# Μεταπτυχιακή διατριβή

# Λογισμός κατά *Malliavin* και εφαρμογές στην χρηματοοικονομική

Ιωάννης Δ.Μπαλτάς

Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικής επιστήμης
ΠΜΣ Χρηματοοικονομικά και Αναλογιστικά μαθηματικά
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

# Ευχαριστιες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της εξεταστικής μου επιτροπής δρ. Σ. Ξανθόπουλο, επίκουρο καθηγητή του Πανεπιστημίου Αιγαίου και δρ. Σ. Βρόντο, λέκτορα του Πανεπιστημίου Αιγαίου για την βοήθειά τους. Επίσης ευχαριστώ την δρ. Ευαγγελία Πέτρου, του Πανεπιστημίου *Humboldt* του Βερολίνου για τις χρήσιμες παρατηρήσεις και σημειώσεις στο 4ο θερινό σχολείο *Stochastic Finance* στην Χίο, τον Ιούλιο του 2007.

Η εκπόνηση της διατριβής αυτής θα καθίστατο αδύνατη δίχως την βοήθεια του δρ. Α.Ν. Γιαννακόπουλου, αναπληρωτή καθηγητή του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών, τον οποίο και ευχαριστώ θερμά.

Σάμος, Νοέμβρης 2007. Γιάννης Μπαλτάς

# Περιεχόμενα


**1 Εισαγωγή** **1**

**2 Ο λογισμός κατά** *Malliavin* **3**
- 2.1 Το ανάπτυγμα χάους του *Wiener* . . . 3
  - 2.1.1 Τα πολυώνυμα *Hermite* . . . 4
  - 2.1.2 Πολλαπλό ολοκλήρωμα κατά *Itô* . . . 5
  - 2.1.3 Το θεώρημα ανάπτυξης του χάους . . . 7
- 2.2 Η παράγωγος κατά *Malliavin* . . . 8
- 2.3 Το ολοκλήρωμα κατά *Skorohod* . . . 12
- 2.4 Ολοκλήρωση κατά μέλη . . . 15
- 2.5 Παράρτημα : Αποδείξεις . . . 17

**3 Εφαρμογές στην χρηματοοικονομική** **31**
- 3.1 *Greeks* και ολοκλήρωση κατά μέλη . . . 31
  - 3.1.1 *Greeks* . . . 32
- 3.2 Ευρωπαϊκά δικαιώματα . . . 33
  - 3.2.1 Δέλτα . . . 33
  - 3.2.2 *Vega* . . . 34
  - 3.2.3 Γάμμα . . . 35
- 3.3 Ασιατικά δικαιώματα . . . 36
  - 3.3.1 Δέλτα . . . 36
  - 3.3.2 *Vega* . . . 37
- 3.4 Ο τύπος των $Clark - Ocone$ . . . 38
  - 3.4.1 Θεωρητική προσέγγιση . . . 38
  - 3.4.2 Εφαρμογή στην χρηματοοικονομική . . . 41
  - 3.4.3 Εφαρμογή στο μοντέλο $Black - Scholes$ . . . 43
- 3.5 Παράρτημα : Αποδείξεις . . . 44

**4 Προσομοίωση** *Monte Carlo* **51**
- 4.1 *Digital options* . . . 51
  - 4.1.1 *Greeks* για ευρωπαϊκά *digital* δικαιώματα αγοράς . 52

# Κεφάλαιο 1

# Εισαγωγή

Στα πλαίσια της διατριβής αυτής θα ασχοληθούμε με ένα παρακλάδι της στοχαστικής ανάλυσης τον λογισμό κατά $Malliavin$. Ονομάστηκε έτσι προς τιμή του δημιουργού του, καθηγητή $Paul$ $Malliavin$[1].Ο λογισμός κατά $Malliavin$ είναι από εκείνες τις περιπτώσεις όπου ένας ειδικός τρόπος επίλυσης γίνεται μία ολόκληρη θεωρία και μάλιστα μία θεωρία τόσο σημαντική, που στηρίζεται επάνω της ένα πολύ μεγάλο κομμάτι της σύγχρονης χρηματοοικονομικής και όχι μόνο, επιστήμης. Είναι άξιον απορίας αν ο ίδιος ο $Malliavin$ είχε φανταστεί στα μέσα της δεκαετίας του 70, όταν έβαζε τα πρώτα θεμέλια σε αυτόν τον τομέα,τις διαστάσεις που θα έπερνε περίπου είκοσι χρόνια μετά.
Ο απότερος σκοπός του $Malliavin$ ήταν να δώσει μία λύση στο πρόβλημα της υποελιπτικότητας του $Hörmander$, πρόβλημα με το οποίο δεν θα ασχοληθούμε στην παρούσα εργασία. Μετά από αρκετά χρόνια όμως, διάφοροι ερευνητές της στοχαστικής ανάλυσης, όπως οι $Bismut$, $Strook$[9], $Watanabe$[10] κ.α., αντιλήφθηκαν το ενδιαφέρον και τις δυνατότητες της θεωρίας αυτής και έτσι δημιουργήθηκε ο λογισμός κατά $Malliavin$ με την μορφή που τον γνωρίζουμε σήμερα.
Στην πραγματικότητα ο λογισμός κατά $Malliavin$ είναι ένα είδος διαφορικού λογισμού σε άπειρες διαστάσεις, με τον οποίο μας δίνεται η δυνατότητα να παραγωγήσουμε συναρτησοειδή της κίνησης $Brown$ μέσα σε κατάλληλα ορισμένους χώρους $Wiener$, κάτι αρκετά εντυπωσιακό και συνάμα ενδιαφέρον αν αναλογιστούμε ότι η κίνηση $Brown$ δεν είναι πουθενά παραγωγίσημη. Στηριζόμενος ουσιαστικά στο ανάπτυγμα χάους του $Wiener$, δίνει λύση σε προβλήματα που θα ήταν αδύνατο να λυθούν, όπως για παράδειγμα η έρευση της ολοκληρωτέας ποσότητας στο θεώρημα αναπαράστασης των $martingale$.
Η χρησιμότητα όμως του λογισμού κατά $Malliavin$ δεν περιορίζεται μόνο στην στοχαστική ανάλυση. Με μία ειδική τεχνική που χρησιμοποιεί το ολοκλήρωμα κατά $Skorohod$[27] και είναι γνωστή ως ολοκλήρωση κατά μέλη,

μας δίνεται η δυνατότητα να υπολογίσουμε αποτελεσματικά τους δείκτες ευαισθησίας , γνωστούς και ως *greeks*, για δικαιώματα που δεν έχουν συνεχή συνάρτηση απόδοσης, όπως για παράδειγμα τα *Asian* και τα *digital*. Αυτές είναι οι δύο εφαρμογές του λογισμού κατά *Malliavin* με τις οποίες θα ασχοληθούμε στην διατριβή αυτή. Υπάρχουν όμως και άλλες πολλές, όπως για παράδειγμα στην επίλυση των *backward* στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων και διαρκώς η επιστημονική κοινότητα βρίσκει και μια νέα εφαρμογή για τον λογισμό κατά *Malliavin*.

Η δομή της εργασίας αυτής είναι η εξής. Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται μια σύντομη αναφορά στα βασικότερα σημεία του λογισμού κατά *Malliavin* : Ανάπτυξη σε χάος του *Wiener*, παράγωγος κατά *Malliavin* και ολοκλήρωμα κατά *Skorohod*. Στο τρίτο κεφάλαιο εξετάζεται θεωρητικά η εφαρμογή του λογισμού κατά *Malliavin* στην αποτίμηση των παραγώγων. Στο τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο κάνουμε προσομοίωση *Monte Carlo* με βάση τον λογισμό κατά *Malliavin*, για να υπολογίσουμε τα *greeks* για ευρωπαϊκά *digital* δικαιώματα.

Όλα τα προγράμματα του τέταρτου κεφαλαίου έγιναν σε *Matlab*.

# Κεφάλαιο 2

# Ο λογισμός κατά *Malliavin*

Στο κεφάλαιο αυτό θα εισάγουμε τα βασικά σημεία του λογισμού κατά *Malliavin*. Η μελέτη μας καλύπτει το θεώρημα ανάπτυξης του χάους κατά *Wiener*, τον ορισμό της παραγώγου κατά *Malliavin* και το ολοκλήρωμα κατά *Skorohod*. Στο τέλος του κεφαλαίου ακολουθεί ένα παράρτημα αποτελούμενο από όλες τις αποδείξεις.

## 2.1 Το ανάπτυγμα χάους του *Wiener*

Έστω χώρος πιθανοτήτων της μορφής $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ και έστω $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ο χώρος *Hilbert* των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων τυχαίων μεταβλητών ως προς το μέτρο $P$. Με $W(t,\omega) = W(t)$, $\omega \in \Omega, t \geq 0$, συμβολίζουμε την τυπική μονοδιάστατη κίνηση *Brown* και έστω $F_t = \sigma(W(s), s \leq t)$ η διήθηση που αυτή παράγει.
Στην διατριβή αυτή, θα εργαστούμε στον χώρο *Wiener* δηλαδή σε χώρο της μορφής $(\mathbb{C}_0([0,T]), \mathcal{F}, \mu)$, όπου $\mu$ είναι το μέτρο *Wiener* και $\Omega = \mathbb{C}_0([0,T])$, μέσα στον οποίο ορίζεται η τυπική μονοδιάστατη κίνηση *Brown*.
Για κάθε συνάρτηση $h \in \mathcal{L}^2([0,T])$, ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή $W(h) = \int_0^T h(t)dW_t$. Η $W(h)$ είναι μια κανονική τυχαία μεταβλητή για την οποία ισχύει :

$E[W(h)] = 0$ και

$E[W(h)W(g)] = \int_0^T h(t)g(t)dt = \langle h, g\rangle_{\mathcal{L}^2([0,T])}$, $\forall h, g \in \mathcal{L}^2([0,T])$.

Μια πρώτη σημαντική παρατήρηση που έχουμε να κάνουμε είναι ότι η απεικόνιση $h \to W(h)$ είναι γραμμική. Πράγματι, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $h, g \in H$, όπου με $H$ συμβολίζουμε τον χώρο *Hilbert* $\mathcal{L}^2([0,T])$, έχουμε :

$$\begin{aligned} & E[(W(\lambda h + \mu g) - \lambda W(h) - \mu W(g))^2] \\ = \; & \|\lambda h + \mu g\|_H^2 + \lambda^2 \|h\|_H^2 + \mu^2 \|g\|_H^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -2\lambda \langle \lambda h + \mu g, h\rangle_H - 2\mu \langle \lambda h + \mu g, g\rangle_H + 2\lambda\mu \langle h, g\rangle_H \\
= \;& \lambda^2 \|h\|_H^2 + \mu^2 \|g\|_H^2 - \lambda \langle \lambda h + \mu g, h\rangle_H - \mu \langle \lambda h + \mu g, g\rangle_H \\
& +2\lambda\mu \langle h, g\rangle_H \\
= \;& 0
\end{aligned}
$$

Η απεικόνιση $h \to W(h)$ είναι μια γραμμική ισομετρία από τον $H$ στον $\mathcal{H}_1$, όπου ο $\mathcal{H}_1$ είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Τα στοιχεία του $\mathcal{H}_1$ είναι τυχαίες μεταβλητές που έχουν μέση τιμή μηδέν και όπως θα δείξουμε παρακάτω όταν μιλήσουμε για το θεώρημα ανάπτυξης του χάους, είναι πολλαπλά στοχαστικά ολοκληρώματα.

**Λήμμα 1.1** Η οικογένεια των τυχαίων μεταβλητών $e^{W(h)}, h \in H$ είναι ένα πλήρες υποσύνολο του $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, όπου $\mathcal{G}$ είναι η διήθηση που παράγεται από τις $W(h), h \in H$.

**Απόδειξη**: Βλέπε παράρτημα □

### 2.1.1 Τα πολυώνυμα *Hermite*

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τα πολυώνυμα *Hermite*. Θα εξετάσουμε τις ιδιότητές τους και στην επόμενη παράγραφο θα αποδείξουμε την χρησιμότητά τους στον λογισμό κατά *Malliavin*.

**Ορισμός 1.1.1** Το πολυώνυμο *Hermite* $n$ βαθμού συμβολίζεται με $H_n(x)$ και ορίζεται ως

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} exp(\frac{x^2}{2}) \frac{d^n}{dx^n} exp(-\frac{x^2}{2}),\ n \geq 0$$

**Θεώρημα 1.1.1** Η συνάρτηση $F(x,t) = exp(tx - \frac{t^2}{2})$, είναι γεννήτρια των πολυωνύμων *Hermite*, δηλαδή τα πολυώνυμα *Hermite*, μπορούν να παραχθούν από το ανάπτυγμα *Taylor* της συνάρτησης αυτής.

**Απόδειξη**: Βλέπε παράρτημα □

**Λήμμα 1.1.1** Τα πολυώνυμα *Hermite* έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες

$i)$Αποτελούν μια ορθοκανονική βάση στον $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mu)$, όπου $\mu$ κάποιο κανονικό μέτρο πιθανότητας (μέτρο *Wiener*)
$ii)$ $H_n^{'}(x) = H_{n-1}^{'}(x)$
$iii)$ $(n+1)H_{n+1}(x) = xH_n(x) - H_{n-1}(x)$
$iv)$ $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$

**Απόδειξη**: Βλέπε παράρτημα □

**Λήμμα 1.1.2** Τα πολυώνυμα *Hermite* ικανοποιούν την εξίσωση της θερμότητας

$$\frac{\partial}{\partial t}H_n(t,x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}H_n(t,x) = 0$$

όπου $\quad H_n(t,x) = \frac{(-t)^n}{n!}exp(\frac{x^2}{2t})\frac{d^n}{dx^n}exp(-\frac{x^2}{2t}).$

## 2.1.2 Πολλαπλό ολοκλήρωμα κατά *Itô*

Στην παράγραφο αυτή εισάγουμε το πολλαπλό ολοκλήρωμα κατά *Itô*, το οποίο είναι θεμελιώδες για το θεώρημα ανάπτυξης του χάους. Πρώτα πρέπει να εισάγουμε κάποιες χρήσιμες έννοιες.

**Ορισμός 1.1.2** Μία πραγματική συνάρτηση $f : [0,T]^n \to \mathbb{R}$ λέγεται συμμετρική αν $f(x_{\sigma 1}, ...x_{\sigma n}) = f(x_1, ..., x_n)$ για όλες τις μεταθέσεις $\sigma$ των $(1, 2, ..., n)$

**Ορισμός 1.1.3** Αν μία πραγματική συνάρτηση $f : [0,T]^n \to \mathbb{R}$, είναι συμμετρική και τετραγωνικά ολοκληρώσιμη, τότε θα λέμε ότι ανήκει στον χώρο των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συμμετρικών συναρτήσεων, τον οποίο συμβολίζουμε με $\mathcal{L}^2_S([0,T]^n)$.

Επειδή το στοχαστικό ολοκλήρωμα κατά *Itô* είναι προσαρμοσμένο στην διήθηση $F_t$, πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί όσον αφορά τον τρόπο ,με τον οποίο θα ορίσουμε το πολλαπλό ολοκλήρωμα. Ορίζουμε το *simplex*

$$S_n = \{(t_1, ..., t_n) \in [0,T]^n : t_1 \leq ... \leq t_n, n \in N, T > 0\}$$

**Ορισμός 1.1.4** Αν για μία πραγματική συνάρτηση $f : [0,T]^n \to \mathbb{R}$, ισχύει ότι

$$||f||^2_{\mathcal{L}^2([0,T]^n)} = \int_{S_n} f^2(t_1, ..., t_n)dt_1...dt_n < \infty$$

τότε μπορεί να οριστεί το επαναλαμβανόμενο ολοκλήρωμα κατά *Itô*

$$J_n(f) = \int_0^T \int_0^{t_n} ... \int_0^{t_2} f(t_1, t_2, ..., t_n)dW(t_1)dW(t_2)...dW(t_n)$$

**Λήμμα 1.1.3** Το επαναλαμβανόμενο ολοκλήρωμα κατά *Itô* παράγεται από τα πολυώνυμα *Hermite*.

**Απόδειξη**: Βλέπε παράρτημα □

**Πρόταση 1.1.1** Για το επαναλαμβανόμενο ολοκλήρωμα κατά *Itô* ισχύει ότι $E[J_n^2(f)] = \|f\|^2_{\mathcal{L}^2(S_n)}$ και $E[J_m(g)J_n(f)] = 0$ για $g \in \mathcal{L}^2(S_m)$ και $f \in \mathcal{L}^2(S_n)$, για $m \neq n$.

**Απόδειξη**: Βλέπε παράρτημα □

Στο σημείο αυτό κάνουμε την εξής σημαντική παρατήρηση. Το γεγονός ότι τα επαναλαμβανόμενα ολοκληρώματα κατά *Itô* είναι μεταξύ τους ορθογώνια, μπορεί κάποιος να το δει και από το λήμμα 1.1.1.. Εφόσον το επαναλαμβανόμενο ολοκλήρωμα κατά *Itô* μπορεί να προκύψει από τα πολυώνυμα *Hermite* και τα πολυώνυμα *Hermite* είναι ορθογώνια μεταξύ τους, προκύπτει ότι και τα επαναλαμβανόμενα ολοκληρώματα κατά *Itô* είναι μεταξύ τους ορθογώνια.

