Καρανικολοπουλος Σωτηρης

Uniformization Αλγεβρικων Καμπυλων

Μεταπτυχιακη Εργασια

Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Μαθηματικών

Σάμος Ιούνιος 2005.

Εισηγητης: Κοντογεώργης Αριστείδης

Επιτροπη

Μεταφτσής Βασίλειος, επίκουρος καθηγητής,

Κοντογεώργης Αριστείδης, λέκτορας,

Μπεληγιάννης Απόστολος, αναπληρωτής καθηγητής.

Στους γονείς μου.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

An expert, is a man who has made all the mistakes, which can be made, in a very narrow field.
Bohr, Niels Henrik David (1885-1962).

Το ερέθισμα μου δόθηκε στην προπτυχιακή μου εργασία, που εκπονήθηκε με τον κύριο Μεταφτσή, όπου και συνάντησα για πρώτη φορά τους καλυπτικούς χώρους. Το πρώτο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας αποτελεί μία φυσική συνέχεια αυτής. Αφού θυμηθούμε κάποια βασικά αποτελέσματα από την θεωρία των καλυπτικών απεικονίσεων, βλέπουμε συνοπτικά την ομάδα των deck transformations μίας καλυπτικής απεικόνισης που προέρχεται από μία (even) δράση μίας ομάδας G σε αυτήν (G-καλύμματα). Ορίζουμε την (μεταβατική) δράση της ομάδας $\pi_1(X,x)$ στο σύνολο $p^{-1}(x)$ και συμπεραίνουμε ότι η ομάδα των deck transformations μίας καλυπτικής απεικόνισής $p:(Y,y)\to(X,x)$ είναι ισόμορφη με την ομάδα των αυτομορφισμών της αντίστροφης εικόνας $p^{-1}(x)$, βλέποντας το $p^{-1}(x)$ σαν έναν δεξιό $\pi_1(X,x)$-χώρο. Συνδέουμε την μεταβατική δράση των deck transformations στο $p^{-1}(x)$ με την κανονικότητα του καλυπτικού χώρου και συμπεραίνουμε πως αν η ομάδα των deck transformations ενός καλύμματος δρα μεταβατικά σε κάθε φύλλο της καλυπτικής απεικόνισης, τότε το κάλυμμα είναι ένα κανονικό G-κάλυμμα με την G να είναι ισόμορφη με τους deck transformations. Μελετάμε συνθήκες ύπαρξης καθολικού καλύμματος και όλα αυτά για να βρούμε την αντιστοιχία που υπάρχει μεταξύ των υποομάδων της θεμελιώδους ομάδας ενός χώρου και των καλυμμάτων του χώρου αυτού, όπως επίσης και των ενδιάμεσων καλυπτικών απεικονίσεων που «ζουν» μεταξύ ενός χώρου και του καθολικού καλύμματός του, με τις υποομάδες της G για ένα G-κάλυμμα. Διατυπώνουμε το θεώρημα 1.41 καθώς και το θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας Galois με την ένα προς ένα αντιστοιχία των ενδιάμεσων σωμάτων μίας Galois επέκτασης και των υποομάδων της ομάδας Galois, για τον άμεσο συσχετισμό αυτών των δύο.

Στο δεύτερο κεφάλαιο θα δούμε πως ένα αλγεβρικό αντικείμενο, όπως οι αλγεβρικές καμπύλες μπορεί να το δούμε σαν ένα καθαρά αναλυτικό αντικείμενο όπως είναι οι επιφάνειες Riemann. Με τα εργαλεία της ανάλυσης κερδίζουμε την τοπική θέαση του αντικειμένου ενώ με την άλγεβρα την καθολική (μπορούμε να δουλέψουμε πάνω από διάφορα σώματα). Μετά από μία νύξη στις αναλυτικές συναρτήσεις από την μιγαδική ανάλυση, βλέπουμε την μιγαδική δομή των συμπαγών επιφανειών Riemann, ορίζουμε απεικονίσεις μεταξύ αυτών και συμπεραίνουμε ότι κάθε τέτοια αναλυτική απεικόνιση μπορεί να επεκταθεί σε ένα τοπολογικό κάλυμμα «πετώντας» κάποια πεπερασμένα σημεία (σημεία διακλάδωσης) καθώς και την εικόνα αυτών μέσω της αναλυτικής απεικόνισης. Μπορεί όμως να γίνει και το αντίστροφο. Από μία καλυπτική απεικόνιση μπορεί να προκύψει μία αναλυτική απεικόνιση επιφανειών Riemann (που επιτρέπεται να έχει σημεία διακλάδωσης).

Για τον λόγο αυτό μία τέτοια απεικόνιση την ονομάζουμε αναλυτικό κάλυμμα (ή διακλαδιζόμενο). Μετά οδηγούμαστε στο πόρισμα 2.30, όπου κάθε ανάγωγο πολυώνυμο F δύο μεταβλητών στον $\mathbb{C}$ επάγει μία καλυπτική απεικόνιση, από το αλγεβρικό σύνολο μηδενισμού του, στο $\mathbb{C}$ αφαιρώντας ένα πεπερασμένο σύνολο. Γνωρίζοντας ότι καλυπτικές απεικονίσεις επάγουν αναλυτικές και proper συναρτήσεις μεταξύ Riemann επιφανειών: $f : X \to Y$ και παίρνοντας το Y σαν το $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, θα οδηγηθούμε σε μία $f \in \mathcal{M}(X)$, με X να είναι μία συμπαγής επιφάνεια Riemann της αλγεβρικής καμπύλης C ή του πολυωνύμου F. Τέλος μέσω μίας αναφοράς στις υπερβατικές επεκτάσεις βλέπουμε ότι ο βαθμός υπερβατικότητας του σώματος των μερόμορφων συναρτήσεων επί του $\mathbb{C}$ ισούται με την μονάδα, δηλαδή κάθε συμπαγής και συνεκτική επιφάνεια Riemann είναι η επιφάνεια Riemann μίας αλγεβρικής καμπύλης.

Μετά από αυτά, το πρώτο κεφάλαιο και οι επιφάνειες Riemann είναι δύο ανεξάρτητες και αυτόνομες μαθηματικές οντότητες. Τουλάχιστον αυτή ήταν η δική μου άποψη. Στην αρχή ...

Βλέπουμε την συσχέτιση της ομάδας των deck transformations ενός αναλυτικού καλύμματος (που επάγεται από ένα τοπολογικό κάλυμμα και αντιστρόφως), με την ομάδα Galois της επέκτασης των αντίστοιχων μερόμορφων σωμάτων και παρουσιάζουμε μία εφαρμογή αυτής της συχέτισης στο αντίστροφο πρόβλημα της θεωρίας Galois. Επίσης κάθε επιφάνεια Riemann μπορεί να ταξινομηθεί με βάση τον καθολικό καλυπτικό της χώρο! Οι πιθανοί καθολικοί καλυπτικοί χώροι, σαν απλά συνεκτικές επιφάνειες είναι μόνο τρεις (uniformization θεώρημα για επιφάνειες Riemann). Γνωρίζοντας τους αυτομορφισμούς των καθολικών καλυπτικών χώρων μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα για την επιφάνεια μας.

Περνάμε έτσι στο τρίτο κεφάλαιο όπου θα ασχοληθούμε με τις Fuchsian ομάδες πρώτου είδους. Είναι διακριτές υποομάδες της $SL_2(\mathbb{R})$, που όταν δράσουν στο πάνω ανοικτό μιγαδικό ημιεπίπεδο $\mathbb{H}^*$ (που του έχουμε προσθέσει τα cusps της ομάδας), τότε ο χώρος πηλίκο που προκύπτει είναι συμπαγής. Αυτό μας οδηγεί σε συμπαγείς επιφάνειες Riemann. Αρχικά βλέπουμε τις τοπολογικές ομάδες και συνεχείς δράσεις μίας τοπολογικής ομάδας πάνω σε έναν τοπολογικό χώρο. Ορίζουμε (τοπολογικούς) χώρους πηλίκα που προέρχονται από δράσεις υποομάδων της τοπολογικής ομάδας (συμπαγείς, διακριτές). Κάνουμε ταξινόμηση των γραμμικών κλασματικών μετασχηματισμών (και των πινάκων που αυτοί αντιπροσωπεύουν) σε υπερβολικούς, παραβολικούς και ελλειπτικούς και μελετάμε τα σταθερά τους σημεία τα οποία «κληρονομούν» το όνομα του μετασχηματισμού που τα σταθεροποιεί. Τα παραβολικά τα ονομάζουμε cusps και επικεντρώνουμε το ενδιαφέρον μας σε διακριτές υποομάδες της $SL_2(\mathbb{R})$ και ιδιαίτερα στην $\Gamma(1) = SL_2(\mathbb{Z})$. Ορίζουμε μία τοπολογία στον $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \cup \{cusps\}$ της $\Gamma(1)$ και μελετάμε το πηλίκο $\mathbb{H}^*/\Gamma(1)$, που είναι η συμπαγές. Είμαστε πια σε θέση να του δώσουμε την μιγαδική δομή που θα το κάνει μία συμπαγή επιφάνεια Riemann και συνεπώς μία αλγεβρική καμπύλη. Μέσα από την modular ομάδα γνωρίζουμε την θεμελιώδη περιοχή της, από όπου μπορούμε να έχουμε μία καλή γεωμετρική θέαση της modular καμπύλης $X(1)$ (η οποία είναι η αλγεβρική καμπύλη της παραπάνω Riemann επιφάνειας). Περνάμε στις modular και weakly modular συναρτήσεις, που θα μας βοηθήσουν να δούμε ότι η j- αναλλοίωτος συνάρτηση είναι μία modular συνάρτηση που επάγει έναν (αναλυτικό) ισομορφισμό του $X(1)$ με το $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Καταλήγουμε στο uniformization θεώρημα για ελλειπτικές καμπύλες, με το οποίο μπορούμε να ταυτίσουμε τον χώρο των κλάσεων ισοδυναμίας των ελλειπτικών καμπύλων (ισοδύναμες καμπύλες αντιστοιχούν σε καμπύλες με την ίδια j- αναλλοίωτο ή σε ομόθετα lattices μέσω της $\wp$ συνάρτησης) με τον $\mathbb{H}/SL_2(\mathbb{Z})$. Τέλος συμπεραίνουμε ότι δεν είναι δυνατόν να υπάρχει συμπαγοποίηση του χώρου των ελλειπτικών καμπύλων χωρίς να συμπεριλάβουμε σε αυτόν μία ιδιόμορφη και συνεπώς μη ελλειπτική καμπύλη.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ στους κυρίους Β. Μεταφτσή και Α. Μπεληγιάννη. Θα ήθελα τέλος να ευχαριστήσω τον δάσκαλό μου Αριστείδη, που στάθηκε πάντα δίπλα μου σε αυτές τις δημιουργικές και παράλληλα δύσκολες στιγμές που πέρασα κατά την συγγραφή. Το μεράκι και η αγάπη για την δουλειά του θα μου αφήσουν τις καλύτερες αναμνήσεις, εντυπώσεις.

Σ. Καρανικολόπουλος, Σάμος 2005.

Κεφάλαιο 1

Καλυπτικές Απεικονίσεις και Θεωρία Galois

Στόχος μας είναι να φτάσουμε στην συσχέτιση των καλυπτικών απεικονίσεων με το θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας Galois.
Στο πρώτο μέρος θα δούμε κάποια βασικά σημεία της θεωρίας των καλυπτικών απεικονίσεων. Σαν βάση έχουμε πάρει την εργασία του [2].
Στο δεύτερο μέρος του παρόντος κεφαλαίου θα δούμε συνοπτικά, κάποια στοιχεία από την θεωρία Galois, για να φτάσουμε στο θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας Galois. Έπειτα θα επιχειρήσουμε να αναδείξουμε τους δεσμούς ανάμεσα στους δύο αυτούς μαθηματικούς κλάδους.

1.1 Καλυπτικές Απεικονίσεις

Όπου δεν αναφέρονται συγκεκριμένα στοιχεία για τους χώρους που θα πραγματευτούμε σε αυτό το κεφάλαιο, θα υποθέτουμε ότι είναι δρομοσυνεκτικοί και τοπικά δρομοσυνεκτικοί. Θα αρχίσουμε υπενθυμίζοντας ένα θεώρημα από τις καλυπτικές απεικονίσεις, καθώς και ένα άμεσο πόρισμα αυτού [1]:

Θεώρημα 1.1. *Αν $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ είναι καλυπτική απεικόνιση και ο Y ένας δρομοσυνεκτικός χώρος, τότε υπάρχει μια επί απεικόνιση*

$$\phi : \pi_1(X, x_0) \to p^{-1}(x_0).$$

Αν ο Y είναι απλά συνεκτικός τότε η ϕ είναι 1-1 και επί.

Με p_* εννοούμε τον επαγόμενο[2], από την καλυπτική απεικόνιση ομομορφισμό.

Πόρισμα 1.2. (i)*Η $p_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0)$ είναι ένας μονομορφισμός.*

(ii) *Υπάρχει μία 1-1 και επί απεικόνιση*

$$\Phi : \pi_1(X, x_0)/H \to p^{-1}(x_0)$$

όπου $H = p_*(\pi_1(Y, y_0))$ και $\pi_1(X, x_0)/H$ δηλώνει τη συλλογή δεξιών συμπλόκων του H στην $\pi_1(X, x_0)$.

---

[1] Για τις αποδείξεις αυτών βλέπε [2] σελίδες 33 και 36 αντίστοιχα.
[2] Βλέπε [2] ορισμό 3.4 σελίδα 15.

Από το πρώτο θεώρημα ισομορφισμών προκύπτει εύκολα ότι:
$\pi_1(Y, y_0)/Kerp_* \cong Imp_*$ και άρα $\pi_1(Y, y_0) \cong p_*(\pi_1(Y, y_0)) = H$. Αν η H είναι κανονική υποομάδα της $\pi_1(X, x_0)$ τότε η p ονομάζεται κανονική ή Galois καλυπτική απεικόνιση και ο χώρος Y κανονικός ή Galois καλυπτικός χώρος. Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η συνθήκη της κανονικότητας ενός καλυπτικού χώρου, είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του $y \in p^{-1}(x_0)$. Αυτοί οι χώροι, θα μας απασχολήσουν ιδιαίτερα παρακάτω.

Λήμμα 1.3 (Λήμμα ανόρθωσης δρόμων).
Έστω $p : Y \to X$ καλυπτική απεικόνιση, με $p(y_0) = x_0$. Κάθε δρόμος $f : I \to X$ με αρχή το σημείο x_0 έχει μοναδική ανόρθωση $\tilde{f}$ στον Y, με αρχή το σημείο y_0.[3]

Η μοναδικότητα του ανορθωμένου δρόμου, είναι μία συνέπεια του παρακάτω γενικευμένου lifting λήμματος:

Λήμμα 1.4. *Έστω $p : Y \to X$ καλυπτική απεικόνιση και Z συνεκτικός τοπολογικός χώρος . Έστω επίσης $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : Z \to Y$ συνεχείς απεικονίσεις τέτοιες ώστε: $p \circ \tilde{f}_1 = p \circ \tilde{f}_2$. Αν $\tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)$ για ένα σημείο $z \in Z$, τότε $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$.*

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο στο Z, για το οποίο οι απεικονίσεις συμφωνούν είναι ανοικτό και το συμπλήρωμά του, στο οποίο οι απεικονίσεις διαφωνούν είναι επίσης ανοικτό. Με αυτόν τον τρόπο το σύνολο όπου θα συμφωνούν, θα είναι το $\varnothing$ (πράγμα άτοπο από την υπόθεση) ή ολόκληρο το Z. Έστω $w \in \{z \in Z : \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)\}$. Επιλέγω $N \subset X$, ανοικτή γειτονιά του $p \circ \tilde{f}_i(w)$, με $i = 1, 2$ η οποία είναι ομαλά καλυμμένη από την p. Παίρνω $p^{-1}(N)$ να είναι η ξένη ένωση ανοικτών N_a τέτοια ώστε για κάθε a η $p|N_a : N_a \to N$ να είναι ένας ομοιομορφισμός. Από την συνέχεια των συναρτήσεων $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$, θα πρέπει η εικόνα ενός συνεκτικού συνόλου να είναι συνεκτικό σύνολο και συνεπώς θα πρέπει να απεικονίζουν μία γειτονιά V του w στο ίδιο N_a. Καθώς όμως $p \circ \tilde{f}_1 = p \circ \tilde{f}_2$, οι $\tilde{f}_1$, και $\tilde{f}_2$, θα πρέπει να συμφωνούν στο V. Έτσι για τυχαίο $w \in \{\tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)\}$ υπάρχει ανοικτή γειτονιά του V, με $V \subset \{z \in Z : \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)\}$ και έτσι το $\{z \in Z : \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)\}$ είναι ένα ανοικτό σύνολο.
Όμοια αν το $w \in \{z \in Z : \tilde{f}_1(z) \neq \tilde{f}_2(z)\}$, οι $\tilde{f}_i$ θα πρέπει να απεικονίζουν μία ανοικτή γειτονία του, V σε διαφορετικά και συνεπώς ξένα N_a. Έτσι θα πρέπει να διαφωνούν στο V και άρα το $\{z \in Z : \tilde{f}_1(z) \neq \tilde{f}_2(z)\}$ είναι ανοικτό.$\Diamond$

Θεώρημα 1.5. *Έστω $p : (Y, y) \to (X, x)$ να είναι καλυπτική απεικόνιση με $p(y) = x$ και f, g δρόμοι στον X με αρχή το x και τέλος το x_1. Ας υποθέσουμε επίσης ότι $\tilde{f}, \tilde{g}$ οι αντίστοιχες ανορθώσεις τους, οι οποίοι είναι δρόμοι στον Y με αρχή το y. Αν $f \simeq_p g$, τότε οι $\tilde{f}, \tilde{g}$ έχουν το ίδιο τελικό σημείο (που ανήκει στον Y) και είναι δρομο-ομοτοπικοί.*[4]

Έστω $y_1, y_2 \in Y : p(y_1) = p(y_2) = x_0$. Πώς οι εικόνες των μονομορφισμών

$$p_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0) \text{ και } p_* : \pi_1(Y, y_1) \to \pi_1(X, x_0)$$

θα μπορούσαν να συγκριθούν; Επιλέγω $[\gamma]$ μία κλάση δρόμων στον Y με αρχή το σημείο y_0 και τέλος το y_1. Ορίζω ισομορφισμό[5] $u : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(Y, y_1)$ με

[3] βλέπε [2] λήμμα 5.1, σελίδα 28.
[4] για την απόδειξη βλέπε [2] θεώρημα 5.1, σελίδα 31.
[5] αλλάζει την βάση κλειστών μονοπατιών του χώρου Y, βλέπε [2] ορισμός 3.2, σελίδα 13.

τύπο: $u(a) = [\bar{\gamma}] * [a] * [\gamma]$ και παίρνω το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα: [6]

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Y, y_0) & \xrightarrow{p_*} & \pi_1(X, x_0) \\ \downarrow u & & \downarrow v \\ \pi_1(Y, y_1) & \xrightarrow{p_*} & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

Ισχύει ότι: $v(b) = (p_*[\gamma])^{-1} * [b] * (p_*[\gamma])$. Όμως $p_*[\gamma] = p \circ [\gamma]$ θα είναι ένα κλειστό μονοπάτι με βάση το x_0, και συνεπώς θα ανήκει στην $\pi_1(X, x_0)$. Έτσι οι εικόνες των $\pi_1(Y, y_0)$ και $\pi_1(Y, y_1)$ μέσω της p_* είναι συζυγείς υποομάδες της $\pi_1(X, x_0)$.

Μπορεί κάθε υποομάδα στην κλάση συζυγίας της υποομάδας $p_*(\pi_1(Y, y_0))$ να προκύψει σαν την εικόνα $p_*(\pi_1(Y, y_1))$ με την επιλογή ενός κατάλληλου $y_1 \in p^{-1}(x_0)$; Η απάντηση είναι Ναι. Κάθε υποομάδα σε αυτήν την κλάση συζυγίας έχει μορφή: $[a^{-1}]*[p_*(\pi_1(Y, y_0))]*[a]$, για $[a] \in \pi_1(X, x_0)$. Αν $f : I \to X$ κλειστό μονοπάτι και αντιπρόσωπος του a, από το λήμμα 1.3 υπάρχει μοναδική ανόρθωση σε δρόμο $g : I \to Y$ με αρχή το y_0. Έστω y_1 να είναι το τέλος του. Τότε θα έχουμε ότι

$$p_*(\pi_1(Y, y_1)) = [a]^{-1} * [p_*(\pi_1(Y, y_0))] * [a].$$

Συνοψίζοντας θα έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα:

Θεώρημα 1.6. *Έστω $p : (Y, y) \to (X, x)$ καλυπτική απεικόνιση. Οι υποομάδες $p_*(\pi_1(Y, y))$, για $y \in p^{-1}(x)$ αποτελούν ακριβώς μία κλάση συζυγίας από υποομάδες του $\pi_1(X, x)$.*

Έστω $p : (Y, y) \to (X, x)$ καλυπτική απεικόνιση, με $y' \in Y'$ και $\varphi : (Y', y') \to (X, x)$ να είναι μία συνεχής απεικόνιση. Πότε υπάρχει $\tilde{\varphi} : (Y', y') \to (Y, y)$, έτσι ώστε η $\tilde{\varphi}$ να αποτελεί ανόρθωση της φ; Τότε ακριβώς το παρακάτω διάγραμμα θα είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} (Y', y') & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & (Y, y) \\ & \varphi \searrow \swarrow p & \\ & (X, x) & \end{array}$$

Αναγκαία συνθήκη: Αν η $\tilde{\varphi}$ υπάρχει τότε θα έχουμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα, που προέρχεται από τους επαγόμενους ομομορφισμούς:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Y', y') & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_*} & \pi_1(Y, y) \\ & \varphi_* \searrow \swarrow p_* & \\ & \pi_1(X, x) & \end{array}$$

Όμως η p_* είναι μονομορφισμός και $\pi_1(Y, y) \cong p_*\big(\pi_1(Y, y)\big)$. Έτσι η ύπαρξη ομομορφισμού $\tilde{\varphi}_*$ που κάνει το διάγραμμα μεταθετικό, είναι ισοδύναμη με την συνθήκη:

$$\varphi_*\big(\pi_1(Y', y')\big) = p_*\big(\tilde{\varphi}_*\pi_1(Y', y')\big) \subset p_*\big(\pi_1(Y, y)\big).$$

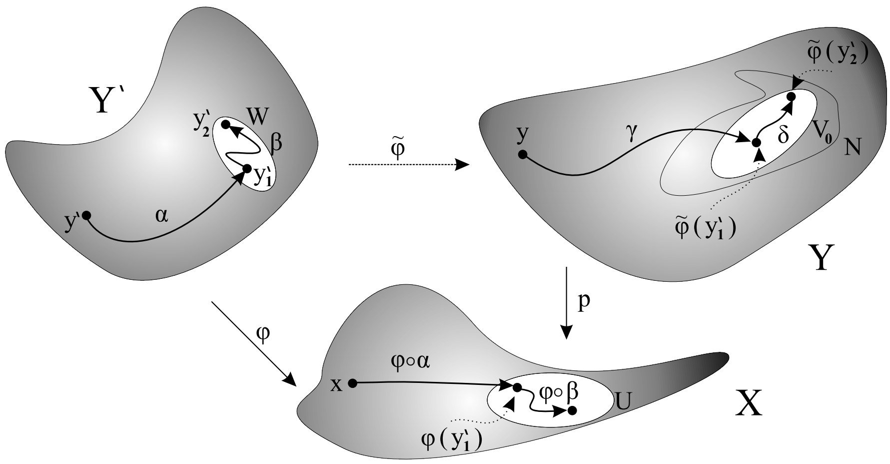
Μάλιστα παρατηρούμε ότι η συνθήκη για την ύπαρξη μίας τέτοιας ανόρθωσης δεν είναι μόνο αναγκαία αλλά είναι και *ικανή*:

Θεώρημα 1.7. *Έστω $p : (Y, y) \to (X, x)$ καλυπτική απεικόνιση, με $y' \in Y'$ και $\varphi : (Y', y') \to (X, x)$ να είναι μία συνεχής απεικόνιση. Υπάρχει μοναδική ανόρθωση $\tilde{\varphi} : (Y', y') \to (Y, y)$, της φ αν και μόνον αν $\varphi_*\big(\pi_1(Y', y')\big) \subset p_*\big(\pi_1(Y, y)\big)$*

[6] ο επαγώμενος από την p ομομορφισμός είναι ανεξάρτητος από την επιλογή βάσης, βλέπε [2] παράδειγμα 3.7, σελίδα 20.

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει το αντίστροφο: Θα δείξουμε στην αρχή ότι αν αυτή υπάρχει, είναι μοναδική. Έστω $y_1' \in Y'$, διαλέγω δρόμο α από το y' στο y_1'. Παίρνω τον δρόμο $\varphi \circ \alpha$ στον X, και τον ανορθώνω σε δρόμο γ στον χώρο Y, με αρχή το σημείο y. Αν υπάρχει μία ανόρθωση $\tilde{\varphi}$ του φ, τότε το $\tilde{\varphi}(y_1)$, θα πρέπει να είναι ίσο με το γ(1), δηλαδή το τέλος της γ. Έτσι $\tilde{\varphi} \circ \alpha$ είναι μία ανόρθωση του $\varphi \circ \alpha$, με αρχή το y και οι ανορθώσεις δρόμων είναι μοναδικές, από το λήμμα 1.1.3 (η κατάσταση απεικονίζεται στο σχήμα 1.1).

Έστω $y_1' \in Y'$, παίρνω α να είναι ο δρόμος στον Y' από το y' στο y_1', όπως και



Σχήμα 1.1:

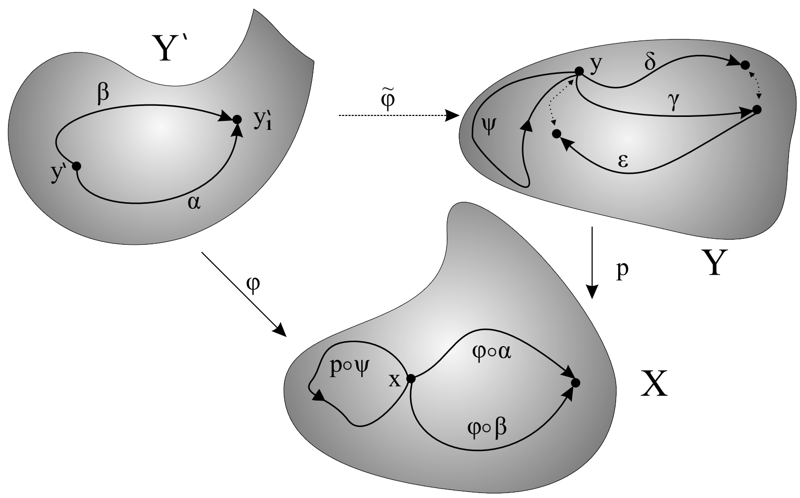
πριν. Παίρνω τον $\varphi \circ \alpha$ στον X, και τον ανορθώνω σε δρόμο γ στον χώρο Y, με αρχή το σημείο y. Ορίζω

$$\tilde{\varphi}(y_1') = \gamma(1).$$

Θα δείξω ότι η φ είναι συνεχής απεικόνιση: Έστω N γειτονιά του $\tilde{\varphi}(y_1')$, θα βρω γειτονιά W του y_1' τέτοια ώστε $\tilde{\varphi}(W) \subset N$. Διαλέγω U γειτονιά του $\varphi(y_1')$. Αυτή είναι ομαλά καλυμμένη από την p. Έστω V_0 το φύλλο του $p^{-1}(U)$, με $\tilde{\varphi}(y_1') \in V_0$ και $p|_{V_0} : V_0 \to U$ να είναι ένας ομοιομορφισμός. Παίρνοντας, αν χρειάζεται, μικρότερες γειτονιές μπορώ να υποθέσω ότι $V_0 \subset N$. Διαλέγω γειτονιά W του y_1', που είναι δρομοσυνεκτική και ανήκει στο $\varphi^{-1}(U)$. Υποστηρίζω τώρα ότι $\tilde{\varphi}(W) \subset V_0$. Για γνωστό $y_2' \in W$, επιλέγω δρόμο β στο W, με αρχή το y_1' και τέλος το σημείο y_2'. Παίρνω την εικόνα του δρόμου στον χώρο X μέσω της φ και ανορθώνω στον χώρο Y. Έστω $\delta = p|_{V_0}^{-1} \circ \varphi \circ \beta$ να είναι η ανόρθωση του δρόμου $\varphi \circ \beta$ με αρχή το σημείο $\tilde{\varphi}(y_1')$. Τότε $\gamma(1) = \tilde{\varphi}(y_1') = \delta(0)$ και συνεπώς ορίζεται το $\gamma * \delta$, το οποίο είναι η ανόρθωση του $\varphi \circ (\alpha * \beta)$ με αρχή το σημείο y. Από τον ορισμό $\tilde{\varphi}(y_2') = (\gamma * \delta)(1) \in V_0$. Έτσι για τυχαίο $y_2 \in W$, έχω $\tilde{\varphi}(y_2') \in V_0 \Longrightarrow \tilde{\varphi}(W) \subset V_0$ και $\tilde{\varphi}$ είναι συνεχής απεικόνιση.

Θα δείξω ότι η φ είναι καλά ορισμένη: Έστω α, β, δρόμοι στον Y', από το y' στο y_1' και $\varphi \circ \alpha, \varphi \circ \beta$ δρόμοι στον X με αρχή το x. Αν γ, δ οι ανορθώσεις τους στον Y με αρχή το y, αρκεί να δείξω ότι $\gamma(1) = \delta(1)$. Έστω ε να είναι η ανόρθωση του $\varphi \circ \bar{\beta}$ με αρχή το $\gamma(1)$. Τότε το $\gamma * \varepsilon$ ορίζεται και αποτελεί ανόρθωση στον Y, του κλειστού μονοπατιού $(\varphi \circ \alpha) * (\varphi \circ \bar{\beta})$[7] στον χώρο X. Η κλάση ομοτοπίας

[7]ισχύει ότι $\varphi_*(\alpha * \bar{\beta}) = \varphi \circ (\alpha * \bar{\beta}) = (\varphi \circ \alpha) * (\varphi \circ \bar{\beta})$.



Σχήμα 1.2:

αυτού του κλειστού μονοπατιού είναι η $\varphi_*([\alpha * \bar{\beta}])$, που από την υπόθεση πρέπει να ανήκει στην $p_*(\pi_1(Y,y))$. Έτσι υπάρχει κλειστό μονοπάτι $\psi \in Y$ με βάση το y έτσι ώστε:

$$\varphi_*([\alpha * \bar{\beta}]) = [p_*(\psi)].$$

Έτσι θα πρέπει $\varepsilon(1) = y$. Πράγματι από το θεώρημα 1.5, αν δύο δρόμοι στον X είναι δρομο-ομοτοπικοί και ανορθωθούν στον Y με αρχή το ίδιο σημείο πρέπει αναγκαστικά να έχουν και το ίδιο τέλος. Αφού $\varphi_*([\alpha * \bar{\beta}]) \simeq_p [p_*(\psi)]$, οι ανορθώσεις τους ψ και $\gamma * \varepsilon$ στον Y, θα πρέπει να έχουν το ίδιο τέλος, δηλαδή $\gamma * \varepsilon(1) = y = \varepsilon(1)$ (βλέπε σχήμα 1.2).
Τώρα το ε είναι ανόρθωση του $\varphi \circ \bar{\beta}$ με αρχή το $\gamma(1)$ και τέλος το y. Έτσι το $\bar{\varepsilon}$ θα είναι ανόρθωση του $\varphi \circ \beta$ και θα έχει αρχή το y και τέλος το σημείο $\gamma(1)$. Ο δρόμος δ είναι άλλη μία τέτοια ανόρθωση. Από μοναδικότητα ανόρθωσης δρόμων, έπεται ότι $\delta = \bar{\varepsilon}$ και άρα $\gamma(1) = \delta(1)$.$\Diamond$

Πόρισμα 1.8. *Έστω $p : (Y,y) \to (X,x)$ καλυπτική απεικόνιση, τότε:*

(i) *Αν σ είναι κλειστό μονοπάτι με βάση το x και $\tilde{\sigma}$ είναι η μοναδική ανόρθωση του σ με αρχή το y, τότε το $\tilde{\sigma}$ έχει τέλος το σημείο y αν και μόνον αν $[\sigma] \in p_*(\pi_1(Y,y))$.*

(ii) *Αν σ, σ', δρόμοι στον X με αρχή το σημείο x και τέλος το x' και $\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}'$ οι ανορθώσεις τους σε δρόμους στον Y με αρχή το y τότε: τα $\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}'$ έχουν το ίδιο τέλος αν και μόνον αν $[\sigma' * \bar{\sigma}] \in p_*(\pi_1(Y,y))$.*

1.1α′ G-Coverings, Deck Transformations

Ορισμός 1.9. *Για κάθε $p : Y \to X$ καλυπτική απεικόνιση, υπάρχει ομάδα $Aut(Y/X)$ η οποία ονομάζεται ομάδα (είναι ομάδα με πράξη την σύνθεση συναρτήσεων.) των Deck transformations, ή ομάδα των Covering transformations:*

$$Aut(Y/X) = \{\varphi : Y \to Y : \varphi \text{ είναι ομοιομορφισμός και } p \circ \varphi = p\}.$$

Πολλοί σημαντικοί καλυπτικοί χώροι προκύπτουν από την δράση μιας ομάδας G σε έναν χώρο Y με X να δηλώνει τον χώρο των τροχιών της δράσης αυτής.

Ορισμός 1.10. *Δράση μιας ομάδας $(G, \cdot)$ σε έναν χώρο Y (από αριστερά) είναι μία απεικόνιση $G \times Y \to Y : (g, y) \mapsto g \cdot y$, που ικανοποιεί τα ακόλουθα:*

(i) $g \cdot (h \cdot y) = (g \cdot h) \cdot y, \forall\, g, h \in G$ *και* $y \in Y$,

(ii) $id_G \cdot y = y, \forall\, y \in Y$,

(iii) *Η απεικόνιση* $y \mapsto g(y) = g \cdot y$ *είναι ένας ομοιομορφισμός του* $Y, \forall\, g \in G$.

Έτσι η G ορίζει μία ομάδα από ομοιομορφισμούς του χώρου Y. Δύο σημεία $y, y' \in Y$ λέμε ότι ανήκουν στην ίδια τροχιά αν υπάρχει $g \in G : g(y) = y'$. Καθώς η G είναι ομάδα, αυτό είναι μία κλάση ισοδυναμίας. Αν συμβολίσω $X = Y/G$ να είναι το σύνολο των τροχιών, δηλαδή το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας, τότε μπορώ να ορίσω την φυσική προβολή $p : Y \to X$ που απεικονίζει κάθε στοιχείο του Y στην κλάση, δηλαδή την τροχιά που το περιέχει. Ο χώρος X είναι εφοδιασμένος με την τοπολογία πηλίκο, δηλαδή κάθε $U \subset X$, είναι ανοικτό του X ανν το $p^{-1}(U)$ είναι ανοικτό του Y. Ο συμβολισμός της φυσικής αυτής προβολής με το γράμμα p δεν είναι τυχαίος. Κάτω από κάποιες προϋποθέσεις για τον χώρο Y και την δράση της ομάδας G, η p είναι μία καλυπτική απεικόνιση.

Ορισμός 1.11. *Μία ομάδα G δρα evenly*[8] *στον χώρο Y, αν κάθε σημείο του Y έχει μια γειτονιά V τέτοια ώστε $g \cdot V$ και $h \cdot V$ είναι ξένα για κάθε διαφορετικά $g, h \in G$.*

Λήμμα 1.12. *Αν μία ομάδα δρα evenly στον χώρο Y, τότε η φυσική προβολή $p : Y \to Y/G$ είναι μία καλυπτική απεικόνιση.*

Απόδειξη: Η p είναι μία συνεχής και ανοικτή απεικόνιση καθώς για κάθε V ανοικτό του Y έχουμε ότι το $p^{-1}(p(V)) = \cup_{g \in G} g \cdot V$ είναι ανοικτό του Y σαν ένωση ανοικτών και από τον ορισμό της απεικόνισης πηλίκο το $p(V)$ είναι ανοικτό του Y/G. Τώρα αν πάρουμε το V, όπως στον ορισμό της even δράσης, τα $g \cdot V$ θα είναι ξένα μεταξύ τους. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε τέτοιο V το $p(V)$ είναι ομαλά καλυμμένο από την p, δηλαδή ο περιορισμός της p σε κάθε ένα από τα $g \cdot V$ στο $p(V)$ είναι ένας ομοιομορφισμός.
Πράγματι για $y \in V$, δηλαδή $p(y) \in p(V)$ υπάρχει $g \cdot y \in g \cdot V$ έτσι ώστε $p(g \cdot y) = p(y)$ και άρα είναι επί. Επίσης αν $p(g \cdot y_1) = p(g \cdot y_2)$ υπάρχει $h \in G$ με $h \cdot g \cdot y_1 = g \cdot y_2$. Αφού η δράση είναι even, και συνεπώς ελεύθερη από τον ορισμό μας, θα πρέπει $h = id_G$ και άρα η ζητούμενη απεικόνιση είναι 1-1.$\Diamond$

Ορισμός 1.13. *Κάθε καλυπτική απεικόνιση $p : Y \to X$, που προέρχεται από μία even δράση μίας ομάδας G σε έναν χώρο Y ονομάζεται G-καλυπτική απεικόνιση και ο χώρος Y G-καλυπτικός χώρος.*

[8] μερικοί συγγραφείς αναφέρονται σε αυτήν την δράση με τον όρο properly discontinuous (ή γνήσια ασυνεχώς). Η λέξη discontinuous σημαίνει ότι οι τροχιές είναι διακριτά (με την τοπολογική έννοια, δηλαδή δεν έχουν σημεία συσσώρευσης στον Y) υποσύνολα της Y. Η λέξη properly σημαίνει ότι κάθε συμπαγή σύνολο τέμνει μόνο πεπερασμένο αριθμό από τις μεταφορές του. Ο όρος όμως properly discontinuous συχνά παραφράζεται και όταν χρησιμοποιείται σημαίνει ότι κάθε σημείο έχει γειτονιά V που να τέμνει μόνο πεπερασμένες το πλήθος μεταφορές $g \cdot V$, του V. Αν σε αυτήν την ερμηνεία προσθέσουμε την λέξη "ελεύθερα", τότε η even δράση μας, θα σημαίνει freely and properly discontinuously.

Παρατήρηση 1.14. *Αν ο χώρος Y είναι Hausdorff και αν η πεπερασμένης τάξης ομάδα G δρα ελεύθερα σε αυτόν, δηλαδή $\nexists g \in G \setminus \{id_G\} : g(y) = y, \forall y \in Y$, τότε η G δρα evenly στον Y.*

Πράγματι: Για γνωστό $y \in Y$, επιλέγω ξένες γειτονιές U_g του $g \cdot y \in Y$, μία για κάθε ένα $g \in G$ (η ύπαρξη αυτών εξασφαλίζεται από την Hausdorff συνθήκη.). Θέτω

$$V = \bigcap_{g \in G} g^{-1} \cdot U_g$$

με V ανοικτό του Y (πεπερασμένη τομή ανοικτών είναι ανοικτό σύνολο), να είναι γειτονιά του y. Τότε για κάθε διαφορετικά $g_1, g_2 \in G$, θα έχω ότι το $g_1 \cdot V \cap g_2 \cdot V$ ισούται με:

$$\Big(\bigcap_{g \in G \setminus \{g_1\}} g_1 \cdot g^{-1} \cdot U_g\Big) \cap (g_1 \cdot g_1^{-1} \cdot U_{g_1}) \cap (g_2 \cdot g_2^{-1} \cdot U_{g_2}) \cap \Big(\bigcap_{g \in G \setminus \{g_2\}} g_2 \cdot g^{-1} \cdot U_g\Big) = \varnothing.$$

Γιατί $U_{g_1} \cap U_{g_2} = \varnothing$.$\Diamond$

Πρόταση 1.15. *Έστω $p : (Y, y) \to (X, x)$ G-καλυπτική απεικόνιση και Y να είναι συνεκτικός χώρος. Τότε η $G \cong Aut(Y/X)$.*

Απόδειξη: Σταθεροποιώ ένα $y \in Y$. Για γνωστό $\varphi \in Aut(Y/X)$, το y και το $\varphi(y)$ θα πηγαίνουν μέσω της φυσικής προβολής στην ίδια τροχιά που τα περιέχει. Συνεπώς θα υπάρχει ένα $g \in G : g \cdot y = g(y) = \varphi(y)$. Τώρα ισχύει $p \circ \varphi(y) = p \circ g(y) = p(y)$. Από λήμμα 1.4, οι φ και η g θα συμπίπτουν.$\Diamond$

Ορισμός 1.16. *Έστω $p_1 : (Y_1, y_1) \to (X, x)$ και $p_2 : (Y_2, y_2) \to (X, x)$ καλυπτικές απεικονίσεις του χώρου X. Ένας ομομορφισμός του χώρου (Y_1, y_1) στον χώρο (Y_2, y_2) είναι μία συνεχής απεικόνιση $\varphi : Y_1 \to Y_2$ τέτοια ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd}
(Y_1, y_1) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & (Y_2, y_2) \arrow[dl, "p_2"] \\
& (X, x) &
\end{tikzcd}$$

Αν η φ είναι ένας ομοιομορφισμός των τοπολογικών χώρων Y_1 και Y_2, τότε προκύπτει ένας ισομορφισμός καλυπτικών χώρων. Σε αυτήν την περίπτωση οι καλυπτικοί χώροι ονομάζονται ισόμορφοι (ή ισοδύναμοι).

Σαν συνέπεια του λήμματος 1.4, θα έχω:

Πόρισμα 1.17. *Έστω φ_1, φ_0 ομομορφισμοί του χώρου (Y_1, y_1) στον χώρο (Y_2, y_2). Αν υπάρχει $y \in Y_1 : \varphi_1(y) = \varphi_0(y)$, τότε $\varphi_1 = \varphi_0$.*

Πράγματι αν $\varphi_1(y) = \varphi_0(y)$, θα είχα ότι $p_2 \circ \varphi_1(y) = p_2 \circ \varphi_0(y) = p_1(y)$ και το αποτέλεσμα έπεται άμεσα από το λήμμα 1.4.

