ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Με θέμα

«Πρόβλεψη μεταβλητότητας σε χρηματοοικονομικές χρονοσειρές»

Της

Μαρίας Αρακά

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
“ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗ ΓΙΑ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ”
(Π.Μ.Σ-Ο.ΔΙ.Μ.)

Επιβλέπων Καθηγητής: Θωμαΐδης Νικόλαος

Χιος
Οκτωβριος 2007

Πρόλογος

Ο σκοπός της μελέτης μας είναι η πρόβλεψη της μεταβλητότητας στη βραχυχρόνια κατανομή (conditional distribution) των αποδόσεων, που παρατηρούνται σε διάφορες χρηματοοικονομικές χρονοσειρές. Γενικά από την βιβλιογραφία ξέρουμε ότι οι χρηματοοικονομικές χρονοσειρές έχουν τρία χαρακτηριστικά¨

1. ομαδοποίηση μεταβλητότητας(volatility clustering)

2. ασύμμετρη μεταβλητότητα (leverage effect)

3. και μακριές ουρές (fat tails)(excess kyrtosis)

Χρησιμοποιούμε διάφορα μοντέλα μεταβλητότητας (GARCH, EGARCH, κτλ) που έχουν προταθεί από την βιβλιογραφία, με διαφορετικές υποθέσεις κατανομών, και επίσης πειραματιζόμαστε με μοντέλα που επιχειρούν να απεικονίσουν εξ' ολοκλήρου την δεσμευμένη κατανομή αποδόσεων (μοντέλα ανάμειξης κατανομών -mixture density models).

Στόχος του κάθε μοντέλου είναι να μοντελοποιήσει αυτά τα χαρακτηριστικά. Αν το δούμε σε όρους κατανομής η δεσμευμένη κατανομή δεν είναι σταθερή αλλά αλλάζει και μάλιστα απότομες πτώσεις ή ανόδους τείνουν να φέρνουν μεγάλη αλλαγή στην μεταβλητότητα. Λόγω αυτού αυξάνεται το εύρος των δυνατών τιμών άρα αλλάζει και η κατανομή.

Έτσι ο στόχος του κάθε μοντέλου είναι να βρει πως η κατανομή διαμορφώνεται σύμφωνα με την πρόσφατη ιστορία της χρονοσειράς. Και να δούμε πόσο καλές προβλέψεις μπορούν να μας δώσουν.

1.1 Στοχαστική διαδικασία

- Μια χρονική σειρά είναι ένα δείγμα με ισαπέχοντα χρονικά σημεία (έτη, τρίμηνα, μήνες, κ.λ.π), ή ισαπέχοντα χρονικά διαστήματα.
- Αν οι παρατηρήσεις είναι συγκεκριμένες τιμές των τυχαίων μεταβλητών X_1, X_2,…….X_n και οι τυχαίες αυτές μεταβλητές είναι υποσύνολο μιας άπειρης σειράς τυχαίων μεταβλητών (ακολουθία τυχαίων μεταβλητών), τότε λέμε ότι η άπειρη αυτή ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών ονομάζεται στοχαστική (stochastic process) και παριστάνεται ως X_t.

1.2 Στασιμότητα

- Τα χαρακτηριστικά μιας κατανομής πιθανότητας περιορίζονται στο μέσο και στη διακύμανση.
- Σε μια συνδυασμένη συνάρτηση πιθανότητας εκτός από το μέσο και τη διακύμανση έχουμε και τη συνδιακύμανση.
- Επομένως από ένα μόνο δείγμα (παρατηρήσεων) δεν μπορούμε να εκτιμήσουμε τις παραπάνω παραμέτρους.
- Το πρόβλημα που δημιουργείτε μπορεί να απλοποιηθεί με την υπόθεση της στασιμότητας (stationarity).
- Επομένως μια στοχαστική διαδικασία είναι στάσιμη όταν οι ιδιότητές της δεν επηρεάζονται από μία αλλαγή μέτρησης της χρονικής περιόδου, δηλαδή η συνδυασμένη συνάρτηση πιθανότητας με αρχή τη χρονική περίοδο t είναι ακριβώς ίδια με τη συνδυασμένη συνάρτηση πιθανότητας με αρχή τη χρονική περίοδο t + k. Όπου k είναι μια τυχαία χρονική περίοδος κατά μήκος του άξονα του χρόνου. Άρα σύμφωνα με τα παραπάνω λέμε ότι σε μια συνδυασμένη συνάρτηση πιθανότητας ο μέσος και η διακύμανση δε μεταβάλλονται, ενώ η συνδυακύμανση είναι συνάρτηση μόνο χρονικών υστερήσεων ή προηγήσεων.

1.3 Λευκός θόρυβος

- Όταν σε μία τυχαία διαδικασία $\{\varepsilon_t\}$ ισχύουν οι παρακάτω τρεις υποθέσεις:
  $E(\varepsilon_t) = 0$
  $V(\varepsilon_t) = \sigma^2$
  $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_t+k) = 0$ για όλα τα t και για κάθε $k \neq 0$

  τότε λέμε η διαδικασία αυτή είναι διαδικασία λευκού θορύβου (white noise process).

1.4 Τυχαίος περίπατος

- Έστω μία απλή στοχαστική διαδικασία που ορίζεται από μία αυτοπαλίνδρομη διαδικασία πρώτης τάξης ως εξής:
  $X_t = \beta X_t - 1 + \varepsilon_t$
  όπου η ε_t ακολουθεί τη διαδικασία λευκού θορύβου (βλέπε λευκό θόρυβο).
- Αν β = 1 το παραπάνω υπόδειγμα γίνεται:
  $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$
  Το παραπάνω υπόδειγμα είναι γνωστό ως τυχαίος περίπατος (random walk) Όταν στο παραπάνω υπόδειγμα υπάρχει σταθερό όρος δηλαδή είναι της μορφής
  $X_t = \alpha + X_{t-1} + \varepsilon_t$
  Τότε λέμε ότι το υπόδειγμα είναι τυχαίος περίπατος με περιπλάνηση (random walk with drift)
  Μια στοχαστική διαδικασία που ακολουθεί τον τυχαίο περίπατο δεν είναι στάσιμη

1.5 Χρονική τάση

- Χρονική τάση λέμε τη μακροχρόνια μεταβολή (αύξηση ή μείωση) που παρατηρείται σε μια μεταβλητή κατά τη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου, δηλαδή την τάση που έχει μία μη στάσιμη χρονική σειρά. Έστω το υπόδειγμα
  $X_t = \alpha + \beta_t + \gamma X_{t-1} + \varepsilon_t$
  όπου ε_t είναι λευκός θόρυβος και t ο χρόνος ως μία ανεξάρτητη μεταβλητή.

1. Αν β = 0 και γ = 1 τότε το υπόδειγμα γράφεται ως ακολούθως:

$X_t = \alpha + X_{t-1} + \varepsilon_t$ ή $\Delta X_t = \alpha + \varepsilon_t$

Στην τελευταία αυτή συνάρτηση η μεταβλητή X_t κινείται ανοδικά ή καθοδικά ανάλογα με το πρόσημο του α. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι έχουμε στοχαστική τάση και η συνάρτηση ονομάζεται στάσιμη διαδικασία των διαφορών, διότι η μη στασιμότητα στη X_t μπορεί να απαλειφθεί όταν πάρουμε τις πρώτες διαφορές αυτής της χρονικής σειράς

2. Αν $\beta \neq 0$ και γ = 0

τότε το υπόδειγμα γράφεται ως ακολούθως:

$X_t = \alpha + \beta_t + \varepsilon_t$

Στην περίπτωση αυτή η μεταβλητή X_t κινείται ανοδικά ή καθοδικά ανάλογα με το πρόσημο του β οπότε λέμε ότι έχουμε προσδιοριστική τάση και η συνάρτηση ονομάζεται στάσιμη διαδικασία τάσεως, διότι η μη στασιμότητα στη X_t μπορεί να απαλειφθεί αν αφαιρέσουμε την τάση $(\alpha + \beta_t)$ από τη χρονική αυτή σειρά.

3. Αν $\beta \neq 0$ και γ = 1

τότε το υπόδειγμα γράφεται ως ακολούθως:

$X_t = \alpha + \beta_t + \gamma X_{t-1} + \varepsilon_t$

Στην περίπτωση αυτή η μεταβλητή X_t κινείται ανοδικά ή καθοδικά ανάλογα με το συνδυασμένο αποτέλεσμα και των δύο προσήμων (α και β) οπότε λέμε ότι έχουμε στοχαστική και προσδιοριστική τάση.

Για την περίπτωση αυτή δηλαδή της στοχαστικής και προσδιοριστικής τάσης χρησιμοποιούμε διάφορους ελέγχους όπως είναι και ο έλεγχος των Dickey and Fuller (1979).

1.6 Στασιμότητα των χρονικών σειρών

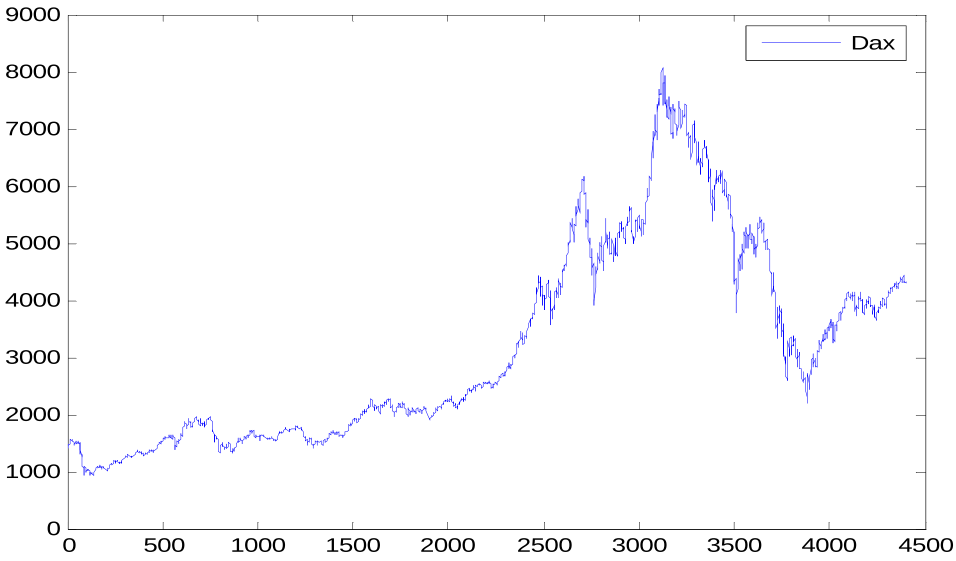
Για να εφαρμόσουμε την ανάλυση της παλινδρόμησης στις χρονικές σειρές θα πρέπει τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται να προέρχονται από στάσιμες διαδικασίες. Οι περισσότερες οικονομικές σειρές είναι μη στάσιμες. Άρα πριν εφαρμόσουμε την παλινδρόμηση σ' αυτές τις χρονικές σειρές θα πρέπει να κάνουμε τους ελέγχους για τη στασιμότητα των χρονικών αυτών σειρών.

- Μια χρονική σειρά λέγεται στάσιμη όταν η τιμή της ταλαντεύεται γύρω από το μέσο, δηλαδή οι τιμές που αυτή παίρνει στα διάφορα χρονικά διαστήματα έχουν τον ίδιο μέσο, την ίδια διακύμανση και η τιμή της συνδιακύμανσής της μεταξύ δύο χρονικών περιόδων εξαρτάται μόνον από την υστέρηση μεταξύ των δύο χρονικών περιόδων δηλαδή από την απόσταση ανάμεσα στα δύο αυτά χρονικά σημεία και όχι από την πραγματική χρονική περίοδο που υπολογίζεται η συνδιακύμανση.

Μια χρονική σειρά Yt είναι στάσιμη όταν:
Μέσος:
$E(Yt) = \mu$
Διακύμανση:
$Var(Yt) = E(Yt - \mu)^2 = \sigma^2$
Συνδιακύμανση:
$Cov(Yt , Yt+k) = E[(Yt - \mu) (Yt+k - \mu)] = \gamma\kappa$

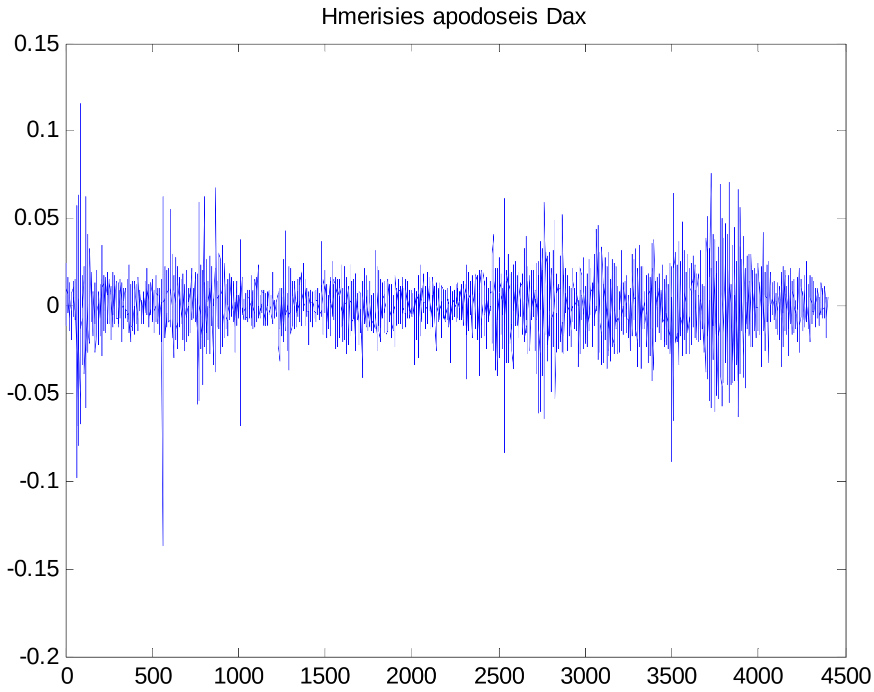
- Αν μία τουλάχιστο από τις παραπάνω σχέσεις δεν ισχύει, τότε η χρονική σειρά Yt χαρακτηρίζεται μη στάσιμη.
- Δηλαδή σε μία μη στάσιμη χρονική σειρά τόσο ο μέσος, όσο και η διακύμανση είναι συνάρτηση του χρόνου. Στην πράξη είναι πολύ δύσκολο να βρούμε στάσιμες χρονικές σειρές ιδιαίτερα δε στην οικονομική επιστήμη.
- Μια χρονική σειρά δεν είναι στάσιμη όταν παρουσιάζει τάση (ανοδική ή καθοδική), όταν μεταβάλλεται η μεταβλητότητα της σε συνάρτηση με τον χρόνο ή όταν παρουσιάζει εποχικότητα.

Παρακάτω βλέπουμε μια μη στάσιμη χρονοσειρά. Είναι οι τιμές κλεισίματος του δείκτη Dax.



Διάγραμμα 1

Και στο επόμενο σχήμα βλέπουμε μια στάσιμη χρονοσειρά. Είναι οι αποδόσεις του δείκτη Dax.



Διάγραμμα 2

1.7 Τιμές, Αποδόσεις

Είναι προτιμητέο να μην εργαζόμαστε με τις τιμές των χρεογράφων αλλά να τις μετατρέπουμε σε αποδόσεις γιατί συνήθως οι αποδόσεις είναι στάσιμες χρονοσειρές. Υπάρχουν δύο τρόποι για αυτό, οι απλές αποδόσεις και οι λογαριθμικές αποδόσεις που δίνονται από τις εξισώσεις (1-1) και (1-2).
Εάν οι διαδοχικές παρατηρήσεις τιμών που γίνονται σε χρόνο t και t+1 είναι P_t και P_{t+1}, αντίστοιχα, και η αντίστοιχη σειρά αποδόσεων είναι y_t τότε οι:

Λογαριθμικές αποδόσεις είναι

$$y_t = log\frac{P_{t+1}}{P_t} = \log P_{t+1} - \log P_t \qquad (1.1)$$

Απλές αποδόσεις.

$$y_t = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t} = \frac{P_{t+1}}{P_t} - 1 \qquad (1.2)$$

Οι λογαριθμικές αποδόσεις είναι περισσότερο διαδεδομένες στα GARCH μοντέλα και προτιμάται περισσότερο για τις χρονοσειρές. Όμως τα μοντέλα GARCH είναι βασισμένα σε υψηλής συχνότητας δεδομένα (π.χ. σε καθημερινές ή εβδομαδιαίες παρατηρήσεις), η διαφορά ανάμεσα στις δυο μεθόδους είναι ελάχιστη.

1.8 Ομαδοποίηση μεταβλητότητας (volatility clustering)

Στα οικονομικά, ομαδοποίηση μεταβλητότητας (volatility clustering) αναφέρεται στις παρατηρήσεις, όπως είπε ο Mandelbrot, όπου *"μεγάλες αλλαγές τείνουν να ακολουθούνται από μεγάλες αλλαγές, και οι μικρές αλλαγές τείνουν να ακολουθούνται από τις μικρές αλλαγές."* Μια ποσοτική εκδήλωση από αυτό το γεγονός είναι αυτό, ενώ οι απλές αποδόσεις είναι μεταξύ τους ασυσχέτιστες, οι απόλυτες αποδόσεις $|r_t|$ ή τα τετράγωνά τους επιδεικνύουν μια θετική, μια στατιστικά σημαντική και αργά ελλατούμενη (and slowly decaying) συνάρτηση αυτοσυσχέτησης: $corr(|r_t|, |r_{t+\tau}|) > 0$ οπού τ είναι από μερικά λεπτά έως αρκετές εβδομάδες.

Οι παρατηρήσεις αυτού του τύπου στην χρονοσειρά έχουν οδηγήσει στη χρήση GARCH μοντέλων για τις χρηματοοικονομικές προβλέψεις και την τιμολόγηση των παραγώγων. Τα ARCH μοντέλα (Engle, 1982) και τα GARCH μοντέλα (Bollerslev, 1986) στόχος τους είναι να περιγράψουν ακριβέστερα το φαινόμενο της ομαδοποίησης της μεταβλητότητας και σχετικά χαρακτηριστικά όπως η υπερβάλλουσα κύρτωση. Η κύρια ιδέα πίσω από αυτά τα δύο ευρέως χρησιμοποιούμενα μοντέλα είναι ότι η μεταβλητότητα είναι εξαρτώμενη από το πρόσφατο παρελθόν μιας χρονοσειράς. Αυτό είναι μια ακριβέστερη διατύπωση της διαίσθησης ότι η μεταβλητότητα τείνει να επανέλθει σε κάποιο μέσο όρο παρότι παραμένει σταθερή ή κινείται μονοτονικά (http://en.wikipedia.org/wiki/Monotonic) στο χρόνο.

1.9 Μακριές ουρές (Fat tail)

Η κύρτωση μετρά το πόσο "παχιές" είναι οι ουρές της κατανομής. Υπερβολική κύρτωση σημαίνει ότι η κατανομή έχει ‘παχύτερες’ ουρές από μια κανονική κατανομή. Παχιές ουρές σημαίνει ότι υπάρχει υψηλότερη από την κανονική πιθανότητα των μεγάλων θετικών και αρνητικών αποδόσεων[1].

Όταν υπολογίζουμε την κύρτωση : και το αποτέλεσμα είναι +3.00 δείχνει την απουσία κύρτωση (η κατανομή είναι μεσοκυρτοτική). Για την απλότητα στην ερμηνεία του, μερικοί στατιστικοί ρυθμίζουν αυτό το αποτέλεσμα σε μηδέν και έπειτα οποιαδήποτε εκτός από μηδέν αναφέρεται ως υπερβάλλουσα κύρτωση. Οι αρνητικοί αριθμοί δείχνουν μια πλατικυρτωτική(platykurtic) κατανομή; οι θετικοί αριθμοί δείχνουν μια λεπτοκυρτωτική (leptokurtic) κατανομή.

Μια υπερβολικής κύρτωσης κατανομή έχει αιχμηρότερη "κορυφή" και παχύτερες ουρές, ενώ μια χαμηλής κύρτωσης κατανομή έχει μια περισσότερο στρογγυλευμένη κορυφή και μακρύτερες ουρές.

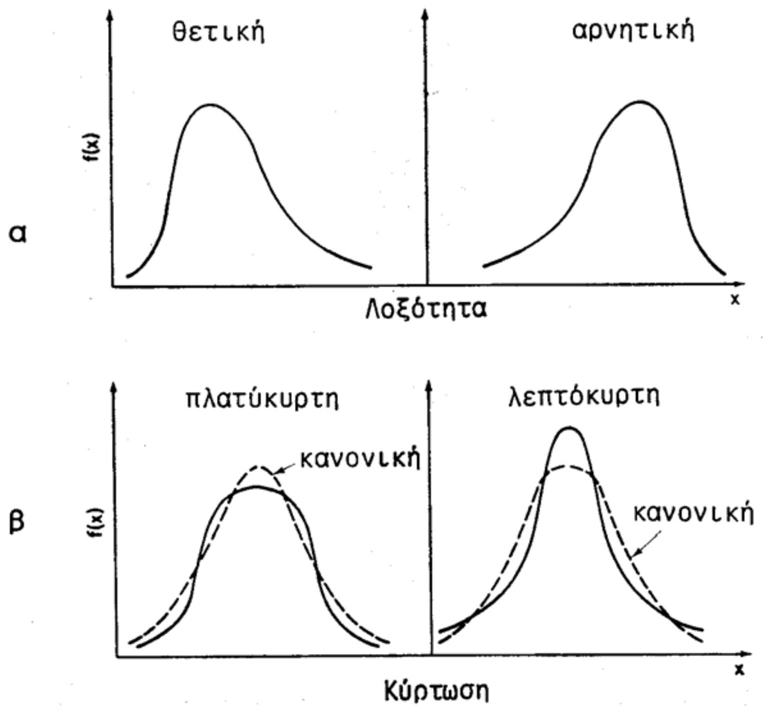
Οι κατανομές με μηδενική κύρτωση καλούνται μεσοκυρτωτικές(mesokurtotic). Το πιο σημαντικό παράδειγμα μιας μεσοκυρτωτικής κατανομής είναι οι κατανομές που βρίσκονται στην οικογένεια κατανομών της κανονικής κατανομής. Άλλες μεσοκυρτωτικές κατανομές είναι : π.χ. η διονυμική κατανομή (binomial distribution) για

$$p = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{12}}.$$

Μια κατανομή με θετική κύρτωση καλείται λεπτοκυρτωτική (leptokurtic). Από την άποψη της μορφής, μια λεπτοκυρτωτική κατανομή έχει μια οξύτερη "κορυφή" γύρω από την μέση τιμή(δηλαδή μια υψηλότερη πιθανότητα από μια κανονικά κατανεμημένη μεταβλητή από τις τιμές κοντά στο μέσο όρο) και "παχιές ουρές" (δηλαδή μια υψηλότερη πιθανότητα από μια κανονικά κατανεμημένη μεταβλητή σε ακραίες τιμές).

Μια κατανομή με αρνητική κύρτωση καλείται πλατικυρτωτική (platykurtotic). Από την άποψη της μορφής, μια πλατικυρτωτική (platykurtic) κατανομή έχει μικρότερη "κορυφή" γύρω από το μέσο όρο (δηλαδή μια χαμηλότερη πιθανότητα από μια κανονικά κατανεμημένη μεταβλητή των τιμών κοντά στο μέσο όρο) και "λεπτές ουρές" (δηλαδή μια χαμηλότερη πιθανότητα από μια κανονικά κατανεμημένη μεταβλητή σε ακραίες τιμές). Παράδειγμα πλατικυρτωτικής (platykurtic) κατανομής περιλαμβάνει η ομοιόμορφη κατανομή. Η πιο πλατυκυρτωτική κατανομή είναι η Bernoulli κατανομή με p = ½.

[1] Η κανονική κατανομή και η t-student κατανομή είναι συμμετρικές κατανομές και οι δύο απλά η κατανομή t-student έχει μια επιπλέον παράμετρο τους βαθμούς ελευθερίας που καθορίζουν την μορφή στα άκρα. Ο λόγος που χρησιμοποιούμε την t-student κατανομή είναι για να εκτιμούμε την διακύμανση σ^2



Διάγραμμα 3

1.10 Ασύμμετρη μεταβλητότητα (Asymmetry Volatility)

Η σχέση μεταξύ των αποδόσεων μιας μετοχής και της μεταβλητότητας της είναι το κέντρο για την αξιολόγηση ενός χρηματοοικονομικού παράγωγου και της διαχείρισης χαρτοφυλακίων. Οι εμπειρικοί ερευνητές έχουν τεκμηριώσει μια ασυμμετρία στην διακύμανση των χρηματιστηριακών τιμών. Η ασυμμετρία σε αυτήν την σχέση έχει σημαντικές επιπτώσεις στις αξιολογήσεις των επιλογών και της πρόβλεψης της μεταβλητότητας.

Για να καταλάβουμε καλύτερα την ασύμμετρη μεταβλητότητα θα ενσωματώσουμε στα μοντέλα μεταβλητές που μετράν αυτή την ασυμμετρία με ένα πιο αποδοτικό τρόπο. Η ασύμμετρη φύση στις αποδόσεις και στην μεταβλητότητα είναι καλά τεκμηριωμένη στην υπάρχουσα εμπειρική βιβλιογραφία. Οι ερευνητές παρατηρούν ότι όταν οι κακές ειδήσεις φθάνουν στο χρηματιστήριο, η μελλοντική μεταβλητότητα αυξάνεται γενικά. Με άλλα λόγια οι αποδόσεις και η μεταβλητότητα είναι αρνητικά συσχετισμένες. Αυτή η επίδραση είναι εντονότερη κατά τη διάρκεια των συντριβών του χρηματιστηρίου. Παραδείγματος χάριν, η πτώση 22% στις 19 Οκτωβρίου ..1987 που οδηγεί σε μια τεράστια αύξηση της μεταβλητότητας. Αφ' ετέρου, οι καλές ειδήσεις δεν προκαλούν ιδιαιτέρα μεγάλη μείωση στην μεταβλητότητα. Κατά συνέπεια, η μεταβλητότητα είναι ασύμμετρη ανάλογα στις καλές και τις κακές ειδήσεις.

Πρόσφατες μελέτες από τον Black (1976) και Christie (1982) αποδίδουν ότι η ασύμμετρη μεταβλητότητα έχει προέλθει από τις αλλαγές στο financial leverage (the debt-equity ratio). Μια άλλη εξήγηση της ασυμμετρίας είναι η υπόθεση του time-varying risk premium όπως έχει συζητηθεί από τους French, Schwert και Stambaugh (1987): μια προσδοκώμενη αύξηση στην αστάθεια αυξάνει την απαιτούμενη return on equity, όπου οδηγεί σε μια άμεση πτώση των τιμών των μετοχών. Οι Campbell και Hentschel (1992) επισήμαναν ότι και τα δύο αποτελέσματα συμβάλλουν στην ασύμμετρη συμπεριφορά της μεταβλητότητας του χρηματιστηρίου: the leverage effect and the volatility feedback effect (εάν αναμένουμε η απόδοση των μετοχών να αυξηθεί όταν η μεταβλητότητα αυξάνεται, και εάν αναμένονται τα μερίσματα να είναι αμετάβλητα, κατόπιν οι τιμές των μετοχών πρέπει να πέσουν όταν αυξάνεται η μεταβλητότητα). Εντούτοις, η εξήγησή τους δεν μπορεί επίσης πλήρως να αποτελέσει την παρατηρηθείς μεταβλητότητα. Με την σύγκριση των δύο αποτελεσμάτων, οι Bekaert and Wu (2000) απέδωσαν το μεγαλύτερο μέρος της ασυμμετρίας της μεταβλητότητας στο πρόσφατο παρελθόν. Το όνομα ”volatility feedback” μπορεί να εξηγηθεί με τον ακόλουθο τρόπο: ” εάν η μεταβλητότητα διατιμάται, μια προσδοκώμενη αύξηση στην μεταβλητότητα αυξάνει την απαραίτητη return to equity, που οδηγεί σε μια άμεση πτώση τιμών των μετοχών” (Wu (2001)).

