Ματινα Μαντζαρη

Monstrous Moonshine

Το τερας και οι περιεργες φιλιες του

Μεταπτυχιακη Εργασια

Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Μαθηματικών
Σάμος Ιούνιος 2010

Εισηγητης: Κοντογεώργης Αριστείδης,
Λάμπρου Πολυξένη

Επιτροπη

Κοντογεώργης Αριστείδης

Παπαλεξίου Νίκος

Χατζηνικήτας Αγαπητός

Στον Σωτήρη

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Κάπου στα 1973 οι Fischer και Griess ανακάλυψαν μια καινούρια πεπερασμένη απλή ομάδα $\mathbb{M}$, τάξης

$$\begin{aligned} & 808017424794512875886459904961710757005754368000000000 = \\ = \; & 2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^{9} \cdot 7^{6} \cdot 11^{2} \cdot 13^{3} \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 \\ \approx \; & 8 \cdot 10^{53}. \end{aligned}$$

Οι Norton και Conway υποστήριξαν πως αυτή η ομάδα έχει μια ανάγωγη αναπαράσταση βαθμού 196883, ίση δηλαδή με το γινόμενο των τριών μεγαλύτερων πρώτων παραγόντων της τάξης της $\mathbb{M}$ και μετά, υπολογίστηκε ολόκληρος ο πίνακας χαρακτήρων της, με την επόμενη διάσταση να είναι 21296876. Ο Conway ονόμασε την ομάδα αυτή « τέρας » (monster) και λίγο αργότερα, το 1979, μαζί με τον Norton, έγραψαν μια εργασία [13] στην οποία μίλησαν για κάποιες εικασίες τους, βασιζόμενοι στην παρατήρηση των McKay και Thompson πως το ανάπτυγμα Fourier της ελλειπτικής modular συνάρτησης $j(\tau) = q^{-1} + 0 + 196884q + 21493760q^2 + \cdots$, με $q = e^{2\pi i \tau}$, μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των διαστάσεων των ανάγωγων αναπαραστάσεων της $\mathbb{M}$.

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 196884 &= 196883 + 1 \\ 21493760 &= 21296876 + 196883 + 1 \\ 864299970 &= 842609 + 21296876 + 2 \cdot 196883 + 2 \cdot 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Βασιζόμενοι και σε άλλες παρατηρήσεις σχετικά με την ομάδα $\mathbb{M}$, οι εικασίες τους αυξάνονταν. Ο Thompson πρότεινε να αντικατασταθούν οι χαρακτήρες του ταυτοτικού στοιχείου της $\mathbb{M}$ από χαρακτήρες άλλων στοιχείων της ομάδας. Το εντυπωσιακό είναι πως όλες αυτές οι modular συναρτήσεις που δημιουργούνται, με αυτούς τους συντελεστές, είναι γένους 0.

Με λίγα λόγια, η πρώτη και κύρια εικασία, που λέγεται "Moonshine conjecture", λέει πως υπάρχει ένα απειροδιάστατο $\mathbb{M}$-module, $V = \bigoplus_{n \geq -1} V_n$, με $\dim V_n = c_n$, όπου c_n οι συντελεστές της $j(\tau) = \sum\limits_{n \geq -1} c_n q^n$. Από αυτό προκύπτει πως κάθε στοιχείο $g \in \mathbb{M}$ δρα σε κάθε υπόχωρο V_n και έχει τιμή χαρακτήρα $\chi_n(g) = \mathrm{Tr}(g|V_n)$ ο οποίος μπορει να χρησιμοποιηθεί ώστε να κατασκευαστεί η σειρά Thompson-McKay $\mathrm{T}_g(q) = \sum\limits_{n \geq -1} \chi_n(g) q^m$ του στοιχείου g της $\mathbb{M}$.

Η δεύτερη εικασία των Conway-Norton υποστηρίζει πως αν θεωρήσουμε ένα χώρο V όπως παραπάνω, για κάθε στοιχείο g της $\mathbb{M}$ υπάρχει μια γένους μηδέν υποομάδα K της $PSL_2(\mathbb{R})$, commensurable με την modular ομάδα $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z})$, τέτοια ώστε η $T_g(q)$ να είναι η κανονικοποιημένη, κύρια modular συνάρτηση της K.

Το όνομά τους "Moonshine conjectures", τους δόθηκε από τον Conway ο οποίος, όταν ο McKay του ανακοίνωσε πως ο συντελεστής του q (198664) ήταν ακριβώς η διάσταση της Griess άλγεβρας (και άρα ακριβώς 1 παραπάνω από την διάσταση της μικρότερης αναπαράστασης της $\mathbb{M}$), του απάντησε πως « αυτά είναι... moonshine », εννοώντας μια τρελή, μια απίθανη ιδέα.

Αποδείχθηκε πως πράγματι υπάρχει μια απειροδιάστατη graded αναπαράσταση της ομάδας Monster της οποίας οι σειρές McKay-Thompson είναι ακριβώς τα Hauptmoduls που βρήκαν οι Conway και Norton. Οι Frenkel, Lepowsky και Meurman[17] κατασκεύασαν αυτή την αναπαράσταση χρησιμοποιώντας vertex τελεστές. Το module που προκύπτει λέγεται Monster module.

Η απόδειξη των εικασιών, καθώς επίσης και πολλές ακόμα σχέσεις μεταξύ της ομάδας $\mathbb{M}$ και της j-συνάρτησης, ήρθε λίγα χρόνια αργότερα, το 1992, από τον R. Borcherds στο [1].

Όλη αυτή η ιστορία μας γοήτευσε ιδιαίτερα και θελήσαμε να κάνουμε μια πρσπάθεια να την γνωρίσουμε από λίγο πιο κοντά και ίσως και να την καταλάβουμε... Αρχικά, δίνουμε κάποια απ' τα εργαλεία που χρειαζόμαστε ώστε να κατανοήσουμε την απόδειξη που έδωσε ο Borcherds και στο δεύτερο μέρος θα επιχειρήσουμε να την παρουσιάσουμε. Ελπίζουμε να απολαύσετε το ταξίδι, όσο και εμείς!

Συνοδηπόροι μου σε αυτό ήταν, και είναι, η Ξένια, που με την επιμονή και την όρεξή της καταφέραμε να ανέβουμε αυτό το... βουνό, ο Σωτήρης που ήταν δίπλα μου σε όλες τις στιγμές, όμορφες και δύσκολες, να με εμπνέει πάντα και ο Αριστείδης να μας εμψυχώνει και να μας δείχνει μέσα από τις ιστορίες του, τον δρόμο.

Και μια μικρή αναδρομή στην ιστορία του τέρατος και της παρέας του.

Το χρονικό...

Το πρώτο μισό του 19ου αι. γεννήθηκε η θεωρία των modular συναρτήσεων από την θεωρία των ελλειπτικών συναρτήσεων που πρώτοι μελέτησαν οι Abel, Gauss και Jacobi. Οι ελλειπτικές συναρτήσεις είναι συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής που είναι διπλά (doubly) περιοδικές, ή γενικότερα που μετασχηματίζονται από συγκεκριμένους παράγοντες μέσω μεταφορών (translations), από ένα lattice $\mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$, όπου $w_1, w_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$ και $\frac{w_1}{w_2} \notin \mathbb{R}$. Η εξάρτηση των modular συναρτήσεων από τις περιόδους τους και ειδικά από το πηλίκο $\tau = \frac{w_1}{w_2}$ είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα. Η ομάδα $SL_2(\mathbb{Z})$ των ακέραιων 2×2 πινάκων με ορίζουσα 1, δρα μέσω γραμμικών μετασχηματισμών στο lattice που παράγεται από τις περιόδους, συμπεριλαμβανομένης μιας δράσης της modular ομάδας $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z})$ στο άνω μιγαδικό ημιεπίπεδο $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ που δίνεται από τους Möbius μετασχηματισμους $g\tau = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$, όπου $g = \pm\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})/ < \pm 1 >$. Ψάχνουμε λογικά, συναρτήσεις στο $\mathbb{H}$ που να είναι Γ-αναλλοίωτες. Οι Dedekind και Klein, ανεξάρτητα, κατασκεύασαν μια τέτοια συνάρτηση $j(\tau)$. Ας θέσουμε $q = e^{2\pi i\tau}$. Μία ακριβής έκφραση της $j(\tau)$ προκύπτει από δύο συναρτήσεις, τη $\Delta(\tau) = \eta(\tau)^{24} = q\prod_{n>0}(1-q^n)^{24}$, (η ήτα συνάρτηση του Dedekind) και την $\Theta_L(\tau) = \sum_{a\in L} q^{<a,a>/2} = (\sum_{a\in E_8} q^{<a,a>/2})^3$ όπου L το lattice που είναι το ορθογώνιο ευθύ άθροισμα τριών αντιγράφων του lattice ριζών της E_8. Αυτό το lattice είναι το μοναδικό άρτιο unimodular lattice με rank 8. Οι $\Delta(\tau)$, $\Theta_L(\tau)$ δεν είναι modular invariant, αλλά το πηλίκο τους $\frac{\theta_L(\tau)}{\Delta(\tau)} = j(\tau)$ είναι. Αυτή η συνάρτηση είναι ολόμορφη (αναλυτική) στο $\mathbb{H}$ και ορίζει στο $\mathbb{H}/\Gamma \cup \{i\infty\}$ μια μερόμορφη συνάρτηση με έναν απλό πόλο στο $\{i\infty\}$ και μάλιστα ένα μιγαδικό αναλυτικό ισομορφισμό με την σφαίρα του Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{CP}^1$.

Η modular-αναλλοίωτη $j(\tau)$ είναι μία θεμελιώδης συνάρτηση ή ένα Hauptmodul, δηλαδή οι modular συναρτήσεις (μερόμορφες modular-αναλλοίωτες στο $\mathbb{H} \cup \{\infty\}$) περιέχουν ακριβώς το σώμα των ρητών συναρτήσεων της $j(\tau)$. Μέχρι μίας προσθετικής σταθεράς, η $j(\tau)$ είναι το μοναδικό Hauptmodul στο $\mathbb{H}$ που έχει έναν απλό πόλο στο $i\infty$, με πηλίκο (residue) 1 στο q.

Μία άλλη επιλογή ενός άρτιου unimodular lattice L με rank 24 στην $j(\tau) = \frac{\Theta_L(\tau)}{\Delta(\tau)}$, επηρεάζει μόνο το σταθερό όρο της $j(\tau)$. Αν επιλέξουμε τον σταθερό όρο να είναι μηδέν (μία επιλογή που δεν γίνεται από κανένα τέτοιο lattice) η $J(\tau) = j(\tau) - 744$ έχει το ακόλουθο ανάπτυγμα Laurent

$$J(\tau) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n q^n = q^{-1} + 0 + 196884q + \cdots$$

Οι συντελεστές της είναι όλοι θετικοί ακέραιοι, εκτός του σταθερού.

Ακόμα και πριν την ανακάλυψη της $j(\tau)$, είχε παρατηρηθεί πως μία σημαντική χαρακτηριστική, που συμβολίζεται $\lambda(\tau)$, των ελλειπτικών συναρτήσεων με περιόδους w_1, w_2, είναι αναλλοίωτη μόνο υπό μία συγκεκριμένη υποομάδα $\Gamma(2)$ της Γ.

Αυτό, χρόνια μετά, οδήγησε τον Klein στη δημιουργία της θεωρίας των congruence υποομάδων. Εισήγαγε μία κλάση πρωταρχικών congruence υποομάδων $\Gamma(N)$, για $N > 0$, και μία γενική έννοια της congruence υποομάδας Γ' (με level n) τέτοια ώστε $\Gamma(N) \subset \Gamma' \subset \Gamma$. Για παράδειγμα η congruence υποομάδα με level n, είναι η ομάδα

$$\Gamma_0(n) = \{g = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma | c \equiv 0 \bmod n\}.$$

Ο Poincaré, από ένα άρθρο του Fuchs, μελετά μία γενική κλάση διακεκριμένων υποομάδων της $PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R}) / < \pm 1 >$ και τις αντίστοιχες αυτομορφικές συναρτήσεις τους (automorphic functions)[1], τις οποίες ονόμασε Fuchsian ομάδες. Αυτές περιλαμβάνουν τις ομάδες $\Gamma, \Gamma(N)$ και $\Gamma_0(n)$ και οι αυτομορφικές συναρτήσεις είναι ανάλογες των modular συναρτήσεων. Για κάθε Fuchsian ομάδα Γ', μία συμπαγοποίηση του $\mathbb{H}/\Gamma'$ έχει δομή μίας συμπαγούς επιφάνειας Riemann. Το γένος g της επιφάνειας είναι το πιο προφανές χαρακτηριστικό της Γ'. Στην περίπτωση που το γένος της $\overline{\mathbb{H}/\Gamma'}$ είναι 0, η θεωρία των αυτομορφικών συναρτήσεων είναι απλή: Το σώμα των αυτομορφικών συναρτήσεων παράγεται από μία μόνο συνάρτηση, την $J_{\Gamma'}(\tau)$, που προσδιορίζεται μέχρι ρητούς μετασχηματισμούς και λέγεται το Hauptmodul της Γ'.

Μάλιστα στην περίπτωση της modular ομάδας Γ, η επιφάνεια έχει γένος 0 (σφαίρα Riemann) και το Hauptmodul της Γ είναι η $J(\tau)$.

[1] Μια αυτομορφική συνάρτηση $f(z)$ μιας μιγαδικής μεταβλητής z είναι μια συνάρτηση που είναι αναλυτική (εκτός από τους πόλους) σε μια περιοχή και η οποία είναι αναλλοίωτη υπό μια αριθμήσιμα άπειρη ομάδα γραμμικών κλασματικών μετασχηματισμών (επίσης γνωστοί ως μετασχηματισμοί Möbius) $z' = \frac{az+b}{cz+d}$. Οι αυτομορφικές συναρτήσεις είναι γενικεύσεις των τριγωνομετρικών και των ελλειπτικών συναρτήσεων.

Δες επίσης [55] και [54]

Ας αναφέρουμε μερικά στοιχεία για ομάδες που αντιστοιχούν σε γένους 0 επιφάνειες.

Ο Fricke μελέτησε τις επιφάνειες που σχετίζονται με την $\Gamma_0(n)$. Συγκεκριμένα οι congruence υποομάδες $\Gamma_0(p)$, για p πρώτο, δίνουν παραδείγματα γένους 0 επιφανειών αν και μόνο αν το $(p-1)$ είναι διαιρέτης του 24.

Ο κανονικοποιητής της $\Gamma_0(n)$ στην $PSL(2,\mathbb{R})$ περιγράφεται από τους Atkin και Lehner. Όταν ο $n = p$, πρώτος, είναι απλά η ομάδα $\Gamma_0(p)^+$ που παράγεται από την $\Gamma_0(p)$ και τις Fricke involutions w_p.

Ο Ogg ολοκλήρωσε την απόδειξη του Fricke, πως για p πρώτο, η $\Gamma_0(p)^+$ έχει την γένους 0 ιδιότητα αν και μόνο αν $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 47, 59, 71$. Αυτό το περίεργο σύνολο πρώτων, θα μπορούσε να μείνει ως ένα από τα πολλά μαθηματικά δεδομένα που φαίνονται να μην έχουν κάποια ιδιαίτερη σημασία. Έτυχε όμως να ακούσει ο Ogg μία ομιλία του Tits για μία σποραδική, πεπερασμένη ομάδα που προέβλεψαν, μα δεν απέδειξαν πως υπάρχει, οι Fischer-Griess, τάξης $2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$. Το τεράστιο μέγεθος αυτής της ομάδας, ήταν που έκανε τον Conway να την ονομάσει Monster (τέρας!). Κανείς δεν φανταζόταν τότε, αρχές του '75, πως είχαν δει απλά την μύτη του παγόβουνου. Και κάπως έτσι, η ιστορία μας ξεκινά....

Μέρος I

Κεφάλαιο 1

Πεπερασμένες Ομάδες και Αναπαραστάσεις

1.1 Πεπερασμένες Απλές ομάδες

Εξ΄ ορισμού μία απλή ομάδα είναι αυτή της οποίας οι μόνες κανονικές υποομάδες είναι οι τετριμμένες, η $\{1\}$ και η ίδια η ομάδα. Η σημασία των πεπερασμένων απλών ομάδων έγκειται στον ρόλο τους ως building blocks, υπό την έννοια πως κάθε πεπερασμένη ομάδα μπορεί να κατασκευαστεί από το $\{1\}$ επεκτείνοντας μέσω μιας ακολουθίας πεπερασμένων απλών ομάδων. Η ταξινόμιση όλων των Πεπερασμένων Απλών Ομάδων, που έγινε τον περασμένο αιώνα, λέει ότι εκτός από τις
• κυκλικές ομάδες C_p τάξης p (πρώτος),
• εναλλάσσουσες (alternating) ομάδες A_n για $n \geq 5$,
• 16 άπειρες οικογένειες ομάδων τύπου Lie (όπως $PSL_n(q), PSU_n(q), G_2(q)$),
υπάρχουν ακριβώς 26 άλλες ομάδες που είναι πεπερασμένες και απλές και που δεν μπορούν να ενταχθούν σε καμία από τις παραπάνω άπειρες οικογένειες. Αυτές οι 26 ομάδες, λέγονται σποραδικές. Το εύρος των μεγεθών τους κυμαίνεται από 7920, που είναι η τάξη της ομάδας του Mathieu M_{11} (1861) μέχρι της μεγαλύτερης από αυτές, που λέγεται Monster[1]και συμβολίζεται με $\mathbb{M}$, τάξης περίπου 8×10^{53}.

Οι περισσότερες από τις σποραδικές ομάδες (19 από αυτές) περιέχονται στην $\mathbb{M}$. Λέμε πως μια ομάδα G περιέχεται στην Monster αν η G είναι η ολομορφική εικόνα κάποιας υποομάδας της Monster, δηλάδη αν υπάρχει κάποια H στην $\mathbb{M}$ με κανονική υποομάδα N τέτοια ώστε το πηλίκο H/N να είναι ισόμορφο με την G. Οι σποραδικές ομάδες που περιέχονται στην Monster λέγονται Monstrous σποραδικές ομάδες. Οι υπόλοιπες 6, λέγονται non-Monstrous, ή όπως τις ονόμασε ο Griess, η ευτυχισμένη οικογένεια και οι Παρίες, οι απόβλητοι...

Η ομάδα Monster προβλέφθηκε απο τον B. Fischer το ΄73 και κατασκευάστηκε πρώτα από τον R. L. Griess το ΄80, ο οποίος παρατήρησε αυτό το αποτέλεσμα κατασκευάζοντας μία συγκεκριμένη μεταθετική, μη-προσεταιριστική άλγεβρα (με $\mathbb{M}$-αναλλοίωτη διγραμμική μορφή), σε έναν πραγματικό διανυσματικό χώρο διάστασης 196883, με την ομάδα Monster $\mathbb{M}$ ως την ομάδα αυτομορφισμών της (στην οποία δρα ως το άθροισμα της τετριμμένης αναπαράστασης και της αναπαράστασης βαθμού 196884). Αυτή η άλγεβρα λέγεται Griess άλγεβρα. Σήμερα κατανοούμε την Griess άλγεβρα ως το πρώτο κομμάτι μιας απειροδιάστατης graded άλγεβρας, του

[1]λέγεται και φιλικός γίγαντας «Friendly Giant»

Moonshine Module $V^\natural$, δηλαδή ενός graded διανυσματικού χώρου $V^\natural = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n^\natural$, όπου οι διαστάσεις των V_n είναι ίσες με τους συντελεστές $c(n)$ της ελλειπτικής modular συνάρτησης

$$j(\tau) - 744 = \sum_n c(n) q^n = q^{-1} + 196884q + 21493760q^2 + \cdots,\ q = e^{2\pi i \tau}, \mathrm{Im}(\tau) > 0.$$

Το $V^\natural$, έχει μια πολύ πλούσια αλγεβρική δομή και έχει ως ομάδα αυτομορφισμών την $\mathbb{M}$.

1.2 Η ομάδα monster

Η ομάδα Monster $\mathbb{M}$ είναι μια πεπερασμένη ομάδα, η μεγαλύτερη από τις 26 σποραδικές απλές ομάδες, τάξης:

$$\begin{aligned} & 808017424794512875886459904961710757005754368000000000 = \\ = \quad & 2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 \\ \approx \quad & 8 \cdot 10^{53}. \end{aligned}$$

Όπως κάθε μη-κυκλική πεπερασμένη απλή ομάδα, η $\mathbb{M}$ παράγεται από τις involutions της (δηλαδή στοιχεία τάξης 2) και έτσι θα είναι μια ολομορφική εικόνα μιας Coxeter ομάδας[2]. Η $\mathbb{M}$ προκύπτει από 26 involutions και το αφινικό επίπεδο τάξης 3.

Ο J. G. Thompson έδειξε πως η μοναδικότητα της (ως απλή ομάδα της δοσμένης τάξης) θα προέκυπτε από την ύπαρξη μιας 196883-διάστατης, πιστής αναπαράστασης. Μια απόδειξη της ύπαρξης μιας τέτοιας αναπαράστασης ανακοινώθηκε το 1982 από τον S. P. Norton, αν και δεν δημοσίευσε λεπτομέρειες και η πρώτη απόδειξη δημοσιευμένη δόθηκε από τον Griess, το 1990.

Η $\mathbb{M}$ έχει 194 κλάσεις συζυγίας (πολύ μικρός αριθμός για μια απλη ομάδα αυτής της τάξης) και άρα τόσες το πλήθος ανάγωγες αναπαραστάσεις. Τον πίνακα χαρακτήρων της, κάθως και πολλές άλλες πληροφορίες γι΄ αυτήν και άλλες ομάδες, μπορούμε να δούμε στον Άτλαντα [14] Για παράδειγμα, βρίσκουμε πως η $\mathbb{M}$ έχει ακριβώς 2,3,4 κλάσεις συζυγίας στοιχείων τάξης 2,3,4 αντίστοιχα και αυτές λέγονται $2A, 2B, 3A$ κ.λ.π. Επίσης βρίσκουμε πως οι διαστάσεις των μικρότερων ανάγωγων αναπαραστάσεων της $\mathbb{M}$ είναι 1, 196883, 21296876 και 842609326, οπότε βλέπουμε πως δεν είναι τόσο το μέγεθος της τάξης της που δυσκολεύει τους υπολογισμούς στην ομάδα monster, άλλα περισσότερο οι διαστάσεις των μικρότερων μη τετριμμένων αναπαραστάσεων της.

Στη χαρακτηριστική δύο υπάρχει μια ανάγωγη αναπαράσταση διάστασης μικρότερη κατα 1 (196882) που φαίνεται να δίνει πολλές πληροφορίες. Για παράδειγμα, ο R. Wilson την χρησιμοποίησε ώστε να δείξει ότι η $\mathbb{M}$ είναι μια ομάδα Hurwitz. Αυτό σημαίνει πως η $\mathbb{M}$ παράγεται από 2 στοιχεία g και h και ικανοποιεί τις σχέσεις:

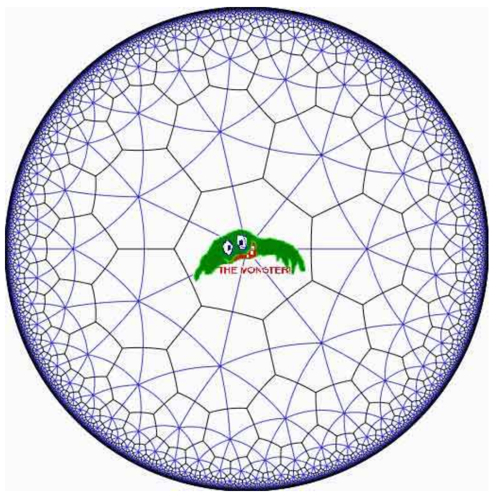
$$g^2 = h^3 = (gh)^7 = 1.$$

[2]Coxeter ομάδες, είναι ομάδες που επιτρέπουν μια περιγραφή υπό το πρίσμα των mirror symmetries. Μάλιστα, οι πεπερασμένες Coxeter ομάδες είναι ακριβώς οι πεπερασμένες Ευκλείδιες ομάδες ανακλάσεων. Οι ομάδες συμμετρίας των κανονικών πολυέδρων είναι ένα παράδειγμα. Μπορούμε να ορίσουμε μια τέτοια ομάδα με μια εκπροσώπηση $\langle r_1, \cdots, r_n | (r_i r_j)^{m_{ij}} = 1\rangle$ με $m_{ii} = 1$ και $m_{ij} \geq 2$ για $i \neq j$. Η πρώτη σχέση σημαίνει $(r_i r_i)^1 = (r_i)^2 = 1$, $\forall i$, δηλαδή οι γεννήτορες είναι involutions (και το γινόμενο δύο γεννητόρων έχει τάξη 2 ή 3).

Γεωμετρικά, αυτό συνεπάγεται πως η Monster είναι η ομάδα αυτομορφισμών μιας επιφάνειας Riemann γένους g που ικανοποιεί το φράγμα του Hurwitz $84(g-1) = |\mathbb{M}|$. Αυτό είναι:

$$\begin{aligned} g &= 9619255057077534236743570297163223297687552000000001 = \\ &= 42151199 * 293998543 * 776222682603828537142813968452830193. \end{aligned}$$

Ή, σε αναλογία με την τετάρτου βαθμού (quartic) Klein η οποία μπορεί να κατασκευαστεί από 24 επτάγωνα στο tiling του υπερβολικού επιπέδου, υπάρχει μια πεπερασμένη περιοχή του υπερβολικού επιπέδου, που « πλακοστρώνεται » με επτάγωνα, από την οποία μπορούμε να κατασκευάσουμε αυτην την monster καμπύλη κολλώντας το σύνορο με έναν συγκεκριμένο τρόπο έτσι ώστε να πάρουμε μια επιφάνεια Riemann με ακριβώς 9619255057077534236743570297163223297687552000000001 τρύπες. Αυτό το πεπερασμένο κομμάτι του υπερβολικού πλακόστρωτου (αποτελούμενο από $|\mathbb{M}|/7$ επτάγωνα) θα το ονομάσουμε: « η αυτοκρατορία του τέρατος » !



Σχήμα 1.1: Το τέρας.

1.3 Λίγα για Αναπαραστάσεις Πεπερασμένων Ομάδων

Η θεώρηση των αναπαραστάσεων που θα κρατήσουμε θα είναι αυτή των $K[G]$-modules, αλλά ας πάρουμε τα πράγματα από την αρχή. Η θεωρία αναπαραστάσεων μας βοηθά στη μελέτη πολύπλοκων αλγεβρικών δομών στέλνοντάς τες σε διανυσματικούς χώρους και γραμμικούς μετασχηματισμούς μεταξύ αυτών, καθιστώντας έτσι τους υπολογισμούς σχετικά πιο εύκολους. Μεταθέτουμε λοιπόν τα προβλήματά μας, ζητώντας την βοήθεια της γραμμικής άλγεβρας. Ας δώσουμε λοιπόν κάποιους ορισμούς.

Ορισμός 1.3.1. *Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα και K ένα σώμα. Μια K-αναπαράσταση της G είναι ένας διανυσματικός χώρος V πάνω από το K και ένας ομομορφισμός ομάδων*

$$\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)\,(= GL(V) = GL(K^n)),\ n = \mathrm{dim}V.$$

Δηλαδή σε κάθε στοιχείο $g \in G$ της ομάδας, αντιστοιχίζουμε έναν αντιστρέψιμο γραμμικό μετασχηματισμό $\rho(g) : V \to V$ που ικανοποιεί την $\rho(g)\rho(h) = \rho(gh)$ για κάθε $g, h \in G$.

Ο K-δ.χ. V λέγεται και χώρος αναπαράστασης της ρ και η διάσταση του χώρου $\dim_K V$ λέγεται βαθμός της αναπαράστασης και συμβολίζεται με $\deg \rho$ (ή $\deg V$).

Παρατήρηση 1.3.2. *Θα ονομάζουμε αναπαράσταση είτε τον V, είτε τον ρ (ή το ζεύγος (V, ρ)), ανάλογα με το αν θέλουμε να δώσουμε έμφαση στον διανυσματικό χώρο ή στον ομομορφισμό.*

Ορισμός 1.3.3. *Έστω V αναπαράσταση της G. Ένας υπόχωρος W του V είναι μια υποπαράσταση της G, αν ο περιορισμός $\rho|_W : W \to W$ είναι μια αναπαράσταση της G.*

Ορισμός 1.3.4. *Μια αναπαράσταση $V \neq \{0\}$ της G θα λέγεται ανάγωγη αν δεν έχει άλλες υποπαραστάσεις πέρα από την $\{0\}$ και τον εαυτό της V.*

Παράδειγμα 1.3.5. *Κάθε παράσταση της G βαθμού $\deg \rho = 1$ είναι ανάγωγη, αφού οι μόνοι υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου V διάστασης 1 είναι ο V και ο $\{0\}$.*

Ορισμός 1.3.6. *Έστω V μια αναπαράσταση της G. Τότε η V είναι το ευθύ άθροισμα αναπαραστάσεων W_1, W_2 αν $V = W_1 \oplus W_2$, ως διανυσματικός χώρος και $\rho(g)(w_1 + w_2) = \rho_1(g)(w_1) + \rho_2(g)(w_2)$ για κάθε $w_i \in W_i$, $i = 1, 2$ και $g \in G$ ($\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$, $\rho_i : G \to \mathrm{Aut}(W_i)$).*

Και τώρα, τι γίνεται με την αναπαράσταση αν αλλάξουμε το σώμα· Η λύση δίνεται μέσω συντεταγμένων. Αν $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ είναι μια K-αναπαράσταση του V, τότε μια επιλογή συντεταγμένων δίνει $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V) \to GL_n(K)$, την γενική γραμμική ομάδα των αντιστέψιμων $n \times n$ πινάκων, με στοιχεία στο σώμα K, όπου $n = \dim_K(V)$. Παίρνοντας λοιπόν μια επέκταση E του σώματος K, αφού $GL_n(K) \subseteq GL_n(E)$ η $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V) \to GL_n(K) \hookrightarrow GL_n(E)$, μας δίνει μια E-αναπαράσταση της G.

Η παραστάσεις $\rho : G \to GL_n(V)$, λέγονται και παραστάσεις δια πινάκων.

Μπορούμε να ταυτίσουμε παραστάσεις δια πινάκων με παραστάσεις με χώρο παράστασης τον K^n μέσω του ισομορφισμού:

$$\Phi_e : GL(K^n) \xrightarrow{\cong} GL_n(K) \, (e : \text{ η κανονική βάση του } K^n)$$

Παραδείγματα αναπαραστάσεων μιας ομάδας G :

Παράδειγμα 1.3.7. (i) *Η μοναδιαία αναπαράσταση n-οστου βαθμού:*

$$\rho_0 : G \to GL(V), \quad \rho_0(\sigma) = \mathrm{id}_V \, \forall \sigma \in G,$$

όπου $\dim_K V = n$

(ii) *Παραστάσεις 1ου βαθμού είναι οι ομομορφισμοί ομάδων:*

$$G \to K^*(= GL_1(K) \cong GL(K))$$

.

(iii) *Το ευθύ άθροισμα αναπαραστάσεων $\rho_i : G \to GL(V)$, $i = 1, 2$ της ομάδας G:*

$$\rho_1 \oplus \rho_2 : \begin{cases} G \to GL(V_1 \oplus V_2) \\ \sigma \mapsto (\rho_1(\sigma), \rho_2(\sigma)). \end{cases}$$

(iv) *η ομαλή αναπαράσταση.*

Θέτουμε

$$K[G] = \{\sum_{g \in G} a_g g | a_g \in K, \text{ με πεπερασμένα μόνο } a_g \neq 0\},$$

ο δακτύλιος ομάδας (group ring) της G πάνω από το K. Ο $K[G]$ είναι μια K-άλγεβρα.

Θα θεωρήσουμε τις K-αναπαραστάσεις της G σαν $K[G]$-modules. Δηλαδή την 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των ισοδύναμων κλάσεων αναπαραστάσεων της K-άλγεβρας $K[G]$ με τα ισόμορφα (αριστερά) $K[G]$-modules, ως modules παραστάσεων.

Ορισμός 1.3.8. *Έστω G μια ομάδα και K ένα σώμα. Μια K-αναπαράσταση της G είναι ένα αριστερό $K[G] - module$, M.*

Με άλλα λόγια, έστω M ένας K-διανυσματικός χώρος και για κάθε στοιχείο της ομάδας $g \in G$ έχουμε έναν γραμμικό μετασχηματισμό $\rho(g) : M \to M$ που δίνεται από την δράση των g στον M, βλέποντάς τα ως $1g \in K[G]$. Αυτοί οι μετασχηματισμοί ικανοποιούν τις: 1) $\rho(1) = 1_M$ και 2) $\rho(g_2 g_1)(m) = \rho(g_2)(\rho(g_1)(m))$ για κάθε $m \in M$, $g \in G$. Παρατηρούμε ότι $\rho(g^{-1})\rho(g) = \rho(1) = 1_M$ έτσι ώστε $\rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1}$. Μάλιστα, κάθε $\rho(g)$ είναι αντιστρέψιμο, δηλαδή $\rho(g) \in \mathrm{Aut}(M)$.

Αντίστροφα, μπορούμε να δούμε μια K-αναπαράσταση της G στον M, όπου M είναι ένας K-διανυσματικός χώρος που δίνεται από έναν ομομορφισμό $\rho : G \to \mathrm{Aut}(M)$. Τότε δίνουμε δομή $K[G]$-module στον M μέσω της $(\sum_{g \in G} a_g g)(m) = \sum_{g \in G} a_g \rho(g)(m)$ και λέμε ότι η αναπαράσταση δίνεται μέσω της ρ.

Παράδειγμα 1.3.9. (i) *Παίρνοντας $M = K[G]$, ως $K[G]$-module έχουμε την ομαλή αναπαράσταση. Είναι μια αναπαράσταση βαθμού n και ως K-διανυσματικός χώρος, ο M έχει μια βάση $\{g : g \in G\}$ και ένα στοιχείο $g_0 \in G$ δρα στο M ως*

$$\rho(g_0)(\sum_{g \in G} a_g g) = \sum_{g \in G} a_g g_0 g$$

(ii) *Έστω M_1, M_2 δύο αναπαραστάσεις της G, που ορίζονται μέσω των ρ_1, ρ_2, τότε $M_1 \oplus M_2$ είναι μια αναπαράσταση της G και $\rho_1 \oplus \rho_2$ $\deg(M_1 \oplus M_2) = \deg M_1 \oplus \deg M_2$.*

Υιοθετώντας την προσέγγιση των $K[G]$-modules ταυτίζουμε ανάγωγες αναπαραστάσεις με απλά $K[G]$-modules.

