ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΩΝ ΣΥΜΒΟΛΑΙΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΘΕΩΡΙΑΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΕ ΑΠΕΙΡΟΔΙΑΣΤΑΤΟ ΧΩΡΟ.

ΜΑΥΡΟΥΔΗ ΒΑΣΙΛΙΚΗ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΓΙΑΝΝΑΚΟΠΟΥΛΟΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ Μ.Π.Σ. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΣΤΙΣ ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ

ΣΑΜΟΣ ΝΟΕΜΒΡΗΣ 2006

Πρόλογος

Η βελτιστοποίηση είναι πλούσια σε μαθηματικά εργαλεία και ιδιαίτερα οι ιδιότητες των μεγιστοποιητών και των ελαχιστοποιητών των συναρτήσεων που μελετάμε βασίζονται στην πληθώρα τεχνικών που προέρχονται από την μαθηματική ανάλυση, τις τοπολογικές έννοιες και τις γεωμετρικές ιδέες. Επίσης σπουδαίο ρόλο στη ανάλυση τέτοιων προβλημάτων έχει και η κυρτή θεωρία η οποία επιτυγχάνει να τα απλουστεύσει και να «οδηγήσει» την κλασική ανάλυση στα παρακλάδια της μοντέρνας ανάλυσης.

Συγκεκριμένα, το πρώτο κεφάλαιο μας εισάγει στην έννοια της ασφάλισης. Κατ΄αρχήν η αιτία της ασφάλισης είναι οι κίνδυνοι οπότε για καλύτερη διαχείριση τους χωρίζουμε στα είδη και στους παράγοντες που τους προκαλούν. Σε συνδιασμό όμως με τους κινδύνους οι τελικές αποφάσεις εξαρτώνται από τις προσωπικές επιλογές μας που ταξινομούνται με την βοήθεια της σχέσης προτίμησης και τον βαθμό κινδύνου. Μετά λοιπόν από τον προβληματισμό γύρω από το θέμα των κινδύνων είναι βέβαιο ότι μας απασχολούν οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να τους αντιμετωπίσουμε δηλαδή η κράτηση, η μεταφορά, η αποφυγή, ο έλεγχος ζημιών και η ασφάλιση.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζουμε την θεωρία με την οποία μπορούμε να επιλύσουμε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης σε άπειρες διαστάσεις. Συγκεκριμένα αναφέρουμε την παράγωγο *Gâteaux*, την παράγωγο *Fre'chet* και τις σχέσεις που συναιπάγουν την ύπαρξη μεγιστοποιητών. Άλλα πολύτιμα εργαλεία είναι ο πολλαπλασιαστής Lagrange, η συνθήκη Karush-Kuhn-Tucker, το υποδιαφορικό και η δυϊκότητα.

Στο κεφάλαιο 3, που είναι και το κυριότερο, ορίζουμε το συγκεκριμένο πρόβλημα που μας απασχολεί και σχετίζεται με την συνάρτηση αποζημίωσης (που ανήκει σε χώρο άπειρων διαστάσεων), την συνάρτηση ασφαλίστρου, τον αρχικό πλούτο και την τυχαία μεταβλητή που εκφράζει την ζημιά. Η μελέτη μας στηρίζεται κυρίως σε τοπολογικές έννοιες όπως το σύνορο και το εσωτερικό ενός συνόλου τα οποία εκφράζουν τα φαινόμενα της απαλλαγής, της πλήρης αποζημίωσης και της συνασφάλισης και απεικονίζονται στο σχήμα 1. Τα βασικά σημεία στα οποία επικεντρωνόμαστε είναι η Πρόταση 3.1 όπου έχουμε την σχέση που συνδέει την συνάρτηση κόστους με την ωφελιμότητα και την Πρόταση 3.2 που αναφέρεται στην βελτιστοποίηση της συνάρτησης αποζημίωσης σε σχέση με το μέγεθος των συναρτήσεων κόστους γεγονός άμεσα συνδεδεμένο με το αν θα αναλάβουμε την ασφάλιση.

Στο κεφάλαιο 4 αναφέρονται τα τελικά αποτελέσματα στα οποία καταλήγουμε από το κεφάλαιο 3.

Το κεφάλαιο 5 περιέχει όλες τις απαραίτητες μαθηματικές έννοιες που περιέχει η εργασία καθώς και κάποιες αποδείξεις Προτάσεων, Θεωρημάτων και Λημμάτων που χρησιμοποιήθηκαν.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Κίνδυνος-Ασφάλιση

Κεφάλαιο 2

Βελτιστοποίηση σε άπειρες διαστάσεις

Κεφάλαιο 3

Εφαρμογή της θεωρίας βελτιστοποίησης στον σχεδιασμό ασφαλιστικών συμβολαίων

Κεφάλαιο 4

Κεφάλαιο 5

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΜΕΡΟΣ Α

ΜΕΡΟΣ Β

Κεφάλαιο 1

Κίνδυνος-Ασφάλιση

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την δημιουργία της ασφαλιστικής θεωρίας και των ασφαλιστικών συμβολαίων των οποίων στοχεύουμε στην βελτιστοποίησή τους.

Ορισμός 1.1 Με την έννοια του **κινδύνου** εννοούμε την αβεβαιότητα ή την έλλειψη γνώσης σχετικά με ένα ζημιογόνο ενδεχόμενο.

Άρα για να υπάρχει κίνδυνος θα πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον δύο ενδεχόμενα και το ένα να μην είναι επιθυμητό. Διαφορετικά, αν γνωρίζουμε με σιγουριά ή πιθανότητα 1 τι πρόκειται να συμβεί τότε δεν αντιμετωπίζουμε κίνδυνο.

1.1 Είδη κινδύνων

Το «βάρος» των κινδύνων επωμίζονται οι ασφαλιστές και ανάλογα με το είδος των κινδύνων αποφασίζουν για το αν θα τους αναλάβουν και το οικονομικό αντίτιμο που θα τους αντιστοιχίσουν. Για το λόγο αυτό δημιουργήθηκαν οι παρακάτω κατηγορίες.

Στη περίπτωση που οι ασφαλιστές αναλάβουν τους κινδύνους έχουμε τους ονομαζόμενους **«καθαρούς κινδύνους»** (pure risks), οι οποίοι είναι καταστάσεις, στις οποίες υπάρχουν μόνο οι πιθανότητες απώλειας ή μη απώλειας.

Παράδειγμα. Οι ασφαλιστές δεν ασφαλίζουν την πιθανή χρηματική ζημία που μπορεί να επέλθει όταν κάποιος παίζει στο χρηματιστήριο, στο καζίνο και σε περιπτώσεις που μπορεί να προκύψει κέρδος ή ζημιά, τους λεγόμενους **«κερδοσκοπικούς κίνδυνους»** (speculative risks).

Διακρίνουμε, επίσης, τους **«στατικούς κινδύνους»**, στους οποίους οι κίνδυνοι υπάρχουν σε ένα δεδομένο περιβάλλον και συνδέονται με απώλειες από την μη ομαλή λειτουργία της φύσης ή λάθη και παραλείψεις των ανθρώπων.

Παράδειγμα. Οι σεισμοί, τα τροχαία και τις περισσότερες φορές οι κίνδυνοι αυτής της κατηγορίας ασφαλίζονται.

Αντίθετα, οι **«δυναμικοί κίνδυνοι»** συνδέονται με ένα μεταβαλλόμενο περιβάλλον όπως οι τεχνολογικές μεταβολές.

Μια άλλη κατηγορία κινδύνων που ξεχωρίζουμε είναι οι **«γενικευμένοι κίνδυνοι»** που επηρεάζουν όλη την οικονομία ή μεγάλο αριθμό ατόμων ή ομάδων στην οικονομία, για παράδειγμα, η υψηλή εγκληματικότητα, οι πόλεμοι.

Αντίθετα, οι **«ειδικοί κίνδυνοι»** επηρεάζουν μόνο τα άτομα και όχι την κοινωνία, το σύνολο.

Παράδειγμα. Η κλοπή του αυτοκινήτου μας δεν ενδιαφέρει άμεσα το σύνολο αλλά έμμεσα, διότι δημιουργεί προβληματισμό για το ποιος θα είναι το επόμενο θύμα κλοπής.

1.2 Λοταρίες

Γενικά δημιουργείται μια αβεβαιότητα που σχετίζεται με τις διαφορετικές εκδοχές της οικονομίας (διαφορετικές επιλογές) από τις οποίες μόνο μια θα εμφανιστεί αλλά δεν είναι γνωστό από πρίν ποιά ακριβώς. Μπορούμε λοιπόν να προσαρτήσουμε μια πιθανότητα για την εμφάνιση της κάθε επιλογής. Πολλές φορές η κάθε πιθανή εκδοχή ονομάζεται κατάσταση του κόσμου. Η συνολική επιλογή ονομάζεται λοταρία (lottery).

Ορισμός 1.2.1 Ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να έχουμε διαφορετικές επιλογές $X_1,...,X_S$ από τις οποίες μια μόνο θα πραγματοποιηθεί αλλά δεν είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε με βεβαιότητα ποιά. Θεωρούμε ότι η επιλογή X_i μπορεί να πραγματοποιηθεί με πιθανότητα p_i, $i=1,...,S$. Η συνολική μας επιλογή X ονομάζεται λοταρία και συμβολίζεται

$$L = p_1 \circ X_1 \oplus p_2 \circ X_2 \oplus ... \oplus p_S \circ X_S$$

Τα X_i μπορεί να είναι χρηματικά ποσά, αγαθά και άλλα. Το σύνολο όλων των λοταριών συμβολίζεαται L .

Σχόλιο 1.2.1 Μια εναλλακτική θεώρηση της λοταρίας είναι σαν μια τυχαία μεταβλητή X η οποία έχει κατανομή πιθανότητας $P(X = X_i) = p_i$.

Παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι ένα άτομο αγοράζει ένα λαχνό κάποιου λαχείου. Ο πρώτος λαχνός αντιστοιχεί στο ποσό X_1, ο δεύτερος λαχνός στο ποσό X_2 και ο τρίτος λαχνός στο ποσό X_3. Τέλος υπάρχει πάντοτε η περίπτωση ο κάτοχος του λαχείου να μην κερδίσει τίποτα $X_4 = 0$. Η πιθανότητα να τύχει ο πρώτος λαχνός είναι p_1, ο δεύτερος p_2, ο τρίτος p_3 και η πιθανότητα να μην κερδίσει τίποτα είναι $p_4 = 1 - p_1 - p_2 - p_3$. Το λαχείο λοιπόν αντιστοιχεί στην λοταρία $L = p_1 \circ X_1 \oplus p_2 \circ X_2 \oplus p_3 \circ X_3 \oplus p_4 \circ X_4$. Στην περίπτωση αυτή τα «βραβεία» μπορεί να εκφραστούν με θετικούς πραγματικούς αριθμούς, $X_i \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 1.2.2 Ας υποθέσουμε ότι ένα άτομο έχει να αντιμετωπίσει μια σειρά από αβέβαιες επιλογές $L_1,...,L_K$ κάθε μια από τις οποίες μπορεί να θεωρηθεί σαν μια απλή λοταρία. Η κάθε μια από τις επιλογές αυτές θα πραγματοποιηθεί με πιθανότητα π_K. Η συνολική αυτή απόφαση θα ονομάζεται σύνθετη λοταρία και θα συμβολίζεται

$$L = \pi_1 \circ L_1 \oplus \pi_2 \circ L_2 \oplus \ldots \oplus \pi_K \circ L_K$$

Με τον παρακάτω ορισμό μας δίνεται η δυνατότητα γενίκευσης της διαδικασίας απλοποίησης σύνθετων λοταριών με περισσότερα βραβεία.

Ορισμός 1.2.3 Θα υιοθετήσουμε τις παρακάτω υποθέσεις για μια λοταρία

(Υ1) $1 \circ X_1 \oplus (1-1) \circ X_2 \oplus \ldots \oplus (1-1) X_S \sim X_1$ δηλαδή το να λάβουμε ένα βραβείο με πιθανότητα 1 είναι το ίδιο με το λάβουμε ένα βραβείο σίγουρα.

(Υ2) $p_1 \circ X_1 \oplus p_2 \circ X_2 \oplus \ldots \oplus p_K X_K \sim p_2 \circ X_2 \oplus p_1 \circ X_1 \oplus \ldots \oplus p_K X_K \sim \ldots$, δηλαδή το άτομο δεν ενδιαφέρεται για την σειρά με την οποία μπορεί να λάβει τα βραβεία αν η πιθανότητα των διαφορετικών βραβείων δεν αλλάζει.

(Υ3) Έστω $\pi_i, p_{ij}, i = 1, \ldots, k, j = 1, \ldots, S$ θετικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\sum_{i=1}^{K} \pi_i$ και $\sum_{j=1}^{S} p_{ij} = 1$, $i = 1, \ldots, k$. Τότε $\oplus_{i=1}^{K} \pi_i \circ (\oplus_{j=1}^{S} p_{ij} \circ X_j) \sim \oplus_{j=1}^{S} (\sum_{i=1}^{K} \pi_i p_{ij}) \circ X_j$

1.3 Σχέσεις Προτίμησης

Στην πραγματικότητα όμως τον σπουδαιότερο ρόλο έχει η προσωπική μας επιλογή. Έστω ότι βρισκόμαστε ανάμεσα σε ποικιλία προτάσεων και συμβολίζουμε με X το σύνολο αυτό. Είμαστε αναγκασμένοι να κάνουμε τις επιλογές μας που θα δηλώνουν τις επιθυμίες μας. Για το λόγο αυτό ορίζουμε τη σχέση προτίμησης.

Ορισμός 1.3.1 Η **σχέση προτίμησης** συμβολίζεται με μια σχέση διάταξης, δηλαδή αν θέλουμε να εκφράσουμε ότι η προτιμησή μας στην επιλογή x είναι εξίσου επιθυμητή με την επιλογή y γράφουμε: $x \geq y$

Παράδειγμα. Έστω ότι έχουμε τρεις επιλογές για το μέρος που θα ταξιδεύσουμε. Μπορούμε να επισκευτούμε την Ζάκυνθο (Ζ), την Κρήτη (Κ) και την Σάμο(Σ). Άρα X ={Ζ,Κ,Σ}. Προτιμάμε όμως να πάμε στη Σάμο από την Κρήτη και αυτό εκφράζεται ως Σ ≥ Κ. Επίσης, προτιμάμε Ζάκυνθο από την Κρήτη επομένως Ζ ≥ Κ.

Ορισμός 1.3.2 Η σχέση ≥ που εκφράζει την προτίμηση των ατόμων ονομάζεται **ορθολογική** (rational) αν έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

- Πληρότητα όπου $\forall\ x, y \in X$ είτε $x \geq y$ ή $y \geq x$ είτε ισχύουν και τα δύο.

Η ιδιότητα αυτή σημαίνει ότι οι προτιμήσεις x και y μπορούν να συγκριθούν.

- Ανακλαστικότητα όπου $\forall\ x \in X$, $x \geq x$.

Είναι φανερό ότι μια επιλογή είναι τουλάχιστον εξίσου επιθυμητή με τον εαυτό της.

- Μεταβατικότητα όπου $\forall\ x, y, z \in X$ αν ισχύει $x \geq y$ και $y \geq z$ τότε $x \geq z$.

Άρα, αν η επιλογή x είναι τουλάχιστον εξίσου επιθυμητή με την επιλογή y και η επιλογή y είναι τουλάχιστον εξίσου επιθυμητή με την επιλογή z τότε η επιλογή x είναι τουλάχιστον εξίσου επιθυμητή με την επιλογή z.

Παρατήρηση. Η σχέση $\geq$ μοιάζει την σχέση $\geq$ στο σύνολο $\mathbb{R}$, μόνο που στη συγκεκριμένη περίπτωση το σύνολο προτιμήσεων X δεν είναι απαραίτητα το σύνολο $\mathbb{R}$ αλλά μπορεί να ορισθεί μια σχέση $\geq$ με τις ίδιες ιδιότητες.

Η σχέση $\geq$ ονομάζεται και σχέση ασθενούς προτίμησης. Επίσης, έχουμε και κάποιες παρεμφερείς σχέσεις όπως σχέση αυστηρής προτίμησης >. Για παράδειγμα, έστω ότι $x > y$, τότε επιλέγεται αυστηρά η προτίμηση x. Μια άλλη σχέση που συναντάμε είναι η σχέση αδιαφορίας $\approx$ (ή άλλος συμβολισμός ~) που ισχύει αν και μόνο αν $x \geq y$ και $y \geq x$ άρα αδιάφοροι για το ποια θα είναι η επιλογή.

Ορισμός 1.3.3 Η σχέση $\geq$ είναι συνεχής

I) Αν για κάθε $x \in X$ τα σύνολα $\Lambda^{+} := \{y \in X : y \geq x\} \subset X$ και $\Lambda^{-} := \{y \in X : x \geq y\} \subset X$ είναι κλειστά σύνολα ή ισοδύναμα

II) Αν $x_n, y_n, n = 1,2,...$ δύο ακολουθίες στοιχείων του X τέτοιες ώστε $x_n \geq y_n$, $n = 1,2,...$ και $x := \lim_{n\to\infty} x_n, y := \lim_{n\to\infty} y_n$ τότε $x \geq y$.

Ο ορισμός αυτός μας λέει ότι για επιλογές που είναι αρκετά κοντά (με την έννοια της μετρικής που έχουμε ορίσει στον X) η διάταξη τους με την σχέση προτίμησης δεν μεταβάλλεται δραματικά.

1.4 Σχέσεις προτίμησης στον χώρο των λοταριών

Θα θεωρήσουμε τώρα ότι μπορούμε να ορίσουμε σχέσεις προτιμήσεων στον χώρο των λοταριών L και ότι τα άτομα μπορούν να επιλέξουν ανάμεσα στις διαφορετικές λοταρίες. Η σχέση προτίμησης στον χώρο των λοταριών $\geq$ θα έχει τα χαρακτηριστικά των σχέσεων προτίμησης που αναπτύχθηκαν στην περίπτωση των επιλογών υπό συνθήκες αβεβαιότητας. Θα χρειαστεί να ορίσουμε και δύο νέες ιδιότητες οι οποίες θα μας χρησιμεύσουν στην μελέτη των σχέσεων προτίμησης υπό συνθήκες αβεβαιότητας.

Η πρώτη ιδιότητα είναι μια ιδιότητα που μας εξασφαλίζει ότι μικρές αλλαγές στις πιθανότητες δύο λοταριών δεν θα αλλάξουν τις προτιμήσεις μας μεταξύ των λοταριών ή ισοδύναμα μικρές αλλαγές στις πιθανότητες των διαφόρων βραβείων δεν θα αλλάξουν κατά πολύ τις προτιμήσεις μας. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται ιδιότητα της συνέχειας και αποτελεί γενίκευση της ιδιότητας της συνέχειας που είδαμε πριν.

Ορισμός 1.4.1 Η σχέση προτίμησης $\geq$ στον χώρο L ονομάζεται συνεχής αν για κάθε $L_1, L_2, L_3 \in \mathrm{L}$ τα σύνολα $\Lambda^{+} := \{\lambda \in [0,1] : \lambda L_1 + (1-\lambda) L_2 \geq L_3\} \subset [0,1]$ και $\Lambda^{-} := \{\lambda \in [0,1] : L_3 \geq \lambda L_1 + (1-\lambda) L_2\} \subset [0,1]$ είναι κλειστά.

Η δεύτερη ιδιότητα είναι το αξίωμα της ανεξαρτησίας, το οποίο μας λέει ότι αν αναμίξουμε δύο λοταρίες με μια τρίτη, η σχέση προτίμησης μεταξύ των δύο αρχικών λοταριών παραμένει αναλλοίωτη.

Ορισμός 1.4.2 Η σχέση προτίμησης $\geq$ ικανοποιεί το αξίωμα της ανεξαρτησίας αν για κάθε $L_1, L_2, L_3 \in \mathrm{L}$ και κάθε $\lambda \in [0,1]$ ισχύει

$$L_1 \geq L_2 \Rightarrow \lambda L_1 + (1-\lambda) L_3 \geq \lambda L_2 + (1-\lambda) L_3$$

1.5 Αποστροφή κινδύνου

Για να μελετήσουμε την αποστροφή κινδύνου θα ξεκινήσουμε από τον ορισμό της συνάρτησης ωφελιμότητας. Σκοπός μας είναι να αντιστοιχήσουμε την $\geq$ του συνόλου επιλογών X στις σχέσεις $\geq$ στο σύνολο $\mathbb{R}$ και για αυτό ορίζουμε μια συνάρτηση $u : X \to \mathbb{R}$.

Ορισμός 1.5.1 Η **συνάρτηση ωφελιμότητας** είναι μια συνάρτηση $u : X \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $x \geq y$ αν και μόνο αν $u(x) \geq u(y)$.

Με τον τρόπο αυτό η κάθε προτίμηση του ατόμου που ανήκει στο X γίνεται ένας πραγματικός αριθμός $u(x)$. Οπότε όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της συνάρτησης u τόσο πιο επιθυμητή είναι η επιλογή μας. Επίσης, αν για δύο επιλογές $x, y \in \mathrm{X}$ ισχύει $u(x) = u(y)$ τότε το άτομο είναι αδιάφορο ανάμεσα στις δύο επιλογές, $x \sim y$.

Επίσης, η ύπαρξη μιας συνεχούς συνάρτησης ωφελιμότητας u που μπορεί να περιγράψει τις προτιμήσεις των καταναλωτών έχει επακόλουθο ότι αν $u : \mathrm{L} \to \mathbb{R}$ τότε $L_1 \geq L_2 \Rightarrow u(L_1) \geq u(L_2)$.

Παράλληλα υπάρχει και η έννοια της **αναμενόμενης ωφελιμότητας** που εξασφαλίζει την ιδιότητα της μοναδικότητας στη συνάρτηση ωφελιμότητας.

Ορισμός 1.5.2 Μια συνάρτηση ωφελιμότητας u λέμε ότι ικανοποιεί την ιδιότητα της αναμενόμενης ωφελιμότητας αν ικανοποιεί την σχέση:

$$u(p_1 \circ X_1 \oplus \ldots \oplus p_s \circ X_s) = p_1 u(X_1) + \ldots + p_s u(X_s)$$

όπου X_i οι επιλογές που μπορούν να πραγματοποιηθούν με πιθανότητα p_i, $i = 1, \ldots, S$ σε S καταστάσεις του κόσμου.
Η τιμή της συνάρτησης ωφελιμότητας της λοταρίας (δηλαδή οι συνολικές επιλογές) είναι ίση με τη αναμενόμενη ωφελιμότητα των βραβείων.

Παρατήρηση. Η συνάρτηση αναμενόμενης ωφελιμότητας έχει την ιδιότητα να μεταφέρει τις πράξεις $\circ$ και $\oplus$ στις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της πρόσθεσης στο $\mathbb{R}$.

Αν για κάποιο άτομο ισχύει:

$$u(px + (1-p)y) \geq pu(x) + (1-p)u(y) := u(p \circ x \oplus (1-p) \circ y)$$

για δύο βραβεία x, y τότε έχουμε **αποστροφή του κινδύνου**, αφού προτιμάται το σίγουρο κέρδος από το αβέβαιο κέρδος της λοταρίας. Αν σχεδιάσουμε την συνάρτηση ωφελιμότητας στην περίπτωση της αποστροφής του κινδύνου παρατηρούμε ότι είναι μια συνάρτηση κυρτή που στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω.

Εκτός βέβαια από την γεωμετρική εικόνα για το μέγεθος της αποστροφής του κινδύνου έχουμε και το αριθμητικό μέγεθος, το μέγεθος της απολύτου αποστροφής στον κίνδυνο του Arrow-Pratt.

Ορισμός 1.5.3 Το **μέτρο απολύτου αποστροφής στον κίνδυνο των Arrow-Pratt** μιας συνάρτησης ωφελιμότητας u είναι η ποσότητα:

$$r(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

Ένα άτομο αποστρέφεται περισσότερο τον κίνδυνο όσο μεγαλύτερη είναι η ποσότητα $r(w)$ για την συνάρτηση ωφελιμότητας του. Η ποσότητα $r(w)$ είναι ένα τοπικό μέτρο αποστροφής κινδύνου, το οποίο αναφέρεται στην περιοχή κάποιου στοιχήματος και στην περιοχή ενός συγκεκριμένου αρχικού πλούτου w. Υπάρχουν, όμως, και ολικά μέτρα αποστροφής κινδύνου που ισχύουν για οποιαδήποτε w, για οποιοδήποτε στοιχήματα και μας απασχολεί ο συνολικός πλούτος του ατόμου.

Θα παραθέσουμε **τρία πιθανά ολικά μέτρα** που αφορούν την αποστροφή κινδύνου.

