



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΠΙΔΑΚΑ ΑΕΡΑ ΣΤΗΝ
ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΗ ΔΙΕΡΓΑΣΙΑ FILM BLOWING**

Παπαλουκάς Νίκος

Επιβλέπων Καθηγητής: Χουσιάδας Κωνσταντίνος

Σάμος, Ιούλιος 2010

Ευχαριστήρια

Θεωρώ χρέος μου να ευχαριστήσω όλους τους ανθρώπους που με διάφορους τρόπους με βοήθησαν στην εκπόνηση αυτής της εργασίας.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Κωνσταντίνο Χουσιάδα για την ανάθεση αυτής της διπλωματικής εργασίας, για την βοήθεια και την καθοδήγηση καθόλη την διάρκεια της εκπόνησης της.

Ευχαριστώ, τον Αναπληρωτή Καθηγητή Βασίλειο Μεταφτσή και τον Επίκουρο Καθηγητή Αντώνη Τσολομούτη, μέλη του Μαθηματικού Τμήματος, για την συμμετοχή τους στην εξεταστική επιτροπή.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την γυναίκα μου Ράνια για την στήριξη της καθόλη την διάρκεια του μεταπτυχιακού προγράμματος.

Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	4
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	5
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	9
<i>ΜΕΘΟΔΟΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ.....</i>	9
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	14
<i>ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΜΑΖΑΣ, ΟΡΜΗΣ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ</i>	14
2.1 <i>Εξισώσεις σε Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων.....</i>	14
2.2 <i>Εξισώσεις σε Κυλινδρικό Σύστημα Συντεταγμένων</i>	17
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	22
<i>ΟΙ ΠΙΔΑΚΕΣ ΑΕΡΑ.....</i>	22
3.1 <i>Ελεύθερη ροή αέρα (free air jet).....</i>	22
3.2 <i>Τζετ αέρα πάνω από επίπεδη πλάκα.....</i>	23
3.3. <i>Τζετ αέρα γύρω από αξονοσυμμετρικό σώμα εκ' περιστροφής</i>	26
<i>Ο μετασχηματισμός Mangler</i>	27
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4	31
4.1. <i>Προσεγγιστικές εξισώσεις λεπτού φιλμ.....</i>	31
4.2. <i>Τελική μορφή των εξισώσεων του λεπτού φιλμ.....</i>	36
4.3. <i>Η συνολική αξονική δύναμη εξαιτίας του πίδακα αέρα.....</i>	38
4.4. <i>Οι εξισώσεις του φιλμ πολυμερούς συμπεριλαμβάνοντας την δύναμη του αέρα δοσμένες με τις μεταβλητές των Pearson & Petrie, 1970b,c.</i>	39
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ.....	47
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	48

Περίληψη

Μια από τις πιο γνωστές και σημαντικές βιομηχανικές διεργασίας είναι η παραγωγή λεπτών μεμβρανών (φιλμ) από πολυμερικά υλικά με εμφύσηση αέρα ή "Film Blowing Process" (FBP). Παρόλο που η διεργασία αυτή μελετάται από το 1970 δεν υπάρχει ένα ολοκληρωμένο μαθηματικό μοντέλο το οποίο να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την πλήρη περιγραφή της διεργασίας.

Πιο συγκεκριμένα, κατά την παραγωγή των φιλμ, ένα πίδακας αέρα (air-jet), χρησιμοποιείται για να επιταχύνει την ψύξη και να σταθεροποιήσει το εκβαλλόμενο φιλμ. Το πεδίο ροής του αέρα αλληλεπιδρά με το πεδίο ροής του πολυμερούς και η αλληλεπίδραση αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική για την διεργασία.

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η μαθηματική μοντελοποίηση του πεδίου ροής του αέρα και η σύζευξη τους με τις αντίστοιχες εξισώσεις που περιγράφουν το πεδίο ροής του πολυμερούς. Στηρίχθηκε στις προσωπικές σημειώσεις του επιβλέποντα, Αναπληρωτή Καθηγητή Κ. Χουσιάδα, και στο ερευνητικό του άρθρο, "A mathematical model to study the effect of the air jet in the film blowing process" το οποίο τον καιρό της ολοκλήρωσης αυτής της εργασίας (Ιούλιος 2010) βρισκόταν υπό κρίση για δημοσίευση στο διεθνές επιστημονικό περιοδικό "Polymer Engineering and Science".

Εισαγωγή

Η βιομηχανική διεργασία Film Blowing Process (FBP) είναι μια πολύ γνωστή και σημαντική διαδικασία που χρησιμοποιείται στην βιομηχανική παραγωγή διαξονικών ελαστικών πολυμερικών μεμβρανών. Η διαδικασία, ένα σχέδιο της οποίας φαίνεται στην εικόνα 1, έχει λάβει μεγάλη προσοχή από το 1970, μετά τις πρωτοποριακές εργασίες από τους Pearson και Petrie (1970a, b, c). Λεπτομερής περιγραφή της διαδικασίας μπορεί να βρεθεί στην βιβλιογραφία (βλ. για παράδειγμα Beanault και Mitsoulis 1998; Καμμάς 2006, Καραμπάγιας 2006, Housiadas et al. 2007 καθώς και αναφορές εκεί μέσα. Ακολουθεί επίσης μία σύντομη περιγραφή.

Λιωμένο πολυμερές εκβάλλεται σε μόνιμη κατάσταση κάθετα προς τα πάνω με ένα σταθερό ρυθμό ροής από έναν δακτυλιοειδή εκβολέα σχηματίζοντας μια λεπτή σωληνοειδής μεμβράνη, ακτίνα και πάχος τα οποία μεταβάλλονται στην αξονική διεύθυνση. Μακριά από το επίπεδο εκβολής κυλιόμενοι κίλινδροι εφαρμόζουν μία έλκονσα αξονική δύναμη στην μεμβράνη, η οποία προκαλεί αξονική επέκταση της μεμβράνης, ισοπεδώνοντας την μέσα σε διπλό ένα στρώμα φύλλου και στεγανοποιώντας την λεγόμενη "φουσαλίδα" ή "ασκό" από το επάνω μέρος. Αέρας παρέχεται μέσα στην φουσαλίδα με πίεση ελαφρώς πάνω από την ατμοσφαιρική για να διογκώσει την φουσαλίδα με ελεγχόμενο τρόπο και να προκαλέσει μια περιφερειακή επέκταση της μεμβράνης. Λόγω της απώλειας θερμότητας από το πολυμερές στον περιβάλλοντα αέρα, το πολυμερές στερεοποιείται σε μια απόσταση από την έξοδο η οποία είναι γνωστή ως το "ύψος γραμμή πήξης". Υποτίθεται ότι πάνω από αυτό το ύψος δεν υπάρχει καμία παραμόρφωση του φιλμ. Σημαντικές παράμετροι οι οποίες ρυθμίζουν την διαδικασία και επίσης χαρακτηρίζουν τις διαστάσεις του τελικού προϊόντος, είναι ο σταθερός λόγος της ταχύτητας της μεμβράνης στους κυλιόμενους κίλινδρους προς την ταχύτητα εκβολής, γνωστή ως σχεδιαστική ταχύτητα ή λόγος απορρόφησης (TUR), ο λόγος της ακτίνας της μεμβράνης στην γραμμή πήξης προς την ακτίνα εξόδου, ή ο λόγος blow-up (BUR), και η μείωση του πάχους (TR) η οποία είναι ο λόγος της απόσταση της δακτυλιοειδούς εξόδου προς το τελικό πάχος της μεμβράνης.

Για να επιταχύνουμε την ψύξη της μεμβράνης και να αυξήσουμε την σταθερότητα της βιομηχανικής διαδικασίας, ένας πίδακας αέρα προμηθεύεται περιφερειακά και εφαπτομενικά στην εξωτερική επιφάνεια της μεμβράνης (Tanner 2000; Sidiropoulos and Vlachopoulos 2000; Gao and Ewing 2005, Gao et al. 2005). Η πηγή του πίδακα αέρα συνήθως τοποθετείται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με τον δακτυλιοειδή εκβολέα. Ο αέρας παρατηρείται να προσκολλά στην μεμβράνη του πολυμερούς, σχηματίζοντας έναν δακτυλιοειδή πίδακα, ο οποίος οριοθετείται από το φιλμ και ο οποίος εισέρχεται στον εξωτερικό στάσιμο αέρα. Λόγω της απουσίας βαθμίδας πίεσης ή μιας εξωτερικής ροής και λόγω

των τάσεων που ασκούνται από το φιλμ στον αέρα, ο πίδακας αέρα βαθμιαία απλώνεται αξονικά και ακτινικά. Λόγω αυτού η ταχύτητα και η ορμή του ελαττώνονται πολύ γρήγορα περιορίζοντας την επίδραση του στην μεμβράνη μόνο στο χαμηλότερο μέρος της φυσαλίδας. Η ορμή και η μεταφορά θερμοκρασίας μεταξύ του αέρα και της ροής του πολυμερούς επηρεάζει σημαντικά την δυναμική της μεμβράνης. Η αλληλεπίδραση του πίδακα αέρα με την σωληνοειδή μεμβράνη, η οποία λαμβάνει χώρα διαμέσου της άγνωστης εξωτερικής επιφάνειας του ασκού, φαίνεται να είναι αρκετά σημαντική μιας και σε πολλές περιπτώσεις η βιομηχανική διαδικασία γίνεται ασταθής, ο ασκός καταρρέει και η παραγωγή της μεμβράνης διακόπτεται.

Ωστόσο, λόγω της πολυπλοκότητας αυτού διαφασικού προβλήματος, πολύ λίγη θεωρητική εργασία έχει εμφανιστεί στην βιβλιογραφία. Για την ροή του φιλμ μόνο, τα περισσότερα μαθηματικά μοντέλα που έχουν χρησιμοποιηθεί έως τώρα βασίζονται στην κλασική ανάλυση των Pearson και Petrie (1970a,b). Υποθέτοντας αξονική συμμετρία και μόνιμη κατάσταση και χρησιμοποιώντας είτε μια ανάλυση διαταραχών (1970a) είτε την λεπτών κελιών προσέγγιση (1970b) καταφέρνουν να παράγουν τις κατάλληλες μονοδιάστατες (1D) εξισώσεις λεπτής-μεμβράνης, οι οποίες μπορούν να λυθούν αριθμητικά ώστε να προβλεφθεί το σχήμα της φυσαλίδας και το πάχος της μεμβράνης. Εδώ να σημειωθεί ότι οι εξισώσεις που περιγράφουν την εκβολή του πολυμερούς θα μπορούσαν να επιλυθούν αριθμητικά στην πλήρη τους μορφή (Georgiou 2003) ωστόσο σε αυτήν την περίπτωση οι υπολογιστικές απαιτήσεις αυξάνονται τρομερά.

Παρά το γεγονός ότι πολλές θεωρητικές εργασίες ακολούθησαν (δείτε για παράδειγμα, Petrie 1975), σε κανένα από αυτά τα μοντέλα η αεροδυναμική δύναμη δεν λήφθηκε υπ' όψιν. Επιπλέον, οι θεωρητικές προβλέψεις των υπάρχοντων μαθηματικών μοντέλων έχουν μόνο ποιοτική συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα, υποδεικνύοντας ότι ο πίδακας αέρα εξωτερικά του ασκού έχει σημαντική επίδραση στον ασκό και πρέπει να ληφθεί υπόψη στο μαθηματικό μοντέλο.

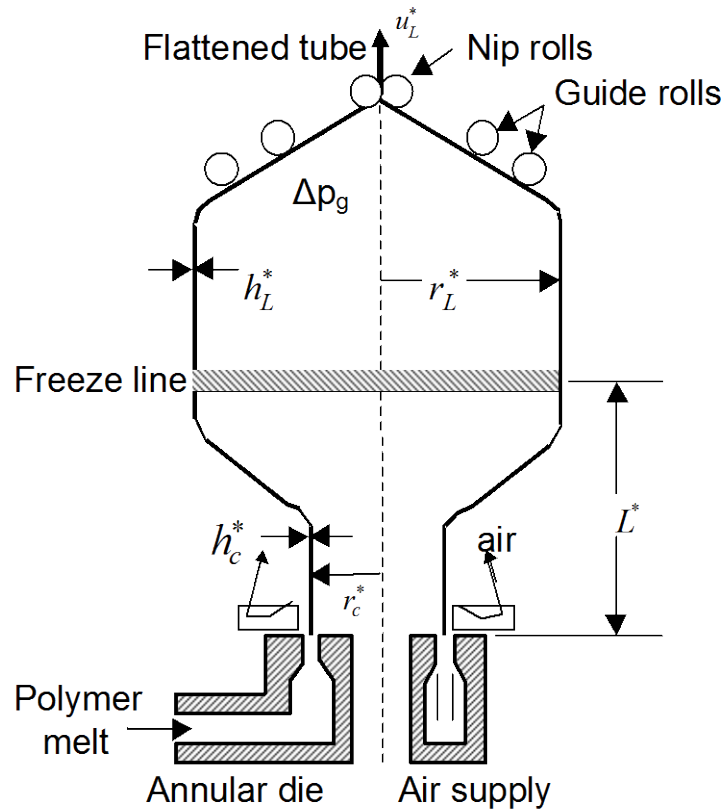
Μια πρώτη προσπάθεια θεωρητικής μελέτης της αεροδυναμικής επίδρασης σε μοντέλα άκαμπτου μεμβράνης επιχειρήθηκε από τους Campbell et al. 1992. Αυτοί οι συγγραφείς εφάρμοσαν την μέθοδο της εναπόθεσης συναρτήσεων συνεχούς ροής και την μέθοδο της μακρο-ισορροπίας της μάζας και της ενέργειας βασιζόμενοι είτε σε δυναμική ροή είτε υποθέτοντας κατανομή ταχυτήτων; Ωστόσο η επιτυχία τους ήταν περιορισμένη. Οι Sidirooulos & Vlachopoulos 2000 εκτέλεσαν αριθμητικές προσομοιώσεις της τυρβώδους ροής ενός μη-ισόθερμου ρεύματος αέρα έξω από έναν άκαμπτο τοίχο χρησιμοποιώντας μια παραλλαγή του $k-\varepsilon$ Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS) μοντέλου, χωρίς ωστόσο να μελετήσουν την άμεση επίδραση της αεροδυναμικής δύναμης στο φιλμ. Ο Καμμάς 2006 έκανε μία

προσπάθεια για την μοντελοποίηση του πεδίου ροής του αέρα χωρίς ωστόσο να επιτύχει τον στόχο του. Τέλος, οι Housiadas & Tsamopoulos 2008 παρουσίασαν ένα μαθηματικό μοντέλο για την μελέτη της επίδρασης του αέρα λαμβάνοντας υπόψην το συνοριακό στρώμα του αέρα. Οι εξισώσεις όμως που παρήγαγαν δεν ήταν ίδιες με αυτές που παράγονται για το συνοριακό στρώμα εξωτερικά ενός συμμετρικού σώματος εκ' περιστροφής. Για τον λόγο αυτό στην παρούσα εργασία εφαρμόστηκε η συνηθισμένη και καλά γνωστή μεθοδολογία συνοριακών στρωμάτων.

Ο στόχος της παρούσας εργασίας είναι η παραγωγή ενός μαθηματικού μοντέλου για την FBP, η οποία να ισχύει στο όριο του πολύ λεπτού φιλμ, και το οποίο να περιλαμβάνει την αεροδυναμική δύναμη, η οποία εφαρμόζεται από τον πίδακα αέρα στο φιλμ. Επειδή η δυναμική της μεμβράνης είναι πολύ περίπλοκη και για να παραμείνει η ανάλυση όσο το δυνατόν πιο απλή, υποθέτουμε αξονική συμμετρία, μόνιμη κατάσταση και σταθερή θερμοκρασία και για τις δύο φάσεις. Για το πολυμερές λαμβάνονται υπόψη ιξωδοελαστικές, αδρανειακές, βαρυτικές και επιφανειακές δυνάμεις (Housiadas et al. 2007, Lee et al. 2006, Luo and Tanner 2000, Cain and Denn 1988). Η ιξωδοελαστική αντίδραση του φιλμ συμπεριλαμβάνεται με την χρήση γνωστών καταστατικών μοντέλων, όπως την καταστατική εξίσωση Upper-Convected-Maxwell (UCM), το εκθετικό affine και non-affine Phan-Thien & Tanner (PTT) μοντέλο, το οποίο χρησιμοποιήθηκε πρόσφατα για την μελέτη του FBP από τον Hyun και τους συνεργάτες του (Shin et al. 2007, Kim et al. 2006, Hyun et al. 2004) και το μοντέλο Giesekus. Οι εξισώσεις για την λεπτή μεμβράνη παράγονται ακολουθώντας την γενική μεθοδολογία που ο Housiadas et al. 2007 ανέπτυξαν για 3D και χρονικά εξαρτημένες δακτυλιοειδείς ροές και παρουσιάζονται στο τμήμα 4^ο κεφάλαιο.

Για το πεδίο ροής του αέρα λαμβάνονται υπόψη μόνο οι ιξώδεις και αδρανειακές δυνάμεις. Οι απλοποιημένες διέπουσες εξισώσεις παράγονται χρησιμοποιώντας την κλασική ανάλυση συνοριακού στρώματος για την αξονοσυμμετρική ροή του αέρα γύρω από ένα αξονοσυμμετρικό σώμα εκ' περιστροφής το οποίο επιτρέπεται να κινείται και να παραμορφώνεται. Στην συνέχεια εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός Mangler για να αναχθούν οι συνοριακού στρώματος εξισώσεις της αξονοσυμμετρικής περίπτωσης σε αυτές για μια επίπεδη πλάκα. Οι τελευταίες, επιδέχονται λύση ομοιότητας, η οποία παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από τον Glauert 1956 στην πρωτότυπη εργασία του για τους πίδακες τοίχου. Επιπλέον δείχνουμε ότι η διατμητική τάση και η πίεση στην εξωτερική διεπιφάνεια της μεμβράνης μπορεί να υπολογιστεί με βάση το σχήμα της μεμβράνης και μόνο. Το γεγονός αυτό επιτρέπει να καταλήξουμε σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων στην αξονική διεύθυνση με αγνώστους που αφορούν το πολυμερές και μόνο.