Ορισμός 1.3.10. *Το M είναι ένα απλό ή ανάγωγο $K[G]$-module αν δεν έχει γνήσια και μη τετριμμένα υπomodules.*

1.3α΄ Χαρακτήρες

Έστω K ένα σώμα, V ένας K-διανυσματικός χώρος με $\dim(V) = n$ και $f \in \mathrm{End}(V)$. Αν διαλέξουμε μια βάση του V, τότε ο f δίνεται, ως πρός αυτήν την βάση, από έναν πίνακα $A = (a_{ij})$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του f, ορίζεται: $\phi(X) =: \det(XI_n - A)$, όπου I_n ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας, και γράφεται

$$\phi(X) = X^n - \mathrm{tr}(A)x^{n-1} + \cdots .$$

Με $\mathrm{tr}(A)$ συμβολίζουμε το ίχνος του πίνακα και δίνεται από την $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Ορίζουμε $\mathrm{tr}(A) := \mathrm{tr}(f)$.

Ορισμός 1.3.11. *Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα και $\rho : G \to GL(V)$ μια αναπαράσταση της. Η απεικόνιση*

$$\chi_\rho : \begin{cases} G \to K \\ \sigma \mapsto \chi_\rho(\sigma) := \mathrm{tr}(\rho(\sigma)), \quad \forall\, \sigma \in G. \end{cases}$$

θα λέγεται χαρακτήρας της G.

Οι χαρακτήρες έχουν τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) $\chi(e) = n$, όπου $n = \deg\rho$,

(ii) $\chi(\tau^{-1}\sigma\tau) = \chi(\sigma)$, $\forall\, \sigma, \tau \in G$, επομένως οι χαρακτήρες είναι συναρτήσεις των κλάσεων συζυγίας της G,

(iii) αν η ρ είναι 1ου βαθμού, τότε $\chi_\rho(\sigma) = \rho(\sigma)$, δηλαδή οι χαρακτήρες 1ου βαθμού είναι οι ομομορφισμοί της G στο K^*,

(iv) $\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$,

(v) οι ανάγωγοι χαρακτήρες της G (δηλαδή οι χαρακτήρες που αντιστοιχούν σε ανάγωγες παραστάσεις) είναι K-γραμμικώς ανεξάρτητοι.

Θεώρημα 1.3.12. *Υπάρχουν ακριβώς τόσες ανάγωγες παραστάσεις της G, όσες και οι κλάσεις συζυγίας της ομάδας.*

Κλάσεις συζυγίας $[G]$ της ομάδας, είναι το σύνολο των κλάσεων συζυγίας των στοιχείων της $[\sigma] := \{\tau\sigma\tau^{-1} | \tau \in G\}$.

Πρόταση 1.3.13. *Κάθε πεπερασμένη ομάδα G έχει ακριβώς $\#(G/[G,G])$ ανάγωγους χαρακτήρες πρώτου βαθμού*
και
$\#G = \sum_{i=1}^{n} (\deg\rho_i)^2$, *όπου ρ_i: αντιπρόσωποι των κλάσεων ανάγωγων παραστάσεων της G.*

Θεώρημα 1.3.14. *Αν χ ανάγωγος χαρακτήρας της G, τότε ο βαθμός του,* $\deg\chi$, *διαιρεί την τάξη της ομάδας.*

Για αποδείξεις και περισσότερα πάνω στη θεωρία αναπαραστάσεων πεπερασμένων ομάδων, δείτε [49] και [48].

Κεφάλαιο 2

Lie Άλγεβρες

2.1 Ορισμός

Ορισμός 2.1.1. *Μια Lie άλγεβρα είναι ένας διανυσματικός χώρος* $\mathfrak{g}$ *(πιθανώς άπειρης διάστασης) πάνω από ένα σώμα* $\mathbb{F}$*, εφοδιασμένος με μία πράξη που λέγεται Lie bracket ή μεταθέτης*

$$\begin{aligned} [,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\to \mathfrak{g} \\ (x, y) &\mapsto [x, y] \end{aligned}$$

και ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα:

(i) *(Διγραμμικότητα) η* $[,]$ *είναι γραμμική σε κάθε συνιστώσα, δηλαδη*

$$\begin{aligned} [ax + bx', y] &= a[x, y] + b[x', y], \\ [x, ay + by'] &= a[x, y] + b[x, y'], \end{aligned}$$

(ii) *(Αντι-συμμετρικότητα)* $[x, y] = -[y, x]$,

(iii) *(Ταυτότητα Jacobi)* $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$,
(ισοδύναμα, $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$*),*

για $x, x', y, y', z \in \mathfrak{g}$ *και* $a, b \in \mathbb{F}$.

Αν η διάσταση της $\mathfrak{g}$ ως διανυσματικός χώρος είναι n, λέμε ότι η $\mathfrak{g}$ είναι μία n-διάστατη Lie άλγεβρα.

2.2 Ομομορφισμοί - Υποάλγεβρες - Ιδεώδη

Ορισμός 2.2.1. *Έστω* $\mathfrak{g}$ *μία Lie άλγεβρα και έστω* $\mathfrak{p}, \mathfrak{i}$ *διανυσματικοί υπόχωροι του* $\mathfrak{g}$.

- *Αν ο* $\mathfrak{p}$ *ικανοποιεί την σχέση* $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$*, τότε γίνεται ο ίδιος μία Lie άλγεβρα (κληρονομώντας το bracket από την* $\mathfrak{g}$*) και λέγεται Lie υποάλγεβρα της* $\mathfrak{g}$.

- *Αν ο* $\mathfrak{i}$ *ικανοποιεί την* $[\mathfrak{i}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{i}$*, λέγεται ιδεώδες της* $\mathfrak{g}$.

Παρατηρούμε ότι κάθε μη-μηδενικό στοιχείο $x \in \mathfrak{g}$ ορίζει μία 1-διάστατη υποάλγεβρα $\mathbb{F}x$, με τετριμμένο bracket, αφού $[x, x] = 0$ (λόγω αντισυμμετρικότητας).

Ο $\mathfrak{g}$ και ο 0-διάστατος διανυσματικός υπόχωρος $\{0\}$ είναι ιδεώδη της $\mathfrak{g}$. Αυτά λέγονται τετριμμένα ιδεώδη. Τα ιδεώδη που δεν είναι τα τετριμμένα λέγονται μη-τετριμμένα και ένα ιδεώδες που δεν είναι ο ίδιος ο χώρος $\mathfrak{g}$, λέγεται γνήσιο ιδεώδες.

Τα ιδεώδη στην θεωρία των Lie αλγεβρών παίζουν τον ίδιο ρόλο με τις κανονικές υποομάδες στην θεωρία ομάδων και των δίπλευρων ιδεωδών στην θεωρία δακτυλίων (προκύπτουν ως πυρήνες ομομορφισμών).

Αν $\mathfrak{i}$ είναι ένα ιδεώδες της $\mathfrak{g}$, ο διανυσματικός χώρος πηλίκο $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ γίνεται Lie άλγεβρα μέσω του bracket

$$[\overline{x}, \overline{y}] := \overline{[x, y]}$$

Εδώ $\overline{x}, \overline{y}$ είναι στοιχεία του $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ και $x, y \in \mathfrak{g}$. Αυτη η Lie άλγεβρα λέγεται Lie άλγεβρα πηλίκο.

Ένα λιγότερο τετριμμένο παράδειγμα ιδεώδους της $\mathfrak{g}$ είναι το

$$\mathfrak{z} := \{x \in \mathfrak{g} : [x, y] = 0, \forall\, y \in \mathfrak{g}\}$$

και λέγεται κέντρο της Lie άλγεβρας $\mathfrak{g}$. Αν $\mathfrak{z} = \{0\}$, λέμε ότι η $\mathfrak{g}$ δεν έχει κέντρο.

Η Lie άλγεβρα $\mathfrak{g}$ με bracket $[x, y] = 0$ για κάθε $x, y \in \mathfrak{g}$ λέγεται μεταθετική ή αβελιανή Lie άλγεβρα. Παρατηρούμε ότι η $\mathfrak{g}$ είναι αβελιανή αν και μόνο αν $\mathfrak{z} = \mathfrak{g}$. Για μία Lie άλγεβρα $\mathfrak{g}$, μία αβελίανη Lie υποάλγεβρα παίζει σημαντικό ρόλο όταν μελετάμε δομές και αναπαραστάσεις της $\mathfrak{g}$.

Ένα ακόμα παράδειγμα ιδεώδους είναι η Lie υποάλγεβρα της $\mathfrak{g}$, που συμβολίζεται $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, που είναι το ανάλογο της (υπο)ομάδας μεταθετών μιας ομάδας. Αποτελείται από όλους τους γραμμικούς συνδιασμούς των $[x, y]$ για $x, y \in \mathfrak{g}$. Προκύπτει πως η $\mathfrak{g}$ είναι αβελιανή ανν $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$.

Ορισμός 2.2.2. *Μία γραμμική απεικόνιση $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ μεταξύ δύο Lie αλγεβρών, πάνω από το $\mathbb{F}$, που ικανοποιεί την $\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]$ για κάθε $x, y \in \mathfrak{g}$, λέγεται ομομορφισμός αυτών των Lie αλγεβρών.*

Το bracket στο πρώτο μέλος της ισότητας είναι το bracket της $\mathfrak{g}$, ενώ στο δευτερο μέλος είναι της $\mathfrak{g}'$.

Αν $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ είναι ένας ομομορφισμός Lie αλγεβρών, τότε ο πυρήνας

$$\mathrm{Ker}(\phi) := \{x \in \mathfrak{g} : \phi(x) = 0\}$$

είναι ένα ιδεώδες της $\mathfrak{g}$ και ο ϕ επάγει έναν ομομορφισμό Lie άλγεβρών

$$\overline{\phi} : \mathfrak{g}/\mathrm{Ker}(\phi) \to \mathfrak{g}'$$

Η εικόνα $\mathrm{Im}(\phi) = \{x \in \mathfrak{g}' \,|\, x = \phi(y), y \in \mathfrak{g}\}$ του ομομορφισμού ϕ είναι υποάλγεβρα της $\mathfrak{g}'$.

Η ϕ λέγεται μονομορφισμός αν $\mathrm{Ker}(\phi) = 0$ και επιμορφισμός αν $\mathrm{Im}(\phi) = \mathfrak{g}'$, και αν ισχύουν και τα δύο λέγεται ισομορφισμός.

Αν $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$, ο ομομορφισμός λέγεται ενδομορφισμός και ο ισομορφισμός λέγεται αυτομορφισμός. Με $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ συμβολίζουμε την ομάδα όλων αυτών.

Θεώρημα 2.2.3. *Αν $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ ομομορφισμός Lie αλγεβρών, τότε $\mathfrak{g}/\mathrm{Ker}(\phi) \cong \mathrm{Im}(\phi)$. Αν $\mathfrak{i}$ οποιοδήποτε ιδεώδες της $\mathfrak{g}$ επαγόμενο στον $\mathrm{Ker}(\phi)$, υπάρχει μοναδικός* *ομομορφισμός $\psi : \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \to \mathfrak{g}'$ ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό (π: η κανονική απεικόνιση):*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, dashed, "\pi"] & \mathfrak{g}' \\ & \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

Αν $\mathfrak{g}_1, \cdots, \mathfrak{g}_n$ είναι Lie άλγεβρες, το ευθύ άθροισμά τους, ως διανυσματικοί χώροι

$$\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_i \in \mathfrak{g}_i, i = 1, \ldots, n\}$$

γίνεται μία Lie άλγεβρα μέσω του bracket

$$[(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)] := ([x_1, y_1], \ldots, [x_n, y_n])$$

και η $\mathfrak{g}$ λέγεται το ευθύ άθροισμα των Lie άλγεβρών $\mathfrak{g}_1, \cdots, \mathfrak{g}_n$. Σε αυτήν την περίπτωση, κάθε $\mathfrak{g}_i$ γίνεται ένα ιδεώδες μέσω της εμφύτευσης

$$\phi_i : \mathfrak{g}_i \ni x \mapsto (0, \cdots, \overbrace{x}^{i}, \cdots, 0) \in \mathfrak{g}$$

Ορισμός 2.2.4. *Για πεπερασμένης διάστασης Lie άλγεβρες ορίζουμε:*

- *η $\mathfrak{g}$ λέγεται απλή αν η διάστασή της είναι μεγαλύτερη από 1 και δεν έχει γνήσια ιδεώδη (βέβαια μια 2-διάστατη Lie άλγεβρα, έχει πάντα ένα μονοδιάστατο ιδεώδες, όποτε στον ορισμό θα μπορούσαμε να απαιτήσουμε η διάσταση της Lie άλγεβρας να είναι μεγαλύτερη ή ίση του 3).*
  Με άλλα λόγια αν η $\mathfrak{g}$ δεν έχει ιδεώδη πέρα από τον εαυτό της και το 0 και επιπλέον $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq 0$ (μη αβελιανή).

- *ένα πεπερασμένο ευθύ άθροισμα απλών Lie αλγεβρών λέγεται ημιαπλή Lie άλγεβρα.*

- *η $\mathfrak{g}$ λέγεται reductive Lie άλγεβρα αν είναι ευθύ άθροισμα του κέντρου της και μίας ημιαπλής Lie άλγεβρας.*

Εύκολα προκύπτει πως $\mathfrak{g}$ απλή $\Leftrightarrow \mathfrak{z} = 0$ και $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.

Ορισμός 2.2.5. *Έστω $\mathfrak{g}$ μια Lie άλγεβρα. Κάθε στοιχείο $x \in \mathfrak{g}$ ορίζει ένα στοιχείο $ad(x) \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ ως εξής:*

$$ad(x)(y) := [x, y], (y \in \mathfrak{g})$$

Τότε η απεικόνιση

$$\begin{array}{rcl} ad : \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \\ x & \mapsto & ad(x) \end{array}$$

είναι ένας ομομορφισμός Lie αλγεβρών. Η $(ad, \mathfrak{g})$ λέγεται adjoint αναπαράσταση της $\mathfrak{g}$.

Ο τελεστής $ad(x), x \in \mathfrak{g}$ ικανοποιεί επίσης την ακόλουθη ιδιότητα:

Ορισμός 2.2.6. *Έστω $\mathfrak{g}$ μία Lie άλγεβρα. Η απεικόνιση $\mathcal{D} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ λέγεται derivation της $\mathfrak{g}$, αν ικανοποιεί την*

$$\mathcal{D}([x,y]) = [\mathcal{D}x, y] + [x, \mathcal{D}y], (x, y \in \mathfrak{g}).$$

Ο χώρος $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ *όλων των derivations της $\mathfrak{g}$ σχηματίζει μία Lie υποάλγεβρα της* $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$.

Από την ταυτότητα Jacobi, βλέπουμε ότι η $ad(x)$ είναι μία derivation της $\mathfrak{g}$ και λέγεται εσωτερική (inner) derivation της $\mathfrak{g}$. Η απεικόνιση

$$\begin{array}{rcl} ad : \mathfrak{g} & \to & \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \\ x & \mapsto & ad(x) \end{array}$$

είναι ομομορφισμός Lie αλγεβρών.

Ορισμός 2.2.7. *Μία Lie υποάλγεβρα $\mathfrak{h}$ μιας απλής Lie άλγεβρας $\mathfrak{g}$ που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες, λέγεται Cartan υποάλγεβρα της $\mathfrak{g}$:*

(i) *η $\mathfrak{h}$ είναι μια μέγιστη αβελιανή υποομάδα της $\mathfrak{g}$*

(ii) *ο γραμμικός μετασχηματισμός* $\mathrm{ad(H)}, \mathrm{H} \in \mathfrak{h}$ *είναι πάντα διαγωνιοποιήσιμος.*

Cartan υποάλγεβρες υπάρχουν για πεπερασμένης διάστασης Lie άλγεβρες, όταν το σώμα είναι άπειρης διάστασης. Αν το σώμα είναι αλγεβρικά κλειστό, χαρακτηριστικής 0 και η άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης, τότε όλες οι Cartan υποάλγεβρες είναι συζυγείς υπό αυτομορφισμούς της Lie άλγεβρας και είναι όλες ισόμορφες.

2.3 Παραδείγματα Lie αλγεβρών

Παράδειγμα 2.3.1. *Οποιοσδήποτε δ.χ. $\mathfrak{g}$ γίνεται μία (αβελιανή) Lie άλγεβρα μέσω του bracket $[x,y] = 0$.*

Παράδειγμα 2.3.2. *Ο χώρος των 3×3 άνω τριγωνικών μιγαδικών πινάκων $T_{3\times 3}$ που παράγεται από τα στοιχεία $x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ και $z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ με bracket $[a,b] = ab - ba$ για κάθε $a, b \in T_{3\times 3}$ είναι μία Lie άλγεβρα.*

Παράδειγμα 2.3.3. *Η Lie άλγεβρα που παράγεται από τα $u_1, \cdots, u_n, v_1, \cdots, v_n, z$ ($2n+1$ το πλήθος),*

$$\mathfrak{g} := \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C}u_i \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C}v_i \oplus \mathbb{C}z,$$

με bracket να ορίζεται $[u_i, v_j] = -[v_j, u_i] = \delta_{i,j} z, [\mathfrak{g}, z] = 0$ λέγεται $2n+1$-διάστατη Heisenberg άλγεβρα. Το $\mathbb{C}z$ είναι το κέντρο της.
Η άλγεβρα του προηγούμενου παραδείγματος είναι η 3-διάστατη Heisenberg άλγεβρα.

Παράδειγμα 2.3.4. *Έστω A μία προσεταιριστική άλγεβρα (πάνω από το $\mathbb{C}$). Η A γίνεται Lie άλγεβρα μέσω του bracket*

$$[a,b] := ab - ba, \quad a, b \in A.$$

Αν η A είναι μεταθετική ως προσεταιριστική άλγεβρα, είναι μεταθετική και ως Lie άλγεβρα.

Παράδειγμα 2.3.5. *Για $n \in \mathbb{Z}$, το σύνολο των μιγαδικών $n \times n$ πινάκων $M_n(\mathbb{C})$ είναι μία προσεταιριστική άλγεβρα και είναι Lie άλγεβρα με bracket $[X,Y] := XY - YX, X, Y \in M_n(\mathbb{C})$. Την συμβολίζουμε $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$.*
Ο υπόχωρος $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) := \{X \in M_n(\mathbb{C}) : tr(X) = 0\}$ είναι μια Lie υποάλγεβρα της $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$.

Παράδειγμα 2.3.6. *Για έναν διανυσματικό χώρο V (ίσως άπειρης διάστασης) πάνω από το $\mathbb{F}$, ο δ.χ. $\operatorname{End} V$ (το σύνολο των γραμμικών μετασχηματισμών $V \to V$) είναι μία προσεταιριστική άλγεβρα. Με bracket $[f,g] = f \circ g - g \circ f$ (αφου ο πολλαπλασιασμός στον $\operatorname{End} V$ είναι σύνθεση συναρτήσεων), ο $\operatorname{End} V$ γίνεται Lie άλγεβρα πάνω από το $\mathbb{F}$.*

Για να ξεχωρίζουμε αυτήν την νέα δομή άλγεβρας, γράφουμε $\mathfrak{gl}(V)$ βλέποντας τον $\operatorname{End} V$ ως Lie άλγεβρα και την ονομάζουμε γενική γραμμική άλγεβρα (γιατί σχετίζεται με την γενική γραμμική ομάδα $GL(V)$ των αντιστρέψιμων ενδομορφισμών του V).

Ή με άλλα λόγια, αν ο V είναι πεπερασμένης διάστασης, επιλέγοντας μία βάση $\{e_1, \cdots, e_n\}$ του V, κάθε στοιχείο $f \in \operatorname{End} V$ μπορεί να εκφραστεί σε μορφή πίνακα ως εξής: για

$$f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$$

η απεικόνιση

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{gl}(V) & \to & \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \\ f & \mapsto & (a_{i,j})_{i,j=1,\cdots,n} \in \end{array}$$

είναι ισομορφισμός Lie αλγεβρών.

2.4 Αναπαραστάσεις

Ορισμός 2.4.1. *Έστω $\mathfrak{g}$ μία Lie άλγεβρα, V ένας διανυσματικός χώρος και*

$$\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$$

ένας ομομορφισμός Lie αλγεβρών. Θα λέμε αναπαράσταση της $\mathfrak{g}$ το ζεύγος (π, V) και τον V χώρο αναπαράστασης.

Με άλλα λόγια, μία αναπαράσταση είναι μία απεικόνιση

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \times V & \to & V \\ (x, v) & \mapsto & \pi(x)v \end{array}$$

που ικανοποιεί τις εξής συνθήκες.

(i) $\pi(ax + by)v = a\pi(x) + b\pi(y)v$

(ii) $\pi(x)(av + bw) = a\pi(x)v + b\pi(x)w$

(iii) $\pi([x, y])v = [\pi(x), \pi(y)]v, \quad (x, y \in \mathfrak{g}, v \in V)$.

Το δεξί μέλος της (iii) είναι bracket στη $\mathfrak{gl}(V)$ και η (iii) γράφεται ισοδύναμα

$$\pi([x, y])v = \pi(x)\pi(y)v - \pi(y)\pi(x)v.$$

Αν (π, V) είναι αναπαράσταση της $\mathfrak{g}$, ο V λέγεται $\mathfrak{g}$-module.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την γλώσσα των modules, παράλληλα με την (ισοδύναμη) γλώσσα των αναπαραστάσεων.

Έστω $\mathfrak{g}$ μία Lie άλγεβρα και $V \big|_{\mathbb{F}}$ ένας δ.χ., εφοδιασμένος με μία απεικόνιση $\mathfrak{g} \times V \to V, (x, v) \mapsto x.v$. Ο V θα λέγεται $\mathfrak{g}$-module αν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες, για $x, y \in \mathfrak{g}$, $v, w \in V$, $a, b \in \mathbb{F}$:

- $(ax + by).v = a(x.v) + b(y.v)$
- $x.(av + bw) = a(x.v) + b(x.w)$
- $[x, y].v = x.(y.v) - y.(x.v)$

Άρα, αν $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ είναι μια αναπαράσταση της $\mathfrak{g}$, τότε ο V είναι ένα $\mathfrak{g}$-module μέσω της δράσης $x.v = \phi(x)(v)$. Αντίστροφα, δοθέντος ένος $\mathfrak{g}$-module V, αυτή η εξίσωση μας δίνει μια αναπαράσταση $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.

Ορισμός 2.4.2. *Έστω (π, V) μια αναπαράσταση της $\mathfrak{g}$. Αν ένας διανυσματικός υπόχωρος U του V ικανοποιεί τη σχέση:*

$$\pi(x)u \in U, (x \in \mathfrak{g}, u \in U)$$

θα λέγεται αναλλοίωτος υπόχωρος του V. Τότε αν πάρουμε τον περιορισμό της $\pi(x), (\forall x \in \mathfrak{g})$ στον χώρο U, η $\pi \big|_U (x)$ θα είναι μια αναπαράσταση της $\mathfrak{g}$ στον U και θα λέγεται υποπαράσταση της (π, V).

Ο V και το $\{0\}$ είναι αναλλοίωτοι υπόχωροι του V και λέγονται τετριμμένοι. Κάθε αναλλοίωτος υπόχωρος, εκτός του V, λέγεται γνήσιος αναλλοίωτος υπόχωρος. Αν ο V δεν περιέχει μη-τετριμένους αναλλοίωτους υπόχωρους, η (π, V) λέγεται ανάγωγη αναπαράσταση της $\mathfrak{g}$.

2.5 Απειροδιάστατες Lie άλγεβρες

Μία Kac-Moody (KM) άλγεβρα είναι μία Lie άλγεβρα, συνήθως άπειρης διάστασης, που μπορεί να οριστεί από γεννήτορες και σχέσεις μέσω ενός γενικευμένου πίνακα Cartan. Αυτές οι άλγεβρες είναι μία γενίκευση των πεπερασμένης διάστασης ημιαπλών Lie αλγεβρών και πολλές από τις ιδιότητες που σχετίζονται με την δομή της Lie άλγεβρας, του συστήματος ριζών της, τών ανάγωγων αναπαραστάσεων κ.α. είναι ανάλογα στην KM θεώρηση. Μία τάξη αυτών είναι οι αφινικές (affine) Lie άλγεβρες, οι οποίες έχουν πολλές εφαρμογες και στην θεωρητική φυσική. Μέσω των affine KM αλγεβρών, ο Kac ανακάλυψε κάποιες πολύ ενδιαφέρουσες ταυτότητες όπως οι Macdonald, που θα δούμε παρακάτω.

Οι BKM άλγεβρες από την άλλη, είναι όμοιες Lie άλγεβρες με τις KM, με την διαφορά να επιτρέπουν την ύπαρξη φανταστικών απλών ριζών. Παράδειγμα αυτών είναι η monster Lie άλγεβρα $\mathfrak{m}$.

2.5α′ Kac-Moody άλγεβρες

Έστω $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i,\\ j\leq n}}$, ένας πραγματικός $n \times n$ πίνακας.

Ορισμός 2.5.1. *Αν ο A ικανοποιεί τις συνθήκες:*

(i) $a_{ii} = 2$,

(ii) $i \neq j \Rightarrow a_{ij} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$,

(iii) $a_{ij} = 0 \Leftrightarrow a_{ji} = 0$,

λέγεται γενικευμένος Cartan πίνακας ή Kac-Moody (KM)-πίνακας.

Μια υλοποίηση (realization) του A είναι μια τριάδα $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$, όπου $\mathfrak{h}$ είναι ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος, $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathfrak{h}^*$ ($\mathfrak{h}^*$ ο δυικός του $\mathfrak{h}$) και $\Pi^\vee = \{h_1, \ldots, h_n\} \subset \mathfrak{h}$ είναι υποσύνολα των $\mathfrak{h}^*$ και $\mathfrak{h}$ αντίστοιχα, και ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες:

(i) και τα δύο σύνολα Π και $\Pi^\vee$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα,

(ii) $\alpha_j(h_i) = a_{ij}, (i, j = 1, \ldots, n)$,

(iii) $n - \operatorname{rank} A = \dim \mathfrak{h} - n$.

Το Π (αντιστ. $\Pi^\vee$) λέγεται βάση ριζών (root basis) (αντιστ. coroot βάση) και τα στοιχεία του Π (αντιστ. $\Pi^\vee$) λέγονται απλές ρίζες (αντιστ. coroots).
Επίσης θέτουμε:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\alpha_i, \quad Q^+ = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_+\alpha_i.$$

Το lattice Q λέγεται lattice ριζών (root lattice). Για $\alpha = \sum_i k_i \alpha_i \in Q$, ο αριθμός $\mathrm{ht}(\alpha) = \sum_i k_i$ λέγεται ύψος (height) της α.

Ορίζουμε μια σχέση μερικής διάταξης στο lattice ως εξής: $\lambda \geq \mu \Leftrightarrow \lambda - \mu \in Q^+$

Ορισμός 2.5.2. *Η KM-άλγεβρα $\mathfrak{g}(A)$, που αντιστοιχεί στον πίνακα A, είναι η Lie άλγεβρα με γεννήτορες $e_i, f_i (i = 1, \ldots, n), \mathfrak{h}$ και σχέσεις:*

$$\begin{cases} [e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i & (i, j = 1, \ldots, n), \\ [h, h'] = 0 & (h, h' \in \mathfrak{h}), \\ [h, e_i] = \alpha_j(h_i) e_i, & \\ [h, f_i] = -\alpha_j(h_i) f_i & (i = 1, \ldots, n \text{ και } h \in \mathfrak{h}) \\ \mathrm{ad}(e_i)^{1-a_{ij}} e_j = \mathrm{ad}(f_i)^{1-a_{ij}} f_j = 0 & \text{για } i \neq j. \end{cases}$$

Συμβολίζουμε με $\mathfrak{n}_+$ (αντίστ. $\mathfrak{n}_-$) την υποάλγεβρα της $\mathfrak{g}(A)$ που παράγεται από τα $e_1, \ldots, e_n$ (αντίστ. $f_1, \ldots, f_n$).

Θεώρημα 2.5.3. (i) $\mathfrak{g}(A) = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ *(ευθύ άθροισμα δ.χ.),*

(ii) *η απεικόνιση που στέλνει $e_i \mapsto -f_i$, $f_i \mapsto -e_i$, $h \mapsto -h$ μπορεί να επεκταθεί μοναδικά σε μια involution ω, που λέγεται Chevalley involution, της Lie άλγεβρας $\mathfrak{g}(A)$,*

(iii) *έχουμε την εξής διάσπαση χώρων ριζών:*

$$\mathfrak{g}(A) = \Big(\bigoplus_{\substack{\alpha\in Q_+\\ \alpha\neq 0}} \mathfrak{g}_{-\alpha}\Big) \oplus \mathfrak{h} \oplus \Big(\bigoplus_{\substack{\alpha\in Q_+\\ \alpha\neq 0}} \mathfrak{g}_{\alpha}\Big),$$

όπου $\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g}(A) \,|\, [h,x] = \alpha(h)x, \text{ για κάθε } h \in \mathfrak{h}\}$.

Η υποάλγεβρα $\mathfrak{h}$ της $\mathfrak{g}(A)$ λέγεται Cartan υποάλγεβρα και τα e_i, f_i, γεννήτορες Chevalley. Μπορούμε να γράψουμε την $\mathfrak{g}(A) = \bigoplus_{\alpha\in Q} \mathfrak{g}_\alpha$. Παρατηρούμε ότι $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$.
Ο αριθμός $\operatorname{mult}\alpha := \dim \mathfrak{g}_\alpha$ λέγεται πολλαπλότητα του α.
Αφού $\omega(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha}$, συμπεραίνουμε ότι $\operatorname{mult}\alpha = \operatorname{mult}(-\alpha)$.

Ένα στοιχείο $\alpha \in Q$ λέγεται ρίζα αν $\alpha \neq 0$ και $\operatorname{mult}\alpha \neq 0$. Μία ρίζα $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$) λέγεται θετική (αντιστ. αρνητική). Προκύπτει από το Θεώρημα 2.5.3 πως μια ρίζα θα είναι είτε θετική, είτε αρνητική. Συμβολίζουμε $\Delta, \Delta_+, \Delta_-$, το σύνολο των ριζών, θετικών αρνητικών αντίστοιχα και $\Delta = \Delta_+ \sqcup \Delta_-$ (ξένη ένωση).

Gradation

Δοθήσης μιας αβελιανής ομάδας G μια διάσπαση $V = \bigoplus_{\alpha\in G} V_\alpha$ ενός διανυσματικού χώρου V σε ευθύ άθροισμα των υποχώρων του, λέγεται μια $G-$*gradation* του V. Τα στοιχεία των V_α λέγονται ομογενή βαθμού (degree) α. Η παρακάτω πρόταση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην Θεωρία Αναπαραστάσεων.

Πρόταση 2.5.4. *Έστω $\mathfrak{h}$ μια μεταθετική Lie άλγεβρα, V ένα διαγωνιοποιήσιμο $\mathfrak{h}$ − module, δηλαδή*

$$V = \bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{h}*} V_\lambda, \text{ όπου } V_\lambda = \{v \in V | h(v) = \lambda(h)v, \text{ για κάθε } h \in \mathfrak{h}\}.$$

Τότε κάθε υποmodule U του V είναι $\mathfrak{h}^*$ − graded.

Μια G-gradation μιας Lie άλγεβρας $\mathfrak{g}$ είναι η gradation της ως διανυσματικός χώρος $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha\in G} \mathfrak{g}_\alpha$, τέτοια ώστε $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

Έστω τώρα $s = (s_1, \dots, s_n)$ μια n-άδα ακεραίων. Θέτοντας

$$\mathrm{deg} e_i = -\mathrm{deg} f_i = s_i \text{ και } \mathrm{deg}\mathfrak{h} = 0$$

ορίζεται μια $\mathbb{Z}$ − *gradation*

$$\mathfrak{g}(A) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j(s)$$

που λέγεται τύπου s. Τα $\mathfrak{g}_j(s) = \bigoplus_\alpha \mathfrak{g}_\alpha$, όπου το άθροισμα είναι πάνω απο τα $\alpha = \sum_i k_i\alpha_i \in Q$ τέτοια ώστε $\sum_i k_i s_i = j$. Αν $s_i > 0$ για όλα τα i, τότε $\mathfrak{g}_0(s) = \mathfrak{h}$ και $\dim\mathfrak{g}_j(s) < \infty (j \in \mathbb{Z})$.

Μια σημαντική gradation είναι η πρωταρχική (principal). Είναι τύπου $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$, δηλαδή

$$\mathfrak{g}_j(\mathbf{1}) = \bigoplus_{\alpha:\mathrm{ht}\alpha=j} \mathfrak{g}_\alpha$$

Παρατηρούμε ότι $\mathfrak{g}_0(\mathbf{1}) = \mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}_{-1}(\mathbf{1}) = \sum_i \mathbb{C}f_i$, $\mathfrak{g}_1(\mathbf{1}) = \sum_i \mathbb{C}e_i$.

Διγραμμικές μορφές

Ένας πίνακας $A = (a_{ij})$ λέγεται συμμετρικοποιήσιμος αν υπάρχει αντιστρέψιμος, διαγώνιος πίνακας $D = \mathrm{diag}(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ και ένας συμμετρικός πίνακας $B = (b_{ij})$ έτσι ώστε $A = DB$.
Η Lie άλγεβρα $\mathfrak{g}(A)$, που αντιστοιχεί στον παραπάνω πίνακα, λέγεται συμμετρικοποιήσιμη Lie άλγεβρα.

Ορισμός 2.5.5. *Μία διγραμμική μορφή $\prec, \succ$ σε έναν διανυσματικό χώρο V λέγεται:*

- *συμμετρική, αν $\prec x, y \succ = \prec y, x \succ$,*
- *θετικά ορισμένη (positive definite), αν $\prec x, x \succ \geq 0$ για όλα τα x, με την ισότητα να ισχύει ανν $x = 0$ και*
- *μη-εκφυλισμένη (non-degenerate), αν $\prec x, y \succ = 0$ για κάθε $y \in V \Rightarrow x = 0$*

για κάθε $x, y \in V$.

Ορισμός 2.5.6. *Μία (μιγαδικών τιμών) διγραμμική μορφή $\prec, \succ$ σε μία Lie άλγεβρα λέγεται $\mathfrak{g}$-αναλλοίωτος, αν είναι συμμετρική και ικανοποιεί την*

$$\prec [x, y], z \succ = \prec x, [y, z] \succ,$$

για κάθε $x, y \in \mathfrak{g}$.

Θεώρημα 2.5.7. *Αν $\mathfrak{g}(A)$ είναι μια συμμετρικοποιήσιμη Lie άλγεβρα, που αντιστοιχει στον πίνακα A, υπάρχει μια μη-εκφυλισμένη, συμμετρική $\mathfrak{g}(A)$-αναλλοίωτη διγραμμική μορφή $(.|.)$ με τιμές στο $\mathbb{C}$.*

Έστω $A = (a_{ij})$ συμμετρικοποιήσιμος γενικευμένος πίνακας Cartan. Φιξάρουμε μια διάσπαση $A = \mathrm{diag}(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)(b_{ij})_{i,j=1}^{n}$, όπου τα ϵ_i είναι θετικοί ρητοί και (b_{ij}) είναι συμμετρικός ρητός πίνακας.

