ΝΕΙΛΟΥ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ

ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΕΝ ΤΩ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΩ
ΚΑΙ ΤΗ ΣΧΟΛΗ ΤΩΝ Ν. ΔΟΚΙΜΩΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

μετὰ 103 σχημάτων ἐν τῷ κειμένῳ

Πρὸς χρῆσιν τῶν φοιτητῶν τοῦ Πανεπιστημίου, τοῦ Πολυτεχνείου καὶ τῶν Ἀνωτέρων Στρατιωτικῶν Σχολῶν.

ΑΘΗΝΑΙ
ΤΥΠΟΙΣ Ε. & Ι. ΜΠΛΑΖΟΥΔΑΚΗ
1924

Πᾶν ἀντίτυπον μὴ φέρον τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως θεωρεῖται κλεψίτυπον.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ἀπὸ τῆς εὑρέσεως τῆς *Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας* ὑπὸ τοῦ Καρτεσίου (1596 — 1650) δύναται νὰ χρονολογηθῇ ἡ ἐποχὴ ἥτις χωρίζει τὰ νεώτερα Μαθηματικὰ ἀπὸ τὴν ἐπιστήμην τῶν ἀρχαίων.

Οὗτοι εἶχον φέρει τὴν Γεωμετρίαν κατὰ τὴν Ἀλεξανδρινὴν πρὸ παντὸς περίοδον εἰς τοιαύτην ἀκμήν, ὥστε καὶ σήμερον ἀκόμη διδασκόμεθα πολλὰ ἐκ τῆς ἀναγνώσεως τῶν κωνικῶν τομῶν τοῦ Ἀπολλωνίου (περὶ τὰ 240 — 190 π.Χ.) καὶ τῆς περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου πραγματείας τοῦ Ἀρχιμήδους (περὶ τὰ 287—212 π.Χ.). Πρὸς τούτοις εἶχον ἀναπτύξει συστηματικῶς μεθόδους, τῶν ὁποίων τὰ ὀλίγα εἰσέτι σωζόμενα λείψανα δεικνύουν ὅτι, αὗται ἀπέβλεπον ἐν πολλοῖς εἰς τὸν αὐτὸν σκοπὸν εἰς ὃν καὶ ἡ Γεωμετρία τοῦ Descartes. Εἰς τὸ διάσημον αὐτοῦ βιβλίον «Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum» (Copenhagen 1886) ἐδοκίμασεν ὁ Δανὸς μαθηματικὸς H. G. Zeuthen (1839 — 1915) ν' ἀνασυντάξῃ τὰς μεθόδους ταύτας· διὰ τοῦ βιβλίου τούτου ὡς καὶ διὰ τοῦ συγγράμματος τοῦ T. L. Heath Apollonius of. Perga (Cambridge 1896) δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἰδέαν τινὰ τῶν ἀπολεσθεισῶν τούτων μεθόδων τῆς Ἑλλην. ἐπιστήμης.

Ἐκ τῆς μελέτης ταύτης — τὴν ὁποίαν οὐδεὶς ἐνδιαφερόμενος διὰ τὴν πρόοδον τῆς ἀνθρωπίνης σκέψεως ἐπιτρέπεται ν' ἀμελήσῃ — διδασκόμεθα ὁποίαν τεραστίαν πρόοδον ἐσήμανεν ἡ ἐπινόησις ὑπὸ τοῦ Descartes τῆς ἰδέας τοῦ «ἄξονος» δηλ. τῆς ἰδέας τῆς ἀπεικονίσεως τῶν σημείων μιᾶς εὐθείας ἐπὶ τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν (θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν) ἀριθμῶν. Ἡ ἰδέα τοῦ ἄξονος κατέστη σήμερον κοινὸν κτῆμα ὁλοκλήρου τῆς ἀνθρωπότητος· τὴν χρησιμοποιοῦμεν διαρκῶς, ὅπως τὸ διαπιστοῦν τὰ διαγράμματα, τὰ ὁποῖα ἀπαντῶμεν καὶ εἰς αὐτὰς ἀκόμη τὰς ἐφημερίδας.

Ἡ μέθοδος τοῦ Descartes ἐπέτρεψεν ὅπως ἅμα τῇ ἐμφανίσει αὐτῆς, ὁ λογισμὸς τῶν ἀπειροστῶν ἐφαρμοσθῇ εἰς παντὸς εἴδους προβλήματα τῆς Γεωμετρίας καὶ τῆς Μηχανικῆς καὶ συνετέλεσεν οὐσιωδέστερον παντὸς ἄλλου μέσου εἰς τὴν ταχεῖαν τελειοποίησιν τῆς Ἀναλύσεως κατὰ τοὺς ἡρωϊκοὺς δι' αὐτὴν χρόνους τοῦ δεκάτου ὀγδόου αἰῶνος. Ἀντιστρόφως, αἱ διάφοροι πρόοδοι τῆς κυρίως λεγομένης Γεωμετρίας κατὰ τοὺς τελευταίους αἰῶνας ἐπέδρασαν σπουδαίως ἐπὶ τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας καὶ συνέτειναν εἰς τὸ νὰ λάβωσιν ἀπροσδόκητον ἀνάπτυξιν αἱ ἀναλυτικαὶ μέθοδοι.

Ἤδη ὁ Desargues (1593—1662) εἶχε πρὸ πολλοῦ ἑρμηνεύσει τὴν ἔννοιαν τῶν εἰς τὸ ἄπειρον εὑρισκομένων σημείων καὶ εὐθειῶν καὶ τὸν χειρισμὸν αὐτῶν.

Αἱ ἰδέαι αὗται τοῦ Desargues ἔμειναν ὅμως σχεδὸν ἀπαρατήρητοι, μέχρις ὅτου ἡ πλειὰς τῶν γεωμετρῶν, οἵτινες ὀλίγον τι μετὰ τὴν γαλλικὴν ἐπανάστασιν συνηθροίσθησαν περὶ τὸν G. Monge (1746—1818) ἀνέπτυξαν συστηματικῶς τὰς ἐννοίας ταύτας καὶ παρεσκεύασαν τὸ ἔδαφος εἰς τὸν Poncelet (1788—1867) ὅστις ὀλίγον τι ἀργότερον ἐφεῦρε τὴν προβολικὴν Γεωμετρίαν. Εἶναι αὕτη ἡ ἐποχὴ καθ' ἣν ἐφευρέθη ἡ ἀρχὴ τῆς δυαδικότητος, διὰ τῆς ὁποίας ἐδιπλασιάζοντο τὰ θεωρήματα τῆς Γεωμετρίας ἐδιχοτομοῦντο δὲ αἱ σελίδες τῶν βιβλίων, ὅπως ἐκτεθῶσιν οὕτως ἐκ παραλλήλου τὰ δίδυμα θεωρήματα. Ἡ ἐφαρμογὴ τῆς ἀρχῆς τῆς δυαδικότητος εἰς τὴν ἀναλυτικὴν Γεωμετρίαν ἔδειξεν ὅτι, τὰ σύμβολα τῆς τελευταίας ταύτης δύνανται διαφοροτρόπως νὰ ἑρμηνευθῶσιν καὶ ὅτι τὰ αὐτὰ σύμβολα χρησιμοποιούμενα καταλλήλως δύνανται νὰ παραστήσωσιν ἐντελῶς διάφορα γεωμετρικὰ ἀντικείμενα, π. χ. σημεῖον ἀφ' ἑνὸς ἢ εὐθεῖαν ἀφ' ἑτέρου ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, ἢ πάλιν σημεῖον ἀφ' ἑνὸς ἢ ἐπίπεδον ἀφ' ἑτέρου ἐν τῷ χώρῳ τῶν 3 διαστάσεων.

Ἡ τοιαύτη ἐπέκτασις τοῦ συμβολισμοῦ εἶχεν ὡς ἀποτέλεσμα τὴν ἔτι μᾶλλον γενίκευσιν τῆς Καρτεσιανῆς μεθόδου τῶν συντεταγμένων καὶ ἐχρησίμευσεν ὡς ἀφετηρία καὶ ἄλλης ἀκόμη προόδου τῆς ἐπιστήμης.

Κατὰ τὸ 1828 ἐδημοσίευσεν ὁ Möbius (1790—1868) τὸν «βαρυκεντρικόν» του λογισμὸν καὶ τὸ 1832 ὁ Plücker (1801—1868) τὴν γραμμικήν του Γεωμετρίαν, ἔργα, τὰ ὁποῖα συνέτειναν εἰς τὸ νὰ ἐλευθερώσουν τὰς συντεταγμένας ἀπὸ τὰς τελευταίας πέδας, αἱ ὁποῖαι ἠμπόδιζον ἀκόμη τὴν ἐλευθέραν χρῆσιν τῶν ἐννοιῶν τούτων.

Αἱ μεταγενέστεραι πρόοδοι, αἵτινες ἔδωκαν εἰς τὴν Ἀναλυτικὴν Γεωμετρίαν τὴν σύγχρονόν της μορφήν, εἶνε ἐντελῶς ἄλλης φύσεως. Ἡ χρῆσις εἶχεν ἀποκαλύψει ὅτι τὰ γεωμετρικὰ μεγέθη παρουσιάζονται εἰς τὰ προβλήματα τῆς Ἀναλυτ. Γεωμετρίας ὡς ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις ἐντελῶς ἰδιαζούσης μορφῆς.

Ἐξ αὐτῆς τῆς παρατηρήσεως ἐγεννήθη ἡ θεωρία τῶν ἀναλλοιώτων, ἥτις ἀνεπτύχθη περὶ τὰ 1850 καὶ εἶχεν ὡς κυρίους αὐτῆς μύστας τὸν Cayley (1821—1895) καὶ τὸν Sylvester (1814—1897) ἐν Ἀγγλίᾳ, τὸν Clebsch (1833—1872) καὶ τὸν Aronhold (1819—1884) ἐν Γερμανίᾳ.

Τὰ κλασσικὰ βιβλία, τὰ ὁποῖα ἀντιπροσωπεύουν τὴν περίοδον ταύτην καὶ ἐμπεριέχουν τὴν ἐφαρμογὴν τῶν νέων ἀλγεβρικῶν μεθόδων εἰς τὴν Γεωμετρίαν εἶνε ἡ Ἀναλυτικὴ Γεωμετρία τοῦ Salmon, ἥτις ἔσχεν ἀπείρους ἐκδόσεις καὶ ἐξακολουθεῖ ἀκόμη νὰ ἀναδημοσιεύεται καὶ τὸ βιβλίον τοῦ Lindemann, τὸ ὁποῖον περιέχει τὰς παραδόσεις τοῦ Clebsch περὶ τοῦ ἀντικειμένου τούτου.

Ἐπίσης σπουδαίαν καὶ ἔτι μεγαλειτέραν ἐπίδρασιν ἐπὶ τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας ἔσχεν ἡ ἀνάπτυξις τῆς θεωρίας τῶν συμπλεγμάτων, ἥτις κατ' ἀρχὰς ἀνεπτύχθη ὑπὸ τοῦ E. Galois (1811—1830) ἐξ ἀφορμῆς τῆς θεωρίας τῶν ἐξισώσεων ἐν τῇ Ἀλγέβρα· ἀπεδείχθη ὅμως κατόπιν ὡς μία τῶν κυριωτέρων βάσεων ὁλοκλήρου τῆς συγχρόνου Μαθηματικῆς ἐπιστήμης. Πρὸ παντὸς ὁ F. Klein ἠννόησεν κατὰ τὸ 1872 τὴν σπουδαιότητα τὴν ὁποίαν ἐνέχει ἡ ἔννοια τοῦ συμπλέγματος ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ.

Εἰς ἑκάστην τῶν Γεωμετριῶν, αἵτινες ἐμελετήθησαν μέχρι τοῦδε, λ. χ. εἰς τὴν Εὐκλείδειον λεγομένην Γεωμετρίαν, εἰς τὴν προβολικὴν Γεωμετρίαν, εἰς τὴν Γεωμετρίαν τῶν κύκλων, ἐφευρεθεῖσαν ὑπὸ τοῦ Möbius ἢ εἰς τὴν Γεωμετρίαν τῶν εὐθειῶν τοῦ Plücker ὡς καὶ εἰς τὰς μὴ Εὐκλειδείους Γεωμετρίας τοῦ Lobatchewsky καὶ τοῦ Riemann ἀνταποκρίνεται ἰδιαίτερον σύμπλεγμα μετασχηματισμοῦ τοῦ χώρου. Τὰ συμπλέγματα ταῦτα δύνανται λοιπόν, ὅπως τὸ ἀπέδειξεν ὁ Klein, νὰ χρησιμοποιηθῶσιν ὄχι μόνον πρὸς ταξινόμησιν τῶν Γεωμετριῶν τούτων, ἀλλὰ καὶ πρὸς χαρακτηρισμὸν αὐτῶν.

Ὡς βλέπομεν λοιπὸν ἡ ἀρχικὴ ἰδέα τοῦ Descartes, ἥτις ἀπέβλεπεν ἁπλῶς εἰς συνδυασμὸν τῶν μεθόδων τῆς Ἀλγέβρας μετὰ τῆς ἐπιστήμης τοῦ χώρου, ἐχρησίμευσεν ὡς ἀφορμὴ τεραστίας ἀναπτύξεως τῆς Γεωμετρίας, τὴν ὁποίαν οὐδεὶς ἠδύνατο νὰ προβλέψῃ.

Αἱ σύγχρονοι μέθοδοι τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας δὲν ἔχουν παρὰ ἐλάχιστα κοινὰ σημεῖα μετὰ τῆς Γεωμετρίας τοῦ Descartes.

Οὐχ' ἧττον αὕτη ἀποτελεῖ τὴν βάσιν ὅλων τῶν γενικεύσεων τὰς ὁποίας ἀναφέραμεν καὶ ὡς ἐκ τούτου παραμένει τὸ θεμέλιον τῆς διδασκαλίας τῆς ἐπιστήμης ταύτης.

Ὁ συγγραφεὺς τοῦ ἀνὰ χεῖρας βιβλίου ὀφείλων κατ' ἀνάγκην νὰ μὴ ἀπομακρυνθῇ τῆς παραδεδεγμένης ἐν τῷ ἡμετέρῳ Πανεπιστημίῳ διδασκαλίας ἠκολούθησε τὰς κλασσικὰς μεθόδους. Ἐν ταὐτῷ ὅμως τὸ ἔργον ἀποτελεῖ ἀρίστην εἰσαγωγὴν εἰς τὴν Ἀναλυτικὴν Γεωμετρίαν καὶ χάρις εἰς τὸν μέγαν ἀριθμὸν τῶν ἐν αὐτῷ περιεχομένων καὶ ἐπιτυχῶς ἐκλεγεισῶν ἀσκήσεων χορηγεῖ εἰς τὸν ἀναγνώστην τὰ μέσα, ὅπως ἐπιδοθῇ καὶ εἰς τὴν μελέτην τῶν ὑψηλοτέρων κεφαλαίων τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας, τὰ ὁποῖα ἐν ὀλίγοις ὑπεδείξαμεν ἀνωτέρω.

Ἐν Κηφισιᾷ, Μάϊος 1924.

ΚΩΝΣΤ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΜΕΡΟΥΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

Ὁρισμὸς τῆς θέσεως σημείου δι' ἀριθμῶν

Ὁρισμὸς τῆς θέσεως ἀνύσματος δι' ἀριθμῶν

Περὶ ἀλλαγῆς τῶν ἀξόνων τῶν συντεταγμένων

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

Περὶ ἐξισώσεων εὐθειῶν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ

Θέσεις εὐθειῶν πρὸς ἀλλήλας

Ἐξισώσεις ἐπιπέδων καὶ εὐθειῶν ἐν τῷ διαστήματι

Περὶ τομῆς ἐπιπέδων

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

Μετρικαὶ ἰδιότητες ἐν τῷ ἐπιπέδῳ

Περὶ γεωμετρικῶν τόπων

Μετρικαὶ ἰδιότητες ἐν τῷ διαστήματι

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV'

Περὶ περιφερείας κύκλου

Περὶ σφαίρας

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

Περὶ ἐλλείψεως

Περὶ ὑπερβολῆς

Περὶ παραβολῆς

Συσχέτισις τῶν καμπύλων δευτέρου βαθμοῦ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

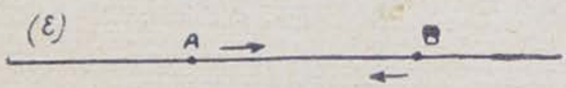
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

§ 1. Σκοπὸς τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας. —

Σκοπὸς τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας εἶνε νὰ παραστήσῃ γεωμετρικὰ σχήματα δι' ἀλγεβρικῶν τύπων, τῇ βοηθείᾳ τούτων νὰ ἐρευνήσῃ τὰς ἰδιότητας αὐτῶν, καὶ τοὐναντίον, νὰ ἀπεικονίσῃ ἀλγεβρικοὺς τύπους, ἐν γένει, διὰ γεωμετρικῶν σχημάτων ἢ γεωμετρικῶν εἰκόνων. Οὕτω π. χ. τὸ σημεῖον παρίσταται δι' ἑνὸς ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, καθόσον θεωρεῖται κείμενον ἐπί τινος εὐθείας, ἢ ἐπιπέδου ἢ ἐν τῷ χώρῳ (τῶν τριῶν διαστάσεων). Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ παρίσταται ὑπὸ μιᾶς ἢ δύο ἐξισώσεων, κλπ.

§ 2. Περὶ ἀνυσμάτων. —

α') Καλοῦμεν *ἄνυσμα*, Α Β π. χ., εὐθείας τινὸς (*ε*) τὴν ὁποίαν νοοῦμεν ἐπ' ἄπειρον ἐκτεινομένην, τὸ τμῆμα αὐτῆς ΑΒ (σχ. 1), τὸ ὁποῖον θεωρεῖται διανυόμενον ὁμαλῶς ὑπό τινος κινητοῦ, ἀναχω-



(Σχ. 1)

ροῦντος ἐκ τοῦ σημείου Α καὶ διευθυνομένου πρὸς τὸ σημεῖον Β. Κατὰ ταῦτα, τὸ ἄνυσμα ΑΒ ἔχει ἀρχὴν τὸ Α καὶ πέρας τὸ Β, φορὰν δὲ τὴν ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β, ἐνῷ τὸ ἄνυσμα ΒΑ ἔχει ἀρχὴν τὸ Β καὶ πέρας τὸ Α, φορὰν δὲ τὴν ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Α.

β') Ἐφ' ἑκάστης εὐθείας διακρίνομεν δύο φορὰς ἀντιθέτους, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία θεωρεῖται ὡς *θετική*, ἡ δὲ ἄλλη ὡς *ἀρνητική*.

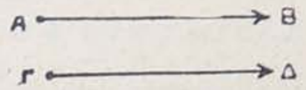
γ') Ἄνυσμα, κείμενον ἐπ' εὐθείας, καὶ ἔχον τὴν θετικὴν μὲν φορὰν αὐτῆς καλεῖται *θετικόν*, ἔχον δὲ τὴν ἀρνητικὴν φορὰν τῆς εὐθείας καλεῖται *ἀρνητικόν*.

δ') Ἀνύσματα κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἢ ἐπὶ εὐθειῶν παραλλήλων θεωροῦνται ὡς παράλληλα καὶ καλοῦνται *ὁμόρροπα* μέν, ἂν ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν, *ἀντίρροπα* δέ, ἂν ἔχουν ἀντιθέτους φοράς.

ε΄) Όταν δύο ανύσματα, τιθέμενα ἐπ' ἄλληλα, ἐφαρμόζουν, καλοῦνται **ὁμορρόπως** μὲν ἴσα, ἂν εἶνε ὁμόρροπα, **ἀντιρρόπως** δι' ἴσα, ἂν εἶνε ἀντίρροπα. Διὰ νὰ παραστήσωμεν ὅτι δύο ἀνύσματα, π. χ. τὰ ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ. 2) εἶνε ὁμορρόπως ἴσα γράφομεν

$$\mathrm{AB} = \Gamma\Delta.$$

ϛ΄) Ἄνυσμα, τοῦ ὁποίου ἡ ἀρχὴ καὶ τὸ πέρας συμπίπτουν, πα-



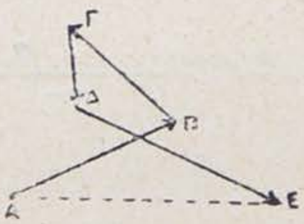
(Σχ. 2)

ρίσταται μὲ τὸ σύμβολον 0 (μηδέν). Κατὰ ταῦτα, διὰ νὰ εἶνε

$$\mathrm{AB} = 0,$$

πρέπει νὰ συμπίπτουν τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Ἀνύσματα ἴσα μὲ μηδὲν θεωροῦνται ὡς ἀδιαφόρως ἴσα.

ζ΄) Καλοῦμεν ἀνύσματα **διαδοχικὰ** τὰ ἀνύσματα, τὰ ὁποῖα εἶνε οὕτως διατεθειμένα κατὰ σειράν, ὥστε ἡ ἀρχὴ ἑκάστου ἐξ αὐτῶν (ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ ἑξῆς) νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ πέρας τοῦ προηγουμένου αὐτοῦ. Π. χ. τὰ ἀνύσματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, Δ Ε (σχ. 3) λέγονται διαδοχικά.



(Σχ. 3)

§ 3. Γεωμετρικὸν ἄθροισμα ἀνυσμάτων. —

α΄) Καλοῦμεν *γεωμετρικὸν ἄθροισμα* διαδοχικῶν ἀνυσμάτων τὸ ἄνυσμα, τὸ ἔχον ἀρχὴν τὴν τοῦ πρώτου καὶ πέρας τὸ πέρας τοῦ τελευταίου. Οὕτω, τὸ γεωμετρικὸν ἄθροισμα τῶν διαδοχικῶν ἀνυσμάτων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ (σχ. 3) εἶνε τὸ ἄνυσμα ΑΕ. Ἡ σχέσις αὕτη μεταξὺ τῶν ἀνυσμάτων τούτων γράφεται συμβολικῶς ὡς ἑξῆς:

$$\mathrm{AB} \# \mathrm{B}\Gamma \# \Gamma\Delta \# \Delta\mathrm{E} = \mathrm{AE}.$$

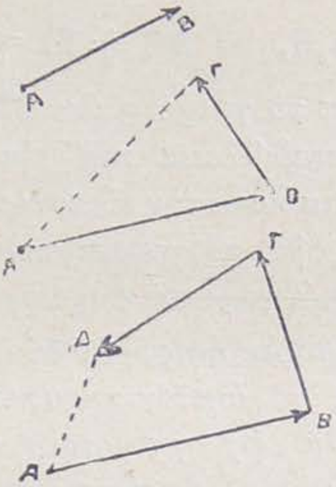
Ἤτοι τὸ σύμβολον τῆς γεωμετρικῆς ἀθροίσεως, ἐν γένει, εἶνε τὸ $\#$ καὶ ἀπαγγέλλεται ὡς *σύν*.

β') Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἔχομεν, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶνε τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ

(Σχ. 4)

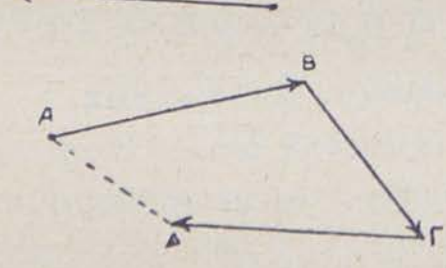
(Σχ. 5)

(Σχ. 6)



$$AB \# BA = AA = 0. \qquad (\sigma\chi.\ 4)$$
$$AB \# B\Gamma = A\Gamma. \qquad (\sigma\chi.\ 5)$$
$$AB \# B\Gamma \# \Gamma\Delta = A\Delta. \qquad (\sigma\chi.\ 6)$$
$$AB \# B\Gamma \# \Gamma A = AA = 0. \qquad (\sigma\chi.\ 5)$$
$$AB \# B\Gamma \# \Gamma\Delta \# \Delta A = AA = 0. \qquad (\sigma\chi.\ 6)$$

γ') Ἐὰν δοθέντα διαδοχικὰ ἀνύσματα ἀποτελοῦν τὰς πλευρὰς γραμμῆς (τεθλασμένης), τὸ γεωμετρικὸν ἄθροισμα αὐτῶν εἶνε τὸ ἄνυσμα, τὸ ἔχον ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τῆς γραμμῆς καὶ πέρας τὸ πέρας αὐτῆς. Ἂν δ' ἡ γραμμὴ τῶν δοθέντων ἀνυσμάτων εἶνε κλειστή, τὸ γεωμετρικὸν ἄθροισμα αὐτῶν εἶνε ἓν σημεῖον, ἢ ἄνυσμα ἴσον μὲ μηδέν.



(Σχ. 7)

δ') Καλοῦμεν γεωμετρικὸν ἄθροισμα οἱωνδήποτε ἀνυσμάτων (ὁπωσδήποτε κειμένων ἐν τῷ χώρῳ), π.χ. τῶν A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 (σχ. 7) τὸ γεωμετρικὸν ἄθροισμα ἀνυσμάτων διαδοχικῶν καὶ ὁμορρόπως ἴσων πρὸς τὰ δοθέντα, ὡς τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν ὅτι

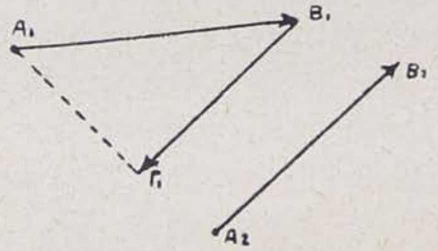
$$A_1B_1 \# A_2B_2 \# A_3B_3 = AB \# B\Gamma \# \Gamma\Delta = A\Delta.$$

ε΄) Εἶνε προφανές, ὅτι τὸ γεωμετρικὸν ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων ἀνυσμάτων δὲν μεταβάλλεται καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν ληφθοῦν τὰ ἀνύσματα ταῦτα κατὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ γεωμετρικοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν. Ἐν γένει, διὰ τὸ γεωμετρικὸν ἄθροισμα ἀνυσμάτων ἰσχύουν αἱ θεμελιώδεις ἰδιότητες τοῦ ἀθροίσματος ἀριθμῶν.

ϛ΄) Καλοῦμεν ***γεωμετρικὴν διαφορὰν*** δύο ἀνυσμάτων, π.χ. τῶν A_1B_1, A_2B_2, τὸ ἄνυσμα, τὸ ὁποῖον προστιθέμενον γεωμετρικῶς εἰς τὸ δεύτερον A_2B_2, δίδει ὡς γεωμετρικὸν ἄθροισμα τὸ πρῶτον A_1B_1. Οὕτω ἡ γεωμετρικὴ ἀφαίρεσις τοῦ ἀνύσματος A_2B_2 ἀπὸ τοῦ A_1B_1 ἀνάγεται εἰς τὴν γεωμετρικὴν πρόσθεσιν τοῦ B_2A_2, ἀντιρρόπως ἴσου τῷ A_2B_2, μετὰ τοῦ A_1B_1. Διότι ἔχομεν

$$A_1B_1 \# B_2A_2 \# A_2B_2 = A_1B_1$$

ἐπειδὴ εἶνε $B_2A_2 \# A_2B_2 = B_2B_2 = 0.$



(Σχ. 8)

Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν γεωμετρικὴν ἀφαίρεσιν δύο ἀνυσμάτων διὰ τοῦ συμβόλου —***(πλήν)***, θὰ ἔχωμεν, ἂν τὸ $B_1\Gamma_1$ εἶνε ἀντιρρόπως ἴσον τῷ A_2B_2 (σχ. 8)

$$A_1B_1 - A_2B_2 = A_1B_1 \# B_2A_2 = A_1B_1 \# B_1\Gamma_1 = A_1\Gamma_1.$$

§ 4. Ὁρισμὸς μήκους ἀνύσματος. —

α΄) Καλοῦμεν μῆκος ἀνύσματός τινος ΑΒ καὶ παριστάνομεν αὐτὸ διὰ τοῦ (ΑΒ) τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως αὐτοῦ δι' ἄλλου ἀνύσματος θετικοῦ ΟΘ, λαμβανομένου ἴσου μὲ τὴν μονάδα (1 μ., ἢ 0,1 μ. κλπ.). Κατὰ ταῦτα θὰ ἔχωμεν

$$\frac{AB}{O\Theta} = (AB).$$

β΄) Τὸ μῆκος (ΑΒ) τοῦ ἀνύσματος ΑΒ εἶνε ἀριθμὸς θετικὸς μέν, ἂν τὸ ἄνυσμα εἶνε θετικόν, ἀρνητικὸς δ' ἂν εἶνε ἀρνητικόν. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν ὅτι (ΟΘ) = 1.

γ΄) Ἀνύσματα ὁμορρόπως μὲν ἴσα ἔχουν μήκη ἴσα καὶ ὁμόσημα, ἀντιρρόπως δ' ἴσα ἔχουν μήκη ἀντίθετα. Οὕτω ἔχομεν ὅτι

$$(AB) = -(BA), \quad (BA) = -(AB), \quad (AB) + (BA) = 0.$$

δ΄) Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι «***τὸ μῆκος τοῦ γεωμετρικοῦ ἀθροίσματος ἀνυσμάτων εἶνε μικρότερον ἢ ἴσον μὲ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν ἀνυσμάτων***».

Ἤτοι, ἂν ἔχωμεν $AB = A_1B_1 \# A_2B_2 \# \ldots \# A_\mu B_\mu$

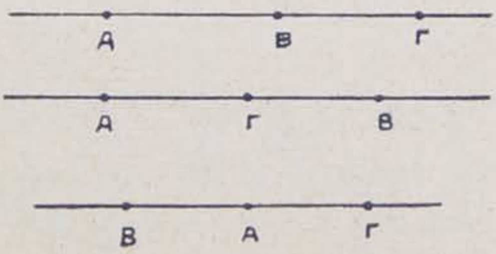
θὰ εἶνε $(AB) \leqq (A_1B_1) + (A_2B_2) + \ldots + (A_\mu B_\mu)$,

καθόσον τὰ προστιθέμενα ἀνύσματα εἶνε παράλληλα ἢ μή.

ε΄) Ἂν τρία σημεῖα Α, Β, Γ κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς (σχ. 9) θὰ εἶνε

$$(AB) + (B\Gamma) = (A\Gamma).$$

Τῷ ὄντι, ἂν τὸ Β κεῖται μεταξύ τῶν Α καὶ Γ ἡ ἀπόδειξις εἶνε



(Σχ. 9)

προφανής, ἀφοῦ τὰ ἀνύσματα εἶνε ὁμόρροπα.

Ἂν τὸ Γ κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β θὰ ἔχωμεν

$$(A\Gamma) + (\Gamma B) = (AB).$$

Ἑπομένως $(A\Gamma) - (B\Gamma) = (AB)$,

ἤτοι $(AB) + (B\Gamma) = (A\Gamma)$.

Ἂν τὸ Α κεῖται μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ θὰ ἔχωμεν

$$(BA) + (A\Gamma) = (B\Gamma), \text{ ἢ } -(AB) + (A\Gamma) = (B\Gamma)$$

καὶ ἑπομένως $(AB) + (B\Gamma) = (A\Gamma)$.

στ΄) Ἐν γένει, ἂν τὰ σημεῖα $A_1, A_2, \ldots, A_\mu$ κεῖνται ἐπ᾿ εὐθείας γραμμῆς, θὰ εἶνε

$$(A_1A_2)+(A_2A_3)+\ldots+(A_{\mu-1}A_\mu)=(A_1A_\mu).$$

Διότι, θὰ ἔχωμεν

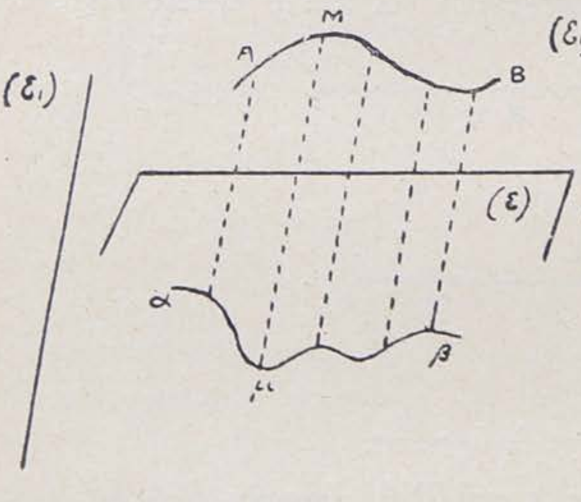
$$(A_1A_2)+(A_2A_3)=(A_1A_3)$$
$$(A_1A_3)+(A_3A_4)=(A_1A_4),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(A_1A_{\mu-1})+(A_{\mu-1}A_\mu)=(A_1A_\mu)=(A_1A_2)+(A_2A_3)+\ldots+(A_{\mu-1}A_\mu).$$

§ **5. Περὶ προβολῶν.** —

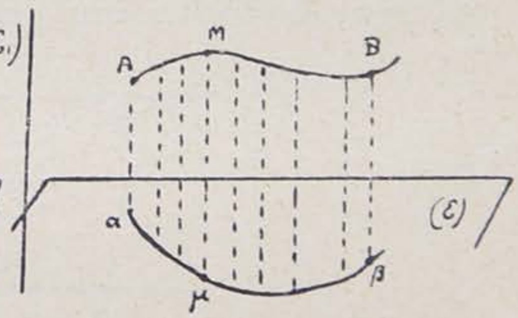
α΄) Καλοῦμεν ***προβολὴν*** σημείου τινὸς Μ (σχ. 10—11) ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον (ε) παραλλήλως πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν (ε_1) τὸ σημεῖον μ καθ᾿ ὃ ἡ ἐκ τοῦ Μ ἀγομένη εὐθεῖα παραλλήλως τῇ (ε_1) τέμνει τὸ ἐπίπεδον (ε).

Ἡ προβολὴ τοῦ Μ καλεῖται *ὀρθή*, ἂν ἡ (ε_1) εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (ε) (σχ. 11). Ἐὰν τὸ σημεῖον Μ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (ε) ἡ προβολὴ αὐτοῦ εἶνε αὐτὸ τὸ σημεῖον Μ.

β΄) Καλοῦμεν προβολὴν γραμμῆς τινος ΑΒ ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον



(Σχ. 10)



Σχ. (11)

τὸν τόπον αβ τῶν προβολῶν τῶν σημείων τῆς γραμμῆς ΑΒ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (σχ. 10—11).

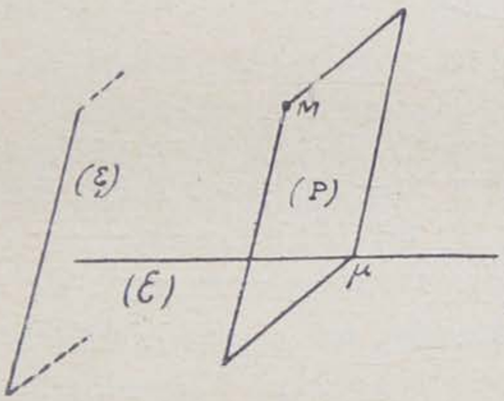
Κατὰ ταῦτα, ἂν ἡ ΑΒ εἶνε εὐθεῖα γραμμή, ἡ προβολὴ αὐτῆς εἶνε, ἐν γένει, εὐθεῖα. Ἂν δ᾿ ἡ εὐθεῖα ΑΒ κεῖται ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου, ἡ προβολὴ ταύτης εἶνε αὐτὴ ἡ ΑΒ. Ἂν ἡ ΑΒ εἶνε εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, ἡ ὀρθὴ προβολὴ αὐτῆς εἶνε ἓν σημεῖον, καθ᾿ ὃ αὐτὴ τέμνει τὸ ἐπίπεδον.

γ') Κατ' ἀνάλογον τρόπον ὁρίζομεν τὴν προβολὴν σημείου τινὸς ἢ γραμμῆς ἐπὶ εὐθεῖαν (ε) παραλλήλως πρὸς εὐθεῖαν (ε_1), τοῦ σημείου ἢ τῆς γραμμῆς καὶ τῶν εὐθειῶν (ε) καὶ (ε_1) κειμένων ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. Ἂν ἡ (ε_1) εἶνε κάθετος τῇ (ε) ἡ προβολὴ καλεῖται ***ὀρθή.***

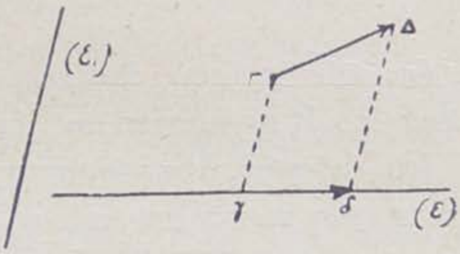
δ') Καλοῦμεν προβολὴν σημείου τινὸς Μ (σχ. 12) ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν (ε) παραλλήλως πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον (ε_1) τὴν τομὴν μ τῆς εὐθείας ὑπὸ ἐπιπέδου (Ρ), διερχομένου διὰ τοῦ σημείου Μ καὶ παραλλήλου τῷ (ε_1). Τὸ ἐπίπεδον (Ρ) καλεῖται συνήθως ***ἐπίπεδον προβάλλον*** τὸ σημεῖον Μ.

Ἂν τὸ (ε_1) εἶνε κάθετον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἡ προβολὴ καλεῖται ***ὀρθή.***

ε') Καλοῦμεν προβολὴν ἀνύσματος ΑΒ ἢ γραμμῆς τινος ἐπὶ δοθεῖ-



(Σχ. 12)



(Σχ. 13)

σαν εὐθεῖαν παραλλήλως πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον τὸν τόπον τῶν προβολῶν τῶν σημείων τοῦ ἀνύσματος, ἢ τῆς γραμμῆς, ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

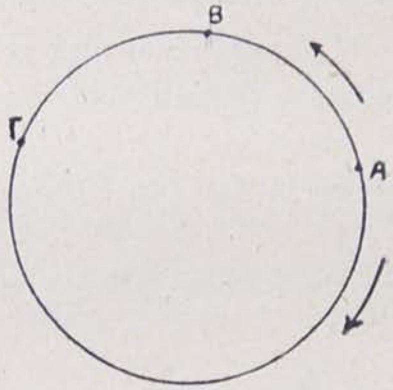
ς') Ἡ προβολὴ ἀνύσματός τινος ΓΔ εἶνε, ἐν γένει, ἄνυσμα γδ (σχ. 13) ἔχον ἀρχὴν τὴν προβολὴν γ τῆς ἀρχῆς Γ καὶ πέρας τὴν προβολὴν δ τοῦ πέρατος Δ τοῦ δοθέντος ἀνύσματος ΓΔ.

§ 6. Περὶ τόξων κύκλου. —

α') Σημεῖον δύναται νὰ κινηθῇ ἐπὶ κυκλικῆς περιφερείας κατὰ δύο ἀντιθέτους φοράς.

Ἂν ἡ μία τούτων, ἔστω ἡ ἐκ δεξιῶν πρὸς τἀριστερὰ (ὡς πρὸς παρατηρητὴν ἱστάμενον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου καὶ ἔχοντα τοὺς πόδας αὐτοῦ παρὰ τὸ κέντρον) θεωρηθῇ ὡς ***θετική,*** ἡ ἀντίθετος αὐτῆς θὰ θεωρῆται ὡς ***ἀρνητική*** (σχ. 14).

β') Δοθέντων δύο σημείων περιφερείας κύκλου, ἔστω τῶν Α καὶ Β (σχ. 14) ὑπάρχουν ἄπειρα τόξα, ἔχοντα ἀρχὴν τὸ Α καὶ πέρας τὸ Β. Τὰ τόξα αὐτὰ διαφέρουν ἀπ' ἀλλήλων ὄχι μόνον κατὰ τὸ ἀπόλυτον μέγεθος ἀλλὰ καὶ κατὰ τὴν φορὰν αὐτῶν. ***Θετικὰ*** μὲν καλοῦνται τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα διαγράφονται κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, ***ἀρνητικὰ*** δὲ ὅσα διαγράφονται κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν.



(Σχ. 14)

γ΄) Ἐκ τῶν ἀπείρων θετικῶν τόξων, τῶν ἐχόντων ἀρχὴν τὸ Α καὶ πέρας τὸ Β παριστάνομεν διὰ τ τὸ μικρότερον. Τοῦτο διαγράφεται ὑπὸ κινητοῦ, ἀναχωροῦντος ἐκ τοῦ Α, κινουμένου κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν τῶν τόξων, καὶ φθάνοντος διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὸ Β.

Πᾶν ἄλλο θετικὸν τόξον ΑΒ διαφέρει τοῦ τ κατὰ πολλαπλάσιον περιφερείας, τὴν ὁποίαν παριστάνομεν διὰ τοῦ λ. Ἑπομένως, πάντα τὰ θετικὰ τόξα, τὰ ἔχοντα ἀρχὴν τὸ Α καὶ πέρας τὸ Β δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\tau + k.\lambda$$

ἐνῷ k παριστάνει ἀκέραιόν τινα θετικὸν ἀριθμόν, ὅστις αὐξανόμενος κατὰ μονάδα δίδει τὴν τάξιν τοῦ τόξου τούτου.

δ΄) Ἐκ τῶν ἀρνητικῶν τόξων, τῶν ἐχόντων ἀρχὴν τὸ Α καὶ πέρας τὸ Β, τὸ πρῶτον παρίσταται ὑπὸ τοῦ $\tau - \lambda$, τὸ δεύτερον ἐκ τούτων ὑπὸ τοῦ $\tau - 2\lambda$, τὸ δὲ ἔχον τάξιν k ὑπὸ τοῦ $\tau - k.\lambda$.

Ὅθεν πάντα τὰ τόξα τὰ ἔχοντα ἀρχὴν τὸ Α καὶ πέρας τὸ Β, διαφέρουν ἀπ' ἀλλήλων κατὰ πολλαπλάσιον περιφερείας, ἐνῷ τὸ πολλαπλάσιον εἶνε ἀριθμὸς ἀκέραιος θετικὸς ἢ ἀρνητικός.

ε΄) Ἐνῷ, ἐὰν τρία σημεῖα Α, Β, Γ κεῖνται ἐπ' εὐθείας ὑπάρχει ἡ σχέσις

$$(\text{ΑΒ}) + (\text{ΒΓ}) = (\text{ΑΓ}),$$

ἂν τὰ σημεῖα ταῦτα κεῖνται ἐπὶ περιφερείας κύκλου, ἢ θὰ εἶνε

$$(\text{ΑΒ}) + (\text{ΒΓ}) = (\text{ΑΓ})$$

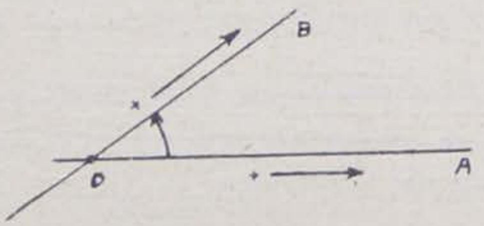
ἢ τὸ (ΑΒ) + (ΒΓ) θὰ διαφέρῃ τοῦ (ΑΓ) κατὰ πολλαπλάσιον περιφερείας.

Ἐὰν ἡ φορὰ ΑΒΓ εἶνε θετική, τὸ πρῶτον θετικὸν τόξον ΑΒ καὶ τὸ πρῶτον θετικὸν ΒΓ ἔχουν ἄθροισμα τὸ πρῶτον θετικὸν ΑΓ. Ἂν ἡ φορὰ ΑΒΓ εἶνε ἀρνητική, τὸ πρῶτον θετικόν ΑΒ καὶ τὸ πρῶτον θετικὸν ΒΓ δίδουν ἄθροισμα τὸ δεύτερον θετικὸν ΑΓ.

§ 7. **Περὶ γωνιῶν.**—

α΄) Καλοῦμεν *θετικὴν γωνίαν* δύο εὐθειῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία θεωρεῖται ὡς πρώτη πλευρὰ αὐτῆς, ἡ δὲ ἄλλη ὡς δευτέρα, τὴν γωνίαν, ἥτις γίνεται, ὅταν τὸ θετικὸν μέρος τῆς πρώτης στρέφεται περὶ τὴν κορυφὴν καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς γωνίας κατὰ θετικὴν φορὰν (ἀντίθετον τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν ὡρολογίου) μέχρις ὅτου λάβῃ τὴν θέσιν τοῦ θετικοῦ μέρους τῆς δευτέρας.

Ἀρνητικὴν γωνίαν δύο εὐθειῶν καλοῦμεν τὴν γωνίαν, ἥτις γίνεται, ἂν ἡ στροφὴ τοῦ θετικοῦ μέρους τῆς πρώτης πλευρᾶς γίνεται ἀντιθέτως τῆς προηγουμένης (ἤτοι πρὸς τὴν κίνησιν τῶν δεικτῶν ὡρολογίου) μέχρις ὅτου λάβῃ τὴν θέσιν τοῦ θετικοῦ μέρους τῆς δευτέρας. Κατὰ ταῦτα, τὸ σύμβολον γων. ΑΒΓ (σχ. 15) παριστάνει ἀπείρους θετικὰς γωνίας, ἐχούσας πρώτην πλευρὰν τὴν ΟΑ, δευτέραν δὲ τὴν ΟΒ, καὶ διαφερούσας κατὰ πολλαπλάσιον τῶν 4 ὀρθῶν γωνιῶν.



(Σχ. 15)

Ἡ μικροτέρα ἐκ τῶν γωνιῶν τούτων ΑΟΒ προκύπτει, ὅταν ἡ στρεφομένη πλευρὰ ΟΑ συναντᾷ διὰ πρώτην φορὰν τὴν ΟΒ. Ἡ δευτέρα κατὰ σειρὰν ἐκ τῶν γωνιῶν ΑΟΒ γίνεται, ὅταν ἡ ΟΑ συναντήσῃ διὰ δευτέραν φορὰν τὴν ΟΒ ἐν τῇ συνεχῇ στροφῇ αὐτῆς.

Οὕτω ἡ γωνία δύο εὐθειῶν εἶνε μία μόνη, ὅταν εἶνε ὡρισμένη ἡ σειρὰ αὐτῶν καὶ ἡ θετικὴ φορὰ ἐπὶ ἑκάστης τούτων.

