Πανεπιστημιο Αιγαιου

Τμημα
Στατιστικης και Αναλογιστικων - Χρηματοοικονομικων
Μαθηματικων

ΟΙ ΑΚΡΙΒΕΙΣ ΜΕΓΑΛΕΣ ΑΠΟΚΛΙΣΕΙΣ ΣΕ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΜΕ ΒΑΡΙΕΣ ΟΥΡΕΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΛΟΥΚΙΣΣΑ ΦΩΤΗ

1 Μαρτίου 2013

Περιεχόμενα

.

Η παρούσα Διδακτορική Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Διδακτορικού Διπλώματος που απονέμει το Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών - Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου.

Ως επιβλέπων του υποψήφιου διδάκτορα Φώτη Λουκίσσα, εγκρίνω την υποβολή της διδακτορικής διατριβής του για την απόκτηση του Διδακτορικού Διπλώματος στην επιστημονική περιοχή των Αναλογιστικών και Χρηματοοικονομικών μαθηματικών.

Δ. Γ. Κωνσταντινίδης

Αναπ. Καθηγητής

Σάμος 15 Ιανουαρίου 2013

.

Η παρούσα διδακτορική διατριβή αξιολογήθηκε από την ακόλουθη επταμελή εξεταστική επιτροπή.

1. **Κωνσταντινίδης Δημήτριος**, Αναπ. Καθηγητής Τμήματος Στατιστικής και Αναλογιστικών - Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου. (επιβλέπων).

   Γνωστικό Αντικείμενο ‘ Αναλογιστική ’

2. **Ζήμερας Στυλιανός**, Επίκ. Καθηγητής Τμήματος Στατιστικής και Αναλογιστικών - Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου. (μέλος της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής)

   Γνωστικό Αντικείμενο ‘ Πιθανότητες - Στατιστική ’

3. **Καραχάλιος Νικόλαος**, Αναπληρωτής Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου. (μέλος της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής).

   Γνωστικό Αντικείμενο ‘ Διαφορικές εξισώσεις ’

4. **Καραγρηγορίου Αλέξανδρος**, Αναπληρωτής Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών και Στατιστικής του Πανεπιστημίου Κύπρου.

   Γνωστικό Αντικείμενο ‘ Στατιστική ’

5. **Μπουρνέτας Απόστολος**, Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών.

   Γνωστικό Αντικείμενο : ‘ Επιχειρησιακή έρευνα, στοχαστικά μοντέλα ’

6. **Λουλάκης Μιχαήλ**, Επίκουρος Καθηγητής της ΣΕΜΦΕ του ΕΜΠ.

   Γνωστικό Αντικείμενο : ‘ Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές ’

7. **Ζαζάνης Μιχαήλ**, Καθηγητής Τμήματος Στατιστικής του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών.

   Γνωστικό Αντικείμενο : ‘ Πιθανότητες - Στατιστική ’

.

Στη Λυδία

Περίληψη

Η εργασία αυτή περιέχει την ερευνητική προσπάθεια στο πλαίσιο των ασυμπτωτικών σχέσεων των ακριβών μεγάλων αποκλίσεων για αθροίσματα τυχαίων μεταβλητών των οποίων οι κατανομές ανήκουν στην ευρύτερη κλάση των κατανομών με βαριές ουρές.

Ειδικότερα, ως πρώτο αποτέλεσμα, βρίσκουμε το κάτω φράγμα της ασυμπτωτικής σχέσης των μεγάλων αποκλίσεων για τυχαία αθροίσματα μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών με κατανομές στην κλάση των κατανομών με μακριές ουρές.

Στη συνέχεια, για τις ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, μελετάμε τις κεντροποιημένες ασυμπτωτικές σχέσεις των μεγάλων αποκλίσεων για μη τυχαία αθροίσματα αλλά και για τυχαία αθροίσματα στην περιοχή των κατανομών με κυριαρχημένες ουρές.

Επιπροσθέτως, για τις ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, μελετάμε τις ασυμπτωτικές σχέσεις των μεγάλων αποκλίσεων για τυχαία αθροίσματα στην περιοχή των κατανομών με υποεκθετικές ουρές.

Τέλος, για τις ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, μελετάμε τις ασυμπτωτικές σχέσεις των μεγάλων αποκλίσεων για τυχαία αθροίσματα σε πεπερασμένο χρόνο στη περιοχή των κατανομών με υποεκθετικές ουρές.

Παραπέρα, ερευνούμε την ασυμπτωτική σχέση των μεγάλων αποκλίσεων στην περίπτωση εξαρτημένων προσθετέων (ασθενώς αρνητικά εξαρτημένων).

Συγκεκριμένα, βρίσκουμε το κάτω φράγμα της κεντροποιημένης ασυμπτωτικής σχέσης των μεγάλων αποκλίσεων για μη τυχαία αθροίσματα αλλά και για τυχαία αθροίσματα μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών που έχουν κατανομές με μακριές ουρές.

Επιπροσθέτως, μελετάμε τις κεντροποιημένες ασυμπτωτικές σχέσεις των μεγάλων αποκλίσεων για μη τυχαία αθροίσματα αλλά και για τυχαία αθροίσματα στην περιοχή των κατανομών με κυριαρχημένες ουρές για μη

αρνητικές τυχαίες μεταβλητές.

Τέλος, αποδεικνύουμε την ασυμπτωτική σχέση των μεγάλων αποκλίσεων για μη τυχαία αθροίσματα αλλά και για τυχαία αθροίσματα στην περιοχή της τομής των κατανομών με μακριές ουρές και των κατανομών με κυριαρχημένες ουρές για μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές.

Στο τελευταίο μέρος της εργασίας, δίνονται εφαρμογές των παραπάνω αποτελεσμάτων σε τρία στοχαστικά μοντέλα. Στο ανανεωτικό, στο σύνθετο ανανεωτικό, και στο μοντέλο των αρνητικά συσχετισμένων πραγματοποιήσιμων ζημιών. Επιπλέον, για το σύνθετο ανανεωτικό μοντέλο δείχνουμε ότι ικανοποιεί την ασυμπτωτική σχέση των μεγάλων αποκλίσεων για μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με συνεπώς μεταβαλλόμενες ουρές.

Abstract

This paper comprises an attempt of investigation in the frame of asymptotic relations for sums of random variables whose distributions belong in the wider class of heavy tail distributions.

More specifically, as a first result, we find the lower bound of asymptotic relation of large deviations for random sums of non negative random variables with long tail distributions.

Moreover, for the non negative, independent and identical distributed random variables, we study the centered asymptotic relation of large deviations for non random sums as well as random sums in the frame of dominately varying tail distributions.

Furthermore, for the non negative, independent and identical distributed random variables we investigate the asymptotic relation of large deviations for random sums in a frame of the subexponetial varying tail distributions.

Finally, for the non negative, independent and identical distributed random variables, we prove the asymptotic relation of large deviation for random variables in finite time in the frame of the subexponetial varying tail distributions.

Furthermore, we investigate the asymptotic relations of large deviations in the case of dependent random variables (extended negative dependent).

Specifically, we find the lower bound of the asymptotic relation of large deviations for non random sums as well as random sums of negative random variables with long tail distributions.

Additionally, we study the asymptotic relation of large deviations for non random sums as well as for random sums of dominately varying tail distributions for non negative random variables.

Finally, we prove the asymptotic relation of large deviations for non

random sums as well as for random sums in the frame of the intersection of long tail and of dominately varying tail distributions for non negative random variables.

In the last part of this work, we provide applications of the above results in three stochastic models. In the renewal, the compound renewal and the negatively associated claim occurrences. Furthermore, for the compound renewal model, we show that it satisfies the asymptotic relation of the large deviation for non negative random variables with consistently varying tails.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Επικαιρότητα του θέματος.

Στη σημερινή εποχή ολοένα και πιο συχνά εμφανίζονται γεγονότα 'ακραίων φαινομένων'. Δηλαδή σπάνια γεγονότα των οποίων η εμφάνιση έχει καταστροφικές συνέπειες. Επομένως υπάρχει επιτακτική ανάγκη της πρόβλεψής τους. Τέτοια σπάνια γεγονότα βρίσκουμε στις επιστήμες των Χρηματοοικονομικών και Ασφαλιστικών μαθηματικών, στην ανάλυση δικτύων υπολογιστών αλλά και στις επιστήμες της Φυσικής και Περιβάλλοντος. Ειδικότερα, ακραίο παράδειγμα στη διαχείριση κινδύνου εμφανίστηκε με την οικονομική κρίση του 2008.

Σκοπός της εργασίας.

Σκοπός της παρούσας διατριβής είναι η συμβολή στην ανάπτυξη μαθηματικών εργαλείων τα οποία μπορούν να προβλέπουν ικανοποιητικά την εμφάνιση τέτοιων σπάνιων καταστάσεων και να βοηθήσουν την αποτελεσματική αντιμετώπιση των συνεπειών τους.

Ερευνητική πρωτοτυπία.

Η διατριβή περιλαμβάνει αποτελέσματα τα οποία είναι πρωτότυπα και δίνουν λύσεις τόσο σε θεωρητικά όσο σε πρακτικά προβλήματα τα οποία δεν έχουν αντιμετωπισθεί μέχρι σήμερα. Η πρωτοτυπία της διατριβής συνίσταται στην παρουσίαση ασυμπωτικών σχέσεων των μεγάλων αποκλίσεων σε ευρύτερες κλάσεις κατανομών με βαριές ουρές. Συγκεκριμένα αποτελέσματα που ήταν γνωστά για την κλάση των κατανομών με συνεπώς μεταβαλλόμενες ουρές γενικεύτηκαν σε κλάση κατανομών που συμβολίζεται με S^* και αντιπροσωπεύει μια σημαντική υποκλάση των υποεκθετικών κατανομών. (Βλέπε Θεώρημα 3)

Παραπέρα στο θέμα της ανάλυσης μοντέλων εξάρτησης γενικεύονται γνωστά αποτελέσματα της κλάσης κατανομών με συνεπώς μεταβαλλόμενες ουρές σε ευρύτερη κλάση κατανομών που καταλαμβάνει το κοινό πεδίο των κατανομών με μακριές ουρές και των κατανομών με κυριαρχημένα μεταβαλλόμενες ουρές που συμβολίζονται με $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$. (Βλέπε Θεώρημα 8)

Ερευνητική μεθοδολογία.

Τα βασικά ερευνητικά αντικείμενα μελέτης για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων είναι οι κατανομές με βαριές ουρές καθώς και οι ασυμπτωτικές σχέσεις της θεωρίας των μεγάλων αποκλίσεων. Συνδυάζουμε τα πιο πρόσφατα αποτελέσματα στις παραπάνω περιοχές για να παράγουμε νέα μεθοδολογικά εργαλεία πρόβλεψης. Συγκεκριμένα προτείνεται εφαρμογή της ανισότητας Potter με τη χρήση των δεικτών Matuszewska σε συνδυασμό με την h-μη ευαισθησία που παρουσιάζουν οι κατανομές με μακριές ουρές. (Βλέπε Θεωρήματα 1, 3, 7 και 8)

Θεωρητική και πρακτική αξία της εργασίας.

Η θεωρητική συνεισφορά της διατριβής περικλείεται στην παραγωγή νέων ασυμπωτικών σχέσεων των μεγάλων αποκλίσεων σε ευρύτερες περιοχές κατανομών με βαριές ουρές, που περιγράφουν με λεπτομέρεια τη δομή των υποεκθετικών κατανομών. Η πρακτική αξία της είναι η δυνατότητα εφαρμογής των αποτελεσμάτων σε συγκεκριμένες στοχαστικές διαδικασίες που συναντάμε στην Αναλογιστική και Χρηματοοικονομική πρακτική. Με βάση τις ασυμπτωτικές εκφράσεις που πέρνουμε μπορούν να παραχθούν νέα αναλογιστικά και χρηματοοικονομικά συμβόλαια που καλύπτουν περιπτώσεις με υποεκθετικές κατανομές.

Ανακοίνωση των αποτελεσμάτων.

Τα αποτελέσματα της διατριβής έχουν δημοσιευτεί σε τρεις εργασίες:

1. D. Konstantinides and F. Loukissas
Precise large deviations for consistently varying-tailed distributions in the compound renewal risk model.
Lithuanian Mathematical Journal **50** no.4, 391-400 (2010)

2. F. Loukissas
Precise large deviations for long varying-tailed distributions.
Journal of Theoretical Probability **25** no.4, 913-924 (2012)

3. D. Konstantinides and F. Loukissas
Precise large deviations for sums of negatively dependent random variables with common long tailed distributions.
Communications in Statistics - Theory and Methods **40** no.4 19-20 (2011)

Επιπλέον υπάρχουν σε άλλες δύο εργασίες οι οποίες βρίσκονται στη διαδικασία της κρίσης :

1. F. Loukissas
Precise large deviations for sums of dependent rv's with common distribution in intersection of dominatedly varying tailed with long tailed distributions.

2. F. Loukissas
Precise large deviations for random sums of rv's with subexponential tailed distributions.

Στις παραπάνω δημοσιεύσεις έχουν γίνει αναφορές στις ακόλουθες εργασίες:

1. Dawei Lu
Lower bound of large deviations for sums of long taildd claims in

a multy risk model.
Statistics and Probability letters **82** 1242-1250 (2012)

2. Y. Yang, R. Leipus, J. Siaulys
Precise large deviations for compound random sums in the prensence of dependence structures.
Computers and Mathematics with Applications **64** 2074-2083 (2012)

3. W. He, D. Cheng, Y. Wang
Asymptotic lower bonds of precise large deviations with nonnegative and dependent random variables.
Statistics and Probability letters **83** 331-338 (2013)

Τα αποτελέσματα έχουν ανακοινωθεί στα σεμινάρια που διοργανώνει το τμήμα της Στατιστικής Χρηματοοικονομικών και Ασφαλιστικών Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου με τις ακόλουθες ομιλίες.

1. 21 Οκτωμβρίου 2009.
Οι μεγάλες αποκλίσεις στο σύνθετο ανανεωτικό μοντέλο.

2. 7 Μαίου 2010.
Precise large deviations for long tailed distributions.

3. 2 Μαρτίου 2011.
Οι Μεγάλες αποκλίσεις στις κατανομές με βαριές ουρές.

4. 9 Νοεμβρίου 2011
Εφαρμογές των μεγάλων αποκλίσεων σε στοχαστικά μοντέλα ασφάλισης.

Τα αποτελέσματα έχουν ανακοινωθεί στα παρακάτω διεθνή συνέδρια και σεμινάρια.

1. 14th International Congress on Insurance Mathematics and Economics, Toronto, Canada, 17.06.10- 19.06.10.

2. 2nd International Conference on Modern Stochastics, Kyiv National University, Kyiv, Ukraine, 07.09.10.

3. Semirar of Department of Actuarial Mathematics and Statistics, Heriot-Watt University, Edimburg, United Kindom 20.01.11.

Δομή της εργασίας.

Η εργασία αυτή περιέχει πέντε κεφάλαια που παρουσιάζουν την ερευνητική προσπάθεια στο πλαίσιο των ασυμπτωτικών σχέσεων των ακριβών μεγάλων αποκλίσεων για αθροίσματα τυχαίων μεταβλητών των οποίων οι κατανομές ανήκουν στην ευρύτερη κλάση των κατανομών με βαριές ουρές.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται αναλυτικά οι περιοχές της θεωρίας των κατανομών με βαρείες ουρές καθώς και η θεωρία των μεγάλων αποκλίσεων.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα Λήμματα τα οποία είναι χρήσιμα για τις αποδείξεις των αποτελεσμάτων καθώς και τα αποτελέσματα για ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Στο τέταρτο κεφάλαιο δίνεται μία αναλυτική περιγραφή των εξαρτημένων τυχαίων μεταβλητών καθώς και τα αποτελέσματα των ασυμπτωτικών σχέσεων των μεγάλων αποκλίσεων για τα αθροίσματα των παραπάνω μεταβλητών.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι εφαρμογές των παραπάνω αποτελεσμάτων σε στοχαστικές διαδικασίες οι οποίες εμφανίζονται στην επιστήμη των Αναλογιστικών μαθηματικών.

Στο τέλος παρατίθεται βιβλιογραφία με 73 αναφορές.

Συνοπτική παρουσίαση κάθε κεφαλαίου.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, ξεκινάμε από τον ασθενή νόμο των μεγάλων αριθμών, περνάμε από το κεντρικό οριακό θεώρημα και φτάνουμε μέσω αυτού στη θεωρία των μεγάλων αποκλίσεων. Στη συνέχεια, ξεχωρίζουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά μεταξύ προσθετέων με ελαφριές ουρές και προσθετέων με βαριές ουρές. Τέλος, κάνουμε μία ιστορική αναδρομή της αντίστοιχης θεωρίας από το 1930 μέχρι σήμερα.

Στο τρίτο κεφάλαιο, ως πρώτο αποτέλεσμα, βρίσκουμε το κάτω φράγμα της ασυμπτωτικής σχέσης των μεγάλων αποκλίσεων για τυχαία αθροίσματα μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών με κατανομές στην κλάση των κατανομών με μακριές ουρές.

Στη συνέχεια, για τις ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, μελετάμε τις κεντροποιημένες ασυμπτωτικές σχέσεις των μεγάλων αποκλίσεων για μη τυχαία αθροίσματα αλλά και για τυχαία αθροίσματα στην περιοχή των κατανομών με κυριαρχημένες ουρές.

Επιπροσθέτως, για τις ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, μελετάμε τις ασυμπτωτικές σχέσεις των μεγάλων αποκλίσεων για τυχαία αθροίσματα στην περιοχή των κατανομών με υποεκθετικές ουρές.

Τέλος, για τις ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, μελετάμε τις ασυμπτωτικές σχέσεις των μεγάλων αποκλίσεων για τυχαία αθροίσματα σε πεπερασμένο χρόνο στη περιοχή των κατανομών με υποεκθετικές ουρές.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, ερευνούμε την ασυμπτωτική σχέση των μεγάλων αποκλίσεων στην περίπτωση εξαρτημένων προσθετέων (ασθενώς αρνητικά εξαρτημένων).

Συγκεκριμένα, βρίσκουμε το κάτω φράγμα της κεντροποιημένης ασυμπτωτικής σχέσης των μεγάλων αποκλίσεων για μη τυχαία αθροίσματα αλλά και για τυχαία αθροίσματα μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών που έχουν κατανομές με μακριές ουρές.

Επιπροσθέτως, μελετάμε τις κεντροποιημένες ασυμπτωτικές σχέσεις των μεγάλων αποκλίσεων για μη τυχαία αθροίσματα αλλά και για τυχαία αθροίσματα στην περιοχή των κατανομών με κυριαρχημένες ουρές για μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές.

Τέλος, αποδεικνύουμε την ασυμπτωτική σχέση των μεγάλων αποκλίσεων για μη τυχαία αθροίσματα αλλά και για τυχαία αθροίσματα στην περιοχή της τομής των κατανομών με μακριές ουρές και των κατανομών με κυριαρχημένες ουρές για μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές.

Στο πέμπτο κεφάλαιο, δίνονται εφαρμογές των παραπάνω αποτελεσμάτων σε τρία στοχαστικά μοντέλα. Στο ανανεωτικό, στο σύνθετο ανανεωτικό, και στο μοντέλο των αρνητικά συσχετισμένων πραγματοποιήσιμων ζημιών. Επιπλέον, για το σύνθετο ανανεωτικό μοντέλο δείχνουμε ότι ικανοποιεί την ασυμπτωτική σχέση των μεγάλων αποκλίσεων για μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με συνεπώς μεταβαλλόμενες ουρές.

Ευχαριστίες

Για την εκπόνηση της Διδακτορικής διατριβής και την απόκτηση του Διδακτορικού διπλώματος θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τους ακόλουθους:

- Τον κύριο Δημήτρη Κωνσταντινίδη, ο οποίος ως επιβλέπων αφιέρωσε πάρα πολύ χρόνο για να με καθοδηγήσει στον κόσμο των εννοιών της θεωρίας ρίσκου ώστε να επιτευχθεί ο στόχος μου.

- Τον κύριο Νίκο Καραχάλιο, ο οποίος με στήριξε σταθερά στις επιλογές μου και στις δύσκολες στιγμές της πορείας μου.

- Τα μέλη ΔΕΠ του τμήματος Στατιστικής και Αναλογιστικών - Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου για την άψογη συνεργασία που είχα μαζί τους κατά τα δύο έτη που εργαζόμουν στο τμήμα ως βοηθητικό διδακτικό προσωπικό.

- Τη σύντροφό μου Γεωργία, η οποία με την υπομονή της με βοήθησε να φτάσω στη δική μου Ιθάκη.

Κεφάλαιο 2

Οι Μεγάλες αποκλίσεις σε κατανομές με βαριές ουρές

2.1 Ασυμπτωτικές σχέσεις σε αθροίσματα τυχαίων μεταβλητών

Οι ασυμπτωτικές σχέσεις αθροισμάτων θα δοθούν μέσω δύο χαρακτηριστικών παραδειγμάτων που δείχνουν τη σπουδαιότητα των αποτελεσμάτων της περιοχής αυτής.

Το πρώτο παράδειγμα είναι ο **ασθενής νόμος των μεγάλων αριθμών**. Για την περιγραφή αυτού χρειαζόμαστε μία ακολουθία $\{X_n, n \geq 1\}$ ανεξάρτητων, ισόνομων, πραγματικών τυχαίων μεταβλητών με κοινή συνάρτηση κατανομής $F(x) = P(X \leq x)$ και συνάρτηση ουράς $\overline{F} = 1 - F$.

Ενδιαφερόμαστε για τη συμπεριφορά των αθροισμάτων που παράγονται από τους όρους της ακολουθίας $\{X_n, n \geq 1\}$. Αυτό μας οδηγεί στη μελέτη του αθροίσματος

$$S_n = X_1 + ... + X_n$$

και παραπέρα της δειγματικής μέσης τιμής

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} S_n.$$

Αναφέρουμε παρακάτω τον 'ασθενή νόμο των μεγάλων αριθμών' που μας λέει ότι:

Εάν $\{X_n, \, n \geq 1\}$ είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων πραγματικών τυχαίων μεταβλητών με $E(X_n) = \mu$. Τότε

$$\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu$$

καθώς $n \to \infty$.

Όπου με $\xrightarrow{P}$ συμβολίζουμε τη σύγκλιση κατά πιθανότητα.
Αυτή είναι η πρώτη βασική ασυμπτωτική σχέση αθροισμάτων που ανάγεται στην εργασία του Bernoulli ' The Art of Conjecturing ' που εκδόθηκε το 1713.

Μία άλλη χρήσιμη ασυμπτωτική σχέση αθροίσματος τυχαίων μεταβλητών είναι το 'Κεντρικό Οριακό Θεώρημα'.
Η βασική ιδέα του θεωρήματος είναι η προσέγγιση της κατανομής του αθροίσματος των τυχαίων μεταβλητών από την κανονική κατανομή. Το θεώρημα αυτό εξηγεί την επικράτηση της κανονικής κατανομής σε πολλές εφαρμογές και μας λέει ότι:

Εάν $E(X^2) < \infty$ τότε

$$\left(\sigma n^{1/2}\right)^{-1} (S_n - n\mu) \to^d \Phi$$

καθώς $n \to \infty$.
Στην παραπάνω σχέση με Φ συμβολίζουμε την τυπική κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1. Με $\sigma^2 = Var(X)$ και με $\to^d$ συμβολίζουμε τη σύγκλιση κατά κατανομή.

Περισσότερες πληροφορίες για το κεντρικό οριακό θεώρημα υπάρχουν στα βιβλία των W. Feller (1971) και S. I. Resnick (1999).

Οι βασικές ασυμπτωτικές σχέσεις της εργασίας είναι τα αποτελέσματα που περικλείονται στη θεωρία των 'Μεγάλων Αποκλίσεων'.

Στις μεγάλες αποκλίσεις, για κατανομές με βαριές ουρές, η προσέγγιση της συνάρτησης της ουράς του τυχαίου προσθετέου γίνεται από τη συνάρτηση της ουράς του αθροίσματος, καθώς η τιμή της τυχαίας μεταβλητή αυξάνει σε συνάρτηση με την αύξηση του πλήθους των τυχαίων μεταβλητών.

Στα αποτελέσματα των μεγάλων αποκλίσεων, για κατανομές με βαριές ουρές, εξετάζεται η σύγκλιση της ουράς του αθροίσματος $P(S_n > x) = \overline{F}_n(x)$. Η ασυμπτωτική συμπεριφορά της ουράς του αθροίσματος για $n \to \infty$ γίνεται ομοιόμορφα καθώς το x ανήκει σε διάστημα της μορφής (d_n, ∞) και προσεγγίζει την ουρά του προσθετέου.

2.2 Κατανομές με βαριές ουρές

Ο βασικός σκοπός της εργασίας αυτής είναι η μελέτη των μεγάλων αποκλίσεων σε τυχαίες μεταβλητές κατανομών με **βαριές ουρές**. Οι κατανομές με βαριές ουρές έχουν βασικό ρόλο στην ανάλυση πολλών στοχαστικών συστημάτων. Για παράδειγμα, είναι συχνά απαραίτητες στα δίκτυα επικοινωνιών, στη θεωρία κινδύνου, στην ανάλυση ακραίων φαινομένων.

Ορισμός 1.
Μία κατανομή F ονομάζεται κατανομή με βαριά ουρά ($F \in \mathcal{K}$) όταν ισχύει

$$\int_{\mathcal{R}} e^{\lambda x} dF(x) = \infty, \quad \lambda > 0,$$

δηλαδή απειρίζεται η εκθετική ροπή της κατανομής.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα κατανομών με βαριές ουρές.

1. Η $Pareto$ κατανομή στο $\mathcal{R}^+$.

   Αυτή η κατανομή έχει συνάρτηση ουράς

   $$\overline{F}(x) = \left(\frac{k}{x+k}\right)^a$$

   για $k, a > 0$.

   Η $Pareto$ κατανομή έχει όλες τις ροπές τάξης $\gamma < a$ πεπερασμένες και τις ροπές τάξης $\gamma \geq a$ μη πεπερασμένες.

2. Η $Burr$ κατανομή στο $\mathcal{R}^+$.

   Η κατανομή αυτή έχει συνάρτηση ουράς

   $$\overline{F}(x) = \left(\frac{k}{x^r+k}\right)^a$$

   για $k, a, r > 0$.

   Η $Burr$ κατανομή έχει όλες τις ροπές τάξης $\gamma < ar$ πεπερασμένες και τις ροπές τάξης $\gamma \geq ar$ μη πεπερασμένες.

3. Η *Cauchy* κατανομή στο $\mathcal{R}$.

   Αυτή η κατανομή δίνεται από τη συνάρτηση πυκνότητας.

   $$f(x) = \frac{1}{\pi\left((x-\alpha)^2+1\right)}$$

   για $\alpha \in \mathcal{R}$.