Φιξάρουμε μια μη-εκφυλισμένη διγραμμική μορφή, σε σχέση με την παραπάνω διάσπαση του πίνακα και παίρνουμε την συνήθη έκφραση για τον γενικευμένο πίνακα Cartan :

$$A = \left(\frac{2(\alpha_i|\alpha_j)}{(\alpha_i|\alpha_i)}\right)_{i,j=1}^{n}$$

$(\alpha_i|\alpha_i) > 0$, για $i = 1, \ldots, n$ $(a_i|a_j) \leq 0$, για $i \neq j$. Επεκτείνοντας την $(.|.)$ σε μια αναλλοίωτη συμμετρική μορφή, σε ολόκληρη τη $\mathfrak{g}(A)$ έχουμε την standard αναλλοίωτη μορφή.

Έστω τώρα, ένας $n \times n$ πίνακας πάνω από το $\mathbb{R}$ και έστω ένας δ.χ. $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ τέτοιος ώστε $\mathfrak{h} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Θεωρούμε την μιγαδική Lie άλγεβρα $\mathfrak{g}(A)$ ως *πραγματική* Lie άλγεβρα. Ορίζουμε compact involution να είναι ένας αντιγραμμικός αυτομορφισμός ω_0, στην $\mathfrak{g}(A)$ έτσι ώστε:

$$\begin{cases} \omega_0(e_i) = -f_i & \\ \omega_0(f_i) = -e_i & (i = 1, \ldots, n), \\ \omega_0(h) = -h & (\text{ για } h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}.) \end{cases}$$

Τώρα, έστω A συμμετρικοποιήσιμος πίνακας, πανω από το $\mathbb{R}$ και $(.|.)$ η standard διγραμμική μορφή στην $\mathfrak{g}(A)$. Ορίζουμε Ερμιτιανή μορφή στην $\mathfrak{g}(A)$:

$$(x|y)_0 := -(\omega_0(x)|y).$$

Ομάδα Weyl

Ας ορίσουμε τώρα την ομάδα Weyl για KM-άλγεβρες $\mathfrak{g}(A)$. Για κάθε $i = 1, \ldots, n$ ορίζουμε θεμελιώδη ανάκλαση r_i του δυικού χώρου $\mathfrak{h}^*$:

$$r_i(\lambda) = \lambda - \lambda(h_i)a_i, \lambda \in \mathfrak{h}^*.$$

Η r_i είναι ανάκλαση αφού το σύνολο των σημείων της είναι $T_i = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* | \lambda(h_i) = 0\}$ και $r_i(a_i) = -a_i$.

Η υποομάδα $\mathcal{W}$ της $GL(\mathfrak{h}^*)$ που παράγεται από όλες τις θεμελιώδεις ανακλάσεις, λέγεται Weyl ομάδα της $\mathfrak{g}(A)$.

Πρόταση 2.5.8. *Το σύστημα ριζών* $\Delta = \{\alpha \in Q | \alpha \neq 0, \operatorname{mult} \alpha \neq 0\}$ *της* $\mathfrak{g}(A)$ *είναι* W*-αναλλοίωτο και* $\operatorname{mult} \alpha = \operatorname{mult} w(\alpha)$*, για κάθε* $\alpha \in \Delta, w \in W$*.*

Ο $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{h}$ είναι σταθερός υπό την δράση της W, επειδή $Q^\vee \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Το σύνολο

$$C = \{h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} | \alpha_i(h) \geq 0, i = 1, \ldots, n\}$$

λέγεται θεμελιώδης Weyl chamber. Τα σύνολα $w(C)$ λέγονται Weyl chambers και η ένωση τους, κώνος του Tits.

Και τώρα θα δώσουμε έναν νέο ορισμό, που δεν συναντάμε στην πεπερασμένη διάσταση. Τις φανταστικές ρίζες.

Ορισμός 2.5.9. *Μια ρίζα* $\alpha \in \Delta$ *λέγεται πραγματική, αν υπάρχει* $w \in W$ *τέτοιο ώστε* $w(\alpha)$ *να είναι απλή ρίζα. Συμβολίζουμε* $\Delta^{re}, \Delta^{re}_+$ *τα σύνολα των πραγματικών και θετικών πραγματικών ριζών αντίστοιχα.*
Οι ρίζες που δεν είναι πραγματικές, λέγονται φανταστικές και συμβολίζουμε $\Delta^{im}, \Delta^{im}_+$ *τα σύνολα των φανταστικών και θετικών φανταστικών ριζών αντίστοιχα.*

Εξ' ορισμού: $\Delta = \Delta^{re} \sqcup \Delta^{im}$.
Αν $\alpha \in \Delta^{re}$, τότε $\alpha = w(\alpha_i)$ για κάποιο $\alpha_i \in \Pi, w \in W$.

Πρόταση 2.5.10. *Αν ο* A *είναι συμμετρικοποιήσιμος,* α *μία ρίζα και* $(.|.)$ *η standard διγραμμική μορφή τότε:*

- α *πραγματική, αν και μόνο αν* $(\alpha|\alpha) > 0$
- α *φανταστική αν και μόνο αν* $(\alpha|\alpha) \leq 0$

2.5β′ Borcherds-Kac-Moody άλγεβρες

Θα μελετήσουμε μια κλάση Lie αλγεβρών οι οποίες έχουν μια contravariant διγραμμική μορφή, η οποία είναι σχεδόν θετικά ορισμένη. Αυτές οι άλγεβρες, τις οποίες εισήγαγε ο Borcherds, γενικεύουν τις Kac-Moody άλγεβρες (μπορούμε να τις δούμε ως Kac-Moody άλγεβρες με φανταστικές απλές ρίζες) και ονομάζονται γενικευμένες Kac-Moody άλγεβρες ή Borcerds-Kac-Moody (BKM) άλγεβρες.

Τα περισσότερα από τα στοιχεία που είδαμε για τις Kac-Moody, γενικεύονται σε αυτές τις νέες άλγεβρες.

Σε επόμενο κεφάλαιο θα δούμε ότι υπάρχει μια BKM άλγεβρα συναρτήσει οποιουδήποτε άρτιου Lorentzian lattice, διάστασης το πολύ 26, ή οποιουδήποτε Lorentzian, διάστασης το πολύ 10. Θα δούμε και έναν τύπο για τις πολλαπλότητες των ριζών. Οι αριθμοί 10 και 26 προκύπτουν από το θεώρημα no-ghost.

Universal Borcherds-Kac-Moody άλγεβρες

Ορισμός 2.5.11. *Έστω I ένα αριθμήσιμο σύνολο (σύνολο δεικτών). Ένας πραγματικός συμμετρικός πίνακας $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ ονομάζεται πίνακας Borcherds-Cartan αν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:*

(i) $a_{ij} \leq 0$, *αν* $i \neq j$,

(ii) *αν* $a_{ii} > 0$, *τότε* $2a_{ij}/a_{ii} \in \mathbb{Z}$ *για όλα τα* j.

Ορισμός 2.5.12. *Έστω $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$, ένας Borcerds-Cartan πίνακας. Η universal BKM άλγεβρα που αντιστοιχεί στον πίνακα A, ορίζεται να είναι η Lie άλγεβρα $\hat{\mathfrak{g}}(A)$ που δίνεται από τους γεννήτορες e_i, f_i, h_{ij} για $i, j \in I$ και τις σχέσεις:*

(α) $[e_i, f_j] = h_{ij}$,

(β) $[h_{ij}, e_k] = \delta_{i,j} a_{ik} e_k$, $[h_{ij}, f_k] = -\delta_{i,j} a_{ik} f_k$,

(γ) *αν* $a_{ii} = 2$ *και* $i \neq j$ *τότε* $\mathrm{ad}\,(e_i)^{1-2a_{ij}/a_{ii}} = \mathrm{ad}\,(f_i)^{1-a_{ij}/a_{ii}} = 0$,

(δ) *αν* $a_{ii} \leq 0, a_{jj} \leq 0$ *και* $a_{ij} = 0$ *τότε* $[e_i, e_j] = [f_i, f_j] = 0$.

Ιδιότητες:

(i) Υπάρχει μοναδική αναλλοίωτη διγραμμική μορφή στην $\hat{\mathfrak{g}}(A)$ τέτοια ώστε $(e_i, f_j) = \delta_{i,j}$.
Τότε, από invariance, (1), (2) $\Rightarrow (h_{ii}, h_{jj}) = a_{ij}$.

(ii) Αν $a_{ii} > 0 \;\forall\, i \in I$, τότε η $\hat{\mathfrak{g}}(A)$ είναι μια συνήθης KM άλγεβρα με συμμετρικό πίνακα Cartan.
Γενικά η $\hat{\mathfrak{g}}(A)$ έχει σχεδόν όλες τις ιδιότητες των KM αλγεβρών και η μόνη κύρια διαφορά είναι ότι οι BKM επιτρέπεται να έχουν και φανταστικές απλές ρίζες.

(iii) Αν εφαρμόσουμε την ταυτότητα Jacobi στα e_k, f_l, h_{ij} παίρνουμε:
$[h_{ij}, h_{kl}] = \delta_{i,j}(a_{jk} - a_{jl})h_{kl}$ έτσι ώστε:

- (α′) το h_{ij} να ανήκει στο κέντρο της $\hat{\mathfrak{g}}(A)$ αν $i \neq j$,
- (β′) όλα τα h_{ij} μετατίθενται μεταξύ τους και
- (γ′) $h_{ij} = 0$ αν οι i και j στήλες του A δεν είναι ίσες.

Τα στοιχεία h_{ij}, για τα οποία οι i, j-στήλες είναι ίσες σχηματίζουν μια βάση για μία αβελιανή υποάλγεβρα $\hat{\mathfrak{h}}$ της $\hat{\mathfrak{g}}(A)$, την οποία ονομάζουμε Cartan υποάλγεβρα της $\hat{\mathfrak{g}}(A)$.

Ο λόγος που χρειαζόμαστε στοιχεία h_{ij} για $i \neq j$ είναι ότι η $\hat{\mathfrak{g}}(A)$, έτσι ορισμένη, είναι ίση με την universal central extension της.

(iv) Μπορούμε να ορίσουμε $\mathbb{Z}$-gradation της $\hat{\mathfrak{g}}(A)$, θέτοντας $\deg e_i = -\deg f_i = n_i$, όπου $(n_i|i \in I)$ είναι μια συλλογή θετικών ακεραίων με πεπερασμένες επαναλλήψεις. Ο υπόχωρος βαθμού 0 της $\hat{\mathfrak{g}}(A)$, είναι η υποάλγεβρα Cartan $\hat{\mathfrak{h}}$.

(v) Η $\hat{\mathfrak{g}}(A)$ έχει μία involution ω με $\omega(e_i) = -f_i$, $\omega(f_i) = -e_i$, $\omega(h_{ij}) = -h_{ji}$ που λέγεται Cartan involution.

(vi) Η contravariant form $(x, y)_0 := (\theta(x), y)$ είναι σχεδόν θετικά ορισμένη στην $\hat{\mathfrak{g}}(A)$, που σημαίνει ότι $(x, x)_0 > 0$ όποτε το x είναι ομογενές στοιχείο βαθμού μη μηδενικού στην $\hat{\mathfrak{g}}(A)$.

(vii) Το root lattice Q ορίζεται ως η ελεύθερη αβελιανή ομάδα που παράγεται από στοιχεία α_i, για $i \in I$ με διγραμμική μορφή $(\alpha_i, \alpha_j) = a_{ij}$.

- Τα στοιχεια α_i λέγονται απλές ρίζες.
- Η universal BKM είναι Q-graded, θέτοντας την $\hat{\mathfrak{h}}$ να έχει βαθμό μηδέν τα e_i να έχουν βαθμό α_i και τα f_i να έχουν βαθμό $-\alpha_i$.
- Ο χώρος των ριζών ενός στοιχείου $\alpha \in Q$ είναι ο διανυσματικός χώρος των στοιχείων της $\hat{\mathfrak{g}}(A)$, αυτού του βαθμού.
- Αν $\alpha \neq 0$ και έχει μη-μηδενικό χώρο ριζών,τότε το α λέγεται ρίζα της $\hat{\mathfrak{g}}(A)$.
- Δικρίνουμε τις ρίζες α σε θετικές και αρνητικές όπως κάναμε για τις KM άλγεβρες. Μια ρίζα λέγεται πραγματική αν $(\alpha, \alpha) = \alpha^2 > 0$ και φανταστική αν $\alpha^2 \leq 0$.

(viii) Υπάρχει μια demominator formula για BKM άλγεβρες

$$e^{\rho} \prod_{\alpha > 0} (1 - e^{\alpha})^{mult(\alpha)} = \sum_{w \in W} \det(w) w(e^{\rho} \sum_{\alpha} \epsilon(\alpha) e^{\alpha}) \tag{2.1}$$

όπου ρ είναι ένα διάνυσμα με $(\rho, \alpha_i) = \frac{1}{2}\alpha_i^2 = \frac{1}{2}a_i i$ για κάθε $i \in I$, και λέγεται διάνυσμα Weyl, W είναι η ομάδα Weyl (ομάδα συμμετριών του Q που παράγεται από τις ανακλάσεις $r_i(\alpha) := \alpha - (\alpha, \alpha_i)\alpha_i$ που αντιστοιχούν στις πραγματικές απλές ρίζες και $\epsilon(\alpha) = (-1)^n$, αν το α είναι άθροισμα n διακεκριμένων, ορθογώνιων ανά δύο, φανταστικών απλών ριζών και 0 διαφορετικά.

(ix) Υπάρχει ένας φυσικός ομομορφισμός αβελιανών ομάδων, από το root lattice $Q \to \hat{\mathfrak{h}}$ στην Cartan υποάλγεβρα, στέλνοντας το $\alpha_i \mapsto h_{ii}$ που διατηρεί την διγραμμική μορφή. Αυτός συνήθως δεν ειναι 1-1. Είναι πιθανό για n φανταστικές απλές ρίζες να έχουμε την ίδια εικόνα h_{ii} στην $\hat{\mathfrak{h}}$, στην οποία περιπτωση λέμε ότι η α_i είναι απλή πολλαπλότητας n.

BKM άλγεβρες

Ορισμός 2.5.13. *Μία BKM άλγεβρα $\mathfrak{g}$ είναι μία Lie άλγεβρα που έχει μία σχεδόν θετικά ορισμένη contravariant διγραμμική μορφή $(,)_0$, δηλαδή η $\mathfrak{g}$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(1) Η $\mathfrak{g}$ είναι $\mathbb{Z}$-graded, $\mathfrak{g} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_m$. Η $\mathfrak{g}_0$ είναι αβελιανή και οι $\mathfrak{g}_m$ είναι πεπερασμένης διάστασης για κάθε $m \neq 0$.

(2) Η $\mathfrak{g}$ έχει μια involution ω η οποία δρα ως -1 στην $\mathfrak{g}_0$ και απεικονίζει το $\mathfrak{g}_m$ στο $\mathfrak{g}_{-m}$.

(3) Η $\mathfrak{g}$ έχει μια αναλλοίωτη διγραμμική μορφή $(,)$, ω-αναλλοίωτη, τέτοια ώστε $\mathfrak{g}_m$ και $\mathfrak{g}_n$ να είναι ορθογώνια, έκτος αν $m = -n$.

(4) Η contravariant διγραμμική μορφή $(x, y)_0 := -(x, \omega(y))$ είναι θετικά ορισμένη στο $\mathfrak{g}_m$, για κάθε $m \neq 0$.

Αν πάρουμε το πηλίκο μιας universal BKM άλγεβρας, παίρνουμε μια BKM άλγεβρα. Και αντίστροφα, μπορούμε να πάρουμε κάθε BKM άλγεβρα από μία universal BKM άλγεβρα, όπως λέει το παρακάτω θεώρημα [1] (Θεώρημα 4.1).

Θεώρημα 2.5.14. *Έστω $\mathfrak{g}$ μία BKM άλγεβρα. Υπάρχει μία μοναδική universal BKM άλγεβρα $\hat{\mathfrak{g}}$, graded αν θέσουμε $\deg e_i = -\deg f_i = n_i$ για θετικούς ακεραίους n_i, και ένας ομομορφισμός f στη $\mathfrak{g}$ τέτοιο ώστε:*

(i) *ο f διατηρεί το grading, την involution, τη διγραμμική μορφή της $\mathfrak{g}$,*

(ii) *ο πυρήνας του f βρίσκεται στο κέντρο της $\hat{\mathfrak{g}}$,*

(iii) *η εικόνα του f είναι ένα ιδεώδες της $\mathfrak{g}$ και η $\mathfrak{g}$ είναι το ημιευθύ άθροισμα της εικόνας και μίας υποάλγεβρας της $\mathfrak{g}_0$. Επιπλέον, οι εικόνες των γεννητόρων e_i, f_i είναι ιδιοδιανύσματα της $\mathfrak{g}_0$.*

Θα μιλάμε για ρίζες, ομαδα Weyl κ.τ.λ. μίας BKM άλγεβρας, εννοώντας τις ρίζες, ομαδα Weyl κ.τ.λ. της universal BKM άλγεβρας του παραπάνω θεωρήματος.

Θα κατασκευάσουμε σε επόμενο κεφάλαιο, με την βοήθεια του θεωρήματος "no-ghost", τη monster Lie άλγεβρα $\mathfrak{m}$. Αυτή είναι μία BKM άλγεβρα, στην οποία δρα η ομάδα monster $\mathbb{M}$.

2.5γ′ Η Virasoro άλγεβρα

Η Virasoro άλγεβρα είναι μία ακόμα απειροδιάστατη Lie άλγεβρα, αλλά ανήκει σε μια οικογένεια διαφορετική από τις KM και τις BKM Lie άλγεβρες.

Η Virasoro άλγεβρα είναι η central extension της (μιγαδικής) Witt άλγεβρας των μιγαδικών πολυωνυμικών διανυσματικών πεδίων (vector fields) στον κύκλο (δηλαδή η Virasoro είναι η central extension της Lie άλγεβρας των μερόμορφων vector fields σε μία γένους 0 επιφάνεια Riemann που είναι ολόμορφα, εκτός από δύο φιξαρισμένα σημεία).

Ο τανυστής ενέργειας ορμής [1], στη σύμμορφη θεωρία πεδίου (conformal field theory) στις δύο διαστάσεις, έχει ολομορφική (αντιολομορφική) σύμμορφη διάσταση $(h, \bar{h}) = (2, 2)$ και μπορεί να εκφραστεί σε ανάπτυγμα *Laurent* ως $T(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-n-2} L_n$, όπου $L_n = \frac{1}{2\pi i}\oint z^{n+1}\, T(z)\, dz$ οι γεννήτορες της τοπικής σύμμορφης ομάδας (local conformal group). Οι γεννήτορες L_n ικανοποιούν την κβαντική Virasoro άλγεβρα ($c \neq 0$). Λόγω των αντιολομορφικών συνιστωσών θα έχουμε δύο αντίγραφα Virasoro αλγεβρών τα οποία μετατίθενται.

[1] O stress-energy tensor (λέγεται και stress-energy-momentum tensor) είναι μία τανυστική ποσότητα της οποίας οι συνιστώσες είναι η πυκνότητα (density) και η πυκνότητα ροής (flux density) της ενέργειας και της ορμής (momentum) στον χωροχρόνο. Αποτελεί γενίκευση του stress tensor της Νευτώνιας φυσικής. Είναι ένα χαρακτηριστικό της ύλης (matter), της ακτινοβολίας (radiation), και των μη-βαρυτικών δυναμικών πεδίων (force fields). O stress-energy tensor είναι η πηγή των βαρυτικών πεδίων στις εξισώσεις του Einstein της γενικής θεωρίας της σχετικότητας, ακριβώς όπως η μάζα είναι η πηγή ενός τέτοιου πεδίου στην Νευτώνια βαρύτητα.

Η Witt άλγεβρα (η Virasoro χωρίς την central extension) ανακαλύφθηκε από τον E. Cartan (1909). Το ανάλογό της πάνω από πεπερασμένα σώματα μελέτησε ο E. Witt περίπου στα 1930. Η central extension της Witt άλγεβρας που δίνει την Virasoro βρέθηκε πρώτα (σε χαρακτηριστική $p > 0$) από τον R. E. Block (1966) και ανεξάρτητα επανανακαλύφθηκε (στην χαρακτηριστική 0) από τους I. M. Gelfand και D. B. Fuks (1968). Ο Virasoro (1970) βρήκε κάποιους τελεστές που παράγουν την Virasoro άλγεβρα ενώ μελετούσε dual resonance models, παρόλο που δεν βρήκε την central extension. Η central extension που δίνει την Virasoro ανακαλύφθηκε στην φυσική λίγο αργότερα από τον J. H. Weis, σύμφωνα με τους Brower και Thorn (1971, σελίδα 167 Eliminating spurious states from the dual resonance model).

Ορισμός 2.5.15. *Η Virasoro άλγεβρα είναι ο διανυσματικός χώρος*

$$Vir = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}L_i \oplus \mathbb{C}C$$

με βάση $L_i (i \in \mathbb{Z})$ και C, $\mathbb{C}C$: το 1-διάστατο κέντρο, και είναι η Lie άλγεβρα που ικανοποιεί τα ακόλουθα bracket products:

(i) $[L_i, L_j] = (i-j)L_{i+j} + \frac{C}{12}(i^3 - i)\delta_{i+j,0}$

(ii) $[L_i, C] = 0$

Θέτοντας

$$Vir_+ := \oplus_{i>0}\mathbb{C}L_i, Vir_- := \oplus_{i<0}\mathbb{C}L_i, Vir_0 := \mathbb{C}L_0 \oplus \mathbb{C}C,$$

η Virasoro αναλύεται ως

$$Vir = Vir_- \oplus Vir_0 \oplus Vir_+$$

Το μέρος Vir_0 παίζει τον ρόλο της Cartan υποάλγεβρας της Vir και μπορούμε να θεωρήσουμε το $\mathbb{C}L_i$ ως τον χώρο ριζών, για κάθε i, αλλά δεν υπάρχει καμία ρίζα που να παίζει τον ρόλο της θεμελιώδους (απλής) ρίζας.

2.5δ′ Λίγα για Αναπαραστάσεις

Ορισμός 2.5.16. *Έστω (π, V) μία αναπαράσταση της Vir.*

(i) *Αν ο γραμμικός μετασχηματισμός $\pi(L_0)$ του V είναι διαγωνιοποιήσιμος, και κάθε ιδιόχωρος είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε η αναπαράσταση (π, V) λέγεται L_0-διαγωνιοποιήσιμη.*

(ii) *Αν η (π, V) είναι L_0-διαγωνιοποιήσιμη και επιλέξουμε μιγαδικούς αριθμούς h, c και $0 \neq v_0 \in V$ που ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες*

   (α′) $\pi(C)v_0 = cv_0$,

   (β′) $\pi(L_0)v_0 = hv_0, \pi(Vir_+)v_0 = \{0\}$,

   (γ′) $\pi(\mathfrak{U}(Vir))v_0 = V$, *όπου $\mathfrak{U}(Vir)$: η universal enveloping άλγεβρα,*

   τότε η (π, V) λέγεται highest weight αναπαράσταση, (h, c) λέγεται το highest weight της και v_0 λέγεται ένα highest weight διάνυσμα. Το c λέγεται central charge και το h conformal weight του v.

Για κάθε ζεύγος μιγαδικών αριθμών h και c, υπάρχει μοναδική ανάγωγη highest weight αναπαράσταση με αυτές τις ιδιοτιμές.

Συμβολίζουμε το ανάγωγο highest weight module με highest weight (h, c), με $\mathfrak{B}(h, c)$.

2.5ε′ Σχέση Virasoro και affine Lie αλγεβρών

Αυτό που συνδέει την Virasoro με τις affine Lie άλγεβρες, είναι οι διαφορικοί τελεστές $d_j := t^{j+1}\frac{d}{dt}, (j \in \mathbb{Z})$ στον $\mathbb{R}$. Αφού ο d_j γίνεται $d_j = -ie^{ij\theta}\frac{d}{d\theta}$, μέσω του μετασχηματισμου $t = e^{i\theta}$, μπορούμε να τον δούμε ως ένα διανυσματικό πεδίο (vector field) στον 1-διάστατο τόρο S^1. Οι σχέσεις μεταθετών, για d_j ως διαφορικοί τελεστές είναι

$$[d_j, d_k] = (k - j)d_{j+k}$$

δηλαδή,

$$[-d_j, -d_k] = (j - k)(-d_{j+k})$$

και τα brackets των στοιχείων L_j που σχηματίζουν μια βάση για την Virasoro, είναι αυτά που προκύπτουν, προσθέτοντας ένα κεντρικό στοιχείο στα bracket γινόμενα των $-d_j$.

Γι′ αυτό, μπορούμε να θεωρήσουμε την άλγεβρα ως την της άλγεβρας των πολυωνυμικών διανυσματικών πεδίων, στον 1-διάστατο τόρο.

Κεφάλαιο 3

Vertex άλγεβρες

Μία vertex operator άλγεβρα (VOA) είναι μία αλγεβρική δομή με σημαντικό ρόλο στην θεωρία σύμμορφων πεδίων (conformal field theory) και άλλους σχετικούς κλάδους στην φυσική. Οι VOA έχουν αποδειχθεί εξαιρέτικα χρήσιμές και σε μαθηματικά προβλήματα, όπως στο monstrous moonshine και την geometric Langlands correspondence. Πρώτος τις εισήγαγε ο Richard Borcherds το 1986, παρακινούμενος από τους vertex operators που εμφανίστηκαν από παρεμβολες πεδίων στην 2-διάστατη C.F.T.[1]. Τα αξιώματα των vertex αλγεβρών είναι μία αλγεβρική ερμηνεία αυτών που οι φυσικοί ονομάζουν chiral άλγεβρες, των οποίων ο ορισμός δόθηκε αυστηρά μαθηματικά από τους Alexander Beilinson και Vladimir Drinfeld. Σημαντικά παραδείγματα vertex operator αλγεβρών είναι οι lattice VOA (modeling lattice conformal field theories), οι VOA που δίνονται από αναπαραστάσεις affine Kac-Moody αλγεβρών, οι Virasoro VOA (δηλαδή, VOAs συναρτήσει αναπαραστάσεων της Virasoro άλγεβρας) και το moonshine module V, που κατασκεύασαν οι Frenkel, Lepowsky, Meurman το 1988.

Ο Borcherds είπε: «you either know what they are, or you don"t want to know»...

3.1 Ορισμός vertex αλγεβρών

Ορισμός 3.1.1. *Μία vertex άλγεβρα έναι ένας απειροδιάστατος graded διανυσματικός χώρος $V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n$, πάνω από ένα σώμα $\mathbb{F}$ (το $\mathbb{C}$ ή το $\mathbb{R}$), εφοδιασμένος με ένα άπειρο πλήθος διγραμμικών γινομένων $u_n v$ (ή $u*_n v$), για $n \in \mathbb{Z}$.*

Τα u_n ικανοποιούν τα παρακάτω αξιώματα:

[1] Υπάρχουν δύο εκδοχές των 2D CFT: 1) Ευκλείδειες, και 2) Lorentzian. Οι πρώτες εφαρμόζονται στην στατιστική μηχανική και οι άλλες στην θεωρία κβαντικών πεδίων (quantum field theory). Μεταξύ τους οι δύο σχετίζονται (μέσω μίας Wick rotation). Οι 2- διάστατες CFTs είναι (κατα κάποιο τρόπο) αναλλοίωτες υπό μία απειροδιάστατη ομάδα συμμετριών. Για παράδειγμα, θεωρούμε μία CFT σε μία σφαίρα του Riemann. Έχει τους μετασχηματισμούς Mobius ως σύμμορφη (conformal) ομάδα, η οποία είναι ισόμορφη με (την πεπερασμένης διάστασης) $PSL(2,\mathbb{C})$. Οι απειροστοί μετασχηματισμοί σχηματίζουν μία απειροδιάστατη άλγεβρα, που λέγεται Witt άλγεβρα και μόνο τα primary fields (ή chiral fields) είναι αναλλοίωτα, with respect to the full infinitesimal conformal group. Στις περισσότερες C.F.T.s, μία σύμμορφη ανωμαλία (conformal anomaly), γνωστή και ως Weyl anomaly, προκύπτει στην κβαντική θεωρία. Αυτό το αποτέλεσμα είναι η εμφάνιση μιας μη- τετριμμένης central charge, και η Witt άλγεβρα τροποποιείται ώστε να γίνει η Virasoro άλγεβρα.

(i) *Για κάθε* u, $v \in V$, $u_n v = 0$, *για* $n >> 0$, *που εξαρτάται από τα* u, v.

(ii) *υπάρχει στοιχείο* $1 \in V$ *τέτοιο ώστε* $1_n v = \delta_{n,-1} v$.

(iii) *συνδέονται μεταξύ τους μέσω της ταυτότητας Jacobi-Borcherds:*

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} \binom{m}{i} (u_{l+i}v)_{m+n-i}w = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \binom{l}{i} (u_{m+l-i}(v_{n+i}w) - (-1)^l v_{n+l-i}(u_{m+i}w))$$

$\forall\, u, v, w \in V$ *και* $\forall\, l, m, n \in \mathbb{Z}$

Με άλλα λόγια, μία vertex άλγεβρα είναι ένας διανυσματικός χώρος V, *με ένα διάνυσμα* $1 \in V$ *που λέγεται και vacuum και είναι η μονάδα (unit) του χώρου, καθώς και μία απεικόνιση* $Y : V \to \mathrm{End}V[[z^{\pm 1}]]$[2] *που αντιστοιχίζει σε κάθε* $A \in V$ *μία τυπική δυναμοσειρά, που λέγεται vertex τελεστής,* $Y(A, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_{(n)} z^{-n-1}$, *όπου κάθε* $A_{(n)}$ *είναι ένας γραμμικός τελεστής στον* V, *έτσι ώστε για κάθε* $v \in V$, *έχουμε* $A_{(n)}v = 0$ *για* $n >> 0$.

Τα γινόμενα διατηρούν το grading μέσω της: $V_k *_n V_l \subseteq V_{k+l-n-1}$.

Ο όρος «διγραμμικό» σημαίνει πως κάθε $a, a', b, b' \in \mathbb{C}$ και $u, u', v, v' \in V$ ικανοποιούν την

$$(au + a'u') *_n (bv + b'v') = abu *_n v + ab'u *_n v' + a'bu' *_N v + a'b'u' *_n v'$$

δηλαδή, ότι τα γινόμενα είναι συμβατά με την δομή διανυσματικού χώρου του V.

Οι υπόχωροι V_n πρέπει όλοι να είναι πεπερασμένης διάστασης και πρέπει να είναι τετριμμένοι $V_n = \{0\}$ για n ικανά μεγάλο.

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να συλλέξουμε όλα αυτά τα γινόμενα σε μια generating function: μια γραμμική απεικόνιση

$$Y : V \to (\mathrm{End}V)[[z, z^{-1}]]$$

δηλαδή σε κάθε διάνυσμα $u \in V$, αντιστοιχίζουμε την τυπική δυναμοσειρά (που λέγεται vertex τελεστής) $Y(u, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n z^{-n-1}$. Για κάθε u, ο συντελεστής u_n θα είναι απεικόνιση από το V στο V:

$$\begin{aligned} u_n : V &\to V \\ v &\mapsto u_n v. \end{aligned}$$

Η διγραμμικότητα, στην νέα γλώσσα, μεταφράζεται ως: το $Y(*, z)$ είναι γραμμικό και κάθε συνάρτηση u_n είναι η ίδια γραμμική (δηλαδή είναι ενδομορφισμοί).

Τα γινόμενα θα γράφονται $u *_n v = u_n v := u_n(v)$.

Θεωρούμε ότι το V_0 είναι μονοδιάστατο και το $1 \in V_0$.

Παρατήρηση 3.1.2. *Οι διωνυμικοί συντελεστές* $\binom{m}{i}$ *ορίζονται ως:* $\binom{m}{i} = \frac{m(m-1)\cdots(m-i+1)}{i!}$, *αν* $i \geq 0$ *και* $\binom{m}{i} = 0$ *αν* $i < 0$.

[2] $W[[z^{\pm 1}]] = \{\sum_{n\in\mathbb{Z}} w_n z^n \mid w_n \in W\}$

3.2 Σχέσεις για vertex άλγεβρες από ταυτότητα Jacobi

Από την ταυτότητα Jacobi-Borcherds προκύπτουν πολλές πληροφορίες για την vertex άλγεβρα.

[1] για $l = 0$, παίρνουμε $[u_m, v_n] = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \binom{m}{i} (u_i v)_{m+n-i}$, η οποία είναι η σχέση μεταθετών.

[2] για $m = 0$, προκύπτει $(u_l v)_n = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \binom{l}{i} (u_{l-i} v_{n+i} - (-1)^l v_{n+l-i} u_i)$, δηλαδή η προσεταιριστικότητα των vertex αλγεβρών.

[3] από την σχέση μεταθετών [1], για $m = 0$ έχουμε

$$[u_0, v_n]w = \sum \binom{0}{i} (u_0 v)_{n-i} w \Rightarrow u_0(v_n w) = (u_0 v)_n w + v_n(u_0 w),$$

δηλαδή, οι τελεστές u_0 δρούν ως derivations στα γινόμενα $u_n w$ της vertex άλγεβρας V.

3.3 Vertex Operator Άλγεβρες

Ο αρχικός ορισμός των vertex αλγεβρών (στον κλάδο της φυσικής), δίνεται μέσω τελεστών $\mathcal{V}(v, z)$ με τιμές πολυώνυμα Laurent, χρησιμοποιώντας την έκφραση $\mathcal{V}(v, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^{-n-1}$. Τότε, τα αξιώματα των vertex αλγεβρών, στην αναλυτική τους μορφή, θα είναι ανάλογα.

Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο V και τη γραμμική απεικόνιση

$$\begin{aligned} \mathcal{V} : V &\rightarrow (\mathrm{End}\ V)[[z, z^{-1}]] \\ v &\mapsto \mathcal{V}(v, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^{-n-1} \end{aligned}$$

η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε στοιχείο $v \in V$ έναν τελεστή (vertex operator) $\mathcal{V}(v, z)$. Αυτοί θα ικανοποιούν τα εξής αξιώματα:

(i) Αν $v, u \in V$, τότε

$$Res_z[z^n \mathcal{V}(v, z)u] = 0,^3$$

για $n >> 0$ που εξαρτάται από τα v, u.