Κεφάλαιο 2 ~ Μοντέλα

2.1 Γενικά

Ενα αυτοπαλίνδρομο υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικό (autoregressive conditionally heteroscedastic - ARCH) μοντέλο είναι ένα μοντέλο χρονοσειρών με εφαρμογές στην οικονομετρία που θεωρεί τη διακύμανση του τρέχοντος σφάλματος ως συνάρτηση των διακυμάνσεων των όρων σφάλματος των προηγούμενων χρονικών περιόδων.

Αν υποτεθεί ένα αυτοπαλίνδρομο μοντέλο κινητού μέσου (AutoRegressive Moving Average model - ARMA) για τη διακύμανση του σφάλματος, τότε το υπόδειγμα είναι το γενικευμένο αυτοπαλίνδρομο υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικό (generalized autoregressive conditionally heteroscedastic - GARCH) μοντέλο.

2.2 Υπό Συνθήκη Μεταβλητότητα - ARCH(q)

Ο Engle (1982) χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο για τον πληθωρισμό στην Μεγάλη Βρετανία, εισήγαγε το φαινόμενο της υπό συνθήκη μεταβλητότητας, δείχνοντας πως μεγάλα και μικρά σφάλματα πρόβλεψης τείνουν να εμφανίζονται σε ομάδες, πράγμα που υποδεικνύει ότι η διακύμανση έχει έναν τύπο ετεροσκεδαστικότητας η οποία εξαρτάται από τις προηγούμενες τιμές του διαταρακτικού όρου. Ονόμασε αυτού του είδους την ετεροσκεδαστικότητα autoregressive conditional heteroscedasticity δηλαδή υπό συνθήκη μεταβλητότητα. Αυτού του είδους η ετεροσκεδαστικότητα βρίσκει εφαρμογή τόσο στα μοντέλα παλινδρόμησης όσο και στα μοντέλα αυτοπαλινδρόμησης (autoregression). Σύμφωνα με αυτό το μοντέλο, ο διαταρακτικός όρος σε ένα μοντέλο ARCH(1) είναι:

$$\varepsilon_t = \nu_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2}$$

όπου αποτελεί μια διαδικασία λευκού θορύβου με διακύμανση σ^2. Αποδεικνύεται εύκολα με βάση αυτές τις υποθέσεις ότι, τόσο ο μέσος όσο και ο υπό συνθήκη μέσος του διαταρακτικού όρου είναι μηδέν, η διακύμανση είναι σταθερή, αλλά η υπό συνθήκη διακύμανση δεν είναι σταθερή και έχουμε υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητα. Η παραπάνω σχέση ονομάζεται υπό συνθήκη μεταβλητότητα πρώτου βαθμού καθώς περιλαμβάνει μία υστέρηση του διαταρακτικού όρου. Ο Engle (1982) μας δίνει την γενικευμένη μορφή της υπό συνθήκη μεταβλητότητας με q υστερήσεις ARCH(q):

$$\varepsilon_t = \nu_t \sqrt{\alpha_0 + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2}$$

2.3 Τι είναι GARCH?

Τα ARCH και GARCH μοντέλα έχουν εφαρμοστεί σε ένα ευρύ φάσμα της χρηματοοικονομικών σειρών , αλλά οι εφαρμογές στη χρηματοδότηση είναι ιδιαίτερα επιτυχείς και είναι η εστίαση αυτής της εισαγωγής. Οι χρηματοδοτικές αποφάσεις είναι γενικά βασισμένες στον συνδυασμό μεταξύ του κινδύνου και της απόδοσης; η οικονομετρική ανάλυση του κινδύνου είναι ένα μέρος της τιμολόγησης χαρτοφυλακίων, βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίων, τιμολόγησης παραγώγων και διαχείριση κινδύνου. Η ανάλυση των ARCH και GARCH μοντέλων και οι πολλές επεκτάσεις τους παρέχουν ένα στατιστικό στάδιο στο οποίο πολλές θεωρίες από την τιμολόγηση παραγώγων και χαρτοφυλακίων μπορεί να εξεταστεί.

Το GARCH είναι ένα Γενικευμένο αυτοπαλίνδρομο υπό όρους ετεροσκεδαστικότητας (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) μοντέλο. Αόριστα μιλώντας, μπορούμε να πούμε ότι η ετεροσκεδαστικότητα είναι ένας όρος που χρησιμοποιείτε για μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών όταν οι τυχαίες μεταβλητές που την αποτελούν έχουν διαφορετική διακύμανση.(i.e.,volatility). Ο όρος υπό όρους (Conditional) υπονοεί μια εξάρτηση από τις παρατηρήσεις του άμεσου παρελθόντος, και ο όρος αυτοπαλίνδρομο (autoregressive) περιγράφει έναν ανατροφοδοτικό μηχανισμό που ενσωματώνει προηγούμενες παρατηρήσεις στο παρόν. Τα GARCH μοντέλα είναι ένας μηχανισμός που περιλαμβάνει τις προηγούμενες διακυμάνσεις για να βρει διακυμάνσεις για το μέλλον. Πιο συγκεκριμένα, τα GARCH μοντέλα, χρησιμοποιούν προηγούμενες διακυμάνσεις και προηγούμενες προβλέψεις διακυμάνσεων για να προβλέψει μελλοντικές διακυμάνσεις. Όποτε όταν μιας χρονοσειράς η διακύμανση αλλάζει με το χρόνο λέγετε ετεροσκεδαστική. Εάν η διακύμανση παραμένει ίδια στο χρόνο η χρονοσειρά λέγετε ομοσκεδαστική.

2.4 Γιατί χρησιμοποιούμε τα GARCH μοντέλα;

Τα GARCH μοντέλα (Bollerslev(1986)), τα οποία φτιάχτηκαν πριν μια δεκαετία για να μπορέσουν να εξηγήσουν την αστάθεια στην διακύμανση. Λαμβάνουν υπόψη την υπερβολική κύρτωση(π.χ μακριές ουρές) και την ομαδοποίηση μεταβλητότητας (volatility clustering), δύο σημαντικά χαρακτηριστικά των χρηματοοικονομικών χρονοσειρών. Γενικά τα μοντέλα GARCH ανήκουν στην οικογένεια των μοντέλων που παραμετροποιούν τον μέσο και την διακύμανση . Οπότε ότι μοντέλο μέσου ή διακύμανσης του βάλω μπορεί να το εκτιμήσει. Εμείς θέλουμε GARCH μοντέλα δηλαδή Autoregressive Conditional Heteroskedasticity μοντέλα διότι είναι συναρτήσει και προηγούμενων τιμών της μεταβλητότητας και εμείς θέλουμε να ξέρουμε για την προηγούμενη ιστορία της μεταβλητότητας λόγω του φαινόμενου που υπάρχει και λέγεται ομαδοποίηση μεταβλητότητας ότι δηλαδή οι μεγάλες διακυμάνσεις τείνουν να ακολουθούνται από μεγάλες διακυμάνσεις και οι μικρές διακυμάνσεις τείνουν να ακολουθούνται από μικρές διακυμάνσεις για αυτό το λόγω ένα μοντέλο πχ. $\sigma^2 = \kappa + y_{t-1}$ θα αποτύγχανε να μοντελοποίηση την μεταβλητότητα γιατί δεν έχει προηγούμενες τιμές της μεταβλητότητας.

Μπορούμε να εφαρμόσουμε τα GARCH μοντέλα σε διαφορετικούς τομείς όπως διαχείριση κινδύνου, διαχείριση χαρτοφυλακίων, για τιμολόγηση options, συνάλλαγμα, και την δομή των επιτοκίων. Μπορούμε να βρούμε εφαρμογές των μοντέλων GARCH στα equity markets, όχι μόνο για απλές μετοχές, αλλά και για χαρτοφυλάκια μετοχών και δεικτών, και αγορές μελλοντικών συμβολαίων. Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε τα GARCH μοντέλα για να εξετάσουμε την σχέση μεταξύ μακροπρόθεσμων και βραχυπρόθεσμων επιτοκίων. Οι αγορές συναλλάγματος, οι οποίες παρουσιάζουν μεγάλες περιόδους από διακυμάνσεις και ηρεμία με σημαντική συμπεριφορά μακριών ουρών είναι καλά ταιριασμένες για τα GARCH μοντέλα.

2.5 GARCH Περιορισμοί

Αν και τα μοντέλα GARCH είναι χρήσιμα για ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών, έχουν και κάποιους περιορισμούς:

- Τα GARCH μοντέλα είναι μόνο ένα μέρος της λύσης. Αν και τα GARCH μοντέλα είναι συνήθως εφαρμοσμένα σε σειρές αποδόσεων, αλλά οι χρηματοδοτικές αποφάσεις είναι σπάνια βασισμένες απλώς στις αναμενόμενες αποδόσεις και τις διακυμάνσεις.
- Τα GARCH μοντέλα είναι παραμετρικά που λειτουργούν καλύτερα κάτω σχετικά σταθερές συνθήκες στην αγορά . Αν και τα GARCH μοντέλα είναι αποκλειστικά σχεδιασμένα για να μοντελοποιούν time-varying conditional variances, τα GARCH μοντέλα συχνά αποτυγχάνουν να ενσωματώσουν τα ιδιαίτερα ανώμαλα φαινόμενα, συμπεριλαμβανομένων των μεγάλων διακυμάνσεων αγοράς (π.χ. πτώσεις και επόμενες αναπηδήσεις), και άλλα ιδιαίτερα απρόβλεπτα γεγονότα που μπορούν να οδηγήσουν σε σημαντική δομική αλλαγή.
- Τα GARCH μοντέλα συχνά αποτυγχάνουν να λάβουν πλήρως τις παχιές ουρές που παρατηρούνται στην χρηματοοικονομικές χρονοσειρές. Η ετεροδαστικότητα μπορεί να εξηγήσει κάποιες συμπεριφορές από τις παχιές ουρές αλλά όχι όλες από αυτές. Κατανομές με ιδιότητες όπως η κανονική κατανομή δεν μπορεί να πιάσει πολύ τις ακραίες τιμές ενώ η κατανομή student-t που έχει το χαρακτηριστικό των ‘παχιών ουρών’ είναι πιο εύρωστη σε ακραία φαινόμενα που παρατηρούμε συχνά στην μεταβλητότητα, αλλά συχνά η επιλογή της κατανομής είναι ένα θέμα δοκιμής και λάθους.

2.6 Υπό όρους μοντέλα για τον μέσο

Η αναμενόμενη τιμή των αποδόσεων μιας μετοχής αλλάζει με τον χρόνο, όπως έχει προσδιοριστεί από την σχέση της με της αποδόσεις της αγοράς και όποια άλλη επεξηγηματική μεταβλητή. Αυτή η προσδοκία είναι η υπό όρους μέση τιμή. Το κλασσικό μοντέλο λαμβάνει υπόψη ότι τα σφάλματα του μοντέλου ε_t είναι ομοσκεδαστική διαδικασία.. Δηλαδή έχει τα σφάλματα έχουν μια συνεχή διακύμανση $V(\varepsilon_t) = \sigma^2$ όποια και αν είναι η τιμή της εξαρτώμενης μεταβλητής. Η ιδέα για τα GARCH μοντέλα όπως έχουμε αναφέρει ήταν να προσθέσουν μια δεύτερη εξίσωση την υπό όρους διακύμανση. Που εκφράζει την εξέλιξη της υπό όρους διακυμάνσεις των σφαλμάτων $V_t(\varepsilon_t) = \sigma_t^2$.

Τα μοντέλα GARCH όπως έχουμε αναφέρει μπορούν να χρησιμοποιήσουν οποιοδήποτε μοντέλο μέσου δεν είναι δεσμευτικό να είναι ένα ARMA μοντέλο απλά να είναι οποιοδήποτε μοντέλο μέσου απλά να είναι συναρτήσει προηγουμένων τιμών του. Τα περισσότερα μοντέλα βέβαια χρησιμοποιούν ένα πολύ απλό μοντέλο μέσου όπως προσδιορίζεται στην παράγραφο *(2.7.2)*. Σε κάποιες περιπτώσεις είναι καλό να χρησιμοποιείτε μια time-varying υπό όρους μέση τιμή αλλά πρέπει να είμαστε προσεχτικοί να μην χρησιμοποιούμε πολλούς παραμέτρους για να μην δημιουργηθούν προβλήματα σύγκλισης.

2.7 Υπό όρους μοντέλα διακύμανσης

Η δεύτερη εξίσωση σε ένα GARCH μοντέλο είναι η υπό όρους διακύμανση. Τα διαφορετικά μοντέλα GARCH που έχουν δημιουργηθεί είναι από τις διαφορετικές εξισώσεις της υπό όρους διακύμανσης.

Η υπό όρους διακύμανση των σφαλμάτων, σ_t^2, είναι εξ ορισμού

$$Var_{t-1}(y_t) = E_{t-1}(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2 \qquad (2.7.1)$$

Η βασική διορατικότητα των μοντέλων GARCH είναι ότι στην διάκριση μεταξύ των υπό όρους διακυμάνσεων και της διαδικασίας σφαλμάτων. Ο όρος conditional υπονοεί τη ρητή εξάρτηση σε μια προηγούμενη ακολουθία παρατηρήσεων. Ο όρος unconditional ενδιαφέρεται για τη μακροπρόθεσμη συμπεριφορά μιας χρηματοοικονομικής σειράς και δεν υποθέτει καμία ρητή γνώση του παρελθόντος.

Τα διάφορα μοντέλα GARCH χαρακτηρίζουν την υπό όρους κατανομή με την επιβολή εναλλακτικών παραμέτρων για να συλλάβει την τμηματική εξάρτηση της υπό όρους διακύμανσης των καταλοίπων.

Ανάλογα τώρα με το μοντέλο διακύμανσης που θέλω να χρησιμοποιήσω έχουμε τα διαφορετικά μοντέλα GARCH.

Στην ουσία λοιπόν η οικογένεια των GARCH μοντέλων αποτελούνται από τρία μοντέλα. Ένα μοντέλο μέσου, ένα μοντέλο διακύμανσης και ένα μοντέλο κατανομής. Ανάλογα λοιπόν το πώς κάθε φορά εγώ θέλω να εκτιμήσω τα δεδομένα μου αλλάζω τα μοντέλα. Αν εγώ ήθελα να εκτιμήσω δεδομένα με πολύ ασυμμετρία θα μπορούσα να βάλω μια ασύμμετρη κατανομή.

Έτσι λοιπόν με οποιαδήποτε μοντέλο μέσου και να έχω π.χ. $y_t = l(t)$

έχω τα εξής μοντέλα GARCH:

1. Το απλό μοντέλο GARCH με κανονική κατανομή
2. Το απλό μοντέλο GARCH με Student T κατανομή
3. Το μοντέλο EGARCH(εκθετικό μοντέλο) με κανονική κατανομή
4. και το μοντέλο EGARCH με Student T κατανομή

2.7.1 GARCH(P,Q) Conditional Variance

Το γενικό GARCH(P,Q) μοντέλο για την υπό όρους διακύμανση των καταλοίπων είναι:

$$\sigma_t^2 = \mu + \sum_{i=1}^{P} A_i\, \sigma_{t-1}^2 + \sum_{j=1}^{Q} B_j \varepsilon_{t-j}^2$$

(2.7.2)

με τους περιορισμούς

$$\sum_{i=1}^{P} A_i + \sum_{j=1}^{Q} B_j < 1$$

(2.7.3)

$\mu > 0$
$A_i \geq 0 \quad i = 1,2, \dots P$
$B_j \geq 0 \quad j = 1,2,3 \dots, Q$

Σημειώνουμε ότι το βασικό GARCH(P,Q) μοντέλο είναι μια ασύμμετρη διαδικασία διακύμανσης και ο διαταρακτικός όρος αγνοείται.

2.7.2 Απλό μοντέλο GARCH

Το απλό μοντέλο GARCH είναι το μοντέλο GARCH(1,1) με κανονική κατανομή των σφαλμάτων βασισμένο στις εξισώσεις (2.6.1)και Eq. (2.7.2)

$y_t = K + \varepsilon_t$ (2.7.4)

$\sigma_t^2 = \mu + A_1\sigma_{t-1}^2 + B_1\varepsilon_{t-1}^2$ (2.7.5)

Στο υπό όρους μοντέλο του μέσου, εξίσωση (2.7.4), οι αποδόσεις, y_t, αποτελούνται από μια απλή σταθερά, συν έναν ασυσχέτιστο, λευκού θορύβου σφάλμα ε_t. Αυτό το μοντέλο είναι συχνά επαρκές για να περιγράψει τον υπό όρους μέσο όρο σε μια χρηματοοικονομική σειρά αποδόσεων. Οι περισσότερες οικονομικές σειρές αποδόσεων δεν απαιτούν την περιεκτικότητα που ένα πρότυπο ARMAX παρέχει.

Στο υπό όρους μοντέλο διακύμανσης, η εξίσωση (2.7.5), η πρόβλεψη διακύμανσης, σ_t^2,αποτελείται από μια σταθερά συν έναν σταθμισμένο μέσο όρο της πρόβλεψης της προηγούμενης περιόδου,σ_{t-1}^2, και το τετράγωνο της προηγούμενης περιόδου των σφαλμάτων. Αν και οι οικονομικές σειρές αποδόσεων, όπως καθορίζεται στις εξισώσεις (1.1) και εξίσωση (1.2), χαρακτηριστικά εκθέτουν λίγο συσχετισμό, τα τετράγωνα των αποδόσεων συχνά δείχνουν μια στατιστικά σημαντική συσχέτιση. Αυτό υπονοεί το συσχετισμό στη διαδικασία διακύμανσης, και είναι μια ένδειξη ότι τα δεδομένα είναι κατάλληλα για ένα μοντέλο GARCH.

Αν και απλοϊκός, το απλό μοντέλο που φαίνεται στις εξισώσεις (2.7.4) και (2.7.5) έχει διάφορα οφέλη: Αντιπροσωπεύει ένα φειδωλό μοντέλο που απαιτεί για να υπολογίσει μόνο τέσσερις παραμέτρους (K,μ,A_1, και B_1). Σύμφωνα με τους Box και Jenkins ,όσο λιγότερες παραμέτρους έχεις να υπολογίσεις, τόσο λιγότερα που μπορούν να πάνε στραβά. Το απλό GARCH(1,1) μοντέλο συλλαμβάνει το μεγαλύτερο μέρος της μεταβλητότητας στην σειρά αποδόσεων.

2.8 Εκθετική Γενικευμένη Υπό Συνθήκη Μεταβλητότητα - EGARCH(p,q)

Τόσο τα ARCH όσο και τα GARCH μοντέλα είναι σε ένα βαθμό περιοριστικά, υπό την έννοια ότι αφήνουν την υπό συνθήκη διακύμανση να εξαρτάται μόνο από το μέγεθος προγενέστερων διαταραχών (shocks) αλλά όχι και από το πρόσημό τους, καθώς η υπό συνθήκη διακύμανση εξαρτάται από το τετράγωνο των περασμένων διαταραχών. Ένα άλλο πρόβλημα με τα μοντέλα που έχουμε δει ως τώρα είναι ότι κατά την εκτίμηση τέτοιων διαδικασιών πρέπει να θέσουμε επί πλέον περιορισμούς στις παραμέτρους της διακύμανσης, έτσι ώστε αυτή να παραμένει πάντα θετική και πεπερασμένη.

Τα μοντέλα ARCH και GARCH υποθέτουν ότι η υπό συνθήκη διακύμανση είναι συνάρτηση μόνο του μεγέθους των υστερήσεων του σφάλματος και όχι του πρόσημού τους, δηλαδή, μόνο το μέγεθος και όχι το πρόσημο των υστερήσεων του σφάλματος καθορίζουν την υπό συνθήκη διακύμανση. Αυτή η υπόθεση είναι περιοριστική και αυτά τα μοντέλα δεν είναι επαρκή για να συλλάβουν και να περιγράψουν το λεγόμενο «φαινόμενο της μόχλευσης»(άσύμετρη μεταβλητότητα) (leverage effect), για το οποίο μίλησε πρώτος ο Black (1976). Ο Black παρατήρησε ότι για τις μετοχές συχνά οι προς τα κάτω διαταραχές των τιμών τους ακολουθούνται από μεγαλύτερη μεταβλητότητα από ότι οι αυξητικές διαταραχές ίσου μεγέθους. Λόγω αυτών των επιπλοκών, ο Nelson (1991) παρουσίασε μια πιο γενική μορφή για την υπό συνθήκη μεταβλητότητα, το μοντέλο του εκθετικού GARCH(p,q) ή EGARCH(p,q). Το γενικό EGARCH(P,Q) μοντέλο για την (conditional) υπό όρους διακύμανση των σφαλμάτων με δυναμικούς όρους και μια ρητή υπόθεση κατανομής πιθανότητας είναι

$$log\sigma_t^2 = K + \sum_{i=1}^{P} A_i \, log\sigma_{t-1}^2 + \sum_{j=1}^{Q} B_j \left[\frac{|\varepsilon_{t-j}|}{\sigma_{t-j}} - E\left\{ \frac{|\varepsilon_{t-j}|}{\sigma_{t-j}} \right\} \right] + \sum_{j=1}^{Q} L_j \left(\frac{\varepsilon_{t-j}}{\sigma_{t-j}} \right)$$

(2.8.1)

Όπου

$$\{|z_{t-j}|\} - E\left(\frac{|\varepsilon_{t-j}|}{\sigma_{t-j}}\right) - \begin{cases} \sqrt{2/\pi} \text{ για κανονική κατανομή} \\ \sqrt{\frac{\nu-2}{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \text{ για κατανομή } t-student \end{cases}$$

(2.8.2)

Με βαθμούς ελευθερίας ν>2.

Σε αυτή την μορφή η υπό συνθήκη διακύμανση εκφράζεται σε λογαριθμική μορφή έτσι ώστε να είναι πάντα θετική και επίσης ο τέταρτος όρος στο δεξί μέρος της εξίσωσης επιτρέπει στο πρόσημο του σφάλματος να επηρεάζει την υπό συνθήκη διακύμανση και έτσι μπορεί να συλλάβει και περιγράψει το leverage effect.

Τα μοντέλα EGARCH(P,Q) συμπεριφέρνονται σαν μοντέλα ARMA(P,Q) για $log\sigma_t^2$. Κατά συνέπεια, οι σταθεροί περιορισμοί για τα μοντέλα EGARCH(P,Q) συμπεριλαμβάνουν την εξασφάλιση ότι τα eigenvalues του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$\lambda^P - A_1\lambda^{P-1} - A_2\lambda^{P-2} - \cdots - A_P$$

είναι μέσα στον μοναδιαίο κύκλο.

Σημειώνουμε ότι τα μοντέλα EGARCH είναι πλήρως διαφορετικά από τα μοντέλα GARCH δεδομένου ότι τα τυποποιημένα σφάλματα, z_t, χρησιμεύουν ως η αναγκάζοντας μεταβλητή και για την υπό όρους διακύμανση και τα σφάλματα. Τα GARCH μοντέλα επιτρέπουν την ομαδοποίηση της μεταβλητότητας με τον συνδυασμό των G_i και A_i όρων, όπου στα EGARCH μοντέλα συλλαμβάνεται εξ ολοκλήρου από τους όρους G_i.

Η μορφή αυτού του μοντέλου EGARCH(P,Q) εμφανίζεται να προσφέρει ένα πλεονέκτημα δεδομένου ότι δεν κάνει ρητά οποιεσδήποτε υποθέσεις για την υπό όρους κατανομή πιθανότητας (είτε είναι Gaussian or Student's t). Εντούτοις, αυτό δεν ισχύει εξ ολοκλήρου. Αν και καμία κατανομή δεν υποτίθεται ρητά στην παραπάνω εξίσωση. Στην πραγματικότητα, η παραπάνω εξίσωση μπορεί εύκολα να ρυθμιστεί εκ νέου για να δώσει έμφαση στη κατανομή πιθανότητας.

Αν και τα μοντέλα EGARCH(P,Q) δεν απαιτούν κανέναν περιορισμό παραμέτρων για να εξασφαλίσουν θετικές υπό όρους διακυμάνσεις, οι εξισωτικοί περιορισμοί είναι απαραίτητοι. Αφού ένα μοντέλο EGARCH(P,Q) συμπεριφέρεται σαν ένα ARMA(P,Q) μοντέλο για το λογάριθμο της υπό όρους διακύμανσης, επιβάλλουμε μη γραμμικούς περιορισμούς στους συντελεστές για να εξασφαλίσουμε ότι οι eigenvalues του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι μέσα στον μοναδιαίο κύκλο. Το μοντέλο EGARCH(P,Q) είναι ασύμμετρο μοντέλο που κατασκευάστηκε για να πιάσει το leverage effect, ή την αρνητική συσχέτιση, μεταξύ των αποδόσεων των μετοχών και της διακύμανσης. Το μοντέλο EGARCH(P,Q) περιλαμβάνει leverage όρους που λαμβάνει υπόψη ρητά και το μέγεθος του σφάλματος.

Για το μοντέλο EGARCH(P,Q), οι leverage συντελεστές L_i είναι εφαρμοσμένοι στα πραγματικά σφάλματα ε_{t-1}. Και γενικά για να δω το μέγεθος του leverage effect αρκεί να κοιτάξω τον συντελεστή L_i. Για αυτό το λόγω , εάν το leverage effect δεν μπορεί πράγματι να κρατηθεί, οι leverage συντελεστές πρέπει να είναι αρνητικοί. Αυτό είναι σε αντίθεση με τα μοντέλα GARCH(P,Q), στο οποίο τα σφάλματα αγνοούνται. Αν και τα GARCH(P,Q) μοντέλα περιλαμβάνουν όρους σχετικούς με σφάλματα, $\varepsilon_t = z_t\sigma_t$, τα μοντέλα EGARCH(P,Q) περιλαμβάνουν όρους για τα τυποποιημένα σφάλματα, $z_t = \varepsilon_t/\sigma_t$. Από αυτή την άποψη, τα μοντέλα EGARCH(P,Q) είναι πλήρως μοναδικά. Γενικά, δεν υπάρχει καμία ασυμμετρία στο συνάλλαγμα, και επομένως το ασύμμετρο EGARCH(P,Q) μοντέλο είναι συχνά ακατάλληλος για τη διαμόρφωση τέτοιας σειράς αποδόσεων.

2.9 Εκτίμηση GARCH

Εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας

Αν έχουμε μοντέλα για την υπό όρους μέσο και διακύμανση και μια χρονοσειρά, παίρνοντας τα κατάλοιπα από την χρονοσειρά και εκτιμώντας με την μέγιστη πιθανοφάνεια, τις παραμέτρους που χρειάζονται για το συγκεκριμένο μοντέλο της σειράς αποδόσεων.

Προσπαθούμε να βρούμε ένα ελάχιστο μιας μονοδιάστατης συνάρτησης από διάφορες μεταβλητές που αρχίζουν από μια αρχική εκτίμηση. Έπειτα εκτιμούμε τις παραμέτρους μέσω της μέγιστης πιθανοφάνιας (MLE). Η επιλεγμένη log-likelihood συνάρτηση γίνεται σε 3 στάδια:

1. Λαμβάνοντας υπόψη το διάνυσμα των τρεχουσών τιμών παραμέτρου και της χρονοσειράς, η πιθανοφάνεια log-likelihood δίνει τα κατάλοιπα. Αυτό το συμπέρασμα, ή το αντίστροφο φιλτράρισμα, ρυθμίζει εκ νέου την υπό όρους μέση εξίσωση που λύνει για την τρέχουσα καινοτομία ε_t:

$$\varepsilon_t = -C + y_t - \sum_{i=1}^{R} \varphi_i\, y_{t-i} - \sum_{j=1}^{M} \theta_j \varepsilon_{t-j} - \sum_{k=1}^{Nx} \beta_k X(t,k) \qquad (2.9.1)$$

Αυτή η εξίσωση, μετασχηματίζει μια συσχετισμένη διαδικασία y_t σε μια μη συσχετισμένη λευκού θορύβου διαδικασία ε_t.