Πόρισμα 1.18. *Η ομάδα των $Aut(Y/X)$ δρα ελεύθερα στον χώρο Y.*

Έστω $p : (Y, y) \to (X, x)$ καλυπτική απεικόνιση Έστω $\varphi \in Aut(Y/X)$ και $y \in Y$ με $\varphi(y) = y$. Τότε $p_2 \circ \varphi(y) = p_2(y)$ και άρα $\varphi = id$.

Λήμμα 1.19. *Έστω $(Y_1, p_1), (Y_2, p_2)$ καλυπτικοί χώροι του X και $y_i \in Y_i$, με $\{i = 1, 2\}$, να είναι σημεία έτσι ώστε: $p_1(y_1) = p_2(y_2)$. Υπάρχει ομομορφισμός $\varphi : (Y_1, y_1) \to (Y_2, y_2)$ ανν $p_{1_*}(\pi_1(Y_1, y_1)) \subset p_{2_*}(\pi_1(Y_2, y_2))$.*

Αν υπάρχει τέτοιο φ, θα έχω ότι $p_2 \circ \varphi = p_1$, δηλαδή η φ είναι ανόρθωση της p_1. Από το θεώρημα 1.7 έπεται το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 1.20. *Με τις προϋποθέσεις του προηγούμενου λήμματος, υπάρχει ομοιομορφισμός* $\varphi : (Y_1, y_1) \to (Y_2, y_2)$, *ανν* $p_{1_*}(\pi_1(Y_1, y_1)) = p_{2_*}(\pi_1(Y_2, y_2))$.

Θα έχουμε ότι:

$$p_{2_*}(\pi_1(Y_2, y_2)) \cong \pi_1(Y_2, y_2) \cong {}^9\pi_1(Y_1, y_1) \cong p_{1_*}(\pi_1(Y_1, y_1)).$$

Σαν μία ειδική περίπτωση αυτού, παίρνουμε το παρακάτω αποτέλεσμα:

Πόρισμα 1.21. *Αν* (Y, p) *καλυπτικός χώρος του* X, *με* $y_1, y_2 \in p^{-1}(x)$ *και* $x \in X$, *τότε υπάρχει* $\varphi \in Aut(Y/X)$ *με* $\varphi(y_1) = y_2$, *ανν* $p_*(\pi_1(Y, y_1)) = p_*(\pi_1(Y, y_2))$.

Θεώρημα 1.22. *Δύο καλυπτικοί χώροι* (Y_1, p_1) *και* (Y_2, p_2) *του χώρου* X, *είναι ισόμορφοι ανν για κάθε δύο* $y_1 \in Y_1$ *και* $y_2 \in Y_2$ *με* $p_1(y_1) = p_2(y_2) = x \in X$ *οι υποομάδες* $p_{1_*}(\pi_1(Y_1, y_1))$ *και* $p_{2_*}(\pi_1(Y_2, y_2))$ *ανήκουν στην ίδια κλάση συζυγίας στον* $\pi_1(X, x)$.

Καθώς οι δύο καλυπτικοί χώροι είναι ισόμορφοι, από πόρισμα 1.20, θα έχω ότι $p_{1_*}(\pi_1(Y_1, y_1)) = p_{2_*}(\pi_1(Y_2, y_2))$. Τώρα $y_1, y_2 \in p^{-1}(x)$ και από θεώρημα 1.6, έπεται το ζητούμενο.
Το θεώρημα μας λέει ότι η κλάση συζυγίας των υποομάδων που αναφέρεται στο θεώρημα 1.6, καθορίζει απόλυτα τον καλυπτικό χώρο up to isomorphism.

Λήμμα 1.23. *Έστω καλυπτικοί χώροι* (Y_1, p_1) *και* (Y_2, p_2) *του χώρου* X *και* φ *ένας ομομορφισμός ανάμεσά τους. Τότε ο* (Y_1, φ) *είναι καλυπτικός χώρος του* Y_2.

Απόδειξη: Κάθε σημείο $x \in X$ έχει μία δρομοσυνεκτική γειτονιά U, έτσι ώστε να είναι ομαλά καλυμμένη και από τις δύο καλυπτικές απεικονίσεις p_1, p_2 ταυτόχρονα: Αν U_1 είναι ομαλά καλυμμένη από την p_1 και U_2 ομαλά καλυμμένη από την p_2 τότε θέτοντας $U = U_1 \cap U_2$, θα προκύψει η ζητούμενη γειτονιά.
Θα δείξω ότι η φ *είναι επί:* Αν $y \in Y_2$ θα δείξω ότι υπάρχει $x \in Y_1 : \varphi(x) = y$. Επιλέγω βάση $y_1 \in Y_1$ και $y_2 = \varphi(y_1)$ με $p_1(y_1) = p_2(y_2) = x$. Παίρνω $f : I \to Y_2$ με αρχή το y_2 και τέλος το σημείο y. Έστω $g = p_2 \circ f$ να είναι η εικόνα του παραπάνω δρόμου μέσω της p_2 στον χώρο X, με αρχή το σημείο x. Από το λήμμα ανόρθωσης δρόμων, υπάρχει μοναδική ανόρθωση σε δρόμο h στον χώρο Y_1, με αρχή το σημείο y_1, τέτοια ώστε $p_1 \circ h = g$. Έστω να έχει τέλος το σημείο x. Θα δείξω ότι $\varphi(x) = y$. Οι δρόμοι $\varphi \circ h$ και f έχουν την ίδια αρχή, το y_2 και ισχύει $p_2 \circ \varphi \circ h = p_1 \circ h = g = p_2 \circ f \implies \varphi \circ h = f$, από μοναδικότητα ανόρθωσης δρόμων. Έτσι $\varphi(x) = y$.
Έτσι διαλέγουμε ομαλά καλυμμένη περιοχή του τυχαίου $z \in Y_2$ ως εξής: παίρνουμε U ανοικτή περιοχή του $x = p_2(z)$, η οποία είναι ομαλά καλυμμένη και από τις δύο καλυπτικές απεικονίσεις με τον τρόπο που περιγράψαμε στην αρχή. Θέτω W, να είναι το φύλλο της $p_2^{-1}(U)$ που περιέχει το z. Η W είναι ομαλά καλυμμένη από την φ. $\Diamond$

Έστω (Y, p) καλυπτικός χώρος του X, με Y απλά συνεκτικό χώρο. Αν (Y', p') είναι ένα τυχαίο, διαφορετικό κάλυμμα του X, τότε από το λήμμα 1.19, υπάρχει ομομορφισμός φ του (Y, p) στον (Y', p') και από το παραπάνω λήμμα ο (Y, φ) είναι ένας καλυπτικός χώρος του Y'. Αυτός είναι ο λόγος που ένας απλά συνεκτικός καλυπτικός χώρος ονομάζεται καθολικός καλυπτικός χώρος. Επίσης από το θεώρημα 1.22 κάθε δύο καθολικοί καλυπτικοί χώροι είναι ισόμορφοι.

[9] ένας ομοιομορφισμός επάγει ισομορφισμό των εμπλεκόμενων θεμελιωδών ομάδων.

1.1β′ Η δράση της Ομάδας $\pi_1(X,x)$ στο Σύνολο $p^{-1}(x)$

Έστω $p:(Y,y)\to(X,x)$ καλυπτική απεικόνιση, ορίζω δράση της ομάδας $\pi_1(X,x)$ στο σύνολο $p^{-1}(x)$ για κάθε $x\in X$ έτσι ώστε η $\pi_1(X,x)$ να δρα από δεξιά στο σύνολο $p^{-1}(x)$.

Ορισμός 1.24. *Έστω (Y,p) καλυπτικός χώρος του X, με $x\in X$. Για κάθε $y\in p^{-1}(x)$ και για κάθε $[\alpha]\in\pi_1(X,x)$, ορίζω $y\cdot[\alpha]\in p^{-1}(x)$ ως εξής. Από το λήμμα ανόρθωσης δρόμων και το θεώρημα 1.5, υπάρχει μοναδική κλάση δρόμων του Y, έστω $[\tilde\alpha]$, τέτοια ώστε $p_*([\tilde\alpha])=[\alpha]$ με αρχή το σημείο y. Ορίζω $y\cdot[\alpha]$ να είναι το τέλος της κλάσης δρόμων $[\tilde\alpha]$, δηλαδή $y\cdot[\alpha]:=[\tilde\alpha](1)$.*

Ισχύουν τα εξής:

$$(y\cdot[\alpha])\cdot[\beta]=y([\alpha]\cdot[\beta]) \text{ και } y\cdot[e_x]^{10}=y.$$

Συμπεραίνουμε ότι η $\pi_1(X,x)$ από δεξιά στο σύνολο $p^{-1}(x)$. Θα δείξουμε ότι η δράση αυτή είναι μεταβατική, δηλαδή για κάθε $y_1,y_0\in p^{-1}(x)$ υπάρχει $[\alpha]\in\pi_1(X,x):\ y_0\cdot[\alpha]=y_1$. Πράγματι καθώς έχουμε υποθέσει ότι ο χώρος Y είναι δρομοσυνεκτικός, υπάρχει κλάση δρόμων $[\tilde\alpha]$ από το y_0 στο y_1. Θέτω $[\alpha]=p_*([\tilde\alpha])$. Το $[\alpha]$ είναι κλάση κλειστών μονοπατιών και $y_0\cdot[\alpha]=y_1$.

Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε κάποια βασικά αποτελέσματα και ορισμούς από την θεωρία ομάδων που θα μας βοηθήσουν να πλησιάσουμε τον σκοπό μας. Όταν μία ομάδα G δρα σε ένα σύνολο E από αριστερά, τότε λέμε ότι ο E είναι ένας αριστερός G-χώρος. Αν η G δρα μεταβατικά στον E, τότε ο E ονομάζεται ομογενής (homogeneous) G-χώρος. Από τον τρόπο που ορίσαμε την δράση ομάδας (συνθήκη 3) προκύπτει ότι η απεικόνιση $E\to E$ που απεικονίζει $y\mapsto g\cdot y$ είναι ένας ομοιομορφισμός του E και συνεπώς μια μετάθεση του E. Έτσι έχουμε:

Θεώρημα 1.25. *Αν E είναι ένας αριστερός G-χώρος, τότε για κάθε $g\in G$, η απεικόνιση $E\to E$ που απεικονίζει $y\mapsto g\cdot y$ είναι μια μετάθεση του E.*

Ορισμός 1.26. *Έστω E_1,E_2, να είναι αριστεροί G-χώροι. Μία απεικόνιση $f: E_1\to E_2$ ονομάζεται απεικόνιση αριστερών G-χώρων (ή G-equivariant) αν*

$$f(g\cdot y)=g\cdot(fy)$$

για κάθε $g\in G$ και $y\in E$. Μία απεικόνιση f αριστερών G-χώρων καλείται ισομορφισμός αριστερών G-χώρων, αν η f είναι 1-1 και επι, με την αντίστροφή της, να είναι και αυτή μία απεικόνιση αριστερών G-χώρων[11].

Έστω E, ένας τυχαίος ομογενής αριστερός G-χώρος. Διαλέγω $y_0\in E$ και θέτω:

$$H=\{g\in G:\ g\cdot y_0=y_0\}$$

Η H είναι υποομάδα της G και ονομάζεται υποομάδα ισοτροπίας ή σταθεροποιητής του y_0.

Παρατήρηση 1.27. *Κάθε ομογενής G-χώρος E, είναι ισόμορφος με κάποιο G/H.*

[10] με $[e_x]$ συμβολίζω την κλάση που αποτελείται από τα κλειστά μονοπάτια με βάση το x, που είναι ομοτοπική με το τετριμμένο, δηλαδή το σημείο x.

[11] στο κεφάλαιο 3 θα δούμε ότι αν οι E_1,E_2 είναι τοπολογικοί χώροι και η G μία τοπολογική ομάδα που δρα συνεχώς σε αυτούς, τότε η f είναι ένας ισομορφισμός (αριστερών) G χώρων αν είναι ένας ομοιομορφισμός μεταξύ των τοπολογικών χώρων.

Παίρνω την απεικόνιση $G \to E$ με τύπο $g \mapsto g \cdot y_0$. Η απεικόνιση είναι επί καθώς ο E είναι ομογενής G-χώρος. Θέτω $H = \{g \in G : g \cdot y_0 = y_0\}$. Για να απεικονίζονται δύο στοιχεία $g_1, g_2 \in G$ στο ίδιο στοιχείο του E θα πρέπει $g_1 \cdot y_0 = g_2 \cdot y_0 \Leftrightarrow g_2^{-1} \cdot g_1 = y_0 \Leftrightarrow g_2^{-1} \cdot g_1 \in H$. Δηλαδή θα πρέπει να ανήκουν στο ίδιο σύμπλοκο της H. Έτσι, η απεικόνιση $G \to E$ επάγει μία 1-1 και επί απεικόνιση $f : G/H \to E$. Μάλιστα η f είναι ένας ισομορφισμός αριστερών G-χώρων και οι $G/H, E$ είναι ισόμορφοι αριστεροί G-χώροι.$\Diamond$
Τώρα έστω G δρα μεταβατικά σε ένα σύνολο E από δεξιά, τότε λέμε ότι ο E είναι ένας ομογενής δεξιός G-χώρος. Έστω $\varphi : E \to E$ ένας αυτομορφισμός του E. Τότε για κάθε $y \in E$ τα σημεία $y, \varphi(y)$ έχουν τον ίδιο σταθεροποιητή. Αντίστροφα έστω $x, y \in E$ που έχουν τον ίδιο σταθεροποιητή. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\varphi \in Aut(E)$ έτσι ώστε $\varphi(x) = y$. Ορίζουμε την φ ως εξής. Έστω $z \in E$. Τότε από την μεταβατική δράση της G υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $z = x \cdot g$. Δηλαδή πρέπει να έχουμε

$$\varphi(z) = \varphi(x \cdot g) = (\varphi x) \cdot g = y \cdot g.$$

Έτσι ορίζουμε $\varphi(z) = y \cdot g$. Πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι ο ορισμός αυτός είναι ανεξάρτητος από την επιλογή του g, δηλαδή αν $x \cdot g = x \cdot g'$, τότε $y \cdot g = y \cdot g'$, κάτι που προκύπτει από την υπόθεση ότι τα x, y έχουν τον ίδιο σταθεροποιητή.

Λήμμα 1.28. *Μία ομάδα A από αυτομορφισμούς ενός ομογενούς G-χώρου E είναι ολόκληρη η ομάδα $Aut(E)$ ανν για κάθε δύο σημεία $x, y \in E$ που έχουν τον ίδιο σταθεροποιητή, υπάρχει ένας αυτομορφισμός $\varphi \in A$, έτσι ώστε $\varphi(x) = y$*[12].

Έστω H υποομάδα της G τότε:

$$N(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}.$$

είναι υποομάδα της G που περιέχει την H και ονομάζεται ο κανονικοποιητής (normalizer) της H. Είναι η μεγαλύτερη υποομάδα του G που περιέχει την H σαν κανονική υποομάδα. Προφανώς αν $H \triangleright G$ τότε $N(H) = G$.

Θεώρημα 1.29. *Έστω E ένας ομογενής G-χώρος και έστω H, να είναι ο σταθεροποιητής ενός $y \in E$. Τότε η ομάδα αυτομορφισμών του E είναι ισόμορφη με την ομάδα $N(H)/H$.*[13]

Από τα παραπάνω είναι τώρα ξεκάθαρο, ότι το σύνολο $p^{-1}(x)$ είναι ένας ομογενής δεξιός $\pi_1(X,x)$-χώρος. Για κάθε $y \in p^{-1}(x)$ ο σταθεροποιητής αυτού του y, είναι η υποομάδα $p_*(\pi_1(Y,y))$ της $\pi_1(X,x)$ (πόρισμα 1.8). Συνεπώς θα έχουμε το σύνολο $p^{-1}(x)$, σαν ένας ομογενής δεξιός $\pi_1(X,x)$-χώρος, να είναι ισόμορφος με την συλλογή συμπλόκων $\pi_1(X,x)/p_*(\pi_1(Y,y))$ (παρατήρηση 1.27.) και ο αριθμός των φύλλων της καλυπτικής απεικόνισης ισούται με τον δείκτη της υποομάδας $p_*(\pi_1(Y,y))$.

Είναι πράγματι άξιο προσοχής (και απορίας ίσως;) ότι καταφέραμε να φτάσουμε στο θεώρημα από όπου ξεκινήσαμε (βλέπε πόρισμα 1.2) αλλά μέσω διαφορετικών συλλογισμών. Για την συνέχεια θα δούμε τι σχέση μπορεί να έχει η ομάδα των covering transformations ενός καλυπτικού χώρου με την δράση της $\pi_1(X,x)$ στο $p^{-1}(x)$.

[12]για την απόδειξη, βλέπε στον [6], σελίδα 422.
[13]για την απόδειξη βλέπε σελ. 423 του [6].

Πρόταση 1.30. *Για κάθε αυτομορφισμό $\varphi \in Aut(Y/X)$, κάθε σημείο $y \in p^{-1}(x)$ και $[\alpha] \in \pi_1(X,x)$ έχουμε:*

$$\varphi(y \cdot [\alpha]) = (\varphi y) \cdot [\alpha],$$

δηλαδή κάθε $\varphi \in Aut(Y/X)$ επάγει έναν αυτομορφισμό του συνόλου $p^{-1}(x)$, παίρνοντας το $p^{-1}(x)$ σαν έναν δεξιό $\pi_1(X,x)$-χώρο.

Απόδειξη: Ανορθώνουμε το $[\alpha]$ σε κλάση δρόμων $[\tilde{\alpha}]$ στον χώρο Y, με αρχή το σημείο y έτσι ώστε $p_*([\tilde{\alpha}]) = [\alpha]$. Τότε $y \cdot [\alpha]$ θα είναι το τέλος των δρόμων $[\tilde{\alpha}]$. Τώρα παίρνοντας τους δρόμους $\varphi_*([\tilde{\alpha}])$ στον Y, θα έχουν αρχή το $\varphi(y)$ και τέλος το σημείο $\varphi(y \cdot [\alpha])$. Θα ισχύει ότι:

$$p_*(\varphi_*([\tilde{\alpha}]) = (p \circ \varphi)_*([\tilde{\alpha}])^{14} = p_*([\tilde{\alpha}]) = [\alpha].$$

Έτσι η κλάση δρόμων $\varphi_*([\tilde{\alpha}])$, αποτελούν ανόρθωση της κλάσης $[\alpha]$ και συνεπώς από μοναδικότητα ανόρθωσης, θα πρέπει να ταυτίζονται με το $[\tilde{\alpha}]$. Έτσι

$$y \cdot [\alpha] = (\varphi y) \cdot [\alpha] = \varphi(y \cdot [\alpha]). \ \Diamond$$

Θεώρημα 1.31. *Έστω (Y,p) καλυπτικός χώρος του X με $x \in X$, τότε η ομάδα $Aut(Y/X)$ είναι ισόμορφη με την $Aut(p^{-1}(x))$, παίρνοντας το $p^{-1}(x)$ σαν έναν δεξιό $\pi_1(X,x)$-χώρο.*

Απόδειξη: Αν $\varphi \in Aut(Y/X)$, τότε ο περιορισμός $\varphi|_{p^{-1}(x)}$ είναι ένας αυτομορφισμός της $p^{-1}(x)$, σαν ένας δεξιός $\pi_1(X,x)$-χώρος, από το προηγούμενο θεώρημα. Επίσης, κάθε αυτομορφισμός φ, εξαρτάται μόνον από τον περιορισμό του $\varphi|_{p^{-1}(x)}$, δηλαδή η απεικόνιση

$$k : \varphi \to \varphi|_{p^{-1}(x)}$$

είναι 1-1. Πράγματι $Ker k = \{\varphi \in Aut(Y/X) : \ k(\varphi) = id\}$. Από το πόρισμα 1.18 η φ δρα ελεύθερα στον Y και συνεπώς $\varphi = id$ και η k είναι 1-1. Αρκεί να δείξω ότι η k είναι επί. Από το λήμμα 1.28, οι αυτομορφισμοί που επάγουν οι $Aut(Y/X)$ είναι όλη η ομάδα $Aut(p^{-1}(x))$, ανν για κάθε $y_1, y_2 \in p^{-1}(x)$ με τους σταθεροποιητές αυτών των y_i να είναι ίσοι, δηλαδή $p_*(\pi_1(Y,y_1)) = p_*(\pi_1(Y,y_2))$, υπάρχει $\varphi \in Aut(Y/X) : \varphi(y_1) = y_2$. Κάτι που ισχύει από το πόρισμα 1.21. Έτσι $k(Aut(Y/X)) = Aut(p^{-1}(x))$ και k είναι επί.$\Diamond$

Πόρισμα 1.32. *Για κάθε $x \in X$ και $y \in p^{-1}(x)$, θα έχω ότι:*

$$Aut(Y/X) \cong N[p_*(\pi_1(Y,y))]/p_*(\pi_1(Y,y)),$$

όπου ο $N[p_*(\pi_1(Y,y))]$ είναι ο κανονικοποιητής της υποομάδας $p_*(\pi_1(Y,y))$ του $\pi_1(X,x)$.

Από το προηγούμενο θεώρημα, θα έχω ότι $Aut(Y/X) \cong Aut(p^{-1}(x))$. Εφαρμόζοντας τώρα το θεώρημα 1.29, προκύπτει το ζητούμενο.

Θεώρημα 1.33. *Αν (Y,p) κανονικός καλυπτικός χώρος του X, τότε:*

$$Aut(Y/X) \cong \pi_1(X,x)/p_*(\pi_1(Y,y))$$

για κάθε $x \in X$ και $y \in p^{-1}(x)$.

Προκύπτει άμεσα από το πόρισμα 1.32 γιατί αφού $p_*(\pi_1(Y,y)) \lhd \pi_1(X,x)$, θα έχω ότι $N[p_*(\pi_1(Y,y))] = \pi_1(X,x)$.

Πόρισμα 1.34. *Αν ο (Y,p) είναι καθολικός καλυπτικός χώρος του X, θα έχω $Aut(Y/X) \cong \pi_1(X,x)$*

[14]βλέπε functorial ιδιότητες των επαγόμενων ομομορφισμών [2], σελ.16.

1.1γ′ Κανονικοί Καλυπτικοί Χώροι και Χώροι Πηλίκα

Έστω (Y,p) καλυπτικός χώρος του X. Επειδή η p είναι μία ανοικτή απεικόνιση, ο X έχει την τοπολογία πηλίκο που επάγεται από την p. Έτσι μπορούμε να πάρουμε τον X από τον Y ταυτίζοντας συγκεκριμένα σημεία: Για κάθε $x \in X$, όλα τα σημεία του συνόλου $p^{-1}(x)$, πρέπει να ταυτιστούν σε ένα σημείο. Η ομάδα $Aut(Y/X)$, μεταθέτει όλα τα σημεία του συνόλου $p^{-1}(x)$, μεταξύ τους. Γενικά δεν ισχύει ότι $Y/Aut(Y/X) \cong X$. Μπορεί να υπάρχουν $y_1, y_2 \in p^{-1}(x)$ και $\nexists \varphi \in Aut(Y/X)$ έτσι ώστε $\varphi(y_1) = y_2$. Δηλαδή οι $Aut(Y/X)$ να μην δρουν μεταβατικά στο $p^{-1}(x)$.

Λήμμα 1.35. *Αν (Y,p) καλυπτικός χώρος του X, η ομάδα αυτομορφισμών $Aut(Y/X)$ δρα μεταβατικά στο $p^{-1}(x)$, με $x \in X$ ανν ο (Y,p) είναι κανονικός καλυπτικός χώρος.*

Απόδειξη: Η ομάδα $Aut(Y/X)$ δρα μεταβατικά στον $p^{-1}(x)$ αν για κάθε $y_1, y_2 \in p^{-1}(x)$ υπάρχει φ έτσι ώστε $\varphi(y_1) = y_2$. Αυτό, από το πόρισμα 1.21, αυτό θα συμβαίνει ανν $p_*(\pi_1(Y,y_1)) = p_*(\pi_1(Y,y_2))$. Από θεώρημα 1.6, οι υποομάδες $p_*(\pi_1(Y,y))$ για $y \in p^{-1}(x)$ αποτελούν μία κλάση συζυγίας από υποομάδες του $\pi_1(X,x)$. Έτσι $p_*(\pi_1(Y,y_1)) = [\alpha] * p_*(\pi_1(Y,y_2)) * [\bar{\alpha}]$. Από την κανονικότητα του καλυπτικού χώρου έπεται ότι $p_*(\pi_1(Y,y_1)) = p_*(\pi_1(Y,y_2))$.◊

Είδαμε ότι αν το (Y,p) είναι κανονικός καλυπτικός χώρος του X, τότε:

$$Y/Aut(Y/X) \cong X.$$

Ας δούμε τώρα το αντίστροφο της πρότασης 1.15:

Πρόταση 1.36. *Έστω ότι ο (Y,p) είναι καλυπτικός χώρος του X. Τότε η ομάδα $Aut(Y/X)$, δρα evenly στον Y. Επίσης αν η $Aut(Y/X)$ δρα μεταβατικά σε κάθε φύλλο της p, τότε το κάλυμμα είναι ένα κανονικό G-κάλυμμα με $Aut(Y/X) = G$.*

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι η δράση είναι even. Έστω $y \in Y$ και N μια γειτονιά του $p(y)$, η ποία είναι ομαλά καλυμμένη από την p. Παίρνω ένα φύλλο της p, V με $y \in V$ έτσι ώστε η $p|_V V \to N$ να είναι ένας ομοιομορφισμός. Αν $\varphi \neq \varphi' \in Aut(Y/X)$, τότε $\varphi(V)$ και $\varphi'(V)$, θα πρέπει να είναι ξένα, διαφορετικά η $\varphi^{-1} \circ \varphi'$ θα έχει ένα σταθερό σημείο στο V, πράγμα άτοπο από πόρισμα 1.18. Έτσι $\varphi(V) \cap \varphi'(V) = \varphi \cdot V \cap \varphi' \cdot V = \varnothing$. Τώρα από το προηγούμενο λήμμα αν η ομάδα $Aut(Y/X)$, δρα μεταβατικά στο $p^{-1}(x)$, ο Y είναι κανονικός καλυπτικός χώρος. Άρα $Y/Aut(Y/X) \cong X$ και προφανώς $G = Aut(Y/X)$.◊

Παρατηρούμε ότι αν η δράση είναι μεταβατική, θα είναι και πιστή, δηλαδή το $\varphi \in Aut(Y/X)$, με $\varphi(y) = y'$ είναι μοναδικό. Από το θεώρημα 1.33 και την πρόταση 1.36 παίρνουμε το παρακάτω πόρισμα:

Πόρισμα 1.37. *Αν (Y,p) είναι ένας κανονικός καλυπτικός χώρος του X, τότε ο Y είναι ένα κανονικό G-κάλυμμα και*

$$G = Aut(Y/X) \cong \pi_1(X,x)/p_*(\pi_1(Y,y))$$

για κάθε $x \in X$ και $y \in p^{-1}(x)$. Αν ο Y είναι απλά συνεκτικός χώρος τότε $\pi_1(X) \cong G = Aut(Y/X)$.

Είδαμε ότι ένας καλυπτικός χώρος (Y,p) του X καθορίζεται πλήρως από την κλάση συζυγίας της υποομάδας $p_*(Y,y)$ του $\pi_1(X,x)$. Το ερώτημα που προκύπτει είναι ότι: αν X είναι ένας τοπολογικός χώρος και αν μας δίνεται μία κλάση συζυγίας από υποομάδες του $\pi_1(X,x)$, υπάρχει καλυπτικός χώρος (Y,p) του X έτσι ώστε η $p_*(Y,y)$ να ανήκει σε αυτήν την κλάση συζυγίας;

Θεώρημα 1.38. *Έστω X τοπολογικός χώρος, που έχει καθολικό καλυπτικό χώρο. Τότε για κάθε κλάση συζυγίας από υποομάδες της $\pi_1(X,x)$, υπάρχει καλυπτικός χώρος (Y,p) του X, έτσι ώστε η $p_*(\pi_1(Y,y))$ να ανήκει σε αυτήν την κλάση συζυγίας.*

Απόδειξη: Έστω $(\tilde{X},q)$ ο καθολικός καλυπτικός χώρος του X. Η $\pi_1(X,x)$ δρα μεταβατικά στο σύνολο $q^{-1}(x)$ από δεξιά, και καθώς ο Y είναι απλά συνεκτικός δρα ελεύθερα. Επίσης και η ομάδα αυτομορφισμών $Aut(\tilde{X}/X) \cong \pi_1(X,x)$ δρα μεταβατικά (κάθε καθολικό κάλυμμα είναι και κανονικό) από αριστερά, στο σύνολο $q^{-1}(x)$. Διαλέγω ένα σημείο $\tilde{x} \in q^{-1}(x)$ και υποομάδα G που ανήκει στην κλάση συζυγίας που μας δίνεται. Έστω H να είναι υποομάδα των αυτομορφισμών $Aut(\tilde{X}/X)$ που ορίζεται ως εξής: $\varphi \in H$ ανν υπάρχει στοιχείο $[\alpha] \in G$ τέτοιο ώστε $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{x}\cdot[\alpha] \in q^{-1}(x)$. Στο δεξί μέλος της ισότητας έχουμε την δράση του αυτομορφισμού φ στην $q^{-1}(x)$ ενώ στο αριστερό μέλος της ισότητας την δράση του στοιχείου της ομάδας G στον $q^{-1}(x)$. Είδαμε ότι (ορισμός 1.24) $G \cong H$ μέσω της αντιστοιχίας $\varphi \leftrightarrow [\alpha]$, ανν $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{x}\cdot[\alpha]$.
Επειδή $H \leq Aut(\tilde{X}/X)$, η H δρα evenly στον $\tilde{X}$. Έστω Y να δηλώνει τον χώρο πηλίκο $\tilde{X}/H$, $r : \tilde{X} \to Y$, να είναι η φυσική προβολή και $p : Y \to X$ να είναι η απεικόνιση που επάγει η $q : \tilde{X} \to X$. Έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα έτσι ώστε $p \circ r = q$:

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{X},\tilde{x}) & \xrightarrow{r} & (Y,y) \\ & q \searrow \swarrow p & \\ & (X,x) & \end{array}$$

Όπου ο $(\tilde{X},q)$ καλυπτικός χώρος του X (από υπόθεση), ο $(\tilde{X},r)$ είναι ένας H-καλυπτικός χώρος του Y (από λήμμα 1.12) και (Y,p) καλυπτικός χώρος του X από το λήμμα 1.23 γιατί αποτελεί έναν ομομορφισμό καλυπτικών χώρων. Αρκεί να δείξω ότι $G \cong p_*(\pi_1(Y,y))$. Έχω ότι $p : Y = \tilde{X}/H \to X$ είναι μία καλυπτική απεικόνιση, έτσι $p_*(\pi_1(Y,y)) \cong \pi_1(Y,y)$ και από το πόρισμα 1.37 θα έχω $\pi_1(Y,y) \cong H \cong G$, έτσι $G \cong p_*(\pi_1(Y,y))$. $\diamondsuit$

Ορισμός 1.39. *Ένας χώρος X ονομάζεται τοπικά απλά συνεκτικός αν κάθε γειτονιά ενός σημείου του, περιέχει μια γειτονιά του σημείου που είναι απλά συνεκτική.*

Ορισμός 1.40. *Ένας χώρος X ονομάζεται semilocally απλά συνεκτικός αν κάθε σημείο του έχει γειτονιά τέτοια ώστε κάθε κλειστό μονοπάτι σε αυτήν την γειτονιά είναι ομοτοπικό με το τετριμμένο. Ισοδύναμα αν κάθε σημείο $x \in X$ έχει γειτονιά V έτσι ώστε ο επαγώμενος από τον εγκλεισμό ομομορφισμός $i_* : \pi_1(V,x) \to \pi_1(X,x)$ είναι ο μηδενικός, δηλαδή απεικονίζει κάθε στοιχείο της $\pi_1(V,x)$ στο ταυτοτικό και συνεπώς η i είναι μη ουσιώδης[15] συνάρτηση (null-homotopic).*

Είναι προφανές ότι αν ένας χώρος είναι τοπικά απλά συνεκτικός, τότε θα είναι και semilocally απλά συνεκτικός. Μπορούμε μάλιστα να δείξουμε ότι ένας συνεκτικός και τοπικά δρομοσυνεκτικός χώρος έχει καθολικό καλυπτικό χώρο ανν είναι semilocally απλά συνεκτικός[16]. Για τα παρακάτω, υποθέτουμε ότι ο χώρος X είναι συνεκτικός, τοπικά δρομοσυνεκτικός και semilocally απλά συνεκτικός, έτσι ώστε να έχει καθολικό καλυπτικό χώρο.
Φτάσαμε στον σκοπό μας, που είναι να βρούμε την αντιστοιχία που υπάρχει μεταξύ των υποομάδων της θεμελιώδους ομάδας ενός χώρου και των καλυμμάτων του

[15] βλέπε [2] σελίδα 56.
[16] βλέπε [1] σελίδα 188.

χώρου αυτού. Το παρακάτω αποτέλεσμα θα είναι μια φυσική συνέπεια της μέχρι τώρα πορείας μας:

Θεώρημα 1.41. *(α) Για κάθε υποομάδα H του $\pi_1(X,x)$ υπάρχει ένα συνεκτικό κάλυμμα: $p_H : (Y_H, y_H) \to (X,x)$, με $y_H \in p^{-1}(x)$, έτσι ώστε η εικόνα του $\pi_1(Y_H, y_H)$ στην $\pi_1(X,x)$, μέσω της p_{H_*} να είναι η υποομάδα H. Κάθε άλλο τέτοιο κάλυμμα (ως προς την επιλογή βάσης) είναι ισόμορφο με αυτό.*
(β) Αν K είναι μία άλλη υποομάδα του $\pi_1(X,x)$, που περιέχει το H, υπάρχει μοναδική συνεχής απεικόνιση $p_{H,K} : (Y_H, y_H) \to (Y_K, y_K)$ που είναι συμβατή με τις προβολές στον X. Αυτή είναι καλυπτική απεικόνιση και αν $H \lhd K$, τότε είναι ένα G-κάλυμμα με $G = K/H$.

Απόδειξη: (α) Έστω $(\tilde{X}, u)$ να είναι ο καθολικός καλυπτικός χώρος του X. Αφού $H \le \pi_1(X,x)$, από το θεώρημα 1.38 υπάρχει καλυπτικός χώρος (Y_H, p_H) του X, έτσι ώστε η $p_{H_*}(\pi_1(Y_H, y_H)) = H$. Έστω $p'_H : (Y_H, y'_H) \to (X,x)$ μία άλλη καλυπτική απεικόνιση με $p(y_H) = p(y_K) = x$ και $p'_{H_*}(\pi_1(Y_H, y'_H)) = H$. Από το πόρισμα 1.21 θα έχω ότι οι δύο αυτοί καλυπτικοί χώροι θα είναι ισόμορφοι γιατί $p_{H_*}(\pi_1(Y_H, y_H)) = p'_{H_*}(\pi_1(Y_H, y'_H))$ (ο p_* είναι ανεξάρτητος από την επιλογή βάσης.).
(β) Όμοια υπάρχει (Y_K, p_K) καλυπτικός χώρος του X, έτσι ώστε
$p_{K_*}(\pi_1(Y_K, y_K)) = K$. Έτσι θα έχουμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X}, \tilde{x}) \arrow[dl, "r_K"'] \arrow[dr, "r_H"] \arrow[d] & \\ Y_K \arrow[dr, "p_K"'] & & Y_H \arrow[dl, "p_H"] \\ & (X,x) & \end{tikzcd}$$

Αν τώρα $H \subset K$ υπάρχει $p_{H,K}$ έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} (Y_H, y_H) \arrow[rr, "p_{H,K}"] \arrow[dr, "p_H"'] & & (Y_K, y_K) \arrow[dl, "p_K"] \\ & (X,x) & \end{tikzcd}$$

Πράγματι, από το θεώρημα 1.7 θα έχω ότι υπάρχει μοναδική ανόρθωση της p_H με $p_K \circ p_{H,K} = p_H$ ανν $H = p_{H_*}(\pi_1(Y_H, y_H)) \subset p_{K_*}(\pi_1(Y_K, y_K)) = K$. Τώρα αφού η $p_{H,K}$ είναι ένας ομομορφισμός καλυπτικών απεικονίσεων, σύμφωνα με το λήμμα 1.23, θα είναι μία καλυπτική απεικόνιση.
Αν $H = p_{H_*}(\pi_1(Y_H, y_H)) \lhd p_{K_*}(\pi_1(Y_K, y_K)) = K$ τότε από το πρόταση 1.36 και το θεώρημα 1.33, ο χώρος $(Y_H, p_{H,K})$, θα είναι ένας G-καλυπτικός χώρος με

$$G = \pi_1(Y_K, y_K)/p_{H,K_*}(\pi_1(Y_H, y_H)).$$

Όμως $\pi_1(Y_K, y_K) \cong p_{K_*}(\pi_1(Y_K, y_K)) = K$, γιατί η p_{K_*} είναι μονομορφισμός. Όμοια $p_{H,K_*}(\pi_1(Y_H, y_H)) \cong \pi_1(Y_H, y_H) \cong H$.Έτσι $G \cong K/H$. $\diamondsuit$

Πόρισμα 1.42. *Υπάρχει μία 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ όλων των υποομάδων H της $\pi_1(X,x)$ και όλων των καλυπτικών κλάσεων*[17] *$[p_H : (Y_H, y_H) \to (X,x)]$. Δηλαδή:*

$$H = p_{H_*}(\pi_1(Y_H, y_H)) \longleftrightarrow [p_H : (Y_H, y_H) \to (X,x)].$$

[17] δηλαδή των καλυπτικών χώρων του X που αντιστοιχούν στην υποομάδα H modulo(ισομορφισμοί καλυπτικών χώρων).

Θα έχουμε την εξής αντιστοιχία:

$$\begin{array}{ccccc}
(\tilde{X},\tilde{x}) & \leftrightarrow & \{e\} & = & Aut(\tilde{X}/\tilde{X}) \\
\downarrow & & \cap & & \wedge \\
(Y_H, y_H) & \leftrightarrow & H & = & Aut(\tilde{X}/H) \\
\downarrow & & \cap & & \wedge \\
(Y_K, y_K) & \leftrightarrow & K & = & Aut(\tilde{X}/K) \\
\downarrow & & \cap & & \wedge \\
(X,x) & \leftrightarrow & G & = & Aut(\tilde{X}/X)
\end{array}$$

Αν η H είναι κανονική υποομάδα της K, τότε ο καλυπτικός χώρος $(Y_H, p_{H,K})$ θα είναι ένα K/H-κάλυμμα. Τότε θα έχουμε ότι:

$$K/H \cong Aut(\tilde{X}/Y_K)/Aut(\tilde{X}/Y_H) \cong Aut(Y_H/Y_K).$$

Κάθε κάλυμμα $Y_H \to X$, που αντιστοιχεί στην H, μπορεί να ταυτιστεί με το $\tilde{X}/H \to X$, με H να είναι μια υποομάδα των $Aut(\tilde{X}/X) \cong \pi_1(X,x)$, που δρα στον $\tilde{X}$. Κανονικά καλύμματα του χώρου X αντιστοιχούν σε κανονικές υποομάδες H. Έτσι κάθε κανονικό κάλυμμα $p : Y \to X$, έχει την μορφή $\tilde{X}/H \to X$ και είναι G-κάλυμμα (πρόταση 1.37.), με

$$\pi_1(X,x)/H \cong Aut(Y/X) \cong G.$$

Βλέπουμε ότι οι μικρότερες υποομάδες της $\pi_1(X,x)$ και συνεπώς οι μικρότερες υποομάδες της $Aut(\tilde{X}/X)$, αντιστοιχούν σε μεγαλύτερα καλύμματα.

1.2 Θεωρία Galois

Έστω F, K σώματα με $K \subset F$, τότε το F είναι μία επέκταση του K.

Ορισμός 1.43. *Έστω F επέκταση του σώματος E. Ορίζουμε την Galois ομάδα της επέκτασης αυτής να είναι:*

$$Gal(F/K) = \{\sigma \in Aut(F) : \sigma(k) = k \,\forall\, k \in K\}.$$

Ορίσαμε την ομάδα Galois να αποτελείται από εκείνους τους αυτομορφισμούς του σώματος F, που αφήνουν σημειακά σταθερό το σώμα E, με $Gal(F/K) \leq Aut(F)$.
Για την συνέχεια θα παρουσιάσουμε σύντομα κάποια αποτελέσματα της θεωρίας Galois με βάση τους [4] και [7], με σκοπό να φτάσουμε στο θεμελιώδες θεώρημα της εν λόγο θεωρίας. Ένα ανάγωγο πολυώνυμο f ονομάζεται διαχωρίσιμο αν για κάθε ρίζα του ρ, το $f'(\rho) \neq 0$, δηλαδή αν δεν έχει ρίζες πολλαπλότητας μεγαλύτερης της μονάδας.

Θεώρημα 1.44. *Έστω $f(x) \in F[x]$ είναι ένα διαχωρίσιμο πολυώνυμο και F είναι μία επέκταση του σώματος K. Αν F είναι το splitting field του f τότε:*

$$|Gal(F/K)| = [F : K].$$

Ορισμός 1.45. *Έστω F σώμα. Αν $G \subset Aut(F)$ τότε θέτουμε το*

$$F^G = \{f \in F : \sigma(f) = f \,\forall \sigma \in G\}.$$

να είναι το σταθερό σώμα του G στον F.

Παρατηρούμε ότι το F^G είναι ένα υπόσωμα του F. Ο παραπάνω ορισμός είναι σημαντικός όταν το G είναι υποομάδα των $Aut(F)$. Παραμένει όμως αξιόλογος ακόμα και αν είναι ένα απλό υποσύνολο, βλέποντας ότι αν

$$H \subset G \text{ τότε } F^G \subset F^H.$$

Επίσης αν F επέκταση του K και $G = Gal(F/K)$, τότε $K \subset F^G \subset F$. Κάθε σώμα ανάμεσα στο K και το F ονομάζεται ενδιάμεσο σώμα. Στην περίπτωση που η G είναι υποομάδα της ομάδας αυτομορφισμών του F θα έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

(i) Αν G είναι μία υποομάδα της $Aut(F)$ τότε $[F : F^G] = |G|$.

