“ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ
ΚΑΙ ΔΙΑΘΕΣΗΣ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ
ΣΕ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ
ΜΕ ΠΟΙΚΙΛΙΑ ΠΕΛΑΤΩΝ
ΚΑΙ ΚΟΣΤΟΣ ΠΟΙΟΤΗΤΑΣ”

Η Διπλωματική Εργασία
παρουσιάστηκε ενώπιον
του Διδακτικού Προσωπικού του
Πανεπιστημίου Αιγαίου

Για την Εκπλήρωση
των Απαιτήσεων για το Δίπλωμα Ειδίκευσης του
Μεταπτυχιακού Προγράμματος
“ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ
ΚΑΙ ΣΤΙΣ ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ”
Του Τμήματος Μαθηματικών
Του Πανεπιστημίου Αιγαίου

ΓΙΑΝΝΑΚΟΠΟΥΛΟΥ ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2008

Η ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΩΝ ΕΠΙΚΥΡΩΝΕΙ

ΤΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΗΣ ΓΙΑΝΝΑΚΟΠΟΥΛΟΥ ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗΣ:

ΙΩΑΝΝΙΔΗΣ ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ, Επιβλέπων

Λέκτορας

Ημερομηνία παρουσίασης 8-12-2008

Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα

"ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ

ΚΑΙ ΣΤΙΣ ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ"

Τμήματος Μαθηματικών

Πανεπιστημίου Αιγαίου

ΝΙΚΟΛΟΠΟΥΛΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ, Μέλος

Επίκουρος Καθηγητής

Τμήματος Μαθηματικών

Πανεπιστημίου Αιγαίου

ΠΑΠΑΣΑΛΟΥΡΟΣ ΑΝΔΡΕΑΣ , Μέλος

Λέκτορας

Τμήματος Μαθηματικών

Πανεπιστημίου Αιγαίου

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2008

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα εργασία πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών «Μαθηματική Μοντελοποίηση στις Φυσικές Επιστήμες και στις Σύγχρονες Τεχνολογίες» του τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου.

Θα αποτελούσε παράλειψή μου να μην αναφερθώ σε όλους εκείνους που με βοήθησαν και μου συμπαραστάθηκαν καθ'όλη την διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας αυτής. Αρχικά, οφείλω να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Ευστράτιο Ιωαννίδη για την ανάθεση της εργασίας, τον χρόνο που μου διέθεσε, την ηθική υποστήριξη που μου προσέφερε και την πολύτιμη βοήθειά του στην ολοκλήρωση της εργασίας αυτής.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ ανήκει στους γονείς μου, Κίμωνα και Ελευθερία, για την υποστήριξή τους τόσο σε όλα τα χρόνια των σπουδών μου όσο και σε κάθε μου απόφαση, και στα αδέλφια μου, Άννα και Γιάννη, για την ηθική συμπαράσταση που μου παρείχαν σε κάθε δύσκολη στιγμή.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω θερμά όλους εκείνους οι οποίοι υπήρξαν αρωγοί σε αυτή την προσπάθειά μου κι έκαναν με την παρουσία τους το ¨ταξίδι¨ αυτό λιγότερο μοναχικό…

Γιαννακοπούλου Κατερίνα

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ .... - 5 -
1.2 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ .... - 6 -
1.3 ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ .... - 7 -

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΕΛΕΓΧΟ

2.1 ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ .... - 8 -
2.1.1 Χαρακτηριστικά προβλημάτων Δυναμικού Προγραμματισμού .... - 9 -
2.1.2 Η γενική αναδρομική σχέση (recursive relationship) .... - 10 -
2.1.3 Προβλήματα Δυναμικού Προγραμματισμού .... - 11 -
2.2 ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ .... - 13 -
(ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟΣ ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ) ....
2.2.1 Μαρκοβιανές διαδικασίες αποφάσεων διακριτού χρόνου .... - 13 -
2.2.1.1 Προβλήματα με πεπερασμένο ορίζοντα αποφάσεων .... - 14 -
2.2.1.2 Προβλήματα με άπειρο ορίζοντα αποφάσεων .... - 15 -
2.2.1.3 Μεγιστοποίηση του μέσου κέρδους ανά μονάδα χρόνου .... - 16 -
2.2.2 Μαρκοβιανές διαδικασίες αποφάσεων συνεχούς χρόνου .... - 19 -
2.2.2.1 Η τεχνική της ομοιομορφοποίησης (uniformisation) .... - 20 -

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

3.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ .... - 23 -
3.2 ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΜΟΡΦΗΣ ΤΗΣ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ .... - 25 -
3.2.1 Μοντελοποίηση .... - 25 -
3.2.2 Υπολογισμός κόστους ποιότητας .... - 27 -
3.2.3 Υπολογισμός μέσου αναμενόμενου κέρδους .... - 30 -
3.2.4 Εξαγωγή εξισώσεων βελτιστοποίησης .... - 32 -
3.2.5 Μέθοδος διαδοχικών προσεγγίσεων .... - 33 -
3.3 ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΤΗΣ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ .... - 35 -
3.3.1 Αριθμητικά παραδείγματα .... - 35 -
3.3.1.2 Μεταβολή του R_1 .... - 37 -
3.3.1.3 Μεταβολή του b_2 .... - 39 -
3.3.1.4 Μεταβολή του h .... - 40 -
3.4 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ .... - 42 -

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΥΠΟ ΕΞΕΤΑΣΗ

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ .... - 43 -
4.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ **ΠΟΛ_1** .... - 43 -
4.3 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ **ΠΟΛ_2** .... - 46 -
4.4 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ **ΠΟΛ_3** .... - 48 -
4.5 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ **ΠΟΛ_4** .... - 51 -
4.6 ΣΥΝΟΨΗ .... - 54 -

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ

5.1 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ: **ΠΟΛ_1, ΠΟΛ_2, ΠΟΛ_3, ΠΟΛ_4, ΒΕΛΤΙΣΤΗ** .... - 56 -
5.2 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΚΕΡΔΟΥΣ ΤΩΝ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ .... - 56 -
5.2.1 Επίδραση των μεταβολών του λ_1 .... - 57 -
5.2.2 Επίδραση των μεταβολών του λ_2 .... - 58 -

5.2.3 Επίδραση των μεταβολών του μ ... - 59 -
5.2.4 Επίδραση των μεταβολών του R_1 ... - 61 -
5.2.5 Επίδραση των μεταβολών του R_2 ... - 62 -
5.2.6 Επίδραση των μεταβολών του b_1 ... - 63 -
5.2.7 Επίδραση των μεταβολών του b_2 ... - 64 -
5.2.8 Επίδραση των μεταβολών του h ... - 65 -
5.2.9 Επίδραση των μεταβολών του r_c ... - 66 -
5.2.10 Επίδραση των μεταβολών του g ... - 68 -
5.2.11 Επίδραση των μεταβολών του σ ... - 69 -
5.3 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ... - 70 -
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ... - 71 -
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ... - 73 -
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ... - 75 -

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1.1 Εισαγωγή

Στην εποχή μας, ένας από τους παράγοντες καταλυτικής σημασίας για την βιωσιμότητα και την κερδοφορία μιας βιομηχανίας είναι ο αποτελεσματικός έλεγχος των συστημάτων παραγωγής, ο οποίος εμπεριέχει τόσο τον έλεγχο παραγωγής (δηλαδή πότε θα ξεκινήσει και πότε θα διακοπεί η παραγωγική διαδικασία) όσο και τον έλεγχο ποιότητας και διάθεσης αποθεμάτων.

Για την εύρεση της βέλτιστης πολιτικής ελέγχου παραγωγής εφαρμόζονται συνήθως ο δυναμικός προγραμματισμός και ο βέλτιστος έλεγχος. Πολύ συχνά όμως η βέλτιστη πολιτική είτε είναι δύσκολο να εκτιμηθεί είτε είναι πολύ σύνθετη και συνεπώς μη εφαρμόσιμη. Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιούμε απλές υποβέλτιστες πολιτικές που προσεγγίζουν τη βέλτιστη.

Κατά την παραγωγική διαδικασία, μετά το στάδιο της παραγωγής ακολουθεί η διαδικασία του ποιοτικού ελέγχου. Η εξέλιξη στην τεχνολογία του αυτοματισμού και των διαδικασιών ελέγχου έχει μετατρέψει τον εξαντλητικό έλεγχο ποιότητας σε μια διαδικασία πολύ ταχύτερη και οικονομικότερη. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ολοένα και περισσότερες επιχειρήσεις να προτιμούν τη διαδικασία αυτή εγκαταλείποντας τον παραδοσιακό δειγματοληπτικό έλεγχο. Κατά τη διάρκεια του εξαντλητικού ελέγχου πραγματοποιείται επιθεώρηση σε κάθε παραγόμενη μονάδα προϊόντος προκειμένου να πιστοποιηθεί η πλήρωση ή μη των προδιαγραφών ποιότητας που έχουν τεθεί. Στην περίπτωση μη πλήρωσης, το προϊόν απορρίπτεται, διαφορετικά κατηγοριοποιείται βάσει των χαρακτηριστικών της ποιότητάς του. Έτσι, με δεδομένο ότι υπάρχει ποικιλία αγοραστών με διαφορετικές απαιτήσεις, η κάθε παραγόμενη μονάδα διατίθεται στην αντίστοιχη κατηγορία πελατών. Η σύνδεση ελέγχου παραγωγής, διάθεσης προϊόντων και ποιοτικού ελέγχου συντελεί στον καλύτερο συντονισμό των διαδικασιών αυτών, που συνήθως αντιμετωπίζονται χωριστά από τις παραγωγικές επιχειρήσεις, με τελικό στόχο τη βελτίωση του συνολικού κέρδους της επιχείρησης.

Όσον αφορά στο κόστος ποιότητας, αυτό εκφράζει το κόστος από την πιθανή επιστροφή του προϊόντος ή την πληρωμή ρήτρας ποιότητας αλλά και τη δυσαρέσκεια του πελάτη. Όπως είναι προφανές, το κόστος ποιότητας, ως μέτρο δυσαρέσκειας του πελάτη, σχετίζεται άμεσα με την πολιτική διάθεσης του προϊόντος και δεδομένου ότι επηρεάζει άμεσα το κέρδος της παραγωγικής μονάδας, χρήζει ιδιαίτερης μελέτης. Εδώ θα μελετήσουμε το πρόβλημα του ελέγχου παραγωγής και διάθεσης προϊόντων σε συστήματα παραγωγής που απευθύνονται σε δυο κατηγορίες πελατών και υπάρχουν απαιτήσεις και κόστη ποιότητας.

1.2 Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Το πρόβλημα του ελέγχου συστημάτων παραγωγής έχει απασχολήσει πολλούς ερευνητές και υπάρχει πλούσια βιβλιογραφία που πραγματεύεται το συγκεκριμένο αντικείμενο. Σύμφωνα με τον S.B.Gershwin [7], ο έλεγχος απλών συστημάτων παραγωγής αντιμετωπίζεται ως ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης. Σε πιο σύνθετα συστήματα ο τρόπος αντιμετώπισης του προβλήματος είναι η αναζήτηση της βέλτιστης πολιτικής μέσα σε μια οικογένεια σχετικά απλών πολιτικών με λίγες παραμέτρους. Στην εργασία των Buzacott and Shanthikumar [1] παρουσιάζονται διάφορες οικογένειες πολιτικών ελέγχου συστημάτων παραγωγής. Στην παρούσα εργασία εξετάζουμε την παραγωγή ενός προϊόντος το οποίο έχει στοχαστική ζήτηση και απευθύνεται σε ποικιλία πελατών οι οποίοι δεν είναι πάντα διαθέσιμοι. Σε τέτοια συστήματα παραγωγής, η πλέον συνηθισμένη πρακτική υπαγορεύει τον καθορισμό ενός κατωφλίου το οποίο ονομάζεται απόθεμα βάσης (base stock). Οι Clark και Scarf [2] πραγματεύονται τις λεγόμενες πολιτικές αποθέματος βάσης. Οι Kouikoglou και Phillis [6] εξετάζουν το πρόβλημα του συνδυασμένου ελέγχου αποθεμάτων, παραγγελιών και χαρακτηριστικών ποιότητας σε συστήματα παραγωγής με μία μηχανή όπου οι χρόνοι παραγωγής και οι αφίξεις των πελατών είναι εκθετικοί. Ενώ ο Albert.Y.Ha [4] μελέτησε συστήματα με πολλούς τύπους πελατών οι αφίξεις των οποίων ακολουθούν κατανομή Poisson και οι χρόνοι παραγωγής είναι εκθετικοί. Τέλος, σε πολύπλοκα συστήματα παραγωγής, των οποίων τα προϊόντα απευθύνονται σε διαφορετικές αγορές με διαφορετικές απαιτήσεις ποιότητας και διαφορετικές τιμές, αναφέρονται οι Hong και Elsayed [5].

1.3 Δομή της εργασίας

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με τον έλεγχο παραγωγής και διάθεσης αποθεμάτων σε συστήματα παραγωγής με ποικιλία πελατών που έχουμε και κόστος ποιότητας. Πιο αναλυτικά, στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται βασικές έννοιες του Δυναμικού Προγραμματισμού και της θεωρίας των Μαρκοβιανών διαδικασιών αποφάσεων. Στο Κεφάλαιο 3, περιγράφεται το σύστημα στο οποίο δραστηριοποιείται η επιχείρηση, αναλύεται το κόστος ποιότητας και αναζητούμε τη μορφή της βέλτιστης πολιτικής που καλείται να ακολουθήσει η επιχείρηση προκειμένου να μεγιστοποιήσει το κέρδος της. Μετά από αριθμητική μελέτη της συμπεριφοράς του βέλτιστου κέρδους της επιχείρησης, παρουσιάζεται η μορφή της βέλτιστης πολιτικής. Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται τέσσερις διαφορετικές ευρετικές πολιτικές εκ των οποίων οι δυο τελευταίες είναι αυτές που προτείνονται στην παρούσα εργασία. Στο Κεφάλαιο 5 συγκρίνονται όλες οι πολιτικές μεταξύ τους και παρουσιάζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα που προκύπτουν από τη σύγκριση αυτή. Ακολουθούν τα συμπεράσματα όλης αυτής της διαδικασίας και σχεδιαγράμματα με την συγκριτική απεικόνιση της αξίας κάθε πολιτικής. Τέλος, στο Παράρτημα της εργασίας αυτής παρατίθενται οι αλγόριθμοι για τον υπολογισμό της αξίας όλων των πολιτικών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΕΛΕΓΧΟ

2.1 Δυναμικός Προγραμματισμός

Ο Δυναμικός Προγραμματισμός είναι μια υπολογιστική μέθοδος η οποία εφαρμόζεται όταν πρόκειται να ληφθεί μια σύνθετη απόφαση που προκύπτει από τη σύνθεση επιμέρους αποφάσεων που αλληλοεξαρτώνται. Η αλληλεξάρτηση μπορεί να προκύπτει επειδή οι αποφάσεις παρουσιάζουν κάποια χρονική διαδοχή είτε συνδέονται με κοινούς περιορισμούς. Οι αποφάσεις αυτές μπορεί να λαμβάνονται σε ένα περιβάλλον γνωστών συνθηκών (**ντετερμινιστικός ή αιτιοκρατικός Δυναμικός Προγραμματισμός**) ή ακόμα και σε ένα περιβάλλον αβεβαιότητας (**στοχαστικός Δυναμικός Προγραμματισμός**). Στα προβλήματα με ντετερμινιστική συμπεριφορά παρατηρούμε ότι η απόφαση που παίρνουμε σε κάθε φάση έχει ένα μονοσήμαντα καθορισμένο αποτέλεσμα τόσο ως προς την αντικειμενική συνάρτηση όσο και ως προς τον μετασχηματισμό της ¨τρέχουσας¨ κατάστασης σε κάποια κατάσταση της επόμενης φάσης. Στα προβλήματα στοχαστικού δυναμικού προγραμματισμού - με τα οποία θα ασχοληθούμε στην παρούσα εργασία - η κάθε απόφαση μπορεί να έχει περισσότερα από ένα δυνατά αποτελέσματα, το καθένα από τα οποία έχει μια καθορισμένη πιθανότητα να συμβεί, και επίσης μπορεί να οδηγήσει σε μετασχηματισμό της ¨παρούσας¨ κατάστασης σε περισσότερες από μια δυνατές καταστάσεις της επόμενης φάσης.

Ο Δυναμικός Προγραμματισμός, η θεμελίωση του οποίου έγινε κατά τη δεκαετία του 1950 από τον R.E.Bellman, αποτελεί σήμερα έναν βασικό κλάδο του μαθηματικού προγραμματισμού με εφαρμογές σε ένα πλήθος περιοχών της Επιχειρησιακής Έρευνας όπως π.χ. στον έλεγχο αποθεμάτων, στη συντήρηση συστημάτων, στο σχεδιασμό επενδύσεων κ.ά.

Η μέθοδος επίλυσης των προβλημάτων δυναμικού προγραμματισμού βασίζεται στη διασύνδεση των επιμέρους αποφάσεων με κατάλληλη αναδρομική σχέση ώστε η σύνθεση των επιμέρους αποφάσεων να δίνει την τελικά ζητούμενη απόφαση. Με άλλα λόγια, το αρχικό πρόβλημα διασπάται σε επιμέρους υποπροβλήματα τα οποία συνδέονται με τη βοήθεια κατάλληλων αναδρομικών σχέσεων. Για να καλυφθούν όλες οι εκδοχές από τη διασύνδεση των επιμέρους προβλημάτων, τα υποπροβλήματα αυτά λύνονται παραμετρικά, δηλαδή για όλες τις δυνατές τιμές ορισμένων παραμέτρων. Αυτό αποτελεί και το κύριο υπολογιστικό κόστος της μεθόδου το οποίο, αν και σημαντικό, είναι πολύ μικρότερο από το κόστος της πλήρους απαρίθμησης και αξιολόγησης όλων των δυνατών λύσεων. Επειδή το κόστος της υπολογιστικής προσπάθειας στα προβλήματα Δυναμικού Προγραμματισμού είναι αρκετά υψηλό, η μέθοδος χρησιμοποιείται για προβλήματα που δεν είναι δυνατό να αντιμετωπισθούν με μεθόδους Γραμμικού ή Ακέραιου Προγραμματισμού. Από τη σκοπιά αυτή, η μέθοδος Δυναμικού Προγραμματισμού παρουσιάζει μεγαλύτερη ευελιξία από άλλες μεθόδους, το τίμημα όμως για την ευελιξία αυτή είναι συνήθως το αυξημένο υπολογιστικό κόστος. Χαρακτηριστικό του Δυναμικού Προγραμματισμού είναι ότι δεν υπάρχει γενικευμένη διατύπωση της μεθόδου που να έχει άμεση λειτουργική ισχύ. Οι αναδρομικές σχέσεις που συνεπάγεται η μέθοδος διαφοροποιούνται ριζικά από πρόβλημα σε πρόβλημα.

2.1.1 Χαρακτηριστικά προβλημάτων Δυναμικού Προγραμματισμού

Τα προβλήματα Δυναμικού Προγραμματισμού παρουσιάζουν τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- οι αποφάσεις λαμβάνονται διαδοχικά
- το πρόβλημα μπορεί να διαιρεθεί σε βήματα (φάσεις ή στάδια) (stages) και σε κάθε βήμα απαιτείται να ληφθεί μια ¨στρατηγική¨ απόφαση (ακολουθείται μια πολιτική)
- κάθε βήμα έχει ένα ορισμένο αριθμό ¨καταστάσεων¨ (states) που συνδέονται με αυτό
- το αποτέλεσμα μιας στρατηγικής απόφασης που λαμβάνεται σε κάθε βήμα είναι να μετατρέπει την παρούσα κατάσταση σε μια κατάσταση που συνδέεται με το επόμενο βήμα (ενδεχομένως σύμφωνα με μια κατανομή πιθανότητας)
- με κάθε απόφαση συνδέεται ένα κέρδος ή ένα κόστος

- ο αντικειμενικός σκοπός που εκφράζεται με την αντικειμενική συνάρτηση, είναι να μεγιστοποιηθεί το συνολικό κέρδος ή να ελαχιστοποιηθεί η συνολική ζημιά ή γενικότερα να επιτευχθεί το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα
- ο τρόπος με τον οποίο βρεθήκαμε σε μια κατάσταση ενός βήματος είναι άσχετος με τις αποφάσεις που θα επακολουθήσουν. Δηλαδή, οι αποφάσεις που θα επακολουθήσουν εξαρτώνται μόνο από την κατάσταση στην οποία βρισκόμαστε και όχι από τον τρόπο με τον οποίο βρεθήκαμε σε αυτήν

Τέτοια προβλήματα διέπονται από την «**αρχή του Bellman**» που χαρακτηρίζει τη βέλτιστη λύση: ¨*Μια βέλτιστη διαδοχή αποφάσεων έχει την ιδιότητα ότι, ανεξάρτητα από τις αρχικές αποφάσεις, οι αποφάσεις που απομένουν πρέπει να συνιστούν μια βέλτιστη στρατηγική (πολιτική) σε σχέση με την κατάσταση που απορρέει από τις αρχικές αποφάσεις*¨. Με άλλα λόγια για τα προβλήματα του Δυναμικού Προγραμματισμού, η γνώση της τρέχουσας κατάστασης του συστήματος μεταφέρει όλη την πληροφόρηση της προηγούμενης συμπεριφοράς που είναι αναγκαία για τον προσδιορισμό της άριστης πολιτικής από εκεί και μετά. Αυτό είναι γνωστό ως **Μαρκοβιανή ιδιότητα**. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται και **αρχή του βέλτιστου**.

2.1.2 Η γενική αναδρομική σχέση (recursive relationship)

Όλες οι παραπάνω ιδιότητες μπορούν να εκφρασθούν φορμαλιστικά χρησιμοποιώντας ορισμένους συμβολισμούς μέσω της αναδρομικής σχέσης η οποία προσδιορίζει την άριστη απόφαση για κάθε κατάσταση στο στάδιο *n*, με δεδομένη την άριστη απόφαση για κάθε κατάσταση στο στάδιο *n-1*. Έστω:

n : ο αριθμός των φάσεων (βημάτων) που απομένουν. Δηλαδή, *n* είναι ο δείκτης αρίθμησης των φάσεων αρχίζοντας από το τέλος.

α_n : η μεταβλητή που καθορίζει την απόφαση στην φάση *n* (από το τέλος)

i : η μεταβλητή που καθορίζει την κατάσταση που βρισκόμαστε

$f_n(i,\alpha_n)$: η συνάρτηση που εκφράζει το βέλτιστο αποτέλεσμα για τις *n* τελευταίες φάσεις μαζί, όταν στη *n*-ιοστή από το τέλος βρισκόμαστε στην κατάσταση *i* και παίρνουμε την απόφαση α_n

$R(i,\alpha_n)$: το κέρδος (ή το κόστος) που προκύπτει όταν βρισκόμαστε στην κατάσταση *i* της *n*-ιοστής φάσης και πάρουμε την απόφαση α_n

$T(i,\alpha_n)$: η κατάσταση της φάσης n-1 στην οποία μας οδηγεί η απόφαση α_n που λαμβάνεται όταν βρισκόμαστε στην κατάσταση i της n-ιοστής φάσης

Τότε ισχύει η αναδρομική σχέση:

$$\boxed{f_n(i) = \max_{a_n}\left\{R(i,a_n) + f_{n-1}(T(i,a_n))\right\}}$$

Έστω $\overline{a}_n$ η τιμή της α_n που δίνει τη βέλτιστη τιμή της $f_n(i)$.
Τότε έχουμε:

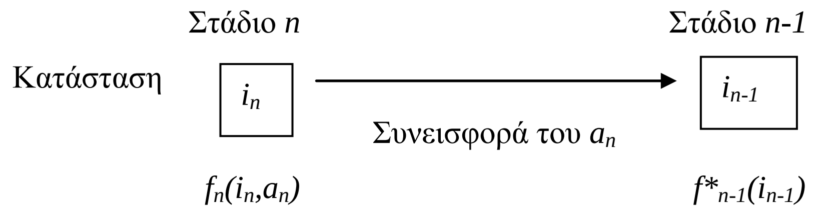
$$f_n(i) = \max_{a_n} f(i,a_n) = f(i,\overline{a}_n)$$

Συνήθως οι τιμές του $f_n(i)$ για τα διάφορα i είναι εύκολο να βρεθούν. Έτσι μπορούμε να εφαρμόσουμε αναδρομικά τη σχέση που παρουσιάσαμε παραπάνω και να επωφεληθούμε από το γεγονός ότι η τιμή του i είναι συνήθως καθορισμένη για την αρχική φάση (την πρώτη από την αρχή). Χρησιμοποιώντας την αναδρομική αυτή σχέση, η διαδικασία επίλυσης προχωρά προς τα πίσω στάδιο με στάδιο κάθε φορά, βρίσκοντας την άριστη πολιτική για κάθε κατάσταση του σταδίου μέχρι να βρεθεί η βέλτιστη πολιτική για το αρχικό στάδιο. Οι τιμές των $\overline{a}_n$ μας δίνουν τη διαδοχή των αποφάσεων που οδηγούν στην βέλτιστη λύση.

Τέλος, είναι χαρακτηριστικό ότι η ακριβής μορφή της αναδρομικής σχέσης διαφέρει μεταξύ των προβλημάτων του Δυναμικού Προγραμματισμού.

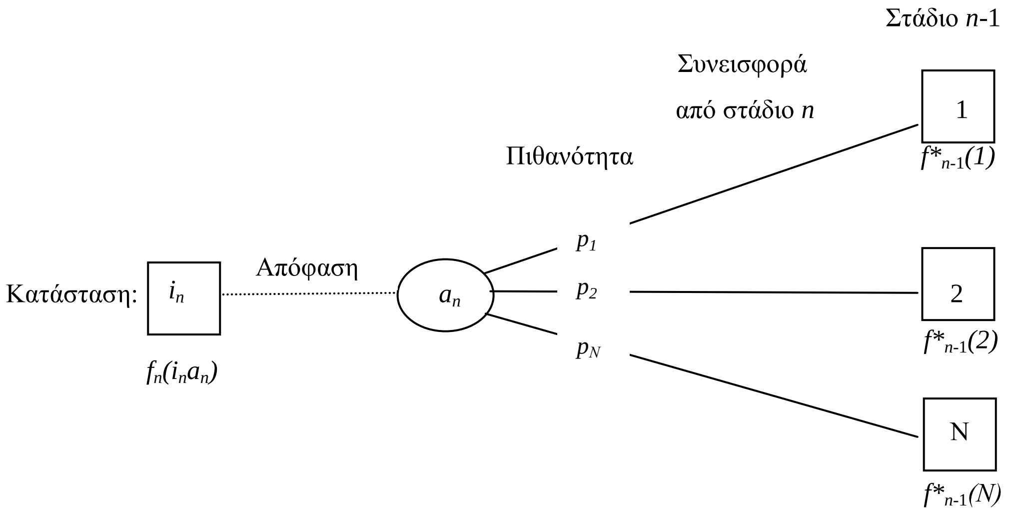
2.1.3 Προβλήματα Δυναμικού Προγραμματισμού

Τα προβλήματα του Δυναμικού Προγραμματισμού διακρίνονται σε αιτιοκρατικά και στοχαστικά. Στα **αιτιοκρατικά προβλήματα**, η κατάσταση του επόμενου σταδίου προσδιορίζεται πλήρως από την κατάσταση και την πολιτική του τρέχοντος σταδίου. Έτσι, στο στάδιο n η διαδικασία θα είναι σε κάποια κατάσταση i_n. Ακολουθώντας την απόφαση α_n η διαδικασία προχωρά σε κάποια κατάσταση i_{n-1} στο στάδιο (n-1). Από το σημείο αυτό και πέρα, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για την άριστη πολιτική είναι $f^*_{n-1}(i_{n-1})$. Η απόφαση a_n έχει κι αυτή κάποια συνεισφορά στην αντικειμενική συνάρτηση. Συνδέοντας τις δυο αυτές ποσότητες με τον κατάλληλο τρόπο έχουμε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $f_n(i_n,a_n)$ αρχίζοντας στο στάδιο *n*. Αριστοποιώντας ως προς a_n έχουμε $f^*_n(i_n)=f_n(i_n,a^*_n)$. Αφού κάνουμε αυτό για κάθε δυνατή τιμή του i_n, η διαδικασία επίλυσης είναι έτοιμη να προχωρήσει πίσω κατά ένα στάδιο. Η βασική δομή των αιτιοκρατικών προτύπων περιγράφεται στο σχήμα 1.



Σχήμα 1: Η βασική δομή των προσδιοριστικών προτύπων

Τα **στοχαστικά προβλήματα** Δυναμικού Προγραμματισμού διαφέρουν από τα αιτιοκρατικά στο ότι η κατάσταση στο επόμενο στάδιο δεν προσδιορίζεται πλήρως από την κατάσταση και την απόφαση στο τρέχον στάδιο αλλά υπάρχει μια κατανομή πιθανότητας για το τι θα είναι η επόμενη κατάσταση. Ωστόσο, η κατανομή πιθανότητας αυτή προσδιορίζεται πλήρως από την κατάσταση και την απόφαση στο τρέχον στάδιο. Η βασική δομή των στοχαστικών προβλημάτων περιγράφεται στο διάγραμμα 2, όπου N είναι ο αριθμός των δυνατών καταστάσεων στο στάδιο (n-1), $(p_1,p_2,\ldots,p_N)$ είναι η κατανομή πιθανότητας για το ποια θα είναι η κατάσταση, δεδομένης της κατάστασης i_n και της απόφασης a_n στο στάδιο *n*. Όταν το σχήμα 2 επεκτείνεται για να συμπεριλάβει όλες τις δυνατές καταστάσεις και αποφάσεις σε όλα τα στάδια, τότε ονομάζεται *δένδρο απόφασης* (decision tree).



Σχήμα 2: Η βασική δομή των στοχαστικών προτύπων

Λόγω της στοχαστικής δομής, η σχέση μεταξύ $f_n(i_n,a_n)$ και $f^*_{n-1}(i_{n-1})$ είναι αναγκαστικά κάπως πιο πολύπλοκη από εκείνη των αιτιοκρατικών προβλημάτων. Η ακριβής μορφή της σχέσης αυτής θα εξαρτάται από τη μορφή της συνολικής αντικειμενικής συνάρτησης. Δηλαδή, έστω ότι ο αντικειμενικός σκοπός είναι η μεγιστοποίηση του προσδοκώμενου αθροίσματος των συνεισφορών από τα ξεχωριστά στάδια. Στην περίπτωση αυτή το $f_n(i_n,a_n)$ θα αντιπροσωπεύει το μέγιστο στο προσδοκώμενο άθροισμα από το στάδιο n και πέρα, όταν η κατάσταση και η απόφαση στο στάδιο n είναι i_n και a_n αντίστοιχα. Επομένως:

$$f_n(i_n, a_n) = R(i_n, a_n) + \sum_{i=1}^{N} p_i f^*_{n-1}(i)$$

με

$$f*_{n-1}(i_{n-1}) = \max_{a_{n-1}} f_{n-1}(i_{n-1}, a_{n-1})$$

όπου η μεγιστοποίηση είναι προς όλες τις τιμές του a_{n-1}.

2.2 Μαρκοβιανές διαδικασίες αποφάσεων (Στοχαστικός Δυναμικός Προγραμματισμός)

Οι Μαρκοβιανές διαδικασίες αποφάσεων εισήχθησαν από τον Bellman (1957) και ήταν αποτέλεσμα του συνδυασμού της θεωρίας των Μαρκοβιανών διαδικασιών και του Δυναμικού Προγραμματισμού. Επί της ουσίας, οι μαρκοβιανές διαδικασίες αποφάσεων αντιμετωπίζουν τα στοχαστικά προβλήματα δυναμικού προγραμματισμού. Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε συνοπτικά μερικά στοιχεία της θεωρίας των Μαρκοβιανών διαδικασιών αποφάσεων.

2.2.1 Μαρκοβιανές διαδικασίες αποφάσεων διακριτού χρόνου

Έστω μια στοχαστική διαδικασία X_n, n=0,1,2,… όπου η τυχαία μεταβλητή X_n αναπαριστά την κατάσταση του συστήματος τη χρονική στιγμή n. Το σύνολο των καταστάσεων του συστήματος είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο. Το σύστημα επιθεωρείται τις χρονικές στιγμές n=0,1,2,…οι οποίες θεωρούμε ότι ισαπέχουν μεταξύ τους. Η κατάσταση του συστήματος παρατηρείται σε κάθε χρονική στιγμή επιθεώρησης και μια ενέργεια επιλέγεται από ένα σύνολο εναλλακτικών ενεργειών. Έστω ότι σε κάποια χρονική στιγμή επιθεώρησης n το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση i_n και η απόφαση a_n επιλέγεται από ένα πεπερασμένο σύνολο εναλλακτικών αποφάσεων A(i). Το παραπάνω σύστημα είναι μια **Μαρκοβιανή διαδικασία αποφάσεων σε διακριτό χρόνο** αν:

- υπάρχει μια αμοιβή (ή κόστος) $R(\iota_n,\alpha_n)$ η οποία εξαρτάται μόνον από την κατάσταση i_n και την απόφαση α_n, ως οικονομική συνέπεια της επιλογής της απόφασης α_n, τη χρονική στιγμή κατά την οποία το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση i_n.
- την επόμενη χρονική στιγμή η κατάσταση του συστήματος είναι η κατάσταση j με πιθανότητα $p_{ij}(\alpha)$ η οποία εξαρτάται μόνον από την απόφαση α και τις καταστάσεις i,j.

Ο όρος ¨Μαρκοβιανή¨ δικαιολογείται από το γεγονός ότι η αμοιβή R(i,α) και η πιθανότητα μετάβασης $p_{ij}(\alpha)$ εξαρτώνται από το παρελθόν της διαδικασίας μόνο μέσω της τρέχουσας κατάστασης i και της ενέργειας α που επιλέγεται στην κατάσταση αυτή.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, οι αποφάσεις λαμβάνονται σε σημεία του χρόνου τα οποία αναφέρονται ως *βαθμίδες αποφάσεων* ή *χρονικές στιγμές αποφάσεων* (decision epochs or stages). Το σύνολο των βαθμίδων αποφάσεων μπορεί να είναι πεπερασμένο ή άπειρο.

2.2.1.1 Προβλήματα με πεπερασμένο ορίζοντα αποφάσεων

Έστω a_t η ενέργεια που επιλέγεται τη χρονική στιγμή t. Το συνολικό κέρδος $u_N^\pi(s)$ όταν απομένουν N βήματα μέχρι το τερματισμό της διαδικασίας, υπό τον έλεγχο της πολιτικής π, δοθέντος ότι η αρχική κατάσταση της διαδικασίας είναι η κατάσταση s, ορίζεται ως εξής:

$$u_N^\pi(s) = E_\pi\left[\sum_{t=0}^{N-1} R(X_t, \alpha_t) + F(X_N)\right]$$

όπου E_π αναπαριστά την υπό-συνθήκη αναμενόμενη τιμή, δοθέντος ότι η πολιτική π έχει υιοθετηθεί για τον έλεγχο της διαδικασίας. Η συνάρτηση $F(\cdot)$ είναι μια γνωστή συνάρτηση κέρδους η οποία ορίζεται στο χώρο καταστάσεων της διαδικασίας και αντιπροσωπεύει ένα τελικό κέρδος $F(X_N)$ όταν η διαδικασία σταματά τη χρονική στιγμή N.

Για κάθε κατάσταση s της διαδικασίας, η βέλτιστη συνάρτηση $u_N^{\pi^*}(s)$ του αναμενόμενου κόστους όταν απομένουν N βήματα μέχρι το τερματισμό της διαδικασίας, ορίζεται ως εξής:

$$u_N^{\pi^*}(s) = \inf_{\pi \in \Pi} u_N^{\pi}(s), \quad s \in S$$

Η πολιτική π^* ονομάζεται *βέλτιστη πολιτική* και το $u_N^{\pi^*}(s)$ *βέλτιστη τιμή* της συνάρτησης Markov με πεπερασμένο ορίζοντα αποφάσεων.