**Ορισμός 1.1.5** Έστω μια πραγματική συνάρτηση $g \in \mathcal{L}^2_S([0,T]^n)$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε το πολλαπλό ολοκλήρωμα κατά *Itô*

$$\begin{aligned} I_n(g) &= \int_{[0,T]^n} g(t_1, t_2, ..., t_n) dW(t_1) dW(t_2) ... dW(t_n) \\ &= \int_0^T \int_0^{t_n} ... \int_0^{t_2} g(t_1, t_2, ..., t_n) dW(t_1) dW(t_2) ... dW(t_n) \\ &= n! J_n(g) \end{aligned}$$

Για το πολλαπλό ολοκλήρωμα κατά *Itô* ισχύουν οι παρακάτω χρήσιμες σχέσεις

$$\begin{aligned} E[I_n^2(g)] &= E[(n!) J_n^2(g)] = (n!)^2 E[J_n^2(g)] \\ &= (n!)^2 \|g\|_{\mathcal{L}^2(S_n)} = n! \|g\|_{\mathcal{L}^2([0,T]^n)} \end{aligned}$$

όπου $g \in \mathcal{L}^2_S([0,T]^n)$. Στο σημείο αυτό βλέπουμε την χρησιμότητα των συμμετρικών συναρτήσεων. Με την χρησιμοποίηση των συμμετρικών συναρτήσεων είναι πολύ εύκολο να πηγαίνουμε από τον χώρο $\mathcal{L}^2(S_n)$ στον χώρο $\mathcal{L}^2([0,T]^n)$, ιδιότητα πολύ σημαντική για τον ορισμό του πολλαπλού στοχαστικού ολοκληρώματος.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι $f = \widetilde{g}$ και $g \in \mathcal{L}^2_S([0,T]^n)$ τότε θα ισχύει

$$I_n(f) = n! J_n(f) = n! J_n(\widetilde{g}) = J_n(g)$$

όπου $\widetilde{g}$ είναι η συμμετροποίηση της $g$.

**Λήμμα 1.1.4** Αν $g \in \mathcal{L}^2([0,T])$, τότε ισχύει

$$n!J_n(g) \;=\; \|g\|^n H_n(\frac{\theta}{\|g\|})$$

όπου $\theta = \int_0^T g(t)dW_t$ και $\|g\| = \|g\|_{\mathcal{L}^2([0,T]^n)}$.

Το λήμμα αυτό είναι πολύ χρήσιμο, γιατί μας βοηθά να υπολογίζουμε πολλαπλά στοχαστικά ολοκληρώματα χρησιμοποιώντας μόνο τα πολυώνυμα *Hermite*.

### 2.1.3 Το θεώρημα ανάπτυξης του χάους

Στην παρούσα παράγραφο θα ασχοληθούμε με το θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού κατά *Malliavin*, το θεώρημα ανάπτυξης του χάους κατά *Wiener*. Ουσιαστικά, το θεώρημα αυτό μας λέει ότι μια προσαρμοσμένη και τετραγωνικά ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή, μπορεί να γραφεί σαν ακολουθία πολλαπλών στοχαστικών ολοκληρωμάτων.

**Θεώρημα 1.1.2: Ανάπτυγμα σε χάος του** *Wiener*: Έστω $\phi$ μία τυχαία μεταβλητή, προσαρμοσμένη στην διήθηση $F_t$ και τετραγωνικά ολοκληρώσιμη. Τότε υπάρχει μία μοναδική ακολουθία συμμετρικών συναρτήσεων $f_n \in \mathcal{L}^2_S([0,T]^n)$, τέτοια ώστε

$$\phi(\omega) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$$

να συγκλίνει στον $\mathcal{L}^2(P)$. Επιπλέον έχουμε την ισομετρία

$$\|\phi\|^2_{\mathcal{L}^2(P)} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} n!\,\|f_n\|^2_{\mathcal{L}^2([0,T]^n)}$$

**Απόδειξη**: Βλέπε παράρτημα □

**Εναλλακτική εκδοχή** Έστω $\mathcal{H}_n$ ο χώρος που παράγεται από τα πολυώνυμα *Hermite* $\{H_n(W_h), h \in X\}$ όπου X είναι ένας χώρος *Hilbert* και $\mathcal{H}_n$ είναι κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{L}^2(\Omega, F, \mathbb{P})$. Τότε

$$\mathcal{L}^2(\Omega, F, \mathbb{P}) \;=\; \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$$

**Απόδειξη**: Βλέπε παράρτημα □

Τα στοιχεία του $\mathcal{H}_n$ λέγονται χάος του $Wiener$ τάξεως $n$ και ο $Itô$ απέδειξε (1951) ότι δεν είναι τίποτε άλλο παρά πολλαπλά στοχαστικά ολοκληρώματα. Τυπικά το θεώρημα αυτό δίνει μια προσιτή μορφή στα πολλαπλά στοχαστικά ολοκληρώματα, αντιμετωπίζοντάς τα ως τετραγωνικά ολοκληρώσιμες τυχαίες μεταβλητές. Η χρησιμότητά του στον λογισμό κατά $Malliavin$ είναι πολύ μεγάλη. Μέσω του θεωρήματος αυτού ορίζονται η παράγωγος κατά $Malliavin$ και το ολοκλήρωμα κατά $Skorohod$, τα οποία θα εξετάσουμε στις επόμενες παραγράφους.

## 2.2 Η παράγωγος κατά *Malliavin*

Έστω $\mathcal{S}$ ο χώρος που παραγεται από τις τυχαίες μεταβλητές της μορφής $F = f(W(h_1), ..., W(h_n))$, $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ ο χώρος των απείρως παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f$, όπου $h_1, ..., h_n \in \mathcal{L}^2([0,T])$ και $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

**Ορισμός 1.2.1** Έστω $U$ ένα ανοιχτό υποσύνολο ενός χώρου $Banach$ $X$ και $f : U \to \mathbb{R}^n$. Η $f$ έχει κατευθυνόμενη παράγωγο στην διεύθυνση $y \in X$ στο σημείο $x \in U$, αν υπάρχει το όριο

$$D_y f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}[f(x+\epsilon y) - f(x)] = \frac{d}{d\epsilon}[f(x+\epsilon y]_{\epsilon=0}$$

Ο λόγος που δώσαμε τον παραπάνω ορισμό είναι γιατί μέσω αυτού θα εισάγουμε την παράγωγο κατά $Malliavin$. Συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι η παράγωγος κατά $Malliavin$ είναι μία κατευθυνόμενη παράγωγος και μάλιστα με συγκεκριμένη κατεύθυνση, η οποία δίνεται από τον ακόλουθο ορισμό.

**Ορισμός 1.2.2** Έστω $g \in \mathcal{L}^2([0,T])$ και $\gamma \in \Omega$. Το σύνολο των $\gamma$ που μπορούν να γραφούν ως

$$\gamma(t) = \int_0^t g(s)ds \in \Omega$$

λέγεται χώρος των $Cameron - Martin$ και συμβολίζεται με $\mathcal{H}_{cm}$.

$$\mathcal{H}_{cm} = \left\{ \gamma \in \Omega := \gamma = \int_0^t h(s)ds, h \in \mathcal{L}^2([0,T]) \right\}$$

Τονίζουμε ότι θα ασχοληθούμε με παραγώγους που έχουν κατευθύνσεις $\gamma$.

**Ορισμός 1.2.3** Η παράγωγος κατά *Malliavin* μιας τυχαίας μεταβλητής $F \in \mathcal{S}$, είναι η στοχαστική διαδικασία $\{D_t F, t \in T\}$, που ορίζεται ως

$$D_t F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(W(h_1), ..., W(h_n))h_i(t)$$

Με $\mathcal{D}_{1,2}$ συμβολίζουμε τον χώρο των παραγωγίσιμων κατά *Mallivin* τυχαίων μεταβλητών.

Ουσιαστικά, μπορούμε να δούμε την παράγωγο κατά *Malliavin* σαν ένα γραμμικό, μη φραγμένο τελεστή

$$D_t : S \subset \mathcal{L}^2(\Omega) \to \mathcal{L}^2([0,T] \times \Omega)$$

Ο $\mathcal{D}_{1,2}$ έχει τη νόρμα $\|.\|_{1,2}$ που ορίζεται ως

$$\|F\|_{1,2} = \|F\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + \|D_t F\|_{\mathcal{L}^2([0,T]\times\Omega)}$$

Ο $\mathcal{S}$ είναι πλήρης ως προς την $\|.\|_{1,2}$. Επειδή όμως δεν είναι ξεκάθαρο αν και το πεδίο ορισμού της παραγώγου κατά *Malliavin* είναι πλήρες ως προς την νόρμα αυτή, δηλαδή κάθε $\|.\|_{1,2}$-*Cauchy* ακολουθία να συγκλίνει σε κάποιο στοιχείο του χώρου αυτού, χρειαζόμαστε ένα νέο χώρο, μεγαλύτερο. Ορίζουμε έτσι τον χώρο $\mathbb{D}_{1,2}$, ο οποίος είναι πλήρης και σε αυτόν εργαζόμαστε.

Η παράγωγος *Malliavin* έχει τις εξής ιδιότητες :

**Γραμμικότητα** : $D_t(\alpha F + G) = \alpha D_t F + D_t G, \forall F, G \in \mathbb{D}_{1,2}$

**Κανόνας αλυσίδας** : $D_t(f(F)) = \sum f_i(F) D_t F_i, \forall F_i \in \mathbb{D}_{1,2}$

**Κανόνας γινομένου** : $D_t(FG) = F(D_t G) + G(D_t F), \forall F, G \in \mathbb{D}_{1,2}$

Προηγουμένως μιλήσαμε για την παράγωγο με κατεύθυνση και είπαμε ότι μέσω της παραγώγου αυτής θα ορίσουμε την παράγωγο κατά *Malliavin*. Συγκεκριμένα, η παράγωγος κατά *Malliavin* είναι μία παράγωγος με κατεύθυνση και μάλιστα με συγκεκριμένη κατεύθυνση $\gamma$ όπου το $\gamma$ είναι στοιχείο του χώρου $Cameron - Martin$. Αυτός ο ισχυρισμός γίνεται ξεκάθαρος από το ακόλουθο λήμμα.

**Λήμμα 1.2.1** Η παράγωγος κατά *Malliavin* είναι μία παράγωγος με κατεύθυνση $\gamma$ όπου $\gamma \in \mathcal{H}_{cm}$

**Απόδειξη**: Βλέπε παράρτημα $\square$

Βασικό σημείο του λογισμού κατά *Malliavin* είναι η ολοκλήρωση κατά μέλη για την οποία θα μιλήσουμε σε επόμενη παράγραφο. Ενδεικτικά παραθέτουμε την ακόλουθη σχέση η οποία θα φανεί χρήσιμη σε ότι θα ακολουθήσει.

**Λήμμα 1.2.2** Αν $F \in \mathcal{S}$ και $h \in H$, ισχύει:

$$E[\langle DF, h\rangle_H] = E[FW(h)]$$

**Απόδειξη**: Βλέπε παράρτημα □

Χρησιμοποιώντας την σχέση αυτή, μπορούμε να πάρουμε το ακόλουθο λήμμα

**Λήμμα 1.2.3** Έστω $F, G \in \mathcal{S}$ και $h \in H$. Τότε ισχύει:

$$E(G\langle DF, h\rangle_H) = E(-F\langle DG, h\rangle_H + FGW(h))$$

**Απόδειξη**: Βλέπε παράρτημα □

Καταλήγουμε λοιπόν στο ακόλουθο συμπέρασμα για τον τελεστή παραγώγησης $D$.

**Λήμμα 1.2.4** Ο τελεστής παραγώγισης $D$, είναι κλειστός και έχει κλειστή επέκταση, από τον $\mathcal{L}^p(\Omega) \to \mathcal{L}^p([0,T] \times \Omega), p \geq 1$.

Όταν λέμε ότι ένας τελεστής $\mathcal{T}$ είναι κλειστός, ουσιαστικά εννοούμε ότι αν $X_n \to x$ και $\mathcal{T}X_n \to y$ τότε $x \in Domain(\mathcal{T})$ και $\mathcal{T}x = y$. Από την θεωρία της συναρτησιακής ανάλυσης, γνωρίζουμε ότι ο τελεστής της παραγώγισης είναι κλειστός. Επιπλέον τονίζουμε, ότι αν ένας τελεστής είναι κλειστός τότε και ο συζυγής του θα είναι κλειστός. Η παρατήρηση αυτή θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη όταν μιλήσουμε για το ολοκλήρωμα κατά *Skorohod*. Επανερχόμαστε τώρα στο λήμμα.

**Απόδειξη**: Βλέπε παράρτημα □

Όταν αναφέραμε το θεώρημα επέκτασης του χάους τονίσαμε την σημαντικότητά του για τον λογισμό κατά *Malliavin*. Όλη η θεωρία μας δομείται πάνω στο θεώρημα αυτό και ταυτόχρονα ορίζεται μέσω αυτού. Θα δούμε τώρα πως η παράγωγος κατά *Malliavin*, μπορεί να ορισθεί μέσω του θεωρήματος ανάπτυξης του χάους.

**Θεώρημα 1.2.1** Έστω μία τυχαία μεταβλητή $F \in \mathcal{L}^2(\Omega, F, \mathbb{P})$, τετραγωνικά ολοκληρώσιμη, για την οποία μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα επέκτασης του χάους, δηλαδή η $F$ μπορεί να γραφεί ως

$$F = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(g_m), g \in \mathcal{L}_S^2([0,T]^m)$$

Τότε η $F \in \mathbb{D}_{1,2}$ αν και μόνο αν

$$\sum_{m=1}^{\infty} mm! \, \|g\|^2_{\mathcal{L}^2([0,T]^m)} < \infty$$

και στην περίπτωση αυτή η παράγωγος κατά $Malliavin$ ορίζεται ως

$$D_t F = \sum_{m=1}^{\infty} m I_{m-1}(g_m(.,t))$$

**Απόδειξη**: Βλέπε παράρτημα $\square$

Αν $\{F_n\}$ είναι μια ακολουθία συναρτήσεων της μορφής $F(W(h_1),...,W(h_n))$ η οποία συγκλίνει στην $F$ στον $\mathcal{L}^p(\Omega), p \geq 1$ καθώς το $n \to \infty$, έχει ενδιαφέρον να εξετάσουμε αν θα ισχύει ότι και $D_t F = \lim_{n\to\infty} D_t F_n$. Για να ισχύει αυτό θα πρέπει να είμαστε βέβαιοι ότι η παράγωγος κατά $Malliavin$ ορίζεται με μοναδικό τρόπο. Με άλλα λόγια, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει μια δεύτερη ακολουθία $\{G_n\}$ η οποία συγκλίνει στην $F$ στον $\mathcal{L}^p(\Omega), p \geq 1$, να ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} D_t F_n = \lim_{n\to\infty} D_t G_n$$

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα το οποίο παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.

**Θεώρημα 1.2.2** Έστω $H_n = F_n - G_n$ και θεωρούμε την ακολουθία $\{H_n\}$ η οποία συγκλίνει στο μηδέν στον $\mathcal{L}^p(\Omega)$ καθώς το $n \to \infty$ και υποθέτουμε ότι η $\{D_t F_n\}$ συγκλίνει στον $\mathcal{L}^p(\mathcal{L}^2([0,T] \times \Omega))$ καθώς $n \to \infty$. Στην περίπτωση αυτή, ισχύει ότι:

$$\lim_{n\to\infty} D_t H_n = 0$$

Καταλήγουμε λοιπόν ότι η $D_t F$ είναι ορισμένη με μοναδικό τρόπο και επομένως το επόμενο λήμμα ισχύει.

**Λήμμα 1.2.5** Έστω $F \in L^p(\Omega)$ και $\{F_n\} \to F$. Τότε ισχύει ότι

$$D_t F = \lim_{n\to\infty} D_t F_n$$

**Απόδειξη**: Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος □

**Παρατήρηση 1.** Έστω $F \in \mathbb{D}_{1,2}$ με $D_t F = 0, \forall t \in [0,T]$. Τότε από το Θεώρημα 1.2.1 προκύπτει ότι η $F$ πρέπει να ίση με την $E(F)$.

**Παρατήρηση 2.** Έστω $A \in \mathcal{F}$. Τότε

$$D_t(\mathbb{I}_A) = D_t(\mathbb{I}_A)^2 = 2\mathbb{I}_A D_t(\mathbb{I}_A)$$

και επομένως $D_t(\mathbb{I}_A) = 0$. Επειδή όμως $\mathbb{I}_A = E(\mathbb{I}_A) = P(A)$ από την προηγούμενη παρατήρηση συνεπάγεται ότι $P(A) = 0$ ή $P(A) = 1$

Τώρα, αφού ορίσαμε την παράγωγο κατά *Malliavin*, είμαστε σε θέση να εξετάσουμε το δεύτερο σημαντικό σημείο του λογισμού κατά *Malliavin*, το ολοκλήρωμα κατά *Skorohod*.

## 2.3 Το ολοκλήρωμα κατά *Skorohod*

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι ο τελεστής παραγώγισης είναι ένας κλειστός και ταυτόχρονα μη φραγμένος τελεστής $D : \mathbb{D}_{1,2} \to \mathcal{L}^2([0,T] \times \Omega)$. Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τον συζυγή του τελεστή αυτού, τον $D^*$ και θα δούμε ότι ο τελεστής αυτός έχει ιδιαίτερη σημασία στον λογισμό κατά *Malliavin*, γιατί είναι επέκταση του στοχαστικού ολοκληρώματος, δηλαδή είναι ένα ολοκλήρωμα, γνωστό και ως ολοκλήρωμα κατά *Skorohod*.

**Ορισμός 1.3.1** Ορίζουμε ως $D^*$ τον συζυγή του τελεστή $D$. Ο $D^*$, ως επέκταση του $D$, είναι ένας κλειστός και μη φραγμένος τελεστής με τιμές στον $\mathcal{L}^2([0,T] \times \Omega)$, τέτοιος ώστε :

• Το πεδίο ορισμού του $D^*$, το οποίο συμβολίζουμε με $Dom(D^*)$, είναι το σύνολο

$$Dom(D^*) = \left\{ u \in \mathcal{L}^2([0,T] \times \Omega) : \left| E(\int_0^T D_t F u_t dt \right| \leq c(u) \|F\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \right\},$$

$\forall F \in \mathbb{D}_{1,2}, c \in \mathbb{R}$

• Αν $u \in Dom(D^*)$ τότε $D^*(u) \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ και

$$E(FD^*(u)) = E(\langle DF, u \rangle_H)$$

$\forall F \in \mathbb{D}_{1,2}$

το οποίο πρακτικά σημαίνει ότι $\langle F, D^*(u)\rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \langle DF, u\rangle_{\mathcal{L}^2([0,T]\times\Omega)}$. Δηλαδή ο τελεστής $Skorohod$ είναι ένας κλειστός μη φραγμένος τελεστής, ουσιαστικά ένας γραμμικός μετασχηματισμός, ο οποίος μετασχηματίζει τετραγωνικά ολοκληρώσιμες στοχαστικές διαδικασίες σε τετραγωνικά ολοκληρώσιμες τυχαίες μεταβλητές. Επιπλέον παρατηρούμε ότι $E[D^*(u)] = 0, \forall u \in Dom(D^*)$.