1. Ένα άτομο A με συνάρτηση ωφελιμότητας $u_A(w)$ αποστρέφεται περισσότερο τον κίνδυνο από ένα άτομο με συνάρτηση ωφελιμότητας $u_B(w)$ αν:
$$-\frac{u_A''(w)}{u_A'(w)} > -\frac{u_B''(w)}{u_B'(w)}$$

2. Ένα άτομο A με συνάρτηση ωφελιμότητας $u_A(w)$ αποστρέφεται περισσότερο τον κίνδυνο από ένα άτομο με συνάρτηση ωφελιμότητας $u_B(w)$ αν υπάρχει αύξουσα και αυστηρά κυρτή που στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω συνάρτηση G τέτοια ώστε:
$$u_A(w) = G(u_B(w))$$

3. Ένα άτομο A αποστρέφεται περισσότερο τον κίνδυνο από ένα άτομο B αν είναι διατεθειμένο να πληρώσει παραπάνω για την αποφυγή ενός συγκεκριμένου κινδύνου από το B. Θεωρώντας ότι το X είναι τυχαία μεταβλητή με $E(X)$ να συμβολίζει κάποια πιθανή απολαβή του ατόμου, ονομάζουμε $\pi_{\mathrm{A}}(X)$ το μέγιστο ποσό πλούτου που το άτομο A έχει την δυνατότητα να πληρώσει ώστε να αποφευχθεί η X. Το ποσό αυτό κατά κάποιο τρόπο είναι το ασφάλιστρο για τον κίνδυνο στον οποίο εκτίθεται το άτομο λόγω της αβεβαιότητας της αποδοχής X.
$$u_A(w - \pi_{\mathrm{A}}(X)) = E\left[u_A(w - X)\right]$$

Ένα άτομο A αποστρέφεται ολικά τον κίνδυνο, περισσότερο από ένα άτομο B αν $\pi_{\mathrm{A}}(X) > \pi_B(X)$ για κάθε πλούτο w.

Όπως δείχνει το θεώρημα του Pratt τα τρία αυτά μέτρα είναι ισοδύναμα.

Παρατήρηση. Το ασφάλιστρο που είναι διατεθειμένος να δεχθεί ένας ασφαλιστής για να αποδεχθεί τον κίνδυνο X, είναι τέτοιο ώστε $u(w) = E[u(w + \pi_A(X) - X)]$.

Μια άλλη σημαντική έννοια είναι η σχετική αποστροφή στον κίνδυνο.

Ορισμός 1.5.5 Η ποσότητα

$$\rho = -\frac{u''(w)w}{u'(w)}$$

ονομάζεται **μέτρο των Arrow-Pratt για την σχετική αποστροφή στον κίνδυνο**.

Η ποσότητα αυτή εκφράζει την σχετική αποστροφή απέναντι στον κίνδυνο επειδή σχετίζει την αποστροφή του κινδύνου με το μέγεθος του πλούτου του ατόμου. Η ερμηνεία του ορισμού είναι ότι ο πιο πλούσιος επενδυτής μπορεί να «αναλάβει» περισσότερο κίνδυνο από ένα επενδυτή με μικρότερη οικονομική επιφάνεια.

1.6 Ασφάλιση (insurance)

Στις προηγμένες κοινωνίες επικρατεί η αντίληψη της ασφάλισης, ώστε να προστατεύεται κανείς από πιθανές ζημιές και να νοιώθει το αίσθημα της ανθρώπινης αλληλεγγύης.

Ορισμός 1.6.1 Με τον όρο **ασφάλιση** εννοούμε την συγκέντρωση τυχαίων, απρόβλεπτων κινδύνων και την μεταφορά τους σε ασφαλιστές, που συμφωνούν, έναντι ασφαλίστρου, να αποζημιώσουν τους ασφαλισμένους για τις τυχαίες ζημιές ή να παρέχουν άλλες χρηματικές παροχές ή υπηρεσίες, που συνδέονται με τον κίνδυνο.

Μπορούμε να ασφαλίσουμε για παράδειγμα, από την κατοικία μας μέχρι και την ζωή μας, δηλαδή τα ασφαλιστικά συμβόλαια ασχολούνται με υλικές ζημίες αλλά και με τους ανθρώπους. Επομένως έχουμε τις Γενικές Ασφαλίσεις ή Ασφαλίσεις Ζημιών και τις Ασφαλίσεις Ζωής. Με την πρώτη κατηγορία ο ασφαλισμένος εισπράττει κάποιο ποσό από την Ασφαλιστική Εταιρία μόνο αν επέλθει κάποια ζημία στο χρονικό διάστημα της κάλυψης ενώ στις Ασφαλίσεις Ζωής το κεφάλαιο του ασφαλισμένου επιστρέφεται σχεδόν πάντα.

◊ **Βασικά χαρακτηριστικά της ασφάλισης** είναι:

1. Η συγκέντρωση κινδύνου (pooling risk)
2. Μεταφορά κινδύνου και μείωση αβεβαιότητας (risk transfer and risk reduction)
3. Αποζημίωση (indemnification)

Συγκέντρωση κινδύνου

Με την μέθοδο αυτή γίνεται ο καταμερισμός των απωλειών που συνέβησαν σε μερικούς ασφαλισμένους προς το σύνολο τους.

Παράδειγμα. Έχουμε 100 εργάτες που θέλουν να ασφαλιστούν για τυχόν εργατικό ατύχημα που μπορεί να συμβεί. Υποθέτουμε, επίσης, ότι το μέσο χρηματικό ποσό ζημιάς που αντιστοιχεί σε μια τέτοια περίπτωση είναι 100.000 ευρώ και κατά μέσο όρο συμβαίνει μια ζημιά το χρόνο. Άρα, ο κάθε εργάτης έχει να πληρώσει ασφάλιστρο 100.000 ευρώ /100 = 100 ευρώ.

Βασική προϋπόθεση της παραπάνω ενέργειας είναι η ύπαρξη μεγάλου αριθμού ομοιογενών κινδύνων, ώστε να ισχύει ο Νόμος των Μεγάλων Αριθμών.

Μεταφορά κινδύνου και μείωση αβεβαιότητας

Κύριος στόχος της ασφάλισης είναι η μεταφορά του κινδύνου, (που σχολιάσαμε παραπάνω) από τον ασφαλισμένο στον ασφαλιστή. Η μεταφορά μιας μεγάλης αβέβαιης ζημιάς έχει βέβαια και το αντίστοιχο οικονομικό αντίκτυπο που είναι το ασφάλιστρο. Ταυτόχρονα, ο ασφαλιστής αναλαμβάνει τον κίνδυνο αφού μπορεί, μέσω του Νόμου των Μεγάλων Αριθμών, να προβλέψει με σχετική ακρίβεια τις αναμενόμενες ζημιές.

Αποζημίωση

Έχει διάφορες μορφές όπως μετρητά, επισκευή και αντικατάσταση ανάλογα με την συμφωνία που έχει γίνει και σκοπό έχει να βοηθήσει τον ασφαλισμένο με την ζημία του. Βασικό χαρακτηριστικό της αποζημίωσης είναι ότι είναι αδύνατον να ξεπερνά την ζημιά μιας και σκοπός μας είναι η αποκατάσταση του κινδύνου και όχι το κέρδος.

◊ Προϋποθέσεις ασφάλισης

Αν και η χρησιμότητα της ασφάλισης είναι μεγάλη δεν ασφαλίζονται όλοι οι καθαροί κίνδυνοι και θα πρέπει να ισχύουν κάποιες **προϋποθέσεις**:

- Να υπάρχει μεγάλος αριθμός ομοειδών περιπτώσεων ώστε να εφαρμόζεται ο Νόμος των Μεγάλων Αριθμών. Στην περίπτωση που ο αριθμός των ασφαλισμένων προσώπων είναι μικρός, η θέση της ασφαλιστικής εταιρίας είναι λίγο καλύτερη απ' αυτή του ενός προσώπου.

- Η ζημιά να είναι τυχαία, απροσδόκητη και σε σχέση με το άτομο απρόβλεπτη. Επίσης, ζημιές που προκαλούνται από τα ίδια τα ασφαλισμένα άτομα, εξαιρούνται από οποιαδήποτε ασφαλιστική κάλυψη σύμφωνα με τα ασφαλιστικά συμβόλαια. Βασικό κριτήριο για τους ασφαλιστές στην περίπτωση αυτή, είναι το λεγόμενο ασφαλιστικό συμφέρον (insurance interest) όπου ο ασφαλισμένος πρέπει να έχει χάσει από την επέλευση του κινδύνου, για παράδειγμα ο ιδιοκτήτης περιουσιακών στοιχείων έχει ασφαλιστικό συμφέρον απέναντι στην περιουσία του, το ασφαλιστικό συμφέρον ενός μέλους μιας οικογένειας είναι η ασφάλεια ζωής των μελών της.

- Η ζημία να είναι καθορισμένη και μετρήσιμη (να έχει συγκεκριμένα αιτία, χρόνο, τόπο, ποσό). Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η περίπτωση της ασφάλισης λόγω ανικανότητας, όπου είναι δύσκολο να γνωρίζουμε αν η ζημιά για την οποία έχει ασφαλισθεί το άτομο έχει προκύψει πραγματικά. Έστω ότι ο ασφαλισμένος έχει μετά από κάποιο ατύχημα πρόβλημα στην όραση. Δεν ξέρουμε αν ισχύει η ασφάλιση ανικανότητας που έχει και καλύπτει το 30% της αρχικής του όρασης. Το γεγονός αυτό όμως μπορεί να προσδιορισθεί με την βοήθεια των κατάλληλων γιατρών και πληροφοριών σχετικών με το ατύχημα.

- Οι ζημίες να μην είναι συχνές και καταστροφικές ώστε και η ασφαλιστική εταιρία να μην είναι επιφυλακτική. Σε πολλές περιπτώσεις οι ασφαλιστές για να αντιμετωπίσουν μια τέτοια κατάσταση αναγκάζονται να μεταφέρουν μέρος των υποχρεώσεων τους σε άλλη ασφαλιστική εταιρία, με την μέθοδο της αντασφάλισης (underwriting).

- Η ζημία να μην είναι οικονομικά ασήμαντη. Κάθε πρόγραμμα ασφάλισης περιλαμβάνει μερικές επιβαρύνσεις ώστε να καλυφθούν τα έξοδα της ασφαλιστικής εταιρίας όπως τα έξοδα παραγωγής του ασφαλιστικού συμβολαίου, διοικητικά έξοδα και άλλα. Επομένως, αν οι ασφαλισμένες ζημιές είναι σχετικά μικρές σε σχέση με τα ασφάλιστρα είναι προτιμότερο να μην ασφαλισθεί το άτομο.

- Η πιθανότητα ζημίας να είναι μετρήσιμη, ώστε να μπορεί να υπολογισθεί η πιθανή οικονομική ζημιά με ικανοποιητική ακρίβεια. Για παράδειγμα, δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα ζημιάς που προκαλείται από την ανεργία ή τον πόλεμο αν και ξέρουμε ότι επηρεάζει αρνητικά όλα τα μέλη της κοινωνίας.

- Το ασφάλιστρο να είναι λογικό ώστε να μπορεί να πληρωθεί από το μεγαλύτερο ποσοστό των ασφαλισμένων χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία. Με τον τρόπο αυτό, η ασφάλιση εκτελεί το ανθρωπιστικό της έργο δίνοντας την ευκαιρία προστασίας στα περισσότερα μέλη της κοινωνίας, και ταυτόχρονα μεγιστοποιεί τα κέρδη της ασφαλιστικής εταιρίας, αφού έτσι προσελκύονται περισσότεροι πελάτες.

◊ Ασφάλιστρο

Το βασικό κομμάτι της ασφάλισης είναι το **ασφάλιστρο**, δηλαδή το τίμημα του κινδύνου ή διαφορετικά το ποσό που καταθέτει προκαταβολικά ο ασφαλισμένος στην ασφαλιστική εταιρία σαν αντάλλαγμα της πιθανής ζημιάς που μπορεί να συμβεί. Με την διαδικασία της τιμολόγησης υπολογίζεται το αντίτιμο της ασφάλισης με τους εξής τρόπους:

1. Εκτίμηση και εμπειρία
2. Ταξινόμηση κατά κλάσεις

3. Με προσαρμογή (δηλωτικά συμβόλαια)
4. Προϋπολογιστικά με βάση το εκτιμώμενο αποτέλεσμα

Συνήθως οι ασφαλιστικές εταιρίες αποφεύγουν την πλήρη ασφάλιση και χρησιμοποιούν για τον υπολογισμό ασφαλίστρου την **αρχή της ωφελιμότητας**. Η αρχή αυτή προσπαθεί να αιτιολογήσει τις αποκλίσεις τις μαθηματικής ελπίδας και παράλληλα υποστηρίζει ότι η χρήση της μαθηματικής ελπίδας δεν ενδείκνυται για τα χρηματικά ποσά. Το γεγονός αυτό, στηρίζεται στο ότι ένα χρηματικό ποσό δεν έχει την ίδια σημασία για όλα τα άτομα και υπό όλες τις συνθήκες και επομένως οι οικονομικές αποφάσεις που λαμβάνονται δεν επηρεάζονται αποκλειστικά από την αντικειμενική αξία του ποσού αλλά την σημασία του για τον ενδιαφερόμενο.

Παράδειγμα. Η αξία των 300 ευρώ είναι διαφορετική για κάποιον που έχει καταθέσεις εκατομμυρίων σε σύγκριση με κάποιον που έχει μηνιαίο εισόδημα 600 ευρώ. Άρα οι οικονομικές αποφάσεις κρίνονται από μια συνάρτηση ωφελιμότητας και η μαθηματική ελπίδα πρέπει να προσαρμόζεται στις τιμές αυτής της συνάρτησης.

Πολλές φορές παρατηρείται το φαινόμενο ενώ ο ασφαλισμένος έχει πληρώσει ετήσια ασφάλιστρα για κάποιο ασφαλιστικό πρόγραμμα, να ζητάει την επιστροφή των χρημάτων του, δηλαδή τη διάλυση του συμβολαίου πριν το χρόνο λήξης του με δικαίωμα επιστροφής των καταβληθέντων χρημάτων και των δημιουργηθέντων αποθεματικών.

Αιτίες της παραπάνω κατάστασης είναι κατ' αρχήν ότι η σύγχρονη νομοθεσία δεν επιτρέπει συμβάσεις οι οποίες υποχρεώνουν ή δεσμεύουν το άτομο για όλη τη ζωή του καθώς δεν επιτρέπουν και τον αθέμιτο πλουτισμό. Άλλος λόγος, επίσης, είναι η αλλαγή στην οικονομική κατάσταση του ασφαλισμένου ώστε να μην μπορεί να πληρώσει τα ασφάλιστρα. Επίσης, σε περιπτώσεις που η ασφάλεια έχει γίνει προς όφελος των κληρονόμων του ασφαλισμένου και οι κληρονόμοι πεθάνουν, δεν υπάρχει λόγος να συνεχίζεται η πληρωμή ασφαλίστρων. Άλλος βασικός λόγος, είναι ότι ο ασφαλισμένος μπορεί να μην έχει πλέον εμπιστοσύνη στον ασφαλιστή.

◇ Ασφαλιστικά συμβόλαια

Α. Πράξεις ασφαλιστικών συμβολαίων

Οι ασφαλιστικές εταιρίες σύμφωνα με την νομοθεσία εκτελούν ορισμένες **πράξεις επί των ασφαλιστικών συμβολαίων** οι κυριότερες είναι:

- Η εξαγορά του συμβολαίου, όπου ο ασφαλισμένος ζητάει την ακύρωση της ασφάλισης και συγχρόνως την εκκαθάριση της πιστώσεως του προς την ασφαλιστική εταιρία.
- Η περιστροφή ή αναγωγή του συμβολαίου, δηλαδή ο ασφαλισμένος ζητάει να απαλλαγεί από την καταβολή ασφαλίστρων, χωρίς να διακοπεί ή να μεταβληθεί η μορφή ή η λήξη της ασφάλισης. Με την

πράξη αυτή το αρχικό ασφαλισμένο κεφάλαιο αντικαθίσταται από άλλο, το οποίο ονομάζεται ελεύθερο.

- Η μετατροπή του συμβολαίου.

B. Από τι αποτελούνται συνήθως τα ασφαλιστικά συμβόλαια;

Τα ασφαλιστικά συμβόλαια αποτελούνται συνήθως από:

1. **Απαλλαγή** (deductible), όπως προαναφέραμε, είναι η μη καταβολή αποζημίωσης όταν η ζημιά του ασφαλισμένου είναι μικρότερη από κάποιο προσυμφωνημένο ποσό. Αν θεωρήσουμε Z το τελικό ποσό που πληρώνει η ασφαλιστική εταιρία, X την ζημία και d την απαλλαγή έχουμε:

$$Z = \begin{cases} 0 & X \le d \\ X - d & X > d \end{cases}$$

2. **Συνασφάλιση** (coinsurance), όπου η ασφαλιστική σύμβαση υπογράφεται από πολλούς ασφαλιστές, τους συμβαλλόμενους που αναλαμβάνουν από ένα τμήμα του κινδύνου το οποίο και αυτό αναγράφεται στο ασφαλιστικό συμβόλαιο. Αν έχουμε συνασφάλιση με ποσοστό a όπου $0 < a < 1$, Z το τελικό ποσό που πληρώνει η ασφαλιστική εταιρία και X την ζημία έχουμε:

$$Z = aX$$

3. **Ανώτερο όριο κάλυψης**. Στην περίπτωση που η ζημιά είναι μικρότερη από το όριο το άτομο αποζημιώνεται πλήρως και στην αντίθετη περίπτωση η αποζημίωση ισούται με το όριο. Αν θεωρήσουμε Z το τελικό ποσό που πληρώνει η ασφαλιστική εταιρία, X την ζημία και L το ανώτερο όριο κάλυψης έχουμε:

$$Z = \begin{cases} X & X \le L \\ L & X > L \end{cases}$$

Όλα αυτά έχουν διαφορετικές αρχικές συνθήκες που είναι ανάλογες με την συμπεριφορά των ατόμων, τις πληροφορίες που συλλέγουν, τον τύπο της ζημιάς (όπως φωτιά, πλημμύρα) και το είδος του διοικητικού κόστους που δημιουργείται από την ασφαλιστική εταιρία.

Επιπλέον, ο σχεδιασμός του ασφαλιστικού συμβολαίου που θα μας απασχολήσει εξαρτάται στενά από τις υποθέσεις που χρησιμοποιούμε για τις συναρτήσεις διοικητικών κόστων. Συνήθως υποθέτουμε ότι έχουμε κυρτές (convexity), κοίλες (concavity) ή σταθερές συναρτήσεις κόστους.

Γ. Κόστη ασφαλιστικών συμβολαίων

Τα κόστη διακρίνονται σε **σταθερά** (fixed costs), τα οποία δεν εξαρτώνται από την ποσότητα της παραγωγής, δηλαδή πρέπει να αντιμετωπίζονται ακόμα και αν δεν παράγεται τίποτα.

Επίσης, έχουμε και τα **μεταβλητά κόστη** (variable cost) που είναι τα κόστη τα οποία μεταβάλλονται ανάλογα με την παραγωγή και ισούνται με μηδέν όταν δεν παράγεται τίποτα.

Τα **συνολικά κόστη** (total cost) μιας εταιρίας είναι το άθροισμα των μεταβλητών και των σταθερών κόστων.

Η αύξηση συνολικού κόστους στην περίπτωση που η εταιρία αυξάνει την παραγωγή (quantity) κατά μια μονάδα ονομάζεται **οριακό κόστος** (marginal cost).

Οριακό κόστος = Αλλαγή στο συνολικό κόστος /Αλλαγή στην παραγωγή

Επίσης, υπάρχουν και τα **απορροφούμενα κόστη** (sunk costs) τα οποία έχουν είδη συμφωνηθεί και δεν γίνεται να διαγραφούν, δηλαδή δεν μπορούμε να τα αποφύγουμε όποια απόφαση και να πάρουμε.

Παράδειγμα. Έχουμε αγοράσει ένα εισιτήριο για το θέατρο, η τιμή του εισιτηρίου είναι ένα απορροφούμενο κόστος, γιατί ακόμα και αν αποφασίσουμε να μην πάμε, δεν υπάρχει τρόπος να πάρουμε τα χρήματα που έχουμε αρχικά δώσει.

Το αντίθετο ακριβώς είναι τα **ευκαιριακά κόστη** (opportunity cost), τα οποία πρέπει να εγκαταλείψουμε αν κάνουμε μια άλλη επιλογή.

Παράδειγμα. Έστω μια αυτοκινητοβιομηχανία έχει 100 αυτοκίνητα και δεν μπορεί να τα πουλήσει τότε τα κόστη των αυτοκινήτων είναι απορροφούμενα. Τα ευκαιριακά κόστη είναι τυχόν μικροζημιές είτε κάποιες αλλαγές που μπορεί να ζητηθούν.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον δημιουργούν τα **διοικητικά κόστη** που αποτελούνται από οικονομικές υποχρεώσεις, όπως μισθούς διοικητικού προσωπικού, έξοδα χώρων, εξοπλισμούς, επικοινωνιακά έξοδα, μεταφορικά έξοδα, κόστη σεμιναρίων, έξοδα για να καλυφθούν έκτακτες ανάγκες, έξοδα για να υπολογιστούν και να διοικηθούν τα διαθέσιμα χρηματικά ποσά, διαφημιστικά έξοδα, φόροι και τόκοι που εκκρεμούν, ασφάλειες και επιπλέον αποζημιώσεις που οφείλουν στην περίπτωση που συμβούν ζημιές.

Κεφάλαιο 2

Βελτιστοποίηση σε άπειρες διαστάσεις

Σκοπός της ενότητας αυτής είναι να παραθέσει τρόπους ώστε να αντιμετωπίσουμε προβλήματα άπειρων διαστάσεων τα οποία αναλύονται διαφορετικά σε σχέση με τα προβλήματα πεπερασμένων διαστάσεων αλλά παράλληλα έχουν και πολλές κοινές ιδιότητες.

2.1 Περιγραφή του γενικού προβλήματος βελτιστοποίησης σε άπειρες διαστάσεις

Ορίζουμε U ένα τοπολογικό χώρο με τοπολογία T , $J: U \to \overline{\mathbb{R}}$ μια συνάρτηση και $C \subset U$. Αναζητάμε λύσεις του προβήματος:

$$J(u) \to \max_{u \in C}$$

Αν θέλουμε να επεκτείνουμε την συνάρτηση σε σύνολο U έχουμε

$$\tilde{J}(u) := \begin{cases} J(u) & \text{αν } u \in C \\ +\infty & \text{αλλου} \end{cases}$$

και το πρόβλημα ξαναγράφεται ως

$$\tilde{J}(u) \to \max_{u \in U}$$

Στην περίπτωση που έχουμε περιορισμούς για $u \in C$ τότε μπορούμε πάντα να ορίσουμε $J(u) := +\infty$ αν $u \in C$ και για αυτό το λόγο το μέγιστο μπορεί να ορισθεί μόνο στο $U \setminus C$ αν J είναι συνάρτηση τέτοια ώστε: $\exists u_0 \in U : J(u_0) < +\infty$.

Διακρίνουμε όμως δύο είδη λύσεων τον τοπικό και τον ολικό μεγιστοποιητή.

Ορισμός 2.1 Ένα σημείο $u \in U$ ονομάζεται

α)**Τοπικός μεγιστοποιητής**, αν υπάρχει ανοιχτό σύνολο $V \subset U$ τέτοιο ώστε $u \in U$ και

$$J(u) \geq J(\upsilon), \quad \forall \upsilon \in V .$$

β)**Ολικός μεγιστοποιητής**, αν

$$J(u) \geq J(\upsilon), \quad \forall \upsilon \in U . \tag{2.1}$$

Στη συνέχεια θα δούμε ότι στην περίπτωση του τοπικού μεγιστοποιητή ομαλών συναρτήσεων χρησιμοποιούμε συνθήκες παραγώγου πρώτου και δευτέρου βαθμού, ενώ για τον ολικό μεγιστοποιητή περιοριζόμαστε μόνο στον ορισμό (σχέση 2.1). Φυσικά ο ολικός μεγιστοποιητής είναι και τοπικός μεγιστοποιητής αλλά γενικά δεν ισχύει το αντίθετο.

2.2 Ύπαρξη λύσεων

Για να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη λύσεων ενός γενικού προβλήματος βελτιστοποίησης χρειαζόμαστε τις έννοιες της συμπάγειας και της άνω-ημισυνέχειας.

