

ΠΑΝΑΓΟΥ ΘΩΔΩΡΗΣ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΒΑΣΕΩΝ GRÖBNER ΣΤΟ
ΣΥΣΤΗΜΑ GPS

ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΣΤΗ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑ ΚΑΙ ΤΗΝ
ΓΕΩΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ



Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Μα-
θηματικών

Σάμος, Φεβρουάριος 2006

ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ : Κοντογεώργης Αριστείδης

ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Κοντογεώργης Αριστείδης, Λέκτορας Πανεπιστημίου Αιγαίου

Μιλιαρέσης Γιώργος, Λέκτορας Πανεπιστημίου Πατρών

Χουσιάδας Κώστας, Επίκουρος Καθηγητής Πανεπιστημίου Αιγαίου

*Στην αδελφή μου,
Νάντια!*

Περιεχόμενα

Εισαγωγή x

I Εισαγωγή στη Γεωδαισία και στο Σύστημα GPS 1

1 Στοιχεία Θεωρίας Γεωδαισίας 2

1.1 Ορισμός της Γεωδαισίας 2

1.2 Κινήσεις της Γης 3

1.3 Επιφάνειες Αναφοράς 3

1.4 Συστήματα Αναφοράς 6

1.5 Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς 8

1.5α' Το Ελληνικό Σύστημα Αναφοράς ΕΓΣΑ 87' 10

2 Εισαγωγή στο Σύστημα GPS 12

2.1 Γενικά για το GPS 12

2.2 Βασικά χαρακτηριστικά του GPS 13

2.3 Αρχή Λειτουργίας του GPS 18

2.4 Μετρήσεις με GPS 21

2.5 Εφαρμογές του GPS 23

II Στοιχεία Αλγεβρικής Θεωρίας 25

3 Θεμελιώδεις Ορισμοί 26

3.1 Σύνολα 26

3.2 Συναρτήσεις 29

3.3 Στοιχεία Θεωρίας Ομάδων 30

3.4	Στοιχεία Θεωρίας Δακτυλίων και Σωμάτων	33
3.5	Πολυώνυμα	35
3.6	Ανάλυση σε Παράγοντες	37
3.7	Περισσότερα στα Πολυώνυμα	40
4	Βάσεις Gröbner	45
4.1	Η Προεύλεση	45
4.2	Αρχές των Βάσεων Gröbner	45
4.3	Ο Αλγόριθμος του Buchberger	50
4.4	Επίλυση Πολυωνυμικών Εξισώσεων	51
4.4α'	Μέθοδος Sturmfel	52
4.5	Παρατηρήσεις στις Βάσεις Gröbner	53
III	Εφαρμογή των Βάσεων Gröbner	54
5	Εντοπισμός με Αποστάσεις	55
5.1	Εφαρμογές των Αποστάσεων	55
5.2	Εντοπισμός με Χρήση GPS	56
5.2α'	Το πρόβλημα των ψευδο-αποστάσεων τεσσάρων σημείων	56
5.3	Εντοπισμός σε Τοπικά Συστήματα Αναφοράς	60
5.3α'	Εντοπισμός στις δύο διαστάσεις	60
5.3β'	Εντοπισμός στις τρεις διαστάσεις	63
6	Εντοπισμός με Μεθόδους Τομής	67
6.1	Το Πρόβλημα της Τομής και η Σημασία του	67
6.2	Γεωδαιτική Τομή	68
6.2α'	Τομή στο επίπεδο	68
6.2β'	Τρισδιάστατη Τομή	72
6.3	Φωτογραμμετρική Τομή	76
A'	Στοιχεία Φωτογραμμετρίας	79
A'.0α'	Ορισμός της Φωτογραμμετρίας	79
A'.0β'	Συστήματα Συντεταγμένων	80
A'.0γ'	Το μαθηματικό μοντέλο της Φωτογραμμετρίας	81
A'.0δ'	Προϊόντα	81

Α'.0ε' Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα της Φωτογραμμετρίας 82

Β' Αλγόριθμοι Βάσεων Gröbner 84

B'.1 Awange-Grafarend Groebner Basis Algorithm 84

B'.2 Awange-Grafarend Multipolynomial Resultans Algorithm 89

Bibliografia 93

Εισαγωγή

Αυτή η εργασία αποτελεί το δεύτερο τμήμα της μεταπτυχιακής μου διατριβής, παρόλο που αποτελεί από μόνο του μια ξεχωριστή διατριβή. Στο θέμα αυτό εφαρμόζονται στοιχεία από τομείς της *Αλγεβρικής Θεωρίας* (Ομάδες, Δακτυλιοί, Αλγεβρική Γεωμετρία) με στόχο να επιλυθούν αλγεβρικά υπολογιστικά προβλήματα της Γεωδαισίας και της Γεωπληροφορικής.

Στις μέρες κάθε σύγχρονος επιστήμονας ή μηχανικός, γνωρίζει πως η συνθετότητα της φύσης αλλά και των περισσότερων εφαρμοσμένων προβλημάτων είναι τόσο πολύπολη, που ο μόνος τρόπος επίλυσης τους είναι με προσεγγιστικές μεθόδους. Παρόλα αυτά οι περισσότεροι μηχανικοί αγνοούν της ύπαρξη πολλών μαθηματικών εργαλείων και άλλοι πάλι δυσανασχετούν όταν έχουν να εργαστούν με αυτά. Σε αυτό φέρνουν ευθύνη και οι θεωρητικοί επιστήμονες που είναι αποκομμένοι από τις άλλες επιστήμες ή τις εφαρμογές τους και δεν «διαφημίζουν» τις εργασίες τους ή επιμένουν σε έναν αυστηρό φορμαλισμό που είναι δύσκολος για τους μηχανικούς στα πρώτα στάδια γνωριμίας τους με τις θεωρίες.

Αντιπάρδειγμα αποτελούν οι Awange και Grafarend που με το βιβλίο τους *Solving Computational Problems in Geodesy and Geoinformatics* φέρνουν σε μια πρώτη επαφή τους Τοπογράφους Μηχανικούς με την Αλγεβρική Θεωρία. Η εργασία αυτή κατά ένα μεγάλο μέρος αποτελεί ένα review κάποιων κεφαλαίων του βιβλίου. Ακόμη ένα αντιπάρδειγμα είναι ο Αριστείδης Κοντογεώργης Λέκτορας του Πανεπιστημίου Αιγαίου, που αν και θεωρητικός τολμήσε να αναλάβει μια εργασία κατά το ήμισυ έξω από τον χώρο του και με τον τρόπο αυτό να γίνει ξεκάθαρο πως η Άλγεβρα μόνο θεωρητική δεν είναι.

Ο υπογράφοντας θεωρεί ότι η εργασία είναι πλήρης και από θεωρία αλλά και από εφαρμογές, αν και υπάρχουν κάποια σκοτεινά σημεία στο κείμενο. Η απόφαση να μην γίνει αποσαφηνιστική των πάντων, επιλέχθηκε με βάση το σκοπό και την έκταση της εργασίας. Πιο συγκεκριμένα η εργασία έχει χωριστεί σε τέσσερα τμήματα:

Μέρος I Γίνεται μια μικρή εισαγωγή στις Θεωρία της Γεωδαισίας και του συστήματος GPS. Το πρώτο αποτελεί την επιστήμη που μελετά θέματα όπως

π.χ. τις διαστάσεις της Γης, ενώ το δεύτερο αποτελεί την τεχνολογία με την οποία μπορούμε να γνωρίζουμε την ακριβή μας θέση πάνω στη Γη.

Μέρος II Διατυπώνονται συνοπτικά στοιχεία της Αλγεβρικής θεωρίας και αναλύεται το υπολογιστικό εργαλείο (Βάσεις Gröbner) που θα εφαρμόσουμε στα προβλήματα μας.

Μέρος III Γίνεται η εφαρμογή της θεωρίας σε δύο σημαντικά προβλήματα του Τοπογράφου Μηχανικού.

Παραρτήματα Περιγράφονται οι βασικές αρχές της Φωτογραμμετρίας και παρατίθενται οι αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται στην επίλυση των προβλημάτων.

Θ. Πανάγου, Σάμος 2006.
Τοπογράφος Μηχανικός

Μέρος Ι

Εισαγωγή στη Γεωδαισία και στο Σύστημα GPS

Κεφάλαιο 1

Στοιχεία Θεωρίας Γεωδαισίας

1.1 Ορισμός της Γεωδαισίας

Η λέξη **Γεωδαισία** είναι σύνθεση των λέξεων *Γη* και *δαιώ* (=διαιρώ, μοιράζω). Η ακριβής ερμηνεία της λέξης θα σήμαινε υποδιαίρεση της Γης ή διαμερισμός της Γης. Σήμερα η λέξη Γεωδαισία ορίζει μια περιοχή των Γεωεπιστημών, δηλαδή των επιστημών (όπως π.χ. η Γεωλογία, η Γεωφυσική κ.α.), που ασχολούνται με τον Πλανήτη Γη στο σύνολο του ή μερικά.

Ορισμός 1.1.1. *Με τη λέξη Γεωδαισία ορίζουμε την επιστημονική περιοχή που μελετάει θεωρητικά και πρακτικά: Το σχήμα (μορφή), το μέγεθος (διαστάσεις) και το πεδίο βαρύτητας (ελκτικό και φυγόκεντρο πεδίο) της Γης, στην επιφάνεια της και έξω από αυτήν, ζητήματα σχετικά με τον προσδιορισμό σημείων αναφοράς και γενικά θέσεων στην φυσική της επιφάνεια και κάτω από αυτήν. Τις διαχρονικές μεταβολές του σχήματος, του μεγέθους και του πεδίου βαρύτητας, καθώς και τις μετατοπίσεις των σημείων αναφοράς και θέσεων. Την απεικόνιση όλων των προηγούμενων αντικειμένων της. (Λιθιεράτος 1992)*

Η Γη είναι ένα τεράστιο, σε όγκο, φυσικό σώμα, με σχήμα αρκετά πολύπλοκο, το οποίο σε πρώτη προσέγγιση θα λέγαμε ότι τείνει προς σφαίρα. Οι διαστάσεις και τα φυσικά μεγέθη που την αφορούν, είναι αδύνατον να γίνουν αντιληπτές από την απλή δυνατότητα άμεσης εποπτείας που έχει ο άνθρωπος στον περιβάλλοντα χώρο. Η πρώτη προσέγγιση του σχήματος της, η λεγόμενη *γήινη σφαίρα*, έχει ακτίνα R περίπου ίση 6.370km , μάζα M περίπου $6 \times 10^{24}\text{kg}$, μέση πυκνότητα δ περίπου $5.5 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$ και περιστρέφεται γύρω από τον άξονα της με γωνιακή ταχύτητα ω περίπου $7 \times 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$. Η γήινη αυτή σφαίρα δημιουργεί δυναμικό V περίπου $6.3 \times 10^{14} \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}^2}$ και δυνάμεις βαρύτητας, έντασης g περίπου $980 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$ πάνω στην επιφάνεια της.

Στην πραγματικότητα, η μορφή της Γης, είναι πολυπλοκότερη από σφαίρα, τείνει στην μορφή ενός ελλειψοειδούς εκ περιστροφής, του *γήινου ελ-*

λειψοειδούς, με μεγάλο άξονα a περίπου 6.380km και μικρό ημιάξονα b περίπου 6.360km . Το ελλειψοειδές είναι πεπλατυσμένο στους Πόλους, αφού η διαφορά μεγάλου και μικρού ημιάξονα είναι μόλις 20km , δηλαδή 3‰ του μεγάλου ημιάξονα. Η εσωτερική δομή της Γης μπορεί να χαρακτηριστεί από την διάκριση σε τρία γενικά στρώματα, φασματικά διακεκριμένα μεταξύ τους, το *φλοιό*, το *μανδύα* και τον *πυρήνα*.

1.2 Κινήσεις της Γης

Οι κινήσεις της Γης είναι δυνατόν να καταταγούν σε δύο βασικές κατηγορίες:

- α. Περιστροφή γύρω από τον ήλιο, ακολουθώντας ελλειπτική τροχιά.
- γ. Περιστροφή γύρω από τον άξονα της.

Γενικά, τρία χαρακτηριστικά των κινήσεων της Γης μπορούν να θεωρηθούν ως πιο σημαντικά:

- α. Η Γη περιστρέφεται γύρω από τον άξονα της με μια σχεδόν σταθερή γωνιακή ταχύτητα περιστροφής.
- β. Ο άξονας της έχει μια σχεδόν σταθερή κλίση ως προς το επίπεδο της τροχιάς της Γης (εκλειπτικό επίπεδο), γύρω από τον ήλιο.
- γ. Ο προσανατολισμός του άξονα της Γης στο διάστημα, ως προς τους αστέρες, είναι σχεδόν σταθερός.

Η γνώση του προσανατολισμού του άξονα περιστροφής είναι πολύ σημαντική για τον υπολογισμό των τροχιών των τεχνητών δορυφόρων της Γης.

1.3 Επιφάνειες Αναφοράς

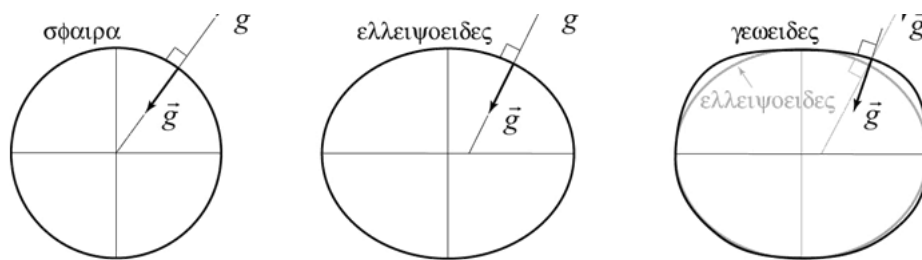
Η πραγματική επιφάνεια της Γης, το λεγόμενο *γήινο ανάγλυφο*, είναι πολύπλοκη και αδύνατον να περιγραφεί άμεσα, χωρίς την « αναφορά » της σε μια απλούστερη, βοηθητική, μορφή επιφάνειας, η οποία καλείται *επιφάνεια αναφοράς* και η οποία ανάλογα με την έκταση των εφαρμογών και την απαιτούμενη ακρίβεια των μετρήσεων και των εφαρμογών, μπορεί να είναι το επίπεδο, η γήινη σφαίρα ή το γήινο ελλειψοειδές. Έτσι, η πραγματική επιφάνεια της Γης, συγκρίνεται με την επιφάνεια αναφοράς και κατα κάποιο τρόπο « χαρτογραφείται » σε αυτή.

Όπως αναφέρθηκε, ένα από τα βασικά προβλήματα της Γεωδαισίας είναι ο ακριβής προσδιορισμός του σχήματος και του μεγέθους της Γης. Η φυσική

επιφάνεια της Γης είναι το όριο μεταξύ της συμπαγούς γης και της υδάτινης επιφάνειας με την ατμόσφαιρα. Η φυσική επιφάνεια της Γης καλύπτεται κατά το 72% από νερό και μόνο το 28% από στεριά. Έτσι, η επιφάνεια της δεν είναι μια μάζα συμπαγής, αφού δεν αποτελείται από ομοιογενές υλικό.

Η επιφάνεια αυτή που εκλέγεται να πλησιάζει περισσότερο, από κάθε άλλη ισοδυναμική επιφάνεια του πεδίου βαρύτητας της Γης, την μέση στάθμη της θάλασσας είναι το *γεωειδές*.

Έτσι, οι βασικές επιφάνειες αναφοράς που χρησιμοποιούνται στην γεωδαισία για να περιγράψουν το σχήμα της Γης είναι τρεις: το γεωειδές, το ελλειψοειδές και η σφαίρα. Σχήμα (1.1)



Σχήμα 1.1: Οι επιφάνειες αναφοράς.

Γεωειδές

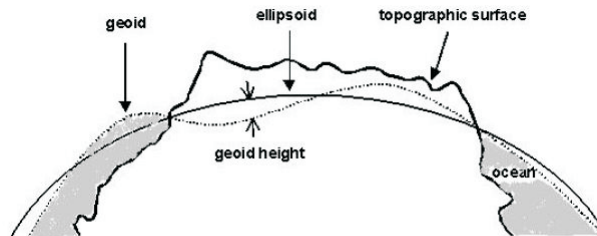
Ως *γεωειδές* ορίζεται η ισοδυναμική επιφάνεια έλξης και περιστροφής της Γης που πλησιάζει τη μέση στάθμη της θάλασσας (ΜΣΘ με ακρίβεια $\pm 1m$) διορθωμένη από τις επιδράσεις των μεταβολών της πυκνότητας του νερού, των κυμάτων των παλιρροιών, των ρευμάτων και των ατμοσφαιρικών θαλασσών. Η επιφάνεια του γεωειδούς είναι εξ ορισμού κάθετη προς την διεύθυνση της βαρύτητας και με τοπογραφικές μεθόδους (χωροστάθμιση) μετρούνται τα υψόμετρα ως προς αυτήν. Δηλαδή αποτελεί την επιφάνεια αναφοράς των υψομέτρων. Το γεωειδές είναι μια μη ομαλή επιφάνεια και προσδιορίζεται μέσω αστρογεωδαιτικών παρατηρήσεων ή με μετρήσεις βαρύτητας ή αναλύοντας την κίνηση των τεχνητών δορυφόρων. Το γεωειδές προσαρμόζεται στη Μέση Στάθμη των Θαλασσών και προεκτείνεται κάτω από τις ηπείρους. Δες Σχήματα (1.1) και (1.2).

Ελλειψοειδές Αναφοράς

Επειδή το γεωειδές δεν είναι ομαλή επιφάνεια, είναι ακατάλληλο για να χρησιμοποιηθεί ως επιφάνεια αναφοράς για υπολογισμούς. Έτσι, στους συνήθεις

γεωδαιτικούς υπολογισμούς (δύο διαστάσεις) η θέση των σημείων που βρίσκονται στην φυσική επιφάνεια της Γης, ορίζεται προσδιορίζοντας τις συντεταγμένες τους ως προς κάποια επιφάνεια αναφοράς, που εκλέγεται συμβατικά, έτσι ώστε να προσεγγίζει όσο το δυνατόν καλύτερα το γεωειδές και συγχρόνως να έχει μια απλή μαθηματική έκφραση.

Ως βέλτιστο μαθηματικό μοντέλο του γεωειδούς επιλέγεται το διαξονικό ελλειψοειδές, που προκύπτει με περιστροφή μιας έλλειψης γύρω από τον μικρό της ημιάξονα. Κάθε σημείο της φυσικής επιφάνειας της Γης απεικονίζεται σε ένα σημείο στο ελλειψοειδές, που υλοποιείται με το ίχνος της καθέτου πάνω στο ελλειψοειδές. Δηλαδή τα δύο αυτά σημεία εκφράζονται με τις ίδιες ελλειψοειδείς συντεταγμένες φ (γεωδαιτικό πλάτος) και λ (γεωδαιτικό μήκος), ενώ το μήκος της καθέτου λέγεται γεωμετρικό υψόμετρο h του σημείου.



Σχήμα 1.2: Διακρίνουμε τις επιφάνειες αναφοράς, το γεωειδές, το ελλειψοειδές και την τοπογραφική επιφάνεια.

Το πρόβλημα της εύρεσης των διαστάσεων του καλύτερου ελλειψοειδούς θεωρείται εκείνο, που το κέντρο του ταυτίζεται με κέντρο της μάζας της Γης, ο άξονας συμμετρίας του ταυτίζεται με τον άξονα περιστροφής της Γης και προσεγγίζει όσο το δυνατόν καλύτερα (σε διαστάσεις) το γεωειδές. Όμως υπάρχουν ελλειψοειδή αναφοράς που προσαρμόζονται καλύτερα στο γεωειδές μιας περιοχής και σε θέση και σε διαστάσεις και χρησιμοποιούνται ως επιφάνειες αναφοράς τοπικών γεωδαιτικών εργασιών.

Έτσι, κάθε κράτος επιλέγει εκείνο το ελλειψοειδές αναφοράς που προσεγγίζει καλύτερα το γεωειδές στην συγκεκριμένη περιοχή ορίζοντας με αυτόν τον τρόπο, το γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς (γεωδαιτικό datum). Ένα τέτοιο ελλειψοειδές, που οι διαστάσεις του εκλέγονται εκ των προτέρων, λέγεται γεωδαιτικό ελλειψοειδές αναφοράς και το κέντρο του δεν συμπίπτει με το κέντρο μάζας της Γης, ενώ ο μικρός του άξονας επιλέγεται να είναι παράλληλος με

τον άξονα περιστροφής της Γης. (Βέης 2005)

Η σφαίρα

Η σφαίρα έχει την απλούστερη μαθηματική έκφραση από τις άλλες επιφάνειες αναφοράς, αλλά προσεγγίζει με μικρότερη ακρίβεια τόσο το ΕΕΠ όσο και το γεωιδές στην περιοχή. Η μαθηματική έκφραση που εκφράζει τη σφαίρα ακτίνας R , όταν κέντρο του συστήματος συντεταγμένων είναι το κέντρο της σφαίρας είναι γνωστό:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2. \quad (1.1)$$

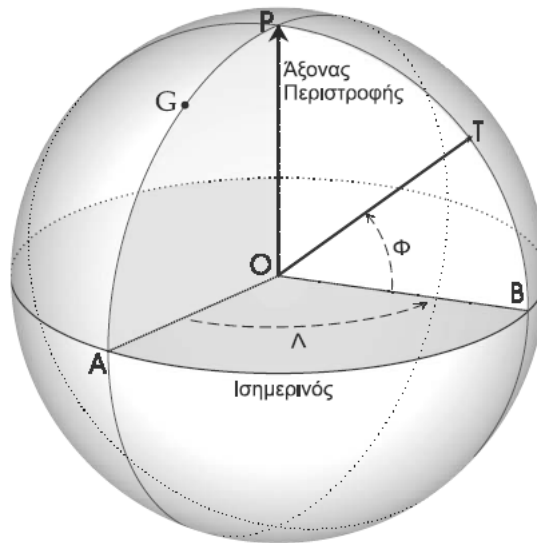
Η σφαίρα ως επιφάνεια αναφοράς χρησιμοποιείται στις αναγωγές της τριγωνομετρικής υψομετρίας στην τοπογραφία, αλλά και στην χαρτογραφία και τη ναυσιπλοία.

1.4 Συστήματα Αναφοράς

Ο κύριος σκοπός της Γεωδαισίας είναι ο προσδιορισμός του σχήματος και του μεγέθους της Γης και η εγκαθίδρυση στην επιφάνεια της ενός αριθμού τριγωνομετρικών σημείων που η σχετική (και η κατα προτίμηση απόλυτη) θέση τους να είναι γνωστή. Για τη λύση αυτού του προβλήματος απαιτείται ένα σύστημα αναφοράς και αφού το πρόβλημα της Γεωδαισίας είναι ένα πρόβλημα στο χώρο, θα πρέπει να είναι τρισδιάστατο. Υπάρχουν τρεις ομάδες συστημάτων αναφοράς που χρησιμοποιούνται στη Γεωδαισία και τις γεωδαιτικές εργασίες.

Η πρώτη περιλαμβάνει το φυσικό σύστημα (σύστημα αξόνων και επιφανειών εξοπλισμένο με μια μαθηματική θεωρία) που ορίζει τη θέση ενός σημείου με τον προσανατολισμό της πραγματική κατακορύφου και τον γεωδυναμικό αριθμό που αντιστοιχεί στο σημείο. Το σύστημα αυτό ονομάζεται *Αστρονομικό Σύστημα Αναφοράς* και η θέση ενός σημείου σε αυτό, μπορεί να προσδιοριστεί με απεύθείας μετρήσεις που γίνονται στο σημείο. Οι αστρονομικές συντεταγμένες είναι το *αστρονομικό πλάτος* Φ και το *αστρονομικό μήκος* Λ , Σχήμα (1.3). Σήμερα χρησιμοποιείται κυρίως στις αστρογεωδαιτικές εργασίες.

Η δεύτερη περιλαμβάνει τα *γήινα* ή *γεωκεντρικά* ή *γεωγραφικά συστήματα* τα οποία είναι και παγκόσμια συστήματα αναφοράς. Η θέση ενός σημείου ορίζεται σε σχέση με το κέντρο μάζας της Γης και χρησιμοποιεί το μέσο άξονα περιστροφής της Γης ως βασική διεύθυνση αντί της κατακορύφου. Ο ορισμός της θέσης μπορεί να εκφραστεί με μια ποικιλία παραμέτρων και μαθηματικών εκφράσεων, που οι πιο διαδεδομένες είναι: Το σύστημα των ελλειψοειδών συντεταγμένων, στο οποίο η θέση ενός σημείου προσδιορίζεται



Σχήμα 1.3: Το Αστρονομικό Σύστημα Αναφοράς.

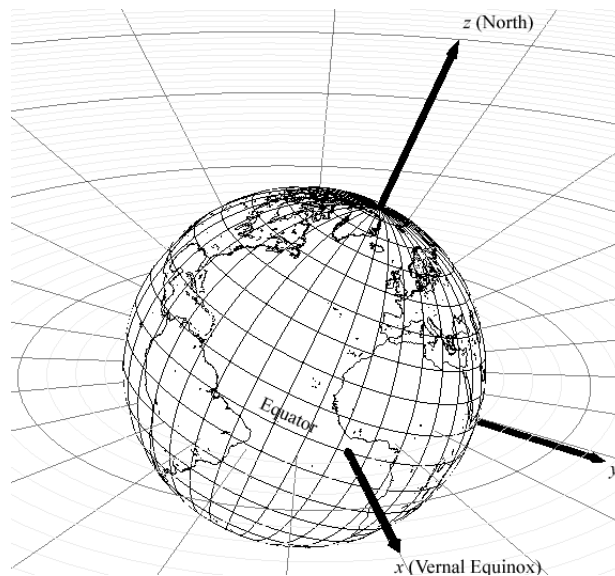
σε σχέση με ένα ελλειψοειδές αναφοράς (εκ περιστροφής ή τριαξονικό) και το σύστημα των καρτεσιανών συντεταγμένων, Σχήμα (1.4).

Η τρίτη ομάδα συστημάτων αναφοράς είναι τα *Γεωδαιτικά Συστήματα Αναφοράς* που διαφέρουν από ένα γήινο σύστημα, στο ότι η αρχή (αφετηρία) του συστήματος δεν ταυτίζεται με το κέντρο μάζας της Γης. Ένα γεωδαιτικό σύστημα μπορεί και επιδιώκεται να προσανατολιστεί παράλληλα με το γήινο σύστημα με μια πολύ καλή προσέγγιση (καλύτερη του 10^{-6}). Η θέση ενός σημείου μπορεί επίσης να εκφραστεί σε ελλειψοειδείς ή καρτεσιανές συντεταγμένες.

Στην πράξη χρησιμοποιούνται επίσης και τα *Τοπικά (ή Τοποκεντρικά) Συστήματα Αναφοράς* για συγκεκριμένες εφαρμογές. Το κέντρο του συστήματος είναι ένα σημείο της φυσικής επιφάνειας της Γης και οι άξονες του μπορεί να έχουν αυθαίρετο προσανατολισμό.

Ακόμη να τονίσουμε ότι η Γεωδαισία με δορυφόρους απαιτεί τη χρήση ενός «συστήματος αδράνειας», δηλαδή ενός συστήματος συντεταγμένων σε ηρεμία ή σε κατάσταση ομοιόμορφης κίνησης χωρίς καμία επιτάχυνση, που ονομάζεται *Ουράνιο Σύστημα Αναφοράς*. Με αυτό περιγράφεται η κίνηση των δορυφόρων, ενώ απαιτείται η σύνδεση του με σταθερό στη Γη συμβατικό γήινο σύστημα αναφοράς, που υλοποιείται με σημεία (σταθμούς) πάνω στην επιφάνεια της Γης.

Οι γεωδαιτικές και οι γήινες συντεταγμένες δεν προσδιορίζονται απευθείας από μετρήσεις που γίνονται στο ίδιο το σημείο, αλλά προσδιορίζονται από



Σχήμα 1.4: Το Γήινο Σύστημα Αναφοράς.

σημείο σε σημείο. Τα συστήματα αυτά είναι ουσιαστικά αριθμητικά συστήματα, δεδομένου ότι στην πραγματικότητα ορίζονται με αριθμητικές τιμές, τις συντεταγμένες σε πραγματικά σημεία της Γης (δίκτυα), με τα οποία υλοποιούνται.

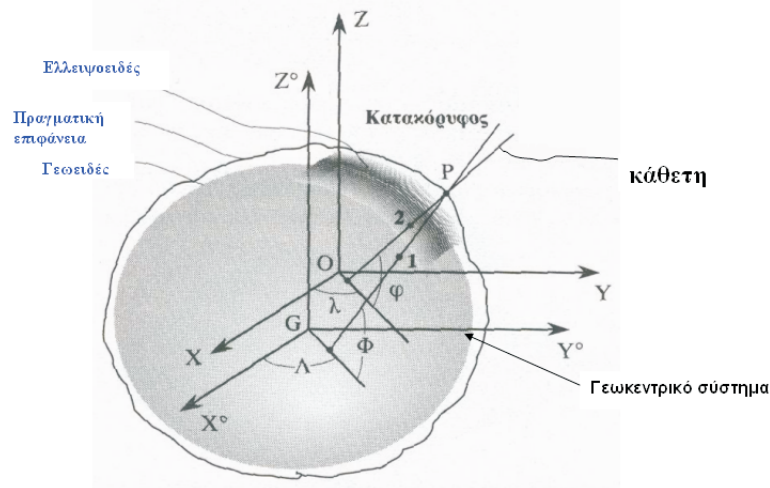
Τέλος με κατάλληλες μετρήσεις και υπολογισμούς, είναι δυνατόν να επιτευχθεί τόσο η σύνδεση μεταξύ των συστημάτων αναφοράς, όσο και η μετατροπή των συντεταγμένων από ένα σύστημα αναφοράς σε ένα άλλο στην ίδια χώρα ή και μεταξύ χωρών, με την προϋπόθεση ότι είναι γνωστές όλες οι παράμετροι που ορίζουν τα συστήματα αναφοράς.

1.5 Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς

Για την αναπαράσταση του γήινου αναγλύφου μιας χώρας χρησιμοποιείται ένα Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς, το οποίο ορίζεται από τρισσορθώνιους καρτεσιανούς άξονες X, Y, Z με κοινή αρχή αξόνων, σε σημείο που απέχει συγκεκριμένη απόσταση από το κέντρο μάζας της Γης και όχι πολύ μακριά από αυτό.

Στο γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς, ορίζεται ένα ελλειψοειδές εκ περιστροφής (ΕΕΠ) (το κέντρο του είναι η αρχή των αξόνων του συστήματος), με δεδομένες διαστάσεις (μεγάλο ημιάξονα και εκκεντρότητα), η επιφάνεια του οποίου προσαρμόζεται όσο το δυνατόν καλύτερα στο γεωειδές, στην περιοχή

της χώρας ή της ευρύτερης περιοχής, που μας ενδιαφέρει, Σχήμα (1.5).



Σχήμα 1.5: Το Γεωκεντρικό X^0, Y^0, Z^0 και το Γεωδαιτικό X, Y, Z σύστημα.

Ένα σημείο του γήινου αναγλύφου ορίζεται είτε από τις ορθογώνιες *καρτεσιανές* συντεταγμένες X, Y, Z ως προς τους γεωδαιτικούς άξονες αναφοράς, είτε από τις ορθογώνιες αλλά *ελλειψοειδείς* συντεταγμένες λ, φ , το γεωδαιτικό μήκος και πλάτος, που συμπληρώνονται από την κάθετη απόσταση h , του σημείου από την επιφάνεια του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής, που λέγεται *γεωμετρικό υψόμετρο*.

Τα X, Y, Z και λ, φ, h που αναφέρονται στο ίδιο σημείο αλλά σε διαφορετικά συστήματα, σχετίζονται μεταξύ τους βάση της Αναλυτικής Γεωμετρίας.

$$\begin{aligned} X &= (N + h)\cos\lambda\cos\varphi \\ Y &= (N + h)\sin\lambda\cos\varphi \\ Z &= [(1 - e^2)N + h]\sin\varphi \end{aligned} \quad (1.2)$$

με

$$\begin{aligned} N &= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \\ \rho &= \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^3}} \end{aligned} \quad (1.3)$$

όπου (N) η ακτίνα καμπυλότητας της πρώτης καθέτου τομής στην μεσημβρινή τομή (ακτίνας καμπυλότητας ρ) του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής του σημείου με συντεταγμένες X, Y, Z . Με e η εκκεντρότητα της έλλειψης και a η διάσταση του μεγάλου άξονα.

Οι αντίστροφες σχέσεις των (1.2) λ, φ, h συναρτήσεως των X, Y, Z και των διαστάσεων του ΕΕΠ είναι

$$\begin{aligned}\lambda &= \arctan \frac{Y}{X} \\ \varphi &= \arctan \frac{Z + e^2 N \sin \varphi}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \\ h &= \frac{Z}{\sin \varphi} - (1 - e^2)N\end{aligned}\quad (1.4)$$

Τα γεωδαιτικά συστήματα αναφοράς για τις ανάγκες της χαρτογραφίας και των τοπογραφικών διαγραμμάτων χρησιμοποιούν γεωμετρικές ή μαθηματικές απεικονίσεις της επιφάνειας της σφαίρας ή του ελλειψοειδούς σε ένα επίπεδο ή μια αναπτυκτική επιφάνεια (κώνος, κύλινδρος) όπου υπολογίζονται οι επίπεδες ορθογώνιες συντεταγμένες των σημείων.

Υψομετρία

Είναι δυνατό το ίδιο σημείο να προσδιορίζεται από τις ελλειψοειδείς συντεταγμένες λ, φ και από την κάθετη απόσταση του H από το γεωειδές και ονομάζεται *ορθομετρικό υψόμετρο*. Δηλαδή στην πράξη είναι το υψόμετρο που μετράμε από τη στάθμη της θάλασσας.

Η διαφορά του ορθομετρικού με το γεωμετρικό υψόμετρο (κάθετη απόσταση από το ΕΕΠ) λέγεται *αποχή του γεωειδούς* N (προσοχή μην συγχέεται με την ακτίνα καμπυλότητας) και δίνεται από τη σχέση

$$h = H + N \quad (1.5)$$

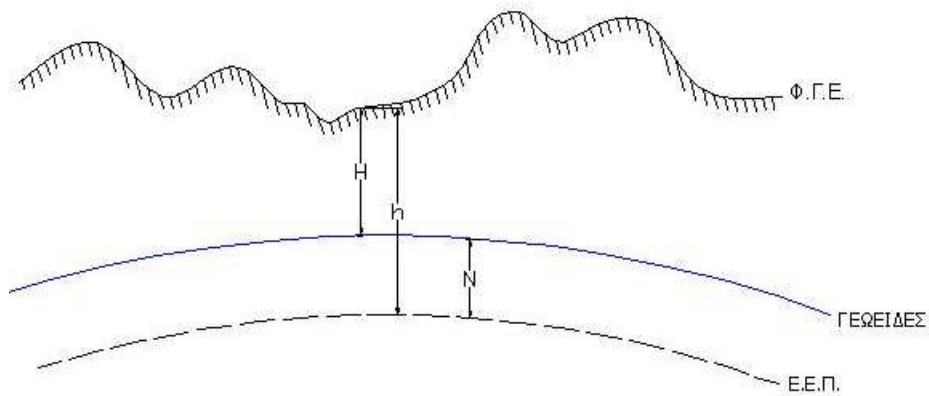
όταν το γεωειδές είναι πάνω από το ΕΕΠ, Σχήμα (1.6). Διαφορετικά, αν το γεωειδές είναι κάτω από το ΕΕΠ ισχύει

$$h = H - N. \quad (1.6)$$

και αποτελεί ένα σημαντικό μέγεθος επεξεργασίας και ερμηνείας στη Γεωδαισία και τη Γεωφυσική. Το υψόμετρο του γεωειδούς N , υπολογίζεται συνήθως με μια πολύπλοκη διαδικασία. Τα δορυφορικά συστήματα εντοπισμού θέσης μπορούν να μας δώσουν ακρίβεια στο σχετικό προσδιορισμό των υψομέτρων h της τάξης του εκατοστού και στη συνέχεια να υπολογίσουμε τα ορθομετρικά υψόμετρα.