   Όλες οι ροπές τάξης $\gamma < 1$ είναι πεπερασμένες, ενώ η πρώτη δεν υπάρχει.

4. Η *lognormal* κατανομή στο $\mathcal{R}^+$.

   Αυτή η κατανομή δίνεται από τη συνάρτηση πυκνότητας.

   $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\exp\left(\frac{-(\log x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

   για $\mu, \sigma > 0$.

   Όλες οι ροπές είναι πεπερασμένες.

5. Η *Weibull* κατανομή στο $\mathcal{R}^+$.

   Αυτή η κατανομή δίνεται από τη συνάρτηση ουράς.

   $$\overline{F}(x) = e^{-(x/\lambda)^{\alpha}}$$

   για $\lambda, \alpha > 0$.

   Όλες οι ροπές είναι πεπερασμένες. Αυτή η κατανομή είναι με βαριά ουρά εάν $\alpha < 1$.

Ο χωρισμός των κατανομών με βαριές ουρές σε κλάσεις διευκολύνει τη μελέτη τους. Γι' αυτό το διαχωρισμό χρειαζόμαστε τις έννοιες της συνέλιξης, του ανώτερου ορίου και του κατώτερου ορίου .

1. Η **συνέλιξη** δύο κατανομών F και H που συμβολίζεται με $F * H$ και ορίζεται ως

   $$(F * H)(x) = \int_{-\infty}^{x} H(x-y)dF(y).$$

Ομοίως, ορίζουμε επαγωγικά, τη συνέλιξη των κατανομών $F_1\,, \ldots, \, F_n$ που συμβολίζεται με $F_1 * \ldots * F_n$.
Η $n-$οστή συνέλιξη της κατανομής F ορίζεται ως

$$F^{*n}(x) = P(S_n \leq x).$$

2. Ορίζουμε το **ανώτερο όριο** μιας συνάρτησης $f(x)$ με πεδίο ορισμού το D καθώς $x \to a$ και συμβολίζουμε με $\limsup_{x\to a} f(x)$ το εξής:

$$\limsup_{x\to a} f(x) = \lim_{e\to 0} sup\left\{f(x) : x \in D \cap B(a,e) - \{a\}\right\},$$

όπου $B(a;e)$ η μετρική περιοχή ακτίνας e γύρω από το a.

3. Ομοίως, ορίζουμε ως **κατώτερο όριο** το εξής:

$$\liminf_{x\to a} f(x) = \lim_{e\to 0} inf\left\{f(x) : x \in D \cap B(a,e) - \{a\}\right\}.$$

2.2.1 Κλάσεις κατανομών με Βαριές ουρές

Θα αναφέρουμε τις ακόλουθες κλάσεις για τις κατανομές μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών.

- Η κλάση των κατανομών με **ομαλά μεταβαλλόμενες** ουρές που συμβολίζουμε με $\mathcal{R}_{-\alpha}$.

$$\mathcal{R}_{-\alpha} = \left\{F : \lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = y^{-\alpha}, 0 \leq \alpha < \infty\,, \forall\, y > 0\right\}$$

- Η κλάση των κατανομών με **εκτεταμένες ομαλά μεταβαλλόμενες** ουρές που συμβολίζουμε με $ERV(-\alpha, -\beta)$.

$$ERV(-\alpha,-\beta) = \left\{F : y^{-\beta} \leq \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} \leq y^{-\alpha},\ 1 < \alpha \leq \beta < \infty,\ \forall\, y > 1\right\}$$

- Η κλάση των κατανομών με **συνεπώς μεταβαλλόμενες** ουρές που συμβολίζουμε με $\mathcal{C}$.

$$\mathcal{C} = \left\{F : \lim_{y\searrow 1} \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = 1\right\}$$

ή ισοδύναμα

$$\mathcal{C} = \left\{ F : \lim_{y \nearrow 1} \limsup_{x \to \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = 1 \right\}.$$

- Η κλάση των κατανομών με **κυριαρχημένα μεταβαλλόμενες** ουρές που συμβολίζουμε με $\mathcal{D}$.

$$\mathcal{D} = \left\{ F : \limsup_{x \to \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} < \infty, \forall\, 0 < y < 1 \right\}$$

- Η κλάση των **υποεκθετικών** κατανομών που συμβολίζουμε με $\mathcal{S}$.

$$\mathcal{S} = \left\{ F : \lim_{x \to \infty} \frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{F}(x)} = n, \forall\, n \geq 2 \right\}$$

Η κλάση αυτή μελετήθηκε για πρώτη φορά από τον V. P. Čistyakov (1964) και τους J. Chover, P. Ney και S. Wainger (1973α). Περισσότερες ιδιότητες της κλάσης αυτής έχουν παρουσιαστεί στις εργασίες των P. Embrechts και C. M. Goldie (1980) και (1982).

Μία υποκλάση των υποεκθετικών κατανομών είναι η $\mathcal{S}^*$ η οποία ορίζεται για τις κατανομές με πεπερασμένη μέση τιμή μ και ισχύει

$$\mathcal{S}^* = \left\{ F : \lim_{x \to \infty} \int_0^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \overline{F}(y) = 2\mu \right\}.$$

Η κλάση αυτή μελετήθηκε για πρώτη φορά στην εργασία της C. Klüppelberg (1988).

Τέλος, η κλάση των κατανομών με **μακριές ουρές** που συμβολίζουμε με $\mathcal{L}$.

$$\mathcal{L} = \left\{ F : \lim_{x \to \infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = 1, \forall\, y > 0 \right\}$$

Μία εκτενής μελέτη της κλάσης αυτής είναι η εργασία των S. Foss, D. Korshunov και S. Zachary (2009).

Για τις παραπάνω κλάσεις κατανομών είναι γνωστή η παρακάτω σχέση:

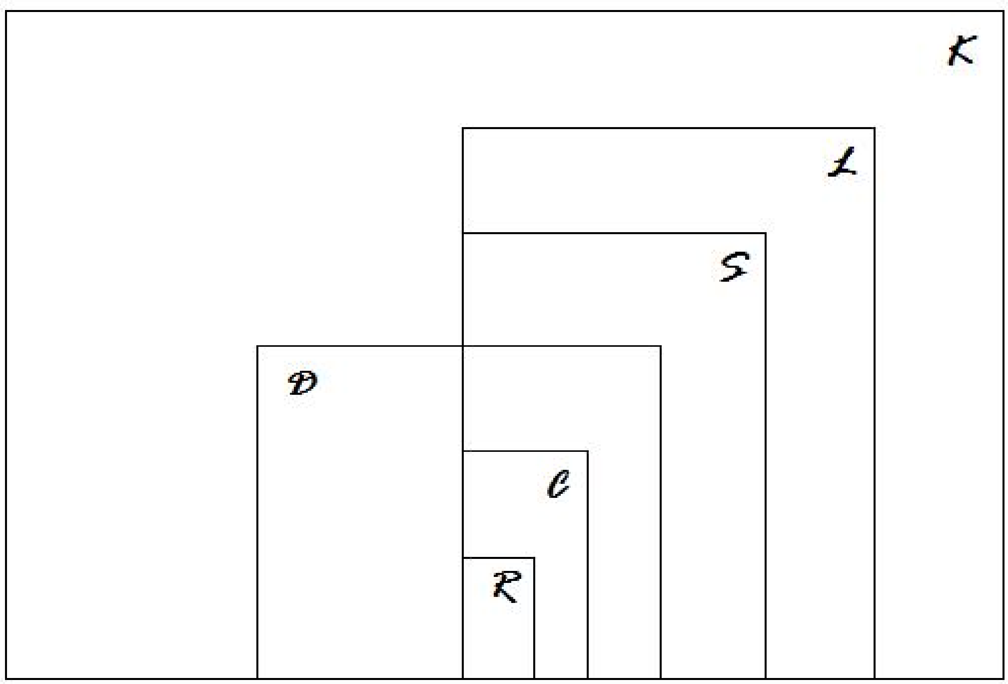
$$\mathcal{R}_{-\gamma} \subset ERV(-\alpha, -\beta) \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{D} \cap \mathcal{L} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{K}.$$

για κάθε $1 < \alpha \leq \gamma \leq \beta < \infty$.
Περισσότερες πληροφορίες και παραδείγματα για την παραπάνω σχέση υπάρχουν στις εργασίες των P. Embrechts και E. Omey (1984), C. Klüppelberg (1989), P. R. Jelenkovic και A. A. Lazar (1999), J. Cai και Q. Tang (2004).

Το βιβλίο των N.H. Bingham, C.M. Goldie και J.L. Teugels (1987) είναι κλασικό εργαλείο στην περιοχή της θεωρίας των κατανομών με βαριές ουρές. Επίσης ένα βασικό βιβλίο το οποίο πραγματεύεται στην περιοχή των κατανομών με βαριές ουρές και στη θεωρία ακραίων τιμών είναι των P. Embrechts, C. Klüppelberg και T. Mikosch (1997). Μία πρόσφατη και αρκετά αξιόλογη εργασία στην ίδια περιοχή είναι των S. Foss, D. Korshunov και S. Zachary (2009). Τέλος, στην ελληνική βιβλιογραφία, μία εργασία στην ίδια περιοχή είναι του Δ. Γ. Κωνσταντινίδη (2011).

.

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται η διάταξη των παραπάνω κλάσεων.



2.3 Οι h-μη ευαίσθητες κατανομές

Στο βιβλίο των S. Foss, D. Korshunov και S. Zachary (2011) βρίσκουμε την έννοια των 'h-μη ευαίσθητων' κατανομών που έχουν βασικό ρόλο σε αυτή την εργασία. Παρακάτω δίνουμε τον ορισμό αυτών των κατανομών.

Ορισμός 2. *Εάν δοθεί μία θετική μη φθίνουσα συνάρτηση $h(x)$, η κατανομή F στο $\mathcal{R}$ καλείται h-μη ευαίσθητη εάν ισχύει*

$$\overline{F}\left(x \pm h(x)\right) \sim \overline{F}(x), \quad x \to \infty. \tag{2.3.1}$$

Στην ίδια εργασία υπάρχει το Λήμμα 2.19 που λέει το ακόλουθο:

Υποθέτουμε ότι η κατανομή F είναι με μακριά ουρά. Τότε υπάρχει μία μη φθίνουσα συνάρτηση τέτοια ώστε $h(x) \to \infty$ καθώς $x \to \infty$ και η F είναι h-μη ευαίσθητη.

Παρακάτω θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε την μη αρνητική συνάρτηση $h(x)$ για τις διάφορες κλάσεις των κατανομών με βαριές ουρές.

- Για την κλάση των κατανομών με '**αργά μεταβαλλόμενες** ' ουρές δηλαδή για τις κατανομές αυτές που ισχύει

  $$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(yx)}{\overline{F}(x)} = 1, \quad y > 0$$

  μπορούμε να επιλέξουμε ως $h(x) = \epsilon x$ για κάποια $\epsilon > 0$.
  Πράγματι

  $$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}\left(x \pm h(x)\right)}{\overline{F}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}\left(x \pm \epsilon x\right)}{\overline{F}(x)} = 1.$$

- Για την κλάση των κατανομών με '**ομαλά μεταβαλλόμενες**' ουρές μπορούμε να επιλέξουμε ως $h(x) = x^{\frac{1}{1+q}}$ για οποιοδήποτε $q > 0$.

  Από το Θεώρημα 2.47 της εργασίας των S. Foss, D. Korshunov και S. Zachary (2009) η κατανομή ανήκει στην κλάση των κατανομών με ‘**συνεπώς μεταβαλλόμενες**’ ουρές εάν και μόνο εάν η κατανομή είναι $o(x)$-μη ευαίσθητη.

Μία κατανομή F ονομάζεται $o(x)$-μη ευαίσθητη εάν για κάθε θετική συνάρτηση h τέτοια ώστε $h(x) = o(x)$ να ισχύει

$$\overline{F}(x \pm h(x)) = \overline{F}(x)$$

- Παραπέρα, για κατανομές με βαριές ουρές οι οποίες είναι πιο ελαφριές από τις παραπάνω κατανομές έχουμε την ακόλουθη επιλογή.
  - Για τις *lognormal* κατανομές μπορούμε να πάρουμε ως $h(x) = o(x/\ln x)$.
  - Για τις *Weibull* κατανομές μπορούμε να πάρουμε ως $h(x) = o(x^{1-a})$.

2.4 Οι ακριβείς μεγάλες αποκλίσεις σε κατανομές με βαριές ουρές.

Για τη μελέτη των μεγάλων αποκλίσεων στις κατανομές με βαριές ουρές σημαντικό ρόλο διαδραματίζει η έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης της οποίας δίνουμε τον ορισμό.

Ορισμός 3.
Έστω $\{f_n(x), n \geq 1\}$ μία ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων. Λέμε ότι η ακολουθία f_n συγκλίνει ομοιόμορφα, εάν και μόνο εάν
για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένας ακέραιος N τέτοιος, ώστε για όλα τα x και όλα τα $n > N$ να ισχύει

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Επίσης, θα χρειαστούμε τις παρακάτω έννοιες και συμβολισμούς.

$$\begin{aligned}
a(x) \lesssim b(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \limsup_{x\to\infty} \frac{a(x)}{b(x)} \leq 1 \\
a(x) \gtrsim b(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \liminf_{x\to\infty} \frac{a(x)}{b(x)} \geq 1. \\
a(x) \sim b(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \frac{a(x)}{b(x)} = 1. \\
a(x) = o\left(b(x)\right) \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \frac{a(x)}{b(x)} = 0. \\
a(x) = O\left(b(x)\right) \quad &\Leftrightarrow \quad \limsup_{x\to\infty} \frac{a(x)}{b(x)} = c, \quad c < \infty.
\end{aligned}$$

Όπου $a(\cdot)$ και $b(\cdot)$ είναι θετικές συναρτήσεις.

Ο **άνω δείκτης Matuszewska** για μία κατανομή F συμβολίζεται ως γ_F και ορίζεται ως εξής:

$$\gamma(y) := \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}, \quad \gamma_F := \inf\left\{-\frac{\log \gamma(y)}{\log y} : y > 1\right\}.$$

Ο **κάτω δείκτης Matuszewska** για μία κατανομή F συμβολίζεται ως

μ_F και ορίζεται ως εξής:

$$\mu(y) := \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}, \quad \mu_F := \sup\left\{-\frac{\log\gamma(y)}{\log y} : y > 1\right\}.$$

Περισσότερες ιδιότητες και πληροφορίες πάνω στους δείκτες Matuszewska υπάρχουν στην εργασία των D.B.H. Cline, G. Samorodnitsky (1994).

Στη συνέχεια, θα κάνουμε μία ιστορική ανασκόπηση των αποτελεσμάτων των μεγάλων αποκλίσεων.
Οι μεγάλες αποκλίσεις μελετούν την ομοιόμορφη ασυμπτωτική συμπεριφορά της πιθανότητας

$$P(S_n > x) = \overline{F}_n(x) \tag{2.4.2}$$

σε συγκεκριμένες x-περιοχές της μορφής $(c_n,\, d_n)$, $(1,\, c_n)$, $(d_n,\, \infty)$ για κατάλληλες θετικές ακολουθίες c_n, d_n καθώς $n \to \infty$.
Η τιμή x στη σχέση (2.4.2) είναι συνήθως υψηλή και έτσι έχουμε να μελετήσουμε την πιθανότητα τέτοιων σπάνιων γεγονότων, όταν το S_n ξεπερνά το x. Γεννάται το ερώτημα τι είδος προσέγγιση έχουμε για την πιθανότητα $\overline{F}_n(x)$.
Μία προσέγγιση προτείνει το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα με την παρακάτω μορφή:

Εάν $\sigma^2 = Var(X) < \infty$ τότε

$$\sup_{c_n \le x - n\mu \le d_n} \left| \frac{\overline{F}_n(x)}{\overline{\Phi}\left(\frac{x-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)} - 1 \right| = o(1) \tag{2.4.3}$$

για $c_n = n\mu + c_-\sqrt{n}$ και $d_n = n\mu + c_+\sqrt{n}$ και κάθε $-\infty < c_- < c_+ < \infty$, όπου με Φ συμβολίζουμε την τυπική κανονική κατανομή.

Εάν $c_-\sqrt{n} < S_n - n\mu < c_+\sqrt{n}$, τότε βρίσκουμε μία ασυμπτωτική σχέση η οποία ονομάζεται **Θεώρημα κανονικής απόκλισης** του S_n από τη μέση τιμή του $n\mu$.

Εάν $(x - n\mu)/\sqrt{n} \to \infty$, τότε βρίσκουμε μία ασυμπτωτική σχέση η οποία ονομάζεται **Θεώρημα μεγάλης απόκλισης**.
Έτσι μπορούμε να επαναθέσουμε το ερώτημα: Τι είδος προσέγγιση της πιθανότητας $\overline{F}_n(x)$ αναμένεται.

Το 1938 ο $Cram\grave{e}r$, δοθείσης της ύπαρξης της εκθετικής ροπής σε μια περιοχή του πεδίου ορισμού, έδειξε ότι η σχέση (2.4.3) ισχύει για $c_n = c\sqrt{n}$ για κάθε $c > 0$ και $d_n = o(n^{2/3})$. Περισσότερες πληροφορίες υπάρχουν στα βιβλία του $H.Cram\grave{e}r\ Vol.I, II$ (1994)

Θα αναφέρουμε τα συμπεράσματα στην περίπτωση που ισχύει η συνθήκη του $Cram\grave{e}r$.

Υποθέτουμε ότι η ροπογεννήτρια συνάρτηση

$$E\exp\{hx\},\ h > 0$$

υπάρχει σε κάποιο διάστημα του πεδίου ορισμού.
Τότε ισχύει

$$\frac{1 - G_n(x)}{1 - \Phi(x)} = \exp\left[\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(\frac{x}{n}\right)\right]\left[1 + O\left(\frac{x+1}{\sqrt{n}}\phi(x)\right)\right]$$

$$\frac{G_n(-x)}{\Phi(-x)} = \exp\left[-\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(\frac{-x}{n}\right)\right]\left[1 + O\left(\frac{x+1}{\sqrt{n}}\phi(x)\right)\right]$$

ομοιόμορφα για θετικό αριθμό $x = o(\sqrt{n})$. Όπου

$$G_n(x) = P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Εδώ $\lambda(z)$ είναι μία δυναμοσειρά που συγκλίνει σε ένα διάστημα του πεδίου ορισμού και της οποίας οι συντελεστές εξαρτώνται από τις ροπές της τυχαίας μεταβλητής X.

Ο Petrov έδωσε μία βελτιωμένη μορφή του Θεωρήματος χωρίς να χρειάζεται να ορίσει τους συντελεστές της $\lambda(z)$.

Υποθέτουμε ότι οι συνθήκες του προηγούμενου θεωρήματος ικανοποιούνται. Τότε

$$1 - G_n(x) = (1 - \Phi(x)) \left[1 + O\left(\frac{x^3}{\sqrt{n}} \right) \right]$$

για θετικό $x = o(n^{1/6})$.

Για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε στην εργασία του V. V. Petrov (1975).

Αργότερα η έρευνα επικεντρώθηκε στη μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της ποσότητας $\ln \overline{F}_n(x)$ κάτω από τη συνθήκη *Cramer*. Στην περίπτωση αυτή, παίρνουμε μία ασυμπτωτική σχέση η οποία ονομάζεται **Θεώρημα των κατά προσέγγιση μεγάλων αποκλίσεων**. Κλασικές εργασίες προς αυτή την κατεύθυνση είναι οι μονογραφίες των J. A. Bucklew (1991), A. Dembo και O. Zeitouni (1993) και R. S. Ellis (1985). Ωστόσο τα Θεωρήματα των κατά προσέγγιση μεγάλων αποκλίσεων δεν είναι επαρκή σε πολλές περιπτώσεις. Έτσι, η μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφορά της ποσότητας $\overline{F}_n(x)$ είναι χρήσιμη σε πολλά αναλογιστικά και χρηματοοικονομικά στοχαστικά μοντέλα και η ασυμπτωτική σχέση που λαμβάνουμε ονομάζεται **Θεώρημα των ακριβών μεγάλων αποκλίσεων** .

Ακριβείς μεγάλες αποκλίσεις για μερικά αθροίσματα ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με κατανομές που έχουν βαριές ουρές.

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να μελετήσουμε τις μεγάλες αποκλίσεις, όταν δεν ισχύει η συνθήκη *Cramer*. Η αντιμετώπιση πρέπει να είναι τελείως διαφορετική, καθώς η ροπογεννήτρια συνάρτηση δεν υπάρχει σε οποιαδήποτε περιοχή του πεδίου ορισμού. Ωστόσο, έγινε επέκταση της έρευνας και σε αυτές τις κατανομές έχοντας συμπεράσματα για την ασυμπτωτικής συμπεριφορά της πιθανότητας $\overline{F}_n(x)$.

Το πρώτο αποτέλεσμα δόθηκε στην κλάση των κατανομών με ομαλά μεταβαλλόμενες ουρές στις εργασίες του C.C. Heyde (1967α), (1967β) και (1968) για το οποίο χρειαζόμαστε τις έννοιες των ευσταθών τυχαίων μεταβλητών και της περιοχής έλξης τους.

Μία τυχαία μεταβλητή X (ή η κατανομή της) ονομάζεται ευσταθής εάν για τις ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές X_1, $X_2, ...,$ X_n, X ισχύει η σχέση

$$c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_nX_n =^d bX + a$$

για όλους τους μη αρνητικούς αριθμούς c_1, $c_2 ..., c_n$ και κατάλληλους θετικούς αριθμούς b, a. Όπου με $A =^d B$ εννοούμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές A,B έχουν την ίδια κατανομή.

Μία ευσταθής κατανομή έχει χαρακτηριστική συνάρτηση

$$\phi_X(t) = E(\exp\{iXt\}) = \exp\{i\gamma t - c|t|^\alpha(1 - i\beta \text{sign}(t)z(t,a)\}$$

όπου γ είναι μία πραγματική σταθερά, $c > 0$, $\alpha \in (0, 2]$, $\beta \in [-1, 1]$ και

$$\begin{aligned} z(t,\alpha) &= \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right), \quad \epsilon\alpha\nu, \alpha \neq 1, \\ z(t,\alpha) &= -\frac{2}{\pi} ln|t|, \quad \epsilon\alpha\nu, \alpha = 1. \end{aligned}$$

Η σπουδαιότερη παράμετρος στην παραπάνω συνάρτηση είναι η α, η οποία προσδιορίζει της ιδιότητες τις κλάσης των ευσταθών κατανομών (ροπές, ουρές, ασυμπτωτική συμπεριφορά).

Η σταθερά α ονομάζεται ‘ δείκτης ευστάθειας ’ και η κατανομή ονομάζεται ‘ α-ευσταθής ’. Περισσότερες πληροφορίες για τις ευσταθείς τυχαίες μεταβλητές υπάρχουν στο βιβλίο των P. Embrechts, C. Klüppelberg και T. Mikosch (1997) σελ. 71 .

Στη συνέχεια, δίνουμε την έννοια της περιοχής έλξης μίας ευσταθούς κατανομής.

Λέμε ότι η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X ανήκει στην περιοχή έλξης της α-ευσταθούς κατανομής G_α, εάν για τις ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές X_1, $X_2, ..., X_n$, X υπάρχουν σταθερές a_n και b_n ώστε η κατανομή του αθροίσματος

$$\left\{\frac{1}{b_n}(S_n - a_n)\, n \geq 1\right\}$$

να συγκλίνει κατά κατανομή στην G_α. Γράφουμε τότε $X \in DA(\alpha)$.

Τώρα, είμαστε σε θέση να αναφέρουμε το αποτέλεσμα του C.C. Heyde το οποίο είναι το ακόλουθο:

Έστω η $X \in DA(\alpha)$ με $\alpha \in (0,2)$. Έστω $\{b_n,\, n \geq 1\}$ μία ακολουθία πραγματικών αριθμών έτσι ώστε $b_n \uparrow \infty$ και

$$P(X > b_n) \sim 1/n.$$

Συμβολίζουμε με $M_1 = X_1$, $M_n = \max\{X_1, ..., X_n\}$ το μέγιστο του δείγματος, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(S_n > b_n x_n)}{nP(X > b_n x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{P(S_n > b_n x_n)}{P(M_n > b_n x_n)} = 1$$

για κάθε ακολουθία $x_n \to \infty$.

Ένα άλλο αποτέλεσμα για τις ακριβείς μεγάλες αποκλίσεις στις κατανομές με ομαλά μεταβαλλόμενες ουρές δόθηκε στην εργασία του S.V. Nagaev (1971) και είναι το ακόλουθο:

Υποθέτουμε ότι $F \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ για κάποιο $\alpha > 2$. Εάν $E|X|^{2+\delta} < \infty$ για κάποιο $\delta > 0$ και $Var(X) = 1$, τότε ισχύει

$$P(S_n - n\mu > x) = \overline{\Phi}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)(1 + o(1)) + n\overline{F}(x)(1 + o(1))$$

ομοιόμορφα για $x \geq \sqrt{n}$. Συγκεκριμένα

$$P(S_n - n\mu > x) = \overline{\Phi}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)(1 + o(1))$$

για $\sqrt{n} \leq x \leq \delta(n \ln n)^{1/2}$ και $\delta < \sqrt{\alpha - 2}$ και

$$P(S_n - n\mu > x) = n\overline{F}(x)(1 + o(1))$$

για $x > \delta(n \ln n)^{1/2}$ και $\delta > \sqrt{\alpha - 2}$.

Αργότερα μελετήθηκαν οι ακριβείς μεγάλες αποκλίσεις στις εκτεταμένες ομαλά μεταβαλλόμενες ουρές στην εργασία των D.B.H. Cline και T. Hsing (1991) και το αποτέλεσμα είναι το εξής:

Εάν $F \in ERV(-\alpha, -\beta)$ με $1 < \alpha \leq \beta < \infty$, τότε για κάθε σταθερό $\gamma > 0$ ισχύει

$$P\left(S_n > x\right) \sim n\overline{F}(x),$$

ομοιόμορφα για $x \geq \gamma n$ καθώς $n \to \infty$.

Στην ίδια εργασία υπάρχει το Θεώρημα 1.1 με το οποίο οριοθετούνται οι ασυμπτωτικές σχέσεις των μεγάλων αποκλίσεων στις κατανομές με βαριές ουρές και είναι το ακόλουθο:

Η $F \in \mathcal{S}$ εάν και μόνο εάν ισχύει

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\overline{F}(t + x)}{\overline{F}(t)} = 1, \quad x \in \mathcal{R}$$

και υπάρχει ακολουθία t_n τέτοια ώστε

$$\limsup_{n \to \infty} \sup_{s \geq t_n} \frac{P(S_n > s)}{n\overline{F}(s)} \leq 1$$

Επιπλέον, όταν $F \in \mathcal{S}$ υπάρχει ακολουθία t_n τέτοια ώστε να ισχύει

$$\lim_{n\to\infty}\sup \sup_{s\geq t_n}\left|\frac{P(S_n>s)}{n\overline{F}(s)}-1\right|=0.$$

Το αποτέλεσμα για τις κατανομές με συνεπώς μεταβαλλόμενες ουρές δόθηκε στην εργασία των K. W. Ng, Q. Tang, J. Yan και H. Yang (2004) το οποίο λέει ότι:

Έστω $\{X_k,\, k>1\}$ μία ακολουθία ανεξάρτητων μη αρνητικών, ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με κοινή κατανομή $F \in \mathcal{C}$ και πεπερασμένη μέση τιμή μ. Τότε για κάθε σταθερό $\gamma > 0$ ισχύει

$$P\left(S_n - n\mu > x\right) \sim n\overline{F}(x), \tag{2.4.4}$$

ομοιόμορφα για $x \geq \gamma n$ καθώς $n \to \infty$.