(ii) Αν G, H είναι πεπερασμένες υποομάδες της $Aut(F)$ με $F^G = F^H$, τότε $G = H$.

Θεώρημα 1.46. *Έστω F να είναι μία πεπερασμένη επέκταση του σώματος K με ομάδα Galois $G = Gal(F/K)$. Θα λέμε ότι είναι μία Galois επέκταση αν ισχύει μία από τις παρακάτω ισοδύναμες συνθήκες:*

(i) $K = F^G$.

(ii) *Κάθε ανάγωγο πολυώνυμο $p(x) \in K[x]$, το οποίο έχει ρίζες στο F, είναι διαχωρίσιμο και έχει όλες τις ρίζες του στο σώμα F.*

(iii) *Το σώμα F αποτελεί το splitting field κάποιου διαχωρίσιμου πολυωνύμου $f(x) \in K[x]$.*

1.2α′ Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Θεωρίας Galois

Θεώρημα 1.47 (Θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας Galois).
Έστω F πεπερασμένου βαθμού επέκταση Galois επί του K, με ομάδα Galois την $G = Gal(F/K)$, $K = F^G$ και E ενδιάμεσο σώμα, δηλαδή $K \subset E \subset F$. Τότε υπάρχει μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ: όλων των ενδιάμεσων σωμάτων της επέκτασης και όλων των υποομάδων της G, που δίνεται από την $E \mapsto Gal(F/E)$ έτσι ώστε:

(i) *Ο σχετικός βαθμός της επέκτασης δύο ενδιάμεσων σωμάτων είναι ίσος με τον σχετικό δείκτη των αντίστοιχων υποομάδων της Galois ομάδας. Συγκεκριμένα η $Gal(F/K)$, έχει τάξη $[F : K]$.*

(ii) *Η F είναι μία Galois επέκταση επί κάθε ενδιάμεσου σώματος E, αλλά το E είναι Galois επέκταση επί του K ανν η αντίστοιχη υποομάδα Galois: $Gal(F/E)$ είναι μία κανονική υποομάδα της G. Σ′ αυτήν την περίπτωση θα έχουμε:*
$$Gal(F/K)/Gal(F/E) \cong Gal(E/K).$$

Η 1-1 αντιστοιχία προκύπτει αντιστοιχώντας σε κάθε ενδιάμεσο σώμα E την Galois ομάδα $Gal(F/E) \leq Gal(F/K)$.
Αντίστροφα: Αντιστοιχώ σε κάθε υποομάδα H της $Gal(F/K)$ το σταθερό της σώμα στην F, δηλαδή $H \mapsto F^H$.

Αν L, M ενδιάμεσα σώματα της επέκτασης $K \subset F$ και J, H υποομάδες της $Gal(F/K)$ με $H \leq J$, θα έχω:

$$\begin{array}{ccccccc}
F & \longmapsto & 1 & & F & \longleftarrow & 1 \\
\cup & & \wedge & & \cup & & \wedge \\
M & \longmapsto & Gal(F/M) & & F^H & \longleftarrow & H \\
\cup & & \wedge & & \cup & & \wedge \\
L & \longmapsto & Gal(F/L) & & F^J & \longleftarrow & J \\
\cup & & \wedge & & \cup & & \wedge \\
K & \longmapsto & Gal(F/K) & & K & \longleftarrow & Gal(F/K)
\end{array}$$

Λήμμα 1.48. *Έστω F επέκταση σώματος K, με ενδιάμεσα σώματα L, M. Έστω H, J υποομάδες της $Gal(F/K) = G$. Τότε:*

(i) $Gal(F/F) = 1$ *και* $Gal(F/K) = G$,

(ii) $F^1 = F$,

(iii) *Αν* $L \subset M \Longrightarrow Gal(F/M) < Gal(F/L)$,

(iv) $H < J \Longrightarrow F^J \subset F^H$,

(v) $L \subset F^{Gal(F/L)}$ *και* $H < Gal(F/F^H)$,

(vi) $Gal(F/L) = Gal(F/F^{Gal(F/L)})$ *και* $F^H = F^{Gal(F/F^H)}$.

Ελπίζω ότι το παρακάτω γράφημα θα αποσαφηνίσει τυχόν απορίες:

$$\begin{array}{ccccccc}
F & \longmapsto & 1 & \longmapsto & F & \longmapsto & 1 \\
\cup & & \wedge & & \cup & & \wedge \\
M & \longmapsto & Gal(F/M) & \longmapsto & F^{Gal(F/M)} & \longmapsto & Gal(F/M) \\
\cup & & \wedge & & \cup & & \wedge \\
L & \longmapsto & Gal(F/L) & \longmapsto & F^{Gal(F/L)} & \longmapsto & Gal(F/L) \\
\cup & & \wedge & & \cup & & \wedge \\
K & \longmapsto & Gal(F/K) & \longmapsto & F^G & \longmapsto & G
\end{array}$$

Σχήμα 1.3: Μία επέκταση F επί του K που δεν είναι Galois.

Η παραπάνω επέκταση F είναι Galois επί του K ανν $F^G = K$. Όμοια η F είναι επέκταση Galois επί τυχαίου ενδιάμεσου σώματος E, ανν $E = F^{Gal(F/E)}$.

Ορισμός 1.49. *Έστω X ενδιάμεσο σώμα της επέκτασης $K \subset F$ (ή μία υποομάδα της Galois ομάδας της επέκτασης, αντίστοιχα.). Ορίζουμε το X να είναι κλειστό ανν $X = F^{Gal(F/X)}$ ($X = Gal(F/F^X)$.). Παρατηρούμε ότι η F είναι μία Galois επέκταση επί του K, ανν το σώμα K είναι κλειστό.*

Λήμμα 1.50. *Έστω F να είναι επέκταση ενός σώματος K. Υπάρχει μία 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα των κλειστών ενδιάμεσων σωμάτων της επέκτασης και των κλειστών υποομάδων της ομάδας Galois, που δίνεται από $E \mapsto Aut(F/E)$.*

Σε μία Galois επέκταση όλα τα ενδιάμεσα σώματα είναι κλειστά και στην περίπτωση που η επέκταση είναι πεπερασμένου βαθμού, όλες οι υποομάδες της ομάδας Galois είναι επίσης κλειστές. Πράγματι:

Λήμμα 1.51. *Αν F επέκταση ενός σώματος, L, M ενδιάμεσα σώματα με $L \subset M$ και H, J υποομάδες της ομάδας $Gal(F/K) = G$, με $H < J$, τότε:*

(i) *Αν το L είναι κλειστό σώμα και $[M : L] < \infty$, τότε το M είναι κλειστό σώμα και*
$$Gal(F/L)/Gal(F/M) = [M : L],$$

(ii) *Αν H είναι κλειστή υποομάδα και $[J : H] < \infty$, τότε η J είναι κλειστή υποομάδα με*
$$[F^H : F^J] = [J : H],$$

(iii) *Αν F είναι μία πεπερασμένη επέκταση Galois επί του K, τότε όλα τα ενδιάμεσα σώματα και όλες οι υποομάδες της ομάδας $Gal(F/K)$ είναι κλειστές με $Gal(F/K) = [F : K]$.*

Η κατάσταση περιγράφεται στο παρακάτω σχήμα.

$$\begin{array}{ccc}
F & \longleftrightarrow & 1 \\
\cup & & \wedge \\
M & \longleftrightarrow & Gal(F/M) \\
\cup & & \wedge \\
L & \longleftrightarrow & Gal(F/L) \\
\cup & & \wedge \\
K & \longleftrightarrow & G
\end{array}$$

Σχήμα 1.4: Μία επέκταση F επί του K που είναι Galois.

Κεφάλαιο 2

Επιφάνειες Riemann

2.1 Επιφάνειες Riemann και Αναλυτικές Απεικονίσεις

2.1α′ Λίγα για τις Αναλυτικές Συναρτήσεις

Θα αρχίσουμε υπενθυμίζοντας λίγα πράγματα για τις αναλυτικές (ή ολόμορφες, holomorphic[1]) συναρτήσεις:
Μία συνάρτηση λέγεται αναλυτική σε ένα ανοικτό U, αν υπάρχει η παράγωγος σε κάθε σημείο του U. Θα λέμε ότι είναι αναλυτική σε ένα σημείο z_0, αν είναι αναλυτική σε μία περιοχή του z_0. Πρέπει να παρατηρήσουμε έτσι ότι η αναλυτικότητα στο z_0 είναι μία έννοια διαφορετική της παραγωγισημότητας. Αν f είναι αναλυτική σε μία ανοικτή U, τότε είναι μία συνεχής συνάρτηση στο U και ισχύουν οι Cauchy-Riemann συνθήκες: αν $f(z) = u(x, y) + v(x, y)i$, με $z = x + yi$ τότε $u_x = v_y$ και $u_y = -v_x$.
Ένα άλλο βασικό αποτέλεσμα είναι ότι κάθε συγκλίνουσα δυναμοσειρά είναι μία αναλυτική συνάρτηση στο διάστημα σύγκλισης και κάθε αναλυτική f, σε ένα ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ μπορεί να την παραστήσουμε με μία δυναμοσειρά, δηλαδή για κάθε z_0 στο ανοικτό σύνολο, υπάρχει μία δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ που συγκλίνει στο $f(z)$, για κάθε z σε μία περιοχή του z_0[2].
Αν $f(z)$ είναι αναλυτική σε δίσκο $D = D(z_0, R)$, με $R > 0$, ισχύει το θεώρημα Taylor, δηλαδή για κάθε $z \in D$ θα έχουμε:

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2\frac{(z - z_0)^2}{2} + \cdots \text{ με } a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\ (n = 0, 1, \ldots).$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- z_0 είναι ρίζα της f,
- $a_0 = 0$,
- η f γράφεται σαν $f(z) = (z - z_0)g(z)$, για κάθε $z \in D$, με $g(z)$ αναλυτική συνάρτηση στο D.

[1] ο όρος ολόμορφη προέρχεται από την σύνθεση τον λέξεων *όλος* και *μορφή* και επιλέχτηκε για να τονιστεί η ομοιότητα ανάμεσα στις ολόμορφες συναρτήσεις και τις ακέραιες (entire) συναρτήσεις (όπως τα πολυώνυμα) που είναι παραγωγίσημα παντού στο πεπερασμένο επίπεδο (θα δούμε αργότερα (πόρισμα 2.15) ότι μία συνάρτηση παντού αναλυτική στο $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ είναι σταθερή).

[2] βλέπε [8] θεώρημα 16.7, σελίδα 361.

Αν $f(z)$ όχι σταθερή συνάρτηση, τότε θα έχουμε ότι:

$$f(z) - a_0 = a_1(z - z_0) + a_2\frac{(z-z_0)^2}{2} + \cdots$$

Θα πρέπει τουλάχιστον μία από τις παραγώγους $f^{(n)}$ να μην είναι μηδέν, γιατί διαφορετικά θα είχαμε από το ανάπτυγμα Taylor σε μία περιοχή του z_0 ότι η $f(z)$ θα ήταν σταθερή, πράγμα άτοπο από την υπόθεσή μας. Έστω $(z - z_0)^k$ να είναι η μικρότερη δύναμη του $(z - z_0)$, με όχι μηδενικό συντελεστή. Προκύπτει ότι:

$$f(z) - a_0 = (z - z_0)^k\Big[\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} + (z - z_0)\frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} + \cdots\Big] \text{ με } f^{(k)} \neq 0$$

Θα λέμε ότι το k είναι η πολλαπλότητα (ή η τάξη του σημείου) με την οποία η f παίρνει την τιμή z_0. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι αν το z_0 είναι ρίζα μίας όχι σταθερής $f(z)$, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- Η $f(z)$ έχει ρίζα πολλαπλότητας k στο z_0,
- $f'(z) = f'(z_0) = \cdots = f^{k-1}(z_0) = 0$ και $f^k(z_0) \neq 0$,
- $f(z) = (z - z_0)^k g(z)\, \forall\, z \in D$, με $g(z)$ μία αναλυτική συνάρτηση στον D και $g(z_0) \neq 0$.

Σημείο ανωμαλίας z_0 της f είναι όταν η f είναι αναλυτική σε κάθε γειτονιά του z_0, αλλά δεν είναι αναλυτική στο z_0. Μεμονωμένο σημείο ανωμαλίας είναι όταν, επιπλέον υπάρχει κάποια «τρυπημένη» γειτονιά του z_0 : $0 < |z - z_0| < R$, έτσι ώστε η f να είναι αναλυτική. Για παράδειγμα το $z = 0$ είναι μεμονωμένο σημείο ανωμαλίας για την $1/z$.
Έτσι, όταν η f είναι παραγωγίσημη στον ανοικτό δίσκο $D(z_0, R)\setminus\{z_0\}$, υπάρχουν σταθερές: $a_i, b_i \in \mathbb{C} : i = (0, \ldots, n)$ για κάθε $z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ έτσι ώστε να ισχύει το θεώρημα Laurent, δηλαδή η f να έχει σειρά Laurent με:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

Για κάθε $z \in R_1 < |z - z_0| < R_2$, όπου η f είναι αναλυτική. Το πρώτο άθροισμα ονομάζεται κανονικό μέρος της f και αντιπροσωπεύει μία αναλυτική συνάρτηση, ενώ το δεύτερο κύριο μέρος. Όπου:

$$a_n = \int_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz/2\pi i \text{ για } n \geq 0,\ b_n = \int_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}}dz/2\pi i \text{ για } n \geq 1.$$

Με c να είναι μία Π.Α.Κ. Τα a_i, b_i, προκύπτουν από τον Γενικευμένο Ολοκληρωτικό Τύπο του Cauchy που ισχύει για μία παραγωγίσημη $f(z)$ στο $I(c)^3 \cup$ ίχνος της c με $z_0 \in I(c)$ και c να είναι μία Π.Α.Κ (Πολύ Απλή Καμπύλη), δηλαδή κλειστή, απλή, θετικά προσανατολισμένη και το $I(c)\cup$ ίχνος της καμπύλης να είναι ένα κυρτό σύνολο[4]. Για $n = 1$ θα έχουμε ότι $b_1 2\pi i = \int_c f(z)dz$ με b_1 να είναι το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $f(z)$ στο z_0 και συμβολίζεται με $Res(f, z_0)$.
Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

[3]με $I(c)$ συμβολίζουμε το εσωτερικό της καμπύλης c.

[4]ο Γενικευμένος Ολοκληρωτικός Τύπος του Cauchy, μας λέει ότι για f, c, όπως παραπάνω, θα έχουμε ότι: $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$.

- Αν όλα τα b_i είναι μηδέν, τότε η f παρουσιάζει αιρόμενη (ή επουσιώδη) ανωμαλία στο z_0. Ορίζοντας $f(z_0) = a_0$ τότε η ανωμαλία αίρεται,
- Αν άπειρα b_i είναι διάφορα του μηδενός, τότε έχουμε ουσιώδη ανωμαλία στο z_0,
- Αν πεπερασμένα b_i είναι διάφορα του μηδενός, τότε για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ θα έχουμε $b_k \neq 0$ ενώ $b_{k+1} = b_{k+2} = \ldots = 0$. Τότε λέμε ότι η $f(z)$ έχει πόλο με πολλαπλότητα (τάξης) k στο z_0 και $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι οι ρίζες της $f(z)$ είναι οι πόλοι της $f(\zeta)$ και το αντίστροφο εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό $\zeta = 1/z$, ενώ οι τάξεις διατηρούνται. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για μία f αναλυτική στο $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$:

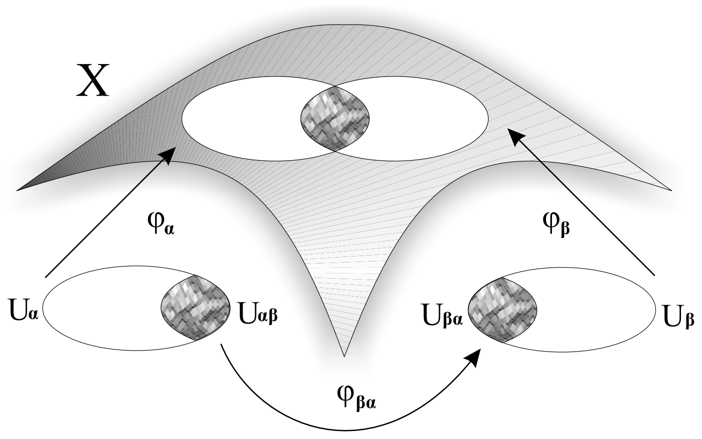
- Η $f(z)$ έχει πόλο με πολλαπλότητα k στο z_0,
- $f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^k}$, για κάποια $h(z)$ αναλυτική στο $D(z_0, R)$ και $h(z) \neq 0$,
- το όριο $\lim_{z\to z_0} f(z)(z - z_0)^k$ υπάρχει και είναι διάφορο του μηδενός.

2.1β′ Βλέποντας τις Επιφάνειες Riemann

Μία συνεκτική επιφάνεια Riemann X είναι μία λεία 2-πολλαπλότητα, μαζί με μία μιγαδική αναλυτική δομή στον X:

- Είναι μία *επιφάνεια*, δηλαδή ένας Hausdorff τοπολογικός τοπολογικός χώρος X με μία αριθμήσιμη βάση έτσι ώστε: για κάθε $x \in X$ να υπάρχει ανοικτή περιοχή του U_x, με U_x να είναι ομοιομορφική με ένα V, που είναι ανοικτό του $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$.
- Ο X είναι εφοδιασμένος με ένα ζεύγος $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, όπου U_α είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και φ_α μία συλλογή από ομοιομορφισμούς: $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset X$, για κάθε δείκτη $\alpha \in I$ (ο φ_α είναι μία εμφύτευση του U_α στον X.). Την συλλογή $\{\varphi_\alpha : \alpha \in I\}$ την ονομάζουμε χάρτη (chart, coordinate chart) και το ζεύγος $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ συντεταγμενική περιοχή (coordinate neighborhood.). Επίσης:
- Ο τοπολογικός τοπολογικός χώρος X καλύπτεται από αυτές τις περιοχές, δηλαδή ισχύει $X = \cup \varphi_\alpha(U_\alpha)$, με $\alpha \in \mathbb{N}$. Τέλος:
- Αν $U_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta))$, ορίζουμε τις απεικονίσεις αλλαγής συντεταγμένων να είναι, $\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha : U_{\alpha\beta} \to U_{\beta\alpha}$ ή
$$\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha : \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$$
με $U_{\alpha\beta} \cong U_{\beta\alpha}$ και απαιτούμε να είναι C^∞ και αναλυτικές *για κάθε* δείκτες α, β (αν ήταν μόνο C^∞ θα είχαμε μία λεία (ή διαφορίσιμη) μιγαδική επιφάνεια.). Οι $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$, ονομάζονται αναλυτικά ισοδύναμες συντεταγμενικές περιοχές.

Μία άλλη οικογένεια συντεταγμενικών περιοχών: $\{\psi_{\alpha'} : U_{\alpha'} \to X\}$ είναι αναλυτικά ισοδύναμη με την $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \to X\}$ αν *όλες* οι απεικονίσεις αλλαγής συντεταγμένων από την μία συντεταγμενική περιοχή στην άλλη είναι C^∞ και αναλυτικές. Τότε λέμε ότι οι δύο οικογένειες συντεταγμενικών περιοχών ορίζουν την ίδια επιφάνεια Riemann.



Σχήμα 2.1: Μία επιφάνεια Riemann.

Παρατήρηση 2.1. *Ισοδύναμα κάποιοι συγγραφείς*[5] *ορίζουν μία συντεταγμενική περιοχή στον X να είναι ομοιομορφισμός $\varphi : U \to V$ με U ανοικτό του X και V ανοικτό του $\mathbb{C}$. Τότε δύο συντεταγμενικές περιοχές $\varphi_i : U_i \to V_i$ $i = 1, 2$ θα είναι αναλυτικά ισοδύναμες αν:*

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

είναι μία αμφιολόμορφη συνάρτηση (ονομάζεται και αναλυτικός ισομορφισμός), δηλαδή οι συναρτήσεις $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}, \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ να είναι αναλυτικές, πράγμα που ισχύει και με τον παραπάνω ορισμό, καθώς εκεί απαιτήσαμε η $\varphi_{\beta\alpha}$, να είναι αναλυτική για κάθε α, β και συνεπώς και η $\varphi_{\alpha\beta}$ να είναι μία αναλυτική συνάρτηση. Πιο κάτω θα χρησιμοποιούμε και τους δύο αυτούς ισοδύναμους ορισμούς ανάλογα με την περίσταση.

Ορισμός 2.2. *Μία επιφάνεια Riemann είναι ένα ζεύγος (X, Σ), με X να είναι μία συνεκτική 2-πολλαπλότητα και Σ μία μιγαδική δομή στον X, όπως αυτή ορίστηκε παραπάνω.*

Θα γράφουμε X αντί για (X, Σ) και θα αναφερόμαστε σε έναν αντιπρόσωπο της οικογένειας των συντεταγμενικών περιοχών.
Παραδείγματα επιφανειών Riemann:

(i) Το μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$, παίρνοντας σαν χάρτη την ταυτοτική απεικόνιση: $id_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

(ii) Αν X είναι μία επιφάνεια Riemann, παίρνω $Y \subset X$, με Y να είναι ένας τόπος (domain), δηλαδή ένα ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του X. Ο Y έχει μία φυσική δομή που το κάνει επιφάνεια Riemann. Μπορούμε να πάρουμε σαν συντεταγμενικές περιοχές όλες εκείνες τις συντεταγμενικές περιοχές του X: (U, φ) με $\varphi : U \to \varphi(U) \subset X$, με $U \subset Y$. Μάλιστα κάθε τόπος $Y \subset \mathbb{C}$ είναι μία επιφάνεια Riemann.

[5] για παράδειγμα στον [9].

(iii) Η σφαίρα S^2, που την ταυτίζουμε με την προβολική ευθεία πάνω από το $\mathbb{C}$, δηλαδή το $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, όπου $\infty \notin \mathbb{C}$. Εφοδιάζουμε τον $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ με την ακόλουθη τοπολογία: τα ανοικτά του $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ είναι τα συνήθη ανοικτά $U \subset \mathbb{C}$, μαζί με τα σύνολα της μορφής $V \cup \{\infty\}$, όπου $V \subset \mathbb{C}$, να είναι το συμπλήρωμα ενός συμπαγούς $K \subset \mathbb{C}$. Ο $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ αποτελεί την συμπαγοποίηση[6] ενός σημείου (one point compactification) του $\mathbb{C}$. Ο $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ είναι έτσι ένας συμπαγής Hausdorff τοπολογικός χώρος. Θέτουμε:

$$U_1 := \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{\infty\} = \mathbb{C} \text{ και } U_2 := \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0\} = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}.$$

Ορίζουμε $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}$, με $i = 1, 2.$ έτσι ώστε $\varphi_1 = id$ και

$$\varphi_2(z) = \begin{cases} 1/z, & \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}^* \\ 0, & \text{για } z = \infty. \end{cases}$$

Οι απεικονίσεις είναι ομοιομορφισμοί και το $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ είναι μία 2-πολλαπλότητα. Επειδή U_i είναι συνεκτικά με $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, ο $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ είναι συνεκτικός (η ένωση συνεκτικών συνόλων με όχι κενή τομή είναι ένα συνεκτικό σύνολο, βλέπε [5], θεώρημα 1.3 σελίδα 149.). Η μιγαδική δομή στον $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ορίζεται από τις συντεταγμενικές περιοχές (φ_i, U_i) έτσι ώστε $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}$, με $i = 1, 2.$ Αρκεί να δείξουμε ότι είναι αναλυτικά ισοδύναμες: Πράγματι $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^* = \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ και η

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$$

με τύπο $\varphi(z) = 1/z$ είναι αμφιολόμορφη.

Παρατήρηση 2.3. *Τοπικά μία επιφάνεια Riemann X είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του μιγαδικού επίπεδου. Αν $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ είναι μία συντεταγμενική περιοχή στον X κάθε σημείο του, περιέχεται σε πολλούς διαφορετικούς χάρτες που κανένας από αυτούς δεν μπορεί να διαχωριστεί από τους άλλους. Αυτός είναι ο λόγος που στις επιφάνειες Riemann κρατάμε τις ιδέες από την μιγαδική ανάλυση που δεν εξαρτώνται από την επιλογή των συντεταγμενικών περιοχών. Επίσης δεν είναι πάντα δυνατή η ύπαρξη μίας τέτοιας μιγαδικής δομής σε μία τυχαία επιφάνεια. Θα πρέπει η επιφάνεια να είναι προσανατολισμένη. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να απαιτήσουμε οι ορίζουσες του Ιακωβιανού πίνακα των απεικονίσεων αλλαγής συντεταγμένων να είναι όλες θετικές, κάτι που ισχύει από τις Cauchy-Riemann συνθήκες. Αν πάλι η επιφάνεια είναι συμπαγής, εξασφαλίζεται η ύπαρξη της αναλυτικής μιγαδικής δομής. Έτσι για κάθε «λογική» επιφάνεια που μπορούμε να σκεφτούμε εκτός από το μπουκάλι του Klein και το $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, μπορούμε να την εφοδιάσουμε με την εν λόγω μιγαδική δομή.*

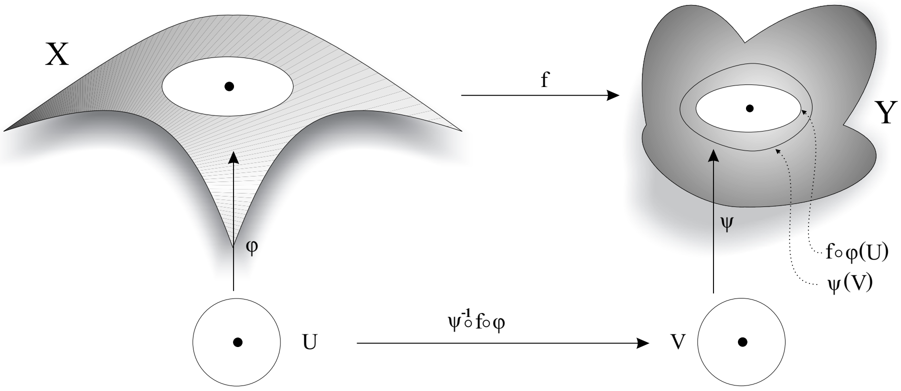
2.1γ΄ Απεικονίσεις Μεταξύ Riemann Επιφανειών και Ιδιότητες τους

Αν X είναι μία επιφάνεια Riemann, ορίζουμε μία $f : X \to \mathbb{C}$ να είναι αναλυτική αν: για κάθε συντεταγμενική περιοχή $\varphi_\alpha : U_\alpha \to X$, η σύνθεση $f \circ \varphi_\alpha$ είναι μία αναλυτική συνάρτηση στο ανοικτό $U_\alpha \subset \mathbb{C}$. Το σύνολο όλων των αναλυτικών συναρτήσεων στον X το συμβολίζουμε με $\mathcal{O}(X)$. Γενικότερα αν X, Y είναι επιφάνειες Riemann, μία απεικόνιση $f : X \to Y$ είναι αναλυτική σε ένα $P \in X$, αν

[6] βλέπε [5] σελίδα 183.

υπάρχουν συντεταγμενικές περιοχές: $\varphi : U \to X$ και $\psi : V \to Y$ που απεικονίζονται σε γειτονιές του P και του $f(P)$ αντίστοιχα, έτσι ώστε $f(\varphi(U)) \subset \psi(V)$, και η σύνθεση $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ να είναι μία αναλυτική απεικόνιση από το U στο V (βλέπε σχήμα 2.2).

Θα συνεχίσουμε υπενθυμίζοντας δύο θεωρήματα της μιγαδικής ανάλυσης και τις



Σχήμα 2.2: Αναλυτική απεικόνιση μεταξύ επιφανειών Riemann.

αντίστοιχες εφαρμογές που έχουν στις επιφάνειες Riemann. Αυτά θα μας βοηθήσουν στο να βρούμε κάποιες ιδιαίτερες ιδιότητες που χαρακτηρίζουν τις αναλυτικές απεικονίσεις μεταξύ των επιφανειών Riemann.

Θεώρημα 2.4 (Θεώρημα του Riemann για τις αιρόμενες ανωμαλίες).
Αν μία συνάρτηση f είναι φραγμένη και αναλυτική σε μία «τρυπημένη» γειτονιά ενός σημείου z_0, τότε η f είναι αναλυτική στο z_0 είτε το z_0 είναι σημείο αιρόμενης ανωμαλίας[7].

Ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι:

Θεώρημα 2.5. *Αν U είναι ένα ανοικτό υποσύνολο μίας επιφάνειας Riemann και $z_0 \in U$, με f αναλυτική και φραγμένη στο $U \setminus \{z_0\}$, τότε μπορεί να επεκταθεί μοναδικά σε μία $\tilde{f} \in \mathcal{O}(U)$.*

Επίσης έχουμε το ταυτοτικό θεώρημα ή θεώρημα της μοναδικότητας στο εσωτερικό[8] για τόπους στον $\mathbb{C}$:

Θεώρημα 2.6. *Έστω $f_1(z), f_2(z)$ δύο αναλυτικές συναρτήσεις ορισμένες σε τόπο X, που συμπίπτουν σε σύνολο $A \subset X$ με z_0 να είναι ένα σημείο συσσώρευσης και $z_0 \in X$. Τότε οι $f_1(z)$ και $f_2(z)$ θα συμπίπτουν σε όλο τον τόπο X.*

Ισοδύναμα για τις απεικονίσεις μεταξύ Riemann επιφανειών θα έχουμε:

Θεώρημα 2.7 (Ταυτοτικό Θεώρημα).
Έστω X, Y επιφάνειες Riemann και $f_1(z), f_2(z) : X \to Y$ δύο αναλυτικές απεικονίσεις που συμπίπτουν σε ένα σύνολο $A \subset X$, έχοντας ένα σημείο συσσώρευσης $z_0 \in X$. Τότε οι $f_1(z), f_2(z)$ θα είναι ταυτοτικά ίσες.

[7] για την απόδειξη βλέπε [10], θεώρημα 1, σελίδα 397.
[8] για την απόδειξη αυτού βλέπε [8], θεώρημα 17.1, σελίδα 369.

Απόδειξη: Θέτω G να είναι το σύνολο όλων των σημείων $x \in X$ που έχουν μία ανοικτή γειτονιά W του X έτσι ώστε $f_1|_W = f_2|_W \Rightarrow W \subset G$. Το G είναι ένα ανοικτό σύνολο από την παραπάνω υπόθεση. Θα δείξω ότι είναι και κλειστό. Έστω $b \in \partial G$, τότε $f_1(b) = f_2(b)$ από την συνέχεια των f_i. Επιλέγω συντεταγμενικές περιοχές $\varphi : U \to X$ και $\psi : U' \to Y$ με $b \in \varphi(U)$ και $f_i(\varphi(U)) \subset \psi(U')$. Υποθέτω επίσης ότι ο U και συνεπώς το $\varphi(U)$, είναι συνεκτικά χωρία. Οι απεικονίσεις

$$g_i = \psi^{-1} \circ f_i \circ \varphi : U \to U' \subset \mathbb{C}$$

είναι αναλυτικές. Καθώς $\varphi(U) \cap G \neq \varnothing$ θα έχω από το θεώρημα 2.6, ότι οι g_1, g_2 θα είναι ταυτοτικά ίσες και $f_1|_{\varphi(U)} = f_2|_{\varphi(U)}$. Έτσι $b \in G$ και το G είναι κλειστό[9]. Καθώς ο X είναι συνεκτικός τα μόνα ανοικτά και κλειστά ταυτόχρονα υποσύνολά του θα είναι το $\varnothing$ και ολόκληρος ο X. Γνωρίζοντας ότι κάθε κλειστό σύνολο, περιέχει τα σημεία συσσώρευσης του, θα έχουμε ότι $z_0 \in G$ και έτσι η πρώτη περίπτωση αποκλείεται.$\Diamond$

Μία πιο γενικευμένη κλάση συναρτήσεων, είναι αυτή των μερόμορφων (meromorphic[10]) συναρτήσεων. Με αυτόν τον όρο εννοούμε συναρτήσεις που μπορούν να αναπαρασταθούν σαν το κλάσμα δύο ακέραιων συναρτήσεων. Προφανώς κάθε ακέραια συνάρτηση $f(z)$ είναι μερόμορφη $\frac{f(z)}{1}$, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει. Για παράδειγμα έχουμε την $\frac{1}{z}$ που είναι μερόμορφη αλλά όχι ακέραια (δεν έχει παράγωγο στο $z = 0$.). Τα απλούστερα μέλη των μερόμορφων συναρτήσεων που δεν είναι ακέραιες συναρτήσεις, είναι οι ρητές συναρτήσεις, δηλαδή μία συνάρτηση που είναι το κλάσμα:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n} \; (a_m \neq 0, b_n \neq 0),$$

δύο πολυωνύμων που δεν έχουν κοινές ρίζες. Η $f(z)$ θα παίρνει την τιμή ∞ στις ρίζες του $Q(z)$. Για τον λόγο αυτό θα πρέπει να θεωρηθεί σαν συνάρτηση με τιμές στο εκτεταμένο επίπεδο $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Τέλος αν οι βαθμοί των πολυωνύμων είναι ίσοι με την μονάδα, η ρητή συνάρτηση είναι γραμμική και παίρνει την μορφή:

$$f(z) = \frac{a_1 z + a_0}{b_1 z + b_0}, \text{ με } a_1 b_0 - a_0 b_1 \neq 0.$$

Ονομάζεται κλασματικός γραμμικός μετασχηματισμός ή μετασχηματισμός του Möbius και θα τον δούμε εκτενέστερα στο τρίτο κεφάλαιο. Ας γυρίσουμε πίσω στις επιφάνειες Riemann.

Ορισμός 2.8. *Έστω X επιφάνεια Riemann. Η f είναι μία μερόμορφη συνάρτηση στον X αν $f : X \setminus S \to \mathbb{C}$ με $S \subset X$ είναι μία αναλυτική συνάρτηση έτσι ώστε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *Το S να είναι ένα διακριτό σύνολο, δηλαδή να περιέχει μόνο μεμονωμένα σημεία: αν $p \in S$, υπάρχει $D(p, R), R > 0$ έτσι ώστε $D(p, R) \cap S = \{p\}$.*

(ii) *Για κάθε $p \in S$ έχω*

$$\lim_{x \to p} |f(x)| = \infty$$

[9] δείξαμε ότι $\partial G \subset G$, έτσι $G^0 \cup \partial G = \overline{G} \subset G$ και γνωρίζουμε ότι $G \subset \overline{G}$, με αποτέλεσμα $\overline{G} = G$.

[10] η λέξη μερόμορφη, προέρχεται από την σύνθεση των λέξεων *μέρος* = *κλάσμα* και *μορφή*, η οποία σημαίνει μία συνάρτηση «σαν κλάσμα».

Τα σημεία του S ονομάζονται πόλοι της f και το σύνολο των μερόμορφων συναρτήσεων στον X συμβολίζεται με $\mathcal{M}(X)$.
Αν $n \geq 1$, θα έχω ότι κάθε $f \in \mathbb{C}[z]$ ορίζει μία αναλυτική συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Παίρνοντας το $\mathbb{C}$ σαν υποσύνολο του $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, τότε $\lim_{x\to p} |f(x)| = \infty$ και συνεπώς $f \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$. Ισοδύναμα μπορούμε να φανταστούμε τις μερόμορφες απεικονίσεις f στον χώρο X, σαν αναλυτικές απεικονίσεις στην σφαίρα $f : X \to S^2$:

Θεώρημα 2.9. *Έστω X επιφάνεια Riemann και $f \in \mathcal{M}(X)$. Για κάθε πόλο της f ορίζω $f(P) := \infty$. Τότε η $f : X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ είναι μία αναλυτική συνάρτηση. Αντίστροφα αν η $f : X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ είναι αναλυτική τότε είτε είναι σταθερή και ταυτοτικά ίση με το ∞, είτε το $f^{-1}(\infty)$ αποτελείται από μεμονωμένα σημεία και η $f : X \setminus f^{-1}(\infty) \to \mathbb{C}$ είναι μία μερόμορφη συνάρτηση στον X.*

Απόδειξη: Έστω $f \in \mathcal{M}(X)$ και P να είναι το σύνολο των πόλων της f. Τότε η f επάγει μία συνεχή απεικόνιση $f : X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Έστω $\varphi : U \to X$ και $\psi : U' \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ να είναι συντεταγμενικές περιοχές στον X, και στον $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ αντίστοιχα, με $f(\varphi(U)) \subset \psi(U')$. Πρέπει να δείξω ότι η

$$g = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi : U \to U'$$

είναι μία αναλυτική συνάρτηση. Η f είναι αναλυτική στον $X \setminus P$ και συνεπώς η g θα είναι αναλυτική στο $U \setminus \varphi^{-1}(P)$. Από το θεώρημα 2.5, η g θα είναι αναλυτική σε όλο το U. Το αντίστροφο έπεται από το θεώρημα 2.7. $\Diamond$

Θεώρημα 2.10 (Τοπική Συμπεριφορά των Αναλυτικών Συναρτήσεων).

Έστω X, Y επιφάνειες Riemann και $f : X \to Y$ μία όχι σταθερή αναλυτική απεικόνιση μεταξύ αυτών των επιφανειών. Έστω $a \in X$ και $b := f(a)$. Τότε υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ με $k \geq 1$ και συντεταγμενικές περιοχές: $\varphi : U \to \varphi(U) \subset X$, $\psi : U' \to \psi(U') \subset Y$ έτσι ώστε:

(i) $a \in \varphi(U) \cong U, \varphi^{-1}(a) = 0$ *και* $b \in U', \psi^{-1}(b) = 0$,

(ii) $f(\varphi(U)) \subset \psi(U')$,

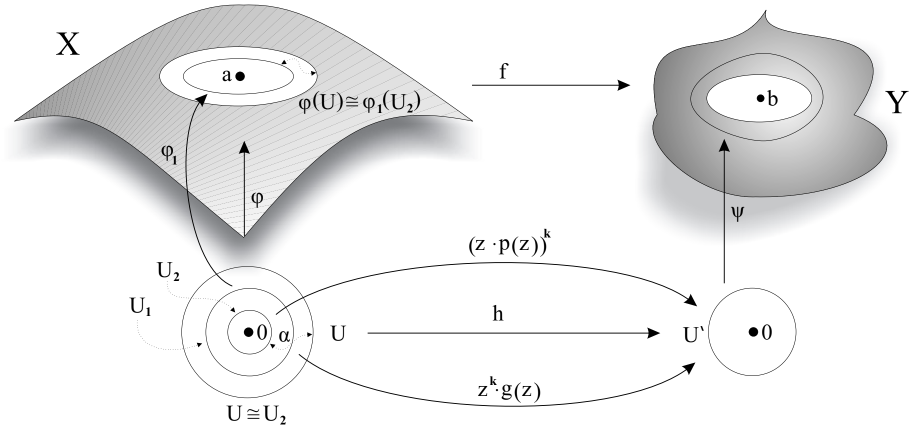
(iii) *η* $h := \psi^{-1} \circ f \circ \varphi : U \to U'$ *έχει τύπο* $h(z) = z^k$, *για κάθε* $z \in U$.

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι τεχνική και θα γίνει κατασκευάζοντας μία τέτοια συνάρτηση h. Υπάρχουν συντεταγμενικές περιοχές $(\varphi_1, U_1), (\psi, U')$ των X, Y αντίστοιχα έτσι ώστε να ισχύουν τα δύο πρώτα, αν αντικαταστήσω το ζεύγος (φ, U) με το (φ_1, U_1). Τώρα από το θεώρημα 2.7, η $f_1 := \psi^{-1} \circ f \circ \varphi_1 : U_1 \to U'$ είναι ταυτοτικά ίση με την f και συνεπώς δεν είναι σταθερή συνάρτηση. Όμως $f_1(0) = 0$ και άρα υπάρχει $k \geq 1$ έτσι ώστε $f_1(z) = z^k g(z)$, με $g(z)$ αναλυτική στο U_1 και $g(0) \neq 0$. Επίσης, υπάρχει μία γειτονιά του 0, έστω U_2 και μία αναλυτική $p(z)$ σε αυτήν την γειτονιά έτσι ώστε $p^k(z) = g(z)$. Πράγματι θα έχω $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} z^n$. Παίρνοντας έναν μικρότερο δίσκο με κέντρο την αρχή θα έχω για παράδειγμα την $g(z)/a_k$ να απεικονίζει το 0 στο 1 και συνεπώς μπορώ να την συνθέσω με έναν κλάδο της λογαριθμικής συνάρτησης

$$\log(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(1-z)^n \text{ για } |z-1| < 1,$$

θέτοντας μετά

$$p(z) = \alpha \cdot \exp\Big(\frac{1}{k} \log(g(z))/a_k\Big)$$



Σχήμα 2.3:

όπου α μία k-οστή ρίζα της μονάδας και θα έχω $p^k(z) = g(z)$. Η αντιστοιχία $z \mapsto zp(z)$ αποτελεί μία αμφιολόμορφη συνάρτηση $\alpha : U_2 \to U$, με U_2 ανοικτή γειτονιά του 0 με $U_2 \subset U_1$ και U μία ανοικτή γειτονιά του 0. Θέτω $\varphi(U) := \varphi_1(U_2)$ (ουσιαστικά παίρνω την εμφύτευση του U_2 στον U_1 και θα έχω την $\varphi_1|_{U_2} : U_2 \to \varphi_1|_{U_2}(U_2)$, να είναι ένας ομοιομορφισμός) και αντικαθιστώ την (φ_1, U_1) με την (φ, U), όπου $\varphi = \varphi_1 \circ \alpha^{-1}$. Έτσι από την κατασκευή μας, η απεικόνιση $h := \psi^{-1} \circ f \circ \varphi : U \to U'$ ικανοποιεί την $h(z) = z^k$. $\Diamond$

Παρατήρηση 2.11. *Ο αριθμός k στο προηγούμενο θεώρημα μπορεί να χαρακτηριστεί ως εξής. Για κάθε γειτονιά U_a του a υπάρχει γειτονιά $U \subset U_a$ και W γειτονιά του b, με $b = f(a)$ έτσι ώστε το σύνολο $f^{-1}(y) \cap U$ περιέχει k ακριβώς στοιχεία, για κάθε $y \in W$ με $y \neq b$. Ονομάζουμε το k πολλαπλότητα με την οποία η f παίρνει την τιμή b στο σημείο a ή πιο απλά λέμε ότι η f έχει πολλαπλότητα k στο σημείο a, όπως την είδαμε και στην αρχή του κεφαλαίου.*

Πόρισμα 2.12. *Έστω X, Y επιφάνειες Riemann και f είναι μία όχι σταθερή αναλυτική απεικόνιση μεταξύ αυτών των επιφανειών. Τότε η f είναι μία ανοικτή απεικόνιση.*

Παίρνοντας $\varphi(U_\alpha)$ μία ανοικτή περιοχή του $\alpha \in X$, από τον ορισμό της f θα έχω ότι $f(\varphi(U_\alpha))$ θα είναι μία ανοικτή περιοχή του $f(\alpha)$. Έτσι η f είναι μία ανοικτή απεικόνιση.