β΄) Ἐνίοτε θεωροῦμεν ὡς γωνίαν δύο εὐθειῶν τὴν κοίλην γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν τὰ θετικὰ μέρη αὐτῶν, ἀδιαφοροῦντες τότε περὶ τῆς σειρᾶς τὴν ὁποίαν ἔχουν αὗται.

Γωνίαν ἴσην μὲ τὴν γωνίαν δύο εὐθειῶν λαμβάνομεν καὶ ἂν ἀπό τινος σημείου τοῦ χώρου φέρωμεν ἀνύσματα ἀντιστοίχως ὁμόρροπα πρὸς τὰς θετικὰς φορὰς τῶν εὐθειῶν.

γ΄) Καλοῦμεν ***γωνίαν εὐθείας καὶ ἐπιπέδου*** τὴν μικροτέραν τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ εὐθεῖα μὲ τὴν ὀρθὴν προβολὴν αὐτῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου.

δ΄) Ἑκάστη τῶν δύο διέδρων γωνιῶν τὰς ὁποίας σχηματίζουν δύο ἐπίπεδα μετρεῖται, ὡς γνωστόν, ὑπὸ τῆς ἀντιστοίχου πρὸς αὐτὴν ἐπιπέδου γωνίας. Ἂν θεωρήσωμεν καὶ τὰς εὐθείας, αἵτινες εἶνε κάθετοι ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἡ ὑπὸ τῶν θετικῶν μερῶν τούτων σχηματιζομένη γωνία ἰσοῦται μὲ τὴν μίαν ἐκ τῶν ἀντιστοιχουσῶν γωνιῶν πρὸς τὰς διέδρους. Θὰ θεωροῦμεν ὡς ***γωνίαν τῶν δύο ἐπιπέδων*** τὴν γωνίαν τῶν θετικῶν μερῶν τῶν ἐπ᾽ αὐτὰ καθέτων εὐθειῶν.

§ 8. Μέτρησις γωνιῶν.—

Ἐπειδὴ ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ εἰς ἴσους κύκλους αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι εἶνε ἀνάλογοι τῶν τόξων, ἐφ᾽ ὧν βαίνουν, ἕπεται ὅτι

«***ἄν ὡς μονάδα τῶν γωνιῶν λάβωμεν τὴν ἐπίκεντρον γωνίαν, τὴν βαίνουσαν ἐπὶ τόξου ἴσου τῇ ἀκτῖνι, ὁ λόγος τῆς τυχούσης γωνίας πρὸς τὴν μονάδα τῶν γωνιῶν θὰ εἶνε ἴσος μὲ τὸν λόγον τοῦ τόξου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου βαίνει, πρὸς τὴν ἀκτῖνα***».

Ἑπομένως, «***ὁ ἀριθμὸς ὅστις παριστάνει γωνίαν τινά, θὰ εἶνε ὁ παριστάνων τὸ ἀντιστοιχοῦν ἐπὶ αὐτῆς τόξον, μετρηθὲν διὰ τῆς ἀκτῖνος, ληφθείσης ὡς μονάδος***».

Οὕτω ἡ ὀρθὴ γωνία παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{\pi}{2}$ αἱ δύο ὀρθαὶ γωνίαι ὑπὸ τοῦ π, αἱ τρεῖς ὀρθαὶ ὑπὸ τοῦ $\frac{3\pi}{2}$ κ. ο. κ.

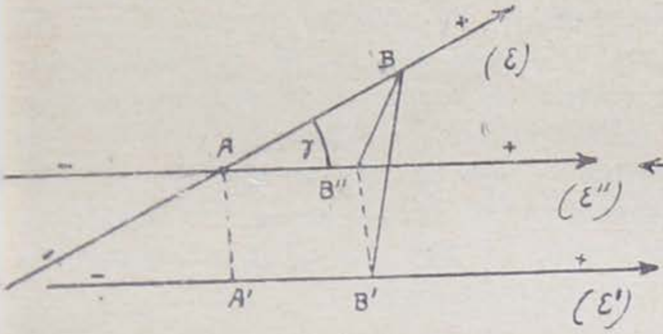
§ 9. Σχέσις ἀνύσματος πρὸς τὴν ὀρθὴν προβολὴν αὐτοῦ.—

α΄) «***Τὸ μῆκος τῆς ὀρθῆς προβολῆς ἀνύσματός τινος ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τοῦ ἀνύσματος ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας τῶν παραλλήλων πρὸς αὐτὰ εὐθειῶν***».

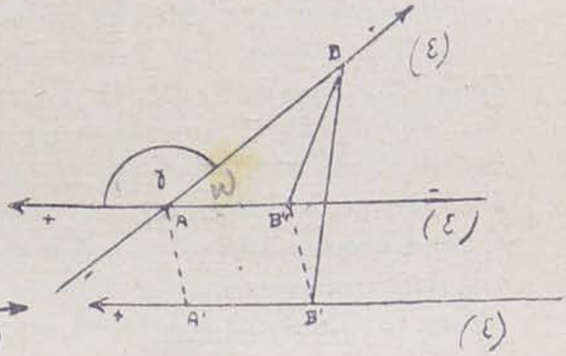
Ἔστω Α Β δοθὲν ἄνυσμα, κείμενον ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε) καὶ Α΄ Β΄

ἡ ὀρθὴ προβολὴ αὐτοῦ ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε') γ δὲ ἡ γωνία τῶν εὐθειῶν τούτων (σχ. 16-17). Θὰ δείξωμεν ὅτι $\qquad (A'B')=(AB).\text{συν}\,\gamma.$

Διὰ τῆς ἀρχῆς A τοῦ AB φέρομεν εὐθεῖαν (ε'') παράλληλον τῇ



(Σχ. 16)



(Σχ. 17)

(ε'). Οὕτω ἡ γωνία γ ἰσοῦται μὲ τὴν γωνίαν τῶν θετικῶν μερῶν τῶν (ε) καὶ (ε''). Ἂν B'' εἶνε τὸ σημεῖον καθ' ὅ ἡ (ε'') τέμνει τὸ προβάλλον ἐπίπεδον τοῦ σημείου B, τὸ ἄνυσμα AB'' ἐπὶ τῆς (ε'') θὰ εἶνε ὁμορρόπως ἴσον τῷ A'B' ἐπὶ τῆς (ε'). Ἐὰν τὰ AB, A'B', ἐπομένως καὶ τὰ AB, AB'' εἶνε θετικὰ ἢ ἀρνητικὰ ἐπὶ τῶν εὐθειῶν (ε) καὶ (ε'') ἀντιστοίχως, ἡ γώνία γ εἶνε ὀξεῖα, ἄν δὲ τὸ ἓν εἶνε θετικὸν καὶ τὸ ἄλλο ἀρνητικὸν ἡ γωνία γ εἶνε ἀμβλεῖα (σχ. 17).

Κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν ἔχομεν ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ABB'',

$$(AB'')=(AB).\ \text{συν}\ \gamma.$$

Κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν, ἄν ω παριστάνῃ τὴν γωνίαν τῶν AB καὶ AB'', εἶνε $\qquad \omega=\pi-\gamma.$

Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὰ AB, AB'' ἔχουν φορὰς ἀντιθέτους ἐπὶ τῶν εὐθειῶν (ε) καὶ (ε'') καὶ οἱ ἀριθμοὶ (AB), (AB'') εἶνε ἑτερόσημοι, θὰ ἔχωμεν

$$(AB'')=(AB).\ \text{συν}\ \gamma.$$

Θέτοντες ἀντὶ τοῦ (AB'') τὸ ἴσον αὐτοῦ (A'B') ἔχομεν

$$(A'B')=(AB).\ \text{συν}\ \gamma.$$

ϐ') Ἐκ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως ἕπεται ὅτι

«τὸ μῆκος τῆς ὀρθῆς προβολῆς A'B' ἐπὶ ἐπίπεδον (π) ἀνύσματός τινος AB κειμένου ἐπὶ εὐθείας (ε), δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$(A'\ B')=(AB).\ \text{συν}\ \gamma,$$

ἂν γ παριστάνῃ τὴν γωνίαν τῶν θετικῶν μερῶν τῆς (ε) καὶ τῆς ὀρθῆς προβολῆς αὐτῆς ἐπὶ τοῦ (π)».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1) Δοθεισῶν δύο εὐθειῶν (ε), (έ) ὑπάρχουν 4 περιπτώσεις ὡς πρὸς τὴν ἐκλογὴν τῶν θετικῶν φορῶν ἐπ' αὐτῶν. Ἐπαληθεύσατε δι' ἑκάστην τῶν περιπτώσεων τούτων τὴν ἀνωτέρω πρότασιν ά).

2) Ἐπ' εὐθείας (ε) δίδεται ἄνυσμα P_1 P_2. Τυχὸν σημεῖον P τῆς (ε) ὁρίζει τὸν λόγον (P_1 P): (P P_2)=λ Ἔστωσαν P'_1, P'_2, P' αἱ ὀρθαὶ προβολαὶ τῶν P_1, P_2, P ἐπὶ τυχούσης εὐθείας (έ). Παρακολουθήσατε τὴν κίνησιν τοῦ P', ὅταν τὸ P διατρέχῃ τὴν (ε) καὶ δείξατε ὅτι ὁ λόγος (P'_1 P'): (P' P'_2) εἶνε ἴσος μὲ λ ἀνεξαρτήτως τῶν θετικῶν φορῶν ἐπὶ τῶν ε) καὶ (έ).

2) Παρατηρήσατε ὅτι, ἐνῶ ἡ σχέσις (A' B')=(AB). συν γ εἶνε ἀνεξάρτητος ἀπὸ τὴν ἐκλογὴν τῶν θετικῶν φορῶν ἐπὶ τῶν (ε) καὶ έ, ἕκαστον τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἐκλογῆς ταύτης.

§ 10. Περὶ προβολῆς γεωμετρικοῦ ἀθροίσματος ἀνυσμάτων ἐπὶ εὐθεῖαν.—.

α') Ἔστωσαν τυχόντα σημεῖα P_1, P_2, . . . , P_ν, $P_{\nu+1}$ καὶ τὰ διαδοχικὰ ἀνύσματα P_1 P_2, P_2 P_3, . . . , P_ν $P_{\nu+1}$. Θὰ εἶνε:

$P_1P_2 \# P_2P_3 \# . . . . \# P_\nu P_{\nu+1} = P_1P_{\nu+1}$ (§ 3.α').

Προβάλλομεν τὰ ἀνύσματα ἐπί τινος εὐθείας (ε), παραλλήλως πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον ἢ δοθεῖσαν εὐθεῖαν. Ἐὰν P'_1, P'_2, . . , $P'_{\nu+1}$ εἶνε ἀντιστοίχως αἱ προβολαὶ τῶν P_1, P_2, . . . , $P_{\nu+1}$, τὰ ἀνύσματα P'_1 P'_2, P'_2 P'_3, ..., P'_ν $P'_{\nu+1}$ θὰ εἶνε αἱ ἀντίστοιχοι προβολαὶ τῶν P_1 P_2, P_2P_3, ..., P_ν $P_{\nu+1}$, τὸ δὲ P'_1 $P'_{\nu+1}$ προβολὴ τοῦ P_1 $P_{\nu+1}$. Ἐπειδὴ τὰ P'_1, P'_2, . . . , $P'_{\nu+1}$ κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε) θὰ ἔχωμεν

$$(P'_1\ P'_2) + (P'_2\ P'_3) + ... + (P'_\nu\ P'_{\nu+1}) = (P'_1 P'_{\nu+1}).$$

Ἦτοι :

«Τὸ μῆκος τῆς προβολῆς γεωμετρικοῦ ἀθροίσματος ἀνυσμάτων ἐπί τινα εὐθεῖαν ἰσοῦται μὲ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν προβολῶν τῶν ἀνυσμάτων ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν».

β') Κατὰ ταῦτα

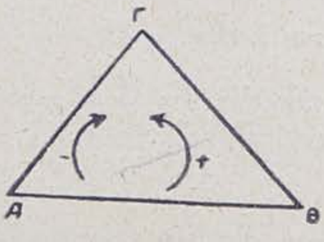
«δοθέντος ἀνύσματος, δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸ μῆκος τῆς προβολῆς αὐτοῦ ἐπί τινα εὐθεῖαν διὰ τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος τῶν προβολῶν τῶν πλευρῶν τεθλασμένης γραμμῆς, ἐχούσης ἀρχὴν καὶ πέρας τὴν ἀρχὴν καὶ τὸ πέρας τοῦ ἀνύσματος».

§ 11. Περὶ ὀρθῆς προβολῆς ἐπιπέδου σχήματος ἐπὶ ἄλλο ἐπίπεδον.—

α΄) Καλοῦμεν ὀρθὴν προβολὴν ἐπιπέδου σχήματος ἐπὶ ἄλλο ἐπίπεδον (π') τὸν τόπον τῶν ὀρθῶν προβολῶν τῶν σημείων τοῦ σχήματος ἐπὶ τὸ (π').

β΄) Καλοῦμεν *θετικὴν φορὰν* ἐπὶ δοθέντος ἐπιπέδου τὴν φορὰν καθ' ἣν κινεῖται εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου, ὅταν αὕτη στρέφεται περὶ ἓν σημεῖον αὐτῆς κατὰ τὴν ἀντίθετον φορὰν τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν ὡρολογίου, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον συμπίπτει ἢ εἶνε παράλληλον πρὸς τὸ δοθὲν ἐπίπεδον. Τὴν ἀντίθετον τῆς φορᾶς ταύτης, ὁμοίαν πρὸς τὴν φορὰν καθ' ἣν κινοῦνται οἱ δεῖκται τοῦ ὡρολογίου, καλοῦμεν *ἀρνητικὴν φορὰν* ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου.

γ΄) Λέγομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἐπιπέδου σχήματος εἶνε ***θετικόν***, ἂν ἡ περίμετρος αὐτοῦ ὁρίζῃ τὴν θετικὴν φορὰν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, ἐφ' οὗ κεῖται, ὡς πρὸς παρατηρητὴν ἱστάμενον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, ἔχοντα δὲ τὴν κεφαλὴν αὐτοῦ πρὸς τὸ θετικὸν μέρος τῆς καθέτου εὐθείας ἐπ' αὐτό. Ἂν ἡ περίμετρος ὁρίζῃ τὴν ἀρνητικὴν φορὰν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου λέγομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχήματος εἶνε ἀρνητικόν. Οὕτω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ θὰ θεωρῆται θετικόν, ἐνῷ τοῦ ΑΓΒ ἀρνητικόν (σχ. 18).



(Σχ. 18)

δ΄) ***«Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀρθῆς προβολῆς τριγώνου ἐπὶ ἄλλο ἐπίπεδον (π') ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ προβαλλομένου ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας τῶν δύο ἐπιπέδων».***

Ἔστω τὸ τρίγωνον $P_1\,P_2\,P_3$ κείμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ (π) καὶ $P'_1\,P'_2\,P'_3$ ἡ ὀρθὴ προβολὴ αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (π').

Ἂν ε καὶ ε' παριστάνουν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων τούτων ἀντιστοίχως, θὰ δείξωμεν ὅτι εἶνε

$$\varepsilon' = \varepsilon .\, \text{συν}\, \gamma,$$

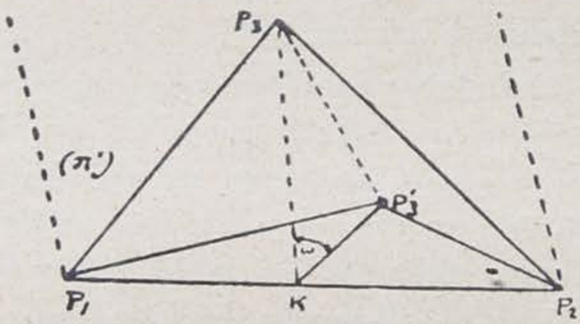
ἂν γ παριστάνῃ τὴν γωνίαν τῶν ἐπιπέδων (π) καὶ (π').

Ὑποθέτομεν πρῶτον ὅτι τὸ ἐπίπεδον (π') τέμνει τὸ (π) κατὰ μίαν τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου $P_1\ P_2\ P_3$, ἔστω τὴν $P_1\ P_2$.

Ἂν P'_3 εἶνε ἡ ὀρθὴ προβολὴ τοῦ P_3 ἐπὶ τοῦ (π'), ἡ ὀρθὴ προβολὴ τοῦ τριγώνου $P_1\ P_2\ P_3$ ἐπὶ τοῦ (π') εἶνε τὸ τρίγωνον $P_1\ P_2\ P_3'$ (σχ. 19.)

Ἂν ἡ γωνία γ τῶν δύο ἐπιπέδων εἶνε ὀξεῖα, τὰ σημεῖα P_1, P_2, P_3 καὶ P'_1, P'_2 P'_3 ὁρίζουν ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων ἀντιστοίχως τὴν αὐτὴν φοράν, τὰ δὲ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων εἶνε ὁμόσημα.

Ἂν ἡ γ εἶνε ἀμβλεῖα, τὰ σημεῖα ταῦτα ὁρίζουν φορὰς ἀντιθέτους ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων ἀντιστοίχως, τὰ δὲ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων $P_1P_2P_3$ καὶ $P_1P_2P'_3$ εἶνε ἑτερόσημα.



(Σχ. 19)

Ἔστω P_3 K ἡ ἐκ τοῦ P_3 κάθετος εὐθεῖα ἐπὶ τὴν $P_1\ P_2$.

Ἡ εὐθεῖα P'_3 K θὰ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν $P_1\ P_2$.

Ἂν ω παριστάνῃ τὴν γωνίαν P_3 K P'_3 (ἀντίστοιχον τῆς μιᾶς τῶν διέδρων, τὰς ὁποίας σχηματίζουν τὰ ἐπίπεδα), θὰ εἶνε

$\gamma = \omega$, ἄν ἡ γ εἶνε ὀξεῖα

καὶ $\gamma = \pi - \omega$, ἄν ἡ γ εἶνε ἀμβλεῖα.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου P_3 K P'_3 ἔχομεν

$$(KP'_3) = (KP_3).\ \text{συν}\ \omega.$$

Εἶνε δὲ $\quad$ ἐμβ. $P_1\ P_2\ P_3 = \frac{1}{2}\,(P_1\ P_2).\ (KP_3)$

ἐμβ. $P_1\ P_2\ P'_3 = \frac{1}{2}\,(P_1\ P_2)\ (K\ P'_3)$.

Ἐπομένως $\quad$ ἐμβ. $P_1\ P_2\ P'_3 = \frac{1}{2}\,(P_1\ P_2)\ (K\ P_3)$. συν ω

ἢ $\quad$ ἐμβ. $P_1\ P_2\ P'_3 =$ ἐμβ. $P_1\ P_2\ P_3$. συν ω.

Καὶ ἂν μὲν $\quad$ $\gamma = \omega$, ἔχομεν

ἐμβ. $P_1\ P_2\ P'_3 =$ ἐμβ. $P_1\ P_2\ P_3$. συν γ,

ἂν δὲ $\quad$ $\gamma = \pi - \omega$

θὰ εἶνε πάλιν $\quad$ ἐμβ. $P_1\ P_2\ P'_3 =$ ἐμβ. $P_1\ P_2\ P_3$. συν $\bar{\gamma}$, ἐπειδὴ τὰ ἐμβαδὰ τῶν $P_1\ P_2\ P'_3$ καὶ $P_1\ P_2\ P_3$ εἶνε ἑτερόσημα.

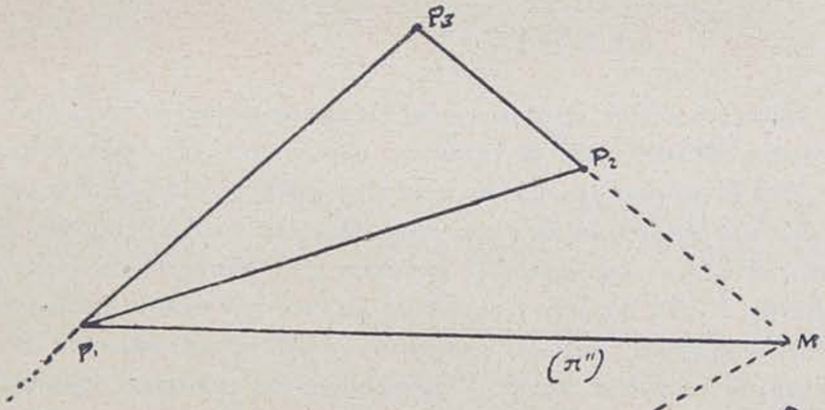
Ἄρα ἡ σχέσις ἐμβ. $P_1\ P_2\ P'_3 =$ ἐμβ. $P_1\ P_2\ P_3$. συν γ δίδει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ $P_1\ P_2\ P'_3$, τῆς προβολῆς τοῦ $P_1\ P_2\ P_3$, καὶ κατὰ τὰς δύο περιπτώσεις ὅσον ἀφορᾷ τὴν γωνίαν γ.

Ἂν τὸ ἐπίπεδον (π') δὲν τέμνῃ τὸ (π) κατά τινα τῶν πλευρῶν τοῦ $P_1\ P_2\ P_3$, φέρομεν τὸ ἐπίπεδον (π'') παράλληλον τῷ (π') διά τινος τῶν κορυφῶν τοῦ $P_1\ P_2\ P_3$, ἔστω τῆς P_1 (σχ. 20—21).

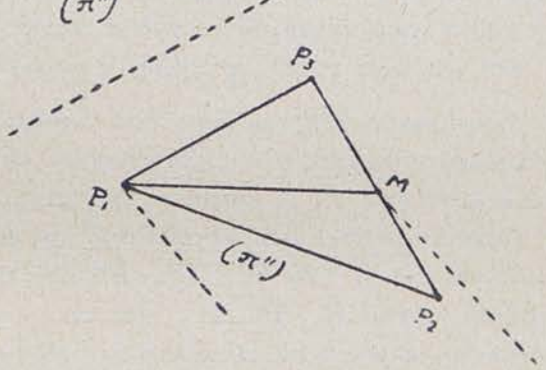
Αἱ ὀρθαὶ προβολαὶ τοῦ $P_1P_2P_3$ ἐπὶ τοῦ (π') καὶ τοῦ (π'') εἶνε ἴσαι. Ἂν τὸ (π'') τέμνῃ τὸ (π) κατὰ τὴν εὐθεῖαν P_1M (σχ. 20) τὸ $P_1P_2P_3$ θὰ εἶνε ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τριγώνων $P_1\ M\ P_3$ καὶ $P_1\ M\ P_2$, ἢ (σχ. 21) μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν P_1P_2M καὶ $P_1M\ P_3$. Ἐπειδὴ δι' ἕκαστον τῶν τριγώνων τούτων, ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκεται τὸ $P_1P_2P_3$, ἰσχύει ἡ ἰδιότης, ἔχομεν ὅτι

ἐμβαδὸν προβολῆς τοῦ $P_1P_2P_3$ = ἐμβαδὸν $P_1\ P_2\ P_3$. συν γ

ἢ $\qquad \varepsilon' = \varepsilon$. συν γ.



(Σχ. 20)



(Σχ. 21)

ε) Ἡ ἀνωτέρω ἰσότης ἀληθεύει καὶ ὅταν ε παριστάνῃ τὸ ἐμβαδὸν πολυγώνου τινὸς $P_1P_2 \ldots P_\nu$, κειμένου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (π), (ε') τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀρθῆς προβολῆς αὐτοῦ $P'_1P'_2 \ldots P'_\nu$ ἐπὶ τοῦ (π'), ἂν τὸ σημεῖον ἑκάστου τῶν ε καὶ ε' ὁρίζεται κατ' ἀναλογίαν ὡς ἀνωτέρω τὸ τοῦ τριγώνου. Διότι, ἂν O εἶνε τυχὸν σημεῖον ἐν τῷ (π) O′ ἡ ὀρθὴ προβολὴ αὐτοῦ ἐν τῷ (π′), θὰ ἔχωμεν

$$P_1 P_2 \ldots P_\nu = O P_1 P_2 \# O P_2 P_3 \# \ldots \# OP_\nu P_1,$$

$$P'_1 P'_2 \ldots P'_\nu = O' P'_1 P'_2 \# O'P'_2 P'_3 \# \ldots \# O' P'_\nu P'_1.$$

Ἀλλ' εἶνε

$$\text{ἐμβ. } O' P'_1 P'_2 = \text{ἐμβ. } O P_1 P_2 . \text{συν } \gamma,$$

$$\text{ἐμβ. } O' P'_2 P'_3 = \text{ἐμβ. } O P_2 P_3 . \text{ συν } \gamma,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\text{ἐμβ. } O' P'_\nu P'_1 = \text{ἐμβ. } O P_\nu P_1 . \text{ συν } \gamma.$$

Ἑπομένως καὶ $\varepsilon' = \varepsilon. \text{ συν } \gamma.$

στ′) Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ἡ ἰδιότης καὶ ὅταν ε παριστάνῃ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου τινός. Διότι ὁ κύκλος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ ὅριον ἐγγεγραμμένων ἢ περιγεγραμμένων εἰς αὐτὸν κανονικῶν πολυγώνων, τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Καταστήσατε ἐποπτικὴν τὴν ἰδιότητα τῆς ἰσότητος $\varepsilon' = \varepsilon.$ συν γ, μὲ ἓν ὑπόδειγμα, διακρίνοντες θετικὸν καὶ ἀρνητικὸν μέρος τοῦ (ἐκ χαρτονίου) ἐπιπέδου (π) καὶ (π′) διὰ διαφόρων χρωμάτων ἀπὸ τῆς τομῆς των (τὰ δύο θετικὰ διὰ λευκοῦ π. χ. τὰ δὲ δύο ἀρνητικὰ διὰ μαύρου). Φέρατε τὰ δύο ἐπίπεδα εἰς διαφόρους θέσεις πρὸς ἄλληλα. Ὁρίσατε εἰς ἑκάστην των θέσιν τὴν γωνίαν γ καὶ τὸ θετικὸν τρίγωνον $P_1 P_2 P_3$ ἐπὶ τοῦ (π) ὡς καὶ τὸ τῆς ὀρθῆς προβολῆς του ἐπὶ τοῦ (π′). Ἐπαληθεύσατε οὕτω ὅτι εἰς πάσας τὰς περιπτώσεις τὸ σημεῖον τοῦ ε' συμπίπτει μὲ τὸ τοῦ $\varepsilon.$ συν γ. Ἐξετάσατε τὰς μερικὰς περιπτώσεις, καθ' ἃς εἶνε $\gamma = 0^0$, $\gamma = 90^0$, $\gamma = 180^0$.

2) Ἐξηγήσατε διὰ τοῦ ἀνωτέρω ὑποδείγματος ὅτι ἡ σχέσις $\varepsilon' = \varepsilon.$ συν γ εἶνε ἀνεξάρτητος ἀπὸ τὴν ἐκλογὴν τῶν θετικῶν φορῶν τῶν καθέτων εὐθειῶν ἐπὶ τὰ (π) καὶ (π′), ἐν ᾧ ἕκαστον τῶν μελῶν της ἐξαρτᾶται ἀπὸ αὐτήν.

3) Παρατηρήσατε ὅτι ὁρισθείσης τῆς ἀκολουθίας τῶν P_1, P_2, P_3, ἐπὶ τοῦ (π) ὁρίζεται καὶ ἡ τῶν P'_1, P'_2, P'_3 ἐπὶ τοῦ (π′). Οὕτω, ἂν τὸ ε' παριστάνῃ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ $P'_1 P'_2 P'_3$ καὶ τὸ ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ $P_1 P_2 P_3$, ποῖον εἶνε οὕτω τὸ ε κατὰ μέγεθος καὶ σημεῖον;

4) Ἂν ε εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ $P_1 P_2 P_3$, ποῖον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τῶν $P_2 P_3 P_1$, $P_3 P_1 P_2$, $P_3 P_2 P_1$, $P_2 P_1 P_3$, $P_1 P_3 P_1$ κατὰ μέγεθος καὶ σημεῖον;

5) Προβάλατε ὀρθῶς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (π′) ἰσόπλευρον τρίγωνον, τετράγωνον, ἑξάγωνον, ὀκτάγωνον, δεκάγωνον, κείμενα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (π) καὶ σχηματίζοντος γωνίαν 30^0, ἢ 45^0, ἢ 60^0 μὲ τὸ (π′). Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἑκάστοτε προβολῆς διὰ τῆς ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τοῦ προβαλλομένου σχήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι.

Ὁρισμὸς τῆς θέσεως σημείου δι' ἀριθμῶν.

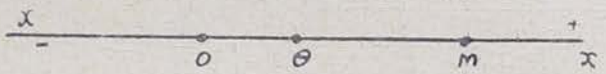
§ 12. Ὁρισμὸς τῆς θέσεως σημείου κειμένου ἐπὶ εὐθείας.—

α') Ἔστω σημεῖόν τι Μ, κείμενον ἐπὶ εὐθείας xx', τὴν ὁποίαν καλοῦμεν *ἄξονα τῶν x ἢ τῶν τετμημένων.* Ζητεῖται νὰ ὁρισθῇ ἀλγεβρικῶς ἡ θέσις τοῦ Μ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τούτου.

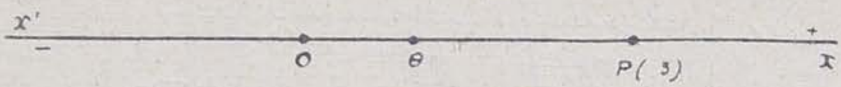
Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν σταθερόν τι σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἄξονος, ἔστω τὸ ο (σχ. 22), τὸ ὁποῖον καλοῦμεν *ἀρχὴν τῶν τετμημένων.* Ὁρίζομεν τὴν θετικὴν φορὰν ἐπὶ τοῦ ἄξονος, ἔστω δ' ἡ ἐκ τοῦ ο πρὸς τὸ x καὶ λαμβάνομεν τὸ σημεῖον Θ ἐπ' αὐτοῦ, ὥστε νὰ εἶνε (οΘ) = 1. Τὸ ἄνυσμα οΜ μετρούμενον διὰ τοῦ οΘ δίδει τὸν ἀριθμὸν

$$\frac{\text{οΜ}}{\text{οΘ}} = (\text{οΜ}),$$

(Σχ. 22)



(Σχ. 23)



τὸν ὁποῖον παριστάνομεν συνήθως διὰ τοῦ x, καὶ καλεῖται οὗτος *τετμημένη* τοῦ σημείου Μ, σημειώνεται δὲ συμβολικῶς οὕτω

$$\text{Μ}(x).$$

β') Κατὰ τἀνωτέρω ἕκαστον σημεῖον, κείμενον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x ἔχει μίαν τετμημένην, ἥτις εἶνε θετική, ἀρνητική, ἢ μηδέν, καθόσον τὸ σημεῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ οx, ἢ τοῦ οx', ἢ ἐπὶ τοῦ ο. Καὶ ἀντιστρόφως, εἰς δοθέντα ἀλγεβρικὸν ἀριθμόν, π.χ. εἰς τὸν 3, ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον Ρ (3) (σχ. 23) ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶνε (οΡ) = οΡ : οΘ = 3. Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν τὴν θέσιν σημείου Ν (−2) ἐπὶ τοῦ ἄξονος, λαμβάνοντες τὸ Ν ἐπὶ τοῦ οx', ὥστε νὰ εἶνε $(\text{οΝ}) = \dfrac{\text{οΝ}}{\text{οΘ}} = -2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Εὕρετε ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x τὰ σημεῖα, τὰ ἔχοντα τετμημένην $1 \cdot -2 \cdot 1,5 \cdot {}^3/_2 \cdot -{}^3/_2 \sqrt{2}\ \sqrt{3}\ \sqrt{0,5}$.

2) Εὕρετε τὰ σημεῖα Μ(−4), Ν(−3.5), Ρ (6. 5).

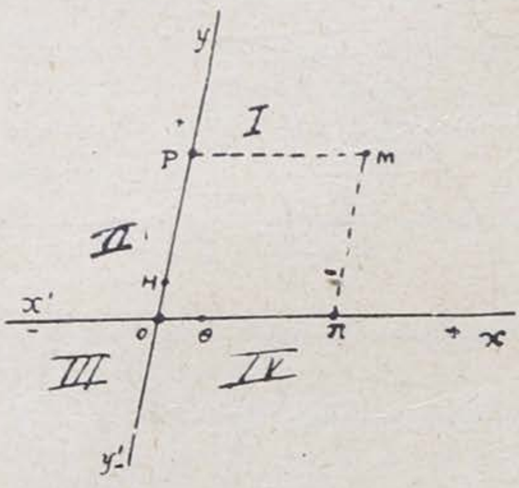
3) Εὕρετε τὰ σημεῖα, τῶν ὁποίων αἱ τετμημέναι ἐπαληθεύουν τὰς ἐξισώσεις $2x-3=0$, $7x+5=0$, $5x+1=0$, $x^2=4$, $x^3=27$, ἀντιστοίχως.

4) Ὁμοίως εὕρετε τὰ σημεῖα τῶν ὁποίων αἱ τετμημέναι ἐπαληθεύουν τὰς ἐξιώσεις $2x^2+5x+2=0$, $x^2+3x-10=0$, $x^3=-27$, $x^4=16$, $x^5=-32$.

§ 13. Ὁρισμὸς τῆς θέσεως σημείου ἐπὶ ἐπιπέδου.—

α) Ἔστω σημεῖον Μ, κείμενον ἐπὶ ἐπιπέδου. Ζητεῖται νὰ ὁρισθῇ ἀλγεβρικῶς ἡ θέσις τοῦ Μ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον ο ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καὶ δι' αὐτοῦ φέρομεν δύο εὐθείας xox', yoy', τὰς ὁποίας καλοῦμεν *ἄξονας συντεταγμένων ἢ σύστημα ἀξόνων* oxy, (τὴν μὲν πρώτην ἄξονα τῶν *τετμημένων ἢ τῶν x*, τὴν δὲ δευτέραν ἄξονα *τῶν τεταγμένων ἢ τῶν y*). Ὁρίζομεν ἀπὸ τοῦ ο, τὸ ὁποῖον καλεῖται *ἀρχὴ τῶν ἀξόνων ἢ τῶν συντεταγμένων* τὰς θετικὰς καὶ ἀρνητικὰς φορὰς ἐπὶ

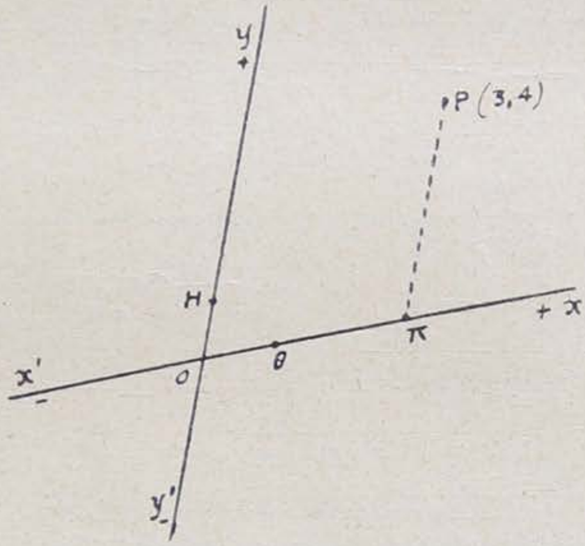


(Σχ. 24)

ἑκάστου τῶν ἀξόνων, λαμβάνομεν δὲ συνήθως ὡς θετικὰς τὰς ἐκ τοῦ ο πρὸς τὸ x καὶ πρὸς τὸ y, καὶ ὡς ἀρνητικὰς τὰς ἐκ τοῦ ο πρὸς τὸ x' καὶ y' (σχ.24). Λαμβάνομεν ἐπὶ μὲν τοῦ ox τὸ σημεῖον Θ, ὥστε νὰ εἶνε (oΘ)=1, ἐπὶ δὲ τοῦ oy τὸ Η, ὥστε νὰ εἶνε (oH) =1. Προβάλλομεν τὸ δοθὲν σημεῖον Μ ἐπὶ ἑκάστου τῶν ἀξόνων παραλλήλως πρὸς τὸν ἄλλον καὶ ἔστωσαν Π ἡ προβολὴ αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ P ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y.

Τὰ ἀνύσματα oΠ καὶ oP μετρούμενα ἀντιστοίχως ὑπὸ τῶν oΘ καὶ oH δίδουν τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{o\Pi}{o\Theta}=(o\Pi)$, $\frac{oP}{oH}=(oP)$, τοὺς ὁποίους παριστάνομεν διὰ τῶν x καὶ y ἀντιστοίχως, καὶ καλοῦμεν τὸν πρῶτον *τετμημένην* τοῦ Μ, τὸν δεύτερον *τεταγμένην* τοῦ Μ, καὶ τοὺς δύο *συντεταγμένας* (εὐθυγράμμους) τοῦ Μ, γράφομεν δὲ συμβολικῶς Μ (x, y).

β') Δοθέντος ἑνὸς ζεύγους (πραγματικῶν) ἀριθμῶν ὡς συντεταγμένων σημείου τοῦ ἐπιπέδου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου δίδονται οἱ ἄξονες τῶν συντεταγμένων, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον. Ἔστω π. χ. ὅτι αἱ συντεταγμέναι ἑνὸς σημείου εἶνε (3,4). Λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ xx' ἀπὸ τοῦ o τὸ ἄνυσμα oΠ, ὥστε νὰ εἶνε (oΠ)=3 (σχ. 25)· ἀπὸ τὸ σημεῖον Π φέρομεν ἄνυσμα ΠΡ παραλλήλως τῷ yy', ἔχον φορὰν τὴν ἐκ τοῦ o πρὸς τὸ y, ὥστε νὰ εἶνε (oP) =4. Τὸ σημεῖον Ρ εἶνε τὸ ἔχον συντεταγμένας (3, 4).



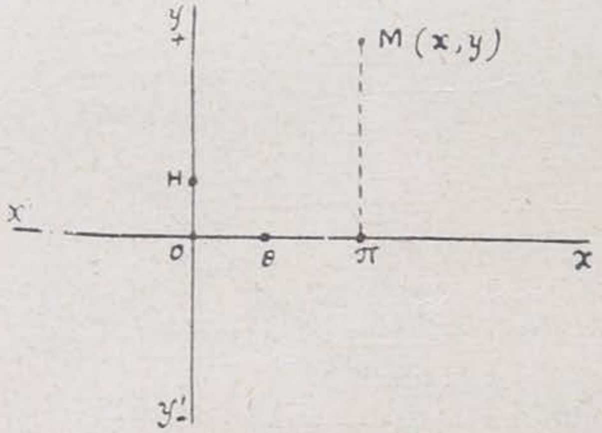
(Σχ. 25)

γ') Κατὰ ταῦτα, «***εἰς ἕκαστον σημεῖον ἐπιπέδου ἀντιστοιχεῖ ἓν ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἤτοι αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τούτου***». Καὶ ἀντιστρόφως, «***εἰς ἕκαστον ζεῦγος δοθέντων ἀριθμῶν ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ἔχον τὸν μὲν πρῶτον ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ὡς τετμημένην, τὸν δὲ δεύτερον ὡς τεταγμένην***».

δ') Ἡ τεταγμένη σημείου Μ τοῦ ἐπιπέδου εἶνε θετικὴ ἢ ἀρνητική, ἂν τὸ ἄνυσμα oΠ ἔχῃ θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν φοράν. Ἡ τεταγμένη τοῦ Μ εἶνε θετικὴ ἢ ἀρνητική, ἂν τὸ ἄνυσμα oP, ἢ τὸ ὁμορρόπως ἴσον πρὸς αὐτὸ ΠΡ, ἔχῃ φορὰν θετικὴν ἢ ἀρνητικήν.

ε') Διὰ τῶν ἀξόνων τῶν συντεταγμένων xox', yoy' τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν διαιρεῖται εἰς τέσσαρα μέρη τὰ I, II, III, IV (σχ. 24). Ἂν σημεῖόν τι κεῖται ἐπὶ τοῦ I, ἡ τετμημένη καὶ τεταγμένη αὐτοῦ εἶνε θετικαί· ἂν κεῖται ἐπὶ τοῦ II ἡ μὲν τετμημένη αὐτοῦ εἶνε ἀρνητική, ἡ δὲ τεταγμένη θετική· ἂν κεῖται ἐπὶ τοῦ III, ἡ τετμημένη καὶ τεταγμένη αὐτοῦ εἶνε ἀρνητικαί· ἂν δὲ κεῖται ἐπὶ τοῦ IV, ἔχει τετμημένην θετικὴν καὶ τεταγμένην ἀρνητικήν.

ς΄) Ἂν σημεῖόν τι τοῦ ἐπιπέδου κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x, ἔχει τεταγμένην μηδέν· ἂν κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y, ἔχει τετμημένην μηδέν· ἂν κεῖται ἐπὶ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων, ἔχει συντεταγμένας ἴσας μὲ μηδέν· ἂν κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥτις διχοτομεῖ τὴν γωνίαν xoy καὶ τὴν x′oy′, ἔχει συντεταγμένας ἴσας· ἂν κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας, τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν x′oy καὶ τὴν xoy′ ἔχει συντεταγμένας ἀντιθέτους.



(Σχ. 26)

ζ΄) Ἂν ἡ γωνία τῶν ἀξόνων εἶνε ὀρθή (σχ. 26), οἱ ἄξονες λέγονται ὀρθογώνιοι ἢ ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων, αἱ δὲ συντεταγμέναι σημείου τινὸς λέγονται *ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι* τοῦ σημείου τούτου. Ἂν οἱ ἄξονες τῶν συντεταγμένων εἶνε πλάγιοι πρὸς ἀλλήλους, αἱ μὲν συντεταγμέναι σημείου τινὸς λέγονται ***πλαγιογώνιοι ἢ πλάγιαι συντεταγμέναι*** αὐτοῦ, οἱ δὲ ἄξονες ***πλάγιοι ἢ πλαγιογώνιον σύστημα ἀξόνων***. Εἰς πάσας τὰς περιπτώσεις ταύτας αἱ συντεταγμέναι λέγονται καὶ ***καρτεσιαναὶ*** συντεταγμέναι, ἐκ τοῦ ὀνόματος τοῦ ἐφευρέτου αὐτῶν (Cartesius 1596-1650).

Προτάσεις ἰσχύουσαι διὰ πλαγίας συντεταγμένας μὲ γωνίαν θ τῶν ἀξόνων τρέπονται εἰς προτάσεις ἰσχυούσας διὰ ὀρθογωνίους συντεταγμένας, ἂν ὑποτεθῇ $\theta = \frac{\pi}{2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Εὕρετε τὰ σημεῖα (2,3)· (−2,−0.5)· (1,−5)· $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2) Ποῦ κεῖνται τὰ σημεῖα, τὰ ἔχοντα συντεταγμένας (α, β)· (−α, −β)· (−α, β)· (α −β);

3) Παραλληλόγραμμον ἔχει κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων, πλευρὰς δὲ παραλλήλους πρὸς τοὺς ἄξονας. Εὕρετε τὰς συντεταγμένας τῶν κορυφῶν του, ἂν ἡ μία ἐξ αὐτῶν ἔχῃ συντεταγμένας (x, y).

4) Φέρατε διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων τυχοῦσαν εὐθεῖαν. Ἂν M_1 (x_1, y_1), M_2 (x_2, y_2) εἶνε τυχόντα σημεῖα τῆς εὐθείας, δείξατε ὅτι εἶνε

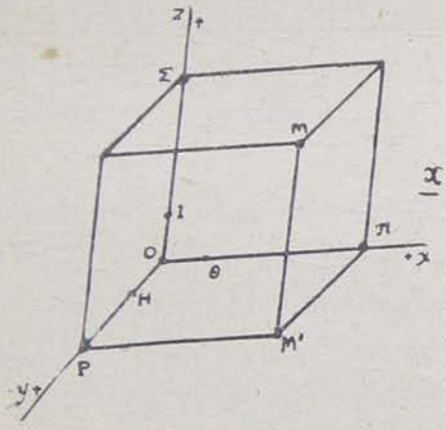
$$y_1 : x_1 = y_2 : x_2.$$

5) Σημείου τινὸς αἱ συντεταγμέναι εἶνε $(x\ y)$. Τίνες θὰ εἶνε αἱ συντεταγμέναι του, ἂν ἀλλάξωμεν τὰς φορὰς τῶν ἀξόνων; ἂν τὸ θετικὸν μέρος τοῦ ἄξονος τῶν x λάβωμεν ὡς θετικὸν τοῦ τῶν y καὶ τοὐναντίον;

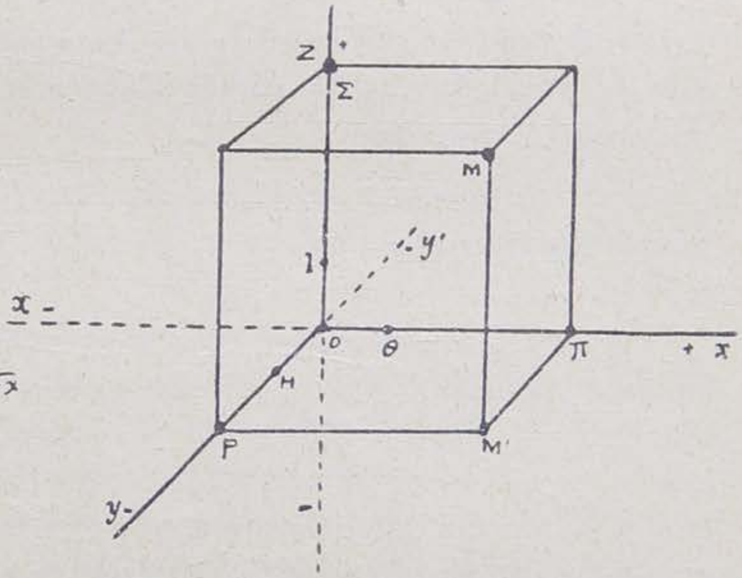
§ 14. Ὁρισμὸς τῆς θέσεως σημείου ἐν τῷ χώρῳ τῶν τριῶν διαστάσεων.—

α´) Ἔστω σημεῖον M, κείμενον ἐν τῷ χώρῳ τῶν τριῶν διαστάσεων. Ζητεῖται νὰ ὁρισθῇ ἀλγεβρικῶς ἡ θέσις αὐτοῦ.

Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον o τοῦ χώρου, καὶ δι' αὐτοῦ φέρομεν τρεῖς εὐθείας, xox′, yoy′, zoz′ (σχ. 27-28), καλοῦμεν



(Σχ. 27)



(Σχ. 28)

δ' αὐτὰς *ἄξονας συντεταγμένων* ἢ σύστημα ἀξόνων oxyz (τὴν πρώτην ἄξονα τῶν x ἢ τῶν τετμημένων, τὴν δευτέραν ἄξονα τῶν y ἢ τῶν τεταγμένων, τὴν δὲ τρίτην ἄξονα τῶν z ἢ τῶν κατηγμένων). Ὁρίζομεν ἀπὸ τοῦ o, τὸ ὁποῖον καλεῖται ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων τὰ θετικὰ μέρη τῶν ἀξόνων ox, oy, oz καὶ τὰ ἀρνητικὰ ox′, oy′, oz′.

Λαμβάνομεν τὰ ἀνύσματα oΘ ἐπὶ τοῦ ox, oH ἐπὶ τοῦ oy καὶ oI ἐπὶ τοῦ oz, ὥστε νὰ εἶνε (oΘ)=1, (oH)=1, (oI)=1. Προβάλλομεν τὸ σημεῖον M ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x παραλλήλως πρὸς τὸ ἐπίπεδον yoz. Ἔστω Π ἡ προβολὴ αὐτη. Ὁ ἀριθμὸς $\frac{o\Pi}{o\Theta} = (o\Pi)$ καλεῖται *τετμημένη* τοῦ σημείου Μ καὶ παρίσταται συνήθως διὰ τοῦ x. Κατ' ἀνάλογον τρόπον προβάλλομεν τὸ Μ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y καὶ τοῦ τῶν z παραλλήλως πρὸς τὰ ἐπίπεδα xoz καὶ xoy ἀντιστοίχως. Ἔστωσαν Ρ καὶ Σ αἱ προβολαὶ αὗται. Ὁ ἀριθμὸς $\frac{oP}{oH} = (oP)$ καλεῖται *τεταγμένη* τοῦ Μ καὶ παρίσταται διὰ τοῦ y, ὁ δὲ $\frac{o\Sigma}{oI} = (o\Sigma)$ λέγεται *κατηγμένη* τοῦ Μ καὶ παρίσταται διὰ τοῦ z. Οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ x, y, z λέγονται εὐθύγραμμοι ἢ καρτεσιαναὶ συντεταγμέναι τοῦ σημείου Μ καὶ γράφομεν συμβολικῶς Μ (x, y, z). Ἂν οἱ ἄξονες τῶν συντεταγμένων εἶνε ἀνὰ δύο κάθετοι ἐπ' ἀλλήλους, τὸ σύστημα τῶν ἀξόνων λέγεται ***ὀρθογώνιον***, αἱ δὲ συντεταγμέναι σημείου τινὸς ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι αὐτοῦ (σχ. 28).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι

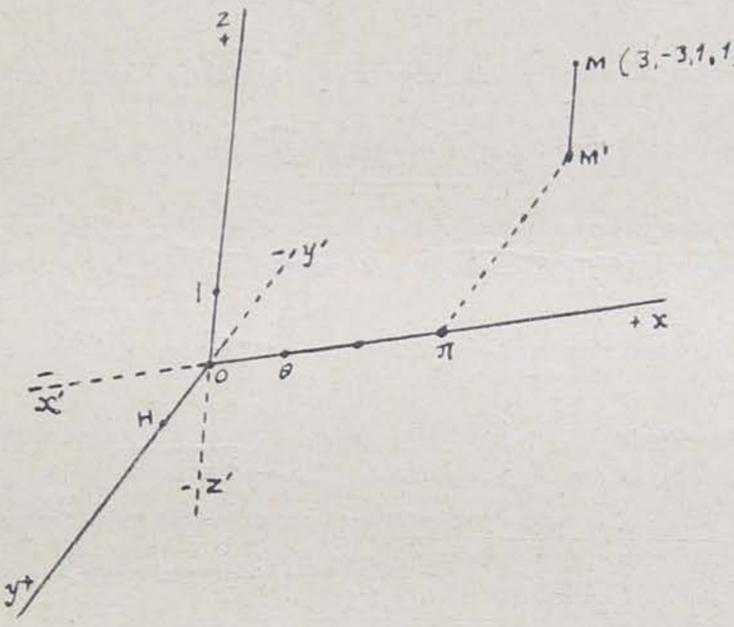
«***δοθέντος ἑνὸς σημείου ἐν τῷ διαστήματι καὶ συστήματος ἀξόνων ἐν αὐτῷ, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τρεῖς ἀριθμούς, οἵτινες παριστάνουν τὸ σημεῖον***».

Καὶ ἀντιστρόφως, «***δοθέντων τριῶν (πραγματικῶν) ἀριθμῶν συντεταγμένων σημείου τινός, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον τοῦτο***».

Τῷ ὄντι, ἂν π. χ. (3,—2, 5) εἶνε αἱ συντεταγμέναι ἑνὸς σημείου, λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x ἀπὸ τοῦ o τὸ ἄνυσμα οΠ, ὥστε νὰ εἶνε (οΠ)=3, ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y τὸ οΡ, ὥστε νὰ εἶνε (οΡ)=—2 καὶ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν z τὸ οΣ, ὥστε νὰ εἶνε (οΣ)=5. Διὰ τοῦ Π φέρομεν ἐπίπεδον παράλληλον τῷ yoz, διὰ τοῦ Ρ παράλληλον τῷ xoz, καὶ διὰ τοῦ Σ παράλληλον τῷ xoy. Ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων τούτων, ἔστω τὸ Μ, εἶνε τὸ σημεῖον (3,—2, 5).

ϐ')Συντομώτερον εὑρίσκομεν τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου Μ ὡς ἑξῆς. Φέρομεν δι' αὐτοῦ εὐθεῖαν ΜΜ' παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν z, ἥτις τέμνει τὸ ἐπίπεδον xoy, ἔστω εἰς τὸ σημεῖον Μ' (σχ. 27-8). Διὰ τοῦ Μ' φέρομεν εὐθεῖαν Μ'Π παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν y, ἥτις τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x, ἔστω εἰς τὸ σημεῖον Π. Τὰ ἀνύσματα οΠ, ΠΜ', Μ'Μ μετρούμενα διὰ τῶν οΘ, οΗ, οΙ ἀντιστοίχως δίδουν τὰς συντεταγμένας x, y, z τοῦ σημείου Μ.

Ἐπίσης εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον Μ, ὅταν δοθοῦν αἱ συντεταγμέναι αὐτοῦ π. χ. αἱ (3,—3,1, 1) καὶ ὡς ἑξῆς. Εὑρίσκομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x τὸ σημεῖον Π, ὥστε νὰ εἶνε (οΠ)=3 (σχ. 29). Διὰ τοῦ Π φέρομεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ xoy ἄνυσμα ΠΜ′ παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν y, ὥστε νὰ εἶνε (ΠΜ′)=—3, 1. Τέλος διὰ τοῦ Μ′ φέρομεν ἄνυσμα Μ′Μ παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν z, ὥστε νὰ εἶνε (Μ′Μ)=1. Οὕτω τὸ τὸ σημεῖον Μ εἶνε τὸ ἔχον συντεταγμένας (3,—3,1, 1).



(Σχ. 29)

γ′) Οἱ τρεῖς ἄξονες τῶν συντεταγμένων ὁρίζουν τὰ τρία ἐπίπεδα xoy, yoz καὶ xoz ἢ τὰ xy,yz, καὶ xz, τὰ ὁποῖα καλοῦνται ***συντεταγμένα ἐπίπεδα.*** Ταῦτα χωρίζουν τὸν χῶρον εἰς ὀκτὼ μέρη, ὁρίζοντα ὀκτὼ τριέδρους στερεὰς γωνίας. Τὸ ἐπίπεδον τῶν xy χωρίζει τὸν χῶρον εἰς δύο μέρη, κείμενα ἄνωθεν καὶ κάτωθεν αὐτοῦ· τὸ ἐπίπεδον τῶν yz εἰς δύο, κείμενα δεξιὰ καὶ ἀριστερὰ αὐτοῦ· τὸ δὲ τῶν xz εἰς δύο, κείμενα ἔμπροσθεν καὶ ὄπισθεν αὐτοῦ. Σημεῖόν τι τοῦ διαστήματος δύναται νὰ κεῖται ἐντὸς μιᾶς τῶν ὀκτὼ τριέδρων γωνιῶν (8 θέσεις), ἢ ἐπί τινος τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων (12 θέσεις), ἢ ἐπί τινος τῶν ἀξόνων (6 θέσεις), ἢ ἐπὶ τῆς ἀρχῆς ο. Ἤτοι σημεῖόν τι δύναται νὰ ἔχῃ 27 διαφόρους θέσεις ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων, τὰ συντεταγμένα ἐπίπεδα καὶ τὰς τριέδρους γωνίας.

δ′) Ἑκάστη τῶν συντεταγμένων σημείου τινὸς δύναται νὰ εἶνε θετικὴ ἢ ἀρνητική, ἢ μηδέν, καθόσον τὰ ἀνύσματα oΠ, ΠΜ′, Μ′Μ (σχ. 27—28) ἔχουν φορὰς θετικάς, ἢ ἀρνητικάς, ἢ εἶνε ἴσα μὲ μηδὲν ἀντιστοίχως.

ε′) Ἂν σημεῖόν τι κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x, ἔχει y=o καὶ z=o· ἂν κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y, ἔχει x=o καὶ z=o· ἂν δὲ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν z, ἔχει x=o καὶ y=o. Ἂν τὸ σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων ἔχει x=o, y=o καὶ z=o.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Κατασκευάσατε τὰ σημεῖα (1,1,1)· (1, −2, 1)· $(-2, ^1/_2, -3)$· (o, −1, o)· (2, −2, o)· (−1, o, −1)· (−1, −1, −3)· (α, α, γ)· (α, γ, γ), (α, 6, α)· (α, 6, α)· (α, −α, −α).

2) Ποῦ κεῖνται τὰ σημεῖα, τὰ ἔχοντα κατηγμένην z=2, z=−3, z=3,5, z=γ;

3) Ποῦ κεῖνται τὰ σημεῖα τὰ ἔχοντα x=2, z=2; x=−3, y=4; y=−5, z=2;

4) Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν συντεταγμένων σημείου, κειμένου ἐπί τινος τῶν ἐπιπέδων, τῶν διχοτομούντων τὰς γωνίας δύο ἐκ τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων;

5) Τίς εἶνε ὁ τόπος τῶν σημείων, διὰ τὰ ὁποῖα εἶνε x=y; x=−y; y=z; y=−z;

6) Τίς εἶνε ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν x−z=o; x+z=o;

7) Διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων φέρατε τυχοῦσαν εὐθεῖαν. Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν συντεταγμένων (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) δύο τυχόντων σημείων αὐτῆς P_1, P_2 ἀντιστοίχως;

8) Τίς ἡ θέσις τῶν σημείων (α, 6, γ) καὶ (−α, 6, γ); ἢ τῶν (α, 6, γ) καὶ (−α, −6, −γ); ἢ τῶν (α, 6, γ) καὶ (α, −6, −γ);

9) Πῶς σχετίζονται αἱ συντεταγμέναι δύο σημείων συμμετρικῶν ὡς πρὸς ἓν τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων; ἢ ὡς πρὸς ἕνα τῶν ἀξόνων, ἢ ὡς πρὸς τὴν ἀρχήν;

10) Αἱ συντεταγμέναι σημείου τινὸς Μ εἶνε (x, y, z). Τίνες θὰ εἶνε αἱ συντεταγμέναι του, ἂν ἀλλαχθῇ ἡ θετικὴ φορὰ ἑνὸς ἢ περισσοτέρων ἀξόνων; Τίνες θὰ εἶνε, ἂν τὸ θετικὸν μέρος τοῦ ἄξονος τῶν x λάβωμεν ὡς θετικὸν τῶν z καὶ τὸ ἀρνητικὸν τῶν z ὡς ἀρνητικὸν τῶν x καὶ τοὐναντίον;

11) Εὕρετε τοὺς ἓξ διαφόρους τεθλασμένους δρόμους ὡς τὸν ΟΠΜ΄Μ (σχ. 27-8), οἵτινες συνδέουν τὴν ἀρχὴν o μὲ τὸ σημεῖον Μ καὶ εἰς τοὺς ὁποίους τὰ μέρη αὐτῶν εἶνε ἀνύσματα παράλληλα πρὸς τοὺς ἄξονας.

12 Εὕρετε ποῦ κεῖνται τὰ σημεῖα (α, 6, γ), (α, −6, γ), (α, o, γ)
(α, 6, o), (α, 6, o) (α, o, o)
(α, 6, −γ), (α, −6, −γ), (α, o, −γ).

Ὁρισμὸς τῆς θέσεως ἀνύσματος δι᾿ ἀριθμῶν.

§ 15. **Ὁρισμὸς τῆς θέσεως ἀνύσματος ἐπ᾿ εὐθείας.**—

α) Ἔστω ἄνυσμα $M_1 M_2$, κείμενον ἐπί τινος εὐθείας xox΄ (σχ. 30) τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ὡς ἄξονα τῶν τετμημένων, ἔχοντα ἀρχὴν τὸ o, θετικὸν μέρος τὸ ox καὶ μονάδα μήκους τὸ oΘ. Ζητεῖται νὰ ορισθῇ ἀλγεβρικῶς τὸ ἄνυσμα $M_1 M_2$ διὰ τῶν τετμημένων τῶν ἄκρων αὐτοῦ.

Ἂν καλέσωμεν x_1 καὶ x_2 τὰς τετμημένας τῶν M_1 καὶ M_2 ἀντιστοίχως, θὰ ἔχωμεν

(Σχ. 30)

$$oM_1 \# M_1 M_2 = oM_2$$

καὶ $$(oM_1)+(M_1 M_2)=(oM_2).$$

Ἑπομένως $$(M_1 M_2)=(oM_2)-(oM_1)=x_2-x_1.$$

Ἂν παραστήσωμεν διὰ α τὸν ἀριθμὸν $(M_1 M_2)$, ὅστις καλεῖται καὶ *τετμημένη* τοῦ ἀνύσματος $M_1 M_2$, ἔχομεν $\alpha = x_2 - x_1$·

ἤτοι «***ἡ τετμημένη ἀνύσματος ἰσοῦται μὲ τὴν τετμημένην τοῦ πέρατος μεῖον τὴν τετμημένην τῆς ἀρχῆς αὐτοῦ***».

Κατὰ ταῦτα, δοθέντος ἀνύσματός τινος διὰ τῶν ἄκρων αὐτοῦ $M_1 (x_1)$, $M_2 (x_2)$, κειμένου ἐπί τινος εὐθείας, λαμβανομένης ὡς ἄξονος τῶν τετμημένων, ὑπάρχει εἷς πραγματικὸς ἀριθμός, $\alpha = x_2 - x_1$, παριστάνων τὸ ἄνυσμα τοῦτο.

β') Ἀντιστρόφως, δοθέντος πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ὡς τετμημένης ἀνύσματός τινος καὶ τοῦ ἑνὸς τῶν ἄκρων διὰ τῆς τετμημένης αὐτοῦ, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἄνυσμα ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν τετμημένων ἐφ' ἧς κεῖται.

Ἔστω π. χ. $\alpha=2$ καὶ $M_1 (3)$. Ἔχομεν $x_1=3$, $x_2=\alpha+x_1=2+3=5$.

Εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον M_1, ὥστε νὰ εἶνε $(oM_1)=3$ καὶ τὸ M_2 ὥστε νὰ εἶνε $(oM_2)=5$. Τὸ ἄνυσμα $M_1 M_2$ εἶνε προφανῶς τὸ ζητούμενον. Ἂν δοθῇ $\alpha=-3$ καὶ $M_2 (-1)$, εὑρίσκεται τὸ $M_1 M_2$ ὡς ἑξῆς.

Ἔχομεν $x_1=x_2-\alpha=-1-(-3)=-1+3=2.$

Εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα $M_1 (2)$ καί $M_2 (-1)$ καὶ ἔχομεν τὸ ἄνυσμα $M_1 M_2$.

γ') Ἐὰν ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν τετμημένων xox' λάβωμεν ἓν σημεῖον o', ἔχον τετμημένην α' ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν o, ἤτοι $(oo')=\alpha'$, παραστήσωμεν δὲ τὴν τετμημένην τοῦ σημείου M ὡς πρὸς o μὲν διὰ τοῦ x, ὡς πρὸς o' δὲ διὰ τοῦ x', θὰ ἔχωμεν (§ 3, α')

$$oo' \# o'M = oM.$$

Ἐπομένως $(\acute{o}M)=(oM)-(o\acute{o})$ ἢ $x'=x-\alpha'$, καὶ $x=x'+\alpha'$.

Ἡ ἰσότης αὕτη δεικνύει τὴν σχέσιν, ἥτις συνδέει τὰς τετμημένας ἑνὸς σημείου, κειμένου ἐπὶ εὐθείας ὡς πρὸς δύο διαφόρους ἀρχὰς τῶν τετμημένων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1) Πόση εἶνε ἡ τετμημένη ἀνύσματος AB ἂν εἶνε $A\left(\frac{5}{4}\right)$ $B\left(-\frac{1}{2}\right)$; $A(-3, 7)$, $B(6)$; $A(1)$, $B(-13)$;

2) Εὕρετε τὰ ἀνύσματα $M_1 M_2$ καὶ $M M_3$, ἂν εἶνε $x_1=2$, $\alpha=5$, ἢ $x_2=-2$, $\alpha=-\frac{1}{2}$, καὶ $\alpha=-1$, $x_3=-\frac{1}{4}$.

3) Δείξατε, ὅτι τό μέσον ἀνύσματος $M_1 M_2$ ἔχει τετμημένην $\frac{x_1+x_2}{2}$ ἂν εἶνε $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$.

4) Ἂν ἡ νέα ἀρχὴ ό τῶν τετμημένων ἔχῃ τετμημένην (-3) ὡς πρὸς τὴν o, τίνες εἶνε αἱ νέαι τετμημέναι τῶν $M_1\left(x_1=\frac{5}{2}\right)$, $M_2\ (x_2=-3)$, $M_3\ (x_3=-3)$;

ϛ΄) Πρόβλημα. «*Δίδονται δύο σημεῖα $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον $M(x)$ ἐπ' αὐτοῦ ὥστε νὰ εἶνε*»

$$\frac{(M_1M)}{(MM_2)}=\frac{k_2}{k_1}=k$$

Ἔχομεν προφανῶς

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{k_2}{k_1}$$

ἐκ ταύτης δ' εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ $x=\frac{k_1 x_1+k_2 x_2}{k_1+k_2}$

ἢ

$$x=\frac{x_1+k x_2}{1+k}.$$

Μεταβαλλομένου τοῦ k μεταβάλλεται ἡ θέσις τοῦ M ἐπὶ τῆς εὐθείας. Οὕτω ἂν $k=o$, τὸ M συμπίπτει μὲ τὸ M_1, μεταβαλλομένου δὲ τοῦ k ἀπὸ τοῦ o μέχρι 1, τὸ M κινεῖται ἀπὸ τοῦ M_1 μέχρι τοῦ μέσου τοῦ $M_1 M_2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Ὁμὰς πρώτη. 1) Δίδονται τὰ σημεῖα $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων. Εὕρετε σημεῖον ἐπ' αὐτοῦ, διαιροῦν τὸ $M_1 M$ εἰς μέρη, ἔχοντα λόγον $2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}, -2 \cdot -3 \cdot -\frac{5}{2}, -\frac{3}{7}$.

2) Ἐξετάσατε πῶς κινεῖται τὸ M, ὅταν τὸ $k=(M_1M):(MM_2)$ μεταβάλλεται λαμβάνον τὰς τιμὰς $-\infty \ldots -1 \ldots o \ldots +1 \ldots +\infty$. Καὶ ἀντιστρόφως, ἂν τὸ M κινῆται ἀπὸ τοῦ σημείου $(-\infty)$ συνεχῶς ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων μέχρι τοῦ $(+\infty)$, πῶς μεταβάλλεται τὸ k;

3) Δείξατε ὅτι τὸ $k=(M_1 M):(M M_2)$ εἶνε ἀνεξάρτητον ἀπὸ τὴν ἐκλογὴν τῆς μονάδος μήκους οΘ καὶ ἀπὸ τὴν ἐκλογὴν τῆς θετικῆς φορᾶς ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων.

4) Εὕρετε διὰ τῶν τετμημένων x_1 καὶ x_2 τῶν M_1 καὶ M_2 τὰς τετμημένας τοῦ σημείου Μ, ἐὰν εἶνε $(M_1M):(M M_2)=\infty$· 1· -1 — ∞·· $-\frac{3}{2}$, 2 — 2·

$-\frac{1}{2}$· — 5 καὶ εὕρετε τὰς θέσεις τῶν σημείων τούτων.

Ὁμὰς δευτέρα (Ἁρμονικὰ σημεῖα) 1) Ἔστωσαν δύο σημεῖα M_1 M_2 ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων καὶ τὰ Σ_1, Σ_2 ἐπ' αὐτοῦ, ὥστε νὰ εἶνε

$$\frac{(M_1\Sigma_1)}{(\Sigma_1 M_2)}=\lambda_1,\quad \frac{(M_1\Sigma_2)}{(\Sigma_2 M_2)}=\lambda_2.$$

Τὸ $\lambda_1:\lambda_2=\frac{(M_1\Sigma_1)}{(\Sigma_1M_2)}:\frac{(M_1\Sigma_2)}{(\Sigma_2M_2)}$ καλοῦμεν διπλοῦν λόγον τῶν M_1, Σ_1, M_2

καὶ Σ_2 καὶ τὸν σημειώνομεν συμβολικῶς οὕτω $(M_1\ \Sigma_1\ M_2\ \Sigma_2)$. Τὰ σημεῖα M_1, M_2 καθὼς καὶ τὰ Σ_1, Σ_2 λέγονται ὁμόλογα ἢ ἀντίστοιχα σημεῖα τῆς τετράδος. Καθ' ὅμοιον τρόπον ὁ διπλοῦς λόγος τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ

εἶνε $\frac{(AB)}{(\Gamma B)}:\frac{(A\Delta)}{(\Gamma\Delta)}=(AB\Gamma\Delta)$ ἐνῷ ὁ $(B\Gamma A\Delta)=\frac{(B\Gamma)}{(A\Gamma)}:\frac{(B\Delta)}{(A\Delta)}$. Ἐὰν ὁ διπλοῦς λόγος τεσσάρων σημείων εὐθείας ἰσοῦται μὲ — 1, τὰ σημεῖα λέγονται *ἁρμονικά*, ἢ ὅτι ἀποτελοῦν *ἁρμονικὴν σημειοσειράν*, ἄλλως λέγονται *ἀναρμονικὰ* καὶ ὁ διπλοῦς λόγος των *ἀναρμονικός*.

2) Μὲ 4 σημεῖα εὐθείας σχηματίζομεν 24 διπλοῦς λόγους, ἐκ τῶν ὁποίων 6 εἶνε διάφοροι ἀλλήλων, καὶ ἕκαστος περιέχει 4 ἴσους. Σχηματίσατε αὐτοὺς διὰ τὰ Α, Β, Γ, Δ καὶ δείξατε τὴν ἰδιότητα ταύτην.

3) Θέσατε $(AB\Gamma\Delta)=\lambda$ καὶ δείξατε ὅτι τότε οἱ ἄλλοι 5 ἀναρμονικοὶ λόγοι

εἶνε ἴσοι μὲ $\frac{1}{\lambda}$, $1-\lambda$, $\frac{\lambda}{\lambda-1}$ $\frac{1}{1-\lambda}$, $\frac{\lambda-1}{\lambda}$.

4) Δείξατε ὅτι ἂν $(AB\Gamma\Delta)=-1$, οἱ 24 διπλοῖ λόγοι ἀποτελοῦν 3 συμπλέγματα καὶ κ θὲν ἔχει 8 ἴσους διπλοῦς λόγους, ἀντιστοιχοῦν δ' εἰς τὰ

συμπλέγματα αἱ τιμαὶ -1, $\frac{1}{2}$, 2 τῶν λόγων των. Οὕτω θὰ εἶνε

$$(AB\Gamma\Delta)=(A\Delta\Gamma B)=(B\Gamma\Delta A)=(BA\Delta\Gamma)=(\Gamma BA\Delta)=(\Gamma\Delta AB)=(\Delta\Gamma BA)$$
$$=(\Delta AB\Gamma)=-1.$$

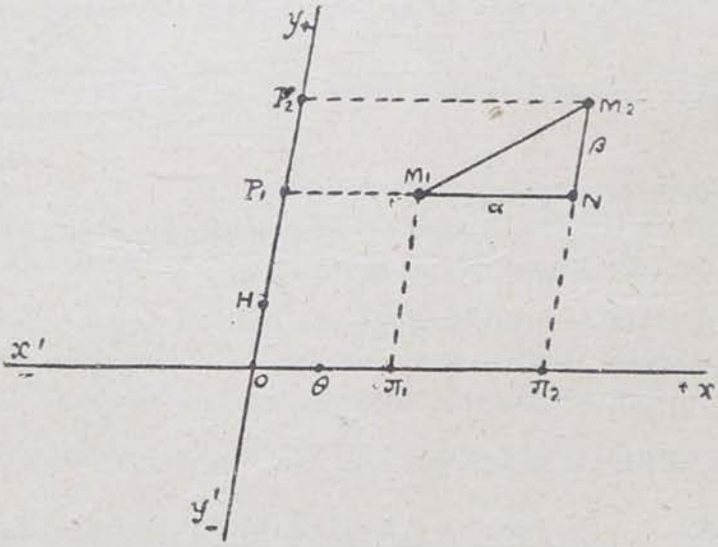
5) Ἂν x_1, x_2, x_3, x_4 εἶνε αἱ τετμημέναι τῶν Α,Β Γ,Δ, ἐνῷ $(AB\Gamma\Delta)=-1$, εὕρετε ὅτι εἶνε

$$(x_1+x_3)(x_2+x_4)=2(x_1x_3+x_2x_4).$$

§ **16. Ὁρισμὸς τῆς θέσεως ἀνύσματος ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.—**
α') Ἔστω τὸ ἄνυσμα $M_1 M_2$ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ xoy, M_1 (x_1, y_1) M_2 (x_2, y_2) τὰ ἄκρα αὐτοῦ, καὶ Π_1, Π_2, P_1, P_2 αἱ προβολαὶ τούτων ἐφ' ἑκάστου τῶν ἀξόνων παραλλήλως πρὸς τὸν ἄλλον (σχ. 31). Τὸ ἄνυσμα $\Pi_1 \Pi_2$ εἶνε ἡ προβολὴ τοῦ $M_1 M_2$ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y, τὸ δὲ $P_1 P_2$ ἡ προβολὴ αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y παραλλήλως πρὸς τὸν τῶν x. Οἱ ἀριθμοὶ $(\Pi_1 \Pi_2) = \alpha$, $(P_1 P_2) = \beta$ καλοῦνται *συντεταγμέναι προβολαὶ τοῦ ἀνύσματος* $M_1 M_2$ (*τετμημένη καὶ τεταγμένη προβολὴ αὐτοῦ*). Ἔχομεν προφανῶς

$$\boxed{\alpha = x_2 - x_1, \ \beta = y_2 - y_1}$$

ἤτοι, «***αἱ συντεταγμέναι προβολαὶ ἀνύσματος ἰσοῦνται μὲ τὰς διαφορὰς τῶν ὁμωνύμων συντεταγμένων τῶν ἄκρων (πέρατος καὶ ἀρχῆς) τοῦ ἀνύσματος***».



(Σχ. 31)

Οὕτω π. χ. διὰ τὸ ἄνυσμα $M_1 M_2$, ἂν εἶνε M_1 $(3, -7)$, M_2 $\left(-11, \frac{1}{2}\right)$ εἶνε $\alpha = -14$, $\beta = 7\frac{1}{2}$.

β') Δοθέντος τοῦ ἑνὸς τῶν ἄκρων ἀνύσματος καὶ τῶν συντεταγμένων αὐτοῦ προβολῶν, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἄλλο ἄκρον αὐτοῦ. Τῷ ὄντι, ἂν γνωρίζωμεν τὰ (α, β) καὶ τὸ M_1 (x_1, y_1) π. χ., ἔχομεν $x_2 = \alpha + x_1$, $y_2 = \beta + y_1$ ἤτοι τὸ M_2 (x_2, y_2).

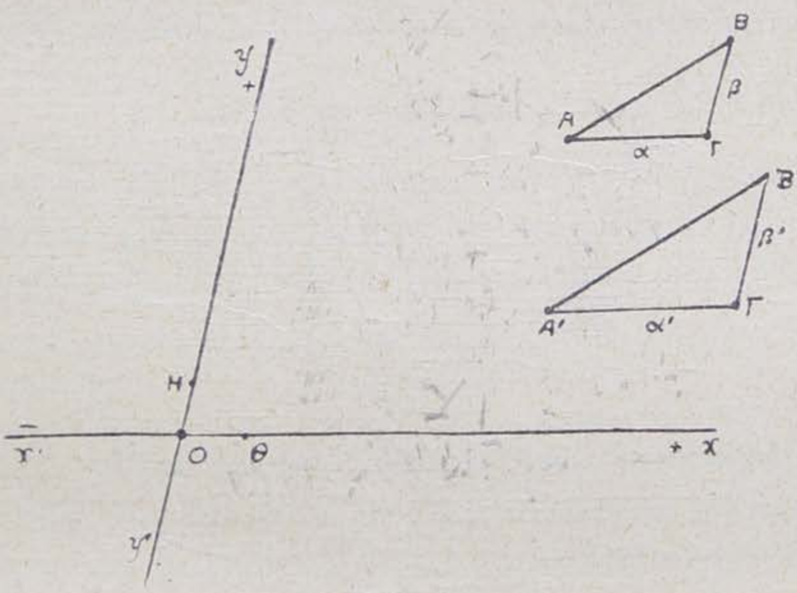
γ') Δοθεισῶν τῶν συντεταγμένων προβολῶν ἀνύσματος καὶ τῆς ἀρχῆς (ἢ τοῦ πέρατος αὐτοῦ) δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὸ ἄνυσμα. Τῷ ὄντι ἂν δοθῇ ἡ ἀρχὴ M_1 καὶ αἱ συντεταγμέναι προβολαὶ (α, β) ἀνύσματος $M_1 M_2$, ἢ εὑρίσκομεν τὸ M_2 ὡς ἀνωτέρω καὶ κατασκευάζομεν τὸ M_1M_2, ἢ ἐκ τοῦ M_1 φέρομεν ἄνυσμα M_1N παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν x, ὥστε νὰ εἶνε $(M_1 N) = \alpha$ (σχ. 31)· ἐκ τοῦ N φέρομεν ἄνυσμα NM_2 παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν y, ὥστε νὰ εἶνε $(N M_2) = \beta$. Οὕτω ἔχομεν τὸ $M_1 M_2$.

δ') Ἄνυσμα ἔχον ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων καὶ συντεταγμένας προβολὰς (α, β) ἔχει πέρας τὸ σημεῖον (α, β).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1) Εὕρετε τὰς συντεταγμένας προβολὰς ἀνύσματος $M_1 M_2$, ἂν εἶνε M_1 (3, 4), M_2 (— 4, 5)· M_1 (ο, — 3), M_2 (— 4, 5)· M_1 (2, ο, M_2 (—3, ο)· M_1 (3,—3), M_2 (1, 1)· M_1 $\left(2\frac{1}{3}, -3\right)$, M_2 (—3, 4).

2) Κατασκευάσατε ἄνυσμα $M_1 M_2$, ἂν εἶνε (α = 3, β = — 5), M_1 (3, — 4)· (α=2, β=4), M_2 (—4, 5)· (α= —5, β= —7), M_1(—1,5,ο)· (α=0,5, β=—0,5), M_2 (— 3, ο).

3) Κατασκευάσατε ἄνυσμα, διερχόμενον διὰ τῆς ἀρχῆς, ἔχονδὲ (α=2, β=4)· (α = — 1, β = 3).



(Σχ. 32)

§ 17. Ἰδιότητες παραλλήλων ἀνυσμάτων.—

α') ***«Δύο ἀνύσματα παράλληλα ἔχουν τὰς ὁμωνύμους συντεταγμένας αὐτῶν προβολὰς ἀναλόγους, ὁ δὲ λόγος τῶν ὁμωνύμων προβολῶν ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ἀνυσμάτων».***

Ἔστωσαν δύο παράλληλα ἀνύσματα ΑΒ (α, β), Α΄Β΄ (α΄,β΄) (σχ.32).

Θὰ δείξωμεν ὅτι εἶνε $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} \; \frac{(AB)}{(A'B')}$.

Τῷ ὄντι, ἂν θεωρήσωμεν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, Α΄Β΄Γ΄, τὰ ἔχοντα τὰς μὲν πλευρὰς ΑΓ, Α΄Γ΄ παραλλήλως τῷ ἄξονι τῶν x, τὰς δὲ ΓΒ, Γ΄Β΄ παραλλήλως τῷ ἄξονι τῶν y, θὰ εἶνε $(ΑΓ)=α$, $(Α΄Γ΄)=α'$, $(ΓΒ)=β$, $(Γ΄Β΄)=β'$. Τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶνε ὅμοια (ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀντιστοίχως παραλλήλους). Ἐπειδὴ δὲ ἂν αἱ πλευραὶ ΑΒ, Α΄Β΄ εἶνε ὁμόρροποι ἢ ἀντίρροποι καὶ αἱ ΓΒ, Γ΄Β΄, καθὼς καὶ αἱ ΑΓ, Α΄Γ΄ θὰ εἶνε ὁμόρροποι ἢ ἀντίρροποι, αἱ ἀναλογίαι

$$\frac{(ΑΓ)}{(Α΄Γ΄)}=\frac{(ΓΒ)}{(Γ΄Β΄)}=\frac{(ΑΒ)}{(Α΄Β΄)}$$

θὰ ἰσχύουν ὄχι μόνον κατ' ἀπόλυτον τιμήν, ἀλλὰ καὶ ὡς πρὸς τὰ σημεῖα αὐτῶν.

Ἑπομένως εἶνε
$$\boxed{\frac{α}{α'}=\frac{β}{β'}=\frac{(ΑΒ)}{(Α΄Β΄)}}$$

β΄) Ἀντιστρόφως, «***ἂν αἱ ὁμώνυμοι συντεταγμέναι προβολαὶ δύο ἀνυσμάτων εἶνε ἀνάλογοι, τὰ ἀνύσματα εἶνε παράλληλα***».

Διότι ἔστωσαν τὰ ΑΒ $(α,β)$, Α΄Β΄ $(α',β')$ καὶ ὅτι εἶνε $\frac{α}{α'}=\frac{β}{β'}$ (1)

Θὰ δείξωμεν ὅτι τὰ ΑΒ, Α΄Β΄ εἶνε παράλληλα.

Διότι, ἂν τὸ Α΄Β΄ δὲν εἶνε παράλληλον τῷ ΑΒ, φέρωμεν δ' ἐκ τοῦ σημείου Α΄ τὸ ἄνυσμα Α΄Β΄΄ παράλληλον τῷ ΑΒ καὶ ἔχον τετμημένην προβολὴν $α'$ τεταγμένην δὲ προβολὴν $β''$, θὰ ἔχωμεν, κατὰ τἀνωτέρω

$$\frac{α}{α'}=\frac{β}{β''} \qquad (2)$$

Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν $β''=β'$.

Ἑπομένως καὶ τὸ ἄνυσμα Α΄Β΄΄ συμπίπτει μὲ τὸ Α΄Β΄. Δηλαδὴ τὰ ΑΒ, Α΄Β΄ εἶνε παράλληλα.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ὅτι,

γ΄) «***Ἵνα δύο ἀνύσματα εἶνε παράλληλα, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχουν τὰς συντεταγμένας αὐτῶν προβολὰς ἀναλόγους***».

δ΄) «***Ἵνα δύο ἀνύσματα εἶνε ὁμορρόπως ἢ ἀντιρρόπως ἴσα, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχουν τὰς ὁμωνύμους συντεταγμένας αὐτῶν προβολὰς ἴσας ἢ ἀντιθέτους***».

ε′) Πρόβλημα. «*Δοθέντων δύο σημείων* M_1 (x_1, y_1) M_2 (x_2, y_2), *νὰ εὑρεθῇ σημεῖον* M (x, y) *ἐπὶ τῆς εὐθείας* M_1 M_2, *ὥστε νὰ εἶνε*

$$\frac{(M_1\, M)}{(M\, M_2)} = \frac{k_2}{k_1} = \lambda\cdot$$

Ἐπειδὴ τὰ ἀνύσματα M_1 M $(x-x_1, y-y_1)$, MM_2 (x_2-x, y_2-y) εἶνε παράλληλα (§ 1, δ′) θὰ ἔχωμεν (ά)

$$\frac{x-x_1}{x_2-x} = \frac{y-y_1}{y_2-y} = \frac{k_2}{k_1}$$

Ἐκ τούτου εὑρίσκομεν

$$x = \frac{k_1\, x_1 + k_2\, x_2}{k_1 + k_2} = \frac{x_1 + \lambda\, x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{k_1\, y_1 + k_2\, y_2}{k_1 + k_2} = \frac{y_1 + \lambda\, y_2}{1+\lambda}$$

Ἂν εἶνε $k_1 = k_2$, θὰ ἔχωμεν $\boxed{x = \frac{x_1+x_2}{2},\ y = \frac{y_1+y_2}{2}}$

ἤτοι, «*αἱ συντεταγμέναι τοῦ μέσου ἀνύσματος ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ὁμωνύμων συντεταγμένων τῶν ἄκρων αὐτοῦ.*»

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1) Δοθέντων τῶν σημείων M_1 (x_1, y_1), M_2 (x_2, y_2) νὰ εὑρεθοῦν αἱ συντεταγμέναι τοῦ M (x, y) ἐπὶ τῆς εὐθείας M_1 M_2, ὥστε νὰ εἶνε $M_1 M : M M_2 = \frac{3}{3}$, ἢ $-\frac{1}{2}$ ἢ 0, 45.

2) Δοθέντων τῶν σημείων M_1 (x_1, y_1), M_2 (x_2, y_2), . . . , M_ν (x_ν, y_ν), κειμένων ἐπ' εὐθείας, εὕρετε σημεῖον M (x, y) ἐπ' αὐτῆς, ὥστε νὰ εἶνε

$$k_1\,(MM_1) + k_2\,(MM_2) + \ldots + K_\nu\,(MM_\nu) = 0.$$

3) Δίδεται τρίγωνον $M_1 M_2 M_3$ διὰ τῶν κορυφῶν του M_1 (x_1, y_1), M_2 $(x_2\, y_2)$, M_3 $(x_3\, y_3)$. Εὕρετε

ά) τὰς συντεταγμένας τῶν μέσων τῶν πλευρῶν του· β′ τὰς συντεταγμένας τῆς τομῆς τῶν διαμέσων του (εἰς τὰ $^2/_3$ τῶν διαμέσων του ἀπὸ τῶν κορυφῶν).

§ 18. Περὶ συντελεστοῦ διευθύνσεως ἀνύσματος καὶ εὐθείας.—

ά) Καλοῦμεν *συντελεστὴν διευθύνσεως* ἢ (*γωνιακὸν συντελεστὴν*) ἀνύσματός τινος ὡς πρὸς ἄξονας συντεταγμένων oxy τὸν λόγον τῆς τεταγμένης προβολῆς τοῦ ἀνύσματος πρὸς τὴν τετμημένην αὐτοῦ προβολήν. Οὕτω τοῦ ἀνύσματος AB (α, β) ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως θὰ εἶνε ἴσος μὲ $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$.

β′) Ἐπειδή, ἵνα δύο ἀνύσματα AB(α, β), A′B′ (ά, β′) εἶνε παράλληλα, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'}$, ἢ $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta'}{\alpha'}$,

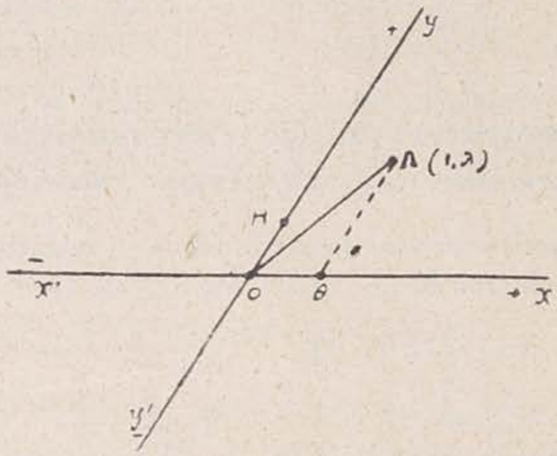
ἕπεται ὅτι «***ἵνα δύο ἀνύσματα εἶνε παράλληλα, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχουν συντελεστὰς διευθύνσεως ἴσους***».

γ') Καλοῦμεν συντελεστὴν διευθύνσεως εὐθείας τινὸς τὸν συντελεστὴν διευθύνσεως ἀνύσματος παραλλήλου πρὸς αὐτήν.

Ἑπομένως

δ') «Ἵνα δύο εὐθεῖαι εἶνε παράλληλοι, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχουν συντελεστὰς διευθύνσεως ἴσους».

ε') Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν ἄνυσμα ἔχον συντελεστὴν διευθύνσεως λ ὡς πρὸς ἄξονας οχy, ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν ἄνυσμα οΛ (σχ. 33), ἔχον συντεταγμένας προβολὰς (1, λ).



(Σχ. 33)

ς') Παρατηρητέον ὅτι ὁ ἄξων τῶν x ἔχει συντελεστὴν διευθύνσεως λ = ο. Ὅταν εὐθεῖά τις κεῖται ἐντὸς τῶν γωνιῶν xoy καὶ x'oy', διερχομένη διὰ τοῦ ο, ἔχει τὸ λ θετικόν, ἂν δὲ κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας x'oy, καὶ τῆς xoy' ἔχει λ ἀρνητικόν. Ὅταν τὸ ἄνυσμα οΛ στρέφεται περὶ τὸ ο ἐν τῇ γωνίᾳ xoy καὶ διευθύνεται ἐκ τῆς οx πρὸς τὴν οy ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως αὐτοῦ λ αὐξάνει συνεχῶς ἀπὸ τοῦ ο μέχρι τοῦ $+\infty$. Ἂν στρέφεται περὶ τὸ ο καὶ διευθύνεται ἐκ τῆς οx πρὸς τὴν οy', τὸ λ ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ τοῦ ο μέχρι τοῦ $-\infty$. Ὅταν εὐθεῖα διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς καὶ στρεφομένη διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος τῶν y, ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως αὐτῆς μεταπίπτει ἐκ τοῦ $+\infty$ εἰς τὸ $-\infty$, ἂν κινῆται πρὸς τὴν οy, καὶ ἐκ τοῦ $-\infty$ εἰς τὸ $+\infty$, ἂν κινῆται πρὸς τὴν οy'.

Ἡ μὲν εὐθεῖα, ἥτις διχοτομεῖ τὰς γωνίας xoy, x'oy' ἔχει λ=1, ἡ δὲ διχοτομοῦσα τὰς γωνίας x'oy, xoy' ἔχει λ = — 1.

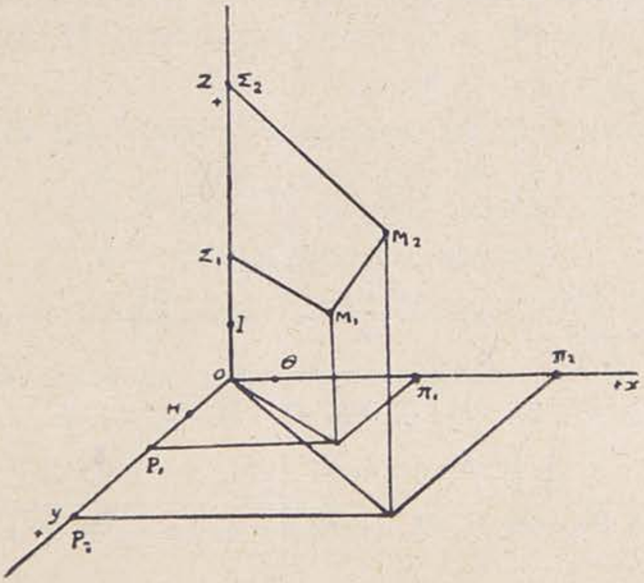
§ **19. Ὁρισμὸς τῆς θέσεως ἀνύσματος ἐν τῷ διαστήματι.**—

α΄) Ἔστωσαν M_1 (x_1, y_1, z_1), M_2 (x_2, y_2, z_2) τὰ ἄκρα ἀνύσματος M_1 M_2. Ζητεῖται νὰ ὁρισθῇ ἀλγεβρικῶς τὸ ἄνυσμα τοῦτο (σχ. 34).

Ἂν προβάλωμεν τὰ ἄκρα αὐτοῦ M_1 καὶ M_2 ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x παραλλήλως πρὸς τὸ ἐπίπεδον yz, αἱ προβολαὶ αὐτῶν Π_1, Π_2 ὁρίζουν τὸ ἄνυσμα Π_1 Π_2, προβολὴν τοῦ M_1 M_2 ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x. Ὁ ἀριθμὸς $(\Pi_1\ \Pi_2) = \alpha$ καλεῖται ***τετμημένη προβολὴ*** τοῦ ἀνύσματος M_1 M_2. Κατ' ἀνάλογον τρόπον ὁ ἀριθμὸς $(P_1\ P_2) = \beta$ καλεῖται ***τεταγμένη προβολὴ*** τοῦ M_1 M_2, καὶ ὁ $(\Sigma_1\ \Sigma_2) = \gamma$ ***κατηγμένη προβολὴ*** αὐτοῦ, ἐνῶ P_1 P_2 εἶνε προβολὴ τοῦ M_1 M_2 ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y παραλλήλως τῷ ἐπιπέδῳ xz καὶ Σ_1 Σ_2 ἡ προβολὴ αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν z παραλλήλως τῷ ἐπιπέδῳ xy. Οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ καλοῦνται ***συντεταγμέναι προβολαὶ*** τοῦ ἀνύσματος M_1 M_2, γράφομεν δὲ συμβολικῶς M_1 M_2 (α, β, γ).

Εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε

$$(\Pi_1\Pi_2)=\alpha=x_2-x_1$$
$$(P_1\ P_2)=\beta=y_2-y_1$$
$$(\Sigma_1\ \Sigma_2)=\gamma=z_2-z_1$$



(Σχ. 34)

β΄) Διὰ τῶν ἀνωτέρω τύπων εὑρίσκομεν τὰς συντεταγμένας τοῦ ἑτέρου τῶν ἄκρων ἀνύσματος, ὅταν γνωρίζωμεν τὰς συντεταγμένας προβολὰς τοῦ ἀνύσματος καὶ τὰς συντεταγμένας τοῦ ἄλλου ἄκρου αὐτοῦ.

γ΄) Ἂν δίδεται ἡ ἀρχὴ M_1 (x_1, y_1) ἀνύσματος καὶ αἱ συντεταγμέναι αὐτοῦ προβολαί (α, β, γ), εὑρίσκομεν τὸ πέρας αὐτοῦ M_2, φέροντες ἐκ τοῦ M_1 παράλληλως τῷ ἄξονι τῶν x ἄνυσμα M_1K, ὥστε νὰ εἶνε $(M_1 K) = \alpha$· ἐκ τοῦ K φέρομεν ἄνυσμα ΚΛ παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν y, ὥστε νὰ εἶνε $(K\Lambda) = \beta$· ἐκ τοῦ Λ φέρομεν ἄνυσμα ΛM_2 παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν z, καὶ ὥστε νὰ εἶνε $(\Lambda M_2) = \gamma$. Τὸ M_2 εἶνε τὸ ζητούμενον σημεῖον. Διότι οὕτω, τὸ ἄνυσμα $M_1 M_2$ ἔχει συντεταγμένας προβολὰς (α, β, γ).

§ 20. Ἰδιότητες παραλλήλων ἀνυσμάτων ἐν τῷ διαστήματι.—

ά) Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι «***δύο ἀνύσματα παράλληλα ἔχουν τὰς ὁμωνύμους συντεταγμένας αὐτῶν προβολὰς ἀναλόγους· ὁ δὲ λόγος τῶν ὁμωνύμων συντεταγμένων προβολῶν ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν μηκῶν τῶν ἀνυσμάτων***». Καὶ τὸ ἀντίστροφον τούτου ἀληθεύει, ἀποδεικνύεται δ' εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

β́) Ἑπομένως, «***ἵνα δύο ἀνύσματα εἶνε παράλληλα, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ συντεταγμέναι αὐτῶν προβολαὶ νὰ εἶνε ἀνάλογοι***».

γ́) «***Ἵνα δύο ἀνύσματα εἶνε ὁμορρόπως ἢ ἀντιρρόπως ἴσα, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχουν τὰς ὁμωνύμους αὐτῶν συντεταγμένας προβολὰς ἴσας ἢ ἀντιθέτους***».

δ́) Δίδονται δύο σημεῖα $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ σημεῖον $M(x, y, z)$ ἐπὶ τῆς εὐθείας $M_1 M_2$, ὥστε νὰ εἶνε $(M_1 M) : (MM_2) = k_2 : k_1 = \lambda$.

Διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος (ά) ἔχομεν

$$\frac{x-x_1}{x_2-x} = \frac{y-y_1}{y_2-y} = \frac{z-z_1}{z_2-z} = \frac{k_2}{k_1}$$

ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν, ἂν τεθῇ $k_2 : k_1 = \lambda$,

$$x = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2}{k_1 + k_2} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1) Εὕρετε τὰς συντεταγμένας προβολὰς ἀνύσματος $M_1 M_2$, ἂν εἶνε M_1 (3, o, —2), M_2 (2, —3, 4)· M_1 (o, o, —4), M_2 (—3, —1, —4)· $M_1\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}\right)$, M_2 (—3, 2, — 5).

2) Εὕρετε τὸ ἄνυσμα $M_1 M_2$ (α=2, β=4, γ= — 3) ἂν εἶνε M_1 (4, —2, 3), ἢ M_2 (—4, —5, 7).

3) Κατασκευάσατε τὸ ἄνυσμα $M_1 M_2$, ἂν εἶνε α=2, β= — 3, γ= — 1 καὶ M_2 (1, — 1, — 1).

4) Εὕρετε τὸ σημεῖον M (x, y) ἐπὶ τῆς εὐθείας $M_1 M_2$, ἂν δίδεται ὅτι $M_1\left(\frac{3}{2}, 2, -4\right)$, M_2(— 1, 4, — 3) καὶ εἶνε $(M_1M) : (MM_2) = -5$, ἢ $4\frac{1}{2}$, ἢ 2.

5) Εὕρετε τὰς συντεταγμένας τοῦ μέσου M ἀνύσματος $M_1 M_2$, ἂν εἶνε $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

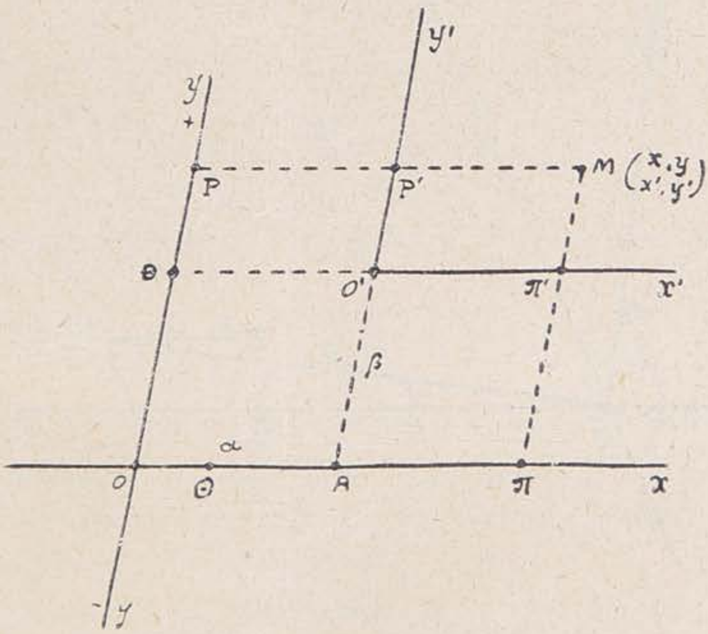
Περὶ ἀλλαγῆς τῶν ἀξόνων τῶν συντεταγμένων.

§ **21. Ἀλλαγὴ ἀξόνων ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.**—

ά) Ἐνίοτε εὐκολύνεται ἡ λύσις προβλήματός τινος, ἐὰν ἀντὶ τῶν ἀξόνων, ὡς πρὸς τοὺς ὁποίους ἔχομεν τὰς συντεταγμένας τῶν σημείων θεωρουμένου τινὸς σχήματος, λαμβάνωμεν ἄλλους τοιούτους, κειμένους ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ μετὰ τῶν πρώτων. Ἐν τῇ περιπτώσει αὐτῇ εἶνε ἀνάγκη νὰ γνωρίζωμεν τύπους, παρέχοντας τὰς συντεταγμένας οἱουδήποτε σημείου τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς ἓν ἐκ τῶν συστημάτων τῶν ἀξόνων, ὅταν εἶνε γνωσταὶ αἱ συντεταγμέναι αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸ ἄλλο σύστημα. Ὡς πρὸς τὴν θέσιν παλαιῶν καὶ νέων ἀξόνων διακρίνομεν τὰς ἑξῆς τρεῖς περιπτώσεις.

β') «***Ὅταν οἱ νέοι ἄξονες*** o'x'y' ***εἶνε ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τοὺς παλαιοὺς*** oxy (σχ. 35)».

Ἔστωσαν (α, β) αἱ συντεταγμέναι τῆς νέας ἀρχῆς ό ὡς πρὸς τοὺς παλαιοὺς ἄξονας, (x, y) αἱ συντεταγμέναι σημείου τινὸς Μ τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὸ σύστημα oxy καὶ (x', y') ὡς πρὸς τὸ νέον o'x'y'. Ἂν Α εἶνε ἡ προβολὴ τοῦ ό ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y, Π καὶ Π' αἱ προβολαὶ τοῦ Μ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ τῶν x' παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y, θὰ ἔχωμεν :



(Σχ. 35)

$$(\text{o}\Pi) = (\text{oA}) + (\text{A}\Pi)$$

ἢ

$$(\text{o}\Pi) = (\text{oA}) + (\text{ó}\Pi')$$

καὶ $$x = \alpha + x'.$$

Ὁμοίως ἔχομεν

$$(\Pi M) = (\Pi\Pi') + (\Pi' M)$$

ἢ $$(\Pi M) = (A o') + (\Pi' M)$$

καὶ $$y = \beta + y'.$$

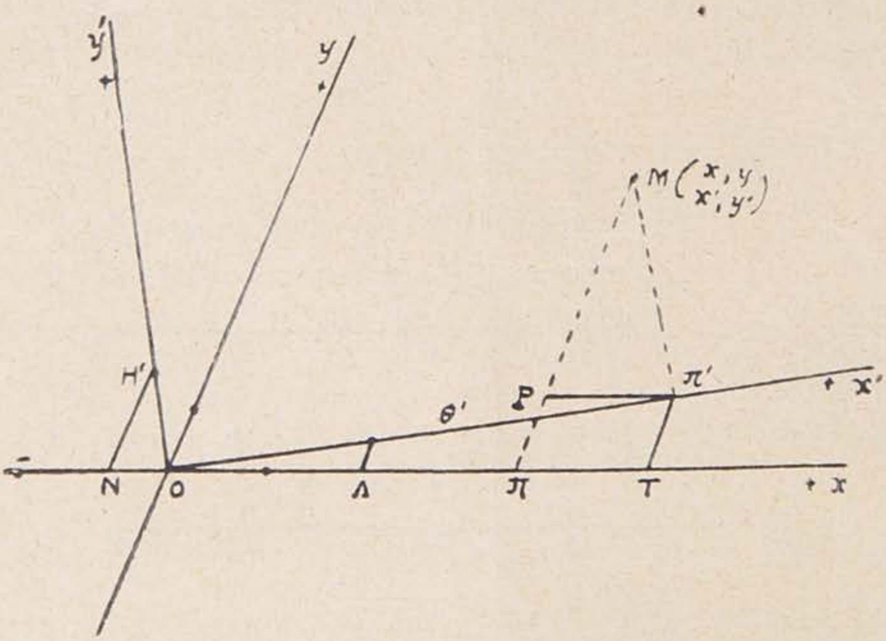
Ἐπομένως αἱ συντεταγμέναι (x, y) τυχόντος σημείου M τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὸ σύστημα oxy συνδέονται μὲ τὰς συντεταγμένας αὐτοῦ (x′, y′) ὡς πρὸς τὸ σύστημα o′x′y′ διὰ τῶν τύπων

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x' + \alpha \\ y &= y' + \beta \end{aligned}}$$

ἢ διὰ τῶν $$\left\{ \begin{aligned} x' &= x - \alpha \\ y' &= y - \beta. \end{aligned} \right.$$

γ′)« Ὅταν οἱ νέοι ἄξονες ox′, oy′ **ἔχουν διευθύνσεις διαφόρους τῶν παλαιῶν** ox, oy **ἀλλ᾽ ἡ ἀρχὴ αὐτῶν συμπίπτῃ μὲ τὴν τῶν παλαιῶν (σχ. 36)».**

Ἔστωσαν (x, y) αἱ συντεταγμέναι σημείου τινὸς M ὡς πρὸς τὸ σύστημα oxy καὶ (x′, y′) ὡς πρὸς τὸ ox′y′.



(Σχ. 36)

Λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Θ′ καὶ H′ ἐπὶ τοῦ ox′ καὶ τοῦ oy′ ἀντιστοίχως, ὥστε νὰ εἶνε (oΘ′) = 1, (oH′) = 1.

Ἔστωσαν $(\vartheta'_1, \vartheta'_2)$ αἱ συντεταγμέναι τοῦ Θ′ καὶ (η'_1, η'_2) αἱ τοῦ H′ ὡς πρὸς τὸ σύστημα oxy.

Προβάλλομεν τὸ Μ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ τῶν x′ ἀντιστοίχως παραλλήλως πρὸς τὸν oy καὶ oy′. Ἔστωσαν Π καὶ Π′ αἱ προβολαὶ αὗται, Τ δὲ ἡ προβολὴ τοῦ Π′ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x παραλλήλως τῷ ἄξονι τῶν y καὶ Ρ ἐπὶ τῆς ΠΜ παραλλήλως τῷ τῶν x.

Ἔχομεν
$$(o\Pi) = (oT) + (T\Pi),$$
$$(\Pi M) = (\Pi P) + (PM).$$

Εἶνε
$$(o\Pi) = x,\ (o\Pi') = x',\ (\Pi M) = y,\ (\Pi' M) = y',$$
$$(o\Lambda) = \vartheta'_1,\ (\Lambda\Theta') = \vartheta'_2,\ (oN) = \eta'_1,\ (NH') = \eta'_2.$$

Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων οΛΘ′ καὶ οΤΠ′ ἔχομεν
$$\frac{(oT)}{(o\Lambda)} = \frac{(T\Pi')}{(\Lambda\Theta')} = \frac{(o\Pi')}{(o\Theta')}$$
ἢ
$$\frac{(oT)}{\vartheta'_1} = \frac{(T\Pi')}{\vartheta'_2} = \frac{x'}{1}$$
ἐξ ὧν ἕπεται $(oT) = \vartheta'_1\, x',\ (T\Pi') = (\Pi P) = \vartheta'_2\, x'.$

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων οΝΗ′ καὶ Π′ΡΜ ἔχομεν ὅτι
$$(\Pi' P) = (T\Pi) = \eta'_1\, y',\ (PM) = \eta'_2\, y'.$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς τῶν (οΠ), (οΤ) καὶ (ΤΠ) εἰς τὴν ἰσότητα
$$(o\Pi) = (oT) + (T\Pi),$$
εὑρίσκομεν $x = \vartheta_1'\, x' + \eta'_1\, y'.$

Ἐπίσης, ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς τῶν (ΠΜ), (ΠΡ) καὶ (ΡΜ) εἰς τὴν ἰσότητα
$$(\Pi M) = (\Pi P) + (PM),$$
ἔχομεν $y = \vartheta'_2\, x' + \eta'_2\, y'.$

Ἤτοι ἔχομεν τοὺς ἑξῆς τύπους ἀλλαγῆς τῶν ἀξόνων ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ
$$\left|\begin{array}{l} x = \vartheta'_1\, x' + \eta'_1\, y' \\ y = \vartheta'_2\, x' + \eta'_2\, y' \end{array}\right| \qquad (1)$$

Οἱ τύποι οὗτοι δίδουν τὰς συντεταγμένας (x, y) τοῦ σημείου Μ ὡς πρὸς τοὺς παλαιοὺς ἄξονας, ὅταν γνωρίζωμεν τὰς συντεταγμένας αὐτοῦ (x′, y′) ὡς πρὸς τοὺς νέους, καθὼς καὶ τὰς συντεταγμένας τῶν σημείων Θ′ καὶ Η′ ὡς πρὸς τὸ σύστημα οxy.

ϐ′) Πρὸς εὕρεσιν τῶν x′, y′ διὰ τῶν x, y ἢ λύομεν τὸ ἀνωτέρω σύστημα τῶν ἐξισώσεων ὡς πρὸς x′, y′, ἤ, ἐπειδὴ τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶνε ἀνάλογον πρὸς τὸ προηγούμενον, θὰ ἔχωμεν
$$\left|\begin{array}{l} x' = \vartheta_1\, x + \eta_1\, y \\ y' = \vartheta_2\, x + \eta_2\, y, \end{array}\right.$$

ἐν ᾧ $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ καὶ (η_1, η_2) εἶνε αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων Θ καὶ Η, κειμένων ἐπὶ τῶν οχ καὶ ογ, ὡς πρὸς τὸ σύστημα οχ΄γ΄, εἶνε δὲ $(o\Theta) = 1$, $(oH) = 1$.

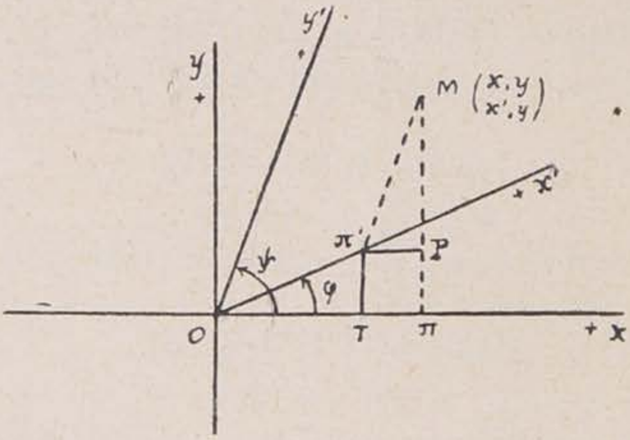
ε΄) «*Μετάβασις ἀπὸ ὀρθογωνίου συστήματος ἀξόνων εἰς ἄλλο πλαγιογώνιον*».

Ἔστω ὅτι τὸ μὲν σύστημα οχγ εἶνε ὀρθογώνιον, τὸ δὲ οχ΄γ΄ πλαγιογώνιον. Ἔστω ὅτι ἡ θετικὴ φορὰ ἐπὶ τῶν νέων ἀξόνων εἶνε ἡ ἐκ τοῦ ο πρὸς τὸ χ΄ καὶ πρὸς τὸ γ΄ ἀντιστοίχως καὶ ὅτι φ καὶ ψ παριστάνουν τὰς γωνίας χοχ΄ καὶ χογ΄ (σχ. 37). Θὰ ἔχωμεν κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην

$$\vartheta'_1 = \text{συν}\,\varphi,\ \vartheta'_2 = \text{ημ}\varphi,\ \eta'_1 = \text{συν}\,\psi,\ \eta'_2 = \text{ημ}\psi.$$

Ἑπομένως οἱ ἀνωτέρω τύποι (1) γίνονται

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x'\ \text{συν}\,\varphi + y'\ \text{συν}\,\psi \\ y &= x'\ \text{ημ}\varphi + y'\ \text{ημ}\,\psi \end{aligned}} \qquad (2)$$



(Σχ. 37)

ς΄) Ἐὰν εἶνε καὶ $\psi = \frac{\pi}{2} + \varphi$, τὰ δύο συστήματα οχγ καὶ οχ΄γ΄ εἶνε ὀρθογώνια, καὶ τὸ δεύτερον προκύπτει ἐκ τοῦ πρώτου, ἂν τοῦτο στραφῇ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτοῦ καὶ περὶ τὸ ο κατὰ γωνίαν φ. Κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην ἔχομεν

$$\vartheta'_1 = \text{συν}\,\varphi,\ \vartheta'_2 = \text{ημ}\varphi,$$

$$\eta'_1 = \text{συν}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\,\text{ημ}\varphi,\ \eta'_2 = \text{ημ}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \text{συν}\,\varphi.$$

Οὕτω οἱ τύποι ἀλλαγῆς τῶν ἀξόνων θὰ εἶνε

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x'\ \text{συν}\varphi - y'\ \text{ημ}\varphi \\ y &= x'\ \text{ημ}\varphi + y'\ \text{συν}\varphi \end{aligned}} \qquad (3)$$

ζ') (Γενικὴ περίπτωσις). «*Ὅταν οἱ νέοι ἄξονες* ὀx', ὀy' *ἔχουν ἀρχὴν καὶ διευθύνσεις διαφόρους τῶν παλαιῶν*».

Κατὰ τὴν περίπτωσιν αὐτὴν μεταχειριζόμεθα βοηθητικὸν σύστημα ἀξόνων ο'x'',ο'y'', ἐχόντων ἀρχὴν μὲν τὸ ὀ (α,β), ὁμορρόπων δὲ πρὸς τοὺς παλαιοὺς ἄξονας ἀντιστοίχως οx καὶ οy (σχ. 38).

Ἂν (x, y), (x', y'), (x'', y'') εἶνε αἱ συντεταγμέναι σημείου τινὸς Μ ὡς πρὸς τοὺς παλαιοὺς ἄξονας, ὡς πρὸς τοὺς νέους καὶ τοὺς βοηθητικοὺς ἀντιστοίχως, θὰ ἔχωμεν διὰ τὰ συστήματα οxy καὶ ο'x''y''

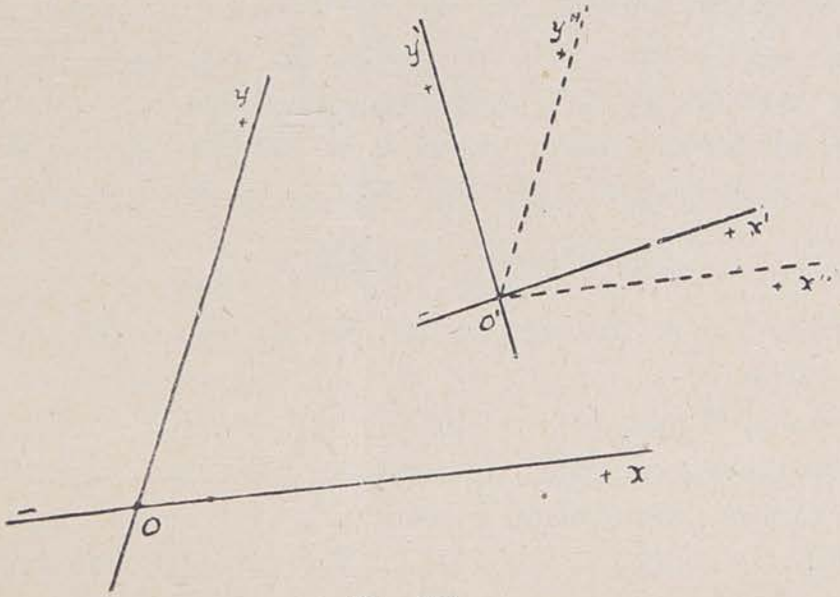
$$\begin{cases} x = x'' + \alpha \\ y = y'' + \beta, \end{cases}$$

καὶ διὰ τὰ ο'x''y'', ο'x'y'

$$\begin{cases} x'' = \vartheta_1' x' + \eta_1' y' \\ y'' = \vartheta_2' x' + \eta_2' y'. \end{cases}$$

Ἐκ τούτων δ' εὑρίσκομεν διὰ τὰ οxy καὶ ὀx'y' τοὺς τύπους

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \vartheta'_1 x' + \eta'_1 y' + \alpha \\ y &= \vartheta'_2 x' + \eta'_2 y' + \beta \end{aligned}}$$



(Σχ. 38)

Παρατηρητέον ὅτι οἱ τύποι οὗτοι τῆς ἀλλαγῆς τῶν ἀξόνων, καθὼς καὶ οἱ ἀνωτέρω εὑρεθέντες εἶνε πρωτοβάθμιοι ὡς πρὸς x, y καὶ **x'**, y'.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1) Δείξατε ὅτι οἱ τύποι $x = x' + \alpha$, $y = y' + \beta$ ἰσχύουν οἱανδήποτε θέσιν καὶ ἂν ἔχῃ ἡ νέα ἀρχὴ ὀ καὶ τὸ σημεῖον Μ.

2) Ἂν αἱ ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι (x, y) σημείου τινὸς συνδέωνται διὰ τῆς σχέσεως $x^2 + y^2 = \rho^2$, εἰς τίνα τρέπεται αὕτη, ἂν ληφθῇ ὡς ἀρχὴ νέων ἀξόνων, ὁμορρόπων πρὸς τοὺς παλαιούς, τὸ ὀ (α, β);

3) Αἱ ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι σημείων ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν $x^2+y^2=\rho^2$. Εἰς τίνα τρέπεται αὕτη, ἂν λάβωμεν νέους ἄξονας ox', oy' διχοτομοῦντας τὰς γωνίας xoy, $x'oy$ τῶν παλαιῶν ἀξόνων;

4) Ἂν εἰς ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων ἔχωμεν $x^2-y^2=\alpha^2$, εἰς τίνα ἐξίσωσιν θὰ τραπῇ αὕτη, ἂν λάβωμεν ὡς νέους ἄξονας τὰς εὐθείας, αἵτινες διχοτομοῦν τὰς γωνίας xoy καὶ $x'oy$ τῶν παλαιῶν;

5) Εὕρετε τοὺς τύπους $x=x'$ συνφ $+\,y'$ συνψ, $x=x'$ ημφ$+y'$ ημψ κατ' εὐθεῖαν, τῇ βοηθείᾳ τοῦ σχήματος.

6) Εἰς ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων αἱ συντεταγμέναι σημείου ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$. Λάβετε νέον σύστημα ἀξόνων πλαγιογώνιον $ox'y'$, ὥστε νὰ εἶνε γων $xox'=\varphi$, καὶ γων $xoy'=\psi$, ἐνῷ εἶνε καὶ

$$\frac{\text{συνφ. συνψ}}{\alpha^2}+\frac{\text{ημφ. ημψ}}{6^2}=o.$$

Δείξατε ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις τρέπεται εἰς τὴν $\frac{x'^2}{\alpha'^2}+\frac{y^2}{6'^2}=1$, ἂν τεθῇ

$$\frac{\text{συν}^2\varphi}{\alpha^2}+\frac{\text{ημ}^2\varphi}{6^2}=\frac{1}{\alpha'^2},\quad \frac{\text{συν}^2\psi}{\alpha^2}+\frac{\text{ημ}^2\psi}{6^2}=\frac{1}{6'^2}.$$

§ 22. Ἀλλαγὴ ἀξόνων ἐν τῷ διαστήματι.—

α') Ἂν οἱ νέοι ἄξονες ox', oy', oz' εἶνε παράλληλοι πρὸς τοὺς παλαιοὺς ox, oy, oz, αἱ συντεταγμέναι τῆς νέας ἀρχῆς o ὡς πρὸς τὸ σύστημα $oxyz$ εἶνε (α, β, γ), παραστήσωμεν δὲ διὰ (x, y, z) καὶ (x', y', z') τὰς συντεταγμένας τυχόντος σημείου Μ τοῦ διαστήματος ὡς πρὸς τὸ παλαιὸν καὶ τὸ νέον σύστημα τῶν ἀξόνων, εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι

$$\boxed{x=x'+\alpha,\ y=y'+\beta,\ z=z'+\gamma}$$

6') Ἔστω ὅτι οἱ νέοι ἄξονες ox', oy', oz' ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀρχὴν μὲ τοὺς παλαιοὺς ox, oy, oz (σχ. 39) καὶ ἔχουν διευθύνσεις διαφόρους ἐκείνων. Παριστάνομεν διὰ $(\vartheta'_1, \vartheta'_2, \vartheta'_3)$, $(\eta'_1, \eta'_2, \eta'_3)$, $(\iota'_1, \iota'_2, \iota'_3)$ τὰς συντεταγμένας ὡς πρὸς τὸ σύστημα $oxyz$ τῶν σημείων Θ', Η' καὶ Ι', κειμένων ἀντιστοίχως ἐπὶ τοῦ ox', oy' καὶ oz' καὶ ὥστε νὰ εἶνε $(o\Theta')=1$, $(oH')=1$, $(oI')=1$. Ἔστωσαν (x, z, y) καὶ (x', y', z') αἱ συντεταγμέναι σημείου τινὸς Μ τοῦ διαστήματος ὡς πρὸς τὸ σύστημα $oxyz$ καὶ $ox'y'z'$ ἀντιστοίχως.

Ἤτοι ἔστω $(o\Pi)=x$, $(\Pi P)=y$, $(PM)=z$,

$(o\Pi')=x'$, $(\Pi'P')=y'$, $(P'M)=z'$.

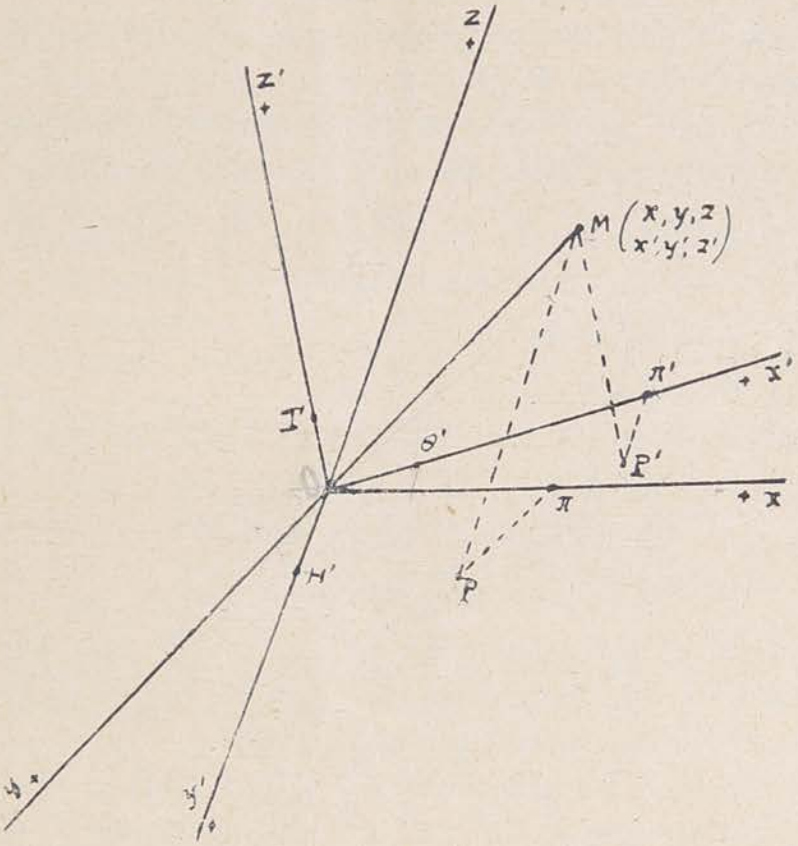
Ἔχομεν $oM = o\Pi' \# \Pi'P' \# P'M$.

Ἑπομένως καὶ (§ 10, α')

$$(1)\begin{cases} \text{προβ.}\,(oM)_x = \text{προβ.}\,(o\Pi')_x + \text{προβ.}\,(\Pi'P')_x + \text{προβ.}\,(P'M)_x \\ \text{προβ.}\,(oM)_y = \text{προβ.}\,(o\Pi')_y + \text{προβ.}\,(\Pi'P')_y + \text{προβ.}\,(P'M)_y \\ \text{προβ.}\,(oM)_z = \text{προβ.}\,(o\Pi')_z + \text{προβ.}\,(\Pi'P')_z + \text{προβ.}\,(P'M)_z \end{cases}$$

ἐνῷ αἱ πρῶται προβολαὶ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x γίνονται παραλλήλως τῷ ἐπιπέδῳ yz, αἱ δεύτεραι ἐπὶ τοῦ y παραλλήλως τῷ xz, αἱ δὲ τρίται ἐπὶ τοῦ τῶν z παραλλήλως τῷ xy.

Θεωροῦντες τὰ παράλληλα ἀνύσματα oΘ′ καὶ oΠ′ ἔχομεν (§ 20.α′)



(Σχ. 39)

$$\frac{\text{προβ.}\,(o\Pi')\,x}{\text{προβ.}\,(o\Theta')x = \vartheta_1'} = \frac{(o\Pi')}{(o\Theta')} = \frac{x'}{1}$$

Ἄρα προβ. $(o\Pi')_x = \vartheta_1'\,x'$.

Κατ᾽ ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκομεν

προβ. $(o\Pi')_y = \vartheta_2'\,x'$, προβ. $(o\Pi')_z = \vartheta_3'\,x'$.

Θεωροῦντες τὰ παράλληλα ἀνύσματα oH′ καὶ Π′P′ εὑρίσκομεν ὁμοίως

προβ. $(\Pi'P')_x = \eta_1'\,y'$, προβ. $(\Pi'P')_y = \eta_2'y'$, προβ. $(\Pi'P')_z = \eta_3'\,y'$.

Τέλος ἐκ τῶν παραλλήλων ἀνυσμάτων oΓ καὶ P′M εὑρίσκομεν

προβ. $(P'M)_x = \iota_1'\,z'$, προβ. $(P'M)_y = \iota_2'\,z'$, προβ. $(P'M)_z = \iota_3'z'$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς ἀνωτέρω τιμὰς τῶν προβολῶν τῶν $o\Pi'$, $\Pi'P'$, $P'M$ εἰς τοὺς τύπους (1) ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι εἶνε

$$\text{προβ.}\ (oM)_x = x,\ \text{προβ.}\ (oM)_y = y,\ \text{προβ.}\ (oM)_z = z,$$

εὑρίσκομεν τοὺς ἑξῆς τύπους ἀλλαγῆς τῶν ἀξόνων

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \vartheta'_1 x' + \eta'_1 y' + \iota'_1 z' \\ y &= \vartheta'_2 x' + \eta'_2 y' + \iota'_2 z' \\ z &= \vartheta'_3 x' + \eta'_3 y' + \iota'_3 z' \end{aligned}} \qquad (2)$$

γ') Ἂν τὸ παλαιὸν καὶ τὸ νέον σύστημα τῶν ἀξόνων εἶνε ὀρθογώνια, παραστήσωμεν δὲ διὰ τῶν (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3) τὰ συνημίτονα τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν τὰ ἀνύσματα $o\Theta'$, oH', oI' ἀντιστοίχως μὲ τοὺς ἄξονας ox, oy, oz, θὰ ἔχωμεν (§ 9,α')

$$\vartheta_1' = (o\Theta').\, a_1,\quad \vartheta_2' = (o\Theta').\, b_1,\quad \vartheta_3' = (o\Theta').\, c_1$$

ἢ $\quad \vartheta'_1 = a_1,\ \vartheta'_2 = b_1,\ \vartheta'_3 = c_1.$

Ὁμοίως $\quad \eta'_1 = a_2,\ \eta'_2 = b_2,\ \eta'_3 = c_2,$

$\qquad\qquad \iota'_1 = a_3,\ \iota'_2 = b_3,\ \iota'_3 = c_3.$

Τὰς τιμὰς ταύτας ἀντικαθιστῶντες εἰς τοὺς τύπους (2) εὑρίσκομεν

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a_1 x' + a_2 y' + a_3 z' \\ y &= b_1 x' + b_2 y' + b_3 z' \\ z &= c_1 x' + c_2 y' + c_3 z' \end{aligned}} \qquad (3)$$

δ') Ἂν ζητῆται νὰ ἐκφράσωμεν τὰ (x', y', z') διὰ τῶν x, y, z, παρατηροῦμεν ὅτι τὰ συνημίτονα τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζει τὸ ἄνυσμα $o\Theta$ ($(o\Theta) = 1$) τοῦ ox μὲ τοὺς ἄξονας ox', oy', oz' εἶνε (a_1, a_2, a_3), τοῦ δὲ oH ($(oH) = 1$) καὶ τοῦ oI ($(oI) = 1$) τῶν oy καὶ oz μὲ τοὺς αὐτοὺς ἄξονας ox', oy', oz' εἶνε ἀντιστοίχως (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3). Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν

$$\begin{aligned} x' &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ y' &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ z' &= a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{aligned} \qquad (4)$$

ε') Ἂν οἱ νέοι ἄξονες $óx'$, $óy'$, $óz'$ ἔχουν ἀρχὴν $ó$ (α, β, γ) καὶ διευθύνσεις διαφόρους τῶν παλαιῶν ox, oy, oz, μεταχειριζόμεθα βοηθητικὸν σύστημα ἀξόνων $óx''$, $óy''$, $óz''$ ὁμορρόπων ἀντιστοίχως πρὸς τοὺς παλαιοὺς ἄξονας. Ἂν (x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z'') εἶνε αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου M ὡς πρὸς τοὺς παλαιοὺς ἄξονας, ὡς πρὸς τοὺς νέους, καὶ ὡς πρὸς τοὺς βοηθητικοὺς ἀντιστοίχως, θὰ ἔχωμεν

$$x = \alpha + x'',\quad y = \beta + y'',\quad z = \gamma + z''$$

$x'' = \vartheta'_1 x' + \eta'_1 y' + \iota' z', \; y'' = \vartheta'_2 x' + \eta'_2 y' + \iota'_2 z',$
$z'' = \vartheta'_3 x' + \eta'_3 x' + \iota'_3 z',$
ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν τοὺς ἑξῆς γενικοὺς τύπους

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \vartheta'_1 x' + \eta'_1 y' + \iota'_1 z' + \alpha \\ y &= \vartheta'_2 x' + \eta'_2 y' + \iota'_2 z' + \beta \\ z &= \vartheta'_3 x' + \eta'_3 y' + \iota'_3 z' + \gamma \end{aligned}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1) Δείξατε ὅτι οἱ τύποι ἀλλαγῆς συντεταγμένων $x = \alpha + x'$ $y = 6 + y'$, $z = \gamma + z'$ ἰσχύουν εἰς οἱανδήποτε τῶν 8 τριέδρων γωνιῶν τοῦ χώρου καὶ ἂν εὑρίσκωνται τὰ σημεῖα ὁ καὶ Μ.

2)Εὕρετε τοὺς τύπους ἀλλαγῆς ὀρθογωνίων συντεταγμένων, ἂν ὁ νέος ἄξων Oz συμπέσῃ μὲ τὸν παλαιὸν z oz', ἐπομένως ἂν οἱ νέοι ἄξονες προκύπτουν ἐκ τῶν παλαιῶν διὰ στροφῆς των περὶ τὸν ἄξονα τῶν z κατὰ γωνίαν φ (ἐν τῷ xy).

3) Ἂν εἰς ὀρθογώνιον σύστημα συντεταγμένων αἱ συντεταγμέναι σημείου ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν $x^2+y^2+z^2=\rho^2$, εἰς τίνα μεταβάλλεται αὔτη, ἂν ἀλλάξωμεν τὸ σύστημα τῶν ἀξόνων διὰ παραλλήλου μεταφορᾶς τοῦ πρώτου;

4) Δείξατε ὅτι τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (2καὶ 3) ἰσχύει, καὶ ὅταν τὸ μὲν παλαιὸν σύστημα τῶν ἀξόνων εἶνε ὀρθογώνιον, τὸ δὲ νέον πλαγιογώνιον. ἔχουν δὲ τὴν αὐτὴν ἀρχήν

5) Αἱ ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι (x, y, z) σημείου Μ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{6^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$. Εἰς τίνα ἐξίσωσιν τρέπεται αὔτη, ἂν (x', y', z') εἶνε αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου ὡς πρὸς νέον σύστημα πλαγιογώνιον, ἔχον τὴν αὐτὴν ἀρχὴν μὲ τὸ παλαιόν;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

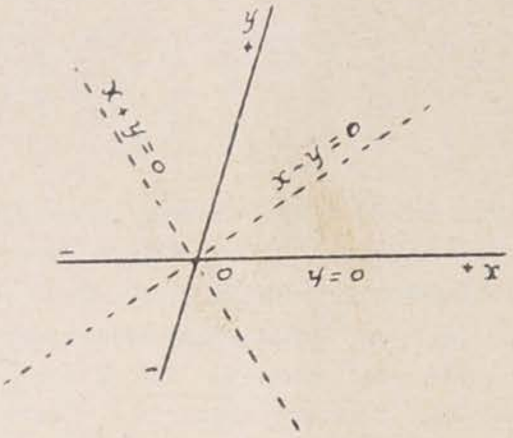
Περὶ ἐξισώσεων εὐθειῶν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

§ 23. Ὁρισμοί.—

α΄) Ἔστωσαν ἄξονες συντεταγμένων οχy ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. Ἐπειδὴ πᾶν σημεῖον τοῦ ἄξονος τῶν x ἔχει τεταγμένην y ἴσην μὲ μηδὲν (§ 13, ς΄), πᾶν δὲ σημεῖον ἔχον τεταγμένην ἴσην μὲ μηδὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x, διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ὁ ἄξων τῶν x ἔχει ἐξίσωσιν $y=o$.

6΄) Δι' ὅμοιον λόγον λέγομεν ὅτι ὁ ἄξων τῶν y ἔχει ἐξίσωσιν $x=o$.

γ΄) Ἡ εὐθεῖα, ἥτις διχοτομεῖ τὰς γωνίας xoy καὶ x'o'y' ἔχει ἐξίσωσιν $x=y$. Διότι, πᾶν σημεῖον τῆς εὐθείας ταύτης ἔχει τετμημένην x ἴσην μὲ τὴν τεταγμένην y· καὶ ἀντιστρόφως, ἂν σημείου τινὸς ἡ τετμημένη x ἰσοῦται μὲ τὴν τεταγμένην αὐτοῦ y, τὸ σημεῖον τοῦτο κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥτις διχοτομεῖ τὰς γωνίας xoy καὶ x′oy′ (σχ. 40).



(Σχ. 40)

δ′) Δι' ὅμοιον λόγον λέγομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἥτις διχοτομεῖ τὰς γωνίας x′oy, xoy′ ἔχει ἐξίσωσιν x=—y, ἢ x+y=o (σχ.40).

ε′) Ἐν γένει, «***ἵνα γραμμή τις παριστάνεται ὑπό τινος ἐξισώσεως φ*** (x, y)=o, ***συνδεούσης τὰς συντεταγμένας*** x, y, ***πρέπει ἡ ἐξίσωσις αὕτη νὰ ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων πάντων τῶν σημείων τῆς γραμμῆς, καὶ μόνον ὑπ' αὐτῶν***».

ϛ′) Ἑπομένως, «***καλοῦμεν ἐξίσωσιν γραμμῆς τινὸς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ὡς πρὸς ἄξονας συντεταγμένων*** oxy ***τὴν ἐξίσωσιν, ἥτις ἐκφράζει τὴν ἀναγκαίαν καὶ ἱκανὴν συνθήκην εἰς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ὑπόκεινται αἱ συντεταγμέναι σημείου τινὸς τοῦ ἐπιπέδου, ἵνα τὸ σημεῖον τοῦτο κεῖται ἐπὶ τῆς γραμμῆς***».

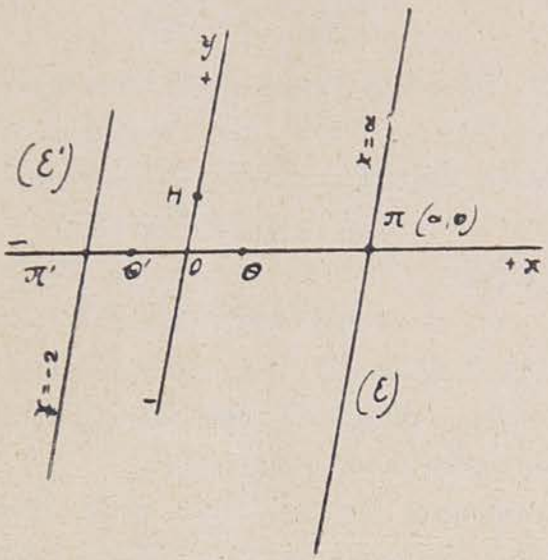
ζ′) Κατὰ ταῦτα ἡ ἐξίσωσις εὐθείας (ε) παραλλήλου τῷ ἄξονι τῶν y (σχ.41) καὶ τεμνούσης τὸν ἄξονα x εἰς τὸ σημεῖον Π (α, o) εἶνε ἡ x=α. Διότι, πᾶν σημεῖον αὐτῆς ἔχει τετμημένην α· πᾶν δὲ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, ἔχον τετμημένην α κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης. Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας (ε_1) (σχ. 41) τεμνούσης τὸν ἄξονα x εἰς τὸ σημεῖον, τὸ ἔχον τετμημένην —2 εἶνε x = —2.

η′) Ὁμοίως παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις εὐθείας (ε_1) (σχ.42) παραλλήλου τῷ ἄξονι τῶν x καὶ τεμνούσης τὸν ἄξονα τῶν y εἰς τὸ σημεῖον P (o, β), εἶνε ἡ y=β.

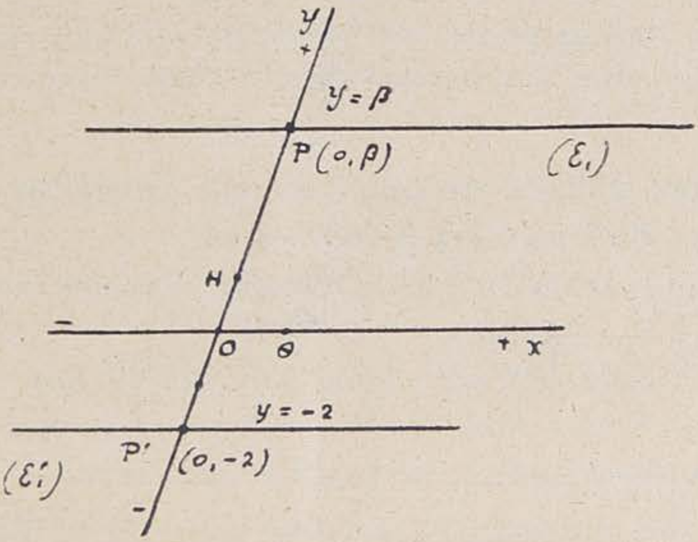
Οὕτω, ἂν τὸ β εἶνε ἴσον μὲ—2 ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας (ε'_1) (σχ. 42) εἶνε y=—2 θ΄) Ἐὰν τὸ πρῶτον μέλος φ (x, y) τῆς ἐξισώσεως

$$φ(x, y) = o$$

καμπύλης τινός, ἀναφερομένης ὡς πρὸς ἄξονας oxy εἶνε, ἢ δύναται



(Σχ. 41)



(Σχ. 42)

νὰ τεθῇ, ὑπὸ μορφὴν ἀκεραίου πολυωνύμου ὡς πρὸς x καὶ y, ἡ καμπύλη λέγεται ***ἀλγεβρική***.

Καλεῖται ***βαθμὸς ἢ τάξις*** ἀλγεβρικῆς καμπύλης ὁ βαθμὸς τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς ὡς πρὸς x καὶ y.