(ii) Υπάρχει στοιχείο $1 \in V$, που λέγεται vacuum και ικανοποιεί την

$$\mathcal{V}(1, z) = id_V.$$

(iii) Η ταυτότητα Jacobi-Borcherds θα δίνεται για κάθε $v, u \in V$ ως εξής:

$$\begin{aligned} & z_0^{-1}\delta(\frac{z_1 - z_2}{z_0})\mathcal{V}(v, z_1)\mathcal{V}(u, z_2) - z_0^{-1}\delta(\frac{-z_2 + z_1}{z_0})\mathcal{V}(u, z_2)\mathcal{V}(v, z_1) = \\ = \quad & z_2^{-1}\delta(\frac{z_1 - z_0}{z_2})\mathcal{V}(\mathcal{V}(v, z_0)u, z_2), \end{aligned}$$

όπου οι δυωνυμικές εκφράσεις θα πρέπει να αναπτυχθούν σε μη αρνητικές ακέραιες δυνάμεις της δεύτερης μεταβλητής.

Εδώ $\delta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}[[z, z^{-1}]]$ είναι το ανάπτυγμα Laurent της γνωστής δ-συνάρτησης στο $z = 1$ και $Res_z[z^{-n-1}w(z)] = w_n$, για μία $w(z) = \sum_{n\in\mathbb{C}} w_n z^n$.

[3] Για μία τυπική σειρά $w(z) = \sum_{n\in\mathbb{C}} w_n z^n \in W\{z\}$ γράφουμε $\mathrm{Res}_z[w(z)] = w_{-1}$.

3.4 Ο τελεστής $\mathcal{D}$

Για κάθε vertex άλγεβρα, ορίζουμε τελεστή $\mathcal{D} : V \to V$ ως $\mathcal{D}(v) = v_{-2}1$. Τότε ισχύει $D(1) = 1_{-2}1 = 0$.

Λήμμα 3.4.1. $\mathcal{D}(u)_n v = -n u_{n-1} v$.

Απόδειξη. Από τον ορισμό του $\mathcal{D}$, έχουμε ότι $(\mathcal{D}u)_n = (u_{-2}1)_n$ και από την προσεταιριστικότητα, παίρνουμε

$$(\mathcal{D}u)_n = (u_{-2}1)_n = \sum_{i\geq 0}(-1)^i \binom{-2}{i}(u_{-2-i}1_{n+i} - (-1)^{-2}1_{n-2-i}u_i). \tag{3.1}$$

Για $n \geq 0, n+i \geq 0$ για κάθε $i \geq 0$, επομένως $1_{n+i} = 0$, για κάθε $i \geq 0$. Επίσης $1_{n-2-i} = 1$, ανν $i = n-1$, διαφορετικά $1_{n-2+i} = 0$. Η σχέση (3.1) για $n \geq 0$ γίνεται

$$(\mathcal{D}u)_n = -(-1)^{n-1}\binom{-2}{n-1}u_{n-1}, \tag{3.2}$$

και $\binom{-2}{n-1} = \frac{(-2)(-3)\cdots(-2-n+1+1)}{(n-1)!} = (-1)^{n-1}n$. Τότε η (3.2) γίνεται

$$(\mathcal{D}u)_n = -(-1)^{n-1}(-1)^{n-1}n u_{n-1} = -n u_{n-1}.$$

Για $n \leq 0, n-2-i < -1$ για κάθε $i \geq 0$, επομένως $1_{n-2-i} = 0$, για κάθε $i \geq 0$. Επίσης $1_{n+i} = 1$, ανν $i = -n-1$, διαφορετικά $1_{n+i} = 0$. Η σχέση (3.1) για $n < 0$ γίνεται

$$(\mathcal{D}u)_n = -(-1)^{-n-1}\binom{-2}{-n-1}u_{-2+n+1}, \tag{3.3}$$

και $\binom{-2}{-n-1} = \frac{(-2)(-3)\cdots(-2+n+1+1)}{(-n-1)!} = -(-1)^{-n-1}n$. Τότε η (3.3) γίνεται

$$(\mathcal{D}u)_n = -(-1)^{-n-1}(-1)^{-n-1}n u_{n-1} = -n u_{n-1}.$$

□

Υποθέτουμε ότι ο $\mathcal{D}$ είναι μία derivation της vertex άλγεβρας V, δηλαδή

$$\mathcal{D}(u_n v) = u_n \mathcal{D}(v) + (\mathcal{D}(u))_n v.$$

Σε αυτή την περίπτωση συνοψίζουμε τις ιδιότητές του $\mathcal{D}$.

Ιδιότητες:

(1) $\mathcal{D}(u)_n v = -n u_{n-1} v$.

(2) $\mathcal{D}(1) = 1_{-2}1 = 0$, από (ii) ορισμού των vertex

(3) (derivation) $\mathcal{D}(u_n v) = u_n \mathcal{D}(v) + (\mathcal{D}(u))_n v$, επομένως, από (1), $\mathcal{D}(u_n v) = u_n \mathcal{D}(v) - n u_{n-1} v$.

(4) Χρησιμοποιώντας (2), (3) παίρνουμε:
$\mathcal{D}(u_n 1) = -n u_{n-1} 1$
Επομένως,
$\mathcal{D}(v) = v_{-2} 1$
$\mathcal{D}^2(v) = \mathcal{D}(v_{-2} 1) = -2 v_{-3} 1$
$\vdots$
$\mathcal{D}^n(v) = n! v_{-n-1} 1 \Leftrightarrow v_{-n-1} 1 = \frac{\mathcal{D}^n(v)}{n!} = \mathcal{D}^{(n)}(v)$, όπου $\mathcal{D}^{(n)} = \mathcal{D}^n / n!$
ή διαφορετικά
$v_n 1 = \mathcal{D}^{(-n-1)}(v)$, δηλαδή

$$v_n 1 = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \geq 0 \\ v, & \text{αν } n = 1 \\ \frac{\mathcal{D}^{-n-1}}{(-n-1)!} v, & \text{αν } n \leq -2. \end{cases}$$

Παρατήρηση 3.4.2. *Χρησιμοποιώντας την διγραμμικότητα των $u_n v$ και την ιδιότητα $v_{-1} 1 = v$, μπορούμε να δείξουμε την injectivity των vertex αλγεβρών*

$$u_n = 0, \forall\, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow u = 0.$$

Απόδειξη. " $\Rightarrow$ " Αν $u_n = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$ τότε ισχύει και για $n = -1$, δηλαδή $u_{-1} = 0 \Rightarrow u_{-1} = 0, \forall v \in V$ και άρα και για $1 \in V$ οπότε $u_{-1} = 0 \Rightarrow u = 0$.

" $\Leftarrow$ " Αν $u = 0$ τότε από διγραμμικότητα $u_n = (u + 0)_n = 0_n = u_n + 0_n \Rightarrow u_n = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$. □

Παρατήρηση 3.4.3. *Η injectivity συνεπάγεται την αντισυμμετρικότητα*
$u_n v = -(-1)^n v_n u + \sum_{i \geq 1} \frac{1}{i!} (-1)^{i+n+1} \mathcal{D}^i (v_{n+i} u)$,
ή διαφορετικά
$u_n v = \sum_{i \geq 0} (-1)^{i+n+1} \mathcal{D}^{(i)} (v_{n+i}(u))$

3.5 Conformal vertex άλγεβρες

Ορισμός 3.5.1. *Έστω Vir η Virasoro άλγεβρα με central charge c και βάση $\{L_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \cup \{c\}$. Ένα σύμμορφο (conformal) διάνυσμα μιας vertex άλγεβρας V είναι ένα άρτιο διάνυσμα w τέτοιο ώστε ο αντίστοιχος vertex operator να είναι $\mathcal{V}(w, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$, με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) $L_{-1} = \mathcal{D}$,

(ii) L_0 *διαγωνιοποιήσιμος στον* V.

Ο αριθμός c λέγεται central charge του w. Μία vertex άλγεβρα εφοδιασμένη με ένα conformal διάνυσμα w, λέγεται conformal vertex άλγεβρα βαθμού (rank) c και είναι ένα Vir-module. Αν v είναι ιδιοδιάνυσμα του L_0, τότε η ιδιοτιμή του n λέγεται conformal weight του v.

Ο τελεστής $Y(v, z)$ λέγεται τελεστής ενέργειας -ορμής (energy-momentum) της vertex άλγεβρας V.

Από τον ορισμό του $\mathcal{V}(w, z)$ προκύπτει ότι $L_i = w_{i+1}$. Αυτό μας δίνει το παρακάτω αποτέλεσμα.

Λήμμα 3.5.2. • $w_0 v = \mathcal{D}(v)$, *για κάθε* $v \in V$.

- $w_1 w = 2w$.
- $w_3 w = \frac{c}{2}$.
- $w_i w = 0$, *για* $i = 2$ *ή* $i > 0$.

Απόδειξη. Αφού $w \in V$ θα έχουμε $w_n 1 = 0$ και $w_{-1}1 = w$.

$$w_l w = w_l(w_{-1}1) = [wl, w_{-1}]1 + w_{-1}(w_l 1)$$

γιατί $[w_l, w_{-1}]1 = w_l w_{-1} 1 - w_{-1} w_l 1$ και αφού $w_i = L_{i-1}$, αντικαθιστώ στην σχέση της Vir και παίρνω $[w_l, w_{-1}] = [L_{l-1}, L_{-2}] = (l+1)L_{l-3} + \binom{l}{3}\frac{c}{2}\delta_{l-1,2} = (l+1)w_{l-2} + \binom{l}{3}\frac{c}{2}\delta_{l-3,0}$ όποτε $w_l w = (l+1)w_{l-2}1 + \binom{l}{3}\frac{c}{2}\delta_{l,3} + w_{-1}(w_l 1)$ άρα

$$w_0 w = w_{-2}1 = \mathcal{D}(w),$$

$$w_1 w = 2(w_{-1}1) + w_{-1}(w_1 1) = 2w,$$

$$w_2 w = 0,$$

$$w_3 w = 4w_1 1 + \frac{c}{2}1 + w_{-1}(w_3 1) = \frac{c}{2},$$

$$w_l w = 0, \text{ για } l > 3.$$

□

3.6 Lattice vertex άλγεβρες

Θα κατασκευάσουμε μία vertex άλγεβρα V_Λ, συναρτήσει οπουδήποτε άρτιου lattice Λ ή, πιο συγκεκριμένα, του double cover $\hat{\Lambda}$ του Λ, δηλαδή μιας central extension $\hat{\Lambda}$ του Λ από μία ομάδα τάξης 2. Αυτή η vertex άλγεβρα ως δ.χ. είναι ο Fock space του Λ, δηλαδή το τανυστικό γινόμενο του twisted group ring $\mathbb{Q}(\hat{\Lambda})$ και του πολυωνυμικού δακτυλίου $S(\oplus_{i>0}\Lambda_i)$ πάνω από το άθροισμα ενός άπειρου πλήθους αντιγράφων Λ_i του $\Lambda \otimes \mathbb{R}$. Για την απόδειξη των moonshine conjecture εμείς θα χρησιμοποιήσουμε τη lattice vertex άλγεβρα που αντιστοιχεί στο lattice $II_{1,1}$.

3.6α′ Κατασκευή του Fock space

Έστω ένα άρτιο lattice Λ, με $d = \text{rank}\,\Lambda < \infty$, εφοδιασμένο με μια συμμετρική, μη εκφυλισμένη, διγραμμική μορφή $(\cdot)$, και αντίστοιχο μετρικό τανυστη (metric tensor) $\eta^{\mu\nu}$. Εισάγουμε:

- ορθοκανονικά διανύσματα $\Psi_r, r \in \Lambda$, ("zero mode states"),
- τελεστές (oscillators) α^μ_m, $m \in \mathbb{Z}$, $1 \le \mu \le d$, οι οποίοι ικανοποιούν:
  - (i) (σχέση μεταθετών) $[\alpha^\mu_m, \alpha^\nu_n] = m\eta^{\mu\nu}\delta_{m+n,0}$,
  - (ii) (Ερμιτιανή συνθήκη) $(\alpha^\mu_m)^\dagger = \alpha^\mu_{-m}$,
    και
  - (iii) δρουν στα Ψ_r ως:
    - $\alpha^\mu_m \Psi_r = 0$ για $m > 0$,
    - $\alpha^\mu_0 \Psi_r = r_\mu \Psi_r$ για $m = 0$, όπου r_μ συνιστώσα του Λ,
    - και για $m < 0$, παράγουν τον Fock space από τις Ψ_r.

Οι α^μ_m λέγονται τελεστές καταστροφής για $m > 0$ και τελεστές δημιουργίας για $m < 0$.

Ορίζουμε
$$r(m) := \sum_{\mu=1}^{d} r_\mu \equiv r \cdot \alpha_m$$
τέτοιους ώστε
$$[r(m), s(n)] = m(r \cdot s)\delta_{m+n,0},$$
για $r,\, s \in \Lambda,\, m,\, n \in \mathbb{Z}$.

Θα συμβολίζουμε με
$$\hat{\mathfrak{h}} := \{r(m) | r \in \Lambda, m \in \mathbb{Z}\}$$
τη d-fold Heisenberg άλγεβρα που παράγεται από τους α^μ_m και
$$S(\hat{h^-}) := \bigoplus_{N\in\mathbb{N}} \{\prod_{i=1}^{N} r_i(-m_i) | r_i \in \Lambda, m_i > 0, 1 \leq i \leq N\}$$
τον διανυσματικό χώρο των πεπερασμένων γινομένων τελεστών δημιουργίας, δηλαδή την συμμετρική άλγεβρα της $\hat{\mathfrak{h}}$ (Παίρνουμε την συμμετρική άλγεβρα γιατί οι τελεστες δημιουργίας, $\alpha^\mu_m, m < 0$, μετατίθενται μεταξύ τους.)

Τώρα θέλουμε να δημιουργήσουμε και τη group άλγεβρα του lattice $\mathbb{C}[\Lambda]$, η οποία είναι αβελιανή ομάδα. Αυτή θα σχηματιστεί από στοιχεία της μορφής $e^{ir\cdot q}, r \in \Lambda$, τα οποία ταυτίζουμε με τα zero mode states, επειδή $\Psi_r = e^{ir\cdot q}\Psi_0$, δηλαδή παράγονται από το vacuum Ψ_0.

(τα $q^\mu, 1 \leq \mu \leq d$ είναι τελεστές θέσης, που μετατίθενται με τα α^μ_m για $m \neq 0$, ικανοποιούν την $[q^\nu, p^\mu] = i\eta^{\mu\nu}$ και δίνουν την $e^{ir\cdot q}\Psi_s = \Psi_{r+s}$.)

Προκύπτει όμως ότι παίρνοντας $S(\hat{\mathfrak{h}}^-) \otimes \mathbb{C}[\Lambda]$ ως Fock space, όταν θα του δώσουμε δομή vertex άλγεβρας θα χάσουμε κάποιους όρους στην ταυτότητα Jacobi-Borcherds.

Γι΄ αυτό και θα πάρουμε την twisted group άλγεβρα του Λ, $\mathbb{C}\{\Lambda\}$, που αποτελείται από τους τελεστες e^r, δηλαδή θα δουλέψουμε στο double cover $\hat{\Lambda}$ του Λ.

Ορίζουμε τελεστές
$$e^r := e^{ir\cdot q} c_r$$
και απαιτούμε τις συνθήκες:

(i) $e^r e^s = \epsilon(r, s)e^{r+s}$.

(ii) $e^r e^s = (-1)^{r\cdot s} e^s e^r$, δηλαδή τα e^r δε μετατίθενται πάντα.

(iii) $e^r e^{-r} = 1$.

(iv) $e^0 = 1$.

Τα c_r είναι 2-cocycles, δηλαδή $\mathbb{Z}$-διγραμμικές απεικονίσεις $\epsilon_0 : \Lambda\times\Lambda \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{F}_2$ τέτοιες ώστε $\epsilon_0(a, b) + \epsilon_0(a + b, c) = \epsilon_0(b, c) + \epsilon_0(a, b + c)$, για $a, b, c \in A$.

Ένας 2-cocycle
$$c_r : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$
$$(r, s) \mapsto < r, s > +2\mathbb{Z}$$
αντιστοιχεί σε μια central extension
$$1 \to \{\pm 1\} \to \hat{\Lambda} \to \Lambda \to 1$$

όπου $\hat{\Lambda} = \{\pm 1\} \times \Lambda$ και ορίζεται στον $\hat{\Lambda}$ πολλαπλασιασμός

$$(\rho, r) * (\sigma, s) = (\epsilon(r, s)\rho\sigma, r + s), \rho, \sigma \in \{\pm 1\}, r, s \in \Lambda.$$

Και έτσι, ισοδύναμα με τις σχέσεις (i)-(iv), παίρνουμε:

(i′) $\epsilon(r, s)\epsilon(r + s, t) = \epsilon(r, s + t)\epsilon(s, t)$.

(ii′) $\epsilon(r, s) = (-1)^{r\cdot s}\epsilon(s, r)$.

(iii′) $\epsilon(r, s) = 1$.

(iv′) $\epsilon(0.0) = 1$.

Συγκεντρώνοντας τα δεδομένα μας έχουμε:

- κατασκευάσαμε τον Fock space,

$$V := S(\hat{\mathfrak{h}}^{-1}) \otimes \mathbb{C}\{\Lambda\}.$$

- οι τελεστές $r(m)$ δρουν μόνο στο $S(\hat{\mathfrak{h}}^{-1})$ ως εξής:
  (i) οι τελεστές δημιουργίας ως πολλαπλασιασμός,
  (ii) οι τελεστές καταστροφής μέσω της σχέσης μεταθετών $[r(m), s(n)] = m(r \cdot s)\delta_{m+n,0}$,
- οι α_0^μ δρουν μόνο στην $\mathbb{C}\{\Lambda\}$ ως $r(0)e^s \equiv (r \cdot p)e^s = (r \cdot s)e^s, r, s \in \Lambda$ και
- η δράση των e^r στην $\mathbb{C}\{\Lambda\}$ δίνεται από την σχέση $e^r e^s = \epsilon(r, s)e^{r+s}$.

3.6β′ Δημιουργία της vertex operator άλγεβρας

Για κάθε στοιχείο $v \in V$ στον χώρο που κατασκευάσαμε, θα ορίσουμε vertex operators $\mathcal{V}(v, z)$, δηλαδή απεικονίσεις από τον V στον δακτύλιο των τυπικών σειρών Laurent.

Για $r \in \Lambda$ εισάγουμε το τυπικό άθροισμα

$$r(z) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} r(m)z^{-m-1},$$

το οποίο είναι στοιχείο στο $\hat{\mathfrak{h}}[[z, z^{-1}]]$. Η δράση του $r(m)$ είναι διαφορετική για τα διάφορα $m \in \mathbb{Z}$, γι′ αυτο και θα χωρίσουμε το $r(z)$ σε τρία μέρη:

$$r(z) = r^-(z) + r(0) + r^+(z)$$

με $r^-(z) := \sum_{m>0} r(-m)z^{m-1}$ και $r^+(z) := \sum_{m>0} r(m)z^{-m-1}$.

Για $e^r \in \mathbb{C}\{\Lambda\}$**:** θέτουμε

$$\mathcal{V}(e^r, z) := e^{\int r^-(z)dz} e^r z^{r(0)} e^{\int r^+(z)dz}$$

όπου τα ολοκληρώματα δίνουν $\int r^-(z)dz = \sum_{m>0} \frac{1}{m} r(-m)z^m$, $\int r^+(z)dz = \sum_{m>0} \frac{1}{m} r(m)z^{-m}$.

Χρησιμοποιούμε έναν τύπο από την φυσική (πεδίο Fubini-Veneziano)

$$Q^\mu(z) \equiv q^\mu - ip^\mu \ln z + i \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{m}\alpha_m^\mu z^{-m},$$

ο οποίος βέβαια έχει νόημα μόνο αν τον εκθετικοποιήσουμε. Οι q^{μ}, όπως είπαμε, είναι τελεστές θέσης, $p^{\mu} \equiv \alpha_0^{\mu}$, και μεταξύ τους ικανοποιούν την $[q^{\nu}, p^{\mu}] = i\eta^{\mu\nu}$ και δίνουν $e^{ir\cdot q}\Psi_s = \Psi_{r+s}$. Βρίσκουμε λοιπόν

$$\mathcal{V}(e^r, z) =: e^{ir\cdot Q(z)} : c_r,$$

όπου c_r, ο 2- συνκύκλος (τελεστής ορμής εδώ) και με το σύμβολο : ... : εννοούμε την κανονική ταξινόμηση (normal ordering) των όρων της παράστασης, δηλαδή τοποθετούμε τους τελεστές δημιουργίας στα αριστερά των τελεστών καταστροφής, και προκύπτει τελεστής καλώς ορισμένος τελεστής από $V \to V[[z, z^{-1}]]$, ενώ η προηγούμενη έκφραση δεν είναι τελεστής μιας και δεν συγκλίνει.

Παίρνουμε λοιπόν ένα στοιχείο του V, $v = (\prod_{j=1}^{N} s_j(-n_j)) \otimes e^r$ και ορίζουμε

$$\mathcal{V}(v, z) :=: \mathcal{V}(e^r, z) \prod_{j=1}^{N} \frac{1}{(n_j - 1)!} (\frac{d}{dz})^{n_j - 1} s_j(z) :$$

$$\equiv i : e^{ir\cdot Q(z)} \prod_{j=1}^{N} \frac{1}{(n_j - 1)!} (\frac{d}{dz})^{n_j} (s_j \cdot Q(z)) : c_r,$$

όπου $\frac{d}{dz}(is \cdot Q(z)) = s(z)$.

Επεκτείνοντας αυτόν τον ορισμό, μέσω γραμμικότητας, προκύπτει μια καλώς ορισμένη απεικόνιση

$$\mathcal{V} : V \to (EndV)[[z, z^{-1}]]$$
$$v \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n z^{-n-1}.$$

Συνδυασμός

Η Heisenberg Lie άλγεβρα που χρησιμοποιήσαμε στην κατασκευή του Fock space μπορεί να προκύψει από ένα lattice Λ. Γι' αυτό θα επεκτείνουμε την $\hat{\mathfrak{h}}$ σε αντίγραφα του lattice, $\Lambda(i)$ (αντίγραφα του ρητού δ.χ. του Λ, $\Lambda_{\mathbb{Q}} = \Lambda \otimes \mathbb{Q}$, δηλαδή εμφυτεύσεις του Λ στον $\mathbb{Q}$- δ.χ.). (Συμβολισμός: θα αντικαταστήσουμε την διγραμμική μορφή του lattice $(\cdot)$ με μια νέα $(,))$ Έτσι, έχοντας μία central extension για άρτιο lattice

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to \hat{\Lambda} \to \Lambda \to 0$$

$\mathbb{Z}_2 =< \epsilon, \epsilon^2 = 1 >$ και αντικαθιστώντας την group άλγεβρα $\mathbb{C}\{\Lambda\}$ με την ρητή $\mathbb{Q}\{\Lambda\}$, παίρνουμε τον Fock space

$$V = \mathbb{Q}\{\Lambda\} \otimes S(\Lambda(i)).$$

Ομοίως, τα στοιχεία της $\mathbb{Q}\{\Lambda\}$ θα είναι $e^r, r \in \Lambda$ με $e^r e^s = (-1)^{(r,s)} e^s e^r$, $e^r e^s = \epsilon^{(r,s)} e^s e^r$ και $e^r e^{-r} = \frac{1}{2}\epsilon^{(r,r)}$ και τα στοιχεία της συμμετρικής $S(\Lambda(i))$ θα τα γράφουμε, για απλοποίηση, $r(i)$. Έτσι ένα στοιχείο του θα είναι, για παράδειγμα, $e^r \otimes s(1)^3 \otimes t(4)$.

Ο V έχει τις ακόλουθες δομές:

(i) Ο V είναι άλγεβρα, μιας και όλα τα μέρη του τανυστικού γινομένου είναι άλγεβρες.

(ii) Υπάρχουν γραμμικές απεικονίσεις:

$$\mathcal{D} : V \to V$$
$$e^r \mapsto \mathcal{D}(e^r) = r(1)e^r$$
$$r(i) \mapsto \mathcal{D}(r(i)) = ir(i+1)$$

η $\mathcal{D}$ είναι derivation και συμβολίζουμε $\mathcal{D}^{(i)}$ τον τελεστή $\frac{\mathcal{D}^i}{i!}$ και

$$\deg : V \to V$$
$$e^r \mapsto \deg(e^r) = \frac{1}{2}(r,r)e^r$$
$$r(i)v \mapsto \deg(r(i))v = r(i)(iv + \deg(v))$$

Αν $\deg u = iu$, λέμε πως το u έχει βαθμό i.

(iii) έχει μια Cartan involution θ η οποία δρα στον $\mathbb{R}$ μέσω της $\theta(e^r) = e^{-r}$, (και έτσι γίνεται αυτομορφισμός του V με $\theta(e^r) = e^{-r}$ και $\theta(r(i)) = -r(i)$.)

(iv) ορίζουμε στον V τους τελεστές $r(i)$, για $i \in \mathbb{Z}$ ως:

- για $i > 0$, $r(i)(v) = r(i)(v), v \in V$,
- για $i = 0$, $r(i)(e^s) = (r,s)e^s$,
- για $i < 0$, $r(i)(e^s) = 0$,

και

$$[r(i), r(j)] = \begin{cases} j(r,s), & \text{αν } i = -j, \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

όπου $[r(i), r(j)] = r(i)r(j) - r(j)r(i)$

(v) ο V έχει μοναδικό εσωτερικό γινόμενο $(,)$, τέτοιο ώστε ο $r(i)$ να είναι ο συζυγής του $r(-i)$ και

$$(e^r, e^s) = \begin{cases} 1, & \text{αν } r = s \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(vi) η integral form $V_{\mathbb{Z}}$ του V ορίζεται ως ο μικρότερος υποδακτύλιος του V που περιέχει όλα τα e^r και είναι κλειστός υπό την δράση των $\mathcal{D}^{(i)}$ για $i \geq 0$. Αυτή, είναι συμβατή με όλες τις παραπάνω δομές, δηλαδή διατηρείται από την θ και τους τελεστές $r(i)$, και το $(,)$ είναι κλειστό σε αυτήν. Ως υποδακτύλιος, παράγεται από τα στοιχεία $e^r, r(1), 1/2(r(2)+r(1)^2), 1/6(2r(3)+3r(2)r(1)+r(1)^3, \ldots$ (πολυώνυμα Schur).

Ο V γίνεται $\mathbb{Z}$-graded θέτοντας e^r να έχουν βαθμό r και $r(i)$ να έχουν βαθμό 0. Ομοίως με πριν κατασκευάζουμε την vertex άλγεβρα. Η μόνη διαφορά είναι πως εφοδιάσαμε τον χώρο με κάποιες επιπλέον δομές, που θα μας δώσουν την δυνατότητα να δημιουργήσουμε μία vertex άλγεβρα που θα κληρονομεί ιδιότητες και από τις lattice VOA και από τις conformal VOA. Ο $\mathcal{D}$ θα είναι ο L_{-1} και η Cartan involution θ θα είναι ο Cartan αυτομορφισμός w που περιέχεται στην έκφραση

$$(-1)^i \sum_{j \geq 0} L_i^j(w(u))_{2i-j-n-2/j!}$$

που μας δίνει τον συζυγή του u_n.

3.7 Η monster vertex άλγεβρα

Οι Frenkel, Lepowsky και Meurman κατασκεύασαν μια vertex άλγεβρα $V^\natural$ που την ονόμασαν monster vertex άλγεβρα. Η κατασκευή της χρειάζεται ένα ολόκληρο βιβλίο, γι' αυτό εμείς απλώς θα απαριθμήσουμε τις ιδιότητες που χρειαζόμαστε:

(i) Η $V^\natural$ είναι μία vertex άλγεβρα, πάνω από το $\mathbb{R}$ με conformal διάνυσμα ω διάστασης $c = 24$ και μία θετικά ορισμένη διγραμμική μορφή τέτοια ώστε ο συζυγής του u_n να δίνεται από την έκφραση $(-1)^i \sum_{j\geq 0} L_1^j u_{2i-j-n-2}/j!$.

(ii) Ο $V^\natural$ είναι το άθροισμα των ιδιόχωρων $V_i^\natural$ του τελεστή L_0, όπου $V_i^\natural$ είναι ο ιδιόχωρος στον οποίο ο L_0 έχει ιδιοτιμή $i+1$, και η διάσταση του $V_i^\natural$ δίνεται από την $\sum \dim (V_i^\natural) q^i = j(q) - 744 = q^{-1} + 196884q + \ldots$

(iii) Η απλή ομάδα monster $\mathbb{M}$ δρα στον $V^\natural$, διατηρώντας την δομή vertex άλγεβρας, το conformal διάνυσμα ω και την διγραμμική μορφή. Οι πρώτες αναπαραστάσεις $V_i^\natural$ της $\mathbb{M}$ (μετά τις $V_{-1}^\natural = \chi_1$, $V_0^\natural = 0$) αναλύονται ως $V_1^\natural = \chi_1 + \chi_2$, $V_2^\natural = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3$, $V_3^\natural = 2\chi_1 + 2\chi_2 + \chi_3 + \chi_4$, $V_5^\natural = 4\chi_1 + 5\chi_2 + 3\chi_3 + 2\chi_4 + \chi_5 + \chi_6 + \chi_7$ όπου χ_i, $1 \leq i \leq 7$ είναι οι πρώτες επτά ανάγωγες αναπαραστάσεις της monster, καταγεγραμμένες σύμφωνα με την αύξηση της διάστασης.

3.8 Τανυστικό γινόμενο vertex αλγεβρών

Αν U και V είναι vertex άλγεβρες, τότε το τανυστικό τους γινόμενο $U \otimes V$ ως διανυσματικός χώρος είναι και πάλι vertex άλγεβρα αν ορίσουμε για $u \in U$, $v \in V$, το στοιχείο του $\mathrm{End}\,(U \otimes V)$ $(u \otimes v)_n := \sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} u_i \otimes v_{n-1-i}$ και το ταυτοτικό να είναι $1_{U\otimes V} := 1_U \otimes 1_V$. Αν οι U, V έχουν σύμμορφα διανύσματα w_U, w_V διαστάσεων m, n, τότε το διάνυσμα

$$w_{U\otimes V} := w_U \otimes 1_V + 1_U \otimes w_V$$

θα είναι ένα σύμμορφο διάνυσμα του $U \otimes V$ διάστασης $m + n$.

Παράδειγμα 3.8.1.

- $V_{II_{25,1}} = V_{\Lambda_{Leech}} \otimes V_{II_{1,1}}$.
  Η lattice vertex άλγεβρα, συναρτήσει του 26-διάστατου άρτιου unimodular Lorenzian lattice $V_{II_{25,1}}$ δίνεται από το τανυστικό γινόμενο των lattice vertex αλγεβρών που αντιστοιχουν στο Leech lattice Λ_{Leech} και το 2-διάστατο άρτιο unimodular Lorenzian lattice $V_{II1,1}$. $V_{II_{25,1}} = V_{\Lambda_{Leech}} \otimes V_{II_{1,1}}$

- *Θα κατασκευάσουμε την vertex άλγεβρα $V^\natural \otimes V_{II_{1,1}}$, όπου $V^\natural$ η Monster vertex άλγεβρα.*

Συνοψίζοντας:

Η vertex άλγεβρα V που θα χρησιμοποιήσουμε για την απόδειξη του θεωρήματος:

- Εξ' ορισμού, ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$1_n v = \delta_{n,-1} v,$$

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}\binom{m}{i}(u_{l+i}v)_{m+n-i}w=\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\binom{l}{i}(u_{m+l-i}(v_{n+i}w)-(-1)^l v_{n+l-i}(u_{m+i}w)),$$

$\forall u,v,w\in V$ και $\forall l,m,n\in\mathbb{Z}$,

- $$v_n 1=0, n\geq 0,$$
  $$v_{-1}1=v,$$
- έχει τελεστή $\mathcal{D}\equiv L_{-1}$ τέτοιο ώστε $\mathcal{D}(v)=v_{-2}1$,
- ο διανυσματικός χώρος $V/\mathcal{D}V$ είναι μια Lie άλγεβρα με bracket $[u,v]=u_0v$ όπου $\mathcal{D}V$ είναι η εικόνα του V, υπό την δράση του $\mathcal{D}$,
- υπάρχει μια $V_{II_{1,1}}$ συναρτήσει του 2- διάστατου άρτιου unimodular, Lorentzian lattice $II_{1,1}$,
- και η monster vertex άλγεβρα $V^\natural$ που σε αυτήν δρα η ομάδα monster (το monster module των F.L.M.) έχει δομή vertex άλγεβρας,
- ο underlying δ.χ. της $V^\natural$ είναι ένας graded- δ.χ. με ομογενή μέρη, βαθμών $1,0,196884,...$ ίσα με τους συντελεστες της ελλειπτικής modular συνάρτησης $j(q)-744$,
- περιέχει ένα στοιχείο $w\in V$, το σύμμορφο διάνυσμα, με σύμμορφο βάρος $c\in\mathbb{R}$,
- και κάθε στοιχείο του $v\in V$ είναι άθροισμα ιδιοδιανυσμάτων του τελεστή $L_0=w_1$, όπου $L_i=w_{i+1}$,
- αν το $v\in V^\natural$, με σύμμορφο βάρος n, λέμε ότι το v έχει βαθμό $n-1=n-c/24$,
  δηλ. το $V^\natural$ έχει $c=24$,
- οι τελεστές L_i ικανοποιούν τη σχέση $[L_i,L_j]=(i-j)L_{i+j}+\binom{i+1}{3}\frac{c}{2}\delta_{i+j,0}$ και έτσι κανουν τον V ένα $Vir-module$, δηλ. ο V είναι μια αναπαράσταση της Virasoro,
- ορίζοντας τον χώρο $P^i=\{w\in V|L_0(w)=iw, L_i(w)=0 \text{ για } i>0\}$, έχουμε ότι ο χώρος $P^1/(\mathcal{D}V\cap P^1)$ είναι μια υποάλγεβρα της Lie άλγεβρας $V/\mathcal{D}V$, που για εμας θα είναι ίσος με $P^1/\mathcal{D}P^0$,
- η $V^\natural$,όπως και κάθε άλγεβρα συναρτήσει ενός άρτιου lattice, έχει μια $\mathbb{R}$-τιμών συμμετρική διγραμμική μορφή $(,)$, τέτοια ώστε ο συζυγής του u_n να είναι $(-1)^i\sum_{j\geq 0}L_1^j(\omega(u))_{2i-j-n-2}/j!$ αν u έχει βαθμό i ή 1 στην περίπτωση της $V^\natural$,
- επειδή το τανυστικό γινόμενο vertex αλγεβρων είναι και πάλι vertex άλγεβρα, φτιάχνουμε την $V^\natural\otimes V_{II_{1,1}}$,
- στην monster vertex άλγεβρα $V^\natural$ δρα η ομάδα monster $\mathbb{M}$.

