

“Ροή Ρευστού σε Πορώδη Υλικά & το Πρόβλημα του Φράγματος”

Η Διπλωματική Εργασία
παρουσιάστηκε ενώπιον
του Διδακτικού Προσωπικού του
Πανεπιστημίου Αιγαίου

Για την Εκπλήρωση
των Απαιτήσεων για το Δίπλωμα Ειδίκευσης του
Μεταπτυχιακού Προγράμματος
“ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ
ΚΑΙ ΣΤΙΣ ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ”
Του Τμήματος Μαθηματικών
Της Σχολής Θετικών Επιστημών
Του Πανεπιστημίου Αιγαίου

ΧΡΥΣΑΝΘΗ ΜΑΓΓΙΝΑ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2008

Η ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΩΝ ΕΠΙΚΥΡΩΝΕΙ
ΤΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΤΗΣ ΜΑΓΓΙΝΑΣ ΧΡΥΣΑΝΘΗΣ:

ΝΙΚΟΛΟΠΟΥΛΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ, Επιβλέπων

Επίκουρος Καθηγητής

Ημερομηνία 5/11/2008

Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα

“ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ
ΚΑΙ ΣΤΙΣ ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ”

Τμήματος Μαθηματικών

Πανεπιστημίου Αιγαίου

ΧΑΤΖΗΝΙΚΗΤΑΣ ΑΓΑΠΗΤΟΣ, Μέλος

Επίκουρος Καθηγητής

Τμήματος Μαθηματικών

Πανεπιστημίου Αιγαίου

ΙΩΑΝΝΙΔΗΣ ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ, Μέλος

Λέκτορας

Τμήματος Μαθηματικών

Πανεπιστημίου Αιγαίου

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2008

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία μελετάμε τη ροή ρευστού σε πορώδη υλικά και μια εφαρμογή αυτής, το πρόβλημα του απλού ορθογωνίου φράγματος.

Τα φαινόμενα ροής ρευστών σε πορώδη υλικά είναι μια σημαντική πηγή προβλημάτων ελεύθερου συνόρου, και συχνά σχετίζονται με φαινόμενα διαρροών που απαντώνται στη φύση. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι και το πρόβλημα του απλού ορθογωνίου φράγματος.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε μία εισαγωγή στα προβλήματα ελεύθερου συνόρου, την εμπειρική σχέση για την ροή του νερού διαμέσου ενός πορώδους μέσου που ανέπτυξε το 1856, ο Γάλλος μηχανικός υδραυλικής ο Henry Darcy, γνωστή και ως νόμος του Darcy και τέλος τις εξισώσεις ροής που διέπουν το υπό μελέτη φαινόμενο.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζουμε τη κλασική μοντελοποίηση του προβλήματος του απλού ορθογωνίου φράγματος, τις συναρτήσεις ροής που προκύπτουν από αυτή, τη χρήση του μετασχηματισμού του Baiocchi στη μοντελοποίηση του προβλήματος και τέλος τη μεταβολική μορφή του προβλήματος.

Στο τρίτο κεφάλαιο ασχολούμαστε με μια προσεγγιστική αναλυτική λύση του προβλήματος του απλού ορθογωνίου φράγματος και συγκεκριμένα με τη προσέγγιση του Dupuit.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε μια εισαγωγή στις επαναληπτικές μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων, στην μέθοδο πεπερασμένων διαφορών, η οποία είναι μία μέθοδος κατάλληλη για επίλυση ελλειπτικού τύπου μερικών διαφορικών εξισώσεων και τέλος περιγράφουμε την αριθμητική επίλυση του προβλήματος του απλού ορθογωνίου φράγματος στη μορφή που παίρνει με χρήση του μετασχηματισμού Baiocchi.

Τέλος στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης του προβλήματος του απλού ορθογωνίου φράγματος, την οποία περιγράψαμε στο τέταρτο κεφάλαιο.

ΜΑΓΓΙΝΑ ΧΡΥΣΑΝΘΗ
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα
“Μαθηματική Μοντελοποίηση Στις Φυσικές Επιστήμες και
Στις Σύγχρονες Τεχνολογίες”
Τμήματος Μαθηματικών
Σχολή Θετικών επιστημών
Πανεπιστημίου Αιγαίου
© 2008

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ - ΑΦΙΕΡΩΣΕΙΣ

Θα ήθελα πρωτίστως να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Χρήστο Νικολόπουλο, Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου για την ευκαιρία που μου έδωσε, να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα. Χάρης στην απεριόριστη βοήθειά του, κατάφερα τόσο να κατανοήσω το θέμα, όσο και να φέρω εις πέρας την παρούσα διπλωματική εργασία.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής, τον κ. Αγαπητό Χατζηνικήτα, Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου και τον κ. Ευστράτιο Ιωαννίδη, Λέκτορα του ίδιου Τμήματος, για την τιμή που μου έκαναν, να διαθέσουν ένα σημαντικό μέρος του πολύτιμου χρόνου τους, για να μελετήσουν την εργασία.

Τέλος θα ήθελα να πω ένα μεγάλο ευχαριστώ στον αγαπημένο μου σύζυγο Χρήστο και στους αγαπημένους μου γονείς Σωτήρη και Σπυριδούλα για την αμέριστη αγάπη τους και συμπαράσταση που μου παρείχαν καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου. Τους αφιερώνω την διπλωματική μου εργασία ως ένα ελάχιστο δείγμα αγάπης και σεβασμού, υποσχόμενη ότι θα προσπαθήσω να ανταποκριθώ σε όλες τους τις προσδοκίες.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Κεφάλαιο 1ο

Εισαγωγή	7
1.1 Προβλήματα Ελεύθερου Συνόρου	7
1.2 Νόμος Darcy	8
1.3 Εξισώσεις Ροής	18

Κεφάλαιο 2ο

Μοντελοποίηση του προβλήματος το απλού ορθογωνίου φράγματος	25
2.1 Κλασσική μοντελοποίηση: φυσική παραγωγή	26
2.2 Συνάρτηση ροής	28
2.3 Μοντελοποίηση σε σταθερό κωρίο: Ο μετασχηματισμός Baiocchi	29
2.4 Μεταβολική μορφή του προβλήματος	34

Κεφάλαιο 3ο

Αναλυτική προσέγγιση του Dupuit	37
3.1 Προσέγγιση του Dupuit	37

Κεφάλαιο 4ο

Αριθμητική επίλυση του προβλήματος του απλού ορθογωνίου φράγματος	41
4.1 Επίλυση γραμμικών συστημάτων	41
4.1.1 Γενική επαναληπτική μέθοδος	42
4.1.2 Μέθοδος Jacobi	42
4.1.3 Μέθοδος Gauss – Seidel	45
4.2 Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών	47

4.3 Περιγραφή αριθμητικής επίλυσης του προβλήματος του απλού ορθογωνίου φράγματος.....	49
---	-----------

Κεφάλαιο 5ο

Αριθμητικά Αποτελέσματα	59
--------------------------------------	-----------

5.1 Μελέτη Περιπτώσεων.....	59
------------------------------------	-----------

5.2 Συγκρίσεις και συμπεράσματα.....	67
---	-----------

Βιβλιογραφία	68
---------------------------	-----------

Παραρτήματα

Παράρτημα Α: Προγράμματα	69
---------------------------------------	-----------

Παράρτημα Β: Πίνακες	78
-----------------------------------	-----------

Κεφάλαιο 1ο

Εισαγωγή

1.1 Προβλήματα Ελεύθερου Συνόρου

Τυπικά, ένα πρόβλημα ελεύθερου συνόρου αποτελείται από μία Μ.Δ.Ε. ελλειπτικού τύπου που ικανοποιείται μέσα σε ένα φραγμένο χωρίο μαζί με τις αναγκαίες συνοριακές συνθήκες. Ένα τμήμα του συνόρου ή και όλο το σύνορο, το ελεύθερο σύνορο, δεν είναι γνωστό και πρέπει να οριστεί ως μέρος της λύσης. Προκειμένου να καταστεί αυτό δυνατό, μια πρόσθετη συνθήκη πρέπει να οριστεί στο ελεύθερο σύνορο.

Τα φαινόμενα ροής ρευστών σε πορώδη υλικά είναι μια σημαντική πηγή προβλημάτων ελεύθερου συνόρου, και συχνά σχετίζονται με φαινόμενα διαρροών που απαντώνται στη φύση. Παραδείγματα τέτοιων φαινομένων είναι οι διαρροές που απαντώνται σε φράγματα, σε ανοικτούς δίαυλους όπως ποτάμια, κανάλια, λιμνούλες και αρδευτικά συστήματα ή μέσα σε πηγάδια. Ωστόσο, το πρακτικό ενδιαφέρον στα προβλήματα ελεύθερου συνόρου δεν σχετίζεται μόνο με φαινόμενα φυσικής διαρροής, αλλά εκτείνεται, για παράδειγμα και σε θέματα που σχετίζονται με τη φυσική πλάσματος, τους ημιαγωγούς, την ηλεκτροχημική μηχανική κ.τ.λ..

Μια κατηγορία προβλημάτων ελεύθερου συνόρου εμφανίζεται σε πορώδη ροή όταν το πορώδες υλικό καταλαμβάνεται από δύο υγρά που χωρίζονται από μία σαφή διεπιφάνεια, η οποία είναι το ελεύθερο σύνορο. Σε αυτή τη κατηγορία προβλημάτων συχνά μελετάμε διεπιφάνειες νερού / αέρα, οι οποίες είναι οι πλέον συνηθισμένες, αλλά και διεπιφάνειες νερού / ατμού, λαδιού / νερού, λαδιού / αερίου και αλμυρού νερού / γλυκού νερού κ.τ.λ. Η υπόθεση, ότι υπάρχει μία σαφής διεπιφάνεια, υποδηλώνει ότι η πορώδης ροή είναι κορεσμένη, δηλαδή κάθε συγκεκριμένο μέρος του πορώδους είτε είναι κορεσμένο από το ένα υγρό είτε δεν περιέχει καθόλου από αυτό, έτσι ώστε να υπάρχει σαφής διάκριση μεταξύ των δύο καταστάσεων ανάμεσα στο ελεύθερο σύνορο και σαφής καθορισμός ανάμεσα στις περιοχές που καταλαμβάνονται από τα διαφορετικά υγρά. Για παράδειγμα, σε μια κορεσμένη ροή νερού / αέρα οποιοδήποτε τμήμα του πορώδους μέσου είναι είτε υγρό είτε στεγνό. Η κατασκευή προβλημάτων ελεύθερου συνόρου πορώδων ροών μπορούν επομένως, να θεωρηθούν προσεγγίσεις φαινομένων που προκύπτουν από μερικώς κορεσμένες ροές στις οποίες το υγρό μπορεί να υπάρχει ανάμεσα στη μηδενική και τη μέγιστη τιμή, που αντιστοιχεί στον κορεσμό. Μερικές φορές, η σύγκριση ανάμεσα στη μαθηματική λύση (αναλυτική ή αριθμητική) ενός μοντέλου ελεύθερου συνόρου και τις λύσεις αντίστοιχων μοντέλων

που αναπαριστούν μερικώς κορεσμένες ροές καταδεικνύουν το εάν η υπόθεση κορεσμένης ροής δικαιολογείται.

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε τους βασικούς νόμους που διέπουν τα φαινόμενα ροής σε πορώδη υλικά.

1.2 Νόμος Darcy

Το 1856, ένας Γάλλος μηχανικός υδραυλικής ο Henry Darcy ανέπτυξε μία εμπειρική σχέση για την ροή του νερού διαμέσου ενός πορώδους μέσου. Βρήκε ότι η ειδική παροχή (specific discharge) v_x (μήκος/χρόνο) είναι απευθείας ανάλογη με την υδραυλική κλίση $\frac{\Delta h}{\Delta x}$, δηλαδή:

$$v_x \propto \frac{\Delta h}{\Delta x}, \quad (1.1)$$

όπου h = υδραυλική στάθμη (L) και είναι μέτρο της πίεσης του νερού.

Η υδραυλική στάθμη (h) είναι το απόλυτο υψόμετρο, ως προς ένα επίπεδο αφετηρίας, της στάθμης του υπόγειου νερού σε μια γεώτρηση ανορυγμένη σε ελεύθερο υδροφορέα.

Η εξίσωση (1.1) λοιπόν είναι μια καταστατική εξίσωση που προκύπτει με τον εξής εμπειρικό τρόπο: Έστω ότι έχουμε μια διάταξη όπως αυτή του σχήματος (1.1). Συγκεκριμένα σε αυτό το σχήμα (1.1) βλέπουμε τη σχηματική απεικόνιση του νόμου του Darcy. Έχουμε ότι σε έναν σωλήνα γεμάτο άμμο ή άλλο κατάλληλο πορώδες μέσο διπλασιάζοντας την υδραυλική κλίση $\frac{\Delta h}{\Delta x}$, βρίσκουμε ότι διπλασιάζεται και η ειδική απόδοση v_x . Άρα έχουμε ότι:

$$v_x \propto \frac{\Delta h}{\Delta x}.$$

Επιπλέον προκειμένου να είναι διαστατικά σωστή η εξίσωση (1.1) χρειάζεται έναν συντελεστή αναλογίας, οπότε η (1.1) γίνεται:

$$v_x = -K_x \frac{dh}{dx}, \quad (1.2)$$

όπου: v_x : Ειδική απόδοση κατά την x – διεύθυνση (LT^{-1}),

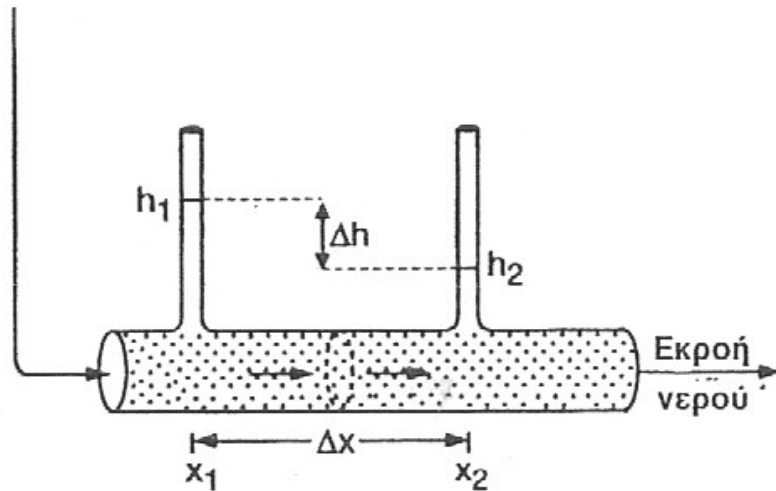
K_x : Κορεσμένη υδραυλική αγωγιμότητα κατά την x – διεύθυνση (LT^{-1}),

dh : η μεταβολή της στάθμης από το σημείο 1 στο σημείο 2 (L),

dx : η απόσταση μεταξύ των σημείων 1 και 2 (L),

$\frac{\Delta h}{\Delta x}$: η υδραυλική κλίση κατά την x – διεύθυνση (αδιάστατη).

προς τη δεξαμενή



$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{h_2 - h_1}{x_2 - x_1}$$

Σχήμα 1.1: Σχηματική απεικόνιση του νόμου Darcy για ροή διαμέσου ενός πορώδους μέσου.

Επίσης το αρνητικό πρόσημο είναι απαραίτητο στην εξίσωση (1.2) καθώς το νερό ρέει από το σημείο με υψηλό δυναμικό προς το χαμηλό. Για να επιτευχθεί λοιπόν θετική τιμή για το v_x απαιτείται αρνητική υδραυλική κλίση.

Η ειδική απόδοση v_x αναφέρεται πολλές φορές ως επιφανειακή ταχύτητα ή ταχύτητα Darcy. Έχει μονάδες ταχύτητας (LT^{-1}) αλλά δεν είναι πραγματική ταχύτητα με την οποία κινείται το νερό διαμέσου του υδροφόρου γιατί πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν ότι το νερό κινείται στα κενά, στους πόρους του υλικού και όχι σε όλο τον όγκο του. Μέτρο της πραγματικής ταχύτητας είναι η u_x όπου είναι ίση με την v_x διαιρεμένη με το πορώδες n (σε κορεσμένες συνθήκες):

$$u_x = \frac{v_x}{n} \quad \text{ή} \quad \frac{v_x}{n_e}, \quad (1.3)$$

όπου: u_x : πραγματική ταχύτητα (LT^{-1}),

v_x : ειδική παροχή (LT^{-1}),

n : πορώδες,

n_e : ενεργό πορώδες.

Το πορώδες (n) είναι η απορροφητικότητα ή τα διαθέσιμα κενά προς το συνολικό όγκο, δηλαδή έχουμε ότι $n = \frac{\text{όγκος κενών}}{\text{ολικό όγκο}}$, ενώ το ενεργό πορώδες (n_e) είναι η αποτελεσματική απορροφητικότητα ή τα ενεργά κενά (τα κενά που συνδέονται μεταξύ τους) προς το συνολικό όγκο, δηλαδή έχουμε ότι $n_e = \frac{\text{όγκος ενεργών κενών}}{\text{ολικό όγκο}}$.

Η πραγματική ταχύτητα u_x είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα Darcy v_x γιατί καθώς το νερό διέρχεται μέσα από διόδους, όσο πιο στενές είναι αυτές τόσο αναπτύσσει και μεγαλύτερη ταχύτητα (εξάλλου έχουμε ότι $0 < n < 1$ ή $0 < n_e < 1$). Σε συμπαγείς υδροφόρους το ενεργό πορώδες (όγκος των ενεργών κενών / ολικό όγκο) μπορεί να είναι μικρότερο από το ολικό (όγκος των κενών / ολικό όγκο) καθώς αντικατοπτρίζει τον όγκο των συνδεόμενων πόρων διαμέσου των οποίων κινείται το νερό.

Παράδειγμα 1.1: Ταχύτητα και Χρόνος Διαδρομής

Πιεζόμετρα τοποθετούνται ανά 100 μέτρα κατά μήκος μιας τομής σε φρεατικό υδροφόρο. Το πιεζόμετρο είναι ένας κατακόρυφος σωλήνας ο οποίος συνδέει ένα σημείο του πορώδους υλικού με την ατμόσφαιρα. Πρακτικά αυτό γίνεται με τη διάνοιξη μίας ερευνητικής γεώτρησης. Το πιεζόμετρο χρησιμοποιείται στην υδραυλική για την μέτρηση του της υδραυλικής στάθμης h .

Η ανάγνωση των υδραυλικών υψών σε σχέση με το επίπεδο της θάλασσας δίνει το πίνακα (1.1).

Ο φρεατικός υδροφόρος αποτελείται από λεπτή άμμος με πορώδες 0.33 και κορεσμένη υδραυλική αγωγιμότητα $0.001 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$. Θέλουμε να υπολογίσουμε την ειδική απόδοση, την πραγματική ταχύτητα και τον χρόνο ταξιδιού που κάνει το υπόγειο νερό για να μετακινηθεί από τη θέση A1 στη θέση A3 (πίνακας 1.1).

Πίνακας 1.1: Πίνακας τυπικών υδρογεωλογικών παραμέτρων για διαφορετικές μονάδες υδροφόρων και υλικών.

Υλικό	Πορώδες, N, %	Ειδική απόδοση, %	Υδραυλική αγωγιμότητα, K, cm s ⁻¹	Περατότητα, k, cm ²
<u>Χαλαρές αποθέσεις</u>				
Χαλίκι	25 – 35	25 – 35	1 – 100	10 ⁻⁵ – 10 ⁻³
Άμμος	30 – 45	25 – 40	10 ⁻⁴ – 10 ⁻¹	10 ⁻⁹ – 10 ⁻⁶
Πυλός	35 – 45	20 – 35	10 ⁻⁶ – 10 ⁻⁴	10 ⁻¹¹ – 10 ⁻⁹
Άργιλος	40 – 55	2 – 10	10 ⁻⁹ – 10 ⁻⁶	10 ⁻¹⁴ – 10 ⁻¹¹
<u>Πετρώματα</u>				
Καρστικός ασβεστόλιθος	15 – 40	10 – 35	10 ⁻⁴ – 10 ⁻¹	10 ⁻⁸ – 10 ⁻⁶
Ασβεστόλιθος μη καρστικός	5 – 15	2 – 10	10 ⁻⁶ – 10 ⁻⁴	10 ⁻¹¹ – 10 ⁻⁹
Ψαμμίτης	10 – 25	5 – 15	10 ⁻⁷ – 10 ⁻⁴	10 ⁻¹² – 10 ⁻⁹
Αργιλικός σχιστόλιθος	0 – 10	0 – 5	10 ⁻¹¹ – 10 ⁻⁷	10 ⁻¹⁶ – 10 ⁻¹³
Κρυσταλλικά πετρώματα (θραυσματοποιημένα)	1 – 10	1 – 10	10 ⁻⁶ – 10 ⁻⁴	10 ⁻¹¹ – 10 ⁻⁹
Κρυσταλλικά πετρώματα (μη θραυσματοποιημένα)	0 – 2	0 – 1	10 ⁻¹¹ – 10 ⁻⁹	10 ⁻¹⁶ – 10 ⁻¹⁴
Πιεζόμετρο	Υδραυλική στάθμη, h		Απόσταση, m	
A1	150.0		0	
A2	149.5		100	
A3	149.0		200	

Λύση: Η υδραυλική κλίση είναι σταθερή κατά μήκος της τομής των τριών πιεζόμετρων:

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{h_3 - h_1}{x_3 - x_1} = \frac{149.0 - 150.0}{200 - 0} = -0.005 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Χρησιμοποιώντας τον νόμο του Darcy μπορούμε να βρούμε την ειδική παροχή. Το υπόγειο νερό κινείται από το πιεζόμετρο A1 (υψηλή στάθμη) στο A3 (χαμηλή στάθμη):

$$v_x = -K_x \frac{dh}{dx} = -\left(\frac{0.001 \text{ cm}}{\text{s}}\right) \left(\frac{-0.005 \text{ m}}{\text{m}}\right) \Leftrightarrow$$

$$v_x = 5.0 \times 10^{-6} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Έτσι, η πραγματική ταχύτητα είναι περίπου 1 εκατοστό την ημέρα (τυπική τιμή):

$$u_x = \frac{v_x}{n} = 1.51 \times 10^{-5} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} = 1.31 \text{ cm} \cdot \text{d}^{-1}.$$

Επίσης ο χρόνος ταξιδιού για 200 μέτρα είναι 41.8 έτη:

$$t = \frac{x}{u_x} = \frac{200\text{m}}{0.0131\text{md}^{-1}} = 15300\text{days} = 41.8\text{years} .$$

◆

Όταν θέλουμε να προσδιορίσουμε το ρυθμό ροής του νερού (Q) που κινείται στον υδροφόρο είναι απαραίτητο να καθορίσουμε τη διατομή (A) της περιοχής διαμέσου της οποίας περνάει ο υδροφόρος. Ως γνωστόν, η ογκομετρική ροή (Σχήμα 1.2) δίνεται από τον τύπο:

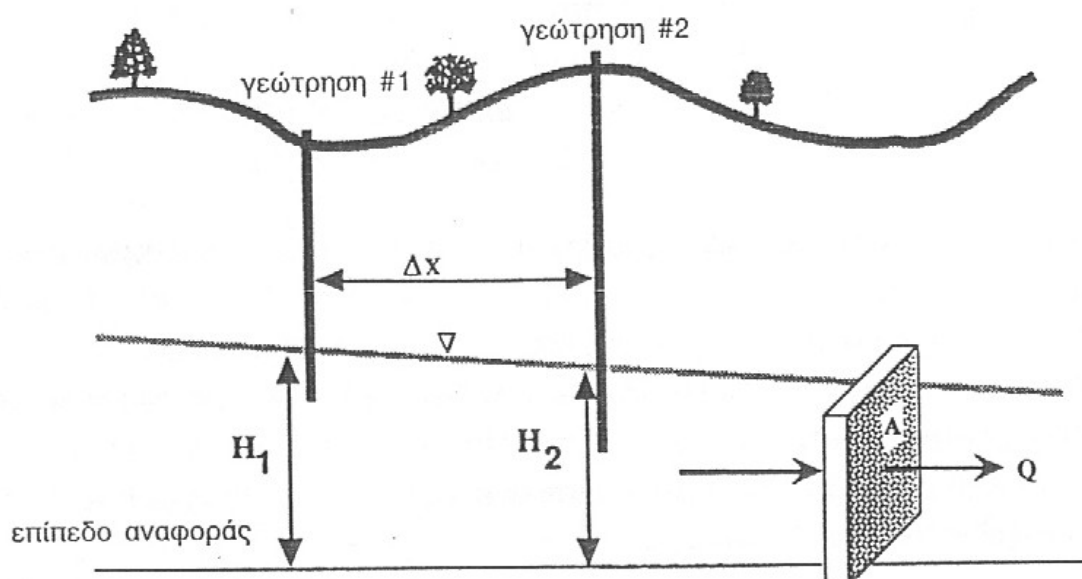
$$Q = -K_x A \frac{dh}{dx}, \quad (1.4)$$

όπου: Q : Ογκομετρική ροή (L^3T^{-1}),

K_x : Κορεσμένη υδραυλική αγωγιμότητα κατά την x -διεύθυνση (LT^{-1}),

A : Διατομή της περιοχής διαμέσου της οποίας περνάει ο υδροφόρος (L^2),

$\frac{dh}{dx}$: η υδραυλική κλίση κατά την x - διεύθυνση (αδιάστατη).



