Η Εξισωση KdV Με Αποσβεση

Μεταπτυχιακη Εργασια

Γαβριηλ Ανδρεολας

α.μ. 2004001

Επιβλεπων Καθηγητης : Νικος Καραχαλιος

Τμημα Μαθηματικων

Πανεπιστημιο Αιγαιου

Καρλοβασι 2006

Ευχαριστίες
Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Νίκο Καραχάλιο για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του καθώς και για το χρόνο που μου διέθεσε.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η εξίσωση KdV

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{0.0.1}$$

αρχικά προτάθηκε ως μοντέλο για κυματισμό μικρού πλάτους, που διαδίδεται σε στενό κανάλι και σε ρηχό νερό, από τους D.J. Korteweg και G. de Vries το 1895. Αργότερα η εξίσωση KdV εμφανίστηκε σε πλήθος φυσικών καταστάσεων όπου η μη γραμμικότητα και η διασπορά είναι σημαντικές. Παραδείγματα άλλων τέτοιων φυσικών συστημάτων απαντώνται στη μετεωρολογία, τη φυσική πλάσματος, τα laser, την ακουστική, την οπτική, τους ημιαγωγούς. Συνεπώς, η εξίσωση KdV θεωρείται μια από τις σπουδαιότερες μονοδιάστατες μη γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις. Βεβαίως, σε πληθώρα φαινομένων δεν είναι δυνατόν να αγνοηθούν μηχανισμοί απόσβεσης και εξωτερικές διεγέρσεις. Στις περιπτώσεις αυτές καταλήγουμε σε εξισώσεις της μορφής

$$u_t + uu_x + u_{xxx} + \mathcal{L}(u) = f, \tag{0.0.2}$$

όπου η f εκφράζει τις εξωτερικές δυνάμεις και το $\mathcal{L}(u)$ την απόσβεση. Αυτή είναι η εξίσωση που θα μελετηθεί στη συνέχεια και συγκεκριμένα με τον όρο απόσβεσης να είναι $\mathcal{L}(u) = \gamma u$ όπου γ είναι μια θετική σταθερά και η f είναι ανεξάρτητη του χρόνου.

Μια συνοπτική αναφορά στους χώρους L^p και Sobolev και γενικά στα εργαλεία που θα είναι χρήσιμα για τη μελέτη της εξίσωσης (0.0.2) γίνεται στο πρώτο κεφάλαιο. Επιπλέον, περιγράφεται η παραγωγή της εξίσωσης KdV.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται ένα θεώρημα ύπαρξης λύσης για την εξίσωση (0.0.2). Το θεώρημα αυτό, των T. Kato & C. Lai αρχικά παρουσιάστηκε από τους ίδιους ως εφαρμογή στην εξίσωση Euler [**3**], αλλά εφαρμόζεται και σε πληθώρα άλλων προβλημάτων αρχικών τιμών. Η απόδειξη του θεωρήματος βασίζεται στη διατύπωση του προβλήματος αρχικών τιμών σε γενικευμένη μορφή. Στη συνέχεια διατυπώνεται ένα προσεγγιστικό πρόβλημα, το οποίο μας δίνει μια ακολουθία λύσεων, η οποία δείχνουμε ότι συγκλίνει (ασθενώς) στη λύση του προβλήματος.

Τέλος, στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφονται ορισμένα αποτελέσματα που αφορούν τη δυναμική συμπεριφορά των λύσεων της (0.0.2), και συγκεκριμένα την ύπαρξη απορροφητικής σφαίρας.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΧΩΡΩΝ SOBOLEV ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ - ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ KdV

Σε αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο θα παρουσιαστούν συνοπτικά βασικά αποτελέσματα που αφορούν χώρους Banach και Hilbert και ειδικότερα χώρους L^p και Sobolev. Οι χώροι αυτοί είναι πολύ χρήσιμοι στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, γενικά, και στη μελέτη προβλημάτων αρχικών τιμών για διαφορικές εξισώσεις, ειδικότερα, αφού αποτελούν το φυσιολογικό πλαίσιο για την διατύπωση αυτών σε ασθενή μορφή. Στις αμέσως επόμενες παραγράφους θα ασχοληθούμε με χώρους συναρτήσεων σε μια διάσταση δεδομένου ότι και το πρόβλημα με το οποίο θα ασχοληθούμε στο επόμενο κεφάλαιο είναι μονοδιάστατο. Βέβαια οι χώροι αυτοί γενικεύονται και σε περισσότερες διαστάσεις, αλλά στην περίπτωση αυτή οι ιδιότητες τους καθορίζονται και από το χωρίο και το σύνορό του. Κατά συνέπεια, η μονοδιάστατη περίπτωση είναι απλούστερη.

1.1. Ο ΧΩΡΟΣ L^p

Στην παράγρφο αυτή θα περιοριστούμε σε μια συνοπτική ανασκόπιση της θεωρίας των χώρων L^p. Θα πρέπει να αναφέρουμε πως σε ότι ακολουθεί δεν χρησιμοποιούμε το ολοκλήρωμα του Riemann, αλλά το ολοκληρωμα του Lebesque.

Ο $L^p(0,1)$ είναι ένα σύνολο κλάσεων ισοδυναμίας συναρτήσεων. Θεωρούμε ότι δύο συναρτήσεις είναι ισοδύναμες και τις ταυτίζουμε αν είναι ίσες σχεδόν παντού στο (0,1). Ωστόσο, χάριν ευκολίας θα αναφέρουμε τα στοιχεία του L^p ως συναρτήσεις και θα γράφουμε $f \in L^p$, αν η $|f|^p$ είναι ολοκληρώσιμη στο (0,1).

Έστω $p \in \mathbb{R}$ με $1 \leq p < \infty$. Συμβολίζουμε με $L^1(0,1)$ τον χώρο των Lebesque ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο (0,1) με τιμές στον $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $L^p(0,1)$ να είναι ο εξής χώρος:

$$L^p(0,1) := \left\{ f : (0,1) \to \mathbb{R} \mid \ |f|^p \in L^1(0,1) \right\},$$

δηλαδή

$$\int_0^1 |f(x)|^p dx < \infty.$$

Σε ότι ακολουθεί το διάστημα (0,1) θα εννοείται και έτσι αντί για $L^p(0,1)$ θα γράφουμε L^p .

Στον χώρο L^p ορίζουμε τη νόρμα

$$\|f\|_{L^p} := \left[\int_0^1 |f(x)|^p \, dx \right]^{1/p}. \tag{1.1.1}$$

Πρόταση 1.1.1. *(Ο L^p είναι γραμμικός χώρος.) Ο χώρος L^p είναι γραμμικός χώρος και η απεικόνιση $\|\cdot\|_{L^p} : L^p \to \mathbb{R}$ είναι νόρμα.*

Απόδειξη. Για $p \geq 1$ ισχύει η εκτίμηση

$$\|u + v\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p}$$

η οποία λέγεται ανισότητα Minkowski.

Η απόδειξη της ανισότητας Minkowski βασίζεται στην ανισότητα $Hölder$, σύμφωνα με την οποία ισχύει το εξής: Αν $q := p/(p-1)$ είναι ο λεγόμενος συζυγής εκθέτης του p, δηλαδή το q είναι τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

και $u \in L^p$, $v \in L^q$, τότε $uv \in L^1$ και $\|uv\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q}$.

Οι υπόλοιπες ιδιότητες της νόρμας $\|\cdot\|_{L^p}$ προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό της και εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι ο L^p είναι γραμμικός χώρος. □

Με τη βοήθεια δύο θεμελιωδών αποτελεσμάτων της θεωρίας ολοκλήρωσης κατά Lebesque, του θεωρήματος της μονότονης σύγκλισης και του λήμματος του Fatou, μπορεί να αποδειχθεί ότι

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1.2. *(Πληρότητα των χώρων L^p.) Οι χώροι L^p, $1 \leq p < \infty$, είναι πλήρεις.*

ΠΟΡΙΣΜΑ 1.1.3. *(O L^2 είναι χώρος Hilbert.) Ο χώρος L^2 είναι χώρος Hilbert με το εσωτερικό γινόμενο*

$$(u,v) := \int_0^1 uvdx.$$

ΣΧΟΛΙΟ. (Ο χώρος L^∞.) Λέμε ότι μια μετρήσιμη συνάρτηση u στο (0,1) είναι ουσιωδώς φραγμένη στο (0,1), αν υπάρχει μια σταθερά K τέτοια ώστε $|u(x)| \leq K$ σ.π. στο (0,1). Το infimum των σταθερών K για τις οποίες ισχύει αυτή η σχέση, λέγεται ουσιώδες supremum της $|u|$ στο (0,1) και συμβολίζεται με

$$ess \sup_{x\in(0,1)} |u(x)|.$$

Ο χώρος των ουσιωδώς φραγμένων συναρτήσεων στο (0,1) συμβολίζεται με $L^\infty(0,1)$. Ο L^∞ είναι γραμμικός χώρος και η $\|\cdot\|_{L^\infty}$,

$$\|u\|_{L^\infty} := ess \sup_{x\in(0,1)} |u(x)|$$

είναι νόρμα στον L^∞. Μάλιστα ο (L^∞,$\|\cdot\|_{L^\infty}$) είναι πλήρης χώρος.

Εύκολα βλέπει κανείς ότι στην περίπτωση που μια συνάρτηση u είναι συνεχής στο (0,1) το ουσιώδες supremum της ταυτίζεται με το supremum της.

Για $p \neq 2$ οι χώροι L^p είναι, όπως αναφέραμε ήδη, πλήρεις, δηλαδή χώροι Banach, αλλά η νόρμα τους δεν παράγεται από εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή αυτοί οι χώροι δεν είναι χώροι Hilbert.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1.4. Έστω u μια συνεχής συνάρτηση στο (0,1). Φορέας της u καλείται η κλειστή θήκη του συνόλου $\{x \in (0,1) \ : \ u(x) \neq 0\}$. Το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων στο (0,1) με φορέα ένα φραγμένο σύνολο που περιέχεται στο (0,1) συμβολίζεται με $C_0(0,1)$. Ο δείκτης 0 σε αυτόν το συμβολισμό υποδηλώνει ότι οι συναρτήσεις αυτές μηδενίζονται σε περιοχές κοντά στο σύνορο του (0,1).

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.1.5. *(Πυκνότητα του C_0 στους L^p.) Για $1 \leq p < \infty$, ο χώρος C_0 είναι πυκνός στον L^p.*

Σχολιο. (Μη πυκνότητα του C_0 στον L^∞.) Έστω $u : (0,1) \to \mathbb{R}$, $u(x) = 1$. Προφανώς $u \in L^\infty$. Όμως βλέπουμε εύκολα ότι για κάθε $\phi \in C_0$ ισχύει $\|u-\phi\|_{L^\infty} \geq 1$ και συνεπώς το αντίστοιχο της τελευταίας πρότασης για $p = \infty$ δεν ισχύει.

Προταση 1.1.6. *(Διαχωρισιμότητα των χώρων L^p.) Για $1 \leq p < \infty$, ο χώρος L^p είναι διαχωρίσιμος.*

Σχολιο. (Μη διαχωρισιμότητα του L^∞.) Αποδεικνύεται ότι ο χώρος L^∞ δεν είναι διαχωρίσιμος.

Θα αναφέρουμε ακόμα τον χώρο $L^1_{loc}(0,1)$, ο οποίος αποτελείται από τις τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, δηλαδή, αν G είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του (0,1) τέτοιο ώστε το $\overline{G}$ να περιέχεται στο (0,1), τότε οι περιορισμοί των στοιχείων του $L^1_{loc}(0,1)$ στο G περιέχονται στον $L^1(G)$. Ο $L^1(0,1)$ είναι γνήσιος υπόχωρος του $L^1_{loc}(0,1)$. Για παράδειγμα η συνάρτηση $u : (0,1) \to \mathbb{R}$, $u(x) := 1/x$, ανήκει στον $L^1_{loc}(0,1)$, αφού, για κάθε $0 < a < b < 1$, το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b |u(x)| dx$$

είναι πεπερασμένο, αλλά δεν ανήκει στον $L^1(0,1)$, αφού δεν είναι ολοκληρώσιμη στο (0,1). Στον χώρο $L^1_{loc}(0,1)$ δεν ορίζουμε κάποια νόρμα.

Οι χώροι L^p που έχουμε ήδη εξετάσει αφορούν συναρτήσεις που παίρνουν τιμές στον $\mathbb{R}$. Σε αυτό το σημείο θα αναφερθούμε σε χώρους συναρτήσεων οι οποίες παίρνουν τιμές σε ένα χώρο Banach X. Γενικεύοντας λοιπόν τους χώρους $L^p(0,1)$ έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμος 1.1.7. Έστω X ένας χώρος Banach και $0 < T < \infty$. Ο χώρος $L^p(0,T;X)$ με $1 \leq p < \infty$ αποτελείται από όλες τις μετρήσιμες συναρτήσεις $u : (0,T) \to X$ για τις οποίες ισχύει:

$$\|u\|_p := \left[\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt\right]^{1/p} < \infty. \tag{1.1.2}$$

Ορισμένες βασικές ιδιότητες των χώρων $L^p(0,T;X)$ παρουσιάζονται στην επόμενη πρόταση. Οι ιδιότητες αυτές είναι και ιδιότητες των χώρων $L^p(0,T)$ διότι $L^p(0,T) = L^p(0,T;\mathbb{R})$, αλλά εδώ διατυπώνονται σε πιο γενική μορφή.

Προταση 1.1.8. *(Ιδιότητες των χώρων $L^p(0,T;X)$). Έστω X και Y χώροι Banach και $1 \leq p < \infty$. Τότε*
$a)$ Ο $L^p(0,T;X)$ με την νόρμα 1.1.2 είναι χώρος Banach δεδομένου ότι ταυτίζουμε τις συναρτήσεις που είναι ίσες σχεδόν παντού στο (0,T).
$b)$ Ο $C([0,T];X)$ είναι πυκνός στον $L^p(0,T;X)$ και η εμφύτευση

$$C([0,T];X) \subseteq L^p(0,T;X)$$

είναι συνεχής.
$c)$ Αν ο χώρος X είναι χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)_X$, τότε ο $L^2(0,T;X)$ είναι επίσης χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο

$$(u|v) = \int_0^T (u(t)|v(t))_X dt.$$

$d)$ Ο χώρος $L^p(0,T;X)$ είναι διαχωρίσιμος αν ο X είναι διαχωρίσιμος και $1 \leq p < \infty$.
$e)$ Αν η εμφύτευση $X \subset Y$ είναι συνεχής, τότε η εμφύτευση

$$L^r(0,T;X) \subset L^q(0,T;Y), \quad 1 \leq q \leq r \leq \infty,$$

είναι επίσης συνεχής.

1.2. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΑΣΘΕΝΟΥΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Έχοντας αναφερθεί στους χώρους L^p, είμαστε σε θέση να προχωρήσουμε σε μια εισαγωγή στους χώρους Sobolev σε μια διάσταση. Ουσιαστικό ρόλο στους χώρους του Sobolev παίζουν οι γενικευμένες ή ασθενείς παράγωγοι. Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε λοιπόν με τις γενικευμένες παραγώγους και μετά θα είμαστε σε θέση να μιλήσουμε για τους χώρους του Sobolev.

Οι χώροι του Sobolev σε μια διάσταση μπορούν να οριστούν σε οποιοδήποτε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Όμως, το πρόβλημα με το οποίο θα ασχοληθούμε στο επόμενο κεφάλαιο, το μελετάμε στο διάστημα (0,1). Έτσι εδώ θα περιοριστούμε στην περίπτωση του χωρίου αυτού.

Συμβολίζουμε με $C_0^\infty(0,1)$ το σύνολο των συναρτήσεων, που ορίζονται στο (0,1) και έχουν συμπαγή φορέα που περιέχεται στο (0,1). Τον χώρο $C_0^\infty(0,1)$ τον ονομάζουμε χώρο δοκιμής και τα στοιχεία του συναρτήσεις δοκιμής.

Έστω $u \in C^1(0,1)$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε κατά τα γνωστά την παράγωγο της u σε κάθε σημείο του (0,1). Αυτό δεν μπορεί να γίνει με συναρτήσεις, για παράδειγμα, $u \in L^1_{loc}(0,1)$, αφού ούτε καν για τις τιμες τους σε κάθε σημείο $x \in (0,1)$ δεν μπορούμε να μιλήσουμε. Για να οδηγηθούμε σε μια γενίκευση της έννοιας της παραγώγου ας δούμε πρώτα μια άλλη ιδιότητα της u', για $u \in C^1(0,1)$ στην οποία υπεισέρχονται μόνο ολοκληρώματα και όχι τιμές σε σημεία.

Έστω λοιπόν $u \in C^1(0,1)$. Τότε για κάθε $\phi \in C_0^\infty(0,1)$ και με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε:

$$\int_0^1 u\phi' dx = -\int_0^1 u'\phi \, dx. \tag{1.2.1}$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η σχέση (1.2.1) χαρακτηρίζει τη u'. Πράγματι, έστω $v \in C(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$\int_0^1 u\phi' dx = -\int_0^1 v\phi dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty. \tag{1.2.2}$$

Από τις (1.2.1) και (1.2.2) έπεται ότι

$$\int_0^1 (u' - v)\phi dx = 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty. \tag{1.2.3}$$

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $u' = v$. Υποθέτουμε το αντίθετο και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Έστω λοιπόν ότι για κάποιο $x^* \in (0,1)$ ισχύει $u'(x^*) \neq v(x^*)$ και μάλιστα χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι $u'(x^*) > v(x^*)$. Δεδομένου ότι οι u' και v είναι συνεχείς υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $u'(x) > v(x)$ για κάθε $x \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$. Επιλέγοντας τη συνάρτηση δοκιμής ϕ έτσι ώστε να παίνει μόνο μη αρνητικές τιμές και να έχει φορέα το διάστημα $[x^* - \delta, x^* + \delta]$, διαπιστώνουμε ότι

$$\int_0^1 (u' - v)\phi dx = \int_{x^*-\delta}^{x^*+\delta} (u' - v)\phi dx > 0,$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού έρχεται σε αντίφαση με την (1.2.3). Συνεπώς, η (1.2.1) χαρακτηρίζει όντως την u'.