1.5α' Το Ελληνικό Σύστημα Αναφοράς ΕΓΣΑ 87'

Το 1987 προτάθηκε από την Γεωδαιτική και Γεωφυσική Επιτροπή του κράτους (ΓΤΕΚ) και το 1988 υιοθετήθηκε από τον Οργανισμό Κτηματολογίου και



Σχήμα 1.6: Διακρίνουμε το γεωμετρικό υψόμετρο h , το ορθομετρικό υψόμετρο H και την αποχή του γεωειδούς N .

Χαρτογραφήσεων Ελλάδας (ΟΚΧΕ) το Ελληνικό Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς, γνωστό ως ΕΓΣΑ'87.

Το ΕΕΠ που χρησιμοποιείται είναι το *GRS 80*. Ως αφετηρία του συστήματος επελέγη το κεντρικό βάθρο του Κέντρου Διονύσου στην Αττική. Οι γεωκεντρικές παρατηρήσεις αφετηρίας προέκυψαν από παρατηρήσεις δορυφόρων πολλών ετών με συστήματα φωτογραφικά, doppler και laser.

Για την εφαρμογή επιλέχθηκε η Εγκάρσια Μερκατορική Προβολή και ο κεντρικός μεσημβρινός $\lambda = 24^0$ με κλίμακα παραμόρφωσης $K_0 = 0.9996$.

Κεφάλαιο 2

Εισαγωγή στο Σύστημα GPS

2.1 Γενικά για το GPS

Η εκτόξευση του πρώτου τεχνητού δορυφόρου της Γης (Sputnik I) στις 4 Οκτωβρίου του 1957 και η διαστημική τεχνολογία που την ακολούθησε, έδωσε μια επαναστατική ώθηση σε πολλές επιστήμες μεταξύ των οποίων και η γεωδαισία. Η *διαστημική γεωδαισία* όπως ονομάστηκε, έδωσε μια νέα οπτική στην αντιμετώπιση των γεωμετρικών και δυναμικών γεωδαιτικών προβλημάτων. Με τους τεχνητούς δορυφόρους καθιερώθηκε η μέθοδος του τρισδιάστατου τριγωνισμού (τριγωνισμός στο χώρο) και ο άμεσος προσδιορισμός της θέσης σημείων σε ένα τρισσορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, που χρησιμοποιεί γεωδαιτικά συστήματα αναφοράς. Με τη μέθοδο αυτή, οι γεωδαιτικές εργασίες προσδιορισμού θέσης απαλάσσονται από την πολυπλοκότητα που ενυπάρχει στην κλασική μέθοδο, όπου χρησιμοποιούνται κυρίως τοπικά συστήματα αναφοράς. Στη διαστημική γεωδαισία, οι παρατηρήσεις δεν είναι πλέον οι κλασικές ποσότητες που γνωρίζουμε από την κλασική γεωδαισία (π.χ. γωνίες, διευθύνσεις πλευρών, βαρύτητα), αλλά πολυποκότερες, προϊόντα σύνθετων συστημάτων μέτρησης (π.χ. διαφορές συχνοτήτων, χρόνοι διαδρομής σημάτων κ.α.)(Λιθιεράτος 1992).

Το **Παγκόσμιο Σύστημα Εντοπισμού θέσης (Global Position System)** είναι ένα στρατιωτικό σύστημα πλοήγησης, το οποίο σχεδιάστηκε, χρηματοδοτήθηκε και ελέγχεται από το Υπουργείο Άμυνας των ΗΠΑ. Παρόλο που ο πρωταρχικός στόχος του GPS είναι για στρατιωτικούς σκοπούς των ΗΠΑ, η χρήση του συστήματος είναι ελεύθερη για όλους τους μη στρατιωτικούς χρήστες.

Το GPS είναι ένα σύστημα πλοήγησης που βασίζεται σε σήματα που εκπέμπονται από ένα δίκτυο δορυφόρων που βρίσκονται σε τροχιά γύρω από την γη. Από κάθε δορυφόρο η μετάδοση πληροφοριών για την ακριβή ώρα και την θέση του, επιτρέπει σε ένα κατάλληλο δέκτη να υπολογίσει με τριγων-

νισμό την δική του θέση, η οποία εμφανίζεται στην οθόνη του εκφρασμένη σε συντεταγμένες ενός συγκεκριμένου γεωδαιτικού συστήματος αναφοράς (προεπιλεγμένο το WGS 84). Ο ακριβής προσδιορισμός θέσης ποικίλει ανάλογα με τις ανάγκες. Έτσι για έναν πεζοπόρο ή για ένα στρατιώτη στην έρημο, ακριβής σημαίνει απόκλιση περίπου 15m. Για ένα πλοίο που πλέει στα παράκτια ύδατα, ακριβής σημαίνει απόκλιση 5m περίπου. Για ένα τοπογράφο, ακριβής σημαίνει απόκλιση μικρότερη από 1cm. Το GPS μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δώσει την ακριβή θέση σε πολλές τις εφαρμογές, με μόνη διαφορά, τον δέκτη GPS που θα χρησιμοποιηθεί και την αντίστοιχη τεχνική.

Το GPS) έχει επιφέρει ριζικές αλλαγές στις τοπογραφικές εργασίες και γενικότερα στη γεωδαισία λόγω των ειδικών χαρακτηριστικών του, που περιλαμβάνουν:

- Σχετικά μεγάλες ακρίβειες προσδιορισμού θέσης, σε επίπεδα που κυμαίνονται από δεκάμετρα ως λίγα χιλιοστά.
- Ο προσδιορισμός θέσης γίνεται ταυτόχρονα σε τρεις διαστάσεις, δηλαδή οριζοντιογραφικός και υψομετρικός εντοπισμός.
- Ο προσδιορισμός της ταχύτητας και του χρόνου σε επίπεδα ακρίβειας που αντιστοιχούν σε αυτά του προσδιορισμού θέσης.
- Διαθέσιμο στους χρήστες οπουδήποτε και αν βρίσκονται, στον αέρα, στη φυσική επιφάνεια της Γης, ή στη θάλασσα.
- Σχετικά μικρό κόστος για το σύστημα δέκτη/κεραίας, ενώ δεν απαιτείται συνδρομή χρήσης του GPS.
- Σύστημα παντός καιρού, διαθέσιμο 24 ώρες καθημερινά.

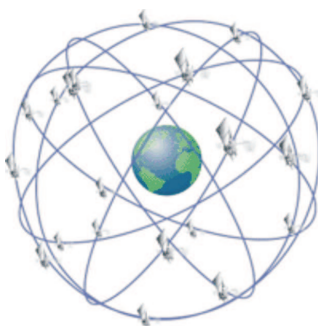
2.2 Βασικά χαρακτηριστικά του GPS

Η συνολική διαμόρφωση του GPS αποτελείται από τρία ξεχωριστά τμήματα:

- **Το Τμήμα Διαστήματος** - Δορυφόροι που βρίσκονται σε τροχιά γύρω από την Γη.
- **Το Λειτουργικό Τμήμα Εδάφους** - Σταθμοί τοποθετημένοι γύρω από τον ισημερινό της Γης ώστε να ελέγχουν τους δορυφόρους.
- **Το Τμήμα Χρηστών** - Οποιοσδήποτε λαμβάνει και χρησιμοποιεί το σήμα του GPS.

Το Τμήμα Διαστήματος

Το διαστημικό τμήμα είναι σχεδιασμένο, ώστε να αποτελείται 24 δορυφόρους οι οποίοι βρίσκονται σε τροχιά γύρω από την Γη. Σήμερα βρίσκονται σε λειτουργία 28 δορυφόροι, από τους οποίους οι 4 είναι αναπληρωματικοί και χρησιμοποιούνται όταν κάποιος από τους 24 πρωταρχικούς, παρουσιάζει αδυναμία κάλυψης μιας περιοχής λόγω απόκλισης από την κανονική του τροχιά. Η τροχιά κάθε δορυφόρου είναι περίπου κυκλική (ελλείψεις με μέγιστη εκκεντρότητα 0.015) και το επίπεδό της παρουσιάζει γωνία κλίσης 55° ως προς το ισημερινό επίπεδο της Γης. Οι 28 δορυφόροι βρίσκονται σε 7 τροχιακά επίπεδα, ανά 4, και σε ύψος περίπου 20200km . Κάθε τροχιακό επίπεδο σχηματίζει γωνία 60° με το επόμενο πάνω στο ισημερινό επίπεδο. Ο χρόνος ολοκλήρωσης μιας πλήρους περιστροφής του δορυφόρου είναι 12 ώρες σε αστρικό χρόνο και κατά συνέπεια οι δορυφόροι εμφανίζονται στον ορίζοντα ενός τόπου περίπου 4 λεπτά της ώρας νωρίτερα κάθε μέρα. Η παραπάνω



Σχήμα 2.1: Το σύστημα GPS.

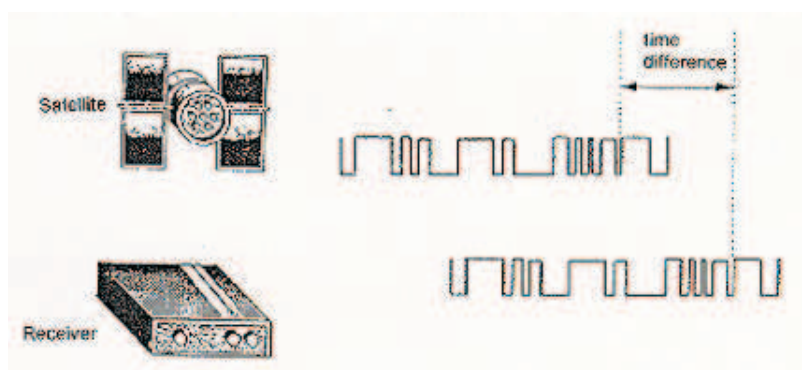
δορυφορική διάταξη εξασφαλίζει ορατότητες από τους δέκτες τουλάχιστον για 4 δορυφόρους από κάθε σημείο της γης και σε όποια χρονική στιγμή, σε όλες τις καιρικές συνθήκες με γωνία ύψους 15° (πάνω από τον ορίζοντα ενός τόπου). Η διάρκεια ζωής τους, δηλαδή η διάρκεια καλής λειτουργίας, κυμαίνεται από 6 έως 7.5 χρόνια.

Κάθε δορυφόρος είναι εφοδιασμένος με συστήματα υψηλής τεχνολογίας και βασικό εξοπλισμό τα ατομικά χρονόμετρα υψηλής ακριβείας (χρονόμετρα ή ταλαντωτές ρουβιδίου ή και καισίου) για τη μέτρηση του χρόνου και την παραγωγή των εκπεμπόμενων σημάτων υψηλής σταθερότητας (σταθερότητα ως προς τις συχνότητες της τάξης). Κάθε δορυφόρος μεταδίδει ένα « μοναδικό » σήμα που διαμορφώνεται πάνω σε φέρουσες συχνότητες στην περιοχή L του φάσματος των μικροκυμάτων.

- Η συχνότητα $L_1 = 1575.42\text{MHz}$ με μήκος κύματος $\lambda = 19.05\text{cm}$.

- Η συχνότητα $L_2 = 1227.60\text{MHz}$ με μήκος κύματος $\lambda = 24.45\text{cm}$.

Οι συχνότητες που εκπέμπονται από κάθε δορυφόρο βασίζονται όλες στη θεμελιώδη συχνότητα $f = 10.23\text{MHz}$ του ατομικού χρονομέτρου κάθε δορυφόρου. Στη συχνότητα L_1 εκπέμπονται οι C/A και P κώδικες, ενώ στη L_2 μόνο ο P κώδικας. Η διαμόρφωση του σήματος με τον P ή τον C/A κώδικα εξυπηρετεί στην χρονομέτρηση. Αν ταυτόχρονα με τον δορυφόρο, το ίδιο σήμα δημιουργείται και στον δέκτη, η διαφορά χρόνου μεταξύ του σήματος που εισέρχεται στον δέκτη και του παραγόμενου στο δέκτη, αντιστοιχεί στο χρόνο που έκανε το σήμα για να καλύψει την απόσταση δορυφόρου-δέκτη (Σχήμα 2.2).



Σχήμα 2.2: Η διαφορά χρονισμού στον δορυφόρο και στο δέκτη.

Το Λειτουργικό Τμήμα Εδάφους

Το Λειτουργικό Τμήμα Εδάφους αποτελείται από έναν κεντρικό σταθμό ελέγχου, πέντε σταθμούς παρακολούθησης και τρεις σταθμούς επικοινωνίας καταναμημένους σε σημεία γύρω από τον ισημερινό της Γης, που σκοπό έχουν τον έλεγχο, την παρακολούθηση και την επικοινωνία με τους δορυφόρους.

Οι *Σταθμοί Επικοινωνίας* (Upload Ground Antennas) είναι επίγειες κεραιές που μεταδίδουν δεδομένα στον δορυφόρο από τον κεντρικό σταθμό ελέγχου και αντίστροφα.

Οι *Σταθμοί Παρακολούθησης* (Monitor Stations) είναι δέκτες GPS, βρίσκονται σχεδόν σ' όλη τη Γη μακριά μεταξύ τους. Φέρουν ατομικά χρονόμετρα υψηλής ακριβείας (χρονόμετρα Καισίου) και κάνουν συνεχώς μετρήσεις προς όλους τους δορυφόρους. Τα δεδομένα των παρατηρήσεων μεταδίδονται στον κεντρικό σταθμό ελέγχου.

Ο *Κεντρικός Σταθμός Ελέγχου* (Master Station), στο Κολοράντο των ΗΠΑ, ελέγχει αυτόματα όλη τη λειτουργία του δορυφορικού και επίγειου συστήματος. Μπορεί να παρεμβαίνει στους δορυφόρους και να τροποποιεί τα τροχιακά τους στοιχεία, που εκπέμπονται από τη μνήμη του Η/Υ των δορυφόρων, επεξεργάζεται συνεχώς δεδομένα που συλλέγει από τους άλλους σταθμούς, υπολογίζει τις δορυφορικές εφημερίδες (πληροφορίες για τις τροχιές των δορυφόρων) και άλλες διορθωτικές παραμέτρους.



Σχήμα 2.3: Η γεωγραφική κατανομή των σταθμών παρακολούθησης και ελέγχου του συστήματος GPS.

Τα αποτελέσματα αυτά, αποστέλλονται από τον κεντρικό σταθμό, με τηλεπικοινωνίες, μέσω των σταθμών επικοινωνίας στη μνήμη των δορυφόρων κάθε μερικές ώρες και εκπέμπονται ακολούθως από τους δορυφόρους προς τους χρήστες. Σε περίπτωση βλάβης των σταθμών ελέγχου, οι δορυφόροι μπορούν από μόνοι τους, με τον δικό τους επεξεργαστή, να προβλέψουν την τροχιά τους για λίγες μόνο μέρες με σημαντική όμως μείωση της ακρίβειας. Δορυφορικές εφημερίδες μπορούν να διανέμονται στους χρήστες από διάφορες υπηρεσίες π.χ. από τη Γεωδαιτική Υπηρεσία (National Geodetic Survey) των ΗΠΑ.

Η ακρίβεια της θέσης των δορυφόρων είναι της τάξης των μερικών ή μερικών δεκάδων μέτρων, γεγονός που για τις γεωδαιτικές εφαρμογές συνεπάγεται ακρίβεια καλύτερη από $1ppm$. Το γεγονός αυτό, ότι δηλαδή επιτυγχάνονται ακρίβειες κατά πολύ καλύτερες από την ακρίβεια θέσης των δορυφόρων οφείλεται στη μεγάλη απόσταση μεταξύ δορυφόρων και δεκτών σε σχέση με την πολύ μικρότερη απόσταση μιας βάσης.

Το Τμήμα Χρηστών

Το Τμήμα Χρηστών περιλαμβάνει τους δέκτες GPS. Ένας δέκτης GPS αποτελείται από την κεραία του, τον κυρίως δέκτη, καθώς και έναν υπολογιστή με

τη μονάδα εισόδου-εξόδου που συνεργάζεται με την αντίστοιχη μονάδα του δέκτη. Σήμερα, μερικές δεκάδες εταιρείες σ' όλο τον κόσμο κατασκευάζουν δέκτες διαφόρων τύπων, τους οποίους συνεχώς τελειοποιούν.

Οι *κεραίες* είναι μικρών διαστάσεων, μικρού βάρους και συνήθως πολυκατευθυντήριες. Διακρίνονται σε μονοπολικές, τετράφυλλες, σπειροειδείς, επίπεδες, κωνικές κ.λ.π. Μερικές κεραίες έχουν τη δυνατότητα λήψης σε διπλή συχνότητα ($L1$ και $L2$). Για μία σωστή λήψη σημάτων οι κεραίες δεν πρέπει να επισκιάζονται από γειτονικά αντικείμενα όπως είναι μεγάλα κτίρια, δέντρα κτλ, επειδή στις περιπτώσεις αυτές δημιουργούνται παρεμβολές πολυκλαδικών ανακλάσεων του σήματος. Για τις γεωδαιτικές εφαρμογές οι κεραίες μπορούν να κεντρώνονται σε τρίποδα π.χ. τρίποδα θεοδόλιχου, ή απ' ευθείας στο βάθρο του τριγωνομετρικού σημείου.

Ο *κυρίως δέκτης* αποτελείται από τις μονάδες μηχανικού υλικού (*hardware*), τα κανάλια με την βοήθεια των οποίων γίνεται η λήψη των σημάτων καθώς και από τις μονάδες επεξεργασίας των σημάτων. Ένας σημερινός δέκτης διαθέτει περισσότερα από 4 κανάλια. Ανάλογα με τις παραπάνω μονάδες (κανάλια) καθώς και με τις τεχνικές μετρήσεων, οι δέκτες διακρίνονται σε συνεχείς ή πολυκάναλους, πολυπλέκτες, υβριδικούς και ακολουθιακούς.

Ένας πολυκάναλος δέκτης διαθέτει τουλάχιστον 4 κανάλια. Κάθε κανάλι παρακολουθεί και μετρά αποκλειστικά το σήμα ενός μόνο δορυφόρου, επιτυγχάνοντας έτσι συνεχείς και αδιάκοπες μετρήσεις στον κώδικα και στη φάση και επιπλέον μεγάλο αριθμό μετρήσεων σε σύντομο χρονικό διάστημα. Ένας πολυπλέκτης δέκτης διαθέτει ένα ή και δύο κανάλια, είναι αρκετά μικρότερου κόστους από τον πολυκάναλο που φέρει αρκετές μονάδες επεξεργασίας. Σε έναν πολυκάναλο δέκτη η λήψη των σημάτων από το κανάλι, εναλλάσσεται από δορυφόρο σε δορυφόρο με πολύ μεγάλη ταχύτητα της τάξης των $5m/sec$ ώστε η επεξεργασία των σημάτων να γίνεται στις μονάδες επεξεργασίας. Η ταχύτητα είναι τέτοια ώστε να βρίσκεται σε συντονισμό με την ταχύτητα εκπομπής του κώδικα δεδομένων ($50bits/sec$) για να μη διακόπτεται η συνεχής ροή της πληροφορίας του κώδικα αυτού για τον κάθε ένα δορυφόρο. Ένας υβριδικός δέκτης είναι αυτός που ενώ είναι πολυκάναλος έχει και τις δυνατότητες ενός πολυπλέκτη.

Τέλος ένας ακολουθιακός δέκτης, έχει το μικρότερο κόστος και διαθέτει συνήθως ένα κανάλι και μία μονάδα επεξεργασίας έτσι ώστε η λήψη να μοιράζεται χρονικά ανάμεσα στις μονάδες λήψης και επεξεργασίας του σήματος. Ο χρόνος ανακύκλωσης από δορυφόρο σε δορυφόρο είναι αρκετά μεγαλύτερος, δεν είναι δυνατή η συνεχής μέτρηση των φάσεων των φερόντων κυμάτων και των κωδικών και επίσης δεν είναι δυνατή η ταυτόχρονη μέτρηση των φάσεων στις συχνότητες $L1$ και $L2$. Για τους λόγους αυτούς οι ακολουθιακοί δέκτες παρουσιάζουν μεγαλύτερη αβεβαιότητα στα αποτελέσματα.

Ο *υπολογιστής του δέκτη* παίζει το ρόλο του ελεγκτή και συντονιστή ό-

λων των λειτουργιών του δέκτη: ελέγχει δορυφόρους και σήματα, υπολογίζει διορθώσεις, επεξεργάζεται μετρήσεις και δίνει αποτελέσματα. Επίσης επικοινωνεί με τις μονάδες εισόδου /εξόδου του δέκτη π.χ. καταγραφή μετρήσεων σε δισκέτα.(Λιθιεράτος 1999)

Η Επιλεκτική Διαθεσιμότητα

Η *επιλεκτική διαθεσιμότητα* είναι μια λειτουργία την οποία εφαρμόζει το Υπουργείο Άμυνας των ΗΠΑ στο σήμα του GPS. Σκοπός είναι να μην επιτραπεί στους πολίτες και στις εχθρικές δυνάμεις να χρησιμοποιήσουν την απόλυτη ακρίβεια του GPS και αυτό επιτυγχάνεται υποβάλλοντας τα ρολόγια των δορυφόρων σε μία διαδικασία που είναι γνωστή ως «ταλάντωση», η οποία μεταβάλλει ελαφρά το χρόνο των ρολογιών. Ουσιαστικά εισάγεται θόρυβος στο εκπεμπόμενο σήμα. Επιπλέον, η τροχιά που ακολουθούν οι δορυφόροι εκπέμπεται λίγο διαφορετική απ' ό,τι είναι στην πραγματικότητα. Το τελικό αποτέλεσμα είναι η υποβάθμιση της ακρίβειας θέσης στα 100m.

Η Ε/Δ επηρεάζει τους πολίτες που χρησιμοποιούν ένα μόνο δέκτη για τη λήψη αυτόνομης θέσης. Οι χρήστες διαφορικών συστημάτων δεν επηρεάζονται σημαντικά από την Ε/Δ. Οι στρατιωτικοί δέκτες είναι εξοπλισμένοι με ειδικό hardware το οποίο εξαλείφει την επίδραση της επιλεκτικής διαθεσιμότητας. Η επιλεκτική διαθεσιμότητα μπορεί να τεθεί *On* ή *Off* από τους επίγειους σταθμούς ελέγχου του GPS. Από την 1η Μαΐου 2000, το Υπουργείο Άμυνας της Αμερικής έθεσε σε κατάσταση *Off* την Επιλεκτική Διαθεσιμότητα, με ανακοίνωση του εκπροσώπου Τύπου των Η.Π.Α., οπότε ο εντοπισμός που παρέχεται είναι ο μέγιστος που μπορεί να δώσει το σύστημα.

2.3 Αρχή Λειτουργίας του GPS

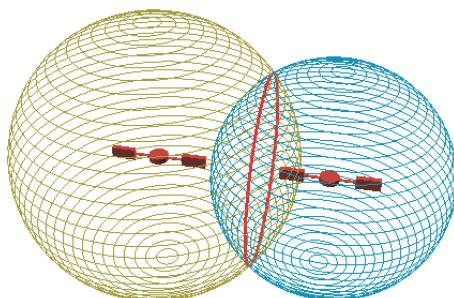
Η αρχή λειτουργίας του προσδιορισμού θέσης με το GPS βασίζεται θεωρητικά στον «τριπλευρισμό», δηλαδή την ταυτόχρονη μέτρηση μηκών από τους δορυφόρους στους δέκτες. Για να επιτευχθεί αυτό, πρέπει ο δέκτης GPS να μετρήσει το χρόνο που απαιτείται για να ταξιδεύσει το σήμα από τον δορυφόρο στον δέκτη. Για να μετρηθεί ο χρόνος απαιτείται ακριβής χρονομέτρηση. Είναι απαραίτητη η ακριβής γνώση της θέσης των δορυφόρων στην τροχιά τους κάθε στιγμή. Τέλος πρέπει να γίνουν διορθώσεις για καθυστερήσεις που οφείλονται στην ατμόσφαιρα καθώς το σήμα ταξιδεύει μέσα σε αυτή.

Η μέτρηση με GPS βασίζεται στην θεώρηση ότι οι δορυφόροι στο διάστημα είναι «σημεία αναφοράς» που χρησιμοποιούνται για τον εντοπισμό της θέσης εδώ στη Γη. Αυτή η ιδέα γεωμετρικά εξηγείται παρακάτω:

Υποθέτουμε ότι μετράμε την απόσταση από έναν δορυφόρο μέχρι την επιφάνεια της Γης, και έστω ότι υπολογίζεται 2000km. Αυτό σημαίνει ότι όλες

οι πιθανές θέσεις θα μπορούσαν να βρίσκονται στην επιφάνεια μιας σφαίρας που έχει κέντρο τον δορυφόρο και ακτίνα 20000km .

Στη συνέχεια, ας υποθέσουμε ότι μετράμε την απόσταση σε ένα δεύτερο δορυφόρο της Γης. Αυτό σημαίνει ότι, όχι μόνο βρισκόμαστε στην πρώτη σφαίρα αλλά επιπλέον και στη δεύτερη σφαίρα με ακτίνα 21000km , όπως φαίνεται στο Σχήμα (2.4).



Σχήμα 2.4: Με χρήση δύο δορυφόρων GPS οι θέσεις του χρήστη βρίσκονται στην τομή των δύο σφαιρών.

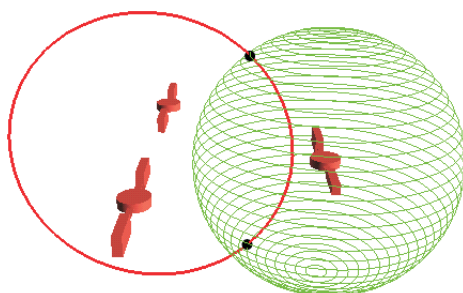
Εαν τώρα μετρήσουμε την απόσταση από ένα τρίτο δορυφόρο που απέχει 22000km , αυτό περιορίζει ακόμα περισσότερο τον προσδιορισμό της θέσης μας σε δύο σημεία τα οποία προκύπτουν εκεί από η τρίτη σφαίρα κόβει τον κύκλο που δημιουργήθηκε ως τομή των δύο πρώτων σφαιρών.

Επομένως, *θεωρητικά απαιτούνται τουλάχιστον τρεις ταυτόχρονες μετρήσεις απόστασης προς τρεις διαφορετικούς δορυφόρους για να προσδιοριστεί η τρισδιάστατη θέση του δέκτη*. Όμως η ποιότητα του προσδιορισμού θέσης εξαρτάται από την ακρίβεια μέτρησης αυτών των αποστάσεων και τη γεωμετρία της τομής των σφαιρών. Έτσι, για να αποφασίσουμε ποια πραγματική θέση μεταξύ των δύο σημείων που προκύπτουν από την τομή μπορούμε να κάνουμε μια τέταρτη μέτρηση. Συνήθως όμως ένα από τα δύο σημεία όπως φαίνεται στο Σχήμα (2.5) είναι τελείως λάθος και έτσι απορρίπτεται. Επομένως, *όταν θέλουμε να βρούμε την τρισδιάστατη θέση μας με χρήση ενός δέκτη GPS πρέπει να έχουμε ταυτόχρονες μετρήσεις απόστασης από τουλάχιστον 4 δορυφόρους*.

Η μέτρηση της απόστασης μας από ένα δορυφόρο επιτυγχάνεται, μετρώνας το χρόνο που απαιτείται το σήμα που στέλνει ο δορυφόρος να φτάσει στον δέκτη. Ουσιαστικά, το πρόβλημα ανάγεται στην απλή σχέση

$$\text{απόσταση} = \text{ταχύτητα} \times \text{χρόνος}.$$

Στην περίπτωση του GPS η ταχύτητα είναι ίση με την ταχύτητα του φωτός στο κενό, επειδή αναφερόμαστε σε ραδιοσήματα. Επομένως αυτό που χρειάζεται είναι η μέτρηση του χρόνου διάδοσης του σήματος από το δορυφόρο σε



Σχήμα 2.5: Με χρήση τριων δορυφόρων GPS η θέση του χρήστη μπορεί να βρίσκεται σε δύο πιθανά σημεία.

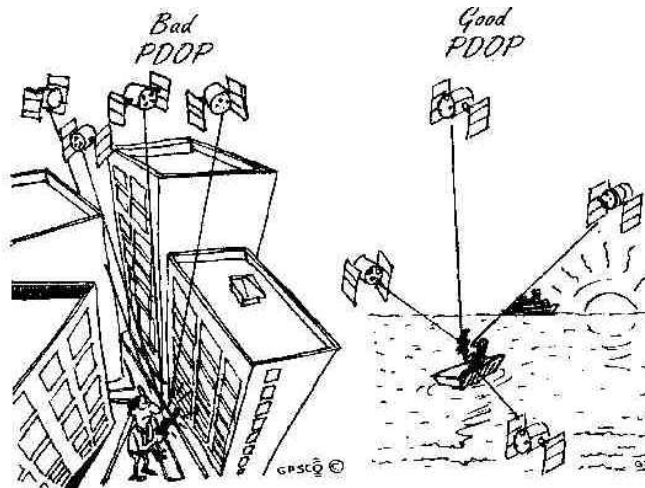
ένα δέκτη, δηλαδή της παρέλευσης του χρόνου μεταξύ της χρονικής στιγμής t_E εκπομπής του σήματος από ένα δορυφόρο GPS και της χρονικής στιγμής t_L λήψης του ίδιου σήματος σε ένα δέκτη GPS. Η μετρούμενη διαφορά $t = t_L - t_E$ πολλαπλασιαζόμενη με την ταχύτητα του φωτός ($c = 299792458 \text{ km/sec}$) δίνει την απόσταση δορυφόρου-δέκτη, δες Σχήμα (2.2).

Αυτές οι μετρήσεις καλούνται *μετρήσεις ψευδο-αποστάσεων*, δεδομένου ότι διαφέρουν από την πραγματική απόσταση δορυφόρου-δέκτη λόγω σφαλμάτων. Οι μετρήσεις ψευδο-απόστασης γίνονται συνήθως με μια αβεβαιότητα της τάξης μερικών μέτρων. Τα σημαντικότερα σφάλματα οφείλονται σε :

- τροχιακά σφάλματα των δορυφόρων,
- σφάλματα που οφείλονται στη διεύλευση του σήματος από την ατμόσφαιρα (ιονόσφαιρα και τροπόσφαιρα),
- σφάλματα λόγω των χρονικών καθυστερήσεων των χρονομέτρων του δορυφόρου και του δέκτη,
- σφάλματα των πολλαπλών διαδρομών (multipath), δηλαδή όταν λαμβάνεται ένα σήμα που έχει ανακλαστεί σε μια επιφάνεια οπότε μετράμε μεγαλύτερη απόσταση,
- σφάλματα που οφείλονται στη γεωμετρία των δορυφόρων (Dilution Of Precision-DOP), δες Σχήμα (2.6),
- η επιλεκτική διαθεσιμότητα,
- η κρυπτογράφηση (Anti Spoofing).

Η γνώση της ακριβούς θέσης των δορυφόρων είναι απαραίτητη αφού συστηματικά χρησιμοποιούνται ως σημεία αναφοράς για τις μετρήσεις της απόστασης. Επειδή οι δορυφόροι βρίσκονται σε πολύ μεγάλο ύψος (περίπου

21000km) οι τροχιές τους είναι πολύ εύκολα προβλέψιμες. Μικρές αποκλίσεις από την τροχιά του κάθε δορυφόρου μετρώνται και διορθώνονται συνεχώς από τους σταθμούς ελέγχου. Αυτές οι διορθώσεις στέλνονται στους δορυφόρους και στην συνέχεια μεταδίδονται μαζί με το σήμα που στέλνεται στον δέκτη (εφημερίδες). (Τσακίρη 2004)



Σχήμα 2.6: Διαφορές καλής και κακής γεωμετρίας δορυφορικού σχηματισμού.

2.4 Μετρήσεις με GPS

Οι δέκτες του συστήματος GPS, συγκρίνουν τους λαμβανόμενους κώδικες με αντίγραφα που φτιάχνουν οι ίδιοι. Αυτοί οι κώδικες (δορυφόρων και δεκτών) αν και παράγονται κατά τον ίδιο τρόπο, δεν ταυτίζονται σε χρόνο και η διαφορά χρόνου μεταξύ τους, πολλαπλασιαζόμενη με την ταχύτητα του φωτός στο κενό, δίνει την απόσταση δορυφόρου-δέκτη. Με μετρήσεις ψευδοαποστάσεων προσδιορίζουμε το διάνυσμα από το κέντρο της Γης μέχρι τον παρατηρητή.

Εκτός από τις μετρήσεις των ψευδοαποστάσεων, το GPS παρέχει και *μετρήσεις φάσεις του φέροντος κύματος*. Αυτές στηρίζονται στη δυνατότητα μέτρησης της απόστασης μεταξύ του εκάστοτε δορυφόρου και ενός δέκτη, σαν συνάρτηση των μετρουμένων κύκλων φάσης, όπου $\lambda = \lambda_1 = 19.029\text{cm}$ για την συχνότητα L_1 και $\lambda = \lambda_2 = 24.421\text{cm}$ για την συχνότητα L_2 . Η μέτρηση της φάσης του φέροντος κύματος γίνεται συνήθως με ακρίβεια της τάξης $1^0/0$ του αντίστοιχου μήκους κύματος λ του χρησιμοποιημένου σήματος. Οι μετρήσεις του φέροντος κύματος είναι ακριβέστερες κατά δύο τουλάχιστον

τάξεις μεγέθους από τις μετρήσεις ψευδοαπόστασης και ως εκ τούτου αποτελούν τον μόνο τύπο μετρήσεων υψηλής ακρίβειας στους οποίους βασίζονται οι διάφορες γεωδαιτικές και τοπογραφικές μετρήσεις.

Οι δύο βασικές τεχνικές μέτρησης με GPS είναι:

- **Απόλυτος Προσδιορισμός Θέσης:** προσδιορισμός συντεταγμένων μεμονωμένων σημείων με έναν δέκτη. Χρησιμοποιούνται οι μετρήσεις ψευδοαποστάσεων. Εφαρμόζεται κυρίως στην ναυσιπλοΐα ή γενικά σε εργασίες που δεν χρειάζονται μεγάλη ακρίβεια. Η ακρίβεια είναι της τάξης των 15m. Οι δέκτες που χρησιμοποιούνται είναι συνήθως μικρές, φορητές μονάδες χειρός με χαμηλό κόστος. Με χρήση δεκτών συχνότητας L_2 μπορούμε να έχουμε βελτίωση των μετρήσεων κατά 10 – 20 % (). Ο προσδιορισμός της θέσης γίνεται σε μορφή καρτεσιανών συντεταγμένων (X,Y,Z) ή γεωδαιτικών συντεταγμένων (φ, λ, h).
- **Σχετικός Προσδιορισμός Θέσης:** προσδιορίζονται διανύσματα βάσης, δηλαδή οι διαφορές συντεταγμένων ($\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$) μεταξύ ζευγών σημείων (δεκτών) που ορίζουν τις λεγόμενες βάσεις (*base – lines*). Εφαρμόζεται στις γεωδαιτικές εφαρμογές (π.χ. δίκτυα). Χρησιμοποιούνται οι πολύ πιο ακριβείς μετρήσεις φάσεων της τάξης του 1cm για τα συνήθη δίκτυα. Απαιτούνται δύο τουλάχιστον δέκτες με δυνατότητα μέτρησης φάσεων τουλάχιστον στη συχνότητα L_1 . Οι μετρήσεις φάσεων και στην L_2 συχνότητα συνεισφέρουν στην ελαχιστοποίηση ή την απαλοιφή των ιονοσφαιρικών σφαλμάτων και μειώνουν το χρόνο εκτέλεσης των εργασιών. Οδηγούν έτσι σε αποτελέσματα μεγαλύτερης ακρίβειας. Η ακρίβεια είναι της τάξης των 0.01 – 2ppm της απόστασης (βάσης) που μετριέται.