Το παρακάτω Θεώρημα παρέχει μία εξίσωση που υπολογίζει αναδρομικά τη βέλτιστη συνάρτηση για κάθε κατάσταση της διαδικασίας.

<u>Θεώρημα 1</u>

Η ποσότητα $u_N^{\pi}(s), s \in S$, ικανοποιεί για κάθε N=1,2,… την εξίσωση:

$$u_N^{\pi}(s) = \max_{a \in A_s}\{R(s,a) + \sum_{j \in S} p(j/s,a) u_{N-1}^{\pi}(j)\}$$

όπου $u_0^{\pi}(s)$ =F(s).

Επιπλέον υπάρχει μια βέλτιστη Μαρκοβιανή πολιτική η οποία, οποτεδήποτε η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση s, επιλέγει εκείνη την ενέργεια *α* που μεγιστοποιεί το δεξί μέλος της εξίσωσης.

Η εξίσωση του Θεωρήματος 1 είναι γνωστή ως *εξίσωση βελτιστοποίησης* ή *εξίσωση του Bellman* για το πρόβλημα της μεγιστοποίησης του συνολικού αναμενόμενου κέρδους σε πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα. Το Θεώρημα 1 μπορεί να αποδειχθεί με επαγωγή ως προς N και η απόδειξη βρίσκεται στο βιβλίο της Sennott [13].

2.2.1.2 Προβλήματα με άπειρο ορίζοντα αποφάσεων

Σε αυτήν την ενότητα θα περιγράψουμε ένα στάσιμο μοντέλο Markov με μη πεπερασμένο, μετρήσιμο, πλήθος βαθμίδων αποφάσεων, T=1,2,…, (stationery infinity horizon Markov decision model). Σε αυτό το μοντέλο τα δεδομένα του προβλήματος, είναι σταθερά, δηλαδή οι αμοιβές $R_t(i,\alpha)$, οι πιθανότητες μετάβασης $p_t(j/i,\alpha)$ και το σύνολο των αποφάσεων δεν μεταβάλλονται από τη μια περίοδο απόφασης στην άλλη. Επίσης το σύνολο των καταστάσεων *i* είναι πεπερασμένο. Συγκεκριμένα θα αναφερθούμε στις εξισώσεις βελτιστοποίησης, γνωστές ως εξισώσεις Bellman, οι οποίες αποτελούν εργαλεία για την εύρεση της βέλτιστης πολιτικής καθώς και στα απαιτούμενα υπολογιστικά εργαλεία. Επίσης θα αναφερθούμε αναλυτικά στο κριτήριο εύρεσης της βέλτιστης στάσιμης πολιτικής και στις συνθήκες οι οποίες εξασφαλίζουν την ύπαρξη της. Εδώ πρέπει να αναφέρουμε ότι μια πολιτική ονομάζεται στάσιμη όταν είναι ανεξάρτητη του χρόνου, δηλαδή οι αποφάσεις λαμβάνονται συναρτήσει της κατάστασης του συστήματος και μόνον.

Όπως αναφέραμε, στα προβλήματα άπειρου χρονικού ορίζοντα υποθέτουμε ότι το σύνολο των βαθμίδων αποφάσεων τείνει στο άπειρο. Σε τέτοιου είδους προβλήματα υπάρχουν διάφορα είδη κριτηρίων βελτιστοποίησης. Σε αυτή την εργασία θα εξετάσουμε το κριτήριο του αναμενόμενου μέσου κέρδους.

2.2.1.3 Μεγιστοποίηση του μέσου κέρδους ανά μονάδα χρόνου

Το αναμενόμενο μέσο κέρδος (expected average gain) $J^{\pi}(s)$ ανά μονάδα χρόνου, υπό τον έλεγχο της πολιτικής π, δοθέντος ότι η αρχική κατάσταση της διαδικασίας είναι η κατάσταση i, ορίζεται ως εξής:

$$J^{\pi}(\mathrm{i}) = \lim_{N\to\infty}\sup \frac{\mathrm{E}_{\pi}[\sum_{j=0}^{N-1} R(X_j, \alpha_j) \,/\, X_0 = i]}{N}.$$

Για κάθε κατάσταση i της διαδικασίας, μία πολιτική π^* είναι βέλτιστη (average optimal) αν:

$$J^{\pi^*}(i) = \max_{\pi\in\Pi} J^{\pi}(\mathrm{i})$$

Στο πρόβλημα της μεγιστοποίησης του μακροπρόθεσμου αναμενόμενου μέσου κέρδους ανά μονάδα χρόνου, η ύπαρξη μιας βέλτιστης πολιτικής δεν είναι βέβαιη. Υπάρχουν προβλήματα ελέγχου μιας στοχαστικής διαδικασίας στα οποία η βέλτιστη πολιτική είτε δεν υπάρχει είτε και αν ακόμη υπάρχει δεν είναι μία στάσιμη πολιτική. Παραδείγματα τέτοιων περιπτώσεων αναφέρουν ο Ross [14] και η Sennott [13].

Πολλοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί με το θέμα της κατασκευής κατάλληλων υποθέσεων οι οποίες εξασφαλίζουν την ύπαρξη μιας βέλτιστης στάσιμης πολιτικής. Η Sennott [13] παρουσιάζει αναλυτικά τα πρόσφατα αποτελέσματα σχετικά με το θέμα αυτό με αρκετές αναφορές σε προηγούμενες εργασίες.

Στη παρούσα εργασία υποθέτουμε πάλι ότι υπάρχει ένας θετικός πραγματικός αριθμός M τέτοιος ώστε για κάθε ενέργεια *α* και κάθε κατάσταση *i* της διαδικασίας ισχύει ότι: $|r(\mathrm{i},\alpha)| < \mathrm{M}$.

Το Θεώρημα 2 παρέχει μία ικανή συνθήκη για την ύπαρξη <u>μιας</u> βέλτιστης στάσιμης πολιτικής.

Θεώρημα 2

Έστω ότι υπάρχει μία άνω φραγμένη συνάρτηση $\{\upsilon_i\}$, $i \geq 0$, και μία σταθερά J έτσι ώστε:

$$u(i) = \max_{a \in A_s}\{R(i,a) - J + \sum_{j=0}^{\infty} p(j/i,a)u(i)\}, \quad \mathrm{i} \geq 0$$

Τότε υπάρχει μία βέλτιστη στάσιμη πολιτική $f \equiv \{f_i\}$, $i \geq 0$, η οποία, οποτεδήποτε η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση i, επιλέγει εκείνη την ενέργεια *α*= f_i που μεγιστοποιεί το δεξί μέλος της παραπάνω εξίσωσης. Επιπλέον η σταθερά *J* είναι ίση με $J^f(i)$, $\mathrm{i} \geq 0$

Η εξίσωση αυτή είναι γνωστή ως *εξίσωση βελτιστοποίησης* για το πρόβλημα της μεγιστοποίησης του μακροπρόθεσμου αναμενόμενου μέσου κέρδους ανά μονάδα χρόνου και οι τιμές $\upsilon(i), i \geq 0$, είναι γνωστές ως *τιμές του σχετικού κέρδους* της βέλτιστης στάσιμης πολιτικής. Η απόδειξη του Θεωρήματος 2 βρίσκεται στο βιβλίο του Ross [14].

Για κάθε κατάσταση *i* της διαδικασίας, το παρακάτω θεώρημα παρέχει μία συνθήκη η οποία εγγυάται την ύπαρξη της ακολουθίας των σχετικών τιμών $\{\upsilon(i)\}$ μέσω της βέλτιστης συνάρτησης $\mathrm{u}_\lambda(\mathrm{i}), \mathrm{i} \geq 0$.

Θεώρημα 3

Έστω ότι για μία κατάσταση της διαδικασίας (π.χ. για την κατάσταση 0) υπάρχει μία σταθερά B τέτοια ώστε:

$$|\mathrm{u}_\lambda(\mathrm{i}) - \mathrm{u}_\lambda(0)| < \mathrm{B}, \qquad (1)$$

για κάθε $i \geq 0$ και κάθε $\lambda \in (0,1)$. Τότε:

α) Υπάρχει μία φραγμένη ακολουθία αριθμών $\upsilon(i)$, $i \geq 0$, και μια σταθερά J που ικανοποιούν την εξίσωση βελτιστοποίησης.

β) Υπάρχει μία ακολουθία αριθμών $\{\lambda_n\}$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = 1$, για την οποία ισχύει ότι:

$\upsilon(i) = \lim_{n\to\infty}\{u_{\lambda_n}(i) - u_{\lambda_n}(0)\}$ και

γ) $\lim_{\lambda\to 1}(1-\lambda)u_\lambda(0) = J$.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 3 βρίσκεται στο βιβλίο του Ross [14] στο οποίο παρέχονται επίσης αποτελέσματα που παρέχουν ικανές συνθήκες τέτοιες ώστε να ισχύει η ανισότητα (1).

Στο πρόβλημα της μεγιστοποίησης του μακροπρόθεσμου αναμενόμενου μέσου κέρδους ανά μονάδα χρόνου, η ακόλουθη Υπόθεση UC χρειάζεται να εισαχθεί ώστε να είναι εφικτός ο υπολογισμός μιας βέλτιστης στάσιμης πολιτικής.

Υπόθεση UC:

Για κάθε στάσιμη πολιτική *f* υπάρχει μια κατάσταση *κ* (η οποία μπορεί να εξαρτάται από την πολιτική *f*) τέτοια ώστε ο αναμενόμενος χρόνος και το αναμενόμενο κέρδος που απαιτούνται για τη μετάβαση στην κατάσταση *κ* από οποιαδήποτε αρχική κατάσταση της διαδικασίας, υπό τον έλεγχο της πολιτικής *f*, είναι πεπερασμένα.

Η Υπόθεση UC εξασφαλίζει επίσης ότι το μακροπρόθεσμο αναμενόμενο μέσο κέρδος ανά μονάδα χρόνου οποιασδήποτε στάσιμης πολιτικής που υιοθετείται για τον έλεγχο της διαδικασίας είναι ανεξάρτητο της αρχικής κατάστασης της διαδικασίας.

Στο πρόβλημα της μεγιστοποίησης του μακροπρόθεσμου αναμενόμενου μέσου κέρδους ανά μονάδα χρόνου, ο αλγόριθμος βελτίωσης των πολιτικών, ο αλγόριθμος των διαδοχικών προσεγγίσεων και η μέθοδος του γραμμικού προγραμματισμού συνιστούν τις βασικές υπολογιστικές τεχνικές. Στα βιβλία των Puterman [15], Tijms [16] περιέχεται το θεωρητικό υπόβαθρο αυτών των υπολογιστικών τεχνικών καθώς και αρκετές εφαρμογές τους. Ειδικά για τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων, την οποία χρησιμοποιούμε στην παρούσα εργασία, όπως αποδεικνύεται από τον Tijms [16] ισχύει το ακόλουθο θεώρημα :

<u>Θεώρημα 4</u>

Αν ισχύει η συνθήκη UC έστω π^* η στάσιμη πολιτική που βελτιστοποιεί την εξίσωση βελτιστοποίησης:

$$u_k^{\pi^*}(i) = \min_{\alpha \in A_S} \{r(i,\alpha) + \sum_{j \in S} p(j/i,\alpha) u_{k-1}(j)\}, \quad i \in S.$$

Τότε έχουμε ότι:

$$m_k \le J^* \le J_i(\pi_n^*) \le M_k, \quad i \in S \text{ και } k \ge 1,$$

όπου J^* είναι το βέλτιστο αναμενόμενο κέρδος και $J(\pi^*)$ είναι το μέσο αναμενόμενο κέρδος της πολιτικής π_k^*

$$M_k = \max_{i \in S}\{u_k(i) - u_{k-1}(i)\}, \quad k = 1,2,..$$

$$m_k = \min_{i \in S}\{u_k(i) - u_{k-1}(i)\}, \quad k = 1,2,..$$

Επιπλέον η ακολουθία m_k είναι αύξουσα ως προς k και η M_k είναι φθίνουσα ως προς k.

2.2.2 Μαρκοβιανές διαδικασίες αποφάσεων συνεχούς χρόνου

Σε αντίθεση με τα παραπάνω, θεωρούμε ότι έχουμε ένα σύστημα για τον έλεγχο του οποίου οι ενέργειες επιλέγονται σε τυχαίες χρονικές στιγμές. Έστω X_n η κατάσταση του συστήματος τη χρονική στιγμή *n*, *n*≥0 και t_n, *n*≥1 το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ των χρονικών στιγμών *n*-1 και *n*. Υποθέτουμε ότι t_0=0 και ότι τη χρονική στιγμή n το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση i στην οποία η ενέργεια α επιλέγεται από ένα σύνολο *A*(*i*). Το σύστημα αυτό αποτελεί μια **ημι-Μαρκοβιανή διαδικασία αποφάσεων** αν:

- την επόμενη χρονική στιγμή η κατάσταση του συστήματος είναι η *j* με πιθανότητα $p_{ij}(\alpha)$ η οποία εξαρτάται μόνον από την ενέργεια *α* και τις καταστάσεις *i*,*j*.
- Με δεδομένο ότι την επόμενη χρονική στιγμή η κατάσταση του συστήματος είναι η *j*, το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μέχρι το σύστημα να μεταβεί από την κατάσταση *i* στην *j* είναι μια τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας $F_{ij}(\bullet \backslash \alpha)$.

Μια υποκατηγορία των ημι-Μαρκοβιανών διαδικασιών αποφάσεων είναι οι **Μαρκοβιανές διαδικασίες αποφάσεων σε συνεχή χρόνο** με τις οποίες θα ασχοληθούμε στην παρούσα εργασία. Σε μια Μαρκοβιανή διαδικασία αποφάσεων σε συνεχή χρόνο, το χρονικό διάστημα t_n που μεσολαβεί μεταξύ των χρονικών στιγμών n-1 και n, n≥1 στις οποίες επιλέγεται μια ενέργεια, είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί την Εκθετική κατανομή. Στις περιπτώσεις των ημι-Μαρκοβιανών διαδικασιών και των Μαρκοβιανών διαδικασιών αποφάσεων σε συνεχή χρόνο, η τεχνική της ομοιομορφοποίησης (uniformisation) μετατρέπει αυτές τις διαδικασίες σε μια ισοδύναμη Μαρκοβιανή διαδικασία αποφάσεων σε διακριτό χρόνο, έτσι ώστε υπό τον έλεγχο οποιασδήποτε στάσιμης πολιτικής το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος (ή κέρδος) ανά μονάδα χρόνου να είναι το ίδιο και στις δυο διαδικασίες. Οι δυο διαδικασίες έχουν τον ίδιο χώρο καταστάσεων και για κάθε κατάσταση i έχουν τα ίδια σύνολα εναλλακτικών ενεργειών A(i). Διαφέρουν μόνο στα κόστη (ή κέρδη) και στις πιθανότητες μετάβασης. Στην επόμενη ενότητα περιγράφεται συνοπτικά η τεχνική της ομοιομορφοποίησης.

2.2.2.1 Η τεχνική της ομοιομορφοποίησης (uniformisation)

Θεωρούμε ένα σύστημα το οποίο βρίσκεται στην κατάσταση *i* κι εφαρμόζοντας την απόφαση *α* μεταβαίνει στην κατάσταση *j* με πιθανότητα $p_{ij}(\alpha)$. Ο χρόνος μετάβασης *τ* από την κατάσταση *i* στην κατάσταση *j* είναι τυχαίος και εκθετικά κατανεμημένος με παράμετρο $v_i(\alpha)$ που ονομάζεται *ρυθμός μετάβασης*.

Δηλαδή: P{χρόνος μετάβασης $\le$ τ/i,α} $\le 1 - e^{-v_i(\alpha)\tau}$

Η ισοδύναμη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$P(\tau) = v_i(\alpha) e^{-v_i(\alpha)\tau}, \quad \tau \ge 0$$

Επιπρόσθετα, το *τ* είναι ανεξάρτητο προηγούμενων χρόνων μετάβασης, καταστάσεων και αποφάσεων. Η παράμετρος $v_i(a)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη υπό την έννοια ότι υπάρχει *v* τέτοιο ώστε $v_i(a) \le v, \forall i, \alpha$. Με άλλα λόγια θεωρούμε ότι ο ρυθμός μετάβασης είναι σταθερός για όλες τις καταστάσεις-αποφάσεις.

Ο αντίστοιχος μέσος χρόνος μετάβασης είναι:

$$E\{\tau\} = \int_0^\infty \tau v_i(a) e^{-v_i(a)\tau} d\tau = \frac{1}{v_i(a)}$$

Έτσι η παράμετρος $v_i(\alpha)$ μπορεί να ερμηνευθεί ως ο *μέσος αριθμός μεταβάσεων στη μονάδα του χρόνου.* Στην ανάλυση που ακολουθεί συμβολίζουμε με $x(t)$ την κατάσταση και με $\alpha(t)$ την απόφαση τη χρονική στιγμή t οι οποίες παραμένουν σταθερές μεταξύ των μεταβάσεων. Επίσης ορίζουμε ως:

t_k: η χρονική στιγμή που λαμβάνει χώρα η κ-ιοστή μετάβαση. Συνεπώς ισχύει: $t_0=0$

$\tau_\kappa=\tau_\kappa-\tau_{\kappa-1}$: το διάστημα της κ-ιοστής μετάβασης

$x_\kappa=x(t_\kappa)$ Έχουμε: $x(t)= x_\kappa$ για $t_\kappa \leq t < t_{\kappa+1}$

$\alpha_\kappa=\alpha(t_\kappa)$ Έχουμε: $\alpha(t)= \alpha_\kappa$ για $t_\kappa \leq t < t_{\kappa+1}$

Επομένως η συνάρτηση κέρδους στα προβλήματα συνεχούς χρόνου ορίζεται ως εξής:

$$\lim_{N\to\infty} E\left\{\int_0^{t_N} e^{-\beta\tau} R(x(t),a(t))dt\right\}$$

όπου β: θετική παράμετρος αποπληθωρισμού

και R(x(t),α(t)): γνωστή συνάρτηση κέρδους

Στα προβλήματα αυτά αν χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του αποπληθωρισμένου κέρδους έχουμε ότι το αναμενόμενο συνολικό αποπληθωρισμένο κέρδος αν εφαρμόσουμε την πολιτική π, και η αρχική κατάσταση είναι η x_0, ορίζεται ως εξής:

$$J_n(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{E}\left\{\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-\beta\tau} R(x(t),a(t))dt\right\}$$

Εφαρμόζοντας την τεχνική της ομοιομορφοποίησης, εισάγουμε την έννοια του συντελεστή αποπληθωρισμού $\alpha \in (0,1)$ για να εκφράσουμε το γεγονός ότι οι αμοιβές του μέλλοντος είναι μικρότερης αξίας από τις σημερινές αμοιβές λόγω του πληθωρισμού.

Όπου $\alpha = \dfrac{v}{\beta + v}$

Το κέρδος ανά μετάβαση μετασχηματίζεται ως εξής: $\tilde{R}(i,a) = \dfrac{R(i,a)}{\beta + v}$

Και οι νέες πιθανότητες μετάβασης είναι:

$$\tilde{p}_{ij}(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{v_i(\alpha)}{v} p(j/i,\alpha), & \text{αν } i \neq j \\ \dfrac{v_i(\alpha)}{v} p(i/i,\alpha) + 1 - \dfrac{v_i(\alpha)}{v}, & \text{αν } i = j \end{cases}$$

Η τεχνική της ομοιομορφοποίησης παρουσιάζεται λεπτομερώς στο βιβλίο του Tijms (1994) και στο βιβλίο του Sennott [13]. Στα βιβλία των Ross (1992), Puterman

[15], Tijms[16], Sennott [13] παρουσιάζονται οι Μαρκοβιανές διαδικασίες αποφάσεων σε συνεχή χρόνο. Επίσης αναφέρονται οι υπολογιστικές τεχνικές για την εύρεση μιας βέλτιστης στάσιμης πολιτικής με αρκετά παραδείγματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

3.1 Περιγραφή του συστήματος παραγωγής

Έστω ένα σύστημα παραγωγής το οποίο παράγει ένα προϊόν και το διαθέτει σε δυο τύπους αγορών: πελάτες τύπου 1 (ή «καλοί πελάτες») και πελάτες τύπου 2 (ή «λιγότερο καλοί πελάτες»). Οι πελάτες αυτοί αφικνούνται από την κάθε αγορά με έναν ρυθμό λ_i και οι αφίξεις τους ακολουθούν την κατανομή Poisson. Η ζήτηση είναι τυχαία και ο καθένας ζητά μία μονάδα προϊόντος, το οποίο χαρακτηρίζεται από ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό y η τιμή του οποίου είναι τυχαία και ακολουθεί την κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(y)$ (κανονική κατανομή με γνωστές: μέση τιμή α, διασπορά σ^2) και έχει ιδανική τιμή: t. Το κόστος ποιότητας, λόγω απόκλισης του ποιοτικού χαρακτηριστικού y από την ιδανική τιμή t, υποθέτουμε ότι είναι:

$Q_{ij}=b_jE[(y-t)^2|$ περιοχή ποιότητας $i]$

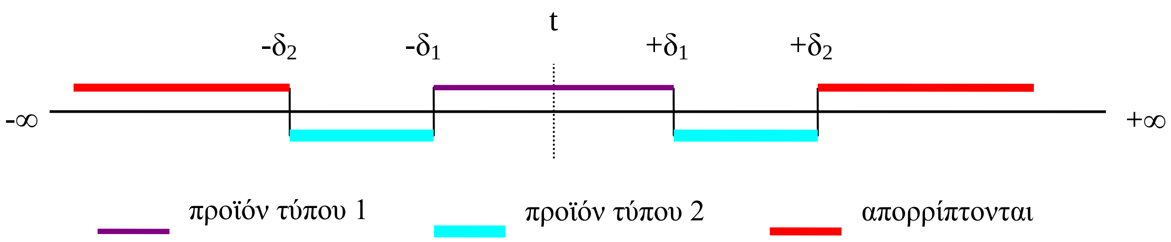
όπου b_j: μοναδιαίο κόστος ποιότητας κατηγορίας πελατών τύπου j

Επίσης, υποθέτουμε ότι η αγορά τύπου 1 προσφέρει κέρδος R_1 ανά κομμάτι κι έχει παράμετρο κόστους ποιότητας b_1 και η αγορά τύπου 2 προσφέρει κέρδος R_2 ανά κομμάτι κι έχει παράμετρο κόστους ποιότητας b_2, με $b_1>b_2$. Θεωρούμε ότι τα παραγόμενα κομμάτια αφού επιθεωρηθούν (κόστος επιθεώρησης: g) είτε απορρίπτονται (κόστος απόρριψης: r_c), είτε πωλούνται. Τα προϊόντα που επιλέγονται να προωθηθούν προς πώληση αποθηκεύονται μέχρι να παρουσιαστούν ενδιαφερόμενοι πελάτες και η αποθήκευσή τους στοιχίζει h χρηματικές μονάδες ανά μονάδα προϊόντος και χρόνου. Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι δεν επιτρέπονται οι εκκρεμείς παραγγελίες. Δηλαδή, ένας πελάτης που δε θα ικανοποιηθεί άμεσα χάνεται. Ακόμη υποθέτουμε ότι οι χρόνοι παραγωγής είναι τυχαίοι και είναι εκθετικά κατανεμημένοι.

Οι Hong και Elsayed (1998) [5] μελετούν το πρόβλημα διάθεσης των παραγόμενων προϊόντων σε συστήματα παραγωγής που δεν λαμβάνεται υπόψη το κόστος αποθεματοποίησης κι έχουν υπολογίσει πού συμφέρει να διαθέτουμε ένα προϊόν ανάλογα με το μέγεθος της απόκλισης του ποιοτικού χαρακτηριστικού από την ιδανική τιμή. Έχουν ταξινομηθεί οι αγορές έτσι, ώστε $R_1>R_2$. Αποδεικνύεται ότι για τις παραμέτρους κόστους ποιότητας b_j δεν μπορούμε παρά να θεωρήσουμε ότι $b_1>b_2$. Αν δεν συνέβαινε αυτό, τότε θα ίσχυε $b_1\leq b_2$. Αλλά τότε η αγορά α_1 θα πρόσφερε αφενός μεγαλύτερο κέρδος, ενώ αφετέρου θα είχε και μικρότερο κόστος ποιότητας. Άρα δε θα συμφέρει να πουλάμε καθόλου στην αγορά α_2. Σε αυτήν την περίπτωση δεν έχει νόημα να διερευνηθούν διαφορετικές πολιτικές, αφού το πιο ευνοϊκό είναι να πωλούνται όλα τα προϊόντα στην αγορά α_1.

Στην εργασία [5] αποδεικνύεται ότι υπάρχουν «κατώφλια διαλογής» δ_1 και δ_2, τα οποία οριοθετούν στην πραγματικότητα μια απόσταση από την ιδανική τιμή *t*. Έτσι όσα προϊόντα βρίσκονται σε απόσταση ίση ή μικρότερη με δ_1 από το *t*, ανήκουν στην πρώτη διαλογή ή αλλιώς λέμε ότι είναι τύπου 1. Η περιοχή της πρώτης διαλογής (πολύ καλά κομμάτια) είναι η $[t–\delta_1, t+\delta_1]$. Η περιοχή της δεύτερης διαλογής ή προϊόντα τύπου 2 (λιγότερο καλά κομμάτια) αποτελείται από τα προϊόντα που «απέχουν» από την ιδανική τιμή t περισσότερο από δ_1 και λιγότερο από δ_2. Άρα η τιμή y του ποιοτικού χαρακτηριστικού για αυτά τα κομμάτια ανήκει στα διαστήματα $[t–\delta_2, t–\delta_1]\cup[t+\delta_1, t+\delta_2]$. Όταν η απόκλιση από την ιδανική τιμή είναι μεγαλύτερη από δ_2 τότε τα κομμάτια απορρίπτονται και η τιμή y για αυτά ανήκει στο $[–\infty, t– \delta_2]\cup [t+\delta_2, +\infty]$.

Γραφικά η κατηγοριοποίηση του προϊόντος, βάσει της απόκλισης του χαρακτηριστικού ποιότητας y από την ιδανική τιμή t, αποδίδεται ως εξής:



Σχήμα 3: Κατηγορίες προϊόντων σύμφωνα με την απόκλιση του χαρακτηριστικού ποιότητας

Τα κατώφλια διαλογής δ_1 και δ_2 υπολογίζονται θεωρητικά στην εργασία του Elsayed, έτσι ώστε να βελτιστοποιείται το κέρδος το οποίο αποτελεί συνάρτηση του κέρδους από τις πωλήσεις, του κόστους ποιότητας, του κόστους επιθεώρησης, του κόστους απόρριψης και του κόστους αποθέματος.

Στο σημείο αυτό, πρέπει να αναφέρουμε ότι η αναλυτική αντιμετώπιση του προβλήματος καθορισμού των κατωφλίων διαλογής είναι ιδιαίτερα σύνθετη. Η διαδικασία αυτή πραγματοποιείται στα πλαίσια του ελέγχου ποιότητας από το αντίστοιχο τμήμα της κάθε επιχείρησης. Στην πραγματικότητα τα κατώφλια διαλογής είναι περισσότερα δεδομένου ότι η κατηγοριοποίηση του προϊόντος βάσει της απόκλισης (y-t) είναι ευρύτερη. Στην παρούσα εργασία εστιάζουμε στον έλεγχο παραγωγής και διάθεσης προϊόντος και όσον αφορά στον έλεγχο ποιότητας δεχόμαστε την ύπαρξη δύο τύπων προϊόντος με κατώφλια διαλογής τα: δ_1,δ_2.

Η κατάσταση του συστήματος παραγωγής ($N(t)=(n_1(t),n_2(t))$) περιγράφεται από τις παραμέτρους $n_1,n_2\geq 0$ οι οποίες εκφράζουν το απόθεμα που υπάρχει από προϊόν τύπου 1 και 2 αντίστοιχα. Οι αποφάσεις τις οποίες καλείται να λάβει η επιχείρηση έχουν να κάνουν με την:

1. παραγωγή, δηλαδή αν θα παράγει ή όχι
2. αποδοχή παραγγελίας και διάθεση προϊόντος στον πελάτη τύπου 1
3. αποδοχή παραγγελίας και διάθεση προϊόντος στον πελάτη τύπου 2

3.2 Αναζήτηση μορφής της βέλτιστης πολιτικής

Σε αυτό το σύστημα παραγωγής, αναζητούμε τη μορφή της βέλτιστης πολιτικής. Στην προσπάθεια μας να προσδιορίσουμε τη μορφή αυτής, θα μελετήσουμε τις παραπάνω αποφάσεις τις οποίες πρέπει να λάβει η επιχείρηση καθώς και την συμπεριφορά της εστιάζοντας σε ζητήματα ελέγχου παραγωγής και διάθεσης προϊόντος. Αρχικά, η παραγωγική μονάδα καλείται να αποφασίσει αν θα παράγει κι έπειτα αν και πώς θα διαθέσει το παραγόμενο προϊόν στους πελάτες της. Ως προς το πρόβλημα του ελέγχου παραγωγής, θα εξετάσουμε ποιος είναι ο παράγοντας εκείνος ο οποίος καθορίζει την παύση ή την συνέχιση της παραγωγικής διαδικασίας Ως προς το πρόβλημα διάθεσης του προϊόντος, η επιχείρηση έχει τις εξής επιλογές: είτε δεν θα το διαθέσει προς πώληση οπότε το προϊόν θα παραμείνει αποθηκευμένο, είτε θα το διαθέσει στους πελάτες τύπου 1 ή τύπου 2. Στα παρακάτω κεφάλαια θα εξετάσουμε πώς γίνεται η διανομή του προϊόντος στις δυο αγορές για όλες τις δυνατές περιπτώσεις. Δηλαδή για τις περιπτώσεις όπου υπάρχει απόθεμα και από τους δύο τύπους προϊόντος ή μόνο από τον έναν ή δεν υπάρχει καθόλου απόθεμα. Το πώς συμπεριφέρεται η επιχείρηση στις παραπάνω περιπτώσεις, και στους συνδυασμούς αυτών, με κριτήριο τη μεγιστοποίηση του κέρδους θα μας δώσει μια εικόνα της μορφής της βέλτιστης πολιτικής.

3.2.1 Μοντελοποίηση

$N(t)=(n_1(t),n_2(t))$: κατάσταση του συστήματος όπου $n_i(t)$:απόθεμα κατάλληλο για την αγορά α_i

ν: μέσος ρυθμός πραγματοποίησης όλων των γεγονότων ($\nu=\lambda_1+\lambda_2+\mu$)

(1/ν : μέσος χρόνος μεταξύ δυο διαδοχικών γεγονότων)

μ: μέσος ρυθμός παραγωγής

(η διάρκεια παραγωγής κομματιού είναι εκθετική)

λ_i: ρυθμός αφίξεων πελατών από την αγορά α_i

(οι αφίξεις από την αγορά α_i ακολουθούν κατανομή Poisson)

P_1: πιθανότητα τα προϊόντα να είναι τύπου 1 (πολύ καλά κομμάτια)

P_2: πιθανότητα τα προϊόντα να είναι τύπου 2 (λιγότερο καλά κομμάτια)

P_3: πιθανότητα τα προϊόντα να απορριφθούν

R_1: τιμή προϊόντος στην αγορά τύπου 1

R_2: τιμή προϊόντος στην αγορά τύπου 2

<u>Αποφάσεις:</u>

- Παραγωγή

Οι δυνατές επιλογές είναι:

Διακοπή παραγωγής

Επανεκκίνηση παραγωγής

- Αν θα πουλήσει και τι τύπου προϊόν θα πουλήσει στον πελάτη τύπου 1

Οι δυνατές επιλογές πώλησης προϊόντος στον καλό πελάτη είναι:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Πώληση προϊόντος τύπου 1}\\ \text{Πώληση προϊόντος τύπου 2}\\ \text{Απόρριψη παραγγελίας}\end{array}\right\} \longrightarrow \text{σε πελάτη τύπου 1}$$

- Αν θα πουλήσει και τι τύπου προϊόν θα πουλήσει στον πελάτη τύπου 2

Οι δυνατές επιλογές πώλησης προϊόντος στον λιγότερο καλό πελάτη είναι:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Πώληση προϊόντος τύπου 1}\\ \text{Πώληση προϊόντος τύπου 2}\\ \text{Απόρριψη παραγγελίας}\end{array}\right\} \longrightarrow \text{σε πελάτη τύπου 2}$$

<u>Μορφές κόστους:</u>

Q_{ij} i,j=1,2: κόστος ποιότητας πώλησης προϊόντος τύπου i σε πελάτη j

g : κόστος επιθεώρησης

r_c : κόστος απόρριψης

h: κόστος αποθέματος

3.2.2 Υπολογισμός κόστους ποιότητας

Με τον όρο «**κόστος ποιότητας**» ορίζουμε τη δυσαρέσκεια του πελάτη λόγω της ποιότητας του προϊόντος που αγόρασε και η οποία εκφράζεται ως χρηματική απώλεια της επιχείρησης. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η τιμή *y* του ποιοτικού χαρακτηριστικού των παραγόμενων προϊόντων θεωρούμε ότι ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή *α* και διασπορά σ^2. Το κόστος ποιότητας $Q_{ij}=b_jE[(y-t)^2|$ περιοχή ποιότητας $i]$ είναι διαφορετικό για κάθε κομμάτι που πωλείται, αφού για κάθε κομμάτι είναι διαφορετική η τιμή $|y–t|$ κι εκφράζει το κόστος από την πώληση προϊόντος τύπου *i* σε πελάτη τύπου *j*.

$Q_{11}=b_1E[(y-t)^2] = b_1\int_{t-\delta_1}^{t+\delta_1}(y-t)^2 f(y)dy$, $y\in[t-\delta_1, t+\delta_1]$.

το κόστος ποιότητας όταν προϊόν τύπου 1 πωλείται σε πελάτη της αγοράς α_1.

$Q_{12}=b_2E[(y-t)^2]= b_2\int_{t-\delta_1}^{t+\delta_1}(y-t)^2 f(y)dy$, $y\in[t-\delta_1, t+\delta_1]$.

το κόστος ποιότητας όταν προϊόν τύπου 1 πωλείται σε πελάτη της αγοράς α_2.

$Q_{21}=b_1E[(y-t)^2]= b_1\left\{\int_{t-\delta_2}^{t-\delta_1}(y-t)^2 f(y)dy + \int_{t+\delta_1}^{t+\delta_2}(y-t)^2 f(y)dy\right\}$,

$y\in[t-\delta_2, t-\delta_1]\cup[t+\delta_1, t+\delta_2]$.

το κόστος ποιότητας όταν προϊόν τύπου 2 πωλείται σε πελάτη της αγοράς α_1.

$Q_{22}=b_2E[(y-t)^2]= b_2\left\{\int_{t-\delta_2}^{t-\delta_1}(y-t)^2 f(y)dy + \int_{t+\delta_1}^{t+\delta_2}(y-t)^2 f(y)dy\right\}$,

$y\in[t-\delta_2, t-\delta_1]\cup[t+\delta_1, t+\delta_2]$.

το κόστος ποιότητας όταν προϊόν τύπου 2 πωλείται σε πελάτη της αγοράς α_2.

Γνωρίζοντας ότι $b_1> b_2$ συμπεραίνουμε ότι: $Q_{11}> Q_{12}$ και $Q_{21}> Q_{22}$.

Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε πως υπολογίζεται το κόστος ποιότητας (Kouikoglou, Phillis [6]).