Η δομή της παρούσας εργασίας έχει ως εξής. Στο Κεφάλαιο 1 παρουσιάζουμε την μέθοδο ομοιότητας για την επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων. Στο κεφάλαιο 2 παρουσιάζουμε τους πίδακες αέρα και την διαδικασία επίλυσης σε γνωστές γεωμετρίες. Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζουμε τις εξισώσεις λεπτού-φιλμ για το πολυμερές και την σύζευξή τους με τις αντίστοιχες εξισώσεις του αέρα.



Σχηματική παρουσίαση της διεργασίας “Film Blowing”

Equation Chapter (Next) Section 1 Κεφάλαιο 1

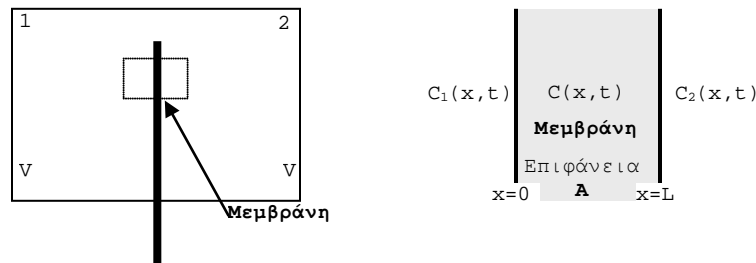
Μέθοδος Ομοιότητας

Η μέθοδος Ομοιότητας είναι μια τεχνική λύσεως των διαφορικών εξισώσεων κατά την οποία μια μερική διαφορική εξίσωση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών ανάγεται σε μια συνήθη διαφορική εξίσωση μιας σύνθετης μεταβλητής. Η μέθοδος θα χρησιμοποιηθεί για την επίλυση των εξισώσεων για τον πίδακα αέρα που χρησιμοποιείται στην βιομηχανική διεργασία Film Blowing γιατί και θα περιγραφεί παρακάτω. Περισσότερες λεπτομέρειες για την μέθοδο μπορούν να βρεθούν στην μεταπτυχιακή εργασία της Ε. Νεοφύτου 2007.

Η ανάλυση ομοιότητας, η οποία κάποιες φορές καλείται «συνδυασμός μεταβλητών», είναι εφαρμόσιμη σε συγκεκριμένα προβλήματα των οποίων τα χαρακτηριστικά μήκη προσδιορίζονται από τον ρυθμό εξέλιξης παρά από τις γεωμετρικές διαστάσεις. Τέτοια προβλήματα γενικώς αφορούν περιοχές οι οποίες είναι ημι-άπειρες.

Η μέθοδος ομοιότητας μπορεί να εφαρμοστεί σε γραμμικά όπως επίσης και σε μη-γραμμικά προβλήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων. Στο παρακάτω παράδειγμα θα χρησιμοποιήσουμε αυτήν την μέθοδο για την εύρεση της λύσης ενός τέτοιου προβλήματος. Το πρόβλημα αυτό μελετάται από τον Dean 1998.

Έστω το φαινόμενο της μεταβατικής διάχυσης κατά μήκος μιας μεμβράνης πάχους L . Η συγκέντρωση της ουσίας που πρόκειται να διαλυθεί μέσα στον διαλύτη και ο συντελεστής διάχυσης μέσα στη μεμβράνη είναι $C(x,t)$ και D , αντίστοιχα. Τα εξωτερικά διαλύματα υποθέτουμε ότι είναι πλήρως αναμειγμένα και οι συγκεντρώσεις των ουσιών που πρόκειται να διαλυθούν μέσα στο μείγμα είναι $C_1(x,t)$ και $C_2(x,t)$ αντιστοίχως. Κάθε διάλυμα έχει όγκο V , και η εκτεθειμένη περιοχή της μεμβράνης A .



Θεωρούμε ότι αρχικά δεν υπάρχει καμία ουσία και ότι την χρονική στιγμή $t=0$ η συγκέντρωση στο ένα εξωτερικό διάλυμα ξαφνικά μεταβάλλεται στο C_0 . Θα μελετήσουμε πως διαμορφώνονται οι συγκεντρώσεις κατά την διάρκεια του χρόνου t .

Συγκεντρωνόμαστε στην μεμβράνη, η οποία θεωρούμε ότι είναι ένα ομογενές υλικό και η μεταβολή της συγκέντρωσης περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

Οι αρχικές και συνοριακές συνθήκες για την $C(x,t)$ είναι:

$$C(x,0) = 0 \quad (1.2)$$

$$C(0,t) = kC_1(x,t) \quad (1.3)$$

$$C(L,t) = kC_2(x,t) \quad (1.4)$$

όπου k είναι μια σταθερά διαχωρισμού (partition coefficient).

Έστω ότι θέλουμε να μελετήσουμε το πρόβλημα της διάχυσης μεμβράνης για πολύ μικρό t ή Δt . Υποθέτουμε ότι ο όγκος V , είναι τόσο μεγάλος ώστε η $C_1(x,t)$, παραμένει πολύ κοντά στην αρχική της τιμή C_0 , για αυτό το μικρό χρονικό διάστημα t . Οι αρχικές και συνοριακές συνθήκες (1.3), (1.4), αντικαθίστανται τότε από τις:

$$C(0,t) = kC_0 \quad (1.5)$$

$$C(\infty,t) = 0 \quad (1.6)$$

Μία λύση ομοιότητας μπορεί να βρεθεί για το παραπάνω πρόβλημα της παραδοχικής διάχυσης σε πολύ μικρό χρόνο t . Χρησιμοποιώντας την αδιάστατη συγκέντρωση $\Theta \equiv C/(kC_0)$, το παραπάνω πρόβλημα που περιγράψαμε, μετασχηματίζεται στο εξής:

$$(\Pi_2) \begin{cases} \frac{\partial \Theta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} & \text{(a)} \\ \Theta(x,0) = 0 & \text{(b)} \\ \Theta(0,t) = 1 & \text{(c)} \\ \Theta(\infty,0) = 0 & \text{(d)} \end{cases} \quad (1.7)$$

Μια συνθήκη της μεθόδου ομοιότητας φαίνεται να ικανοποιείται, καθώς το πρόβλημα (Π_2) δεν περιέχει σταθερό χαρακτηριστικό μήκος. Δηλαδή δεν υπάρχει κάποια συνοριακή συνθήκη σε κάποια πεπερασμένη τιμή του x όπως $x=L$.

Για να προχωρήσουμε στην διερεύνηση λύσης ομοιότητας θα κάνουμε τον μετασχηματισμό:

$$\eta = \frac{x}{g(t)} \text{ και } \xi = t \quad (1.8)$$

Η συνάρτηση $g(t)$ είναι άγνωστη και θα πρέπει να προσδιοριστεί. Εξετάζοντας τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες παρατηρούμε ότι οι συνθήκες (1.7)b,d θα είναι ισοδύναμες εάν ισχύει

$$g(0) = 0 \quad (1.9)$$

δηλαδή, $t = 0$ και $x = \infty$ θα αντιστοιχούν σε $\eta = \infty$ εάν ικανοποιείται η εξίσωση (1.9). Επομένως εάν ισχύει το παραπάνω, οι αρχικές και συνοριακές συνθήκες του προβλήματος (Π_2) γίνονται:

$$\Theta(0, \xi) = 1, \quad \Theta(\infty, \xi) = 0$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας για τις καινούργιες μεταβλητές (1.8) έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{g(t)} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (1.10)$$

Εφαρμόζοντας την παραπάνω ισότητα για την συνάρτηση g , παίρνουμε $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{g(t)} \frac{\partial g}{\partial \eta} = 0$, αφού

$g = g(t)$, και επομένως $\frac{\partial g}{\partial \eta} = 0 \Rightarrow g = g(\xi)$, άρα η (1.10) γίνεται:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{g(\xi)} \frac{\partial}{\partial \eta},$$

Αντίστοιχα έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{g(t)} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{g(t)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{g(t)} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{g^2(t)} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} = \frac{1}{g^2(\xi)} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} = -\frac{xg'(t)}{g^2(t)} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} = -\frac{\eta g'(t)}{g(t)} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} = -\frac{\eta g'(\xi)}{g(\xi)} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} \end{aligned}$$

Οπότε χρησιμοποιώντας τις παραπάνω εξισώσεις το πρόβλημα (Π_2) μετασχηματίζεται στο εξής:

$$(\Pi_3) \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\eta g'(\xi)}{g(\xi)} \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} + \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = D \frac{1}{g^2(\xi)} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} & (a) \\ \Theta(0, \xi) = 1 & (b) \\ \Theta(\infty, \xi) = 0 & (c) \end{array} \right. \quad (1.11)$$

Η λύση που ζητάμε αφορά πολύ μικρό χρονικό διάστημα t , οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση $\Theta(\eta, \xi)$ είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής ξ . Επομένως στην εξίσωση (1.11)a ο όρος $\partial\Theta/\partial\xi$ απαλείφεται.

Παρατηρούμε ότι το πρόβλημα (Π_2) είναι ένα πρόβλημα αρχικών τιμών μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης $2^{ας}$ τάξεως με δύο συνθήκες οπότε μπορούμε εύκολα τώρα να προχωρήσουμε στην διερεύνηση της λύσης του. Από την (1.11)a έχουμε:

$$\frac{d^2\Theta}{d\eta^2} + \eta \left(\frac{g(\xi)g'(\xi)}{D} \right) \frac{d\Theta}{d\eta} = 0 \quad (1.12)$$

Όπως είδαμε παραπάνω η συνάρτηση Θ θα πρέπει να εξαρτάται μόνο από την μεταβλητή η , επομένως για να μπορέσουμε να προχωρήσουμε σε λύση της (1.12), θα πρέπει το γινόμενο $g(\xi)g'(\xi)$ να είναι σταθερά. Έστω ότι η τιμή αυτής της σταθεράς είναι C , τότε η τελευταία εξίσωση γίνεται:

$$\frac{d^2\Theta}{d\eta^2} + \frac{C}{D}\eta \frac{d\Theta}{d\eta} = 0 \quad (1.13)$$

και ολοκληρώνοντας παίρνουμε:

$$\frac{d\Theta}{d\eta} = \alpha e^{-\frac{C}{2D}\eta^2}$$

όπου α σταθερά. Ολοκληρώνουμε πάλι την τελευταία εξίσωση λαμβάνοντας υπόψη και τις συνθήκες (1.11)b,c, και έχουμε:

$$\int_0^\eta d\Theta = \alpha \int_0^\eta e^{-\frac{C}{2D}\eta^2} d\eta + C_1 \Rightarrow \Theta(\eta) - \Theta(0) = \alpha \int_0^\eta e^{-\frac{C}{2D}\eta^2} d\eta + C_1 \stackrel{\Theta(0)=1}{\Rightarrow} \Theta(\eta) = 1 + \alpha \int_0^\eta e^{-\frac{C}{2D}\eta^2} d\eta + C_1$$

$$\text{Για } \eta = 0 \rightarrow \Theta(0) = 1 \Rightarrow 1 = 1 + \alpha \int_0^0 e^{-\frac{C}{2D}\eta^2} d\eta + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\text{Για } \eta = \infty \rightarrow \Theta(\infty) = 0 \Rightarrow 0 = 1 + \alpha \int_0^\infty e^{-\frac{C}{2D}\eta^2} d\eta \stackrel{C=2D}{\Rightarrow} 0 = 1 + \alpha \int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι ίσο με $\sqrt{\pi}/2$, αφού είναι το μισό του Γκαουσιανού ολοκληρώματος:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx, \text{ άρα } \alpha = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

οπότε καταλήγουμε:

$$\Theta(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-s^2} ds \equiv 1 - \operatorname{erf}(\eta) \equiv \operatorname{erfc}(\eta) \quad (1.14)$$

όπου erf και erfc είναι η συνάρτηση σφάλματος και η συμπληρωματική συνάρτηση σφάλματος αντίστοιχα. Για να ολοκληρωθεί η λύση πρέπει να βρούμε την $g(\xi)$. Ισχύει: $(g^2)' = 2gg'$ και αφού πρέπει το γινόμενο gg' να είναι σταθερό έχουμε:

$$(g^2)' = 4D$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω εξίσωση και παίρνοντας ως αρχική συνθήκη την εξίσωση (1.9) βρίσκουμε:

$$g = 2(D\xi)^{1/2}, \quad \eta = \frac{x}{2(D\xi)^{1/2}}$$

Για να επιβεβαιώσουμε ότι η $\Theta(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-s^2} ds$ είναι η ζητούμενη λύση του προβλήματος

(Π_2), βρίσκουμε τα $\frac{\partial \Theta}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}$ και κάνουμε αντικατάσταση στην δ.ε. της (1.7)

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = -\frac{\eta g'(\xi)}{g(\xi)} \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} + \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = -\frac{x}{2(Dt)^{1/2}} \frac{\left(\frac{D}{t}\right)^{1/2}}{2(Dt)^{1/2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2} = -\frac{x e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{2\sqrt{D^3 t^2} \sqrt{\pi}}$$

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = \frac{1}{g^2(\xi)} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} = \frac{1}{4Dt} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2} \right) = \frac{-x e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{2(Dt)^{1/2} \sqrt{\pi} Dt}$$

Οπότε θα έχουμε $-\frac{x e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{2\sqrt{D^3 t^2} \sqrt{\pi}} = D \frac{-x e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{2(Dt)^{1/2} \sqrt{\pi} Dt}$ η οποία επαληθεύεται. Αντίστοιχα για τις

συνοριακές συνθήκες έχουμε:

$$\Theta(x, 0) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0, \quad \Theta(0, t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^0 e^{-s^2} ds = 1 \text{ και}$$

$$\Theta(\infty, 0) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds = 0.$$

Equation Section (Next) Κεφάλαιο 2

Οι εξισώσεις διατήρησης μάζας, ορμής και ενέργειας

2.1 Εξισώσεις σε Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων

Έστω ρ, \bar{P} η πυκνότητα και η πίεση του αέρα αντίστοιχα, $\bar{U}_x, \bar{U}_y, \bar{U}_z$, οι συνιστώσες της ταχύτητας σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, συντεταγμένες στους αντίστοιχους άξονες.

Εξίσωση διατήρησης της μάζας

Η εξίσωση της διατήρησης της μάζας σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\rho \bar{U}_x) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}}(\rho \bar{U}_y) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\rho \bar{U}_z) = 0 \quad (2.1)$$

Θα μελετήσουμε το φαινόμενο για ασυμπίεστο ρευστό, άρα $\rho = \text{σταθερο}$, σε μόνιμη κατάσταση, άρα $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, και επίσης θα θεωρήσουμε ότι η ροή είναι διδιάστατη δηλαδή δεν υπάρχουν μεταβολές στην \bar{y} -

διεύθυνση, άρα $\frac{\partial}{\partial \bar{y}} = 0$, οπότε η (2.1) γίνεται:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\rho \bar{U}_x) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\rho \bar{U}_z) = 0 \Rightarrow \rho \left(\frac{\partial \bar{U}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial \bar{z}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (2.2)$$

Για να μπορέσουμε να εργαστούμε πιο εύκολα θα κάνουμε αδιαστατοποίηση της τελευταίας εξίσωσης. Θεωρούμε τα χαρακτηριστικά μεγέθη L, V, ω , του μήκους, της ταχύτητας και της πίεσης αντίστοιχα. Θέτουμε:

$$x = \frac{\bar{x}}{L}, z = \frac{\bar{z}}{L}, U_x = \frac{\bar{U}_x}{V}, U_z = \frac{\bar{U}_z}{V},$$

Ισχύει: $\frac{\partial \bar{U}_x}{\partial \bar{x}} = \frac{V}{L} \frac{\partial U_x}{\partial x}$, $\frac{\partial \bar{U}_z}{\partial \bar{z}} = \frac{V}{L} \frac{\partial U_z}{\partial z}$ και επομένως η (2.2) μετασχηματίζεται στην εξής:

$$\frac{V}{L} \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{V}{L} \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0}$$

Εξίσωση διατήρησης της ορμής

Η εξίσωση της διατήρησης της ορμής στον x-άξονα είναι:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{U}_x}{\partial t} + \bar{U}_x \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial x} + \bar{U}_y \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial y} + \bar{U}_z \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{U}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}_x}{\partial z^2} \right) \quad (2.3)$$

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως θεωρούμε ότι $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$ οπότε η (2.3) γίνεται:

$$\rho \left(\bar{U}_x \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial x} + \bar{U}_z \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{U}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}_x}{\partial z^2} \right) \quad (2.4)$$

Θέτουμε: $x = \frac{\bar{x}}{L}, z = \frac{\bar{z}}{L}, U_x = \frac{\bar{U}_x}{V}, U_z = \frac{\bar{U}_z}{V}$, οπότε θα ισχύει:

$$\frac{\partial \bar{U}_x}{\partial x} = \frac{V}{L} \frac{\partial U_x}{\partial x}, \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial z} = \frac{V}{L} \frac{\partial U_z}{\partial z}, \frac{\partial^2 \bar{U}_x}{\partial x^2} = \frac{V}{L^2} \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \bar{U}_z}{\partial z^2} = \frac{V}{L^2} \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2}, \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = \frac{\varpi}{L} \frac{\partial P}{\partial x}$$

Επομένως η (2.4) μετασχηματίζεται στην εξής:

$$\begin{aligned} \rho \left(V U_x \frac{V}{L} \frac{\partial U_x}{\partial x} + V U_z \frac{V}{L} \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) &= -\frac{\varpi}{L} \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{V}{L^2} \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{V}{L^2} \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \right) \Rightarrow \\ \frac{\rho V}{L} \left(U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_z \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) &= -\frac{\varpi}{L} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu V}{L^2} \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \right) \Rightarrow \\ \frac{\rho V L}{\mu} \left(U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_z \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) &= -\frac{\varpi L}{\mu V} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Το $\frac{\rho V L}{\mu}$ είναι μια χαρακτηριστική σταθερά που ονομάζεται σταθερά Reynolds και συμβολίζεται ως Re .