Σχήμα 1.2: Η παροχή Q σε έναν υδροφόρο προσδιορίζεται από την επιφάνεια διατομής A και την υδραυλική κλίση μεταξύ των δύο γεωτρήσεων παρατήρησης $Q = -K_x A (\Delta h / \Delta x)$.

Η ταχύτητα Darcy v_x όπως και η ογκομετρική ροή Q εξαρτώνται άμεσα τόσο από τις ιδιότητες του υγρού (νερού) όσο και από τις ιδιότητες του μέσου.

Η κορεσμένη υδραυλική αγωγιμότητα K_x είναι ένα μέτρο των ιδιοτήτων του υγρού αλλά και του πορώδους μέσου του υδροφόρου.

Παρακάτω παραθέτουμε κάποιους εμπειρικούς νόμους για τον προσδιορισμό του K σε κάποιες συγκεκριμένες περιπτώσεις.

Εμπειρικά έχει προκύψει ότι:

$$K = \frac{Cd^2\rho g}{\mu} = \frac{k\rho g}{\mu}, \quad (1.5)$$

όπου: K : κορεσμένη υδραυλική αγωγιμότητα (LT^{-1}),

C : συντελεστής αναλογίας (αδιάστατο),

d : διάμετρος των κόκκων (L),

ρ : πυκνότητα υγρού (ML^{-3}),

g : σταθερά βαρύτητας (LT^{-2}),

μ : ιξώδες ($ML^{-1}T^{-1}$, $N \cdot s \cdot m^{-2} \equiv k \text{ g m}^{-1} \text{ s}^{-1}$),

k : πραγματική διαπερατότητα (ιδιότητα του μέσου) (L^2 , $k = Cd^2$).

Οι ιδιότητες του μέσου εμπεριέχονται στην παράμετρο Cd^2 ενώ οι ιδιότητες του υγρού στις παραμέτρους ρ και μ . Η πυκνότητα του νερού εξαρτάται από την θερμοκρασία και την αλατότητα, ενώ το ιξώδες μ μόνο από την θερμοκρασία.

Ο Hazen συσχέτισε εμπειρικά την κορεσμένη υδραυλική αγωγιμότητα με την διάμετρο των κόκκων στις ομοιογενώς διαβαθμισμένες άμμους, θέτοντας:

$$K = \alpha d_{10}^2, \quad (1.6)$$

όπου: α : σταθερά του Hazen – για το νερό, εάν το d_{10} εκφράζεται σε μονάδες mm και το K σε μονάδες cm/s τότε το α παίρνει την τιμή 1.0,

d_{10} : διάμετρος μορίων όπου το ποσοστό 10% των μορίων είναι μικρότερο από τη διάμετρο.

Για να είναι διαστατικά σωστή η εξίσωση (1.6) η σταθερά του Hazen α έχει μονάδες $L^{-1}T^{-1}$.

Η εμπειρική εξίσωση (1.7) των Carmen – Kozeny, είναι μια άλλη σχέση με την οποία μπορούμε να εκτιμήσουμε την υδραυλική αγωγιμότητα. Προκύπτει από την (1.5) αντικαθιστώντας την σταθερά αναλογίας C με την παρακάτω σχέση που βασίζεται στο πορώδες:

$$K = \frac{n^3}{(1-n)^2} \left(\frac{d_m^2}{180} \right) \left(\frac{\rho g}{\mu} \right), \quad (1.7)$$

όπου: K : κορεσμένη υδραυλική αγωγιμότητα (LT^{-1}),

n : πορώδες (αδιάστατο),

ρ : πυκνότητα υγρού (ML^{-3}),

d_m : μέση διάμετρος κόκκων (L^2),

g : σταθερά βαρύτητας (LT^{-2}),

μ : ιξώδες ($ML^{-1}T^{-1}$).

Ο νόμος του Darcy εφαρμόζεται και στις τρεις διαστάσεις όπως φαίνεται και παρακάτω στις εξισώσεις (1.8) – (1.10), αλλά δεδομένου ότι είναι μια εμπειρική σχέση, υπόκειται σε κάποιους περιορισμούς:

- Σε πολύ χαμηλές ταχύτητες σε πολύ λεπτόκοκκα υλικά μπορεί να υπάρξει κάποιο όριο υδραυλικής κλίσης κάτω από το οποίο δεν υφίσταται ροή.
- Σε πολύ υψηλές ταχύτητες (τυρβώδη ροή), ο όρος της κινητικής ενέργειας που μπαίνει προκαλεί μία μη γραμμική σχέση μεταξύ v_x και $\frac{dh}{dx}$. Αυτό το φαινόμενο δεν

συμβαίνει ιδιαίτερα συχνά στο υπόγειο νερό παρά μόνο σε περιπτώσεις που έχουμε κίνηση νερού σε βραχώδες πέτρωμα. Η μη-γραμμική ροή δεν εμφανίζεται συχνά στα υπόγεια νερά, αλλά η ροή σε θρυμματισμένα πετρώματα μπορεί να είναι τάχιση. Σε τέτοιες περιπτώσεις η ροή μπορεί να έχει γραμμική μορφή και να εξαρτάται από τη συνεκτικότητα των θραυσμάτων και επιπλέον ο υδροφόρος ορίζοντας μπορεί να μην συμπεριφέρεται σύμφωνα με την εξίσωση Darcy.

Ο καλύτερος, όμως, τρόπος εκτίμησης του K είναι από επιτόπιες αντλητικές δοκιμές σε αρκετές γεωτρήσεις:

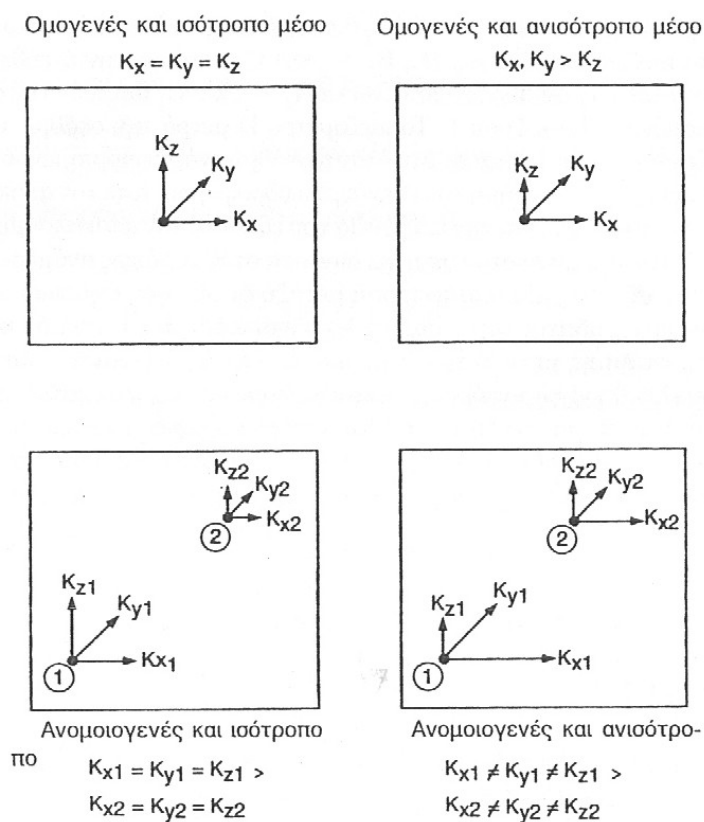
$$\text{Κατά μήκος: } v_x = -K_x \frac{dh}{dx} \quad (\text{διαμήκη}). \quad (1.8)$$

$$\text{Κατά πλάτος: } v_y = -K_y \frac{dh}{dy} \quad (\text{εγκάρσια}). \quad (1.9)$$

$$\text{Κατακόρυφα: } v_z = -K_z \frac{dh}{dz} \quad (\text{κατακόρυφη}). \quad (1.10)$$

Όταν το K_x διαφέρει από το K_y και το K_z σε ένα σημείο του υδροφόρου, η ροή λέμε ότι είναι ανισοτροπική. Όταν η υδραυλική αγωγιμότητα διαφέρει από σημείο σε σημείο του υδροφόρου έχουμε μη-ομογενή κατάσταση. Το σχήμα (1.3) παρουσιάζει πιθανές καταστάσεις του υδροφορέα. Συχνά, μπορούν να παρατηρηθούν ομογενείς,

ανισοτροπικές συνθήκες σε οριζόντια ιζηματογενή και σε αμμώδη στρώματα. Συνήθως, ισχύει ότι $K_x = K_y > K_z$, επειδή η ροή σε οριζόντιο επίπεδο είναι συνήθως πιο ισχυρή από την κατακόρυφη, σε στρωματοποιημένες αποθέσεις.



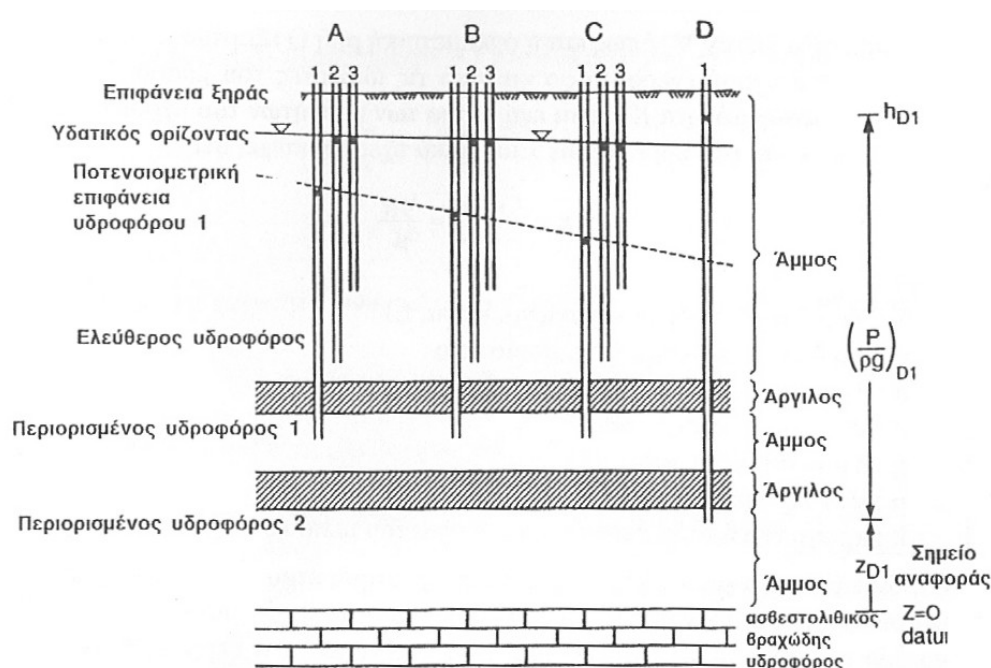
Σχήμα 1.3: Τέσσερες δυνατές περιπτώσεις ομοιογένειας και ισοτροπίας σε έναν τρισδιάστατο κορεσμένο υδροφόρο.

Οι υδραυλικές κλίσεις κατά τις x και y διευθύνσεις μπορούν να μετρηθούν από πιεζόμετρα μέσα στον ίδιο υδροφόρο ενώ οι κατακόρυφες κλίσεις απαιτούν σύστημα πιεζόμετρων σε διαφορετικά βάρη (όπως φαίνεται στο σχήμα (1.4)) ώστε να υπολογιστεί η διαφορά δυναμικού.

Παρακάτω δίνουμε ένα παράδειγμα για το πώς με τη χρήση πιεζόμετρου μπορούμε να υπολογίσουμε τις υδραυλικές κλίσεις.

Τα πιεζόμετρα μετρούν τη στάθμη (head) του υδροφόρου μέσα στο οποίο βρίσκονται. Έτσι, τα πιεζόμετρα A_2, A_3, B_2, C_2 και C_3 στο σχήμα (1.4) μετρούν την ελεύθερη στάθμη (water table) του ελεύθερου υδροφόρου ενώ τα A_1, B_1 και C_1 μετρούν την στάθμη του περιορισμένου υδροφόρου 1. Το πιεζόμετρο D_1 μετρά την στάθμη του περιορισμένου υδροφόρου 2. Σημειώνεται ότι, όταν η στάθμη ενός περιορισμένου υδροφόρου (όπως στο D_1) υπερβεί την στάθμη του ελεύθερου υδροφόρου, τότε τον υδροφόρο τον αποκαλούμε «αρτεσιανό», ενώ αν υπερβεί και την επιφάνεια του

εδάφους τον αποκαλούμε «ρέοντα αρτεσιανό». Ροή υπάρχει μόνο όταν υπάρχει διαφορά στάθμης όπως για παράδειγμα ανάμεσα στα σημεία A και B στο σχήμα (1.4), προκαλώντας μια διαμήκη ροή μεταξύ αυτών των σημείων. Στο σχήμα (1.4) θεωρούμε ροή σε ένα στρώμα αργίλου. Αν και το στρώμα αργίλου είναι υδατοσταγές και το K_z είναι πάρα πολύ μικρό, παρουσιάζεται μία διαφορά στάθμης μεταξύ των σημείων A_1 και A_2 δείχνοντας μία κατακόρυφη ροή από τον ελεύθερο υδροφόρο προς τον περιορισμένο υδροφόρο 1 με αποτέλεσμα να τον τροφοδοτεί. Επίσης παρατηρείται μία κατακόρυφη ροή από τον περιορισμένο υδροφόρο 2 προς τον περιορισμένο υδροφόρο 1 (κίνηση από την υψηλή στάθμη προς τη χαμηλή).



Σχήμα 1.4: Σχηματική απεικόνιση ενός ελεύθερου υδροφόρου και δύο περιορισμένων. Συστήματα πιεζόμετρων βρίσκονται στα σημεία A, B και C.

Η υδραυλική στάθμη είναι ένα μέτρο της ενέργειας ανά μονάδα όγκου νερού:

$$h = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g}, \quad (1.11)$$

όπου: z : ανύψωση στάθμης πάνω από το σημείο αναφοράς, L

h : υδραυλική στάθμη (L),

p : πίεση ($ML^{-1}T^{-2}$),

ρ : πυκνότητα νερού (ML^{-3}),

g : επιτάχυνση της βαρύτητας (LT^{-2}),

v : ταχύτητα νερού (LT^{-1}).

Οι τρεις όροι στο δεξί μέλος της εξίσωσης (1.11) αντιστοιχούν στο γεωμετρικό ύψος, στο ύψος πίεσης και στην κινητική ενέργεια. Ο όρος της κινητικής ενέργειας μπορεί να αγνοηθεί στις περισσότερες περιπτώσεις εφόσον η ροή στους υδροφόρους υπόγειων νερών είναι ομαλή και οι ταχύτητες πολύ μικρές. (Μια εξαίρεση είναι κοντά σε φρεάτια αντλήσεως νερού όπου η ταχύτητα άντλησης είναι μεγάλη). Στο σχήμα (1.4) το γεωμετρικό ύψος και το ύψος πίεσης δείχνονται για το πιεζόμετρο D₁. Το γεωμετρικό ύψος λαμβάνεται ως προς ένα επίπεδο αφετηρίας το οποίο λαμβάνεται αυθαίρετα ως σημείο αναφοράς, συχνά λαμβάνεται η μέση στάθμη της θάλασσας. Το γεωμετρικό ύψος z, μετριέται στο σημείο της μέτρησης, δηλαδή στο κάτω άνοιγμα του πιεζόμετρου.

Παράδειγμα 1.2: Υπολογισμός κατακόρυφης ροής από δικτυωμένα πιεζόμετρα

Να προσδιορίσετε την κατακόρυφη ταχύτητα μεταξύ του φρεατικού αμμώδους υδροφόρου (με πορώδες n = 0.30) και του περιορισμένου υδροφόρου 1 (με πορώδες n = 0.45) στο σημείο Β στο σχήμα (1.4). Η υδραυλική αγωγιμότητα K_z της άμμου είναι 10⁻⁴ cm·s⁻¹. Η πιεζομετρική στάθμη μετριέται στο κάτω άκρο των πιεζόμετρων, (όπου γίνεται η μέτρηση).

Πιεζόμετρο	Στάθμη, z	Υδραυλική στάθμη, h
B1	220 m	460 m
B2	245 m	470 m

Λύση: Υπολογίζουμε την κατακόρυφη υδραυλική κλίση:

$$\frac{\Delta h}{\Delta z} = \frac{h_2 - h_1}{z_2 - z_1} = \frac{470 - 460}{245 - 220} = 0.40 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Σε μια πρώτη προσέγγιση η πιο σωστή υδραυλική αγωγιμότητα που πρέπει να ληφθεί είναι του αργλικού στρώματος αφού εκεί είναι η μεγαλύτερη αντίσταση στη ροή. Υπολογίζουμε την ειδική απόδοση και μετά την ταχύτητα:

$$v_z = -K_z \frac{dh}{dz} = -(10^{-7} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}) \cdot (0.40 \text{ m} \cdot \text{m}^{-1}) = -4 \cdot 10^{-8} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$u_x = \frac{v_z}{n} = -\frac{4 \cdot 10^{-8} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}}{0.45} = -8.9 \cdot 10^{-8} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} = -2.8 \text{ cm} \cdot \text{year}^{-1}.$$

Το νερό κινείται προς τα κάτω από τον αμμώδη ελεύθερο υδροφόρο στον περιορισμένο υδροφόρο 1 με πολύ αργό ρυθμό. Αν σημειωνόταν, μόλυνση στον αμμώδη υδροφόρο, θα περνούσαν δεκάδες χρόνια πριν να φτάσει στο περιορισμένο υδροφόρο 1. ♦

Στην επόμενη παράγραφο θα αναφερθούμε στις εξισώσεις κίνησης ρευστού έτσι ώστε να έχουμε μία πιο πλήρη εικόνα για τα φαινόμενα ροής ρευστών σε πορώδη υλικά.

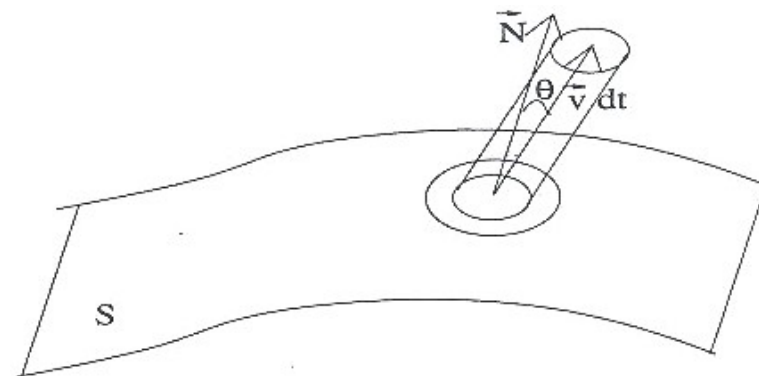
1.3 Εξισώσεις Ροής

Υποθέτουμε ότι μία περιοχή του τρισδιάστατου χώρου καταλαμβάνεται από ένα ρευστό (υγρό ή αέριο) σε κίνηση. Έχουμε δύο προσεγγίσεις για να περιγράψουμε τη κίνηση:

- Τη **προσέγγιση Lagrange**, στην οποία προσπαθούμε να προσδιορίσουμε τη θέση (a, b, c, t) για κάθε χρονική στιγμή t ενός σωματιδίου του ρευστού το οποίο βρίσκεται στο σημείο (a, b, c) τη χρονική στιγμή $t = 0$.
- Τη **προσέγγιση Euler**, στην οποία προσπαθούμε να προσδιορίσουμε την ταχύτητα $\vec{v}(x, y, z, t)$, τη πυκνότητα $\rho(x, y, z)$ και άλλες φυσικές μεταβλητές όπως η πίεση $P(x, y, z)$ για κάθε χρονική στιγμή t σε κάθε σημείο (x, y, z) στη περιοχή που περιέχεται το ρευστό.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τη κίνηση του ρευστού χρησιμοποιώντας τη προσέγγιση Euler.

Υποθέτουμε πάντα ότι η ταχύτητα, η πυκνότητα και η πίεση μεταβάλλονται ομαλά ως προς κάθε τους μεταβλητή. Θεωρούμε μία κλειστή επιφάνεια S στο ρευστό που περιέχει ένα χωρίο Ω . Δηλαδή συγκεντρώνουμε τη προσοχή μας σε ένα συγκεκριμένο στοιχειώδες χωρίο του ρευστού. Υποθέτουμε επιπλέον ότι δεν έχουμε πηγές ή διαρροές ρευστού σε κάποιο σημείο. Με βάση αυτές τις υποθέσεις από το νόμο διατήρησης της μάζας έχουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής της μάζας του ρευστού στο χωρίο Ω ισούται με το ρυθμό με τον οποίο το ρευστό εισέρχεται στο Ω κατά μήκος της S .



Σχήμα 1.5: Ροή ρευστού στο σύνορο S .

Έστω dS μία μικρή στοιχειώδη περιοχή στο σημείο Q στην επιφάνεια S . Το ρευστό που διαπερνά το dS μεταξύ του χρόνου t και $t + dt$ καταλαμβάνει ένα κύλινδρο βάσης dS και ύψους $\vec{v}(Q)dt \cos(\theta)$ όπου θ η γωνία των $\vec{v}(Q)$ και $\vec{N}(Q)$, όπου $\vec{N}(Q)$ είναι το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια S στο σημείο Q με φορά προς τα έξω (Σχ. 1.5).

Επομένως ο κύλινδρος έχει όγκο:

$$V_c = \bar{v}(Q)\vec{N}(Q)dSdt. \quad (1.12)$$

Επίσης, ο ρυθμός με τον οποίο το ρευστό διαπερνά την επιφάνεια S μας δίνεται από το επιφανειακό ολοκλήρωμα:

$$\int_S \bar{v}\vec{N}dS = \int_S \bar{v}d\tilde{S}, \quad (1.13)$$

όπου $d\tilde{S} = \vec{N}dS$. Η σχέση (1.13) μας δίνει τον όγκο του ρευστού που διαπερνά το dS. Επομένως η μάζα που διαπερνά το dS μεταξύ του χρόνου t και t + dt είναι:

$$\rho\bar{v}(Q)\vec{N}(Q)dSdt, \quad (1.14)$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού. Επιπλέον, ο ρυθμός με τον οποίο η μάζα του ρευστού εξέρχεται από το Ω κατά μήκος της S είναι:

$$\int_S \rho\bar{v}\vec{N}dS.$$

Ο ρυθμός με τον οποίο η μάζα εισέρχεται στο Ω θα είναι $-\int_S \rho\bar{v}(Q)\vec{N}(Q)dS$, και άρα εφόσον έχουμε διατήρηση της μάζας από το θεώρημα απόκλισης παίρνουμε ότι:

$$\int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\int_S \rho\bar{v}\vec{N}dS = -\int_\Omega \text{div}(\rho\bar{v})dV,$$

ή δεδομένου ότι το Ω είναι ένα τυχαίο υποχωρίο που καταλαμβάνει το ρευστό έχουμε:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\bar{v}) = 0. \quad (1.15)$$

Η εξίσωση (1.15) ονομάζεται εξίσωση συνέχειας και είναι ένας νόμος διατήρησης που αφορά στη κίνηση ενός ρευστού. Επίσης ισχύει για κάθε περιοχή που καταλαμβάνει το ρευστό. Για ένα ασυμπίεστο ρευστό (π.χ. το νερό είναι τέτοιο) έχουμε ότι η πυκνότητα δεν μεταβάλλεται, ρ = σταθερά και η εξίσωση συνέχειας γίνεται:

$$\text{div}(\bar{v}) = 0,$$

και η ταχύτητα \bar{v} είναι ένα σωληνοειδές διανυσματικό πεδίο.

Ένα άλλο στοιχείο που πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν είναι ότι η κίνηση του ρευστού θα πρέπει να καθορίζεται και από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, δηλαδή ότι ο ρυθμός μεταβολής της ορμής κάθε μέρους του ρευστού είναι ίσος με το άθροισμα των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτό.