Οι τεχνικές μέτρησης με GPS στον σχετικό εντοπισμό είναι:

- (i) *Στατικός Εντοπισμός (Static Surveys)* δίνει ακρίβειες της τάξης των λίγων χιλιοστών, όπου ο ένας δέκτης (*reference receiver*) τοποθετείται σε γνωστό σημείο και ο άλλος (*rover receiver*) καταλαμβάνει για ένα σχετικά μεγάλο χρονικό διάστημα 40 – 90min ένα δεύτερο σημείο του οποίου η θέση ζητείται να υπολογισθεί.
- (ii) *Ταχύς Στατικός Εντοπισμός (Rapid Static Surveys)* χρησιμοποιεί την ίδια μεθοδολογία με την προηγούμενη τεχνική, όμως με σημαντική μείωση του χρόνου παραμονής του δεύτερου δέκτη από 5 – 20min, ενώ η ακρίβεια που επιτυγχάνεται είναι της τάξης του 1ppm. Είναι μια τεχνική που χρησιμοποιείται όταν απαιτείται να προσδιορισθεί η θέση πολλών σημείων. Χρησιμοποιείται για επίλυση βάσεων μέχρι 15 – 20km.

(iii) *Κινηματικός Εντοπισμός (Kinematic Surveys)* έχει διάφορες μορφές που όμως όλες βασίζονται στην ταχεία κατάληψη σημείων, από μερικά *sec* έως $1 - 2 \text{ min}$ και με κυμαινόμενες ακρίβειες της τάξης των εκατοστών. Η τεχνική του *Κινηματικού Εντοπισμού σε Πραγματικό Χρόνο (Real Time Kinematic – RTK)* είναι η ακριβέστερη μέθοδος αποτύπωσης χρησιμοποιώντας το σύστημα GPS σε πραγματικό χρόνο, για τη λειτουργία της οποίας απαιτείται μεταξύ των δεκτών, η ύπαρξη ασύρματης ζεύξης (*radio link*). Το βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου (*RTK*) είναι ότι ο χρήστης βλέπει την λύση τη στιγμή ακριβώς των παρατηρήσεων και είναι σίγουρός ότι φεύγοντας από το πεδίο, ότι η αποτύπωση έχει πετύχει 100% .

2.5 Εφαρμογές του GPS

Το GPS καλύπτει πάρα πολλές εφαρμογές οι οποίες σχετίζονται με τον εντοπισμό θέσης στη γήινη επιφάνεια, στον αέρα ή τη θάλασσα, καθώς και με την παραγωγή ακριβή χρόνου αναφοράς. Σήμερα μάλιστα, όλο και περισσότερα πεδία επιστημών και εφαρμογών υιοθετούν την GPS τεχνολογία. Μια ταξινόμηση των εφαρμογών του GPS είναι η εξής:

- **Τοπογραφία και Χαρτογραφία** στην στεριά, θάλασσα και στον αέρα, όπως εφαρμογές ίδρυσης αστικών και άλλων δικτύων, συλλογή δεδομένων για GIS, ενημέρωση χαρτών κ.α.
- **Γεωδαιτικές εφαρμογές**, όπως ίδρυση γεωδαιτικών δικτύων ελέγχου σε τοπικές ή εθνικές κλίμακες, προσδιορισμός γεωειδούς και υψομετρικού υποβάθρου, ακριβείς εργασίες παρακολούθησης μετακινήσεων.
- **Γεωδυναμικές εφαρμογές**, όπως μέτρηση της σχετικής θέσης ενός τοπικού συστήματος αναφοράς σε τακτικά χρονικά διαστήματα με σκοπό να διαπιστωθεί πιθανή μετακίνηση πλακών.
- **Περιβάλλοντολογικές εφαρμογές**, όπως μέτρηση του ύψους κυμάτων στην ωκεανογραφία και παρακολούθηση της ατμόσφαιρας στην μετεωρολογία.
- **Πλοήγηση** σε στεριά, θάλασσα και αέρα, που περιλαμβάνει εφαρμογές κινηματικού εντοπισμού μεγάλης ή μικρής ακρίβειας (π.χ. αστυνομία) καθώς και παρακολούθηση στόλου (π.χ. φορτηγά, τρένα κ.α.).
- **Ειδικές εφαρμογές**, όπως μεταφορά χρόνου, προσδιορισμός θέσης ατράκτου αεροσκαφών.

- **Χρήσεις αναψυχής**, ορειβασία, πεζοπορία κ.α.
- **Στρατιωτικές εφαρμογές.**

Μέρος ΙΙ

Στοιχεία Αλγεβρικής Θεωρίας

Κεφάλαιο 3

Θεμελιώδεις Ορισμοί

3.1 Σύνολα

Όταν εκτελούμε μαθηματικές πράξεις όπως μετρήσεις γωνιών, αποστάσεων, βαρύτητας, συντεταγμένες εικόνων κ.α. χρησιμοποιούμε αριθμούς. Μια μετρημένη απόσταση, για παράδειγμα παίρνει τιμή $100m$ για να υποδηλώσει το μήκος. Αριθμοί όπως $1, 2, \dots$ μπορούν να βρουν χρήση π.χ.

- αρίθμηση σημείων που μετρήθηκαν
- λογισμικά όπως Geographical Information Systems
- πρόσβαση *pin* αριθμών σε τράπεζες

Σε κάθε περίπτωση, όλοι αυτοί οι αριθμοί ανήκουν στο σύνολο των *φυσικών αριθμών*

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

έχοντας προσθέσει και το 0. Το σύνολο \mathbb{N} είναι *κλειστό* ύπο την πράξη:

- της πρόσθεσης, σε αυτή την περίπτωση το άθροισμα δυο αριθμών είναι επίσης φυσικός αριθμός (π.χ. $3 + 6 = 9$) και,
- του πολλαπλασιασμού, και σε αυτήν την περίπτωση το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού δύο αριθμών είναι φυσικός αριθμός (π.χ. $3 \times 6 = 18$)

Από την άλλη πλευρά η αφαίρεση δυο φυσικών αριθμών δεν είναι απαραίτητα φυσικός αριθμός (π.χ. $3 - 6 = -3$). Για να αποφύγουμε την αποτυχία αυτή του συνόλου των φυσικών αριθμών να είναι κλειστό κατά την αφαίρεση, εισάγαμε τους αρνητικούς αριθμούς και προστέθηκαν μπροστά από τους

φυσικούς. Για έναν φυσικό αριθμό n για παράδειγμα, ο $-n$ είναι ο αντίθετος του. Το σύνολο

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

είναι το σύνολο των *ακεραίων*. Το σύνολο \mathbb{Z} έχει:

- «ταυτοτικό προσθετικό» τον αριθμό 0, ο οποίος όταν προστίθεται σε οποιοδήποτε ακέραιο n τον αφήνει αμετάβλητο (π.χ. $0 + 13 = 13$) και,
- «προσθετικό αντίστροφο» $-n$ που όταν προστεθεί σε έναν ακέραιο n δίνει αποτέλεσμα το ταυτοτικό 0 (π.χ. $-13 + 13 = 0$). Ο αριθμός -13 είναι ένα προσθετικό αντίστροφο του 13.

Το σύνολο \mathbb{Z} με τις ιδιότητες της «άθροισης» και του «προσθετικού αντιστρόφου» μας επιτρέπει να διαχειριστούμε αριθμούς αθροίζοντας και αφαιρώντας τους. Αυτό είναι εξαιρετικά χρήσιμο όταν επεξεργαζόμαστε μετρημένες τιμές. Για παράδειγμα επιτρέπει την επίλυση εξισώσεων της μορφής $y + m = 0$, όπου m είναι ένας ακέραιος.

Με σκοπό να επιτρέπεται η διαίρεση αριθμών όπως στην περίπτωση παρατηρήσεις αποστάσεων, «ταυτοτικό πολλαπλασιαστικό» και «αντίστροφο» θα πρέπει να οριστούν σαν:

- «ταυτοτικό πολλαπλασιαστικό» είναι ο ακέραιος 1 ο οποίος όταν πολλαπλασιαστεί με οποιοδήποτε ακέραιο n διατηρεί την ταυτότητα του n (π.χ. $1 \times 13 = 13$),
- «πολλαπλασιαστικό αντίστροφο» είναι ένας ακέραιος m τέτοιος ώστε κάθε πολλαπλασιασμός του με έναν άλλο ακέραιο n δίνει το 1 (π.χ. $m \times n = 1$).

Για έναν μη μηδενικό ακέραιο n , ένα πολλαπλασιαστικό αντίστροφο είναι ο $\frac{1}{n}$. Για παράδειγμα το πολλαπλασιαστικό αντίστροφο του 5 είναι το $\frac{1}{5}$. Το γεγονός αυτό οδηγεί σε ένα νέο επεκτάσιμο σύνολο \mathbb{Q} , συνδιάζοντας τους ακεραίους με τα πολλαπλασιαστικά αντίστροφα τους

$$\mathbb{Q} = \{\dots, -2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2, \dots\}$$

όπου ένας καινούργιος αριθμός έχει δημιουργηθεί εκτός από τους $-1, 0, 1$. Το σύνολο των *ρητών* αριθμών είναι κλειστό ως προς τις παρακάτω πράξεις:

- Για κάθε ρητό αριθμό, υπάρχει ένα προσθετικό αντίστροφο το οποίο είναι και αυτό ρητός αριθμός (π.χ. $-\frac{1}{13} + \frac{1}{13} = 0$),

- Κάθε ρητός αριθμός, εκτός του 0, έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο το οποίο είναι και αυτό ρητός αριθμός (π.χ. $13 \times \frac{1}{13} = 1$),
- Το σύνολο των ρητών αριθμών είναι κλειστό υπό την πράξη της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού (π.χ. $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ και $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$),

Το σύνολο \mathbb{Q} είναι χρήσιμο γιατί επιτρέπει την πρόσθεση, την αφαίρεση, τον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση. Για το λόγο αυτό επιτρέπει τη λύση εξισώσεων την μορφής $ny - m = 0$, $\{n, m\}$ όπου n, m ακέραιοι, με $n \neq 0$. Το σύνολο αυτό δεν είναι αρκετά μεγάλο, αφού δεν περιέχει τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών και δεν μπορεί να μετρήσει το Πυθαγόρειο μήκος. Στην γεωδαισία καθώς και στην γεωπληροφορική, ο υπολογισμός αποστάσεων από σταθμούς συντεταγμένων απαιτεί μέτρηση των τετραγωνικών ριζών των αριθμών. Θα επεκτείνουμε το σύνολο των ρητών \mathbb{Q} στο σύνολο των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} , όπου οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί είναι αυτοί που απαιτούνται για την μέτρηση αποστάσεων. Οι αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί περιλαμβάνουν τα αθροιστικά αντίστροφα. Το σύνολο \mathbb{R} επίσης κατέχει πολλαπλασιαστικά αντίστροφα. Το σύνολο \mathbb{R} επιτρέπει την επίλυση εξισώσεων της μορφής $y^2 - 3 = 0 \Rightarrow y = \pm 3$, όπου η λύση δεν είναι ούτε ακέραιος ούτε ρητός αριθμός. Παρόλα αυτά το σύνολο \mathbb{R} δεν είναι αρκετά μεγάλο για να επιτρέψει λύσεις εξισώσεων της μορφής $y^2 + 1 = 0$. Για το λόγο αυτό δημιουργείται το σύνολο \mathbb{C} των μιγαδικών αριθμών επισυνάπτοντας ένα στοιχείο i , όπου $i^2 = -1$.

Το σύνολο \mathbb{C} μπορεί να επεκταθεί ακόμη περισσότερο στο σύνολο \mathbb{H} των τετραδικών αριθμών. Στη γεωδαισία και την γεωπληροφορική οι τετραδικοί αριθμοί χρησιμοποιούνται για την επίλυση του προβλήματος της τρισδιάστατης τομής. Οι τετραδικοί αριθμοί ορίζονται ως το σύνολο των πινάκων της μορφής

$$\begin{bmatrix} a + di & b + ci \\ -b + ci & a - di \end{bmatrix} \mid \{a, b, c, d\} \in \mathbb{R},$$

όπου εκφράζεται με μοναδιαίους πίνακες $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ως

$$\begin{bmatrix} a + di & b + ci \\ -b + ci & a - di \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

$$a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k},$$

όπου $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ είναι τετραδικοί με νόρμα 1 που ικανοποιούν

$$\begin{aligned}i^2 &= j^2 = k^2 = 1 \\ij &= k = -ji \\jk &= i = -kj \\ki &= j = -ik.\end{aligned}$$

Ολοκληρώνουμε τη παράγραφο ορίζοντας τους αλγεβρικούς αριθμούς.

Ορισμός 3.1.1. Ένας αριθμός $n \in \mathbb{C}$ είναι αλγεβρικός αν

$$a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \dots + a_1 a + a_0 = 0$$

και έχει βαθμό n , εάν δεν ικανοποιεί καμία τέτοια εξίσωση χαμηλότερου βαθμού και $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$.

3.2 Συναρτήσεις

Ορισμός 3.2.1. (Συνάρτηση ή απεικόνιση) Συνάρτηση ή απεικόνιση φ από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B είναι ένας κανόνας, μέσω του οποίου σε κάθε στοιχείο a του A αντιστοιχίζεται ακριβώς ένα στοιχείο b του B . Λέμε ότι με την φ απεικονίζεται το a στο b , και ότι με την φ απεικονίζεται το A στο B .

Ο κλασικός συμβολισμός που χρησιμοποιείται για να δηλωθεί ότι μέσω της φ απεικονίζεται το a στο b είναι

$$\varphi(a) = b$$

Το στοιχείο b λέγεται **εικόνα του a μέσω της φ** . Το γεγονός ότι με την φ απεικονίζεται το A στο B , θα εκφράζεται συμβολικά με την

$$\varphi : A \rightarrow B$$

Ορισμός 3.2.2. (Ένα-προς-ένα και επί) Μία συνάρτηση από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B λέγεται **ένα-προς-ένα** αν για κάθε στοιχείο του B υπάρχει το πολύ ένα στοιχείο του A το οποίο απεικονίζεται σ' αυτό, και λέγεται **επί** του B αν για κάθε στοιχείο του B υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του A που απεικονίζεται σ' αυτό.

Παράδειγμα 3.2.3. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $f(x) = 2x + 3$ είναι ένα-προς-ένα αφού διαφορετικές τιμές του x δίνουν διαφορετικές τιμές του $f(x)$. Είναι επί του \mathbb{R} διότι για κάθε τιμή y στο \mathbb{R} προκύπτει μέσω της f για κατάλληλο x συγκεκριμένα για, $x = (y - 3)/2$.

Παραδειγμα 3.2.4. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $f(x) = x^2$ δεν είναι ένα προς-ένα διότι $f(2) = f(-2) = 4$. Δεν είναι ούτε επί, διότι οι αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί δεν προκύπτουν ως τετράγωνα πραγματικών αριθμών.

Τέλος σημειώνουμε ότι για μια $\phi : A \rightarrow B$, το σύνολο A λέγεται **πεδίο ορισμού** της ϕ , το σύνολο B λέγεται **πεδίο τιμών** της ϕ , και το σύνολο $\phi(A) = \{\phi(a) | a \in A\}$ λέγεται η **εικόνα του A μέσω της ϕ** .

3.3 Στοιχεία Θεωρίας Ομάδων

Ορισμός 3.3.1. (Διμελής πράξη) Μια **διμελής πράξη $*$** σε ένα σύνολο S είναι μια συνάρτηση, με την οποία σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος (a, b) στοιχείων του S αντιστοιχίζεται κάποιο στοιχείο του S .

Η λέξη *διατεταγμένο* σε αυτόν τον ορισμό είναι σημαντική, διότι επιτρέπει στο στοιχείο που αντιστοιχεί στο ζεύγος (a, b) να είναι διαφορετικό από το στοιχείο που αντιστοιχεί στο ζεύγος (b, a) . Με μια διμελή πράξη στο S , πρέπει να αντιστοιχίζεται σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος ένα στοιχείο που ανήκει κι αυτό στο S . Η απαίτηση να είναι και το στοιχείο αυτό πάλι στο S είναι γνωστή σαν **συνθήκη κλειστότητας**.

Παραδειγμα 3.3.2. Η συνήθης πρόσθεση $+$ είναι μια διμελή πράξη στο σύνολο \mathbb{R} . Ο συνήθης πολλαπλασιασμός \times είναι μια άλλη διμελής πράξη στο \mathbb{R} . Σε αυτό το παράδειγμα μπορούμε να αντικαταστήσουμε το \mathbb{R} με τα σύνολα $\mathbb{C}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}^+, \mathbb{Z}^+$.

Παραδειγμα 3.3.3. Η συνήθης πρόσθεση $+$ δεν είναι διμελής πράξη στο σύνολο \mathbb{R}^* των μη μηδενικών αριθμών, διότι $2 + (-2)$ δεν ανήκει στο σύνολο \mathbb{R}^* . Δηλαδή το \mathbb{R}^* δεν είναι κλειστό ως προς την $+$.

Παραδειγμα 3.3.4. Στο σύνολο \mathbb{Z}^+ ορίζουμε τη διμελή πράξη $*$ θέτοντας $a * b$ ως τον μικρότερο από τους a και b ή ως την κοινή τους τιμή αν $a = b$. Έτσι, $2 * 11 = 2, 15 * 10 = 10$ και $3 * 3 = 3$.

Μια διμελής πράξη μας επιτρέπει να συνδιάσουμε δύο μόνο στοιχεία.

Ορισμός 3.3.5. (Αντιμεταθετική πράξη) Μια διμελής πράξη σε ένα σύνολο S λέγεται **αντιμεταθετική** αν (και μόνο αν) $a * b = b * a$ για κάθε $a, b \in S$.

Ορισμός 3.3.6. (Προσεταιριστική πράξη) Μια διμελής πράξη σε ένα σύνολο S λέγεται **προσεταιριστική** αν $(a * b) * c = a * (b * c)$ για κάθε $a, b, c \in S$.

Ορισμός 3.3.7. (Ομάδα) Ομάδα $\langle G, * \rangle$ είναι ένα σύνολο G , μαζί με μια διμελή πράξη $*$ στο G τέτοια, ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα:

G_1 : Η διμελής πράξη $*$ είναι προσεταιριστική.

G_2 : Υπάρχει ένα στοιχείο e στο G τέτοιο, ώστε $e * x = x * e = x$ για κάθε $x \in G$. (Ταυτοτικό στοιχείο)

G_3 : Για κάθε a στο G , υπάρχει ένα στοιχείο a' στο G με την ιδιότητα, $a' * a = a * a' = e$. (Αντίστροφο στοιχείο)

Ορισμός 3.3.8. (Αβελιανή ομάδα) Μια ομάδα G λέγεται αβελιανή αν η διμελής της πράξη $*$ είναι αντιμεταθετική.

Παραδειγμα 3.3.9. Το σύνολο \mathbb{Z}^+ με πράξη την $+$ δεν είναι ομάδα. Διότι δεν υπάρχει ταυτοτικό στοιχείο για την $+$ στο \mathbb{Z}^+ .

Παραδειγμα 3.3.10. Το σύνολο \mathbb{Z} με πράξη την $+$ είναι ομάδα και πιο συγκεκριμένα αβελιανή.

Παραδειγμα 3.3.11. Ορίζουμε την $*$ στο σύνολο \mathbb{Q}^+ μέσω της $a * b = ab/2$. Τότε

$$(a * b) * c = \frac{ab}{2} * c = \frac{abc}{4},$$

και ομοίως

$$a * (b * c) = a * \frac{bc}{2} = \frac{abc}{4},$$

Επομένως η $*$ είναι προσεταιριστική. Προφανώς

$$2 * a = a * 2 = a$$

για κάθε $a \in \mathbb{Q}^+$, άρα το 2 είναι ταυτοτικό στοιχείο για την $*$. Τέλος

$$a * \frac{4}{a} = \frac{4}{a} * a = 2$$

άρα το $\hat{a} = 4/a$ είναι το αντίστροφο του a . Επομένως το \mathbb{Q}^+ με πράξη την $*$ είναι ομάδα.

Θεώρημα 3.3.12. Σε μια ομάδα G με πράξη την $*$ υπάρχει μόνο ένα ταυτοτικό στοιχείο e τέτοιο, ώστε

$$e * x = x * e = x$$

για κάθε $x \in G$. Ομοίως, για κάθε $a \in G$, υπάρχει μόνο ένα στοιχείο a' τέτοιο, ώστε

$$a' * a = a * a' = e$$

Τονίζουμε μια χρήσιμη διαπίστωση

$$(ab)' = b' a'$$

Ορισμός 3.3.13. (Τάξη της G) Αν G είναι μια πεπερασμένη ομάδα, τότε η τάξη $|G|$ της G είναι το πλήθος των στοιχείων της G .

Ορισμός 3.3.14. (Υποομάδα) Αν ένα υποσύνολο H μιας ομάδας G είναι κλειστό ως προς τη διμελή πράξη της G και αν το H είναι και αυτό ομάδα, τότε το H λέγεται υποομάδα της G .

Ορισμός 3.3.15. (Ομομορφισμός) Μια απεικόνιση φ μιας ομάδας G σε μια ομάδα G' λέγεται **ομομορφισμός** αν

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

για κάθε $a, b \in G$.

Ορισμός 3.3.16. (Ισομορφισμός) Ένας **ισομορφισμός** $\varphi : G \rightarrow G'$ είναι ένας ομομορφισμός ένα-προς-ένα και επί της G' . Ο συνήθης συμβολισμός είναι $G \simeq G'$.

Θεώρημα 3.3.17. Έστω G μια ομάδα και έστω $a \in G$. Τότε το

$$H = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

είναι μια υποομάδα της G και μάλιστα η μικρότερη υποομάδα της G που περιέχει το a , δηλαδή, κάθε υποομάδα που περιέχει το a περιέχει και την H . Η ομάδα H λέγεται **κυκλική**.

Ορισμός 3.3.18. (Κυκλική υποομάδα) Η ομάδα H του Θεωρήματος (3.3.17) λέγεται **κυκλική υποομάδα της G** που παράγεται από το a , και συμβολίζεται με $\langle a \rangle$.

Ορισμός 3.3.19. (Κυκλική ομάδα, γεννήτορας) Έστω G μια ομάδα. Θα λέμε ότι η G είναι **κυκλική** αν υπάρχει ένα στοιχείο a της G τέτοιο ώστε κάθε στοιχείο x της G μπορεί να γραφεί στην μορφή a^n για κάθε ακέραιο n . Το στοιχείο a της G παράγει την G και ονομάζεται **γεννήτορας** της G αν $\langle a \rangle = G$.

Θεώρημα 3.3.20. Κάθε κυκλική ομάδα είναι αβελιανή.

Πόρισμα 3.3.21. (Ο αλγόριθμος διαίρεσης για το \mathbb{Z}) Αν m είναι ένας θετικός ακέραιος και n οποιοσδήποτε ακέραιος, τότε υπάρχουν μονοσήμαντα ορισμένοι ακέραιοι q και r τέτοιοι, ώστε

$$n = mq + r \quad \& \quad 0 \leq r < m.$$

Με τον συμβολισμό του αλγορίθμου της διαίρεσης, λέμε ότι ο q είναι το **πηλίκο** και ο r το **υπόλοιπο** της διαίρεσης του n με m .

Ορισμός 3.3.22. (Ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης) Έστω r και s δύο θετικοί ακέραιοι. Ο θετικός γεννήτορας d της κυκλικής ομάδας

$$H = \{nr + ms \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$$

με πράξη την πρόσθεση λέγεται **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ)** των r και s .

Παραδειγμα 3.3.23. Βρείτε τον ΜΚΔ των 42 και 72. Οι θετικοί διαιρέτες του 42 είναι οι: 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 και 42. Οι θετικοί διαιρέτες του 72 είναι οι: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 και 72. Ο ΜΚΔ είναι ο 6. Παρατηρούμε ότι $6 = (3)72 + (-5)(42)$.

Είναι φανερό πως αν υπάρχει ο ΜΚΔ κάποιων αριθμών, τότε είναι και μοναδικός. Διότι αν υπήρχαν δύο ΜΚΔ για κάποιους δοσμένους αριθμούς, ο ένας θα διαιρούσε τον άλλο και συνεπώς θα ήταν ίσοι μεταξύ τους.

3.4 Στοιχεία Θεωρίας Δακτυλίων και Σωμάτων

Ορισμός 3.4.1. (Δακτύλιος) Ένας **δακτύλιος** $\langle R, +, \cdot \rangle$ είναι ένα σύνολο R μαζί με δύο διμελείς πράξεις $+$ και \cdot , τις οποίες αποκαλούμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, ορισμένες στο R , έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα:

R_1 : $\langle R, +, \cdot \rangle$ είναι μια αβελιανή ομάδα.

R_2 : Ο πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστικός.

R_3 : $\forall a, b, c \in R$ ισχύουν ο **αριστερός επιμεριστικός νόμος**, $a(b + c) = (ab) + (ac)$, και ο **δεξιός επιμεριστικός νόμος**, $(a + b)c = (ac) + (bc)$

Θα υιοθετήσουμε τη συνήθη σύμβαση ότι ο πολλαπλασιασμός εκτελείται πριν από την πρόσθεση, οπότε ο αριστερός επιμεριστικός νόμος, για παράδειγμα

$$a(b + c) = ab + ac$$

χωρίς τις παρενθέσεις στο δεξιό μέλος της ισότητας. Θα αναφερόμαστε για ευκολία, αν και κάπως λανθασμένα, στον δακτύλιο R αντί του δακτυλίου $\langle R, +, \cdot \rangle$, όταν βέβαια δεν προκαλεί σύγχυση. Με $\langle R, + \rangle$ θα συμβολίζουμε την προσθετική ομάδα του δακτυλίου R .

Παραδειγμα 3.4.2. Τα σύνολα \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} και \mathbb{C} με πράξεις την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό, είναι όλα δακτύλιοι.

Θεώρημα 3.4.3. Αν R είναι ένας δακτύλιος με ταυτοτικό στοιχείο της πρόσθεσης το 0 , τότε $\forall a, b \in R$ έχουμε

- $0a = a0 = 0$,
- $a(-b) = (-a)b = -(ab)$
- $(-a)(-b) = -ab$

Ορισμός 3.4.4. (Ομομορφισμός) Έστω R και R' δύο δακτύλιοι. Μια απεικόνιση $\varphi : R \rightarrow R'$ λέγεται **ομομορφισμός** αν οι παρακάτω δύο ιδιότητες ικανοποιούνται για κάθε $a, b \in R$:

- $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$
- $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$

Ορισμός 3.4.5. (Ισομορφισμός) Ένας **ισομορφισμός** $\varphi : R \rightarrow R'$ από έναν δακτύλιο R σε έναν δακτύλιο R' είναι ένας ομομορφισμός που είναι ένα-προς-ένα και επί του R' . Οι δακτύλιοι R και R' είναι τότε **ισόμορφοι**.

Ορισμός 3.4.6. (Αντιμεταθετικός δακτύλιος μοναδιαίο στοιχείο) Ένας δακτύλιος στον οποίο ο πολλαπλασιασμός είναι αντιμεταθετική πράξη, λέγεται **αντιμεταθετικός δακτύλιος**. Ένας δακτύλιος με πολλαπλασιαστικό ταυτοτικό στοιχείο 1 , για το οποίο $1x = x1 = x$ για κάθε $x \in R$, λέγεται **δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο**. Κάθε ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού λέγεται **μοναδιαίο στοιχείο**.

Θεώρημα 3.4.7. Αν R είναι ένας δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο, τότε αυτό το μοναδιαίο στοιχείο 1 είναι το μόνο πολλαπλασιαστικό ταυτοτικό στοιχείο R .

Ορισμός 3.4.8. (Μονάδα) Έστω R ένας δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο. Ένα στοιχείο u του R λέγεται **μονάδα** του R αν έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο στο R .

Ορισμός 3.4.9. (Δακτύλιος διαίρεσης) Αν κάθε μη μηδενικό στοιχείο του R είναι μονάδα, τότε ο λέγεται **δακτύλιος διαίρεσης**.

Ορισμός 3.4.10. (Σώμα, σρεβλό σώμα) Σώμα λέγεται ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος διαίρεσης. Ένας μη αντιμεταθετικός δακτύλιος διαίρεσης λέγεται **σρεβλό σώμα**.

Υποδακτύλιος ενός δακτυλίου λέγεται ένα υποσύνολο του δακτυλίου, που είναι δακτύλιος με τις πράξεις που του κληρονομεί ο μεγάλος δακτύλιος. Ομοίως ορίζεται η έννοια του **υποσώματος** για ένα υποσύνολο ενός σώματος.

Παραδειγμα 3.4.11. Το σύνολο \mathbb{Z} δεν είναι σώμα, αφού το 2 , για παράδειγμα, δεν έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο, δηλαδή το 2 δεν είναι μονάδα του \mathbb{Z} . Οι μόνες μονάδες στο \mathbb{Z} είναι τα 1 και -1 .

Για τη λύση αλγεβρικών υπολογιστικών προβλημάτων στη γεωδαισία και την γεωπληροφορική επαρκεί να θεωρούμε ότι ένας δακτύλιος είναι μεταθετικός και περιλαμβάνει το ταυτοτικό του στοιχείο. Εκτός από τους δακτυλίους αριθμών, έχουμε και τους δακτυλίους πολυωνύμων, όπως θα δούμε αργότερα. Αυτοί οι δύο επαρκούν για καθημερινές μετρήσεις και χειρισμό των παρατηρήσεων.

3.5 Πολυώνυμα

Στην γεωδαισία και την γεωπληροφορική, οι περισσότερες παρατηρήσεις σχετίζονται με άγνωστες παραμέτρους μέσω εξισώσεων αλγεβρικού (πολυωνυμικού) τύπου. Στην περίπτωση που οι παρατηρήσεις δεν είναι πολυωνυμικού τύπου, μετατρέπονται σε πολυωνυμικές μέσω του θεωρήματος (3.5.6). Οι άγνωστες παράμετροι μπορούν να βρεθούν μέσω της επίλυσης των «υπολειματικών» αλγεβρικών εξισώσεων. Τέτοιες λύσεις είναι εφικτές με την εφαρμογή των πράξεων της αθρόισης και του πολλαπλασιασμού πολυωνύμων, τα οποία αποτελούν τα στοιχεία των πολυωνυμικών δακτυλίων.

Ορισμός 3.5.1. (Πολυώνυμο μιας μεταβλητής) Έστω R ένας δακτύλιος. Ένα πολυώνυμο $f(x)$ με συντελεστές από τον R είναι ένα άπειρο τυπικό άθροισμα

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$$

όπου $a_i \in R$ και $a_i = 0$ εκτός από πεπερασμένο πλήθος τιμών του i . Τα a_i είναι οι **συντελεστές του $f(x)$** . Αν για κάποια $i > 0$ ισχύει $a_i \neq 0$, η μεγαλύτερη τέτοια τιμή του i λέγεται **βαθμός του $f(x)$** . Αν δεν υπάρχει τέτοιο $i > 0$, τότε λέμε ότι το $f(x)$ είναι **βαθμού μηδέν**. Ένα πολυώνυμο μηδενικού βαθμού ονομάζεται **σταθερό πολυώνυμο**.

Ορισμός 3.5.2. (Μονικό πολυώνυμο) Ένα πολυώνυμο $f(x) \in R[x]$ της μορφής

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

θα λέγεται **μονικό πολυώνυμο βαθμού n** , όπου $a_n = 1$.

Ορισμός 3.5.3. (Μονώνυμο) Μονώνυμο είναι ένα πολυώνυμο που έχει ένα μονάχα όρο.

Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός πολυωνύμων με συντελεστές από έναν δακτύλιο R ορίζονται με έναν τρόπο που μας είναι αρκετά οικείος. Αν

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots,$$

και

$$g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + \dots,$$

τότε για την πρόσθεση πολυωνύμων, έχουμε

$$f(x) + g(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n + \dots,$$

όπου $c_n = a_n + b_n$, και για τον πολλαπλασιασμό πολυωνύμων έχουμε

$$f(x)g(x) = d_0 + d_1x + \dots + d_nx^n + \dots,$$

όπου $d_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$. Είναι φανερό ότι τα c_i όσο και τα d_i είναι πάλι ίσα με 0 για όλες εκτός από πεπερασμένες τιμές του i . Σημειώνουμε ότι το $\sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$ μπορεί να μην είναι ίσο με το $\sum_{i=0}^n b_i a_{n-i}$ αν ο R δεν είναι αντιμεταθετικός. Τα πολυώνυμα $f(x)$ και $g(x)$ είναι **ίσα** μόνο αν όλοι οι συντελεστές τους είναι ίσοι, δηλαδή: $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots$, κ.ο.κ.

Οι συντελεστές των πολυωνύμων μπορούν να προστεθούν, να αφαιρεθούν, να πολλαπλασιαστούν και να διαιρεθούν παίζοντας το ρόλο κλειδί του καθορισμού των λύσεων των πολυωνυμικών εξισώσεων.

Παραδειγμα 3.5.4. Δίνεται η εξίσωση $9w^2 - 1 = 0$. Βρείτε τις ακέραιες λύσεις.

Μια εξίσωση με συντελεστές στο \mathbb{Z} δεν έχει απαραίτητα λύση στο \mathbb{Z} . Η εξίσωση $9w^2 - 1 = 0$ έχει λύση στο \mathbb{Q} την $w = \pm \frac{1}{3}$.

Επίσης στη βιβλιογραφία συναντάμε το όρο **απροσδιόριστη** x αντί για μεταβλητή x .

Θεώρημα 3.5.5. Το σύνολο $R[x]$ όλων των πολυωνύμων μιας απροσδιόριστης x με συντελεστές από έναν δακτύλιο R είναι ένας δακτύλιος με την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό πολυωνύμων. Αν ο R είναι αντιμεταθετικός, τότε το ίδιο ισχύει και για τον $R[x]$, και αν ο R έχει μοναδιαίο στοιχείο το 1, τότε το 1 είναι και μοναδιαίο στοιχείο του $R[x]$.

Έτσι, $\mathbb{Z}[x]$ είναι ο δακτύλιος των πολυωνύμων με απροσδιόριστη το x και ακέραιους συντελεστές, $\mathbb{Q}[x]$ είναι ο δακτύλιος των πολυωνύμων ως προς x με ρητούς συντελεστές, κ.ο.κ. Η διαφορά ενός πολυωνυμικού δακτυλίου με ένα πολυώνυμο είναι ότι το δεύτερο είναι το άθροισμα ενός περασμένου συνόλου μονωνύμων και αποτελεί στοιχείο του πρώτου.

Με $R[x, y]$ συμβολίζουμε **τον δακτύλιο των πολυωνύμων δύο απροσδιόριστων x και y με συντελεστές από το R** . Με ανάλογο τρόπο ορίζεται ο **δακτύλιος $R[x_1, \dots, x_n]$ των πολυωνύμων των n απροσδιόριστων x_i με συντελεστές από το R** .