Εξετάζουμε τις δυο παρακάτω περιπτώσεις:

α) Θεωρώντας ότι το ϖ είναι μια χαρακτηριστική πίεση, με $\varpi = \frac{\mu V}{L}$, η εξίσωση (2.5) γίνεται:

$$\boxed{\text{Re} \left(U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_z \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2}}$$

β) Εάν θέσουμε $\varpi = \rho V^2$ ο συντελεστής μπροστά από τον όρο $\frac{\partial P}{\partial x}$, γίνεται: $\frac{L \rho V^2}{\mu V} = \frac{L \rho V}{\mu} = Re$ η

εξίσωση (2.5) γίνεται:

$$\boxed{U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_z \frac{\partial U_x}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \right)}$$

Η εξίσωση της διατήρησης της ορμής στον z-άξονα σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{U}_z}{\partial t} + \bar{U}_x \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial x} + \bar{U}_y \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial y} + \bar{U}_z \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{U}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}_z}{\partial z^2} \right) \quad (2.6)$$

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως θεωρούμε ότι $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$ οπότε η (2.6) γίνεται:

$$\rho \left(\bar{U}_x \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial x} + \bar{U}_z \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{U}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}_z}{\partial z^2} \right) \quad (2.7)$$

Θέτουμε όπως προηγουμένως: $x = \frac{\bar{x}}{L}, z = \frac{\bar{z}}{L}, U_x = \frac{\bar{U}_x}{V}, U_z = \frac{\bar{U}_z}{V},$

Ισχύει: $\frac{\partial \bar{U}_z}{\partial \bar{x}} = \frac{V}{L} \frac{\partial U_z}{\partial x}, \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial \bar{z}} = \frac{V}{L} \frac{\partial U_z}{\partial z}, \frac{\partial^2 \bar{U}_z}{\partial \bar{x}^2} = \frac{V}{L^2} \frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \bar{U}_z}{\partial \bar{z}^2} = \frac{V}{L^2} \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2}, \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}} = \frac{\varpi}{L} \frac{\partial P}{\partial z}$

Επομένως η (2.7) μετασχηματίζεται στην εξής:

$$\begin{aligned} \rho \left(V U_x \frac{V}{L} \frac{\partial U_z}{\partial x} + V U_z \frac{V}{L} \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\varpi}{L} \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{V}{L^2} \frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} + \frac{V}{L^2} \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right) \Rightarrow \\ \frac{\rho V}{L} \left(U_x \frac{\partial U_z}{\partial x} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\varpi}{L} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\mu V}{L^2} \left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right) \Rightarrow \\ \frac{\rho V L}{\mu} \left(U_x \frac{\partial U_z}{\partial x} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\varpi L}{\mu V} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Αντίστοιχα, με την ανάλυση για το ϖ που έχει προηγηθεί έχουμε:

α) Εάν θέσουμε $\varpi = \frac{\mu V}{L}$, η εξίσωση (2.8) γίνεται:

$$\boxed{\text{Re} \left(U_x \frac{\partial U_z}{\partial x} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2}}$$

β) Εάν θέσουμε $\varpi = \rho V^2$ έχουμε:

$$\boxed{U_x \frac{\partial U_z}{\partial x} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right)}$$

Εξίσωση διατήρησης της θερμότητας

Η εξίσωση της διατήρησης της θερμότητας σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι:

$$\rho c_p \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{U}_{\bar{x}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{U}_{\bar{y}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} + \bar{U}_{\bar{z}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} \right) = k \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} \right) \quad (2.9)$$

όπου στην (2.9) έχουμε θεωρήσει ότι η μαζική πυκνότητα του ρευστού ρ είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη της θερμοκρασίας, c_p είναι η επίσης σταθερή θερμοχωρητικότητα του και k ο σταθερός συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας.

Αν θεωρήσουμε ότι $\frac{\partial}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}} = 0$ η (2.9) γίνεται:

$$\rho c_p \left(\bar{U}_{\bar{x}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{U}_{\bar{z}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} \right) = k \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} \right) \quad (2.10)$$

Θέτουμε: $T = \frac{\bar{T}}{\tau}, x = \frac{\bar{x}}{L}, z = \frac{\bar{z}}{L}, U_x = \frac{\bar{U}_{\bar{x}}}{V}, U_z = \frac{\bar{U}_{\bar{z}}}{V},$

Ισχύει: $\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = \frac{\tau}{L} \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} = \frac{\tau}{L} \frac{\partial T}{\partial z}, \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} = \frac{\tau}{L^2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} = \frac{\tau}{L^2} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$

Επομένως η (2.10) μετασχηματίζεται στην εξής:

$$\rho c_p \left(V U_x \frac{\tau}{L} \frac{\partial T}{\partial x} + V U_z \frac{\tau}{L} \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left(\frac{\tau}{L^2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\tau}{L^2} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \Rightarrow Pe \left(U_x \frac{\partial T}{\partial x} + U_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

όπου $Pe \equiv \frac{\rho c_p V L}{k} = Pr Re, \quad Pr \equiv \frac{\mu c_p}{k}, \quad Re \equiv \frac{\rho V L}{\mu}$

2.2 Εξισώσεις σε Κυλινδρικό Σύστημα Συντεταγμένων

Οι αντίστοιχες εξισώσεις για την διατήρηση της μάζας, την διατήρηση της ορμής και την διατήρηση της θερμότητας της διάταξης που μελετάμε στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων έχουν ως εξής.

Εξίσωση διατήρησης της μάζας

Η εξίσωση της διατήρησης της μάζας είναι:

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial t} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} (\rho \bar{r} \bar{U}_{\bar{r}}) + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} (\rho \bar{U}_{\bar{\theta}}) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\rho \bar{U}_{\bar{z}}) = 0 \quad (2.11)$$

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, θα μελετήσουμε το φαινόμενο για ασυμπίεστο ρευστό σε μόνιμη κατάσταση, άρα $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, και επίσης θα θεωρήσουμε ότι η ροή είναι αξονοσυμμετρική δηλαδή

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} = 0, \text{ οπότε η (2.11) γίνεται:}$$

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} (\rho \bar{r} \bar{U}_{\bar{r}}) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\rho \bar{U}_{\bar{z}}) = 0 \Rightarrow \rho \frac{\partial \bar{U}_{\bar{r}}}{\partial \bar{r}} + \frac{\rho}{\bar{r}} \bar{U}_{\bar{r}} + \rho \frac{\partial \bar{U}_{\bar{z}}}{\partial \bar{z}} = 0, \text{ οπότε τελικά}$$

$$\frac{\partial \bar{U}_{\bar{r}}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{U}_{\bar{r}}}{\bar{r}} + \frac{\partial \bar{U}_{\bar{z}}}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (2.12)$$

Για να κάνουμε αδιαστατοποίηση της τελευταίας εξίσωσης θέτουμε $U_r = \frac{\bar{U}_{\bar{r}}}{V}, U_z = \frac{\bar{U}_{\bar{z}}}{V}, r = \frac{\bar{r}}{L}, z = \frac{\bar{z}}{L}$

$$\text{Ισχύει: } \frac{\bar{U}_{\bar{r}}}{\bar{r}} = \frac{V U_r}{L r}, \frac{\partial \bar{U}_{\bar{r}}}{\partial \bar{r}} = \frac{V}{L} \frac{\partial U_r}{\partial r}, \frac{\partial \bar{U}_{\bar{z}}}{\partial \bar{r}} = \frac{V}{L} \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

Επομένως η (2.12) μετασχηματίζεται στην εξής:

$$\boxed{\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0} \quad (2.13)$$

Εξίσωση διατήρησης της ορμής

Η εξίσωση που περιγράφει την διατήρηση της ορμής στον r-άξονα σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{U}_{\bar{r}}}{\partial \bar{t}} + \bar{U}_{\bar{r}} \frac{\partial \bar{U}_{\bar{r}}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{U}_{\bar{\theta}}}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{U}_{\bar{r}}}{\partial \bar{\theta}} - \frac{\bar{U}_{\bar{\theta}}}{\bar{r}} + \bar{U}_{\bar{z}} \frac{\partial \bar{U}_{\bar{r}}}{\partial \bar{z}} \right) = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{r}} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} (\bar{r} \bar{U}_{\bar{r}}) \right) + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{U}_{\bar{r}}}{\partial \bar{\theta}^2} - \frac{2}{\bar{r}^2} \frac{\partial \bar{U}_{\bar{r}}}{\partial \bar{\theta}} + \frac{\partial^2 \bar{U}_{\bar{r}}}{\partial \bar{z}^2} \right]$$

θεωρώντας όπως προηγουμένως ότι $\frac{\partial}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} = 0$ έχουμε:

$$\rho \left(\bar{U}_{\bar{r}} \frac{\partial \bar{U}_{\bar{r}}}{\partial \bar{r}} + \bar{U}_{\bar{z}} \frac{\partial \bar{U}_{\bar{r}}}{\partial \bar{z}} \right) = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{r}} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} (\bar{r} \bar{U}_{\bar{r}}) \right) + \frac{\partial^2 \bar{U}_{\bar{r}}}{\partial \bar{z}^2} \right] \quad (2.14)$$

Θέτουμε $U_r = \frac{\bar{U}_{\bar{r}}}{V}, P = \frac{\bar{P}}{\rho}, r = \frac{\bar{r}}{L}, z = \frac{\bar{z}}{L}$

$$\text{Ισχύει: } \frac{\partial}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial}{L \partial r}, \frac{\partial \bar{U}_{\bar{r}}}{\partial \bar{r}} = \frac{V}{L} \frac{\partial U_r}{\partial r}, \frac{\partial \bar{U}_{\bar{r}}}{\partial \bar{z}} = \frac{V}{L} \frac{\partial U_r}{\partial z}, \frac{\partial^2 \bar{U}_{\bar{r}}}{\partial \bar{z}^2} = \frac{V}{L^2} \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2}, \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{r}} = \frac{\varpi}{L} \frac{\partial P}{\partial r}$$

Επομένως η (2.14) μετασχηματίζεται στην εξής:

$$\rho \left(V U_r \frac{V}{L} \frac{\partial U_r}{\partial r} + V U_z \frac{V}{L} \frac{\partial U_r}{\partial z} \right) = -\frac{\varpi}{L} \frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[\frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{L r} \frac{\partial}{\partial r} (L r V U_r) \right) + \frac{V}{L^2} \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} \right] \Rightarrow$$

$$\frac{\rho V L}{\mu} \left(U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_r}{\partial z} \right) = -\frac{\varpi L}{\mu V} \frac{\partial P}{\partial r} + \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_r) \right) + \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} \right] \quad (2.15)$$

Αντίστοιχα, με την ανάλυση για το ϖ που έχει προηγηθεί έχουμε:

α) Εάν θέσουμε $\varpi = \frac{\mu V}{L}$, η εξίσωση (2.15) γίνεται:

$$\boxed{\text{Re} \left(U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_r) \right) + \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} \right]}$$

β) Εάν θέσουμε $\varpi = \rho V^2$ έχουμε:

$$\boxed{U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_r}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_r) \right) + \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} \right]} \quad (2.16)$$

Η εξίσωση που περιγράφει την διατήρηση της ορμής στον z-άξονα σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{U}_{\bar{z}}}{\partial t} + \bar{U}_{\bar{r}} \frac{\partial \bar{U}_{\bar{z}}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{U}_{\theta}}{r} \frac{\partial \bar{U}_{\bar{z}}}{\partial \theta} + \bar{U}_{\bar{z}} \frac{\partial \bar{U}_{\bar{z}}}{\partial \bar{z}} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}} + \mu \left[\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{U}_{\bar{z}}}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{U}_{\bar{z}}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}_{\bar{z}}}{\partial \bar{z}^2} \right]$$

Θεωρώντας ότι ισχύει $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ έχουμε:

$$\rho \left(\bar{U}_{\bar{r}} \frac{\partial \bar{U}_{\bar{z}}}{\partial \bar{r}} + \bar{U}_{\bar{z}} \frac{\partial \bar{U}_{\bar{z}}}{\partial \bar{z}} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}} + \mu \left[\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{U}_{\bar{z}}}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{\partial^2 \bar{U}_{\bar{z}}}{\partial \bar{z}^2} \right] \quad (2.17)$$

Θέτουμε: $U_r = \frac{\bar{U}_{\bar{r}}}{V}, U_z = \frac{\bar{U}_{\bar{z}}}{V}, P = \frac{\bar{P}}{\varpi} r = \frac{\bar{r}}{L}, z = \frac{\bar{z}}{L}$

$$\text{Ισχύει: } \frac{\partial}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial}{L \partial r}, \frac{\partial \bar{U}_{\bar{z}}}{\partial \bar{r}} = \frac{V}{L} \frac{\partial U_z}{\partial r}, \frac{\partial \bar{U}_{\bar{z}}}{\partial \bar{z}} = \frac{V}{L} \frac{\partial U_z}{\partial z}, \frac{\partial^2 \bar{U}_{\bar{z}}}{\partial \bar{z}^2} = \frac{V}{L^2} \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2}, \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}} = \frac{\varpi}{L} \frac{\partial P}{\partial z}$$

Επομένως η (2.17) μετασχηματίζεται στην εξής:

$$\rho \left(V U_r \frac{V}{L} \frac{\partial U_z}{\partial r} + V U_z \frac{V}{L} \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) = -\frac{\varpi}{L} \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{L r} \frac{\partial}{\partial r} \left(L r \frac{V}{L} \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) + \frac{V}{L^2} \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right] \Rightarrow$$

$$\frac{\rho V L}{\mu} \left(U_r \frac{\partial U_z}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) = -\frac{\varpi L}{\mu V} \frac{\partial P}{\partial z} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right] \quad (2.18)$$

Αντίστοιχα, με την ανάλυση για το ϖ που έχει προηγηθεί έχουμε:

α) Εάν θέσουμε $\varpi = \frac{\mu V}{L}$, η εξίσωση (2.18) γίνεται:

$$Re \left(U_r \frac{\partial U_z}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right]$$

β) Εάν θέσουμε $\varpi = \rho V^2$ έχουμε:

$$U_r \frac{\partial U_z}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right] \quad (2.19)$$

Εξίσωση διατήρησης της θερμότητας

Η εξίσωση που περιγράφει την διατήρηση της θερμότητας σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι:

$$\rho c_p \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{U}_r \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} + \frac{\bar{U}_\theta}{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \theta} + \bar{U}_z \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right) = k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} \right]$$

Θεωρώντας ότι ισχύει $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ έχουμε:

$$\rho c_p \left(\bar{U}_r \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} + \bar{U}_z \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right) = k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} \right] \quad (2.20)$$

Θέτουμε: $T = \frac{\bar{T}}{\tau}$, $r = \frac{\bar{r}}{L}$, $z = \frac{\bar{z}}{L}$, $U_r = \frac{\bar{U}_r}{V}$, $U_z = \frac{\bar{U}_z}{V}$

Ισχύει: $\frac{\partial \bar{T}}{\partial r} = \frac{\tau}{L} \frac{\partial T}{\partial r}$, $\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = \frac{\tau}{L} \frac{\partial T}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} = \frac{\tau}{L^2} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ και επομένως η (2.20) μετασχηματίζεται στην εξής:

$$\begin{aligned} \rho c_p \left(V U_r \frac{\tau}{L} \frac{\partial T}{\partial r} + V U_z \frac{\tau}{L} \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= k \left[\frac{1}{L r} \frac{\partial}{\partial r} \left(L r \frac{\tau}{L} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\tau}{L^2} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \Rightarrow \\ \rho c_p \frac{V \tau}{L} \left(U_r \frac{\partial T}{\partial r} + U_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= \frac{k \tau}{L^2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \Rightarrow \\ \frac{\rho c_p}{k} L V \left(U_r \frac{\partial T}{\partial r} + U_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \end{aligned}$$

και τελικά:

$$\boxed{Pe \left(U_r \frac{\partial T}{\partial r} + U_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}$$

Επομένως οι τελικές εξισώσεις που θα χρησιμοποιήσουμε για την περιγραφή της ελεύθερης ροής αέρα από το στόμα ακροφυσίου σε αδιάστατη μορφή είναι οι εξής:

ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

$$\text{Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων } (x,z): \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0$$

$$\text{Κυλινδρικό Σύστημα Συντεταγμένων } (r,z): \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0$$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

$$\text{Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων } (x,z): \text{Pe} \left(U_x \frac{\partial T}{\partial x} + U_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$$\text{Κυλινδρικό Σύστημα Συντεταγμένων } (r,z): \text{Pe} \left(U_r \frac{\partial T}{\partial r} + U_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ

Θεωρώντας ότι $\varpi = \frac{\mu V}{L}$

Καρτεσιανό Σύστ. Συντ. (x,z):

$$x\text{-άξονας: } \text{Re} \left(U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_z \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2}$$

$$z\text{-άξονας: } \text{Re} \left(U_x \frac{\partial U_z}{\partial x} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2}$$

Κυλινδρικό Σύστ. Συντ. (r,z):

$$r\text{-άξονας: } \text{Re} \left(U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_r) \right) + \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} \right]$$

$$z\text{-άξονας: } \text{Re} \left(U_r \frac{\partial U_z}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right]$$

Θεωρώντας ότι $\varpi = \rho V^2$

Καρτεσιανό Σύστ. Συντ. (x,z):

$$x\text{-άξονας: } U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_z \frac{\partial U_x}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \right)$$

$$z\text{-άξονας: } U_x \frac{\partial U_z}{\partial x} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right)$$

Κυλινδρικό Σύστ. Συντ. (r,z):

$$r\text{-άξονας: } U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_r}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_r) \right) + \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} \right]$$

$$z\text{-άξονας: } U_r \frac{\partial U_z}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right]$$

Equation Section (Next) Κεφάλαιο 3

Οι πίδακες αέρα

3.1 Ελεύθερη ροή αέρα (free air jet)

Στο παρακάτω παράδειγμα θα μελετήσουμε το φαινόμενο της ελεύθερης ροής αέρα από το στόμιο ακροφύσιου. Οι εξισώσεις που θα χρησιμοποιήσουμε για να περιγράψουμε την εξέλιξη του φαινομένου είναι η διατήρηση της μάζας, και η διατήρηση της ορμής.

