



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

**Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Μαθηματική Μοντελοποίηση
Στις Φυσικές Επιστήμες
και στις Σύγχρονες Τεχνολογίες»**

Μεταπτυχιακή Διατριβή

**Ασυμπτωτική Συμπεριφορά
Παραγώγων Συστημάτων 2^{ης} τάξης**

**Παναγιώτα
Κόικαλη**

Εξεταστική Επιτροπή

Νίκος Καραχάλιος (επιβλέπων)
Επίκουρος Καθηγητής
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Βασίλης Μεταφτσής
Επίκουρος Καθηγητής
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Χρήστος Νικολόπουλος
Επίκουρος Καθηγητής
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Σάμος 2006

Περίληψη

Σκοπός της εργασίας αυτής, είναι η μελέτη παραγώγων συστημάτων 2^{ης} τάξης με απόσβεση. Τα παράγωγα συστήματα είναι συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων στα οποία το διανυσματικό πεδίο (η μη-γραμμικότητα), είναι το διάνυσμα κλίσης (gradient-«παράγωγος») μιας βαθμωτής συνάρτησης. Στην εργασία παρουσιάζουμε το βασικό αποτέλεσμα της εργασίας των H. Haraux και M. Jendoubi [HJ]. Το αποτέλεσμα αυτό εξασφαλίζει την σύγκλιση σε σημείο ισορροπίας για κάθε φραγμένη λύση για την περίπτωση που η βαθμωτή συνάρτηση του συστήματος, είναι αναλυτική. Το αποτέλεσμα αυτό είναι πολύ σημαντικό καθώς καλύπτει για το υπό μελέτη σύστημα την περίπτωση για την οποία η αρχή αναλλοίωτου δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Η αρχή του αναλλοίωτου, εξασφαλίζει την σύγκλιση σε σημείο ισορροπίας για την περίπτωση όπου το σύνολο των σημείων ισορροπίας αποτελείται από μεμονωμένα σημεία. Το αποτέλεσμα των H. Haraux και M. Jendoubi [HJ], εξασφαλίζει την σύγκλιση ακόμη και στην περίπτωση που το σύστημα έχει ένα «συνεχές» από σημεία ισορροπίας, με την υπόθεση της αναλυτικότητας. Στην εργασία παρουσιάζονται τα αποτελέσματα ορισμένων απλών εξομοιώσεων με χρήση του MATHEMATICA.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Βασικές Έννοιες και Ορισμοί.....	4-14
----------------------------------	------

Κεφάλαιο 2

Ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων παραγώγων συστημάτων δεύτερης τάξης με αναλυτική μη-γραμμικότητα	15
2.1 Εισαγωγή-Σύντομη Αναδρομή σε ορισμένα γνωστά αποτελέσματα.	15
2.2 Το Θεώρημα της Σύγκλισης των A. Haraux M. Jendoubi.....	16
2.3 Δυο παραδείγματα εφαρμογής του Θεωρήματος	30
Βιβλιογραφία	39

Κεφάλαιο 1

Βασικές έννοιες και ορισμοί

Στο εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο, θα αναφέρουμε ορισμένους βασικούς ορισμούς και αποτελέσματα από το μέρος εκείνο της θεωρίας των δυναμικών συστημάτων, που αφορά τα λεγόμενα *δυναμικά συστήματα κλίσης ή παράγωγα συστήματα* (*gradient dynamical systems*).

Τα παράγωγα δυναμικά συστήματα είναι μια πολύ σημαντική κλάση συστημάτων. Ονομάζονται έτσι γιατί το διανυσματικό πεδίο που ορίζει το αντίστοιχο σύστημα διαφορικών εξισώσεων, είναι το *διάνυσμα κλίσης ή η παράγωγος* ∇F (gradient) μιας βαθμωτής συνάρτησης $F: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. Από την πλευρά των εφαρμογών πολλές είναι οι φυσικές διαδικασίες για τις οποίες η προσπάθεια μαθηματικής μοντελοποίησης οδηγεί σε συστήματα αυτού του τύπου. Αρκεί ίσως να αναφέρουμε τον *νόμο του Fourier για τη θερμότητα* ο οποίος περιγράφει το διάνυσμα ροής της θερμότητας. Σύμφωνα με το νόμο του Fourier, αν Q είναι το διάνυσμα ροής της θερμότητας, τότε

$$Q = -\nabla T, \quad (\text{NF})$$

όπου T είναι η βαθμωτή συνάρτηση της θερμοκρασίας (με λόγια «η θερμότητα ρέει προς την κατεύθυνση εκείνη που αντιτίθεται στη μεταβολή της θερμοκρασίας»). Παρόμοιες καταστατικές εξισώσεις (μαθηματικές διατυπώσεις νόμων που σχετίζονται με την περιγραφή των φυσικών ιδιοτήτων του μέσου και παράγονται κυρίως με βάση την παρατήρηση και την εμπειρία) με τον (NF), αποτελούν δομικά στοιχεία στη χημική κινητική ή στη βιολογία.

Η παρουσίαση των βασικών ορισμών και αποτελεσμάτων που ακολουθούν, βασίζεται κατά κύριο λόγο στην αναφορά [HK]. Δίνουμε πρώτα τον ορισμό του συστήματος διαφορικών εξισώσεων κλίσης ή παράγωγου συστήματος.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1 Αν $F: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ είναι C^2 συνάρτηση, το *διάνυσμα κλίσης ή παράγωγο διάνυσμα της F* (*gradient vector*) είναι το διάνυσμα

$$-\nabla F(x) \equiv -\left(\frac{\partial}{\partial x_1} F(x), \frac{\partial}{\partial x_2} F(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_N} F(x) \right).$$

Το αντίστοιχο της F , *παράγωγο σύστημα διαφορικών εξισώσεων*, είναι το σύστημα

$$\dot{x} = -\nabla F(x). \quad (1.1)$$

Όπως και σε κάθε δυναμικό σύστημα, καθοριστικό ρόλο στη μελέτη της δυναμικής των παράγωγων συστημάτων έχουν τα κρίσιμα σημεία ή σημεία ισορροπίας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2 Ένα σημείο \bar{x} θα λέγεται **κρίσιμο σημείο ή σημείο ισορροπίας** για το παράγωγο σύστημα (1.1), αν $\nabla F(x) = 0$. Το κρίσιμο σημείο \bar{x} θα λέγεται **μη εκφυλισμένο** αν οι ιδιοτιμές του Hessian πίνακα της F στο \bar{x} , δηλαδή του πίνακα

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(\bar{x}) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_N}(\bar{x}) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_N}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_N \partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_N \partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_N^2}(\bar{x}) \end{bmatrix}, \quad (\text{HM})$$

είναι μη μηδενικές.

Για λόγους πληρότητας της παρουσίασης, υπενθυμίζουμε τους ορισμούς των εννοιών της ευστάθειας, της αστάθειας καθώς και της ασυμπτωτικής ευστάθειας για τα σημεία ισορροπίας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3 Ένα σημείο ισορροπίας \bar{x} του παράγωγου συστήματος (1.1) θα λέγεται **ευσταθές**, αν για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ (το οποίο εξαρτάται μόνο από το ε) τέτοιο ώστε για κάθε x^0 για τα οποία ισχύει $\|x^0 - \bar{x}\| < \delta$, η λύση $\varphi(t, x^0)$ του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\nabla F(x), \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

είναι τέτοια ώστε $\|\varphi(t, x^0) - \bar{x}\| < \varepsilon$ για κάθε $t > 0$. Το σημείο ισορροπίας \bar{x} θα λέγεται **ασταθές** σημείο ισορροπίας για το (1.1), αν υπάρχει $n > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\delta > 0$, να υπάρχει x^0 με $\|x^0 - \bar{x}\| < \delta$ και $t_{x^0} > 0$, ώστε να ισχύει $\|\varphi(t_{x^0}, x^0) - \bar{x}\| = n$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4 Ένα σημείο ισορροπίας \bar{x} θα λέγεται **ασυμπτωτικά ευσταθές**, αν είναι ευσταθές και επιπλέον, αν υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $\|\varphi(t, x^0) - \bar{x}\| \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow +\infty$, για όλα τα x^0 για τα οποία ισχύει $\|x^0 - \bar{x}\| < r$.

Είναι γνωστό ότι το πρώτο βήμα για τη μελέτη της δυναμικής ενός συστήματος μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, γίνεται συνήθως μέσω του *θεωρήματος γραμμικοποίησης*. Σύμφωνα με το *θεώρημα γραμμικοποίησης*, αν ο πίνακας γραμμικοποίησης σε ένα δεδομένο σημείο ισορροπίας έχει ιδιοτιμές με μη-μηδενικό πραγματικό μέρος, τότε η δυναμική του αρχικού συστήματος κοντά στο σημείο ισορροπίας, περιγράφεται από αυτή του γραμμικοποιημένου συστήματος. Υπενθυμίζουμε ότι τα σημεία ισορροπίας τα οποία δίνουν πίνακα γραμμικοποίησης με ιδιοτιμές οι οποίες είναι μη-μηδενικές ή έχουν μη-μηδενικό πραγματικό μέρος αν

είναι μιγαδικές, λέγονται **υπερβολικά**. Η εφαρμογή του θεωρήματος γραμμικοποίησης, στο παράγωγο σύστημα (1.1), έχει ως συνέπεια το ακόλουθο Λήμμα.

ΛΗΜΜΑ 1.5 Ένα σημείο ισορροπίας του παράγωγου συστήματος (1.1), είναι υπερβολικό αν και μόνο αν τα κρίσιμα σημεία της F είναι μη εκφυλισμένα. Αν το \bar{x} είναι υπερβολικό σημείο ισορροπίας του παράγωγου συστήματος, (1.1), τότε το \bar{x} χαρακτηρίζεται ως προς την ευστάθεια, ως εξής:

- Το \bar{x} είναι ασταθής κόμβος αν και μόνο αν η F έχει μεμονωμένο μέγιστο στο \bar{x} .
- Το \bar{x} είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνο αν η F έχει μεμονωμένο ελάχιστο στο \bar{x} .
- Το \bar{x} είναι σαγματικό σημείο αν και μόνο αν η F έχει σαγματικό σημείο στο \bar{x} .

Σημειώνουμε ότι η ισοδυναμία εκφυλισμένου και υπερβολικού σημείου στο Λήμμα 1.5 είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος γραμμικοποίησης, γιατί ο πίνακας γραμμικοποίησης για το παράγωγο σύστημα (1.1) στο σημείο ισορροπίας \bar{x} , είναι ο Hessian πίνακας της F (HM): Πράγματι, από τον Ορισμό 1.1 του παράγωγου συστήματος, απαιτούμε η F , να είναι κλάσης C^2 . Κατά συνέπεια, από το θεώρημα εναλλαγής των παραγώγων για τις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, επιτρέπεται η εναλλαγή στη σειρά παραγωγίσης στον πίνακα (HM). Δηλαδή, ο πίνακας (HM) είναι συμμετρικός, για το σύστημα (HM), σε κάθε σημείο ισορροπίας \bar{x} και άρα έχει μόνον πραγματικές ιδιοτιμές. Επομένως ένα μη-εκφυλισμένο σημείο ισορροπίας του συστήματος (1.1) είναι υπερβολικό σημείο ισορροπίας.

Για το χαρακτηρισμό ως προς την ευστάθεια του μη-εκφυλισμένου σημείου ισορροπίας \bar{x} , σημειώνουμε ότι για την περίπτωση παραγώγων συστημάτων στο επίπεδο, δηλαδή στην περίπτωση $N = 2$, ο χαρακτηρισμός προκύπτει άμεσα από τα κριτήρια για την ύπαρξη μεγίστου, ελαχίστου ή σαγματικού σημείου για τη συνάρτηση $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Στην περίπτωση $N = 2$, ο Hessian πίνακας της F (HM), είναι ο 2×2 πίνακας

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(\bar{x}) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(\bar{x}) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(\bar{x}) \end{bmatrix}, \quad (HM2)$$

με $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(\bar{x}) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}(\bar{x})$, αφού η $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, είναι κλάσης C^2 . Όπως ήδη αναφέραμε,

ο πίνακας (HM2), είναι ο πίνακας γραμμικοποίησης για το παράγωγο σύστημα. Οι ιδιοτιμές του 2×2 πίνακα (HM2), είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$\lambda^2 - \text{tr} \mathbf{A} \lambda + \det \mathbf{A} = 0,$$

$$\text{tr} \mathbf{A} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(\bar{x}) + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(\bar{x}),$$

$$\det \mathbf{A} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(\bar{x}) \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(\bar{x}) - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(\bar{x}) \right)^2.$$

Κατά συνέπεια, ο χαρακτηρισμός ως προς την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας, προκύπτει από τα κριτήρια ύπαρξης τοπικού μεγίστου, ελαχίστου ή σαγματικού σημείου για τη συνάρτηση $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Τα παράγωγα συστήματα απολαμβάνουν πολύ σημαντικές ιδιότητες οι οποίες σχετίζονται με την περιγραφή της δυναμικής τους. Πριν αναφερθούμε σε αυτές, θα αναφέρουμε κάποιους βασικούς ορισμούς για τα οριακά σύνολα και την περίφημη αρχή αναλλοίωτου.