Παρατήρηση 1.

Ένα ερώτημα το οποίο γεννάται είναι το ακόλουθο. Μπορούμε να βρούμε μία κατανομή με υποεκθετική συνάρτηση ουράς για την οποία να ισχύει η ασυμπτωτική σχέση των μεγάλων αποκλίσεων όταν η ομοιόμορφη σχέση μεταξύ x και n είναι υπεργραμμική και δεν ισχύει στη γραμμική περίπτωση. Ένα τέτοιο παράδειγμα βρίσκουμε στην εργασία του A. V. Nagaev (1969). Για τις $Weibull$ κατανομές με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$p(x)=\frac{2}{3\sqrt{\pi}}e^{-|x|^{2/3}}$$

και συνάρτηση κατανομής ουράς

$$\overline{F}(x)\sim\frac{x^{1/3}}{\sqrt{\pi}}e^{-x^{2/3}}, \qquad x\to\infty$$

εάν ορίσουμε

$$S_n(x)=P(S_n>x)$$

από την παραπάνω εργασία παίρνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. $\sqrt{n} < x < \left(2(\frac{2}{3})^{3/4} - \delta\right)(n-1)^{\frac{3}{4}}$ όπου δ είναι αρκετά μικρός, σταθερός θετικός αριθμός. Τότε
$$S_n(x) = \left[1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right] \exp\left\{\frac{x^3}{n^2}\lambda^{[2]}(x/n)\right\}(1+o(1)).$$

2. $\left(2(\frac{2}{3})^{3/4} - \delta\right)(n-1)^{\frac{3}{4}} < x < (2(\frac{2}{3})^{3/4} + \delta)(n-1)^{\frac{3}{4}}$ τότε
$$\begin{aligned} S_n(x) &= \left[1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right] \exp\left\{\frac{x^3}{n^2}\lambda^{[2]}(x/n)\right\}(1+o(1)) \\ &+ n\left[1 - \Phi\left(\frac{\alpha x}{\sqrt{n-1}}\right)\right] \exp\left\{\frac{\alpha^3 x^3}{(n-1)^2}\lambda^{[2]}\left(\frac{\alpha x}{n-1}\right)\right\}\sqrt{2\pi n} \\ &\times \left(1 - \frac{(2/9)(n-1)}{x^{4/3}(1-\alpha)^{4/3}}\right)^{-1/2} e^{-(1-\alpha)^{2/3}x^{2/3}}(1+o(1)). \end{aligned}$$

3. $\left(2(\frac{2}{3})^{3/4} + \delta\right)(n-1)^{\frac{3}{4}} \le x \le \frac{1}{\rho}n^{3/2}$ όπου ρ είναι μία ποσότητα η οποία πηγαίνει αργά στο άπειρο καθώς το n αυξάνει.
$$S_n(x) = \frac{n(2/3)\sqrt{2\pi n}}{(1-\alpha)^{1/3}x^{1/3}}\left(1 - \frac{(2/9)(n-1)}{x^{4/3}(1-\alpha)^{4/3}}\right)^{-1/2} S_{n-1}(\alpha x) S_1\left((1-\alpha)x\right)(1+o(1)).$$

4. $\frac{1}{\rho}n^{3/2} < x < \rho n^{3/2}$
$$S_n(x) = \frac{n x^{1/3}}{2/3} \exp\left\{-x^{2/3} + \frac{\sigma^2(2/3)^2(n-1)}{x^{(2/3)}}\right\}(1+o(1))$$

5. $x \ge \rho n^{3/2}$
$$S_n(x) = n\overline{F}(x)(1+o(1)).$$

Στην δεύτερη και τρίτη περίπτωση το $\alpha < 3/4$ είναι η μικρότερη θετική ρίζα της εξίσωσης
$$\frac{n-1}{x^{4/3}} = \frac{3\alpha(1-\alpha)^{1/3}}{2}\left(1 - 3\lambda_0\left(\frac{\alpha x}{n-1}\right) - 4\lambda_1\left(\frac{\alpha x}{n-1}\right)^2 - 5\lambda_2\left(\frac{\alpha x}{n-1}\right)^3\right). \tag{2.4.5}$$

και $\lambda^{[2]}(z)$ είναι οι δύο πρώτοι όροι της σειράς Cramer, λ_i είναι οι συντελεστές της σειράς οι οποίοι εξαρτώνται από τις ροπές γ_i της κατανομής.

Μπορούμε να δούμε από την πέμπτη περίπτωση ότι η ασυμπτωτική σχέση των μεγάλων αποκλίσεων ισχύει ομοιόμορφα όταν $x \geq \rho n^{3/2}$ η οποία είναι μη γραμμική.

Θα δείξουμε ότι η ασυμπτωτική σχέση των μεγάλων αποκλίσεων δεν ισχύει στην περίπτωση της γραμμικής σχέσης μεταξύ x και n. Υποθέτουμε ότι $x = kn$, για κάθε σταθερό k, τότε από την εξίσωση (2.4.5) λαμβάνουμε

$$\frac{n-1}{(kn)^{4/3}} = \frac{3\alpha(1-\alpha)^{1/3}}{2}\left(1 - 3\lambda_0\left(\frac{\alpha kn}{n-1}\right) - 4\lambda_1\left(\frac{\alpha kn}{n-1}\right)^2 - 5\lambda_2\left(\frac{\alpha kn}{n-1}\right)^3\right).$$

Εάν θέσουμε $\omega = \omega(n) = \frac{n}{n-1}$ τότε έχουμε $\omega(n) = 1+o(1)$ καθώς $n \to \infty$ και η εξίσωση γίνεται

$$1 = \frac{k^{4/3}3\alpha(1-\alpha)^{1/3}n^{1/3}\omega}{2}\left(1 - 3\lambda_0\left(\alpha k\omega\right) - 4\lambda_1\left(\alpha k\omega\right)^2 - 5\lambda_2\left(\alpha k\omega\right)^3\right).$$

Η μικρότερη θετική ρίζα της παραπάνω εξίσωσης για αρκετά μεγάλα n είναι η $\alpha = Mn^{-1/3}$ όπου $M = \frac{2}{3}k^{-4/3}(1-o(1))$ καθώς $n \to \infty$.

Από την τρίτη περίπτωση έχουμε

$$\begin{aligned} S_n(kn) &= \frac{2n\sqrt{2\pi n}}{3(1-Mn^{-1/3})^{1/3}(kn)^{1/3}}\left(1 - \frac{2(n-1)}{9(kn)^{4/3}(1-Mn^{-1/3})^{4/3}}\right)^{-1/2} \\ \times \quad & S_{n-1}(Mkn^{2/3})S_1\left((1-Mn^{-1/3})kn\right)(1+o(1)). \end{aligned}$$

Το $S_{n-1}(Mkn^{2/3})$ υπολογίζεται από την πρώτη περίπτωση

$$S_{n-1}(Mkn^{2/3}) = [1-\Phi(Mkn^{1/6}\omega^{1/2})]\exp\left\{(Mk)^3\omega^2\lambda^{[2]}\left(Mkn^{-1/3}\omega\right)\right\}(1+o(1)).$$

Παραπέρα

$$\begin{aligned}
\frac{S_n(kn)}{n\overline{F}(kn)} &= \frac{2\sqrt{2\pi}}{3k^{1/3}} n^{1/6}\left(1-\frac{2(n-1)}{9(kn)^{4/3}(1-Mn^{-1/3})^{4/3}}\right)^{-1/2}\times \\
&\times \quad [1-\Phi(Mkn^{1/6}\omega^{1/2})]\exp\left\{(Mk)^3\omega^2\lambda^{[2]}\left(Mkn^{-1/3}\omega\right)\right\}\times \\
&\times \quad e^{(kn)^{(2/3)}[1-(1-Mn^{-1/3})^{(2/3)}]}(1+o(1)).
\end{aligned}$$

Είναι γνωστό ότι για την κανονική κατανομή ισχύει

$$1-\Phi(x)\sim\frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}},$$

καθώς $x\to\infty$ άρα έχουμε

$$\begin{aligned}
&\frac{S_n(kn)}{n\overline{F}(kn)} = \frac{2\sqrt{2\pi}}{3k^{1/3}} n^{1/6}\left(1-\frac{2(n-1)}{9(kn)^{4/3}(1-Mn^{-1/3})^{4/3}}\right)^{-1/2}\times \\
\times \quad & \exp\left\{(Mk)^3\omega^2\lambda^{[2]}\left(Mkn^{-1/3}\omega\right)\right\}\times \\
\times \quad & \frac{1}{Mkn^{1/6}\omega^{1/2}}e^{-\frac{(Mk)^2n^{1/3}\omega}{2}}e^{(kn)^{(2/3)}[1-(1-Mn^{-1/3})^{(2/3)}]}(1+o(1)) \\
= \quad & \frac{2\sqrt{2\pi}}{3Mk^{4/3}}\left(1-\frac{2(n-1)}{9(kn)^{4/3}(1-Mn^{-1/3})^{4/3}}\right)^{-1/2}\times \\
\times \quad & \exp\left\{(Mk)^3\omega^2\lambda^{[2]}\left(Mkn^{-1/3}\omega\right)-\frac{(Mk)^2n^{1/3}\omega}{2}+(kn)^{(2/3)}[1-(1-Mn^{-1/3})^{(2/3)}]\right\}(1+o(1)) \\
= \quad & \frac{2\sqrt{2\pi}}{3Mk^{4/3}}\left(1-\frac{2(n-1)}{9(kn)^{4/3}(1-Mn^{-1/3})^{4/3}}\right)^{-1/2}\times \\
\times \quad & \exp\left\{(Mk)^3\omega^2\left(\lambda_0+\lambda_1Mkn^{-1/3}\omega+\lambda_2\left(Mkn^{-1/3}\omega\right)^2\right)\right\}\times \\
\times \quad & \exp\left\{-\frac{(Mk)^2n^{1/3}\omega}{2}+(kn)^{(2/3)}[1-(1-Mn^{-1/3})^{(2/3)}]\right\}(1+o(1))
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το κανόνα $de\, L'Hospital$ παίρνουμε ότι

$$n^{(2/3)}\left(-\frac{(Mk)^2n^{-1/3}\omega}{2}+k^{(2/3)}\left[1-(1-Mn^{-1/3})^{(2/3)}\right]\right)\to-\infty$$

και επομένως

$$\frac{S_n(kn)}{n\overline{F}(kn)} \to 0$$

καθώς $n \to \infty$.

Άρα υπάρχουν κατανομές με υποεκθετική συνάρτηση ουράς που δεν ανήκουν στην κλάση $\mathcal{C}$ για τις οποίες δεν ισχύει η ασυμπτωτική σχέση των μεγάλων αποκλίσεων όταν η ομοιόμορφη σχέση μεταξύ x και n είναι γραμμική.

Μία αξιόλογη εργασία η οποία διαπραγματεύεται τις ασυμπτωτικές σχέσεις των μεγάλων αποκλίσεων είναι των D. Denisov, A.B. Dieker και V. Shneer (2008). Για τα αποτελέσματα της εργασίας αυτής χρειαζόμαστε τις παρακάτω έννοιες:

1. Φυσικής κλίμακας ακολουθία $\{b_n\}$ (Natural scale).
   Η ακολουθία $\{b_n\}$ είναι φυσικής κλίμακας εάν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $K > 0$ τέτοια ώστε

   $$P\left(\left|\frac{S_n}{b_n}\right| < K\right) > 1 - \epsilon\,.$$

   Ένα παράδειγμα τέτοιας ακολουθίας βρίσκουμε στον ασθενή νόμο των μεγάλων αριθμών των Marcinkewicz- Zygmund.

   Εάν $EX = 0$ και $EX^r < \infty$ για κάποιο $r \in (1, 2)$ τότε η ακολουθία $b_n = n^{1/r}$ είναι φυσικής κλίμακας.

2. Μη ευαίσθητη ακολουθία I_n (Insensitivity).
   Δοθείσης μίας ακολουθίας $\{b_n\}$ λέμε ότι η ακολουθία I_n είναι μία b-μη ευαίσθητη εάν $I_n > b_n$ και ισχύει

   $$\sup_{x > I_n} \sup_{0 < t < b_n} \left|\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)} - 1\right| \to 0.$$

3. Αποκοπής ακολουθία $\{h_n\}$ (Truncation).

   Η ακολουθία $\{h_n\}$ είναι αποκοπής εάν ισχύει

   $$\lim_{K\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{nP\left(S_2 > x,\, X_1,\, X_2 \in (-\infty,\, -Kb_n)\cup(h_n,\, \infty) > h_n\right)}{\overline{F}(x)} = 0$$

4. Μικρών αλμάτων ακολουθία $\{J_n\}$ (Small steps).

   Δοθέντος μίας ακολουθίας $\{h_n\}$ λέμε ότι η ακολουθία J_n είναι μία h- μικρών αλμάτων εάν ισχύει

   $$\lim_{n\to\infty}\sup_{x>J_n}\frac{P(S_n > x,\, X_1 \le h_n, ..., X_n \le h_n)}{n\overline{F}(x)} = 0$$

Τώρα είμαστε σε θέση να δώσουμε το βασικό αποτέλεσμα της εργασίας (Θεώρημα 2.1).

Έστω $\{b_n\}$ είναι φυσικής κλίμακας ακολουθία, η I_n είναι μία b-μη ευαίσθητη ακολουθία, η $\{h_n\}$ είναι αποκοπής ακολουθία και η J_n είναι μία h-μικρών αλμάτων ακολουθία.

Εάν $h_n = O(b_n)$ και $h_n \le J_n$ τότε ισχύει

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x>J_n+I_n}\left|\frac{P(S_n > x)}{n\overline{F}(x)} - 1\right| = 0$$

Στην Πρόταση 8.1, της εργασίας αυτής, εφαρμόζεται το παραπάνω Θεώρημα για τυχαίες μεταβλητές με κατανομές $F \in \mathcal{D}$, $E(X_i) = 0$ και με $E(X_i^2) = 1$. Εάν $\gamma_F < -2$ και $t > -\mu_F - 2$ τότε ισχύει

$$P(S_n > x) \sim n\overline{F}(x) \tag{2.4.6}$$

ομοιόμορφα για $x \ge \sqrt{tn\log n} + I_n$ όπου I_n είναι κατάλληλη ακολουθία.

Εάν $F \in \mathcal{C}$ τότε ισχύει η (2.4.6) ομοιόμορφα για $x \ge \sqrt{tn\log n}$.

Στο Θεώρημα 9.1 αποδείχνεται, κάτω από κατάλληλες προϋποθέσεις, η σχέση (2.4.6) ισχύει όταν $F \in \mathcal{C}$, $E(X_i) = 0$ και μη πεπερασμένη διακύμανση, ομοιόμορφα για $x > x_n$ όπου $n\overline{F}(x_n) = o(1)$.

Τέλος στο Πόρισμα 2.1 της εργασίας αυτής για κατανομές ώστε $x^k\overline{F} \in \mathcal{D}$, $E(X_i) = 0$, $E|X_i|^k < \infty$ για κάποια $1 < k \leq 2$ και

$$\lim_{x\to\infty} \sup_{0\leq t\leq x^{1/k}} \left| \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)} - 1 \right| = 0, \tag{2.4.7}$$

ισχύει για κάθε $\alpha > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x>\alpha} \left| \frac{P\left(S_n > nx\right)}{n\overline{F}(nx)} - 1 \right| = 0.$$

Παρατήρηση 2.
Οι κατανομές που ικανοποιούν την σχέση (2.4.7) ανήκουν σε μία κλάση κατανομών η οποία είναι ευρύτερη από την κλάση των κατανομών με συνεπώς μεταβαλλόμενες ουρές.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η κατανομή με συνάρτηση κατανομής ουράς $\overline{F}(x) = \exp\{-\log^2(x)\}$. Η κατανομή αυτή ικανοποιεί τη σχέση (2.4.7) αλλά δεν ανήκει στη κλάση των κατανομών με συνεπώς μεταβαλλόμενες ουρές.

Τέλος, για τις κατανομές που ανήκουν την κλάση $\mathcal{S}^*$ ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα το οποίο βρίσκουμε στην εργασία των D. Denisov, S. Foss και S. Zachary (2010) το οποίο λέει το ακόλουθο:

Έστω $\{X_k,\, k > 1\}$ μία ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με κοινή κατανομή $F \in \mathcal{S}^*$ και πεπερασμένη μέση τιμή. Έστω μία αύξουσα συνάρτηση $h(x) > 0$ η ποία είναι τέτοια ώστε να ισχύει $\overline{F}(x \pm h(x)) \sim \overline{F}(x)$ καθώς $x \to \infty$.
Τότε ισχύει

$$P\left(S_n > x\right) \sim n\overline{F}(x), \tag{2.4.8}$$

καθώς $x \to \infty$ ομοιόμορφα για $n \leq h(x)$.

Παρατήρηση 3. Το παραπάνω Θεώρημα σε σύγκριση με το αποτέλεσμα της εργασίας των D. Denisov, A.B. Dieker και V. Shneer ενώ δίνει το ίδιο αποτέλεσμα όπως θα δούμε με το παράδειγμα της $Weibull$ είναι απλούστερο και γενικότερο αφού χρησιμοποιεί μόνο την ύπαρξη της μέσης τιμής. Έτσι για την $Weibull$ με

$$\overline{F}(x) \sim \frac{x^{1/3}}{\sqrt{\pi}} e^{-x^{2/3}}, \qquad x \to \infty$$

σύμφωνα με το αποτέλεσμα των D. Denisov, A.B. Dieker και V. Shneer έχουμε :
$b_n = n^{1/2}$ αφού $EX < \infty$.
$I_n = n^{(3/2)+\epsilon}$, $\epsilon > 0$ αφού για $t = n^{1/2}$ και $x = n^{(3/2)+\epsilon}$ ισχύει

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^{(3/2)+\epsilon} - n^{1/2})^{1/3}}{(n^{(3/2)+\epsilon})^{1/3}} \exp\{(n^{(3/2)+\epsilon})^{2/3} - (n^{(3/2)+\epsilon} - n^{1/2})^{2/3}\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 - n^{-(1+\epsilon)}\right)^{1/3} \exp\{\frac{n^1/2}{n^{((3/2)+\epsilon)(1/3)}}\} = 1.
\end{aligned}$$

$J_n = n^{(3/4)(1+\epsilon)}$, $\epsilon > 0$.

Άρα ισχύει το Θεώρημα των D. Denisov, A.B. Dieker και V. Shneer για $x > n^{3/2+\epsilon}$ το οποίο κάτω φράγμα είναι ίσο ή μεγαλύτερο από το $\rho n^{3/2}$, (όπου ρ είναι μία ποσότητα η οποία πηγαίνει αργά στο άπειρο καθώς το n αυξάνει) το οποίο είναι το κάτω φράγμα που παίρνουμε από το Θεώρημα των D. Denisov, S. Foss και S. Zachary.

Μία ενδιαφέρουσα εργασία στις μεγάλες αποκλίσεις είναι των I. Armendariz και M. Loulakis (2011) όπου μελετάται η ασυμπτωτική συμπεριφορά της δεσμευμένης πιθανότητας

$$P\left((X_1, X_2, ..., X_n) \in A | S_n > x\right)$$

καθώς $n \to \infty$ και $x \geq d_n$. Το βασικό συμπέρασμα είναι ότι η δέσμευση επηρεάζει ασυμπτωτικά μόνο την συμπεριφορά της τυχαίας μεταβλητής $M_n = \max_{1\leq i\leq n} X_i$ ενώ οι υπόλοιπες $(n-1)$ τυχαίες μεταβλητές συμπεριφέρονται ασυμπτωτικά ως ανεξάρτητες.

Βασικές εργασίες, στις οποίες μπορούμε να αντλήσουμε περισσότερα στοιχεία, για τις ακριβείς μεγάλες αποκλίσεις σε μη τυχαία αθροίσματα είναι των S.V. Nagaev (1979), I.F. Pinelis (1985), T. Mikosch και A.V. Nagaev (1998), T. Mikosch και A.V. Nagaev (2001), L. V. Rozovski (1993), V. Paulauskas και A. Skučaitė (2004), A. Baltrunas, R. Leipus και J. Siaulys (2008) και οι μονογραφές των V. Vinogradov (1994) και N. Gantert (1996).

Ακριβείς μεγάλες αποκλίσεις για τυχαία αθροίσματα ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με κατανομές που έχουν βαριές ουρές.

Έστω $\{N(t), t > 0\}$ μία μη αρνητική ακέραια διαδικασία καταμέτρησης η οποία είναι ανεξάρτητη από την ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών $\{X_k, k \geq 1\}$. Συμβολίζουμε με $\lambda(t) = EN(t) < \infty$ για $0 \leq t < \infty$ και $\lambda(t) \to \infty$ καθώς $t \to \infty$. Για το τυχαίο άθροισμα της μορφής

$$S_{N(t)} = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k, \quad t > 0$$

οι ακριβείς μεγάλες αποκλίσεις παίρνουν την ασυμπτωτική σχέση

$$P(S_{N(t)} > x) \sim \lambda(t)\overline{F}(x),$$

καθώς $t \to \infty$ ομοιόμορφα για $x \geq d_{\{\lambda(t)\}}$.

Ισοδύναμα

$$\limsup_{t\to\infty} \sup_{x \geq d_{\{\lambda(t)\}}} \left| \frac{P\left(S_{N(t)} > x\right)}{\lambda(t)\overline{F}(x)} - 1 \right| = 0.$$

Το πρώτο αποτέλεσμα στις ακριβείς μεγάλες αποκλίσεις για τυχαία αθροίσματα δόθηκε από τους C. Klüppelberg και T. Mikosch (1997) και είναι το ακόλουθο:

Έστω $F \in ERV(-\alpha, -\beta)$ για κάποια $1 < \alpha \leq \beta < \infty$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι $\{N(t), t \geq 0\}$ είναι μία ακέραια διαδικασία καταμέτρησης που ικανοποιεί τις παρακάτω υποθέσεις

$$N_1 : \quad \frac{N(t)}{\lambda(t)} \xrightarrow{P} 1,$$

καθώς $t \to \infty$, και

$$N_2 : \quad \sum_{k>(1+\delta)\lambda(t)} (1+\epsilon)^k P(N(t) = k) = o(1)$$

καθώς $t \to \infty$, για κάθε $\delta > 0$ και κάποια αρκετά μικρά $\epsilon > 0$. Τότε η σχέση

$$P(S_{N(t)} - \mu\lambda(t) > x) \sim \lambda(t)\overline{F}(x),$$

ισχύει ομοιόμορφα για $x \geq \gamma\lambda(t)$ για κάθε σταθερό $\gamma > 0$.

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι για τις κατανομές με συνεπώς μεταβαλλόμενες ουρές και δόθηκε στην εργασία των K. W. Ng, Q. Tang, J. Yan και H. Yang (2004) το οποίο λέει ότι:

Έστω $\{X_k, k \geq 1\}$ μία ακολουθία ανεξάρτητων μη αρνητικών, ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με πεπερασμένη μέση τιμή μ και κοινή κατανομή $F \in \mathcal{C}$ ανεξάρτητη από μία μη αρνητική ακέραια διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$. Υποθέτουμε ότι η διαδικασία $N(t)$ ικανοποιεί την υπόθεση

$$A : \quad EN(t)I_{(N^p(t)>(1+\delta)\lambda(t))} = O(\lambda(t)) \tag{2.4.9}$$

για κάποια $p > \gamma_F$ και κάθε $\delta > 0$. Τότε ισχύει

$$P\left(S_{N(t)} - \mu\lambda(t)\right) \sim \lambda(t)\overline{F}(x)$$

ομοιόμορφα για $x \geq \gamma\lambda(t)$.

Κεφάλαιο 3

Οι ακριβείς μεγάλες αποκλίσεις για ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

3.1 Μη τυχαία αθροίσματα S_n

3.1.1 Προκαταρκτικά

Το παρακάτω Λήμμα είναι βασικό για τα επιχειρήματα της εργασίας και υπάρχει η απόδειξή του στην εργασία των K. W. Ng, Q. Tang, J. Yan και H. Yang (2004) (Λήμμα 2.2).

Λήμμα 1.

Για μία κατανομή $F \in \mathcal{D}$ και για κάθε $\rho > \gamma_F$ υπάρχουν θετικά x_0 και B τέτοια ώστε για όλα τα $\theta \in (0,1]$ και για όλα τα $x \geq \theta^{-1}x_0$ ισχύει η σχέση

$$\frac{\overline{F}(\theta x)}{\overline{F}(x)} \leq B\theta^{-\rho}$$

Η παραπάνω σχέση και όταν $\theta = \theta(x) \to 0,\ x \to \infty$.

Θα χρειαστούμε επίσης και το ακόλουθο Λήμμα όπου η απόδειξή του υπάρχει στην εργασία των K. W. Ng, Q. Tang, J. Yan και H. Yang (2003) (Λήμμα 3.1)

Λήμμα 2.
Έστω μία στοχαστική διαδικασία $N(t)$ *με μέση τιμή* $\lambda(t)$*για την οποία ισχύει*

$$N_1: \quad \frac{N(t)}{\lambda(t)} \xrightarrow{P} 1$$

τότε έχουμε

$$E\left(\frac{N(t)}{\lambda(t)} I_{\{\frac{N(t)}{\lambda(t)} > 1+\theta\}}\right) = o(1)$$

για κάθε $\theta > 0$,

όπου με I συμβολίζουμε τη δείκτρια συνάρτηση.

Το επόμενο Λήμμα είναι μία άλλη μορφή της ανισότητας Fuk και $Nagaev$ και βρίσκεται στην εργασία των K. W. Ng, Q. Tang, J. Yan, H. Yang (2004) (Λήμμα 2.2).

Λήμμα 3.
Έστω $\{X_k,\ k \geq 1\}$ *είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών με κοινή κατανομή* F *και πεπερασμένη μέση τιμή* μ. *Τότε για όλα τα* $u > 0,\ x > 0$ *και* $n \geq 1$ *έχουμε.*

$$P(S_n > x) \leq n\overline{F}\left(\frac{x}{u}\right) + \left(\frac{e\mu n}{x}\right)^u$$

Στην ίδια εργασία βρίσκουμε και το επόμενο (Λήμμα 2.1).