Θεώρημα 3.5.6. Δοθέντος n αλγεβρικών (πολυωνυμικών) εξισώσεων παρατηρήσεων, όπου n είναι η διάσταση του χώρου παρατηρήσεων \mathbb{Y} τάξης l με m άγνωστες μεταβλητές και m είναι η διάσταση του παραμετρικού χώρου \mathbb{X} , η εφαρμογή της λύσης των ελαχίστων τετραγώνων (least squares solution - LESS) στις αλγεβρικές εξισώσεις παρατηρήσεων έχει τάξη $(2l - 1)$ στο σύνολο των μη γραμμικών αλγεβρικών κανονικών εξισώσεων. Υπάρχουν m κανονικές εξισώσεις πολυωνυμικής τάξης $(2l - 1)$ που μπορούν να λυθούν.

Απόδειξη

Δίνονται μη γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις $f_i \in k\{\xi_1, \dots, \xi_m\}$, εκφραζόμενες ως

$$\begin{cases} f_1 \in k\{\xi_1, \dots, \xi_m\} \\ f_2 \in k\{\xi_1, \dots, \xi_m\} \\ \vdots \\ f_n \in k\{\xi_1, \dots, \xi_m\}, \end{cases}$$

τάξης l , θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την αντικειμενική συνάρτηση

$$\|f\|^2 = f_1^2 + \dots + f_n^2 \quad \forall f_i \in k\{\xi_1, \dots, \xi_m\}$$

και βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους ως προς τις μεταβλητές $\{\xi_1, \dots, \xi_m\}$. Η τάξη της εξίσωσης από l^2 μειώνεται σε $(2l - 1)$ με διαφορίση της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές ξ_1, \dots, ξ_m . Αυτό έχει ως αποτέλεσμα σε m κανονικές εξισώσεις πολυωνυμικής τάξης $2l - 1$. \square

Η σημασία του παραπάνω θεωρήματος για τα προβλήματα που μας ενδιαφέρουν είναι ότι όλες οι εξισώσεις παρατήρησης μπορούν να μετασχηματιστούν σε « αλγεβρικές » ή « πολυωνυμικές ».

3.6 Ανάλυση σε Παράγοντες

Με σκοπό να κατανοήσουμε την ανάλυση πολυωνύμων σε παράγοντες, είναι ουσιώδες να αναφέρουμε ιδιότητες των πρώτων αριθμών των ακεραίων. Αυτό είναι σύμφωνο με το γεγονός ότι τα πολυώνυμα συμπεριφέρονται σαν ακέραιοι.

Ορισμός 3.6.1. (Πρώτος αριθμός) Ένας ακέραιος αριθμός p , με $p > 1$, ονομάζεται **πρώτος** όταν διαιρείται μόνο με τον αριθμό 1 και με τον εαυτό του.

Θεώρημα 3.6.2. (Ομομορφισμοί εκτίμησης της θεωρίας σωμάτων) Έστω F ένα υπόσωμα ενός σώματος E , έστω a τυχόν στοιχείο του E , και x μια απροσδιόριστη. Η απεικόνιση $\phi_a : F[x] \rightarrow E$ που ορίζεται από την

$$\phi_a(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = a_0 + a_1a + \dots + a_na^n$$

για κάθε $(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) \in F$, είναι ομομορφισμός από τον $F[x]$ στο E . Επίσης, $\phi_a(x) = a$, και η ϕ_a περιορισμένη στο F είναι η ταυτοτική απεικόνιση. Δηλαδή, $\phi_a(a) = a$ αν $a \in F$. Ο ομομορφισμός ϕ_a λέγεται **εκτίμηση στο a** .

Ορισμός 3.6.3. (Ρίζα ενός πολυωνύμου) Έστω F ένα υπόσωμα ενός σώματος E , και έστω a ένα στοιχείο του E . Έστω $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ στον $F[x]$, και $\phi_a : F[x] \rightarrow E$ ο ομομορφισμός εκτίμησης του θεωρήματος. Με $f(a)$ συμβολίζουμε το

$$\phi_a(f(x)) = a_0 + a_1a + \dots + a_na^n.$$

Αν $f(a) = 0$, τότε το a λέγεται **ρίζα** του $f(x)$.

Μας ενδιαφέρει η εύρεση των ριζών πολυωνύμων. Έστω E και F σώματα, με $E \leq F$. Ας υποθέσουμε ότι το $f(x) \in F[x]$ αναλύεται στον $F[x]$, δηλαδή $f(x) = g(x)h(x)$ όπου $g(x), h(x) \in F[x]$, και έστω $a \in E$.

$$f(a) = \phi_a(f(x)) = \phi_a(g(x)h(x)) = \phi_a(g(x))\phi_a(h(x)) = g(a)h(a)$$

Έτσι, αν $a \in E$, έχουμε $f(a) = 0$ αν και μόνο αν είτε $g(a) = 0$ είτε $h(a) = 0$. Δηλαδή το πρόβλημα της εύρεσης μιας ρίζας του $f(x)$ ανάγεται στο πρόβλημα της εύρεσης μιας ρίζας ενός παράγοντα του $f(x)$. Αυτός είναι ο λόγος για τους οποίους είναι χρήσιμη η μελέτη της ανάλυσης πολυωνύμων.

Γενικά, ένα πολυώνυμο βαθμού n θα έχει n ρίζες, που θα είναι είτε πραγματικές είτε μιγαδικές. Αν το πολυώνυμο έχει πραγματικούς συντελεστές, τότε οι μιγαδικές ρίζες εμφανίζονται κατά ζεύγη με τις συζυγείς του. Οι πολυωνυμικοί συντελεστές παίζουν σημαντικό ρόλο στον καθορισμό των ριζών. Μια μικρή εναλλαγή σε έναν συντελεστή, θα έδινε διαφορετικές ρίζες. Θα πρέπει να τονίσουμε ότι για πολυώνυμο βαθμού n στο σώμα των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} , λύσεις με ριζικά υπάρχουν για πολυώνυμο μέχρι βαθμού 4. Ο Evariste Galois (1811-1832) απέδειξε ότι για πολυώνυμο βαθμού μεγαλύτερα του 4, δεν υπάρχει εν γένει μαθηματικός τύπος για εύρεση των ριζών του.

Θεώρημα 3.6.4. (Αλγόριθμος διαίρεσης για τον $F[x]$)

Έστω

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$$

και

$$g(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_0$$

δύο στοιχεία του $F[x]$, όπου τα a_n και b_m είναι μη μηδενικά στοιχεία του F και $m > 0$. Τότε υπάρχουν μοναδικά πολυώνυμα $q(x)$ και $r(x)$ στον $F[x]$ τέτοια ώστε

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

με τον βαθμό του $r(x)$ γνησιώς μικρότερο από τον βαθμό m του $g(x)$.

Πόρισμα 3.6.5. Ένα στοιχείο $a \in F$ είναι ρίζα του $f(x) \in F[x]$ αν και μόνο αν το $x - a$ είναι παράγοντας στον $F[x]$.

Πόρισμα 3.6.6. Ένα μη μηδενικό πολυώνυμο $f(x) \in F[x]$ βαθμού n έχει το πολύ n ρίζες σε ένα σώμα F .

Ορισμός 3.6.7. (Ανάγωγο πολυώνυμο) Ένα μη σταθερό πολυώνυμο $f(x) \in F[x]$ λέγεται **ανάγωγο πάνω από το F** ή **ανάγωγο πολυώνυμο στον $F[x]$** , αν δεν μπορούμε να γράψουμε το $f(x)$ ως γινόμενο $g(x)h(x)$ δύο πολυωνύμων $g(x)$ και $h(x)$ στον $F[x]$, τα οποία να έχουν, και τα δύο, βαθμό μικρότερο από τον βαθμό του $f(x)$.

Θεώρημα 3.6.8. Έστω $f(x) \in F[x]$, και ας υποθέσουμε ότι το $f(x)$ είναι βαθμού 2 ή 3. Τότε το $f(x)$ αναλύεται πάνω από το F αν και μόνο αν έχει μια ρίζα στο F .

Παραδειγμα 3.6.9. Το πολυώνυμο $x^2 - 2$ είναι ανάγωγο στον $\mathbb{Q}[x]$, αλλά δεν είναι ανάγωγο στον $\mathbb{R}[x]$.

Ορισμός 3.6.10. (Μονωνυμική διάταξη) Μία **μονωνυμική διάταξη** στον $k[x_1, \dots, x_n]$ είναι οποιαδήποτε σχέση σε ένα σύνολο μονωνύμων $x^a \in k[x_1, \dots, x_n]$ (ή ισοδύναμα, στο $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$) που ικανοποιεί τα παρακάτω:

- (i) $\eta >$ είναι μια πλήρης (ή γραμμική) σχέση διάταξης.
- (ii) Εάν $a > \beta$ και $\gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, τότε $a + \gamma > \beta + \gamma$.
- (iii) $\eta >$ είναι μια καλή διάταξη πάνω στον $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$. Αυτό σημαίνει ότι κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ έχει ένα μικρότερο στοιχείο ύπο.

Ορισμός 3.6.11. (Λεξικογραφική διάταξη) Έστω $a = (a_1, \dots, a_n)$ και $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$. Θα λέμε ότι $a >_{\text{lex}} \beta$, εάν το διανύσμα της διαφοράς $a - \beta \in \mathbb{Z}^n$, η αριστερά-περισσότερο μη μηδενική εισαγωγή είναι θετική. Θα γράφουμε $x_{\text{lex}}^a > x_{\text{lex}}^\beta$ αν $a >_{\text{lex}} \beta$.

Ορισμός 3.6.12. (Οδηγός όρος) Δίνεται ένα μη μηδενικό πολυώνυμο $f(x) \in k[x]$, έστω

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m$$

όπου $a_i \in k$ και $a_0 \neq 0$ όπου $m = \deg(f)$. Τότε λέμε ότι a_0x^m είναι ο **οδηγός όρος (LT)** του f , και γράφεται $LT(f) = a_0x^m$.

Παραδειγμα 3.6.13. Αν $f(x) = 2x^3 - 4x + 3$, τότε ο $LT(f) = 2x^3$.

Ορισμός 3.6.14.

Multidegree του f : $Multideg(f) = \max(a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \mid a_a \neq 0)$

Οδηγός Συντελεστής (Leading Coefficient) του f : $LC(f) = a_{Multideg(f)} \in k$

Οδηγός Μονώνυμο (Leading Monomial) του f : $LM(f) = x^{Multideg(f)}$ (με συντελεστή 1)

Παραδειγμα 3.6.15. Θεωρούμε το πολυώνυμο $f(x) = 2x^2y^8 - 3x^5yz^4 + xyz^3 - xy^4$, τότε σύμφωνα με την λεξικογραφική διάταξη $\{x, y, z\}$, έχουμε:

$$Multideg(f) = (5, 1, 4)$$

$$LC(f) = -3$$

$$LM(f) = x^5yz^4$$

$$LT(f) = -3x^5yz^4$$

3.7 Περισσότερα στα Πολυώνυμα

1 ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Όπως είδαμε, οι ρίζες ενός πολυωνύμου με συντελεστές από το \mathbb{Q} μπορεί να μην ανήκουν στο \mathbb{Q} , αλλά να υπάρχουν σε ένα άλλο σύνολο \mathbb{R} . Το πολυώνυμο $y^2 - 12 = 0$, για παράδειγμα, δεν έχει ρίζες στον $\mathbb{Q}[y]$, αλλά οι ρίζες $\pm \sqrt{12}$ ανήκουν στο \mathbb{R} . Η επέκταση του συνόλου από \mathbb{Q} σε \mathbb{R} λέγεται επέκταση σώματος.

Ορισμός 3.7.1. Επέκταση σώματος Ένα σώμα E λέγεται **επέκταση σώματος ενός σώματος F** αν $F \leq E$.

Έτσι, το \mathbb{R} είναι μια επέκταση του \mathbb{Q} , και το \mathbb{C} είναι μια επέκταση τόσο του \mathbb{R} όσο και του \mathbb{Q} . Συχνά είναι σκόπιμο να χρησιμοποιήσουμε δικτυωτά διαγράμματα για να απεικονίζουμε επεκτάσεις σωμάτων, με το μεγαλύτερο σώμα να βρίσκεται στην κορυφή.



Μπορεί να συμβεί σε έναν πολυωνυμικό δακτύλιο $R[x]$, η λύση ξ να ικανοποιεί όχι μόνο το πολυώνυμο $g(x)$ αλλά και κάποιο άλλο $h(x)$, όπου $g(x)$ και $h(x)$ είναι στοιχεία του $R[x]$. Στην περίπτωση που πολλά πολυώνυμα στον $R[x]$ έχουν ξ για ρίζα, και τα πολυώνυμα είναι πολλαπλάσια ενός πολυωνύμου ελάχιστου βαθμού το οποίο έχει επίσης ξ σαν ρίζα, το πολυώνυμο αυτό λέγεται *ελάχιστο πολυώνυμο*. Δουλεύοντας με τις βάσεις Gröbner θα δούμε ότι πολλά πολυώνυμα ενός σώματος $R[x]$ θα περιέχουν την ίδια ρίζα ξ . Η ιδιότητα αυτή θα χρησιμοποιηθεί για την ελάττωση του βαθμού αρκετών πολυμεταβλητών πολυωνύμων σε μονώνυμα.

2 ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Γενικά, το απλούστερο πολυώνυμο είναι το γραμμικό πολυώνυμο $cx + d = 0$ το οποίο λύνεται ως προς x πολλαπλασιάζοντας και στις δύο πλευρές με το αντίστροφο του c , δεδομένου ότι $c \neq 0$. Η λύση είναι $x = -c^{-1}d$. Γραμμικά πολυώνυμα, δηλαδή πολυώνυμα βαθμού 1, βρίσκουν χρήση σε παρατηρήσεις υψομέτρων και της βαρύτητας. Σε αυτές τις περιπτώσεις, εφαρμόζονται σε διανυσματικούς χώρους μέσου γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων της μορφής $Ax + y = 0$ των οποίων η λύση είναι $x = (A'A^{-1})A'y$, με την προϋπόθεση ότι ο $(A'A^{-1})$ είναι συμμετρικός πίνακας.

Τα πολυώνυμα 2ου βαθμού είναι γνωστά ως τετραγωνικά πολυώνυμα. Έχουν την μορφή $ax^2 + bx + c = 0$. Για απλές περιπτώσεις όπως $x^2 + 2x = 0$, η λύση αναζητείται με παραγοντοποίηση π.χ. $x(x + 2)$ που οδηγεί σε $x = 0$ ή $x = -2$. Η γενική λύση των τετραγωνικών εξισώσεων της μορφής $ax^2 + bx + c = 0$ με πραγματικούς συντελεστές $\{a, b, c\}$ δίνεται από τον τύπο

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ή

$$x = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Κατά τον καθορισμό των ριζών, στις περιπτώσεις που τα a ή c (ή και τα δύο) είναι μικρά αυτό οδηγεί σε λανθασμένες λύσεις. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι ότι μια από τις ρίζες περιέχει την αφαίρεση b με μια πολύ κοντινή τιμή της b . Στην περίπτωση αυτή προτείνεται η χρήση του τύπου

$$q = -\frac{1}{2}[b + \operatorname{sgn}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}]$$

και τότε οι ρίζες δίνονται από

$$x_1 = \frac{q}{a}, \quad x_2 = \frac{c}{q}.$$

Γενικά, κάθε τετραγωνικό πολυώνυμο έχει ακριβώς δύο πραγματικές ή δύο μιγαδικές ρίζες. Από τους συντελεστές προκύπτει, εάν $b^2 - 4ac > 0$, οι ρίζες είναι πραγματικές αλλά εάν $b^2 - 4ac < 0$ οι ρίζες είναι ζευγάρι μιγαδικών αριθμών. Στην περίπτωση που $b^2 - 4ac = 0$ έχουμε μια διπλή πραγματική ρίζα και είναι γνωστό ως το κρίσιμο σημείο στο οποίο το πρόσημο της συνάρτησης (πολυώνυμο) αλλάζει πρόσημο.

3 ΚΥΒΙΚΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Τα πολυώνυμα αυτά είναι βαθμού 3 και παίρνουν την μορφή $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Όπως και στα τετραγωνικά, οι απλές περιπτώσεις μπορούν να λυθούν με παραγοντοποίηση π.χ. $x^3 - 2x = 0$ που αναλύεται σε $x(x^2 - 2) = 0$ και δίνει ρίζες $x = 0, x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$. Μια άλλη προσέγγιση είναι να ελαττώσουμε το κυβικό πολυώνυμο έτσι ώστε τα πολυώνυμα βαθμού 2 να απαλείφονται και να δίνουν την πιο απλή μορφή $y^3 + ey + f = 0$. Τα τελευταία είναι γνωστά ως αναγμένα κυβικά πολυώνυμα. Η απλούστερη αυτή μορφή μπορεί να λυθεί μέσω του τύπου του Cardano.

$$y = \sqrt[3]{-\frac{f}{2} + \sqrt{T}} + \sqrt[3]{-\frac{f}{2} - \sqrt{T}}$$

όπου $T = \left(\frac{e}{2}\right)^3 + \left(\frac{f}{2}\right)^2$. Μόλις μια ρίζα ξ_1 βρεθεί, το πολυώνυμο $y^3 + ey + f = 0$ διαιρείται με $(y - \xi_1)$ και το απομείνων τετραγωνικό πολυώνυμο λύνεται κατα τα γνωστά.

Μια άλλη εναλλακτική προσέγγιση ακολουθεί την εξής μεθοδολογία: Έστω $\{a, b, c\}$ πραγματικοί συντελεστές ενός κυβικού πολυωνύμου. Υπολογίζουμε

$$\begin{cases} K \equiv \frac{a^2 - 3b}{54} \\ L \equiv \frac{2a^3 - gab + 27c}{54} \end{cases}$$

Αν K και L είναι πραγματικοί, και $L < K$, τότε το κυβικό πολυώνυμο έχει τρεις πραγματικές ρίζες

$$\begin{cases} x_1 = -2\sqrt{K}\cos\left(\frac{\Theta}{3}\right) - \frac{a}{3} \\ x_2 = -2\sqrt{K}\cos\left(\frac{\Theta+2\pi}{3}\right) - \frac{a}{3} \\ x_3 = -2\sqrt{K}\cos\left(\frac{\Theta-2\pi}{3}\right) - \frac{a}{3} \end{cases}$$

όπου $\Theta = \cos^{-1}\left(\frac{L}{\sqrt[3]{K}}\right)$.

Γενικά, εαν ξ_1, ξ_2, ξ_3 είναι οι ρίζες ενός κυβικού πολυωνύμου, η ορίζουσα D μπορεί να οριστεί ως

$$D = (\xi_1 - \xi_2)^2(\xi_1 - \xi_3)^2(\xi_2 - \xi_3)^2,$$

και υπολογίζεται από τους συντελεστές a, b, c, d . Αν $D > 0$ τότε οι ρίζες είναι πραγματικές και διακεκριμένες. Αν $D < 0$, τότε μια ρίζα είναι πραγματική και υπόλοιπες δύο συζηγείς μιγαδικές. Στην περίπτωση που $D = 0$, θα έχω μια τριπλή ρίζα. Στην περίπτωση που οι συντελεστές b, c, d είναι όλοι θετικοί, τότε όλες οι τρεις ρίζες θα είναι αρνητικές, καθώς αν b, d είναι αρνητικοί και c θετικός, τότε όλες οι τρεις ρίζες θα είναι θετικές.

3 ΤΕΤΡΑΔΙΚΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Τετραδικά πολυώνυμα είναι αυτά που έχουν βαθμό 4. Στην περίπτωση που υπάρχει μια ρίζα για το πολυώνυμο $p(x) = 0$, μπορεί να εφαρμοστεί ο αλγόριθμος διαίρεσης και οδηγουμαστε στον παράγοντα $(x - \xi_1)f(x)$. Εδώ, $f(x)$ είναι ένα κυβικό πολυώνυμο που μπορεί να λυθεί από τα προηγούμενα. Η γενική μορφή του είναι $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$. Οι παρακάτω περιπτώσεις μπορούν να ισχύουν για ένα τετραδικό πολυώνυμο.

- $p(x)$ να έχει τέσσερις πραγματικές ρίζες.
- $p(x)$ να έχει δυο πραγματικές ρίζες και δυο μιγαδικές συζηγείς.
- $p(x)$ να μην έχει πραγματικές ρίζες.

Γενικά, εαν $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ είναι οι ρίζες ενός τετραδικού πολυωνύμου, η ορίζουσα D μπορεί να οριστεί ως

$$D = (\xi_1 - \xi_2)^2(\xi_1 - \xi_3)^2(\xi_1 - \xi_4)^2(\xi_2 - \xi_3)^2(\xi_2 - \xi_4)^2(\xi_3 - \xi_4)^2,$$

και υπολογίζεται από τους συντελεστές b, c, d, e .

Αν $D > 0$ τότε οι ρίζες είναι πραγματικές και διακεκριμένες ή όλες είναι ζεύγη μιγαδικών συζηγών ριζών. Αν $D < 0$, τότε δυο ρίζες είναι πραγματικές διακεκριμένες και οι άλλες δυο μιγαδικές συζηγείς. Στην περίπτωση που $D = 0$, έχουμε τουλάχιστον μια διπλή ρίζα. Και πάλι υπάρχει τύπος που δίνει τις λύσεις με ριζικά, αλλά είναι αρκετά πολύπλοκος. Γενικά υπάρχουν αρκετές μέθοδοι π.χ. Newton κ.α., που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε απ' ευθείας για την εύρεση λύσεων μιας πολυωνυμικής εξίσωσης.

Κεφάλαιο 4

Βάσεις Gröbner

4.1 Η Προέλευση

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται ένα από τα πιο ισχυρά υπολογιστικά αλγεβρικά εργαλεία, για επίλυση συστημάτων μη γραμμικών εξισώσεων. Το εργαλείο αυτό είναι οι ονομαζόμενες βάσεις Gröbner, οι οποίες γράφονται στα αγγλικά ως Groebner basis. Προτάθηκαν από τον W.Gröbner το 1949 και αναπτύχθηκαν από τον μαθητή του B.Buchberger το 1965. Το 1964 ο H.Hironaka είχε ανεξάρτητα χρησιμοποιήσει το ίδιο εργαλείο σε συνδυασμό με την εργασία του στην ανάλυση ιδιομορφιών (singularities) στην αλγεβρική γεωμετρία και τις ονόμασε *κανονικές βάσεις* (standard basis). Ο B.Buchberger αποφάσισε να τιμήσει τον επιβλέποντα καθηγητή του W.Gröbner (1899-1980) ονομάζοντας τις κανονικές βάσεις για ιδεώδη σε πολυωνυμικούς δακτύλιους $k[x_1, \dots, x_n]$ σε Gröbner basis.

Σαν παρατήρηση, αναφέρεται ότι τα περισσότερα προβλήματα στην φύση, καθώς και στη γεωδαισία, την γεωπληροφορική, την όραση υπολογιστών, τη ρομποτική, την τοπογραφία κ.α., μπορούν να μοντελοποιηθούν μέσω *συστημάτων μη γραμμικών εξισώσεων*.

4.2 Αρχές των Βάσεων Gröbner

Θα μπορούσαμε διαισθητικά να δούμε τις βάσεις Gröbner ως τον μέγιστο κοινό διαιρέτη ενός συστήματος πολυμεταβλητών εξισώσεων. Η βασική τους εφαρμογή για εμάς είναι η απαλειφή των μεταβλητών σε ένα σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων.

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση πολυωνύμων μιας μεταβλητής $f_1, f_2 \in k[x]$

$$\begin{cases} f_1 = 3x^4 - 3x^3 + 8x^2 + 2x - 5 \\ f_2 = 5x^4 - 4x^2 - 9x + 21 \end{cases}$$

Για την επίλυση του παραπάνω συστήματος εξισώσεων μιας μεταβλητής χρησιμοποιείται ο Ευκλείδειος αλγόριθμος (αλγόριθμος διαίρεσης).

Από την άλλη πλευρά, αν οι εξισώσεις δεν ήταν μιας μεταβλητής αλλά πολλών π.χ., $g_1, g_2 \in k[x, y]$ τότε εφαρμόζεται ο αλγόριθμος Buchberger.

$$\begin{cases} g_1 = xy + x - y - 1 \\ g_2 = xy - x - y + 1 \end{cases}$$

Οι βάσεις Gröbner όπως δηλώθηκε νωρίτερα είναι χρήσιμες για την απαλειφή μεταβλητών σε συστήματα μη γραμμικών εξισώσεων. Από την άλλη πλευρά η μέθοδος απαλειφής κατά Gauss είναι εφαρμόσιμη σε γραμμικές μόνο περιπτώσεις.

Παραδειγμα 4.2.1. (Μέθοδος απαλειφής του Gauss). Λύστε το γραμμικό σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 2 \\ 3x - y + z = 6 \\ -x + 3y + 4z = 4. \end{cases} \quad (4.1)$$

Το πρώτο βήμα είναι να απαλείψουμε την μεταβλητή x στη δεύτερη και τρίτη έκφραση του (4.1). Αυτό επιτυγχάνεται πολλαπλασιάζοντας την πρώτη έκφραση με 3 και προσθέτοντας της στην δεύτερη εξίσωση και στη συνέχεια αφαιρώντας την πρώτη έκφραση από την τρίτη του (4.1). Προκύπτει ένα νέο σύστημα

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 2 \\ 2y + 7z = 12 \\ 2y + 2z = 2. \end{cases} \quad (4.2)$$

Ως δεύτερο βήμα πρέπει να απαλείψουμε την μεταβλητή y από την δεύτερη και τρίτη έκφραση του (4.1). Αφαιρώντας τη δεύτερη από την τρίτη έκφραση παίρνουμε

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 2 \\ 2y + 7z = 12 \\ -5z = -10. \end{cases} \quad (4.3)$$

Η λύση $z = 2$ στο σύστημα (4.3) μπορεί να αντικατασταθεί στην δεύτερη εξίσωση $2y + 7z = 12$ και να δώσει τιμή $y = -1$, η οποία μαζί με την τιμή $z = 2$ αντικαθίστανται στην πρώτη έκφραση και δίνουν τιμή $x = 1$, οπότε και ολοκληρώνεται η τεχνική απαλειφής κατά Gauss.

Σε πολλές εφαρμογές, οι εξισώσεις σχετίζονται με τις άγνωστες μεταβλητές των μετρούμενων (παρατηρούμενων) ποσοτήτων ενώ είναι συνήθως μη γραμμικές και συχνά αποτελούνται από πολλές μεταβλητές.

Γενικά ο αλγόριθμος των βάσεων Gröbner απαλείφει ένα σύστημα πολυμεταβλητών πολυωνυμικών εξισώσεων. Αυτό επιτυγχάνεται με εφαρμογή των

πράξεων της αθροίσεως και του πολλαπλασιασμού πάνω σε έναν πολυωνυμικό δακτύλιο. Σε ένα δοσμένο σύστημα που πρέπει να επιλυθεί ως προς τους αγνώστους του, ο αλγόριθμος των βάσεων Gröbner εφαρμόζεται με στόχο να αλλάξει τους γεννήτορες του συστήματος σε άλλους ποιο απλούς ώστε να είναι δυνατή η επίλυση του. Δηλαδή οι βάσεις Gröbner απαλείφουν τις μεταβλητές, με τρόπο όμοιο με εκείνο της μεθόδου απαλειφής του Gauss για γραμμικές περιπτώσεις.

Παραδειγμα 4.2.2. (Υπολογισμός βάσης Gröbner) Θεωρούμε ένα σύνολο $F(x, y) = \{f_1, f_2\}$ με στοιχεία

$$\begin{cases} f_1 = xy - 2y \\ f_2 = 2y^2 - x^2, \end{cases}$$

όπου $\{f_1, f_2\} \in I$ είναι οι γεννήτορες του ιδεώδους. Ψάχνουμε να βρούμε ένα απλοποιημένο σύνολο γεννητόρων του ιδεώδους. Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο των βάσεων Gröbner (Buchberger) (τον οποίο θα δώσουμε στην συνέχεια) απαλείφουμε το σύστημα των μη γραμμικών εξισώσεων F σε ένα άλλο σύστημα G

$$G := \{-2x^2 + x^3, -2y + xy, -x^2 + 2y^2\}.$$

Τώρα το σύνολο G περιέχει ένα πολυώνυμο μιας μεταβλητής $-2x^2 + x^3$ του οποίου μπορούμε εύκολα να βρούμε τις ρίζες. Στη συνέχεια με αντικατάσταση στα απομένον στοιχεία του συνόλου G μπορούμε να λύσουμε ως προς y . Οι λύσεις στο G , δηλαδή οι ρίζες ($x = 0, x = 0, x = 2$) και αυτές του y ικανοποιούν το F . Επαλήθευση πραγματοποιείται με αντικατάσταση των λύσεων στο αρχικό σύστημα και πρέπει να δίνουν 0.

Ορισμός 4.2.3. (Ιδεώδες) Ένα ιδεώδες ενός αντιμεταθετικού δακτυλίου R είναι ένα σύνολο $I \subset R$ ώστε να έχουμε ότι το I να είναι προσδετική υποομάδα του δακτυλίου R και επιπλέον $\forall r \in R, a \in I$ να έχουμε $ra \in R$.

Στην ειδική περίπτωση που $R = k[x_1, \dots, x_n]$ είναι ένας πολυωνυμικός δακτύλιος και το k είναι σώμα, είναι γνωστό ότι κάθε ιδεώδες του R είναι πεπερασμένα παραγόμενο, δηλαδή υπάρχουν πολυώνυμα $f_1, \dots, f_r \in R$ ώστε $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$, δηλαδή για οποιοδήποτε στοιχείο $a \in I$ υπάρχουν κατάλληλα πολυώνυμα c_1, \dots, c_r ώστε

$$a = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_r f_r.$$

Θα λέμε ότι τα f_1, \dots, f_r είναι οι γεννήτορες του ιδεώδους I .

Παραδειγμα 4.2.4. (Ιδεώδες) Θεωρούμε τα πολυώνυμα f_1, f_2 όπου

$$\begin{cases} f_1 := (x_1 - X)^2 + (y_1 - Y)^2 - d_1^2 \\ f_2 := (x_2 - X)^2 + (y_2 - Y)^2 - d_2^2 \end{cases}$$

στοιχεία του πολυωνυμικού δακτυλίου $\mathbb{R}[X, Y]$. Οποιοδήποτε στοιχείο του ιδεώδους $\langle f_1, f_2 \rangle$ που παράγουν τα f_1, f_2 μπορεί να γραφτεί ως

$$\left[I = \langle f_1, f_2 \rangle = c_1 f_1 + c_2 f_2 \right]$$

Η ανάγκη του ορισμού του ιδεώδους μπορεί να παρουσιαστεί με όρους πολυωνυμικών εξισώσεων $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$. Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{aligned} f_1 &= 0 \\ f_2 &= 0 \\ &\vdots \\ f_s &= 0, \end{aligned}$$

Σχηματίζουμε το ιδεώδες $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ που παράγουν τα f_1, \dots, f_s . Αν (x_1, \dots, x_n) είναι μία ταυτόχρονη λύση του συστήματος τότε κάθε στοιχείο του ιδεώδους θα μηδενίζεται πάνω σε αυτή την λύση. Επιπλέον αν βρούμε ένα «ενναλακτικό» σύστημα g_1, \dots, g_r γεννητόρων του ιδεώδους, τότε το παραπάνω σύστημα θα είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{aligned} g_1 &= 0 \\ g_2 &= 0 \\ &\vdots \\ g_r &= 0, \end{aligned}$$

Στόχος μας είναι λοιπόν να προσδιορίσουμε ένα όσο το δυνατόν ποιο απλό σύστημα γεννητόρων ενός ιδεώδους.

Οι γεννήτορες του ιδεώδους μπορούν να υπολογιστούν με τον *αλγόριθμο της διαίρεσης* που ορίζεται ως

Ορισμός 4.2.5. (Ο αλγόριθμος της διαίρεσης) Θεωρούμε ένα ιδεώδες $I = \langle h_1, \dots, h_s \rangle$ του $k[x, y]$, εφοδιασμένο με την λεξικογραφική διάταξη. Κάθε $g \in k[x, y]$ μπορεί να γραφτεί στην μορφή $g = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_s f_s + r$, όπου $a_i, r \in k[x, y]$ και είτε $r = 0$ είτε ένας γραμμικός συνδιασμός όρων, όπου κανένας δεν διαιρείται από τους $LT(f_1), \dots, LT(f_s)$.

Ο αλγόριθμος της διαίρεσης του παραπάνω ορισμού εφαρμόζεται με επιτυχία στην περίπτωση των μονωνικών πολυωνύμων, καθώς το υπόλοιπο r μπορεί να καθοριστεί μοναδικά. Για πολυμεταβλητά πολυώνυμα, το υπόλοιπο μπορεί να μην καθορίζεται μοναδικά καθώς εξαρτάται από την διάταξη των διαιρετών. Η διαίρεση του πολυωνύμου F από $\{f_1, f_2\}$ όπου το f_1 προηγείται του f_2 μπορεί να μην δώσει απαραίτητα το ίδιο υπόλοιπο του F με $\{f_1, f_2\}$, στην περίπτωση του οποίου η διάταξη έχει αλλάξει, για παράδειγμα έχουμε

θεωρήσει την « ανάποδη λεξικογραφική διάταξη ». . Το πρόβλημα ξεπερνιέται αν περάσουμε σε βάσεις Gröbner.

Ας ξεκινήσουμε με τον ευκλείδιο αλγόριθμο σε δακτύλιο πολυωνύμων μίας μεταβλητής:

Θεώρημα 4.2.6. *Αν $f(x) \in k[x]$ θεωρούμε το κύριο ιδεώδες $I = f(x)k[x]$ που παράγει το f . Για κάθε πολυώνυμο $g(x) \in k[x]$, υπάρχει πολυώνυμο $h(x)$ και $r(x) \in k[x]$, με $\deg(r) < \deg h(x)$, ώστε*

$$g(x) = h(x)f(x) + r(x).$$

Παρατηρούμε ότι το τυχαίο πολυώνυμο $g(x)$ είναι στοιχείο του ιδεώδους I αν και μόνο αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του είναι 0.

Είναι γνωστό ότι οι πολυωνυμικοί δακτύλιοι περισσότερων από μία μεταβλητές δεν είναι ευκλείδιοι οπότε μία τέτοια κατασκευή δεν είναι δυνατόν να γίνει. Παρόλα αυτά μπορούμε να ορίσουμε τον παρακάτω αλγόριθμο διαίρεσης.

Θεωρούμε ένα ιδεώδες $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$ του δακτυλίου $k[x_1, \dots, x_n]$. Έστω ένα τυχαίο $g \in k[x_1, \dots, x_n]$. Θα συμβολίζουμε με $a_i = LT(f_i)$. Θεωρούμε τον μικρότερο i ώστε το a_i να διαιρεί κάποιο όρο του g . Αν δεν υπάρχει τέτοιος όρος τότε το g είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης και

$$g = 0f_1 + \dots + 0f_r + g.$$

Σε διαφορετική περίπτωση ας είναι h ο μεγαλύτερος (ως προς την λεξικογραφική διάταξη) όρος του g που να είναι διαιρετός με a_i . Αντικαθιστούμε το g με

$$g - \frac{h}{a_i}f_i.$$

Επαναλαμβάνουμε μέχρι κανείς όρος του g να μην είναι διαιρετός με κάποιο a_i . Σε κάθε επανάληψη το g γίνεται μικρότερο ως προς την δοθήσα μονονυμική διάταξη οπότε κάποια στιγμή ο αλγόριθμος σταματά. Το άσχημο με τον αλγόριθμο αυτό είναι ότι η τελική τιμή του g εξαρτάται από την σειρά γραφής των f_1, \dots, f_r όπως και από την επιλογή των γεννητόρων. Επίσης είναι δυνατόν ο αλγόριθμος αυτός να δίνει υπόλοιπο 0 για μερικές επιλογές f_i ενώ για άλλες επιλογές των f_i μην δίνει 0. Το πρόβλημα αυτό θα το λύσουμε στην συνέχεια, διαλέγοντας τα f_i να είναι μία βάση Gröbner.