Τώρα στη σχέση (1.2.1) θέτουμε $w = u'$ και έχουμε

$$\int_0^1 u\phi' \, dx = -\int_0^1 w\phi \, dx\, , \ \forall \phi \in C_0^\infty(0,1) \tag{1.2.4}$$

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, το κίνητρο για τον ορισμό της ασθενούς παραγώγου είναι η παρατήρηση ότι η σχέση (1.2.4) ισχύει και για συναρτήσεις οι οποίες δεν είναι αρκετά λείες.

Ορισμος 1.2.1. Έστω $u, w \in L^1_{loc}(0,1)$. Τότε, w καλείται ασθενής ή γενικευμένη παράγωγος της u, πρώτης τάξης, αν και μόνο αν η σχέση (1.2.4) ικανοποιείται.

Φυσικά είναι δυνατό είτε να υπάρχει είτε να μην υπάρχει η ασθενής παράγωγος μιας συνάρτησης του L^1_{loc}.

Προταση 1.2.2. *Αν $u \in C(0,1)$, τότε η κλασική παράγωγος της u είναι και ασθενής παράγωγος.*

Κάθε γενικευμένη (ασθενής) παράγωγος $w = \frac{d}{dx}u$ είναι μοναδική με την έννοια ότι αν $r = \frac{d}{dx}u$ τότε $w = r$ σ.π.

Αποδειξη. Έστω $u \in C(0,1)$ τότε η $w = \frac{d}{dx}u$ είναι κλασική παράγωγος. Από τις σχέσεις (1.2.1) και (1.2.4) είναι φανερό ότι η w είναι και ασθενής παράγωγος της u.

Έστω ότι $w = \frac{d}{dx}u$, $r = \frac{d}{dx}u$ είναι ασθενείς παράγωγοι της u, τότε από την σχέση (1.2.4) προκύπτει $\int_0^1 (w-r)\phi dx = 0 \;\; \forall \phi \in C_0^\infty(0,1)$. Συνεπώς $w = r$ σ.π. □

Με παρόμοιο τρόπο ορίζεται και η παράγωγος $v \in L^1_{loc}(0,1)$ οποιασδήποτε τάξης $n \in \mathbb{N}$, μιας συνάρτησης $u \in L^1_{loc}(0,1)$ ως το μοναδικό στοιχείο, αν υπάρχει, τέτοιο ώστε

$$\int_0^1 u\phi^{(n)} dx = (-1)^n \int_0^1 v\phi dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty(0,1).$$

Τέλος πρέπει να σημειώσουμε ότι για παράδειγμα η ασθενής δεύτερη παράγωγος δεν ορίζεται ως η πρώτη παράγωγος της πρώτης παραγώγου αλλά κατ' ευθείαν.

1.3. Ο ΧΩΡΟΣ SOBOLEV $W^{k,p}$

Έστω $p \in [0,\infty]$ και $k \in \mathbb{N}$.

Ορισμος 1.3.1. (Χώροι Sobolev.) Ο χώρος Sobolev $W^{k,p}(0,1)$ αποτελείται από τις συναρτήσεις $u \in L^p(0,1)$ που έχουν ασθενείς παραγώγους $u', u'', ..., u^{(k)}$, τάξης έως και k και όλες αυτές οι παράγωγοι ανήκουν στον $L^p(0,1)$. Στον $W^{k,p}(0,1)$ ορίζουμε τη νόρμα $\|\cdot\|_{k,p}$

$$\|u\|_{k,p} := \left(\sum_{j=0}^{k} \|u^{(j)}\|_{L^p}^p \right)^{1/p} \quad , \quad \alpha\nu \; p < \infty$$

και για $p = \infty$

$$\|u\|_{k,\infty} := \sum_{j=1}^{k} \|u^{(j)}\|_{L^\infty}$$

Ότι η συνάρτηση $\|\cdot\|_{k,p}$ είναι πράγματι νόρμα στον $W^{k,p}$ αποδεικνύεται εύκολα με την ανισότητα του Minkowski αν χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι η $\|\cdot\|_{L^p}$ είναι νόρμα στον L^p.

Για $p = 2$ συνήθως γράφουμε H^k αντί για $W^{k,2}$. Ο λόγος είναι ότι όπως θα δούμε στη συνέχεια οι χώροι αυτοί είναι χώροι Hilbert. Το αντίστοιχο εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)_k$ δίνεται ως εξής

$$(u,v)_k := \sum_{j=0}^{k} (u^{(j)}, v^{(j)}) , \quad \forall u, v \in H^k$$

όπου $(\cdot,\cdot)$ είναι το εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(0,1)$,

$$(u,v) := \int_0^1 uv\, dx$$

Στη συνέχεια θα συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_k$ αντί για $\|\cdot\|_{k,2}$ τη νόρμα του H^k όπου δεν υπάρχει κίνδυνος να προκληθεί σύγχιση με τη νόρμα του L^p.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.3.2. *(Πληρότητα των χώρων Sobolev.) Οι χώροι του Sobolev $W^{k,p}$, $k \in \mathbb{N}$ και $p \in [0,\infty]$, είναι πλήρεις.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W^{k,p}$ μια ακολουθία Cauchy ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_{k,p}$. Τότε, για κάθε $j \in \{0,...k\}$, η ακολουθία $(u_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι προφανώς ακολουθία Cauchy στον L^p. Λόγω της πληρότητας του L^p υπάρχουν συναρτήσεις $v_j \in L^p$ τέτοιες ώστε για κάθε $j \in \{0,...,k\}$

$$u_n^{(j)} \to v_j, \;\; n \to \infty\,, \;\;\; \sigma\tau o\nu \;\; L^p$$

και συγκεκριμένα για $j = 0$,

$$u_n \to v_0 := u, \;\; n \to \infty\,, \;\;\; \sigma\tau o\nu \;\; L^p.$$

Τώρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $u \in W^{k,p}$ και ότι

$$u_n \to u, \;\; n \to \infty\,, \;\;\; \sigma\tau o\nu \;\; W^{k,p}.$$

Έστω λοιπόν $\phi \in C_0^\infty$ μια συνάρτηση δοκιμής. Τότε για $j \in \{1,...,k\}$,

$$\int_0^1 u_n \phi^{(j)} dx = (-1)^j \int_0^1 u_n^{(j)} \phi dx.$$

Τώρα αφήνοντας το n να τείνει στο άπειρο το αριστερό και το δεξί μέλος της τελευταίας σχέσης τείνουν αντίστοιχα στα

$$\int_0^1 u\phi^{(j)} dx \;\; \kappa\alpha\iota \;\; (-1)^j \int_0^1 v_j \phi dx,$$

έχουμε δηλαδή ότι

$$\int_0^1 u\phi^{(j)} dx = (-1)^j \int_0^1 v_j \phi dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty,$$

δηλαδή υπάρχει η ασθενής παράγωγος $u^{(j)}$ της u για $j \in \{1,...k\}$ και μάλιστα $u^{(j)} = v_j$, $j = 1,...k$. Χρησιμοποιώντας τώρα το γεγονός ότι $v_j \in L^p$ διαπιστώνουμε αμέσως ότι $u^{(j)} \in L^p$, $j = 0,...k$ οπότε $u \in W^{k,p}$. Επί πλέον, για $1 \le p < \infty$,

$$\|u - u_n\|_{k,p}^p = \sum_{j=0}^{k} \|u^{(j)} - u_n^{(j)}\|_{L^p} = \sum_{j=0}^{k} \|v_j - u_n^{(j)}\|_{L^p}^p \to 0\,, \quad n \to \infty,$$

και παρόμοια για $p = \infty$,

$$\|u-u_n\|^p_{k,\infty}=\sum_{j=0}^{k}\|u^{(j)}-u_n^{(j)}\|_{L^\infty}=\sum_{j=0}^{k}\|v_j-u_n^{(j)}\|^p_{L^\infty}\to 0\,,\quad n\to\infty,$$

δηλαδή $u_n \to u\,,\ \ n\to\infty$ στον $W^{k,p}$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Τέλος δίνουμε ορισμένα σημαντικά αποτελέσματα που αφορούν εμφυτεύσεις σε χώρους $Sobolev$.

Θεωρημα 1.3.3. *(Εμφυτεύσεις σε χώρους Sobolev)*
$i)$ *(Πυκνότητα.) Ο χώρος $C^\infty[0,1]$ είναι πυκνός στον $H^k(0,1)$ για $k=0,1,2,...$*
$ii)$ *(Συμπαγείς εμφύτευσεις.) Οι εμφυτεύσεις $L^2\supset H^1\supset H^2\supset H^3\supset ...$ είναι συμπαγείς.*
$iii)$ *Η εμφύτευση $H^k(0,1)\subset C^{k-1}[0,1]$ είναι συνεχής.*

1.4. Ο ΔΥΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ

Έστω X ένας χώρος Banach. Ως συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές στον χώρο X ορίζεται η συνεχής γραμμική απεικόνιση $f:X\to\mathbb{R}$. Η νόρμα του συναρτησοειδούς είναι $\|f\|=\sup_{\|u=1\|}|\langle f,u\rangle|$. Άρα $|\langle f,u\rangle|\le\|f\|\,\|u\|\ \ \forall u\in X$.

Με X^* συμβολίζουμε το χώρο όλων των γραμμικών συναρτησοειδών στο X. Ο χώρος X^* με την νόρμα $\|f\|$, είναι χώρος Banach, και ονομάζεται δυϊκός του X. Θέτουμε $X^{**}=(X^*)^*$.

Έστω $u\in X$. Αν ορίσουμε $U(f)=\langle f,u\rangle\ \ \forall f\in X$, τότε $U:X^*\to\mathbb{R}$ είναι ένα γραμμικό συνεχές συναρτησοειδές, δηλαδή, $U\in X^{**}$ και εύκολα βλέπουμε ότι $\|U\|=\|u\|$. Ορίζουμε $j(u)=U$ και παίρνουμε μια γραμμική ισομετρία:

$$j:X\to X^*$$

Ο τελεστής j είναι ένα προς ένα και για αυτό ο χώρος X προσδιορίζεται από το υποσύνολο $j(X)$ του X^{**}. Με αυτή την έννοια γράφουμε $X\subseteq X^{**}$.

Ο χώρος Banach X ονομάζεται ανακλαστικός αν και μόνο αν ο τελεστής j είναι επί του του X^{**} και τότε μπορούμε να γράψουμε $X=X^{**}$. Επιπλέον, αν ταυτίσουμε το u με το $U=j(u)$, μπορούμε να γράφουμε $\langle f,u\rangle=\langle u,f\rangle\,,\ \ \forall f\in X^*,\ \ u\in X$.

1.4.1. Ο ΔΥΙΚΟΣ ΤΕΛΕΣΤΗΣ. Έστω X,Y δύο χώροι Banach και έστω $T:X\to Y$ μια γραμμική απεικόνιση (συνήθως ονομάζεται τελεστής) ορισμένη στο X. Ο T ονομάζεται φραγμένος τελεστής αν υπάρχει C τέτοιο ώστε $\|Tx\|_Y\le C\,\|x\|_X$ για κάθε $x\in X$. Αν ο T είναι φραγμένος, ορίζουμε

$$\|T\|=\sup{}_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

Προφανώς, αν $\|Tx\|\le C$ για κάθε $x\in X$ με $\|x\|=1$, τότε $\|T\|\le C$. Επιπλέον, η οικογένεια των φραγμένων γραμμικών τελεστών είναι γραμμικός χώρος. Εύκολα μπορεί να ελεγχθεί ότι η $\|T\|$ ορίζει μια νόρμα. Ο χώρος των φραγμένων γραμμικών τελεστών με την παραπάνω νόρμα συμβολίζεται με $L(X,Y)$. Από τον ορισμό της νόρμας $\|T\|$, προκύπτει ότι για κάθε $x\in X$ έχουμε $\|Tx\|\le\|T\|\,\|x\|$.

Έστω $A:X\to Y$ ένας φραγμένος γραμμικος τελεστής και έστω $\varphi\in Y^*$. Τότε $f(x)=\phi(Ax)$ για $x\in X$ ορίζει ένα γραμμικό συναρτησοειδές στον X. Επιπλέον $|f(x)|\le\|\phi\|_{Y^*}\|A\|\,\|x\|$. Έτσι, $f\in X^*$ και έχουμε μια απεικόνιση $\phi\mapsto f:=A^*\phi$. Προφανώς αυτή η απεικόνιση είναι γραμμική. Έτσι για κάθε $x\in X$ και $\phi\in Y^*$έχουμε $\phi(Ax)=(A^*\phi)(x)$.

Τώρα ελέγχουμε ότι ο τελεστής A^* είναι φραγμένος :

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_Y = \sup_{\|x\|=1} \sup_{\|\phi\|=1} |\phi(A(x)| = \sup_{\|\phi\|=1} \sup_{\|x\|=1} |\phi(A(x)| =$$

$$= \sup_{\|\phi\|=1} \sup_{\|x\|=1} |A^*(\phi)(x)| = \sup_{\|\phi\|=1} \|A^*(\phi)\|_{X^*} = \|A^*\|.$$

Δηλαδή βλεπουμε ότι $\|A\| = \|A^*\|$. Ο τελεστής $A^* : Y^* \to X^*$ ονομάζεται δυϊκός τελεστής του A.

Ορισμος 1.4.1. Ο τελεστής $A : X \to Y$ λέγεται συμπαγής αν και μόνο αν είναι συνεχής και απεικονίζει φραγμένα σύνολα σε σχετικά συμπαγή σύνολα. Δηλαδή, αν ο A είναι συμπαγής, τότε κάθε φραγμένη ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει μια υπακολουθία $(u_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $(Au_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα.

Το ακόλουθο γνωστό θεώρημα που μας επιτρέπει να χαρακτηρίσουμε κάποια σύνολα ως σχετικά συμπαγή θα είναι χρήσιμο για τη συνέχεια.

Θεωρημα 1.4.2. *($Arzel\acute{a}$) Έστω $M \subseteq C[a, b]$. M είναι σχετικά συμπαγές (στον $C[a, b]$) αν και μόνο αν το M είναι*

$i)$ ομοιόμορφα φραγμένο

$ii)$ ισοσυνεχές: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|t_1 - t_2| < \delta$ συνεπάγεται $|f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon$ για κάθε $f \in M$.

1.5. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΑΣΘΕΝΟΥΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

Θεωρημα 1.5.1. ($Riesz\,(1918)$). *Ένας χώρος Banach είναι πεπερασμένης διάστασης αν και μόνο αν η κλειστή μοναδιαία μπάλα είναι συμπαγής.*

Σύμφωνα με αυτό το αποτέλεσμα σε χώρους Banach άπειρης διάστασης υπάρχουν φραγμένες ακολουθίες που δεν έχουν συγκλίνουσα υπακολουθία. Αυτή η έλλειψη συμπάγειας σε απειροδιάστατους χώρους Banach προκαλεί πολλές δυσκολίες στη θεωρία των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Στην αντιμετώπιση αυτών των δυσκολιών, καθοριστικό ρόλο έχει η έννοια της ασθενούς σύγκλισης.

Ορισμος 1.5.2. Μια ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σε ένα χώρο Banach X ονομάζεται ασθενώς συγκλίνουσα, δηλαδή

$$u_n \rightharpoonup u$$

αν και μόνο αν

$$\langle f, u_n\rangle \to \langle f, u\rangle \quad \forall f \in X^*$$

Το ακόλουθο θεώρημα έχει κεντρικό ρόλο στην απόδειξη θεωρημάτων ύπαρξης στη θεωρία των μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Θεωρημα 1.5.3. ($Eberlein(1947)$, $\check{S}muljian(1940)$)

Κάθε φραγμένη ακολουθία σε έναν ανακλαστικό χώρο Banach έχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία.

Αποδειξη. Η απόδειξη που ακολουθεί αφορά την ειδική περίπτωση διαχωρίσιμου χώρου Hilbert. Η περίπτωση αυτή είναι που ενδιαφέρει για την απόδειξη του θεωρήματος ύπαρξης στο κεφάλαιο δύο.

Έστω X ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και έστω (u_n) μια φραγμένη ακολουθία στον X. Επιλέγουμε ένα αριθμήσιμο σύνολο $\{v_k\}$ που είναι πυκνό στον X και χρησιμοποιούμε ένα διαγώνιο επιχείρημα:

$$\begin{array}{lcl}(u_{11}|v_1),\,(u_{12}|v_1),\,(u_{13}|v_1) & \to & a_1\\ (u_{21}|v_2),\,(u_{22}|v_2),\,(u_{23}|v_2) & \to & a_2\end{array}$$

Για την ακρίβεια, αυτό συμβαίνει διότι $|(u_n|v_1)| \leq \|u_n\|\|v_1\|$και άρα υπάρχει μια υπακολουθία της (u_n) που συμβολίζεται με (u_{1n}) τέτοια ώστε $(u_{1n}|v_1) \to a_1$ καθώς $n \to \infty$. Ομοίως υπάρχει μια υπακολουθία (u_{2n}) της (u_{1n}) τέτοια ώστε $(u_{2n}|v_2) \to a_2$ καθώς $n \to \infty$ κλπ. Έτσι λοιπόν, η διαγώνια ακολουθία (w_n) με $w_n = u_{nn}$ έχει την ιδιότητα:

$(w_n|v_k) \to a_k$ καθώς $n \to \infty$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Επιπλέον έχουμε

$$\begin{aligned}|(w_n - w_m|v)| &= |(w_n - w_m|v - v_k) + (w_n - w_m|v_k)| \leq\\ &\leq \|w_n - w_m\|\|v - v_k\| + |(w_n - w_m|v_k)| < \varepsilon,\end{aligned}$$

για κατάλληλο v_k και για κάθε $n, m \geq n_0(\varepsilon)$, αφού το $\{v_k\}$ είναι πυκνό στον X. Άρα υπάρχουν αριθμοί $a(v)$ τέτοιοι ώστε καθώς $n \to \infty$

(1.5.1) $$(w_n|v) \to a(v) \quad \forall v \in X.$$

Προφανώς η απεικόνιση $v \mapsto a(v)$ είναι γραμμική και από την (1.5.1) έχουμε ότι $|a(v)| \leq \|v\| \sup_{n\in\mathbb{N}} \|w_n\|$ για κάθε $v \in X$.

Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει $w \in X$ ώστε $a(v) = (w|v)$ για κάθε $v \in X$. Άρα από την (1.5.1) έχουμε ότι $w_n \rightharpoonup w$ καθώς $n \to \infty$. □

Όταν γράφουμε $u_n \to u$ καθώς $n \to \infty$ σε ένα χώρο Banach X εννοούμε ότι $\|u_n - u\| \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Αυτή η κατά νόρμα σύγκλιση λέγεται και ισχυρή σύγκλιση σε αντίθεση με την ασθενή σύγκλιση. Τα ακόλουθα αποτελέσματα χρησιμοποιούναι συχνά.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.5.4. *(Ιδιότητες της ασθενούς σύγκλισης.)*
Έστω (u_n) μια ακολουθία στον πραγματικό χώρο Banach X. Τότε:
a) Η ισχυρή σύγκλιση $u_n \to u$ καθώς $n \to \infty$ συνεπάγεται την ασθενή σύγκλιση $u_n \rightharpoonup u$ καθώς $n \to \infty$.
b) Αν $dimX < \infty$ τότε η ασθενής σύγκλιση $u_n \rightharpoonup u$ καθώς $n \to \infty$ συνεπάγεται την ισχυρή σύγκλιση $u_n \to u$ καθώς $n \to \infty$.
c) Αν (u_n) είναι φραγμένη στον X και αν υπάρχει $u \in X$ και ένα πυκνό σύνολο D στον X^* τέτοιο ώστε

$$\langle f, u_n\rangle \to \langle f, u\rangle \ \ \forall\, f \in D\,,$$

τότε $u_n \rightharpoonup u$ καθώς $n \to \infty$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. $a)$ Αν $u_n \to u$ τότε $\langle f, u_n\rangle \to \langle f, u\rangle$ για κάθε $f \in X^*$ διότι το f είναι συνεχές συναρτησοειδές.

$b)$ Έστω $\{e_i\}_{i=1}^n$ μια βάση του X. Έστω (x_n) μια ακολουθία του X με $x_n \rightharpoonup x$. Έχουμε $x_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + ... + a_{kn}e_k$ και $x = a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_{nk}e_n$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\|x_n - x\| \to 0$. Για το σκοπό αυτό θέτω $f_i(x) = a_i$ για κάθε $i \leq n$. Τότε το f_i είναι συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές. Έτσι για κάθε $i \leq n$ έχουμε $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} f_i(x_n) = f_i(x) = a_i$, δηλαδή $a_{in} \to a_i$ καθώς $n \to \infty$. Άρα για αρκετά μεγάλο n έχουμε ότι $|a_{in} - a_i| < \varepsilon/n$ και έτσι έχουμε $\|x_n - x\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{in} - a_i| < n \cdot \varepsilon/n = \varepsilon$. Δεδομένου ότι $dimX < \infty$ όλες οι νόρμες είναι ισοδύναμες και το συμπέρασμα έπεται.

$c)$ Έστω $g \in X^*$. Έχουμε $|\langle g, u_n\rangle - \langle g, u\rangle| = |\langle g - f, u_n\rangle + \langle f, u_n - u\rangle + \langle f - g, u\rangle| \leq \|g - f\|(\|u_n\| + \|u\|) + |\langle f, u_n - u\rangle| \leq \varepsilon$ για κατάλληλο $f \in D$ και για κάθε $n \geq n_0(\varepsilon)$.

□

Θεωρημα 1.5.5. *(Banach – Steinhaus (1927)). Αν $u_n \rightharpoonup u$ καθώς $n \to \infty$, τότε η ακολουθία (u_n) είναι φραγμένη και $\|u\| \leq \liminf \|u_n\|$.*

1.5.1. ΑΣΘΕΝΩΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΚΑ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΤΕΛΕΣΤΕΣ. Έστω X, Y χώροι Banach. Ο τελεστής $A : X \to Y$ ονομάζεται ασθενώς ακολουθιακά συνεχής αν και μόνο αν

$$u_n \rightharpoonup u,$$

συνεπάγεται

$$Au_n \rightharpoonup Au,$$

καθώς $n \to \infty$

Ο ρόλος των τελεστών αυτών, είναι καθοριστικής σημασίας στις αποδείξεις θεωρημάτων ύπαρξης στις διαφορικές εξισώσεις. Συγκεκριμένα, στις μερικές διαφορικές εξισώσεις, επιθυμούμε οι διαφορικοί τελεστές που εμπλέκονται να είναι ασθενώς ακολουθιακά συνεχείς, ώστε να είναι δυνατό το πέρασμα στο ασθενές όριο, μέσω μιας προσεγγιστικής ακολουθίας λύσεων η οποία συγκλίνει ασθενώς.

Προταση 1.5.6. *Έστω X, Y χώροι Banach. Αν $A : X \to Y$ είναι γραμμικός και συνεχής, τότε ο A είναι ασθενώς ακολουθιακά συνεχής.*

Αποδειξη. Έστω $u_n \rightharpoonup u$. Έχουμε $\langle v, Au_n\rangle = \langle A^*v, u_n\rangle$ και $\langle v, Au\rangle = \langle A^*v, u\rangle$ όπου A^* είναι ο δυϊκός τελεστής του A.

Άρα, $\langle v, Au_n\rangle \to \langle u, Au\rangle$ καθώς $n \to \infty$ για κάθε $v \in Y^*$ δηλαδή, $Au_n \rightharpoonup Au$ καθώς $n \to \infty$. □

1.6. ΕΜΦΥΤΕΥΣΕΙΣ ΣΕ ΧΩΡΟΥΣ BANACH

Ορισμος 1.6.1. Έστω X και Y χώροι Banach με $X \subseteq Y$. Ο τελεστής εμφύτευσης $j : X \to Y$ ορίζεται $j(u) = u \;\; \forall u \in X$.
i) Η εμφύτευση $X \subseteq Y$ λέγεται συνεχής αν και μόνο αν ο τελεστής j είναι συνεχής, δηλαδή

$$\|u\|_Y \leq const\, \|u\|_X \quad \forall u \in X \tag{1.6.1}$$

ii) Η εμφύτευση $X \subseteq Y$ λέγεται συμπαγής αν και μόνο αν ο j είναι συμπαγής τελεστής, δηλαδή ισχύει η (1.6.1) και κάθε φραγμένη ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του X έχει υπακολουθία $(u_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει στον Y.

Γενικότερα, έχουμε εμφύτευση αν υπάρχουν δύο χώροι Banach X και Y και ένας τελεστής $j : X \to Y$ που είναι ένα προς ένα. Δεδομένου ότι ο j είναι ένα προς ένα, μπορούμε να ταυτίσουμε το u με το $j(u)$. Με αυτή την έννοια γράφουμε $X \subseteq Y$.

Θυμίζουμε ότι δύο νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$ στον χώρο Banach X ονομάζονται ισοδύναμες αν και μόνο αν υπάρχουν δύο θετικές σταθερές c και d ώστε $\|u\|_1 \leq c\|u\|_2$ και $\|u\|_2 \leq d\|u\|_1$ για κάθε $u \in X$.

Η σημασία αυτής της έννοιας βρίσκεται στο γεγονός ότι πολλές ιδιότητες διατηρούνται αν χρησιμοποιούμε ισοδύναμες νόρμες. Γενικά διατηρούνται όλες οι τοπολογικές ιδιότητες αφού οι ισοδύναμες νόρμες επάγουν την ίδια τοπολογία.

Για παράδειγμα, οι νόρμες του $H^3(0,1)$

$$\|u\|_{H^3} = \left(\int_0^1 \left(u^2 + \sum_{j=1}^{3} (D_j u)^2\right) dx\right)^{1/2},$$

$$\|u\|_{H^3,*} = \left(\int_0^1 \left(u^2 + (\partial^3 u)^2\right) dx\right)^{1/2},$$

οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν στην τοποθέτηση του προβλήματος αρχικών τιμών για την εξίσωση KdV σε ασθενή μορφή, είναι ισοδύναμες.

1.7. ΤΡΙΑΔΕΣ ΕΞΕΛΙΞΗΣ

Ορισμος 1.7.1. Η τριάδα "$V \subseteq H \subseteq V^*$ λέγεται τριάδα εξέλιξης (evolution triple) αν ισχύουν τα ακόλουθα:
i) Ο V είναι πραγματικός, διαχωρίσιμος και ανακλαστικός χώρος Banach.
ii) Ο H είναι πραγματικός, διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.
iii) Η εμφύτευση $V \subseteq H$ είναι συνεχής, δηλαδή

$$\|v\|_H \leq const\,\|v\|_V \quad \forall v \in V, \tag{1.7.1}$$

και ο V είναι πυκνός στον H.

Το κίνητρο για τον ορισμό των τριάδων εξέλιξης προέρχεται από τους χώρους συναρτήσεων V και H που εμφανίζονται στην ασθενή μορφή προβλημάτων αρχικών - συνοριακών τιμών.

Η ακόλουθη πρόταση δίνει την έννοια με την οποία ο εγκλεισμός $H \subseteq V^*$ έχει νόημα. Σημείο αναφοράς είναι η σχέση

$$\left\langle \bar{h}, v\right\rangle_V = (h, v)_H \quad \forall v \in V. \tag{1.7.2}$$

Προταση 1.7.2. *Έστω "$V \subseteq H \subseteq V^*$" μια τριάδα εξέλιξης. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα*
i) Σε κάθε $h \in H$ αντιστοιχεί μέσω της (1.7.2) ένα γραμμικό συνεχές συναρτησοειδές $\bar{h} : V \to \mathbb{R}$, δηλαδή $\bar{h} \in V^*$.
ii) Η απεικόνιση $h \to \bar{h}$ από το H στο V^* είναι γραμμική, ένα προς ένα και συνεχής.

Αποδειξη. Έστω $h \in H$. Από την (1.7.1) έχουμε

$$|(h, v)_H| \leq \|h\|_H \|v\|_H \leq const\,\|h\|_H \|v\|_V, \quad \forall v \in V.$$

Υπάρχει μοναδικό συναρτησοειδές $\bar{h} : V \to \mathbb{R}$ που αντιστοιχεί σε κάθε συνάρτηση $h \in H$ και από τη σχέση (1.7.2) προκύπτει

$$\frac{\left|\left\langle \bar{h}, v\right\rangle_V\right|}{\|v\|_V} \leq const\|h\|_H \Rightarrow$$
$$\sup_{v \neq 0} \frac{\left|\left\langle \bar{h}, v\right\rangle_V\right|}{\|v\|_V} \leq const\|h\|_H \Rightarrow$$
$$\left\|\bar{h}\right\|_{V^*} \leq const\|h\|_H$$

Δηλαδή η απεικόνιση $h \to \bar{h}$ από το H στο V^* είναι συνεχής. Προφανώς είναι και γραμμική. Επίσης είναι και ένα προς ένα γιατί από το $\bar{h} = 0 \Rightarrow (h, v)_H = 0 \ \ \forall v \in V$. Ο χώρος V είναι πυκνός στον H και συνεπώς $h = 0$. □

Συμπερασμα. Από την τελευταία πρόταση προκύπτει ότι μπορούμε να ταυτίσουμε το $\bar{h}$ με το h. Με αυτή την έννοια έχουμε $H \subseteq V^*$ επομένως μπορούμε να γράφουμε h αντί για $\bar{h}$. Άρα ισχύουν τα ακόλουθα

$$\langle h, v\rangle_V \ = (h, v)_H \quad \forall h \in H,\ v \in V,$$

$$\|h\|_{V^*} \leq const\, \|h\|_H \quad \forall h \in H.$$

Ορισμος 1.7.3. Έστω $X,\ X^+$ χώροι Banach. Τότε το $\{X, X^+\}$ λέγεται δυϊκό ζεύγος (dual pair) αν ισχύουν τα ακόλουθα
i) Υπάρχει μια διγραμμική, φραγμένη απεικόνιση

$$(v, u) \to \langle v, u\rangle_X$$

από το $X^+ \times X \to \mathbb{R}$.
ii) Αν $\langle v, u\rangle_X = 0 \ \forall u \in X$, τότε $v = 0$.
iii) Αν $\langle v, u\rangle_X = 0 \ \forall v \in X$, τότε $u = 0$.
Δηλαδή η διγραμμική μορφή είναι μη εκφυλισμένη.

Τα δυϊκά ζεύγη είναι μια χρήσιμη γενίκευση της συνήθους δυϊκότητας στους χώρους Banach. Σε πολλά προβλήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων εμφανίζεται η ανάγκη να χρησιμοποιηθούν τρεις διαφορετικοί χώροι Banach, οι V, H, V^+ με $V \subseteq H \subseteq V^+$ με V^+ όχι απαραίτητα τον δυϊκό του V, V^*. Θεωρούμε μόνο ότι το $\{V, V^+\}$ αποτελεί ένα δυϊκό ζεύγος.

Έτσι οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμος 1.7.4. Η τριάδα ”$V \subseteq H \subseteq V^+$ λέγεται αποδεκτή τριάδα (admissible triple) αν ισχύουν τα ακόλουθα
i) Ο H είναι πραγματικός, διαχωρίσιμος χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)_H$.
ii) $\{V, V^+\}$ είναι ένα δυϊκό ζεύγος διαχωρίσιμων χώρων Banach με την αντίστοιχη διγραμμική μορφή $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
iii) Οι εμφυτεύσεις $V \subseteq H \subseteq V^+$ είναι συνεχείς και πυκνές.
iv) Για κάθε $h \in H,\ v \in V$ ισχύει:

$$\langle h, v\rangle = (h, v)_H\,.$$

Η έννοια της αποδεκτής τριάδας, που αποτελεί γενίκευση της τριάδας εξέλιξης, ορίστηκε από τους T. Kato & C. Lai για την αντιμετώπιση του θεωρήματος ύπαρξης λύσης για την εξίσωση του Euler.

1.8. ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ Korteweg - de Vries

Υπάρχουν αρκετά φυσικά συστήματα η μοντελοποίηση των οποίων οδηγεί στην εξίσωση KdV. Η εξίσωση KdV προήλθε αρχικά σαν ένα μοντέλο για κυματισμό μικρού πλάτους που διαδίδεται μέσα σε ένα στενό κανάλι με ρηχό νερό. Το γεγονός ότι το φαινόμενο εξελίσεται σε στενό κανάλι μας επιτρέπει να θεωρήσουμε τον κυματισμό διδιάστατο. Αυτό είναι το φυσικό σύστημα που θα εξετάσουμε στη συνέχεια.

Θεωρούμε λοιπόν την κίνηση διδιάστατων κυμάτων στην επιφάνεια ενός υγρού. Το μέγιστο πλάτος του κυματισμού a θεωρείται μικρό σε σχέση με το βάθος του υγρού h, ενώ το μήκος κύματος l, θεωρείται μεγάλο σε σύγκριση με το h. Οι παράμετροι

$\epsilon = a/h$ και $\delta = h/l$ παίζουν σημαντικό ρόλο στη διάδοση της διαταραχής όπως θα φανεί στη συνέχεια.

Η κίνηση του ρευστού περιγράφεται από το διάνυσμα της ταχύτητας $V(x,y,t) = iu(x,y,t) + jv(x,y,t)$ όπου i και j είναι τα μοναδιαία διανύσματα στην οριζόντια και κατακόρυφη διεύθυνση αντίστοιχα. Θεωρούμε ότι η ροή του ρευστού είναι αστρόβιλη, δηλαδή $\nabla \times V = 0$. Επίσης υποθέτουμε ότι η πυκνότητα του ρευστού, ρ, είναι σταθερή, έτσι ώστε η εξίσωση συνέχειας να απλοποιείται στην $\nabla V = 0$. Τότε μπορούμε να θέσουμε $V = \nabla\phi$ με $\nabla^2\phi = 0$.

Το ρευστό θεωρείται φραγμένο από ένα οριζόντιο πυθμένα, έτσι ώστε $\phi_y(x,0) = 0$. Το άνω σύνορο είναι η ελεύθερη επιφάνεια $y_1 = h + \eta(x,t)$. Στη συνέχεια όλοι οι όροι που αναφέρονται στην ελεύθερη επιφάνεια θα δηλώνονται με τον δείκτη 1. Οι συνοριακές συνθήκες στην ελεύθερη επιφάνεια είναι μη γραμμικές και σε αυτό εντοπίζεται η πολυπλοκότητα του προβλήματος. Για την ελεύθερη επιφάνεια $y_1 = h + \eta(x,t)$, μπορούμε να γράψουμε

(1.8.1) $$\frac{\partial y_1}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{dx_1}{dt}.$$

Δεδομένου ότι $dy_1/dt = v_1 = \partial\phi_1/\partial y$ και $dx_1/dt = u_1 = \partial\phi_1/\partial x$ έχουμε την πρώτη συνοριακή συνθήκη στις ακόλουθες μορφές

(1.8.2) $$v_1 = \eta_t + \eta_x u_1,$$

ή

(1.8.3) $$\phi_{1y} = \eta_t + \eta_x \phi_{1x}.$$

Η δεύτερη συνοριακή συνθήκη προέρχεται από τη διατήρηση της ορμής

(1.8.4) $$\frac{DV}{Dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + (V\nabla)V = -\frac{1}{\rho}\nabla p - gj,$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του υγρού, p, η πίεση σε κάθε σημείο του ρευστού, και g η επιτάχυνση της βαρύτητας. Από την ταυτότητα $\frac{1}{2}\nabla(V^2) = V \times (\nabla \times V) + (V \cdot \nabla)V$ και επειδή έχουμε υποθέσει ότι η ροή είναι αστρόβιλη, δηλαδή $\nabla \times V = 0$ η εξίσωση (1.8.4) γράφεται $\nabla(\phi_t + \frac{1}{2}V^2 + p/\rho + gy) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι η ποσότητα μέσα στο ∇ εξαρτάται μόνο από το χρόνο. Άρα ολοκληρώνοντας και ενσωματώνοντας την συνάρτηση του χρόνου που εμφανίζεται στη συνάρτηση δυναμικού ϕ φτάνουμε στην σχέση

(1.8.5) $$\phi_t + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{p}{\rho} + gy = 0.$$

Εφαρμόζουμε τώρα την τελευταία έκφραση στην ελεύθερη επιφάνεια θεωρώντας $p_1 = 0$, και παραγωγίζοντας ως προς x, φτάνουμε στη δεύτερη συνοριακή συνθήκη η οποία έχει τη μορφή

(1.8.6) $$u_{1t} + u_1 u_{1x} + v_1 v_{1x} + g\eta_x = 0.$$

Έτσι η κίνηση στην ελεύθερη επιφάνεια περιγράφεται από τη λύση της εξίσωσης Laplace η οποία να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες (1.8.2) και (1.8.6).