2. Η εξίσωση πιθανοφάνειας χρησιμοποιεί τα κατάλοιπα για να βρει τις αντίστοιχες υπό όρους διακυμάνσεις μέσω της επαναλαμβανόμενης αντικατάστασης στις εξισώσεις της υπό όρους διακύμανσης.

3. Τέλος, η λειτουργία χρησιμοποιεί τα σφάλματα που έχουν προκύψει και τις υπό όρους διακυμάνσεις για να αξιολογήσει την κατάλληλη log-likelihood εξίσωση. Εάν τα ε_t έχουν κανονική κατανομή η εξίσωση log-likelihood είναι:

$$L = \frac{1}{T}\left\{-\frac{T}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} log\sigma_t^2 - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} {}^{\varepsilon_t^2}\!/_{\sigma_t^2}\right\} \qquad (2.9.2)$$

(5-1) Εάν η κατανομή είναι Student's t, η εξίσωση log-likelihood είναι

$$L = \frac{1}{T}\left\{T\,log\left\{\frac{\Gamma[(v+1)/2]}{\pi^{1/2}\Gamma(\frac{v}{2})}(v-2)^{-1/2}\right\} - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} log\sigma_t^2\right\} \quad (2.9.3)$$

(5-2) Όπου T είναι το μέγεθος του δείγματος . Οι βαθμοί ελευθερίας πρέπει να είναι μεγαλύτεροι του 2.

2.10 MDN(Mixture Density Models)

Όλα τα μοντέλα τύπου GARCH έχουν ένα μοντέλο για το μέσο μ_t και ένα μοντέλο για το σ_t^2 και από εκεί και πέρα μου λέει ότι η μεταβλητή μου ακολουθεί μια συγκεκριμένη κατανομή, που ο μόνος τρόπος να αλλάξεις αυτή την κατανομή είναι να πειράξεις τον μέσο και την διακύμανσή του. Βέβαια μπορούμε να βάλουμε οποιαδήποτε κατανομή θέλουμε απλά εμείς σε αυτή την έρευνα επιλέξαμε συμμετρικές κατανομές την κανονική και την t-student. Το μόνο λοιπόν που μπορούμε να κάνουμε είναι να αλλάξουμε το εύρος ή να την κεντράρουμε σε διαφορετικό σημείο. Το θέμα είναι να δούμε αν αυτό αρκεί για τις προβλέψεις.

Οπότε κάποιοι έκαναν διάφορες παρατηρήσεις και είδαν ότι η κατανομή μου η unconditional κατανομή δηλαδή αν βγάλεις το μέσο και αν βγάλεις και την επίδραση της χρονικά μεταβαλλόμενης διακύμανσης που αυτό το κάνουμε αν ορίσουμε το z_t όπου $z_t = \frac{y_t - \mu_t}{\sigma_t} \sim D(0,1)$ αυτό πρέπει να ακολουθεί μια κατανομή που είναι σταθερή στον χρόνο όμως βλέπουμε ότι αυτή η κατανομή δεν είναι τόσο σταθερή και επιπλέον εμφανίζει ασυμμετρίες κτλ. Άρα κάποιοι είπαν ότι ενδεχομένως εδώ μπορείς να βάλεις μια κατανομή η οποία είναι ασύμμετρη και έχει μια παράμετρο ακόμη που ελέγχει την ασυμμετρία της. Από την στιγμή που θα την προσδιορίσουμε την κατανομή θα είναι σταθερή για όλες τις παραμέτρους. Η ιδέα λοιπόν ήταν ότι αντί να κοιτάμε τον μέσο και την διακύμανση μήπως θα μπορούσαμε με κάποιο τρόπο να ελέγχουμε κατευθείαν την κατανομή και ανάλογα με το τι συμβαίνει στην αγορά να την αλλάζουμε; Δηλαδή άλλοτε να τραβάμε την ουρά της άλλοτε να την γέρνουμε κτλ.

Η ιδέα ήταν η εξής σκέφτηκαν πώς να κάνουν μια κατανομή που να έχει αυτό το χαρακτηριστικό. Έτσι λοιπόν μπορούμε να πάρουμε συμμετρικές κατανομές και να προσπαθήσουμε να τις συνθέσουμε. Όποτε αν θέλουμε μια καινούργια κατανομή $P = n\varphi_1 + (1-n)\varphi_2$ ή $P = n_1\varphi_1 + n_2\varphi_2$ όπου $n_1 + n_2 = 1$ π.χ. $P = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ όπου βλέπει τις 2 κατανομές και παίρνει το μέσο όρο των δυο. Όμως δημιουργείται μια περίεργη κατανομή που έχει περισσότερα από ένα βουναλάκια. Ο περιορισμός $n_1 + n_2 = 1$ είναι για να πάρω μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Όπου μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι απλά ότι το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη είναι 1.

Υπάρχει και ένα θεώρημα που μας λέει ότι αν μου δώσεις οποιαδήποτε κατανομή να είναι βέβαια συνάρτηση πιθανότητας πυκνότητας μπορεί να είναι τύπου Diriclet τότε μπορώ να τις προσεγγίσω με ένα επίσης μεγάλο αριθμό από κανονικές κατανομές.

Μια μαθηματική ανάλυση είναι ότι έστω y_t μια χρονοσειρά αποδόσεων και $x_t = (y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-k})$ επεξηγηματικές μεταβλητές. Και στόχος μας είναι να προσεγγίσουμε την συνάρτηση δεσμευμένης(conditional) πιθανότητας πυκνότητας δηλαδή πιο είναι ένα πιθανό εύρος του y_t δεδομένου ότι x_t. Και αυτή μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά από ένα σταθμισμένο άθροισμα από κανονικές κατανομές (ή student). Αν πάρουμε τις κανονικές κατανομές τότε ορίζω $\phi_i(.) = \phi(., \mu_i, \sigma_{it}^2)$ Οι κατανομές αυτές είναι διαφορετικά κεντραρισμένες και έχουν και διαφορετικό εύρος.

Κάθε μια κατανομή είναι ένα μοντέλο GARCH άρα το μ_i (είναι μια γραμμική συνάρτηση των επεξηγηματικών μεταβλητών) είναι η εξίσωση του μέσου

$$\mu_{it} = \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij} x_{jt} \qquad (2.10.1)$$

Ο μέσος της συνολικής κατανομής είναι το άθροισμα

$$\mu_t = \sum_{i=1}^{n} n_i \mu_{it} \qquad (2.10.2)$$

Έτσι αφού έχω το μέσο μπορώ να βρω και το σφάλμα που κάνει το μοντέλο.

$$\varepsilon_t = y_t - \mu_t \qquad (2.10.3)$$

Τώρα πως θα φτιάξουμε την διακύμανση.

$$\sigma_{it}^2 = \alpha_0^i + \alpha_1^i \sigma_{t-1}^2 + \alpha_2^i \varepsilon_{t-1}^2 \qquad (2.10.4)$$

Όπου

$$\sigma_{t-1}^2 = \sum_{i=1}^{n} n_i \left\{ \sigma_{it}^2 + (\mu_{it} - \mu_t)^2 \right\} \qquad (2.10.5)$$

Από τους τύπους βλέπουμε ένα περίεργο μοντέλο GARCH διότι το σ_{t-1} είναι η διακύμανση της συνολικής κατανομής και το ε_{t-1} είναι το σφάλμα του συνολικού μοντέλου. Άρα η κάθε κατανομή παρακολουθεί με διαφορετικό τρόπο την πρόβλεψη της μεταβλητότητας και το σφάλμα. Το $(\mu_{it} - \mu_t)^2$είναι ουσιαστικά η απόκλιση της κάθε κατανομής από το συνολικό μέσο μοντέλο. Άρα βλέπουμε τι μπορεί να μας ανεβάσει την συνολική διακύμανση αφενός μεν αν το κάθε μοντέλο δίνει μεγάλη διακύμανση και επιπλέων αν ανοίξει την κατανομή.

Το μοντέλο αυτό έχει κάποιες ελεύθερες παραμέτρους το θέμα λοιπόν είναι πως μπορούμε να βρούμε τον καλύτερο συνδυασμό; Και η ερώτηση είναι ότι θα βρούμε τις καλύτερες τιμές της παραμέτρου με βάση τα δεδομένα. Δηλαδή να ελαχιστοποιήσω το συνολικό σφάλμα. Επειδή εδώ μιλάμε για μοντέλα κατανομής για να ελαχιστοποιήσω το σφάλμα που κάνει η κατανομή στα δεδομένα. Δηλαδή πως μπορώ να μετρήσω το πόσο καλά προσαρμόζει το μοντέλο στα δεδομένα. Και ο τρόπος που χρησιμοποιούμε είναι η μέγιστη πιθανοφάνεια. Στην ουσία η πιθανοφάνεια είναι μια συνάρτηση όλων των παραμέτρων του μοντέλου και ορίζεται ως εξής

$$L(\delta) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \log\left(p(y_t / x_{t\delta})\right) \qquad (2.10.6)$$

αυτή είναι η log-likelihood (log πιθανοφάνεια) Είναι log διότι θέλω να δω κατά πόσο είναι πιθανή αυτή η κατανομή για τα δεδομένα που έχω.

Οι ελεύθερες παράμετροι είναι

$$\delta = (n_1, n_2, \dots, n_n, \beta_i', \dots, \beta_n', \alpha_i', \dots, \alpha_n') \qquad (2.10.7)$$

Όπου n είναι οι συντελεστές ανάμιξης β και α διανύσματα άρα για να βρω το καλύτερο ουσιαστικά θέλω το $max L(\delta)$

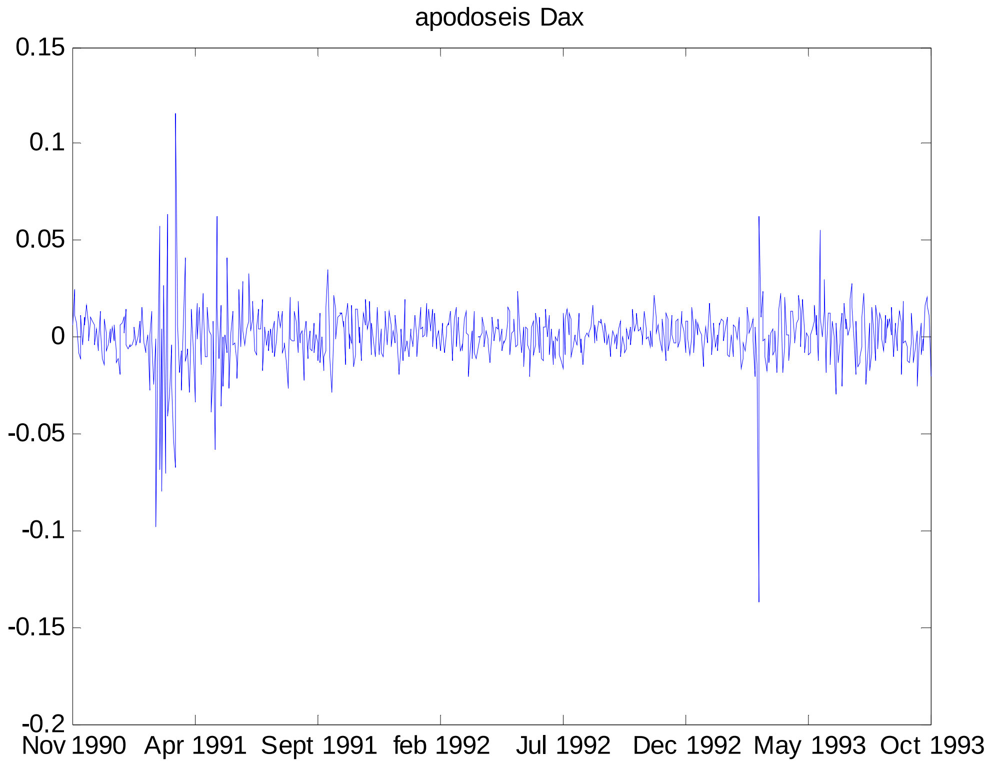
3.1 Αποτελέσματα του δείγματος

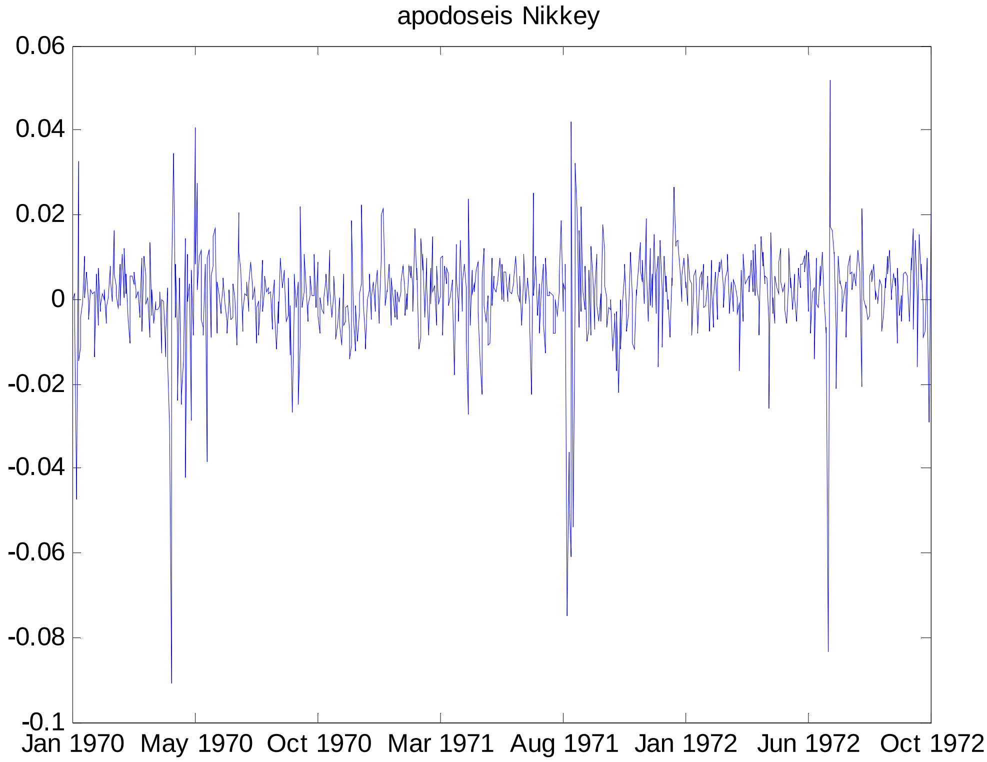
3.1.1 Χαρακτηριστικά των χρονοσειρών

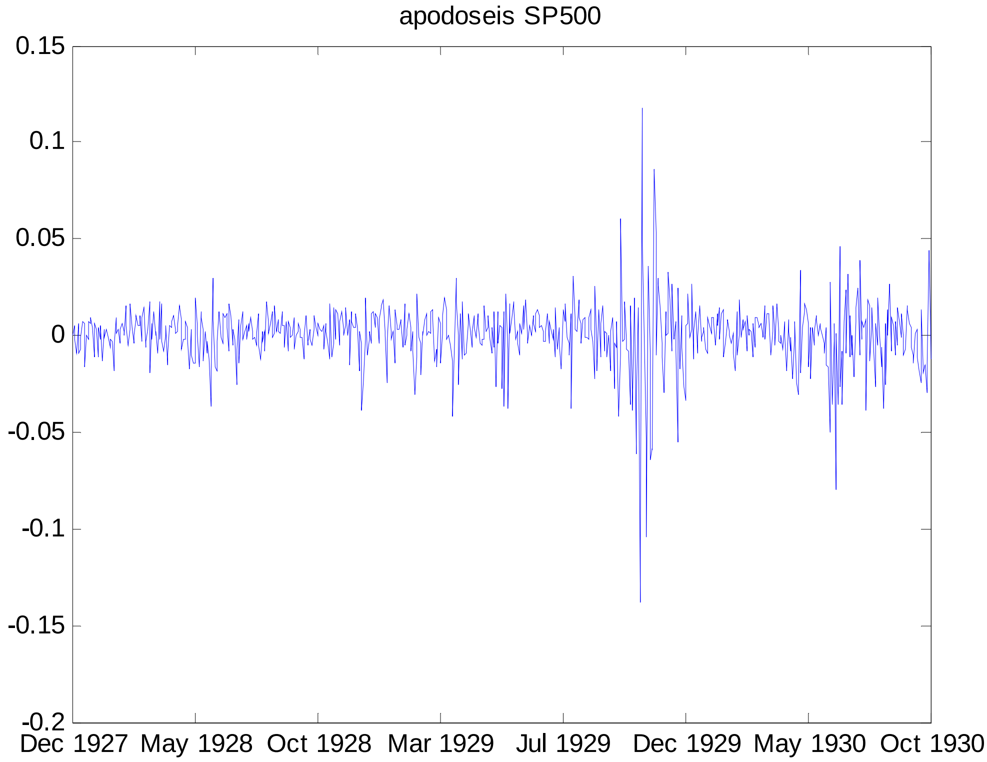
Θα δούμε πρώτα αν στις χρονοσειρές που θα δουλέψουμε υπάρχουν τα χαρακτηριστικά που προσπαθούμε να μοντελοποιήσουμε. Δηλαδή:

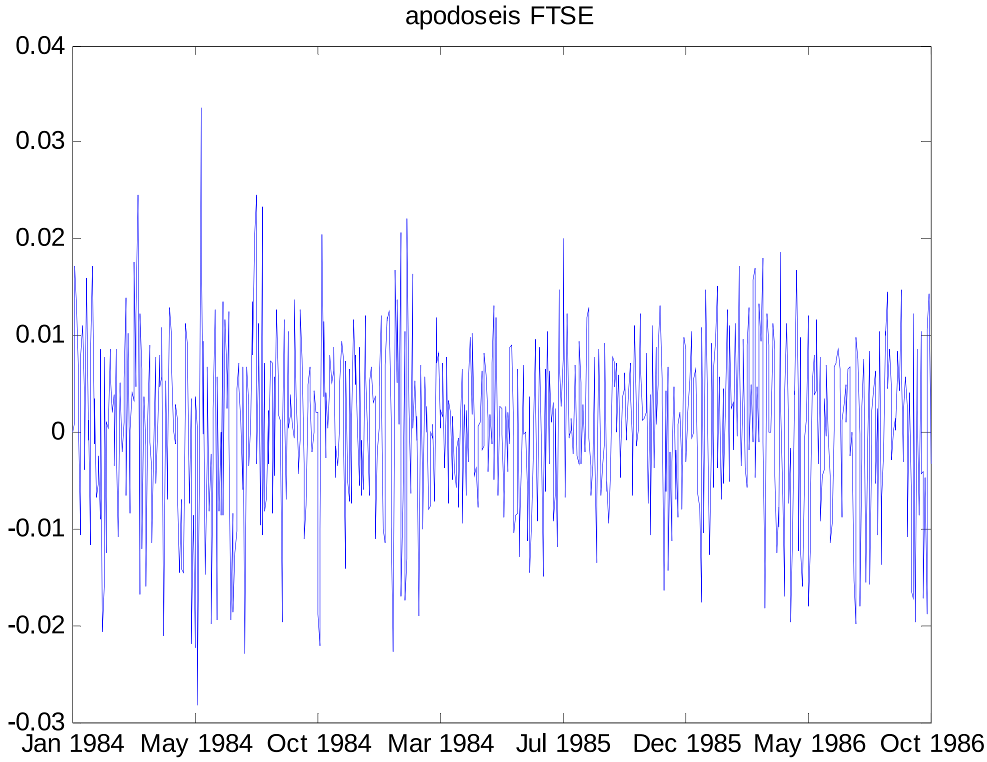
1. ομαδοποίηση μεταβλητότητας(volatility clustering)

Όπως θα δούμε στα διαγράμματα παρακάτω είναι φανερό ότι υπάρχει το φαινόμενο της ομασοποίηση μεταβλητότητας. Στο πρώτο διάγραμμα που είναι οι αποδόσεις του δείκτη Dax μπορούμε να δούμε ότι στην παρατήρηση 560 που έχουμε μια απότομη πτώση η αμέσως επόμενη κίνηση είναι μια μεγάλη απότομη άνοδος. Ενώ στις παρατηρήσεις από 700 έως 750 είναι μια πιο ήρεμη περίοδος.



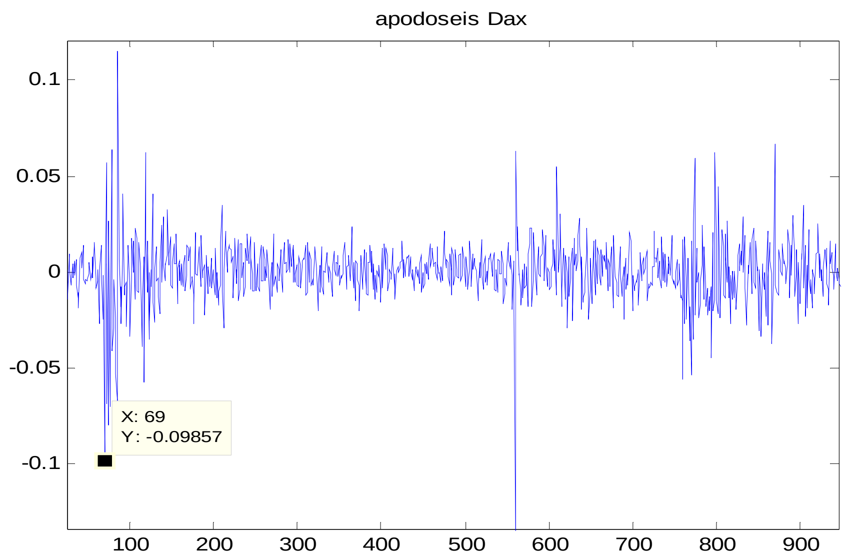

apodoseis Nikkey
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
-0.06
-0.08
-0.1
Jan 1970 May 1970 Oct 1970 Mar 1971 Aug 1971 Jan 1972 Jun 1972 Oct 1972

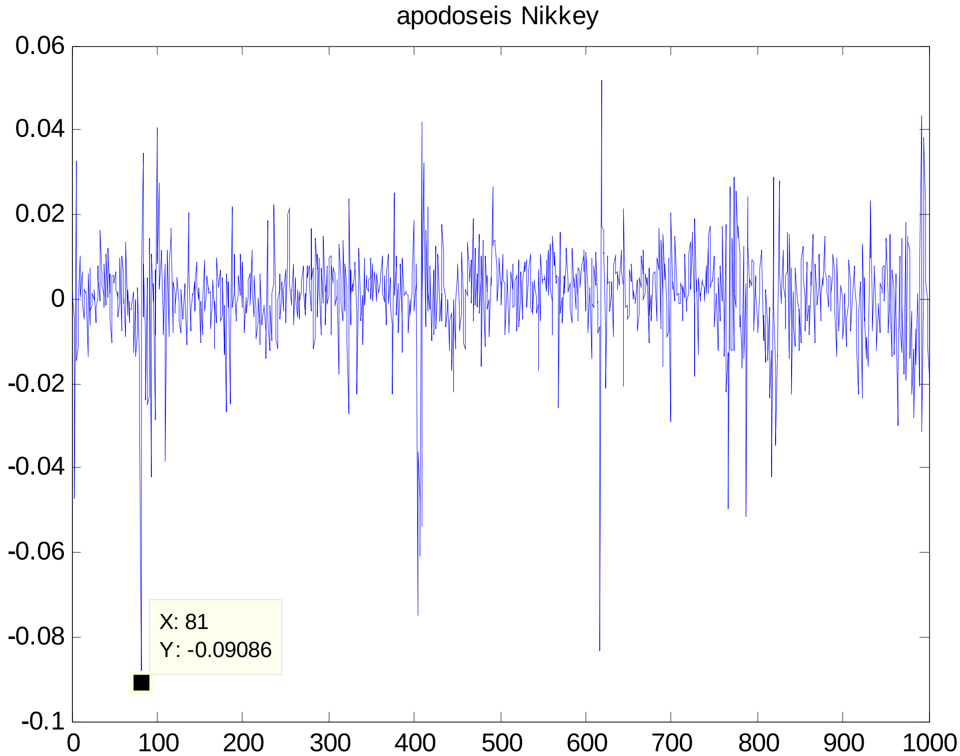

apodoseis SP500
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
Dec 1927 May 1928 Oct 1928 Mar 1929 Jul 1929 Dec 1929 May 1930 Oct 1930

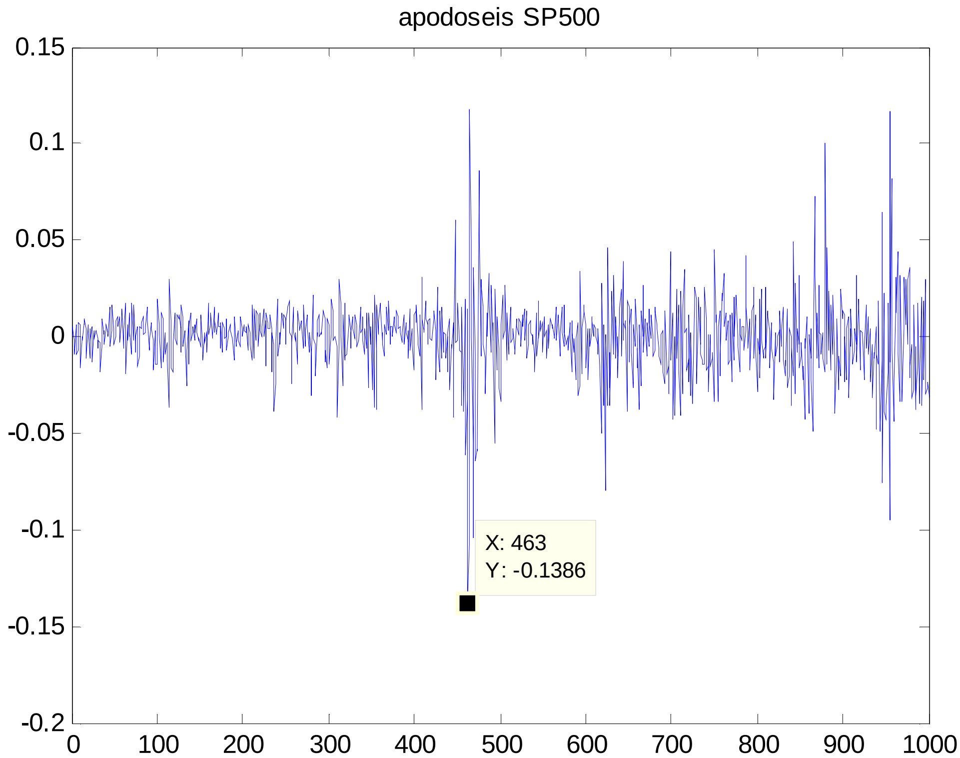


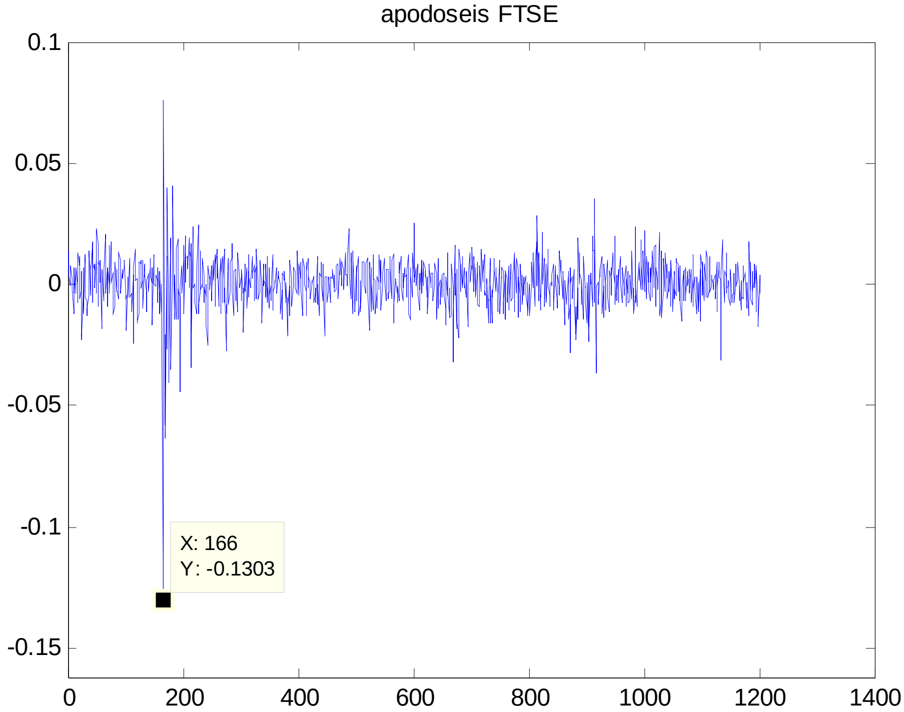
2. Ασύμμετρη μεταβλητότητα (leverage effect)

Και αυτό το φαινόμενο φαίνεται να έχουν οι χρονοσειρές που χρησιμοποιούμε. Στον δείκτη Dax π.χ στην παρατήρηση 69 έχουμε πτώση και τις επόμενες μέρες βλέπουμε αύξηση στην μεταβλητότητα. Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και στην παρατήρηση 750. Όπως είπαμε δηλαδή η απόδοση είναι αρνητικά συσχετισμένη με την διακύμανση.




apodoseis Nikkey
X: 81
Y: -0.09086
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
-0.06
-0.08
-0.1
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000


apodoseis SP500
X: 463
Y: -0.1386
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000



Αφού λοιπόν βλέπουμε ότι οι χρονοσειρές που θα δουλέψουμε έχουν τα χαρακτηριστικά αυτά θα δούμε κατά πόσο μοντέλα μας έπιασαν αυτά τα χαρακτηριστικά και πόσο πιθανά είναι τα μοντέλα μας στα δεδομένα μας.