Υπενθυμίζουμε κατ' αρχήν, ότι αν είναι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (1.2), τότε η θετική τροχιά $\gamma^+(x_0)$, η αρνητική τροχιά $\gamma^-(x_0)$ και η τροχιά $\gamma(x_0)$ του x_0 , ορίζονται αντίστοιχα ως τα ακόλουθα υποσύνολα του \mathbb{R}^N ,

$$\gamma^+(x_0) = \bigcup_{t \in [0, \beta_{x_0})} \varphi(t; x_0),$$

$$\gamma^-(x_0) = \bigcup_{t \in (\alpha_{x_0}, 0]} \varphi(t; x_0),$$

$$\gamma(x_0) = \bigcup_{t \in (\alpha_{x_0}, \beta_{x_0})} \varphi(t; x_0).$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6 Ένα σημείο y είναι ω -οριακό σημείο της τροχιάς $\gamma(x^0)$ αν υπάρχει μια ακολουθία t_j με $t_j \rightarrow \beta_{x^0}$ καθώς $j \rightarrow +\infty$ τέτοιο ώστε $\varphi(t_j, x^0) \rightarrow y$ καθώς $j \rightarrow +\infty$. Με άλλα λόγια, το y είναι ω -οριακό σημείο της τροχιάς $\gamma(x^0)$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $t(\varepsilon)$ τέτοιο ώστε $\|y - \varphi(t(\varepsilon), x^0)\| < \varepsilon$. Το σύνολο όλων των ω -οριακών σημείων της τροχιάς $\gamma(x^0)$ καλείται ω -οριακό σύνολο της $\gamma(x^0)$ και συμβολίζεται $\omega(x^0)$.

Ένας ισοδύναμος (σημειώνουμε ότι η απόδειξη της ισοδυναμίας δεν είναι τετριμμένη) ορισμός του $\omega(x^0)$, είναι ο ορισμός του ως

$$\omega(x^0) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma^+(\varphi(t, x^0))}. \quad (\Omega\Sigma)$$

Με άλλα λόγια, από την κλειστότητα της θετικής τροχιάς, αφαιρούμε τα οριακά της σημεία.

Επίσης η έννοια του λεγόμενου α -οριακού συνόλου $\alpha(x^0)$ της τροχιάς $\gamma(x^0)$ μπορεί να οριστεί με παρόμοιο τρόπο. Ένα σημείο $y \in \alpha(x^0)$, αν υπάρχει μια ακολουθία t_j με $t_j \rightarrow \alpha_{x^0}$ καθώς $j \rightarrow +\infty$ τέτοιο ώστε $\varphi(t_j, x^0) \rightarrow y$ καθώς $j \rightarrow +\infty$. Ο αντίστοιχος ορισμός του $(\Omega\Sigma)$ για το α -οριακό σύνολο είναι

$$\alpha(x^0) = \bigcap_{t \leq 0} \overline{\varphi(t, x^0)}. \quad (\Lambda\Sigma)$$

Θα δώσουμε δυο χαρακτηριστικά παραδείγματα οριακών συνόλων.

Στο πρώτο παράδειγμα, θεωρούμε ένα ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας \bar{x} στον \square^N , δηλαδή τέτοιο ώστε $\varphi(t, x^0) \rightarrow \bar{x}$ καθώς $t \rightarrow +\infty$. Σ' αυτή την περίπτωση, μπορούμε να διαλέξουμε την ακολουθία $\{t_j\}$ να είναι μία αύξουσα ακολουθία με $t_j \rightarrow +\infty$ καθώς $j \rightarrow +\infty$, και να δείξουμε ότι $\bar{x} \in \omega(x^0)$.

Στο δεύτερο παράδειγμα, θεωρούμε την περίπτωση ενός σημείου το οποίο ανήκει σε περιοδική τροχιά. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι η $\varphi(t, x^0)$ είναι περιοδική λύση με (ελάχιστη) περίοδο T . Τότε γνωρίζουμε ότι η $\gamma(x^0)$ είναι κλειστή καμπύλη. Θα δούμε ότι $\omega(x^0) = \gamma(x^0)$.

Πράγματι αν $y \in \gamma(x^0)$, τότε υπάρχει $t_y \in [0, p)$ τέτοιο ώστε $y = \varphi(t_y, x^0)$. Αν τώρα θεωρήσουμε την ακολουθία $t_j = jT + t_y$, με $j = 1, 2, \dots$, τότε $y = \varphi(t_j, x^0)$ για όλα τα j , αφού η λύση είναι περιοδική. Επομένως $y \in \omega(x^0)$. Είναι φανερό ότι κανένα άλλο σημείο δεν ανήκει στο $\omega(x^0)$. Παρόμοια δείχνουμε ότι $\alpha(x^0) = \gamma(x^0)$.

Ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα το οποίο προσδιορίζει περιοχές του χώρου φάσεων όπου θα πρέπει να αναζητηθεί το ω -οριακό σύνολο και έχει άμεση εφαρμογή στα παράγωγα συστήματα, είναι η λεγόμενη αρχή του αναλλοίωτου (*invariance principle*). Πριν προχωρήσουμε στη διατύπωση αυτού του αποτελέσματος, θα χρειαστούμε ορισμένους βασικούς ορισμούς. Οι ορισμοί αυτοί αναφέρονται σε ένα γενικό σύστημα $\dot{x} = f(x)$, $f: \square^N \rightarrow \square^N$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.7 Ένα υποσύνολο U στον \square^N θα λέγεται θετικά αναλλοίωτο (αντίστοιχα αρνητικά αναλλοίωτο) από τη ροή φ με $\dot{x} = f(x)$, αν για κάθε $x^0 \in U$, η θετική τροχιά $\gamma^+(x^0)$ (αντίστοιχα η αρνητική τροχιά $\gamma^-(x^0)$) που διέρχεται από το x^0 ανήκει στο U .

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8 Ένα υποσύνολο M στον \square^N θα λέγεται αναλλοίωτο κάτω από την επίδραση της ροής φ με $\dot{x} = f(x)$, αν για κάθε $x^0 \in M$ η τροχιά $\gamma(x^0)$ που διέρχεται από το x^0 ανήκει στο M ή $\varphi(t, M) = M$ για κάθε $t \in \square$.

Χαρακτηριστικά παραδείγματα αναλλοίωτων συνόλων, είναι τα σημεία ισορροπίας και οι περιοδικές τροχιές. Το παρακάτω Λήμμα περιγράφει τις ιδιότητες που έχουν τα οριακά σύνολα αν οι τροχιές είναι φραγμένες.

ΛΗΜΜΑ 1.9 Αν η θετική τροχιά $\gamma^+(x^0)$ (αντίστοιχα, $\gamma^-(x^0)$) είναι φραγμένη, τότε το ω -οριακό σύνολο $\omega(x^0)$ (αντίστοιχα, $\alpha(x^0)$) είναι μη-κενό, συμπαγές και συνεκτικό αναλλοίωτο σύνολο.

Διατυπώνουμε τώρα την αρχή αναλλοίωτου της οποίας η απόδειξη οφείλεται στον J. P. La Salle (1960).

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.10 (Αρχή του αναλλοίωτου) Έστω V μια πραγματική συνάρτηση και έστω $U \equiv \{x \in \mathbb{R}^N : V(x) < \kappa\}$, με κ πραγματικός αριθμός. Υποθέτουμε ότι η V είναι συνεχής στο κάλλυμα \bar{U} του U και είναι C^1 στο U με $\dot{V}(x) \leq 0$ για κάθε $x \in U$. Θεωρούμε το υποσύνολο S του \bar{U} , $S \equiv \{x \in \bar{U} : \dot{V}(x) = 0\}$ και έστω M το μεγαλύτερο αναλλοίωτο σύνολο στο S . Τότε κάθε θετική τροχιά που ξεκινάει από το U και παραμένει φραγμένη έχει ω -οριακό σύνολο στο M .

Ως ένα παράδειγμα εφαρμογής της αρχής αναλλοίωτου, θα αναφέρουμε πρώτα ένα πόρισμα της, το οποίο σχετίζεται με τα συστήματα για τα οποία είναι δυνατόν να προσδιοριστεί μια συνάρτηση Liapunov. Για λόγους απλότητας θεωρούμε ότι το σύστημα $\dot{x} = f(x)$, $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, έχει την αρχή των αξόνων $\{0\}$, ως σημείο ισορροπίας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.11 Μια θετικά ορισμένη συνάρτηση $V : U \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, όπου U είναι μια ανοικτή περιοχή της αρχής $\{0\}$, λέγεται συνάρτηση Liapunov για το σύστημα $\dot{x} = f(x)$, αν $\dot{V}(x) \leq 0$, για κάθε $x \in U - \{0\}$. Αν $\dot{V}(x) < 0$ για κάθε $x \in U - \{0\}$, τότε η συνάρτηση V καλείται γνήσια συνάρτηση Liapunov.

Στην περίπτωση λοιπόν που η V είναι μια συνάρτηση Liapunov, προκύπτει από το Θεώρημα 1.10, το ακόλουθο πόρισμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1.12 Αν κάθε θετική τροχιά είναι φραγμένη και V είναι θετικά ορισμένη για $x \in U - \{0\}$, τότε $M = \{0\}$, η αρχή είναι ασυμπτωτικά ευσταθής και όλη η περιοχή U ανήκει στο πεδίο έλξης.

Στη γενικότερη περίπτωση όπου $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ είναι C^1 συνάρτηση τέτοια ώστε $V(x) \rightarrow +\infty$ καθώς $\|x\| \rightarrow +\infty$ και $\dot{V}(x) \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^N$, με εφαρμογή του Θεωρήματος 1.10, είναι δυνατόν να αποδειχθεί το ακόλουθο Θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.13 Αν $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ είναι C^1 συνάρτηση τέτοια ώστε $V(x) \rightarrow +\infty$ καθώς $\|x\| \rightarrow +\infty$ και $\dot{V}(x) \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^N$, τότε κάθε θετική τροχιά είναι

φραγμένη και το ω -οριακό σύνολο της ανήκει στο M , το μεγαλύτερο αναλλοίωτο σύνολο στο $\{x \in \mathbb{R}^N : \dot{V}(x) = 0\}$.

Η τελευταία εφαρμογή του Θεωρήματος 1.10 αναφέρεται στα παράγωγα συστήματα της μορφής (1.1). Περιγράφει την βασικότερη ιδιότητα που έχουν τα παράγωγα συστήματα (1.1), σχετικά με την δυναμική των φραγμένων λύσεων τους.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.14 A. Αν $\gamma^+(x^0)$ είναι φραγμένη θετική τροχιά του παράγωγου συστήματος, τότε το ω -οριακό σύνολο $\omega(x^0)$ ανήκει στο σύνολο των σημείων ισορροπίας του παράγωγου συστήματος. Αν τα σημεία ισορροπίας είναι μεμονωμένα το ω -οριακό σύνολο είναι ένα σημείο ισορροπίας. Επιπλέον, αν $F(x) \rightarrow +\infty$ καθώς $\|x\| \rightarrow +\infty$, τότε κάθε θετική τροχιά του παράγωγου συστήματος είναι φραγμένη.

B. Αν $\gamma^-(x^0)$ είναι φραγμένη αρνητική τροχιά του παράγωγου συστήματος, τότε το α -οριακό σύνολο $\alpha(x^0)$ ανήκει στο σύνολο των σημείων ισορροπίας του παράγωγου συστήματος. Αν τα σημεία ισορροπίας είναι μεμονωμένα, τότε το α -οριακό σύνολο έχει μοναδικό σημείο ισορροπίας. Επιπλέον, αν $F(x) \rightarrow -\infty$ καθώς $\|x\| \rightarrow +\infty$ τότε κάθε αρνητική τροχιά του παράγωγου συστήματος είναι φραγμένη.

Σχέδιο για την απόδειξη: Θα δώσουμε την ιδέα της απόδειξης, για την περίπτωση των θετικών τροχιών. Θα συμβολίζουμε με E , το σύνολο των σημείων ισορροπίας του συστήματος. Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο της (1.1) με την $x(t)$, βλέπουμε ότι

$$-\|\dot{x}\|^2 = \dot{F}(x). \quad (1.2)$$

Από την (1.2), προκύπτει ότι $\dot{F}(x) \leq 0$, και με ολοκλήρωση στο αυθαίρετο διάστημα $[0, t]$, βρίσκουμε ότι $F(x(t)) \leq F(x(0)) = F(x_0)$ για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Επομένως οι θετικές τροχιές $\gamma^+(x_0)$ είναι φραγμένες για κάθε αρχική συνθήκη $x(t) = x_0 \in \mathbb{R}^N$.

Επειδή η συνάρτηση $F: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, είναι κλάσης C^2 , και επειδή από την (1.2), $\dot{F}(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^N$, προκύπτει από την εφαρμογή του Θεωρήματος 1.10, ότι κάθε θετική τροχιά που ξεκινάει από το U έχει ω -οριακό σύνολο στο M , το μεγαλύτερο αναλλοίωτο σύνολο στο $S \equiv \{x \in \bar{U} : \dot{F}(x) = 0\}$. Από την εξίσωση (1.2), μπορούμε να προσδιορίσουμε το σύνολο S : Αν $\dot{F}(x) = 0$, τότε από την (1.2) έχουμε $\|\dot{x}\|^2 = 0$ το οποίο σημαίνει ότι $\dot{x} = 0$. Άρα από την εξίσωση (1.1) $\nabla F(x) = 0$, και κατά συνέπεια το σημείο x , είναι σημείο ισορροπίας, δηλαδή $x \in E$. Με παρόμοιο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί ότι αν $x \in E$ τότε $x \in S$. Άρα $S = E$. Επομένως και το M αποτελείται από σημεία ισορροπίας. Αφού το ω -οριακό σύνολο, ανήκει στο M και το ω -οριακό σύνολο, αποτελείται από σημεία ισορροπίας. Επειδή το ω -οριακό σύνολο είναι συνεκτικό, θα πρέπει να είναι ένα σημείο ισορροπίας. Με παρόμοιο τρόπο, αποδεικνύεται και η περίπτωση για το α -οριακό σύνολο. ■

Θα δώσουμε δυο παραδείγματα παραγώγων συστημάτων. Το πρώτο παράδειγμα, αποτελεί ένα χαρακτηριστικό τύπο συστήματος, το οποίο εμφανίζεται στη μαθηματική βιολογία ή τη χημική κινητική.