Κεφάλαιο 4

Modular Forms

4.1 Επιφάνειες Riemann και Αναλυτικές Απεικονίσεις

4.1α΄ Λίγα για τις Αναλυτικές Συναρτήσεις

Θα δούμε λίγα πράγματα για τις αναλυτικές (ή ολόμορφες, holomorphic[1]) συναρτήσεις.
Μία συνάρτηση f λέγεται αναλυτική σε ένα ανοικτό U, αν υπάρχει η παράγωγος σε κάθε σημείο του U. Θα λέμε ότι είναι αναλυτική σε ένα σημείο z_0, αν είναι αναλυτική σε μία περιοχή του z_0. Πρέπει να παρατηρήσουμε έτσι ότι η αναλυτικότητα στο z_0 είναι μία έννοια διαφορετική της παραγωγισημότητας συναρτήσεων πραγματικών μεταβλητών. Αν f είναι αναλυτική σε μία ανοικτή περιοχή U, τότε είναι μία συνεχής συνάρτηση στο U και ισχύουν οι Cauchy-Riemann συνθήκες: αν $f(z) = u(x, y) + v(x, y)i$, με $z = x + yi$ τότε $u_x = v_y$ και $u_y = -v_x$.
Ένα άλλο βασικό αποτέλεσμα είναι ότι κάθε συγκλίνουσα δυναμοσειρά είναι μία αναλυτική συνάρτηση στο διάστημα σύγκλισης και κάθε αναλυτική συνάρτηση f, σε ένα ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ μπορούμε να την παραστήσουμε με μία δυναμοσειρά, δηλαδή για κάθε z_0 στο ανοικτό σύνολο, υπάρχει μία δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ που συγκλίνει στο $f(z)$, για κάθε z σε μία περιοχή του z_0. Αν $f(z)$ είναι αναλυτική σε δίσκο $D = D(z_0, R)$, με $R > 0$, ισχύει το θεώρημα Taylor, δηλαδή για κάθε $z \in D$ θα έχουμε:

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2\frac{(z - z_0)^2}{2} + \cdots \text{ με } a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\ (n = 0, 1, \ldots).$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- z_0 είναι ρίζα της f,
- $a_0 = 0$,
- η f γράφεται σαν $f(z) = (z - z_0)g(z)$, για κάθε $z \in D$, με $g(z)$ αναλυτική συνάρτηση στο D.

[1] ο όρος ολόμορφη προέρχεται από την σύνθεση τον λέξεων *όλος* και *μορφή* και επιλέχτηκε για να τονιστεί η ομοιότητα ανάμεσα στις ολόμορφες συναρτήσεις και τις ακέραιες (entire) συναρτήσεις (όπως τα πολυώνυμα) που είναι παραγωγίσημα παντού στο πεπερασμένο επίπεδο (μία συνάρτηση παντού αναλυτική στο $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ είναι σταθερή).

Αν η $f(z)$ είναι μία μη σταθερή αναλυτική συνάρτηση (σε κάποιο z_0), τότε στο ανάπτυγμα Taylor της f:

$$f(z) - a_0 = a_1(z - z_0) + a_2\frac{(z - z_0)^2}{2} + \cdots$$

θα πρέπει μία τουλάχιστον από τις παραγώγους $f^{(n)}$ να μην είναι μηδέν, γιατί διαφορετικά θα είχαμε από το ανάπτυγμα Taylor σε μία περιοχή του z_0 ότι η $f(z)$ θα ήταν σταθερή, πράγμα άτοπο από την υπόθεσή μας. Έστω ότι το $(z - z_0)^k$ είναι η μικρότερη δύναμη του $(z-z_0)$, με μη μηδενικό συντελεστή. Προκύπτει ότι:

$$f(z) - a_0 = (z - z_0)^k\Big[\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} + (z - z_0)\frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} + \cdots\Big] \text{ με } f^{(k)} \neq 0$$

Θα λέμε ότι το k είναι η πολλαπλότητα (ή η τάξη του σημείου) με την οποία η f παίρνει την τιμή z_0. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι αν το z_0 είναι ρίζα μίας μη σταθερής $f(z)$, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- Η $f(z)$ έχει ρίζα πολλαπλότητας k στο z_0,
- $f'(z) = f'(z_0) = \cdots = f^{k-1}(z_0) = 0$ και $f^k(z_0) \neq 0$,
- $f(z) = (z - z_0)^k g(z)\,\forall\, z \in D$, με $g(z)$ μία αναλυτική συνάρτηση στον D και $g(z_0) \neq 0$.

Σημείο ανωμαλίας z_0 της f έχουμε όταν η f είναι αναλυτική σε κάθε γειτονιά του z_0, αλλά δεν είναι αναλυτική στο z_0. Μεμονωμένο σημείο ανωμαλίας είναι όταν, επιπλέον υπάρχει κάποια «τρυπημένη» γειτονιά του $z_0 : 0 < |z - z_0| < R$, έτσι ώστε η f να είναι αναλυτική. Για παράδειγμα το $z = 0$ είναι μεμονωμένο σημείο ανωμαλίας για την $1/z$.
Έτσι, όταν η f είναι παραγωγίσημη στον ανοικτό δίσκο $D(z_0, R)\setminus\{z_0\}$, υπάρχουν σταθερές: $a_i, b_i \in \mathbb{C} : i = (0, \ldots, n)$ για κάθε $z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ έτσι ώστε να ισχύει το θεώρημα Laurent, δηλαδή η f να έχει σειρά Laurent με:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n},$$

για κάθε $z \in R_1 < |z - z_0| < R_2$, όπου η f είναι αναλυτική. Τα a_n, b_n προκύπτουν, από τον Γενικευμένο Ολοκληρωτικό Τύπο του Cauchy που ισχύει για μία παραγωγίσημη $f(z)$ στο $I(c) \cup$ {ίχνος της c} με $z_0 \in I(c)$ [2], να είναι:

$$a_n = \int_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz/2\pi i \text{ για } n \geq 0,\; b_n = \int_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}}dz/2\pi i \text{ για } n \geq 1,$$

με c να είναι μία Π.Α.Κ. [3] Το πρώτο άθροισμα ονομάζεται κανονικό μέρος της f και αντιπροσωπεύει μία αναλυτική συνάρτηση, ενώ το δεύτερο κύριο μέρος.

Για $n = 1$ θα έχουμε ότι $b_1 2\pi i = \int_c f(z)dz$ με b_1 να είναι το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $f(z)$ στο z_0 και συμβολίζεται με $Res(f, z_0)$.
Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

[2] με $I(c)$ συμβολίζουμε το εσωτερικό της καμπύλης c.

[3] (Πολύ Απλή Καμπύλη), δηλαδή κλειστή, απλή, θετικά προσανατολισμένη και το $I(c)\cup$ ίχνος της καμπύλης να είναι ένα κυρτό σύνολο (Ο Γενικευμένος Ολοκληρωτικός Τύπος του Cauchy, μας λέει ότι για f, c, όπως παραπάνω, θα έχουμε ότι: $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$.).

- Αν όλα τα b_i είναι μηδέν, τότε η f παρουσιάζει αιρόμενη (ή επουσιώδη) ανωμαλία στο z_0. Ορίζοντας $f(z_0) = a_0$ τότε η ανωμαλία αίρεται,
- Αν άπειρα b_i είναι διάφορα του μηδενός, τότε έχουμε ουσιώδη ανωμαλία στο z_0,
- Αν πεπερασμένα b_i είναι διάφορα του μηδενός, τότε για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ θα έχουμε $b_k \neq 0$ ενώ $b_{k+1} = b_{k+2} = \ldots = 0$. Τότε λέμε ότι η $f(z)$ έχει πόλο με πολλαπλότητα (τάξης) k στο z_0 και $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι οι ρίζες της $f(z)$ είναι οι πόλοι της $f(\zeta)$ και το αντίστροφο εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό $\zeta = 1/z$, ενώ οι τάξεις διατηρούνται. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για μία f αναλυτική στο $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$:

- Η $f(z)$ έχει πόλο με πολλαπλότητα k στο z_0,
- $f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^k}$, για κάποια $h(z)$ αναλυτική στο $D(z_0, R)$ και $h(z) \neq 0$,
- το όριο $\lim_{z\to z_0} f(z)(z - z_0)^k$ υπάρχει και είναι διάφορο του μηδενός.

4.1β′ Επιφάνειες Riemann

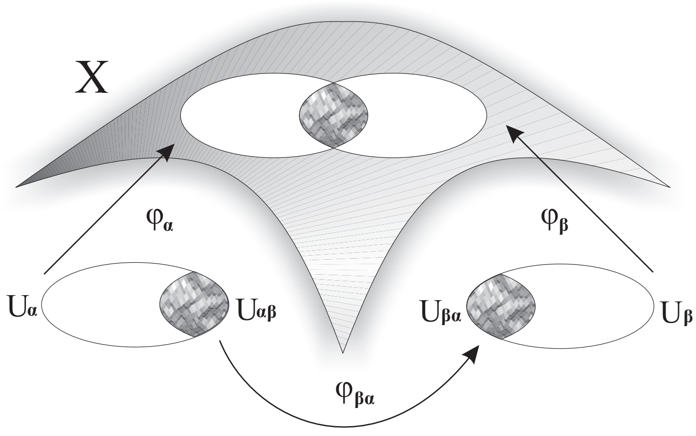
Μία συνεκτική επιφάνεια Riemann X είναι μία λεία 2-πολλαπλότητα, μαζί με μία μιγαδική αναλυτική δομή στον X:

- Είναι μία *επιφάνεια*, δηλαδή ένας Hausdorff τοπολογικός χώρος X με μία αριθμήσιμη βάση έτσι ώστε: για κάθε $x \in X$ να υπάρχει ανοικτή περιοχή του U_x,ομοιομορφική με ένα ανοικτό V του $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$.
- Ο X είναι εφοδιασμένος με μια οικογένεια ζευγών $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in I}$, όπου U_α είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και φ_α μία συλλογή από ομοιομορφισμούς: $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset X$, για κάθε δείκτη $\alpha \in I$ (ο φ_α είναι μία εμφύτευση του U_α στον X). Την συλλογή $\{\varphi_\alpha : \alpha \in I\}$ την ονομάζουμε χάρτη (chart, coordinate chart) και το ζεύγος $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ συντεταγμενική περιοχή (coordinate γειτονιά). Επίσης:
- Ο τοπολογικός χώρος X καλύπτεται από αυτές τις περιοχές, δηλαδή ισχύει $X = \cup\varphi_\alpha(U_\alpha)$, με $\alpha \in \mathbb{N}$. Τέλος:
- Αν $U_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta))$, ορίζουμε τις απεικονίσεις αλλαγής συντεταγμένων να είναι, $\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha : U_{\alpha\beta} \to U_{\beta\alpha}$ ή

  $$\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha : \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$$

  με $U_{\alpha\beta} \cong U_{\beta\alpha}$ και απαιτούμε να είναι C^∞ και αναλυτικές *για κάθε* δείκτες α, β (αν ήταν μόνο C^∞ θα είχαμε μία λεία (ή διαφορίσιμη) μιγαδική επιφάνεια). Οι $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$, ονομάζονται αναλυτικά ισοδύναμες συντεταγμενικές περιοχές.

Μία άλλη οικογένεια συντεταγμενικών περιοχών: $\{\psi_{\alpha'} : U_{\alpha'} \to X\}$ είναι αναλυτικά ισοδύναμη με την $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \to X\}$ αν *όλες* οι απεικονίσεις αλλαγής συντεταγμένων από την μία συντεταγμενική περιοχή στην άλλη είναι C^∞ και αναλυτικές. Τότε λέμε ότι οι δύο οικογένειες συντεταγμενικών περιοχών ορίζουν την ίδια επιφάνεια Riemann.



Σχήμα 4.1: Μία επιφάνεια Riemann.

Παρατήρηση 4.1.1. *Ισοδύναμα κάποιοι συγγραφείς ορίζουν μία συντεταγμενική περιοχή στον X να είναι ομοιομορφισμός $\varphi : U \to V$ με U ανοικτό του X και V ανοικτό του $\mathbb{C}$. Τότε δύο συντεταγμενικές περιοχές $\varphi_i : U_i \to V_i$ $i = 1, 2$ θα είναι αναλυτικά ισοδύναμες αν η:*

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

είναι μία αμφιολόμορφη συνάρτηση (ονομάζεται και αναλυτικός ισομορφισμός), δηλαδή αν οι συναρτήσεις $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}, \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ είναι αναλυτικές, πράγμα που ισχύει και με τον παραπάνω ορισμό, καθώς εκεί απαιτήσαμε η $\varphi_{\beta\alpha}$, να είναι αναλυτική για κάθε α, β και συνεπώς και η $\varphi_{\alpha\beta}$ να είναι μία αναλυτική συνάρτηση.

Ορισμός 4.1.2. *Μία επιφάνεια Riemann είναι ένα ζεύγος (X, Σ), με X να είναι μία συνεκτική 2-πολλαπλότητα και Σ μία μιγαδική δομή στον X, όπως αυτή ορίστηκε παραπάνω.*

Θα γράφουμε X αντί για (X, Σ) και θα αναφερόμαστε σε έναν αντιπρόσωπο της οικογένειας των συντεταγμενικών περιοχών.
Παραδείγματα επιφανειών Riemann:

(i) Το μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$, παίρνοντας την ταυτοτική απεικόνιση: $id_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

(ii) Αν X είναι μία επιφάνεια Riemann, παίρνουμε $Y \subset X$, όπου Y, μια περιοχή (τόπος) (domain), δηλαδή ένα ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του X. Ο Y έχει μία φυσική δομή που το κάνει επιφάνεια Riemann. Μπορούμε να πάρουμε σαν συντεταγμενικές περιοχές όλες εκείνες τις συντεταγμενικές περιοχές του X: (U, φ) με $\varphi : U \to \varphi(U) \subset X$, με $U \subset Y$. Μάλιστα κάθε τόπος $Y \subset \mathbb{C}$ είναι μία επιφάνεια Riemann.

(iii) Η σφαίρα S^2, που την ταυτίζουμε με την προβολική ευθεία πάνω από το $\mathbb{C}$, δηλαδή το $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, όπου $\infty \notin \mathbb{C}$. Εφοδιάζουμε τον $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ με την ακόλουθη τοπολογία: τα ανοικτά του $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ είναι τα συνήθη ανοικτά $U \subset \mathbb{C}$, μαζί με τα σύνολα της μορφής $V \cup \{\infty\}$, όπου $V \subset \mathbb{C}$, να είναι το συμπλήρωμα ενός συμπαγούς $K \subset \mathbb{C}$. Ο $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ αποτελεί την συμπαγοποίηση[4] ενός σημείου (one point compactification) του $\mathbb{C}$. Ο $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ είναι έτσι ένας συμπαγής Hausdorff τοπολογικός χώρος. Θέτουμε:

$$U_1 := \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{\infty\} = \mathbb{C} \text{ και } U_2 := \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0\} = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}.$$

Ορίζουμε $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}$, με $i = 1, 2$. έτσι ώστε $\varphi_1 = id$ και

$$\varphi_2(z) = \begin{cases} 1/z, & \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}^* \\ 0, & \text{για } z = \infty. \end{cases}$$

Οι απεικονίσεις είναι ομοιομορφισμοί και το $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ είναι μία 2-πολλαπλότητα. Επειδή τα U_i είναι συνεκτικά με $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, ο $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ είναι συνεκτικός (η ένωση συνεκτικών συνόλων με μη κενή τομή είναι ένα συνεκτικό σύνολο (βλέπε [38], θεώρημα 1.3 σελίδα 149). Η μιγαδική δομή στον $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ορίζεται από τις συντεταγμενικές περιοχές (φ_i, U_i) έτσι ώστε $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}$, με $i = 1, 2$. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι αναλυτικά ισοδύναμες. Πράγματι $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^* = \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ και η

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$$

με τύπο $\varphi(z) = 1/z$ είναι αμφιολόμορφη.

Παρατήρηση 4.1.3. *Τοπικά μία επιφάνεια Riemann X είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του μιγαδικού επίπεδου. Αν $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ είναι μία συντεταγμενική περιοχή στον X κάθε σημείο του, περιέχεται σε πολλούς διαφορετικούς χάρτες που κανένας από αυτούς δεν μπορεί να διαχωριστεί από τους άλλους. Αυτός είναι ο λόγος που στις επιφάνειες Riemann κρατάμε τις ιδέες από την μιγαδική ανάλυση που δεν εξαρτώνται από την επιλογή των συντεταγμενικών περιοχών. Επίσης δεν είναι πάντα δυνατή η ύπαρξη μίας τέτοιας μιγαδικής δομής σε μία τυχαία επιφάνεια. Θα πρέπει η επιφάνεια να είναι προσανατολισμένη. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να απαιτήσουμε οι ορίζουσες του Ιακωβιανού πίνακα των απεικονίσεων αλλαγής συντεταγμένων να είναι όλες θετικές, κάτι που ισχύει από τις Cauchy-Riemann συνθήκες. Αν πάλι η επιφάνεια είναι συμπαγής, εξασφαλίζεται η ύπαρξη της αναλυτικής μιγαδικής δομής. Έτσι για κάθε «λογική» επιφάνεια που μπορούμε να σκεφτούμε εκτός από το μπουκάλι του Klein και το $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, μπορούμε να την εφοδιάσουμε με την εν λόγω μιγαδική δομή.*

4.1γ΄ Απεικονίσεις μεταξύ Riemann επιφανειών

Αν X είναι μία επιφάνεια Riemann, ορίζουμε μία $f : X \to \mathbb{C}$ να είναι αναλυτική αν: για κάθε συντεταγμενική περιοχή $\varphi_\alpha : U_\alpha \to X$, η σύνθεση $f \circ \varphi_\alpha$ είναι μία αναλυτική συνάρτηση στο ανοικτό $U_\alpha \subset \mathbb{C}$. Το σύνολο όλων των αναλυτικών συναρτήσεων στον X το συμβολίζουμε με $\mathcal{O}(X)$. Γενικότερα αν X, Y είναι επιφάνειες Riemann, μία απεικόνιση $f : X \to Y$ είναι αναλυτική σε ένα $P \in X$, αν υπάρχουν συντεταγμενικές περιοχές: $\varphi : U \to X$ και $\psi : V \to Y$ που απεικονίζονται σε γειτονιές του P και του $f(P)$ αντίστοιχα, έτσι ώστε $f(\varphi(U)) \subset \psi(V)$, και η σύνθεση $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ να είναι μία αναλυτική απεικόνιση από το U στο V.

[4] βλέπε [38] σελίδα 183.

Μία πιο γενικευμένη κλάση συναρτήσεων είναι αυτή των μερόμορφων (meromorphic)[5] συναρτήσεων. Με αυτόν τον όρο εννοούμε συναρτήσεις που μπορούν να αναπαρασταθούν σαν το κλάσμα δύο ακέραιων συναρτήσεων. Προφανώς κάθε ακέραια συνάρτηση $f(z)$ είναι μερόμορφη $\frac{f(z)}{1}$, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει. Για παράδειγμα έχουμε την $\frac{1}{z}$ που είναι μερόμορφη αλλά όχι ακέραια (δεν έχει παράγωγο στο $z = 0$.). Τα απλούστερα μέλη των μερόμορφων συναρτήσεων που δεν είναι ακέραιες συναρτήσεις, είναι οι ρητές συναρτήσεις, δηλαδή μία συνάρτηση που είναι το κλάσμα:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n} \; (a_m \neq 0, b_n \neq 0),$$

δύο πολυωνύμων που δεν έχουν κοινές ρίζες. Η $f(z)$ θα παίρνει την τιμή ∞ στις ρίζες του $Q(z)$. Για τον λόγο αυτό θα πρέπει να θεωρηθεί σαν συνάρτηση με τιμές στο εκτεταμένο επίπεδο $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Τέλος αν οι βαθμοί των πολυωνύμων είναι ίσοι με την μονάδα, η ρητή συνάρτηση είναι γραμμική και παίρνει την μορφή:

$$f(z) = \frac{a_1 z + a_0}{b_1 z + b_0}, \text{ με } a_1 b_0 - a_0 b_1 \neq 0.$$

Ονομάζεται κλασματικός γραμμικός μετασχηματισμός ή μετασχηματισμός του Möbius

4.1δ′ Επιφάνειες Riemann και Αλγεβρικές Καμπύλες

Έστω $F(z, w)$ ένα μη σταθερό πολυώνυμο δύο μεταβλητών με μιγαδικούς συντελεστές. Το σύνολο των ριζών του:

$$C = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : \; F(z, w) = 0\}$$

ονομάζεται «μιγαδική αφινική καμπύλη στο επίπεδο». Ταυτίζοντας το $\mathbb{C}^2$ με το $\mathbb{R}^4$, το C θα ορίζεται από δύο πραγματικές εξισώσεις: αυτές που μηδενίζουν το πραγματικό και αυτές που μηδενίζουν το φανταστικό μέρος του $F(z, w)$. Έτσι περιμένουμε το C να είναι μία επιφάνεια και θα έχουμε δίκιο, εκτός του ότι όπως και στις καμπύλες έτσι και στο C μπορεί να υπάρχουν κάποιες ανωμαλίες. Χρησιμοποιώντας κάποια εργαλεία για να αφαιρέσουμε τις ανωμαλίες και να προσθέσουμε κάποια σημεία σε αυτά και στο άπειρο, παίρνουμε μία συμπαγή επιφάνεια Riemann. Μάλιστα αν το F δεν είναι ανάγωγο τότε η επιφάνεια που θα πάρουμε θα είναι η ξένη ένωση επιφανειών που θα προέρχονται από τους ανάγωγους παράγοντες του F.

Ένα πολύ χρήσιμο αποτέλεσμα:

Πόρισμα 4.1.4. *Κάθε συμπαγής και συνεκτική επιφάνεια Riemann είναι η επιφάνεια Riemann μιας αλγεβρικής καμπύλης.*

Γνωρίζουμε, από Θεώρημα[6], πως ο καθολικός καλυπτικός χώρος $\tilde{X}$, μιας επιφάνειας Riemann X, είναι (σύμμορφος) είτε ο $\mathbb{C}$, είτε η σφαίρα του Riemann, είτε ο μοναδιαίος ανοικτός μιγαδικός δίσκος D.

[5] η λέξη μερόμορφη, προέρχεται από την σύνθεση των λέξεων *μέρος = κλάσμα* και *μορφή*, η οποία σημαίνει μία συνάρτηση «σαν κλάσμα».

[6] Uniformization θεώρημα για επιφάνειες Riemann

Γνωρίζουμε όμως[7] ότι η απεικόνιση

$$\lambda : \mathbb{H} \to D \ \text{ με τύπο } z \mapsto \frac{z-i}{z+i},$$

είναι ένας ομοιομορφισμός του μιγαδικού δίσκου με το μιγαδικό άνω ημιεπίπεδο $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \ Im(z) > 0\}$, με αποτέλεσμα η τρίτη περίπτωση να ταυτίζεται με το $\mathbb{H}$.

Οι αυτομορφισμοί των παραπάνω τριών επιφανειών είναι:

- $Aut(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b : \ a, b \in \mathbb{C}\}$,
- $Aut(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) = PSL_2(\mathbb{C}) = \{$ μετασχηματισμοί του Möbius$\}$,
- $Aut(\mathbb{H}) = PSL_2(\mathbb{R})$.

Αν $\tilde{X} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, τότε $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.
Αν $\tilde{X} = \mathbb{C}$, τότε η G θα πρέπει να είναι μία διακριτή ομάδα από μεταφορές, ισόμορφη με το 0 ή την $SL_2(\mathbb{Z})$ ή ένα lattice Λ με συνέπεια ο X να είναι ο $\mathbb{C}$ ή ο $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ ή κάποιος τόρος $\mathbb{C}/\Lambda$.
Στην περίπτωση που $\tilde{X} = D$, θα έχουμε ότι κάθε επιφάνεια Riemann αντιστοιχεί σε μία υποομάδα του $PSL_2(\mathbb{R})$, που δρα evenly στον D. Αυτές ονομάζονται Fuchsian Ομάδες.

Ένας γραμμικός κλασματικός μετασχηματισμός ή διαφορετικά μετασχηματισμός του Möbius είναι μία 1-1 και επί απεικόνιση της σφαίρας του Riemann που δίνεται από τον τύπο:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & \text{για κάθε } z \neq -d/c, \infty, \\ \frac{a}{c}, & \text{για } z = \infty, \\ \infty, & \text{για } z = -d/c. \end{cases}$$

Όπου $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ και $ad - bc \neq 0$. Μπορεί να δειχθεί ότι οι γραμμικοί κλασματικοί μετασχηματισμοί σχηματίζουν ομάδα με πράξη την σύνθεση συναρτήσεων[8]. Από γεωμετρική σκοπιά, η ομάδα των κλασματικών μετασχηματισμών είναι η ομάδα των (αναλυτικών)[9] αυτομορφισμών της σφαίρας του Riemann.

4.2 Η modular ομάδα

Έστω $\mathbb{H}$ να είναι το πάνω ημιεπίπεδο του $\mathbb{C}$, δηλαδή το σύνολο των μιγαδικών αριθμών τ με θετικό φανταστικό μέρος.

$$\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$$

Έστω $SL_2(\mathbb{R})$ να είναι η ομάδα των 2×2 πινάκων $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, με πραγματικούς συντελεστες και ορίζουσα $det = 1$.

$$SL_2(\mathbb{R}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1\}$$

[7] στην βιβλιογραφία αναφέρεται σαν unit disk upper half plane equivalence theorem.
[8] βλέπε [36], σελίδα 168.
[9] στην γλώσσα της μιγαδικής ανάλυσης, οι ομοιομορφισμοί είναι οι σύμμορφες (conformal) απεικονίσεις, βλέπε [51] σελίδα 285.

Η ομάδα $SL_2(\mathbb{R})$ δρα στο μιγαδικό επίπεδο, μέσω Möbius μετασχηματισμών, δηλαδή για $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{R})$ και $\tau \in \mathbb{H}$

$$g\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

Το στοιχείο $-1 = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{R})$ δρα τετριμμένα στο $\mathbb{H}$. Τότε, μπορούμε να θεωρήσουμε πως είναι μια δράση της ομάδας $PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}$.

Έστω η ομάδα $SL_2(\mathbb{Z})$ να είναι η υποομάδα της $SL_2(\mathbb{R})$, που αποτελείται από τους πίνακες με συντελεστές στο $\mathbb{Z}$ και είναι μια διακεκριμένη υποομάδα της $SL_2(\mathbb{R})$.

Ορισμός 4.2.1. *Η ομάδα $G = PSL_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ λέγεται η modular ομάδα. Είναι η εικόνα της $SL_2(\mathbb{Z})$ στην $PSL_2(\mathbb{R})$.*

Κάποιοι συγγραφείς ορίζουν την modular ομάδα να είναι η $PSL_2(\mathbb{Z})$ και άλλοι την μεγαλύτερη $SL_2(\mathbb{Z})$. Επικρατεί ο συμβολισμός $SL_2(\mathbb{Z})$, μιας και είναι ίδιες *modulo* ± 1.

Τα cusps[10] της $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ είναι ακριβώς τα σημεία του $\mathbb{Q} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$.

Επίσης, κάθε cusp είναι ισοδύναμο με ένα cusp στο ∞. Έτσι:

$$\mathbb{H}^*/\Gamma = \mathbb{H}/\Gamma \cup \{\infty\}, \text{ με } \mathbb{H}^* = \mathbb{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}),$$

ή ισοδύναμα ο $\mathbb{H}^*/\Gamma$[11] αποτελεί *την συμπαγοποίηση του ενός σημείου του* $\mathbb{H}/\Gamma$, καθώς ο $\mathbb{H}^*/\Gamma$ είναι ένας Hausdorff και τοπικά συμπαγής χώρος.

Ορισμός 4.2.2. *Για κάθε διακριτή υπομάδα Γ της $SL_2(\mathbb{R})$, ονομάζουμε θεμελιώδης περιοχή (fundamental domain) του $\mathbb{H}/\Gamma$ (ή πιο απλά του Γ) αν:*

(i) *ο F είναι ένα συνεκτικό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{H}$,*

(ii) *οποιαδήποτε δύο σημεία του F δεν είναι Γ-ισοδύναμα,*

(iii) *κάθε σημείο του $\mathbb{H}$ είναι Γ-ισοδύναμο με ένα σημείο που ανήκει στην κλειστότητα του F.*

Κάθε θεμελίωδης περιοχή περιέχει ακριβώς έναν αντιπρόσωπο από την τροχιά για κάθε $z \in \mathbb{H}$. Μπορεί να δειχτεί ότι υπαρχει μία θεμελιώδης περιοχή για κάθε Γ και ότι (μία) θεμελιώδης περιοχή του $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$[12] είναι η

$$F = \{z \in \mathbb{H} : \ |z| > 1, \ |Re(z)| < 1/2\}.$$

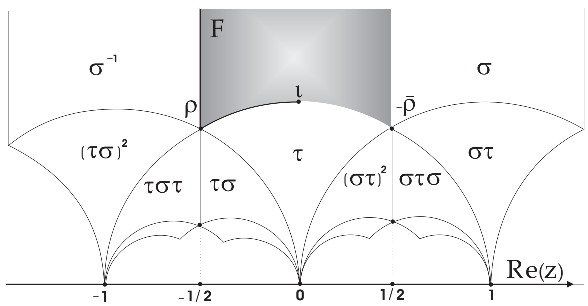
Το F είνα φραγμένο από τις οριζόντιες γραμμές $Re(z) = 1/2, \ Re(z) = -1/2$ και από τον κύκλο $|z| = 1$. Αυτή η περιοχή είναι ένα υπερβολικό τρίγωνο (το άθροισμα των γωνιών είναι μικρότερο του π) με κορυφές τις $(-1+i\sqrt{3})/2 = \exp(2\pi i/3) = \rho$ και $(1+i\sqrt{3})/2 = \exp(2\pi i/6) = -\bar{\rho}$ με τις γωνίες που σχηματίζουν με τις πλευρές να είναι ίσες με $\pi/3$. Τέλος έχει μία τρίτη κορυφή, στο ∞ με την γωνία που σχηματίζει με τις αντίστοιχες πλευρές να είναι μηδέν. Μάλιστα αν αφήσουμε κάθε στοιχείο της *modular* ομάδας να δράσει πάνω στο F τότε θα καταφέρουμε να

[10] Δες Παράρτημα

[11] Δες Παράρτημα

[12] η αποδειξη είναι τεχνική και βασίζεται στις δίαφορες περιπτώσεις του c_σ για ένα $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$, βλέπε [37], θεώρημα 2.12, σελίδα 26, ή στον [44] σελίδα 16.

επικαλύψουμε τον $\mathbb{H}$ με έναν ειδικό τρόπο, που ονομάζεται tessellation[13]του $\mathbb{H}$, με τέτοια υπερβολικά τρίγωνα. Αυτός είναι ο λόγος που κάποιοι συγγραφείς[14] διαφοροποιούν την τρίτη ιδιότητα στον ορισμό που δώσαμε γαι την θεμελιώδη περιοχή, ότι θα πρέπει δηλαδή να ισχύουν τα (i), (ii) και $\mathbb{H} = \cup\gamma\bar{F}$. Τέλος σε κάθε ένα από αυτά τα τρίγωνα θα πρέπει η μία του κορυφή είτε να είναι το ∞ είτε να ανήκει στον πραγματικό άξονα $Im(z) = 0$. Ο λόγος είναι φανερός, όταν κάθε μετασχηματισμός που αντιστοιχεί σε έναν από τους γεννήτορες της $SL_2(\mathbb{Z})$, θα πρέπει είτε να σταθεροποιεί το ∞ (T) είτε να το απεικονίζει στο μηδέν (S, βλέπε το ακόλουθο θεώρημα).



Σχήμα 4.2: Μία θεμελιώδη περιοχή για την modular ομάδα και κάποιες δράσεις των στοιχείων της $SL_2(\mathbb{Z})$ στην F.

Θεώρημα 4.2.3. *Η ομάδα G παράγεται από τα στοιχεία $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ και $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, με $S^2 = 1 = (ST)^3$.*

Η δράση των γεννητόρων στον $\mathbb{H}$ δίνεται από τους μετασχηματισμούς

$$S(\tau) = -1/\tau \text{ και } T(\tau) = \tau + 1, \text{ με } \tau \in \mathbb{H}$$

όπου ο μετασχηματισμός T είναι μία ανάκλαση κατά μήκος του τόξου του κύκλου $|\tau| = 1$ και ο S είναι μια μεταφορά προς τα δεξιά κατά μία μονάδα. Τα στοιχεία S και $ST = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ έχουν πεπερασμένη τάξη με συνέπεια η modular ομάδα να περιέχει πεπερασμένες υποομάδες, τάξης 2 και 3 αντίστοιχα.

Παρατήρηση 4.2.4. *Τα cusps, όπως και τα σταθερά ελλειπτικά σημεία της modular ομάδας ανήκουν στο σύνορο της θεμελιώδης της περιοχής F.*

4.3 Το Πηλίκο $\mathbb{H}^*/\Gamma$ σαν μία Επιφάνεια Riemann

Αν η Γ συμβολίζει μία διακριτή υποομάδα της $SL_2(\mathbb{R})$, μπορούμε να δώσουμε μία μιγαδική δομή στον $\mathbb{H}^*/\Gamma$, έτσι ώστε να γίνει μία επιφάνεια Riemann.

Αποδεικνύεται ότι ο $\mathbb{H}^*/SL_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{H}/SL_2(\mathbb{Z}) \cup \{\infty\}$ είναι συμπαγής. Από την αντίστοιχη πρόταση (δες Παράρτημα), θα έχουμε ότι ο $\mathbb{H}^*/\Gamma'$ είναι συμπαγής ανν η Γ' είναι μία διακριτή υποομάδα του $SL_2(\mathbb{R})$, η οποία είναι commensurable με την $SL_2(\mathbb{Z})$.

[13]προέρχεται από τον λατινικό όρο tessella που έχει τις ρίζες του στο ελληνικό τέσσερα, «τετράγωνο». Ένα tiling ενός τοπολογικού χώρου S είναι μία συλλογή $\mathcal{B}$ από ανοικτά του S τέτοια ώστε να είναι ξένα μεταξύ τους και η κλειστότητα της ένωσης τους να ισούται με τον S.

[14]βλέπε [37].

Ορισμός 4.3.1. *Μία Fuschian ομάδα πρώτου είδους καλείται μία διακριτή υποομάδα Γ του $SL_2(\mathbb{R})$ (ή του $PSL_2(\mathbb{R})$), τέτοια ώστε ο $\mathbb{H}^*/\Gamma$ να είναι συμπαγής.*

Αν αυτήν την ομάδα την εφοδιάσουμε με την μιγαδική δομή που αναφέρθηκε στην αρχή της παραγράφου, τότε ο $\mathbb{H}^*/\Gamma$ γίνεται μία συμπαγής επιφάνεια Riemann. Όμως είδαμε ότι αυτή η επιφάνεια Riemann θα αντιπροσωπεύει και μία αλγεβρική καμπύλη.