ι΄) Ὁ βαθμὸς ἀλγεβρικῆς τινος καμπύλης μένει ἀμετάβλητος καὶ μετὰ τὴν μετάβασιν εἰς ἄλλους ἄξονας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. Διότι, οἱ γενικοὶ τύποι ἀλλαγῆς τῶν ἀξόνων συντεταγμένων εἶνε πρωτοβάθμιοι ὡς πρὸς x, y καὶ x΄, y΄.

ια') Καμπύλη τις ἀλγεβρικὴ βαθμοῦ μ τέμνεται ὑπὸ τυχούσης εὐθείας εἰς μ σημεῖα πραγματικὰ καὶ διάφορα ἀλλήλων, ἢ (πάντα ἢ τινὰ) φανταστικά, ἢ καὶ συμπίπτοντα. Τῷ ὄντι, ἂν λάβωμεν τὴν εὐθεῖαν ταύτην ὡς ἄξονα τῶν x καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης εἶνε

$$\varphi(x, y) = o,$$

παρατηροῦμεν ὅτι, τὰ κοινὰ σημεῖα τοῦ νέου ἄξονος τῶν x καὶ τῆς καμπύλης θὰ ἔχουν y=o. Ὅθεν, αἱ τετμημέναι τῶν κοινῶν σημείων τῆς καμπύλης καὶ τῆς δοθείσης εὐθείας θὰ εὑρεθοῦν ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$\varphi(x, o) = o,$$

ἥτις προκύπτει ἐκ τῆς

$$\varphi(x, y) = o$$

ἂν τεθῇ y=o. Ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x, o) = o$ εἶνε, ἐν γένει, μ βαθμοῦ ὡς πρὸς x. Ἄρα ἔχει μ ρίζας, ἐν γένει, πραγματικάς, ἢ φανταστικάς, ἐκ τῶν ὁποίων δύνανταί τινες νὰ εἶνε ἴσαι.

Τὰ εἰς τὰς διαφόρους ἀπ' ἀλλήλων ρίζας ἀντιστοιχοῦντα κοινὰ σημεῖα λέγονται *διακεκριμένα ἀπ' ἀλλήλων* σημεῖα τομῆς τῆς εὐθείας καὶ τῆς καμπύλης· τὰ εἰς τὰς ἴσας ρίζας ἀντιστοιχοῦντα λέγονται συμπίπτοντα σημεῖα τομῆς,· τὰ δὲ εἰς τὰς φανταστικὰς ρίζας ἀντιστοιχοῦντα λέγονται φανταστικὰ σημεῖα τομῆς τῆς εὐθείας καὶ τῆς καμπύλης.

§ **24. Πᾶσα εὐθεῖα γραμμὴ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἔχει ἐξίσωσιν πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y.**—

α') Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι ὁ ἄξων τῶν x ἔχει ἐξίσωσιν y=o (§ 23, α')·
ὁ ἄξων τῶν y ἔχει ἐξίσωσιν x=o (§ 23,β')·
ἡ εὐθεῖα, ἥτις διχοτομεῖ τὰς γωνίας xoy, x'oy', ἔχει ἐξίσωσιν x−y=o (§ 23,γ')·
ἡ εὐθεῖα, ἥτις διχοτομεῖ τὰς γωνίας x'oy, xoy' ἔχει ἐξίσωσιν x+y=o (§ 23,δ')·
Εὐθεῖα παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν y ἔχει ἐξίσωσιν x−α=o (§ 23,ζ')·
Εὐθεῖα παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν x ἔχει ἐξίσωσιν y−β=o (§ 23,η').

Πᾶσαι αἱ ἀνωτέρω ἐξισώσεις τῶν ἐν λόγῳ εὐθειῶν εἶνε, ἐν γένει, πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y.

Θὰ δείξωμεν ὅτι καὶ οἱαδήποτε εὐθεῖα ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἔχει ἐξίσωσιν πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, y.

β') Ἔστω ὅτι εὐθεῖά τις ὁρίζεται διὰ δύο σημείων αὐτῆς, τῶν $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ (σχ. 43).

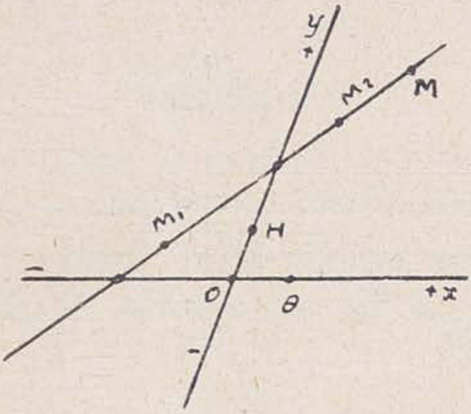
Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον M (x, y) ἐπὶ τῆς εὐθείας. Ἐπειδὴ τὰ ἀνύσματα $M_1 M$ $(x-x_1, y-y_1)$, $M_1 M_2$ (x_2-x_1, y_2-y_1) εἶνε παράλληλα (§ 2, δ′) θὰ ἔχωμεν (§ 17, α′)

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$

ἢ

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y_1-y_2} \qquad (1)$$

Πᾶν σημεῖον M (x, y) τῆς εὐθείας ἔχει συντεταγμένας, ἐπαληθευούσας τὴν ἐξίσωσιν ταύτην. Καὶ ἀντιστρόφως, ἂν σημείου τινὸς (τοῦ ἐπιπέδου) M′ (x′, y′) αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν (1) , τὸ M′ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας.



(Σχ. 43)

Διότι ἐξ' ὑποθέσεως ἔχομεν $\frac{x'-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y'-y_1}{y_1-y_2}$, ἢ $\frac{x'-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y'-y_1}{y_2-y_1}$

ἄρα τὰ ἀνύσματα M_1M' $(x'-x_1, y'-y_1)$, M_1M_2 (x_2-x_1, y_2-y_1) εἶνε παράλληλα. Ἐπειδὴ δὲ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀρχήν, τὸ M κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ἐφ' ἧς κεῖται καὶ τὸ M_2.

Ἑπομένως, «***ἡ ἐξίσωσις εὐθείας, διερχομένης διὰ δύο σημείων*** $\boldsymbol{M_1}$ (x_1, y_1), $\boldsymbol{M_2}$ (x_2, y_2) εἶνε

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y_1-y_2}} \qquad (1)$$

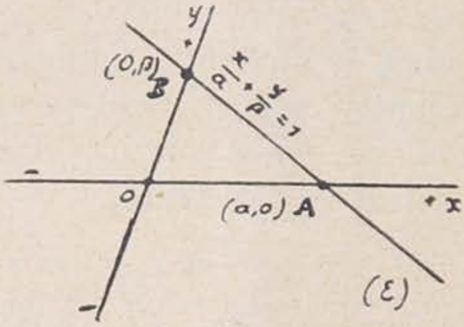
ἥτις εἶνε πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y.

Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις τίθεται καὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = o \qquad (2)$$

γ′) Ἂν τὰ δεδομένα σημεῖα τῆς εὐθείας (ε) (σχ. 44) εἶνε ἐκεῖνα καθ' ἃ αὕτη τέμνει τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων Π (α,ο), Ρ (ο,β) θὰ ἔχωμεν $x_1=\alpha$, $y_1=o$, $x_2=o$, $y_2=\beta$ καὶ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας θὰ εἶνε

$$\boxed{\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1} \qquad (3)$$



(Σχ. 44)

δ′) Ἔστω ὅτι εὐθεῖά τις ὁρίζεται δι' ἑνὸς τῶν σημείων M_1 (x_1, y_1) καὶ τοῦ συντελεστοῦ διευθύνσεως αὐτῆς λ.

Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον M (x, y) ἐπὶ τῆς εὐθείας. Τὸ ἄνυσμα $M_1 M$ $(x-x_1, y-y_1)$ ἔχει συντελεστὴν διευθύνσεως λ (§ 18, γ′). Ἑπομένως ἔχομεν

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\lambda, \text{ ἢ } y-y_1=\lambda\,(x-x_1) \qquad (4)$$

Πᾶν σημεῖον M (x, y) τῆς εὐθείας ἔχει συντεταγμένας, ἐπαληθευούσας τὴν ἐξίσωσιν ταύτην. Καὶ ἀντιστρόφως, πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου M′ (x′, y′), τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουν τὴν (4) κεῖται ἐπὶ τῆς ἐν λόγῳ εὐθείας. Διότι θὰ ἔχωμεν

$$y'-y_1=\lambda\,(x'-x_1), \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{y'-y_1}{x'-x_1}=\lambda.$$

Ἄρα τὸ ἄνυσμα $M_1 M'$ $(x'-x_1, y'-y_1)$ εἶνε παράλληλον τῇ εὐθείᾳ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ M_1 κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας καὶ τὸ M′ κεῖται ἐπ' αὐτῆς.

Ὅθεν, «***ἡ ἐξίσωσις εὐθείας, διερχομένης διὰ τοῦ σημείου*** M_1 (x_1, y_1) ***καὶ ἐχούσης συντελεστὴν διευθύνσεως λ, εἶνε***

$$\boxed{y-y_1=\lambda\,(x-x_1)}$$

ἥτις εἶνε πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, y.

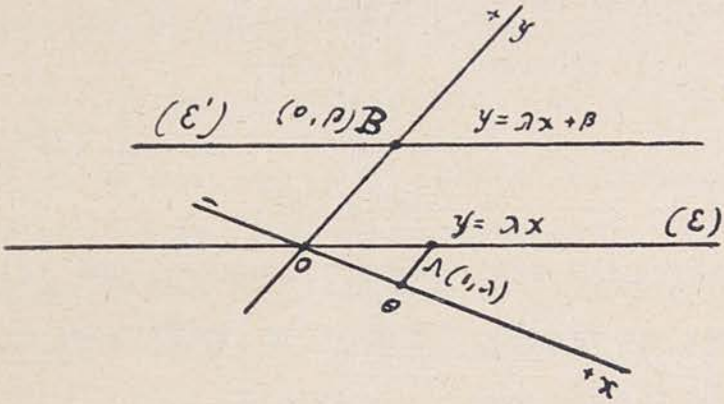
ε') Ἂν τὸ δοθὲν σημεῖον τῆς εὐθείας (ε) (σχ. 45) εἶνε ἡ ἀρχὴ ο(ο,ο) ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς θὰ εἶνε $y=\lambda x$.

Ἑπομένως, ἡ ἐξίσωσις εὐθείας, διερχομένης διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων καὶ ἐχούσης συντελεστὴν διευθύνσεως λ, εἶνε

$$\boxed{y=\lambda x}$$

ϛ') Ἂν τὸ δοθὲν σημεῖον εἶνε τὸ Β (ο, β), καθ' ὃ ἡ εὐθεῖα τέμνει τὸν ἄξονα τῶν y, ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας (ε') θὰ εἶνε, ἐπειδὴ ἔχομεν $x_1 = o, y_1 = \beta$ (σχ. 45)

$$y = \lambda x + \beta$$



(Σχ. 45)

ζ') Ὁ ἀριθμὸς β, ὅστις παριστάνει τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος οΒ, καλεῖται ***τεταγμένη τῆς εὐθείας ἐπὶ τὴν ἀρχήν***. Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς α, ὅστις παριστάνει τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος οΠ, ἂν Π εἶνε τὸ σημεῖον τομῆς τῆς εὐθείας καὶ τοῦ ἄξονος τῶν x καλεῖται ***τετμημένη τῆς εὐθείας ἐπὶ τὴν ἀρχήν***. Ἡ τετμημένη καὶ τεταγμένη εὐθείας ἐπὶ τὴν ἀρχὴν καλοῦνται ***συντεταγμέναι τῆς εὐθείας ἐπὶ τὴν ἀρχήν***.

Ἄρα ἡ ἐξίσωσις εὐθείας, ἐχούσης συντελεστὴν διευθύνσεως λ καὶ τεταγμένην ἐπὶ τὴν ἀρχὴν β, εἶνε

$$\boxed{y=\lambda x+\beta}$$

Ἐφαρμογαί. 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις εὐθείας, διερχομένης διὰ τῶν σημείων (—3, 2), (5, — 7).

Θέτομεν εἰς τὴν γενικὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2}$$

$x_1=-3,\ x_2=5,\ y_1=2,\ y_2=-7$ καὶ ἔχομεν

$$\frac{x+3}{-3-5}=\frac{y-2}{2+7},\quad \text{ἢ}\quad \frac{x+3}{-8}=\frac{y-2}{9}$$

ἢ $$9\,x+8\,y+11=o.$$

2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἥτις ἔχει συντεταγμένας ἐπὶ τὴν ἀρχὴν 5, καὶ —7.

Θέτομεν $\alpha=5,\ \beta=-7$ εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{y}{\beta}=1$

καὶ εὑρίσκομεν $$7\,x-5\,y-35=o.$$

3) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις εὐθείας, ἐχούσης συντελεστὴν διευθύνσεως $-\dfrac{4}{9}$ καὶ τεταγμένην ἐπὶ τὴν ἀρχὴν 4.

Θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $y=\lambda\,x+\beta$

$$\lambda=-\frac{4}{9},\ \beta=4 \text{ καὶ ἔχομεν } y=-\frac{4}{9}\,x+4$$

ἢ $$4\,x+9\,y=36.$$

4) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις εὐθείας, διερχομένης διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων καὶ ἐχούσης συντελεστὴν διευθύνσεως $-\dfrac{3}{5}$.

Θέτομεν εἰς τὴν ἐξισωσιν $y=\lambda\,x$

τὸ $\lambda=-\dfrac{3}{5}$ καὶ ἔχομεν $y=-\dfrac{3}{5}\,x,$

ἢ $$3\,x+5\,y=o.$$

5) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις εὐθείας, ἐχούσης συντελεστὴν διευθύνσεως — 1 καὶ διερχομένης διὰ τοῦ σημείου (3,—2).

Θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $y-y_1=\lambda\,(x-x_1)$

$$\lambda=-1,\ x_1=3,\ y_1=-2 \text{ καὶ ἔχομεν } y+2=-\,(x-3)$$

ἢ $$y+x-1=o.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Τίς εἶνε ἡ ἐξίσωσις εὐθείας, διερχομένης διὰ τῶν σημείων (2,—3), (—4, 1); Τὸ σημεῖον (1, 4) κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης. Ἡ ἀρχὴ ο (ο, ο) κεῖται ἐπ' αὐτῆς;

2) Ἡ ἐξίσωσις εὐθείας διερχομένης διὰ τῆς ἀρχῆς ο καὶ τοῦ M_1 (x_1, y_1) εἶνε $yx_1-y_1\,x=o$, ἢ $y:x=y_1:x_1$. Εὕρετε αὐτὴν τῇ βοηθείᾳ σχήματος.

3 Εὕρετε τῇ βοηθείᾳ τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως ὅτι αἱ ἐξισώσεις τῶν ἀξόνων εἶνε $y=o$, $x=o$, τῶν δὲ εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι διχοτομοῦν τὰς γωνίας τῶν ἀξόνων εἶνε $x\pm y=o$

4) Αἱ κορυφαὶ τριγώνου ἔχουν συντεταγμένας (2, 3), (—4, 1), (2, —3). Εὕρετε τὰς ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν του.

5) Δίδεται τρίγωνον διὰ τῶν κορυφῶν του M_1 (x_1, y_1) M_2 (x_2, y_2), M_3 (x_3, y_3). Εὕρετε ὅτι αἱ ἐξισώσεις τῶν διαμέσων του εἶνε

$$x(2y_1 - y_2 - y_3) - y(2x_1 - x_2 - x_3) + x_1 y_2 - y_1 x_2 + x_1 y_3 - y_1 x_3 = o,$$

$$x(2y_2 - y_3 - y_1) - y(2x_2 - x_3 - x_1) + x_2 y_3 - y_2 x_3 + y_1 x_2 - x_1 y_2 = o;$$

$$x(2y_3 - y_1 - y_2) - y(2x_3 - x_1 - x_2) + y_1 x_3 - y_3 x_1 + y_2 x_3 - x_2 y_3 = o.$$

6) Παρατηρητέον, ὅτι διὰ προσθέσεως καὶ τῶν τριῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων κατὰ μέλη προκύπτει ἐξαγόμενον μηδέν. Αἱ διάμεσοι τοῦ τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Πῶς θὰ εὑρεθῇ τοῦτο;

7) Εὕρετε τὰς ἐξισώσεις τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου (2, 3), (—4, 1), (2—3).

8) Ἡ εὐθεῖα, ἣν ὁρίζουν τὰ σημεῖα (3, 4), (—2, —5) διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς; Τὰ σημεῖα (1, 5), (—6, —2) κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης;

9) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς εὐθείας, ἥτις διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς καὶ τοῦ σημείου (—5, —1).

10) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς εὐθείας, τῆς διερχομένης διὰ τῶν σημείων (α, —α), (α, —α²).

11) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς εὐθείας, ἥτις ἔχει συντελεστὴν διευθύνσεως $-\frac{3}{4}$ καὶ διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων.

12) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς εὐθείας, τῆς διερχομένης διὰ τῆς ἀρχῆς καὶ παραλλήλου πρὸς τὸ ἄνυσμα $\left(5 \quad -\frac{4}{9}\right)$, ἢ τὸ (—1, —5), ἢ τὸ (—α, α²).

§ 25. Πᾶσα ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y παριστάνει εὐθεῖαν.—

α΄) Εἴδομεν ὅτι πᾶσα εὐθεῖα γραμμὴ ἔχει ἐξίσωσιν πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y.

Θὰ δείξωμεν ἤδη ὅτι πᾶσα ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y παριστάνει εὐθεῖαν.

Ἔστω ἡ γενικὴ ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y

$$Ax + By + \Gamma = o, \qquad (1)$$

ἐνῷ Α, Β, Γ εἶνε ἀριθμοὶ γνωστοὶ ἢ παραστάσεις γνωσταί.

β΄) Ἂν εἶνε Α, Β, Γ ≠ ο, λύομεν τὴν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς y καὶ εὑρίσκομεν

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{\Gamma}{B}.$$

Θέτομεν $\quad -\frac{A}{B} = \lambda, \; -\frac{\Gamma}{B} = \beta,$

ὅτε ἔχομεν $\quad y = \lambda x + \beta.$

Αὕτη παριστάνει, ὡς εὕρομεν (§ 24, ζ′), εὐθεῖαν, ἔχουσαν συντελεστὴν διευθύνσεως $\lambda = -\frac{A}{B}$ καὶ τεταγμένην ἐπὶ τὴν ἀρχὴν ἴσην μὲ $\beta = -\frac{\Gamma}{B}$.

Ἑπομένως κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις (1) παριστάνει εὐθεῖαν γραμμήν.

γ′) Ἂν εἶνε Α καὶ Γ $\neq$ ο, ἀλλὰ τὸ Β=ο, ἡ (1) θὰ ἔχῃ τὴν μορφὴν

$$A\,x + \Gamma = o \qquad (2).$$

Λύοντες δ' αὐτὴν ὡς πρὸς x, εὑρίσκομεν $x = -\frac{\Gamma}{A}$

Ἂν θέσωμεν $-\frac{\Gamma}{A} = \alpha$, εὑρίσκομεν $x = \alpha$.

Αὕτη παριστάνει (§ 23, ζ′) εὐθεῖαν παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν y καὶ ἔχουσαν τετμημένην ἐπὶ τὴν ἀρχὴν $\alpha = -\frac{\Gamma}{A}$.

Ἄρα, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις (1) ἐν τῇ περιπτώσει αὐτῇ, ἢ ἡ (2), παριστάνει εὐθεῖαν γραμμήν.

δ′) Ἂν εἶνε $A = o$, Β, Γ $\neq$ ο, ἔχομεν $B\,y + \Gamma = o$,

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $y = -\frac{\Gamma}{B}$,

ἥτις παριστάνει εὐθεῖαν παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν x, ἔχουσαν δὲ τεταγμένην ἐπὶ τὴν ἀρχὴν $\beta = -\frac{\Gamma}{B}$.

ε′) Ἂν εἶνε $\Gamma = o$, Α, Β $\neq$ ο, θὰ ἔχωμεν

$$A\,x + B\,y = o,$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $y = -\frac{A}{B}x$

ἢ θέτοντες $-\frac{A}{B} = \lambda$, ἔχομεν $y = \lambda x$.

Αὕτη παριστάνει εὐθεῖαν, διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων καὶ ἔχουσαν συντελεστὴν διευθύνσεως $\lambda = -\frac{A}{B}$ (§ 24, ε′).

ς′) Ὅθεν, ἐν γένει, ἡ ἐξίσωσις (1) παριστάνει εὐθεῖαν γραμμήν, ἔχουσαν συντελεστὴν διευθύνσεως ἴσον μὲ $-\frac{A}{B}$.

Συνήθως λέγομεν ἡ εὐθεῖα $A\,x + B\,y + \Gamma = o$ καὶ ἐννοοῦμεν τὴν εὐθεῖαν, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις αὕτη.

ϛ΄) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔχομεν ὅτι, ἡ εὐθεῖα $Ax + By = o$ (ἐν ᾗ ὑποτίθεται ὅτι εἶνε τὸ $\Gamma = o$) διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων. Καὶ τὸ ἀντίστροφον συμβαίνει. Ἂν εὐθεῖά τις διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων, θὰ ἔχῃ ἐξίσωσιν ἄνευ σταθεροῦ ὅρου ὡς πρὸς x καὶ y. Διότι, ἂν $Ax + By + \Gamma = o$ εἶνε ἡ ἐξίσωσις τοιαύτης εὐθείας, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον o (o, o) θὰ κεῖται ἐπ' αὐτῆς, θὰ ἔχωμεν $A.o + B.o + \Gamma = o$, ἢ $\Gamma = o$.

Ἤτοι «***ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα εὐθεῖά τις διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων εἶνε ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς νὰ στερῆται σταθεροῦ ὅρου***».

η΄) Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα $Ax + By + \Gamma = o$ ἔχει συντελεστὴν διευθύνσεως $-\frac{A}{B}$, τὸ δὲ ἄνυσμα (B, —A) ἔχει τὸν αὐτὸν συντελεστὴν διευθύνσεως, ἕπεται ὅτι

«***δοθείσης τῆς ἐξισώσεως $Ax + By + \Gamma = o$, τὸ ἄνυσμα $(B, -A)$ εἶνε παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ταύτην***».

θ΄) Ἡ ἐξίσωσις $(Ax + By + \Gamma)(A_1x + B_1y + \Gamma_1) = o$ παριστάνει δύο εὐθείας (ζεῦγος εὐθειῶν), ἐχούσας ἐξισώσεις

$$Ax + By + \Gamma = o \text{ καὶ } A_1x + B_1y + \Gamma_1 = o$$

ἀντιστοίχως. Τῷ ὄντι, ἵνα τὸ γινόμενον

$$(Ax + By + \Gamma)(A_1x + B_1y + \Gamma_1)$$

γίνῃ μηδέν, ἀρκεῖ ὁ εἷς τῶν παραγόντων αὐτοῦ νὰ εἶνε ἴσος μὲ μηδέν. Ἤτοι ἀρκεῖ νὰ εἶνε

$$Ax + By + \Gamma = o, \text{ ἢ } A_1x + B_1y + \Gamma_1 = o.$$

Ἑκάστη τῶν ἐξισώσεων τούτων παριστάνει εὐθεῖαν γραμμήν· ἄρα καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις παριστάνει τὸ ζεῦγος τῶν εὐθειῶν τούτων. Ἑπομένως καὶ πᾶσα ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y, τῆς ὁποίας τὸ πρῶτον μέλος (τοῦ δευτέρου ὄντος μηδὲν) τρέπεται εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων ὡς πρὸς x καὶ y παριστάνει, ἐν γένει, δύο εὐθείας γραμμάς.

§ **26. Κατασκευὴ εὐθείας ὅταν δοθῇ ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς.**— α΄) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις εὐθείας

$$Ax + By + \Gamma = o, \qquad (1)$$

ἐνῷ ὑποτίθεται ὅτι εἶνε $\Gamma \neq o$.

Ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ ἡ εὐθεῖα (1).

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν δύο (διάφορα) σημεῖα τῆς εὐθείας.

Ὡς τοιαῦτα ἐκλέγομεν τὰ σημεῖα καθ' ἃ ἡ εὐθεῖα τέμνει τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων, καὶ πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὰς συντεταγμένας τῆς εὐθείας ἐπὶ τὴν ἀρχήν.

Ἐπειδὴ πᾶν σημεῖον τοῦ ἄξονος τῶν x ἔχει $y = o$, θέτομεν εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν $y = o$, ὅτε ἔχομεν

$$A x + \Gamma = o$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\qquad x = -\frac{\Gamma}{A}.$

Ἤτοι ἡ εὐθεῖα ἔχει τετμημένην ἐπὶ τὴν ἀρχὴν ἴσην μὲ $-\frac{\Gamma}{A}$.

Ὁμοίως διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τεταγμένην τῆς εὐθείας ἐπὶ τὴν ἀρχήν, παρατηροῦμεν ὅτι, πᾶν σημεῖον τοῦ ἄξονος τῶν y ἔχει $x = o$. Θέτομεν εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν $x = o$, ὅτε ἔχομεν

$$B y + \Gamma = o,$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\qquad y = -\frac{\Gamma}{B}.$

Ἤτοι ἡ εὐθεῖα ἔχει τεταγμένην ἐπὶ τὴν ἀρχὴν ἴσην μὲ $-\frac{\Gamma}{B}$.

Ὅθεν, ἡ εὐθεῖα, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις

$$A x + B y + \Gamma = o$$

διέρχεται διὰ τῶν σημείων $\left(-\frac{\Gamma}{A}, o\right), \left(o, -\frac{\Gamma}{B}\right)$ καὶ ἐπομένως κατασκευάζεται.

β') Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα, ἥτις τέμνει τοὺς ἄξονας εἰς τὰ σημεῖα (α, o) (o, β) ἔχει ἐξίσωσιν (§ 24, γ')

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1,$$

ἂν φέρωμεν τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν (1) ὑπὸ τὴν μορφὴν ταύτην, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{x}{\left(-\frac{\Gamma}{A}\right)} + \frac{y}{\left(-\frac{\Gamma}{B}\right)} = 1.$$

Ἐκ ταύτης συνάγομεν πάλιν ὅτι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα διέρχεται διὰ τῶν σημείων $\left(-\frac{\Gamma}{A}, o\right)$, $\left(o, -\frac{\Gamma}{B}\right)$ καὶ κατασκευάζεται.

γ') Ἔστω ὅτι ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ ἡ εὐθεῖα, τῆς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις εἶνε

$$A x + B y = o.$$

Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις αὕτη διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων, ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ καὶ ἡ διεύθυνσις αὐτῆς, ἢ καὶ ἓν σημεῖον αὐτῆς διάφορον τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων.

Γνωρίζομεν ὅτι πρὸς τὴν εὐθεῖαν $A x + B y = o$ εἶνε παράλληλον τὸ ἄνυσμα $(B, -A)$ (§ 25, η') ἢ τὸ $(1, -A : B)$.

Κατασκευάζομεν τὸ ἄνυσμα τοῦτο (§ 18, ε'), ἔχον ἀρχὴν τὸ ο καὶ οὕτω κατασκευάζεται ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

Ἂν θέλωμεν νὰ κατασκευάσωμεν τὴν εὐθεῖαν $A x + B y = o$ διὰ τῆς εὑρέσεως ἑνὸς σημείου αὐτῆς διαφόρου τοῦ ο, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν εὐθείας τινὸς παραλλήλου τῷ ἄξονι τῶν y, ἔστω τὴν $x = 1$.

Αὕτη θὰ τέμνῃ τὴν ζητουμένην εὐθεῖαν εἰς ἓν σημεῖον (διάφορον τοῦ ο). Τὸ σημεῖον τοῦτο θὰ ἔχῃ τετμημένην 1. Θέτομεν $x = 1$ εἰς τὴν ἐξίσωσιν $A x + B y = o$, ὅτε προκύπτει $A + B y = o$. Λύοντες ταύτην ὡς πρὸς y, εὑρίσκομεν $y = -\frac{A}{B}$.

Ἡ τιμὴ αὕτη παριστάνει τὴν τεταγμένην τοῦ ζητουμένου σημείου.

Ὅθεν τὸ ζητούμενον σημεῖον εἶνε τὸ $\left(1, -\frac{A}{B}\right)$. Ἡ εὐθεῖα διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς καὶ τοῦ σημείου τούτου, ἑπομένως κατασκευάζεται.

Ἐφαρμογαί. 1) Ἔστω ἡ εὐθεῖα $2 x - 3 y - 6 = o$.

Πρὸς κατασκευὴν αὐτῆς, γράφομεν τὴν ἐξίσωσιν οὕτω

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1.$$

Ἡ εὐθεῖα ἔχει συντεταγμένας ἐπὶ τὴν ἀρχὴν 3 καὶ -2, ἤτοι διέρχεται διὰ τῶν σημείων $(3, o)$, $(o, -2)$· ἑπομένως κατασκευάζεται καὶ εἶνε ἡ (ε) (σχ. 46).

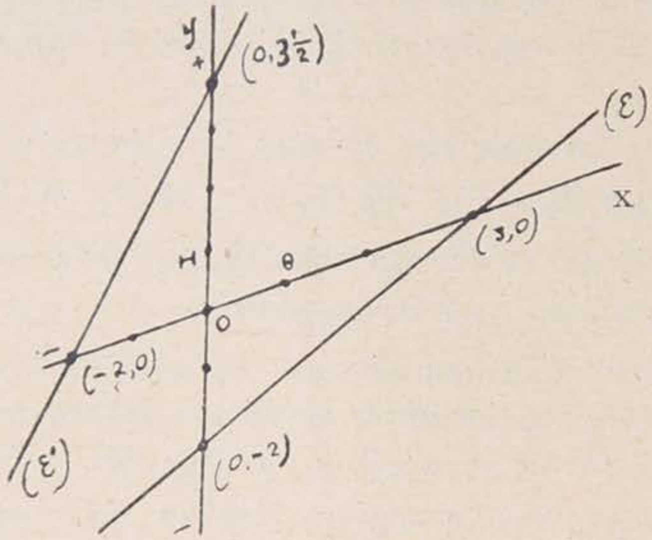
2) Ἔστω ἡ εὐθεῖα $\frac{7}{2} x - 2 y + 7 = o$.

Πρὸς κατασκευὴν αὐτῆς θέτομεν $y = o$ καὶ εὑρίσκομεν

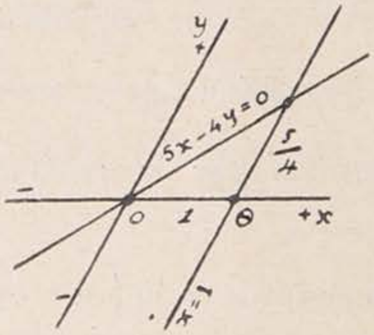
$$x = \frac{-14}{7} = -2$$

Θέτομεν $x = o$ καὶ εὑρίσκομεν $y = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$.

(Σχ. 46)



(Σχ. 47)



Ἡ εὐθεῖα διέρχεται διὰ τῶν σημείων $\left(-2, o\right), \left(o, 3\frac{1}{2}\right)$ καὶ κατασκευάζεται εἶνε δὲ ἡ (ε') (σχ. 46).

3) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $5x - 4y = o$.

Αὕτη παριστάνει εὐθεῖαν, διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς, ἐπειδὴ δὲν ἔχει σταθερὸν ὅρον (§ 25, ζ'). Πρὸς κατασκευὴν τῆς εὐθείας θέτομεν $x = 1$, καὶ εὑρίσκομεν $y = \frac{5}{4}$.

Ἡ εὐθεῖα διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων καὶ διὰ τοῦ σημείου $\left(1, \frac{5}{4}\right)$ καὶ κατασκευάζεται (σχ. 47).

4) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις εὐθείας $-3x + y = o$, διερχομένης διὰ τῆς ἀρχῆς. Διὰ τὴν κατασκευὴν αὐτῆς παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε $A = -3$, $B = 1$. Τὸ παράλληλον πρὸς αὐτὴν ἄνυσμα εἶνε τὸ $(B = 1, -A = 3)$. Κατασκευάζομεν ἄνυσμα $(1, 3)$ ἔχον ἀρχὴν τὸ o (ἤτοι εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον $(1, 3)$) καὶ οὕτω κατασκευάζεται ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ εὐθεῖαι, τῶν ὁποίων αἱ ἐξισώσεις εἶνε

1) $x + 4y - 1 = o$ 2) $x - y = 2$ 3) $y - 2x = 3$ 4) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} - 2 = o$ 5) $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$ 6) $x - 9y + 3 = o$ 7) $x + 3y = o$, 8) $x + y = 1$ 9) $3x - 5y = o$ 10) $2y - 9x = o$ 11) $\frac{x}{3} - y = o$, 12) $\frac{x-1}{3} + \frac{y+2}{5} = o$.

2 Εὕρετε τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην, ἵνα ἡ εὐθεῖα $\alpha x + 6y + \gamma = o$ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου $\left(-\frac{\alpha}{\gamma}, -\frac{6}{\gamma}\right)$.

3) Εὕρετε τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην, ἵνα τὸ ἄνυσμα $(\alpha, 6)$ εἶνε παράλληλον τῇ εὐθείᾳ $Ax + By + \Gamma = o$.

4) Τίς εἶνε ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα αἱ εὐθεῖαι $Ax + By + \Gamma = o$, $A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 = o$ εἶνε παράλληλοι; (§ 18, δ').

5) Τίς εἶνε ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα αἱ ἐξισώσεις $Ax+By+\Gamma=o$, $A_1 x + B y_1 + \Gamma_1 = o$ παριστάνουν τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν; (Ἐκφράσατε ὅτι αἱ συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν (§ 26, α') τῶν εὐθειῶν, εἶνε ἀντιστοίχως ἴσαι).

6) Δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις $5x^2 - 6xy + 5x = o$ παριστάνει δύο εὐθείας (ζεῦγος εὐθειῶν), ἐχούσας ἐξισώσεις $x = o$, $5x - 6y + 5 = o$ ἀντιστοίχως.

Πότε πολυώνυμον ἀνωτέρου τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, y παριστάνει εὐθείας; καὶ πόσας;

7) Ἡ ἐξίσωσις $(Ax + By + \Gamma)^2 = o$ παριστάνει δύο εὐθείας συμπιπτούσας. Διατί; Γενικεύσατε τοῦτο.

8) Μετασχηματίσατε τὴν ἐξίσωσιν εὐθείας, διερχομένης διὰ τῶν $M_1 (x_1, y_1)$, $M_2 (x_2, y_2)$ ὡς πρὸς ἄξονας oxy, ἂν ληφθῇ ὡς ἀρχὴ τὸ μέσον τοῦ $M_1 M_2$ καὶ οἱ νέοι ἄξονες εἶνε παράλληλοι πρὸς τοὺς ἀρχικούς.

9) Αἱ ἐξισώσεις δὲ εὐθειῶν εἶνε $5x - 2y = 7$ καὶ $x + y = 1$. Εἰς τίνας τρέπονται αὗται, ἂν αἱ εὐθεῖαι ἀναφέρωνται ὡς πρὸς νέους ἄξονας, ὥστε νὰ εἶνε γων. $xox' = o^0$, γων. $xoy' = 45^0$;

§ 27. Θέσις τῶν σημείων ἐπιπέδου ὡς πρὸς εὐθεῖαν.—
α') Ἔστω $Ax + By + \Gamma = o$ (1) ἡ ἐξίσωσις εὐθείας τινός. Αὕτη διαιρεῖ τὸ ἐπίπεδον oxy εἰς δύο μέρη, κείμενα ἑκατέρωθεν αὐτῆς. Ἐνῷ πᾶν σημεῖον, κείμενον ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἔχει συντεταγμένας, αἵτινες ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν (1), ἤτοι μηδενίζουν τὸ πολυώνυμον $Ax + By + \Gamma$, πᾶν σημεῖον, κείμενον ἐπὶ τοῦ ἑνὸς τῶν δύο μερῶν τοῦ ἐπιπέδου, εἰς τὰ ὁποῖα αὕτη διαιρεῖ αὐτό, ἔχει συντεταγμένας αἵτινες, τιθέμεναι ἀντὶ τῶν x καὶ y εἰς τὸ πολυώνυμον $Ax + By + \Gamma$, δίδουν ἐξαγόμενον θετικόν· τοὐναντίον, πᾶν σημεῖον, κείμενον εἰς τὸ ἄλλο μέρος τοῦ ἐπιπέδου, ἔχει συντεταγμένας αἵτινες, τιθέμεναι εἰς τὸ πολυώνυμον ἀντὶ τῶν x καὶ y, δίδουν ἐξαγόμενον ἀρνητικόν.

β') Καλοῦμεν *θετικὸν μέρος τοῦ ἐπιπέδου* oxy *ὡς πρός τινα εὐθεῖαν* αὐτοῦ ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου τὰ σημεῖα ἔχουν συντεταγμένας αἵτινες, τιθέμεναι ἀντὶ τῶν x καὶ y εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως τῆς εὐθείας, δίδουν ἐξαγόμενον θετικόν. Τὸ ἄλλο μέρος τοῦ ἐπιπέδου λέγεται *ἀρνητικὸν μέρος τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν* καὶ αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων αὐτοῦ τιθέμεναι εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως τῆς εὐθείας ἀντὶ τῶν x καὶ y δίδουν ἐξαγόμενον ἀρνητικόν.

Ἔστω π. χ. ἡ εὐθεῖα $3x - 5y - 6 = o$.

Ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων κεῖται εἰς τὸ ἀρνητικὸν μέρος τοῦ ἐπιπέδου oxy ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ταύτην. Διότι εἶνε

$$3 . o - 5 . o - 6 = - 6.$$

Ἐπίσης τὰ σημεῖα $(1, o)$, $(-1, o)$, $(o, -1)$ κεῖνται εἰς τὸ ἀρνητικὸν μέρος τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ταύτην. Διότι εἶνε
$3 . 1 - 5 . o - 6 = -3$· $3 . (-1) - 5 . o - 6 = -9$· $3 . o - 5 . (-1) - 6 = -1$.

Ἐνῷ τὸ σημεῖον $(o, -2)$ κεῖται εἰς τὸ θετικὸν μέρος τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν. Διότι εἶνε

$$3 . o - 5 . (-2) - 6 = + 4.$$

Ἐν γένει, δοθείσης τῆς εὐθείας $Ax + By + \Gamma = o$, ἂν μὲν εἶνε $\Gamma > o$ ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων κεῖνται εἰς τὸ θετικὸν μέρος τοῦ ἐπιπέδου oxy ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν, ἂν δ' εἶνε $\Gamma < o$, εἰς τὸ ἀρνητικόν.

γ') Καλοῦμεν *θετικὸν μέρος εὐθείας*, κειμένης ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν τῶν ἀξόνων oxy καὶ διαφόρου τοῦ ἄξονος τῶν y ἀπὸ σημείου τινὸς αὐτῆς τὸ μέρος αὐτῆς τὸ ὁποῖον, στρεφόμενον περὶ τὸ σημεῖον τοῦτο καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ φορὰν θετικὴν (ἀντίθετον τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν ὡρολογίου), διαγράφει τὸ θετικὸν μέρος τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν. Τὸ ἕτερον μέρος τῆς εὐθείας καλοῦμεν *ἀρνητικὸν μέρος αὐτῆς.*

δ') Καλοῦμεν *θετικὴν φορὰν ἐπὶ εὐθείας*, διαφόρου τοῦ ἄξονος τῶν y, ὡς πρός τι σημεῖον αὐτῆς τὴν φοράν, ἥτις βαίνει ἐκ τοῦ σημείου τούτου πρὸς ἄλλο σημεῖον τῆς εὐθείας, κείμενον εἰς τὸ θετικὸν μέρος αὐτῆς ὡς πρὸς τὸ δοθὲν σημεῖον. Ἡ ἀντίθετος τῆς θετικῆς φορᾶς ἐπὶ τῆς εὐθείας εἶνε ἡ *ἀρνητικὴ φορὰ αὐτῆς.*

ε') Τοὐναντίον, καλοῦμεν θετικὸν μέρος τοῦ ἄξονος τῶν y ἀπὸ τῆς ἀρχῆς αὐτοῦ o τὸ μέρος αὐτοῦ oy, τὸ ὁποῖον στρεφόμενον κατὰ τὴν φορὰν τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν ὡρολογίου διαγράφει τὸ θετικὸν μέρος τοῦ ἐπιπέδου (τῶν ἀξόνων oxy) ὡς πρὸς αὐτόν. Τὸ ἕτερον μέρος τοῦ ἄξονος τούτου oy′ καλεῖται ἀρνητικόν. Ἡ ἐκ τοῦ o πρὸς τὸ y φορὰ καλεῖται θετικὴ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y, ἡ δ' ἐκ τοῦ o πρὸς τὸ y′ ἀρνητική.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Εὕρετε τὸ θετικὸν καὶ ἀρνητικὸν μέρος τοῦ ἐπιπέδου τῶν oxy ὡς πρὸς ἑκάστην τῶν εὐθειῶν $x=o$, $y=o$, $3x-7y+1=o$,

$$x+y=o,\ x+y=6,\ -x+y=o,\ x-y=o,\ -x-y=o.$$

Εὕρετε ἐπίσης τὸ θετικὸν καὶ ἀρνητικὸν μέρος ἑκάστης τῶν εὐθειῶν τούτων ὡς πρὸς ἓν σημεῖον αὐτῆς.

2) Τίνα μεταβολὴν παθαίνουν αἱ φοραὶ ἐπί τινος εὐθείας, ἂν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα τῶν ὅρων της;

3) Δοθείσης εὐθείας $Ax+By+\Gamma=o$, ἐνῷ εἶνε $\Gamma \neq o$, ὁρίζομεν τὸ θετικὸν καὶ ἀρνητικὸν μέρος τοῦ ἐπιπέδου oxy ὡς πρὸς αὐτήν, ἂν εὕρωμεν εἰς ποῖον ἐκ τῶν δύο μερῶν ἀνήκει τὸ σημεῖον o (o, o), δηλαδὴ ἐκ τοῦ σημείου τοῦ Γ. Πῶς γίνεται τοῦτο διὰ δοθεῖσαν εὐθεῖαν $Ax+By \neq o$, διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς;

Θέσεις εὐθειῶν πρὸς ἀλλήλας.

Δίδονται αἱ ἐξισώσεις

$$\begin{aligned} A_1x+B_1y+\Gamma_1&=o\\ A_2x+B_2y+\Gamma_2&=o \end{aligned} \qquad (1)$$

δύο εὐθειῶν· ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις αὐτῶν πρὸς ἀλλήλας ἐκ τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων.

Αἱ εὐθεῖαι αὗται ἢ τέμνονται, ἢ εἶνε παράλληλοι, ἢ συμπίπτουν.

§ **28 Συνθήκη ἵνα δύο εὐθεῖαι συμπίπτουν.—**

α΄) Ἔστω ὅτι αἱ ἀνωτέρω ἐξισώσεις (1) παριστάνουν εὐθείας συμπιπτούσας. Τότε αἱ ὁμώνυμοι συντεταγμέναι αὐτῶν ἐπὶ τὴν ἀρχὴν (§ 24, ζ΄) θὰ εἶνε ἴσαι. Ἤτοι θὰ ἔχωμεν

$$-\frac{\Gamma_1}{A_1} = -\frac{\Gamma_2}{A_2}, \text{ καὶ } -\frac{\Gamma_1}{B_1} = -\frac{\Gamma_2}{B_2}, \text{ ἢ } \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{A_1}{A_2}, \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

Ἑπομένως καὶ $$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}.$$

Ὅθεν «***ἂν δύο ἐξισώσεις παριστάνουν εὐθείας συμπιπτούσας, οἱ ὁμώνυμοι συντελεσταὶ τῶν ἐξισώσεων τούτων εἶνε ἀνάλογοι***».

β΄) Ἀντιστρόφως «***ἂν εἶνε*** $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$ (2) ***αἱ ἐξισώσεις (1) παριστάνουν τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν***».

Διότι, ἂν καλέσωμεν k τοὺς ἴσους λόγους (2) θὰ ἔχωμεν

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = k, \text{ καὶ } A_1 = A_2.k,\ B_1 = B_2.k,\ \Gamma_1 = \Gamma_2.k.$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰ A_1 B_1, Γ_1 διὰ τῶν ἴσων αὐτῶν εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν τῶν (1) εὑρίσκομεν ἀντὶ τῆς $A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 = o$ τὴν $k(A_2 x + B_2 y + \Gamma_2) = o$, ἢ $A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 = o$.

Ἤτοι, ἡ πρώτη τῶν ἐξισώσεων (1) παριστάνει τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, τὴν ὁποίαν παριστάνει καὶ ἡ δευτέρα αὐτῶν.

γ΄) Ἑπομένως «***ἵνα δύο ἐξισώσεις (πρώτου βαθμοῦ) παριστάνουν τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ οἱ ὁμώνυμοι συντελεσταὶ αὐτῶν νὰ εἶνε ἀνάλογοι***».

§ **29. Συνθήκη ἵνα δύο εὐθεῖαι εἶνε παράλληλοι.—**

α΄) Ἔστω ὅτι αἱ ἐξισώσεις $\begin{cases} A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 = o \\ A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 = o \end{cases}$ (1)

παριστάνουν εὐθείας παραλλήλους. Τότε οἱ συντελεσταὶ διευθύνσεων αὐτῶν θὰ εἶνε ἴσοι (§ 18, δ΄). Ἂν παραστήσωμεν διὰ λ_1 τὸν συντελεστὴν διευθύνσεως τῆς πρώτης εὐθείας καὶ διὰ λ_2 τὸν τῆς δευτέρας, θὰ εἶνε

$$\lambda_1 = -\frac{A_1}{B_1},\quad \lambda_2 = -\frac{A_2}{B_2} \qquad (§ 25, β΄)$$

καὶ $$-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2} \qquad (§ 18, δ΄).$$

Ἑπομένως καὶ $$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Ἤτοι «***ἂν δύο ἐξισώσεις παριστάνουν εὐθείας παραλλήλους, οἱ συντελεσταὶ τῶν ὁμωνύμων ἀγνώστων αὐτῶν εἶνε ἀνάλογοι***».