Παρατηρούμε επίσης ότι στην περίπτωση μίας μεταβλητής ο αλγόριθμος γίνεται ο συνηθισμένος αλγόριθμος της ευκλείδειας διαίρεσης

Μία βάση Gröbner για ένα ιδεώδες I ως προς μία μονονυμική διάταξη είναι ένα (πεπερασμένο) σύνολο γεννητόρων G για το οποίο να ισχύει μία από τις παρακάτω ισοδύναμες ιδιότητες:

- Το ιδεώδες που παράγεται από τους leading όρους όλων των γεννητόρων στο I να είναι αυτό που παράγεται από τους leading όρους της βάσης G .
- Ο leading όρος κάθε πολυωνύμου στο I να διαιρείται από τον leading όρο ενός πολυωνύμου στην βάση G .
- Η διαίρεση πολλών μεταβλητών ενός πολυωνύμου στο ιδεώδες I με την βάση G να δίνει αποτέλεσμα 0.

4.3 Ο Αλγόριθμος του Buchberger

Ο αλγόριθμος του Buchberger είναι μία μέθοδος να μετασχηματίσουμε ένα δεδομένο σύνολο γεννητόρων ενός ιδεώδους σε μία βάση Gröbner ως προς μία μονονυμική διάταξη. Μπορούμε να πούμε ότι αποτελεί μία γενίκευση του ευκλείδειου αλγορίθμου για τον υπολογισμό του μεγίστου κοινού διαιρέτη και της απαλειφής του Gauss για την λύση γραμμικών συστημάτων.

Ο αλγόριθμος αυτός έχει ως εισαγωγή ένα σύνολο γεννητόρων $F = \{f_1, \dots, f_r\}$ ενός ιδεώδους I του πολυωνυμικού δακτυλίου $k[x_1, \dots, x_n]$, και στην έξοδο του θα μας δώσει μία βάση Gröbner για το ιδεώδες I .

Ο αλγόριθμος δουλεύει ως εξής: Ας είναι $g_i = LT(f_i)$ ως προς την δοθείσα διάταξη και ας είναι a_{ij} το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των g_i, g_j . Θέτουμε

$$S_{ij} = \frac{a_{ij}}{g_i} f_i - \frac{a_{ij}}{g_j} f_j.$$

Παρατηρούμε ότι οι leading όροι θα εξαφανιστούν. Κάνοντας χρήση του αλγορίθμου διαίρεσης πολλών μεταβλητών υπολογίζουμε το υπόλοιπο της διαίρεσης ως προς το σύνολο F . Το αποτέλεσμα το προσθέτουμε στο σύνολο F και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία από την αρχή εκτός αν το αποτέλεσμα ανήκει ήδη στο F .

Οι βάσεις Gröbner αποτελούν ένα από τα σημαντικότερα εργαλεία στους αλγεβρικούς υπολογισμούς, που βρίσκουν εφαρμογές σε πεδία όπως τα μαθηματικά και τη μηχανική για επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων. Επίσης χρησιμοποιούνται στην ανακάλυψη και απόδειξη θεωρημάτων για επίλυση συστημάτων πολυωνυμικών εξισώσεων. Ακόμη, με τη απαλειφή ενός δοσμένου πολυωνύμου f μέσω της βάσης Gröbner G , το f λέγεται *μέλος του ιδεώδους* εάν το υπόλοιπο r είναι μηδέν. Εάν $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ είναι η βάση Gröbner ενός ιδεώδους $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ και $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ ένα πολυώνυμο $f \in I$ αν και μόνο αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του f με το G είναι μηδέν. Ακόμη οι βάσεις Gröbner χρησιμοποιούνται για να δείξουν την ισοδυναμία των

πολυωνυμικών εξισώσεων. Δύο σύνολα πολυωνυμικών εξισώσεων θα παράγουν το ίδιο πολυώνυμο αν οι βάσεις Gröbner τους είναι ίσες, με οποιαδήποτε διάταξη. Η ιδιότητα αυτή είναι πολύ σημαντική στο ότι οι βάσεις Gröbner θα ικανοποιούν το αρχικό σύστημα που δημιουργήθηκε από το σύνολο γεννητόρων των μη γραμμικών εξισώσεων. Αυτό σημαίνει ότι ένα σύστημα πολυωνυμικών εξισώσεων $f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, f_s(x_1, \dots, x_n) = 0$ θα έχει τις ίδιες λύσεις με το σύστημα που δημιουργείται από οποιαδήποτε βάση Gröbner των f_1, \dots, f_s οποιαδήποτε διάταξης. Αυτή είναι η βασική ιδιότητα των βάσεων Gröbner που χρησιμοποιείται για την επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων.

4.4 Επίλυση Πολυωνυμικών Εξισώσεων

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σύνολο πολυωνύμων $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ και ότι το σύνολο των σημείων

$$(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \text{ ώστε } f_i(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ για κάθε } 1 \leq i \leq r,$$

είναι πεπερασμένο. Θέλουμε να υπολογίσουμε ποιές είναι αυτές οι λύσεις, και να βρούμε προσεγγύσεις των λύσεων (πχ σε αριθμητική κινητής υποδιαστολής).

Όπως δείξαμε σε σχέση με την λεξικογραφική διάταξη ($x_1 > x_2 > \dots > x_n$) υπάρχει μία βάση Gröbner με $s \geq r$ το πλήθος στοιχεία ώστε σε αυτήν να υπάρχει g_i με $LM(g_i) = x_i^{n_i}$ για κάποιο $n_i \in \mathbb{N}$. Μπορούμε λοιπόν χωρίς περιορισμό της γενικότητας να αριθμίσουμε την βάση αυτή ώστε

$$\begin{aligned} g_1 &= g_1(x_n), & LM(g_1) &= x_n^{n_1}, \\ g_2 &= g_2(x_{n-1}, x_n), & LM(g_2) &= x_{n-1}^{n_2}, \\ &\vdots & &\vdots \\ g_n &= g_n(x_1, \dots, x_n), & LM(g_n) &= x_1^{n_n}. \end{aligned}$$

Δηλαδή ένα πολυώνυμο που ο $LM(g)$ είναι το $x_i^{n_i}$ είναι πολυώνυμο μόνο στις μεταβλητές x_i, x_{i+1}, \dots, x_n . Αυτή είναι μία γενίκευση της απαλειφής του Gauss για την επίλυση γραμμικών συστημάτων και συγκεκριμένα αντιστοιχεί στο να φέρουμε τον πίνακα σε τριγωνική μορφή.

Η μέθοδος λύσης είναι λοιπόν η ακόλουθη: Υπολογίζουμε τις πραγματικές λύσεις του πολυωνύμου μίας μεταβλητής $g_1(x_n) = 0$, με μία από τις πολλές μεθόδους επίλυσης πολυωνυμικών εξισώσεων. Για κάθε μία λύση αντικαθιστούμε την τιμή της στο g_2 που γίνεται τώρα πολυώνυμο μίας μεταβλητής και ξανα υπολογίζουμε τις όλες τις λύσεις. Συνεχίζουμε με τα αντικαθιστόντας στα υπόλοιπα πολυώνυμα. Ο αντίστοιχος υπολογισμός στα γραμμικά συστήματα είναι αυτός της *προς τα πίσω αντικατάστασης*.

Τέλος δοκιμάζουμε τις λύσεις που έχουν προκύψει στα υπόλοιπα πολυώνυμα g_{n+1}, \dots, g_s και διαγράφουμε όσες λύσεις δεν τα ικανοποιούν.

4.4α' Μέθοδος Sturmfel

Δίνονται τρεις ομογενείς εξισώσεις δευτέρου βαθμού ως

$$\begin{cases} F_1 := a_{11}x^2 + a_{12}y^2 + a_{13}z^2 + a_{14}xy + a_{15}xz + a_{16}yz = 0 \\ F_2 := a_{21}x^2 + a_{22}y^2 + a_{23}z^2 + a_{24}xy + a_{25}xz + a_{26}yz = 0 \\ F_3 := a_{31}x^2 + a_{32}y^2 + a_{33}z^2 + a_{34}xy + a_{35}xz + a_{36}yz = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

η Ιακωβιανή ορίζουσα υπολογίζεται ως

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

που οδηγεί σε ένα κυβικό πολυώνυμο με συντελεστές $\{x, y, z\}$. Καθώς το πολυώνυμο που προκύπτει από τη διακρίνουσα J στην (4.5) είναι κυβικό, οι μερικές παράγωγοι, θα είναι τετραγωνικά πολυώνυμα με μεταβλητές $\{x, y, z\}$ και γράφονται στη μορφή

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial x} &:= b_{11}x^2 + b_{12}y^2 + b_{13}z^2 + b_{14}xy + b_{15}xz + b_{16}yz = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial y} &:= b_{21}x^2 + b_{22}y^2 + b_{23}z^2 + b_{24}xy + b_{25}xz + b_{26}yz = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial z} &:= b_{31}x^2 + b_{32}y^2 + b_{33}z^2 + b_{34}xy + b_{35}xz + b_{36}yz = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Οι συντελεστές b_{ij} στο σύστημα (4.6) είναι τα κυβικά πολυώνυμα της (4.6). Το τελικό βήμα στον υπολογισμό των υπολειμματικών ποσοτήτων στο αρχικό σύστημα (4.4) περιλαμβάνει τον υπολογισμό της ορίζουσας ενός πίνακα 6×6 που δίνεται από τον τύπο

$$\text{Res}_{222}(F_1 F_2 F_3) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Οι υπολειμματικές ποσότητες στην (4.7) εξαλείφονται εαν και μόνο αν το σύστημα (4.4) έχει μια κοινή λύση $\{x, y, z\}$, όπου $\{x, y, z\}$ είναι μιγαδικοί ή πραγματικοί αριθμοί, όχι όλοι ίσοι με 0. Οι δείκτες στον πίνακα της (4.7) δηλώνουν το βαθμό του πολυωνύμου του (4.4) του οποίου οι ορίζουσα αναζητάται.

4.5 Παρατηρήσεις στις Βάσεις Gröbner

Με τους σύγχρονους υπολογιστές, η προσέγγιση με υπολειμματικές ποσότητες μπορούν εύκολα να χρησιμοποιηθεί στην ανάπτυξη αλγορίθμων για επίλυση συστημάτων μη γραμμικών εξισώσεων. Συγκρίνοντας την με την μέθοδο των βάσεων Gröbner, έχει το πλεονέκτημα ότι δεν υπολογίζονται περισσότερες παράμετροι, με αποτέλεσμα να απαιτείται λιγότερος υπολογιστικός χώρος. Από την άλλη πλευρά η διατύπωση και ο σχεδιασμός των πινάκων μεγαλώνει καθώς ο αριθμός των πολυωνύμων και των μεταβλητών αυξάνει. Για το λόγο αυτό, η χρήση της μεθόδου με πολώνυμα προτείνεται μόνο όταν η μέθοδος με βάσεις Gröbner αποτύχουν.

Μέρος ΙΙΙ

Εφαρμογή των Βάσεων Gröbner

Κεφάλαιο 5

Εντοπισμός με Αποστάσεις

5.1 Εφαρμογές των Αποστάσεων

Μέσα από την ιστορία, ο καθορισμός της θέσης ήταν μια θεμελιώδης αποστολή που πραγματοποιούνταν από τον άνθρωπο σε καθημερινή βάση. Κάθε μέρα, ο καθένας πρέπει να ξέρει που βρίσκεται και που πηγαίνει. Για τους ορειβάτες, τους πιλότους, τους ναυτικούς, κ.α. η γνώση της θέσης έχει τεράστια σημασία. Ο παραδοσιακός τρόπος για να εντοπίσει κάποιος την θέση του ήταν η χρήση του χάρτη, δίνοντας του την ικανότητα να ορίσει κάποιες κατευθύνσεις. Στις μέρες μας, η εισαγωγή των Παγκόσμιων Δορυφορικών Συστημάτων Πλοήγησης (Global Navigation Satellite Systems-GNSS) τα οποία συνδιάζουν το Global Positioning System (GPS), το ρώσικής κατασκευής GLONASS και το προτεινόμενο από την Ευρώπη GALILEO έχουν επιφέρει επανάσταση στην τέχνη του προσδιορισμού θέσης.

Για παράδειγμα στο νέο πεδίο της Μετεωρολογίας με GPS (GPS meteorology) καθώς και στη γεωδαισία, τη ρομποτική και την γεωπληροφορική κ.α. οι αποστάσεις (ranges) παίζουν ρόλο κλειδί στον καθορισμό των άγνωστων παραμέτρων (μεταβλητές). Στη μετεωρολογία με GPS τα σήματα των δορυφόρων διανύουν αποστάσεις μέσα στην ατμόσφαιρα οι οποίες μετριοούνται και συσχετίζονται με τα κενά αέρος της ατμόσφαιρας. Με αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνουμε ακριβή και παγκόσμια παρακολούθηση της ατμόσφαιρας εξάγοντας συμπεράσματα για την θερμοκρασία, την πίεση και την υγρασία. Εκτός από την εφαρμογή του καθορισμού της θέσης και τις εφαρμογές στην μετεωρολογία, η μέτρηση των αποστάσεων βρίσκει εφαρμογές όπως στην γρήγορη εύρεση βάσης (πλευρά τριγώνου) στην τοπογραφική αποτύπωση, στη πύκνωση των τοπογραφικών δικτύων καθώς και στην φωτογραμμετρία όπου καθορίζονται οι συντεταγμένες του προβολικού κέντρου από μετρήσεις σε φωτογραφίες και σε συντεταγμένες εδάφους.

Οι μέτρηση των αποστάσεων σχετίζεται με τις επιθυμητές παραμέτρους,

μέσω συστημάτων μη γραμμικών εξισώσεων όπου και απαιτείται ακριβής λύση. Προσεγγιστικές αριθμητικές διαδικασίες χρησιμοποιούνται για την επίλυση τέτοιων μη γραμμικών εξισώσεων, που συνήθως είναι επαναλήπτικές από την φύση τους και συχνά απαιτούν γραμμικοποίηση των εξισώσεων. Όπου απαιτείται κλειστού τύπου λύση, απαραίτητα είναι βήματα αφαιρέσεων και αντικαταστάσεων τα οποία είναι κουραστικά και χρονοβόρα. Για το λόγο αυτό είναι επιθυμητό, όπου μπορεί, να γίνει αποφυγή των γραμμικοποιήσεων, των επαναλήψεων και των βημάτων αντικατάστασης.

Σε αυτό το κεφάλαιο άμεσες μέθοδοι επιλύσεων μη γραμμικών εξισώσεων αποστάσεων παρουσιάζονται χωρίς χρήση γραμμικοποιήσεων, επαναλήψεων και αντικαταστάσεων. Συγκεκριμένα, η αλγεβρική προσέγγιση παρακάμπτει το πρόβλημα γρήγορων υπολογιστών με μεγάλους χώρους αποθήκευσης. Οι μέθοδοι που παρουσιάζονται σε αυτό το κεφάλαιο οδηγούν άμεσα στον εντοπισμό της θέσης ενός άγνωστου σταθμού από μετρήσεις αποστάσεων. Αυτό επιτυγχάνεται απαλείφοντας μεταβλητές με αποτέλεσμα να προκύπτουν πολυώνυμα μιας άγνωστης μεταβλητής στα οποία εύκολα μπορούμε να βρούμε τις ρίζες τους με την εντολή «*roots*» του Matlab.

Οι βελτιώσεις στα όργανα μέτρησης αποστάσεων έχει οδηγήσει στα λεγόμενα EDM (Electromagnetic Distance Measuring), εξοπλισμοί που μετρούν αποστάσεις με μεγάλη ακρίβεια. Τα όργανα αυτά βρίσκουν χρήση στα Τοπικά Συστήματα Αναφοράς. Από την άλλη πλευρά ο όρος «*ranging*» είναι αυτός που χρησιμοποιείται διεθνώς και ενσωματώνει τις μετρήσεις ψευδο-αποστάσεων με GPS.

5.2 Εντοπισμός με Χρήση GPS

5.2α' Το πρόβλημα των ψευδο-αποστάσεων τεσσάρων σημείων

Μόλις κάποιος έχει πρόσβαση σε ένα δέκτη GPS χειρός, ένα κινητό τηλέφωνο ή ένα ρολόι με προσαρμοσμένο δέκτη GPS, το μόνο που χρειάζεται να κάνει για να μάθει την θέση του είναι να πατήσει ένα κουμπί. Βασικά, οι λειτουργίες του δέκτη περιλαμβάνουν μετρήσεις αποστάσεων από τους δορυφόρους GPS. Ο δέκτης μετρά το χρόνο που χρειάζεται για να ταξιδεύσει το σήμα που εκπέμπεται από τους δορυφόρους. Η απόσταση υπολογίζεται από την σχέση

$$\text{απόσταση} = \text{ταχύτητα} \times \text{χρόνος}$$

όπου η ταχύτητα δίνεται με την ταχύτητα του φωτός στο κενό. Οι αποστάσεις S_i σχετίζονται με την θέση του άγνωστου σταθμού $\{X_0, Y_0, Z_0\}$ με τη σχέση

$$S_i = \sqrt{(X_i - X_0)^2 + (Y_i - Y_0)^2 + (Z_i - Z_0)^2}, \quad (5.1)$$

όπου $\{X_i, Y_i, Z_i\}$ είναι η θέση του δορυφόρου i . Γεωμετρικά οι τρεις άγνωστοι $\{X_0, Y_0, Z_0\}$ βρίσκονται από την τομή τριών σφαιρών που δίνονται από τις εξισώσεις των ψευδο-αποστάσεων. Η μέτρηση της απόστασης από έναν μόνο δορυφόρο τοποθετεί τη θέση του χρήστη οπουδήποτε επάνω στη σφαίρα που δημιουργείται από την απόσταση S_1 . Η μέτρηση με χρήση δυο δορυφόρων τοποθετούν τη θέση, στην τομή των δύο σφαιρών που δημιουργούνται από τις αποστάσεις S_1 και S_2 . Για το λόγο αυτό ένας τρίτος δορυφόρος χρειάζεται για να καθορίσει πλήρως τη θέση του χρήστη. Δες Σχήματα (2.4) και (2.5). Αυτό επιτυγχάνεται από την τομή της τρίτης σφαίρας S_3 με τις άλλες δύο. Εάν οι μετρήσεις των αποστάσεων από τους δορυφόρους ήταν άμεσες, θα ήταν επαρκείς για τον καθορισμό της θέσης του χρήστη. Όμως οι μετρήσεις δεν είναι άμεσες λόγω της διαφοράς χρονισμού των δορυφόρων και του δέκτη. Οι τιμές των χρόνων των δορυφόρων πρέπει να μοντελοποιηθούν, ενώ του δέκτη ορίζονται ως άγνωστες. Για καθορισμό θέσης με GPS, εκτός από τον καθορισμό θέσης με μετρήσεις αποστάσεων, οι τιμές του ρολογιού του δέκτη πρέπει να προστεθούν στις εξισώσεις παρατήρησης ως άγνωστοι. Καθώς τα σήματα από τους δορυφόρους φθάνουν στο δέκτη, οι αποστάσεις περιέχουν αβεβαιότητες χρονισμού και των δύο, οι οποίες αναφέρονται ως *ψευδο-αποστάσεις* (*pseudo-ranges*). Αυτό λοιπόν που μετρά κάποιος δεν είναι οι αληθινές αποστάσεις, αλλά οι ψευδο-αποστάσεις. Οι μετρήσεις ψευδο-αποστάσεων οδηγούν στο πρόβλημα ψευδο-αποστάσεων GPS τεσσάρων σημείων (pseudo 4P4), που είναι ένα πρόβλημα καθορισμού τεσσάρων αγνώστων. Οι άγνωστοι αποτελούνται από τις τρεις συνιστώσες θέσης του δέκτη $\{X_0, Y_0, Z_0\}$ και από το σφάλμα των αποστάσεων (range bias). Οι ελάχιστες παρατηρήσεις που απαιτούνται για τον καθορισμό της θέσης του δέκτη και του σφάλματος, είναι παρατηρήσεις ψευδο-αποστάσεων από τέσσερις δορυφόρους. Εκτός από παρατηρήσεις ψευδο-αποστάσεων, συχνά γίνονται και μετρήσεις φάσης για πιο ακριβή αποτελέσματα.

Τέσσερις εξισώσεις ψευδο-αποστάσεων διαμορφώνονται στην (5.2) και διατυπώνονται αλγεβρικά ως

$$\left[\begin{array}{l} (x_1 - a_0)^2 + (x_2 - b_0)^2 + (x_3 - c_0)^2 - (x_4 - d_0)^2 = 0 \\ (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - b_1)^2 + (x_3 - c_1)^2 - (x_4 - d_1)^2 = 0 \\ (x_1 - a_2)^2 + (x_2 - b_2)^2 + (x_3 - c_2)^2 - (x_4 - d_2)^2 = 0 \\ (x_1 - a_3)^2 + (x_2 - b_3)^2 + (x_3 - c_3)^2 - (x_4 - d_3)^2 = 0 \\ (a_0, b_0, c_0) = (x^0, y^0, z^0) \sim P^0 \\ (a_1, b_1, c_1) = (x^1, y^1, z^1) \sim P^1 \\ (a_2, b_2, c_2) = (x^2, y^2, z^2) \sim P^2 \\ (a_3, b_3, c_3) = (x^3, y^3, z^3) \sim P^3. \end{array} \right. \quad (5.2)$$

Στην (5.2), $\{P^0, P^1, P^2, P^3\}$ είναι οι θέσεις των τεσσάρων δορυφόρων GPS των οποίων τα σήματα εντοπίζονται από τον δέκτη στον άγνωστο σταθμό P_0 . Οι

θέσεις των δορυφόρων δίνονται από τις συντεταγμένες $\{x^i, y^i, z^i \mid i = 0, 1, 2, 3\}$, όπου με i δηλώνεται το νούμερο συγκεκριμένου δορυφόρου. Οι μετρημένες ψευδο-αποστάσεις από τους δορυφόρους στον σταθερό δέκτη στο σημείο P_0 δίνονται ως $\{d_0, d_1, d_2, d_3, \}$. Οι παράμετροι $\{a_0, b_0, c_0\}$, $\{a_1, b_1, c_1\}$, $\{a_2, b_2, c_2\}$, $\{a_3, b_3, c_3\}$, $\{d_0, d_1, d_2, d_3, \}$ είναι γνωστά στοιχεία του σφαιρικού κώνου, που τέμνεται στο P_0 για να δώσει τις άγνωστες συντεταγμένες και $\{x_1, x_2, x_3\}$ του δέκτη και το σταθερό σφάλμα αποστάσεων $\{x_4\}$. Πολλές μέθοδοι έχουν δημιουργηθεί με σκοπό να δοθούν λύσεις των (5.2). Εδώ παρουσιάζεται η προσέγγιση των λύσεων με χρήση των βάσεων Gröbner, όπως περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Η εξίσωση (5.2) αναπτύσσεται και επεξεργάζεται σύμφωνα με την λεξικογραφική διάταξη $\{x_1 > x_2 > x_3 > x_4\}$ ως

$$\begin{cases} x_1^2 - 2a_0x_1 + x_2^2 - 2b_0x_2 + x_3^2 - 2c_0x_3 - x_4^2 + 2d_0x_4 + a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 - d_0^2 = 0 \\ x_1^2 - 2a_1x_1 + x_2^2 - 2b_1x_2 + x_3^2 - 2c_1x_3 - x_4^2 + 2d_1x_4 + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - d_1^2 = 0 \\ x_1^2 - 2a_2x_1 + x_2^2 - 2b_2x_2 + x_3^2 - 2c_2x_3 - x_4^2 + 2d_2x_4 + a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - d_2^2 = 0 \\ x_1^2 - 2a_3x_1 + x_2^2 - 2b_3x_2 + x_3^2 - 2c_3x_3 - x_4^2 + 2d_3x_4 + a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 - d_3^2 = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

όπου οι άγνωστες μεταβλητές που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Οι υπόλοιποι όροι είναι γνωστές σταθερές. Η εξίσωση (5.3) γράφεται με τους γραμμικούς όρους στην δεξιά πλευρά και τους μη γραμμικούς στην αριστερή ως

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 2a_0x_1 + 2d_0x_2 + 2c_0x_3 - 2d_0x_4 + d_0^2 - a_0^2 - b_0^2 - c_0^2 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 2a_1x_1 + 2d_1x_2 + 2c_1x_3 - 2d_1x_4 + d_1^2 - a_1^2 - b_1^2 - c_1^2 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 2a_2x_1 + 2d_2x_2 + 2c_2x_3 - 2d_2x_4 + d_2^2 - a_2^2 - b_2^2 - c_2^2 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 2a_3x_1 + 2d_3x_2 + 2c_3x_3 - 2d_3x_4 + d_3^2 - a_3^2 - b_3^2 - c_3^2. \end{cases} \quad (5.4)$$

Αφαιρώντας την τελευταία έκφραση (5.4iv) από τις τρεις πρώτες εκφράσεις (5.4i), (5.4ii), (5.4iii) οδηγούμαστε στο σύστημα

$$\begin{cases} a_{03}x_1 + b_{03}x_2 + c_{03}x_3 + d_{30}x_4 + e_{03} = 0 \\ a_{13}x_1 + b_{13}x_2 + c_{13}x_3 + d_{31}x_4 + e_{13} = 0 \\ a_{23}x_1 + b_{23}x_2 + c_{23}x_3 + d_{32}x_4 + e_{23} = 0, \end{cases} \quad (5.5)$$

όπου

$$\begin{cases} a_{03} = 2(a_0 - a_3), b_{03} = 2(b_0 - b_3), c_{03} = 2(c_0 - c_3), d_{30} = 2(d_3 - d_0), \\ a_{13} = 2(a_1 - a_3), b_{13} = 2(b_1 - b_3), c_{13} = 2(c_1 - c_3), d_{31} = 2(d_3 - d_1), \\ a_{23} = 2(a_2 - a_3), b_{23} = 2(b_2 - b_3), c_{23} = 2(c_2 - c_3), d_{32} = 2(d_3 - d_2), \\ e_{03} = (d_0^2 - a_0^2 - b_0^2 - c_0^2) - (d_3^2 - a_3^2 - b_3^2 - c_3^2), \\ e_{13} = (d_1^2 - a_1^2 - b_1^2 - c_1^2) - (d_3^2 - a_3^2 - b_3^2 - c_3^2), \\ e_{23} = (d_2^2 - a_2^2 - b_2^2 - c_2^2) - (d_3^2 - a_3^2 - b_3^2 - c_3^2). \end{cases}$$

παρατηρούμε ότι η (5.5) περιέχει τρεις εξισώσεις που είναι γραμμικές με τέσσερις άγνωστους που οδηγούν σε ένα επιλύσιμο σύστημα εξισώσεων. Η απαίτηση της εργασίας με μια μεταβλητή, ας πούμε την x_4 , σαν να είναι μια σταθερά οδηγεί σε ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους. Τότε εφαρμόζουμε τις τεχνικές είτε των βάσεων Gröbner είτε των υπολειματικών πολυωνύμων με σκοπό να λύσουμε το γραμμικό σύστημα της εξίσωσης για $x_1 = g(x_4)$, $x_2 = g(x_4)$, $x_3 = g(x_4)$, όπου $g(x_4)$ είναι μια γραμμική συνάρτηση.

Προσέγγιση με βάσεις Gröbner

Με χρήση της εντολής `> GroebnerBasis` [`{polynomials}`, `{variables}`, `{options}`] στο λογισμικό *Mathematica* για το σύστημα (5.5)

$$\text{GroebnerBasis} \left[\begin{array}{l} \{a_{03}x_1 + b_{03}x_2 + c_{03}x_3 + d_{30}x_4 + e_{03}, \\ a_{13}x_1 + b_{13}x_2 + c_{13}x_3 + d_{31}x_4 + e_{13}, \\ a_{23}x_1 + b_{23}x_2 + c_{23}x_3 + d_{32}x_4 + e_{23}\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \end{array} \right] \quad (5.6)$$

οδηγούμαστε στην λύση.

Λύση. [Υπολογισμένες βάσεις Gröbner για GPS εξισώσεων ψευδο-αποστάσεων]

$$\begin{aligned} g_1 &:= (-a_{23})b_{13}e_{03} + a_{13}b_{23}e_{03} + a_{23}b_{03}e_{13} - a_{03}b_{23}e_{13} - a_{13}b_{03}e_{23} + a_{03}b_{13}e_{23} \\ &\quad - a_{23}b_{13}c_{03}x_3 + a_{13}b_{23}c_{03}x_3 + a_{23}b_{03}c_{13}x_3 - a_{03}b_{23}c_{13}x_3 - a_{13}b_{03}c_{23}x_3 + a_{03}b_{13}c_{23}x_3 \\ &\quad - a_{23}b_{13}d_{30}x_4 + a_{13}b_{23}d_{30}x_4 + a_{23}b_{03}d_{31}x_4 - a_{03}b_{23}d_{31}x_4 - a_{13}b_{03}d_{32}x_4 + a_{03}b_{13}d_{32}x_4. \\ g_2 &:= (-a_{23})e_{13} + a_{13}e_{23} - a_{23}b_{13}x_2 + a_{13}b_{23}x_2 - a_{23}c_{13}x_3 + a_{13}c_{23}x_3 - a_{23}d_{31}x_4 + a_{13}d_{32}x_4. \\ g_3 &:= (-a_{23})e_{03} + a_{03}e_{23} - a_{23}b_{03}x_2 + a_{03}b_{23}x_2 - a_{23}c_{03}x_3 + a_{03}c_{23}x_3 - a_{23}d_{30}x_4 + a_{03}d_{32}x_4. \\ g_4 &:= (-a_{13})e_{03} + a_{03}e_{13} - a_{13}b_{03}x_2 + a_{03}b_{13}x_2 - a_{13}c_{03}x_3 + a_{03}c_{13}x_3 - a_{13}d_{30}x_4 + a_{03}d_{31}x_4. \\ g_5 &:= e_{23} + a_{23}x_1 + b_{23}x_2 + c_{23}x_3 + d_{32}x_4. \\ g_6 &:= e_{13} + a_{13}x_1 + b_{13}x_2 + c_{13}x_3 + d_{31}x_4. \\ g_7 &:= e_{03} + a_{03}x_1 + b_{03}x_2 + c_{03}x_3 + d_{30}x_4. \end{aligned}$$

Στη λύση αυτή, μπορεί κάποιος να παρατήρησε ότι το g_1 είναι ένα πολυώνυμο με μεταβλητές x_3 και x_4 . Εκφράζοντας το g_1 ως $x_3 = g(x_4)$, και αντικαθιστώντας στο g_2 οδηγούμαστε στο $x_2 = g(x_4)$, μαζί με $x_3 = g(x_4)$ αντικαθιστούμε στο g_5 και παίρνουμε $x_1 = g(x_4)$. Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις που πήραμε των $x_1 = g(x_4)$, $x_2 = g(x_4)$ και $x_3 = g(x_4)$ στην (5.3i), οδηγούμαστε σε μια τετραγωνική εξίσωση της x_4 (π.χ. $h_2x_4^2 + h_1x_4 + h_0 = 0$). Θα μπορούσαμε να οδηγηθούμε στις επιθυμητές μεταβλητές $x_1 = g(x_4)$, $x_2 = g(x_4)$ και $x_3 = g(x_4)$ με reduced Groebner basis. Οι αλγόριθμοι που λύνουν την τετραγωνική εξίσωση είναι

- Awange-Grafarend Groebner basis algorithm,
- Awange-Grafarend Multipolynomial resultans algorithm.

και παρουσιάζονται στο Παράρτημα Β.

Εντοπισμός με περισσότερους από τέσσερις δορυφόρους

Σε προηγούμενη παράγραφο περιγράψαμε την περίπτωση που ο εντοπισμός γινόταν με τέσσερις δορυφόρους. Υπάρχει η δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε περισσότερους δορυφόρους GPS καθώς αυτό είναι που συμβαίνει συχνότερα στην πράξη. Αυτό επιτυγχάνεται με την προσέγγιση « Gauss-Jacobi combinatorial ». Η μέθοδος αυτή δεν θα περιγραφεί καθώς χρησιμοποιεί στατιστικά εργαλεία, η μελέτη των οποίων δεν αποτελεί αντικείμενο της εργασίας αυτής. Τα χαρακτηριστικά αυτών, των μη αλγεβρικών μεθόδων, είναι ότι κατά την επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων, χρησιμοποιούν αρχικές τιμές, γραμμικοποίηση των εξισώσεων παρατήρησης και επαναλήψεις.

5.3 Εντοπισμός σε Τοπικά Συστήματα Αναφοράς

Όπως αναφέρθηκε πριν στον εντοπισμό με GPS, οι στόχοι που παρατηρούνταν είναι δορυφόροι στον τρισδιάστατο χώρο και βρίσκονται σε κίνηση. Στα Τοπικά Γεωδαιτικά Συστήματα (Local Position Systems) οι στόχοι βρίσκονται στην γήινη επιφάνεια. Θα παρουσιάσουμε μεθόδους εντοπισμού όχι μόνο στο διδιάστατο αλλά και το τρισδιάστατο επίπεδο.

5.3α' Εντοπισμός στις δύο διαστάσεις

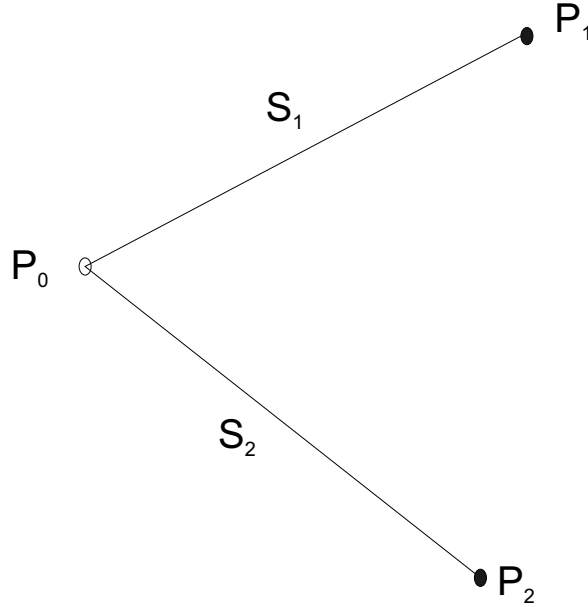
Τετριμένη προσέγγιση

Θεωρήστε δύο αποστάσεις $\{S_1, S_2\}$ που μετρούνται από έναν άγνωστο σταθμό $P_0 \in \mathbb{E}^2$ προς δύο σταθμούς $P_1 \in \mathbb{E}^2$ και $P_2 \in \mathbb{E}^2$ γνωστών συντεταγμένων. Το διδιάστατο πρόβλημα εντοπισμού με αποστάσεις περιλαμβάνει τον καθορισμό των επίπεδων συντεταγμένων $\{X_0, Y_0\}_{P_0}$ του άγνωστου σταθμού $P_0 \in \mathbb{E}^2$, δίνονται:

- οι παρατηρούμενες αποστάσεις $\{S_1, S_2\}$,
- οι συντεταγμένες $\{X_1, Y_1\}_{P_1}$ του σταθμού $P_1 \in \mathbb{E}^2$ και $\{X_2, Y_2\}_{P_2}$ του σταθμού $P_2 \in \mathbb{E}^2$.