Ορισμός 4.3.2. *Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ θέτουμε:*

$$\begin{aligned} \Gamma(N) &= \{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) | \gamma \equiv 1 mod(N)\} \\ &= \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) | a \equiv b \equiv 1 mod(N), b \equiv c \equiv 0 mod(N)\} \end{aligned}$$

Τότε η $\Gamma(N)$ είναι μία κανονική υποομάδα της $SL_2(\mathbb{Z})$ και λέγεται principal congruence υποομάδα της, με τάξη (level) N.

Και βάση αυτού του ορισμού, θα λέμε την $SL_2(\mathbb{Z}) = \Gamma(1)$.
Επίσης θέτουμε:

$$Y(1) = \mathbb{H}/\Gamma(1), \text{ και } X(1) = \mathbb{H}^*/\Gamma(1).$$

Η $X(1)$ είναι η αλγεβρική καμπύλη που αντιστοιχεί στην συμπαγή επίφάνεια Riemann $\mathbb{H}^*/\Gamma(1)$. Αυτή ονομάζεται modular καμπύλη. Παρατηρούμε ότι $X(1) \setminus Y(1) = \{\infty\}$ καθώς όλα τα cusps στην $\Gamma(1)$ είναι ισοδύναμα με το άπειρο. Είδαμε επίσης ότι όλα τα cusps και τα ελλειπτικά σταθερά σημεία της $\Gamma(1)$ ανήκουν στο σύνορο και συνεπώς στην κλειστότητα της θεμελιώδους περιοχής F. Από τον ορισμό της τελευταίας καθένα από αυτά είναι $\Gamma(1)$-ισοδύναμο με κάποιο $z \in \mathbb{H}$ ενώ στο F δεν υπάρχουν $\Gamma(1)$-ισοδύναμα στοιχεία. Έτσι τα cusps και τα ελλειπτικά σταθερά σημεία της $\Gamma(1)$ που ανήκουν στο σύνορο θα πρέπει να είναι ισοδύναμα με κάποια cusps και ελλειπτικά σταθερά σημεία αντίστοιχα (η εικόνα τους, μέσω κάποιου $\gamma \in \Gamma$ θα πρέπει να είναι σταθερό σημείο) που και αυτά θα πρέπει να ανήκουν στο ∂F. Στον τοπολογικό χώρο $Y(1)$ όμως, πρέπει να ταυτίσουμε αυτές τις κλάσεις ισοδυναμίας. Θα πρέπει δηλαδή να ταυτίσουμε τα δύο τόξα του κύκλου ακτίνας $|z| = 1$ όπως και τις δύο οριζόντιες ακμές του υπερβολικού τριγώνου μας. Αυτό που θα προκύψει θα είναι ο $Y(1)$ και προσθέτοντας ένα σημείο (ένα cusp για την ακρίβεια), το $\{\infty\}$ παίρνουμε τον συμπαγή $X(1)$, που όπως φαίνεται από το σχήμα 3.3, θα είναι ομοιομορφικός με την σφαίρα του Riemann. Με αυτόν τον τρόπο πετύχαμε μία όμορφη γεωμετρική κατασκευή του $X(1)$.

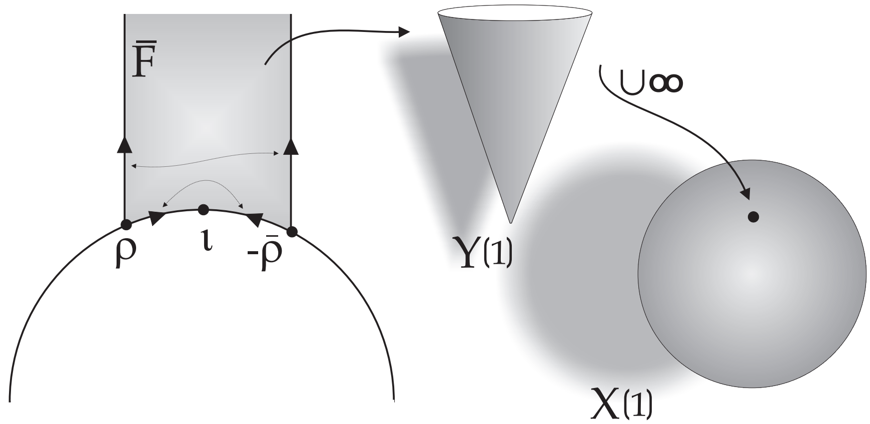
Είδαμε πώς ο χώρος πηλίκο $X(1)$ μπορεί να αποκτήσει δομή επιφάνειας Riemann. Γνωρίζουμε, πως οι μερόμορφες συναρτήσεις πάνω σε αυτήν την επιφάνεια, που είναι οι μερόμορφες πάνω από την σφαίρα του Riemann είναι το σώμα ρητών συναρτήσεων του $\mathbb{C}$.

Για αποδείξεις και περισσότερα, δες [50].

4.4 Οι Modular συναρτήσεις

Ορισμός 4.4.1. *Έστω k ακέραιος. Λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι weakly modular, βάρους $2k$ (στην $\Gamma(1)$) αν η f είναι μερόμορφη στο πάνω ημιεπίπεδο $\mathbb{H}$ και επαληθεύει την σχέση*

$$f(\tau) = (c\tau + d)^{-2k} f(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}) \text{ για όλα τα } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$



Σχήμα 4.3: Η γεωμετρία του $Y(1)$ και του $X(1)$.

Πρόταση 4.4.2. *Έστω f μερόμορφη στο $\mathbb{H}$. Η συνάρτηση f είναι weakly modular συνάρτηση, βάρους $2k$ αν και μόνο αν ικανοποιεί τις σχέσεις:*

(i) $f(\tau+1) = f(\tau)$

(ii) $f(\frac{-1}{\tau}) = \tau^{2k} f(\tau)$

Αν θεωρήσουμε πως η πρώτη σχέση ικανοποιείται, τότε μπορούμε να εκφράσουμε την f ως συνάρτηση των $q = e^{2\pi i\tau}$, γιατί η σχέση μας λέει πως η f είναι περιοδική με περίοδο ίση με την μονάδα, συνεπώς μπορούμε να την εκφράσουμε συναρτήσει των sin και cos, με το τ να τρέχει στο $\mathbb{H}$ και το q στον δίσκο με ¨τρύπα ' (έξω την αρχή) $\{q \in \mathbb{C} \,|\, |q| < 1\}$. Συνεπώς μπορούμε να την εκφράσουμε, συναρτήσει των q ως μια σειρά Fourier:

$$\tilde{f}(\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n q^n$$

Η f θα λέγεται:

- μερόμορφη στο ∞ αν $\tilde{f} = \sum_{n=-n_0}^{\infty} \alpha_n q^n$ για κάποιο $n_0 \in \mathbb{Z}$
- αναλυτική (ολόμορφη) στο ∞ αν $\tilde{f} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n q^n$

Αν η f είναι μερόμορφη στο ∞, με $\tilde{f} = a_{-n_0} q^{-n_0} + \cdots$, με $a_{-n_0} \neq 0$ τότε η τάξη της f στο ∞, θα είναι η τάξη του $\tilde{f}$ στο $q = 0$, που είναι ίση με $-n_0$ (όταν το $\tau \to i\infty$[15], τότε το $q \to 0$). Επίσης αν η f είναι αναλυτική στο ∞, τότε ορίζουμε να είναι $f(\infty) = \tilde{f}(0) = a_0$.

Ορισμός 4.4.3. *Μία συνάρτηση f ονομάζεται modular συνάρτηση, αν και μόνο αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) *η f είναι μερόμορφη στο $\mathbb{H}$*

[15]μέχρι το τέλος και ακολουθώντας τον συμβολισμό στην βιβλιογραφία, θα συμβολίζουμε το ∞ με $i\infty$. Ο λόγος είναι ότι «προσεγγίζουμε» το ∞ από τον άξονα $Im(z)$.

(ii) *για κάθε πίνακα* $\gamma \in \Gamma(1)$ *και* $\tau \in \mathbb{H}$, *ισχύει* $f(\gamma\tau) = f(\tau)$, *δηλαδή η* f *είναι* $\Gamma(1)$- *αναλλοίωτη*

(iii) *η σειρά Laurent είναι της μορφής* $\tilde{f}(\tau) = \sum_{n=-m}^{\infty} \alpha_n q^n$

ή ισοδύναμα, αν η f *είναι μία weakly modular συνάρτηση, μηδενικού βάρους, μερόμορφη στο* ∞.

Παρατήρηση 4.4.4. *Το πηλίκο δύο weakly modular συναρτήσεων, ίδιου βάρους και μερόμορφων στο άπειρο, δίνουν μία modular συνάρτηση.*

Καθώς η f είναι $\Gamma(1)$-αναλλοίωτη μπορούμε να την θεωρήσουμε σαν συνάρτηση στον $Y(1)$. Το ότι είναι μερόμορφη στο ∞, δηλαδή στο cusp της $\Gamma(1)$, σημαίνει ότι εξακολουθεί να είναι μερόμορφη ακόμα και αν την θεωρήσουμε σαν μία συνάρτηση του $X(1)$. Δηλαδή η f είναι μερόμορφη σε όλο τον ανοικτό μιγαδικό δίσκο.

Ορισμός 4.4.5. *Μία weakly modular συνάρτηση που είναι παντού αναλυτική (δηλαδή στον* $\mathbb{H}$ *και αναλυτική στο* ∞*), ονομάζεται modular form. Αν ισχύει επίσης ότι* $f(\infty) = 0$, *τότε η* f *ονομάζεται cusp form.*

Μια modular form, βάρους $2k$ δίνεται από την σειρά:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$$

η οποία συγκλίνει για $|q| < 0$ και ικανοποιεί την:

$$f(-\frac{1}{z}) = z^{2k} f(z)$$

Είναι cusp form αν $a_0 = 0$.

Παράδειγμα 4.4.6. *1 Αν* f *και* f' *είναι modular forms βάρους* $2k$ *και* $2k'$, *τότε το γινόμενό τους* ff' *θα είναι modular form βάρους* $2k + 2k'$.

2 Η συνάρτηση

$$q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24} = q - 24q^2 + 252q^3 - 1472^4 + \cdots$$

είναι cusp form βάρους 12.

3 Οι σειρές του Eisenstein:

Αν Λ *είναι ένα latttice, τότε οι σειρές του Eisenstein έχουν την μορφή:*

$$G_{2k}(\Lambda) = \sum_{\substack{\omega \in \Lambda \\ \omega \neq 0}} \frac{1}{\omega^{2k}},$$

που συγκλείνουν απόλυτα για κάθε $k \geq 2$[16]. *Για* $\tau \in \mathbb{H}$, *θα έχουμε:*

$$G_{2k}(\tau) = G_{2k}(\Lambda_\tau) = \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{Z} \\ (m,n) \neq 0}} \frac{1}{(m\tau + n)^{2k}}.$$

[16] βλέπε [45], θεώρημα 3.1, σελίδα 153.

Παρατηρούμε ότι $G_{2k}(c\Lambda) = c^{-2k}G_{2k}(\Lambda)$ *για κάθε* $c \in \mathbb{C}^*$. *Επίσης*

$$\Lambda\gamma\tau = \mathbb{Z}\frac{a\tau+b}{c\tau+d} + \mathbb{Z} = \frac{1}{c\tau+d}(\mathbb{Z}(a\tau+b)+\mathbb{Z}(c\tau+d)) = \frac{1}{c\tau+d}\Lambda_\tau.$$

Έτσι

$$\begin{aligned} G_{2k}(\gamma\tau) &= G_{2k}(\Lambda_{\gamma\tau}) \\ &= G_{2k}((c\tau+d)^{-1}\Lambda_\tau) \\ &= (c\tau+d)^{2k}G_{2k}(\Lambda_\tau) = (c\tau+d)^{2k}G_{2k}(\tau). \end{aligned}$$

Συμπερασματικά οι σειρές του Eisenstein είναι ένα παράδειγμα weakly modular συναρτήσεων βάρους $2k$. *Μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι αναλυτικές στο* ∞ *με* $G_{2k}(\infty) = 2\zeta(s)$[17], *όπου* ζ *να είναι η ζήτα Riemann συνάρτηση και άρα είναι μία modular form.*

4.5 Η modular αναλλοίωτη $j(\tau)$

Ορισμός 4.5.1. *Ορίζουμε την modular αναλλοίωτο* $j(\tau)$, $\tau \in \mathbb{H}$ *να είναι η συνάρτηση*

$$j(\tau) = 1728\frac{g_2^3(\tau)}{\Delta(\tau)}.$$

[18] *Δηλαδή η* $j(\tau)$ *είναι η* j*-αναλλοίωτη που αντιστοιχεί στην ελλειπτική καμπύλη με διακρίνουσα* Δ:

$$E_{\Lambda_\tau} : y^2 = 4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau)$$

και η E_{Λ_τ} *δέχεται παραμετρικοποίηση κάνοντας χρήση της* $\wp$ *συνάρτησης του Weierstrass*[19]

$$\mathbb{C}/\Lambda_\tau \to E_{\Lambda_\tau}(\mathbb{C}),$$
$$z \mapsto \big(\wp(z;\Lambda_\tau), \wp'(z;\Lambda_\tau)\big).$$

Δύο ελλειπτικές καμπύλες E, E' είναι ισόμορφες αν ισχύει $j(E) = j(E')$. Τα παραπάνω είναι κλασικά θέματα της θεωρίας των ελλειπτικών καμπύλων και μπορούν να βρεθούν σε οποιοδήποτε σχετικό βιβλίο για παράδειγμα στον [[45]], κεφάλαιο VI, πρόταση 3.6, σελίδα 158.

Θεώρημα 4.5.2. *Η συνάρτηση* $j(\tau)$ *είναι μία modular συνάρτηση και επάγει έναν (αναλυτικό) ισομορφισμό:*

$$X(1) \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}). \tag{4.1}$$

Πόρισμα 4.5.3. *Κάθε modular συνάρτηση* $f \in \mathcal{M}(X(1))$, *είναι ρητή συνάρτηση της* j. *Αν επιπλέον η* f *είναι αναλυτική συνάρτηση στο* $\mathbb{H}$, *τότε η* f *είναι πολυώνυμο του* j.

Πρόταση 4.5.4. (i) *Η συνάρτηση* j *είναι modular συνάρτηση, βάρους 0.*

[17] βλέπε [46], πρόταση 3.4.2 σελίδα 25.

[18] $g_2(\tau) = 60G_4(\tau)$

[19] αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η συνάρτηση του Weierstrass είναι η λύση της διαφορικής εξίσωσης $\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$ και συνεπώς έχει ήδη μορφή ελλειπτικής καμπύλης επί του $\mathbb{C}$.

(ii) *Είναι ολόμορφη στο $\mathbb{H}$ και έχει έναν απλό πόλο στο άπειρο.*

(iii) *Ορίζει έναν επιμόρφισμό από το $\mathbb{H}/G$ στο $\mathbb{C}$, όπου $G = SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$.*

Πρόταση 4.5.5. *Έστω f μια μερόμορφη συνάρτηση στον $\mathbb{H}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η f είναι μια modular συνάρτηση, βάρους 0.*

(ii) *Η f είναι ένα πηλίκο δύο modular forms ίδιου βάρους.*

(iii) *Η f είναι ρήτη συνάρτηση της j.*

Παρατήρηση 4.5.6. *1 Μπορούμε να ορίσουμε με φυσικό τρόπο μια δομή μιγαδικής αναλυτικής πολλαπλότητας (manifold) στην συμπαγοποίηση $\widehat{\mathbb{H}/G}$ του $\mathbb{H}/G$. Η πρώτη πρόταση λέει ότι η j ορίζει έναν ισομορφισμό από τον $\widehat{\mathbb{H}/G}$ στην σφαίρα του Riemann $\mathbb{S}_2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Η δεύτερη, πως οι μόνες μερόμορφες συναρτήσεις στην σφαίρα $\mathbb{S}_2$ είναι οι ρητές.*

2 Ο συντελεστής $1728 = 2^6 3^3$ έχει εισαχθεί έτσι ώστε η j να έχει υπόλοιπο ίσο με 1 στο άπειρο. Πιο συγκεκριμένα, το ανάπτυγμα σε σειρά μας δίνει:

$$J(z) = \frac{1}{q} + 744 + \sum_{n=1}^{\infty} c(n)q^n, z \in \mathbb{H}, q = e^{2\pi i z}$$

και έχουμε:

$$c(1) = 2^2 3^3 1823 = 196884, c(2) = 2^{11} 5 \cdot 2099 = 21493760$$

Οι συντελεστές $c(n)$ είναι ακέραιοι και έχουν εντυπωσιακές ιδιότητες διαιρετότητας:

$$\begin{aligned}
n \equiv 0 \mod 2^a &\Rightarrow c(n) \equiv 0 \mod 2^{3a+8} \\
n \equiv 0 \mod 3^a &\Rightarrow c(n) \equiv 0 \mod 3^{2a+3} \\
n \equiv 0 \mod 5^a &\Rightarrow c(n) \equiv 0 \mod 5^{a+1} \\
n \equiv 0 \mod 7^a &\Rightarrow c(n) \equiv 0 \mod 7^{a} \\
n \equiv 0 \mod 11^a &\Rightarrow c(n) \equiv 0 \mod 11^{a}
\end{aligned}$$

στις 3 πρώτες, για $a \geq 1$.

4.6 Οι τελεστές Hecke $T(n)$

Έστω E ένα σύνολο και X_E μια ελεύθερη αβελιανή ομάδα που παράγεται από το E. Μια αντιστοιχία (correspondence) στο E είναι ένας ομομορφισμός T της X_E στον εαυτό της και η τιμές στα στοιχεία του E είναι

$$T(x) = \sum_{y \in E} n_y(x) y, n_y(x) \in \mathbb{Z}$$

και τα $n_y(x)$ να είναι μηδεν για όλα σχεδόν τα y.

Έστω τώρα $\mathcal{R}$ να είναι το σύνολο των lattices στον $\mathbb{C}$. Έστω $n \geq 1$ ακέραιος. Συμβολίζουμε $T(n)$ την αντιστοιχία στο $\mathcal{R}$ που μετασχηματίζει ένα lattice σε άθροισμα (στο $X_{\mathcal{R}}$) των υπolattices, δείκτη n.

4.6α′ Η δράση των $T(n)$ σε modular συναρτήσεις

Έστω f μια weakly modular συνάρτηση βάρους $2k$. Ορίζουμε $T(n)f$ ως την συνάρτηση στο $\mathbb{H}$, συναρτήση της συνάρτησης $n^{2k-1}T(n)$ στο $\mathcal{R}$. Έχουμε:

$$T(n)f(z) = n^{2k-1} \sum_{\substack{a\geq 1, ad=n \\ 0\leq b<d}} d^{-2k} f(\frac{az+b}{d}),$$

όπου a, b, d στοιχεία των ακεραίων πινάκων $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ με $ad = n, a \geq 1, 0 \leq b < d$, από το σύνολο των οποίων έχουμε έναν επιμορφισμό στο σύνολο των υποlattice $\Gamma(n)$, δείκτη n στο Γ, του οποίου (του Γ) μια βάση είναι $w_1' = aw_1 + bw_2, w_2' = dw_2$.

Πρόταση 4.6.1. *Η συνάρτηση $T(n)f$ είναι μια weakly modular συνάρτηση, βάρους $2k$.*

Συμπεριφορά στο άπειρο: Θεωρούμε ότι η f είναι μια modular συνάρτηση, δηλ. είναι μερόμορφη στο άπειρο. Έστω

$$f(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c(m)q^m$$

το ανάπτυγμα Laurent της, με $q = e^{2\pi i z}$.

Πρόταση 4.6.2. *Η συνάρτηση $T(n)f$ είναι μια modular συνάρτηση. Έχουμε:*

$$T(n)f(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \gamma(m)q^m$$

με

$$\gamma(m) = \sum_{\substack{a|(n,m) \\ a\geq 1}} a^{2k-1} c(\frac{mn}{a^2})$$

Για απόδειξη δες [41].

Παρατήρηση 4.6.3. *Οι Hecke operators μπορούν να μελετηθούν γεωμετρικά, ως αντιστοιχίες που συνδέουν ζεύγη modular καμπυλών.*

4.7 Hauptmoduls

Το $\mathbb{H}$ είναι μία από τις 3 πιθανές γεωμετρίες στις 2 διαστάσεις (οι άλλες είναι σφαίρα και Ευκλείδειο επίπεδο). Η $PSL_2(\mathbb{Z})$ είναι για το $\mathbb{H}$, η ομάδα των ισομετριών που διατηρούν τον προσανατολισμό. Έστω G διακριτή υποομάδα της $SL_2(\mathbb{Z})$. Τότε ο χώρος $G/\mathbb{H}$ έχει μια φυσική δομή μίας προσανατολισμένης επιφάνειας και κληρονομεί μία μιγαδική δομή από το $\mathbb{H}$ (άρα μπορούμε να τον δούμε ως μιγαδική καμπύλη).

Παράδειγμα 4.7.1. *Η $G = SL_2(\mathbb{Z})$ δίνει την σφαίρα με μία τρύπα, άρα έχει γένος 0.*

Γένος της ομάδας θα εννοούμε το γένος της επιφάνειας που προκύπτει.

Κάθε καμπύλη Σ με γένος g και n τρύπες, για $3g + n > 3$, είναι ισοδύναμη ως μιγαδική καμπύλη, με τον χώρο $G/\mathbb{H}$ για κάποια υποομάδα G της $SL_2(\mathbb{R})$ ισόμορφη της θεμελιώδους ομάδας $\pi_1(\Sigma)$.

Η πιο σημαντική επιλογή για G είναι η $SL_2(\mathbb{Z})$, λόγω της ερμηνείας της ως η modular ομάδα του τόρου. Οι περισσότερες ομάδες που παρουσιάζουν ενδιαφέρον είναι commensurable με την $SL_2(\mathbb{Z})$, δηλαδή ο δείκτης της τομής τους $|SL_2(\mathbb{Z}) \cap G|$ είναι πεπερασμένος και στις δύο. Παραδείγματα αυτών είναι οι congruence υποομάδες

$$\Gamma(N) := \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) | \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} mod N\}$$

$$\Gamma_0(N) := \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) | N \text{ διαιρεί } c\}$$

Παράδειγμα 4.7.2. *Η $\Gamma_0(N)$ έχει γένος:*

$$g = 0 \text{ για } N = 2, 13, 25$$
$$g = 2 \text{ για } N = 50$$
$$g = 3 \text{ για } N = 24$$

Ο παρακάτω ορισμός περιέχει όλες τις ομάδες που εμφανίζονται στην Mounstous Moonshine.

Ορισμός 4.7.3. *Λέμε μία διακριτή υποομάδα G της $SL_2(\mathbb{R})$ τύπου moonshine modular ομάδα, αν περιέχει κάποιες $\Gamma_0(N)$ και επίσης υπακούει στη συνθήκη*

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \Leftrightarrow t \in \mathbb{Z}$$

Μία τέτοια υποομάδα είναι απαραίτητα commensurable [20] με την $SL_2(\mathbb{Z})$. Παρατηρούμε ότι για μία τέτοια G, οποιαδήποτε μερόμορφη συνάρτηση $f : G/\mathbb{H} \to \mathbb{C}$ θα έχει μία έκφραση Fourier της μορφής $f(\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n q^n$, όπου $q = e^{2\pi i \tau}$.

Ορισμός 4.7.4. *Έστω G να είναι οποιαδήποτε υποομάδα της $SL_2(\mathbb{R})$, commensurable με την $SL_2(\mathbb{Z})$. Με τον όρο modular συνάρτηση f της G εννοούμε οποιαδήποτε μερόμορφη συνάρτηση $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$, τέτοια ώστε*

$$f(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}) = f(\tau), \text{ για κάθε } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$$

και τέτοια ώστε , για κάθε $A \in SL_2(\mathbb{Z})$, η συνάρτηση $f(A\tau)$ να έχει μία έκφραση Fourier της μορφής $\sum_{-\infty}^{\infty} b_n q^{\frac{n}{N}}$ για κάποια N και b_n (και τα δύο εξαρτώνται από το A) και όπου $b_n = 0$ για όλα πλήν πεπερασμένου πλήθους αρνητικά n.

Αυτός ο ορισμός απλά δηλώνει πως η f είναι μερόμορφη συνάρτηση στην συμπαγή επιφάνεια $\Sigma_G := G/\overline{\mathbb{H}}$, όπου $\overline{\mathbb{H}} := \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$. Οι G- τροχιές του λέγονται cusps και ο ρόλος τους είναι να συμπληρώνουν (γεμίζουν) τις τρύπες της $G/\mathbb{H}$, συμπαγοποιώντας την επιφάνεια, μιας και υπάρχουν πολύ λιγότερες μερόμορφες συναρτήσεις σε συμπαγείς επιφάνειες από ότι σε μη- συμπαγείς (συγκρίνεται την σφαίρα του Riemann με το μιγαδικό επίπεδο!).

Εμάς ενδιαφέρουν ιδιαίτερα οι γένους 0 ομάδες G τύπου moonshine. Οι modular συναρτήσεις τους χαρακτηρίζονται ως εξής:

[20] Δύο υποομάδες Γ, Γ' λέγονται commensurable, αν ο δείκτης της τομής τους $|\Gamma \cap \Gamma'|$ στην Γ και Γ' είναι πεπερασμένος

Θα υπάρχει μοναδική modular συνάρτηση J_G για την G, με q- ανάπτυγμα της μορφής

$$J_G(\tau) = q^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$$

Οι modular συναρτήσεις για την G είναι ακριβώς οι ρητές συναρτήσεις $f(\tau) = \frac{pol(J_G(\tau))}{pol(J_G(\tau))}$ στην J_G. Αυτή η συνάρτηση J_G λέγεται το (κανονικοποιημένο) Hauptmodul για την γένους 0 ομάδα G.

Παράδειγμα 4.7.5. *Η modular ομάδα $SL_2(\mathbb{Z}) = \Gamma(1)$ έχει Hauptmodul την*

$$J_{SL_2(\mathbb{Z})}(\tau) = q^{-1} + 196884q + 21493760q^2 + 8642909970q^3 + \cdots$$

ή ισοδύναμα $J(\tau) = j(\tau) - 744$

Αυτό το 196884 είναι το ίδιο που εμφανίζεται στο αριστερό μέλος της $196884 = 196883 + 1$

Παράδειγμα 4.7.6. *Άλλα παραδείγματα Hauptmodul, γένους 0 modular ομάδων είναι:*
για τις $\Gamma_0(2), \Gamma_0(13), \Gamma_0(25)$ αντίστοιχα

$$\begin{aligned}
J_{\Gamma(2)}(\tau) &= q^{-1} + 276q - 2048q^2 + 11202q^3 - 49152q^4 + 184024q^5 + \cdots \\
J_{\Gamma(13)}(\tau) &= q^{-1} - q + 2q^2 + q^3 + 2q^4 - 2q^5 - 2q^7 - 2q^8 + q^9 + \cdots \\
J_{\Gamma(25)}(\tau) &= q^{-1} - q + q^4 + q^6 - q^{11} - q^{14} + q^{21} + q^{24} - q^{26} + \cdots
\end{aligned}$$

Ο Thompson απέδειξε πως υπάρχουν μόνο πεπερασμένου πλήθους ομάδες τύπου moonshine σε κάθε γένος. Ο Cummins βρήκε όλες τις γένους 0 και 1. Συγκεκριμένα, υπάρχουν 6486 γένους 0 ομάδες τύπου moonshine. Ακριβώς 616 από αυτές έχουν Hauptmoduls με ρήτους (μάλιστα integral) συντελεστές (171 εκ των οποίων είναι οι σειρές Thompson-McKay) και οι υπόλοιπες έχουν κυκλοτομικούς ακέραιους συντελεστές. Υπάρχουν κάποιες φυσικές ισοδυναμίες (πρδ. μια δραση Galois) που συμπυκνώνουν αυτόν τον αριθμό σε 371, 310 εκ των οποίων έχουν integral Hauptmoduls.

Ορισμός 4.7.7. *Hauptmodul για την γένους 0 ομάδα G, η οποία είναι commensurable με την $SL_2(\mathbb{Z})$, θα λέμε μία συνάρτηση που δίνει έναν ισομορφισμό από μία συμπαγή επιφάνεια Riemann $\overline{\mathbb{H}/G}$ στην σφαίρα $\mathbb{C} \cup \infty$, στέλνοντας το $i\infty \mapsto \infty$ και θα λέμε το Hauptmodul, κανονικοποιημένο αν μπορεί να γραφτεί ως*

$$e^{-2\pi i a \tau} + \{ \text{ μία συνάρτηση που μηδενίζεται στο } i\infty \text{ για } a > 0\}$$

Μέρος II

Moonshine Conjectures

Κεφάλαιο 5

Η απόδειξη

5.1 Η εικασία

Η πρώτη εικασία των Conway και Norton, η επονομαζόμενη “moonshine conjecture”, ισχυρίζεται ότι υπάρχει ένα απειροδιάστατο graded $\mathbb{M}$-module

$$V = \bigoplus_{n \geq -1} V_n$$

με $\dim V_n = c(n)$ για κάθε n, όπου $c(n)$ οι συντελεστές της j-αναλλοίωτης στην έκφρασή της ως σειρά Laurent $j(\tau) = \sum_{m \geq -1} c(n) q^n$. Από αυτό προκύπτει ότι κάθε στοιχείο g της $\mathbb{M}$ δρα σε κάθε V_n και έχει τιμή χαρακτήρα

$$\chi_n(g) = tr(g|V_n)$$

η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί ώστε να κατασκευαστεί η McKay-Thompson σειρά του g:

$$T_g(q) = \sum_{n \geq -1} \chi_n(g) q^n.$$

Η δεύτερη εικασία των Conway και Norton ισχυρίζεται πως με τον V όπως παραπάνω, για κάθε στοιχείο g της $\mathbb{M}$, υπάρχει μία γένους μηδέν υποομάδα K της $PSL_2(\mathbb{R})$, commensurable με την modular ομάδα $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z})$, τέτοια ώστε η $T_g(q)$ να είναι η κανονικοποιημένη κύρια modular function για την K.

Ακολούθως οι A. Oliver, L. Atkin, P. Fong, S. D. Smith έδειξαν, κάνοντας υπολογισμούς μέσω υπολογιστή, πως πράγματι υπάρχει μια απειροδιάστατη graded αναπαράσταση της ομάδας Monster, της οποίας οι McKay-Thompson σειρές είναι ακριβώς τα Hauptmoduls που βρήκαν οι Conway και Norton. Οι I. Frenkel, J. Lepowsky και A. Meurman κατασκεύασαν αυτή ακριβώς την αναπαράσταση χρησιμοποιώντας vertex operators στην conformal field theory. Το module που προκύπτει ονομάζεται Monster module και συμβολίζεται με $V^\natural$.

Θεώρημα 5.1.1. *Θεωρούμε ότι $V^\natural = \oplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n^\natural$ είναι η απειροδιάστατη graded αναπαράσταση της απλής ομάδας monster $\mathbb{M}$ που κατασκεύασαν οι Frenkel, Lepowsky, Meurman . Τότε για κάθε στοιχείο g της monster $\mathbb{M}$, η σείρα Thompson $T_g(q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} Tr(g|V_n) q^n$ είναι ένα Hauptmodul για μία γένους 0 υποομάδα της $SL_2(\mathbb{R})$, δηλαδή η $V^n atural$ ικανοποιεί την κύρια εικασία των Conway Norton στο [13].*

5.2 Σχέδιο απόδειξης:

- Κατασκευάζουμε μια vertex άλγεβρα $V^\natural$ η οποία είναι μια graded άλγεβρα που παρέχει τις moonshine αναπαραστάσεις στην $\mathbb{M}$, και επιβεβαιώνεται ότι το monster module έχει δομή vertex άλγεβρας αναλλοίωτη υπό την δράση της $\mathbb{M}$. Έτσι η $V^\natural$ ονομάζεται monster vertex άλγεβρα.

- Κατασκευάζουμε μια Lie άλγεβρα $\mathfrak{m}$ από την $V^\natural$ χρησιμοποιώντας το θεώρημα των Goddard-Thorn "no-ghost" από τη θεωρία χορδών. Αυτή είναι μια Borcherds-Kac-Moody Lie άλγεβρα.

- Κατασκευάζουμε μια denominator identity για την $\mathfrak{m}$ που σχετίζεται με τους συντελεστές της $j(q)$.

- Κατασκευάζουμε ένα πλήθος από twisted denominator identities οι οποίες είναι κατά παρόμοιο τρόπο συσχετισμένες με τις σειρές $T_g(q)$.

- Χρησιμοποιούμε τις denominator identities για να προσδιορίσουμε τα $c(n)$, χρησιμοποιώντας Hecke operators, ομολογία Lie αλγεβρών και Adams operations.

5.3 Η Monster Vertex Άλγεβρα

Υπενθυμίζουμε πως η Monster Vertex άλγεβρα που λέγεται και Moonshine module, παρέχει μια απειροδιάστατη αναπαράσταση της Monster $\mathbb{M}$ και χαρακτηρίζεται από τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) η $V^\natural$ είναι μια vertex operator άλγεβρα, με conformal διάνυσμα w, διάστασης $c = 24$ και μια θετικά ορισμένη διγραμμική μορφή.

(ii) $V^\natural = \oplus_{n\geq -1} V_n^\natural$, όπου $V_n^\natural = V_{(n+1)}^\natural$ είναι ο ιδιόχωρος του L_0 με ιδιοτιμή $n+1$ και η dim $V_n^\natural$ δίνεται μέσω της γεννήτριας συνάρτησης $\sum_{n\geq -1} \dim V_n^\natural q^n = J(q) = j(q) - 744 = q^{-1} + 196884q + ...$

(iii) η δράση της $\mathbb{M}$ στη $V^\natural$, διατηρεί τη δομή vertex operator άλγεβρας, το conformal διάνυσμα και την διγραμμική μόρφη.

5.4 Κατασκευή της $\mathfrak{m}$ - Θεώρημα no-ghost

Για να ορίσουμε τη Monster Lie άλγεβρα δεν πρέπει να ξεχάσουμε πως πρώτα βρέθηκε η fake Monster Lie άλγεβρα, συναρτήσει του Leech lattice. Χρησιμοποιούμε το γεγονος πως το Lorentzian lattice $II_{25,1}$ μπορεί να γραφτει ως το ευθύ άθροισμα του Leech lattice και του μοναδικού 2-διάστατου άρτιου unimodular lattice $II_{1,1}$. Τα στοιχεία του $II_{1,1}$ συνήθως παρίστανται ως ζεύγη $(m,n) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ με πίνακα εσωτερικού γινομένου $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ έτσι ώστε $(m,n)^2 = -2mn$. Η ομοιότητα της vertex άλγεβρας συναρτήσει του Leech lattice, $V_{\Lambda_{Leech}}$ με το Monster Module $V^\natural$ συνιστά την κατασκευή μιας vertex άλγεβρας $V^\natural \oplus V_{II_{1,1}}$. Τότε η Monster Lie άλγεβρα $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}^{\natural\otimes II_{1,1}}$ ορίζεται ως ο υπόχωρος:

$$\mathfrak{g}^{\natural\otimes II_{1,1}} := P_{(1)}^{\natural\otimes II_{1,1}} / Kernel(,)_{\natural\otimes II_{1,1}}.$$

Η $\mathfrak{m}$ είναι $II_{1,1}$-graded, έχει μια invariant διγραμμική μορφή και έχει μια involution που επάγεται από τον τετριμμένο αυτομορφισμό του $V^\natural$ και την natural involution θ του $V_{II_{1,1}}$ (που δρα ως -1 στο $II_{1,1}$ και στο piece of degree $0 \in II_{1,1}$ της $V_{II_{1,1}}$).

