Πλιογκα Μαγδαληνη

Οι χωροι L^p

Μεταπτυχιακη Εργασια

Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Μαθηματικών
Σάμος 2009

Εισηγητης: Τσολομύτης Αντώνης

Επιτροπη

Τσολομύτης Αντώνης

Φελουζής Ευάγγελος

Στεφανόπουλος Ευάγγελος

Στους γονείς μου!

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Αυτή η μεταπτυχιακή εργασία εκπονήθηκε υπό την επίβλεψη και την καθοδήγηση του κ. Αντώνη Τσολομύτη. Για την πολύτιμη βοήθειά του, τη συνεργασία και τη συνεχή στήριξή του, χωρίς τις οποίες η εργασία δε θα είχε πραγματοποιηθεί, τον ευχαριστώ θερμά. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Ευάγγελο Φελουζή και τον κ. Ευάγγελο Στεφανόπουλο για το χρόνο που διέθεσαν και με τις παρατηρήσεις τους βοήθησαν στη βελτίωση της εργασίας αυτής.

Μ. Πλιόγκα, Σάμος 2009.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στο μέτρο

1.1 Εισαγωγή

Πρόβλημα: ο καθορισμός/ υπολογισμός του όγκου ή της επιφάνειας στον $\mathbb{R}^3$ ή $\mathbb{R}^2$ χωρίων που φράσσονται από επιφάνειες ή καμπύλες οι οποίες δεν είναι τόσο καλές ώστε να αποδίδουν οι τεχνικές του Απειροστικού Λογισμού.

Το βέλτιστο/ επιθυμητό θα ήταν η ύπαρξη συνάρτησης $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ ώστε οι τιμές της στα «καλά» σύνολα να συμπίπτουν με αυτές που δίνει ο Απειροστικός Λογισμός.

Επιθυμητές ιδιότητες:

(i) αν E_1,E_2,... πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία ξένων συνόλων τότε

$$\mu(E_1 \cup E_2 \cup \ldots) = \mu(E_1) + \mu(E_2) + \ldots$$

(ii) αν το E είναι μεταφορά, στροφή ή ανάκλαση του F τότε $\mu(E) = \mu(F)$

(iii) θέλουμε κάποια κανονικοποίηση , π.χ. $\mu(Q) = 1$ όπου Q ο μοναδιαίος κύβος

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_j < 1 \text{ για } j = 1, \ldots, n\}$$

Δυστυχώς κάτι τέτοιο είναι ανέφικτο ακόμα και στην περίπτωση $n = 1$. Ας δούμε γιατί:

Ορίζουμε στο σύνολο $[0, 1)$ μια σχέση ισοδυναμίας: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Από κάθε κλάση ισοδυναμίας επιλέγουμε ένα στοιχείο και σχηματίζουμε το σύνολο E (αυτό απαιτεί το αξίωμα της επιλογής). $\forall r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$ ορίζουμε το σύνολο

$$E_r = \{y + r : x \in E \cap [0, 1 - r)\} \cup \{y + r - 1 : x \in E \cap [1 - r, 1)\}.$$

Θα δείξουμε ότι $\forall x \in [0, 1)\, \exists! r : x \in E_r$. Έστω $x \in [0, 1)$ και έστω $y \in [x] \cap E$ (το E περιέχει ένα στοιχείο από κάθε κλάση ισοδυναμίας). Θέτω $r = x - y$ αν $x \geq y$ ή $r = x - y + 1$ αν $x < y$. Σε κάθε περίπτωση $x \in E_r$. Διότι αν $x \geq y$ τότε $x = y + r$, $y \in E$ και $y = x - r \leq 1 - r$. Αλλιώς αν $x < y$ τότε $x = y + r - 1$, $y \in E$, και $y = x - r + 1 \geq 1 - r$ και $y = x - r + 1 < 1 \Leftrightarrow x < r = x - y + 1 \Leftrightarrow y < 1$.

Δείξαμε ότι $\forall x \in [0,1)\, \exists r : x \in E_r$. Τώρα θα δείξουμε ότι αυτό το r είναι μοναδικό. Αν $x \in E_r \cap E_s$ και $r \neq s$ το ($x - r$ ή το $x - r + 1$) και το ($x - s$ ή το $x - s + 1$) είναι διακεκριμένα στοιχεία του E (διότι $x - r = x - s \Leftrightarrow r = s$ και $x - r = x - s + 1 \Leftrightarrow r = s - 1 < 0, r \in [0,1)$), που όμως ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας αφού έχουν ρητή διαφορά. Αυτό είναι αδύνατο.

Έστω τώρα ότι το $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ ικανοποιούν τα (i), (ii) και (iii). Από το (i) και (ii) $\mu(E) = \mu(E \cap [0, 1 - r)) + \mu(E \cap [1 - r, 1))\ \forall r \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$. Αλλά το $\mathbb{Q} \cap [0,1)$ είναι αριθμήσιμο οπότε

$$1 \overset{\text{(iii)}}{=} \mu([0,1)) \overset{\text{(ii)}}{=} \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} \mu(E_r) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} \mu(E)$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού $\sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} \mu(E) < \infty \Rightarrow \mu(E) = 0$ αλλά τότε $\sum \mu(E) = 0 \neq 1$.

Θα μπορούσαμε να χαλαρώσουμε το (i) να ισχύει μόνο σε πεπερασμένα αθροίσματα, αλλά ούτε αυτό είναι καλό αφού η προσθετικότητα για άπειρες ακολουθίες είναι απαραίτητη για όλα τα αποτελέσματα συνέχειας και ορίων. Επιπλέον αν $n \geq 3$ αυτή η ασθενέστερη εκδοχή της (i) είναι ασύμβατη με τα (ii) και (iii).

Πράγματι το 1924 οι Banach και Tarski απέδειξαν το ακόλουθο καταπληκτικό αποτέλεσμα: Αν U και V φραγμένα ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Τότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ και υποσύνολα $E_1,\ldots,E_k$, $F_1,\ldots,F_k \in \mathbb{R}^n$ ώστε

(i) E_j ξένα και $\cup E_j = U$.

(ii) F_j ξένα και $\cup F_j = V$.

(iii) το F_j είναι μεταφορές ή/ και στροφές ή/ και ανακλάσεις του E_j, $\forall j = 1,\ldots$

Διέξοδος: Αλλάζουμε το πεδίο ορισμού του μ από το να είναι όλο το $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ να είναι κατάλληλες υποοικογένειες. Τα μ λέγονται μέτρα και εμφανίζονται σε διάφορα επιστημονικά αντικείμενα όπως στη φυσική ως κατανομή μάζας ή στις πιθανότητες ως πιθανότητα.

1.2 σ-άλγεβρες

Έστω $X \neq \emptyset$. Μια *άλγεβρα* συνόλων στο X είναι μια μη κενή οικογένεια συνόλων $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ η οποία είναι κλειστή στις πεπερασμένες ενώσεις και στα συμπληρώματα. Δηλαδή, αν $E_1,E_2,\ldots,E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \cup_{j=1}^n E_j \in \mathcal{A}$ και $\forall E \in \mathcal{A} \Rightarrow E^c \in \mathcal{A}$. Αν αλλάξουμε τον ορισμό ώστε αριθμήσιμες ενώσεις να ανήκουν στην $\mathcal{A}$ τότε έχουμε τον ορισμό της σ-άλγεβρας.

Παρατήρηση 1.2.1. *$\cap_j E_j = (\cup_j E_j^c)^c \in \mathcal{A}$ άρα μια σ-άλγεβρα περιέχει και αριθμήσιμες τομές των στοιχείων της. Έτσι αν $E \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A} \neq \emptyset$) $\Rightarrow E^c \in \mathcal{A} \Rightarrow \emptyset = E \cap E^c \in \mathcal{A} \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{A}$. Επίσης $X = E \cup E^c \in \mathcal{A} \Rightarrow X \in \mathcal{A}$.*

Παρατήρηση 1.2.2. *Μια άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα αν είναι κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις ξένων στοιχείων της: Αν $(E_j)_{j=1}^n \subseteq \mathcal{A}$ θέτουμε*

$$F_k = E_k \Bigg\backslash \left[\bigcup_1^{k-1} E_j \right] = E_k \cap \left(\bigcup_1^{k-1} E_j \right)^c \in \mathcal{A}$$

και (F_j) ξένα και επιπλέον $\cup F_k = \cup E_k$. Αυτό το τέχνασμα, το να μετατρέπει κανείς μια οικογένεια συνόλων σε σύνολα ξένα μεταξύ τους, θα χρησιμοποιηθεί συχνά παρακάτω.

Παράδειγμα 1: Για κάθε σύνολο X, το $\mathcal{P}(X)$ και το $\{\emptyset, X\}$ είναι σ-άλγεβρες.

Παράδειγμα 2: Αν X υπεραριθμήσιμο (π.χ. $X = \mathbb{R}$) η

$$\mathcal{A} = \{E \subseteq X : E \text{ αριθμήσιμο ή } E^c \text{ αριθμήσιμο } \}$$

είναι η σ-άλγεβρα των αριθμήσιμων συνόλων ή συν-αριθμήσιμων συνόλων.

Είναι εύκολο να ελέγξει κανείς ότι η τομή σ-άλγεβρων είναι σ-άλγεβρα. Έτσι αν $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ υπάρχει μοναδική ελάχιστη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ που περιέχει την οικογένεια $\mathcal{E}$ (η τομή όλων των σ-άλγεβρων που περιέχουν την $\mathcal{E}$ και υπάρχει τουλάχιστον μία τέτοια, η $\mathcal{P}(X)$). Η $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ λέγεται «η σ-άλγεβρα που παράγεται από την $\mathcal{E}$».

Παρατήρηση 1.2.3. *Αν $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{F}) \Rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{F})$.*

Ορισμός 1.2.4. *Αν X μετρικός ή τοπολογικός χώρος, η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα ανοιχτά υποσύνολα του X λέγεται Borel σ-άλγεβρα και συμβολίζεται με $\mathcal{B}_X$. Τα στοιχεία της λέγονται σύνολα Borel. Η $\mathcal{B}_X$ περιέχει ανοιχτά, κλειστά σύνολα, αριθμήσιμες ενώσεις κλειστών συνόλων κ.λ.π.*

- *Αριθμήσιμη τομή ανοιχτών συνόλων ονομάζονται G_δ σύνολα.*
- *Αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων ονομάζονται F_σ σύνολα.*
- *Αριθμήσιμη ένωση G_δ συνόλων ονομάζονται $G_{\delta\sigma}$ σύνολα.*
- *Αριθμήσιμη τομή F_σ συνόλων ονομάζονται $F_{\sigma\delta}$ σύνολα.*

(δ και σ από τα γερμανικά Durchshnit και Summe, δηλαδή τομή και ένωση).

Η Borel σ-άλγεβρα στο $\mathbb{R}$ θα είναι σημαντική παρακάτω και γι' αυτό δίνουμε στην επόμενη πρόταση διάφορους τρόπους με τους οποίους μπορεί να παραχθεί.

Πρόταση 1.2.5. *Η $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ μπορεί να παραχθεί από τις ακόλουθες οικογένειες:*

- *ανοιχτά διαστήματα $\mathcal{E}_1 = \{(\alpha, b) : \alpha < b\}$*
- *κλειστά διαστήματα $\mathcal{E}_2 = \{[\alpha, b] : \alpha < b\}$*
- *ημι-ανοιχτά διαστήματα $\mathcal{E}_3 = \{(\alpha, b] : \alpha < b\}$ ή $\mathcal{E}_4 = \{[\alpha, b) : \alpha < b\}$*
- *$\mathcal{E}_5 = \{(\alpha, \infty) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ ή $\mathcal{E}_6 = \{(-\infty, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$*
- *$\mathcal{E}_7 = \{[\alpha, \infty) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ ή $\mathcal{E}_8 = \{(-\infty, \alpha] : \alpha \in \mathbb{R}\}$*

Απόδειξη: Όλα τα παραπάνω είναι σύνολα Borel, άρα $\mathcal{M}(\mathcal{E}_j) \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Κάθε ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμη ένωση διαστημάτων άρα $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$. Ομοίως κάθε $\mathcal{M}(\mathcal{E}_j)$, $j \geq 2$, περιέχει τα ανοιχτά διαστήματα, άρα $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{E}_j)$.□

Έστω $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ συλλογή μη κενών συνόλων και έστω $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Επίσης $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ η προβολή στην α-συντεταγμένη. Αν $\mathcal{M}_\alpha$ είναι μια σ-άλγεβρα στο X_α για κάθε α, η σ-άλγεβρα γινόμενο στο X είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα

$$\{\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) : E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha, \alpha \in A\}.$$

Αυτή τη σ-άλγεβρα τη συμβολίζουμε με $\otimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$.

Πρόταση 1.2.6. *Αν A αριθμήσιμο, τότε η $\otimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$ είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα $\{\prod_{\alpha \in A} E_\alpha : E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha\}$.*

Απόδειξη: $E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha \Rightarrow \pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) = \prod_{\beta \in A} E_\beta$ με $E_\beta = X_\beta$ $\forall \beta \neq \alpha$ άρα $\otimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha \subseteq \mathcal{M}\{\prod_{\alpha \in A} E_\alpha : E_\alpha \in M_\alpha\}$ (είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα $\{\prod_{\alpha \in A} E_\alpha : E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha\}$). Αντιστρόφως, $\prod_{\alpha \in A} E_\alpha = \cap_{\alpha \in A} \pi_\alpha^{-1}(E_\alpha)$ το οποίο ανήκει στο $\otimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$, γιατί το A είναι αριθμήσιμο. Άρα η τομή είναι αριθμήσιμη και $\{\prod_{\alpha \in A} E_\alpha : E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha\} \subseteq \otimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$. Από την Παρατήρηση 1.2.3 έπεται ότι $\mathcal{M}\{\prod_{\alpha \in A} E_\alpha : E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha\} \subseteq \otimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$. □

Πρόταση 1.2.7. *Έστω ότι η $\mathcal{M}_\alpha$ παράγεται από την οικογένεια $\mathcal{E}_\alpha$, $\alpha \in A$. Τότε η $\otimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$ παράγεται από την $\mathcal{F}_1 = \{\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) : E_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha, \alpha \in A\}$. Αν A αριθμήσιμο και $X_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha$, $\forall \alpha$, τότε η $\otimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$ παράγεται από την $\mathcal{F}_2 = \{\prod_{\alpha \in A} : E_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha\}$.*

Απόδειξη: Φανερά $\mathcal{M}(\mathcal{F}_1) \subseteq \otimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$. Αντιστρόφως $\forall \alpha$, η $\{E \subseteq X_\alpha : \pi_\alpha^{-1}(E) \in \mathcal{M}(\mathcal{F}_1)\}$ είναι σ-άλγεβρα στο X_α που περιέχει την $\mathcal{E}_\alpha$, άρα και την $\mathcal{M}_\alpha$. Δηλαδή $\pi_\alpha^{-1}(E) \in \mathcal{M}(\mathcal{F}_1)$, $\forall E \in \mathcal{M}_\alpha$, $\forall \alpha \in A$ και άρα $\otimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{F}_1)$. Ο δεύτερος ισχυρισμός προκύπτει από τον πρώτο όπως στην απόδειξη της Πρότασης 1.2.6. □

Πρόταση 1.2.8. *Έστω $X_1, \ldots, X_n$ μετρικοί χώροι και έστω $X = \prod_1^n X_j$, εφοδιασμένο με τη μετρική γινόμενο. Τότε $\otimes_{j=1}^n \mathcal{B}_{X_j} \subseteq \mathcal{B}_X$. Αν οι X_j είναι διαχωρίσιμοι τότε $\otimes_{j=1}^n \mathcal{B}_{X_j} = \mathcal{B}_X$.*

Απόδειξη: Η $\otimes_1^n \mathcal{B}_{X_j}$ παράγεται (από την Πρόταση 1.2.7) από τα σύνολα $\pi_j^{-1}(U_j)$, $1 \leq j \leq n$ με U_j ανοιχτό στον X_j. Αλλά αυτά τα σύνολα είναι ανοιχτά στον X άρα $\otimes_{j=1}^n \mathcal{B}_{X_j} \subseteq \mathcal{B}_X$. Έστω τώρα ότι $(x_j^k)_{k=1}^\infty$ πυκνό στον X_j και $\mathcal{E}_j$ η συλλογή των ανοιχτών μπαλών με κέντρα τα x_j^k, $k = 1, 2, \ldots$ και ρητή ακτίνα . Έτσι κάθε ανοιχτό σύνολο του X_j είναι ένωση στοιχείων της $\mathcal{E}_j$, και μάλιστα αριθμήσιμη ένωση αφού, η $\mathcal{E}_j$ είναι αριθμήσιμη. Τα στοιχεία του X με συντεταγμένες από τα x_j^k είναι αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολό του. Οι μπάλες του X, με κέντρα αυτά τα στοιχεία και ακτίνα ρητό r, είναι γινόμενα μπαλών ακτίνας r στα X_j, με κέντρο από τα x_j^k, $k = 1, 2, \ldots$ Έτσι η $\mathcal{B}_{X_j}$ παράγεται από την $\mathcal{E}_j$ και η $\mathcal{B}_X$ από τα $\{E_1 \times E_2 \ldots \times E_n : E_j \in \mathcal{E}_j\}$. Από την Πρόταση 1.2.7 έπεται ότι $\mathcal{B}_X = \otimes_{j=1}^n \mathcal{B}_{X_j}$. □

Πόρισμα 1.2.9. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \otimes_1^n \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

Ορισμός 1.2.10. *Μια οικογένεια $\mathcal{E}$, αποτελούμενη από υποσύνολα του X, λέγεται στοιχειώδης όταν*

(i) $\emptyset \in \mathcal{E}$

(ii) $E, F \in \mathcal{E} \Rightarrow E \cap F \in \mathcal{E}$

(iii) $E \in \mathcal{E} \Rightarrow$ *το* E^c *είναι πεπερασμένη ένωση στοιχείων της* $\mathcal{E}$.

Πρόταση 1.2.11. *Αν $\mathcal{E}$ είναι στοιχειώδης οικογένεια, η συλλογή $\mathcal{A}$ των πεπερασμένων ξένων ενώσεων, στοιχείων της $\mathcal{E}$, είναι άλγεβρα.*

Απόδειξη: Θα υποθέσουμε ότι αν $E \in \mathcal{E}$ τότε το E^c είναι ένωση δύο ξένων στοιχείων της $\mathcal{E}$. Η απόδειξη για περισσότερα είναι ανάλογη. Αν $A, B \in \mathcal{E}$ θα δείξουμε ότι $A \cup B \in \mathcal{A}$ και $A \backslash B \in \mathcal{A}$. Αλλά $B \in \mathcal{E} \Rightarrow B^c = C_1 \cup C_2$, $C_1, C_2 \in \mathcal{E}$, ξένα. Έτσι $A \backslash B = (A \cap C_1) \cup (A \cap C_2)$, οπότε $A \cup B = (A \backslash B) \cup B$. Τα παραπάνω είναι ξένες ενώσεις άρα ανήκουν στην $\mathcal{A}$. Άρα από επαγωγή αν $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{E} \Rightarrow \cup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{A}$, γιατί η επαγωγική υπόθεση είναι $A_1, \ldots, A_{n-1}$ ξένα, οπότε $\cup_1^n A_j = (\cup_1^{n-1} A_j \backslash A_n) \cup A_n$ που είναι ξένη ένωση. Έτσι η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες ενώσεις. Για τα συμπληρώματα , αν $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{E}$ και $A_j^c = B_j^1 \cap B_j^2$, ($B_j^1, B_j^2 \in \mathcal{E}$ ξένα). Τότε

$$\left(\bigcup_1^n A_j\right)^c = \bigcap_1^n (B_j^1 \cap B_j^2) = \bigcup \{B_1^{k^1} \cap \ldots \cap B_n^{k^n} : k_1, \ldots, k_n = 1, 2\} \in \mathcal{A}.$$

□

1.3 Μέτρα

Ορισμός 1.3.1. *Έστω ότι το σύνολο X είναι εφοδιασμένο με μια σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$. Ένα μέτρο στον χώρο $(X, \mathcal{M})$ είναι μια συνάρτηση $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ ώστε*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) *αν* $(E_j)_{j=1}^\infty$ *ακολουθία ξένων συνόλων στην* $\mathcal{M}$ *τότε* $\mu(\cup_1^\infty E_j) = \sum_1^\infty \mu(E_j)$.

Η (ii) λέγεται «αριθμήσιμη προσθετικότητα» και συνεπάγεται την πεπερασμένη προσθετικότητα βάζοντας $E_j = \emptyset$ από κάποιο δείκτη και μετά. Το $(X, \mathcal{M})$ λέγεται μετρήσιμος χώρος και η τριάδα $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος μέτρου.

Αν $\mu(X) < \infty$ το μέτρο λέγεται πεπερασμένο. Αν $X = \cup_1^\infty E_j$, $E_j \in \mathcal{M}$, $\mu(E_j) < \infty \ \forall j$, το μ λέγεται σ-πεπερασμένο. Αν $E = \cup_1^\infty E_j$, $E_j \in \mathcal{M}$, $\mu(E_j) < \infty \ \forall j$, το E λέγεται σ-πεπερασμένο για το μέτρο μ. Τέλος, αν $\forall E \in \mathcal{M}$ με $\mu(E) = \infty$, τότε υπάρχει $F \in \mathcal{M}$ με $F \subseteq E$ ώστε $0 < \mu(F) < \infty$ το μ λέγεται ημιπεπερασμένο (semifinite). Κάθε σ-πεπερασμένο είναι ημιπεπερασμένο, αλλά δεν ισχύει το αντίστροφο. Συνήθως τα μέτρα είναι σ-πεπερασμένα. Όσα δεν είναι, έχουν συχνά παθολογική συμπεριφορά.

Παραδείγματα: (i) Έστω $X \neq \emptyset$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ και $f : X \to [0, \infty]$ μια συνάρτηση. Η f ορίζει ένα μέτρο πάνω στην $\mathcal{M}$ ως εξής: $\mu(E) = \sum_{x \in E} f(x)$.

Το μ είναι ημιπεπερασμένο αν και μόνο αν $f(x) < \infty$ $\forall x \in X$. Το μ είναι σ-πεπερασμένο αν και μόνο αν το μ είναι ημιπεπερασμένο και το $\{x : f(x) > 0\}$ είναι αριθμήσιμο

- Αν $f(x) = 1$ $\forall x$ το μ λέγεται «αριθμητικό μέτρο».
- Αν $f(x) = 0$ $\forall x \neq x_0$ και $f(x_0) = 1$ το μ λέγεται μέτρο Dirac στο x_0.

(Χρησιμοποιούμε τα ίδια ονόματα και για την περίπτωση όπου $\mathcal{M} \neq \mathcal{P}(X)$.)

(ii) Έστω X υπεραριθμήσιμο και $\mathcal{M}$ η σ-άλγεβρα των αριθμήσιμων και συναριθμήσιμων υποσυνόλων του X. Η απεικόνιση $\mu(E) = 0$ αν E αριθμήσιμο και $\mu(E) = 1$ αν E συναριθμήσιμο είναι μέτρο.

(iii) Έστω X απειροσύνολο, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ και $\mu(E) = 0$ αν E πεπερασμένο και $\mu(E) = \infty$ αν E άπειρο. Τότε το μ είναι πεπερασμένα προσθετικό μέτρο αλλά όχι μέτρο.

Θεώρημα 1.3.2. *Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος μέτρου.*

(i) *(Μονοτονία) Αν $E, F \in \mathcal{M}$ και $E \subseteq F \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$.*

(ii) *(Υποπροσθετικότητα) Αν $(E_j)_1^\infty \subseteq \mathcal{M} \Rightarrow \mu(\cup_1^\infty E_j) \leq \sum_1^\infty \mu(E_j)$.*

(iii) *(Συνέχεια από αριστερά) Αν $(E_j)_1^\infty \subseteq \mathcal{M}$ και $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots \Rightarrow \mu(\cup_1^\infty E_j) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j)$.*

(iv) *(Συνέχεια από δεξιά) Αν $(E_j)_1^\infty \subseteq \mathcal{M}$ και $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots$ και $\mu(E_n) < \infty$ για κάποιο $n \Rightarrow \mu(\cap_1^\infty E_j) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j)$.*

Απόδειξη: (i) $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \backslash E) \geq \mu(E)$.

(ii) $F_1 = E_1$, $F_k = E_k \backslash (\cup_{j=1}^{k-1} E_j)$, $\forall k > 1$. Τα F_k είναι ξένα και $\cup_1^n F_j = \cup_1^n E_j$. Από το (i)

$$\mu\left(\bigcup_1^\infty E_j\right) = \mu\left(\bigcup_1^\infty F_j\right) = \sum_1^\infty \mu(F_j) \leq \sum_1^\infty \mu(E_j).$$

(iii) Θέτουμε $E_0 = \emptyset$. Έχουμε

$$\mu\left(\bigcup_1^\infty E_j\right) = \sum_1^\infty \mu(E_j \backslash E_{j-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n \mu(E_j \backslash E_{j-1}) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

(iv) Θέτουμε $F_j = E_n \backslash E_j$, $\forall j > n$. Οπότε $F_{n+1} \subseteq F_{n+2} \subseteq \ldots$, $\mu(E_n) = \mu(F_j) + \mu(E_j)$, $\forall j > n$ και $\cup_{j=n+1}^\infty F_j = E_n \backslash (\cap_{j=1}^\infty E_j)$. Οπότε από το (iii) έχουμε

$$\mu(E_n) = \mu\left(\bigcap_1^\infty E_j\right) + \lim_{j\to\infty} \mu(F_j) = \mu\left(\bigcap_1^\infty E_j\right) + \lim_{j\to\infty} (\mu(E_n) - \mu(E_j)).$$

Επειδή $\mu(E_n) < \infty$ έχουμε

$$\mu\left(\bigcap_{1}^{\infty} E_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j).$$

$\square$

Παρατήρηση 1.3.3. *Η συνθήκη $\mu(E_n) < \infty$ είναι απαραίτητη (για παράδειγμα $\cap_{n=1}^{\infty} [n,\infty) = \emptyset$).*

Ορισμός 1.3.4. *Αν $E \in \mathcal{M}$ και $\mu(E) = 0$. Τότε το E λέγεται μηδενικό σύνολο. Έστω ότι μία πρόταση ισχύει για όλα τα $x \in X$, εκτός από τα x σε ένα σύνολο μέτρου μηδέν. Τότε λέμε ότι η πρόταση ισχύει σχεδόν παντού (σ.π.) ή «σχεδόν για κάθε x».*

Αν $\mu(E) = 0$ και $F \subseteq E$ τότε από τη μονοτονία του μ έχουμε ότι $\mu(F) = 0$, εφόσον βέβαια $F \in \mathcal{M}$ (π.χ. αν $\mathcal{M} = \{\emptyset, X\}$), αυτό μπορεί να μην είναι σωστό).

Ορισμός 1.3.5. *Ένα μέτρο λέγεται πλήρες, αν το πεδίο ορισμού του περιέχει όλα τα υποσύνολα των μηδενικών συνόλων.*

Θεώρημα 1.3.6. *Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος μέτρου, $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{M} : \mu(N) = 0\}$ και $\overline{\mathcal{M}} = \{E \cup F : E \in \mathcal{M}$ και $F \subseteq N$ για κάποιο $N \in \mathcal{N}\}$. Τότε η $\overline{\mathcal{M}}$ είναι σ-άλγεβρα και υπάρχει μοναδική επέκταση $\bar{\mu}$ του μ στην $\overline{\mathcal{M}}$, όπου $\bar{\mu}$ πλήρες. Το $\bar{\mu}$ λέγεται πλήρωση του μ και η $\overline{\mathcal{M}}$ πλήρωση της $\mathcal{M}$.*

Απόδειξη: Οι $\mathcal{M}$ και $\mathcal{N}$ είναι κλειστές στις αριθμήσιμες ενώσεις, άρα το ίδιο ισχύει και για την $\overline{\mathcal{M}}$. Αν $E \cup F \in \overline{\mathcal{M}}$ και $F \subseteq N$, $\mu(N) = 0$, $E \in \mathcal{M}$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $E \cap N = \emptyset$ (αλλιώς αντικαθιστούμε τα F,N με τα $F \backslash E$, $N \backslash E$). Έτσι $E \cup F = (E \cup N) \cap (N^c \cup F) \Rightarrow (E \cup F)^c = (E \cup N)^c \cup (N \backslash F)$. Όμως $(E \cup N)^c \in \mathcal{M}$ και $N \backslash F \subseteq N$, άρα $(E \cup F)^c \in \overline{\mathcal{M}}$. Άρα η $\mathcal{M}$ είναι σ-άλγεβρα. Θέτουμε $\bar{\mu}(E \cup F) = \mu(E)$. Αυτό είναι καλά ορισμένο, διότι αν $E_1 \cup F_1 = E_2 \cup F_2$ $(F_j \subseteq N_j \in \mathcal{N}) \Rightarrow E_1 \subseteq E_2 \cup F_2$, οπότε $\mu(E_1) \leq \mu(E_2) + \mu(N_2) = \mu(E_2)$. Ομοίως $\mu(E_2) \leq \mu(E_1)$, άρα $\mu(E_1) = \mu(E_2) \Rightarrow \bar{\mu}(E_1 \cup F_1) = \bar{\mu}(E_2 \cup F_2)$. Εύκολα βλέπει κανείς ότι το $\bar{\mu}$ είναι πλήρες μέτρο στην $\overline{\mathcal{M}}$ και η μοναδική επέκταση του μ στη $\overline{\mathcal{M}}$. $\square$

1.4 Εξωτερικά μέτρα

Τα εξωτερικά μέτρα είναι ένα εργαλείο με το οποίο μπορούμε να κατασκευάσουμε μέτρα.