Όπως και η παράγωγος κατά $Malliavin$, έτσι και το ολοκλήρωμα κατά $Skorohod$ μπορεί να ορισθεί μέσω του θεωρήματος ανάπτυξης του χάους κατά $Wiener$. Ο τρόπος που γίνεται αυτό, δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 1.3.1** Έστω μια τυχαία μεταβλητή $u \in \mathcal{L}^2([0,T]\times\Omega)$, η οποία έχει την αναπαράσταση του θεωρήματος ανάπτυξης του χάους κατά $Wiener$ :

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(.,t))$$

$\forall n \geq 1, \forall f_n \; in \mathcal{L}_S^2([0,T])$. Τότε $u \in Dom(D^*)$, αν και μόνο αν η σειρά

$$D^*(u) = \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(\tilde{f}_n)$$

συγκλίνει στον $\mathcal{L}^2(\Omega)$

Η $\tilde{f}_n$ είναι η συμμετροποίηση της $f_n$ σε $(n+1)$ διαστάσεις και ορίζεται ως

$$\begin{aligned} \tilde{f}_n(t_1,...,t_n,t) = \tilde{f}_n(t_1,...,t_n,t_{n+1}) = \\ = \frac{1}{n+1}[f_n(t_1,...,t_{n+1}) + ... + f_n(t_1,...,t_{i-1},t_{i+1},...,t_{n+1},t_i) + \\ ... + f_n(t_2,...,t_{n+1},t_1)] \end{aligned}$$

**Απόδειξη**: Βλέπε παράρτημα □

Από το παραπάνω θεώρημα είναι προφανές ότι ο χώρος $Dom(D^*)$ των $Skorohod$ ολοκληρώσιμων διαδικασιών συμπίπτει με τον υπόχωρο του χώρου $\mathcal{L}^2([0,T]\times\Omega)$ που παράγεται από τις στοχαστικές διαδικασίες που ικανοποιούν τη συνθήκη

$$E[D^*(u)^2] = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)! \left\|\tilde{f}_n\right\|^2_{\mathcal{L}^2([0,T]^{n+1})} < \infty$$

Για τον $Dom(D^*)$ έχουμε να παρατηρήσουμε ότι περιλαμβάνει τον $\mathbb{D}_{1,2}$, κάτι που άλλωστε είναι πολύ φυσικό από τον ορισμό του ολοκληρώματος κατά *Skorohod*.

**Λήμμα 1.3.1** Έστω $u \in Dom(D^*)$ και $F \in \mathbb{D}_{1,2}$. Τότε $Fu \in \mathcal{L}^2([0,T] \times \Omega)$ και

$$D^*(Fu) = FD^*(u) - \langle DF, u \rangle_H$$

δηλαδή η $Fu$ είναι ολοκληρώσιμη κατά *Skorohod* αν και μόνο αν το δεξί μέλος της παραπάνω ισότητας ανήκει στον $\mathcal{L}^2(\Omega)$

**Απόδειξη**: Βλέπε παράρτημα □

Η παράγωγος κατά *Malliavin* του ολοκληρώματος κατά *Skorohod* δίνεται από το ακόλουθο λήμμα.

**Λήμμα 1.3.2** Έστω $u \in \mathbb{D}_{1,2}(\mathcal{L}^2([0,T]))$ και ότι η στοχαστική διαδικασία $(D_t u_s)_{t\in[0,T]}$ είναι ολοκληρώσιμη κατά *Skorohod* και ανήκει στον $\mathcal{L}^2([0,T] \times \Omega)$. Τότε :

$$D_t(D^*(u)) = u_t + \int_{[0,T]} D_t u_s \delta W_s$$

όπου με $\int \delta W_t$ δηλώνουμε το ολοκλήρωμα κατά *Skorohod*.

**Παρατήρηση 1.** Ο τελεστής *Skorohod* αυξάνει τον βαθμό του χάους του *Wiener* κατά ένα, ενώ ο τελεστής της παραγώγου κατά *Malliavin* τον μειώνει κατά ένα.

**Παρατήρηση 2.** Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα κατά *Skorohod* $\int_0^T W_t \delta W_t$.

$$\begin{aligned}
\int_0^T W_t \delta W_t &= \int_0^T \int_0^T dW_s dW_t \\
&= I_2(1) \\
&= 2\int_0^T \int_0^{t_2} dW_{t_1} dW_{t_2} \\
&= W^2(T) - T
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\int_0^T W_t \delta W_t \neq W_t \int_0^T \delta W_t = W^2(T)$$

Το ολοκλήρωμα κατά $Skorohod$ όπως αναφέραμε στην αρχή της παραγράφου είναι επέκταση του στοχαστικού ολοκληρώματος κατά $It\hat{o}$. Συγκεκριμένα, όταν η ολοκληρωτέα ποσότητα $u_t$ είναι προσαρμοσμένη στην διήθηση $F_t$, τότε το ολοκλήρωμα κατά $Skorohod$ είναι το στοχαστικό ολοκλήρωμα κατά $It\hat{o}$. Όταν αυτό δεν συμβαίνει δημιουργούνται ευκαιρίες για $arbitrage$. Ας εξετάσουμε τώρα αναλυτικότερα την σχέση μεταξύ ολοκληρώματος κατά $Skorohod$ και στοχαστικού ολοκληρώματος κατά $It\hat{o}$. Σε πρώτη φάση παραθέτουμε το παρακάτω χρήσιμο λήμμα.

**Λήμμα 1.3.3** Έστω $u_t$ μία στοχαστική διαδικασία τέτοια ώστε $E[u^2(t)] < \infty$ και $F_T$ μετρήσιμη $\forall t \in [0,T]$. Έστω επιπλέον ότι η $u_t$ έχει την αναπαράσταση της ανάπτυξης του χάους κατά $Wiener$

$$u_t = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(.,t))$$

Τότε η $u_t$ είναι προσαρμοσμένη στην $F_t$ αν και μόνο αν

$$f_n(t_1, ..., t_n, t) = 0$$

όπου $t < max(t_i), 1 \leq i \leq n$ και $(t_1, ..., t_n) \in H$.

**Απόδειξη**: Βλέπε παράρτημα □

Είμαστε τώρα σε θέση να διατυπώσουμε το ακόλουθο θεώρημα το οποίο δείχνει τη σχέση μεταξύ ολοκληρώματος κατά $Skorohod$ και στοχαστικού ολοκληρώματος κατά $It\hat{o}$.

**Θεώρημα 1.3.2** (Το ολοκλήρωμα κατά $Skorohod$ είναι επέκταση του στοχαστικού ολοκληρώματος κατά $It\hat{o}$) : Έστω $u_t$ μία τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στοχαστική διαδικασία, $F_t$ προσαρμοσμένη $\forall t \in [0,T]$. Τότε $u_t \in Dom(D^*)$ και

$$\int_0^T u_t \delta W_t = \int_0^T u_t dW_t$$

**Απόδειξη**: Βλέπε παράρτημα □

## 2.4 Ολοκλήρωση κατά μέλη

Το σημαντικότερο ίσως αποτέλεσμα του λογισμού κατά $Malliavin$ είναι η ολοκλήρωση κατά μέλη. Μέσω αυτής της διαδικασίας μπορεί κάποιος να δει εύκολα κατά πόσο όλη αυτή η θεωρία που αναφέραμε μπορεί να χρησιμεύσει στην χρηματοοικονομική, πέρα από το καθαρά θεωρητικό ενδιαφέρον.

Η ολοκλήρωση κατά μέλη καθιστά τον λογισμό κατά *Malliavin* ένα ζωντανό και ταυτόχρονα ζωτικό κομμάτι της σύγχρονης χρηματοοικονομικής επιστήμης.
Στην προηγούμενη παράγραφο, όταν μιλήσαμε για το ολοκλήρωμα κατά *Skorohod* είδαμε ότι ισχύει η σχέση

$$E[\int_0^T (D_tF)u_t dt] = E[FD^*(u)]$$

Η σχέση αυτή αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο πάνω στον οποίο δομείται η θεωρία της ολοκλήρωσης κατά μέλη. Ας δούμε το όλο ζήτημα αναλυτικότερα γιατί αποτελεί το κομβικό σημείο της διατριβής αυτής.

Έστω ότι έχουμε δύο τυχαίες μεταβλητές, την $F$ και την $G$ και έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την $E[f^{'}(F)G]$ για κάποια συνάρτηση $f$. Ένα σημαντικό πρόβλημα που μπορεί να προκύψει στο σημείο αυτό, είναι να μην γνωρίζουμε την από κοινού κατανομή των $F$, $G$. Η ιδέα πάνω στην οποία θα στηριχθούμε είναι να κάνουμε τον μετασχηματισμό

$$E[f^{'}(F)G] = E[f(F)H]$$

όπου H είναι μια νέα τυχαία μεταβλητή. Έστω $Z = f(F)$. Η δράση του τελεστή *Malliavin* πάνω στην Z δίνει:

$$D_sZ = f^{'}(F)D_sF$$

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχέση με $Gh(s)$, όπου $h(s), s \in [0,T]$ είναι κάποια στοχαστική διαδικασία, πιθανώς εξαρτώμενη από τις $F, G$, παίρνουμε:

$$Gh(s)D_sZ = f^{'}(F)Gh(s)D_sF$$

και ολοκληρώνοντας κατά μέλη :

$$\begin{aligned} \int_0^T Gh(s)D_sZds &= \int_0^T f^{'}(F)Gh(s)D_sFds \\ &= f^{'}(F)G\int_0^T h(s)D_sFds \end{aligned}$$

και λύνοντας ως προς την $f^{'}(F)G$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} f^{'}(F)G &= \frac{\int_0^T Gh(s)D_sZds}{\int_0^T h_sD_sFds} \\ &= \int_0^T \frac{Gh(s)D_sZ}{\int_0^T h(u)D_uFdu}ds \\ &= E[\int_0^T (D_sZ)u_sds] \end{aligned}$$

όπου θέσαμε $u_s = \dfrac{Gh(s)}{\int_0^T h_u D_u X du}$. Εφαρμόζωντας στην παραπάνω σχέση την $E[\int_0^T (D_t F) u_t dt] = E[FD^*(u)]$ παίρνουμε:

$$E[f^{'}(F)G] = E\left[f(F)D^*\left(\frac{Gh(s)}{\int_0^T h_u D_u X du}\right)\right]$$

όπου $H = D^*\left(\dfrac{Gh(s)}{\int_0^T h_u D_u X du}\right)$. Αν τώρα η διαδικασία $h$ είναι κάποια σταθερή, τότε η H παίρνει την μορφή $H = D^*\left(\dfrac{G}{\frac{1}{T}\int_0^T D_u X du}\right)$. Εμείς αυτό που θα κάνουμε στο κεφάλαιο που ακολουθεί είναι να υπολογίζουμε τα $greeks$ μέσω της παραπάνω σχέσης που αποδείξαμε.

Αφήνουμε προς το παρόν την ολοκλήρωση κατά μέλη. Θα επανέλθουμε στο επόμενο κεφάλαιο όπου θα συνδέσουμε ξεκάθαρα τον λογισμό κατά $Malliavin$ με την χρηματοοικονομική και τότε θα δούμε πως αυτά που είπαμε παραπάνω εφαρμόζονται άμεσα για την τιμολόγιση παραγώγων.

## 2.5 Παράρτημα : Αποδείξεις

Στην ενότητα αυτή παραθέτουμε όλες τις αποδείξεις που αναφέρθηκαν στην παραπάνω θεωρία. Για ευκολία των αναγνωστών, όλες οι προς απόδειξη προτάσεις διατυπώνονται ξανά.

**Λήμμα 1.1** Η οικογένεια των τυχαίων μεταβλητών $e^{W(h)}, h \in H$ είναι ένα πλήρες υποσύνολο του $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, όπου $\mathcal{G}$ είναι η διήθηση που παράγεται από τις $W(h), h \in H$

**Απόδειξη**: Έστω $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, τέτοιο ώστε : $E[Xe^{W(h)}] = 0, \forall h \in H$. Η γραμμικότητα της απεικόνισης $h \to W(h)$, συνεπάγεται ότι : $E[Xexp\sum_{i=1}^m t_i W(h_i)]$=0,$\forall t_1, ..., t_m \in \mathbb{R}$, $\forall h_1, ..., h_m \in H$.Επομένως καταλήγουμε ότι X=0 □

**Θεώρημα 1.1.1** Η συνάρτηση $F(x,t) = exp(tx - \frac{t^2}{2})$, είναι γεννήτρια των πολυωνύμων $Hermite$, δηλαδή τα πολυώνυμα $Hermite$ μπορούν να παραχθούν από το ανάπτυγμα $Taylor$ της συνάρτησης αυτής.

**Απόδειξη:** Παίρνουμε το ανάτυγμα της $F(x,t)$

$$F(x,t) = exp(tx - \frac{t^2}{2}) \quad = \quad exp(\frac{x^2}{2})exp(-\frac{1}{2}(x-t)^2)$$

$$
\begin{aligned}
&= exp(\frac{x^2}{2})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}(\frac{d^n}{dx^n}exp(-\frac{(x-t)^2}{2})) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} t^n H_n(x).
\end{aligned}
$$

όπου $H_n(x)$, είναι το πολυώνυμο *Hermite* βαθμού $n$. □

**Λήμμα 1.1.1** Τα πολυώνυμα *Hermite* έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες
$i)$Αποτελούν μια ορθοκανονική βάση στον $\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mu)$, όπου $\mu$ κάποιο κανονικό μέτρο πιθανότητας
$ii)$ $H_n^{'}(x) = H_{n-1}^{'}(x)$
$iii)$ $(n+1)H_{n+1}(x) = xH_n(x) - H_{n-1}(x)$
$iv)$ $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$

**Απόδειξη:**$i)$ Γνωρίζουμε ότι ένα ορθοκανονικό σύνολο σε ένα χώρο *Hilbert*, αποτελεί βάση για τον χώρο αυτό.

$\alpha)(H_n, H_m)_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mu)} = \int_{\mathbb{R}} H_n(x)H_m(x)\mu(dx) = 0, \forall n \neq m$

$\beta)||H_n(x)|| = (H_n, H_n)^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mu)} = 1$

Επομένως τα πολυώνυμα *Hermite* αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύνολο για τον χώρο $\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mu)$, ο οποίος είναι ένας χώρος *Hilbert* με αποτέλεσμα να αποτελούν και ορθοκανονική βάση.

$ii)$ Από το Θεώρημα 1.1.2 είδαμε ότι $F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n H_n(x)$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}F(x,t) &= F(x,t)t = \sum_{n=0}^{\infty} t^n t H_n(x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1} H_n(x)
\end{aligned}
$$

και παίρνουμε το ζητούμενο.
$iii)$ Από το Θεώρημα 1.1.2

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}F(x,t) &= F(x,t)(x-t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} t^n x H_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1} H_n(x)
\end{aligned}
$$

και το ζητούμενο έπεται

$iv)$ Από το Θεώρημα 1.1.2

$$
F(-x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n H_n(-x) = F(x,-t)
$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n H_n(x)$$

□

**Λήμμα 1.1.3** Το επαναλαμβανόμενο ολοκλήρωμα κατά *Itô* παράγεται από τα πολυώνυμα *Hermite*.

**Απόδειξη:** Για λόγους ευκολίας θα χρησιμοποιήσουμε την μορφή των πολυωνύμων *Hermite* $H_n(t,x) = \frac{(-t)^n}{n!} exp(\frac{x^2}{2t}) \frac{d^n}{dx^n} exp(-\frac{x^2}{2t})$. Εφαρμόζωντας το λήμμα του *Itô* στην συνάρτηση $H_n(t,W_t)$, έχουμε:

$$\begin{aligned} dH_n(t,W_t) &= [\frac{\partial}{\partial t}H_n(t,W_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}H_n(t,W_t)]dt \\ &+ \frac{\partial}{\partial x}H_n(t,W_t)dW_t \\ &= \frac{\partial}{\partial x}H_n(t,W_t)dW_t \end{aligned}$$

Από το λήμμα 1.1.1 προκύπτει οτι

$$\begin{aligned} dH_n(t,W_t) &= H_{n-1}(t,W_t)dW_t \\ H_1(t,W_t) &= \int_0^T dW(t_1) \\ H_2(t,W_t) &= \int_0^T \int_0^{t_2} dW(t_1)dW(t_2) \\ ..... \\ H_n(t,W_t) &= \int_0^T \int_0^{t_n} ... \int_0^{t_2} dW(t_1)dW(t_2)...dW(t_n) \end{aligned}$$

□

**Πρόταση 1.1.1** Για το επαναλαμβανόμενο ολοκλήρωμα *Itô* ισχύει ότι $E[J_n^2(f)] = \|f\|^2_{\mathcal{L}^2(S_n)}$ και $E[J_m(g)J_n(f)] = 0$ για $g \in \mathcal{L}^2(S_m)$ και $f \in \mathcal{L}^2(S_n)$

**Απόδειξη**:

$$\begin{aligned} & E[J_n^2(f)] = \\ = \ & E[(\int_0^T \int_0^{t_n} ... \int_0^{t_2} f(t_1,t_2,...,t_n)dW(t_1)dW(t_2)...dW(t_n))^2] \\ = \ & \int_0^T E[(\int_0^{t_n} ... \int_0^{t_2} f(t_1,t_2,...,t_n)dW(t_1)dW(t_2)...dW(t_{n-1}))^2]dt_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^T \int_0^{t_n} E[(\int_0^{t_{n-1}} ... \int_0^{t_2} f(t_1, t_2, ..., t_n) dW(t_1) dW(t_2) ... dW(t_{n-2}))^2] \\
&\quad dt_n dt_{n-1} \\
&= ... \\
&= \int_0^T \int_0^{t_n} ... \int_0^{t_2} f^2(t_1, t_2, ..., t_n) dt_1 dt_2 ... dt_n \\
&= \|f\|^2_{\mathcal{L}^2(S_n)}
\end{aligned}$$