β') Ἀντιστρόφως, «***ἂν εἶνε*** $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ (2) ***αἱ ἐξισώσεις*** (1) ***παριστάνουν εὐθείας παραλλήλους***».

Διότι ἐκ τῶν (2) ἔχομεν $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$, ἢ $-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2}$

ἢ $\lambda_1 = \lambda_2$.

Ἤτοι αἱ εὐθεῖαι, τὰς ὁποίας παριστάνουν αἱ ἐξισώσεις (1) εἶνε παράλληλοι (§ 18, δ').

γ') Ἑπομένως, «***ἵνα δύο ἐξισώσεις (πρώτου βαθμοῦ) παριστάνουν εὐθείας παραλλήλους, πρέπει καὶ ἀρκεῖ οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων αὐτῶν νὰ εἶνε ἀνάλογοι***».

δ') Κατὰ ταῦτα πρὸς τὴν εὐθεῖαν $y = \lambda x$ παράλληλος εἶνε ἡ $y = \lambda x + \beta$, διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ β, (τὰς ἀνεξαρτήτους τῶν x καὶ y). Ἐπίσης πρὸς τὴν εὐθεῖαν $A x + B y = o$ παράλληλος εἶνε ἡ $A x + B y + \Gamma = o$, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ σταθεροῦ Γ.

ε') Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα τὸ ἄνυσμα (α, β) εἶνε παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν $A x + B y + \Gamma = o$ εἶνε ἡ

$$A \alpha + B \beta = o.$$

Διότι ἡ σχέσις $A \alpha + B \beta = o$ ἐκφράζει, ὅτι τὸ σημεῖον (α, β) κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας $A x + B y = o$, ἥτις διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων καὶ εἶνε παράλληλος πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν $A x + B y + \Gamma = o$. Ἑπομένως, ἡ ἐν λόγῳ σχέσις ἐκφράζει ὅτι τὸ ἄνυσμα, τὸ ἔχον ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων καὶ πέρας τὸ σημεῖον (α, β) κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας $A x + B y = o$, ἄρα, ὅτι εἶνε παράλληλον τῇ $A x + B y + \Gamma = o$.

§ 30. Περὶ τομῆς δύο εὐθειῶν.—

α') Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις $\begin{cases} A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 = o \\ A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 = o \end{cases}$ (1)

Ἂν αἱ εὐθεῖαι, τὰς ὁποίας παριστάνουν αἱ ἐξισώσεις (1) τέμνωνται, αἱ συντεταγμέναι τῆς τομῆς αὐτῶν, ἔστωσαν αἱ x', y', θὰ ἐπαληθεύουν τὰς (1). Καὶ ἀντιστρόφως, ἂν αἱ συντεταγμέναι σημείου τινὸς ἐπαληθεύουν τὰς (1), τὸ σημεῖον τοῦτο εἶνε κοινὸν τῶν εὐθειῶν (1).

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι, ἵνα εὕρωμεν τὰς συντεταγμένας x′, y′ τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν (1), ἀρκεῖ νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) ὡς πρὸς x καὶ y.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος (1) εὑρίσκομεν

$$(2)\quad \left|\begin{array}{l} x'=\dfrac{B_1\Gamma_2-B_2\Gamma_1}{A_1B_2-A_2B_1},\ \text{ἢ}=\dfrac{\begin{vmatrix}B_1 & \Gamma_1\\ B_2 & \Gamma_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}},\ \text{ἢ συμβολικῶς}\ =\dfrac{|B,\Gamma|}{|A,B|}.\\[2ex] y'=\dfrac{\Gamma_1A_2-\Gamma_2A_1}{A_1B_2-A_2B_1},\ \text{ἢ}=\dfrac{\begin{vmatrix}\Gamma_1 & A_1\\ \Gamma_2 & A_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}},\ \text{ἢ συμβολικῶς}\ =\dfrac{|\Gamma,A|}{|A,B|}.\end{array}\right.$$

β′) Διακρίνομεν ἤδη τρεῖς περιπτώσεις.

I) Ἂν ὁ κοινὸς παρονομαστὴς τῶν κλασμάτων (2) $A_1B_2-A_2B_1$ εἶνε διάφορος τοῦ μηδενός, ἤτοι ἂν εἶνε $A_1B_2-A_2B_1 \neq 0$, ἢ $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$, αἱ εὐθεῖαι (1) τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον, κείμενον εἰς πεπερασμένην ἀπόστασιν καὶ ἔχον συντεταγμένας τὰς ἀνωτέρω τιμὰς (2) τῶν x καὶ y.

II) Ἂν εἶνε $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$, ἐν ᾧ οἱ ἀριθμηταὶ τῶν κλασμάτων (2) εἶνε διάφοροι τοῦ μηδενός, ἤτοι ἂν εἶνε $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$, αἱ εὐθεῖαι (1) εἶνε παράλληλοι, (§ 29, γ′), ἢ τέμνονται εἰς σημεῖον, κείμενον εἰς τὸ ἄπειρον.

III) Ἂν εἶνε $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$ καὶ τοὐλάχιστον εἷς τῶν ἀριθμητῶν τῶν κλασμάτων (2) ἴσος μὲ μηδέν, ἤτοι νὰ εἶνε $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$ αἱ ἐξισώσεις (1) παριστάνουν εὐθείας συμπιπτούσας, ἢ ἐχούσας πάντα τὰ σημεῖα αὐτῶν κοινὰ (§ 28, γ′).

γ′) Ἂν αἱ ἐξισώσεις τῶν δεδομένων εὐθειῶν εἶνε τῆς μορφῆς

$$\left.\begin{array}{l} y=\lambda_1x+\beta_1\\ y=\lambda_2x+\beta_2\end{array}\right\}\qquad (1')$$

δύνανται νὰ συμβοῦν ἐπίσης τὰ ἑξῆς τρία

I) ἢ νὰ εἶνε $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ὅτε αἱ εὐθεῖαι τέμνονται καὶ ἡ τομὴ αὐτῶν ἔχει συντεταγμένας

$$x=\frac{\beta_1-\beta_2}{\lambda_2-\lambda_1}\qquad y=\frac{\beta_1\lambda_2-\beta_2\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}.$$

II) ἢ νὰ εἶνε $\lambda_1 = \lambda_2$, $\beta_1 \neq \beta_2$, ὅτε αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι (1') εἶνε παράλληλοι (χωρὶς νὰ συμπίπτουν), ἢ τέμνονται εἰς τὸ ἄπειρον.

III) ἢ νὰ εἶνε $\lambda_1 = \lambda_2$, $\beta_1 = \beta_2$, ὅτε αἱ εὐθεῖαι (1') συμπίπτουν, ἢ ἔχουν πάντα τὰ σημεῖα αὐτῶν κοινά.

Ἐφαρμογαί. 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρὸς ἀλλήλας θέσις τῶν εὐθειῶν $5x - 4x + 6 = 0$, $10x - 8x + 12 = 0$.

Παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε $\frac{5}{10} = \frac{-4}{-8} = \frac{6}{12}$.

Ἑπομένως αἱ εὐθεῖαι, τὰς ὁποίας παριστάνουν αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις συμπίπτουν.

2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρὸς ἀλλήλας θέσις τῶν εὐθειῶν

$$3x = 7y, \quad 15x - 35y = 2.$$

Ἐπειδὴ εἶνε $\frac{3}{15} = \frac{-7}{35}$

αἱ εὐθεῖαι εἶνε παράλληλοι πρὸς τὸ ἄνυσμα $(-7, -3)$.

3) Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρὸς ἀλλήλας θέσεις τῶν εὐθειῶν

$$2x - 3y + 5 = 0, \quad x + y = 1.$$

Ἐπειδὴ εἶνε $\frac{2}{1} \neq \frac{-3}{1} \neq \frac{5}{-1}$ αἱ εὐθεῖαι τέμνονται. Αἱ συντεταγμέναι τῆς τομῆς των εἶνε $x' = \dfrac{\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{-2}{5}$, $y' = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \dfrac{7}{5}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Αἱ πλευραὶ τριγώνου ἔχουν ἐξισώσεις $x + y = 1$, $2x + 3y = 4$, $5x - 3y + 2 = 0$.

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ συντεταγμέναι τῶν κορυφῶν του.

2) Εὕρετε, ἂν ἡ εὐθεῖα $x - 3y - 7 = 0$ διέρχεται διὰ τῆς τομῆς τῶν $2y - 3x = 8$, $56y = 40 + 48x$.

3) Αἱ συντεταγμέναι τῶν κορυφῶν τριγώνου $M_1 M_2 M_3$ εἶνε $M_1 (x_1, y_1)$, $M_2 (x_2, y_2)$, $M_3 (x_3, y_3)$. Εὕρετε τὰς ἐξισώσεις τῶν διαμέσων του, καὶ τὰς συντεταγμένας τῆς τομῆς δύο ἐκ τούτων.

4) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς εὐθείας, ἥτις διέρχεται διὰ τῆς τομῆς τῶν $3x + 5y - 6 = 0$, $x - 3y = 2$ καὶ διὰ τοῦ σημείου $(3, -1)$, ἢ καὶ διὰ τοῦ $(0, 3)$.

5) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς εὐθείας, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ σημείου $(3, -5)$ καὶ εἶνε παράλληλος πρὸς τὴν $5x - 4y + 2 = 0$.

6) Εὕρετε τὰς ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν, αἵτινες διέρχονται διὰ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου $x - 5y = 1$, $2x + 3y = 4$, $5x - 3y + 2 = 0$ καὶ εἶνε ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς πλευράς του, τὰς ἀπέναντι τῶν κορυφῶν του.

7) Εὕρετε τὸ k ὥστε αἱ εὐθεῖαι $kx = 2(k + 2) - (k - 1)y$, $3kx = (3k + 1)y + (5k + 4$ νὰ εἶνε παράλληλοι, ἢ νὰ συμπίπτουν.

§ 31. Περὶ τομῆς τριῶν εὐθειῶν.—

α′) Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις τριῶν εὐθειῶν

$$\left.\begin{array}{l} A_1\,x + B_1\,y + \Gamma_1 = o, \\ A_2\,x + B_2\,y + \Gamma_2 = o, \\ A_3\,x + B_3\,y + \Gamma_3 = o. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Ζητεῖται ἡ συνθήκη, ἵνα αἱ εὐθεῖαι αὗται τέμνωνται, ἢ εἶνε παράλληλοι (τέμνωνται εἰς τὸ ἄπειρον).

Ἂν αἱ εὐθεῖαι τέμνωνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, αἱ συντεταγμέναι

$$x' = |B, \Gamma| : |A, B|, \qquad y' = |\Gamma, A| : |A, B|$$

τῆς τομῆς τῶν δύο πρώτων (30, α′) θὰ ἐπαληθεύουν καὶ τὴν τρίτην ἐξίσωσιν. Ἤτοι θὰ ἔχωμεν

$$A_3\,|\,B, \Gamma\,| : |\,A, B\,| + B_3\,|\,\Gamma, A\,| : |A, B\,| + \Gamma_3 = o, \qquad (2)$$

ἢ

$$A_3(B_1\Gamma_2 - B_2\Gamma_1) + B_3\,(\Gamma_1\,A_2 - A_1\,\Gamma_2) + \Gamma_3(A_1\,B_2 - A_2\,B_1) = o. \qquad (3)$$

β′) Ἀντιστρόφως, ἂν πληροῦται ἡ σχέσις αὕτη, εἶνε δὲ καὶ $A_1\,B_2 - A_2\,B_1 \neq o$, αἱ εὐθεῖαι (1) τέμνονται. Διότι ἡ (3) γραφομένη ὑπὸ τὴν μορφὴν (2) ἐκφράζει, ὅτι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν δύο πρώτων ἐκ τῶν εὐθειῶν (1) ἔχει συντεταγμένας x', y' ἐπαληθευούσας καὶ τὴν τρίτην τῶν (1)· ἤτοι ὅτι κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς τρίτης εὐθείας.

γ′) Ἂν εἶνε $A_1\,B_2 - A_2\,B_1 = o$, χωρὶς νὰ εἶνε $B_1\,\Gamma_2 - B_2\,\Gamma_1$ καὶ $\Gamma_1\,A_2 - A_1\,\Gamma_2$ ἴσον μὲ μηδέν, ἡ (3) ἐκφράζει τὴν ἀναγκαίαν καὶ ἱκανὴν συνθήκην, ἵνα τὸ ἄνυσμα $(B_1\,\Gamma_2 - B_2\,\Gamma_1, \Gamma_1\,A_2 - \Gamma_2\,A_1)$ εἶνε παράλληλον πρὸς τὴν τρίτην τῶν εὐθειῶν (1) (§ 29, ε′). Ἀλλὰ τὸ ἄνυσμα $(B_1\,\Gamma_2 - B_2\,\Gamma_1, \Gamma_1\,A_2 - A_1\,\Gamma_2)$ εἶνε παράλληλον πρὸς ἑκάστην τῶν παραλλήλων εὐθειῶν $A_1\,x + B_1\,y + \Gamma_1 = o$, $A_2\,x + B_2\,y + \Gamma_2 = o$ (§ 29, ε′). Ἑπομένως ἐν τῇ περιπτώσει αὐτῇ ἡ (3) ἐκφράζει τὴν συνθήκην, ἵνα αἱ (1) εἶνε παράλληλοι (τέμνωνται εἰς τὸ ἄπειρον).

δ′) Ἂν εἶνε

$$B_1\,\Gamma_2 - B_2\,\Gamma_1 = o, \Gamma_1\,A_2 - A_1\,\Gamma_2 = o, A_1\,B_2 - A_2\,B_1 = o,$$

ὅτε ἐπαληθεύεται ἀφ' ἑαυτῆς ἡ (3) αἱ μὲν δύο πρῶται τῶν (1) συμπίπτουν· οὕτω δ' ἡ τρίτη δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι ἔχει σημεῖόν τι κοινὸν μετ' αὐτῶν, κείμενον εἰς πεπερασμένην ἀπόστασιν, ἢ εἰς τὸ ἄπειρον.

ε΄) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι

«*ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα αἱ τρεῖς εὐθεῖαι (1) τέμνωνται ἢ εἶνε παράλληλοι εἶνε ἡ*

$$A_3 (B_1 \Gamma_2 - B_2 \Gamma_1) + B_3 (\Gamma_1 A_2 - \Gamma_2 A_1) + \Gamma_3 (A_1 B_2 - A_2 B_1) = o,$$

ἥτις γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} = o, \qquad \text{ἢ συμβολικῶς} \qquad |A, B, \Gamma| = o.$$

ϛ΄) Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα τρία σημεῖα $M_1 (x_1, y_1)$, $M_2 (x_2, y_2)$, $M_3 (x_3, y_3)$ κεῖνται ἐπ' εὐθείας εἶνε $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = o$,

ἢ συμβολικῶς $\qquad |x, y, 1| = o.$

Διότι ἡ σχέσις αὕτη ἐκφράζει τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην, ἵνα τὸ σημεῖον $M_1 (x_1, y_1)$ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥτις διέρχεται διὰ τῶν $M_2 (x_2, y_2)$, $M_3 (x_3, y_3)$ καὶ ἔχει ἐξίσωσιν

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = o \qquad (§\ 24,\ β΄).$$

§ 32. Ἐξίσωσις ἐπιπέδου δέσμης εὐθειῶν.—

α΄) Καλοῦμεν *ἐπίπεδον δέσμην εὐθειῶν* ἢ *ἀκτίνων* τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν, αἵτινες διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. Τὸ σημεῖον τῆς κοινῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν τούτων καλεῖται *κέντρον τῆς δέσμης*.

β΄) Ἔστωσαν
$$\left.\begin{array}{l} A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 = o, \\ A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 = o \end{array}\right\} \qquad (1)$$

αἱ ἐξισώσεις δύο εὐθειῶν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ οχy.

Ἡ ἐξίσωσις πάσης εὐθείας (τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν), διερχομένης διὰ τῆς τομῆς τῶν (1) ἔχει τὴν μορφὴν

$$\mu_1 (A_1 x + B_1 y + \Gamma_1) + \mu_2 (A_2 x + B_2 y + \Gamma_2) = o \qquad (2)$$

ἐνῷ μ_1, μ_2 εἶνε κατάλληλοι σταθεροὶ παράγοντες (ἀνεξάρτητοι τῶν x καὶ y).

Διότι ἡ (2) ὡς πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y παριστάνει εὐθεῖαν. Διέρχεται δ' αὕτη διὰ τῆς τομῆς τῶν (1). Διότι, ἂν μὲν αἱ (1) ἔχουν κοινόν σημεῖον (μὴ κείμενον εἰς τὸ ἄπειρον), αἱ συντεταγμέναι τούτου μηδενίζουν τὰ πολυώνυμα $A_1 x + B_1 y + \Gamma_1$, $A_2 x + B_2 y + \Gamma_2$, τιθέμεναι ἀντὶ τῶν x, y εἰς αὐτά· ἄρα καὶ ἡ (2) ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων τοῦ σημείου τούτου.

Ἂν δὲ αἱ (1) εἶνε παράλληλοι (μὴ συμπίπτουσαι) καὶ ἡ (2) εἶνε παράλληλος πρὸς αὐτάς. Διότι θὰ ἔχωμεν

$$-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2} \qquad (\text{ἐξ ὑποθέσεως})$$

ἄρα καὶ
$$-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2} = -\frac{\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2}{\mu_1 B_1 + \mu_2 B_2}.$$

Ἡ ἐξίσωσις (2) παριστάνει πᾶσαν εὐθεῖαν, διερχομένην διὰ τῆς τομῆς τῶν (1). Διότι, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν καταλλήλως τὰ μ_1, μ_2 ἵνα ἡ (2) παριστάνει εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τῆς τομῆς τῶν (1) καὶ διὰ τοῦ τυχόντος σημείου, π.χ. διὰ τοῦ M' (x', y'), τοῦ ἐπιπέδου.

Τῷ ὄντι, ἵνα συμβαίνῃ τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν

$$\mu_1 (A_1 x' + B_1 y' + \Gamma_1) + \mu_2 (A_2 x' + B_2 y' + \Gamma_2) = o,$$

ἐκ τῆς ὁποίας ὁρίζεται ὁ λόγος $\mu_1 : \mu_2$ καὶ εἶνε

$$\mu_1 : \mu_2 = -(A_2 x' + B_2 y' + \Gamma_2) : (A_1 x' + B_1 y' + \Gamma).$$

Οὕτω ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας ταύτης θὰ εἶνε

$$(A_2 x' + B_2 y' + \Gamma_2)(A_1 x + B_1 y + \Gamma_1)$$
$$= (A_1 x' + B_1 y' + \Gamma_1)(A_2 x + B_2 y + \Gamma_2).$$

γ') Ἡ ἐξίσωσις εὐθείας, διερχομένης διὰ τῆς τομῆς τῶν (1) καὶ διὰ τοῦ σημείου (x', y'), ὅταν τοῦτο δὲν κεῖται ἐπί τινος τῶν (1) δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς

$$\frac{A_1 x + B_1 y + \Gamma_1}{A_1 x' + B_1 y' + \Gamma_1} = \frac{A_2 x + B_2 y + \Gamma_2}{A_2 x' + B_2 y' + \Gamma_2}.$$

δ') Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι

«***ἵνα ἡ εὐθεῖα*** $A_3 x + B_3 y + \Gamma_3 = o$ ***διέρχεται διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν*** $A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 = o$, $A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 = o$ ***πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε δυνατὸν νὰ ὁρισθοῦν δύο συντελεσταὶ*** μ_1 ***καὶ*** μ_2, ***διάφοροι τοῦ μηδενός, ὥστε ἡ εὐθεῖα***

$$\mu_1 (A_1 x + B_1 y + \Gamma_1) + \mu_2 (A_2 x + B_2 y + \Gamma_2) = o$$

νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν $A_3 x + B_3 y + \Gamma_3 = o$».

ε') Ἂν παραστήσωμεν διὰ H_1 καὶ H_2 τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἐξισώσεων $A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 = 0$, $A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 = 0$, ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιπέδου δέσμης τῶν ἀκτίνων, τῆς ἐχούσης κέντρον τὴν τομὴν τῶν $H_1 = 0$, $H_2 = 0$ θὰ εἶνε

$$\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 = 0, \text{ ἢ } H_1 + \mu H_2 = 0 \qquad (\mu = \mu_2 : \mu_1).$$

Τῷ ὄντι, ἡ ἐξίσωσις αὕτη δίδει τὴν ἐξίσωσιν πάσης ἀκτῖνος τῆς δέσμης ταύτης διὰ καταλλήλου ἐκλογῆς τῆς παραμέτρου μ.

ϛ') Ἵνα διακρίνωμεν ἂν εὐθεῖά τις, ἔχουσα ἐξίσωσιν $H_3 = 0$, διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς δέσμης $\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 = 0$, ἤτοι ἂν ἀνήκῃ εἰς τὴν δέσμην ταύτην, εὑρίσκομεν πρῶτον τιμὰς τῶν μ_1, μ_2 ὥστε ἡ εὐθεῖα, $\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 = 0$ νὰ διέρχεται διά τινος σημείου τῆς $H_3 = 0$. Ἂν ἤδη ἡ εὐθεῖα $H_3 = 0$ ἀνήκῃ εἰς τὴν δέσμην, αἱ εὐθεῖαι $\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 = 0$ καὶ $H_3 = 0$ θὰ συμπίπτουν, διὰ τὰς ὁρισθείσας τιμὰς τῶν μ_1, μ_2. Ἑπομένως, αἱ παραστάσεις $\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2$ καὶ H_3 δύνανται νὰ διαφέρουν μόνον κατὰ σταθερὸν παράγοντα (§ 28, γ'). Ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ $-\mu_3$ τὸν παράγοντα τοῦτον, θὰ ἔχωμεν διὰ πᾶσαν τιμὴν τῶν x, y

$$\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 \equiv -\mu_3 H_3, \text{ ἢ } \mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 + \mu_3 H_3 \equiv 0,$$

(ἐνῷ τὸ σύμβολον $\equiv$ παριστάνει τὸ ἐκ ταυτότητος ἴσον).

Ἀντιστρόφως, ἂν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τρεῖς παράγοντας μ_1, μ_2, μ_3, διαφόρους τοῦ μηδενός, ὥστε ἡ παράστασις $\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 + \mu_3 H_3$ νὰ εἶνε ἐκ ταυτότητος ἴση μὲ μηδέν, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι $H_1 = 0$, $H_2 = 0$, $H_3 = 0$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Διότι, ἂν εἰς τὴν ταυτότητα $\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 + \mu_3 H_2 \equiv 0$ θέσωμεν ἀντὶ τῶν x, y τὰς συντεταγμένας τῆς τομῆς τῶν $H_1 = 0$, $H_2 = 0$, θὰ ἔχωμεν $\mu_3 H_3 = 0$.

Ἑπομένως θὰ εἶνε $H_3 = 0$. Ἤτοι καὶ ἡ εὐθεῖα $H_3 = 0$ διέρχεται διὰ τῆς τομῆς τῶν $H_1 = 0$, $H_2 = 0$.

ζ') Ὅθεν, ***ἵνα τρεῖς εὐθεῖαι*** $H_1 = 0$, $H_2 = 0$, $H_3 = 0$ ***διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ὑπάρχουν τρεῖς παράγοντες*** μ_1, μ_2, μ_3, ***διάφοροι τοῦ μηδενός, ὥστε νὰ ὑπάρχῃ ἡ ταυτότης***

$$\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 + \mu_3 H_3 \equiv 0.$$

Ἐφαρμογή. Εἰς πᾶν τρίγωνον αἱ τρεῖς διάμεσοι αὐτοῦ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Πρὸς εὐκολίαν λαμβάνομεν ὡς ἄξονας συντεταγμένων τὰς δύο πλευρὰς τοῦ τριγώνου. Ἔστωσαν ο (ο, ο), Α (α, ο), Β (ο, β) αἱ κορυφαὶ τοῦ τριγώνου.

Τὰ μέσα Α′, Γ′, Β′ τῶν πλευρῶν οΑ, Α Β, ο Β τοῦ τριγώνου ο Α Β ἔχουν συντεταγμένας

$$A'\left(\frac{\alpha}{2}, o\right), \Gamma'\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right), B'\left(o, \frac{\beta}{2}\right).$$ Αἱ εὐθεῖαι ΒΑ′, ΑΒ′, οΓ′

ἤτοι αἱ διάμεσοι τοῦ τριγώνου ἔχουν ἐξισώσεις ἀντιστοίχως (§ 24, γ′)

$$\frac{x}{\frac{1}{2}\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1, \qquad \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\frac{1}{2}\beta} = 1, \qquad \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} = o.$$

Ἐπειδὴ ἡ τρίτη τούτων προκύπτει δι' ἀφαιρέσεως τῶν μελῶν τῆς δευτέρας ἀπὸ τῶν τῆς πρώτης ($\mu_1 = 1$, $\mu_2 = -1$), ἕπεται ὅτι αἱ εὐθεῖαι, τὰς ὁποίας παριστάνουν αἱ ἐξισώσεις αὗται διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Ὁμὰς πρώτη. 1) Εὕρετε, ἂν αἱ εὐθεῖαι $3x - 5y - 7 = o$, $7x + 2y - 4 = o$, $16x - 3y = 11$ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

2) Εὕρετε τὸ σημεῖον τῆς κοινῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν $3x + 5y = o$, $2x + 7y + 3 = o$, καὶ ποῦ ἡ $x = 2y$ τέμνει αὐτάς.

3) Εὕρετε τὰς συντεταγμένας τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου $M_1 M_2 M_3$, ἂν εἶνε $M_1 (x_1, y_1)$, $M_2 (x_2, y_2)$, $M_3 (x_3, y_3)$.

4) Εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ λόγου $\mu_1 : \mu_2$ ἀντιστοιχεῖ μία ὡρισμένη ἀκτὶς τῆς δέσμης $\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 = o$ καὶ ἀντιστρόφως. Λαμβάνει τις τὰς ἐξισώσεις πασῶν τῶν ἀκτίνων τῆς δέσμης, ἐὰν ὁ λόγος $\mu_1 : \mu_2$ λάβῃ πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς ἀπὸ τοῦ $-\infty$ μέχρι τοῦ $+\infty$. Εἰς τίνας τιμὰς τοῦ λόγου ἀντιστοιχοῦν αἱ εὐθεῖαι $H_1 = o$, $H_2 = o$; Ἐξετάσατε τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν αἱ $H_1 = o$, $H_2 = o$, εἶνε παράλληλοι.

5) Ἂν αἱ εὐθεῖαι $H_1 = o$, $H_2 = o$, $H_3 = o$ τέμνωνται, ὑπάρχουν τρεῖς παράγοντες μ_1, μ_2, μ_3 ὥστε νὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα $\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 + \mu_3 H_3 \equiv o$. Ὑποθέσατε ὅτι εἶνε καὶ $\mu'_1 H_1 + \mu'_2 H_2 + \mu'_3 H_3 \equiv o$. Δείξατε ὅτι θὰ εἶνε $\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = \mu'_1 : \mu'_2 : \mu'_3$.

6) Ἂν εἷς ἢ δύο τῶν παραγόντων μ_1, μ_2, μ_3 εἶνε μηδέν, τὶ συνάγομεν ἐκ τῆς ταυτότητος $\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 + \mu_3 H_3 \equiv o$;

7) Εὕρετε τὰς ἀκτῖνας τῆς δέσμης, τὴν ὁποίαν ὁρίζουν αἱ

$$2x - 7y + 11 = o, \quad 5x + 3y - 1 = o,$$

αἵτινες διέρχονται διὰ τῶν σημείων (ο, ο), (5, ο), (− 2, 3), καὶ τὰς παραλλήλους πρὸς τοὺς ἄξονας.

8) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἀκτῖνος τῆς δέσμης τῶν $A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 = o$, $A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 = o$, ἥτις διέρχεται διὰ τῆς τομῆς τῶν $A'_1 x + B'_1 y + \Gamma'_1 = o$, $A'_2 x + B'_2 y + \Gamma'_2 = o$, καθὼς καὶ τῶν παραλλήλων ἀκτίνων πρὸς τὰς εὐθείας αὐτάς.

Ὁμὰς δευτέρα 1) Δείξατε ὅτι οἱουδήποτε ὄντος τοῦ λ ἡ εὐθεῖα

$$(1 + 3\lambda - 2\lambda^2)x + (2 - \lambda + 5\lambda^2)y + (5 + \lambda + 8\lambda^2) = o$$

διέρχεται πάντοτε δι' ἑνὸς σταθεροῦ σημείου. Εὕρετε τὸ σημεῖον αὐτό.

2) Εὕρετε τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην, ἵνα ἡ εὐθεῖα

$$(k + k_1\lambda + k_2\lambda^2)x + (\mu + \mu_1\lambda + \mu_2\lambda^2)y + (\nu + \nu_1\lambda + \nu_2\lambda^2) = o$$

διέρχεται δι' ἑνὸς σταθεροῦ σημείου (τὸ ὁποῖον δυνατὸν νὰ κεῖται εἰς τὸ ἄπειρον), οἱουδήποτε ὄντος τοῦ λ.

3) Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶνε σταθερὰ ἡ κορυφὴ Α καὶ αἱ διευθύνσεις τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ, μεταβάλλονται δὲ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν (ΑΒ) = β· ΑΓ) = γ, ὥστε νὰ εἶνε $\dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma} = \mu =$ σταθερόν.

Δείξατε ὅτι ἡ τρίτη πλευρὰ τοῦ τριγώνου μεταβάλλεται, ὥστε νὰ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου. Εὕρετε αὐτό.

4) Ἂν οἱ συντελεσταὶ τῆς ἐξισώσεως $Ax + By + \Gamma = o$ (1) μεταβάλλωνται ὥστε νὰ εἶνε $A\alpha + B\beta + \Gamma = o$, τῶν α, β ὄντων σταθερῶν, αἱ εὐθεῖαι (1) διέρχονται διὰ σταθεροῦ τινος σημείου. Εὕρετε αὐτό.

5) Δείξατε ὅτι τοῦ λ μεταβαλλομένου, ἡ εὐθεῖα

$$(2\lambda + 1)x + (1 - \lambda)y + 2\lambda - 1 = o$$

κινεῖται, ὥστε νὰ διέρχεται δι' ἑνὸς σταθεροῦ σημείου. Εὕρετε τὸ σημεῖον αὐτό.

6) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς εὐθείας, τῆς διερχομένης διὰ τῆς τομῆς τῶν $2x + y = 15$, $y - 3x = 10$ καὶ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων, ἢ καὶ διὰ τοῦ σημειου (3, —1).

§ 33. Θεωρήματα τοῦ Μενελάου καὶ τοῦ Ceva.—

α΄) Ἔστωσαν (ΓΒ) = α, (ΓΑ) = β, (ΑΒ) = γ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 48).

Ὑποθέτομεν ὅτι αἱ πλευραὶ τέμνονται ὑπὸ τυχούσης (*τεμνούσης*) εὐθείας (ε) ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα A_1, B_1, Γ_1, ὥστε νὰ εἶνε

$$\frac{(BA_1)}{(A_1\Gamma)} = \lambda, \qquad \frac{(\Gamma B_1)}{(B_1 A)} = \mu, \qquad \frac{(A\Gamma_1)}{(\Gamma_1 B)} = \nu.$$

Διὰ τῶν λ, μ ὁρίζονται τὰ σημεῖα A_1, B_1 (§ 17,ε΄) καὶ ἡ τέμνουσα (ε), ἑπομένως καὶ ἡ τομὴ Γ_1 τῶν ΑΒ, A_1B_1· ἄρα καὶ τὸ ν.

Πρέπει λοιπὸν νὰ ὑπάρχῃ σχέσις τις μεταξὺ τῶν λ, μ, ν, τὴν ὁποίαν ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν.

Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν τὴν ΓΒ ὡς ἄξονα τῶν x, τὴν ΓΑ ὡς ἄξονα τῶν y, ἀρχὴν δὲ τῶν συντεταγμένων τὸ Γ. Τότε τὸ σημεῖον A_1

θὰ ἔχῃ τετμημένην $\frac{\alpha}{1+\lambda}$ (§ 17,ε΄), καὶ τὸ B_1 τεταγμένην $\frac{\mu\beta}{1+\mu}$. Αἱ ἀντίστοιχοι ἐξισώσεις τῶν ΑΒ καὶ A_1B_1 εἶνε ἑπομένως (§ 24, γ΄)

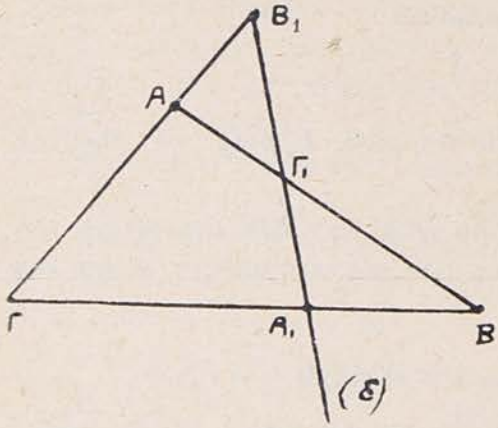
$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1, \quad (1+\lambda)\frac{x}{\alpha}+\frac{(1+\mu)}{\mu}\frac{y}{\beta}=1.$$

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν ὡς τετμημένην τῆς τομῆς Γ_1 τούτων $\frac{\alpha}{1-\lambda\mu}$. Ἀλλ' αὕτη εἶνε ἴση μὲ $\frac{\alpha\nu}{1+\nu}$, ὡς ἐξάγεται ἐκ τῆς ἰσότητος $\frac{(A\Gamma_1)}{(\Gamma_1 B)}=\nu$. Ὅθεν ἔχομεν

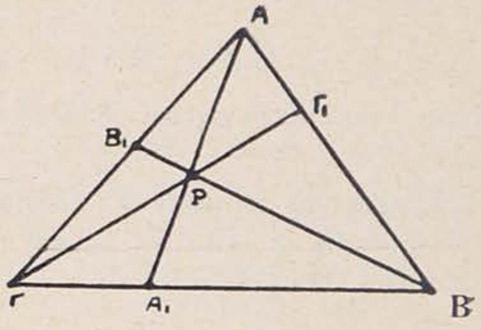
$$\frac{\alpha}{1-\lambda\mu}=\frac{\alpha\nu}{1+\nu}$$

ἐξ ἧς προκύπτει $\lambda.\mu.\nu=-1$, ἢ $\frac{(BA_1)\,(\Gamma B_1)\,(A\Gamma_1)}{(A_1\Gamma)\,(B_1A)\,(\Gamma_1B)}=-1.$

Ἡ σχέσις αὕτη ἐκφράζει ἰδιότητα τῶν λ, μ, ν, ὁριζομένων ὡς ἀνωτέρω, ἥτις καλεῖται ***θεώρημα τοῦ Μενελάου.***



(Σχ. 48)



(Σχ. 49)

β΄) Ἐὰν συνδέσωμεν δι' εὐθειῶν τυχὸν σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου μὲ τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, αἱ εὐθεῖαι αὗται θὰ τέμνουν τὰς ἀπέναντι τῶν κορυφῶν πλευρὰς αὐτοῦ, ἔστω εἰς τὰ σημεῖα A_1, B_1, Γ_1 (σχ. 49). Ἂν τεθῇ $\frac{(BA_1)}{(A_1\Gamma)}=\lambda$, $\frac{(\Gamma B_1)}{(B_1A)}=\mu$, $\frac{(A\Gamma_1)}{(\Gamma_1B)}=\nu$, (1)

ἐπειδὴ τὰ λ καὶ μ ὁρίζουν τὰ σημεῖα A_1, B_1, ἤτοι τὰς εὐθείας AA_1, BB_1 καὶ τὴν τομὴν αὐτῶν Ρ, ἄρα καὶ τὸ σημεῖον Γ_1, πρέπει νὰ εἶνε δυνατὸν νὰ ὁρισθῇ τὸ ν ἐκ τῶν λ καὶ μ. Ἤτοι ὑπάρχει σχέσις τις, συνδέουσα τὰ λ,μ,ν. Πρὸς εὕρεσιν αὐτῆς λαμβάνομεν ὡς ἀρχὴν τὸ Γ, ὡς ἄξονας τῶν x καὶ y τὰς πλευρὰς ΓΒ καὶ ΓΑ, καὶ θὰ ἔχωμεν ὡς τετμημένην τοῦ A_1 τὸ $\frac{\alpha}{1+\lambda}$, ὡς τεταγμένην τοῦ B_1 τὸ $\frac{\mu\,\beta}{1+\mu}$, ὡς ἐξισώσεις δὲ τῶν εὐθειῶν AA_1 καὶ BB_1 τὰς

$$(1+\lambda)\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1, \qquad \frac{x}{\alpha}+\frac{(1+\mu)}{\mu}\cdot\frac{y}{\beta}=1.$$

Δι' ἀφαιρέσεως τῶν ἐξισώσεων τούτων κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

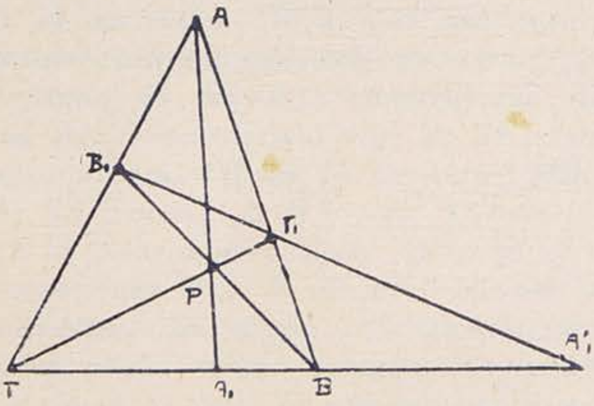
$$\frac{\lambda}{\alpha}x-\frac{y}{\beta\mu}=0, \qquad (2)$$

ὡς ἐξίσωσιν μιᾶς τῶν διὰ τοῦ P διερχομένων εὐθειῶν (§ 32,β'). Αὕτη εἶνε ἡ $\Gamma\Gamma_1$,(ὡς διερχομένη καὶ διὰ τῆς ἀρχῆς Γ).'Εκ τῆς ἐξισώσεως (2) τῆς $\Gamma\Gamma_1$ καὶ τῆς $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$ τῆς AB, εὑρίσκομεν ὡς τετμημένην τοῦ σημείου Γ_1 τὸ $\frac{\alpha}{1+\lambda\mu}$, ἥτις εἶνε ἴση μὲ $\frac{\alpha\nu}{1+\nu}$, ὡς προκύπτει ἐκ τῆς $\frac{(A\Gamma_1)}{(\Gamma_1 B)}=\nu$.

'Εκ τῆς
$$\frac{\alpha\nu}{1+\nu}=\frac{\alpha}{1+\lambda\mu}$$

εὑρίσκομεν $\lambda.\mu.\nu=+1$, ἢ $\frac{(BA_1)}{(A_1\Gamma)}\frac{(\Gamma B_1)}{(B_1A)}\frac{(A\Gamma_1)}{(\Gamma_1B)}=+1.$

Ἡ σχέσις αὕτη ἐκφράζει ἰδιότητα τῶν λ, μ, ν, ἅτινα ὡρίσθησαν ἐκ τῶν (1), ἥτις καλεῖται **θεώρημα τοῦ Ceva.**



(Σχ. 50)

γ') Τὰ ἀνωτέρω ἐξαγόμενα συνδυάζομεν ἤδη ὡς ἑξῆς.

Συνδέομεν τὰ σημεῖα B_1,Γ_1 διὰ (διατεμνούσης) εὐθείας, ἥτις τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ, ἔστω εἰς τὸ σημεῖον A'_1 (σχ.50). Παριστάνομεν τὸν λόγον $\frac{(ΒΑ'_1)}{(Α'_1Γ)}$ διὰ λ', καὶ διὰ λ, μ, ν ἀντιστοίχως τοὺς λόγους

$$\frac{(ΒΑ_1)}{(Α_1Γ)}, \quad \frac{(ΓΒ_1)}{(Β_1Α)}, \quad \frac{(ΓΓ_1)}{(Γ_1Β)}.$$

Ἐφαρμόζομεν τὸ θεώρημα τοῦ *Μενελάου* διὰ τὴν τέμνουσαν $Β_1\,Γ_1\,Α'_1$, καὶ ἔχομεν

$$λ'.\,μ.\,ν = -1.$$

Ἀφ' ἑτέρου κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Ceva ἔχομεν

$$λ.\,μ.\,ν = +1.$$

Ἑπομένως εἶνε $\quad λ' = -λ.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Δείξατε ὅτι τὰ σημεῖα Β, Γ χωρίζονται ἁρμονικῶς ὑπὸ τῶν $Α_1$, $Α'_1$ (τοῦ ἀνωτέρω σχήματος).

2 Καλοῦμεν *πλῆρες τετρακόρυφον* τὸ εὐθύγραμμον σχῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζουν 4 σημεῖα μετὰ τῶν 6 εὐθειῶν, αἵτινες συνδέουν αὐτὰ ἀνὰ δύο λαμβανόμενα. Καλοῦμεν *πλῆρες τετράπλευρον* 4 εὐθείας μετὰ τῶν 6 σημείων καθ' ἃ τέμνονται αὗται ἀνὰ δύο λαμβανόμεναι Κατασκευάσατε τοιαῦτα σχήματα.

3) Ἔστωσαν 4 σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ταῦτα ὡς κορυφὰς πλήρους τετρακορύφου, ἔχοντος πλευρὰς τὰς εὐθείας ΑΒ, ΓΔ, ΑΓ, ΒΔ, ΑΔ, ΒΓ, αἵτινες τέμνονται ἔστω εἰς τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Θ (ταῦτα καλοῦνται *διαγώνια σημεῖα τοῦ τετρακορύφου* ΑΒΓΔ). Ἐὰν συνδέσωμεν τὰ Ζ καὶ Θ δι' εὐθείας, τεμνούσης τὴν ΑΒ εἰς τὸ Η, καὶ τὴν ΓΔ εἰς τὸ Ι, εὕρετε ὅτι τὰ Α, Β χωρίζονται ἁρμονικῶς ὑπὸ τῶν Ε, Η, καθὼς καὶ τὰ Γ, Δ ὑπὸ τῶν Ε, Ι. (Ἐφαρμόσατε πρὸς τοῦτο τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα, πρῶτον εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΖ μὲ τὴν διατέμνουσαν ΓΔ καὶ τὸ σημεῖον Θ, καὶ δεύτερον εἰς τὸ τρίγωνον ΓΔΖ μὲ τὴν διατέμνουσαν ΑΒ καὶ τὸ σημεῖον Θ). Ὁμοίως ἡ εὐθεῖα ΕΘ τέμνει τὰς ΑΓ καὶ ΒΔ εἰς τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα μὲ τὸ Ζ χωρίζουν ἁρμονικῶς τὰ Α, Γ καὶ τὰ Β, Δ. Τέλος ἡ ΕΖ τέμνει τὰς ΑΔ καὶ ΒΓ εἰς σημεῖα, ἅτινα μὲ τὸ Θ, χωρίζουν ἁρμονικῶς τὰ Α, Δ καὶ Β, Γ. Οὕτω συνδέοντες τὰ τρία (διαγώνια) σημεῖα Ε, Ζ, Θ λαμβάνομεν ἐφ' ἑκάστης τῶν 6 πλευρῶν τοῦ πλήρους τετρακορύφου *ἁρμονικὰ συμπλέγματα*. Διὰ τῶν ἁρμονικῶν τούτων ἰδιοτήτων τοῦ πλήρους τετρακορύφου δυνάμεθα διὰ τῆς χρήσεως μόνου τοῦ κανόνος νὰ εὕρωμεν τὸ τέταρτον ἁρμονικὸν σημεῖον.

4) Δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ. Εὕρετε τὸ τέταρτον ἁρμονικὸν των σημεῖον, τὸ ἀντίστοιχον εἰς τὸ Γ α') ἂν τὸ Γ κεῖται μεταξὺ Α καὶ Β· β') ἂν τὸ Γ κεῖται ἐκτὸς τοῦ τμήματος ΑΒ.

5) Εἰς τὰ θεωρήματα τοῦ *Μενελάου* καὶ τοῦ Ceva λάβετε ὑπ' ὄψιν σας τὰ σημεῖα τῶν τμημάτων. Δώσατε τιμὰς εἰς τὸ λ καὶ μ καὶ εὕρετε τὸ ν. Διατυπώσατε τὰ θεωρήματα, ὅταν εἶνε λ = μ = 1, εὕρετε δὲ καὶ τὸ ν.

Ἐξισώσεις ἐπιπέδων καὶ εὐθειῶν ἐν τῷ διαστήματι.

§ 34. Ὁρισμοί.—

α΄) Ἐὰν θεωρήσωμεν ἐν τῷ διαστήματι τρεῖς ἄξονας συντεταγμένων οxyz καὶ φαντασθῶμεν ἐπίπεδον παράλληλον τῷ yz, τέμνον τὸν ἄξονα τῶν x, ἔστω εἰς τὸ σημεῖον Π (α,ο,ο), παρατηροῦμεν ὅτι, πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τούτου ἔχει τετμημένην x ἴσην μὲ α. Καὶ ἀντιστρόφως, πᾶν σημεῖον τοῦ διαστήματος, ἔχον τετμημένην x ἴσην μὲ α, κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου. Ἄρα ὁ τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τετμημένην α, εἶνε τὸ διὰ τοῦ σημείου Π (α, ο, ο) ἀγόμενον ἐπίπεδον παράλληλον τῷ yz.

Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι «*ἡ ἐξίσωσις* x=*α παριστάνει ἐπίπεδον παράλληλον τῷ* yz *καὶ τέμνον τὸν ἄξονα τῶν* x *εἰς σημεῖον, ἔχον τετμημένην α*».