Οι μη γραμμικές εξισώσεις των αποστάσεων, που σχετίζονται με τις παραπάνω τιμές των συνεταγμένων του άγνωστου σταθμού, εκφράζονται ως

$$\begin{cases} (X_1 - X_0)^2 + (Y_1 - Y_0)^2 = S_1^2 \\ (X_2 - X_0)^2 + (Y_2 - Y_0)^2 = S_2^2, \end{cases} \quad (5.7)$$



Σχήμα 5.1: Παρατηρήσεις αποστάσεων.

και επεκτείνοντας τις οδηγούμεστε σε

$$\begin{cases} X_1^2 + Y_1^2 - 2X_1X_0 - 2Y_1Y_0 + X_0^2 + Y_0^2 = S_1^2 \\ X_2^2 + Y_2^2 - 2X_2X_0 - 2Y_2Y_0 + X_0^2 + Y_0^2 = S_2^2. \end{cases} \quad (5.8)$$

Η τετριμμένη αναλυτική προσέγγιση λύνει την (5.8) αφαιρώντας π.χ. την πρώτη έκφραση (5.8i) από την δεύτερη, και εκφράζοντας τους αγνώστους της μιας με τους όρους της άλλης. Αυτό οδηγεί

$$Y_0 = -\left(\frac{X_1 - X_2}{Y_1 - Y_2}\right)X_0 + \frac{S_2^2 - S_1^2 + X_1^2 - X_2^2 + Y_1^2 - Y_2^2}{2(Y_1 - Y_2)}, \quad (5.9)$$

που με αντικατάσταση του \$Y_0\$ στην πρώτη έκφραση της (5.8) δίνει

$$\begin{bmatrix} X_1^2 + Y_1^2 - 2X_1X_0 - 2Y_1 \left[-\left(\frac{X_1 - X_2}{Y_1 - Y_2}\right)X_0 + \frac{S_2^2 - S_1^2 + X_1^2 - X_2^2 + Y_1^2 - Y_2^2}{2(Y_1 - Y_2)} \right] \\ + X_0^2 + \left[-\left(\frac{X_1 - X_2}{Y_1 - Y_2}\right)X_0 + \frac{S_2^2 - S_1^2 + X_1^2 - X_2^2 + Y_1^2 - Y_2^2}{2(Y_1 - Y_2)} \right]^2. \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Επεκτείνοντας και αναλύοντας σε συνιστώσες την (5.10) οδηγούμαστε στην

$$\left[\begin{array}{l} (1 + a^2)X_0^2 + (2ab - 2X_1 - 2Y_1a)X_0 + b^2 - 2Y_1b + X_1^2 + Y_1^2 - S_1^2 = 0, \\ \text{με} \\ a = -\left(\frac{X_1 - X_2}{Y_1 - Y_2}\right) \\ \text{και} \\ b = \frac{S_2^2 - S_1^2 + X_1^2 - X_2^2 + Y_1^2 - Y_2^2}{2(Y_1 - Y_2)}. \end{array} \right. \quad (5.11)$$

Η τετραγωνική εξίσωση (5.11) λύνεται προς X_0 χρησιμοποιώντας τον τύπο $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ή $x = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$ και στη συνέχεια αντικαθιστώντας στην (5.9) για να πάρουμε τις τιμές της Y_0 .

Προσέγγιση με βάσεις Gröbner

Η προσέγγιση με βάσεις Gröbner λύνει το σύστημα

$$\left[\begin{array}{l} g_1 := X_1^2 + Y_1^2 - 2X_1X_0 - 2Y_1Y_0 + X_0^2 + Y_0^2 - S_1^2 = 0 \\ g_2 := X_2^2 + Y_2^2 - 2X_2X_0 - 2Y_2Y_0 + X_0^2 + Y_0^2 - S_2^2 = 0. \end{array} \right. \quad (5.12)$$

με χρήση του λογισμικού Mathematica

$$\left[\begin{array}{l} \text{GroebnerBasis}[\{g_1, g_2\}, \{X_0, Y_0\}, \{X_0\}] \\ \text{GroebnerBasis}[\{g_1, g_2\}, \{X_0, Y_0\}, \{Y_0\}]. \end{array} \right. \quad (5.13)$$

Από την πρώτη έκφραση της (5.13) παίρνουμε μια τετραγωνική εξίσωση μιας μόνο μεταβλητής Y_0 απαλείφοντας την μεταβλητή X_0 , ενώ το αντίθετο συμβαίνει στην δεύτερη έκφραση.

Λύση βάσεων Gröbner

$$e_2 Y_0^2 + e_1 Y_0 + e_0 = 0 \quad (5.14)$$

$$f_2 X_0^2 + f_1 X_0 + f_0 = 0.$$

όπου οι συντελεστές είναι:

$$e_2 = (4X_1^2 - 8X_1X_2 - 8Y_1Y_2 + 4X_2^2 + 4Y_2^2 + 4Y_1^2).$$

$$e_1 = (-4X_1^2Y_1 + 4S_1^2Y_1 - 4Y_1^3 - 4X_2^2Y_2 - 4X_1^2Y_2 + 4Y_1^2Y_2 + 4Y_1^2Y_2^2 - 4Y_2^3 + 4S_2^2Y_2 - 4S_2^2Y_1 - 4S_1^2Y_2 - 4X_2^2Y_1 + 8X_1X_2Y_1 + 8X_1X_2Y_2).$$

$$e_0 = (S_2^4 + 2X_1^2Y_2^2 + 4S_1^2X_1X_2 + 4S_2^2X_1X_2 - 2S_2^2X_2^2 - 2Y_1^2Y_2^2 + S_1^4 + \dots - 4X_1X_2^3 - 4X_1X_2Y_1^2 + Y_2^4 - 4X_1^3X_2).$$

$$f_2 = (4X_1^4 - 8X_1X_2 - 8Y_1Y_2 + 4X_2^2 + 4Y_2^2 + 4Y_1^2).$$

$$f_1 = (-4X_2Y_1^2 - 4X_1Y_1^2 + 4X_1^2X_2 - 4S_2^2X_1 - 4X_2Y_2^2 - 4X_1^3 + 8X_1Y_1Y_2 + 4S_1^2X_1 + 8X_2Y_1Y_2 + 4X_1X_2^2 - 4X_2^3 - 4X_1Y_2^2 + 4S_2^2X_2 - 4S_1^2X_2).$$

$$f_0 = (S_1^4 + 2X_1^2Y_2^2 - 4X_2^2Y_1Y_2 - 2S_2^2X_2^2 + 6Y_1^2Y_2^2 + 4S_1^2Y_1Y_2 + S_1^4 - \dots - 2S_1^2Y_1^2 + 2X_2^2Y_2^2 - 4Y_1Y_2^3 + Y_2^2).$$

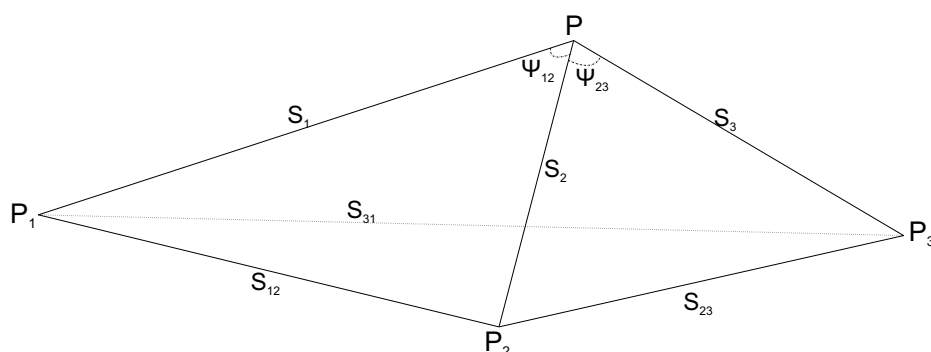
Με δοσμένες τις τιμές των συντεταγμένων των γνωστών σταθμών και των μετρούμενων αποστάσεων το μόνο που χρειάζεται είναι να υπολογιστούν οι συντελεστές $\{e_2, e_1, e_0, f_2, f_1, f_0\}$. Μόλις οι συντελεστές έχουν υπολογιστεί, η εντολή «roots» του Matlab, εφαρμόζεται και λύνει τα πολυώνυμα μιας μεταβλητής της θέσης του άγνωστου σταθμού.

5.36' Εντοπισμός στις τρεις διαστάσεις

Κλειστή Μορφή Τρισδιάστατου Εντοπισμού

Το πρόβλημα του τρισδιάστατου εντοπισμού διαφέρει από αυτόν του επιπέδου, στον αριθμό των αγνώστων που πρέπει να καθοριστούν. Στην περίπτωση του επιπέδου, σκοπός μας ήταν να προσδιορίσουμε τις συντεταγμένες $\{X_0, Y_0\}$ του άγνωστου σταθμού P . Στον τρισδιάστατο εντοπισμό, οι συντεταγμένες $\{X, Y, Z\}$ πρέπει να υπολογιστούν από τις μετρημένες αποστάσεις. Αφού περιλαμβάνονται τρεις συντεταγμένες, απόστάσεις πρέπει να μετρηθούν προς τουλάχιστον τρεις σταθμούς. Εάν οι παρατηρούμενοι σταθμοί είναι περισσότεροι από τρεις, σε αυτήν την περίπτωση η λύση είναι *καλά ορισμένη* (overdetermined). Ο στόχος μας είναι να καθορίσουμε την θέση του άγνωστου σταθμού $P \in \mathbb{E}^3$ μετρώντας τις απόστάσεις προς αυτόν από τρεις γνωστούς σταθμούς $P_i \in \mathbb{E}^3 \mid i = 1, 2, 3$. Γενικά, το πρόβλημα κλειστής μορφής του τρισδιάστατου εντοπισμού διατυπώνεται ως εξής:

Δίνονται οι μετρημένες αποστάσεις από έναν άγνωστο σταθμό $P \in \mathbb{E}^3$ προς τουλάχιστον τρεις σταθμούς $P_i \in \mathbb{E}^3 \mid i = 1, 2, 3$. Καθορίστε τη θέση $\{X, Y, Z\}$ του άγνωστου σταθμού $P \in \mathbb{E}^3$. Από τις τρεις μη γραμμικές εξισώσεις παρατήρησης αποστάσεων, στην παρακάτω λύση, οδηγούμαστε σε δυο εξισώσεις με τρεις αγνώστους. Οι εξισώσεις (5.15) επεκτείνονται στην μορφή των εξισώ-



Σχήμα 5.2: Τετράεδρο: παρατηρήσεις αποστάσεων και γωνιών στον τρισδιάστατο χώρο.

σεων (5.16) και η διαφορά τους δίνει τις (5.17) με τους τετραγωνικούς όρους $\{X^2, Y^2, Z^2\}$ να έχουν απαλειφθεί. Στη συνέχεια συγκεντρώνουμε όλους τους γνωστούς όρους της (5.17) στην δεξιά πλευρά και αυτούς που σχετίζονται με τις άγνωστες παραμέτρους (π.χ. a και b) στην αριστερή πλευρά. Η λύση των αγνώστων όρων $\{X, Y, Z\}$ περιλαμβάνει την επίλυση της (5.18), που έχει δυο εξισώσεις με τρεις αγνώστους.

Λύση (Αφαιρώντας τις μη γραμμικές εξισώσεις αποστάσεων)

$$\begin{cases} S_1^2 = (X_1 - X)^2 + (Y_1 - Y)^2 + (Z_1 - Z)^2 \\ S_2^2 = (X_2 - X)^2 + (Y_2 - Y)^2 + (Z_2 - Z)^2 \\ S_3^2 = (X_3 - X)^2 + (Y_3 - Y)^2 + (Z_3 - Z)^2 \end{cases} \quad (5.15)$$

$$\begin{cases} S_1^2 = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 - 2X_1X - 2Y_1Y - 2Z_1Z \\ S_2^2 = X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 - 2X_2X - 2Y_2Y - 2Z_2Z \\ S_3^2 = X_3^2 + Y_3^2 + Z_3^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 - 2X_3X - 2Y_3Y - 2Z_3Z \end{cases} \quad (5.16)$$

Αφαιρώντας τις προκύπτει

$$\begin{cases} S_1^2 - S_2^2 = X_1^2 - X_2^2 + Y_1^2 - Y_2^2 + Z_1^2 - Z_2^2 + a \\ S_2^2 - S_3^2 = X_2^2 - X_3^2 + Y_2^2 - Y_3^2 + Z_2^2 - Z_3^2 + b \end{cases} \quad (5.17)$$

όπου

$$\begin{cases} a = 2X(X_2 - X_1) + 2Y(Y_2 - Y_1) + 2Z(Z_2 - Z_1) \\ b = 2X(X_3 - X_2) + 2Y(Y_3 - Y_2) + 2Z(Z_3 - Z_2) \end{cases} \quad (5.18)$$

και εξισώνοντας με την (5.17) παίρνουμε

$$\begin{cases} a = S_1^2 - S_2^2 - X_1^2 + X_2^2 - Y_1^2 + Y_2^2 - Z_1^2 + Z_2^2 \\ b = S_2^2 - S_3^2 - X_2^2 + X_3^2 - Y_2^2 + Y_3^2 - Z_2^2 + Z_3^2 \end{cases} \quad (5.19)$$

Προσέγγιση με Απαλειφή

Στην προσέγγιση με απαλειφή η εξίσωση (5.18) διατυπώνεται στην μορφή (5.20), με δύο εξισώσεις και δυο αγνώστους $\{X, Y\}$.

$$\begin{cases} 2X(X_2 - X_1) + 2Y(Y_2 - Y_1) = a - 2Z(Z_2 - Z_1) \\ 2X(X_3 - X_2) + 2Y(Y_3 - Y_2) = b - 2Z(Z_3 - Z_2) \end{cases} \quad (5.20)$$

Σε αυτήν την εξίσωση, μεταχειριζόμαστε την μεταβλητή Z σαν σταθερά. Με την πρώτη απαλειφή οι όροι X και Y εκφράζονται συναρτήσει του όρου Z και αντικαθιστούνται σε κάθε μια από τις εκφράσεις της εξίσωσης (5.20) για να δώσουν την τιμή της Y . Οι τιμές των $\{X, Y\}$ περιγράφονται στην εξίσωση (5.21) και οι σταθερές $\{c, d, e, f\}$ δίνονται από την (5.22).

$$\begin{cases} X = c - dZ \\ Y = e - fZ \end{cases} \quad (5.21)$$

$$\begin{cases} c = \frac{a(Y_3 - Y_2) - b(Y_2 - Y_1)}{2[(X_2 - X_1)(Y_3 - Y_2) - (X_3 - X_2)(Y_2 - Y_1)]} \\ d = \frac{\{(Z_2 - Z_1)(Y_3 - Y_2) - (Z_3 - Z_2)(Y_2 - Y_1)\}Z}{\{(X_2 - X_1)(Y_3 - Y_2) - (X_3 - X_2)(Y_2 - Y_1)\}} \\ e = \frac{a(X_3 - X_2) - b(X_2 - X_1)}{2[(Y_2 - Y_1)(X_3 - X_2) - (Y_3 - Y_2)(X_2 - X_1)]} \\ f = \frac{\{(Z_2 - Z_1)(X_3 - X_2) - (Z_3 - Z_2)(X_2 - X_1)\}Z}{\{(Y_2 - Y_1)(X_3 - X_2) - (Y_3 - Y_2)(X_2 - X_1)\}} \end{cases} \quad (5.22)$$

Οι τιμές των $\{X, Y\}$ στην (5.21) αντικαθιστούνται στην πρώτη έκφραση της (5.15) και δίνει την τετραγωνική εξίσωση (5.22) σε όρους Z ως αγνώστους. Επιλύεται η δευτεροβάθμια εξίσωση (5.23) και υπολογίζονται οι λύσεις της.

$$\begin{cases} gZ^2 + hZ + i = 0 \\ Z_{1,2} = \frac{-h \pm \sqrt{h^2 - 4gi}}{2g} \end{cases} \quad (5.23)$$

Οι συντελεστές $\{g, h, i\}$ δίνονται στην (5.24)

$$\begin{cases} g = d^2 + f^2 + 1 \\ h = 2(dX_1 + fY_1 - Z_1 - cd - ef) \\ i = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 - 2X_1c - 2Y_1e - S_1^2 + c^2 + e^2 \end{cases} \quad (5.24)$$

Προσέγγιση με βάσεις Gröbner

Η έκφραση (5.18) εκφράζεται στην αλγεβρική μορφή (5.25) και οι συντελεστές στην (5.26).

$$\begin{cases} a_{02}X + b_{02}Y + c_{02}Z + f_{02} = 0 \\ a_{12}X + b_{12}Y + c_{12}Z + f_{12} = 0 \end{cases} \quad (5.25)$$

$$\begin{cases} a_{02} = 2(X_1 - X_2), & a_{12} = 2(X_2 - X_3) \\ b_{02} = 2(Y_1 - Y_2), & b_{12} = 2(Y_2 - Y_3) \\ c_{02} = 2(Z_1 - Z_2), & c_{12} = 2(Z_2 - Z_3) \\ f_{02} = (S_1^2 - X_1^2 - Y_1^2 - Z_1^2) - (S_2^2 - X_2^2 - Y_2^2 - Z_2^2) \\ f_{12} = (S_2^2 - X_2^2 - Y_2^2 - Z_2^2) - (S_3^2 - X_3^2 - Y_3^2 - Z_3^2) \end{cases} \quad (5.26)$$

Δίνεται η παρακάτω εντολή στο Mathematica:

> *GroebnerBasis* [{ $a_{02}X + b_{02}Y + c_{02}Z + f_{02}$, $a_{12}X + b_{12}Y + c_{12}Z + f_{12}$ }{ X, Y }]

και η λύση των εξισώσεων είναι (5.27).

$$\begin{cases} g_1 = a_{02}b_{12}Y - a_{12}b_{02}Y - a_{12}c_{02}Z + a_{02}c_{12}Z + a_{02}f_{12} - a_{12}f_{02} \\ g_2 = a_{12}X + b_{12}Y + c_{12}Z + f_{12} \\ g_3 = a_{02}X + b_{02}Y + c_{02}Z + f_{02} \end{cases} \quad (5.27)$$

Η πρώτη έκφραση της (5.27) λύνεται για $Y = g_1(Z)$ και το αποτέλεσμα παρουσιάζεται στην (5.28).

$$Y = \frac{\{(a_{12}c_{02} - a_{02}c_{12})Z + a_{12}f_{02} - a_{02}f_{12}\}}{(a_{02}b_{12} - a_{12}b_{02})} \quad (5.28)$$

Η τιμή αυτή αντικαθίσταται στην δεύτερη έκφραση της (5.27), λύνεται ως προς $X = g_2(Z)$ και δίνει την (5.29).

$$X = \frac{-(b_{12}Y + c_{12}Z + f_{12})}{a_{12}}. \quad (5.29)$$

Κεφάλαιο 6

Εντοπισμός με Μεθόδους Τομής

6.1 Το Πρόβλημα της Τομής και η Σημασία του

Χαρακτηριστικό της μεθόδου τομής είναι ότι ο άγνωστος σταθμός είναι παρατηρούμενος. Κατά την προσέγγιση με τομές, γίνονται μετρήσεις γωνιών (διευθύνσεις) προς τον άγνωστο σταθμό. Οι μετρήσεις γίνονται από τρεις ή και περισσότερους γνωστούς σταθμούς. Η μέθοδος αυτή έχει το πλεονέκτημα ότι είναι δυνατός ο εντοπισμός ενός σταθμού ο οποίος είναι απρόσιτος. Τέτοιες περιπτώσεις συναντάμε συνήθως κατά την διάρκεια κατασκευών ή του κτηματολογίου. Κατά την διάρκεια κατασκευών για παράδειγμα, ένας σταθμός μπορεί να είναι απρόσιτος επειδή το έδαφος είναι βαλτώδες ή καθιζάνει ή λόγω υψηλού κινδύνου. Σε αυτές τις περιπτώσεις η προσέγγιση της τομής μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Η μέθοδος αυτή είναι διαδεδομένη και στην φωτογραμμετρία. Κατά την διαδικασία του αεροτριγωνισμού, ταυτόχρονες τομές φωτεινών ακτίνων συμβαίνουν σε δύο ή περισσότερες επικαλυπτόμενες φωτογραφίες στα κοινά τους σημεία εδάφους.

Η εφαρμογή της μεθόδου έχει επεκταθεί περισσότερο από το Παγκόσμιο Σύστημα Εντοπισμού (Global Position System). Με την εισαγωγή του συστήματος GPS, οι κλασικές γεωδαιτικές και φωτογραμμετρικές τεχνικές εντοπισμού έχουν φθάσει σε έναν νέο ορίζοντα. Οι γεωδαιτικές και φωτογραμμετρικές παρατηρήσεις διευθύνσεων πρέπει να αναλυθούν σε ένα τρισδιάστατο Ευκλείδιο χώρο. Η πρόκληση έχει αναγκάσει τις τεχνικές εντοπισμού να λειτουργούν τρισδιάστατα. Κλειστού τύπου λύσεις σε προβλήματα τρισδιάστατης τομής είναι πολύ σπάνια. Ένας λόγος για τον οποίο δεν συναντάμε κλειστού τύπου λύσεις σε τέτοια προβλήματα, είναι λόγω της μη γραμμικότητας των εξισώσεων στις παρατηρήσεις διευθύνσεων, που μερικώς συμβαίνουν από τις *παραμέτρους του εξωτερικού προσανατολισμού*. Ένας στόχος της εφαρμογής είναι η διευθέτηση του προβλήματος των παραμέτρων του προσανατολισμού.

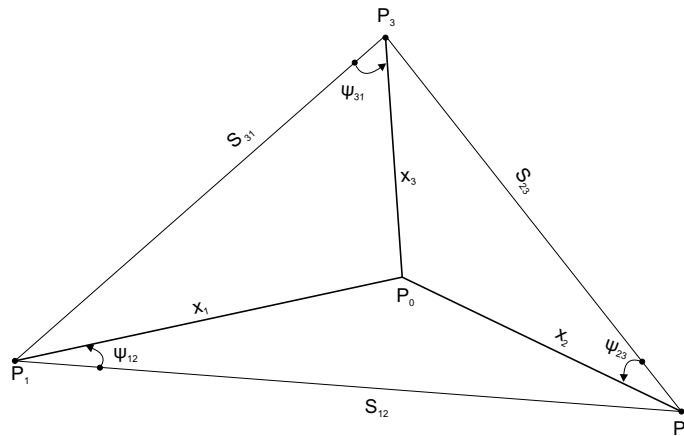
Το κλειδί στην αντιμετώπιση του προβλήματος της μη γραμμικότητας είναι

η χρήση *αδιάστατων ποσοτήτων* σε γεωδαιτικά και φωτογραμμετρικά δίκτυα. Οι γωνίες σε έναν τρισδιάστατο χώρο ονομάζονται *γωνίες χώρου* (*space angles*) ή *αναλογίες αποστάσεων* (*distance ratios*) και είναι τα αδιάστατα δομικά στοιχεία τα οποία είναι ισοδύναμα κάτω από την δράση των 7 παραμέτρων του μετασχηματισμού ομοιότητας.

6.2 Γεωδαιτική Τομή

6.2α' Τομή στο επίπεδο

Το πρόβλημα της τομής στο επίπεδο διατυπώνεται ως εξής: Δίνονται οι διευθύνσεις (οι τιμές των μετρήσεων των γωνιών στο θεοδόλιχο) από δύο γνωστούς σταθμούς P_1 και P_2 προς τον άγνωστο σταθμό P_0 , καθορίστε την θέση του $\{X_0, Y_0\}$. Η λύση του προβλήματος εξαρτάται από το αν οι γωνίες (ή διευθύνσεις) χρησιμοποιούνται όπως συζητάται παρακάτω.



Σχήμα 6.1: Τρισδιάστατη Τομή.

Συνήθους Λύση

Η κλειστού τύπου λύση, με τομή στο επίπεδο έχει μεγάλη παραδοχή. Στο Σχήμα (6.1) διακρίνονται οι γωνίες ψ_{12} και ψ_{21} στο τρίγωνο του επιπέδου $\Delta : P_0P_1P_2$ όπου P_0, P_1, P_2 κόμβοι. Δίνονται οι καρτεσιανές συντεταγμένες $\{X_1, Y_1\}$ και $\{X_2, Y_2\}$ των σημείων P_1 και P_2 , ενώ οι συντεταγμένες $\{X_0, Y_0\}$ του σημείου P_0 είναι άγνωστες. Οι γωνίες $\psi_{12} = \alpha$ και $\psi_{21} = \beta$ προκύπτουν από μετρήσεις με διαφορά οριζοντίων διευθύνσεων όπου $\psi_{12} = T_{10} - T_{12}$ και $\psi_{21} = T_{20} - T_{21}$ είναι παραδείγματα παρατηρούμενων οριζοντίων διευθύνσεων

T_{10} και T_{12} από το P_1 στο P_0 και από P_1 στο P_2 , ενώ η T_{21} και T_{20} από P_2 στο P_1 και από P_2 στο P_0 αντίστοιχα. Παίρνοντας διαφορές απεικονίζουμε τις παρατηρήσεις διευθύνσεων σε γωνίες και απαλείφουμε τους αγνώστους προσανατολισμού. Η λύση της του προβλήματος της δισδιάστατης τομής σε όρους γωνιών, στην κλασική τοπογραφία, δίνεται από τους παρακάτω τύπους

$$X_0 = s_{12} \frac{\cos a \sin \beta}{\sin(a + \beta)} \quad (6.1)$$

$$Y_0 = s_{12} \frac{\sin a \sin \beta}{\sin(a + \beta)} \quad (6.2)$$

και η Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των κόμβων δίνεται από

$$s_{12} = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}. \quad (6.3)$$

Στην περίπτωση που υιοθετηθούν οι διευθύνσεις, οι μετρημένες τιμές από τους γνωστούς σταθμούς P_1 και P_2 προς τον άγνωστο σταθμό P_0 προσδιορίζονται από τις διευθύνσεις T_{10} και T_{20} αντίστοιχα. Εάν ο οριζόντιος κύκλος του θεοδολίχου διαβάξει από P_1 σε P_2 ορίζεται στο μηδέν, τότε η μετρούμενη γωνία a είναι ίση με την μετρούμενη διεύθυνση T_{12} από το P_1 στο P_2 . Με αυτόν τον τρόπο, κάνουμε χρήση των δύο γωνιών και διευθύνσεων και για αυτό εισάγονται δύο ακόμα άγνωστοι, ο άγνωστος προσανατολισμός σ_1 και σ_2 . Αυτό οδηγεί σε τέσσερις εξισώσεις παρατήρησης με τέσσερις αγνώστους, που γράφονται ως

$$\begin{cases} \tan(T_{12} + \sigma_1) = \left\{ \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \right\} \\ \tan(T_{10} + \sigma_1) = \left\{ \frac{Y_0 - Y_1}{X_0 - X_1} \right\} \\ \tan(T_{21} + \sigma_2) = \left\{ \frac{Y_1 - Y_2}{X_1 - X_2} \right\} \\ \tan(T_{20} + \sigma_2) = \left\{ \frac{Y_0 - Y_2}{X_0 - X_2} \right\} \end{cases} \quad (6.4)$$

όπου $\{X_1, Y_1, X_2, Y_2\}$ συντεταγμένες των δύο γνωστών σταθμών P_1, P_2 , όπου $\{T_{12}, T_{10}, T_{21}, T_{20}\}$ είναι οι μετρημένες οριζόντιες διευθύνσεις και $\{X_0, Y_0, \sigma_1, \sigma_2\}$ είναι οι επιθυμητές θέσεις και ο προσανατολισμός του άγνωστου σταθμού. Λύνονται θεωρώντας τον αντίστροφο των εφαιπτομένων ως

$$\begin{cases} \sigma_1 = \tan^{-1} \left\{ \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \right\} - T_{12} \\ \sigma_2 = \tan^{-1} \left\{ \frac{Y_1 - Y_2}{X_1 - X_2} \right\} - T_{21} \end{cases} \quad (6.5)$$

Μόλις τα άγνωστα στοιχεία προσανατολισμού υπολογιστούν στο σύστημα (6.5) αντικαθιστούνται στις εξισώσεις (6.4) και δίνουν λύσεις των τιμών $\{X_0, Y_0\}$.

Λύσεις που προκύπτουν με βάσεις Gröbner

Οι σχέσεις (6.4) με χρήση του τύπου

$$\tan(a + \beta) = \frac{\tan a + \tan \beta}{1 - \tan a \tan \beta}, \quad (6.6)$$

δίνουν:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\tan T_{12} + \tan \sigma_1}{1 - \tan T_{12} \tan \sigma_1} = \left\{ \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \right\} \\ \frac{\tan T_{10} + \tan \sigma_1}{1 - \tan T_{10} \tan \sigma_1} = \left\{ \frac{Y_0 - Y_1}{X_0 - X_1} \right\} \\ \frac{\tan T_{21} + \tan \sigma_2}{1 - \tan T_{21} \tan \sigma_2} = \left\{ \frac{Y_1 - Y_2}{X_1 - X_2} \right\} \\ \frac{\tan T_{20} + \tan \sigma_2}{1 - \tan T_{20} \tan \sigma_2} = \left\{ \frac{Y_0 - Y_2}{X_0 - X_2} \right\} \end{array} \right. \quad (6.7)$$

Αναπτύσσοντας τις (6.7) και αναπροσαρμόζοντας τις παίρνουμε τις τριγωνομετρικές αλγεβρικές εκφράσεις:

$$\left[\begin{array}{l} (X_2 - X_1 + Y_2 \tan T_{12} - Y_1 \tan T_{12}) \tan \sigma_1 + X_2 \tan T_{12} - X_1 \tan T_{12} + Y_1 - Y_2 = 0 \\ X_0 \tan T_{10} + X_0 \tan \sigma_1 + Y_0 \tan T_{10} \tan \sigma_1 - Y_0 - X_1 \tan \sigma_1 - Y_1 \tan T_{10} \tan \sigma_1 - X_1 \tan T_{10} + Y_1 = 0 \\ (X_1 - X_2 + Y_1 \tan T_{21} - Y_2 \tan T_{21}) \tan \sigma_2 + X_1 \tan T_{21} - X_2 \tan T_{21} + Y_2 - Y_1 = 0 \\ X_0 \tan T_{20} + X_0 \tan \sigma_2 + Y_0 \tan T_{20} \tan \sigma_2 - Y_0 - X_2 \tan \sigma_2 - Y_2 \tan T_{20} \tan \sigma_2 - X_2 \tan T_{20} + Y_2 = 0 \end{array} \right. \quad (6.8)$$

Δηλώνοντας

$$\left[\begin{array}{l} a_1 = \tan T_{12} \\ a_2 = \tan T_{21} \\ b = \tan T_{10} \\ c = \tan T_{20} \\ d_1 = \tan \sigma_1 \\ d_2 = \tan \sigma_2 \end{array} \right. \quad (6.9)$$

και αντικαθιστώντας στην (6.8) οδηγούμαστε σε τέσσερις αλγεβρικές εξισώσεις που ταξινομούνται με την λεξικογραφική διάταξη $\{X_0 > Y_0 > d_2 > d_1\}$

$$\left[\begin{array}{l} f_1 = d_1 X_2 - d_1 X_1 + d_1 Y_2 a_1 - d_1 Y_1 a_1 + X_2 a_1 - X_1 a_1 + Y_1 - Y_2 = 0 \\ f_2 = X_0 b + X_0 d_1 - Y_0 + Y_0 b d_1 - X_1 d_1 - Y_1 b d_1 - X_1 b + Y_1 = 0 \\ f_3 = d_2 X_1 - d_2 X_2 + d_2 Y_1 a_2 - d_2 Y_2 a_2 + X_1 a_2 - X_2 a_2 + Y_2 - Y_1 = 0 \\ f_4 = X_0 c + X_0 d_2 - Y_0 + Y_0 c d_2 - X_2 d_2 - Y_2 c d_2 - X_2 c + Y_2 = 0 \end{array} \right. \quad (6.10)$$

Με χρήση της εντολής $> GroebnerBasis [\{polynomials\}, \{variables\}, \{options\}]$ στο λογισμικό *Mathematica* το σύστημα (6.10) λύνεται ως

$$\left[\begin{array}{l} \text{GroebnerBasis} [\{f_1, f_2, f_3, f_4\}, \{X_0, Y_0, d_2, d_1\}, \{X_0, Y_0, d_2\}] \\ \text{GroebnerBasis} [\{f_1, f_2, f_3, f_4\}, \{X_0, Y_0, d_1, d_2\}, \{X_0, Y_0, d_1\}] \\ \text{GroebnerBasis} [\{f_1, f_2, f_3, f_4\}, \{d_2, d_1, Y_0, X_0\}, \{Y_0, d_2, d_1\}] \\ \text{GroebnerBasis} [\{f_1, f_2, f_3, f_4\}, \{d_2, d_1, X_0, Y_0\}, \{X_0, d_2, d_1\}]. \end{array} \right. \quad (6.11)$$

Η πρώτη και η δεύτερη έκφραση του (6.11) δίνουν γραμμικές εξισώσεις που σχετίζουν τις εφαιπτομένες d_1 και d_2 των άγνωστων προσανατολισμών σ_1 και σ_2 και των συντεταγμένων $\{X_1, Y_1, X_2, Y_2\}$ των γνωστών σταθμών P_1 και P_2 . Η τρίτη και η τέταρτη έκφραση δίνουν γραμμικές εξισώσεις που σχετίζουν τις συντεταγμένες X_0 και Y_0 του άγνωστου σταθμού P_0 , με τις συντεταγμένες $\{X_1, Y_1, X_2, Y_2\}$ των γνωστών σταθμών P_1 και P_2 και τους όρους προσανατολισμού d_1 και d_2 . Οι υπολογισμένες βάσεις Gröbner (γραμμικές συναρτήσεις) είναι

$$\left[\begin{array}{l} d_1 = \frac{(-a_1 X_1 + a_1 X_2 + Y_1 - Y_2)}{(X_1 - X_2 + a_1 Y_1 - a_1 Y_2)} \\ d_2 = \frac{(-a_2 X_1 + a_2 X_2 + Y_1 - Y_2)}{(X_1 - X_2 + a_2 Y_1 - a_2 Y_2)} \\ X_0 = \frac{-(Y_1 - Y_2 - d_1 X_1 + d_2 X_2 - b X_1 + c X_2 - b d_1 Y_1 + b c Y_1 - c d_2 Y_1 + \dots + a_2 b c d_2 Y_2 - a_2 b c d_2 Y_1)}{d_1 + b c d_1 - d_2 - b c d_2 + b c d_2 + b d_1 d_2 + b - c - c d_1 d_2} \\ Y_0 = \frac{-(a_2 b X_1 - a_2 b d_2 Y_2 + c d_1 X_2 - a_2 d_1 X_2 + b c X_2 - a_2 b X_2 - \dots + d_2 Y_1 + c Y_1 + a_2 b d_2 Y_1 - d_1 Y_1)}{d_1 + b c d_1 - d_2 - b c d_2 + b c d_2 + b d_1 d_2 + b - c - c d_1 d_2} \end{array} \right. \quad (6.12)$$

Παραδειγμα 6.2.1. (Πρόβλημα τομής στο επίπεδο) Δίνονται οι καρτεσιανές συντεταγμένες του επιπέδου των δύο γνωστών σταθμών P_1 και P_2 .

$$\begin{aligned} \{X_1 = 2490.50m, Y_1 = 2480.79m\}_{P_1} \\ \{X_2 = 780.67m, Y_2 = 7394.05m\}_{P_2}. \end{aligned}$$

Οι γωνίες διεύθυνσης των σημείων P_1 και P_2 του άγνωστου σταθμού $P_0 \in \mathbb{E}^2$ είναι $117^\circ 11' 20.7''$ και $27^\circ 35' 47.9''$ αντίστοιχα. (Σαν μονάδα μέτρησης των γωνιών χρησιμοποιείται η μοίρα $^\circ$. 1° υποδιαιρείται σε $60'$ λεπτά, ενώ το $1'$ σε $60''$ δευτερόλεπτα). Χρησιμοποιώντας αυτές τις γωνίες, οι διευθύνσεις που μετρήθηκαν ήταν: $T_{10} = 0^\circ 0' 0''$, $T_{12} = 117^\circ 11' 20.7''$, $T_{21} = 0^\circ 0' 0''$ και $T_{20} = 27^\circ 35' 47.9''$. Από τις διευθύνσεις αυτές και με χρήση της (6.9) προκύπτουν οι σταθερές $\{a_1, a_2, b, c\}$ οι οποίες με αντικατάσταση στις δύο πρώτες σχέσεις της (6.12) δίνουν τις τιμές των d_1 και d_2 και χρησιμοποιούνται στην τέταρτη εξίσωση της (6.9). Αυτό οδηγεί στην εύρεση των δύο άγνωστων παραμέτρων $\sigma_1 = 351^\circ 59' 56.3''$ και $\sigma_2 = 289^\circ 11' 17.0''$. Οι άγνωστες συντεταγμένες $\{X_0, Y_0\}$ του άγνωστου σταθμού P_0 υπολογίζονται από την τρίτη και τέταρτη έκφραση της (6.12). Τελικά προκύπτουν $\{X_0 = 6629.0952m, Y_0 = 1899.0728m\}$.