Δεδομένου ότι ενδιαφερόμαστε μόνο για μικρές τιμές του y (δηλαδή $h << l$), θα προσπαθήσουμε να πάρουμε μια ικανοποιητική λύση της εξίσωσης Laplace χρησιμοποιώντας τους πρώτους όρους του αναπτύγματος

$$\phi(x,y,t)=\sum_{n=0}^{\infty} y^n \phi_n(x,t). \tag{1.8.7}$$

Αντικαθιστώντας αυτή την έκφραση στην εξίσωση Laplace παίρνουμε το εξής

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} y^n\{\phi_{n,xx}+(n+2)(n+1)\phi_{n+2}\}=0 \Rightarrow \\ &\phi_{n,xx}+(n+2)(n+1)\phi_{n+2}=0. \end{aligned} \tag{1.8.8}$$

Επίσης είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας στον πυθμένα είναι μηδενική, δηλαδή

$$v|_{bottom}=\phi_y(x,0)=0. \tag{1.8.9}$$

Η σχέση (1.8.9), συνεπάγεται ότι $\phi_1=0$. Άρα όλα τα ϕ_n για n περιττό μηδενίζονται και έτσι παίρνουμε

$$\phi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!}\phi_0^{(2n)}. \tag{1.8.10}$$

Κατά συνέπεια, οι συνιστώσες της ταχύτητας στην ελεύθερη επιφάνεια είναι

$$\begin{aligned} u_1&=\phi_{x1}=f-\frac{1}{2}y_1^2 f_{xx}+...\\ v_1&=\phi_{y1}=-y_1 f_x+\frac{1}{6}y_1^3 f_{xxx}+... \end{aligned} \tag{1.8.11}$$

όπου $f(x,t)=\partial\phi_0(x,t)/\partial x$.

Τώρα εισάγουμε αδιάστατες ανεξάρτητες μεταβλητές θέτοντας $x=lx'$ και $t=(l/c_0)t'$. Ομοίως, θέτουμε για τις εξαρτημένες μεταβλητές $\eta=a\eta'$, $u_1=\epsilon c_0 u_1'$, $v_1=\epsilon\delta c_0 v_1'$, και $f=\epsilon c_0 f'$. Επίσης θέτουμε $y_1=h(1+\epsilon\eta')$. Έτσι από την (1.8.11) για τις αδιάστατες ταχύτητες έχουμε

$$\begin{aligned} u_1'&=f'-\frac{1}{2}\delta^2\frac{\partial^2 f'}{\partial x'^2},\\ v_1'&=-(1+\epsilon\eta')\frac{\partial f'}{\partial x'}+\frac{1}{6}\delta^2\frac{\partial^3 f'}{\partial x'^3}, \end{aligned} \tag{1.8.12}$$

και η πρώτη και η δεύτερη συνοριακές συνθήκες (1.8.2) και (1.8.6), γίνονται

$$\frac{\partial\eta'}{\partial t'}+\frac{\partial f'}{\partial x'}+\epsilon\eta'\frac{\partial f'}{\partial x'}+\epsilon f'\frac{\partial\eta'}{\partial x'}-\frac{1}{6}\delta^2\frac{\partial^3 f'}{\partial x'^3} = 0. \tag{1.8.13}$$

$$\frac{\partial f'}{\partial t'}+\frac{\partial\eta'}{\partial x'}+\epsilon f'\frac{\partial f'}{\partial x'}-\frac{1}{2}\delta^2\frac{\partial^3 f'}{\partial x'^2\partial t'} = 0. \tag{1.8.14}$$

Οι εξισώσεις αυτές τώρα επιλύονται εύκολα χρησιμοποιώντας μια μέθοδο διαταραχών. Πρώτα παρατηρούμε ότι όταν τα ϵ και δ θεωρηθούν αμελητέα, προκύπτει $\eta'_{t'}+f'_{x'}=0$

και $f'_{t'} + \eta'_{x'} = 0$. Τώρα εισάγουμε στην (1.8.14) την ακόλουθη σειρά διαταραχής κρατώντας μόνο τους όρους πρώτης τάξης ως προς ϵ και δ^2

$$f' = \eta' + \epsilon F + \delta^2 G. \tag{1.8.15}$$

Και αφαιρώντας την εξίσωση (1.8.13) από την (1.8.14) παίρνουμε

$$\epsilon\left(2\frac{\partial F}{\partial x'} + \eta'\frac{\partial \eta'}{\partial x'}\right) + \delta^2\left(2\frac{\partial G}{\partial x'} - \frac{2}{3}\frac{\partial^3 \eta'}{\partial x'^3}\right) = 0. \tag{1.8.16}$$

Δεδομένου ότι οι ποσότητες ϵ και δ έχουν διαφορετικό φυσικό νόημα και είναι ανεξάρτητες εξαφανίζονται χωριστά. Έτσι παίρνουμε $F = -\frac{1}{4}(\eta')^2$ και $G = \frac{1}{3}\partial^2\eta'/\partial x'^2$. Έτσι το f' μπορεί τώρα να εκφραστεί συναρτήσει του η' και αν αντικατασταθεί στην (1.8.13) δίνει

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t'} + \frac{\partial \eta'}{\partial x'} + \frac{3}{2}\epsilon\eta'\frac{\partial \eta'}{\partial x'} + \frac{1}{6}\delta^2\frac{\partial^3 \eta'}{\partial x'^3} = 0. \tag{1.8.17}$$

Ο όρος $\partial\eta'/\partial x'$ εξαλειφεται μέσω του μετασχηματισμού $\xi = x' - t'$, $\tau = t'$. Έτσι η εξίσωση που προκύπτει έχει τη μορφή της εξίσωσης Korteweg de Vries. Τώρα αν πολλαπλασιάσουμε το αποτέλεσμα με $9\epsilon/\delta^4$ και θέσουμε $w := 3\epsilon\eta/2\delta^2$ και $\tau' := \delta^2\tau/6$ παίρνουμε

$$w_{\tau'} + 6ww_\xi + w_{\xi\xi\xi} = 0.$$

Σε πολλά συστήματα βέβαια δεν μπορούμε να αγνοήσουμε την απώλεια ενέργειας και τις εξωτερικές διεγέρσεις. Στις περιπτώσεις αυτές οδηγούμαστε σε μια εξίσωση της μορφής

$$u_t + uu_x + u_{xxx} + \mathcal{L}(u) = f, \tag{1.8.18}$$

όπου η f εκφράζει την εξωτερική διέγερση και το $\mathcal{L}(u)$ είναι ο όρος απόσβεσης. Για την περίπτωση που θα μελετηθεί στη συνέχεια ο όρος της απόσβεσης είναι $\mathcal{L}(u) = \gamma u$ και η εξίσωση έχει τη μορφή $u_t + uu_x + u_{xxx} + \gamma u = f$ όπου η f είναι ανεξάρτητη του χρόνου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΛΥΣΗΣ ΓΙΑ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ KdV

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται αποτελέσματα που αφορούν την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης για το πρόβλημα αρχικών τιμών για την εξίσωση KdV με απόσβεση και εξωτερική διέγερση :

$$u_t + uu_x + u_{xxx} + \gamma u = f, \tag{2.0.19}$$

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{2.0.20}$$

Επίσης θεωρούμε περιοδικές συνοριακές συνθήκες και συγκεκριμένα $u(x,t) = u(x+1,t) = 0$. Η μελέτη του προβλήματος (2.0.19) - (2.0.20) βασίζεται κατ' αρχήν στη διατύπωσή του σε γενικευμένη μορφή και στη χρήση της έννοιας των αποδεκτών τριάδων (admissible triple) οι οποίες, όπως έχει ήδη αναφερθεί, αποτελούν γενίκευση της έννοιας των τριάδων εξέλιξης $V \subseteq H \subseteq H^* \subseteq V^*$. Η εισαγωγή της έννοιας των αποδεκτών τριάδων έγινε από τους T. Kato & C. Lai στο [**3**] για την αντιμετώπιση του προβλήματος ύπαρξης λύσης της εξίσωσης Euler.

2.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Για τη συναρτησιακή τοποθέτηση του προβλήματος θα θεωρήσουμε χώρους Sobolev περιοδικών συναρτήσεων. Συγκεκριμένα εισάγουμε τους χώρους

$$L_{per}(0,1) = \{u \in L_{loc}(\mathbb{R}) \ : \ u(x) = u(x+1)\},$$

και

$$H^m_{per}(0,1) = \{u \in H^m_{loc}(\mathbb{R}) \ : \ u^{(k)} \in L_{per}(0,1)\,,\ \forall k \in \{0,1,2,...m\},$$

όπου το m είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος. Δηλαδή ο $H^m_{per}(0,1)$ αποτελείται από όλες τις περιοδικές συναρτήσεις που είναι τοπικά ολοκληρώσιμες στον $H^m(\mathbb{R})$. Ο χώρος αυτός εφοδιάζεται με τη νόρμα του $H^m(0,1)$ δηλαδή

$$\|u\|_{H^m_{per}} = \left(\sum_{j=0}^{m} \|u^{(j)}\|^2_{L^2}\right)^{1/2}.$$

Ο χώρος $H^m_{per}(0,1)$ έχει τις ίδιες ιδιότητες με τον $H^m(0,1)$ και σε ότι ακολουθεί αντί για $H^m_{per}(0,1)$ θα γράφουμε απλά H^m.

Ορισμος 2.1.1. Μια οικογένεια $\{V, H, V^+\}$ τριών πραγματικών διαχωρίσιμων χώρων Banach ονομάζεται αποδεκτή τριάδα αν ισχύουν τα ακόλουθα :
i) Ο H είναι πραγματικός, διαχωρίσιμος χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)_H$ και νόρμα $\|\cdot\|_H = (\cdot,\cdot)^{1/2}_H$.
ii) Οι εμφυτεύσεις $V \subseteq H \subseteq V^+$ είναι συνεχείς και πυκνές.

iii) Υπάρχει μια συνεχής, μη εκφυλισμένη διγραμμική μορφή $\langle \cdot, \cdot \rangle$ στον $V^+ \times V$ τέτοια ώστε $\langle v, u \rangle = (v|u)_H$ για $\quad v, u \in H$.

Σε μια αποδεκτή τριάδα γενικά ισχύει $V^+ \neq V^*$. Στη συνέχεια αναφέρονται κάποια χρήσιμα λήμματα.

Για το πρόβλημα (2.0.19)-(2.0.20) επιλέγουμε την τριάδα $\{H^6, H^3, L^2\}$.

ΛΗΜΜΑ 2.1.2. *Η οικογένεια χώρων $\{H^6, H^3, L^2\}$ είναι μια αποδεκτή τριάδα.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αρκεί να αποδείξουμε την ιδιότητα iii) του προηγούμενου ορισμού. Θεωρούμε τη διγραμμική μορφή $\langle \cdot, \cdot \rangle : L^2 \times H^6 \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από το ολοκλήρωμα

$$\langle v, u \rangle = \int_0^1 (uv - \partial^6 uv) dx \,, \quad \forall u \in H^6, \;\; v \in L^2 \tag{2.1.1}$$

Η διγραμμική μορφή (2.1.1) είναι συνεχής διότι :

$$|\langle v, u \rangle| \leq \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|\partial^6 u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq 2\|u\|_{H^6} \|v\|_{L^2}$$

Τέλος θα πρέπει να δείξουμε ότι το εσωτερικό γινόμενο που προέρχεται από τη διγραμμική μορφή (2.1.1) επάγει μια ισοδύναμη νόρμα στον H^3. Για το σκοπό αυτό παρατηρούμε ότι η ισοδύναμη νόρμα του H^3

$$\|u\|_{H^3,*} = \left(\int_0^1 \left(u^2 + (\partial^3 u)^2 \right) dx \right)^{1/2},$$

επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο $[v, u]_{H^3} := \int_0^1 (uv + \partial^3 u \partial^3 v) dx \,, \;\; \forall \, u, v \in H^3$ που προέρχεται από την διγραμμική μορφή (2.1.1) . □

Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε το μη γραμμικό τελεστή $A : H^3 \to L^2$, με $Au = uu_x + u_{xxx} + \gamma u$. Στόχος είναι να γραφτεί η εξίσωση (2.0.19) σε γενικευμένη μορφή. Για να γίνει αυτό πολλαπλασιάζουμε την (2.0.19) με $v \in H^6$ και ολοκληρώνουμε :

$$\int_0^1 u_t v dx + \int_0^1 (uu_x + u_{xxx} + \gamma u - f) v dx = 0. \tag{2.1.2}$$

Ομοίως πολλαπλασιάζουμε την (2.0.19) με $-\partial^6 v$ και ολοκληρώνουμε :

$$-\int_0^1 u_t \partial^6 v dx - \int_0^1 (uu_x + u_{xxx} + \gamma u - f) \partial^6 v dx = 0. \tag{2.1.3}$$

Από τις σχέσεις (2.1.2) και (2.1.3) προκύπτει η ασθενής (ή γενικευμένη) φόρμουλα που θα χρησιμοποιήσουμε

$$\frac{d}{dt} \langle u, v \rangle + \langle Au, v \rangle = \langle f, v \rangle. \tag{2.1.4}$$

Μια συνάρτηση u καλείται ασθενής (ή γενικευμένη) λύση του προβλήματος (2.0.19) - (2.0.20) αν ικανοποιεί την φόρμουλα (2.1.4). Αυστηρός ορισμός της ασθενούς λύσης που θα αναζητήσουμε θα δοθεί στη συνέχεια.

Τα λήμματα που ακολουθούν περιγράφουν ορισμένες χρήσιμες ιδιότητες του τελεστή A. Πριν διατυπώσουμε τα λήμματα αυτά είναι χρήσιμο να αναφέρουμε δύο ορισμούς.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.3. Ένας τελεστής $A : X \to Y$, λέγεται τοπικά φραγμένος (localy bounded) αν για κάθε $u \in B_R(0) = \{x \in X \; : \; \|x\| \leq R\}$, υπάρχει $C(R) > 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει $\|Au\|_Y \leq C(R) \|u\|_X$.

Ορισμος 2.1.4. Ένας τελεστής $A : X \to Y$ λέγεται τοπικά Lipschitz συνεχής (locally Lipschitz continuous) αν για κάθε $u, v \in B_R(0) = \{x \in X \, : \, \|x\| \leq R\}$ του X υπάρχει σταθερά $L(R)$ τέτοια ώστε να ισχύει $\|Au - Av\| \leq L(R)\|u - v\|$.

Λημμα 2.1.5. *Ο τελεστής $A : H^3 \to L^2$ είναι τοπικά φραγμένος.*

Αποδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι ο μη γραμμικός όρος του τελεστή A είναι τοπικά φραγμένος. Δηλαδή ο όρος $Tu = uu_x$, όπου $u \in B_R(0) \subset H^3$. Πράγματι

$$\begin{aligned}
\|Tu\|^2_{L^2} &= \int_0^1 |uu_x|^2 dx \leq \sup_{x\in[0,1]} |u|^2 \int_0^1 |u_x|^2 dx = \\
&= \sup_{x\in[0,1]} |u|^2 \|u_x\|^2_{L^2} \leq C_0(R)\|u\|^2_{H^3},
\end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned}
\|Au\|_{L^2} &\leq \|uu_x\|_{L^2} + \|u_{xxx}\|_{L^2} + \|\gamma u\|_{L^2} \leq \\
&\leq C_0^{1/2}\|u\|_{H^3} + \|u\|_{H^3} + \gamma\|u\|_{H^3} = \\
&= \left(C_0^{1/2} + 1 + \gamma\right) \|u\|_{H^3} = C(R)\|u\|_{H^3}.
\end{aligned}$$

Δηλαδή ο τελεστής A είναι φραγμένος. □

Λημμα 2.1.6. *Ο τελεστής $A : H^3 \to L^2$ είναι τοπικά Lipschitz συνεχής.*

Αποδειξη. Οι γραμμικοί όροι του τελεστή A είναι τοπικά Lipschitz συνεχείς γιατί είναι φραγμένοι. Επομένως, αρκεί να δειχτεί ότι ο μη γραμμικός τελεστής T είναι τοπικά Lipschitz συνεχής. Έστω $u, v \in B_R(0) \subset H^3$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\|Tu - Tv\|_{L^2} &= \|uu_x - vv_x\|_{L^2} = \|uu_x - vu_x + vu_x - vv_x\|_{L^2} \leq \\
&\leq \|uu_x - vu_x\|_{L^2} + \|vu_x - vv_x\|_{L^2} = \\
&= \|(u - v)u_x\|_{L^2} + \|v(u_x - v_x)\|_{L^2} = \\
&= \left(\int_0^1 |(u - v)u_x|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_0^1 |v(|u_x - v_x)|^2\right)^{1/2} \leq \\
&\leq \sup_{x\in[0,1]} |u_x| \left(\int_0^1 |u - v|^2 dx\right)^{1/2} + \\
&\quad + \sup_{x\in[0,1]} |v_x| \left(\int_0^1 |u_x - v_x|^2 dx\right)^{1/2} = \\
&= \|u_x\|_\infty \|u - v\|_{L^2} + \|v\|_\infty \|u_x - v_x\|_{L^2} \leq \\
&\leq \|u_x\|_\infty \|u - v\|_{H^3} + \|v\|_\infty \|u - v\|_{H^3} = \\
&= (\|u_x\|_\infty + \|v\|_\infty)\|u - v\|_{H^3} \leq (\|u\|_{H^3} + \|v\|_{H^3})\|u - v\|_{H^3} \leq \\
&\leq C(R)\|u - v\|_{H^3}
\end{aligned}$$

Άρα πράγματι ο τελεστής A είναι τοπικά Lipschitz συνεχής διότι :

$$\begin{aligned}
\|Au - Av\|_{L^2} &= \|uu_x + u_{xxx} + \gamma u - vv_x - v_{xxx} - \gamma v\|_{L^2} \leq \\
&\leq \|uu_x - vv_x\|_{L^2} + \|u_{xxx} - v_{xxx}\|_{L^2} + \gamma\|u - v\|_{L^2} \leq \\
&\leq (\|u_x\|_\infty + \|v\|_\infty + 1 + \gamma)\|u - v\|_{H^3} \leq \\
&\leq (\|u\|_{H^3} + \|v\|_{H^3} + 1 + \gamma)\|u - v\|_{H^3} \leq \\
&\leq L(R)\|u - v\|_{H^3}
\end{aligned}$$

□

Θα αναφέρουμε ένα λήμμα που θα μας επιτρέψει να δείξουμε ότι ο μη γραμμικός τελεστής T είναι ασθενώς ακολουθιακά συνεχής. Την απόδειξη του ακόλουθου λήμματος μπορεί να βρει κανείς στο **[2]** σε πιο γενική μορφή.