Θεώρημα 2.13. *Έστω X, Y επιφάνειες Riemann με X να είναι συμπαγής και f είναι μία όχι σταθερή αναλυτική απεικόνιση μεταξύ αυτών των επιφανειών. Τότε ο Y είναι συμπαγής και η f επί.*

Απόδειξη: Από 2.12 το $f(X)$ θα είναι ένα ανοικτό του Y. Όμως η εικόνα συμπαγούς μέσω συνεχής συνάρτησης είναι συμπαγές σύνολο και συνεπώς κλειστό. Καθώς ο Y είναι συνεκτικός, τα μόνα ανοικτά και κλειστά υποσύνολά του είναι το κενό και ο Y. Έτσι $f(X) = Y$ με f επί και Y συμπαγής.$\Diamond$

Πόρισμα 2.14. *Κάθε αναλυτική συνάρτηση σε συμπαγή επιφάνεια Riemann είναι σταθερή.*

Μία αναλυτική f στην συμπαγή επιφάνεια X, είναι από τον ορισμό μία $f: X \to \mathbb{C}$ και ο $\mathbb{C}$ δεν είναι συμπαγής. Από το προηγούμενο πόρισμα έπεται το ζητούμενο.

Πόρισμα 2.15. *Κάθε μερόμορφη συνάρτηση f στον $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, δηλαδή κάθε αναλυτική $f: S^2 \to S^2$ είναι μία ρητή συνάρτηση και κάθε αναλυτική στον $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ είναι σταθερή.*

Απόδειξη: Η f έχει πεπερασμένο αριθμό πόλων. Αν είχε άπειρους πόλους, τότε το σύνολο όλων των πόλων θα είχε ένα σημείο συσσώρευσης (από την ιδιότητα Bolzano-Weierstrass). Από το 2.7 η f θα ήταν ίση με την σταθερή απεικόνιση $z = \infty$. Υποθέτουμε ότι το ∞ δεν είναι πόλος της f (διαφορετικά επιλέγουμε την $1/f$). Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ να είναι οι πόλοι της f και

$$h_\nu(z) = \sum_{j=-k_\nu}^{-1} c_{\nu j}(z - a_\nu)^j,$$

να είναι το κύριο μέρος της f στον πόλο a_ν, με $\nu = 1, \ldots, n$. Η συνάρτηση $g := f - (h_1 + \cdots + h_n)$ είναι μία αναλυτική συνάρτηση στον $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$[11], με $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ συμπαγή επιφάνεια Riemann. Από το προηγούμενο πόρισμα η g είναι μία σταθερή συνάρτηση και η f είναι ρητή.$\Diamond$

Ορισμός 2.16. *Έστω Y, X επιφάνειες Riemann και f είναι μία όχι σταθερή αναλυτική απεικόνιση μεταξύ αυτών των επιφανειών $f: Y \to X$. Ένα σημείο $P \in Y$ ονομάζεται σημείο διακλάδωσης (ramification point) της f αν δεν υπάρχει γειτονιά του V του P έτσι ώστε η $f|_V$ είναι 1-1.*

Παραδείγματα:

(i) Έστω $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ και $p_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ να είναι η απεικόνιση με τύπο $p_k(z) = z^k$. Τότε το $0 \in \mathbb{C}$ είναι σημείο διακλάδωσης της p_k και η απεικόνιση $p_k|_{\mathbb{C}^*} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ δεν έχει σημεία διακλάδωσης. Μάλιστα, γνωρίζουμε ότι αποτελεί μία καλυπτική απεικόνιση k-φύλλων.

(ii) Έστω $f: Y \to X$ μία όχι σταθερή αναλυτική συνάρτηση μεταξύ επιφανειών Riemann, με $y \in Y$ και $x = f(y)$. Τότε το y είναι σημείο διακλάδωσης της f, ακριβώς όταν η f παίρνει την τιμή y με πολλαπλότητα μεγαλύτερης της μονάδας. Από το θεώρημα 2.10 η συμπεριφορά της f κοντά στο y είναι ακριβώς η ίδια με την συμπεριφορά της p_k από το πρώτο παράδειγμα, κοντά στο μηδέν.

2.1δ′ Τοπολογικά Καλύμματα

Σε αυτό το σημείο πρέπει να θυμηθούμε ότι για έναν τοπικά συμπαγή χώρο X στο $x \in X$ υπάρχει συμπαγή υποσύνολό του $\mathbb{C}$ που περιέχει μία γειτονιά του x. Αν ο X είναι τοπικά συμπαγής σε κάθε του σημείο τότε ονομάζεται τοπικά συμπαγής. Προφανώς η συμπάγεια συνεπάγει την τοπική συμπάγεια.

Ορισμός 2.17. *Μία συνεχής συνάρτηση $f: X \to Y$ μεταξύ δύο τοπικά συμπαγών χώρων, ονομάζεται proper αν για κάθε συμπαγή K του Y, η αντίστροφη εικόνα του μέσω της f, $f^{-1}(K)$ είναι συμπαγής.*

[11] το άθροισμα και το γινόμενο αναλυτικών συναρτήσεων είναι αναλυτική συνάρτηση.

Για παράδειγμα, αυτό συμβαίνει πάντα όταν ο τοπολογικός χώρος X είναι συμπαγής: από την συνέχεια της f το $f^{-1}(K)$ θα είναι κλειστό υποσύνολο συμπαγούς και συνεπώς ένα συμπαγές σύνολο. Επίσης μία proper συνάρτηση είναι κλειστή (οι εικόνες κλειστών μέσω της f είναι κλειστά σύνολα.).

Ορισμός 2.18. *Μία απεικόνιση $f : Y \to X$ με Y, X να είναι τοπολογικοί χώροι, ονομάζεται διακριτή αν το $f^{-1}(x)$ είναι ένα διακριτό υποσύνολο του Y, για κάθε $x \in X$.*

Λήμμα 2.19. *Έστω X, Y τοπικά συμπαγείς και $f : Y \to X$ μία proper και διακριτή απεικόνιση. Ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *Για κάθε $x \in X$ το σύνολο $f^{-1}(\{x\})$ είναι πεπερασμένο,*

(ii) *Αν $x \in X$ και V μία γειτονιά του $f^{-1}(x)$, τότε υπάρχει μία γειτονιά U του x έτσι ώστε $f^{-1}(U) \subset V$.*

Απόδειξη: Για το πρώτο μέρος θα έχω ότι το $f^{-1}(\{x\})$ θα είναι συμπαγή (η f είναι proper) και διακριτό υποσύνολο του Y ταυτόχρονα, συνεπώς πεπερασμένο. Για το δεύτερο, θα έχω ότι για κάθε V να είναι μία γειτονιά του $f^{-1}(x)$ το $Y \setminus V$ θα είναι κλειστό του Y και καθώς η f είναι proper συνάρτηση, θα είναι κλειστή και το $f(Y \setminus V) := A$ θα είναι κλειστό του X με $x \notin A$. Έστω $U = X \setminus A$ να είναι μία ανοικτή γειτονιά του x. Τότε θα έχω $f^{-1}(U) = Y \setminus f^{-1}(A)$ και $f^{-1}(f(Y \setminus V)) \supset Y \setminus V$[12] και συνεπώς θα έχω ότι $f^{-1}(U) = Y \setminus f^{-1}(f(Y \setminus V)) \subset V$. $\Diamond$

Θεώρημα 2.20. *Έστω X, Y επιφάνειες Riemann και $p : Y \to X$ μία όχι σταθερή αναλυτική απεικόνιση. Αυτή δεν έχει σημεία διακλάδωσης ανν είναι ένας τοπικός ομοιομορφισμός. Επιπροσθέτως αν Y συμπαγής (ισχύει και με ασθενέστερη συνθήκη, όταν X, Y είναι τοπικά συμπαγείς χώροι με p proper απεικόνιση), τότε η p είναι μία καλυπτική απεικόνιση.*

Απόδειξη: Έστω ότι η p δεν έχει σημεία διακλάδωσης και y τυχαίο σημείο του Y. Υπάρχει μία ανοικτή γειτονιά του Y έτσι ώστε η $p|_V$ να είναι μία 1-1. Καθώς η p συνεχής και ανοικτή (από το πόρισμα 2.12) θα απεικονίζει ομοιομορφικά το ανοικτό V στο ανοικτό $U = p(V)$. Αντίστροφα αν η p είναι ένας τοπικός ομοιομορφισμός, τότε για κάθε $y \in Y$ υπάρχει ανοικτή περιοχή του y, έστω V που θα απεικονίζεται ομοιομορφικά σε ένα ανοικτό του X. Έτσι η $p|_V$ θα είναι 1-1 με συνέπεια το y να μην είναι σημείο διακλάδωσης. Τώρα από το θεώρημα 2.13 η p επί και ο X συμπαγής. Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε σημείο $x \in X$ έχει γειτονιά $U \subset X$ που είναι ομαλά καλυμμένη από την p. Πράγματι θέτω $p^{-1}(x) = \{y_1, \ldots, y_n\}$ με $y_i \neq y_j \; \forall \, i \neq j$. Καθώς η p είναι ένας τοπικός ομοιομορφισμός θα έχω ότι για κάθε $j = 1, \ldots, n$ υπάρχει μία ανοικτή γειτονιά W_j του y_j και μία ανοικτή U_j του x έτσι ώστε η $p|_{W_j} : W_j \to U_j$ να είναι ένας ομοιομορφισμός. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα W_j είναι ξένα ανά δύο. Όμως και η $W_1 \cup \cdots \cup W_n$ είναι μία ανοικτή περιοχή του $p^{-1}(x)$. Η p είναι proper συνάρτηση καθώς ο Y είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος και διακριτή: αν δεν ήταν για κάποιο $\alpha \in X$, τότε από το θεώρημα 2.7, θα ήταν ταυτοτικά ίση με την σταθερή απεικόνιση $p(x) = \alpha$, πράγμα άτοπο από την υπόθεσή μας. Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε το λήμμα 2.19, από όπου υπάρχει ανοικτή περιοχή $U \subset U_1 \cap \cdots \cap U_n$ (οι τομές δικαιολογούνται, γιατί επιλέγω την μικρότερη τέτοια περιοχή) του x με $p^{-1}(U) \subset W_1 \cup \cdots \cup W_n$. Θέτοντας $V_j = W_j \cap p^{-1}(U)$, θα έχω ότι τα V_j θα είναι ξένα με

$$p^{-1}(U) = V_1 \cup \cdots \cup V_n$$

[12] Για κάθε $f : A \to B$ με $A_0 \subset A$ ισχύει $f^{-1}(f(A_0)) \supset A_0$.

και $p|_{V_j} : V_j \to U$ να είναι ένας ομοιομορφισμός για κάθε $j = 1, \ldots, n.\Diamond$

Τώρα έστω $f : X \to Y$, είναι μία αναλυτική, proper, όχι σταθερή απεικόνιση μεταξύ επιφανειών Riemann X, Y. Το σύνολο των σημείων διακλάδωσης R είναι κλειστό του X (για κάθε $p \in R$ υπάρχει γειτονιά του p, U_p με $U_p \cap R \neq \varnothing$ από την παρατήρηση 2.11.) και διακριτό, δηλαδή κάθε $p \in R$ είναι μεμονωμένο (αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $p \in R$ υπάρχει U_p με $U_p \cap R = \{p\}$. Από την ίδια παρατήρηση, μικραίνοντας τις ανοικτές περιοχές U του p, μπορώ να καταλήξω στην ζητούμενη περιοχή.). Τώρα καθώς f proper το $f(R) := S$ θα είναι κλειστό και διακριτό υποσύνολο του Y. Ονομάζουμε το S σύνολο των κρίσιμων τιμών της f. Αν ορίσω $Y' = Y \setminus S$ και $X' = X \setminus f^{-1}(S) \subset X \setminus R$ τότε όπως είδαμε, παίρνουμε μία αναλυτική καλυπτική απεικόνιση p n-φύλλων. Κάθε τιμή $c \in Y'$ η p την παίρνει ακριβώς n φορές. Για να επεκτείνουμε το συμπέρασμα αυτό και για τις κρίσιμες τιμές $s \in S$ πρέπει να λάβουμε υπόψιν και την πολλαπλότητα:

Θεώρημα 2.21. *Έστω X, Y επιφάνειες Riemann και $f : X \to Y$ μία proper όχι σταθερή αναλυτική απεικόνιση. Υπάρχει ένας φυσικός αριθμός n έτσι ώστε η f να παίρνει κάθε τιμή $c \in Y$ ακριβώς n φορές, προσμετρώντας και τις πολλαπλότητες.*

Απόδειξη: Έστω n ο αριθμός των φύλλων της καλυπτικής απεικόνισης $p := f|_{X'} : X' \to Y'$. Έστω $s \in S$ μία κρίσιμη τιμή της f και $f^{-1}(s) = \{x_1, \ldots, x_r\}$ και ορίζω k_j να είναι η πολλαπλότητα της f στο σημείο x_j. Από την παρατήρηση 2.11 θα υπάρχουν U_j ανοικτές περιοχές των x_j και V_j ανοικτές περιοχές του s έτσι ώστε για κάθε $c \in V_j \setminus \{s\}$, το σύνολο $f^{-1}(c) \cap U_j$ να περιέχει ακριβώς k_j στοιχεία, με $j = 1, \ldots, r$. Τώρα από το λήμμα 2.19 μπορούμε να βρούμε μία ανοικτή περιοχή $V \subset V_1 \cap \cdots \cap V_r$ του s έτσι ώστε $f^{-1}(V) \subset U_1 \cup \cdots \cup U_r$. Τότε για κάθε σημείο $c \in V \cap Y'$, θα έχουμε ότι το $f^{-1}(c) \in f^{-1}(V)$ αποτελείται από $k_1 + \cdots + k_r$ σημεία. Όμως το $c \in Y'$ και συνεπώς $f^{-1}(c) = p^{-1}(c) = n$. Έτσι $n = k_1 + \cdots + k_r$. $\Diamond$

Τώρα αν f είναι μία αναλυτική απεικόνιση μεταξύ των επιφανειών Riemann X, Y, θέτω $h = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$, με h αναλυτική συνάρτηση και συνεπώς $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Η συνθήκη αυτή είναι ανεξάρτητη από την επιλογή συντεταγμενικών περιοχών (φ, U) και (ψ, V). Διαλέγουμε για απλούστευση τα U, V να είναι δίσκοι με κέντρο το $(0,0)$, με $\varphi(0) = P$ και $\psi(0) = f(P)$ αντίστοιχα. Ο μικρότερος ακέραιος e που μηδενίζει την h με $a_e \neq 0$ ονομάζεται δείκτης διακλάδωσης (ramification index) της f στο σημείο P και δεν είναι τίποτα άλλο πέρα από την πολλαπλότητα της f στο σημείο P. Το συμβολίζουμε με $e_f(P)$. Σύμφωνα με το παράδειγμα 2, που ακολουθεί του ορισμού 2.16, ένα σημείο P θα είναι σημείο διακλάδωσης ανν $e_f(P) > 1$. Βέβαια αν η f είναι σταθερή, η h είναι ίση ταυτοτικά με το 0[13] και τότε $e_f(P) = \infty$. Δεν θα ασχοληθούμε με αυτή την περίπτωση. Παρατηρούμε ότι είτε η f έχει πόλο είτε ρίζα τάξης e, στο z_0, αυτή μπορεί να γραφτεί στην μορφή:

$$f(z) = k(z)(z - z_0)^e \text{ με } e \in \mathbb{Z} \text{ και } k(z) \text{ αναλυτική, } k(z_0) \neq 0.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε το z_0 να το μεταφέρουμε στην αρχή των αξόνων, έτσι ώστε $f(z) = k(z) z^e$, με $k(0) \neq 0$. Καθώς η $k(z)$ αναλυτική θα έχουμε $k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+e} z^n$. Βρίσκω, όπως πριν αναλυτική $p(z)$ έτσι ώστε $k(z) = p(z)^e$ και συνεπώς μπορώ να γράψω $h(z) = (zp(z))^e$. Βρίσκοντας νέες συντεταγμενικές περιοχές $\tilde{\varphi} : U' \to X$ με $U' \subset U$ και $\tilde{\varphi}(z) = \varphi(zp(z))$, θα έχουμε ότι η $\psi^{-1} \circ f \circ \tilde{\varphi}$ να είναι τοπικά η απεικόνιση $z \mapsto z^e$. Γνωρίζουμε ότι αυτή η απεικόνιση απεικονίζει

[13]προκύπτει από το το ταυτοτικό θεώρημα, καθώς θα πρέπει $h(0) = 0$.

το 0 στο 0 εκτός της αρχής είναι μία e-fold καλυπτική απεικόνιση. Συνοψίζοντας θα έχουμε τα παρακάτω σημαντικό αποτέλεσμα:

Πρόταση 2.22. *Έστω $f : X \to Y$ μία όχι σταθερή αναλυτική απεικόνιση και X, Y να είναι συμπαγείς επιφάνειες Riemann. Τότε:*

(i) $|R| < \infty$ *με $R \subset X$ το σύνολο των σημείων διακλάδωσης και $S = f(R) \subset Y$.*

(ii) *Η απεικόνιση $X \setminus f^{-1}(S) \to Y \setminus S$ είναι μία καλυπτική απεικόνιση n-φύλλων. Ονομάζουμε τον ακέραιο n βαθμό (degree) της αναλυτικής f και το συμβολίζουμε με $n := degf$. Αυτός είναι το άθροισμα του πλήθους των αντίστροφων εικόνων ενός γνωστού $q \in Y$ μετρημένης της πολλαπλότητας της f σε κάθε ένα από αυτά τα σημεία, δηλαδή:*

(iii) *Για κάθε $q \in Y$ ισχύει:*

$$\sum_{P \in f^{-1}(q)} e_f(P) = n.$$

Βλέπουμε ότι κάθε αναλυτική απεικόνιση μεταξύ συμπαγών Riemann επιφανειών, μπορεί να επεκταθεί σε ένα τοπολογικό κάλυμμα n-φύλλων. Αυτός είναι ο λόγος που μία τέτοια αναλυτική απεικόνιση την ονομάζουμε αναλυτική καλυπτική απεικόνιση. Πρέπει να προσέξουμε ότι για αναλυτικά καλύμματα, είναι επιτρεπτό να περιέχουν σημεία διακλάδωσης κάτι που δεν ισχύει για τοπολογικά καλύμματα.

Αν $f \in \mathcal{M}(X)$, με X επιφάνεια Riemann, τότε θα έχουμε $f : X \setminus S \to \mathbb{C}$ με S να είναι διακριτό υποσύνολο του X. Βρίσκοντας μία συντεταγμενική περιοχή $\varphi : U \to X$ για κάθε $P \in X$ έτσι ώστε $\varphi(0) = P$, η $h = f \circ \varphi(z)$ είναι αναλυτική στο $U \setminus \{P\}$ και συνεπώς την γράφω όπως και πριν σαν $h = f \circ \varphi(z) = z^k \cdot g(z)$ με g να είναι αναλυτική και $g(z) \neq 0 \, \forall \, z \in U$, επιτρέποντας τώρα στο k να πάρει και αρνητικές τιμές. Θα έχουμε έτσι ότι αν η πολλαπλότητα της f στο σημείο $P \in X$ είναι k τότε:

- Αν $k > 0$ η f θα έχει ρίζα με πολλαπλότητα k στο P με $f(P) = 0$ και $k = e_f(P)$,
- Αν $k < 0$ η f θα έχει πόλο με πολλαπλότητα k στο P με $f(P) = \infty$ και $k = -e_f(P)$,
- Διαφορετικά $k = 0$,
- Αν το σημείο P είναι πόλος ή ρίζα, δηλαδή αν $k \neq 0$ τότε λέμε ότι η f παρουσιάζει ανωμαλία στο P.

Λήμμα 2.23. *Για κάθε συμπαγή επιφάνεια Riemann X και για κάθε όχι σταθερή μερόμορφη συνάρτηση $f \in \mathcal{M}(X)$, ο αριθμός των ριζών της ισούται με τον αριθμό των πόλων της, προσμετρώντας τις πολλαπλότητες:*

$$\sum_{P \in X} e_f(P) = 0.$$

Θα έχω:

$$\sum_{P \in X} e_f(P) = \sum_{P \in f^{-1}(0)} e_f(P) + \sum_{P \in f^{-1}(\infty)} e_f(P).$$

Όμως από τα παραπάνω θα έχω:

$$\sum_{P\in X} e_f(P) = \sum_{P\in f^{-1}(0)} e_f(P) - \sum_{P\in f^{-1}(0)} e_f(P).$$

και από το θεώρημα 2.21 θα έχω ότι

$$\sum_{P\in X} e_f(P) = n - n = 0.\Diamond$$

2.1ε′ Διακλαδιζόμενα Καλύμματα

Θα δείξουμε το αντίστροφο της πρότασης 2.22, βλέποντας πώς από ένα τοπολογικό κάλυμμα μπορεί να προκύψει ένα αναλυτικό κάλυμμα μεταξύ επιφανειών Riemann.

Πρόταση 2.24. *Έστω Y επιφάνεια Riemann, S ένα πεπερασμένο υποσύνολο του Y και $p : X' \to Y \setminus S$ μία καλυπτική απεικόνιση e φύλλων με X' να είναι συνεκτικός. Μπορούμε να εμφυτεύσουμε τον X' σαν ένα ανοικτό υποσύνολο μίας επιφάνειας Riemann X: $X' \hookrightarrow X$ με $X = X' \cup$ ένα πεπερασμένο σύνολο έτσι ώστε η p να μπορεί να επεκταθεί σε μία proper, αναλυτική συνάρτηση μεταξύ επιφανειών Riemann $f : X \to Y$.*

Απόδειξη: Το πρόβλημα μπορούμε να το δούμε τοπικά στον χώρο Y, προσπαθώντας να «γεμίσουμε» τα σημεία που λείπουν. Παίρνω την συνήθη καλυπτική απεικόνιση

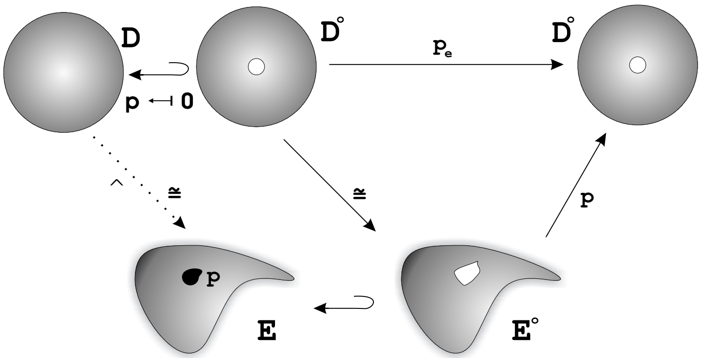
$$p_e : D^o \to D^o,\ z \mapsto z^e$$

με $D = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$, και $D^o = D \setminus \{0\}$. Γνωρίζοντας ότι $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ και ότι ο S^1 είναι ένα strong deformation retract[14] του D^o, θα πρέπει ο εγκλεισμός $j : S^1 \to D^o$ να επάγει έναν ισομορφισμό των εμπλεκόμενων θεμελιωδών ομάδων. Έτσι $\pi_1(D^o) = \mathbb{Z}$ και συνεπώς κάθε συνεκτικός καλυπτικός τοπολογικός χώρος του με πεπερασμένα φύλλα, θα πρέπει να αντιστοιχεί σε πεπερασμένες ομάδες του $\mathbb{Z}$. Μα αυτές είναι οι $e\mathbb{Z}$ με $e \in \mathbb{N}$ με αντίστοιχες καλυπτικές απεικονίσεις τις p_e που αναφέραμε. Αυτό σημαίνει ότι οι καλυπτικοί χώροι του D^o θα είναι ίσοι modulo τους ισομορφισμούς καλυπτικών χώρων. Πράγματι αν $p : E^o \to D^o$ μία καλυπτική απεικόνιση e φύλλων, από το θεώρημα 1.22 οι δύο καλυπτικοί χώροι θα είναι ισόμορφοι ανν οι δύο υποομάδες $p_*(\pi_1(E^o)), p_{e_*}(\pi_1(D^o))$ του $\pi_1(D^o) \cong \mathbb{Z}$ ανήκουν στην ίδια κλάση συζυγίας. Όμως επειδή η $\mathbb{Z}$ είναι αβελιανή ομάδα κάτι τέτοιο θα συμβαίνει ανν αντιστοιχούν στην ίδια υποομάδα του $\mathbb{Z}$. Πράγμα που συμβαίνει καθώς αφού είναι e-fold καλυπτικοί χώροι θα πρέπει να αντιστοιχούν στην υποομάδα $e\mathbb{Z}$. Έτσι αν $p : E^o \to D^o$ είναι καλυπτική απεικόνιση e-φύλλων, υπάρχει ομοιομορφισμός των καλυπτικών χώρων $\psi : D^o \to E^o$ με $p \circ \psi = p_e$, ο οποίος εξαρτάται από την επιλογή βάσης. Μάλιστα έχουμε ακριβώς e επιλογές για τον ομοιομορφισμό ψ, που αντιστοιχούν στα e σημεία του E^o για μια συγκεκριμένη βάση. Οι υπόλοιπες επιλογές για το ψ έχουν την μορφή $z \mapsto \psi(\exp(2\pi k/e) \cdot z)$ με $\exp(2\pi ik/e)$ να είναι μία από της e-οστές ρίζες της μονάδας και $k \in [1, e-1]$[15]

Τώρα είναι σαφές πως θα «γεμίσουμε» τον καλυπτικό χώρο E^o. Ορίζουμε $E = E^o \cup \{p\}$ με $p \notin E^o$ και δίνουμε στον E δομή επιφάνειας Riemann έτσι

[14] βλέπε [2] σελίδες 38-41.

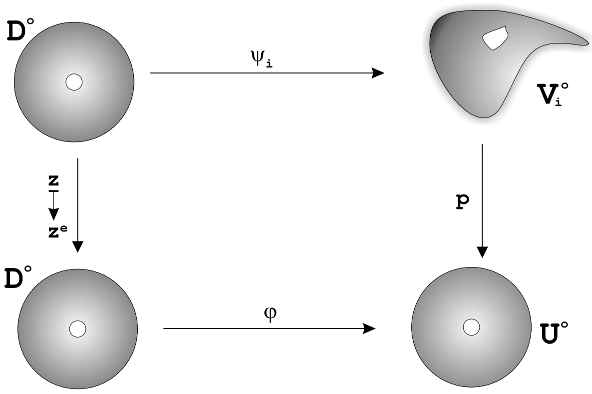
[15] Καθώς οι χώροι D^o και E^o είναι ισοδύναμοι καλυπτικοί χώροι, βλέπε ορισμό 1.16, θα πρέπει οι καλυπτικές απεικονίσεις p, p_e να είναι ισόμορφες. Πράγματι $p = p_e \circ \psi^{-1}$ με τύπο $z \mapsto \psi^{-1}(z) \mapsto (\psi^{-1}(z))^e$ και $z \mapsto \exp(2\pi ik/e) \cdot z \mapsto z^e$.



Σχήμα 2.4:

ώστε: η επέκταση της ψ από το D^o στο D να απεικονίζει το 0 στο p και το εσωτερικό του D ομοιομορφικά στο εσωτερικό του E και συνεπώς να αποτελεί έναν ομοιομορφισμό, $\hat{\psi}$, με $\hat{\psi}(D) \cong E$.

Επιστρέφοντας στην καλυπτική απεικόνιση $p : X' \to Y \setminus S$ του θεωρήματος, για $Q \in S$ μπορώ να βρω συντεταγμενική περιοχή $\varphi : D \to \varphi(D) := U \subset Y$ με $\varphi(0) = Q$, έτσι ώστε $U \cap S = \{Q\}$ και με U^o να συμβολίζω το $U \setminus \{Q\}$. Θα έχω ότι κάθε τέτοιο U^o θα είναι ομαλά καλυμμένο, δηλαδή: $p^{-1}(U^o) = \cup_{n=1}^{m} V_n^o$ με τα V_n^o να είναι ξένα για κάθε $n = 1, \ldots, m$ και $p|_{V_i^o}(V_i^o) \cong U^o$. Τώρα ο περιορισμός της καλυπτικής απεικόνισης σε κάθε ένα από τα V_i^o είναι μία καλυπτική απεικόνιση, έστω e_i φύλλων, του U^o. Από τα παραπάνω μπορούμε να βρούμε ομοιομορφισμούς $\psi_i : D^o \to V_i^o$, έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό: δηλαδή να ισχύει $p(\psi_i(z)) = \varphi(z^{e_i})$. Προσθέτω ένα σημείο για κάθε V_i^o έτσι ώστε $V_i^o \hookrightarrow V_i$ και κάθε ψ_i να επεκτείνεται σε έναν ομοιομορφισμό από το $D \to V_i$. Παίρνοντας



Σχήμα 2.5:

αυτές τις επεκτάσεις για συντεταγμενικές περιοχές θα έχω την ξένη ένωση αυτών των V_i να μου δίνει μία επιφάνεια Riemann. Η απεικόνιση $V_i^o \to U^o$ επεκτείνεται σε μία αναλυτική απεικόνιση από το $V_i \to U$ έτσι ώστε να έχει δείκτη διακλάδωσης e_i στο σημείο που προσθέσαμε. Αν αυτό γίνει για κάθε σημείο του S, παίρνω τον χώρο X να είναι $X = X^o \cup S$ με το S να είναι πεπερασμένο. Αυτοί οι χάρτες δίνουν στον X δομή επιφάνειας Riemann (με την προϋπόθεση ότι οι χάρτες που προσθέσαμε είναι συμβατοί με αυτούς του X^o), και η καλυπτική απεικόνιση p επεκτείνεται σε μία αναλυτική $f : X \to Y$.◊

2.2 Επιφάνειες Riemann και Αλγεβρικές Καμπύλες

Έστω $F(z,w)$ όχι σταθερό πολυώνυμο δύο μεταβλητών με μιγαδικούς συντελεστές. Το σύνολο των ριζών του:

$$C = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : \ F(z,w) = 0\}$$

ονομάζεται «μιγαδική αφινική καμπύλη στο επίπεδο». Ταυτίζοντας το $\mathbb{C}^2$ με το $\mathbb{R}^4$, θα έχω το C να ορίζεται από δύο πραγματικές εξισώσεις: αυτές που μηδενίζουν το πραγματικό και αυτές που μηδενίζουν το φανταστικό μέρος του $F(z,w)$. Έτσι περιμένουμε το C να είναι μία επιφάνεια και θα έχουμε δίκιο, εκτός ότι όπως και στις καμπύλες έτσι και στο C μπορεί να υπάρχουν κάποιες ανωμαλίες. Θα χρησιμοποιήσουμε τα εργαλεία της προηγούμενης ενότητας για να αφαιρέσουμε τις ανωμαλίες και να προσθέσουμε κάποια σημεία σε αυτά και στο άπειρο έτσι ώστε να πάρουμε μία συμπαγή επιφάνεια Riemann. Μάλιστα αν το F δεν είναι ανάγωγο τότε η επιφάνεια που θα πάρουμε θα είναι η ξένη ένωση επιφανειών που θα προέρχονται από τους ανάγωγους παράγοντες της F. Έτσι υποθέτουμε προς το παρόν ότι το πολυώνυμο F είναι ανάγωγο. Γράφουμε

$$F(Z,W) = a_0(Z)W^n + a_1(Z)W^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(Z)W + a_n(Z),$$

με $a_i(Z)$ πολυώνυμα ως προς το Z και $a_0(Z) \neq 0$, με $n > 0$ καθώς αν $n = 0$ $F = bZ + c$ και συνεπώς $C \cong \mathbb{C}$. Θέτουμε $F_w = \partial F/\partial W$, το οποίο είναι ένα πολυώνυμο ως προς W με $degF_w = n - 1$:

$$F_w = \frac{\partial F}{\partial W} = n \cdot a_0(Z)W^{n-1} + (n-1) \cdot a_1(Z)W^{n-2} + \cdots + a_{n-1}(Z).$$

Λήμμα 2.25. *Υπάρχουν πολυώνυμα $B(Z,W), C(Z,W), d(Z)$, με $d(Z) \neq 0$ έτσι ώστε:*

$$B(Z,W) \cdot F(Z,W) + C(Z,W) \cdot F_w(Z,W) = d(Z).$$

Απόδειξη: Κάνουμε χρήση του λήμματος Gauss:

Λήμμα 2.26 (Λήμμα του Gauss).
Αν F είναι ένα πολυώνυμο στον $K[X,Y]$, τότε αν το F είναι ανάγωγο στον $K(X)[Y]$, θα είναι ανάγωγο στον $K[X,Y]$.

Απόδειξη λήμματος Gauss: Έστω $F \in K[X,Y]$, με $F = a_0(X) + a_1(X)Y + \cdots + a_n(X)Y^n$ και $a_i(X) \in K[X], i = 0, \ldots, n$. Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των $a_0(X), \ldots, a_n(X)$ ονομάζεται content του πολυωνύμου F και τον συμβολίζουμε με $c(F)$. Συμπεραίνουμε ότι το F είναι πρωτόγονο ανν $c(F) = 1$.

Για αρχή θα δείξουμε ότι το γινόμενο δύο πρωτόγονων πολυωνύμων είναι πρωτόγονο. Πράγματι έστω $F = a_0 + a_1Y + \cdots + a_nY^n$ και $G = b_0 + b_1Y + \cdots + b_mY^m$ να είναι πρωτόγονα. Έστω επίσης $p = p(X)$ ένα όχι σταθερό πολυώνυμο που διαιρεί όλους τους συντελεστές του $F \cdot G$. Παίρνω τα μικρότερα δυνατά i, j έτσι ώστε το p να μην διαιρεί το a_i και το b_j. Η ύπαρξη τέτοιων δεικτών εξασφαλίζεται καθώς $c(F) = 1 = c(G)$ και συνεπώς $p \nmid c(F)$ και $p \nmid c(G)$. Έτσι υπάρχουν $i, j \in \mathbb{Z}$

τέτοια ώστε $p \mid a_s$ με $i < s$ και $p \nmid b_i$ και $p \mid a_t$ με $j < t$ και $p \nmid b_j$ αντίστοιχα. Τότε ο συντελεστής του Y^{i+j} στο $F \cdot G$ θα έχει μορφή:

$$a_i b_j + a_{i+1} b_{j-1} + \cdots + a_{i+j} b_0 + a_{i-1} b_{j+1} + \cdots + a_0 b_{i+j}$$

τότε θα έχουμε όλους τους όρους εκτός από τον πρώτο να διαιρούνται από το p, καθώς αν $p \mid a_i b_j \Rightarrow p \mid a_i$ ή $p \mid b_j$, που είναι άτοπο από την υπόθεσή μας με συνέπεια την απόδειξη του ισχυρισμού. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι για κάθε δύο πολυώνυμα $F, G \in K[X, Y]$ θα έχω

$$c(F \cdot G) = c(F) \cdot c(G)$$

Πράγματι $F = c(F) \cdot F_1$ και $G = c(G) \cdot G_1$ με F_1, G_1 πρωτόγονα[16]. Τότε $F \cdot G = c(F) \cdot c(G) \cdot F_1 \cdot G_1$ και από τα παραπάνω το πολυώνυμο $F_1 \cdot G_1$ είναι πρωτόγονο, έτσι θα έχω

$$c(F \cdot G) = c(F) \cdot c(G).$$

Για γνωστό $G \in K(X)[Y]$ όχι μηδενικό, μπορούμε να γράψουμε $G = g \cdot G_1$ με $g \in K(X)$ και G_1 πρωτόγονο στον $K[X, Y]$.

Έστω F ανάγωγο στον $K[X, Y]$ και F να παραγοντοποιείται στον $K(X)[Y]$ με $F = G \cdot H$ με G, H πολυώνυμα ως προς Y και $deg(G, H) > 0$. Γράφω $G = g \cdot G_1, H = h \cdot H_1$ με G_1, H_1 πρωτόγονα και $g = p/q,\ h = r/s$ με $p, q, r, s \in K[X]$. Τότε $q \cdot s \cdot F = p \cdot r \cdot G_1 \cdot H_1 \in K[X, Y] \cong K[X][Y]$. Έτσι $q \cdot s \cdot c(F)^{17} = p \cdot r \Rightarrow F = c(F) \cdot G_1 \cdot H_1$ με $G_1 \cdot H_1$ πρωτόγονο και το F παραγοντοποιείται στον $K[X, Y]$. Πράγμα άτοπο καθώς το F είναι ανάγωγο στον $K[X, Y]$. $\Diamond$

Επιστρέφοντας στην αρχική απόδειξη είναι τώρα φανερό πως αν F είναι ανάγωγο στο $\mathbb{C}[Z, W]$ τότε το F θα είναι ανάγωγο στο $\mathbb{C}(Z)[W]$. Εφαρμόζω τον Ευκλείδειο αλγόριθμο, διαιρώντας το F με το F_w και αφού «διώξω» τους παρονομαστές θα έχω

$$b_0 \cdot F = Q_1 \cdot F_w + R_1,$$

όπου $b_0 \in \mathbb{C}[Z]$ και R_1 είναι ένα πολυώνυμο ως προς W με $degR_1 < n - 1$. Αν ο βαθμός του R_1 είναι θετικός διαιρώ με F_w παίρνοντας την εξίσωση:

$$b_1 \cdot F_w = Q_2 \cdot F_w + R_2,$$

συνεχίζοντας συνεχίζοντας, βρίσκω εξισώσεις $b_i \cdot R_{i-1} = Q_{i+1} \cdot R_i + R_{i+1}$, μέχρι για κάποιο k, το πολυώνυμο R_{k+1} είναι μηδενικού βαθμού ως προς το W. Παρατηρούμε ότι το $R_{k+1} \neq 0$ γιατί διαφορετικά το R_k θα διαιρούσε το R_{k-1}, έπειτα το $R_{k-2}, \ldots$, και τελικά το F_w και το F πράγμα άτοπο από την υπόθεσή μας.

Θέτουμε $d(Z) = R_{k+1}$. Το $d(Z)$ είναι το ιδεώδες στο $\mathbb{C}[Z, W]$ που γεννάται από το F και το F_w.$\Diamond$

Παίρνοντας τα B, C και d του λήμματος με τέτοιον τρόπο ώστε να μην διαιρούνται όλα από ένα μη σταθερό πολυώνυμο ως προς Z τότε το d είναι μοναδικό modulo τον πολλαπλασιασμό με μία σταθερά και ονομάζεται *διακρίνουσα* του F ως προς το W. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το $d(Z)$ είναι ο Μ.Κ.Δ των F, F_w, δηλαδή $d(Z) = (F, F_w)$ και η διαδικασία που βρίσκουμε τα πολυώνυμα B, C είναι η ίδια διαδικασία που εφαρμόζουμε για την εύρεση των ακεραίων για να γράψουμε

[16]Κάθε πολυώνυμο F, G μπορεί να γίνει πρωτόγονο, διαιρώντας το με το $c(F)$ και $c(G)$ αντίστοιχα.

[17]Γνωρίζουμε ότι αν $a \in K$ και $f \in K[X] \Rightarrow c(a \cdot f) = a \cdot c(f)$.

σαν γραμμικό συνδυασμό τον διαιρέτη και τον διαιρετέο με τον Μ.Κ.Δ, εφαρμόζοντας την αντίστροφη διαδικασία του Ευκλείδειου αλγόριθμου.
Παραδείγματα:

(i) Για $F = W^2 + b(Z)W + c(Z)$ θα πάρω διαιρώντας με $F_w = 2W + b(Z)$ πηλίκο $W/2$ και υπόλοιπο $b(Z)W/2 + c(Z)$, διαιρώντας ξανά το F_w με το νέο υπόλοιπο, παίρνω πηλίκο $4/b(Z)$ και υπόλοιπο $-4c(Z)/b(Z) + b(Z)$. Εφαρμόζοντας τον Ευκλείδειο αλγόριθμο στην τελευταία διαίρεση έχω $2W+b(Z) = \big(b(Z)W/2+c(Z)\big)4/b(Z)-4c(Z)/b(Z)+b(Z)$. Πολλαπλασιάζοντας με $-b(Z)$ θα έχω $(-b(Z))\big(2W+b(Z)\big) = (-4)\big(b(Z)W/2+c(Z)\big)+b(Z)-4c(Z)$ με
$$R_2 = d(Z) = b(Z) - 4c(Z)$$
να είναι η διακρίνουσα του F. Τώρα $b(Z) - 4c(Z) = (2W + b(Z))(-b(Z) + 4(b(Z)W/2 + c(Z))$. Όμως το υπόλοιπο από την πρώτη διαίρεση ισούται με $\big(W^2 + b(Z)W + c(Z)\big) - \big(2W + b(Z)\big)(W/2)$ και αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση παίρνω το ζητούμενο αποτέλεσμα:
$$d(Z) = \big(2W - b(Z)\big)\big(-2 - b(Z)\big) + 4\big(W^2 + b(Z)W + c(Z)\big),$$
όπου $B(Z,W) = 4$ και $C(Z,W) = \big(-2W - b(Z)\big)$.

(ii) Όμοια αν $F = W^3 + b(Z)W + c(Z)$ προκύπτει ότι η διακρίνουσα ισούται με:
$$d(Z) = F_w \cdot \big(4b(Z)^2 + 6b(Z)W^2 + 9c(Z)b(Z)\big) - F \cdot \big(18b(Z)W + 27c(Z)\big),$$
που είναι ίσο με $4b(Z)^3 + 27c(Z)^2$.