Λήμμα 4.
Για μία κατανομή $F \in \mathcal{D}$ *με πεπερασμένη μέση τιμή,* $1 \leq \gamma_F < \infty$ *και καθώς* $x \to \infty$, *η σχέση*

$$x^{-\gamma} = o(\overline{F}(x))$$

Ισχύει για κάθε $\gamma > \gamma_F$.

Με βάση τον ορισμό των μη-ευαίσθητων κατανομών και το Λήμμα 2.19 των S. Foss, D. Korshunov και S. Zachary (2011) έχουμε το ακόλουθο:

Λήμμα 5.
Υποθέτουμε ότι $F \in \mathcal{L}$, τότε υπάρχει μία μη αρνητική γνησίως αύξουσα συνάρτηση $h(x)$ τέτοια ώστε $h(x) \to \infty$ καθώς $x \to \infty$ και να ισχύει

$$\overline{F}(x \pm h(x)) \sim \overline{F}(x) \tag{3.1.1}$$

καθώς $x \to \infty$.

Απόδειξη.
Από το Λήμμα 2.19 αφού $F \in \mathcal{L}$ παίρνουμε ότι υπάρχει μία αύξουσα ακολουθία x_n η οποία τείνει στο άπειρο τέτοια ώστε να ισχύει για την $\alpha(x) = n$ με $x \in [x_n, x_{n+1})$ η σχέση $\overline{F}(x \pm \alpha(x)) \sim \overline{F}(x)$

Επιλέγουμε ως

$$h(x) = (n-1) + \frac{1}{x_{n+1} - x_n}(x - x_n), \qquad x \in [x_n, x_{n+1})$$

τότε η $h(x)$ είναι αύξουσα και ισχύει $h(x) < \alpha(x)$ άρα ισχύει

$$\overline{F}(x \pm h(x)) \sim \overline{F}(x)$$

□

Παρατήρηση 4.
Σε όλες τις παρακάτω προτάσεις της εργασίας η αύξουσα συνάρτηση $h(x)$ είναι τέτοια ώστε να ικανοποιεί την σχέση (3.1.1) του Λήμματος 5

Θα αποδείξουμε την παρακάτω ασυμπτωτική σχέση που επίσης είναι βασική στις αποδείξεις μας.

Πρόταση 1.
Έστω X μία τυχαία μεταβλητή με πεπερασμένη μέση τιμή μ και συνάρτηση κατανομής F. Τότε για κάθε $\gamma > 0$ ισχύει

$$n\overline{F}(x) \to 0$$

ομοιόμορφα για $x \geq \gamma n$.

Απόδειξη.

Καθώς $x \geq \gamma n$ για κάθε $\gamma > 0$ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $x \geq 0$. Επίσης γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$\mu_+ = \int_0^\infty \overline{F}(x)dx.$$

Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε τα ακόλουθα

$$\begin{aligned}\mu_+ &= -\int_0^\infty x(\overline{F}(x))'dx = -\lim_{x\to\infty}(x\overline{F}(x)) + \int_0^\infty \overline{F}(x)dx \\ &= -\lim_{x\to\infty}(x\overline{F}(x)) + \mu\end{aligned}$$

από τα οποία συνάγουμε τη σχέση

$$\lim_{x\to\infty}(x\overline{F}(x)) = 0$$

και καθώς $x \geq \gamma n$ για κάθε $\gamma > 0$ συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}(n\overline{F}(x)) \leq \lim_{x\to\infty}(x\overline{F}(x)) = 0.$$

Μία ασυμπτωτική σχέση η οποία ισχύει για θετικές τυχαίες μεταβλητές είναι το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 6.

Έστω $\{X_k,\ k \geq 1\}$ είναι μία ακολουθία από ανεξάρτητες και ισόνομες μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με κοινή κατανομή F και πεπερασμένη μέση τιμή μ. Τότε για κάθε $\gamma > 0$ ισχύει

$$P\left(S_n - n\mu > x\right) \gtrsim n\overline{F}(x + n\mu), \tag{3.1.2}$$

ομοιόμορφα για $x \geq \gamma n$ καθώς $n \to \infty$,
και εάν $F \in \mathcal{L}$ τότε ισχύει

$$P\left(S_n - n\mu > x\right) \gtrsim n\overline{F}(x), \tag{3.1.3}$$

καθώς $n \to \infty$, ομοιόμορφα για $x \geq h^{-1}(n\mu)$.

Απόδειξη.

$$
\begin{aligned}
P(S_n - n\mu > x) \geq P\left(S_n - n\mu > x, \quad \max_{1\leq i\leq n} X_i > x + n\mu\right) & \\
\geq \quad & \sum_{i=1}^{n} P\left(S_n - n\mu > x, \quad X_i > x + n\mu\right) \\
- \quad & \sum_{1\leq k<l\leq n} P\left(S_n - n\mu > x, \quad X_k > x + n\mu,\ X_l > x + n\mu\right) \\
\geq \quad & nP\left(S_{n-1} - n\mu > -n\mu, \quad X_n > x + n\mu\right) - \left(n\overline{F}(x+n\mu)\right)^2 \\
= \quad & nP\left(S_{n-1} - n\mu > -n\mu\right)\overline{F}(x+n\mu) - \left(n\overline{F}(x+n\mu)\right)^2 \\
\geq \quad & n\overline{F}(x+n\mu)\left(P\left(S_{n-1} - n\mu > -n\mu\right) - n\overline{F}(x)\right). \qquad (3.1.4)
\end{aligned}
$$

Έτσι, έχουμε

$$
\frac{P\left(S_n - n\mu > x\right)}{n\overline{F}(x+n\mu)} \quad \geq \quad \left(P\left(S_{n-1} - n\mu > -n\mu\right) - n\overline{F}(x)\right). \qquad (3.1.5)
$$

Από τον ασθενή νόμο των μεγάλων αριθμών έχουμε

$$
\lim_{n\to\infty} P\left(S_{n-1} - n\mu > -n\mu\right) = 1.
$$

καθώς $n \to \infty$,
και άρα παίρνουμε

$$
\liminf_{n\to\infty} \sup_{x\geq\gamma n} \frac{P\left(S_n - n\mu > x\right)}{n\overline{F}(x+n\mu)} \geq
$$

$$
\liminf_{n\to\infty} \sup_{x\geq\gamma n} \left(P\left(S_{n-1} - n\mu > -n\mu\right) - n\overline{F}(x)\right)
$$

ή

$$
P\left(S_n - n\mu > x\right) \gtrsim n\overline{F}(x+n\mu),
$$

ομοιόμορφα για $x \geq \gamma n$ καθώς $n \to \infty$.

Αφού $F \in \mathcal{L}$ τότε από το Λήμμα 5 παίρνουμε ότι υπάρχει μία συνάρτηση $0 < h(x) < x$ γνησίως αύξουσα τέτοια ώστε $h(x) \to \infty$ καθώς $x \to \infty$ και να ισχύει

$$\overline{F}(x + h(x)) \sim \overline{F}(x)$$

καθώς $x \to \infty$.

Από την $x \geq h^{-1}(n\mu)$ παίρνουμε $h(x) \geq n\mu$ και άρα ισχύει

$$\overline{F}(x + n\mu) \geq \overline{F}(x + h(x)) \sim \overline{F}(x)$$

καθώς $n \to \infty$, ομοιόμορφα για $x \geq h^{-1}(n\mu)$.

Επομένως ισχύει η σχέση (3.1.3).

$\square$

Παρατήρηση 5.

Στο παραπάνω αποτέλεσμα μπορούμε να βελτιώσουμε σημαντικά το κατώφλι της ομοιόμορφης σχέσης εάν θεωρήσουμε μία ακολουθία φυσικής κλίμακας $b_n = n^{1/r}$ για κάποια $r \in [1, 2)$. Τότε ισχύει η ασυμπτωτική ανισότητα (3.1.3) ομοιόμορφα για $x \geq h^{-1}(b_n)$. Η ύπαρξη της ακολουθίας b_n προϋποθέτει ότι $EX^r < \infty$ για κάποιο $r \in (1, 2)$

Ένα βασικό εργαλείο για τις αποδείξεις των Θεωρημάτων είναι η **ανισότητα Bonferroni** που λέει ότι, εάν

$$S_k = \sum P(A_{i_1} \cap ... \cap X_{i_k})$$

όπου $i_1 < i_2 < ... < i_k$ και $2 < k \leq n$,

τότε, για k περιττό ισχύει

$$P\left(\cup_{i=1}^{k} X_i\right) \leq \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} S_j$$

και για k άρτιο ισχύει

$$P\left(\cup_{i=1}^{k} X_i\right) \geq \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} S_j.$$

3.1.2 Τα Αποτελέσματα

Πρώτα, μελετάμε την ασυμπτωτική σχέση των κεντροποιημένων μεγάλων αποκλίσεων στην περιοχή των κατανομών με κυριαρχημένες ουρές για μη αρνητικές, ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.

Θεώρημα 1.
Έστω $\{X_k,\ k \geq 1\}$ μία ακολουθία από μη αρνητικές, ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κοινή κατανομή $F \in \mathcal{D}$ και πεπερασμένη μέση τιμή μ. Τότε για κάθε $q > 0$ και για κάθε $\gamma > 0$ ισχύει

$$n\overline{F}(x + (1+q)n\mu) \lesssim P\left(S_n - n(1+q)\mu > x\right) \lesssim n\overline{F}(x) \qquad (3.1.6)$$

ομοιόμορφα για $x \geq \gamma n$ καθώς $n \to \infty$.

Παρατήρηση 6.
Η σταθερά q είναι πολύ χρήσιμη στα αναλογιστικά μοντέλα και ονομάζεται ‘ Συντελεστής επιβάρυνσης ασφαλείας ’ .

Παρατήρηση 7.
Η απόδειξη του άνω φράγματος του παραπάνω Θεωρήματος βασίζεται στην τεχνική της απόδειξης του Θεωρήματος 3.1 της εργασίας των K. W. Ng, Q. Tang, J. Yan και H. Yang (2004) χρησιμοποιώντας μία διαφορετική ακολουθία τυχαίων μεταβλητών στην διαδικασία αποκοπής.

Απόδειξη.

Πρώτα θα αποδείξουμε το κάτω φράγμα της ασυμπτωτικής σχέσης.

$$
\begin{aligned}
& P(S_n - n(1+q)\mu > x) \geq P\left(S_n - n(1+q)\mu > x, \quad \bigcup_{i=1}^{n} X_i > x + (1+q)n\mu\right) \\
\geq \quad & \sum_{i=1}^{n} P\left(S_n - n(1+q)\mu > x, \quad X_i > x + (1+q)n\mu\right) \\
- \quad & \sum_{1 \leq k < l \leq n} P\left(S_n - n(1+q)\mu > x, \quad X_k > x + (1+q)n\mu,\, X_l > x + (1+q)n\mu\right) \\
\geq \quad & \sum_{i=1}^{n} P\left(X_i > x + (1+q)n\mu\right) - \left(n\overline{F}(x + (1+q)n\mu)\right)^2 \\
\geq \quad & n\overline{F}(x + (1+q)n\mu)\left(1 - n\overline{F}(x)\right).
\end{aligned}
$$

Έτσι μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ισχύει η ανισότητα

$$
\frac{P\left(S_n - n\mu > x\right)}{n\overline{F}(x + (1+q)n\mu)} \quad \geq \quad 1 - n\overline{F}(x).
$$

Γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$
n\overline{F}(x) \to 0
$$

ομοιόμορφα για $x \geq \gamma n$ καθώς $n \to \infty$.
Σε συνδυασμό με το παραπάνω έχουμε

$$
P\left(S_n - (1+q)n\mu > x\right) \gtrsim n\overline{F}(x + (1+q)n\mu)
$$

καθώς $n \to \infty$.
Θα αποδείξουμε το άνω φράγμα της ασυμπτωτικής σχέσης (3.1.6)
Ορίζουμε ως $\alpha = \max\{-\log(n\overline{F}(x), 1\}$. Τότε $a \to \infty$ ομοιόμορφα για $x \geq \gamma n$ καθώς $n \to \infty$.
Συνεχίζοντας, ορίζουμε την ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών και του

αντίστοιχου αθροίσματος:

$$\begin{aligned}\widetilde{X}_k &:= X_k I_{\{X_k \le \frac{x}{\alpha^2}\}} + x I_{\{X_k > \frac{x}{\alpha^2}\}} \\ \widetilde{S}_n &:= \sum_{i=1}^{n} \widetilde{X}_k. \\ \widetilde{x} &:= x + n(1+q)\mu\end{aligned}$$

Για κάποιο $h > 0$, που θα οριστεί παρακάτω, και χρησιμοποιώντας την ανισότητα $\ln(x+1) \le x$ συνάγουμε τα ακόλουθα

$$\begin{aligned}\frac{P(\tilde{S}_n > \widetilde{x})}{n\overline{F}(x)} &\le \frac{e^{-h\tilde{x}} E(e^{h\tilde{S}_n})}{n\overline{F}(x)} \\ &\le e^{-h\tilde{x}+\alpha} \left(\int_0^{+\infty} \left(e^{ht} - 1\right) d\widetilde{F}(t) + 1 \right)^n \\ &\le e^{-h\tilde{x}+\alpha} \left(\exp\left\{ \ln\left\{ \int_0^{+\infty} \left(e^{ht} - 1\right) d\widetilde{F}(t) + 1 \right\}\right\}\right)^n \\ &\le \exp\left\{ n \int_0^{+\infty} \left(e^{ht} - 1\right) d\widetilde{F}(t) - h\widetilde{x} + a \right\}.\end{aligned}$$

Στη συνέχεια, χωρίζουμε το ολοκλήρωμα ως εξής

$$\int_0^{+\infty} \left(e^{ht} - 1\right) d\widetilde{F}(t) \le \int_0^{\frac{x}{\alpha^2}} \left(e^{ht} - 1\right) dF(t) + e^{hx}\overline{F}(\frac{x}{\alpha^2}).$$

Από την ανισότητα $e^u - 1 \le ue^u$ συνάγουμε τα παρακάτω

$$\int_0^{+\infty} \left(e^{ht} - 1\right) d\widetilde{F}(t) \le \int_0^{\frac{x}{a^2}} hte^{ht} dF(t) + e^{hx}\overline{F}(\frac{x}{a^2}) \le$$

$$he^{h\left(\frac{x}{\alpha^2}\right)} \int_0^{\frac{x}{\alpha^2}} t dF(t) + e^{hx}\overline{F}(\frac{x}{\alpha^2}) \le h\mu e^{h\left(\frac{x}{\alpha^2}\right)} + e^{hx}\overline{F}(\frac{x}{\alpha^2}).$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1 και 4 για $\rho \ge \gamma_F$ λαμβάνουμε ότι $\overline{F}(\frac{x}{\alpha^2}) \le \alpha^{2\rho}\overline{F}(x)$ και ισχύει

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \left(e^{ht} - 1\right) d\widetilde{F}(t) &\le h\mu e^{h\left(\frac{x}{\alpha^2}\right)} + Be^{hx}\alpha^{2\rho}\overline{F}(x) \\ &\le h\mu e^{h\left(\frac{x}{\alpha^2}\right)} + Be^{hx}e^{2\rho\log\alpha}\frac{e^{-\alpha}}{n}.\end{aligned}$$

Άρα συμπεραίνουμε την ανισότητα

$$\begin{aligned}
&\frac{P(\widetilde{S}_n > \widetilde{x})}{n\overline{F}(x)} \leq \\
&\exp\left\{nh\mu e^{h\left(\frac{x}{\alpha^2}\right)} + Be^{hx-\alpha+2\rho\log\alpha} - h\widetilde{x} + \alpha\right\}.
\end{aligned}$$

Θέτοντας στην παραπάνω σχέση

$$h = \frac{\alpha - 2\rho\log\alpha}{x}$$

Καθώς το $x \geq n\mu$ τότε λαμβάνουμε τα παρακάτω

$$\begin{aligned}
&\frac{P(\widetilde{S}_n > \widetilde{x})}{n\overline{F}(x)} \leq \\
\leq\ & C\exp\left\{nh\mu e^{\alpha^{-1}} - hx - hn(1+q)\mu + \alpha\right\} \\
\leq\ & C\exp\left\{\frac{n\mu\alpha}{x}(e^{\alpha^{-1}} - (1+q)) - \alpha + 2\rho\log\alpha + \alpha\right\} \\
\leq\ & C\exp\left\{\frac{\mu\alpha}{\gamma}(e^{\alpha^{-1}} - (1+q)) + 2\rho\log\alpha\right\} \\
\leq\ & C\exp\left\{\frac{\mu\alpha}{\gamma}\left(\left(e^{\alpha^{-1}} - (1+q)\right) + \frac{2\rho\log\alpha}{\alpha}\right)\right\} \to 0 \quad (3.1.7)
\end{aligned}$$

καθώς $n \to \infty$ ομοιόμορφα για $x \geq \gamma n$ και C είναι μια θετική σταθερά. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι μπορούμε να γράψουμε την παρακάτω σχέση

$$\begin{aligned}
P(S_n - n(1+q)\mu > x) &= P\left(S_n - n(1+q)\mu > x, \quad \max_{1\leq i\leq n} X_i > x\right) \\
&+ P\left(S_n - n(1+q)\mu > x, \quad \max_{1\leq i\leq n} X_i \leq x\right) \\
&\leq n\overline{F}(x) + P(\widetilde{S}_n > \widetilde{x}) \qquad (3.1.8)
\end{aligned}$$

Έτσι αντικαθιστώντας την (3.1.7) στην (3.1.8) συνάγουμε ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{x\geq \gamma n} \frac{P\left(S_n - n(1+q)\mu > x\right)}{n\overline{F}(x)} \leq$$

$$1 + \limsup_{n\to\infty} \sup_{x\geq \gamma n} \frac{P\left(\widetilde{S}_n - (1+q)n\mu > x\right)}{n\overline{F}(x)} = 1$$

καθώς $n \to \infty$.

$\square$

3.2 Τυχαία αθροίσματα $S_{N(t)}$

Στην ενότητα αυτή, θα αποδείξουμε τις ασυμπτωτικές σχέσεις των μεγάλων αποκλίσεων όταν η διαδικασία καταμέτρησης των συμβάντων είναι μία στοχαστική διαδικασία.

Ξεκινώντας, θα βρούμε το κάτω φράγμα της ουράς του τυχαίου αθροίσματος $\overline{F}_{N(t)}$ για μη αρνητικές, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κατανομές που έχουν μακριές ουρές χρησιμοποιώντας ως συνθήκη το να ικανοποιεί η διαδικασία καταμέτρησης τον ασθενή νόμο των μεγάλων αριθμών.

Θεώρημα 2.
Έστω $\{X_k,\ k \geq 1\}$ είναι μία ακολουθία από ανεξάρτητες και ισόνομες μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με κοινή κατανομή F και πεπερασμένη μέση τιμή μ, ανεξάρτητη από μία μη αρνητική ακέραια διαδικασία $N(t),\ t \geq 0\}$. Υποθέτουμε ότι η η $N(t)$ ικανοποιεί την υπόθεση

$$N_1: \quad \frac{N(t)}{\lambda(t)} \xrightarrow{P} 1,$$

καθώς $t \to \infty$. Τότε για κάθε $\gamma > 0$

$$P(S_{N(t)} - \mu\lambda(t) > x) \gtrsim \lambda(t)\overline{F}(x + \mu\lambda(t)), \tag{3.2.9}$$

ισχύει ομοιόμορφα για $x \geq \gamma\lambda(t)$ καθώς $t \to \infty$,
και εάν $F \in \mathcal{L}$ τότε ισχύει

$$P\left(S_{N(t)} - \mu\lambda(t) > x\right) \gtrsim \lambda(t)\overline{F}(x) \tag{3.2.10}$$

καθώς $t \to \infty$, ομοιόμορφα για $x \geq h^{-1}(\mu\lambda(t))$.

Απόδειξη.

Παρατηρούμε ότι για $0 < \delta < 1$

$$
\begin{aligned}
P(S_{N(t)} - \mu\lambda(t) > x) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(S_k - \mu\lambda(t) > x) P(N(t) = k) \\
\geq & \sum_{(1-\delta)\lambda(t) \leq k \leq (1+\delta)\lambda(t)} P(S_k - \mu\lambda(t) > x) P(N(t) = k) \\
\geq & \; P(S_{((1-\delta)\lambda(t))} - \mu\lambda(t) > x) P\left(1 - \delta \leq \frac{N(t)}{\lambda(t)} \leq 1 + \delta\right) ,
\end{aligned}
$$

Η υπόθεση N_1 δίνει

$$
\begin{aligned}
& P(S_{N(t)} - \mu\lambda(t) > x) \gtrsim \\
& P\left(S_{(1-\delta)\lambda(t)} - (1-\delta)\,\lambda(t)\,\mu > x + \mu\lambda(t) - (1-\delta)\,\lambda(t)\,\mu\right) ,
\end{aligned}
$$

και από Λήμμα 6 έχουμε

$$
P(S_{N(t)} - \mu\lambda(t) > x) \gtrsim ((1-\delta)\lambda(t))\overline{F}(x + \delta\mu\lambda(t)) \,. \tag{3.2.11}
$$

όμως $0 < \delta < 1$ τότε από την σχέση (3.2.11) έχουμε

$$
\lim_{\delta \to 0} \liminf_{t \to \infty} \sup_{x \geq \gamma\lambda(t)} \frac{P(S_{N(t)} - \mu\lambda(t) > x)}{\lambda(t)\overline{F}(x + \mu\lambda(t))} \geq 1 \,.
$$

Αφού $F \in \mathcal{L}$ τότε από το Λήμμα 5 παίρνουμε ότι υπάρχει μία συνάρτηση $0 < h(x) < x$ γνησίως αύξουσα τέτοια ώστε $h(x) \to \infty$ καθώς $x \to \infty$ και να ισχύει

$$
\overline{F}(x + h(x)) \sim \overline{F}(x)
$$

καθώς $x \to \infty$.

Από την $x \geq h^{-1}(\mu\lambda(t))$ παίρνουμε

$$
h(x) \geq h(h^{-1}(\mu\lambda(t))) = \mu\lambda(t)
$$

και άρα ισχύει

$$
\overline{F}(x + \mu\lambda(t)) \geq \overline{F}(x + h(x)) \sim \overline{F}(x)
$$

καθώς $t \to \infty$, ομοιόμορφα για $x \geq h^{-1}(\gamma\lambda(t))$ και άρα ισχύει η σχέση (3.2.10).

□

Παρατήρηση 8.

Στο παραπάνω αποτέλεσμα μπορούμε να βελτιώσουμε σημαντικά το κατώφλι της ομοιόμορφης σχέσης εάν θεωρήσουμε μία ακολουθία φυσικής κλίμακας $b_n = n^{1/r}$ για κάποια $r \in [1, 2)$. Τότε ισχύει η ασυμπτωτική ανισότητα (3.2.10) ομοιόμορφα για $x \geq h^{-1}(b_{\lambda(t)})$. Η ύπαρξη της ακολουθίας b_n προϋποθέτει ότι $EX^r < \infty$ για κάποιο $r \in (1, 2)$

Στην συνέχεια, αποδεικνύουμε την ασυμπτωτική σχέση των ακριβών μεγάλων αποκλίσεων για τυχαία αθροίσματα των οποίων οι κατανομές προσθετέων ανήκουν στις κατανομές της κλάσης $\mathcal{S}^*$ μη αρνητικών, ισόνομων και ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών.

Θεώρημα 3.

Έστω $\{X_k,\ k \geq 1\}$ είναι μία ακολουθία μη αρνητικών ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με κοινή κατανομή $F \in \mathcal{S}^*$ ανεξάρτητη από μία μη αρνητική ακέραια διαδικασία καταμέτρησης $\{N(t),\ t \geq 0\}$. Υποθέτουμε ότι η $N(t)$ ικανοποιεί την υπόθεση

$$N_1 : \quad \frac{N(t)}{\lambda(t)} \xrightarrow{P} 1,$$

καθώς $t \to \infty$ και

$$N_2 : \quad \sum_{k > (1+\delta)\lambda(t)} (1+\epsilon)^k P(N(t) = k) = o(1)$$

καθώς $t \to \infty$, για κάθε $\delta > 0$ και κάποια αρκετά μικρά $\epsilon > 0$.
Τότε ισχύει

$$P(S_{N(t)} > x) \sim \lambda(t)\overline{F}(x), \tag{3.2.12}$$

ομοιόμορφα για $x \geq h^{-1}(\lambda(t))$ καθώς $t \to \infty$.

Απόδειξη.

Έχουμε ότι

$$P(S_{N(t)} > x) = \sum_{k=1}^{\infty} P(S_k > x) P(N(t) = k)$$

όπου παίρνουμε

$$\begin{aligned} &= \sum_{k<(1-\delta)\lambda(t)} + \sum_{(1-\delta)\lambda(t)\le k\le(1+\delta)\lambda(t)} + \sum_{k>(1+\delta)\lambda(t)} \\ &:= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{k<(1-\delta)\lambda(t)} P(S_k > x) P(N(t) = k) \\ &\le \sum_{k<(1-\delta)\lambda(t)} P(S_{(1-\delta)\lambda(t)} > x) P(N(t) = k). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (2.4.8) παίρνουμε το ακόλουθο

$$\begin{aligned} I_1 &\lesssim \sum_{k<(1-\delta)\lambda(t)} ((1-\delta)\lambda(t))\overline{F}(x) P(N(t) = k) \\ &\le ((1-\delta)\lambda(t))\overline{F}(x) \sum_{k<(1-\delta)\lambda(t)} P(N(t) = k) \\ &\le (1-\delta)\lambda(t)\overline{F}(x) P(N(t) < (1-\delta)\lambda(t)) \\ &= (1-\delta)\lambda(t)\overline{F}(x) P\left(N(t) - \lambda(t) < -\delta\lambda(t)\right). \end{aligned}$$

Από την υπόθεση N_1 βρίσκουμε

$$I_1 = o(\lambda(t)\overline{F}(x)) \tag{3.2.14}$$

καθώς $t \to \infty$.

Τώρα θα ασχοληθούμε με τον όρο I_2.

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{(1-\delta)\lambda(t)\le k\le(1+\delta)\lambda(t)} P(S_k > x) P(N_t = k) \\ &\ge P(S_{((1-\delta)\lambda(t))} > x) P\left(1 - \delta \le \frac{N(t)}{\lambda(t)} \le 1 + \delta\right) \end{aligned}$$

Η υπόθεση N_1 δίνει

$$I_2 \gtrsim P\left(S_{(1-\delta)\lambda(t)} > x\right) ,$$

από την σχέση (2.4.8) έχουμε

$$I_2 \gtrsim ((1-\delta)\lambda(t))\overline{F}(x) .$$

Όμοια

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{(1+\delta)\lambda(t) \leq k \leq (1+\delta)\lambda(t)} P(S_k > x)P(N_t = k) \\ &\leq P(S_{((1+\delta)\lambda(t))} > x)P\left(1-\delta \leq \frac{N(t)}{\lambda(t)} \leq 1+\delta\right) , \end{aligned}$$

Η υπόθεση N_1 δίνει

$$I_2 \lesssim P\left(S_{(1+\delta)\lambda(t)} > x\right) ,$$

από την σχέση (2.4.8) έχουμε

$$I_2 \lesssim ((1+\delta)\lambda(t))\overline{F}(x) .$$

Άρα, εάν $\delta \to 0$ παίρνουμε

$$I_2 \sim \lambda(t)\overline{F}(x) \tag{3.2.15}$$

καθώς $t \to \infty$.