Πρόκειται για ένα παράδειγμα ροής αέρα (Schlichting & Gersten, 2003) χωρίς περιορισμούς και εξωτερικές επιδράσεις (τοίχος, εξωτερική ροή κ.α.) στο οποίο μπορεί να εφαρμοσθεί η θεωρία του συνοριακού στρώματος. Καθώς δεν υπάρχει κάποιος τοίχος ή κάποιο άλλο εμπόδιο ή περιορισμός, πρόκειται για μια περίπτωση ελεύθερου οριακού στρώματος. Οι εξισώσεις που περιγράφουν το φαινόμενο (σε καρτεσιανές και κυλινδρικές συντεταγμένες) δόθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Οι αντίστοιχες εξισώσεις συνοριακού στρώματος, Schlichting & Gersten, 2003, είναι:

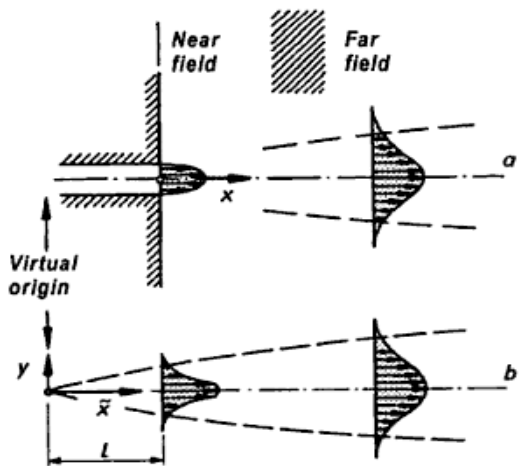


Fig. 7.7. Velocity profile of the free jet, $\tilde{x} = x + L$
 (a) parabola shaped profile at the outlet
 (b) fictitious replacement flow with virtual origin

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (3.2)$$

με συνοριακές συνθήκες $U = 0, V = 0$ για $y \rightarrow \infty$ και $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ για $y \rightarrow \infty$. Επίσης, λόγω ότι στην ελεύθερη ροή αέρα δεν υπάρχει εξωτερική ροή ισχύει $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$

Εισάγουμε την ροϊκή συνάρτηση: $\Psi(x,y)$, έτσι ώστε να ισχύει $U = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, V = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, η εξ.(3.1)

ικανοποιείται ταυτόσημα ενώ η (3.2) γίνεται:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} \quad (3.3)$$

Κάνουμε τον μετασχηματισμό από τις μεταβλητές x, y στις αδιάστατες μεταβλητές ξ, η :

$$\xi \equiv x, \quad \eta \equiv \frac{y}{\delta(x)} \quad (3.4)$$

Έστω ότι η ροϊκή συνάρτηση είναι της μορφής:

$$\Psi(\xi, \eta) = U_N(\xi) \delta(\xi) f(\eta) \quad (3.5)$$

Κάνοντας τον παραπάνω μετασχηματισμό και βάζοντας την (4) στην (3) παίρνουμε:

$$f''' + \alpha_1 f f'' - \alpha_3 f'^2 = \delta^2 \frac{U_N}{V} \left(f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \quad (3.6)$$

Όπου $\alpha_1 = \frac{\delta}{V} \frac{d}{d\xi} (U_N \delta)$, $\alpha_3 = \frac{\delta^2}{V} \frac{dU_N}{d\xi}$ και αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες:

$\eta \rightarrow -\infty: f' = 0$, $\eta = 0: f = 0$, $\eta \rightarrow \infty: f' = 0$. Ολοκληρώνουμε την (3.6) ως προς η από $-\infty$ έως $+\infty$ και παίρνουμε:

$$(1 + \alpha_3) \int_{-\infty}^{\infty} f'^2 d\eta = 0 \Rightarrow \alpha_3 = -1$$

Επομένως παίρνουμε την εξίσωση: $f''' + f f'' + f' = 0$ η οποία έχει την αναλυτική λύση:

$$f(\eta) = \tanh(\eta) \quad f'(\eta) = 2(1 - \tanh^2(\eta)) \quad (3.7)$$

3.2 Τζετ αέρα πάνω από επίπεδη πλάκα

Οι εξισώσεις συνοριακού στρώματος για επίπεδη ροή πάνω μια επίπεδη πλάκα, πάνω από έναν επίπεδο τοίχο, και σε καρτεσιανή γεωμετρία έχουν ως εξής:

$$\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial s} = 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{1}{St} \frac{\partial U}{\partial t} + V \frac{\partial U}{\partial n} + U \frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} \quad (3.9)$$

Στην παραπάνω εξίσωση $St \equiv (t_c^* U_c^*) / r_c^*$ είναι ο αριθμός Strouhal. Σε μόνιμη κατάσταση, η λύση για τις Εξ.(3.8),(3.9) μπορεί πιο εύκολα να προκύψει εισάγοντας την ροϊκή συνάρτηση Ψ η οποία ορίζεται έτσι ώστε οι συνιστώσες της ταχύτητας να δίνονται από $U = \partial\Psi/\partial n$ και $V = -\partial\Psi/\partial s$. Τότε η Εξ.(3.8) ικανοποιείται ταυτόσημα ενώ η Εξ.(3.9), έπειτα από μερικές αλγεβρικές πράξεις, γίνεται:

$$V \frac{\partial U}{\partial n} + U \frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} \Rightarrow -\frac{\partial\Psi}{\partial s} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial n} \right) + \frac{\partial\Psi}{\partial n} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial n} \right) = \frac{\partial^2}{\partial n^2} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial n} \right) \Rightarrow -\frac{\partial\Psi}{\partial s} \frac{\partial^2\Psi}{\partial n^2} + \frac{\partial\Psi}{\partial n} \frac{\partial^2\Psi}{\partial s\partial n} = \frac{\partial^3\Psi}{\partial n^3}$$

$$\frac{\partial^3\Psi}{\partial n^3} - \left(\frac{\partial\Psi}{\partial n} \frac{\partial^2\Psi}{\partial s\partial n} - \frac{\partial\Psi}{\partial s} \frac{\partial^2\Psi}{\partial n^2} \right) = 0 \quad (3.10)$$

Μια λύση ομοιότητας μπορεί να αποκτηθεί υποθέτοντας ότι η ροϊκή συνάρτηση είναι της μορφής

$\Psi(n, s) = s^n f\left(\frac{n}{cs^m}\right)$, όπου c, n, m είναι άγνωστες σταθερές οι οποίες πρέπει να προσδιοριστούν. Ισχύει:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\eta} = \frac{\partial}{\partial\tilde{\eta}} \left(s^n f\left(\frac{\eta}{cs^m}\right) \right) = s^n \frac{\partial}{\partial\eta} \left(f\left(\frac{\eta}{cs^m}\right) \right) = s^n f' \frac{\partial}{\partial\eta} \left(\frac{\eta}{cs^m} \right) = s^n f' \frac{1}{cs^m} = \frac{s^{n-m}}{c} f'$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\eta^2} = \frac{\partial}{\partial\eta} \left(\frac{s^{n-m}}{c} f' \right) = \frac{s^{n-m}}{c} f'' \frac{\partial}{\partial\eta} \left(\frac{\eta}{cs^m} \right) = \frac{s^{n-2m}}{c^2} f''$$

$$\frac{\partial^3\Psi}{\partial\eta^3} = \frac{s^{n-3m}}{c^3} f'''$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(s^n f\left(\frac{\tilde{\eta}}{cs^m}\right) \right) = ns^{n-1} f + s^n f' \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\eta}{cs^m} \right) = ns^{n-1} f - \frac{ms^{n-m-1}\eta}{c} f'$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\eta\partial s} = \frac{\partial}{\partial\eta} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial s} \right) = \frac{\partial}{\partial\tilde{\eta}} \left(ns^{n-1} f - \frac{ms^{n-m-1}\eta}{c} f' \right) = ns^{n-1} f' \frac{\partial}{\partial\eta} \left(\frac{\eta}{cs^m} \right) - \frac{ms^{n-m-1}}{c} f' -$$

$$\frac{ms^{n-m-1}\eta}{c} f'' \frac{\partial}{\partial\eta} \left(\frac{\eta}{cs^m} \right) = \frac{(n-m)s^{n-m-1}}{c} f' - \frac{ms^{n-2m-1}\eta}{c^2} f''$$

Αντικαθιστούμε στην (3.10) και παίρνουμε:

$$\frac{s^{n-3m}}{c^3} f''' - \left[\frac{s^{n-m}}{c} f' \left(\frac{(n-m)s^{n-m-1}}{c} f' - \frac{ms^{n-2m-1}\eta}{c^2} f'' \right) - \left(ns^{n-1} f - \frac{ms^{n-m-1}\eta}{c} f' \right) \frac{s^{n-2m}}{c^2} f'' \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{s^{n-3m}}{c^3} f''' - \left(\frac{(n-m)s^{2n-2m-1}}{c^2} (f')^2 - \frac{ms^{2n-3m-1}\eta}{c^3} f f'' - \frac{ns^{2n-2m-1}}{c^2} f f'' + \frac{ms^{2n-3m-1}\eta}{c^3} f f'' \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{s^{n-3m}}{c^3} f''' - \frac{(n-m)s^{2n-2m-1}}{c^2} (f')^2 + \frac{ns^{2n-2m-1}}{c^2} f f'' = 0$$

συνεπώς έχουμε την εξίσωση:

$$f'''(x) + c_0 f(x) f''(x) + c_1 [f'(x)]^2 = 0, \quad x \equiv \tilde{n}/(cs^{3/4}) \quad (3.11)$$

όπου $c_0 = cns^{n+m-1}$ και $c_1 = c(m-n)s^{n+m-1}$. Οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες έχουν ως εξής:

$$f(0)=0, \quad f'(0)=0, \quad f(\infty)=1, \quad f'(\infty)=0, \quad f''(\infty)=0, \quad (3.12)(a-e)$$

όπου η συνοριακή συνθήκη (11c) χρησιμοποιείται χωρίς πρόβλημα της γενικότητας. Επομένως, μια λύση ομοιότητας υπάρχει μόνο εάν c_0 και c_1 είναι σταθερές και $n+m-1=0$.

Οι Εξ.(3.11) και (3.12) αποτελούν ένα μη-γραμμικό πρόβλημα ιδιοτιμών το οποίο έχει μη-τετριμμένες λύσεις μόνο για συγκεκριμένες τιμές των c_0 και c_1 . Ο Glauert (1956) έδειξε ότι κατάλληλες τιμές για τις σταθερές είναι $c_0=1$, $c_1=2$ και επομένως έχουμε:

$$n+m-1=0, \quad cn=1, \quad c(m-n)=2$$

Η λύση του παραπάνω συστήματος είναι:

$$n = \frac{1}{4}, \quad c = 4, \quad m = \frac{3}{4}$$

Έτσι η μορφή της ροϊκής συνάρτησης δίνεται από $\Psi(n,s) = s^{1/4} f\left(\frac{n}{4s^{3/4}}\right)$ και η αντίστοιχη λύση για την f δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή από την σχέση:

$$\frac{n}{4s^{3/4}} = \ln \left(\frac{\sqrt{1+\sqrt{f}} + f}{1-\sqrt{f}} \right) + \sqrt{3} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{3f}}{2+\sqrt{f}} \right) \quad (3.13)$$

Η λύση συμπληρώνεται προσδιορίζοντας την έως τώρα άγνωστη ταχύτητα αναφοράς για τον αέρα, U_c^* . Αυτό μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας την σταθερότητα της εξωτερικής ροής της ορμής,

$F(s) \equiv \int_0^\infty \left(U \int_n^\infty U^2 dn \right) dn$, μια έννοια η οποία για πρώτη φορά εισήχθη από τον Glauert, η οποία είναι μια

σταθερά για την ροή του αέρα. Συγκεκριμένα, μπορεί να δειχθεί ότι $F \equiv F^*/F_c^* = 1/40$ όπου $F_c^* = 4\pi^2 U_c^{*2} r_c^* \eta_a^* / \rho_a^*$ είναι η χαρακτηριστική κλίμακα για την F , από το οποίο προκύπτει ότι:

$$F^*/F_c^* = 1/40 \Rightarrow \frac{F^*}{4\pi^2 U_c^{*2} r_c^* \eta_a^* / \rho_a^*} = \frac{1}{40} \Rightarrow U_c^{*2} = \frac{10F^* \rho_a^*}{\pi^2 r_c^* \eta_a^*} \Rightarrow$$

$$U_c^* = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{10F^* \rho_a^*}{r_c^* \eta_a^*}} \quad (3.14)$$

Η εξωτερική ροή της ροϊκής ορμής, F^* , μπορεί να υπολογιστεί όταν είναι διαθέσιμες πληροφορίες για την ροή του αέρα στο ακροφύσιο. Για την αξονοσυμμετρική περίπτωση μια πρόχειρη εκτίμηση είναι

$$F^* \approx \frac{1}{2} U_c^* Q_a^{*2} \quad (\text{Glauert 1956}) \quad \text{όπου } U_c^* \text{ είναι μια τυπική ταχύτητα για τον πίδακα και } Q_a^* = \int_0^\infty U^* dn^* \text{ είναι}$$

ο ογκομετρικός ρυθμός ροής ανά ακτίνιο. Η τελευταία σχέση προκύπτει ως εξής:

$$F^* = \int_0^\infty \left(U^* \int_{n^*}^\infty U^{*2} dn^* \right) dn^* \approx U_c^* \int_0^\infty \left(U^* \int_{n^*}^\infty U^* dn^* \right) dn^* = \frac{1}{2} U_c^* \int_0^\infty -\frac{\partial}{\partial n^*} \left(\int_{n^*}^\infty U^* dn^* \right)^2 dn^* = \frac{1}{2} U_c^* \left(\int_0^\infty U^* dn^* \right)^2$$

Η διατμητική τάση στον τοίχο, $S_{ns,w}$, μπορεί να βρεθεί παρατηρώντας ότι $f''(0) = \int_0^\infty f'^2(x) dx = 2/9$.

Έτσι:

$$S_{ns,w} = \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{n=0} = \frac{1}{72} s^{-5/4} \quad (3.15)$$

3.3. Τζετ αέρα γύρω από αξονοσυμμετρικό σώμα εκ' περιστροφής

Στην περίπτωση που έχουμε ένα αξονοσυμμετρικό σώμα εκ' περιστροφής και έχουμε ένα τζετ αέρα το οποίο διοχετεύεται εφαπτομενικά του σώματος οι αδιάστατες εξισώσεις του συνοριακού στρώματος είναι:

$$\frac{\partial(RV)}{\partial n} + \frac{\partial(RU)}{\partial s} = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{1}{St} \frac{\partial U}{\partial t} + V \frac{\partial U}{\partial n} + U \frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \kappa U^2 \quad (3.18)$$

Αφού, δεν υπάρχει εξωτερική ροή και ο αέρας μακριά από το φιλμ είναι στάσιμος, υπάρχει μόνο ένα επικρατών κομμάτι της πίεσης το οποίο όμως δεν μπαίνει στην Εξ.(3.24). Η πίεση αυτή, που δίνεται από την Εξ.(3.18) στην οποία $\kappa = \kappa(s)$ είναι η τοπική καμπυλότητα της διεπιφάνειας. Οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες για την ταχύτητα είναι:

$$V(n=0, s) = U(n=0, s) = U(n \rightarrow \infty, s) = \frac{\partial U}{\partial n}(n \rightarrow \infty, s) = 0 \quad (3.19)$$

Οι εξισώσεις αυτές έχουν μεγάλη ομοιότητα με αυτές της επίπεδης πλάκας. Πράγματι ο Mangler εφάρμοσε έναν μετασχηματισμό, ο οποίος ανάγει τις εξισώσεις συνοριακού στρώματος ενός αξονοσυμμετρικού σώματος σε αυτές για μια επίπεδη πλάκα.

Ο μετασχηματισμός Mangler

Ο μετασχηματισμός Mangler (Schlichting & Gersten 2003, Slattery 1999) έχει ως εξής:

$$\tilde{t} = R^2 t, \quad \tilde{s} = \int_0^s R^2 dx, \quad \tilde{n} = Rn, \quad \tilde{U} = U, \quad \tilde{V} = \frac{1}{R} \left(V + \frac{R'}{R} nU \right) \quad (3.20)$$

όπου $R' \equiv dR/ds$. Τότε οι διαφορικοί τελεστές γίνονται:

$$\tilde{\eta} = R\eta \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \eta} = R \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \eta^2} = R^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}^2}, \quad \tilde{t} = R^2 t \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = R^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{t}^2}, \quad R = R(s)$$

$$\tilde{s} = \int_0^s R^2 dx \Rightarrow \frac{\partial}{\partial s} = R^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{s}} + \frac{\tilde{\eta}}{R} R' \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}}, \quad \tilde{V} = \frac{1}{R} \left(V + \frac{R'}{R} \eta U \right) \Rightarrow V = R\tilde{V} - \frac{R'}{R^2} \tilde{\eta} \tilde{U}$$

Οι διέπουσες εξισώσεις έχουν ως εξής:

Ισοζύγιο μάζας

$$\frac{\partial(RV)}{\partial \eta} + \frac{\partial(RU)}{\partial s} = 0 \Rightarrow R \frac{\partial V}{\partial \eta} + R \frac{\partial U}{\partial s} + U \frac{dR}{ds} = 0 \Rightarrow R \frac{\partial V}{\partial \tilde{\eta}} + R \left(R^2 \frac{\partial U}{\partial \tilde{s}} + \frac{\tilde{\eta}}{R} R' \frac{\partial U}{\partial \tilde{\eta}} \right) + UR' = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tilde{\eta}} + \left(R^2 \frac{\partial U}{\partial \tilde{s}} + \frac{\tilde{\eta}}{R} R' \frac{\partial U}{\partial \tilde{\eta}} \right) + \frac{UR'}{R} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}} \left(R\tilde{V} - \frac{R'}{R^2} \tilde{\eta} \tilde{U} \right) + R^2 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{s}} + \frac{\tilde{\eta}}{R} R' \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{\eta}} + \frac{UR'}{R} = 0 \Rightarrow$$

$$R^2 \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{\eta}} - \frac{R'}{R} \frac{\partial(\tilde{\eta} \tilde{U})}{\partial \tilde{\eta}} + R^2 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{s}} + \frac{\tilde{\eta}}{R} R' \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{\eta}} + \frac{UR'}{R} = 0 \Rightarrow$$

$$R^2 \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{\eta}} - \frac{R'}{R} \tilde{U} - \frac{R'}{R} \tilde{\eta} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{\eta}} + R^2 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{s}} + \frac{\tilde{\eta}}{R} R' \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{\eta}} + \frac{UR'}{R} = 0 \Rightarrow R^2 \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{\eta}} + R^2 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{s}} = 0$$

από όπου συνεπάγεται ότι:

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{\eta}} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{s}} = 0 \quad (3.21)$$