Το σύστημα $\dot{x} = -\nabla F(x)$, για τη συνάρτηση $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, με

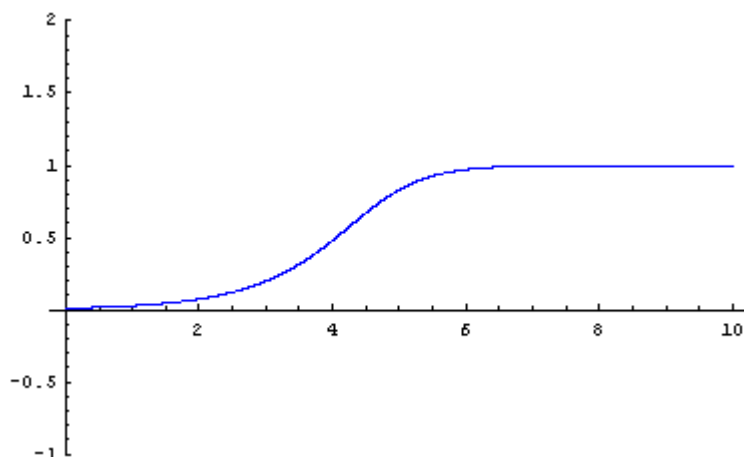
$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{4}(x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2 + 2x_2^2 - 8x_1x_2),$$

Είναι το παράγωγο σύστημα

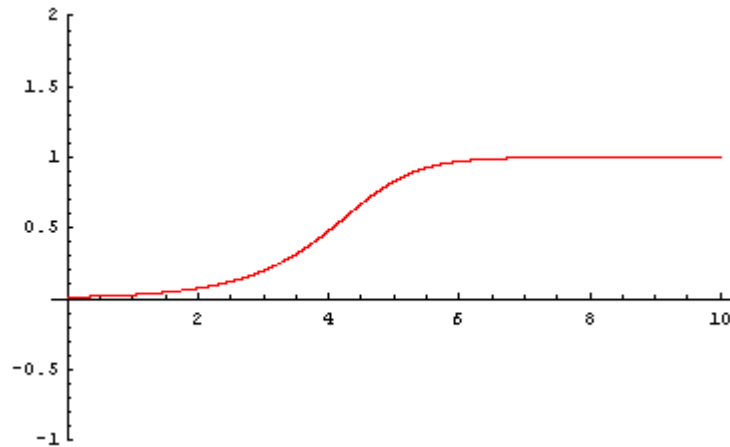
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2(x_2 - x_1) + x_1(1 - x_1^2), \\ \dot{x}_2 &= -2(x_2 - x_1) + x_2(1 - x_2^2). \end{aligned} \tag{GS}$$

Συστήματα αυτού του τύπου, περιγράφουν για παράδειγμα την εξέλιξη δυο πληθυσμών ή των συγκεντρώσεων x_1, x_2 δυο ουσιών οι οποίες συμμετέχουν σε μια χημική αντίδραση.

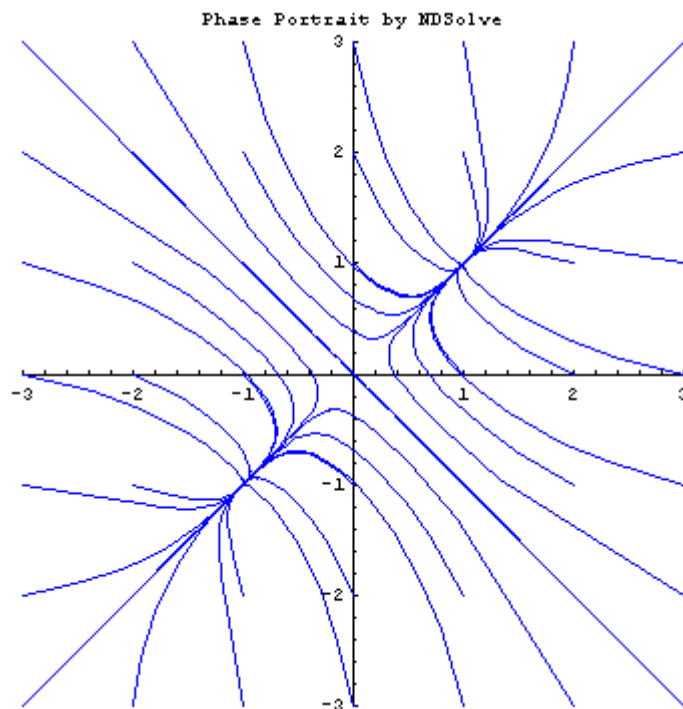
Τα σημεία ισορροπίας της F είναι $(0,0)$, $(1,1)$ και $(-1,-1)$, όλα είναι μη εκφυλισμένα και άρα υπερβολικά. Είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι η αρχή $(0,0)$ είναι ασταθές σαγματικό σημείο. Τα σημεία ισορροπίας $(1,1)$ και $(-1,-1)$, είναι ασυμπτωτικά ευσταθή. Επιπλέον όλες οι θετικές τροχιές είναι φραγμένες γιατί $F(x) \rightarrow +\infty$ καθώς $\|x\| \rightarrow +\infty$. Κατά συνέπεια, το ω-οριακό σύνολο για κάθε θετική τροχιά είναι ένα από τα τρία σημεία ισορροπίας, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.14.



Εικόνα 1. Η λύση $x_1(t)$ για το σύστημα (GS1) με αρχική συνθήκες $x_1(0) = 0.01$, $x_2(0) = 0.01$. Αστάθεια του σαγματικού σημείου $(0,0)$. Η λύση του συστήματος, συγκλίνει στο ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας $(1,1)$. Το σύστημα επιλύθηκε αριθμητικά με το MATHEMATICA.



Εικόνα 2. Η λύση $x_2(t)$ για το σύστημα (GS1) με αρχική συνθήκες $x_1(0) = 0.01$, $x_2(0) = 0.01$. Αστάθεια του σαγματικού σημείου $(0,0)$. Η λύση του συστήματος συγκλίνει στο ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας $(1,1)$.



Εικόνα 3. Το πορτραίτο φάσεων για το σύστημα (GS1). Τα σημεία ισορροπίας $(1,1)$ και $(-1,-1)$ είναι ευσταθείς κόμβοι. Η αρχή $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο. Το ω -οριακό σύνολο κάθε θετικής τροχιάς, είναι ένα από τα τρία σημεία ισορροπίας.

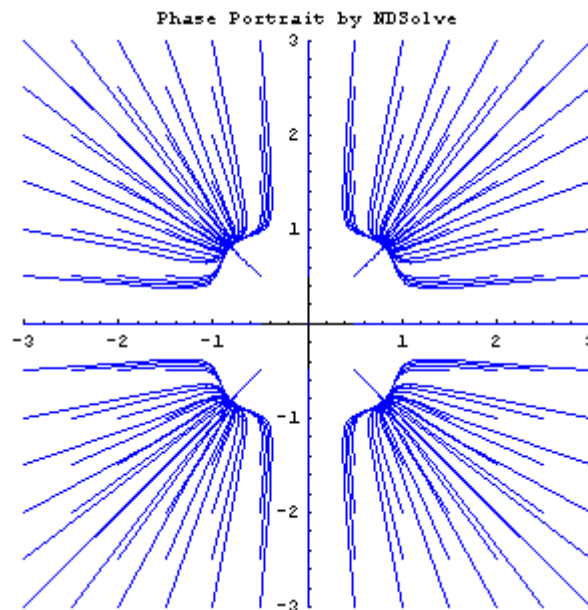
Ένα δεύτερο παράδειγμα είναι το σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1^3 - bx_1x_2^2 + x_1, \\ \dot{x}_2 &= -x_2^3 - bx_1^2x_2 + x_2. \end{aligned} \tag{GS2}$$

με $0 < b < 1$ παράμετρο. Αυτό είναι το παράγωγο σύστημα το οποίο προκύπτει από τη συνάρτηση

$$F(x_1, x_2) = \frac{x_1^4}{4} + \frac{b}{2}x_1^2x_2^2 + \frac{x_2^4}{4} - \frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{2}.$$

Είναι δυνατόν ναδειχθεί ότι τα σημεία ισορροπίας της F είναι εννέα. Όλες οι θετικές τροχιές του παράγωγου συστήματος είναι φραγμένες γιατί $F(x) \rightarrow +\infty$ καθώς $\|x\| \rightarrow +\infty$. Από το Θεώρημα 1.14, κάθε λύση τείνει σ' ένα από τα εννέα σημεία ισορροπίας καθώς $t \rightarrow +\infty$. Με το MATHEMATICA, σχεδιάστηκε το πορτραίτο φάσεων για το σύστημα (GS2), το οποίο παρουσιάζεται στις εικόνες 3 και 4.

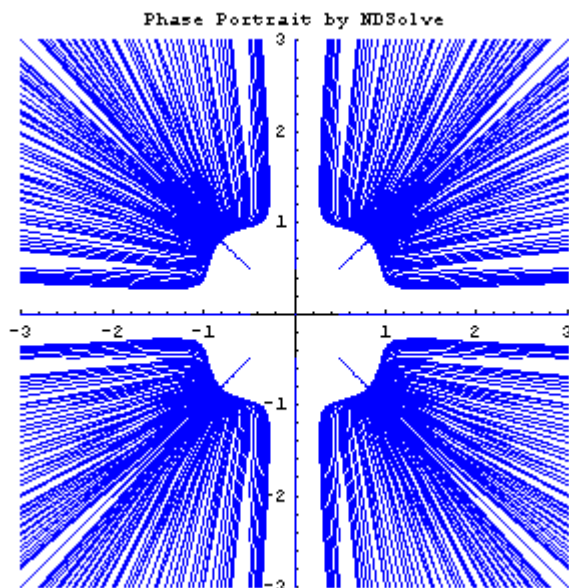


Εικόνα 3. Το πορτραίτο φάσεων για το σύστημα (GS2). Υπάρχουν 9 σημεία ισορροπίας. Από τα εννέα σημεία ισορροπίας, τα τέσσερα είναι ασυμπτωτικά ευσταθείς κόμβοι. Τα υπόλοιπα πέντε τα οποία βρίσκονται στους άξονες και η αρχή, είναι ασταθή.

Καθώς στο επόμενο κεφάλαιο, θα μελετήσουμε παράγωγα συστήματα για τα οποία οι μη-γραμμικότητες είναι αναλυτικές συναρτήσεις, υπενθυμίζουμε τον ορισμό της πραγματικής αναλυτικής συνάρτησης.

Από τις πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής, γνωρίζουμε ότι για μια αυθαίρετη συνάρτηση $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ορίζεται σε ένα ανοικτό διάστημα I και έχει συνεχείς παραγώγους αυθαίρετης τάξης (γράφουμε C^∞), είναι δυνατόν η σειρά Taylor γύρω από ένα σημείο $x_0 \in I$ να μην συγκλίνει, ή και αν συγκλίνει, να μην συγκλίνει στην f .

Οι συναρτήσεις f κλάσης C^∞ για τις οποίες η σειρά Taylor γύρω από ένα σημείο $x_0 \in I$, συγκλίνει στην f λέγεται αναλυτική. Η έννοια της αναλυτικής συνάρτησης, επεκτείνεται και για τις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.



Εικόνα 4. Περισσότερες τροχιές για το σύστημα (GS2).

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.15 Υποθέτουμε ότι Ω είναι ανοικτό και συνεκτικό χωρίο του \mathbb{R}^N και $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$, μια συνάρτηση κλάσης $C^\infty(\Omega)$. Η συνάρτηση F καλείται αναλυτική στο x_0 , αν η σειρά Taylor γύρω από το x_0

$$F(x) = \sum_{|a| \geq 0} \frac{1}{|a|!} D_a f(x_0) (x - x_0)^a,$$

συγκλίνει στην $F(x)$. Αν αυτό για κάθε $x_0 \in \Omega$, τότε η συνάρτηση λέγεται αναλυτική στο Ω .

Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$$F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 1},$$

Μπορεί ναδειχθεί ότι είναι αναλυτική στο \mathbb{R}^n , εκτός από τη μοναδιαία σφαίρα $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$. Σημειώνουμε ότι αθροίσματα, γινόμενα και σύνθεση αναλυτικών συναρτήσεων είναι αναλυτική συνάρτηση. Ο λόγος αναλυτικών συναρτήσεων είναι αναλυτική συνάρτηση εκτός από τα πιθανά σημεία μηδενισμού του παρονομαστή. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αναλυτικών συναρτήσεων αποτελούν οι πολυωνυμικές συναρτήσεις n -μεταβλητών.

Κεφάλαιο 2

Ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων παραγώγων συστημάτων δεύτερης τάξης με αναλυτική μη-γραμμικότητα

Η ενότητα αυτή είναι αφιερωμένη στο βασικό θέμα μελέτης της εργασίας, την ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων παραγώγων συστημάτων (gradient systems) δεύτερης τάξης. Η ενότητα αυτή βασίζεται κατά κύριο λόγο στη μελέτη των A. Haraux και M. A. Jendoubi [HJ], για παράγωγα συστήματα $2^{\text{ης}}$ τάξης της μορφής

$$U'' + g(U_t) = \nabla F(U), \quad t \geq 0,$$

όπου $F: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, είναι αναλυτική συνάρτηση και $g: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ είναι μια Lipschitz και πιεστική (coercive) συνάρτηση, τέτοια ώστε $g(0) = 0$.