Τέλος

$$I_3 = \sum_{k > (1+\delta)\lambda(t)} P(S_k > x)P(N(t) = k)$$

Εάν χρησιμοποιήσουμε την *Kesten* ανισότητα (δες *Chistyakov* (1964)) καθώς $F \in \mathcal{S}$ που λέει το ακόλουθο:

Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει μία σταθερά $K = K(\epsilon)$ τέτοια ώστε

$$P(S_n > x) \leq K(1+\epsilon)^n \overline{F}(x)$$

παίρνουμε το ακόλουθο

$$I_3 \leq \sum_{k>(1+\delta)\lambda(t)} K(1+\epsilon)^n \overline{F}(x) P(N(t)=k).$$

και από την υπόθεση N_2 έχουμε

$$I_3 \sim o\left(\lambda(t)\overline{F}(x)\right). \tag{3.2.16}$$

καθώς $t \to \infty$.

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.2.14), (3.2.15), (3.2.16) στην (3.2.13) παίρνουμε το ζητούμενο.

□

Τέλος, αποδεικνύουμε την ασυμπτωτική σχέση των ακριβών μεγάλων αποκλίσεων για τυχαία αθροίσματα των οποίων οι κατανομές προσθετέων ανήκουν στις κατανομές με κυριαρχημένες ουρές μη αρνητικών, ισόνομων και ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών.

Θεώρημα 4.
Έστω $\{X_k,\ k \geq 1\}$ είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών με κοινή κατανομή $F \in \mathcal{D}$ πεπερασμένη μέση τιμή μ, ανεξάρτητη από μία μη αρνητική ακέραια διαδικασία $\{N(t),\ t \geq 0\}$. Υποθέτουμε ότι η $N(t)$ ικανοποιεί την υπόθεση

$$A: \quad EN(t)I_{(N^p(t)>(1+\epsilon(t))\lambda(t))} = O(\lambda(t))$$

καθώς $t \to \infty$. Τότε για κάθε $q > 0$ και για κάθε $\gamma > 0$ ισχύει

$$\lambda(t)\overline{F}(x+(1+q)\lambda(t)\mu) \lesssim P(S_{N(t)} - (1+q)\mu\lambda(t) > x) \lesssim \lambda(t)\overline{F}(x) \tag{3.2.17}$$

ομοιόμορφα για $x \geq \gamma\lambda(t)$ καθώς $t \to \infty$.

Παρατήρηση 9.

Στην εργασία των Q. Tang, C. Su, T. Jiang και J. Zhang (2001) από το Θεώρημα 2.1 συνάγουμε ότι η ισχύς της υπόθεσης A συνεπάγεται την ισχύ της υπόθεσης N_1.

Απόδειξη.

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να γράψουμε την ακόλουθη ανάλυση για την πιθανότητα

$$P(S_{N(t)} - (1+q)\mu\lambda(t) > x) = \sum_{k=1}^{\infty} P(S_k - (1+q)\mu\lambda(t) > x)P(N(t) = k)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k<(1-\epsilon(t))\lambda(t)} + \sum_{(1-\epsilon(t))\lambda(t) \leq k \leq (1+\epsilon(t))\lambda(t)} + \sum_{k>(1+\epsilon(t))\lambda(t)} \\ &:= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

όπου $\epsilon(t) \to 0$ καθώς $t \to \infty$.

Για τον πρώτο όρο του αθροίσματος ισχύει η ανισότητα

$$I_1 \leq \sum_{k<(1-\epsilon(t))\lambda(t)} P(S_{(1-\epsilon(t))\lambda(t)} - (1+q)\mu\lambda(t) > x)P(N(t) = k).$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1 παίρνουμε τα εξής

$$\begin{aligned} I_1 &\lesssim \sum_{k<(1-\epsilon(t))\lambda(t)} ((1-\epsilon(t))\lambda(t))\overline{F}(x)P(N(t) = k) \\ &\leq ((1-\epsilon(t))\lambda(t))\overline{F}(x) \sum_{k<(1-\epsilon(t))\lambda(t)} P(N(t) = k) \\ &\leq (1-\epsilon(t))\lambda(t)\overline{F}(x)P(N(t) < (1-\epsilon(t))\lambda(t)) \\ &= (1-\epsilon(t))\lambda(t)\overline{F}(x)P\left(N(t) - \lambda(t) < -\epsilon(t)\lambda(t)\right). \end{aligned}$$

Σε συνδυασμό με υπόθεση N_1 βρίσκουμε τελικά ότι ισχύει

$$I_1 = o(\lambda(t)\overline{F}(x)) \tag{3.2.19}$$

καθώς $t \to \infty$.

Συνεχίζοντας στον δεύτερο όρο του αθροίσματος λαμβάνουμε τη σχέση

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{(1-\epsilon(t))\lambda(t) \le k \le (1+\epsilon(t))\lambda(t)} P(S_k - (1+q)\mu\lambda(t) > x) P(N(t) = k) \\ &= \sum_{(1-\epsilon(t))\lambda(t) \le k \le (1+\epsilon(t))\lambda(t)} P(S_k - (1+q)\mu\lambda(t) > x) P\left(1 - \epsilon(t) \le \frac{N(t)}{\lambda(t)} \le 1 + \epsilon(t)\right). \end{aligned}$$

Καθώς $\epsilon(t) \to 0$ συνάγουμε ότι $k \to \lambda(t)$. Σε συνδυασμό με το Θεώρημα 1 και την υπόθεση N_1 λαμβάνουμε ότι

$$\lambda(t)\overline{F}(x + (1+q)\mu\lambda(t)) \le \limsup_{t\to\infty} \sup_{x \ge \gamma\lambda(t)} I_2 \le \lambda(t)\overline{F}(x). \quad (3.2.20)$$

Τέλος, για το τελευταίο όρο του αθροίσματος με τη χρήση του Λήμματος 3 για $u > \gamma_F \ge 1$ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} I_3 &= \sum_{k > (1+\epsilon(t))\lambda(t)} P(S_k - (1+q)\mu\lambda(t) > x) P(N(t) = k) \\ &\le \sum_{k > (1+\epsilon(t))\lambda(t)} P(S_k > x) P(N(t) = k) \\ &\le \sum_{k > (1+\epsilon(t))\lambda(t)} \left(k\overline{F}\left(\frac{x}{u}\right) + \left(\frac{e\mu k}{x}\right)^u\right) P(N(t) = k) \\ &\le \sum_{k > (1+\epsilon(t))\lambda(t)} k\overline{F}\left(\frac{x}{u}\right) P(N(t) = k) + \sum_{k > (1+\epsilon(t))\lambda(t)} \left(\frac{e\mu k}{x}\right)^u P(N(t) = k) \\ &\le \sum_{k > (1+\epsilon(t))\lambda(t)} k\overline{F}\left(\frac{x}{u}\right) P(N(t) = k) + \sum_{k > (1+\epsilon(t))\lambda(t)} \left(\frac{e\mu k}{x}\right)^u P(N(t) = k). \end{aligned}$$

Συνεπώς έχουμε το ακόλουθο

$$\begin{aligned} \frac{I_3}{\lambda(t)\overline{F}(x)} &\le \frac{\overline{F}\left(\frac{x}{u}\right)}{\overline{F}(x)} E\left(\frac{N(t)}{\lambda(t)} I_{\left(\frac{N(t)}{\lambda(t)} - 1 \ge \epsilon(t)\right)}\right) \\ &+ \frac{(e\mu)^u}{x^u \lambda(t)\overline{F}(x)} E\left((N(t))^u \lambda(t) I_{\left(\frac{N(t)}{\lambda(t)} - 1 \ge \epsilon(t)\right)}\right) \end{aligned}$$

Καθώς $F \in \mathcal{D}$, από τα Λήμματα 2, 4 και την υπόθεση A συμπεραίνουμε ότι

$$I_3 = o(\lambda(t)\overline{F}(x)) \tag{3.2.21}$$

καθώς $t \to \infty$.
Αντικαθιστώντας τις (3.2.19), (3.2.20), (3.2.21) στη (3.2.18) παίρνουμε την σχέση (3.2.17).

$\square$

3.3 Ασυμπτωτική σχέση για τυχαία αθροίσματα σε πεπερασμένο χρόνο.

Οι ασυμπτωτικές σχέσεις της πιθανότητας της ουράς του τυχαίου αθροίσματος έχουν μελετηθεί και στην περίπτωση του πεπερασμένου χρόνου. Εργασίες, για πεπερασμένο χρόνο, είναι των P. Embrechts, C.M. Goldie και N.Veraverbeke (1979) και P. Embrechts και C.M. Goldie (1982) P. Embrechts, N.Veraverbeke (1982) και πρόσφατα για τη κλάση $\mathcal{S}^*$ των D. Denisov, S. Foss και S. Zachary (2010).

Ένα αποτέλεσμα ασυμπτωτικής σχέσης σε πεπερασμένο χρόνο είναι το ακόλουθο.

Θεώρημα 5.
Έστω $\{X_k,\ k \geq 1\}$ μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με κοινή κατανομή $F \in \mathcal{L}$ ανεξάρτητη από μία μη αρνητική ακέραια διαδικασία καταμέτρησης $\{N(t),\ t \geq 0\}$. Τότε για κάθε $T < \infty$

$$P(S_{N(T)} > x) \gtrsim \lambda(T)\overline{F}(x)$$

καθώς $x \to \infty$.
Επίσης εάν $F \in \mathcal{S}$ και ισχύει η υπόθεση

$$B: \quad E(1+\epsilon)^{N(T)} < \infty$$

για κάποια $\epsilon > 0$ τότε

$$P(S_{N(T)} > x) \sim \lambda(T)\overline{F}(x)$$

καθώς $x \to \infty$.

Απόδειξη.

Για κάθε σταθερό $m > 0$ λαμβάνουμε ότι

$$\begin{aligned} P(S_{N(T)} > x) &\geq P(S_{N(T)} > x, \quad N(T) \leq m) \\ &= \sum_{n=1}^{m} P(S_n > x) P(N(T) = n) \\ &= \sum_{n=1}^{m} \overline{F}^{*n}(x) P(N(T) = n)\,. \end{aligned}$$

Έτσι συμπεραίνουμε την ακόλουθη ανισότητα

$$\frac{P(S_{N(T)} > x)}{\lambda(T)\overline{F}(x)} \geq \frac{\sum_{n=1}^{m} \overline{F}^{*n}(x) P(N(T) = n)}{\lambda(T)\overline{F}(x)}\,.$$

Γνωρίζουμε από την εργασία των S.Foss, D Korshunov και S.Zachary (2009) (Πόρισμα 10), ότι για την κλάση $\mathcal{L}$ ισχύει

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F}^{*n}(x)}{\overline{F}(x)} \geq n\,,$$

και άρα συνάγουμε ότι ισχύει

$$\begin{aligned} \liminf_{x\to\infty} \frac{P(S_{N(T)} > x)}{\lambda(T)\overline{F}(x)} &\geq \liminf_{x\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{m} \overline{F}^{*n}(x) P(N(T) = n)}{\lambda(T)\overline{F}(x)} \\ &\geq \frac{\sum_{n=1}^{m} nP(N(T) = n)}{\lambda(T)} \to 1 \end{aligned} \tag{3.3.22}$$

καθώς $m \to \infty$.

Τώρα, μελετάμε την ασυμπτωτική σχέση όταν $F \in \mathcal{S}$. Από την $Kesten$ ανισότητα την Υπόθεση B και το Θεώρημα της κυριαρχημένης σύγκλισης λαμβάνουμε το ακόλουθο

$$\begin{aligned} P(S_{N(T)} > x) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n > x) P(N(T) = n) \\ \limsup_{x\to\infty} P(S_{N(T)} > x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \limsup_{x\to\infty} P(S_n > x) P(N(T) = n). \end{aligned}$$

Καθώς $F \in \mathcal{S}$, τότε μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ισχύει

$$
\begin{aligned}
\limsup_{x\to\infty} P(S_{N(T)} > x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} n\overline{F}(x)P(N(T)=n)\\
\limsup_{x\to\infty} P(S_{N(T)} > x) &\sim \overline{F}(x)\sum_{n=1}^{\infty} nP(N(T)=n)\\
\limsup_{x\to\infty} P(S_{N(T)} > x) &\sim \overline{F}(x)\lambda(T)\,,
\end{aligned}
$$

έτσι συμπεραίνουμε ότι

$$
\limsup_{x\to\infty} \frac{P(S_{N(T)} > x)}{\lambda(T)\overline{F}(x)} = 1\,. \tag{3.3.23}
$$

□

Παρατήρηση 10.

Στην εργασία των K. W. Ng, Q. Tang, J. Yan και H. Yang (2003) στο Θεώρημα 2.5 αναφέρεται ότι η υπόθεση B ικανοποιείται από την μη αρνητική ακέραια στοχαστική διαδικασία καταμέτρησης homogeneous Poisson.

Τέλος, δίνουμε συνοπτικούς πίνακες με τα αποτελέσματα για τις ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές

Ασυμπτωτικές σχέσεις για μη τυχαία αθροίσματα

ΚΛΑΣΗ	**ΜΗ ΤΥΧΑΙΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ**
ΚΛΑΣΗ $\mathcal{D}$	$n\overline{F}(x+(1+q)n\mu) \lesssim P\left(S_n - n(1+q)\mu > x\right) \lesssim n\overline{F}(x),$

Ασυμπτωτικές σχέσεις για τυχαία αθροίσματα

ΚΛΑΣΗ	**ΤΥΧΑΙΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ**
ΚΛΑΣΗ $\mathcal{L}$	$P(S_{N(t)} - \mu\lambda(t) > x) \gtrsim \lambda(t)\overline{F}(x),$
ΚΛΑΣΗ $\mathcal{S}$	$P(S_{N(T)} > x) \sim \lambda(T)\overline{F}(x)$
ΚΛΑΣΗ $\mathcal{S}^*$	$P(S_{N(t)} > x) \sim \lambda(t)\overline{F}(x)$
ΚΛΑΣΗ $\mathcal{D}$	$\lambda(t)\overline{F}(x+(1+q)\mu) \lesssim P(S_{N(t)} - (1+q)\mu\lambda(t) > x) \lesssim \lambda(t)\overline{F}(x),$

Κεφάλαιο 4

Οι ακριβείς μεγάλες αποκλίσεις σε εξαρτημένες τυχαίες μεταβλητές

Στο κεφάλαιο αυτό ξεκινώντας, κάνουμε μία ιστορική αναδρομή των ασυμπτωτικών σχέσεων των μεγάλων αποκλίσεων για εξαρτημένους προσθετέους.

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα για τις ασυμπτωτικές σχέσεις των μεγάλων αποκλίσεων σε ένα συγκεκριμένο είδος εξάρτησης που ονομάζεται ‘ Ασθενώς αρνητικά εξαρτημένες ’ τυχαίες μεταβλητές.

4.1 Εισαγωγή

Τα τελευταία χρόνια η έρευνα πάνω στις ακριβείς μεγάλες αποκλίσεις έχει επεκταθεί στη μελέτη διάφορων μορφών εξάρτησης μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών.

Το πρώτο είδος εξάρτησης μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών στο οποίο μελετήθηκαν οι ασυμπτωτικές σχέσεις των μεγάλων αποκλίσεων είναι το είδος που περιγράφεται από τις 'Αρνητικά συσχετισμένες τυχαίες μεταβλητές '. Περισσότερες πληροφορίες για τις αρνητικά συσχετισμένες τυχαίες μεταβλητές μπορούμε να βρούμε στις εργασίες των K. Joag-Dev και F. Proshan (1983), P. Matula (1992), και Q.M. Shao (2000). Παρακάτω δίνουμε τον ορισμό.

Ορισμός 4.
Μία ακολουθία τ.μ. $\{X_k,\, k \geq 1\}$ λέγεται αρνητικά συσχετισμένη (ΑΣ) εάν, για οποιαδήποτε μη κενά ξένα υποσύνολα A και B των $\{1, 2, ..., m\}$, $m \geq 2$ και κάθε ζεύγος μη φθίνουσων συναρτήσεων f και g, ισχύει η ανισότητα

$$Cov\,(f(X_i : i \in A), g(X_j : j \in B)) \leq 0$$

εφόσον υπάρχουν οι δύο πρώτες ροπές των $f(X_i)$ και $g(X_j)$.

Στην εργασία των K. Joag-Dev και F. Proshan (1983) μπορούμε να βρούμε ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. Έστω $A_1, ..., A_k$ είναι ξένα υποσύνολα των $\{1, 2..., m\}$ και $f_1, ..., f_k$ είναι αύξουσες θετικές συναρτήσεις, τότε ισχύει

$$E\prod_{i=1}^{n}(f_i(x_j,\, j \in A_j)) \leq \prod_{i=1}^{n} Ef_i\,(x_j,\, j \in A)$$

2. Ένα υποσύνολο δύο ή περισσότερων ΑΣ τυχαίων μεταβλητών είναι επίσης ΑΣ.

3. Ένα σύνολο ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών είναι ΑΣ.

4. Αύξουσες συναρτήσεις ορισμένες σε ξένα υποσύνολα από ένα σύνολο ΑΣ τυχαίων μεταβλητών είναι ΑΣ.

Στην εργασία του Yan Liu (2007) έχουν δημοσιευτεί τα Θεωρήματα για τις ακριβείς μεγάλες αποκλίσεις των ΑΣ τυχαίων μεταβλητών με κατανομές που έχουν συνεπώς μεταβαλλόμενες ουρές των οποίων οι αποδείξεις βασίζονται στις παραπάνω ιδιότητες. Τα αποτελέσματα αυτά είναι τα ακόλουθα:

Έστω $\{X_k,\, k \geq 1\}$ μία ακολουθία από μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές ΑΣ με κοινή κατανομή $F \in \mathcal{C}$ και πεπερασμένη μέση τιμή μ. Τότε, για κάθε σταθερό $\gamma > 0$ ισχύει

$$P\left(S_n > x\right) \sim n\overline{F}(x),$$

ομοιόμορφα, για $x \geq \gamma n$.

Αντίστοιχα, για τυχαία αθροίσματα έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα:

Έστω $\{X_k,\, k \geq 1\}$ μία ακολουθία από μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές ΑΣ με κοινή κατανομή $F \in \mathcal{C}$ και πεπερασμένη μέση τιμή μ. Υποθέτουμε ότι η $\{X_k,\, k \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητη από μία μη αρνητική ακέραια διαδικασία $\{N(t),\, t \geq 0\}$.
Τότε, κάτω από την υπόθεση

$$A: \quad EN(t)I_{(N(t)>(1+\delta)\lambda(t))} = O(\lambda(t))$$

και για κάθε σταθερό $\gamma > 0$, ισχύει

$$P\left(S_{N(t)} > x\right) \sim \lambda(t)\overline{F}(x),$$

ομοιόμορφα για $x \geq \gamma\lambda(t)$.

Αργότερα μελετήθηκε ένα άλλο είδος εξάρτησης, που περιέχει το είδος ΑΣ τυχαίων μεταβλητών, το οποίο ονομάζεται 'Αρνητικά εξαρτημένες τυχαίες μεταβλητές '. Περισσότερες πληροφορίες για αυτό το είδος εξάρτησης βρίσκουμε στις εργασίες των N. Ebrahimi, M. Ghosh (1981) και H.W. Block, T.H. Savits, M. Shaked (1982). Παρακάτω δίνουμε τον ορισμό.

Ορισμός 5.

Καλούμε μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_k,\, k \geq 1\}$ Αρνητικά Εξαρτημένες (ΑΕ) εάν συγχρόνως ισχύουν για κάθε $n = 1, 2, ...$ και όλα τα $x_1, x_2, ..., x_n$.

$$P(X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n) \leq \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leq x_k) \tag{4.1.1}$$

και

$$P(X_1 > x_1, ..., X_n > x_n) \leq \prod_{k=1}^{n} P(X_k > x_k) \tag{4.1.2}$$

Παραδείγματα ΑΕ τυχαίων μεταβλητών.

Στην εργασία των H.W. Block, T.H. Savits, M. Shaked (1982) βρίσκουμε τα παρακάτω παραδείγματα ΑΕ τυχαίων μεταβλητών.

1. Πολυωνυμική κατανομή: Έστω ότι το τυχαίο διάνυσμα $(X_1,\, X_2,\, ...,\, X_n)$ το οποίο έχει κοινή συνάρτηση κατανομής την με παραμέτρους $(N,\, p_1,\, p_2\, ..., p_n)$.

$$P\left(X_1 = x_1,\, X_2 = x_2,\, ...\, X_n = x_n\right) = \frac{N!}{x_1!...x_n!(N - \sum_{i=1}^{n} x_i)} (\prod_{i=1}^{n} p_i^{x_i})(1 - \sum_{i=1}^{n} p_i)^{N - \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

   όπου $x_i > 0$, $\sum_{i-1}^{n} x_i \leq N$, $p_i \geq 0$ και $0 < \sum_{i=1}^{n} p_i < 1$.
   Τότε η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_k,\, k \geq 1\}$ είναι ΑΕ.

2. *Dirichlet* κατανομή: Έστω ότι το τυχαίο διάνυσμα $(X_1,\, X_2,\, ...,\, X_n)$ το οποίο έχει συνάρτηση πυκνότητας την

$$f(x_1,\, ...,\, x_n) = \frac{\Gamma(\sum_{j=0}^{n} p_j)}{\prod_{j=0}^{n} \Gamma(p_j)} (1 - \sum_{j=1}^{n} x_i)^{p_0 - 1} \prod_{j=1}^{n} x_j^{p_{j-1}}$$

   όπου $x_i \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} x_i \geq 1$ και το διάνυσμα παραμέτρων $(p_1, p_2, ..., p_n)$ ικανοποιεί την $p_j \geq 1$, $j = 1, 2, ...n$.
   Τότε η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_k,\, k \geq 1\}$ είναι ΑΕ.

Στη συνέχεια, αναφέρουμε τα αποτελέσματα που έχουν δημοσιευθεί για τις ακριβείς μεγάλες αποκλίσεις στις αρνητικά εξαρτημένες τυχαίες μεταβλητές. Το πρώτο αποτέλεσμα βρίσκεται στην εργασία του Q. Tang (2006) και είναι το ακόλουθο:

Έστω $\{X_k,\, k \geq 1\}$ μία ακολουθία ΑΕ τυχαίων μεταβλητών με κοινή συνάρτηση κατανομής $F \in \mathcal{C}$ και μέση τιμή 0 που ικανοποιεί την υπόθεση

$$xF(-x) = o\left(\overline{F}(x)\right)$$

καθώς $x \to \infty$.
Τότε για κάθε $\gamma > 0$, ισχύει

$$P\left(S_n > x\right) \sim n\overline{F}(x),$$

ομοιόμορφα για $x \geq \gamma n$.

Αντίστοιχα, για τις μεγάλες αποκλίσεις σε τυχαία αθροίσματα υπάρχει αντίστοιχο αποτέλεσμα στην εργασία των Y. Chen και W. Zhang (2007) που είναι το επόμενο:

Έστω $\{X_k,\, k \geq 1\}$ είναι μία ακολουθία ΑΕ τυχαίων μεταβλητών με κοινή συνάρτηση κατανομής $F \in \mathcal{C}$ και μέση τιμή $\mu < 0$ που ικανοποιεί την υπόθεση $xF(-x) = o(\overline{F}(x))$ που είναι ανεξάρτητη από τη μη αρνητική ακέραια διαδικασία καταμέτρησης $\{N(\lambda),\, t \geq 0\}$. Υποθέτουμε ότι η $N(t)$ ικανοποιεί την υπόθεση

$$N_1: \quad \frac{N(t)}{\lambda(t)} \xrightarrow{P} 1,$$

καθώς $t \to \infty$, και $E|X_1|^r < \infty$ για κάποια $r > 1$. Τότε για κάθε $\gamma > |\mu|$, ισχύει

$$P\left(S_{N(t)} - \mu\lambda(t) > x\right) \sim \lambda(t)\overline{F}(x),$$

ομοιόμορφα για $x \geq \gamma\lambda(t)$.

Τελευταία, έχουμε μία επέκταση του είδους ΑΕ τυχαίων μεταβλητών στην εργασία της Li Liu (2009), όπου εισάγεται το είδος των ‘ Ασθενώς αρνητικά εξαρτημένων ’ τυχαίων μεταβλητών.

Ορισμός 6.

Καλούμε μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_k,\, k \geq 1\}$ Ασθενείς Αρνητικά Εξαρτημένες (ΑΑΕ) όταν συγχρόνως ισχύουν για κάθε $n = 1, 2, ...$ και όλα τα $x_1, x_2, ..., x_n$.

$$P(X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n) \leq M \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leq x_k)$$

και

$$P(X_1 > x_1, ..., X_n > x_n) \leq M \prod_{k=1}^{n} P(X_k > x_k)$$

για κάποια $M > 0$.

Εάν Θέσουμε $M = 1$ στον παραπάνω ορισμό παρατηρούμε ότι παίρνουμε τις ΑΕ τυχαίες μεταβλητές.

Παράδειγμα ΑΑΕ τυχαίων μεταβλητών.

Έστω $\{X_i,\, i = 1, 2\}$ και $\{X_i,\, i \geq 3\}$είναι δύο ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών ανεξάρτητες μεταξύ τους. Η τυχαία μεταβλητή X_1 παίρνει δυνατές τιμές τέτοιες ώστε $x_{1_1} \leq x_{1_2} \leq ... \leq x_{1_N}$. Η ακολουθία $\{X_i,\, i \geq 3\}$ αποτελείται από ανεξάρτητες μεταξύ τους τυχαίες μεταβλητές. Τότε, οι τυχαίες μεταβλητές $\{X_i,\, i \geq 1\}$ είναι ΑΑΕ.

Πράγματι, εάν για κάθε x_1 και x_2 ισχύει

$P(X_1 \leq x_1)P(X_2 \leq x_2) = 0$ ή $P(X_1 > x_1)P(X_2 > x_2) = 0$

τότε οι $\{X_i,\, i \geq 1\}$ είναι ΑΑΕ.

Εάν για κάθε x_1 και x_2 ισχύει

$P(X_1 \leq x_1)P(X_2 \leq x_2) \neq 0$ και $P(X_1 > x_1)P(X_2 > x_2) \neq 0$

παίρνοντας $M = 1/\min\{P(X_1 = x_{1_1}), \ldots, P(X_1 = x_{1_N})\}$
τότε οι $\{X_i, \, i \geq 1\}$ είναι ΑΑΕ.