6.26' Τρισδιάστατη Τομή

Κλειστού Τύπου Λύση

Στην περίπτωση του τρισδιάστατου προβλήματος τομής, τα σημεία $\{P_1, P_2, P_3\}$ στο Σχήμα (6.1) δίνονται μαζί με τις καρτεσιανές συντεταγμένες τους $\{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\{X_2, Y_2, Z_2\}$, $\{X_3, Y_3, Z_3\}$, αλλά οι συντεταγμένες $\{X_0, Y_0, Z_0\}$ του σημείου P_0 είναι άγνωστες. Οι αδιάστατες ποσότητες $\{\psi_{12}, \psi_{23}, \psi_{31}\}$ είναι οι γωνίες του χώρου $\psi_{12} = \angle P_0P_1P_2$, $\psi_{23} = \angle P_0P_2P_3$, $\psi_{31} = \angle P_1P_3P_0$.

Το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής: Δίνονται οι οριζόντιες διεύθυνσεις T_i και οι κατακόρυφες διευθύνσεις B_i μετρημένες από τους τρεις γνωστούς σταθμούς προς στον άγνωστο σταθμό, καθορίστε την θέση του άγνωστου σταθμού P_0 .

Οι μετρήσεις διευθύνσεων από όρους σφαιρικών συντεταγμένων $\{T_i, B_i\}$ μετασχηματίζονται σε γωνίες $\{\psi_{12}, \psi_{23}, \psi_{31}\}$ με χρήση του αναλυτικού τύπου

$$\cos\psi_{ij} = \cos B_i \cos B_j \cos(T_j - T_i) + \sin B_i \sin B_j. \quad (6.13)$$

Η γωνίες χρησιμοποιούνται για την εύρεση των άγνωστων αποστάσεων $\{x_1 = S_1, x_2 = S_2, x_3 = S_3\}$. Αυτές οι αποστάσεις σχετίζονται τον άγνωστο σταθμό $P_0 \in \mathbb{E}^3$ με τους γνωστούς σταθμούς $P_i \in \mathbb{E}^3 | i = \{1, 2, 3\}$. Το μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων που σχετίζει τις άγνωστες αποστάσεις $\{x_1 = S_1, x_2 = S_2, x_3 = S_3\}$ με τις γωνίες $\{\psi_{12}, \psi_{23}, \psi_{31}\}$ δίνεται ως

$$\begin{cases} x_2^2 = x_1^2 + S_{12}^2 - 2S_{12}\cos(\psi_{12})x_1 \\ x_3^2 = x_2^2 + S_{23}^2 - 2S_{23}\cos(\psi_{23})x_2 \\ x_1^2 = x_3^2 + S_{31}^2 - 2S_{31}\cos(\psi_{31})x_3 \end{cases} \quad (6.14)$$

Στη συνέχεια οι υπολογισμένες αποστάσεις χρησιμοποιούνται στην εύρεση της θέσης του άγνωστου σταθμού με τις τεχνικές εντοπισμού με αποστάσεις που παρουσιάστηκαν στον προηγούμενο κεφάλαιο.

Τετριμένη Λύση

Η εξίσωση (6.14) λύνεται προσθέτοντας και τις τρεις εξισώσεις (6.14i), (6.14ii), (6.14iii) με αποτέλεσμα να απαλείφονται οι τετραγωνικοί όροι και προκύπτει

$$S_{12}^2 + S_{23}^2 + S_{31}^2 - 2x_1 S_{12} \cos(\psi_{12}) - 2x_2 S_{23} \cos(\psi_{23}) - 2x_3 S_{31} \cos(\psi_{31}) = 0 \quad (6.15)$$

που είναι γραμμική ως προς x_1, x_2 και x_3 . Η μεταβλητή x_1 στην (6.15) εκφράζεται συναρτήση των x_2 και x_3 ως

$$x_1 = \frac{S_{12}^2 + S_{23}^2 + S_{31}^2 - 2x_2 S_{23} \cos(\psi_{23}) - 2x_3 S_{31} \cos(\psi_{31})}{2S_{12} \cos(\psi_{12})}, \quad (6.16)$$

και αντικαθιστώντας την (6.16) στην πρώτη εξίσωση του συστήματος (6.14*i*) παίρνουμε μια έκφραση συναρτήση των x_2 και x_3 . Η απομείνουσα έκφραση λύνεται με την (6.16)*ii* και από εκεί προκύπτουν οι τιμές των x_2 και x_3 . Τέλος υπολογίζεται το x_1 . Από την άλλη πλευρά, αν η (6.16) λυθεί ως προς x_3 συναρτήση των x_2 και x_1 θα δώσουν μαζί με την (6.14*iii*) μια έκφραση ως προς x_2 και x_1 , η οποία μαζί με τη (6.14*i*) θα δώσουν τις λύσεις των τιμών x_2 και x_1 .

Η καθυστέρηση με αυτήν την προσέγγιση είναι ότι μια μεταβλητή, στην περίπτωση μας η x_2 , υπολογίζεται δυο φορές δίνοντας διαφορετικές τιμές, κάτι που είναι φυσικά ανεπιθύμητο. Μια άμεση λύση στο πρόβλημα βασίζεται στην αλγεβρική προσέγγιση είτε με βάσεις Gröbner είτε με υπολλειματικά πολυώνυμα που ελαττώνουν το πρόβλημα.

Λύση με βάσεις Gröbner

Η μέθοδος με βάσεις Gröbner που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 4 εφαρμόζεται σε δύο βήματα ως ακουλούθως:

- Βήμα 1 (Διαφόριση των αποστάσεων):

Οι εξισώσεις (6.14) επαναγράφονται αλγεβρικά ως

$$\begin{cases} f_1 := x_1^2 + b_1 x_1 - x_2^2 + a_0 = 0 \\ f_2 := x_2^2 + b_2 x_2 - x_3^2 + b_0 = 0 \\ f_3 := x_3^2 + b_3 x_3 - x_1^2 + c_0 = 0 \end{cases} \quad (6.17)$$

με $b_1 = -2S_{12}\cos(\psi_{12})$, $b_2 = -2S_{23}\cos(\psi_{23})$, $b_3 = -2S_{31}\cos(\psi_{31})$ και $a_0 = S_{12}^2$, $b_0 = S_{23}^2$, $c_0 = S_{31}^2$. Οι Reduced Gröbner Basis των εξισώσεων (6.17) υπολογίζονται ως

$$\begin{cases} \text{GroebnerBasis} [\{f_1, f_2, f_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_2, x_3\}] \\ \text{GroebnerBasis} [\{f_1, f_2, f_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_3\}] \\ \text{GroebnerBasis} [\{f_1, f_2, f_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_2, x_3\}] \end{cases} \quad (6.18)$$

που οδηγεί σε τρία τετραδικά πολυώνυμα που καθορίζουν τις άγνωστες αποστάσεις $\{x_1 = S_1, x_2 = S_2, x_3 = S_3\}$

$$\begin{cases} x_1 := d_4 x_1^4 + d_3 x_1^3 + d_2 x_1^2 + d_1 x_1 + d_0 = 0 \\ x_2 := e_4 x_2^4 + e_3 x_2^3 + e_2 x_2^2 + e_1 x_2 + e_0 = 0 \\ x_3 := f_4 x_3^4 + f_3 x_3^3 + f_2 x_3^2 + f_1 x_3 + f_0 = 0. \end{cases} \quad (6.19)$$

Οι συντελεστές των εξισώσεων (6.19) ορίζονται στο [XXXπαπερ]

- Βήμα 2 (καθορισμός θέσης):

Σε αυτό το βήμα, οι υπολογισμένες αποστάσεις των (6.19) χρησιμοποιούνται για να καθορίσουν την άγνωστη θέση $P_0 \in \mathbb{E}^3$. με τις τεχνικές που περιγράφηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Λύση με Sturmfels Resultants

Ο αλγόριθμος που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 4 εφαρμόζεται σε δύο βήματα ως ακουλούθως:

- Βήμα 1 (Διαφόριση των αποστάσεων):

Ακολουθώντας τις εξισώσεις (4.4) έως (4.7) που γίνονται ομογενείς και χρησιμοποιώντας την μεταβλητή x_4 επαναγράφονται στις λύσεις των x_1 , x_2 και x_3 .

- Επιλύουμε ως προς την μεταβλητή x_1 και την μεταχειριζόμαστε ως σταθερά (πολυώνυμου βαθμού 0).

$$\begin{cases} g_1 := (x_1^2 + b_1 x_1 + a_0)x_4^2 - x_2^2 = 0 \\ g_2 := x_2^2 + b_2 x_2 x_4 - x_3^2 + b_0 x_4^2 = 0 \\ g_3 := x_3^2 + b_3 x_3 x_4 + (c_0 - x_1^2)x_4^2 = 0 \end{cases} \quad (6.20)$$

- Επιλύουμε ως προς την μεταβλητή x_2 και την μεταχειριζόμαστε ως σταθερά (πολυώνυμου βαθμού 0).

$$\begin{cases} h_1 := x_1^2 + b_1 x_1 x_4 + (a_0 - x_2^2)x_4^2 = 0 \\ h_2 := (x_2^2 + b_2 x_2 + b_0)x_4^2 - x_3^2 = 0 \\ h_3 := x_3^2 + b_3 x_3 x_4 - x_1^2 + c_0 x_4^2 = 0 \end{cases}$$

- Επιλύουμε ως προς την μεταβλητή x_3 και την μεταχειριζόμαστε ως σταθερά (πολυώνυμου βαθμού 0).

$$\begin{cases} k_1 := x_1^2 + b_1 x_1 x_4 - x_2^2 + a_0 x_4^2 = 0 \\ k_2 := x_2^2 + b_2 x_2 x_4 + (b_0 - x_3^2)x_4^2 = 0 \\ k_3 := (x_3^2 + b_3 x_3 + c_0)x_4^2 - x_1^2 = 0 \end{cases}$$

Από τις (6.20), (6.21) και (6.22), εκφράζοντας $a_1 = (x_1^2 + b_1 x_1 + a_0)$ και $a_2 = (c_0 - x_1^2)$ στην (6.20), $a_3 = (x_2^2 + b_2 x_2 + b_0)$ και $c_2 = (a_0 - x_2^2)$ στην 6.21, και τέλος $c_3 = (b_0 - x_3^2)$ και $c_3 = (x_3^2 + b_3 x_3 + c_0)$ στην (6.22), παίρνουμε την Ιακωβιανή ορίζουσα ως

$$J_{x_1} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \frac{\partial g_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_3} & \frac{\partial g_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x_2} & \frac{\partial g_3}{\partial x_3} & \frac{\partial g_3}{\partial x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 & 0 & 2a_1 x_4 \\ 2x_2 + b_2 x_4 & -2x_3 & b_2 x_2 + 2b_0 x_4 \\ 0 & 2x_3 + b_3 x_4 & b_3 x_3 + 2a_2 x_4 \end{bmatrix}, \quad (6.23)$$

$$J_{x_2} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_3} & \frac{\partial h_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_3} & \frac{\partial h_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial h_3}{\partial x_1} & \frac{\partial h_3}{\partial x_3} & \frac{\partial h_3}{\partial x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + b_1x_4 & 0 & b_1x_1 + 2c_2x_4 \\ 0 & -2x_3 & 2a_3x_4 \\ -2x_1 & 2x_3 + b_3x_4 & b_3x_3 + 2c_0x_4 \end{bmatrix}, \quad (6.24)$$

$$J_{x_3} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial k_1}{\partial x_1} & \frac{\partial k_1}{\partial x_2} & \frac{\partial k_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial k_2}{\partial x_1} & \frac{\partial k_2}{\partial x_2} & \frac{\partial k_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial k_3}{\partial x_1} & \frac{\partial k_3}{\partial x_2} & \frac{\partial k_3}{\partial x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + b_1x_4 & -2x_2 & b_1x_1 + 2a_0x_4 \\ 0 & 2x_2 + b_2x_4 & b_2x_2 + 2c_3x_4 \\ -2x_1 & 0 & 2c_1x_4 \end{bmatrix}, \quad (6.25)$$

Τα αποτελέσματα των οριζουσών είναι κυβικά πολυώνυμα:

$$J_{x_1} = 4x_2b_3x_3^2 + 8x_2x_3a_2x_4 + 4b_2x_2^2x_3 + 2b_2x_2^2b_3x_4 + 8x_2b_0x_4x_3 \\ + 4x_2b_0x_4^2b_3 + 8a_1x_4x_2x_3 + 4a_1x_4^2x_2b_3 + 4a_1x_4^2b_2x_3 + 2a_1x_4^3b_2b_3.$$

$$J_{x_2} = -4x_1b_3x_3^2 - 8x_1x_3c_0x_4 - 8x_1a_3x_4x_3 - 4x_1a_3x_4^2b_3 - 2b_1x_4b_3x_3^2 \\ - 4b_1x_4^2x_3c_0 - 4b_1x_4^2a_3x_3 - 2b_1x_4^3b_3 - 4x_1^2x_3b_1 - 8x_1x_3c_2x_4.$$

$$J_{x_3} = 8c_1x_4x_1x_2 + 4c_1x_4^2x_1b_2 + 4c_1x_4b_1x_2 + 2c_1x_4^3b_1b_2 + 4x_1b_2x_2^2 \\ + 8x_1x_2c_3x_4 + 4b_1x_1^2x_2 + 2b_1x_1^2b_2x_4 + 8x_1a_0x_4^2x_2 + 4x_1a_0x_4^2b_2.$$

Με χρήση των (4.6) και (4.7) οδηγούμαστε

$$\begin{cases} x_1 := d_4x_1^4 + d_3x_1^3 + d_2x_1^2 + d_1x_1 + d_0 = 0 \\ x_2 := e_4x_2^4 + e_3x_2^3 + e_2x_2^2 + e_1x_2 + e_0 = 0 \\ x_3 := f_4x_3^4 + f_3x_3^3 + f_2x_3^2 + f_1x_3 + f_0 = 0 \end{cases} \quad (6.26)$$

- Βήμα 2 (καθορισμός θέσης)

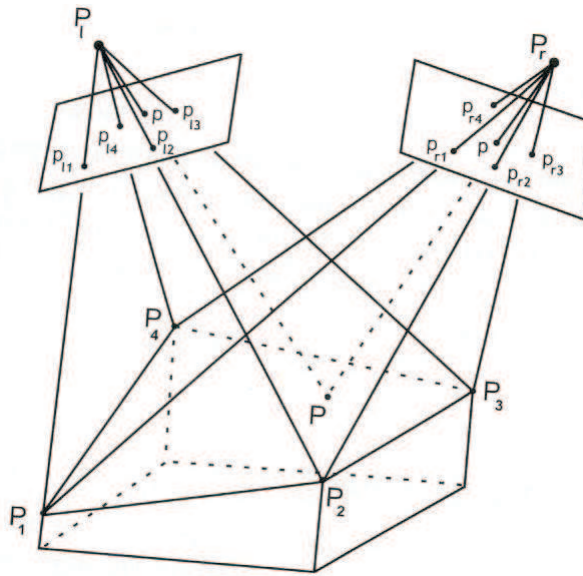
Σε αυτό το βήμα, οι υπολογισμένες αποστάσεις από τις (6.26) χρησιμοποιούνται για να καθορίσουν την άγνωστη θέση $P_0 \in \mathbb{E}^3$.

Τομή με περισσότερους από τρεις σταθμούς

Θέλουμε να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες του άγνωστου σταθμού $P_0 \in \mathbb{E}^3$, γνωρίζοντας τις συντεταγμένες περισσότερων από τρεις σταθμούς P_1, P_2, \dots, P_n . Σε αυτήν την περίπτωση οι παρατηρήσεις περιλαμβάνουν οριζόντιες T_i και κατακόρυφες B_i διευθύνσεις από τον κάθε γνωστό P_i σταθμό προς τον άγνωστο P_0 . Η επίλυση γίνεται με μεθόδους της *θεωρίας σφαλμάτων*, η μελέτη της οποίας βρίσκεται εκτός ύλης του αντικειμένου της εργασίας.

6.3 Φωτογραμμετρική Τομή

Το πρόβλημα της φωτογραμμετρικής τομής είναι: Δίνεται η θέση και ο προσανατολισμός δυο ή και περισσότερων φωτογραφιών, ορίστε την ακτίνα από την τομή των φωτογραφιών στα κοινά σημεία εδάφους. Καθορίστε την επίγειες συντεταγμένες (X, Y, Z) του άγνωστου σταδμού P . (Για περισσότερα στην φωτογραμμετρία, δεξ το Παράρτημα Α, Στοιχεία Φωτογραμμετρίας). Ας δούμε την επίλυση του πρόβληματος με δύο τρόπους αλγεβρικά.



Σχήμα 6.2: Παρατηρούμε δύο επικαλυπτόμενες φωτογραφίες στο χώρο και την γεωμετρία της απεικόνισης των κοινών σημείων εδάφους $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$.

Προσέγγιση Möbius των Grafarend-Shan

Ας υποθέσουμε ότι οι καρτεσιανές συντεταγμένες $\{X_l, Y_l, Z_l\}$ και $\{X_r, Y_r, Z_r\}$ που αντιστοιχούν στο αριστερό προβολικό κέντρο P_l και στο δεξιό προβολικό κέντρο P_r είναι γνωστές. Οι εξισώσεις για το κάθε προβολικό κέντρο είναι

$$\begin{bmatrix} X - X_l \\ Y - Y_l \\ Z - Z_l \end{bmatrix} = s_l R_l \begin{bmatrix} x_l \\ y_l \\ -f_l \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

και

$$\begin{bmatrix} X - X_r \\ Y - Y_r \\ Z - Z_r \end{bmatrix} = s_r R_r \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ -f_r \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

Στις σχέσεις αυτές, f_l και f_r είναι η αριστερή και το δεξιά εστιακή απόσταση και \mathbf{R} είναι ο πίνακας στροφής. Οι αναλογικές αποστάσεις (distances ratios) αντίστοιχα δίνονται από τους τύπους

$$s_l := \frac{\|\overrightarrow{PP_l}\|}{\|\overrightarrow{pp_l}\|} = \frac{\sqrt{(X - X_l)^2 + (Y - Y_l)^2 + (Z - Z_l)^2}}{\sqrt{x_l^2 + y_l^2 + z_l^2}} \quad (6.29)$$

και

$$s_r := \frac{\|\overrightarrow{PP_r}\|}{\|\overrightarrow{pp_r}\|} = \frac{\sqrt{(X - X_r)^2 + (Y - Y_r)^2 + (Z - Z_r)^2}}{\sqrt{x_r^2 + y_r^2 + z_r^2}}. \quad (6.30)$$

Οι εξισώσεις (6.29) και (6.30) μπορούν να αναλυθούν στην εξίσωση του μετασχηματισμού ομοιότητας 7 παραμέτρων

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = s_l R_l \begin{bmatrix} x_l \\ y_l \\ -f_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_l \\ Y_l \\ Z_l \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

καθώς και

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = s_r R_r \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ -f_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_r \\ Y_r \\ Z_r \end{bmatrix}. \quad (6.32)$$

Ο μετασχηματισμός ομοιότητας μεταβάλλει τα μεγέθη, όμως παραμένουν οι ίδιες αναλογίες και φυσικά οι γωνίες. Ένας κύβος μετασχηματίζεται σε κύβο διαφορετικού μεγέθους.

Οι Graferend και Shan πρότειναν μια λύση τριών βημάτων βασισμένη στις συντεταγμένες Möbius ως εξής:

- Βήμα πρώτο, οι αναλογικές αποστάσεις $\{s_l, s_r\}$ μεταξύ των προβολικών κέντρων και των άγνωστων σημείων τομής, καθορίζονται από ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων. Τα στοιχεία της αριστερής και της δεξιάς εικόνας διαμορφώνουν το γραμμικό σύστημα εξισώσεων.
- Βήμα δεύτερο, μέσω των αναλογικών αποστάσεων υπολογίζουμε τις συντεταγμένες Möbius.
- Βήμα τρίτο, αυτές οι συντεταγμένες μετασχηματίζονται σε ένα τρισδιάστατο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $\{X, Y, Z\}$.

Προσέγγιση με μεταθετική άλγεβρα

Η παραπάνω μέθοδος λύνει την τομή ακτινών από δύο φωτογραφίες, αλλά η αλγεβρική προσέγγιση λύνει την τομή ακτινών από τρεις φωτογραφίες. Σε

αυτήν την περίπτωση πρέπει να θεωρήσουμε ότι ο άγνωστος σταθμός τέμνεται από τρεις φωτογραφίες. Οι αποστάσεις $\{S_1, S_2, S_3\}$ προς τους άγνωστους σταθμούς καθορίζονται από τις εξισώσεις (6.19) ή (6.26). Οι συντεταγμένες των άγνωστων σταθμών υπολογίζονται από με τις μεθόδους εντοπισμού που περιγράφηκαν για τις τρεις διαστάσεις στο Κεφάλαιο 5.

Παράρτημα Α΄

Στοιχεία Φωτογραμμετρίας

Α΄.0α΄ Ορισμός της Φωτογραμμετρίας

Φωτογραμμετρία ονομάζεται η τέχνη, επιστήμη και τεχνολογία για την απόκτηση αξιόπιστης πληροφορίας σχετικά με φυσικά αντικείμενα και το περιβάλλον μέσα από διαδικασίες καταγραφής, μέτρησης και ερμηνείας φωτογραφικών εικόνων αλλά και προτύπων ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. (ASP,1980)

Σε γενικές γραμμές, η Φωτογραμμετρία είναι ένα σύνολο τεχνικών που αποσκοπούν στην « απόδοση », δηλαδή στον κατά το δυνατόν πιστότερο γεωμετρικό προσδιορισμό, της μορφολογίας αντικειμένων του τρισδιάστατου (3D) χώρου. *Στην φωτογραμμετρία η εικόνα προσεγγίζεται γεωμετρικά με το μοντέλο της κεντρικής προβολής* (Πέτσα 2000).

Η Φωτογραμμετρία ταξινομείται σε κατηγορίες ανάλογα με τον τύπο της φωτογραφίας, τον τρόπο λήψης και τον τρόπο χρήσης της. Διακρίνουμε έτσι την *από αέρα Φωτογραμμετρία* στην περίπτωση των αεροφωτογραφιών σε αντίθεση με την *Επίγεια Φωτογραμμετρία* που ο σταθμός λήψης των φωτογραφιών βρίσκεται στο έδαφος. Ανάλογα με τον τρόπο λήψης διακρίνουμε τις *κατακόρυφες, κεκλιμένες και πλάγιες λήψεις*. Το μέρος της Φωτογραμμετρίας που ασχολείται με την εξαγωγή (δισδιάστατης αναγκαστικά) πληροφορίας από μια μόνο φωτογραφία ονομάζεται *Μονοεικονική Φωτογραμμετρία* σε αντίθεση με την *Στερεοφωτογραμμετρία* που χρησιμοποιεί επικαλυπτόμενα ζεύγη εικόνων. Ανάλογα με τον τρόπο επεξεργασίας και απόδοσης της πληροφορίας διακρίνουμε την *Αναλογική Φωτογραμμετρία*, όπου γίνεται χρήση αναλογικών φωτογραμμετρικών οργάνων. Η *Ψηφιακή Φωτογραμμετρία* που έρχεται, σε συνάρτηση με την ανάπτυξη της ψηφιακής τεχνολογίας και των γραφικών επεξεργάζεται όχι πλέον αναλογικές αλλά ψηφιακές εικόνες. (Πατιάς 1991)

Σε πρώτη προσέγγιση τα σημεία του χώρου προβάλλονται σε ένα επίπεδο προβολής (επίπεδο αρνητικού της φωτογραφίας για αναλογικές εικόνες) μέσω

μιας δέσμης ακτίνων προβολής, οι οποίες διέρχονται όλες από το κέντρο προβολής (ή προβολικό κέντρο). Για να μπορέσει κανείς να προσδιορίσει σημεία του χώρου ως αλληλοτομίες δύο δεσμών ακτίνων, αυτές θα πρέπει να έχουν προηγουμένως τοποθετηθεί σωστά στο χώρο. Σε αυτό το σημείο εισάγουμε την έννοια του *προσανατολισμού* μιας κεντρικής προβολής. Μια κεντρική προβολή ορίζεται πλήρως εάν έχει οριστεί:

- **Εσωτερικά**, με το να ορίσουμε την θέση του κέντρου προβολής ως προς το επίπεδο προβολής, δηλαδή τη θέση του σημείου λήψης ως προς το επίπεδο του αρνητικού. Η θέση του κέντρου προβολής ορίζεται από την προβολή του στο επίπεδο προβολής $\{x_0, y_0\}$ και την εστιακή του απόσταση $\{f\}$ (απόσταση του κέντρου προβολής από το επίπεδο προβολής). Έτσι, η σύνδεση του κέντρου προβολής με τα εικονοσημεία αναπαράγει τη σωστή δέσμη ακτίνων. Ουσιαστικά αποκαθίσταται η πορεία της φωτεινής ακτίνας μέσα στη φωτομηχανή, όπως υπήρχε κατά τη στιγμή της λήψης. *Άρα εσωτερικός προσανατολισμός \rightarrow ανάπλαση της δέσμης.*
- **Εξωτερικά**, με από τη θέση και τον προσανατολισμό του επιπέδου προβολής στο χώρο. Δεδομένου ότι το επίπεδο προβολής είναι ήδη προσανατολισμένο εσωτερικά και συνεπώς η δέσμη είναι γνωστή, αυτό ισοδυναμεί με τον προσανατολισμό $\{X_0, Y_0, Z_0, \omega, \phi, \kappa\}$ της ίδιας της δέσμης στο χώρο. *Άρα εξωτερικός προσανατολισμός \rightarrow αποκατάσταση θέσης δέσμης στον χώρο.*

Α'.06' Συστήματα Συντεταγμένων

Τα *εικονοσήματα* είναι σημεία, τα οποία βρίσκονται εγχαραγμένα στο πλαίσιο της μετρικής μηχανής και καταγράφονται κατά τη λήψη στο επίπεδο του αρνητικού σε θέσεις στις οποίες έχει δοθεί υψηλή ακρίβεια από τον κατασκευαστή. Με την βοήθεια των εικονοσημάτων ορίζεται στο επίπεδο της φωτογραφίας ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $\{x', y'\}$, το *σύστημα των εικονοσυντεταγμένων*. Η αρχή του συστήματος είναι η τομή των ευθειών που ορίζουν αντιδιαμετρικά εικονοσήματα και ονομάζεται *πρωτεύων σημείο*.

Το *σύστημα της εικόνας* είναι ένα τρισδιάστατο δεξιόστροφο σύστημα $\{x, y, z\}$ με αρχή το κέντρο προβολής. Ο άξονας z είναι κάθετος στο επίπεδο της εικόνας, ενώ οι άξονες $\{x, y\}$ είναι παράλληλοι στους άξονες $\{x', y'\}$ του συστήματος των εικονοσυντεταγμένων.

Τα σημεία εδάφους αναφέρονται σε ένα τοπικό δεξιόστροφο τρισσορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $\{X, Y, Z\}$. Το σύστημα αυτό έχει αυθαίρετη αρχή και ο άξονας Z είναι κατά τη διεύθυνση της τοπικής καθέτου του ελειψοειδούς. Το σύστημα είναι το *επίγειο σύστημα συντεταγμένων* ή αλλιώς *γεωδαιτικό*.

A'.0γ' Το μαθηματικό μοντέλο της Φωτογραμμετρίας

Το μαθηματικό μοντέλο με το οποίο εκφράζεται η κεντρική προβολή είναι η *συνθήκη συγγραμμικότητας*. Κάθε σημείο του εδάφους π.χ. το P_1 (με συντεταγμένες εδάφους $\{X_1, Y_1, Z_1\}$ στο γεωδαιτικό σύστημα) είναι συνευθειακό με το σημείο p_1 στην φωτογραφία (με συντεταγμένες $\{x_1, y_1\}$ στο σύστημα της εικόνας) και το κέντρο προβολής P (με συντεταγμένες $\{X_0, Y_0, Z_0\}$ στο γεωδαιτικό σύστημα και $\{x_0, y_0, -f\}$ στο σύστημα της εικόνας). Με $\{\omega, \phi, \kappa\}$ συμβολίζονται οι στροφές του συστήματος της εικόνας σε σχέση με το γεωδαιτικό. Η γραμμή που περνάει από τα τρία αυτά σημεία, υλοποιεί μια ακτίνα φωτός. Η συνθήκη συγγραμμικότητας που συνδέει τα παραπάνω είναι:

$$\begin{bmatrix} X_1 - X_0 \\ Y_1 - Y_0 \\ Z_1 - Z_0 \end{bmatrix} = \lambda R \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ x_1 - y_0 \\ -f \end{bmatrix} \quad (A'.1)$$

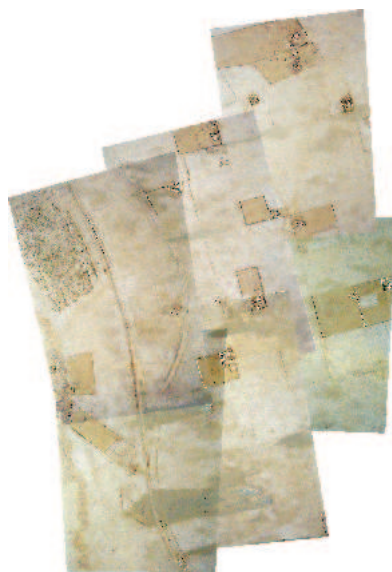
όπου λ ο συντελεστής κλίμακας και R ο (3×3) πίνακας στροφής που εξαρτάται από τις γωνίες $\{\omega, \phi, \kappa\}$. Διαιρώντας τις δύο πρώτες εξισώσεις με την τρίτη και απαλείφοντας το λ παίρνουμε την *αναλυτική μορφή της συνθήκης συγγραμμικότητας*

$$\begin{cases} x_1 = -f \frac{R_{11}(X_1 - X_0) + R_{21}(Y_1 - Y_0) + R_{31}(Z_1 - Z_0)}{R_{13}(X_1 - X_0) + R_{23}(Y_1 - Y_0) + R_{33}(Z_1 - Z_0)} \\ y_1 = -f \frac{R_{12}(X_1 - X_0) + R_{22}(Y_1 - Y_0) + R_{32}(Z_1 - Z_0)}{R_{13}(X_1 - X_0) + R_{23}(Y_1 - Y_0) + R_{33}(Z_1 - Z_0)} \end{cases} \quad (A'.2)$$

Η συνθήκη συγγραμμικότητας διατυπώνεται για κάθε σημείο που μετρείται στην εικόνα και συνδέει τις εικονοσυντεταγμένες του $\{x_1, y_1\}$ με τις συντεταγμένες του $\{X_1, Y_1, Z_1\}$ στο γεωδαιτικό σύστημα μέσω τριών βασικών στοιχείων $\{x_0, y_0, -f\}$ του εσωτερικού προσανατολισμού και των έξι στοιχείων $\{X_0, Y_0, Z_0, \omega, \phi, \kappa\}$ του εξωτερικού προσανατολισμού. (Πέτσα 2000)

A'.0δ' Προϊόντα

Αεροτριγωνισμός είναι η διαδικασία αποκατάστασης της θέσης του συνόλου των αεροφωτογραφιών στον τρισδιάστατο χώρο (Λακαφώσης 2002). Με την ολοκλήρωση του αεροτριγωνισμού (για εναέριες λήψεις), δεδομένου ότι έχουμε αρκετές εικόνες μπορούμε να φτιάξουμε π.χ. ένα φωτομωσαϊκό. Το *φωτομωσαϊκό*, στην απλή του μορφή, είναι μια συλλογή επικαλυπτόμενων φωτογραφιών, που ενώνονται μεταξύ τους έτσι ώστε να δίνουν την εντύπωση μιας μόνο φωτογραφίας που καλύπτει μια ευρύτερη περιοχή, Σχήμα (A'.1). Επίσης, μπορούμε να παράγουμε χάρτες και διαγράμματα για πολλές χρήσεις και μελέτες (κατασκευών, περιβαλλοντολογικές, χρήσεων γης κ.α).



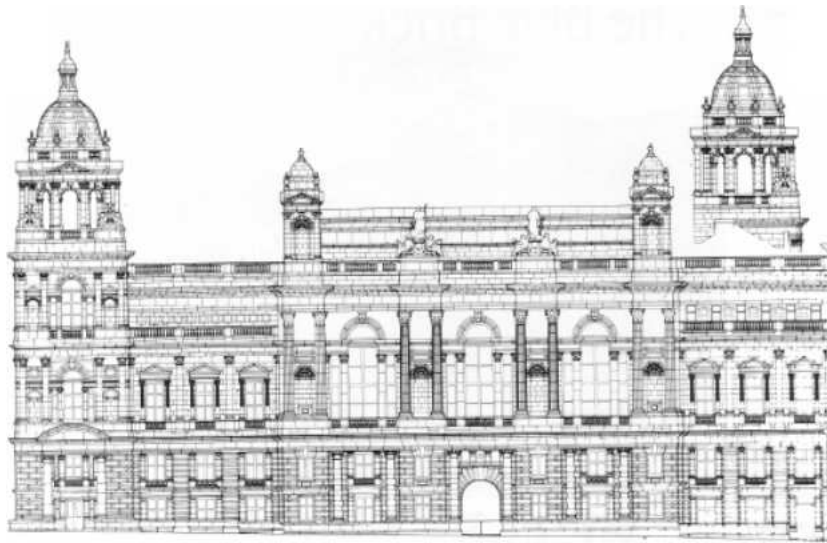
Σχήμα Α'.1: Ένα φωτοωσaiκό είναι μια συλλογή επικαλυπτόμενων αεροφωτογραφιών. Παρατηρούμε την επικάλυψη των εικόνων κατά το μήκος και κατά το πλάτος της διεύθυνσης πτήσης.

Από την άλλη πλευρά, στην επίγεια φωτογραμμετρία με την ολοκλήρωση του τριγωνισμού, μπορούμε να παράγουμε πολύ ακριβή διαγράμματα μεγάλων κλιμάκων (π.χ. 1 : 10, 1 : 1) που βρίσκουν εφαρμογες στην αρχιτεκτονική, την ιατρική κ.α., Σχήμα (Α'.2).