Ισοζύγιο ορμής

$$\begin{aligned}
\frac{1}{St} \frac{\partial U}{\partial t} + V \frac{\partial U}{\partial n} + U \frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} &\Rightarrow \frac{R^2}{St} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{t}} + R \left(R\tilde{V} - \frac{R'}{R^2} \tilde{\eta} \tilde{U} \right) \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{n}} + \tilde{U} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{s}} = R^2 \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{n}^2} \Rightarrow \\
\frac{R^2}{St} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{t}} + R^2 \tilde{V} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{n}} - \frac{R'}{R} \tilde{\eta} \tilde{U} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{n}} + \tilde{U} \left(R^2 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{s}} + \frac{\tilde{\eta}}{R} R' \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{\eta}} \right) &= R^2 \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{n}^2} \Rightarrow \\
\frac{1}{St} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{V} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{n}} + \tilde{U} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{s}} &= \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{n}^2} \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Οι συνοριακές συνθήκες για \tilde{U} και \tilde{V} παραμένουν ομογενείς όπως προηγουμένως βλ Εξ.(3.19)

$$\tilde{V}(\tilde{n}=0, \tilde{s})=0, \tilde{U}(\tilde{n}=0, \tilde{s})=0, \tilde{U}(\tilde{n} \rightarrow \infty, \tilde{s}) = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{n}}(\tilde{n} \rightarrow \infty, \tilde{s})=0 \tag{3.23}$$

Συνοπτικά έχουμε:

$$\boxed{
\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{\eta}} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{s}} = 0, \quad \frac{1}{St} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{V} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{n}} + \tilde{U} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{s}} &= \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{n}^2} \\
\tilde{V}(\tilde{n}=0, \tilde{s}) = \tilde{U}(\tilde{n}=0, \tilde{s}) = \tilde{U}(\tilde{n} \rightarrow \infty, \tilde{s}) &= \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{n}}(\tilde{n} \rightarrow \infty, \tilde{s}) = 0
\end{aligned}
}$$

Οι παραπάνω δύο εξισώσεις είναι ακριβώς ίδιες με αυτές που ισχύουν για ένα τζετ αέρα πάνω από μία επίπεδη πλάκα, η λύση των οποίων παρουσιάστηκε στο τμήμα 3.2. Όσον αφορά όμως την διατμητική δύναμη που ασκείται στον τοίχο αυτή είναι:

$$S_{ns,w} = \left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_{n=0} = R \left. \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{n}} \right|_{\tilde{n}=0} = \frac{1}{72} R \tilde{s}^{-5/4} \tag{3.24}$$

Επίσης, η μεταβολή της πίεσης του πίδακα του αέρα στον τοίχο, P_w , προκύπτει με ολοκλήρωση της Εξ.(3.18) ως προς n μεταξύ 0 και ∞ :

$$P_w(s) - P_\infty = \int_0^\infty \kappa(s) U^2(s, n) dn = \int_0^\infty \kappa(\tilde{s}) U^2(\tilde{s}, \tilde{n}) R d\tilde{n} = -\frac{\kappa}{18R} \tilde{s}^{-1/4} \tag{3.25}$$

Οι ποσότητες αυτές μπορούν να εκφραστούν και σε όρους αξονικών συντεταγμένων παρατηρώντας ότι η τοπική καμπυλότητα της διεπιφάνειας είναι η αντίστροφη της ακτίνας καμπυλότητας στο μεσημβρινό επίπεδο, και επομένως $\kappa(z) = -R''(z) / \left(1 + R'^2(z)\right)^{3/2}$. Επιπροσθέτως, το τόξο μήκους και η απειροστή αξονική απόσταση συνδέονται μέσω της απλής γεωμετρικής σχέσης, $ds = \sqrt{1 + R'^2(z)} dz$. Τότε οι Εξ.(3.24), (3.25) ανάγονται, αντιστοίχως:

$$S_{ns,w}(z) = \frac{1}{72} R Z^{-5/4} \tag{3.26}$$

$$P_w(z) = \frac{R''Z^{-1/4}}{18R(1+R'^2)^{3/2}} \quad (3.27)$$

$$Z \equiv \int_0^z R^2 \sqrt{1+R'^2(z)} dz \quad (3.28)$$

Οι σχέσεις (3.19) και (3.20) δείχνουν ότι τόσο η διατμητική τάση στον τοίχο όσο και η πίεση η οποία προκύπτει αποκλειστικά λόγω της καμπυλότητας του τοίχου υπολογίζονται αποκλειστικά και μόνο με βάση το σχήμα του τοίχου, δηλαδή με βάση την $R = R(z)$.

Η λύση συμπληρώνεται προσδιορίζοντας την έως τώρα άγνωστη ταχύτητα αναφοράς για τον αέρα, U_c^* . Αυτό μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας την σταθερότητα της εξωτερικής ροής της ορμής η οποία στην συγκεκριμένη περίπτωση γίνεται $F(s) \equiv \int_0^\infty \left(RU \int_n^\infty RU^2 dn \right) dn$. Πράγματι μπορεί να δειχτεί ότι η λύση ομοιότητας που παράχθηκε παραπάνω η $F \equiv F^*/F_c^* = 1/40$ όπου $F_c^* = 4\pi^2 U_c^{*2} r_c^{*3} \eta_a^*/\rho_a^*$ είναι η χαρακτηριστική κλίμακα για την F , από το οποίο προκύπτει ότι:

$$F^*/F_c^* = 1/40 \Rightarrow \frac{F^*}{4\pi^2 U_c^{*2} r_c^{*3} \eta_a^*/\rho_a^*} = \frac{1}{40} \Rightarrow U_c^{*2} = \frac{1}{\pi^2 r_c^{*2}} \frac{10F^* \rho_a^*}{r_c^* \eta_a^*} \Rightarrow$$

$$\boxed{U_c^* = \frac{1}{\pi r_c^{*i}} \sqrt{\frac{10F^* \rho_a^*}{r_c^* \eta_a^*}}} \quad (3.29)$$

Η εξωτερική ροή της ροϊκής ορμής, F^* , μπορεί να υπολογιστεί όταν πληροφορίες για την ροή του αέρα στο ακροφύσιο είναι διαθέσιμες. Για την αξονοσυμμετρική περίπτωση μια πρόχειρη εκτίμηση είναι $F^* \approx \frac{1}{2} U^* Q_a^{*2}$ (Glauert 1956) όπου U^* είναι μια τυπική ταχύτητα για τον πίδακα και Q_a^* είναι ο ογκομετρικός ρυθμός ροής ανά ακτίνιο. Ωστόσο, αφού το F^* είναι σταθερό, οι ποσότητες U^* και Q_a^* μπορεί να θεωρηθεί ότι παίρνουν τις τιμές τους στην έξοδο του ακροφύσιου. Στην πραγματικότητα, δοθέντος του πλάτους του ακροφύσιου, d^* , του ογκομετρικού ρυθμού της ροής του αέρα στην έξοδο του ακροφύσιου, Q_a^* , έχουμε:

$$Q_a^* = \left\{ \pi (r_c^* + d^*)^2 - \pi r_c^{*2} \right\} U_c^* = \left\{ \pi d^{*2} + 2\pi r_c^* d^* \right\} U_c^* \approx 2\pi r_c^* d^* U_c^*$$

εφόσον $d^* \ll r_c^*$ και επομένως έπεται ότι $U^* \approx Q_a^*/(2\pi r_c^* d^*)$ είναι μια μέση εξωτερική ταχύτητα του αέρα. Επομένως, η ροή της ροϊκή ορμής γίνεται:

$$F^* \approx \frac{Q_a^{*3}}{4\pi r_c^* d^*} \quad (3.30)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση για την χαρακτηριστική ταχύτητα προκύπτει:

$$U_c^* \approx \frac{Q_a^*}{\pi r_c^{*2}} \sqrt{\frac{5Q_a^* \rho_a^*}{2\pi d^* \eta_a^*}} \quad (3.31)$$

Η λύση ομοιότητας μας βοηθά να υπολογίσουμε και την αύξηση του ογκομετρικού ρυθμού ροής, την ελάττωση της ροϊκής ορμής και την ροή της ροϊκής ορμής όπως παρακάτω:

$$\Delta Q = Z^{1/4}, \quad \Delta K = -\frac{2}{9}Z^{-1/4}, \quad F = \frac{1}{40} \quad (3.32)(a,b,c)$$

Η Εξ.(3.32) δείχνει ότι στην πηγή του πίδακα ΔQ και ΔK είναι μηδέν και άπειρο, αντιστοίχως, ενώ η ποσότητα F είναι σταθερά. Η Εξ.(3.32)(c) αποκαλύπτει ότι η ροή για την ροϊκή ορμή είναι μια σταθερά για την ροή του αέρα. Να σημειωθεί ότι $\Delta Q(-\Delta K) = \frac{2}{9} = \frac{20}{9}F$. Σε αντίθεση, για έναν ελεύθερο πίδακα, και εξαιτίας της συμμετρίας του πεδίου ροής στο $\tilde{r} = 0$, η ροϊκή ορμή είναι μια σταθερά για αυτήν την ροή. Αυτό δεν είναι αληθές στην περίπτωση του πίδακα τοίχου, όπως φαίνεται καθαρά από την εξίσωση Εξ.(3.32)(b).

4.1. Προσεγγιστικές εξισώσεις λεπτού φιλμ

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, η μεθοδολογία που παρουσιάστηκε από τον κ.Housiadas et al. 2007, και η οποία περιγράφεται επίσης από τους Καμμά 2006 και Καραμπάγια 2006, ακολουθείται έτσι ώστε να παραχθούν οι λεπτού φιλμ προσεγγιστικές εξισώσεις περιλαμβάνοντας τις τάσεις λόγω του πίδακα αέρα. Ο αέρας και το πολυμερικό φιλμ θεωρούνται ότι είναι ασυμπίεστα και ισοθερμικά ενώ και τα δυο πεδία ροής θεωρούνται αξονοσυμμετρικά και σε μόνιμη κατάσταση. Ένα σταθερό κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων χρησιμοποιείται για να περιγραφεί το πεδίο ροής του πολυμερούς ενώ ένα τοπικό ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων, το οποίο βρίσκεται στην εξωτερική επιφάνεια χρησιμοποιείται για να περιγράψει το πεδίο ροής του πίδακα αέρα. Οι ποσότητες που σχετίζονται με τον αέρα δηλώνονται με τον δείκτη “a”, ο δείκτης “c” υποδεικνύει ότι η αντίστοιχη μεταβλητή είναι ένα χαρακτηριστικό μέγεθος, ο εκθέτης “*” δηλώνει μια διαστατική ποσότητα και ο δείκτης “L” δηλώνει τιμές στην γραμμή παγώματος, οι οποίες έχουν ορισθεί εκ των προτέρων καθώς το πρόβλημα μεταφοράς θερμότητας δεν θα εξεταστεί εδώ. Ο τόνος σε αυτό το κεφάλαιο δηλώνει παραγωγή ως προς τις αξονικές συντεταγμένες, εκτός και εάν δηλώνεται διαφορετικά.

Όλα οι ποσότητες που εκφράζουν μήκος κανονικοποιούνται με την εξωτερική ακτίνα του δακτυλιοειδούς φιλμ, r_c^* , στο προεξέχον επίπεδο, $z^* = 0$, και για τα δύο, το πολυμερές και τον αέρα μιας και ο πίδακας αέρα τροφοδοτείται εφαπτομενικά στην εξωτερική επιφάνεια της εξόδου του δακτυλιοειδούς στομίου. Στο ίδιο επίπεδο, η μέση διατομή της ταχύτητα εκβολής, u_c^* , χρησιμοποιείται ως χαρακτηριστική ταχύτητα του πολυμερούς. Η ταχύτητα αναφοράς για τον αέρα είναι U_c^* η οποία ωστόσο, για την οριακού στρώματος ανάλυση την οποία θα ακολουθήσουμε εδώ, απομένει να προσδιοριστεί. Η ολική πίεση του πολυμερούς p^* , ο τανυστής της επιπλέον τάσης του πολυμερούς \underline{s}^* , και η πίεση του αέρα μέσα στην φυσαλίδα έχουν γίνει αδιάστατα με την ιξώδη κλίμακα $\eta_p^* u_c^* / r_c^*$, όπου η_p^* είναι το μηδενικού ρυθμού διατμητικό ιξώδες του πολυμερούς. Η σταθερά πυκνότητας μάζας του πολυμερούς δηλώνεται από την ρ_p^* και ο μέγιστος χρόνος χαλάρωσης ως λ_p^* ενώ ρ_a^* και η_a^* είναι οι σταθερές πυκνότητας μάζας και ιξώδες του αέρα αντιστοίχως. Η επιτάχυνση της βαρύτητας δηλώνεται ως g^* και η σταθερά της επιφανειακής τάσης του πολυμερούς/αέρα διεπιφάνειας ως σ^* .

Όλες οι εξαρτημένες μεταβλητές οι οποίες εμφανίζονται στις εξισώσεις του λεπτού φιλμ είναι εξαρτημένες μόνο από την αξονική συντεταγμένη z , δηλαδή $X = X(z)$, όπου $X = u_r, u_z, p, H, R, \dot{\Gamma}_r, \dot{\Gamma}_z, s_{rr}, s_{rz}, s_{\phi\phi}, s_{zz}$. R είναι η ακτίνα του εξωτερικού φιλμ, H είναι το πάχος του φιλμ, u_r και u_z είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας του φιλμ, p είναι η πίεση, $\dot{\Gamma}_r$ και $\dot{\Gamma}_z$ είναι τα τροποποιημένα βαθμωτά διανύσματα της ταχύτητας $s_{rr}, s_{rz}, s_{\phi\phi}$ και s_{zz} είναι οι μη τετριμμένες συνιστώσες της επιπλέον τάσης του πολυμερούς. Να σημειωθεί ότι οι δείκτες οι οποίοι έπρεπε να χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν της τάξη μεγέθους κάθε εξαρτημένης μεταβλητής έχουν παραβλεφθεί για ευκολία. Λαμβάνοντας υπόψη την ιξωδοελαστικότητα, την αδράνεια και την βαρύτητα, οι εξισώσεις του λεπτού φιλμ είναι οι εξισώσεις διατήρησης της μάζας και της ορμής στην κάθετη και στην εφαπτομενική διεύθυνση, αντιστοίχως:

$$HRu_z = 1 \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{s_{\phi\phi} - s_{rr}}{R} - \frac{(1+R'^2)}{H} (\Delta P_g - a_v P_w - 2Ca^{-1}2\mathbf{H}) - (-p + s_{zz}) \left(R'' - \frac{R'^2}{R} \right) - StR' + \\ + Reu_z^2 R'' - \frac{a_v S_{nm,w}}{H} (1+R'^2) = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{R'(s_{rr} - s_{\phi\phi})}{R} + (-p + s_{zz}) \left\{ R' \left(\frac{1}{R} + R'' \right) + \frac{H'}{H} (1+R'^2) \right\} + (1+R'^2) (-p + s_{zz})' - St \\ - \frac{Re}{2} \left\{ u_z^2 (1+R'^2) \right\}' + \frac{a_v S_{ns,w}}{H} (1+R'^2) = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

όπου

$$p = (s_{rr} - 2R's_{rz} + R'^2 s_{zz}) / (1+R'^2) \quad (4.4)$$

$$s_{rz} = \frac{R'(s_{zz} - s_{rr})}{1-R'^2} = R'(-p + s_{zz}) \quad (4.5)$$

$$\dot{\Gamma}_r - R'\dot{\Gamma}_z + \frac{u_r}{R} + u_z' = 0 \quad (4.6)$$

$$u_r = R'u_z \quad (4.7)$$

Στις προηγούμενες εξισώσεις ο, $Re \equiv (\rho_p^* u_c^* r_c^*) / \eta_p^*$ είναι ο αριθμός Reynolds, ο $St \equiv (\rho_p^* g^* r_c^{*2}) / (\eta_p^* u_c^*)$ είναι ο αριθμός Stokes και ο $Ca^{-1} \equiv (\sigma^* r_c^*) / (\eta_p^* u_c^* h_c^*)$ είναι ο αντίστροφος

αριθμός Capillary όπου h_c^* είναι το πάχος του φιλμ στο $z^*=0$. Στην Εξ.(4.2)

$\Delta P_g = (P^i - \alpha_v P_\infty) \equiv (P^{i*} - P_{atm}^*) r_c^{*2} / (\eta_p^* u_c^* h_c^*) > 0$ είναι η σταθερά υπερπίεσης αερίου με

$P_\infty \equiv P(r \rightarrow \infty, z)$, P^i είναι η σταθερά πίεσης του σχεδόν στάσιμου αέρα μέσα στην φυσαλίδα και η μηδενικής τάξης Gaussian καμπυλότητα είναι η ίδια και για τις δυο διεπιφάνειες και δίνεται από τον τύπο

$$2\mathbf{H} = \frac{1}{R(1+R'^2)^{1/2}} - \frac{R''}{(1+R'^2)^{3/2}}. \text{ Στις Εξ.(4.2), (4.3) εμφανίζεται ο λόγος των ιξώδη δυνάμεων μεταξύ}$$

των δυο φάσεων:

$$\alpha_v \equiv \frac{\sqrt{\rho_a^* \eta_a^* U_c^{*3} r_c^{*3}}}{\eta_p^* u_c^* h_c^*}$$

Επιπροσθέτως, στην εξωτερική διεπιφάνεια του πολυμερούς/αέρα οι εφαπτομενικές ταχύτητες των δυο φάσεων (πολυμερές/αέρας) είναι ίσες $\beta v(z) = U(r = R(z), z)$ όπου ο λόγος των χαρακτηριστικών ταχυτήτων, β , ορίζεται ως:

$$\beta \equiv u_c^* / U_c^*$$

και U είναι η αδιάστατη εφαπτομενική συνιστώσα του διανύσματος της ταχύτητας για τον αέρα και $v \equiv u_z \sqrt{1+R'^2}$ είναι η εφαπτομενική ταχύτητα του φιλμ. Οι δυο τελευταίες παράμετροι, α_v and β , περιγράφουν την αλληλεπίδραση ανάμεσα στα δυο ρευστά. Όταν $\alpha_v = \beta = 0$, τα δυο πεδία ροής γίνονται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Να σημειωθεί ότι η αλληλεπίδραση προκαλείται κυρίως από την δύναμη που εφαρμόζεται από τον αέρα στο φιλμ, κάνοντας τον λόγο του ιξώδους, α_v , πολύ σημαντικό; αντιθέτως, η επίδραση του λόγου της ταχύτητας, β , δοθέντος ότι σε μια τυπική βιομηχανική διαδικασία ισχύει $\beta \ll 1$, είναι αμελητέα.