Ορισμός 1.4.1. *Μία συνάρτηση $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ λέγεται εξωτερικό μέτρο αν*

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

(ii) *Αν* $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$,

(iii) $\mu^*(\cup_1^{\infty} A_j) \leq \sum_1^{\infty} \mu^*(A_j)$.

Η ονομασία «εξωτερικό μέτρο» προκύπτει από τον τρόπο κατασκευής τους. Πρώτα ορίζει κανείς ένα είδος «πρότυπου-μέτρου» σε μια οικογένεια $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Μετά προσεγγίζει υποσύνολα του X «από έξω», με αριθμήσιμες ενώσεις στοιχείων του $\mathcal{E}$.

Πρόταση 1.4.2. *Έστω $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ και $\rho : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ ώστε $\emptyset \in \mathcal{E}$, $X \in \mathcal{E}$ και $\rho(\emptyset) = 0$. Για κάθε $A \subseteq X$ ορίζουμε*

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_1^\infty \rho(E_j) : E_j \in \mathcal{E} \text{ και } A \subseteq \bigcup_1^\infty E_j \right\}.$$

Το μ^* είναι εξωτερικό μέτρο.

Απόδειξη: Φανερά αφού $X \in \mathcal{E}$ κάθε $A \subseteq X$ καλύπτεται από στοιχεία του $\mathcal{E}$. Άρα ο ορισμός του μ^* είναι καλός. Φανερά $\mu^*(\emptyset) = 0$ (βάζουμε $E_j = \emptyset$ $\forall j$). Επίσης, αν $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (τα καλύμματα του B είναι και καλύμματα του A). Έστω τώρα $A_j \subseteq X$ και έστω $\varepsilon > 0$, $\exists (E_j^k)_{k=1}^\infty : A_j \subseteq \cup_{k=1}^\infty E_j^k$ και $\sum_{k=1}^\infty \rho(E_j^k) \leq \mu^*(A_j) + \varepsilon 2^{-j}$. Αν $A = \cup_{j=1}^\infty A_j \Rightarrow A \subseteq \cup_{j,k=1}^\infty E_j^k$ και $\mu^*(\cup_1^\infty A_j) = \mu^*(A) \leq \sum_{j,k}^\infty \rho(E_j^k) = \sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty \rho(E_j^k) \leq \sum_{j=1}^\infty (\mu^*(A_j) + \varepsilon 2^{-j}) = \sum_{j=1}^\infty \mu^*(A_j) + \varepsilon$. □

Ορισμός 1.4.3. *Έστω μ^* εξωτερικό μέτρο στο X. Το $A \subseteq X$ λέγεται μ^*-μετρήσιμο αν $\forall E \subseteq X$*

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Φανερά, η $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ ισχύει από την υποπροσθετικότητα του μ^*, $\forall E$, $\forall A$. Άρα, για να δείξουμε ότι το A είναι μ^*-μετρήσιμο, αρκεί να δείξουμε ότι $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$, $\forall E$, με $\mu^*(E) < \infty$ (για $\mu^*(E) = \infty$ είναι προφανής).

Θεώρημα 1.4.4 (Το Θεώρημα του Καραθεοδωρή). *Έστω μ^* εξωτερικό μέτρο στο X και $\mathcal{M}$ η συλλογή όλων των μ^*-μετρήσιμων υποσυνόλων του X. Τότε*

(i) *Η $\mathcal{M}$ είναι σ-άλγεβρα.*

(ii) *Το μ^* περιορισμένο στην $\mathcal{M}$ είναι πλήρες μέτρο.*

Απόδειξη: Η $\mathcal{M}$ είναι κλειστή στα συμπληρώματα γιατί ο ορισμός των μ^*-μετρήσιμων είναι συμμετρικός ως προς A και A^c. Αν $A, B \in \mathcal{M}$ και $E \subseteq X$, από την υποπροσθετικότητα έχουμε

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \\
&= \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) \\
&\quad + \mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c) \\
&\geq \mu^*((E \cap A \cap B) \cup (E \cap A \cap B^c) \cup (E \cap A^c \cap B)) \\
&\quad + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c) \\
&\geq \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c).
\end{aligned}$$

Άρα $A \cup B \in \mathcal{M}$, οπότε η $\mathcal{M}$ είναι άλγεβρα. Επιπλέον, το μ^* είναι πεπερασμένα προσθετικό, διότι αν $A,B \in \mathcal{M}$ και $A \cup B = \emptyset$, τότε

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*((A \cup B) \cap A) + \mu^*((A \cup B) \cap A^c) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Για να δείξουμε ότι η $\mathcal{M}$ είναι σ-άλγεβρα, αρκεί να δείξουμε ότι είναι κλειστή στις αριθμήσιμες ξένες ενώσεις. Έστω $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων συνόλων της $\mathcal{M}$. Θέτουμε $B_n = \cup_{j=1}^{n} A_j$ και $B = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$. Έστω $E \subseteq X$, τότε

$$\begin{aligned}
\mu^*(E \cap B_n) &= \mu^*((E \cap B_n) \cap A_n) + \mu^*((E \cap B_n) \cap A_n^c) \\
&= \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1}),
\end{aligned}$$

αφού A_n ξένα με τα A_j, για $j < n$, οπότε $A_j \subseteq A_n^c$ $\forall j < n$. Με επαγωγή $\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu^*(E \cap A_j)$. Άρα

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) \geq \sum_{j=1}^{n} \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap B^c).$$

Αφήνοντας το $n \to \infty$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap B^c) \\
&\geq \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) \geq \mu^*(E).
\end{aligned}$$

Άρα $B \in \mathcal{M}$ και η $\mathcal{M}$ είναι σ-άλγεβρα. Θέτοντας $E = B$ έχουμε

$$\mu^*(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(B \cap A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) \Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j),$$

δηλαδή το μ^* είναι αριθμήσιμα προσθετικό στη $\mathcal{M}$. Το $\mu^* \mid \mathcal{M}$ είναι πλήρες μέτρο, γιατί αν $\mu^*(A) = 0$, $E \subseteq X$,

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E).$$

Άρα $A \in \mathcal{M}$. □

Το Θεώρημα του Καραθεοδωρή μας επιτρέπει να επεκτείνουμε μέτρα ορισμένα σε άλγεβρες, σε μέτρα σε σ-άλγεβρες.

Ορισμός 1.4.5. *Αν $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ είναι άλγεβρα, μια συνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ λέγεται προμέτρο αν*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) $\mu(\cup_1^{\infty} A_j) \leq \sum_1^{\infty} \mu(A_j)$ *για ξένα* $A_j \in \mathcal{A}$.

Ένα προμέτρο δεν είναι ακόμα μέτρο γιατί η $\mathcal{A}$ μπορεί να μην είναι σ-άλγεβρα. Ένα προμέτρο μ σε μια άλγεβρα $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, δίνει ένα εξωτερικό μέτρο, το

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_1^\infty \mu(A_j) : A_j \in \mathcal{A} \text{ και } E \subseteq \bigcup_1^\infty A_j\right\}. \tag{1.1}$$

Πρόταση 1.4.6. *Αν μ προμέτρο στην $\mathcal{A}$ και μ^* όπως στην (1.1), τότε*

(i) $\mu^* \mid \mathcal{A} = \mu$

(ii) $\forall A \in \mathcal{A}$ *είναι μ^*-μετρήσιμο.*

Απόδειξη: (i) Αν $E \in \mathcal{A}$ θα δείξουμε ότι $\mu(E) = \mu^*(E)$. Φανερά, $\mu(E) \geq \mu^*(E)$, γιατί θέτοντας $A_1 = E \in \mathcal{A}$ και $A_j = \emptyset$, $\forall j \geq 2$, ισχύει $E \subseteq \cup_1^\infty A_j$ και $\mu^*(E) \leq \sum_1^\infty \mu(A_j) = \mu(E)$. Αντιστρόφως, έστω $A_j \in \mathcal{A}$ με $E \subseteq \cup_1^\infty A_j$. Θα δείξουμε ότι $\sum_1^\infty \mu(A_j) \geq \mu(E)$, οπότε παίρνοντας infimum θα προκύψει $\mu^*(E) \geq \mu(E)$. Θέτουμε $B_n = E \cap (A_n \setminus (\cup_{j=1}^{n-1} A_j))$. Τα B_n είναι ξένα και η ένωσή τους είναι το E, αφού $E \subseteq \cup_1^\infty A_j$. Δηλαδή $E = \cup_1^\infty B_n$ και άρα $\cup_1^\infty B_n \in \mathcal{A}$. Έτσι από τον ορισμό του προμέτρου $\mu(E) = \sum_1^\infty \mu(B_j) \leq \sum_1^\infty \mu(A_j)$.

(ii) Έστω $A \in \mathcal{A}$ και $E \subseteq X$. Έστω $\varepsilon > 0$ και $(B_j)_{j=1}^\infty \subseteq \mathcal{A}$, με $E \subseteq \cup_{j=1}^\infty B_j$ και $\sum_1^\infty \mu(B_j) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) + \varepsilon &\geq \sum_1^\infty \mu(B_j) \\
&\geq \sum_1^\infty \mu(B_j \cap A) + \mu(B_j \cap A^c) \qquad (1.2) \\
&\overset{(i)}{=} \sum_1^\infty \mu^*(B_j \cap A) + \mu^*(B_j \cap A^c) \\
&\geq \mu^*\left(\bigcup_1^\infty B_j \cap A\right) + \mu^*\left(\bigcup_1^\infty B_j \cap A^c\right) \\
&\geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c),
\end{aligned}$$

όπου στην (1.2) χρησιμοποιήσαμε ότι το μ είναι προμέτρο. Ισχύει $\forall \varepsilon > 0$, άρα το A είναι μ^*-μετρήσιμο. □

Θεώρημα 1.4.7. *Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ άλγεβρα, μ προμέτρο στην $\mathcal{A}$ και $\mathcal{M}$ η σ-άλγεβρα που παράγεται από την $\mathcal{A}$.*

(i) *Υπάρχει μέτρο $\bar{\mu}$ στη $\mathcal{M}$ που $\bar{\mu} \mid \mathcal{A} = \mu$. Συγκεκριμένα, $\bar{\mu} = \mu^* \mid \mathcal{M}$, όπου το μ^* ορίζεται από την (1.1).*

(ii) *Αν ν ένα άλλο τέτοιο μέτρο στη $\mathcal{M} \Rightarrow \nu(E) \leq \bar{\mu}(E)$, $\forall E \in \mathcal{M}$. Ισχύει η ισότητα όταν $\bar{\mu}(E) < \infty$.*

(iii) *Αν μ σ-πεπερασμένο, τότε το $\bar{\mu}$ είναι η μοναδική επέκταση του μ σε ένα μέτρο στη $\mathcal{M}$.*

Απόδειξη: Το (i) προκύπτει αμέσως από το Θεώρημα του Καραθεοδωρή και την Πρόταση 1.4.6, δίοτι η σ-άλγεβρα των μ^*-μετρήσιμων περιέχει την $\mathcal{A}$, άρα και τη $\mathcal{M}$.

(ii) Αν $E \in \mathcal{M}$, $E \subseteq \cup_{j=1}^{\infty} A_j$, $A_j \in \mathcal{A}$. Άρα $\nu(E) \leq \sum_1^{\infty} \nu(A_j) = \sum_1^{\infty} \mu(A_j)$. Παίρνοντας infimum έχουμε ότι $\nu(E) \leq \bar{\mu}(E)$. Παρατηρούμε ότι αν $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$, έχουμε

$$\nu(A) = \lim_{n\to\infty} \nu(\cup_{j=1}^{n} A_j) = \lim_{n\to\infty} \mu(\cup_{j=1}^{n} A_j) = \bar{\mu}(A).$$

Άρα αν $\mu(E) < \infty$ διαλέγουμε τα A_j, ώστε $\bar{\mu}(A) \leq \bar{\mu}(E) + \varepsilon \Rightarrow \bar{\mu}(A \backslash E) < \varepsilon$ και $\nu(E) = \nu(A \cap E)$, $\nu(A\backslash E) = \nu(A \cap E^c)$, άρα

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(E) &\leq \bar{\mu}(A) = \nu(A) = \nu(E) + \nu(A\backslash E) \\ &\leq \nu(E) + \bar{\mu}(A\backslash E) \leq \nu(E) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Αφού ισχύει $\forall \varepsilon > 0$, έχουμε ότι $\bar{\mu}(E) = \nu(E)$.

(iii) Αν $X = \cup_1^{\infty} A_j$ με $\mu(A_j) < \infty$, τότε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα A_j είναι ξένα. Τότε $\forall E \in \mathcal{M}$, έχουμε

$$\bar{\mu}(E) = \sum_1^{\infty} \bar{\mu}(E \cap A_j) \overset{(ii)}{=} \sum_1^{\infty} \nu(E \cap A_j) = \nu(E),$$

άρα $\bar{\mu} = \nu$. □

1.5 Μέτρα Borel στο $\mathbb{R}$

Η σ-άλγεβρα $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ των Borel υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα ημιανοιχτά διαστήματα του $\mathbb{R}$, δηλαδή διαστήματα της μορφής $(\alpha, b]$ ή (α, ∞) ή $\emptyset$.

Έστω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση, οπότε έχει πλευρικά όρια σε κάθε σημείο:

$$F(\alpha^+) = \lim_{x\to\alpha^+} F(x) = \inf_{x>\alpha} F(x),$$
$$F(\alpha^-) = \lim_{x\to\alpha^-} F(x) = \sup_{x<\alpha} F(x).$$

Επίσης τα $F(\infty) = \sup_{x\in\mathbb{R}} F(x)$ και $F(-\infty) = \inf_{x\in\mathbb{R}} F(x)$ υπάρχουν στο $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Η F είναι από δεξιά συνεχής αν $F(\alpha) = F(\alpha^+)$.

Πρόταση 1.5.1. *Έστω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσα και δεξιά συνεχής. Αν τα $(\alpha_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$, είναι ξένα, θέτουμε*

$$\mu\left(\bigcup_1^n (\alpha_j, b_j]\right) = \sum_1^n (F(b_j) - F(\alpha_j))$$

και $\mu(\emptyset) = 0$. Τότε το μ είναι προμέτρο στην άλγεβρα $\mathcal{A}$ των ημιανοιχτών διαστημάτων (δηλαδή στην άλγεβρα που παράγεται από διαστήματα της μορφής $(\alpha, b]$, (α, ∞), $\emptyset$).

Απόδειξη: Το μ είναι καλά ορισμένο: αν τα $(\alpha, b] = \cup_1^n (\alpha_j, b_j]$ και τα $(\alpha_j, b_j]$ είναι ξένα, τότε μετά ίσως από μια επαναδιάταξη των διαστημάτων μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\alpha = \alpha_1 < b_1 = \alpha_2 < b_2 = \alpha_3 < b_3 = \ldots < b_n = b$, οπότε

$$\sum_1^n (F(b_j) - F(\alpha_j)) = F(b) - F(\alpha).$$

Γενοκότερα, αν $(I_i)_{i=1}^n$ και $(J_j)_{j=1}^m$ είναι πεπερασμένες ακολουθίες ξένων ημιανοιχτών διαστημάτων με $\cup_1^n I_i = \cup_1^m J_j$, το παραπάνω λέει ότι

$$\sum_1^n \mu(I_i) = \sum_1^n \sum_1^m \mu(I_i \cap J_j) = \sum_1^m \mu(J_j).$$

Έτσι το μ είναι καλά ορισμένο και πεπερασμένα προσθετικό.

Μένει να δείξουμε ότι αν $(I_j)_{j=1}^\infty$ είναι ακολουθία ξένων ημιανοιχτών διαστημάτων με $\cup_1^\infty I_j \in \mathcal{A}$ τότε $\mu(\cup_1^\infty I_j) = \sum_1^\infty \mu(I_j)$. Από την πεπερασμένη προσθετικότητα, χωρίς βλάβη της γενικότητας, το $\cup_1^\infty I_j$ είναι ένα ημιανοιχτό διάστημα $I = (\alpha, b]$ (η τομή ημιανοιχτών είναι ημιανοιχτό και το συμπλήρωμα είναι ένωση δύο ημιανοιχτών διαστημάτων το πολύ). Οπότε

$$\mu(I) = \mu\left(\bigcup_1^n I_j\right) + \mu\left(I \setminus \bigcup_1^n I_j\right) \geq \mu\left(\bigcup_1^n I_j\right) = \sum_1^n \mu(I_j).$$

Άρα

$$\mu(I) \geq \sum_1^n \mu(I_j).$$

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε πρώτα ότι $-\infty < \alpha < b < \infty$ και έστω $\varepsilon > 0$. Αφού F δεξιά συνεχής $\exists \delta > 0 : F(\alpha + \delta) - F(\alpha) < \varepsilon$. Αν $I_j = (\alpha_j, b_j]$, $\forall j$ $\exists \delta_j > 0$ ώστε $F(b_j + \delta_j) - F(b_j) < \varepsilon 2^{-j}$. Τα ανοιχτά διαστήματα $(\alpha_j, b_j + \delta_j)$ καλύπτουν το συμπαγές σύνολο $[\alpha + \delta, b]$, οπότε υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Διαγράφοντας όσα $(\alpha_j, b_j + \delta_j)$ περιέχονται σε ένα τέτοιο σύνολο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

(i) τα $(\alpha_1, b_1 + \delta_1)$,...,$(\alpha_N, b_N + \delta_N)$ καλύπτουν το $[\alpha + \delta, b]$,

(ii) $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_N$,

(iii) $b_j + \delta_j \in (\alpha_{j+1}, b_{j+1} + \delta_{j+1})$, για $j = 1, \ldots, N-1$.

Τώρα έχουμε

$$\begin{aligned}
\mu(I) &= \mu((\alpha+\delta,b]) + \mu((\alpha+,\alpha+\delta]) \\
&\leq F(b) - F(\alpha+\delta) + \varepsilon \\
&\leq F(b_N+\delta_N) - F(\alpha_1) + \varepsilon \qquad (1.3) \\
&= F(b_N+\delta_N) - F(\alpha_N) + \sum_1^{N-1} (F(\alpha_{j+1}) - F(\alpha_j)) + \varepsilon \\
&\leq F(b_N+\delta_N) - F(\alpha_N) + \sum_1^{N-1} (F(b_j+\delta_j) - F(\alpha_j)) + \varepsilon \\
&= \sum_1^{N} (F(b_j+\delta_j) - F(\alpha_j)) + \varepsilon \\
&\leq \sum_1^{N} (F(b_j) + \varepsilon 2^{-j} - F(\alpha_j)) + \varepsilon \\
&= \sum_1^{N} \mu(I_j) + 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

όπου στην (1.3) χρησιμοποιήσαμε ότι $b_N + \delta_N > b$, $\alpha_1 < \alpha + \delta$ και F αύξουσα. Άρα

$$\mu(I) \leq \sum_1^N \mu(I_j).$$

Αν $\alpha = -\infty$ το ίδιο επιχείρημα δίνει $F(b) - F(-M) \leq \sum_1^\infty \mu(I_j) + 2\varepsilon$, $\forall M < \infty$. Αν $b = \infty$ τότε $F(M) - F(\alpha) \leq \sum_1^\infty \mu(I_j) + 2\varepsilon$. Οπότε ολοκληρώνουμε την απόδειξη αφήνοντας το $\varepsilon \to 0$ και το $M \to \infty$. □

Θεώρημα 1.5.2. *Αν $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσα και δεξιά συνεχής συνάρτηση τότε υπάρχει ακριβώς ένα μ_F στην $\mathcal{B}_\mathbb{R}$, ώστε $\mu_F((\alpha, b]) = F(b) - F(\alpha)$, $\forall \alpha, b \in \mathbb{R}$. Αν G μια άλλη τέτοια συνάρτηση τότε $\mu_F = \mu_G \Leftrightarrow F - G =$ σταθερά. Αντιστρόφως, αν μ είναι ένα μέτρο στην $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ πεπερασμένο σε κάθε φραγμένο Borel σύνολο, τότε ορίζουμε*

$$F(x) = \mu((0,x]) \text{ αν } x > 0, \quad F(0) = 0, \quad F(x) = -\mu((x,0]) \text{ αν } x < 0,$$

και αυτή η F είναι αύξουσα, δεξιά συνεχής και $\mu = \mu_F$.

Απόδειξη: Κάθε τέτοια F ορίζει ένα προμέτρο στην άλγεβρα $\mathcal{A}$ των ημιανοιχτών διαστημάτων από την προηγούμενη πρόταση. Φανερά οι F και G ορίζουν το ίδιο προμέτρο αν και μόνο αν $F - G$ σταθερά και τα προμέτρα είναι σ-πεπερασμένα αφού $\mathbb{R} = \cup_{-\infty}^{\infty} (j, j+1]$. Άρα τα δύο πρώτα προκύπτουν από το Θεώρημα 1.4.7

Για τον τελευταίο ισχυρισμό, η μονοτονία του μ συνεπάγεται ότι η F είναι αύξουσα. Η συνέχεια από πάνω του μ συνεπάγεται ότι η F είναι δεξιά συνεχής. Φανερά $\mu = \mu_F$ στην $\mathcal{A}$. Οπότε $\mu = \mu_F$ στην $\mathcal{B}_\mathbb{R}$, από τη μοναδικότητα του Θεωρήματος 1.4.7 □

Παρατήρηση 1.5.3. *Θα μπορούσαμε να είχαμε χρησιμοποιήσει διαστήματα της μορφής $[\alpha, b)$ και αριστερά συνεχείς συναρτήσεις.*

Παρατήρηση 1.5.4. *Αν μ πεπερασμένο μέτρο στην $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, τότε $\mu = \mu_F$ όπου $F(x) = \mu((-\infty, x])$.*

Παρατήρηση 1.5.5. *Η F λέγεται συνάρτηση κατανομής του μ (camulative distribution function).*

Παρατήρηση 1.5.6. *Η θεωρία που αναπτύχθηκε μέχρι και το Θεώρημα 1.4.7 για κάθε αύξουσα, δεξιά συνεχή συνάρτηση F δίνει ένα πλήρες μέτρο $\bar{\mu}_F$ με πεδίο ορισμού συνήθως μεγαλύτερο της $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Στην πραγματικότητα το $\bar{\mu}_F$ είναι η πλήρωση του μ_F. Αυτό το πλήρες μέτρο θα το γράφουμε πάλι μ_F και θα το λέμε «το Lebesgue-Stieltjes μέτρο της F».*

Έστω F αύξουσα και δεξιά συνεχής συνάρτηση και μ το πλήρες Lebesgue-Stieltjes μέτρο της F με πεδίο ορισμού το $\mathcal{M}$. Έτσι $\forall E \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \inf\left\{\sum_1^\infty (F(b_j) - F(\alpha_j)) : E \subseteq \bigcup_1^\infty (\alpha_j, b_j]\right\} \\ &= \inf\left\{\sum_1^\infty \mu((\alpha_j, b_j]) : E \subseteq \bigcup_1^\infty (\alpha_j, b_j]\right\}. \end{aligned}$$

Λήμμα 1.5.7. *Για κάθε $E \in \mathcal{M}$,*

$$\mu(E) = \inf\left\{\sum_1^\infty \mu((\alpha_j, b_j)) : E \subseteq \bigcup_1^\infty (\alpha_j, b_j)\right\}.$$

Απόδειξη: Έστω $\nu(E) = \inf\{\sum_1^\infty \mu((\alpha_j, b_j)) : E \subseteq \cup_1^\infty (\alpha_j, b_j)\}$. Έστω $l_j = b_j - \alpha_j$ και $I_{jk} = \left(b_j - l_j 2^{1-k}, b_j - l_j 2^{-k}\right]$ για $k \in \mathbb{N}$. Οπότε $(\alpha_j, b_j) = \cup_{k=1}^\infty I_{jk}$, οπότε $E \subseteq \cup_{j,k=1}^\infty I_{jk}$ και

$$\sum_1^\infty \mu((\alpha_j, b_j)) =^{1} \sum_{j,k=1}^\infty \mu(I_{jk}) \geq \mu(E).$$

Άρα $\nu(E) \geq \mu(E)$. Αντιστρόφως, αν $\varepsilon > 0$, $\exists\{(\alpha_j, b_j]\}_1^\infty$ με $E \subseteq \cup_1^\infty (\alpha_j, b_j]$ και $\sum_1^\infty \mu((\alpha_j, b_j]) \leq \mu(E) + \varepsilon$ και $\forall j$ $\exists \delta_j > 0$: $F(b + \delta_j) - F(b) < \varepsilon 2^{-j}$. Έτσι $E \subseteq \cup_1^\infty (\alpha_j, b_j + \delta_j)$ και

$$\sum_1^\infty \mu((\alpha_j, b_j + \delta_j)) \leq \sum_1^\infty \mu((\alpha_j, b_j]) + \varepsilon \leq \mu(E) + 2\varepsilon.$$

Άρα $\nu(E) \leq \mu(E)$. □

[1] Τα $(I_{jk})_k$ είναι ξένα.

Θεώρημα 1.5.8. *Αν $E \in \mathcal{M}$, τότε*

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \inf\{\mu(U) : U \supseteq E, U \text{ ανοιχτό}\}(\text{ εξωτερική κανονικότητα}), \\ &= \sup\{\mu(K) : K \subseteq E, K \text{ συμπαγές}\}(\text{ εσωτερική κανονικότητα}). \end{aligned}$$

Απόδειξη: Αν U ανοιχτό με $U \supseteq E$ τότε $\mu(U) \geq \mu(E)$. Το U είναι αριθμήσιμη ένωση διαστημάτων (α_j, b_j), άρα $\mu(U) \leq \sum_1^\infty \mu((\alpha_j, b_j))$ και έχουμε ότι $\inf\{\mu(U) : U \supseteq E, U \text{ ανοιχτό}\} \leq \inf\{\sum_1^\infty \mu((\alpha_j, b_j)\} = \mu(E)$. Για τη δεύτερη ισότητα, έστω E φραγμένο. Αν $E = \bar{E}$ τότε E συμπαγές. Αλλιώς, $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει ανοιχτό ώστε[2] $U \supseteq \overline{E} \backslash E$: $\mu(U) \leq \mu(\overline{E}\backslash E) + \varepsilon$. Θέτω $K = \overline{E} \backslash U$. Το K είναι συμπαγές ως υποσύνολο συμπαγών και $K \subseteq E$, οπότε

$$\begin{aligned} \mu(K) &= \mu(E) - \mu(E \cap U) \\ &= \mu(E) - [\mu(U) - \mu(U \backslash E)] \\ &\geq \mu(E) - \mu(U) + \mu(\bar{E}\backslash E) \\ &\geq \mu(E) - \varepsilon, \end{aligned} \tag{1.4}$$

όπου στην (1.4) χρησιμοποιούμε ότι τα K,$E \cap U$ είναι ξένα και $K \cup (E \cap U) = E$. Αν E δεν είναι φραγμένο, θέτουμε $E_j = E \cap (j, j+1]$. Από το προηγούμενο $\forall \varepsilon > 0$, υπάρχει συμπαγές $K_j \subseteq E_j$: $\mu(K_j) \geq \mu(E_j) - \varepsilon 2^{-j}$. Έστω $H_n = \cup_{-n}^n K_j$. Το H_n είναι συμπαγές υποσύνολο του E και $\mu(H_n) \geq \mu(\cup_{-n}^n K_j) - \varepsilon$. Αφού $\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(\cup_{-n}^n E_j)$ το αποτέλεσμα έπεται. □

Θεώρημα 1.5.9. *Αν $E \subseteq \mathbb{R}$, τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) $E \in \mathcal{M}$.