Για τις ΑΑΕ τυχαίες μεταβλητές ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. Εάν $\{X_k, \, k \geq 1\}$ είναι μη αρνητικές ΕΑΕ τότε για κάθε $n \geq 1$

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_k\right) \leq M \prod_{i=1}^{n} E\left(X_k\right).$$

2. Έστω $\{X_k, \, k \geq 1\}$ είναι ΕΑΕ και $\{f_k, \, k \geq 1\}$ είναι αύξουσες ή φθίνουσες συναρτήσεις τότε, $\{f(X_k), \, k \geq 1\}$ είναι επίσης ΕΑΕ.

Στην ίδια εργασία υπάρχει το παρακάτω αποτέλεσμα για τις ακριβείς μεγάλες αποκλίσεις των ΑΑΕ τυχαίων μεταβλητών:

Έστω $\{X_k, \, k \geq 1\}$ είναι ΑΑΕ με κοινή κατανομή $F \in \mathcal{C}$ και μέση τιμή 0 που ικανοποιεί τη

$$xF(-x) = o\left(\overline{F}(x)\right)$$

καθώς $x \to \infty$.
Τότε, για κάθε σταθερό $\gamma > 0$, ισχύει

$$P\left(S_n > x\right) \sim n\overline{F}(x),$$

ομοιόμορφα για $x \geq \gamma n$.

Άλλες εργασίες στις ακριβείς μεγάλες αποκλίσεις με εφαρμογές σε στοχαστικά μοντέλα εξαρτημένων τυχαίων μεταβλητών είναι των Y. B. Wang, K. Y. Wang και D. Y. Cheng (2006), S. Wang και W. Wang (2008), και X. Shen και Z. Lin (2008).

4.2 Τα αποτελέσματα

4.2.1 Προκαταρκτικά

Το επόμενο Λήμμα είναι χρήσιμο για την απόδειξη των αποτελεσμάτων και το βρίσκουμε στην εργασία των Y. Chen, K. C. Yuen και K. W. Ng (2010) (Λήμμα 2.3)

Λήμμα 7.
Έστω $\{X_k,\ k \geq 1\}$ είναι μία ακολουθία ΕΑΕ ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με κοινή κατανομή F και πεπερασμένη μέση τιμή μ. Τότε για όλα τα $u > 0$ και για κάποια $C = C(u) > 0$ ισχύει.

$$P(S_n > x) \leq n\overline{F}\,(xu) + C\left(\frac{n}{x}\right)^{1/u},$$

για όλα τα $n = 1, 2, ...$ και $x > 0$.

4.2.2 Μη τυχαία αθροίσματα S_n

Πρώτα βρίσκουμε το κάτω φράγμα της ασυμπτωτικής σχέσης των ακριβών μεγάλων αποκλίσεων για κατανομές με μακριές ουρές μη αρνητικών ΑΑΕ τυχαίων μεταβλητών. Η απόδειξη διαφέρει από την περίπτωση των ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών στα ακόλουθα σημεία:
α)Δεν χρησιμοποιούμε τον ασθενή νόμο των μεγάλων αριθμών.
β)Δεν χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες της ανεξαρτησίας των τυχαίων μεταβλητών.

Θεώρημα 6.
Έστω $\{X_k,\ k \geq 1\}$ είναι μία ακολουθία μη αρνητικών ΑΑΕ τυχαίων μεταβλητών με κοινή κατανομή F και πεπερασμένη μέση τιμή $\mu > 0$. Τότε για κάθε $\gamma > 0$

$$P\left(S_n - n\mu > x\right) \gtrsim n\overline{F}(x + n\mu), \tag{4.2.3}$$

ισχύει ομοιόμορφα για $x \geq \gamma n$,
και εάν $F \in \mathcal{L}$ *τότε ισχύει*

$$P\left(S_n - n\mu > x\right) \gtrsim n\overline{F}(x), \tag{4.2.4}$$

καθώς $n \to \infty$, *ομοιόμορφα για* $x \geq h^{-1}(n\mu)$.

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} P(S_n - n\mu > x) &\geq P\left(S_n - n\mu > x, \quad \max_{1\leq i\leq n} X_i > x + n\mu\right) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} P\left(S_n > x + n\mu, \quad X_i > x + n\mu\right) \\ &- \sum_{1\leq k<l\leq n} P\left(S_n - n\mu > x, \quad X_k > x + n\mu,\ X_l > x + n\mu\right) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} P\left(X_i > x + n\mu\right) - \left(nM\overline{F}(x + n\mu)\right)^2 \\ &\geq n\overline{F}(x + n\mu)\left(1 - nM^2\overline{F}(x)\right). \end{aligned}$$

Όπου παίρνουμε

$$\frac{P\left(S_n - n\mu > x\right)}{n\overline{F}(x + n\mu)} \geq \left(1 - M^2 n\overline{F}(x)\right)$$

Γνωρίζουμε ότι για μία ακολουθία $\{X_k,\, k \geq 1\}$ μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών με κατανομή F και πεπερασμένη μέση τιμή ισχύει

$$n\overline{F}(x) \to 0$$

ομοιόμορφα για $x \geq \gamma n$ καθώς $n \to \infty$. έτσι παίρνουμε

$$P\left(S_n - n\mu > x\right) \gtrsim n\overline{F}(x + n\mu) \tag{4.2.5}$$

καθώς $n \to \infty$.
Αφού $F \in \mathcal{L}$ τότε από το Λήμμα 5 παίρνουμε ότι υπάρχει μία συνάρτηση

$0 < h(x) < x$ γνησίως αύξουσα τέτοια ώστε $h(x) \to \infty$ καθώς $x \to \infty$ και να ισχύει

$$\overline{F}(x + h(x)) \sim \overline{F}(x)$$

καθώς $x \to \infty$.

Από την $x \geq h^{-1}(n\mu)$ παίρνουμε

$$h(x) \geq h(h^{-1}(n\mu)) = n\mu$$

και άρα ισχύει

$$\overline{F}(x + n\mu) \geq \overline{F}(x + h(x)) \sim \overline{F}(x)$$

καθώς $n \to \infty$, ομοιόμορφα για $x \geq h^{-1}(n\mu)$.

Επομένως ισχύει η σχέση (4.2.4).

□

Στη συνέχεια, μελετάμε την ασυμπτωτική σχέση των κεντροποιημένων ακριβών μεγάλων αποκλίσεων στην περιοχή των κατανομών με κυριαρχημένες ουρές για μη αρνητικές ΑΑΕ τυχαίες μεταβλητές.

Θεώρημα 7.

Έστω $\{X_k,\ k \geq 1\}$ μία ακολουθία ΑΑΕ και ισόνομων μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών με κοινή κατανομή $F \in \mathcal{D}$ και πεπερασμένη μέση τιμή μ. Τότε για κάθε $q > 0$ και για κάθε $\gamma > 0$ ισχύει

$$n\overline{F}(x + (1+q)n\mu) \lesssim P\left(S_n - n(1+q)\mu > x\right) \lesssim n\overline{F}(x), \qquad (4.2.6)$$

ομοιόμορφα για $x \geq \gamma n$.

Απόδειξη.

Πρώτα θα αποδείξουμε το κάτω φράγμα της ασυμπτωτικής σχέσης.

Από την ανισότητα Bonferroni συνάγουμε τα ακόλουθα

$$P(S_n - n(1+q)\mu > x) \geq P\left(S_n - n(1+q)\mu > x, \quad \bigcup_{i=1}^{n} X_i > x + (1+q)n\mu\right)$$

$$\begin{aligned}
\geq &\ \sum_{i=1}^{n} P\left(S_n - n(1+q)\mu > x, \quad X_i > x + (1+q)n\mu\right) \\
- &\ \sum_{1 \leq k < l \leq n} P\left(S_n - n(1+q)\mu > x, \quad X_k > x + (1+q)n\mu,\, X_l > x + (1+q)n\mu\right) \\
\geq &\ \sum_{i=1}^{n} P\left(X_i > x + (1+q)n\mu\right) - \left(Mn\overline{F}(x + (1+q)n\mu)\right)^2 \\
\geq &\ n\overline{F}(x + (1+q)n\mu)\left(1 - M^2 n\overline{F}(x)\right).
\end{aligned}$$

Έτσι μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ισχύει η ανισότητα

$$\frac{P\left(S_n - n\mu > x\right)}{n\overline{F}(x + (1+q)n\mu)} \quad \geq \quad 1 - M^2 n\overline{F}(x).$$

Γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$n\overline{F}(x) \to 0$$

ομοιόμορφα για $x \geq \gamma n$ καθώς $n \to \infty$.
Σε συνδυασμό με το παραπάνω έχουμε

$$P\left(S_n - (1+q)n\mu > x\right) \gtrsim n\overline{F}(x + (1+q)n\mu) \tag{4.2.7}$$

καθώς $n \to \infty$.
Θα αποδείξουμε το άνω φράγμα της ασυμπτωτικής σχέσης.

Ορίζουμε ως $\alpha = \max\{-\log(n\overline{F}(x), 1\}$. Τότε $a \to \infty$ ομοιόμορφα για $x \geq \gamma n$ καθώς $n \to \infty$.
Συνεχίζοντας, ορίζουμε την ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών και του

αντίστοιχου αθροίσματος:

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}_k &:= X_k I_{\{X_k \le \frac{x}{\alpha^2}\}} + x I_{\{X_k > \frac{x}{\alpha^2}\}} \\
\widetilde{S}_n &:= \sum_{i=1}^{n} \widetilde{X}_k. \\
\widetilde{x} &:= x + n(1+q)\mu
\end{aligned}$$

Καθώς $a^2 > 1$, τότε η $\widetilde{X}_k$ είναι μία αύξουσα συνάρτηση των X_k. Επιπλέον, από την ιδιότητα 2 των ΑΑΕ οι τ.μ. $\widetilde{X}_k$ είναι ΑΑΕ .
Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα 1 των ΑΑΕ για κάποιο $h > 0$, που θα οριστεί παρακάτω, και χρησιμοποιώντας την ανισότητα $\ln(x+1) \le x$ συνάγουμε τα ακόλουθα

$$\begin{aligned}
\frac{P(\tilde{S}_n > \widetilde{x})}{n\overline{F}(x)} &\le M\frac{e^{-h\tilde{x}}E(e^{h\tilde{S}_n})}{n\overline{F}(x)} \\
&\le Me^{-h\tilde{x}+\alpha}\left(\int_0^{+\infty}\left(e^{ht}-1\right)d\widetilde{F}(t)+1\right)^n \\
&\le Me^{-h\tilde{x}+\alpha}\left(\exp\left\{\ln\left\{\int_0^{+\infty}\left(e^{ht}-1\right)d\widetilde{F}(t)+1\right\}\right\}\right)^n \\
&\le M\exp\left\{n\int_0^{+\infty}\left(e^{ht}-1\right)d\widetilde{F}(t)-h\widetilde{x}+a\right\}.
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια, χωρίζουμε το ολοκλήρωμα ως εξής

$$\int_0^{+\infty}\left(e^{ht}-1\right)d\widetilde{F}(t) \le \int_0^{\frac{x}{\alpha^2}}\left(e^{ht}-1\right)dF(t) + e^{hx}\overline{F}(\frac{x}{\alpha^2}).$$

Από την ανισότητα $e^u - 1 \le ue^u$ συνάγουμε τα παρακάτω

$$\int_0^{+\infty}\left(e^{ht}-1\right)d\widetilde{F}(t) \le \int_0^{\frac{x}{a^2}} hte^{ht}dF(t) + e^{hx}\overline{F}(\frac{x}{a^2}) \le$$

$$he^{h\left(\frac{x}{\alpha^2}\right)}\int_0^{\frac{x}{\alpha^2}} tdF(t) + e^{hx}\overline{F}(\frac{x}{\alpha^2}) \le h\mu e^{h\left(\frac{x}{\alpha^2}\right)} + e^{hx}\overline{F}(\frac{x}{\alpha^2}).$$

Χρησιμοποιώντας τα Λήμματα 1 και 4 για $\rho \geq \gamma_F$ λαμβάνουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\left(e^{ht}-1\right)d\widetilde{F}(t) &\leq h\mu e^{h\left(\frac{x}{\alpha^2}\right)}+Be^{hx}\alpha^{2\rho}\overline{F}(x)\\ &\leq h\mu e^{h\left(\frac{x}{\alpha^2}\right)}+Be^{hx}e^{2\rho\log\alpha}\frac{e^{-\alpha}}{n}.\end{aligned}$$

Άρα συμπεραίνουμε την ανισότητα

$$\frac{P(\widetilde{S}_n>\widetilde{x})}{n\overline{F}(x)}\leq$$

$$M\exp\left\{nh\mu e^{h\left(\frac{x}{\alpha^2}\right)}+Be^{hx-\alpha+2\rho\log\alpha}-h\widetilde{x}+\alpha\right\}.$$

Θέτοντας στην παραπάνω σχέση

$$h=\frac{\alpha-2\rho\log\alpha}{x}$$

Καθώς το $x\geq n\mu$ τότε λαμβάνουμε τα παρακάτω

$$\begin{aligned}&\frac{P(\widetilde{S}_n>\widetilde{x})}{n\overline{F}(x)}\leq\\ \leq\;& C\exp\left\{nh\mu e^{\alpha^{-1}}-hx-hn(1+q)\mu+\alpha\right\}\\ \leq\;& C\exp\left\{\frac{n\mu\alpha}{x}(e^{\alpha^{-1}}-(1+q))-\alpha+2\rho\log\alpha+\alpha\right\}\\ \leq\;& C\exp\left\{\alpha(e^{\alpha^{-1}}-(1+q))+2\rho\log\alpha\right\}\\ \leq\;& C\exp\left\{a\left(\left(e^{\alpha^{-1}}-(1+q)\right)+\frac{2\rho\log\alpha}{\alpha}\right)\right\}\to 0 \qquad (4.2.8)\end{aligned}$$

καθώς $n\to\infty$ ομοιόμορφα για $x\geq\gamma n$ και C είναι μια θετική σταθερά. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι μπορούμε να γράψουμε την παρακάτω σχέση

$$\begin{aligned}P(S_n-n(1+q)\mu>x) &= P\left(S_n-n(1+q)\mu>x,\quad \max_{1\leq i\leq n}X_i>x\right)\\ &+ P\left(S_n-n(1+q)\mu>x,\quad \max_{1\leq i\leq n}X_i\leq x\right)\\ &\leq n\overline{F}(x)+P(\widetilde{S}_n>\widetilde{x}) \qquad (4.2.9)\end{aligned}$$

Έτσι αντικαθιστώντας την (4.2.8) στην (4.2.9) συνάγουμε ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{x\geq\gamma n} \frac{P\left(S_n - n(1+q)\mu > x\right)}{n\overline{F}(x)} \leq$$

$$1 + \limsup_{n\to\infty} \sup_{x\geq\gamma n} \frac{P\left(\widetilde{S}_n - (1+q)n\mu > x\right)}{n\overline{F}(x)} = 1$$

καθώς $n \to \infty$.

□

Τέλος, μελετάμε την ασυμπτωτική σχέση των κεντροποιημένων ακριβών μεγάλων αποκλίσεων στην περιοχή της τομής των κατανομών με κυριαρχημένες ουρές με κατανομές με μακριές ουρές για μη αρνητικές ΑΑΕ τυχαίες μεταβλητές.

Θεώρημα 8.

Έστω $\{X_k,\ k \geq 1\}$ μία ακολουθία ΑΑΕ και ισόνομων μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών με κοινή κατανομή $F \in \mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ και πεπερασμένη μέση τιμή μ. Τότε ισχύει

$$P\left(S_n - n\mu > x\right) \sim n\overline{F}(x) \tag{4.2.10}$$

καθώς $n \to \infty$, ομοιόμορφα για $x \geq h^{-1}(n\mu)$.

Απόδειξη.

Αφού $F \in \mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ τότε από το Λήμμα 5 παίρνουμε ότι υπάρχει μία συνάρτηση $0 < h(x)$ γνησίως αύξουσα τέτοια ώστε $h(x) \to \infty$ καθώς $x \to \infty$ και να ισχύει

$$\overline{F}(x \pm h(x)) \sim \overline{F}(x)$$

καθώς $x \to \infty$.

Από την σχέση (4.2.6) έχουμε τα ακόλουθα

$$\begin{aligned} n\overline{F}(x+(1+q)n\mu) &\lesssim P\left(S_n - n(1+q)\mu > x\right) \lesssim n\overline{F}(x) \\ n\overline{F}(x+(1+q)n\mu) &\lesssim P\left(S_n - n\mu > x + qn\mu\right) \lesssim n\overline{F}(x) \\ n\overline{F}(x+n\mu) &\lesssim P\left(S_n - n\mu > x\right) \lesssim n\overline{F}(x - qn\mu) \end{aligned}$$

Από την $x \geq h^{-1}(n\mu)$ παίρνουμε

$$\overline{F}(x) \sim \overline{F}(x+h(x)) \leq \overline{F}(x+n\mu)$$

και

$$\overline{F}(x-qn\mu) \leq \overline{F}(x-h(x)) \sim \overline{F}(x)$$

καθώς $n \to \infty$, ομοιόμορφα για $x \geq h^{-1}(n\mu)$.

□

4.2.3 Τυχαία αθροίσματα $S_{N(t)}$

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε την ασυμπτωτική σχέση των μεγάλων αποκλίσεων, όταν η διαδικασία καταμέτρησης των συμβάντων είναι μία στοχαστική διαδικασία.

Ξεκινώντας, θα βρούμε το κάτω φράγμα της ουράς του τυχαίου αθροίσματος για μη αρνητικές και ισόνομες ΑΑΕ τυχαίες με κατανομές που έχουν μακριές ουρές χρησιμοποιώντας ως συνθήκη το να ικανοποιεί η διαδικασία καταμέτρησης τον ασθενή νόμο των μεγάλων αριθμών

Θεώρημα 9.
Έστω $\{X_k,\ k \geq 1\}$ είναι μία ακολουθία μη αρνητικών ΑΑΕ τυχαίων μεταβλητών με κοινή κατανομή F και πεπερασμένη μέση τιμή $\mu > 0$ ανεξάρτητη από μία μη αρνητική και ακέραια διαδικασία $\{N(t),\ t \geq 0\}$. Υποθέτουμε ότι η $N(t)$ ικανοποιεί την υπόθεση

$$N_1: \quad \frac{N(t)}{\lambda(t)} \xrightarrow{P} 1,$$

καθώς $t \to \infty$. *Τότε για κάθε* $\gamma > 0$

$$P(S_{N(t)} - \mu\lambda(t) > x) \gtrsim \lambda(t)\overline{F}(x + \mu\lambda(t)) \tag{4.2.11}$$

ισχύει ομοιόμορφα για $x \geq \gamma\lambda(t)$ *καθώς* $t \to \infty$,
και εάν $F \in \mathcal{L}$ *τότε ισχύει*

$$P\left(S_{N(t)} - \mu\lambda(t) > x\right) \gtrsim \lambda(t)\overline{F}(x) \tag{4.2.12}$$

καθώς $t \to \infty$, *ομοιόμορφα για* $x \geq h^{-1}(\mu\lambda(t))$.

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} P(S_{N(t)} - \mu\lambda(t) > x) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(S_k - \mu\lambda(t) > x)P(N(t) = k) \\ &> \sum_{(1-\delta)\lambda(t) \leq k \leq (1+\delta)\lambda(t)} \end{aligned}$$

όπου $0 < \delta < 1$ είναι τυχαίο.

$$\begin{aligned} &\sum_{((1-\delta)\lambda(t)) \leq k \leq (1+\delta)\lambda(t)} P(S_k - \mu\lambda(t) > x)P(N(t) = k) \\ \geq\ & P(S_{((1-\delta)\lambda(t))} - \mu\lambda(t) > x)P\left(1 - \delta \leq \frac{N(t)}{\lambda(t)} \leq 1 + \delta\right), \end{aligned}$$

Η υπόθεση N_1 και από Θεώρημα 6 έχουμε

$$\begin{aligned} &P(S_{(1-\delta)\lambda(t)} - (1-\delta)\,\lambda(t)\,\mu > x + \mu\lambda(t) - (1-\delta)\,\lambda(t)\,\mu) \\ \gtrsim\ & (1-\delta)\lambda(t)\overline{F}(x + \mu\lambda(t)). \end{aligned}$$

Άρα

$$\lim_{\delta \to 0} \liminf_{t \to \infty} \sup_{x \geq \gamma\lambda(t)} \frac{P(S_{N(t)} - \mu\lambda(t) > x)}{\lambda(t)\overline{F}(x + \mu\lambda(t))} \geq 1. \tag{4.2.13}$$

Από την $x \geq h^{-1}(\mu\lambda(t))$ παίρνουμε

$$h(x) \geq h(h^{-1}(\mu\lambda(t))) \geq \mu\lambda(t)$$

και άρα ισχύει

$$\overline{F}(x+\mu\lambda(t)) \geq \overline{F}(x+h(x)) \sim \overline{F}(x)$$

καθώς $t \to \infty$, ομοιόμορφα για $x \geq f(\mu\lambda(t))$ και άρα ισχύει η σχέση (4.2.12). $\square$

Παραπέρα, μελετάμε την ασυμπτωτική σχέση των κεντροποιημένων μεγάλων αποκλίσεων των τυχαίων αθροισμάτων με κατανομές προσθετέων που ανήκουν στις κατανομές με κυριαρχημένες ουρές για μη αρνητικές Α-ΑΕ τυχαίες μεταβλητές.

Θεώρημα 10.
Έστω $\{X_k,\ k \geq 1\}$ είναι μία ακολουθία ΑΑΕ και ισόνομων μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών με κοινή κατανομή $F \in \mathcal{D}$ πεπερασμένη μέση τιμή μ, ανεξάρτητη από μία μη αρνητική ακέραια διαδικασία $\{N(t),\ t \geq 0\}$. Υποθέτουμε ότι η $N(t)$ ικανοποιεί την υπόθεση

$$A: \quad EN(t)I_{(N^p(t)>(1+\epsilon(t))\lambda(t))} = O(\lambda(t))$$

καθώς $t \to \infty$. Τότε για κάθε $q > 0$ και $\gamma > 0$ ισχύει

$$\lambda(t)\overline{F}(x+(1+q)\mu\lambda(t)) \lesssim P(S_{N(t)}-(1+q)\mu\lambda(t) > x) \lesssim \lambda(t)\overline{F}(x) \tag{4.2.14}$$

ομοιόμορφα για $x \geq \gamma\lambda(t)$ καθώς $t \to \infty$.

Απόδειξη.

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να κάνουμε την παρακάτω ανάλυση

$$\begin{aligned} P(S_{N(t)}-(1+q)\mu\lambda(t) > x) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(S_k-(1+q)\mu\lambda(t) > x)P(N(t)=k) \\ = &\sum_{k<(1-\epsilon(t))\lambda(t)} + \sum_{(1-\epsilon(t))\lambda(t)\leq k\leq(1+\epsilon(t))\lambda(t)} + \sum_{k>(1+\epsilon(t))\lambda(t)} \\ := &\ I_1+I_2+I_3 \qquad (4.2.15)\end{aligned}$$

όπου $\epsilon(t) \to 0$ καθώς $t \to \infty$.

Για τον πρώτο όρο του αθροίσματος ισχύει η ανισότητα

$$I_1 \leq \sum_{k<(1-\epsilon(t))\lambda(t)} P(S_{(1-\epsilon(t))\lambda(t)} - (1+q)\mu\lambda(t) > x)P(N(t)=k).$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 7 παίρνουμε τα εξής

$$\begin{aligned} I_1 &\lesssim \sum_{k<(1-\epsilon(t))\lambda(t)} ((1-\epsilon(t))\lambda(t))\overline{F}(x)P(N(t)=k) \\ &\leq ((1-\epsilon(t))\lambda(t))\overline{F}(x) \sum_{k<(1-\epsilon(t))\lambda(t)} P(N(t)=k) \\ &\leq (1-\epsilon(t))\lambda(t)\overline{F}(x)P(N(t)<(1-\epsilon(t))\lambda(t)) \\ &= (1-\epsilon(t))\lambda(t)\overline{F}(x)P\left(N(t)-\lambda(t)<-\epsilon(t)\lambda(t)\right). \end{aligned}$$

Σε συνδυασμό με υπόθεση N_1 βρίσκουμε τελικά ότι ισχύει

$$I_1 = o(\lambda(t)\overline{F}(x)) \tag{4.2.16}$$

καθώς $t \to \infty$.

Για τον δεύτερο όρο του αθροίσματος παρατηρούμε ότι ισχύει το παρακάτω

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{(1-\epsilon(t))\lambda(t)\leq k\leq(1+\epsilon(t))\lambda(t)} P(S_k-(1+q)\mu\lambda(t)>x)P(N(t)=k) \\ &= \sum_{(1-\epsilon(t))\lambda(t)\leq k\leq(1+\epsilon(t))\lambda(t)} P(S_k-(1+q)\mu\lambda(t)>x)P\left(1-\epsilon(t)\leq\frac{N(t)}{\lambda(t)}\leq 1+\epsilon(t)\right). \end{aligned}$$

Καθώς $\epsilon(t) \to 0$ συνάγουμε ότι $k \to \lambda(t)$. Σε συνδυασμό με το Θεώρημα 7 και την υπόθεση N_1 λαμβάνουμε ότι

$$\lambda(t)\overline{F}(x+(1+q)\mu\lambda(t)) \leq \limsup_{t\to\infty} \sup_{x\geq\gamma\lambda(t)} I_2 \leq \lambda(t)\overline{F}(x). \tag{4.2.17}$$

Τέλος, για το τελευταίο όρο του αθροίσματος με τη χρήση του Λήμματος 7 για $u > \gamma_F \geq 1$ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
I_3 &= \sum_{k>(1+\epsilon(t))\lambda(t)} P(S_k-(1+q)\mu\lambda(t)>x)P(N(t)=k)\\
&\leq \sum_{k>(1+\epsilon(t))\lambda(t)} P(S_k>x)P(N(t)=k)\\
&\leq \sum_{k>(1+\epsilon(t))\lambda(t)} \left(k\overline{F}\left(\frac{x}{u}\right)+C\left(\frac{k}{x}\right)^u\right)P(N(t)=k)\\
&\leq \sum_{k>(1+\epsilon(t))\lambda(t)} k\overline{F}\left(\frac{x}{u}\right)P(N(t)=k)+C\sum_{k>(1+\delta)\lambda(t)}\left(\frac{k}{x}\right)^u P(N(t)=k)
\end{aligned}$$

Συνεπώς έχουμε το ακόλουθο

$$\frac{I_3}{\lambda(t)\overline{F}(x)} \leq \frac{\overline{F}\left(u^{-1}x\right)}{\overline{F}(x)}E\left(\frac{N(t)}{\lambda(t)}I_{\left(\frac{N(t)}{\lambda(t)}-1\geq\epsilon(t)\right)}\right)+\frac{C}{x^u\overline{F}(x)}E\left(\frac{N^u(t)}{\lambda(t)}I_{\left(\frac{N(t)}{\lambda(t)}-1\geq\epsilon(t)\right)}\right).$$

Καθώς $F\in\mathcal{D}$, από τα Λήμματα 2, 4 και την υπόθεση A συμπεραίνουμε ότι

$$I_3 = o(\lambda(t)\overline{F}(x)) \tag{4.2.18}$$

καθώς $t\to\infty$.
Αντικαθιστώντας τις (4.2.16), (4.2.17), (4.2.18) στη (4.2.15) παίρνουμε την σχέση (4.2.14).