Στόχος της μελέτης, είναι η διερεύνηση κατάλληλων συνθηκών για τη σύγκλιση φραγμένων λύσεων του συστήματος (2.1), σε κάποιο σημείο ισορροπίας. Η απόδειξη ενός τέτοιου αποτελέσματος είναι ιδιαίτερα σημαντική καθώς ουσιαστικά, αποτελεί αποτέλεσμα ολικής μη-γραμμικής ευστάθειας των λύσεων ισορροπίας: δηλαδή το αποτέλεσμα της σύγκλισης των φραγμένων λύσεων της (2.1) σε σημείο ισορροπίας, ισχύει για οποιαδήποτε αρχικά δεδομένα που οδηγούν σε φραγμένες λύσεις της (2.1) και επιπλέον, δεν προκύπτει από συνθήκες και ανάλυση γραμμικοποίησης. Η σημασία του αποτελέσματος είναι επίσης μεγάλη γιατί καλύπτει και την περίπτωση η οποία δεν καλύπτεται από το Θεώρημα 1.14: Για την εφαρμογή του Θεωρήματος 1.14, απαιτείται τα σημεία ισορροπίας να είναι μεμονωμένα. Το Θεώρημα 2.1 που θα παρουσιάσουμε, καλύπτει και την περίπτωση που το σύστημα έχει ένα συνεχές από σημεία ισορροπίας, δηλαδή το σύνολο των σημείων ισορροπίας δεν είναι διακριτό.

Στην εργασία αυτή πραγματοποιήσαμε επίσης αριθμητικές εξομοιώσεις με χρήση του πακέτου MATHEMATICA, οι οποίες βρέθηκαν σε απόλυτη συμφωνία με τα θεωρητικά αποτελέσματα.

2.1 Εισαγωγή- σύντομη αναδρομή σε ορισμένα γνωστά αποτελέσματα

Σ' αυτή την εργασία, θα μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά (καθώς $t \rightarrow +\infty$), των φραγμένων ημιτροχιών του δυναμικού συστήματος, που ορίζεται από το μη-γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης της μορφής,

$$U'' + g(U_t) = \nabla F(U), \quad t \geq 0, \tag{2.1}$$

όπου $U = (u_1, u_2, \dots, u_N)$, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_N} \right)$.

Για τη μη-γραμμικότητα $F: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, υποθέτουμε αρχικά για την εισαγωγική αυτή συζήτηση, ότι είναι $C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, με τις παραγώγους να είναι φραγμένες.

Για τη συνάρτηση $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, η οποία έχει το ρόλο γραμμικής, ή πιθανόν μη-γραμμικής απόσβεσης (π.χ. τριβής), υποθέτουμε ότι είναι μια τοπικά Lipschitz, συνεχής και θετικά ορισμένη συνάρτηση.

Τα πρώτα βασικά αποτελέσματα που σχετίζονται με τη σύγκλιση των φραγμένων ημιτροχιών παραγώγων συστημάτων, σχετίζονται με το μη-γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης

$$U_t = \nabla F(U), \quad t \geq 0. \quad (2.2)$$

Αναφέρουμε το σύγγραμμα των J. Palis και W. de Melo [PM], όπου γίνεται εκτεταμένη μελέτη του συστήματος (2.2), σχετικά με τη σύγκλιση των φραγμένων λύσεων του σε σημεία ισορροπίας: Πρώτα, με χρήση της αρχής αναλλοιώτου (βλ. Θεώρημα 1.10) είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι $U_t \rightarrow 0$, καθώς $t \rightarrow \infty$. Στη συνέχεια αποδεικνύεται ότι η διάσταση του συστήματος είναι καθοριστικής σημασίας. Αν $N = 1$, τότε αποδεικνύεται ότι κάθε φραγμένη λύση συγκλίνει σε σημείο ισορροπίας. Στην περίπτωση όμως $N = 2$, η σύγκλιση αυτή μπορεί και να μην συμβαίνει. Στο [PM], περιγράφονται παραδείγματα συστημάτων της μορφής (2.2), με πολύ λίγες μη-γραμμικότητες (κλάσης ακόμη και C^∞) όπου η σύγκλιση σε σημείο ισορροπίας αποτυγχάνει.

Μια πολύ σημαντική συνεισφορά σε αυτή την κατεύθυνση, δηλαδή της διερεύνησης των κατάλληλων συνθηκών για τη μη-γραμμικότητα οι οποίες να εξασφαλίζουν την σύγκλιση των φραγμένων λύσεων του (2.2) σε σημείο ισορροπίας, οφείλεται στον L. Simon [LS83]. Στην εργασία [LS], αποδεικνύεται ότι αν η F είναι επιπλέον, αναλυτική, τότε κάθε φραγμένη λύση του (2.2) συγκλίνει σε σημείο ισορροπίας. Η απόδειξη του αποτελέσματος βασίζεται σε μια πολύ βασική ανισότητα, την ανισότητα του Lojasiewicz [SL65]. Η ανισότητα του Lojasiewicz, η οποία θα αναφερθεί στη συνέχεια, συνδέει με ένα πολύ ενδιαφέροντα τρόπο τη νόρμα του $\nabla F(U)$ με το δυναμικό $F(U)$, με την προϋπόθεση ότι η F είναι αναλυτική.

Σχετικά με το σύστημα (2.1), για την περίπτωση $N=1$, με ικανοποιητικά λίγες μη-γραμμικότητες, το αποτέλεσμα της σύγκλισης οφείλεται στον A. Haraux [H86]. Στην περίπτωση συστημάτων της μορφής (2.1) αλλά μεγαλύτερης διάστασης $N \geq 2$, αναμένεται να υπάρχουν αντιπαραδείγματα, σε αναλογία με αυτά για το σύστημα πρώτης τάξης (2.2), τα οποία περιγράφονται στο [PM].

Λαμβάνοντας λοιπόν υπόψη το αποτέλεσμα του L. Simon [LS83] για το σύστημα πρώτης τάξης (2.2) με την υπόθεση της αναλυτικής συνάρτησης, είναι ενδιαφέρον το ερώτημα, του κατά πόσον το αποτέλεσμα [LS83], μπορεί να γενικευθεί και για το σύστημα δεύτερης τάξης (2.1). Το ερώτημα αυτό αποτέλεσε και τον κύριο στόχο της εργασίας [H], η οποία παρουσιάζεται εδώ. Θα πρέπει επίσης να σημειώσουμε ότι το αποτέλεσμα που θα παρουσιαστεί, αποτελεί μια σημαντική γενίκευση, καθώς αφορά την περίπτωση $N \geq 2$, κάτω φυσικά από τον περιορισμό της αναλυτικότητας για τη μη-γραμμικότητα.

2.2 Το Θεώρημα της σύγκλισης των A. Haraux και M. Jendoubi

Κάτω από κατάλληλες συνθήκες για τις μη-γραμμικότητες g και F , θα δούμε ότι κάθε φραγμένη ημιτροχιά $(U(t), U_t(t))$ του δυναμικού συστήματος που ορίζεται από το (2.1) είναι τέτοια ώστε :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \{ \|U_t\| + \text{dist}(U(t), \mathfrak{S}) \} = 0.$$

Με \mathfrak{S} συμβολίζουμε το σύνολο

$$\mathfrak{S} = \{ \alpha \in \square^N : \nabla F(\alpha) = 0 \}. \quad (2.3)$$

Με $\langle x, y \rangle$, συμβολίζουμε το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $x, y \in \square^N$ και με $\|x\|$, συμβολίζουμε την (Ευκλείδεια) νόρμα του x στο \square^N .

Η υπόθεση της αναλυτικότητας, είναι κρίσιμη, καθώς θα μας επιτρέψει να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα του *Lojasiewicz*, η οποία διατυπώνεται στο

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1 (Θεώρημα *Lojasiewicz*) Έστω $F: \square^N \rightarrow \square$ μία αναλυτική συνάρτηση σε μια περιοχή του σημείου a στο \square^N . Τότε υπάρχουν $\sigma > 0$ και $0 < \theta < \frac{1}{2}$ τέτοια ώστε

$$\|\nabla F(x)\| \geq |F(x) - F(\alpha)|^{1-\theta}, \quad \forall x \in \square^N : \|x - \alpha\| < \sigma. \quad (2.4)$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.1, οφείλεται στον S. *Lojasiewicz* [SL65]. Με χρήση λοιπόν της ανισότητας (2.3), θα αποδείξουμε το βασικό αποτέλεσμα της σύγκλισης, για το σύστημα (2.1), δηλαδή το

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2 Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $F: \square^N \rightarrow \square$, είναι αναλυτική και ότι η συνάρτηση $g: \square^N \rightarrow \square^N$ ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες

$$\langle g(u), u \rangle \geq c \|u\|^2, \quad \forall u \in \square^N, \quad (2.5)$$

$$\|g(u)\| \leq C \|u\|, \quad \forall u \in \square^N, \quad (2.6)$$

για κάποιες σταθερές $0 < c \leq C$. Αν $U: \square^+ \rightarrow \square^N$ είναι μια $C^1(\square^+, \square^N)$, φραγμένη λύση του προβλήματος (2.1), τότε υπάρχει $\alpha \in \mathfrak{S}$ τέτοιο ώστε

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \{ \|U_t(t)\| + \|U(t) - \alpha\| \} = 0. \quad (2.7)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Για διευκόλυνση της παρουσίασης, θα χωρίσουμε την απόδειξη σε διάφορα βήματα (το τέλος κάθε βήματος συμβολίζεται με \square).

Για την απόδειξη, θα θεωρούμε ότι τα αρχικά δεδομένα $(U_0, U_1) \in \square^N \times \square^N$, είναι τέτοια ώστε η λύση του συστήματος (2.1), $U: \square^+ \rightarrow \square^N$, να είναι $C^1(\square^+, \square^N)$, φραγμένη.

Βήμα 1 (Σύγκλιση για την $\|U_t(t)\|$). Σε αυτό το βήμα, θα δείξουμε ότι

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|U_t(t)\| = 0.$$

Παίρνουμε πρώτα το εσωτερικό γινόμενο της εξίσωσης (2.1) με την U_t και βρίσκουμε ότι

$$\langle U_u(t), U_t \rangle + \langle g(U_t(t)), U_t(t) \rangle = \langle \nabla F(U(t)), U_t(t) \rangle,$$

η οποία ισοδύναμα γράφεται ως

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U_t(t)\|^2 + \langle g(U_t(t)), U_t(t) \rangle = \frac{d}{dt} F(U(t)) \quad (2.8)$$

Ολοκληρώνοντας την (2.8) στο διάστημα $[0, t)$, για αυθαίρετο $0 \leq t < +\infty$ βρίσκουμε ότι

$$\frac{1}{2} \|U_t(t)\|^2 - \frac{1}{2} \|U_t(0)\|^2 + \int_0^t \langle g(U_s), U_s \rangle ds = F(U(t)) - F(U(0)). \quad (2.9)$$

Παρατηρούμε στη συνέχεια ότι η συνάρτηση $\rho(t) := \|U_t(t)\|^2$, είναι ομοιόμορφα συνεχής στο \square^+ : Η $C^1(\square^+, \square^N)$ λύση του προβλήματος (2.1), $U: \square^+ \rightarrow \square^N$, είναι φραγμένη. Δηλαδή $U, U_t \in L^\infty(\square^+, \square^N)$, που σημαίνει ότι υπάρχουν σταθερές $K_1, K_2 > 0$, τέτοιες ώστε

$$\|U(t)\| \leq K_1, \quad \|U_t(t)\| \leq K_2, \quad \text{για κάθε } t \in \square^+. \quad (2.10)$$

Επίσης, από τις υποθέσεις συνέχειας και αναλυτικότητας για τις συναρτήσεις g και F αντίστοιχα και την εξίσωση (2.1),

$$U_u = \nabla F(U) - g(U_t). \quad (2.11)$$

εξάγουμε το συμπέρασμα ότι και η U_u είναι φραγμένη, δηλαδή $U_u \in L^\infty(\square^+, \square^N)$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει σταθερά $K > 0$, τέτοια ώστε

$$\|U_u(t)\| \leq K, \quad \text{για κάθε } t \in \square^+. \quad (2.12)$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση $\rho(t) := \|U_t(t)\|^2$, έχουμε ότι για κάθε $t_1, t_2 \in \square^+$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $t_1 < t_2$), υπάρχει $t_1 < \xi < t_2$ έτσι ώστε

$$|\rho(t_1) - \rho(t_2)| \leq |\rho'(\xi)| |t_1 - t_2|. \quad (2.13)$$

Όμως για την παράγωγο $\rho'(t) = \frac{d}{dt} \|U_t(t)\|^2$, έχουμε

$$\rho'(t) = \frac{d}{dt} \|U_t(t)\|^2 = \frac{d}{dt} \langle U_t(t), U_t(t) \rangle = 2 \langle U_{tt}(t), U_t(t) \rangle$$

και από την ανισότητα *Cauchy-Swartz*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \text{ για κάθε } x, y \in \square^N \quad (CS)$$

και την (2.10), έχουμε

$$|\rho'(\xi)| = 2 |\langle U_{tt}(\xi), U_t(\xi) \rangle| \leq \|U_{tt}(\xi)\| \cdot \|U_t(\xi)\| \leq K_3 K_2 := M. \quad (2.14)$$

Δηλαδή, σύμφωνα με την (2.14), και αφού το $\xi \in \square^+$ είναι αυθαίρετο, η $\rho'(t)$ είναι φραγμένη. Άρα από την (2.13) και (2.14), καταλήγουμε στην ανισότητα

$$|\rho(t_1) - \rho(t_2)| = \left| \|U_t(t_1)\|^2 - \|U_t(t_2)\|^2 \right| \leq M |t_1 - t_2|,$$

που δείχνει ότι η $\rho(t) := \|U_t(t)\|^2$, είναι Lipschitz και επομένως ομοιόμορφα συνεχής στο \square^+ . Συνδυάζοντας την ομοιόμορφη συνέχεια $\rho(t) := \|U_t(t)\|^2$ με τη (2.9), προκύπτει ότι η $\rho(t) := \|U_t(t)\|^2$ είναι ολοκληρώσιμη στο \square^+ (δηλαδή $\rho(t) := \|U_t(t)\|^2 \in L^1(\square^+)$).