Αρχικά, θα υπολογίσουμε το $Q_{11}= b_1\int_{t-\delta_1}^{t+\delta_1}(y-t)^2 f(y)dy$

με $(y-t)^2=(y-\bar{y}+\bar{y}-t)^2=(y-\bar{y})^2+(\bar{y}-t)^2+2(y-\bar{y})(\bar{y}-t)$

και $f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma^2}}$

Έχουμε: $(y-\bar{y})e^{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma^2}}dy=-\sigma^2 d\left(e^{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma^2}}\right)$

Επομένως:

$$Q_{11} = b_1\int_{t-\delta_1}^{t+\delta_1}(y-t)^2 f(y)dy = b_1\left\{\int_{t-\delta_1}^{t+\delta_1}(y-\bar{y})^2 f(y)dy + 2(\bar{y}-t)\int_{t-\delta_1}^{t+\delta_1}(y-\bar{y})f(y)dy + (\bar{y}-t)^2\int_{t-\delta_1}^{t+\delta_1} f(y)dy\right\}$$

όπου:

$$\int_{t-\delta_1}^{t+\delta_1}(y-\bar{y})^2 f(y)dy = \int_{t-\delta_1}^{t+\delta_1}(y-\bar{y})(y-\bar{y})\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma^2}}dy = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{t-\delta_1}^{t+\delta_1}(y-\bar{y})de^{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma^2}}$$

$$2(\bar{y}-t)\int_{t-\delta_1}^{t+\delta_1}(y-\bar{y})f(y)dy = 2(\bar{y}-t)\int_{t-\delta_1}^{t+\delta_1}(y-\bar{y})\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma^2}}dy = -\frac{2(\bar{y}-t)\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{t-\delta_1}^{t+\delta_1}de^{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma^2}}$$

$$(\bar{y}-t)^2\int_{t-\delta_1}^{t+\delta_1} f(y)dy = (\bar{y}-t)^2 P_1$$

Τελικά έχουμε:

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= b_1\int_{t-\delta_1}^{t+\delta_1}(y-t)^2 f(y)dy \\
&= b_1\left\{-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{t-\delta_1}^{t+\delta_1}(y-\bar{y})de^{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma^2}} - \frac{2(\bar{y}-t)\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{t-\delta_1}^{t+\delta_1}de^{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma^2}} + (\bar{y}-t)^2 P_1\right\} \\
&= -\frac{\sigma^2 b_1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\left[(t+\delta_1-\bar{y})e^{-\frac{(t+\delta_1-\bar{y})^2}{2\sigma^2}} - (t-\delta_1-\bar{y})e^{-\frac{(t-\delta_1-\bar{y})^2}{2\sigma^2}} - \int_{t-\delta_1}^{t+\delta_1}e^{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma^2}}dy\right] \\
&\quad -\frac{2(\bar{y}-t)\sigma^2 b_1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\left[e^{-\frac{(t+\delta_1-\bar{y})^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{(t-\delta_1-\bar{y})^2}{2\sigma^2}}\right] + (\bar{y}-t)^2 P_1 b_1 \\
&= -\frac{\sigma b_1}{\sqrt{2\pi}}\left[(t+\delta_1-\bar{y})e^{-\frac{(t+\delta_1-\bar{y})^2}{2\sigma^2}} - (t-\delta_1-\bar{y})e^{-\frac{(t-\delta_1-\bar{y})^2}{2\sigma^2}}\right] \\
&\quad -\frac{2(\bar{y}-t)\sigma b_1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{(t+\delta_1-\bar{y})^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{(t-\delta_1-\bar{y})^2}{2\sigma^2}}\right] + (\bar{y}-t)^2 P_1 b_1 + \sigma^2 P_1 b_1
\end{aligned}$$

αφού $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{t-\delta_1}^{t+\delta_1}e^{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma^2}}dy = P_1$

Αντίστοιχα έχουμε:

$$\begin{aligned}
Q_{12} &= b_2\int_{t-\delta_1}^{t+\delta_1}(y-t)^2 f(y)dy \\
&= -\frac{\sigma b_2}{\sqrt{2\pi}}\left[(t+\delta_1-\bar{y})e^{-\frac{(t+\delta_1-\bar{y})^2}{2\sigma^2}} - (t-\delta_1-\bar{y})e^{-\frac{(t-\delta_1-\bar{y})^2}{2\sigma^2}}\right] \\
&\quad -\frac{2(\bar{y}-t)\sigma b_2}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{(t+\delta_1-\bar{y})^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{(t-\delta_1-\bar{y})^2}{2\sigma^2}}\right] + (\bar{y}-t)^2 P_1 b_2 + \sigma^2 P_1 b_2
\end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό του Q_{21} έχουμε:

$Q_{21}=b_1\left\{\int_{t-\delta_2}^{t-\delta_1}(y-t)^2 f(y)dy+\int_{t+\delta_1}^{t+\delta_2}(y-t)^2 f(y)dy\right\}$

Θέλουμε να υπολογίσουμε το: C=$\int_{t-\delta_2}^{t-\delta_1}(y-t)^2 f(y)dy+\int_{t+\delta_1}^{t+\delta_2}(y-t)^2 f(y)dy$ (3)

Ισχύει η σχέση: $\int_{t-\delta_2}^{t}(y-t)^2 f(y)dy=\int_{t-\delta_2}^{t-\delta_1}(y-t)^2 f(y)dy+\int_{t-\delta_1}^{t}(y-t)^2 f(y)dy$

$$\Rightarrow \int_{t-\delta_2}^{t-\delta_1}(y-t)^2 f(y)dy=\int_{t-\delta_2}^{t}(y-t)^2 f(y)dy-\int_{t-\delta_1}^{t}(y-t)^2 f(y)dy \quad (1)$$

Αντίστοιχα ισχύει: $\int_{t+\delta_1}^{t+\delta_2}(y-t)^2 f(y)dy=\int_{t}^{t+\delta_2}(y-t)^2 f(y)dy-\int_{t}^{t+\delta_1}(y-t)^2 f(y)dy$ (2)

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1),(2) στην (3) έχουμε:

C=$\int_{t-\delta_2}^{t}(y-t)^2 f(y)dy-\int_{t-\delta_1}^{t}(y-t)^2 f(y)dy+\int_{t}^{t+\delta_2}(y-t)^2 f(y)dy-\int_{t}^{t+\delta_1}(y-t)^2 f(y)dy$

Όμως: $\int_{t-\delta_1}^{t}(y-t)^2 f(y)dy+\int_{t}^{t+\delta_1}(y-t)^2 f(y)dy=\int_{t-\delta_1}^{t+\delta_1}(y-t)^2 f(y)dy$

και $\int_{t-\delta_2}^{t}(y-t)^2 f(y)dy+\int_{t}^{t+\delta_2}(y-t)^2 f(y)dy=\int_{t-\delta_2}^{t+\delta_2}(y-t)^2 f(y)dy$

Επομένως: C=$\int_{t-\delta_2}^{t+\delta_2}(y-t)^2 f(y)dy$ - $\int_{t-\delta_1}^{t+\delta_1}(y-t)^2 f(y)dy$

Δηλαδή:

$$\begin{aligned}
Q_{21} &= b_1\left\{\int_{t-\delta_2}^{t-\delta_1}(y-t)^2 f(y)dy+\int_{t+\delta_1}^{t+\delta_2}(y-t)^2 f(y)dy\right\}\\
&= b_1 C = b_1\left\{\int_{t-\delta_2}^{t+\delta_2}(y-t)^2 f(y)dy-\int_{t-\delta_1}^{t+\delta_1}(y-t)^2 f(y)dy\right\}\\
&= b_1\int_{t-\delta_2}^{t+\delta_2}(y-t)^2 f(y)dy-b_1\int_{t-\delta_1}^{t+\delta_1}(y-t)^2 f(y)dy\\
&= b_1\int_{t-\delta_2}^{t+\delta_2}(y-t)^2 f(y)dy-Q_{11}
\end{aligned}$$

$$=-\frac{\sigma b_1}{\sqrt{2\pi}}\left[(t+\delta_2-\bar{y})e^{-\frac{(t+\delta_2-\bar{y})^2}{2\sigma^2}}-(t-\delta_2-\bar{y})e^{-\frac{(t-\delta_2-\bar{y})^2}{2\sigma^2}}\right]$$

$$-\frac{2(\bar{y}-t)\sigma b_1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{(t+\delta_2-\bar{y})^2}{2\sigma^2}}-e^{-\frac{(t-\delta_2-\bar{y})^2}{2\sigma^2}}\right]+(\bar{y}-t)^2(P_2+P_1)b_1+\sigma^2(P_2+P_1)b_1$$

$$+\frac{\sigma b_1}{\sqrt{2\pi}}\left[(t+\delta_1-\bar{y})e^{-\frac{(t+\delta_1-\bar{y})^2}{2\sigma^2}}-(t-\delta_1-\bar{y})e^{-\frac{(t-\delta_1-\bar{y})^2}{2\sigma^2}}\right]$$

$$+\frac{2(\bar{y}-t)\sigma b_1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{(t+\delta_1-\bar{y})^2}{2\sigma^2}}-e^{-\frac{(t-\delta_1-\bar{y})^2}{2\sigma^2}}\right]-(\bar{y}-t)^2 P_1 b_1-\sigma^2 P_1 b_1$$

αφού $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{t-\delta_2}^{t+\delta_2} e^{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma^2}}dy = P_1 + P_2$

Επομένως:

$$Q_{21} = -\frac{\sigma b_1}{\sqrt{2\pi}}\left[(t+\delta_2-\bar{y})e^{-\frac{(t+\delta_2-\bar{y})^2}{2\sigma^2}} - (t-\delta_2-\bar{y})e^{-\frac{(t-\delta_2-\bar{y})^2}{2\sigma^2}} - (t+\delta_1-\bar{y})e^{-\frac{(t+\delta_1-\bar{y})^2}{2\sigma^2}} + (t-\delta_1-\bar{y})e^{-\frac{(t-\delta_1-\bar{y})^2}{2\sigma^2}}\right]$$
$$-\frac{2(\bar{y}-t)\sigma b_1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{(t+\delta_2-\bar{y})^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{(t-\delta_2-\bar{y})^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{(t+\delta_1-\bar{y})^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(t-\delta_1-\bar{y})^2}{2\sigma^2}}\right] + \left[(\bar{y}-t)^2 b_1 + \sigma^2 b_1\right]P_2$$

Αντίστοιχα έχουμε:

$$Q_{22} = -\frac{\sigma b_2}{\sqrt{2\pi}}\left[(t+\delta_2-\bar{y})e^{-\frac{(t+\delta_2-\bar{y})^2}{2\sigma^2}} - (t-\delta_2-\bar{y})e^{-\frac{(t-\delta_2-\bar{y})^2}{2\sigma^2}} - (t+\delta_1-\bar{y})e^{-\frac{(t+\delta_1-\bar{y})^2}{2\sigma^2}} + (t-\delta_1-\bar{y})e^{-\frac{(t-\delta_1-\bar{y})^2}{2\sigma^2}}\right]$$
$$-\frac{2(\bar{y}-t)\sigma b_2}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{(t+\delta_2-\bar{y})^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{(t-\delta_2-\bar{y})^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{(t+\delta_1-\bar{y})^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(t-\delta_1-\bar{y})^2}{2\sigma^2}}\right] + \left[(\bar{y}-t)^2 b_2 + \sigma^2 b_2\right]P_2$$

3.2.3 Υπολογισμός μέσου αναμενόμενου κέρδους

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ο σκοπός μας είναι να βρούμε μια πολιτική η οποία να μεγιστοποιεί το μέσο αναμενόμενο κέρδος, το οποίο είναι:

$$J = \liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}E\left\{\int_0^T -h[n_1(t)+n_2(t)]dt + \int_0^T I_\mu(t)[-g - I_q(t)r_c]dP(t) + \right.$$
$$+\int_0^T \left[I_{\lambda_1}[R_1 - b_1[I_{d_{11}}(\Upsilon_1 - t)^2 + (1-I_{d_{11}})(\Upsilon_2 - t)^2]]\right]dN_1(t) +$$
$$\left.+\int_0^T \left[I_{\lambda_2}[R_2 - b_2[I_{d_{12}}(\Upsilon_1 - t)^2 + (1-I_{d_{12}})(\Upsilon_2 - t)^2]]\right]dN_2(t)\right\}$$

όπου:

ο όρος $E\left\{\int_0^T -h[n_1(t)+n_2(t)]dt\right\}$ εκφράζει το αναμενόμενο κόστος αποθέματος

ο όρος $E\left\{\int_0^T I_\mu(t)[-g - I_q(t)r_c]dP(t)\right\}$ εκφράζει το αναμενόμενο κόστος επιθεώρησης και το μέσο κόστος απόρριψης όπου:

P(t): τον συνολικό αριθμό των παραγόμενων μονάδων μέχρι τη χρονική στιγμή t

$$I_{\mu}(t)=\begin{cases}1, & \text{συνεχίζεται η παραγωγή}\\ 0, & \text{διακόπτεται η παραγωγή}\end{cases}$$

$$I_{q}(t)=\begin{cases}1, & \text{το προϊόν απορρίπτεται}\\ 0, & \text{το προϊόν δεν απορρίπτεται}\end{cases}$$

Ο όρος $\mathrm{E}\left\{\int_0^T \left[I_{\lambda_1}[R_1 - b_1[I_{d_{11}}(\mathrm{Y}_1 - t)^2 + (1 - I_{d_{11}})(\mathrm{Y}_2 - t)^2]] \right] dN_1(t)\right\}$ εκφράζει το αναμενόμενο κέρδος από την πώληση προϊόντος σε πελάτη τύπου 1 και το αντίστοιχο κόστος ποιότητας με:

Y_1,Y_2 : τυχαίες μεταβλητές που εκφράζουν την τιμή του χαρακτηριστικού ποιότητας των παραγόμενων μονάδων προϊόντος που ανήκουν στον τύπο 1 ή 2 αντίστοιχα και για τις οποίες ισχύει:

$\mathrm{Y}_1 \in \left[t-\delta_1, t+\delta_1\right]$ και $\mathrm{Y}_2 \in \left[t-\delta_2, t-\delta_1\right] \cup \left[t+\delta_1, t+\delta_2\right]$

$N_1(t)$: το συνολικό πλήθος πελατών τύπου 1 που έχουν αφιχθεί μέχρι τη χρονική στιγμή t

$$I_{\lambda_1}(t)=\begin{cases}1, & \text{δεχόμαστε την παραγγελία του πελάτη τύπου 1}\\ 0, & \text{δεν δεχόμαστε την πραγγελία του πελάτη τύπου 1}\end{cases}$$

$$I_{d_{11}}(t)=\begin{cases}1, & \text{δίνουμε προϊόν τύπου 1 σε πελάτη τύπου 1}\\ 0, & \text{δεν δίνουμε προϊόν τύπου 1 σε πελάτη τύπου 1}\end{cases}$$

Ο όρος $E\left\{\int_0^T \left[I_{\lambda_2}[R_2 - b_2[I_{d_{12}}(\mathrm{Y}_1 - t)^2 + (1 - I_{d_{12}})(\mathrm{Y}_2 - t)^2]] \right] dN_2(t)\right\}$ εκφράζει το κέρδος από την πώληση προϊόντος σε πελάτη τύπου 2 και το αντίστοιχο κόστος ποιότητας με:

$N_2(t)$: το συνολικό πλήθος πελατών τύπου 2 που έχουν αφιχθεί μέχρι τη χρονική στιγμή t

$$I_{\lambda_2}(t)=\begin{cases}1, & \text{δεχόμαστε την παραγγελία του πελάτη τύπου 2}\\ 0, & \text{δεν δεχόμαστε την πραγγελία του πελάτη τύπου 2}\end{cases}$$

$$I_{d_{12}}(t)=\begin{cases}1, & \text{δίνουμε προϊόν τύπου 1 σε πελάτη τύπου 2}\\ 0, & \text{δεν δίνουμε προϊόν τύπου 1 σε πελάτη τύπου 2}\end{cases}$$

3.2.4 Εξαγωγή εξισώσεων βελτιστοποίησης

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε την *εξίσωση Bellman* του βέλτιστου μέσου αναμενόμενου κέρδους για το σύστημά μας. Ακολουθώντας την διαδικασία του στοχαστικού δυναμικού προγραμματισμού ορίζουμε ως $U_k(n_1,n_2)$ το συνολικό αναμενόμενο κέρδος των κ πρώτων βαθμίδων απόφασης όταν η αρχική κατάσταση είναι (n_1,n_2). Επίσης για κάθε καθορισμένη κατάσταση αναφοράς (n_{1_0}, n_{2_0}), το σχετικό κέρδος εκκίνησης του συστήματος στην κατάσταση (n_1,n_2) υπολογίζεται ως εξής:

$$u(n_1,n_2) = \lim_{k\to\infty}[U_k(n_1,n_2) - U_k(n_{1_0},n_{2_0})]$$

κι εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής του συνολικού αναμενόμενου μέσου κέρδους.

Για τη διευκόλυνση της ανάλυσής μας, θα κατηγοριοποιήσουμε το σύνολο των καταστάσεων n_1,n_2. Έτσι διακρίνουμε τις περιπτώσεις όπου στο σύστημά μας:

υπάρχει απόθεμα και από τους δύο τύπους προϊόντος $(n_1,n_2>0)$

υπάρχει απόθεμα μόνο από το προϊόν τύπου 2 $(n_1=0,n_2>0)$

υπάρχει απόθεμα μόνο από το προϊόν τύπου 1 $(n_1>0,n_2=0)$

δεν υπάρχει καθόλου απόθεμα $(n_1= n_2=0)$

Επομένως έχουμε:

- **Για $n_1,n_2>0$**

$$u(n_1,n_2)+\frac{J}{v} = \frac{1}{v}\{-h(n_1+n_2)+\mu\max[P_1u(n_1+1,n_2)+P_2u(n_1,n_2+1)+P_3[u(n_1,n_2)-r_c]-g ,$$

$$u(n_1,n_2)]+ \lambda_1\max[u(n_1-1,n_2)+R_1-Q_{11} , u(n_1,n_2-1)+R_1-Q_{21} , u(n_1,n_2)] +$$

$$+ \lambda_2\max[u(n_1-1,n_2)+R_2-Q_{12} , u(n_1,n_2-1)+R_2-Q_{22} , u(n_1,n_2)]\}$$

- **Για $n_1=0, n_2>0$**

$$u(0,n_2)+\frac{J}{v}=\frac{1}{v}\{-hn_2 + \mu\max[P_1u(1,n_2)+P_2u(0,n_2+1)+P_3[u(0,n_2)-r_c]-g , u(0,n_2)] +$$

$$+\lambda_1\max[u(0,n_2-1)+R_1-Q_{21}, u(0,n_2)]+ \lambda_2\max [u(0,n_2-1)+R_2-Q_{22} , u(0,n_2)]\}$$

- **Για $n_1>0, n_2=0$**

$$u(n_1,0)+ \frac{J}{v}= \frac{1}{v}\{-hn_1 +\mu\max[P_1u(n_1+1,0)+P_2u(n_1,1)+P_3[u(n_1,0)-r_c]-g , u(n_1,0)] +$$

$$+\lambda_1\max[u(n_1-1,0)+R_1-Q_{11} , u(n_1,0)] + \lambda_2\max[u(n_1-1,0)+R_2-Q_{12} , u(n_1,0)]\}$$

- **Για $n_1,n_2=0$**

$$u(0,0)+\frac{J}{v}=\frac{1}{v}\{\mu\max[P_1u(1,0)+P_2u(0,1)+P_3[u(0,0)-r_c]-g\ ,\ u(0,0)]\ +(\lambda_1+\lambda_2)u(0,0)\}$$

όπου ο όρος $\frac{J}{v}$ εκφράζει το μέσο αναμενόμενο κέρδος μεταξύ δυο γεγονότων

Στις παραπάνω εξισώσεις βελτιστοποίησης διακρίνουμε το κομμάτι της παραγωγής:

$$\frac{1}{v}\{-h(n_1+n_2)+\mu\max[P_1u(n_1+1,n_2)+P_2u(n_1,n_2+1)+P_3[u(n_1,n_2)-r_c]-g,\ u(n_1,n_2)]$$

και το κομμάτι της πώλησης:

$$\{\lambda_1\max[u(n_1-1,n_2)+R_1-Q_{11}\ ,\ u(n_1,n_2-1)+R_1-Q_{21}\ ,\ u(n_1,n_2)]\ +$$
$$+\lambda_2\max[u(n_1-1,n_2)+R_2-Q_{12}\ ,\ u(n_1,n_2-1)+R_2-Q_{22}\ ,\ u(n_1,n_2)]\}$$

Αναφορικά με την παραγωγή παρουσιάζουμε όλες τις δυνατότητες της επιχείρησης οι οποίες είναι: είτε παράγουμε, οπότε με πιθανότητα P_1 παράγεται προϊόν τύπου 1, με πιθανότητα P_2 προϊόν τύπου 2 και με πιθανότητα P_3 προϊόν που απορρίπτεται, είτε δεν παράγουμε καθόλου. Επειδή, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, το κριτήριό μας είναι η βελτιστοποίηση του κέρδους, από αυτές επιλέγουμε την απόφαση που θα μας μεγιστοποιήσει το κέρδος αφού λάβουμε υπόψη στον υπολογισμό την αφαίρεση

του κόστους επιθεώρησης: {-g}

και του κόστους απόρριψης: $P_3[u_k(n_1,n_2)-r_c]$

Σχετικά με τις πωλήσεις θα πρέπει να αποφασίσουμε αν θα δεχθούμε την παραγγελία και τι είδους προϊόν θα δώσουμε στον πελάτη. Και πάλι επιλέγουμε αυτό που θα μας βελτιστοποιήσει το κέρδος αφού προσθέσουμε το κέρδος από την πώληση του αντίστοιχου προϊόντος (R_1,R_2) και αφαιρέσουμε το κατάλληλο κόστος ποιότητας (Q_{ij} $i,j=1,2$).

3.2.5 Μέθοδος διαδοχικών προσεγγίσεων

Η βέλτιστη εξίσωση του μέσου κόστους μπορεί να προσεγγιστεί αριθμητικά από τον αλγόριθμο διαδοχικών προσεγγίσεων σύμφωνα με την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1:

Θέτουμε $U_0(n_1,n_2)=0$ για κάθε $(n_1,n_2) \in X$ και

- το συνολικό αναμενόμενο κέρδος των *k*+1 πρώτων βαθμίδων απόφασης όταν υπάρχει απόθεμα προϊόντος και των δυο τύπων ($n_1,n_2>0$) είναι:

$$U_{k+1}(n_1,n_2)= \frac{1}{v}\{-h(n_1+n_2)+\mu \max[P_1U_k(n_1+1,n_2)+P_2U_k(n_1,n_2+1)+P_3[U_k(n_1,n_2)-r_c]-g\ ,$$

$$U_k(n_1,n_2)]+ \lambda_1\max[U_k(n_1-1,n_2)+R_1-Q_{11}\ ,\ U_k(n_1,n_2-1)+R_1-Q_{21}\ ,\ U_k(n_1,n_2)]\ +$$

$$+\ \lambda_2\max[U_k(n_1-1,n_2)+R_2-Q_{12}\ ,\ U_k(n_1,n_2-1)+R_2-Q_{22}\ ,\ U_k(n_1,n_2)]\}$$

- το συνολικό αναμενόμενο κέρδος των *k*+1 πρώτων βαθμίδων απόφασης όταν υπάρχει απόθεμα τύπου 2 ($n_1=0$, $n_2>0$) είναι:

$$U_{k+1}(0,n_2)=\frac{1}{v}\{-hn_2 + \mu\max[P_1U_k(1,n_2)+P_2U_k(0,n_2+1)+P_3[U_k(0,n_2)-r_c]-g\ ,\ U_k(0,n_2)]\ +$$

$$+\lambda_1\max[U_k(k0,n_2-1)+R_1-Q_{21}\ ,\ U_k(0,n_2)\ ]+ \lambda_2\max\ [U_k(0,n_2-1)+R_2-Q_{22}\ ,\ U_k(0,n_2)]\}$$

- το συνολικό αναμενόμενο κέρδος των *k*+1 πρώτων βαθμίδων απόφασης όταν υπάρχει απόθεμα τύπου 1 ($n_2=0$, $n_1>0$) είναι:

$$U_{k+1}(n_1,0)= \frac{1}{v}\{-hn_1 +\mu\max[P_1U_k(n_1+1,0)+P_2U_k(n_1,1)+P_3[U_k(n_1,0)-r_c]-g\ ,\ U_k(n_1,0)]\ +$$

$$+\lambda_1\max[U_k(n_1-1,0)+R_1-Q_{11}\ ,\ U_k(n_1,0)] + \lambda_2\max[U_k(n_1-1,0)+R_2-Q_{12}\ ,\ U_k(n_1,0)]\}$$

- το συνολικό αναμενόμενο κέρδος των *k*+1 πρώτων βαθμίδων απόφασης όταν υπάρχει δεν υπάρχει καθόλου απόθεμα προϊόντος ($n_1=n_2=0$) είναι:

$$U_{k+1}(0,0)= \frac{1}{v}\{\mu\max[P_1U_k(1,0)+P_2U_k(0,1)+P_3[U_k(0,0)-r_c]-g\ ,\ U_k(0,0)] +(\lambda_1+\lambda_2)U_k(0,0)\}$$

Τότε το βέλτιστο μέσο κέρδος είναι:

$J = v\lim_{k\to\infty}[U_k(n_1,n_2)-U_{k-1}(n_1,n_2)]$ για κάθε $(n_1,n_2) \in X$.

Για την εκτίμηση της βέλτιστης πολιτικής και του μέγιστου μέσου αναμενόμενου κέρδους χρησιμοποιούμε τη μέθοδο διαδοχικών προσεγγίσεων όπως παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

3.3 Μελέτη της συμπεριφοράς της βέλτιστης πολιτικής

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε, με τη βοήθεια μιας σειράς αριθμητικών παραδειγμάτων, τη δομή της βέλτιστης πολιτικής που πρέπει να ακολουθήσουμε σχετικά με την παραγωγή και την διάθεση προϊόντων. Πιο συγκεκριμένα, θα εξετάσουμε πως διαμορφώνονται οι αποφάσεις της σε μεταβολές των παραμέτρων του συστήματος. Από τη συμπεριφορά αυτή θα λάβουμε μια εικόνα σχετικά με τη μορφή της βέλτιστης πολιτικής.

3.3.1 Αριθμητικά παραδείγματα

Θεωρούμε ότι το σύστημά μας έχει τις εξής τιμές παραμέτρων:

R_1=10, R_2=5, λ_1=λ_2=3, μ=6, b_1=3, b_2=1, h=1, r_c=1, g=1, t=9, σ=0,5, α=10.

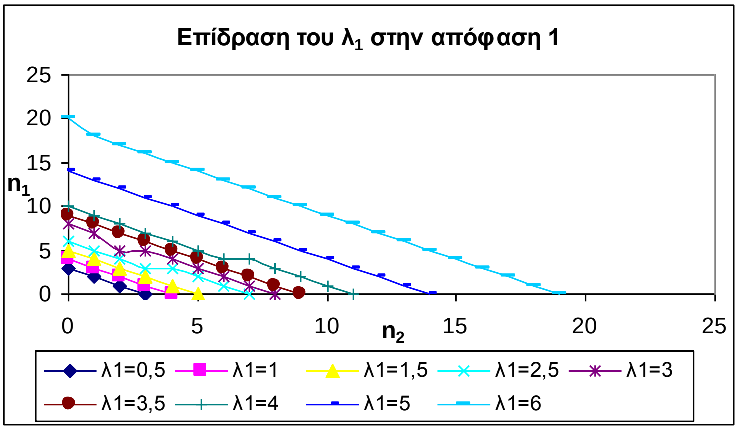
Στην ανάλυση που ακολουθεί μεταβάλλουμε βηματικά μια παράμετρο κάθε φορά διατηρώντας τις υπόλοιπες σταθερές και παρατηρούμε την επίδραση που επιφέρει αυτό στην κάθε απόφαση. Πιο συγκεκριμένα οι αποφάσεις αυτές είναι:

Απόφαση 1: αν θα παράγει ή όχι το σύστημά μας.

Απόφαση 2: αν θα κάνουμε δεκτή μια παραγγελία τύπου 1 και τι είδους προϊόν θα διαθέσουμε

Απόφαση 3: αν θα κάνουμε δεκτή μια παραγγελία τύπου 2 και τι είδους προϊόν θα διαθέσουμε

3.3.1.1 Μεταβολή του λ_1



Σχήμα 4: επίδραση του λ_1 στην απόφαση 1

Στο παραπάνω σχήμα η κάθε καμπύλη αντιστοιχεί σε διαφορετική τιμή του λ_1 (ρυθμός αφίξεων πελατών τύπου 1). Δεξιά της κάθε καμπύλης, καθώς και τα σημεία πάνω σε αυτήν, αποτελούν την περιοχή όπου δεν παράγουμε, ενώ αριστερά της καμπύλης ορίζεται η περιοχή όπου παράγουμε. Η μορφή των καμπυλών δείχνει γενικά ότι η επιχείρηση έχει την τάση να παράγει μέχρι ένα ορισμένο απόθεμα τύπου 1 και 2. Όμως αυτό παραβιάζεται σε κάποιες περιπτώσεις ($λ_1$=2,5 και $λ_1$=4) όπου η επιχείρηση διατηρεί μικρό απόθεμα τύπου 1. Τότε συνεχίζει την παραγωγή ελπίζοντας να αυξήσει το συγκεκριμένο απόθεμα και υπερβαίνει το επίπεδο το οποίο στις άλλες καμπύλες ορίζει την παύση της παραγωγής. Τέλος, παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται το $λ_1$ τόσο αυξάνεται η ανάγκη για διατήρηση μεγαλύτερων αποθεμάτων που θα μας επιτρέψουν την ικανοποίηση μεγαλύτερου πλήθους πελατών.

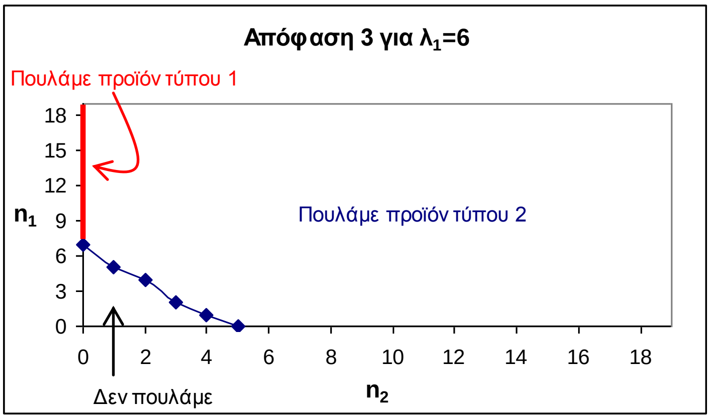
Επίδραση στην απόφαση 2: αποδοχή παραγγελίας και διάθεση προϊόντος στον πελάτη τύπου 1

Σχετικά με το ποιο προϊόν θα πουληθεί στον πελάτη τύπου 1, η επιχείρηση αποφασίζει ότι στον πελάτη αυτής της κατηγορίας θα πουλά προϊόν τύπου 1 και μόνο όταν δεν έχει απόθεμα (n_1=0) θα πουλά προϊόν τύπου 2. Η απόφαση αυτή παραμένει σταθερή ανεξάρτητα από τις μεταβολές του $λ_1$.

Επίδραση στην απόφαση 3: αποδοχή παραγγελίας και διάθεση προϊόντος στον πελάτη τύπου 2

Στο σχήμα 5 παρατηρούμε ότι όταν ο ρυθμός άφιξης των πελατών τύπου 1 είναι μικρός ($λ_1$=0,5), η επιχείρηση αποφασίζει ότι στους πελάτες τύπου 2 θα δίνει προϊόν τύπου 2 και μόνο όταν δεν υπάρχει καθόλου απόθεμα απ' αυτό (δηλ: n_2=0) θα τους πουλά προϊόν τύπου 1. Καθώς ο ρυθμός άφιξης των πελατών τύπου 1 αυξάνεται ($λ_1$=6), η επιχείρηση αλλάζει συμπεριφορά ως προς το τι θα πουλά στους λιγότερο καλούς πελάτες. Παρατηρούμε ότι προτιμά να μην τους πουλά καθόλου όταν τα αποθέματα και των δυο τύπων προϊόντος είναι πολύ χαμηλά προκειμένου να φυλάσσει μονάδες προϊόντος για τους καλούς πελάτες. Πιο συγκεκριμένα, όταν δεν έχει καθόλου απόθεμα τύπου 2, τότε περιμένει να συγκεντρωθούν κάποιες μονάδες τύπου 1 για να τους τις διαθέσει. Αυτό παρατηρούμε ότι συμβαίνει για n_1>7.

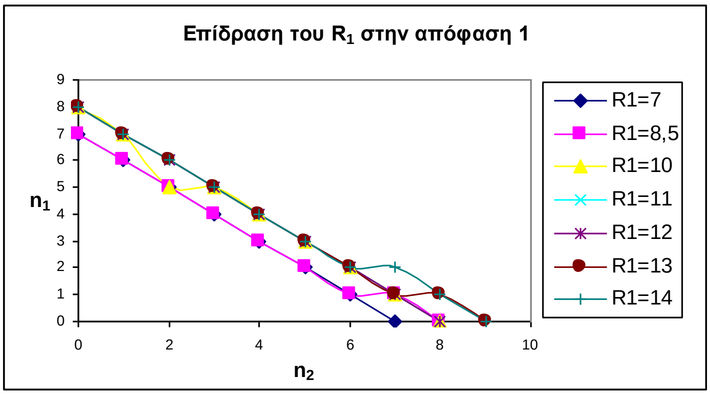
Αντίστοιχα στην περίπτωση όπου n_1=0, η επιχείρηση πουλά προϊόν τύπου 2 στους λιγότερο καλούς πελάτες αφού έχουν συγκεντρωθεί τουλάχιστον 5 μονάδες προϊόντος τύπου 2 ($n_2 \geq 5$). Η επιχείρηση αρχίζει να πουλά για $n_2 \geq 5$ στους πελάτες τύπου 2, γιατί έτσι κατά κάποιο τρόπο εξασφαλίζει και την εξυπηρέτηση των πελατών τύπου 1. Διαφορετικά, δεδομένου ότι n_1=0, η ενδεχόμενη παραγγελία τύπου 1 θα έπρεπε να απορριφθεί και ο πελάτης να χαθεί. Τώρα όμως η επιχείρηση διαθέτοντας κάποιες μονάδες τύπου 2 κι επιλέγοντας να μην τις πουλήσει στους πελάτες τύπου 2, τις φυλάσσει για την περίπτωση που εμφανιστεί πελάτης τύπου 1.



Σχήμα 5: απόφαση 3 για λ_1=6

3.3.1.2 Μεταβολή του R_1

Στο σύστημα που έχουμε περιγράψει οι πελάτες τύπου 1 είναι καλύτεροι πελάτες από εκείνους του τύπου 2. Συνεπώς ισχύει ότι $R_1 > R_2$, δηλαδή η αξία πώλησης προϊόντος στην αγορά τύπου 1 είναι μεγαλύτερη από την αξία πώλησης προϊόντος στην αγορά τύπου 2. Βάσει αυτής της σχέσης θα ακολουθήσει η παρακάτω ανάλυση όπου και θα εξετάσουμε τις περιπτώσεις για $R_1 > R_2 = 5$



Σχήμα 6: επίδραση του R_1 στην απόφαση 1

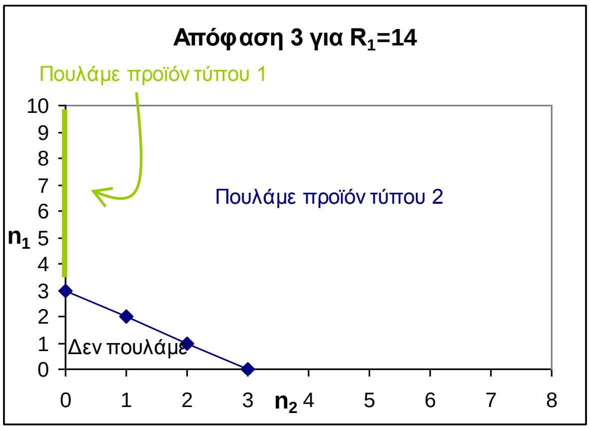
Στο παραπάνω σχήμα η κάθε καμπύλη αντιστοιχεί σε διαφορετική τιμή του R_1 (αξία πώλησης προϊόντος στην αγορά τύπου 1). Δεξιά της κάθε καμπύλης ορίζεται η περιοχή όπου δεν παράγουμε, ενώ αριστερά βρίσκεται η περιοχή όπου παράγουμε. Και πάλι παρατηρούμε ότι οι καμπύλες για R_1=8,5, R_1=11 και R_1=13 δείχνουν πως η επιχείρηση δεν ακολουθεί την πολιτική κατωφλίου δεδομένου ότι η παραγωγή συνεχίζεται ελπίζοντας να αυξηθεί το μικρό απόθεμα τύπου 1. Τέλος, είναι εμφανές ότι όσο αυξάνεται το R_1 τόσο αυξάνεται και η παραγωγή.