Λημμα 2.1.7. *Έστω $(u_n w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία στον $H^m(0,1)$ όπου $m = 0, 1, 2, ...$ και*

$$\begin{aligned}
u_n &\to u \qquad \sigma\tau o \;\; C[0,1], \\
w_n &\rightharpoonup w \qquad \sigma\tau o \;\; L^2(0,1),
\end{aligned}$$

όπου $u, w : (0,1) \to \mathbb{R}$. Τότε ισχύει ότι

$$u_n w_n \rightharpoonup uw \;\; \sigma\tau o \;\; H^m(0,1).$$

Λημμα 2.1.8. *Ο τελεστής $A : H^3 \to L^2$ είναι ακολουθιακά ασθενώς συνεχής.*

Αποδειξη. Ο γραμμικός τελεστής $Lu = u_{xxx} + \gamma u$ είναι ασθενώς ακολουθιακά συνεχής γιατί είναι συνεχής.

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι ο μη γραμμικός τελεστής $Tu = uu_x$ είναι ασθενώς ακολουθιακά συνεχής. Έστω $u_n \rightharpoonup u$ καθώς $n \to \infty$. Τότε και η ακολουθία $(\partial_x u_n) \subseteq H^2$συγκλίνει ασθενώς με $\partial_x u_n \rightharpoonup \partial_x u$ καθώς $n \to \infty$ διότι ο τελεστής ∂_x είναι γραμμικός και συνεχής. Επειδή η εμφύτευση $H^3(0,1) \subseteq C[0,1]$ είναι συμπαγής η ακολουθία (u_n) συγκλίνει ισχυρά στον $C[0,1]$, δηλαδή $u_n \to u$ καθώς $n \to \infty$. Έτσι από το προηγούμενο λήμμα προκύπτει ότι $u_n \partial_x u_n \rightharpoonup uu_x$ στον H^2. Δηλαδή $Tu_n \rightharpoonup Tu$ καθώς $n \to \infty$. □

Λημμα 2.1.9. *Υπάρχει μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε*

$$|\langle Au, u\rangle| \leq g(\|u\|^2_{H^3}) \;\; \forall u \in H^6 \tag{2.1.5}$$

Αποδειξη. Για κάθε $u \in H^6$, γράφουμε τον όρο $\langle Au, u\rangle$, ως

$$\langle Au, u\rangle = B(u,u) + C(u,u) + D(u,u) + E(u,u),$$

όπου

$$\begin{aligned}
B(u,u) &= \int_0^1 (u^{(3)}u - u^{(3)}u^{(6)})dx \\
C(u,u) &= \int_0^1 uu_x u dx \\
D(u,u) &= -\int_0^1 uu_x u^{(6)} dx \\
E(u,u) &= \gamma\int_0^1 (uu + u^{(3)}u^{(3)})dx
\end{aligned}$$

Θα προσπαθήσουμε να πάρουμε εκτιμήσεις για τους παραπάνω όρους υποβιβάζοντας, όπου χρειάζεται, τους όρους όπου εμφανίζονται παράγωγοι ανώτερης τάξης, με ολοκληρώσεις κατά παράγοντες και χρήση των συνοριακών συνθηκών. Κατ' αρχήν για την ποσότητα $B(u,u)$ παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} B(u,u) &= \int_0^1 (u^{(3)}u - u^{(3)}u^{(6)})dx = -\int_0^1 (uu^{(3)} - u^{(6)}u^{(3)})dx = \\ &= -B(u,u), \end{aligned}$$

και κατά συνέπεια $B(u,u) = 0$. Για την ποσότητα $C(u,u)$, έχουμε

$$C(u,u) = \int_0^1 u^2 u_x dx \leq \|u\|^2_{L^2}\|u_x\|_\infty \leq C_1\|u\|^3_{H^3}.$$

Παρόμοια, για τον $E(u,u)$, έχουμε

$$E(u,u) = \gamma\int_0^1 (uu + u^{(3)}u^{(3)})dx = \gamma\|u\|^2_{L^2} + \gamma\|u^{(3)}\|_{L^2} \leq 2\gamma\|u\|^2_{H^3}.$$

Τέλος, για τον όρο $D(u,u)$, ο οποίος περιλαμβάνει όρο έκτης τάξης ως προς την παράγωγο, πρώτα υποβιβάζουμε την τάξη και στη συνέχεια προχωρούμε σε εκτιμήσεις

$$\begin{aligned} D(u,u) &= -\int_0^1 uu_x u^{(6)} dx = \int_0^1 (uu_x)^{(3)}u^{(3)}dx = \\ &= \int_0^1 [(u_x u_x + uu_{xx})]_{xx} u_{xxx} dx = \\ &= \int_0^1 [(u_{xxx}u_x + 3(u_{xx})^2 + 3u_{xxx}u_x)u_{xxx} + uu_{xxx}u_{xxx}]dx = \\ &= \int_0^1 [(u_{xxx}u_x + 3(u_{xx})^2 + 3(u_{xxx}u_x)u_{xxx} + \frac{1}{2}u[(u_{xxx})^2]_x]dx = \\ &= \int_0^1 [(u_{xxx})^2u_x + 3(u_{xx})^2u_{xxx} + 3(u_{xxx})^2u_x - \\ &\quad -\frac{1}{2}u_x[(u_{xxx})^2]_x]dx \leq \\ &\leq \|u_{xxx}\|^2_{L^2}\|u_x\|_\infty + 3\|u_{xx}\|^2_{L^2}\|u_{xxx}\|_\infty + \\ &\quad +3\|u_{xxx}\|^2_{L^2}\|u_x\|_\infty + \left|\int_0^1 \frac{1}{2}u_x(u_{xxx})^2dx\right| \leq \\ &\leq C_0[\|u\|^2_{H^3}\|u\|_{H^3} + 3\|u\|^2_{H^3}\|u\|_{H^3} + \\ &\quad +3\|u\|^2_{H^3}\|u\|_{H^3} + \frac{1}{2}\|u_x\|_\infty\|u_{xxx}\|^2_{L^2} \leq C_2\|u\|^3_{H^3}. \end{aligned}$$

Άρα, καταλήγουμε στην εξής εκτίμηση

$$\begin{aligned} |\langle Au,u\rangle| &= |B(u,u) + C(u,u) + D(u,u) + E(u,u)| \leq \\ &\leq |B(u,u)| + |C(u,u)| + |D(u,u)| + |E(u,u)| \leq \\ &\leq C_1\|u\|^3_{H^3} + C_2\|u\|^3_{H^3} + 2\gamma\|u\|^2_{H^3} = \\ &= C_3\|u\|^3_{H^3} + 2\gamma\|u\|^2_{H^3} = g(\|u\|^2_{H^3}) \end{aligned}$$

Όπου $g : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ είναι αύξουσα συνάρτηση με $g(x) = C_3x^{3/2} + 2\gamma x$ □

2.2. ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΥΠΑΡΞΗΣ ΚΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑΣ ΛΥΣΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ KdV

Προχωρούμε στον ορισμό της ασθενούς λύσης του προβλήματος (2.0.19)-(2.0.20).

Ορισμος 2.2.1. Για δεδομένο $u_0 \in H^3$ και $f \in L^2$, λύση του προβλήματος (2.0.19)-(2.0.20) ορίζουμε να είναι μια συνάρτηση $u(x,t) \in C([0,T],H^3) \cap C^1([0,T],L^2)$ που ικανοποιεί για κάθε $v \in H^6$ στο $[0,T]$ τη φόρμουλα

$$\langle u_t, v\rangle + \langle Au, v\rangle = \langle f, v\rangle, \tag{2.2.1}$$

$$u(0) = u_0, \tag{2.2.2}$$

για κάποιο $T > 0$.

Θεωρημα 2.2.2. *Έστω $u_0 \in H^3$. Τότε υπάρχει $T \geq 0$, τέτοιο ώστε το πρόβλημα (2.0.19)-(2.0.20) να έχει μοναδική λύση που να ικανοποιεί τον παραπάνω ορισμό. Επιπλέον $u \in C([0,T],H^3)$ και $u_t \in C([0,T],L^2)$.*

Αποδειξη. Α. ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ
Έστω u, v δύο λύσεις του προβλήματος (2.0.19)-(2.0.20) οι οποίες αντιστοιχούν στην ίδια αρχική συνθήκη $u(0) = v(0) = u_0$. Δηλαδή θεωρούμε ότι το πρόβλημα δεν έχει μοναδική λύση και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Τότε έχουμε ότι

$$u_t - v_t + uu_x - vv_x + u_{xxx} - v_{xxx} + \gamma u - \gamma v = 0,$$

ή υπό τη μορφή τελεστή,

$$u_t - v_t + Au - Av = 0,$$

και υπολογίζοντας το εσωτερικό γινόμενο,

$$(u_t - v_t + Au - Av | u - v) = 0,$$

καταλήγουμε στην εξίσωση,

$$\frac{d}{dt}\|u(t) - v(t)\|^2_{L^2} = -2(Au(t) - Av(t)|u(t) - v(t))_{L^2}\,, \quad \forall t \in [0,T].$$

Τώρα θέλουμε να υπολογίσουμε μια εκτίμηση για την ποσότητα $(Au - Av|u - v)$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}(Au - Av|u-v)_{L^2} &= (uu_x - vv_x + u_{xxx} - v_{xxx}\gamma u - \gamma v|u-v)_{L^2} = \\ &= (uu_x - vv_x|u-v)_{L^2} + (u_{xxx} - v_{xxx}|u-v)_{L^2} + \\ &\quad +\gamma(u - v|u-v)_{L^2}.\end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα εκτιμήσουμε κάθε όρο της ποσότητας αυτής

$$\begin{aligned}
|\gamma(u-v|u-v)_{L^2}| &= \gamma\|u-v\|_{L^2}^2. \\
(u_{xxx}-v_{xxx}|u-v)_{L^2} &= \int_0^1 (u_{xxx}-v_{xxx})(u-v)dx = \\
&= -\int_0^1 (u-v)(u_{xxx}-v_{xxx})dx = 0. \\
|(uu_x-vv_x|u-v)_{L^2}| &= |\int_0^1 (uu_x-vv_x)(u-v)dx| = \\
&= |\int_0^1 [u(u_x-v_x)(u-v)+(u-v)v_x(u-v)]dx| = \\
&= |-\frac{1}{2}\int_0^1 u_x(u-v)^2dx + \int_0^1 v_x(u-v)^2dx| \leq \\
&\leq \sup|u_x|\int_0^1 (u-v)^2dx + \sup|v_x|\int_0^1 (u-v)^2dx \leq \\
&\leq C_0(R)\|u-v\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Τελικά καταλήγουμε στη διαφορική ανισότητα

$$\frac{d}{dt}\|u(t)-v(t)\|_{L^2}^2 \leq C(R)\|u-v\|_{L^2}^2\,, \quad C>0,$$

στην οποία θέτουμε $\phi := u-v$ και παίρνουμε

(2.2.3) $$\frac{d}{dt}\|\phi\|_{L^2}^2 \leq C(R)\|\phi\|_{L^2}^2.$$

Ολοκληρώνοντας την (2.2.3), παίρνουμε

(2.2.4) $$\int_0^t \frac{\frac{d}{ds}\|\phi\|_{L^2}^2}{\|\phi\|_{L^2}^2}ds \leq \int_0^t C(R)ds,$$

η οποία δίνει την

(2.2.5) $$\ln\|\phi(t)\|_{L^2}^2 - \ln\|\phi(0)\|_{L^2}^2 \leq C(R)t.$$

Και από την (2.2.5) προκύπτει η

$$\|\phi(t)\|_{L^2}^2 \leq \|\phi(0)\|_{L^2}^2 e^{C(R)t}.$$

Όμως, από τις αρχικές συνθήκες παίρνουμε,

$$\phi(0) = u(0)-v(0) = u_0-u_0 = 0.$$

Κατά συνέπεια,

$$\|\phi(t)\|_{L^2}^2 \leq 0 \Rightarrow \|\phi\|_{L^2} = 0.$$

Επομένως, $\phi(t)=0$ σχεδόν παντού, και άρα $u=v$.

Β. ΥΠΑΡΞΗ

Περιγραφή της βασικής ιδέας για την απόδειξη - Τροποποιημένη μέθοδος Galerkin. Η απόδειξη για την ύπαρξη λύσης βασίζεται στη μέθοδο Galerkin: κατασκευάζεται μια προσεγγιστική ακολουθία λύσεων μέσω ενός κατάλληλου συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων το οποίο προκύπτει από "προβολή" του αρχικού προβλήματος σε χώρο πεπερασμένης διάστασης. Για την ακολουθία αυτή λαμβάνονται κατάλληλες εκτιμήσεις οι οποίες εξασφαλίζουν το πέρασμα στο όριο - με την έννοια της ασθενούς σύγκλισης - στην ασθενή φόρμουλα για τη λύση. Το ασθενές αυτό όριο της προσεγγιστικής ακολουθίας είναι και η ασθενής λύση του προβλήματος.

Η μέθοδος που θα εφαρμοστεί εδώ αποτελεί μια σημαντική τροποποίηση της μεθόδου Galerkin, η οποία οφείλεται στους T. Kato & C. Lai. Η τροποποίηση αυτή, βασίζεται στο συνδιασμό της ιδέας της αποδεκτής τριάδας εξέλιξης με αρχές σύγκρισης συνήθων διαφορικών εξισώσεων για τη λήψη των απαραίτητων εκτιμήσεων για την προσεγγιστική ακολουθία. Ο συνδυασμός αυτός, επιτρέπει μεγαλύτερη ευελιξία στους υπολογισμούς με αποτέλεσμα την παραγωγή εκτιμήσεων και τελικά τη σύγκλιση σε λύση, σε χώρο μεγαλύτερης ομαλότητας. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ύπαρξη ισχυρής λύσης (κλάσης H^3).

Απόδειξη του αποτελέσματος της ύπαρξης. Θεωρούμε μια ακολουθία υπόχωρων πεπερασμένης διάστασης $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του H^6 τέτοια ώστε $M_1 \subset M_2 \subset ...H^6$ και $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n} = H^6 \subseteq H^3$. Δηλαδή η ένωσή τους είναι πυκνή στον H^3.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η ορθογώνια προβολή $P_n : H^3 \to M_n$ ορίζεται ως εξής :

$$P_n u = \sum_{i=1}^{k} (u|e_i)_{H^3} e_i \tag{2.2.6}$$

όπου $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $M_n \subset H^3$. Επίσης ισχύει ότι

$$P_n u = u, \ \ \forall u \in M_n. \tag{2.2.7}$$

Η επέκταση της προβολής (2.2.6) σε ένα φραγμένο γραμμικό τελεστή (διατηρείται το ίδιο σύμβολο για τον τελεστή) $P_n : L^2 \to H^6$ δίνεται ως εξής :

$$P_n u = \sum_{i=1}^{k} \langle u, e_i \rangle e_i\,, \quad u \in L^2 \tag{2.2.8}$$

και βλεπουμε εύκολα ότι ικανοποιεί τη σχέση :

$$\langle v, P_n u \rangle = \langle u, P_n v \rangle\,, \quad \forall u, v \in L^2. \tag{2.2.9}$$

Τώρα θεωρούμε το προσεγγιστικό πρόβλημα :

$$\partial_t u_n(t) + P_n A u_n(t) = P_n f\,, \quad u_n(t) \in M_n \tag{2.2.10}$$

$$u_n(0) = P_n u_0 \tag{2.2.11}$$

Αναζητούμε μια λύση $u_n : [0,T] \to M_n$ του προβλήματος (2.2.10)-(2.2.11) για κατάλληλο $T > 0$.