Επομένως

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|U_t(t)\| = 0. \quad (2.15)$$

□

Το ω -οριακό σύνολο $\omega(U_0, U_1)$, ορίζεται ως

$$\omega(U_0, U_1) = \left\{ \alpha \in \square^N, \exists t_n \rightarrow \infty, U(t_n) \rightarrow \alpha, t \rightarrow \infty \right\}. \quad (2.16)$$

Γνωρίζουμε από το Κεφάλαιο 1-Λήμμα 1.9 ότι το $\omega(U_0, U_1)$ είναι μη-κενό συμπαγές, συνεκτικό σύνολο. Από την (2.15), την εξίσωση (2.1) (σκεφτόμενοι τον ορισμό των σημείων ισορροπίας) και τον ορισμό του συνόλου \mathfrak{I} που δίνεται στη (2.3), προκύπτει ότι $\omega(U_0, U_1) \subset \mathfrak{I}$.

Έστω $\alpha \in \omega(U_0, U_1)$. Χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητής $U = \alpha + V$ και θεωρώντας τη συνάρτηση

$$H(V) = F(\alpha + V) - F(\alpha), \quad (2.17)$$

παρατηρούμε ότι

$$\nabla H(V) = \nabla F(\alpha + V) - \nabla F(\alpha) = \nabla F(\alpha + V) = \nabla F(U). \quad (2.18)$$

δηλαδή

$$\nabla H(V) = \nabla F(U). \quad (2.20)$$

Δηλαδή βλέπουμε από τις (2.17)-(2.20) ότι χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\alpha = 0$ και $F(0) = 0$, $\nabla F(0) = 0$.

Στη συνέχεια, για αυθαίρετο $\varepsilon > 0$, ορίζουμε για κάθε $t \in \mathbb{R}^+$ τη συνάρτηση

$$E(t) = \frac{1}{2} \|U_t(t)\|^2 - F(U(t)) - \varepsilon \langle \nabla F(U(t)), U_t(t) \rangle \quad (2.21)$$

Θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε διαφορικές ανισότητες για την συνάρτηση $E(t)$.

Βήμα 2 (*1^η ανισότητα για την $E'(t)$*). Θα υπολογίσουμε την παράγωγο της $E(t)$ ως προς t : βλέπουμε πρώτα ότι η (2.8), μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \|U_t(t)\|^2 - F(U(t)) \right\} = - \langle g(U_t(t)), U_t(t) \rangle. \quad (2.22)$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας και τον κανόνα παραγωγίσης για το εσωτερικό γινόμενο,

$$\frac{d}{dt} \langle \nabla F(U(t)), U_t(t) \rangle = \langle \nabla^2 F(U) \cdot U_t, U_t \rangle + \langle \nabla F(U), U_{tt} \rangle, \quad (2.23)$$

Υπενθυμίζουμε στο σημείο αυτό για την (2.23), ότι αν $F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, είναι διαφορίσιμη συνάρτηση στο ανοικτό $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ και η

$$\nabla F(U) = \left(\frac{\partial F(U)}{\partial u_1}, \frac{\partial F(U)}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial F(U)}{\partial u_N} \right),$$

είναι επίσης διαφορίσιμη στο σημείο $U \in \Omega$, τότε η δεύτερη παράγωγος της F στο σημείο U , δίνεται από τον πίνακα του Hesse $\nabla^2 F(U)$, (Hessian matrix)

$$\nabla^2 F(U) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F(U)}{\partial u_1^2} & \frac{\partial F(U)}{\partial u_1 \partial u_2} & \dots & \frac{\partial F(U)}{\partial u_1 \partial u_N} \\ \frac{\partial F(U)}{\partial u_2 \partial u_1} & \frac{\partial F(U)}{\partial u_2^2} & \dots & \frac{\partial F(U)}{\partial u_2 \partial u_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F(U)}{\partial u_N \partial u_1} & \frac{\partial F(U)}{\partial u_N \partial u_2} & \dots & \frac{\partial F(U)}{\partial u_N^2} \end{bmatrix}.$$

Υπενθυμίζουμε επίσης ότι, ότι αν η $F : \Omega \subseteq \square^N \rightarrow \square$, είναι C^2 -τάξης στο Ω , τότε ο πίνακας $\nabla^2 F(U)$, είναι συμμετρικός. Με την υπενθύμιση αυτή και τις σχέσεις (2.21), (2.22) και (2.23), βρίσκουμε ότι η παράγωγος ως προς t , της $E(t)$, είναι

$$E'(t) = -\langle g(U_t), U_t \rangle - \varepsilon \langle \nabla^2 F(U) \cdot U_t, U_t \rangle - \varepsilon \langle \nabla F(U), U_t \rangle, \text{ για κάθε } t \geq 0. \quad (2.24)$$

Εξετάζουμε τώρα τον τελευταίο όρο στο δεξί μέλος της (2.24). Χρησιμοποιώντας την (2.11), την ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου $\langle x, ay + bz \rangle = a \langle x, y \rangle + b \langle x, z \rangle$, για κάθε $x, y \in \square^N$ και $a, b \in \square$, και το ότι $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$, για κάθε $x \in \square^N$, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} -\varepsilon \langle \nabla F(U), U_t \rangle &= -\varepsilon \langle \nabla F(U), \nabla F(U) - g(U_t) \rangle \\ &= -\varepsilon \langle \nabla F(U), \nabla F(U) \rangle + \varepsilon \langle \nabla F(U), g(U_t) \rangle \\ &= -\varepsilon \|\nabla F(U)\|^2 + \varepsilon \langle \nabla F(U), g(U_t) \rangle \end{aligned} \quad (2.25)$$

Επίσης, από την ανισότητα Cauchy-Swartz (CS), βρίσκουμε για τον τελευταίο όρο στο δεξί μέλος της (2.25), ότι

$$\varepsilon \langle \nabla F(U), g(U_t) \rangle \leq \varepsilon \|\nabla F(U)\| \cdot \|g(U_t)\| \quad (2.26)$$

Επομένως, από τις (2.25) και (2.26), βρίσκουμε ότι για τον τελευταίο όρο στο δεξί μέλος της (2.24), ισχύει η ανισότητα

$$-\varepsilon \langle \nabla F(U), U_t \rangle \leq -\varepsilon \|\nabla F(U)\|^2 + \varepsilon \|\nabla F(U)\| \cdot \|g(U_t)\|. \quad (2.27)$$

Εισάγοντας την ανισότητα (2.27) στην (2.24), βρίσκουμε για την $E'(t)$, μια πρώτη ανισότητα

$$E'(t) \leq -\langle g(U_t), U_t \rangle - \varepsilon \langle \nabla^2 F(U) \cdot U_t, U_t \rangle - \varepsilon \|\nabla F(U)\|^2 + \varepsilon \|\nabla F(U)\| \|g(U_t)\|. \quad (2.28)$$

□

Βήμα 3 (2^η ανισότητα για την $E'(t)$). Θα εργαστούμε στη συνέχεια για τον δεύτερο όρο της ανισότητας (2.28). Υπενθυμίζουμε στο σημείο αυτό ότι αν $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ πίνακας και $x \in \mathbb{R}^N$, διάνυσμα, τότε για τη νόρμα του διανύσματος $A \cdot x$, ισχύει

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|, \quad (2.29)$$

όπου $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, είναι η νόρμα πίνακα, που επάγεται από την νόρμα $\|\cdot\|$, του \mathbb{R}^N .

Για τον δεύτερο όρο της (2.28), κατ' αρχήν παρατηρούμε εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy-Swartz (CS), ότι

$$\varepsilon \left| \langle \nabla^2 F(U) U_t, U_t \rangle \right| \leq \varepsilon \|\nabla^2 F(U) U_t\| \cdot \|U_t\| \quad (2.30)$$

Εφαρμόζοντας την (2.29), για το διάνυσμα $\nabla^2 F(U) \cdot U_t$, βρίσκουμε ότι

$$\varepsilon \|\nabla^2 F(U) U_t\| \leq \varepsilon \| \|\nabla^2 F(U)\| \cdot \|U_t\| \quad (2.31)$$

Επιλέγουμε το $\varepsilon > 0$, να είναι αρκετά μικρό έτσι ώστε

$$\varepsilon \| \|\nabla^2 F(U)\| < \frac{c^2}{2}. \quad (2.32)$$

Έτσι από την (2.31) για αυτή την επιλογή του ε , βρίσκουμε χρησιμοποιώντας την (2.32), ότι

$$\varepsilon \|\nabla^2 F(U) U_t\| \leq \frac{c^2}{2} \|U_t\| \quad (2.33)$$

Χρησιμοποιώντας την (2.33), η (2.30) δίνει τώρα την ανισότητα

$$\varepsilon \left| \langle \nabla^2 F(U) \cdot U_t, U_t \rangle \right| \leq \frac{c^2}{2} \|U_t\|^2. \quad (2.34)$$

Επίσης από την υπόθεση (2.5), για τον πρώτο όρο της (2.28), ισχύει

$$-\langle g(U_t), U_t \rangle \leq 0. \quad (2.35)$$

Χρησιμοποιώντας τις (2.34) και (2.35), από την (2.28) προκύπτει η ανισότητα

$$E'(t) \leq -\frac{c^2}{2} \|U_t\|^2 - \varepsilon \|\nabla F(U)\|^2 + \varepsilon \|\nabla F(U)\| \|g(U_t)\|. \quad (2.36)$$

Χρησιμοποιώντας και την υπόθεση (2.6), βρίσκουμε τη δεύτερη ανισότητα για την $E'(t)$,

$$E'(t) \leq -\frac{c^2}{2} \|U_t\|^2 - \varepsilon \|\nabla F(U)\|^2 + \varepsilon C \|\nabla F(U)\| \|U_t\|. \quad (2.37)$$

□

Βήμα 4 ($E'(t) \leq 0$). Στο βήμα αυτό, θα επεξεργαστούμε ακόμη περισσότερο, την ανισότητα (2.37). Για το σκοπό αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε δύο σημαντικές ανισότητες. Η πρώτη ανισότητα είναι η ανισότητα Young, σύμφωνα με την οποία

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \text{ για κάθε } a, b \in \mathbb{R}^+, \text{ με } 1 < p, q < \infty, \text{ έτσι ώστε } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (AY)$$

Η δεύτερη ανισότητα είναι η

$$(a+b)^r \leq K_r (a^r + b^r), \text{ για κάθε } a, b, r \in \mathbb{R}^+ \text{ (η } K_r \text{ εξαρτάται από το } r). \quad (AI)$$

Πρώτα, εφαρμόζουμε την ανισότητα (AY), στον τελευταίο όρο στο δεξί μέλος της (2.37): Για $p = q = 2$ και για $a = \|\nabla F(U)\|$, $b = C \|U_t\|$, βρίσκουμε ότι

$$\varepsilon C \|\nabla F(U)\| \|U_t\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla F(U)\|^2 + \frac{\varepsilon C^2}{2} \|U_t\|^2.$$

Εισάγοντας την παραπάνω ανισότητα στην (2.37), βρίσκουμε ότι

$$E'(t) \leq \left(\frac{\varepsilon C^2 - c^2}{2} \right) \|U_t\|^2 - \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla F(U)\|^2 \quad (2.38)$$

Στην (2.38), επιλέγουμε τη σταθερά ε , έτσι ώστε αφενός να ικανοποιείται η (2.32), αλλά και να ισχύει ταυτόχρονα ότι

$$\varepsilon < \frac{c^2}{C^2}, \quad (2.39)$$

για να είναι η σταθερά $\left(\frac{\varepsilon C^2 - c^2}{2} \right)$ αρνητική και το δεξί μέλος της (2.38), να προκύψει αρνητικό. Αυτό σημαίνει ότι καταρχήν επιλέγουμε το $\varepsilon > 0$, έτσι ώστε

$$0 < \varepsilon < \min \left\{ \frac{c^2}{\|\nabla^2 F(U)\|}, \frac{c^2}{C^2} \right\} := \varepsilon_1 \quad (2.40)$$

Άρα βλέπουμε ότι υπάρχει ε_1 τέτοιο ώστε $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$, να ισχύει

$$\left(\frac{\varepsilon C^2 - c^2}{2} \right) := -\varepsilon_2 < 0 \quad (2.41)$$

και η (2.38) να μπορεί να γραφτεί ως

$$E'(t) \leq -\varepsilon_2 \|U_t\|^2 - \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla F(U)\|^2 < 0, \quad \text{για κάθε } t > 0. \quad (2.42)$$

Δηλαδή έχουμε ότι

$$E'(t) \leq 0, \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}^+. \quad (2.43)$$

□

Βήμα 5 (3^η ανισότητα για την $E'(t)$) Η ανισότητα (2.42), μπορεί να γραφτεί και ως

$$-E'(t) \geq \varepsilon_2 \|U_t\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla F(U)\|^2 > 0. \quad (2.44)$$

Θα κάνουμε πρώτα τον τελικό προσδιορισμό του $\varepsilon > 0$, έτσι ώστε να προκύψει μια άλλη χρήσιμη ανισότητα για την $E'(t)$. Θέλουμε το $\varepsilon > 0$, να ικανοποιεί την (2.40), αλλά και να ισχύει ταυτόχρονα, και ότι $\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon_2$, ώστε από την (2.44), να μπορεί να προκύψει μια