(ii) $E = V \backslash N_1$ *όπου* V *είναι* G_δ *σύνολο και* $\mu(N_1) = 0$.

(iii) $E = H \cup N_2$ *όπου* H *είναι* F_σ *σύνολο και* $\mu(N_2) = 0$.

Απόδειξη: Αφού το μ είναι πλήρες, (ii)$\Rightarrow$ (i) και (iii) $\Rightarrow$(i). Έστω $E \in \mathcal{M}$ και E φραγμένο. Από το προηγούμενο, $\forall j \in \mathbb{N}$, $\exists\, U_j \supseteq E \supseteq K_j$, με U_j ανοιχτό και K_j συμπαγές τέτοιο ώστε:

$$\mu(U_j) - 2^{-j} \leq \mu(E) \leq \mu(K_j) + 2^{-j}.$$

Έστω $V = \cap_{j=1}^\infty U_j$, $H = \cup_{j=1}^\infty K_j$. Τότε $\mu(V) = \mu(E) = \mu(H) < \infty$, οπότε $\mu(V \backslash E) = \mu(E \backslash H) = 0$. Άρα (i) $\Rightarrow$ (ii) και (i) $\Rightarrow$ (iii), όταν E φραγμένο. □

Το μέτρο Lebesgue είναι το πλήρες μέτρο μ_F με $F(x) = x$ και θα το συμβολίζουμε με m. Τα Lebesgue μετρήσιμα σύνολα θα τα συμβολίζουμε με $\mathcal{L}$. Τον περιορισμό $m|_{\mathcal{B}_\mathbb{R}}$ θα τον λέμε πάλι μέτρο Lebesgue.

Θεώρημα 1.5.10. *Αν $E \subseteq \mathbb{R}$ και $s, r \in \mathbb{R}$, έστω $E + s = \{x + s : x \in E\}$ και $rE = \{rx : x \in E\}$. Αν $E \in \mathcal{L}$ τότε $E + s$,$rE \in \mathcal{L}$ $\forall s, \forall r$ και $m(E + s) = m(E)$ και $m(rE) = |r|\, m(E)$.*

[2] Από την πρώτη ισότητα

Απόδειξη: $\forall E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ορίζω $m_s(E) = m(E+s)$ και $m^r(E) = m(rE)$. Τα m_s και m^r ταυτίζονται με τα m και $|r|\,m$ αντίστοιχα στις πεπερασμένες ενώσεις διαστημάτων και άρα και στην $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ από το Θεώρημα 1.4.7 Επίσης αν $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ και $m(E) = 0$ τότε $m(E+s) = m(rE) = 0$. Έπεται ότι η $\mathcal{L}$ διατηρήται με μεταφορές και πολλαπλασιασμούς, (από το Θεώρημα 1.5.9, και $m(E+s) = m(E)$, $m(rE) = |r|\,m(E)$. □

Πρόταση 1.5.11. *Έστω C το σύνολο Cantor*

(i) *Το C είναι συμπαγές.*

(ii) *Αν $x, y \in C$ και $x < y$, υπάρχει $z \notin C$: $x < z < y$ οπότε το C είναι ολικά μη συνεκτικό και πουθενά πυκνό.*

(iii) *Το C δεν έχει μεμονωμένα σημεία.*

(iv) $m(C) = 0$.

(v) *card(C)= c.*

Απόδειξη: (i) Προφανές, ως τομή κλειστών υποσυνόλων του $[0,1]$.

(ii) Προφανές, αν τα x και y διαφέρουν για πρώτη φορά στον k όρο μετά την υποδιαστολή, $\alpha_k(x) = 0$ και $\alpha_k(y) = 2$. Θέτουμε z:

$$\alpha_n(z) = \begin{cases} \alpha_n(x), & \text{αν } n \neq k \\ 1, & \text{αν } n = k. \end{cases}$$

(iii) Αν $x_0 \in C$ απομονωμένο $\exists \varepsilon > 0$: $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap C = \emptyset$. Έστω $x_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j 3^{-j}$, $\alpha_j \in \{0, 2\}$. Βρίσκουμε n τέτοιο ώστε : $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$. Θέτω $y = \sum_{j=1}^{\infty} b_j 3^{-j}$, όπου $b_j = \alpha_j$, $\forall j \neq n+1$ και $b_{n+1} = 0$ αν $\alpha_{n+1} = 2$, $b_{n+1} = 2$ αν $\alpha_{n+1} = 0$. Τότε $y \neq x_0$, $y \in C$,

$$|x_0 - y| \leq 2 \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{3^j} = 2\frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3^n} < \varepsilon,$$

το οποίο είναι άτοπο.

(iv)
$$m(C) = 1 - \sum_{0}^{\infty} \frac{2^j}{3^{j+1}} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - (2/3)} = 0.$$

(v) $\forall x \in C$, $x = \sum_1^{\infty} \alpha_j 3^{-j}$. Ορίζω $f(x) = \sum_1^{\infty} b_j 2^{-j}$. Τότε $b_j = 0$ αν $\alpha_j = 0$ και $b_j = 1$ αν $\alpha_j = 2$. Η f είναι 1-1 και επί: $C \to [0,1]$. □

Η f είναι αύξουσα, διότι αν $x < y$ τότε $f(x) < f(y)$, εκτός αν τα x, y είναι άκρα αφαιρούμενου διαστήματος. Σε αυτή τη περίπτωση $f(x) = p2^{-k}$ για κάποια p, k και τα $f(x), f(y)$ είναι οι δύο αναπαραστάσεις του ίδιου αριθμού στη βάση 2, άρα η f είναι αύξουσα. Έτσι η f επεκτείνεται σε όλο το $[0,1]$. Θέτοντας την σταθερή στα διαστήματα που αφαιρούνται με τιμή ίση με αυτή στα άκρα. Άρα $f : [0,1] \to [0,1]$ αύξουσα και επί. Άρα η f δεν έχει άλματα, συνεπώς είναι συνεχής. Η f λέγεται συνάρτηση Cantor ή Cantor-Lebesgue.

Πρόταση 1.5.12. $\mathcal{L} \neq \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Απόδειξη: card$(\mathcal{L})$ =card$(\mathcal{P}(\mathbb{R})) > c$ αφού κάθε υποσύνολο του C είναι $\mathcal{L}$-μετρήσιμο. Όμως card$(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) = c$. □

Κεφάλαιο 2

Ολοκλήρωση

2.1 Μετρήσιμες συναρτήσεις

Αν $f : X \to Y$ και $\mathcal{N}$ σ-άλγεβρα στον Y, τότε το $\{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{N}\}$ είναι σ-άλγεβρα στον X. Η $f : (X, \mathcal{M}) \to (Y, \mathcal{N})$ λέγεται *μετρήσιμη συνάρτηση* αν $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ $\forall E \in \mathcal{N}$.

Πρόταση 2.1.1. *Αν $\mathcal{N} = \mathcal{M}(\mathcal{E})$ τότε η f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν $f^{-1} \in \mathcal{M}$ $\forall E \in \mathcal{E}$.*

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Προφανές, αφού η f είναι μετρήσιμη, τότε $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ $\forall E \in \mathcal{N}$ άρα και $\forall E \in \mathcal{E} \subseteq \mathcal{N}$.

($\Leftarrow$) Αρκεί να δείξουμε ότι $\{E \subseteq Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\} \supseteq \mathcal{N}$. Όμως $\{E \subseteq Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\} \supseteq \mathcal{E}$ και είναι σ-άλγεβρα, άρα $\{E \subseteq Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\} \supseteq \mathcal{M}(\mathcal{E}) \supseteq \mathcal{N}$. $\square$

Πόρισμα 2.1.2. *Αν X, Y μετρικοί ή τοπολογικοί χώροι κάθε $f : X \to Y$ συνεχής, είναι $(\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y)$-μετρήσιμη.*

Ορισμός 2.1.3. *Η $f : (X, \mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ λέγεται μετρήσιμη αν είναι $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ ή $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$-μετρήσιμη. Ειδικά η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λέγεται Lebesgue μετρήσιμη αν είναι $(\mathcal{L}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-μετρήσιμη. Φανερά η $f \circ g$ δεν είναι $\mathcal{L}$-μετρήσιμη γιατί θα πρέπει το $g^{-1}(E)$ να είναι στην $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ και όχι στην $\mathcal{L}$. Αν όμως περιοριστούμε σε Borel μετρήσιμες τότε η σύνθεση είναι μετρήσιμη.*

Πρόταση 2.1.4. *Η $f : X \to \mathbb{R}$ είναι $\mathcal{M}$-μετρήσιμη $\Leftrightarrow f^{-1}((\alpha, \infty)) \in \mathcal{M}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν $f^{-1}([\alpha, \infty)) \in \mathcal{M}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f^{-1}(-\infty, \alpha) \in \mathcal{M}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow f^{-1}((-\infty, \alpha]) \in \mathcal{M}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.*

Για $A \in \mathcal{M}$, η $f|_A$ λέγεται μετρήσιμη στο A αν $f^{-1}(E) \cap A \in \mathcal{M}$ για κάθε Borel E. $\Leftrightarrow f|_A$ είναι $\mathcal{M}_A$ μετρήσιμη με $\mathcal{M}_A = \{B \cap A : B \in \mathcal{M}\}$.

Αν X ένα σύνολο και $\{(Y_\alpha, \mathcal{N}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ μια οικογένεια μετρήσιμων χώρων και $f_\alpha : X \to Y_\alpha$ είναι μια απεικόνιση $\forall \alpha \in A$, τότε υπάρχει ελάχιστη σ-άλγεβρα στον X ως προς την οποία όλες οι f_α είναι μετρήσιμες, δηλαδή η σ-άλγεβρα που παράγεται από όλα τα $f_\alpha^{-1}(E_\alpha)$ $\forall E_\alpha \in \mathcal{N}_\alpha$, $\forall \alpha \in A$. Αυτή η σ-άλγεβρα λέγεται η σ-άλγεβρα που παράγεται από τις f_α. Αν $X = \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$ τότε η σ-άλγεβρα γινόμενο όπως τη γνωρίζουμε είναι αυτή που παράγεται από τις προβολές $\pi_\alpha : X \to Y_\alpha$.

Πρόταση 2.1.5. *Έστω $(X, \mathcal{M})$ και $(Y_\alpha, \mathcal{N}_\alpha)$, $\alpha \in A$, μετρήσιμοι χώροι. $Y = \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$, $\mathcal{N} = \otimes_{\alpha\in A}\mathcal{N}_\alpha$, $\pi_\alpha : Y \to Y_\alpha$ οι προβολές. Τότε $f : X \to Y$ είναι $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-μετρήσιμη αν και μόνο αν η $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ είναι $(\mathcal{M}, \mathcal{N}_\alpha)$-μετρήσιμη $\forall\alpha$.*

Απόδειξη: Αν f μετρήσιμη τότε η f_α είναι μετρήσιμη ως σύνθεση μετρήσιμων. Αντίστροφα, αν κάθε f_α είναι μετρήσιμη τότε $\forall E_\alpha \in \mathcal{N}_\alpha$, έχουμε ότι $f^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha)) = f_\alpha^{-1}(E_\alpha) \in \mathcal{M}$. Οπότε η f είναι μετρήσιμη από την Πρόταση 2.1.1 □

Πόρισμα 2.1.6. *$f : X \to \mathbb{C}$ είναι $\mathcal{M}$-μετρήσιμη $\Leftrightarrow$ οι Ref και Imf είναι $\mathcal{M}$-μετρήσιμες.*

Απόδειξη: Αυτό προκύπτει από το $\mathcal{B}_\mathbb{C} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \mathcal{B}_\mathbb{R} \otimes \mathcal{B}_\mathbb{R}$. □

Πρόταση 2.1.7. *Αν $f, g : X \to \mathbb{C}$ είναι $\mathcal{M}$-μετρήσιμες το ίδιο ισχύει και για τις $f + g$ και fg.*

Απόδειξη: Έστω $F : X \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, $\varphi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ και $\psi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $F = (f, g)$, $\varphi(x, y) = x + y$, $\psi(x, y) = xy$. Αφού $\mathcal{B}_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}} = \mathcal{B}_\mathbb{C} \otimes \mathcal{B}_\mathbb{C}$ η F είναι $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}})$-μετρήσιμη, από την Πρόταση 2.1.5. Οι φ και ψ είναι $(\mathcal{B}_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}}, \mathcal{B}_\mathbb{C})$-μετρήσιμες, από το Πόρισμα 2.1.6. Επειδή $f + g = \varphi \circ F$ και $fg = \psi \circ F$ είναι $\mathcal{M}$-μετρήσιμες. □

Συχνά διευκολύνει να χρησιμοποιήσουμε το $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ όπου ορίζουμε $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \{E \subseteq \overline{\mathbb{R}} : E \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}_\mathbb{R}\}$. Είναι το ίδιο με το να ορίσουμε την Borel σ-άλγεβρα στο $\overline{\mathbb{R}}$ με μετρική $\rho(x, y) = |Ax - Ay|$ όπου $Ax = \arctan x$. Η $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ παράγεται από τις ημιευθείες $(\alpha, \infty]$ ή $[-\infty, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και η $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι $\mathcal{M}$-μετρήσιμη αν είναι $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$-μετρήσιμη.

Πρόταση 2.1.8. *Αν f_j ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στον $(X, \mathcal{M})$ με τιμές στο $\overline{\mathbb{R}}$, τότε οι συναρτήσεις*

$$g_1(x) = \sup_j f_j(x), \qquad g_2(x) = \inf_j f_j(x),$$

$$g_3(x) = \limsup_{j\to\infty} f_j(x), \qquad g_4(x) = \liminf_{j\to\infty} f_j(x)$$

είναι όλες μετρήσιμες. Αν $\lim_{j\to\infty} f_j(x)$ υπάρχει $\forall x \in X$, τότε έχουμε ότι η $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)$ είναι μετρήσιμη.

Απόδειξη: Έχουμε ότι $g_1^{-1}((\alpha, \infty]) = \cup_1^\infty f_j^{-1}((\alpha, \infty])$ και $g_2^{-1}([-\infty, \alpha)) = \cup_1^\infty f_j^{-1}([-\infty, \alpha))$ οπότε οι g_1 και g_2 είναι μετρήσιμες. Οπότε είναι μετρήσιμες και οι $h_k(x) = \sup_{j>k} f_j(x)$ άρα είναι μετρήσιμη και η $g_3 = \inf_{k\geq 1} h_k$. Ομοίως και η g_4. Τέλος αν η $f(x)$ υπάρχει $\forall x \in X$ τότε $f = g_3 = g_4$, οπότε η f είναι μετρήσιμη. □

Πόρισμα 2.1.9. *Αν $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μετρήσιμες τότε οι $\max(f,g)$ και $\min(f,g)$ είναι μετρήσιμες.*

Πόρισμα 2.1.10. *Αν f_j ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων με τιμές στο $\mathbb{C}$ και $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)$ υπάρχει $\forall x$ τότε η f είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη: Χωρίζουμε σε πραγματικό και φανταστικό μέρος και επανασυνθέτουμε. Από το Πόρισμα 2.1.6 το συμπέρασμα έπεται. □

Δυο χρήσιμες συναρτήσεις για την $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ είναι οι

$$f^+(x) = \max(f(x), 0) \geq 0, \quad f^-(x) = \max(-f(x), 0) \geq 0.$$

Φανερά $f = f^+ - f^-$. Η f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν οι f^+ και f^- είναι μετρήσιμες.

Αν $f : X \to \mathbb{C}$ η πολική αναπαράσταση είναι η σχέση

$$f = (\mathrm{sgn} f)\,|f| \text{ όπου } \mathrm{sgn}(z) = z/|z|, \forall z \neq 0 \text{ και } \mathrm{sgn}(0) = 0.$$

Η f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν οι $|f|$ και $\mathrm{sgn} f$ είναι μετρήσιμες. (Η $z \to |z|$ είναι συνεχής οπότε η $z \to \mathrm{sgn}(z)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Άρα αν $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοιχτό, το $\mathrm{sgn}^{-1}(U)$ είναι είτε ανοιχτό είτε $V \cup \{0\}$ με V ανοιχτό. Σε κάθε περίπτωση είναι Borel μετρήσιμο.)

Αν $(X, \mathcal{M})$ μετρήσιμος χώρος και $E \subseteq X$ η χαρακτηριστική συνάρτηση χ_E του E (ή 1_E) ορίζεται ως εξής $\chi_E(x) = 1$ αν $x \in E$, $\chi_E(x) = 0$ αν $x \in E^c$. Φανερά η χ_E είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν $E \in \mathcal{M}$. Μια απλή συνάρτηση στον X είναι ένας πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός με μιγαδικούς συντελέστες, χαρακτηριστικών συναρτήσεων συνόλων στην $\mathcal{M}$. Οι απλές δεν επιτρέπεται να έχουν τιμές $\pm\infty$. Ισοδύναμα $f : X \to \mathbb{C}$ απλή αν και μόνο αν f μετρήσιμη και $\mathrm{range}(f)$ πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Πράγματι αν $\mathrm{range}(f) = \{z_1, \cdots, z_n\}$, έστω $E_j = (f^{-1}(\{z_j\})$ οπότε $f = \sum_1^n z_j \chi_{E_j}$. Αυτή η αναπαράσταση καλείται συνήθης αναπαράσταση της f. Αναπαριστά την f ως γραμμικό συνδιασμό με διακεκριμμένους συντελεστές ξένων υποσυνόλων με ένωση τον X. Επίσης, αν f, g απλές τότε οι $f + g, fg$ είναι απλές.

Θεώρημα 2.1.11. *Έστω $(X, \mathcal{M})$ μετρήσιμος χώρος.*

(i) *Αν $f : X \to [0, \infty]$ μετρήσιμη υπάρχει ακολουθία $\{\varphi_n\}$ απλών συναρτήσεων ώστε $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \cdots \leq f$, $\varphi_n \to f$ κατά σημείο, και $\varphi_n \to f$ ομοιόμορφα σε κάθε σύνολο στο οποίο η f είναι φραγμένη.*

(ii) *Αν $f : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη υπάρχουν $\{\varphi_n\}$ απλές ώστε $0 \leq |\varphi_1| \leq |\varphi_2| \leq \cdots \leq |f|$, $\varphi_n \to f$ κατά σημείο, και $\varphi_n \to f$ ομοιόμορφα σε κάθε σύνολο στο οποίο η f είναι φραγμένη.*

Απόδειξη: (i) Αν $n \in \mathbb{N}$ και $0 \leq k \leq 2^{2n} - 1$, έστω

$$E_n^k = f^{-1}\big((k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]\big) \text{ και } F_n = f^{-1}((2^n, \infty]),$$

και ορίζουμε

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} k2^{-n}\chi_{E_n^k} + 2^n\chi_{F_n}.$$

Εύκολα ελέγχεται ότι $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ $\forall n$ και $0 \leq f - \varphi_n \leq 2^{-n}$ στο σύνολο όπου $f \leq 2^n$.

(ii) Αν $f = g + ih$ εφαρμόζουμε το (i) για τις g^+, g^-, h^+, h^-. □

Πρόταση 2.1.12. *Αν μ πλήρες, τότε*

(i) *αν f μετρήσιμη και $f = g$ σ.π. τότε η g είναι μετρήσιμη*

(ii) *αν f_n μετρήσιμη $\forall n$ και $f_n \to f$ σ.π. τότε η f είναι μετρήσιμη.*

Αν το μ δεν είναι πλήρες τα (i) και (ii) είναι εν γένει λάθος.

Όμως αν κανείς ξεχάσει να ελέγξει την πληρότητα του μ δε θα οδηγηθεί σε πολύ σοβαρά σφάλματα σύμφωνα με την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.1.13. *Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος μέτρου και $(X, \overline{\mathcal{M}}, \bar{\mu})$ η πλήρωση του. Αν f $\overline{\mathcal{M}}$-μετρήσιμη στον X υπάρχει $\mathcal{M}$-μετρήσιμη g ώστε $f = g$ $\bar{\mu}$-σχεδόν παντού.*

Απόδειξη: Αν $f = \chi_E$ με $E \in \overline{\mathcal{M}}$ είναι φανερό, οπότε προκύπτει και αν f $\overline{\mathcal{M}}$-μετρήσιμη απλή. Για τη γενική περίπτωση επιλέγουμε $\overline{\mathcal{M}}$-μετρήσιμες απλές $\varphi_n \to f$ κατά σημείο. Για κάθε n, έστω ψ_n $\mathcal{M}$-μετρήσιμη απλή με $\psi_n = \varphi_n$ σ.π. εκτός ενός συνόλου $E_n \in \overline{\mathcal{M}}$ με $\bar{\mu}(E_n) = 0$. Έστω $N \in \mathcal{M}$ ώστε $\mu(N) = 0$ και $N \supseteq \cup_1^\infty E_n$ και θέτουμε $g = \lim \psi_n \chi_{N^c}$. Τότε η g είναι $\mathcal{M}$-μετρήσιμη και $g = f$ στο N^c. □

2.2 Ολοκλήρωση μη αρνητικών συναρτήσεων

Ο $(X, \mathcal{M}, \mu)$ θα είναι χώρος μέτρου και $L^+ = \{$μετρήσιμες συναρτήσεις $: X \to [0, \infty]\}$.

Ορισμός 2.2.1. *Αν φ απλή συνάρτηση $\in L^+$ με συνήθη αναπαράσταση $\varphi = \sum_1^n \alpha_j \chi_{E_j}$, με τα E_j ξένα και $\cup E_j = X$. Ορίζουμε το ολοκλήρωμα της φ ως προς το μέτρο μ να είναι ο αριθμός*

$$\int \varphi d\mu = \sum_1^n \alpha_j \mu(E_j)$$

(με τη συνθήκη $0 \cdot \infty = 0$). Παρατηρούμε ότι μπορεί να συμβεί $\int \varphi d\mu = \infty$ (π.χ. $\varphi = \chi_{\mathbb{R}}$). Αν πρέπει να φαίνεται η μεταβλητή της φ, γράφουμε $\int \varphi(x) d\mu(x)$ (κάποιοι προτιμούν να γράφουν $\int \varphi(x) \mu(dx)$).

Ορισμός 2.2.2. *Αν $A \in \mathcal{M}$ επειδή $\varphi\chi_A = \sum \alpha_j \chi_{E_j \cap A}$ ορίζουμε*

$$\int_A \varphi d\mu = \int \varphi \chi_A d\mu.$$

Πρόταση 2.2.3. *Αν φ, ψ απλές στο L^+ τότε*

(i) *Αν $c \geq 0$, $\int c\varphi = c \int \varphi$.*

(ii) $\int(\varphi + \psi) = \int \varphi + \int \psi$.

(iii) *Αν $\varphi \leq \psi$, τότε $\int \varphi \leq \int \psi$.*

(iv) *Η απεικόνιση $A \to \int_A \varphi$ είναι μέτρο στην $\mathcal{M}$.*

Απόδειξη: (i) Είναι τετριμμένο.

(ii) Έστω $\varphi = \sum_1^n \alpha_j \chi_{E_j}$, $\psi = \sum_1^m b_k \chi_{F_k}$ οι συνήθεις αναπαραστάσεις των φ και ψ. Αφού $E_j = \cup_{k=1}^m (E_j \cap F_k)$, $F_k = \cup_{j=1}^n (E_j \cap F_k)$ και τα $(E_j \cap F_k)_k$ είναι ξένα, και τα $(E_j \cap F_k)_j$ είναι ξένα, η πεπερασμένη προσθετικότητα του μ δίνει

$$\int \varphi + \int \psi = \sum_{j,k} (\alpha_j + b_k)\mu(E_j \cap F_k) = \int (\varphi + \psi).$$

(iii) Αν $\varphi \leq \psi$, τότε $E_j \cap F_k = \emptyset \Rightarrow \alpha_j \leq b_k$. Οπότε

$$\int \varphi = \sum_{j,k} \alpha_j \mu(E_j \cap F_k) \leq \sum_{j,k} b_k \mu(E_j \cap F_k) = \int \psi.$$

(iv) Αν $(A_k)_1^\infty$ ξένα $\in \mathcal{M}$ και $A = \cup_1^\infty A_k$,

$$\int_A \varphi = \sum_j \alpha_j \mu(A \cap E_j) = \sum_{j,k} \mu(A_k \cap E_j) = \sum_k \int_{A_k} \varphi.$$

□

Ορισμός 2.2.4. *Αν $f \in L^+$ ορίζουμε*

$$\int f d\mu = \sup\left\{ \int \varphi d\mu : 0 \leq \varphi \leq f, \varphi \text{ απλή} \right\}.$$

Από το (iii) της Πρότασης 2.2.3 αυτός ο ορισμός δίνει την ίδια τιμή με τον ορισμό του ολοκληρώματος απλής συνάρτησης όταν η f είναι απλή. Επίσης, είναι φανερό ότι αν $f \leq g$ τότε $\int f \leq \int g$ και $\int cf = c \int f$ $\forall c \geq 0$. Το επόμενο θεώρημα μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το $\int f$ χρησιμοποιώντας μια ακολουθία απλών που να αυξάνει στην f.

Θεώρημα 2.2.5 (Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης.)**.** *Αν $f_n \in L^+$ και $f_j \leq f_{j+1}$ $\forall j$ και $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ $(= \sup_n f_n)$, τότε $\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$.*

Απόδειξη: $\{\int f_n\}$ είναι αύξουσα ακολουθία, άρα συγκλίνει στο $\mathbb{R} \cup \infty$. Επίσης $\int f_n \leq \int f$ οπότε $\lim_{n\to\infty} \int f_n \leq \int f$. Για την αντίστροφη ανισότητα, έστω $\alpha \in (0,1)$ και φ απλή συνάρτηση με $0 \leq \varphi \leq f$. Θέτουμε $E_n = \{x : f_n \geq \alpha\varphi(x)\}$.

Τότε η E_n είναι μια αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων και $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = X$, διότι $0 < \alpha < 1$, $\varphi \leq f$ και $f_n \to f$. Έχουμε $\int f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq \alpha \int_{E_n} \varphi$ διότι $f_n \geq f_n \chi_{E_n}$ και $f_n \geq \alpha\varphi$ στο E_n. Όμως από την Πρόταση 2.2.3 το $\int_A \varphi$ είναι μέτρο και αφού E_n αύξουσα, έχουμε ότι $\int \varphi = \int_{\cup E_n} \varphi = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \varphi$ (αφού $\mu(\cup E_n) = \lim \mu(E_n)$ αφού η E_n είναι αύξουσα). Άρα $\lim_{n\to\infty} \int f_n \geq \alpha \int \varphi$. Για $\alpha \to 1$ έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \int f_n \geq \int \varphi$, $\forall \varphi$ απλή και $0 \leq \varphi \leq f$. Παίρνοντας το supremum πάνω από όλες τις απλές $\varphi \leq f$ έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \int f_n \geq \int f$. $\square$

Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος.