Ορισμός 2.2.1 Ορίζουμε (U,T) ένα τοπολογικό χώρο και μια συνάρτηση $J:U\to\overline{\mathbb{R}}$. Η συνάρτηση J ονομάζεται **άνω-ημισυνεχής** στο $u\in U$ αν:

$$J(u)\geq \inf_{V\in \mathrm{T}}\ \sup_{\upsilon\in V} J(\upsilon)\,.$$

Στην περίπτωση που U είναι μετρικός χώρος, ο παραπάνω ορισμός με χρήση ακολουθιών είναι ισοδύναμος:
Η συνάρτηση J είναι άνω-ημισυνεχής στο u αν:

$$J(u)\geq \lim_{k\to\infty}\ \sup J(u_k) \tag{2.2}$$

για όλες τις ακολουθίες u_k που συγκλίνουν στο u.

Θεώρημα 2.2.1 Ορίζουμε $J:U\to\overline{\mathbb{R}}$ μια άνω-ημισυνεχή συνάρτηση και το σύνολο

$$\{u\in U\,/\,J(u)\geq M\}$$

να είναι μη κενό και συμπαγές για κάποια $M\in\mathbb{R}$. Στην περίπτωση αυτή υπάρχει ολικός μεγιστοποιητής της συνάρτησης

$$J(u)\to \max_{u\in U}$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.1 χρησιμοποιήσαμε την σχέση (2.2) αν και ο τοπολογικός μας χώρος είναι μη μετρικός.

Παρατήρηση. Το συμπέρασμα. του παραπάνω Θεωρήματος είναι ότι το σύνολο που αποτελείται από ολικούς μεγιστοποιητές του G είναι συμπαγές. Αυτό παρατηρείται διότι η κλειστότητα του συνόλου $\{u\in U\,/\,J(u)\geq M\}$, όπου βρίσκονται όλοι οι ολικοί μεγιστοποιητές, συνεπάγεται από την άνω-ημισυνέχεια.. Αυτό συμβαίνει γιατί για κάθε u που ανήκει στην κλειστότητα του G έχουμε: $a\geq J(u)\geq \inf_{V\in\mathrm{T}}\ \sup_{\upsilon\in V} J(\upsilon)\geq a$.

Για πεπερασμένων διαστάσεων προβλήματα, η συμπάγεια των συνόλων συνήθως δημιουργείται λόγω του φράγματος, γεγονός που δεν ισχύει για άπειρων διαστάσεων προβλήματα. Μια παρόμοια ιδιότητα ισχύει για τους χώρους Hilbert (και πιο γενικά για το δυϊκό χώρο Banach) που ονομάζεται μερικές φορές και Eberlein-Smullyan λήμμα:

Λήμμα 2.2.1 Ορίζουμε U ένα χώρο Hilbert και (u_k) μια φραγμένη ακολουθία στο U. Τότε υπάρχει μια ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία (u_{k_l}) τέτοια ώστε:

$$<\upsilon,u_{k_l}>\ \to\ <\upsilon,\tilde{u}>\qquad \forall\,\upsilon\in U\,,\quad \text{για κάποια } \tilde{u}\in U\,.$$

Επίσης, ανάλογη ιδιότητα ισχύει για το δυϊκό χώρο Banach:

Λήμμα 2.2.2 Ορίζουμε $U = B^*$ για κάποιο χώρο Banach B και (u_k) μια φραγμένη ακολουθία στο U. Τότε υπάρχει μια ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία (u_{k_l}) τέτοια ώστε:

$$< \upsilon, u_{k_l} > \ \to\ < \upsilon, \tilde{u} > \quad \forall \upsilon \in B, \quad \text{για κάποια } \tilde{u} \in U .$$

Σαν αποτέλεσμα του Θεωρήματος 2.2.1 και των παραπάνω Λημμάτων είναι η ύπαρξη ολικού μεγιστοποιητή που εξασφαλίζεται αν J είναι «αδύναμα» άνω-ημισυνεχής και $J(u) \geq M$ που σημαίνει περιορισμός στο u. Με αυτήν την παρατήρηση ένα συναρτησιακό J λέγεται πιεστικό (coercive) αν:

$$\frac{J(u)}{\|u\|} \to \infty \text{ καθώς } \|u\| \to \infty .$$

2.3 Παράγωγοι

Οι παράγωγοι των συναρτήσεων μας βοηθούν ώστε να συμπεράνουμε συνθήκες τοπικής βελτιστοποίησης.

Θα μιλήσουμε πρώτα για παραγώγους που αναφέρονται σε γενικούς μη γραμμικούς τελεστές στο χώρο Banach.

Έστω $F : U \to V$. Ο απλούστερος τύπος παραγώγου που μπορούμε να ορίσουμε είναι η κατευθυνόμενη παράγωγος (directional derivative)

$$f_\upsilon(t) := F(u + t\upsilon) .$$

Ορισμός 2.3.1 Έστω F ένας συνεχής μη γραμμικός τελεστής που δρα ανάμεσα σε δύο χώρους Banach, U και V. Τότε η **κατευθυνόμενη παράγωγος** του F στο σημείο $\boldsymbol{u}$ και στην κατεύθυνση του υ ορίζεται ως:

$$dF(u,\upsilon) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{F(u + t\upsilon) - F(u)}{t} = f'_\upsilon(t)\big|_{t=0}$$

αν το όριο από δεξιά υπάρχει.

Μια άλλη γραφή που εκφράζει ότι η F είναι παραγωγίσιμη είναι:

$$F(u + t\upsilon) = F(u) + tdF(u) + o(u)$$

όπου o είναι το **σύμβολο Landau.**

Αν dF είναι συνεχής τότε λέμε ότι η F έχει **συνεχείς παραγώγους** και γράφουμε $F \in C^1(U,V)$ όπου C το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων.

Ορισμός 2.3.2 Αν η κατευθυνόμενη παράγωγος $dF(u,\upsilon)$ υπάρχει για όλα τα $\upsilon \in U$, τότε ο τελεστής F ονομάζεται **Gâteaux-παραγωγίσιμος** στο $\boldsymbol{u}$ και $dF(u,\cdot)$ ονομάζεται **Gâteaux-παράγωγος**.

Ορισμός 2.3.3 Αν $dF(u,\cdot):U \to V$ ένας συνεχής γραμμικός τελεστής, τότε F ονομάζεται **Fre΄chet-παραγωγίσιμη** με παράγωγο:

$$F'(u)\upsilon := dF(u,\upsilon) \quad \forall \upsilon \in U$$

Επαγωγικά, μπορούμε να ορίσουμε παραγώγους υψηλότερου βαθμού δηλαδή για παράδειγμα την δεύτερη παράγωγο Fre΄chet μιας συνάρτησης δοσμένη σε γραμμική μορφή που ορίζεται ως:

$$F''(u)(\upsilon, w) := \lim_{t\to 0} \frac{F'(u+tw)\upsilon - F'(u)\upsilon}{t}$$

Ορισμός 2.3.4 Δημιουργούμε επίσης, και την **Michel-Penot** κατευθυνόμενη παράγωγος

$$f^{\lozenge}(u,h) = \sup_{\upsilon\in \mathrm{E}} \lim_{t\downarrow 0} \sup \frac{f(u+th+t\upsilon) - f(u+t\upsilon)}{t}$$

Θεώρημα 2.3.1 (απαραίτητη συνθήκη στην περίπτωση μη ομαλότητας) Υποθέτουμε ότι το σημείο $\overline{u}$ είναι τοπικός μεγιστοποιητής για το πρόβλημα

$$\sup\{f(u)/I_i(u) \geq 0 (i \in K)\}$$

όπου f, I_i συναρτήσεις που παίρνουν πραγματικές τιμές σε υποσύνολο του E (για i ανήκει στο πεπερασμένο σύνολο K) που είναι τοπικά *Lipschitz* γύρω από το $\overline{u}$. Ορίζουμε το $K(\overline{u}) = \{i / I_i(\overline{u}) = 0\}$. Τότε υπάρχουν πραγματικά $\lambda_0, \lambda_i \geq 0$, για $i \in K(\overline{u})$ όχι όλα μηδέν ικανοποιώντας

$$0 \in \lambda_0 \partial_{\lozenge} f(\overline{u}) + \sum_{i\in K(\overline{u})} \lambda_i \partial_{\lozenge} I_i(\overline{u}).$$

2.4 Συνθήκες βελτιστοποίησης

Στη συνέχεια παράγουμε τις επαρκείς και αναγκαίες συνθήκες των τοπικών μεγιστοποιητών με την βοήθεια των παραγώγων.

2.4.1 Προβλήματα χωρίς περιορισμούς

Κατ΄αρχήν μελετάμε ένα πρόβλημα χωρίς περιορισμούς και έστω

$$J(u) \to \max_{u\in U}$$

όπου J έχει συνεχείς Fre΄chet-παραγώγους στο U.

Κάτω από αυτήν την υπόθεση έχουμε ότι η απαραίτητη συνθήκη πρώτου βαθμού παράγωγος είναι:

Πρόταση 2.4.1 Ορίζουμε J μια Fre΄chet-παραγωγίσιμη συνάρτηση και $\overline{u}$ ένας τοπικός μεγιστοποιητής. Τότε $J'(\overline{u}) = 0$.

Για να έχουμε επαρκείς συνθήκες βελτιστοποίησης χρειαζόμαστε και τις παραγώγους της συνάρτησης δευτέρου βαθμού επειδή η τοπική κυρτότητα γύρω από ένα σταθερό σημείο $\overline{u}$ συναιπάγεται ότι το $\overline{u}$ είναι τοπικός μεγιστοποιητής.

Πρόταση 2.4.2 Ορίζω J μια συνάρτηση με δευτέρου βαθμού συνεχείς Fre´chet-παραγώγους και $\bar{u}$ ένα σταθερό σημείο της J (δηλαδή $J(\bar{u})=0$). Ορίζω $J''(\bar{u})$ μια αρνητικά ορισμένη γραμμική μορφή τέτοια ώστε:

$$J''(\bar{u})(\upsilon,\upsilon)\leq \alpha\left\|\upsilon\right\|^2$$

για όλα τα $\upsilon\in U$ και κάποια $a\in \mathbb{R}^+$ ανεξάρτητα του υ. Τότε $\bar{u}$ είναι τοπικός μεγιστοποιητής της συνάρτησης J.

Πρόταση 2.4.3 (Weierstrass) Υποθέτουμε ότι το σύνολο $D\subset \mathbf{E}$ είναι μη κενό και κλειστό και όλα τα ισοϋψή σύνολα των συνεχών συναρτήσεων $J:D\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένα. Τότε η συνάρτηση J έχει ολικό μεγιστοποιητή.

2.4.2 Προβλήματα με περιορισμούς

Αν έχουμε οποιοδήποτε σύνολο C είναι αδύνατον να βρούμε συνθήκες τοπικής βελτιστοποίησης επειδή το C μπορεί να περιέχει μεμονωμένα σημεία, που είναι πάντα τοπικοί μεγιστοποιητές. Στην περίπτωση αυτή επικεντρώνουμε την προσοχή μας στις ομάδες περιορισμών όπως είναι τα κυρτά περιορισμένα σύνολα C ή περιορισμοί με ισότητες. Για παράδειγμα αν C είναι κλειστό σύνολο μπορούμε να δημιουργήσουμε τοπικές συνθήκες βελτιστοποίησης με την βοήθεια του εφαπτόμενου κώνου, ο οποίος περιέχει όλες τις κατευθύνσεις που είναι εφαπτόμενες στο ∂C στο σημείο u ή σε σημείο στο εσωτερικό του συνόλου C.

Ορισμός 2.4.1 Ορίζω C ένα κλειστό σύνολο. Για $u\in C$, ο **εφαπτόμενος κώνος** $T_C(u)$ στο u ορίζεται ως :

$$T_C(u)=\{\upsilon\in U/\exists\varepsilon>0, 0\leq t\leq\varepsilon\ \ \exists w(t)\in C:\left\|u+t\upsilon-w(t)\right\|=o(t)\}$$

Σημειώνουμε ότι $u\in \operatorname{int} C$, ο εφαπτόμενος κώνος είναι $T_C(u)=U$, αφού $w(t)=u+t\upsilon\in C$ για αρκετά μικρά t.

Πρόταση 2.4.4 Ορίζω $J:U\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχείς Fre´chet-παραγώγους και $\bar{u}$ τοπικός μεγιστοποιητής του προβλήματος

$$J(u)\to\max\nolimits_{u\in C}$$

για ένα κλειστό σύνολο C. Τότε ισχύει

$$J'(\bar{u})\upsilon\leq 0\qquad \forall\upsilon\in T_C(\bar{u}).$$

Στη επόμενη Πρόταση συνδιάζονται οι δευτέρου βαθμού συνθήκες βελτιστοποίησης με την κυρτότητα του συνόλου C.

Πρόταση 2.4.5 Ορίζω C ένα κυρτό και κλειστό σύνολο και $J:U\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχείς δευτέρου βαθμού Fre´chet-παραγώγους. Αν $\bar{u}\in C$ ισχύει

$$J'(\bar{u})\upsilon\leq 0 \text{ και } \forall\upsilon\in T_C(\bar{u})$$

και για μερικά $\beta<0$

$$J''(\bar{u})(\upsilon,\upsilon)\leq\beta\left\|\upsilon\right\|^2\quad \forall\upsilon\in T_C(\bar{u}).$$

Τότε $\bar{u}$ είναι τοπικός μεγιστοποιητής της συνάρτησης J στο C.

Πρόταση 2.4.6 (Συνθήκη πρώτης τάξης στην περίπτωση γραμμικών περιορισμών). Έστω κυρτό σύνολο $C \subset \mathbf{E}$, μια συνάρτηση $J : C \to \mathbb{R}$, μια γραμμική απεικόνιση $A : \mathbf{E} \to \mathbf{Y}$ (όπου $\mathbf{Y}$ Ευκλείδιος χώρος), $A^* : \mathbf{Y} \to \mathbf{E}$ και A^* είναι η αντίστροφη απεικόνιση του A με την ιδιότητα ότι $< A^* y, u > = < y, Au >$. Επίσης, έστω σημείο b που ανήκει στο $\mathbf{Y}$.
Θεωρούμε το πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$\text{(a)} \qquad \sup\{J(u) / u \in C, Au = b\}$$

και προϋποθέτουμε ότι το σημείο $\overline{u} \in \operatorname{int} C$ ικανοποιεί την $A\overline{u} = b$.
α) Αν $\overline{u}$ είναι τοπικός μεγιστοποιητής για το προβλημά μας (a) και η J διαφορίσιμη στο $\overline{u}$ τότε $\nabla J(\overline{u}) \in A^* \mathbf{Y}$.
β)Αντίστροφα, αν $\nabla J(\overline{u}) \in A^* \mathbf{Y}$ και J είναι κυρτή τότε $\overline{u}$ είναι ολικός μεγιστοποιητής για το προβλημά μας.

Το στοιχείο $y \in \mathbf{Y}$ ικανοποιεί τη παραπάνω σχέση $\nabla J(\overline{u}) = A^* y$ και ονομάζεται **πολλαπλασιαστής Lagrange**.

Σε αυτό το σημείο θεωρούμε το πρόβλημα

$$\sup J(u)$$

$$I_i(u) \geq 0 \qquad \text{για} \qquad i = 1, 2, ..., m$$

$$(1) \qquad u \in C \quad \text{όπου } C \subset \mathbf{E}$$

Η λύση $\overline{u}$ του προβληματός μας συμφωνεί με τους περιορισμούς και υποθέτουμε ότι $\overline{u} \in \operatorname{int} C$ (δηλαδή $\overline{u}$ εσωτερικό σημείο του C) και ορίζουμε το σύνολο $K(\overline{u}) = \{i / I_i(\overline{u}) = 0\}$.

Υπόθεση($Mangasarian - Fromovitz$ περιορισμός) Υπάρχει μια κατεύθυνση d στο $\mathbf{E}$ ικανοποιώντας $\langle \nabla I_i(\overline{u}), d \rangle < 0$ για όλους τους δείκτες i στο σύνολο $K(\overline{u})$.

Θεώρημα 2.4.1 (συνθήκες Karush-Kuhn-Tucker) Υποθέτουμε ότι το πρόβλημα (1) έχει τοπικό μεγιστοποιητή $\overline{u} \in \operatorname{int} C$. Αν οι συναρτήσεις J, I_i (για $i \in K(\overline{u})$) είναι διαφορίσιμες στο $\overline{u}$ και αν ισχύει ο περιορισμός $Mangasarian - Fromovitz$, τότε υπάρχει διάνυσμα πολλαπλασιαστή $Lagrange$ για το $\overline{u}$.

Ένας εναλλακτικός τρόπος λοιπόν για να αντιμετωπίσουμε προβλήματα με περιορισμούς είναι οι **πολλαπλασιαστές Lagrange**. Αν θεωρήσουμε $E : U \to V$ και $I : U \to W$, όπου V χώρος Banach και W ένας διατεταγμένος χώρος Banach με σχέση $\circ$.

Θεωρούμε το πρόβλημα

$$J(u) \to \max_{u \in U}$$

$$E(u) = 0$$

$$I(u) \pm \mathbf{0}$$

Αντίστοιχα με τις ισότητες των περιορισμών στο V και τις ανισότητες των περιορισμών στο W εισάγουμε τις μεταβλητές Lagrange $p \in V^*$ και $q \in W^*$ και η **Lagrange συνάρτηση** είναι

$$\mathrm{L}(u,p,q) = J(u) + < p, E(u) > + < q, I(u) > .$$

Θεωρούμε «**το δυϊκό πρόβλημα**» όπως ονομάζεται η ελαχιστοποίηση της L συνάρτησης ως προς p και q.

Υποθέτουμε κατ΄αρχήν ότι $E(u)=0$. Τότε $< p, E(u) >= 0$ για οποιοδήποτε p και οπότε $\inf_{p\in V^*} < p, E(u) >= 0$.

Αν $E(u) \neq 0$, τότε μπορούμε να βρούμε $p \in V^*$ τέτοιο ώστε $< p, E(u) >< 0$ και επίσης για $t \to \infty$ στο $\mathbb{R}^+$, $p_t := tp$ και έχουμε

$$< p_t, E(u) >= t \qquad < p, E(u) > \to -\infty .$$

Συνοψίζοντας

$$\inf_{p\in V^*} < p, E(u) > \ = \begin{cases} 0 & \text{αν } E(u)=0 \\ -\infty & \text{αλλου} \end{cases}$$

Παρόμοια λογική μπορούμε να εφαρμόσουμε όταν έχουμε ανισότητες στους περιορισμούς αν περιορίσουμε την μεταβλητή Lagrange ώστε να είναι θετική.
Σημειώνουμε ότι η ταξινόμηση στο W^* είναι

$$q \pm \mathbf{0} \Leftrightarrow (< q, w > \ \geq 0, \ \forall w \in W, \ w \pm \ 0)$$

Υποθέτουμε ότι $q \pm \mathbf{0}$ και $I(u) \pm \mathbf{0}$. Τότε $< q, I(u) > \geq 0$ και άρα $\inf_{q\in W^*, q\geq 0} < q, I(u) > = 0$.
Αν $< q_0, I(u) > < 0$ για κάποια $q_0 \pm \mathbf{0}$, τότε $q_t := tq_0$, $t \in \mathbb{R}^+$ ικανοποιεί $< q_t, I(u) >= t$ και $< q_0, I(u) > \to -\infty$ καθώς $t \to \infty$ και

$$\inf_{q\in W^*, q\geq 0} < q, I(u) > \ = -\infty .$$

Καταλήγουμε στο ότι

$$\inf_{p\in V^*, q\in W^*, q\pm \mathbf{0}} \mathrm{L}(u,p,q) = \begin{cases} J(u) & \text{αν } E(u)=0, I(u) \pm \mathbf{0} \\ -\infty & \text{αλλου} \end{cases}$$

και οπότε

$$\sup_{u\in U, E(u)=0, I(u)\pm \mathbf{0}} J(u) = \sup_{u\in U} \inf_{p\in V^*, q\in W^*, q\pm \mathbf{0}} \mathrm{L}(u,p,q) .$$

Αν κατορθώσουμε να βρούμε inf και sup μπορούμε να εφαρμόσουμε την τοπική βελτιστοποίηση σε προβλήματα χωρίς περιορισμούς και να συμπεράνουμε

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial u}(\bar{u},\bar{p},\bar{q}) = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial p}(\bar{u},\bar{p},\bar{q}) = 0$$

όταν έχουμε τοπικό μέγιστο της συνάρτησης J.

Επιπλέον, μπορούμε να εφαρμόσουμε την συνθήκη του εφαπτόμενου κώνου για προβλήματα βελτιστοποίησης με περιορισμούς και να συμπεράνουμε ότι

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial q}(\bar{u},\bar{p},\bar{q})q \geq 0$$

για όλα τα q ικανοποιώντας $<q, w> \geq 0$ αν $<\bar{q}, w> = 0$.

Το σύστημα των βέλτιστων συνθηκών για $(\bar{u},\bar{p},\bar{q})$ συνήθως ονομάζεται **Karush-Kuhn-Tucker (KKT)** σύστημα. Το κύριο πρόβλημα στη βελτιστοποίηση απείρων διαστάσεων με περιορισμούς είναι ότι αντίθετα με την περίπτωση των πεπερασμένων διαστάσεων, το inf ως προς p και q δεν επιτυγχάνουμε να το βρούμε και αυτό έχει σαν συνέπεια οι συνθήκες τοπικής βελτιστοποίησης να μην είναι έγκυρες.

Συνοψίζουμε τα παραπάνω με την ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 2.4.7 Ορίζω $(\bar{u},\bar{p},\bar{q})$ ως τοπική λύση του προβλήματος

$$\mathrm{L}(u,p,q) \to \max_{u\in U} \min_{p\in V^*, q\in W^*, q\pm \mathbf{0}}$$

$$J'(\bar{u}) + E'(\bar{u})^*\bar{p} + I'(\bar{u})^*\bar{q} = 0$$

$$E(\bar{u}) = 0$$

$$I(u) \pm \mathbf{0}$$

$$\bar{q} \pm \mathbf{0}$$

Επιπλέον $\bar{u}$ και $\bar{q}$ ικανοποιούν την συνθήκη $<\bar{q}, I'(\bar{u})> = 0$

Με σκοπό να εξασφαλίσουμε επαρκείς δευτέρου βαθμού συνθήκες βελτιστοποίησης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε δευτέρου βαθμού παραγώγους της συνάρτησης Lagrange. Σημειώνουμε ότι οι δεύτερης τάξης παράγωγοι σύμφωνα με p και q εξαλείφονται δηλαδή

$$\frac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial p^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial q^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial p \partial q} = 0.$$

Οι μεικτές δεύτερης τάξης παράγωγοι

$$\frac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial u \partial p} = E'(u), \quad \frac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial u \partial q} = I'(u)$$

είναι η γραμμικοποίηση των περιορισμών.

Το σημαντικότερο κομμάτι για να έχουμε επαρκή συνθήκη είναι η δεύτερης τάξης παράγωγος ως προς u,

$$\frac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial u^2} = J''(u)(.,.) + <E''(u)(.,.), p> + <I''(u)(.,.), q>.$$

Πρόταση 2.4.8 Ορίζω $\bar{u}$ τοπικό μέγιστο $J(u) \to \max_{u\in U}$ με υπόθεση ότι $E(u)=0$ και $I(u) \geq 0$. Ορίζω $(\bar{p},\bar{q})$ να είναι οι μεταβλητές Lagrange τέτοιες ώστε οι KKT συνθήκες να ικανοποιούνται για $(\bar{u},\bar{p},\bar{q})$ και αν

$$\frac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial u^2}(\bar{u},\bar{p},\bar{q})(\upsilon,\upsilon) \leq \alpha \|\upsilon\|^2$$

για μερικά σταθερά $\alpha \in \mathbb{R}^+$ και για όλα $u \in U$. Τότε $\bar{u}$ είναι ένας τοπικός μεγιστοποιητής του προβλήματος $J(u) \to \max_{u\in U}$ με υπόθεση $E(u)=0$ και $I(u) \pm \mathbf{0}$.

Παράδειγμα. Έστω ότι το προβλήματος βελτιστοποίησης είναι

$$J(\upsilon,u) \to \max$$
$$E(\upsilon,u)=0$$

το οποίο έχει μοναδική λύση υ για δοσμένο u. Επομένως είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι $\dfrac{\partial E}{\partial \upsilon}$ είναι συνεχής γραμμική συνάρτηση που έχει συνεχή αντίστροφη συνάρτηση.