Επίδραση στην απόφαση 2: αποδοχή παραγγελίας και διάθεση προϊόντος στον πελάτη τύπου 1

Οι τιμές του R_1 στο παράδειγμά μας κυμαίνονται από 5 έως 14 για τις οποίες προκύπτει ότι η επιχείρηση προτιμά να πουλά στον πελάτη τύπου 1 τα καλά προϊόντα και μόνο όταν δεν έχει (n_1=0) να πουλά τα λιγότερο καλά προϊόντα.

Επίδραση στην απόφαση 3: αποδοχή παραγγελίας και διάθεση προϊόντος στον πελάτη τύπου 2

Όταν η αξία πώλησης του προϊόντος τύπου 1 είναι λίγο μεγαλύτερη από την αντίστοιχη του τύπου 2 (δηλαδή R_1=7, R_2=5), η επιχείρηση αποφασίζει να πουλά στους λιγότερο καλούς πελάτες τα λιγότερο καλά κομμάτια και μόνο για n_1=0 να τους πουλά τα προϊόντα τύπου 1. Όταν όμως αυξάνεται το R_1 (R_1=14) η επιχείρηση επιλέγει να μην πουλά στους λιγότερο καλούς πελάτες για μικρές τιμές του αποθέματος και να διαθέτει το προϊόν στους πελάτες τύπου 1 καθώς αυτό της αποφέρει μεγαλύτερα κέρδη. Όσο το R_1 αυξάνεται, η επιχείρηση επιλέγει να μην πουλά καθόλου στους πελάτες τύπου 2 όσο τα αποθέματα των δύο τύπων προϊόντος είναι χαμηλά. Μόλις αυτά φτάσουν σε κάποιο επίπεδο (στο παράδειγμά μας $n_1+n_2 \geq 3$) τότε τους πουλά τα λιγότερο καλά προϊόντα και μόνο για n_2=0 και $n_1 \geq 3$ τους πουλά τα προϊόντα τύπου 1.

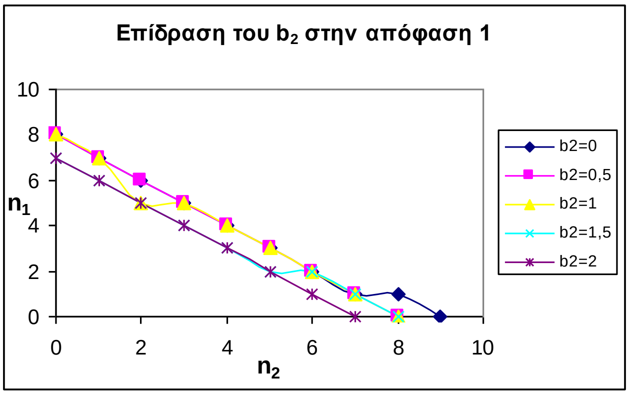


Σχήμα 7: απόφαση 3 για R_1=14

3.3.1.3 Μεταβολή του b_2

Το b_2, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, είναι ο συντελεστής κόστους ποιότητας για την αγορά τύπου 2 και ισχύει $b_1 > b_2$. Η σχέση αυτή θα τηρηθεί στην εξέταση που ακολουθεί όπου θα διατηρούμε σταθερές όλες τις υπόλοιπες παραμέτρους ($b_1=3$) και βηματικά θα μεταβάλλουμε της τιμές του b_2.

Επίδραση στην απόφαση 1: παραγωγή



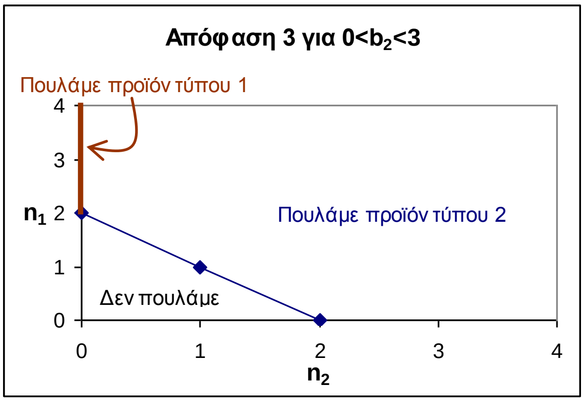
Σχήμα 8: επίδραση του b_2 στην απόφαση 1

Οι καμπύλες του σχήματος 8 αντιστοιχούν σε διάφορες τιμές του b_2 (με $b_2<b_1$). Παρατηρούμε ότι αυτές οι μεταβολές επιφέρουν μικρές αλλαγές στην περιοχή παραγωγής, η οποία βρίσκεται αριστερά της κάθε καμπύλης, με τάση αύξησής της καθώς ο συντελεστής κόστους ποιότητας για την αγορά τύπου 2 αυξάνεται.

Επίδραση στην απόφαση 2: αποδοχή παραγγελίας και διάθεση προϊόντος στον πελάτη τύπου 1

Και σε αυτήν την περίπτωση, οι μεταβολές του b_2 αφήνουν ανεπηρέαστη την απόφαση της επιχείρησης σχετικά με το τι θα πουλήσει στους πελάτες τύπου 1. Με άλλα λόγια, η επιχείρηση αποφασίζει να πουλά στους καλούς πελάτες καλά προϊόντα (εκτός από την περίπτωση όπου $n_1=0$) ανεξάρτητα από την τιμή του b_2.

Επίδραση στην απόφαση 3: αποδοχή παραγγελίας και διάθεση προϊόντος στον πελάτη τύπου 2

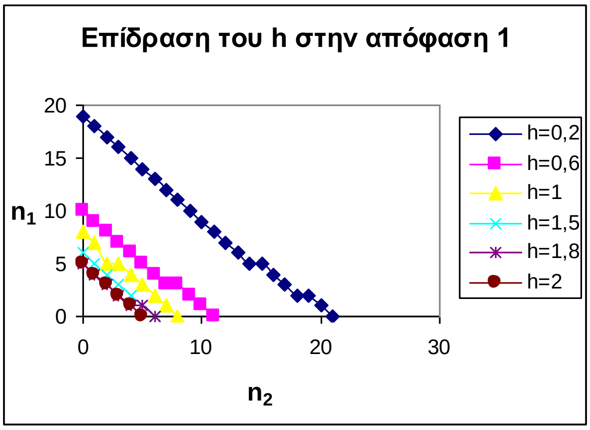


Σχήμα 9: επίδραση του b_2 στην απόφαση 3

Στο παραπάνω σχήμα βλέπουμε πώς διαμορφώνεται η απόφαση 3 για $0< b_2<3$. Υπάρχει μια μικρή περιοχή όπου η επιχείρηση δεν πουλά καθόλου στους πελάτες τύπου 2 κι έπειτα (για $n_1+n_2\geq 2$) περνά στην μεγάλη περιοχή πώλησης προϊόντος τύπου 2. Και πάλι, όταν $n_2=0$ το προϊόν τύπου 1 για $n_1\geq 2$ το διαθέτει στους λιγότερο καλούς πελάτες.

3.3.1.4 Μεταβολή του h

<u>Επίδραση στην απόφαση 1: παραγωγή</u>



Σχήμα 10: επίδραση του h στην απόφαση 1

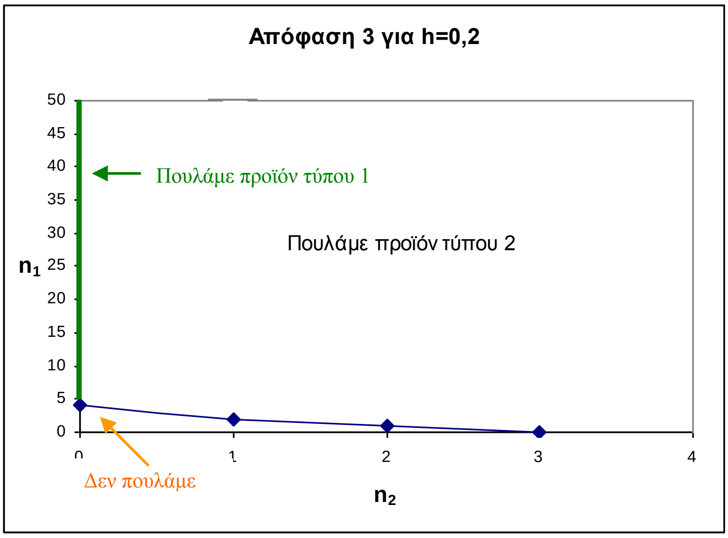
Στο παραπάνω σχήμα είναι εμφανές ότι όσο αυξάνεται το κόστος αποθέματος ανά μονάδα προϊόντος h τόσο μειώνεται η περιοχή όπου η επιχείρηση αποφασίζει να παράγει (περιοχή αριστερά της κάθε καμπύλης), διότι η αύξηση του h συνεπάγεται σημαντική αύξηση του κόστους που επιβαρύνει την κάθε παραγόμενη μονάδα.

Επίδραση στην απόφαση 2: αποδοχή παραγγελίας και διάθεση προϊόντος στον πελάτη τύπου 1

Οι μεταβολές του h δεν επιδρούν καθόλου στην λήψη της απόφασης σχετικά με το τι θα πουληθεί στον πελάτη τύπου 1. Η επιχείρηση πουλά στους καλούς πελάτες τα καλά προϊόντα εκτός από την περίπτωση όπου n_1=0 οπότε και τους δίνει προϊόν τύπου 2.

Επίδραση στην απόφαση 3: αποδοχή παραγγελίας και διάθεση προϊόντος στον πελάτη τύπου 2

Η επιχείρηση έχοντας ένα πολύ χαμηλό κόστος αποθέματος (h=0,2) προτιμά κάποιες μονάδες αντί να τις πουλά να τις αποθηκεύει. Έτσι στην περίπτωση που έχει απόθεμα μόνο τύπου 2 (n_1=0), η επιχείρηση επιλέγει να τις πουλήσει όταν $n_1+n_2\geq 3$ ή 4(σχήμα 11). Στην περίπτωση όπου n_2=0, η επιχείρηση θα πουλήσει στον πελάτη τύπου 2 καλό προϊόν μόνο όταν $n_1\geq 4$. Για $n_1\leq 4$ οι μονάδες αποθηκεύονται.



Σχήμα 11: απόφαση 3 για h=0,2

Αναμενόμενο είναι η αύξηση του h να επιδρά αρνητικά στην αποθήκευση των μονάδων παραγόμενου προϊόντος κι έτσι αυτές να διατίθενται στους πελάτες.

3.4 Συμπεράσματα

Από την ανάλυση που προηγήθηκε παρατηρούμε ότι αναφορικά με την απόφαση παραγωγής υπάρχει μια καμπύλη $S(n_1)$ τέτοια ώστε όταν το συνολικό απόθεμα είναι μεγαλύτερο της $S(n_1)$ είναι βέλτιστο να διακόπτεται η παραγωγή ($n_1+n_2>S(n_1)$), όταν $n_1+n_2\leq S(n_1)$ η παραγωγή συνεχίζεται. Σε αρκετές περιπτώσεις $S(n_1)=S$, είναι δηλαδή ένα σταθερό κατώφλι. Κάθε παράμετρος επηρεάζει το κατώφλι $S(n_1)$ της παραγωγής, το επίπεδο δηλαδή, μετά το οποίο η επιχείρηση αποφασίζει να σταματήσει την παραγωγή και για το οποίο ισχύει $n_1+n_2\leq S(n_1)$. Για παράδειγμα, όταν $\lambda_1=0{,}5$ παράγουμε όσο $S\leq 2$, όταν $\lambda_1=0{,}5$ παράγουμε όσο $S\leq 19$.

Στην απόφαση 2 η βέλτιστη πολιτική εμφανίζει μια σταθερή συμπεριφορά. Δεδομένου ότι καλούμαστε να αποφασίσουμε τι θα πουλήσουμε στους καλούς πελάτες, τους οποίους δεν θέλουμε να δυσαρεστήσουμε, προτιμάμε να τους πουλάμε πάντα τα καλά προϊόντα και μόνο όταν δεν έχουμε καθόλου από αυτά επιλέγουμε, από το να μην τους εξυπηρετήσουμε καθόλου, να τους διαθέσουμε τα λιγότερο καλά. Η πολιτική αυτή εμφανίζεται σταθερή ανεξάρτητα από τις μεταβολές των παραμέτρων του συστήματος.

Αναφορικά με την εξυπηρέτηση των πελατών τύπου 2 (απόφαση 3), παρατηρούμε ότι η βέλτιστη πολιτική της επιχείρησης είναι λίγο πιο σύνθετη. Αρχική γραμμή της είναι να τους πουλά τα λιγότερο καλά κομμάτια και μόνο στην περίπτωση όπου $n_2=0$ να τους πουλά προϊόν του τύπου 1. Όμως ακόμα και τότε, την συμφέρει όσο έχει λίγες μονάδες προϊόντος τύπου 1 να μην τις πουλήσει σε αυτήν την κατηγορία πελατών αλλά να τις αποθηκεύσει ή να τις διαθέσει στην άλλη αγορά. Έτσι μέχρι ένα ορισμένο κατώφλι c_1, δηλαδή όσο $n_1\leq c_1$ κι ενώ $n_2=0$, η επιχείρηση επιλέγει να μην πουλά καθόλου στους πελάτες τύπου 2 και μόνο όταν $n_1>c$ να τους διαθέτει προϊόν τύπου 1. Ανάλογα πράττει και στην γενική περίπτωση όπου $n_1+n_2\leq c_1(n_1)$. Πιο συγκεκριμένα, όταν υπάρχουν μόνο λίγες μονάδες προϊόντος τύπου 2 η επιχείρηση επιλέγει να μην τις πουλήσει στους πελάτες τύπου 2 αλλά να τις αποθηκεύσει ή να τις κρατήσει για τους καλούς πελάτες της προκειμένου να αποφύγει το ενδεχόμενο μη εξυπηρέτησής τους. Αυτό ισχύει μέχρι οι μονάδες του n_2 να αυξηθούν μέχρι κάποιο επίπεδο. Μόλις υπερβεί αυτό το επίπεδο κρίνει ότι έχουν συγκεντρωθεί αρκετές μονάδες προϊόντος και πουλά στους πελάτες τύπου 2. Με άλλα λόγια, για $n_1+n_2\leq c_2(n_2)$ η παραγωγική μονάδα δεν πουλά καθόλου στους πελάτες τύπου 2 ενώ για $n_1+n_2> c_2(n_2)$ τους πουλά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

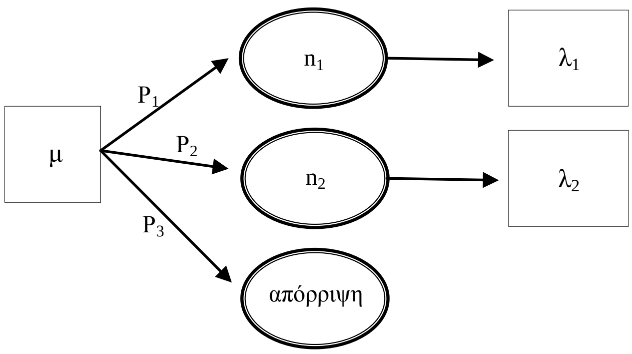
ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΥΠΟ ΕΞΕΤΑΣΗ

4.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάσαμε τη συμπεριφορά της επιχείρησης που ακολουθεί την βέλτιστη πολιτική και καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι η μορφή της βέλτιστης πολιτικής τείνει να είναι μορφής κατωφλίου χωρίς να είναι αμιγώς τέτοια. Με άλλα λόγια, φαίνεται ότι μπορεί να προσεγγιστεί από πολιτικές μορφής κατωφλίου. Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζουμε δυο πολιτικές αυτής της μορφής (ΠΟΛ_1, ΠΟΛ_2) και στη συνέχεια προτείνουμε δυο πολιτικές (ΠΟΛ_3, ΠΟΛ_4) οι οποίες προέκυψαν από την αριθμητική μελέτη της βέλτιστης πολιτικής στο προηγούμενο κεφάλαιο.

4.2 Περιγραφή ΠΟΛ_1

Θεωρούμε ένα σύστημα παραγωγής όπως αυτό που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 3. Η επιχείρηση παράγει ένα προϊόν με μέσο ρυθμό παραγωγής μ, το επιθεωρεί με κόστος επιθεώρησης g, και αν είναι τύπου 1 με πιθανότητα P_1 πωλείται στους καλούς πελάτες, αν είναι τύπου 2 με πιθανότητα P_2 πωλείται στους λιγότερο καλούς πελάτες και αν κρίνεται ακατάλληλο με πιθανότητα P_3 δεν διατίθεται καν στην αγορά, με κόστος απόρριψης r_c. Η πολιτική αυτής της επιχείρησης υποθέτουμε ότι είναι της απλής μορφής: πουλάμε προϊόν τύπου 1 στους καλούς πελάτες και προϊόν τύπου 2 στους λιγότερο καλούς πελάτες. Δηλαδή επιτρέπεται η πώληση κομματιών n_i μόνο στον αντίστοιχο τύπο πελατών. Σε περίπτωση που δεν υπάρχει απόθεμα από τον τύπο προϊόντος που αντιστοιχεί στην κατηγορία του πελάτη τότε δεν πουλάμε καθόλου.



Σχήμα 12: Πολιτική 1

Επίσης όσον αφορά στην παραγωγή, η επιχείρηση που εφαρμόζει την πολιτική ΠΟΛ_1 ορίζει ένα απόθεμα ασφαλείας S (base stock). Όταν το απόθεμα (n_1+n_2) ξεπεράσει την τιμή S τότε η παραγωγή σταματά. Δηλαδή:

$$I_h = \begin{cases} 1, & \text{αν } n_1+n_2 \leq S \quad \text{παράγουμε} \\ 0, & \text{αν } n_1+n_2 > S \quad \text{δεν παράγουμε} \end{cases}$$

Η ΠΟΛ_1 βασίζεται στην πολιτική που περιγράφουν οι Hong και Elsayed (1998) [5] οι οποίοι θεωρούν ότι μόλις παραχθεί ένα κομμάτι προϊόντος και αφού επιθεωρηθεί, πωλείται αμέσως στην αντίστοιχη αγορά η οποία είναι πάντα διαθέσιμη. Δηλαδή, το παραγόμενο προϊόν αν είναι τύπου 1 ($0 \leq y-t < \delta_1$) πωλείται στους καλούς πελάτες, αν είναι τύπου 2 ($\delta_1 \leq y-t < \delta_2$) πωλείται στους λιγότερο καλούς πελάτες και αν απορρίπτεται ($\delta_2 \leq y-t < \infty$) δεν διατίθεται καν στην αγορά. Οι παραπάνω ερευνητές με τον τρόπο αυτό αγνοούν το κόστος αποθέματος – αφού θεωρούν ότι η κάθε αγορά είναι πάντα διαθέσιμη- καθώς και το κόστος λόγω απώλειας πελατών. Επομένως το συνολικό κέρδος αποτελεί συνάρτηση του κέρδους από τις πωλήσεις, του κόστους ποιότητας, του κόστους επιθεώρησης και του κόστους απόρριψης των ελαττωματικών κομματιών. Στην ΠΟΛ_1 κάνουμε τις ίδιες παραδοχές με τη μόνη διαφορά ότι ενσωματώνουμε και το κόστος αποθέματος.

Το μέσο αναμενόμενο κέρδος στη μονάδα του χρόνου για κάθε στάσιμη πολιτική μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Εδώ βέβαια δεν αναζητούμε τη βέλτιστη πολιτική και συνεπώς οι χρησιμοποιούμενες αναδρομικές σχέσεις είναι διαφορετικές. Η πολιτική αυτή αποτυπώνεται στις παρακάτω αναδρομικές σχέσεις βάσει των οποίων υπολογίζουμε το μέσο κέρδος (συναρτήσει της μοναδικής παραμέτρου ελέγχου, του κατωφλίου παραγωγής S) με κριτήριο τη μεγιστοποίησή του. Η τιμή του S που μεγιστοποιεί το κέρδος της συγκεκριμένης πολιτικής βρίσκεται με εξαντλητική αναζήτηση.

- **Για $n_1,n_2 > 0$**

$$u_{k+1}(n_1,n_2)= \frac{1}{v}\Big\{-h(n_1+n_2) + \mu\Big[I_h\,[P_1u_k(n_1+1,n_2)+P_2u_k(n_1,n_2+1)+P_3(u_k(n_1,n_2)-r_c)-g] +(1-I_h)u_k(n_1,n_2)\Big] + \lambda_1[u_k(n_1-1,n_2)+R_1-Q_{11}] + \lambda_2\,[u_k(n_1,n_2-1)+R_2-Q_{22}]\Big\}$$

- **Για $n_1=0, n_2>0$**

$$u_{k+1}(0,n_2) = \frac{1}{v}\Big\{-hn_2 + \mu\Big[I_h\,[P_1u_k(1,n_2)+P_2u_k(0,n_2+1)+P_3(u_k(0,n_2)-r_c)-g]$$

$$+(1-I_h)u_k(0,n_2)\Big] + \lambda_1\, u_k(0,n_2) + \lambda_2\,[u_k(0,n_2-1)+R_2-Q_{22}\,]\Big\}$$

- **Για $n_1>0, n_2=0$**

$$u_{k+1}(n_1,0) = \frac{1}{v}\Big\{-hn_1+\mu\Big[I_h\,[P_1u_k(n_1+1,0)+P_2u_k(n_1,1)+ P_3(u_k(n_1,0)-r_c)-g]$$

$$+(1-I_h)u_k(n_1,0)\Big] + \lambda_1\,[u_k(n_1-1,0)+R_1-Q_{11}] + \lambda_2\, u_k(n_1,0)\Big\}$$

- **Για $n_1,n_2 =0$**

$$u_{k+1}(0,0) = \frac{1}{v}\Big\{\mu\Big[I_h\,[P_1u_k(1,0)+P_2u_k(0,1)+P_3\,(u_k(0,0)-r_c)-g] + (1- I_h)\, u_k(0,0)\Big]$$

$$+ (\lambda_1+\lambda_2)\, u_k(0,0)\Big\}$$

όπου $U_k(n_1,n_2)$ είναι το συνολικό αναμενόμενο κέρδος όταν εφαρμόζεται η ΠΟΛ_1 και το βασικό απόθεμα είναι S και η αρχική κατάσταση είναι (n_1,n_2)
ενώ το μέσο αναμενόμενο κέρδος $J(S)$ δίνεται από:

$$J(S) = v\lim_{k\to\infty}[U_k(n_1,n_2) - U_{k-1}(n_1,n_2)] \quad \forall(n_1,n_2)$$

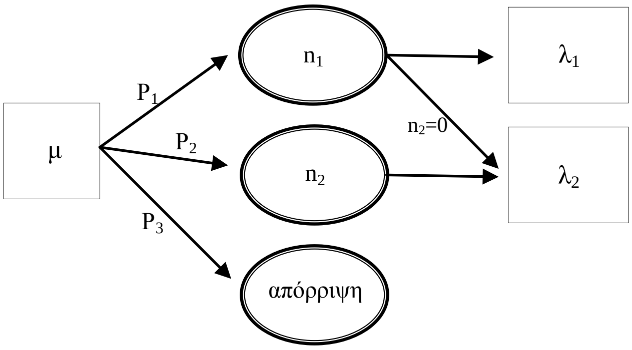
Όπως φαίνεται από τις παραπάνω αναδρομικές σχέσεις που εκφράζουν την αξία της πολιτικής, στο τμήμα της παραγωγής εκφράζουμε την πιθανότητα να παράγουμε προϊόν τύπου 1 οπότε μεταβαίνουμε στην κατάσταση $u_k(n_1+1, n_2)$ ή τύπου 2 οπότε πηγαίνουμε στην κατάσταση $u_k(n_1, n_2+1)$ ή προϊόν μη αποδεκτό οπότε και αφαιρούμε το κόστος απόρριψης. Επίσης αφαιρούμε το κόστος επιθεώρησης και το κόστος αποθέματος από όλο το άθροισμα, αφού αυτά επιβαρύνουν όλη την παραγωγική διαδικασία ανεξάρτητα από τον τύπου του προϊόντος. Η συνάρτηση I_h εκφράζει την πολιτική της επιχείρησης σχετικά με την παραγωγή και το κατώφλι S. Αν η τιμή της είναι 1 τότε η παραγωγή πραγματοποιείται, ενώ αν η τιμή της είναι 0 η παραγωγή δεν πραγματοποιείται και το σύστημα παραμένει στην κατάσταση $u_k(n_1,n_2)$.

Στο τμήμα της πώλησης εκφράζουμε το ενδεχόμενο να έρθει πελάτης τύπου 1 ή τύπου 2. Ανάλογα με την κατάσταση στην οποία βρίσκονται τα αποθέματα της επιχείρησης, πράττουμε αναλόγως. Δηλαδή πουλάμε κομμάτια n_i μόνο στον αντίστοιχο τύπο πελάτη και στην περίπτωση που δεν υπάρχει απόθεμα από τον τύπο προϊόντος που αντιστοιχεί σε αυτόν (n_1=0 ή n_2=0 ή n_1=n_2=0) τότε δεν πουλάμε καθόλου. Στις περιπτώσεις που υπάρχει απόθεμα και πραγματοποιείται η πώληση, προσθέτουμε το κέρδος (R_2 ή R_1) και αφαιρούμε το αντίστοιχο κόστος ποιότητας (Q_{22} και Q_{11}).

4.3 Περιγραφή ΠΟΛ_2

Θεωρούμε ένα σύστημα παραγωγής με τα ίδια χαρακτηριστικά και τις ίδιες τιμές παραμέτρων όπως αυτά παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 3. Η πολιτική ΠΟΛ_2 που εξετάζεται από τον Λοΐζο [9] αποτελεί βελτίωση της ΠΟΛ_1 που περιγράψαμε στην προηγούμενη ενότητα.

Σύμφωνα την πολιτική ΠΟΛ_2 και σε σχέση με την πολιτική των Hong και Elsayed, ισχύουν οι ίδιες παραδοχές με δυο διαφοροποιήσεις. Η πρώτη αφορά το απόθεμα το οποίο απουσιάζει από την παραπάνω εργασία. Εδώ διατηρείται απόθεμα προϊόντος για την ικανοποίηση των πελατών που δεν είναι πάντα διαθέσιμοι και η έλλειψή του μπορεί να οδηγήσει σε απώλεια πελατών. Η δεύτερη διαφορά που ξεχωρίζει την ΠΟΛ_2 από την ΠΟΛ_1, εντοπίζεται στην πώληση προϊόντων. Και στην ΠΟΛ_2 ορίζουμε ένα απόθεμα ασφαλείας S (base stock) σύμφωνα με το οποίο όταν το απόθεμα (n_1+n_2) φτάσει στην τιμή S τότε η παραγωγή σταματά. Αυτό εκφράζεται μέσω της δείκτριας συνάρτησης I_h, όπως και στην ΠΟΛ_1. Όταν ζητείται κομμάτι από πελάτη τύπου 1 τότε η επιχείρηση ελέγχει το απόθεμα και αν υπάρχει απόθεμα τύπου 1 (n_1) τότε πουλάει, αν όμως υπάρχει απόθεμα τύπου 2 (n_2) τότε δεν πουλάει διότι το προϊόν αυτό δεν καλύπτει τις απαιτήσεις του καλού πελάτη. Όμως το προϊόν τύπου 1 υπερκαλύπτει τις απαιτήσεις ποιότητας του λιγότερο καλού πελάτη. Οπότε όταν έρχεται πελάτης τύπου 2 και υπάρχουν διαθέσιμα μόνο κομμάτια n_1 μπορεί η επιχείρηση να πουλήσει από αυτά. Επομένως η βασική διαφορά με την ΠΟΛ_1 είναι ότι στην πολιτική ΠΟΛ_2 επιτρέπεται η πώληση κομματιών n_i όχι μόνο στον αντίστοιχο τύπο πελατών αλλά και στους λιγότερο απαιτητικούς πελάτες.



Σχήμα 13: Πολιτική 2

Οι αναδρομικές σχέσεις που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση του αναμενόμενου κέρδους κάθε πολιτικής τέτοιου τύπου δίνονται παρακάτω.

- **Για $n_1, n_2 > 0$**

$$u_{k+1}(n_1,n_2 = \frac{1}{v}\Big\{-h(n_1+n_2) + \mu\Big[I_h\,[P_1u_k(n_1+1,n_2)+P_2u_k(n_1,n_2+1)+$$

$$P_3(u_k(n_1,n_2)-r_c)-g] +(1- I_h)u_k(n_1,n_2)\Big] + \lambda_1[u_k(n_1-1,n_2)+R_1-Q_{11}\,] +\lambda_2\,[u_k(n_1,n_2-1)+R_2-Q_{22}]\Big\}$$

- **Για $n_1=0, n_2>0$**

$$u_{k+1}(0,n_2)= \frac{1}{v}\Big\{-hn_2+\mu\Big[I_h\,[(P_1u_k(1,n_2)+P_2u_k(0,n_2+1)+P_3(u_k(0,n_2)-r_c)-g] +$$

$$+(1- I_h)u_k(0,n_2)\Big]+ \lambda_1\, u_k(0,n_2) + \lambda_2\,[u_k(0,n_2-1)+R_2-Q_{22}\,]\Big\}$$

- **Για $n_1>0, n_2=0$**

$$u_{k+1}(n_1,0) = \frac{1}{v}\Big\{-hn_1+\mu\Big[I_h\,[(P_1u_k(n_1+1,0)+P_2u_k(n_1,1)+P_3(u_k(n_1,0)-r_c))-g] +$$

$$(1-I_h)u_k(n_1,0)\Big]+\lambda_1[u_k(n_1-1,0)+R_1-Q_{11}]+ \lambda_2\,[u_k(n_1-1,0)+R_2-Q_{12}]\Big\}$$

- **Για $n_1,n_2 = 0$**

$$u_{k+1}(0,0)= \frac{1}{v}\Big\{ \mu \Big[I_h \,[P_1 u_k(1,0)+P_2 u_k(0,1)+P_3 (u_k(0,0)-r_c)-g] + (1- I_h)\, u_k(0,0)\Big] + (\lambda_1+ \lambda_2)\, u_k(0,0)\Big\}$$

Οι παραπάνω αναδρομικές σχέσεις που δίνουν της αξία της ΠΟΛ_2 εκφράζουν τα ίδια πράγματα με εκείνες της ΠΟΛ_1 μόνο που τώρα καλύπτεται και η περίπτωση όπου προσφέρεται προϊόν τύπου 1 στους πελάτες τύπου 2 για $n_2=0$. Έτσι, η λογική παραμένει η ίδια στο κομμάτι της παραγωγής με την ύπαρξη του κατωφλίου S, ενώ στο κομμάτι της πώλησης, για την περίπτωση όπου $n_1>0, n_2=0$, εμφανίζεται και το κόστος ποιότητας Q_{12}.

4.4 Περιγραφή προτεινόμενης πολιτικής ΠΟΛ_3

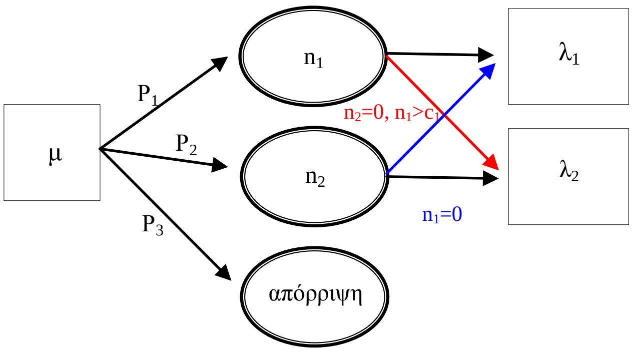
Στην ενότητα αυτή προτείνεται μια πολιτική (ΠΟΛ_3) η οποία αποτελεί βελτίωση της ΠΟΛ_2 και προσεγγίζει ικανοποιητικά την βέλτιστη πολιτική του συστήματός μας.

Θεωρούμε ένα σύστημα παραγωγής με τα ίδια χαρακτηριστικά και τις ίδιες τιμές παραμέτρων όπως αυτά παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 3. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει η ΠΟΛ_3 βασίζεται στην ΠΟΛ_2 με τις διαφορές ότι υιοθετεί την ύπαρξη ενός ακόμα κατωφλίου c_1 και επιτρέπει την πώληση προϊόντων τύπου 2 σε πελάτες τύπου 2 όταν δεν υπάρχει απόθεμα τύπου 1. Όσον αφορά στην παραγωγή, η πολιτική αυτή είναι ίδια με εκείνη που περιγράψαμε παραπάνω (ΠΟΛ_1, ΠΟΛ_2).

Σχετικά με τη διάθεση προϊόντων η πολιτική αυτή γίνεται λίγο πιο σύνθετη σε σχέση με την ΠΟΛ_2. Σύμφωνα με την ΠΟΛ_3, μετά την παραγωγή και την επιθεώρηση του προϊόντος, οι παραγόμενες μονάδες τύπου 1 προορίζονται για τους καλούς πελάτες και οι μονάδες τύπου 2 για τους λιγότερο καλούς. Στην απόφαση σχετικά με το τι θα πουλήσει η επιχείρηση στον πελάτη τύπου 1, τα πράγματα είναι ξεκάθαρα: πουλά πάντα προϊόν τύπου 1 και μόνο όταν δεν έχει απόθεμα από αυτό, δηλαδή $n_1=0$, πουλά προϊόν τύπου 2. Στον πελάτη τύπου 2 όμως η πολιτική διαφοροποιείται. Όταν η επιχείρηση έχει απόθεμα μόνο από το καλό προϊόν (δηλαδή $n_1>0$, $n_2=0$) το πουλά στον πελάτη τύπου 2 μόνο όταν οι μονάδες του n_1 υπερβούν ένα κατώφλι c_1. Με τον τρόπο αυτό, η παραγωγική μονάδα δείχνει ότι όταν έχει λίγες μονάδες προϊόντος τύπου 1 προτιμά να τις κρατήσει, μέχρι αυτές να αυξηθούν ως το επίπεδο c_1, προκειμένου να τις διαθέσει στους καλούς πελάτες της όταν χρειαστεί κάτι το οποίο θα της αποφέρει μεγαλύτερα κέρδη. Αν αυτές δεν διατεθούν σε αυτούς, τότε τις πουλά στους λιγότερο καλούς. Δηλαδή μέχρι το απόθεμα τύπου 1 να φτάσει στο επίπεδο c_1, η επιχείρηση προτιμά να μην πουλά καθόλου στην δεύτερη κατηγορία πελατών της. Με άλλα λόγια, στην ΠΟΛ_3, εμφανίζεται ένα νέο κατώφλι c το οποίο καθορίζει από ποιο επίπεδο αποθέματος n_1 και μετά θα πωλούνται καλά προϊόντα στους λιγότερο απαιτητικούς πελάτες. Αυτό εκφράζεται μέσω της συνάρτησης:

$$I_{s2} = \begin{cases} 1, & \text{αν } n_2=0 \text{ και } n_1>c_1 \quad \text{πουλάμε προϊόν τύπου 1 σε πελάτες τύπου 2} \\ 0, & \text{αλλιώς} \quad \text{δεν πουλάμε καθόλου σε πελάτες τύπου 2} \end{cases}$$

Η ΠΟΛ_3, όπως περιγράφηκε παραπάνω, απεικονίζεται διαγραμματικά στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 14: Προτεινόμενη Πολιτική 3

Στη συνέχεια δίνονται οι αναδρομικές σχέσεις βάσει των οποίων υπολογίζουμε το μέσο κέρδος της ΠΟΛ_3.