Μπορούμε να εφαρμόσουμε μια εκδοχή του no-ghost theorem για την $\mathfrak{m}$

Θεώρημα 5.4.1. *(No-ghost) Έστω ότι:*

(i) *$V = \oplus_{n\geq -1} V_n$ η VOA, με $\operatorname{rank} V = 24$, όπου $V_n = V_{n+1}$ είναι η συνιστώσα με conformal weight $n+1$ (έτσι ώστε ο L_0 να έχει μη αρνητικές ιδιοτιμές),*

(ii) *ο V είναι εφοδιασμένος με μια μη εκφυλισμένη διγραμμικη μορφη $(,)$, τέτοια ώστε ο συζυγής του $L_{(n)}$ να είναι $L_{(-n)}$,*

(iii) *στον V δρα μια ομάδα G, που διατηρεί τη δομή.*

Τότε έχουμε τον ακόλουθο φυσικό ισομορφισμό $G-module$

$$P^{\otimes II_{1,1}}_{(1),(r)}/Kernel(,)_{V\otimes V_{II_{1,1}}} \cong V_{-\frac{1}{2}r^2} \equiv V_{(1-\frac{1}{2})r^2} \text{ για } 0 \neq r \in II_{1,1}$$

$$P^{\otimes II_{1,1}}_{(1),(0)}/Kernel(,)_{V\otimes V_{II_{1,1}}} \cong V_0 \oplus \mathbb{R}^2 \equiv V_{(1)} \oplus \mathbb{R}^2$$

όπου $P^{\otimes II_{1,1}}_{(1),(r)}$: ο υπόχωρος βαθμού $r \in II_{1,1}$ του physical χώρου
$P^{\otimes II_{1,1}}_{(1)} = \{\psi \in V \otimes V_{II_{1,1}} | L_{(n)}\psi = \delta_{n,0}\psi, n \geq 0\}$[1]
και η G δρα τετριμμένα στους $V_{II_{1,1}}$ και $\mathbb{R}^2$.

Θεώρημα 5.4.2. *Υπάρχει μια Lie άλγεβρα $\mathfrak{m}$, την οποία ονομάζουμε monster Lie άλγεβρα, με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(1) Η $\mathfrak{m}$ είναι $II_{1,1}$-graded.

(2) Η $\mathfrak{m}$ έχει μια contravariant διγραμμική μορφή $(,)_0$ η οποία είναι θετικά ορισμένη στο κομμάτι βαθμού $(m,n) \neq (0,0)$. (Με τον όρο contravariant διγραμμική μορφή εννοούμε ότι η $II_{1,1}$-graded Lie άλγεβρα $\mathfrak{m}$ έχει μια involution ω η οποία δρα ως -1 στο $II_{1,1}$ και ως -1 στο κομμάτι βαθμού (0,0), έτσι ώστε η μορφή $(u,v) = -(u,\omega(v))_0$ να είναι αναλλοίωτη και $(u,v) = 0$ εκτός αν $\deg(u) + \deg(v) = 0$.).

(3) Στην $\mathfrak{m}$ δρα η ομάδα monster. Ως αναπαράσταση της $\mathbb{M}$, το μέρος της $\mathfrak{m}$ βαθμού (m,n) είναι ισόμορφο με το $V^\natural_{mn}$ αν $(m,n) \neq (0,0)$ και με την τετριμμένη αναπαράσταση $\mathbb{R}^2$ αν $(m,n) = (0,0)$, όπου $V^\natural_n$ είναι το κομμάτι της monster vertex άλγεβρας $V^\natural$ με σύμμορφο βάρος $n+1$.

Το no-ghost theorem μας λέει ότι:

- το piece of degree $(m,n) \in II_{1,1}$ της $\mathfrak{m}$ είναι ισόμορφο με το piece $V^\natural_{mn}$ του Moonshine module
- η contravariant form είναι positive definite σε αυτό το piece της $\mathfrak{m}$
- το piece of degree $(0,0)$ της $\mathfrak{m}$ είναι ισόμορφο με $\mathbb{R}^2$

[1] Υπενθύμιση από Κεφ.3: ο χώρο $P^i = \{w \in V | L_0(w) = iw, L_i(w) = 0 \text{ για } i > 0\}$

Αν ορίσουμε ένα στοιχείο της $\mathfrak{m}$, βαθμού $(m,n) \in II_{1,1}$ να έχει $\mathbb{Z}-$ degree $=$ $2m+n$, τότε με το $\mathbb{Z}-$ grading, η $\mathfrak{m}$ φαίνεται να είναι μια BKM άλγεβρα.

Το $II_{1,1}-$ grading της $\mathfrak{m}$, μοιάζει με root space decomposition της Monster Lie άλγεβρας.
Για να το διαπιστώσουμε:

Θα δούμε πώς είναι η BKM άλγεβρα με root lattice $II_{1,1}$

(i) ξεκινάμε με δύο διανύσματα $\pm(1,-1) \in II_{1,1}$, με sqare lenght 2 και έστω $(1,-1)$ η πραγματική απλή ρίζα

(ii) παίρνουμε $\rho := (-1,0)$, ως διάνυσμα Weyl έτσι ώστε οι απλές ρίζες (m,n) που μένουν (φανταστικές) να προσδιορίζονται από την συνθήκη: $\rho r = -\frac{1}{2}r^2$

(iii) ξέρουμε ότι οι απλές ρίζες πρέπει να έχουν μη μηδενικό εσωτερικό γινόμενο μεταξύ τους

(iv) συμπεραίνουμε ότι τα διανύσματα $(1,n)$, $n=-1$ ή $n>0$, αποτελούν ένα σύνολο απλών ριζών για το root lattice $II_{1,1}$.

Η denominator formula για αυτήν την Borcherds άλγεβρα είναι:

$$p^{-1}\prod_{\substack{m>0\\ n\in\mathbb{Z}}}(1-p^m q^n)^{\mathrm{mult}(m,n)} = \sum_{w\in W}\det(w)w(p^{-1}(1-\sum_{n>0}\mathrm{mult}(1,n)pq^n))$$

όπου $p=e^{(1,0)}$, $q=e^{(0,1)}$ του group ring του $II_{1,1}$. Παρατηρούμε επίσης πως οι φανταστικές απλές ρίζες $(1,n)$, $n\geq 1$, έχουν μη μηδενικό εσωτερικό γινόμενο μεταξύ τους έτσι ώστε να μην υπάρχει διορθωτικός όρος στο δεξί μέλος. Αφού το lattice $II_{1,1}$ έχει μόνο μία πραγματική απλή ρίζα, η ομάδα Weyl έχει τάξη δύο και παράγεται από τις ανακλάσεις που ανταλλάσουν τα p,q $(\sigma_{(1,-1)}p = e^{(1,0)-\{(1,-1)\cdot(1,0)\}(1,-1)} = q)$. Άρα

$$\begin{aligned}
p^{-1}\prod_{\substack{m>0\\ n\in\mathbb{Z}}}(1-p^m q^n)^{\mathrm{mult}(m,n)} &= p^{-1}-\sum_{n>0}\mathrm{mult}(1,n)q^n-(q^{-1}-\sum_{n>0}\mathrm{mult}(1,n)p^n)\\
&= \sum_{\substack{n\geq -1\\ n\neq 0}}\mathrm{mult}(1,n)(p^n-q^n),
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιούμε το γεγονός πως οι πραγματικές απλές ρίζες έχουν πάντα πολλαπλότητα ένα. Παρακάτω θα προσδιορίσουμε τις άγνωστες πολλαπλότητες των ριζών μέσω μιας ταυτότητας για τις ελλειπτικές modular συναρτήσεις που προκύπτει να είναι ακριβώς η παραπάνω denominator formula.

5.5 Οι απλές ρίζες της $\mathfrak{m}$

Αφού κατασκευασαμε την $\mathfrak{m}$, θέλουμε να δούμε ποιες είναι οι απλές τις ρίζες. Τις απλές ρίζες μιας BKM άλγεβρας τις βρίσκουμε μέσω της denominator formula που για την $\mathfrak{m}$ θα προκύψει από την παρακάτω ταυτότητα.

Λήμμα 5.5.1.

$$p^{-1}\prod_{\substack{m>0\\ n\in\mathbb{Z}}}(1-p^m q^n)^{c(mn)} = j(p)-j(q) \tag{5.1}$$

όπου $j(q)-744=\sum_n c(n)q^n = q^{-1}+196884q+\dots$

Απόδειξη. Θέλουμε να δείξουμε ότι και το πρώτο μέρος της ισότητας είναι modular συνάρτηση, με level 1 (αναφέρεται στην $\Gamma(1)$). Πολλαπλασιάζουμε λοιπόν το αριστερό μέρος της (5.1) με p και παίρνουμε το λογάριθμό του

Χρησιμοποιούμε την λογαριθμική σειρά $\log(1-t)=-\sum_k \frac{t^k}{k}$ και έχουμε

$$\log\prod_{\substack{m>0\\ n\in\mathbb{Z}}}(1-p^m q^n)^{c(mn)} = \sum_{\substack{m>0\\ n\in\mathbb{Z}}}\log(1-p^m q^n)^{c(mn)}$$

$$=\sum_{\substack{m>0\\ n\in\mathbb{Z}}}c(mn)\log(1-p^m q^n) = -\sum_{\substack{m>0\\ n\in\mathbb{Z}}}c(mn)\sum_k\frac{(p^m q^n)^k}{k}$$

$$=-\sum_{\substack{m>0\\ n\in\mathbb{Z}}}\sum_{k>0}c(mn)\frac{(p^m q^n)^k}{k}.$$

Κάνουμε μια αλλαγή μεταβλητής που στέλνει τα $m\to\frac{m}{k}$ και τα $n\to\frac{n}{k}$ και αυτό συμβαίνει για τα $k|m, k|n \Rightarrow k|(m,n)$. Και άρα έχουμε:

$$-\sum_{m>0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k>0}c(mn)\frac{(p^{mk}q^{kn})}{k} = -\sum_{m>0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{0<k|(m,n)}\frac{1}{k}c(\frac{mn}{k^2})p^m q^n. \tag{5.2}$$

Από Πρόταση 12 [Serre] για Hecke operators, ισχύει

$$T(m)f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\gamma(n)q^n,$$

όπου

$$\gamma(n)=\sum_{\substack{k|(m,n)\\ k\geq 1}}k^{2l-1}c(\frac{mn}{k^2}),$$

$$f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c(n)q^n$$

και $T(m)$, ο m-οστός Hecke operator. Επομένως,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{0<k|(m,n)}\frac{1}{k}c(\frac{mn}{k^2})q^n = T(m)\sum_{n\in\mathbb{Z}}c(n)q^n$$

για μια modular συνάρτηση βάρους 0, δηλαδή $J(n)=j(n)-744$ (Πορ.4.6.4). Άρα το δεξί μέλος της (5.2) γίνεται

$$-\sum_{m>0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{0<k|(m,n)}\frac{1}{k}c(\frac{mn}{k^2})p^m q^n = -\sum_{m>0}T(m)(\sum_{n\in\mathbb{Z}}c(n)q^n)p^m$$

$$= - \sum_{m>0} T(m)(j(p) - 744)p^m = \sum_{m>0} f_m(q)p^m$$

όπου από Πορ. 4.6.3-4-5 και Πρ. 4.7.2., κάθε f_m θα είναι μια modular συνάρτηση, με level 1, ολόμορφη στο πάνω ημιεπίπεδο και άρα πολυώνυμο της j.

Αν τώρα εκθετικοποιήσουμε το αποτέλεσμα, βλέπουμε πως το αριστερό μέλος της (5.1) είναι της μορφής $\sum_{m\geq 1} g_m p^m$, όπου κάθε g_m είναι ένα πολυώνυμο στην $J(q)$.

Κάθε συντελεστής των p^m στο δεξί μέλος είναι είτε σταθερά (αν $m \neq 0$), είτε $744 - j(q)$ (αν $m = 0$) και άρα είναι επίσης ένα πολυώνυμο στην $j(q)$.

Κάθε πολυώνυμο στην $j(q)$ προσδιορίζεται από τους συντελεστές των q^n, για $n \leq 0$, άρα για να αποδείξουμε το λήμμα, αρκεί να εξετάσουμε πως οι συντελεστές των q^n, $n \leq 0$ είναι ίδιοι και στα δύο μέλη. ☐

Παρατήρηση 5.5.2. *Το άπειρο γινόμενο της (5.1) συγκλίνει αν* $|p|, |q| < e^{-2\pi}$ *και* $p \neq q$, *και η άπειρη σειρά για την* $j(q)$ *συγκλίνει αν* $|q| < 1$ *(δηλαδή* $Im(\tau) > 0$*).*

Θεώρημα 5.5.3. *Οι απλές ρίζες της monster Lie άλγεβρας* $\mathfrak{m}$ *είναι τα διανύσματα* $(1, -1)$ *και* $(1, n)$ *με* $n > 0$, *το κάθένα με πολλαπλότητα* $c(n)$.

Απόδειξη. Έστω $\mathfrak{n}$ η BKM άλγεβρα με root lattice $II_{1,1}$ της οποίας οι ρίζες είναι $(1, n)$, με $n = -1, n > 0$.

Οι απλές ρίζες μιας BKM άλγεβρας (με δοσμένη Cartan υποάλγεβρα και κατάλληλη επιλογή θεμελιώδους Weyl chamber), προσδιορίζονται από τις πολλαπλότητες τους, λόγω της denominator formula.

Άρα είναι ικανή συνθήκη να δείξουμε ότι η πολλαπλότητα της ρίζας (m, n) της άλγεβρας $\mathfrak{n}$ είναι ίση με την πολλαπλότητα $c(mn)$ της ρίζας (m, n) της άλγεβρας $\mathfrak{m}$ (και άρα ότι $\mathfrak{n}$ η είναι ισόμορφη με την $\mathfrak{m}$).

Η denominator formula της Lie άλγεβρας $\mathfrak{m}$ είναι

$$e^\rho \prod_{\substack{m>0 \\ n\in\mathbb{Z}}} (1 - p^m q^n)^{\mathrm{mult}\,(m,n)} = \sum_{w\in W} \det(w) w(e^\rho S) \tag{5.3}$$

όπου mult (m, n) είναι η πολλαπλότητα της ρίζας (m, n) της $\mathfrak{n}$, p και q είναι τα στοιχεία $e^{(1,0)}$ και $e^{(0,1)}$ του group ring του $II_{1,1}$, W είναι η ομάδα Weyl της $\mathfrak{n}$ η οποία είναι τάξης 2 και της οποίας το μη-τετριμμένο στοιχείο ανταλλάσσει τα p, q, ρ είναι το στοιχείο $(-1, 0)$ κι επομένως $e^\rho = e^{(-1,0)} = p^{-1}$ και τέλος,

$$S = \sum_A (-1)^{|A|} e^{\Sigma A}$$

όπου A είναι τα πεπερασμένα υποσύνολα του συνόλου των απλών φανταστικών ριζών, τέτοια ώστε τα διακεκριμένα στοιχεία τους να είναι ανά δύο ορθογώνια, $|A|$ να είναι το πλήθος των στοιχείων των A, και ΣA είναι το άθροισμα των στοιχείων τους.

Όλες οι φανταστικές απλές ρίζες της $\mathfrak{n}$ έχουν μη μηδενικό εσωτερικό γινόμενο μεταξύ τους, έτσι το S είναι ίσο με $1 - \sum_{n>0} c(n)pq^n = 1 - p(j(q) - q^{-1} - 744)$ και άρα το δεξί μέλος της denominator formula της $\mathfrak{m}$ είναι

$$e^\rho S - w(e^\rho S) = (p^{-1} - j(q) + q^{-1} + 744) - (q^{-1} - j(p) + p^{-1} + 744) = j(p) - j(q)$$

όπου w είναι το μη τετριμμένο στοιχείο της Weyl ομάδας W.

Αυτό είναι το δεξί μέλος της (5.1) και άρα και τα αριστερά μέλη των (5.1) και (5.3) θα πρέπει να είναι ίσα, το οποίο συνεπάγεται ότι η πολλαπλότητα της ρίζας $(m, n) \neq (0, 0)$ της $\mathfrak{n}$ είναι $c(mn)$. □

Παρατήρηση 5.5.4. *Αυτό το αποτέλεσμα μας δείχνει ότι η δράση της monster* $\mathbb{M}$ *στην* $\mathfrak{m}$ *μπορεί να επεκταθεί σε μια δράση ολόκληρης της ομάδας αυτομορφισμών του graded διανυσματικού χώρου* V *στην* $\mathfrak{m}$*, η οποία διατηρεί το grading και την δομή της* $\mathfrak{m}$*. Η ιδιαίτερη ιδιότητα της δράσης της monster στην* $\mathfrak{m}$ *που χρησιμοποιούμε είναι το ότι τα μέρη βαθμών* (a, b) *και* (c, d) *της* $II_{1,1} - graded$ *Lie άλγεβρας* $\mathfrak{m}$ *είναι ισόμορφα ως αναπαραστάσεις της monster* $\mathbb{M}$*, όταν* $ab = cd \neq 0$.

5.6 Twisted denominator formula

Ένας εναλλακτικός τρόπος να υπολογίσουμε την denominator formula είναι από τις ομάδες ομολογίας μέσω της ταυτότητας Euler-Poincare:

$$\Lambda(E) = H(E)$$

όπου E: η υποάλγεβρα που αντιστοιχεί στις θετικές ρίζες στην ανάλυση της $\mathfrak{m}$ ως ευθύ άθροισμα υποαλγεβρών: $\mathfrak{m} = E \oplus \mathfrak{h} \oplus F$, και H: η υποάλγεβρα που αντιστοιχεί στις αρνητικές ρίζες.

5.6α΄ Ομολογία

Η standard ακολουθία

$$... \to \Lambda^2(E) \to \Lambda^1(E) \to \Lambda^0(E) \to 0$$

της οποίας οι ομάδες ομολογίας είναι αυτές της Lie άλγεβρας E, μας δείχνει ότι $\Lambda(E) = H(E)$, όπου

$\Lambda(E)$: ο virtual διανυσματικός χώρος $\Lambda^0(E) \ominus \Lambda^1(E) \oplus \Lambda^2(E)...$ που σχηματίζεται από το εναλλασσόμενο άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων της E και

$H(E)$: ο virtual διανυσματικός χώρος $H_0 \ominus H_1 \oplus H_2...$ που σχηματίζεται από το εναλλασσόμενο άθροισμα των ομάδων ομολογίας της E, με πραγματικούς συντελεστές.

Αν L είναι το lattice των ριζών της $\mathbb{M}$, τότε και οι δύο πλευρές της ισότητας είναι virtual δ.χ., των οποίων τα ομογενή μέρη είναι πεπερασμένης διάστασης και άρα τα άπειρα αθροίσματα έχουν νόημα.

Η denominator formula προκύπτει από το γεγονός ότι $\Lambda(E) = H(E)$ ως virtual, $L - graded$ διανυσματικοί χώροι.

Ο χαρακτήρας του $\Lambda(E)$ είναι ένα γινόμενο πάνω από τις θετικές ρίζες

Οι όμαδες $H(E)$ για BKM άλγεβρες μπορούν να λογαριαστούν με τον ίδιο τρόπο που τις λογαριάζουμε για συνήθεις KM. Για KM παίρνουμε ότι ο διανυσματικός χώρος $H_i(E)$ έχει μια βάση που αντιστοιχεί στα στοιχεία της ομάδας, μήκους i, άρα ο χαρακτήρας του $H(E)$ είναι άθροισμα πάνω από την ομάδα Weyl. Εφαρμόζουμε λοιπόν στις BKM και παίρνουμε ότι

$H_i(E)$ είναι ο υπόχωρος των $\Lambda^i(E)$ spanned από τα ομογενή διανύσματα των $\Lambda^i(E)$ των οποίων οι βαθμοί $r \in L$ ικανοποιούν την σχέση: $(r + \rho)^2 = \rho^2$. Ο βαθμός r οποιουδήποτε ομογενούς διανύσματος των $\Lambda^i(E)$ ικανοποιεί την: $(r + \rho)^2 \leq \rho^2$, άρα τα $H_i(E)$ μπορούν να θεωρηθούν σαν ένα είδος φράγματος των $\Lambda^i(E)$.

Πρακτικά είναι ικανή συνθήκη το να γνωρίζουμε τους υπόχωρους του $H(E)$, στοιχείων των οποίων οι βαθμοί r έχουν την ιδιότητα το διάνυσμα $r+\rho$ να βρίσκεται μέσα στην θεμελιώδη Weyl chamber. Αυτος ο υπόχωρος είναι ισόμορφος με τον υπόχωρο του $\Lambda(E)$, όλων των στοιχείων που μπορούν να γραφτούν στη μορφή $e_1 \wedge e_2 \wedge ...$, όπου e_i είναι διανύσματα που ανήκουν στον χώρο ριζών των ανά δύο ορθογώνιων φανταστικών απλών ριζών, έτσι ώστε ο χαρακτήρας αυτού του υπόχωρου να είναι το άθροισμα $\sum_\alpha \epsilon(\alpha)e^\alpha$ που εμφανίζεται στην denominator formula.

Για κάθε BKM άλγεβρα οι ομάδες ομολογίας λογαριάζονται αν γνωρίζουμε τις απλές ρίζες.

Στην περίπτωση της $\mathfrak{m}$ οι απλές της ρίζες είναι τα διανύσματα $(1,-1)$ (πραγματική) και $(1,n), n>0$ (φανταστικές), με πολλαπλότητα $c(n)$.

Οι ομάδες ομολογίας $H_i(E)$ είναι οι υπόχωροι των στοιχείων των $\Lambda^i(E)$, $H_i(E) = \{x \in \Lambda^i(E) \,|\, \deg x = r \in L\,\text{με}\,(r, r+2\rho) = 0\}$, όπου L το root lattice.

Στην $\mathfrak{m}$ οι ρίζες $r=(m,n)$ είναι στοιχεία του $II_{1,1}$ που, όπως είπαμε, έχει πίνακα εσωτερικού γινομένου, επομένως το εσωτερικό γινόμενο δύο στοιχείων (m,n), (m',n') ισούται με $((m,n),(m',n')) = -mn' - m'n$. Ταυτίζουμε το διάνυσμα Weyl με το διάνυσμα $\rho = (-1,0)$. Ισχύει $\rho^2 = 0$.

Θα βρούμε για ποια στοιχεία του root lattice $r=(m,n)$ ισχύει η συνθήκη $(r,r+2\rho)=0$. Έχουμε $(r,r+2\rho) = ((m,n),(m-2,n)) = -mn-2mn+2n = -2n(m-1)$. Επομένως

$$(r, r+2\rho) = 0 \Leftrightarrow m = 1 \quad \text{ή} \quad n = 0,$$

δηλαδή $r=(m,0)$ ή $r=(1,n)$).

Στη συνέχεια θα βρούμε τα στοιχεία των $\Lambda^i(E)$, αυτών των βαθμών.

Βρίσκουμε ότι:

- η $H_0(E)$ είναι $1-\dim$, με char $H_0(E) = 1$, αφού ο $\Lambda^0(E) = \mathbb{R}$ είναι ο $1-\dim$ χώρος βαθμού $(0,0)$.

- η $H_1(E)$ είναι ο υπόχωρος του $\Lambda^1(E) = E$, στοιχείων, δηλαδή ριζών, βαθμού $(m,0)$ ή $(1,n)$. Όμως δεν υπάρχουν ρίζες βαθμού $(m,0)$ και ο χώρος των ριζών βαθμού $(1,n)$ είναι ο χώρος των απλών φανταστικών ριζών $H_1(E) \cong \bigoplus_{n\geq 0} \mathfrak{g}_{(1,n)}$.
  $H_1(E) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_n pq^n$, $(pq^n = e^{(1,0)}e^{n(0,1)} = e^{(1,n)})$
  Έτσι, έχει char $H_1(E) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \dim V_n e^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n)pq^n = p(j(q)-744)$ και το μέρος της βαθμού $(1,n)$ είναι ισόμορφο με την n-οστή head αναπαράσταση της monster $\mathbb{M}$.

- για $i \geq 2$ δεν υπάρχουν στοιχεία του $\Lambda^i(E)$ βαθμού $(1,n)$, γιατί όλα τα στοιχεία της E έχουν βαθμούς της μορφής (m,n), για $m \geq i$, (αφού $\Lambda^2(E)$ περιέχει στοιχεία της μορφής: $x \wedge y \in \wedge^2 E$, με $x \in (1,n)$ και $y \in (1,n')$) με $m \geq i$. Επίσης όλα έχουν βαθμούς με $n > 0$, εκτός από τον $1-\dim$ χώρο με βαθμό $(1,-1)$ (δηλαδή ίσο με την πραγματική απλή ρίζα). Έτσι ο μόνος τρόπος για τα στοιχεία του $\Lambda^2(E)$ να έχουν βαθμό $(m,0) = r$ είναι να είναι exterior products δύο στοιχείων της E βαθμών $(1,-1)$ και $(m-1,1)$

$(\oplus_{m\geq 2} e_{(1,-1)} \wedge e_{(m-1,1)}$ και $(1,-1)+(m-1,1)=(m,0))$.
Άρα η $H_2(E)$ είναι το άθροισμα των μερών, βαθμών $(m,0)$ για $m \geq 2$.

$H_2(E) = \bigoplus_{m\geq 2} H_2^m(E)$, όπου $H_2^m(E) = \langle e_{(1,-1)} \wedge e_{(m-1,1)} \rangle \cong V_{m-1}$ με $\deg(e_{(1,-1)} \wedge e_{(m-1,1)}) = (m,0)$.

Έτσι $H_2(E) = \sum_{m\geq 2} V_{m-1} e^{(m,0)} = \sum_{m\geq 1} V_m e^{(m+1,0)} = \sum_{m>0} V_m e^{(m+1,0)} = \sum_{m>0} V_m p^{m+1}$ και ο χαρακτήρας της είναι

char $H_2(E) = \sum_{m\geq 2} \dim H_2^m(E) e^{(m,0)} = \sum_{m>0} \dim V_m p^{m+1} = p\sum_{m>0} c(m)p^m = p(j(p)-744)-1$.

Γιατί $p(j(p)-744)-1 = p(p^{-1}+\sum_{m>0} c(n)p^m)-1 = 1+p\sum_{m>0} c(m)p^m - 1 = p\sum_{m>0} c(m)p^m = \sum_{m>0} \dim V_m p^{m+1}$.

- οι $H_i(E) = 0,$ για $i \geq 3$.

Οπότε το alternating sum είναι:
$H(E) = \bigoplus_{i\geq 0} (-1)^i H_i(E) = H_0(E) - H_1(E) + H_2(E) = V_{-1} - p\sum_{n\in\mathbb{Z}} V_n q^n + p\sum_{m>0} V_m q^m = p(\sum_m V_m p^m - \sum_n V_n q^n)$, όπου $p = e^{(1,0)}, q = e^{(0,1)}$.

Η υποάλγεβρα των θετικών ριζών είναι $E = \sum_{m>0,n\in\mathbb{Z}} V_{mn} p^m q^n$, όπου V_{mn} το μέρος στην αναπαράσταση, βαθμού (m,n) και έτσι, αν αντικαταστήσουμε αυτές τις τιμές στην σχέση $\Lambda(E) = H(E)$, πολλαπλασιάζοντας και με p^{-1} θα έχουμε:

$$p^{-1}\Lambda(\sum_{m>0,n\in\mathbb{Z}} V_{mn} p^m q^n) = \sum_m V_m p^m - \sum_n V_n q^n,$$

όπου V_m, V_n η m-οστή και n-οστή head αναπαράσταση της απλής ομάδας monster $\mathbb{M}$.

Και τα δύο μέρη είναι virtual $II_{1,1}$-graded αναπαραστάσεις της $\mathbb{M}$.

5.6β΄ Adams operation

Για κάθε διανυσματικό χώρο $U, \dim U < \infty$ η $\Lambda(U)$ είναι naturally ισόμορφη με $\exp(-\sum_{i>0} \psi^i(U)/i)$, όπου ψ^i είναι η i-οστή Adams operation. Αυτό μας το δίνει η αρχή για splitting που λέει ότι δύο natural operations σε αναπαραστάσεις είναι ίσες αν είναι ίσες σε αθροίσματα $1-\dim$ αναπαραστάσεων, και αυτό επείδη και οι δύο εκφράσεις είναι πολλαπλασιαστικές στον U και ίσες αν $\dim U = 1$. Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε πως κάθε αναπαράσταση είναι άθροισμα μονοδιάστατων αναπαραστάσεων.

Το ίδιο ισχύει επίσης και για $\infty - \dim$ διανυσματικούς χώρους, graded από κάποιο lattice L, με την προϋπόθεση ότι κάθε ομογενές μέρος του είναι πεπερασμένης διάστασης και τα μέρη βαθμού $a \in L$ μηδενίζονται, εκτός αν a βρίσκεται μέσα σε κάποιον φιξαρισμένο κλειστό κώνο που δεν περιέχει καμία γραμμή και έχει την κορυφή του στην αρχή.

Αυτή η συνθήκη μας εξασφαλίζει ότι όλοι οι διανυσματικοί χώροι $\Lambda(U), \psi^i(U)$ κ.λ.π. είναι graded με πεπερασμένης διάστασης μέρη κάθε βαθμού.

Η Adams operation ψ^i, σε virtual αναπαράσταση μιας ομάδας G ορίζεται ως:

$$Tr(g|\psi^i(U)) = Tr(g^i|U), g \in G.$$

Για μια class function $f: G \to \mathbb{C}$ ορίζεται ως $(\psi^i f)(g) = f(g^i), \forall\, g \in G$.

Για εμάς $G \equiv \mathbb{M}$. Όλα τα $\mathbb{M}$-modules που θα αναφέρονται είναι πεπερασμένης διάστασης $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$-graded και θα ταυτίζονται με τυπικές σειρές στον δακτύλιο $R(\mathbb{M})[[p,q]]$. Ο $\psi^i : R(\mathbb{M}) \to R(\mathbb{M})$ και $W \in R(\mathbb{M})[[p,q]]$.

Επίσης, αν W μια πεπερασμένης διάστασης $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$-graded αναπαράσταση της $\mathbb{M}$ τέτοια ώστε $W_{(\gamma_1,\gamma_2)} = 0, \gamma_1, \gamma_2 > 0$, θα γράφουμε $W = \sum_{(\gamma_1,\gamma_2)\in\mathbb{N}^2} W_{(-\gamma_1,-\gamma_2)} p^{\gamma_1} q^{\gamma_2}$ ταυτίζοντας τον graded χώρο και τις τυπικές σειρές.

Επεκτείνουμε τον ορισμό των ψ^i στις τυπικές σειρές $W \in R(\mathbb{M})[[p,q]]$, ορίζοντας $\psi^i(p) = p^i, \psi^i(q) = q^i$ και γενικά

$$\psi^i(\sum_{(\gamma_1,\gamma_2)\in\mathbb{N}^2} W_{(-\gamma_1,-\gamma_2)} p^{\gamma_1} q^{\gamma_2}) = \sum_{(\gamma_1,\gamma_2)\in\mathbb{N}^2} \psi^i(W_{(-\gamma_1,-\gamma_2)}) p^{i\gamma_1} q^{i\gamma_2}.$$

Εφαρμόζουμε τώρα τους παραπάνω τύπους στην αρχική μας σχέση $\Lambda(E) = H(E)$ από την οποία πήραμε

$$p^{-1}\Lambda(\sum_{m>0,n\in\mathbb{Z}} V_{mn} p^m q^n) = \sum_m V_m p^m - \sum_n V_n q^n.$$

Έχουμε:

(i) $\Lambda(E) \cong exp(-\sum_{i>0} \psi^i(E)/i)$ άρα

$$\Lambda(\sum_{m>0,n\in\mathbb{Z}} V_{mn} p^m q^n) \cong exp(-\sum_{i>0} \psi^i(\sum_{m>0,n\in\mathbb{Z}} V_{mn} p^m q^n)).$$

(ii) Από την

$$\psi^i(\sum_{(\gamma_1,\gamma_2)\in\mathbb{N}^2} W_{(-\gamma_1,-\gamma_2)} p^{\gamma_1} q^{\gamma_2}) = \sum_{(\gamma_1,\gamma_2)\in\mathbb{N}^2} \psi^i(W_{(-\gamma_1,-\gamma_2)}) p^{i\gamma_1} q^{i\gamma_2}$$

έχουμε ότι

$$exp(-\sum_{i>0} \psi^i(\sum_{m>0,n\in\mathbb{Z}} V_{mn} p^m q^n)) = exp(-\sum_{i>0} \sum_{m>0,n\in\mathbb{Z}} \psi^i(V_{mn}) p^{im} q^{in}/i).$$

(iii) Παίρνοντας τώρα και στα δύο μέλη το ίχνος

$$exp(-\sum_{i>0} \sum_{m>0,n\in\mathbb{Z}} Tr(g|\psi^i(V_{mn})) p^{im} q^{in}) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} Tr(g|V_m) p^m - \sum_{n\in\mathbb{Z}} Tr(g|V_n) q^n$$

και από την σχέση για τον ψ^i $Tr(g|\psi^i(U)) = Tr(g^i|U), g \in G$ παίρνουμε

$$exp(-\sum_{i>0} \sum_{m>0,n\in\mathbb{Z}} Tr(g^i|V_{mn}) p^{im} q^{in}) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} Tr(g|V_m) p^m - \sum_{n\in\mathbb{Z}} Tr(g|V_n) q^n.$$

Και τελικά, προέκυψαν οι σειρές Thompson-McKay $T_g(q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} Tr(g|V_n) q^n$ που τόσο επιθυμούσαμε!

Αυτές οι σχέσεις μεταξύ των συντελεστών των συναρτήσεων $\sum_{n\in\mathbb{Z}} Tr(g|V_n) q^n$ είναι οι ίδιες με αυτές στην εικασία του Norton που θα πρέπει να ισχύουν για τις modular functions που σχετίζονται με στοιχεία της monster, των Conway, Norton.