Έχουμε ότι για κάθε χρονική στιγμή η ορμή είναι $\int_\Omega \rho\bar{v}dV$ και μεταβάλλεται με

ρυθμό:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{v}) dV .$$

Η μεταβολή της ορμής οφείλεται στους παρακάτω λόγους:

α) στην ορμή κατά μήκος του S,

β) στη πίεση που ασκείται στο ρευστό στο χωρίο Ω από το ρευστό που καταλαμβάνει το εξωτερικό χωρίο από το Ω , και

γ) στις διάφορες εξωτερικές δυνάμεις όπως π.χ. βαρύτητα, ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις κ.τ.λ., που ασκούνται στο Ω .

α) Η ορμή μεταφέρεται κατά μήκος της επιφάνειας S στο Ω με ρυθμό:

$$-\int_S \bar{v}(\rho \bar{v} \bar{N}) dS .$$

β) Η πίεση του ρευστού στο Ω ασκείται στο S στην κατεύθυνση του διανύσματος $-\bar{N}$. Επομένως, η δύναμη που εξασκείται στο Ω από το υπόλοιπο ρευστό είναι:

$$-\int_S P \bar{N} dS$$

όπου P είναι η πίεση.

γ) Οι εξωτερικές δυνάμεις (σε μονάδες δύναμης ανά μονάδα μάζας) θα είναι:

$$\int_{\Omega} \rho \bar{F} dV .$$

Συνοψίζοντας, η εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα και του θεωρήματος της απόκλιση, μας δίνει την εξίσωση:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{v}) dV &= -\int_S \bar{v}(\rho \bar{v} \bar{N}) dS - \int_S P \bar{N} dS + \int_{\Omega} \rho \bar{F} dV \\ &= \int_{\Omega} [\rho(\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} + \bar{v} \operatorname{div}(\rho \bar{v})] dV - \int_{\Omega} \nabla P dV + \int_{\Omega} \rho \bar{F} dV \end{aligned}$$

ή

$$\int_{\Omega} \left[\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{v} \operatorname{div}(\rho \bar{v}) + \rho(\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} + \nabla P - \rho \bar{F} \right] dV = 0 . \quad (1.16)$$

Στην εξίσωση (1.16), ο δεύτερος και ο τρίτος όρος του ολοκληρώματος μας δίνει μηδέν λόγω της εξίσωσης της συνέχειας. Επομένως αφού το χωρίο Ω είναι τυχαίο έχουμε:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\nabla P + \rho \vec{F}. \quad (1.17)$$

Η εξίσωση (1.17) είναι η εξίσωση κίνησης του ρευστού. Οι εξισώσεις (1.15) και (1.17) ονομάζονται εξισώσεις Euler.

Εάν θέλουμε τώρα να μελετήσουμε την εξίσωση κίνησης του ρευστού σε πορώδες υλικό έχουμε την εξίσωση της συνέχειας που προκύπτει από τον νόμο διατήρησης της μάζας, αλλά με τη διαφορά ότι η κίνηση του ρευστού γίνεται στα κενά, πόρους, του υλικού, δηλαδή σε όγκο $n \cdot v$. Επομένως η εξίσωση συνέχειας έχει τη μορφή:

$$\frac{\partial(\rho n)}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

ή

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = \frac{\partial(\rho n)}{\partial t}, \quad (1.18)$$

όπου: $v_{x,y,z}$: ειδική απόδοση (ταχύτητα Darcy) στις διευθύνσεις x , y και z (LT^{-1}),

ρ : πυκνότητα νερού (ML^{-3}),

n : πορώδες (αδιάστατο),

t : χρόνος (T).

Ο όρος $\frac{\partial(\rho n)}{\partial t}$ αναφέρεται στην μεταβολή της μάζας του νερού λόγω της μεταβολής της πυκνότητας ρ ή λόγω της μεταβολής του πορώδους n . Από την ανάλυση του δεύτερου μέλους της εξίσωσης (1.18) προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial(\rho n)}{\partial t} = n \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial n}{\partial t} = \rho S_s \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (1.19)$$

όπου: S_s : ειδική υδροχωρητικότητα, $S_s = \rho g(\alpha + n\beta)$ (L^{-1}),

α : συμπιεστότητα του υδροφορέα ($\alpha = 1/E$ όπου E = το μέτρο ελαστικότητας του υδροφορέα),

β : συμπιεστότητα του νερού ($\beta = 1/E_1$ όπου E_1 = το μέτρο ελαστικότητας του νερού),

n : πορώδες,

g : επιτάχυνση της βαρύτητας.

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (1.19) στην (1.18) προκύπτει η (1.20):

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = \rho S_s \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (1.20)$$

Αναλύοντας τις μερικές παραγώγους στο πρώτο μέλος της εξίσωσης (1.20) και δεδομένου ότι οι όροι $\frac{\partial \rho}{\partial x}$, $\frac{\partial \rho}{\partial y}$ και $\frac{\partial \rho}{\partial z}$ (η μεταβολή δηλαδή της πυκνότητας σε σχέση με την απόσταση) θεωρούνται αμελητέοι προκύπτει ότι:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_y}{\partial y} + \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} = \rho S_s \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (1.21)$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη με την πυκνότητα ρ και αντικαθιστώντας την ταχύτητα Darcy προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) = S_s \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (1.22)$$

Η εξίσωση (1.22) είναι μία δεύτερης τάξεως μερική διαφορική εξίσωση, τριών διαστάσεων η οποία απαιτεί κάποια αριθμητική λύση. Για την λύση της, απαιτούνται οι σχετικές αρχικές και συνοριακές συνθήκες όπως και οι παράμετροι K και S_s του υδροφόρου. Η (1.22) είναι η βασική εξίσωση για μη στάσιμη (μη μόνιμη) ροή σε υδροφόρο.

Εάν ο υδροφόρος ορίζοντας είναι ομογενής και ισότροπος, μπορούμε να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης (1.22) με την κορεσμένη υδραυλική αγωγιμότητα K , οπότε:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{S_s}{K} \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (1.23)$$

όπου το K είναι η κορεσμένη υδραυλική αγωγιμότητα και στις τρεις διευθύνσεις.

Για τη ροή σε γεώτρηση και το δίκτυο ροής που δημιουργείται, η εξίσωση (1.23) συνήθως εκφράζεται συναρτήσει της λεγόμενης μεταβιβαστικότητας $T = Kb$ και της αποθηκευτικότητας $S = S_s b$, όπου b είναι το πάχος του υδροφόρου:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1.24)$$

όπου: S = συντελεστής αποθηκευτικότητας (αδιάστατο),

T = μεταβιβαστικότητα ($L^2 T^{-1}$).

Παρατηρούμε ότι κάθε όρος της εξίσωσης (1.24) έχει διαστάσεις αντίστροφου μήκους.

Εάν οι συνθήκες είναι σταθερές (στάσιμη ροή), τότε προκύπτει η γνωστή εξίσωση Laplace σε δύο διαστάσεις:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0, \quad (1.25)$$

η οποία ισχύει για την μονάδα του όγκου κορεσμένου, ομογενούς και ισότροπου πορώδους μέσου κάτω από σταθερές συνθήκες (μόνιμη ροή). Για να είναι καλά ορισμένη η εξίσωση (1.25) και για την επίλυσή της απαιτούνται κατάλληλες συνοριακές συνθήκες.

Η λύση της εξίσωσης (1.25) μας δίνει την τιμή της υδραυλικής στάθμης σε κάθε σημείο του συστήματος ροής και μπορεί να γίνει με διάφορες αριθμητικές μεθόδους όπως με την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών η οποία παρουσιάζεται αναλυτικά στο Κεφάλαιο 4ο (σελ. 47) της παρούσας εργασίας.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε ένα παράδειγμα αριθμητικής επίλυσης της εξίσωσης (1.25).

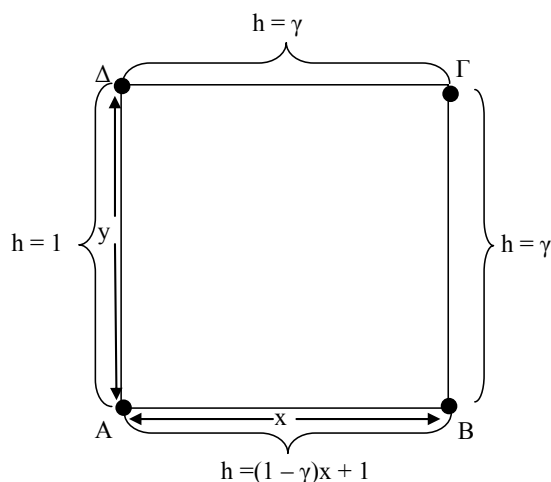
Θεωρούμε ότι το χωρίο μας είναι το $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, δηλαδή το σημείο Α αντιστοιχεί στο (0,0) το σημείο Β στο (1,0), το σημείο Δ στο (0,1) και το σημείο Γ στο (1,1) και οι συνοριακές συνθήκες για την (1.25) είναι:

ΑΒ: $h = (1 - \gamma)x + 1,$

ΑΔ: $h = 1$ (σταθερά),

ΔΓ: $h = \gamma,$

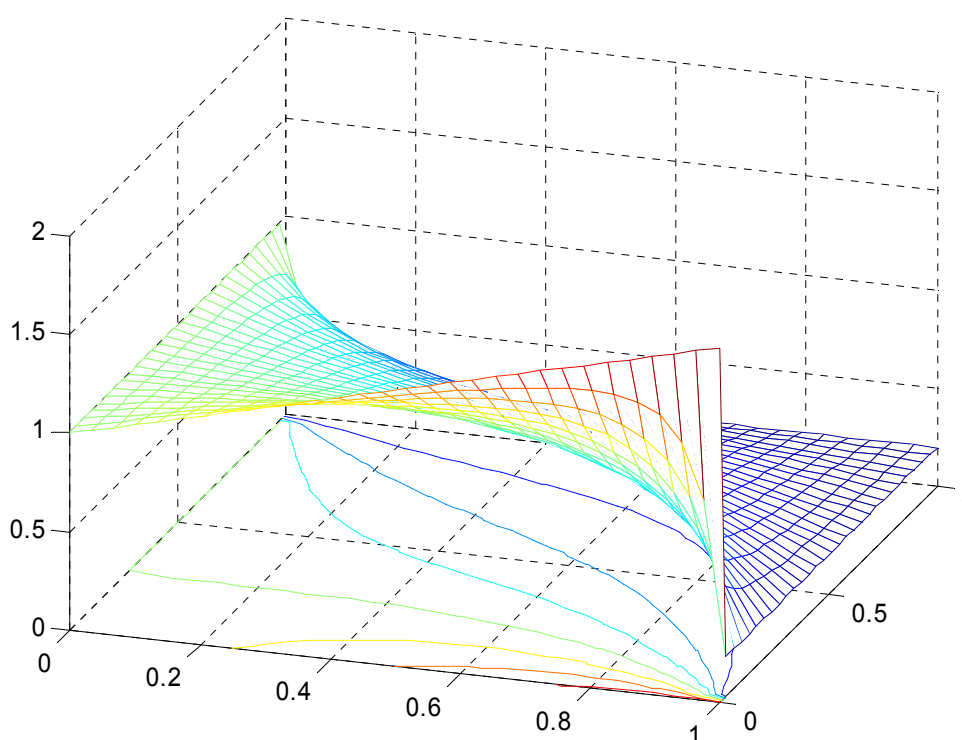
ΒΓ: $h = \gamma.$



Σχήμα 1.6: Το χωρίο Ω και οι συνοριακές συνθήκες.

Σύμφωνα με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών διακριτοποιούμε την περιοχή ΑΒΓΔ χρησιμοποιώντας M σημεία στον άξονα των x και M σημεία στον άξονα των y .

Εκτελώντας το πρόγραμμα που προκύπτει με χρήση πεπερασμένων διαφορών (βλέπε Κεφάλαιο 4ο) και που παρουσιάζεται στο παράρτημα Α (σελ. 69) για την εξίσωση (1.25) και για τις παραπάνω συνοριακές συνθήκες και για $M = 30$ σημεία και $\gamma = 0.2$ έχουμε την ακόλουθη τρισδιάστατη γραφική παράσταση της λύσης h της εξίσωσης (1.25) καθώς και των ισοσταθμικών καμπυλών της.



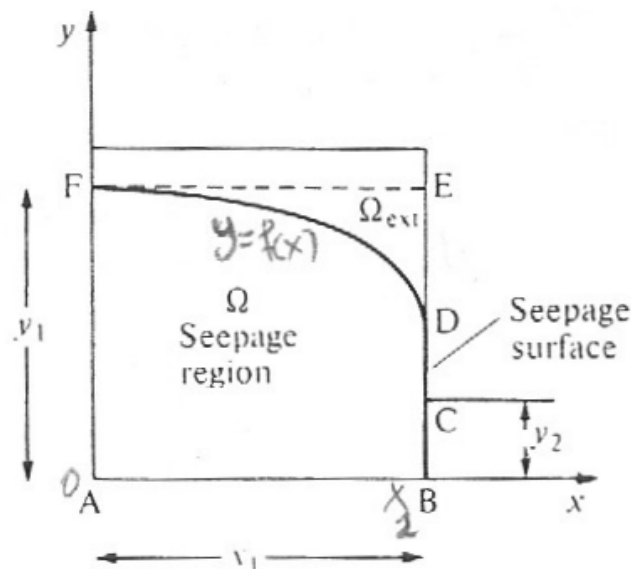
Σχήμα 1.7: Τρισδιάστατη γραφική παράσταση των τιμών της λύσης h της εξίσωσης (1.25) και των ισοσταθμικών καμπυλών της για $M = 30$ σημεία διακριτοποίησης και $\gamma = 0.2$.

Στο επόμενο κεφάλαιο εφαρμόζοντας τους βασικούς νόμους ροής ρευστού σε πορώδη υλικό θα παρουσιάσουμε και θα μελετήσουμε ένα πρόβλημα ελεύθερου συνόρου το πρόβλημα του απλού ορθογωνίου φράγματος.

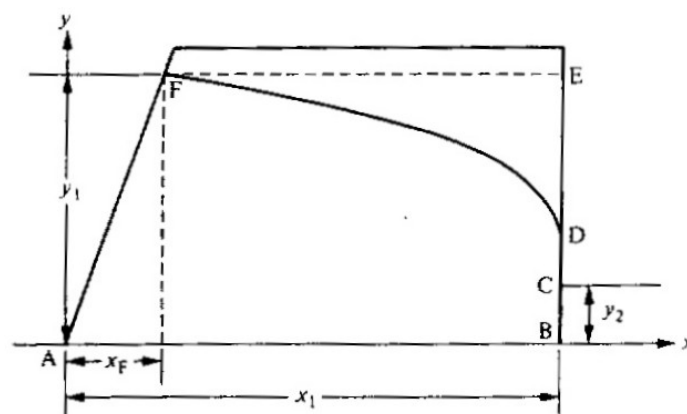
Κεφάλαιο 2ο

Μοντελοποίηση του προβλήματος του απλού ορθογωνίου φράγματος

Η απλούστερη περίπτωση διαρροής μέσα από ένα φράγμα που χωρίζει δύο δεξαμενές σε διαφορετικά επίπεδα μπορεί να θεωρηθεί ως η στάσιμη κορεσμένη ροή ενός ασυμπίεστου υγρού μέσα από ένα ομοιογενές ιστροπικό μέσο. Το απλό ορθογώνιο φράγμα (Σχ. 2.1) που έχει παράλληλα κάθετα τοιχώματα και μια αδιαπέραστη οριζόντια βάση έχει μελετηθεί πολύ και υιοθετήθηκε από πολλούς συγγραφείς ως ένα πρόβλημα μοντέλο για τον προσδιορισμό νέων μεθόδων επίλυσης προβλημάτων ελεύθερου συνόρου. Άλλη περίπτωση φράγματος είναι το τραπεζοειδές φράγμα. (Σχ. 2.2).



Σχήμα 2.1: Απλό ορθογώνιο φράγμα.



Σχήμα 2.2: Τραπεζοειδές φράγμα.

2.1 Κλασική μοντελοποίηση: φυσική παραγωγή

Η φυσική παραγωγή των μαθηματικών εξισώσεων θα δοθεί κατ' αρχήν με αναφορά στο σχήμα (2.1). Το φράγμα θεωρείται ότι είναι αρκετά μακρύ ώστε η ροή να θεωρείται δυσδιάστατη στο επίπεδο (x, y) , όπου x : μήκος και y : ύψος.

Η ροή θεωρείται ότι διέπεται από το νόμο του Darcy (1856) εκφραζόμενη με τη μορφή:

$$q_1 = \frac{-K}{\rho g} \text{grad } h = \frac{-k}{\mu} \text{grad } \{p + \rho g y\}, \quad (2.1)$$

όπου: q_1 : το διάνυσμα της ταχύτητας,

p : η πίεση στο υγρό,

h : η υδραυλική στάθμη,

ρ : η πυκνότητα,

μ : το ιξώδες του υγρού,

K : η κορεσμένη υδραυλική αγωγιμότητα,

k : η πραγματική διαπερατότητα του υλικού (ιδιότητα του μέσου $k = \frac{\mu K}{\rho g}$).

Η κάθετη συντεταγμένη y είναι θετική προς τα πάνω. Για τις υποθέσεις που έχουν ήδη γίνει σχετικά με το υγρό, το k είναι σταθερά και έτσι η συνάρτηση:

$$\phi_1 = \frac{-k}{\mu} (p + \rho g y), \quad (2.2)$$

είναι το δυναμικό ταχύτητας και ισχύει $q_1 = -\text{grad } \phi_1$. Αλλά από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε:

$$\text{div}(q_1) = 0. \quad (2.3)$$

Επομένως, από τις σχέσεις (2.1 – 2.3) παίρνουμε:

$$\text{div}(\text{grad } \phi_1) = \nabla^2 \phi_1 = 0, \quad (2.4)$$

δηλαδή, η ϕ_1 ικανοποιεί την εξίσωση Laplace στην περιοχή διαρροής Ω (σχήμα 2.1).

Είναι βολικό, για διάφορους λόγους ευκολίας και απλότητας, να εμφανίσουμε ένα τροποποιημένο δυναμικό ταχύτητας $\phi(x, y)$, όπου:

$$\phi(x, y) = \frac{\mu \phi_1(x, y)}{k \rho g} = \frac{p}{\rho g} + y, \quad (2.5)$$

ώστε

$$q = -\text{grad } \phi \quad \text{και} \quad \nabla^2 \phi = 0, \quad (2.6)$$

όπου $q = \mu q_1 / krg$, ένας τροποποιημένος ρυθμός ροής.

Η περιοχή διαρροής ορίζεται από μέρη των τοιχωμάτων AF και BD και της βάσης AB του φράγματος, αλλά επίσης και από την ελεύθερη επιφάνεια FD της οποίας το σχήμα και η θέση μένει να καθοριστούν, συμπεριλαμβανομένης της περιοχής του «σημείου αποσύνδεσης» D στο τοίχωμα BE. Το μέρος του συνόρου CD, είναι γνωστό και ως η «επιφάνεια διαρροής».

Οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται από την $\phi(x, y)$ στα διαφορετικά μέρη του συνόρου της περιοχής Ω εξάγονται ως ακολούθως. Αφού δεν μπορεί να υπάρξει ροή μέσα από μία αδιαπέραστη επιφάνεια η κανονική παράγωγος $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ πρέπει να είναι

μηδέν σε κάθε τέτοια επιφάνεια, π.χ., στη βάση AB, η $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$. Αφού η ελεύθερη

επιφάνεια FD είναι η διεπιφάνεια ανάμεσα στο νερό στην περιοχή ροής Ω και στον αέρα από πάνω, μέσα στον οποίο δεν διεισδύει καθόλου νερό, η συνθήκη $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$

ισχύει και στην FD επίσης. Η δεύτερη συνθήκη στο ελεύθερο σύνορο είναι ότι η πίεση πρέπει να είναι συνεχής σε αυτό. Επιπλέον έξω από την περιοχή ροής και στις πλευρές AF και BC η πίεση είναι σταθερή και μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι μηδέν. Θέτοντας το $p = 0$ στην (2.5) προκύπτει $\phi = y$ στην FD. Ομοίως, στην επιφάνεια διαρροής CD το $\phi = y$, αφού έχουμε ότι η πίεση είναι ίση με 0, επειδή πάλι το νερό εκεί βρίσκεται σε επαφή με τον αέρα. Η συνθήκη κατά μήκος του συνόρου στο πορώδες υλικό, το οποίο έρχεται σ' επαφή με μία δεξαμενή ρευστού, εξαρτάται από το γεγονός ότι η ταχύτητα του υγρού σε μία δεξαμενή είναι αμελητέα συγκρινόμενη με εκείνη μέσα στο πορώδες υλικό. Επομένως, μηδενική ταχύτητα σημαίνει ότι το δυναμικό της ταχύτητας $\phi = y + \frac{p}{\rho g}$ είναι σταθερό και αφού η πίεση $p = 0$ στην επιφάνεια μίας δεξαμενής, έχουμε $\phi = y_1$ ή $\phi = y_2$ κατά μήκος των AF ή BC αντίστοιχα (Σχ. 2.1).

Το πρόβλημα μοντέλο του απλού ορθογώνιου φράγματος ορίζεται επομένως σε σχέση με το σχήμα (2.1), από την ακόλουθη εξίσωση και τις συνθήκες:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{στο } \Omega, \quad 0 < x < x_1, \quad 0 < y < f(x), \quad (2.7)$$

$$\phi = y_1 \quad \text{στο AF}, \quad \phi = y_2 \quad \text{στο BC}, \quad (2.8)$$

$$\phi = y, \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{στο FD}, \quad (2.9)$$

$$\phi = y \quad \text{στο CD}, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{στο AB,} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \leq 0 \quad \text{στο CD.} \quad (2.12)$$

Η συνθήκη (2.12) εκφράζει το γεγονός ότι κάποιο υγρό φεύγει από το πορώδες στην περιοχή διαρροής CD, αλλά καμία ποσότητα από το υγρό δεν μπορεί να εισχωρήσει στο πορώδες μέσο. Η πλήρης λύση περιλαμβάνει τον καθορισμό του ελεύθερου συνόρου $y = f(x)$ έτσι ώστε:

$$f(0) = y_1, \quad f(x_1) > y_2, \quad \frac{d}{dx}f(0) = 0, \quad \frac{d}{dx}f(x_1) = \infty. \quad (2.13)$$

Σ' αυτό το παράδειγμα, όπου $\phi = \text{σταθερά}$, θα υπάρχουν γραμμές ροής κατά μήκος των οποίων έχουμε ότι $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$. Έπεται ότι η αδιαπέραστη βάση και η ελεύθερη επιφάνεια είναι και οι δύο γραμμές ροής. Σωματίδια του υγρού κινούνται κατά μήκος μίας γραμμής ροής, πάντα στην ίδια διεύθυνση από την ανώτερη στην κατώτερη δεξαμενή και στη διεύθυνση του x καθώς αυτό αυξάνει (Σχ. 2.1). Έτσι η ταχύτητα του υγρού είναι θετική στην περιοχή ροής και η ϕ πρέπει να φθίνει κατά μήκος οποιασδήποτε γραμμής ροής. Συγκεκριμένα, κατά μήκος της ελεύθερης επιφάνειας της γραμμής ροής, η ϕ είναι φθίνουσα συνάρτηση του x , και αφού $\phi = y = f(x)$ στο FD, έπεται, ότι η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Τελικά, επειδή η βάση και η ελεύθερη επιφάνεια είναι γραμμές ροής, ορίζουν ένα σωλήνα ροής μέσα από κάθε κάθετο τμήμα του οποίου η ροή του υγρού είναι η ίδια. Ειδικότερα, μέσα από οποιοδήποτε κάθετο τμήμα του φράγματος έχουμε ένα σταθερό ρυθμό ροής που δίνεται από τον τύπο:

$$-\int_0^{f(x)} \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, y) dy = \text{σταθερά} = q. \quad (2.14)$$

Η ποσότητα αυτή πολλές φορές αναφέρεται και ως «εκροή».

2.2 Συνάρτηση ροής

Οι συνιστώσες της ταχύτητας q στην (2.6) δίνονται από τους τύπους:

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (2.15a)$$

Επίσης, υπάρχει μία συνάρτηση ροής ψ , που ικανοποιεί την εξίσωση Laplace $\nabla^2 \psi = 0$ και για την οποία:

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (2.15\beta)$$

Οι εξισώσεις Cauchy – Riemann $\phi_x = \psi_y$ και $-\phi_y = \psi_x$ συνεπάγονται από τις (2.15α) και (2.15β) ως συνήθως.

Το απλό πρόβλημα φράγματος που ορίζεται από τις εξισώσεις (2.7 – 2.12) μπορεί επίσης να εκφραστεί και σε όρους των δύο συναρτήσεων ϕ και ψ ως εξής:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \quad \text{στο } \Omega \\ \phi = y_1 \quad \text{στο AF}, \quad \phi = y_2 \quad \text{στο BC} \\ \phi = y, \quad \psi = 0 \quad \text{στο FD} \\ \phi = y \quad \text{στο CD} \\ \psi = q \quad \text{στο AB} \end{array} \right\} \quad (2.16)$$

όπου το q είναι ο ρυθμός ροής μέσα από το φράγμα που ορίστηκε στην (2.14).