Κατ' ἀνάλογον τρόπον λέγομεν ὅτι «*ἡ ἐξίσωσις* y=*β παριστάνει ἐπίπεδον παράλληλον τῷ* xz *καὶ τέμνον τὸν ἄξονα τῶν* y *εἰς σημεῖον, ἔχον τεταγμένην β*».

Ἐπίσης «*ἡ ἐξίσωσις* z=*γ παριστάνει ἐπίπεδον παράλληλον τῷ* xy *καὶ τέμνον τὸν ἄξονα τῶν* z *εἰς σημεῖον ἔχον κατηγμένην γ*».

β΄) Ἐν γένει, «*καλοῦμεν ἐπιφάνειαν παριστανομένην ὑπὸ ἐξισώσεως φ(*x, y, z*)=ο, περιεχούσης τὰς μεταβλητὰς* x,y,z, *τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν (ἂν ὁ τόπος οὗτος εἶνε ἐπιφάνεια)*».

γ΄) Ἑπομένως, «*ἐξίσωσις ἐπιφανείας λέγεται ἡ ἐξίσωσις, ἡ ὁποία ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων παντὸς σημείου τῆς ἐπιφανείας καὶ μόνον ὑπὸ τῶν συντεταγμένων τῶν σημείων τούτων*».

δ΄) Ἂν ἐπιφάνειά τις (ε) ἔχῃ ἐξίσωσιν φ (x, y, z) = ο θὰ λέγωμεν συνήθως ἡ ἐπιφάνεια φ (x, y, z) = ο καὶ θὰ ἐννοοῦμεν τὴν (ε).

ε΄) Ἡ ἐξίσωσις x=ο ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων μόνον τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου yz, τὸ ὁποῖον αὕτη καὶ παριστάνει. Ὁμοίως ἡ ἐξίσωσις y=ο ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων μόνον τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου xz. Τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν δύο αὐτῶν ἐπιπέδων, ἤτοι τὰ σημεῖα τοῦ ἄξονος τῶν z ἔχουν συντεταγμένας, ἐπαληθευούσας τὰς ἐξισώσεις x = ο, y = ο. Καὶ ἀντιστρόφως, ἂν σημείου τινὸς αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουν τὰς ἐξισώσεις x = ο, y = ο, θὰ κεῖται τοῦτο ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου yz καὶ ἐπὶ τοῦ xz. Ἄρα θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων τούτων, δηλαδὴ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν z.

Διὰ τοῦτο αἱ ἐξισώσεις $x = o$, $y = o$ καλοῦνται ἐξισώσεις τοῦ ἄξονος τῶν z.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι, αἱ ἐξισώσεις $x = o$, $z = o$ παριστάνουν τὸν ἄξονα τῶν y καὶ λέγονται ἐξισώσεις αὐτοῦ, αἱ δὲ $y = o$, $z = o$ λέγονται ἐξισώσεις τοῦ ἄξονος τῶν x.

ς') Ὁμοίως ἔχομεν ὅτι αἱ $x = \alpha$, $y = \beta$ εἶνε ἐξισώσεις εὐθείας παραλλήλου τῷ ἄξονι τῶν z, αἱ $x = \alpha$, $z = \gamma$ εὐθείας παραλλήλου τῷ ἄξονι τῶν y, αἱ δὲ $y = \beta$, $z = \gamma$ εὐθείας παραλλήλου τῷ ἄξονι τῶν x.

ζ') Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις ὡς πρὸς τὸ σύστημα $oxyz$ τῶν ἀξόνων

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1\,(x,\ y,\ z) = o \\ \varphi_2\,(x,\ y,\ z) = o\end{array}\right\} \qquad (1)$$

καὶ ἂς ὑποτεθῇ, ὅτι ἑκάστη τούτων παριστάνει ἐπιφάνειαν.

Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουν τὰς ἐξισώσεις ταύτας θὰ εἶνε γραμμή, καθ' ἣν τέμνονται αἱ ἐπιφάνειαι, αἱ ἔχουσαι ἐξισώσεις τὰς (1). Διότι, ἂν αἱ συντεταγμέναι ἑνὸς σημείου ἐπαληθεύουν τὰς δύο ἐξισώσεις (1), τοῦτο θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῶν δύο ἐπιφανειῶν, ἄρα ἐπὶ τῆς τομῆς αὐτῶν.

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ λέγωμεν ὅτι ἡ γραμμή, ἡ ὁποία εἶνε ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουν τὰς ἐξισώσεις (1) παριστάνεται ὑπὸ τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (1).

η') Πρὸς εὕρεσιν τῶν ἐξισώσεων γραμμῆς, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὰς ἐξισώσεις δύο ἐπιφανειῶν, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ τῆς γραμμῆς καὶ δὲν ἔχουν ἄλλο κοινὸν σημεῖον ἐκτὸς τῆς γραμμῆς, τῆς ὁποίας ζητοῦμεν τὰς ἐξισώσεις.

θ') Πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς

$$f\,(x,\ y) = o \qquad (2)$$

μὴ περιέχουσα τὸν ἄγνωστον z, παριστάνει, ἐν γένει, ἐπιφάνειαν (***κυλινδρικήν***), παραγομένην ἐκ τῆς κινήσεως εὐθείας (***γενετείρας***), παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα τῶν z καὶ συναντώσης τὸ ἐπίπεδον xy κατά τι σημεῖον τῆς γραμμῆς (***ὁδηγοῦ***), ἔστω AB, ἐχούσης ἐξισώσεις

$$\left.\begin{array}{l}f\,(x,\ y) = o, \\ z = o.\end{array}\right\} \qquad (3)$$

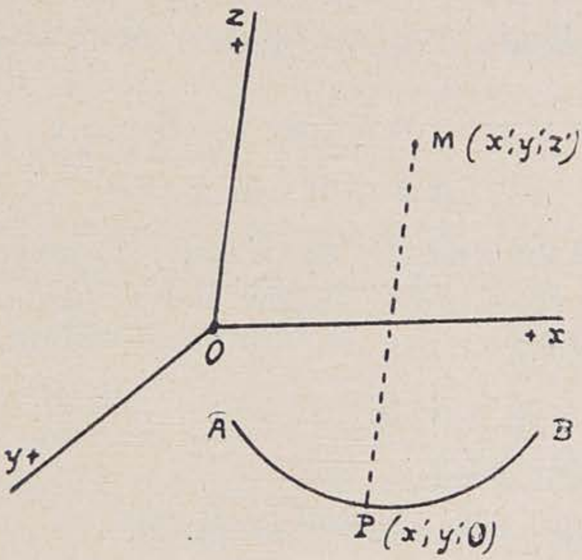
Διότι, ἂν σημεῖόν τι M ἔχῃ συντεταγμένας (x', y', z'), ἐπαληθευούσας τὴν ἐξίσωσιν (2), ἤτοι ἂν εἶνε

$$f(x', y') = o,$$

τὸ σημεῖον M κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας. Ἐπειδὴ ἡ προβολὴ αὐτοῦ παραλλήλως τῷ ἄξονι τῶν z ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου xy, ἔστω τὸ P, ἔχει συντεταγμένας (x', y', o), αἵτινες ἐπαληθεύουν τὰς ἐξισώσεις (3), ἄρα κεῖται ἐπὶ τῆς γραμμῆς AB (σχ. 51). Ἤτοι, τὸ σημεῖον M, καθὼς καὶ πάντα τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας PM, κεῖνται ἐπὶ τῆς ἐν λόγῳ κυλινδρικῆς ἐπιφανείας.

Καὶ ἀντιστρόφως, ἂν σημεῖόν τι, ἔστω τὸ $M(x', y', z')$ κεῖται ἐπὶ τῆς ἐν λόγῳ κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, θὰ ἔχωμεν

$$f(x', y') = o.$$



(Σχ. 51)

Διότι, ἂν προβάλωμεν τὸ M ἐπὶ τοῦ xy παραλλήλως τῷ ἄξονι τῶν z, ἡ προβολὴ αὐτοῦ P θὰ ἔχῃ συντεταγμένας (x', y', o) καὶ κεῖται ἐπὶ τῆς γραμμῆς AB, ἐχούσης τὰς ἐξισώσεις (3).

Ἑπομένως εἶνε

$$f(x', y') = o, \quad z = o.$$

ε') Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἔχομεν ὅτι, ἐξίσωσις τῆς μορφῆς

$$\varphi(y, z) = o$$

παριστάνει, ἐν γένει, κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν, ἔχουσαν γενετείρας μὲν παραλλήλους πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x, ὁδηγὸν δὲ τὴν γραμμὴν

$$\varphi(y, z) = o,$$
$$x = o.$$

Πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς

$$\sigma(x, z) = o$$

παριστάνει, ἐν γένει, κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν, ἔχουσαν γενετείρας μὲν παραλλήλους τῷ ἄξονι τῶν y, ὁδηγὸν δὲ τὴν γραμμήν, ἥτις ἔχει ἐξισώσεις

$$\sigma(x, z) = o, \; y = o.$$

§ **35. Πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς** $Ax + By + \Gamma z + \Delta = o$ **παριστάνει ἐπίπεδον.**—

α′) Ἐν γένει ἡ ἐξίσωσις

$$Ax + By + \Gamma z + \Delta = o$$

παριστάνει ἐπιφάνειάν τινα. Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια αὕτη εἶνε ἐπίπεδον.

Ἂν μὲν εἶνε $\Gamma = o$, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$Ax + By + \Delta = o,$$

ἥτις παριστάνει κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν, ἔχουσαν γενετείρας μὲν παραλλήλους τῷ ἄξονι τῶν z, ὁδηγὸν δὲ τὴν γραμμὴν, τὴν ἔχουσαν ἐξισώσεις (§ 34, θ′)

$$Ax + By + \Delta = o, \quad z = o$$

(ἐν τῷ ἐπιπέδῳ oxy).

Ἀλλ' ἡ γραμμὴ αὕτη εἶνε εὐθεῖα (§ 25).

Ἄρα ἡ ἐν λόγῳ κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια εἶνε ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν z.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι ἂν εἶνε $B = o$, ἢ $A = o$, ἡ ἐξίσωσις $Ax + \Gamma z + \Delta = o$, ἢ ἡ $By + \Gamma z + \Delta = o$ παριστάνει ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν y, ἢ τῶν x ἀντιστοίχως.

β′) Ἂν εἶνε $B = o, \Gamma = o$, ἔχομεν $Ax + \Delta = o$,

ἢ $x = -\dfrac{\Delta}{A}$, ἥτις παριστάνει ἐπίπεδον παράλληλον τῷ yz (§ 34, α′).

γ′) Ἐν γένει, ἡ ἐξίσωσις $Ax + By + \Gamma z + \Delta = o$ (1) παριστάνει ἐπίπεδον.

Διότι, ἂν λάβωμεν δύο τυχόντα σημεῖα $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις αὕτη, θὰ εἶνε (§ 34, γ′)

$$A x_1 + B y_1 + \Gamma z_1 + \Delta = o, \quad A x_2 + B y_2 + \Gamma z_2 + \Delta = o. \qquad (2)$$

Αἱ συντεταγμέναι τυχόντος σημείου Μ′ (x′, y′, z′) τῆς εὐθείας τῶν M_1, M_2 θὰ εἶνε

$$x' = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2}{k_1 + k_2}, \quad y' = \frac{k_1 y_1 + k_2 y_2}{k_1 + k_2}, \quad z' = \frac{k_1 z_1 + k_2 z_2}{k_1 + k_2},$$

ἂν τεθῇ $(M_1\ M) : (M\ M_2) = k_2 : k_1$ (§ 20, δ′).

Θέτομεν ἀντὶ τῶν x, y, z τὰ x′, y′, z′ ἐν τῇ (1), ὅτε ἔχομεν

$$A x' + B y' + \Gamma z' + \Delta = \frac{k_1}{k_1 + k_2} (A x_1 + B y_1 + \Gamma z_1 + \Delta)$$
$$\frac{k_2}{k_1 + k_2} (A x_2 + B y_2 + \Gamma z_2 + \Delta),$$

τὸ ὁποῖον ἰσοῦται μὲ μηδὲν ἕνεκα τῶν (2). Ἄρα, πᾶν σημεῖον τῆς εὐθείας $M_1\ M_2$ κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, ἣν παριστᾷ ἡ ἐξίσωσις $A x + B y + \Gamma z + \Delta = o$. Ἤτοι ἡ ἐπιφάνεια αὕτη εἶνε ἐπίπεδον.

δ′) Παρατηρητέον ὅτι, ἂν εἶνε $\Delta = o$ ἡ ἐξίσωσις

$$A x + B y + \Gamma z = o$$

παριστάνει ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων. Διότι αἱ συντεταγμέναι τῆς ἀρχῆς ο (ο,ο,ο) ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν.

§ **36. Πᾶν ἐπίπεδον παρίσταται ὑπὸ ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς** x, y, z.—

α′) Ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ yz, ἢ τὸ xz, ἢ τὸ xy παρίσταται ὑπὸ ἐξισώσεως τῆς μορφῆς $x = \alpha$, ἢ $y = \beta$, ἢ $z = \gamma$ ἀντιστοίχως (§ 34,α′). Ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν z θὰ τέμνῃ τὸ ἐπίπεδον xy κατὰ εὐθεῖαν, ἔχουσαν ἐξισώσεις ἔστω $z = o$, $A x + B y + \Delta = o$, (§ 24). Ἑπομένως, τὸ ἐπίπεδον τοῦτο παριστάνεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$A x + B y + \Delta = o, \qquad (§\ 34,\vartheta').$$

Ὁμοίως ἔχομεν ὅτι, ἂν ἐπίπεδον εἶνε παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν y παριστάνεται ὑπὸ ἐξισώσεως τῆς μορφῆς $Ax + \Gamma z + \Delta = o$· ἂν εἶνε παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν x ὑπὸ ἐξισώσεως τῆς μορφῆς $By + \Gamma z + \Delta = o$.

β′) Θὰ δείξωμεν ὅτι τυχὸν ἐπίπεδον (k), τέμνον τοὺς ἄξονας οxyz εἰς τὰ σημεῖα Π (α, ο, ο), Ρ (ο, β, ο), Σ (ο, ο, γ) ἀντιστοίχως παριστάνεται ὑπὸ ἐξισώσεως πρωτοβαθμίου ὡς πρὸς x, y, z.

Τὸ ἐπίπεδον (k) τέμνει τὸ xy κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΠΡ, ἔχουσαν ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $z = o$, $A x + B y + \Delta = o$, (§ 24)· ἐνῷ εἶνε $A \alpha + \Delta = o$, $B \beta + \Delta = o$, (§ 23, ε′), $\Delta \neq o$.

Ἑπομένως εἶνε $-\dfrac{\Delta}{A}=\alpha,\ -\dfrac{\Delta}{B}=\beta,$

ἢ $$\frac{A}{\Delta}=-\frac{1}{\alpha},\quad \frac{B}{\Delta}=-\frac{1}{\beta}. \qquad (1)$$

Θεωροῦμεν ἤδη τὴν ἐξίσωσιν $\dfrac{A}{\Delta}x+\dfrac{B}{\Delta}y+\dfrac{\Gamma}{\Delta}z+1=o,$

ἢ τὴν $Ax+By+\Gamma z+\Delta=o,$ ἐν ᾗ τὰ μὲν $\dfrac{A}{\Delta}$, $\dfrac{B}{\Delta}$ ἔχουν τὰς ἀνωτέρω τιμὰς (1), τὸ δὲ $\dfrac{\Gamma}{\Delta}$ λαμβάνομεν ἴσον μὲ $-\dfrac{1}{\gamma}$. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις αὕτη παριστάνει ἐπίπεδον (§ 35, γ'), ἔστω τὸ (k'), τέμνον τὸ ἐπίπεδον xy κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΠΡ. Διότι διὰ $z=o$ ἔχομεν $Ax+By+\Delta=o$.

Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο θὰ διέρχεται καὶ διὰ τοῦ σημείου $\Sigma\,(o,\,o,\,\gamma)$. Διότι εἶνε $A.\,o+B.\,o+\Gamma\gamma+\Delta=o$, ἐπειδὴ ἐλήφθη

$$\frac{\Gamma}{\Delta}=-\frac{1}{\gamma},\qquad \text{ἢ } \Gamma\gamma+\Delta=o.$$

Τὰ ἐπίπεδα (k) καὶ (k') ἔχοντα τὴν εὐθεῖαν ΠΡ κοινὴν καὶ τὸ σημεῖον Σ κοινόν, κείμενον ἐκτὸς αὐτῆς, συμπίπτουν. Ἄρα τὸ ἐπίπεδον (k) παριστάνεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $Ax+By+\Gamma z+\Delta=o$,

ἐνῷ εἶνε $$\frac{A}{\Delta}=-\frac{1}{\alpha},\ \frac{B}{\Delta}=-\frac{1}{\beta},\ \frac{\Gamma}{\Delta}=-\frac{1}{\gamma}.$$

Γράφοντες τὴν $Ax+By+\Gamma z+\Delta=o$ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{A}{\Delta}x+\frac{B}{\Delta}y+\frac{\Gamma}{\Delta}z+1=o, \qquad (\text{ἐνῷ εἶνε } \Delta\neq o)$$

εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{y}{\beta}+\dfrac{z}{\gamma}=1,$

ἥτις παριστάνει τὸ ἐπίπεδον (k).

γ') Ἂν ἐπίπεδον (k_1) διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων καὶ τέμνῃ τὸ xy, ἔστω κατὰ τὴν εὐθεῖαν οΛ, τὸ δὲ xz κατὰ τὴν οΡ, θὰ παριστάνεται ὑπὸ ἐξισώσεως τῆς μορφῆς

$$Ax+By+\Gamma z=o, \qquad (2)$$

ἐνῷ $Ax+By=o,\ z=o$ εἶνε αἱ ἐξισώσεις τῆς εὐθείας οΛ (ἐπὶ τοῦ xy), αἱ δὲ $Ax+\Gamma z=o,\ y=o$ αἱ ἐξισώσεις τῆς εὐθείας οΡ (ἐπὶ τοῦ xz).

Διότι, ἡ ἐξίσωσις (2) παριστάνει ἐπίπεδον, ἔστω τὸ (k'_1), διερχόμενον διὰ τῆς ἀρχῆς (o,o,o)· τέμνει δὲ τοῦτο τὸ μὲν xy κατὰ τὴν εὐθεῖαν $Ax+By=o,\ z=o$, ἤτοι κατὰ τὴν οΛ, τὸ δὲ xz κατὰ τὴν $Ax+\Gamma z=o,\ y=o$, ἤτοι κατὰ τὴν οΡ.

Ἑπομένως τὸ (k_1') συμπίπτει μὲ τὸ (k_1). Ἤτοι τὸ (k_1) παρίσταται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$A x + B y + \Gamma z = o.$$

δ') Ἂν δοθὲν ἐπίπεδον τέμνῃ τὸ xy κατὰ τὴν εὐθεῖαν $A x + B y + \Delta = o$, $z = o$, διέρχεται δὲ καὶ διὰ τοῦ σημείου (α, β, γ), τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ xy καὶ ἑπομένως εἶνε $\gamma \neq o$, θὰ παριστάνεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$A x + B y + \Gamma z + \Delta = o, \qquad (3)$$

ἐνῷ εἶνε

$$A \alpha + B \beta + \Gamma \gamma + \Delta = o, \qquad (4)$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν τὴν τιμὴν τοῦ $\Gamma = -\frac{1}{\gamma}(A \alpha + B \beta + \Delta)$.

Διότι, τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον παριστάνει ἡ ἐξίσωσις (3) τέμνει τὸ xy κατὰ τὴν εὐθεῖαν $A x + B y + \Delta = o, z = o$, διέρχεται δὲ καὶ διὰ τοῦ σημείου (α, β, γ) ἕνεκα τῆς (4). Ἄρα τὸ ἐπίπεδον τοῦτο συμπίπτει μὲ τὸ δοθέν.

37. Θετικὸν καὶ ἀρνητικὸν μέρος τοῦ χώρου ὡς πρὸς ἐπίπεδον.—

α') Ἔστω $A x + B y + \Gamma z + \Delta = o$ ἡ ἐξίσωσις ἐπιπέδου τινός. Ἐνῷ πᾶν σημεῖον, κείμενον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἔχει συντεταγμένας ἐπαληθευούσας τὴν ἐξίσωσιν αὐτοῦ, πᾶν ἄλλον σημεῖον ἔχει συντεταγμένας, αἵτινες τιθέμεναι ἀντὶ τῶν x, y, z ἐν τῇ ἐξισώσει τοῦ ἐπιπέδου δίδουν ἐξαγόμενον θετικὸν ἢ ἀρνητικόν.

Καλοῦμεν ***θετικὸν μέρος τοῦ χώρου ὡς πρὸς ἐπίπεδον*** ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι τιθέμεναι ἀντὶ τῶν x, y z ἐν τῇ ἐξισώσει αὐτοῦ δίδουν ἐξαγόμενον θετικόν· ***ἀρνητικὸν δὲ μέρος τοῦ χώρου ὡς πρὸς ἐπίπεδον*** καλοῦμεν τὸ ἄλλο μέρος τοῦ χώρου ὡς πρὸς αὐτό. Π.χ. ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον $3x + 5y - z = o$, τὸ σημεῖον $(1, -1, o)$ κεῖται εἰς τὸ ἀρνητικὸν μέρος τοῦ χώρου. Διότι εἶνε $3 + 5(-1) - o = -2$. Ἐνῷ τὸ σημεῖον $(o, +7, 1)$ κεῖται εἰς τὸ θετικὸν μέρος τοῦ χώρου ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο, ἐπειδὴ εἶνε $3.o + 5.7 - 1 = 34$.

β') Διὰ νὰ ὁρίσωμεν τὸ θετικὸν καὶ ἀρνητικὸν μέρος τοῦ χώρου ὡς πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ ἐξίσωσις, εὑρίσκομεν τὴν θέσιν τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (ἂν τοῦτο δὲν διέρχεται δι' αὐτῆς), θέτοντες ἐν τῇ ἐξισώσει (o, o, o), ἀντὶ τῶν x, y, z. Ἀλλὰ τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀντικαταστάσεως ταύτης δίδει τὸν σταθερὸν ὅρον Δ τῆς ἐξισώσεως τοῦ ἐπιπέδου $Ax + By + \Gamma z + \Delta = o$.

Ἑπομένως, ἂν εἶνε $\Delta > 0$, τὸ μέρος τοῦ χώρου ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον, ἐνῷ χώρῳ περιέχεται καὶ ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων εἶνε τὸ θετικόν, τὸ δ' ἄλλο τὸ ἀρνητικόν. Τοὐναντίον συμβαίνει, ἂν εἶνε $\Delta < 0$.

Ἂν τὸ ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων, ὅτε θὰ εἶνε $\Delta = 0$, εὑρίσκομεν τὴν θέσιν σημείου τινὸς ἐκ τῶν ἀξόνων ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἀντὶ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων $(0, 0, 0)$.

γ') Ἂν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα τῶν ὅρων τῆς ἐξισώσεως ἐπιπέδου, τὸ θετικὸν μέρος τοῦ χώρου τρέπεται εἰς ἀρνητικόν, καὶ τοὐναντίον, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο.

§ 38. Κατασκευὴ ἐπιπέδου δοθείσης τῆς ἐξισώσεως αὐτοῦ.—

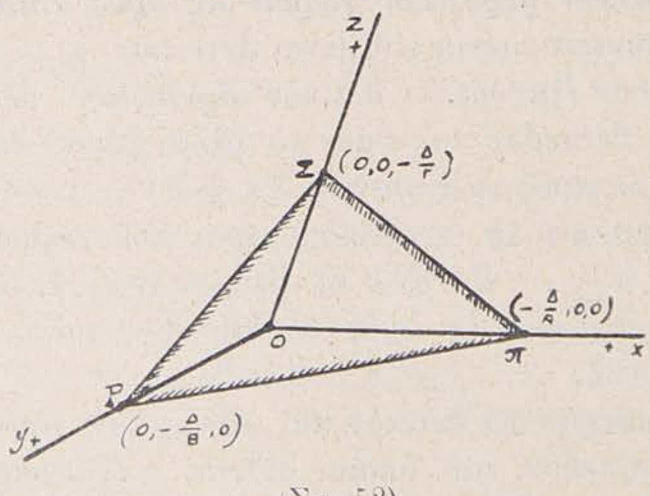
α') Ἔστω $A x + B y + \Gamma z + \Delta = 0$ (1),

ἡ ἐξίσωσις ἐπιπέδου τινός, μὴ διερχομένου διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων ($\Delta \neq 0$).

Ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο.

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τρία σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, μὴ κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας. Ὡς τοιαῦτα προτιμῶμεν τὰ σημεῖα καθ' ἃ τὸ ἐπίπεδον τέμνει τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων. Ἔστωσαν ταῦτα Π, Ρ, Σ ἀντιστοίχως.

Ἐπειδὴ πᾶν σημεῖον τοῦ ἄξονος τῶν x ἔχει τεταγμένην y καὶ κατηγμένην z ἴσας μὲ μηδέν, καὶ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ τὸ (1) τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x, θὰ ἔχῃ τὸ y καὶ τὸ z αὐτοῦ ἴσα μὲ μηδέν. Θέτοντες λοιπὸν εἰς τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἐπιπέδου $y=0$, $z=0$ ἔχομεν $Ax + \Delta = 0$,



(Σχ. 52)

ἐξ ἧς ἔχομεν $x = -\dfrac{\Delta}{A}$ ὡς τετμημένην τοῦ ἐν λόγῳ σημείου τομῆς.

Ὅθεν τὸ σημεῖον Π ἔχει συντεταγμένας $\left(-\dfrac{\Delta}{A}, 0, 0\right)$ (σχ. 52).

Ὁμοίως εὑρίσκομεν θέτοντες εἰς τὴν (1) $x = o$, $z = o$, ὅτι αἱ συντεταγμέναι τοῦ Ρ εἶνε

$\left(o, -\frac{\Delta}{B}, o\right)$, τοῦ δὲ Σ, θέτοντες $x = o$, $y = o$, αἱ $\left(o, o, -\frac{\Delta}{\Gamma}\right)$.

Τὰ σημεῖα Π, Ρ, Σ ὁρίζουν τὸ ἐπίπεδον (1).

β′) Ἡ τετμημένη τοῦ σημείου Π, ἤτοι τὸ $-\frac{\Delta}{A}$ καλεῖται, συνήθως, *τετμημένη τοῦ ἐπιπέδου* (1) *ἐπὶ τὴν ἀρχήν*. Ὁμοίως τὸ $-\frac{\Delta}{B}$ λέγεται *τεταγμένη αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ἀρχήν*, τὸ δὲ $-\frac{\Delta}{\Gamma}$ *κατηγμένη τοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ τὴν ἀρχήν*. Τὰ $-\frac{\Delta}{A}$, $-\frac{\Delta}{B}$, $-\frac{\Delta}{\Gamma}$ καλοῦνται *συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν* τοῦ ἐπιπέδου

$$A\,x + B\,y + \Gamma\,z + \Delta = o.$$

γ′) Παρατηρητέον ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1$ παριστάνει ἐπίπεδον, ἔχον συντεταγμένας ἐπὶ τὴν ἀρχὴν α, β, γ.

Πρὸς κατασκευὴν τοῦ ἐπιπέδου $A\,x + B\,y + \Gamma\,z + \Delta = o$ δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν καὶ ὡς ἑξῆς. Γράφομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{x}{\left(-\frac{\Delta}{A}\right)} + \frac{y}{\left(-\frac{\Delta}{B}\right)} + \frac{z}{\left(-\frac{\Delta}{\Gamma}\right)} = 1$

καὶ ἔχομεν ὡς συντεταγμένας αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τὰ

$$-\frac{\Delta}{A}, \quad -\frac{\Delta}{B}, \quad -\frac{\Delta}{\Gamma},$$

ἤτοι τὰ σημεῖα Π, Ρ, Σ (σχ. 52) καθ' ἃ τὸ ἐπίπεδον (1) τέμνει τοὺς ἄξονας.

δ′) Ἂν ἡ ἐξίσωσις ἐπιπέδου τινὸς εἶνε τῆς μορφῆς

$$A\,x + B\,y + \Gamma\,z = o,$$

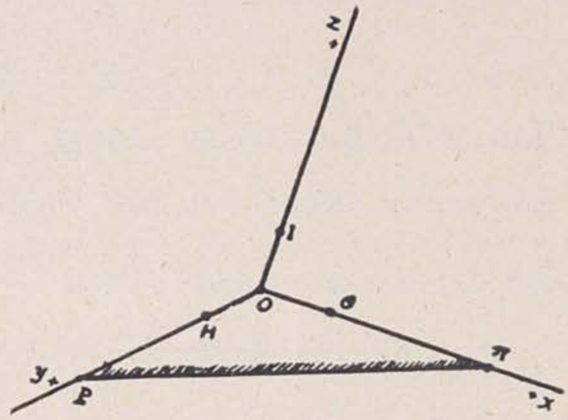
παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων (§ 35,δ′).

Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τέμνει τὸ ἐπίπεδον xy κατὰ τὴν εὐθεῖαν $A\,x + B\,y = o,\ z = o$,

τὸ δὲ ἐπίπεδον xz κατὰ τὴν εὐθεῖαν $A\,x + \Gamma\,z = o,\ y = o$.

Κατασκευαζόμεναι αἱ εὐθεῖαι αὗται (§ 26,γ′) ὁρίζουν τὸ ἐν λόγῳ ἐπίπεδον.

ε') Ἂν ἐπίπεδόν τι ἔχῃ ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $A\,x + B\,y + \Delta = o$, θὰ εἶνε παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν z (§ 35, α') καὶ θὰ τέμνῃ τὸ xy κατὰ τὴν εὐθεῖαν $A\,x + B\,y + \Delta = o$, $z = o$. Ὅθεν ἡ εὐ-



(Σχ. 53)

θεῖα αὔτη, ἔστω ἡ ΠΡ (σχ. 53), μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν z ὁρίζουν τὸ ἐν λόγῳ ἐπίπεδον.

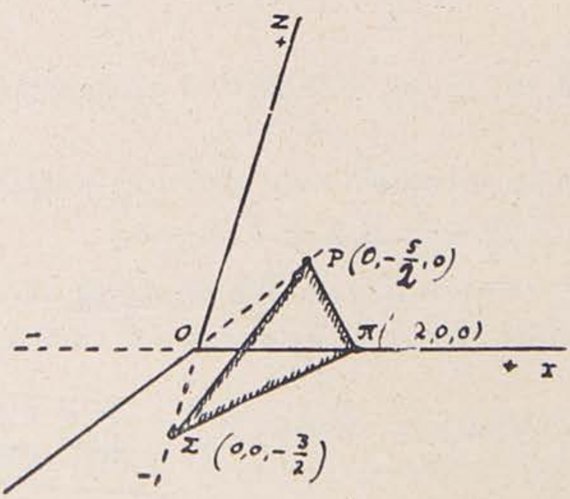
Ἐφαρμογαί. 1) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $15\,x - 12\,y - 20\,z = 30$.

Γράφομεν τὴν ἐξίσωσιν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-\frac{5}{2}} + \frac{z}{-\frac{3}{2}} = 1.$$

Τὸ ἐπίπεδον τέμνει τοὺς ἄξονας εἰς τὰ σημεῖα $\Pi\,(2, o, o)$, $P\left(o, -\frac{5}{2}, o\right)$, $\Sigma\left(o, o, -\frac{3}{2}\right)$ τὰ ὁποῖα ὁρίζουν τὸ ἐπίπεδον (σχ.54).

2) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\qquad 7\,x - 4\,y - 6\,z = o$,

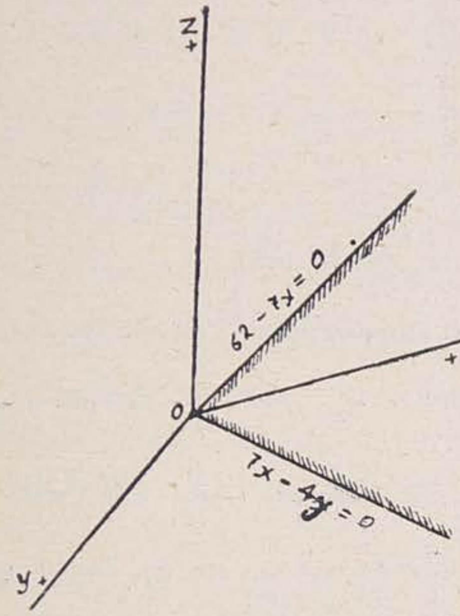


(Σχ. 54)

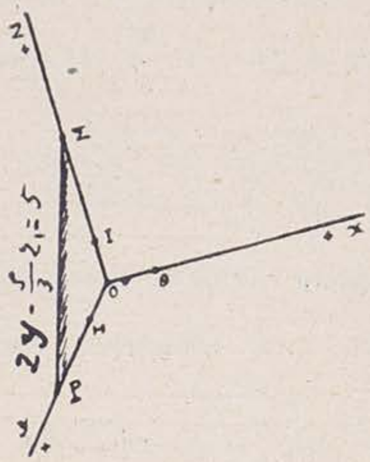
ἥτις παριστάνει ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων.

Τοῦτο τέμνει τὸ xy κατὰ τὴν εὐθεῖαν $7x - 4y = o,\ z = o$,
τὸ δὲ xz κατὰ τὴν εὐθεῖαν $6z - 7x = o,\ y = o$,
(αἵτινες διέρχονται διὰ τῆς ἀρχῆς o). Κατασκευάζομεν τὰς **εὐθείας** ταύτας (§ 26, γ′), αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν τὸ ἐπίπεδον (σχ. 55).

3) Ἡ ἐξίσωσις $2y - \frac{5}{3}z = 5$ παριστάνει ἐπίπεδον **παράλληλον**

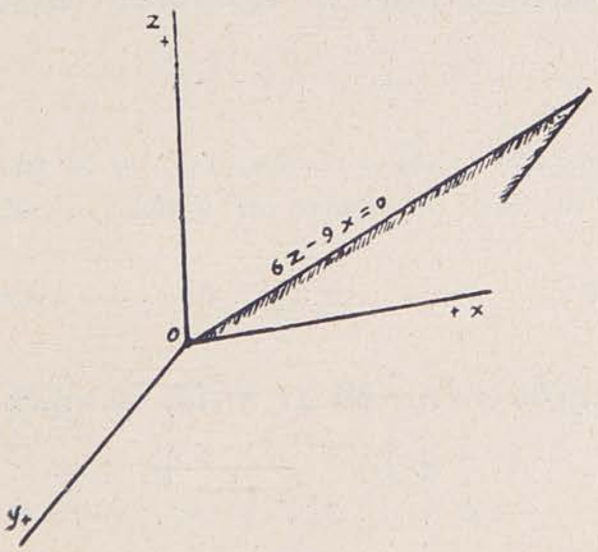


(Σχ. 55)



(Σχ. 56)

τῷ ox, τέμνει δὲ τοῦτο τὸ yz κατὰ τὴν εὐθεῖαν $2y - \frac{5}{3}z = 5, x = o$.



(Σχ. 57)

Κατασκευάζομεν τὴν εὐθεῖαν αὐτὴν (§ 26, α′), ἥτις ὁρίζει **τὸ ἐπίπεδον** (σχ. 56).

4) Ἡ ἐξίσωσις $6z - 9x = o$ παριστάνει ἐπίπεδον, διερχόμενον διὰ τῆς ἀρχῆς o καὶ διὰ τοῦ ἄξονος τῶν y (§ 35, δ΄ καὶ α΄).

Τοῦτο τέμνει τὸ ἐπίπεδον xz κατὰ τὴν εὐθεῖαν $6z - 9x = o$, $y = o$. Κατασκευάζομεν τὴν εὐθεῖαν ταύτην, ἥτις ὁρίζει τὸ ἐπίπεδον μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν y (σχ. 57).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1) Κατασκευάσατε τὰ ἐπίπεδα, τῶν ὁποίων αἱ ἐξισώσεις εἶνε $3x + 5y + 8z = 1$, $x + y - 2z = 3$, $x - y = o$, $x + z = o$, $y + z - x = -1$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} - \frac{5}{8}z = 1$, $x - z = o$, $x + y = o$, $y - z = o$, $y + z = o$. $x + 3y - 8z = o$, $3x - 9z + 4 = o$. $\frac{x}{3} + \frac{y}{8} + z = o$, $\frac{x-3}{2} + \frac{z+1}{2} - \frac{y}{3} = 13\frac{1}{2}$.

2) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἐπιπέδου, τοῦ παραλλήλου τῷ oz καὶ ἔχοντος τετμημένην καὶ τεταγμένην ἐπὶ τὴν ἀρχὴν $-\frac{3}{8}$ καὶ $\frac{5}{8}$, ἢ 4 καὶ $-\frac{1}{2}$, ἢ $\frac{2}{3}$ καὶ $-6\frac{1}{5}$. ἢ 6 καὶ $-5\frac{1}{4}$, ἢ $-\frac{1}{2}$ καὶ $-\frac{9}{15}$, ἢ 0 καὶ -7.

3) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τῆς ἀρχῆς o, διὰ τοῦ ἄξονος τῶν z καὶ τέμνοντος τὸ xy κατὰ εὐθεῖαν ἔχουσαν συντελεστὴν διευθύνσεως $-\frac{3}{4}$ ἢ $\frac{4}{7}$ ἢ $6\frac{1}{3}$, ἢ 1, ἢ $-3\frac{1}{4}$, ἢ $-6{,}57$.

4) Τίς ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐπιπέδου, τοῦ ἔχοντος συντεταγμένας ἐπὶ τὴν ἀρχὴν 3, 5, -4, ἢ 2, -1, $\frac{5}{3}$, ἢ 7,6,-2, ἢ $-\frac{1}{2}$, $3\frac{2}{3}$, $-8\frac{7}{9}$.

5) Τίς ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐπιπέδου, τοῦ διερχομένου διὰ τῆς ἀρχῆς καὶ τέμνοντος τὸ xy καὶ τὸ yz κατὰ τὰς εὐθείας τὰς ἐχούσας συντελεστὰς διευθύνσεως -1, ἢ $\frac{4}{5}$, ἢ 8. καὶ -2, ἢ $\frac{3}{4}$, ἢ $-\frac{1}{2}$ ἀντιστοίχως.

§ 39. Θέσεις δύο ἐπιπέδων πρὸς ἄλληλα.—

Ἔστωσαν
$$\left.\begin{aligned} A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = o, \\ A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = o \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

αἱ ἐξισώσεις δύο ἐπιπέδων, ἔστω τῶν (ε_1) καὶ (ε_2).

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τῶν ἐπιπέδων τούτων πρὸς ἄλληλα.

*α′) « **Αναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα αἱ ἐξισώσεις (1) παριστάνουν ἐπίπεδα συμπίπτοντα εἶνε ἡ***

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = \Gamma_1 : \Gamma_2 = \Delta_1 : \Delta_2».$$

Τῷ ὄντι, ἂν τὰ (ε_1), (ε_2) συμπίπτουν, θὰ ἔχουν τὰς ὁμωνύμους αὐτῶν συντεταγμένας ἐπὶ τὴν ἀρχὴν ἴσας. Ἄρα θὰ εἶνε

$$-\frac{\Delta_1}{A_1} = -\frac{\Delta_2}{A_2},\ -\frac{\Delta_1}{B_1} = -\frac{\Delta_2}{B_2},\ -\frac{\Delta_1}{\Gamma_1} = -\frac{\Delta_2}{\Gamma_2},$$

ἐξ ὧν ἔπεται ὅτι $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \dfrac{\Delta_1}{\Delta_2}.$ (2)

Καὶ ἀντιστρόφως, ἂν πληροῦται ἡ συνθήκη (2) τὰ (ε_1), (ε_2) συμπίπτουν. Διότι ἐκ τῶν (2) ἔχομεν

$$-\frac{\Delta_1}{A_1} = -\frac{\Delta_2}{A_2},\ -\frac{\Delta_1}{B_1} = -\frac{\Delta_2}{B_2},\ = -\frac{\Delta_1}{\Gamma_1} = -\frac{\Delta_2}{\Gamma_2}.$$

Ἤτοι τὰ (ε_1), (ε_2) ἔχουν τὰς ὁμωνύμους συντεταγμένας αὐτῶν ἐπὶ τὴν ἀρχὴν ἴσας. Οὕτω ἔχουν τρία σημεῖα κοινά, μὴ κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας· ἄρα τὰ (ε_1), (ε_2) συμπίπτουν.

*β′) « **Ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα αἱ ἐξισώσεις (1) παριστάνουν ἐπίπεδα παράλληλα εἶνε ἡ** $A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = \Gamma_1 : \Gamma_2$».*

Πράγματι, ἂν τὰ (ε_1), (ε_2), εἶνε παράλληλα, θὰ τέμνουν τὸ xy καὶ τὸ xz κατὰ εὐθείας παραλλήλους ἀντιστοίχως. Ἡ τομὴ τοῦ (ε_1) καὶ τοῦ xy ἔχει ἐξισώσεις

$$A_1 x + B_1 y + \Delta_1 = o,\ z = o,$$

ἡ δὲ τοῦ (ε_2) καὶ xy τὰς

$$A_2 x + B_2 y + \Delta_2 = o,\ z = o.$$

Ἀλλ' ἵνα αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶνε παράλληλοι πρέπει νὰ εἶνε (§29,α′)

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2 \qquad (3).$$

Ὁμοίως αἱ τομαὶ τῶν (ε_1), (ε_2) καὶ τοῦ xz ἔχουν ἐξισώσεις

$A_1 x + \Gamma_1 z + \Delta_1 = o$, $y=o$, καὶ $A_2 x+\Gamma_2 z+\Delta_2=o$, $y=o$.

Ἵνα δ' αὗται εἶνε παράλληλοι πρέπει νὰ εἶνε

$$A_1 : A_2 = \Gamma_1 : \Gamma_2 \qquad (4)$$

Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν (3) καὶ (4) ἔχομεν $A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = \Gamma_1 : \Gamma_2$, (5) Ἀντιστρόφως, ἂν εἶνε $A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = \Gamma_1 : \Gamma_2$ τὰ ἐπίπεδα (1) εἶνε παράλληλα. Διότι, τότε θὰ ὑπάρχουν αἱ σχέσεις (4) καὶ (3) καὶ ἐπειδὴ αἱ τομαὶ τῶν ἐπιπέδων (1) καὶ τῶν xy καὶ xz εἶνε παράλληλοι καὶ αὐτὰ τὰ ἐπίπεδα εἶνε παράλληλα.

γ') Κατὰ ταῦτα, ἐξίσωσις τυχόντος ἐπιπέδου, παραλλήλου τῷ

$$A x + B y + \Gamma z = o,$$

τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων, εἶνε ἡ

$$A x + B y + \Gamma z + \Delta = o,$$

ὅπου Δ παριστάνει τυχόντα ἀριθμὸν διάφορον τοῦ μηδενός. Καὶ ἀντιστρόφως, δοθέντος τοῦ ἐπιπέδου

$$A x + B y + \Gamma z + \Delta = o,$$

τὸ διὰ τῆς ἀρχῆς διερχόμενον καὶ παράλληλον αὐτῷ ἔχει ἐξίσωσιν

$$A x + B y + \Gamma z = o.$$

δ') Ἂν οὐδεμία τῶν ἀνωτέρω συνθηκῶν (2) καὶ (5) πληροῦται, τὰ δύο ἐπίπεδα (ε_1), (ε_2) τέμνονται κατὰ εὐθεῖαν, ἔχουσαν ἐξισώσεις τὰς τῶν ἐπιπέδων τούτων (§ 34, η')· ἤτοι τὰς

$$A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = o, \quad A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = o.$$

§ 40. Συνθήκη ἵνα ἄνυσμά τι εἶνε παράλληλον πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον.—

«***Ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα τὸ ἄνυσμα Τ (α, β, γ) εἶνε παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον***
$A x + B y + \Gamma z + \Delta = o$ ***εἶνε ἡ*** $A \alpha + B \beta + \Gamma \gamma = o$».

Διότι τὸ διὰ τῆς ἀρχῆς ο παράλληλον ἐπίπεδον πρὸς τὸ δοθέν, ἔχει ἐξίσωσιν $A x + B y + \Gamma z = o$· τὸ ἄνυσμα οΜ (α, β, γ) ὁμορρόπως ἴσον τῷ Τ μὲ ἀρχὴν τὸ ο ἔχει πέρας Μ μὲ συντεταγμένας (α, β, γ). Ἵνα τὸ Τ (α, β, γ), ἢ τὸ οΜ (α, β, γ), εἶνε παράλληλον πρὸς τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ σημεῖον Μ (α, β, γ) νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $A x + B y + \Gamma z = o$.
Ἤτοι, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε $A \alpha + B \beta + \Gamma \gamma = o$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Εὕρετε τὴν πρὸς ἄλληλα θέσιν τῶν ἐπιπέδων, τῶν ἐχόντων ἐξισώσεις.

α') $3x - 5y + 8z = o$, $\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}y + 4z = o$. β') $x + y + z = 1$, $x + y + z = 8$, γ') $x + y - z = 2$, $3x - 3y + 3z = 6$, δ') $x + y - z = 2$, $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{z}{2} = 1$, ε') $6x - y - z = 2$, $2x - \frac{y}{3} - \frac{z}{3} = 2$.

2 Τίς εἶνε ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα τὰ ἀνύσματα T_1 ($\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$) T_2 ($\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$), T_3 ($\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$) εἶνε παράλληλα πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον;

3) Εὕρετε τὴν τιμὴν τοῦ λ, ἵνα τὸ ἐπίπεδον $3x - 5y + 8z + 7 = o$ εἶνε παράλληλον τῷ ἀνύσματι (3λ, $\lambda - 1$, $2\lambda - 7$).

§ 41. Ἐξίσωσις ἀξονικῆς δέσμης ἐπιπέδων.—

α΄) Καλοῦμεν *ἀξονικὴν δέσμην ἐπιπέδων* τὸ σύνολον τῶν ἐπιπέδων, ἅτινα διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἥτις καλεῖται *ἄξων τῆς δέσμης*.