Τα δύο πρώτα μοντέλα το GARCH και το EGARCH όπως έχουμε αναφέρει απλά μπορεί να πειράξει τον μέσο και την διακύμανση. Ενώ στο MDN μοντέλο μπορούμε να πειράξουμε και τα μορφολογικά χαρακτηριστικά της κατανομής όπως είναι η ασυμμετρία.

In sample παρατηρήσεις

Θα εξετάσουμε πως συμπεριφέρνονται τα μοντέλα μέσα στο δείγμα δηλαδή πόσο πιθανό είναι το κάθε μοντέλο για τα δεδομένα μας. Αυτό θα το εξετάσουμε με την log-likelihood συνάρτηση. Θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα του κάθε μοντέλου και το μοντέλο με την μικρότερη τιμή θα είναι αυτό που εφαρμόζει καλύτερα στα δεδομένα.

	DAX	**NIKKEY**	**SP500**	**FTSE**
GARCH_norm	2058.1	2222.1	2057.7	2337.2
GARCH_t	2122	2327.2	2081.5	2337.1
EGARCH_norm	2073.2	2235.5	2071.1	2337
EGARCH_t	2123.9	2331.2	2088.6	2337
MDN	767.9700	781.0600	722.0500	965.0200

Βαθμοί ελευθερίας	**DAX**	**NIKKEY**	**SP500**	**FTSE**
GARCH_norm	-	-	-	-
GARCH_t	6,021	3,7047	4,9537	200
EGARCH_norm	-	-	-	-
EGARCH_t	6,0451	3,9775	5,7253	200
MDN	-	-	-	-

Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι το μοντέλο MDN μας δίνει τα καλύτερα αποτελέσματα και με μεγάλη διαφορά από τα άλλα μοντέλα για όλες τις χρονοσειρές που εξετάσαμε. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι διότι όπως έχουμε εξηγήσει παραπάνω ότι τα μοντέλα MDN μπορούν να πιάσουν καλύτερα τα χαρακτηριστικά των χρονοσειρών όπως η ασύμμετρη μεταβλητότητα, η ομαδοποίηση μεταβλητότητας και οι μακριές ουρές. Επίσης ένας άλλος λόγος που είναι καλύτερα τα μοντέλα MDN σε σχέση με τα άλλα είναι ότι είναι πολύ λεπτοκυρτωτικά.

Στον δεύτερο πίνακα βλέπουμε τους βαθμούς ελευθερίας για τα μοντέλα που έχουν κατανομή Student-T. Γνωρίζουμε ότι όσο οι βαθμοί ελευθερίας τείνουν στο άπειρο η κατανομή Student-T προσεγγίζει την κανονική κατανομή. Ο δείκτης FTSE που έχει 200 βαθμούς ελευθερίας η κατανομή του είναι κανονική. Ενώ ο δείκτης Nikkey με 3,7 βαθμούς ελευθερίας έχει πιο μακριές ουρές από μια κανονική κατανομή. Οι δείκτες Dax και SP500 πλησιάζουν αρκετά την κανονική κατανομή.

3.2 Πρόβλεψη

Το επόμενο βήμα της έρευνας αυτής είναι η πρόβλεψη με τα μοντέλα αυτά.

DAX

Διάστημα Εμπιστοσύνης	***95%***	***90%***	***80%***	***60%***
GARCH_norm	0.0460	0.0640	0.1180	0.2860
GARCH_T	0.0200	0.0520	0.1080	0.2740
EGARCH_norm	0.0380	0.0680	0.1200	0.2900
EGARCH_T	0.0160	0.0420	0.1040	0.2760
MDN	0.0380	0.0580	0.1140	0.1940

Από τον παραπάνω πίνακα και τα παρακάτω σχήματα βλέπουμε ότι για την συγκεκριμένη χρονοσειρά δηλαδή για τον δείκτη DAX το καλύτερο μοντέλο για την πρόβλεψη είναι το GARCH με t-student κατανομή διάστημα εμπιστοσύνης 95% και 90% ενώ για 80% διάστημα εμπιστοσύνης καλύτερες προβλέψεις μας δίνει το μοντέλο EGARCH με t-student κατανομή ενώ για 60% διάστημα εμπιστοσύνης καλύτερες προβλέψεις μας δίνει το μοντέλο MDN. Και αυτό γιατί όταν π.χ. λέμε ότι το μοντέλο θέλουμε ένα μοντέλο με διάστημα εμπιστοσύνης 95% . Αυτό που πρέπει να σημειώσουμε είναι ότι το μοντέλο MDN συμπεριφέρεται σχεδόν σαν ένα μοντέλο GARCH ενώ εγώ θα περίμενα κάτι καλύτερο αφού μπορεί να πειράξει περισσότερα χαρακτηριστικά από κάθε άλλο μοντέλο.

Nikkey

Διάστημα Εμπιστοσύνης	***95%***	***90%***	***80%***	***60%***
GARCH_norm	0.0440	0.0880	0.1800	0.3620
GARCH_T	0.0140	0.0380	0.1220	0.3380
EGARCH_norm	0.0460	0.0920	0.1700	0.3540
EGARCH_T	0.0120	0.0400	0.1360	0.3440
MDN	0.0300	0.0620	0.1480	0.2720

Ο δείκτης Nikkey αν δούμε από το διάγραμμα των αποδόσεων έχει μεγάλη μεταβλητότητα. Από τα αποτελέσματα της διαδικασίας για τον δείκτη Nikkey μας δίνει διαφορετικά αποτελέσματα για τα διαστήματα εμπιστοσύνης. Δηλαδή για διαστήματα εμπιστοσύνης 95% και 60% μας δίνει ότι το καλύτερο μοντέλο για πρόβλεψη είναι το MND με κανονική κατανομή. Ενώ για διαστήματα εμπιστοσύνης 90% καλύτερο μοντέλο για πρόβλεψη είναι το EGARCH με κανονική Student's T και για διάστημα εμπιστοσύνης 80% καλύτερο μοντέλο για πρόβλεψη είναι το GARCH με κατανομή Student's T. Παρατηρούμε ότι τα μοντέλα MDN που μας έδωσαν τα καλύτερα αποτελέσματα στο in sample στην πρόβλεψη δεν είναι τόσο αποδοτικά βλέπουμε ότι το μοντέλο που ταιριάζει καλύτερα στα δεδομένα μου δεν είναι αυτό που μου δίνει τις καλύτερες προβλέψεις.

SP500

Διάστημα εμπιστοσύνης	***95%***	***90%***	***80%***	***60%***
GARCH_norm	0.0760	0.1260	0.2340	0.4380
GARCH_T	0.0300	0.0840	0.1880	0.4140
EGARCH_norm	0.1120	0.1680	0.2720	0.4800
EGARCH_T	0.0580	0.1100	0.2480	0.4640
MDN	0.0480	0.0640	0.1080	0.2040

Για το συγκεκριμένο δείκτη η διαδικασία μας έδωσε ότι το καλύτερο μοντέλο για πρόβλεψη για διάστημα εμπιστοσύνης 95% είναι το GARCH με κατανομή t-student ενώ για 90%, 80% και 60% το καλύτερο για πρόβλεψη είναι το MDN με κατανομή t-student. Εδώ λοιπόν συμφωνούμε με το μοντέλο που μας έδωσε καλύτερα αποτελέσματα in sample να είναι και το καλύτερο μοντέλο για πρόβλεψη.

<u>FTSE</u>

Διάστημα εμπιστοσύνης	***95%***	***90%***	***80%***	***60%***
GARCH_norm	0.0460	0.0820	0.1820	0.3980
GARCH_T	0.0460	0.0820	0.1800	0.3980
EGARCH_norm	0.0540	0.0880	0.1840	0.4240
EGARCH_T	0.0460	0.0880	0.1820	0.4180
MDN	0.0080	0.0180	0.0400	0.0760

Για τον δείκτη FTSE η διαδικασία μας έδωσε ότι καλύτερο μοντέλο για πρόβλεψη είναι το MDN με κανονική κατανομή για όλα τα επίπεδα σημαντικότητας. Τα μοντέλα GARCH με κανονική κατανομή, τοGARCH και EGARCH με κατανομή t-student συμπεριφέροντε με σχεδόν το ίδιο τρόπο.

Κεφάλαιο 4~ Συμπεράσματα

Τα μοντέλα που χρησιμοποίησα για τις προβλέψεις μου όπως έχω αναφέρει είναι το μοντέλο GARCH με κανονική κατανομή και κατανομή t-student, το μοντέλο EGARCH με κανονική κατανομή και κατανομή t-student, και το μοντέλο MDN με κανονική κατανομή. Τα μοντέλα έχουν δημιουργηθεί σε γλώσσα MATLAB.

Τα εφάρμοσα σε χρονοσειρές αποδόσεων τεσσάρων δεικτών. Του γερμανικού δείκτη DAX, του Ιαπωνικού δείκτη Nikkey, του αγγλικού δείκτη FTSE και του αμερικάνικου δείκτη S&P500. Και σύγκρινα πόσο πιθανά είναι τα μοντέλα αυτά για τα δεδομένα που τους έδινα και πόσο καλές προβλέψεις έδιναν για διαστήματα εμπιστοσύνης 95%,90%,85%,60%.

Προσπάθησα με τα χαρακτηριστικά που έχουν οι χρονοσειρές δηλαδή την ασύμμετρη μεταβλητότητα, την ομαδοποίηση μεταβλητότητας και τις μακριές ουρές να φτιάξω μοντέλα που να μπορούν να αξιοποιούν αυτά τα χαρακτηριστικά.

Τώρα στο ερώτημα ποιο μοντέλο είναι καλύτερο δεν υπάρχει ακριβής απάντηση. Παρατηρήσαμε στην in sample διαδικασία ότι υπάρχει η λεπτοκύρτωση και τα μοντέλα με Student T κατανομή έχουν σε κάποιες περιπτώσεις μεγαλύτερο LLF όμως το MDN μοντέλο είναι το καλύτερο και με μεγάλη διαφορά. Παρότι ήταν απλά με κανονική κατανομή.

Δηλαδή γενικά γνωρίζουμε ότι έχουμε λεπτοκύρτωση και τα μοντέλα GARCH και ARCH δεν μπορεί να πιάσει το φαινόμενο αυτό για αυτό χρειάστηκε να βάλουμε Student T κατανομή. Όμως αυτό έρχεται σε αντίθεση με το ότι και ένα μοντέλο με κανονική κατανομή δεν διαφέρει και τόσο από ένα μοντέλο με Student T κατανομή όλα πάνω κάτω έχουν τα ίδια αποτελέσματα.

Σε σχέση με την μεταβλητότητα in sample και με τις προβλέψεις το MDN με κατανομή Student T μπορεί να έχει καλύτερα αποτελέσματα. Εκτός όμως από την λεπτοκύρτωση και την ασύμμετρη μεταβλητότητα κάτι που επιτρέπει το μοντέλο MDN στην in sample διαδικασία είναι η ασύμμετρη unconditional κατανομή.

Στην πρόβλεψη μιας μέρα μετά που πραγματοποιήσαμε για όλα τα μοντέλα η διαδικασία μας έδωσε κάποιο μοντέλο που με διαφορά να είναι καλύτερο από τα άλλα. Δηλαδή στις 700 μέρες που είχα σαν δείγμα (περίπου 3 χρόνια πριν) δεν με βοήθησε αρκετά για πρόβλεψη μια μέρα μετά.

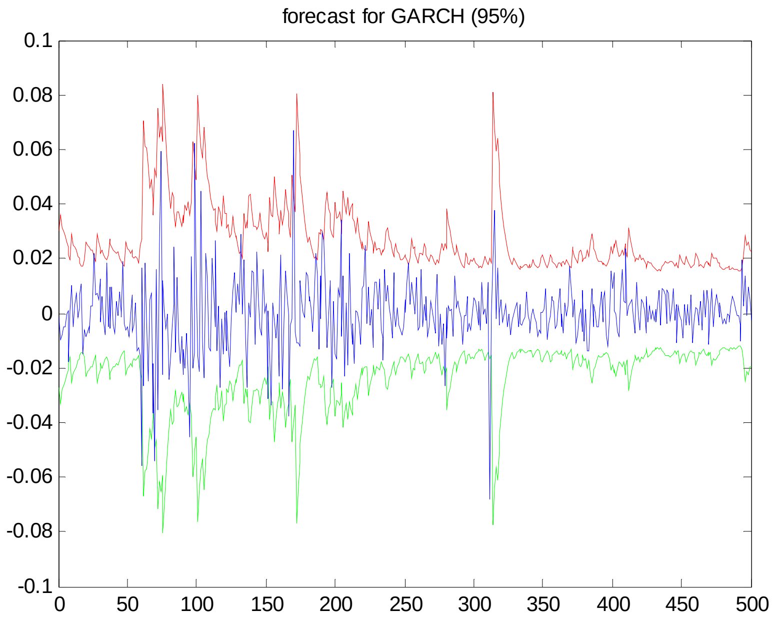
Για να πούμε λοιπόν πιο είναι το καλύτερο μοντέλο είναι σχετικό με το τι θέλω να κάνω και με το τι έχω. Αν θέλω π.χ. να πιάσω ένα φαινόμενο έστω την ασυμμετρία θα χρησιμοποιήσω ένα πιο γενικό μοντέλο με κίνδυνο βέβαια να ταιριάξει πράγματα που δεν χρειάζεται. Αλλιώς πρέπει να δω πιο μοντέλο ταιριάζει καλύτερα στην χρονοσειρά μου.

Επίσης σχετικά με το μοντέλο MDN ήταν πολύ δύσκολο και χρονοβόρο για να εκτιμήσω το μοντέλο. Ήταν πολύ χρονοβόρο να βρούμε τους εκτιμητές που έχουν την ελάχιστη πιθανοφάνεια και φυσικά δεν είμαστε σίγουροι ότι τους έχουμε βρει κιόλας.

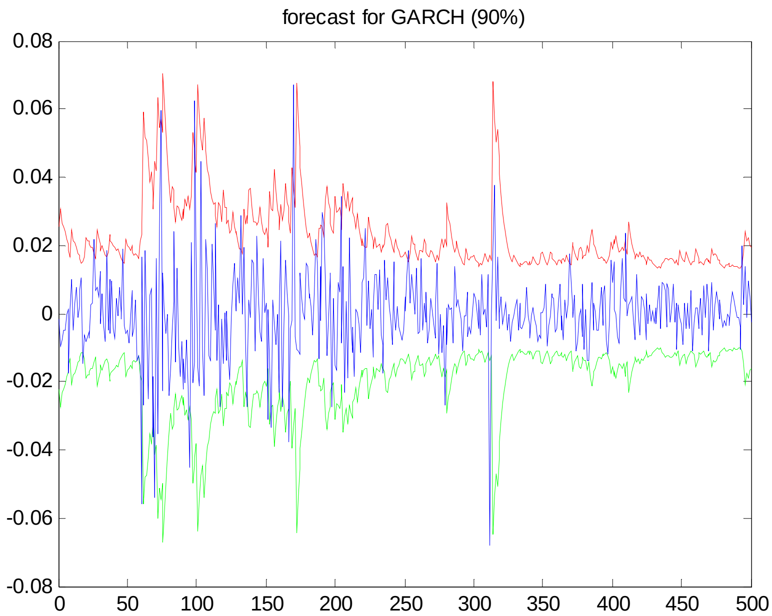
Αυτό που θα μπορούσε να γίνει για να δούμε αν δίνει καλύτερες εκτιμήσεις και καλύτερες προβλέψεις είναι να χρησιμοποιήσουμε περισσότερες μέρες στο δείγμα μας. Να δούμε αν ένα μοντέλο MDN με κατανομή t-student δίνει καλύτερες προβλέψεις αν και αυτό είπαμε είναι τι ζητάμε κάθε φορά και γενικά να μπορούσε η εκτίμηση του μοντέλου MDN να επεκταθεί να μην είναι τόσο δύσκολη και χρονοβόρα. Στα υπόλοιπα μοντέλα δεν αντιμετώπισα κάποιο ιδιαίτερο πρόβλημα.

Παράρτημα

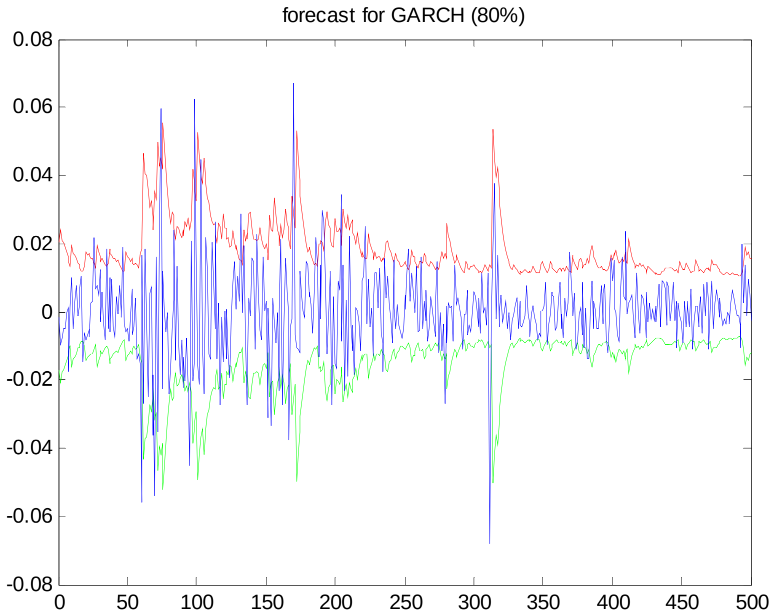
Dax

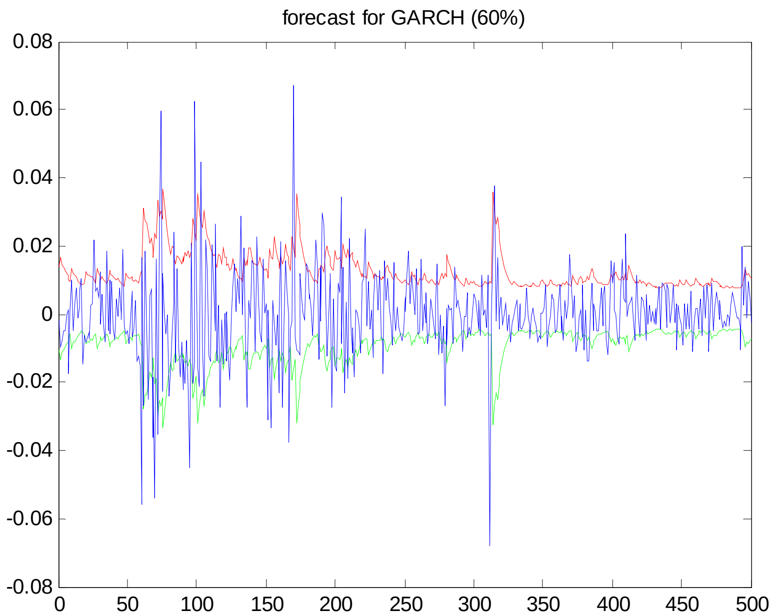


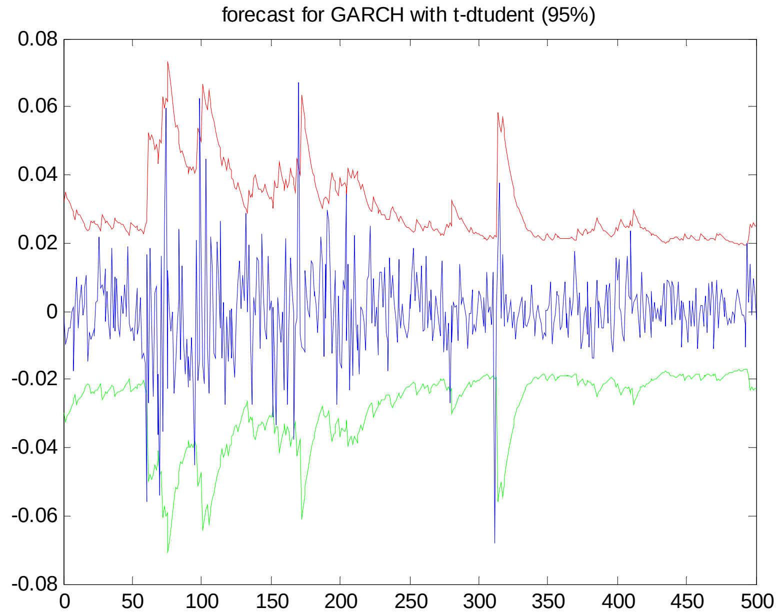
Από το διάγραμμα τις προβλέψεις για το μοντέλο GARCH με κανονική κατανομή. Βλέπουμε ότι στις απότομες ανόδους ή πτώσεις το μοντέλο επανέρχεται σταδιακά στα κανονικά επίπεδα. Και αυτό φαίνεται αρκετά στις περιόδους με την πολύ ακραία μεταβλητότητα.



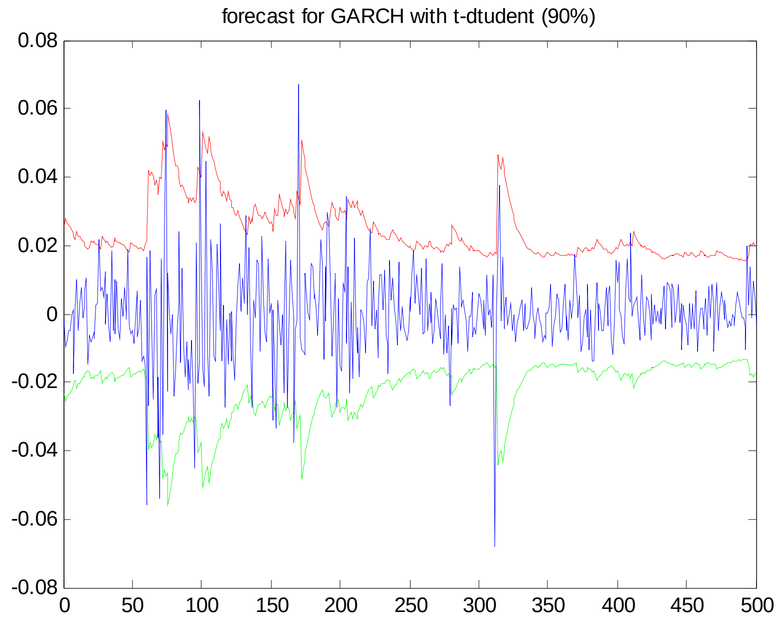
Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι στα μοντέλα με κανονική κατανομή όταν αλλάζουμε τα διαστήματα εμπιστοσύνης από 95% σε 90% πέφτει σταδιακά χωρίς απότομες πτώσεις. Που σημαίνει μεγάλους βαθμούς ελευθερίας που είναι λογικό αφού είμαστε σε κανονική κατανομή

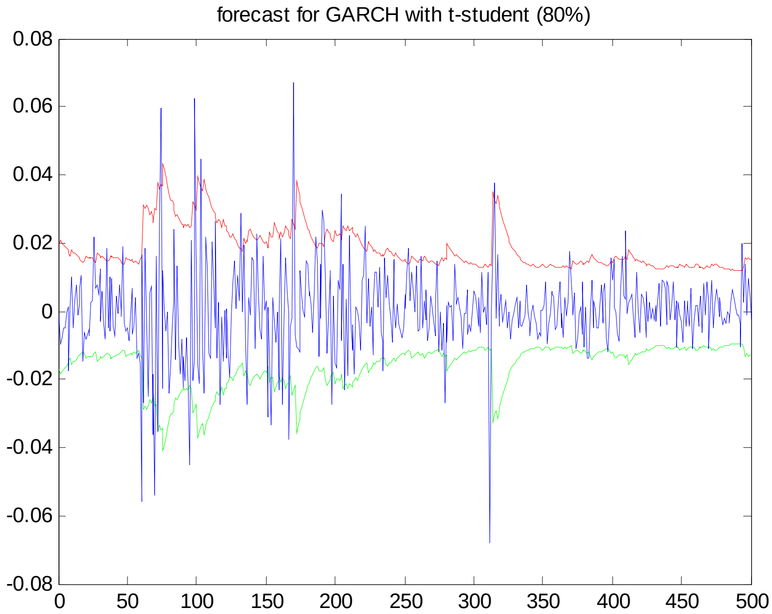


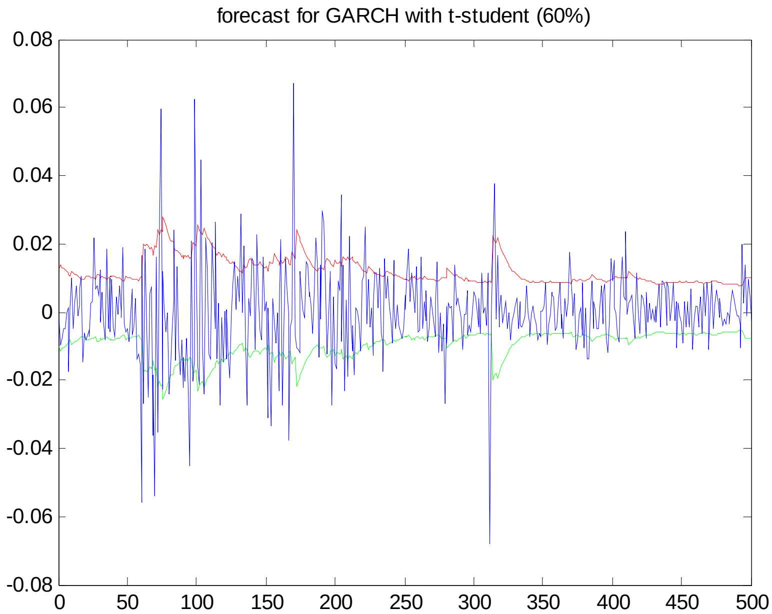


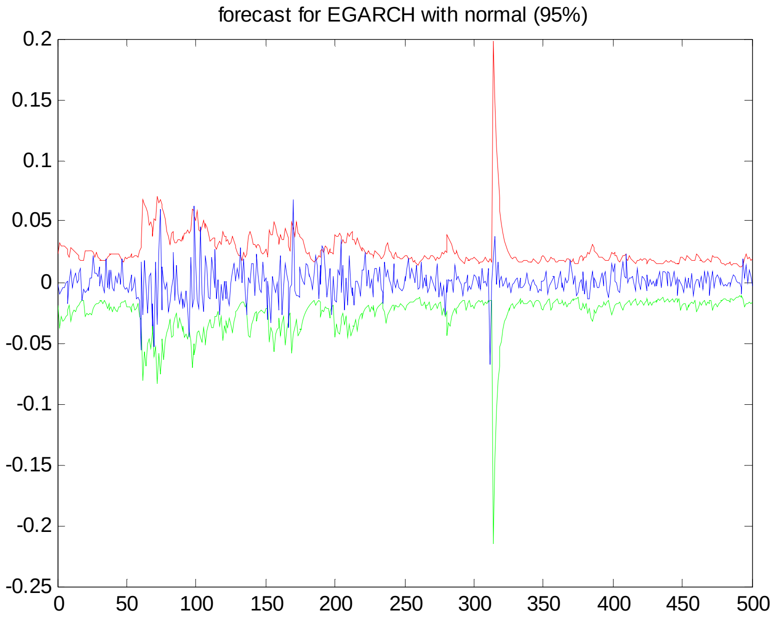


Το μοντέλο GARCH με Student-T κατανομή τείνει να ανεβάζει περισσότερο τα όρια για να πιάσει την έντονη μεταβλητότητα από ένα απλό GARCH μοντέλο επίσης για να επανέλθει σε κανονικά επίπεδα το κάνει πολύ πιο αργά.