Θεώρημα 2.2.6. *Αν $\{f_n\}$ είναι πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία στο L^+ και $f = \sum_n f_n$. Τότε $\int f = \sum_n \int f_n$.*

Απόδειξη: Για δυο συναρτήσεις f_1 και f_2, έστω ακολουθίες απλών $\{\varphi_j\}$ και$\{\psi_j\}$ με την $\{\varphi_j\}$ να αυξάνει στην f_1 και $\{\psi_j\}$ να αυξάνει στην f_2. Οπότε η $\{\varphi_j + \psi_j\}$ αυξάνει στην $f_1 + f_2$. Συνεπώς από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

$$\int (f_1 + f_2) = \lim \int (\varphi_j + \psi_j) = \int f_1 + \int f_2.$$

Τα όρια υπάρχουν, αφού οι $\{\int \varphi_j\}$ και $\{\int \psi_j\}$ είναι αύξουσες. Από επαγωγή $\int \sum_1^N f_n = \sum_1^N \int f_n$ και για $N \to \infty$ από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε ότι $\sum_1^\infty \int f_n = \lim_{N\to\infty} \int \sum_1^N f_n = \int \sum_1^\infty f_n$. $\square$

Πρόταση 2.2.7. *Αν $f \in L^+$ τότε $\int f = 0$ αν και μόνο αν $f = 0$ σ.π.*

Απόδειξη: Αν f απλή είναι προφανές γιατί $\sum_1^n \alpha_j \mu(E_j) = 0$ άρα είτε $\alpha_j = 0$ ή $\mu(E_j) = 0$. Γενικά αν $0 \leq \varphi \leq f$ με φ απλή και $f = 0$ σ.π. τότε $\varphi = 0$ σ.π. και $\int f = \sup_{\varphi \leq f} \int \varphi = 0$. Αντίστροφα, έστω $\int f = 0$ τότε $\{x : f(x) > 0\} = \cup_1^\infty E_n$, όπου $E_n = \{x : f(x) \geq n^{-1}\}$. Οπότε αν $f \neq 0$ σ.π., $\mu(\{x : f(x) > 0\}) > 0 \Rightarrow \mu(\cup_1^\infty E_n) > 0$. Άρα $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\mu(E_{n_0}) > 0$. Αλλά τότε $f > n_0^{-1} \chi_{E_{n_0}}$, άρα $\int f \geq n_0^{-1} \mu(E_{n_0}) > 0$, το οποίο είναι άτοπο. $\square$

Πόρισμα 2.2.8. *Αν $f_n \in L^+$,$f \in L^+$ και f_n αυξάνει στην f σ.π., τότε $\int f = \lim \int f_n$.*

Απόδειξη: Αν f_n αυξάνει στην f $\forall x \in E$ με $\mu(E^c) = 0$ τότε $f = f\chi_E$ σ.π. και $f_n = f_n \chi_E$ σ.π., οπότε $\int f = \int f\chi_E = \lim \int f_n \chi_E = \lim \int f_n$. $\square$

Λήμμα 2.2.9 (Fatou). *Αν $\{f_n\}$ είναι μια ακολουθία στο L^+, τότε*

$$\int (\liminf f_n) \leq \liminf \int f_n.$$

Απόδειξη: Για κάθε k έχουμε ότι $\inf_{n\geq k} f_n \leq f_j$ $\forall j \geq k$. Άρα $\int \inf_{n\geq k} f_n \leq \int f_j$ $\forall j \geq k$. Άρα $\int \inf_{n\geq k} f_n \leq \inf_{j\geq k} \int f_j$. Αφήνουμε το $k \to \infty$ και από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε ότι

$$\int (\liminf f_n) = \lim_{k\to\infty} \int (\inf_{n\geq k} f_n) \leq \liminf \int f_n.$$

$\square$

Πόρισμα 2.2.10. *Αν $f_n \in L^+$, $f \in L^+$ και $f_n \to f$ σ.π., τότε*

$$\int f \leq \liminf \int f_n.$$

Απόδειξη: Αν $f_n \to f$ παντού τότε το λήμμα Fatou δίνει το αποτέλεσμα. Αν $f_n \to f$ σχεδόν παντού, τότε τις αλλάζουμε σε ένα μηδενικό σύνολο. □

Πρόταση 2.2.11. *Αν $f \in L^+$ και $\int f < \infty$ τότε το $\{x : f(x) = \infty\}$ είναι μηδενικό σύνολο και το $\{x : f(x) > 0\}$ είναι σ-πεπερασμένο.*

2.3 Ολοκλήρωση μιγαδικών συναρτήσεων

Για πραγματικές συναρτήσεις η επέκταση του ορισμού του ολοκληρώματος είναι προφανής

$$\int f = \int f^+ - \int f^-.$$

Εφόσον όμως $\int f^+$ και $\int f^- \in \mathbb{R}$. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη, δηλαδή αν $\int f^\pm < \infty$. Επειδή $f^\pm \leq |f| \leq f^+ + f^-$, η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int |f| < \infty$.

Πρόταση 2.3.1. *Ο χώρος των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος και το ολοκλήρωμα είναι γραμμικό συναρτησοειδές.*

Απόδειξη: Ο πρώτος ισχυρισμός έπεται από το γεγονός ότι $|\alpha f + bg| \leq |\alpha|\,|f| + |b|\,|g|$. Εύκολα, $\int \alpha f = \alpha \int f$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Αν f, g ολοκληρώσιμες και $h = f+g$, τότε $h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$, οπότε $h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$. Από το Θεώρημα 2.2.6 έχουμε ότι

$$\int h^+ + \int f^- + \int g^- = \int h^- + \int f^+ + \int g^+,$$

οπότε $\int h = \int f + \int g$. □

Αν f μιγαδική μετρήσιμη συνάρτηση, λέμε ότι η f είναι *ολοκληρώσιμη* αν και μόνο αν $\int |f| < \infty$. Αφού $|f| \leq |Ref| + |Imf| \leq 2\,|f|$, η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν οι Ref και Imf είναι ολοκληρώσιμες και σε αυτήν την περίπτωση ορίζουμε

$$\int f = \int Ref + i \int Imf.$$

Πάλι ο χώρος αυτών των συναρτήσεων είναι διανυσματικός χώρος και το ολοκλήρωμα είναι γραμμικό συναρτησοειδές. Συμβολίζουμε αυτό το χώρο με $L^1(\mu)$ ή $L^1(X, \mu)$ ή $L^1(X)$ ή L^1.

Πρόταση 2.3.2. *Αν $f \in L^1$, τότε $\left|\int f\right| \leq \int |f|$.*

Απόδειξη: Αν $\int f = 0$ είναι προφανές. Αν $f : X \to \mathbb{R}$, τότε

$$\left|\int f\right| = \left|\int (f^+ - f^-)\right| \leq \int f^+ + \int f^- = \int |f|.$$

Αν $f : X \to \mathbb{C}$ και $\int f \neq 0$, έστω $\alpha = \overline{sgn \int f}$, όπου $\overline{sgnz} = \overline{z} / |z|$. Τότε

$$\begin{aligned} \left| \int f \right| &= \alpha \int f = \int \alpha f = Re \int \alpha f = \int Re(\alpha f) \leq \int |Re(\alpha f)| \\ &\leq \int |\alpha f| = \int |f| . \end{aligned}$$

□

Πρόταση 2.3.3. (i) *Αν $f \in L^1$, τότε $\{x : f(x) \neq 0\}$ είναι σ-πεπερασμένο.*

(ii) *Αν $f, g \in L^1$, τότε $\int_E f = \int_E g$ $\forall E \in \mathcal{M}$ αν και μόνο αν $\int |f - g| = 0 \Leftrightarrow f = g$ σ.π.*

Απόδειξη: Για το (i) έχουμε ότι $\{x : f(x) \neq 0\} = \{x : |f(x)| \neq 0\} = \cup_{n=1}^{\infty} \{x : |f(x)| > 1/n\}$. Τότε

$$\begin{aligned} \infty &> \int |f(x)| \, d\mu \geq \int_{\{x:|f(x)|>1/n\}} |f(x)| \, d\mu \\ &\geq \int_{\{x:|f(x)|>1/n\}} \frac{1}{n} d\mu = \frac{1}{n} \mu(\{x : |f(x)| > 1/n\}) \end{aligned}$$

Άρα $\mu(\{x : |f(x)| > 1/n\}) < \infty$. Η πρώτη ισοδυναμία του (ii) έπεται από την Πρόταση 2.2.11. Αν $\int |f - g| = 0$ $\forall E \in \mathcal{M}$, τότε

$$\left| \int_E f - \int_E g \right| \leq \int \chi_E \, |f - g| \leq \int |f - g| = 0.$$

Επίσης αν $u = Re(f - g)$, $v = Im(f - g)$ και $f \neq g$ σ.π., τουλάχιστον μία από τις $u^{\pm}$,$v^{\pm}$ πρέπει να είναι μη μηδενική σε σύνολο θετικού μέτρου. Αν για παράδειγμα $E = \{x : u^+(x) > 0\}$ και $m(E) > 0$, τότε $Re(\int_E f - \int_E g) = \int_E u^+ > 0$, αφού $u^- = 0$ στο E. Ομοίως και οι άλλες περιπτώσεις. □

Η προηγούμενη πρόταση λέει ότι μπορούμε να ολοκληρώνουμε συναρτήσεις χωρίς να δίνουμε σημασία σε σύνολα μέτρου μηδέν. Άρα μπορούμε να θεωρούμε τις συναρτήσεις με τιμές στο $\mathbb{R}$ αντί στο $\overline{\mathbb{R}}$. Επίσης είναι βολικό να επαναορίσουμε το $L^1(\mu)$ να αποτελείται από κλάσεις ισοδυναμίας όπου $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ σ.π.

Θεώρημα 2.3.4 (Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης)**.** *Έστω $f_n \in L^1$ ώστε*

(i) *$f_n \to f$ σ.π.*

(ii) *υπάρχει $g \geq 0$, $g \in L^1$ ώστε $|f_n| \leq g$ $\forall n$, τότε $f \in L^1$ και $\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$.*

Απόδειξη: Η f είναι μετρήσιμη (ίσως με επαναορισμό σε ένα μηδενικό σύνολο) αφού είναι κατά σημείο όριο μετρήσιμων και αφού $|f| \leq g \Rightarrow f \in L^1$.

Θεωρώντας τα Ref και Imf μπορούμε να υποθέσουμε f_n,f πραγματικές. Οπότε $g + f_n \geq 0$ σ.π. και $g - f_n \geq 0$ σ.π. Οπότε από το λήμμα Fatou

$$\int g + \int f \leq \liminf \int (g + f_n) = \int g + \liminf \int f_n,$$

$$\int g - \int f \leq \liminf \int (g - f_n) = \int g - \limsup \int f_n.$$

Άρα $\liminf \int f_n \geq \int f \geq \limsup \int f_n$ και το αποτέλεσμα έπεται. □

Θεώρημα 2.3.5. *Έστω f_j ακολουθία στον L^1 ώστε $\sum_1^\infty \int |f_j| < \infty$. Τότε η $\sum_1^\infty f_j$ συγκλίνει σ.π. σε μια L^1 συνάρτηση και $\int \sum_1^\infty f_n = \sum_1^\infty \int f_n$.*

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 2.2.6, $\int \sum_1^\infty |f_j| = \sum_1^\infty \int |f_j| < \infty$. Οπότε $\sum_1^\infty |f_j| \in L^1$. Άρα από την Πρόταση 2.2.11, $\sum_1^\infty |f_j(x)| < \infty$ σ.π. και άρα για κάθε τέτοιο x η σειρά $\sum_1^\infty f_j(x)$ συγκλίνει. Επίσης, $|\sum_1^n f_j| \leq \sum_1^\infty |f_j|\ \forall n$, άρα εφαρμόζεται το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης στην ακολουθία μερικών αθροισμάτων, και προκύπτει $\int \sum_1^\infty f_n = \sum_1^\infty \int f_n$. □

Θεώρημα 2.3.6. *Αν $f \in L^1(\mu)$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει ολοκληρώσιμη απλή $\varphi = \sum \alpha_j \chi_{E_j}$ ώστε $\int |f - \varphi|\, d\mu < \varepsilon$. Οπότε οι ολοκληρώσιμες απλές είναι πυκνές στον $L^1(\mu)$. Αν το μ είναι ένα Lebesgue-Stieltjes μέτρο στο $\mathbb{R}$, τα σύνολα E_j στον ορισμό της φ μπορούν να επιλεγούν να είναι πεπερασμένες ενώσεις ανοιχτών διαστημάτων. Επιπλέον, υπάρχει συνεχής g που μηδενίζεται έξω από ένα φραγμένο διάστημα ώστε $\int |f - g|\, d\mu < \varepsilon$.*

Απόδειξη: Έστω $\{\varphi_n\}$ απλές όπως στο Θεώρημα 2.2.11(ii). Τότε έχουμε ότι $\int |\varphi_n - f| < \varepsilon$ για μεγάλο n, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης. Αν $\varphi_n = \sum \alpha_j \chi_{E_j}$, E_j ξένα και τα $\alpha_j \neq 0$, παρατηρούμε ότι $\mu(E_j) = |\alpha_j|^{-1} \int_{E_j} |\varphi| \leq |\alpha_j|^{-1} \int |f| < \infty$. Επίσης, $\mu(E \triangle F) = \int |\chi_E - \chi_F|$, οπότε αν το μ είναι Lebesgue-Stieltjes μέτρο στο $\mathbb{R}$ μπορούμε να προσεγγίσουμε την χ_{E_j} όσο θέλουμε στην L^1 μετρική με πεπερασμένα αθροίσματα χ_{I_k} όπου I_k ανοιχτά διαστήματα. Τέλος, αν $I_k = (\alpha, b)$ μπορούμε να προσεγγίσουμε την χ_{I_k} στην L^1 μετρική από συνεχείς συναρτήσεις που μηδενίζονται εκτός του (α, b). □

Θεώρημα 2.3.7. *Έστω $f : X \times [\alpha, b] \to \mathbb{C}$ $(-\infty < \alpha < b < \infty)$ και $f(\cdot, t) : X \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη $\forall t \in [\alpha, b]$. Έστω $F(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x)$.*

(i) *Έστω ότι υπάρχει $g \in L^1(\mu)$ τέτοια ώστε $|f(x, t)| \leq g(x)\ \forall x, t$. Αν $\lim_{t \to t_0} f(x, t) = f(x, t_0)$. Τότε $\lim_{t \to t_0} f(t) = f(t_0)$. Συγκεκριμένα, αν $f(x, \cdot)$ είναι συνεχής για κάθε x, τότε η f είναι συνεχής.*

(ii) *Έστω ότι η $\partial f / \partial t$ υπάρχει και υπάρχει $g \in L^1(\mu)$ ώστε $|(\partial f / \partial t)(x, t)| \leq g(x)\ \forall x, t$. Τότε η F είναι διαφορίσιμη και $F^{'}(t) = \int (\partial f / \partial t)(x, t) d\mu(x)$.*

Απόδειξη: (i) Εφαρμόζουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης στην $f_n(x) = f(x, t_n)$ όπου $t_n \to t_0$.

(ii) Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0) = \lim h_n(x) \text{ όπου } h_n(x) = \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0},$$

για $t_n \to t_0$. Έτσι η $\partial f/\partial t$ είναι μετρήσιμη και από το θεώρημα μέσης τιμής,

$$|h_n(x)| \leq \sup_{t\in[\alpha,b]} \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x),$$

οπότε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης μπορεί να χρησιμοποιηθεί ξανά

$$F'(t_0) = \lim \frac{f(t_n) - f(t_0)}{t_n - t_0} = \lim \int h_n(x) d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) d\mu(x).$$

□

Θα χρησιμοποιήσουμε τον χαρακτηρισμό Darboux για το ολοκλήρωμα Riemann.

Θεώρημα 2.3.8. *Έστω f φραγμένη πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[\alpha, b]$*

(i) *Αν f ολοκληρώσιμη κατά Riemann, τότε είναι Lebesgue μετρήσιμη και άρα ολοκληρώσιμη αφού f φραγμένη. Επίσης $\int_\alpha^b f(x)dx = \int_{[\alpha,b]} f(x)dm(x)$.*

(ii) *Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν*

$$m(\{x \in [\alpha, b] : f \text{ ασυνεχής στο } x\}) = 0$$

.

Απόδειξη: (i) Έστω f Riemann ολοκληρώσιμη, για κάθε διαμέριση P έστω

$$G_p = \sum_1^n M_j \chi_{(t_{j-1},t_j]} \quad \text{και} \quad g_p = \sum_1^n m_j \chi_{(t_{j-1},t_j]},$$

οπότε $S_p f = \int G_p dm$ και $s_p f = \int g_p dm$. Υπάρχει ακολουθία διαμερίσεων P_k με νόρμα διαμέρισης που τείνει στο 0, όπου κάθε μια είναι εκλέπτυνση της άλλης. Οπότε η g_{p_k} είναι αύξουσα και η G_{p_k} είναι φθίνουσα και $S_{p_k} f, s_{p_k} f \to \int_\alpha^b f(x)dx$. Έστω $G = \lim G_{p_k}$ και $g = \lim g_{p_k}$. Φανερά $g \leq f \leq G$ και από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης $\int G dm = \int g dm = \int_\alpha^b f(x)dx$ (αφού $\int G dm = \int \lim G_{p_k} dm = \lim \int G_{p_k} dm = \lim S_{p_k} f = \int_\alpha^b f$). Άρα $\int (G-g)dm = 0 \Rightarrow G = g$ σ.π. $\Rightarrow G = f$ σ.π. Άρα η f είναι μετρήσιμη αφού είναι η G, ως όριο μετρήσιμων και το m είναι πλήρες μέτρο. Φανερά, $\int_{[\alpha,b]} f dm = \int G dm = \int_\alpha^b f(x)dx$.

(ii) Έστω $H(x) = \limsup_{y\to x} f(y)$, $h(x) = \liminf_{y\to x} f(y)$. Τότε ισχύει ότι $\limsup_{y\to x} f(y) = \inf_{\delta>0}(\sup_{|y-x|<\delta} f(y))$. Επίσης, $\liminf_{y\to x} f(y) = \sup_{\delta>0}(\inf_{|y-x|<\delta} f(y))$. Δείχνουμε ότι $H(x) = h(x)$ αν και μόνο αν η f είναι συνεχής στο x. Η $H = G$ σ.π. οπότε οι H, h είναι Lebesgue μετρήσιμες και

$$\int_{[\alpha,b]} Hdm = \overline{\int_{\alpha}^{b}} f(x)dx, \int_{[\alpha,b]} hdm = \underline{\int_{\alpha}^{b}} f(x)dx.$$

Ισχύει ότι $\{x \in [\alpha, b] : f$ ασυνεχής στο $x\} = \{x \in [\alpha, b] : H(x) \neq h(x)\}$. Άρα αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε $\int_{[\alpha,b]} Hdm = \overline{\int_{\alpha}^{b}} f(x)dx = \underline{\int_{\alpha}^{b}} f(x)dx = \int_{[\alpha,b]} hdm$. Οπότε $\int_{[\alpha,b]}(H-h)dm = 0 \Rightarrow H = h$ σ.π. Άρα $m(\{x \in [\alpha, b] : f$ ασυνεχής στο $x\}) = 0$. Αντίστροφα, αν $m(\{x \in [\alpha, b] : f$ ασυνεχής στο $x\}) = 0$, τότε $\int H = \int h$, άρα η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. □

2.4 Διάφοροι ορισμοί σύγκλισης

Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα, τότε $f_n \to f$ κατά σημείο και $f_n \to f$ σ.π., αλλά δε συνεπάγεται σύγκλιση στον L^1.

(i) $f_n = n^{-1}\chi_{(0,n)}$.

(ii) $f_n = \chi_{(n,n+1)}$.

(iii) $f_n = n\chi_{[0,1/n]}$.

(iv) $f_n = \chi_{[j2^{-k},(j+1)2^{-k}]}$ όπου $0 \le j < 2^k$ και $n = j + 2^k$.

Στα (i), (ii) και (iii) η $f_n \to 0$ ομοιόμορφα, αλλά $f_n \not\to 0$ στον L^1, αφού $\int |f_n| = 1$ $\forall n$. Στο (iv) η $f_n \to 0$ στον L^1, αφού $\int |f_n| = 2^{-k}$ για $2^k \le n < 2^{k+1}$, αλλά η $f_n(x)$ δε συγκλίνει $\forall x \in [0, 1]$, αφού είναι μηδέν για άπειρα n και 1 για άπειρα n. Από την άλλη μεριά, αν $f_n \to f$ σ.π. και $|f_n| \le g$, με $g \in L^1$, τότε $f_n \to f$ στον L^1. Αυτό ισχύει λόγω του ότι $|f_n - f| \le 2j$ και του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης.

Ορισμός 2.4.1. *Έστω f_n μετρήσιμες μιγαδικές στον $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Λέμε ότι είναι Cauchy ως προς το μέτρο αν $\forall \varepsilon > 0$,*

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \ge \varepsilon\}) \to 0 \text{ καθώς } n, m \to \infty,$$

και συγκλίνει στην f ως προς το μέτρο αν $\forall \varepsilon > 0$,

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}) \to 0 \text{ καθώς } n \to \infty.$$

Για παράδειγμα οι ακολουθίες των (i), (iii) και (iv) παραπάνω συγκλίνουν στο μηδέν ως προς το μέτρο, αλλά η (ii) δεν είναι Cauchy ως προς το μέτρο.

Πρόταση 2.4.2. *Αν $f_n \to f$ στον L^1, τότε $f_n \to f$ ως προς το μέτρο.*

Απόδειξη: Έστω $E_{n,\varepsilon} = \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$. Τότε

$$\int |f_n - f| \geq \int_{E_{n,\varepsilon}} |f_n - f| \geq \varepsilon \mu(E_{n,\varepsilon}),$$

οπότε $\mu(E_{n,\varepsilon}) \leq \varepsilon^{-1} \int |f_n - f| \to 0$. □

Το αντίστροφο είναι λάθος, για παράδειγμα το (i) και (iii).

Θεώρημα 2.4.3. *Έστω $\{f_n\}$ Cauchy ως προς το μέτρο. Τότε υπάρχει μετρήσιμη f ώστε $f_n \to f$ ως προς το μέτρο και υπακολουθία $\{f_{n_j}\}$ της $\{f_n\}$ που συγκλίνει στην f σ.π. Επίσης, αν $f_n \to g$ ως προς το μέτρο, τότε $g = f$ σ.π.*

Απόδειξη: Μπορούμε να επιλέξουμε μια υπακολουθία $\{g_j\} = \{f_{n_j}\}$ της f_n τέτοια ώστε αν $E_j = \{x : |g_j(x) - g_{j+1}(x)| \geq 2^{-j}\}$. Τότε $\mu(E_j) \leq 2^{-j}$ αφού η $\{f_n\}$ είναι Cauchy ως προς το μέτρο. Θέτουμε $F_k = \cup_{j=k}^{n} E_j$. Τότε $\mu(F_k) \leq \sum_k^\infty 2^{-j} = 2^{1-k}$, και αν $x \notin F_k$, για $i \geq j \geq k$ έχουμε

$$|g_j(x) - g_i(x)| \leq \sum_{l=j}^{i-1} |g_{l+1}(x) - g_l(x)| \leq \sum_{l=j}^{i-1} 2^{-l} = 2^{1-j}. \tag{2.1}$$

Οπότε η $\{g_j\}$ είναι κατά σημείο Cauchy στο F_k^c. Έστω $F = \cap_1^\infty F_k = \limsup E_j$: τότε $\mu(F) = 0$, και αν θέσουμε $f(x) = \lim g_j(x)$ για $x \notin F$ και $f(x) = 0$ για $x \in F$, τότε η f είναι μετρήσιμη και $g_j \to f$ σ.π. Επίσης η (2.1) συνεπάγεται ότι $|g_j(x) - f(x)| \leq 2^{2-j}$ για $j \geq k$, $x \notin F_k$. Αφού $\mu(F_k) \to 0$ καθώς $k \to \infty$, έπεται ότι $g_j \to f$ ως προς το μέτρο. Αλλά $f_n \to f$ ως προς το μέτρο διότι

$$\begin{aligned}\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \quad &\subseteq \quad \{x : |f_n(x) - g_j(x)| \geq \varepsilon/2\} \\ &\qquad \cup \{x : |g_j(x) - f(x)| \geq \varepsilon/2\},\end{aligned}$$

και τα σύνολα δεξιά έχουν μικρό μέτρο όταν n, j μεγάλα. Ομοίως, αν $f_n \to g$ ως προς το μέτρο διότι

$$\begin{aligned}\{x : |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} \quad &\subseteq \quad \{x : |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon/2\} \\ &\qquad \cup \{x : |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon/2\},\end{aligned}$$

$\forall n$, οπότε $\mu(\{x : |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$ για κάθε ε. Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0$ βάσει μιας μηδενικής ακολουθίας παίρνουμε $f = g$ σ.π. □

Πόρισμα 2.4.4. *Αν $f_n \to f$ στον L^1, τότε υπάρχει υπακολουθία $\{f_{n_j}\}$ ώστε $f_{n_j} \to f$ σ.π.*

Απόδειξη: Από την Πρόταση 2.4.2 και το Θεώρημα 2.4.3 το συμπέρασμα έπεται. □

Αν $f_n \to f$ σ.π. δεν συνεπάγεται ότι $f_n \to f$ ως προς το μέτρο, όπως στο παράδειγμα (ii).

Θεώρημα 2.4.5 (Θεώρημα Egoroff.). *Έστω $\mu(X) < \infty$ και f_n, f μετρήσιμες μιγαδικές συναρτήσεις στον X ώστε $f_n \to f$ σ.π. Τότε $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει $E \subseteq X$ ώστε $\mu(E) < \varepsilon$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο E^c.*

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ παντού στον X. Για $k, n \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$E_n(k) = \bigcup_{m=n}^{\infty} \{x : |f_m(x) - f(x)| \geq k^{-1}\}.$$

Τότε για σταθερό k, τα $E_n(k)$ φθίνουν καθώς το n αυξάνει, και $\cap_{n=1}^{\infty} E_n(k) = \emptyset$, αφού $f_n \to f$. Έτσι αφού $\mu(X) < \infty$ συμπεραίνουμε ότι $\mu(E_n(k)) \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Έστω $\varepsilon > 0$ και $k \in \mathbb{N}$. Διαλέγουμε n_k μεγάλο ώστε $\mu(E_n(k)) < \varepsilon 2^{-k}$ και έστω $E = \cup_{k=1}^{\infty} E_{n_k}$. Τότε $\mu(E) < \varepsilon$ και $|f_n(x) - f(x)| < k^{-1}$ για $n > n_k$ και $x \notin E$. Άρα $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο E^c. □

2.5 Μέτρα γινόμενα

Αν $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ χώροι μέτρου, έχουμε ήδη ορίσει την σ-άλγεβρα $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Τώρα θα κατασκευάσουμε το μέτρο γινόμενο των μ και ν.

Ένα ορθογώνιο είναι ένα σύνολο της μορφής $A \times E$ όπου $A \in \mathcal{M}$ και $E \in \mathcal{N}$. Φανερά $(A \times E) \cap (B \times F) = (A \cap B) \times (E \cap F)$ και $(A \times E)^c = (X \times E^c) \cup (A^c \times E)$. Αν $\mathcal{A}$ η συλλογή πεπερασμένων ξένων ενώσεων ορθογωνίων είναι μια άλγεβρα και βέβαια $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$.

Θα ορίσουμε $\pi(A \times E) = \mu(A)\nu(E)$ και ο ορισμός είναι καλός αν το $A \times E$ είναι πεπερασμένη ένωση ξένων ορθογωνίων $A_j \times E_j$. Τότε για $x \in X$ και $y \in Y$,

$$\chi_A(x)\chi_E(y) = \chi_{A \times E}(y) = \sum \chi_{A_j \times E_j}(x, y) = \sum \chi_{A_j}(x)\chi_{E_j}(y).$$

Ολοκληρώνοντας ως προς x και μετά ως προς y, έχουμε ότι

$$\pi(A \times E) = \sum \pi(A_j \times E_j),$$

$(0 \cdot \infty = 0)$. Το π είναι προμέτρο στην $\mathcal{A}$, οπότε από το Θεώρημα 1.4.7 το π ορίζει ένα εξωτερικό μέτρο στο $X \times Y$ που ο περιορισμός του στην $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ είναι μέτρο που επεκτείνει το π. Αυτό το μέτρο ονομάζεται μέτρο γινόμενο και συμβολίζεται με $\mu \times \nu$.

Αν μ,ν σ-πεπερασμένα τότε το $\mu \times \nu$ είναι σ-πεπερασμένο και από το Θεώρημα 1.4.7 είναι το μοναδικό μέτρο στην $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, όπου $(\mu \times \nu)(A \times E) = \mu(A)\nu(E)$ $\forall A \times E$. Ομοίως, ορίζεται το

$$\mu_1 \times \dots \mu_n(A_1 \times \dots \times A_n) = \prod_{1}^{n} \mu(A_j).$$

Αν $E \subseteq X \times Y$ ορίζουμε για $x \in X$, $y \in Y$ την x-τομή E_x και y-τομή E^y του E με

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}, \qquad E^y = x \in X : (x, y) \in E\}.$$

Ομοίως, αν $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ ορίζουμε την x-τομή f_x και y-τομή f^y της f με

$$f_x(y) = f^y(x) = f(x, y).$$

Πρόταση 2.5.1. (i) *Αν $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, τότε $E_x \in \mathcal{N}$ $\forall x \in X$ και $E^y \in \mathcal{M}$ $\forall y \in Y$.*

(ii) *Αν f $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ μετρήσιμη, τότε f_x $\mathcal{N}$-μετρήσιμη και f^y $\mathcal{M}$ μετρήσιμη.*

Απόδειξη: (i) Έστω $\mathcal{R} = \{E \subseteq X \times Y : E_x \in \mathcal{N} \forall x$ και $E^y \in \mathcal{M}\ \forall y\}$. Η $\mathcal{R}$ περιέχει τα ορθογώνια $[(A \times B)_x = B$ αν $x \in A$ και $(A \times B)_x = \emptyset$ αν $x \notin A]$. Αφού $(\cup_1^\infty E_j)_x = \cup_1^\infty (E_j)_x$ και $(E_x)^c = (E^c)_x$ η $\mathcal{R}$ είναι σ-άλγεβρα. Άρα $\mathcal{R} \supseteq \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$.