Στην εξ.(4.2) και (4.3) $S_{m,w} \equiv S_m(r = R(z), z)$ και $S_{ns,w} \equiv S_{ns}(r = R(z), z)$ είναι οι κάθετες και εφαπτομενικές ιξώδεις τάσεις του αέρα, αντιστοίχως, και $P_w \equiv P(r = R(z), z)$ είναι η πίεση που ασκείται από τον πίδακα του αέρα στο φιλμ στην διεπιφάνεια του πολυμερούς/αέρα. Για να είναι πλήρεις οι προσεγγιστικές εξισώσεις του λεπτού φιλμ οι όροι αυτοί πρέπει να αποτιμηθούν από το κατάλληλο πεδίο ροής για τον αέρα. Αυτό έγινε στο 3^ο Κεφάλαιο όπου δείχθηκε ότι στην χαμηλότερη τάξη προσέγγισης, δηλαδή για $1/\sqrt{\text{Re}_a} \rightarrow 0$, όπου $\text{Re}_a \equiv \rho_a^* U_c^* r_c^* / \eta_a^*$ είναι ο αριθμός Reynolds για τον αέρα, και με την επιπλέον υπόθεση ότι $\beta \rightarrow 0$, οι όροι αυτοί είναι:

$$S_{m,w}(z) = 0 \quad (4.8)$$

$$S_{ns,w}(z) = \frac{RZ^{-5/4}}{72} \quad (4.9)$$

$$P_w(z) = \frac{R''Z^{-1/4}}{18R(1+R'^2)^{3/2}} \quad (4.10)$$

$$Z \equiv \int_0^z R^2 \sqrt{1+R'^2} dx \quad (4.11)$$

Να σημειωθεί ότι για $R=1$, δηλαδή για έναν ίσιο κύλινδρο, δηλαδή για $R=1$, το Z είναι ταυτόσημο με το z . Οι Εξ.(4.9)-(4.11) δείχνουν ότι για την οριακού στρώματος ανάλυση, η οποία ακολουθείται εδώ, η διατμητική δύναμη και η πίεση λόγω της ροής αέρα εξαρτώνται από το σχήμα της φυσαλίδας μόνο. Αυτό έχει μεγάλη σημασία για το μαθηματικό μοντέλο καθώς επιτρέπει την επίδραση από τον πίδακα του αέρα να συμπεριληφθεί στις εξισώσεις λεπτού φιλμ χωρίς να χρειάζεται να λυθούν νέες εξισώσεις και ταυτοχρόνως, η πολυπλοκότητα των εξισώσεων του λεπτού φιλμ να αυξάνεται ελάχιστα. Η Εξ.(4.10) δείχνει επίσης τα γνωστά αποτελέσματα από την θεωρία του οριακού στρώματος επάνω από καμπύλες επιφάνειες ότι οι μεταβολές της πίεσης στην εξωτερική επιφάνεια της φυσαλίδας προκαλούνται από την ροή του αέρα λόγω της τοπικής καμπύλωσης του φιλμ. Φυσικά συμπεριφέρεται κανονικά στην εξωτερική επιφάνεια της φυσαλίδας αλλά λόγω του γεγονότος ότι είναι αναλογική του R'' , οι μετρήσεις του είναι πολύ μικρές και η επίδραση του στην φυσαλίδα είναι σχεδόν αμελητέα. Είναι αξιοπρόσεκτο ότι οι Εξ.(4.2),(4.3),(4.8)-(4.10) αποδεικνύουν την εικασία των Campbell et al. 1992, δηλαδή ότι ο πίδακας αέρα ασκεί μια δύναμη εφαπτομενικά στην επιφάνεια του φιλμ και μια κάθετη δύναμη στην επιφάνεια λόγω της μεταβολής της πίεσης (Campbell et al. 1992, σελ. 758). Πραγματικά, αφού η κάθετη συνιστώσα της τάσης του αέρα στην διεπιφάνεια του πολυμερούς/αέρα είναι μηδέν το κάθετο ισοζύγιο ορμής του φιλμ, η Εξ.(4.3), επηρεάζεται μόνο από την πίεση της ροής του αέρα, P_w , ενώ το εφαπτομενικό ισοζύγιο ορμής του φιλμ, η Εξ.(4.2), επηρεάζεται από την μόνη συνιστώσα του τανυστή τάσης για τον αέρα η οποία δε είναι μηδέν, $S_{ns,w}$.

Οι Εξ. (4.1)-(4.3) είναι συζευγμένες με τις μη-τετριμμένες συνιστώσες του τανυστή τάσης λόγω της ιξωδοελαστικότητας του πολυμερούς, οι οποίες είναι:

$$s_{rr} e^{\{\omega De Tr\}} + De \left\{ u_z s'_{rr} - 2s_{rr} \dot{\Gamma}_r - 2s_{rz} (u'_r - R' \dot{\Gamma}_r) + \xi \chi_{rr} \right\} = \dot{\gamma}_{rr} - a_G De (s_{rr}^2 + s_{rz}^2) \quad (4.12)$$

$$s_{rz} e^{\{\omega De Tr\}} + De \left\{ u_z s'_{rz} - s_{rr} \dot{\Gamma}_z + \frac{u_r s_{rz}}{R} - s_{zz} (u'_r - R' \dot{\Gamma}_r) + \xi \chi_{rz} \right\} = \dot{\gamma}_{rz} - a_G De \{ s_{rz} (s_{rr} + s_{zz}) \} \quad (4.13)$$

$$s_{\varphi\varphi} e^{\{\omega De Tr\}} + De \left\{ u_z s'_{\varphi\varphi} - s_{\varphi\varphi} \frac{2u_r}{R} + \xi \chi_{\varphi\varphi} \right\} = \dot{\gamma}_{\varphi\varphi} - a_G De s_{\varphi\varphi}^2 \quad (4.14)$$

$$s_{zz} e^{\{\omega De Tr\}} + De \left\{ u_z s'_{zz} - 2s_{rz} \dot{\Gamma}_z - 2s_{zz} (u'_z - R \dot{\Gamma}_z) + \xi \chi_{zz} \right\} = \dot{\gamma}_{zz} - a_G De (s_{rz}^2 + s_{zz}^2) \quad (4.15)$$

όπου $Tr \equiv s_{rr} + s_{\varphi\varphi} + s_{zz}$, $\dot{\gamma}_{ij}, i, j = r, \varphi, z$ είναι οι χαμηλότερης τάξης συνιστώσες του τανυστή διατμητικού ρυθμού και $\chi_{ij}, i, j = r, \varphi, z$ είναι οι χαμηλότερης τάξης συνιστώσες του συμμετρικού τανυστή δευτέρας τάξης $\underline{\underline{\chi}} \equiv \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \cdot \underline{\underline{s}} + \underline{\underline{s}} \cdot \underline{\underline{\dot{\gamma}}}$ που προέρχεται από την υπόθεση της μη-συνδεδεμένης κίνησης των μορίων του πολυμερούς. Δίνονται από:

$$\dot{\gamma}_{rr} = 2\dot{\Gamma}_r, \quad \dot{\gamma}_{rz} = u'_r + \dot{\Gamma}_z - R \dot{\Gamma}_r, \quad \dot{\gamma}_{\varphi\varphi} = \frac{2u_r}{R}, \quad \dot{\gamma}_{zz} = 2(u'_z - R \dot{\Gamma}_z) \quad (4.16)$$

$$\chi_{rr} = 2(\dot{\gamma}_{rr} s_{rr} + \dot{\gamma}_{rz} s_{rz}), \chi_{rz} = s_{rz} (\dot{\gamma}_{rr} + \dot{\gamma}_{zz}) + \dot{\gamma}_{rz} (s_{rr} + s_{zz}), \chi_{\varphi\varphi} = 2\dot{\gamma}_{\varphi\varphi} s_{\varphi\varphi}, \chi_{zz} = 2(\dot{\gamma}_{rz} s_{rz} + \dot{\gamma}_{zz} s_{zz}) \quad (4.17)$$

Στις εξ.(4.12)-(4.15) $De \equiv \lambda_p^* u_c^* / r_c^*$, είναι ο αριθμός Deborah, ω είναι η εκθετική PTT παράμετρος η οποία διέπει την εκτατική συμπεριφορά της ροής θέτοντας ένα άνω όριο στο εκτατικό ιξώδες, ξ είναι η παράμετρος που υπολογίζει τη μη-συνδεδεμένη κίνηση μεταξύ του δικτύου των μορίων και του συνεχούς μέσου και a_G είναι η παράμετρος κινητικότητας που εισάγεται για τον υπολογισμό των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των μορίων του πολυμερούς. Μια ποικιλία πολύ γνωστών καταστατικών μοντέλων μπορούν να προκύψουν από την γενική μορφή των Εξ. (4.12)-(4.15):

- (i) Για $\omega = \xi = a_G = 0$, και $De \neq 0$ το UCM μοντέλο.
- (ii) Για $\xi = a_G = 0$, και $De, \omega \neq 0$ το συνδεδεμένο εκθετικό PTT μοντέλο.
- (iii) Για $a_G = 0$, και $De, \omega, \xi \neq 0$ το μη-συνδεδεμένο εκθετικό PTT μοντέλο.
- (iv) Για $\omega = \xi = 0$, και $De, a_G \neq 0$ το Giesekus μοντέλο.
- (v) Για $De = 0$ το Νευτώνειο μοντέλο, δηλαδή $\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\dot{\gamma}}}$

Αποδεκτές τιμές για τις ρεολογικές παραμέτρους είναι $0 \leq \xi \leq 1$, $0 \leq \omega < 1$ και $0 \leq a_G \leq 1$. Όταν $a_v = a_G = \xi = 0$, οι Εξ.(4.2),(4.3) και (4.12)-(4.15) ταυτίζονται με αυτές που παρήχθησαν από τους κ.Housiadas et al. (2007) για την περίπτωση της αξονοσυμμετρικής μόνιμης κατάστασης. Οι κατάλληλες οριακές συνθήκες στο $z = 0$ και $z = L$ είναι:

$$u_z = 1, \quad R = 1, \quad H = 1, \quad \text{at } z=0 \quad (4.18)(a,b,c)$$

$$s_{ij} = \dot{\gamma}_{ij}, \quad i, j = r, \varphi, z \quad \text{at } z=0 \quad (4.19)$$

$$s_{rz} = 0, \quad HR(-p + s_{zz}) = T_L, \quad \text{at } z=L \quad (4.20)(a,b)$$

Η οριακή συνθήκη (4.19) για την επιπλέον τάση του πολυμερούς είναι η ευσταθής ισορροπία των μορίων του πολυμερούς στο επίπεδο εκβολής. Η οριακή συνθήκη (4.20) είναι η δύναμη ισορροπίας στην ακτινική και στην αξονική διεύθυνση, αντιστοίχως, όπου $T_L \equiv T_L^*/(2\pi\eta_p^*u_c^*h_c^*)$ είναι η αδιάστατη αξονική δύναμη που ασκείται από τους κυλιόμενους κυλίνδρους. Εναλλακτικά μπορεί να αντικατασταθεί από την ταχύτητα συλλογής του προϊόντος, u_L :

$$u_r = 0, \quad u_z = u_L, \quad \text{at } z = L \quad (4.21)(a,b)$$

Οι οριακές συνθήκες (4.20)(a) και (4.21)(a) είναι και οι δυο ισοδύναμες στο $R' = 0$. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, το ύψος της γραμμής πήξης, L , είναι σταθερά και οριστεί εκ των προτέρων.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να ανακεφαλαιώσουμε ότι οι τελικές εξισώσεις για το φιλμ συμπεριλαμβανομένης της αεροδυναμικής δύναμης ισχύουν καθώς τα όρια $h_c^*/r_c^* \rightarrow 0$, $\frac{1}{\sqrt{Re_a}} \rightarrow 0$, και $u_c^*/U_c^* \rightarrow 0$. Αυτές είναι πολύ πραγματικές υποθέσεις, όπως δείχνουν οι τιμές τους για μια συγκεκριμένη βιομηχανική διαδικασία (δείτε επόμενο τμήμα).

4.2. Τελική μορφή των εξισώσεων του λεπτού φιλμ

Οι λεπτού φιλμ εξισώσεις ορμής που αναφέρονται παραπάνω, Εξ.(4.2) και (4.3), μπορούν να απλοποιηθούν περισσότερο. Πρώτα είναι βολικό να ορίσουμε τις ποσότητες της δύναμης για το φιλμ F_I και F_{II} , μαζί με την συνολική αξονική δύναμη σε κάθε διατομή, F_t :

$$F_I \equiv HR(-p + s_{zz}) \quad (4.22)$$

$$F_{II} \equiv HR(s_{\varphi\varphi} - s_{rr}) \quad (4.23)$$

$$F_t \equiv F_I - \frac{\Delta P_g}{2} R^2 - \frac{Re}{HR} - \frac{a_v}{18Z^{1/4}\sqrt{1+R'^2}} + \frac{2Ca^{-1}R}{\sqrt{1+R'^2}} \quad (4.24)$$

Κάνοντας αντικατάσταση στην (4.2), έχουμε:

$$\frac{F_{II}}{HR^2} - \frac{(1+R'^2)}{H} (\Delta P_g - a_v P_w - 2Ca^{-1}2H) - \frac{F_I}{HR} \left(R'' - \frac{R'^2}{R} \right) - StR' + Reu_z^2 R'' - \frac{a_v S_{m,w}}{H} (1+R'^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{F_{II}}{R} - R(1+R'^2) (\Delta P_g - a_v P_w - 2Ca^{-1}2H) - F_t \left(R'' - \frac{R'^2}{R} \right) - StHRR' + HRReu_z^2 R'' - a_v RS_{m,w} (1+R'^2) = 0$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (4.1), $HRu_z = 1 \Rightarrow u_z = 1/HR$ και την (4.8) προκύπτει:

$$\frac{F_{II}}{R} - F_I \left(R'' - \frac{R'^2}{R} \right) - StHRR' + \frac{ReR''}{HR} - R(1+R'^2)(\Delta P_g - a_v P_w - 2Ca^{-1}2\mathbf{H}) = 0 \quad (4.25)$$

Από την (4.3) και τις (4.9), (4.22), (4.23) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} & \frac{-R'F_{II}}{HR^2} + \frac{F_I}{HR} \left\{ R' \left(\frac{1}{R} + R'' \right) + \frac{H'}{H} (1+R'^2) \right\} + (1+R'^2) \left(\frac{F_I}{HR} \right)' - St - \frac{Re}{2} \left\{ \left(\frac{1}{HR} \right)^2 (1+R'^2) \right\}' + \frac{a_v R Z^{-5/4}}{72H} (1+R'^2) = 0 \\ & \Rightarrow \frac{-F_{II}}{R} + F_I \left(\frac{R'^2}{R} + R'' \right) - St \frac{HR}{R'} - \frac{ReHR}{2R'} \left\{ \frac{1+R'^2}{(HR)^2} \right\}' + \frac{a_v R^2 Z^{-5/4}}{72R'} (1+R'^2) + \frac{(1+R'^2)}{R'} F_I' = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{-F_{II}}{R} + F_I \left(\frac{R'^2}{R} + R'' \right) + StHRR' - St \frac{HR(R'+1)}{R'} - \frac{ReHR}{2R'} \left\{ \frac{1+R'^2}{(HR)^2} \right\}' + \frac{a_v R^2 Z^{-5/4}}{72R'} (1+R'^2) + \frac{(1+R'^2)}{R'} F_I' = 0$$

Από την τελευταία σχέση και την (4.25) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} & \frac{ReR''}{HR} - R(1+R'^2)(\Delta P_g - a_v P_w - 2Ca^{-1}2\mathbf{H}) - \frac{ReHR}{2R'} \left\{ \frac{1+R'^2}{(HR)^2} \right\}' + \\ & \frac{a_v R^2 Z^{-5/4}}{72R'} (1+R'^2) + \frac{(1+R'^2)}{R'} F_I' = St \frac{HR(R'+1)}{R'} \\ & \Rightarrow Re \left\{ \frac{R''}{HR} - \frac{HR}{2R'} \left\{ \frac{1+R'^2}{(HR)^2} \right\}' \right\} - R(1+R'^2)(\Delta P_g - a_v P_w - 2Ca^{-1}2\mathbf{H}) + \frac{a_v R^2 Z^{-5/4}}{72R'} (1+R'^2) + \frac{(1+R'^2)}{R'} F_I' = St \frac{HR(1+R')}{R'} \\ & \Rightarrow Re \left(\frac{1+R'^2}{R'} \right) \frac{(HR)'}{(HR)^2} - \left(\frac{1+R'^2}{R'} \right) RR'(\Delta P_g - a_v P_w - 2Ca^{-1}2\mathbf{H}) + \frac{a_v R^2 Z^{-5/4}}{72} \left(\frac{1+R'^2}{R'} \right) + \frac{(1+R'^2)}{R'} F_I' = St \frac{HR(1+R')}{R'} \\ & \Rightarrow F_I' - \Delta P_g RR' + Re \frac{(HR)'}{(HR)^2} + 2Ca^{-1}RR'2\mathbf{H} + a_v P_w RR' + \frac{a_v R^2 Z^{-5/4}}{72} = StHR \\ & \Rightarrow F_I' - \Delta P_g RR' + Re \frac{(HR)'}{(HR)^2} + 2Ca^{-1}RR' \left(\frac{1}{R(1+R'^2)^{1/2}} - \frac{R''}{(1+R'^2)^{3/2}} \right) + a_v \left(P_w RR' + \frac{R^2 Z^{-5/4}}{72} \right) = StHR \\ & \Rightarrow F_I' - \Delta P_g RR' + Re \frac{(HR)'}{(HR)^2} + 2Ca^{-1} \left(\frac{R'(1+R'^2) - RR'R''}{(1+R'^2)^{3/2}} \right) + a_v \left(P_w RR' + \frac{R^2 Z^{-5/4}}{72} \right) = StHR \\ & \Rightarrow F_I' - \Delta P_g RR' + Re \frac{(HR)'}{(HR)^2} + 2Ca^{-1} \left(\frac{R'(1+R'^2) - RR'R''}{(1+R'^2)^{3/2}} \right) + a_v \left(\frac{(1+R'^2)Z^{-5/4} + 4R'R''Z^{-1/4}}{(1+R'^2)^{3/2}} \right) = StHR \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το πρώτο μέρος είναι η παράγωγος της (4.24), άρα:

$$\boxed{F_t' = St H R} \quad (4.26)$$

Οι Εξ.(4.22)-(4.25) ισχύουν και για Νευτώνια φιλμ και για μη-Νευτώνια φιλμ. Στην προηγούμενη περίπτωση, οι εξισώσεις αυτές μαζί με τις Εξ.(4.12)-(4.14) και $s_{ij} = \dot{\gamma}_{ij}$, $i,j=r,\varphi,z$, δηλαδή τις Εξ.(4.12)-(4.15) για $De = 0$, μπορούν να περιοριστούν σε ένα κλειστό σύστημα εξισώσεων με άγνωστα τα F_t , H και R . Στην πιο πρόσφατη περίπτωση, οι εξισώσεις αυτές αποτελούν ένα κλειστό σύστημα εξισώσεων με αγνώστους F_t , H , R και $s_{rr}, s_{\varphi\varphi}, s_{zz}, s_{rz}$. Είναι επίσης αξιοπρόσεκτο ότι για ένα Νευτώνιο φιλμ, η κατανομή του πάχους δίνεται αναλυτικά απευθείας από μια ολοκληρωτική εξίσωση (βλ Εξ.(4.44) παρακάτω) ως μια συνάρτηση των δυνάμεων που επιδρούν στο φιλμ και στο σχήμα της φυσαλίδας. Οι λεπτομέρειες για την παραγωγή αυτής της εξίσωσης, η οποία δείχνει σαφέστατα την επίδραση της αεροδυναμικής δύναμης στο πάχος του φιλμ, δίνονται παρακάτω:

4.3. Η συνολική αξονική δύναμη εξαιτίας του πίδακα αέρα

Είναι επίσης ενδιαφέρον να εξαχθεί μια έκφραση για την συνολική αξονική δύναμη, F_{axial} , η οποία ασκείται στην εξωτερική επιφάνεια της φυσαλίδας λόγω του πίδακα του αέρα. Γενικά, υπολογίζεται ως εξής:

$$F_{axial} = \int_0^{2\pi} \underline{e}_z \cdot \left(\underline{n}^{out} \cdot \left(-P_w \underline{I} + \underline{S}_w \right) \right) R d\varphi = \frac{2\pi R}{\sqrt{1+R'^2}} \left(R' P_w + S_{ns,w} \right) \quad (4.27)(a)$$

όπου \underline{e}_z είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην αξονική διεύθυνση και \underline{n}^{out} είναι το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην εξωτερική διεπιφάνεια του πολυμερούς/αέρα, το οποίο δείχνει μακριά από το φιλμ. Η Εξ.(4.27)(a) δείχνει ότι η F_{axial} εξαρτάται και από την P_w και την $S_{ns,w}$ όπως επίσης αναφέρθηκε από τον Campbell et al. (1992). Χρησιμοποιώντας την λύση ομοιότητας των Εξ.(4.9) και (4.10), η συνολική αξονική δύναμη είναι:

$$F_{axial} = \frac{\pi}{36\sqrt{1+R'^2}} \left(\frac{4R'R''Z^{-1/4}}{(1+R'^2)^{3/2}} + R^2 Z^{-5/4} \right) \quad (4.28)$$

Η Εξ.(4.28) δείχνει ότι η συνεισφορά λόγω της μεταβολής της πίεσης είναι πολύ μικρότερη από την διατμητική τάση επειδή η προηγούμενη είναι ανάλογη του $R'R''$ το οποίο για τις τυπικές φυσαλίδες που παράγονται στην FBP είναι μια πολύ μικρή ποσότητα, και επιπλέον, κοντά στο επίπεδο εκβολής

$I^{-1/4} < I^{-5/4}$. Αυτό είναι σε πλήρη συμφωνία με το συμπέρασμα από τον Campbell et al. (1992) ότι η συνεισφορά της πίεσης στην συνολική αξονική δύναμη είναι πολύ μικρή. Να σημειωθεί ωστόσο ότι αυτοί οι συγγραφείς απέτυχαν να προβλέψουν την συνολική αξονική δύναμη επειδή αγνόησαν της ιξώδεις δυνάμεις του αέρα και δεν ενσωμάτωσαν το οριακό στρώμα του πίδακα στην ανάλυση τους.

4.4. Οι εξισώσεις του φιλμ πολυμερούς συμπεριλαμβανοντας την δύναμη του αέρα δοσμένες με τις μεταβλητές των Pearson & Petrie, 1970b,c.

Οι λεπτού φιλμ εξισώσεις που αναφέρονται στο τμήμα 4.2. παρουσιάζονται εδώ σε σχέση με τις μεταβλητές που χρησιμοποιήσαν οι Pearson και Petrie (1970b), δηλαδή ως προς την εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας του φιλμ, v , το κανονικό πάχος του φιλμ, h , και την μέση ακτίνα της φυσαλίδας, r , τα οποία σε σχέση με τις μεταβλητές που χρησιμοποιούνται σε αυτήν την εργασία είναι:

$$v \equiv u_z \sqrt{1+R'^2}, \quad h \equiv H/\sqrt{1+R'^2}, \quad r \equiv R \quad (4.29)(a,b,c)$$

Απαλείφοντας την αξονική συνιστώσα της ταχύτητας u_z με την βοήθεια της εξίσωσης συνέχειας, Εξ.(4.1), και χρησιμοποιώντας τις Εξ.(4.4)-(4.7) και (4.12)-(4.15) για $De=0$, οι ποσότητες F_I και F_{II} που δίνονται από τις Εξ.(4.22)-(4.23), μπορούν να εκφραστούν απευθείας με τους όρους της ακτίνας της φυσαλίδας και του κανονικού πάχους της φυσαλίδας:

$$F_I = -\frac{2}{1+r'^2} \left(\frac{2h'}{h} + \frac{r'}{r} \right) \quad (4.30)$$

$$F_{II} = -\frac{2}{1+r'^2} \left((1-r'^2) \frac{h'}{h} - \frac{r'}{r} (1+2r'^2) \right) \quad (4.31)$$

Αντικαθιστώντας τις Εξ.(4.29)-(4.31) στις Εξ.(4.25)-(4.26), η συνολική δύναμη στην αξονική διεύθυνση, F_I , και το ισοζύγιο ορμής δίνονται από τις:

$$F_I = -\frac{2}{1+r'^2} \left(\frac{2h'}{h} + \frac{r'}{r} \right) - \frac{\Delta P_g}{2} r^2 - \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} \left(\frac{Re}{hr} + \frac{a_v}{18Z^{1/4}} - 2Ca^{-1}r \right) \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} & \frac{h'}{h} \left(-2 + \frac{4rr''}{1+r'^2} \right) + 2r' \left(\frac{1}{r} + \frac{r''}{1+r'^2} \right) + \\ & + \left\{ \frac{Rer''}{h\sqrt{1+r'^2}} - St hr^2 r' \sqrt{1+r'^2} - r^2 (1+r'^2) \left(\Delta P_g - \frac{a_v r''}{18Z^{1/4} r (1+r'^2)^{3/2}} - 2Ca^{-1} 2\mathbf{H} \right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$F_t' = St hr \sqrt{1+r'^2} \quad (4.34)$$

Οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες είναι:

$$h=1, \quad r=1 \text{ at } z=0, \quad r'=0, \quad r=R_L \text{ at } z=L \quad (4.35)(a,b,c,d)$$

Οι Εξ.(4.32)-(4.34) είναι το κατάλληλο σύνολο εξισώσεων που διέπουν ένα Νευτώνειο φιλμ, με άγνωστες F_t, h και r , οι οποίες πρέπει να λυθούν μαζί με τις συνοριακές συνθήκες (4.35). Να σημειωθεί η συνοριακή συνθήκη (4.35)(a) δεν ταυτίζεται με την συνοριακή συνθήκη (4.18)(c).

Από την Εξ.(4.25) έχουμε:

$$F_{II} - F_t (RR'' - R'^2) - St h R^2 R' \sqrt{1+R'^2} + \frac{Re R''}{h \sqrt{1+R'^2}} - R^2 (1+R'^2) (\Delta P_g - a_v P_w - 2Ca^{-1} 2\mathbf{H}) = 0 \Rightarrow$$

$$F_{II} - F_t (RR'' - R'^2) = St h R^2 R' \sqrt{1+R'^2} - \frac{Re R''}{h \sqrt{1+R'^2}} + R^2 (1+R'^2) (\Delta P_g - a_v P_w - 2Ca^{-1} 2\mathbf{H}) \quad (4.36)$$

Από τις Εξ.(4.30)-(4.31) έχουμε ότι:

$$F_{II} - F_t (rr'' - r'^2) = -\frac{2}{1+r'^2} \left((1-r'^2) \frac{h'}{h} - (1+2r'^2) \frac{r'}{r} \right) + \frac{2}{1+r'^2} \left(\frac{2h'}{h} + \frac{r'}{r} \right) (rr'' - r'^2) =$$

$$\frac{h'}{h} \left(-\frac{2(1-r'^2)}{1+r'^2} + \frac{4(rr'' - r'^2)}{1+r'^2} \right) + \frac{2r'(1+2r'^2)}{r(1+r'^2)} + \frac{2r'(rr'' - r'^2)}{r(1+r'^2)} =$$

$$\frac{h'}{h} \left(-\frac{2-2r'^2+4r'^2}{1+r'^2} + \frac{4rr''}{1+r'^2} \right) + \frac{2r'(1+2r'^2)}{r(1+r'^2)} + \frac{2r'(rr'' - r'^2)}{r(1+r'^2)} = \frac{h'}{h} \left(-2 + \frac{4rr''}{1+r'^2} \right) + 2r' \left(\frac{1+2r'^2+rr''-r'^2}{r(1+r'^2)} \right) =$$

$$\frac{h'}{h} \left(-2 + \frac{4rr''}{1+r'^2} \right) + 2r' \left(\frac{1}{r} + \frac{r''}{1+r'^2} \right) \quad (4.37)$$

Από την Εξ.(4.32)-(4.33) και την προκύπτει ότι η ορμή θα είναι:

$$\frac{h'}{h} \left(-2 + \frac{4rr''}{1+r'^2} \right) + 2r' \left(\frac{1}{r} + \frac{r''}{1+r'^2} \right) = St h r^2 r' \sqrt{1+r'^2} - \frac{Re r''}{h \sqrt{1+r'^2}} +$$

$$+ r^2 (1+r'^2) (\Delta P_g - a_v P_w - 2Ca^{-1} 2\mathbf{H}) \quad (4.38)$$

Από την Εξ.(4.34) έχουμε:

$$\frac{dF_t}{dz} = S_t h r \sqrt{1+r'^2} \Rightarrow \int_z^L \frac{dF_t}{dz} = \int_z^L S_t h r \sqrt{1+r'^2} dz \Rightarrow F_t|_z^L = S_t \int_z^L h r \sqrt{1+r'^2} dz \Rightarrow$$

$$F_t = T - S_t \int_z^L hr \sqrt{1+r'^2} dz, \quad L \text{ που } \equiv \quad (=) \quad (4.39)$$

Από την Εξ.(4.32) έχουμε ότι:

$$F_t = -\frac{2}{1+r'^2} \left(\frac{2h'}{h} + \frac{r'}{r} \right) - \frac{\Delta P_g}{2} r^2 - \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} \left(\frac{Re}{hr} + \frac{a_v}{18Z^{1/4}} - 2Ca^{-1}r \right) \Rightarrow$$

$$F_t(z=L) = -2 \left(\frac{2h'}{h} \right) - \frac{\Delta P_g}{2} r^2 - \left(\frac{Re}{hr} + \frac{a_v}{18Z^{1/4}} - 2Ca^{-1}r \right)$$

Θέτουμε $B \equiv \Delta P_g / 2$, $r(z=L) = R_L$, $h(z=L) = h_L$ και $T_L = -4h'/h$ και η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$F_t(z=L) = -T_L - BR_L^2 - \left(\frac{Re}{h_L R_L} + \frac{a_v}{18Z_L^{1/4}} - 2Ca^{-1}R_L \right) \quad (4.40)$$

Από τον ορισμό της F_t , Εξ.(4.32) και τη Εξ.(4.39) παίρνουμε:

$$-\frac{2}{1+r'^2} \left(\frac{2h'}{h} + \frac{r'}{r} \right) - \frac{\Delta P_g}{2} r^2 - \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} \left(\frac{Re}{hr} + \frac{a_v}{18Z^{1/4}} - 2Ca^{-1}r \right) = T - S_t \int_z^L hr \sqrt{1+r'^2} dy \Rightarrow$$

$$-\frac{2}{1+r'^2} \left(\frac{2h'}{h} + \frac{r'}{r} \right) = T + Br^2 + \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} \left(\frac{Re}{hr} + \frac{a_v}{18Z^{1/4}} - 2Ca^{-1}r \right) - S_t \int_z^L hr \sqrt{1+r'^2} dy \Rightarrow$$

$$\frac{h'}{h} + \frac{r'}{2r} = -\frac{(1+r'^2)}{4} \left[T + Br^2 + \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} \left(\frac{Re}{hr} + \frac{a_v}{18Z^{1/4}} - 2Ca^{-1}r \right) - S_t \int_z^L hr \sqrt{1+r'^2} dy \right] \Rightarrow (4.41)$$

$$\frac{d}{dz} \left[\ln(h\sqrt{r}) \right] = -\frac{(1+r'^2)}{4} \left[T + Br^2 + \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} \left(\frac{Re}{hr} + \frac{a_v}{18Z^{1/4}} - 2Ca^{-1}r \right) - S_t \int_z^L hr \sqrt{1+r'^2} dy \right] \Rightarrow$$

$$\ln(h\sqrt{r}) - \ln(A \cdot 1) = -\frac{1}{4} \int_0^4 (1+r'^2) \left[T + Br^2 + \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} \left(\frac{Re}{hr} + \frac{a_v}{18Z^{1/4}} - 2Ca^{-1}r \right) - S_t \int_z^L hr \sqrt{1+r'^2} dy \right] dx \Rightarrow$$

$$h = \frac{1}{\sqrt{r}} \exp \left(-\frac{1}{4} \int_0^4 (1+r'^2) \left[T + Br^2 + \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} \left(\frac{Re}{hr} + \frac{a_v}{18Z^{1/4}} - 2Ca^{-1}r \right) - S_t \int_z^L hr \sqrt{1+r'^2} dy \right] dx \right) \quad (4.42)$$

Θέτουμε: $f \equiv -\frac{1}{4} (1+r'^2) \left[T + Br^2 + \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} \left(\frac{Re}{hr} + \frac{a_v}{18Z^{1/4}} - 2Ca^{-1}r \right) - S_t \int_z^L hr \sqrt{1+r'^2} dy \right]$, οπότε η

(4.41) γίνεται:

$$\frac{h'}{h} + \frac{r'}{2r} = f \Rightarrow \frac{h'}{h} = f - \frac{r'}{2r} \quad (4.43)$$

Αντικαθιστούμε την τελευταία σχέση στην Εξ.(4.38) και παίρνουμε:

$$\left(f - \frac{r'}{2r}\right) \left(-2 + \frac{4rr''}{1+r'^2}\right) + 2r' \left(\frac{1}{r} + \frac{r''}{1+r'^2}\right) + \left\{ \frac{\text{Re } r''}{h\sqrt{1+r'^2}} - \text{St}hr^2 r' \sqrt{1+r'^2} - r^2 (1+r'^2) (\Delta P_g - a_v P_w - 2Ca^{-1} 2\mathbf{H}) \right\} = 0$$

Πολλαπλασιάζουμε την παραπάνω σχέση με $r(1+r'^2)$ και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} & r(1+r'^2) \left[\left(f - \frac{r'}{2r}\right) \left(-2 + \frac{4rr''}{1+r'^2}\right) + 2r' \left(\frac{1}{r} + \frac{r''}{1+r'^2}\right) \right] + \\ & \quad + \left\{ \frac{\text{Re } rr'' \sqrt{1+r'^2}}{h\sqrt{1+r'^2}} - \text{St}hr^3 r' (1+r'^2)^{3/2} - r^3 (1+r'^2)^2 (\Delta P_g - a_v P_w - 2Ca^{-1} 2\mathbf{H}) \right\} = 0 \Rightarrow \\ & \left(r(1+r'^2) f - r(1+r'^2) \frac{r'}{2r} \right) \left(-2 + \frac{4rr''}{1+r'^2}\right) + 2r'r(1+r'^2) \left(\frac{1}{r} + \frac{r''}{1+r'^2}\right) + \\ & \quad + \left\{ \frac{\text{Re } rr'' \sqrt{1+r'^2}}{h\sqrt{1+r'^2}} - \text{St}hr^3 r' (1+r'^2)^{3/2} - r^3 (1+r'^2)^2 (\Delta P_g - a_v P_w - 2Ca^{-1} 2\mathbf{H}) \right\} = 0 \Rightarrow \\ & -2r(1+r'^2) f + 4rr'' r f + r'(1+r'^2) - \cancel{2r'r'r''} + 2r'(1+r'^2) + \cancel{2r'r'r''} + \left\{ \frac{\text{Re } rr'' \sqrt{1+r'^2}}{h} - \right. \\ & \quad \left. - \text{St}hr^3 r' (1+r'^2)^{3/2} - r^3 (1+r'^2)^2 (\Delta P_g - a_v P_w - 2Ca^{-1} 2\mathbf{H}) \right\} = 0 \Rightarrow \\ & r'' \left(4r^2 f + \frac{\text{Re } r \sqrt{1+r'^2}}{h} \right) - 2r(1+r'^2) f + 3r'(1+r'^2) + \left\{ \text{St}hr^3 r' (1+r'^2)^{3/2} - \right. \\ & \quad \left. - r^3 (1+r'^2)^2 (\Delta P_g - a_v P_w - 2Ca^{-1} 2\mathbf{H}) \right\} = 0 \Rightarrow \\ & r^2 r'' \left(4f + \frac{\text{Re } \sqrt{1+r'^2}}{rh} \right) = 2r(1+r'^2) f - 3r'(1+r'^2) - \left\{ \text{St}hr^3 r' (1+r'^2)^{3/2} - \right. \\ & \quad \left. - r^3 (1+r'^2)^2 (\Delta P_g - a_v P_w - 2Ca^{-1} 2\mathbf{H}) \right\} \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε την f στο πρώτο μέρος της τελευταίας εξίσωσης:

$$r^2 r'' \left[-(1+r'^2) \left(T + Br^2 + \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} \left(\frac{Re}{hr} + \frac{a_v}{18Z^{1/4}} - 2Ca^{-1}r \right) - S_t \int_z^L hr \sqrt{1+r'^2} dy \right) + \frac{Re \sqrt{1+r'^2}}{rh} \right] =$$

$$2r(1+r'^2)f - 3r'(1+r'^2) - \left\{ St hr^3 \sqrt{(1+r'^2)}^{3/2} - r^3(1+r'^2)^2 (\Delta P_g - a_v P_w - 2Ca^{-1}2\mathbf{H}) \right\} \Rightarrow$$

$$r^2 r'' \left[-(1+r'^2) \left(T + Br^2 + \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} \left(\frac{a_v}{18Z^{1/4}} - 2Ca^{-1}r \right) - S_t \int_z^L hr \sqrt{1+r'^2} dy \right) - \frac{(1+r'^2) Re}{\sqrt{1+r'^2} hr} + \frac{Re \sqrt{1+r'^2}}{rh} \right] =$$

$$2r(1+r'^2)f - 3r'(1+r'^2) - \left\{ St hr^3 r'(1+r'^2)^{3/2} - r^3(1+r'^2)^2 (\Delta P_g - a_v P_w - 2Ca^{-1}2\mathbf{H}) \right\} \Rightarrow$$

$$r^2 r'' \left[-(1+r'^2) \left(T + Br^2 - S_t \int_z^L hr \sqrt{1+r'^2} dy \right) - \sqrt{1+r'^2} \frac{a_v}{18Z^{1/4}} + 2Ca^{-1}r \sqrt{1+r'^2} \right] =$$

$$2r(1+r'^2)f - 3r'(1+r'^2) - \left\{ St hr^3 r'(1+r'^2)^{3/2} - r^3(1+r'^2)^2 (\Delta P_g - a_v P_w - 2Ca^{-1}2\mathbf{H}) \right\} \Rightarrow$$

$$-r^2 r''(1+r'^2) \left(T + Br^2 - S_t \int_z^L hr \sqrt{1+r'^2} dy \right) - r^2 r'' \sqrt{1+r'^2} \frac{a_v}{18Z^{1/4}} + r^2 r'' 2Ca^{-1}r \sqrt{1+r'^2} =$$

$$2r(1+r'^2)f - 3r'(1+r'^2) - \left\{ St hr^3 r'(1+r'^2)^{3/2} - r^3(1+r'^2)^2 (\Delta P_g - a_v P_w - 2Ca^{-1}2\mathbf{H}) \right\} \Rightarrow$$