και ο πρώτο μέρος αποδείχθηκε. Αν τώρα $g \in \mathcal{L}^2(S_m)$ και $f \in \mathcal{L}^2(S_n)$, έχουμε :

$$\begin{aligned}
&E[J_m(g) J_n(f)] = \\
&= E[(\int_0^T \int_0^{s_m} ... \int_0^{s_2} g(s_1, s_2, ..., s_m) dW(s_1) dW(s_2) ... dW(s_m)) \\
&\quad (\int_0^T \int_0^{s_m} ... \int_0^{t_2} f(t_1, t_2, ..., s_m) dW(t_1) dW(t_2) ... dW(s_m))] \\
&= \int_0^T E[(\int_0^{s_m} ... \int_0^{s_2} g(s_1, s_2, ..., s_m) dW(s_1) dW(s_2) ... dW(s_{m-1})) \\
&\quad (\int_0^{s_m} ... \int_0^{t_2} f(t_1, t_2, ..., s_m) dW(t_1) dW(t_2) ... dW(s_{m-1}))] ds_m \\
&= ... \\
&= \int_0^T \int_0^{s_m} ... \int_0^{s_2} E[g(s_1, ..., s_m) \int_0^{s_1} ... \int_0^{t_2} f(t_1, ..., s_m) \\
&\quad dW(t_1) dW(t_2) ... dW(s_{n-m}))] ds_1 ds_2 ... ds_m \\
&= 0
\end{aligned}$$

επειδή όπως γνωρίζουμε από την στοχαστική ανάλυση, η μέση τιμή ενός στοχαστικού ολοκληρώματος κατά *Itô* είναι μηδέν.□

**Θεώρημα 1.1.2: Ανάπτυγμα σε χάος του** *Wiener* **:** Έστω $\phi$ μια τυχαία μεταβλητή, προσαρμοσμένη στην διήθηση $F_t$ και τετραγωνικά ολοκληρώσιμη. Τότε υπάρχει μια μοναδική ακολουθία συμμετρικών συναρτήσεων $f_n \in \mathcal{L}^2_S([0,T]^n)$, τέτοια ώστε

$$\phi(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$$

να συγκλίνει στον $\mathcal{L}^2(P)$. Επιπλέον έχουμε την ισομετρία

$$\|\phi\|^2_{\mathcal{L}^2(P)} = \sum_{n=0}^{\infty} n! \, \|f_n\|^2_{\mathcal{L}^2([0,T]^n)}$$

**Απόδειξη :** Υποθέτουμε ότι βρισκόμαστε στον χώρο $\mathcal{L}^2(\Omega, F_t, \mathbb{P})$. Από το θεώρημα αναπαράστασης του *Itô*, υπάρχει μία μοναδική στοχαστική διαδικασία $\phi_1(s_1, \omega)$· $0 \leq s_1 \leq T$, προσαρμοσμένη στην διήθηση $F_t$, τέτοια ώστε $E[\int_0^T \phi_1^2(s_1, \omega) ds_1] \leq \|\phi\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{P})}$ και επιπλέον

$$\phi(\omega) = E[\phi(\omega)] + \int_0^T \phi_1(s_1, \omega) dW(s_1) \tag{2.1}$$

Εφαρμόζωντας πάλι το θεώρημα αναπαράστασης στην συνάρτηση $\phi_1(s_1, \omega)$, παίρνουμε ότι υπάρχει μια $F_t$ προσαρμοσμένη διαδικασία $\phi_2(s_1, s_2, \omega)$ τέτοια ώστε $E[\int_0^{s_1} \phi_2^2(s_1, s_2, \omega) ds_2] \leq E[\phi_1^2(s_1)] < \infty$ και επιπλέον

$$\phi_1(s_1, \omega) = E[\phi_1(s_1)] + \int_0^{s_1} \phi_2(s_1, s_2, \omega) dW(s_2) dW(s_1) \tag{2.2}$$

Αντικαθιστώτας την (1.2) στην (1.1), παίρνουμε

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= E[\phi] + \int_0^T [E(\phi_1(s_1) + \int_0^{s_1} \phi_2(s_1, s_2, \omega) dW(s_2) dW(s_1)] dW(s_1) \\ &= g_0 + \int_0^T g_1(s_1) dW(s_1) + \int_0^T \int_0^{s_1} \phi_2(s_2, s_1, \omega) dW(s_2) dW(s_1) \end{aligned} \tag{2.3}$$

όπου $g_0 = E[\phi(\omega)]$ και $g_1(s_1) = E[\phi_1(s_1)]$. Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία για την συνάρτηση $\phi_2(s_1, s_2, \omega)$, προκύπτει ότι υπάρχει μια $F_t$ προσαρμοσμένη διαδικασία $\phi_3(s_1, s_2, s_3, \omega) \cdot 0 \leq s_3 \leq s_2$, τέτοια ώστε $E[\int_0^{s_2} \phi_3^2(s_1, s_2, s_3, \omega) ds_3] \leq E[\phi_2^2(s_1, s_2, \omega)] < \infty$ και επιπλέον

$$\phi_2(s_1, s_2, \omega) = E[\phi(s_1, s_2, \omega)] + \int_0^{s_2} \phi_3(s_1, s_2, s_3, \omega) dW(s_3) \tag{2.4}$$

Αντικαθιστώτας την (1.4) στην (1.3) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \phi(\omega) = g_0 &+ \int_0^T g_1(s_1) dW(s_1) + \int_0^T \int_0^{s_1} g_2(s_1, s_2) dW(s_2) dW(s_1) \\ &+ \int_0^T \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} \phi_3(s_1, s_2, s_3, \omega) dW(s_3) dW(s_2) dW(s_1) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Συνεχίζοντας την διαδικασία αυτή για $n$ βήματα, θα πάρουμε εν τέλει μια $F_t$ προσαρμοσμένη διαδικασία $\phi_{n+1}(s_1, s_2, ..., s_{n+1})$· $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq ... \leq s_{n+1} \leq T$ και πραγματικές συναρτήσεις $g_0, g_1, ..., g_n$ έτσι ώστε να ισχύει

$$\begin{aligned} &\phi(\omega) = \sum_{n=0}^{n} J_n(g_\kappa) \\ &+ \int_0^T \int_0^{s_{n+1}} ... \int_0^{s_2} \phi_{n+1}(s_1, s_2, ..., s_{n+1}, \omega) dW(s_1) dW(s_2) ... dW(s_{n+1}) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Σκοπός μας είναι να εξαφανήσουμε τον δεύτερο όρο στο δεξιό μέλος της παραπάνω ισότητας για να πάρουμε το ζητουμενο αποτέλεσμα. Σε πρώτη φάση όταν αναφερόμαστε στο επαναλαμβανόμενο ολοκλήρωμα της (1.6) θα χρησιμοοποιούμε το συμβολισμό $j_{n+1}$. Παραπάνω όταν αναφερθήκαμε στο επαναλαμβανόμενο ολοκλήρωμα αποδείξαμε ότι έχει την ιδιότητα της ορθογωνιότητας. Δηλαδή $(j_{n+1}, J_\kappa(g_\kappa))_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = 0,\ g_\kappa \in \mathcal{L}^2([0,T])^n$. Επομένως μπορεί να εφαρμοστεί το πυθαγόρειο θεώρημα

$$\|\phi\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \sum_{\kappa=0}^{n} \|J_\kappa(g_\kappa)\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + \|j_{n+1}\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)}$$

και επειδή η $\sum_{\kappa=0}^{n} \|J_\kappa(g_\kappa)\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)}$ συγκλίνει υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} j_{n+1}$ και έστω ότι είναι ίσο με $j$. Αυτό που θέλουμε να δείξουμε είναι ότι $j = 0$. Έχουμε ότι $(j, J_\kappa(g_\kappa))_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = 0$ και επειδή ο χώρος των επαναλαμβανόμενων ολοκληρωμάτων σχηματίζει μια ορθοκανονική βάση στον χώρο *Hilbert* $\mathcal{L}^2([0,T]^n)$ συνεπάγεται ότι $j = 0$. Επομένως

$$\phi(\omega) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} J_\kappa(g_\kappa) \tag{2.7}$$

συγκλίνει στον $\mathcal{L}^2(\Omega)$ και επιπλέον

$$\|\phi\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \sum_{\kappa=0}^{n} \|J_\kappa(g_\kappa)\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \tag{2.8}$$

Τέλος αν ορίσουμε την συμμετροποίηση της $g = \widetilde{g_n}$ και θέσουμε $\widetilde{g_n} = f_n$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} I_n(f_n) &= n! J_n(f_n) \\ &= n! J_n(\widetilde{g_n}) = J_n(g_n) \end{aligned}$$

και το ζητούμενο αποδείχθηκε □

**Εναλλακτική εκδοχή** Έστω $\mathcal{H}_n$ ο χώρος που δημιουργείται από τα πολυώνυμα *Hermite* $\{H_n(W_h), h \in X\}$ όπου X είναι ένας χώρος *Hilbert* και $\mathcal{H}_n$ είναι κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{L}^2(\Omega, F, \mathbb{P})$. Τότε

$$\mathcal{L}^2(\Omega, F, \mathbb{P}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$$

**Απόδειξη**: Έστω $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, F, \mathbb{P})$, τέτοιο ώστε $E[XH_n(W(h))] = 0,\ \forall n, h \in \mathcal{L}^2([0,T])$. Τότε $E[XW(h)^n] = 0 \Rightarrow E[Xe^{W(h)}] = 0 \Rightarrow$

$E[Xexp\sum_{i=1}^{m} t_i W(h_i)]=0$ $\forall t_1, ..., t_m \in \mathbb{R}$, $\forall h_1, ..., h_m \in H \Rightarrow X = 0$
□

**Λήμμα 1.2.1** Η παράγωγος κατά *Malliavin* είναι μια παράγωγος με κατεύθυνση $\gamma$ όπου $\gamma \in \mathcal{H}_{cm}$

**Απόδειξη**:

$$\begin{aligned}
\int_0^T D_t F h(t) dt &= \langle DF, h \rangle_H \\
&= \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(W(t_1, ..., t_n)) \left\langle \mathbb{I}_{[0,t_i]}, h \right\rangle_H \\
&= \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(W(t_1, ..., W(t_n))) \int_0^{t_i} h(s) ds \\
&= \frac{d}{d\epsilon} F(\omega + \epsilon \int_0^{t_i} h(s) ds)_{\epsilon=0} \\
&= \frac{d}{d\epsilon} F(\omega + \epsilon\gamma)_{\epsilon=0}
\end{aligned}$$

□

**Λήμμα 1.2.2** Αν $F \in \mathcal{S}$ και $h \in H$, ισχύει:

$$E(\langle DF, h \rangle_H) = E(FW(h))$$

**Απόδειξη**: Έστω $\{e_n\}$ ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα στον $H$. Έστω $h = e_1$ και ότι η $F$ είναι της μορφής $F = f(W(e_1), ..., W(e_n))$. Έστω ότι με $\phi(x)$ δηλώνουμε την πυκνότητα της τυπικής κανονικής κατανομής στον $\mathbb{R}^n$.

$$\phi(x) = (2\pi)^{\frac{-n}{2}} exp(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2)$$

Τότε :

$$\begin{aligned}
E(\langle DF, h \rangle_H) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \phi(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) x_1 \phi(x) dx \\
&= E(FW(e_1)) \\
&= E(FW(h))
\end{aligned}$$

□

**Λήμμα 1.2.3** Έστω $F, G \in \mathcal{S}$ και $h \in H$. Τότε ισχύει:

$$E(G \langle DF, h \rangle_H) = E(-F \langle DG, h \rangle_H + FGW(h))$$

**Απόδειξη**: Από το λήμμα της ολοκλήρωσης κατά μέλη γνωρίζουμε ότι $E(\langle DF, h \rangle_H) = E(FW(h))$ και κατά συνεπεια :

$$\begin{aligned} E(FGW(h)) &= E(\langle DFG, h \rangle_H) \\ &= E(G \langle DF, h \rangle_H) + E(F \langle DG, h \rangle_H) \end{aligned}$$

□

**Λήμμα 1.2.4** Ο τελεστής παραγώγησης $D$, είναι κλειστός και έχει κλειστή επέκταση, από τον $\mathcal{L}^p(\Omega) \to \mathcal{L}^p([0,T] \times \Omega), p \geq 1$.

**Απόδειξη**: Αρκεί να δείξουμε ότι αν η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών $\{F_n\} \to 0$ στον $\mathcal{L}^p(\Omega)$ και η $DF_n \to \kappa$ στον $\mathcal{L}^p([0,T] \times \Omega)$, τότε $\kappa = 0$. Αν $G \in \mathcal{S}$ και $h \in H$, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} E(\langle \kappa, h \rangle_H G) &= \lim_{n \to \infty} E(G \langle DF_n, h \rangle_H) \\ &= \lim_{n \to \infty} E(-F_n \langle DG, h \rangle_H + F_n GW(h)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει επειδή $F_n \to 0$ στον $\mathcal{L}^p(\Omega)$ και επειδή η $G$ και η $DG$ είναι φραγμένες. Επομένως παίρνουμε ότι $\kappa = 0$ και το ζητούμενο αποδείχθηκε □

**Θεώρημα 1.2.1** Έστω μία τυχαία μεταβλητή $F \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, τετραγωνικά ολοκληρώσιμη, για την οποία μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα επέκτασης του χάους, δηλαδή η $F$ μπορεί να γραφεί ως

$$F = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(g_m), g \in \mathcal{L}_S^2([0,T]^m)$$

Τότε η $F \in \mathbb{D}_{1,2}$ αν και μόνο αν

$$\sum_{m=1}^{\infty} mm! \left\| g \right\|^2_{\mathcal{L}^2([0,T]^m)} < \infty$$

και στην περίπτωση αυτή η παράγωγος κατά *Malliavin* ορίζεται ως

$$D_t F = \sum_{m=1}^{\infty} m I_{m-1}(g_m(.,t))$$

**Απόδειξη**: Έστω $F_m = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$. Τότε $F_m \in \mathbb{D}_{1,2}$ και $F_m \to F$ στον $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Επιπλέον για $m > \kappa$

$$\begin{aligned}
\left\| D_t F_m \| - D_t F_\kappa \right\|^2_{\mathcal{L}^2([0,T]\times\Omega)} &= \left\| \sum_{n=\kappa+1}^{m} n I_{n-1}(f_n(.,t)) \right\|^2_{\mathcal{L}^2([0,T]\times\Omega)} \\
&= \int_0^T E[\left\{ \sum_{n=\kappa+1}^{m} n I_{n-1}(f_n(.,t)) \right\}^2 ]dt \\
&= \int_0^T \sum_{n=\kappa+1}^{m} n^2 (n-1)! \, \|f_n(.,t)\|^2_{\mathcal{L}^2([0,T]^{n-1})} \\
&= \sum_{n=\kappa+1}^{m} n n! \, \|f_n\|^2_{\mathcal{L}^2([0,T]^n)}
\end{aligned}$$

και αν $\sum_{n=\kappa+1}^{m} n n! \, \|f_n\|^2_{\mathcal{L}^2([0,T]^n)} < \infty$ συνεπάγεται ότι η $\{D_t F\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει στον $\mathcal{L}^2([0,T]\times\Omega)$ και $F \in \mathbb{D}_{1,2}$ και

$$D_t F = \lim_{m\to\infty} D_t F_m = \sum_{n=0}^{\infty} n I_{n-1}(g_n(.,t))$$

□

**Θεώρημα 1.3.1** Έστω μια τυχαία μεταβλητή $u \in \mathcal{L}^2([0,T]\times\Omega)$, η οποία έχει την αναπαράσταση του θεωρήματος ανάπτυξης του χάους κατά *Wiener*.

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(.,t))$$

$\forall n \geq 1, \forall f_n \; in \mathcal{L}^2_S([0,T])$. Τότε $u \in Dom(D^*)$, αν και μόνο αν η σειρά

$$D^*(u) = \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(\tilde{f}_n)$$

συγκλίνει στον $\mathcal{L}^2(\Omega)$

**Απόδειξη**: Έστω $G = I_n(g)$ όπου $g \in \mathcal{L}^2_S([0,T]), \forall n \geq 1$, είναι ένα πολλαπλό στοχαστικό ολοκλήρωμα κατά *Itô*.

$$\begin{aligned}
E(\langle u_t, D_t G\rangle_{\mathcal{L}^2([0,T])}) &= \sum_{m=0}^{\infty} E(\langle I_n(f_n(.,t)), n I_{n-1}(g(.,t))\rangle_{\mathcal{L}^2([0,T])} \\
&= E(\langle I_{n-1}(f_{n-1}(.,t)), n I_{n-1}(g(.,t))\rangle_{\mathcal{L}^2([0,T])}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E(n\int_{[0,T]} I_{n-1}(f_{n-1}(.,t))I_{n-1}(g(.,t))dt) \\
&= \int_{[0,T]} nE[I_{n-1}(f_{n-1}(.,t))I_{n-1}(g(.,t))]dt \\
&= n(n-1)!\int_{[0,T]} \langle f_{n-1}(.,t), g(.,t)\rangle_{\mathcal{L}^2([0,T]^{n-1})}\, dt \\
&= n!\left\langle \tilde{f}_{n-1}, g\right\rangle_{\mathcal{L}^2([0,T]^n)} \\
&= E(I_n(\tilde{f}_{n-1})I_n(g)) \\
&= E(I_n(\tilde{f}_{n-1})G)
\end{aligned}$$

$\forall u \in Dom(D^*)$ καταλήγουμε ότι

$$E(D^*(u)G) = E(I_n(\tilde{f}_{n-1})G)$$

$\forall g$ της μορφής $g = I_n(g_n)$. Επιπλέον μπορούμε να δούμε το $I_n(\tilde{f}_{n-1})$ σαν την προβολή του τελεστή $Skorohod$ στο $n-$οστό χάος $Wiener$. Οπότε η $\sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(\tilde{f}_n)$ συγκλίνει στον $\mathcal{L}^2(\Omega)$ στο $D^*(u)$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η παραπάνω σειρά συγκλίνει σε κάποιον $V$.

$$E(\int_{[0,T]} u_t D_t(\sum_{n=0}^{N} I_n(g_n))dt) = E(V\sum_{n=0}^{\infty} I_n(g_n)), \forall N \geq 0$$

και καταλήγουμε ότι ισχύει

$$\left|E(\int_{[0,T]} u_t D_t F dt\right| \leq \|V\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \|F\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}$$

για κάθε τυχαία μεταβλητή $F$ που έχει μια πεπερασμένη αναπαράσταση ανάπτυξης του χάους κατά $Wiener$. Επειδή $F \in \mathbb{D}_{1,2}$ και ο $\mathbb{D}_{1,2}$ είναι πυκνός, καταλήγουμε ότι $u \in Dom(D^*)$ $\square$

**Λήμμα 1.3.1** Έστω $u \in Dom(D^*)$ και $F \in \mathbb{D}_{1,2}$. Τότε $Fu \in \mathcal{L}^2([0,T]\times\Omega)$ και

$$D^*(Fu) = FD^*(u) - \langle DF, u\rangle_H$$

**Απόδειξη**: ·Έστω $G$ είναι της μορφής $G = g(W(h_1), ..., W(h_n)), h \in H$. Τότε από τον κανόνα του γινομένου παίρνουμε

$$\begin{aligned}
E(GFD^*(u)) &= E(\int_0^T D_t(GF)u_t dt) \\
&= E(G\int_0^T D_tFu_t dt) + E(F\int_0^T D_tGu_t dt) \\
&= E(G\int_0^T D_tFu_t dt) + E(GD^*(Fu))
\end{aligned}$$

και το ζητούμενο αποδείχθηκε □

**Λήμμα 1.3.3** Έστω $u_t$ μία στοχαστική διαδικασία τέτοια ώστε $E[u^2(t)] < \infty$ και $F_T$ μετρήσιμη $\forall t \in [0,T]$. Έστω επιπλέον ότι η $u_t$ έχει την αναπαράσταση της ανάπτυξης του χάους κατά *Wiener*

$$u_t = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(.,t))$$

Τότε η $u_t$ είναι προσαρμοσμένη στην $F_t$ αν και μόνο αν

$$f_n(t_1, ..., t_n, t) = 0$$

όπου $t < max(t_i), 1 \leq i \leq n$ και $(t_1, ..., t_n) \in H$.