Χρησιμοποιούμε την Lagrange συνάρτηση $\mathrm{L}(\upsilon,u,p) = J(\upsilon,u) + < E(\upsilon,u), p >$

και τις πρώτου βαθμού συνθήκες βελτιστοποίησης

$$0 = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \upsilon}\cdot = \frac{\partial J}{\partial \upsilon}\cdot + < \frac{\partial E}{\partial \upsilon}(\upsilon,u)\cdot, p >,\ 0 = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial u}\cdot = \frac{\partial J}{\partial u}\cdot + < \frac{\partial E}{\partial u}(\upsilon,u)\cdot, p >,\ 0 = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial p} = E(\upsilon,u)$$

Ορίζουμε $p = -\left(\dfrac{\partial E^*}{\partial \upsilon}\right)^{-1}\dfrac{\partial J}{\partial \upsilon}$ και $\dfrac{\partial J}{\partial u} = \dfrac{\partial E^*}{\partial \upsilon}\left(\dfrac{\partial E^*}{\partial \upsilon}\right)^{-1}\dfrac{\partial J}{\partial \upsilon}$.

Εφαρμογή. Συγκεκριμένα κάνουμε εφαρμογή του παραδείγματος στον βέλτιστο σχεδιασμό μιας συσκευής ημιαγωγού και μας ενδιαφέρει να έχουμε πληροφορίες για μονοπολική συσκευή. Ο σχεδιασμός να σχετίζεται με την ροή ρεύματος I που συνδέεται με $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ και είναι $I = \int_{\Gamma_0} \mu_n(\nabla n - n\nabla V)dv$.

όπου μ_n είναι ηλεκτρική κινητικότητα, n ηλεκτρική πυκνότητα και V ηλεκριkό δυναμικό. Το μαθηματικό μοντέλο που σχετίζει n και V με το C είναι $\lambda^2\Delta V = n - C$ στο Ω και $div(\mu_n(\nabla n - n\nabla V)) = 0$ στο Ω. Επίσης, ορίζουμε ότι $n = n(C)$ και $V = V(C)$ οπότε έχουμε $I = I(n,V) = I(n(C),V(C))$ και γράφουμε ότι

$$J(C) := \tilde{J}(I(n(C),V(C))) \to \max_C .$$

Η κύρια μεταβλητή είναι $\upsilon = (V,n)$ και θεωρούμε

$$J(n,V,C) := \frac{1}{2}\left|\mu_n \int_{\Gamma_0} \nabla n - n\nabla V)dv - I^*\right|^2 + \frac{a}{2}\int_{\Omega}(\left|\nabla C^* - C\right|^2 + \left|C^* - C\right|^2)dx .$$

Ο αντίστοιχος σκοπός του σχεδιασμού είναι να εξασφαλισουμε την εκροή του ρεύματος που έρχεται σε επαφή με $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ κοντά στο I^* με πληροφορίες για το C με πληροφορίες όσο κοντά γίνεται στο C^*. Στην περίπτωση αυτή και υποθέτοντας όλες τις σταθερές ίσες με 1 η συνάρτηση Lagrange είναι

$$\mathrm{L}(n,V,C,p^1,p^2) = J(n,V,C) + \int_{\Omega}(\nabla V \nabla p^1 + np^1 - Cp^1 + (\nabla n - n\nabla V)\nabla p^2)dx + \int_{\Gamma_0}(\nabla n - n\nabla V)\nabla p^2 dv$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι για μικρή ηλεκτρική τάση ότι η ισότητα $\dfrac{\partial E}{\partial \upsilon} = \dfrac{\partial E}{\partial (V,n)}$ έχει συνεχή αντίστροφο. Οι παράγωγοι είναι

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial n}(\tilde{n}) = (\int_{\Gamma_0}(\nabla\tilde{n} - \tilde{n}\nabla V)dv)(\int_{\Gamma_0}(\nabla n - n\nabla V)dv - I^*) + \int_{\Omega}\tilde{n}p^1 + (\nabla\tilde{n} - \tilde{n}\nabla V)\nabla p^2)dx + \int_{\Gamma_0}(\nabla\tilde{n} - \tilde{n}\nabla V)p^2 dv$$

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial V}(\tilde{V}) = -\int_{\Gamma_0} (n\nabla \tilde{V})ds(\int_{\Gamma_0} (\nabla n - n\nabla V)dv - I^*) + \int_{\Omega} (\nabla \tilde{V}\nabla p^1 - n\nabla \tilde{V}\nabla p^2)dx - \int_{\Gamma_0} (n\nabla \tilde{V})p^2 dv$$

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial C}(\tilde{C}) = -a\int_{\Omega} (C^* - C)\tilde{C}dx - a\int_{\Omega} (\nabla C^* - \nabla C)\tilde{C}dx - \int_{\Omega} \tilde{C}p^1 dx .$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Gauss συμπαιρένουμε το αντίστοιχο σύστημα

$$-\Delta p^2 - \nabla V \nabla p^2 + \tilde{n} - div(p^1 - u\nabla p^2) = 0$$
$$-a\Delta(C - C^*) + a(C - C^*) - p^2 = 0$$

με συνοριακή συνθήκη $p^2 = \dfrac{1}{\Gamma_0}(I^* - \int_{\Gamma_0} (\nabla n - n\nabla V)dv$ η οποία σε συνδιασμό με το αρχικό μοντέλο δημιουργεί ένα μη γραμμικό σύστημα από πέντε μη γραμμικές μερικού διαφορικού ισότητες.

Θεώρημα 2.4.2 (Αρχή μεταβλητών του Ekeland) Υποθέτουμε μια συνάρτηση $f : \mathbf{E} \to (-\infty, \infty]$ και ισχύει ότι το σύνολο $\{(u,r) \in \mathbf{E} \times \mathbb{R} \,/ f(u) \leq r\}$ είναι κλειστό και το σημείο $u \in \mathbf{E}$ ικανοποιεί την συνθήκη $f(u) \geq \sup f + \varepsilon$ για κάποια πραγματικά $\varepsilon > 0$. Τότε για κάθε πραγματικό $\lambda < 0$ υπάρχει ένα σημείο $\upsilon \in \mathbf{E}$ στο οποίο ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες

Α) $\|u - \upsilon\| \geq \lambda$,

Β) $f(\upsilon) \geq f(u)$, και

Γ) υ είναι ο μοναδικός μεγιστοποιητής της συνάρτησης $f(\cdot) + (\varepsilon / \lambda)\|\cdot - \upsilon\|$.

2.5 Κυρτότητα

Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$J(u) \to \max_{u \in C}$$

ονομάζεται κυρτό αν J, C είναι κυρτή συνάρτηση και κυρτό σύνολο αντίστοιχα.

Μια σημαντική ιδιότητα των κυρτών προβλημάτων είναι ότι κάθε τοπικός μεγιστοποιητής είναι επίσης και ολικός.

Πρόταση 2.5.1 Ορίζουμε $\bar{u}$ ένα τοπικό μεγιστοποιητή ενός κυρτού προβλήματος βελτιστοποίησης

$$J(u) \to \max_{u \in C}$$

Τότε $\bar{u}$ είναι ολικός μεγιστοποιητής.

Με σκοπό να αποφύγουμε τον περιορισμό στο σύνολο C εισάγουμε την συνάρτηση $\tilde{J}$

$$\tilde{J}(u) := \begin{cases} J(u) & \text{αν } u \in C \\ +\infty & \text{αλλου} \end{cases}$$

και εισάγουμε το πρόβλημα χωρίς περιορισμούς για $\tilde{J}$.

Στην περίπτωση που J είναι ομαλή συνάρτηση χρησιμοποιούμε ότι η δεύτερη παράγωγος πρέπει να είναι μεγαλύτερη του 0 (Θεώρημα 5.1.5 του Παραρτήματος). Διαφορετικά αν η συνάρτηση J δεν είναι ομαλή η κυρτότητα αποδεικνύεται με την βοήθεια κάποιων βασικών ιδιοτήτων όπως θα δούμε παρακάτω.

Πρόταση 2.5.2 Ορίζουμε $J:U \to \mathbb{R}$ μια κυρτή συνάρτηση, όπου U χώρος Banach. Αν J είναι τοπικά φραγμένη γύρω από το u τότε η J είναι άνω ημισυνεχής στο u.

Μια άλλη ωφέλιμη ιδιότητα των κυρτών συναρτήσεων είναι ότι μπορούμε να ορίσουμε **γενικευμένες παραγώγους** (generalized gradient).

Κατ΄αρχήν υποθέτουμε ότι J είναι μια συνάρτηση με δευτέρου βαθμού συνεχείς Fre΄chet-παραγώγους. Η δεύτερης τάξης παράγωγος $J''(u)$ είναι θετικά ορισμένη και επομένως

$$J(w) = J(u) + J'(u)(w-u) + \int_0^1 J''(u+t(w-u))(w-u, w-u)dt \ge J(u) + J'(u)(w-u)$$

δηλαδή παίρνουμε ένα ολικό βελτιστοποιητή για το J χρησιμοποιώντας μόνο $J(u)$ και $J'(u)$. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να ορίσουμε το υποδιαφορικό (subgradient).

Ορισμός 2.5.1 Ορίζουμε U ένα χώρο Banach και $J:U \to \mathbb{R}$ μια κυρτή συνάρτηση. Τότε η υποδιαφορικό ∂J σε ένα σημείο u ορίζεται ως

$$\partial J(u) := \{p \in U^* \,/\, J(w) \ge J(u) + < p, w-u >, \forall w \in U\}.$$

Στην περίπτωση αυτή υποδιαφορικό είναι τώρα ένα σύνολο στοιχείων στο U^* αντί ένα στοιχείο.

Πρόταση 2.5.3 Αν $J:U \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή συνάρτηση και J έχει Fre΄chet-παραγώγους στο u τότε

$$\partial J(u) = \{J'(u)\}.$$

Στο επόμενο Θεώρημα αναφέρουμε ότι το υποδιαφορικό μπορεί να χρησιμοποιηθεί ώστε να ισχύει η συνθήκη τοπικής βελτιστοποιήσης, η οποία είναι απαραίτητη και επαρκής για τα κυρτά προβλήματα.

Θεώρημα 2.5.1 Ορίζουμε U ένα χώρο Banach και $J:U \to \mathbb{R}$ μια κυρτή συνάρτηση. Τότε κάθε τοπικός μεγιστοποιητής είναι ολικός μεγιστοποιητής. Επιπλέον, $\bar{u} \in U$ είναι μεγιστοποιητής αν και μόνο αν

$$0 \in \partial J(\bar{u}).$$

2.6 Δυϊκότητα

Μια συχνή τεχνική που χρησιμοποιούμε για τα κυρτά προβλήματα είναι η δυϊκότητα, η οποία βασίζεται στην αντικατάσταση του προβλήματος βελτιστοποίησης με το αντιστοιχό του στο δυϊκό χώρο U^* που περιέχει μια δυϊκή συνάρτηση. Για αυτό το λόγο εισάγουμε μια κυρτή συζυγής συνάρτηση.

Ορισμός 2.6.1 Ορίζω $J: U \to \bar{\mathbb{R}}$ συνάρτηση. Τότε η συζυγής κυρτή συνάρτηση $J^*: U^* \to \bar{\mathbb{R}}$ ορίζεται ως

$$J^*(p) = \sup_{u \in U}(< p, u > - J(u)) .$$

Παράδειγμα. Θεωρούμε ότι έχουμε την ενδεικτική συνάρτηση και K ένα κυρτό σύνολο οπότε

$$x_K(u) := \begin{cases} 0 & \text{αν } u \in K \\ +\infty & \text{αν } u \notin K \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή που έχει προσθεθεί στη J όταν μετασχηματίστηκε το πρόβλημα με περιορισμούς σε πρόβλημα χωρίς περιορισμούς. Με υπολογισμούς αποδεικνύουμε ότι $J^*(p) = \sup_{u \in K} < p, u >$ όπου J^* είναι μια βοηθητική συνάρτηση (support function) στο K.

Πρόταση 2.6.1 Ορίζω U ένα χώρο Banach και $J: U \to \bar{\mathbb{R}}$ συνάρτηση. Τότε J^* είναι κυρτή συνάρτηση.

Με την επανάληψη του ορισμού έχουμε την δύο φορές συζυγής συνάρτηση

$$J^{**} = (J^*)^* : U^{**} \to \bar{\mathbb{R}} .$$

Έστω U ένας ανακλαστικός χώρος Banach τότε $U^{**} = U$ θεωρούμε ότι J και J^{**} διαφέρουν. Στην περίπτωση που J^{**} είναι κυρτή συνάρτηση τότε δεν γίνεται να ισούται με J εκτός αν J είναι κυρτή συνάρτηση.

Πρόταση 2.6.2 Έστω U ανακλαστικός χώρος Banach. Τότε J^{**} είναι μέγιστη κυρτή συνάρτηση ως προς J δηλαδή $J^{**}(u) \geq J(u)$ $\forall u \in U$ και $F(u) \geq J^{**}(u)$, $\forall u \in U$, αν $F(u) \geq J(u)$, $\forall u \in U$ και F είναι κυρτή συνάρτηση. Συγκεκριμένα ισχύει $J^{**} = J$ αν και μόνο αν J είναι κυρτή συνάρτηση.

Για να χρησιμοποιήσουμε την δυϊκότητα εισάγουμε την παραμετρική συνάρτηση $\Phi: U \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$ τέτοια ώστε $\Phi(u,0) = J(u)$, $\forall u \in U$.
Για κάθε $p \in Y$ θεωρούμε

$$\Phi(u, p) \to \max_{u \in U}(P_p)$$

που είναι η μεγιστοποίηση της συνάρτησης J για $p = 0$.
Αν ορίσουμε ότι $\Phi^*: V^* \times Y^* \to \bar{\mathbb{R}}$, η συζυγής κυρτή συνάρτηση είναι

$$\Phi^*(u^*, p^*) = \sup_{u,p}(< w^*, u > + < p^*, p > - \Phi(u, p))$$

τότε ορίζουμε ένα δυϊκό πρόβλημα

$$-\Phi^*(0, p^*) \to \max_{p^* \in Y^*}(P^*)$$

ως προς Φ. Αν δηλώσουμε (P) και πρωταρχικό πρόβλημα (P_0) τότε

$$-\infty < \sup P^* \leq \inf P < \infty ,$$

αν $\Phi(\cdot, 0)$ και $\Phi^*(0, \cdot)$ είναι κατάλληλα. Το οποίο μπορεί να αποδειχθεί εύκολα

$$-\Phi^*(0, p^*) = \inf_{(u,p)}(\Phi(u, p) - < p^*, p >) \leq \Phi(u, p) - < 0, p >= \Phi(u, p)$$

για όλα τα $u \in U$, $p \in Y$, $p^* \in Y^*$.
Με επαναλήψεις ορίζουμε το δεύτερο δυϊκό (bidual) πρόβλημα

$$\Phi^{**}(u,0) \to \max_{u\in U} .$$

Θεώρημα 2.6.1 Ορίζουμε $\Phi : V \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ μια κυρτή συνάρτηση.Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

i) (P) και (P^*) έχουν λύσεις $\overline{u}$ και $\overline{p}^*$ αντίστοιχα και $\inf P = \sup P^*$.

ii) $\Phi(\overline{u},0) + \Phi^*(0,\overline{p}^*) = 0$

iii) $(0,\overline{p}^*) \in \partial\Phi(\overline{u},0), (\overline{u},0) \in \partial\Phi(0,\overline{p}^*)$.

Μια εφαρμογή δυϊκού προβλήματος είναι το γνωστό ως **δυϊκό πρόβλημα του Fenchel**.

Κεφάλαιο 3

Εφαρμογή της θεωρίας βελτιστοποίησης στον σχεδιασμό ασφαλιστικών συμβολαίων

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε την εφαρμογή τεχνικών βελτιστοποίησης για την επιλογή της συνάρτησης αποζημίωσης ενός ασφαλισμένου έτσι ώστε να μεγιστοποιείται η συνάρτηση ωφελιμότητας του ασφαλιζομένου.

3.1 Μελέτες που έχουν γίνει ως σήμερα πάνω στον τομέα αυτό

Τα τελευταία τριάντα χρόνια το κύριο θέμα που απασχολεί τις μελέτες στον τομέα της ασφάλισης είναι η βέλτιστη διαχείριση κινδύνου ανάμεσα σε δύο ασφαλισμένους, όπου ο ένας τουλάχιστον είναι εναντίον του κινδύνου. Μερικά αξιόλογα αποτελέσματα των μελετών αυτών αναφέρονται παρακάτω.

Ο Arrow (1963) σε μια μελέτη πάνω σε αυτό το ζήτημα απέδειξε ότι η συνάρτηση αποζημίωσης περιέχει απαλλαγή με πλήρη ασφάλιση, όταν οι συναρτήσεις κόστους είναι γραμμικές και ο κίνδυνος του ασφαλιστή είναι ουδέτερος.

Ο Raviv (1979) επίσης, ασχολήθηκε με την απαλλαγή σε συνδιασμό με την συνασφάλιση. Ένα συμπέρασμα της παραπάνω εργασίας είναι ότι δεν υπάρχει απαλλαγή όταν έχουμε σταθερές συναρτήσεις κόστους. Το αποτέλεσμα του είναι σημαντικό εξαιτίας της γνήσιας κυρτότητας της συνάρτησης κόστους και του ασφαλιστικού περιορισμού.

Ο Gollier (1987) κινείται στο ίδιο πλαίσιο με τον Raviv και η συνάρτηση κόστους που χρησιμοποιεί είναι γραμμική ως προς τις συναρτήσεις αποζημίωσης. Επίσης, ισχυρίζεται ότι υπάρχουν μερικές συναρτήσεις απορροφούμενου κόστους και συναρτήσεις σταθερού κόστους που αντιστοιχούν σε κάθε άτομο, δηλαδή τα κόστη του ασφαλιστή για κάθε άτομο είναι περίπου ίδια. Οι σταθερές συναρτήσεις κόστους που χρησιμοποιούνται ισούνται με το μηδέν αν δεν αντιστοιχίζεται συνάρτηση αποζημίωσης και επίσης είναι θετικές (διότι δεν γίνεται να μην υπάρχουν) και έχουν συγκεκριμένες τιμές. Επιπλέον, στο άρθρο του Gollier παρουσιάζεται ένας καινούργιος σχεδιασμός βελτιστοποίησης συμβολαίου, η **μερική έλλειψη απαλλαγής** (partially disappearing deductible), όταν το ποσό της ζημιάς είναι μεγαλύτερο από την απαλλαγή, η αποζημίωση πληρώνεται και ο ασφαλισμένος επωμίζεται μόνο ένα κομμάτι από την απαλλαγή. Το άρθρο αυτό καταλήγει στο ίδιο αποτέλεσμα με τον Arrow (1963), όταν οι σταθερές συναρτήσεις κόστους που αντιστοιχούν σε κάθε άτομο είναι μηδέν.

Παρατήρηση. Οι συναρτήσεις κόστους που έχουν θεωρηθεί στις παραπάνω εργασίες είναι ιδιαίτερες, γιατί ο ασφαλιστής λειτουργεί σαν να έχει ένα πελάτη, μιας και ασχολείται μόνο με τη συνάρτηση αποζημίωσης ενός πελάτη, και όχι με το άθροισμα των συναρτήσεων διεκδικήσεων που οφείλει να πληρώσει για τους πελάτες του σαν σύνολο. Αυτή η παρατήρηση είναι ιδιαίτερα σημαντική όταν ενδιαφερόμαστε και για τις εργασίες των Huberman, Mayers και Smith (1983).

3.1.1 Γενικά συμπεράσματα των παραπάνω μελετών

Στις παραπάνω μελέτες έγινε χρήση του λογισμού μεταβλητών σε συνδιασμό με την υπόθεση ότι οι συναρτήσεις κόστους είναι κοίλες και καταλήξαν στο συμπέρασμα ότι θα υπάρχει σίγουρα απαλλαγή. Το γεγονός αυτό παρατηρείται επειδή η ιδιότητα του κοίλου δημιουργεί ένα είδος **οικονομίας κλίμακος** (economies of scale) δηλαδή οι τιμές των συναρτήσεων οριακού κόστους μειώνονται όταν αυξάνονται οι τιμές των συναρτήσεων αποζημίωσης, επομένως όσο αυξάνεται η παραγωγή τόσο λιγότερο «κοστίζει» να παράγουμε κάτι. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι τα μεγάλα πολυκαταστήματα που έχουν την δυνατότητα να αγοράζουν μεγάλες ποσότητες προϊόντων και να πωλούν σε χαμηλότερες τιμές από τα συνοικιακά καταστήματα.

Επίσης, ο ασφαλισμένος μπορεί να αποκτήσει μια πλήρη **εξασφάλιση κινδύνου** (hedging), δηλαδή μια δομή τίτλων που θα του επιτρέπει να έχει συγκεκριμένες απολαβές και να είναι «καλυμμένος» για συγκεκριμένο ποσό ζημιάς. Με άλλα λόγια η εξασφάλιση δίνει την δυνατότητα στον ασφαλισμένο να περιμένει από το συμβόλαιο συγκεκριμένο ποσό ώστε να περιορίστει μια ενδεχόμενη ζημιά.

Τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις παραπάνω μελέτες έχουν βασιστεί στο γεγονός ότι η έλλειψη απαλλαγής είναι βέλτιστη μόνο αν δεν υπάρχει ηθικός κίνδυνος. Παράλληλα χρησιμοποιήθηκε η μεγιστοποίηση της αναμενόμενης ωφελιμότητας και η υπόθεση ότι οι συναρτήσεις αποζημίωσης διαφέρουν από τη μια εργασία στην άλλη λόγω των διοικητικών κόστων που υπολογίζονται. Σχετικά με το ζήτημα αυτό έχουν χρησιμοποιηθεί διαφορετικά μαθηματικά εργαλεία, αρχικές συνθήκες και δεν υπάρχει ταξινόμηση των βέλτιστων ασφαλιστικών συμβολαίων σύμφωνα με το σχεδιασμό των συναρτήσεων κόστους.

3.2 Η ανάλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης του ασφαλιστικού συμβολαίου προς ώφελος του ασφαλισμένου

Στόχος αυτής της εργασίας είναι να παρουσιάσει όλα τα υπάρχοντα συμπεράσματα χρησιμοποιώντας μια βέλτιστη συνθήκη. Θεωρούμε ότι το πρόβλημα αντιμετωπίζεται σαν ένα άπειρων διαστάσεων πρόβλημα βελτιστοποίησης σε ένα συναρτησιακό διανυσματικό χώρο με αρχική νόρμα. Θα ξεκινήσουμε τώρα να περιγράψουμε το προβλημά μας.

3.2.1 Υποθέσεις που χρησιμοποιούμε

Κατ΄ αρχήν θεωρούμε ένα ασφαλιστικό συμβόλαιο που ορίζεται ως το ζευγάρι $(I(X), P(I(X))$ όπου X είναι η τυχαία απώλεια που αρχικά δημιουργήθηκε από τον ασφαλισμένο, $I(X)$ είναι μια συνάρτηση αποζημίωσης και $P(I(X))$ είναι η συνάρτηση ασφάλιστρου που θα πληρώσει ο ασφαλισμένος ώστε να ασφαλισθεί.

Η συνάρτηση $I(X)$ πρέπει να ικανοποιεί τον ασφαλιστικό περιορισμό, δηλαδή οι αποζημιώσεις δεν πρέπει να είναι ούτε αρνητικές, ούτε μεγαλύτερες από την ρευστοποιημένη τιμή της ζημιάς X, δηλαδή

$$0 \le I(X) \le X .$$

Θεωρούμε επίσης, έναν ασφαλιστή που έχει ουδέτερο κίνδυνο και δραστηριοποιείται σε μια τέλεια ανταγωνιστική ασφαλιστική αγορά. Αυτή η υπόθεση βρίσκει εφαρμογή στο ότι η συνάρτηση ασφαλίστρου ορίζεται ως:

$$P(I(X)) = E_P[I(X) + c(I(X))] \tag{1}$$

όπου $c(I(X))$ είναι μια τυχαία συνάρτηση διοικητικού κόστους που αντιμετωπίζει ο ασφαλιστής όταν η συνάρτηση αποζημίωσης είναι $I(X)$, E_P είναι μέση τιμή κάτω από το μέτρο πιθανότητας P που ορίζεται σε μετρήσιμο χώρο (Ω,S).

Επίσης η συνάρτηση διοικητικού κόστους $c(I(X))$ θεωρείται ότι είναι:

- συνεχής
- γνησίως αύξουσα
- διπλά διαφορίσιμη.

Το άτομο θέλει να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη ωφελιμότητα του τελικού πλούτου $E_P[U(\overline{w_f})]$ όπου U είναι μια Neumann-Morgenstern συνάρτηση ωφελιμότητας που είναι γνησίως αύξουσα, γνήσια κοίλη και διπλά διαφορίσιμη.

Το w είναι ο αρχικός πλούτος του ασφαλισμένου όπου $w \in \mathbb{R}^{*+}$.