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι, σ' αυτό το παράδειγμα, το q μπορεί να οριστεί ρητά από τις διαστάσεις του φράγματος και τα επίπεδα του νερού. Στην πραγματικότητα ο Charni (1951) [1] απέδειξε ότι για το φράγμα του σχήματος (2.1) ισχύει:

$$q = \frac{(y_1^2 - y_2^2)}{2x_1}.$$

2.3 Μοντελοποίηση σε σταθερό χωρίο: Ο μετασχηματισμός Baiocchi

Το 1971 ο Baiocchi πρότεινε ένα νέο τρόπο θεώρησης των προβλημάτων ροής μέσα από πορώδη μέσα που έχει αποδειχθεί πολύ αποτελεσματικός και από θεωρητική και από αριθμητική άποψη. Επιτρέπει θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας που αποδεικνύονται με αυστηρότητα, επίσης διευκολύνει την παραγωγή νέων αριθμητικών αλγορίθμων που είναι απλοί και αποτελεσματικοί στη χρήση τους και οι οποίοι ανταγωνίζονται καλώς παλαιότερα σχήματα που βασίζονται στις κλασικές μοντελοποιήσεις των εξισώσεων (2.7-2.12) ή (2.16). Ο Baiocchi (1972) ([1]) ανέπτυξε τη θεωρητική πλευρά της ιδέας του για το πρόβλημα του απλού ορθογώνιου φράγματος και η αριθμητική εφαρμογή οφείλεται στον Comincioli *et al.* (1971) ([1]).

Η προσέγγιση του Baiocchi παρουσιάζεται εδώ με αναφορά στο απλό ορθογώνιο φράγμα (Σχ. 2.1). Η εξαρτημένη μεταβλητή εκτείνεται συνεχώς μέσα από την ελεύθερη

επιφάνεια, και από την άγνωστη περιοχή Ω , στην οποία το πρόβλημα ορίζεται από τις εξισώσεις (2.7 – 2.12), επεκτείνεται σε μια γνωστή περιοχή με σταθερά σύνορα, στην περίπτωση αυτή την περιοχή ABEF και έτσι η ϕ ορίζεται πάνω στο σύνολο της γνωστής εκτεταμένης περιοχής.

Το χωρίο Ω στο σχήμα (2.1) εκτείνεται στη γνωστή περιοχή ABEF, η οποία δηλώνεται από το D ($0 < x < x_1, 0 < y < y_1$) έτσι ώστε $D \equiv \Omega + \Omega_{\text{ext}} + \Gamma$, όπου Γ είναι το ελεύθερο σύνορο FD που συμπεριλαμβάνει τα σημεία F και D και το Ω_{ext} ορίζεται από $0 < x < x_1, f(x) < y < y_1$. Η εξαρτημένη μεταβλητή ϕ εκτείνεται συνεχώς και ορίζεται στο \bar{D} , δηλαδή στο χωρίο D μαζί με τα σύνορα του, θέτοντας:

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(x, y) &= \phi(x, y), \quad \text{στο } \bar{\Omega}, \\ \tilde{\phi}(x, y) &= y, \quad \text{στο } \bar{D} \setminus \bar{\Omega}.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Ορίζουμε μια ασθενής λύση των εξισώσεων (2.7 – 2.12) να είναι μια τριάδα $\{ f, \Omega, \phi \}$ τέτοια ώστε: η $f(x)$ να είναι μια συνεχής γνησίως φθίνουσα συνάρτηση για $0 \leq x \leq x_1$ με $f(0) = y_1$ και $f(x_1) \geq y_2$, το Ω να είναι το ανοικτό χωρίο που έχουμε, ήδη σημειώσει, η $\phi(x, y)$ να είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη μαζί με τις πρώτες παραγώγους της στο Ω , να είναι συνεχής στο $\bar{\Omega}$, και με αυτή την έννοια να ικανοποιεί τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned}\phi &= y_1 \quad \text{στο } AF, & \phi &= y_2 \quad \text{στο } BC, \\ \phi &= y, \\ \phi &= y \quad \text{στο } CD,\end{aligned}$$

και η $\phi(x, y)$ να ικανοποιεί τη σχέση:

$$\iint_{\Omega} (\phi_x \tilde{\phi}_x + \phi_y \tilde{\phi}_y) dx dy = 0, \tag{2.19}$$

για κάθε $\tilde{\phi}(x, y)$ ορισμένη στο $[0, x_1] \times [0, y_1]$ με συνεχείς πρώτες παραγώγους και με $\tilde{\phi} = 0$ σε μια περιοχή των AF και BE. Ως συνήθως η ασθενής λύση (2.19) συνεπάγεται ότι $\nabla^2 \phi = 0$ στο Ω και ότι η ϕ ικανοποιεί τις εξισώσεις:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{στο } FD$$

και

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{στο } AB.$$

Ο μετασχηματισμός του Baiocchi τώρα χρησιμοποιείται για να ορίσει μια νέα ανεξάρτητη μεταβλητή w η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$w(x, y) = \int_y^{y_1} \{\tilde{\phi}(x, n) - n\} dn. \quad (2.20)$$

Στη συνέχεια θα ερευνήσουμε ορισμένες ιδιότητες της $w(x, t)$. Στην ελεύθερη επιφάνεια Γ και στο $\bar{D} \setminus \bar{\Omega}$, έχουμε ότι $w = 0$ και έτσι η w είναι συνεχής στο \bar{D} επειδή η (2.20) συνεπάγεται:

$$w(x, y) = \int_y^{f(x)} \{\tilde{\phi}(x, n) - n\} dn, \quad \text{στο } \bar{\Omega}. \quad (2.20a)$$

Επιπλέον, η αντικατάσταση της $\tilde{\phi} = y + \frac{p}{\rho g}$ στην (2.20) δίνει:

$$w(x, y) = \int_y^{f(x)} \frac{p(x, n)}{\rho g} dn,$$

και έτσι, αφού οι p και ρg είναι θετικές ποσότητες στο Ω , έχουμε ότι $w(x, y) > 0$ στο Ω . Η παραγωγή της (2.20a) ως προς x δίνει:

$$\begin{aligned} w_x(x, y) &= f_x(x) \{\tilde{\phi}(x, f(x)) - f(x)\} + \int_y^{f(x)} \tilde{\phi}_x(x, n) dn \\ &= \int_y^{f(x)} \tilde{\phi}_x(x, n) dn, \end{aligned} \quad (2.21)$$

αφού από την πρώτη της (2.9), η $\tilde{\phi}(x, f(x)) = f(x)$. Ομοίως, έχουμε ότι:

$$w_y = -\{\tilde{\phi}(x, y) - y\}. \quad (2.22)$$

Έτσι

$$w_x = w_y = 0 \quad \text{στο } y = f(x) \text{ και στο } \bar{D} \setminus \bar{\Omega},$$

και οι πρώτες παράγωγοι της w είναι συνεχείς σε ολόκληρο το D .

Επομένως το πρόβλημα που καλούμαστε να λύσουμε είναι: σε πια σημεία του χωρίου ABCDEF (Σχ. 2.1), ισχύει $w = 0$ και σε ποια $w > 0$. Η λύση αυτού του προβλήματος καθορίζει το ελεύθερο σύνορο Γ .

Ένα κατάλληλο σημείο έναρξης για την παραγωγή μίας διαφορικής εξίσωσης που ικανοποιείται από την w είναι το θεώρημα του Green. Σύμφωνα με αυτό ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \iint_D \nabla \tilde{\phi} \cdot \nabla w dx dy &= \int_{\delta D} \tilde{\phi} \frac{\partial w}{\partial n} dS - \iint_D \tilde{\phi} \nabla^2 w dx dy \\ &= -\iint_D \tilde{\phi} \nabla^2 w dx dy, \end{aligned} \quad (2.23)$$

ένεκα των συνοριακών συνθηκών για $\frac{\partial w}{\partial n}$ και $\tilde{\phi}$. Η εισαγωγή μίας συνάρτησης $\Phi(x, y)$

που δίνεται από τη σχέση:

$$\Phi = \int_0^y \tilde{\phi}(x, n) dn, \quad (2.24)$$

δηλαδή

$$\tilde{\phi}(x, y) = \Phi_y(x, y), \quad (2.25)$$

οδηγεί σε μια δεύτερη έκφραση για το ολοκλήρωμα $\iint_D \nabla \tilde{\phi} \cdot \nabla w dx dy$ ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} \iint_D \nabla \tilde{\phi} \cdot \nabla w dx dy &= \iint_D \{ \tilde{\phi}_x w_x + \tilde{\phi}_y w_y \} dx dy \\ &= \iint_D \{ w_x \Phi_{xy} + w_y \Phi_{yy} \} dx dy \\ &= \iint_{\Omega} \{ w_x \Phi_{xx} + w_y \Phi_{yy} \} dx dy, \end{aligned} \quad (2.26)$$

μετά από ολοκλήρωση κατά μέρη και με την σημείωση ότι η Φ μηδενίζεται μαζί με όλες τις παραγώγους της στις FA, AB και BC και ότι η w μηδενίζεται στην FD. Τώρα η αντικατάσταση των εξισώσεων (2.22), (2.18) και (2.25) στην (2.26) δίνει:

$$\begin{aligned} \iint_D \nabla \tilde{\phi} \cdot \nabla w dx dy &= - \iint_{\Omega} [(\phi - y) \Phi_{xx} + (\phi - y) \Phi_{yy}] dx dy \\ &= \iint_{\Omega} (\phi_x \Phi_x + \phi_y \Phi_y - \Phi_y) dx dy \\ &= \iint_{\Omega} -\tilde{\phi} dx dy = \iint_{\Omega} -\tilde{\phi} x_{\Omega} dx dy, \end{aligned} \quad (2.27)$$

χρησιμοποιώντας το θεώρημα Green, την εισαγωγή των συνοριακών συνθηκών, και με $\nabla^2 \varphi = 0$ στο πεδίο Ω . Επιπλέον έχουμε ότι $x_{\Omega} = 1$ στο Ω και μηδέν έξω από το Ω . Τελικά, οι (2.23) και (2.27) μαζί δίνουν ότι η μεταβλητή w ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 w &= 1 \quad \text{στο } \Omega, & w &> 0 \\ \nabla^2 w &= 0 \quad \text{στο } D \setminus \Omega, & w &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.28)$$

Για να ολοκληρωθεί η μοντελοποίηση του προβλήματος του απλού φράγματος χρειάζεται να προσδιορίσουμε τις συνθήκες που ικανοποιούνται από την $w(x, t)$ στα σύνορα του D . Έτσι έχουμε:

$$\text{στο AF,} \quad \tilde{\phi}(0, y) = y_1, \quad w(0, y) = \int_y^{y_1} (y_1 - n) dn = \frac{1}{2} (y_1 - y)^2, \quad (2.29)$$

$$\text{στο BC,} \quad \tilde{\phi}(x_1, y) = y_2, \quad w(x_1, y) = \int_y^{y_2} (y_2 - n) dn = \frac{1}{2} (y_2 - y)^2, \quad (2.30)$$

$$\text{στο CD,} \quad \tilde{\phi}(x_1, y) = y, \quad w(x_1, y) = 0, \quad (2.31)$$

$$\text{στο DE,} \quad \tilde{\phi}(x_1, y) = y, \quad w(x_1, y) = 0, \quad (2.32)$$

$$\text{στο FE,} \quad \tilde{\phi}(x, y_1) = y, \quad w(x, y_1) = 0. \quad (2.33)$$

Αφού η AB είναι μία γραμμική ροής ισχύει ότι:

$$w_x(x, 0) = \int_0^{y_1} \tilde{\phi}_x(x, n) dn = -q$$

όπου το q είναι ο ρυθμός ροής μέσα από το φράγμα και είναι ανεξάρτητο του x . Η χρησιμοποίηση των εξισώσεων (2.29) και (2.30) για $y = 0$ δείχνει ότι:

$$w_x = -\frac{\frac{1}{2}(y_1^2 - y_2^2)}{x_1},$$

και με την ολοκλήρωση ως προς x της παραπάνω εξίσωσης, έχοντας υπόψη ότι για $x = 0$, $w(0, 0) = \frac{1}{2}y_1^2$, τελικά έχουμε:

$$\text{στο AB,} \quad \tilde{\phi}_y(x, 0) = 0, \quad w(x, 0) = \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{\frac{1}{2}(y_1^2 - y_2^2)x}{x_1}. \quad (2.34)$$

Οι ιδιότητες της w και οι εξισώσεις στην (2.28) μπορούν να εκφραστούν από την ακόλουθη διαφορική εξίσωση και τις ανισότητες στο χωρίο D :

$$\left. \begin{aligned} w(1 - \nabla^2 w) &= 0, \\ 1 - \nabla^2 w(x, y) &\geq 0, \quad w(x, y) \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

Σημειώνουμε ότι αφού βρεθεί μια τέτοια λύση, το χωρίο Ω μπορεί να αναγνωριστεί ως η περιοχή στην οποία η $w > 0$, δηλαδή το $\Omega = \{(x, y) \mid (x, y) \in D, w(x, y) > 0\}$, επίσης το ελεύθερο σύνορο $y = f(x)$ δίνεται από τις σχέσεις:

$$f(x) = \sup\{y \mid (x, y) \in \Omega\}, \quad 0 < x < x_1,$$

με

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad \text{και} \quad f(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} f(x).$$

2.4 Μεταβολική μορφή του προβλήματος

Έχει αποδειχθεί (Duvaut και Lions 1976, Mosco 1973) ([1]) ότι αν η $w(x, y)$ ικανοποιεί την (2.35) και τις συνθήκες (2.29 – 2.33) με την (2.34), τότε επίσης ικανοποιεί την ανισότητα:

$$a(w, u - w) \geq (u - w), \quad (2.36)$$

για όλες τις συναρτήσεις u , οι οποίες, μαζί με τις πρώτες παραγώγους τους, υπάρχουν και είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες στο D και οι οποίες συμφωνούν με την w στο σύνορο του D . Η συνάρτηση w και οι πρώτες παράγωγοί της είναι ομοίως τετραγωνικά ολοκληρώσιμες στο D . Αναφορικά με τη σχέση (2.36) έχουμε ότι η διγραμμική μορφή $a(w, u - w)$ ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} a(w, u - u) &= \iint_D \nabla w \cdot \nabla (u - u) dx dy \\ &= \iint_D \{w_x (u_x - w_x) + w_y (u_y - w_y)\} dx dy \end{aligned} \quad (2.37)$$

και

$$(u - w) = - \iint_D (u - w) dx dy. \quad (2.38)$$

Μια απόδειξη της σχέσης (2.36) που σκιαγραφείτε από τον Bruch (1980) ([1]) έχει ως εξής:

Εισάγουμε τη συνάρτηση $\beta = u - w$, η οποία είναι μηδέν στο σύνορο του D , τότε:

$$\iint_D \{\nabla \beta \cdot \nabla w\} dx dy + \iint_D \beta dx dy = \iint_D \{\nabla \beta \cdot \nabla w\} dx dy + \iint_D \beta x_{\Omega} dx dy + \iint_{D-\Omega} u dx dy, \quad (2.39)$$

αφού η $w = 0$ στο $\bar{D} \setminus \bar{\Omega}$. Ο ορισμός της $\Phi(x, y) = \int_0^y \beta(x, \eta) d\eta$ και επομένως της $\beta(x, y) = \Phi_y(x, y)$ και η παρατήρηση ότι η Φ μηδενίζεται μαζί με όλες τις παραγώγους της στις FA , AB και BC , ενώ η w μηδενίζεται στην FE , οδηγεί στην εξίσωση (2.26). Δηλαδή έχουμε:

$$\iint_D \{\nabla \beta \cdot \nabla w\} dx dy = \iint_D (w_y \Phi_{xx} + w_y \Phi_{yy}) dx dy. \quad (2.40)$$

Με αντικατάσταση της (2.22) στην (2.40) έχουμε ότι:

$$\iint_D \{\nabla \beta \cdot \nabla w\} dx dy = \iint_D (-\{\bar{\phi}(x, y) - y\} \Phi_{xx} - \{\bar{\phi}(x, y) - y\} \Phi_{yy}) dx dy. \quad (2.41)$$

Στη συνέχεια αντικαθιστώντας την (2.18) στην (2.41) έχουμε ότι:

$$\iint_D \{\nabla \beta \cdot \nabla w\} dx dy = \iint_{\Omega} (-\{\phi(x, y) - y\} \Phi_{xx} - \{\phi(x, y) - y\} \Phi_{yy}) dx dy. \quad (2.42)$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\beta(\mathbf{x}, y) = \Phi_y(\mathbf{x}, y)$ η (2.42) γίνεται:

$$\begin{aligned} \iint_D \{\beta \cdot \nabla w\} dx dy &= - \iint_{\Omega} [(\phi - y)\Phi_{xx} + (\phi - y)\Phi_{yy}] dx dy \\ &= \iint_{\Omega} (\phi_x \Phi_x + \phi_y \Phi_y - \Phi_y) dx dy \\ &= \iint_{\Omega} -\beta dx dy = \iint_{\Omega} -\beta x_{\Omega} dx dy. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Η απόδειξη της (2.36) ακολουθεί αμέσως χρησιμοποιώντας την (2.43) στην (2.39) και έχοντας υπόψη ότι $u \geq 0$ στο $\bar{D} \setminus \bar{\Omega}$.

Επανερχόμενοι στη μοντελοποίηση του προβλήματος, εξαιτίας της συμμετρίας στην ανισότητα (2.36), η ζητούμενη λύση $w(\mathbf{x}, y)$ είναι επίσης μία λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης:

$$J(w) \leq J(u), \quad (2.44)$$

όπου οι συναρτήσεις $u(\mathbf{x}, y)$, $w(\mathbf{x}, y)$ είναι όπως ορίζονται στην (2.36) και το συναρτησιακό J ορίζεται να είναι:

$$J(u) = \frac{1}{2} \iint_D (u_x^2 + u_y^2) dx dy + \iint_D u dx dy. \quad (2.45)$$

Πράγματι, μπορούμε να φέρουμε την εξίσωση (2.36) στη μορφή:

$$- \iint_D (w_x^2 + w_y^2) dx dy - \iint_D w dx dy \geq - \iint_D (w_x u_x + w_y u_y) dx dy - \iint_D u dx dy, \quad (2.46)$$

χρησιμοποιώντας την (2.37). Η γενική ανισότητα $(a - \beta)^2 \geq 0$, δηλαδή $2a\beta \leq a^2 + \beta^2$, δίνει $2w_x u_x \leq w_x^2 + u_x^2$ και επίσης $2w_y u_y \leq w_y^2 + u_y^2$ και έτσι η (2.46) συνεπάγεται την (2.44).

Η μετατροπή του προβλήματος σε μια μεταβολική μορφή είναι πολύ χρήσιμη δεδομένου ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη της ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης του προβλήματος.

Αποδείξεις για την ύπαρξη και τη μοναδικότητα μίας λύσης της ανισότητας (2.36) και ως εκ τούτου του προβλήματος ελαχιστοποίησης (2.44), δίνονται από τον Baiocchi *et al.* (1973b, 1976), τους Lions και Stampacchia (1967) και τον Glowinski (1976) ([1]).

Ο Baiocchi (1980a) ([1]) επέκτεινε τη μελέτη του απλού ορθογώνιου φράγματος για να συμπεριλάβει μια συνθήκη παραγώγου $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \lambda(\phi - y_1)$, $\lambda > 0$, στην επιφάνεια εισαγωγής AF (Σχ. 2.1) αντί για τη συνθήκη (2.8), $\phi = y_1$. Προφανώς, η επίδραση των

ακαθαρσιών στην δεξαμενή όταν μεταφέρονται προς την επιφάνεια AF εκφράζεται καλύτερα από μία τέτοιου τύπου συνθήκη. Σε αυτή τη περίπτωση ο Βαιocchi ([1]) παράγει την ανισότητα:

$$\iint_D \nabla w \cdot \nabla (v - w) dx dy + \lambda \int_0^{y_1} [w(0, y) \{v(0, y) - w(0, y)\}] dy$$

$$\geq \iint_D (w - v) dx dy - \lambda \int_0^{y_1} [(y_1 y - y^2 / 2) \{v(0, y) - w(0, y)\}] dy ,$$

όπου D είναι το σταθερό χωρίο ολόκληρου του φράγματος. Ο Βαιocchi (1980a) ([1]) βρίσκει ότι αυτό το πρόβλημα είναι καλά τοποθετημένο, ότι η ύπαρξη και η μοναδικότητα μπορούν να αποδειχθούν και ότι η αριθμητική λύση είναι καλά ορισμένη.

Η εκτεταμένη λίστα αναφορών του μετασχηματισμού Βαιocchi δίνει μια καλή αίσθηση του εύρους των εφαρμογών και της χρησιμότητάς του.

Κεφάλαιο 3ο

Αναλυτική προσέγγιση του Dupuit

Η πρακτική σημασία προβλημάτων ελεύθερου συνόρου σε πορώδη ροή έχει ενθαρρύνει πολλές προσπάθειες ώστε να βρεθούν αναλυτικές λύσεις, και προσεγγιστικές και ακριβείς. Οι δεύτερες εξαρτώνται σχεδόν εξ' ολοκλήρου από την εύρεση κατάλληλων σύμμορφων απεικονίσεων της περιοχής ροής από το φυσικό επίπεδο επάνω στο επίπεδο του δυναμικού της ροής, με χρήση θεωρίας και εργαλείων από τη μιγαδική ανάλυση. Στη παρούσα εργασία δεν θα επεκταθούμε σε αυτές τις τεχνικές. Θα αναφερθούμε μόνο στην παρουσίαση μίας προσεγγιστικής αναλυτικής λύσης και θα παρουσιάσουμε την αναλυτική προσέγγιση του Dupuit.

3.1 Προσέγγιση του Dupuit

Ο Dupuit (1963) έκανε την απλουστευτική υπόθεση ότι η κλίση της ελεύθερης επιφάνειας στην απειροστή ροή είναι πολύ μικρή. Αυτό φαίνεται να τεκμηριώνεται από παρατηρήσεις της συμπεριφοράς των περισσότερων ροών υδάτων στο έδαφος. Σε στάσιμη δυσδιάστατη ροή χωρίς συσσώρευση ουσιών στο κατακόρυφο επίπεδο $x - z$ ή $x - y$, η ελεύθερη επιφάνεια είναι μια γραμμή ροής και σε κάθε σημείο της και ο ρυθμός ροής ανά μονάδα επιφανείας (unit area) q_s δίνεται από το νόμο του Darcy και είναι:

$$q_s = -K \frac{d\phi}{ds} = -K \frac{dz}{ds} = -K \frac{dh}{ds}, \quad (3.1)$$

όπου το s μετριέται κατά μήκος της γραμμής ροής, αφού $\phi = z = h$ στο ελεύθερο σύνορο. Ο Dupuit αντικατέστησε τον όρο $\frac{dh}{ds}$ με το $\frac{dh}{dx}$ θεωρώντας μικρές κλίσεις, πράγμα που ισοδυναμεί με την υπόθεση ότι οι ισοδυναμικές επιφάνειες είναι κάθετες, δηλαδή έχουμε ότι $\eta = \phi(x)$ και είναι ανεξάρτητη του z , δηλαδή η ροή θεωρείται ότι είναι οριζόντια. Έτσι τώρα εξετάζουμε μια ομοιόμορφη μονοδιάστατη ροή που βασίζεται στην έκφραση:

$$q_x = -K_x \frac{dh}{dx}, \quad h = h(x), \quad (3.2)$$

και πρέπει να εξετάσουμε το σφάλμα που παρουσιάζεται από την παράβλεψη της κάθετης ροής $q_z = -K_z \frac{\partial \phi}{\partial z}$.