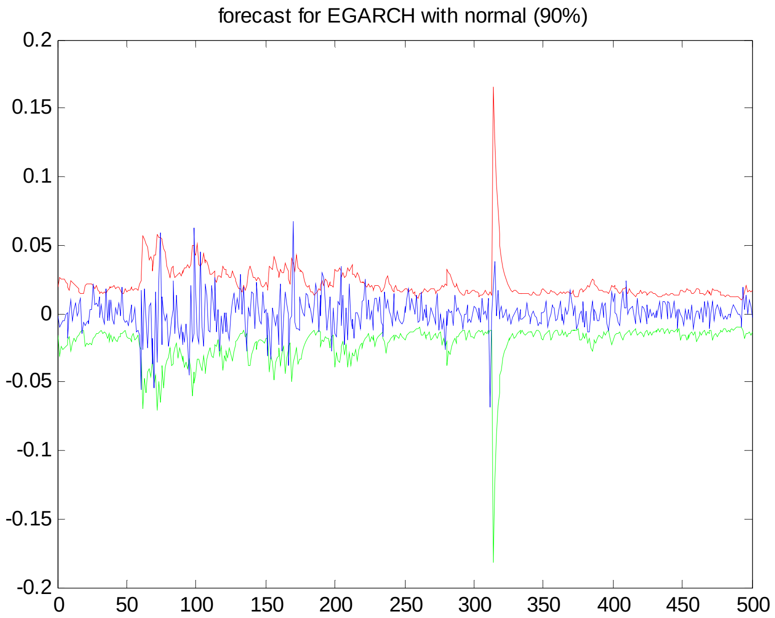


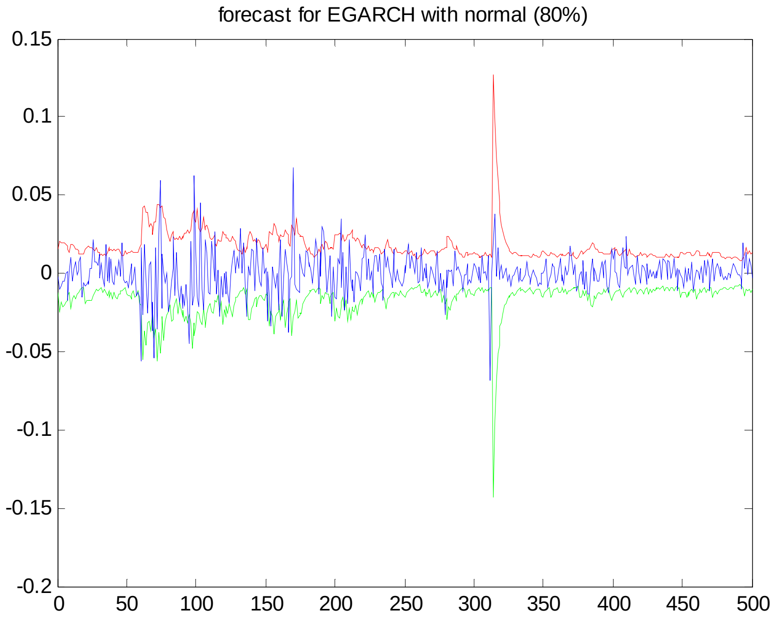

forecast for GARCH with t-student (80%)
0.08
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
-0.06
-0.08
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

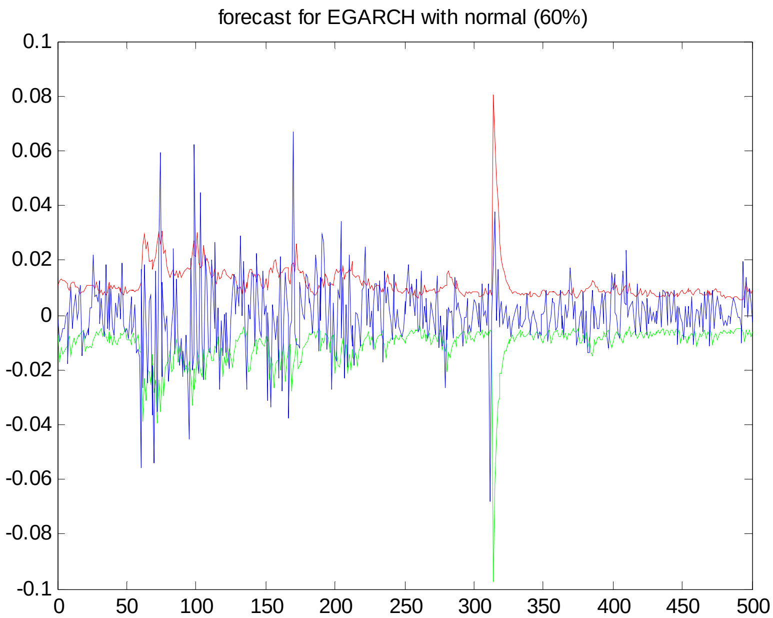

forecast for GARCH with t-student (60%)
0.08
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
-0.06
-0.08
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

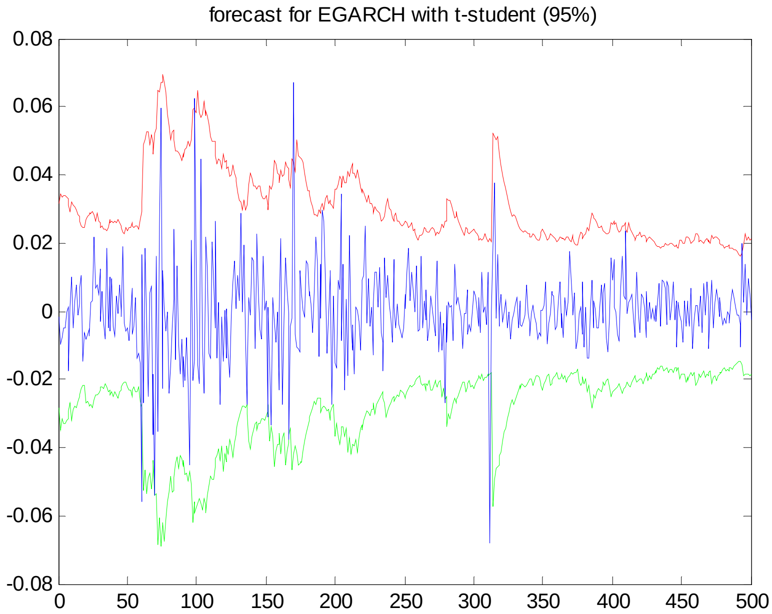


Από παραπάνω διάγραμμα για το μοντέλο EGARCH με κανονική κατανομή όπως θα ήταν αναμενόμενο βλέπουμε ότι για να πιάσει την μεταβλητότητα ανεβάζει πάρα πολύ τα όρια. Παρατηρούμε ότι κοντά στην παρατήρηση 300 που έχουμε μια πτώση αμέσως μετά ανεβάζει πάρα πολύ τα όρια για να πιάσει το φαινόμενο της ασυμμετρίας και για να επανέλθει το κατεβάζει πολύ απότομα με εκθετικό ρυθμό.

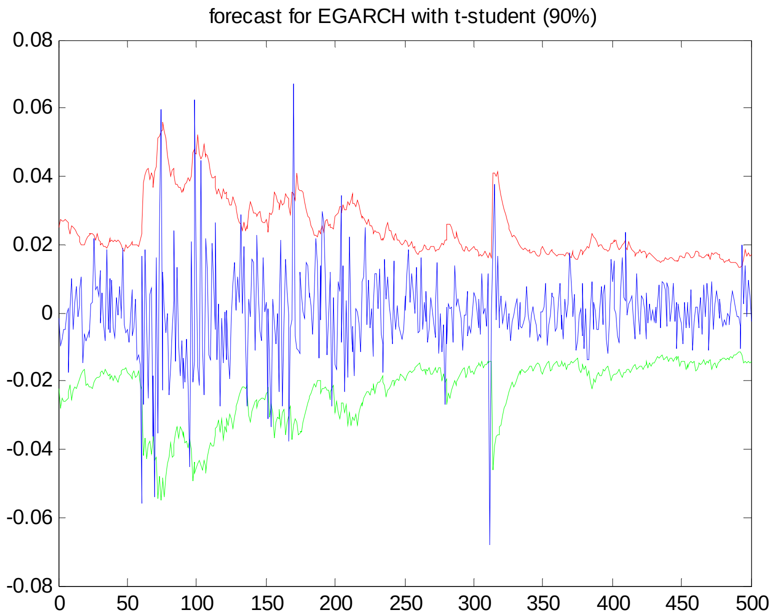



forecast for EGARCH with normal (80%)
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

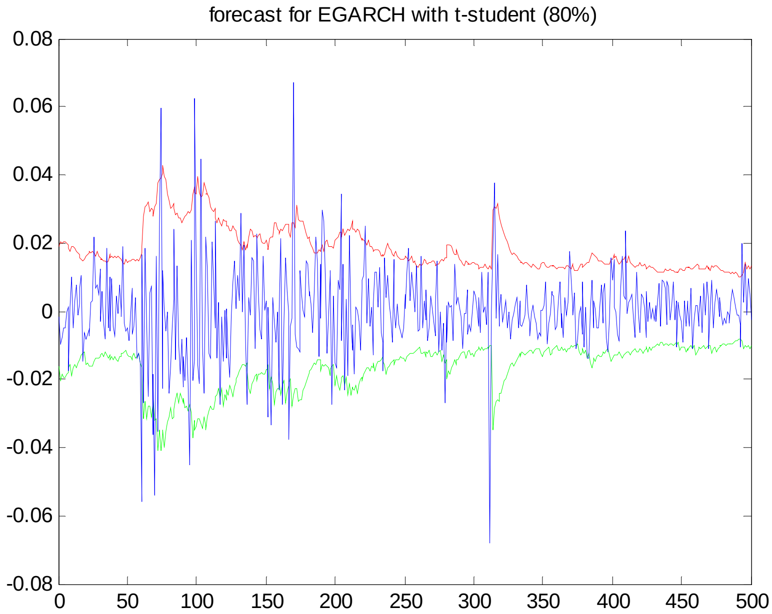

forecast for EGARCH with normal (60%)
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
-0.06
-0.08
-0.1
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

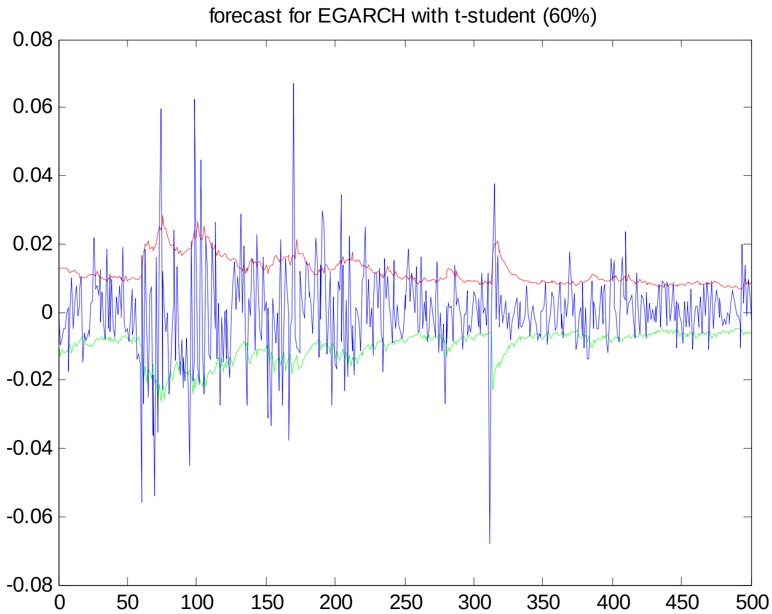


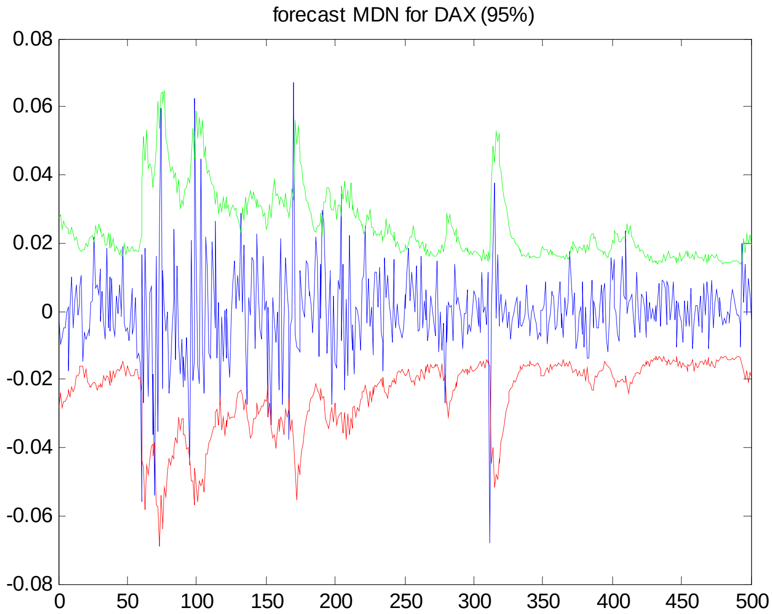
Σε αυτό το μοντέλο βλέπουμε ότι και αυτό ανεβάζει πολύ τα όρια για να μπορέσει να πιάσει την μεταβλητότητα αλλά δεν έχει τόσο απότομες εκθετικές πτώσεις όπως το μοντέλο EGARCH με κανονική κατανομή.



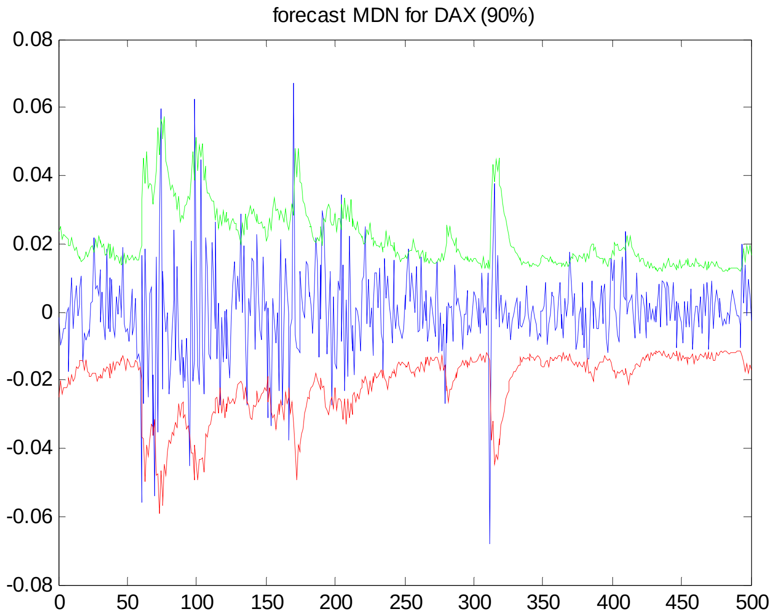
Και εδώ μπορούμε να παρατηρήσουμε το μοντέλο EGARCH με κατανομή Student T έχει πολύ ανοιχτά όρια και όταν αλλάζουμε τα επίπεδα σημαντικότητας πέφτει πιο αργά από ένα GARCH με Student T κατανομή και αυτό διότι το μοντέλο GARCH με Student T κατανομή έχει λιγότερους βαθμούς ελευθερίας από το μοντέλο EGARCH με κατανομή Student T. Το φαινόμενο αυτό θα το παρατηρήσουμε και πιο κάτω που φαίνεται περισσότερο.

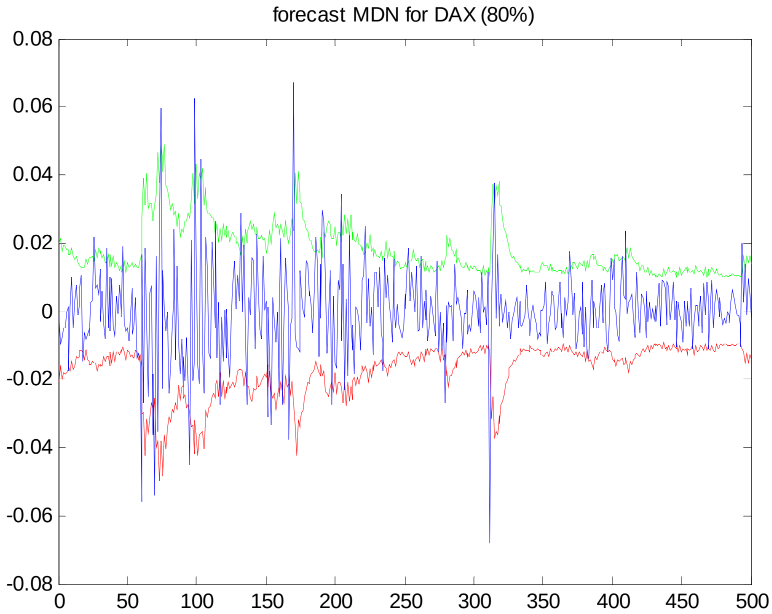

forecast for EGARCH with t-student (80%)
0.08
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
-0.06
-0.08
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500


forecast for EGARCH with t-student (60%)
0.08
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
-0.06
-0.08
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

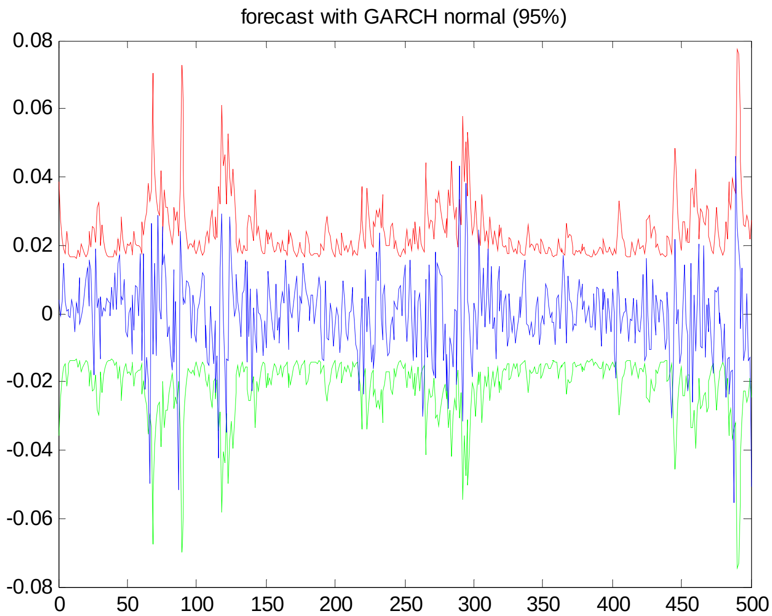


Το μοντέλο MDN για τον δείκτη Dax βλέπουμε και στο διάγραμμα ότι συμπεριφέρεται σαν ένα απλό μοντέλο GARCH με κανονική κατανομή.

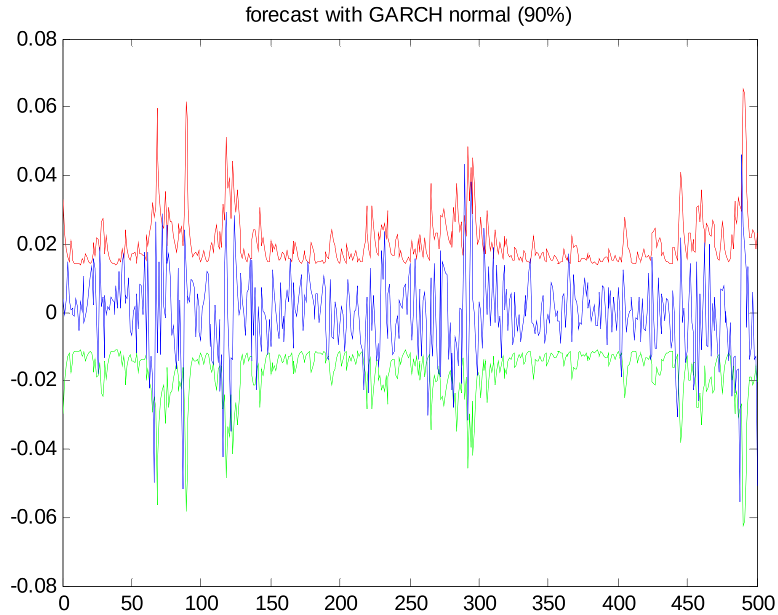


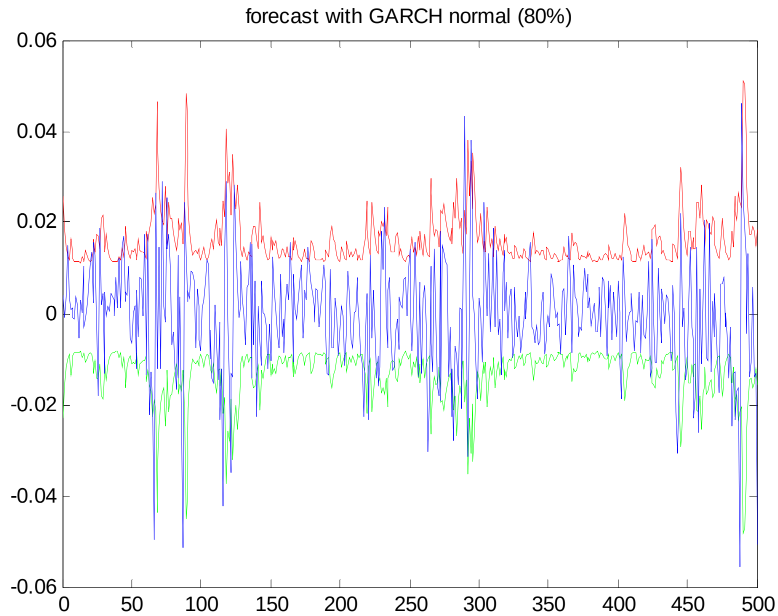


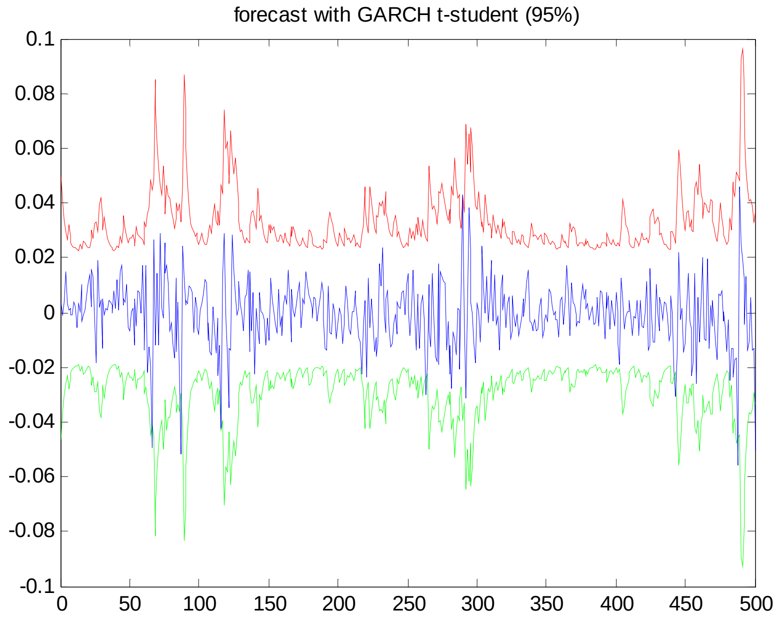
NIkkey



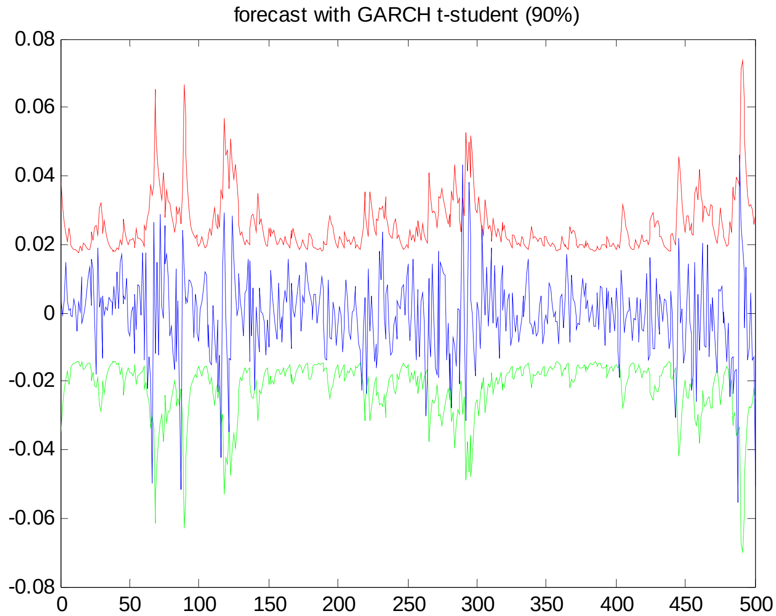
Το μοντέλο GARCH με κανονική κατανομή συμπεριφέρεται και σε αυτό τον δείκτη όπως περιμέναμε ανεβάζοντας τα όρια και μετά με την σταδιακή εξασθένισή τους.