(ii) Προκύπτει άμεσα από το (i), διότι $(f_x)^{-1}(B) = (f^{-1}(B))_x$ και $(f^y)^{-1}(B) = (f^{-1}(B))^y$. □

Παρατήρηση 2.5.2. *Ακόμα και αν μ,ν πλήρη το $\mu \times \nu$ δεν είναι σχεδόν ποτέ πλήρες. Πράγματι, έστω $A \in \mathcal{M}$, $A \neq \emptyset$, $\mu(A) = 0$ και έστω $\mathcal{N} \neq \mathcal{P}(Y)$ (για παράδειγμα, μ,ν Lebesgue μέτρα στο $\mathbb{R}$). Αν $E \in \mathcal{P}(Y) \backslash \mathcal{N}$, τότε $A \times E \notin \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ λόγω της προηγούμενης πρότασης, αλλά $A \times E \subseteq A \times Y$ και $\mu \times \nu(A \times Y) = 0$ $(0 \cdot \infty = 0)$.*

Ορισμός 2.5.3. *Η οικογένεια $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ λέγεται μονότονη κλάση αν είναι κλειστή ως προς αύξουσες ενώσεις και φθίνουσες τομές.*

Λήμμα 2.5.4. *Αν $\mathcal{A}$ άλγεβρα, τότε η μονότονη κλάση που παράγεται από την $\mathcal{A}$ (δηλαδή η τομή όλων των μονότονων κλάσεων που την περιέχουν) είναι η $\mathcal{M}(\mathcal{A}) =: \mathcal{M}$.*

Απόδειξη: $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Θέλουμε να δείξουμε ότι η $\mathcal{C}$ είναι σ-άλγεβρα, οπότε αφού $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ η ελάχιστη που περιέχει την $\mathcal{A}$, θα συμπεράνουμε ότι $\mathcal{C} = \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Επειδή $\cup_1^\infty A_n = \cup_{n=1}^\infty (\cup_{k=1}^n A_k)$ αύξουσα ένωση, αν δείξουμε ότι $\cup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{C}$, θα έχουμε ότι $\cup_1^\infty A_n \in \mathcal{C}$. Άρα για να έχουμε ότι η $\mathcal{C}$ είναι σ-άλγεβρα, θέλουμε να δείξουμε ότι

- $\cup_1^n A_k \in \mathcal{C}$ $\forall A_k \in \mathcal{C}$
- $E \backslash F \in \mathcal{C}$ $\forall E, \forall F \in \mathcal{C}$
- $X \in \mathcal{C}$

Δηλαδή, αρκεί να δείξουμε ότι η $\mathcal{C}$ είναι άλγεβρα. Αν $X \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$, τότε $X \in \mathcal{C}$. Αρκεί $\forall E, F \in \mathcal{C}$ $E \backslash F$, $F \backslash E$ και $F \cap E \in \mathcal{C}$. Αν $F \in \mathcal{C}$ θέτουμε

$$\mathcal{C}(F) = \{E \in \mathcal{C} : E \backslash F, F \backslash E, F \cap E \in \mathcal{C}\} \subseteq \mathcal{C}.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\mathcal{C}(F) \supseteq \mathcal{C}$, γιατί τότε $\mathcal{C} = \mathcal{C}(F)$ $\forall F \in \mathcal{C}$, οπότε αν $E \in \mathcal{C}$, $F \in \mathcal{C}$, $E \in \mathcal{C} = \mathcal{C}(F)$. Άρα $E \in \mathcal{C}(F)$, οπότε $E \backslash F, F \backslash E, F \cap E \in \mathcal{C}$. Αν δείξουμε ότι $\mathcal{C}(F)$ μονότονη κλάση με $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(F)$, τότε η $\mathcal{C}$ ως ελάχιστη μονότονη κλάση με $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ θα ικανοποιεί $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}(F)$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η $\mathcal{C}(F)$ είναι μονότονη κλάση. Μένει να δειχθεί ότι $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(F)$, $\forall F \in \mathcal{C}$ ή κατευθείαν $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}(F)$ $\forall F \in \mathcal{C}$. Αν $F \in \mathcal{A}$ τότε $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(F)$, διότι αν $E \in \mathcal{A}$ τότε $E \backslash F, F \backslash E, F \cap E \in \mathcal{A}$ αφού η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα. Άρα $E \backslash F, F \backslash E, F \cap E \in \mathcal{C}$, αφού $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$, οπότε από τον ορισμό της $\mathcal{C}(F)$ έχουμε ότι $E \in \mathcal{C}(F)$. Άρα για $F \in \mathcal{A}$ έχουμε και ότι $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}(F)$. Έστω ότι $F \in \mathcal{C}$, θα δείξουμε άμεσα ότι $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}(F)$. Θα δείξουμε ότι $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(F)$ $\forall F \in \mathcal{C}$. Έστω $F \in \mathcal{C}$ και $E \in \mathcal{A}$. Άρα $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}(E)$, και επειδή $F \in \mathcal{C}$, $F \in \mathcal{C}(E)$. Εξαιτίας της συμμετρίας στον ορισμο του $\mathcal{C}$ τότε $E \in \mathcal{C}(F)$. Άρα $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(F)$. □

Θεώρημα 2.5.5. *Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ σ-πεπερασμένοι χώροι μέτρου. Αν $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, οι συναρτήσεις $x \to \nu(E_x)$, $y \to \mu(E^y)$ είναι μετρήσιμες στον X και Y αντίστοιχα, και*

$$(\mu \times \nu)(E) = \int \nu(E_x) d\mu(x) = \int \mu(E^y) d\nu(y).$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα ότι τα μ και ν είναι πεπερασμένα και έστω $\mathcal{C}$ το σύνολο όλων των $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ για τα οποία ισχύει το συμπέρασμα. Αν $E = A \times B$ τότε $\nu(E_x) = \chi_A(x)\nu(B)$ και $\mu(E^y) = \mu(A)\chi_B(y)$, οπότε φανερά $E \in \mathcal{C}$. Από την προσθετικότητα των μ, ν η $\mathcal{C}$ περιέχει και πεπερασμένες ξένες ενώσεις παραλληλογράμμων. Οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα, αρκεί να δείξουμε ότι η $\mathcal{C}$ είναι μονότονη κλάση. Έστω $E_n \in \mathcal{C}$ αύξουσα και $E = \cup_1^\infty E_n$. Οι συναρτήσεις $f_n(y) = \mu((E_n)^y)$ είναι μετρήσιμες και αυξάνουν κατά σημείο στην $f(y) = \mu(E^y)$. Άρα f μετρήσιμη και από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης

$$\int \mu(E^y) d\nu(y) = \lim \int \mu((E_n)^y) d\nu(y) = \lim \mu \times \nu(E_n) = \mu \times \nu(E).$$

Ομοίως, $\mu \times \nu(E) = \int \nu(E_x) d\mu(x)$, οπότε $E \in \mathcal{C}$. Αφού $\mu(X), \mu(Y) < \infty$ ισχύει και για φθίνουσες ακολουθίες $\{E_n\}$ με την ίδια απόδειξη, αλλά με χρήση του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης με $\{E_n\}$ φθίνουσα, $E = \cap E_n$ και $y \to \mu(E_1^y)$ ανήκει στον $L^1(\nu)$ αφού $\mu((E_1)^y) \leq \mu(X) < \infty$ και $\nu(Y) < \infty$, άρα το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης μπορεί να εφαρμοστεί για να δείξουμε ότι $E \in \mathcal{C}$.

Αν μ και ν είναι σ-πεπερασμένα γράφουμε $X \times Y = \cup_1^\infty X_j \times Y_j$ με $\{X_j \times Y_j\}$ αύξουσα και $\mu(X_j), \nu(Y_j) < \infty$. Άρα αν $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, εφαρμόζεται το προηγούμενο στο σύνολο $E \cap (X_j \times Y_j)$ $\forall j$, οπότε

$$\begin{aligned} \mu \times \nu(E \cap (X_j \times Y_j)) &= \int \chi_{X_j}(x) \nu(E_x \cap Y_j) d\mu(x) \\ &= \int \chi_{Y_j}(y) \mu(E^y \cap X_j) d\nu(y). \end{aligned}$$

Πάλι από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης για $j \to \infty$

$$\begin{aligned} \mu \times \nu(E) &= \int \chi_X(x) \nu(E_x) d\mu(x) = \int \nu(E_x) d\mu(x) \\ &= \int \chi_Y(y) \mu(E^y) d\nu(y) = \int \mu(E^y) d\nu(y). \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 2.5.6 (Θεώρημα Fubini-Toneli.). *Έστω* $(X,\mathcal{M},\mu)$ *και* $(Y,\mathcal{N},\nu)$ *σ-πεπερασμένοι χώροι μέτρου. Τότε,*

(i) *(Toneli) Αν* $f \in L^+(X\times Y)$, *τότε οι συναρτήσεις* $g(x)=\int f_x d\nu$ *και* $h(y)=\int f^y d\mu$ *είναι στον* $L^+(X)$ *και* $L^+(Y)$ *αντίστοιχα και*

$$\begin{aligned}\int f d(\mu\times\nu) &= \int\left[\int f(x,y)d\nu(y)\right]d\mu(x) \qquad (2.2)\\ &= \int\left[\int f(x,y)d\mu(x)\right]d\nu(y).\end{aligned}$$

(ii) *(Fubini) Αν* $f\in L^1(\mu\times\nu)$, *τότε* $f_x\in L^1(\nu)$ *σχεδόν για κάθε* $x\in X$ *και* $f^y\in L^1(\mu)$ *σχεδόν για κάθε* $y\in Y$ *και οι σχεδόν παντού ορισμένες* $g(x)=\int f_x d\nu$ *και* $h(y)=\int f^y d\mu$ *είναι στον* $L^1(\mu)$ *και* $L^1(\nu)$ *αντίστοιχα και ισχύει η (2.2).*

Απόδειξη: Το θεώρημα Toneli για f χαρακτηριστική συνάρτηση, προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 2.5.5 και άρα ισχύει και για απλές λόγω γραμμικότητας. Αν $f\in L^+(X\times Y)$ και $\{f_n\}$ απλές που αυξάνουν στην f, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, οι αντίστοιχες g_n και h_n αυξάνουν στις g και h ($g_n(x)=\int (f_n)_x d\nu$, $h_n(y)=\int (f_n)^y d\mu$), οπότε g,h μετρήσιμες και

$$\int g d\mu = \lim\int g_n d\mu = \lim\int f_n d(\mu\times\nu) = \int f d(\mu\times\nu),$$

$$\int h d\nu = \lim\int h_n d\nu = \lim\int h_n d(\mu\times\nu) = \int f d(\mu\times\nu).$$

Αυτά αποδεικνύουν το θεώρημα Toneli και δείχνουν ότι αν $f\in L^+(X\times Y)$ και $\int f d(\mu\times\nu)<\infty$, τότε $g<\infty$ σ.π. και $h<\infty$ σ.π., δηλαδή $f_x\in L^1(\nu)$ σ.π. και $f^y\in L^1(\mu)$ σ.π. Έτσι, αν $f\in L^1(\mu\times\nu)$ το θεώρημα Fubini έπεται από εφαρμογή των προηγούμενων στο θετικό και αρνητικό μέρος των Ref και Imf. □

Παρατήρηση 2.5.7. (i) *Συνήθως θα παραλείπουμε τις παρενθέσεις και θα γράφουμε*

$$\int\left[\int f(x,y)d\mu(x)\right]d\nu(y) = \int\int f(x,y)d\mu(x)d\nu(y) = \int\int f(x,y)d\mu d\nu.$$

(ii) *Η υπόθεση του σ-πεπερασμένου είναι απαραίτητη.*

(iii) *Η υπόθεση* $f\in L^+(X\times Y)$ *ή* $f\in L^1(\mu\times\nu)$ *είναι απαραίτητη για δύο λόγους. Πρώτα, μπορεί οι* f_x *και* f^y *να είναι μετρήσιμες για όλα τα* x,y, *και τα διαδοχικά ολοκληρώματα* $\int\int f d\nu d\mu$, $\int\int f d\mu d\nu$ *υπάρχουν και η* f *να μην είναι* $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$*-μετρήσιμη και τα διαδοχικά ολοκληρώματα μπορεί να μην είναι ίσα. Επίσης, αν* $f\geq 0$ *μπορεί οι* f_x *και* f^y *να είναι μετρήσιμες* $\forall x,y$ *και τα ολοκληρώματα* $\int\int f d\nu d\mu$, $\int\int f d\mu d\nu$ *να υπάρχουν, ίσως και διαφορετικά, και* $\int |f|\, d(\mu\times\nu)=\infty$.

(iv) *Τα θεωρήματα Fubini και Toneli χρησιμοποιούνται συχνά διαδοχικά. Πρώτα κανείς χρησιμοποιεί το Toneli για να βεβαιωθεί ότι* $\int |f|\, d(\mu \times \nu) < \infty$ *και μετά εφαρμόζει το Fubini για να πάρει ότι* $\int\int f d\nu d\mu = \int\int f d\mu d\nu$.

Έστω $X = Y$ το σύνολο των αριθμήσιμων διατακτικών αριθμών. Οπότε $\forall x \in X$ το σύνολο $\{y : y < x\}$ είναι αριθμήσιμο. Έστω $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ η σ-άλγεβρα των αριθμήσιμων ή συναριθμήσιμων συνόλων και $\mu = \nu$ με $\mu(A) = 0$, αν A αριθμήσιμο, και $\mu(A) = 1$, αν A υπεραριθμήσιμο. Έστω $E = \{(x, y) : y < x\}$. Τότε $E_x = \{y : (x, y) \in E\} = \{y : y < x\}$ είναι αριθμήσιμο, άρα μετρήσιμο. Επίσης, $E^y = \{x : (x, y) \in E\} = \{x : y < x\}$ είναι συναριθμήσιμο, άρα μετρήσιμο.

$$\int\int \chi_E d\mu d\nu = \int_Y \left[\int_X \chi_E(x) d\mu(x)\right] d\nu(y) = \int_Y 1 d\nu(y) = 1$$

και

$$\int\int \chi_E d\nu d\mu = \int_X \left[\int_Y \chi_E(y) d\nu(y)\right] d\mu(x) = \int_X 0 d\mu(x) = 0,$$

άρα $E \notin \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Αν δεχόμαστε την υπόθεση του συνεχούς, μπορούμε να πάρουμε ότι $X = [0, 1]$ (όχι με τη συνήθη διάταξη), οπότε θα έχουμε ότι E_x, E^y μετρήσιμα (αριθμήσιμα και συναριθμήσιμα άρα Borel), αλλά $E \subseteq X \times X$ άρα δεν είναι $\mathcal{L}$-μετρήσιμο. Έστω $X = Y = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mu = \nu$ το αριθμητικό μέτρο. Ορίζουμε $f(m, n) = 1$ αν $m = n$ και $f(m, n) = -1$ αν $m = n + 1$ και $f(m, n) = 0$ αλλιώς. $\int |f|\, d(\mu \times \nu) = \infty$ και $\int\int f d\nu d\mu \neq \int\int f d\mu d\nu$.

2.6 Το ολοκλήρωμα Lebesgue στον $\mathbb{R}^n$

Το Lebesgue μέτρο m στον $\mathbb{R}^n$ είναι η πλήρωση γινομένου $m \times \ldots \times m$ n φορές στην $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \ldots \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ή ισοδύναμα η πλήρωση του $m \times \ldots \times m$ στην $\mathcal{L} \otimes \ldots \otimes \mathcal{L} = \mathcal{L}^n$. Όταν δεν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης θα γράφουμε απλά m.

Θεώρημα 2.6.1. *Έστω* $E \in \mathcal{L}^n$.

(i) *Ισχύει* $m(E) = \inf\{m(U) : U \supseteq E, U$ *ανοιχτό*$\} = \sup\{m(K) : K \subseteq E, K$ *συμπαγές*$\}$.

(ii) $E = A_1 \cup N_1 = A_2 \setminus N_2$ *όπου* A_1 F_σ *σύνολο,* A_2 G_δ *σύνολο και* $m(N_1) = m(N_2) = 0$.

(iii) *Αν* $m(E) < \infty$ $\forall \varepsilon > 0$ *υπάρχει πεπερασμένη συλλογή* $\{R_j\}_1^N$ *ξένων ορθογωνίων που οι πλευρές τους είναι διαστήματα ώστε* $m(E \triangle \cup_1^N R_j) < \varepsilon$.

Απόδειξη: Από τον ορισμό του μέτρου γινομένου (που γίνεται μέσω εξωτερικού μέτρου όπου η αρχική άλγεβρα είναι τα ορθογώνια), αν $E \in \mathcal{L}^n$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχουν ξένα ορθογώνια R_j ώστε $E \subseteq \cup_1^\infty R_j$ και $\sum_1^\infty m(R_j) \leq m(E) + \varepsilon$. Εφαρμόζοντας την εξωτερική κανονικότητα στο $\mathbb{R}$, υπάρχει ορθογώνιο με ανοιχτές πλευρές S_j, ώστε $S_j \supseteq R_j$ και $m(S_j) \leq m(R_j) + \varepsilon 2^{-j}$. Αν $U = \cup_1^\infty S_j$, U ανοιχτό και $m(U) \leq \sum_1^\infty m(S_j) \leq m(E) + 2\varepsilon$. Αυτό αποδεικνύει την πρώτη ισότητα του (i). Ομοίως και η δεύτερη. Αν $m(E) < \infty$, τότε $m(S_j) < \infty \ \forall j$. Οι πλευρές του S_j είναι αριθμήσιμες ενώσεις ανοιχτών διαστημάτων παίρνοντας κατάλληλες πεπερασμένες υποενώσεις βρίσκουμε ορθογώνια $T_j \subseteq S_j$, που είναι πεπερασμένες ενώσεις διαστημάτων ώστε $m(T_j) \geq m(S_j) - 2^{-j}$. Αν N αρκετά μεγάλο, έχουμε

$$\begin{aligned} m\left(E \triangle \bigcup_1^N T_j\right) &= m\left(E \setminus \bigcup_1^N T_j\right) + m\left(\bigcup_1^N T_j \backslash E\right) \\ &\leq m\left(\bigcup_1^N (S_j \backslash T_j)\right) + m\left(\bigcup_{N+1}^{\infty} S_j\right) + m\left(\bigcup_1^{\infty} S_j \backslash E\right) \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Το $\cup_1^N T_j$ γράφεται ως πεπερασμένη ξένη ένωση ορθογωνίων με πλευρές διαστήματα. □

Θεώρημα 2.6.2. *Αν $f \in L^1(m)$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\varphi = \sum_1^N \alpha_j \chi_{R_j}$ όπου κάθε R_j είναι γινόμενο διαστημάτων ώστε $\int |f - \varphi| < \varepsilon$ και υπάρχει συνεχής συνάρτηση g που μηδενίζεται έξω από ένα συμπαγές ώστε $\int |f - g| < \varepsilon$.*

Απόδειξη: Είναι προφανής. □

Θεώρημα 2.6.3. *Το μέτρο Lebesgue είναι αναλλοίωτο στις μεταφορές, δηλαδή αν $E \in \mathcal{L}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ και $E + x = \{y + x : y \in E\}$ τότε $E + x \in \mathcal{L}^n$ και $m(E+x) = m(E)$. Επίσης, αν f Lebesgue μετρήσιμη και είτε $f \geq 0$ ή $f \in L^1(m)$, τότε $\int f(x+y)dy = \int f(y)dy$.*

Απόδειξη: Προφανές για παραλληλόγραμμο άρα και για Borel σύνολα. Τα μηδενικά διατηρούν το μέτρο μηδέν με μεταφορά, άρα ισχύει και για $\mathcal{L}^n$ σύνολα. Για τις συναρτήσεις χρησιμοποιούμε χαρακτηριστικές. Τέλος, για την τυχαία συνάρτηση χρησιμοποιούμε την ανάλυση σε θετικό και αρνητικό μέρος του πραγματικού και του φανταστικού μέρους. □

Ταυτίζουμε μια γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με τον πίνακα $(T_{ij}) = \langle Te_j, e_j \rangle$ όπου e_j η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$. Τότε $\det(T \circ S) = \det T \cdot \det S$. Συμβολίζουμε με $GL(n, \mathbb{R})$ την ομάδα των αντιστρέψιμων γραμμικών απεικονίσεων στον $\mathbb{R}^n$.

Λήμμα 2.6.4. *Κάθε $T \in GL(n, \mathbb{R})$ μπορεί να γραφτεί ως σύνθεση πεπερασμένου πλήθους από τους παρακάτω μετασχηματισμούς:*

$$T_1(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, cx_j, \ldots, x_n)(1 \leq j \leq n, c \neq 0),$$

$$T_2(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_j + cx_k, \ldots, x_n)(1 \leq j \leq n, k \neq j, c \neq 0),$$

$$T_3(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_k, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_j, \ldots, x_n)(1 \leq j < k \leq n).$$

(δηλαδή κάθε πίνακας με μη μηδενική ορίζουσα μπορεί να αναχθεί με πράξεις γραμμών στον ταυτοτικό.)

Θεώρημα 2.6.5. *Έστω $T \in GL(n,\mathbb{R})$*

(i) *Αν f Lebesgue μετρήσιμη στο $\mathbb{R}^n$, είναι μετρήσιμη και η $f \circ T$. Αν $f \geq 0$ ή $f \in L^1(m)$, τότε*

$$\int f(x)dx = |\det T| \int f \circ T(x)dx. \tag{2.3}$$

(ii) *Αν $E \in \mathcal{L}^n$, τότε $T(E) \in \mathcal{L}^n$ και $m(T(E)) = |\det T|\, m(E)$.*

Απόδειξη: Αν f Borel μετρήσιμη, το ίδιο είναι και η $f \circ T$ αφού T συνεχής. Αν η (2.3) ισχύει για T και $S \in GL(n,\mathbb{R})$ το ίδιο ισχύει και για την $T \circ S$, αφού

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= |\det T| \int f \circ T(x)dx = |\det T|\,|\det S| \int f \circ T \circ S(x)dx \\ &= |\det T \circ S| \int f \circ (T \circ S)(x)dx. \end{aligned}$$

Άρα αρκεί να δειχθεί η (2.3) για τους στοιχειώδης T_1, T_2, T_3 του παραπάνω λήμματος. Για τον T_3 είναι αλλαγή σειράς ολοκλήρωσης, άρα από το θεώρημα Fubini-Toneli $\det T_3 = -1$. Για τους T_1 και T_2 ολοκληρώνουμε πρώτα ως προς x_j και χρησιμοποιούμε τις

$$\int f(t)dt = |c| \int f(ct)dt, \qquad \int f(t+\alpha) = \int f(t)dt,$$

στη μία διάσταση που προέρχονται από το $m(rE) = |r|\, m(E)$ και $m(E+\alpha) = m(E)$ και έχουμε ότι $\det T_2 = 1$ και $\det T_1 = c$. Για το (ii), $T(E) \in \mathcal{L}^n$ γιατί T^{-1} συνεχής και $m(T(E)) = |\det T|\, m(E)$ με χρήση της $f = \chi_{T(E)}$. □

Πόρισμα 2.6.6. *Το μέτρο Lebesgue είναι αναλλοίωτο στις στροφές.*

Απόδειξη: Αν T στροφή, τότε $TT^* = I$, αλλά $\det T = \det T^*$. Άρα $|\det T| = 1$. □

Αποδεικνύεται και το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 2.6.7. *Έστω Ω ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $G : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ένας c^1 διαφορομορφισμός.*

(i) Αν f Lebesgue μετρήσιμη στο $G(\Omega)$, τότε η $f \circ G$ είναι Lebesgue μετρήσιμη στο Ω. Αν $f \geq 0$ ή $f \in L^1(G(\Omega), m)$, τότε

$$\int_{G(\Omega)} f(x)dx = \int_{\Omega} (f \circ G)(x)\, |\det D_x G|\, dx,$$

όπου $D_x G := D_x(g_1, \ldots, g_n) = (\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x))$ και G διαφορομορφισμοί αν G $1-1$ και $D_x G \in GL(n,\mathbb{R})$ για κάθε x.

(ii) Αν $E \subseteq \Omega$ και $E \in \mathcal{L}^n$, τότε $G(E) \in \mathcal{L}^n$ και $m(G(E)) = \int_E |\det D_x G|\, dx$.

Οι σημαντικότεροι μετασχηματισμοί στον $\mathbb{R}^2$ και στον $\mathbb{R}^3$ είναι οι πολικές ($x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, dxdy = rdrd\theta$) και οι σφαιρικές συντεταγμένες ($x = r\sin\varphi\cos\theta, y = r\sin\varphi\sin\theta, z = r\cos\varphi, dxdydz = r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi$). Αντίστοιχοι τύποι υπάρχουν και σε υψηλότερες διαστάσεις αλλά είναι υπερβολικά περίπλοκοι. Συνήθως αρκεί να ξέρουμε ότι μέτρο Lebesgue είναι το γινόμενο ενός μέτρου ενός κομματιού της μοναδιαίας σφαίρας επί $r^{n-1}dr$ στο $(0,\infty)$. Θα κατασκευάσουμε αυτό το μέτρο στη σφαίρα: $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$. Αν $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ θα γράφουμε $r = |x|$ και $x^{'} = x/|x|$. Η απεικόνιση $\Phi(x) = (r, x^{'})$ είναι συνεχής, $1-1$ και επί από το $\mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to (0,\infty)\times S^{n-1}$ με συνεχή αντίστροφο την $\Phi^{-1}(r,x^{'}) = rx^{'}$. Έστω m_* το μέτρο Borel στο $(0,\infty)\times S^{n-1}$ που επάγει η Φ από το μέτρο Lebesgue, δηλαδή $m_*(E) = m(\Phi^{-1}(E))$.