Η ακριβής έκφραση για τη συνολική οριζόντια εκροή Q , μέσα από το υλικό, είναι:

$$Q = -K_x \int_0^{h(x)} \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, z) dz = -K_x \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_0^{h(x)} \phi(x, z) dz - \frac{1}{2} h^2 \right\} = -K_x \frac{\partial \phi'}{\partial x}. \quad (3.3)$$

όπου

$$\phi' = h\tilde{\phi} - \frac{1}{2}h^2, \quad h\tilde{\phi} = \int_0^{h(x)} \phi(x, z) dz.$$

Από την υπόθεση του Dupuit παίρνουμε:

$$Q \approx -K_x h \frac{\partial h}{\partial x} = -K_x \frac{\partial \left(\frac{1}{2} h^2 \right)}{\partial x}, \quad (3.4)$$

δηλαδή, η ϕ' έχει αντικατασταθεί από την $\frac{1}{2}h^2$. Η ολοκλήρωση κατά μέρη της έκφρασης για την ϕ' στην (3.3) δίνει:

$$\begin{aligned} \phi' &= \int_0^{h(x)} \phi(x, z) dz - \frac{1}{2}h^2 = (z\phi)_0^{h(x)} - \int_0^{h(x)} z \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dz - \frac{1}{2}h^2(x) \\ &= \frac{1}{2}h^2(x) \left\{ 1 + \frac{2}{K_z h^2(x)} \int_0^{h(x)} z q_z(x, z) dz \right\}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

όπου $q_z = -K_z \frac{\partial \phi}{\partial z}$, $q_z(h) < 0$. Ο ολοκληρωτικός όρος στην (3.5) μετρά το σφάλμα που παρουσιάζεται από την αντικατάσταση της ϕ' με την $\frac{1}{2}h^2$, δηλαδή το σφάλμα είναι:

$$e(x) = \frac{2}{K_z h^2(x)} \int_0^{h(x)} z q_z(x, z) dz.$$

Επειδή πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια έχουμε ότι $\phi = h$, $\frac{q_z}{q_x} = \frac{dh}{dx}$, και

$\frac{d\phi}{dx} = \frac{dh}{dx} = -\left(\frac{q_x}{K_x} \right) - \left(\frac{q_z}{K_z} \right) \frac{dh}{dx}$, με τα q_x, q_z να παίρνουν τιμές για $z = h$, βλέπουμε ότι

$$q_z = \frac{-K_x \left(\frac{dh}{dx} \right)^2}{1 + \left(\frac{K_x}{K_z} \right) \left(\frac{dh}{dx} \right)^2}, \quad z = h.$$

Το εύρος του όρου του σφάλματος επομένως δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$0 < \frac{\text{προσεγγιστική λύση} - \text{αριθμητική λύση}}{\text{προσεγγιστική λύση}} = \frac{\frac{1}{2}h^2 - \phi'}{\frac{1}{2}h^2} < \frac{\left(\frac{K_x}{K_z}\right) \left(\frac{dh}{dx}\right)^2}{1 + \left(\frac{K_x}{K_z}\right) \left(\frac{dh}{dx}\right)^2}. \quad (3.6)$$

Ως παράδειγμα, εφαρμόζουμε τον τύπο του Dupuit (3.4) στο πρόβλημα του απλού φράγματος πλάτους L που χωρίζει δύο δεξαμενές με ύψη νερού h_0 και h_L (Σχήμα (2.1) με $x_1 = L$, $y_1 = h_0$, $y_2 = h_L$). Ολοκληρώνοντας τη δεύτερη εξίσωση (3.4) και με την παρατήρηση ότι η Q είναι σταθερή σε ολόκληρο το φράγμα για σταθερή ροή και με $K_x = K$ για ένα ισοτροπικό ομογενές φράγμα, έχουμε:

$$h^2(x) = h_0^2 - 2 \frac{Qx}{K}, \quad Q = K \frac{(h_0^2 - h_L^2)}{2L}. \quad (3.7)$$

Η σωστή έκφραση για την Q (δηλαδή χωρίς να κάνουμε τις υποθέσεις του Dupuit) έπεται από την ολοκλήρωση της (3.3) και εισάγοντας $\phi = h(x) = h_0$, για $x = 0$ για να πάρουμε (Charni, 1951) **[1]**:

$$\left(\frac{Q}{K}\right)_x = -\int_0^{h(x)} \phi(x, z) dz + \frac{1}{2}(h^2 + h_0^2). \quad (3.8)$$

Αλλά για $x = L$ έχουμε $\phi(L, z) = h_L$, $0 < z \leq h_L$ και $\phi = z$, $h_L \leq z \leq h_S$ όπου h_S είναι το ύψος του σημείου διαχωρισμού. Ως εκ τούτου για $x = L$, χρησιμοποιώντας την (3.8) έχουμε:

$$\left(\frac{Q}{K}\right)_L = -\int_0^{h_L} h_L dz - \int_{h_L}^{h_S} z dz + \frac{1}{2}(h_S^2 - h_0^2) = \frac{1}{2}(h_0^2 - h_L^2),$$

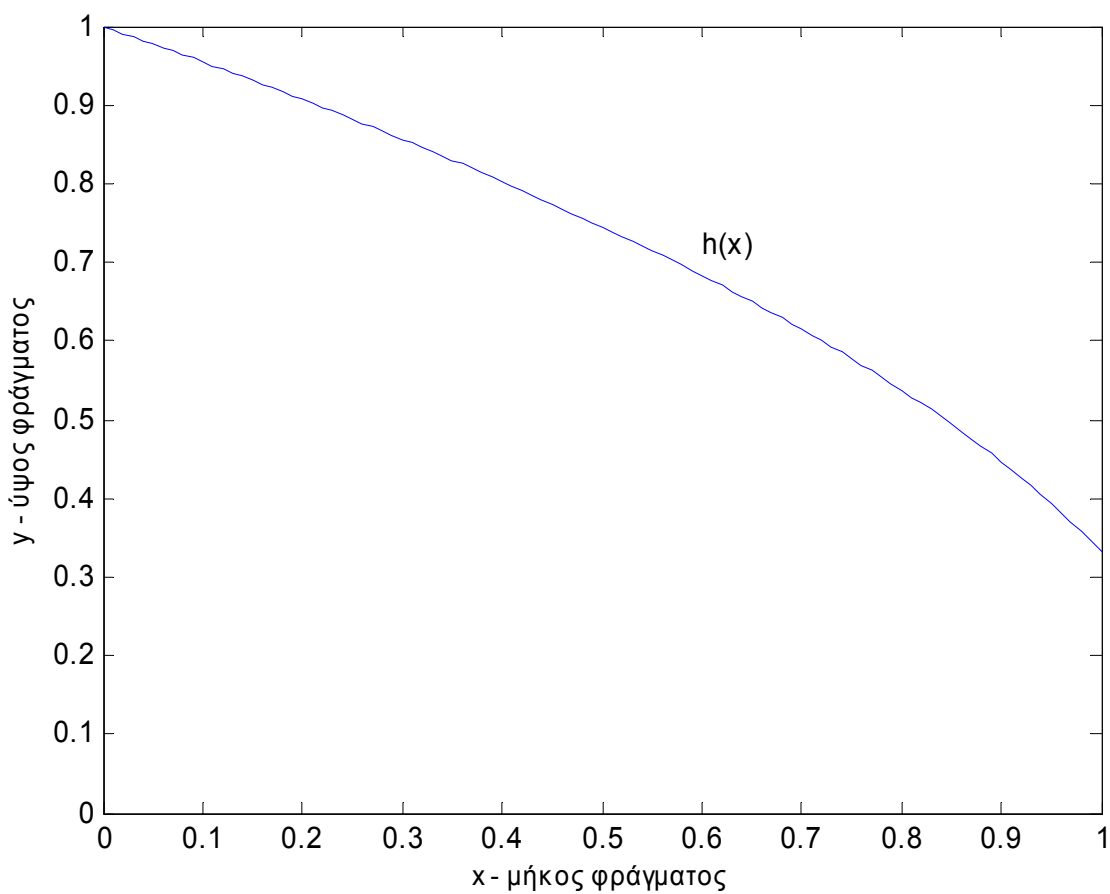
και έτσι ο τύπος του Dupuit (3.7) για τη ολική εκροή (εκκένωση) Q καταλήγει σ' αυτή την περίπτωση να είναι ακριβής (παράδοξο αφού η αναλυτική μέθοδος του Dupuit είναι προσεγγιστική μέθοδος).

Από την άλλη πλευρά, το πρώτο μέλος της (3.7) προσεγγίζει την ελεύθερη επιφάνεια με μια παραβολή που διέρχεται από το $h = h_0$ για $x = 0$ και $h = h_L$ για $x = L$. Έτσι, η λύση του Dupuit δεν περιλαμβάνει μία επιφάνεια διαρροής και η παραβολική ελεύθερη επιφάνεια συναντά και την πλευρά εισόδου και την πλευρά εξόδου του φράγματος σε πεπερασμένες γωνίες που δίνονται από:

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{Q}{Kh_0} \quad \text{για } x=0 \quad \text{και} \quad \frac{dh}{dx} = -\frac{Q}{Kh_L} \quad \text{για } x=L.$$

Ένα πρόχειρο γενικό πλαίσιο αποδοχής της προσέγγισης και που προτείνεται για πρακτικούς σκοπούς είναι ότι οι τύποι του Dupuit είναι αποδεκτοί, αν τα μήκη στην κατεύθυνση ροής είναι μεγαλύτερα από το διπλάσιο του βάθους της περιοχής ροής.

Τέλος θα παρουσιάσουμε γραφικά τη λύση της εξίσωσης (3.7) για $h_0 = 1$, $h_L = 1/3$ και $L = 1$.



Σχήμα 3.1: Γραφική παράσταση της λύσης h της εξίσωσης (3.7) για $h_0 = 1$, $h_L = 1/3$ και $L = 1$.

Κεφάλαιο 4ο

Αριθμητική επίλυση του προβλήματος του απλού ορθογωνίου φράγματος

Για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος του απλού ορθογωνίου φράγματος θα χρειαστούμε να αναφέρουμε κάποια βασικά πράγματα για τις μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων και τη μέθοδο επίλυσης ελλειπτικών Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων με χρήση πεπερασμένων διαφορών.

4.1 Επίλυση γραμμικών συστημάτων

Η επίλυση συστημάτων n γραμμικών εξισώσεων, συνήθως με το ίδιο πλήθος αγνώστων, δηλαδή ο υπολογισμός του διανύσματος x με n συνιστώσες που είναι η λύση του γραμμικού συστήματος

$$Ax = b \quad (4.1)$$

όπου A ένας δεδομένος $n \times n$ πίνακας και b δεδομένο διάνυσμα με n συνιστώσες, είναι ένα πρόβλημα που συναντάμε συχνά στις εφαρμογές. Τυπικά, γραμμικά συστήματα της μορφής (4.1) προκύπτουν κατά τη διακριτοποίηση συνεχών προβλημάτων όπως, π.χ. επίλυσης διαφορικών και ολοκληρωτικών εξισώσεων, προσέγγισης συναρτήσεων, επίλυσης μη γραμμικών συστημάτων κ.τ.λ. Έτσι οι αλγόριθμοι επίλυσης γραμμικών συστημάτων αποτελούν βασικό δομικό λίθο σχεδόν κάθε σύνθετης εφαρμογής των Υπολογιστικών Μαθηματικών.

Οι μέθοδοι επίλυσης γραμμικών συστημάτων στην Αριθμητική Ανάλυση χωρίζονται σε δύο κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει τις **άμεσες** ή **αναλυτικές** μεθόδους, που δίνουν λύση απ' ευθείας από τις σχέσεις, που προκύπτουν από ένα σύστημα ισοδύναμο με το αρχικό σύστημα (4.1) και η δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνει τις **επαναληπτικές** μεθόδους που δίνουν τη λύση έμμεσα από επαναληπτικές διαδικασίες.

Οι πιο δημοφιλείς αναλυτικές μέθοδοι είναι: η Μέθοδος απαλοιφής Gauss, η Μέθοδος Gauss-Jordan, η Παραγοντοποίηση LU, η Μέθοδος Choleski κ.τ.λ. Ενώ οι πιο δημοφιλείς επαναληπτικές μέθοδοι είναι: η Μέθοδος Jacobi, η Μέθοδος Gauss-Seidel, η Μέθοδος Χαλάρωσης – SOR κ.τ.λ.

Όταν, όμως, ένα σύστημα έχει μεγάλο αριθμό εξισώσεων και πολλά μηδενικά στοιχεία οι αναλυτικές μέθοδοι επίλυσης αυτού είναι ασύμφωρες, γιατί απαιτούν αρκετή

υπολογιστική εργασία και γιατί καταλαμβάνουν μεγάλο μέρος στη μνήμη ενός Η/Υ, αφού αποθηκεύουν και τα μηδενικά στοιχεία. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε προσεγγιστικές μεθόδους επίλυσης, δηλαδή τις επαναληπτικές μεθόδους, με τις οποίες δημιουργούμε ακολουθίες που συγκλίνουν στη λύση του συστήματος. Συστήματα μεγάλων διαστάσεων με πολλά μηδενικά στοιχεία εμφανίζονται συχνά στην αριθμητική επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων.

4.1.1 Γενική επαναληπτική μέθοδος

Έστω ότι το γραμμικό σύστημα (4.1) είναι ομαλό, δηλαδή $\det A \neq 0$. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα έχει μία μοναδική λύση. Για υπολογίσουμε προσεγγιστικά τη λύση του (4.1) γράφουμε τον πίνακα A υπό μορφή διαφοράς πινάκων:

$$A = Q - P$$

όπου ο πίνακας Q είναι αντιστρέψιμος. Τότε το σύστημα (4.1) γίνεται:

$$(Q - P)x = b$$

ή

$$Qx = Px + b$$

ή

$$x = Q^{-1}Px + Q^{-1}b.$$

Αν θέσουμε $Q^{-1}P = D$ και $Q^{-1}b = c$, τότε θα έχουμε:

$$x = Dx + c. \tag{4.2}$$

Η επαναληπτική μέθοδος ορίζεται από την (4.2) ως εξής:

$$x^{(k)} = Dx^{(k-1)} + c, \tag{4.3}$$

όπου $k = 1, 2, \dots$ και με αρχικό διάνυσμα $x^{(0)} = \text{δοθέν}$.

4.1.2 Μέθοδος Jacobi

Έστω ότι το γραμμικό σύστημα (4.1) είναι ομαλό, δηλαδή $\det A \neq 0$ και τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα A είναι διάφορα του μηδενός, δηλαδή:

$$a_{ii} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

Στην επαναληπτική μέθοδο του Jacobi παίρνουμε τους πίνακες P και Q της γενικής επαναληπτικής μεθόδου, ως εξής:

$$Q = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{ οπότε } Q^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

και

$$P = Q - A = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Αν θέσουμε τώρα, όπως στη γενική επαναληπτική μέθοδο:

$$Q^{-1}P = D \quad \text{και} \quad Q^{-1}b = c,$$

τότε θα έχουμε τον επαναληπτικό τύπο της μεθόδου Jacobi:

$$x^{(k)} = Dx^{(k-1)} + c, \quad k = 1, 2, \dots, \quad x^{(0)} = \text{δοθέν.}$$

Δηλαδή

$$x^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{-a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{-a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & \frac{-a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{-a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{-a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{bmatrix} x^{(k-1)} + \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}.$$

Επειδή $x^{(k)} = x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})^T$ ο επαναληπτικός τύπος της μεθόδου Jacobi γράφεται:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right), \quad j \neq i \quad \text{με} \quad i = 1, \dots, n \quad \text{και} \quad k=1, 2, \dots \quad (4.4)$$

Επομένως, σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο, πρακτικά λύνουμε την πρώτη εξίσωση του

συστήματος ως προς x_1 , τη δεύτερη ως προς x_2 κ.τ.λ. Μετά εφαρμόζουμε τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων σύμφωνα με τον τύπο (4.4), αρχίζοντας από δοθέν διάνυσμα $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T$, οπότε παίρνουμε μία ακολουθία διανυσμάτων:

$$x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})^T.$$

Αν η ακολουθία των διανυσμάτων αυτών, που είναι οι προσεγγίσεις της λύσης του συστήματος (4.1), συγκλίνει στο διάνυσμα x , δηλαδή αν

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x,$$

τότε το x είναι λύση του συστήματος (4.1).

Κριτήριο διακοπής. Ορίζουμε ως κριτήριο διακοπής των διαδοχικών προσεγγίσεων, τη σχέση:

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_{\infty} \leq \varepsilon,$$

όπου ε είναι ένας δοθείς αριθμός με $\varepsilon < 1$.

Επειδή $\|Y\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i|$, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| \leq \varepsilon.$$

Ένα άλλο ανάλογο κριτήριο διακοπής δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_{\infty}}{\|x^{(k)}\|_{\infty}} = \frac{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|}{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)}|} \leq \varepsilon.$$

Τέλος, μπορούμε ως κριτήριο διακοπής να ορίσουμε ένα μέγιστο αριθμό επαναλήψεων M , έτσι ώστε $k \leq M$.

Κριτήριο σύγκλισης. Αν ο πίνακας A του συστήματος (4.1) έχει αυστηρά διαγώνια υπεροχή κατά γραμμή, δηλαδή αν ισχύει η σχέση:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad j \neq i \quad \text{με} \quad i = 1, \dots, n,$$

τότε η επαναληπτική μέθοδος Jacobi αποδεικνύεται ότι συγκλίνει στη λύση x του συστήματος για οποιαδήποτε αρχικό διάστημα $x^{(0)}$ ([3]).

Επειδή η συνθήκη της αυστηρά διαγώνιας υπεροχής είναι αρκετά περιοριστική

μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως κριτήριο σύγκλισης τη συνθήκη της διαγώνιας υπεροχής, δηλαδή της σχέσης:

$$\begin{cases} |a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, & j \neq i, \quad i = 1, \dots, n \\ |a_{ii}| > \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, & \text{για καποιο } i \end{cases},$$

η οποία είναι μία πιο ασθενής συνθήκη και για την οποία επίσης αποδεικνύεται ότι εξασφαλίζεται η σύγκλιση της μεθόδου για κάθε $x^{(0)}$ ([4]).

Στο παράρτημα A (σελ. 77) υπάρχει πρόγραμμα, που δημιουργήθηκε στο μαθηματικό πακέτο Matlab, που υλοποιεί τη μέθοδο Jacobi.

4.1.3 Μέθοδος Gauss – Seidel

Για να λύσουμε το γραμμικό σύστημα (4.1) όπου ο πίνακας A είναι ομαλός και με $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$, με τη μέθοδο Gauss – Seidel, παίρνουμε τους πίνακες P και Q της επαναληπτικής μεθόδου, ως εξής:

$$Q = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

και

$$P = Q - A = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Αν θέσουμε, όπως και στη γενική επαναληπτική μέθοδο:

$$Q^{-1}p = D \quad \text{και} \quad Q^{-1}b = c,$$

τότε θα έχουμε τον επαναληπτικό τύπο της μεθόδου Gauss-Seidel:

$$x^{(k)} = Dx^{(k-1)} + c, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \text{με } x^{(0)} \text{ δοθέν.}$$

Δηλαδή θα έχουμε ένα γραμμικό επαναληπτικό σύστημα ως προς $x^{(k)}$, που για κάθε k λύνεται με εμπρός – αντικατάσταση:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(k-1)} \right), \quad \mu\epsilon \quad i = 1, \dots, n \quad (4.5)$$

Κριτήριο διακοπής. Ορίζουμε ως κριτήριο διακοπής των διαδοχικών προσεγγίσεων, όπως και στη μέθοδο Jacobi, τη σχέση:

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_{\infty} \leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| \leq \epsilon$$

ή τη σχέση:

$$\frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_{\infty}}{\|x^{(k)}\|_{\infty}} = \frac{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|}{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)}|} \leq \epsilon.$$

ή τέλος, μπορούμε ως κριτήριο διακοπής να ορίσουμε ένα μέγιστο αριθμό επαναλήψεων M , έτσι ώστε $k \leq M$.

Κριτήριο σύγκλισης. Χρησιμοποιούμε ως κριτήριο σύγκλισης, όπως και στη μέθοδο Jacobi τη διαγώνια υπεροχή (αυστηρή ή μη) ([3], [4]).

Στο παράρτημα A (σελ. 76) υπάρχει πρόγραμμα, που δημιουργήθηκε στο μαθηματικό πακέτο Matlab, που υλοποιεί τη μέθοδο Gauss-Seidel.

Όπως φαίνεται από την σχέση (4.5), η μέθοδος Gauss-Seidel είναι παραπλήσια με τη μέθοδο Jacobi. Η διαφορά μεταξύ των δύο μεθόδων είναι ότι, στην μεν μέθοδο Jacobi βάζουμε στα δεύτερα μέλη των επαναληπτικών ισοτήτων τις τιμές των $x_i^{(k-1)}$, που βρήκαμε στην προηγούμενη επανάληψη, ενώ στη μέθοδο Gauss-Seidel βάζουμε διαδοχικά τις τιμές των $x_i^{(k)}$, που είναι διαθέσιμες.

Όταν ο πίνακας A του γραμμικού συστήματος (4.1) είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος ($x^T Ax > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$) αποδεικνύεται ότι η μέθοδος Gauss-Seidel συγκλίνει πολύ ταχύτερα από τη μέθοδο Jacobi. Συγκεκριμένα, απαιτεί περίπου το μισό πλήθος βημάτων για να επιτύχει την ίδια ακρίβεια.

Επίσης, ο τύπος (4.4) της μεθόδου Jacobi, δείχνει ότι ο υπολογισμός της νέας τιμής $x_i^{(k)}$ της i -συνιστώσας γίνεται συναρτησί των τιμών $x_i^{(k-1)}$ και δεν προϋποθέτει γνώση καμίας άλλης νέας τιμής $x_j^{(k)}, j \neq i$, σε αντίθεση με ότι συμβαίνει με τη μέθοδο Gauss-Seidel (4.5). Δηλαδή στη μέθοδο Jacobi, τα $x_i^{(k)}, i = 1, 2, \dots, n$, μπορούν να υπολογιστούν συγχρόνως σε n παράλληλους υπολογιστές οι οποίοι έχουν τα κοινά δεδομένα $A, b, x^{(k-1)}$. Λέμε ότι η μέθοδος Jacobi έχει την ιδιότητα της παραλληλίας,

ενώ η μέθοδος Gauss-Seidel όχι. Οι λεγόμενες «παράλληλες» μέθοδοι αποκτούν όλο και μεγαλύτερη σημασία με την ανάπτυξη παράλληλων επεξεργαστών.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε μία μέθοδο επίλυσης Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων, αυτή των πεπερασμένων διαφορών

4.2 Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών

Η μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών είναι γενίκευση των μεθόδων, που χρησιμοποιούνται για τη λύση συνήθων διαφορικών εξισώσεων, όπως π.χ. η μέθοδος Euler, Taylor, Runge-Kutta, κ.τ.λ.

Έστω η ελλειπτική μερική διαφορική εξίσωση (εξίσωση Poisson):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad \text{στο} \quad \Omega = \{(x, y) | a < x < b, c < y < d\}, \quad (4.6)$$

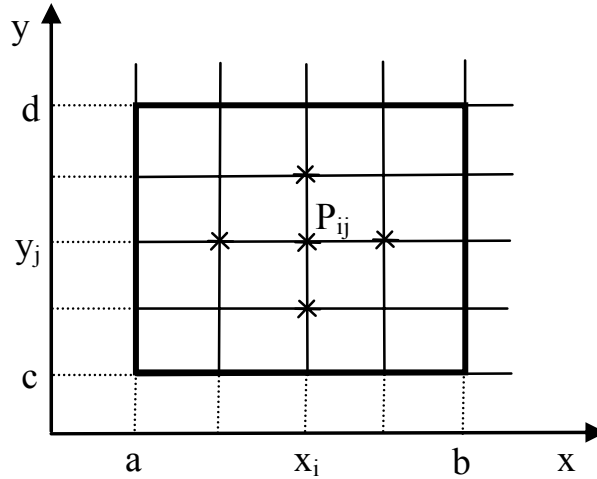
$$u(x, y) = g(x, y) \quad \text{στο} \quad \Gamma \quad (\Gamma = \partial\Omega).$$

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού και ότι το πρόβλημα έχει μοναδική λύση.

Για να λύσουμε το πρόβλημα με τη μέθοδο των πεπερασμένων Διαφορών διαιρούμε κατ' αρχήν το διάστημα $[a, b]$ σε n ίσα υποδιαστήματα μήκους $h = \frac{b-a}{n}$ και το διάστημα $[c, d]$ σε m ίσα υποδιαστήματα μήκους $k = \frac{d-c}{m}$. Κατόπιν δημιουργούμε ένα πλέγμα ευθύγραμμων τμημάτων φέρνοντας κάθετους στα σημεία x_i και παράλληλους στα σημεία y_j (σχ. 4.1), όπου:

$$x_i = a + i \cdot h \quad \text{για} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$y_j = c + j \cdot k \quad \text{για} \quad j = 0, 1, 2, \dots, m.$$



Σχήμα 4.1: Πλέγμα σημείων.