□

Τέλος, μελετάμε την ασυμπτωτική σχέση των κεντροποιημένων μεγάλων αποκλίσεων των τυχαίων αθροισμάτων με κατανομές προσθετέων που ανήκουν στη τομή των κατανομών με κυριαρχημένες ουρές με τις κατανομές με μακριές ουρές για μη αρνητικές ΑΑΕ τυχαίες μεταβλητές.

Θεώρημα 11.
Έστω $\{X_k,\ k\geq 1\}$ είναι μία ακολουθία ΑΑΕ και ισόνομων μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών με κοινή κατανομή $F\in\mathcal{D}\cap\mathcal{L}$ πεπερασμένη μέση

τιμή μ, ανεξάρτητη από μία μη αρνητική ακέραια διαδικασία $\{N(t),\ t \geq 0\}$. Υποθέτουμε ότι η $N(t)$ ικανοποιεί την υπόθεση

$$A: \quad EN(t)I_{(N^p(t)>(1+\epsilon(t))\lambda(t))} = O(\lambda(t))$$

καθώς $t \to \infty$. Τότε ισχύει

$$P\left(S_{N(t)} - \mu\lambda(t) > x\right) \sim \lambda(t)\overline{F}(x) \tag{4.2.19}$$

καθώς $t \to \infty$, ομοιόμορφα για $x \geq h^{-1}(\mu\lambda(t))$.

Απόδειξη.

Αφού $F \in \mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ τότε από το Λήμμα 5 παίρνουμε ότι υπάρχει μία συνάρτηση $0 < h(x)$ αύξουσα τέτοια ώστε $h(x) \to \infty$ καθώς $x \to \infty$ και να ισχύει

$$\overline{F}(x \pm h(x)) \sim \overline{F}(x)$$

καθώς $x \to \infty$.

Από την σχέση (4.2.14) έχουμε τα ακόλουθα

$$\begin{aligned}
\lambda(t)\overline{F}(x+(1+q)\mu\lambda(t)) &\lesssim P(S_{N(t)} - (1+q)\mu\lambda(t) > x) \lesssim \lambda(t)\overline{F}(x) \\
\lambda(t)\overline{F}(x+(1+q)\mu\lambda(t)) &\lesssim P(S_{N(t)} - \mu\lambda(t) > x + q\mu\lambda(t)) \lesssim \lambda(t)\overline{F}(x) \\
\lambda(t)\overline{F}(x+\mu\lambda(t)) &\lesssim P(S_{N(t)} - \mu\lambda(t) > x) \lesssim \lambda(t)\overline{F}(x - q\mu\lambda(t))
\end{aligned}$$

Από την $x \geq h^{-1}(\mu\lambda(t))$ παίρνουμε

$$\overline{F}(x) \sim \overline{F}(x+h(x)) \leq \overline{F}(x+\mu\lambda(t))$$

και

$$\overline{F}(x - q\mu\lambda(t)) \leq \overline{F}(x-h(x)) \sim \overline{F}(x)$$

καθώς $n \to \infty$, ομοιόμορφα για $x \geq h^{-1}(\mu\lambda(t))$.

$\square$

Παρατήρηση 11.

Με παρόμοια απόδειξη μπορούμε να δείξουμε ότι η σχέση (4.2.19) ισχύει για ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κοινή κατανομή $F \in \mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ όταν η ακέραια διαδικασία καταμέτρησης $N(t)$ ικανοποιεί την υπόθεση A.

Δίνουμε ένα συνοπτικό πίνακα με τα αποτελέσματα για τις ασθενώς αρνητικά εξαρτημένες τυχαίες μεταβλητές

Ασυμπτωτικές σχέσεις για μη τυχαία αθροίσματα

ΚΛΑΣΗ	**ΜΗ ΤΥΧΑΙΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ**
ΚΛΑΣΗ $\mathcal{L}$	$P(S_n - n\mu > x) \gtrsim n\overline{F}(x)$
ΚΛΑΣΗ $\mathcal{D}$	$n\overline{F}(x + (1+q)n\mu) \lesssim P\left(S_n - n(1+q)\mu > x\right) \lesssim n\overline{F}(x),$
ΚΛΑΣΗ $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$	$P(S_n - n\mu > x) \sim n\overline{F}(x)$

Ασυμπτωτικές σχέσεις για τυχαία αθροίσματα

ΚΛΑΣΗ	**ΤΥΧΑΙΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ**
ΚΛΑΣΗ $\mathcal{L}$	$P(S_{N(t)} - \mu\lambda(t) > x) \gtrsim \lambda(t)\overline{F}(x)$
ΚΛΑΣΗ $\mathcal{D}$	$\lambda(t)\overline{F}(x + (1+q)\mu) \lesssim P(S_{N(t)} - (1+q)\mu\lambda(t) > x) \lesssim \lambda(t)\overline{F}(x),$
ΚΛΑΣΗ $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$	$P(S_{N(t)} - \mu\lambda(t) > x) \sim \lambda(t)\overline{F}(x)$

Κεφάλαιο 5

Εφαρμογές των ακριβών μεγάλων αποκλίσεων σε μοντέλα στοχαστικών διαδικασιών

Τα παραπάνω αποτελέσματα των ακριβών μεγάλων αποκλίσεων για τυχαία αθροίσματα έχουν εφαρμογές σε στοχαστικές διαδικασίες. Παρακάτω, θα δώσουμε την εφαρμογή των αποτελεσμάτων σε τρία συγκεκριμένα στοχαστικά μοντέλα. Αυτά είναι:

α) Το ανανεωτικό μοντέλο.

β) Το σύνθετο ανανεωτικό μοντέλο.

γ) Το μοντέλο για αρνητικά συσχετισμένες πραγματοποιήσιμες ζημιές.

5.1 Το ανανεωτικό μοντέλο.

Το μοντέλο αυτό έχει την παρακάτω δομή.

1. Οι ζημιές $\{X_n,\ n \geq 1\}$ είναι ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κοινή

κατανομή F και πεπερασμένη μέση τιμή $\mu = EX_1$.

2. Τα μεσοδιαστήματα αφίξεων στα ατυχήματα $\{Y_n,\ n \geq 1\}$ είναι μη αρνητικές ισόνομες ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κοινή μέση τιμή $EY_1 = 1/\lambda$ και $Var(Y_1) = \sigma_Y^2 < \infty$ ανεξάρτητη από την $\{X_n,\ n \geq 1\}$.

3. Ο αριθμός των ζημιών στο διάστημα [0, t] συμβολίζεται με

$$N(t) = \sup\{n \geq 1 : T_n \leq t\}, \quad t \geq 0$$

όπου $T_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

Εάν εφαρμόσουμε τα Θεωρήματα 4 και 10 στην ανανεωτική διαδικασία, έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα. Για την απόδειξη του χρειαζόμαστε το παρακάτω Λήμμα που βρίσκεται στην εργασία των Q. Tang, C. Su, T. Jiang και J. Zhang (2001) (Λήμμα 2.4).

Λήμμα 8. .
Υποθέτουμε $\{N(t), t \geq 0\}$ είναι μία ακέραια διαδικασία καταμέτρησης. Τότε, για κάθε θετικό δ και m ισχύει

$$\sum_{k > (1+\delta)\lambda(t)} k^m P(N(t) \geq k) = o(1), \quad t \to \infty.$$

Θεώρημα 12.
Έστω $\{X_n,\ n \geq 1\}$ ανεξάρτητες ή ΑΑΕ, ισόνομες μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με κοινή κατανομή $F \in \mathcal{D}$. Έστω $\{N(t),\ t > 0\}$ είναι μία ανανεωτική διαδικασία. Υποθέτουμε ότι η ακολουθία $\{X_n,\ n \geq 1\}$ και $\{N(t),\ t > 0\}$ είναι ανεξάρτητες. Τότε για κάθε $q > 0$ και για κάθε $\gamma > 0$ ισχύει

$$\lambda(t)\overline{F}(x + (1+q)\mu) \lesssim P(S_{N(t)} - (1+q)\mu\lambda(t) > x) \lesssim \lambda(t)\overline{F}(x),$$

ομοιόμορφα για $x \geq \gamma\lambda(t)$ καθώς $t \to \infty$.

Τέλος, εάν $F \in \mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ τότε ισχύει

$$P\left(S_{N(t)} - \mu\lambda(t) > x\right) \sim \lambda(t)\overline{F}(x) \tag{5.1.1}$$

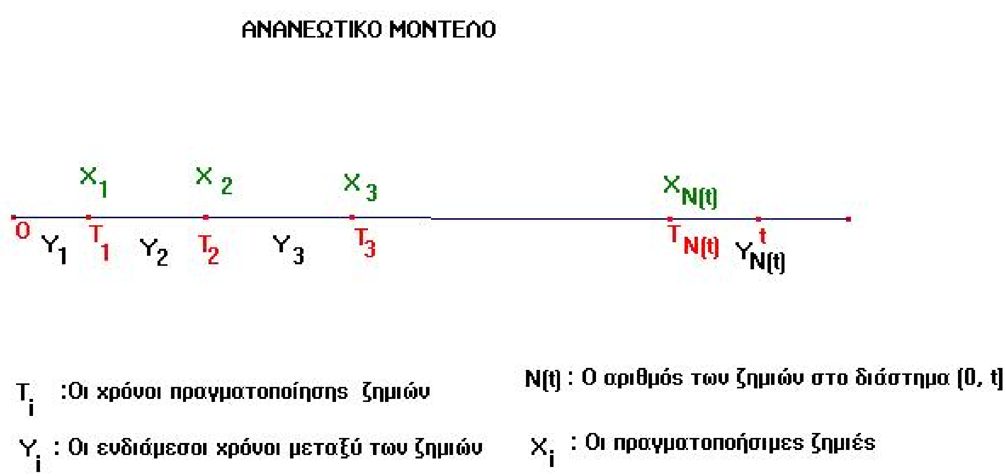
καθώς $t \to \infty$, ομοιόμορφα για $x \geq h^{-1}(\mu\lambda(t))$.

Απόδειξη.

Από το Λήμμα 8 παίρνουμε ότι η ανανεωτική στοχαστική διαδικασία ικανοποιεί την υπόθεση A και συνεπώς συνάγουμε το αποτέλεσμα.

□

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται το ανανεωτικό μοντέλο.



5.2 Σύνθετη ανανεωτική διαδικασία

Στην εργασία των Q. Tang, C. Su, T. Jiang, J. Zhang (2001) έγινε εισαγωγή ενός πιο ρεαλιστικού μοντέλου, που ονομάζεται σύνθετο ανανεωτικό μοντέλο. Στο μοντέλο αυτό έχουμε περισσότερες από μία ζημίες σε κάθε ατύχημα.

Το μοντέλο αυτό έχει την παρακάτω δομή.

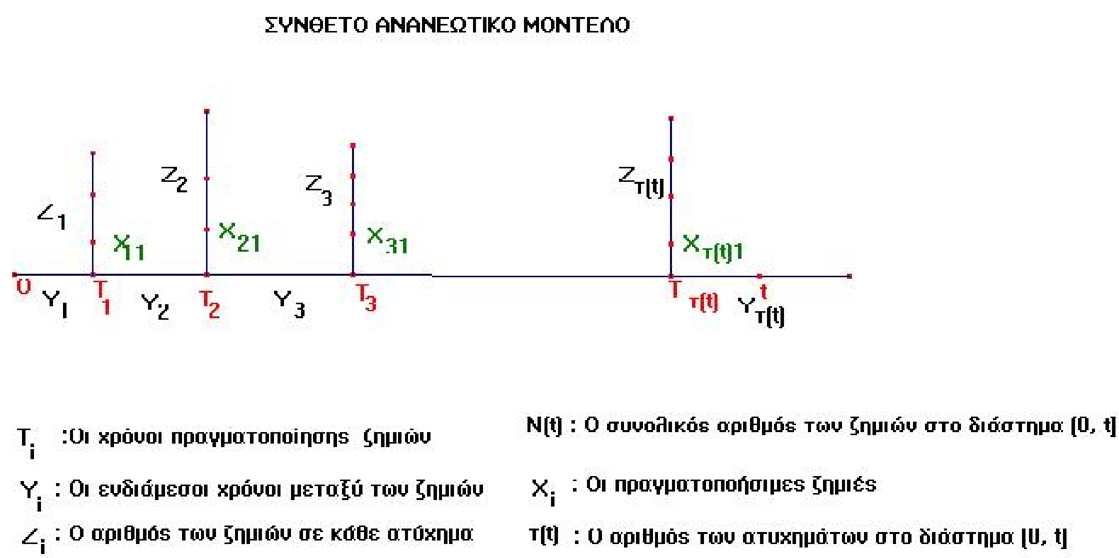
1. Οι ζημιές $\{X_n,\ n \geq 1\}$ είναι ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κοινή κατανομή F και πεπερασμένη μέση τιμή $\mu = EX_1$.

2. Τα μεσοδιαστήματα εμφανίσεων ατυχημάτων $\{Y_n,\ n \geq 1\}$ είναι μη αρνητικές ισόνομες ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κοινή μέση τιμή $EY_1 = 1/\lambda$ ανεξάρτητη από την $\{X_n,\ n \geq 1\}$.
   Η ακολουθία $\{Y_n,\ n \geq 1\}$ ονομάζεται οδηγός της ακολουθίας καταμέτρησης.

3. Ο αριθμός των ατυχημάτων στο διάστημα [0, t] συμβολίζεται από την
   $$\tau(t) = \sup\{n \geq 1 : T_n \leq t\}$$
   για κάθε $t \geq 0$ με $E(\tau(t)) = \nu(t)$.

   Ο αριθμός των ζημιών στο n-στο ατύχημα αποτελεί τον n-στο όρο μιας μη αρνητικής ακολουθίας ακέραιων τυχαίων μεταβλητών $\{Z_n,\ n \geq 1\}$ που είναι μία ακολουθία από ισόνομες ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κοινή κατανομή G και πεπερασμένη μέση θ, ανεξάρτητη από τις ακολουθίες $\{X_n,\ n \geq 1\}$ και $\{Y_n,\ n \geq 1\}$. Το σύνολο των ζημιών στο χρονικό διάστημα t δίνεται από
   $$N(t) = \sum_{i=1}^{\tau(t)} Z_i, \qquad t \geq 0$$
   με
   $$\lambda(t) = E(N(t)) = E\left(\sum_{i=1}^{\tau(t)} Z_i\right) = \theta\nu(t)\,.$$

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται το σύνθετο ανανεωτικό μοντέλο.



Παρατήρηση 12.

Στην εργασία των Q. Tang, C. Su, T. Jiang και J. Zhang (2001) από το Θεώρημα 2.3 συνάγουμε ότι η σύνθετη ανανεωτική διαδικασία ικανοποιεί την υπόθεση A (2.4.9) και από το Θεώρημα 2.1 στην ίδια εργασία συνάγουμε ότι η υπόθεση A συνεπάγεται την ισχύ της υπόθεσης N_1. Έτσι, η σύνθετη ανανεωτική διαδικασία ικανοποιεί την υπόθεση N_1.

Με βάση τα παραπάνω, αποδεικνύουμε το παρακάτω θεώρημα για το σύνθετο ανανεωτικό μοντέλο.

Θεώρημα 13.

Έστω $\{X_k,\ k \geq 1\}$ είναι μία ακολουθία μη αρνητικών, ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με κοινή κατανομή $F \in \mathcal{C}$ και πεπερασμένη μέση τιμή μ.

Έστω $\{Z_i,\ i \geq 1\}$ είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων ακέραιων τυχαίων μεταβλητών με $Z_1 \geq 1$, $EZ_1^p < \infty$ για κάποια $p > \gamma_F + 2$, με κοινή κατανομή G με πεπερασμένη μέση τιμή θ.

Έστω επίσης $\{N(t)\,,\ t \geq 0\}$ μία σύνθετη ανανεωτική διαδικασία με οδηγό μία ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών $\{Y_k,\ k \geq 1\}$ οι οποίες έχουν κοινή πεπερασμένη μέση τιμή.

Υποθέτουμε ότι οι ακολουθίες $\{X_k,\ k \geq 1\}$,$\{Z_i,\ i \geq 1\}$ και $\{Y_k,\ k \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους . Τότε για κάθε σταθερό $\gamma > 0$ ισχύει

$$P(S_{N(t)} - \mu\theta\nu(t) > x) \sim \theta\nu(t)\overline{F}(x),$$

ομοιόμορφα για $x \geq \gamma\lambda(t)$ καθώς $t \to \infty$.

Απόδειξη.

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να γράψουμε τη σχέση

$$\begin{aligned}
P(S_{N(t)} - \mu\lambda(t) > x) = \sum_{k=1}^{\infty} P(S_k - \mu\lambda(t) > x)P(N(t) = k) \\
= \quad \sum_{k<(1-\delta)\lambda(t)} + \sum_{(1-\delta)\lambda(t)\leq k\leq(1+\delta)\lambda(t)} + \sum_{k>(1+\delta)\lambda(t)} \\
:= \quad I_1 + I_2 + I_3 \qquad (5.2.2)
\end{aligned}$$

όπου το δ είναι αυθαίρετο από το διάστημα $(0, \gamma/\mu)$.
Για τον πρώτο όρο του αθροίσματος ισχύουν τα εξής

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{k<(1-\delta)\lambda(t)} P(S_k - \mu\lambda(t) > x)P(N(t) = k) \\
&\leq \sum_{k<(1-\delta)\lambda(t)} P(S_{(1-\delta)\lambda(t)} > x + \mu\lambda(t))P(N(t) = k) \\
&= \sum_{k<(1-\delta)\lambda(t)} P(S_{(1-\delta)\lambda(t)} - (1-\delta)\lambda(t)\mu > x + \mu\lambda(t) - (1-\delta)\lambda(t)\mu)P(N(t) = k).
\end{aligned}$$

Σε συνδυασμό με τη σχέση (2.4.4) συνάγουμε ότι

$$\begin{aligned}
I_1 &\sim \sum_{k<(1-\delta)\lambda(t)} (1-\delta)\lambda(t)\overline{F}(x + \mu\lambda(t) - (1-\delta)\lambda(t)\mu)P(N(t) = k) \\
&= \sum_{k<(1-\delta)\lambda(t)} (1-\delta)\lambda(t)\overline{F}(x + \delta\mu\lambda(t))P(N(t) = k) \\
&\leq (1-\delta)\lambda(t)\overline{F}(x) \sum_{k<(1-\delta)\lambda(t)} P(N(t) = k) \\
&= (1-\delta)\lambda(t)\overline{F}(x)P(N(t) < (1-\delta)\lambda(t)) \\
&= (1-\delta)\lambda(t)\overline{F}(x)P(N(t) - \lambda(t) < -\delta\lambda(t)).
\end{aligned}$$

Τελικά, σε συνδυασμό με την υπόθεση N_1 συμπεραίνουμε ότι

$$I_1 = o(\lambda(t)\overline{F}(x)) \qquad (5.2.3)$$

για κάθε σταθερό $0 < \delta < \gamma/\mu$.

Για τον δεύτερο όρο του αθροίσματος I_2 ισχύει η σχέση

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{(1-\delta)\lambda(t)\leq k \leq (1+\delta)\lambda(t)} P(S_k - \mu\lambda(t) > x)P(N(t) = k) \\ &\leq P(S_{(1+\delta)\lambda(t)} - \mu\lambda(t) > x)P\left[(1-\delta) \leq \frac{N(t)}{\lambda(t)} \leq (1+\delta)\right] \end{aligned}$$

και σε συνδυασμό με την υπόθεση N_1 λαμβάνουμε

$$I_2 \lesssim P(S_{(1+\delta)\lambda(t)} - (1+\delta)\lambda(t)\mu > x + \mu\lambda(t) - (1+\delta)\lambda(t)\mu).$$

καθώς $t \to \infty$.

Με βάση τη σχέση (2.4.4) συνάγεται ότι

$$I_2 \lesssim (1+\delta)\lambda(t)\overline{F}\left[x + \mu\lambda(t) - (1+\delta)\lambda(t)\mu\right].$$

Επίσης, καθώς $0 < \delta < \gamma/\mu$ και $x \geq \gamma\lambda(t)$ ισχύει

$$x + \mu\lambda(t) - (1+\delta)\lambda(t)\mu \geq \left(1 - \frac{\delta\mu}{\gamma}\right)x$$

και άρα βρίσκουμε

$$I_2 \lesssim (1+\delta)\lambda(t)\overline{F}\left[\left(1 - \frac{\delta\mu}{\gamma}\right)x\right].$$

όταν $t \to \infty$.

Όμοια με την παραπάνω διαδικασία μπορούμε να γράψουμε τα ακόλουθα

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{(1-\delta)\lambda(t)\leq k \leq (1+\delta)\lambda(t)} P(S_k - \mu\lambda(t) > x)P(N(t) = k) \\ &\geq P(S_{(1-\delta)\lambda(t)} - \mu\lambda(t) > x)P\left((1-\delta) \leq \frac{N(t)}{\lambda(t)} \leq (1+\delta)\right) \end{aligned}$$

και με βάση την υπόθεση N_1 συνάγουμε

$$I_2 \gtrsim P(S_{(1-\delta)\lambda(t)} - (1-\delta)\lambda(t)\mu > x + \mu\lambda(t) - (1-\delta)\lambda(t)\mu).$$

καθώς $t \to \infty$.

Επιπλέον από τη σχέση (2.4.4), λαμβάνουμε

$$I_2 \gtrsim (1-\delta)\lambda(t)\overline{F}(x+\mu\lambda(t)-(1-\delta)\lambda(t))\mu)$$

και καθώς ισχύει η ανισότητα $x \geq \gamma\lambda(t)$ τότε

$$x+\mu\lambda(t)-(1-\delta)\lambda(t)\mu \leq \left(1+\frac{\delta\mu}{\gamma}\right)x$$

και άρα λαμβάνουμε την ασυμπτωτική ανισότητα

$$I_2 \gtrsim (1-\delta)\lambda(t)\overline{F}\left[\left(1+\frac{\delta\mu}{\gamma}\right)x\right]$$

καθώς $t \to \infty$.

Από την υπόθεση ότι $F \in \mathcal{C}$ λαμβάνουμε ότι

$$\lim_{\delta\searrow 0}\limsup_{x\to\infty}\frac{1}{\overline{F}(x)}\,\overline{F}\left[\left(1+\frac{\delta\mu}{\gamma}\right)x\right] = \lim_{\delta\searrow 0}\limsup_{x\to\infty}\frac{1}{\overline{F}(x)}\,\overline{F}\left[\left(1-\frac{\delta\mu}{\gamma}\right)x\right] = 1$$

και τελικά για τον δεύτερο όρο του αθροίσματος ισχύει η σχέση

$$\lim_{\delta\searrow 0}\limsup_{t\to\infty}\sup_{x\geq\gamma\lambda(t)}\left|\frac{I_2}{\lambda(t)\overline{F}(x)}-1\right| = 0 \qquad (5.2.4)$$

Τέλος, για τον τρίτο όρο του αθροίσματος I_3 μπορούμε να γράψουμε τα εξής

$$\begin{aligned} I_3 &= \sum_{k>(1+\delta)\lambda(t)} P(S_k-\mu\lambda(t)>x)P(N(t)=k) \\ &\leq \sum_{k>(1+\delta)\lambda(t)} P(S_k>x)P(N(t)=k) \end{aligned}$$

από τη χρήση του Λήμματος 3, εάν επιλέξουμε $\gamma_F < u < p-1$, παίρνουμε τις παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq \sum_{k>(1+\delta)\lambda(t)} \left[k\overline{F}\left(\frac{x}{u}\right) + \left(\frac{e\mu k}{x}\right)^u\right] P(N(t)=k) \\
&\leq \sum_{k>(1+\delta)\lambda(t)} k\overline{F}\left(\frac{x}{u}\right) P(N(t)=k) \\
&+ \left(\frac{e\mu}{x}\right)^u \sum_{k>(1+\delta)\lambda(t)} k^p P(N(t)=k) \\
&:= K_1 + K_2
\end{aligned}$$

Για τον όρο K_1 γράφουμε την παρακάτω ανάλυση

$$\begin{aligned}
K_1 &\asymp \sum_{k>(1+\delta)\lambda(t)} k\overline{F}(x) P(N(t)=k) \\
&\leq \overline{F}(x) \sum_{k>(1+\delta)\lambda(t)} k \sum_{n\geq\frac{k}{\tau+\theta}} P\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i = k\right) P(\tau(t)=n) \\
&+ \overline{F}(x) \sum_{k>(1+\delta)\lambda(t)} k \sum_{1\leq n<\frac{k}{\tau+\theta}} P\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i = k\right) P(\tau(t)=n) \\
&= J_1 + J_2
\end{aligned}$$

όπου $\theta = EZ_1 \geq 1$ και $\tau > 0$ είναι τέτοια ώστε

$$\frac{1+\delta}{\tau+\theta} > 1.$$

Θα ασχοληθούμε με τον όρο J_1

$$\begin{aligned}
J_1 &= \overline{F}(x) \sum_{k>(1+\delta)\lambda(t)} k \sum_{n\geq\frac{k}{\tau+\theta}} P\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i = k\right) P(\tau(t)=n) \\
&\leq \overline{F}(x) \sum_{k>(1+\delta)\lambda(t)} k \sum_{n\geq\frac{k}{\tau+\theta}} P(\tau(t)=n) \\
&= \overline{F}(x) \sum_{k>(1+\delta)\lambda(t)} kP\left(\tau(t) \geq \frac{k}{\tau+\theta}\right)
\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας το Λήμμα 8 βρίσκουμε την ασυμπτωτική σχέση

$$J_1 = o(1)\overline{F}(x) = o(\overline{F}(x)).$$

Για τον όρο J_2 γράφουμε

$$\begin{aligned}
J_2 &= \overline{F}(x) \sum_{k>(1+\delta)\lambda(t)} k \sum_{1\leq n<\frac{k}{\tau+\theta}} P\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i = k\right) P(\tau(t)=n) \\
&\leq \overline{F}(x) \sum_{k>(1+\delta)\lambda(t)} k \sum_{1\leq n<\frac{k}{\tau+\theta}} P\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i = k\right) \\
&\leq \overline{F}(x) \sum_{k>(1+\delta)\lambda(t)} k\, P\left(\sum_{1\leq i<\frac{k}{\tau+\theta}} Z_i \geq k\right) \\
&\leq \overline{F}(x) \sum_{k>(1+\delta)\lambda(t)} k\, P\left(\sum_{1\leq i<\frac{k}{\tau+\theta}} (Z_i-\theta) \geq \frac{\tau k}{\tau+\theta}\right).
\end{aligned}$$

Από το Πόρισμα 3 της εργασίας των D. H. Fuk, S. V. Nagaev (1971) το οποίο λέει τα εξής:
Για ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $\{U_n,\ n\geq 1\}$ ισχύει η ακόλουθη ανισότητα για $p>0$

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{k=1}^{n} U_k \geq x\right) &\leq \left(1+\frac{2}{p}\right)^p nE\left|U_1\right|^p x^{-p} \\
&+ \exp\left\{-2(p+2)^{-2}e^{-p}x^2\left(nEU_1^2\right)^{-1}\right\}.
\end{aligned}$$

Εάν θέσουμε $EU_1 = 0$ και $E|U_1|^p < \infty$ για κάποια $p \geq 3$, τότε λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
& P\left(\sum_{1\leq i\leq \frac{k}{\tau+\theta}} (Z_i - \theta) \geq \frac{\tau k}{\tau+\theta}\right) \\
\leq\ & \left(1+\frac{2}{p}\right)^p \frac{k}{\tau+\theta} E|Z_i-\theta|^p \left(\frac{\tau k}{\tau+\theta}\right)^{-p} \\
+\ & \exp\left\{-2(-p+2)^{-2}e^{-p}\left(\left(\frac{k}{\tau+\theta}\right)E(Z_i-\theta)^2\right)^{-1}\left(\frac{\tau k}{\tau+\theta}\right)^2\right\} \\
\leq\ & C_p k^{-p+1} + \exp\{-D_p k\}
\end{aligned}$$

όπου C_p, D_p είναι θετικές σταθερές.
Τελικά, συνάγουμε ότι

$$J_2 = \overline{F}(x)o(1) = o(\overline{F}(x))$$

και συνεπώς μπορούμε να συμπεράνουμε

$$K_1 = J_1 + J_2 = o(\overline{F}(x)).$$

Στη συνέχεια, εξετάζουμε τον όρο K_2

$$\begin{aligned}
K_2 &= \left(\frac{e\mu}{x}\right)^u \sum_{k>(1+\delta)\lambda(t)} k^p P(N(t)=k) \\
&= (e\mu^u)\, x^{-u} \sum_{k>(1+\delta)\lambda(t)} k^p P(N(t)=k)
\end{aligned}$$

και σε συνδυασμό με το Λήμμα 4 συνάγουμε ότι

$$K_2 = (e\mu)^u o(\overline{F}(x)) \sum_{k>(1+\delta)\lambda(t)} k^p P(N(t)=k).$$

με παρόμοια βήματα του όρου K_1 μπορούμε να συμπεράνουμε τη σχέση

$$\sum_{k>(1+\delta)\lambda(t)} k^p P(N(t)=k) = o(1)$$

έτσι λαμβάνουμε την ακόλουθη σχέση

$$K_2 = (e\mu)^u o(\overline{F}(x))o(1) = o(\overline{F}(x)).$$

Συνεπώς

$$I_3 = K_1 + K_2 = o(\overline{F}(x)). \tag{5.2.5}$$

Τελικά, αντικαθιστώντας τις (5.2.3),(5.2.4) και (5.2.5) στη (5.2.2) παίρνουμε το αποτέλεσμα.