Θεώρημα 2.6.8. *Υπάρχει μοναδικό μέτρο Borel $\sigma = \sigma_{n-1}$ στην S^{n-1} ώστε $m_* = \rho\times\sigma$. Αν f Borel μετρήσιμη στον $\mathbb{R}^n$ και $f \geq 0$ ή $f \in L^1(m)$, τότε*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(r,x')r^{n-1}d\sigma(x')dr. \tag{2.4}$$

Απόδειξη: Η (2.4) για $f = \chi_E$ είναι ίδια με την $m_* = \rho\times\sigma$. Άρα για τη γενική f θα προκύψει από τη γραμμικότητα και όρια απλών. Αρκεί λοιπόν να δειχθεί η $m_* = \rho\times\sigma$. Έστω E Borel στο S^{n-1} και $\alpha > 0$. Έστω

$$E_\alpha = \Phi^{-1}((0,\alpha]\times E) = \{rx' : 0 < r \leq \alpha, x \in E\}.$$

Αν η (2.4) ισχύει όταν $f = \chi_{E_1}$ θα πρέπει

$$m(E_1) = \int_1^0 \int_E r^{n-1}d\sigma(x')dr = n^{-1}\sigma(E).$$

Ορίζουμε λοιπόν $\sigma(E) = nm(E_1)$. Επειδή η απεικόνιση $E \to E_1$ πηγαίνει σύνολα Borel σε σύνολα Borel, αντιμετατίθεται με ενώσεις, τομές, συμπληρώματα, είναι φανερό ότι το σ είναι μέτρο Borel στην S^{n-1}. Επίσης, αφού E_α είναι η εικόνα του E_1 υπό την απεικόνιση $x \to \alpha x$, έπεται από το θεώρημα αλλαγής μεταβλητών, ότι $mE_\alpha = \alpha^n m(E_1)$, άρα αν $0 < \alpha < b$,

$$\begin{aligned} m_*((\alpha,b]\times E) &= m(E_b\backslash E_\alpha) = n^{-1}(b^n - \alpha^n)\sigma(E) = \sigma(E)\int_\alpha^b r^{n-1}dr \\ &= \rho\times\sigma((\alpha,b]\times E). \end{aligned}$$

Έστω $E = \mathcal{B}_{S^{n-1}}$ και $\mathcal{A}_E$ η συλλογή πεπερασμένων ξένων ενώσεων της μορφής $(\alpha,b]\times E$. Η $\mathcal{A}_E$ είναι άλγεβρα στο $(0,\infty)\times E$ που παράγει την σ-άλγεβρα $\mathcal{M}_E = \{A\times E : A \in \mathcal{B}_{(0,\infty)}\}$. Από προηγούμενο υπολογισμό έχουμε ότι $m_* = \rho\times\sigma$ στην $\mathcal{A}_E$ και από τη μοναδικότητα επέκτασης $m_* = \rho\times\sigma$ στην $\mathcal{M}_E$. Αλλά $\cup\{\mathcal{M}_E : E \in \mathcal{B}_{S^{n-1}}\}$ είναι τα Borel ορθογώνια του $(0,\infty)\times S^{n-1}$, οπότε πάλι από τη μοναδικότητα της επέκτασης έχουμε ότι $m_* = \rho\times\sigma$ σε όλα τα Borel. □

Πόρισμα 2.6.9. *Αν η f είναι μετρήσιμη στο $\mathbb{R}^n$ και $f \geq 0$ ή $f \in L^1(m)$ ώστε $f(x) = g(|x|)$ για κάποια g στο $(0, \infty)$, τότε*

$$\int f(x)dx = \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty g(r) r^{n-1} dr.$$

Πόρισμα 2.6.10. *Αν $\alpha > 0$ έστω $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \alpha\}$ και η f μετρήσιμη στον $\mathbb{R}^n$.*

(i) *Αν $|f(x)| \leq C\,|x|^{-\alpha}$ στο B για κάποιο $C > 0$ και $\alpha < n$, τότε $f \in L^1(B)$. Αν $|f(x)| \geq C\,|x|^{-n}$ στο B, τότε $f \notin L^1(B)$.*

(ii) *Αν $|f(x)| \leq C\,|x|^{-\alpha}$ στο B^c για κάποιο $C > 0$ και $\alpha > n$, τότε $f \in L^1(B^c)$. Αν $|f(x)| \geq C\,|x|^{-n}$ στο B^c, τότε $f \notin L^1(B^c)$.*

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το Πόρισμα 2.6.9 στις $|x|^{-\alpha}\chi_B$ και $|x|^{-\alpha}\chi_{B^c}$. □

Πρόταση 2.6.11. *Αν $\alpha > 0$,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\alpha\,|x|^2)dx = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{n/2}.$$

Απόδειξη: Έστω $I_n = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\alpha\,|x|^2)dx$. Για $n = 2$, από το Πόρισμα 2.6.9 έχουμε

$$I_2 = 2\pi \int_0^\infty r e^{-\alpha r^2} dr = -\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) e^{-\alpha r^2} \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{\alpha}.$$

Αφού $\exp(-\alpha\,|x|^2)dx = \prod_1^\infty \exp(-\alpha\chi_j^2)$, από το θεώρημα Tonelli έχουμε ότι $I_n = (I_1)^n$. $I_1 = (I_2)^{1/2}$ οπότε $I_n = (\pi/\alpha)^{n/2}$. □

Ορίζουμε

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt (x > 0).$$

Έχουμε ότι $\Gamma(1) = 1$ και $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ [με την αντικατάσταση $t = s^2$ και χρήση της Πρότασης 2.6.11]. Επιπλέον, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Έπεται ότι για $n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(n) = (n-1)! \qquad \Gamma\Big(n + \frac{1}{2}\Big) = \Big(n - \frac{1}{2}\Big)\Big(n - \frac{3}{2}\Big) \dots \Big(\frac{1}{2}\Big)\sqrt{\pi}.$$

Πρόταση 2.6.12. $\sigma(S^{n-1}) = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$.

Απόδειξη: Από το Πόρισμα 2.6.9 και την Πρόταση 2.6.11, και για $t = s^2$,

$$\begin{aligned} \pi^{n/2} &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr \\ &= \frac{\sigma(S^{n-1})}{2} \int_0^\infty s^{(n-2)/2} e^{-s} ds = \frac{\sigma(S^{n-1})}{2} \Gamma\Big(\frac{n}{2}\Big). \end{aligned}$$

□

Πόρισμα 2.6.13. *Αν* $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ *,τότε*

$$m(B^n) = \pi^{n/2}/\Gamma((n/2)+1).$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} m(B^n) &= \sigma(S^{n-1})\int_0^1 r^{n-1}dr = \sigma(S^{n-1})/n \\ &= 2\pi^{n/2}/n\Gamma(n/2) = \pi^{n/2}/\Gamma((n/2)+1). \end{aligned}$$

$\square$

Άσκηση: Ομοίως υπολογίζεται ο όγκος του $B_p^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p \leq 1\}(0 < p < \infty)$: Θέτουμε $I_p = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\|x\|_p^p\right)dx$. Από τη μια μεριά θα έχουμε

$$I_p = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp(-|t|^p)dt\right)^n.$$

Από την άλλη μεριά όμως

$$I_p = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\|x\|_p}^{\infty} \frac{d}{dt}(-\exp(-t^p))dt\right)dx.$$

Παρατήρηση 2.6.14. *Από τον τύπο Stirling για τη συνάρτηση* Γ *προκύπτει εύκολα ότι* $c_1(p)n^{-1/p} \leq vol(B_p^n)^{1/n} \leq c_2(p)n^{-1/p}$, *όπου* c_1, c_2 *σταθερές ως προς* n. *Για παράδειγμα,* $vol(B_2^n)^{1/n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Κεφάλαιο 3

Ανάλυση μέτρων

3.1 Προσημασμένα μέτρα

Ορισμός 3.1.1. *Ένα προσημασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{M})$ είναι μια συνάρτηση $\nu : \mathcal{M} \to [-\infty, \infty]$ ώστε $\nu(\emptyset) = 0$, το ν δεν πετυχαίνει και τις δύο τιμές $\{\pm\infty\}$. Έστω $\{E_j\} \in \mathcal{M}$ ακολουθία ξένων συνόλων, τότε $\nu(\cup_1^\infty E_j) = \sum_1^\infty \nu(E_j)$ όπου η τελευταία σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα αν $\nu(\cup_1^\infty E_j) < \infty$.*

Κάθε μέτρο είναι προσημασμένο μέτρο. Πολλές φορές αναφερόμαστε στα μέτρα ως «θετικά μέτρα». Για παράδειγμα, αν μ_1, μ_2 είναι μέτρα και ένα από αυτά είναι πεπερασμένο, τότε το $\nu = \mu_1 - \mu_2$ είναι προσημασμένο. Αν $f : X \to [-\infty, \infty]$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση και τουλάχιστον ένα από τα $\int f^+$, $\int f^-$ είναι πεπερασμένο, τότε $\nu(E) = \int_E f d\mu$ είναι προσημασμένο.

Πρόταση 3.1.2. *Έστω ν ένα προσημασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{M})$. Αν $\{E_j\}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία στην $\mathcal{M}$, τότε $\nu(\cup_1^\infty E_j) = \lim_{j\to\infty} \nu(E_j)$. Αν $\{E_j\}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία στην $\mathcal{M}$ και $\nu(E_1) < \infty$, τότε $\nu(\cap_1^\infty E_j) = \lim_{j\to\infty} \nu(E_j)$.*

Ορισμός 3.1.3. *Έστω ν ένα προσημασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{M})$, ένα σύνολο $E \in \mathcal{M}$ λέγεται θετικό (αρνητικό, μηδενικό) αν και μόνο αν $\nu(F) \geq 0$ [$\nu(F) \leq 0$, $\nu(F) = 0$] για κάθε $F \in \mathcal{M}$ ώστε $F \subset E$.*

Στο παράδειγμα $\nu(E) = \int_E f d\mu$, το E είναι θετικό, αρνητικό, ή μηδέν αν και μόνο αν $f \geq 0$, $f \leq 0$, $f = 0$ μ-σ.π. στο E.

Λήμμα 3.1.4. *Αν P_j είναι ένα θετικό σύνολο για ν για κάθε $j \in \mathbb{N}$, τότε το σύνολο $\cup_1^\infty P_j$ είναι θετικό για ν.*

Απόδειξη: Έστω $Q_n = P_n \setminus \cup_1^{n-1} P_j$. Τότε $Q_n \subset P_n$, άρα το Q_n είναι θετικό. Αν $E \subset \cup_1^\infty P_j$, τότε $\nu(E) = \sum_1^\infty \nu(E \cap Q_n) \geq 0$. $\square$

Θεώρημα 3.1.5 (Ανάλυση του Hahn)**.** *Έστω ν ένα προσημασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{M})$, τότε υπάρχει θετικό σύνολο P και αρνητικό σύνολο N ώστε $P \cup N = X$ και $P \cap N = \emptyset$. Αν P', N' ένα άλλο τέτοιο ζευγάρι, τότε $P \triangle P' (= N \triangle N')$ είναι μηδενικό για το ν.*

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας το ν δε δίνει ποτέ $+\infty$ (αλλιώς θεωρούμε το $-\nu$). Πρώτα ισχυριζόμαστε ότι αν $\nu(A) > -\infty$, τότε $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει $B \subset A$ ώστε $\nu(B) \geq \nu(A)$ και $\nu(E) > -\varepsilon$ $\forall E \subset B$. Αν όχι, υπάρχει $E_1 \subset A$ με $\nu(E_1) \leq -\varepsilon$. Αφού $\nu(A \backslash E_1) = \nu(A) - \nu(E_1) \geq \nu(A)$ υπάρχει $E_2 \subset A \backslash E_1$ ώστε $\nu(E_2) \leq -\varepsilon$. Συνεχίζοντας μ' αυτόν τον τρόπο φτιάχνουμε μια ακολουθία $\{E_j\}$ ξένων υποσυνόλων του A ώστε $\nu(E_j) \leq -\varepsilon$. Αν $E = \cup_1^\infty E_j$, τότε $\nu(A \backslash E) = \nu(A) - \sum_1^\infty \nu(E) = +\infty$, το οποίο είναι άτοπο.

Τώρα ισχυριζόμαστε ότι αν $\nu(A) > -\infty$ υπάρχει θετικό σύνολο $P \subset A$ με $\nu(P) \geq \nu(A)$. Θέτουμε $A_1 = A$ και ορίζουμε τα A_n επαγωγικά ως εξής: αν έχουν οριστεί τα $A_1, \ldots, A_{n-1}$, βρίσκουμε $A_n \subset A_{n-1}$ ώστε $\nu(A_n) \geq \nu(A_{n-1})$ και $\nu(E) \geq -1/n$ $\forall E \subset A_n$, από τον προηγούμενο ισχυρισμό. Έστω $P = \cap_1^\infty A_n$, τότε το P είναι θετικό από την κατασκευή και από την Πρόταση 3.1.2 έχουμε ότι $\nu(P) = \lim \nu(A_n) \geq \nu(A)$.

Έστω τώρα $s = \sup\{\nu(A) : A \in \mathcal{M}\}$. Υπάρχει ακολουθία $\{P_n\}$ ώστε $\nu(P_n) \to s$ και από τον δεύτερο ισχυρισμό, χωρίς βλάβη της γενικότητας, το P_n είναι θετικό για κάθε n. Έστω $P = \cup_1^\infty P_n$. Τότε $\nu(P) = s$ και το P είναι θετικό, από την Πρόταση 3.1.2 και από το Λήμμα 3.1.4. Επιπλέον, το $N = P^c$ είναι αρνητικό, γιατί αν $E \subset N$ και $\nu(E) > 0$ θα είχαμε ότι $\nu(P \cup E) = \nu(P) + \nu(E) > s$, το οποίο είναι άτοπο.

Τέλος, αν P', N' άλλο ένα τέτοιο ζευγάρι έχουμε ότι $P \backslash P' \subset P$ και $P \backslash P' \subset N'$, άρα έχουμε ότι το $P \backslash P'$ είναι και θετικό και αρνητικό, άρα είναι μηδενικό. Ομοίως για το $P' \backslash P$. □

Ορισμός 3.1.6. *Δυο μέτρα μ, ν λέγονται ορθογώνια αν υπάρχουν $E, F \in \mathcal{M}$ ώστε $E \cap F = \emptyset$, $E \cup F = X$. Το E είναι μηδενικό για το μ και το F είναι μηδενικό για το ν. Γράφουμε $\mu \perp \nu$.*

Θεώρημα 3.1.7. *Αν ν προσημασμένο μέτρο, υπάρχουν μοναδικά θετικά μέτρα ν^+ και ν^- ώστε $\nu = \nu^+ - \nu^-$ και $\nu^+ \perp \nu^-$.*

Απόδειξη: Αν $X = P \cup N$ η ανάλυση Hahn για το ν, θέτουμε $\nu^+(E) = \nu(E \cap P)$ και $\nu^-(E) = -\nu(E \cap N)$. Φανερά, $\nu = \nu^+ - \nu^-$ και $\nu^+ \perp \nu^-$. Αν $\nu = \mu^+ - \mu^-$ με $\mu^+ \perp \mu^-$, έστω $E \cap F = \emptyset$, $E \cup F = X$ και $\mu^+(F) = \mu^-(E) = 0$. Τότε η $X = E \cup F$ είναι ανάλυση Hahn για το ν, οπότε το $P \triangle E$ είναι μηδενικό. Άρα $\forall A \in \mathcal{M}$, $\mu^+(A) = \mu^+(A \cap E) = \nu(A \cap E) = \nu(A \cap P) = \nu^+(A)$. Ομοίως $\nu^- = \mu^-$. □

Τα μέτρα ν^+ και ν^- λέγονται θετικό και αρνητικό μέρος του ν, και το $\nu = \nu^+ - \nu^-$ λέγεται ανάλυση Jordan του ν. Ορίζουμε η ολική κύμανση του ν να είναι το μέτρο $|\nu|$ με

$$|\nu| = \nu^+ + \nu^-.$$

Ορίζουμε το ολοκλήρωμα ως προς το προσημασμένο μέτρο ν: θέτουμε

$$L^1(\nu) = L^1(\nu^+) \cap L^1(\nu^-),$$

$$\int f d\nu = \int f d\nu^+ - \int f d\nu^- \text{ για } f \in L^1(\nu).$$

3.2 Το θεώρημα Lebesgue-Radon-Nikodym

Ορισμός 3.2.1. *Το προσημασμένο μέτρο ν είναι απόλυτα συνεχές ως προς το θετικό μέτρο μ αν $\nu(E) = 0\ \forall E \in \mathcal{M}$ όπου $\mu(E) = 0$. Γράφουμε $\nu << \mu$. Εύκολα $|\nu| << \mu$ αν και μόνο αν $\nu^+ << \mu$ και $\nu^- << \mu$.*

Η απόλυτη συνέχεια είναι το αντίθετο της ορθογωνιότητας. Αν $\nu << \mu$ και $\nu \perp \mu$, τότε $\nu = 0$ (διότι αν $E \cap F = \emptyset$ και $X = E \cup F$) και $\mu(E) = |\nu|(F) = 0$. Επειδή $\nu << \mu$ έχουμε ότι $|\nu|(E) = 0$, άρα $|\nu| = 0$ και $\nu = 0$. Επίσης, $\nu << \mu$ αν και μόνο αν $\nu << |\mu|$.

Θεώρημα 3.2.2. *Έστω ν πεπερασμένο προσημασμένο μέτρο και μ θετικό μέτρο στον $(X, \mathcal{M})$. Τότε $\nu << \mu$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|\nu(E)| < \varepsilon$ όταν $\mu(E) < \delta$.*

Απόδειξη: Αφού $\nu << \mu$ έχουμε ότι $|\nu| << \mu$ και $|\nu(E)| \leq |\nu|(E)$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\nu = |\nu|$, δηλαδή το ν είναι θετικό. Φανερά, από την $\varepsilon - \delta$ συνθήκη έχουμε ότι $\nu << \mu$. Αντίστροφα, έστω ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να μπορούμε να βρούμε $E_n \in \mathcal{M}$ με $\mu(E_n) < 2^{-n}$ και $\nu(E_n) \geq \varepsilon$. Θέτουμε $F_k = \cup_k^\infty E_n$ και $F = \cap_1^\infty F_k$. Τότε $\mu(F_k) < 2^{1-k}$, οπότε $\mu(F) = 0$, αλλά $\nu(F_k) \geq \varepsilon$ και αφού το ν είναι πεπερασμένο έχουμε ότι $\nu(F) = \lim \nu(F_n) \geq \varepsilon$. Έτσι έχουμε οδηγηθεί σε αντίφαση. $\square$

Το βασικό παράδειγμα απολύτως συνεχούς μέτρου είναι το $\nu(E) = \int_E f d\mu$, όπου η f είναι μ-ολοκληρώσιμη. Το ν είναι πεπερασμένο αν και μόνο αν $f \in L^1(\mu)$. Για μια μιγαδική συνάρτηση $f \in L^1(\mu)$ το προηγούμενο θεώρημα εφαρμόζεται στα Ref και Imf.

Πόρισμα 3.2.3. *Αν $f \in L^1(\mu)$, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\left|\int_E f d\mu\right| < \varepsilon$ όταν $\mu(E) < \delta$.*

Παρατήρηση 3.2.4. *Αντί για $\nu(E) = \int_E f d\mu$ γράφουμε απλούστερα*

$$d\nu = f d\mu.$$

Λήμμα 3.2.5. *Έστω ν και μ πεπερασμένα στον $(X, \mathcal{M})$. Είτε $\nu \perp \mu$ ή υπάρχει $\varepsilon > 0$ και $E \in \mathcal{M}$ ώστε $\mu(E) > 0$ και $\nu \geq \varepsilon\mu$ στο E (δηλαδή το E είναι θετικό για το $\nu - \varepsilon\mu$).*

Απόδειξη: Έστω $X = P_n \cup N_n$ η ανάλυση Hahn για το $\nu - n^{-1}\mu$. Έστω $P = \cup_1^\infty P_n$ και $N = \cap_1^\infty N_n = P^c$. Τότε το N είναι αρνητικό για όλα τα $\nu - n^{-1}\mu$ για κάθε n, άρα $0 \leq \nu(N) \leq n^{-1}\mu(N)$ για κάθε n, οπότε $\nu(N) = 0$. Αν $\mu(P) = 0$, τότε $\nu \perp \mu$. Αν $\mu(P) > 0$ υπάρχει n ώστε $\mu(P_n) > 0$ και το P_n είναι θετικό σύνολο για το $\nu - n^{-1}\mu$. $\square$

Θεώρημα 3.2.6 (Lebesgue-Radon-Nikodym)**.** *Έστω ν σ-πεπερασμένο προσημασμένο μέτρο και μ σ-πεπερασμένο θετικό μέτρο στον $(X, \mathcal{M})$. Υπάρχουν μοναδικά σ-πεπερασμένα προσημασμένα μέτρα λ, ρ στον $(X, \mathcal{M})$ ώστε $\lambda \perp \mu$, $\rho << \mu$ και $\nu = \lambda + \rho$. Επίσης, υπάρχει μ-ολοκληρώσιμη $f : X \to \mathbb{R}$, μοναδική εκτός από μεταβολές σε μηδενικά σύνολα, ώστε $d\rho = f d\mu$.*

Απόδειξη: Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις. Στην πρώτη υποθέτουμε ότι τα ν και μ είναι θετικά και πεπερασμένα. Έστω

$$\mathcal{F} = \left\{ f : X \to [0,\infty] : \int_E f d\mu \leq \nu(E) \forall E \in \mathcal{M} \right\}.$$

Αφού $\nu \geq 0$, $0 \in \mathcal{F}$, άρα $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Αν $f, g \in \mathcal{F}$, τότε $h = \max(f,g) \in \mathcal{F}$, διότι αν $A = \{x : f(x) > g(x)\}$, $\forall E \in \mathcal{M}$ έχουμε

$$\int_E h d\mu = \int_{E\cap A} f d\mu + \int_{E\setminus A} g d\mu \leq \nu(E \cap A) + \nu(E\setminus A) = \nu(E).$$

Έστω $\alpha = \sup\{\int_X f d\mu : f \in \mathcal{F}\}$, σημειώνοντας ότι $\alpha \leq \nu(X) < \infty$, και επιλέγουμε μια ακολουθία $\{f_n\} \in \mathcal{F}$ ώστε $\int_X f_n d\mu \to \alpha$. Θέτουμε $g_n = \max(f_1, \dots, f_n)$ και $f = \sup_n f_n$. Τότε $g_n \in \mathcal{F}$ και αυξάνει μονότονα στην f. Επίσης, $\int g_n d\mu \geq \int f_n d\mu$. Έπεται ότι $\lim \int g_n d\mu = \alpha$ και από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε ότι $\int_E f d\mu = \lim \int_E g_n d\mu \leq \nu(E)$, άρα $f \in \mathcal{F}$ και $\int_X f d\mu = \lim \int_X g_n d\mu = \alpha$. Παρατηρούμε ότι αφού $f \in \mathcal{F}$, $f \geq 0$ και $\int f \leq \nu(E) < \infty$ έχουμε ότι $f < \infty$ σ.π., άρα χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε την $f : X \to [0,\infty)$. Ισχυριζόμαστε ότι το μέτρο $d\lambda = d\nu - f d\mu$, το οποίο είναι θετικό αφού $f \in \mathcal{F}$, είναι ορθογώνιο στο μ $[\lambda(E) = \nu(E) - \int_E f d\mu \geq 0]$. Αν όχι, από το Λήμμα 3.2.5 υπάρχει $E \in \mathcal{M}$ και $\varepsilon > 0$ ώστε $\mu(E) > 0$ και $\nu \geq \varepsilon\mu$ στο E. Αλλά τότε $\varepsilon\chi_E d\mu \leq d\lambda = d\nu - f d\mu$, άρα $(f + \varepsilon\chi_E) d\mu \leq d\nu$. Οπότε $f + \varepsilon\chi_E \in \mathcal{F}$, αλλά $\int (f + \varepsilon\chi_E) d\mu = \alpha + \varepsilon\mu(E) > \alpha$, το οποίο είναι άτοπο. Για τη μοναδικότητα, αν $d\nu = d\lambda' + f' d\mu$ έχουμε ότι $d\lambda - d\lambda' = (f - f')d\mu$. Αλλά $\lambda - \lambda' \perp \mu$, ενώ $(f - f')d\mu << \mu$. Συνεπώς, $d\lambda - d\lambda' = (f - f')d\mu = 0$ άρα $\lambda = \lambda'$ και $f = f'$ σ.π.

Στην δεύτερη περίπτωση υποθέτουμε ότι τα μ, ν είναι σ-πεπερασμένα. Υπάρχει ακολουθία ξένων συνόλων $A_j \in \mathcal{M}$ ώστε $\mu(A_j) < \infty$, $\nu(A_j) < \infty$ για κάθε j και $X = \cup_1^\infty A_j$ (γράφουμε το X ως ένωση ξένων σύνολων μ πεπερασμένα μ-μέτρα και ως ένωση ξένων σύνολων με πεπερασμένα ν-μέτρα και παίρνουμε τομές). Ορίζουμε $\mu_j(E) = \mu(E \cap A_j)$ και $\nu_j(E) = \nu(E \cap A_j)$, τότε $d\nu_j = d\lambda_j + f_j d\mu_j$ όπου $\lambda_j(A_j^c) = 0$ και $f_j|_{A_j^c} = 0$. Θέτω $\lambda = \sum_1^\infty \lambda_j$ και $f = \sum_1^\infty f_j$. Τότε $\lambda \perp \mu$ και $d\nu = d\lambda + f d\mu$. Η μοναδικότητα αποδεικνύεται όπως πριν.

Τέλος, στην τρίτη περίπτωση υποθέτουμε ότι το ν είναι προσημασμένο και εφαρμόζουμε το προηγούμενο στα ν^+ και ν^-. □

Η ανάλυση $\nu = \lambda + \rho$ με $\lambda \perp \mu$ και $\rho << \mu$ λέγεται ανάλυση Lebesgue του ν ως προς μ. Το ότι αν $\nu << \mu \Rightarrow \exists f : d\nu = f d\mu$ λέγεται θεώρημα Radon-Nikodym και η f παράγωγος Radon-Nikodym του ν ως προς μ. Γράφουμε $f = d\nu/d\mu$. Οι τύποι που ξέρουμε από τα διαφορικά είναι σωστοί, για παράδειγμα $d(\nu_1 + \nu_2)/d\mu = d(\nu_1)/d\mu + d(\nu_2)/d\mu$. Ακολουθεί ο κανόνας αλυσίδας:

Πρόταση 3.2.7. *Υποθέτουμε ότι το ν είναι σ-πεπερασμένο προσημασμένο μέτρο και μ, λ σ-πεπερασμένα στον $(X, \mathcal{M})$ ώστε $\nu << \mu$ και $\mu << \lambda$.*

(i) *Αν $g \in L^1(\nu)$, τότε $g(d\nu/d\mu) \in L^1(\mu)$ και $\int g d\nu = \int g(d\nu/d\mu) d\mu$.*

(ii) *$\nu << \lambda$, και $(d\nu/d\lambda) = (d\nu/d\mu)(d\mu/d\lambda)$ σ.π.*

Απόδειξη: Θεωρώντας τα ν^+ και ν^- ξεχωριστά, υποθέτουμε ότι $\nu \geq 0$. Η εξίσωση $\int g d\nu = \int g(d\nu/d\mu)d\mu$ αληθεύει για $g - \chi_E$ από τον ορισμό του $d\nu/d\mu$. Οπότε αληθεύει για απλές συναρτήσεις εξαιτίας της γραμμικότητας, για μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, και για συναρτήσεις που ανήκουν στον $L^1(\nu)$ πάλι εξαιτίας της γραμμικότητας. Αντικαθιστώντας τα ν, μ με μ, λ και θέτοντας $g = \chi_E d\nu/d\mu$ έχουμε

$$\nu(E) = \int_E \frac{d\nu}{d\mu} d\mu = \int_E \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda$$

για κάθε $E \in \mathcal{M}$, άρα $(d\nu/d\lambda) = (d\nu/d\mu)(d\mu/d\lambda)$ λ-σ.π. $\square$

Πόρισμα 3.2.8. *Αν $\mu << \lambda$ και $\lambda << \mu$, τότε $d\lambda/d\mu = (d\mu/d\lambda)^{-1}$ σ.π..*

Όχι-παράδειγμα: Έστω μ μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$ και ν σημειακό μέτρο στο 0. Ξεκάθαρα $\mu \perp \nu$. Η παράγωγος Radon-Nikodym $d\nu/d\mu$ (που δεν υπάρχει) είναι γνωστή ως δ-συνάρτηση Dirac.

Κεφάλαιο 4

Συναρτησιακή ανάλυση

4.1 Στοιχεία συναρτησιακής ανάλυσης

Ορίζουμε για $1 \leq p < \infty$

$$\|f-g\|_p = \left(\int |f-g|^p \, d\mu\right)^{1/p}$$

Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ όπου $A = \{1, \ldots, n\}$ και $\mu\{k\} = 1$. Έχουμε ότι $f(t) = f(1)\chi_{\{1\}}(t) + f(2)\chi_{\{2\}}(t) + \ldots + f(n)\chi_{\{n\}}(t)$. Τότε

$$\begin{aligned}
\left(\int_A |f-g|^2 \, d\mu\right)^{1/2} &= \left(\int_A \Big(\sum_{k=1}^{n}(f(k)-g(k))\chi_{\{k\}}(t)\Big)^2 d\mu(t)\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_A \sum_{k=1}^{n}(f(k)-g(k))^2\chi_{\{k\}}(t)d\mu(t)\right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n}(f(k)-g(k))^2\right)^{1/2} \\
&= \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(f(k)-g(k))^2}
\end{aligned}$$

Ορισμός 4.1.1. *Έστω $\mathcal{F} = \{$μετρήσιμες συναρτήσεις $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ και $\mathcal{F}/_\sim = \{[f] : f \in \mathcal{F}\}$ όπου $[f] = \{g \in \mathcal{F} : g \sim f\}$. Ορίζουμε*

$$L^p = \left\{[f] : \left(\int |f|^p\right)^{1/p} < \infty\right\},$$

με $\rho(f, g) = \|f-g\|_p$.

Ορισμός 4.1.2. *Έστω X διανυσματικός χώρος. Ορίζουμε τη νόρμα $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ με τις παρακάτω ιδότητες* *(i)* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \ \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Ο $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος με νόρμα.

Ορισμός 4.1.3. *Αν X είναι πλήρης (ως προς την p της νόρμας), δηλαδή κάθε ακολουθία Cauchy έχει όριο στον X, λέγεται χώρος Banach.*

Ορισμός 4.1.4. *Έστω $F : L^p \to \mathbb{R}$ με $F(f+g) = F(f) + F(g)$ και $F(\lambda f) = \lambda F(f)$. Τότε λέμε ότι η F είναι γραμμικό συναρτησοειδές. Ορίζουμε*

$$(L^p)^* = \{F : L^p \to \mathbb{R} \text{ γραμμική και συνεχής}\}.$$

Ο $(L^p)^*$ είναι γραμμικός χώρος αφού $(F+G)(f) = F(f) + G(f) \in L^p$ και $(\lambda F)(f) = \lambda(F(f)) \in L^p$.