- **Για $n_1,n_2>0$**

$$u_{k+1}(n_1,n_2)= \frac{1}{v}\Big\{-h(n_1+n_2) + \mu\Big[I_h\,[P_1u_k(n_1+1,n_2)+P_2u_k(n_1,n_2+1)+P_3(u_k(n_1,n_2)-r_c)-g] +(1-I_h)u_k(n_1,n_2)\Big] + \lambda_1[u_k(n_1-1,n_2)+R_1-Q_{11}] + \lambda_2\,[u_k(n_1,n_2-1)+R_2-Q_{22}]\Big\}$$

- **Για $n_1=0,n_2>0$**

$$u_{k+1}(0,n_2)= \frac{1}{v}\Big\{-hn_2 + \mu\Big[I_h\,[(P_1u_k(1,n_2)+P_2u_k(0,n_2+1)+P_3(u_k(0,n_2)-r_c)-g] + (1- I_h)u_k(0,n_2)\Big]+\lambda_1[u_k(0,n_2-1)+R_1-Q_{21}]+ \lambda_2\,[u_k(0,n_2-1)+R_2-Q_{22}]\Big\}$$

- **Για $n_1>0, n_2=0$**

$$u_{k+1}(n_1,0)= \frac{1}{v}\Big\{-hn_1+\mu\Big[I_h\,[P_1u_k(n_1+1,0)+P_2u_k(n_1,1)+P_3(u_k(n_1,0)-r_c)-g]+$$

$$(1-I_h)\,u_k(n_1,0)\Big]+\lambda_1[u_k(n_1-1,0)+R_1-Q_{11}]+\lambda_2\,\{I_{s2}\,[u_k(n_1-1,0)+R_2-Q_{12}]\}+$$

$$\lambda_2\,(1-I_{s2})\,u_k(n_1,0)\Big\}$$

- **Για $n_1,n_2=0$**

$$u_{k+1}(0,0) = \frac{1}{v}\Big\{\mu\Big[I_h\,[P_1u_k(1,0)+P_2U_k(0,1)+P_3\,(u_k(0,0)-r_c)-g] + (1-I_h)\,u_k(0,0)\Big]+$$

$$(\lambda_1+\lambda_2)u_k(0,0)\Big\}$$

Όπως έχουμε δει και στις προηγούμενες πολιτικές, οι αναδρομικές σχέσεις κατηγοριοποιούνται βάσει του αποθέματος. Σε κάθε μια περίπτωση η εξίσωση αποτελείται από το τμήμα παραγωγής και πώλησης. Το τμήμα της παραγωγής εκφράζει πάντα την ίδια πολιτική: αν η επιχείρηση αποφασίσει να παράγει (δηλαδή $I_h=1$) τότε η παραγόμενη μονάδα θα είναι τύπου 1 με πιθανότητα P_1 και το σύστημα θα βρεθεί στην κατάσταση $U_k(n_1+1,n_2)$ ή τύπου 2 με πιθανότητα P_2 και το σύστημα θα βρεθεί στην κατάσταση $U_k(n_1,n_2+1)$, ή ακατάλληλη με πιθανότητα P_3 οπότε το σύστημα θα παραμείνει στην κατάσταση $U_k(n_1,n_2)$ και θα επιβαρυνθεί με το κόστος απόρριψης. Στο σημείο αυτό, για τον υπολογισμό του μέσου κέρδους, αφαιρούμε από το τμήμα της παραγωγής το κόστος επιθεώρησης (g). Αν αποφασίσει να μην παράγει (δηλαδή $I_h=0$) το σύστημα θα παραμείνει στην κατάσταση $U_k(n_1,n_2)$.

Στο τμήμα της πώλησης τα πράγματα διαφοροποιούνται ανάλογα με την κατάσταση του συνολικού αποθέματος το οποίο διατηρεί η επιχείρηση. Έτσι, στην περίπτωση όπου δεν υπάρχει καθόλου απόθεμα προϊόντος (δηλαδή $n_1,n_2=0$) είναι προφανές ότι δεν πραγματοποιείται καμία πώληση. Αν υπάρχει απόθεμα μόνο τύπου 1 (δηλαδή $n_1>0,n_2=0$) τότε: αν έρθει πελάτης τύπου 1, τον εξυπηρετούμε πουλώντας του το διαθέσιμο προϊόν. Αν έρθει πελάτης τύπου 2 και οι μονάδες του προϊόντος τύπου 1 είναι κάτω από c_1 (δηλαδή $n_2=0$, $n_1\le c_1$, άρα $I_{s2}=0$) τότε δεν του πουλάμε καθόλου και παραμένουμε στην κατάσταση $U_k(n_1,0)$. Αν όμως ισχύει $n_2=0$, $n_1>c_1$, δηλαδή $I_{s2}=1$, τότε του πουλάμε προϊόν τύπου 1 και μεταβαίνουμε στην κατάσταση $U_k(n_1-1,0)$. Από εδώ αφαιρούμε το αντίστοιχο κόστος ποιότητας Q_{12} και προσθέτουμε το κέρδος από την πώληση μιας μονάδας προϊόντος σε πελάτη τύπου 2 R_2.

Αν υπάρχει απόθεμα μόνο τύπου 2 (δηλαδή n_1=0,n_2>0) τότε όποιος πελάτης κι αν έρθει του διατίθεται προϊόν τύπου 2. Επομένως το σύστημα οδηγείται στην κατάσταση $U_k(0,n_2-1)$ ενώ για τον υπολογισμό του μέσου κέρδους αφαιρούμε τα κόστη ποιότητας Q_{21},Q_{22} και προσθέτουμε τα αντίστοιχα κέρδη από την πώληση R_1 και R_2.

Τέλος στην περίπτωση που υπάρχει απόθεμα και από τους δυο τύπους προϊόντος (δηλαδή n_1,n_2 >0) τότε σε κάθε τύπο πελάτη πωλείται το αντίστοιχο προϊόν.

4.5 Περιγραφή προτεινόμενης πολιτικής ΠΟΛ_4

Θεωρούμε ένα σύστημα παραγωγής με τα ίδια χαρακτηριστικά και τις ίδιες τιμές παραμέτρων όπως αυτά παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 3. Το παραγόμενο προϊόν ακολουθεί την κατηγοριοποίηση που έχει αναπτυχθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο και οι πελάτες διαχωρίζονται σε τύπου 1 και 2. Σύμφωνα με την πολιτική που προτείνεται στην παρούσα ενότητα (ΠΟΛ_4), η επιχείρηση ακολουθεί την ίδια πολιτική με αυτή των ΠΟΛ_1, ΠΟΛ_2 και ΠΟΛ_3 όσον αφορά στην παραγωγή. Δηλαδή, έχουμε κι εδώ την ύπαρξη ενός κατωφλίου S το οποίο ορίζει μέχρι πότε θα συνεχίζεται η παραγωγή. Για $n_1+n_2 \leq S$ συνεχίζεται η παραγωγή ενώ για $n_1+n_2>S$ σταματά. Δηλαδή:

$$I_h = \begin{cases} 1, & \text{αν } n_1+n_2 \leq S \quad \text{παράγουμε} \\ 0, & \text{αν } n_1+n_2 > S \quad \text{δεν παράγουμε} \end{cases}$$

Όσον αφορά στην πώληση η προτεινόμενη πολιτική διατηρεί το κατώφλι c_1, που συναντήσαμε στην ΠΟΛ_3, το οποίο καθορίζει από ποιο επίπεδο αποθέματος n_1 και μετά θα πωλούνται καλά προϊόντα στους λιγότερο απαιτητικούς πελάτες για την περίπτωση όπου η επιχείρηση έχει απόθεμα μόνο από το καλό προϊόν (δηλαδή n_1>0, n_2=0) και εκφράζεται μέσω της συνάρτησης:

$$I_{s2} = \begin{cases} 1, & \text{αν } n_2=0 \text{ και } n_1>c_1 \quad \text{πουλάμε προϊόν τύπου 1 σε πελάτες τύπου 2} \\ 0, & \text{αν } n_2=0 \text{ και } n_1 \leq c_1 \quad \text{δεν πουλάμε καθόλου σε πελάτες τύπου 2} \end{cases}$$

Στην περίπτωση όπου υπάρχει περιορισμένο απόθεμα και των δύο κατηγοριών, η επιχείρηση θέτει και πάλι σε προτεραιότητα τους καλούς πελάτες. Δηλαδή, αν έχει λίγες μονάδες από το προϊόν τύπου 2 δεν τις πουλά στους πελάτες τύπου 2 αλλά τις διαθέτει στους καλούς και μόνο όταν το συνολικό απόθεμα υπερβεί ένα επίπεδο c_2 τις πουλά στους πελάτες τύπου 2. Επομένως υπάρχει σε αυτήν την περίπτωση ένα επιπλέον κατώφλι c_2 το οποίο προσδιορίζει πότε θα ξεκινά η πώληση του προϊόντος στους λιγότερο καλούς πελάτες.

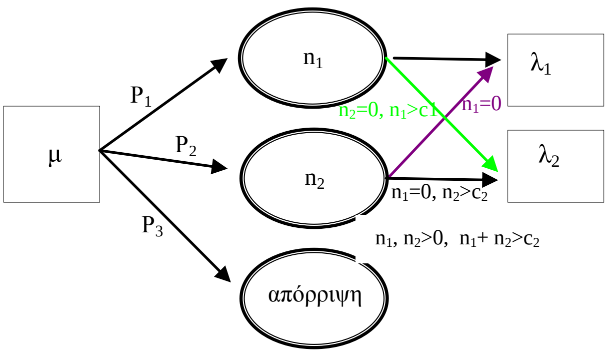
Με άλλα λόγια, στην γενική περίπτωση όπου υπάρχει απόθεμα και από τους δυο τύπους προϊόντος (δηλαδή $n_1,n_2 >0$), η επιχείρηση ακολουθεί την εξής πολιτική: όταν το συνολικό απόθεμα (n_1+n_2) δεν υπερβαίνει το κατώφλι c_2 δεν πουλάει καθόλου στους λιγότερο απαιτητικούς πελάτες. Όταν όμως $n_1+n_2>c_2$ τότε τους διαθέτει προϊόν τύπου 2. Δηλαδή:

$$I_{s1} = \begin{cases} 1, & \text{αν } n_1+n_2> c_2 \text{ και } n_2> 0 \quad \text{πουλάμε προϊόν τύπου 2 σε πελάτες τύπου 2} \\ 0, & \text{αν } n_1+n_2\leq c_2 \text{ και } n_2> 0 \quad \text{δεν πουλάμε καθόλου σε πελάτες τύπου 2} \end{cases}$$

Εδώ σημειώνουμε ότι θα πρέπει $c_2 \leq c_1$

Συνοψίζοντας, παρατηρούμε ότι η επιχείρηση που ακολουθεί την προτεινόμενη πολιτική (ΠΟΛ_4) έχει την εξής συμπεριφορά πώλησης: σε ότι αφορά στους καλούς πελάτες, τους πουλά πάντα προϊόν τύπου 1 και μόνο όταν δεν έχει καθόλου από αυτό, τους πουλά μονάδες από το λιγότερο καλό προϊόν. Στους πελάτες τύπου 2 η συμπεριφορά της, επιχείρησης εξαρτάται από το απόθεμα. Πιο συγκεκριμένα, όταν διαθέτει μόνο απόθεμα τύπου 1, τότε τους πουλά από αυτό με την προϋπόθεση ότι ισχύει $n_1>c_1$. Και τέλος, όταν υπάρχει απόθεμα και από τους δυο τύπους προϊόντος και μόνο απόθεμα τύπου 2, τότε τους πουλά τα λιγότερα καλά προϊόντα μόνο αν ισχύει $n_1+n_2>c_2$. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις οι πελάτες τύπου 2 δεν εξυπηρετούνται.

Η ΠΟΛ_4, όπως περιγράφηκε παραπάνω, απεικονίζεται διαγραμματικά στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 15: Προτεινόμενη Πολιτική 4

Οι αναδρομικές σχέσεις που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση του μέσου κέρδους αυτής της πολιτικής είναι:

- **Για $n_1,n_2>0$**

$$u_{k+1}(n_1,n_2)=\frac{1}{v}\Big\{-h(n_1+n_2)+\mu\Big[I_h\,[P_1u_k(n_1+1,n_2)+P_2u_k(n_1,n_2+1)+P_3(u_k(n_1,n_2)-r_c)-g]+$$

$$(1-I_h)u_k(n_1,n_2)\Big]+\lambda_1\,[u_k(n_1-1,n_2)+R_1-Q_{11}]+\lambda_2\,\{I_{s1}\,[u_k(n_1,n_2-1)+R_2-Q_{22}]\}+$$

$$\lambda_2\,(1-I_{s1})u_k(n_1,n_2)\Big\}$$

- **Για $n_1=0,n_2>0$**

$$u_{k+1}(0,n_2)=\frac{1}{v}\Big\{-hn_2+\mu\Big[I_h\,[(P_1u_k(1,n_2)+P_2u_k(0,n_2+1)+P_3(u_k(0,n_2)-r_c)-g]+$$

$$(1-I_h)u_k(0,n_2)\Big]+\lambda_1[u_k(0,n_2-1)+R_1-Q_{21}]+\lambda_2\,\{I_{s1}\,[u_k(0,n_2-1)+R_2-Q_{22}]\}+$$

$$\lambda_2\,(1-I_{s1})\,[u_k(0,n_2)]\Big\}$$

- **Για $n_1>0,n_2=0$**

$$u_{k+1}(n_1,0)=\frac{1}{v}\Big\{-hn_1+\mu\Big[I_h\,[P_1u_k(n_1+1,0)+P_2u_k(n_1,1)+P_3(u_k(n_1,0)-r_c)-g]+$$

$$(1-I_h)\,u_k(n_1,0)\Big]+\lambda_1[u_k(n_1-1,0)+R_1-Q_{11}]+\lambda_2\{I_{s2}\,[u_k(n_1-1,0)+R_2-Q_{12}]\}+$$

$$\lambda_2\,(1-I_{s2})\,[u_k(n_1,0)]\Big\}$$

- **Για $n_1,n_2=0$**

$$u_{k+1}(0,0)=\frac{1}{v}\Big\{\mu\Big[I_h\,[P_1u_k(1,0)+P_2u_k(0,1)+P_3\,(u_k(0,0)-r_c)-g]+(1-I_h)\,u_k(0,0)\Big]+$$

$$(\lambda_1+\lambda_2)u_k(0,0)\Big\}$$

Οι παραπάνω αναδρομικές σχέσεις εκφράζουν το συνολικό αναμενόμενο κέρδος της παραγωγικής μονάδας και όπως παρατηρούμε, το τμήμα που αντιστοιχεί στην παραγωγή είναι το ίδιο σε όλες τις περιπτώσεις. Δηλαδή, αν παράγουμε ($I_h=1$) με μέσο ρυθμό μ θα προκύψει προϊόν τύπου 1 με πιθανότητα P_1, οπότε θα βρεθούμε στην κατάσταση $U_k(n_1+1,n_2)$ ή προϊόν τύπου 2 με πιθανότητα P_2, οπότε θα βρεθούμε στην κατάσταση $U_k(n_1,n_2+1)$ ή προϊόν ακατάλληλο με πιθανότητα $P_3=1-P_1-P_2$ οπότε το σύστημα θα παραμείνει στην κατάσταση $U_k(n_1,n_2)$. Στην τελευταία περίπτωση αφαιρείται το κόστος απόρριψης r_c, ενώ από όλο το άθροισμα αφαιρούμε το κόστος g, αφού μετά την παραγωγή κάθε μονάδα περνά από το στάδιο της επιθεώρησης. Αν δεν παράγουμε, δηλαδή I_h=0, το σύστημα θα παραμείνει στην κατάσταση $U_k(n_1,n_2)$.

Το τμήμα των εξισώσεων που αντιστοιχεί στην πώληση διαφοροποιείται ανάλογα με την κατάσταση του αποθέματος. Έτσι στην περίπτωση που υπάρχει απόθεμα και των δυο τύπων αν εμφανιστούν πελάτες τύπου 1 με ρυθμό άφιξης λ_1 θα τους πουληθεί προϊόν τύπου 1. Επομένως στον υπολογισμό του κέρδους προστίθεται το κέρδος από την πώληση R_1 και αφαιρείται το αντίστοιχο κόστος ποιότητας Q_{21}. Αν εμφανιστούν πελάτες τύπου 2 με ρυθμό άφιξης λ_2 τότε: αν I_{s3}=1 θα τους πουληθεί προϊόν τύπου 2, οπότε θα συνυπολογισθεί το κέρδος από την πώληση R_2 και θα αφαιρεθεί το Q_{22}, ενώ αν I_{s3}=0 δεν θα τους πουληθεί τίποτα.

Στην περίπτωση που υπάρχει μόνο απόθεμα τύπου 2, αν εμφανιστούν πελάτες τύπου 1 με ρυθμό άφιξης λ_1 θα τους πουληθεί προϊόν τύπου 2, οπότε προστίθεται το κέρδος από την πώληση R_1 και αφαιρείται το κόστος ποιότητας Q_{21}. Ενώ αν έχουμε αφίξεις πελατών τύπου 2 με ρυθμό λ_2 τότε: αν I_{s1}=1 θα τους πουληθεί προϊόν τύπου 2, οπότε θα συνυπολογισθεί το κέρδος από την πώληση R_2 και θα αφαιρεθεί το Q_{22}, ενώ αν I_{s1}=0 δεν θα τους πουληθεί καθόλου προϊόν.

Στην περίπτωση που υπάρχει μόνο απόθεμα τύπου 1, αν εμφανιστούν πελάτες τύπου 1 με ρυθμό άφιξης λ_1 θα τους πουληθεί προϊόν τύπου 1, οπότε προστίθεται το κέρδος από την πώληση R_1 και αφαιρείται το κόστος ποιότητας Q_{11}. Αν έρθουν πελάτες της λιγότερο απαιτητικής αγοράς με ρυθμό λ_2 τότε: αν I_{s2}=1 θα τους πουληθεί προϊόν τύπου 1, οπότε θα συνυπολογισθεί το κέρδος από την πώληση R_2 και θα αφαιρεθεί το κόστος ποιότητας Q_{12}, ενώ αν I_{s2}=0 δεν θα εξυπηρετηθούν καθόλου.

Τέλος, είναι προφανές ότι στην περίπτωση που δεν υπάρχει καθόλου απόθεμα δεν πραγματοποιείται καμία πώληση.

4.6 Σύνοψη

Από την παραπάνω παρουσίαση των πολιτικών, προκύπτει ότι η ΠΟΛ_1 αποτελεί την απλούστερη πολιτική που μπορεί να εφαρμοστεί στο σύστημά μας και αυτή είναι: παραγωγή όσο $n_1+n_2 \leq S$ και πώληση κομματιών n_i μόνο στον πελάτη τύπου i. Η ΠΟΛ_2 στηρίζεται σε αυτήν και σύμφωνα με αυτήν, η επιχείρηση παράγει όσο

$n_1+n_2 \le S$ και πουλά κομμάτια n_1 όχι μόνο στον αντίστοιχο τύπο πελατών αλλά και στους λιγότερο απαιτητικούς πελάτες τύπου 2, όταν $n_2=0$. Στηριζόμενοι στην ΠΟΛ_2, προχωράμε ένα βήμα παρακάτω και λαμβάνουμε την πολιτική ΠΟΛ_3 η οποία προτείνει η επιχείρηση να παράγει όσο $n_1+n_2 \le S$, να πουλά κομμάτια n_i στους πελάτες τύπου i αλλά όταν $n_1=0$ να πουλά λιγότερο καλά κομμάτια στους καλούς πελάτες. Στην περίπτωση όπου $n_2=0$, πουλά προϊόν τύπου 1 σε πελάτες τύπου 2 μόνο αν $n_1>c_1$. Διαφορετικά (δηλαδή αν $n_1 \le c_1$) δεν τους εξυπηρετεί καθόλου. Στη συνέχεια προτείνεται μια ακόμα πολιτική (ΠΟΛ_4) η οποία αποτελεί βελτίωση της ΠΟΛ_3 και εισάγει ακόμα ένα κατώφλι c_2 το οποίο προσδιορίζει πότε θα επιτρέπεται η πώληση του προϊόντος στους πελάτες τύπου 2, ακόμα και όταν υπάρχει απόθεμα προϊόντων τύπου 2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ

5.1 Σύγκριση των πολιτικών: ΠΟΛ_1, ΠΟΛ_2, ΠΟΛ_3, ΠΟΛ_4, βέλτιστη πολιτική

Στο κεφάλαιο 3 μελετήσαμε τη μορφή της βέλτιστης πολιτικής και καταλήξαμε στο ότι τείνει να είναι μορφής κατωφλίου. Είδαμε σε γενικές γραμμές ότι υπάρχει μια καμπύλη $S(n_1)$ για την οποία ισχύει: αν $n_1+n_2>S(n_1)$ η παραγωγή διακόπτεται, διαφορετικά η παραγωγή συνεχίζεται. Επίσης, η επιχείρηση που εφαρμόζει τη βέλτιστη πολιτική πουλά καλό προϊόν στον καλό πελάτη και μόνο όταν δεν υπάρχει απόθεμα τύπου 1 του διαθέτει λιγότερο καλό προϊόν. Στον πελάτη τύπου 2 εμφανίζει την εξής συμπεριφορά βάσει της κατάστασης του αποθέματος που διαθέτει: αν $n_1+n_2>c(n_2)$, όπου $c(n_2)$ φθίνουσα συνάρτηση ως προς n_2, τότε πουλάμε προϊόντα τύπου 2 στους πελάτες τύπου 2. Ενώ στην περίπτωση που έχουμε $n_2=0$, δίνουμε προϊόντα τύπου 1. Αν $n_1+n_2\leq c(n_2)$, τότε απορρίπτουμε τις παραγγελίες των πελατών αυτών.

Με βάση αυτή τη βέλτιστη πολιτική, περιγράψαμε στο κεφάλαιο 4 τέσσερις πολιτικές μορφής κατωφλίου (ΠΟΛ_1, ΠΟΛ_2, ΠΟΛ_3, ΠΟΛ_4) από τις οποίες οι δύο τελευταίες (ΠΟΛ_3, ΠΟΛ_4) προέκυψαν από τη μελέτη της συμπεριφοράς της βέλτιστης πολιτικής και παρουσιάζονται πρώτη φορά στην παρούσα εργασία. Σκοπός αυτής της εργασίας είναι να αποδειχθεί ότι οι προτεινόμενες πολιτικές ΠΟΛ_3, ΠΟΛ_4 αποτελούν καλή προσέγγιση της βέλτιστης και παράλληλα συμπεραίνεται ότι η κάθε πολιτική είναι όχι μόνο συνέχεια της προηγούμενης αλλά και βελτίωσή της. Στην ενότητα που ακολουθεί παρουσιάζεται η διαγραμματική απεικόνιση του μέσου κέρδους που αποφέρει η κάθε ευρετική πολιτική και η συγκριτική παρουσίαση αυτών με την βέλτιστη πολιτική.

5.2 Πειραματική σύγκριση του μέσου κέρδους των πολιτικών

Στην ενότητα αυτή, κάνοντας χρήση των προγραμμάτων που παρατίθενται στο Παράρτημα, μελετάμε αριθμητικά πως επηρεάζεται το μέσο κέρδος της κάθε πολιτικής από τις μεταβολές των παραμέτρων του συστήματος. Ξεκινώντας από κάποιες αρχικές τιμές των παραμέτρων (οι οποίες συμβολίζονται με κίτρινη υπογράμμιση στους πίνακες) μεταβάλλουμε κάθε μια από αυτές βηματικά αφήνοντας σταθερές τις υπόλοιπες. Έτσι λαμβάνουμε ως αποτέλεσμα το βέλτιστο μέσο κέρδος της κάθε πολιτικής αλλά και τα αντίστοιχα βέλτιστα κατώφλια. Στη συνέχεια παριστάνουμε γραφικά τα αποτελέσματα και κάνουμε συγκριτική μελέτη αυτών.

5.2.1 Επίδραση των μεταβολών του λ_1

Διατηρώντας αμετάβλητες όλες τις υπόλοιπες παραμέτρους, δίνουμε διάφορες τιμές στον ρυθμό άφιξης πελατών τύπου 1 (λ_1) και λαμβάνουμε τους παρακάτω πίνακες με το μέσο κέρδος και τις τιμές των κατωφλίων όλων των πολιτικών.

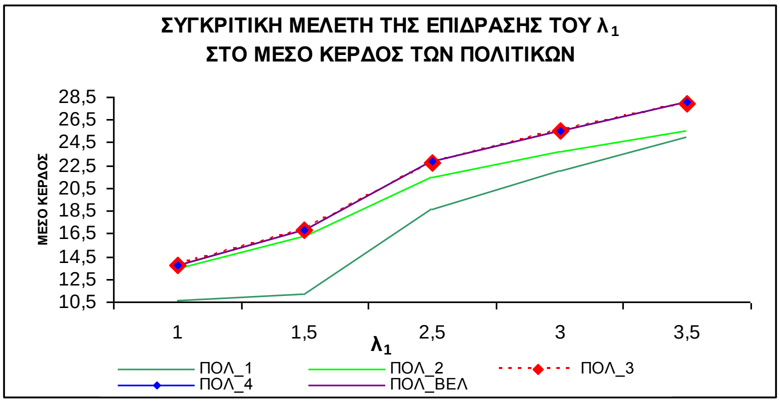
λ_1	ΠΟΛ_1	ΠΟΛ_2	ΠΟΛ_3	ΠΟΛ_4	ΠΟΛ_ΒΕΛ
	J	J	J	J	J
1	10,649	13,396	13,737	13,737	13,736
1,5	11,146	16,295	16,813	16,813	16,813
2,5	18,657	21,520	22,773	22,809	22,810
3	22,048	23,694	25,478	25,570	25,570
3,5	24,943	25,483	27,951	28,101	28,101

Πίνακας 1: μέσο κέρδος πολιτικών όταν μεταβάλλεται το λ_1

	ΠΟΛ_1	ΠΟΛ_2	ΠΟΛ_3		ΠΟΛ_4		
λ_1	S	S	S	c_1	S	c_1	c_2
1	20	3	3	0	3	0	0
1,5	2	4	4	0	4	0	0
2,5	4	7	5	1	5	1	1
3	6	8	7	1	7	1	1
3,5	8	10	8	2	8	2	1

Πίνακας 2: βέλτιστες τιμές παραμέτρων ελέγχου όταν μεταβάλλεται το λ_1

Ο παραπάνω πίνακας τιμών του μέσου κέρδους των πολιτικών (πίνακας 1) απεικονίζεται γραφικά στο σχήμα 16.



Σχήμα 16:συγκριτική απεικόνιση της επίδρασης του λ_1 στο μέσο κέρδος των πολιτικών

Όπως παρατηρούμε από τα παραπάνω αποτελέσματα, καθώς αυξάνεται το λ_1, αυξάνεται και το μέσο κέρδος των πολιτικών με φθίνοντα ρυθμό. Δηλαδή, η αύξηση του ρυθμού άφιξης των καλών πελατών οδηγεί σε αύξηση του μέσου κέρδους της επιχείρησης. Πιο συγκεκριμένα, εκείνη που ακολουθεί την προτεινόμενη πολιτική (ΠΟΛ_4) εμφανίζει το υψηλότερο μέσο κέρδος κι έπειτα ακολουθεί με οριακή διαφορά η ΠΟΛ_3. Το μέσο κέρδος των επιχειρήσεων που ακολουθούν τις ΠΟΛ_1, ΠΟΛ_2 είναι εμφανώς χαμηλότερο.

5.2.2 Επίδραση των μεταβολών του λ_2

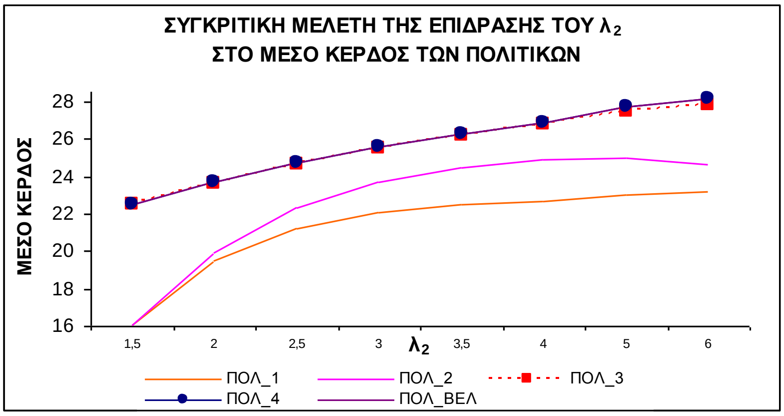
Με δεδομένο ότι όλες οι υπόλοιπες παράμετροι παραμένουν σταθερές και μεταβάλλοντας μόνο τον ρυθμό άφιξης πελατών τύπου 2 (λ_2), λαμβάνουμε τους παρακάτω πίνακες τιμών και το σχήμα 17.

λ_2	ΠΟΛ_1	ΠΟΛ_2	ΠΟΛ_3	ΠΟΛ_4	ΠΟΛ_ΒΕΛ
	J	J	J	J	J
1,5	16,083	16,115	22,534	22,548	22,548
2	19,537	19,949	23,654	23,688	23,688
2,5	21,243	22,317	24,635	24,695	24,695
3	22,048	23,694	25,478	25,570	25,570
3,5	22,467	24,485	26,164	26,298	26,298
4	22,709	24,895	26,751	26,890	26,889
5	23,004	24,990	27,504	27,721	27,721
6	23,164	24,642	27,845	28,182	28,182

Πίνακας 3: μέσο κέρδος πολιτικών όταν μεταβάλλεται το λ_2

	ΠΟΛ_1	ΠΟΛ_2	ΠΟΛ_3		ΠΟΛ_4		
λ_2	S	S	S	c_1	S	c_1	c_2
1,5	5	5	4	1	4	1	1
2	6	6	5	1	5	1	1
2,5	6	8	6	1	6	1	1
3	6	8	7	1	7	1	1
3,5	6	9	8	1	8	1	1
4	6	11	9	2	9	2	1
5	5	14	11	2	11	2	2
6	5	18	15	2	14	2	2

Πίνακας 4: βέλτιστες τιμές παραμέτρων ελέγχου όταν μεταβάλλεται το λ_2



Σχήμα 17:συγκριτική απεικόνιση της επίδρασης του λ_2 στο μέσο κέρδος των πολιτικών

Τα παραπάνω στοιχεία αποδεικνύουν ότι η επίδραση στο μέσο κόστος του λ_2 είναι παρόμοια με εκείνη του λ_1. Δηλαδή, καθώς αυξάνεται το λ_2, το μέσο κόστος αυξάνεται με φθίνοντα ρυθμό. Και πάλι το μέσο κόστος της ΠΟΛ_4 υπερκαλύπτει το μέσο κόστος κάθε άλλης πολιτικής. Είναι εμφανές ότι η ΠΟΛ_1 έχει μεγάλη διαφορά με τις υπόλοιπες, ενώ οριακή εξακολουθεί να είναι η διαφορά κόστους μεταξύ των ΠΟΛ_3 και ΠΟΛ_4.

5.2.3 Επίδραση των μεταβολών του μ

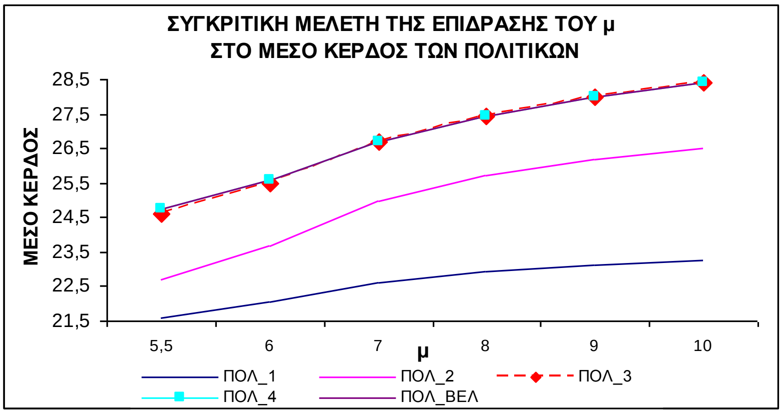
Μεταβάλλοντας μόνο τις τιμές του ρυθμού παραγωγής (μ) του συστήματος λαμβάνουμε τους παρακάτω πίνακες.

μ	ΠΟΛ_1	ΠΟΛ_2	ΠΟΛ_3	ΠΟΛ_4	ΠΟΛ_ΒΕΛ
	J	J	J	J	J
5,5	21,607	22,708	24,624	24,749	24,749
6	22,048	23,694	25,478	25,570	25,570
7	22,591	24,991	26,676	26,710	26,711
8	22,926	25,738	27,443	27,443	27,443
9	23,101	26,181	27,989	27,989	27,989
10	23,274	26,518	28,396	28,396	28,396

Πίνακας 5: μέσο κέρδος πολιτικών όταν μεταβάλλεται το μ

	ΠΟΛ_1	ΠΟΛ_2	ΠΟΛ_3		ΠΟΛ_4		
μ	S	S	S	c_1	S	c_1	c_2
5,5	6	10	7	2	7	1	1
6	6	8	7	1	7	1	1
7	5	7	5	1	5	1	1
8	5	6	5	1	5	1	0
9	5	6	4	1	4	1	0
10	4	5	4	0	4	0	0

Πίνακας 6: βέλτιστες τιμές παραμέτρων ελέγχου όταν μεταβάλλεται το μ



Σχήμα 18:συγκριτική απεικόνιση της επίδρασης του μ στο μέσο κέρδος των πολιτικών

Από το σχήμα 18 προκύπτει ότι καθώς αυξάνεται ο ρυθμός παραγωγής μ αυξάνεται και το μέσο κέρδος, ενώ το μέσο κέρδος της ΠΟΛ_4 υπερκαλύπτει γραφικά, με πολύ μικρή διαφορά, πρακτικά μηδενική, το αντίστοιχο της ΠΟΛ_3. Οι άλλες δύο πολιτικές ακολουθούν παρουσιάζοντας αισθητά μικρότερο μέσο κέρδος.

5.2.4 Επίδραση των μεταβολών του R_1

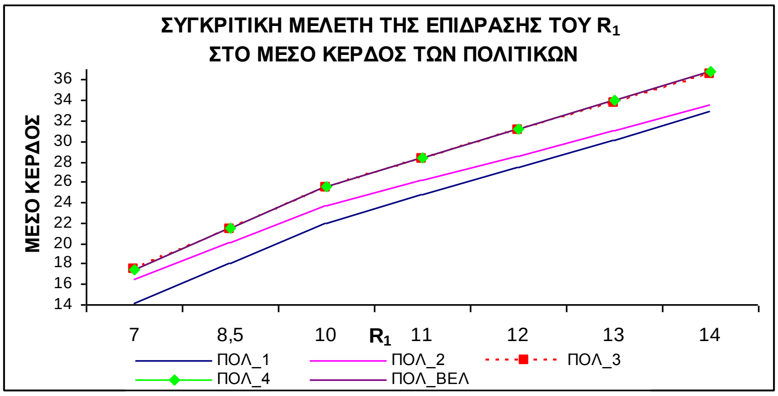
Διατηρώντας όλες τις άλλες παραμέτρους σταθερές, μεταβάλλουμε την αξία πώλησης μιας παραγόμενης μονάδας στην αγορά τύπου 1 (R_1) και λαμβάνουμε τους παρακάτω πίνακες τιμών και το σχήμα 19.