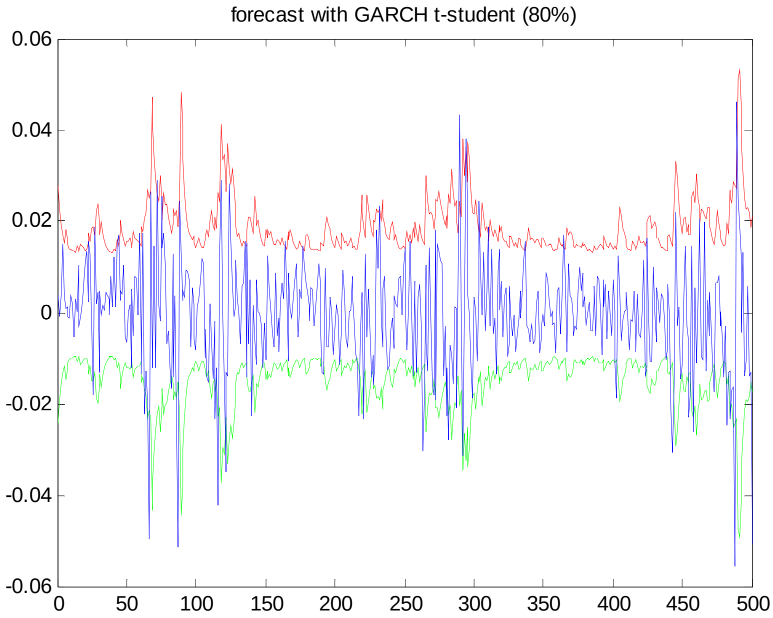

forecast with GARCH normal (90%)
0.08
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
-0.06
-0.08
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

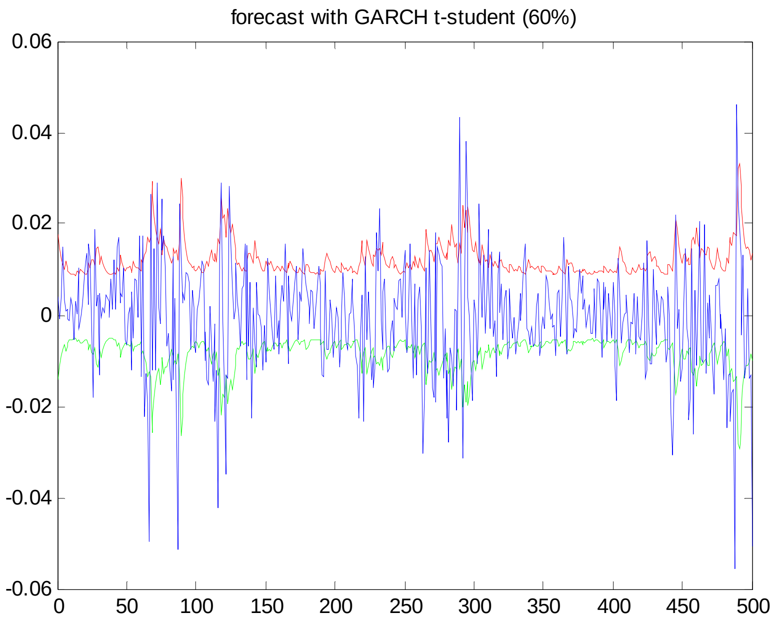

forecast with GARCH normal (80%)
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
-0.06
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

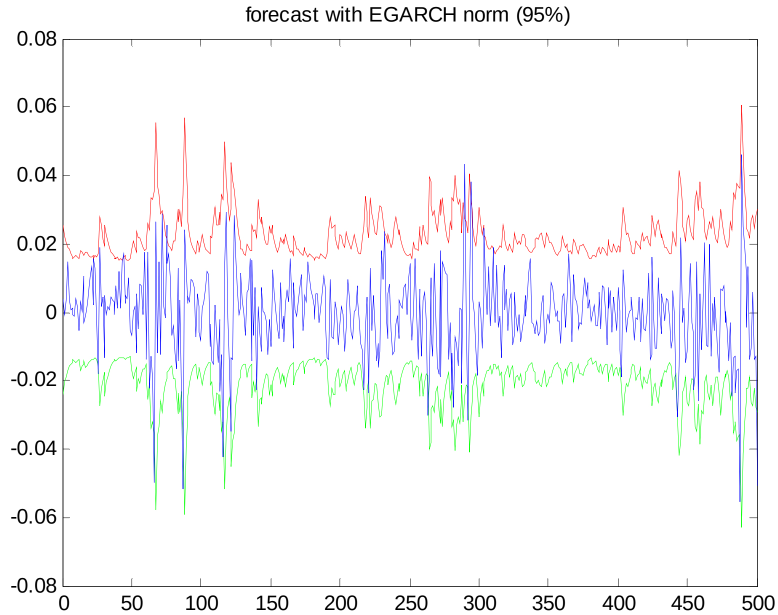


Εδώ παρατηρούμε ότι τα όρια είναι υπερβολικά πολύ ανοικτά για να μπορέσουν να πιάσουν την αυξημένη μεταβλητότητα. Όμως οι επαναφορές γίνονται με σταδιακό τρόπο.

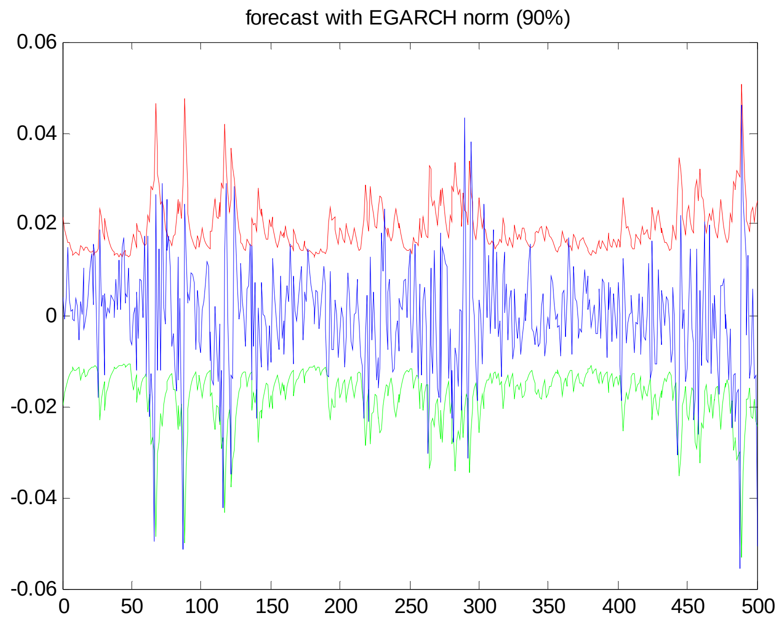



forecast with GARCH t-student (80%)
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
-0.06
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

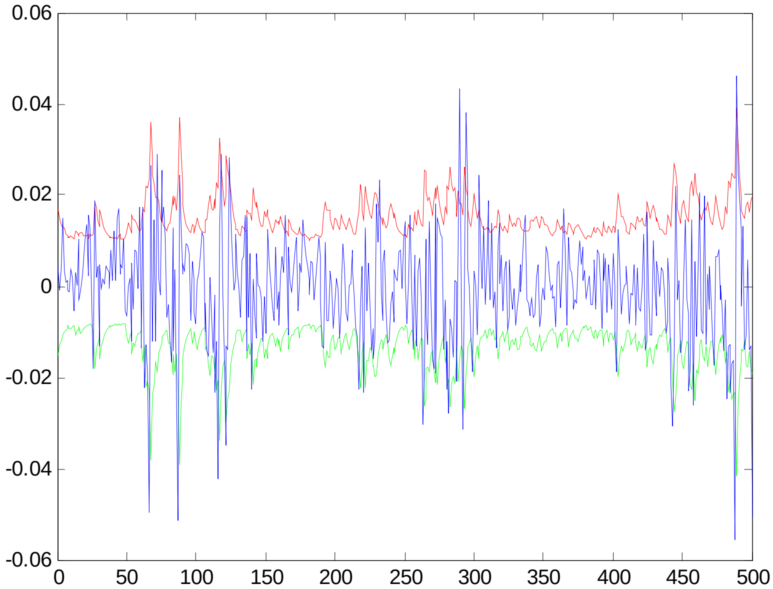

forecast with GARCH t-student (60%)
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
-0.06
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500



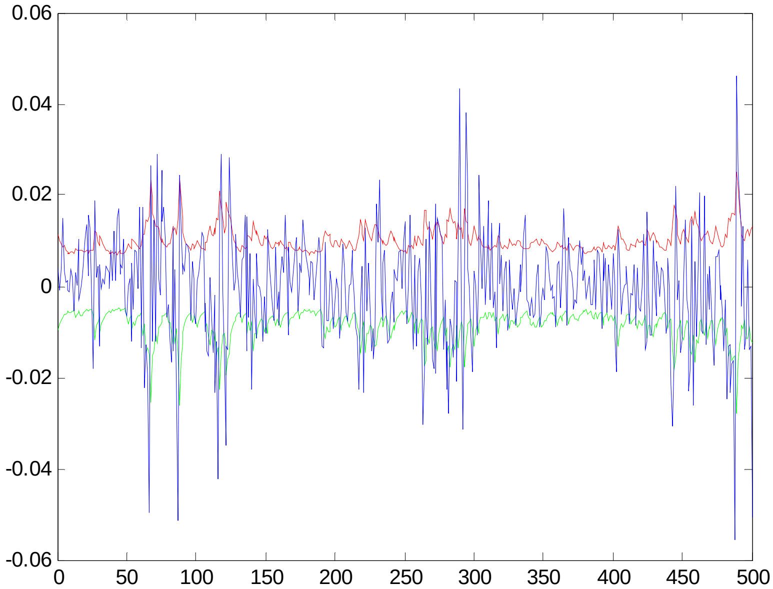
Το μοντέλο EGARCH με κανονική κατανομή συμπεριφέρεται όπως ένα μοντέλο GARCH με κανονική κατανομή.

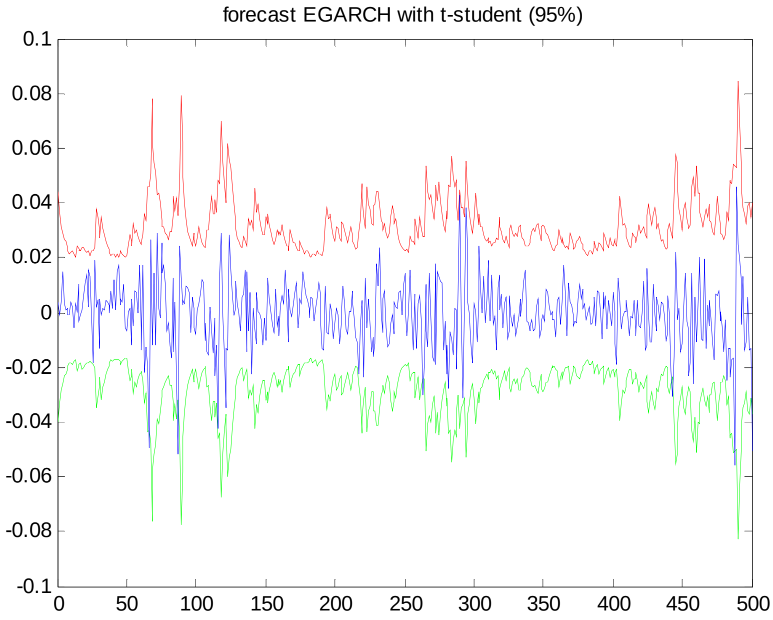


forecast with EGARCH norm (80%)

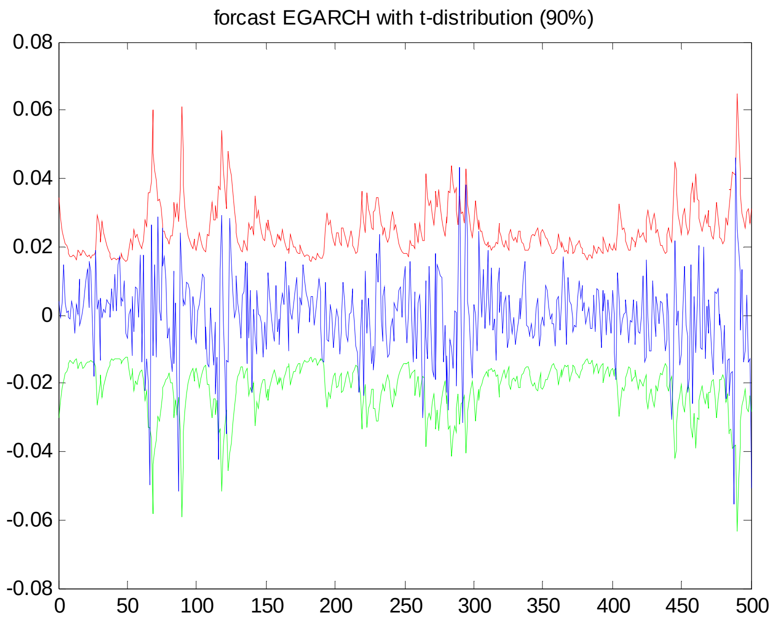


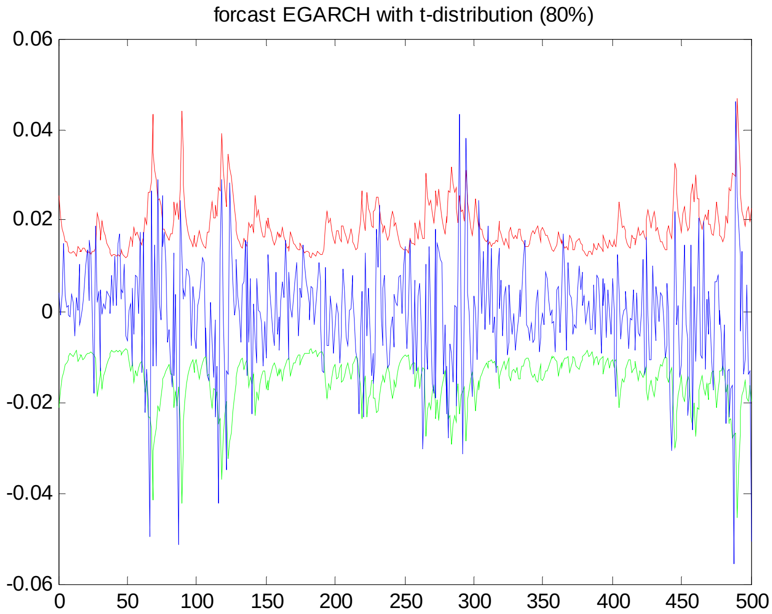
forecast with EGARCH norm (60%)

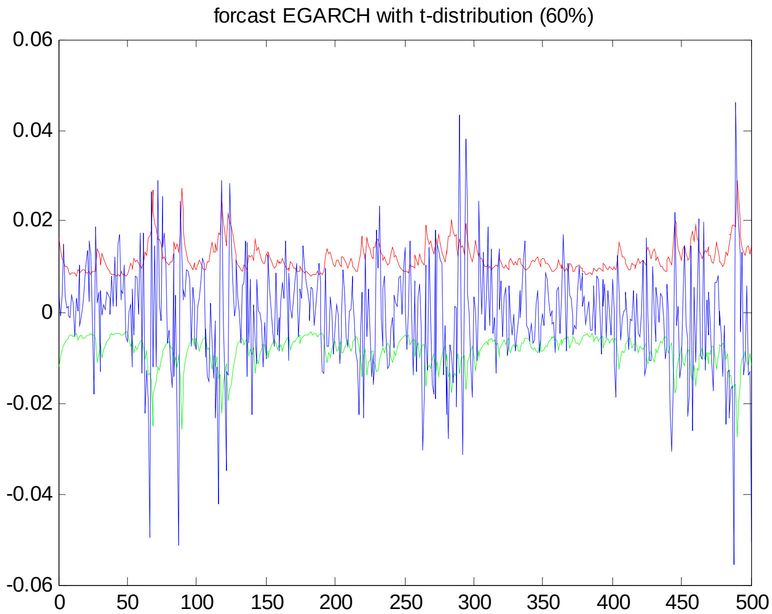


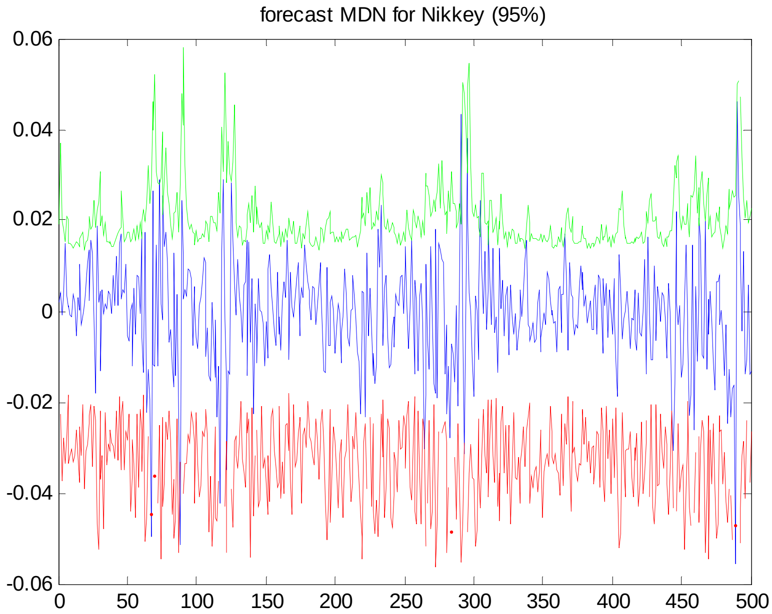


Και αυτό το μοντέλο συμπεριφέρεται σαν ένα μοντέλο GARCH με κατανομή Student T.

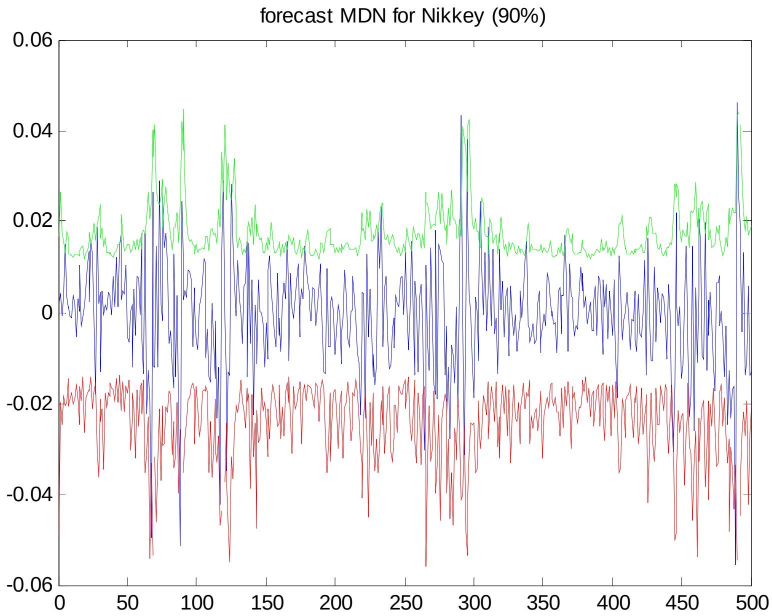


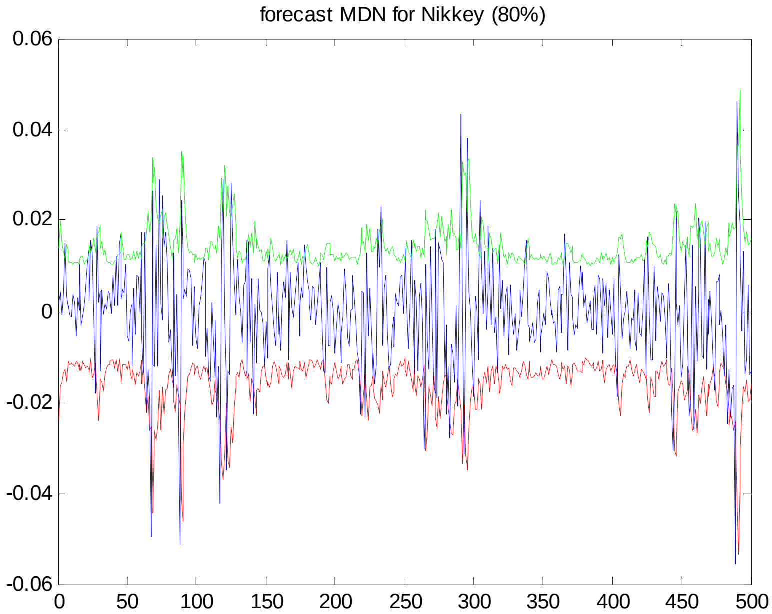

forcast EGARCH with t-distribution (80%)
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
-0.06
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500


forcast EGARCH with t-distribution (60%)
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
-0.06
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500



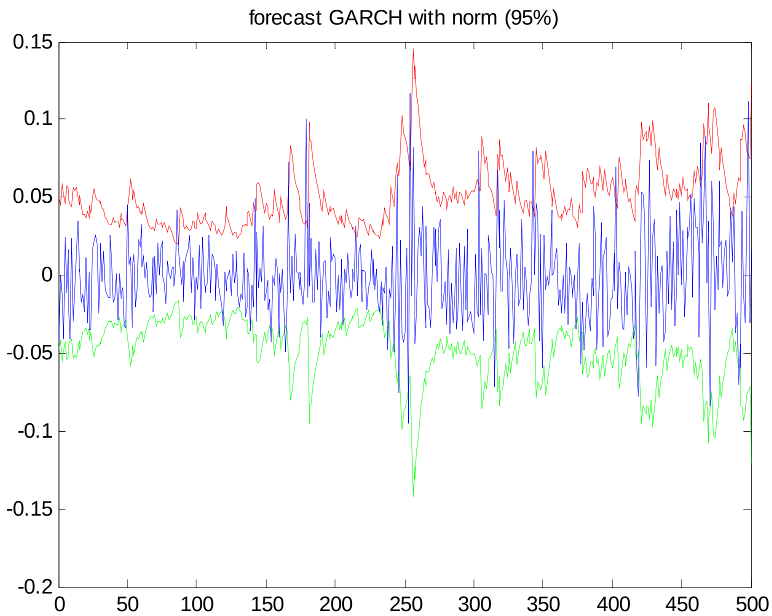
Το μοντέλο MDN για αυτό τον δείκτη για το συγκεκριμένο διάστημα εμπιστοσύνης συμπεριφέρεται ακριβώς όπως θα θέλαμε για τις προβλέψεις μας. Δηλαδή να ανεβάζει και να κατεβάζει τα όρια όσο χρειάζεται κάθε φορά ανάλογα με τα ανεβοκατεβάσματα του δείκτη.

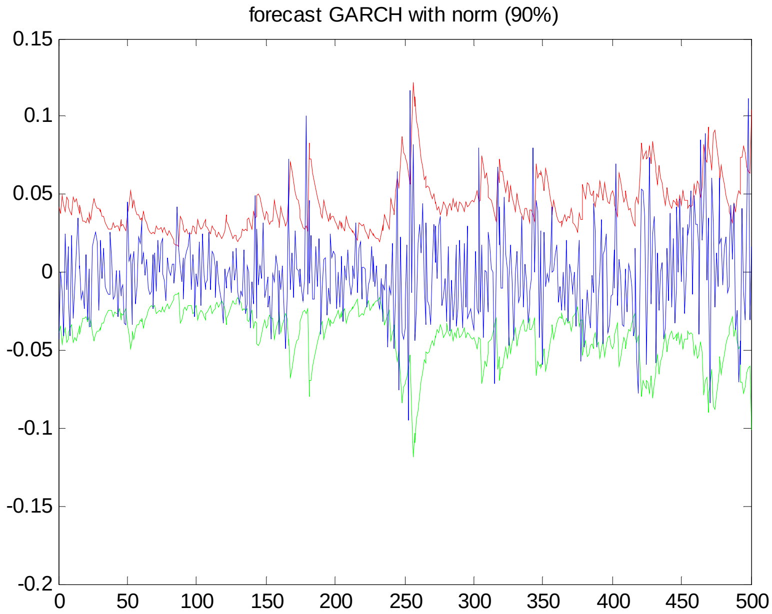


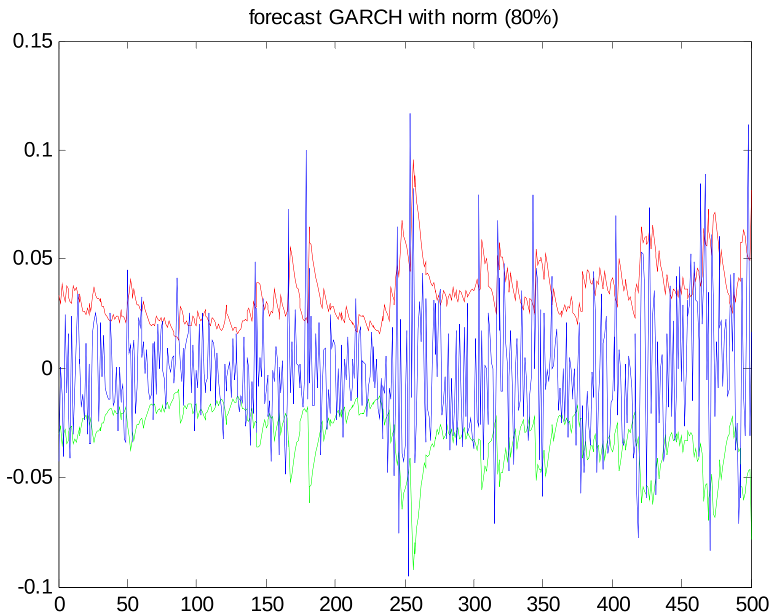


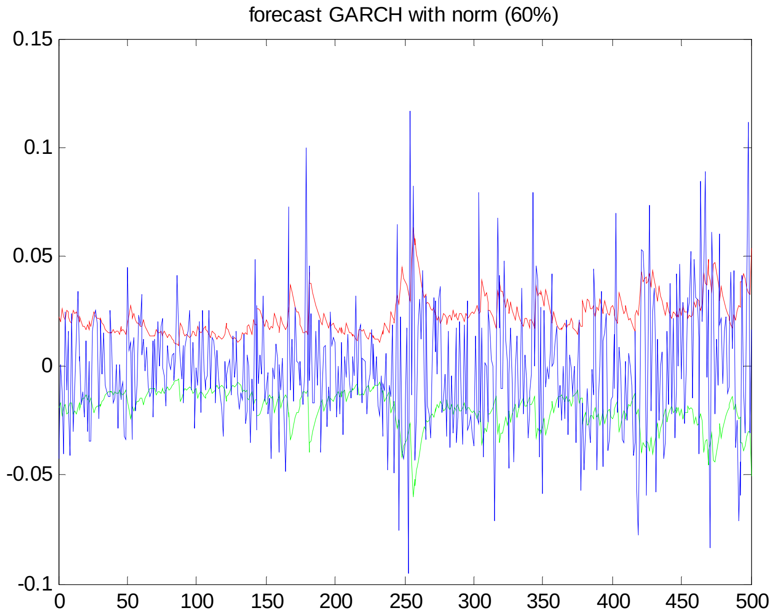
SP500

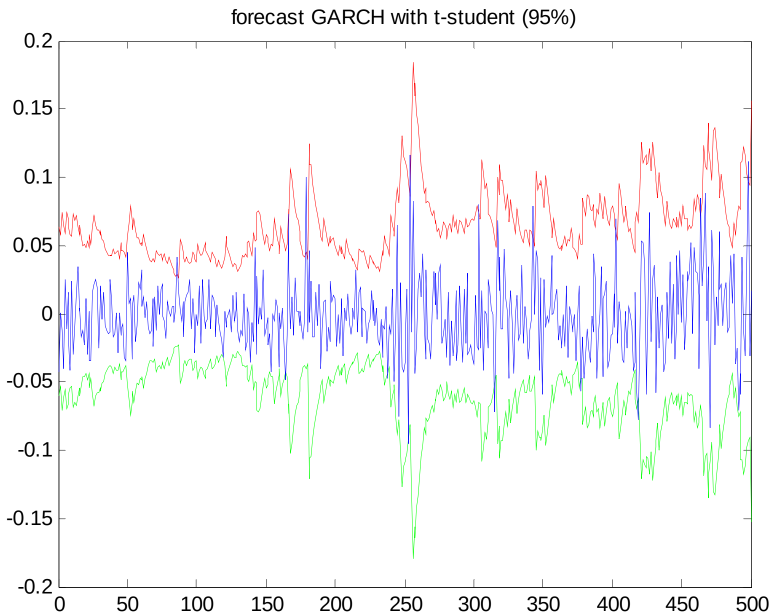
Για τον συγκεκριμένο δείκτη δεν έχουμε να παρατηρήσουμε κάτι αξιοσημείωτο.