Ο τελεστής $A : H^3 \to L^2$ είναι ασθενώς ακολουθιακά συνεχής και ο τελεστής $P_n : L^2 \to H^6$ είναι συνεχής. Κατά συνέπεια και καθώς $M_n \subset H^6 \subset H^3 \subset L^2$, προκύπτει ότι ο τελεστής

$$P_n A : M_n \to M_n$$

είναι ασθενώς ακολουθιακά συνεχής. Δεδομένου ότι $dim M_n = k < \infty$ προκύπτει ότι ο τελεστής $P_n A$ είναι συνεχής. Επίσης, ο τελεστής $A : H^3 \to L^2$ είναι τοπικά φραγμένος ενώ ο τελεστής $P_n : L^2 \to H^3$ είναι φραγμένος. Άρα αν $B_R = \{u \in M_n : \|u\| \leq R\}$ είναι η κλειστή μοναδιαία σφαίρα του M_n, τότε υπάρχει θετική σταθερα $C(R)$ έτσι ώστε

$$\|P_n A u_n\| \leq C(R)\|P_n\|\|u_n\| \leq C_1(R)\|u_n\|.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι η εικόνα της B_R μέσω του τελεστή P_nA είναι φραγμένη. Άρα ο τελεστής $P_nA : M_n \to M_n$ είναι συμπαγής γιατί τα φραγμένα σύνολα σε χώρους πεπερασμένης διάστασης είναι σχετικά συμπαγή. Έτσι από το θεώρημα του Peano [Παράρτημα] προκύπτει ότι υπάρχει ένα $T > 0$ και μια C^1 λύση του προβλήματος *συνήθων διαφορικών εξισώσεων* (2.2.10)-(2.2.11) στο $[0, T]$.

Τώρα από την εξίσωση (2.2.10) και τις σχέσεις (2.1.5), (2.2.9) έχουμε ότι :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(t)\|^2_{H^3} &= [u_n(t), \partial_t u_n(t)]_{H^3} = \langle u_n(t), \partial_t u_n(t)\rangle \\
&= -\langle u_n(t), P_nAu_n(t)\rangle + \langle u_n(t), P_nf\rangle \\
&= -\langle Au_n(t), P_nu_n(t)\rangle + \langle u_n(t), P_nf\rangle \\
&\le g(\|u_n(t)\|^2_{H^3}) + \langle u_n(t), P_nf\rangle \\
&\le h(\|u_n(t)\|^2_{H^3}) \qquad (2.2.12)
\end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι για την ποσότητα $\langle u_n(t), P_nf\rangle$, χρησιμοποιήσαμε τη συνεχή εμφύτευση $H^3 \subset L^2$ και τη συνέχεια του τελεστή $P_n : L^2 \to H^6$ για να πάρουμε την εκτίμηση

$$\begin{aligned}
\langle u_n, P_nf\rangle &\le \|u_n\|_{L^2}\|P_nf\|_{H^6} \\
&\le C_0\|f\|_{L^2}\|u_n\|_{H^3} \\
&\le C\|u_n\|_{H^3}. \qquad (2.2.13)
\end{aligned}$$

Η συνάρτηση $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ορίζεται ως $h(x) := g(x) + C \cdot x^{1/2}$.

Άρα από τις εκτιμήσεις (2.2.12) και (2.2.13) έχουμε την ανισότητα

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(t)\|^2_{H^3} \le h(\|u_n(t)\|^2_{H^3}), \qquad (2.2.14)$$

$$\|u_n(0)\|^2_{H^3} \le \|u_0\|^2_{H^3}. \qquad (2.2.15)$$

Τώρα συγκρίνουμε τη λύση του προβλήματος (2.2.14)-(2.2.15) με τη λύση του ακόλουθου προβλήματος αρχικών τιμών :

$$\dot{\phi}(t) = 2h(\phi(t)), \qquad (2.2.16)$$

$$\phi(0) = \|u_0\|^2_{H^3}, \qquad (2.2.17)$$

και από την αρχή της σύγκρισης [Παράρτημα] έχουμε την εκτίμηση :

$$\|u_n(t)\|^2_{H^3} \le \phi(t) \qquad (2.2.18)$$

στο $[0, T]$ για κάθε n όπου το $[0, T]$ είναι το διάστημα ύπαρξης λύσης του προβλήματος (2.2.16)-(2.2.17).

Έχουμε ότι η συνάρτηση $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ είναι C^1 άρα η $\frac{dh}{dx}$ είναι φραγμένη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}_+$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση h είναι Lipschitz συνεχής σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}_+$. Άρα από το θεώρημα $Picard - Lindel\ddot{o}f$ [Παράρτημα] έχουμε ότι υπάρχει $T_1 > 0$ τέτοιο ώστε το πρόβλημα (2.2.16)-(2.2.17) να έχει μοναδική συνεχή λύση στο $[0, T_1]$. Έτσι από την εκτίμηση (2.2.18) έχουμε ότι

$$\|u_n(t)\|^2_{H^3} \le \max_{t\in[0,T]} \phi(t) := R \qquad (2.2.19)$$

Από την αρχή της συνέχειας [Παράρτημα (Πρόταση 4.0.2)] μπορούμε να επεκτείνουμε τη λύση u_n στο διάστημα $[0, T_1]$. Αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο διότι το T_1 είναι ανεξάρτητο του n. Άρα στη συνέχεια θα θεωρούμε $T = T_1$.

Έστω $D = \{a_\nu : \nu \in \mathbb{N}\}$ ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του $[0, T]$. Τότε με το ακόλουθο διαγώνιο επιχείρημα θα δείξουμε ότι υπάρχει υπακολουθία της $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $u_n(t) \rightharpoonup u(t)$ καθώς $n \to \infty$ για κάθε $t \in D$ (διατηρούμε τον ίδιο συμβολισμό για την υπακολουθία).

Από το θεώρημα $Eberlein - Smu\check{l}jian$ και την εκτίμηση (2.2.19) έχουμε ότι υπάρχει μια υπακολουθία της $(u_n(t))$ που συμβολίζεται με $(u_{1n}(t))$ τέτοια ώστε $u_{1n}(a_1) \rightharpoonup u(a_1)$ καθώς $n \to \infty$. Ομοίως υπάρχει μια υπακολουθία $(u_{2n}(t))$ της $(u_{1n}(t))$ τέτοια ώστε $u_{2n}(a_2) \rightharpoonup u(a_2)$ καθώς $n \to \infty$ κλπ. Δηλαδή έχουμε

$$
\begin{aligned}
u_{11}(a_1), u_{12}(a_1), u_{13}(a_1), \ldots &\rightharpoonup u(a_1)\\
u_{21}(a_2), u_{22}(a_2), u_{23}(a_2), \ldots &\rightharpoonup u(a_2)\\
u_{31}(a_3), u_{32}(a_3), u_{33}(a_3), \ldots &\rightharpoonup u(a_3)
\end{aligned}
$$

καθώς $n \to \infty$
Άρα η ακολουθία $u_{nn}(a_\nu) \rightharpoonup u(a_\nu)$, δηλαδή $u_{nn}(t) \rightharpoonup u(t)$ καθώς $n \to \infty$ για κάθε $t \in D$. Δηλαδή η υπακολουθία που αναζητώ είναι η $(u_{nn})_{n\in\mathbb{N}} =: (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Έστω $v \in M_k$ για σταθερό k και έστω $n \geq k$. Από τις εξισώσεις (2.2.9), (2.2.10) και (2.2.11) έχουμε :

$$
\begin{aligned}
[\partial_t u_n(t), v]_{H^3} &= [v, \partial_t u_n(t)\rangle]_{H^3}\\
&= \langle v, \partial_t u_n(t)\rangle\\
&= -\langle v, P_n A u_n(t)\rangle + \langle v, P_n f\rangle\\
&= -\langle A u_n(t), P_n v\rangle + \langle f, P_n v\rangle\\
&= -\langle A u_n(t), v\rangle + \langle f, P_n v\rangle
\end{aligned}
\tag{2.2.20}
$$

Ολοκληρώνοντας ως προς το χρόνο για κάθε $t_1, t_2 \in [0, T]$, για κάθε $v \in M_k$ και $\forall n \geq k$ παίρνουμε :

$$
\langle u_n(t_2), v\rangle - \langle u_n(t_1), v\rangle = -\int_{t_1}^{t_2} \langle A u_n(s), v\rangle ds + \int_{t_1}^{t_2} \langle f, P_n v\rangle ds \tag{2.2.21}
$$

Θέτουμε $\gamma(t) := \langle u_n(t), v\rangle$ και κάνουμε τις ακόλουθες εκτιμήσεις για τις ποσότητες στο δεξί μέλος της (2.2.21).
Έχουμε

$$
\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \langle f, P_n v\rangle ds &\leq \|P_n v\|_{H^6} \|f\|_{L^2} \int_{t_1}^{t_2} ds\\
&= \|P_n v\|_{H^6} \|f\|_{L^2} (t_2 - t_1)\\
&\leq const|t_2 - t_1|,
\end{aligned}
\tag{2.2.22}
$$

Επιπλέον, από το λήμμα (2.1.5) έχουμε ότι ο τελεστής $A : H \to L^2$ είναι τοπικά φραγμένος. Άρα για τον πρώτο όρο του δεξιού μέλους της (2.2.21), έχουμε την εκτίμηση

$$
\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \langle A u_n(s), v\rangle ds &\leq \int_{t_1}^{t_2} \|A u_n(s)\|_{L^2} \|v\|_{H^6} ds\\
&\leq C\|v\|_{H^6} \int_{t_1}^{t_2} \|u_n(s)\|_{H^3} ds\\
&\leq C\|v\|_{H^6} \sup_{t\in[t_1,t_2]} \|u_n(t)\| |t_2 - t_1|\\
&\leq C|t_2 - t_1|.
\end{aligned}
\tag{2.2.23}
$$

Συνδυάζοντας τις (2.2.22) και (2.2.23) συμπεραίνουμε ότι

$$|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)| \leq const|t_2 - t_1|.$$

Δηλαδή η ακολουθία $(\gamma_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοσυνεχής στο $[0,T]$. Άρα η $(\gamma_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,T]$ καθώς $n \to \infty$ [Παράρτημα (Πρόταση 4.0.3)]. Η ακολουθία $(\gamma_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει για κάθε $v \in M_n$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ δηλαδή για κάθε $v \in \cup_{n\in\mathbb{N}} M_n$. Άρα η $(\gamma_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει για κάθε $v \in H^6$ γιατί $\overline{\cup_{n\in\mathbb{N}} M_n} = H^6$. Πράγματι, έστω $v \in H^6$. Τότε υπάρχει ακολουθία $(w_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ ώστε $w_k \to v$ καθώς $k \to \infty$. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} |\langle u_n(t), v\rangle - \langle u(t), v\rangle| &= |\langle u_n(t), v\rangle - \langle u_n(t), w_k\rangle + \langle u_n(t), w_k\rangle - \langle u(t), v\rangle| \\ &\leq |\langle u_n, v - w_k\rangle + |\langle u_n, w_k\rangle - \langle u, v\rangle| < \epsilon \end{aligned}$$

για αρκετά μεγάλα n και k. Επομένως προκύπτει ότι

(2.2.24) $$u_n(t) \rightharpoonup u(t)$$

στον H^3 καθώς $n \to \infty$ ομοιόμορφα στο $[0,T]$. Και επειδή ο τελεστής A είναι ασθενώς ακολουθιακά συνεχής,

(2.2.25) $$Au_n(t) \rightharpoonup Au(t)$$

στον L^2 καθώς $n \to \infty$. Επίσης

(2.2.26) $$[u_n(0), v]_{H^3} = [P_n u_0, v]_{H^3} = [u_0, v]_{H^3}.$$

Από τις (2.2.24), (2.2.25) και (2.2.26), περνώντας το όριο καθώς $n \to \infty$ στις εξισώσεις (2.2.20) και (2.2.21) προκύπτει ότι η u είναι λύση του προβλήματος (2.0.19)-(2.0.20) και ότι $u \in C([0,T], H^3)$ και ικανοποιείται η σχέση

$$\gamma(t) - \gamma(0) = -\int_0^t \langle Au, v\rangle ds$$

για κάθε $v \in H^6$ και $t \in [0,T]$. Από το λήμμα 2.1.5 και την εξίσωση $\partial_t u + Au = f$ προκύπτει ότι $\partial_t u \in C([0,T], L^2)$. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΑΠΟΡΡΟΦΗΤΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ

Το κεφάλαιο αυτό είναι αφιερωμένο σε μια εισαγωγική συζήτηση για το δυναμικό σύστημα που ορίζεται από την εξίσωση KdV, μέσω του προβλήματος αρχικών τιμών

$$u_t + uu_x + u_{xxx} + \gamma u = f \tag{3.0.27}$$

$$u(0) = u_0\,, \tag{3.0.28}$$

όπου η συνάρτηση f δεν εξαρτάται από το χρόνο. Μας ενδιαφέρουν περιοδικές ως προς τη χωρική μεταβλητή λύσεις, δηλαδή λύσεις που ικανοποιούν την

$$u(x+1,t) = u(x,t) \tag{3.0.29}$$

3.1. ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ ΣΥΝΟΛΑ ΚΑΙ ΕΛΚΥΣΤΕΣ

Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιαστούν κάποια εισαγωγικά στοιχεία που αφορούν τα αναλλοίωτα σύνολα και τους ελκυστές. Η παρουσιάση θα είναι συνοπτική και θα αφορά απειροδιάστατα δυναμικά συστήματα όπως το πρόβλημα που θα μελετήσουμε.

Θεωρούμε τη λύση $u = u(t)$ μιας διαφορικής εξίσωσης της μορφής

$$\frac{du(t)}{dt} = F(u(t)), \tag{3.1.1}$$

με αρχική συνθήκη

$$u(0) = u_0, \tag{3.1.2}$$

και ενδιαφερόμαστε για την συμπεριφορά της $u(t)$ καθώς $t \to \infty$. Η μεταβλητή $u = u(t)$ ανήκει σε ένα γραμμικό χώρο H που ονομάζεται χώρος των φάσεων. Προφανώς αν γνωρίζουμε την $u = u(t)$ έχουμε μια πλήρη περιγραφή για την κατάσταση του συστήματος για κάθε χρονική στιγμή.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :
Την περίπτωση πεπερασμένης διάστασης, όπου

$$u = u(t) \in H = \mathbb{R}^N.$$

Την περίπτωση άπειρης διάστασης, όπου

$$u = u(t) \in H = \acute{\varepsilon}\nu\alpha\varsigma\ \chi\acute{\omega}\rho o\varsigma\ Hilbert$$

Στην περίπτωση της άπειρης διάστασης λοιπόν ο χώρος Hilbert H είναι συνήθως ένας χώρος συναρτήσεων οι οποίες ορίζονται σε κάποιο χωρίο $G \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3, ...$ Στις περιπτώσεις αυτές θα συμβολίζουμε με $u(t) \in H$ μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το G.

Η εξέλιξη του δυναμικού συστήματος περιγράφεται από από μια οικογένεια τελεστών $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ που απεικονίζουν τον H στον ευατό του και ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες

$$S(0) = I\,, \quad S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2)\,, \quad \forall t_i \in \mathbb{R} \tag{3.1.3}$$

Δηλαδή αυτή η οικογένεια τελεστών έχει τη δομή ημιομάδας. Αν ϕ είναι η κατάσταση του δυναμικού συστήματος τη χρονική στιγμή s τότε $S(t)\phi$ είναι η κατάσταση του συστήματος τη χρονική στιγμή $t + s$, και

$$u(t) = S(t)u(0)\,, \tag{3.1.4}$$
$$u(t + s) = S(t)u(s) = S(s)u(t)\,, \quad s, t \geq 0. \tag{3.1.5}$$

Έστω $u_0 \in H$. Μια τροχιά που ξεκινάει από το u_0 είναι το σύνολο $\cup_{t\geq 0}S(t)u_0$. Ομοίως, όταν υπάρχει, μια τροχιά που καταλήγει στο σημείο u_0 είναι το σύνολο των σημείων $\cup_{t\leq 0}\{u(t)\}$, όπου u είναι η απεικόνιση από το $(-\infty, 0]$ στο H τέτοια ώστε $u(0) = u_0$ και $u(t + s) = S(t)u(s)$. Οι τροχιές που ξεκινούν ή καταλήγουν στο u_0 ονομάζονται επίσης θετική ή αρνητική τροχιά μέσω του u_0. Μια πλήρης τροχιά που περιέχει το u_0 είναι η ένωση της θετικής και της αρνητικής τροχιάς μέσω του u_0. Για $u_0 \in H$ ή για $\mathcal{A} \subset H$, ορίζουμε το ω-οριακό σύνολο του u_0 (ή του $\mathcal{A}$) ως

$$\omega(u_0) = \cap_{s\geq 0}\overline{\cup_{t\geq 0}S(t)u_0}\,,$$

ή

$$\omega(\mathcal{A}) = \cap_{s\geq 0}\overline{\cup_{t\geq 0}S(t)\mathcal{A}}\,,$$

όπου οι κλειστότητες λαμβάνονται στον H. Αντίστοιχα, όταν υπάρχει, το a - οριακό σύνολο του $u_0 \in H$ ή του $\mathcal{A} \subset H$ ορίζεται ώς

$$a(u_0) = \cap_{s\leq 0}\overline{\cup_{t\leq 0}S(-t)^{-1}u_0}\,,$$

ή

$$a(\mathcal{A}) = \cap_{s\leq 0}\overline{\cup_{t\leq 0}S(-t)^{-1}\mathcal{A}}\,,$$

Εύκολα βλέπει κανείς ότι $\phi \in \omega(\mathcal{A})$ αν και μόνο αν υπάρχει μια ακολουθία στοιχείων $\phi_n \in \mathcal{A}$ και μια ακολουθία $t_n \to \infty$ τέτοια ώστε

$$S(t_n)\phi_n \to \phi \;\; \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma \;\; n \to \infty \tag{3.1.6}$$

Ομοίως, $\phi \in a(\mathcal{A})$ αν και μόνο αν υπάρχει μια ακολουθία ψ_n που συγκλίνει στο ϕ στον H και μια ακολουθία $t_n \to \infty$, τέτοια ώστε

$$\phi_n = S(t_n)\psi_n \in \mathcal{A}\,, \quad \forall n$$

Σταθερό ή στάσιμο σημείο είναι ένα σημείο $u_0 \in H$ τέτοιο ώστε

$$S(t)u_0 = u_0\,, \quad \forall t \geq 0$$

Η τροχιά και το ω και a - οριακό σύνολο ενός τέτοιου σημείου είναι προφανώς ίσο με $\{u_0\}$. Αν u_0 είναι ένα στάσιμο σημείο τότε ορίζουμε την ευσταθή και ασταθή πολλαπλότητα του u. Η ευσταθής πολλαπλότητα του u_0, $\mathcal{M}_-(u_0)$, είναι το (ίσως και κενό) σύνολο σημείων u_* τα οποία ανήκουν σε μια πλήρη τροχιά $\{u(t),\, t \in \mathbb{R}\}$, $u_* = u(t_0)$ και για τα οποία ισχύει

$$u(t) = S(t-t_0)u_* \to u_0 \ \ \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma\ \ t \to \infty.$$

Η ασταθής πολλαπλότητα του u_0, $\mathcal{M}_+(u_0)$, είναι το (ίσως και κενό) σύνολο σημείων $u_* \in H$ τα οποία ανήκουν σε μια πλήρη τροχιά $\{u(t),\, t \in \mathbb{R}\}$ και για τα οποία ισχύει

$$u(t) \to u_0 \ \ \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma\ \ t \to -\infty.$$

Ένα στάσιμο σημείο u_0 είναι ευσταθές αν $\mathcal{M}_+(u_0) = \varnothing$ και ασταθές διαφορετικά.