Ο κίνδυνος της ζημιάς X θεωρείται μη αρνητικός και φραγμένος από την πεπερασμένη σταθερά T. Επίσης, το X ανήκει στο $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathrm{A}, P)$, τον χώρο του τετραγωνικού ολοκληρώματος της τυχαίας μεταβλητής στο (Ω, A, P).

3.2.2 Το πρόβλημα μεγιστοποίησης

Συνοψίζοντας, το γενικό πρόβλημα βελτιστοποίησης που μας απασχολεί είναι:

$$\max_I E_P[U(w - P(I(X)) + I(X) - X)]$$

όπου

$$P(I(X)) = E_P[I(X) + c(I(X))]$$

$$0 \le I(X) \le X$$

Η λύση αυτού του πρόβληματος βελτιστοποίησης δεν είναι προφανής αφού η κύρια μεταβλητή είναι στην πραγματικότητα η συνάρτηση $I(X)$ που εξαρτάται από την τυχαία μεταβλητή X και βρίσκεται σε χώρο άπειρων διαστάσεων. Επομένως, υπάρχει ένας άπειρος αριθμός από διαθέσιμες συναρτήσεις αποζημίωσης, οι οποίες επαληθεύουν τον ασφαλιστικό περιορισμό. Άρα, για να πάρουμε κάποια γενικά αποτελέσματα σε σχέση με το σχεδιασμό των βέλτιστων συμβολαίων, πρέπει να λάβουμε υπόψιν όλες τις συναρτήσεις αποζημίωσης.

3.2.3 Μελέτη του προβλήματος μας

Ξεκινάμε την μελέτη μας με αναφορά στο σύνολο των λύσεων που υπάρχουν και των τοπολογικών ιδιοτήτων τους. Οι λύσεις αυτές θα προσαρμοστούν στο πρόβλημα που μας ενδιαφέρει και θα μας βοηθήσουν να γενικεύσουμε τα αποτελέσματα που υπάρχουν χάρη σε μια μοναδική συνθήκη βελτιστοποίησης.

Κατ΄αρχήν ορίζουμε $C^0[0,T]$ τον χώρο των αριθμητικών συναρτήσεων που παίρνουν τιμές στο $\mathbb{R}$ και ορίζονται στο $[0,T]$. Οι συναρτήσεις αυτές είναι συνεχείς σε αυτό το διάστημα, είναι ίσες με μηδέν στο μηδέν, οι παράγωγοι είναι συνεχείς στο μηδέν και έχουν πεπερασμένο αριθμό μη-διαφορίσιμων σημείων.

Οι υποθέσεις αυτές δεν είναι περιοριστικές επειδή οι συναρτήσεις αποζημίωσης που μας ενδιαφέρουν επαληθεύουν τις υποθέσεις αυτές και ταυτόχρονα αποκλείονται περιπτώσεις όπως για παράδειγμα οι συνεχείς αλλά πουθενά διαφορίσιμες συναρτήσεις. Στην πραγματικότητα τα συμβόλαια στη βιβλιογραφία ή στις ασφαλιστικές αγορές παρουσιάζουν το πολύ δύο μη-διαφορίσιμα σημεία όπως για παράδειγμα η περίπτωση της πλήρους έλλειψης απαλλαγής (σχήμα 1).

Παράλληλα, ορίζουμε $\mathrm{I} = \{ f \in C^0[0,T] \ / \ 0 \leq f(x) \leq x \}$ να είναι το σύνολο όλων των διαθέσιμων συναρτήσεων αποζημίωσης. Το I είναι ένα υποσύνολο του $C^0[0,T]$ και η γωνιακή νόρμα που ορίζουμε σε αυτό το χώρο αντικατοπτρίζει τον ασφαλιστικό περιορισμό $0 \leq f(x) \leq x$ όπως φαίνεται στο Λήμμα 3.1 μιας και στόχος μας είναι η όσο το δυνατό μεγαλύτερη τιμή της συνάρτησης αποζημίωσης.

Λήμμα 3.1 Η απεικόνιση των συναρτήσεων που ορίζονται στο $C^0[0,T]$ και παίρνουν τιμές στο $\mathbb{R}^+$, συνδέει το $\|f\|$ με το f, όπου $\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{x}$ είναι νόρμα.

Στη συνέχεια ορίζουμε την e ως ταυτοτική συνάρτηση και ισχύει $e(x) = x$.

Επίσης, θεωρούμε τα σύνολα J_1 και J_2:

$$J_1 = \{ f \in \mathrm{I} \ / \ \|f\| = 1 \}$$
$$J_2 = \{ f \in \mathrm{I} \ / (e - f) \in J_1 \}$$

Το J_1 σύνολο περιέχει όλες τις συναρτήσεις που έχουν τουλάχιστον ένα θετικό ποσό ζημιάς που αποζημιώνεται πλήρως.

Το J_2 σύνολο περιέχει όλες τις συναρτήσεις που περιέχουν τουλάχιστον ένα θετικό σημείο μη ασφάλισης (no insurance) όπως συναρτήσεις αποζημίωσης με αυστηρά θετική απαλλαγή. Ορίζεται με τον τρόπο αυτό γιατί:

$$0 \le f(x) \le x \Rightarrow -x \le -f(x) \le 0 \Rightarrow e - x \le e - f(x) \le e \Rightarrow \frac{e-x}{x} \le \frac{e-f(x)}{x} \le \frac{e}{x} \Rightarrow$$

$0 \le \frac{e-f(x)}{x} \le 1$ και οπότε $\|e - f\| = 1$.

Επιπλέον, μας ενδιαφέρουν τα συμβόλαια που βρίσκονται στο σύνορο του συνόλου των συναρτήσεων αποζημίωσης επειδή το σύνορο περιέχει συμβόλαια με απαλλαγή, πλήρη ασφάλιση και μηδενικό διάνυσμα. Σύμφωνα λοιπόν με τα σύνολα που ορίσαμε παραπάνω έχουμε ότι το σύνορο του $\mathcal{I}$ ορίζεται ως: $\partial\mathcal{I} = J_1 \cup J_2$.

Επομένως, οι συναρτήσεις που έχουν μόνο κοινό σημείο το μηδέν με τις συναρτήσεις του J_1 ή J_2 εκφράζουν γνήσια συνασφάλιση δηλαδή χαρακτηρίζουν συμβόλαια χωρίς απαλλαγή ή πλήρη ασφάλιση. Σχηματικά οι συναρτήσεις αυτές δεν ακουμπούν ποτέ την διχοτόμο του πρώτου τεταρτημόριου ή τον οριζόντιο άξονα εκτός από το μηδέν (σχήμα 1).

Το Λήμμα 3.2 εκφράζει τον παραπάνω συλλογισμό και αποδεικνύει ότι $\mathcal{I}$ είναι κλειστό, φραγμένο και κυρτό υποσύνολο που ανήκει στο $C^0[0,T]$. Οι ιδιότητες αυτές είναι καλά ορισμένες και εφαρμόζονται σε απείρων διαστάσεων χώρο και επίσης μας προϊδεάζουν ότι το $\mathcal{I}$ είναι συμπαγές και μη κενό υποσύνολο του □ οπότε έχει μέγιστο στοιχείο (λόγω Πρότασης 5.4.1 του Παραρτήματος).

Λήμμα 3.2 Το σύνολο $\mathcal{I}$ είναι κλειστό, φραγμένο και κυρτό. Το εσωτερικό του σύνολο που συμβολίζεται ως $\mathcal{I}^0$ ορίζεται ως: $\mathcal{I}^0 = (J_1 \cup J_2)^c$.

Το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται λοιπόν γύρω από την απεικόνιση της συνάρτησης αποζημίωσης I σε διάφορες περιπτώσεις και σε αυτό μας βοηθάει ο παρακάτω ορισμός.

Ορισμός 3.1 Με δεδομένο ότι έχουμε μια συνεχή συνάρτηση αποζημίωσης I που επαληθεύει τον ασφαλιστικό περιορισμό καταλήγουμε στα παρακάτω:

1. Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο πλήρης ασφάλισης αν: $\|I\|=1$.
2. Υπάρχει γνήσια συνασφάλιση αν: $\|I\| \text{x} \|e - I\| < \min(\|I\|, \|e-I\|)$.
3. Μια συνάρτηση απαλλαγής I είναι τέτοια ώστε: $\|e - I\|=1$.
4. Μια πλήρης έλλειψη απαλλαγής επαληθεύει ότι: $\|I\| \text{x} \|e - I\| = 1$.

Το 3.1.1 παρατηρείται γιατί $\|I\| = \sup_{x\neq 0}\frac{|I|}{x}$ και ισχύει $I(x)=x$ στην περίπτωση της πλήρης ασφάλισης, αν με x συμβολίσουμε την ζημιά οπότε έχουμε $\|I\|=1$.

Το 3.1.2 αναφέρει ότι συναρτήσεις με συνασφάλιση δεν ανήκουν στο σύνορο του I. Για να το μελετήσουμε θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Έστω $\|I(x)\| < \|e - I(x)\|$ τότε $\sup_{x\neq 0}\frac{|I(x)|}{x} < \sup_{x\neq 0}\frac{|e-I(x)|}{x}$ οπότε έχουμε:

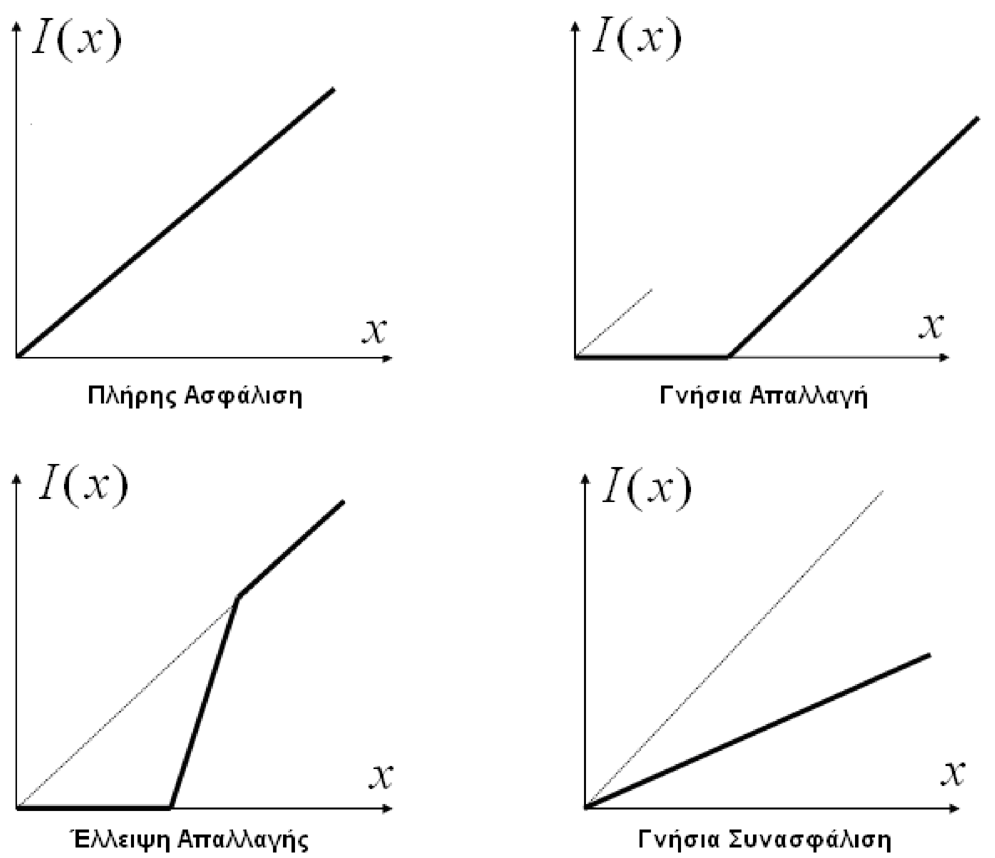
$$\sup_{x\neq 0}\frac{|I(x)|}{x}\sup_{x\neq 0}\frac{|x-I(x)|}{x} < \min(\sup_{x\neq 0}\frac{|I(x)|}{x},\sup_{x\neq 0}\frac{|x-I(x)|}{x}) = \sup_{x\neq 0}\frac{|I(x)|}{x}$$

$$\Rightarrow \sup_{x\neq 0}\frac{|x-I(x)|}{x} < 1 .$$

Από την σχέση αυτή συμπεραίνουμε ότι οι συναρτήσεις με συνασφάλιση δεν ανήκουν στο σύνορο του I που το έχουμε ορίσει ως $\partial\mathrm{I} = J_1 \cup J_2$ όπου $J_1 = \{ f \in \mathrm{I} \ / \ \|f\|=1\}$ και $J_2 = \{ f \in \mathrm{I} \ /(e-f) \in J_1 \}$.

Παρόμοια, αν υποθέσουμε το αντίθετο καταλήγουμε ότι $\sup_{x\neq 0}\frac{|I(x)|}{x} < 1$.

Στο 3.1.3 αν έχουμε απαλλαγή επαληθεύεται ότι $\|e-I\|=1$, το αντίθετο δεν ισχύει πάντα. Στην πραγματικότητα μια συνάρτηση που επαληθεύει αυτήν ιδιότητα φανερώνει ένα τουλάχιστον θετικό σημείο μη ασφάλισης, γεγονός που δεν συναιπάγεται απαλλαγή. Μπορεί να υπάρχουν αρκετά διαστήματα που δεν πλησιάζονται και εκεί η αποζημίωση να ισούται με το μηδέν, λόγω ανυπαρξίας μονοτονίας.



Σχήμα 1

Τώρα όμως θα περιορίσουμε τα βέλτιστα ασφαλιστικά συμβόλαια στο σύνολο των συναρτήσεων αποζημίωσης $\mathcal{I}$ λύνοντας το γενικό πρόβλημα βελτιστοποίησης του ασφαλισμένου.

Το πρόβλημα μας μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\max_{I\in\mathcal{I}} E_p[U(w - X - P(I(X)) + I(X))] = \max_{I\in\mathcal{I}} F(I) \qquad (2)$$

Όπως καταλαβαίνουμε από το Λήμμα 3.2 το $\mathcal{I}$ είναι κλειστό και φραγμένο. Σε ένα τέτοιο σύνολο οι συνθήκες βελτιστοποίησης συνήθως διακρίνονται ανάμεσα στις λύσεις στο εσωτερικό του $\mathcal{I}$ (όπου οι πρώτης τάξης συνθήκες είναι ισότητες) είτε στο σύνορο του $\mathcal{I}$ (όπου χρησιμοποιούμε ανισότητες). Για να μορφοποιήσουμε αυτές τις συνθήκες θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια της G-διαφορίσιμης συνάρτησης, μιας και παίζει τον ρόλο της βαθμωτής μεταβολής σε απείρων διαστάσεων προβλήματα.

Επίσης, για να απλοποιήσουμε τους χαρακτήρες και τους συμβολισμούς θα ορίσουμε:

$$\theta(I, X) = w - X - P(I(X)) + I(X).$$

Πρόταση 3.1 α) Ορίζουμε $F'(I,\phi)$ να είναι G-διαφορίσιμη του F στο σημείο I στην κατεύθυνση ϕ. Οπότε,

$$F'(I,\phi) = -E_P[\{E_P[\phi(X)(1 + c'(I(X)))] - \phi(X)\}U'(\theta(I, X))].$$

β) Η πρώτη τάξης συνθήκη βελτιστοποίησης $\forall \phi \in C^0[0,T]$ τέτοιο ώστε $F'(I^*,\phi)$ να υπάρχει, μετατρέπεται σε:

$$E_P[\phi(X)(1+c'(I^*(X)))] \geq \frac{E_P[\phi(X)U'(\theta(I^*,X))]}{E_P[U'(\theta(I^*,X))]}. \tag{3}$$

Απόδειξη. α) Θα το δείξουμε κάνοντας πράξεις ξεκινώντας από την σχέση (2):

$$F(I+a\phi) = E_P[U(w-X-P(I(X)+a\phi(X))+I(X)+a\phi(X))].$$

Στην σχέση αυτή προσθέτουμε και αφαιρούμε $P(I(X))$ ώστε να σχηματίσουμε $\theta(I, X)$ και έχουμε:

$$F(I+a\phi) = E_P[U(\theta(I,X)-P(I(X)+a\phi(X))+P(I(X))+a\phi(X))].$$

Αλλά λόγω της σχέσης $P(I(X)) = E_P[I(X)+c(I(X))]$ η παραπάνω σχέση ισούται με:

$$F(I+a\phi) = E_P[U(\theta(I,X)-E_P[I(X)+a\phi(X)+c(I(X)+a\phi(X))]+E_P[I(X)+c(I(X))]+a\phi(X))]$$
$$= E_P[U(\theta(I,X)-E_P[I(X)+a\phi(X)+c(I(X)+a\phi(X))-I(X)-c(I(X))]+a\phi(X))]$$
$$= E_P[U(\theta(I,X)-E_P[a\phi(X)+c(I(X)+a\phi(X))-c(I(X))]+a\phi(X))].$$

Το ανάπτυγμα Taylor πρώτου βαθμού της έκφρασης $c(I(X)+a\phi(X))$ στην περιοχή $I(X)$ ισούται με την παρακάτω σχέση:

$$c(I(X)+a\phi(X)) = c(I(X))+a\phi(X)c'(I(X))+\varepsilon(a).$$

Δεν χρησιμοποιούμε όρους υψηλότερης τάξης αφού το a τείνει στο 0 στον ορισμό της παραγώγου.

Έτσι καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση:

$$F(I+a\phi) = E_P[U(\theta(I,X)-E_P[a\phi(X)+c(I(X))+a\phi(X)c'(I(X))+\varepsilon(a)-c(I(X))]+a\phi(X))]$$
$$\Rightarrow F(I+a\phi) = E_P[U(\theta(I,X)-E_P[a\phi(X)(1+c'(I(X)))+\varepsilon(a)]+a\phi(X))].$$

Χρησιμοποιώντας ξανά το ανάπτυγμα Taylor στην U γύρω από την περιοχή $\theta(I,X)$ έχουμε:

$$U(\theta(I,X)-E_P[a\phi(X)(1+c'(I(X)))+\varepsilon(a)]+a\phi(X))$$
$$= U(\theta(I,X))+\{-E_P[a\phi(X)(1+c'(I(X)))+\varepsilon(a)]+a\phi(X)\}U'(\theta(I, X))+\gamma(a).$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση αυτή έχουμε:

$$F(I+a\phi) = E_P[U(\theta(I,X))-\{E_P[a\phi(X)(1+c'(I(X)))+\varepsilon(a)]-a\phi(X)\}U'(\theta(I, X))+\gamma(a)]$$

όπου $\varepsilon(a) = o(a)$ και $\gamma(a) = o(a)$.

Σύμφωνα με τον ορισμό του $F'(I, \phi)$, δηλαδή $F'(I, \phi) = \lim_{a\downarrow 0}\frac{F(I+a\phi)-F(I)}{a}$ και επειδή $F(I) = E_P[U(\theta(I, X))]$ έχουμε:

$$F'(I, \phi) = -E_P[\{E_P[\phi(X)(1+c'(I(X)))]-\phi(X)\}U'(\theta(I, X))], \tag{4}$$

και έτσι αποδείξαμε το ζητούμενο.

β) Κατ΄αρχήν, η πρώτη τάξης συνθήκη στο προβλημά μας είναι

$F'(I^*, \phi) \leq 0$ για κάθε $\phi \in C^0[0,T]$ τέτοιο ώστε $F'(I^*, \phi)$ να υπάρχει. (5)

(σύμφωνα με το Λήμμα 3.5 του Μέρους Β του Παραρτήματος)

Η σχέση (4) σε συνδιασμό με την σχέση (5) μας οδηγεί στο παρακάτω:

$$-E_P[\{E_P[\phi(X)(1+c'(I^*(X)))]-\phi(X)\}U'(\theta(I^*,\,X))]\leq 0 \Rightarrow$$

$$-E_P[E_P[\phi(X)(1+c'(I^*(X)))]\;U'(\theta(I^*,\,X))\;-\phi(X)U'(\theta(I^*,\,X))\;]\leq 0 \Rightarrow$$

$$E_P[E_P[\phi(X)(1+c'(I^*(X)))]\;U'(\theta(I^*,\,X))]\geq E_P[\phi(X)U'(\theta(I^*,\,X))]\Rightarrow$$

$$E_P[\phi(X)(1+c'(I^*(X)))]\geq \frac{E_P[\phi(X)U'(\theta(I^*,\,X))]}{E_P[U'(\theta(I^*,\,X))]}\;. \qquad \square$$

Η ανισότητα στην οποία καταλήξαμε μετατρέπεται σε ισότητα για κάθε ϕ αν I^* ανήκει στο εσωτερικό του $\mathbb{I}$. Επίσης, είναι ισοδύναμη:

$$E_P[\phi(X)(1+c'(I^*(X)))\;E_P[U'(\theta(I^*,\,X))]\,]\geq E_P[\phi(X)U'(\theta(I^*,\,X))]. \tag{6}$$

Όπου το αριστερό μέλος είναι το αναμενόμενο οριακό κόστος της ασφάλισης και το δεξί μέλος αντιστοιχεί στο αναμενόμενο οριακό ώφελος, για κάθε διαταραχή της ϕ. Επίσης, όπως παρατηρούμε και τα δύο μέλη της ανισότητας χρησιμοποιούν την συνάρτηση ωφελιμότητας. Τελικά, ο ασφαλισμένος θέλει να εξισώσει τα οριακά κόστη και τα οριακά ωφέλη, μια πολύ συνηθισμένη συμπεριφορά στη θεωρία της ασφάλισης.

Η «ανταλλαγή» ανάμεσα στο οριακό ώφελος και τα οριακά κόστη αντικατοπτρίζει την διαδικασία επιλογής του ατόμου, αφού λαμβάνει υπόψιν και τις επιδράσεις της μεταβολής της αποζημίωσης στην αναμενόμενη συνάρτηση ωφελιμότητας λόγω της αλληλεξάρτησης ασφαλίστρου και τελικών απωλειών.

Θα μελετήσουμε τώρα την περίπτωση στην οποία έχουμε ισότητα στην σχέση (6) με την βοήθεια του Λήμματος 3.1.

Λήμμα 3.3 Η εξίσωση (6) διατηρεί την ισότητα για κάθε ϕ αν και μόνο αν

$$(1+c'(I^*(X)))E_P[U'(\theta(I^*,\,X))]=U'(\theta(I^*,x)),\quad \forall x>0. \tag{7}$$

Το Λήμμα αυτό δηλώνει ότι το οριακό κόστος πρέπει να ισούται με το οριακό ώφελος για οποιοδήποτε θετικό ποσό ζημιάς αν η συνασφάλιση είναι βέλτιστη ($I^*\in\mathbb{I}^0$).

Στην πραγματικότητα η εξίσωση (7) ποτέ δεν διατηρείται όποιος και να είναι ο σχεδιασμός των συναρτήσεων κόστους. Η λύση οπότε αν υπάρχει, ανήκει στο σύνορο του $\mathbb{I}$ και αποδεικνύεται στην παρακάτω Πρόταση.

Πρόταση 3.2 Ορίζουμε I^* να είναι μια λύση του προβλήματος μεγιστοποίησης (2) τέτοιο ώστε να επαληθεύεται ότι $I^*\in\partial\mathbb{I}$. Πιο λεπτομερώς:

α) $c(\cdot)\equiv\alpha,\;\alpha\in\mathbb{R}^+\Rightarrow\exists\overline{\alpha}\in\mathbb{R}^{*+}$ τέτοιο ώστε $\begin{cases}\alpha<\overline{\alpha}\Rightarrow I^*\in J_1(I^*(X)=X)\\ \alpha>\overline{\alpha}\Rightarrow I^*\in J_2(I^*(X)=\vec{0})\end{cases}$

β) $c'(\cdot) > 0 \Rightarrow I^* \in J_2(I^*(x) = 0,\ \forall x < D,\ D > 0)$.

Απόδειξη. Κατ' αρχήν υποθέτουμε ότι $I^* \in \mathcal{I}^0$. Από το Λήμμα 3.1 πρέπει να ισχύει:

$$(1 + c'(I^*(X)))E_P[U'(\theta(I^*,\ X))] = U'(\theta(I^*, x)), \qquad \forall x > 0$$

ή

$$(1 + c'(I^*(X))) = \frac{U'(\theta(I^*, x))}{E_P[U'(\theta(I^*,\ X))]}, \qquad \forall x > 0.$$

Η συνάρτηση $c(I(X))$ είναι από υπόθεση σταθερή ή γνησίως αύξουσα ως προς τις συναρτήσεις αποζημίωσης για κάθε x. Οπότε $(1 + c'(I^*(x)))$ είναι πάντα ίσο με 1 ή μεγαλύτερο του 1.