παρόμοια ανισότητα με τη σταθερά $\frac{\varepsilon}{2}$ ως κοινό παράγοντα. Από τον ορισμό της ε_2 στην

(2.41), αυτό σημαίνει ότι απαιτούμε να ισχύει $\frac{\varepsilon}{2} < \frac{c^2 - \varepsilon C^2}{2}$, δηλαδή θα πρέπει

$$\varepsilon < \frac{c^2}{C^2 + 1}. \quad (2.45)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι $\frac{c^2}{C^2 + 1} < \frac{c^2}{C^2}$ και συνδυάζοντας τις (2.45) και (2.40), επιλέγουμε το $\varepsilon > 0$, έτσι ώστε να ισχύει

$$0 < \varepsilon < \min \left\{ \frac{c^2}{\|\|\nabla^2 F(U)\|\|}, \frac{c^2}{C^2 + 1} \right\} := \varepsilon_0.$$

Άρα βλέπουμε ότι υπάρχει ε_0 τέτοιο ώστε $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, να ισχύει

$$-E'(t) \geq \frac{\varepsilon}{2} (\|U_t\|^2 + \|\nabla F(U)\|^2). \quad (2.46)$$

Είναι εύκολο να δούμε χρησιμοποιώντας την ανισότητα (AY) ότι η (ΑΠ) για $r = 2$, ισχύει με $K_r = 2$, δηλαδή $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$. Μπορούμε επομένως να γράψουμε ότι

$$\|U_t\|^2 + \|\nabla F(U)\|^2 \geq \frac{1}{2} (\|U_t\| + \|\nabla F(U)\|)^2.$$

Εισάγοντας αυτή την ανισότητα στην (2.46), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι υπάρχει ε_0 τέτοιο ώστε $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, να ισχύει η ανισότητα

$$-E'(t) \geq \frac{\varepsilon}{4} (\|U_t\| + \|\nabla F(U)\|)^2, \quad \text{για κάθε } t \geq 0. \quad (2.47)$$

□

Βήμα 6 ($\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = 0$) Στο βήμα 4, καταλήξαμε στη σχέση (2.43), δηλαδή δείξαμε ότι $E'(t) \leq 0$, για κάθε $t \geq 0$. Δηλαδή η $E(t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση για κάθε $t \geq 0$. Επίσης, με την αλλαγή μεταβλητής $U = \alpha + V$, για $\alpha \in \omega(U_0, U_1)$, είδαμε ότι χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το $0 \in \omega(U_0, U_1)$. Επομένως,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = 0 \quad \text{και} \quad E(t) \geq 0 \quad \text{για κάθε } t \geq 0. \quad (2.48)$$

□

Βήμα 7 ($\lim_{t \rightarrow +\infty} \|U(t)\| = 0$) Στο τελευταίο αυτό βήμα, θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|U(t) - \alpha\| = 0,$$

όπου $\alpha \in \omega(U_0, U_1)$, με χρήση του Θεωρήματος 2.1, δηλαδή της ανισότητας *Lojasiewicz*. Όπως ήδη αναφέραμε, λόγω της αλλαγής μεταβλητής, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι $\alpha = 0$ και επομένως αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|U(t)\| = 0 \quad (2.49)$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση Α. Υπάρχει $t_0 \in \mathbb{R}^+$ έτσι ώστε $E(t_0) = 0$. Τότε για κάθε $t \geq t_0$ θα έχουμε $E(t) = 0$. Αλλά αυτό σημαίνει ότι και $E'(t) = 0$, για κάθε $t \geq t_0$. Σε αυτή την περίπτωση, από την (2.47), θα έχουμε

$$0 \geq \frac{\varepsilon}{4} (\|U_t\| + \|\nabla F(U)\|)^2, \quad \text{για κάθε } t \geq t_0.$$

Λόγω της ιδιότητας της νόρμας, $\|x\| \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^N$, και $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$, από την παραπάνω ανισότητα προκύπτει ότι

$$U_t(t) = 0 \quad \text{και} \quad \nabla F(U(t)) = 0, \quad \text{για κάθε } t \geq t_0.$$

Όμως επειδή το σύστημα (2.1) είναι αυτόνομο, λόγω μοναδικότητας των λύσεων, θα πρέπει να έχουμε $U_t(t) = 0$ και $\nabla F(U(t)) = 0$, για κάθε $t \geq 0$. Άρα στην περίπτωση A, η λύση του προβλήματος (2.1), είναι σημείο ισοροπίας.

Περίπτωση B. $E(t) > 0$, για κάθε $t \geq 0$. Για αυτή την περίπτωση, επιλέγουμε κατ' αρχήν κάποιο $0 < \theta < \frac{1}{2}$, όπως ακριβώς αναφέρει το Θεώρημα 2.1, και θεωρούμε την συνάρτηση $[E(t)]^\theta$. Για την παράγωγο της ως προς t , έχουμε

$$-\frac{d}{dt}[E(t)]^\theta = -\theta E'(t)[E(t)]^{\theta-1}. \quad (2.50)$$

Θα προσπαθήσουμε να πάρουμε μια κατάλληλη εκτίμηση για τον όρο $[E(t)]^{\theta-1}$ της (2.50). Αφού $E(t) > 0$, για κάθε $t \geq 0$, επιτρέπεται να δουλέψουμε πρώτα με τον

$$\frac{1}{[E(t)]^{\theta-1}} = [E(t)]^{1-\theta}.$$

Με αντικατάσταση της $E(t)$, η οποία ορίστηκε στην (2.21), έχουμε ότι

$$\begin{aligned} [E(t)]^{1-\theta} &= \left[\frac{1}{2} \|U_t\|^2 - F(U) - \varepsilon \langle \nabla F(U), U_t \rangle \right]^{1-\theta} \\ &\leq \left[\frac{1}{2} \|U_t\|^2 + |F(U)| + \varepsilon |\langle \nabla F(U), U_t \rangle| \right]^{1-\theta} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα (ΑΠ), για το δεξί μέλος της παραπάνω ανισότητας για $r = 1 - \theta$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μια σταθερά K_θ η οποία εξαρτάται από το θ , έτσι ώστε

$$\begin{aligned} [E(t)]^{1-\theta} &\leq K_\theta \left(\|U_t\|^{2(1-\theta)} + |F(U)|^{1-\theta} + \varepsilon |\langle \nabla F(U), U_t \rangle|^{1-\theta} \right) \\ &\leq K_\theta \left(\|U_t\|^{2(1-\theta)} + |F(U)|^{1-\theta} + |\langle \nabla F(U), U_t \rangle|^{1-\theta} \right) \end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε ότι $\varepsilon < 1$, όπως προκύπτει από τον προσδιορισμό του $\varepsilon > 0$ (2.45), αφού από την υπόθεση του Θεωρήματος 2.2, για τις σταθερές C, c , έχουμε $0 < c \leq C < \infty$.

Χρησιμοποιώντας τώρα την ανισότητα Cauchy-Schwarz (CS), για τον όρο $|\langle \nabla F(U), U_t \rangle|$, βρίσκουμε ότι $|\langle \nabla F(U), U_t \rangle| \leq \|\nabla F(U)\| \cdot \|U_t\|$. Άρα

$$[E(t)]^{1-\theta} \leq K_\theta \left(\|U_t\|^{2(1-\theta)} + |F(U)|^{1-\theta} + \|\nabla F(U)\|^{1-\theta} \|U_t\|^{1-\theta} \right) \quad (2.51)$$

Υπενθυμίζουμε ότι έχουμε επιλέξει $0 < \theta < \frac{1}{2}$ και ισχύει $1-\theta < 1$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Young (AY) για τον όρο $\|\nabla F(U)\|^{1-\theta} \|U_t\|^{1-\theta}$, θέτοντας $a = \|\nabla F(U)\|^{1-\theta}$, $b = \|U_t\|^{1-\theta}$, με $p = \frac{1}{1-\theta} > 1$ και $q = \frac{1}{\theta} > 1$, παρατηρώντας ότι $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = (1-\theta) + \theta = 1$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \|\nabla F(U)\|^{1-\theta} \|U_t\|^{1-\theta} &\leq (1-\theta) \|\nabla F(U)\| + \theta \|U_t\|^{\frac{(1-\theta)}{\theta}} \\ &\leq \|\nabla F(U)\| + \|U_t\|^{\frac{(1-\theta)}{\theta}}. \end{aligned}$$

Άρα η (2.51) γίνεται

$$[E(t)]^{1-\theta} \leq K_\theta \left(\|U_t\|^{2(1-\theta)} + |F(U)|^{1-\theta} + \|\nabla F(U)\| + \|U_t\|^{\frac{(1-\theta)}{\theta}} \right). \quad (2.52)$$

Καθώς το $0 \in \omega(U_0, U_1)$, από τον ορισμό του ω -οριακού συνόλου, υπάρχει ακολουθία $t_n \rightarrow \infty$, τέτοια ώστε $U(t_n) \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$. Επίσης, στο βήμα 6, δείξαμε την (2.48), δηλαδή ότι $\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = 0$, και στο βήμα 1, την (2.15) δηλαδή ότι $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|U_t(t)\| = 0$.

Αυτό σημαίνει, ότι για $\sigma > 0$ όσο μικρό θέλουμε, υπάρχει $N > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq N$, να ισχύει

$$\|U(t_n)\| < \frac{\sigma}{2} \text{ και } \frac{8K_\theta}{\theta\varepsilon} [E(t_n)]^\theta < \frac{\sigma}{2} \text{ για κάθε } t \geq t_N, \quad (2.53)$$

$$\|U_t(t)\| \leq 1 \text{ για κάθε } t \geq t_N. \quad (2.54)$$

Ορίζουμε στη συνέχεια το

$$\bar{t} := \sup \{ t \geq t_N, \|U(s)\| < \sigma, s \in [t_N, t] \}. \quad (2.55)$$

Η (2.55) σημαίνει ότι

$$\text{για κάθε } t \in (t_N, \bar{t}), \quad \|U(t)\| < \sigma. \quad (2.56)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα το Θεώρημα 2.1: πιο συγκεκριμένα, το εφαρμόζουμε για $x = U(t)$, $t \in (t_N, \bar{t})$ και $a = 0$. Υπενθυμίζουμε για μια ακόμη φορά, ότι με αλλαγή μεταβλητής χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρήσαμε ότι $a = 0$ και $F(0) = 0$, $\nabla F(0) = 0$. Έτσι με βάση το Θεώρημα 2.1, θα έχουμε ότι

$$\|\nabla F(U(t))\| \geq |F(U(t))|^{1-\theta}, \text{ για κάθε } t \in (t_N, \bar{t}). \quad (2.57)$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι επειδή $0 < \theta < \frac{1}{2}$, λόγω της (2.54), θα έχουμε

$$\|U_t\|^{2(1-\theta)} \leq \|U_t\| \quad \text{και} \quad \|U_t\|^{\frac{(1-\theta)}{\theta}} \leq \|U_t\|, \text{ για κάθε } t \in (t_N, \bar{t}). \quad (2.58)$$

Εισάγοντας τώρα τις εκτιμήσεις (2.57) και (2.58) στην (2.52), βρίσκουμε ότι

$$[E(t)]^{1-\theta} \leq 2K_\theta (\|U_t\| + \|\nabla F(U)\|), \text{ για κάθε } t \in (t_N, \bar{t}).$$

Δηλαδή, για τον όρο $[E(t)]^{\theta-1}$, θα έχουμε

$$[E(t)]^{\theta-1} = \frac{1}{[E(t)]^{1-\theta}} \geq \frac{1}{2K_\theta} \cdot \frac{1}{(\|U_t\| + \|\nabla F(U)\|)}, \text{ για κάθε } t \in (t_N, \bar{t}). \quad (2.59)$$

Τώρα, η (2.50), με χρήση των (2.47) και (2.59) για κάθε $t \in (t_N, \bar{t})$, δίνει την

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}[E(t)]^\theta &= -\theta E'(t)[E(t)]^{\theta-1} \\ &\geq \frac{\theta\varepsilon}{4} (\|U_t\| + \|\nabla F(U)\|)^2 [E(t)]^{\theta-1} \\ &\geq \frac{\theta\varepsilon}{4} (\|U_t\| + \|\nabla F(U)\|)^2 \cdot \frac{1}{2K_\theta} \cdot \frac{1}{(\|U_t\| + \|\nabla F(U)\|)}, \end{aligned}$$

επομένως θα έχουμε ότι

$$-\frac{d}{dt}[E(t)]^\theta \geq \frac{\theta\varepsilon}{8K_\theta} (\|U_t\| + \|\nabla F(U)\|), \quad \text{για κάθε } t \in (t_N, \bar{t}). \quad (2.60)$$

Ολοκληρώνοντας την (2.60) ως προς t , στο διάστημα (t_N, \bar{t}) , παίρνουμε ότι

$$[E(t_N)]^\theta - [E(\bar{t})]^\theta \geq \frac{\theta\varepsilon}{8K_\theta} \int_{t_N}^{\bar{t}} \|U_t(t)\| dt + \frac{\theta\varepsilon}{8K_\theta} \int_{t_N}^{\bar{t}} \|\nabla F(U(t))\| dt,$$

ή διαφορετικά, μεταφέροντας τον όρο $[E(\bar{t})]^\theta$, στο δεξί μέλος,

$$[E(t_N)]^\theta \geq \frac{\theta\varepsilon}{8K_\theta} \int_{t_N}^{\bar{t}} \|U_t(t)\| dt + \frac{\theta\varepsilon}{8K_\theta} \int_{t_N}^{\bar{t}} \|\nabla F(U(t))\| dt + [E(\bar{t})]^\theta.$$