**Απόδειξη**: $\forall g \in \mathcal{L}_s^2([0,T]^n)$, έχουμε :

$$\begin{aligned} E[I_n(g)|F_t] &= n!E[J_n(g)|F_t] \\ &= n!E[\int_0^T \int_0^{t_n} ... \int_0^{t_2} g(t_1, ..., t_n) dW(t_1)...dW(t_n)|F_t] \\ &= n! \int_0^t \int_0^{t_n} ... \int_0^{t_2} g(t_1, ..., t_n) dW(t_1)...dW(t_n) \\ &= n!J_n(g(t_1, ..., t_n))\mathbb{I}_{\{maxt_i < t\}} \\ &= I_n(g(t_1, ..., t_n))\mathbb{I}_{\{maxt_i < t\}} \end{aligned}$$

Επομένως η $u_t$ είναι $F_t$ προσαρμοσμένη

$$\Leftrightarrow E[u_t|F_t] = u_t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} E[I_n(f_n(.,t))|F_t] = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(.,t)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(.,t))\mathbb{I}_{\{maxt_i < t\}} = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(.,t)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f_n(t_1, ..., t_n, t)\mathbb{I}_{\{maxt_i < t\}} = f_n(t_1, ..., t_n, t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f_n(t_1, ..., t_n, t) = 0$$

Λόγω της μοναδικότητας του θεωρήματος ανάπτυξης του χάους κατά *Wiener* □

**Θεώρημα 1.3.2** (Το ολοκλήρωμα κατά *Skorohod* είναι επέκταση του στοχαστικού ολοκληρώματος κατά *Itô*) : Έστω $u_t$ μία τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στοχαστική διαδικασία, $F_t$ προσαρμοσμένη $\forall t \in [0,T]$. Τότε $u_t \in Dom(D^*)$ και

$$\int_0^T u_t \delta W_t = \int_0^T u_t dW_t$$

**Απόδειξη**: Σε πρώτη φάση παρατηρούμε ότι

$$\tilde{f}_n(t_1, ..., t_n) = \frac{1}{n+1} f_n(t_1, ..., t_{j-1}, t_{j+1}, ..., t_j)$$

όπου $t_j = maxt_i, 1 \leq i \leq n+1$

$$\begin{aligned}
\left\|\tilde{f}_n\right\|^2_{\mathcal{L}^2([0,T]^{n+1})} &= (n+1)! \int_{S_{n+1}} \tilde{f}_n^2(x_1, ..., x_n) dx_1 ... dx_{n+1} \\
&= \frac{(n+1)!}{(n+1)^2} \int_{S_{n+1}} f_n^2(x_1, ..., x_n) dx_1 ... dx_n \\
&= \frac{n!}{n+1} \int_0^T \int_0^t \int_0^{x_n} ... \int_0^{x_2} f_n^2(x_1, ..., x_n) dx_1 ... dx_n dt \\
&= \frac{n!}{n+1} \int_0^T \int_0^T \int_0^{x_n} ... \int_0^{x_2} f_n^2(x_1, ..., x_n) dx_1 ... dx_n dt \\
&= \frac{1}{n+1} \int_0^T \|f_n(., t)\|^2_{\mathcal{L}^2([0,T]^n)} dt
\end{aligned}$$

Από το θεώρημα ανάπτυξης του χάους γνωρίζουμε την ισομετρία

$$\|\phi\|^2_{\mathcal{L}^2(P)} = \sum_{n=0}^{\infty} n! \|f_n\|^2_{\mathcal{L}^2([0,T]^n)}$$

όπου $\phi$ τετραγωνικά ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή και $f_n \in \mathcal{L}^2_S([0,T]^n)$. Επομένως :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)! \left\|\tilde{f}_n\right\|^2_{\mathcal{L}^2([0,T]^{n+1})} &= \sum_{n=0}^{\infty} (n)! \int_0^T \|f_n(., t)\|^2_{\mathcal{L}^2([0,T]^n)} dt \\
&= \int_0^T \sum_{n=0}^{\infty} (n)! \|f_n(., t)\|^2_{\mathcal{L}^2([0,T]^n)} dt \\
&= E[\int_0^T u_t^2 dt] < \infty
\end{aligned}$$

επομένως $u_t \in Dom(D^*)$. Επιπλέον :

$$\begin{aligned}
\int_0^T u_t dW_t &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T I_n(f_n(., t)) dW_t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T n! J_n(f_n(., t)) dW_t
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T n! \int_{S_n} f_n(t_1, ..., t_n, t) dW(t_1)...dW(t_n) dW(t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T n!(n+1) \int_{S_n} \tilde{f}_n(t_1, ..., t_{n+1}) dW(t_1)...dW(t_{n+1}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)! J_{n+1)(\tilde{f}_n)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(\tilde{f}_n) = \int_0^T u_t \delta W_t
\end{aligned}
$$

□

# Κεφάλαιο 3

# Εφαρμογές στην χρηματοοικονομική

Στο κεφάλαιο αυτό, που αποτελείται από δύο μέρη, θα εξετάσουμε πως εφαρμόζεται ο λογισμός κατά *Malliavin* στην χρηματοοικονομική. Συγκεκριμένα, στο πρώτο μέρος ασχολούμαστε με τον υπολογισμό των *greeks* για *options*, με βάση την μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά μέλη που παρουσιάσαμε στο πρώτο κεφάλαιο. Στο δεύτερο μέρος, παρουσιάζεται ένα άλλο θεμελιώδες αποτέλεσμα του λογισμού κατά *Malliavin*, ο τύπος των $Clark-Ocone$ και βλέπουμε πως εφαρμόζεται στην θεωρία χαρτοφυλακίου.

## 3.1 *Greeks* και ολοκλήρωση κατά μέλη

Πριν προχωρήσουμε περαιτέρω στην ανάλυσή μας, είναι χρήσιμο στο σημείο αυτό να παραθέσουμε κάποια στοιχεία σχετικά με την αγορά στην οποία βρισκόμαστε. Υποθέτουμε ότι το μοντέλο που έχουμε για την αγορά είναι το μοντέλο των $Black - Scholes$. Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό, υποθέτουμε ότι η αγορά αποτελείται από δύο τίτλους. Έναν με κίνδυνο (μετοχή), η τιμή του οποίου συμβολίζεται με $S_t$ και έναν χωρίς κίνδυνο (ομόλογο) του οποίου η τιμή συμβολίζεται με $B_t$. Οι τιμές των τίτλων αυτών ακολουθούν τις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \\ dB_t &= r B_t dt \end{aligned}$$

όπου με $r$ συμβολίζουμε το επιτόκιο, με $\sigma$ την μεταβλητότητα και με $W_t$ την τυπική μονοδιάστατη κίνηση *Brown*, ορισμένη σε ένα πλήρη χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Βλέπουμε οτι η μετοχή ακολουθεί το μοντέλο της γεωμετρικής κίνησης *Brown* και η λύση της εφαρμόζοντας το λήμμα του

*Itô* στην συνάρτηση $F(S_t) = ln(S_t)$ είναι

$$S_t = S_0 exp\left[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t\right]$$

Για λόγους συντομίας θέτουμε $\beta = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$ και η παραπάνω σχέση παίρνει τη μορφή $S_t = S_0 exp[\beta t + \sigma W_t]$

### 3.1.1 *Greeks*

Τα *greeks* έχουν ιδιαίτερη σημασία στην χρηματοοικονομική επιστήμη. Ουσιαστικά είναι η παράγωγος μιας οικονομικής ποσότητας (π.χ. τιμή ενός δικαιώματος) ως προς κάποια από τις παραμέτρους της. Οι παράμετροι αυτές μπορεί να είναι, το επιτόκιο, η τιμή του υποκείμενου τίτλου, το *volatility* κ.α.. Είναι δείκτες ευαισθησίας γιατί μετρούν την ευαισθησία της αξίας ενός χαρτοφυλακίου ως προς την μεταβολή των παραμέτρων αυτών. Τα *greeks* είναι τα $\Delta = \frac{\partial}{\partial S_0}$, $V$[1]$=\frac{\partial}{\partial \sigma}$, $\rho = \frac{\partial}{\partial r}$, $\Gamma = \frac{\partial^2}{\partial S_0^2}$ και $\theta = \frac{\partial}{\partial t}$ και προφανώς η ονομασία τους οφείλεται στο γεγονός ότι αναπαρίστανται από γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου.
Λόγω της σημαντικότητάς τους, επιβάλλεται ο γρήγορος και ακριβής υπολογισμός τους. Αυτό που θα κάνουμε στο παρών κεφάλαιο, είναι να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά μέλη, που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, για να υπολογίσουμε τα *greeks* για *european* και *asian* διακαιώματα. Η μέθοδος αυτή είναι γενική και μπορεί να εφαρμοστεί για οποιαδήποτε δικαιώματα. Στο σημείο αυτό κάνουμε την εξής σημαντική παρατήρηση. Υπάρχουν αρκετές μέθοδοι υπολογισμού των *greeks*, όπως για παράδειγμα η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών και η μέθοδος της πιθανοφάνειας. Αυτό όμως που κάνει τον λογισμό κατά *Malliavin* να ξεχωρίζει στο συγκεκριμένο πρόβλημα, είναι ότι δεν απαιτεί γνώση της κατανομής των τυχαίων μεταβλητών που χρησιμοποιούμε. Το σημείο αυτό σε πρώτη επαφή μπορεί να μην έχει ιδιαίτερη σημασία, αλλά στην περίπτωση των Ασιατικών δικαιωμάτων, είναι απαραίτητο.
Όσον αφορά την ταχύτητα υπολογισμού της μεθόδου αυτής, θα ασχοληθούμε αναλυτικότερα στο επόμενο κεφάλαιο, όπου θα εξετάσουμε ένα πολύ σημαντικό σημείο για τον υπολογισμό των *greeks*, την προσομοίωση *Monte Carlo*. Ας επανέλθουμε τώρα αναλυτικότερα στο πρόβλημά μας.

Έστω ότι έχουμε δύο τυχαίες μεταβλητές, την $X \equiv X(\alpha)$ και την $Y$ και έστω $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, μία μετρήσιμη συνάρτηση, όπου $\alpha$ είναι μία παράμετρος. Θέλουμε να υπολογίσουμε την ποσότητα $E[\phi(X(\alpha))Y]$ και υποθέτουμε ότι

[1]Το *Vega* παρά το γεγονός ότι δεν αντιπροσωπεύει γράμμα του ελληνικού αλφαβήτου, έχει επικρατήσει να αναφέρεται μαζί με τα *greeks*.

μπορούμε να εναλλάξουμε την παράγωγο με την μέση τιμή[2]. Η γενική μορφή των *greeks*, είναι ως η παράγωγος της ποσότητας αυτής ως προς την παράμετρο $\alpha$, δηλαδή

$$\vartheta(\alpha) = \frac{\partial}{\partial\alpha}E[\phi(X(\alpha))Y] = E[\frac{\partial}{\partial\alpha}\phi(X(\alpha))Y]$$

όπου με $\vartheta(\alpha)$ συμβολίζουμε την τιμή του *greek* που αντιστοιχεί στην παράμετρο $\alpha$. Για τις διάφορες τιμές του $\alpha$, παίρνουμε και τα αντίστοιχα *greeks*, π.χ. αν $\alpha = S_0$ τότε έχουμε το Δέλτα.

## 3.2 Ευρωπαϊκά δικαιώματα

Τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα είναι μια ειδική και ευρέως γνωστή κατηγορία παραγώγων. Ένα δικαίωμα ευρωπαϊκού τύπου, δίνει στον κάτοχό του το δικαίωμα και όχι την υποχρέωση, της αγοραπωλησίας ενός συγκεκριμένου τίτλου, σε μια προκαθορισμένη τιμή (*strike*) στην λήξη του (*maturity*). Η απόδοση ενός τέτοιου δικαιώματος είναι της μορφής $\Phi(S_T)$, όπου $S_T = S_0 exp[\beta T + \sigma W_T]$, $T$ είναι η ημερομηνία λήξης του και $\Phi(.)$ η συνάρτηση απόδοσής του. Η περίπτωση των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων είναι η απλούστερη, όσον αφορά τον υπολογισμό των *greeks* και ο λόγος που την εξετάζουμε είναι γιατί δείχνει τον τρόπο με τον οποίο εφαρμόζεται ο λογισμός κατά *Malliavin* στο πρόβλημα αυτό.

### 3.2.1 Δέλτα

Από την αναπαράσταση $Feynman - Kač$, κάποιος μπορεί εύκολα να παρατηρήσει ότι η τιμή ενός τέτοιου δικαιώματος, στα πλαίσια του μοντέλου των $Black - Scholes$, θα έχει πάντα τη μορφή $E[e^{-rT}\Phi(S_T)]$.

Το Δέλτα είναι η πρώτη παράγωγος της τιμής του δικαιώματος, ως προς την τιμή του υποκείμενου τίτλου :

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{\partial}{\partial S_0}E[e^{-rT}\Phi(S_T)] \\ &= e^{-rT}E[\frac{\partial}{\partial S_0}\Phi(S_T)] \\ &= \frac{e^{-rT}}{S_0}E[\Phi'(S_T)S_T]\end{aligned}$$

[2] Η υπόθεση αυτή είναι απαραίτητη, διαφορετικά η θεωρία δεν μπορεί να εφαρμοστεί.

στο σημείο αυτό εφαρμόζουμε την ολοκλήρωση κατά μέλη και παίρνουμε :

$$\Delta = \frac{e^{-rT}}{S_0} E\left[\Phi(S_T) D^* \left(\frac{S_T}{\int_0^T D_u S_T du}\right)\right]$$

Είναι απαραίτητο να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^T D_u S_T du$, μιας και θα το συναντήσουμε αρκετές φορές.

$$\int_0^T D_u S_T du = \sigma S_T T$$

και επομένως

$$D^* \left(\frac{S_T}{\int_0^T D_u S_T du}\right) = D^* \left(\frac{S_T}{\sigma S_T T}\right) = D^* \left(\frac{1}{\sigma T}\right) = \frac{W_T}{\sigma T}$$

οπότε καταλήγουμε ότι το Δέλτα ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος, δίνεται από τη σχέση :

$$\Delta = e^{-rT} E\left[\Phi(S_T) \frac{W_T}{\sigma T S_0}\right]$$

### 3.2.2 *Vega*

Το *Vega* είναι η πρώτη παράγωγος της τιμής του δικαιώματος ως προς το *volatility* :

$$\begin{aligned} V &= \frac{\partial}{\partial \sigma} E[e^{-rT}\Phi(S_T)] \\ &= e^{-rT} E[\frac{\partial}{\partial \sigma}\Phi'(S_T)] \\ &= e^{-rT} E[S_T(W_T - \sigma T)\Phi'(S_T)] \end{aligned}$$

και εφαρμόζωντας την ολοκλήρωση κατά μέλη :

$$V = e^{-rT} E\left[\Phi(S_T) D^* \left(\frac{S_T(W_T - \sigma T)}{\int_0^T D_u S_T du}\right)\right]$$

και από τον υπολογισμό του Δέλτα :

$$\begin{aligned} D^* \left(\frac{S_T(W_T - \sigma T)}{\int_0^T D_u S_T du}\right) &= \frac{1}{\sigma T} D^*(W_T) - W_T \\ &= \frac{1}{\sigma T}(W_T^2 - \int_0^T D_s W_t ds) - W_T \\ &= \frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma} \end{aligned}$$

και καταλήγουμε ότι η τιμή του $Vega$ ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος, δίνεται από τη σχέση :

$$V = e^{-rT} E\left[\Phi(S_T)\left(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma}\right)\right]$$

### 3.2.3 Γάμμα

Το Γάμμα είναι η δεύτερη παράγωγος της τιμής του δικαιώματος, ως προς την τιμή του υποκείμενου τίτλου :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\partial^2}{\partial S_0^2} E[e^{-rT}\Phi(S_T)] \\ &= \frac{e^{-rT}}{S_0^2} E[\Phi''(S_T) S_T^2] \end{aligned}$$

και όπως και πριν, εφαρμόζωντας την ολοκλήρωση κατά μέλη :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{e^{-rT}}{S_0^2} E\left[\Phi'(S_T) D^*\left(\frac{S_T^2}{\int_0^T D_u S_T du}\right)\right] \\ &= \frac{e^{-rT}}{S_0^2} E\left[\Phi'(S_T) D^*\left(\frac{S_T}{\sigma T}\right)\right] \\ &= \frac{e^{-rT}}{S_0^2} E\left[\Phi'(S_T) S_T\left(\frac{W_T}{\sigma T} - 1\right)\right] \end{aligned}$$

γιατί

$$D^*\left(\frac{S_T}{\sigma T}\right) = \frac{S_T}{\sigma T} D^*(1) - \frac{1}{\sigma T}\int_0^T D_s S_T ds = S_T\left(\frac{W_T}{\sigma T} - 1\right)$$

Επειδή όμως η ποσότητα που βρήκαμε για το Γάμμα περιέχει παράγωγο, θα εφαρμόσουμε πάλι την ολοκλήρωση κατά μέλη. Γενικά αυτή η αντιμετώπιση είναι αποδεκτή. Μπορούμε να εφαρμόζουμε την ολοκλήρωση κατά μέλη, όσες φορές είναι απαραίτητο.