Ένα σύνολο $X \subset H$ λέγεται θετικά αναλλοίωτο ως προς την ημιομάδα $S(t)$ αν

$$S(t)X \subset X\,, \quad \forall t > 0$$

και λέγεται αρνητικά αναλλοίωτο αν

$$S(t)X \supset X\,, \quad \forall t > 0.$$

Όταν ένα σύνολο είναι θετικά και αρνητικά αναλλοίωτο, το λέμε αναλλοίωτο σύνολο.

Ορισμός 3.1.1. Ένα σύνολο $X \subset H$ είναι αναλλοίωτο σύνολο για την ημιομάδα $S(t)$ αν

$$S(t)X = X\,, \quad \forall t \geq 0\,. \tag{3.1.7}$$

Ένα τετριμμένο παράδειγμα αναλλοίωτου συνόλου είναι ένα σύνολο X με μοναδικό στοιχείο ένα στάσιμο σημείο, $X = \{u_0\}$, ή ένα σύνολο που περιλαμβάνει περισσότερα στάσιμα σημεία. Επίσης μια περιοδική τροχιά είναι ένα απλό παράδειγμα ενός αναλλοίωτου συνόλου, δηλαδή αν για κάποιο $u_0 \in H$ και $T > 0$, $S(T)u_0 = u_0$, τότε το $S(t)u_0$ υπάρχει για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και το

$$X = \{S(t)u_0,\, t \in \mathbb{R}\} \tag{3.1.8}$$

είναι αναλοίωτο. Ένα ακόμα παράδειγμα είναι η ευσταθής και η ασταθής πολλαπλότητα οι οποίες είναι πλήρεις τροχιές και για αυτό είναι αναλλοίωτα σύνολα.

Σχολιο. Αν X είναι ένα αναλλοίωτο σύνολο και $u_0 \in X$, τότε αν ο τελεστής $S(t)$ είναι ένα προς ένα, το $S(t)u_0$ υπάρχει για όλα τα $t \in \mathbb{R}$. Εύκολα βλέπει κανείς ότι το σύνολο $X_{u_0} = \{S(t)u_0,\, t \in \mathbb{R}\}$ είναι ένα αναλλοίωτο σύνολο και ότι δύο τέτοια σύνολα είναι είτε ξένα μεταξύ τους είτε ταυτίζονται. Έτσι τα σύνολα X_{u_0}, $u_0 \in X$ διαμερίζουν το X σε αναλλοίωτα σύνολα. Επιπλέον, τα σύνολα X_{u_0} είναι ελαχιστικά αναλλοίωτα σύνολα. Πράγματι, ένα γνήσιο υποσύνολο του X_{u_0} δεν μπορεί να είναι αναλλοίωτο αφού ένα αναλλοίωτο σύνολο που περιέχει το u_0 θα περιέχει το $S(t)u_0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 3.1.2. Ελκυστής είναι ένα σύνολο $\mathcal{A} \subset H$ που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:
$i)$ Το $\mathcal{A}$ είναι αναλλοίωτο σύνολο ($S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$, $\forall t \geq o$).
$ii)$ Το $\mathcal{A}$ έχει μια ανοικτή περιοχή $\mathcal{U}$ τέτοια ώστε, για κάθε $u_0 \in \mathcal{U}$, το $S(t)u_0$ συγκλίνει στο $\mathcal{A}$ καθώς $t \to \infty$:

$$dist(S(t)u_0, \mathcal{A}) \to 0 \ \ καθώς \ \ t \to \infty.$$

Όπου η απόσταση στην (ii) έχει την συνήθη έννοια απόστασης σημείου από σύνολο στον χώρο H. Αν $\mathcal{A}$ είναι ένας ελκυστής, το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο $\mathcal{U}$ που ικανοποιεί την ιδιότητα (ii) ονομάζεται πεδίο έλξης του $\mathcal{A}$. Εναλλακτικά μπορούμε να πούμε ότι ο $\mathcal{A}$ έλκει τα σημεία του $\mathcal{U}$. Λέμε ότι ο $\mathcal{A}$ έλκει ομοιόμορφα ένα σύνολο $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ αν

(3.1.9)
$$d(S(t)\mathcal{B}, \mathcal{A}) \to 0 \ \ καθώς \ \ t \to \infty,$$

όπου τώρα $d(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)$ είναι η ημιαπόσταση των δύο συνόλων $\mathcal{B}_0$ και $\mathcal{B}_1$:

(3.1.10)
$$d(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1) = \sup_{x \in \mathcal{B}_0} \inf_{y \in \mathcal{B}_1} d(x, y)$$

Ορισμος 3.1.3. Λέμε ότι το σύνολο $\mathcal{A} \subset H$ είναι ολικός ελκυστής για την ομάδα $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ αν το $\mathcal{A}$ είναι ένας συμπαγής ελκυστής που έλκει όλα τα φραγμένα σύνολα του H (και έτσι το πεδίο έλξης του είναι το H).

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι ένα τέτοιο σύνολο είναι μοναδικό. Επίσης είναι μεγιστικό ως προς τη διάταξη του εγκλεισμού σε σύγκριση με τους φραγμένους ελκυστές και σε σχέση με τα φραγμένα αναλοίωτα σύνολα. Για αυτό το λόγο ο ολικός ελκυστής λέγεται και μεγιστικός ελκυστής.

Μια ακόμα βασική έννοια είναι αυτή του απορροφητικού συνόλου.

Ορισμος 3.1.4. Έστω $\mathcal{B}$ ένα υποσύνολο του H και $\mathcal{U}$ ένα ανοικτό σύνολο που περιέχει το $\mathcal{B}$. Λέμε ότι το $\mathcal{B}$ απορροφά το $\mathcal{U}$ αν η τροχιά κάθε φραγμένου συνόλου του $\mathcal{U}$ εισέρχεται στο $\mathcal{B}$ μετά από ορισμένο χρόνο (ο οποίος μπορεί να εξαρτάται από το σύνολο).

(3.1.11)
$$\begin{cases} \forall \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{U}, \quad \mathcal{B}_0 \ φραγμένο, \\ \exists t_1(\mathcal{B}_0) \ τ.ω. \ S(t)\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}, \ \forall t \geq t_1(\mathcal{B}_\prime). \end{cases}$$

Λέμε επίσης ότι το $\mathcal{B}$ απορροφά τα φραγμένα σύνολα του $\mathcal{U}$.

Στην επόμενη ενότητα, θα αναφερθούμε σε ένα από τα βασικά βήματα που αφορούν την ύπαρξη του ολικού ελκυστή, αυτό της ύπαρξης απορροφητικής σφαίρας.

3.2. Η ΑΠΟΡΡΟΦΗΤΙΚΗ ΣΦΑΙΡΑ

Στο κεφάλαιο 2 δείξαμε ότι αν $f \in L^2_{per}$ και $u_0 \in H^3_{per}$ τότε υπάρχει λύση του προβλήματος KdV. Με παρόμοια τεχνική μπορεί να αποδειχθεί ότι αν $u \in H^2_{per}$ και $f \in L^2_{per}$ τότε ορίζεται μοναδική λύση $u \in C([0,T]; H^2)$. Σε ότι ακολουθεί όπου γράφουμε H^m θα εννοούμε τον $H^m_{per}(0,1)$.

Έτσι μπορούμε για κάθε $t \in \mathbb{R}$ να εισάγουμε την μη γραμμική απεικόνιση στον H^2:

(3.2.1)
$$u_0 \to u(t) \equiv S(t)u_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Επιπλέον, επειδή η συνάρτηση f είναι ανεξάρτητη του χρόνου, το πρόβλημα (3.0.27) - (3.0.28) - (3.0.29) είναι αυτόνομο και η οικογένεια $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ έχει τη δομή ημιομάδας

(3.2.2)
$$S(0) = I, \quad S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2), \quad \forall t_i \in \mathbb{R}.$$

Σχετικά με τη συνέχεια αυτών των απεικονίσεων αναφέρουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 3.2.1. *([**6**]) Για κάθε T, $0 < T < \infty$, η οικογένεια τελεστών,*

$$S(t) : H^2 \to C([-T,T]; H^2), \tag{3.2.3}$$

(που αφορούν το πρόβλημα (3.0.27) - (3.0.28) περιορισμένο στο $[-T,T]$) είναι συνεχείς και φραγμένοι.

Η απόδειξη της συνέχειας των τελεστών αυτών δεν είναι τετριμμένη και οφείλεται στους J. Bona & R. Smith.

Ο χώρος $C([-T,T]; H^2)$ εννοείται ότι είναι εφοδιασμένος με τη συνήθη $\sup -$ νόρμα. Η ακόλουθη άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι η απεικόνιση (3.2.3) είναι φραγμένη είναι χρήσιμη στην απόδειξη του επόμενου λήμματος : Για κάθε $R > 0$ και $0 < T < \infty$, υπάρχει μια σταθερά $C_0(R,T)$ τέτοια ώστε

$$\sup_{\substack{|t| \leq T \\ \|u_0\|_2 \leq R}} \|S(t)u_0\|_2 \leq C_0(R,T). \tag{3.2.4}$$

Λήμμα 3.2.2. *Για κάθε $t \in \mathbb{R}$, η απεικόνιση $S(t)$ ως προς την H^1 νόρμα και περιορισμένη στα φραγμένα σύνολα του H^2 είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω $u_0, v_0 \in H^2$ με $\|u_0\|_2 \leq R$ και $\|v\|_2 \leq R$ και με u και v συμβολίζουμε τις αντίστοιχες λύσεις $u(t) = S(t)u_0,\ \ v(t) = S(t)v_0$. Θέτουμε $w = u - v$ το οποίο ικανοποιεί την

$$w_t + (\phi w)_x + w_{xxx} + \gamma w = 0, \tag{3.2.5}$$

όπου

$$\phi = (u+v)/2.$$

Τώρα πολλαπλασιάζουμε την (3.2.5) με $w - w_{xx}$ και ολοκληρώνουμε στο $(0,1)$ το αποτέλεσμα. Επειδή $\int w_{xx}w_{xxx}dx = \int ww_{xxx}dx = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int (ww_t + w(\phi w)_x + \gamma w^2)dx &= \int (w_{xx}w_t + w_{xx}(\phi w)_x + \gamma w_{xx}w)dx \Rightarrow \\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_1^2 + \gamma\|w\|_1^2 &= \int w_{xx}(\phi w)_x dx - \int w(\phi w)_x dx \Rightarrow \\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_1^2 + \gamma\|w\|_1^2 &= -\frac{1}{2}\int \{\phi_x(w^2 + 3w_x^2) + 2\phi_{xx}ww_x\}dx \qquad (3.2.6)
\end{aligned}$$

Οι όροι στο δεξί μέλος της (3.2.6) φράσσονται ως εξής :

$$
\begin{aligned}
\left|\int \phi_x(w^2+3w_x^2)dx\right| &\leq 3|\phi_x|_{L^\infty}\|w\|_1^2 \\
&\leq 3|\phi|_1^{1/2}(2|\phi|_2+|\phi|_1)^{1/2}\|w\|_1^2 \\
&\leq 3(2|\phi|_1|\phi|_2+\|\phi\|_2^2)^{1/2}\|w\|_1^2 \\
&\leq 3(2\|\phi\|_2^2+\|\phi\|_2^2)^{1/2}\|w\|_1^2 \\
&= 3\sqrt{3}\|\phi\|_2\|w\|_1^2, \\
\left|\int \phi_{xx}ww_xdx\right| &\leq |\phi_{xx}|_0|w|_{L^\infty}|w_x|_0 \\
&\leq \|\phi\|_2\|w\|_1|w|_0^{1/2}(2|w|_1+|w|_0)^{1/2} \\
&= \|\phi\|_2\|w\|_1(2|w|_1|w|_0+|w|_0^2)^{1/2} \\
&\leq \|\phi\|_2\|w\|_1(2\|w\|_1^2+\|w\|_1^2)^{1/2} \\
&= 3\sqrt{3}\|\phi\|_2\|w\|_1^2.
\end{aligned}
$$

Δηλαδή έχουμε

$$
\left|\frac{d}{dt}\|w\|_1^2\right| \leq (2\gamma+12\sqrt{3}\|\phi\|_2)\|w\|_1^2 \tag{3.2.7}
$$

Τώρα ολοκληρώνουμε την (3.2.7) ως προς χρόνο και χρησιμοποιώντας την (3.2.4) έχουμε

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \frac{\frac{d}{d\tau}\|w\|_1^2}{\|w\|_1^2}\tau &\leq \int_0^t (2\gamma+const\|\phi\|_2)d\tau \Rightarrow \\
\left[\ln\|w\|_1^2\right]_0^t &\leq 2\gamma t+cosnst\int_0^t(\|w\|_2+\|v\|_2)d\tau \Rightarrow \\
\frac{\|w(t)\|_1}{\|w(0)\|_1} &\leq \exp(\gamma+constC_0(R,t))t \Rightarrow \\
\|w(t)\|_1 &\leq \exp\{\|w(0)\|_1(\gamma+constC_0(R,t))t\}, \qquad (3.2.8)
\end{aligned}
$$

Δηλαδή η απόδειξη ολοκληρώθηκε αφού από την τελευταία ανισότητα προκύπτει η συνέχεια της απεικόνισης $S(t)$. □

Πρόταση 3.2.3. *Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ η απεικόνιση $S(t) : H^2 \to H^2$ είναι ασθενώς συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ασθενώς συγκλίνουσα ακολουθία στον H^2 και u το όριό της. Σταθεροποιούμε ένα $t \in \mathbb{R}$ και από την (3.2.4) προκύπτει ότι η ακολουθία $(S(t)u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη στον H^2. Άρα μπορούμε να επιλέξουμε μια υπακολουθία $(S(t)u_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ η οποία συγκλίνει ασθενώς στον H^2. Επίσης η συμπάγεια της εμφύτευσης $H^2 \subset H^1$ εξασφαλίζει ότι η $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ισχυρά στο u στον H^1. Έτσι σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα, η ακολουθία $(S(t)u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ισχυρά στο $S(t)u$ στον H^1 και $v = S(t)u$. Επομένως ολόκληρη η ακολουθία $(S(t)u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ασθενώς στο $S(t)u$ στον H^2 και η πρόταση αποδείχθηκε. □

Η πρόταση που θα αποδειχθεί αργότερα και αφορά τον προσδιορισμό της απορροφητικής σφαίρας για την ομάδα $\{S(t)\}$, βασίζεται στη χρήση των εξής πολλαπλασιαστών :

$$
\begin{aligned}
M_0(u) &= 2u, && (3.2.9)\\
M_1(u) &= 2u_{xx}+u^2, && (3.2.10)\\
M_2(u) &= (18/5)u_{xxxx}+6uu_{xx}+3u_x^2+u^3. && (3.2.11)
\end{aligned}
$$

Τώρα πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (3.0.27) με τους παραπάνω πολλαπλασιαστές, ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες όπου χρειάζεται στο διάστημα $(0, L)$ και με δεδομένες τις περιοδικές συνοριακές συνθήκες προκύπτουν οι εξισώσεις ενέργειας :

(3.0.27), (3.2.9) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
&\int 2u(u_t + uu_x + u_{xxx} + \gamma u - f)dx = 0 \Rightarrow \\
&\int 2uu_t dx + \int 2u^2 u_x dx + \int 2uu_{xxx} dx + \int (2\gamma u^2 - 2fu)dx = 0 \Rightarrow \\
&\int \frac{\partial}{\partial t} u^2 dx + \int (2\gamma u^2 - 2fu)dx + \int 2u^2 u_x dx + \int 2uu_{xxx} dx = 0 \Rightarrow
\end{aligned}$$

Όπου υπολογίζοντας τους δύο τελευταίους όρους της προηγούμενης εξίσωσης, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
I_{01} &= \int 2u^2 u_x dx = -\int 4u^2 u_x dx = -2\int 2u^2 u_x dx = -2I_{01} \\
I_{02} &= \int 2uu_{xxx} dx = -\int 2u_x u_{xx} dx = \int 2u_{xx} u_x dx = -\int 2u_{xxx} u dx = -I_{02}
\end{aligned}$$

Δηλαδή $I_{01} = 0$ και $I_{02} = 0$. Επομένως η πρώτη εξίσωση είναι :

$$\int \frac{\partial}{\partial t} u^2 dx + \int (2\gamma u^2 - 2fu)dx = 0 \tag{3.2.12}$$

(3.0.27), (3.2.10) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
&\int (2u_{xx} + u^2)(u_t + uu_x + u_{xxx} + \gamma u - f)dx = 0 \Rightarrow \\
&\int (2u_{xx}u_t + u^2 u_t)dx + \int (2uu_x u_{xx} + u^2 u_{xxx})dx + \int u^3 u_x dx + \\
&+ \int 2u_{xx}u_{xxx} dx + \int 2\gamma u u_{xx} dx + \int (-2fu_{xx})dx + \int (\gamma u^3 - fu^2)dx = 0
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε κάθε έναν από τους όρους της τελευταίας εξίσωσης

$$\begin{aligned}
&\int (2u_{xx}u_t + u^2 u_t)dx = \frac{d}{dt}\int (-u_x^2 + \frac{u^3}{3})dx \\
&\int (2uu_x u_{xx} + u^2 u_{xxx})dx = \int u^3 u_x dx = \int 2u_{xx}u_{xxx} dx = 0 \\
&\int 2\gamma u u_{xx} dx = -\int 2\gamma u_x^2 dx \\
&\int (-2fu_{xx})dx = \int 2f_x u_x dx
\end{aligned}$$

Δηλαδή η δεύτερη εξίσωση είναι :

$$\frac{d}{dt}\int (u_x^2 - \frac{u^3}{3})dx + \int (2\gamma(u_x^2 - \frac{u^3}{2}) + fu^2 - 2f_x u_x)dx = 0 \tag{3.2.13}$$

Η τρίτη εξίσωση προκύπτει έπειτα από αρκετές πράξεις και είναι :
(3.0.27), (3.2.11) $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\int(\frac{9}{5}u_{xx}^2 - 3uu_x^2 + \frac{1}{4}u^4)dx + \int[\gamma(\frac{18}{5}u_{xx}^2 + 6u^2u_{xx} + 3uu_x^2 + u^4) -$$
$$-(\frac{18}{5}f_{xx}u_{xx} + 6ufu_{xx} + 3fu_x^2 + fu^3)]dx = 0 \tag{3.2.14}$$

Σε αυτό το σημείο θα δείξουμε ότι από αυτές τις τρεις εξισώσεις προκύπτουν ομοιόμορφα ως προς το χρόνο φράγματα για την τροχιά $\{u(t),\ t \geq 0\}$.