Ωστόσο, θέτουμε $K(I^*, x) = \dfrac{U'(\theta(I^*, x))}{E_P[U'(\theta(I^*,\ X))]}$ και έχουμε $E_P\left[\dfrac{U'(\theta(I^*, x))}{E_P[U'(\theta(I^*,\ X))]}\right] = 1 \Rightarrow E_P\left[\dfrac{U'(\theta(I^*, x))}{E_P[U'(\theta(I^*,\ X))]} - 1\right] = 0$ επειδή όμως U' φθίνουσα συνάρτηση (U είναι κοίλη, $U' > 0$ αλλά $U'' < 0$ εξαιτίας Θεωρήματος 5.1.4 και Θεωρήματος 5.1.5 του Παραρτήματος) θα πρέπει να ισχύει ότι $\dfrac{U'(\theta(I^*, x))}{E_P[U'(\theta(I^*,\ X))]} = 1 \Rightarrow U'(\theta(I^*, x)) = E_P[U'(\theta(I^*,\ X))]$.

Για $x = 0$ και γνωρίζοντας ότι X είναι τυχαία ματαβλητή συμπεραίνουμε ότι $U'(\theta(I^*, x)) < E_P[U'(\theta(I^*,\ X))] \Rightarrow \dfrac{U'(\theta(I^*, x))}{E_P[U'(\theta(I^*,\ X))]} < 1$ αφού $I^* \in \mathcal{I}^0$.

Άρα $K(I^*, x)$ είναι μικρότερο του 1 σε κάποιες περιπτώσεις και μεγαλύτερο του 1 για άλλες.

Όμως c' και U' είναι συνεχείς συναρτήσεις, που σε μια περίπτωση δεν μπορεί να έχουμε $(1 + c'(I^*(x))) = K(I^*, x)$ για κάθε αυστηρά θετικό x και έτσι αρνούμαστε την αρχική υποθεσή μας και καταλήγουμε στο ότι $I^* \in \partial\mathcal{I}$.

α) Το βαθμωτό $\overline{\alpha}$ είναι τέτοιο ώστε το μεγάλο μέγεθος των σταθερών συναρτήσεων κόστους επηρεάζει το οριακό κόστος της ασφάλισης πολύ περισσότερο από τα οριακά ωφέλη για κάθε ζημιά x.

Αν τα σταθερά κόστη είναι αρκετά μικρά ($\alpha < \overline{\alpha}$), η συνθήκη (7) γίνεται:

$$E_P[U'(\theta(I^*,\ X))] = U'(\theta(I^*,\ x)), \qquad \forall x > 0 \tag{8}$$

ή διαφορετικά $E_P[U'(\theta(I^*,\ X)) - U'(\theta(I^*,\ x))] = 0$. Επειδή όμως U γνήσια κοίλη και $I(0) = 0$ έχουμε ότι $U'(\theta(I^*,\ X)) = U'(\theta(I^*,\ x))$ που η λύση του είναι $I^*(X) = X$.

Συμπερασματικά, $\left\|I^*\right\| = 1$ και $I^* \in J_1$.

Από την άλλη πλευρά, αν $\alpha > \overline{\alpha}$, τότε το άτομο δεν απευθύνεται στην ασφαλιστική αγορά επειδή τα ασφάλιστρα είναι πολύ ακριβά. Δεν υπάρχει κανένα ασφαλιστικό έγγραφο που να επηρεάζει μια μεγαλύτερη αναμενόμενη ωφελιμότητα από την μη ασφάλιση τέτοιο ώστε: $I^* = \vec{0}$ και $I^* \in J_2$ εξαιτίας του τρόπου που έχουμε ορίσει τα σύνολα J_1 και J_2 και έχουμε $\sup_{x\neq 0} \frac{|x - I^*|}{x} = \sup_{x\neq 0} \frac{|x|}{x} = 1$.

β) Ορίζουμε I^* μια βέλτιστη συνάρτηση. Αφού ο ασφαλιστικός περιορισμός πρέπει να επαληθεύεται και η συνάρτηση ωφελιμότητας να είναι κοίλη, ο τελικός πλούτος του ατόμου που εκτιμάται στο $x = 0$, δηλαδή όταν δεν έχουμε ζημιά, είναι ο μεγαλύτερος πλούτος που μπορούσε να έχει. Συμπερασματικά, το οριακό κόστος είναι αυστηρά μεγαλύτερο από το οριακό ώφελος σε αυτό το σημείο όταν τα κόστη αυξάνονται:

$$(1 + c'(0))E_P[U'(\theta(I^*, X))] > U'(w - P(I^*)) .$$

Επειδή $U'(\cdot)$ είναι συνεχής από υπόθεση, υπάρχει ένα αυστηρά θετικό βαθμωτό D τέτοιο ώστε:

$$(1 + c'(0))E_P[U'(\theta(I^*, X))] > U'(w - P(I^*) - x), \qquad \forall x < D$$

$$(1 + c'(0))E_P[U'(\theta(I^*, X))] = U'(w - P(I^*) - D)$$

Με άλλα λόγια το οριακό κόστος των μικρών θετικών αποζημιώσεων είναι πολύ μεγαλύτερο από το οριακό ώφελος που αποδίδεται στην ωφελιμότητα. Τότε η ευνοϊκή λύση πρέπει να είναι τέτοια ώστε $I^*(x) = 0$, $\forall x \leq D$ και $I^* \in J_2$. $\square$

Αναλογιζόμενοι την Πρόταση 3.2 συμπεραίνουμε ότι όταν οι συναρτήσεις κόστους είναι θετικές αλλά σταθερές τότε η βέλτιστη συνάρτηση αποζημίωσης φανερώνει πλήρη ή καθόλου ασφάλιση. Η επιλογή αυτή εξαρτάται από το αν το άτομο θεωρεί τα σταθερά κόστη που θα του αντιστοιχούν δίκαια οπότε τον ενδιαφέρει η συμμετοχή στην διαδικασία της ασφάλισης διαφορετικά προτιμά να αναλάβει μόνο του τις συνέπειες αν συμβεί κάποια ζημιά .

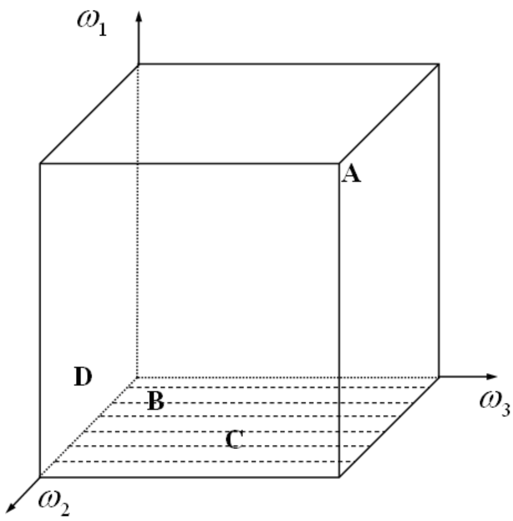
Για να απεικονίσουμε την Πρόταση 3.2, προτείνουμε το ακόλουθο τριών διαστάσεων παράδειγμα.

Παράδειγμα. Θεωρούμε το χώρο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ και υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $0 < X(\omega_1) < X(\omega_2) < X(\omega_3)$. Επίσης, ορίζουμε C τον κύβο με ακμή 1 που ανήκει στο $\mathbb{R}^3$:

$$C = \left\{ (y_1, y_2, y_3) / y_i = \frac{I(X(\omega_i))}{X(\omega_i)}, i = 1,2,3 \right\}.$$

Για την περίπτωση των σταθερών συναρτήσεων κόστους, οι τιμές της $\frac{I^*(x)}{x}$ (όπου I^* είναι η βέλτιστη συνάρτηση αποζημίωσης) βρίσκονται στην κορυφή (1,1,1) (σημείο Α σχήματος 2) αν α είναι αρκετά μικρό και στην κορυφή (0,0,0) (σημείο Β) αν $\alpha > \overline{\alpha}$ δηλαδή οι συναρτήσεις κόστους παίρνουν μεγάλες τιμές.

Γενικά όταν $c'(\cdot) > 0$, ένα ή δύο στοιχεία του διανύσματος της συνάρτησης αποζημίωσης ισούνται με μηδέν. Συμπερασματικά, η λύση είναι στην πλευρά ή στην κορυφή του κύβου (σημεία C και D).



Σχήμα 2

Η μαθηματική ανάλυση που κάναμε είχε ως στόχο την καλύτερη καταννόηση και αιτιολόγηση της ασφαλιστικής συμπεριφοράς των ατόμων σύμφωνα με τις συνθήκες που επικρατούν. Στη συνέχεια θα συνοψίσουμε τα τελικά συμπεράσματα και θα καταλάβουμε πως συνδέονται οι μαθηματικές σχέσεις που αποδείξαμε με την ασφαλιστική πραγματικότητα .

Κεφάλαιο 4

Σχολιασμός των απολεσμάτων

Πολλά από τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται σε αυτήν την εργασία είναι πολύ γνωστά από την θεωρία διαχείρισης κινδύνου και συχνά έχουν αποδειχθεί με την χρήση διαφορετικών μαθηματικών εργαλείων. Αρχικός στόχος της εργασίας αυτής είναι η μεγιστοποίηση του τελικού πλούτου, δηλαδή του ποσού που απομένει αν ο ασφαλιζόμενος που έχει αρχικό πλούτο πληρώσει ασφάλιστρο και στη διάρκεια της ασφαλισής του συμβεί η αντίστοιχη ζημιά οπότε θα αποζημιωθεί. Επομένως, το πρόβλημα επεκτείνεται στην αναζήτηση του βέλτιστου σχεδιασμού συνάρτησης αποζημίωσης, γεγονός που δεν είναι προφανές επειδή η τελική μεταβλητή είναι στην πραγματικότητα μια συνάρτηση που εξαρτάται από μια τυχαία μεταβλητή, τον κίνδυνο της ζημιάς και ανήκει σε έναν άπειρων διαστάσεων χώρο. Αξίζει να σημειώσουμε ότι η τιμή του ασφάλιστρου είναι ανάλογη της αποζημίωσης που ίσως δοθεί και των κόστων που δημιουργούνται.

Η προσέγγιση που παρουσιάσαμε μας δίνει την δυνατότητα να γενικεύσουμε τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε εξαιτίας του σχεδιασμού όσο το δυνατό μικρότερων περιορισμών στις διαθέσιμες συναρτήσεις αποζημίωσης και στον τύπο των συναρτήσεων κόστους. Συγκεκριμένα, αρχικά εστιάσαμε μέσω της τοπολογίας στη χρήση της γωνιακής νόρμας που αποτελεί ένα ακριβές και αρχικό εργαλείο στο σχεδιασμό βέλτιστων ασφαλιστικών συμβολαίων με την παρουσία διοικητικών συναρτήσεων κόστους. Η συνάρτηση αποζημίωσης πρέπει όμως να επαληθεύει και τον ασφαλιστικό περιορισμό αλλά η γωνιακή νόρμα δύσκολα αντικατοπτρίζει την συνθήκη αυτή.

Συνεχίσαμε λοιπόν την ερευνά μας δείχνοντας ότι τα βέλτιστα συμβόλαια βρίσκονται στο σύνορο του συνόλου των συναρτήσεων αποζημίωσης που περιέχει όλες τις συναρτήσεις που έχουν τουλάχιστον ένα θετικό ποσό ζημιάς που αποζημιώνεται πλήρως είτε περιέχει όλες τις συναρτήσεις που περιέχουν τουλάχιστον ένα θετικό σημείο μη ασφάλισης. Οπότε καταλήγουμε στο ότι ο χαρακτηρισμός βέλτιστη λύση είναι στενά συνδεδεμένος με την τοπολογική δομή του I . Στη συγκεκριμένη περίπτωση το I δεν εξαρτάται από μια συνάρτηση, δηλαδή την αναμενόμενη συνάρτηση ωφελιμότητας, ώστε να είναι βέλτιστο και παράλληλα κλειστό, φραγμένο και κυρτό οποιαδήποτε απόφαση και να πραγματοποιηθεί. Επίσης, το εσωτερικό και το σύνορο του είναι καλά ορισμένα οπότε οι συνθήκες βελτιστοποίησης οδηγούν σε λύσεις που βρίσκονται στο εσωτερικό του συνόλου οπότε έχουμε συνασφάλιση ή σε λύσεις στο σύνορο του συνόλου που αποτελείται από απαλλαγή, πλήρη ασφάλιση και καθόλου ασφάλιση.

Στην περίπτωση που ο ασφαλισμένος αποδεχθεί τα κόστη, η διαδικασία επιλογής λειτουργεί σαν να μην υπάρχουν έξοδα (charge) και ο αρχικός πλούτος του να ισούται με $w-\alpha$. Τα σταθερά κόστη δεν έχουν κάποια απευθείας επίδραση στη βελτιστοποίηση του ασφαλιστικού συμβολαίου και το μόνο που παραμένει είναι η επιρροή του πλούτου και η βέλτιστη συνάρτηση αποζημίωσης που περιέχει πλήρη ασφάλιση όταν το άτομο αποφασίσει να καλύψει κίνδυνο τέτοιο ώστε $I^* \in J_1$.

Οι μελέτες του Raviv (1979) σχετίζονται με την βελτιστοποίηση της γνήσιας θετικής απαλλαγής, όταν τα κόστη αυξάνονται και αποκτιόνται χάρη στη μοναδική συνθήκη βελτιστοποίησης: $I^* \in J_2$.

Παρατηρήθηκε πως η γνήσια συνασφάλιση δεν είναι ποτέ βέλτιστη (Πρόταση 3.2) όταν ο κίνδυνος του ασφαλιστή είναι ουδέτερος και δεν υπάρχει ηθικός κίνδυνος. Τελικά, στρέφοντας την προσοχή μας μόνο στην πρώτη παράγωγο της συνάρτησης κόστους, μπορούμε να περιορίσουμε το σύνολο των διαθέσιμων συναρτήσεων αποζημίωσης σε αυτών με απαλλαγή, όταν τα διοικητικά κόστη αυξάνονται. Παρ΄ όλα αυτά, ένας άπειρος αριθμός συναρτήσεων αποζημίωσης ακόμα παραμένει διαθέσιμος όταν τα οριακά κόστη είναι θετικά. Το πρόβλημα που παραμένει είναι ότι δεν ξέρουμε τον σχεδιασμό της βέλτιστης συνάρτησης εκτός της απαλλαγής, αφού καμία υπόθεση δεν έχει γίνει σχετικά με την μεταβολή των οριακών κόστων. Είδη γνωρίζουμε ότι ένα σταθερό οριακό κόστος (που είναι γραμμική συνάρτηση κόστους) παράγει μερική πλήρη ασφάλιση μέσω της απαλλαγής. Στην περίπτωση όμως που η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης κόστους δεν είναι μηδέν, ο σχεδιασμός της βέλτιστης συνάρτησης αποζημίωσης πέρα από την απαλλαγή εξαρτάται όχι μόνο από το πρόσημο του $c''(\cdot)$ αλλά και από την προσεκτική συμπεριφορά του ατόμου απέναντι στους κινδύνους (όπως έδειξε ο Spaeter (1996)).

Μια οικονομική εξήγηση αυτών των συμπερασμάτων είναι η εξής. Η έλλειψη βελτιστοποίησης της πλήρης ασφάλισης, όταν ο ασφαλιστής αντιμετωπίζει αυξανόμενα διοικητικά κόστη, είναι ένα πασίγνωστο αποτέλεσμα στην ασφαλιστική θεωρία. Σε μια τέτοια περίπτωση, το οριακό κόστος της ασφάλισης είναι αυστηρά θετικό και τα αναμενόμενα κόστη «γεννιούνται» από τον ασφαλισμένο μέσω του ασφαλίστρου. Τελικά ο ασφαλισμένος δεν θα μπορέσει ποτέ να καλύψει τα κόστη μέσω των συναρτήσεων αποζημίωσης και προτιμά να κρατήσει ένα ποσοστό του κινδύνου ώστε να έχει χαμηλότερο ασφάλιστρο χρησιμοποιώντας εκτός από την πλήρη ασφάλιση συμβόλαιο με απαλλαγή και συνασφάλιση.

Παράδειγμα

Έστω δύο ποσά ζημιών x_1 και x_2 τέτοια ώστε x_1, x_2 θεωρούνται μικρό και μεγάλο αντίστοιχα, σε σύγκριση με τον αρχικό πλούτο του ατόμου. Επίσης, ο ασφαλισμένος είναι πιο ευαισθητοποιημένος στην αύξηση της αποζημίωσης κατά μια μονάδα όταν η ζημιά ισούται με x_2.

Στην πραγματικότητα, ο τελικός πλούτος του ασφαλισμένου, χωρίς αποζημιώσεις, μειώνεται περισσότερο σε σύγκριση με τον αρχικό του πλούτο, όταν η απώλεια αντιστοιχεί στο x_2 αντί x_1. Καθώς τα διοικητικά κόστη αυξάνονται, το άτομο ενδιαφέρεται περισσότερο για την αύξηση των κόστων που επηρεάστηκαν από την αύξηση της ασφάλισης όταν η ζημιά δεν είναι σημαντική.

Συμπερασματικά, το άτομο προτιμά να μην αποζημιωθεί για μικρές ζημιές και το βέλτιστο συμβόλαιο να περιέχει μια αυστηρά θετική απαλλαγή, η τιμή του οποίου εξαρτάται από τον βαθμό αποστροφής κινδύνου του ασφαλισμένου και τον αρχικό του πλούτο.

Χρειάζεται να σημειώσουμε ότι αν τα κόστη ισούνται με μηδέν, το ασφαλιστικό ασφάλιστρο είναι ακριβές και ο Mossin (1968) έχει δείξει ότι το άτομο επιλέγει πλήρη ασφάλιση. Αυτή η περίπτωση μπορεί επίσης να παραχθεί από την προσέγγιση μας στην οποία η συνάρτηση αποζημίωσης ανήκει στο σύνορο. Είναι χρήσιμο να θυμηθούμε ότι το ασφαλιστικό συμβόλαιο του Mossin είναι καθορισμένο από εξωγενείς παράγοντες δηλαδή ο ασφαλισμένος επιλέγει την γνήσια συνασφάλιση με συντελεστή α (ισούται με ένα στην περίπτωση της πλήρης ασφάλισης).

Χάρις την μοναδική συνθήκη βελτιστοποίησης έχουμε επίσης, αποδείξει ότι η λύση, αν υπάρχει, πάντα εκφράζει απαλλαγή όταν τα κόστη είναι αυξανόμενα σε σχέση με τις αποζημιώσεις. Το γεγονός αυτό μπορεί να έχει, υποθετικά, μερικούς πολύ διαφορετικούς σχεδιασμούς και οι αναλύσεις των Arrow (1963), Raviv (1979) και Huberman, Mayers και Smith (1983) μπορούν να υπάρχουν ως ειδικές περιπτώσεις.

Τελικά έχουμε γενικεύσει τα υπάρχοντα αποτελέσματα και τα έχουμε παρουσιάσει με ένα ομογενοποιημένο τρόπο. Έχουμε επίσης δείξει, στο πλαίσιο της τοπολογίας με γωνιακή νόρμα, ότι ένα βέλτιστο συμβόλαιο περιέχει απαλλαγή όταν η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης κόστους είναι αυστηρά θετική. Για να καταννοήσουμε με περισσότερη ακρίβεια τι συμβαίνει πέρα από την απαλλαγή, η απόκλιση (variation) του οριακού κόστους πρέπει να ληφθεί υπόψιν. Αυτή η μελέτη έγινε από τον Spaeter (1996), όπου χρησιμοποιήθηκε η ίδια συνθήκη βελτιστοποίησης, ιδιαίτερα όταν τα κόστη είναι μη γραμμικά.

Κεφάλαιο 5

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Το κεφάλαιο αυτό χωρίζεται σε τρία μέρη. Στο πρώτο μέρος παρουσιάζουμε τις απαραίτητες γνώσεις μαθηματικών σε περίπτωση που θέλουμε περισσότερες πληροφορίες για κάποια έννοια. Το δεύτερο μέρος περιέχει τις αποδείξεις από το Κεφάλαιο 2 και των Λημμάτων που χρησιμοποίηθηκαν στο Κεφάλαιο 3 σε περίπτωση που θέλουμε να ανατρέξουμε για να τις μελετήσουμε.

Μέρος Α

5.1 Συναρτήσεις

Ορισμός 5.1.1 Αν έχουμε $L \geq 0$ πραγματικό αριθμό και $f : \mathbf{E} \to (-\infty, \infty]$ είναι *Lipschitz* στο υποσύνολο C του πεδίου ορισμού αν $|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|$ για κάθε σημείο $x, y \in C$.
Η f είναι τοπικά *Lipschitz* στο x αν η f είναι *Lipschitz* σε μια περιοχή γύρω από το σημείο x.

Θεώρημα 5.1.1 Έστω $f : \mathbf{E} \to (-\infty, \infty]$ μια κυρτή συνάρτηση. Τότε η f είναι τοπικά *Lipschitz* σε ένα σημείο x στο πεδίο ορισμού της αν και μόνο αν αυτή είναι φραγμένη σε μια γειτονιά του x.

Ορισμός 5.1.2 Θεωρούμε ένα σύνολο $K \subset \mathbf{E}$, ένα Ευκλείδιο χώρο $\mathbf{Y}$ και μια απεικόνιση $\Omega : K \to \mathbf{Y}$. Λέμε ότι η Ω είναι *USC* σε ένα σημείο x στο K αν κάθε ανοιχτό σύνολο U περιέχει $\Omega(x)$ και επίσης περιέχει $\Omega(z)$ για όλα τα σημεία z στο K που βρίσκονται κοντά στο x.

Ορισμός 5.1.3 Η απεικόνιση Ω είναι **cusco** αν είναι *USC* με μη κενές, συμπαγές και κυρτές εικόνες.

Πρόταση 5.1.1 Για ένα κυρτό σύνολο $C \subset \mathbf{E}$, μια κυρτή συνάρτηση $J : C \to \mathbb{R}$ έχει φραγμένα ισοϋψή σύνολα αν και μόνο αν ικανοποιείται ότι $\lim_{\|x\|\to\infty} \sup \frac{J(x)}{\|x\|} < 0$.

Ορισμός 5.1.4 Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση (όπου I συμβολίζουμε ένα κλειστό, ανοιχτό ή ημιανοιχτό, πεπερασμένο ή άπειρο διάστημα στο $\mathbb{R}$). Η f λέγεται **κυρτή συνάρτηση** αν $f[tx+(1-t)y] \le tf(x)+(1-t)f(y)$ για κάθε $x, y \in I$ και για κάθε $0 < t < 1$.

Ορισμός 5.1.5 Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Η $f(x)$ είναι **γνήσια κυρτή** αν έχουμε γνήσια ανισότητα στον προηγούμενο ορισμό.

Ορισμός 5.1.6 Μια συνάρτηση $f(x) : I \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **κοίλη** (αντίστοιχα γνησίως κοίλη) αν η συνάρτηση $-f(x)$ είναι κυρτή (αντίστοιχα, γνησίως κυρτή).

Παρατήρηση. Ισοδύναμοι τρόποι με τους οποίους μπορεί να περιγραφεί η κυρτότητα της $f(x) : I \to \mathbb{R}$ είναι οι εξής

(α) Αν $x, y, z \in I$ και $x < z < y$, τότε $f(z) \le \frac{y-z}{y-x} f(x) + \frac{z-x}{y-x} f(y)$.

Παρατηρούμε ότι το δεξιό μέλος αυτής της ανισότητας ισούται με $f(x) + \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x)$.

(β) Αν $x, y \in I$ και $t, s > 0$ με $t+s=1$, τότε $f(tx+sy) \le tf(x)+sf(y)$.

Οι παρακάτω **ιδιότητες** είναι άμεσες συνέπειες του ορισμού

(α) Αν $f, g : I \to \mathbb{R}$ είναι δύο κυρτές συναρτήσεις και $a \ge 0, b \ge 0$, τότε η $af + bg$ είναι κυρτή συνάρτηση.

(β) Το άθροισμα πεπερασμένου πλήθους κυρτών συναρτήσεων είναι κυρτή συνάρτηση.

(γ) Το κατά σημείο όριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας κυρτών συναρτήσεων είναι κυρτή συνάρτηση.

(δ) Έστω $\{f_j : j \in J\}$ τυχαία οικογένεια κυρτών συναρτήσεων $f_j : I \to \mathbb{R}$.

Ορίζουμε $f : I \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sup\{f_j(x) : j \in J\}$. Αν η f είναι πεπερασμένη παντού στο I, τότε η f είναι κυρτή.