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{e^{-rT}}{S_0^2} E\left[\Phi'(S_T) S_T\left(\frac{W_T}{\sigma T} - 1\right)\right] \\ &= \frac{e^{-rT}}{S_0^2} E\left[\Phi(S_T) D^*\left(\frac{S_T}{\int_0^T D_u S_T du}\left\{\frac{W_T}{\sigma T} - 1\right\}\right)\right] \end{aligned}$$

πρέπει να υπολογίσουμε την ποσότητα

$$\begin{aligned} D^*\left(\frac{S_T}{\int_0^T D_u S_T du}\left\{\frac{W_T}{\sigma T} - 1\right\}\right) &= \frac{1}{\sigma T} D^*\left(\frac{W_T}{\sigma T} - 1\right) \\ &= \frac{1}{\sigma T}\left(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

και τελικά καταλήγουμε ότι το Γάμμα για ευρωπαϊκά δικαιώματα, δίνεται από τη σχέση

$$\Gamma = E\left[\Phi(S_T)\frac{e^{-rT}}{S_0^2\sigma T}\left(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma}\right)\right]$$

**Παρατήρηση :** Μια χρήσιμη σχέση μεταξύ Γάμμα και $Vega$ είναι η ακόλουθη

$$\Gamma = \frac{V}{S_0^2\sigma T}$$

## 3.3 Ασιατικά δικαιώματα

Τα δικαιώματα τέτοιου τύπου είναι ότι και τα ευρωπαϊκά, μόνο που η απόδοσή τους εξαρτάται από την μέση τιμή του υποκείμενου τίτλου. Η τιμή δηλαδή ενός τέτοιου δικαιώματος είναι της μορφής $E[e^{-rT}\Phi(\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt)]$, αντί για $E[e^{-rT}\Phi(S_T)]$ που είχαμε προηγουμένως. Η περίπτωση υπολογισμού των $greeks$ για ασιατικά δικαιώματα και εξοτικά δικαιώματα γενικότερα, είναι πολυπλοκότερη της απλής περίπτωσης των ευρωπαϊκών διακιωμάτων.

### 3.3.1 Δέλτα

Το Δέλτα για τέτοια δικαιώματα, είναι :

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{\partial}{\partial S_0}E\left[e^{-rT}\Phi\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt\right)\right] \\
&= e^{-rT}E\left[\frac{\partial}{\partial S_0}\Phi\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt\right)\right] \\
&= \frac{e^{-rT}}{S_0}E\left[\Phi'\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt\right)\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt\right]
\end{aligned}$$

Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν πολλοί τρόποι για να κάνει κανείς ολοκλήρωση κατά μέλη. Ένας τρόπος είναι να θέσουμε $X = Y = \frac{1}{T}\int_0^T S_t dt$ και τότε παίρνουμε :

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{\partial}{\partial S_0}E\left[\Phi\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt\right)D^*\left(\frac{Y}{\int_0^T D_t X dt}\right)\right] \\
&= \frac{e^{-rT}}{S_0}E\left[\Phi\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt\right)D^*\left(\frac{\int_0^T S_t dt}{\sigma\int_0^T tS_t dt}\right)\right]
\end{aligned}$$

και θέτοντας $u = \frac{1}{\sigma}$ και $F = \frac{\int_0^T S_t dt}{\sigma \int_0^T t S_t dt}$, παίρνουμε

$$\Delta = \frac{e^{-rT}}{S_0} E\left[\Phi\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt\right)\frac{1}{T}\left\{\frac{W_T}{\sigma} + \frac{T^2}{T} - 1\right\}\right]$$

οπου

$$T = \frac{\int_0^T t S_t dt}{\int_0^T S_t dt}, T^2 = \frac{\int_0^T t^2 S_t dt}{\int_0^T S_t dt}$$

□

### 3.3.2 *Vega*

Το $Vega$ θα είναι :

$$\begin{aligned} V &= \frac{\partial}{\partial\sigma} E\left[e^{-rT}\Phi\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt\right)\right] \\ &= e^{-rT} E\left[\frac{\partial}{\partial\sigma}\Phi\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt\right)\right] \\ &= e^{-rT} E\left[\Phi'\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt\right)\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial}{\partial\sigma} S_t dt\right] \\ &= e^{-rT} E\left[\Phi'\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt\right)\frac{1}{T}\int_0^T S_t(W_t - t\sigma) dt\right] \end{aligned}$$

αι εφαρμόζωντας την ολοκλήρωση κατά μέλη για $X = \frac{1}{T}\int_0^T S_t dt$ και $Y = \frac{1}{T}\int_0^T S_t(W_t - t\sigma)dt$, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} V &= e^{-rT} E\left[\Phi\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt\right) D^*\left(\frac{Y}{\int_0^T D_t X dt}\right)\right] \\ &= e^{-rT} E\left[\Phi\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt\right) D^*\left(\frac{\int_0^T S_t W_t dt}{\sigma\int_0^T t S_t dt} - 1\right)\right] \\ &= e^{-rT} E\left[\Phi\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt\right)\left(\frac{\int_0^T\int_0^T S_t W_t dt dW_T}{\sigma\int_0^T t S_t dt} + \frac{\int_0^T t^2 S_t dt \int_0^T S_t W_t dt}{(\int_0^T t S_t dt)^2} - W_T\right)\right] \end{aligned}$$

Με τον τρόπο που περιγράψαμε παραπάνω, μπορούμε να υπολογίσουμε τα *greeks* για οποιαδήποτε δικαιώματα, εφαρμόζωντας την ολοκλήρωση κατά μέλη όσες φορές είναι απαραίτητο και χρησιμοποιώντας την κατάλληλη συνάρτηση απόδοσης

## 3.4 Ο τύπος των $Clark - Ocone$

Στην παράγραφο αυτη θα ασχοληθούμε με άλλο ένα σημαντικό αποτέλεσμα του λογισμού κατά $Malliavin$, τον τύπο των $Clark - Ocone$. Η γενίκευση του τύπου αυτού, που έχει βαθιές ρίζες στην στοχαστική ανάλυση, έχει χρήσιμες εφαρμογές στην θεωρία χαρτοφυλακίου.

### 3.4.1 Θεωρητική προσέγγιση

Πριν προχωρήσουμε περισσότερο, είναι απαραίτητο να αναφέρουμε το παρακάτω θεώρημα

**Θεώρημα 2.2.1** : (Θεώρημα αναπαράστασης των $martingale$) Έστω $M_t$ μια συνεχής τοπική $martingale$, προσαρμοσμένη στην διήθηση $F_t$, $F_t = \sigma(W_s, s \leq t)$ όπου με $W_t$ συμβολίζουμε την τυπική μονοδιάστατη κίνηση $Brown$. Τότε υπάρχει μια στοχαστική διαδικασία $\theta_t$, τετραγωνικά ολοκληρώσιμη, τέτοια ώστε

$$M_t = E[M_t] + \int_0^t \theta_s dW_s$$

για $t \geq 0$.

**Απόδειξη** : παραλείπεται. Βλέπε τον [30] □

Η ποσότητα $\theta_s$, όπως θα δούμε έχει ιδιαίτερη σημασία στην χρηματοοικονομική και ο υπολογισμός της γίνεται εφαρμόζωντας τον τύπο τον $Clark - Ocone$.

**Ορισμός 2.2.1** Έστω $G$ ένα σύνολο $Borel$ ορισμένο στο διάστημα $[0, T]$. Ορίζουμε ως $F_G$, την σ-άλγεβρα που παράγεται από τις συναρτήσεις της μορφής

$$\int_A dW_t = \int_0^T \mathbb{I}_A(t) dW_t$$

όπου $A \subset G$ κάποιο σύνολο $Borel$.

Πριν παρουσιάσουμε τον τύπο των $Clark - Ocone$, είναι χρήσιμο να παρουσιάσουμε κάποια λήμματα, τα οποία θα μας βοηθήσουν στην απόδειξή του.

**Λήμμα 2.2.1** Έστω $g \in \mathcal{L}^2([0, T])$. Τότε :

$$E[\int_0^T g(t) dW_t | F_G] = \int_0^T \mathbb{I}_G(t) g(t) dW_t$$

**Απόδειξη** : Βλέπε παράρτημα □

**Λήμμα 2.2.2** Έστω $u_t$ μια στοχαστική διαδικασία, τέτοια ώστε $u_t$ είναι $F_t \cap F_G$ μετρήσιμη και τετραγωνικά ολοκληρώσιμη. Τότε η $\int_G u_t dW_t$ είναι $F_G$ μετρήσιμη.

**Απόδειξη** : παραλείπεται. Βλέπε τον [4] □

**Λήμμα 2.2.3** Έστω $u_t$ μια $F_t$ προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία, τέτοια ώστε $E[u_t^2 dt] < \infty$. Τότε:

$$E[\int_0^T u_t dW_t | F_G] = \int_G E[u_t | F_G] dW_t$$

**Απόδειξη** : Βλέπε παράρτημα □

**Λήμμα 2.2.4** Έστω $f_n \in \mathcal{L}_S^2([0,T]^n)$. Τότε

$$E[I_n(f_n)|F_G] = I_n[f_n \mathbb{I}_G^{\otimes n}]$$

όπου $f_n \mathbb{I}_G^{\otimes n}(t_1, ..., t_n)= f_n(t_1, ..., t_n)\mathbb{I}_G(t_1), ..., \mathbb{I}_G(t_n)$

**Απόδειξη** : Βλέπε παράρτημα □

Τώρα είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε τον τύπο των $Clark - Ocone$

**Θεώρημα 2.2.1** ($Clark - Ocone$) Έστω $F \in \mathbb{D}_{1,2}$ και $F_T$ μετρήσιμη. Τότε :

$$F = E[F] + \int_0^T E[D_t F | F_t] dW_t$$

**Απόδειξη** : Βλέπε παράρτημα □

Ο τύπος αυτός δεν είναι άμεσα εφαρμόσιμος. Για να γίνει πρέπει να εφαρμόσουμε ένα πολύ σημαντικό θεώρημα της στοχαστικής ανάλυσης, το θεώρημα του $Girsanov$.

**Θεώρημα 2.2.2** (Θεώρημα $Girsanov$) Έστω $u_t$ μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στοχαστική διαδικασία, που ικανοποιεί τη συνθήκη του $Novikov$ $E[exp(\frac{1}{2}\int_0^T u_s^s)] < \infty$. Έστω $W_t$ μια κίνηση $Brown$ κάτω από το μέτρο $P$. Ορίζουμε την στοχαστική διαδικασία

$$M_t = exp\left[-\int_0^t u_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t u_s^2 ds\right]$$

όπου $t \in [0,T]$. Η $M_t$ είναι *martingale* κάτω από το μέτρο $P$. Θεωρούμε τώρα το ισοδύναμο μέτο πιθανότητας $Q$, που δίνεται από την παράγωγο $Radon - Nikodym$

$$M_T = \frac{dQ}{dP}$$

Τότε η στοχαστική διαδικασία $\widetilde{W_t}$, που ορίζεται από την σχέση

$$\widetilde{W_t} = W_t + \int_0^t u_s ds$$

$0 \leq t \leq T$, είναι μια κίνηση *Brown* κάτω από το μέτρο $Q$. Επιπλέον η $\widetilde{W_t}$ έχει την ιδιότητα αναπαράστασης *martingale*, δηλαδή για κάθε τοπική $Q - martingale$ $L_t$, υπάρχει κάποια $\theta_t$ τετραγωνικά ολοκληρώσιμη, τέτοια ώστε :

$$L_t = E[L_t] + \int_0^t \theta_s dW_s$$

**Απόδειξη** : παραλείπεται. Βλέπε τον [30]□

Σκοπός μας είναι να επεκτείνουμε τον τύπο $Clark - Ocone$, με βάση το παραπάνω θεώρημα , δηλαδή να γράψουμε το ολοκλήρωμα πάνω στην $\widetilde{W_t}$. Για να γίνει αυτό, χρειαζόμαστε τα ακόλουθα δύο λήμματα.

**Λήμμα 2.2.5** (Γενικευμένος τύπος του *Bayes*) Έστω $G \in L(Q)$. Τότε

$$E_Q[G|F_t] = \frac{E[M_T F|F_t]}{M_t}$$

**Λήμμα 2.2.6** Έστω $F \in \mathbb{D}_{1,2}$, μια $F_T$ μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή και έστω $\theta_t \in \mathbb{D}_{1,2}(\mathcal{L}^2[0,T])$. Υποθέτουμε ότι ισχύει

$$E[M_T^2 F^2] + E[\int_0^T (M_T D_t F)^2 dt] < \infty$$

και επιπλέον

$$E[\int_0^T M_T F(\theta_t + \int_t^T D_t\theta_s dW_s + \int_t^T \theta_s D_t\theta_s ds)^2 dt] < \infty$$

Τότε ισχύει ότι $M_T F \in \mathbb{D}_{1,2}$ και επιπλέον

$$D_t(M_T F) = M_T D_t F - M_T F(\theta_t + \int_t^T D_t\theta_s dW_s + \int_t^T \theta_s D_t\theta_s ds)$$

**Απόδειξη** : Βλέπε παράρτημα □

Είμαστε τώρα σε θέση να διατυπώσουμε τον γενικευμένο τύπο των $Clark-Ocone$

**Θεώρημα 2.2.2** (Γενικευμένος τύπος των $Clark - Ocone$) : Έστω ότι όλες οι υποθέσεις του λήμματος 2.2.6 ισχύουν. Τότε :

$$F = E_Q[F] + \int_0^T E_Q[D_tF - F\int_t^T D_t\theta_s d\widetilde{W}_s|Ft]d\widetilde{W}_t$$

**Απόδειξη** : Βλέπε παράρτημα □

## 3.4.2 Εφαρμογή στην χρηματοοικονομική

Ας δούμε τώρα, πως ο γενικευμένος τύπος των $Clark - Ocone$, μπορεί να εφαρμοστεί στην χρηματοοικονομική και συγκεκριμένα στην θεωρία χαρτοφυλακίου.

Υποθέτουμε ότι η αγορά που βρισκόμαστε αποτελείται από δύο τίτλους, έναν με κίνδυνο (μετοχή) η οποία ακολυθεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t dW_t$$

και ένα χωρίς κίνδυνο, ο οποίος ακολουθεί την στοχαστική διαφορική

$$dB_t = r_t B_t dt$$

Έστω ότι στον χρόνο $t$ έχουμε στην κατοχή μας $\xi_t$ ομόλογα και $\eta_t$ μετοχές. Μπορούμε να κατασκευάσουμε το χαρτοφυλάκιο $(\xi_t, \eta_t)$, το οποίο έχει αξία

$$V_t = \xi_t B_t + \eta_t S_t$$

Από την θεωρία της χρηματοοικονομικής, γνωρίζουμε ότι ένα χαρτοφυλάκιο είναι αυτοχρηματοδοτούμενο, όταν η αξία του προέρχεται από την αξία των τίτλων που το απαρτίζουν. Επιπλέον σε ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο, δεν προστίθενται καθόλου εξωτερικά ποσά και κατά συνέπεια επενδύονται μόνο τα κέρδη του. Επομένως, για να είναι το χαρτοφυλάκιο που περιγράψαμε αυτοχρηαμτοδοτούμενο, πρέπει να ισχύει ότι

$$dV_t = \xi_t dB_t + \eta_t dS_t$$

Από εδώ και στο εξής, υποθέτουμε ότι εργαζόμαστε με αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο. Από την σχέση που δίνει την αξία του χαρτοφυλακίου, μπορούμε να λύσουμε ως προς τον αριθμό των ομολόγων που έχουμε στην κατοχή μας

$$V_t = \xi_t B_t + \eta_t S_t \Rightarrow \xi_t = \frac{V_t - \eta_t S_t}{B_t}$$

και λαμβάνοντας υπόψην ότι η μετοχή ακολουθεί την $dS_t = \mu_t S_t + \sigma_t S_t dW_t$, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} dV_t &= \xi_t dB_t + \eta_t dS_t \\ &= r_t[V_t - \eta_t S_t dt + \eta_t dS_t] \\ &= r_t[r_t V_t + (\mu_t - r_t)\eta_t S_t]dt + \sigma_t \eta_t S_t dW_t \end{aligned}$$

Σκοπός μας είναι να βρούμε ένα χαρτοφυλάκιο $(\xi_t, \eta_t)$ το οποίο να μας δίνει ως τελικό πλούτο την χρονική στιγμή $T$ την ποσότητα $V(T,\omega) = F(\omega)$. Θέλουμε δηλαδή να βρούμε τα βάρη $\xi_t$, $\eta_t$ καθώς επίσης και τον αρχικό πλούτο $V(0)$. Για να γίνει αυτό, πρέπει να λύσουμε την *backward* στοχαστική διαφορική εξίσωση που βρήκαμε:

$$\begin{aligned} &dV_t = r_t[r_t V_t + (\mu_t - r_t)\eta_t S_t]dt + \sigma_t \eta_t S_t dW_t \\ &V(T,\omega) = F(\omega) \end{aligned}$$

και μάλιστα η επίλυσή της θα γίνει με τον γενικευμένο τύπο των $Clark - Ocone$ που αποδείξαμε παραπάνω.