R_1	ΠΟΛ_1	ΠΟΛ_2	ΠΟΛ_3	ΠΟΛ_4	ΠΟΛ_ΒΕΛ
	J	J	J	J	J
7	14,131	16,552	17,455	17,455	17,455
8,5	18,039	20,078	21,427	21,434	21,434
10	22,048	23,694	25,478	25,570	25,570
11	24,733	26,148	28,212	28,348	28,348
12	27,435	28,612	30,997	31,165	31,165
13	30,180	31,107	33,782	34,015	34,015
14	32,926	33,612	36,572	36,891	36,891

Πίνακας 7: μέσο κέρδος πολιτικών όταν μεταβάλλεται το R_1

	ΠΟΛ_1	ΠΟΛ_2	ΠΟΛ_3		ΠΟΛ_4		
R_1	S	S	S	c_1	S	c_1	c_2
5	4	5	5	0	5	0	0
7	5	6	6	0	6	0	0
8,5	5	8	6	1	6	1	1
10	6	8	7	1	7	1	1
11	6	9	7	2	7	1	1
12	7	10	7	2	7	2	1
13	7	10	7	2	7	2	2
14	7	11	8	2	7	2	2

Πίνακας 8: βέλτιστες τιμές παραμέτρων ελέγχου όταν μεταβάλλεται το R_1



Σχήμα 19: συγκριτική απεικόνιση της επίδρασης του R_1 στο μέσο κέρδος των πολιτικών

Όπως είναι λογικό, η αύξηση του R_1 προκαλεί αύξηση και του μέσου κέρδους. Στο παραπάνω σχήμα βλέπουμε ότι οι πολιτικές ΠΟΛ_3, ΠΟΛ_4 είναι σαφώς καλύτερες από τις ΠΟΛ_1, ΠΟΛ_2 ενώ η μεταξύ τους διαφορά είναι οριακή, με το μέσο κέρδος της ΠΟΛ_4 να υπερκαλύπτει και πάλι εκείνο της ΠΟΛ_3.

5.2.5 Επίδραση των μεταβολών του R_2

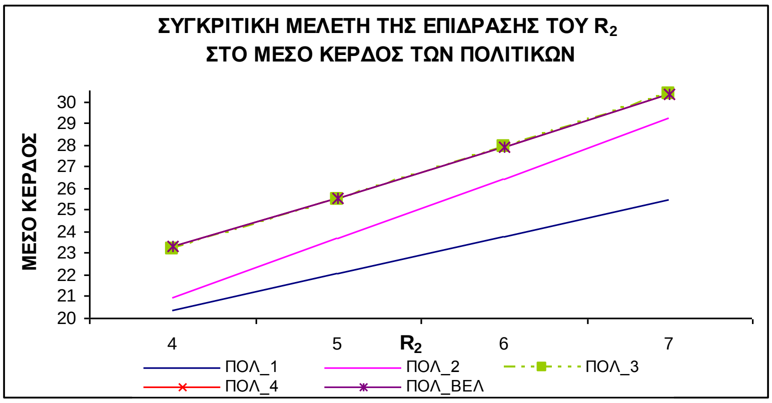
Με δεδομένο ότι όλες οι υπόλοιπες παράμετροι παραμένουν σταθερές και μεταβάλλοντας μόνο την αξία πώλησης μιας παραγόμενης μονάδας στην αγορά τύπου 2 (R_2), λαμβάνουμε τους παρακάτω πίνακες τιμών και το σχήμα 20.

R_2	ΠΟΛ_1	ΠΟΛ_2	ΠΟΛ_3	ΠΟΛ_4	ΠΟΛ_ΒΕΛ
	J	J	J	J	J
4	20,352	20,945	23,156	23,303	23,303
5	22,048	23,694	25,478	25,570	25,570
6	23,744	26,459	27,905	27,928	27,928
7	25,441	29,227	30,354	30,354	30,354

Πίνακας 9: μέσο κέρδος πολιτικών όταν μεταβάλλεται το R_2

	ΠΟΛ_1	ΠΟΛ_2	ΠΟΛ_3		ΠΟΛ_4		
R_2	S	S	S	c_1	S	c_1	c_2
4	6	8	6	2	6	2	1
5	6	8	7	1	7	1	1
6	6	9	7	1	7	1	1
7	6	9	8	1	8	1	0

Πίνακας 10: βέλτιστες τιμές παραμέτρων ελέγχου όταν μεταβάλλεται το R_2



Σχήμα 20: συγκριτική απεικόνιση της επίδρασης του R_2 στο μέσο κέρδος των πολιτικών

Όπως και στην περίπτωση μεταβολής του R_1, το μέσο κέρδος αυξάνεται καθώς η αξία πώλησης μιας μονάδας προϊόντος στους πελάτες τύπου 2 μεγαλώνει. Στο σχήμα 5 είναι εμφανές ότι οι πολιτικές ΠΟΛ_3, ΠΟΛ_4 έχουν πολύ μικρές διαφορές κέρδους με την προτεινόμενη πολιτική να παρουσιάζεται περισσότερο κερδοφόρα.

5.2.6 Επίδραση των μεταβολών του b_1

Μεταβάλλοντας μόνο τον συντελεστή κόστους ποιότητας για την αγορά τύπου 1 (b_1) λαμβάνουμε τους παρακάτω πίνακες.

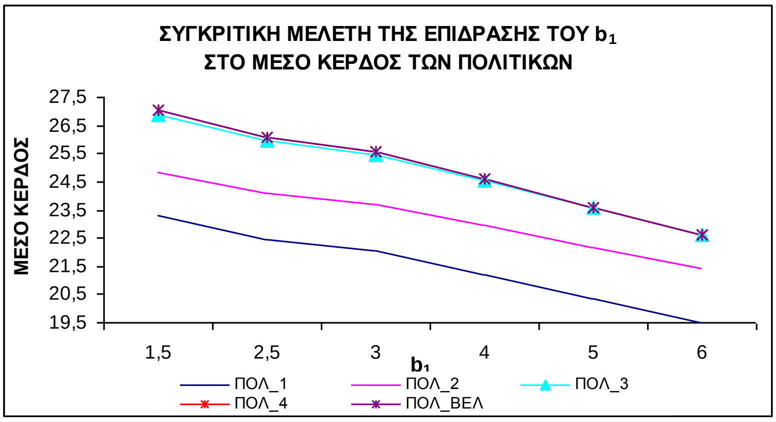
b_1	ΠΟΛ_1	ΠΟΛ_2	ΠΟΛ_3	ΠΟΛ_4	ΠΟΛ_ΒΕΛ
	J	J	J	J	J
1,5	23,310	24,846	26,900	27,053	27,053
2,5	22,469	24,076	25,952	26,063	26,064
3	22,048	23,694	25,478	25,570	25,570
4	21,206	22,939	24,529	24,583	24,583
5	20,365	22,183	23,581	23,596	23,596
6	19,523	21,427	22,633	22,633	22,633

Πίνακας 11: μέσο κέρδος πολιτικών όταν μεταβάλλεται το b_1

	ΠΟΛ_1	ΠΟΛ_2	ΠΟΛ_3		ΠΟΛ_4		
b_1	S	S	S	c_1	S	c_1	c_2
1,5	6	9	7	1	6	1	1
2,5	6	9	7	1	7	1	1
3	6	8	7	1	7	1	1
4	6	8	7	1	7	1	1
5	6	8	7	1	7	1	1
6	6	8	7	1	7	1	0

Πίνακας 12: βέλτιστες τιμές παραμέτρων ελέγχου όταν μεταβάλλεται το b_1

Τα στοιχεία των παραπάνω πινάκων αποτελούν τιμές των καμπυλών μέσου κέρδους. Στο σχήμα που ακολουθεί παρατηρούμε ότι τα μέσα κέρδη μειώνονται ασυμπτωτικά καθώς το b_1 αυξάνεται. Αυτό είναι αναμενόμενο αν σκεφθούμε ότι αύξηση του b_1 συνεπάγεται αύξηση του κόστους ποιότητας κι επομένως μείωση του κέρδους. Οι καμπύλες που αντιστοιχούν στο κέρδος των ΠΟΛ_3, ΠΟΛ_4 φαίνεται να ταυτίζονται. Όμως και από τον πίνακα τιμών προκύπτει ότι αυτό δεν ισχύει καθώς η ΠΟΛ_4 εμφανίζει μεγαλύτερο μέσο κέρδος για κάθε τιμή του b_1 σε σύγκριση με όλες τις άλλες πολιτικές και έχει πολύ μικρή απόκλιση από το κέρδος της ΠΟΛ_3. Αυτό γραφικά απεικονίζεται στο σχήμα 21.



Σχήμα 21: συγκριτική απεικόνιση της επίδρασης του b_1 στο μέσο κέρδος των πολιτικών

5.2.7 Επίδραση των μεταβολών του b_2

Για τη μελέτη της επίδρασης του b_2 στο μέσο κέρδος της κάθε πολιτικής θα διατηρήσουμε σταθερές όλες τις άλλες παραμέτρους του συστήματος και θα μεταβάλλουμε μόνο τον συντελεστή κόστους ποιότητας για την αγορά τύπου 2 (b_2).

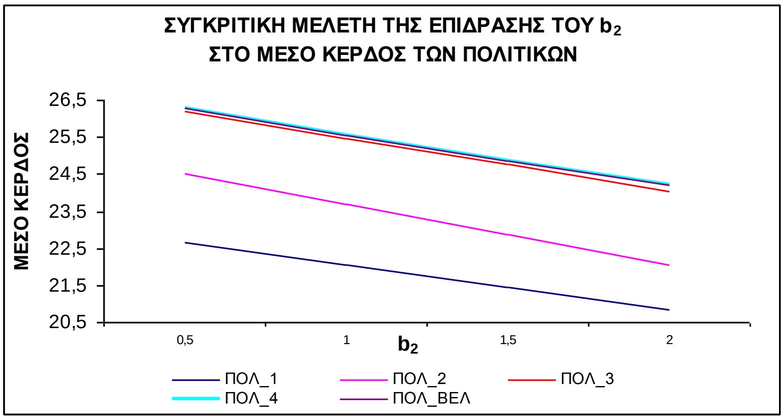
b_2	ΠΟΛ_1	ΠΟΛ_2	ΠΟΛ_3	ΠΟΛ_4	ΠΟΛ_ΒΕΛ
	J	J	J	J	J
0,5	22,653	24,529	26,208	26,278	26,278
1	22,048	23,694	25,478	25,570	25,570
1,5	21,444	22,864	24,755	24,881	24,881
2	20,839	22,035	24,044	24,195	24,195

Πίνακας 13: μέσο κέρδος πολιτικών όταν μεταβάλλεται το b_2

	ΠΟΛ_1	ΠΟΛ_2	ΠΟΛ_3		ΠΟΛ_4		
b_2	S	S	S	c_1	S	c_1	c_2
0,5	6	9	7	1	7	1	1
1	6	8	7	1	7	1	1
1,5	6	8	6	1	6	1	1
2	6	8	6	1	6	1	1

Πίνακας 14: βέλτιστες τιμές παραμέτρων ελέγχου όταν μεταβάλλεται το b_2

Όπως προκύπτει από τους παραπάνω πίνακες, η αύξηση του b_2 προκαλεί μείωση του μέσου κέρδους της παραγωγικής μονάδας. Η ΠΟΛ_1 παρουσιάζει το μικρότερο μέσο κέρδος, μετά ακολουθεί η ΠΟΛ_2 με υψηλότερο κι έπειτα η ΠΟΛ_3. Η προτεινόμενη πολιτική παρουσιάζει το υψηλότερο μέσο κέρδος συγκριτικά με όλες τις άλλες πολιτικές για όλες τις τιμές του b_2, ενώ και πάλι εμφανίζει οριακές διαφορές στο κόστος με την ΠΟΛ_3. Όλα αυτά απεικονίζονται γραφικά στο σχήμα που ακολουθεί.



Σχήμα 22: συγκριτική απεικόνιση της επίδρασης του b_2 στο μέσο κέρδος των πολιτικών

5.2.8 Επίδραση των μεταβολών του h

Διατηρώντας όλες τις άλλες παραμέτρους σταθερές, μεταβάλλουμε το κόστος αποθέματος ανά μονάδα προϊόντος (h) και λαμβάνουμε τους παρακάτω πίνακες τιμών και το σχήμα 23.

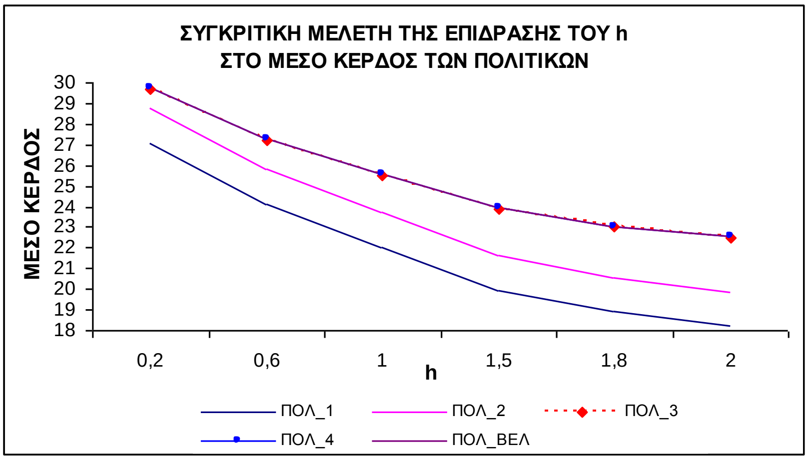
h	ΠΟΛ_1	ΠΟΛ_2	ΠΟΛ_3	ΠΟΛ_4	ΠΟΛ_ΒΕΛ
	J	J	J	J	J
0,2	27,033	28,756	29,694	29,762	29,789
0,6	24,124	25,802	27,179	27,266	27,266
1	22,048	23,694	25,478	25,570	25,570
1,5	19,963	21,604	23,853	23,925	23,925
1,8	18,925	20,528	22,997	23,053	23,054
2	18,267	19,884	22,496	22,537	22,537

Πίνακας 15: μέσο κέρδος πολιτικών όταν μεταβάλλεται το h

	ΠΟΛ_1	ΠΟΛ_2	ΠΟΛ_3		ΠΟΛ_4		
h	S	S	S	c_1	S	c_1	c_2
0,2	12	20	18	3	15	3	2
0,6	8	12	9	2	9	2	1
1	6	8	7	1	7	1	1
1,5	5	6	5	1	5	1	1
1,8	4	6	4	1	4	1	1
2	4	5	4	1	4	1	1

Πίνακας 16: βέλτιστες τιμές παραμέτρων ελέγχου όταν μεταβάλλεται το h

Όπως είναι λογικό, η αύξηση οποιασδήποτε μορφής κόστους μειώνει το κέρδος. Έτσι και στην περίπτωση της αύξησης του κόστους αποθέματος προκαλεί μείωση του μέσου κέρδους.



Σχήμα 23:συγκριτική απεικόνιση της επίδρασης του h στο μέσο κέρδος των πολιτικών

Οι παραπάνω καμπύλες δείχνουν ότι το μέσο κέρδος της προτεινόμενης πολιτικής (ΠΟΛ_4) είναι συνεχώς μεγαλύτερο από το κέρδος των υπόλοιπων πολιτικών.

5.2.9 Επίδραση των μεταβολών του r_c

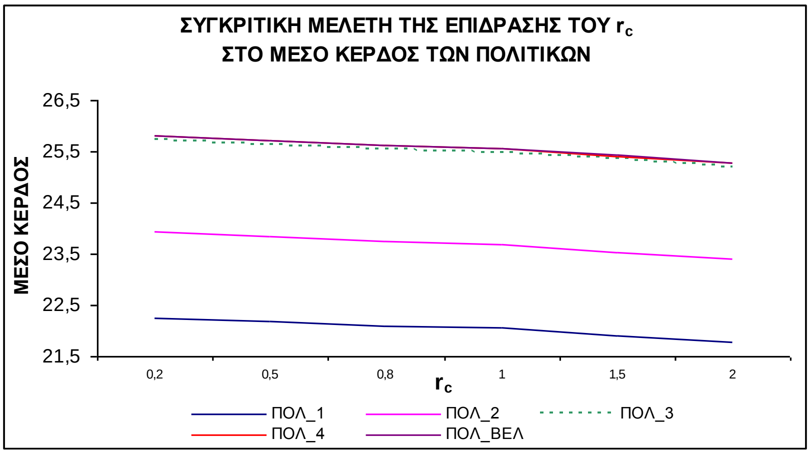
Με δεδομένο ότι όλες οι υπόλοιπες παράμετροι παραμένουν σταθερές και μεταβάλλοντας μόνο το κόστος απόρριψης (r_c), λαμβάνουμε τους παρακάτω πίνακες τιμών και το σχήμα 24.

r_c	ΠΟΛ_1	ΠΟΛ_2	ΠΟΛ_3	ΠΟΛ_4	ΠΟΛ_ΒΕΛ
	J	J	J	J	J
0,2	22,251	23,934	25,716	25,808	25,808
0,5	22,175	23,844	25,627	25,719	25,718
0,8	22,099	23,754	25,537	25,629	25,629
1	22,048	23,694	25,478	25,570	25,570
1,5	21,921	23,545	25,328	25,421	25,422
2	21,794	23,395	25,179	25,274	25,276

Πίνακας 17: μέσο κέρδος πολιτικών όταν μεταβάλλεται το r_c

	ΠΟΛ_1	ΠΟΛ_2	ΠΟΛ_3		ΠΟΛ_4		
r_c	S	S	S	c_1	S	c_1	c_2
0,2	6	8	7	1	7	1	1
0,5	6	8	7	1	7	1	1
0,8	6	8	7	1	7	1	1
1	6	8	7	1	7	1	1
1,5	6	8	7	1	7	1	1
2	6	8	7	1	6	1	1

Πίνακας 18: βέλτιστες τιμές παραμέτρων ελέγχου όταν μεταβάλλεται το r_c



Σχήμα 24: συγκριτική απεικόνιση της επίδρασης του r_c στο μέσο κέρδος των πολιτικών

Το κόστος απόρριψης r_c ανήκει στις παραμέτρους του συστήματος η αύξηση της οποίας οδηγεί σε μείωση του μέσου κέρδους. Αυτό είναι εμφανές στο σχήμα 24, όπου φαίνεται επίσης ότι το μέσο κέρδος που αντιστοιχεί στην ΠΟΛ_4 υπερκαλύπτει γραφικά συνεχώς τα υπόλοιπα κέρδη.

5.2.10 Επίδραση των μεταβολών του g

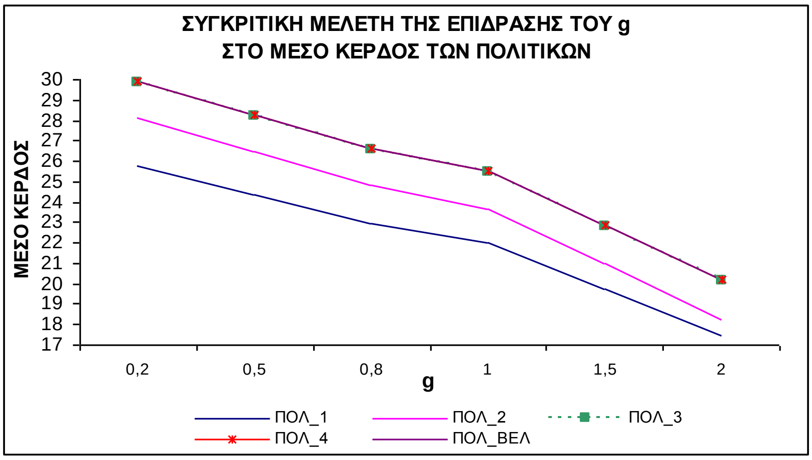
Για τη μελέτη της επίδρασης του g στο μέσο κέρδος της κάθε πολιτικής θα διατηρήσουμε σταθερές όλες τις άλλες παραμέτρους του συστήματος και θα μεταβάλλουμε μόνο το κόστος επιθεώρησης (g).

g	ΠΟΛ_1	ΠΟΛ_2	ΠΟΛ_3	ΠΟΛ_4	ΠΟΛ_ΒΕΛ
	J	J	J	J	J
0,2	25,756	28,113	29,835	29,917	29,917
0,5	24,366	26,455	28,201	28,287	28,287
0,8	22,975	24,797	26,567	26,657	26,656
1	22,048	23,694	25,478	25,570	25,570
1,5	19,730	20,965	22,788	22,897	22,897
2	17,450	18,235	20,110	20,227	20,229

Πίνακας 19: μέσο κέρδος πολιτικών όταν μεταβάλλεται το g

	ΠΟΛ_1	ΠΟΛ_2	ΠΟΛ_3		ΠΟΛ_4		
g	S	S	S	c_1	S	c_1	c_2
0,2	6	9	7	1	7	1	1
0,5	6	9	7	1	7	1	1
0,8	6	9	7	1	7	1	1
1	6	8	7	1	7	1	1
1,5	6	8	6	1	6	1	1
2	5	8	6	1	6	1	1

Πίνακας 20: βέλτιστες τιμές παραμέτρων ελέγχου όταν μεταβάλλεται το g



Σχήμα 25: συγκριτική απεικόνιση της επίδρασης του g στο μέσο κέρδος των πολιτικών

Η αύξηση του κόστους επιθεώρησης μειώνει το μέσο κέρδος της επιχείρησης ανεξάρτητα από το ποια πολιτική ακολουθεί. Συγκριτικά όμως με τις άλλες πολιτικές, το κέρδος της προτεινόμενης παραμένει πάντα υψηλότερο από των πολιτικών ΠΟΛ_1, ΠΟΛ_2, ΠΟΛ_3.

5.2.11 Επίδραση των μεταβολών του σ

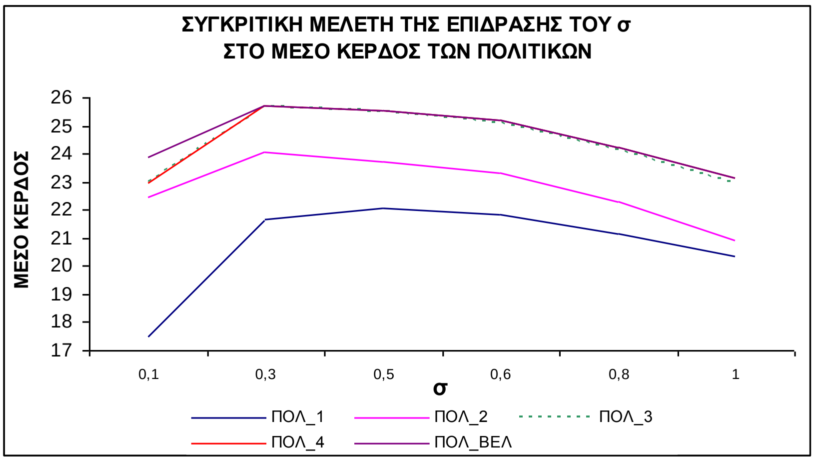
Μεταβάλλοντας μόνο τη διασπορά της κανονικής κατανομής που ακολουθεί το υπό εξέταση ποιοτικό χαρακτηριστικό (σ) λαμβάνουμε τους παρακάτω πίνακες.

σ	ΠΟΛ_1	ΠΟΛ_2	ΠΟΛ_3	ΠΟΛ_4	ΠΟΛ_ΒΕΛ
	J	J	J	J	J
0,1	17,536	22,449	22,959	23,003	23,880
0,3	21,688	24,078	25,640	25,713	25,713
0,5	22,048	23,694	25,478	25,570	25,570
0,6	21,850	23,344	25,097	25,214	25,214
0,8	21,159	22,286	24,102	24,233	24,234
1	20,339	20,941	22,950	23,134	23,134

Πίνακας 21: μέσο κέρδος πολιτικών όταν μεταβάλλεται το σ

	ΠΟΛ_1	ΠΟΛ_2	ΠΟΛ_3		ΠΟΛ_4		
σ	S	S	S	c_1	S	c_1	c_2
0,1	3	6	6	1	5	1	1
0,3	5	8	6	1	6	1	1
0,5	6	8	7	1	7	1	1
0,6	6	9	7	1	7	1	1
0,8	6	10	8	2	7	2	1
1	6	10	8	2	8	2	2

Πίνακας 22: βέλτιστες τιμές παραμέτρων ελέγχου όταν μεταβάλλεται το σ



Σχήμα 26: συγκριτική απεικόνιση της επίδρασης του σ στο μέσο κέρδος των πολιτικών

Όπως παρατηρούμε, καθώς η διασπορά αυξάνει, τα κέρδη μειώνονται, γιατί όλο και λιγότερα κομμάτια έχουν το χαρακτηριστικό ποιότητας με τιμή κοντά στην ιδανική t=9. Άρα, αυτό συνεπάγεται ότι το κόστος ποιότητας μεγαλώνει. Επίσης, για ακόμα μια φορά η καμπύλη μέσου κέρδους της προτεινόμενης πολιτικής υπερκαλύπτει τις καμπύλες που αντιστοιχούν στις υπόλοιπες πολιτικές.

5.3 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό σκοπός μας ήταν να συγκρίνουμε, με τη χρήση αριθμητικών παραδειγμάτων τις τέσσερις ευρετικές πολιτικές με τη βέλτιστη πολιτική και μεταξύ τους. Σε όλες τις πολιτικές εφαρμόζεται έλεγχος κατωφλίου όσον αφορά στην παραγωγή, δηλαδή η παραγωγή διακόπτεται όταν το συνολικό απόθεμα γίνει ίσο με το βασικό απόθεμα S. Οι πολιτικές διαφοροποιούνται ως προς τη διαχείριση των αποθεμάτων για την ικανοποίηση των πελατών. Στην ΠΟΛ_1 δίνουμε αυστηρά προϊόντα τύπου i σε πελάτες τύπου i. Στην ΠΟΛ_2 χαλαρώνουμε λίγο αυτόν τον περιορισμό και είναι δυνατή η πώληση προϊόντων τύπου 1 σε πελάτες τύπου 2 όταν δεν υπάρχει απόθεμα προϊόντων τύπου 2. Στις ΠΟΛ_3, ΠΟΛ_4 είναι δυνατή και η πώληση προϊόντων τύπου 2 στους πελάτες τύπου 1 όταν δεν υπάρχει απόθεμα αντίστοιχων προϊόντων. Επιπλέον σε αυτές τις πολιτικές είναι δυνατή η απόρριψη παραγγελιών πελατών τύπου 2 ακόμη κι αν υπάρχει απόθεμα προϊόντων τύπου 1 (ΠΟΛ_3) ή κι απόθεμα τύπου 2 (ΠΟΛ_4). Τα αριθμητικά αποτελέσματα επιβεβαιώνουν την υπεροχή της ΠΟΛ_4 έναντι όλων των υπολοίπων ευρετικών πολιτικών. Η ΠΟΛ_3 είναι οριακά χειρότερη από βέλτιστη και στην πλειοψηφία των εξεταζόμενων περιπτώσεων είναι εξίσου καλή με την ΠΟΛ_4. Οι άλλες δυο πολιτικές υστερούν εμφανώς των ΠΟΛ_3 και ΠΟΛ_4 με την ΠΟΛ_2 να υπερτερεί καθαρά της ΠΟΛ_1. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι η ΠΟΛ_4 είναι οριακά χειρότερη από την βέλτιστη πολιτική και μάλιστα στις ελάχιστες περιπτώσεις όπου η βέλτιστη πολιτική είναι καλύτερη, η διαφορά τους είναι ελάχιστη.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η εργασία αυτή είχε ως στόχο τη μελέτη του προβλήματος ελέγχου παραγωγής και διάθεσης προϊόντων σε συστήματα παραγωγής που υπάρχουν δύο κατηγορίες πελατών και κόστη ποιότητας. Περιγράψαμε το σύστημα παραγωγής στο οποίο δραστηριοποιείται η επιχείρηση (δύο τύποι πελατών, δύο τύποι προϊόντος βάσει ποιότητας, κόστος ποιότητας, αποθέματος, απόρριψης κι επιθεώρησης) και αναζητήσαμε τη μορφή της βέλτιστης πολιτικής με τη χρήση εργαλείων από τη θεωρία Μαρκοβιανών διαδικασιών απόφασης. Οι αποφάσεις οι οποίες καλείται να λάβει η επιχείρηση είναι:

- Πότε παράγει
- Πότε αποδέχεται και τι προϊόν θα διαθέσει στους πελάτες τύπου 1
- Πότε αποδέχεται και τι προϊόν θα διαθέσει στους πελάτες τύπου 2

Μέσω των αριθμητικών παραδειγμάτων λάβαμε μια εικόνα για τη συμπεριφορά της επιχείρησης και η μελέτη αυτής μας οδήγησε στο συμπέρασμα ότι η βέλτιστη πολιτική αν και δεν έχει απλή δομή μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά από πολιτικές τύπου κατωφλίου. Πιο συγκεκριμένα, αναφορικά με την απόφαση παραγωγής, η επιχείρηση που εφαρμόζει τη βέλτιστη πολιτική παράγει μέχρι το συνολικό απόθεμα να φτάσει το απόθεμα ασφαλείας S. Σχετικά με την πώληση και τη διάθεση προϊόντος, η επιχείρηση πουλά πάντα προϊόν τύπου 1 στους πελάτες τύπου 1 και μόνο όταν n_1=0 τους διαθέτει προϊόν τύπου 1. Στους πελάτες τύπου 2 επιλέγει να πουλά προϊόν τύπου 2. Εδώ όμως παρατηρούμε τα εξής: όταν υπάρχει μόνο απόθεμα τύπου 2 προτιμά τις λίγες μονάδες προϊόντος τύπου 2 να τις φυλάσσει για τους καλούς πελάτες προκειμένου να εξυπηρετήσει κι αυτούς. Έτσι περιμένει μέχρι οι μονάδες τύπου 2 να αυξηθούν κι έπειτα τις διαθέτει και στους πελάτες τύπου 2. Στην άλλη περίπτωση που υπάρχει μόνο απόθεμα τύπου 1, τότε τις λίγες αυτές μονάδες προϊόντος τις κρατάει για την ικανοποίηση των καλών πελατών και αφού αυτές αυξηθούν τις διαθέτει και στην αγορά τύπου 2.

Στη συνέχεια προσπαθήσαμε να προσεγγίσουμε την βέλτιστη πολιτική με 4 άλλες ευρετικές πολιτικές μορφής κατωφλίου (ΠΟΛ_1, ΠΟΛ_2, ΠΟΛ_3, ΠΟΛ_4) οι οποίες αποτελούν η μια βελτίωση της άλλης. Τα αριθμητικά αποτελέσματα επιβεβαίωσαν ότι οι ΠΟΛ_3, ΠΟΛ_4 που προτείνονται μέσα από αυτή την εργασία αποτελούν πολύ καλή προσέγγιση της βέλτιστης πολιτικής. Πιο συγκεκριμένα είδαμε ότι το μέσο κέρδος που αποφέρει στην επιχείρηση η εφαρμογή της ΠΟΛ_4 είναι σχεδόν ίδιο, με οριακές διαφορές, με το αντίστοιχο της βέλτιστης πολιτικής. Ακολουθεί η ΠΟΛ_3 με ελάχιστα μεγαλύτερες διαφορές, ενώ η ΠΟΛ_2 είναι χειρότερη της ΠΟΛ_3 και αρκετά χειρότερη από τη βέλτιστη. Η ΠΟΛ_1 απομακρύνεται πολύ από τον στόχο της καλής προσέγγισης της βέλτιστης πολιτικής καθώς οι διαφορές του μέσου κέρδους είναι αισθητές.

Ακόμη, θα πρέπει να επισημάνουμε ότι από την πειραματική σύγκριση του μέσου κέρδους των πολιτικών προκύπτει ότι οι διαφορές ανάμεσα στην ΠΟΛ_4 και τη βέλτιστη είναι τόσο μικρές που καθιστούν την προτεινόμενη πολιτική μας μια πολύ καλή προσέγγιση της βέλτιστης.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον θα είχε η μελέτη του συνολικού προβλήματος, όπου στις παραμέτρους ελέγχου θα συμπεριλαμβάνεται και ο έλεγχος ποιότητας που εδώ θεωρείται δεδομένος. Σε αυτήν την περίπτωση βέβαια, η δυσκολία του προβλήματος αυξάνει σημαντικά και θα πρέπει πιθανότατα να χρησιμοποιηθούν προσεγγιστικές τεχνικές.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Buzacott, J.A. and Shanthikumar, J.G. (1992) A general approach for coordinating production in multiple-cell manufacturing systems. *Production and Operations Management,*

[2] Clark, A.J. and Scarf, H. (1960) Optimal policies for a multi-echelon inventory problem. *Management Science*

[3] F.S.Hillier-G.J.Lieberman.*Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα*
ΤΟΜΟΣ Α. Εκδόσεις ΠΑΠΑΖΗΣΗ

[4] Ha, A.Y (1994). Optimal dynamic scheduling policy for a make-to-stock production system. *Operations Research*.

[5] Hong, S. H. and Elsayed, E. A. (1998) Economic complete inspection plans with multidecision alternatives. *International Journal of Production Research*. **36**, 3367–3378

[6] Kouikoglou, V.S. and Phillis, Y.A. (2002) Design of product specifications and control policies in a single-stage production system. *IIE Transactions*

[7] S.B.Gershwin, *Manufacturing Systems Engineering* (Prentice Hall, 1994).

[8] Stuart E. Dreyfus, Averill M.Law.*The Art and Theory of Dynamic Programming*

[9] Γιώργος Λοΐζος (2005).*Συντονισμένες πολιτικές ελέγχου ποιότητας και παραγωγής σε εργοστάσια με ποικιλία αγοραστών*. Διπλωματική εργασία. Πολυτεχνείο Κρήτης

[10] Δ.Φακίνος-Α.Οικονόμου. *Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα*
Εκδόσεις ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ. ΑΘΗΝΑ 2003

[11] Ιωαννίδης Ε. (2004). *Συνεργαζόμενες πολιτικές ελέγχου αποθεμάτων και αποδοχής παραγγελιών σε συστήματα παραγωγής*. Διδακτορική διατριβή. Πολυτεχνείο Κρήτης

[12] Bertsekas P. Dimitris (1976). *Dynamic Programming and Stochastic Control*

[13] Sennot L.I., (1999) Stochastic dynamic programming and control og queueing systems, John Wiley, New York, USA.

[14] Ross S.M., (1983) Introduction to stochastic dynamic programming, Academic Press, New York, USA

[15] Puterman M.L., (1994) Markov decision processes: discrete stochastic dynamic programming , John Wiley, New York,USA.