Τώρα θεωρούμε την πρώτη προβολή $\pi_1 : C \to \mathbb{C}$ με $\pi_1(z,w) = z$. Θα δούμε ότι αφαιρώντας κάποιο πεπερασμένο αριθμό σημείων τότε η π_1 γίνεται μία τοπολογική καλυπτική απεικόνιση.

Λήμμα 2.27. *Υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός σημείων $S \subset \mathbb{C}$ έτσι ώστε η προβολή $p : C \setminus \pi_1^{-1}(S) \to \mathbb{C} \setminus S$ να είναι μία πεπερασμένων φύλλων καλυπτική απεικόνιση.*

Απόδειξη: Από το προηγούμενο λήμμα βλέπουμε ότι αν $z \in \mathbb{C}$ και $d(Z) \neq 0$, τότε δεν υπάρχει w τέτοιο ώστε $F(z,w) = 0$ και $F_w(z,w) = 0$. Δηλαδή η εξίσωση $F(z,W)$ δεν έχει ρίζες με πολλαπλότητα μεγαλύτερης της μονάδας. Αν επιπροσθέτως πάρουμε το $a_0(z) \neq 0$, τότε η παραπάνω εξίσωση θα έχει n ακριβώς διαφορετικές ρίζες. Επιλέγουμε το σύνολο S να είναι το
$$S = \{z \in \mathbb{C} : a_0(z) \cdot d(z) = 0\}.$$
Παίρνουμε $z_0 \notin S$ και θέτουμε $w_1, \ldots, w_n$ να είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(z_0, W) = 0$. Σκοπός μας είναι να βρούμε αναλυτικές συναρτήσεις $g_1, \ldots, g_n$ που να είναι ορισμένες σε μία γειτονιά του z_0 έτσι ώστε $g_i(z_0) = w_i$ και $F(z, g_i(z)) = 0$. Παίρνουμε μικρούς, κλειστούς και ξένους δίσκους γύρω από αυτά τα n σημεία και θέτουμε γ_i να είναι Π.Α.Κ γύρω από το σύνορο αυτών των δίσκων που περικλείουν τα w_i.

Ας δείξουμε στην αρχή ότι το λογαριθμικό ολοκληρωτικό υπόλοιπο της F, δηλαδή το $\frac{\partial}{\partial W}(\log F(z,W)) = \frac{F_w}{F}$, σε μία ρίζα της w_i ισούται με την πολλαπλότητα της ρίζας αυτής. Πράγματι αν η F έχει ρίζα w με πολλαπλότητα k τότε σε κάποια γειτονιά του w θα είχα $F=(W-w)^k \cdot G$ με $G(W)\neq 0$ και G αναλυτική στην εν λόγο γειτονιά. Τότε $F_w=(W-w)^k \cdot G_W + k(W-w)^{k_1} \cdot G$. Διαιρώντας κατά μέλη τις F_w, F θα έχω: $\frac{F_w}{F}=\frac{k}{(W-w)}+\frac{G_w}{G}$ με $\frac{G_w}{G}$ να είναι αναλυτική. Έτσι η $\frac{F_w}{F}$ έχει στο w απλό πόλο με $Res(\frac{F_w}{F})=k$ και το ζητούμενο αποδείχθηκε.

Από το Θεώρημα Ολοκληρωτικού Υπολοίπου θα έχουμε ότι:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F_w}{F}dw = R_F,$$

όπου R_F ο αριθμός των ριζών που βρίσκονται εντός της Π.Α.Κ γ, μετρημένης της πολλαπλότητας τους. Γενικεύοντας για μία μερόμορφη F μπορούμε να κάνουμε τον ίδιο υπολογισμό βάζοντας ένα μείον στην πολλαπλότητα του κάθε πόλου. Έτσι θα έχουμε

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F_w}{F}dw = R_F - P_F,$$

όπου R_F, P_F οι αριθμοί των ριζών και των πόλων αντίστοιχα με μετρημένη την πολλαπλότητα, που ανήκουν στο εσωτερικό της Π.Α.Κ γ.

Ειδικεύοντας τα παραπάνω συμπεράσματα στην περίπτωσή μας θα έχουμε ότι για κάθε z κοντά στο z_0 και για $w_i \in I(\gamma_i)$ θα έχουμε:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_i} \frac{F_w}{F}dw = 1$$

καθώς το ολοκλήρωμα ισούται με την μονάδα για $z=z_0$ και η τιμή του μεταβάλλεται για κάθε άλλο z, δηλαδή υπάρχει ακριβώς μία ρίζα της $F(z,W)$ μέσα σε κάθε μία γ_i. Τώρα από το μιγαδικό ανάλογο του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης, (βλέπε [11] σελίδα 232 για το ειδικό θεώρημα πεπλεγμένης πραγματικής συνάρτησης) θα υπάρχει μοναδική συνάρτηση g με $g(z)=w$ τέτοια ώστε $F(z,g(z))=0$. Από τα παραπάνω θα έχω ότι η $g_i(z)\frac{F_w}{F}$ θα έχει ολοκληρωτικό υπόλοιπο ίσο με το $kg_i(z_0)$. Αν τώρα περιοριστώ σε κάθε κύκλο γ_i το $k=1$ και συνεπώς αφήνοντας το z να μεταβάλλεται θα έχω:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_i} w\frac{F_w}{F}dw = g_i(z) = w_i = F^{-1}(z,0).$$

Παίρνοντας U να είναι ο δίσκος γύρο από το z_0 όπου όλες οι παραπάνω $g_i(z)$ ορίζονται, θέτω $V_i=\{(z,g_i(z)) : z\in U\}$. Καθώς τα σημεία αυτά δίνουν όλες τις πιθανές ρίζες της $F(z,W)=0$ με $z\in U$, βλέπουμε ότι το $\pi_1^{-1}(U)$ είναι η ένωση ανοικτών V_i και η π_1 απεικονίζει ομοιομορφικά κάθε V_i στο U, με αντίστροφη εικόνα που δίνεται από τον τύπο $z\mapsto (z,g_i(z))$. ◊

Παρατήρηση 2.28. *Στο παραπάνω συμπέρασμα, ότι το λογαριθμικό ολοκληρωτικό υπόλοιπο ισούται με τον αριθμό των ριζών μείον τον αριθμό των πόλων, μετρημένης της πολλαπλότητας, μπορούμε να φτάσουμε εισάγοντας την έννοια του winding number. Αν F μία μερόμορφη συνάρτηση με ρίζες a_i και πόλους b_k, τότε*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F_w}{F}dw = \sum_i w(\gamma,a_i) - \sum_k w(\gamma,b_k)$$

για κάθε γ που είναι άθροισμα κλειστών μονοπατιών[18] *όχι απαραίτητα απλή καμπύλη, που δεν διέρχεται από καμία από τους παραπάνω πόλους και ρίζες. Όπου $w(\gamma, a_i)$ είναι η πολλαπλότητα της F στις ρίζες a_i και $w(\gamma, b_k)$ η πολλαπλότητα της F στον κάθε πόλο αντίστοιχα. Το $w(\gamma, a_i)$ ονομάζεται winding number και ισούται με*

$$w(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w-a}.$$

Μας λέει πόσες φορές «τυλίγεται» το κάθε κλειστό μονοπάτι γ γύρο από την κάθε ρίζα-πόλο. Πιο αυστηρά αντιπροσωπεύει τον ακέραιο αριθμό (ακέραιο πολλαπλάσιο του $2\pi i$) που προκύπτει από την διαφορά της αρχής με το τέλος εάν ανορθώσουμε στον $\mathbb{R}$ (που είναι ο καθολικός καλυπτικός χώρος του S^1) το κλειστό μονοπάτι γ. Αυτή είναι και η γεωμετρική ματιά πάνω στην πολλαπλότητα της κάθε ρίζας -πόλου της F.

Τώρα σκεφτόμαστε το $\mathbb{C}$ σαν υποσύνολο του $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ και μεγαλώνουμε το σύνολο S προσθέτοντας ένα σημείο στο άπειρο. Από το παραπάνω λήμμα θα έχουμε μία καλυπτική απεικόνιση $X^o \to S^2 \setminus S$, όπου $X^o = \{(z, w) : F(z, w) = 0$ με $z \notin S\}$. Από την πρόταση 2.24, θα έχουμε αυτήν την καλυπτική απεικόνιση να δίνει δομή επιφάνειας Riemann στον X^o. Αρκεί να δείξουμε ότι ο X^o είναι συνεκτικός χώρος.

Λήμμα 2.29. *Αν το $F(Z, W)$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο, τότε ο X^o είναι συνεκτικός.*

Απόδειξη: Έστω Y^o να είναι μία συνεκτική συνιστώσα του X^o και X^o όχι συνεκτικός. Αν περιορίσουμε την καλυπτική απεικόνιση n-φύλλων $X^o \to S^2 \setminus S$ στην συνεκτική συνιστώσα Y^o θα πάρουμε μία καλυπτική απεικόνιση με $m < n$ φύλλα.

Είναι γνωστό πώς μπορούμε να γράψουμε κάθε πολυώνυμο συναρτήσει των ριζών του (τύποι του Vieta[19]). Βλέποντας το $F(Z, W)$ σαν ένα πολυώνυμο στον $\mathbb{C}[Z][W]$ είναι σαφές ότι οι παραπάνω ρίζες θα είναι συναρτήσεις του Z. Γενικά αν $\mathbb{K}$ είναι σώμα και $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ Ακέραια Περιοχή, θα έχουμε τις e_i να είναι οι *στοιχειώδεις συμμετρικές συναρτήσεις* στις μεταβλητές $x_1, \dots, x_n$ επί του $\mathbb{K}$, να είναι οι συντελεστές ως προς y του πολυωνύμου $g(y) \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n][y]$, όπου

$$\begin{aligned} g(y) &= (y - x_1)(y - x_2) \dots (y - x_n) \\ &= y^n - f_1 y^{n-1} + f_2 y^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} f_{n-1} y + (-1)^n f_n \\ &= y^n + \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^\nu f_\nu y^{n-\nu}. \end{aligned}$$

Έστω $z \notin S$ και $e_1(z), \dots, e_m(z)$ να είναι οι στοιχειώδεις συμμετρικές συναρτήσεις στις m τιμές του w, στα σημεία $\pi_1^{-1}(z) \cap Y^o$. Καθώς $F \in \mathcal{M}(X)$, θα έχω ότι $e_1(z), \dots, e_m(z) \in \mathcal{M}(X)$. Θέτω

$$G = W^m - e_1(Z) W^{m-1} + \dots + (-1)^m e_m(Z) \in \mathbb{C}(Z)[W],$$

[18] η ακριβής διατύπωση είναι ότι η γ πρέπει να είναι ένας κύκλος, που σημαίνει ότι είναι μία αλυσίδα, που γράφεται σαν άθροισμα κλειστών μονοπατιών, η οποία πρέπει να είναι ομόλογη του μηδενός. Για μία εισαγωγή στις αλυσίδες και σε αυτήν την ορολογία βλέπε αρχικά στον [15], σελίδα 137 και στην συνέχεια στον [1] στα κεφάλαια 3 και 4.

[19] Για παράδειγμα το $a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2[x^2 - (e_1 + e_2)x + e_1e_2x]$, με e_i να είναι οι ρίζες του ή το $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3[x^3 - (e_1 + e_2 + e_3)x^2 + (e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1)x - e_1e_2e_3]$.

και για κάθε $z \notin S$ θα έχω:

$$G(z, W) = \prod_{P \in \pi_1^{-1}(z) \cap Y^o} (W - w(P)),$$

$$F(z, W) = a_0(z) \prod_{P \in \pi_1^{-1}(z)} (W - w(P)).$$

Τώρα το G μηδενίζεται στο $C := V(I)$, όπου I να είναι το ιδεώδες που γεννάται από το πολυώνυμο F, δηλαδή $I = \langle F \rangle$ με F ανάγωγο και άρα I μέγιστο και συνεπώς πρώτο ιδεώδες του $\mathbb{C}[Z, W]$. Έτσι $G \in I(V(I)) \Rightarrow G \in \sqrt{I}$[20]. Όπου

$$\sqrt{I} = \{F \in \mathbb{C}[Z, W], \text{ με } I \lhd \mathbb{C}[Z, W] : \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ με } F^n \in I\}.$$

Όμως αφού το I είναι πρώτο θα έχω $G^m \in I$. Πράγματι $G \cdot G^{m-1} \in I \Rightarrow G \in I$ ή $G^{m-1} \in I$ και συνεχίζοντας επαγωγικά φτάνω στο συμπέρασμα ότι $G \in I$. Τότε $G \mid F$, πράγμα άτοπο από την υπόθεσή μας.◊

Από την πρόταση 2.24 εξάγουμε το παρακάτω σημαντικό συμπέρασμα:

Πόρισμα 2.30. *Κάθε ανάγωγο πολυώνυμο $F(z, w) \in \mathbb{C}[Z, W]$ επάγει μία καλυπτική απεικόνιση $p : C \setminus \pi_1^{-1}(S) \to \mathbb{C} \setminus S$ με C το αλγεβρικό σύνολο μηδενισμού του F και S το (πεπερασμένο) σύνολο των ιδιομορφιών του. Αυτή η απεικόνιση με την σειρά της επεκτείνεται σε μία αναλυτική και proper απεικόνιση $f : X \to S^2$, με X να είναι μία συμπαγής*[21] *επιφάνεια Riemann και $f \in \mathcal{M}(X)$. Αυτή η επιφάνεια Riemann ονομάζεται η επιφάνεια Riemann της αλγεβρικής καμπύλης C ή του πολυωνύμου F.*

2.2α′ Βαθμός Υπερβατικότητας

[22] Για κάθε γνωστό σώμα K, κάθε επέκταση αυτού F, είναι στην πραγματικότητα μία επέκταση δύο βημάτων: $K \subset E \subset F$, με F να είναι αλγεβρική επέκταση επί του E και το E να είναι καθαρά υπερβατική (purely transcendental) επέκταση επί του K (βλέπε ορισμό 2.34).

Ορισμός 2.31. *Έστω F επέκταση ενός σώματος K, και S υποσύνολο του F. Το S είναι αλγεβρικά εξαρτημένο επί του K αν υπάρχει ένα όχι ταυτοτικά μηδενικό πολυώνυμο $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ έτσι ώστε $f(s_1, \ldots, s_n) = 0$ για κάποια διαφορετικά $s_1, \ldots, s_n \in S$. Το S είναι αλγεβρικά ανεξάρτητο επί του K, αν το S δεν είναι αλγεβρικά εξαρτημένο επί του K.*

Κάθε υποσύνολο αλγεβρικά ανεξάρτητου συνόλου, είναι αλγεβρικά ανεξάρτητο. Το κενό είναι αλγεβρικά ανεξάρτητο ενώ κάθε υποσύνολο του K είναι αλγεβρικά εξαρτημένο. Το μονοσύνολο $\{u\}$ είναι αλγεβρικά εξαρτημένο επί του K αν και μόνον αν το u είναι αλγεβρικό επί του K. Επίσης κάθε στοιχείο ενός αλγεβρικά ανεξάρτητου συνόλου είναι αναγκαστικά υπερβατικό επί του σώματος K. Έτσι αν το F είναι μία αλγεβρική επέκταση επί του K τότε το κενό σύνολο είναι το μόνο αλγεβρικά ανεξάρτητο υποσύνολο του F.

Η αλγεβρική (αν)εξαρτησία είναι επέκταση της γραμμικής (αν)εξαρτησίας. Ισχύει ότι κάθε αλγεβρικά ανεξάρτητο σύνολο είναι γραμμικά ανεξάρτητο αλλά όχι το αντίστροφο.

[20] Από το θεώρημα του Hilbert έχουμε ότι $I(V(I)) = \sqrt{I}$.
[21] καθώς η f είναι proper και ο S^2 συμπαγής, τότε και ο $f^{-1}(S^2) = X$ θα είναι συμπαγής.
[22] Η παράγραφος αυτή βασίζεται στο κεφάλαιο 6 του [7], σελίδα 311.

Ορισμός 2.32. *Έστω F επέκταση ενός σώματος K. Μία υπερβατική βάση (transcendence base) του F επί του K είναι ένα υποσύνολο S του F τέτοιο ώστε το S να είναι αλγεβρικά ανεξάρτητο επί του K και να είναι μεγιστικό (ως προς το περιέχεσθαι) ανάμεσα σε όλα τα αλγεβρικά ανεξάρτητα υποσύνολα του F.*

Η ύπαρξη της υπερβατικής βάσης εξασφαλίζεται από το λήμμα του Zorn. Επίσης υπάρχει μία αναλογία μεταξύ της υπερβατικής βάσης και της βάσης ενός διανυσματικού χώρου: μία υπερβατική βάση δεν είναι βάση και του διανυσματικού χώρου παρόλο που σαν γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο περιέχεται στην βάση.

Ορισμός 2.33. *Έστω F επέκταση του K και S υποσύνολο του F με S να είναι αλγεβρικά ανεξάρτητο επί του K. Το S είναι μία υπερβατική βάση του F επί του K αν και μόνον αν το F είναι αλγεβρικό επί του $K(S)$.*

Ορισμός 2.34. *Η επέκταση F επί του K ονομάζεται καθαρά υπερβατική επέκταση (purely transcendental) αν $F = K(S)$, με $S \subset F$, να είναι αλγεβρικά ανεξάρτητο επί του F.*

Από τον ορισμό 2.33, έχουμε ότι το S θα είναι μία υπερβατική βάση του F επί του K. Έτσι αν πάρουμε F να είναι μία τυχαία επέκταση του σώματος K, με S να είναι μία υπερβατική βάση του F επί του K και $E = K(S)$, τότε το F θα είναι αλγεβρική επέκταση επί του E, δηλαδή η μόνη υπερβατική βάση επί του E θα είναι το $\varnothing$, και το E μία καθαρά υπερβατική επέκταση επί του K, πράγμα που αναφέραμε στην αρχή της παραγράφου.

Ορισμός 2.35. *Έστω F επέκταση του K. Ο βαθμός υπερβατικότητας του F επί του K είναι ο πληθικός αριθμός $|S|$, με S να είναι μία υπερβατική βάση του F επί του K και συμβολίζεται με $tr.d_K F$.*

Μάλιστα ο βαθμός υπερβατικότητας είναι ανεξάρτητος από την επιλογή υπερβατικής βάσης. Είναι το ανάλογο της διάστασης του διανυσματικού χώρου $[F : K]$. Επίσης $tr.d_K F \leq [F : K]$ και $tr.d_K F = 0$ αν και μόνον αν η F είναι μία αλγεβρική επέκταση επί του σώματος K. Τέλος αν F είναι επέκταση ενός σώματος E και E να αποτελεί επέκταση ενός σώματος K θα έχουμε ότι[23]: $tr.d_K F = tr.d_E F + tr.d_K E$.

Τώρα γνωρίζουμε από το πόρισμα 2.15 ότι $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) = \mathbb{C}(z)$ και $\mathcal{O}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) = \mathbb{C}$. Θα δούμε έτσι, ότι κάθε μερόμορφη συνάρτηση, στην σφαίρα του Riemann, έχει βαθμό υπερβατικότητας υπέρ του $\mathbb{C}$ ίσο με μονάδα ή ισοδύναμα:

$$tr.d_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(z) = 1.$$

Πράγματι: Έστω $f/g \in \mathbb{C}(z)$ με $f, g \in \mathbb{C}[z], g \neq 0$. Επιλέγω το πολυώνυμο $\mathbb{C}[z,w] \ni h(z,w) = wg(z) - f(z)$. Τότε $h(z, f/g) = f/g \cdot g(z) - f(z) = 0$. Αυτό μας λέει ότι σύνολο $\{z, f/g\}$ είναι αλγεβρικά εξαρτημένο επί του $\mathbb{C}$ και έτσι το $\{x\}$ αποτελεί μία υπερβατική βάση του $\mathbb{C}(z)$ επί του $\mathbb{C}$. Άρα $tr.d_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(z) = 1$, ή το $\mathbb{C}(z)$ είναι μία καθαρά υπερβατική επέκταση επί του $\mathbb{C}$.

Αν $\pi : Y \to X$ είναι μία όχι σταθερή αναλυτική απεικόνιση μεταξύ επιφανειών Riemann, τότε για κάθε $f \in \mathcal{M}(X)$, η απεικόνιση $\pi^* := f \circ \pi$[24] είναι μία μερόμορφη συνάρτηση στον Y. Έτσι υπάρχει μία απεικόνιση

$$\pi^* : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(Y),$$

η οποία είναι ένας μονομορφισμός σωμάτων.

[23] για την απόδειξη βλέπε [7], θεώρημα 1.11, σελίδα 316.
[24] Μία τέτοια απεικόνιση ονομάζεται pull-back.

Θεώρημα 2.36. *Αν X είναι μία συμπαγής επιφάνεια Riemann και $\mathcal{M}(X)$ το σώμα μερόμορφων συναρτήσεων τότε $tr.d_{\mathbb{C}}\mathcal{M}(X) = 1$.*

Απόδειξη: Έστω $z \in \mathcal{M}(X)$, με $z : X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ να είναι μία αναλυτική συνάρτηση και $degz = n$. Είναι γνωστό ότι ο επαγώμενος μονομορφισμός $z^* : \mathbb{C}(x) \to \mathcal{M}(X)$, αποτελεί μία αλγεβρική επέκταση, βαθμού n[25]. Έστω $w \in \mathcal{M}(X)$. Θα δείξω ότι υπάρχει αλγεβρική σχέση μεταξύ των z, w, πράγμα που μας δείχνει ότι $tr.d_{\mathbb{C}}\mathcal{M}(X) = 1$.

Έστω w_0 το ελάχιστο πολυώνυμο (ανάγωγο και μονικό) επί του $\mathbb{C}(z)[w]$ με τον μέγιστο βαθμό, δηλαδή υποθέτουμε ότι ο βαθμός της επέκτασης $[\mathbb{C}(z, w_0) : \mathbb{C}(z)]$ είναι μέγιστος. Τότε για κάθε $w \in \mathcal{M}(X)$ θα έχουμε:

$$[\mathbb{C}(z, w, w_0) : \mathbb{C}(z)] = [\mathbb{C}(z, w, w_0) : \mathbb{C}(z, w_0)] \cdot [\mathbb{C}(z, w_0) : \mathbb{C}(z)]. \tag{2.1}$$

Τώρα η χαρακτηριστική του $\mathbb{C}(z)$ ισούται με το μηδέν και έτσι κάθε επέκταση του θα είναι απλή. Συνεπώς η επέκταση $\mathbb{C}(z, w, w_0) : \mathbb{C}(z)$ παράγεται από ένα στοιχείο t, τέτοιο ώστε

$$\mathbb{C}(z, w, w_0) = \mathbb{C}(z, t).$$

Όμως θα πρέπει $[\mathbb{C}(z, w, w_0) : \mathbb{C}(z, w_0)] = 1$ γιατί αν $[\mathbb{C}(z, w, w_0) : \mathbb{C}(z, w_0)] > 1$, τότε από την 2.1 θα είχα ότι $[\mathbb{C}(z, t) : \mathbb{C}(z)] > [\mathbb{C}(z, w_0) : \mathbb{C}(z)]$, πράγμα άτοπο από την υπόθεση μας. Έτσι $w \in \mathbb{C}(z, w_0)$ και συνεπώς $\mathcal{M}(X) = \mathbb{C}(z, w_0)$. $\Diamond$

Έτσι το $\mathcal{M}(X)$ είναι μία πεπερασμένα παραγόμενη επέκταση του $\mathbb{C}$, με X να είναι μία συμπαγής επιφάνεια Riemann, που έχει βαθμό υπερβατικότητας 1 επί του $\mathbb{C}$[26]. Τέτοιες επεκτάσεις όμως οδηγούν σε αλγεβρικές καμπύλες C. Πράγματι, για τυχαίες μερόμορφες συναρτήσεις f, g στον X υπάρχει μη μηδενικό ανάγωγο πολυώνυμο $\Phi(Z, W) \in \mathbb{C}[Z, W]$ έτσι ώστε

$$\Phi(f, g) = 0,$$

με C να είναι η αλγεβρική καμπύλη του πολυωνύμου Φ. Από το πόρισμα 2.30 και το θεώρημα 2.36 θα έχουμε έτσι το εξής πολύ σημαντικό αποτέλεσμα.

Πόρισμα 2.37. *Κάθε συμπαγής και συνεκτική επιφάνεια Riemann είναι η επιφάνεια Riemann μίας αλγεβρικής καμπύλης.*

Έστω X να είναι μία συμπαγής επιφάνεια Riemann με $K := \mathcal{M}(X)$ το σώμα των μερόμορφων συναρτήσεων τον X και $\Phi[T] \in K[T]$ να είναι ένα ανάγωγο μονικό πολυώνυμο βαθμού n. Τότε υπάρχει μία επιφάνεια Riemann Y ένα n-fold διακλαδιζόμενο proper αναλυτικό κάλυμμα[27] $\pi : Y \to X$ και μία $F \in L$ έτσι ώστε να μηδενίζει το $(\pi^*\Phi)(F) = (\Phi \circ \pi)(F)$. Συμβολίζουμε την τριπλέτα αυτή με (Y, π, F) που δηλώνει την αλγεβρική καμπύλη $\Phi(T)$. Θέτουμε $L = \mathcal{M}(Y)$. Τότε θα έχουμε τον επαγώμενο μονορφισμό $\pi^* : K \to L$ και βλέπουμε το K σαν υπόσωμα του L. Η επέκταση L/K είναι όπως είδαμε αλγεβρική, βαθμού n. Επίσης $L \cong K[T]/\langle P \rangle$. Μπορεί να αποδειχθεί, μέσω του θεωρήματος 2.5, ότι κάθε covering tranformation στο τοπολογικό κάλυμμα επάγει έναν covering tranformation στο αναλυτικό κάλυμμα[28]. Μάλιστα μπορούμε να φτάσουμε σε ένα βαθύτερο αποτέλεσμα[29]:

[25] βλέπε [9], θεώρημα 8.2, σελίδα 50.

[26] ισοδύναμα το σώμα $\mathcal{M}(X)$ είναι ένα σώμα συναρτήσεων σε μία μεταβλητή επί του $\mathbb{C}$.

[27] καθώς ο X είναι συμπαγής και η π proper, θα έχουμε ότι και ο Y είναι συμπαγής.

[28] βλέπε [9] θεώρημα 8.5, σελίδα 52.

[29] για την απόδειξη, βλέπε [9], θεώρημα 8.12, σελιδα 57.

Θεώρημα 2.38. *Έστω $f \in L$. Κάθε αναλυτικός deck transformation $\sigma : Y \to Y$ του Y επί του X επάγει έναν αυτομορφισμό $f \mapsto \sigma f := f \circ \sigma^{-1}$ του L, που αφήνει σταθερό το σώμα K με την απεικόνιση:*

$$Aut(Y/X) \to Gal(L/K),$$

όπως αυτή ορίστηκε, να είναι ένας ισομορφισμός ομάδων. Τέλος ο καλυπτικός χώρος είναι κανονικός, με την έννοια ότι το τοπολογικό κάλυμμα που επάγει από την πρόταση 2.22 είναι κανονικό, αν η επέκταση είναι Galois.

Πράγματι καθώς ο σ είναι ένας αναλυτικός covering tranformation, το παρακάτω διάγραμμα θα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \arrow[dl, "\pi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

έτσι ώστε να ισχύει $\pi \circ \sigma = \pi$, για κάθε αναλυτική π μεταξύ Riemann επιφανειών X, Y. Επιλέγοντας μία $k \in \mathcal{M}(X)$, θα υπάρχει μία $k' \in \mathcal{M}(Y)$, που επάγεται από την pull-back π^* έτσι ώστε

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ & Y \arrow[ur, "k'"'] & \end{tikzcd}$$

και $k' \circ \pi = \pi^*(k') = k$. Παρατηρούμε ότι ο αυτομορφισμός του L

$$f \mapsto f \circ \sigma^{-1}, \quad \text{με } f \in L,$$

αφήνει σταθερό το σώμα $K = \mathcal{M}(X)$, καθώς για $k \in K$ θα έχω ότι $k \circ \sigma^{-1} = k' \circ \pi \circ \sigma^{-1} = k' \circ \pi \circ \sigma \circ \sigma^{-1} = k$.

2.2β′ Μία εφαρμογή στο αντίστροφο πρόβλημα της θεωρίας του Galois.

Το αντίστροφο πρόβλημα της θεωρίας του Galois θα μπορούσε να συνοψιστεί ως εξής: Δίνεται μία πεπερασμένη ομάδα G και ένα σώμα K μπορούμε να βρούμε μία Galois επέκταση L/K με ομάδα Galois την G; Αυτό είναι ένα πολύ δύσκολο πρόβλημα αν το σώμα K είναι το σώμα των ρητών αριθμών.

Στα παρακάτω θα αποδείξουμε ότι το αντίστροφο πρόβλημα της θεωρίας του Galois έχει λύση αν $K = \mathbb{C}(t)$ είναι το σώμα των ρητών συναρτήσεων επί του $\mathbb{C}$. *Απόδειξη:* Ξεκινάμε με μια πεπερασμένη ομάδα G. Αυτή δέχεται μία παράσταση σε γεννήτορες και σχέσεις $G = \langle \Gamma : \ \Sigma \rangle$ με $G = F_n/R$, όπου F_n είναι η ελεύθερη ομάδα του Γ σε n το πλήθος στοιχεία και R η κανονική υποομάδα του F_n που γεννάται από τον Σ[30].

Παρατηρούμε ότι η F_n είναι η θεμελιώδης ομάδα της σφαίρας του Riemann αν από αυτήν αφαιρέσουμε $n+1$ το πλήθος σημεία, δηλαδή του

$$X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \backslash \{P_1, \ldots, P_{n+1}\},$$

(γνωρίζουμε ότι ο χώρος που αποτελείται από n κύκλους με ένα κοινό σημείο, n-leafed rose, έχει για θεμελιώδη ομάδα μία ελεύθερη ομάδα με n γεννήτορες).

[30] βλέπε [7], σελίδα 67.

Κατασκευάζουμε τον καθολικό καλυπτικό χώρο $\tilde{X}$ του X, και θεωρούμε τον ενδιάμεσο χώρο $\tilde{X}/R$:

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{X} & & & & & & \\ & \searrow & & & & & \\ \downarrow & & \tilde{X}/R & \rightarrow & Y & \rightarrow & \mathcal{M}(Y) \\ & \swarrow & & & \downarrow & & \downarrow \\ X & = & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{P_i\} & \rightarrow & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \rightarrow & \mathcal{M}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) \end{array}$$

Θα έχουμε ότι επειδή ο $\tilde{X}$ είναι καθολικό και συνεπώς κανονικό κάλυμμα του X, ο $\tilde{X}$ είναι ένα G'-κάλυμμα με $G' = Aut(\tilde{X}/X) \cong \pi_1(X) = F_n$, από την κατασκευή μας, δηλαδή ο $\tilde{X}$ αποτελεί ένα F_n-κάλυμμα με $X = \tilde{X}/F_n$. Επίσης ο $\tilde{X}$ αποτελεί ένα R-κάλυμμα του $\tilde{X}/R$, με $R \cong Aut(\tilde{X}/\tilde{X}/R)$. Τώρα καθώς $R \lhd F_n$ από το πόρισμα 1.41 και τα συμπεράσματα που το ακολουθούν, θα έχω ότι ο $\tilde{X}/R$ θα είναι ένα F_n/R-κάλυμμα του X με $F_n/R = Aut(\tilde{X}/X)/Aut(\tilde{X}/\tilde{X}/R) \cong Aut(\tilde{X}/R/X)$.

Από την πρόταση 2.24 μπορούμε να επεκτείνουμε το F_n/R-κάλυμμα του X σε ένα αναλυτικό (με σημεία διακλάδωσης τα $P_1, \ldots, P_{n+1}$), proper κάλυμμα f μεταξύ των Riemann επιφανειών Y και $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (ο Y συμπαγής καθώς η f είναι proper). Παίρνοντας για $\mathcal{M}(Y)$ το σώμα των μερόμορφων συναρτήσεων του Y, μπορώ να εφαρμόσω το θεώρημα 2.38 και θα έχω ότι $Gal(\mathcal{M}(Y)/\mathbb{C}(t)) = Aut(\tilde{X}/R/X) = F_n/R = G$, δηλαδή το ζητούμενο. $\diamondsuit$

Κεφάλαιο 3

Fuchsian Ομάδες Πρώτου Είδους

Από το πρώτο κεφάλαιο και το θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας Galois, συμπεραίνουμε ότι κάθε επιφάνεια Riemann X είναι ισόμορφη με ένα πηλίκο $\tilde{X}/G$, όπου $\tilde{X}$ να είναι ο καθολικός καλυπτικός χώρος του X και G, κάποια υποομάδα των αυτομορφισμών του $\tilde{X}$, που είναι ισόμορφη με την θεμελιώδη ομάδα $\pi_1(X)$ (από το πόρισμα 1.37, θα έχουμε ότι $\pi_1(X) \cong G = Aut(\tilde{X}/X)$.). Μπορούμε να δείξουμε ότι η ομάδα αυτή δρα evenly στον $\tilde{X}$ και συνεπώς βλέπουμε τον $\tilde{X}$ σαν ένα G-κάλυμμα του X, με $X = \tilde{X}/G$. Τώρα για μια επιφάνεια Riemann, η ταξινόμηση των πιθανών καλυπτικών χώρων είναι απλή, καθώς υπάρχουν μόνο τρεις διαφορετικές πιθανότητες:

Θεώρημα 3.1 (Uniformization θεώρημα για επιφάνειες Riemann). *Ο καθολικός καλυπτικός χώρος $\tilde{X}$, μιας επιφάνειας Riemann X, είναι (σύμμορφος) είτε ο $\mathbb{C}$, είτε η σφαίρα του Riemann, είτε ο μοναδιαίος ανοικτός μιγαδικός δίσκος D*[1].

Γνωρίζουμε όμως[2] ότι η απεικόνιση

$$\lambda : \mathbb{H} \to D \ \text{ με τύπο } z \mapsto \frac{z-i}{z+i},$$

είναι ένας ομοιομορφισμός του μιγαδικού δίσκου με το μιγαδικό άνω ημιεπίπεδο $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \ Im(z) > 0\}$, με αποτέλεσμα η τρίτη περίπτωση να ταυτίζεται με το $\mathbb{H}$.

Τώρα οι αυτομορφισμοί των παραπάνω τριών επιφανειών είναι γνωστοί:

- $Aut(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b : \ a, b \in \mathbb{C}\}$,
- $Aut(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) = PSL_2(\mathbb{C}) = \{$ μετασχηματισμούς του Möbius$\}$,
- $Aut(\mathbb{H}) = PSL_2(\mathbb{R})$.

Αν $\tilde{X} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, τότε $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.
Αν $\tilde{X} = \mathbb{C}$, τότε η G θα πρέπει να είναι μία διακριτή ομάδα από μεταφορές,

[1] βλέπε στην εργασία του [18], όπου και προσφέρονται τρεις διαφορετικές αποδείξεις.
[2] στην βιβλιογραφία αναφέρεται σαν unit disk upper half plane equivalence theorem.

ισόμορφη με το 0 ή την $SL_2(\mathbb{Z})$ ή ένα lattice Λ με συνέπεια ο X να είναι ο $\mathbb{C}$ ή ο $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ ή κάποιος τόρος $\mathbb{C}/\Lambda$.
Στην περίπτωση που $\tilde{X} = D$, θα έχουμε ότι κάθε επιφάνεια Riemann αντιστοιχεί σε μία υποομάδα του $PSL_2(\mathbb{R})$, που δρα evenly στον D. Αυτές ονομάζονται Fuchsian Ομάδες.

3.1 Transformation Groups και Χώροι Πηλίκα

Σε αυτή την παράγραφο, βασισμένοι στον [12] θα δούμε κάποιες από τις ιδιότητες μίας ομάδας μετασχηματισμών (transformation group) που δρα σε έναν τοπολογικό χώρο. Εδώ όλοι οι τοπολογικοί χώροι είναι Hausdorff.

Ορισμός 3.2. *Μία τοπολογική ομάδα (ή continuous group) (G, m, τ) είναι ένας τοπολογικός χώρος (G, τ) που έχει δομή ομάδας (G, m), με G να είναι ένα σύνολο, τ, μία τοπολογία και m να δηλώνει την (πολλαπλασιαστική) πράξη της ομάδας, έτσι ώστε οι συναρτήσεις:*

$$G \times G \to G \text{ με τύπο } x \times y \mapsto x \cdot y$$

$$G \to G, \text{ με τύπο } x \mapsto x^{-1},$$

να είναι συνεχείς συναρτήσεις. Μία τελική προϋπόθεση είναι το μονοσύνολο που περιέχει το ταυτοτικό στοιχείο της ομάδας $\{id_G\}$, να είναι κλειστό, έτσι ώστε $G \setminus \{id_G\} \in \tau$.

Από εδώ και στο εξής όταν θα μιλάμε για μία τοπολογική ομάδα, αντί να αναφερόμαστε στην τριπλέτα (G, m, τ), θα την αναφέρουμε για λόγους συντομίας σαν G.

Έστω τώρα G να είναι μία τοπολογική ομάδα και S ένας τοπολογικός χώρος. Η G λέμε ότι *δρα συνεχώς στον* S ή ότι η G είναι *μία ομάδα μετασχηματισμών* στον S αν υπάρχει μία συνεχής απεικόνιση

$$G \times S \to S \text{ με τύπο } S \ni (g, s) \mapsto g \cdot s \in S,$$

έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα εξής:

(i) $(ab)s = a(bs)$ για $a, b \in G$ και $s \in S$,

(ii) $id_G s = s \ \forall s \in S$.

Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι η G δρα στην S (από αριστερά), με την συνηθισμένη έννοια δράσης ομάδας σε σύνολο[3]. Επίσης για κάθε $g \in G$ η απεικόνιση $S \ni s \mapsto gs \in S$ είναι ένας ομοιομορφισμός του S με τον εαυτό του που ονομάζεται (αριστερή) μεταφορά. Συμβολίζουμε με $g(s)$ το gs. Για κάθε $s \in S$, συμβολίζουμε με $Gs = \{gs : \ g \in G\}$ και το καλούμε, όπως και στο πρώτο κεφάλαιο, τροχιά του s μέσω της G, ή πιο απλά την G-τροχιά του s. Δυο σημεία με την ίδια G-τροχιά ονομάζονται G-ισοδύναμα.

Συμβολίζουμε με S/G το σύνολο όλων των G-τροχιών των σημείων του S[4] και με $\pi : S \to S/G$ την φυσική προβολή με τύπο $\pi(s) = Gs$. Ένα υποσύνολο

[3] ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι ο τοπολογικός χώρος S είναι ένας αριστερός G-χώρος, βλέπε πρώτο κεφάλαιο για την ορολογία.

[4] ο συμβολισμός που ακολουθεί ο [12] διαφέρει καθώς μιλάει για αριστερή δράση της G στον τοπολογικό χώρο S και έτσι συμβολίζει με $G \setminus S$ την διαμέριση σε αριστερά σύμπλοκα. Εδώ τον αποφεύγουμε συνειδητά και καταφεύγουμε σε έναν πιο γνώριμο σε εμάς συμβολισμό.

$X \subset S/G$ είναι ανοικτό του S/G αν και μόνον αν το $\pi^{-1}(X)$ είναι ανοικτό του S. Έτσι με φυσιολογικό τρόπο ορίζουμε την τοπολογία πηλίκο στον S/G. Η π γίνεται τότε μία συνεχής συνάρτηση και ανοικτή. Πράγματι αν $Y \subset S$ ανοικτό του S τότε το:

$$\pi^{-1}(\pi(Y)) = \bigcup_{g \in G} g(Y),$$

είναι ανοικτό, σαν ένωση ανοικτών συνόλων (η μεταφορά είναι ένας ομοιομορφισμός του S και συνεπώς μία ανοικτή απεικόνιση.). Πρέπει να προσέξουμε ότι το G/S δεν είναι αναγκαστικά Hausdorff ακόμα και αν το S είναι ένας Hausdorff τοπολογικός χώρος.

Παράδειγμα: Έστω ο $\mathbb{R}$ με την τοπολογία που επάγει η συνήθης μετρική (ευκλείδεια) και $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Τότε ο τοπολογικός χώρος $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ δεν είναι Hausdorff, καθώς για τυχαία ανοικτά διαστήματα η τομή τους θα είναι διάφορη του κενού. Θα περιέχει το $0 \equiv p/q$, με $p, q \in \mathbb{Z}$ γιατί κάθε διάστημα περιέχει άπειρους ρητούς.

Έστω K μία κλειστή (με την τοπολογική έννοια) υποομάδα του G να δρα από δεξιά στην G, με πράξη τον συνήθη πολλαπλασιασμό. Τότε η K-τροχιά ενός στοιχείου $g \in G$ είναι ένα αριστερό σύμπλοκο gK. Έχουμε την τοπολογία πηλίκο $G \to G/K$.