Απαλείφουμε τον όρο $(1+r'^2)$ από όλα τα μέλη της εξίσωσης:

$$-r^2 r'' \left(T + Br^2 - S_t \int_z^L hr \sqrt{1+r'^2} dy \right) - r^2 r'' \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} \frac{a_v}{18Z^{1/4}} + r^2 r'' 2Ca^{-1}r \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} =$$

$$2rf - 3r' - \left\{ St hr^3 r' \sqrt{1+r'^2} - r^3(1+r'^2) (\Delta P_g - a_v P_w - 2Ca^{-1}2\mathbf{H}) \right\} \Rightarrow$$

Πολλαπλασιάζω με -2:

$$2r^2 r'' \left(T + Br^2 - S_t \int_z^L hr \sqrt{1+r'^2} dy \right) = -\frac{r^2 r''}{\sqrt{1+r'^2}} \frac{a_v}{9Z^{1/4}} + \frac{4r^3 r''}{\sqrt{1+r'^2}} Ca^{-1} -$$

$$-4rf + 6r' - 2St hr^3 r' \sqrt{1+r'^2} - 2r^3(1+r'^2) (\Delta P_g - a_v P_w - 2Ca^{-1}2\mathbf{H}) \Rightarrow$$

Αντικαθιστούμε την f στο δεύτερο μέρος της τελευταίας εξίσωσης:

$$2r^2r'' \left(T + Br^2 - S_i \int_z^L hr\sqrt{1+r'^2} dy \right) = 6r' - 2Sthr^3r'\sqrt{1+r'^2} - \frac{r^2r''}{\sqrt{1+r'^2}} \frac{a_v}{9Z^{1/4}} - 2r^3(1+r'^2)(\Delta P_g - a_v P_w - 2Ca^{-1}2\mathbf{H}) + r(1+r'^2) \left[T + Br^2 + \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} \left(\frac{Re}{hr} + \frac{a_v}{18Z^{1/4}} - 2Ca^{-1}r \right) - S_i \int_z^L hr\sqrt{1+r'^2} dy \right] + \frac{4r^3r''}{\sqrt{1+r'^2}} Ca^{-1} \Rightarrow$$

$$2r^2r'' \left(T + Br^2 - S_i \int_z^L hr\sqrt{1+r'^2} dy \right) = 6r' - 2Sthr^3r'\sqrt{1+r'^2} + r(1+r'^2) \left[-\frac{rr''}{(1+r'^2)^{3/2}} \frac{a_v}{9Z^{1/4}} + \frac{4r^2r''}{(1+r'^2)^{3/2}} Ca^{-1} + T + Br^2 + \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} \left(\frac{Re}{hr} + \frac{a_v}{18Z^{1/4}} - 2Ca^{-1}r \right) - S_i \int_z^L hr\sqrt{1+r'^2} dy - 2r^2(\Delta P_g - a_v P_w - 2Ca^{-1}2\mathbf{H}) \right] \Rightarrow$$

$$2r^2r'' \left(T + Br^2 - S_i \int_z^L hr\sqrt{1+r'^2} dy \right) = 6r' - 2Sthr^3r'\sqrt{1+r'^2} + r(1+r'^2) \left[T + Br^2 - 2r^2\Delta P_g - S_i \int_z^L hr\sqrt{1+r'^2} dy - \frac{rr''}{(1+r'^2)^{3/2}} \frac{a_v}{9Z^{1/4}} + \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} \frac{a_v}{18Z^{1/4}} + 2r^2a_v P_w + \frac{4r^2r''}{(1+r'^2)^{3/2}} Ca^{-1} - \frac{2Ca^{-1}r}{\sqrt{1+r'^2}} (+) + 4r^2Ca^{-1}2\mathbf{H} + \frac{Re}{hr\sqrt{1+r'^2}} \right]$$

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των P_w , $2\mathbf{H}$ και $B \equiv \Delta P_g / 2$ η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$2r^2r'' \left(T + Br^2 - S_i \int_z^L hr\sqrt{1+r'^2} dy \right) = 6r' - 2Sthr^3r'\sqrt{1+r'^2} + r(1+r'^2) \left[T + Br^2 - 4Br^2 - S_i \int_z^L hr\sqrt{1+r'^2} dy + \left(\frac{a_v}{18\sqrt{1+r'^2}Z^{1/4}} \right) \left(-\frac{2rr''}{(1+r'^2)} + 1 + \frac{2r^2r''}{r(1+r'^2)} \right) + \left(\frac{2rCa^{-1}}{\sqrt{1+r'^2}} \right) \left(\frac{2rr''}{(1+r'^2)} - 1 + \frac{2r[(1+r'^2) - rr'']}{r(1+r'^2)} \right) + \frac{Re}{hr\sqrt{1+r'^2}} \right] \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
2r^2 r'' \left(T + Br^2 - S_t \int_z^L hr \sqrt{1+r'^2} dy \right) &= 6r' - 2Sthr^3 r' \sqrt{1+r'^2} + r(1+r'^2) \left[T + Br^2 - 4Br^2 - \right. \\
&- S_t \int_z^L hr \sqrt{1+r'^2} dy + \left. \left(\frac{a_v}{18\sqrt{1+r'^2} Z^{1/4}} \right) \left(\frac{-2r^2 r'' + r(1+r'^2) + 2r^2 r''}{r(1+r'^2)} \right) \right] + \\
&+ \left(\frac{2rCa^{-1}}{\sqrt{1+r'^2}} \right) \left(\frac{2r^2 r'' - r(1+r'^2) + 2r(1+r'^2) - 2r^2 r''}{r(1+r'^2)} \right) + \frac{Re}{hr\sqrt{1+r'^2}} \Rightarrow \\
2r^2 r'' \left(T + Br^2 - S_t \int_z^L hr \sqrt{1+r'^2} dy \right) &= 6r' - 2Sthr^3 r' \sqrt{1+r'^2} + r(1+r'^2) \left[T - 3Br^2 - \right. \\
&\left. - S_t \int_z^L hr \sqrt{1+r'^2} dy + \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} \left(\frac{Re}{hr} + \frac{a_v}{18Z^{1/4}} + 2rCa^{-1} \right) \right]
\end{aligned}$$

Δηλαδή οι Εξ.(4.32)-(4.34) ανάγονται στις ακόλουθες εξισώσεις:

$$h = \frac{1}{\sqrt{r}} \exp \left(-\frac{1}{4} \int_0^z \left[(1+r'^2) \left(T + r^2 B + \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} \left(\frac{Re}{hr} + \frac{a_v}{18Z^{1/4}} - 2Ca^{-1}r \right) - St \int_{y=x}^{y=L} hr \sqrt{1+r'^2} dy \right) \right] dx \right) \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned}
2r^2 r'' \left(T + r^2 B - St \int_z^L hr \sqrt{1+r'^2} dx \right) &= 6r' + \\
r(1+r'^2) \left[T - 3r^2 B - St \int_z^L hr \sqrt{1+r'^2} dy + \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} \left(\frac{Re}{hr} + \frac{a_v}{18Z^{1/4}} + 2Ca^{-1}r \right) \right] &- 2Sthr^3 r' \sqrt{1+r'^2}
\end{aligned} \quad (4.45)$$

όπου $B \equiv \Delta P_g / 2$, $T \equiv T_L - R_L^2 B - \frac{Re}{h_L R_L} - \frac{a_v}{18Z_L^{1/4}} + 2Ca^{-1}R_L = F_t(z=L)$, και η συνοριακή συνθήκη

(4.35)(c) λήφθηκε υπόψη στον ορισμό του T . Για $Re = St = 0$ οι Εξ.(4.44) και (4.45) είναι μη-συζευγμένες και το πάχος του κανονικού φιλμ δίνεται αναλυτικά με τον όρο της ακτίνας της φυσαλίδας μόνο:

$$h = \frac{1}{\sqrt{r}} \exp \left(-\frac{1}{4} \int_0^z \left[(1+r'^2) \left(T + r^2 B + \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} \left(\frac{a_v}{18Z^{1/4}} - 2Ca^{-1}r \right) \right) \right] dx \right) \quad (4.46)$$

$$2r^2 r'' (T + r^2 B) = 6r' + r(1+r'^2) \left[T - 3r^2 B + \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} \left(\frac{a_v}{18Z^{1/4}} + 2Ca^{-1}r \right) \right] \quad (4.47)$$

Για $Re = Ca^{-1} = St = a_v = 0$, η Εξ.(4.45) ταυτίζεται με την Εξ.(4.7) των Pearson και Petrie (1970) ενώ η Εξ.(4.44) ταυτίζεται με την δικιά τους Εξ.(4.6) αφού η τελευταία έχει ολοκληρωθεί μία φορά. Για αυτόν

τον λόγο, οι Εξ.(4.44)-(4.45) μπορούν να θεωρηθούν, ως οι γενικεύσεις των αρχικών εξισώσεων λεπτού φιλμ που παραδόθηκαν από τους Pearson και Petrie (1970b), τροποποιημένες καταλλήλως, έτσι ώστε να λαμβάνουν υπόψη τους την αδράνεια, την βαρύτητα, την επιφανειακή τάση και, το πιο σημαντικό, την αεροδυναμική δύναμη λόγω του εφαιπτομενικού πίδακα αέρα. Να σημειωθεί ωστόσο, ότι η ακριβής αριθμητική λύση των Εξ.(4.44)-(4.45), δοθέντος συγκεκριμένων παραμέτρων, είναι πολύ δύσκολο να βρεθεί; εν αντιθέσει με τις Εξ.(4.32)-(4.35) οι οποίες λύνονται πολύ πιο εύκολα.

Συμπεράσματα και προτάσεις για χρήση του μοντέλου

Στην εργασία αυτή αναπτύχθηκε μία μεθοδολογία περιγραφής του πεδίου ροής του πίδακα αέρα, το οποίο χρησιμοποιείται στην βιομηχανική διεργασία “Film Blowing” η οποία βασίζεται στην θεωρία συνοριακών στρωμάτων. Με βάση το παραγόμενο μοντέλο αυτό μπορούν να γίνουν τα παρακάτω:

- I. μελέτη της ιξωδοελαστικότητας του φιλμ
- II. μελέτη της ευστάθειας της διεργασίας
- III. μελέτη του ανισόθερμου προβλήματος.
- IV. σύγκριση των αποτελεσμάτων του νέου μοντέλου με πειραματικά δεδομένα

Ένα σημαντικό κομμάτι από το (I) μαζί με κάποια σύγκριση με πειραματικά δεδομένα έχει ήδη γίνει στο ερευνητικό άρθρο του επιβλέποντα, Αναπληρωτή Καθηγητή Κ.Χουσιάδα, στο άρθρο του «A mathematical model to study the effect of the air jet in the film blowing process», 2010.

Βιβλιογραφία

1. Παντελής Καμμάς, «Η επίδραση της ιξωδοελαστικότητας και του αέρα στην βιομηχανική διεργασία Film Blowing», Μεταπτυχιακή εργασία, Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Μάιος 2006.
2. Γιάννης Καραμπάγιας, «Τρισδιάστατη ανάλυση ευστάθειας και η επίδρασης της θερμοκρασίας στην βιομηχανική διεργασία film blowing», Μεταπτυχιακή εργασία, Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Ιούνιος 2006.
3. Ελένη Νεοφύτου, «Μέθοδοι ομοιότητας σε προβλήματα λογισμού μεταβολών και μερικών διαφορικών εξισώσεων», Μεταπτυχιακή εργασία, Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Μάιος 2007.
4. K.D. Housiadas, “A mathematical model to study the effect of the air jet in the film blowing process”, submitted for publication in *Polym. Eng. Sci.* 2010.
5. J.R.A. Pearson and C.J.S. Petrie, «The flow of a tubular film. Part 1. Formal mathematical representation”, *J. Fluid Mech.*, **40**, 1, 1970a.
6. J.R.A. Pearson and C.J.S. Petrie, «The flow of a tubular film. Part 2. Interpretation of the model and discussion of solutions” *J. Fluid Mech.*, **42**, 609, 1970b.
7. J.R.A. Pearson and C.J.S. Petrie, “A fluid mechanical analysis of the film-blowing process”, *Plastics and Polymers*, **38**, 85, 1970c.
8. C.D. Han and J.Y. Park, “Studies on blown film extrusion. II. Analysis of the deformation and heat transfer processes” *J. Appl. Polym. Sci.*, **19**, 3277, 1975.
9. S. Kim, Y. Fang, P.G. Lafleur, and P.J. Carreau, ”Dynamics and criteria for bubble instabilities in a single layer film blowing extrusion”, *Polym. Eng. Sci.*, **44**, 283, 2004.
10. M. Beaulne and E. Mitsoulis, “Effect of viscoelasticity in the film blowing process”, *J. Appl. Polym. Sci.*, **105**, 2098, 2007.

11. K.D. Housiadas, G. Klidis, and J. Tsamopoulos, "Two- and three-dimensional instabilities in the film blowing process", *J. Non-Newt. Fluid Mech* , **141**, 193, 2007.
12. N. Gao and D. Ewing, "Investigation of the large-scale flow structures in the cooling jets used in the blown manufacturing process", *J. Fluids Eng.*, **127**, 978, 2005.
13. N. Gao, S. Li, and D. Ewing, "Investigation of the cooling jets used in the blown film process", *Inter. Polym. Proces.* **20**, 68, 2005.
14. V. Sidiropoulos and J. Vlachopoulos, «The effects of dual-orifice air-ring design on blown film cooling», *Polym. Eng. Sci.*, **40**, 1611, 2000.
15. R.I. Tanner, *Engineering Rheology*, 2nd edition, Oxford University Press, 2000.
16. G. Georgiou, "Annular liquid jets at high Reynolds numbers", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **42**, 117, 2003.
17. C.J.S. Petrie, « A comparison of theoretical predictions with published experimental measurements on the blown film process», *AIChE J.*, **21**, 275, 1975.
18. G.A. Campbell, N.T. Obot, and B. Cao, "Aerodynamics in the blown film process", *Polym. Eng. Sci.*, **32**, 751, 1992.
19. K.D. Housiadas and J. Tsamopoulos, *XV International Congress on Rheology, Conference Proceedings*, **1027**, 6, 2008.
20. J.C. Hyun, H. Kim, J.S. Lee, H.-S. Song, and H.W. Jung, "Transient solutions of the dynamics in film blowing processes", *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, **121**, 157, 2004.
21. J.S. Lee, D.M. Shin, H-S Song, H.W. Jung, and J.C. Hyun, "Existence of optimal conditions in the film blowing process", *J. Non-Newt. Fluid Mech*, **137**, 24, 2006.
22. D.M. Shin, J.S. Lee, H.W. Jung, and J.C. Hyun, "Multiplicity, bifurcation, stability and hysteresis in dynamic solutions of film blowing process", *J. Rheol.*, **51**, 605, 2007.

23. H. Schlichting and K. Gersten, "*Boundary Layer Theory*", 8th ed., *Correct. printing*, Springer, 2003.
24. J.C. Slattery, "*Advanced Transport Phenomena*", Cambridge University Press, 1999.
25. M.B. Glauert, "The wall jet", *J. Fluid Mech.*, **1**, 625, 1956.
26. X-L Luo and R.I. Tanner, "A computer study of the film blowing process", *Polym. Eng. Sci.*, **25**, 620, 1985.
27. J.J. Cain and M.M. Denn, "Multiplicities and instabilities in film blowing", *Polym. Eng. Sci.*, **28**, 1527, 1988.
28. A.K. Doufas and A.J. McHugh, "Simulation of film blowing including flow-induced crystallization", *J. Rheol.*, **45**, 1085, 2001.
29. K. Housiadas and J. Tsamopoulos, "Unsteady flow of an axisymmetric annular film under gravity", *Phys. Fluids*, **10**, 2500, 1998.
30. E. Mitsoulis, "Extrudate swell of Newtonian fluids from annular dies", *AIChE J.*, **32**, 497, 1986.
31. Y. Seo and E.H. Wissler, "The effect of extrudate swell on modeling the film blowing process", *Polym. Eng. Sci.*, **29**, 722, 1989.
32. S.A. Khan and R.G. Larson, "Comparison of simple constitutive equations for polymer melts in shear and biaxial and uniaxial extensions", *J. Rheol.*, **31**, 207, 1987.
33. W.M. Deen, "*Analysis of transport phenomena*", Oxford University Press, New York, 1998.