[16] Tijms H.C., (1994) Stochastic models: an algorithmic approach, John Wiley, Chichester, England

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΚΩΔΙΚΑΣ
ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΚΕΡΔΟΥΣ ΤΗΣ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

```
MODULE ALL_SUBROUTINES
IMPLICIT NONE
INTEGER, PARAMETER :: RK = 8
CONTAINS
SUBROUTINE RESULTS( OPT_AVG_REV)
IMPLICIT NONE
REAL(RK), INTENT(IN) :: OPT_AVG_REV

PRINT*,"OPT_AVG_REV=",OPT_AVG_REV

END SUBROUTINE RESULTS
END MODULE ALL_SUBROUTINES

PROGRAM TWO_CUSTOMER_CLASSES_QUALITY_POL
USE ALL_SUBROUTINES
IMPLICIT NONE

INTEGER, PARAMETER :: MAX_X1a = 210, MAX_X2a = 210
INTEGER :: N, K, I, J, X1, X2, REP
INTEGER :: MAX_X1, MAX_X2, MAXK

REAL(RK) :: L1, L2, MI, HI, R1, R2, RC, GI, VI, K1, K2, D1, D2, AVG, TRG, STDV
REAL(RK) :: MERROR, ERROR, MIN_DIF, MAX_DIF, DIF, PI
REAL(RK) :: Z, Z1, FZ, FZ1, STEP, OPT_AVG_REV, TEMP1,TEMP2, STEP_TH

REAL(RK), DIMENSION (0:MAX_X1a, 0:MAX_X2a) :: V0
REAL(RK), DIMENSION (0:MAX_X1a, 0:MAX_X2a) :: V1
REAl(RK), DIMENSION (1:3) :: PRQ
REAl(RK), DIMENSION (1:2) :: QC
REAl(RK), DIMENSION (1:2) :: THR
INTEGER,  DIMENSION (0:MAX_X1a, 0:MAX_X2a) :: DPR, DOS1, DOS2
INTEGER,  DIMENSION (0:MAX_X1a) :: DCPR, DCOS10, DCOS11, DCOS12, DCOS20, DCOS21, DCOS22

!REAL(RK), DIMENSION (1:10000) :: TEST
!REAL(RK), DIMENSION (0:MAX_Sa+MAX_C1a+MAX_C2a,0:MAX_C2a) :: COMBIN
!INTEGER :: N, K, I, ADJ, TURN, LENGTH

OPEN (2, FILE='INPUT.DAT', STATUS='OLD')
READ (2,*) MAX_X1
READ (2,*) MAX_X2
READ (2,*) L1
READ (2,*) L2
READ (2,*) MI
READ (2,*) HI
READ (2,*) R1
READ (2,*) R2
READ (2,*) RC
READ (2,*) GI
READ (2,*) K1
READ (2,*) K2
READ (2,*) D1
READ (2,*) D2
READ (2,*) AVG
READ (2,*) TRG
READ (2,*) STDV
READ (2,*) MERROR

VI = L1+L2+MI
```

```
!-------------- QUALITY COSTS ASSESSMENT --------------------------------

MAXK = 1000000
STEP_TH=(D2-D1)
STEP = STEP_TH/MAXK
PI = 3.141592654
Z = TRG-D2
FZ = exp(-(((Z-AVG)**2)/(2*(STDV**2))))/(SQRT(2*PI)*STDV)

DO N = 2, 1, -1
  PRQ(N) = 0.D0
  IF ( N == 1) THEN
     STEP_TH=D1
     STEP = STEP_TH/MAXK
     THR(N) = D1
  ELSE
     THR(N) = D2
     THR(N-1) = D1
  END IF
  Z = TRG-THR(N)
  DO K = 1, MAXK
    Z1 = Z+STEP
    FZ1 = exp(-(((Z1-AVG)**2)/(2*(STDV**2))))/(SQRT(2*PI)*STDV)
              PRQ(N)=PRQ(N)+((FZ1+FZ)*STEP)/2.D0
              Z = Z1
              FZ = FZ1
  END DO
  IF ( N == 1) THEN
     Z = TRG
  ELSE
     Z = TRG+D1
  END IF
  FZ = exp(-(((Z-AVG)**2)/(2*(STDV**2))))/(SQRT(2*PI)*STDV)

  DO K = 1, MAXK
     Z1 = Z+STEP
     FZ1 = exp(-(((Z1-AVG)**2)/(2*(STDV**2))))/(SQRT(2*PI)*STDV)
              PRQ(N)=PRQ(N)+((FZ1+FZ)*STEP)/2.D0
              Z = Z1
              FZ = FZ1
  END DO

  IF ( N == 1) THEN
      QC(N)=-((STDV)/(SQRT(2*PI)))*((TRG+THR(N)-AVG)*EXP(-((TRG+THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2))-
              (TRG-THR(N)-AVG)*EXP(-((TRG-THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2)))
      QC(N)=QC(N)-((2*(AVG-TRG)*STDV)/(SQRT(2*PI)))*(EXP(-((TRG+THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2))-
             EXP(-((TRG-THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2)))+((AVG-TRG)**2+STDV**2)*PRQ(N)
  ELSE
      TEMP1=((TRG+THR(N)-AVG)*EXP(-((TRG+THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2))-
               (TRG-THR(N)-AVG)*EXP(-((TRG-THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2)))
      TEMP2=((TRG+THR(N-1)-AVG)*EXP(-((TRG+THR(N-1)-AVG)**2)/(2*STDV**2))-
              (TRG-THR(N-1)-AVG)*EXP(-((TRG-THR(N-1)-AVG)**2)/(2*STDV**2)))
      QC(N)=-((STDV)/(SQRT(2*PI)))*(TEMP1-TEMP2)
      TEMP1=(EXP(-((TRG+THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2))-EXP(-((TRG-THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2)))
      TEMP2=(EXP(-((TRG+THR(N-1)-AVG)**2)/(2*STDV**2))-EXP(-((TRG-THR(N-1)-AVG)**2)/(2*STDV**2)))
      QC(N)=QC(N)-((2*(AVG-TRG)*STDV)/(SQRT(2*PI)))*(TEMP1-TEMP2)+((AVG-TRG)**2+STDV**2)*PRQ(N)
  END IF

END DO

PRQ(3) = 1.D0-PRQ(1)-PRQ(2)

!-------------- END OF QUALITY COSTS ASSESSMENT --------------------------------

!--------------OPTIMAL POLICY ASSESSMENT (DYNAMIC PROGRAMMING) --------------------------------

  DO X1 = 0, MAX_X1+1
    DO X2 = 0, MAX_X2+1
```

```
      V0(X1,X2) = 0.D0
      V1(X1,X2) = 0.D0
    END DO
  END DO

ERROR=1000000000.D0
REP = 0

DO while ((ERROR < -MERROR).OR.(ERROR > MERROR))
  REP = REP + 1
  DO X1 = 0, MAX_X1
    DO X2 = 0, MAX_X2

      IF (X2 == 0) THEN
              IF (X1 == 0) THEN
! EXISOSEIS BELTISTOPOIHSHS GIA X1=X2=0
                        V1(X1,X2) = ((L1+L2)*V0(X1,X2)+MI*MAX(PRQ(1)*V0(X1+1,X2)+PRQ(2)*V0(X1,X2+1)+
                                    PRQ(3)*(V0(X1,X2)-RC)-GI,V0(X1,X2)))/VI
              ELSE
! EXISOSEIS BELTISTOPOIHSHS GIA X2=0, X1>0
                        V1(X1,X2) = (-HI*X1+MI*MAX(PRQ(1)*V0(X1+1,X2)+PRQ(2)*V0(X1,X2+1)+
                                    PRQ(3)*(V0(X1,X2)-RC)-GI,V0(X1,X2)))
                        V1(X1,X2) = (V1(X1,X2)+L1*MAX(V0(X1-1,X2)+R1-K1*QC(1),V0(X1,X2))+
                                    L2*MAX(V0(X1-1,X2)+R2-K2*QC(1),V0(X1,X2)))/VI

              END IF

      ELSE

                IF (X1 == 0) THEN
! EXISOSEIS BELTISTOPOIHSHS GIA X1=0, X2>0
                        V1(X1,X2) = (-HI*X2+MI*MAX(PRQ(1)*V0(X1+1,X2)+PRQ(2)*V0(X1,X2+1)+
                                    PRQ(3)*(V0(X1,X2)-RC)-GI,V0(X1,X2)))
                        V1(X1,X2) = (V1(X1,X2)+L1*MAX(V0(X1,X2-1)+R1-K1*QC(2),V0(X1,X2))+
                                    L2*MAX(V0(X1,X2-1)+R2-K2*QC(2),V0(X1,X2)))/VI
                ELSE
! EXISOSEIS BELTISTOPOIHSHS GIA X1>0, X2>0
                        V1(X1,X2) = (-HI*(X1+X2)+MI*MAX(PRQ(1)*V0(X1+1,X2)+PRQ(2)*V0(X1,X2+1)+
                                    PRQ(3)*(V0(X1,X2)-RC)-GI,V0(X1,X2)))
                        V1(X1,X2) = (V1(X1,X2)+L1*MAX(V0(X1-1,X2)+R1-K1*QC(1),V0(X1,X2-1)+R1-
                                    K1*QC(2),V0(X1,X2)))
                        V1(X1,X2) = (V1(X1,X2)+L2*MAX(V0(X1-1,X2)+R2-K2*QC(1),V0(X1,X2-1)+R2-
                                    K2*QC(2),V0(X1,X2)))/VI
                END IF
      END IF
    END DO
  END DO

  DO X2 = 0, MAX_X2+1
    V0(MAX_X1+1,X2) = 2*V1(MAX_X1,X2)-V1(MAX_X1-1,X2)
  END DO

  DO X1 = 0, MAX_X1+1
    V0(X1,MAX_X2+1) = 2*V1(X1,MAX_X2)-V1(X1,MAX_X2-1)
  END DO

  MAX_DIF = 0.D0
  MIN_DIF = 10000000000000000.D0

    DO X1 = 0, MAX_X1
        DO X2 = 0, MAX_X2

              DIF = V1(X1,X2)-V0(X1,X2)
              IF (DIF < 0) THEN
                DIF = - DIF
              END IF
              IF (DIF < MIN_DIF) THEN
                MIN_DIF = DIF
```

```
               END IF
               IF (DIF > MAX_DIF) THEN
                 MAX_DIF = DIF
               END IF
          END DO
      END DO

    ERROR = MAX_DIF-MIN_DIF

      DO X1 = 0, MAX_X1
              DO X2 = 0, MAX_X2
                  V0(X1,X2) = V1(X1,X2)
              END DO
      END DO
  END DO

!------ END OF OPTIMAL POLICY ASSESSMENT------------------------------------------

!------ RESULTS PRESENTATION ----------------------------------------------------

      DO X1 = 0, MAX_X1
          DO X2 = 0, MAX_X2
               TEMP1=PRQ(1)*V1(X1+1,X2)+PRQ(2)*V1(X1,X2+1)+PRQ(3)*(V1(X1,X2)-RC)-GI
               IF (TEMP1 > V1(X1,X2)) THEN
                     DPR(X1,X2) = 1
               ELSE
                     DPR(X1,X2) = 0
               END IF

        IF (X1 == 0) THEN
              IF (X2 == 0) THEN
                   DOS1(X1,X2) = 0
              ELSE
                  TEMP1 = V1(X1,X2-1)+R1-K1*QC(2)
                         IF (TEMP1 > V1(X1,X2)) THEN
                               DOS1(X1,X2) = 2
                         ELSE
                                   DOS1(X1,X2) = 0
                         END IF
              END IF
        ELSE
              IF (X2 == 0) THEN
                   TEMP1 = V1(X1-1,X2)+R1-K1*QC(1)
                         IF (TEMP1 > V1(X1,X2)) THEN
                               DOS1(X1,X2) = 1
                         ELSE
                              DOS1(X1,X2) = 0
                         END IF
              ELSE
                   TEMP1 = V1(X1-1,X2)+R1-K1*QC(1)
                   TEMP2 = V1(X1,X2-1)+R1-K1*QC(2)
                         IF ((TEMP1 > V1(X1,X2)).AND.(TEMP1 > TEMP2)) THEN
                                DOS1(X1,X2) = 1
                         ELSE
                              IF ((TEMP2 > V1(X1,X2)).AND.(TEMP2 > TEMP1)) THEN
                                    DOS1(X1,X2) = 2
                              ELSE
                                    DOS1(X1,X2) = 0
                              END IF
                         END IF
              END IF
        END IF

        IF (X1 == 0) THEN
              IF (X2 == 0) THEN
                         DOS2(X1,X2) = 0
              ELSE
                         TEMP1 = V1(X1,X2-1)+R2-K2*QC(2)
```

```
                  IF (TEMP1 > V1(X1,X2)) THEN
                        DOS2(X1,X2) = 2
                  ELSE
                         DOS2(X1,X2) = 0
                  END IF
         END IF
    ELSE
         IF (X2 == 0) THEN
             TEMP1 = V1(X1-1,X2)+R2-K2*QC(1)
                  IF (TEMP1 > V1(X1,X2)) THEN
                        DOS2(X1,X2) = 1
                   ELSE
                        DOS2(X1,X2) = 0
                   END IF
         ELSE
              TEMP1 = V1(X1-1,X2)+R2-K2*QC(1)
              TEMP2 = V1(X1,X2-1)+R2-K2*QC(2)
                  IF ((TEMP1 > V1(X1,X2)).AND.(TEMP1 > TEMP2)) THEN
                        DOS2(X1,X2) = 1
                  ELSE
                      IF ((TEMP2 > V1(X1,X2)).AND.(TEMP2 > TEMP1)) THEN
                          DOS2(X1,X2) = 2
                      ELSE
                          DOS2(X1,X2) = 0
                      END IF
                  END IF
         END IF
    END IF
      END DO
   END DO

DO X1 = 0, MAX_X1-1
 DCPR(X1) = 0
 DCOS10(X1) = 0
 DCOS11(X1) = 0
 DCOS12(X1) = 0
 DCOS20(X1) = 0
 DCOS21(X1) = 0
 DCOS22(X1) = 0
 DO X2 = 0, MAX_X2-1

  IF (DPR(X1,X2) == 1) THEN
         IF (DPR(X1,X2+1).NE.DPR(X1,X2)) THEN
            DCPR(X1)=X2+1
         ELSE
            DCPR(X1)=MAX_X2
         END IF
  END IF

  IF (DOS1(X1,X2) == 0) THEN
         IF (DOS1(X1,X2+1).NE.DOS1(X1,X2)) THEN
            DCOS10(X1)=X2+1
         ELSE
            DCOS10(X1)=MAX_X2
         END IF
  END IF

  IF (DOS1(X1,X2) == 1) THEN
         IF (DOS1(X1,X2+1).NE.DOS1(X1,X2)) THEN
            DCOS11(X1)=X2+1
         ELSE
            DCOS11(X1)=MAX_X2
         END IF
  END IF
  IF (DOS1(X1,X2) == 2) THEN
         IF (DOS1(X1,X2+1).NE.DOS1(X1,X2)) THEN
             DCOS12(X1)=X2+1
         ELSE
```

```
              DCOS12(X1)=MAX_X2
          END IF
   END IF

   IF (DOS2(X1,X2) == 0) THEN
          IF (DOS2(X1,X2+1).NE.DOS2(X1,X2)) THEN
              DCOS20(X1)=X2+1
          ELSE
              DCOS20(X1)=MAX_X2
          END IF
   END IF

   IF (DOS2(X1,X2) == 1) THEN
          IF (DOS2(X1,X2+1).NE.DOS2(X1,X2)) THEN
                 DCOS21(X1)=X2+1
          ELSE
                 DCOS21(X1)=MAX_X2
          END IF
   END IF

   IF (DOS2(X1,X2) == 2) THEN
          IF (DOS2(X1,X2+1).NE.DOS2(X1,X2)) THEN
              DCOS22(X1)=X2+1
          ELSE
              DCOS22(X1)=MAX_X2
          END IF
   END IF
  END DO
END DO

OPT_AVG_REV = MAX_DIF*VI
PRINT*,"OPT_AVG_REV=",OPT_AVG_REV
READ*

OPEN(1,FILE="results.dat",position="rewind",status="replace")

WRITE (1,"(a,d16.10)") 'L1=',L1
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'L2=',L2
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'MI=',MI
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'HI=',HI
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'R1=',R1
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'R2=',R2
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'RC=',RC
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'GI=',GI
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'K1=',K1
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'K2=',K2
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'D1=',D1
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'D2=',D2
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'AVG=',AVG
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'TRG=',TRG
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'STDV=',STDV
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'P1=',PRQ(1)
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'P2=',PRQ(2)
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'P3=',PRQ(3)
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'QC11=',K1*QC(1)
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'QC12=',K2*QC(1)
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'QC21=',K1*QC(2)
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'QC22=',K2*QC(2)
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'ERROR=',ERROR
WRITE (1,*) 'REP=',REP
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'OPT_AVG_REV=',OPT_AVG_REV
WRITE (1,*) 'PRODUCTION DECISSION'
K=MAX_X2+1
DO I = 0, MAX_X1
   WRITE(1,"( 211(:(i2,1x)) )" ) DPR(I,:)
END DO

WRITE (1,*) 'DECISSION OF ORDER ADMISSION FOR CLASS 1 CUSTOMERS'
```

```
DO I = 0, MAX_X1
   WRITE(1,"( 211(:(i2,1x)) )" ) DOS1(I,:)
END DO

WRITE (1,*) 'DECISSION OF ORDER ADMISSION FOR CLASS 2 CUSTOMERS'
DO I = 0, MAX_X1
   WRITE(1,"( 211(:(i2,1x)) )" ) DOS2(I,:)
END DO

WRITE (1,*) 'DECISSION CURVE OF PRODUCTION'
DO I = 0, MAX_X1
   WRITE (1,"(I4)"),DCPR(I)
END DO

WRITE (1,*) 'DECISSION CURVE OF ORDER ADMISSION FOR CUSTOMERS OF CLASS 1 (DEC=0)'
DO I = 0, MAX_X1
   WRITE (1,"(I4)"),DCOS10(I)
END DO

WRITE (1,*) 'DECISSION CURVE OF ORDER ADMISSION FOR CUSTOMERS OF CLASS 1 (DEC=1)'
DO I = 0, MAX_X1
   WRITE (1,"(I4)"),DCOS11(I)
END DO

WRITE (1,*) 'DECISSION CURVE OF ORDER ADMISSION FOR CUSTOMERS OF CLASS 1 (DEC=2)'
DO I = 0, MAX_X1
   WRITE (1,"(I4)"),DCOS12(I)
END DO

WRITE (1,*) 'DECISSION CURVE OF ORDER ADMISSION FOR CUSTOMERS OF CLASS 2 (DEC=0)'
DO I = 0, MAX_X1
   WRITE (1,"(I4)"),DCOS20(I)
END DO

WRITE (1,*) 'DECISSION CURVE OF ORDER ADMISSION FOR CUSTOMERS OF CLASS 2 (DEC=1)'
DO I = 0, MAX_X1
   WRITE (1,"(I4)"),DCOS21(I)
END DO

WRITE (1,*) 'DECISSION CURVE OF ORDER ADMISSION FOR CUSTOMERS OF CLASS 2 (DEC=2)'
DO I = 0, MAX_X1
   WRITE (1,"(I4)"),DCOS22(I)
END DO

WRITE(1,*)
CLOSE(1)

CALL RESULTS(OPT_AVG_REV=OPT_AVG_REV)
READ*

END PROGRAM TWO_CUSTOMER_CLASSES_QUALITY_POL
```

ΚΩΔΙΚΑΣ 1
ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΚΕΡΔΟΥΣ ΤΗΣ ΠΟΛ_1

```
MODULE ALL_SUBROUTINES
IMPLICIT NONE
INTEGER, PARAMETER :: RK = 8
CONTAINS
SUBROUTINE RESULTS( OPT_AVG_REV)
IMPLICIT NONE
REAL(RK), INTENT(IN) :: OPT_AVG_REV

PRINT*,"OPT_AVG_REV_1=",OPT_AVG_REV

END SUBROUTINE RESULTS
END MODULE ALL_SUBROUTINES

PROGRAM TWO_CUSTOMER_CLASSES_QUALITY_POL_1
USE ALL_SUBROUTINES
IMPLICIT NONE
INTEGER, PARAMETER :: MAX_X1a = 210, MAX_X2a = 210
INTEGER :: N, K, I, J, X1, X2, REP, S
INTEGER :: MAX_X1, MAX_X2, MAXK, MAX_S, OPT_S

REAL(RK) :: L1, L2, MI, HI, R1, R2, RC, GI, VI, K1, K2, D1, D2, AVG, TRG, STDV
REAL(RK) :: MERROR, ERROR, MIN_DIF, MAX_DIF, DIF, PI
REAL(RK) :: Z, Z1, FZ, FZ1, STEP, OPT_AVG_REV, TEMP1,TEMP2, STEP_TH

REAL(RK), DIMENSION (0:MAX_X1a, 0:MAX_X2a) :: V0
REAL(RK), DIMENSION (0:MAX_X1a, 0:MAX_X2a) :: V1
REAl(RK), DIMENSION (1:3) :: PRQ
REAl(RK), DIMENSION (1:2) :: QC
REAl(RK), DIMENSION (1:2) :: THR

!REAL(RK), DIMENSION (1:10000) :: TEST
!REAL(RK), DIMENSION (0:MAX_Sa+MAX_C1a+MAX_C2a,0:MAX_C2a) :: COMBIN
!INTEGER :: N, K, I, ADJ, TURN, LENGTH

OPEN (2, FILE='INPUT.DAT', STATUS='OLD')
READ (2,*) MAX_S
READ (2,*) MAX_X1
READ (2,*) MAX_X2
READ (2,*) L1
READ (2,*) L2
READ (2,*) MI
READ (2,*) HI
READ (2,*) R1
READ (2,*) R2
READ (2,*) RC
READ (2,*) GI
READ (2,*) K1
READ (2,*) K2
READ (2,*) D1
READ (2,*) D2
READ (2,*) AVG
READ (2,*) TRG
READ (2,*) STDV
READ (2,*) MERROR

VI = L1+L2+MI

!------------- QUALITY COSTS ASSESSMENT -------------------------------

MAXK = 1000000
STEP_TH=(D2-D1)
STEP = STEP_TH/MAXK
PI = 3.141592654
Z = TRG-D2
```

```
FZ = exp(-(((Z-AVG)**2)/(2*(STDV**2))))/(SQRT(2*PI)*STDV)

DO N = 2, 1, -1
  PRQ(N) = 0.D0
  IF ( N == 1) THEN
    STEP_TH=D1
    STEP = STEP_TH/MAXK
    THR(N) = D1
  ELSE
    THR(N) = D2
    THR(N-1) = D1
  END IF
  Z = TRG-THR(N)
  DO K = 1, MAXK
    Z1 = Z+STEP
    FZ1 = exp(-(((Z1-AVG)**2)/(2*(STDV**2))))/(SQRT(2*PI)*STDV)
            PRQ(N)=PRQ(N)+((FZ1+FZ)*STEP)/2.D0
            Z = Z1
            FZ = FZ1
  END DO
  IF ( N == 1) THEN
    Z = TRG
  ELSE
    Z = TRG+D1
  END IF
  FZ = exp(-(((Z-AVG)**2)/(2*(STDV**2))))/(SQRT(2*PI)*STDV)

  DO K = 1, MAXK
    Z1 = Z+STEP
    FZ1 = exp(-(((Z1-AVG)**2)/(2*(STDV**2))))/(SQRT(2*PI)*STDV)
            PRQ(N)=PRQ(N)+((FZ1+FZ)*STEP)/2.D0
            Z = Z1
            FZ = FZ1
  END DO
END DO

DO N = 1, 2
  IF ( N == 1) THEN
      QC(N)=-((STDV)/(SQRT(2*PI)))*((TRG+THR(N)-AVG)*EXP(-((TRG+THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2))-
              (TRG-THR(N)-AVG)*EXP(-((TRG-THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2)))
      QC(N)=QC(N)-((2*(AVG-TRG)*STDV)/(SQRT(2*PI)))*(EXP(-((TRG+THR( N)-AVG)**2)/(2*STDV**2))-
              EXP(-((TRG-THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2)))+((AVG-TRG)**2+STDV**2)*PRQ(N)
  ELSE
      TEMP1=((TRG+THR(N)-AVG)*EXP(-((TRG+THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2))-
               (TRG-THR(N)-AVG)*EXP(-((TRG-THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2)))
      TEMP2=((TRG+THR(N-1)-AVG)*EXP(-((TRG+THR(N-1)-AVG)**2)/(2*STDV**2))-
               (TRG-THR(N-1)-AVG)*EXP(-((TRG-THR(N-1)-AVG)**2)/(2*STDV**2)))
      QC(N)=-((STDV)/(SQRT(2*PI)))*(TEMP1-TEMP2)
      TEMP1=(EXP(-((TRG+THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2))-EXP(-((TRG-THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2)))
      TEMP2=(EXP(-((TRG+THR(N-1)-AVG)**2)/(2*STDV**2))-EXP(-((TRG-THR(N-1)-AVG)**2)/(2*STDV**2)))
      QC(N)=QC(N)-((2*(AVG-TRG)*STDV)/(SQRT(2*PI)))*(TEMP1-TEMP2)+((AVG-TRG)**2+STDV**2)*PRQ(N)
  END IF
END DO

PRQ(3) = 1.D0-PRQ(1)-PRQ(2)

!-------------- END OF QUALITY COSTS ASSESSMENT --------------------------------

!--------------OPTIMAL POLICY ASSESSMENT (DYNAMIC PROGRAMMING) --------------------------------
OPT_S = 1
OPT_AVG_REV = 0

DO S = 1, MAX_S
   DO X1 = 0, MAX_X1+1
     DO X2 = 0, MAX_X2+1
        V0(X1,X2) = 0.D0
        V1(X1,X2) = 0.D0
     END DO
```

```
   END DO

ERROR=10000.D0
REP = 0

DO while ((ERROR < -MERROR).OR.(ERROR > MERROR))

  REP = REP + 1

  DO X1 = 0, MAX_X1
    DO X2 = 0, MAX_X2
      IF (X2 == 0) THEN
              IF (X1 == 0) THEN
! EXISOSEIS BELTISTOPOIHSHS GIA X1=X2=0
! GIA X1+X2<=S
                        IF (X1+X2<=S) THEN
                                V1(X1,X2) = ((L1+L2)*V0(X1,X2)+MI*(PRQ(1)*V0(X1+1,X2)+PRQ(2)*V0(X1,X2+1)+
                                            PRQ(3)*(V0(X1,X2)-RC)-GI))/VI
                        ELSE
! GIA X1+X2>S
                                V1(X1,X2) = ((L1+L2)*V0(X1,X2)+MI*V0(X1,X2))/VI
                        END IF
              ELSE
! ANADROMIKES SXESEIS GIA X2=0, X1>0
! GIA X1+X2<=S
                        IF (X1+X2<=S) THEN
                          V1(X1,X2) = (-HI*X1+MI*(PRQ(1)*V0(X1+1,X2)+PRQ(2)*V0(X1,X2+1)+
                                      PRQ(3)*(V0(X1,X2)-RC)-GI))
                          V1(X1,X2) = (V1(X1,X2)+L1*(V0(X1-1,X2)+R1-K1*QC(1))+L2*V0(X1,X2))/VI
                        ELSE
! GIA X1+X2>S
                          V1(X1,X2) = -HI*X1+MI*V0(X1,X2)
                          V1(X1,X2) = (V1(X1,X2)+L1*(V0(X1-1,X2)+R1-K1*QC(1))+L2*V0(X1,X2))/VI
                        END IF
              END IF

      ELSE
           IF (X1 == 0) THEN
! ANADROMIKES SXESEIS GIA X2>0, X1=0
! GIA X1+X2<=S
                IF (X1+X2<=S) THEN
                     V1(X1,X2) = (-HI*X2+MI*(PRQ(1)*V0(X1+1,X2)+PRQ(2)*V0(X1,X2+1)+
                                 PRQ(3)*(V0(X1,X2)-RC)-GI))
                     V1(X1,X2) = (V1(X1,X2)+L1*V0(X1,X2)+L2*(V0(X1,X2-1)+R2-K2*QC(2)))/VI
                ELSE
! GIA X1+X2>S
                     V1(X1,X2) = (-HI*X2+MI*V0(X1,X2))
                     V1(X1,X2) = (V1(X1,X2)+L1*V0(X1,X2)+L2*(V0(X1,X2-1)+R2-K2*QC(2)))/VI
                END IF
           ELSE
! ANADROMIKES SXESEIS GIA X2>0, X1>0
! GIA X1+X2<=S
                 IF (X1+X2<=S) THEN
                      V1(X1,X2) = (-HI*(X1+X2)+MI*(PRQ(1)*V0(X1+1,X2)+PRQ(2)*V0(X1,X2+1)+
                                  PRQ(3)*(V0(X1,X2)-RC)-GI))
                      V1(X1,X2) = (V1(X1,X2)+L1*(V0(X1-1,X2)+R1-K1*QC(1))+L2*(V0(X1,X2-1)+R2-K2*QC(2)))/VI
                 ELSE
! GIA X1+X2>S
                      V1(X1,X2) = (-HI*(X1+X2)+MI*V0(X1,X2))
                      V1(X1,X2) = (V1(X1,X2)+L1*(V0(X1-1,X2)+R1-K1*QC(1))+L2*(V0(X1,X2-1)+R2-K2*QC(2)))/VI
                 END IF
           END IF
      END IF
    END DO
  END DO

  DO X2 = 0, MAX_X2+1
     V0(MAX_X1+1,X2) = 2*V1(MAX_X1,X2)-V1(MAX_X1-1,X2)
```

```
  END DO

  DO X1 = 0, MAX_X1+1
     V0(X1,MAX_X2+1) = 2*V1(X1,MAX_X2)-V1(X1,MAX_X2-1)
  END DO

  MAX_DIF = 0.D0
  MIN_DIF = 10000000000000000.D0

   DO X1 = 0, MAX_X1
              DO X2 = 0, MAX_X2
                 DIF = V1(X1,X2)-V0(X1,X2)
                 IF (DIF < 0) THEN
                    DIF = - DIF
                 END IF
                 IF (DIF < MIN_DIF) THEN
                    MIN_DIF = DIF
                END IF
                IF (DIF > MAX_DIF) THEN
                   MAX_DIF = DIF
                END IF

              END DO
   END DO

  ERROR = MAX_DIF-MIN_DIF

   DO X1 = 0, MAX_X1
              DO X2 = 0, MAX_X2
                  V0(X1,X2) = V1(X1,X2)
              END DO
   END DO
END DO

   IF (MAX_DIF*VI > OPT_AVG_REV) THEN
      OPT_AVG_REV = MAX_DIF*VI
      OPT_S = S
   END IF
END DO
!------ END OF OPTIMAL POLICY ASSESSMENT------------------------------------------

!------ RESULTS PRESENTATION -----------------------------------------------------

PRINT*,"OPT_AVG_REV_1=",OPT_AVG_REV
PRINT*,"OPT_S1=",OPT_S

READ*

OPEN(1,FILE="results.dat",position="rewind",status="replace")

WRITE (1,"(a,d16.10)") 'L1=',L1
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'L2=',L2
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'MI=',MI
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'HI=',HI
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'R1=',R1
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'R2=',R2
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'RC=',RC
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'GI=',GI
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'K1=',K1
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'K2=',K2
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'D1=',D1
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'D2=',D2
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'AVG=',AVG
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'TRG=',TRG
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'STDV=',STDV
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'P1=',PRQ(1)
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'P2=',PRQ(2)
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'P3=',PRQ(3)
```

```
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'QC11=',K1*QC(1)
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'QC12=',K2*QC(1)
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'QC21=',K1*QC(2)
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'QC22=',K2*QC(2)
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'ERROR=',ERROR
WRITE (1,*) 'REP=',REP
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'OPT_AVG_REV_1=',OPT_AVG_REV
WRITE (1,"(a,I4)") 'OPT_S1=',OPT_S

WRITE(1,*)
CLOSE(1)

CALL RESULTS(OPT_AVG_REV=OPT_AVG_REV)
READ*

END PROGRAM TWO_CUSTOMER_CLASSES_QUALITY_POL_1
```