Πρόταση 3.3. *Η κλειστότητα του K εξασφαλίζει την συνθήκη Hausdorff για τον τοπολογικό χώρο G/K.*

Απόδειξη: έστω $aK \neq bK$, με $aK, bK \in G/K$. Από ιδιότητες συμπλόκων θα έχω ότι $a^{-1}b \notin K$. Ορίζω συνεχή συνάρτηση $f : G \times G \to G$ με τύπο $f(x,y) = x^{-1}y$, η οποία είναι συνεχής γιατί μπορεί να προκύψει: παίρνοντας την προβολή στην πρώτη συντεταγμένη και συνθέτοντάς την με την συνεχή συνάρτηση του ορισμού 3.2

$$f_a : G \times G \xrightarrow{\pi_1} G \to G \text{ με τύπο } (x,y) \mapsto x \mapsto x^{-1},$$

και στην συνέχεια παίρνοντας την προβολή στην δεύτερη συντεταγμένη $f_b : G \times G \xrightarrow{\pi_2} G$ θα έχω ότι η συνάρτηση $f = (f_a, f_b) : G \times G \to G \times G$ με τύπο $(x,y) \mapsto (x^{-1}, y)$ θα είναι συνεχής[5]. Συνθέτοντας τέλος με την συνεχή συνάρτηση του πολλαπλασιασμού προκύπτει η ζητούμενη συνεχής, σαν σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, f. Τότε $(a,b) \notin f^{-1}(K)$ γιατί $f(a,b) = a^{-1}b$. Καθώς η f είναι συνεχής συνάρτηση το $f^{-1}(K)$ θα είναι κλειστό του $G \times G$. Θα υπάρχουν ανοικτές περιοχές U, V των a και b αντίστοιχα τέτοιες ώστε $(U \times V) \cap f^{-1}(K) = \varnothing$[6]. Παίρνοντας την φυσική προβολή $h : G \to G/K$, που είναι μία ανοικτή απεικόνιση, θα έχω $h(U) \cap h(V) = \varnothing$ και συνεπώς ο G/K να είναι ένας Hausdorff τοπολογικός χώρος.$\diamondsuit$

Τώρα, έστω ότι $K \lhd G$ έτσι ώστε η δράση της G στον G/K να είναι καλά ορισμένη[7], με $g(xK) = gxK$, με $g \in G$, $x \in G$. Η απεικόνιση $(g, xK) \mapsto$

[5] συγκεκριμένα από τον [5] στο θεώρημα 7.4, σελίδα 109 έχουμε ότι η $f : A \to X \times Y$ με τύπο $f(a) = (f_1(a), f_2(a))$ είναι συνεχής αν και μόνον αν οι συναρτήσεις συντεταγμένων $f_1 : A \to X$ και $f_2 : A \to Y$ είναι συνεχείς συναρτήσεις. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να δώσουμε έναν άλλο ισοδύναμο ορισμό για τις τοπολογικές ομάδες (βλέπε [5], άσκηση 2, σελίδα 144.):
Η G είναι μία τοπολογική ομάδα αν η απεικόνιση από το $G \times G \to G$ με τύπο $(x,y) \mapsto x^{-1} \cdot y$ είναι συνεχής και το αντίστροφο.

[6] γνωρίζουμε ότι αν $a \notin K$ με K κλειστό, τότε υπάρχει ανοικτή γειτονιά του a, έστω U, τέτοια ώστε $U \cap K = \varnothing$.

[7] δηλαδή αν $x_1 x_2^{-1} \in K$, τότε $(gx_1)(gx_2)^{-1} \in K$.

$gxK : G \times (G/K) \to G/K$ είναι μία συνεχής απεικόνιση και η δράση της G είναι μεταβατική.

Έστω S ένας Hausdorff τοπολογικός χώρος στον οποίο η G δρα συνεχώς και *μεταβατικά*. Σταθεροποιώ ένα $t \in S$ και θέτω $K = \{g \in G : \; gt = t\}$. Η ομάδα K είναι η υποομάδα ισοτροπίας της G στο t ή ο σταθεροποιητής του t και είναι μία κλειστή υποομάδα της G. Υπάρχει μία φυσική ένα προς ένα απεικόνιση $\lambda : G/K \to S$, με τύπο $\lambda(gK) = gt$. Για κάθε υποσύνολο $X \subset S$ έχουμε

$$\lambda^{-1}(X) = \{gK \in G/K : \; gt \in X\} = h(\{g \in G : \; gt \in X\})$$

με $h : G \to G/K$ να είναι η φυσική προβολή. Παρατηρούμε ότι το $\lambda^{-1}(X)$ είναι ανοικτό αν το X είναι ανοικτό και έτσι η λ είναι μία συνεχής συνάρτηση. Επιπρόσθετα θα έχουμε ότι:

Θεώρημα 3.4. *Η απεικόνιση $\lambda : G/K \to S$, είναι ένας ομοιομορφισμός αν G, S είναι τοπικά συμπαγείς τοπολογικοί χώροι και η G έχει μία αριθμήσιμη βάση ανοικτών συνόλων (ή ισοδύναμα η G είναι ένας δεύτερος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος).*[8]

Απόδειξη: Έστω U ανοικτό του G και $g \in U$. Γνωρίζοντας ότι η λ είναι 1-1 και επί αρκεί να δείξω ότι στην περίπτωση του θεωρήματος η απεικόνιση είναι ανοικτή, δηλαδή αρκεί να δείξω ότι το gt είναι ένα εσωτερικό σημείο του Ut και συνεπώς υπάρχει ανοικτή περιοχή A τέτοια ώστε $gt \in A \subset Ut$.

Γενικά αν η G είναι μία τοπολογική ομάδα και $A, B \subset G$, τότε θα συμβολίζουμε με $AB = \{ab : \; a \in A$ και $b \in B\}$, $A^{-1} = \{a^{-1} : \; a \in A\}$. Επίσης μία γειτονιά V του id_G ονομάζεται *συμμετρική* αν $V = V^{-1}$. Μάλιστα ισχύει ότι αν U είναι μία γειτονιά του id_G μίας τοπολογικής ομάδας G, τότε υπάρχει μία συμμετρική γειτονιά V του id_G έτσι ώστε $VV = VV^{-1} \subset U$[9]. Τέλος κάτι που θα χρησιμοποιούμε πολύ συχνά[10] είναι ότι αν X είναι ένας Hausdorff χώρος τότε θα είναι τοπικά συμπαγής στο σημείο x αν και μόνον αν για κάθε γειτονιά U του x, υπάρχει γειτονιά V_x του x, τέτοια ώστε $\bar{V}$ είναι συμπαγής και $\bar{V} \subset U$.

Επιστρέφοντας στην απόδειξη, για $g \in G$ θα έχουμε:

$$G \to G/K \to S \to S$$

$$g \overset{h}{\mapsto} gK \;\overset{\lambda}{\mapsto} gt \;\overset{\cong}{\mapsto} t.$$

Επιλέγω V να είναι μία συμπαγής γειτονιά του id_G, έτσι ώστε $V = V^{-1}$ και $gV^2 \subset U$. Από την υπόθεση που κάναμε το G, είναι η ένωση $\cup_n g_n V$ αριθμήσιμων το πλήθος $\{g_n\} \subset G$. Τώρα το $g_n V$ είναι συμπαγή και η εικόνα του μέσω της συνεχής λ που είναι το $g_n Vt$ είναι συμπαγής υπόχωρος του S. Ο S είναι ένας Hausdorff τοπολογικός χώρος και έτσι το $g_n Vt$ είναι κλειστό του S. Σύμφωνα με το λήμμα που ακολουθεί ένα τουλάχιστον $g_n Vt$ πρέπει να περιέχει ένα εσωτερικό σημείο. Όμως η απεικόνιση $S \ni t \mapsto g_n t \in S$ είναι ένας ομοιομορφισμός που απεικονίζει κάθε Vt στο $g_n Vt$ και συνεπώς το Vt έχει εσωτερικό σημείο, δηλαδή υπάρχει $vt \in Vt$ και A ανοικτό του S τέτοιο ώστε $vt \in A \subset Vt$. Όμως:

$$gt = gv^{-1} \cdot vt \in gv^{-1}A \subset gV^2 t \subset Ut.$$

[8] το θεώρημα αυτό είναι το αντίστοιχο της παρατήρησης 1.27, για συνεχείς δράσεις τοπολογικών ομάδων σε τοπολογικούς χώρους.

[9] για την απόδειξη αυτού, βλέπε [13], στο λήμμα της σελίδας 117.

[10] για την απόδειξη βλέπε [5] λήμμα 8.2, σελίδα 185.

Έτσι το gt είναι εσωτερικό σημείο του Ut. Τώρα $S = \cup_n g_n Vt$ γιατί η G δρα μεταβατικά στην S και αρκεί να αποδείξουμε τον ισχυρισμό μας:

Λήμμα 3.5. *Έστω $S \neq \varnothing$ τοπικά συμπαγής Hausdorff τοπολογικός χώρος και $V_1, \ldots, V_n, \ldots$ αριθμήσιμα το πλήθος κλειστά υποσύνολα του S, τέτοια ώστε $S = \cup_{n=1}^{\infty} V_n$. Τότε τουλάχιστον κάποιο από τα V_n έχει ένα εσωτερικό σημείο.*

Απόδειξη: Για αρχή θα δούμε ότι κάθε τοπικά συμπαγής και Hausdorff τοπολογικός χώρος είναι κανονικός, δηλαδή για κάθε $x \notin F$ με F κλειστό του παραπάνω χώρου, τότε υπάρχουν $U_x,\ V_F$ ανοικτά του τοπολογικού χώρου με $x \in U_x,\ F \subset V_F$, τέτοια ώστε $U_x \cap V_F = \varnothing$.
Αυτό προκύπτει γιατί ένας Hausdorff τοπολογικός χώρος, είναι τοπικά συμπαγής αν και μόνον αν η συμπαγοποίηση του ενός σημείου του εν λόγω χώρου είναι ένας Hausdorff τοπολογικός χώρος[11]. Γνωρίζοντας τώρα ότι κάθε συμπαγής και Hausdorff τοπολογικός χώρος είναι T_3[12], έτσι και κάθε υπόχωρος αυτού του τοπολογικού χώρου θα είναι T_3.

Ας επιστρέψουμε στην απόδειξη. Έστω τώρα ότι κανένα από τα V_n της υπόθεσης δεν έχει εσωτερικά σημεία (υποθέτουμε δηλαδή ότι $V_n^o = \varnothing$, ισοδύναμα ότι τα V_n δεν περιέχουν κανένα ανοικτό του S εκτός του $\varnothing$.). Παίρνω $W_1 \neq \varnothing$ ανοικτό του S, με $W_1 \subset \bar{W}_1$ και $\bar{W}_1$ να είναι συμπαγή. Ορίζω με αυτόν τον τρόπο $W_2, W_3, \ldots$ έτσι ώστε $W_n \neq \varnothing$ και $W_{n+1} \subset \bar{W}_{n+1} \subset W_n \setminus V_n$ με $W_n \setminus V_n$, να είναι ανοικτό του S. Η τελευταία σχέση εγκλεισμού προκύπτει ως εξής: με το να είναι ο τοπολογικός χώρος S κανονικός, ισοδυναμεί με το να ισχύει ότι για κάθε $x \in S$ και για κάθε ανοικτή περιοχή U_x του x, να υπάρχει ανοικτό $W_n \subset S$ τέτοιο ώστε $x \in W \subset \bar{W}_n \subset U_x$. Αντικαθιστώντας το U_x με $W_n \setminus V_n$ προκύπτει το ζητούμενο καθώς αν $x \in V_n$, τότε αναγκαστικά $x \in V_n^o$, πράγμα άτοπο από την υπόθεσή μας. Έτσι τα $\bar{W}_n$ αποτελούν μία φθίνουσα ακολουθία μη κενών και συμπαγών συνόλων, που έχει σαν αποτέλεσμα[13] ότι $\cap_n \bar{W}_n \neq \varnothing$. Πράγμα άτοπο γιατί σταθεροποιώντας ένα W_n και κάνοντας χρήση των νόμων De Morgan βρίσκουμε ότι:

$$\cap_n \bar{W}_n \subset \cap_n (W_n \setminus V_n) = \varnothing.\Diamond$$

Πρόταση 3.6. *Έστω G τοπολογική ομάδα που δρα συνεχώς σε έναν τοπικά συμπαγή Hausdorff χώρο S. Τότε ο S/G είναι συμπαγής αν και μόνον αν υπάρχει ένα συμπαγές υποσύνολο C του S τέτοιο ώστε $GC = S$.*

Απόδειξη: Έστω $\pi : S \to S/G$. Αν $G \cdot C = S$ τότε $\pi(C) = S/G$. Καθώς η π είναι συνεχής απεικόνιση και ο C συμπαγές υποσύνολο του S, ο S/G, θα είναι συμπαγής. Αντίστροφα, αν ο S/G είναι συμπαγής τότε $S/G = \cup_i \pi(U_i)$, με πεπερασμένο αριθμό ανοικτών U_i, που μέσω της ανοικτής π μας δίνουν πεπερασμένα ανοικτά $\pi(U_i)$, των οποίων οι κλειστότητες $\bar{U}_i$ είναι συμπαγή υποσύνολα, από την τοπική συμπάγεια του χώρου S. Έτσι $S = G \cdot (\cup_i \bar{U}_i)$ και γνωρίζουμε ότι πεπερασμένες ενώσεις συμπαγών μας δίνουν συμπαγές σύνολο.$\Diamond$

Έστω G να είναι μία τοπολογική ομάδα. Ένα $M \subset G$ μπορεί να έχει σημεία συσσώρευσης στον G ακόμα και αν η επαγώμενη από το M τοπολογία είναι η διακριτή. Αν τώρα το M τυχαίνει να είναι και υποομάδα του G τότε η M θα είναι

[11] βλέπε [13], σελίδα 146.

[12] εννοούμε ότι είναι κανονικός και (T_1). Για την ακρίβεια γνωρίζουμε ότι κάθε συμπαγής και Hausdorff τοπολογικός χώρος είναι T_4 (φυσιολογικός και T_1) και ότι $T_4 \Rightarrow T_3$. Βλέπε διαχωριστικά αξιώματα τοπολογικών χώρων.

[13] βλέπε [5], σελίδα 271.

μία τοπολογική ομάδα[14] με τοπολογία την σχετική τοπολογία σαν ένα υποσύνολο του G, δηλαδή $\tau_M = \{M \cap A : \ A \in \tau_G\}$. Ονομάζουμε την M *διακριτή υποομάδα* της G αν η επαγώμενη από την M τοπολογία είναι η διακριτή. Επίσης θα έχουμε:

Πρόταση 3.7. *Έστω Γ υποομάδα της G. Ας υποθέσουμε επίσης ότι η επαγώμενη τοπολογία της Γ είναι τοπικά συμπαγής. Τότε η Γ είναι κλειστή στην G. Ειδικότερα αν η Γ είναι διακριτή υποομάδα της G, τότε η Γ είναι κλειστή της G και δεν έχει σημείο συσσώρευσης στην G.*

Απόδειξη: Έστω ότι η Γ έχει μία συμπαγή γειτονιά C του id_G. Παίρνουμε μία ανοικτή γειτονιά του id_G, έστω U στο G τέτοια ώστε $U \cap \Gamma \subset C$. Έστω $x \in \bar{\Gamma}$, θα δείξουμε ότι $x \in \Gamma$. Βρίσκω γειτονιά V του x τέτοια ώστε $V^{-1} \cdot V \subset U$. Τότε $((V \cap \Gamma)^{-1}) \cdot (V \cap \Gamma) \subset C$, με $V \cap \Gamma \neq \varnothing$, αφού $x \in \bar{\Gamma}$. Έτσι παίρνω $y \in V \cap \Gamma \Rightarrow y^{-1} \in (V \cap \Gamma) \subset C \Rightarrow \underline{(V \cap \Gamma) \subset yC}$. Τότε κάθε γειτονιά W_x του x θα έχω $(W_x \cap V) \cap \Gamma \neq \varnothing$ και άρα $x \in \overline{(V \cap \Gamma)}$. Όμως ο yC είναι συμπαγή υποσύνολο Hausdorff χώρου και άρα κλειστό, με συνέπεια $V \cap \Gamma \subset yC \Rightarrow \overline{V \cap \Gamma} \subset yC \Rightarrow \ x \in yC \subset \Gamma$ και Γ κλειστή υποομάδα του G. Τέλος επειδή $\Gamma' \subset \Gamma$ θα έχω ότι κάθε σημείο της Γ να είναι μεμονωμένο.$\diamondsuit$

Πρόταση 3.8. *Έστω*

(i) *G να είναι μία τοπικά συμπαγής τοπολογική ομάδα και*

(ii) *K να είναι μία συμπαγής υποομάδα της G.*

Θέτοντας $S = G/K$ και $h : G \to S$ να είναι η φυσική προβολή, θα έχω ότι αν A είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του S, τότε το $h^{-1}(A)$ είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του G. Έτσι η h γίνεται μία proper συνάρτηση.

Απόδειξη: Επιλέγω ένα ανοικτό κάλυμμα $\{V_i : \ V_i \in \tau_G, \ i \in I\}$ του G έτσι ώστε κάθε μέλος του να έχει συμπαγή κλειστότητα και παίρνω τις εικόνες τους στον χώρο S μέσω της ανοικτής h. Καθώς το A συμπαγές υποσύνολο του S θα ισχύει $A \subset \cup_i h(V_i)$ με $|I| < \infty$ και $\bar{V}_i$ συμπαγή για κάθε δείκτη i. Έτσι $h^{-1}(A) \subset \cup_i V_i K \subset \cup_i \bar{V}_i K$ με $\bar{V}_i K$ συμπαγή για κάθε πεπερασμένο i (κάθε $\bar{V}_i K$ είναι η εικόνα ενός συμπαγούς συνόλου $(\bar{V}_i, K)$ μέσω της συνεχής συνάρτησης του πολλαπλασιασμού: $\cdot : G \times G \to G$.). Συνεπώς το $h^{-1}(A)$ είναι κλειστό, καθώς η h είναι συνεχής συνάρτηση, υποσύνολο συμπαγούς και άρα συμπαγές.$\diamondsuit$

Πρόταση 3.9. *Έστω G, K, S, h όπως την προηγούμενη πρόταση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η Γ είναι μία διακριτή υποομάδα της G,*

(ii) *για κάθε δυο συμπαγή υποσύνολα A, B του S το σύνολο $\{g \in \Gamma : \ g(A) \cap B \neq \varnothing\}$ είναι πεπερασμένο.*

Απόδειξη: Θέτω $C = h^{-1}(A), \ D = h^{-1}(B)$ που είναι συμπαγή υποσύνολα του G από την πρόταση 3.8 και επιλέγω ένα $g \in \Gamma$. Αν $g(A) \cap B \neq \varnothing$ τότε ένα σημείο του συνόλου αυτού θα είναι το $g(a) = b, \ $ με $a \in A, b \in B$ και εφαρμόζοντας την h^{-1}, παίρνω $gh^{-1}(a) = h^{-1}(b)$. Έτσι θα έχουμε $gC \cap D \neq \varnothing$ και συνεπώς $g \in \Gamma \cap (DC^{-1})$. Όμως καθώς το (DC^{-1}) είναι συμπαγής και η τομή του με ένα διακριτό σύνολο θα πρέπει να μας δώσει ένα πεπερασμένο σύνολο.

[14]βλέπε [13], το θεώρημα στην σελίδα 113.

Αντίστροφα, παίρνω V να είναι ένα μία συμπαγής γειτονιά του id_G στο G και θέτω $t = h(id_G)$. Τότε $\Gamma \cap V \subset \{g \in \Gamma : \ gt \in h(V)\}$, με $A := \{t\}$, $B := h(V)$ συμπαγή. Έτσι το $\Gamma \cap V$ πεπερασμένο και η Γ είναι διακριτή.$\Diamond$

Παρατήρηση 3.10. *Δείξαμε ότι η Γ δρα properly discontiously*[15] *στον S.*

Πόρισμα 3.11. *Παίρνοντας τα G, K, S, h όπως στην πρόταση 3.8 και το Γ να είναι μία διακριτή υποομάδα της G, θα έχουμε ότι για κάθε $z \in S$ το $\{g \in \Gamma : gz = z\}$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο. Πράγματι καθώς η h κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις είναι μία proper απεικόνιση, θα έχουμε ότι το $h^{-1}(\{z\})$ είναι συμπαγές και έτσι το σύνολο $h^{-1}(\{z\}) \cap \Gamma = \{g \in \Gamma : \ gz = z\}$ είναι πεπερασμένο.*

Από εδώ και στο εξής έως το τέλος της παραγράφου, τα G, K, S, h θα είναι όπως στην πρόταση 3.8 ενώ το Γ θα είναι μία διακριτή υποομάδα της G.

Πρόταση 3.12. *Για κάθε $z \in S$, υπάρχει μία γειτονιά U του z τέτοια ώστε $\{g \in \Gamma : \ g(U) \cap U \neq \varnothing\} = \{g \in \Gamma : \ g(z) = z\}$.*

Απόδειξη: Έστω V να είναι μία συμπαγή γειτονιά του z. Από την πρόταση 3.9, το σύνολο $\{g \in \Gamma : \ g(V) \cap V \neq \varnothing\}$ θα είναι πεπερασμένο, έστω να αποτελείται από $\{g_1, \dots, g_r\}$ στοιχεία. Ας είναι τα $\{g_1, \dots, g_s\}$ αυτά που σταθεροποιούν το z, δηλαδή $g_i(z) = z$ για κάθε $1 \leq i \leq s$. Για κάθε δείκτη $i > s$ επιλέγω V_i γειτονιές του z και W_i γειτονιές του $g_i(z)$, τέτοιες ώστε $V_i \cap W_i = \varnothing \ \forall \ i > s$. Θέτω

$$U = V \cap (\cap_{i>s}(V_i \cap g_i^{-1} W_i)).$$

Τότε για $i > s$ θα έχω ότι $g_i U \subset W_i$ με $W_i \cap V_i = \varnothing$ για κάθε δείκτη i, $U \subset V_i$ και $g_i(U) \cap U = \varnothing$. $\Diamond$

Πρόταση 3.13. *Αν δύο σημεία του S, z, w δεν είναι Γ-ισοδύναμα, τότε υπάρχουν περιοχές U_z, V_w των z και w αντίστοιχα, τέτοιες ώστε $g(U_z) \cap V_w = \varnothing \ \forall g \in \Gamma$.*

Απόδειξη: Έστω X, Y συμπαγείς γειτονιές των z και w αντίστοιχα. Από την πρόταση 3.9 θα έχω ότι το $\{g \in \Gamma : \ g(X) \cap Y \neq \varnothing\}$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, έστω $\{g_1, \dots, g_r\}$. Καθώς τα z, w δεν ανήκουν στην ίδια τροχιά, θα έχω ότι $g_i(z) \neq w \ \forall i \in [1, r]$. Έτσι υπάρχουν γειτονιές U_i του $g_i(z)$ και V_i του w τέτοιες ώστε $U_i \cap V_i = \varnothing$ (ο S είναι Hausdorff). Θέτοντας

$$U = X \cap g^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap g_r^{-1}(U_r) \ \text{ και } V = Y \cap V_1 \cap \ldots \cap V_r,$$

προκύπτει το ζητούμενο, καθώς $gU \subset U_i$, $V \subset V_i$ και $U_i \cap V_i = \varnothing$ για κάθε δείκτη i.$\Diamond$

Τώρα έστω S/Γ να δηλώνει το σύνολο όλων των Γ-τροχιών των σημείων του S. Από την προηγούμενη πρόταση θα έχουμε ότι ο χώρος S/Γ, εφοδιασμένος με την τοπολογία πηλίκο, θα είναι ένας Hausdorff τοπολογικός χώρος. Έχουμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & S = G/K \\ \downarrow & & \downarrow \\ G/\Gamma & \longrightarrow & S/\Gamma \end{array}$$

στο οποίο όλες οι απεικονίσεις είναι συνεχείς και ανοικτές.

[15] βλέπε πρώτο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας.

Δυο υποομάδες Γ, Γ' της G ονομάζονται commensurable αν ο δείκτης της τομής τους, $\Gamma \cap \Gamma'$ στην Γ και Γ' είναι πεπερασμένος.

Ένας γραμμικός κλασματικός μετασχηματισμός ή διαφορετικά μετασχηματισμός του Möbius είναι μία 1-1 και επί απεικόνιση της σφαίρας του Riemann που δίνεται από τον τύπο:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & \text{για κάθε } z \neq -d/c, \infty, \\ \frac{a}{c}, & \text{για } z = \infty, \\ \infty, & \text{για } z = -d/c. \end{cases}$$

Όπου $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ και $ad - bc \neq 0$. Μπορεί να δειχθεί ότι οι γραμμικοί κλασματικοί μετασχηματισμοί σχηματίζουν ομάδα με πράξη την σύνθεση συναρτήσεων[16]. Από γεωμετρική σκοπιά, η ομάδα των κλασματικών μετασχηματισμών είναι η ομάδα των (αναλυτικών)[17] αυτομορφισμών της σφαίρας του Riemann.

3.2 Ταξινόμηση Γραμμικών Κλασματικών Μετασχηματισμών

Ας δούμε για αρχή τους γραμμικούς κλασματικούς μετασχηματισμούς στον $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Έστω $\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ και $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Θέτουμε

$$\sigma(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Έστω ότι ο παραπάνω δεν είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός, υποθέτουμε δηλαδή ότι $\sigma \neq \alpha \cdot I_{2\times 2}$, με $\alpha \in \mathbb{C}$. Από την θεωρία των κανονικών μορφών του Jordan, παίρνουμε ότι ο πίνακας σ θα είναι συζυγής με μία από τις ακόλουθες μορφές ανάλογα, με το αν έχει μία ιδιοτιμή πολλαπλότητας δύο, ή δύο διαφορετικές ιδιοτιμές:

$$(i) \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \ (ii) \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \text{ με } \lambda \neq \mu.$$

Γι άυτόν τον λόγο ο μετασχηματισμός είναι ένας από τους δύο:

$$(i)\ z \mapsto z + \lambda^{-1}, \ (ii)\ z \mapsto cz, \ c \neq 1.$$

Στην πρώτη περίπτωση καλούμε το σ *παραβολικό*. Στην δεύτερη περίπτωση το σ ονομάζεται *ελλειπτικό* αν $|c| = 1$ και *υπερβολικό* αν $c \in \mathbb{R}^+$. Διαφορετικά το σ καλείται *λοξοδομικό*. Ο ορισμός αυτός ισχύει τόσο για τους μετασχηματισμούς όσο και για τους πίνακες. Ο ταυτοτικός μετασχηματισμός δεν περιλαμβάνεται στην παραπάνω ταξινόμηση.

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός των σταθερών σημείων του σ είναι ένας ή δύο ανάλογα με το αν η σ είναι ένας παραβολικός μετασχηματισμός ή όχι. Αν επιπρόσθετα βάλουμε την συνθήκη $\det(\sigma) = 1$ τότε η ταξινόμηση μπορεί να γίνει με το ίχνος του πίνακα σ, $tr(\sigma)$:

Πρόταση 3.14. *Έστω $\sigma \in SL_2(\mathbb{C})$, με $\sigma \neq \pm I_{2\times 2}$. Τότε θα έχουμε:*

(i) *το σ είναι παραβολικό αν και μόνον αν το $tr(\sigma) = \pm 2$,*

[16]βλέπε [8], σελίδα 168.

[17]στην γλώσσα της μιγαδικής ανάλυσης, οι ομοιομορφισμοί είναι οι σύμμορφες (conformall) απεικονίσεις, βλέπε [10] σελίδα 285.

(ii) *το σ είναι ελλειπτικό αν και μόνον αν το $tr(\sigma)$ είναι πραγματικό και $|tr(\sigma)| < 2$,*

(iii) *το σ είναι υπερβολικό αν και μόνον αν το $tr(\sigma)$ είναι πραγματικό και $|tr(\sigma)| > 2$,*

(iv) *το σ είναι λοξοδρομικό αν και μόνον αν το $tr(\sigma)$ δεν είναι πραγματικό.*

Απόδειξη: Καθώς $\det(\sigma) = 1$ η κανονική Jordan μορφή του σ, θα είναι $\sigma = \begin{bmatrix} \pm 1 & 1 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$ ή $\sigma = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}$ με $\lambda \neq \pm 1$. Τώρα καθώς οι ιδιοτιμές πρέπει να επαληθεύουν την εξίσωση $\lambda^2 - tr(\sigma)\cdot\lambda + \det(\sigma) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - tr(\sigma)\cdot\lambda + 1 = 0$, η πρώτη περίπτωση προκύπτει αν η διακρίνουσα ως προς λ είναι ίση με το μηδέν, η δεύτερη όταν είναι μικρότερη του μηδενός και η τρίτη όταν είναι μεγαλύτερη. Αν τώρα $\sigma = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}$ και $tr(\sigma) = \lambda + \lambda^{-1} \in \mathbb{R}$, θα έχω ότι: αν $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$ το σ πρέπει να είναι υπερβολικού τύπου. Αν $\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow$ το λ, όπως και η συζυγής ιδιοτιμή του $\bar{\lambda}$, πρέπει να είναι λύσεις της $\lambda^2 - tr(\sigma)\cdot\lambda + 1 = 0$ και συνεπώς θα πρέπει $\lambda \cdot \bar{\lambda} = 1$. Έτσι το σ είναι ελλειπτικό. Συμπερασματικά το σ δεν μπορεί να είναι λοξοδρομικό αν $tr(\sigma) \in \mathbb{R}$. $\Diamond$

Ας περιοριστούμε στους μετασχηματισμούς με πραγματικούς πίνακες. Για $z \in \mathbb{C}$ και $\alpha = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$, θέτω

$$j(\alpha, z) = rz + s. \tag{3.1}$$

Αν $w = \alpha(z) = \frac{pz+q}{rz+s}$, τότε θα έχουμε:

$$\alpha \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} az+b \\ cz+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ 1 \end{bmatrix} \cdot j(\alpha, z).$$

Επίσης αν $w' = \alpha(z')$,

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} z & z' \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w & w' \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j(\alpha, z) & 0 \\ 0 & j(\alpha, z') \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Αντικαθιστώντας με $\bar{z}$ και $\bar{w}$ τα z' και w' αντίστοιχα και παίρνοντας την ορίζουσα θα έχω:

$$\det(\alpha) \cdot Im(z) = Im(\alpha(z)) \cdot |j(\alpha, z)|^2. \tag{3.3}$$

Έστω τώρα

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \ Im(z) > 0\},$$

να δηλώνει το μιγαδικό άνω ημιεπίπεδο (στην βιβλιογραφία αναφέρεται και σαν Poincarè upper half plane.). Επίσης θέτω:

$$GL_2^+ = \{\alpha \in GL_2(\mathbb{R}) : \ \det(\alpha) > 0\}.$$

Αν $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{R})$, τότε από την 3.3, το α απεικονίζει το $\mathbb{H}$ στον εαυτό του. Με αυτόν τον τρόπο προκύπτει ότι $GL_2^+(\mathbb{R}) \cong Aut(\mathbb{H})$.

Υπάρχει μία δράση της $SL_2(\mathbb{R})$ στον $\mathbb{H}$:

$$SL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad \text{με τύπο } (\alpha, z) \mapsto \alpha(z).$$

Με $z \in \mathbb{H}$ και $\alpha = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$. Τώρα από την 3.3 θα έχουμε ότι για κάθε $z \in \mathbb{H}$, το $\alpha(z) \in \mathbb{H}$, καθώς αν $Im(z) > 0 \Rightarrow Im(\alpha(z)) > 0$. Όταν δώσουμε στην $\mathbb{H}$ και $SL_2(\mathbb{R})$ τις φυσικές τοπολογίες τους, η παραπάνω δράση είναι συνεχής.

Από την 3.2 θα έχουμε:

$$j(\alpha\beta, z) = j(\alpha, \beta(z))j(\beta, z). \tag{3.4}$$

Πράγματι: αν $\beta = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, και $\alpha = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ τότε $j(\alpha\beta, z) = (ar + sc)z + rb + sd$ και $j(\alpha, \beta(z))j(\beta, z) = (r\beta(z) + s) \cdot (cz + d) = (r\frac{az+b}{cz+d} + s)(cz + d) = (r(az+b)+s(cz+d)) = (ar+sc)z+rb+sd$. Επίσης αντικαθιστώντας το $z+dz$, με z' στην 3.2 και παίρνοντας την ορίζουσα, θα έχουμε:

$$\frac{d}{dz}\alpha(z) = \det(\alpha) \cdot j(\alpha, z)^{-2}. \tag{3.5}$$

Για $\alpha = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ και για $i = \sqrt{-1}$ τότε παρατηρούμε ότι $\alpha(i) = i \Leftrightarrow \frac{pi+q}{ri+s} = i$ αν και μόνον αν $pi + q = -r + is \ \Leftrightarrow\ p = s$ και $q = -r$ και $\det(\alpha) = 1$. Έτσι η

$$SO_2(\mathbb{R}) = \{\alpha \in SL_2(\mathbb{R}) :\ \alpha^T \cdot \alpha = I_{2\times 2}\},$$

είναι η υποομάδα ισοτροπίας του $SL_2(\mathbb{R})$ στο i. Η δράση της $SL_2(\mathbb{R})$ στον $\mathbb{H}$ που περιγράψαμε παραπάνω είναι μεταβατική:

Πράγματι: Για τυχαίο $z \in \mathbb{H}$ αρκεί να δείξω ότι υπάρχει $\alpha \in SL_2(\mathbb{R})$, τέτοιο ώστε $\alpha(i) = z$. Παίρνοντας $z = x + yi$, με $y > 0$ και επιλέγοντας $\alpha := y^{-\frac{1}{2}} \cdot \begin{bmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$, θα έχω $\alpha(i) = z$. Επιλέγοντας τώρα ένα $z' \neq z$, θα υπάρχει σύμφωνα με τα παραπάνω ένα $\alpha' \in SL_2(\mathbb{R})$ τέτοιο ώστε $\alpha'(i) = z'$. Έτσι δείξαμε ότι για κάθε $z, z' \in \mathbb{H}$ υπάρχει στοιχείο του $SL_2(\mathbb{R})$, το $\alpha' \cdot \alpha^{-1}$ με $\alpha' \cdot \alpha^{-1}(z) = z'$ και άρα η δράση είναι μεταβατική.

Από το θεώρημα 3.4, προκύπτει ότι το $SL_2(\mathbb{R})/SO_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{H}$, με τύπο $\alpha \cdot SO_2(\mathbb{R}) \mapsto \alpha(i)$. Συγκεντρώνοντας τα παραπάνω μπορούμε να έχουμε την εξής πρόταση:

Πρόταση 3.15. (i)*Η ομάδα $SL_2(\mathbb{R})$ δρα μεταβατικά στον $\mathbb{H}$ έτσι ώστε για κάθε $z, z' \in \mathbb{H}$ υπάρχει ένα $\alpha \in SL_2(\mathbb{R})$, τέτοιο ώστε $\alpha(z) = z'$,*

(ii) *Η δράση του $SL_2(\mathbb{R})$ στον χώρο $\mathbb{H}$ επάγει έναν ισομορφισμό:*

$$SL_2(\mathbb{R})/\pm I_{2\times 2} \to Aut(\mathbb{H}),$$

με $Aut(\mathbb{H})$ να δηλώνουν όλους τους αναλυτικούς ισομορφισμούς από το $\mathbb{H}$ στον εαυτό του,

(iii) *ο σταθεροποιητής του i είναι η ομάδα $SO_2(\mathbb{R})$,*

(iv) *τέλος η απεικόνιση*

$$SL_2(\mathbb{R})/SO_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{H},$$

με τύπο $\alpha \cdot SO_2(\mathbb{R}) \mapsto \alpha(i)$ είναι ένας ομοιομορφισμός.

Απόδειξη: (ii) Για αρχή θα δείξουμε ότι η απεικόνιση είναι 1-1, δείχνοντας ότι μόνο το $\pm I_{2\times 2}$ δρα με τετριμμένο τρόπο στον $\mathbb{H}$. Πράγματι αν $\alpha(z) = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \cdot z = z \Rightarrow \frac{pz+q}{rz+s} = z \Rightarrow rz^2 + z(s-p) - q = 0$. Αν αυτό ισχύει για κάθε $z \in \mathbb{H}$ τότε $q = r = 0$ και $s = p$. Έτσι $\alpha = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}$. Αυτός ο πίνακας έχει διακρίνουσα ίση με την μονάδα αν και μόνον αν $p = \pm 1$ και έτσι δείξαμε το ζητούμενο. Στην συνέχεια, θα δείξουμε ότι είναι επί Παίρνοντας ένα $\gamma \in Aut(\mathbb{H})$, γνωρίζουμε από το (i), ότι υπάρχει $\alpha \in SL_2(\mathbb{R})$, τέτοιο ώστε $\alpha(i) = \gamma(i)$. Αντικαθιστώντας το γ, με $\alpha^{-1} \circ \gamma$, θα έχουμε ότι $\gamma(i) = i$, γεγονός που ισοδυναμεί από το (iii), με $\gamma \in SO_2(\mathbb{R}) \subset SL_2(\mathbb{R})$. $\Diamond$

Σε αυτό το σημείο, θα μελετήσουμε καλύτερα τους μετασχηματισμούς που προέρχονται από τα στοιχεία του $SL_2(\mathbb{R})$. Από την πρόταση 3.14, έχουμε ότι η $SL_2(\mathbb{R})$ δεν περιέχει λοξοδρομικούς μετασχηματισμούς. Εξαιτίας της μεταβατικής δράσης, για κάθε $z \in \mathbb{H}$ μπορούμε να βρούμε $\tau \in SL_2(\mathbb{R})$, με $\tau(i) = z$. Τότε προκύπτει το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{cccccc} & i & \xrightarrow{\tau} & z & & \\ SO_2(\mathbb{R}) & \downarrow & & \downarrow & \alpha & , \\ & i & \xrightarrow{\tau} & z & & \end{array}$$

που μας οδηγεί στο:

$$\tau \cdot SO_2(\mathbb{R}) \cdot \tau^{-1} = \{\alpha \in SL_2(\mathbb{R}) : \ \alpha(z) = z\}.$$

Κάθε στοιχείο του $SO_2(\mathbb{R})$ έχει ιδιοτιμές απόλυτης τιμής ίσης με την μονάδα: αν το λ είναι μία ιδιοτιμή και $\mathbf{v}$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμά της, θα έχω ότι για κάθε $\alpha \in SO_2(\mathbb{R})$ να ισχύει $\alpha \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$, δηλαδή $\lambda^2(v,v) = (\lambda v, \lambda v) = (\alpha \cdot v, \alpha \cdot v) = (v, \alpha^T \cdot \alpha \cdot v) = (v,v) \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1$. Έτσι κάθε στοιχείο του $SL_2(\mathbb{R})$ με τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο στον $\mathbb{H}$, πρέπει να είναι είτε το $\pm I_{2\times 2}$ είτε να είναι ελλειπτικό.

Για κάθε $s \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. θέτω:

$$\begin{aligned} F(s) &= \{\alpha \in SL_2(\mathbb{R}) : \ \alpha(s) = s\}, \\ P(s) &= \{\alpha \in F(s) : \alpha \text{ να είναι παραβολικό ή } = \pm I_{2\times 2}\}. \end{aligned}$$

Καθώς η $SL_2(\mathbb{R})$ δρα μεταβατικά στην σφαίρα του Riemann, μπορούμε να βρούμε στοιχείο $\sigma \in SL_2(\mathbb{R})$ με $\sigma(\infty) = s$. Τότε θα έχουμε $F(s) = \sigma \cdot F(\infty) \cdot \sigma^{-1}$ και $P(s) = \sigma \cdot P(\infty) \cdot \sigma^{-1}$. Έτσι βλέπουμε ότι:

$$\begin{aligned} F(\infty) &= \{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} : \ a \in \mathbb{R}^*, \ b \in \mathbb{R}\}, \\ P(\infty) &= \{\pm \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : h \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R} \times \{\pm 1\}. \end{aligned}$$

Έτσι αν ένα στοιχείο $\sigma \in SL_2(\mathbb{R}) \backslash \{\pm I_{2\times 2}\}$, έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο στην σφαίρα του Riemann, τότε το σ είναι είτε παραβολικό είτε υπερβολικό. Είναι φανερό πως σκοπός μας είναι να ταξινομήσουμε τους μετασχηματισμούς σύμφωνα με τα σταθερά τους σημεία. Από τα παραπάνω, έπεται η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 3.16. *Έστω* $\sigma \in SL_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_{2\times 2}\}$. *Τότε:*

(i) *το σ είναι παραβολικό αν και μόνον αν έχει μοναδικό σταθερό σημείο στο $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ και κανένα σταθερό σημείο στον $\mathbb{H}$,*

(ii) *το σ είναι ελλειπτικό αν και μόνον αν έχει ένα σταθερό σημείο $z \in \mathbb{H}$ και κανένα σταθερό σημείο στον $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$,*

(iii) *το σ είναι υπερβολικό αν και μόνον αν έχει δύο (διαφορετικά) σταθερά σημεία στο $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ και κανένα στον $\mathbb{H}$.*

Πόρισμα 3.17. *Έστω $\sigma \in SL_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_{2\times 2}\}$ και $m \in \mathbb{Z}$, με $\sigma^m \neq \pm I_{2\times 2}$. Τότε το σ είναι παραβολικό (αντίστοιχα ελλειπτικό, υπερβολικό) αν και μόνον αν το σ^m είναι παραβολικό (αντίστοιχα, ελλειπτικό, υπερβολικό).*

Έστω τώρα Γ να είναι μία διακριτή υποομάδα του $SL_2(\mathbb{R})$. Ένα σημείο $z \in \mathbb{H}$ ονομάζεται *ελλειπτικό σταθερό σημείο* της Γ αν υπάρχει ένα ελλειπτικό στοιχείο $\sigma \in \Gamma$ τέτοιο ώστε $\sigma(z) = z$. Όμοια ένα σημείο $s \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, ονομάζεται *cusp* του Γ αν υπάρχει υπάρχει παραβολικό στοιχείο $\tau \in \Gamma$, τέτοιο ώστε $\tau(s) = s$. Αν w είναι ένα cusp του Γ (αντίστοιχα ένα ελλειπτικό σταθερό σημείο), και $\gamma \in \Gamma$, τότε και το $\gamma(w)$ είναι επίσης cusp (ελλειπτικό σταθερό σημείο) του Γ.