Πρόταση 4.1.5. *Έστω $F : L^p \to \mathbb{R}$ γραμμική, τότε είναι συνεχής αν και μόνο αν η F είναι φραγμένη στην $B(L^p)$, δηλαδή $\exists M > 0 : \forall f \in B(L^p)$, δηλαδή $\|f\|_p \leq 1$, να ισχύει $|F(f)| \leq M$.*

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$ Αν όχι, υπάρχει $\|f_n\|_p \leq 1 : |F(f_n)| > n$. Τότε $\left|\frac{1}{n}F(f_n)\right| > 1$ και εξαιτίας της γραμμικότητας $\left|F(\frac{1}{n}f_n)\right| > 1$. Τότε $\left\|\frac{1}{n}f_n\right\|_p = \frac{1}{n}\|f_n\|_p \to 0$, άρα $\frac{1}{n}f_n \to 0$. Επειδή η F είναι συνεχής έχουμε ότι $F(\frac{1}{n}f_n) \to F(0) = 0$ (διότι $F(0) = F(0+0) = F(0) + F(0) \Rightarrow F(0) = 0$) το οποίο είναι άτοπο.

$(\Leftarrow)$ Θα δείξω ότι αν $f_n \to 0$ στο L^p, τότε $F(f_n) \to 0$. Έστω ότι $F(f_n) \not\to 0$, τότε $\exists \varepsilon > 0$ και υπακολουθία $\{f_{n_k}\}$ της $\{f_n\}$ με $f_{n_k} \to 0$ και $|F(f_{n_k})| \geq \varepsilon$. Άρα $\exists \varepsilon > 0$, $\exists g_n$ τέτοια ώστε $\|g_n\|_p \leq 1$ με $g_n \to 0$ και $|F(g_n)| \geq \varepsilon$. Θέτω

$$h_n = \frac{g_n}{\|g_n\|_p} \text{ με } \|g_n\|_p \neq 0 \text{ διότι } F(g_n) \neq 0.$$

Τότε

$$\|h_n\|_p = \left\|\frac{g_n}{\|g_n\|_p}\right\|_p = 1$$

και

$$|F(h_n)| = \frac{F(g_n)}{\|g_n\|_p} \geq \frac{\varepsilon}{\|g_n\|_p} \to \infty,$$

το οποίο είναι άτοπο διότι υποθέσαμε ότι η F είναι φραγμένη στη μοναδιαία μπάλα. Τέλος, αν $f_n \to f$ τότε $f_n - f \to 0$. Άρα $F(f_n - f) \to 0$ και $F(f_n) - F(f) \to 0 \Rightarrow F(f_n) \to F(f)$. □

Παρατήρηση 4.1.6. *Έστω $F \in (L^p)^*$, $K \subseteq L^p$ και $M_1 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\|f\|_p \leq M_1 \ \forall f \in K$, τότε η $f|_K$ είναι φραγμένη. Έχουμε ότι $\frac{1}{M_1}K \subseteq B(L^p)$. Αν M είναι το φράγμα της F στην $B(L^p)$, τότε $\forall f \in K$, $\frac{1}{M_1}f \in \frac{1}{M_1}K \subseteq B(L^p)$. Άρα $\left\|\frac{1}{M_1}f\right\|_p \leq M$ και $\|f\|_p \leq MM_1 \ \forall f \in K$.*

Παρατήρηση 4.1.7. *Το σύνολο $\{|F(f)| : f \in B(L^p)\}$ είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.*

Πρόταση 4.1.8. *Η $\|F\| := \sup\{|F(f)| : f \in B(L^p)\}$ είναι νόρμα με $\|\cdot\| : (L^p)^* \to \mathbb{R}_+$.*

Απόδειξη: (i) Έχουμε ότι $\|F\| := \sup\{|F(f)| : f \in B(L^p)\} \geq 0$. Αν $\|F\| = 0 \Leftrightarrow \sup\{|F(f)| : f \in B(L^p)\} = 0 \Leftrightarrow F(f) = 0 \forall f \in B(L^p)$. Αν $f \notin B(L^p)$ και $\|f\|_p \neq 0$ τότε $\frac{f}{\|f\|_p} \in B(L^p)$ και $F(\frac{f}{\|f\|_p}) = 0$. Άρα $\frac{1}{\|f\|_p}F(f) = 0 \Rightarrow F(f) = 0$, οπότε $F = 0$.

(ii)

$$\begin{aligned} \|\lambda F\| &= \sup\{|\lambda F(f)|, \|f\|_p \leq 1\} = \sup\{|\lambda| |F(f)|, \|f\|_p \leq 1\} \\ &= |\lambda| \sup\{|F(f)|, \|f\|_p \leq 1\} = |\lambda| \|F\|. \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \|F + G\| &= \sup\{|(F + G)(f)|, \|f\|_p \leq 1\} \\ &\leq \sup\{|F(f)| + |G(f)|, \|f\|_p \leq 1\} \\ &\leq \sup\{|F(f)|, \|f\|_p \leq 1\} + \sup\{|G(f)|, \|f\|_p \leq 1\} \\ &= \|F\| + \|G\|. \end{aligned}$$

Ο $((L^p)^*, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα και είναι πλήρης, άρα είναι Banach. □

Ορισμός 4.1.9. *Έστω $(X, \|\cdot\|_X)$ και $(Y, \|\cdot\|_Y)$ χώροι Banach και $T : X \to Y$ γραμμική συνάρτηση, δηλαδή $T(x + y) = Tx + Ty$ και $T(\lambda x) = \lambda Tx$. Η T είναι συνεχής αν και μόνο αν $T|_{B_X}$ είναι φραγμένη στον $(Y, \|\cdot\|_Y)$, δηλαδή $\exists M > 0$ ώστε $\forall x \in B_X$, $\|Tx\|_Y \leq M$. Ονομάζουμε την T τελεστή (operator). Θέτουμε $L(X, Y) = \{T : X \to Y$ γραμμική και συνεχής $\}$.*

Πρόταση 4.1.10. *Έστω $T \in L(X, Y)$. Η $\|T\| = \|T\|_{op} = \sup_{x \in B_X} \|Tx\|_Y$ είναι νόρμα.*

Απόδειξη: (i) Έχουμε ότι $\|T\|_{\mathrm{op}} \geq 0$. Επίσης, υποθέτουμε ότι $\|T\|_{\mathrm{op}} = 0$. Τότε $\sup_{x \in B_X} \|Tx\|_Y = 0 \Leftrightarrow \|Tx\|_Y = 0$, $\forall x \in B_X$. Επειδή η $\|\cdot\|_Y$ είναι νόρμα έχουμε ότι $Tx = 0$, $\forall x \in B_X$. Αν $x \notin B_X$ και $\|x\| \neq 0$, τότε $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\|_X = 1$. Άρα $\frac{x}{\|x\|} \in B_X$ και $T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = 0$. Τότε $\frac{1}{\|x\|}Tx = 0$ και $Tx = 0$ $\forall x \in X$. Άρα $T = 0$.

(ii) Θα δείξουμε ότι $\|\lambda T\|_{\mathrm{op}} = \lambda \|T\|_{\mathrm{op}}$.

$$\begin{aligned} \|\lambda T\|_{\mathrm{op}} &= \sup_{x \in B_X} \|\lambda Tx\|_Y = \sup_{x \in B_X} |\lambda| \|Tx\|_Y \\ &= |\lambda| \sup_{x \in B_X} \|Tx\|_Y = |\lambda| \|T\|_{\mathrm{op}}. \end{aligned}$$

(iii) Έστω $T, S \in L(X,Y)$. Τότε

$$\begin{aligned} \|T+S\|_{\text{op}} &= \sup_{x\in B_X} \|(T+S)(x)\|_Y \\ &= \sup_{x\in B_X} \|Tx+Sx\|_Y \\ &\le \sup_{x\in B_X} (\|Tx\|_Y + \|Sx\|_Y) \\ &\le \sup_{x\in B_X} \|Tx\|_Y + \sup_{x\in B_X} \|Sx\|_Y \\ &= \|T\|_{\text{op}} + \|S\|_{\text{op}}. \end{aligned}$$

Αν $T, S \in L(X,Y)$ τότε $T+S \in L(X,Y)$ και $\lambda T \in L(X,Y)$ για $\lambda \in \mathbb{R}$. Ο $(L(X,Y), \|\cdot\|_{\text{op}})$ είναι διανυσματικός χώρος με νορμα. □

Πρόταση 4.1.11. *Ο $(L(X,Y), \|\cdot\|_{op})$ είναι Banach.*

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι ο $(L(X,Y), \|\cdot\|_{\text{op}})$ είναι πλήρης. Έστω T_n Cauchy ακολουθία στον $L(X,Y)$. Αν $x \in X\backslash\{0\}$, τότε $\frac{x}{\|x\|_X} \in B_X$. Έχουμε ότι

$$\left\| T_n\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right) - T_m\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\right\|_Y = \left\|(T_n - T_m)\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\right\|_Y \le \|T_n - T_m\|_{\text{op}},$$

διότι $\|T_n - T_m\|_{\text{op}} = \sup_{y\in B_X} \|T_n - T_m\|_Y$. Άρα

$$\|T_n x - T_m x\|_Y \le \|x\|_X \|T_n - T_m\|_{\text{op}}.$$

Άρα η $T_n x$ είναι Cauchy στον Y και επειδή ο Y είναι πλήρης το όριο της $T_n x$ υπάρχει. Οπότε $\forall x \in X$ το $\lim T_n x$ υπάρχει στον Y. Ορίζω $T : X \to Y$ τέτοια ώστε $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n x$, η οποία είναι προφανώς γραμμική απεικόνιση. Θα δείξουμε ότι $\|T_n - T\|_{\text{op}} \to 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists n_0$ τέτοιο ώστε $\forall n \ge n_0$ $\|T_n - T_m\|_{\text{op}} \le \varepsilon$. Αν $x \in B_X$ και $n, m \ge n_0$ $\|T_n x - T_m x\|_Y \le \|x\|_X \|T_n - T_m\|_{\text{op}} \le 1\varepsilon$. Άρα $\forall n, m \ge n_0$, $\forall x \in B_X$ $\|T_n x - T_m x\|_Y \le \varepsilon$. Οπότε $\lim_{m\to\infty} \|T_n x - T_m x\|_Y \le \varepsilon$ $\forall n, m \ge n_0$, $\forall x \in B_X$. Ισχύει ότι $(T_n x - T_m x)_{m=n_0}^{\infty} \overset{m\to\infty}{\to} T_n x - Tx$, άρα $\|T_n x - T_m x\| \to \|T_n x - Tx\|$. Έτσι, έχουμε ότι $\|T_n x - Tx\|_Y \le \varepsilon$ $\forall n \ge n_0$, $\forall x \in B_X$. Οπότε $\sup_{x\in B_X} \|T_n x - Tx\|_Y \le \varepsilon$ $\forall n \ge n_0$, άρα $\|T_n - T\|_{\text{op}} \le \varepsilon$ $\forall n \ge n_0$. Επίσης, ισχύει $\|T\|_{\text{op}} - \|T_{n_0}\|_{\text{op}} \le \left| \|T\|_{\text{op}} - \|T_{n_0}\|_{\text{op}} \right| \le \|T - T_{n_0}\|_{\text{op}} \le \varepsilon$. Άρα $\|T\|_{\text{op}} \le \varepsilon + \|T_{n_0}\|_{\text{op}} < \infty$. Έπεται ότι $T \in L(X,Y)$ και ο $(L(X,Y), \|\cdot\|_{\text{op}})$ είναι Banach. □

Κεφάλαιο 5

Οι χώροι L^p

Οι χώροι L^p είναι η κλάση των χώρων Banach συναρτήσεων των οποίων οι νόρμες ορίζονται από ολοκληρώματα και γενικεύουν τους L^1 χώρους που συζητήθηκαν στο δεύτερο κεφάλαιο.

5.1 Βασική θεωρία των L^p χώρων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εργαζόμαστε σε ένα σταθερό σταθερό χώρο μέτρου $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Αν f είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση στο X και $0 < p < \infty$, ορίζουμε

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

(επιτρέποντας $\|f\|_p = \infty$) και ορίζουμε

$$L^p(X, \mathcal{M}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{R} \quad f \text{ μετρήσιμη και } \|f\|_p < \infty\}.$$

Συμβολίζουμε τον $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ με $L^p(\mu)$, $L^p(X)$, ή απλά L^p όταν αυτό δεν προκαλεί σύγχυση. Όπως κάναμε με τον L^1, θεωρούμε δυο συναρτήσεις για να ορίσουμε το ίδιο στοιχείο του L^p όταν είναι ίσες σχεδόν παντού. Αν A είναι ένα μη κενό σύνολο, ορίζουμε το $l^p(A)$ να είναι το $L^p(\mu)$ όπου το μ είναι αριθμητικό μέτρο στο $(A, \mathcal{P}(A))$ και συμβολίζουμε το $l^p(\mathbb{N})$ απλά με l^p.

Ο L^p είναι διανυσματικός χώρος. Αν $f, g \in L^p$, τότε

$$|f + g|^p \le [2 \max(|f|, |g|)]^p \le 2^p(|f|^p + |g|^p).$$

Η σημειογραφία μας υποβάλει ότι η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα στον L^p. Είναι προφανές ότι $\|f\|_p = 0$ αν και μόνο αν $f = 0$ σ.π. και $\|cf\|_p = |c| \, \|f\|_p$, οπότε η μόνη ερώτηση είναι η τριγωνική ανισότητα. Προκύπτει ότι το τελευταίο είναι έγκυρο ακριβώς όταν $p \ge 1$, οπότε θα επικεντρωθούμε σχεδόν αποκλειστικά σε αυτήν την περίπτωση.

Πριν επεκταθούμε περισσότερο, ας δούμε γιατί η τριγωνική ανισότητα αποτυγχάνει για $p < 1$. Υποθέτουμε ότι $\alpha > 0$, $b > 0$ και $0 < p < 1$. Για $t > 0$

έχουμε ότι $t^{p-1} > (\alpha+t)^{p-1}$, και ολοκληρώνοντας από το 0 εώς το b, έχουμε ότι $\alpha^p + b^p > (\alpha+b)^p$. Τότε αν E και F είναι ξένα σύνολα, θετικού πεπερασμένου μέτρου στο X και θέτονας $\alpha = \mu(E)^{1/p}$, $b = \mu(F)^{1/p}$, βλέπουμε ότι

$$\|\chi_E + \chi_F\|_p = (\alpha^p + b^p)^{1/p} > \alpha + b = \|\chi_E\|_p + \|\chi_F\|_p .$$

Η θεμελίωση της θεωρίας των L^p χώρων είναι η ανισότητα Hölder.

Λήμμα 5.1.1. *Αν $\alpha \geq 0$, $b \geq 0$ και $0 < \lambda < 1$, τότε*

$$\alpha^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)b,$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $\alpha = b$.

Απόδειξη: Το αποτέλεσμα είναι προφανές αν $b = 0$. Διαφορετικά, θέτοντας $t = \alpha/b$, πρέπει να δείξουμε ότι $t^\lambda \leq \lambda t + (1-\lambda)$, με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $t = 1$. Όμως με στοιχειώδεις υπολογισμούς, η $t^\lambda - \lambda t$ είναι γνήσια αύξουσα για $t < 1$ και γνήσια φθίνουσα για $t > 1$, οπότε η μέγιστη τιμή της, η $1-\lambda$, λαμβάνεται στο $t = 1$. □

Θεώρημα 5.1.2 (Ανισότητα Hölder). *Υποθέτουμε ότι $1 < p < \infty$ και $p^{-1} + q^{-1} = 1$ (με άλλα λόγια, $q = p/(p-1)$). Αν f και g μετρήσιμες συναρτήσεις στον X,*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \tag{5.1}$$

Συγκεκριμένα, αν $f \in L^p$ και $g \in L^q$, τότε $fg \in L^1$ και σε αυτήν την περίπτωση η ισότητα ισχύει στην (5.1) αν και μόνο αν $\alpha\,|f|^p = b\,|g|^q$ σ.π. για κάποια σταθερά α, b με $\alpha b \neq 0$.

Απόδειξη: Είναι τετριμμένο αν $\|f\|_p = 0$ ή $\|g\|_q = 0$ (αφού τότε $f = 0$ ή $g = 0$ σ.π.) ή αν $\|f\|_p = \infty$ ή $\|g\|_q = \infty$. Διαφορετικά, εφαρμόζουμε το Λήμμα 5.1.1 με

$$\alpha = \left|\frac{f(x)}{\|f\|_p}\right|^p, b = \left|\frac{g(x)}{\|g\|_q}\right|^q, \text{ και } \lambda = \frac{1}{p}$$

και έχουμε

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\int |f|^p\,d\mu} + \frac{|g(x)|^q}{q\int |g|^q\,d\mu}. \tag{5.2}$$

Με ολοκλήρωση και στα δύο μέρη έχουμε

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Η ισότητα ισχύει εδώ αν και μόνο αν ισχύει σ.π. στην (5.2) και από το Λήμμα 5.1.1 αυτό συμβαίνει ακριβώς όταν $\|g\|_q^q\,|f|^p = \|f\|_p^p\,|g|^q$ σ.π. □

Η ισότητα $p^{-1} + q^{-1} = 1$ της ανισότητας Hölder προκύπτει συχνά στην L^p θεωρία. Αν $1 < p < \infty$, ο αριθμός $q = p/(p-1)$ έτσι ώστε $p^{-1} + q^{-1} = 1$ λέγεται συζυγής εκθέτης του p.

Θεώρημα 5.1.3 (Ανισότητα Minkowski). *Αν $1 \le p < \infty$ και $f, g \in L^p$, τότε*

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p .$$

Απόδειξη: Το αποτέλεμα είναι προφανές αν $p = 1$ ή αν $f + g = 0$ σ.π. Διαφορετικά γράφουμε

$$\begin{aligned}\int |f+g|^p \, d\mu &= \int |f+g| \, |f+g|^{p-1} \, d\mu \le \int (|f|+|g|) \, |f+g|^{p-1} \, d\mu \\ &= \int |f| \, |f+g|^{p-1} \, d\mu + \int |g| \, |f+g|^{p-1} \, d\mu\end{aligned}$$

και εφαρμόζουμε την ανισότητα Hölder, παρατηρώντας ότι $(p-1)q = p$ όταν το q είναι συζυγής εκθέτης του p. Άρα

$$\begin{aligned}\int |f+g|^p \, d\mu &\le \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \left(\int (|f+g|^{p-1})^q d\mu\right)^{1/q} \\ &+ \left(\int |g|^p \, d\mu\right)^{1/p} \left(\int (|f+g|^{p-1})^q d\mu\right)^{1/q} \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int |f+g|^{(p-1)q} \, d\mu\right)^{1/q} \\ &\le (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int |f+g|^p \, d\mu\right)^{1/q} .\end{aligned}$$

Άρα έχουμε ότι

$$\left(\int |f+g|^p \, d\mu\right)^{1-\frac{1}{q}} \le \|f\|_p + \|g\|_p .$$

Οπότε

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p .$$

□

Αυτό το αποτέλεσμα δείχνει ότι για $p \ge 1$, ο L^p είναι ένας διανυσματικός χώρος νόρμας με νόρμα $\|\cdot\|_p$.

Θεώρημα 5.1.4. *Για $1 \le p < \infty$, ο L^p είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη: Από γνωστό θεώρημα, ένας διανυσματικός χώρος νόρμας είναι πλήρης αν και μόνο αν κάθε απόλυτα συγκλίνουσα σειρά συγκλίνει στο χώρο. Υποθέτουμε ότι $\{f_k\} \subset L^p$ και $\sum_1^\infty \|f_k\|_p = B < \infty$. Έστω $G_n = \sum_1^n |f_k|$ και $G = \sum_1^\infty |f_k|$. Τότε $\|G_n\|_p \le \sum_1^n \|f_k\|_p \le B$ για κάθε n. Οπότε από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, $\int G^p = \lim \int G_n^p \le B^p$. Έτσι $G \in L^p$ και συγκεκριμένα $G(x) < \infty$ σ.π., οπότε η σειρά $\sum_1^\infty f_k$ συγκλίνει σ.π. Συμβολίζοντας το άθροισμα με F, έχουμε ότι $|F| \le G$ και $F \in L^p$. Επιπλέον, $|F - \sum_1^n f_k|^p \le (2G)^p \in L^1$, οπότε από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\left\| F - \sum_1^n f_k \right\|_p^p = \int \left| F - \sum_1^n f_k \right|^p \to 0.$$

Άρα η σειρά $\sum_1^\infty f_k$ συγκλίνει στην L^p νόρμα. □

Πρόταση 5.1.5. *Για $1 \leq p < \infty$, το σύνολο των απλών συναρτήσεων $f = \sum_1^n \alpha_j \chi_{E_j}$, όπου $\mu(E_j) < \infty$ για κάθε j, είναι πυκνό στον L^p.*

Απόδειξη: Ξεκάθαρα τέτοιες συναρτήσεις είναι στον L^p. Αν $f \in L^p$, επιλέγουμε μια ακολουθία $\{f_n\}$ απλών συναρτήσεων ώστε $f_n \to f$ σ.π. και $|f_n| \leq |f|$, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1.11. Τότε $f_n \in L^p$ και $|f_n - f|^p \leq 2^p |f|^p \in L^1$, οπότε από θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, $\|f_n - f\|_p \to 0$. Επιπλέον, αν $f_n = \sum \alpha_j \chi_{E_j}$ όπου τα E_j είναι ξένα και $\alpha_j \neq 0$, πρέπει να έχουμε ότι $\mu(E_j) < \infty$ αφού $\sum |\alpha_j| \mu(E_j) = \int |f_n|^p < \infty$. □

Για να ολοκληρώσουμε την εικόνα των L^p χώρων, συστήνουμε ένα χώρο αντίστοιχο με την οριακή τιμή $p = \infty$. Αν η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση στον X, ορίζουμε

$$\|f\|_\infty = \inf\{\alpha \geq 0 : \mu(\{x : |f(x)| > \alpha\}) = 0\},$$

με τη σύμβαση $\inf \emptyset = \infty$. Παρατηρούμε ότι το infimum βασικά επιτυγχάνεται για

$$\{x : |f(x)| > \alpha\} = \cup_1^\infty \{x : |f(x)| > \alpha + n^{-1}\},$$

και αν τα σύνολα από δεξιά είναι άκυρα, τότε είναι άκυρο και το σύνολο από αριστερά. Η $\|f\|_\infty$ λέγεται ουσιαστικό suremum της f και γράφουμε

$$\|f\|_\infty = ess \sup_{x \in X} |f(x)| .$$

Τώρα ορίζουμε

$$L^\infty = L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{R} \quad f \text{ μετρήσιμη και } \|f\|_\infty < \infty\},$$

με τη συνήθη σύμβαση ότι δυο συναρτήσεις είναι ίσες σ.π. ορίζουμε το ίδιο στοιχείο του L^∞. Έτσι $f \in L^\infty$ αν και μόνο αν υπάρχει μια φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση g ώστε $f = g$ σ.π., για παράδειγμα, $g = f\chi_E$ όπου $E = \{x : |f(x)| \leq \|f\|_\infty\}$.(Παρατηρούμε ότι για σταθερό X και $\mathcal{M}$, ο $L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$ εξαρτάται μόνο από το μ, αφού το μ καθορίζει ποια σύνολα έχουν μέτρο μηδέν. Αν το μ δεν είναι ημιπεπερασμένο, θα πρέπει να υιοθετήσουμε ένα διαφορετικό ορισμό του L^∞).

Τα αποτελέσματα που αποδείξαμε παραπάνω για $1 \leq p < \infty$ επεκτείνονται εύκολα στην περίπτωση όπου $p = \infty$. Συνοψίζοντας,

Θεώρημα 5.1.6. (i) *Αν f, g μετρήσιμες συναρτήσεις στον X, τότε $\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$. Αν $f \in L^1$ και $g \in L^\infty$, $\|fg\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_\infty$ αν και μόνο αν $|g(x)| = \|g\|_\infty$ σ.π. σε σύνολο όπου $f(x) \neq 0$.*

(ii) *Η $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα στον L^∞.*

(iii) *$\|f_n - f\|_\infty \to 0$ αν και μόνο αν υπάρχει $E \in \mathcal{M}$ ώστε $\mu(E^c) = 0$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο E.*

(iv) *Ο L^∞ είναι χώρος Banach.*

(v) *Οι φραγμένες απλές συναρτήσεις είναι πυκνές στον L^∞.*

Στο Θεώρημα (5.1.6 i) και στην τυπική ανισότητα $1^{-1}+\infty^{-1}=1$, είναι φυσικό να θεωρήσουμε το 1 και το ∞ ως συζυγείς εκθέτες.

Το Θεώρημα (5.1.6 iii) δείχνει ότι η $\|\cdot\|_\infty$ σχετίζεται στενά, αλλά συνήθως δεν ταυτίζεται, με την ομοιόμορφη νόρμα $\|\cdot\|_u$. Όμως αν έχουμε να κάνουμε με το μέτρο Lebesgue, ή πιο γενικά με κάποιο μέτρο Borel το οποίο δίνει θετικές τιμές σε όλα τα ανοιχτά σύνολα, τότε $\|f\|_\infty = \|f\|_u$ όταν η f είναι συνεχής, αφού $\{x : |f(x)| > \alpha\}$ είναι ανοιχτό. Σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους συμβολισμούς $\|f\|_\infty$ και $\|f\|_u$ εναλλάξ. Επίσης, μπορούμε να θεωρήσουμε το χώρο των φραγμένων συνεχών συναρτήσεων ως (κλειστό) υποσύνολο του L^∞.

Πιο γενικά έχουμε ότι $L^p \not\subset L^q$ για κάθε $p \neq q$. Θεωρούμε τα παρακάτω απλά παραδείγματα στο $(0,\infty)$ με μέτρο Lebesgue. Έστω $f_\alpha(x) = x^{-\alpha}$, όπου $\alpha > 0$. Στοιχειώδεις υπολογισμοί δείχνουν ότι $f_\alpha \chi_{(0,1)} \in L^p$ αν και μόνο αν $p < \alpha^{-1}$ και $f_\alpha \chi_{(1,\infty)} \in L^p$ αν και μόνο αν $p > \alpha^{-1}$. Έτσι έχουμε δύο λόγους για το ότι μια συνάρτηση f μπορεί να μην είναι στον L^p: είτε η $|f|^p$ αυξάνει πολύ γρήγορα κοντά σε κάποιο σημείο, ή αποτυγχάνει να φθίνει ικανοποιητικά γρήγορα στο άπειρο. Στην πρώτη περίπτωση η συμπεριφορά της $|f|^p$ γίνεται χειρότερη, καθώς το p αυξάνει, ένω στην δεύτερη περίπτωση η συμπεριφορά της $|f|^p$ γίνεται καλύτερη. Με άλλα λόγια, αν $p < q$ οι συναρτήσεις στον L^p μπορεί να είναι τοπικά πιο σπάνιες απ' ότι οι συναρτήσεις στον L^q, καθώς οι συναρτήσεις στον L^q μπορούν να διαδίδονται συνολικά περισσότερο από τις συναρτήσεις στον L^p. Αυτά δείχνουν ότι το συμπέρασμα $L^p \subset L^q$ μπορούμε να το έχουμε υπό όρους στο χώρο μέτρου.