Θεώρημα 5.1.2 Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αν $x \in (a,b)$, τότε υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι:

$$f'_-(x) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{και} \quad f'_+(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Θεώρημα 5.1.3 Κάθε κυρτή συνάρτηση $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής.

Απόδειξη. Έστω $x \in (a,b)$. Τότε, για μικρά $h > 0$ έχουμε $x+h, x-h \in (a,b)$ και $f(x+h) = f(x) + \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} h \to f(x) + f'_{+}(x) \cdot 0 = f(x)$

όταν $h \to 0^+$,και

ανάλογα $f(x-h) = f(x) + \dfrac{f(x-h)-f(x)}{-h} \cdot (-h) \to f(x) + f'_{-}(x) \cdot 0 = f(x)$

όταν $h \to 0^+$. Άρα, η f είναι συνεχής στο x. □

Θεώρημα 5.1.4 Ορίζω $f : E(-\infty, +\infty]$ να είναι μια κυρτή συνάρτηση και E ένας Ευκλείδιος χώρος. Τότε η f είναι συνεχής στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού.

Θεώρημα 5.1.5 Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Η f είναι κυρτή.

(β) Η f' είναι αύξουσα.

(γ) Για κάθε $x, y \in (a,b)$ ισχύει $f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x)$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f είναι κυρτή. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη, έχουμε $f' = f'_{-} = f'_{+}$ στο (a,b). Από το Θεώρημα 3 οι f'_{-}, f'_{+} είναι αύξουσες, άρα η f' είναι αύξουσα.

Υποθέτουμε στη συνέχεια ότι η f' είναι αύξουσα. Έστω $x, y \in (a,b)$. Αν $x < y$, εφαρμόζοντας το Θεώρημα της Μέσης Τιμής στο $[x,y]$, βρίσκουμε $\xi \in (x,y)$ ώστε $f(y) = f(x) + f'(\xi)(y-x)$. Αφού $\xi > x$ και η f' είναι αύξουσα, έχουμε $f'(\xi) \geq f'(x)$. Αφού $y - x > 0$, έπεται ότι:

$$f(y) = f(x) + f'(\xi)(y-x) \geq f(x) + f'(x)(y-x).$$

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι η (γ) που θέλουμε να δείξουμε ισχύει για κάθε $x, y \in (a,b)$ και έστω $0 < t < 1$. Θέτουμε $z = (1-t)x + ty$. Εφαρμόζοντας την υπόθεση για τα ζευγάρια x, z και y, z παίρνουμε

$$f(x) \geq f(z) + f'(z)(x-z) \text{ και } f(y) \geq f(z) + f'(z)(y-z).$$

Άρα, $(1-t)f(x) + tf(y) \geq (1-t)f(z) + tf(z) + f'(z)[(1-t)(x-z) + t(y-z)]$

$$= f(z) + f'(z)[(1-t)x + ty - z] = f(z)$$

Δηλαδή, $(1-t)f(x) + tf(y) \geq f((1-t)x + ty)$. □

Θεώρημα 5.1.6 Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ δευτέρου βαθμού παραγωγίσιμη συνάρτηση. Η f είναι κυρτή αν και μόνο αν $f''(x)\geq 0$ για κάθε $x\in(a,b)$.

Απόδειξη. Η f' είναι αύξουσα αν και μόνο αν $f''\geq 0$ στο (a,b). Όμως από το προηγούμενο Θεώρημα η f' είναι αύξουσα αν και μόνο αν η f είναι κυρτή. □

Η ανισότητα του Jensen αποδεικνύεται με επαγωγή και «γενικεύει» την ανισότητα του ορισμού της κυρτής συνάρτησης.

Πρόταση 5.1.2 (**Ανισότητα του Jensen**). Έστω $f:I\to\mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αν $x_1,...,x_m\in I$ και $t_1,...,t_m\geq 0$ με $t_1+...+t_m=1$ τότε $\sum_{i=1}^{m} t_i x_i\in I$ και $f(t_1x_1+...+t_mx_m)\leq t_1f(x_1)+...+t_mf(x_m)$.

Απόδειξη. Έστω $a=\min\{x_1,...,x_m\}$ και $b=\max\{x_1,...,x_m\}$. Αφού το I είναι διάστημα και $a,b\in I$ συμπεραίνουμε ότι $\{x_1,...,x_m\}\subseteq[a,b]\subseteq I$.

Αφού $t_i\geq 0$ και $t_1+...+t_m=1$, έχουμε

$a=(t_1+...+t_m)a\leq t_1x_1+...+t_mx_m\leq(t_1+...+t_m)b=b$, δηλαδή $t_1x_1+...+t_mx_m\in I$.

Θα δείξουμε την $f(t_1x_1+...+t_mx_m)\leq t_1f(x_1)+...+t_mf(x_m)$ με επαγωγή ως προς m. Για $m=1$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε, ενώ για $m=2$ η σχέση μας ικανοποιείται από τον ορισμό της κυρτής συνάρτησης.

Για το επαγωγικό βήμα υποθέτουμε ότι $m\geq 2$, $x_1,...,x_m,x_{m+1}\in I$ και $t_1,...,t_m,t_{m+1}\geq 0$ με $t_1+...+t_m+t_{m+1}=1$.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάποιο $t_i<1$ (αλλιώς, η ανισότητα ισχύει τετριμμένα). Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $t_{m+1}<1$.

Θέτουμε $t=t_1+...+t_m=1-t_{m+1}>0$. Αφού $x_1,...,x_m\in I$ και $\frac{t_1}{t}+...+\frac{t_m}{t}=1$, η επαγωγική υπόθεση μας δίνει το $x=\frac{t_1}{t}x_1+...+\frac{t_m}{t}x_m\in I$ και $tf(x)=tf(\frac{t_1}{t}x_1+...+\frac{t_m}{t}x_m)\leq t_1f(x_1)+...+t_mf(x_m)$.

Εφαρμόζοντας τώρα τον ορισμό της κυρτής συνάρτησης, παίρνουμε $f(tx+t_{m+1}x_{m+1}) \le tf(x)+t_{m+1}f(x_{m+1})$.

Συνδιάζοντας τις δύο προηγούμενες ανισότητες, έχουμε

$f(t_1x_1+...+t_mx_m+t_{m+1}x_{m+1}) = f(tx+t_{m+1}x_{m+1}) \le t_1f(x_1)+...+t_mf(x_m)+t_{m+1}f(x_{m+1})$. □

Λήμμα 5.1.1 Αν $x<y$ στο $\mathbb{R}$ τότε $[x,y]=\{(1-t)x+ty : 0\le t\le 1\}$.

Ειδικότερα, για κάθε $z\in[x,y]$ έχουμε $z=\dfrac{y-z}{y-x}x+\dfrac{z-x}{y-x}y$.

Απόδειξη. Ελέγχουμε ότι για κάθε $t\in[0,1]$ ισχύει $x\le(1-t)x+ty=x+t(y-x)\le y$ δηλαδή $\{(1-t)x+ty : 0\le t\le 1\}\subseteq[x,y]$. □

Αντίστροφα, κάθε $z\in[x,y]$ γράφεται στη μορφή $z=\dfrac{y-z}{y-x}x+\dfrac{z-x}{y-x}y$.

Παρατηρώντας ότι $t:=(z-x)/(y-x)\in[0,1]$ και $1-t:=(y-z)/(y-x)$, βλέπουμε ότι $[x,y]\subseteq\{(1-t)x+ty : 0\le t\le 1\}$.

Τα σημεία $(1-t)x+ty$ του $[x,y]$ λέγονται **κυρτοί συνδιασμοί** των x και y.

Ορισμός 5.1.7 Έστω x,y δύο σημεία στον $\mathbb{R}^n$. Το ευθύγραμμο τμήμα $[x,y]$ με άκρα x και y είναι το σύνολο όλων των σημείων της μορφής $x+t(y-x)$ με $t\in[0,1]$: $[x,y]=\{(1-t)x+ty : 0\le t\le 1\}$.

Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Το A είναι **κυρτό σύνολο** αν για κάθε $x,y\in A$ και για κάθε $t\in[0,1]$ έχουμε: $(1-t)x+ty\in A$.

Γεωμετρικά, ένα σύνολο είναι κυρτό αν για κάθε δύο σημεία του περιέχει και το ευθύγραμμο τμήμα που τα συνδέει (δηλαδή, η χορδή που έχει σαν άκρα τα σημεία $(x,f(x))$ και $(y,f(y))$ δεν είναι πουθενά κάτω από το γράφημα της f).

Ορισμός 5.1.8 Έστω (Ω,A) μετρήσιμος χώρος και $A\subset\Omega$. Τότε $A\in\mathrm{A}$ αν και μόνο αν 1_A είναι A -μετρήσιμη, όπου 1_A είναι η **δείκτρια** ή χαρακτηριστική **συνάρτηση** του A, δηλαδή

$$1_A(x)=\begin{cases}1 & \alpha\nu\ x\in A\\ 0 & \alpha\nu\ x\notin A\end{cases}$$

Ορισμός 5.1.9 Μια μετρήσιμη **συνάρτηση** $X:\Omega \to \mathbb{R}$ λέγεται **απλή** αν το σύνολο $X(\omega)$ των τιμών της X είναι πεπερασμένο.
Αν η X είναι απλή συνάρτηση, τότε υπάρχει μια μοναδική πεπερασμένη μετρήσιμη διαμέριση $\{A_1,...,A_n\}$ του X, με $A_i \neq \varnothing$ και μοναδικοί $x_1,...,x_n \in \mathbb{R}$ με $x_i \neq x_j$ για $i \neq j$ ώστε $X = \sum_{i=1}^{n} x_i 1_{A_i}$.

Ορισμός 5.1.10 Ορίζουμε την **μοναδιαία σφαίρα** ως $B = \{x \in \mathbf{E} / \|x\| \leq 1\}$, όπου $\mathbf{E}$ Ευκλείδιος χώρος.

Ορισμός 5.1.11 Ένα **σύνολο** D ονομάζεται **φραγμένο** αν υπάρχει πραγματικός k τέτοιος ώστε $kB \supset D$.

Ορισμός 5.1.12 Μια **συνάρτηση** ονομάζεται **ομαλή** όταν έχει παραγώγους άπειρων βαθμών δηλαδή έχει παραγώγους όλων των πεπερασμένων βαθμών.

Ορισμός 5.1.13 Αν $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ορίζουμε

$$R_1(x,x_0) = f(x) - f(x_0) - [Df(x_0)](x - x_0)$$

οπότε

$$f(x) = f(x_0) + [Df(x_0)](x - x_0) + R_1(x,x_0)$$

και από τον ορισμό της παραγωγισιμότητας έχουμε $\dfrac{|R_1(x,x_0)|}{\|x - x_0\|} \to 0$ όταν $x \to x_0$, δηλαδή το $R_1(x,x_0)$ μηδενίζεται στο x_0, ως προς την πρώτη τάξη. Μπορούμε επίσης, να θέσουμε $h = x - x_0$ οπότε $R_1(x,x_0) = R_1(h,x_0)$.

Θεώρημα 5.1.7 Το ανάπτυγμα Taylor πρώτης τάξης. Έστω $f:U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0 \in U$ μπορούμε να γράψουμε

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) + R_1(h,x_0)$$

όπου $R_1(h,x_0)/\|h\| \to 0$ όταν $h \to 0$ στον $\mathbb{R}^n$.
Επίσης, $R_1(h,x_0)$ είναι το σφάλμα ως προς την τάξη 1.

5.2 Μετρική Τοπολογία

5.2.1 Μετρικός Χώρος

Ορισμός 5.2.1 Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Μια **απεικόνιση** $d: X \times X \to \mathbb{R}$ λέγεται **μετρική** στο X (ή συνάρτηση απόστασης στο X) αν για κάθε $x,y,z \in \mathrm{X}$ ικανοποιούνται τα εξής:

$$d(x,y) \geq 0.$$

$d(x,y)=0$ αν και μόνο αν $x=y$.
$d(x,y)=d(y,x)$.
$d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$. (τριγωνική ανισότητα)

Το ζευγάρι (X,d) λέγεται **μετρικός χώρος**. Τα στοιχεία του X λέγονται σημεία του χώρου και ο αριθμός $d(x,y)$ απόσταση του x από το y.

Παράδειγμα. Στο $\mathbb{R}$ η συνήθης ή Ευκλείδια μετρική ορίζεται να είναι η συνάρτηση

$$d(x,y)=\sqrt{(x-y)^2}=|x-y|.$$

Ορισμός 5.2.2 Ένας **μετρικός χώρος** X όπου κάθε ακολουθία Cauchy έχει όριο στο X ονομάζεται **πλήρης**.

Ορισμός 5.2.3 Για να έχουμε **διανυσματικό χώρο,** έστω V με $x,y,z \in$ V και βαθμωτά $r,s \in$ F σώμα θα πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

i) $x+y=y+x$.
ii) $(x+y)+z=x+(y+z)$.
iii) Υπάρχει ένα στοιχείο $0\in V$ τέτοιο ώστε $\forall$ x να ισχύει $0+x = x+0 = x$.
iv) Για κάθε $x\in$ V υπάρχει (μοναδικό) $-x$ τέτοιο ώστε $x+(-x)=0$.
v) $r(sx)=(rs)x$.
vi) $(r+s)x=rx+sx$.
vii) $r(x+y)=rx+ry$.
viii) $1x=x$.

Ορισμός 5.2.4 Έστω V διανυσματικός χώρος. Μια συνάρτηση $\|\cdot\|:V\to\mathbb{R}$ λέγεται **νόρμα** αν ικανοποιεί τα εξής για κάθε $x,y \in V$ και $\lambda\in\mathbb{R}$:

i) $\|x\|\ge 0$
ii) $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$
iii) $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$
iv) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$

Η νόρμα του διανύσματος x μετράει την απόσταση του x από το 0.

Ένας **διανυσματικός χώρος** V **πάνω σε σώμα F λέγεται ότι είναι πεπερασμένης διάστασης** αν μια βάση του περιέχει πολλά πεπερασμένα στοιχεία. Σε αυτήν την περίπτωση, οποιεσδήποτε δύο βάσεις του V έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων. Αυτός ο αριθμός καλείται **διάσταση του** V και συμβολίζεται $\dim V$.

Στην πραγματικότητα οποιοδήποτε πεπερασμένο σύνολο από γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στο V μπορεί να προεκταθεί σε μια βάση του V. Επιπλέον, κάθε σύνολο διάστασης V με γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στο V είναι μια **βάση** για το V.

Ένας **διανυσματικός χώρος** V **πάνω στο σώμα F λέγεται άπειρων διαστάσεων** αν δεν έχει μια βάση που να περιέχει μόνο πολλά πεπερασμένα στοιχεία.

Ορισμός 5.2.5 Χώρος Banach είναι ένας πλήρης διανυσματικός χώρο με νόρμα. Δηλαδή είναι ένας διανυσματικός χώρος V από πραγματικούς και μιγαδικούς αριθμούς εφοδιασμένος με νόρμα $\|\cdot\|$ τέτοιος ώστε κάθε ακολουθία Cauchy στο V έχει το όριο της στο V .

Ορισμός 5.2.6 Έστω ένας διανυσματικός χώρος V πάνω σε σώμα F .Ορίζουμε το **δυϊκό χώρο** V^* να είναι το σύνολο όλων των γραμμικών συναρτήσεων στο V . Ο V^* γίνεται διανυσματικός χώρος πάνω στο F και ισχύουν οι ιδιότητες
$(k+m)(x)=k(x)+m(x)$ και $(ak)(x)=ak(x)$ για όλα $k,m\in V^*$, $a\in F$ και $x\in V$.

Ορισμός 5.2.7 Ένας **χώρος Banach είναι ανακλαστικός** αν ικανοποιείται η ιδιότητα που ισχύει στους δυϊκούς χώρους.

Ορισμός 5.2.8 Κάθε εσωτερικό γινόμενο $<\cdot,\cdot>$ σε πραγματικό και μιγαδικό διανυσματικό χώρο συνδέεται με την νόρμα $\|\cdot\|$ με την σχέση $\|x\|=\sqrt{<x,x>}$. Ένας **χώρος** είναι **Hilbert** H αν είναι πλήρης ως προς την νόρμα που αναφέραμε.

Παρατήρηση. Κάθε χώρος Hilbert είναι και χώρος Banach. Σε άπειρων διαστάσεων διανυσματικό χώρο χρησιμοποιούμε τον χώρο Hilbert επειδή «πλησιάζει» περισσότερο τους χώρους με πεπερασμένες διαστάσεις.

5.2.2 Τοπολογία Μετρικού Χώρου

Ορισμός 5.2.9 Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Μια **ανοιχτή μπάλα** με ακτίνα $r>0$ και κέντρο το στοιχείο $a\in X$ είναι το σύνολο $B(a,r)=\{x \text{ ωστε } d(a,x)<r, x\in X\}$.

Ορισμός 5.2.10 Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Μια **κλειστή μπάλα** με ακτίνα $r>0$ και κέντρο το στοιχείο $a\in X$ είναι το σύνολο $C(a,r)=\{x \text{ ωστε } d(a,x)\le r, x\in X\}$.

Ορισμός 5.2.11 Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Ένα υποσύνολο $G\subset X$ λέγεται **ανοιχτό σύνολο** (ως προς την μετρική d) αν για κάθε $x\in G$ υπάρχει $\varepsilon_x>0$ ώστε η ανοιχτή μπάλα με κέντρο x και ακτίνα ε_x να είναι υποσύνολο του G .

Μερικές **βασικές ιδιότητες** ανοιχτών υποσυνόλων του μετρικού χώρου (X,d)

i) $\varnothing$ και το X είναι ανοιχτά σύνολα.
ii) Η ένωση ανοιχτών υποσυνόλων του μετρικού χώρου (X,d) είναι ανοιχτό σύνολο.
iii) Η τομή πεπερασμένου πλήθους ανοιχτών υποσυνόλων του μετρικού χώρου (X,d) είναι ανοιχτό σύνολο.

Ορισμός 5.2.12 Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Ένα υποσύνολο $G\subset X$ λέγεται **κλειστό σύνολο** (ως προς την μετρική d) αν το συμπλήρωμα $G^c=X/G$ είναι ανοιχτό σύνολο.

Παράδειγμα. Το υποσύνολο $A=[a,b]$ του $\mathbb{R}$ είναι κλειστό στο μετρικό χώρο $(\mathbb{R},d)$, αφού το συμπλήρωμά του είναι $(-\infty,a)\cup(b,\infty)$ ανοιχτό σύνολο, ως ένωση ανοιχτών συνόλων.

Μερικές **βασικές ιδιότητες** κλειστών συνόλων του μετρικού χώρου (X,d):

i) $\varnothing$ και X είναι κλειστά σύνολα.
ii) Η τομή μιας αυθαίρετης οικογένειας κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.
iii) Η ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών συνόλων είναι κλειστό.

Ορισμός 5.2.13 Έστω (X,d) μετρικός χώρος και A ένα υποσύνολο του X. Η ένωση όλων των ανοιχτών υποσυνόλων του X που περιέχονται στο σύνολο A θα λέγεται το **εσωτερικό** ή ο **πυρήνας** του A και θα συμβολίζεται με A^0. Δηλαδή,

$$A^0=\cup\{G \text{ οπου } G \text{ ειναι ανοιχτο υποσυνολο του } X \text{ ωστε } G\subset A\}.$$

Ορισμός 5.2.14 Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $A\subset X$. Η **κλειστότητα** $\overline{A}$ του A είναι η τομή όλων των κλειστών υποσυνόλων που περιέχουν το A. Δηλαδή,

$$\overline{A}=\cap\{F\subset X : F \text{ κλειστο και } \mathrm{A}\subset F\}.$$

Ορισμός 5.2.15 Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $A\subset X$. Το σύνολο των σημείων που ανήκουν στην κλειστότητα του A αλλά δεν ανήκουν στο εσωτερικό του, θα λέγεται το **σύνορο** του A και θα συμβολίζεται ∂A. Δηλαδή, $\partial A=\overline{A}\setminus A^0$.

5.3 Συμπάγεια

Ορισμός 5.3.1 Μια **κάλυψη** (ένα κάλυμμα) K ενός συνόλου X είναι μια συλλογή συνόλων K ώστε $X\subseteq\cup K$.

Ορισμός 5.3.2 Αν K είναι κάλυψη του μετρικού χώρου X, το υποσύνολο C του K λέγεται **υποκάλυψη**, αν η ένωση των στοιχείων της είναι ίση με τον X, δηλαδή αν το C αποτελεί από μόνο του κάλυψη του X.

Ορισμός 5.3.3 Ένας μετρικός χώρος X λέγεται **συμπαγής μετρικός χώρος** αν κάθε ανοιχτή κάλυψη του έχει πεπερασμένη υποκάλυψη.

Πρόταση 5.3.1 Ένα μη κενό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο.

Απόδειξη. Έστω μη κενό συμπαγές υποσύνολο M του $\mathbb{R}$. Αφού το M είναι μη κενό και φραγμένο, το M έχει supremum: $\beta=\sup M$. Άρα υπάρχει ακολουθία $\{x_n\}$ στο M ώστε $x_n\to\beta$. Αφού το M είναι κλειστό, $\beta\in M$. Άρα το β είναι το μέγιστο στοιχείο του M. Η ίδια ακριβώς διαδικασία γίνεται για την ύπαρξη ελαχίστου στοιχείου. $\square$

5.4 Πιθανοθεωρητικές έννοιες

5.4.1 σ-άλγεβρα

Ορισμός 5.4.1 Μια οικογένεια A υποσυνόλων ενός συνόλου Ω λέγεται **σ-άλγεβρα** στο Ω αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $\Omega \in \mathrm{A}, \varnothing \in \mathrm{A}$
2. Αν $A \in \mathrm{A}$ τότε $A^c \equiv \Omega \setminus A \in \mathrm{A}$
3. 3΄. Αν $A_1, A_2, \ldots \in \mathrm{A}$ τότε $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathrm{A}$

Με τις ιδιότητες (2) και (3) απαιτούμε η σ-άλγεβρα να είναι κλειστή ως προς τα συμπληρώματα και τις αριθμήσιμες ενώσεις. Παράλληλα στη θέση της ιδιότητας (3) θα μπορούσαμε να ζητάμε να ικανοποιείται

3΄. Αν $A_1, A_2, \ldots \in \mathrm{A}$ τότε $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathrm{A}$

δηλαδή η σ-άλγεβρα να είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες τομές.

Απόδειξη. Στην περίπτωση που ισχύει η (3) έχουμε $A_1^c, A_2^c, \ldots \in \mathrm{A}$ από την (2) όμως έχουμε $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathrm{A} \Leftrightarrow \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c \in \mathrm{A} \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathrm{A}$.

Ορισμός 5.4.2 Μια οικογένεια A υποσυνόλων ενός συνόλου Ω λέγεται **άλγεβρα** στο Ω αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $\Omega \in \mathrm{A}, \varnothing \in \mathrm{A}$
2. Αν $A \in \mathrm{A}$ τότε $A^c \equiv \Omega \setminus A \in \mathrm{A}$
3. $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathrm{A}$, $n \in \mathbb{N}$ τότε $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathrm{A}$

Παρατηρούμε ότι η διαφορά της άλγεβρας από τη σ-άλγεβρα είναι στην ιδιότητα (3) η οποία απαιτεί η άλγεβρα να είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες ενώσεις (ενώ η σ-άλγεβρα χρειάζεται αριθμήσιμες ενώσεις). Επίσης, στην άλγεβρα ισχύει η ιδιότητα της κλειστότητας ως προς πεπερασμένες τομές και αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο. Το συμπερασμά μας είναι ότι κάθε σ-άλγεβρα είναι και άλγεβρα. Το αντίθετο δεν ισχύει πάντοτε.

Ορισμός 5.4.3 Έστω ένα σύνολο Ω και μια σ-άλγεβρα A υποσυνόλων του Ω. Το ζεύγος (Ω, A) καλείται **μετρήσιμος χώρος**.

Ορισμός 5.4.4 Έστω C μια κλάση υποσυνόλων του Ω. Ορίζουμε την σ-άλγεβρα που παράγεται από την C ως την μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει την κλάση C και την συμβολίζουμε με σ(C).

5.4.2 Τυχαίες μεταβλητές

Ορισμός 5.4.5 Θεωρούμε ότι $\Omega = \mathbb{R}$. Η σ-άλγεβρα Borel είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από την κλάση C όλων των διαστημάτων της μορφής $(-\infty, x)$ τα οποία μπορεί να θεωρηθούν ως υποσύνολα της ευθείας των πραγματικών αριθμών. Τη συμβολίζουμε με $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ή απλά με $\mathcal{B}$.
Τα στοιχεία της $\mathcal{B}$ ονομάζονται **σύνολα Borel**.