Αν $u(x_i, y_j)$ είναι η λύση του προβλήματος (4.6) σε κάθε κόμβο $P_{ij} = (x_i, y_j)$ του πλέγματος, τότε, προσεγγίζουμε τις παραγώγους δεύτερης τάξης της u με σχέσεις κεντρικών διαφορών:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{k^2} \end{cases} \quad (4.7)$$

Αντικαθιστούμε τις (4.7) στην εξίσωση ελλειπτικού τύπου (4.6), οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h^2} \\ + \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{k^2} = f(x_i, y_j), \end{aligned} \quad (4.8)$$

με $i = 1, 2, \dots, n-1$ και $j = 1, 2, \dots, m-1$ και για τις συνοριακές τιμές έχουμε:

$$\begin{aligned} u(x_i, y_0) &= g(x_i, y_0), & i &= 0, 1, 2, \dots, n, \\ u(x_i, y_m) &= g(x_i, y_m), & i &= 0, 1, 2, \dots, n, \\ u(x_0, y_j) &= g(x_0, y_j), & j &= 1, 2, \dots, m-1, \\ u(x_n, y_j) &= g(x_n, y_j), & j &= 1, 2, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Η εξίσωση (4.8), αντικαθιστώντας τις τιμές της $u(x_i, y_j)$ με τη προσέγγιση που προκύπτει από την αριθμητική επίλυση του προβλήματος, δηλαδή την $u_{i,j}$, γράφεται:

$$-2 \left[\left(\frac{h}{k} \right)^2 + 1 \right] u_{i,j} + (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + \left(\frac{h}{k} \right)^2 (u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) = h^2 f(x_i, y_j) \quad (4.9)$$

και οι συνοριακές συνθήκες γράφονται:

$$u_{i,0} = g(x_i, y_0), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

$$u_{i,m} = g(x_i, y_m), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

$$u_{0,j} = g(x_0, y_j), \quad j = 1, 2, \dots, m-1,$$

$$u_{n,j} = g(x_n, y_j), \quad j = 1, 2, \dots, m-1.$$

όπου $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$.

Η εξίσωση (4.9) συσχετίζει τις προσεγγίσεις της $u(x, y)$ στα σημεία

$$(x_{i-1}, y_j), \quad (x_i, y_j), \quad (x_{i+1}, y_j), \quad (x_i, y_{j-1}), \quad (x_i, y_{j+1}).$$

Στη περίπτωση που $h = k$, και τα διαστήματα $[a, b]$ και $[c, d]$ χωρίζονται σε ίσα υποδιαστήματα, η σχέση (4.9) γίνεται:

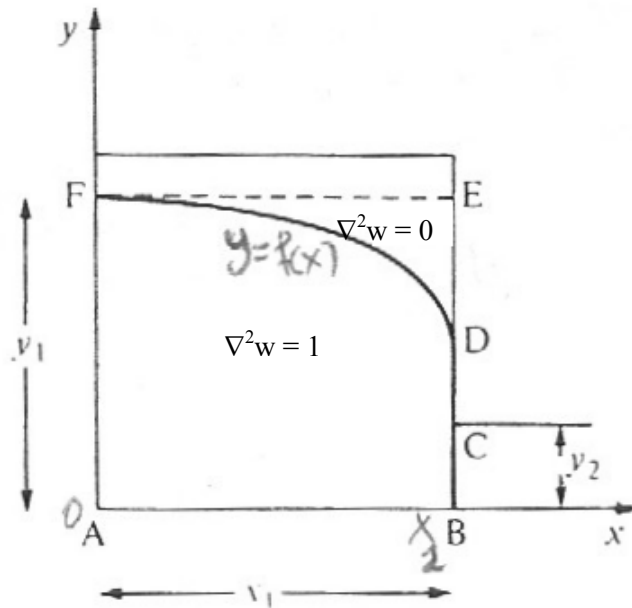
$$-4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} = h^2 f(x_i, y_j). \quad (4.10)$$

Το σύστημα των εξισώσεων (4.10), για $i = 1, 2, \dots, n-1$ και $j = 1, 2, \dots, m-1$, είναι ένα γραμμικό σύστημα της μορφής (4.1), δηλαδή της μορφής $Ax = b$.

4.3 Περιγραφή αριθμητικής επίλυσης του προβλήματος του απλού ορθογωνίου φράγματος

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε την αριθμητική επίλυση του προβλήματος του προσδιορισμού του ελεύθερου συνόρου $f(x)$ του χωρίου Ω του σχήματος (2.1), δηλαδή του προσδιορισμού των σημείων w του χωρίου D για τα οποία ισχύει $\nabla^2 w = 1$.

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών για τις εξισώσεις (2.28) λαμβάνοντας υπόψιν, τη γεωμετρία του απλού ορθογωνίου φράγματος (σχήμα 4.2):



Σχήμα 4.2: Απλό ορθογώνιο φράγμα με χρήση του μετασχηματισμού Baiocchi.

Στη συνέχεια εφαρμόζοντας τις εξισώσεις: (2.29)-(2.34) στο χωρίο ABCDEF έχουμε:

$$\text{AF:} \quad w = \frac{1}{2}(y_1 - y)^2,$$

$$\text{BC:} \quad w(x_1, y) = \int_y^{y_2} (y_2 - n)dn = \frac{1}{2}(y_2 - y)^2,$$

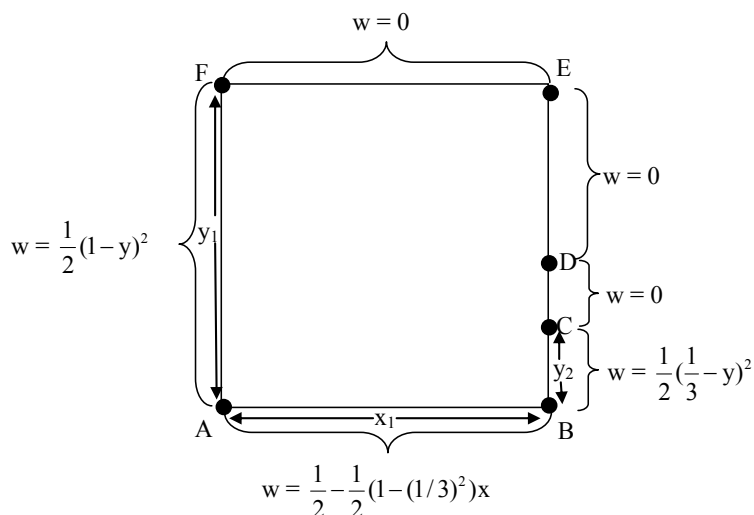
$$\text{CD,} \quad w = 0,$$

$$\text{DE,} \quad w = 0,$$

$$\text{FE,} \quad w(x, y_1) = 0,$$

$$\text{AB,} \quad w = \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}\frac{(y_1^2 - y_2^2)x}{x_1}.$$

Θεωρούμε για παράδειγμα ότι $x_1 = 1$, $y_1 = 1$ και $y_2 = 1/3$. Οπότε το χωρίο μας είναι το $D = [0,1] \times [0,1]$, δηλαδή το A είναι στο σημείο (0,0), το B στο (1,0), το F στο (0,1) και το E είναι στο (1, 1). Τα παραπάνω αναπαριστώνται στο σχήμα (4.3):

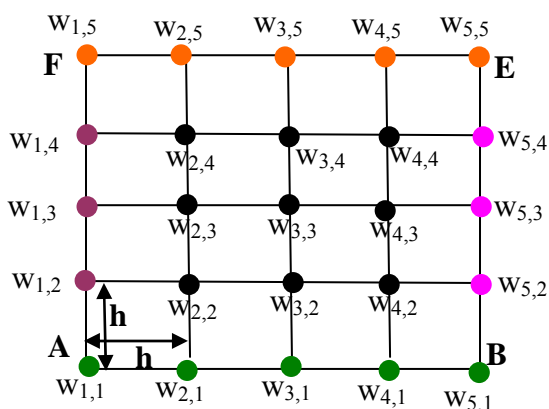


Σχήμα 4.3: Το χωρίο D και οι συνοριακές συνθήκες.

Σύμφωνα με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών διακριτοποιούμε την περιοχή ABCDEF χρησιμοποιώντας M σημεία στον άξονα των x και M σημεία στον άξονα των y .

Επειδή η περιοχή ABCDEF είναι το χωρίο $D = [0,1] \times [0,1]$ και για τη διακριτοποίησή της χρησιμοποιήσαμε M σημεία στον άξονα των x και M σημεία στον άξονα των y , έχουμε ότι το μήκος h του διαστήματος διαμέρισης στον άξονα των x είναι ίσο με το μήκος k του διαστήματος διαμέρισης στον άξονα των y . Δηλαδή έχουμε $h = k$.

Για παράδειγμα θα μελετήσουμε την περίπτωση για την οποία θεωρούμε μία διαμέριση 5 σημείων, δηλαδή $M = 5$, οπότε έχουμε το παρακάτω πλέγμα σημείων:



Σχήμα 4.4: Διακριτοποίηση του χωρίου Ω για $M = 5$ σημεία ανά διεύθυνση.

Αφού έχουμε διαμέριση 5 σημείων και στις δύο διευθύνσεις, έχουμε 4 ίσα διαστήματα ανά διεύθυνση και μήκους $h = \frac{1}{4}$ (διάστημα διαμέρισης).

Οπότε στον x-άξονα τα σημεία της διαμέρισης είναι τα:

$$x(1) = 0, \quad x(2) = \frac{1}{4} = 0.25, \quad x(3) = \frac{1}{2} = 0.5, \quad x(4) = \frac{3}{4} = 0.75, \quad x(5) = 1.$$

Ενώ στον y-άξονα είναι τα:

$$y(1) = 0, \quad y(2) = \frac{1}{4} = 0.25, \quad y(3) = \frac{1}{2} = 0.5, \quad y(4) = \frac{3}{4} = 0.75, \quad y(5) = 1.$$

Οι συνοριακές τιμές είναι τα μόνα γνωστά σημεία του πλέγματος. Συγκεκριμένα έχουμε:

- $w_{i,1} = \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{\frac{1}{2}(y_1^2 - y_2^2)x(i)}{x_1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) \cdot x(i), \quad i = 1, 2, \dots, 5,$
- $w_{i,5} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, 5,$
- $w_{1,j} = \frac{1}{2}(y_1 - y(j))^2 = \frac{1}{2}(1 - y(j))^2 \quad j = 2, 3, 4,$
- $w_{5,j} = \begin{cases} \frac{1}{2}(y_2 - y(j))^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - y(j)\right)^2, & \text{αν } y(j) \leq y_2 = \frac{1}{3} \\ 0, & \text{αν } y(j) > y_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \quad j = 2, 3, 4.$

Θέτουμε:

$$w_{i,j} = W_k$$

όπου τα i, j και k συνδέονται από τη σχέση:

$$k = (i-1) + (j-2) \cdot (M-2).$$

Συγκεκριμένα στο παράδειγμα που μελετάμε έχουμε:

$$k = (i-1) + (j-2) \cdot 3.$$

Οπότε:

$w_{2,2} = W_1,$	$w_{3,2} = W_2,$	$w_{4,2} = W_3,$
$w_{2,3} = W_4,$	$w_{3,3} = W_5,$	$w_{4,3} = W_6,$
$w_{2,4} = W_7,$	$w_{3,4} = W_8,$	$w_{4,4} = W_9.$

Δημιουργούμε έναν πίνακα w του οποίου τα στοιχεία είναι οι γνωστές τιμές των σημείων του πλέγματος ή μηδενικά χρησιμοποιώντας την αντιστοιχία:

$$w(i, j) = \begin{cases} 0, & \text{για } i = 2, \dots, M-1 \text{ και } j = 2, \dots, M-1 \\ w_{j,i}, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (4.11)$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{για } i = 2, \dots, 4 \text{ και } j = 2, \dots, 4 \\ w_{j,i}, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Θέλουμε να βρούμε τα σημεία του πλέγματος για τα οποία ισχύει:

$$\nabla^2 w_{i,j} = 1.$$

Για τον τελεστή Laplace έχουμε:

$$\frac{\partial^2 w(x_i, y_j)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x_i, y_j)}{\partial y^2} = 1.$$

Εκφράζοντας τις μερικές παραγώγους με τις σχέσεις (4.7) καταλήγουμε στον τύπο:

$$\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} + \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{h^2} = 1,$$

ο οποίος αντιστοιχεί στην εξίσωση (4.8) για $h = k$ και $f(x_i, y_j) = 1$.

Εφαρμόζοντας τον τύπο (4.10) για $f(x_i, y_j) = 1$ και για το σημείο $w_{2,2}$ του πλέγματος έχουμε:

$$\begin{aligned} w_{2,2}: \quad & -4w_{2,2} + (w_{1,2} + w_{3,2}) + (w_{2,1} + w_{2,3}) = h^2 \Leftrightarrow \\ & -4W_1 + (w_{1,2} + W_2) + (w_{2,1} + W_4) = h^2 \Leftrightarrow \\ & -4W_1 + W_2 + W_4 = h^2 - w_{1,2} - w_{2,1}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Στη συνέχεια εφαρμόζοντας την παραπάνω διαδικασία και για τα υπόλοιπα εσωτερικά σημεία του πλέγματος έχουμε:

$$w_{3,2}: \quad W_1 - 4W_2 + W_3 + W_5 = h^2 - w_{3,1}, \quad (4.13)$$

$$w_{4,2}: \quad W_2 - 4W_3 + W_6 = h^2 - w_{5,2} - w_{4,1}, \quad (4.14)$$

$$w_{2,3}: \quad W_1 - 4W_4 + W_5 + W_7 = h^2 - w_{1,3}, \quad (4.15)$$

$$w_{3,3}: \quad W_2 + W_4 - 4W_5 + W_6 + W_8 = h^2, \quad (4.16)$$

$$w_{4,3}: \quad W_3 + W_5 - 4W_6 + W_9 = h^2 - w_{5,3}, \quad (4.17)$$

$$w_{2,4}: \quad W_4 - 4W_7 + W_8 = h^2 - w_{1,4} - w_{2,5}, \quad (4.18)$$

$$w_{3,4}: \quad W_5 + W_7 - 4W_8 + W_9 = h^2 - w_{3,5}, \quad (4.19)$$

$$w_{4,4}: \quad W_6 + W_8 - 4W_9 = h^2 - w_{5,4} - w_{4,5}. \quad (4.20)$$

Οπότε έχουμε να λύσουμε το γραμμικό σύστημα των εξισώσεων (4.12) – (4.18), το οποίο με μορφή πινάκων γράφεται:

$$A \cdot W = b,$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix},$$

$$W = [W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6, W_7, W_8, W_9]^T,$$

και

$$b = \begin{bmatrix} h^2 - w_{1,2} - w_{2,1} \\ h^2 - w_{3,1} \\ h^2 - w_{5,2} - w_{4,1} \\ h^2 - w_{1,3} \\ h^2 \\ h^2 - w_{5,3} \\ h^2 - w_{1,4} - w_{2,5} \\ h^2 - w_{3,5} \\ h^2 - w_{5,4} - w_{4,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 - w(2,1) - w(1,2) \\ h^2 - w(1,3) \\ h^2 - w(2,5) - w(1,4) \\ h^2 - w(3,1) \\ h^2 \\ h^2 - w(3,5) \\ h^2 - w(4,1) - w(5,2) \\ h^2 - w(5,3) \\ h^2 - w(4,5) - w(5,4) \end{bmatrix}.$$

Στη δεύτερη ισότητα το b είναι εκφρασμένο με τιμές του πίνακα w που έχουμε δημιουργήσει (σχέση 4.11):

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για $M = 6$ σημεία και $M = 7$ σημεία καταλήγουμε στους πίνακες που φαίνονται στο παράρτημα Β (σελ. 78).

Γενικεύοντας τα παραπάνω παραδείγματα ($M = 5$, $M = 6$, $M = 7$) για M σημεία και θέτοντας $L = M - 2$ μπορούμε να συμπεράνουμε ότι για τον πίνακα A ισχύουν τα εξής:

- Ο πίνακας A είναι ένας τετραγωνικός πίνακας με διαστάσεις $L^2 \times L^2$.

- Για τη πρώτη γραμμή του πίνακα A :

$$A(1, 1) = -4,$$

$$A(1, 2) = 1,$$

$$A(1, L) = 1.$$

- Για τη $2^{\text{η}}$ έως $L - 1$ γραμμή του πίνακα A :

$$A(k, k-1) = 1,$$

$$A(k, k) = -4,$$

$$A(k, k+1) = 1,$$

$$A(k, k+L) = 1,$$

$$\text{όπου } k = 2, 3, \dots, L - 1.$$

- Για τη L γραμμή του πίνακα A :

$$A(L, L-1) = 1,$$

$$A(L, L) = -4,$$

$$A(L, L+1) = 1,$$

$$A(L, L+L) = 1.$$

- Για τη $L+1$ έως $L^2 - L$ γραμμή του πίνακα A :

Οι γραμμές χωρίζονται σε $(L - 2)$ L -αδες.

Για τη πρώτη γραμμή κάθε L -αδας έχουμε:

$$A(k, k-L) = 1,$$

$$A(k, k) = -4,$$

$$A(k, k+1) = 1,$$

$$A(k, k+L) = 1,$$

$$\text{όπου } k = (i - 1) + (j - 2) * L, \quad i = 2, \quad j = 3, 4, \dots, L.$$

Για τις ενδιάμεσες γραμμές κάθε L -αδας έχουμε:

$$A(k, k-L) = 1,$$

$$A(k, k-1) = 1,$$

$$A(k, k) = -4,$$

$$A(k, k+1) = 1,$$

$$A(k, k+L) = 1,$$

$$\text{όπου } k = (i - 1) + (j - 2) * L, \quad i = 3, 4, \dots, L, \quad j = 3, 4, \dots, L.$$

Για τη τελευταία γραμμή κάθε L -αδας έχουμε:

$$A(k, k-L) = 1,$$

$$A(k, k-1) = 1,$$

$$A(k, k) = -4,$$

$$A(k, k+L) = 1,$$

$$\text{όπου } k = (i-1) + (j-2)*L, \quad i = M-1, \quad j = 3, 4, \dots, L.$$

- Για τη $L^2 - L + 1$ γραμμή του πίνακα A :

$$A(k, k-L) = 1,$$

$$A(k, k) = -4,$$

$$A(k, k+1) = 1,$$

$$\text{όπου } k = (i-1) + (j-2)*L, \quad i = 2, \quad j = M-1.$$

- Για τη $L^2 - L + 2$ έως $L^2 - 1$ γραμμή του πίνακα A :

$$A(k, k-L) = 1,$$

$$A(k, k-1) = 1,$$

$$A(k, k) = -4,$$

$$A(k, k+1) = 1,$$

$$\text{όπου } k = (i-1) + (j-2)*L, \quad i = 3, 4, \dots, L, \quad j = M-1.$$

- Για τη τελευταία γραμμή του πίνακα A :

$$A(k, k-L) = 1,$$

$$A(k, k-1) = 1,$$

$$A(k, k) = -4,$$

$$\text{όπου } k = L^2.$$

- Όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα A είναι μηδενικά.

Ενώ για τον πίνακα b μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ισχύουν τα εξής:

- Ο πίνακας b είναι ένας πίνακας στήλη με διάσταση L^2 .

- Για τη πρώτη τιμή του πίνακα b :

$$b(1) = h^2 - w(1, 2) - w(2, 1).$$

- Για τη $2^{\text{η}}$ έως $L-1$ τιμή του πίνακα b :

$$b(k) = h^2 - w(1, k+1),$$

$$\text{όπου } k = 2, 3, \dots, L-1.$$

- Για τη L τιμή του πίνακα b :

$$b(L) = h^2 - w(2, M) - w(1, M-1).$$
- Για τη $L+1$ έως $L^2 - L$ τιμή του πίνακα b :
 Οι τιμές χωρίζονται σε $(L - 2)$ L -αδες.
 Για τη πρώτη τιμή κάθε L -αδας έχουμε:

$$b(k) = h^2 - w(j, 1),$$
 όπου $k = (i - 1) + (j - 2)*L, \quad i = 2, \quad j = 3, 4, \dots, L.$
 Για τις ενδιάμεσες τιμές κάθε L -αδας έχουμε:

$$b(k) = h^2,$$
 όπου $k = (i - 1) + (j - 2)*L, \quad i = 3, 4, \dots, L, \quad j = 3, 4, \dots, L.$
 Για τη τελευταία τιμή κάθε L -αδας έχουμε:

$$b(k) = h^2 - w(j, M),$$
 όπου $k = (i - 1) + (j - 2)*L, \quad i = M - 1, \quad j = 3, 4, \dots, L.$
- Για τη $L^2 - L + 1$ τιμή του πίνακα b :

$$b(k) = h^2 - w(M - 1, 1) - w(M, 2),$$
 όπου $k = (i - 1) + (j - 2)*L, \quad i = 2, \quad j = M - 1.$
- Για τη $L^2 - L + 2$ έως $L^2 - 1$ τιμή του πίνακα b :

$$b(k) = h^2 - w(M, i),$$
 όπου $k = (i - 1) + (j - 2)*L, \quad i = 3, 4, \dots, L, \quad j = M - 1.$
- Για τη τελευταία τιμή του πίνακα b :

$$b(L^2) = h^2 - w(M, 1) - w(1, M).$$

Έχοντας δημιουργήσει του πίνακες A και b για οποιαδήποτε διαμέριση M σημείων μπορούμε να λύσουμε το σύστημα

$$A \cdot W = b$$

με οποιαδήποτε επαναληπτική μέθοδο επίλυσης γραμμικών συστημάτων, π.χ. Gauss-Seidel, Jacobi, κ.τ.λ..

Για να λύσουμε το παραπάνω σύστημα, με χρήση της μεθόδου Gauss-Seidel, (σελ. 45) ή της μεθόδου Jacobi (σελ. 42), ξεκινάμε από μία αρχική τυχαία εκτίμηση $W^{(0)}$ για το W , άρα και για το ελεύθερο σύνορο, το οποίο προσδιορίζεται από τα σημεία του πλέγματος για τα οποία εκατέρωθεν αυτών ισχύει $w = 0$ και $w > 0$. Σε κάθε βήμα της επανάληψης βρίσκουμε μία νέα εκτίμηση $W^{(k)}$ για το W και στη πράξη μεταβάλλουμε τον πίνακα b . Θέτοντας μηδέν αντί του h^2 σε κάθε σημείο για το οποίο έχουμε πάρει τιμή $W_k (= w_{i,j}) = 0$, από τη προηγούμενη επανάληψη, δεν λύνουμε την εξίσωση

$\nabla^2 w = 1$ αλλά την εξίσωση $\nabla^2 w = 0$. Οι επαναλήψεις συνεχίζονται μέχρι οι ενδιάμεσες εκτιμήσεις $W^{(k)}$ να συγκλίνουν στη λύση W του συστήματος.

Αντικαθιστώντας τώρα τη λύση W του συστήματος στο πίνακα w (4.11) σύμφωνα με τη σχέση:

$$w(j, i) = W_k$$

όπου

$$k = (i - 1) + (j - 2)*L, \quad i = 2, 3, \dots, M-1, \quad j = 2, 3, \dots, M - 1$$

αντικαθιστούμε τις εσωτερικές τιμές του πίνακα w , οι οποίες είναι μηδέν (σχέση 4.11), με τις τιμές της λύσης του συστήματος, οπότε έχουμε τελειώσει τη δημιουργία του πίνακα w .

Τέλος στο πίνακα w βλέπουμε για ποια σημεία του πλέγματος ισχύει $\nabla^2 w = 1$ ή ισοδύναμα όπου $w > 0$. Αυτά θεωρούμε ότι ανήκουν στο χωρίο Ω και έτσι καθορίζεται το ελεύθερο σύνορο $f(x)$.

Το πρόγραμμα, που υλοποιεί τον παραπάνω αλγόριθμο επίλυσης, και που δημιουργήθηκε στο μαθηματικό πακέτο Matlab, βρίσκεται στο παράτημα A (σελ. 69).