Πρόταση 3.2.4. *Έστω $\gamma > 0$ και $f \in H^2$ δεδομένα. Τότε υπάρχει μια σταθερά $\rho_2 = \rho_2(\gamma, \|f\|_2)$ τέτοια ώστε για κάθε $R > 0$, υπάρχει $T_2(R)$ έτσι ώστε*

$$\|S(t)u_0\|_2 \leq \rho_2,\ \forall u_0 \in H^2, \quad \|u_0\|_2 \leq R,\ \forall t \geq T_2(R) \tag{3.2.15}$$

Με άλλα λόγια η κλειστή μπάλα στον H^2

$$B_2 = \{v \in H^2 : \|v\|_2 \leq \rho_2\} \tag{3.2.16}$$

είναι ένα φραγμένο απορροφητικό σύνολο για την ημιομάδα $\{S(t)\}$, δηλαδή για κάθε φραγμένο σύνολο $B \in H^2$, υπάρχει $T_2(B)$ έτσι ώστε

$$S(t)B \subset B_2, \quad \forall t \geq T_2(B). \tag{3.2.17}$$

Απόδειξη. Από τις εξισώσεις (3.2.12), (3.2.13), (3.2.14) θα προκύψουν τα φράγματα των $|S(t)u_0|_0$, $|S(t)u_0|_1$ και $|S(t)u_0|_2$ αντίστοιχα. Έτσι από την (3.2.12) έχουμε

$$\frac{d}{dt}|u|_0^2 + 2\gamma|u|_0^2 \leq 2\int fu dx \Rightarrow$$
$$\frac{d}{dt}|u|_0^2 + 2\gamma|u|_0^2 \leq 2|f|_0|u|_0 \Rightarrow$$
$$\frac{d}{dt}|u|_0 + \gamma|u|_0 \leq |f|_0 \Rightarrow$$
$$e^{\gamma t}\frac{d}{dt}|u|_0 + e^{\gamma t}\gamma|u|_0 \leq e^{\gamma t}|f|_0 \Rightarrow$$
$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}(e^{\gamma\tau}|u|_0)d\tau \leq \int_0^t e^{\gamma\tau}|f|_0 d\tau \Rightarrow$$
$$e^{\gamma t}|u|_0 - |u_0|_0 \leq |f|_0(e^{\gamma t} - 1)/\gamma \Rightarrow$$
$$|S(t)u_0|_0 = |u|_0 \leq |u_0|_0 e^{-\gamma t} + |f|_0(1 - e^{-\gamma t})/\gamma \tag{3.2.18}$$

Δηλαδή το $S(t)u_0$ είναι ομοιόμορφα φραγμένο στον L^2 και για

$$t \geq T_0(u_0) = \frac{1}{\gamma}Log\frac{\gamma|u_0|_0}{|f|_0}$$

έχουμε

$$e^{-\gamma t} \leq e^{-\gamma T_0(u_0)} = \exp(-Log\frac{\gamma|u_0|_0}{|f|_0}) = \frac{|f|_0}{\gamma|u_0|_0}$$

Άρα από την (3.2.18) έχουμε

$$|S(t)u_0|_0 \leq 2|f|_0/\gamma \quad \gamma\iota\alpha \quad t \geq T_0(u_0) = \frac{1}{\gamma}Log\frac{\gamma|u_0|_0}{|f|_0} \tag{3.2.19}$$

Τώρα θεωρούμε την εξίσωση (3.2.13) και παρατηρούμε ότι η ποσότητα

$$\phi(u) = \int \left(u_x^2 - \frac{u^3}{3} \right) dx \tag{3.2.20}$$

φράσσεται από κάτω ως εξής :

$$\phi(u) \geq \frac{1}{2}|u|_1^2 - \frac{2^{1/3}}{4}|u|_0^{10/3} - |u|_0^3. \tag{3.2.21}$$

Πράγματι αυτή η ανισότητα προκύπτει από τα ακόλουθα χρησιμοποιώντας και την ανισότητα Young :

$$\begin{aligned}
&\left| \int u_x^2 dx \right| \leq |\sup_{x\in[0,L]}(u)|| \int u^2 dx| \leq |u|_{L^\infty}|u|_0^2 \leq \\
&|u|_0^{5/2}(2|u|_1 + |u|_0)^{1/2} \leq |u|_0^{5/2}(\sqrt{2}|u|_1^{1/2} + |u|_0^{1/2}) \leq \\
&\frac{1}{2}|u|_1^2 + \frac{3\cdot 2^{1/3}}{4}|u|_0^{10/3} + |u|_0^3
\end{aligned} \tag{3.2.22}$$

Άρα έχουμε

$$\begin{aligned}
&\int (-\frac{u^3}{3})dx \geq -\frac{1}{2}|u|_1^2 - \frac{2^{1/3}}{4}|u|_0^{10/3} - |u|_0^3 \Rightarrow \\
&\int u_x^2 dx - \int \frac{u^3}{3} \geq |u|_1^2 - \frac{1}{2}|u|_1^2 - \frac{2^{1/3}}{4}|u|_0^{10/3} - |u|_0^3 \Rightarrow \\
&\phi(u) \geq \frac{1}{2}|u|_1^2 - \frac{2^{1/3}}{4}|u|_0^{10/3} - |u|_0^3
\end{aligned} \tag{3.2.23}$$

Τώρα για να υπολογίσουμε ένα φράγμα για τον δεύτερο όρο της (3.2.13) παρατηρούμε ότι γράφεται ως εξής :

$$\int (2\gamma(u_x^2 - \frac{1}{2}u^3) + fu^2 - 2f_x u_x)dx = \gamma\phi(u) + \xi(u)$$

όπου

$$\xi(u) := \gamma|u|_1^2 - \frac{2}{3}\gamma \int u^3 dx + \int (fu^2 - 2f_x u_x)dx$$

Χρησιμοποιώντας και πάλι την (3.2.22), βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\xi(u) &\geq -\frac{3}{2\gamma}|f|_1^2 - \frac{2^{1/3}}{2}\gamma|u|_0^{10/3} - \frac{2}{3}\gamma L^{-1/2}|u|_0^2 - |f|_\infty |u|_0^2 \Rightarrow \\
-\xi(u) &\geq \frac{3}{2\gamma}|f|_1^2 + \frac{2^{1/3}}{2}\gamma|u|_0^{10/3} + \frac{2}{3}\gamma L^{-1/2}|u|_0^2 + |f|_\infty |u|_0^2
\end{aligned} \tag{3.2.24}$$

Έτσι η εξίσωση (3.2.13) γράφεται

$$\frac{d\phi(u(t))}{dt} + \gamma\phi(u(t)) = -\xi(u(t))$$

Οπότε από τις (3.2.24) και (3.2.18) βρίσκουμε

$$\frac{d\phi(u(t))}{dt} + \gamma\phi(u(t)) \leq K_1(u_0)e^{-\gamma t} + K_2, \tag{3.2.25}$$

Όπου

$$
\begin{aligned}
K_1(u_0) &= \frac{2^{1/3}}{2}\gamma|u_0|_0^{10/3} + \frac{2}{3}\gamma|u_0|_0^3 + |f|_\infty|u_0|_0^2, \\
K_2 &= \frac{3}{2\gamma}|f|_1^2 + \frac{2^{1/3}}{2}|f|_0^{10/3}\cdot\gamma^{-7/3} + \frac{2}{3}|f|_0^3\cdot\gamma^{-3} + |f|_\infty\cdot|f|_0^2\cdot\gamma^{-2}
\end{aligned}
$$

Τώρα πολλαπλασιάζουμε την (3.2.25) με $e^{\gamma t}$, ολοκληρώνουμε την ανίσωση που προκύπτει στο $[0, t]$ και βρίσκουμε

$$\phi(u(t)) \leq (\phi(u_0) + K_1(u_0)t)e^{-\gamma t} + K_2(1 - e^{-\gamma t})\gamma^{-1}. \tag{3.2.26}$$

και χρησιμοποιώντας την (3.2.22) παίρνουμε

$$\phi(u(t)) \leq \left(\frac{3}{2}|u_0|_1^2 + \frac{2^{1/3}\cdot 3}{4}|u_0|_0^{10/3} + |u_0|_0^3 + K_1 t\right)\cdot e^{-\gamma t} + K_2/\gamma \tag{3.2.27}$$

Έτσι θεωρώντας τα φράγματα (3.2.23) και (3.2.27) για την $\phi(u)$ μπορεί κανείς να δείξει ότι το $|u(t)|_1 = |S(t)u_0|_1$ παρμένει φραγμένο καθώς $t \to \infty$. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας ξανά την (3.2.18) και τη μέθοδο που μας οδήγησε στην (3.2.19), μπορούμε να βρούμε ένα $\rho_1 = \rho_1(\gamma, f)$ και ένα $T_1(u_0)$, το οποίο εξαρτάται από το $\|u_0\|_1$, τέτοιο ώστε

$$\|S(t)u_0\|_1 \leq \rho_1, \quad \forall T_1(u_0). \tag{3.2.28}$$

Τέλος για την παραγωγή της (3.2.15) και την ολοκλήρωση της απόδειξης μπορεί κανείς να υπολογίσει ένα φράγμα για το $|u(t)|_2 = |S(t)u_0|_2$ ξεκινώντας από την (3.2.14). Όπως και προηγουμένως θέτουμε

$$\psi(u) = \frac{9}{5}|u|_2^2 + \int((u^4/4) - 3uu_x^2)dx \tag{3.2.29}$$

και ξαναγράφουμε την (3.2.14) ως

$$\frac{d}{dt}\psi(u(t)) + \gamma\psi(u(t)) = -\eta(u(t)). \tag{3.2.30}$$

Και εδώ ο σημαντικός όρος του $\psi(u)$ είναι ο $\frac{9}{5}|u|_2^2$ και το $\eta(u)$ είναι φραγμένο από μια έκφραση που εμπεριέχει μόνο το $\|u\|_1$ και όχι το $|u|_2$. Έτσι η απόδειξη της (3.2.15) προκύπτει από την (3.2.30) όπως και η απόδειξη της (3.2.28) ήταν συνέπεια της (3.2.25). □

Τέλος θα αναφέρουμε το θεώρημα ύπαρξης του ολικού ελκυστή.

Θεωρημα 3.2.5. *Θεωρούμε την ημιομάδα τελεστών*

$$
\begin{aligned}
S(t) : H^2 &\to H^2 \\
u_0 &\to S(t)u_0 = u(t).
\end{aligned}
$$

για την οποία υπάρχει η απορροφητική σφαίρα B_2 και υποθέτουμε ότι ο $S(t)$ είναι ασυμπτωτικά συμπαγής, δηλαδή αν $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία με $t_n \to +\infty$ καθώς $n \to +\infty$ και

$$u_{0,n} \rightharpoonup u_0,$$

στον H^2, τότε

$$S(t_n)u_{0,n} \to S(t)u_0.$$

Τότε το $\omega(B_2) = \mathcal{A}$ είναι ολικός ελκυστής για την ημιομάδα $S(t)$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ολοκληρώνουμε την παρουσίαση της εργασίας παραθέτοντας ορισμένα αποτελέσματα που αφορούν συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, τα οποία χρησιμοποιήθηκαν κατά την παρουσίαση του θεωρήματος ύπαρξης λύσης για την εξίσωση KdV. Τις αποδείξεις των ακόλουθων προτάσεων και θεωρημάτων μπορεί να βρει κανείς στο **[2]**.

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ PEANO.

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = y_0 \tag{3.2.31}$$

για $x : [t_0 - c, t_0 + c] \to Y$ όπου Y είναι χώρος Banach.

Θεωρημα. 4.0.1. *(Γενικευμένο θεώρημα του Peano). Έστω $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in Y$ και*

$$Q_b = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times Y : |t - t_0| \leq a, \ \|y - y_0\| \leq b\},$$

όπου, $0 < a, b < \infty$ σταθερές. Έστω ότι ο $f : Q_b \to Y$ είναι συμπαγής τελεστής και ότι $\|f(t, y)\| \leq K$ για κάθε $(t, y) \in Q_b$ για σταθερό $K > 0$. Θέτουμε $c = \min(a, b/K)$. Τότε το πρόβλημα (3.2.31) έχει μια συνεχώς διαφορίσιμη λύση στο $[t_0 - c, t_0 + c]$.

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ PICARD-LINDELOF.

Θεωρημα. 4.0.2. *Έστω $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in Y$, και*

$$Q_b = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times Y : |t - t_0| \leq a, \ \|y - y_0\| \leq b\},$$

όπου, $a, b > 0$ σταθερές. Έστω $f : Q_b \to Y$ συνεχής και

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall \ (t, x), \ (t, y) \in Q_b,$$

και

$$\|f(t, y)\| < K, \quad \forall \ (t, y) \in Q_b,$$

όπου $L \geq 0$ και $K > 0$ σταθερές. Επιλέγουμε ένα c τέτοιο ώστε $0 < c < a$ και $Kc < b$. Τότε ισχύουν το πρόβλημα αρχικών τιμών (3.2.31) έχει ακριβώς μια συνεχώς διαφορίσιμη λύση $x(\cdot)$ στο διάστημα $[t_0 - c, t_0 + c]$.

ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ.

Προταση. 4.0.1. *Έστω $0 < T < \infty$, και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια αύξουσα C^1 συνάρτηση. Έστω ότι οι C^1 συναρτήσεις u, $v : [0, T] \to \mathbb{R}$ ικανοποιούν τις σχέσεις*

$$\begin{aligned} u' &\leq f(u) \ \ \sigma\tau o \ \ [0, T], \\ v' &= f(v) \ \ \sigma\tau o \ \ [0, T], \\ u(0) &\leq v(0). \end{aligned}$$

Τότε ισχύει η εξής ανισότητα

$$u(t) \quad \leq \quad v(t) \quad \sigma\tau o \ [0, T].$$

ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ Ε-ΞΙΣΩΣΕΩΝ.

ΠΡΟΤΑΣΗ. 4.0.2. *Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών*

$$\begin{aligned} u'(t) &= F(u(t)) \ \sigma\tau o \ J, \\ u(t_0) &= u_0, \end{aligned} \tag{3.2.32}$$

όπου J είναι ένα πραγματικό, πεπερασμένο ή άπειρο διάστημα με $t_0 \in J$, δηλαδή $J \subseteq \mathbb{R}$, και η απεικόνιση F είναι της μορφής

$$F : X \to X,$$

όπου X είναι χώρος $Banach$. Έστω $u_0 \in X$, γνωστό. Επίσης υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας θετικός αριθμός c τέτοιος ώστε αν $u : J_0 \to X$ είναι λύση του προβλήματος (3.2.32) σε ένα υποδιάστημα J_0 του J, τότε

$$\|u(t)\| \leq c \ \sigma\tau o \ J_0.$$

Τότε το πρόβλημα (3.2.32) έχει λύση στο J αν η F είναι συνεχής, φραγμένη σε φραγμένα σύνολα και τοπικά $Lipschitz$ συνεχής.

ΟΡΙΑ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΙΣΟΣΥΝΕΧΕΙΑ.

ΠΡΟΤΑΣΗ. 4.0.3. *Έστω ότι το όριο*

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

υπάρχει για κάθε x σε ένα πυκνό υποσύνολο του M και ότι το σύνολο $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ισοσυνεχές στο M. Τότε το όριο υπάρχει για κάθε $x \in M$ και το όριο της ακολουθίας $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f : M \to Y$ είναι συνεχές.

Βιβλιογραφία

[1] R. Temam. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, 2^{nd} ed. Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, (1997).

[2] E. Zeidler. Nonlinear Functional Analysis and its Applications, Vols I, II, (Fixed Point Theorems, Monotone Operators). Springer-Verlag, New York, (1990).

[3] T. Kato, C.Y. Lai. Nonlinear Evolution Equations and the Euler Flow. Journal of Functional Analysis 56, 15-28, (1984).

[4] J.M. Chidaglia. Weakly Damped Forced Korteweg de Vries Equations Behave as a Finite Dimensional Dynamicl System in the Long Time. Journal of Differential Equations, Vol. 74, No 2, August 1998.

[5] G. L. Lamb, Jr. Elements of Soliton Theory. Pure and Applied Mathematics, John Wiley & Sons, (1980).

[6] J. L. Bona and R. Smith, The initial value problem for the Korteweg - de Vries equation, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 278 (1975), 555-604.