Πρόταση 3.18. *Αν το z είναι ένα ελλειπτικό σταθερό σημείο του Γ, τότε η $\{\gamma \in \Gamma : \ \gamma(z) = z\}$ είναι μία πεπερασμένη και κυκλική ομάδα.*

Απόδειξη: Αν $\tau \in SL_2(\mathbb{R})$ με $\tau(i) = z$, θα έχουμε ότι $\{\sigma \in \Gamma : \ \sigma(s) = s\} = \tau \cdot SO_2(\mathbb{R}) \cdot \tau^{-1} \cap \Gamma$. Τώρα η $SO_2(\mathbb{R})$ είναι συμπαγής γιατί $SO_2(\mathbb{R}) \cong C$ με C να είναι ο μιγαδικός κύκλος ακτίνας ίσης με την μονάδα (που είναι συμπαγής), μέσω της απεικόνισης $\exp i\theta \mapsto \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ με $\theta \in [0, 2\pi)$. Συνεπώς η τομή συμπαγούς με διακριτό σύνολο, πρέπει να μας δώσει πεπερασμένο σύνολο. Επίσης η $SO_2(\mathbb{R})$ είναι ισόμορφη με το $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$[18], που οι πεπερασμένες υποομάδες του, είναι όλες κυκλικές.$\Diamond$

Πρόταση 3.19. *Έστω s να είναι ένα cusp του Γ, και $\Gamma_s = \{\sigma \in \Gamma : \ \sigma(s) = s\}$. Τότε η $\Gamma_s/(\Gamma \cap \{\pm I_{2\times 2}\})$ είναι ισόμορφη με την $\mathbb{Z}$. Επίσης κάθε στοιχείο του Γ_s είναι το $\pm I_{2\times 2}$ ή είναι παραβολικό, δηλαδή $\Gamma_s = \Gamma \cap P(s)$.*

Απόδειξη: Καθώς το $P(s) \cong \mathbb{R} \times \{\pm 1\}$, θα έχω ότι $(P_s \cap \Gamma)/\Gamma \cap \{\pm I_{2\times 2}\}$ θα είναι ισόμορφο με μία όχι τετριμμένη, άπειρη και διακριτή υποομάδα του $\mathbb{R}$, δηλαδή το $\mathbb{Z}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $s = \infty$. Παίρνουμε έναν γεννήτορα $\sigma = \begin{bmatrix} \pm 1 & h \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$ *modulo*(± 1) της ομάδας αυτής. Υποθέτουμε ότι το Γ_s περιέχει ένα υπερβολικό στοιχείο $\tau = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}$, $|a| \neq 1$. Υποθέτουμε επίσης ότι $|a| < 1$. Τότε $\tau\sigma\tau^{-1} = \begin{bmatrix} \pm 1 & a^2 h \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \in P(s) \cap \Gamma$. Με αυτόν τον τρόπο, οδηγηθήκαμε σε άτοπο, καθώς $|a^2 h| < |h|$ ενώ γνωρίζουμε ότι $\begin{bmatrix} \pm 1 & h \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & n \cdot h^{n-1} \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix}$, με $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς $\Gamma_s = P(s) \cap \Gamma$. $\Diamond$

[18] έπεται από το πρώτο θεώρημα ισομορφισμών, αν το εφαρμόσουμε στον επιμορφισμό $(\mathbb{R}, +) \to (C, \cdot)$ που στέλνει κάθε x στο $\exp 2\pi i x$.

Πρόταση 3.20. *Τα στοιχεία του Γ που έχουν πεπερασμένη τάξη, αποτελούνται από τα ελλειπτικά στοιχεία, μαζί με το $\{\pm I_{2\times 2}\}$.*

Απόδειξη: Αν ένα στοιχείο $\sigma \in SL_2(\mathbb{R})$ έχει πεπερασμένη τάξη, τότε το σ, θα πρέπει να είναι συζυγές στον $SL_2(\mathbb{C})$ με ένα πίνακα της μορφής $\begin{bmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \bar{\zeta} \end{bmatrix}$, με ζ να είναι μία ρίζα της μονάδας. Από τον αρχικό ορισμό μας το σ θα είναι ελλειπτικό αν $\zeta \neq \pm 1$. Το αντίστροφο έπεται από την πρόταση 3.18.$\lozenge$

Πρόταση 3.21. *Το σύνολο όλων των ελλειπτικών σταθερών σημείων του Γ δεν έχει σημείο συσσώρευσης στον $\mathbb{H}$.*

Απόδειξη: Έστω πως έχει σημείο συσσώρευσης $w \in \mathbb{H}$. Τότε θα υπάρχει μία ακολουθία από σταθερά ελλειπτικά σημεία $\{z_n\} \in \Gamma$ που θα συγκλίνει σε ένα $w \in \mathbb{H}$. Από την πρόταση 3.12, υπάρχει περιοχή U του w τέτοια ώστε για $\gamma \in \Gamma$ να ισχύει $\gamma(U) \cap U \neq \varnothing$ αν και μόνον αν $\gamma(w) = w$. Από την σύγκλιση της ακολουθίας προκύπτει ότι για κάποιο μεγάλο $n \in \mathbb{N}$ θα έχω $z_n \in U$ και $w \neq z_n$. Έτσι θα έχουμε $\gamma(z_n) = z_n$ για κάποιο ελλειπτικό στοιχείο $\gamma \in \Gamma$. Τότε $\gamma(U) \cap U \neq \varnothing \Rightarrow \gamma(w) = w$. Έτσι το γ έχει δύο σταθερά σημεία στον $\mathbb{H}$, πράγμα άτοπο. $\lozenge$

Κάθε *πίνακα* του $SL_2(\mathbb{R})$ (ή του $GL_2^+(\mathbb{R})$ αντίστοιχα), δεν πρέπει να τον συγχέουμε με τον *μετασχηματισμό* στον $\mathbb{H}$ που τον αναπαριστά.

Πρόταση 3.22. *Έστω σ να είναι ένα ελλειπτικό στοιχείο του Γ. Αν ο πίνακας σ έχει άρτια τάξη $2h$, τότε η Γ περιέχει το $-I_{2\times 2}$ και ο μετασχηματισμός $z \mapsto \sigma(z)$ έχει τάξη h.*

Απόδειξη: Μπορούμε να βρούμε ένα $\tau \in GL_2(\mathbb{C})$, τέτοιο ώστε $\tau\sigma\tau^{-1} = \begin{bmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \bar{\zeta} \end{bmatrix}$, με ζ να είναι μία πρωταρχική[19], $2h$-οστή ρίζα της μονάδας. Τότε $\zeta^h = -1$ και έτσι $\sigma^h = -I_{2\times 2}$. $\lozenge$

Πόρισμα 3.23. *Αν η Γ δεν περιέχει το $-I_{2\times 2}$, τότε κάθε ελλειπτικό στοιχείο του Γ έχει περιττή τάξη.*

Για να διαχωρίσουμε την ομάδα των μετασχηματισμών από την ομάδα πινάκων, θα συμβολίζουμε με $\bar{\Gamma}$ την εικόνα της Γ μέσω της φυσικής απεικόνισης:

$$SL_2(\mathbb{R}) \to SL_2(\mathbb{R})/\pm I_{2\times 2} \cong PSL_2(\mathbb{R})^{20}.$$

Με την $PSL_2(\mathbb{R})$ να είναι μια υποομάδα των Möbius μετασχηματισμών. Για ένα ελλειπτικό σταθερό σημείο $z \in \Gamma$, η τάξη της ομάδας:

$$\{\sigma \in \bar{\Gamma} : \ \sigma(z) = z\},$$

θα ονομάζεται η *τάξη του ελλειπτικού σταθερού σημείου* z σχετική με την Γ.

Πρόταση 3.24. *Δεν υπάρχει ελλειπτικό ή παραβολικό $\alpha \in SL_2(\mathbb{R})$, που να είναι συζυγές στη $SL_2(\mathbb{R})$ με το α^{-1}, παρά μόνο τα υπερβολικά στοιχεία.*

[19] δηλαδή το ζ είναι μία $2h$-οστή ρίζα της μονάδας αλλά δεν είναι μία n-οστή ρίζα της μονάδας για κάθε $0 < n < 2h$. Για παράδειγμα η $\zeta = exp^{\pi i/h} = \cos(\pi/h) + i\sin(\pi/h)$ και $\zeta^h = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$.

[20] γενικά γνωρίζουμε ότι $SL_2(V)/Z(V) \cong PSL_2(V)$, με $Z(V)$ να είναι το κέντρο της $SL_2(V)$ και V ένας διανυσματικός χώρος πάνω από ένα σώμα F.

Απόδειξη: Έστω πως $\gamma\alpha\gamma^{-1} = \alpha^{-1}$, για κάποιο $\gamma \in SL_2(\mathbb{R})$. Αν το α είναι ελλειπτικό, θα έχει ένα σταθερό σημείο στον $\mathbb{H}$ έστω z και συνεπώς υπάρχει ένα $\tau \in SL_2(\mathbb{R})$ με $\tau \cdot \alpha \cdot \tau^{-1} \in SO_2(\mathbb{R})$. Θέτω $\tau \cdot \alpha \cdot \tau^{-1} = \begin{bmatrix} p & q \\ -q & p \end{bmatrix}$ και $\tau \cdot \gamma \cdot \tau^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Τότε θα έχουμε ότι $q \neq 0$ καθώς το α είναι ελλειπτικό και

$$\gamma \cdot \alpha = \alpha^{-1} \cdot \gamma \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & q \\ -q & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & -q \\ q & p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

από το οποίο προκύπτει ότι $a = -d$, $b = c$ και $1 = \det(\gamma) = -(a^2 + b^2)$, που είναι άτοπο γιατί $a, b \in \mathbb{R}$. Αν το α είναι παραβολικό, μπορούμε να επιλέξουμε τ έτσι ώστε $\tau \cdot \alpha \cdot \tau^{-1} = \pm \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Τότε $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, που θα είχε σαν συνέπεια $c = 0$, $a = -d$ και $1 = \det(\gamma) = -a^2$, πράγμα που είναι άτοπο για ακόμα μία φορά. $\diamondsuit$

3.3 Ο Τοπολογικός Χώρος $\mathbb{H}^*/\Gamma$

Σε αυτήν την παράγραφο, η Γ είναι μία διακριτή υποομάδα του $SL_2(\mathbb{R})$ και με $\mathbb{H}^*$, συμβολίζουμε:

$$\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \cup \{\text{cusps του } \Gamma\}.$$

Προφανώς $\mathbb{H}^* = \mathbb{H}$ αν και μόνον αν η Γ δεν έχει cusps. Παρατηρούμε ότι η Γ δρα στο σύνολο $\mathbb{H}^*$ και έτσι μπορούμε να ορίσουμε τον χώρο πηλίκο $\mathbb{H}^*/\Gamma$. Στην επόμενη παράγραφο, θα δώσουμε δομή επιφάνειας Riemann στον $\mathbb{H}^*/\Gamma$ και για τον λόγο αυτό ορίζουμε μία τοπολογία στον $\mathbb{H}^*$:

- Αν $z \in \mathbb{H}$, σαν μέλη της τοπολογίας μας παίρνουμε τις ανοικτές γειτονιές του z που ανήκουν στην συνήθη τοπολογία του $\mathbb{H}$,

- Για κάθε cusp $s \neq \infty$, επιλέγω σαν μέλη της τοπολογίας μας να είναι οι γειτονιές του s που έχουν μορφή:

$$\{s\} \cup \{ \text{ το εσωτερικό ενός κύκλου στον } \mathbb{H},$$

$$\text{ο οποίος είναι εφαπτόμενος στον πραγματικό άξονα στο σημείο } s\},$$

- Αν το $s = \infty$ είναι cusp, τότε επιλέγουμε για ανοικτές γειτονιές του απείρου, τα σύνολα:

$$\{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{H} : \ Im(z) > c\}, \tag{3.6}$$

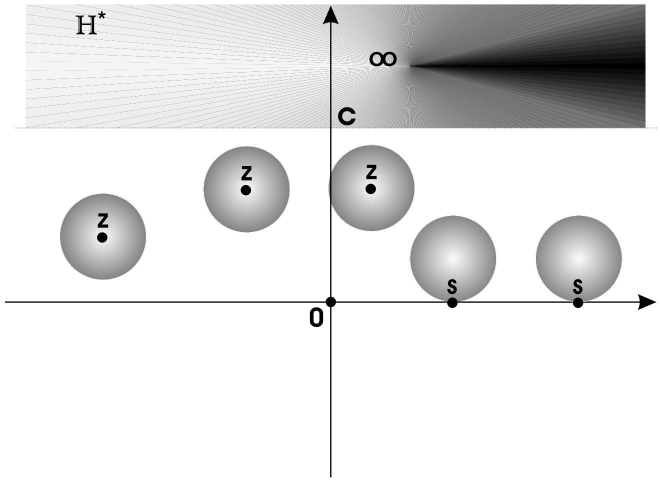
  για κάθε $c \in \mathbb{R}^+$.

Η παραπάνω τοπολογία ορίζει μία Hausdorff τοπολογία στον $\mathbb{H}^*$, όμως ο $\mathbb{H}^*$ δεν είναι τοπικά συμπαγής εκτός και αν $\mathbb{H} = \mathbb{H}^*$.

Για ένα cusp $\sigma \leq \infty$, του Γ θέτουμε όπως στην προηγούμενη παράγραφο:

$$P(s) = \{\alpha \in SL_2(\mathbb{R}) : \ \alpha(s) = s, \text{ με } \alpha \text{ να είναι παραβολικό ή ίσο με } \pm I_{2\times 2}\},$$

$$\Gamma_s = P(s) \cap \Gamma = \{\gamma \in \Gamma : \ \gamma(s) = s\}.$$



Σχήμα 3.1: Μία τοπολογία για τον $\mathbb{H}^*$.

Οι γειτονιές του s που έχουν την παραπάνω μορφή, διατηρούνται σταθερές μέσω της $P(s)$.

Υποθέτουμε ότι το ∞ είναι cusp του Γ. Επίσης για $\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ η 3.3 γίνεται:

$$Im(\alpha(z)) = \det(\alpha) \cdot Im(z)/|cz+d|^2. \tag{3.7}$$

Για κάθε $\sigma \in \Gamma$ συμβολίζουμε με c_σ το πρώτο στοιχείο της δεύτερης γραμμής του πίνακα σ. Τότε $\Gamma_\infty = \{\sigma \in \Gamma : \ c_\sigma = 0\}$. Από την πρόταση 3.19, μπορούμε να βρούμε γεννήτορα $\begin{bmatrix} \pm 1 & h \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix} modulo(\pm 1)$ του Γ_∞.

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι το πηλίκο $\mathbb{H}^*/\Gamma$ είναι ένας Hausdorff και τοπικά συμπαγής τοπολογικός χώρος. Αυτό θα γίνει σταδιακά:

Λήμμα 3.25. *Το $|c_\sigma|$ εξαρτάται μόνο από το διπλό σύμπλοκο*[21] $\Gamma_\infty \sigma \Gamma_\infty$.

Απόδειξη: Για $\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma$, μπορούμε να το δείξουμε με έναν απλό υπολογισμό:

$$\begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+\beta c & b+\beta d \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a+\beta c & (a+\beta)\alpha + b + \beta d \\ c & \alpha c + d \end{bmatrix}. \Diamond$$

[21]ένα διπλό σύμπλοκο (H, K), στην ομάδα G, με H και K υποομάδες G, είναι μία κλάση ισοδυναμίας που ορίζεται στην G με $x \sim y$, ανν υπάρχει $h \in H$ και $k \in K$ με $hxk = y$. Τότε κάθε διπλό σύμπλοκο έχει την μορφή HxK, με την G να διαμερίζεται στα διπλά της σύμπλοκα (H, K). Κάθε ένα από αυτά αποτελεί την ένωση συνηθισμένων συμπλόκων Hy και zK, με $y, z \in G$. Αυτά είναι επίσης οι τροχιές για την δράση του H στην G με αριστερό πολλαπλασιασμό και του K στην G με δεξί πολλαπλασιασμό. Εδώ $H = K = \Gamma_\infty$ και με $\Gamma_\infty \sigma \Gamma_\infty$ δηλώνουν τα διαφορετικά στοιχεία της Γ που προέρχονται από τον αριστερό πολλαπλασιασμό κάθε στοιχείου του συμπλόκου $\sigma\Gamma_\infty$ με κάθε στοιχείο της υποομάδας Γ_∞. Μάλιστα $\Gamma = \sqcup_{\sigma \in \Gamma} \Gamma_\infty \sigma \Gamma_\infty$, και κάθε υποσύνολο στοιχείων $\Gamma_\infty \sigma_i \Gamma_\infty$, με $i = 1, \ldots$ ονομάζεται διπλό σύμπλοκο του Γ ως προς το Γ_∞.

Λήμμα 3.26. *Για γνωστό $M > 0$, υπάρχουν μόνο πεπερασμένα σε αριθμό διπλά σύμπλοκα $\Gamma_\infty \sigma \Gamma_\infty$, έτσι ώστε $\sigma \in \Gamma$ και $|c_\sigma| \le M$.*

Απόδειξη: Παίρνω $\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma$, τέτοιο ώστε $0 < |c_\sigma| \le M($ καθώς $\Gamma_\infty = \{\sigma \in \Gamma : \ c_\sigma = 0\}$, θα ασχοληθούμε μόνο για εκείνα τα σ, τα οποία $c_\sigma \neq 0$.). Τότε για κάποιο $\tau = \pm \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} modulo(\pm 1)$ $h \in \mathbb{R}$, γεννήτορα του Γ_∞, θα έχω $\sigma' = \sigma\tau^n = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b + anh \\ c & d + cnh \end{bmatrix}$, με $n \in \mathbb{Z}$, τέτοιο ώστε $1 \le d + cnh \le 1 + |hc|$. Αυτή θα ικανοποιεί την

$$|c'| = |c_\sigma| \le M, \text{ και } 1 \le |d'| = |d + cnh| \le |1 + ch|.$$

Όμως από την σχέση 3.7, θα έχουμε ότι $Im(\sigma'(i)) = 1/(c'^2 + d'^2)$. Έτσι το $\sigma'(i)$ θα ανήκει στο χωρίο

$$[M^2 + (1 + |h|M)^2]^{-1} \le Im(z) \le 1 \tag{3.8}$$

Τώρα ο μετασχηματισμός $z \mapsto \tau^m(z) = z + mh$, δεν αλλάζει το $Im(z)$. Μπορούμε να πάρουμε ένα m έτσι ώστε $\tau^m\sigma'(i)$ να ικανοποιεί την εξίσωση 3.8 και την:

$$0 \le Re(z) \le |h|. \tag{3.9}$$

Οι συνθήκες 3.8 και 3.9 ορίζουν, ένα συμπαγή σύνολο K του $\mathbb{H}$. Έτσι βρήκαμε ένα στοιχείο $\sigma'' = \tau^m\sigma\tau^n$ με $\sigma''(i) \in K$. Από την πρόταση 3.9, επιλέγοντας για συμπαγή του $\mathbb{H}$, τα $A = \{i\}$ και $B = K$, θα έχουμε ότι $\sigma''(A) \cap B \neq \varnothing$ και από την ίδια πρόταση υπάρχουν πεπερασμένα τέτοια $\sigma'' \in \Gamma$. $\Diamond$

Λήμμα 3.27. *Υπάρχει ένας θετικός αριθμός r, ο οποίος εξαρτάται μόνον από το Γ, έτσι ώστε $|c_\sigma| \ge r$ για κάθε $\sigma \in \Gamma \setminus \Gamma_\infty$. Επίσης, για ένα τέτοιο r θα ισχύει $Im(z) \cdot Im(\sigma(z)) \le 1/r^2$ για κάθε $z \in \mathbb{H}$ και για κάθε $\sigma \in \Gamma \setminus \Gamma_\infty$.*

Απόδειξη: Η ύπαρξη τέτοιου αριθμού έπεται από το προηγούμενο λήμμα. Αν $\sigma = \begin{bmatrix} a + \beta & b + \beta d \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma$ με $c \neq 0$, $z = x + yi$, $y > 0$, θα έχουμε:

$$Im(\sigma(z)) \overset{3.7}{=} Im(z) \cdot |cz + d|^{-2} = Im(z)/(cx + d)^2 + y^2c^2 \le Im(z)/y^2c^2 =$$

$$Im(z) \cdot (c \cdot Im(z))^{-2} = 1/|c|^2 y \overset{3.26}{\le} r^{-2} Im(z)^{-1}. \ \Diamond$$

Λήμμα 3.28. *Για κάθε cusp του Γ, υπάρχει μία γειτονιά U του s στον $\mathbb{H}^*$, έτσι ώστε $\Gamma_s = \{\sigma \in \Gamma : \ \sigma(U) \cap U \neq \varnothing\}$.*

Απόδειξη: Αν η απόδειξη δεν φαίνεται προφανής, ένας όρος που πιστεύω ότι απεχθανόμαστε όλοι μας, τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $s = \infty$. Θέτουμε $U = \{z \in \mathbb{H}^* : \ Im(z) > 1/r\}$, με r να είναι ο αριθμός από το λήμμα 3.27. Αν $\sigma \in \Gamma \setminus \Gamma_\infty$ και $z \in U$, έχουμε, κάνοντας ξανά χρήση του ίδιου λήμματος ότι $Im(\sigma(z)) < 1/r$. Δείξαμε έτσι ότι για τα στοιχεία που δεν σταθεροποιούν το ∞, θα υπάρχει γειτονιά U_∞ τέτοια ώστε $\sigma(U) \cap U = \varnothing$, δηλαδή την άρνηση της πρότασης που είχαμε να αποδείξουμε! $\Diamond$

Πόρισμα 3.29. *Δύο σταθερά σημεία ενός συνόλου U, είναι Γ-ισοδύναμα μόνο αν είναι και Γ_s-ισοδύναμα. Γι αυτό τον λόγο το U/Γ_s μπορεί να ταυτιστεί με ένα υποσύνολο του $\mathbb{H}^*/\Gamma$.*

Λήμμα 3.30. *Για κάθε cusp του Γ και για κάθε συμπαγή υποσύνολο K του $\mathbb{H}$, υπάρχει μία γειτονιά U του s, έτσι ώστε $U \cap \gamma(K) = \varnothing \ \forall\ \gamma \in \Gamma$.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε ξανά ότι $s = \infty$. Μπορούμε να βρούμε δύο θετικούς αριθμούς A, B τέτοιους ώστε $A < Im(z) < B$, για κάθε $z \in K$. Παίρνοντας έναν αριθμό r όπως στο λήμμα 3.27, και θέτουμε

$$U = \{z \in \mathbb{H}^* : \ Im(z) > Max.(B, 1/Ar^2)\}.$$

Τώρα έστω $z \in K$. Από το λήμμα 3.27, αν $\sigma \in \Gamma \setminus \Gamma_\infty$, τότε $Im(\sigma(z)) < 1/Ar^2$. Αν $\sigma \in \Gamma_\infty$, τότε από την εξίσωση 3.7, θα έχουμε $Im(\sigma(z)) = Im(z) < B$. Έτσι για κάθε $\gamma \in \Gamma$, υπάρχει γειτονιά U του s, που να έχει την ζητούμενη ιδιότητα. $\Diamond$

Ας δούμε τώρα την τοπολογία πηλίκο του $\mathbb{H}^*/\Gamma$. Ένα X είναι ανοικτό του $\mathbb{H}^*/\Gamma$ ανν:

$$\{X \subset \mathbb{H}^*/\Gamma : \pi^{-1}(X) \text{ είναι ανοικτό του } \mathbb{H}^*\},$$

με $\pi : \mathbb{H}^* \to \mathbb{H}^*/\Gamma$, να είναι η φυσική προβολή. Αν πάρουμε μία U, του λήμματος 3.28, τότε μπορούμε να ταυτίσουμε το $\pi(U)$ με το U/Γ_s, η οποία θα αποτελεί έτσι μία γειτονιά του $\pi(s)$.

Θεώρημα 3.31. *Ο χώρος πηλίκο $\mathbb{H}^*/\Gamma$ με την παραπάνω τοπολογία είναι ένας Hausdorff τοπολογικός χώρος.*

Απόδειξη: Ο χώρος $\mathbb{H}/\Gamma$ είναι Hausdorff από την πρόταση 3.13. Καθώς ο $\mathbb{H}^*/\Gamma$ είναι ο $\mathbb{H}/\Gamma$ με την ένωση των κλάσεων ισοδυναμίας των cusps, για δύο σημεία $s, t \in \mathbb{H}^*/\Gamma$, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις: Είτε $s, t \in \mathbb{H}$ οπότε και δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε καθώς μπορώ να βρώ ξένες περιοχές των εικόνων τους στον $\mathbb{H}/\Gamma$, είτε $t \in \mathbb{H}$ και $s \in \{cusps\}$ και από λήμμα 3.30 μπορώ να βρώ γειτονιά U του s με $\pi(U)$ γειτονιά του $\pi(s)$ και $\gamma(V)$ γειτονιά του $\pi(t)$ με $\gamma(V) \subset \gamma(K)$ από την τοπική συμπάγεια του $\mathbb{H}/Gamma$, για κάποιο $\gamma \in \Gamma$, έτσι ώστε $\pi(U) \cap \gamma(V) = \varnothing$. Έτσι μένει να εξετάσουμε την τρίτη περίπτωση όπου s, t να είναι cusps, που δεν είναι Γ-ισοδύναμα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $t = \infty$ και παίρνουμε το Γ_∞ και έναν γεννήτορα του, $\pm \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, όπως και προηγουμένως. Ορίζουμε τα παρακάτω σύνολα:

$$\begin{aligned} L &= \{z \in \mathbb{C} : \ Im(z) = u\}, \\ K &= \{z \in L : \ 0 \leq Re(z) \leq |h|\}, \\ V &= \{z \in \mathbb{H}^* : \ Im(z) > u\}, \end{aligned}$$

με $u \in \mathbb{R}^+$. Καθώς ο K είναι συμπαγής, από το λήμμα 3.30, μπορούμε να βρούμε γειτονιά U του s με $K \cap \Gamma U = \varnothing$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το σύνορο του U είναι ένας εφαπτόμενος κύκλος στον πραγματικό άξονα. Θα δείξουμε ότι $V \cap \Gamma U = \varnothing$. Έστω πως όχι, τότε $\gamma(U) \cap U \neq \varnothing$ για κάποιο $\gamma \in \Gamma$. Καθώς $g(\infty) \neq s$, το σύνορο του $\gamma(U)$ θα είναι ένας κύκλος εφαπτόμενος στον $\mathbb{R}$. Έτσι αν $\gamma(U) \cap V \neq \varnothing \Rightarrow \gamma(U) \cap L \neq \varnothing$. Έτσι το $\gamma(U)$ τέμνει κάποιες μεταφορές του K από ένα στοιχείο του Γ_∞, δηλαδή υπάρχει ένα $\delta \in \Gamma_\infty$ έτσι ώστε $\gamma(U) \cap \delta(K) \neq \varnothing \Rightarrow \delta^{-1}\gamma(U) \cap K \neq \varnothing$, πράγμα άτοπο από την υπόθεση που κάναμε. $\Diamond$

Πρόταση 3.32. *Ο χώρος πηλίκο $\mathbb{H}^*/\Gamma$ είναι ένας τοπικά συμπαγής τοπολογικός χώρος.*

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι αν s είναι ένα cusp του Γ και $\pi : \mathbb{H}^* \to \mathbb{H}^*/\Gamma$ να είναι η φυσική προβολή, τότε το $\pi(s)$ έχει μία συμπαγή γειτονιά. Υπόθετουμε ότι $s = \infty$. Από το λήμμα 3.28, υπάρχει μία γειτονιά του, $V = \{z \in \mathbb{H}^* : Im(z) \geq c\}$, με $c \in \mathbb{R}^+$ τέτοια ώστε V/Γ_∞ να μπορεί να ταυτιστεί με το $\pi(V)$. Αν $\begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ είναι ένας γεννήτορας του Γ_∞ modulo(± 1), τότε το $\pi(V)$ συμπίπτει με την εικόνα του $\{z \in V : \ z = \infty \text{ ή } 0 \leq Re(z) \leq |h|\}$, μέσω της π. Όμως το σύνολο αυτό είναι συμπαγές και καθώς η π είναι συνεχής συνάρτηση και το $\pi(V)$ είναι συμπαγές. $\Diamond$

Πρόταση 3.33. *Αν Γ, Γ' είναι δύο commensurable διακριτές υποομάδες της $SL_2(\mathbb{R})$, τότε ο $\mathbb{H}^*/\Gamma$ είναι συμπαγής ανν ο $\mathbb{H}^*/\Gamma'$ είναι συμπαγής*[22].

3.4 Η Modular Ομάδα $SL_2(\mathbb{Z})$

Σε αυτήν την παράγραφο θα δούμε μία εφαρμογή της παραπάνω παραγράφου, μελετώντας την modular ομάδα $SL_2(\mathbb{Z})$, που είναι μία διακριτή υποομάδα της $SL_2(\mathbb{R})$. Για αρχή θα βρούμε τα cusps και τα ελλειπτικά σταθερά της σημεία. Πρώτα ας δικαιολογήσουμε τον τίτλο της παραγράφου:

Ορισμός 3.34. *Η modular ομάδα είναι η $PSL_2(\mathbb{Z})$, δηλαδή η διακριτή υποομάδα των Möbius μετασχηματισμών $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, με στοιχεία από το $\mathbb{Z}$ έτσι ώστε $ad-cb = 1$.*

Κάποιοι συγγραφείς ορίζουν την modular ομάδα να είναι η $PSL_2(\mathbb{Z})$ (βλέπε [16]), ενώ κάποιοι άλλοι (βλέπε [12]) την μεγαλύτερη ομάδα $SL_2(\mathbb{Z})$. Επικρατεί ο συμβολισμός $SL_2(\mathbb{Z})$ με το σκεπτικό ότι οι ομάδες είναι οι ίδιες modulo± 1.

Θα δείξουμε ότι τα cusps της $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ είναι ακριβώς τα σημεία του $\mathbb{Q} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$.

Πράγματι: Το ∞ είναι σταθερό σημείο, του παραβολικού στοιχείου $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \Gamma$. Αν το $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ είναι ένα παραβολικό στοιχείο του Γ, τότε έχει ένα μόνο σταθερό σημείο, έστω s. Αν το s είναι πεπερασμένο, δηλαδή $s \neq \infty$, με $\frac{as+b}{cs+d} = s$, τότε θα ικανοποιεί την εξίσωση:

$$cs^2 + (d-a)s - b = 0, \ \ \text{με } c \neq 0.$$

Καθώς η διακρίνουσα της παραπάνω εξίσωσης πρέπει να μηδενίζεται, δηλαδή πρέπει το $s \in \mathbb{Q}$. ***Αντίστροφα***, για $p, q \in \mathbb{Q}$, με $p, q \in \mathbb{Z}$ και $(p, q) = 1$, βρίσκουμε ακέραιους t, u έτσι ώστε $pt - qu = 1$. Τότε $\sigma = \begin{bmatrix} p & u \\ q & t \end{bmatrix} \in \Gamma$ και $\sigma(\infty) = p/q$. Καθώς η εικόνα ενός cusp, μέσω οποιουδήποτε στοιχείου της Γ είναι cusp, κάθε σημείο του $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ είναι cusp του Γ. Επίσης δείξαμε ότι κάθε cusp είναι ισοδύναμο με ένα cusp στο ∞. Έτσι:

$$\mathbb{H}^*/\Gamma = \mathbb{H}/\Gamma \cup \{\infty\}, \text{ με } \ \mathbb{H}^* = \mathbb{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}),$$

[22] για την απόδειξη βλέπε [12], πρόταση 1.31, σελίδα 13.

ή ισοδύναμα ο $\mathbb{H}^*/\Gamma$ αποτελεί *την συμπαγοποίηση του ενός σημείου του* $\mathbb{H}/\Gamma$, καθώς δείξαμε ότι ο $\mathbb{H}^*/\Gamma$ είναι ένας Hausdorff και τοπικά συμπαγής χώρος.

Στην συνέχεια θα διακόψουμε την φυσιολογική ροή της παραγράφου, για να δούμε συνοπτικά την έννοια του R-module, που θα αποδειχτεί ένα χρησιμο εργαλείο για την συνέχεια.

Τα module επί ενός δακτυλίου είναι μία γενίκευση των αβελιανών ομάδων, οι οποίες είναι module επί του $\mathbb{Z}$.

Ορισμός 3.35. *Έστω R δακτύλιος. Ένα (αριστερό) R-module, αποτελείται από μία προσθετική αβελιανή ομάδα M, μαζί με μία πράξη πολλαπλασιασμού κάθε στοιχείου της M με κάθε στοιχείο του R (από αριστερά) $R \times M \to M$, που απεικονίζει κάθε $(r,a) \mapsto ra$, έτσι ώστε για κάθε $a,b \in M$ και για κάθε $r,s \in R$ να ισχύει:*

(i) $(ra) \in M$,

(ii) $r(a+b) = ra + rb$,

(iii) $(r+s)a = ra + sa$,

(iv) $(rs)a = r(sa)$,

(v) *(αν ο R είναι δακτύλιος με μονάδα, τότε $id_R a = a$, για κάθε $a \in M$.)*

Τότε ο M λέγεται ένα αριστερό (μοναδοειδές) R-module. Αν στον δακτύλιο με μονάδα R κάθε μη μηδενικό στοιχείο του έχει αντίστροφο (είναι δηλαδή δακτύλιος διαίρεσης), τότε το μοναδοειδές R-module ονομάζεται (αριστερός) διανυσματικός χώρος.

Αν ο δακτύλιος είναι μεταθετικός θα μιλάμε μονο για R-modules. Ας επιστρέψουμε στο πνεύμα της παραγράφου:

Στην συνέχεια θα βρούμε τα ελλειπτικά σταθερά σημεία της $SL_2(\mathbb{Z})$. Έστω σ να είναι ένα ελλειπτικό στοιχείο του $SL_2(\mathbb{Z})$. Τότε $|tr(\sigma)| < 2$ και πρέπει να είναι ένας ακέραιος αριθμός, δηλαδή $tr(\sigma) = \pm 1$ ή 0. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του σ θα είναι έτσι το $x^2 \pm x + 1$ ή x^2+1 αντίστοιχα. Γνωρίζοντας ότι τα ελλειπτικά στοιχεία έχουν πεπερασμένη τάξη, αρκεί να βρούμε ένα $m \in \mathbb{N}$ με $\sigma^m = 1$. Θα πρέπει οι ιδιοτιμές (όπως και ο πίνακας σ) να ικανοποιούν το μονικό $x^2+1=0$, που είναι ανάγωγο στον $\mathbb{Z}[x]$ και συνεπώς στον $\mathbb{Q}[x]$. Όμως $x^2+1 = g_4(x) = (x-i)(x+i)$, με g_4 να είναι το τέταρτο κυκλοτομικό πολυώνυμο επί του $\mathbb{Q}$, δηλαδή $g_4(x) = (x-\zeta_1)(x-\zeta_2)(x-\zeta_3)(x-\zeta_4)$ με $\zeta^n = 1$, $n = 1,\dots,4$ να είναι οι τέταρτες ρίζες της μονάδας. Έτσι $\sigma^4 = 1$. Επίσης $x^2+x+1 = g_3(x) = (x-(-1/2+\sqrt{3}i/2))(x-(-1/2-\sqrt{3}i/2))$, με $g_3(x)$ να είναι το τρίτο κυκλοτομικό πολυώνυμο επί του $\mathbb{Q}$. Άρα $\sigma^3 = 1$. Τέλος $x^2-x+1 = g_6(x)$ με $g_6(x)$ να είναι το έκτο κυκλοτομικό πολυώνυμο και $\sigma^6 = 1$. Έτσι $m = 3,4,6$ ή n με $n \mid m$. Παρατηρούμε ότι αν $m=2$, τότε το ζ θα πρέπει να ικανοποιούσε το $g_2(x) = x+1$ πράγμα άτοπο από την υπόθεση μας και συνεπώς $m \neq 2 \Rightarrow \sigma \neq \pm 1$. Σε κάθε περίπτωση οι ιδιοτιμές ζ (όπως και ο πίνακας σ) θα πρέπει να είναι ρίζες μίας δευτέρου βαθμού εξίσωσης, έτσι ώστε $[\mathbb{Q}(\zeta):\mathbb{Q}] \leq 2$[23].

[23]η επέκταση αυτή ονομάζεται κυκλοτομική. Είναι το splitting field του n-οστού κυκλοτομικού πολυωνύμου $g_n(x)$ και ο βαθμός της που ισούται με τον βαθμό του ελάχιστου πολυωνύμου είναι $2 = \varphi(3) = \varphi(6) = \varphi(4)$, με φ να είναι η συνάρτηση του Euler, βλέπε [7], σελίδες 297-300.

Παρατηρούμε ότι αν $\sigma^6 = 1$, τότε $\sigma^3 = \pm 1$. Αν $\sigma^3 = -1 \Rightarrow (-\sigma)^3 = 1$. Έτσι για τον καθορισμό τον ελλειπτικών στοιχείων (ή σταθερών σημείων), αρκεί να περιοριστούμε στις περιπτώσεις $\sigma^4 = 1$ και $\sigma^3 = 1$.

Περίπτωση Πρώτη: $\sigma^4 = 1$. Έστω $\mathbb{Z}^2$ να δηλώνει το $\mathbb{Z}$-module όλων των στηλών διανυσμάτων $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = [a,b]^T$, με $a, b \in \mathbb{Z}$. Τα στοιχεία του $\mathbb{Z}[\sigma]$ δρούν στον $\mathbb{Z}^2$ με αριστερό πολλαπλασιασμό. Παίρνουμε δηλαδή το $\mathbb{Z}^2$ σαν ένα $\mathbb{Z}[\sigma]$-module. Καθώς το $\mathbb{Z}[\sigma]$ είναι ισόμορφο με τον $\mathbb{Z}[i]$ (οι ακέραιοι του Gauss[24]), μεσώ της $\sigma^2 \mapsto -1$, το $\mathbb{Z}[\sigma]$ είναι μία περιοχή κύριων ιδεωδών[25]. Το module $\mathbb{Z}^2$ επί του $\mathbb{Z}[\sigma]$ είναι torsion free[26], καθώς αν $\mathbb{Z}[\sigma] \ni (a+b\sigma)\cdot x = 0 \Rightarrow (a+b\sigma)\cdot(a-b\sigma)\cdot x = 0 \Rightarrow (a^2 - b^2\sigma^2)\cdot x = 0 \overset{\sigma^2=-1}{\Rightarrow} \mathbb{Z} \ni (a^2+b^2)\cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ αν $a + b\sigma \neq 0$. Έτσι το $\mathbb{Z}^2$ πρέπει να είναι ένα ελεύθερο[27] $\mathbb{Z}[\sigma]$-module με τάξη (rank) ίση με την μονάδα. Δηλαδή $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}[\sigma]\cdot u$, για κάποιο $u \in \mathbb{Z}^2$.

Θέτουμε $v = \sigma u \Rightarrow \sigma v = -u$. Η $\{u, v\}$ αποτελεί μία βάση του $\mathbb{Z}^2$ επί του $\mathbb{Z}$. Έχουμε ότι

$$\sigma\cdot[u\ v] = [\sigma u\ \sigma v] = [v\ \ -u] = [u\ v]\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \text{ με } \det[u\ v] = \pm 1^{28}.$$

Αν $\det[u\ v] = 1$ τότε το σ πρέπει να είναι συζυγές με το $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ στην $SL_2(\mathbb{Z})$. Αν $\det[u\ v] = -1$, τότε $\sigma = \tau\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\tau^{-1}$, με $\tau = [u\ v]$. Γι αυτό κάθε ελλειπτικό στοιχείο $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$ τάξης 4 είναι συζυγές με το $\pm\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ στην $SL_2(\mathbb{Z})$. Έτσι κάθε ελλειπτικό σταθερό σημείο με τάξη ίση με δύο πρέπει να είναι ισοδύναμο με το σταθερό σημείο του $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, που είναι το i. Επίσης από την πρόταση 3.24 ο $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ δεν είναι συζυγής με τον $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Περίπτωση δεύτερη: $\sigma^3 = 1$. Θα έχουμε ότι $\mathbb{Z}[\sigma] \cong \mathbb{Z}[\exp(2\pi i/3)]$, που είναι περιοχή κύριων ιδεωδών. Όμοια θα έχουμε ξανά ότι $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}[\sigma]u$, για κάποιο u. Θέτουμε $v = \sigma u$. Τότε:

$$\sigma\cdot[u\ v] = [\sigma u\ \sigma v] = [v\ \ -u-v] = [u\ v]\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\ \text{ με } \det[u\ v] = \pm 1.$$

[24] ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[i]$ είναι οι ακέραιοι του Gauss, έχουμε ότι $\mathbb{Z}[i] = \{\alpha + \beta i :\ \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\}$. Μάλιστα καθώς ο $\mathbb{Z}[i]$ είναι ακέραια περιοχή, τότε εφοδιασμένος με την $\varphi : \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$, με τύπο $(\alpha + \beta i) \mapsto |\alpha + \beta|^2$, ο $\mathbb{Z}[i]$ είναι μία ευκλείδεια περιοχή (δηλαδή ευκλείδειος δακτύλιος και ακέραια περιοχή), βλέπε [7], σελίδα 139.

[25] κάθε ευκλείδειος δακτύλιος είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών με μονάδα, βλέπε [7], θεώρημα 3.9 σελίδα 139.

[26] γενικά αν A ένα αριστερό R-module με R ακέραια περιοχή, τότε για κάθε $a \in A$ θέτω $O_a = \{r \in R :\ ra = 0\}$, το οποίο, είναι ένα ιδεώδες για τον R. Αν $A_t = \{a \in A :\ O_a \neq \varnothing\}$, τότε θα λέμε ότι ο το A είναι torsion free αν $A_t = \varnothing$.

[27] δηλαδή να γράφεται σαν το ευθή γινόμενο από αντίγραφα του $\mathbb{Z}[\sigma]$, δηλαδή $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}[\sigma] \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}[\sigma]$. Για τον αυστηρό ορισμό βλέπε [7], θεώρημα 2.1, σελίδα 181. Στην συγκεκριμμένη περίπτωση, καθώς το $\mathbb{Z}[\sigma]$ είναι περιοχή κύριων ιδεωδών, τα πεπερασμένα παραγώμενα modules επί περιοχές κύριων ιδεωδών συμπίπτουν με τις πεπερασμένες παραγώμενες αβελιανές ομάδες και η $\mathbb{Z}^2$ είναι μία από αυτές. Κάνοντας χρήση του θεωρήματος 6.5 του [7], σελίδα 221, θα έχουμε ότι το $\mathbb{Z}^2$ είναι ελεύθερο επι του $\mathbb{Z}[\sigma]$. Τέλος καθώς $\mathbb{Z}[\sigma] = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sigma$ είναι φανερό οτι ο αριθμός των αντιγράφων $\mathbb{Z}[\sigma]$ που χρησιμοποιούμε για να πάρουμε το $\mathbb{Z}^2$, θα ισούται με την μονάδα.

[28] καθώς το $[u\ v]$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του $SL_2(\mathbb{Z})$, θα πρέπει η ορίζουσα του να ανήκει στις μονάδες του $\mathbb{Z}$, όταν $U(\mathbb{Z}) = \{\pm 1\}$.