Ορίζουμε την στοχαστική διδικασία

$$\theta_t = \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t}$$

και έστω $\widetilde{W_t}$ μια κίνηση *Brown* όπως αυτή ορίζεται από το θεώρημα του *Girsanov*.

$$\begin{aligned} dV_t &= r_t[r_t V_t + (\mu_t - r_t)\eta_t S_t]dt + \sigma_t \eta_t S_t dW_t \\ &= r_t[r_t V_t + (\mu_t - r_t)\eta_t S_t]dt + \sigma_t \eta_t S_t d\widetilde{W_t} \\ &\quad -\sigma_t \eta_t S_t \sigma_t^{-1}(\mu_t - r_t)dt \\ &= r_t V_t dt + \sigma_t \eta_t S_t d\widetilde{W_t} \end{aligned}$$

Ορίζουμε την

$$N_t = exp(-\int_0^t r_s ds)V_t$$

και παίρνουμε:

$$dN_t = exp(-\int_0^t r_s ds)\sigma_t \eta_t S_t d\widetilde{W}_t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow exp(-\int_0^t r_s ds)V(T) = V(0) + \int_0^T exp(-\int_0^t r_s ds)\sigma_t \eta_t S_t d\widetilde{W}_t \quad (3.1)$$

και εφαρμόζωντας τον γενικευμένο τύπο των $Clark - Ocone$ στην τυχαία μεταβλητή $G = exp(-\int_0^t r_s ds)F(\omega)$:

$$G = E_Q[G] + \int_0^T E_Q[(D_t G - G\int_t^T D_t \theta_s d\widetilde{W}_s)|F_t]d\widetilde{W}_t \quad (3.2)$$

και λόγω της μοναδικότητας των (2.1),(2.2) καταλήγουμε ότι

$$V(0) = E_Q[G]$$

και ότι το βάρος $\eta_t$ θα είναι :

$$\eta_t = exp(\int_0^t r_s ds)\sigma_t^{-1} S_t^{-1} E_Q[(D_t G - G\int_t^T D_t \theta_s d d\widetilde{W}_s)|F_t]$$

□

### 3.4.3 Εφαρμογή στο μοντέλο $Black - Scholes$

Ας δούμε τώρα πως εφαρμόζεται αυτή η γενική θεωρία, στην περίπτωση του μοντέλου των $Black - Scholes$. Στην περίπτωση αυτή το μοντέλο για την αγορά είναι το

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t d_t$$
$$dB_t = r B_t dt$$

και τώρα $\theta = \frac{\mu - r}{\sigma}$. Η ποσότητα αυτή έχει ιδιαίτερη οικονομική σημασία. Λέγεται δείκτης του $Sharpe$ και είναι η διαφορά της απόδοσης του βέβαιου από τον αβέβαιο τίτλο, διαιρεμένη με την μεταβλητότητα. Επειδή $\theta \in \mathbb{R}$ συνεπάγεται ότι $D_t \theta = 0$. Στην περίπτωση αυτή το βάρος του αβέβαιου τίτλου θα είναι :

$$\begin{aligned} \eta_t &= e^{r(t-T)}\sigma^{-1} S_t^{-1} E_Q[D_t F|F_t] \\ &= e^{-r(T-t)}\sigma^{-1} S_t^{-1} E_Q[D_t F|F_t] \end{aligned}$$

όπου $F$ είναι η απόδοση στον χρόνο $T$ ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς. Έχουμε δει ότι στην περίπτωση αυτή $F = \Phi(S_T)$, οπότε:

$$\begin{aligned} \eta_t &= \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma S_t} E_Q[\Phi'(S_T)\sigma S_T|F_t] \\ &= e^{-r(T-t)} E_Q[\Phi'(\frac{S_T}{S_t}S_t)\frac{S_T}{S_t}|F_t] \\ &= e^{-r(T-t)} E_Q[x\Phi'(S_{T-t})S_{T-t}]_{x=S_t} \end{aligned}$$

□

## 3.5 Παράρτημα : Αποδείξεις

Στην ενότητα αυτή, παρουσιάσουμε όλες τις αποδείξεις του κεφαλαίου. Όπως και στο παράρτημα του πρώτου κεφαλαίου, για λόγους ευκολίας, οι προς απόδειξη προτάσεις διατυπώνονται ξανά.

**Λήμμα 2.2.1** Έστω $g \in \mathcal{L}^2([0,T])$. Τότε :

$$E[\int_0^T g(t)dW_t|F_G] = \int_0^T \mathbb{I}_G(t)g(t)dW_t$$

**Απόδειξη** : Πρέπει να δείξουμε ότι το $\int_0^T \mathbb{I}_G(t)g(t)dW_t$ είναι $F_G$ μετρήσιμο και επιπλέον ότι

$$E[F\int_0^T g(t)dW_t] = E[F\int_0^T \mathbb{I}_G(t)g(t)dW_t]$$

για κάθε τυχαία μεταβλητή $F$ φραγμένη και $F_G$ μετρήσιμη. Έστω $g$ συνεχής. Τότε:

$$\int_0^T \mathbb{I}_G(t)g(t)dW_t = \lim_{\Delta_{t_i}\to 0}\sum_i g(t_i)\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{I}_G(t)dW_t$$

και επειδή κάθε όρος του αθροίσματος είναι μετρήσιμος, συνεπάγεται ότι και το άθροισμα είναι μετρήσιμο, που με τη σειρά του συνεπάγεται ότι και το όριο είναι μετρήσιμο, στο δεξιό μέλος της παραπάνω ισότητας. Επομένως το $\int_0^T \mathbb{I}_G(t)g(t)dW_t$ είναι $F_G$ μετρήσιμο.

Έστω τώρα $F = \int_0^T \mathbb{I}_A(t)dW_t$. Τότε:

$$\begin{aligned} E[F\int_0^T g(t)dW_t] &= E[\int_0^T \mathbb{I}_A(t)dW_t \int_0^T g(t)dW_t] \\ &= E[\int_0^T \mathbb{I}_A g(t)dW_t] \end{aligned}$$

και επιπλέον

$$\begin{aligned} E[F\int_0^T \mathbb{I}_A g(t)dW_t] &= E[\int_0^T \mathbb{I}_A(t)dW_t \int_0^T \mathbb{I}_G(t)g(t)dW_t] \\ &= E[\int_0^T \mathbb{I}_A(t)\mathbb{I}_G(t)g(t)dW_t] \\ &= E[\int_0^T \mathbb{I}_A(t)g(t)dW_t] \end{aligned}$$

μιας και υποθέσαμε ότι $A \subset G$. Επομένως το ζητούμενο αποδείχθηκε □

**Λήμμα 2.2.3** Έστω $u_t$ μια $F_t$ προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία, τέτοια ώστε $E[u_t^2 dt] < \infty$. Τότε:

$$E[\int_0^T u_t dW_t | F_G] = \int_G E[u_t|F_G]dW_t$$

**Απόδειξη** : Αρκεί να δείξουμε ότι

$$E[F\int_0^T u_t dW_t] = E[F\int_G E[u_t|F_G]dW_t]$$

για κάθε τυχαία μεταβλητή $F$ της μορφής $F = \int_A dW_t$, όπου $A \subset G$. Έστω $F = \int_0^T \mathbb{I}_A(t)dW_t$.Τότε

$$\begin{aligned} E[F\int_0^T u_t dW_t] &= E[\int_0^T \mathbb{I}_A(t)dW_t \int_0^T u_t dW_t] \\ &= E[\int_0^T \mathbb{I}_A(t)u_t dW_t] \\ &= \int_0^T E[\mathbb{I}_A(t)]dW_t \\ &= \int_A E[u_t]dW_t \end{aligned}$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned} E[F\int_G E[u_t|F_G]dW_t] &= E[F\int_0^T \mathbb{I}_G(t)E[u_t|F_G]dW_t] \\ &= E[\int_0^T \mathbb{I}_A(t)dW_t \int_0^T \mathbb{I}_G(t)E[u_t|F_G]dW_t] \\ &= E[\int_0^T \mathbb{I}_A(t)\mathbb{I}_G(t)E[u_t|F_G]dW_t] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^T \mathbb{I}_A(t) E[E[u_t|F_G]]dW_t \\
&= \int_A E[u_t]dW_t
\end{aligned}
$$

και το ζητούμενο αποδείχθηκε□

**Λήμμα 2.2.4** Έστω $f_n \in \mathcal{L}_S^2([0,T]^n)$. Τότε

$$E[I_n(f_n)|F_G] = I_n[f_n \mathbb{I}_G^{\otimes n}]$$

όπου $f_n \mathbb{I}_G^{\otimes n}(t_1,...,t_n)= f_n(t_1,...,t_n)\mathbb{I}_G(t_1),...,\mathbb{I}_G(t_n)$

**Απόδειξη** : Για $n=1$ ισχύει

$$
\begin{aligned}
E[I_1(f_1)|F_G] &= E[\int_0^T f_1(t_1)dW_{t_1}|F_G] \\
&= \int_0^T f_1(t_1)\mathbb{I}_G(t_1)dW_t
\end{aligned}
$$

που ισχύει από το λήμμα 2.2.3. Για $n=\kappa$, έχουμε

$$
\begin{aligned}
&E[I_{\kappa+1}(f_{\kappa+1})|F_G] \\
&= (\kappa+1)!E[\int_0^T \int_0^{t_\kappa} ... \int_0^{t_2} f_{\kappa+1}(t_1,...,t_{\kappa+1})dW_{t_1}...dW_{t_{\kappa+1}}|F_G] \\
&= (\kappa+1)! \int_0^T E[\int_0^{t_\kappa} ... \int_0^{t_2} f_{\kappa+1}(t_1,...,t_{\kappa+1})dW_{t_1}...dW_{t_\kappa}|F_G]\mathbb{I}_G(t_{\kappa+1})dW_{t_{\kappa+1}} \\
&= (\kappa+1)! \int_0^T \int_0^{t_\kappa} ... \int_0^{t_2} f_{\kappa+1}(t_1,...,t_{\kappa+1})\mathbb{I}_G(t_1)...\mathbb{I}_G(t_{\kappa+1})dW_{t_1}...dW_{t_{\kappa+1}} \\
&= I_{\kappa+1}[f_{\kappa+1}\mathbb{I}_G^{\otimes(\kappa+1)}]
\end{aligned}
$$

□

**Θεώρημα 2.2.1** (*Clark − Ocone*) Έστω $F \in \mathbb{D}_{1,2}$ και $F_T$ μετρήσιμη. Τότε :

$$F = E[F] + \int_0^T E[D_t F|F_t]dW_t$$

**Απόδειξη** : Έστω $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$, όπου $f_n \in \mathcal{L}^2([0,T]^n)$.Τοτε :

$$\int_0^T E[D_t F|F_t]dW_t = \int_0^T E[\sum_{n=0}^{\infty} nI_{n-1}(f_n(.,t))|F_t]dW_t$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^T \sum_{n=0}^{\infty} nE[I_{n-1}(f_n(.,t))|F_t]dW_t \\
&= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} nI_{n-1}E[f_n(.,t)\mathbb{I}_{[0,t]}^{\otimes(n-1)}]dW_t \\
&= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)!J_{n-1}[f_n(.,t)\mathbb{I}_{[0,t]}^{\otimes(n-1)}]dW_t \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n!J_n[f_n(.)] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_n(f_n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}_n(f_n) - \mathbb{I}_0(f_0) = F - E[F]\square
\end{aligned}$$

**Λήμμα 2.2.6** Έστω $F \in \mathbb{D}_{1,2}$, μια $F_T$ μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή και έστω $\theta_t \in \mathbb{D}_{1,2}(\mathcal{L}^2[0,T])$. Υποθέτουμε ότι ισχύει

$$E[M_T^2F^2] + E[\int_0^T (M_T D_t F)^2 dt] < \infty$$

και επιπλέον

$$E[\int_0^T M_T F(\theta_t + \int_t^T D_t\theta_s dW_s + \int_t^T \theta_s D_t\theta_s ds)^2 dt] < \infty$$

Τότε ισχύει ότι $M_T F \in \mathbb{D}_{1,2}$ και επιπλέον

$$D_t(M_T F) = M_T D_t F - M_T F(\theta_t + \int_t^T D_t\theta_s dW_s + \int_t^T \theta_s D_t\theta_s ds)$$

**Απόδειξη** : Από τον κανόνα του γινομένου της παραγώγου κατά $Malliavin$, που είδαμε στο δεύτερο κεφάλαιο, έχουμε:

$$\begin{aligned}
D_t(M_T F) &= M_T D_t F + F D_t M_T \\
&= M_T D_t F - F M_T D_t(\int_0^T \theta_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds)
\end{aligned}$$

και τώρα πρέπει να υπολογίσουμε την ποσότητα $D_t(\int_0^T \theta_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds)$. Γνωρίζουμε ότι $D_t\theta_s^2 = 2\theta_s D_t\theta_s$. Επομένως:

$$D_t(\int_0^T \theta_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds) = \theta_t + \int_0^T D_t\theta_s dW_s + \int_0^T \theta_s D_t\theta s ds$$

Επιπλέον, επειδή $D_t(E[F|F_A]) = E[D_tF|F_A]\mathbb{I}_A(t)$

$$\begin{aligned} D_t\theta_s &= D_t(E[\theta_s|F_t]) \\ &= E[D_t\theta_s|F_t]\mathbb{I}_{[0,s]}(t)\square \end{aligned}$$

**Θεώρημα 2.2.2** (Γενικευμένος τύπος των $Clark - Ocone$) : Έστω ότι όλες οι υποθέσεις του λήμματος 2.2.6 ισχύουν. Τότε :

$$F = E_Q[F] + \int_0^T E_Q[D_tF - F\int_t^T D_t\theta_s d\widetilde{W}_s|Ft]d\widetilde{W}_t$$

**Απόδειξη** : Έστω $Y = E_Q[F|F_t]$. Τότε από τον γενικευμένο τύπο του $Bayes$, μπορούμε να γράψουμε

$$Y = \frac{E[M_TF|F_t]}{M_t}$$

όπου $Q$ είναι το νέο μέτρο, όπως αυτό ορίζεται από την παράγωγο $Radon-Nikodym$ μέσω του θεωρήματος του $Girsanov$ και η $M_t^{-1}$ είναι ίση με

$$M_t^{-1} = exp(\int_0^t \theta_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds)$$

Εφαρμόζωντας τον τύπο των $Clark - Ocone$ για την τυχαία μεταβλητή $(M_TF|F_t)$, παίρνουμε:

$$E[M_TF|F_t] = E[M_TF] + \int_0^t E[D_sM_TF|F_s]dWs$$

και διαιρώντας όλα τα μέλη με $M_t$, παίρνουμε:

$$Y_t = M_t^{-1}E_Q[F] + M_t^{-1}\int_0^t E[D_sM_TF|F_s]dW_s \tag{3.4}$$

και από το λήμμα 2.2.6 :

$$\begin{aligned} E[D_t(M_TF|F_t)] &= E[M_T(D_tF - F(\theta_t + \int_t^T D_t\theta_s d\widetilde{W}_s))|F_t] \\ &= M_tE_Q[D_tF - F(\theta_t + \int_t^T D_t\theta_s d\widetilde{W}_s)|F_t] \\ &= M_tE_Q[D_tF - F\int_t^T D_t\theta_s d\widetilde{W}_s|F_t] - M_tY_t\theta_t \\ &= M_t\psi_t - M_tY_t\theta_t \qquad (3.5) \end{aligned}$$

και αντικαθιστώτας την (3) στην (2), παίρνουμε:

$$Y_t = M_t^{-1} E_Q[F] + M_t^{-1} \int_0^t M_s \psi_s dW_s - M_t^{-1} \int_0^t M_s Y_s \theta_s dW_s \Rightarrow$$
$$dY_t = dM_t^{-1} E_Q[F] + dM_t^{-1} M_s \psi_s DW_t - dM_t^{-1} M_t \psi_t \theta_t dW_t$$

και επειδή

$$dM_t^{-1} = M_t^{-1}(\theta_t dW_t + \theta_t^2 dt)$$

καταλήγουμε ότι τελικά ισχύει:

$$\begin{aligned} dY_t &= Y_t(\theta_t dW_t + \theta_t^2 dt) + \psi_t dW_t - Y_t \theta_t dW_t + \theta_t \psi_t dt - Y_t \theta_t^2 dt \Rightarrow \\ &= \psi_t (dW_t + \theta_t dt) \\ &= \psi_t \left( \int_0^t \theta_s ds + W_s \right) = \psi_t \widetilde{W}_t \end{aligned}$$

και το ζητούμενο αποδείχθηκε□

# Κεφάλαιο 4

# Προσομοίωση *Monte Carlo*

Η κλασσική μέθοδος υπολογισμού των *greeks* είναι η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών, όμως η μέθοδος αυτή εμφανίζει ένα μεγάλο πρόβλημα. Όσο πιο μεγάλη είναι η ασυνέχεια της απόδοσης του δικαιώματος, τόσο μεγαλύτερη είναι και η μεροληψία του εκτιμητή που παίρνουμε. Το 1999 οι *Fournie*, *Lasry*, *Lebyscoux*, *Lions*, *Touzi*, έδωσαν λύση σε αυτό το πρόβλημα προτείνοντας την εφαρμογή του λογισμού κατά *Malliavin* για τον υπολογισμό των *greeks*. Στην εργασία τους [7] έδειξαν ότι τα *greeks* μπορούν να γραφούν, ως $E[\Phi(S_T).\pi]$, όπου $\Phi(S_T)$ είναι η απόδοση του δικαιώματος και $\pi$ είναι το βάρος κατά *Malliavin*, το οποίο είναι ανεξάρτητο από την απόδοση. Στο κεφάλαιο αυτό θα αποδείξουμε ότι η μέθοδος που πρότειναν είναι μία πολύ αξιόπιστη και αποτελεσματική μέθοδος προσομοίωσης των *greeks*, ιδίως στην περίπτωση όπου η απόδοση του δικαιώματος είναι ασυνεχής. Κλασικό παράδειγμα δικαιωμάτων με απόδοση μη συνεχή είναι τα λεγόμενα *digital* δικαιώματα.