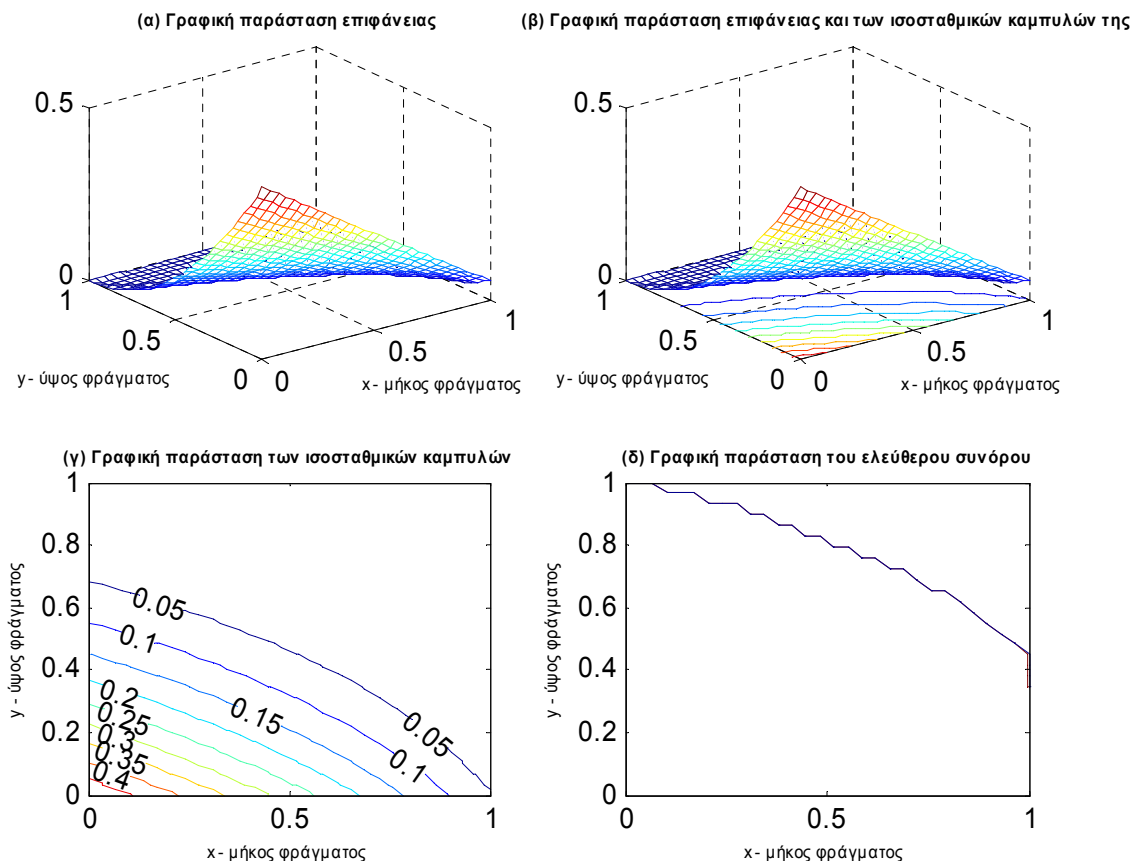
Κεφάλαιο 5ο

Αριθμητικά Αποτελέσματα

5.1 Μελέτη περιπτώσεων

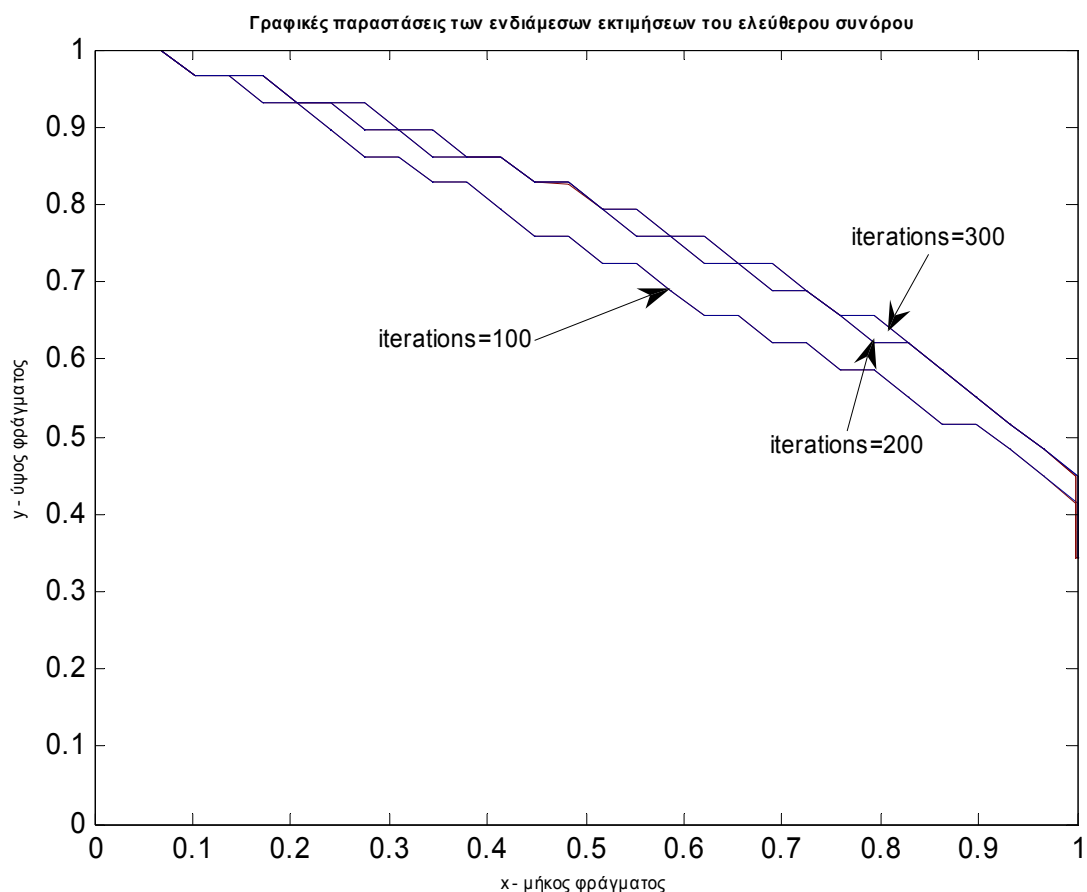
Στη πρώτη περίπτωση που μελετούμε έχουμε $M = 30$ σημεία διαμέρισης σε κάθε διεύθυνση, $x_1 = 1$, $y_1 = 1$ και $y_2 = \frac{1}{3}$, η μέθοδος επίλυσης γραμμικού συστήματος που χρησιμοποιήσαμε ήταν η μέθοδος Gauss-Seidel και το ϵ που χρησιμοποιήσαμε στο κριτήριο διακοπής της επαναληπτική μεθόδου είναι το έψιλον της μηχανής.

Τα αποτελέσματα φαίνονται στο σχήμα (5.1).



Σχήμα 5.1: (α) Τρισδιάστατη γραφική παράσταση της λύσης w της εξίσωσης (2.28).
 (β) Τρισδιάστατη γραφική παράσταση της λύσης w της εξίσωσης (2.28) και των ισοσταθμικών καμπυλών της.
 (γ) Γραφική παράσταση των ισοσταθμικών καμπυλών της λύσης w της εξίσωσης (2.28).
 (δ) Γραφική παράσταση του ελεύθερου συνόρου του κωρίου Ω .
 Για $M=30$ σημεία διακριτοποίησης, $x_1 = 1$, $y_1 = 1$ και $y_2 = 1/3$ και μέθοδος επίλυσης γραμμικού συστήματος την Gauss-Seidel.
 Ο αριθμός των επαναλήψεων είναι: 1880 επαναλήψεις.

Στη συνέχεια στο σχήμα (5.2) θα παρουσιάσουμε τις γραφικές παραστάσεις των ενδιάμεσων εκτιμήσεων του ελεύθερου συνόρου που έδωσε η εφαρμογή της μεθόδου Gauss-Seidel στη προηγούμενη περίπτωση.



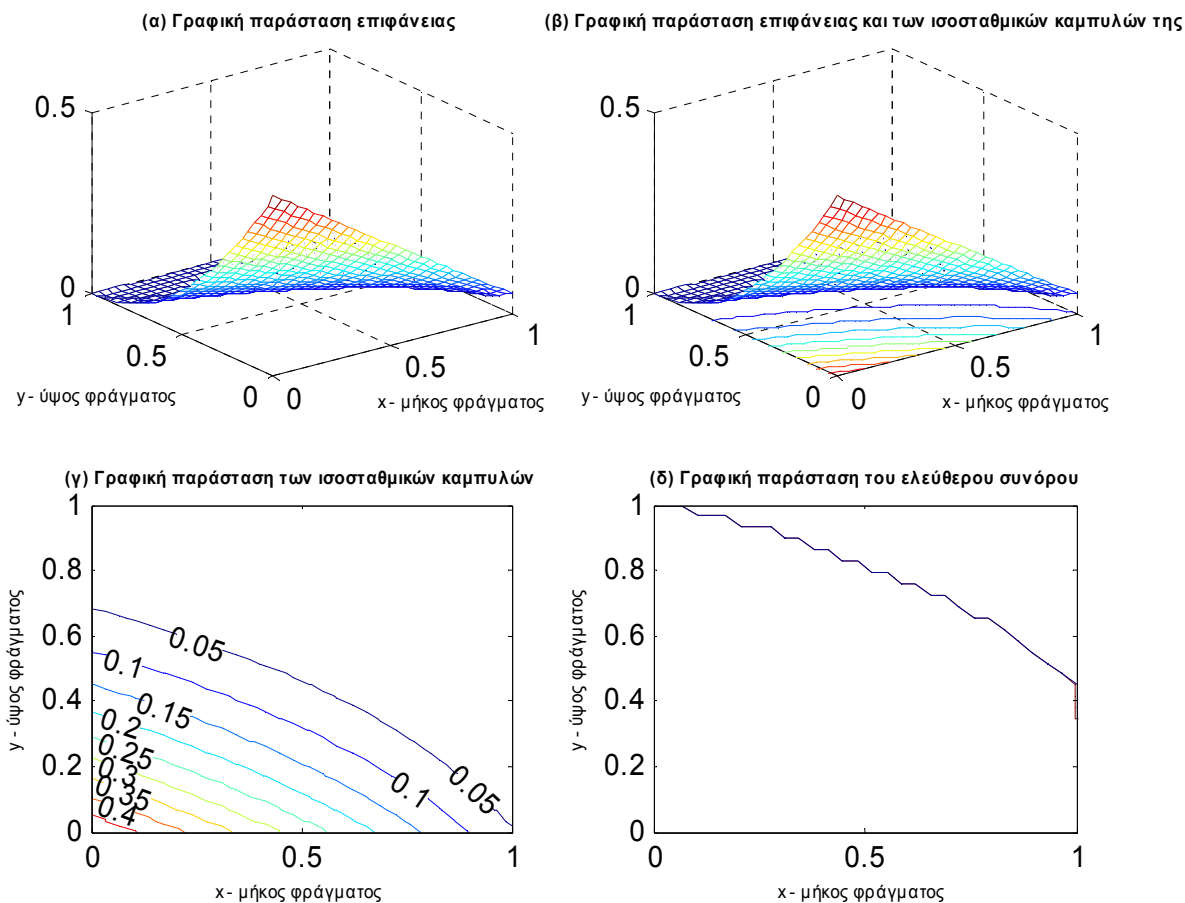
Σχήμα 5.2: Γραφικές παραστάσεις των ενδιάμεσων (ανά 100) εκτιμήσεων του ελεύθερου συνόρου.

Στο σχήμα (5.2) παρατηρούμε ότι στις γραφικές παραστάσεις του ελεύθερου συνόρου παρουσιάζονται, «σκαλοπατάκια». Αυτό είναι αναμενόμενο, αφού το χωρίο που μελετάμε το διακριτοποιούμε με ένα πλήθος σημείων σε κάθε διεύθυνση, με αποτέλεσμα να δημιουργείται ένα πλέγμα σημείων, επομένως έχουμε γραφική παράσταση διακριτών σημείων και όχι συνεχόμενων τιμών.

Επίσης στο σχήμα (5.2) παρατηρούμε ότι οι γραφικές παραστάσεις του ελεύθερου συνόρου για τις ενδιάμεσες εκτιμήσεις του, που δίνει η επαναληπτική μέθοδος Gauss-Seidel, συγκλίνουν σχετικά γρήγορα (μετά τη 300^η επανάληψη) στην λύση.

Στη συνέχεια μελετούμε την αρχική περίπτωση με τη μόνη διαφορά ότι ως μέθοδο επίλυσης γραμμικού συστήματος χρησιμοποιήσαμε τη μέθοδος Jacobi.

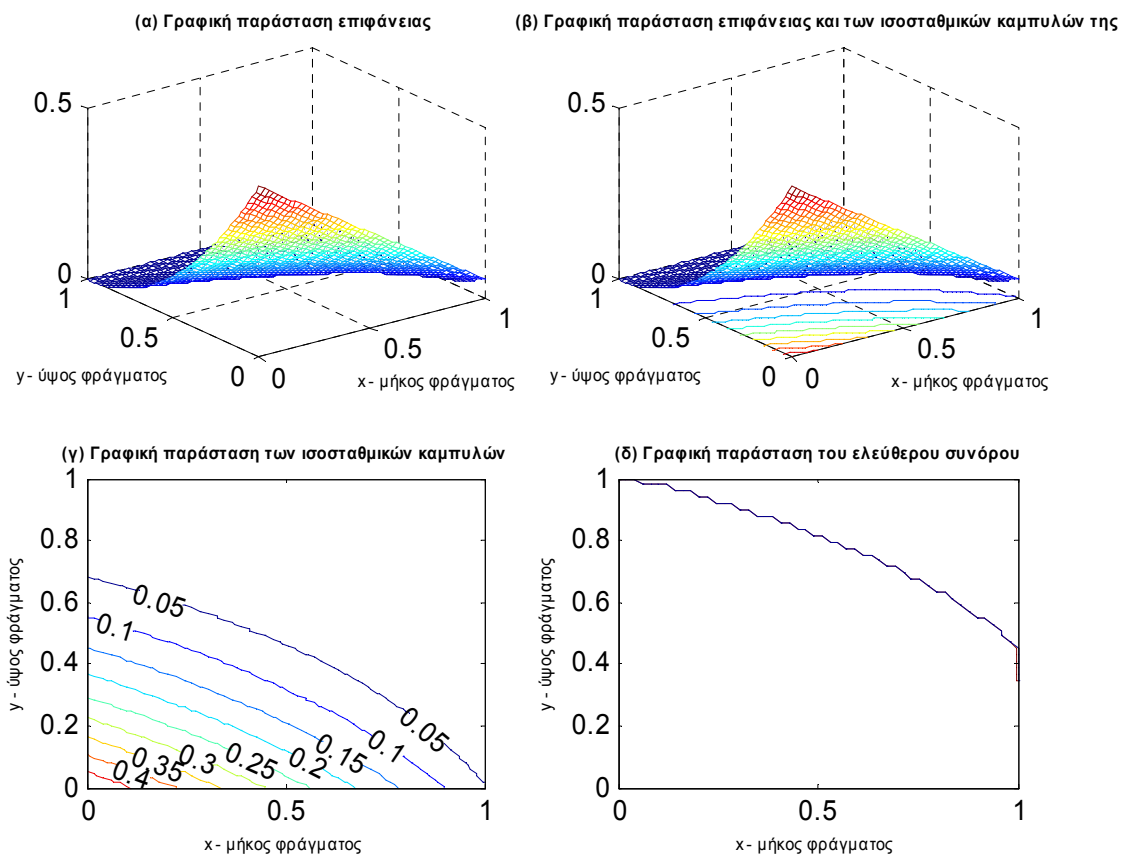
Τα αποτελέσματα φαίνονται στο σχήμα (5.3).



Σχήμα 5.3: (α) Τριδιάστατη γραφική παράσταση της λύσης w της εξίσωσης (2.28).
 (β) Τριδιάστατη γραφική παράσταση της λύσης w της εξίσωσης (2.28) και των ισοσταθμικών καμπυλών της.
 (γ) Γραφική παράσταση των ισοσταθμικών καμπυλών της λύσης w της εξίσωσης (2.28).
 (δ) Γραφική παράσταση του ελεύθερου συνόρου του χωρίου Ω .
 Για $M=30$ σημεία διακριτοποίησης, $x_1 = 1$, $y_1 = 1$ και $y_2 = 1/3$ και μέθοδος επίλυσης γραμμικού συστήματος την Jacobi.
 Ο αριθμός των επαναλήψεων είναι: 3682 επαναλήψεις.

Στην επόμενη περίπτωση που μελετούμε έχουμε ότι: τα σημεία διαμέρισης σε κάθε διεύθυνση είναι $M = 50$, $x_1 = 1$, $y_1 = 1$ και $y_2 = \frac{1}{3}$, η μέθοδος επίλυσης γραμμικού συστήματος που χρησιμοποιούμε είναι η μέθοδος Gauss-Seidel και το ϵ που χρησιμοποιούμε στο κριτήριο διακοπής της επαναληπτική μεθόδου είναι το έψιλον της μηχανής. Δηλαδή διαφέρει με την αρχική στο ότι χρησιμοποιούμε $M = 50$ σημεία διαμέρισης ως προς κάθε διεύθυνση.

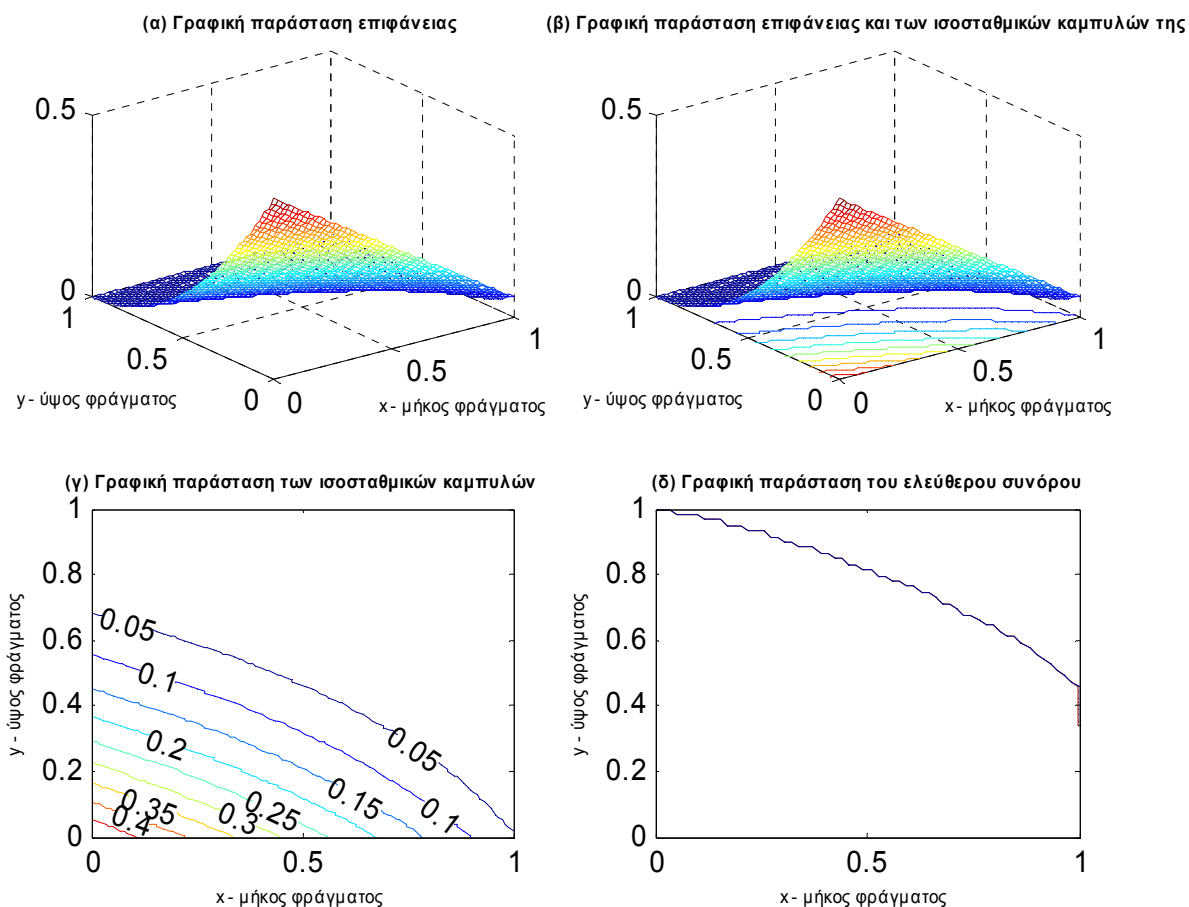
Τα αποτελέσματα φαίνονται στο σχήμα (5.4).



Σχήμα 5.4: (α) Τρισδιάστατη γραφική παράσταση της λύσης w της εξίσωσης (2.28).
 (β) Τρισδιάστατη γραφική παράσταση της λύσης w της εξίσωσης (2.28) και των ισοσταθμικών καμπυλών της.
 (γ) Γραφική παράσταση των ισοσταθμικών καμπυλών της λύσης w της εξίσωσης (2.28).
 (δ) Γραφική παράσταση του ελεύθερου συνόρου του χωρίου Ω .
 Για $M=50$ σημεία διακριτοποίησης, $x_1 = 1$, $y_1 = 1$ και $y_2 = 1/3$ και μέθοδος επίλυσης γραμμικού συστήματος την Gauss-Seidel.
 Ο αριθμός των επαναλήψεων είναι: 5211 επαναλήψεις.

Στη συνέχεια αυξάνουμε τα σημεία διαμέρισης σε $M = 60$ κρατώντας τα υπόλοιπα δεδομένα της προηγούμενης περίπτωσης σταθερά.

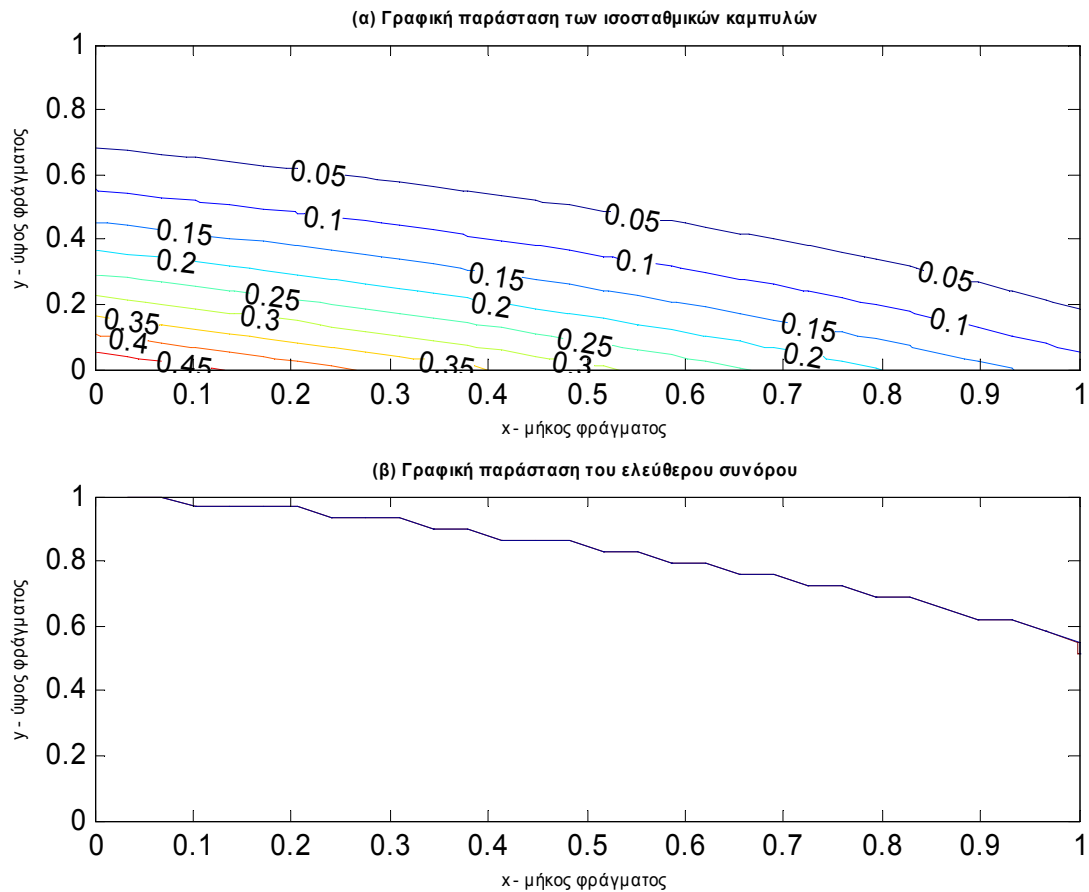
Τα αποτελέσματα φαίνονται στο σχήμα (5.5).