Όμως $\int_{t_N}^{\bar{t}} \|\nabla F(U(t))\| dt \geq 0$, και $[E(\bar{t})]^\theta > 0$, και επομένως

$$[E(t_N)]^\theta \geq \frac{\theta\varepsilon}{8K_\theta} \int_{t_N}^{\bar{t}} \|U_t(t)\| dt,$$

η οποία μπορεί να γραφεί και ως

$$\int_{t_N}^{\bar{t}} \|U_t(t)\| dt \leq \frac{8K_\theta}{\theta\varepsilon} [E(t_N)]^\theta. \quad (2.61)$$

Ας υποθέσουμε ότι \bar{t} πεπερασμένο, δηλαδή $\bar{t} < \infty$. Από το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, θα έχουμε ότι

$$U(\bar{t}) = U(t_N) + \int_{t_N}^{\bar{t}} U_t(t) dt,$$

από την οποία μπορούμε να πάρουμε την ανισότητα

$$\begin{aligned} \|U(\bar{t})\| &= \|U(t_N) + \int_{t_N}^{\bar{t}} U_t(t) dt\| \\ &\leq \int_{t_N}^{\bar{t}} \|U_t(t)\| dt + \|U(t_N)\|, \end{aligned} \quad (2.62)$$

Σημειώνουμε ότι για την παραγωγή της (2.62), χρησιμοποιήσαμε την τριγωνική ανισότητα $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^N$. Τώρα από την (2.61), και την δεύτερη ανισότητα της (2.53), προκύπτει ότι

$$\int_{t_N}^{\bar{t}} \|U_t(t)\| dt < \frac{\sigma}{2}. \quad (2.63)$$

Τότε εισάγοντας την (2.63) και την πρώτη ανισότητα της (2.53) στην (2.62), βρίσκουμε ότι

$$\|U(\bar{t})\| < \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} = \sigma.$$

Αυτό έρχεται σε αντίφαση με τον ορισμό του \bar{t} στην (2.10). Άρα δεν μπορούμε να έχουμε $\bar{t} < \infty$. Επομένως πρέπει $\bar{t} = \infty$. Τότε η (2.61) γίνεται

$$\int_{t_N}^{\infty} \|U_i(t)\| dt \leq \frac{8K_\theta}{\theta\varepsilon} [E(t_N)]^\theta < \infty. \quad (2.64)$$

Τώρα εισάγοντας την (2.64) στην (2.62), στην οποία θέτουμε $\bar{t} = \infty$, θα προκύψει η ύπαρξη του ορίου για την $\|U(t)\|$ καθώς $t \rightarrow \infty$, καθώς και ότι $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|U(t)\| = 0$. Πράγματι, με αυτό τον τρόπο θα έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \|U(t)\| &= \|U(+\infty)\| \leq \|U(t_N)\| + \left\| \int_{t_N}^{+\infty} U_i(t) dt \right\| \\ &\leq \|U(t_N)\| + \frac{8K_\theta}{\theta\varepsilon} [E(t_N)]^\theta. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Καθώς από την (2.53) (και το σχόλιο που προηγήθηκε για την κατασκευή της (2.53)),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \|U(t_n)\| + \frac{8K_\theta}{\theta\varepsilon} [E(t_n)]^\theta \right\} = 0,$$

από το δεξί μέλος της (2.65) για $N \rightarrow +\infty$, θα έχουμε $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|U(t)\| = 0$. Το Θεώρημα 2.1 αποδείχθηκε πλήρως. ■

2.3 Δυο παραδείγματα εφαρμογής του Θεωρήματος 2.2

Θα εφαρμόσουμε τα αποτελέσματα του Θεωρήματος 2.1, σε δυο παράγωγα συστήματα δεύτερης τάξης, της μορφής (2.1). Στο πρώτο παράδειγμα θα θεωρήσουμε το σύστημα δεύτερης τάξης

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \dot{x}_1 &= 2(x_2 - x_1) + x_1(1 - x_1^2), \\ \ddot{x}_2 + \dot{x}_2 &= -2(x_2 - x_1) + x_2(1 - x_2^2). \end{aligned} \quad (A)$$

Αυτό είναι το παράγωγο σύστημα δεύτερης τάξης με απόσβεση της μορφής (2.1) για την συνάρτηση

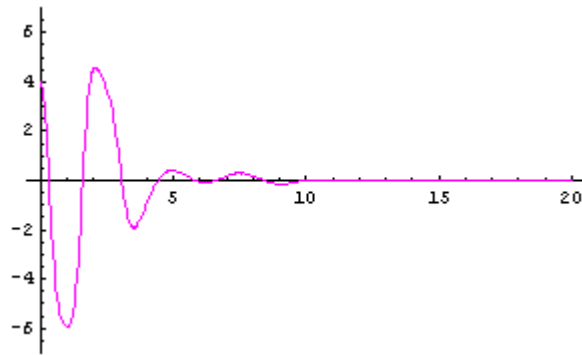
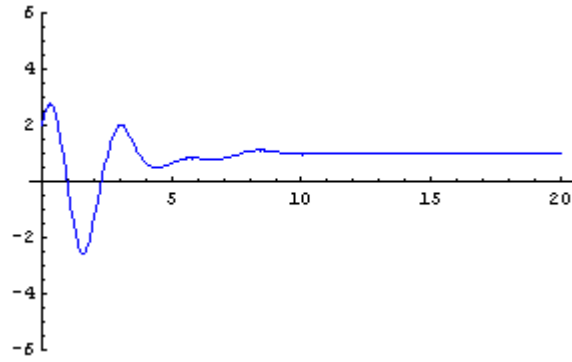
$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{4}(x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2 + 2x_2^2 - 8x_1x_2). \quad (F1)$$

Στην ουσία δανειστήκαμε τη μη γραμμικότητα του συστήματος (GS2) Κεφαλαίου 1. Η συνάρτηση (F1) είναι προφανώς αναλυτική. Το σύστημα σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2, θα πρέπει να συγκλίνει σε κάποιο σημείο ισορροπίας για οποιαδήποτε αρχικά δεδομένα.

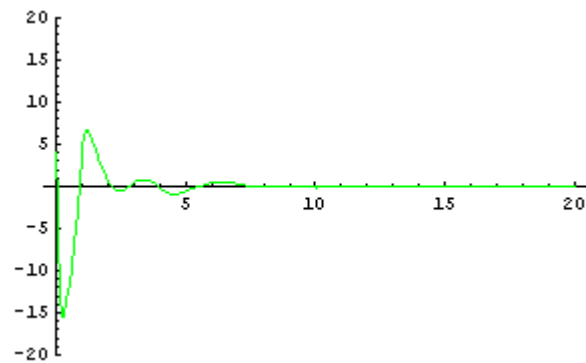
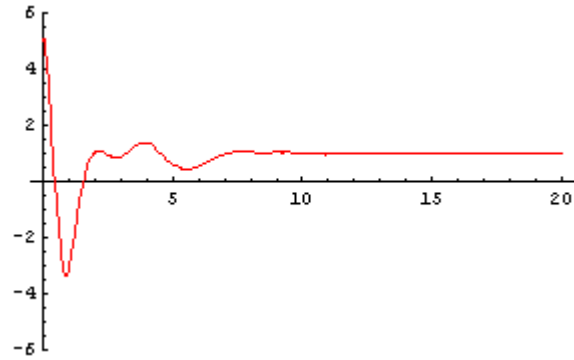
Το σύστημα μπορεί να γραφεί ως σύστημα 4^{ης} τάξης, θέτοντας $\dot{x}_1 = y_1$ και $\dot{x}_2 = y_2$ ως

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1, \\ \dot{y}_1 &= -y_1 + 2(x_2 - x_1) + x_1(1 - x_1^2), \\ \dot{x}_2 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -y_2 - 2(x_2 - x_1) + x_2(1 - x_2^2). \end{aligned} \tag{A1}$$

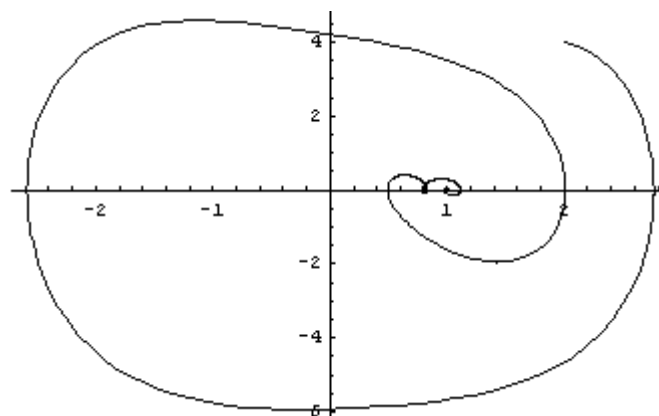
Το σύστημα (A1), έχει ξανά τρία απομονωμένα σημεία ισορροπίας στον χώρο φάσεων $\square^4 - (x_1, y_1, x_2, y_2)$. Συγκεκριμένα τα $P_1 = (0, 0, 0, 0)$, $P_2 = (1, 0, 1, 0)$ και $P_3 = (-1, 0, -1, 0)$. Σημειώνουμε ότι κάθε σύστημα της μορφής (A1) έχει σημεία ισορροπίας της μορφής $P = (x_1^*, 0, x_2^*, 0)$. Το ότι το ω -οριακό σύνολο κάθε θετικής φραγμένης τροχιάς είναι ένα σημείο ισορροπίας προκύπτει και από το Θεώρημα 1.14, αφού τα σημεία ισορροπίας είναι απομονωμένα.



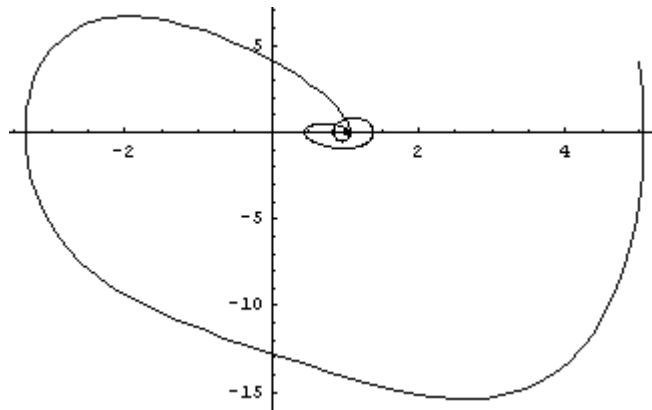
Εικόνα 5. Λύσεις $x_1(t)$ και $y_1(t) = \dot{x}_1(t)$ για το σύστημα (A1), με αρχικές συνθήκες $(x_1(0), y_1(0), x_2(0), y_2(0)) = (2, 4, 5, 4)$. Σύγκλιση στο σημείο ισορροπίας $P_2 = (1, 0, 1, 0)$: Οι $x_1(t)$ και $y_1(t) = \dot{x}_1(t)$ συγκλίνουν στο $(1, 0)$



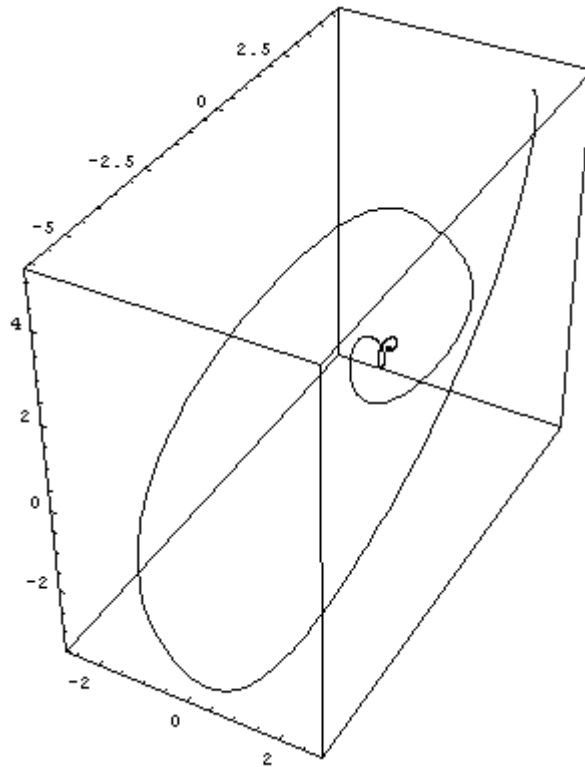
Εικόνα 6. Λύσεις $x_2(t)$ και $\dot{x}_2(t)$ για το σύστημα (A1), με αρχικές συνθήκες $(x_1(0), y_1(0), x_2(0), y_2(0)) = (2, 4, 5, 4)$. Σύγκλιση στο σημείο ισορροπίας $P_2 = (1, 0, 1, 0)$: Οι $x_2(t)$ και $y_2(t) = \dot{x}_2(t)$ συγκλίνουν στο $(1, 0)$



Εικόνα 7. «Γροχιά» στο $x_1 y_1$ -επίπεδο για το σύστημα (A1), με αρχικές συνθήκες $(x_1(0), y_1(0), x_2(0), y_2(0)) = (2, 4, 5, 4)$. Σύγκλιση στο σημείο ισορροπίας $P_2 = (1, 0, 1, 0)$: Οι $x_1(t)$ και $y_1(t) = \dot{x}_1(t)$ συγκλίνουν στο $(1, 0)$



Εικόνα 8. «Γροχιώ» στο x_2y_2 -επίπεδο για το σύστημα (A1), με αρχικές συνθήκες $(x_1(0), y_1(0), x_2(0), y_2(0)) = (2, 4, 5, 4)$. Σύγκλιση στο σημείο ισορροπίας $P_2 = (1, 0, 1, 0)$: Οι $x_2(t)$ και $y_2(t) = \dot{x}_2(t)$ συγκλίνουν στο $(1, 0)$



Εικόνα 9. «Γροχιώ» στον $x_1y_1x_2$ -χώρο για το σύστημα (A1), με αρχικές συνθήκες $(x_1(0), y_1(0), x_2(0), y_2(0)) = (2, 4, 5, 4)$. Σύγκλιση σε σημείο ισορροπίας

Το δεύτερο παράδειγμα δίνεται από το σύστημα

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + \dot{x}_1 &= \lambda x_1 x_2 - x_1^3, \\ \ddot{x}_2 + \dot{x}_2 &= \frac{\lambda}{2} x_1^2 - \frac{\lambda^2}{2} x_2.\end{aligned}\tag{B}$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Είναι παράγωγο σύστημα δεύτερης τάξης με απόσβεση της μορφής (2.1) για την συνάρτηση

$$F(x_1, x_2) = -\frac{1}{4} x_1^4 + \frac{\lambda}{2} x_1^2 x_2 - \frac{\lambda^2}{4} x_2^2,\tag{F2}$$

η οποία είναι προφανώς αναλυτική. Το σύνολο $\mathfrak{S} = \{\alpha \in \mathbb{R}^N : \nabla F(\alpha) = 0\}$ είναι στην περίπτωση μας το σύνολο $\mathfrak{S} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \nabla F(x_1, x_2) = 0\}$. Παρατηρούμε ότι για το σύστημα (B),

$$\mathfrak{S} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \nabla F(x_1, x_2) = 0\} := \left\{ a, \frac{a^2}{\lambda}, a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Δηλαδή για το σύστημα (B), δεν έχουμε απομονωμένα σημεία ισορροπίας και κατά συνέπεια, το συμπέρασμα της σύγκλισης δεν προκύπτει από το Θεώρημα 1.14: Καθώς έχουμε ένα «συνεχές» από σημεία ισορροπίας αυτή τη φορά, το συμπέρασμα προκύπτει από την εφαρμογή του Θεωρήματος 2.2.