Πράγματι το $\sigma v = \sigma^2 u = -\sigma u - \sigma v \Leftrightarrow \sigma v = -v - (u-v) = u$. Έτσι κάθε το σ είναι συζυγές με το $\tau = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ή το $\tau^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ στην $SL_2(\mathbb{Z})$. Συνεπώς κάθε ελλειπτικό σταθερό σημείο τάξης 3 είναι ισοδύναμο με το σημείο $\exp(2\pi i/3)$, που είναι το σταθερό σημείο του τ^2 ή θα είναι ισοδύναμο με το $\exp(2\pi i/6)$, που είναι το σταθερό σημείο του τ. Τέλος από την πρόταση 3.24, το τ δεν είναι συζυγές με το τ^2 στην $SL_2(\mathbb{Z})$.

Ορισμός 3.36. *Για κάθε διακριτή υπομάδα Γ της $SL_2(\mathbb{R})$, ονομάζουμε θεμελιώδης περιοχή (fundamental domain) του $\mathbb{H}/\Gamma$ (ή πιο απλά του Γ) αν:*

(i) *ο F είναι ένα συνεκτικό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{H}$,*

(ii) *οποιαδήποτε δύο σημεία του F δεν είναι Γ-ισοδύναμα,*

(iii) *κάθε σημείο του $\mathbb{H}$ είναι Γ-ισοδύναμο με ένα σημείο που ανήκει στην κλειστότητα του F.*

Κάθε θεμελίωδης περιοχή περιέχει ακριβώς έναν αντιπρόσωπο από την τροχιά για κάθε $z \in \mathbb{H}$. Μπορεί να δειχτεί ότι υπαρχει μία θεμελιώδης περιοχή για κάθε Γ και ότι (μία) θεμελιώδης περιοχή του $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$[29] είναι η

$$F = \{z \in \mathbb{H} : \ |z| > 1, \ |Re(z)| < 1/2\}.$$

Το F είνα φραγμένο από τις οριζόντιες γραμμές $Re(z) = 1/2$, $Re(z) = -1/2$ και από τον κύκλο $|z| = 1$. Αυτή η περιοχή είναι ένα υπερβολικό τρίγωνο (το άθροισμα των γωνιών είναι μικρότερο του π) με κορυφές τις $(-1+i\sqrt{3})/2 = \exp(2\pi i/3) = \rho$ και $(1+i\sqrt{3})/2 = \exp(2\pi i/6) = -\bar{\rho}$ με τις γωνίες που σχηματίζουν με τις πλευρές να είναι ίσες με $\pi/3$. Τέλος έχει μία τρίτη κορυφή, στο ∞ με την γωνία που σχηματίζει με τις αντίστοιχες πλευρές να είναι μηδέν. Μάλιστα αν αφήσουμε κάθε στοιχείο της *modular* ομάδας να δράσει πάνω στο F τότε θα καταφέρουμε να επικαλύψουμε τον $\mathbb{H}$ με έναν ειδικό τρόπο, που ονομάζεται tessellation[30]του $\mathbb{H}$, με τέτοια υπερβολικά τρίγωνα. Αυτός είναι ο λόγος που κάποιοι συγγραφείς[31] διαφοροποιούν την τρίτη ιδιότητα στον ορισμό που δώσαμε γαι την θεμελιώδη περιοχή, ότι θα πρέπει δηλαδή να ισχύουν τα (i), (ii) και $\mathbb{H} = \cup \gamma \bar{F}$. Τέλος σε κάθε ένα από αυτά τα τρίγωνα θα πρέπει η μία του κορυφή είτε να είναι το ∞ είτε να ανήκει στον πραγματικό άξονα $Im(z) = 0$. Ο λόγος είναι φανερός, όταν κάθε μετασχηματισμός που αντιστοιχεί σε έναν από τους γεννήτορες της $SL_2(\mathbb{Z})$, θα πρέπει είτε να σταθεροποιεί το ∞ (σ) είτε να το απεικονίζει στο μηδέν (τ, βλέπε την ακόλουθη πρόταση).

Πρόταση 3.37. *Η modular ομάδα $SL_2(\mathbb{Z})$ γεννάται από τα στοιχεία:*

$$\tau = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ \textit{και} \ \sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

[29]η αποδειξη είναι τεχνική και βασίζεται στις δίαφορες περιπτώσεις του c_σ για ένα $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$, βλέπε [14], θεώρημα 2.12, σελίδα 26, ή στον [12] σελίδα 16.

[30]προέρχεται από τον λατινικό όρο tessella που έχει τις ρίζες του στο ελληνικό τέσσερα, «τετράγωνο». Ένα tiling ενός τοπολογικού χώρου S είναι μία συλλογή $\mathcal{B}$ από ανοικτά του S τέτοια ώστε να είναι ξένα μεταξύ τους και η κλειστότητα της ένωσης τους να ισούται με τον S.

[31]βλέπε [14].

Απόδειξη: Έστω T να είναι η υποομάδα της $SL_2(\mathbb{Z})$ που γεννάται από τα σ, τ. Τότε $-I_{2\times 2} = \tau^2 \in T$. Παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο του $SL_2(\mathbb{Z})$ της μορφής $\begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$ περιέχεται στην T και αν $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in T$, τότε και το $\begin{bmatrix} -c & -d \\ a & b \end{bmatrix} = \tau \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in T$. Έστω ότι $\langle T \rangle \neq SL_2(\mathbb{Z})$. Παίρνω το στοιχείο $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \setminus T$ ώστε το $Min(|a|, |c|)$ να είναι το μικρότερο δυνατό. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $|a| \geq |c| > 0$. Παίρνουμε $q, r \in \mathbb{Z}$, τέτοιους ώστε $a = cq + r$ και $0 \leq r < |c|$. Τότε θα έχουμε ότι $\sigma^{-q} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & * \\ c & * \end{bmatrix} \notin T$ και $r = Min(r, |c|) < |c| = Min(|a|, |c|)$, πράγμα άτοπο από την υπόθεση μας. $\diamondsuit$
Παρατηρούμε ότι η δράση των γεννητόρων στον $\mathbb{H}$ δίνεται από τους παρακάτω μετασχηματισμούς:

$$\tau(z) = -\frac{1}{z} \text{ και } \sigma(z) = 1 + z, \text{ με } z \in \mathbb{H}.$$

Όπου, ο μετασχηματισμός σ είναι μία μεταφορά προς τα δεξιά κατα μία μονάδα, ενώ ο σ είναι μία ανάκλαση κατά μήκος του τόξου του κύκλου $|z| = 1$. Επίσης τα στοιχεία $\tau \cdot \sigma = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ και τ έχουν πεπερασμένη τάξη με

$$\tau^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = I_{2\times 2} \text{ και } (\tau \cdot \sigma)^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^3 = I_{2\times 2}, \text{ modulo}(\pm I_{2\times 2}),$$

με συνέπεια η $SL_2(\mathbb{Z})$ να περιέχει πεπερασμένες υποομάδες τάξης 2 και 3 αντίστοιχα. Οι παραπάνω διαπιστώσεις οδηγούν στο εξής πόρισμα:

Πόρισμα 3.38. *Για κάθε $z \in \bar{F}$ και $\Gamma_z = \{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) : \gamma z = z\}$, θα έχω*

$$\Gamma_z = \begin{cases} \{I_{2\times 2}, \tau\}, & \text{για } z = i, \\ \{I_{2\times 2}, \tau\sigma, (\tau\sigma)^2\}, & \text{για } z = \rho = \exp(2\pi i/3), \\ \{I_{2\times 2}, \sigma\tau, (\sigma\tau)^2\}, & \text{για } z = -\bar{\rho} = \exp(2\pi i/6), \\ \{I_{2\times 2}\}, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Παρατήρηση 3.39. *Τα cusps, όπως και τα σταθερά ελλειπτικά σημεία της modular ομάδας ανήκουν στο σύνορο της θεμελιώδης της περιοχής F.*

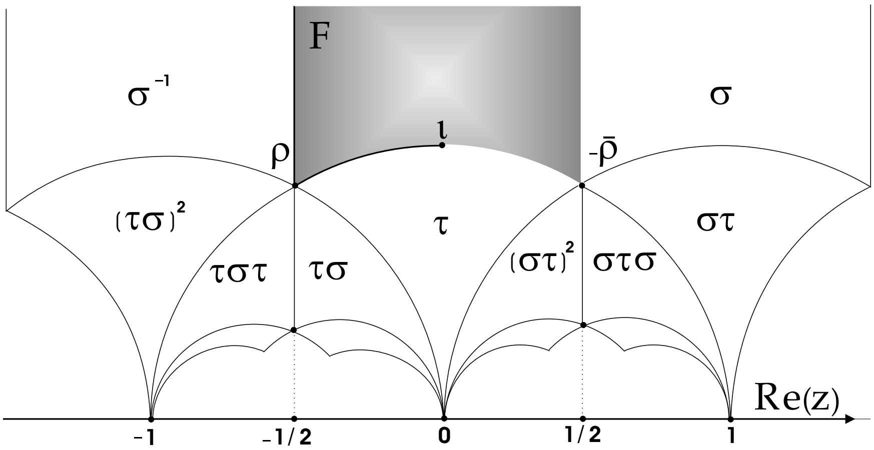
3.5 Το Πηλίκο $\mathbb{H}^*/\Gamma$ σαν μία Επιφάνεια Riemann

Αν η Γ, συμβολίζει μία διακριτή υποομάδα της $SL_2(\mathbb{R})$, θα δώσουμε μία μιγαδική δομή στον $\mathbb{H}^*/\Gamma$, έτσι ώστε να γίνει μία επιφάνεια Riemann, βασιζόμενοι στην μέχρι τώρα πορεία μας σε αυτό το κεφάλαιο. Έστω $\varphi : \mathbb{H}^* \to \mathbb{H}^*/\Gamma$, να είναι η φυσική προβολή. Για κάθε $u \in \mathbb{H}^*$, θέτουμε

$$\Gamma_u = \{\gamma \in \Gamma : \gamma(u) = u\}.$$

Αν το $u \in \mathbb{H} \Rightarrow \varphi(u) \in \mathbb{H}/\Gamma$, χρησιμοποιούμε την πρόταση 3.13, ενώ αν το u είναι cusp, το λήμμα 3.28. Πάντα μπορούμε να βρούμε μία ανοικτή γειτονιά $U \subset \mathbb{H}^*$ του u τέτοια ώστε:

$$\Gamma_u = \{\gamma \in \Gamma : \gamma(U) \cap U \neq \varnothing\}.$$



Σχήμα 3.2: Μία θεμελιώδη περιοχή για την modular ομάδα και κάποιες δράσεις των στοιχείων της $SL_2(\mathbb{Z})$ στην F.

Τότε, από το πόρισμα 3.29 μπορούμε να εμφυτεύσουμε το U/Γ_u στον $\mathbb{H}^*/\Gamma$ ώστε να προκύψει μία φυσική 1-1 απεικόνιση $U/\Gamma_u \to \mathbb{H}^*/\Gamma$, με U/Γ_u να είναι μία ανοικτή γειτονιά του $\varphi(u)$ στον χώρο $\mathbb{H}^*/\Gamma$.

Αν το u δεν είναι ελλειπτικό σταθερό σημείο, ούτε cusp, τότε η Γ_u θα περιέχει μόνο το 1 (και πιθανώς το -1) έτσι ώστε η απεικόνιση $\varphi : U \to U/\Gamma_u$ να είναι ένας ομοιομορφισμός. Επιλέγουμε για συνταγμενική περιοχή του $\mathbb{H}^*/\Gamma$ την $(U/\Gamma_u,\ \varphi^{-1})$.

Υποθέτουμε ότι το u είναι ένα ελλειπτικό σταθερό σημείο, συμβολίζουμε με $\bar{\Gamma}_u$ την ομάδα μετασχηματισμών $\Gamma_u \cdot \{\pm 1\}/\{\pm 1\}$[32]. Έστω λ να είναι ο αναλυτικός ισομορφισμός του $\mathbb{H}$ με τον ανοικτό μιγαδικό μοναδιαίο δίσκο D με $u \mapsto 0$. Αυτό προκύπτει ως εξής: από την μεταβατική δράση της $SL_2(\mathbb{R})$ στον $\mathbb{H}$ (το $u \in \mathbb{H}$ σαν ελλειπτικό σταθερό σημείο) θα υπάρχει ένα α, τέτοιο ώστε $\alpha(u) = i$. Παίρνοντας μετά την απεικόνιση $\lambda(w) = \frac{\alpha(w)-i}{\alpha(w)+i}$ θα έχουμε τον ζητούμενο ισομορφισμό με $\lambda(u) = 0$. Από την πρόταση 3.18, θα πρέπει η $\bar{\Gamma}_u$ να έχει τάξη n για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς προκύπτει το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{cccc} & u & \stackrel{\lambda}{\longmapsto} & 0 & \\ \Gamma_u & \downarrow & & \downarrow & Aut(D/\{0\}) \\ & u & \stackrel{\lambda}{\longmapsto} & 0 & \end{array}$$

Η ομάδα $\lambda\bar{\Gamma}_u\lambda^{-1}$ θα είναι μία ομάδα από αναλυτικούς αυτομορφισμούς του μιγαδικού κύκλου, που θα είναι μία πεπερασμένη κυκλική και θα αποτελείται από τους μετασχηματισμούς[33] :

$$w \mapsto \zeta^k w,\ k = 0, 1 \ldots, n-1,\ \text{με}\ \zeta = \exp(2\pi i/n)\ \text{και}\ n = |\bar{\Gamma}_u|.$$

[32]από το δεύτερο θεώρημα ισομορφισμών, παρατηρούμε ότι $\Gamma_u \cdot \{\pm I_{2\times 2}\}/\{\pm I_{2\times 2}\} \cong \Gamma_u/(\Gamma_u \cap \{\pm I_{2\times 2}\})$, με $\Gamma_u, \pm I_{2\times 2}$ να είναι υποομάδες της Γ με την δεύτερη να είναι κανονική υποομάδα της. Γράφουμε την $\bar{\Gamma}_u$, γιατί από την πρόταση 3.22, μπορεί το $-I_{2\times 2}$ να μην ανήκει στην Γ_u.

[33]αυτό είναι ένα αποτέλεσμα του λήμματος του Schwarz (βλέπε στον [15] για την απόδειξη, θεώρημα 13, σελίδα 135) που λέει πως αν μία συνάρτηση f που είναι αναλυτική για $|z| < 1$ και ικανοποιεί τις συνθήκες $|f(z)| \leq 1,\ f(0) = 0$ τότε θα ισχύει $|f(z)| \leq |z|$. Αν επιπροσθέτως

Μπορούμε με αυτόν τον τρόπο να ορίσουμε απεικόνιση $p : U/\Gamma_u \to \mathbb{C}$ με $p(\varphi(z)) = \lambda^n(z)$. Ο p θα είναι ένας τοπικός ομοιομορφισμός. Έτσι παίρνουμε για συντεταγμενική περιοχή την $(U/\Gamma_u,\ p)$.

Αν το u ειναι cusp, θα είναι ισοδύναμο με το ∞, δηλαδή υπάρχει $\rho \in SL_2(\mathbb{R})$, τέτοιο ώστε $\rho(u) = \infty$. Τότε θα έχουμε:

$$\begin{array}{ccccc} & u & \stackrel{\rho}{\longmapsto} & \infty & \\ \Gamma_u & \downarrow & & \downarrow & \Gamma_\infty \\ & u & \stackrel{\rho}{\longmapsto} & \infty & \end{array}$$

με συνέπεια:

$$\rho\Gamma_u\rho^{-1} = \{\pm \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^m :\ m \in \mathbb{Z},\ h \in \mathbb{R}^+\}.$$

Ορίζουμε $p : U/\Gamma_u \to \mathbb{C}$ έτσι ώστε $p_{|U/\Gamma_u}(U/\Gamma_u)$ να είναι ομοιομορφικό με ένα ανοικτό του $\mathbb{C}$, με τύπο $p(\varphi(z)) = \exp(2\pi i\rho(z)/h)$ και επιλέγουμε για συνταταγμενική περιοχή $(U/\Gamma_u,\ p)$. $\Diamond$

Δείξαμε ότι ο $\mathbb{H}^*/SL_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{H}/SL_2(\mathbb{Z}) \cup \{\infty\}$ είναι συμπαγής. Από την πρόταση 3.33, θα έχουμε ότι ο $\mathbb{H}^*/\Gamma'$ είναι συμπαγής ανν η Γ' είναι μία διακριτή υποομάδα του $SL_2(\mathbb{R})$, η οποία είναι commensurable με την $SL_2(\mathbb{Z})$.

Ορισμός 3.40. *Μία Fuschian ομάδα πρώτου είδους καλείται μία διακριτή υποομάδα Γ του $SL_2(\mathbb{R})$ (ή του $PSL_2(\mathbb{R})$), τέτοια ώστε ο $\mathbb{H}^*/\Gamma$ να είναι συμπαγής.*

Αν αυτήν την ομάδα την εφοδιάσουμε με την μιγαδική δομή που αναφέρθηκε στην αρχή της παραγράφου, τότε ο $\mathbb{H}^*/\Gamma$ γίνεται μία συμπαγής επιφάνεια Riemann. Όμως από το δεύτερο κεφάλαιο είδαμε ότι αυτή η επιφάνεια Riemann θα αντιπροσωπεύει και μία αλγεβρική καμπύλη.

Ορισμός 3.41. *Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ θέτουμε:*

$$\begin{aligned} \Gamma(N) &= \{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) :\ \gamma \equiv 1 \mod (N)\} \\ &= \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) :\ a \equiv d \equiv 1,\ b \equiv c \equiv 0 \mod (N)\}. \end{aligned}$$

Τότε η $\Gamma(N)$ είναι μία κανονική υποομάδα της $SL_2(\mathbb{Z})$ και ονομάζεται η principal congruence υποομάδα της, με τάξη (level) N.

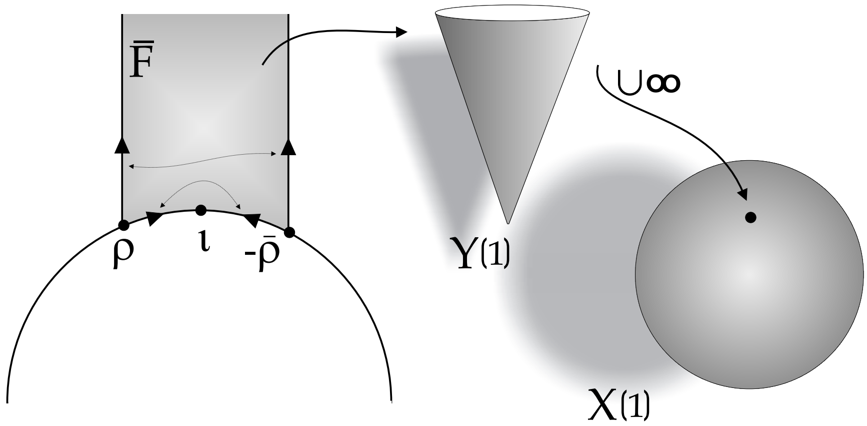
Με τον νέο μας ορισμό θα αναφέρουμε από εδώ και στο εξής την $SL_2(\mathbb{Z})$ σαν $\Gamma(1)$. Επίσης θέτουμε:

$$Y(1) = \mathbb{H}/\Gamma(1), \text{ και } X(1) = \mathbb{H}^*/\Gamma(1).$$

Η $X(1)$ είναι η αλγεβρική καμπύλη που αντιστοιχεί στην συμπαγή επίφάνεια Riemann $\mathbb{H}^*/\Gamma(1)$. Αυτή ονομάζεται modular καμπύλη. Παρατηρούμε ότι $X(1) \setminus Y(1) = \{\infty\}$ καθώς είδαμε, ότι όλα τα cusps στην $\Gamma(1)$ είναι ισοδύναμα με το

υπάρχει ένα $z_0 \neq 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει η ισότητα, τότε θα έχουμε ότι $f(z) = cz$ για μία σταθερά c με $|c| = 1$. Οι προϋποθέσεις ισχύουν για τους αναλυτικούς αυτομορφισμούς του D που σταθεροποιούν το μηδέν. Έτσι θα απεικονίζουν κάθε w σε ένα cw με $|c| = 1$. Παρατηρούμε τώρα ότι αν $g \in \lambda\bar{\Gamma}_w\lambda^{-1}$ τότε $g(w) = cw$ με $c \in \mathbb{C}$. Όμως και $g \circ g(w) = w = c^2 w$ όπως και η n-φορές σύνθεση με τον εαυτό του μας δίνει $g \circ g \circ \cdots \circ g(w) = c^n w = w$. Έτσι θα πρέπει $c^n = 1,\ |c| = 1$ με n να είναι ο μικρότερος τέτοιος ακέραιος, καθώς είναι η τάξη της ομάδας Γ_w. Έτσι ο c είναι μία πρωταρχική n-οστή ρίζα της μονάδας.

άπειρο. Είδαμε επίσης ότι όλα τα cusps και τα ελλειπτικά σταθερά σημεία της $\Gamma(1)$ ανήκουν στο σύνορο και συνεπώς στην κλειστότητα της θεμελιώδους περιοχής F. Από τον ορισμό της τελευταίας καθένα από αυτά είναι $\Gamma(1)$-ισοδύναμο με κάποιο $z \in \mathbb{H}$ ενώ στο F δεν υπάρχουν $\Gamma(1)$-ισοδύναμα στοιχεία. Έτσι τα cusps και τα ελλειπτικά σταθερά σημεία της $\Gamma(1)$ που ανήκουν στο σύνορο θα πρέπει να είναι ισοδύναμα με κάποια cusps και ελλειπτικά σταθερά σημεία αντίστοιχα (η εικόνα τους, μέσω κάποιου $\gamma \in \Gamma$ θα πρέπει να είναι σταθερό σημείο) που και αυτά θα πρέπει να ανήκουν στο ∂F. Στον τοπολογικό χώρο $Y(1)$ όμως, πρέπει να ταυτίσουμε αυτές τις κλάσεις ισοδυναμίας. Θα πρέπει δηλαδή να ταυτίσουμε τα δύο τόξα του κύκλου ακτίνας $|z| = 1$ όπως και τις δύο οριζόντιες ακμές του υπερβολικού τριγώνου μας. Αυτό που θα προκύψει θα είναι ο $Y(1)$ και προσθέτοντας ένα σημείο (ένα cusp για την ακρίβεια), το $\{\infty\}$ παίρνουμε τον συμπαγή $X(1)$, που όπως φαίνεται από το σχήμα 3.3, θα είναι ομοιομορφικός με την σφαίρα του Riemann. Με αυτόν τον τρόπο πετύχαμε μία όμορφη γεωμετρική κατασκευή του $X(1)$.



Σχήμα 3.3: Η γεωμετρία του $Y(1)$ και του $X(1)$.

Είδαμε πώς ο χώρος πηλίκο $X(1)$ μπορεί να αποκτήσει δομή επιφάνειας Riemann. Γνωρίζουμε, από το δεύτερο κεφάλαιο, πως οι μερόμορφες συναρτήσεις πάνω σε αυτήν την επιφάνεια, που είναι οι μερόμορφες πάνω από την σφαίρα του Riemann είναι το σώμα ρητών συναρτήσεων του $\mathbb{C}$.

Ορισμός 3.42. *Έστω $k \in \mathbb{Z}$ και $f(\tau)$ μία συνάρτηση στον $\mathbb{H}$. Θα λέμε ότι η f είναι μία weakly modular συνάρτηση βάρους $2k$ (στον $\Gamma(1)$) αν ισχύουν οι ακόλουθες δύο συνθήκες:*

(i) $f \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$,

(ii) $f(\gamma\tau) = (c\tau + d)^{2k} f(\tau)$ *για κάθε* $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma(1)$ *και* $\tau \in \mathbb{H}$.

Καθώς ο $\Gamma(1)$ γεννάται από τους πίνακες $\tau = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ και $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, μία $f \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$, θα είναι weakly modular με βάρος $2k$ αν ικανοποιεί τις δύο ισότητες:

$$f(\tau + 1) = f(\tau), \quad \text{και } f(-\frac{1}{\tau}) = \tau^{2k} f(\tau).$$

Από την πρώτη παίρνουμε ότι η f είναι περιοδική με περίοδο ίση με την μονάδα και συνεπώς μπορούμε να την εκφράσουμε σαν συνάρτηση των cos και sin, δηλαδή συναρτήσει του:

$$q = \exp(2\pi i\tau),$$

καθώς το τ τρέχει στον $\mathbb{H}$, το q θα τρέχει δίσκο με «τρύπα». Αυτό έχει ως συνέπεια η f να είναι μερόμορφη στον δίσκο με «τρύπα» $\{q \in \mathbb{C} : \ 0 < q < 1\}$. Συνεπώς θα μπορούμε να την εκφράσουμε με μία σειρά Fourier:

$$\tilde{f}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(2\pi i n\tau).$$

Θέτοντας $q = \exp(2\pi i\tau)$, θα λέμε ότι η f είναι:

- μερόμορφη στο ∞ αν $\tilde{f} = \sum_{n=-n_0}^{\infty} a_n q^n$ για κάποιο $n_0 \in \mathbb{Z}$,
- αναλυτική στο ∞ αν $\tilde{f} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$.

Αν η f είναι μερόμορφη στο ∞, με $\tilde{f} = a_{-n_0}q^{-n_0} + \cdots$, με $a_{-n_0} \neq 0$ τότε η τάξη της f στο ∞, θα είναι η τάξη του $\tilde{f}$ στο $q = 0$, που είναι ίση με $-n_0$ (όταν το $\tau \to i\infty$[34], τότε το $q \to 0$). Επίσης αν η f είναι αναλυτική στο ∞, τότε ορίζουμε να είναι $f(\infty) = \tilde{f}(0) = a_0$.

Ορισμός 3.43. *Μία συνάρτηση f ονομάζεται modular συνάρτηση ανν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) $f \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$,

(ii) *για κάθε πίνακα $\gamma \in \Gamma(1)$ και $\tau \in \mathbb{H}$, ισχύει $f(\gamma\tau) = f(\tau)$, δηλαδή η f είναι $\Gamma(1)$-αναλλοίωτη,*

(iii) *Η σειρά Laurent έχει μορφή:*

$$\tilde{f}(\tau) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n \exp(2i\pi n\tau).$$

ή ισοδύναμα αν είναι μία weakly modular συνάρτηση μηδενικού βάρους, που είναι μερόμορφη στο ∞.

Παρατήρηση 3.44. *Παρατηρούμε ότι το πηλίκο δύο weakly modular συναρτήσεων, που είναι μερόμορφες στο ∞ με ίδιο βάρος, δίνουν μία modular συνάρτηση.*

Καθώς η f είναι $\Gamma(1)$-αναλλοίωτη μπορούμε να την θεωρήσουμε σαν συνάρτηση στον $Y(1)$. Το ότι είναι μερόμορφη στο ∞, δηλαδή στο cusp της $\Gamma(1)$, σημαίνει ότι εξακολουθεί να είναι μερόμορφη ακόμα και αν την θεωρήσουμε σαν μία συνάρτηση του $X(1)$. Δηλαδή η f είναι μερόμορφη σε όλο τον ανοικτό μιγαδικό δίσκο.

Ορισμός 3.45. *Μία weakly modular συνάρτηση που είναι παντού αναλυτική (δηλαδή στον $\mathbb{H}$ και αναλυτική στο ∞), ονομάζεται modular form. Αν ισχύει επίσης ότι $f(\infty) = 0$, τότε η f ονομάζεται cusp form.*

[34] μέχρι το τέλος και ακολουθώντας τον συμβολισμό στην βιβλιογραφία, θα συμβολίζουμε το ∞ με $i\infty$. Ο λόγος είναι ότι «προσεγγίζουμε» το ∞ από τον άξονα $Im(z)$.

Παράδειγμα: Οι σειρές του Eisenstein:
Αν Λ είναι ένα latttice, τότε οι σειρές του Eisenstein έχουν την μορφή:

$$G_{2k}(\Lambda) = \sum_{\substack{\omega \in \Lambda \\ \omega \neq 0}} \frac{1}{\omega^{2k}},$$

που συγκλείνουν απόλυτα για κάθε $k \geq 2$[35]. Για $\tau \in \mathbb{H}$, θα έχουμε:

$$G_{2k}(\tau) = G_{2k}(\Lambda_\tau) = \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{Z} \\ (m,n) \neq 0}} \frac{1}{(m\tau + n)^{2k}}.$$

Παρατηρούμε ότι $G_{2k}(c\Lambda) = c^{-2k} G_{2k}(\Lambda)$ για κάθε $c \in \mathbb{C}^*$. Επίσης

$$\Lambda\gamma\tau = \mathbb{Z}\frac{a\tau + b}{c\tau + d} + \mathbb{Z} = \frac{1}{c\tau + d}(\mathbb{Z}(a\tau + b) + \mathbb{Z}(c\tau + d)) = \frac{1}{c\tau + d}\Lambda_\tau.$$

Έτσι

$$\begin{aligned} G_{2k}(\gamma\tau) &= G_{2k}(\Lambda_{\gamma\tau}) \\ &= G_{2k}((c\tau + d)^{-1}\Lambda_\tau) \\ &= (c\tau + d)^{2k} G_{2k}(\Lambda_\tau) = (c\tau + d)^{2k} G_{2k}(\tau). \end{aligned}$$

Συμπερασματικά οι σειρές του Eisenstein είναι ένα παράδειγμα weakly modular συναρτήσεων βάρους $2k$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι έιναι αναλυτικές στο ∞ με $G_{2k}(\infty) = 2\zeta(s)$[36], όπου ζ να είναι η ζήτα Riemann συνάρτηση και άρα είναι ένα modular form.

3.6 Uniformization Ελλειπτικών καμπύλων

Ορισμός 3.46. *Ορίζουμε την modular αναλλοίωτο $j(\tau)$, $\tau \in \mathbb{H}$ να είναι η συνάρτηση*

$$j(\tau) = 1728 \frac{g_2^3(\tau)}{\Delta(\tau)}.$$

Δηλαδή η $j(\tau)$ είναι η j-αναλλοίωτος που αντιστοιχεί στην ελλειπτική καμπύλη με διακρίνουσα Δ:

$$E_{\Lambda_\tau} : y^2 = 4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau)$$

και η E_{Λ_τ} δέχεται παραμετρικοποίηση κάνοντας χρήση της $\wp$ συνάρτησης του Weierstrass[37]

$$\begin{gathered} \mathbb{C}/\Lambda_\tau \to E_{\Lambda_\tau}(\mathbb{C}), \\ z \mapsto \big(\wp(z;\Lambda_\tau), \wp'(z;\Lambda_\tau)\big). \end{gathered}$$

Δύο ελλειπτικές καμπύλες E, E' είναι ισόμορφες αν ισχύει $j(E) = j(E')$. Τα παραπάνω είναι κλασικά θέματα της θεωρίας των ελλειπτικών καμπύλων και μπορούν να βρεθούν σε οποιοδήποτε σχετικό βιβλίο για παράδειγμα στον [16], κεφάλαιο VI, πρόταση 3.6, σελίδα 158.

[35] βλέπε [16], θεώρημα 3.1, σελίδα 153.
[36] βλέπε [17], πρόταση 3.4.2 σελίδα 25.
[37] αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η συνάρτηση του Weierstrass είναι η λύση της διαφορικής εξίσωσης $\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$ και συνεπώς έχει ήδη μορφή ελλειπτικής καμπύλης επί του $\mathbb{C}$.

Θεώρημα 3.47. *Η συνάρτηση $j(\tau)$ είναι μία modular συνάρτηση και επάγει έναν (αναλυτικό) ισομορφισμό:*

$$X(1) \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}). \tag{3.10}$$

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι τα $\Delta(\tau)$ και $g_2(\tau)^3 = 2^6 3^3 5^3 G_4(\tau)^3$, είναι modular forms βάρους 12 και συνεπώς το πηλίκο τους είναι modular συνάρτηση, οπότε είναι στοιχείο του σώματος μερομόρφων συναρτήσεων της επιφάνειας Riemann $X(1)$.

Άρα η συνάρτηση j επάγει ένα πεπερασμένων φύλλων μιγαδικό αναλυτικό κάλυμμα:

$$j : X(1) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}).$$

Τέλος παρατηρούμε ότι $g_2(i\infty) = 120\zeta(4) \neq 0$ (βλέπε [17] σελίδα 26) και $\Delta(i\infty) = 0$, και αφού η Δ έχει βάρος 12 αυτό μας δίνει ότι η τάξη της Δ στο ∞ ισούται με την μονάδα. Δηλαδή η j έχει απλό πόλο στο cusp $\infty \in X(1)$ και κανένα άλλο πόλο στο $X(1)$, συνεπώς πρόκειται για μονόφυλλη μιγαδική αναλυτική συνάρτηση δηλαδή για ισομορφισμό επιφανειών Riemann. $\Diamond$

Πόρισμα 3.48. *Κάθε modular συνάρτηση $f \in \mathcal{M}(X(1))$, είναι ρητή συνάρτηση της j. Αν επιπλέον η f είναι αναλυτική συνάρτηση στο $\mathbb{H}$, τότε η f είναι πολυώνυμο του j.*

Απόδειξη: Η συνάρτηση f είναι μερόμορφη συνάρτηση στο $\mathcal{M}(X(1))$, συνεπώς η $f \circ j^{-1}$ είναι μερόμορφη συνάρτηση του $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ δηλαδή είναι ρητή συνάρτηση, δηλαδή:

$$f \circ j^{-1}(t) = P(t), \text{ για κάποιο } P(t) \in \mathbb{C}(t).$$

Αντικαθιστώντας $t = j(x)$ με $x \in X(1)$ έχουμε ότι $f(x) = P(j(x))$.

Για το δεύτερο κομμάτι της απόδειξης γνωρίζουμε ότι $f = P(j)$ για κάποια ρητή συνάρτηση $P(t) \in \mathbb{C}(t)$. Ας υποθέσουμε ότι το P δεν είναι πολυώνυμο. Τότε υπάρχει ένα $t_0 \in \mathbb{C}$, ώστε $P(t_0) = \infty$ (θα πρέπει για αυτό το t_0 να μηδενίζεται το πολυώνυμο-παρονομαστής του $P(t)$). Από τον ισομορφισμο (3.10) έχουμε ότι υπάρχει $\tau_0 \in \mathbb{H}$ ώστε $j(\tau_0) = t_0$. Τότε όμως $f(\tau_0) = P(j(\tau_0)) = \infty$, που είναι σε αντίθεση με την υπόθεση ότι η f είναι αναλυτική συνάρτηση στο $\mathbb{H}$, και συνεπώς το P είναι πολυώνυμο. $\Diamond$

Πόρισμα 3.49 (Uniformization θεώρημα για ελλειπτικές καμπύλες). *Ας θεωρήσουμε μία ελλειπτική καμπύλη πάνω από το $\mathbb{C}$:*

$$E : y^2 = x^3 + Ax + B$$

με $\Delta = 4A^3 - 27B^2 \neq 0$[38]*, με $A, B \in \mathbb{C}$. Τότε υπάρχει μοναδικό lattice $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ώστε*

$$g_2(\Lambda) = 60G_4(\Lambda) = -4A \text{ και } g_3(\Lambda) = 140G_6(\Lambda) = -4B.$$

Η συνάρτηση

$$\mathbb{C}/\Lambda \to E : y^2 = x^3 + Ax + B,$$

$$z \mapsto \big(\wp(z;\Lambda), \frac{1}{2}\wp'(z;\Lambda)\big)$$

είναι μιγαδικός αναλυτικός ισομορφισμός. Είναι μία αναλυτική απεικόνιση μεταξύ επιφανειών Riemann.

[38] εδω παίρνουμε μη ιδιόμορφες καμπύλες.

Απόδειξη: Κάνοντας χρήση του θεωρήματος 3.47 μπορούμε να βρούμε $\tau \in \mathbb{H}$, ώστε

$$j(\tau) = 1728 \frac{4A^3}{4A^3 - 27B^2}.$$

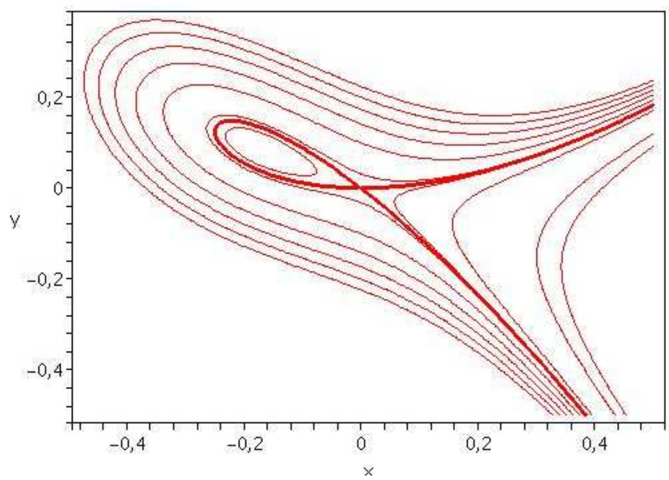
Στην συνέχεια υπολογίζουμε ότι

$$g_2(\Lambda) = -4A \text{ και } g_3(\Lambda) = -B,$$

δηλαδή βρήκαμε ένα lattice που να απεικονίζεται στην ελλειπτική καμπύλη E. $\Diamond$

Βγάλαμε έτσι το συμπέρασμα ότι η κλάση των ελλειπτικών καμπύλων που αναφέραμε στον ορισμό 3.46, περιέχει όλες τις κλάσεις ελλειπτικών καμπύλων επί του $\mathbb{C}$.

Είναι γνωστό ότι δύο ελλειπτικές καμπύλες $\mathbb{C}/\Lambda_1, \mathbb{C}/\Lambda_2$ είναι ισόμορφες (αντιστοιχούν στην ίδια j-αναλλοίωτο) αν και μόνο αν τα αντίστοιχα lattices $\Lambda_i = \langle 1, \tau_i \rangle$ είναι ίδια (ομόθετα[39]), δηλαδή όταν υπάρχει μετασχηματισμός $a \in PGL_2(\mathbb{Z})$ $= SL_2(\mathbb{Z})$ που να στέλνει το ένα lattice στο άλλο[40]. Το γεγονός αυτό θα μπορούσε να δώσει μία δεύτερη απόδειξη γιατί ο χώρος $\mathbb{H}/\Gamma$ είναι ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμίας ελλειπτικών καμπύλων.



Σχήμα 3.4: Μια ακολουθία από ελλειπτικές καμπύλες που συγκλίνουν στην 3.11.

Το σημείο στο άπειρο το οποίο τοποθετήσαμε για να συμπαγοποιήσουμε το πηλίκο $\mathbb{H}/SL_2(\mathbb{Z})$ δεν αντιστοιχεί σε ελλειπτική καμπύλη, πράγματι μπορούμε να υπολογίσουμε ότι για $j_0 \neq 0, 1728$ η ελλειπτική καμπύλη με εξίσωση

$$y^2 + xy = x^3 - \frac{36}{j_0 - 1728}x - \frac{1}{j_0 - 1728}$$

[39] υπάρχει $c \in \mathbb{C}^*$ έτσι ώστε $\Lambda_1 = c\Lambda_2$.

[40] πράγματι αν $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{H}$, τότε Λ_{τ_1} είναι ομόθετο με το Λ_{τ_2}, ανν υπάρχει $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ τέτοιο ώστε $\tau_2 = \frac{a\tau_1 + b}{c\tau_1 + d} \Rightarrow \tau_2 = \gamma(\tau_1)$.

έχει j-αναλλοίωτο ίση με j_0. Άρα για $j = \infty$ οδηγούμαστε στην ιδίομορφη καμπύλη με τύπο

$$y^2 + xy = x^3, \tag{3.11}$$

Πράγματι, δεν είναι δυνατόν να έχουμε συμπαγοποίηση του χώρου των ελλειπτικών καμπύλων χωρίς να αποφύγουμε να συμπεριλάβουμε στον χώρο αυτό και ιδιόμορφες καμπύλες. Για παράδειγμα η ακολουθία ελλειπτικών καμπύλων

$$y^2 + xy = x^3 + a,$$

συγκλίνει στην καμπύλη (3.11), (βλέπε σχήμα 3.4).

Ευρετήριο

Βιβλιογραφία

[1] William Fulton, *Algebraic Topology A First Course*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, (1995).

[2] Καρανικολόπουλος Σωτήρης, *Εισαγωγή Στην Αλγεβρική Τοπολογία*, Πτυχιακή Εργασία, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Μαθηματικών, (2003).

[3] Michio Kuga, *Galois' Dream: Group Theory and Differential Equations*, Birkhäuser, (1993).

[4] Joseph Rotman, *Θεωρία Galois*, Πανεπιστημιακά Κείμενα, Leader Books.

[5] James R. Munkres, *Topology A First Course*, Prentice Hall, (1975).

[6] William S. Massey, *A Basic Course in Algebraic Topology*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, (1991), (Chapter V).

[7] Thomas W. Hungerford, *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, (1989).

[8] A. I. Markushevich, *Theory Of Functions Of A Complex Variable Volume I*, Selected Russian Publications in The Mathematical Sciences, Prentice Hall, (1965).

[9] Otto Forster, *Lectures on Riemann Surfaces*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, (1991).

[10] R. Churcill - J. Brown, *Μιγαδικές Συναρτήσεις και Εφαρμογές*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, δεύτερη έκδοση, (1998).

[11] J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, τρίτη έκδοση, (1999).

[12] Shimura Goro, *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, Princeton University Press, (1971), (Chapter I).

[13] George McCarty, *Topology An Introduction with Application to Topological Groups*, Dover Publications, (1988).

[14] J. S. Milne, *Modular Functions and Modular Forms*, Courses Notes, www.jmilne.org/math (1997).

[15] Lars. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, International Series In Pure And Applied Mathematics, McGraw- Hill, Third Edition, (1979).

[16] Joseph H. Silerman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, (1991).

[17] Joseph H. Silerman, *Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, (1994).

[18] Kevin Timothy Chan, *Uniformization of Riemann Surfaces*, Senior Theses, Harvard university, (2004).

[19] I. Αντωνιάδης, *Ελλειπτικές Καμπύλες (το Θεώρημα του Mordell)*, (1999).

[20] Wikipedia, the free encyclopedia, http://en.wikipedia.org.