Πρόταση 5.1.7. *Αν $0 < p < q < r \leq \infty$, τότε $L^q \subset L^p + L^r$, για $f \in L^q$ να είναι το άθροισμα μιας συνάρτησης στον L^p και μιας συνάρτησης στον L^r.*

Απόδειξη: Αν $f \in L^q$, έστω $E = \{x : |f(x)| > 1\}$ και θέτουμε $g = f\chi_E$, $h = f\chi_{E^c}$. Τότε $|g|^p = |f|^p \chi_E \leq |f|^q \chi_E$, οπότε $g \in L^p$ και $|h|^r \chi_{E^c} \leq |f|^q \chi_{E^c}$, άρα $h \in L^r$. (Αν $r = \infty$, προφανώς $\|h\|_\infty \leq 1$.) □

Πρόταση 5.1.8. *Αν $0 < p < q < r \leq \infty$, τότε $L^p \cap L^r \subset L^q$ και*

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{1-\lambda}, \text{ όπου } \frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}.$$

Απόδειξη: Αν $r = \infty$, έχουμε ότι $\int |f|^q \leq \|f\|_\infty^{q-p} \int |f|^p$, οπότε

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p^{p/q} \|f\|_\infty^{1-(p/q)} = \|f\|_p^\lambda \|f\|_\infty^{1-\lambda}.$$

Αν $r < \infty$, χρησιμοποιούμε την ανισότητα Hölder, παίρνοντας το ζευγάρι των συζυγών εκθετών, για να έχουμε $p/\lambda q$ και $r/(1-\lambda)q$:

$$\begin{aligned}
\int |f|^q &= \int |f|^{\lambda q} |f|^{(1-\lambda)q} \\
&\leq \left\| |f|^{\lambda q} \right\|_{p/\lambda q} \left\| |f|^{(1-\lambda)q} \right\|_{r(1-\lambda)q} \\
&= \left(\int |f|^p \right)^{\lambda q/p} \left(\int |f|^r \right)^{(1-\lambda)q/r} \\
&= \|f\|_p^{\lambda q} \|f\|_r^{(1-\lambda)q}.
\end{aligned}$$

Παίρνοντας την q-στή ρίζα, τελειώσαμε. □

Πρόταση 5.1.9. *Αν A ένα σύνολο και $0 < p < q \leq \infty$, τότε $L^p(A) \subset L^q(A)$ και $\|f\|_q \leq \|f\|_p$.*

Απόδειξη: Προφανώς, $\|f\|_\infty^p = \sup_\alpha |f(\alpha)|^p \leq \sum_\alpha |f(\alpha)|^p$, οπότε $\|f\|_\infty \leq \|f\|_p$. Η περίπτωση $q < \infty$ έπεται από την Πρόταση 5.1.8: αν $\lambda = p/q$,

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p^\lambda \|f\|_\infty^{1-\lambda} \leq \|f\|_p .$$

□

Πρόταση 5.1.10. *Αν $\mu(X) < \infty$ και $0 < p < q \leq \infty$, τότε $L^p(\mu) \supset L^q(\mu)$ και $\|f\|_p \leq \|f\|_q \mu(X)^{(1/p)-(1/q)}$.*

Απόδειξη: Αν $q = \infty$ είναι πραφανές:

$$\|f\|_p^p = \int |f|^p \leq \|f\|_\infty^p \int 1 = \|f\|_\infty^p \mu(X).$$

Αν $q < \infty$ χρησιμοποιούμε την ανισότητα Hölder με συζυγείς εκθέτες q/p και $q/(q-p)$:

$$\|f\|_p^p = \int |f|^p 1 \leq \||f|^p\|_{q/p} \|1\|_{q/(q-p)} = \|f\|_q^p \mu(X)^{(q-p)/q}.$$

□

Ολοκληρώνουμε αυτήν την παράγραφο με μερικές παρατηρήσεις για την σπουδαιότητα των L^p χώρων. Οι τρεις πιο σημαντικοί χώροι είναι οι L^1, L^2 και L^∞. Ο L^1 είναι ήδη γνωστός, ο L^2 είναι χώρος Hilbert και η τοπολογία του L^∞ σχετίζεται στενά με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης. Δυστυχώς ο L^1 και ο L^∞ είναι παθολογικοί από πολλές απόψεις και συχνά είναι πιο γόνιμο να εργαζόμαστε με τους ενδιάμεσους L^p χώρους.

5.2 Ο δυικός του L^p

Υποθέτουμε ότι p και q είναι συζυγείς εκθέτες. Η ανισότητα Hölder δείχνει ότι κάθε $g \in L^q$ ορίζει ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές φ_g στον L^p με

$$\varphi_g(f) = \int fg,$$

και η $\|\cdot\|_{op}$ της φ_g είναι η $\|g\|_q$. Η απεικόνιση $g \to \varphi_g$ είναι σχεδόν πάντα ισομετρική από τον L^q στον $(L^p)^*$.

Πρόταση 5.2.1. *Αν p και q είναι συζυγείς εκθέτες, $1 \leq q < \infty$ και $g \in L^q$, τότε*

$$\|g\|_q = \|\varphi_g\| = \sup\left\{\left|\int fg\right| : \|f\|_p = 1\right\}.$$

Αν το μ είναι ημιπεπερασμένο, το αποτέλεσμα ισχύει επίσης για $q = \infty$.

Απόδειξη: Έχουμε δει ότι $\|\varphi_g\| \leq \|g\|_q$ και η ισότητα είναι τετριμμένη αν $\|g\|_q = 0$. Αν $g \neq 0$ και $q < \infty$, έστω

$$f = \frac{|g|^{q-1}\overline{sgng}}{\|g\|_q^{q-1}}.$$

Τότε

$$\|f\|_p^p = \frac{\int |g|^{(q-1)p}}{\|g\|_q^{(q-1)p}} = \frac{\int |g|^q}{\int |g|^q} = 1,$$

και

$$\|\varphi_g\| \geq \int fg = \frac{\int |g|^q}{\|g\|_q^{q-1}} = \|g\|_q.$$

Αν $q = \infty$ και μ ημιπεπερασμένο, για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να επιλέξουμε $A \subset \{x : |g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon\}$ ώστε $0 < \mu(A) < \infty$. Έστω $f = \mu(A)^{-1}\chi_A\overline{sgng}$, τότε $\|f\|_1 = 1$ και

$$\|\varphi_g\| = \int fg = \mu(A)^{-1}\int_A |g| \geq \|g\|_\infty - \varepsilon.$$

Τελικά, αν το μ είναι ημιπεπερασμένο και $f \to \int fg$ είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον L^p, τότε $g \in L^q$. □

Θεώρημα 5.2.2 (Η αντίστροφη ανισότητα Hölder)**.** *Υποθέτουμε ότι το μ είναι ημιπεπερασμένο και p, q είναι συζυγείς εκθέτες. Αν g είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση στον X ώστε $fg \in L^1$ για κάθε f στο χώρο S των απλών συναρτήσεων, οι οποίες μηδενίζονται έξω από ένα σύνολο πεπερασμένου μέτρου, και η ποσότητα*

$$M_q(g) = \sup\left\{\left|\int fg\right| : f \in S \text{ και } \|f\|_p = 1\right\}$$

είναι πεπερασμένη, τότε $g \in L^q$ και $M_q(g) = \|g\|_q$.

Απόδειξη: Για $q < \infty$ υποθέτουμε ότι το μ είναι σ-πεπερασμένο. Έστω $\{E_n\}$ μια αύξουσα ακολουθία συνόλων θετικού πεπερασμένου μέτρου ώστε $X = \cup_1^\infty E_n$. Έστω $\{\varphi_n\}$ μια ακολουθία απλών συναρτήσεων ώστε $\varphi_n \to g$ κατά σημείο και $|\varphi_n| \leq |g|$ και έστω $g_n = \varphi_n \chi_{E_n}$. Τότε $g_n \to g$ κατά σημείο, $|g_n| \leq |g|$, και $g_n \in S$. Έστω $f_n = \|g_n\|_q^{1-q}|g_n|^{q-1}\overline{sgng}$. Τότε όπως στην απόδειξη της Πρότασης 5.2.1 έχουμε ότι $\|f_n\|_p = 1$ και από το Λήμμα Fatou

$$\begin{aligned}
\|g\|_q &\leq \liminf \|g_n\|_q = \liminf \int |f_n g_n| \\
&\leq \liminf \int |f_n g| = \liminf \int f_n g \leq M_q(g).
\end{aligned}$$

Αν $q = \infty$ και $\varepsilon > 0$, έστω $A = \{x : |g(x)| \geq M_\infty(g) + \varepsilon\}$. Αν το $\mu(A)$ είναι θετικό, μπορούμε να επιλέξουμε $B \subset A$ με $0 < \mu(B) < \infty$. Θέτοντας $f = \mu(B)^{-1}\overline{sgng}\chi_B$ έχουμε ότι $\|f\|_1 = 1$ και $\int fg \geq M_\infty(g) + \varepsilon$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα $\|g\|_\infty \leq M_\infty(g)$. Τέλος, η ανισότητα Hölder δίνει ότι $M_q(g) \leq \|g\|_q$, οπότε η απόδειξη είναι πλήρης. □

Θεώρημα 5.2.3. *Έστω p, q συζυγείς εκθέτες. Αν το μ είναι σ-πεπερασμένο και $1 \leq p < \infty$, για κάθε $\varphi \in (L^p)^*$ υπάρχει $g \in L^q$ ώστε $\varphi(f) = \int fg$ για κάθε $f \in L^p$ και άρα ο $(L^p)^*$ είναι ισομετρικά ισομορφικός στον L^q. Αν $1 < p < \infty$, το παραπάνω ισχύει χωρίς τον περιορισμό του σ-πεπερασμένου.*

Απόδειξη: Έστω ότι το μ είναι πεπερασμένο ($\mu(\mathbb{R}) < \infty$). Έστω $\varphi \in (L^p)^*$ και E μετρήσιμο. Ορίζουμε

$$\nu(E) = \varphi(\chi_E),$$

$\chi_E \in L^p$ αφού το μ είναι πεπερασμένο. Θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Radon-Nikodym. Θα δείξουμε ότι το ν είναι προσημασμένο μέτρο. Έστω E_n ακολουθία ξένων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ ώστε $E = \cup_{n=1}^\infty E_n$. Επειδή τα E_n είναι ξένα έχουμε ότι $\chi_E = \sum_{n=1}^\infty \chi_{E_n}$. Θα δείξουμε ότι $\chi_E = \sum_{n=1}^\infty \chi_{E_n} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^k \chi_{E_n}$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\left\|\chi_E - \sum_{n=1}^k \chi_{E_n}\right\|_p &= \left\|\sum_{n=k+1}^\infty \chi_{E_n}\right\|_p = \left(\int \left|\sum_{k+1}^\infty \chi_{E_n}(x)\right|^p d\mu\right)^{1/p} \\
&= \left(\int \left|\chi_{\cup_{k+1}^\infty E_n}(x)\right|^p d\mu\right)^{1/p} = \left(\int \chi_{\cup_{k+1}^\infty E_n}(x) d\mu\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_{\cup_{k+1}^\infty E_n} d\mu\right)^{1/p} = \mu\left(\bigcup_{k+1}^\infty E_n\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι το μ είναι πεπερασμένο άρα $\mu(\cup_{n=1}^\infty E_n) < \infty$ και $\sum_{n=1}^\infty \mu(E_n) < \infty$. Εξ' ορισμού έχουμε ότι $\lim_{k\to\infty} \sum_1^k \mu(E_n) = \sum_1^\infty \mu(E_n) < \infty$. Οπότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $k \geq k_0$ να ισχύει $\left|\sum_1^\infty \mu(E_n) - \sum_1^k \mu(E_n)\right| < \varepsilon$. Έτσι, $\left|\sum_1^\infty \mu(E_n) - \sum_1^k \mu(E_n)\right| \to 0$, άρα και $\sum_{k+1}^\infty \mu(E_n) \overset{k\to\infty}{\to} 0$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\varphi(\chi_E) &= \varphi\Big(\sum_1^\infty \chi_{E_n}\Big) = \varphi\Big(\lim_{k\to\infty}\sum_1^k \chi_{E_n}\Big) \\
&= \lim_{k\to\infty}\varphi\Big(\sum_1^k \chi_{E_n}\Big) = \lim_{k\to\infty}\sum_1^k \varphi(\chi_{E_n}) \\
&= \sum_1^\infty \varphi(\chi_{E_n}) = \sum_1^\infty \nu(E_n).
\end{aligned}$$

[Τα παραπάνω ισχύουν διότι $\varphi \in (L^p)^*$, άρα είναι γραμμική και συνεχής.] Άρα $\nu(E) = \sum_1^\infty \nu(E_n)$ και έτσι αποδείξαμε την αθροιστικότητα του ν. Οπότε το ν είναι προσημασμένο μέτρο. Τώρα θα δείξουμε ότι $\nu << \mu$ [το ν είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μ], δηλαδή ότι $\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0$ για E μετρήσιμο.

$$\mu(E) = 0 \Rightarrow \chi_E = 0 \in L^p.$$

Επειδή η φ είναι γραμμική έχουμε ότι $\varphi(\chi_E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Radon-Nikodym. Υπάρχει $g \in L^1(\mu)$ ώστε $\nu(E) = \varphi(\chi_E) = \int \chi_E g d\mu = \int_E g d\mu$ για κάθε E μετρήσιμο. Έχουμε ότι $\varphi(\chi_E) = \int_E g d\mu$, άρα

$$\begin{aligned}
\varphi\Big(\sum_1^k \alpha_n \chi_{E_n}\Big) &= \sum_1^k \alpha_n \varphi(\chi_{E_n}) = \sum_1^k \alpha_n \int_{E_n} g d\mu \\
&= \sum_1^k \alpha_n \int \chi_{E_n} g d\mu = \int \Big(\sum_{n=1}^k \alpha_n \chi_{E_n}\Big) g d\mu.
\end{aligned}$$

Άρα $\varphi(f) = \int f g d\mu$ για κάθε f απλή. Από την Πρόταση 5.1.5 για $1 \le p < \infty$, το σύνολο των απλών συναρτήσεων $f = \sum_1^n \alpha_j \chi_{E_j}$, όπου $\mu(E_j) < \infty$ για κάθε j, είναι πυκνό στον L^p. Για $f \in L^p$ υπάρχει f_n απλών με $f_n \xrightarrow{L^p} f$, άρα $\|f_n - f\|_p \to 0$. Έχουμε ότι $\varphi(f_n) = \int f_n g d\mu$ και επειδή η φ είναι συνεχής $\varphi(f_n) \to \varphi(f)$. Θα χρησιμοποιήσουμε την αντίστροφη ανισότητα Hölder για να δείξουμε ότι $g \in L^q(\mu)$. Θα δείξουμε ότι το $M_q(g) = \sup\{\left|\int fg\right| : f \in S \text{ και } \|f\|_p = 1\}$ είναι πεπερασμένο. Έχουμε

$$\left|\int fg\right| = |\varphi(f)| \le \|\varphi\| \, \|f\|_p \le \|\varphi\| \, .$$

Άρα $M_q(g) \le \|\varphi\| < \infty$. Τώρα θα δείξουμε ότι $fg \in L^1$, δηλαδή ότι $\int |fg| < \infty$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int |fg| &= \int sgn(fg) f g d\mu = \int (sgn(fg) f) g d\mu \\
&= \left|\int (sgn(fg) f) g d\mu\right| = |\varphi(sgn(fg) f)| \\
&\le \|\varphi\| \, \|(sgn(fg) f\|_p = \|\varphi\| \, \|f\|_p < \infty.
\end{aligned}$$

Άρα $fg \in L^1$ και η αντίστροφη Hölder μας δίνει ότι $g \in L^q(\mu)$. Εφαρμόζουμε την ανισότητα Hölder για να δείξουμε ότι $\varphi(f) = \int fg d\mu$ για κάθε $f \in L^p$. Έχουμε δείξει ότι $\varphi(f) = \lim \int f_n g d\mu$. Έχουμε για p, q συζυγείς εκθέτες

$$\begin{aligned} \left| \int (f_n - f) g d\mu \right| &\leq \left(\int |f_n - f|^p \right)^{1/p} \left(\int |g|^q \right)^{1/q} \\ &= \|f_n - f\|_p \, \|g\|_q \to 0. \end{aligned}$$

Άρα $\varphi(f) = \int fg d\mu$ για κάθε $f \in L^p$.

Υποθέτουμε ότι το μ είναι σ-πεπερασμένο. Έστω $\{F_n\}$ μια ακολουθία συνόλων ώστε $\mu(F_n) < \infty$ και $X = \cup_{n=1}^{\infty} F_n = \cup_{n=1}^{\infty} \big(\cup_{k=1}^{n} F_k\big)$. Θέτουμε $\cup_{k=1}^{n} F_k = E_n$, τότε $X = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Έχουμε ότι $E_n \subseteq E_{n+1}$ και $\mu(E_n) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(F_k) < \infty$. Συμφωνούμε να ταυτίσουμε τον $L^p(E_n)$ με τον υπόχωρο του $L^p(X)$ που αποτελείται από συναρτήσεις οι οποίες μηδενίζονται έξω από το E_n. Γράφουμε $L^p(E_n) \hookrightarrow L^p(X)$. Για κάθε $f \in L^p(E_n)$ και $\varphi|_{L^p(E_n)}$ από την προηγούμενη συζήτηση έχουμε ότι υπάρχει $g_n \in L^q(E_n)$ ώστε $\varphi(f) = \int_{E_n} f g_n d\mu$. Η g_n είναι μοναδική εκτός από μεταβολές σε μηδενικά σύνολα. Για $n < m$, επειδή η E_n είναι αύξουσα, έχουμε ότι $E_n \subseteq E_m$, άρα $L^p(E_n) \hookrightarrow L^p(E_m)$. Όμως $\varphi(f) = \int_{E_n} f g_n d\mu \in L^p(E_n)$ και $\varphi(f) = \int_{E_m} f g_m d\mu \in L^p(E_m)$, άρα $g_n = g_m$ στο E_n $\sigma.\pi.$ Θέτουμε $g : X \to \mathbb{R}$ ώστε $g = g_n$ στο E_n με $|g| = \lim_{n\to\infty} |g_n|$. Η $|g_n|$ είναι αύξουσα, άρα από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης

$$\begin{aligned} \|g\|_q &= \left(\int |g|^q \right)^{1/q} = \left(\int \lim_{n\to\infty} |g_n|^q \right)^{1/q} \\ &= \lim_{n\to\infty} \|g_n\|_q \, . \end{aligned}$$

Όμως,

$$\begin{aligned} \|g_n\|_q &= \left\| \varphi|_{L^p(E_n)} \right\| \\ &= \sup\{ |\varphi(f)| \, , f : E_n \to \mathbb{R} \text{ και } \|f\|_p \leq 1 \} \\ &\leq \sup\{ |\varphi(f)| \, , f : X \to \mathbb{R} \text{ και } \|f\|_p \leq 1 \} \\ &\leq \|\varphi\| \, , \end{aligned}$$

άρα έχουμε ότι $\|g\|_q \leq \|\varphi\| < \infty$ και $g \in L^q(X)$. Επιπλέον, αν $f \in L^p$ τότε $f\chi_{E_n} \to f$ κατά σημείο. Αυτό ισχύει διότι για $x \in X = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in E_{n_0}$ και επειδή η E_n είναι αύξουσα για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε ότι $x \in E_n$. Άρα $\forall n \geq n_0$ $f(x)\chi_{E_n}(x) = f(x) \to f(x)$. Θα δείξουμε ότι $\|f\chi_{E_n} - f\|_p \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Έχουμε

$$\int_X |f\chi_{E_n} - f|^p \, d\mu = \int_X |f|^p \, |1 - \chi_{E_n}|^p \, d\mu.$$

Εφαρμόζεται το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, διότι $|f|^p \, |1 - \chi_{E_n}|^p \leq |f|^p$ και $\int |f|^p < \infty$, άρα $\|f\chi_{E_n} - f\|_p \to 0$. Έχουμε ότι

$$\varphi(f) = \lim_{n\to\infty} \varphi(f\chi_{E_n}) = \lim_{n\to\infty} \int_X (fg)\chi_{E_n} d\mu.$$

Εφαρμόζεται πάλι το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, διότι $fg\chi_{E_n} \to fg$ κατά σημείο. Έχουμε ότι $|fg\chi_{E_n}| \leq |fg| < \infty$, διότι από την ανισότητα Hölder για $f \in L^p$, $g \in L^q$

$$\int |fg| \leq \left(\int |f|^p\right)^{1/p} \left(\int |g|^q\right)^{1/q} < \infty.$$

Άρα $\varphi(f) = \int_X fg d\mu$.

Έστω ότι το μ είναι τυχαίο και $p > 1$, οπότε $q < \infty$. Για κάθε σ-πεπερασμένο $E \subseteq X$ υπάρχει ουσιαστικά μοναδική $g_E \in L^q(E)$ ώστε $\varphi(f) = \int f g_E d\mu \ \forall f \in L^p(E)$ (από τα προηγούμενα) και $\|g_E\|_q \leq \|\varphi\|$. Αν F σ-πεπερασμένο και $F \supseteq E$ η $g_F|_E$ ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\varphi(f) = \int_E f g_F \quad \forall f \in L^p(E),$$

διότι έχουμε ταυτίσει την f με την

$$\bar{f} = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in E \\ 0, & \text{αν } x \in X \backslash E. \end{cases}$$

και αφού $f \in L^p(E)$ τότε $\bar{f} \in L^p(F)$, οπότε $\varphi(\bar{f}) = \varphi(f)$ λόγω της ταύτισης και

$$\varphi(f) = \varphi(\bar{f}) = \int_F \bar{f} g_F \stackrel{\bar{f}|_{E^c}}{=} \int_E f g_F.$$

Οπότε από τη μοναδικότητα της g_E θα ισχύει $g_F|_E = g_E$ σ.π. Φανερά,

$$\|g_F\|_q^q = \int_F |g_F|^q \geq \int_E |g_F|^q = \int_E |g_E|^q = \|g_E\|_q^q$$

άρα

$$\|g_F\|_q \geq \|g_E\|_q \tag{5.3}$$

Θέτουμε

$$M = \sup\{\|g_E\|_q : E \subseteq X, E \quad \sigma - \text{πεπερασμένο}\}.$$

Θεωρούμε μια ακολουθία E_n σ-πεπερασμένων υποσυνόλων του X ώστε $\|g_{E_n}\|_q \to M$ καθώς $n \to \infty$. Θέτουμε $F = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ το οποίο είναι σ-πεπερασμένο ως αριθμήσιμη ένωση σ-πεπερασμένων, οπότε από την (5.3) έχουμε ότι

$$M \geq \|g_F\|_q \geq \|g_{E_n}\|_q \to M.$$

Άρα $\|g_F\|_q = M$. Το F είναι μεγιστικό με αυτήν την ιδιότητα: αν $A \supseteq F$ και A σ-πεπερασμένο τότε η g_A είναι σ.π. μηδέν έξω από το F. Αυτό συμβαίνει διότι

$$\int |g_F|^q + \int |g_{A\backslash F}|^q = \int |g_A|^q \leq M^q = \int |g_F|^q \Rightarrow \int |g_{A\backslash F}|^q = 0.$$

Η πρώτη ισότητα ισχύει ισχύει διότι $\int |g_A|^q = \int_F |g_A|^q + \int_{A\setminus F} |g_A|^q$ αλλά $g_A|_F = g_F$ και $g_A|_{A\setminus F} = g_{A\setminus F}$. Έχουμε ότι $g_{A\setminus F} \in L^q$ άρα $\left|g_{A\setminus F}\right|^q \in L^1$ και από την Πρόταση 2.3.3 έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
g_{A\setminus F} &= 0 \quad \sigma.\pi. \\
g_A|_{A\setminus F} &= 0 \quad \sigma.\pi. \\
g_A &= g_F \quad \sigma.\pi.
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

[Εδώ είναι απαραίτητο το $q < \infty$. Αν $q = \infty$ επειδή το μέτρο δεν είναι σ-πεπερασμένο μπορεί να μην είναι ημιπεπερασμένο και τότε ο L^∞ δεν είναι καλά ορισμένος.] Άρα η g_F είναι η «μεγαλύτερη». Μένει να ελέγξουμε ότι $\varphi(f) = \int fg_F$ $\forall f \in L^p$. Έστω $f \in L^p$. Θεωρούμε το σύνολο $A = F \cup \{x : f(x) \neq 0\}$. Από την Πρόταση 2.3.3 έχουμε ότι το σύνολο $\{x : f(x) \neq 0\}$ είναι σ-πεπερασμένο. Επίσης, το F είναι σ-πεπερασμένο, άρα και το A είναι σ-πεπερασμένο. Οπότε από την (5.4) έχουμε ότι $\varphi(f) = \int fg_A = \int fg_F$.

Μένει να δείξουμε ότι ο $(L^p)^*$ είναι ισομετρικά ισομορφικός στον L^q. Από την προηγούμενη συζήτηση έχουμε ότι $\|\varphi\|^* = \|g\|_q$ και $\varphi(f) = \int fg$. Πρέπει να βρούμε μία $F : (L^p)^* \to L^q$ γραμμική, 1-1, επί και για κάθε $\varphi_1, \varphi_2 \in (L^p)^*$ να ισχύει $\|\varphi_1 - \varphi_2\|^* = \|F(\varphi_1) - F(\varphi_2)\|_q$. Θέτουμε $F(\varphi) = g$ όπου g είναι η συνάρτηση του θεωρήματος, δηλαδή $\varphi(f) = \int fg$ για κάθε $f \in L^p$. Θα δείξουμε ότι η F είναι γραμμική. Για $\varphi_1, \varphi_2 \in (L^p)^*$ πρέπει να δειχθεί ότι $F(\varphi_1 + \varphi_2) = F(\varphi_1) + F(\varphi_2)$. Θέτουμε $F(\varphi_1) =: g_1$ με $\varphi_1(f) = \int fg_1$ και $F(\varphi_2) =: g_1$ με $\varphi_2(f) = \int fg_2$ για κάθε $f \in L^p$. Παρατηρούμε ότι

$$
\begin{aligned}
(\varphi_1 + \varphi_2)(f) &= \varphi_1(f) + \varphi_2(f) = \int fg_1 + \int fg_2 = \int (fg_1 + fg_2) \\
&= \int f(g_1 + g_2).
\end{aligned}
$$

Όμως, $F(\varphi_1 + \varphi_2) = g_1 + g_2 = F(\varphi_1) + F(\varphi_2)$. Επίσης, $(\lambda\varphi)(f) = \lambda\varphi(f) = \lambda \int fg = \int f(\lambda g)$. Οπότε $F(\lambda\varphi) = \lambda g = \lambda F(\varphi)$. Άρα η F είναι γραμμική. Θα δείξουμε ότι η F είναι ισομετρία, δηλαδή ότι $\|\varphi_1 - \varphi_2\|^* = \|F(\varphi_1) - F(\varphi_2)\|_q$. Έστω $\varphi_1, \varphi_2 \in (L^p)^*$. Θέτουμε $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \in (L^p)^*$. Από τα προηγούμενα έχουμε ότι

$$
\|F(\varphi)\|_q = \|\varphi\|^* \Rightarrow \|F(\varphi_1 - \varphi_2)\|_q = \|\varphi_1 - \varphi_2\|^*
$$

και επειδή η F είναι γραμμική έχουμε ότι $\|F(\varphi_1) - F(\varphi_2)\|_q = \|\varphi_1 - \varphi_2\|^*$. Στην προηγούμενη σχέση για $\varphi_1 \neq \varphi_2$ έχουμε ότι $F(\varphi_1) \neq F(\varphi_2)$. Άρα η F είναι 1-1. Μένει να δείξουμε ότι η F είναι επί. Έστω $g \in L^q$ και $\varphi_g(f) = \int fg$ για κάθε $f \in L^p$. Θα δείξουμε ότι $\varphi_g \in (L^p)^*$. Έστω $f_1, f_2 \in L^p$. Τότε

$$
\begin{aligned}
\varphi_g(f_1 + f_2) &= \int (f_1 + f_2)g = \int f_1 g + \int f_2 g \\
&= \varphi_g(f_1) + \varphi_g(f_2)
\end{aligned}
$$

και $\varphi_g(\lambda f) = \int (\lambda f)g = \lambda \int fg = \lambda\varphi_g(f)$. Άρα η φ_g είναι γραμμική. Με χρήση της ανισότητας Hölder έχουμε

$$|\varphi_g(f)| = \left|\int fg\right| \leq \int |f|\,|g| \leq \|f\|_p \,\|g\|_q \,,$$

άρα η $\|\varphi_g\|^*$ είναι φραγμένη στην μοναδιαία μπάλα με $\|\varphi_g\|^* \leq \|g\|_q$. Έστω $f_n \in L^p$, $f \in L^p$ και $f_n \to f$ στον L^p. Πρέπει να δείξουμε ότι $\varphi_g(f_n) \to \varphi_g(f)$. Έχουμε

$$|\varphi_g(f_n) - \varphi_g(f)| = |\varphi_g(f_n - f)| \leq \|f_n - f\|_p \,\|g\|_q \to 0.$$

Άρα η φ_g είναι συνεχής. Επιπλέον εξ' ορισμού $F(\varphi_g) = g$ και η F είναι επί. Άρα ο $(L^p)^*$ είναι ισομετρικά ισομορφικός στον L^q και η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

Βιβλιογραφία

[1] Gerald B. Folland, Real analysis, *Modern techniques and their applications*, Pure and applied Mathematics, Wiley-Interscience.

[2] Y. Eidelman, V. Milman, A. Tsolomitis, Functional Analysis, *Graduate Course in Mathematics* No 66, AMS.