## 4.1 *Digital options*

Τα *digital* ανήκουν σε μία ειδική κατηγορία δικαιωμάτων γνωστά και ως *binary*. Τα *binary* είναι δικαιώματα των οποίων η συνάρτηση απόδοσης δεν είναι συνεχής γιατί εμφανίζει άλματα, με αποτέλεσμα να δημιουργείται πρόβλημα όσον αφορά την εξασφάλιση. Ένα παράδειγμα τέτοιων δικαιωμάτων είναι τα *cash or nothing* ή αλλιώς *digital*. Ένα *cash or nothing call* είναι ένα δικαίωμα το οποίο δεν πληρώνει τίποτα, αν η τελική τιμή του υποκείμενου τίτλου είναι μικρότερη από την τιμή εξάσκησης και πληρώνει μία χρηματική μονάδα αν είναι μεγαλύτερη. Όπως γνωρίζουμε από το μοντέλο των *Black Scholes*, η πιθανότητα να είναι η τιμή του υποκείμενου τίτλου μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης στο χρόνο λήξης του δικαιώματος είναι $N(d_2)$. Επομένως η τιμή ενός τέτοιου δικαιώματος θα είναι $e^{-rT}N(d_2)$.

Αντίστοιχα, ένα *cash or nothing put* δεν πληρώνει τίποτα αν η τιμή του υποκείμενου τίτλου είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης και μία χρηματική μονάδα αν είναι μικρότερη. Η τιμή του θα είναι ίση με $e^{-rT}N(-d_2)$. Ενδεικτικά αναφέρουμε και την ύπαρξη των *binary* δικαιωμάτων *asset or nothing* τα οποία είναι ίδια με τα *cash or nothing*, με την διαφορά ότι πληρώνουν ένα ποσό ίσο με την τιμή του υποκείμενου τίτλου. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με ευρωπαϊκά *digital* δικαιώματα αγοράς.

### 4.1.1 *Greeks* για ευρωπαϊκά *digital* δικαιώματα αγοράς

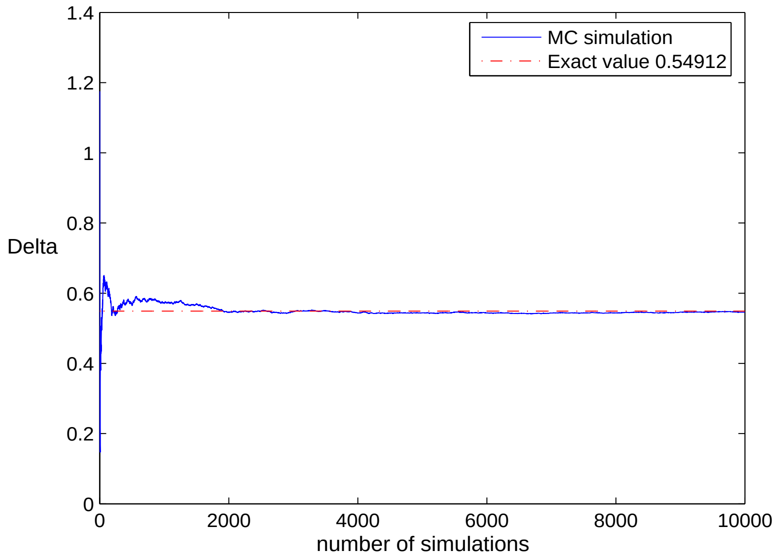
Ένα ευρωπαϊκό *digital* δικαίωμα αγοράς ορίζεται ακριβώς όπως και ένα συνηθισμένο ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς, με την μοναδική διαφορά ότι έχει συνάρτηση απόδοσης της μορφής $\Phi(S_T) = \mathbb{I}_{S_T>K}$, όπου με $S_T$ συμβολίζουμε την τιμή του υποκείμενου τίτλου στην λήξη και με $K$ την τιμή εξάσκησης. Δηλαδή αν η τελική τιμή του υποκείμενου τίτλου, έστω μετοχής, είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης πληρώνει μία χρηματική μονάδα, διαφορετικά δεν πληρώνει τίποτα. Αντίθετα ένα συνηθισμένο ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς, πληρώνει $max(S_T - K)$ στην πρώτη περίπτωση και τίποτα στην δεύτερη.

Σκοπός μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να προσομοιώσουμε με την τεχνική *Monte Carlo* το Δέλτα ενός ευρωπαϊκού *digital* δικαιώματος αγοράς. Όπως είπαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, το Δέλτα ενός δικαιώματος είναι ο λόγος της μεταβολής της τιμής του δικαιώματος ως προς την μεταβολή της τιμής του υποκείμενου τίτλου. Για παράδειγμα, αν το Δέλτα ενός δικαιώματος είναι 0.6, αυτό πρακτικά σημαίνει ότι αν μεταβληθεί η τιμή του υποκείμενου τίτλου κατά ένα μικρό ποσό, αυτό επιφέρει μία μεταβολή στην τιμή του δικαιώματος της τάξεως του 60% επί του ποσού αυτού. Ο λόγος που δίνουμε όλη την έμφανσή μας στο Δέλτα είναι γιατί αποτελεί την βάση υπολογισμού όλων των *greeks*. Με αφετηρία την προσομοίωση της τιμής του Δέλτα, υπολογίζουμε εύκολα όλα τα υπόλοιπα *greeks*. Για παράδειγμα για το Γάμμα ισχύει

$$gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \approx \frac{delta(S + \Delta S) - delta(S - \Delta S)}{S\Delta S}$$

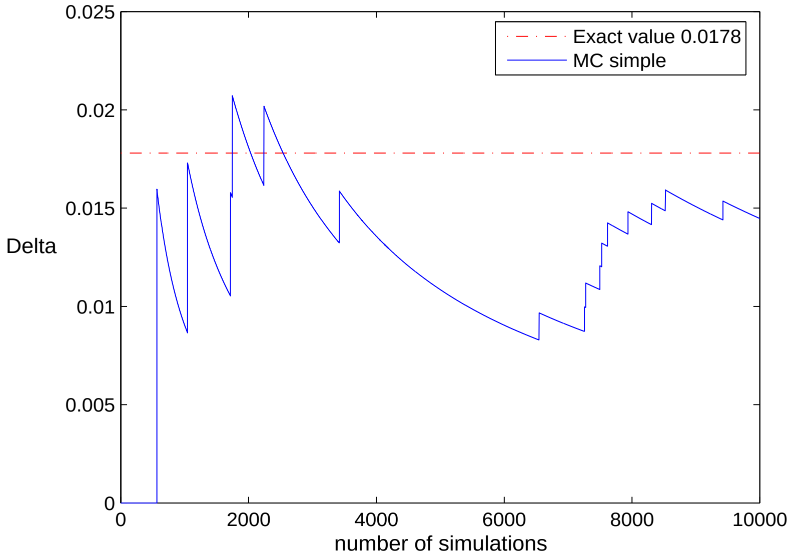
όπου $\Delta S$ είναι μια μικρή μεταβολή στην τιμή του υποκείμενου τίτλου και *delta* η τιμή του Δέλτα. Βλέπουμε λοιπόν ότι η συμπεριφορά του Δέλτα χρίζει ιδιαίτερης προσοχής γιατί πάνω του βασίζεται η εξασφάλιση από το δικαίωμα το οποίο έχουμε να αντιμετωπίσουμε.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι είμαστε αντιμέτωποι με την απλή περίπτωση ενός συνηθισμένου ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς. Εφαρμόζωντας την τεχνική *Monte Carlo* μπορούμε να κάνουμε προσομοίωση για τον υπολογισμό του Δέλτα και με την βοήθεια κάποιου προγράμματος παίρνουμε ένα αποτέλεσμα σαν αυτό του σχήματος 4.1.




Σχήμα 4.1: Δέλτα ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς με $S = 100$, $K = 110$, $T = 1$ έτος, $\sigma = 0.2$ και $r = 0.1$. Χρησιμοποιήσαμε προσομοίωση *Monte Carlo*.

Παρατηρούμε ότι η προσομοίωση που επιτύχαμε είναι αρκετά ικανοποιητική και μάλιστα σε ένα σχετικά μικρό αριθμό επαναλήψεων. Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να εφαρμόσουμε την ίδια τεχνική για την προσομοίωση του Δέλτα ενός ευρωπαϊκού *digital* δικαιώματος αγοράς. Το αποτέλεσμα που θα πάρουμε, δεν έχει καμιά σχέση με αυτό του σχήματος 4.1, μιας και η απλή τεχνική *Monte Carlo* δεν καταφέρνει να προσομοιώσει αποτελεσματικά το προβληματικό Δέλτα του *digital*. Φυσικά για αυτό δεν ευθύνεται η τεχνική *Monte Carlo*, αλλά ο ίδιος ο χαρακτήρας του Δέλτα του *digital*, μιας και είναι κάπως ιδιαίτερος. Η ρίζα του προβλήματος έγκειται στο γεγονός ότι η συνάρτηση απόδοσης είναι μη συνεχής και επομένως είναι αδύνατη η παραγώγισή της. Βέβαια, το πρόβλημα αυτό επεκτείνεται και σε άλλα δικαιώματα με συνάρτηση απόδοσης που δεν είναι συνεχής, όπως τα Ασιατικά. Η περίπτωση που εξετάζουμε φαίνεται ξεκάθαρα στο σχήμα 4.2.

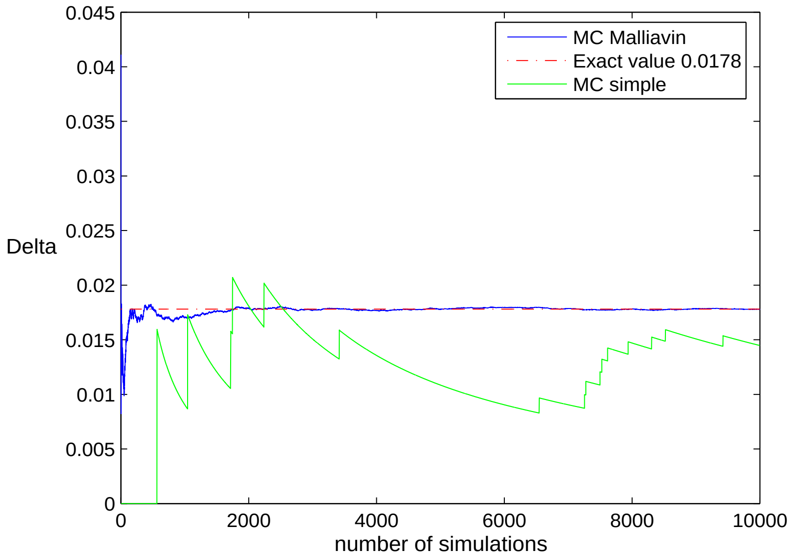



Σχήμα 4.2: Δέλτα ενός ευρωπαϊκού *digital* δικαιώματος αγοράς με $S = 100$, $K = 110$, $T = 1$ έτος, $\sigma = 0.2$ και $r = 0.1$. Χρησιμοποιήσαμε προσομοίωση *Monte Carlo*.

Το ερώτημα είναι αν μπορούμε να κάνουμε κάτι για να "διορθώσουμε" την προσέγγισή μας, μιας και είναι απαραίτητο για την σωστή εξασφάλιση. Την απάντηση την έδωσαν το 1999 οι *Fournie*, *Lasry*, *Lebyscoux*, *Lions*, *Touzi* [7]. Στην εργασία τους προτείνουν ένα νέο τρόπο προσομοίωσης των *greeks* αυτόν με την χρήση του λογισμού κατά *Malliavin* Το Δέλτα με την μέθοδο αυτή είναι :

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{\partial}{\partial S_0} E[e^{-rT}\Phi(S_T)] \\
&= e^{-rT} E[\frac{\partial}{\partial S_0}\Phi(S_T)] \\
&= \frac{e^{-rT}}{S_0} E[\Phi^{'}(S_T)S_T] \\
&= \frac{e^{-rT}}{S_0} E\left[\Phi(S_T) D^{*}\left(\frac{S_T}{\int_0^T D_u S_T du}\right)\right] \\
&= e^{-rT} E\left[\Phi(S_T)\frac{W_T}{\sigma T S_0}\right]
\end{aligned}$$

εφαρμόζωντας την ολοκλήρωση κατά μέλη του λογισμού κατά *Malliavin* όπως είδαμε αναλυτικότερα στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ουσιαστικά, το μόνο που έχουμε να κάνουμε τώρα είναι μια *Monte Carlo* προσομοίωση λαμβάνοντας όμως υπόψην το βάρος κατά *Malliavin* $\dfrac{W_T}{\sigma T S_0}$, που είναι ο διορθωτικός όρος. Κάνοντας την διαδικασία αυτή προκύπτει το αποτέλεσμα του σχήματος 4.3.




Σχήμα 4.3: Δέλτα ενός ευρωπαϊκού *digital* δικαιώματος αγοράς με $S = 100$, $K = 110$, $T = 1$ έτος, $\sigma = 0.2$ και $r = 0.1$ υπολογισμένο με και χωρίς την μέθοδο του λογισμού κατά *Malliavin*.

Είναι γνωστό ότι η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών, η οποία μάλιστα όπως είπαμε αποτελεί τον κλασικό τρόπο υπολογισμού των *greeks*, είναι χειρότερη από την απλή προσομοίωση *Monte Carlo*. Εμείς αποδείξαμε ότι η νέα μέθοδος που κάνει χρήση του λογισμού κατά *Malliavin*, είναι αποτελεσματικότερη της προσομοίωσης *Monte Carlo*. Αυτόματα λοιπόν αποδυκνείεται ότι η μέθοδος που πρότειναν οι *Fournie*, *Lasry*, κ.α. είναι η αποτελεσματικότερη μέθοδος υπολογισμού των *greeks* για την περίπτωση όπου η απόδοση του δικαιώματος που έχουμε δεν είναι συνεχής συνάρτηση. Επομένως οι ισχυρισμοί μας στην αρχή του κεφαλαίου δικαιώνονται.

# Βιβλιογραφία


[1] *Paul Malliavin and Anton Thalmaier. Stochastic calculus of variations in mathematical finance. Springer*, 2005.

[2] *David Nualart. The Malliavin calculus and related topics. Springer*, 2006.

[3] *Denis R.Bell. The Malliavin calculus. Dover*, 2005.

[4] *Bernt Øksendal. An introduction to malliavin calculus with applications to economics. University of Øslo, dept of mathematics*, 1997.

[5] *Peter Fritz. Introduction to malliavin calculus. N.Y. University*, 2002.

[6] *Kohatsu Higa and Miguel Montero. Malliavin calculus applied to finance. Physica A* 320, *pp.* 548-570, 2003.

[7] *Fournié et.al. Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance. Finance and Stochastics*, *pp.* 391-412, 1999.

[8] *Fournié et.al. Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance II. Finance and Stochastics*, *pp.* 201-236, 2001.

[9] *Daniel W. Stroock. The Malliavin calculus : A functional analytic approach. Journal of functional analysis* 44,*pp.* 212-257, 1981.

[10] *Shinzo Watanabe. Ito calculus and malliavin calculus. Kyoto, Japan*, 2005.

[11] Ευαγγελία Πέτρου. *Malliavin calculus in Lèvy spaces and applicaations in finance. Imperial College, London*, 2006.

[12] *Till Schröter. Malliavin calculus in finance. University of Oxford*, 2007.

[13] *Eric Benhamou. Smart Monte Carlo:Various tricks using Malliavin calculus. Quantative Finance, vol.*2 *pp.*329-336, 2002.

[14] *Eric Benhamou. Optimal Malliavin weighting function for the computation of greeks. LSE*, 2000.

[15] *Eric Benhamou. An application of Malliavin calculus to continuous time asian option greeks. LSE*, 2000.

[16] *Jean Charles Prével et.al. Application of Malliavin calculus to the computation of greeks. Computational Finance*, 2003.

[17] *Aaase et.al. White noise generalizations of the Clark − Ocone − Haussman theorem with application to mathematical finance. Finance and Stochastics* 4, *pp.*465-496, 2001.

[18] *Yeoliz Okur. White noise generalizations of the Clark − Ocone formula under change of measure. University of Øslo, dept of mathematics*, 2002.

[19] *Shigeo Kusuoka. Analysis on Wiener spaces II. Journal of functional analysis ,pp.* 229-274, 1992.

[20] *Bass. Diffusions and elliptic operators. Sringer*, 1998.

[21] *Kunita and Kuo. Stochastic analysis on infinite dimensional spaces. LST, N.Y.*, 1994.

[22] *Giuseppe Da Prato. An introduction to infinite dimensional analysis. Springer*, 2006.

[23] *Giuseppe Da Prato and Jerzy Zabczyk. Stochastic equations in infinite dimensions. Cambridge university press*, 1992.

[24] *Nobuoki Obata. White noise calculus. Springer*, 1994.

[25] *Vladimir I. Bogachev. Gaussian measures. American Mathematical Society*, 1998.

[26] *Lászlió Mate. Hilbert space methods in science and engineering. Adam Hilger*, 1989.

[27] A.*V. Skorohod. Integration in Hilbert spaces. Springer*, 1974.

[28] *Kiyoshi Ito. Stochastic analysis. North Holland*, 1982.

[29] *Paul Malliavin. Integration and probability. Springer*, 1995.

[30] Αθανάσιος Ν. Γιαννακόπουλος. *Στοχαστική ανάλυση και εφαρμογές στην χρηματοοικονομική, τόμος Ι:Εισαγωγή στη στοχαστική ανάλυση.* Πανεπιστήμιο Αιγαίου, 2003.

[31] Αθανάσιος Ν. Γιαννακόπουλος. *Στοχαστική ανάλυση και εφαρμογές στην χρηματοοικονομική, τόμος ΙΙ:Εφαρμογές στην χρηματοοικονομική.* Πανεπιστήμιο Αιγαίου, 2003.

[32] *Bachman and Narici. Functional analysis. Dover*, 2000.

[33] *John B. Conway. A course in functional analysis. Springer*, 1990.

[34] *Jordan Stoyanov. Counterexamples in probability. Wiley and sons*, 1997.

[35] *John C. Hull. Options, futures and other derivatives. Prentice Hall*, 2003.

[36] *Salih N. Neftci. An introduction to the mathematics of financial derivatives. Academic press*, 2000.

[37] *Robert Merton. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. Journal of financial economics*, 3, *pp.* 125-144, 1976.

[38] *Nan Chen and Paul Glasserman. Malliavin greeks without Malliavin calculus. Columbia university*, 2006.