Α'.0ε' Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα της Φωτογραμμετρίας

Πλεονεκτήματα των φωτογραμμετρικών μεθόδων (Πατιάς 1991):

- **Ταχύτητα** - Η παραγωγή χαρτών με φωτογραμμετρικές μεθόδους είναι ταχύτερη από οποιαδήποτε άλλη μεθοδολογία που στηρίζεται σε επίγειες μετρήσεις.
- **Οικονομία** - Στενά συνδεδεμένο με την ταχύτητα της συλλογής είναι και το κόστος.
- **Προσπελασιμότητα εδάφους** - Ένα σαφές πλεονέκτημα των φωτογραμμετρικών έναντι των επίγειων μετρήσεων είναι σε περιπτώσεις δύσκολης ή απαγορευτικής προσπελασιμότητας του εδάφους (απόκρυμα μέρη, περιοχές πυκνή βλάστησης, ηφαιστιογενεί περιοχές).



Σχήμα Α'.2: Ένα αρχιτεκτονικό διάγραμμα που προέκυψε από φωτογραμμετρικές μεθόδους.

- **Συνεχής απεικόνιση** - Ενώ οι επίγειες μετρήσεις έχουν ως σκοπό τον προσδιορισμό των συντεταγμένων διακριτών σημείων λεπτομερειών, η φωτογραφία είναι μια συνεχής απεικόνιση του φυσικού κόσμου και μπορεί να αποδοθεί σαν τέτοια.

Μειονεκτήματα των φωτογραμμετρικών μεθόδων:

- **Πολλές πηγές σφαλμάτων** - Οι πηγές σφαλμάτων είναι πολλές και έτσι οι μεθοδολογίες επεξεργασίας δεδομένων πολυπλοκότερες, ενώ τα τελικά προϊόντα είναι μερικές φορές μικρότερης ακρίβειας από τα επίγεια δεδομένα.
- **Απαιτήσεις σε σημεία ελέγχου** - Η Φωτογραμμετρία βασίζει τις μεθοδολογίες της σε κάποια ήδη υπάρχουσα πληροφορία. Απαιτεί δηλαδή την ύπαρξη γνωστών σημείων στο έδαφος. Εξαρτάται από το αποτέλεσμα προηγούμενων επίγειων μετρήσεων και με την έννοια αυτή είναι ένα δευτερογενές στάδιο συλλογής πληροφορίας.

Παράρτημα Β'

Αλγόριθμοι Βάσεων Gröbner

Οι παρακάτω αλγόριθμοι, είναι γραμμένοι σε γλώσσα Matlab και εφαρμόζονται στο πρόβλημα «Αλγεβρικές λύσεις των εξισώσεων ψευδο-αποστάσης GPS για τον υπολογισμό συντεταγμένων σταθερού σταθμού και του σφάλματος απόστασης». Το τεχνικό paper που περιγράφει αυτά τα δύο προγράμματα δημοσιεύτηκε στο επιστημονικό περιοδικό GPS Solutions, Volume 5, Number 4, 2002. Ο κώδικας είναι προβάσιμος στην ιστοσελίδα: (<http://www.ngs.noaa.gov/gps-toolbox/awange.htm>).

B'.1 Awange-Grafarend Groebner Basis Algorithm

Αρχείο: gps.M

Program Awange-Grafarend Groebner Basis Algorithm

Department of Geodesy and GeoInformatics, University of Stuttgart, Germany-29th of August 2001.

Program computes the coefficients `cs2 cs1 cs0` of the quadratic equation obtained from the Groebner basis approach All that is required from the user is to replace the four satellite coordinates and their respective pseudo-range measurements as explained in the input section of the program.

The example considered is adopted from A. Kleusberg (1994), *Zeitschrift fur Vermessungswesen* 119(1994)188-192 and Grafarend and Shan (1996), *ARTIFICIAL SATELLITES, Planetary Geodesy* No 28 Vol 31 pp.133-147.

```
syms x1 x2 x3 x4 a0 a1 a2 a3 b0 b1 b2 b3 c0 c1 c2 c3 d0 d1 d2 d3
a03 a13 a23 b03 b13 b23 b3 c03 c13 c23 d30 d31 d32
```

```
syms e03 e13 e23 format long e
```

Symbolic computation of the stationary receiver coordinates

{z=x3},{y=x2} and {x=x1}

```
cx3=(-a23*b13*e03+a13*b23*e03+a23*b03*e13
-a03*b23*e13-a13*b03*e23+a03*b13*e23
-a23*b13*d30*x4+a13*b23*d30*x4+...
a23*b03*d31*x4-a03*b23*d31*x4-a13*b03*d32*x4+a03*b13*d32*x4)/
(a23*b13*c03-a13*b23*c03-a23*b03*c13+a03*b23*c13+...
a13*b03*c23-a03*b13*c23);
```

```
cx2=(-a23*e13+a13*e23-a23*c13*x3+a13*c23*x3-a23*d31*x4+a13*d32*x4)
/(a23*b13-a13*b23); cx1=(e23+b23*x2+c23*x3+d32*x4)/(-a23);
```

Symbolic computation of the Coefficients of the quadratic equation

```
cf2=((-a23*b13*d30+a13*b23*d30+a23*b03*d31-a03*b23*d31
-a13*b03*d32+a03*b13*d32)^2/...
(a23*b13*c03-a13*b23*c03-a23*b03*c13+a03*b23*c13
+a13*b03*c23-a03*b13*c23)^2+...
(-a23*c13*(-a23*b13*d30+a13*b23*d30+a23*b03*d31
-a03*b23*d31-a13*b03*d32+a03*b13*d32)/...
(a23*b13*c03-a13*b23*c03-a23*b03*c13+a03*b23*c13
+a13*b03*c23-a03*b13*c23)+a13*c23*...
(-a23*b13*d30+a13*b23*d30+a23*b03*d31-a03*b23*d31-a13*b03*d32
+a03*b13*d32)/...
(a23*b13*c03-a13*b23*c03-a23*b03*c13+a03*b23*c13
+a13*b03*c23-a03*b13*c23)-a23*d31+a13*d32)^2/...
(a23*b13-a13*b23)^2+(b23*(-a23*c13*(-a23*b13*d30
+a13*b23*d30
+a23*b03*d31-a03*b23*d31-a13*b03*d32+a03*b13*d32)/...
(a23*b13*c03-a13*b23*c03-a23*b03*c13+a03*b23*c13
+a13*b03*c23-a03*b13*c23)+a13*c23*...
(-a23*b13*d30+a13*b23*d30+a23*b03*d31-a03*b23*d31-a13*b03*d32
+a03*b13*d32)/...
(a23*b13*c03-a13*b23*c03-a23*b03*c13+a03*b23*c13+a13*b03*c23
```

$$\begin{aligned}
 & -a_0^3 b_1^3 c_2^3) \\
 & -a_2^3 d_3^1 + a_1^3 d_3^2) / \dots \\
 & (a_2^3 b_1^3 - a_1^3 b_2^3) + c_2^3 * (-a_2^3 b_1^3 d_3^0 + a_1^3 b_2^3 d_3^0 \\
 & + a_2^3 b_0^3 d_3^1 - a_0^3 b_2^3 d_3^1 - a_1^3 b_0^3 d_3^2 + a_0^3 b_1^3 d_3^2) / \dots \\
 & (a_2^3 b_1^3 c_0^3 - a_1^3 b_2^3 c_0^3 - a_2^3 b_0^3 c_1^3 + a_0^3 b_2^3 c_1^3 \\
 & + a_1^3 b_0^3 c_2^3 - a_0^3 b_1^3 c_2^3) + d_3^2)^2 / a_2^3 - 1); \\
 \\
 \text{cf1} = & (2 * ((-a_2^3 e_1^3 + a_1^3 e_2^3 - a_2^3 c_1^3 * (-a_2^3 b_1^3 e_0^3 + a_1^3 b_2^3 e_0^3 \\
 & + a_2^3 b_0^3 e_1^3 - a_0^3 b_2^3 e_1^3 - a_1^3 b_0^3 e_2^3 + a_0^3 b_1^3 e_2^3) / \dots \\
 & (a_2^3 b_1^3 c_0^3 - a_1^3 b_2^3 c_0^3 - a_2^3 b_0^3 c_1^3 + a_0^3 b_2^3 c_1^3 \\
 & + a_1^3 b_0^3 c_2^3 - a_0^3 b_1^3 c_2^3) + a_1^3 c_2^3 * \dots \\
 & (-a_2^3 b_1^3 e_0^3 + a_1^3 b_2^3 e_0^3 + a_2^3 b_0^3 e_1^3 - a_0^3 b_2^3 e_1^3 \\
 & - a_1^3 b_0^3 e_2^3 + a_0^3 b_1^3 e_2^3) / \dots \\
 & (a_2^3 b_1^3 c_0^3 - a_1^3 b_2^3 c_0^3 - a_2^3 b_0^3 c_1^3 + a_0^3 b_2^3 c_1^3 \\
 & + a_1^3 b_0^3 c_2^3 - a_0^3 b_1^3 c_2^3)) / \dots \\
 & (a_2^3 b_1^3 - a_1^3 b_2^3) - b_0) * (-a_2^3 c_1^3 * (-a_2^3 b_1^3 d_3^0 \\
 & + a_1^3 b_2^3 d_3^0 + a_2^3 b_0^3 d_3^1 \\
 & - a_0^3 b_2^3 d_3^1 - a_1^3 b_0^3 d_3^2 + a_0^3 b_1^3 d_3^2) / \dots \\
 & (a_2^3 b_1^3 c_0^3 - a_1^3 b_2^3 c_0^3 - a_2^3 b_0^3 c_1^3 + a_0^3 b_2^3 c_1^3 \\
 & + a_1^3 b_0^3 c_2^3 - a_0^3 b_1^3 c_2^3) + a_1^3 c_2^3 * \dots \\
 & (-a_2^3 b_1^3 d_3^0 + a_1^3 b_2^3 d_3^0 + a_2^3 b_0^3 d_3^1 \\
 & - a_0^3 b_2^3 d_3^1 - a_1^3 b_0^3 d_3^2 + a_0^3 b_1^3 d_3^2) / \dots \\
 & (a_2^3 b_1^3 c_0^3 - a_1^3 b_2^3 c_0^3 - a_2^3 b_0^3 c_1^3 + a_0^3 b_2^3 c_1^3 \\
 & + a_1^3 b_0^3 c_2^3 - a_0^3 b_1^3 c_2^3) - a_2^3 d_3^1 + a_1^3 d_3^2) / \dots \\
 & (a_2^3 b_1^3 - a_1^3 b_2^3) - 2 * (- (e_2^3 + b_2^3 * (-a_2^3 e_1^3 + a_1^3 e_2^3 - a_2^3 c_1^3 * \dots \\
 & (-a_2^3 b_1^3 e_0^3 + a_1^3 b_2^3 e_0^3 + a_2^3 b_0^3 e_1^3 - a_0^3 b_2^3 e_1^3 \\
 & - a_1^3 b_0^3 e_2^3 + a_0^3 b_1^3 e_2^3) / \dots \\
 & (a_2^3 b_1^3 c_0^3 - a_1^3 b_2^3 c_0^3 - a_2^3 b_0^3 c_1^3 + a_0^3 b_2^3 c_1^3 \\
 & + a_1^3 b_0^3 c_2^3 - a_0^3 b_1^3 c_2^3) + a_1^3 c_2^3 * \dots \\
 & (-a_2^3 b_1^3 e_0^3 + a_1^3 b_2^3 e_0^3 + a_2^3 b_0^3 e_1^3 - a_0^3 b_2^3 e_1^3 \\
 & - a_1^3 b_0^3 e_2^3 + a_0^3 b_1^3 e_2^3) / \dots \\
 & (a_2^3 b_1^3 c_0^3 - a_1^3 b_2^3 c_0^3 - a_2^3 b_0^3 c_1^3 \\
 & + a_0^3 b_2^3 c_1^3 + a_1^3 b_0^3 c_2^3 - a_0^3 b_1^3 c_2^3)) / \\
 & (a_2^3 b_1^3 - a_1^3 b_2^3) + c_2^3 * \dots \\
 & (-a_2^3 b_1^3 e_0^3 + a_1^3 b_2^3 e_0^3 + a_2^3 b_0^3 e_1^3 - a_0^3 b_2^3 e_1^3 \\
 & - a_1^3 b_0^3 e_2^3 + a_0^3 b_1^3 e_2^3) / \dots \\
 & (a_2^3 b_1^3 c_0^3 - a_1^3 b_2^3 c_0^3 - a_2^3 b_0^3 c_1^3 + a_0^3 b_2^3 c_1^3 \\
 & + a_1^3 b_0^3 c_2^3 - a_0^3 b_1^3 c_2^3)) / a_2^3 - a_0) * \dots \\
 & (b_2^3 * (-a_2^3 c_1^3 * (-a_2^3 b_1^3 d_3^0 + a_1^3 b_2^3 d_3^0 \\
 & + a_2^3 b_0^3 d_3^1 - a_0^3 b_2^3 d_3^1 - a_1^3 b_0^3 d_3^2 + a_0^3 b_1^3 d_3^2) / \dots \\
 & (a_2^3 b_1^3 c_0^3 - a_1^3 b_2^3 c_0^3 - a_2^3 b_0^3 c_1^3 + a_0^3 b_2^3 c_1^3
 \end{aligned}$$

```

+a13*b03*c23-a03*b13*c23)+a13*c23*...
(-a23*b13*d30+a13*b23*d30+a23*b03*d31-a03*b23*d31
-a13*b03*d32+a03*b13*d32)/...
(a23*b13*c03-a13*b23*c03-a23*b03*c13+a03*b23*c13
+a13*b03*c23-a03*b13*c23)-a23*d31+a13*d32)/...
(a23*b13-a13*b23)+c23*(-a23*b13*d30+a13*b23*d30+a23*b03*d31
-a03*b23*d31-a13*b03*d32+a03*b13*d32)/...
(a23*b13*c03-a13*b23*c03-a23*b03*c13+a03*b23*c13+a13*b03*c23
-a03*b13*c23)+d32)/a23+2*d0+2*...
((-a23*b13*e03+a13*b23*e03+a23*b03*e13-a03*b23*e13
-a13*b03*e23+a03*b13*e23)/...
(a23*b13*c03-a13*b23*c03-a23*b03*c13+a03*b23*c13
+a13*b03*c23-a03*b13*c23)-c0)*...
(-a23*b13*d30+a13*b23*d30+a23*b03*d31-a03*b23*d31
-a13*b03*d32+a03*b13*d32)/...
(a23*b13*c03-a13*b23*c03-a23*b03*c13+a03*b23*c13
+a13*b03*c23-a03*b13*c23));%*x4+

cf0=(-(e23+b23*(-a23*e13+a13*e23-a23*c13*
(-a23*b13*e03+a13*b23*e03+a23*b03*e13-a03*b23*e13-...
a13*b03*e23+a03*b13*e23)/(a23*b13*c03-a13*b23*c03-a23*b03*c13
+a03*b23*c13+a13*b03*c23-a03*b13*c23)+...
a13*c23*(-a23*b13*e03+a13*b23*e03+a23*b03*e13
-a03*b23*e13-a13*b03*e23+a03*b13*e23)/...
(a23*b13*c03-a13*b23*c03-a23*b03*c13+a03*b23*c13+a13*b03*c23
-a03*b13*c23))/(a23*b13-a13*b23)+c23*...
(-a23*b13*e03+a13*b23*e03+a23*b03*e13
-a03*b23*e13-a13*b03*e23+a03*b13*e23)/...
(a23*b13*c03-a13*b23*c03-a23*b03*c13+a03*b23*c13
+a13*b03*c23-a03*b13*c23))/a23-a0)^2-d0^2+...
((-a23*b13*e03+a13*b23*e03+a23*b03*e13-a03*b23*e13
-a13*b03*e23+a03*b13*e23)/...
(a23*b13*c03-a13*b23*c03-a23*b03*c13+a03*b23*c13
+a13*b03*c23-a03*b13*c23)-c0)^2+...
((-a23*e13+a13*e23-a23*c13*(-a23*b13*e03+a13*b23*e03
+a23*b03*e13-a03*b23*e13-...
a13*b03*e23+a03*b13*e23)/(a23*b13*c03-a13*b23*c03-a23*b03*c13
+a03*b23*c13+a13*b03*c23-...
a03*b13*c23)+a13*c23*(-a23*b13*e03+a13*b23*e03+a23*b03*e13
-a03*b23*e13-a13*b03*e23+a03*b13*e23)/...
(a23*b13*c03-a13*b23*c03-a23*b03*c13+a03*b23*c13

```

$$+a_{13}b_{03}c_{23}-a_{03}b_{13}c_{23}))/((a_{23}b_{13}-a_{13}b_{23})-b_0)^2;$$

Input data as follows: $\{a_0, b_0, c_0\} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ are the coordinates of the first satellite.

d_0 is the pseudo-range measured to this satellite

$\{a_1, b_1, c_1\} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$ are the coordinates of the second satellite.

d_1 is the pseudo-range measured to this satellite

$\{a_2, b_2, c_2\} = \{X_3, Y_3, Z_3\}$ are the coordinates of the third satellite.

d_2 is the pseudo-range measured to this satellite

$\{a_3, b_3, c_3\} = \{X_4, Y_4, Z_4\}$ are the coordinates of the fourth satellite.

d_3 is the pseudo-range measured to this satellite

```
a0=1.4832308660e+007; a1=-1.5799854050e+007;
a2=1.984818910e+006; a3=-1.2480273190e+007;
b0=-2.0466715890e+007; b1=-1.3301129170e+007;
b2=-1.1867672960e+007; b3=-2.3382560530e+007;
c0=-7.428634750e+006; c1=1.7133838240e+007;
c2=2.3716920130e+007; c3=3.278472680e+006;
d0=2.4310764064e+007; d1=2.2914600784e+007;
d2=2.0628809405e+007; d3=2.3422377972e+007;
f00=-a0^2-b0^2-c0^2+d0^2; f11=-a1^2-b1^2-c1^2+d1^2;
f22=-a2^2-b2^2-c2^2+d2^2; f33=-a3^2-b3^2-c3^2+d3^2;
a03=2*(a0-a3); b03=2*(b0-b3); c03=2*(c0-c3); d30=2*(d3-d0); e03=f00-f33;
a13=2*(a1-a3); b13=2*(b1-b3); c13=2*(c1-c3); d31=2*(d3-d1); e13=f11-f33;
a23=2*(a2-a3); b23=2*(b2-b3); c23=2*(c2-c3); d32=2*(d3-d2); e23=f22-f33;
cs2=eval(cf2), cs1=eval(cf1), cs0=eval(cf0)
```

Computation of the stationary receiver range bias x_4

```
sol1=vpa(solve(cs2*x4^2+cs1*x4+cs0),13); x4=sol1
```

Computation of the stationary receiver coordinates $\{x_1=x\}, \{x_2=y\}$ and $\{x_3=z\}$ $x_3=\text{eval}(cx_3)$ $x_2=\text{eval}(cx_2)$ $x_1=\text{eval}(cx_1)$

Check by subtracting the measured from computed distances.

```
check1=sqrt((a0-x1(2,1))^2+(b0-x2(2,1))^2+(c0-x3(2,1))^2)-(d0-x4(2,1))
check2=sqrt((a1-x1(2,1))^2+(b1-x2(2,1))^2+(c1-x3(2,1))^2)-(d1-x4(2,1))
check3=sqrt((a2-x1(2,1))^2+(b2-x2(2,1))^2+(c2-x3(2,1))^2)-(d2-x4(2,1))
check4=sqrt((a3-x1(2,1))^2+(b3-x2(2,1))^2+(c3-x3(2,1))^2)-(d3-x4(2,1))
```


B'.2 Awange-Grafarend Multipolynomial Resultans Algorithm

Αρχείο: Mgps.M

Program Awange-Grafarend Multipolynomial Resultant Algorithm
Department of Geodesy and GeoInformatics, University of Stuttgart,
Germany-29th of August 2001.

Program computes the coefficients cs_2 cs_1 cs_0 of the quadratic equation obtained from the Groebner basis approach. All that is required from the user is to replace the four satellite coordinates and their respective pseudo-range measurements as explained in the input section of the program. The example considered is adopted from A. Kleusberg (1994), Zeitschrift fur Vermessungswesen 119(1994)188-192 and Grafarend and Shan (1996), ARTIFICIAL SATELLITES, Planetary Geodesy No 28 Vol 31 pp.133-147.

Multipolynomial solution of pseudorange equations based on the B. Sturmfel 1998 approach (Proceedings of Symposium in applied Mathematics 53(1998) 25-29. clear all syms x1 x2 x3 x4 a03 b03 c03 d30 e03 a13 b13 syms c13 d31 e13 a23 b23 c23 d32 e23 a0 a1 a2 a3 b0 b1 b2 b3 c0 c1 c2 c3 d0 d1 d2 d3

Hidding the variables by assigning them degree zero

```
%Hidding x3
jc13=c03*x3+d30*x4+e03; jc23=c13*x3+d31*x4+e13;
jc33=c23*x3+d32*x4+e23;
% Hidding x2
jb12=b03*x2+d30*x4+e03; jb22=b13*x2+d31*x4+e13;
jb32=b23*x2+d32*x4+e23;
%Hidding x1
ja11=a03*x1+d30*x4+e03; ja21=a13*x1+d31*x4+e13;
ja31=a23*x1+d32*x4+e23;
```

Computing the Jacobean determinants determinant jc,jb,ja
jc=det([a03 b03 jc13;a13 b13 jc23;a23 b23 jc33]); jb=det([a03 jb12
c03;a13 jb22 c13;a23 jb32 c23]); ja=det([ja11 b03 c03;ja21 b13
c13;ja31 b23 c23]); cjc=collect(jc,x3); cjb=collect(jb,x2);
cja=collect(ja,x1);

Symbolic computation of the stationary receiver coordinates
 $\{z=x_3\}, \{y=x_2\}$ and $\{x=x_1\}$

$$\begin{aligned}
 cx3 = & -(a_{23}b_{03}d_{31}x_4 + a_{03}b_{13}d_{32}x_4 + a_{03}b_{13}e_{23} \\
 & - a_{23}b_{13}d_{30}x_4 - a_{03}b_{23}d_{31}x_4 - a_{03}b_{23}e_{13} + \dots \\
 & a_{13}b_{23}d_{30}x_4 - a_{13}b_{03}d_{32}x_4 - a_{13}b_{03}e_{23} - a_{23}b_{13}e_{03} \\
 & + a_{23}b_{03}e_{13} + a_{13}b_{23}e_{03}) / \dots \\
 & (a_{23}b_{03}c_{13} + a_{13}b_{23}c_{03} - a_{13}b_{03}c_{23} - a_{23}b_{13}c_{03} \\
 & - a_{03}b_{23}c_{13} + a_{03}b_{13}c_{23}); \\
 cx2 = & -(a_{23}c_{13}d_{30}x_4 + a_{03}c_{23}d_{31}x_4 + a_{03}c_{23}e_{13} \\
 & - a_{23}c_{03}d_{31}x_4 - a_{03}c_{13}d_{32}x_4 - \dots \\
 & a_{03}c_{13}e_{23} + a_{13}c_{03}d_{32}x_4 - a_{13}c_{23}d_{30}x_4 - a_{13}c_{23}e_{03} \\
 & - a_{23}c_{03}e_{13} + a_{23}c_{13}e_{03} + a_{13}c_{03}e_{23}) / \dots \\
 & (a_{23}c_{13}b_{03} + a_{13}b_{23}c_{03} - a_{13}c_{23}b_{03} - a_{23}b_{13}c_{03} \\
 & - a_{03}c_{13}b_{23} + a_{03}c_{23}b_{13}); \\
 cx1 = & -(e_{03}b_{13}c_{23} + d_{32}x_4b_{03}c_{13} + d_{30}x_4b_{13}c_{23} \\
 & - d_{30}x_4c_{13}b_{23} - d_{31}x_4b_{03}c_{23} - e_{03}c_{13}b_{23} - \dots \\
 & e_{13}b_{03}c_{23} + e_{13}c_{03}b_{23} + e_{23}b_{03}c_{13} + d_{31}x_4c_{03}b_{23} \\
 & - d_{32}x_4c_{03}b_{13} - e_{23}c_{03}b_{13}) / \dots \\
 & (a_{23}c_{13}b_{03} + a_{13}b_{23}c_{03} - a_{13}c_{23}b_{03} - a_{23}b_{13}c_{03} \\
 & - a_{03}c_{13}b_{23} + a_{03}c_{23}b_{13});
 \end{aligned}$$

Symbolic computation of the Coefficients of the quadratic equation

$$\begin{aligned}
 cf2 = & ((-a_{23}b_{03}d_{31} + a_{23}b_{13}d_{30} + a_{03}b_{23}d_{31} - a_{03}b_{13}d_{32} \\
 & - a_{13}b_{23}d_{30} + a_{13}b_{03}d_{32})^2 / \dots \\
 & (a_{23}c_{13}b_{03} + a_{13}b_{23}c_{03} - a_{13}c_{23}b_{03} - a_{23}b_{13}c_{03} - a_{03}c_{13}b_{23} + a_{03}c_{23}b_{13})^2 + \\
 & (-a_{23}c_{13}d_{30} + a_{23}c_{03}d_{31} + a_{03}c_{13}d_{32} - a_{03}c_{23}d_{31} \\
 & - a_{13}c_{03}d_{32} + a_{13}c_{23}d_{30})^2 / \dots \\
 & (a_{23}c_{13}b_{03} + a_{13}b_{23}c_{03} - a_{13}c_{23}b_{03} - a_{23}b_{13}c_{03} \\
 & - a_{03}c_{13}b_{23} + a_{03}c_{23}b_{13})^2 + \dots \\
 & (-d_{32}b_{03}c_{13} - d_{30}b_{13}c_{23} + d_{31}b_{03}c_{23} - d_{31}c_{03}b_{23} \\
 & + d_{32}c_{03}b_{13} + d_{30}c_{13}b_{23})^2 / \dots \\
 & (a_{23}c_{13}b_{03} + a_{13}b_{23}c_{03} - a_{13}c_{23}b_{03} - a_{23}b_{13}c_{03} \\
 & - a_{03}c_{13}b_{23} + a_{03}c_{23}b_{13})^2 - 1); \%*x_4^2 \\
 cf1 = & (2*((a_{13}c_{23}e_{03} + a_{03}c_{13}e_{23} - a_{03}c_{23}e_{13} \\
 & - a_{13}c_{03}e_{23} + a_{23}c_{03}e_{13} - a_{23}c_{13}e_{03}) / \dots \\
 & (a_{23}c_{13}b_{03} + a_{13}b_{23}c_{03} - a_{13}c_{23}b_{03} - a_{23}b_{13}c_{03} \\
 & - a_{03}c_{13}b_{23} + a_{03}c_{23}b_{13}) - b_0) * \dots \\
 & (-a_{23}c_{13}d_{30} + a_{23}c_{03}d_{31} + a_{03}c_{13}d_{32} - a_{03}c_{23}d_{31} \\
 & - a_{13}c_{03}d_{32} + a_{13}c_{23}d_{30}) / \dots
 \end{aligned}$$

```

(a23*c13*b03+a13*b23*c03-a13*c23*b03-a23*b13*c03
-a03*c13*b23+a03*c23*b13)+2*...
((-e03*b13*c23+e03*c13*b23+e13*b03*c23-e13*c03*b23
-e23*b03*c13+e23*c03*b13)/...
(a23*c13*b03+a13*b23*c03-a13*c23*b03-a23*b13*c03
-a03*c13*b23+a03*c23*b13)-a0)*...
(-d32*b03*c13-d30*b13*c23+d31*b03*c23-d31*c03*b23
+d32*c03*b13+d30*c13*b23)/...
(a23*c13*b03+a13*b23*c03-a13*c23*b03-a23*b13*c03
-a03*c13*b23+a03*c23*b13)+2*d0+2*...
((a13*b03*e23+a03*b23*e13-a03*b13*e23-a13*b23*e03
+a23*b13*e03-a23*b03*e13)/...
(a23*c13*b03+a13*b23*c03-a13*c23*b03-a23*b13*c03
-a03*c13*b23+a03*c23*b13)-c0)*...
(-a23*b03*d31+a23*b13*d30+a03*b23*d31-a03*b13*d32
-a13*b23*d30+a13*b03*d32)/...
(a23*c13*b03+a13*b23*c03-a13*c23*b03-a23*b13*c03
-a03*c13*b23+a03*c23*b13));%*x4

cf0=(-e03*b13*c23+e03*c13*b23+e13*b03*c23-e13*c03*b23
-e23*b03*c13+e23*c03*b13)/...
(a23*c13*b03+a13*b23*c03-a13*c23*b03-a23*b13*c03
-a03*c13*b23+a03*c23*b13)-a0)^2-...
d0^2+((a13*b03*e23+a03*b23*e13-a03*b13*e23-a13*b23*e03
+a23*b13*e03-a23*b03*e13)/...
(a23*c13*b03+a13*b23*c03-a13*c23*b03-a23*b13*c03
-a03*c13*b23+a03*c23*b13)-c0)^2+...
((a13*c23*e03+a03*c13*e23-a03*c23*e13-a13*c03*e23
+a23*c03*e13-a23*c13*e03)/...
(a23*c13*b03+a13*b23*c03-a13*c23*b03-a23*b13*c03
-a03*c13*b23+a03*c23*b13)-b0)^2;

```

Input data as follows:

{a0,b0,c0}={X1,Y1,Z1} are the coordinates of the first satellite.
d0 is the pseudo-range measured to this satellite
{a1,b1,c1}={X2,Y2,Z2} are the coordinates of the second satellite.
d1 is the pseudo-range measured to this satellite
{a2,b2,c2}={X3,Y3,Z3} are the coordinates of the third satellite.
d2 is the pseudo-range measured to this satellite
{a3,b3,c3}={X4,Y4,Z4} are the coordinates of the fourth satellite.

d3 is the pseudo-range measured to this satellite

```

a0=1.4832308660e+007;a1=-1.5799854050e+007;
a2=1.984818910e+006;a3=-1.2480273190e+007;
b0=-2.0466715890e+007;b1=-1.3301129170e+007;
b2=-1.1867672960e+007;b3=-2.3382560530e+007;
c0=-7.428634750e+006;c1=1.7133838240e+007;
c2=2.3716920130e+007;c3=3.278472680e+006;
d0=2.4310764064e+007;d1=2.2914600784e+007;
d2=2.0628809405e+007;d3=2.3422377972e+007;
f00=-a0^2-b0^2-c0^2+d0^2;f11=-a1^2-b1^2-c1^2+d1^2;
f22=-a2^2-b2^2-c2^2+d2^2;f33=-a3^2-b3^2-c3^2+d3^2;
a03=2*(a0-a3);b03=2*(b0-b3);c03=2*(c0-c3);d30=2*(d3-d0);e03=f00-f33;
a13=2*(a1-a3);b13=2*(b1-b3);c13=2*(c1-c3);d31=2*(d3-d1);e13=f11-f33;
a23=2*(a2-a3);b23=2*(b2-b3);c23=2*(c2-c3);d32=2*(d3-d2);e23=f22-f33;
cs2=eval(cf2),cs1=eval(cf1),cs0=eval(cf0)

```

Computation of the stationary receiver range bias x4

```
sol1=vpa(solve(cs2*x4^2+cs1*x4+cs0),13);x4=sol1
```

Computation of the stationary receiver coordinates {x1=x},{x2=y}

and {x3=z} x3=eval(cx3) x2=eval(cx2) x1=eval(cx1)

Check by subtracting the measured from computed distances.

```

check1=sqrt((a0-x1(2,1))^2+(b0-x2(2,1))^2+(c0-x3(2,1))^2)-(d0-x4(2,1))
check2=sqrt((a1-x1(2,1))^2+(b1-x2(2,1))^2+(c1-x3(2,1))^2)-(d1-x4(2,1))
check3=sqrt((a2-x1(2,1))^2+(b2-x2(2,1))^2+(c2-x3(2,1))^2)-(d2-x4(2,1))
check4=sqrt((a3-x1(2,1))^2+(b3-x2(2,1))^2+(c3-x3(2,1))^2)-(d3-x4(2,1))

```

Bibliography

Μαθηματικά

- [1] Cox D, Little J, O'Shea D, *Using Algebraic Geometry, Graduate Text in Mathematics, Springer, 1998.*
- [2] Fraleigh J, *Εισαγωγή στην Άλγεβρα, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2002.*
- [3] Greuel G, Pfister G., *A Singular Introduction to Commutative Algebra, Springer-Verlag, 2002.*
- [4] Κατσαμπέκης Α, *Θεωρία και Εφαρμογές των Βάσεων Gröbner, Μεταπτυχιακή Διατριβή, Ιωάννινα, 2001.*
- [5] Παντελίδης Γ, *Ανάλυση Ι, Εκδόσεις Ζήτη, 2000.*
- [6] Φελουζής Ε, *Εισαγωγή στη Θεωρία Δακτυλίων, Σημειώσεις Πανεπιστήμιο Αιγαίου.*

Γεωδαισία και Γεωπληροφορική

- [7] Αποστολάκης Κ, *Τοπογραφία, Εκδόσεις Σταμούλης, 1991.*
- [8] Awarnge J, *Gröbner bases, multipolynomial resultants and the Gauss-Jacobi combinatorial algorithms-adjustment of nonlinear GPS/LPS observations, Geodetic Institute University Stuttgart, 2001.*
- [9] Awarnge J, Grafarend E, *Solving Computational Problems in Geodesy and Geoinformatics, Springer, 2004.*
- [10] Awarnge J, Grafarend E, *Partial procrustes solution of the three dimensional orientation problem for GPS/LPS observations, Quo vadis geodesia...? Festschrift to E. W. Grafarend on the occasion of his 60th birthday, Eds. F. Krumm and V. S. Schwarze, Report Nr. 1999.*

-
- [11] Awarnge J, Grafarend E, *Algebraic solution of GPS pseudo-ranging equations, Journal of GPS Solution, Vol 5(3), 2002.*
- [12] Βέης Γ, Μπυλλήρης Χ, Σταθός Δ, *Σημειώσεις Ανώτερης Γεωδαισίας ΕΜΠ, 1995.*
- [13] Δερμάνης Α, *Συντεταγμένες και Συστήματα Αναφοράς Εκδόσεις Ζήτη, 2005.*
- [14] Κορακίτης Ρ, *Σημειώσεις Γεωδαιτικής Αστρονομίας ΕΜΠ, 2006.*
- [15] Λακαφώσης Ν, *Φωτογραμμετρία, Βασικές Έννοιες, Μαθηματικά Μοντέλα και Μέθοδοι, Εκδοτικός Οργανισμός Τ.Ε.Ι. Αθήνας, 2002.*
- [16] Λιβιεράτος Ε, *Γενική Χαρτογραφία και Εισαγωγή στη Θεματική Χαρτογραφία, Εκδόσεις Ζήτη, 1988.*
- [17] Λιβιεράτος Ε, *Θεωρία της Γεωδαισίας, Εκδόσεις Ζήτη, 1992.*
- [18] Λιβιεράτος Ε, Φωτίου Α, *Γεωδαισία και Γεωδαιτικά Δίκτυα, Εκδόσεις Ζήτη, 1993.*
- [19] Παραδείσης Δ, *Σημειώσεις Δορυφορικής Γεωδαισίας, ΕΜΠ, 2000.*
- [20] Πατιάς Π, *Εισαγωγή στη Φωτογραμμετρία, Εκδόσεις Ζήτη, 1991.*
- [21] Πέτσα Ε, *Σημειώσεις: Θεμελιώδεις Έννοιες και Θεμελιώδη Προβλήματα της Φωτογραμμετρίας, Τ.Ε.Ι. Αθήνας, 2000.*
- [22] Τσακίρη Μ, *Εισαγωγή στο GPS, Σημειώσεις ΕΜΠ.*