ΚΩΔΙΚΑΣ 2
ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΚΕΡΔΟΥΣ ΤΗΣ ΠΟΛ_2

```
MODULE ALL_SUBROUTINES
IMPLICIT NONE
INTEGER, PARAMETER :: RK = 8
CONTAINS
SUBROUTINE RESULTS( OPT_AVG_REV)
IMPLICIT NONE
REAL(RK), INTENT(IN) :: OPT_AVG_REV

PRINT*,"OPT_AVG_REV_2=",OPT_AVG_REV

END SUBROUTINE RESULTS
END MODULE ALL_SUBROUTINES

PROGRAM TWO_CUSTOMER_CLASSES_QUALITY_POL_2
USE ALL_SUBROUTINES
IMPLICIT NONE
INTEGER, PARAMETER :: MAX_X1a = 210, MAX_X2a = 210
INTEGER :: N, K, I, J, X1, X2, REP, S
INTEGER :: MAX_X1, MAX_X2, MAXK, MAX_S, OPT_S

REAL(RK) :: L1, L2, MI, HI, R1, R2, RC, GI, VI, K1, K2, D1, D2, AVG, TRG, STDV
REAL(RK) :: MERROR, ERROR, MIN_DIF, MAX_DIF, DIF, PI
REAL(RK) :: Z, Z1, FZ, FZ1, STEP, OPT_AVG_REV, TEMP1,TEMP2, STEP_TH

REAL(RK), DIMENSION (0:MAX_X1a, 0:MAX_X2a) :: V0
REAL(RK), DIMENSION (0:MAX_X1a, 0:MAX_X2a) :: V1
REAl(RK), DIMENSION (1:3) :: PRQ
REAl(RK), DIMENSION (1:2) :: QC
REAl(RK), DIMENSION (1:2) :: THR

!REAL(RK), DIMENSION (1:10000) :: TEST
!REAL(RK), DIMENSION (0:MAX_Sa+MAX_C1a+MAX_C2a,0:MAX_C2a) :: COMBIN
!INTEGER :: N, K, I, ADJ, TURN, LENGTH

OPEN (2, FILE='INPUT.DAT', STATUS='OLD')
READ (2,*) MAX_S
READ (2,*) MAX_X1
READ (2,*) MAX_X2
READ (2,*) L1
READ (2,*) L2
READ (2,*) MI
READ (2,*) HI
READ (2,*) R1
READ (2,*) R2
READ (2,*) RC
READ (2,*) GI
READ (2,*) K1
READ (2,*) K2
READ (2,*) D1
READ (2,*) D2
READ (2,*) AVG
READ (2,*) TRG
READ (2,*) STDV
READ (2,*) MERROR

VI = L1+L2+MI

!------------- QUALITY COSTS ASSESSMENT -------------------------------

MAXK = 1000000
STEP_TH=(D2-D1)
STEP = STEP_TH/MAXK
PI = 3.141592654
Z = TRG-D2
```

```
FZ = exp(-(((Z-AVG)**2)/(2*(STDV**2))))/(SQRT(2*PI)*STDV)

DO N = 2, 1, -1
  PRQ(N) = 0.D0
  IF ( N == 1) THEN
    STEP_TH=D1
    STEP = STEP_TH/MAXK
    THR(N) = D1
  ELSE
    THR(N) = D2
    THR(N-1) = D1
  END IF
  Z = TRG-THR(N)
  DO K = 1, MAXK
     Z1 = Z+STEP
     FZ1 = exp(-(((Z1-AVG)**2)/(2*(STDV**2))))/(SQRT(2*PI)*STDV)
            PRQ(N)=PRQ(N)+((FZ1+FZ)*STEP)/2.D0
            Z = Z1
            FZ = FZ1
  END DO
  IF ( N == 1) THEN
     Z = TRG
  ELSE
     Z = TRG+D1
  END IF
  FZ = exp(-(((Z-AVG)**2)/(2*(STDV**2))))/(SQRT(2*PI)*STDV)

  DO K = 1, MAXK
    Z1 = Z+STEP
    FZ1 = exp(-(((Z1-AVG)**2)/(2*(STDV**2))))/(SQRT(2*PI)*STDV)
            PRQ(N)=PRQ(N)+((FZ1+FZ)*STEP)/2.D0
            Z = Z1
            FZ = FZ1
  END DO
END DO

DO N = 1, 2
  IF ( N == 1) THEN
       QC(N)=-((STDV)/(SQRT(2*PI)))*((TRG+THR(N)-AVG)*EXP(-((TRG+THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2))-
              (TRG-THR(N)-AVG)*EXP(-((TRG-THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2)))
       QC(N)=QC(N)-((2*(AVG-TRG)*STDV)/(SQRT(2*PI)))*(EXP(-((TRG+THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2))-
             EXP(-((TRG-THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2)))+((AVG-TRG)**2+STDV**2)*PRQ(N)
  ELSE
       TEMP1=((TRG+THR(N)-AVG)*EXP(-((TRG+THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2))-
                (TRG-THR(N)-AVG)*EXP(-((TRG-THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2)))
       TEMP2=((TRG+THR(N-1)-AVG)*EXP(-((TRG+THR(N-1)-AVG)**2)/(2*STDV**2))-
                (TRG-THR(N-1)-AVG)*EXP(-((TRG-THR(N-1)-AVG)**2)/(2*STDV**2)))
       QC(N)=-((STDV)/(SQRT(2*PI)))*(TEMP1-TEMP2)
       TEMP1=(EXP(-((TRG+THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2))-EXP(-((TRG-THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2)))
       TEMP2=(EXP(-((TRG+THR(N-1)-AVG)**2)/(2*STDV**2))-EXP(-((TRG-THR(N-1)-AVG)**2)/(2*STDV**2)))
       QC(N)=QC(N)-((2*(AVG-TRG)*STDV)/(SQRT(2*PI)))*(TEMP1-TEMP2)+((AVG-TRG)**2+STDV**2)*PRQ(N)
  END IF
END DO

PRQ(3) = 1.D0-PRQ(1)-PRQ(2)

!-------------- END OF QUALITY COSTS ASSESSMENT --------------------------------

!--------------OPTIMAL POLICY ASSESSMENT (DYNAMIC PROGRAMMING) --------------------------------
OPT_S = 1
OPT_AVG_REV = 0

DO S = 1, MAX_S
   DO X1 = 0, MAX_X1+1
     DO X2 = 0, MAX_X2+1
       V0(X1,X2) = 0.D0
       V1(X1,X2) = 0.D0
     END DO
```

```
   END DO

ERROR=10000.D0
REP = 0

DO while ((ERROR < -MERROR).OR.(ERROR > MERROR))

  REP = REP + 1

  DO X1 = 0, MAX_X1
    DO X2 = 0, MAX_X2
      IF (X2 == 0) THEN
           IF (X1 == 0) THEN
! ANADROMIKES SXESEIS GIA X1=X2=0
! GIA X1+X2<=S
                IF (X1+X2<=S) THEN
                     V1(X1,X2) = ((L1+L2)*V0(X1,X2)+MI*(PRQ(1)*V0(X1+1,X2)+PRQ(2)*V0(X1,X2+1)+
                                    PRQ(3)*(V0(X1,X2)-RC)-GI))/VI
                ELSE
! GIA X1+X2>S
                     V1(X1,X2) = ((L1+L2)*V0(X1,X2)+MI*V0(X1,X2))/VI
                END IF

           ELSE
! ANADROMIKES SXESEIS GIA X2=0, X1>0
! GIA X1+X2<=S
                 IF (X1+X2<=S) THEN
                      V1(X1,X2) = (-HI*X1+MI*(PRQ(1)*V0(X1+1,X2)+PRQ(2)*V0(X1,X2+1)+PRQ(3)*(V0(X1,X2)-RC)-GI))
                      V1(X1,X2) = (V1(X1,X2)+L1*(V0(X1-1,X2)+R1-K1*QC(1))+L2*(V0(X1-1,X2)+R2-K2*QC(1)))/VI

                 ELSE
! GIA X1+X2>S
                      V1(X1,X2) = -HI*X1+MI*V0(X1,X2)
                      V1(X1,X2) = (V1(X1,X2)+L1*(V0(X1-1,X2)+R1-K1*QC(1))+L2*(V0(X1-1,X2)+R2-K2*QC(1)))/VI
                 END IF
            END IF

      ELSE
             IF (X1 == 0) THEN
! ANADROMIKES SXESEIS GIA X2>0, X1=0
! GIA X1+X2<=S
                      IF (X1+X2<=S) THEN
                         V1(X1,X2) = (-HI*X2+MI*(PRQ(1)*V0(X1+1,X2)+PRQ(2)*V0(X1,X2+1)+PRQ(3)*(V0(X1,X2)-RC)-GI))
                         V1(X1,X2) = (V1(X1,X2)+L1*V0(X1,X2)+L2*(V0(X1,X2-1)+R2-K2*QC(2)))/VI
                      ELSE
! GIA X1+X2>S
                         V1(X1,X2) = (-HI*X2+MI*V0(X1,X2))
                         V1(X1,X2) = (V1(X1,X2)+L1*V0(X1,X2)+L2*(V0(X1,X2-1)+R2-K2*QC(2)))/VI
                      END IF

             ELSE
! ANADROMIKES SXESEIS GIA X2>0, X1>0
! GIA X1+X2<=S
                       IF (X1+X2<=S) THEN
                              V1(X1,X2) = (-HI*(X1+X2)+MI*(PRQ(1)*V0(X1+1,X2)+PRQ(2)*V0(X1,X2+1)+
                                           PRQ(3)*(V0(X1,X2)-RC)-GI))
                              V1(X1,X2) = (V1(X1,X2)+L1*(V0(X1-1,X2)+R1-K1*QC(1))+L2*(V0(X1,X2-1)+R2-K2*QC(2)))/VI
                       ELSE
! GIA X1+X2>S
                              V1(X1,X2) = (-HI*(X1+X2)+MI*V0(X1,X2))
                              V1(X1,X2) = (V1(X1,X2)+L1*(V0(X1-1,X2)+R1-K1*QC(1))+L2*(V0(X1,X2-1)+R2-K2*QC(2)))/VI
                       END IF
             END IF
      END IF

    END DO
  END DO
```

```
  DO X2 = 0, MAX_X2+1
   V0(MAX_X1+1,X2) = 2*V1(MAX_X1,X2)-V1(MAX_X1-1,X2)
  END DO

  DO X1 = 0, MAX_X1+1
   V0(X1,MAX_X2+1) = 2*V1(X1,MAX_X2)-V1(X1,MAX_X2-1)
  END DO

  MAX_DIF = 0.D0
  MIN_DIF = 10000000000000000.D0

   DO X1 = 0, MAX_X1
        DO X2 = 0, MAX_X2
             DIF = V1(X1,X2)-V0(X1,X2)
             IF (DIF < 0) THEN
                 DIF = - DIF
             END IF
             IF (DIF < MIN_DIF) THEN
                 MIN_DIF = DIF
             END IF
             IF (DIF > MAX_DIF) THEN
                 MAX_DIF = DIF
             END IF
         END DO
   END DO

  ERROR = MAX_DIF-MIN_DIF

   DO X1 = 0, MAX_X1
            DO X2 = 0, MAX_X2
                V0(X1,X2) = V1(X1,X2)
            END DO
   END DO
END DO

   IF (MAX_DIF*VI > OPT_AVG_REV) THEN
       OPT_AVG_REV = MAX_DIF*VI
       OPT_S = S
   END IF
END DO
!------ END OF OPTIMAL POLICY ASSESSMENT------------------------------------------

!------ RESULTS PRESENTATION -----------------------------------------------------

PRINT*,"OPT_AVG_REV_2=",OPT_AVG_REV
PRINT*,"OPT_S2=",OPT_S

READ*

OPEN(1,FILE="results.dat",position="rewind",status="replace")

WRITE (1,"(a,d16.10)") 'L1=',L1
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'L2=',L2
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'MI=',MI
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'HI=',HI
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'R1=',R1
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'R2=',R2
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'RC=',RC
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'GI=',GI
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'K1=',K1
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'K2=',K2
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'D1=',D1
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'D2=',D2
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'AVG=',AVG
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'TRG=',TRG
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'STDV=',STDV
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'P1=',PRQ(1)
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'P2=',PRQ(2)
```

```
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'P3=',PRQ(3)
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'QC11=',K1*QC(1)
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'QC12=',K2*QC(1)
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'QC21=',K1*QC(2)
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'QC22=',K2*QC(2)
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'ERROR=',ERROR
WRITE (1,*) 'REP=',REP
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'OPT_AVG_REV_2=',OPT_AVG_REV
WRITE (1,"(a,I4)") 'OPT_S2=',OPT_S

WRITE(1,*)
CLOSE(1)

CALL RESULTS(OPT_AVG_REV=OPT_AVG_REV)

READ*

END PROGRAM TWO_CUSTOMER_CLASSES_QUALITY_POL_2
```

ΚΩΔΙΚΑΣ 3
ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΚΕΡΔΟΥΣ ΤΗΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ ΠΟΛ_3

```
MODULE ALL_SUBROUTINES
IMPLICIT NONE
INTEGER, PARAMETER :: RK = 8
CONTAINS
SUBROUTINE RESULTS ( OPT_AVG_REV)
IMPLICIT NONE
REAL(RK), INTENT(IN) :: OPT_AVG_REV

PRINT*,"OPT_AVG_REV=", OPT_AVG_REV

END SUBROUTINE RESULTS
END MODULE ALL_SUBROUTINES

PROGRAM TWO_CUSTOMER_CLASSES_QUALITY_POL_3
USE ALL_SUBROUTINES
IMPLICIT NONE
INTEGER, PARAMETER :: MAX_X1a = 210, MAX_X2a = 210
INTEGER :: N, K, I, J, X1, X2, REP, S, c
INTEGER :: MAX_X1, MAX_X2, MAXK, MAX_S, OPT_S, OPT_c

REAL(RK) :: L1, L2, MI, HI, R1, R2, RC, GI, VI, K1, K2, D1, D2, AVG, TRG, STDV
REAL(RK) :: MERROR, ERROR, MIN_DIF, MAX_DIF, DIF, PI
REAL(RK) :: Z, Z1, FZ, FZ1, STEP, OPT_AVG_REV, TEMP1,TEMP2, STEP_TH

REAL(RK), DIMENSION (0:MAX_X1a, 0:MAX_X2a) :: V0
REAL(RK), DIMENSION (0:MAX_X1a, 0:MAX_X2a) :: V1
REAl(RK), DIMENSION (1:3) :: PRQ
REAl(RK), DIMENSION (1:2) :: QC
REAl(RK), DIMENSION (1:2) :: THR

!REAL(RK), DIMENSION (1:10000) :: TEST
!REAL(RK), DIMENSION (0:MAX_Sa+MAX_C1a+MAX_C2a,0:MAX_C2a) :: COMBIN
!INTEGER :: N, K, I, ADJ, TURN, LENGTH

OPEN (2, FILE='INPUT.DAT', STATUS='OLD')
READ (2,*) MAX_S
READ (2,*) MAX_X1
READ (2,*) MAX_X2
READ (2,*) L1
READ (2,*) L2
READ (2,*) MI
READ (2,*) HI
READ (2,*) R1
READ (2,*) R2
READ (2,*) RC
READ (2,*) GI
READ (2,*) K1
READ (2,*) K2
READ (2,*) D1
READ (2,*) D2
READ (2,*) AVG
READ (2,*) TRG
READ (2,*) STDV
READ (2,*) MERROR

VI = L1+L2+MI

!-------------- QUALITY COSTS ASSESSMENT --------------------------------

MAXK = 1000000
STEP_TH=(D2-D1)
STEP = STEP_TH/MAXK
```

```
PI = 3.141592654
Z = TRG-D2
FZ = exp(-(((Z-AVG)**2)/(2*(STDV**2))))/(SQRT(2*PI)*STDV)

DO N = 2, 1, -1
    PRQ(N) = 0.D0
    IF ( N == 1) THEN
        STEP_TH=D1
        STEP = STEP_TH/MAXK
        THR(N) = D1
    ELSE
        THR(N) = D2
        THR(N-1) = D1
    END IF
  Z = TRG-THR(N)
  DO K = 1, MAXK
    Z1 = Z+STEP
    FZ1 = exp(-(((Z1-AVG)**2)/(2*(STDV**2))))/(SQRT(2*PI)*STDV)
            PRQ(N)=PRQ(N)+((FZ1+FZ)*STEP)/2.D0
    Z = Z1
    FZ = FZ1
  END DO
  IF ( N == 1) THEN
      Z = TRG
  ELSE
      Z = TRG+D1
  END IF
  FZ = exp(-(((Z-AVG)**2)/(2*(STDV**2))))/(SQRT(2*PI)*STDV)

  DO K = 1, MAXK
      Z1 = Z+STEP
      FZ1 = exp(-(((Z1-AVG)**2)/(2*(STDV**2))))/(SQRT(2*PI)*STDV)
            PRQ(N)=PRQ(N)+((FZ1+FZ)*STEP)/2.D0
      Z = Z1
      FZ = FZ1
  END DO

END DO

DO N = 1, 2
  IF ( N == 1) THEN
        QC(N)=-((STDV)/(SQRT(2*PI)))*((TRG+THR(N)-AVG)*EXP(-((TRG+THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2))-
                (TRG-THR(N)-AVG)*EXP(-((TRG-THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2)))
        QC(N)=QC(N)-((2*(AVG-TRG)*STDV)/(SQRT(2*PI)))*(EXP(-((TRG+THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2))-
                EXP(-((TRG-THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2)))+((AVG-TRG)**2+STDV**2)*PRQ(N)
  ELSE
        TEMP1=((TRG+THR(N)-AVG)*EXP(-((TRG+THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2))-
                 (TRG-THR(N)-AVG)*EXP(-((TRG-THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2)))
        TEMP2=((TRG+THR(N-1)-AVG)*EXP(-((TRG+THR(N-1)-AVG)**2)/(2*STDV**2))-
                (TRG-THR(N-1)-AVG)*EXP(-((TRG-THR(N-1)-AVG)**2)/(2*STDV**2)))
        QC(N)=-((STDV)/(SQRT(2*PI)))*(TEMP1-TEMP2)
        TEMP1=(EXP(-((TRG+THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2))-EXP(-((TRG-THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2)))
        TEMP2=(EXP(-((TRG+THR(N-1)-AVG)**2)/(2*STDV**2))-EXP(-((TRG-THR(N-1)-AVG)**2)/(2*STDV**2)))
        QC(N)=QC(N)-((2*(AVG-TRG)*STDV)/(SQRT(2*PI)))*(TEMP1-TEMP2)+((AVG-TRG)**2+STDV**2)*PRQ(N)
  END IF
END DO

PRQ(3) = 1.D0-PRQ(1)-PRQ(2)

!-------------- END OF QUALITY COSTS ASSESSMENT --------------------------------

!--------------OPTIMAL POLICY ASSESSMENT (DYNAMIC PROGRAMMING) --------------------------------

OPT_S = 1
OPT_c = 0
OPT_AVG_REV = 0

DO S = 1, MAX_S
```

```
  DO c = 0, S
    DO X1 = 0, MAX_X1+1
      DO X2 = 0, MAX_X2+1
        V0(X1,X2) = 0.D0
        V1(X1,X2) = 0.D0
      END DO
    END DO

ERROR=10000.D0
REP = 0

DO while ((ERROR < -MERROR).OR.(ERROR > MERROR))
  REP = REP + 1

  DO X1 = 0, MAX_X1
    DO X2 = 0, MAX_X2
      IF (X2 == 0) THEN
           IF (X1 == 0) THEN
! ANADROMIKES SXESEIS GIA X1=X2=0
! GIA X1+X2<=S
              IF (X1+X2<=S) THEN
                    V1(X1,X2) = ((L1+L2)*V0(X1,X2)+MI*(PRQ(1)*V0(X1+1,X2)+PRQ(2)*V0(X1,X2+1)+
                                 PRQ(3)*(V0(X1,X2)-RC)-GI))/VI
              ELSE
! GIA X1+X2>S
                    V1(X1,X2) = ((L1+L2)*V0(X1,X2)+MI*V0(X1,X2))/VI
              END IF
           ELSE
! ANADROMIKES SXESEIS GIA X2=0, X1>0
! GIA X1+X2<=S KAI X1<=c
             IF (X1 <= S) THEN
                IF (X1 <= c) THEN
                    V1(X1,X2) = (-HI*X1+MI*(PRQ(1)*V0(X1+1,X2)+PRQ(2)*V0(X1,X2+1)+
                                 PRQ(3)*(V0(X1,X2)-RC)-GI))
                    V1(X1,X2) = (V1(X1,X2)+L1*(V0(X1-1,X2)+R1-K1*QC(1))+L2*V0(X1,X2))/VI
                ELSE
! GIA X1+X2<=S KAI X1>c
                    V1(X1,X2) = (-HI*X1+MI*(PRQ(1)*V0(X1+1,X2)+PRQ(2)*V0(X1,X2+1)+
                                 PRQ(3)*(V0(X1,X2)-RC)-GI))
                    V1(X1,X2) = (V1(X1,X2)+L1*(V0(X1-1,X2)+R1-K1*QC(1))+L2*(V0(X1-1,X2)+R2-K2*QC(1)))/VI
                END IF
             ELSE
! GIA X1+X2>S KAI X1<=c
                IF (X1 <= c) THEN
                    V1(X1,X2) = (-HI*X1+MI*V0(X1,X2)+L1*(V0(X1-1,X2)+R1-K1*QC(1))+L2*V0(X1,X2))/VI
                ELSE
! GIA X1+X2>S KAI X1>c
                    V1(X1,X2) = (-HI*X1+MI*V0(X1,X2)+L1*(V0(X1-1,X2)+R1-K1*QC(1))+L2*(V0(X1-1,X2)+
                                 R2-K2*QC(1)))/VI
                 END IF
             END IF
           END IF

      ELSE
         IF (X1 == 0) THEN
! ANADROMIKES SXESEIS GIA X2>0,X1=0
! GIA X1+X2<=S
            IF (X2 <= S) THEN
               V1(X1,X2) = (-HI*X2+MI*(PRQ(1)*V0(X1+1,X2)+PRQ(2)*V0(X1,X2+1)+PRQ(3)*(V0(X1,X2)-RC)-GI))
               V1(X1,X2) = (V1(X1,X2)+L1*(V0(X1,X2-1)+R1-K1*QC(2))+L2*(V0(X1,X2-1)+R2-K2*QC(2)))/VI
            ELSE
! GIA X1+X2>S
               V1(X1,X2) = (-HI*X2+MI*V0(X1,X2)+L1*(V0(X1,X2-1)+R1-K1*QC(2))+L2*(V0(X1,X2-1)+
                            R2-K2*QC(2)))/VI
            END IF
         ELSE
! ANADROMIKES SXESEIS GIA X2>0,X1>0
! GIA X1+X2<=S
```

```
            IF (X1+X2 <= S) THEN
               V1(X1,X2) = (-HI*(X1+X2)+MI*(PRQ(1)*V0(X1+1,X2)+PRQ(2)*V0(X1,X2+1)+PRQ(3)*(V0(X1,X2)-RC)-GI))
               V1(X1,X2) = (V1(X1,X2)+L1*(V0(X1-1,X2)+R1-K1*QC(1))+L2*(V0(X1,X2-1)+R2-K2*QC(2)))/VI
            ELSE
! GIA X1+X2>S
               V1(X1,X2) = (-HI*(X1+X2)+MI*V0(X1,X2)+L1*(V0(X1-1,X2)+R1-K1*QC(1))+L2*(V0(X1,X2-1)+
                              R2-K2*QC(2)))/VI
            END IF
          END IF
      END IF
    END DO
  END DO

  DO X2 = 0, MAX_X2+1
       V0(MAX_X1+1,X2) = 2*V1(MAX_X1,X2)-V1(MAX_X1-1,X2)
  END DO

  DO X1 = 0, MAX_X1+1
      V0(X1,MAX_X2+1) = 2*V1(X1,MAX_X2)-V1(X1,MAX_X2-1)
  END DO

  MAX_DIF = 0.D0
  MIN_DIF = 10000000000000000.D0

    DO X1 = 0, MAX_X1
         DO X2 = 0, MAX_X2
              DIF = V1(X1,X2)-V0(X1,X2)
              IF (DIF < 0) THEN
                  DIF = - DIF
              END IF
              IF (DIF < MIN_DIF) THEN
                  MIN_DIF = DIF
              END IF
              IF (DIF > MAX_DIF) THEN
                  MAX_DIF = DIF
              END IF
         END DO
    END DO

  ERROR = MAX_DIF-MIN_DIF

    DO X1 = 0, MAX_X1
        DO X2 = 0, MAX_X2
             V0(X1,X2) = V1(X1,X2)
       END DO
    END DO
END DO
    IF (MAX_DIF*VI > OPT_AVG_REV) THEN
       OPT_AVG_REV = MAX_DIF*VI
       OPT_S = S
       OPT_c = c
    END IF

  END DO
END DO

!------ END OF OPTIMAL POLICY ASSESSMENT------------------------------------------

!------ RESULTS PRESENTATION -----------------------------------------------------

PRINT*,"OPT_AVG_REV_3=",OPT_AVG_REV
PRINT*,"OPT_S3=",OPT_S
PRINT*,"OPT_c3=",OPT_c

READ*

OPEN(1,FILE="results.dat",position="rewind",status="replace")
```

```
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'L1=',L1
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'L2=',L2
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'MI=',MI
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'HI=',HI
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'R1=',R1
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'R2=',R2
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'RC=',RC
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'GI=',GI
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'K1=',K1
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'K2=',K2
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'D1=',D1
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'D2=',D2
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'AVG=',AVG
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'TRG=',TRG
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'STDV=',STDV
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'P1=',PRQ(1)
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'P2=',PRQ(2)
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'P3=',PRQ(3)
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'QC11=',K1*QC(1)
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'QC12=',K2*QC(1)
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'QC21=',K1*QC(2)
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'QC22=',K2*QC(2)
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'ERROR=',ERROR
WRITE (1,*) 'REP=',REP
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'OPT_AVG_REV_3=',OPT_AVG_REV
WRITE (1,"(a,I4)") 'OPT_S3=',OPT_S
WRITE (1,"(a,I4)") 'OPT_c3=',OPT_c

WRITE(1,*)
CLOSE(1)

CALL RESULTS(OPT_AVG_REV=OPT_AVG_REV)

READ*

END PROGRAM TWO_CUSTOMER_CLASSES_QUALITY_POL_3
```

ΚΩΔΙΚΑΣ 4
ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΚΕΡΔΟΥΣ ΤΗΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ ΠΟΛ_4

```
MODULE ALL_SUBROUTINES
IMPLICIT NONE
INTEGER, PARAMETER :: RK = 8
CONTAINS
SUBROUTINE RESULTS( OPT_AVG_REV)
IMPLICIT NONE
REAL(RK), INTENT(IN) :: OPT_AVG_REV

PRINT*,"OPT_AVG_REV_3=",OPT_AVG_REV

END SUBROUTINE RESULTS
END MODULE ALL_SUBROUTINES

PROGRAM TWO_CUSTOMER_CLASSES_QUALITY_POL_4
USE ALL_SUBROUTINES
IMPLICIT NONE
INTEGER, PARAMETER :: MAX_X1a = 210, MAX_X2a = 210
INTEGER :: N, K, I, J, X1, X2, REP, S, c, m
INTEGER :: MAX_X1, MAX_X2, MAXK, MAX_S, OPT_S, OPT_c, OPT_m

REAL(RK) :: L1, L2, MI, HI, R1, R2, RC, GI, VI, K1, K2, D1, D2, AVG, TRG, STDV
REAL(RK) :: MERROR, ERROR, MIN_DIF, MAX_DIF, DIF, PI
REAL(RK) :: Z, Z1, FZ, FZ1, STEP, OPT_AVG_REV, TEMP1, TEMP2, STEP_TH

REAL(RK), DIMENSION (0:MAX_X1a, 0:MAX_X2a) :: V0
REAL(RK), DIMENSION (0:MAX_X1a, 0:MAX_X2a) :: V1
REAl(RK), DIMENSION (1:3) :: PRQ
REAl(RK), DIMENSION (1:2) :: QC
REAl(RK), DIMENSION (1:2) :: THR

!REAL(RK), DIMENSION (1:10000) :: TEST
!REAL(RK), DIMENSION (0:MAX_Sa+MAX_C1a+MAX_C2a,0:MAX_C2a) :: COMBIN
!INTEGER :: N, K, I, ADJ, TURN, LENGTH

OPEN (2, FILE='INPUT.DAT', STATUS='OLD')
READ (2,*) MAX_S
READ (2,*) MAX_X1
READ (2,*) MAX_X2
READ (2,*) L1
READ (2,*) L2
READ (2,*) MI
READ (2,*) HI
READ (2,*) R1
READ (2,*) R2
READ (2,*) RC
READ (2,*) GI
READ (2,*) K1
READ (2,*) K2
READ (2,*) D1
READ (2,*) D2
READ (2,*) AVG
READ (2,*) TRG
READ (2,*) STDV
READ (2,*) MERROR

VI = L1+L2+MI

!-------------- QUALITY COSTS ASSESSMENT --------------------------------

MAXK = 1000000
STEP_TH=(D2-D1)
STEP = STEP_TH/MAXK
PI = 3.141592654
```

```
Z = TRG-D2
FZ = exp(-(((Z-AVG)**2)/(2*(STDV**2))))/(SQRT(2*PI)*STDV)

DO N = 2, 1, -1
  PRQ(N) = 0.D0
  IF ( N == 1) THEN
      STEP_TH=D1
      STEP = STEP_TH/MAXK
      THR(N) = D1
  ELSE
      THR(N) = D2
      THR(N-1) = D1
  END IF
  Z = TRG-THR(N)
  DO K = 1, MAXK
     Z1 = Z+STEP
     FZ1 = exp(-(((Z1-AVG)**2)/(2*(STDV**2))))/(SQRT(2*PI)*STDV)
     PRQ(N)=PRQ(N)+((FZ1+FZ)*STEP)/2.D0
     Z = Z1
     FZ = FZ1
  END DO

IF ( N == 1) THEN
      Z = TRG
ELSE
      Z = TRG+D1
END IF
FZ = exp(-(((Z-AVG)**2)/(2*(STDV**2))))/(SQRT(2*PI)*STDV)

  DO K = 1, MAXK
    Z1 = Z+STEP
    FZ1 = exp(-(((Z1-AVG)**2)/(2*(STDV**2))))/(SQRT(2*PI)*STDV)
    PRQ(N)=PRQ(N)+((FZ1+FZ)*STEP)/2.D0
    Z = Z1
    FZ = FZ1
  END DO

END DO

DO N = 1, 2
  IF ( N == 1) THEN
      QC(N)=-((STDV)/(SQRT(2*PI)))*((TRG+THR(N)-AVG)*EXP(-((TRG+THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2))-
                 (TRG-THR(N)-AVG)*EXP(-((TRG-THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2)))
      QC(N)=QC(N)-((2*(AVG-TRG)*STDV)/(SQRT(2*PI)))*(EXP(-((TRG+THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2))-
                EXP(-((TRG-THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2)))+((AVG-TRG)**2+STDV**2)*PRQ(N)
  ELSE
      TEMP1=((TRG+THR(N)-AVG)*EXP(-((TRG+THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2))-
                (TRG-THR(N)-AVG)*EXP(-((TRG-THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2)))
      TEMP2=((TRG+THR(N-1)-AVG)*EXP(-((TRG+THR(N-1)-AVG)**2)/(2*STDV**2))-
                (TRG-THR(N-1)-AVG)*EXP(-((TRG-THR(N-1)-AVG)**2)/(2*STDV**2)))
      QC(N)=-((STDV)/(SQRT(2*PI)))*(TEMP1-TEMP2)
      TEMP1=(EXP(-((TRG+THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2))-EXP(-((TRG-THR(N)-AVG)**2)/(2*STDV**2)))
      TEMP2=(EXP(-((TRG+THR(N-1)-AVG)**2)/(2*STDV**2))-EXP(-((TRG-THR(N-1)-AVG)**2)/(2*STDV**2)))
      QC(N)=QC(N)-((2*(AVG-TRG)*STDV)/(SQRT(2*PI)))*(TEMP1-TEMP2)+((AVG-TRG)**2+STDV**2)*PRQ(N)
  END IF
END DO

PRQ(3) = 1.D0-PRQ(1)-PRQ(2)

!-------------- END OF QUALITY COSTS ASSESSMENT --------------------------------

!--------------OPTIMAL POLICY ASSESSMENT (DYNAMIC PROGRAMMING) --------------------------------

OPT_S = 1
OPT_c = 0
OPT_m = 0
OPT_AVG_REV = 0
```

```
DO S = 1, MAX_S
  DO c = 0, S
    DO m= 0, S
      DO X1 = 0, MAX_X1+1
        DO X2 = 0, MAX_X2+1
             V0(X1,X2) = 0.D0
             V1(X1,X2) = 0.D0
        END DO
      END DO

ERROR=10000.D0
REP = 0

DO while ((ERROR < -MERROR).OR.(ERROR > MERROR))
  REP = REP + 1
  DO X1 = 0, MAX_X1
     DO X2 = 0, MAX_X2
        IF (X2 == 0) THEN
            IF (X1 == 0) THEN
! ANADRONIKES SXESEIS GIA X1=X2=0
! GIA X1+X2<=S
                  IF (X1+X2<=S) THEN
                       V1(X1,X2) = ((L1+L2)*V0(X1,X2)+MI*(PRQ(1)*V0(X1+1,X2)+PRQ(2)*V0(X1,X2+1)+
                                        PRQ(3)*(V0(X1,X2)-RC)-GI))/VI
                  ELSE
! GIA X1+X2>S
                       V1(X1,X2) = ((L1+L2)*V0(X1,X2)+MI*V0(X1,X2))/VI
                  END IF
            ELSE
! ANADRONIKES SXESEIS GIA X2=0, X1>0
! GIA X1+X2<=S KAI X1<=c
                   IF (X1 <= S) THEN
                       IF (X1 <= c) THEN
                         V1(X1,X2) = (-HI*X1+MI*(PRQ(1)*V0(X1+1,X2)+PRQ(2)*V0(X1,X2+1)+PRQ(3)*(V0(X1,X2)-RC)-GI))
                         V1(X1,X2) = (V1(X1,X2)+L1*(V0(X1-1,X2)+R1-K1*QC(1))+L2*V0(X1,X2))/VI
                       ELSE
! GIA X1+X2<=S KAI X1>c
                         V1(X1,X2) = (-HI*X1+MI*(PRQ(1)*V0(X1+1,X2)+PRQ(2)*V0(X1,X2+1)+PRQ(3)*(V0(X1,X2)-RC)-GI))
                         V1(X1,X2) = (V1(X1,X2)+L1*(V0(X1-1,X2)+R1-K1*QC(1))+L2*(V0(X1-1,X2)+R2-K2*QC(1)))/VI
                       END IF
                   ELSE
! GIA X1+X2>S KAI X1<=c
                        IF (X1 <= c) THEN
                             V1(X1,X2) = (-HI*X1+MI*V0(X1,X2)+L1*(V0(X1-1,X2)+R1-K1*QC(1))+L2*V0(X1,X2))/VI
                        ELSE
! GIA X1+X2>S KAI X1>c
                             V1(X1,X2) = (-HI*X1+MI*V0(X1,X2)+L1*(V0(X1-1,X2)+R1-K1*QC(1))+L2*(V0(X1-1,X2)+
                                              R2-K2*QC(1)))/VI
                        END IF
                   END IF
            END IF

        ELSE
              IF (X1 == 0) THEN
! ANADRONIKES SXESEIS GIA X2>0,X1=0
! GIA X1+X2<=S KAI X2>m
                       IF (X1+X2 <= S) THEN
                            IF (X2 > m) THEN
                                 V1(X1,X2) = (-HI*X2+MI*(PRQ(1)*V0(X1+1,X2)+PRQ(2)*V0(X1,X2+1)+
                                                  PRQ(3)*(V0(X1,X2)-RC)-GI))
                                 V1(X1,X2) = (V1(X1,X2)+L1*(V0(X1,X2-1)+R1-K1*QC(2))+L2*(V0(X1,X2-1)+
                                                   R2-K2*QC(2)))/VI
                            ELSE
! GIA X1+X2<=S KAI X2<=m
                                  V1(X1,X2) = (-HI*X2+MI*(PRQ(1)*V0(X1+1,X2)+PRQ(2)*V0(X1,X2+1)+
                                                    PRQ(3)*(V0(X1,X2)-RC)-GI))
                                  V1(X1,X2) = (V1(X1,X2)+L1*(V0(X1,X2-1)+R1-K1*QC(2))+L2*(V0(X1,X2)))/VI
                             END IF
```

```
                    ELSE
! GIA X1+X2>S KAI X2>m
                         IF (X2 > m) THEN
                            V1(X1,X2) = (-HI*X2+MI*V0(X1,X2)+L1*(V0(X1,X2-1)+R1-K1*QC(2))+
                                      L2*(V0(X1,X2-1)+R2-K2*QC(2)))/VI
                         ELSE
! GIA X1+X2>S KAI X2<=m
                            V1(X1,X2) = (-HI*X2+MI*V0(X1,X2)+L1*(V0(X1,X2-1)+R1-K1*QC(2))+L2*(V0(X1,X2)))/VI
                         END IF
                    END IF

       ELSE
! ANADROMIKES SXESEIS GIA X2>0,X1>0
! GIA X1+X2<=S KAI X1+X2>m
         IF (X1+X2 <= S) THEN
           IF (X1+X2 > m) THEN
             V1(X1,X2) = (-HI*(X1+X2)+MI*(PRQ(1)*V0(X1+1,X2)+PRQ(2)*V0(X1,X2+1)+PRQ(3)*(V0(X1,X2)-RC)-GI))
             V1(X1,X2) = (V1(X1,X2)+L1*(V0(X1-1,X2)+R1-K1*QC(1))+L2*(V0(X1,X2-1)+R2-K2*QC(2)))/VI
           ELSE
! GIA X1+X2<=S KAI X1+X2<=m
             V1(X1,X2) = (-HI*(X1+X2)+MI*(PRQ(1)*V0(X1+1,X2)+PRQ(2)*V0(X1,X2+1)+PRQ(3)*(V0(X1,X2)-RC)-GI))
             V1(X1,X2) = (V1(X1,X2)+L1*(V0(X1-1,X2)+R1-K1*QC(1))+L2*(V0(X1,X2)))/VI
           END IF
         ELSE
! GIA X1+X2>S KAI X1+X2>m
             IF (X1+X2 > m) THEN
                V1(X1,X2) = (-HI*(X1+X2)+MI*V0(X1,X2)+L1*(V0(X1-1,X2)+R1-K1*QC(1))+L2*(V0(X1,X2-1)+
                          R2-K2*QC(2)))/VI
             ELSE
! GIA X1+X2>S KAI X1+X2<=m
                V1(X1,X2) = (-HI*(X1+X2)+MI*V0(X1,X2)+L1*(V0(X1-1,X2)+R1-K1*QC(1))+L2*(V0(X1,X2)))/VI
             END IF
         END IF
       END IF
     END IF
   END DO
 END DO

 DO X2 = 0, MAX_X2+1
   V0(MAX_X1+1,X2) = 2*V1(MAX_X1,X2)-V1(MAX_X1-1,X2)
 END DO
 DO X1 = 0, MAX_X1+1
   V0(X1,MAX_X2+1) = 2*V1(X1,MAX_X2)-V1(X1,MAX_X2-1)
 END DO

 MAX_DIF = 0.D0
 MIN_DIF = 10000000000000000.D0

DO X1 = 0, MAX_X1
     DO X2 = 0, MAX_X2
          DIF = V1(X1,X2)-V0(X1,X2)
          IF (DIF < 0) THEN
             DIF = - DIF
          END IF
          IF (DIF < MIN_DIF) THEN
             MIN_DIF = DIF
          END IF
          IF (DIF > MAX_DIF) THEN
             MAX_DIF = DIF
          END IF
     END DO
 END DO

 ERROR = MAX_DIF-MIN_DIF

   DO X1 = 0, MAX_X1
      DO X2 = 0, MAX_X2
          V0(X1,X2) = V1(X1,X2)
```

```
        END DO
    END DO
END DO
      IF (MAX_DIF*VI > OPT_AVG_REV) THEN
       OPT_AVG_REV = MAX_DIF*VI
       OPT_S = S
       OPT_c = c
       OPT_m = m
      END IF
    END DO
  END DO
END DO

!------ END OF OPTIMAL POLICY ASSESSMENT------------------------------------------

!------ RESULTS PRESENTATION ----------------------------------------------------

PRINT*,"OPT_AVG_REV_4=",OPT_AVG_REV
PRINT*,"OPT_S4=",OPT_S
PRINT*,"OPT_c4=",OPT_c
PRINT*,"OPT_m=",OPT_m

READ*

OPEN(1,FILE="results.dat",position="rewind",status="replace")

WRITE (1,"(a,d16.10)") 'L1=',L1
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'L2=',L2
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'MI=',MI
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'HI=',HI
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'R1=',R1
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'R2=',R2
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'RC=',RC
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'GI=',GI
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'K1=',K1
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'K2=',K2
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'D1=',D1
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'D2=',D2
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'AVG=',AVG
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'TRG=',TRG
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'STDV=',STDV
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'P1=',PRQ(1)
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'P2=',PRQ(2)
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'P3=',PRQ(3)
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'QC11=',K1*QC(1)
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'QC12=',K2*QC(1)
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'QC21=',K1*QC(2)
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'QC22=',K2*QC(2)
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'ERROR=',ERROR
WRITE (1,*) 'REP=',REP
WRITE (1,"(a,d16.10)") 'OPT_AVG_REV_4=',OPT_AVG_REV
WRITE (1,"(a,I4)") 'OPT_S4=',OPT_S
WRITE (1,"(a,I4)") 'OPT_c4=',OPT_c
WRITE (1,"(a,I4)") 'OPT_m=',OPT_m

WRITE(1,*)
CLOSE(1)

CALL RESULTS(OPT_AVG_REV=OPT_AVG_REV)

READ*

END PROGRAM TWO_CUSTOMER_CLASSES_QUALITY_POL_4
```