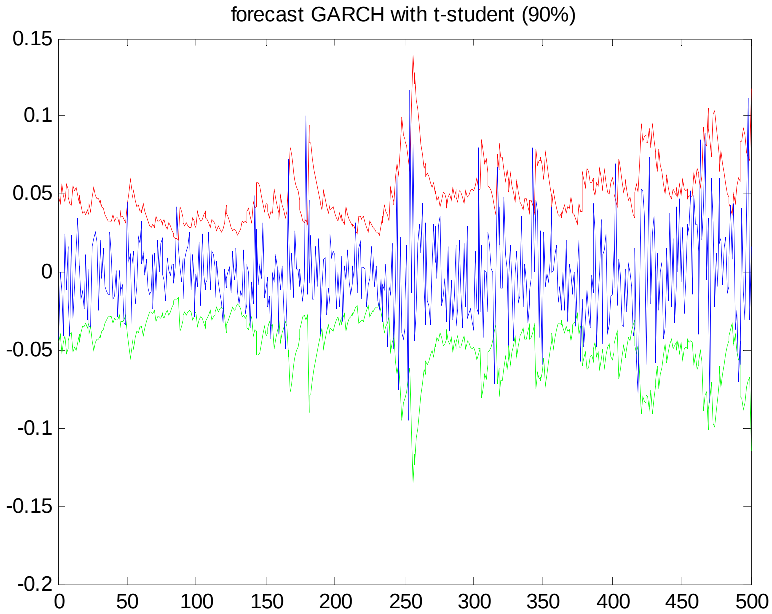


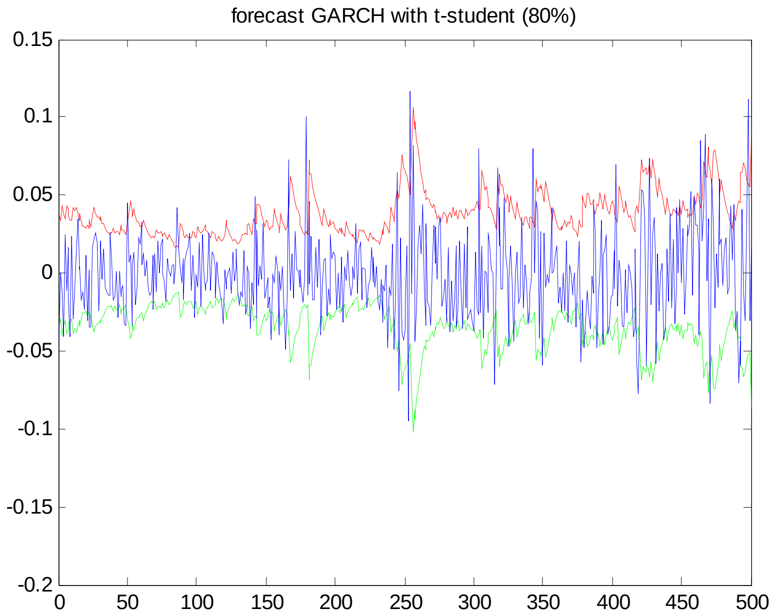

forecast GARCH with norm (90%)
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

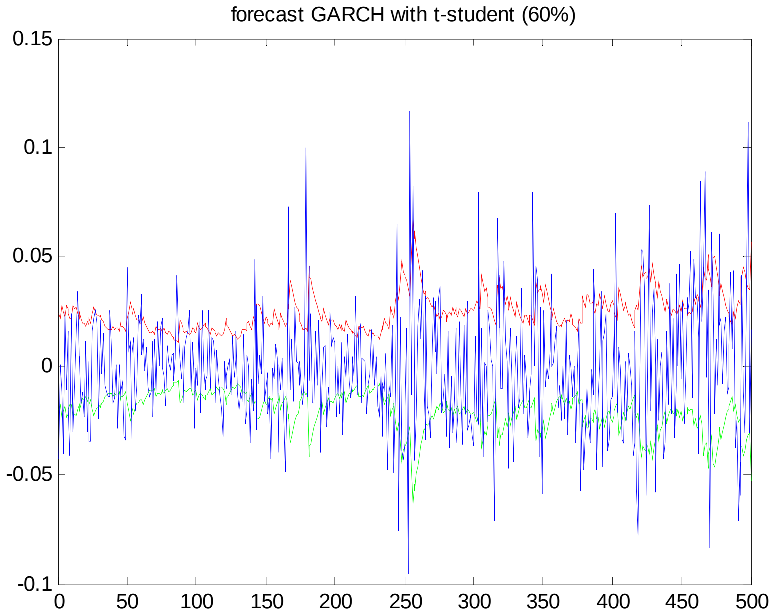

forecast GARCH with norm (80%)
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

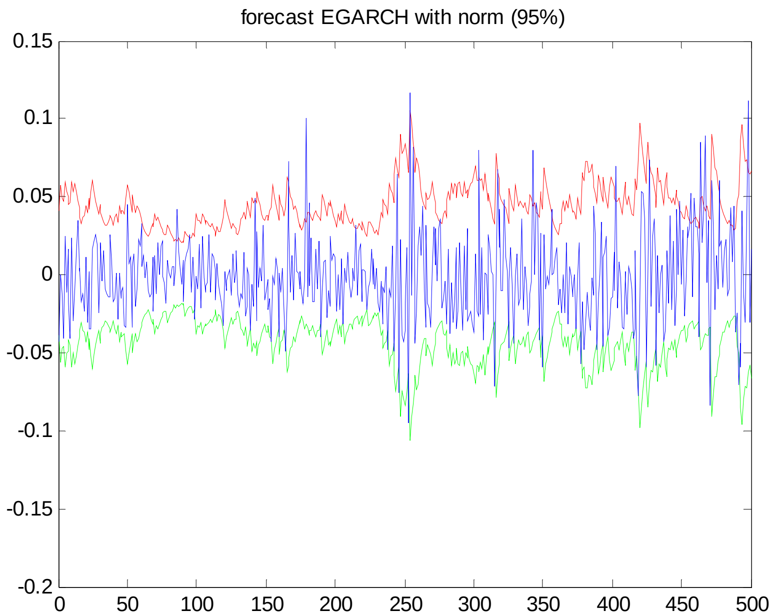

forecast GARCH with norm (60%)
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

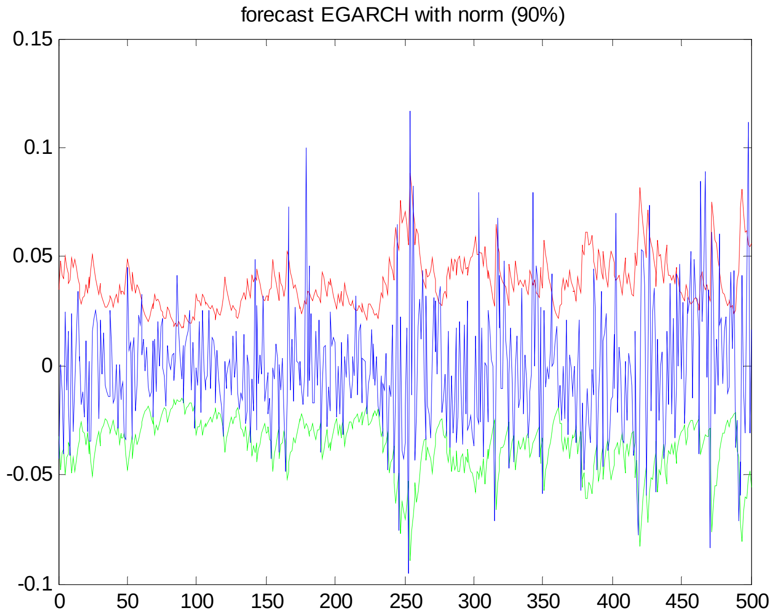

forecast GARCH with t-student (95%)
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

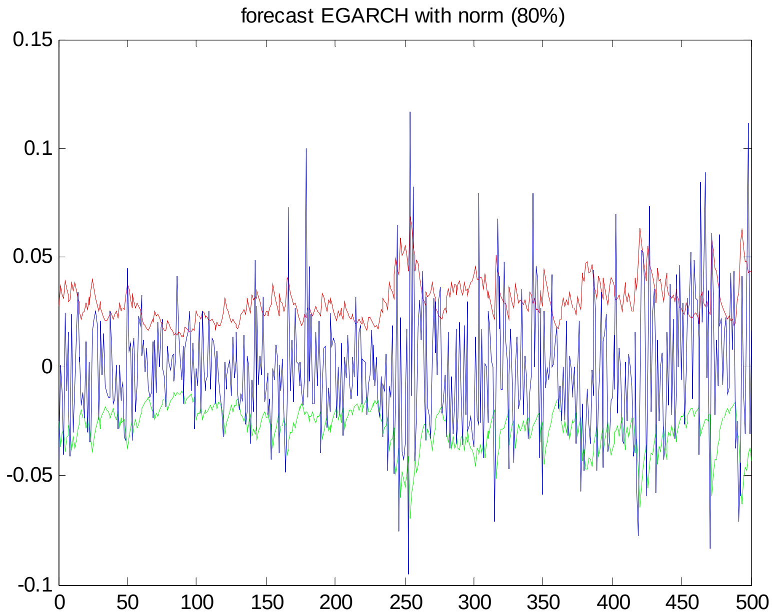

forecast GARCH with t-student (90%)
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

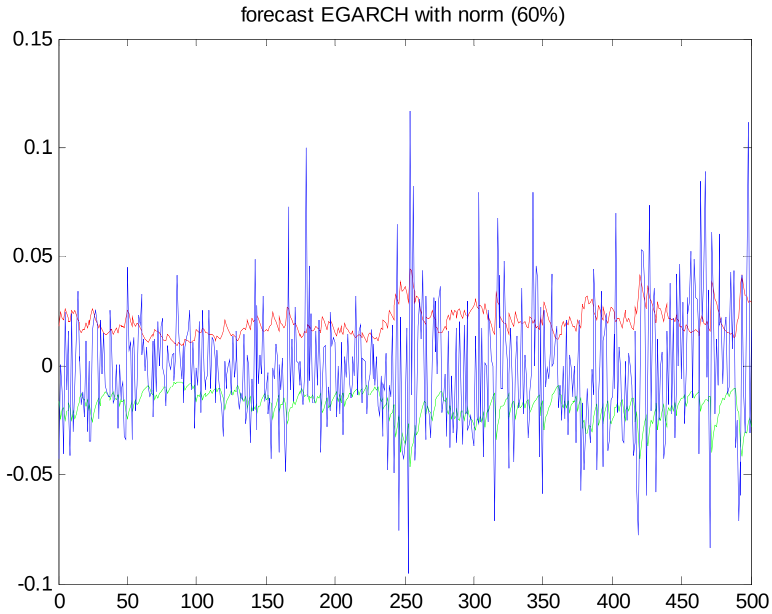

forecast GARCH with t-student (80%)
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

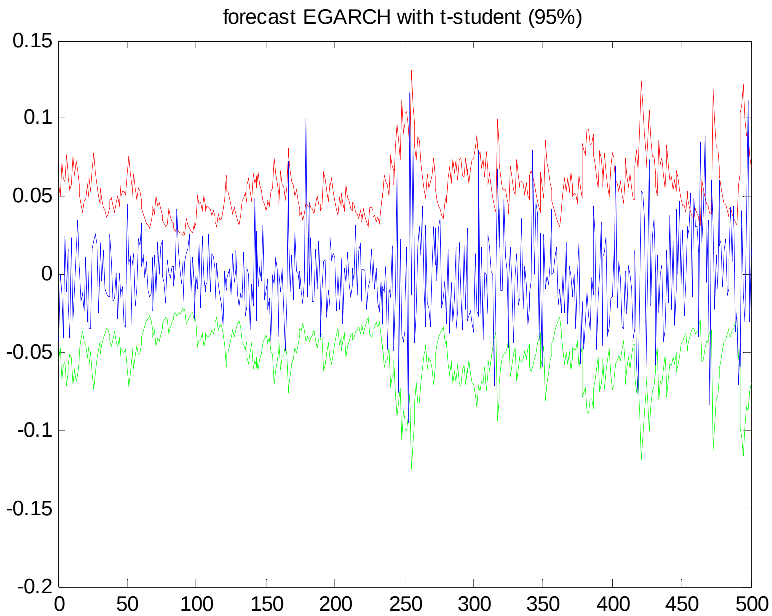

forecast GARCH with t-student (60%)
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

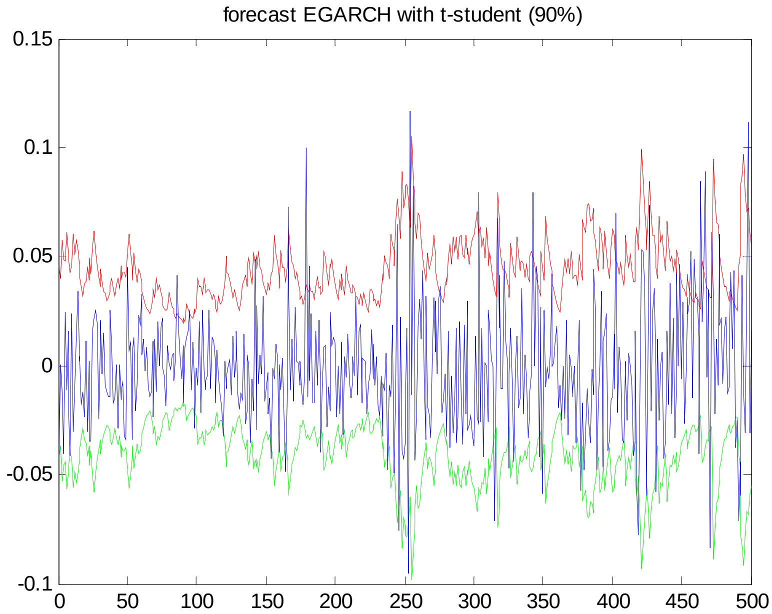

forecast EGARCH with norm (95%)
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

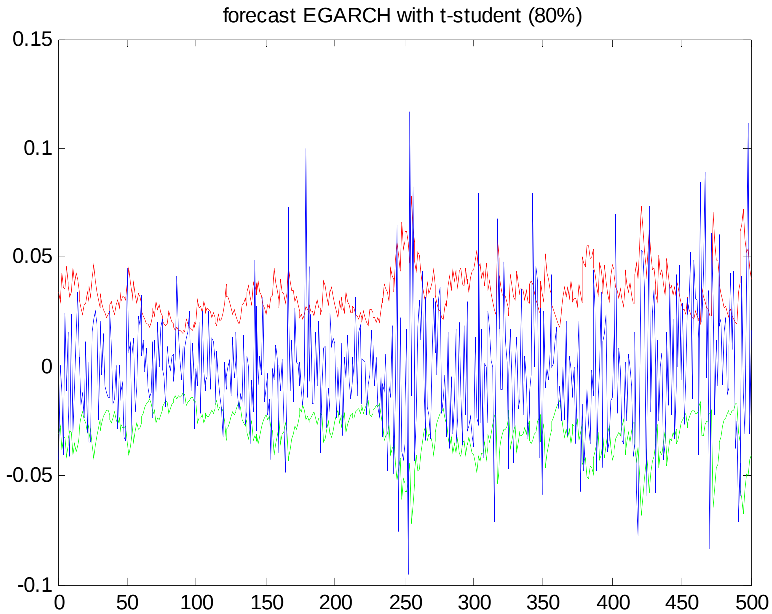

forecast EGARCH with norm (90%)
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

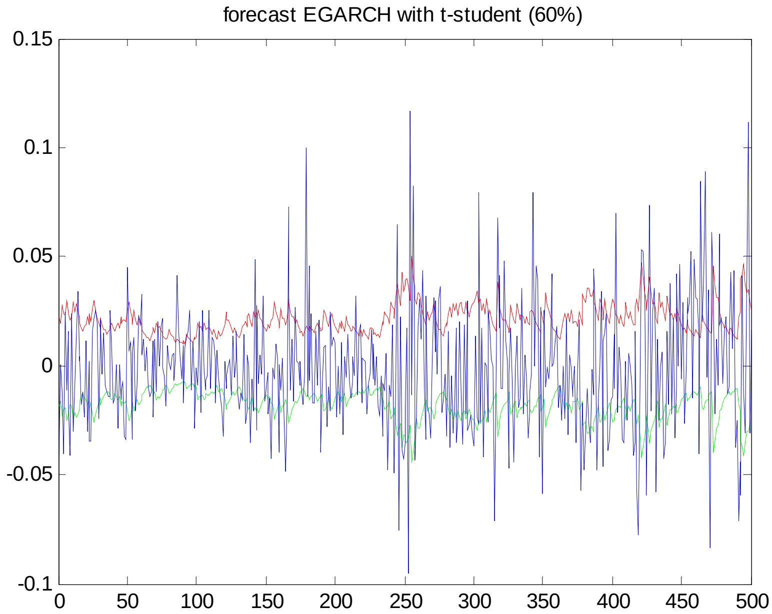

forecast EGARCH with norm (80%)
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

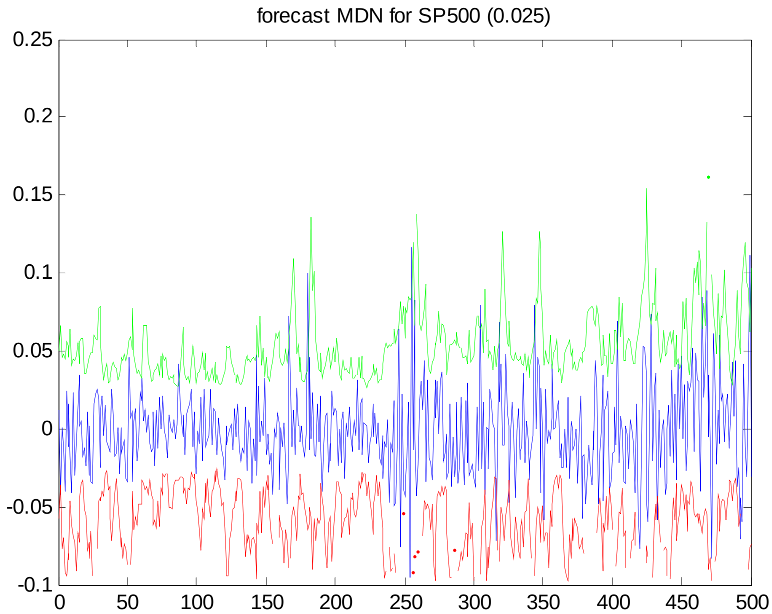

forecast EGARCH with norm (60%)
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

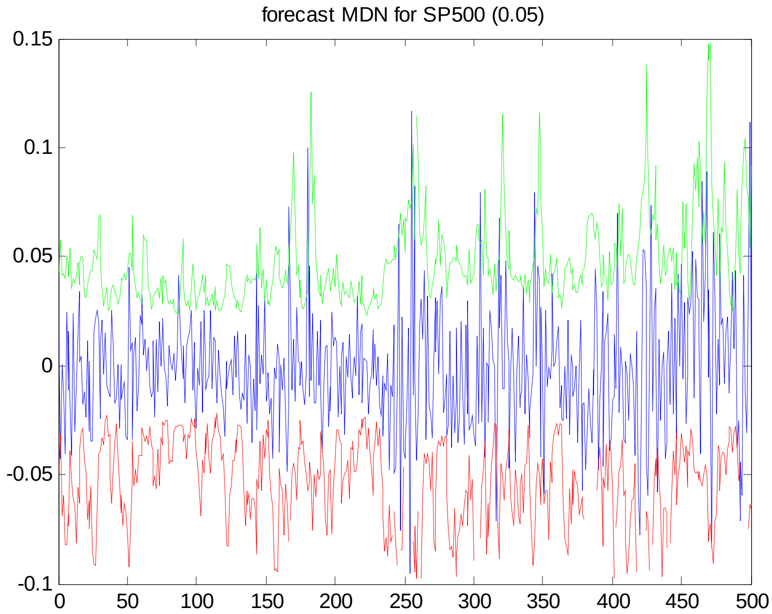

forecast EGARCH with t-student (95%)
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

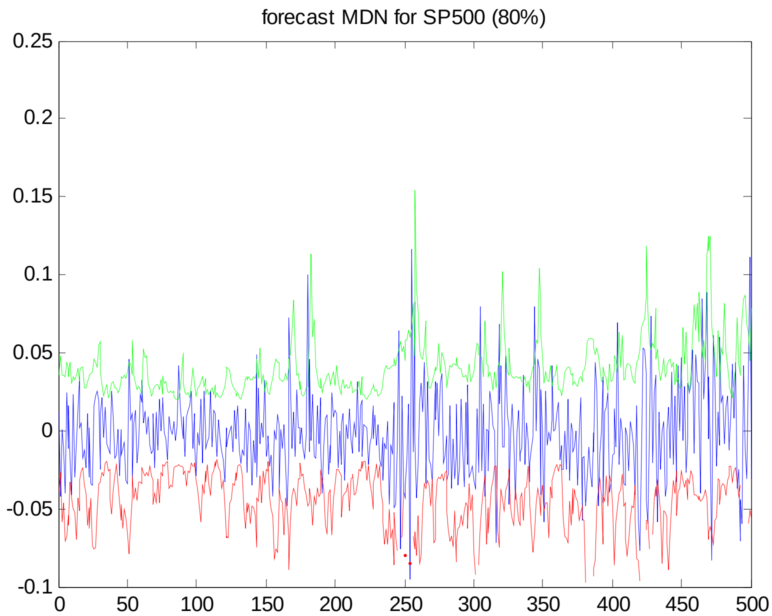

forecast EGARCH with t-student (90%)
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

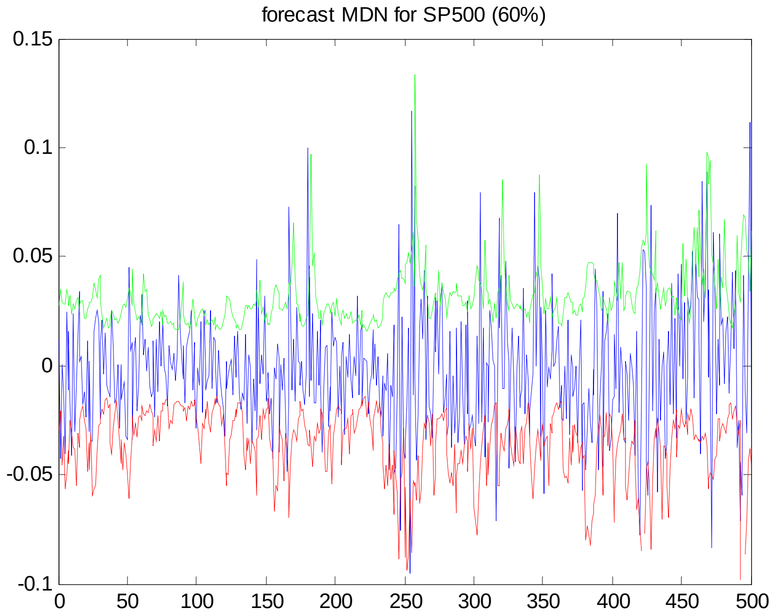

forecast EGARCH with t-student (80%)
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500


forecast EGARCH with t-student (60%)
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

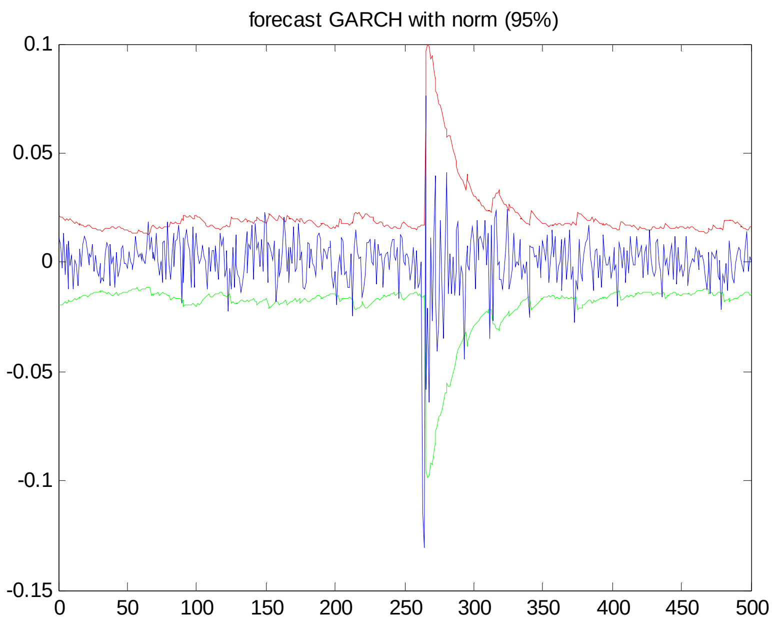

forecast MDN for SP500 (0.025)
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500


forecast MDN for SP500 (0.05)
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

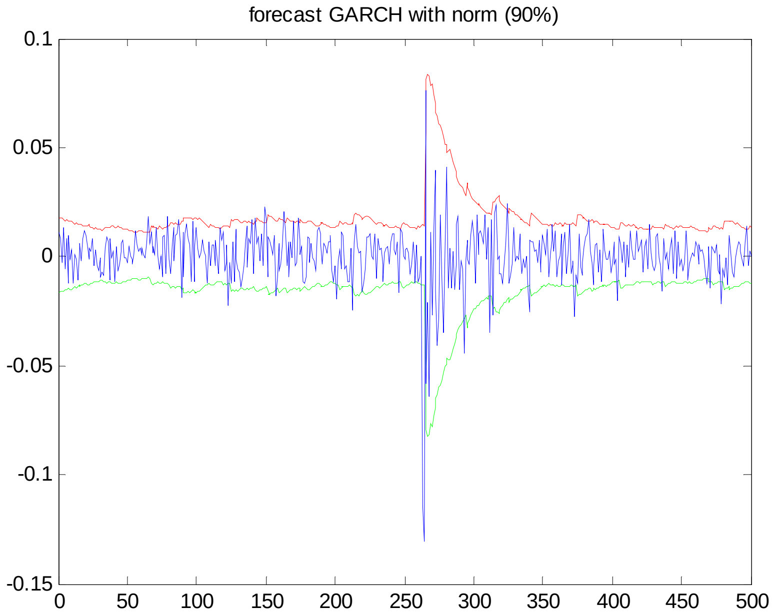

forecast MDN for SP500 (80%)
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

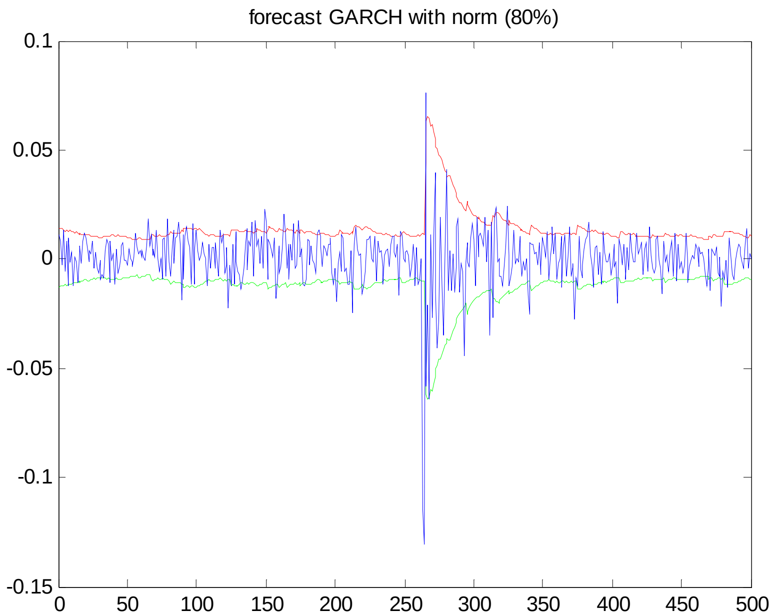


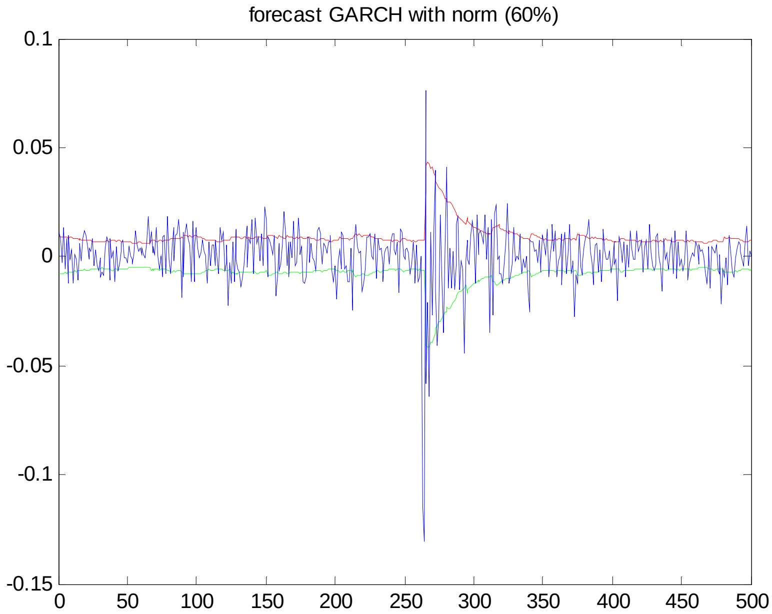
FTSE

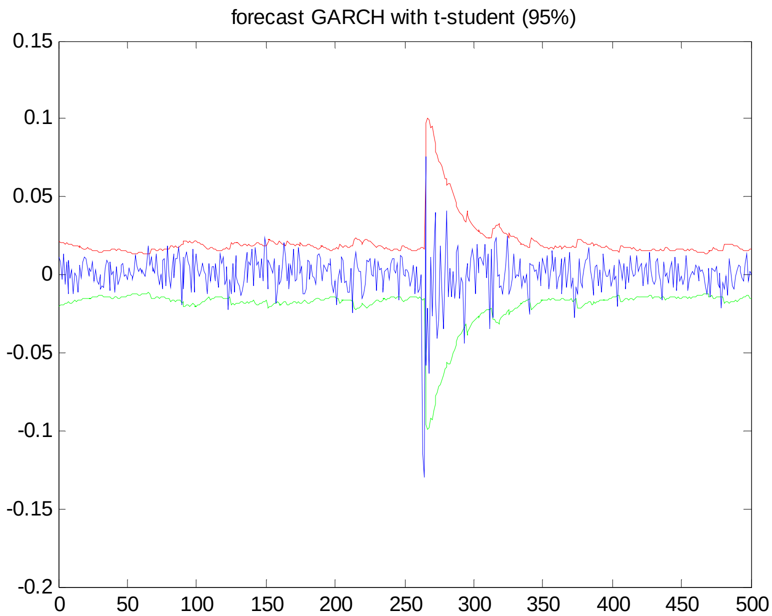


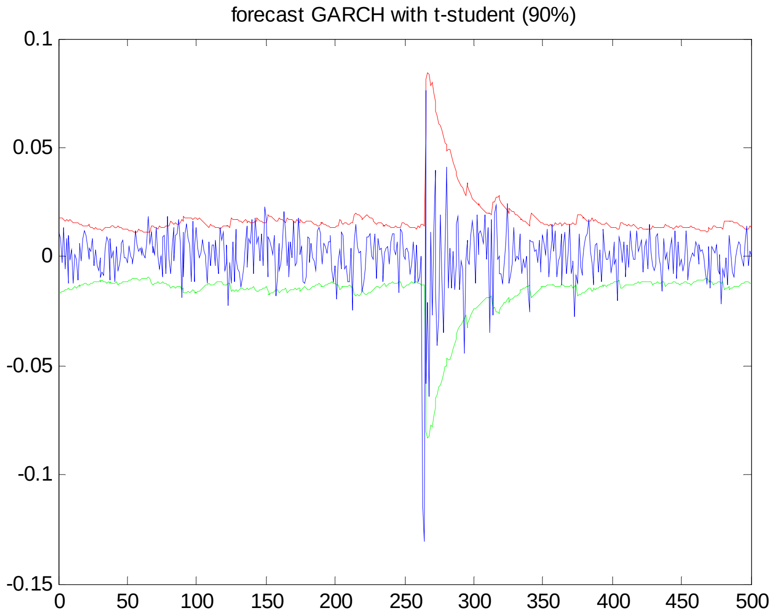
Για τον δείκτη FTSE παρατηρούμε ότι το μοντέλο GARCH με κανονική κατανομή ανεβάζει τα όρια αρκετά όπως κάνει και το μοντέλο GARCH με κατανομή Student T.