$\square$

Στην συνέχεια, θα αποδείξουμε ότι ισχύει η σχέση για τις κατανομές που ανήκουν στην ευρύτερη κλάση $\mathcal{D}$ χρησιμοποιώντας διαφορετική τεχνική στην απόδειξη.

Θεώρημα 14.
Έστω $\{X_k,\ k \geq 1\}$ είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων ή ΑΑΕ ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με κοινή κατανομή $F \in \mathcal{D}$ και πεπερασμένη μέση τιμή μ.
Έστω $\{Z_i,\ i \geq 1\}$ είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων με ακέραιες τιμές τυχαίων μεταβλητών με $EZ_1 = \theta$, $Var(Z_1) = \sigma_Z^2 < \infty$.
Έστω επίσης $\{N(t),\ t \geq 0\}$ μία σύνθετη ανανεωτική διαδικασία με οδηγό μία ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών $\{Y_k,\ k \geq 1\}$ οι οποίες έχουν κοινή πεπερασμένη μέση τιμή.
Υποθέτουμε ότι οι ακολουθίες $\{X_k,\ k \geq 1\}$,$\{Z_i,\ i \geq 1\}$ και $\{Y_k,\ k \geq 1\}$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες. Τότε για κάθε σταθερό $q > 0$ και για κάθε $\gamma > 0$ ισχύει

$$\theta\nu(t)\overline{F}(x + (1+q)\mu) \lesssim P(S_{N(t)} - (1+q)\mu\theta\nu(t) > x) \lesssim \theta\nu(t)\overline{F}(x)$$

ομοιόμορφα για $x \geq \gamma\lambda(t)$.

Εάν $F \in \mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ τότε ισχύει

$$P\left(S_{N(t)} - \mu\lambda(t) > x\right) \sim \lambda(t)\overline{F}(x) \tag{5.2.6}$$

καθώς $t \to \infty$, ομοιόμορφα για $x \geq h^{-1}(\mu\lambda(t))$.

Απόδειξη.

Από την παρατήρηση 12 συνάγουμε ότι η σύνθετη ανανεωτική διαδικασία ικανοποιεί την υπόθεση A που έχει ως συνέπεια την ισχύ του παραπάνω αποτελέσματος.

5.3 Το στοχαστικό μοντέλο των αρνητικά συσχετισμένων πραγματοποιήσιμων ζημιών.

Στην εργασία των M. Denuit, C. Lefevre και S. Utev (2002) βρίσκουμε ένα άλλο στοχαστικό μοντέλο, το μοντέλο των αρνητικά συσχετισμένων πραγματοποιήσιμων ζημιών, στο οποίο το k συμβόλαιο ($k \geq 1$) είναι συσχετισμένο με μία *Bernoulli* τυχαία μεταβλητή $\{J_k, k \geq 1\}$. Η τυχαία μεταβλητή J_k με κοινή μέση τιμή ρ, όπου $0 < \rho \leq 1$ συμβολίζει την πιθανότητα πραγματοποίησης ζημιάς στο k συμβόλαιο.
Οι συνολικές ζημιές

$$S_{N(t)} = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k J_k$$

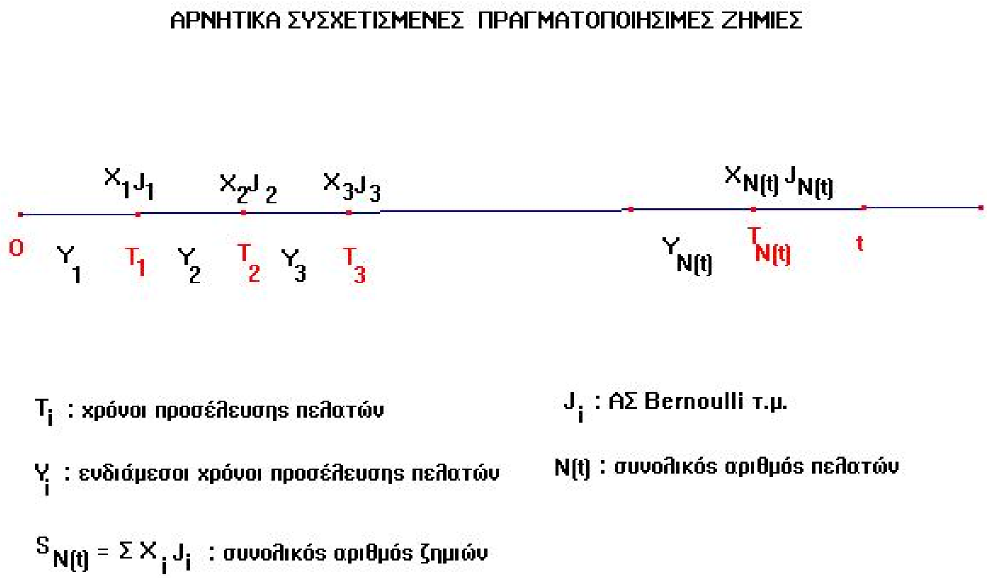
είναι τυχαίο άθροισμα εκτός αν η παράμετρος ρ είναι ίση με 1.
Υποθέτουμε ότι

1. Η ακέραια διαδικασία $N(t)$ είναι η συνήθης ανανεωτική διαδικασία καταμέτρησης συμβολαίων ορισμένη στην ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών $\{Y_n,\ n \geq 1\}$

2. Οι ακολουθίες $\{X_n,\ n \geq 1\}$, $\{Y_n,\ n \geq 1\}$, $\{J_k,\ k \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητες.

3. Η ακολουθία $\{J_k,\ k \geq 1\}$ αποτελείται από αρνητικά συσχετισμένες μεταβλητές.

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται το αρνητικά συσχετισμένες πραγματοποιήσιμες ζημιές μοντέλο.



Εφαρμόζοντας τα αποτελέσματα των Θεωρημάτων 4 και 10 λαμβάνουμε το παρακάτω αποτέλεσμα.

Θεώρημα 15.
Έστω $\{X_n,\ n \geq 1\}$ *είναι μία ακολουθία από ανεξάρτητες ή ΑΑΕ ισόνομες μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με κοινή μέση τιμή* μ *και κοινή κατανομή* $F \in \mathcal{D}$. *Έστω* $\{J_k,\ k \geq 1\}$ *είναι μία ΑΣ ακολουθία από Bernoulli τυχαίες μεταβλητές με κοινή μέση τιμή* $\rho \in (0,1]$ *και έστω* $\{N(t),\ t > 0\}$ *είναι μία ανανεωτική διαδικασία σχηματιζόμενη από μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών* $\{Y_n,\ n \geq 1\}$ *οι οποίες έχουν κοινή πεπερασμένη μέση τιμή και πεπερασμένη διακύμανση. Υποθέτουμε ότι οι ακολουθίες* $\{X_n,\ n \geq 1\}$,$\{J_k,\ k \geq 1\}$ *και η διαδικασία* $\{N(t),\ t > 0\}$ *είναι ανεξάρτητες. Τότε για κάθε* $q > 0$ *και για κάθε* $\gamma > 0$ *ισχύει*

$$\rho\lambda(t)\overline{F}(x+(1+q)\mu) \lesssim P(\sum_{k=1}^{N(t)} X_k J_k - (1+q)\mu\rho\lambda(t) > x) \lesssim \rho\lambda(t)\overline{F}(x),$$

ομοιόμορφα για $x \geq \gamma\lambda(t)$ *καθώς* $t \to \infty$.

Εάν $F \in \mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ *τότε ισχύει*

$$P\left(S_{N(t)} - \mu\lambda(t) > x\right) \sim \lambda(t)\overline{F}(x) \tag{5.3.7}$$

καθώς $t \to \infty$, *ομοιόμορφα για* $x \geq h^{-1}(\mu\lambda(t))$.

Απόδειξη.

Θεωρούμε τη στοχαστική διαδικασία καταμέτρησης

$$N'(t) = \sup\{n:\ T_n \leq t \ and\ J_n = 1\}, \quad t > 0$$

που παριστά τον αριθμό των πραγματοποιήσιμων ζημιών στο διάστημα $[0,t]$. Τότε ισχύει η σχέση

$$N'(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} J_k.$$

Στην Πρόταση 5.1 της εργασίας των K. W. Ng, Q. Tang, J. Yan, and H. Yang (2004) βρίσκουμε ότι η στοχαστική διαδικασία $N'(t)$ ικανοποιεί την συνθήκη Α και αυτό έχει ως συνέπεια να ισχύει το Θεώρημα. □

5.3.1 Παραδείγματα από την Αντασφάλιση

Ως αντασφάλιση εννοούμε τη μεταφορά μέρους ή του συνόλου της ασφάλισης από ένα ασφαλιστή σε άλλον. Ο κύριος λόγος που γίνεται η αντασφάλιση είναι να αποφύγει μία ασφαλιστική εταιρεία καταστροφικές ζημιές. Θα εφαρμόσουμε τα αποτελέσματα των ακριβών μεγάλων αποκλίσεων στα παρακάτω τρία είδη αντασφάλισης:

- Στην αναλογική σύμβαση
- Στη σύμβαση υπερβάλλοντος
- Στην ατομική σύμβαση υπερβάλλοντος

Αναλογική σύμβαση

Σε αυτό το είδος, η αντασφαλιστική εταιρεία πληρώνει το $\xi\%$ της συνολικής ζημιάς μίας ασφαλιστικής εταιρίας $S_{N(t)}$ για κάποια $\xi \in (0,1)$. Οι συνολικές ζημίες που πληρώνει η αντασφαλιστική εταιρεία στην αναλογική σύμβαση ορίζονται ως

$$R_1(t) = \xi S_{N(t)}$$

και με την εφαρμογή των αποτελεσμάτων έχουμε για την πιθανότητα χρεοκοπίας της αντασφαλιστικής εταιρίας έχουμε ότι ισχύει

$$\begin{aligned} & P(R_1(t) - \mu\lambda(t) > x) \\ = \;& P(\xi S_{N(t)} - \mu\lambda(t) > x) \sim \lambda(t)\overline{F}(\frac{x}{\xi}) \end{aligned}$$

καθώς $t \to \infty$, ομοιόμορφα για $x \geq h^{-1}(\mu\lambda(t))$.

Σύμβαση υπερβάλλοντος

Στο επόμενο είδος, η αντασφαλιστική εταιρεία πληρώνει τις ζημιές ενός χαρτοφυλακίου μίας ασφαλιστικής εταιρίας όταν αυτές υπερβούν ένα όριο K.

Οι συνολικές ζημίες που πληρώνει η αντασφαλιστική εταιρεία στη σύμβαση υπερβάλλοντος ορίζονται ως

$$R_2(t) = (S_{N(t)} - K)^+$$

και με την εφαρμογή των αποτελεσμάτων έχουμε για την πιθανότητα χρεοκοπίας της αντασφαλιστικής εταιρίας έχουμε ότι ισχύει

$$\begin{aligned} & P(R_2(t) - \mu\lambda(t) > x) \\ = \; & P((S_{N(t)} - K)^+ - \mu\lambda(t) > x) \sim \lambda(t)\overline{F}(x+K) \end{aligned}$$

καθώς $t \to \infty$, ομοιόμορφα για $x \geq h^{-1}(\mu\lambda(t))$.

Ατομική σύμβαση υπερβάλλοντος

Στο τελευταίο είδος αντασφάλισης, η αντασφαλιστική εταιρεία πληρώνει τις ατομικές ζημιές της ασφαλιστικής εταιρίας που υπερβαίνουν ένα όριο D. Οι συνολικές ζημίες που πληρώνει η αντασφαλιστική εταιρεία στην ατομική σύμβαση υπερβάλλοντος ορίζονται ως

$$R_3(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} (X_i - D)^+$$

και με την εφαρμογή των αποτελεσμάτων έχουμε για την πιθανότητα χρεοκοπίας της αντασφαλιστικής εταιρίας έχουμε ότι ισχύει

$$\begin{aligned} & P(R_3(t) - \mu\lambda(t) > x) \\ = \; & P\left(\sum_{i=1}^{N(t)} (X_i - D)^+ - \mu\lambda(t) > x\right) \sim \lambda(t)\overline{F}(x) \end{aligned}$$

καθώς $t \to \infty$, ομοιόμορφα για $x \geq h^{-1}(\mu\lambda(t))$.

Βιβλιογραφία

[1] I.Armendariz, M. Loulakis *Conditional distribution of heavy tailed random variables on large deviations of their sum.* Stoch. Proc. and their applic. **121** 1138-1147, (2011).

[2] A. Baltrunas, R. Leipus and J. Siaulys *Precise large deviations results for the total claim amount under subexponential claim sizes.* Stat. Prob. Lett. **78** 1206-1214, (2008).

[3] N. H. Bingham, C. M. Goldie and J. L. Teugels *Regular variation.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1987).

[4] H.W. Block,T.H. Savits and M. Shaked *Some concepts of negatively dependence.* Ann. Probab. **10**, 765-772 (1982).

[5] J. A. Bucklew *Large deviation techniques in decision, simulation and estimation .* Willey, New York (1991).

[6] J. Cai and Q. Tang *On max-sum equivalence and canvolution closure of heavy-tailed distributionsand their applications .* J. Appl. Prob. **41** (2004).

[7] V. P. Čistjakov *A theorem on sums of independent positive random variables and its applications to branching random processes* Teor. Verojatnost. i Primenen **9** , 710-718 (1964).

[8] Y. Chen and W.Zhang *Large deviations for random sums of negatively dependent random variables with consistenly varying tails.* Stat. Prob. let. **77**, 530-538 (2007).

[9] Y. Chen, K. C. Yuen and K. W. Ng *Large deviations for random sums of random sums in presence of negative dependence and consistent variation.* Methodology and Computing in App. Prob. (2010)

[10] J. Chover, P. Ney and S. Wainger *Functions of probability measures.* J. Analyse Math.**26**, 255-302 (1973a)

[11] D.B.H. Cline *Intermediate regular and* Π *variation .* Proc. London Math. Soc. **68** 594-616 (1994).

[12] D.B.H. Cline and T. Hsing *Large deviation probabilities for sums and maxima or rv's with heavy or subexponential tails.* Preprint, Texas AM University (1991).

[13] D. B. H. Cline and G. Samorodnitsky *Subexponentiality of the product of independent random variables.* Stochastic Process. Appl. **49** , 75-98 (1994).

[14] H. Cramer *Collected works Volume I.*
Springer-Verlag Berlin (1994).

[15] H. Cramer *Collected works Volume II.*
Springer-Verlag Berlin (1994).

[16] A. Dembo and O. Zeitouni *Large deviations techniques and applications.* Jones and Barlett, Boston (1993).

[17] D. Denisov, A.B. Dieker and V. Shneer *Large deviations for random walks under subexponentiality: The big-jump domain.* Annals of Probability **36** , 1946-1991 (2008).

[18] D.Denisov, S.Foss and D Korshunov *Asymptotics of randomly stopped sums in the presence of heavy tails.* Bernoulli **16**, 971-994 (2010).

[19] M.Denuit , C.Lefevre and S. Utev *Measuring the impact of depepedence between claims occurrences.* Insurance Math. Econom. **30**, 1-19 (2002).

[20] N. Ebrahimi and M. Ghosh *Multivariate negative dependence.* Comm. Statist.A Theory Methods **10**, 307-337 (1981).

[21] R. S. Ellis *Large deviations and statistical mechanics .* Springer, Berlin (1985).

[22] P. Embrechts and C. M. Goldie *On closure and factorization properties of subexponetial distributions.* J. Austral. Math. Soc. **29** 243-256 (1980).

[23] P. Embrechts and C. M. Goldie *On convolution tails.* Stoch. Proc. Appl. **13** 263-227 (1982).

[24] P. Embrechts, C.M. Goldie and N.Veraverbeke *Subexponnetiality and infinite divisibility.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **49**, 335-347 (1979).

[25] P. Embrechts, and N.Veraverbeke *Estimates for the probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims.* Ins. Math. Econom. **1**, 55-72 (1982).

[26] P. Embrechts, C. Klüppelberg and T. Mikosch *Modelling extremal events.* Springer, Berlin, (1997).

[27] P. Embrechts, and E. Omey *A property of longtailed distributions .* J. Appl. probab. **21**, 80-87 (1984).

[28] W. Feller *An itroduction to probability theory and its applications.* J. Wiley, N. York, (1971).

[29] S.Foss, D Korshunov and S.Zachary *Convolutions of long-tailed and subexponential distributions.* J.Appl.Probab. **46**, 756-767 (2009).

[30] S.Foss, D Korshunov and S.Zachary *An Introduction to heavy-tailed and subexponential distributions.* Springer New York (2011).

[31] D. H. Fuk and S. V. Nagaev *Probabilistic inequalities for sums of independent random variables.* Teor. Verojatnost. i Primenen. **16** (1971),

[32] J.Geluk and K.W.Ng *Tail behavior of negatively associated heavy-tailed sums* . J.Appl.Prob. **43**, 587-593 (2006).

[33] N. Gantert *Large deviations for a heavy tailed mixing sequence* Preprint, Technische Universitat (1996).

[34] A. Gut *Stopped random walk. Limit theorem and cationsappli.* Springer, New York, Berlin (1998).

[35] C. C. Heyde *A contribution to the theory of large deviations for sums of independent random variables.* Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **7**, 303-308 (1967).

[36] C. C. Heyde *On large deviation problems for sums of random variables which are not attracted to the normal law.* Ann. Math. Statist. **38**, 1575-1578 (1967).

[37] C. C. Heyde *On large deviation probabilities in the case of attraction to a non-normal stable law* Sankhyā Ser. A **30**, 253–258 (1968).

[38] P. R. Jelenkovic and A. A. Lazar *Asymptotic results for multiplexing subexponential on-off processes.* Adv. Appl. Prob.**31**, 394–421 (1999).

[39] K. Joag-Dev and F. Proshan *Negative association of random variables with applications.* Ann.Statist. **11**, 286-295 (1983).

[40] R. Kaas and Q. Tang *A large deviation result for the aggregate claims with dependent claim occurrences.* Insurance Math. Econom.**36**, 251-259 (2005).

[41] C. Klüppelberg *Subexponential distributions and integrated tails* . J. Appl. Probab. **25** , 132-141 (1988).

[42] C. Klüppelberg and T. Mikosch *Large deviations of heavy-tailed random sums with applications in insurance and finance* J. Appl. Probab. **34** , 293-308 (1997).

[43] Κωνσταντινιδησ Δ. Γ. (2011) *Θεωρία συλλογικού κινδύνου. Μέρος Α* Εκδόσεις Συμμετρία. Αθήνα

[44] D. Konstantinides and F. Loukissas
Precise large deviations for consistently varying-tailed distributions in the compound renewal risk model.
Lithuanian Mathematical Journal **50** no.4, 391-400 (2010)

[45] D. Konstantinides and F. Loukissas
Precise large deviations for sums of negatively dependent random variables with common long tailed distributions.
Communications in Statistics - Theory and Methods **40** no.4 19-20 (2011)

[46] YAN LIU *Precise large deviation for negatively associated random variables with consistently varying tail.* Statist. Prob. Lett.**77**, 181-187 (2007).

[47] LI LIU *Precise large deviation for dependent random variables with heavy tails.* Statist. Prob. Lett.**79**, 1290-1298 (2009).

[48] F. LOUKISSAS *Precise large deviations for long varying-tailed distributions.* Journal of Theor. Probability **25** no.4, 913-924 (2012)

[49] P. MATULA *A note on the almost sure convergence of sums of negatively dependent random variables.* Statist. Prob. Lett.**15**, 209-213 (1992).

[50] T. MIKOSCH AND A. V. NAGAEV *Large deviations of heavy-tailed sums with applications in insurance* Extremes **1** , 81-110 (1998).

[51] MIKOSCH, T. NAGAEV, A.V. (2001) *Rates in approximations to ruin probabilities for heavy-tailed distributions.* Extremes **4:1**, 67-78.

[52] A. V. NAGAEV *Local limit theorems with regard to large deviations when Cramér's condition is not satisfied.* Litovsk. Math. Sb. **8** , 553-579 (1968).

[53] A. V. NAGAEV *Integral limit theorems with regard to large deviations when Cramér's condition is not satisfied.* I, Teor. Verojatnost. i Primenen. **14** , 51-63 (1969).

[54] A.V. NAGAEV *Integral limit theorems for large deviations when Cramer's condition is not fulfilled II.* Theory Prob.Appl. **14**, 193-208 (1969b).

[55] S. V. Nagaev *Large deviations for sums of independent random variables.* Transactions of the Sixth Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes. (Tech. Univ., Prague, 1971; dedicated to the memory of Antonín Špaček), 657-674, Academia, Prague.

[56] S. V. Nagaev *Large deviations of sums of independent random variables.* Ann. Probab. **7**, 745-789 (1979).

[57] K. W. Ng, Q. Tang, J. Yan, and H. Yang *Precise large deviations for sums of random variables with consistently varying tails.* J. Appl. Probab. **41**, 93-107 (2004).

[58] K. W. Ng, Q. Tang, J. Yan and H. Yang *Precise large deviations for the prospective-loss process* J. Appl. Probab. **40**, 391-400 (2003).

[59] V. Paulauskas and A. Skučaitė *Some asymptotic results for one-sided large deviation probabilities.* Lithuanian Math. J. **43**, 318-326 (2003).

[60] I. F. Pinelis *Asymptotic equivalence of the probabilities of large deviations for sums and maximum of independent random variables.* Limit theorems of probability theory **5**, 144-173 "Nauka" Sibirsk. Otdel., Novosibirsk (1985).

[61] V. V. Petrov *Limit theorems of probability theory.* Springer, Berlin (1975).

[62] S. I. Resnick *A Probability Path.* Birkhauser Boston (1999).

[63] L. V. Rozovski *A Probabilities of large deviations on the whole axis.* Theory Probab.Appl. **38**, 35-79 (1993).

[64] Q.M. Shao *A comparison theorem on moment inequalities between negatively associated and independent random variables.* J.Theoret. Prob. **13**, 343-356 (2000).

[65] X. Shen and Z. Lin *Precise large deviation for randomly weighted sums of negatively dependent random variables with consistently varying tails.* Statist. Prob. Lett.**78**, 3222-3229 (2008).

[66] A. Skučaitė *Large deviations for sums of independent heavy-tailed random variables.* Lithuanian Math. J. **44(2)**, 198-208 (2004).

[67] Q. Tang, C. Su, T. Jiang and J. Zhang *Large deviations for heavy-tailed random sums in compound renewal model* Statist. Probab. Lett. **52**, 91-100 (2001).

[68] Q. Tang and G. Tsitsiashvili *Precise estimates for the ruin probability in finite horizon in a discrete-time model with heavy-tailed insurance and financial risks* Stochastic Process. Appl. **108**, 299-325 (2003).

[69] Q. Tang *Insensitivity to Negative Dependence of the Asymptotic Behavior of Precise Large Deviations.* Electron.Journal of Prob. **11**, 107-120 (2006).

[70] V. Vinogradov *Refined large deviations limit theorems.* Longman, Harlow (1994).

[71] D.Wang and Q.Tang *Maxima of sums and random sums for negatively associated random variables with heavy tails.* Stattist. Prob. Lett. **68**, 287-295 (2004).

[72] Y.B.Wang, K.Y.Wang and D.Y.Cheng *Precise large deviations for sums of negatively associated random variables with com-*

mon dominately varying tails. Acta Math. Sinica, English series **22**, 1725-1734 (2006).

[73] S. Wang and W. Wang *Precise large deviation for sums of random variables with consistently varying tails in multy-risk models.* J.Appl. Probab.**44**, 889-900 (2008).