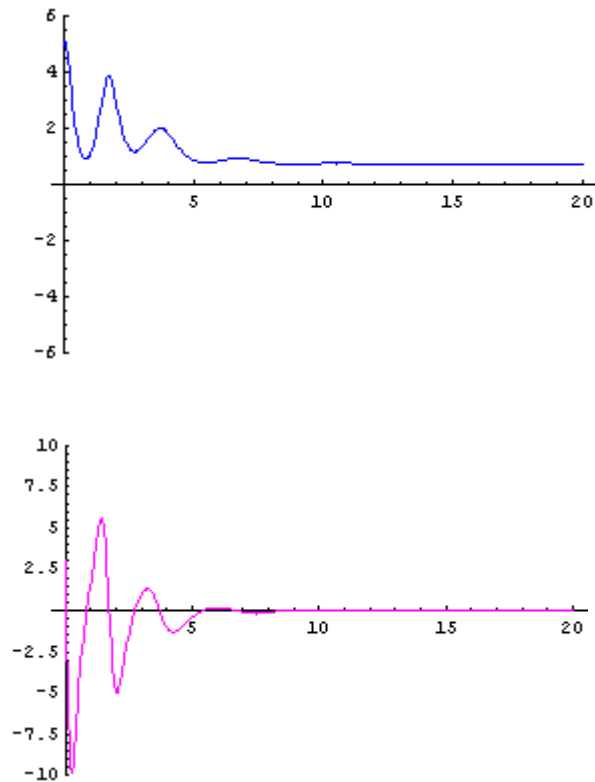
Στις επόμενες εικόνες παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης του συστήματος με το MATHEMATICA, όπου επιβεβαιώνεται η σύγκλιση στο σημείο ισορροπίας. Το σύστημα γράφεται ως σύστημα 1^{ης} τάξης στη μορφή

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= y_1, \\ \dot{x}_1 &= -y_1 + \lambda x_1 x_2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 &= y_2, \\ \dot{x}_2 &= -y_2 + \frac{\lambda}{2} x_1^2 - \frac{\lambda^2}{2} x_2.\end{aligned}\tag{B1}$$

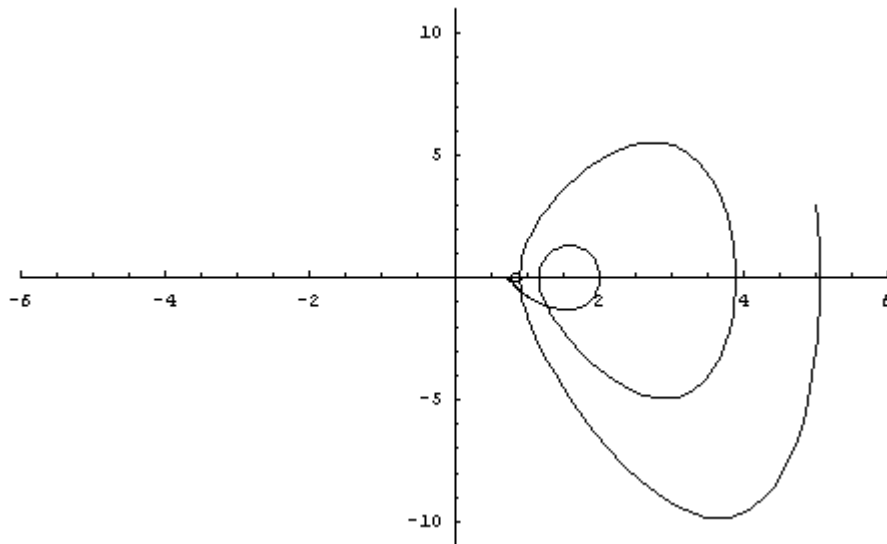
Επομένως για το σύστημα (B1) υπάρχει ένα «συνεχές» από σημεία ισορροπίας

$$P_a = \left(a, 0, \frac{a^2}{\lambda}, 0 \right), \quad a \in \mathbb{R}.$$

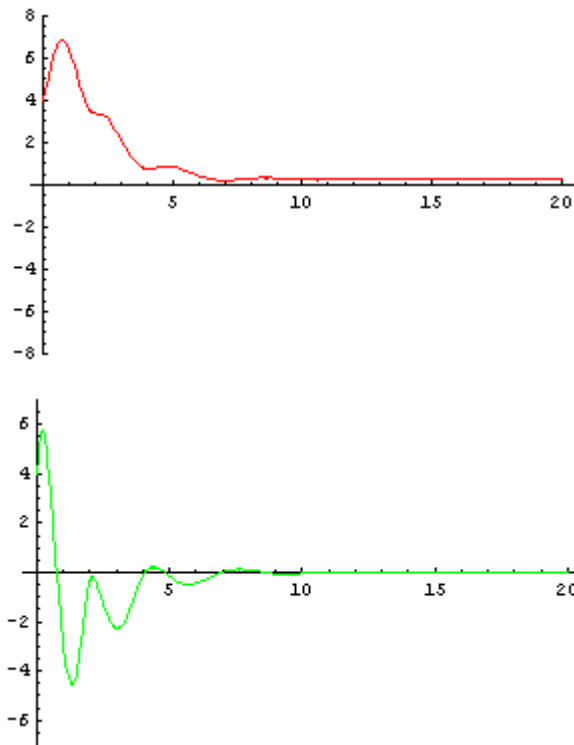
Το παράδειγμα αυτό είναι ενδεικτικό για την ισχύ του Θεωρήματος 2.2.



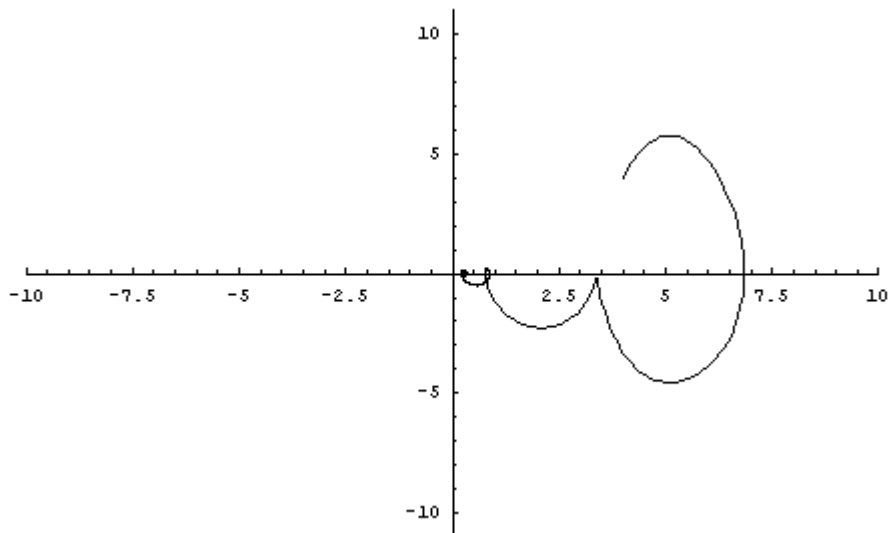
Εικόνα 10. Λύσεις $x_1(t)$ και $y_1(t) = \dot{x}_1(t)$ για το σύστημα (B1), με αρχικές συνθήκες $(x_1(0), y_1(0), x_2(0), y_2(0)) = (5, 3, 4, 4)$. Σύγκλιση σε σημείο ισορροπίας: Οι $x_1(t)$ και $y_1(t) = \dot{x}_1(t)$ συγκλίνουν σε σημείο ισορροπίας.



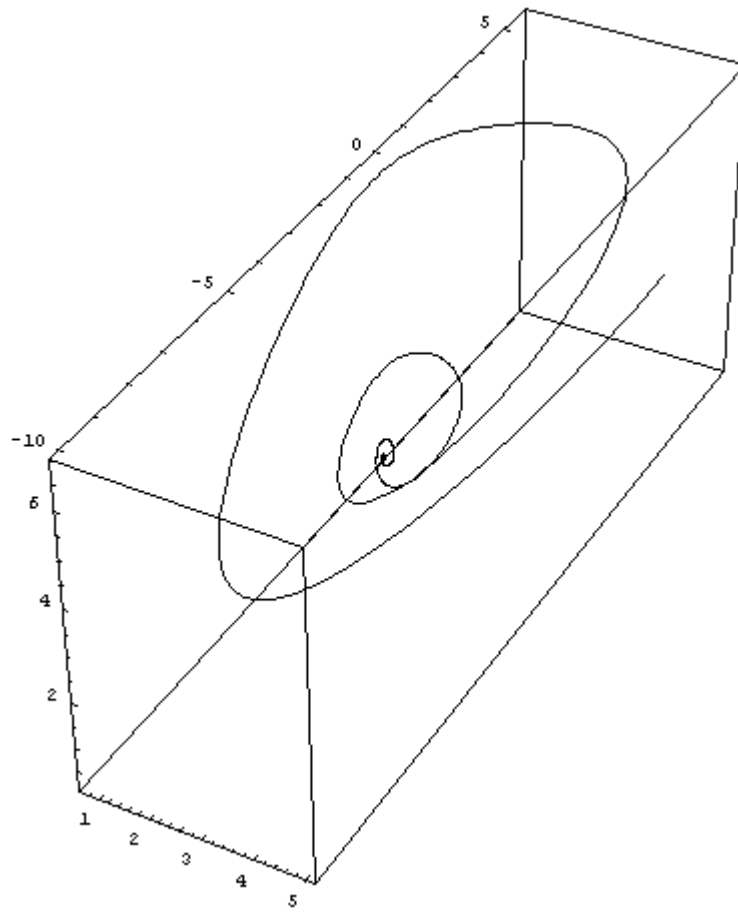
Εικόνα 11. «Γροχιά» στο $x_1 y_1$ -επίπεδο για το σύστημα (B1), με αρχικές συνθήκες $(x_1(0), y_1(0), x_2(0), y_2(0)) = (5, 3, 4, 4)$. Σύγκλιση σε σημείο ισορροπίας



Εικόνα 12. Λύσεις $x_2(t)$ και $y_2(t) = \dot{x}_2(t)$ για το σύστημα (B1), με αρχικές συνθήκες $(x_1(0), y_1(0), x_2(0), y_2(0)) = (5, 3, 4, 4)$. Σύγκλιση σε σημείο ισορροπίας: Οι $x_2(t)$ και $y_2(t) = \dot{x}_2(t)$ συγκλίνουν σε σημείο ισορροπίας.



Εικόνα 12. «Τροχιά» στο $x_2 y_2$ -επίπεδο για το σύστημα (B1), με αρχικές συνθήκες $(x_1(0), y_1(0), x_2(0), y_2(0)) = (5, 3, 4, 4)$. Σύγκλιση σε σημείο ισορροπίας: Οι $x_2(t)$ και $y_2(t) = \dot{x}_2(t)$ συγκλίνουν σε σημείο ισορροπίας.



Εικόνα 9. «Γροχιά» στον $x_1 y_1 x_2$ -χώρο για το σύστημα (B1), με αρχικές συνθήκες $(x_1(0), y_1(0), x_2(0), y_2(0)) = (5, 3, 4, 4)$. Σύγκλιση σε σημείο ισορροπίας.

Βιβλιογραφία

[HK] **J. Hale and H. Koçak.** Dynamics and Bifurcations. Springer-Verlag, New-York, 1992.

[HJ] **A. Haraux and M. Jendoubi.** *Convergence of solutions of second-order Gradient like systems with analytic nonlinearities.* J. Differential Equations 144, 313-320, (1998)

[SL65] **S. Lojasewicz.** *Ensembles semi-analytiques.* Colloques internationaux du C.N.R.S., Vol. 117, 1963.

[PM] **J. Palis and W. Melo.** *Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction.* Springer-Verlag, Berlin/New York, 1982.

[LS] **L. Simon.** *Asymptotics for a class of non linear evolution equations with applications to geometric problems.* Ann. Math. 118 (1983), 525-571.