Η σχέση
(5.4)
$$p^{-1}exp(-\sum_{i>0}\sum_{m>0,n\in\mathbb{Z}} Tr(g^i|V_{mn})p^{im}q^{in}) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} Tr(g|V_m)p^m - \sum_{n\in\mathbb{Z}} Tr(g|V_n)q^n$$

συνεπάγεται ότι οι συναρτήσεις $T_g(q)$ είναι completely replicable, μιας και ο ορισμός των completely replicable συναρτήσεων μας δίνει ισοδύναμη ταυτότητα με την παραπάνω. Η εικασία του Norton ότι αυτές οι modular functions είναι completely replicable απεδείχθει από τον Koike.

Θα χρησιμοποιήσουμε αυτό το γεγονός για να δείξουμε ότι οι συναρτήσεις $T_g(m) = \sum_m Tr(g|V_m)q^m$ είναι αυτές οι modular functions.

5.7 Ολοκλήρωση της απόδειξης

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.1, δηλαδή πως η monster vertex άλγεβρα $V^\natural$ ικανοποιεί τις εικασίες των Conway και Norton [13] και πως οι σειρές Thompson στοιχείων της monster $\mathbb{M}$ είναι Hauptmoduls, αρκεί να δείξουμε ότι η ταυτότητα (5.4) συνεπάγεται πως οι σειρές Thompson προσδιορίζονται από τους πρώτους 5 συντελεστές τους $c_g(i)$, $1 \leq i \leq 5$ και μετά να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός πως τα Hauptmoduls στο [[13], πίνακας 2] ικανοποιούν τις ίδιες ταυτότητες και έχουν τους ίδιους πέντε πρώτους συντελεστές.

Οι συντελεστές $c_g(n) = \mathrm{Tr}(g|V_n)$ των σειρών Thompson στα στοιχεία της monster ικανοποιούν την σχέση (5.4). Αν συγκρίνουμε τους συντελεστές των p^2 και p^4 και στα δύο μέλη της Thompson, μετά από μερικές πράξεις βρίσκουμε ότι οι συντελεστες $c_g(i)$ ικανοποιούν τις ακόλουθες αναδρομικές σχέσεις για $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}
c_g(4k) &= c_g(2k+1) + (c_g(k)^2 - c_{g^2}(k))/2 + \sum_{1\leq j<k} c_g(j)c_g(2k-j), \\
c_g(4k+1) &= c_g(2k+3) - c_g(2)c_g(2k) + (c_g(2k)^2 + c_{g^2}(2k))/2 \\
&+ (c_g(k+1)^2 - c_{g^2}(k+1))/2 + \sum_{1\leq j\leq k} c_g(j)c_g(2k-j+2) \\
&+ \sum_{1\leq j<k} c_{g^2}(j)c_g(4k-4j) + \sum_{1\leq j<2k} (-1)^j c_g(j)c_g(4k-j), \\
c_g(4k+2) &= c_g(2k+2) + \sum_{1\leq j\leq k} c_g(j)c_g(2k-j+1), \\
c_g(4k+3) &= c_g(2k+4) - c_g(2)c_g(2k+1) - (c_g(2k+1)^2 - c_{g^2}(2k+1))/2 \\
&+ \sum_{1\leq j\leq k+1} c_g(j)c_g(2k-j+3) + \sum_{1\leq j\leq k} c_{g^2}(j)c_g(4k-4j+2) \\
&+ \sum_{1\leq j\leq 2k} (-1)^j c_g(j)c_g(4k-j+2),
\end{aligned}$$

όπου $c_g(n) = \mathrm{Tr}(g|V_n)$, $c_{g^2}(n) = \mathrm{Tr}(g^2|V_n)$.

Συγκεκριμένα, αν $n = 4$ ή $n > 5$ τότε ο συντελεστής $c_g(n)$ προσδιορίζεται από τους συντελεστές $c_g(i)$ και $c_{g^2}(i)$ για $1 \leq i < n$, οπότε αν γνωρίζουμε όλους τους συντελεστές $c_g(n)$ για $n = 1$, 2, 3 και 5 και όλα τα στοιχεία g της ομάδας monster τότε, μπορούμε να λογαριάσουμε όλους τους συντελεστές $c_g(n)$.

(Ο συντελεστής $c_g(5)$ δεν προσδιορίζεται από τις αναδρομικές σχέσεις, γιατί αυτές εκφυλίζονται στη $c_g(5) = c_g(5)$). Οι σειρές Thompson ενός στοιχείου της monster δεν προσδιορίζονται από τους 5 πρώτους συντελεστες $c_g(i)$, $1 \leq i \leq 5$, αλλά από τους συντελεστές $c_{g^j}(i)$, $1 \leq i \leq 5$ των σειρών Thompson όλων των δυνάμεών τους g^j. Για παράδειγμα, οι σειρές Thompson των στοιχείων $60F$ και $93A$ (στον Άτλαντα [14]) έχουν τους ίδιους πέντε πρώτους συντελεστές $c_g(i)$, $1 \leq i \leq 5$. Ο Norton στο [39] έδειξε ότι κάθε completely replicable συνάρτηση $\sum a(n)q^n$ προσδιορίζεται από τους 12 συντελεστές της a_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 17, 19, 23$.)

Για την περίπτωση της ελλειπτικής modular συνάρτησης $j(q)$, όπου $g = 1$, αυτές οι αναδρομικές σχέσεις ανακαλύφθηκαν από τον Mahler [35].

Δεν θα χρησιμοποιήσουμε τις παραπάνω σχέσεις, παρά μόνο το γεγονός ότι οι συντελεστές για $n = 1$, 2, 3 και 5 προσδιορίζουν όλους τους συντελεστές.

Ο Norton [39] είδε και ο Koike [33] απέδειξε, πως οι modular συναρτήσεις, συναρτήσει των στοιχείων της monster στο [[13], πίνακας 2], επίσης ικανοποιούν την σχέση (5.3) (με το $\mathrm{Tr}(g|V_m)$ να αντικαθιστάται από τους συντελεστές των q^m της modular συνάρτησης που αντιστοιχεί στα στοιχεία g) και γι΄ αυτό, επίσης ικανοποιούν τις παραπάνω αναδρομικές σχέσεις. Έτσι, για να αποδείξουμε ότι οι σειρές Thompson των στοιχείων της monster είναι αυτές οι modular συναρτήσεις, αρκεί να ελέγξουμε ότι οι συντελετές των q^i, $i \leq 5$ κάθε συνάρτησης είναι οι ίδιοι.

Οι συντελεστές των q^i, $i \leq 5$ κάθε modular συνάρτησης, βρίσκονται στην εργασία των Conway και Norton [13] και ορίζουν αναπαραστάσεις της monster, οι οποίες αναλύονται κατά πως αναφέραμε στο τέλος του Κεφαλαίου 3. Μπορούμε να λογαριασουμε τους συντελεστές $c_g(i)$, $1 \leq i \leq 5$ των σειρών Thompson στα στοιχεία της monster, ως εξής:
Γνωρίζοντας τους συντελεστές $c_g(i)$, $1 \leq i \leq 5$ των σειρών Thompson είναι ισοδύναμο με το να ξέρουμε πώς οι αναπαραστάσεις $V_i, 1 \leq i \leq 5$ της monster αναλύονται σε ανάγωγες αναπαραστάσεις της monster. Οι μόνες ανάγωγες αναπαραστάσεις της monster με διάσταση το πολύ αυτή του V_5, είναι οι πρώτες επτά, με χαρακτήρες χ_i, $1 \leq i \leq 7$ (κατα τον συμβολισμό του Ατλαντα [14]). Γι΄ αυτό, μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές $c_g(i)$, $1 \leq i \leq 5$ τών σειρών Thompson, όλων των στοιχείων της monster με την προϋπόθεση πως μπορούμε να βρούμε επτά στοιχεία g_j, $1 \leq j \leq 7$ της monster, για τα οποία μπορούμε να λογαριάσουμε αυτούς τους συντελεστές και τέτοια ώστε ο πίνακας $\chi_i(g_j)$, $1 \leq i, j \leq 7$ να είναι nonsingular, επειδή αυτός προσδιορίζει την διάσπαση των V_i, $1 \leq i \leq 5$ σε ανάγωγες αναπαραστάσεις της monster.

Στο βιβλίο τους [17], οι Frenkel, Lepowsky, Meurman, δίνουν έναν ακριβή τύπο για τις σειρές Thompson οποιουδήποτε στοιχείου που ανήκει στον κεντροποιητή μιας involution τύπου 2B, της monster. Τα στοιχεία περιττής τάξης, της $2^{1+24}.Co_1$ αντιστοιχούν στα στοιχεία περιττής τάξης της ομάδας αυτομορφισμών του Leech lattice Λ, $2.Co_1$. Ο τύπος των Frenkel, Lepowsky και Meurman είναι ιδιαίτερα εύκολος στον υπολογισμό, αν οι αντίστοιχοι αυτομορφισμοί του Leech lattice είναι περιττής τάξης και δε σταθεροποιούν μη-μηδενικά διανύσματα:
(5.5)
$$2\sum_n \mathrm{Tr}(g|V_n)q^n = 1/\eta_g(q) + \eta_g(q)/\eta_g(q^2) + \eta_g(q)/\eta_g(q^{1/2}) + \eta_g(q)/\eta_g(-q^{1/2})$$

όπου $\eta_g(q)$ είναι η ήτα συνάρτηση των g που δρούν στο Leech lattice και ισούται με $\eta(\epsilon_1 q)\ldots\eta(\epsilon_{24}q)$ αν g έχουν ιδιοτιμές $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{24}$ στον διανυσματικό χώρο $\Lambda \otimes \mathbb{R}$, όπου $\eta(q) = q^{1/24}\prod_{n>0}(1-q^n)$. Αν θέσουμε $f(\tau) = 1/\eta_g(q)$ (όπου $q = e^{2\pi i\tau}$), τότε $f(\tau) - f(0)$ είναι η modular συνάρτηση γένους 0 που οι Conway και Norton αντιστοιχίζουν στο στοιχείο g της monster στο [13], πίνακας 2. Οι συντελεστές στο δεξί μέρος του παραπάνω τύπου, είναι εύκολο να υπολογιστούν ακριβώς και μπορούμε να ελέγξουμε ότι οι συντελεστές των q^i για $i \leq 5$ είναι ίσοι με αυτούς της modular συνάρτησης $f(\tau) - f(0)$. (Το δεξί μέρος της (5.5) και η $f(\tau) - f(0)$ είναι ίσες, όπως μπορούμε να δούμε παρατηρώντας πως το δεξί μέρος της (5.5) είναι $f(\tau) + T_2 f(\tau)/f(\tau)$, όπου T_2 είναι ένας Hecke τελεστής.)

Για τα επτά στοιχεία μας g_j της monster, διαλέγουμε ένα στοιχείο g_1 από τις κλάσεις συζυγίας 2B (για τις οποίες οι Frenkel, Lepowsky και Meurman υπολόγισαν ακριβώς τις σειρές Thompson) και 6 ακόμα στοιχεία g_i της monster που αντιστοιχούν σε περιττής τάξης αυτομορφισμούς του Leech lattice με κανένα σταθεροποιημένο μη-μηδενικό διάνυσμα, τέτοια ώστε η ορίζουσα του 7×7 πίνακα $\chi_i(g_j)$ να είναι μη-μηδενική. Ένα σύνολο 6 στοιχείων που ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες, είναι αυτά που είναι τύπου $3B, 5B, 7B, 9B, 13B, 15D$ στην monster (κατά συμβολισμό Άτλαντα [14]) και αντιστοιχούν σε στοιχεία στις κλάσεις συζυγίας $3A, 5A, 7A, 9A, 13A$, και $15C$ της Co_1. Η ορίζουσα του πίνακα $\chi_i(g_j)$ είναι $35672555520 = 2^{22}3^5 5^1 7^1$, η οποία είναι μη μηδενική. Οι modular ομάδες που αντιστοιχούν σε αυτά τα στοιχεία της monster είναι: $\Gamma_0(3)$, $\Gamma_0(5)$, $\Gamma_0(7)$, $\Gamma_0(9)$, $\Gamma_0(13)$, και $\binom{3,0}{0,1}^{-1}\Gamma_0(5)\binom{3,0}{0,1}$. (Είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσουμε τουλάχιστον ένα στοιχείο g_i άρτιας τάξης, επειδή οι χαρακτήρες των επτά πρώτων αναπαραστάσεων της monster είναι γραμμικά εξαρτημένοι όταν περιορίζονται σε στοιχεία περιττής τάξης.)

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το παραπάνω για να επαληθεύσουμε πως οι αναπαραστάσεις V_1, V_2, V_3 και V_5 της monster αναλύονται κατά τον τρόπο που είδαμε στο κεφ. 3 και αυτό συνεπάγεται πως οι αριθμοί $\mathrm{Tr}(g|V_n)$ είναι ίσοι με τους συντελεστές των αντίστοιχων modular συναρτήσεων στο [13], για $n = 1, 2, 3$ και 5 και γι΄ αυτό για όλα τα n, μέσω των αναδρομικών σχέσεων που είδαμε. Και αυτό αλοκληρώνει την επαλήθευση πως οι συναρτήσεις Thompson $\sum_n \mathrm{Tr}(g|V_n)q^n$ είναι modular συναρτήσεις γένους 0 και αποδεικνύει το Θεώρημα 5.1.1.

Παράρτημα Α΄

lattices

Ένα lattice L είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο ελεύθερο $\mathbb{Z} - module$ με μια ακέραιων τιμών διγραμμική μορφή, που γράφεται (x, y) για x και y στο L. Το *είδος ενός lattice είναι άρτιο (ή II) αν η νόρμα* $x^2 = (x, x)$ *οποιουδήποτε στοιχείου* x *του* L *είναι άρτια (αν η quadratic μορφή* $q(x) = \frac{1}{2}(x, x)$ *παίρνει μόνο ακέραιες τιμές) και περιττή (ή I) διαφορετικά. Αν το* L *είναι περιττό, τότε τα διανύσματα στο* L *με άρτια νόρμα, σχηματίζουν ένα άρτιο υπολattice με index 2 στο* L.

Η υπογραφή (signature) ενός lattice L *είναι η υπογραφή του διανυσματικού χώρου* $L \otimes \mathbb{R}$ *εφοδιασμένου με μια φυσική* $\mathbb{R}$*-τιμών διγραμμική μορφή. Η υπογραφή συμβολίζεται με* (m, n)*, όπου* m *είναι η διάσταση του μέγιστου positive definite υπόχωρου του* $L \otimes \mathbb{R}$ *και* n *είναι η διάσταση του μέγιστου negative definite υπόχωρου. Αν η υπογραφή είναι ίση με* $(1, n)$*, το lattice λέγεται Lorentzian. Έπίσης, ορίζουμε* $\mathrm{sgn}(L) = m - n$ *αν το lattice έχει υπογραφή* (m, n).

Αν η διάσταση ενός lattice είναι αρκετά μικρό, συνηθίζεται να γράφουμετον πίνακα που παριστά την quadratic μορφή ως συμβολισμό για το lattice. Για παράδειγμα, το $\binom{0\,1}{1\,0}$ *συμβολίζει το lattice* $\mathbb{Z}^2$*, εφοδιασμένο με την διγραμμική μορφή* $(x, y)^2 = \binom{x}{y}^T \binom{0\,1}{1\,0} \binom{x}{y} = 2xy$

Το L *λέγεται positive definite, Lorentzian, nonsingular και τα λοιπά, αν ο πραγματικός διανυσματικός χώρος* $L \otimes \mathbb{R}$ *είναι.*

Ένα lattice λέγεται αδιάσπαστο (indecomposable), αν δεν γράφεται ως ευθύ άθροισμα δύο μη μηδενικών υπολattices. Κάθε definite lattice είναι το ευθύ άθροισμα των αδιάσπαστων υποsublattices του. Συγκεκριμένα, κάθε positive definite lattice L *μπορεί να γραφτεί μοναδικά ως* $L = L_1 \oplus I^n$ *όπου το* L_1 *δεν έχει διανύσματα με νόρμα 1 και* I *είναι το μονοδιάστατο lattice που παράγεται από ένα διάνυσμα νόρμας 1.*

Αν L *είναι ένα lattice τότε το* L' *συμβολίζει το δυικό του στο* $L \otimes \mathbb{R}$*, με άλλα λόγια, τα διανύσματα του* $L \otimes \mathbb{R}$ *που έχουν ακέραιο εσωτερικό γινόμενο με όλα τα στοιχεία του* L.

Το L' *περιέχει το* L *και αν το* L *είναι nonsingular τότε το πηλίκο* L'/L *είναι μια πεπερασμένη αβελιανή ομάδα της οποίας η τάξη λέγεται η ορίζουσα (determinant) του* L*. (Αν το* L *είναι singular λέμε ότι έχει ορίζουσα 0.) Η ρητών τιμών quadratic μορφή στο* L' *δίνει μια quadratic μορφή στο* L'/L *που ορίζεται* $mod 1$ *αν* L *είναι περιττό και* $mod 2$ *αν* L *είναι άρτιο. Το* L *λέγεται unimodular, bimodular, ή trimodular αν η ορίζουσα είναι 1, 2 ή 3.*

Άρτια unimodular lattices δοσμένης υπογραφής και διάστασης, υπάρχουν αν *και μόνα αν υπάρχει πραγματικός διανυσματικός χώρος με αυτήν την υπογραφή και διάσταση και η υπογραφή διαιρείται με το 8. Κάθε δύο indefinite unimodular lattices ίδιου τύπου, διάστασης και υπογραφής είναι ισόμορφα. Τα* $I_{m,n}$ *και* $II_{m,n}$ $(m \geq 1, n \geq 1)$ *είναι τα unimodular lattices διάστασης* $m+n$*, υπογραφής* $m-n$*και τύπου* I *ή* II*.*

Ένα διάνυσμα v *σε ένα lattice* L *λέγεται πρωταρχικό αν το* v/n *δεν είναι στο* L *για κάθε* $n > 1$*. Μία ρίζα ενός lattice* L *είναι πρωταρχικό διάνυσμα* r *του* L *τέτοιο ώστε, ανακλάσεις στο υπερεπίπεδο* $r^{\perp}$ *να απεικονίζουν το* L *στον εαυτό του. Αυτή η ανάκλαση απεικονίζει το* $v \in L$ *στο* $v - 2r(v,r)/(r,r)$*. Κάθε διάνυσμα* r *του* L *μόρμας 1 ή 2 είναι μια ρίζα και σε αυτές τις περιπτώσεις, η ανάκλαση στο* $r^{\perp}$ *φιξάρει όλα τα στοιχεία του* L'/L*. Συνήθως λέμε 'ρίζα' εννοώντας 'ρίζα νόρμας 2'. Ένα lattice λέμε πως έχει πολλές ρίζες αν οι ρίζες παράγουν τον διανυσματικό χώρο* $L \otimes \mathbb{R}$*.*

Αν το L *είναι unimodular τότε υπάρχει μοναδικό στοιχείο* c *στο* $L/2L$ *τέτοιο ώστε* $(c,v) \equiv v^2 \bmod 2L$ *για όλα τα* v *στο* L*. Το* c *ή οποιαδήποτε αντίστροφη εικόνα του* c *στο* L *λέγεται ένα χαρακτηριστικό διάνυσμα του* L *και η νόρμα του είναι congruent με την υπογραφή του* $L \bmod 8$*. (Σημείωση: το χαρακτηριστικό διάνυσμα λέγεται και parity διάνυσμα.)*

Παράρτημα Β΄

Ο Τοπολογικός Χώρος $\mathbb{H}^*/\Gamma$

Η Γ είναι μία διακριτή υποομάδα της $SL_2(\mathbb{R})$ και με $\mathbb{H}^*$, συμβολίζουμε:

$$\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \cup \{\textit{cusps του } \Gamma\}.$$

Προφανώς $\mathbb{H}^* = \mathbb{H}$ αν και μόνον αν η Γ δεν έχει cusps[1]. *Παρατηρούμε ότι η Γ δρα στο σύνολο $\mathbb{H}^*$ και έτσι μπορούμε να ορίσουμε τον χώρο πηλίκο $\mathbb{H}^*/\Gamma$. Σε επόμενη παράγραφο, θα δώσουμε δομή επιφάνειας Riemann στον $\mathbb{H}^*/\Gamma$ και για τον λόγο αυτό ορίζουμε μία τοπολογία στον $\mathbb{H}^*$:*

- *Αν $z \in \mathbb{H}$, σαν μέλη της τοπολογίας μας παίρνουμε τις ανοικτές γειτονιές του z που ανήκουν στην συνήθη τοπολογία του $\mathbb{H}$,*
- *Για κάθε cusp $s \neq \infty$, επιλέγω σαν μέλη της τοπολογίας μας να είναι οι γειτονιές του s που έχουν μορφή:*

$$\{s\} \cup \{ \textit{ το εσωτερικό ενός κύκλου στον } \mathbb{H},$$

$$\textit{ο οποίος είναι εφαπτόμενος στον πραγματικό άξονα στο σημείο } s\},$$

[1] Έστω $\sigma \in SL_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_{2\times 2}\}$. Τότε:

(i) το σ είναι παραβολικό αν και μόνον αν έχει μοναδικό σταθερό σημείο στο $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ και κανένα σταθερό σημείο στον $\mathbb{H}$,

(ii) το σ είναι ελλειπτικό αν και μόνον αν έχει ένα σταθερό σημείο $z \in \mathbb{H}$ και κανένα σταθερό σημείο στον $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$,

(iii) το σ είναι υπερβολικό αν και μόνον αν έχει δύο (διαφορετικά) σταθερά σημεία στο $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ και κανένα στον $\mathbb{H}$.

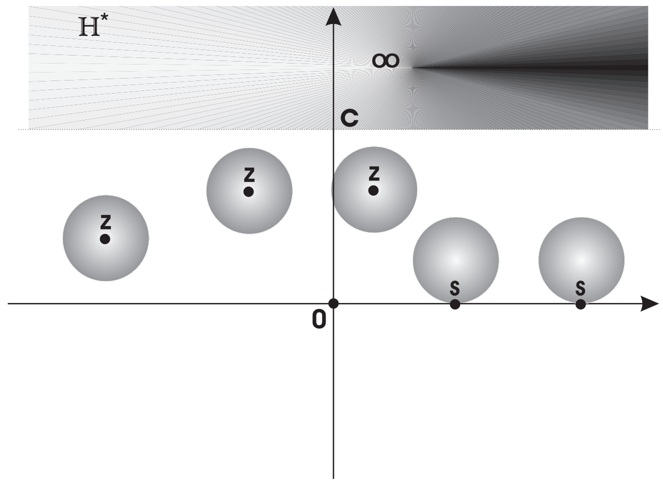
Πόρισμα Β΄.0.1. *Έστω $\sigma \in SL_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_{2\times 2}\}$ και $m \in \mathbb{Z}$, με $\sigma^m \neq \pm I_{2\times 2}$. Τότε το σ είναι παραβολικό (αντίστοιχα ελλειπτικό, υπερβολικό) αν και μόνον αν το σ^m είναι παραβολικό (αντίστοιχα, ελλειπτικό, υπερβολικό).*

Έστω τώρα Γ να είναι μία διακριτή υποομάδα του $SL_2(\mathbb{R})$. Ένα σημείο $z \in \mathbb{H}$ ονομάζεται *ελλειπτικό σταθερό σημείο* της Γ αν υπάρχει ένα ελλειπτικό στοιχείο $\sigma \in \Gamma$ τέτοιο ώστε $\sigma(z) = z$. Όμοια ένα σημείο $s \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, ονομάζεται *cusp* του Γ αν υπάρχει υπάρχει παραβολικό στοιχείο $\tau \in \Gamma$, τέτοιο ώστε $\tau(s) = s$. Αν w είναι ένα cusp του Γ (αντίστοιχα ένα ελλειπτικό σταθερό σημείο), και $\gamma \in \Gamma$, τότε και το $\gamma(w)$ είναι επίσης cusp (ελλειπτικό σταθερό σημείο) του Γ.

- *Αν το $s = \infty$ είναι cusp, τότε επιλέγουμε για ανοικτές γειτονιές του απείρου, τα σύνολα:*

$$\{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{H} : \; Im(z) > c\}, \tag{Β'.1}$$

για κάθε $c \in \mathbb{R}^+$.



Σχήμα Β'.1: Μία τοπολογία για τον $\mathbb{H}^*$.

Η παραπάνω τοπολογία ορίζει μία Hausdorff τοπολογία στον $\mathbb{H}^*$, όμως ο $\mathbb{H}^*$ δεν είναι τοπικά συμπαγής εκτός και αν $\mathbb{H} = \mathbb{H}^*$.

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι το πηλίκο $\mathbb{H}^*/\Gamma$ είναι ένας Hausdorff και τοπικά συμπαγής τοπολογικός χώρος.

Πολύ συνοπτικά:

Ας δούμε τώρα την τοπολογία πηλίκο του $\mathbb{H}^*/\Gamma$. Ένα X είναι ανοικτό του $\mathbb{H}^*/\Gamma$ ανν:

$$\{X \subset \mathbb{H}^*/\Gamma : \pi^{-1}(X) \text{ είναι ανοικτό του } \mathbb{H}^*\},$$

με $\pi : \mathbb{H}^* \to \mathbb{H}^*/\Gamma$, να είναι η φυσική προβολή.

Θεώρημα Β'.0.2. *Ο χώρος πηλίκο $\mathbb{H}^*/\Gamma$ με την παραπάνω τοπολογία είναι ένας Hausdorff τοπολογικός χώρος.*

Πρόταση Β'.0.3. *Ο χώρος πηλίκο $\mathbb{H}^*/\Gamma$ είναι ένας τοπικά συμπαγής τοπολογικός χώρος.*

Πρόταση Β'.0.4. *Αν Γ, Γ' είναι δύο commensurable διακριτές υποομάδες της $SL_2(\mathbb{R})$, τότε ο $\mathbb{H}^*/\Gamma$ είναι συμπαγής ανν ο $\mathbb{H}^*/\Gamma'$ είναι συμπαγής[2].*

[2] για την απόδειξη βλέπε [44], πρόταση 1.31, σελίδα 13.

Παράρτημα Γ′

Ένα μυστηριώδες μήνυμα...

From: mckayj@Math.Princeton.EDU
Date: Mon 10 Mar 2008 07:51:16 GMT+01:00
To: lieven.lebruyn@ua.ac.be

The secret of Monstrous Moonshine and the universe.

Let $j(q) = 1/q + 744 + sum(c[k] * q^k, k >= 1)$ *be the Fourier expansion at* ∞ *of the elliptic modular function.*

Compute $sum(c[k]^2, k = 1..24) modulo 70$

Background: $w_2 5$ *of page x of the preface of Conway/Sloane book SPLAG*

Also in Chapter 27:
The automorphism group of the 26-dimensional Lorentzian lattice
The Weyl vector $w_2 5$ *of section 2.*

Jm

Subject: Re: mystery message
From: lieven.lebruyn@ua.ac.be
Date: Fri 21 Mar 2008 12:37:47 GMT+01:00
To: mckayj@Math.Princeton.EDU

i forced myself to recheck the calculations i did once after receiving your mail. here are the partial sums of squares of j-coefficients modulo 70 for the first 100 of them

[0, 46, 26, 16, 32, 62, 38, 3, 53, 13, 63, 39, 29, 59, 45, 10, 60, 40, 30, 10, 40, 26, 6, 56, 42, 22, 68, 48, 48, 64, 64, 45, 25, 15, 31, 31, 67, 47, 7, 21, 51, 31, 31, 61, 21, 1, 17, 12, 2, 16, 46, 60, 20, 10, 54, 49, 63, 63, 53, 29, 29, 23, 13, 13, 27, 27, 17, 7, 67, 43, 43, 52, 42, 42, 16, 6, 42, 42, 42, 36, 66, 32, 62, 52, 66, 66, 0, 25, 5, 5, 35, 21, 11,

11, 57, 57, 61, 41, 41]

term 24 is 42...
i still fail to see the significance of it all.
atb :: lieven.

From: mckay@encs.concordia.ca
Subject: Re: mystery message
Date: Sat 22 Mar 2008 02:33:19 GMT+01:00
To: lieven.lebruyn@ua.ac.be

I apologize for wasting your time. It is a joke depending, it seems, on one's cultural background.

See the google entry:

Answer to Life, the Universe, and Everything

Best, John McKay

Ευρετήριο

Βιβλιογραφία

[1] R. E. Borcherds, *Monstrous Moonshine and monstrous Lie superalgebras, Invent. Math. 405-444 (1992).*

[2] R. E. Borcherds, *Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the monster. Proc. Natl. Acad. Sci. USA. Vol. 83 (1986) 3068-3071.*

[3] R. E. Borcherds, *Generalized Kac-Moody algebras. J. Algebra 115 (1988), 501–512.*

[4] R. E. Borcherds, *Central extensions of generalized Kac-Moody algebras. J. Alg. 140, 330-335 (1991).*

[5] R. E. Borcherds, *Lattices like the Leech lattice, J. Algebra, vol 130, No. 1, April 1990, 219-234.*

[6] R. E. Borcherds, J. H. Conway, L. Queen, N. J. A. Sloane, *A monster Lie algebra?, Adv. Math. 53 (1984) 75-79.*

[7] R. E. Borcherds, *The monster Lie algebra, Adv. Math. Vol. 83, No. 1, Sept. 1990.*

[8] R. E. Borcherds, *Vertex algebras, (1997)*

[9] R. E. Borcherds, *Sporadic groups and string theory, (1992)*

[10] H. Cartan, S. Eilenberg, *Homological algebra, Princeton University Press 1956.*

[11] J. H. Conway, *The automorphism group of the 26 dimensional even Lorentzian lattice. J. Algebra 80 (1983) 159-163.*

[12] J. H. Conway, N. J. A. Sloane. *Sphere packings, lattices and groups. Springer-Verlag New York 1988, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 290.*

[13] J. H. Conway, S. Norton, *Monstrous moonshine, Bull. London. Math. Soc. 11 (1979) 308-339.*

[14] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson, *Atlas of finite groups, Clarendon Press, Oxford, 1985.*

[15] C. J. Cummins, *On conjugacy classes of congruence subgroups of* $PSL(2,\mathbb{R})$, *(2009)*

[16] *I. B. Frenkel, Representations of Kac-Moody algebras and dual resonance models, Applications of group theory in theoretical physics, Lect. Appl. Math. 21, A.M.S. (1985), p.325-353.*

[17] *I. B. Frenkel, J. Lepowsky, A. Meurman, Vertex operator algebras and the monster, Academic press 1988.*

[18] *I. B. Frenkel, J. Lepowsky, A. Meurman, A natural representation of the Fischer-Griess monster with the modular function J as character, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 81 (1984), 3256-3260.*

[19] *I. B. Frenkel, Y-Z. Huang, J. Lepowsky, On axiomatic formulations of vertex operator algebras and modules, preprint.*

[20] *I. B. Frenkel, H. Garland, G. Zuckerman, Semi-infinite cohomology and string theory, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 83 (1986), 8442-8446.*

[21] *E. Frenkel, David Ben-Zvi, Vertex Algebras and Algebraic Curves, Mathematical Surveys and Monographs, Volume 88, A.M.S., 2004*

[22] *T. Gannon, The algebraic meaning of genus-zero, (2005)*

[23] *T. Gannon, Monstrous Moonshine and the Classification of CFT, (1999)*

[24] *T.Gannon, Monstous Moonshine: The first 25 years. Arxiv (2004)*

[25] *R.Gebert, Introduction to Vertex Algebras, Borcherds Algebras and the Monster Lie Algebra, (1993)*

[26] *P. Goddard and C. B. Thorn, Compatibility of the dual Pomeron with unitarity and the absence of ghosts in the dual resonance model, Phys. Lett., B 40, No. 2 (1972), 235-238.*

[27] *R. C. Gunning, Lectures on modular forms, Annals of mathematical studies, Princeton University Press, 1962.*

[28] *J.E.Humphreys, Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, Springer, 1972*

[29] *E. Jurisich, Borcherds' Proof of the Conway-Norton Conjectures, (2009)*

[30] *E. Jurisich, Generalized Kac-Moody algebras, free Lie algebras and the structure of the Monster Lie algebra, ()*

[31] *V. G. Kac, Infinite dimensional Lie algebras, third edition, Cambridge University Press, 1990.*

[32] *V.G.Kac, Vertex Algebras for Beginners, Un.Lect.S. Vol.10, A.M.S., (1996)*

[33] *M. Koike, On Replication Formula and Hecke Operators, Nagoya University preprint.*

[34] *B. Kostant, Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil theorem. Annals of Math. 74, 329-387 (1961).*

[35] *K. Mahler, On a class of non-linear functional equations connected with modular functions, J. Austral. Math. Soc. 22A, (1976), 65-118.*

[36] *A. I. Markushevich, Theory Of Functions Of A Complex Variable Volume I, Selected Russian Publications in The Mathematical Sciences, Prentice Hall, (1965).*

[37] *J. S. Milne, Modular Functions and Modular Forms, Courses Notes, www.jmilne.org/math (1997).*

[38] *James R. Munkres, Topology A First Course, Prentice Hall, (1975).*

[39] *S. P. Norton, More on moonshine, Computational group theory, Academic press, 1984, 185-193.*

[40] *S. P. Norton, Generalized Moonshine, Proc. Symp. Pure Math. 47 (1987) p. 208-209.*

[41] *J. P. Serre, A course in arithmetic. Graduate texts in mathematics 7, Springer-Verlag, 1973.*

[42] *Shimura Goro, Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions, Princeton University Press, (1971), (Chapter I).*

[43] *J. G. Thompson, A finiteness theorem for subgroups of* $PSL(2,\mathbb{R})$ *which are commensurable with* $PSL(2,\mathbb{Z})$*. Proc. Symp. Pure Math. 37 (1979) p. 533-555.*

[44] *Shimura Goro, Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions, Princeton University Press, (1971), (Chapter I).*

[45] *Joseph H. Silerman, The Arithmetic of Elliptic Curves, Graduate Texts in Mathematics, Springer, (1991).*

[46] *Joseph H. Silerman, Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves, Graduate Texts in Mathematics, Springer, (1994).*

[47] *M. Wakimoto, Infinite-Dimensional Lie Algebras, Math. Mon. Vol 195, A.M.S., (2000)*

[48] *S. H. Weintraub, Representation Teory of Finite Groups: Algebra and Arithmetic, Graduate Studies in Mathematics Vol. 59, A.M.S. 2000*

[49] *Γ. Αντωνιάδης, Θεωρία Αναπαραστάσεων Πεπερασμένων Ομάδων*

[50] *Καρανικολόπουλος Σωτήρης, Uniformization Ελλειπτικών Καμπυλών, Σάμος, 2005*

[51] *R. Churcill - J. Brown, Μιγαδικές Συναρτήσεις και Εφαρμογές, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, δεύτερη έκδοση, (1998).*

[52] *Wikipedia the free encyclopedia, http://en.wikipedia.org*

[53] *lieven le bruyn's blog on noncommutative geometry, www.neverendingbooks.org*

[54] *SpringerLink, Encyclopaedia of Mathematics, http://eom.springer.de*

[55] *Wolfram Mathworld, http://mathworld.wolfram.com*