Ορισμός 5.4.6 Ένα μέτρο πιθανότητας P επάνω σε ένα μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathcal{A})$ είναι μια απεικόνιση $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ για την οποία ισχύουν
α) $P(\varnothing) = 0$, $P(\Omega) = 1$
β) Αν $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$ και τα A_i είναι ανά δύο ξένα τότε

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Η τριάδα $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ονομάζεται **χώρος πιθανοτήτων**.

Ορισμός 5.4.7 Έχουμε μια συνάρτηση $h : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ όπου $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$. Για $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ορίζουμε την αντίστροφη εικόνα του A μέσω της h να είναι

$$h^{-1}(A) := \{\omega \in \Omega : h(\omega) \in A\}$$

Η h λέγεται $\mathcal{A}$ **-μετρήσιμη** αν $\forall A \in \mathcal{B}$ ισχύει $h^{-1}(A) \in \mathcal{A}$, δηλαδή ότι η h είναι $\mathcal{A}$ -μετρήσιμη αν η αντίστροφη εικόνα κάθε Borel συνόλου μέσω της h ανήκει στην σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$.

Ορισμός 5.4.8 Μια τυχαία μεταβλητή είναι μια $\mathcal{A}$ **-μετρήσιμη** $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Την τυχαία μεταβλητή X μπορούμε να την βλέπουμε σαν μια μεταβλητή που η τιμή της εξαρτάται από την έκβαση ενός τυχαίου πειράματος. Για κάθε αποτέλεσμα παίρνουμε έναν αριθμό. Η τιμή που μπορεί να πάρει ακριβώς η μεταβλητή X εξαρτάται από τις πληροφορίες των αποταλεσμάτων του πειράματος που περιέχονται στη σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ **.**

Ορισμός 5.4.9 Μια τυχαία μεταβλητή X είναι P-ολοκληρώσιμη και ανήκει στο σύνολο $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ των P-ολοκληρώσιμων συναρτήσεων αν

$$\int_{\Omega} |X| dP = \int_{\Omega} |X(\omega)| dP(\omega) = \int_{\Omega} |X(\omega)| P(d\omega) < \infty$$

Ορισμός 5.4.10 Μια **τυχαία μεταβλητή** X λέγεται **απλή** αν παίρνει πεπερασμένο αριθμό τιμών και μπορεί να γραφθεί με την μορφή

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i 1_{A_i}$$

όπου $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ και $A_i \in \mathcal{A}$, $1 \le i \le n$ όπου $A_i = \{X = x_i\}$.

Ορισμός 5.4.11 Δύο γεγονότα $A, B \in \mathcal{A}$ ονομάζονται ανεξάρτητα αν

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Ορισμός 5.4.12 Δύο τυχαίες μεταβλητές X,Y ονομάζονται ανεξάρτητες αν για οποιοδήποτε Borel σύνολα $A,B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ τα δύο γεγονότα $\{X \in A\}$ και $\{Y \in B\}$ είναι ανεξάρτητα.

5.4.3 Μέση Τιμή

Ορισμός 5.4.13 Για μια τυχαία μεταβλητή X με $X \in \mathcal{L}^1 := \mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{A},P)$ ορίζουμε τη μέση τιμή $E[X]$ της X ως

$$E[X] := \int_\Omega XdP = \int_\Omega X(\omega)dP(\omega) = \int_\Omega X(\omega)P(d\omega).$$

Ορισμός 5.4.14 Για μια οποιαδήποτε συνάρτηση $g(X)$ της Q, η μέση τιμή $E[g(X)]$ της $g(X)$ ορίζεται ως:

$$E[g(X)] := \int_\Omega g(X)dP = \int_\Omega g(X(\omega))dP(\omega) = \int_\Omega g(X(\omega))P(d\omega).$$

Ορισμός 5.4.15 Αν $A \in \mathcal{A}$ και X τυχαία μεταβλητή με $X \in \mathcal{L}^1$ τότε η μέση τιμή της X επάνω στο A ορίζεται ως:

$$E[X;A] := \int_A XdP = \int_A X(\omega)dP(\omega).$$

Πολλές φορές η μέση τιμή αναφέρεται ως αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής X.
Αν η τυχαία μεταβλητή έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ τότε η μέση τιμή της X μπορεί να γραφθεί ως ολοκλήρωμα Riemann:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

ενώ η μέση τιμή οποιασδήποτε συνάρτησης της X γράφεται ανάλογα:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx.$$

Οι σημαντικότερες ιδιότητες της μέσης τιμής είναι οι παρακάτω

- Αν $X = c$ σ.β. όπου c σταθερά, τότε $E[X] = c$.
- Αν X τυχαία μεταβλητή και c σταθερά τότε $E[cX] = cE[X]$.
- Αν X τυχαία μεταβλητή και d σταθερά τότε $E[X+d] = E(X)+d$.
- Με συνδιασμό των προηγούμενων έχουμε $E[cX+d] = cE(X)+d$.
- $E\left[\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i E[X_i]$
- Αν $X \geq 0$ τότε $EX \geq 0$ σαν συνέπεια των προηγούμενων ιδιοτήτων.
- Αν X και Y τυχαίες μεταβλητές και $X \leq Y$ σ.β. όπου $E[X] \leq E[Y]$.
- Αν $X \geq 0$ τότε $E[X] := \int_\Omega XdP = 0$ αν και μόνο αν $X = 0$ σχεδόν παντού (ως προς το μέτρο P).

Οι ίδιες ιδιότητες ισχύουν και στην περίπτωση που αντί για τυχαία μεταβλητή έχουμε συνάρτηση $g(X)$ μετρήσιμη και ισχύει $g(X):(\mathbb{R}^k, \mathrm{B}^k) \to (\mathbb{R}, \mathrm{B})$ όπου B σύνολο Borel.

Ορισμός 5.4.16 Για $1 \le p \le \infty$ λέμε ότι $X \in \mathrm{L}^p := \mathrm{L}^p(\Omega, \mathrm{A}, P)$ αν $E[|X|^p] < \infty$

Ορισμός 5.4.17 Αν X μια απλή τυχαία μεταβλητή, η μέση τιμή της είναι ο αριθμός

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i P(A_i).$$

Θεώρημα 5.4.1 Ο L^2 είναι ένας γραμμικός χώρος με νόρμα που ισχύει το εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Πρόταση 5.4.1 Αν δύο ολοκληρώσιμες τυχαίες μεταβλητές $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι ανεξάρτητες τότε $E[XY] = E[X]E[Y]$ όπου το γινόμενο XY είναι ολοκληρώσιμο.

Πρόταση 5.4.2 Ανισότητα Schwarz. Αν έχουμε X, Y τυχαίες μεταβλητές έχουμε

$$[E(XY)]^2 \le E(X^2)E(Y^2).$$

Παρατήρηση. Αν X μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή τότε αυτή είναι ολοκληρώσιμη.

Απόδειξη. Από την ανισότητα Schwarz για $Y = 1$, αν X είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη τότε $[E(|X|)]^2 = [E(1|X|)]^2 \le E(1^2)E(X^2) = E(X^2) < \infty$. $\square$

Ορισμός 5.4.18 Έστω μια ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή X και ένα γεγονός $B \in \mathrm{A}$ τέτοιο ώστε $P(B) \ne 0$ τότε η **υπό συνθήκη μέση τιμή** του X στο B ορίζεται ως:

$$E[X/B] = \frac{1}{P(B)} \int_B X dP$$

Ορισμός 5.4.19 Αν X μια ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή στο χώρο πιθανοτήτων (Ω, A, P) και ορίζουμε G μια σ-άλγεβρα που περιέχεται στο A. Τότε η υπό συνθήκη μέση τιμή του X ως προς την G ορίζεται σαν μια τυχαία μεταβλητή $E[X/\mathrm{G}]$ τέτοια ώστε:

1) $E[X/\mathrm{G}]$ είναι G μετρήσιμη

2) Για κάθε $A \in \mathrm{G}$ ισχύει $\int_A E[X/\mathrm{G}] dP = \int_A X dP$.

Μέρος Β

Αποδείξεις Κεφάλαιου 3

Απόδειξη Λήμματος 3.1

Η συνάρτηση $\sup_{x\neq 0}\dfrac{|f(x)|}{x}$ είναι καλά ορισμένη, αφού τα στοιχεία της $C^0\,[0,T]$ είναι διαφορίσιμα στο 0. Από τον τρόπο που έχουμε ορίσει την $\|f\|$ είναι προφανές ότι $\|f\|\geq 0$.

Ισχύει ότι $\|f\|$=0 αν και μόνο αν $f(x)=0$ για κάθε $x\in[0,T]$, αφού μελετάμε την $\sup_{x\neq 0}\dfrac{|f(x)|}{x}$.

Επίσης, ισχύει για κάθε f,g που ανήκουν στο $C^0\,[0,T]$:

$$\|f+g\|=\sup_{x\neq 0}\frac{|f(x)+g(x)|}{x}\leq \sup_{x\neq 0}\frac{|f(x)|+|g(x)|}{x}\leq \sup_{x\neq 0}\frac{|f(x)|}{x}+\sup\frac{|g(x)|}{x}=\|f\|+\|g\|$$

δηλαδή $\|f+g\|\leq\|f\|+\|g\|$.

Επίσης, έχουμε $\sup_{x\neq 0}\dfrac{|cf(x)|}{x}=|c|\,\sup_{x\neq 0}\dfrac{|f(x)|}{x}=|c|\|f\|$ οπότε επαληθεύεται η ιδιότητα $\|cf\|=|c|\|f\|$ $\square$

Απόδειξη Λήμματος 3.2

Έστω ($f_n, n\in\mathbb{N}$) είναι μια ακολουθία στοιχείων του $\mathcal{I}$ που συγκλίνουν στο f.

Σύμφωνα με τον ορισμό της σύγκλισης έχουμε:

$$\lim_n\|f_n-f\|=\lim_n\sup_{x\neq 0}\frac{|f_n(x)-f(x)|}{x}=0\,.$$

Για κάθε $x\in[0,T]$, από το $\lim_n\dfrac{|f_n(x)-f(x)|}{x}=0$ συναιπάγεται ότι $0\leq\dfrac{f(x)}{x}\leq 1$.

Το γεγονός αυτό συμβαίνει επειδή το (f_n, $n\in\mathbb{N}$) ανήκει στο $\mathcal{I}$ που συμβολίζει το σύνολο των διαθέσιμων συναρτήσεων αποζημίωσης και ισχύει $0\leq f_n(x)\leq x\Rightarrow$ $0\leq\dfrac{f_n(x)}{x}\leq 1$ και λόγω της σύγκλισης έχουμε $0\leq\dfrac{f(x)}{x}\leq 1$. Επομένως το $\mathcal{I}$ είναι κλειστό.

Το γεγονός ότι $\mathcal{I}$ είναι και φραγμένο προέρχεται από το παραπάνω συμπέρασμα όπου $\mathcal{I}\subset B(\vec{O},1)$. Οπότε $\mathcal{I}$ κλειστό, φραγμένο και κυρτό.

Θεωρούμε f τέτοιο ώστε $0\leq\|f\|\leq 1$ και ότι: $2a=\min\left(\min_{x\neq 0}\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|,1-\|f\|\right)$.

Η σφαίρα $B(f,a)$ ορίζεται ως:

$$B(f,a)=\{\mathrm{g}\in C^0[0,T]/\|f-g\|\leq a\}\ \text{όπου}\ \|f-g\|=\sup_{x\neq 0}\frac{|g(x)-f(x)|}{x}\,.$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε $\frac{g(x_0)}{x_0} \geq 1$ άρα $\|g\| \geq 1$. Αλλά $\frac{f(x_0)}{x_0} \leq \|f\|$, και

$$\frac{|g(x)-f(x)|}{x} \geq \frac{|g(x)|}{x} - \frac{|f(x)|}{x} \geq 1 - \sup\frac{|f(x)|}{x} \geq 1 - \|f(x)\|$$

και διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις

α) $1-\|f(x)\| < \min_{x\neq 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|$ οπότε $1-\|f(x)\| = 2a$ και έχουμε ότι $\sup_{x\neq 0}\frac{|g(x)-f(x)|}{x} \geq 2a$.

β) $1-\|f(x)\| > \min_{x\neq 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|$ οπότε $\min_{x\neq 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right| = 2a$ και έχουμε ότι $\frac{|g(x)-f(x)|}{x} \geq 1-\|f(x)\| > \min_{x\neq 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|$ άρα $\sup_{x\neq 0}\frac{|g(x)-f(x)|}{x} \geq 2a$.

Επομένως το g δεν ανήκει στη $B(f,a)$.

Παρόμοια, αν υπάρχει x_1 τέτοιο ώστε $\frac{g(x_1)}{x_1} \leq 0$ έχουμε ότι

$$\frac{|f(x)-g(x)|}{x} \geq \frac{|f(x)|}{x} - \frac{|g(x)|}{x} \geq \frac{|f(x)|}{x} \geq \min_{x\neq 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|$$

και διακρίνουμε πάλι δύο περιπτώσεις

α) $1-\|f(x)\| < \min_{x\neq 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|$ οπότε $1-\|f(x)\| = 2a$ και έχουμε ότι $\frac{|f(x)-g(x)|}{x} \geq \min_{x\neq 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right| > 1-\|f\|$ και άρα $\|f-g\| \geq 2a$.

β) $1-\|f(x)\| > \min_{x\neq 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|$ οπότε $\min_{x\neq 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right| = 2a$ και έχουμε ότι $\|f-g\| \geq 2a$.

Συμπερασματικά, κάθε στοιχείο του $B(f,a)$ είναι στο I και η f είναι στο I^0.

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με νόρμα 1. Μιας και το $[0,T]$ είναι συμπαγές σύνολο, υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε $\frac{f(x_0)}{x_0}=1$ (σύμφωνα με την Πρόταση 5.4.1 του Παραρτήματος).

Για κάθε $\varepsilon>0$, η σφαίρα $B(f,\varepsilon)$ περιέχει ένα στοιχείο g του $C^0\,[0,T]$ το οποίο δεν περιέχεται στο I. Για να το αποδείξουμε αυτό ορίζουμε $\gamma>0$ και

$$g(x) = f(x) \qquad \text{αν} \quad x \notin [x_0-\gamma, x_0+\gamma]$$

$$g(x) = f(x) + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{x-x_0+\gamma}{\gamma}\right) \qquad \text{αν} \quad x \in [x_0-\gamma, x_0]$$

$$g(x) = f(x) - \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{x-x_0+\gamma}{\gamma}\right) \qquad \text{αν} \quad x \in [x_0, x_0+\gamma]$$

Είναι φανερό ότι $\dfrac{|f(x)-g(x)|}{x} = \dfrac{\left|\dfrac{\varepsilon}{2}\left(\dfrac{x-x_0+\gamma}{\gamma}\right)\right|}{x} = \dfrac{\varepsilon}{2}\dfrac{1}{x}\left|\dfrac{x-x_0+\gamma}{\gamma}\right| = \dfrac{\varepsilon}{2}\dfrac{1}{x}\left|\dfrac{x-x_0}{\gamma}+1\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

άρα $d(f,g)=\|f-g\|=\dfrac{\varepsilon}{2}$ και η g είναι συνεχής. Άρα, κάθε συνάρτηση η νόρμα της οποίας ισούται με 1 βρίσκεται στο σύνορο του Ι .

Υποθέτουμε τώρα ότι $\|f\|<1$ και ότι υπάρχει $x_1 \neq 0$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon>0$, η σφαίρα $B(f,\varepsilon)$ περιέχει συνάρτηση g που δεν είναι μέσα στο Ι . Χρησιμοποιώντας την ίδια κατασκευή ορίζουμε για κάθε $\gamma>0$

$$g(x)=f(x) \qquad \text{αν} \quad x \notin [x_1-\gamma, x_1+\gamma]$$

$$g(x)=f(x)-\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{x-x_1+\gamma}{\gamma}\right) \qquad \text{αν} \quad x \in [x_1-\gamma, x_1]$$

$$g(x)=f(x)+\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{x-x_1-\gamma}{\gamma}\right) \qquad \text{αν} \quad x \in [x_1, x_1+\gamma]$$

Και εδώ επίσης $d(f,g)=\dfrac{\varepsilon}{2}$ και g(x_1)<0, τότε $g \notin$ Ι και η f ανήκει στο σύνορο του Ι . □

Απόδειξη Λήμματος 3.3

Ορίζουμε $K(I^*,X)=\dfrac{U'(\theta(I^*,X))}{E_P[U'(\theta(I^*,\,X))]}$. Με $I^* \in I^0$ και $c(\cdot)$ μια συνεχή συνάρτηση κόστους τέτοια ώστε $c'(\cdot)>0$, η ισότητα στην σχέση (3) είναι:

$E_P[\phi(X)(1+c'(I^*(X)))]\ E_P[U'(\theta(I^*,\,X))]=E_P[\phi(X)U'(\theta(I^*,\,X))] \Rightarrow$

$E_P[\phi(X)(1+c'(I^*(X))-K(I^*,X))]=0 \quad \forall \phi \in C^0[0,T]$ ώστε $F'(I^*,\ \phi)$ να υπάρχει. (9)

Θα αποδείξουμε ότι αυτή η ισότητα επαληθεύεται μόνο αν $1+c'(I^*(x))-K(I^*,x)=0$ $\forall x>0$.

Θα οδηγηθούμε σε μια αντίφαση γιατί $c'(\cdot)>0$ και $K(I^*,X)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή που επαληθεύει την $E_P(K(I^*,X))=1$ αφού $E_P(K(I^*,X))=E_P\left[\dfrac{U'(\theta(I^*,\mathrm{x}))}{E_P[U'(\theta(I^*,\,X))]}\right]$.

Για $x=0$, $\phi(x)=0$ επειδή $\forall \phi \in C^0[0,T]$ και στο σημείο $x=0$ το γινόμενο $\phi(X)(1+c'(I^*(X))-K(I^*,X))$ ισούται με 0, όποια και να είναι η τιμή της $1+c'(I^*(x))-K(I^*,x)$.

Η απόδειξη γίνεται σε δύο βήματα: πρώτα θεωρούμε την περίπτωση της διακριτής τυχαίας μεταβλητής και μετά μελετάμε την συνεχή περίπτωση χρησιμοποιώντας τα όρια.

Ορίζουμε το X ως μια θετική διακριτή τυχαία μεταβλητή με τιμές x_i, $i=1,2,...,n$ που ανήκουν στο $\mathbb{R}^+$. Σημειώνουμε ότι A_i, $i=1,2,...,n$ το σύνολο των καταστάσεων $\omega \in \Omega$ τέτοιο ώστε $X(\omega) = x_i (P(A_i) > 0)$. Η μορφή του A_i είναι μια πεπερασμένη διαμέριση του Ω και X μπορεί να γραφθεί ως $X = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot 1_{A_i}$, όπου 1_{A_i} είναι η δείκτρια συνάρτηση του A_i.

Ορίζουμε τώρα την συνάρτηση $g(X)$ ως $g(X) = 1 + c'(I^*(X)) - K(I^*, X)$.

Ορίζουμε επίσης ότι $a_\phi^i = \phi(x_i)$ και $\beta_g^i = g(x_i)$ και έχουμε:

$$\phi(X) = \sum_{i=1}^{n} a_\phi^i \cdot 1_{A_i} \text{ και } g(X) = \sum_{i=1}^{n} \beta_g^i \cdot 1_{A_i} .$$

Επίσης, η $E_P[\phi(X)(1 + c'(I^*(X)) - K(I^*, X))]$ γίνεται:

$$E_P[\phi(X)g(X)] = E_P[\sum_{i=1}^{n} a_\phi^i \cdot 1_{A_i} \sum_{i=1}^{n} \beta_g^i \cdot 1_{A_i}] = \sum_{i=1}^{n} a_\phi^i \beta_g^i P(A_i),$$

όπου $P(A_i)$ είναι η πιθανότητα να συμβούν τα γεγονότα A_i. Η δεύτερη ισότητα διατηρείται επειδή σχεδιάζουμε το A_i ώστε να είναι διαμέριση του Ω.

Ορίζουμε $a_\phi = (a_\phi^i,\ i = 1,...,n),\ \beta_g = (\beta_g^i,\ i = 1,...,n),$ και M να είναι ο πίνακας με $P(A_i)$ στη διαγώνιο και αλλού μηδενικά.

Με τον τρόπο αυτό η σχέση (9) απλοποιείται στην:

$a_\phi' M \beta_g = \left\langle a_\phi, \beta_g \right\rangle_M = 0$ όπου $\left\langle \cdot, \cdot \right\rangle_M$ το εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται από τον πίνακα M.

Μας μένει να δείξουμε ότι : $\left\langle a_\phi, \beta_g \right\rangle_M = 0$ αν και μόνο αν $\beta_g = \vec{0}$. (10)

που συμπεραίνεται επειδή a_ϕ μπορεί να πάρει οποιεσδήποτε τιμές ενώ β_g περιέχει την μεταβλητή που μας ενδιαφέρει και χρησιμοποιούμε ότι το μηδενικό διάνυσμα είναι κάθετο σε οποιδήποτε διάνυσμα του χώρου.

Στην περίπτωση της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής χρησιμοποιούμε το παρακάτω Λήμμα.

Λήμμα 3.4 Κάθε θετική τυχαία μεταβλητή X που ορίζεται στο (Ω, A) είναι το όριο τουλάχιστον μιας αύξουσας σειράς θετικών πραγματικών απλών τυχαίων μεταβλητών.

Απόδειξη. Στην συνεχή περίπτωση, ορίζουμε X το όριο σειράς θετικών πραγματικών απλών τυχαίων μεταβλητών $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$.

Ξέρουμε ότι:

$1 + c'(I^*(X_i)) - K(I^*, X_i) = 0 \quad \forall i = 1,...,n$ για κάθε αυστηρά θετική τιμή της X_i. (11)

Αφού $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ και $c'(I^*(X))$ και $K(I^*, X)$ είναι συνεχείς από υπόθεση και τελικά έχουμε σύμφωνα με την (11) ότι :

$$\lim_{n\to\infty} 1 + c'(I^*(X_n)) - K(I^*, X_n) = 1 + c'(I^*(X)) - K(I^*, X) \Leftrightarrow 1 + c'(I^*(X)) - K(I^*, X) = 0$$

για κάθε $x \in [0,T]$ και έτσι αποδείχθηκε το Λήμμα 3.4. $\square$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Bugrer Martin. *Infinite-dimensional Optimization and Optimal Design, Lecture Notes 285J,* Department of Mathematics, UCLA., 2003.

[2] Megretski A. *Convex optimization,* Department of Electrical Engineering and Computer Science, Massachusetts Institute of Technology, 2004.

[3] Teschl Gerald, *Nonlinear Functional Analysis*, 2001.

[4] Jonathan M. Borwein Centre for Experimental and Consructive Mathematics Department of Mathematics and Statistics Simon Fraser University, Canada V5A 1S6 and Adrian S. Lewis Department of Combinatorics and Optimization University of Waterloo, Canada. *Convex Analysis and Nonlinear Optimization* 1999.

[5] Χατζόπουλος Πέτρος, *Ασφαλίσεις Ζωής και Υγείας*, Πανεπιστήμιο Αιγαίου τμήμα Στατιστικής και Χρηματοοικονομικών-Αναλογιστικών Μαθηματικών 2005.

[6] Γιαννακόπουλος Αθανάσιος, *Εισαγωγή στην Θεωρία της επιλογής υπό συνθήκες αβεβαιότητας*, Πανεπιστήμιο Αιγαίου τμήμα Στατιστικής και Χρηματοοικονομικών-Αναλογιστικών Μαθηματικών, 2005.

[7] Ανδριτσάκης Απόστολος, *Ασφαλίσεων Ζωής*, Πανεπιστήμιο Αιγαίου τμήμα Στατιστικής και Χρηματοοικονομικών-Αναλογιστικών Μαθηματικών, 2005.

[8] Παπαροδόπουλος Νικόλαος, *Θεωρίας Κινδύνου*, Πανεπιστήμιο Αιγαίου τμήμα Στατιστικής και Χρηματοοικονομικών-Αναλογιστικών Μαθηματικών, 2006.

[9] Jean-Pierre Aubin, *Optima and Equilibri, An Introduction to Nonlinear Analysis*. Springer-Verlag, 1993.

[10] Sandrine Spaeter and Patrick Roger, *The Design of Optimal Insurance Contracts: A Topological Approach*, University Louis Pasteur, The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory, 1997.

[13] Μιλτιάδης Νεκτάριος, *Εισαγωγή στην Ιδιωτική Ασφάλιση*, Πανεπιστήμιο Πειραιά, Financial Forum Γ΄ Έκδοση 1998.

[14] J. Marsden – A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός,* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ε΄ Έκδοση 2001.