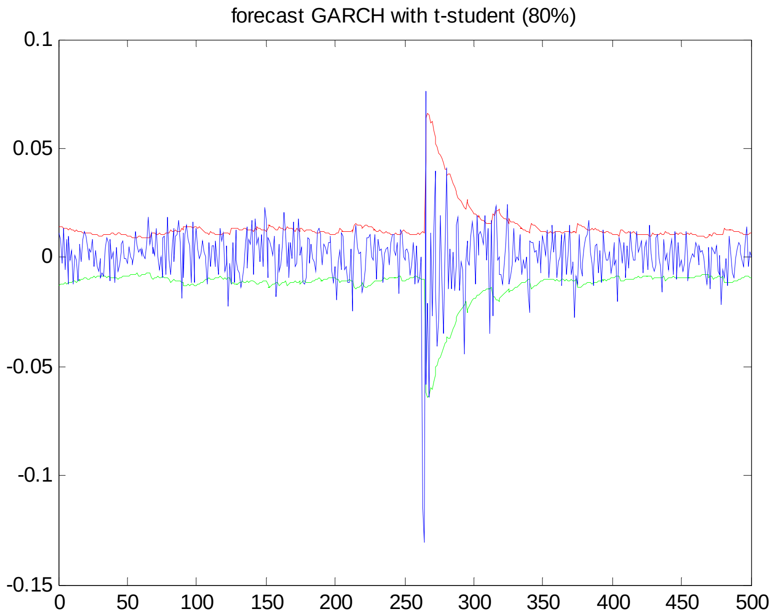

forecast GARCH with norm (90%)
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
0 50 100 150 200 250 300 350 400 450 500

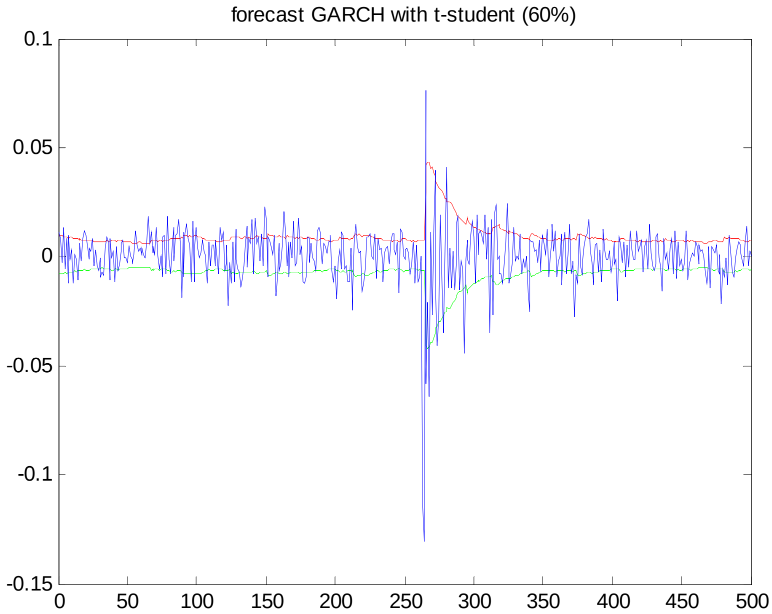

forecast GARCH with norm (80%)
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
0 50 100 150 200 250 300 350 400 450 500

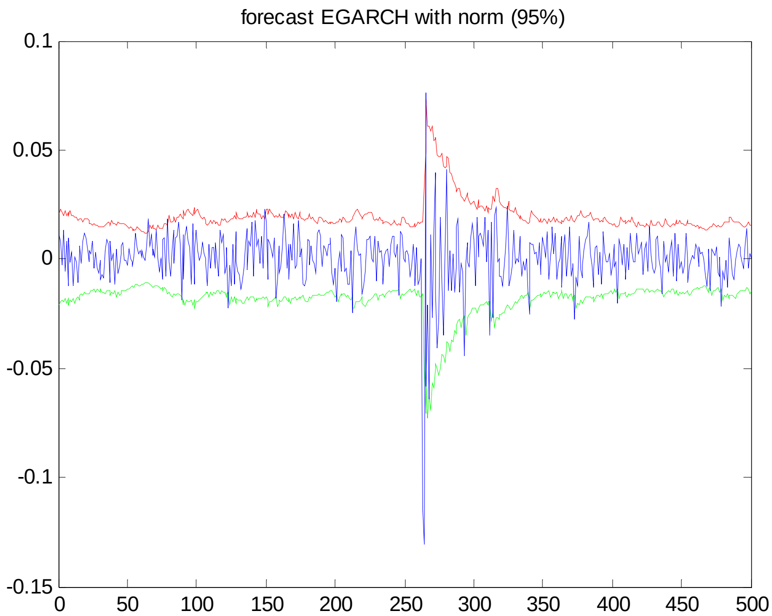

forecast GARCH with norm (60%)
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500


forecast GARCH with t-student (95%)
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

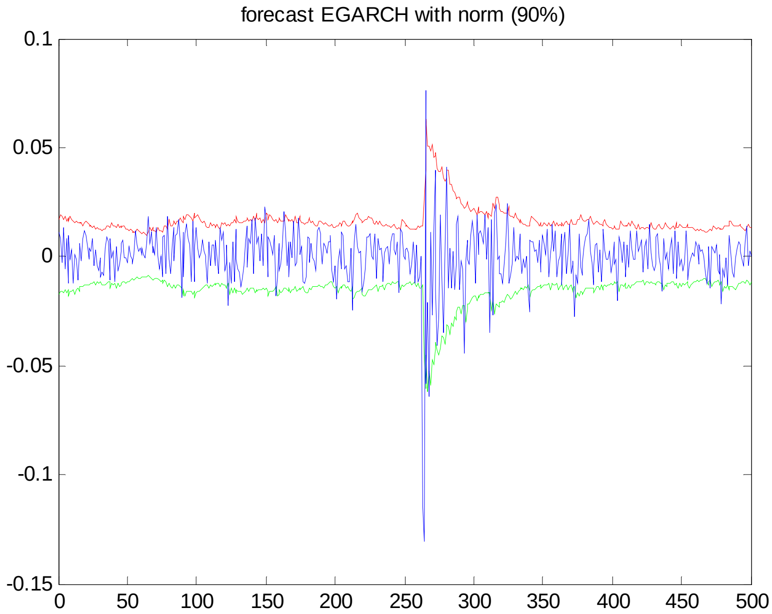

forecast GARCH with t-student (90%)
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

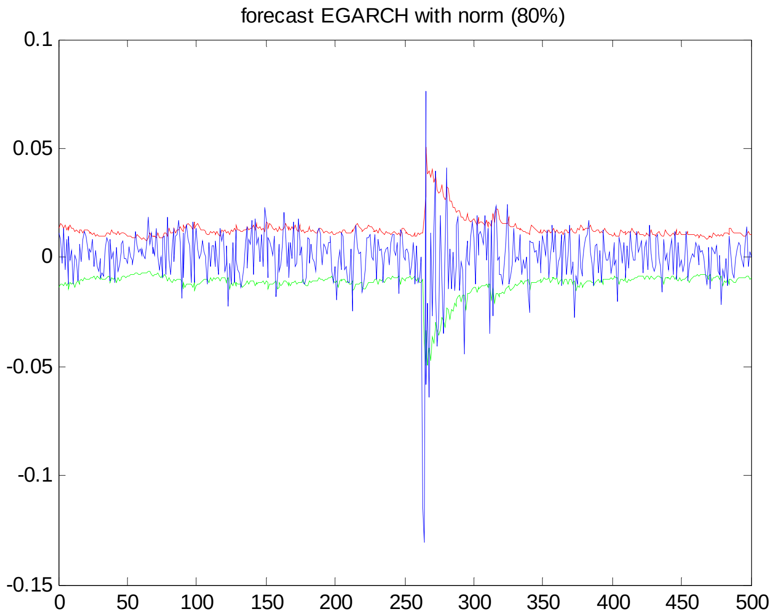

forecast GARCH with t-student (80%)
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

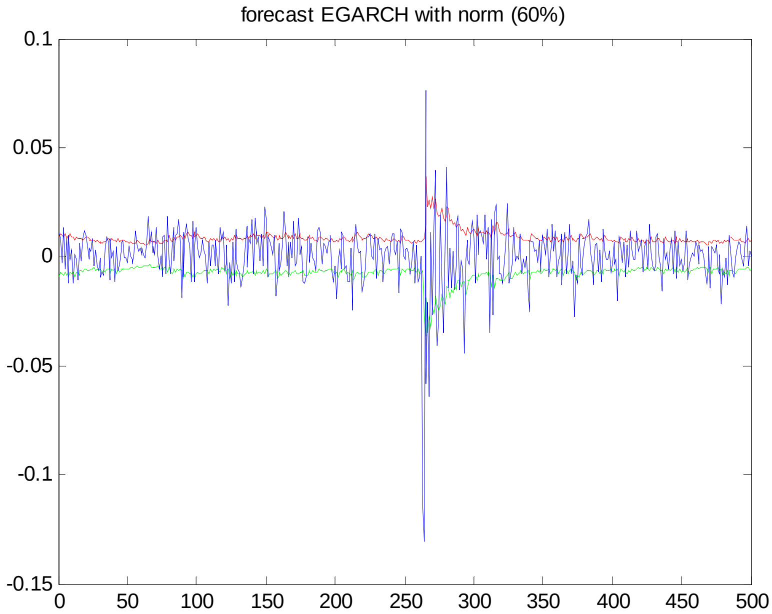


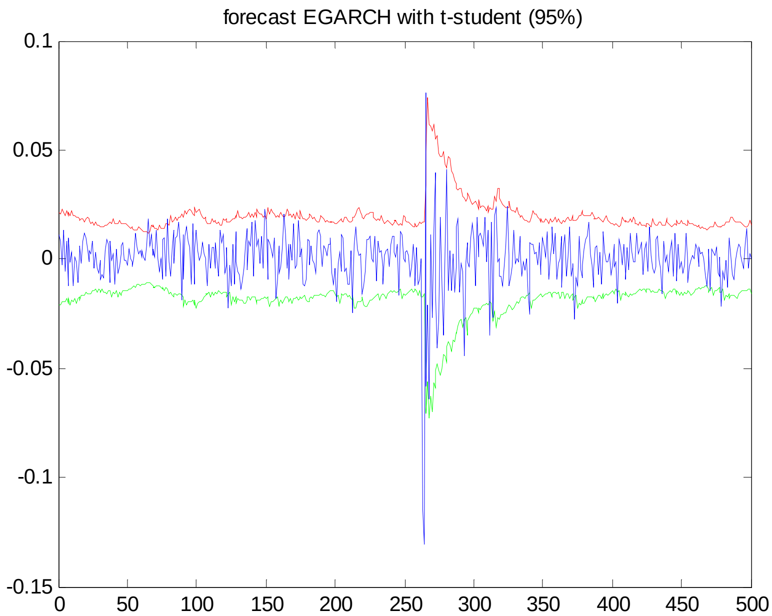


Ενώ το μοντέλο EGARCH με κανονική κατανομή δεν τείνει να ανεβάζει τόσο πολύ τα όρια στις απότομες πτώσεις ή ανόδους ούτε να επανέρχεται στα κανονικά επίπεδα με εκθετικό τρόπο.

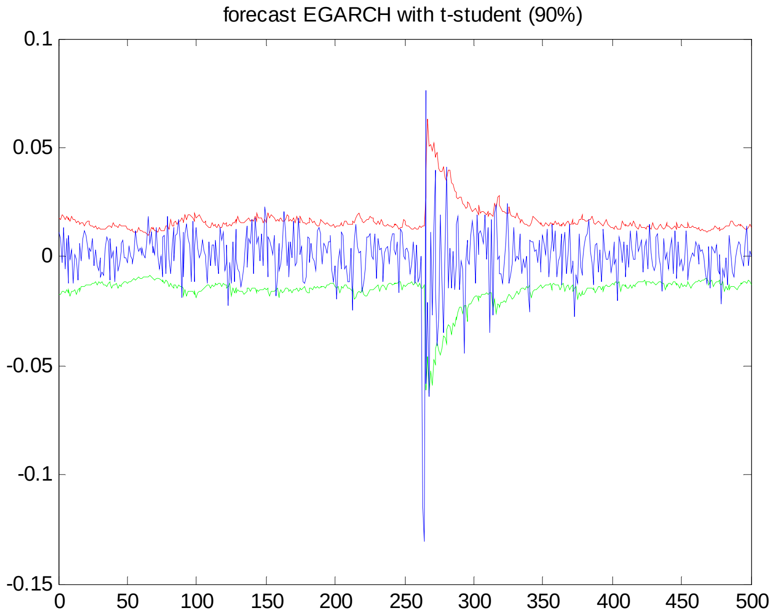

forecast EGARCH with norm (90%)
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

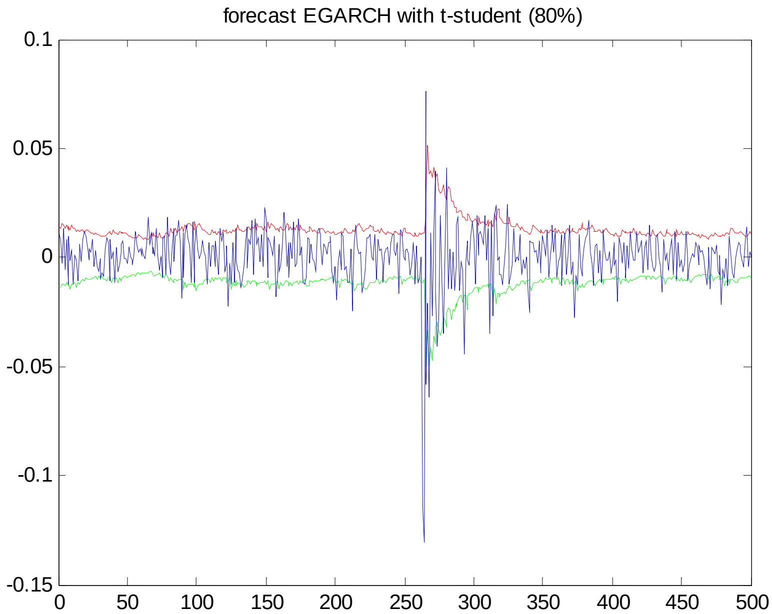

forecast EGARCH with norm (80%)
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

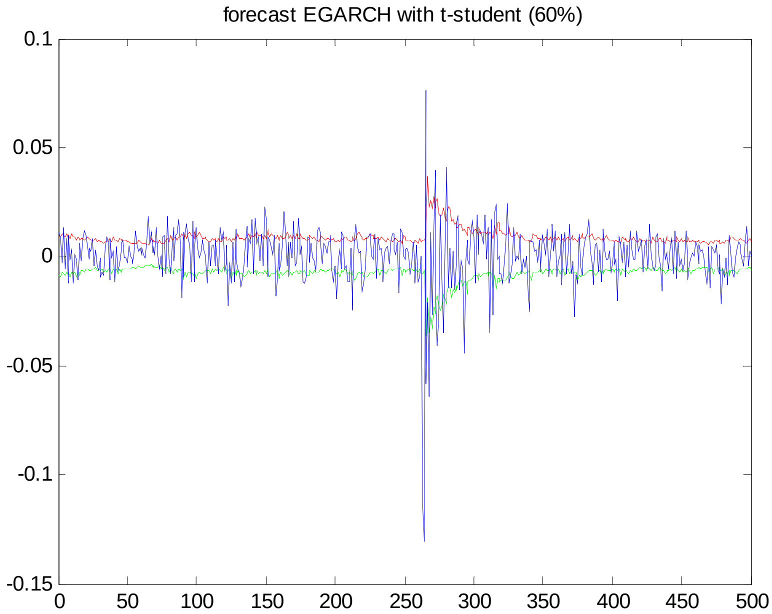


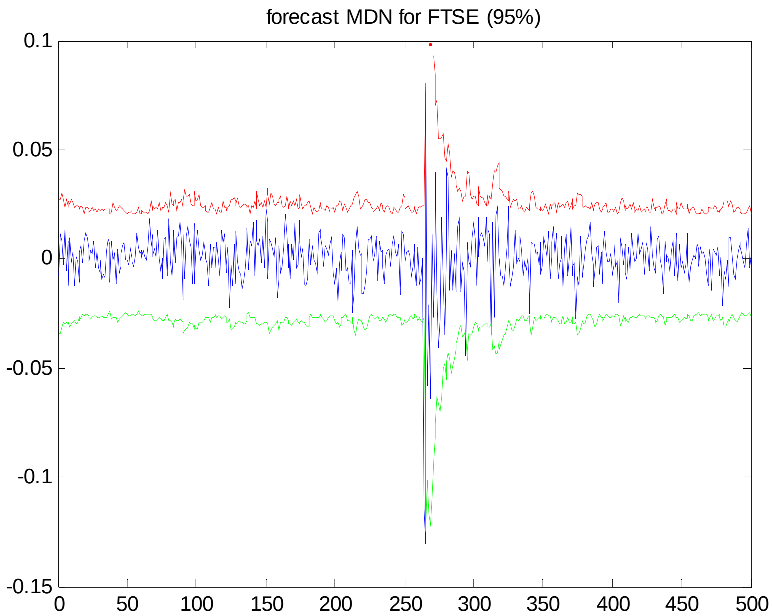


Στα αποτελέσματα του EGARCH μοντέλου με κατανομή Student T παρόλο που φαίνεται να συμπεριφέρεται όπως ένα GARCH μοντέλο με κανονική κατανομή ή με κατανομή Student T παρατηρούμε ότι στην παρατήρηση 260 δηλαδή σε μια απότομη άνοδο δεν ανεβάζει τόσο πολύ το όριο όπως ένα GARCH μοντέλο με κανονική κατανομή.

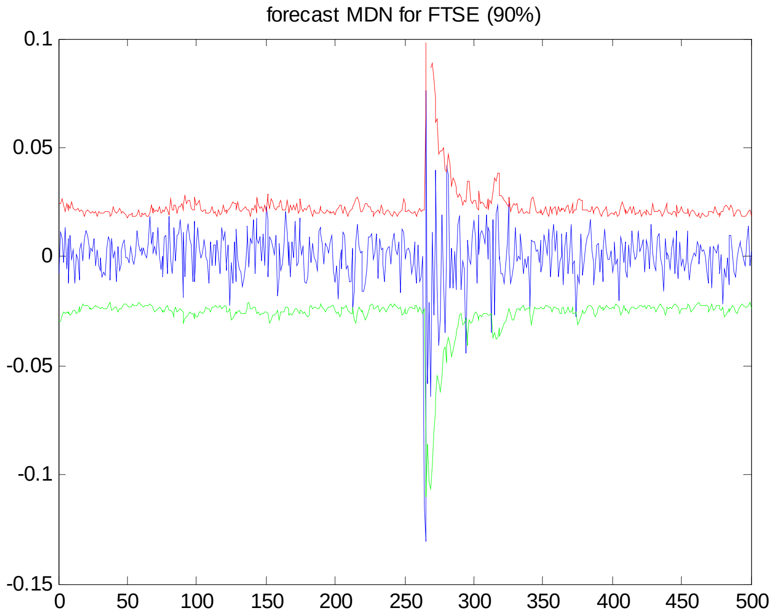

forecast EGARCH with t-student (90%)
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

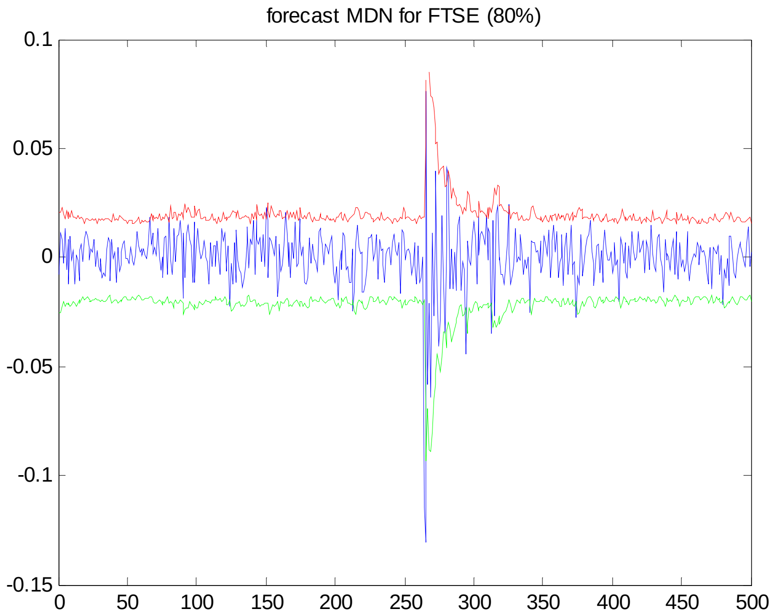

forecast EGARCH with t-student (80%)
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

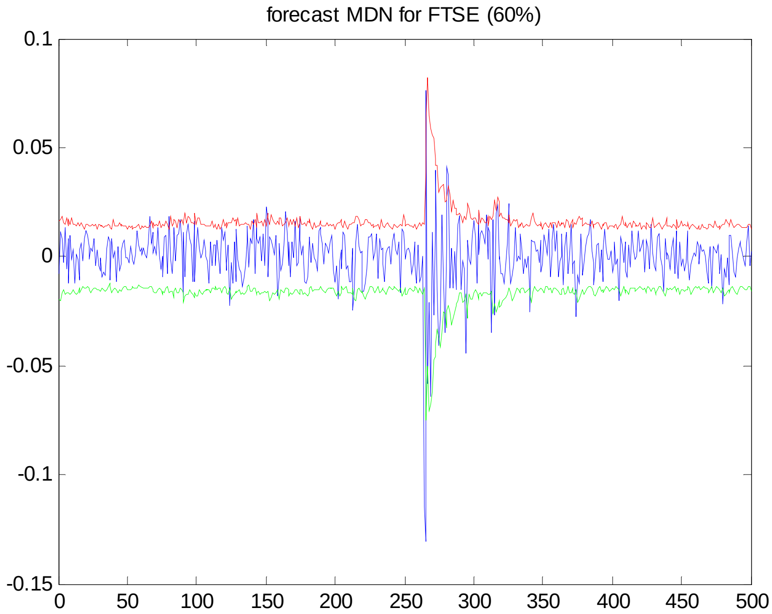




Ενώ το μοντέλο MDN για τον δείκτη μας δείχνει τα έχει πολύ ανοιχτά τα όρια του και ειδικά στις απότομες πτώσεις και ανόδους όπως στην παρατήρηση 260.


forecast MDN for FTSE (90%)
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500


forecast MDN for FTSE (80%)
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500


forecast MDN for FTSE (60%)
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

Βιβλιογραφία

Carol Alexander - Market Models. A Guide to Financial Data Analysis

Peter E. Rossi – Modeling Stock Market Volatility. Bridring the Gap to Continuous Time

Robert Engle - GARCH 101: The Use of ARCH/GARCH Models in Applied Econometrics

Catalin Starica - Is GARCH(1,1) as good a model as the Nobel prize accolades would imply?

Michael Carney - Predicting Probability Distributions for Surf Height Using an Ensemble of Mixture Density Networks

Stefan Mittnik, and Marc S. Paolella - Multivariate Normal Mixture GARCH Markus Haas,

Christian Schittenkopf, Georg Dorffner, Engelbert J Dockner - Volatility Prediction with mixture Density Networks

CHRISTIAN SCHITTENKOPF, GEORG DORFFNER1 and ENGELBERT J. DOCKNER - Forecasting Time-dependent Conditional Densities: A Semi-nonparametric Neural Network Approach

Carol Alexander - Normal Mixture GARCH(1,1) Applications to Exchange Modelling

Markus Haas, Stefan Mittnik, Marc S. Paolell, Sven C. Steude, Stable Mixture GARCH Model

Forecasting Time-dependent Conditional Densities: A Semi-nonparametric Neural Network Approach - Christian Schittenkopf, Georg Dorffner and Engelbert j. Dockner

Stable Mixture GARCH Models - Markus Haas Stefan, Mittnik Marc S. Paolella, Sven C. Steude

http://en.wikipedia.org/wiki/

Delta hedging using constant volatility, GARCH and neural nets to forecast volatility- Dennis Bron

FORECASTING VOLATILITY - Stephen Figlewski