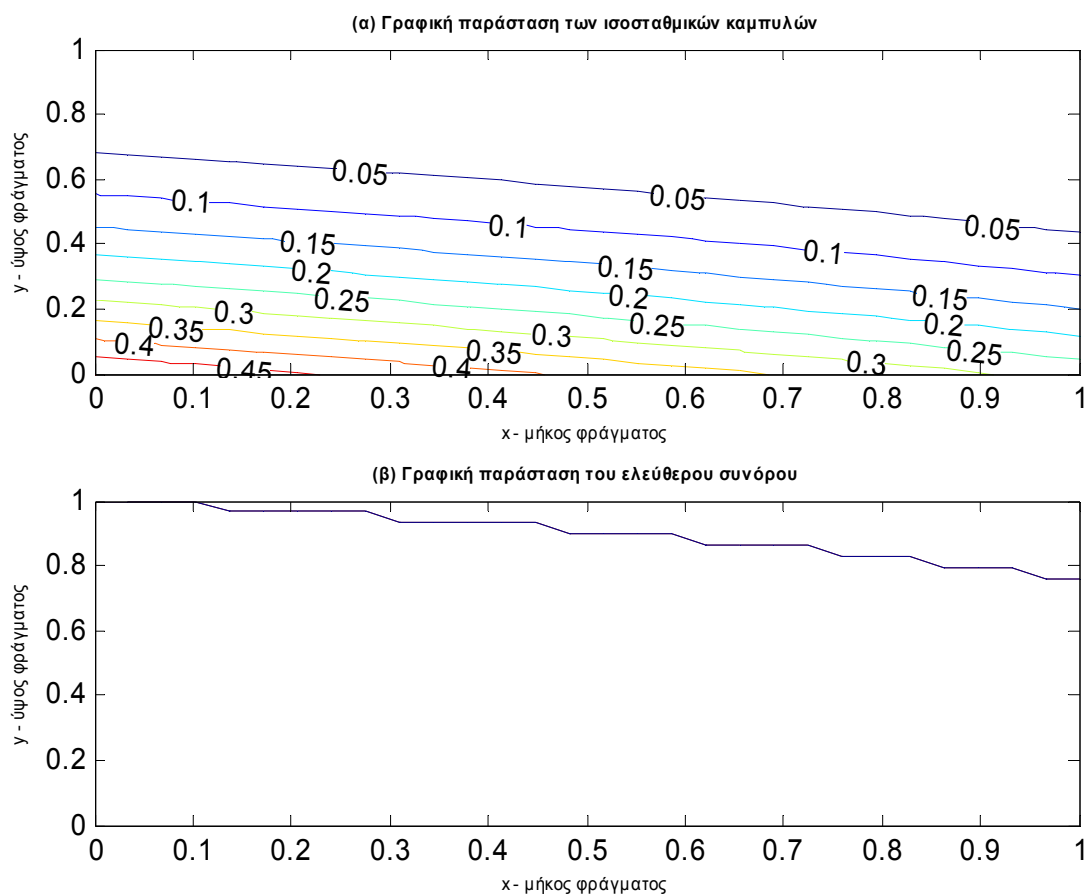
Σχήμα 5.5: (α) Τρισδιάστατη γραφική παράσταση της λύσης w της εξίσωσης (2.28).
 (β) Τρισδιάστατη γραφική παράσταση της λύσης w της εξίσωσης (2.28) και των ισοσταθμικών καμπυλών της.
 (γ) Γραφική παράσταση των ισοσταθμικών καμπυλών της λύσης w της εξίσωσης (2.28).
 (δ) Γραφική παράσταση του ελεύθερου συνόρου του κωρίου Ω .
 Για $M=60$ σημεία διακριτοποίησης, $x_1 = 1$, $y_1 = 1$ και $y_2 = 1/3$ και μέθοδος επίλυσης γραμμικού συστήματος την Gauss-Seidel.
 Ο αριθμός των επαναλήψεων είναι: 7465 επαναλήψεις.

Τέλος στις δύο τελευταίες περιπτώσεις μελετούμε την αρχική περίπτωση για $y_2 = \frac{1}{2}$ και για $y_2 = \frac{3}{4}$.

Τα αποτελέσματα φαίνονται στα σχήματα (5.6-5. 7)

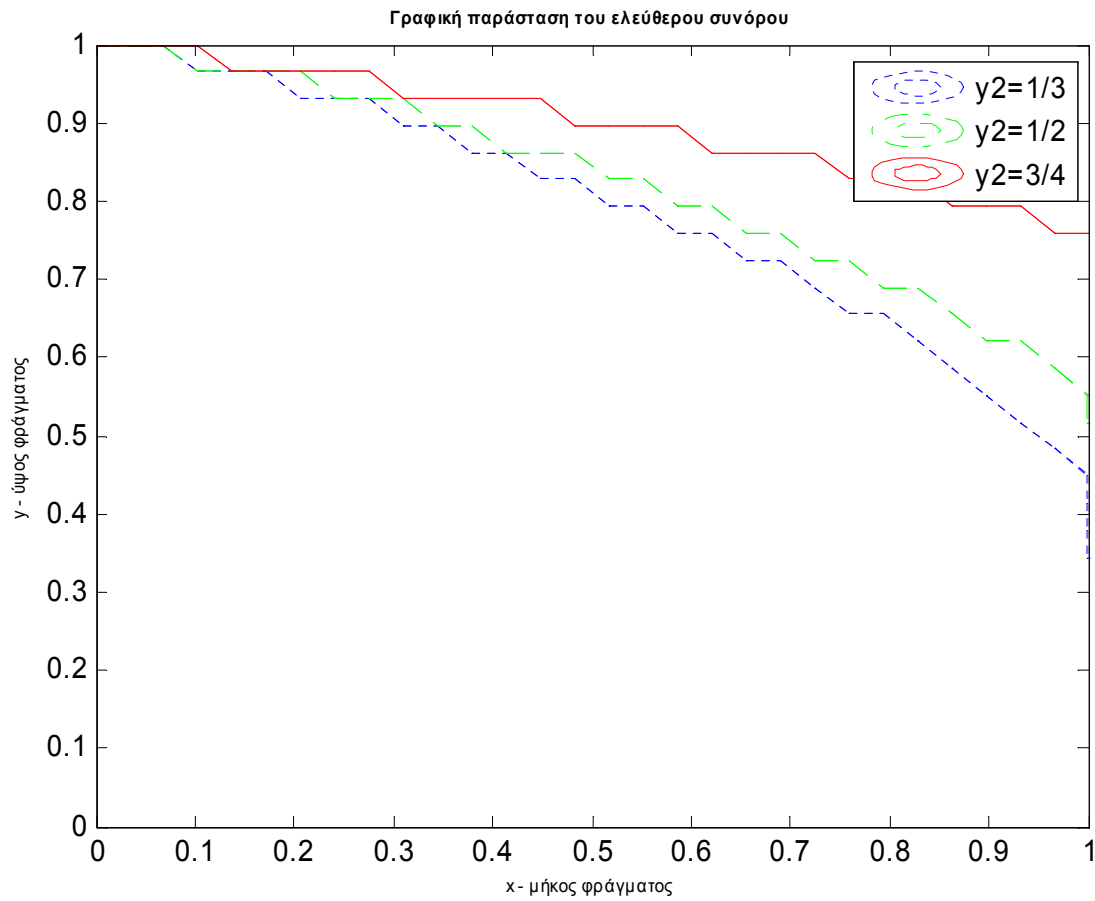


Σχήμα 5.6: (α)Γραφική παράσταση των ισοσταθμικών καμπυλών της λύσης w της εξίσωσης (2.28).
 (β)Γραφική παράσταση του ελεύθερου συνόρου του χωρίου Ω.
 Για $M=30$ σημεία διακριτοποίησης, $x_1 = 1$ $y_1 = 1$ και $y_2 = 1/2$ και μέθοδος επίλυσης γραμμικού συστήματος την Gauss-Seidel.
 Ο αριθμός των επαναλήψεων είναι: 1993 επαναλήψεις.



Σχήμα 5.7: (α)Γραφική παράσταση των ισοσταθμικών καμπυλών της λύσης w της εξίσωσης (2.28).
 (β)Γραφική παράσταση του ελεύθερου συνόρου του χωρίου Ω .
 Για $M=30$ σημεία διακριτοποίησης, $x_1 = 1$, $y_1 = 1$ και $y_2 = 3/4$ και μέθοδος επίλυσης γραμμικού συστήματος την Gauss-Seidel.
 Ο αριθμός των επαναλήψεων είναι: 2247 επαναλήψεις.

Στο σχήμα (5.8) φαίνεται συγκριτικά η γραφική παράσταση του ελεύθερου συνόρου για $y_2 = \frac{1}{3}$, $y_2 = \frac{1}{2}$ και $y_2 = \frac{3}{4}$



Σχήμα 5.8: Η γραφική παράσταση του ελεύθερου συνόρου για $y_2 = 1/3$, $y_2 = 1/2$ και $y_2 = 3/4$.

5.2 Σύγκριση περιπτώσεων - Συμπεράσματα

Συγκρίνοντας τα αριθμητικά αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου μπορούμε να καταλήξουμε στα εξής συμπεράσματα:

- Όταν χρησιμοποιούμε ως επαναληπτική μέθοδο επίλυσης του γραμμικού συστήματος $AW=b$ τη μέθοδο Gauss-Seidel η σύγκλιση γίνεται πιο γρήγορα από το να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο Jacobi. Συγκεκριμένα, η μέθοδος Gauss-Seidel απαιτεί περίπου το μισό πλήθος επαναλήψεων από ότι η μέθοδος Jacobi για να επιτύχει την ίδια ακρίβεια.
- Όταν ο αριθμός των σημείων διαμέρισης M αυξάνει τότε:
 - α. Οι ισοσταθμικές καμπύλες γίνονται πιο λείες, βλέπε σχήματα (5.1γ), (5.4γ) και (5.5γ).
 - β. Η τιμή της συνάρτησης $f(x)$ του ελεύθερου συνόρου έχει μικρότερες αυξομειώσεις, δηλαδή η γραφική της παράσταση γίνεται πιο λεία, βλέπε σχήματα (5.1δ), (5.4δ) και (5.5δ).
- Οι γραφικές παραστάσεις του ελεύθερου συνόρου για τις ενδιαμέσες τιμές της λύσης που δίνει η επαναληπτική μέθοδος Gauss-Seidel συγκλίνουν σχετικά γρήγορα (μετά τη 300^η επανάληψη) στην γραφική παράσταση του ελεύθερου συνόρου για την τελική λύση, βλέπε σχήμα (5.2).
- Όταν αυξάνει το y_2 , τότε:
 - α. Το δεξιό τέλος των ισοσταθμικών καμπυλών ανεβαίνει με αποτέλεσμα οι ισοσταθμικές καμπύλες να χάνουν καμπυλότητα και να τείνουν σε ευθείες, βλέπε σχήματα (5.1γ), (5.6α) και (5.7α).
 - β. Το δεξιό τέλος της γραφικής παράστασης του ελεύθερου συνόρου ανεβαίνει με αποτέλεσμα η γραφική παράσταση του ελεύθερου συνόρου να τείνει σε ευθεία με μικρότερη κλίση, βλέπε σχήματα (5.1δ), (5.6β) και (5.7β).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] John Crank, **Free and moving boundary problems**, Clarendon Press - Oxford, 1984.
- [2] Jerald L. Schnoor, **Environmental modelling : fate and transport of pollutants in water, air, and soil**, Wiley, New York, 1996.
- [3] Γεώργιος Σ. Σοφιανός & Ευάγγελος Θ. Τυχόπουλος, **Αριθμητική Ανάλυση**, Εκδόσεις Σταμούλη, 2005.
- [4] Γεώργιος Δ. Ακριβής – Βασίλειος Α. Δούγαλης, **Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση**, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2005.
- [5] Χρήστος Νικολόπουλος, **Σημειώσεις για το μάθημα «Μαθηματικά Μοντέλα για το Περιβάλλον»**, Σάμος, 2008.

Παράρτημα Α

Προγράμματα που δημιουργήθηκαν στο μαθηματικό πακέτο Matlab

Πρόγραμμα που υλοποιεί τον αλγόριθμο επίλυσης που παρουσιάζεται στην παράγραφο 4.3

Στο παρακάτω πρόγραμμα δουλεύουμε για $M = 30$ σημεία, $x_1 = y_1 = 1$, $y_2 = \frac{1}{3}$ και μέθοδο επίλυσης του γραμμικού συστήματος την επαναληπτική μέθοδο Gauss-Seidel.

```
M=30; %Πλήθος σημείων που χρησιμοποιούμε για τη διακριτοποίηση.
```

```
L=M-2;
```

```
h=1/(M-1); %Είναι το διάστημα μεταξύ δύο σημείων.
```

```
%Αρχικές τιμές στα x1, y1, y2
```

```
X1=1;
```

```
Y1=1;
```

```
Y2=1/3;
```

```
%Δημιουργία πινάκων με τις τιμές των x και y
```

```
v_x1=[0:h:X1];
```

```
v_y1=[0:h:Y1];
```

```
v_y2=[0:h:Y2];
```

```
w=zeros(M,M);
```

```
%Δημιουργία των εξωτερικών (ακραίων) τιμών του πίνακα w
```

```
%Δημιουργία της 1ης γραμμής
```

```
for j=1:M
```

```
    w(1,j)=(1/2)*Y1^2-((1/2)*(Y1^2-Y2^2)*v_x1(j))/X1;
```

```
end
```

```
%Δημιουργία της Mης γραμμής
```

```
for j=1:M
```

```
    w(M,j)=0;
```

```
end
```

```

%Δημιουργία της 1ης στήλης
for i=2:M-1
    w(i,1)=1/2*(Y1-v_y1(i))^2;
end
%Δημιουργία της Mης στήλης
n_y2=length(v_y2);
for i=2:n_y2
    w(i,M)=1/2*(Y2-v_y2(i))^2;
end
w(n_y2+1:M,M)=0;

%Δημιουργία του πίνακα A και του πίνακα b του συστήματος
A=zeros(L^2,L^2);
b1=zeros(L^2,1);

%Δημιουργία της 1ης γραμμής του πίνακα A και της 1ης τιμής του πίνακα b
A(1,1)=-4;
A(1,2)=1;
A(1,1+L)=1;
b1(1)=-w(1,2)-w(2,1);

%Δημιουργία της 2ης έως (L-1)ης γραμμής του πίνακα A
%και της 2ης έως (L-1)ης τιμής του πίνακα b
for k=2:M-3
    A(k,k-1)=1;
    A(k,k)=-4;
    A(k,k+1)=1;
    A(k,k+L)=1;
    b1(k)=-w(1,k+1);
end

%Δημιουργία της Lης γραμμής του πίνακα A
%και της Lης τιμής του πίνακα b
A(L,L-1)=1;
A(L,L)=-4;
A(L,L+L)=1;
b1(L)=-w(2,M)-w(1,M-1);

```

%Δημιουργία της (L+1)ης έως (L²-L)ης γραμμής του πίνακα A

%και της L+1)ης έως (L²-L)ης τιμής του πίνακα b

for j=3:L

 i=2;

 k=(i-1)+(j-2)*L;

 A(k,k-L)=1;

 A(k,k)=-4;

 A(k,k+1)=1;

 A(k,k+L)=1;

 b1(k)=-w(j,1);

for i=3:L

 k=(i-1)+(j-2)*L;

 A(k,k-L)=1;

 A(k,k-1)=1;

 A(k,k)=-4;

 A(k,k+1)=1;

 A(k,k+L)=1;

 b1(k)=0;

end

i=M-1;

k=(i-1)+(j-2)*L;

A(k,k-L)=1;

A(k,k-1)=1;

A(k,k)=-4;

A(k,k+L)=1;

b1(k)=-w(j,M);

end

```

%Δημιουργία της (L^2-L+1)ης γραμμής του πίνακα A
%και της (L^2-L+1)ης τιμής του πίνακα b
i=2;
j=M-1;
k=(i-1)+(j-2)*L;
A(k,k-L)=1;
A(k,k)=-4;
A(k,k+1)=1;
b1(k)=-w(M-1,1)-w(M,2);

%Δημιουργία της (L^2-L+2)ης έως (L^2-1)ης γραμμής του πίνακα A
%και της (L^2-L+2)ης έως (L^2-1)ης τιμής του πίνακα b
for i=3:L
    j=M-1;
    k=(i-1)+(j-2)*L;
    A(k,k-L)=1;
    A(k,k-1)=1;
    A(k,k)=-4;
    A(k,k+1)=1;
    b1(k)=-w(M,i);
end

%Δημιουργία της L^2ης γραμμής του πίνακα A και της L^2ης τιμής του πίνακα b
i=M-1;
j=M-1;
k=(i-1)+(j-2)*L;
A(k,k-L)=1;
A(k,k-1)=1;
A(k,k)=-4;
b1(k)=-w(M-1,M)-w(M,M-1);

b2=h^2*ones(L^2,1);
b=b1+b2;

```



```

%Λύση συστήματος  $A*W=b$  με τη μέθοδο Gauss-Seidel
W=zeros(L^2,1);
%Δημιουργία των πινάκων Q, P, D και c
Q=tril(A);
P=Q-A;
D=Q^(-1)*P;
c=Q^(-1)*b;

%Αρχική τιμή στη λύση W
W_old=zeros(L^2,1);
%Αρχική τιμή στο dW έτσι ώστε η while να εκτελεστεί μία φορά.
dW=1;
iteration=0;%Αριθμός επαναλήψεων της Gauss-Seidel

%Εφαρμογή της μεθόδου Gauss-Seidel
i=1;
while dW>=eps
    W=D*W_old+c;
    W=max(W,0);
    dW=norm((W-W_old),inf);
    W_old=W;
    iteration=iteration+1;
    if (mod(iteration,100)==0)
        for j=1:L^2
            %W_values είναι ο πίνακας στον οποίο αποθηκεύουμε τις ενδιάμεσες τιμές
            %του πίνακα W που δίνει η μέθοδος Gauss-Seidel
            W_values(i,j)=W(j);
        end
        i=i+1;
    end
end
iteration

```

```

%Δημιουργία εσωτερικών τιμών του πίνακα w για την τελική λύση του W
for i=2:M-1
    for j=2:M-1
        k=(i-1)+(j-2)*L;
        w(j,i)=W(k);
    end
end

x=[0:h:1];
y=[0:h:1];
subplot(2,2,1)
mesh(x,y,w)
title('(α) Γραφική παράσταση επιφάνειας','FontSize',6,'FontWeight','bold')
xlabel('x - μήκος φράγματος','FontSize',6)
ylabel('y - ύψος φράγματος','FontSize',6)
subplot(2,2,2)
mesh(x,y,w)
hold on
contour(x,y,w)
title('(β) Γραφική παράσταση επιφάνειας και των ισοσταθμικών καμπυλών
της','FontSize',6,'FontWeight','bold')
xlabel('x - μήκος φράγματος','FontSize',6)
ylabel('y - ύψος φράγματος','FontSize',6)
subplot(2,2,3)
[C,z]=contour(x,y,w);
clabel(C,z)
title('(α) Γραφική παράσταση των ισοσταθμικών καμπυλών','FontSize',6,'FontWeight','bold')
xlabel('x - μήκος φράγματος','FontSize',6)
ylabel('y - ύψος φράγματος','FontSize',6)
subplot(2,2,4)
contour(x,y,w,[0,0+eps])
title('(β) Γραφική παράσταση του ελεύθερου συνόρου','FontSize',6,'FontWeight','bold')
xlabel('x - μήκος φράγματος','FontSize',6)
ylabel('y - ύψος φράγματος','FontSize',6)

```

Πρόγραμμα που δημιουργεί γραφικές παραστάσεις για τις ενδιάμεσες τιμές του πίνακα W που δίνουν οι επαναληπτικές μέθοδοι Gauss-Seidel ή Jacobi

```
M=30; %Πλήθος σημείων που χρησιμοποιούμε για τη διακριτοποίηση.
```

```
L=M-2;
```

```
h=1/(M-1); %Είναι το διάστημα μεταξύ δύο σημείων.
```

```
for z=1:18
```

```
%Δημιουργία εσωτερικών τιμών του πίνακα w για ενδιάμεση λύση του W
```

```
for i=2:M-1
```

```
for j=2:M-1
```

```
k=(i-1)+(j-2)*L;
```

```
w(j,i)=W_values(z,k);
```

```
end
```

```
end
```

```
x=[0:h:1];
```

```
y=[0:h:1];
```

```
contour(x,y,w,[0,0+eps])
```

```
hold on
```

```
end
```

```
title('Γραφικές παραστάσεις των ενδιάμεσων εκτιμήσεων του ελεύθερου συνόρου', 'FontSize',6,'FontWeight','bold')
```

```
xlabel('x - μήκος φράγματος','FontSize',6)
```

```
ylabel('y - ύψος φράγματος','FontSize',6)
```

Πρόγραμμα που υλοποιεί την επαναληπτική μέθοδο Gauss-Seidel

```
A=[7 1 1; -1 5 1; 2 -1 6]
b=[12; 12; 18]
M=3; %Πλήθος αγνώστων ή εξισώσεων του συστήματος

%Δημιουργία των πινάκων Q, P, D και c
Q=tril(A);
P=Q-A;
D=Q^(-1)*P;
c=Q^(-1)*b;

%Αρχική τιμή στη λύση
x_old=zeros(M,1);
%Αρχική τιμή στο dx έτσι ώστε η while να εκτελεστεί μία φορά.
dx=1;
iterations=0;

while dx>=eps
    x_new=D*x_old+c;
    dx=norm((x_new-x_old),inf);
    x_old=x_new;
    iterations=iterations+1;
end
x_new
iterations
```

Πρόγραμμα που υλοποιεί την επαναληπτική μέθοδο Jacobi

```
A=[7 1 1; -1 5 1; 2 -1 6]
b=[12; 12; 18]
M=3; %Πλήθος αγνώστων ή εξισώσεων του συστήματος

%Δημιουργία των πινάκων Q, P, D και c
Q=diag(diag(A));
P=Q-A;
D=Q^(-1)*P;
c=Q^(-1)*b;

%Αρχική τιμή στη λύση
x_old=zeros(M,1);
%Αρχική τιμή στο dx έτσι ώστε η while να εκτελεστεί μία φορά.
dx=1;
iterations=0;

while dx>=eps
    x_new=D*x_old+c;
    dx=norm((x_new-x_old),inf);
    x_old=x_new;
    iterations=iterations+1;
end
x_new
iterations
```

Παράρτημα Β

Διαμέριση Μ = 6 σημείων

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix},$$

$$W = [W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6, W_7, W_8, W_9, W_{10}, W_{11}, W_{12}, W_{13}, W_{14}, W_{15}, W_{16}]^T,$$

και

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} h^2 - w_{1,2} - w_{2,1} \\ h^2 - w_{3,1} \\ h^2 - w_{4,1} \\ h^2 - w_{6,2} - w_{5,1} \\ h^2 - w_{1,3} \\ h^2 \\ h^2 \\ h^2 - w_{6,3} \\ h^2 - w_{1,4} \\ h^2 \\ h^2 \\ h^2 - w_{6,4} \\ h^2 - w_{1,5} - w_{2,6} \\ h^2 - w_{3,6} \\ h^2 - w_{4,6} \\ h^2 - w_{6,5} - w_{5,6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 - w(2,1) - w(1,2) \\ h^2 - w(1,3) \\ h^2 - w(1,4) \\ h^2 - w(2,6) - w(1,5) \\ h^2 - w(3,1) \\ h^2 \\ h^2 \\ h^2 - w(3,6) \\ h^2 - w(4,1) \\ h^2 \\ h^2 \\ h^2 - w(4,6) \\ h^2 - w(5,1) - w(6,2) \\ h^2 - w(6,3) \\ h^2 - w(6,4) \\ h^2 - w(5,6) - w(6,5) \end{bmatrix}.$$

Διαμέριση M = 7 σημείων

$$\begin{aligned}
W = & \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \\ W_6 \\ W_7 \\ W_8 \\ W_9 \\ W_{10} \\ W_{11} \\ W_{12} \\ W_{13} \\ W_{14} \\ W_{15} \\ W_{16} \\ W_{17} \\ W_{18} \\ W_{19} \\ W_{20} \\ W_{21} \\ W_{22} \\ W_{23} \\ W_{24} \\ W_{25} \end{bmatrix} & \text{κα1} & b = & \begin{bmatrix} h^2 - w_{1,2} - w_{2,1} \\ h^2 - w_{3,1} \\ h^2 - w_{4,1} \\ h^2 - w_{5,1} \\ h^2 - w_{7,2} - w_{6,1} \\ h^2 - w_{1,3} \\ h^2 \\ h^2 \\ h^2 \\ h^2 - w_{7,3} \\ h^2 - w_{1,4} \\ h^2 \\ h^2 \\ h^2 \\ h^2 - w_{7,4} \\ h^2 - w_{1,5} \\ h^2 \\ h^2 \\ h^2 \\ h^2 - w_{7,5} \\ h^2 - w_{1,6} - w_{2,7} \\ h^2 - w_{3,7} \\ h^2 - w_{4,7} \\ h^2 - w_{5,7} \\ h^2 - w_{7,6} - w_{6,7} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} h^2 - w(2,1) - w(1,2) \\ h^2 - w(1,3) \\ h^2 - w(1,4) \\ h^2 - w(1,5) \\ h^2 - w(2,7) - w(1,6) \\ h^2 - w(3,1) \\ h^2 \\ h^2 \\ h^2 \\ h^2 - w(3,7) \\ h^2 - w(4,1) \\ h^2 \\ h^2 \\ h^2 \\ h^2 - w(4,7) \\ h^2 - w(5,1) \\ h^2 \\ h^2 \\ h^2 \\ h^2 - w(5,7) \\ h^2 - w(6,1) - w(7,2) \\ h^2 - w(7,3) \\ h^2 - w(7,4) \\ h^2 - w(7,5) \\ h^2 - w(6,7) - w(7,6) \end{bmatrix} .
\end{aligned}$$