β΄) Ἔστωσαν δύο ἐπίπεδα (ε_1), (ε_2), ἔχοντα ἐξισώσεις τὰς

$$\left.\begin{array}{l} (\varepsilon_1) : A_1\, x + B_1\, y + \Gamma_1\, z + \Delta_1 = o \\ (\varepsilon_2) : A_2\, x + B_2\, y + \Gamma_2\, z + \Delta_2 = o. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Ἂν τὰ (ε_1), (ε_2) τέμνωνται κατὰ τὴν εὐθεῖαν, ἔστω τὴν (ε), αὕτη θὰ παρίσταται ὑπὸ τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (1) (§ 34, η΄).

Ζητεῖται ἡ ἐξίσωσις τυχόντος ἐπιπέδου, διερχομένου διὰ τῆς εὐθείας ταύτης (ε).

Θὰ δείξωμεν ὅτι πᾶν τοιοῦτον ἐπίπεδον ἔχει ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς

$$\mu_1\, (A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1) + \mu_2\, (A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2) = o, \quad (2)$$

Ἡ (2) παριστάνει ἐπίπεδον ὡς πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, y, z ἐνῷ μ_1, μ_2 εἶνε (σταθεροὶ) παράγοντες ἀνεξάρτητοι τῶν x, y, z.

Παρατηροῦμεν ἤδη ὅτι, πᾶν σημεῖον τῆς εὐθείας (ε) εἶνε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου (2). Διότι αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τούτου ἐπαληθεύουν τὰς (1), ἑπομένως καὶ τὴν (2).

Ἡ ἐξίσωσις (2) παριστάνει πᾶν ἐπίπεδον, διερχόμενον διὰ τῆς (ε). Διότι δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὰ μ_1, μ_2 καταλλήλως πρὸς τοῦτο.

Οὕτω π. χ. ἂν ζητοῦμεν τὴν ἐξίσωσιν ἐπιπέδου, διερχομένου διὰ τῆς (ε) καὶ τοῦ σημείου M′ (x′, y′, z′), κειμένου ἐκτὸς τῆς (ε), θὰ εἶνε

$$\mu_1 (A_1\, x' + B_1 y' + \Gamma_1 z' + \Delta_1) + \mu_2 (A_2 x' + B_2 y' + \Gamma_2 z' + \Delta_2) = o,$$

ἐξ᾽ ἧς ἔχομεν

$$\mu_1 : \mu_2 = -(A_2 x' + B_2 y' + \Gamma_2 z' + \Delta_2) : (A_1 x' + B_1 y' + \Gamma_1 z' + \Delta_1).$$

Εἰσάγοντες τὴν τιμὴν τοῦ $\mu_1 : \mu_2$ εἰς τὴν (2) ἔχομεν ὡς ἐξίσωσιν τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου τὴν

$$(A_2\, x' + B_2\, y' + \Gamma_2\, z' + \Delta_2)\ (A_1\, x + B_1\, y + \Gamma_1\, z + \Delta_1) =$$
$$= (A_1\, x' + B_1\, y' + \Gamma_1\, z' + \Delta_1)\ (A_2\, x + B_2\, y + \Gamma_2\, z + \Delta_2).$$

γ') Ὅθεν ἡ ἐξίσωσις

$$\mu_1 (A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1) + \mu_2 (A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2) = o$$

παριστάνει τὴν ἀξονικὴν δέσμην τῶν ἐπιπέδων, τῆς ὁποίας ἄξων εἶνε ἡ εὐθεῖα (ε), ἥτις ἔχει ἐξισώσεις τὰς (1).

Ἂν παραστήσωμεν διὰ H_1, H_2 τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἐξισώσεων (1), καὶ διὰ μ τὸν λόγον $\mu_2 : \mu_1$ ἡ ἀξονικὴ δέσμη, ἥτις ἔχει ἄξονα τὴν εὐθεῖαν $H_1 = o$, $H_2 = o$, παρίσταται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$H_1 + \mu H_2 = o.$$

δ') Ἂν τὰ ἐπίπεδα (ε_1), (ε_2), συμπίπτουν, καὶ τὰ ἐπίπεδα (2) συμπίπτουν μετ' αὐτῶν. Διότι, πᾶσα λύσις τῆς πρώτης τῶν ἐξισώσεων (1) εἶνε καὶ τῆς δευτέρας αὐτῶν, ἄρα καὶ τῆς (2). Ἤτοι, πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου (ε_1) εἶνε καὶ τοῦ (ε_2), ἄρα καὶ τοῦ (2).

ε') Ἂν τὰ (ε_1), (ε_2) εἶνε παράλληλα, καὶ τὸ (2) εἶνε παράλληλον πρὸς αὐτά. Διότι, ἂν τεθῇ

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = \Gamma_1 : \Gamma_2 = \frac{1}{\rho}$$

θὰ πληροῦται ἡ συνθήκη τῆς παραλληλίας τῶν (ε_1) καὶ (2), ἤτοι εἶνε

$$(\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2) : A_1 = (\mu_1 B_1 + \mu_2 B_2) : B_1 = (\mu_1 \Gamma_1 + \mu_2 \Gamma_2) : \Gamma_1 = (\mu_1 + \mu_2 \rho)\cdot$$

§ 42. Συνθήκη ἵνα τρία ἐπίπεδα διέρχωνται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας.—

Ἔστωσαν $H_1 = o$, $H_2 = o$ αἱ ἐξισώσεις δύο ἐπιπέδων (ε_1), (ε_2) τεμνομένων κατὰ τὴν εὐθεῖαν (ε), πρὸς δὲ $H_3 = o$ ἡ ἐξίσωσις τρίτου ἐπιπέδου (ε_3). Ζητεῖται ἡ συνθήκη ἵνα τὸ (ε_3) διέρχεται διὰ τῆς εὐθείας (ε).

Ἡ ἀξονικὴ δέσμη, τῆς ὁποίας ἄξων εἶνε ἡ (ε) ἔχει ἐξίσωσιν

$$\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 = o. \qquad (1)$$

Προσδιορίζομεν τὸν λόγον $\mu_1 : \mu_2$, ὥστε ἡ ἐξίσωσις αὕτη νὰ παριστάνῃ ἐπίπεδον διερχόμενον διά τινος σημείου τοῦ (ε_3), ἐκτὸς τῆς (ε) κειμένου.

Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο θὰ συμπίπτῃ οὕτω μετὰ τοῦ (ε_3), ἂν τὸ (ε_3) διέρχεται διὰ τῆς (ε). Ἄρα τὸ H_3 δύναται νὰ διαφέρῃ τοῦ $\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2$ κατά τινα σταθερὸν παράγοντα, ἔστω τὸν $-\mu_3$, ἀφοῦ αἱ δύο ἐξισώσεις (1) καὶ $H_3 = o$ παριστάνουν ἐπίπεδα συμπίπτοντα (§ 39, α'). Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν

$$\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 + \mu_3 H_3 \equiv o \qquad (2)$$

Καὶ ἀντιστρόφως, ἂν πληροῦται ἡ (2), τὰ ἐπίπεδα $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2),(\varepsilon_3)$ διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας (ε). Διότι, ἂν ἐν τῇ (2) θέσωμεν ἀντὶ τῶν x, y, z τὰς συντεταγμένας τυχόντος σημείου τῆς (ε), θὰ εἶνε $\mu_3 H_3 = o$, ἐπειδὴ μηδενίζονται τὰ H_1, H_2. Ἄρα καὶ $H_3 = o$· ἤτοι τὸ ἐν λόγῳ σημεῖον κεῖται καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (ε_3).

Ὅθεν, «***ἵνα τρία ἐπίπεδα $H_1 = o$, $H_2 = o$, $H_3 = o$ διέρχωνται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ὑπάρχουν τρεῖς παράγοντες μ_1, μ_2, μ_3, διάφοροι τοῦ μηδενός, τοιοῦτοι ὥστε τὸ $\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 + \mu_3 H_3$ νὰ εἶνε ἐκ ταυτότητος μηδέν***».

Ἤτοι πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε

$$\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 + \mu_3 H_3 \equiv o.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τῆς εὐθείας

$$A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = o,$$
$$A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = o$$

καὶ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων.

2) Εὕρετε, ἂν τὰ ἐπίπεδα $5x + 2y - z = 11$, $4x - 7y + 3z = 2$, $13x - 4y - 5z = 9$ διέρχωνται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

3) Δείξατε ὅτι εἰς ἑκάστην ὡρισμένην τιμὴν τοῦ λόγου $\mu_1 : \mu_2$ ἀντιστοιχεῖ ἓν ὡρισμένον ἐπίπεδον τῆς δέσμης $\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 = o$, καὶ ἀντιστρόφως. Ἔχει τις οὕτω πάντα τὰ ἐπίπεδα τῆς δέσμης, ἂν ὁ λόγος $\mu_1 : \mu_2$ λάβῃ πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς ἀπὸ $-\infty$ μέχρι τοῦ $+\infty$. Εἰς τίνας τιμὰς τοῦ $\mu_1 : \mu_2$ ἀντιστοιχοῦν τὰ ἐπίπεδα $H_1 = o$, $H_2 = o$ τῆς δέσμης;

4) Ἂν τὰ $H_1 = o$, $H_2 = o$, $H_3 = o$ διέρχωνται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας, θὰ εἶνε $\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 + \mu_3 H_3 \equiv o$. Ἂν ὑποτεθῇ ὅτι εἶνε καὶ $\mu'_1 H_1 + \mu'_2 H_2 + \mu'_3 H_3 \equiv o$ θὰ εἶνε $\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = \mu'_1 : \mu'_2 : \mu'_3$.

5) Εὕρετε τὰς ἐξισώσεις τῶν ἀξονικῶν δεσμῶν τῶν ὁποίων ἄξονες εἶνε οἱ ἄξονες τῶν συντεταγμένων.

6) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἀξονικῆς δέσμης, ἥτις ἔχει ἄξονα τὴν εὐθεῖαν $y = o$, $z = o$, καὶ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου (x', y', z'). Εἰς τὸ ἐξαγόμενον δὲν θὰ ὑπάρχῃ x'. Διατί;

7) Διερευνήσατε τὴν δέσμην $\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 + \mu_3 H_3 = o$, ὅταν τὰ ἐπίπεδα $H_1 = o$, $H_2 = o$ εἶνε παράλληλα.

8) Τέμνονται τὰ ἐπίπεδα $5x + 2y - z = 11$, $4x - 7y + 3z = 2$, $13x - 4y - 5z = 9$ κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν; Διατί;

§ 43. Ἐξίσωσις εὐθείας ὁριζομένης διὰ δύο προβαλλόντων αὐτὴν ἐπιπέδων.—

α') Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τομὴ δύο ἐπιπέδων (διερχομένων δι' αὐτῆς). Διὰ τοῦτο δοθεῖσα εὐθεῖα (ε) δύναται νὰ παρίσταται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων δύο ἐπιπέδων (ε_1), (ε_2) τὰ ὁποῖα διέρχονται δι' αὐτῆς. Ἂν αἱ ἐξισώσεις τῶν ἐπιπέδων τούτων εἶνε ἀντιστοίχως

$$\left.\begin{array}{l}(\varepsilon_1) : A_1\,x + B_1\,y + \Gamma_1\,z + \Delta_1 = o,\\ (\varepsilon_2) : A_2\,x + B_2\,y + \Gamma_2\,z + \Delta_2 = o,\end{array}\right\} \qquad (1)$$

ἡ εὐθεῖα (ε) παρίσταται ὑπὸ τοῦ συστήματος τούτου (1).

β') Ἐν τούτοις ἐκ τῶν ἀπείρων ἐπιπέδων, τῶν διερχομένων διὰ τῆς (ε) ἐκλέγομεν δύο, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν εἶνε παράλληλον πρὸς ἕνα τῶν ἀξόνων συντεταγμένων, ἔστω πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y, καὶ τὸ ἄλλο πρὸς ἄλλον ἄξονα, ἔστω πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x.

γ') Ἔστω ὅτι ἡ εὐθεῖα (ε) τέμνει τὸ ἐπίπεδον xy. Τὸ πρῶτον τῶν ἐπιπέδων τούτων προβάλλει τὴν (ε) ἐπὶ τοῦ xz (παραλλήλως τῷ ἄξονι τῶν y) τὸ δ' ἄλλο ἐπὶ τοῦ yz (παραλλήλως τῷ ἄξονι τῶν x).

Πρὸς εὕρεσιν τῶν ἐξισώσεων τῶν προβαλλόντων ἐπιπέδων τῆς εὐθείας, παρατηροῦμεν ὅτι, πᾶν ἐπίπεδον, διερχόμενον διὰ τῆς (ε) θὰ ἔχῃ ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς

$$\mu_1\,(A_1\,x + B_1\,y + \Gamma_1\,z + \Delta_1) + \mu_2\,(A_2\,x + B_2\,y + \Gamma_2\,z + \Delta_2) = o.$$

Ἵνα τοῦτο εἶνε παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν y, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε

$$\mu_1\,B_1 + \mu_2\,B_2 = o, \text{ ἢ } \mu_1 : \mu_2 = -B_2 : B_1.$$

Ἐπομένως, ἡ ἐξίσωσις τοῦ πρώτου τῶν προβαλλόντων ἐπιπέδων τῆς εὐθείας εἶνε ἡ

$$B_2\,(A_1\,x + \Gamma_1\,z + \Delta_1) - B_1\,(A_2\,x + \Gamma_2\,z + \Delta_2) = o$$

ἢ $\qquad x = \lambda\,z + \alpha, \qquad$ ἐν ᾧ ἐτέθη

$$\lambda = (B_1\Gamma_2 - B_2\Gamma_1) : (A_1B_2 - A_2B_1),\ \alpha = (B_1\Delta_2 - B_2\Delta_1) : (A_1B_2 - A_2B_1).$$

Κατ' ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἑτέρου ἐπιπέδου, τοῦ προβάλλοντος τὴν εὐθεῖαν ἐπὶ τοῦ yz εἶνε ἡ

$y = \mu\,z + \beta, \qquad$ ἐνῷ ἐτέθη

$$\mu = (\Gamma_1A_2 - \Gamma_2A_1) : (A_1B_2 - A_2B_1),\ \beta = (\Delta_1A_2 - \Delta_2A_1) : (A_1B_2 - A_2B_1).$$

Ἐπομένως ἡ εὐθεῖα (ε) παρίσταται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων τῆς μορφῆς

$$x = \lambda\,z + \alpha$$
$$y = \mu\,z + \beta.$$

Παρατηρητέον ὅτι αἱ μὲν ἐξισώσεις τῆς προβολῆς τῆς (ε) ἐπὶ τοῦ xz (παραλλήλως τῷ ἄξονι τῶν y) εἶνε αἱ $x = \lambda z + \alpha$, $y = o$, αἱ δὲ τῆς προβολῆς αὐτῆς ἐπὶ τοῦ yz (παραλλήλως τῷ ἄξονι τῶν x) αἱ

$$y = \mu z + \beta, \quad x = o.$$

Ἄρα τὸ σημεῖον (α, β, o) εἶνε ἐκεῖνο καθ' ὃ ἡ εὐθεῖα τέμνει τὸ ἐπίπεδον xy.

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ λέγωμεν ὅτι, ἂν εὐθεῖά τις τέμνῃ τὸ ἐπίπεδον xy κατὰ τὸ σημεῖον (α, β, o) παρίσταται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \lambda z + \alpha \\ y &= \mu z + \beta \end{aligned}}$$

ἐν ᾧ λ, μ εἶνε οἱ συντελεσταὶ διευθύνσεως τῶν εὐθειῶν, αἵτινες εἶνε προβολαὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων xz καὶ yz ἀντιστοί- (παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y καὶ τῶν x ἀντιστοίχως).

δ') Ἂν ἡ εὐθεῖα εἶνε παράλληλος τῷ xy, ὄχι δὲ καὶ πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y, ἐκ τῶν τριῶν προβαλλόντων αὐτὴν ἐπιπέδων (εἰς τὰ συντεταγμένα ἐπίπεδα παραλλήλως πρὸς τοὺς ἄξονας) δύο συμπίπτουν μὲ τὸ διὰ τῆς εὐθείας ἀγόμενον ἐπίπεδον παραλλήλως τῷ xy, τοῦ ὁποίου ἡ ἐξίσωσις θὰ εἶνε τῆς μορφῆς $z = \gamma$. Τὸ τρίτον προβάλλον αὐτὴν ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ xy παραλλήλως τῷ ἄξονι τῶν z θὰ τέμνῃ τὸν ἄξονα τῶν y, ἔστω κατὰ τὸ σημεῖον (o, β, o), καὶ θὰ ἔχῃ ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $y = \lambda x + \beta$.

Ἄρα ἐν τῇ περιπτώσει αὐτῇ αἱ ἐξισώσεις τῆς εὐθείας εἶνε αἱ

$$\boxed{y = \lambda x + \beta, \; z = \gamma}$$

ἐν ᾧ λ παριστάνει τὸν συντελεστὴν διευθύνσεως τῆς προβολῆς τῆς εὐθείας ἐπὶ τοῦ xy (παραλλήλως τῷ ἄξονι τῶν z), γ δὲ τὴν κατηγμένην τοῦ σημείου, καθ' ὃ τὸ διὰ τῆς εὐθείας ἀγόμενον ἐπίπεδον παραλλήλως τῷ **xy** τέμνει τὸν ἄξονα τῶν z.

ε') Ἂν ἡ εὐθεῖα εἶνε παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν y, τότε μόνον παραλλήλως πρὸς τοὺς ἄξονας τῶν x καὶ τῶν z ὑπάρχουν ἐπίπεδα, προβάλλοντα τὴν εὐθεῖαν, τά ὁποῖα εἶνε διάφορα ἀλλήλων.

Ταῦτα ἔχουν ἐξισώσεις $z = \gamma$, $x = \alpha$ ἀντιστοίχως.

Ἑπομένως ἐν τῇ περιπτώσει αὐτῇ αἱ ἐξισώσεις τῆς εὐθείας εἶνε αἱ

$$\boxed{x = \alpha, \; z = \gamma}$$

ἐν ᾧ τὸ μὲν α εἶνε ἡ τετμημένη τοῦ σημείου, καθ' ὃ τὸ διὰ τῆς εὐθείας ἀγόμενον ἐπίπεδον παραλλήλως τῷ ἄξονι τῶν z τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x, τὸ δὲ γ ἡ κατηγμένη τοῦ σημείου, καθ' ὃ τὸ διὰ τῆς εὐθείας ἀγόμενον ἐπίπεδον παραλλήλως τῷ ἄξονι τῶν x τέμνει τὸν ἄξονα τῶν z.

ϛ') Συνοψίζοντες τἀνωτέρω ἔχομεν ὅτι, αἱ ἐξισώσεις εὐθείας ὁριζομένης διὰ δύο ἐπιπέδων, προβαλλόντων αὐτὴν ἐπὶ δύο ἐκ τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων παραλλήλως πρὸς ἕνα τῶν ἀξόνων ἀντιστοίχως, εἶνε αἱ

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \lambda z + \alpha \\ y = \mu z + \beta \end{array}} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\begin{array}{l} y = \lambda x + \alpha \\ z = \gamma \end{array}} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\begin{array}{l} x = \alpha \\ z = \gamma \end{array}}$$

καθ' ὅσον ἡ εὐθεῖα τέμνει τὸ xy, εἶνε παράλληλος τῷ xy ἀλλ' ὄχι καὶ τῷ ἄξονι τῶν y, ἢ εἶνε παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν y.

§ **44. Ἐξισώσεις εὐθείας διερχομένης διὰ δύο δοθέντων σημείων.—**

α') Ἂν εὐθεῖά τις (ε) διέρχεται διὰ δύο σημείων M_1 (x_1, y_1, z_1), M_2 (x_2, y_2, z_2) αἱ ἐξισώσεις αὐτῆς εἶνε αἱ

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2} = \frac{z-z_1}{z_1-z_2}} \qquad (1)$$

Διότι, ἂν θεωρήσωμεν καὶ τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας, ἔστω τὸ M (x, y, z), τὰ ἀνύσματα $M_1 M$ $(x-x_1, y-y_1, z-z_1)$, καὶ MM_2 (x_2-x, y_2-y, z_2-z) εἶνε παράλληλα καὶ θὰ ἔχωμεν

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

ἤτοι τὰς δύο ἐξισώσεις (1). Ἑπομένως, πᾶν σημεῖον τῆς εὐθείας ἔχει συντεταγμένας ἐπαληθευούσας τὰς (1). Καὶ ἀντιστρόφως, δεικνύεται εὐκόλως (§ 24, β'), ὅτι πᾶν σημεῖον, τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουν τὰς (1) κεῖται ἐπὶ τῆς ἐν λόγῳ εὐθείας. Ἄρα αἱ (1) εἶνε αἱ ἐξισώσεις τῆς εὐθείας (ε).

β') Ἂν εὐθεῖα διέρχεται διὰ τοῦ σημείου M_1 (x_1, y_1, z_1) καὶ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων ἔχει ἐξισώσεις

$$\boxed{\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1}}$$

§ 45. Ἐξισώσεις εὐθείας διερχομένης διὰ δοθέντος σημείου καὶ παραλλήλου πρὸς δοθὲν ἄνυσμα. —

α′) Ἂν δοθεῖσα εὐθεῖα (*ε*) διέρχεται διὰ τοῦ σημείου $M_1(x_1, y_1, z_1)$ καὶ εἶνε παράλληλος πρὸς τὸ ἄνυσμα T (α, β, γ) ἔχει ἐξισώσεις

$$\boxed{\frac{x-x_1}{\alpha}=\frac{y-y_1}{\beta}=\frac{z-z_1}{\gamma}} \qquad (1)$$

Διότι, ἂν λάβωμεν καὶ τὸ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς M (x, y, z), ἐπειδὴ τὰ ἀνύσματα $M_1 M\ (x-x_1, y-y_1, z-z_1)$, T (α,β,γ) εἶνε παράλληλα, θὰ ἔχωμεν τὰς (1). Αἱ ἐξισώσεις (1) ἐπαληθεύονται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων παντὸς σημείου τῆς εὐθείας (*ε*), ἀφοῦ τὸ M εἶνε τυχὸν σημεῖον αὐτῆς. Καὶ ἀντιστρόφως, δεικνύεται (§ 24, δ′), ὅτι πᾶν σημεῖον, τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουν τὰς (1) κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας. Ἄρα αἱ ἐξισώσεις (1) παριστάνουν τὴν εὐθεῖαν (*ε*).

β′) Θεωροῦντες τὰς δύο ἐξισώσεις (1) ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{x-x_1}{\alpha}=\frac{z-z_1}{\gamma}, \quad \frac{y-y_1}{\beta}=\frac{z-z_1}{\gamma} \qquad (2)$$

παρατηροῦμεν, ὅτι ἑκάστη τούτων παριστάνει τὸ προβάλλον ἐπίπεδον τὴν εὐθεῖαν (*ε*), παράλληλον πρὸς τοὺς ἄξονας τῶν y καὶ τῶν x ἀντιστοίχως.

γ′) Καθὼς αἱ ἐξισώσεις (1) τίθενται ὑπὸ τὴν μορφὴν (2) ἢ τὴν

$$x=\lambda z+\alpha, \; y=\mu z+\beta \qquad (2')$$

ἐνῷ ἐτέθη $\lambda=\frac{\alpha}{\gamma}$, $\mu=\frac{\beta}{\gamma}$, $\alpha=x_1-\frac{\alpha}{\gamma}z_1$, $\beta=y_1-\frac{\beta}{\gamma}z_1$,

οὕτω καὶ αἱ ἐξισώσεις (2′) τίθενται ὑπὸ τὴν μορφὴν (1).

Διότι ἔχομεν $\frac{x-\alpha}{\lambda}=z$, $\frac{y-\beta}{\mu}=z$, ἢ $\frac{x-\alpha}{\lambda}=\frac{y-\beta}{\mu}=\frac{z-o}{1}$.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι ἡ εὐθεῖα, τὴν ὁποίαν παριστάνουν αἱ ἐξισώσεις

$$x=\lambda z+\alpha, \; y=\mu z+\beta,$$

διέρχεται διὰ τοῦ σημείου (α, β, ο) καὶ εἶνε παράλληλος τῷ ἀνύσματι (λ, μ, 1).

ϛ') Ἂν μία εὐθεῖα παρίσταται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων

$$\left.\begin{matrix} A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = o \\ A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = o, \end{matrix}\right\}$$

τὸ ἄνυσμα $\alpha = B_1 \Gamma_2 - B_2 \Gamma_1, \beta = \Gamma_1 A_2 - \Gamma_2 A_1, \gamma = A_1 B_2 - A_2 B_1$ εἶνε παράλληλον μὲ αὐτήν. Ἐπειδὴ εἶνε παράλληλον πρὸς ἕκαστον τῶν ἐπιπέδων, τῶν ὁποίων αἱ ἐξισώσεις παριστάνουν τὴν εὐθεῖαν. Διότι ἔχομεν (§ 40)

$$A_1 \alpha + B_1 \beta + \Gamma_1 \gamma = o$$
$$A_2 \alpha + B_2 \beta + \Gamma_2 \gamma = o.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1) Εὕρετε τὰς ἐξισώσεις τῆς εὐθείας ἥτις διέρχεται διὰ τῶν σημείων α') $(3, -2, 1), \left(5\frac{1}{4}, 4, -\frac{3}{2}\right)$· β' $(1, -1, -1), \left(3, -6, -\frac{1}{2}\right)$· γ') $(-3, 0, 0), (0, -5, 0)$, δ' $(-1, 7, -9), (0, 0, -6)$, ε' $(-2, 0, -13)$ $(1, -1, 1)$.

2) Κεῖνται ἐπὶ τῶν εὐθειῶν τῆς 1) τὰ σημεῖα α') $(2, 1, -4)$· β') $(0, 0, 0,)$· γ') $(3, 0, -1)$· δ) $(2, 11, 9)$· ε') $(-3, 0, 0)$; Διατί;

3 Εὕρετε τὰς ἐξισώσεις τῆς εὐθείας, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ σημείου α') $(3, 5, -1)$ καὶ εἶνε παράλληλος πρὸς τὸ ἄνυσμα $(5, -3, -2)$· β') $\left(0, -\frac{3}{2}, 0\right)$ καὶ εἶνε παράλληλος πρὸς τὸ ἄνυσμα $(3, 3, -1)$.

§ 46. Συνθήκη ἵνα δύο ζεύγη ἐξισώσεων (πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, y, z) παριστάνουν τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.—

Ἔστωσαν $H_1 = o$, $H_2 = o$ (1) αἱ ἐξισώσεις εὐθείας (ε).

Ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις $\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 = o$ παριστάνει τὴν ἀξονικὴν δέσμην, τὴν ἔχουσαν ἄξονα τὴν (ε), ἕπεται ὅτι ἡ (ε) δύναται νὰ παρασταθῇ καὶ ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων τυχόντος ζεύγους ἐπιπέδων τῆς δέσμης ταύτης. Ἂν $H' = o$, $H'' = o$ (2) εἶνε αἱ ἐξισώσεις δύο ἐπιπέδων τῆς ἐν λόγῳ δέσμης, θὰ ἔχωμεν προφανῶς (§ 42).

$$\mu'_1 H_1 + \mu'_2 H_2 + \mu' H' \equiv o, \quad \mu''_1 H_1 + \mu''_2 H_2 + \mu'' H'' \equiv o. \qquad (3)$$

Καὶ ἀντιστρόφως, δεικνύεται εὐκόλως ὅτι, ἂν πληροῦνται αἱ (3) τὰ ζεύγη τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) παριστάνουν τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1) Τίς εἶνε ἡ θέσις τῆς εὐθείας $x = \alpha$, $A x + B y + \Gamma z + \Delta = o$;

2) Διὰ τίνων ἐξισώσεων παρίστανται εὐθεῖαι, κείμεναι εἰς ἓν τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων;

3) Κεῖται τὸ σημεῖον $(5, 7, -1)$, ἢ ἡ ἀρχὴ τῶν ἀξόνων, ἐπὶ τῆς εὐθείας

$$3x - y - z = 4, \; 4x - 5y + 2z = 1;$$

4) Τίνος μορφῆς εἶνε αἱ ἐξισώσεις εὐθείας, διερχομένης διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων;

5) Ἡ εὐθεῖα $z = 5x + 2y + 1$, $z = y - 2x$ διέρχεται διὰ τῶν σημείων $(1, 2, -1)$, (o, o, o), $(o, -1, -1)$, $(1, o, -2)$; Διατί;

6) Εὕρετε, ἂν ἡ εὐθεῖα

$$5x - 7y + 2z - 1 = o, \quad 7x + 3y = 4z + 6 = o$$

συμπίπτῃ μὲ τὴν $3x + y - 5z - 1 = o$, $4x + 2y + z + 7 = o$.

7) Ἔστω ὅτι εἶνε $H' = \mu'_1 H_1 + \mu'_2 H_2$, $H'' = \mu''_1 H_1 + \mu''_2 H_2$. Δείξατε ὅτι ἀναλόγους σχέσεις ἔχομεν καὶ διὰ τὰ H_1, H_2 ὡς πρὸς τὰ H', H'', ἂν εἶνε $\mu'_1 \mu''_2 - \mu''_1 \mu'_2 \neq o$. Τί θὰ συμβαίνῃ, ἂν εἶνε

$$\mu'_1 \mu''_2 - \mu''_1 \mu'_2 = o;$$

8) Μία εὐθεῖα παριστάνεται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων $x - 2y + 5z - 3 = o$, $3x + y - 2z = 1$.

Παραστήσατε αὐτὴν δι' ἑνὸς ἄλλου ζεύγους ἐξισώσεων.

9) Εὕρετε, ἂν αἱ ἐξισώσεις

$$3x + 2y - 5z = o, \quad 4x - 7y + 2z - 1 = o$$

καὶ αἱ

$$29y - 26z + 3 = o, \quad 29x - 31z - 2 = o$$

παριστάνουν τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

10) Τίνος μορφῆς εἶνε αἱ ἐξισώσεις εὐθείας, διερχομένης διὰ τοῦ σημείου (x', y', z');

11) Εὕρετε τὰς θέσεις τῆς εὐθείας $x = \lambda z + \alpha$, $y = \mu z + \beta$, ὅταν εἷς ἢ περισσότεροι τῶν συντελεστῶν λ, μ, α, β εἶνε ἴσοι μὲ μηδέν.

12) Εὕρετε τὰς τομὰς τῆς εὐθείας $x = \lambda z + \alpha$, $y = \mu z + \beta$ μὲ τὰ συντεταγμένα ἐπίπεδα.

§ 47. Ἐξίσωσις ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τριῶν δοθέντων σημείων.—

α΄) Ἂν ἐπίπεδον (ε) διέρχεται διὰ τριῶν σημείων $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, μὴ κειμένων ἐπ' εὐθείας, ἔχει ἐξίσωσιν

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = o, \quad (1) \quad \text{ἢ} \quad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = o.$$

Πράγματι, ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ὡς πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, y, z παριστάνει ἐπίπεδον. Τοῦτο διέρχεται διὰ τοῦ M_1, ἐπειδὴ ἡ (1) ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων x_1, y_1, z_1, τοῦ σημείου τούτου. Ὁμοίως παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο διέρχεται διὰ τῶν

M_2 καὶ M_3. Ἄρα τὸ ἐν λόγῳ ἐπίπεδον συμπίπτει μὲ τὸ (ε)· ἤτοι τὸ (ε) ἔχει ἐξίσωσιν τὴν (1).

β') Ἡ ἐξίσωσις (1) προκύπτει ὡς ἑξῆς. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις τοῦ (ε) θὰ εἶνε τῆς μορφῆς

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma z + \Delta = 0,$$

ἢ

$$\frac{\mathrm{A}}{\Delta}x + \frac{\mathrm{B}}{\Delta}y + \frac{\Gamma}{\Delta}z + 1 = 0. \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τῶν M_1, M_2, M_3 θὰ εἶνε

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{A}}{\Delta}x_1 + \frac{\mathrm{B}}{\Delta}y_1 + \frac{\Gamma}{\Delta}z_1 + 1 &= 0 \\ \frac{\mathrm{A}}{\Delta}x_2 + \frac{\mathrm{B}}{\Delta}y_2 + \frac{\Gamma}{\Delta}z_2 + 1 &= 0 \\ \frac{\mathrm{A}}{\Delta}x_3 + \frac{\mathrm{B}}{\Delta}y_3 + \frac{\Gamma}{\Delta}z_3 + 1 &= 0. \end{aligned} \qquad (3)$$

Ἐκ τῶν (3) προσδιορίζομεν τὰς τιμὰς τῶν $\frac{\mathrm{A}}{\Delta}$, $\frac{\mathrm{B}}{\Delta}$, $\frac{\Gamma}{\Delta}$ καὶ ταύτας εἰσάγοντες εἰς τὴν (2) εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἐπιπέδου, ἥτις τίθεται καὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν (1).

Τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν ἐκ τῶν (2) καὶ (3) δι' ἀπαλοιφῆς τῶν

$$\frac{\mathrm{A}}{\Delta}, \quad \frac{\mathrm{B}}{\Delta}, \quad \frac{\Gamma}{\Delta}.$$

γ') Ἂν τὰ τρία σημεῖα M_1, M_2, M_3 κεῖνται ἐπ' εὐθείας, δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὰ x_3, y_3, z_3 ἐν τῇ (1) διὰ τῶν

$$\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \ \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \ \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}, \text{ ἐνῷ εἶνε } \frac{(M_1 M_3)}{(M_3 M_2)} = \lambda.$$

Οὕτω ἡ προκύπτουσα ὁρίζουσα μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν ταύτην ἐν τῇ (1) εἶνε ἐκ ταὐτότητος μηδέν. Κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ ἐπίπεδον (ε) εἶνε ἀόριστον.

δ') Συνθήκη ἵνα τέσσαρα σημεῖα M_1 (x_1, y_1, z_1), M_2 (x_2, y_2, z_2), M_3 (x_3, y_3, z_3), M_4 (x_4, y_4, z_4) κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου εἶνε ἡ

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

§ 48. Ἐξίσωσις ἐπιπέδου διερχομένου διὰ δύο σημείων καὶ παραλλήλου πρὸς δοθὲν ἄνυσμα.—

α') Ἂν ἐπίπεδον (ε) διέρχεται διὰ δύο σημείων $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ καὶ εἶνε παράλληλον πρὸς τὸ ἄνυσμα Τ (α, β, γ), ἔχει ἐξίσωσιν

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & o \end{vmatrix} = o, \quad (1) \text{ ἢ } \quad \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = o.$$

Τῷ ὄντι ἡ ἐξίσωσις (1) παριστάνει ἐπίπεδον, ἐπειδὴ εἶνε τῆς μορφῆς

$$A\,x + B\,y + \Gamma\,z + \Delta = o.$$

Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο διέρχεται διὰ τῶν M_1 καὶ M_2, ἐπειδὴ ἡ (1) μηδενίζεται ἂν τὰ x, y, z ἀντικατασταθοῦν ὑπὸ τῶν x_1, y_1, z_1, ἢ τῶν x_2, y_2, z_2 ἀντιστοίχως· εἶνε δὲ καὶ παράλληλον πρὸς τὸ ἄνυσμα Τ (α, β, γ), διότι ἔχομεν $A\alpha + B\beta + \Gamma\gamma = o$. Ἄρα τὸ ἐπίπεδον τοῦτο συμπίπτει μὲ τὸ (ε)· ἤτοι τὸ (ε) ἔχει ἐξίσωσιν τὴν (1).

β') Παρατηρητέον ὅτι τὸ ἐπίπεδον (1) περιέχει τὰς δύο εὐθείας, τῶν ὁποίων ἐξισώσεις εἶνε αἱ

$$\frac{x-x_1}{\alpha} = \frac{y-y_1}{\beta} = \frac{z-z_1}{\gamma}, \quad \frac{x-x_2}{\alpha} = \frac{y-y_2}{\beta} = \frac{z-z_2}{\gamma}.$$

γ') Συνθήκη ἵνα τὸ ἄνυσμα Τ (α, β, γ) εἶνε παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ὁρίζουν τρία σημεῖα $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ $M_3(x_3, y_3, z_3)$ εἶνε ἡ

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & o \end{vmatrix} = o \quad \text{ἢ} \quad \begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ x_3-x_2 & y_3-y_2 & z_3-z_2 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = o.$$

Ἡ συνθήκη αὐτὴ ἐκφράζει, ὅτι τὸ σημεῖον M_3 κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἄγεται διὰ τῆς εὐθείας $M_1 M_2$ παραλλήλως πρὸς τὸ ἄνυσμα Τ (α, β, γ).

§ 49. Ἐξίσωσις ἐπιπέδου διερχομένου διὰ δοθέντος σημείου καὶ παραλλήλου πρὸς δύο ἀνύσματα.—

α') Ἂν $M_1(x_1, y_1, z_1)$, εἶνε δοθὲν σημεῖον καὶ $T_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $T_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ δοθέντα ἀνύσματα, ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ M_1 καὶ παραλλήλου πρὸς τὰ T_1, T_2 εἶνε

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & o \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & o \end{vmatrix} = o, \ (1) \ \text{ἢ} \ \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = o.$$

Διότι ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶνε τῆς μορφῆς

$$A\,x + B\,y + \Gamma\,z + \Delta = o$$

καὶ παριστᾷ ἐπίπεδον, διερχόμενον διὰ τοῦ M_1, καὶ παράλληλον τῷ T_1 καὶ T_2, ἐπειδὴ εἶνε

$$A\,\alpha_1 + B\,\beta_1 + \Gamma\,\gamma_1 = o, \quad A\,\alpha_2 + B\,\beta_2 + \Gamma\,\gamma_2 = o.$$

β΄) Τὸ ἐπίπεδον (1) περιέχει τὰς εὐθείας τῶν ὁποίων ἐξισώσεις εἶνε

$$\frac{x-x_1}{\alpha_1} = \frac{y-y_1}{\beta_1} = \frac{z-z_1}{\gamma_1}, \quad \frac{x-x_1}{\alpha_2} = \frac{y-y_1}{\beta_2} = \frac{z\ \ z_1}{\gamma_2}$$

καὶ αἵτινες τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον M_1 (x_1, y_1, z_1).

γ΄) «***Ἵνα δύο εὐθεῖαι, ἔχουσαι ἐξισώσεις***

$$\frac{x-x_1}{\alpha_1} = \frac{y-y_1}{\beta_1} = \frac{z\ \ z_1}{\gamma_1}, \quad \frac{x-x_2}{\alpha_2} = \frac{y-y_2}{\beta_2} = \frac{z-z_2}{\gamma_2}$$

κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ (τέμνωνται ἢ εἶνε παράλληλοι), πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = o.$$

Διότι, ἡ σχέσις αὕτη ἐκφράζει τὴν ἀναγκαίαν καὶ ἱκανὴν συνθήκην ἵνα τὸ ἐπίπεδον (1) τὸ ὁποῖον περιέχει τὴν εὐθεῖαν

$$\frac{x-x_1}{\alpha_1} = \frac{y-y_1}{\beta_1} = \frac{z-z_1}{\gamma_1},$$

διέρχεται διὰ τοῦ σημείου (x_2, y_2, z_2).

δ΄) Συνθήκη ἵνα τρία ἀνύσματα T_1 $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, T_2 $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ T_3 $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ εἶνε παράλληλα πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον εἶνε ἡ

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = o.$$

Διότι αὕτη ἐκφράζει ὅτι τὸ ἐπίπεδον

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = o,$$

τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων καὶ εἶνε παράλληλον πρὸς τὰ ἀνύσματα T_2 καὶ T_3, εἶνε παράλληλον πρὸς τὸ T_1.

§ 50. Ἐξίσωσις ἐπιπέδου διερχομένου διὰ δοθέντος σημείου καὶ παραλλήλου πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον.— Ἂν M' (x', y', z'), εἶνε τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ

$$A' x + B' y + \Gamma' z + \Delta' = o$$

ἡ ἐξίσωσις τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου (ε'), ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐπιπέδου, τοῦ διερχομένου διὰ M' καὶ παραλλήλου πρὸς τὸ (ε') θὰ εἶνε

$$A' (x-x') + B' (y-y') + \Gamma' (z-z') = o. \qquad (1)$$

Διότι ἡ ἐξίσωσις τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου θὰ εἶνε τῆς μορφῆς

$$A x + B y + \Gamma z + \Delta = o. \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ θὰ διέρχεται τοῦτο διὰ τοῦ M' θὰ εἶνε

$$A x' + B y' + \Gamma z' + \Delta = o. \qquad (3)$$

Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) ἔχομεν

$$A (x-x') + B (y-y') + \Gamma (z-z') = o. \qquad (4)$$

Ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα (2) καὶ (4) εἶνε παράλληλα, θὰ ἔχωμεν (§ 39, β')

$$A : A' = B : B' = \Gamma : \Gamma'.$$

Παριστάνοντες τοὺς ἴσους τούτους λόγους διὰ ϱ ἔχομεν

$$A = A'. \varrho,\ B = B'. \varrho,\ \Gamma = \Gamma'. \varrho.$$

Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐν λόγῳ ἐπιπέδου εἶνε ἡ (1).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἐπιπέδου, τοῦ διερχομένου διὰ τῶν σημείων (5, 1, 2), (4, — 1, 3), (— 1, 2, — 1).

2) Τίς ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐπιπέδου, τοῦ ἔχοντος συντεταγμένας ἐπὶ τὴν ἀρχὴν $\alpha, -\beta, \gamma$, ἢ $\alpha^2, -\alpha, 1-\alpha^2$, ἢ $2, -3, -8$.

3) Τίνα μορφὴν ἔχει ἡ ἐξίσωσις ἐπιπέδου, τοῦ ὁποίου μία ἢ δύο, τῶν συντεταγμένων του ἐπὶ τὴν ἀρχὴν εἶνε ἄπειροι;

4) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων καὶ τῶν σημείων M_1 (x_1, y_1, z_1), M_2 (x_2, y_2, z_2).

5) Τίς εἶνε ἡ συνθήκη ἵνα ἡ εὐθεῖα ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ σημείου M_1 (x_1, y_1, z_1) καὶ εἶνε παράλληλος πρὸς τὸ ἄνυσμα (α, β, γ) κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $A x + B y + \Gamma z + \Delta = o$.

6) Εὕρετε τὰς ἐξισώσεις τῶν τριῶν ἐπιπέδων, ἅτινα διέρχονται διὰ τῶν M_1 (x_1, y_1, z_1), M_2 (x_2, y_2, z_2) καὶ εἶνε κάθετα ἐπὶ τὰ συντεταγμένα ἐπίπεδα ἀντιστοίχως.

7) Τίς ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐπιπέδου, τοῦ παραλλήλου τῷ ἄξονι τῶν z καὶ ἔχοντος τετμημένην ἐπὶ τὴν ἀρχὴν 5, τεταγμένην δ' ἐπὶ τὴν ἀρχὴν —7;

Περὶ τομῆς ἐπιπέδων

§ 51. Περὶ τομῆς τριῶν ἐπιπέδων.—

α') Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις τριῶν ἐπιπέδων

$$\left.\begin{array}{l} A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = o \\ A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = o \\ A_3 x + B_3 y + \Gamma_3 z + \Delta_3 = o. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Ἵνα εὕρωμεν τὰς συντεταγμένας τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν ἐπιπέδων τούτων, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὰς τιμὰς τῶν x, y, z, αἵτινες ἐπαληθεύουν τὰς ἐξισώσεις (1).

Ἂν μὲν ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων

$$\delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix}$$

εἶνε διάφορος τοῦ μηδενός, τὰ τρία ἐπίπεδα ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον, ἔχον συντεταγμένας (x', y', z'), τῶν ὁποίων αἱ τιμαὶ εἶνε

$$x' = -\begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 & \Delta_1 \\ B_2 & \Gamma_2 & \Delta_2 \\ B_3 & \Gamma_3 & \Delta_3 \end{vmatrix} : \delta, \quad y' = -\begin{vmatrix} \Gamma_1 & A_1 & \Delta_1 \\ \Gamma_2 & A_2 & \Delta_2 \\ \Gamma_3 & A_3 & \Delta_3 \end{vmatrix} : \delta, \quad z' = -\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Delta_1 \\ A_2 & B_2 & \Delta_2 \\ A_3 & B_3 & \Delta_3 \end{vmatrix} : \delta$$

β') Ἂν ἡ δ εἶνε ἴση μὲ μηδέν, δυνατὸν 1) νὰ εἶνε τὰ τρία ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν (νὰ ἔχουν δηλαδὴ ἓν κοινόν σημεῖον εἰς τὸ ἄπειρον)· 2) νὰ τέμνωνται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν· 3) νὰ εἶνε ἀνὰ δύο παράλληλα, δηλαδὴ νὰ ἔχουν μίαν κοινὴν εὐθεῖαν εἰς τὸ ἄπειρον· 4) νὰ συμπίπτουν. Ἡ πρώτη ἐκ τῶν περιπτώσεων τούτων συμβαίνει, ὅταν τοῦ δ ὄντος ἴσου μὲ μηδέν, εἷς τοὐλάχιστον ἐκ τῶν ἀριθμητῶν τῶν ἀνωτέρω κλασμάτων εἶνε διάφορος τοῦ μηδενός, ὅτε τὰ τρία ἐπίπεδα εἶνε παράλληλα πρὸς τὸ ἄνυσμα τὸ ἔχον συντεταγμένας προβολὰς τοὺς ἀριθμητὰς τῶν κλασμάτων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1) Εὕρετε τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου τομῆς τῶν ἐπιπέδων

$$2x+3y+5z-1=o, \quad x-5y+4z-3=o, \quad 7x+y-3+5=o.$$

2) Ἐξετάσατε τὴν θέσιν τῶν ἐπιπέδων

$$z = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1, \quad z = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2, \quad z = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3$$

πρὸς ἄλληλα.

3) Εὕρετε τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν ἐπιπέδων

$$A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = o, \quad A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = o$$

μὲ τὰ συντεταγμένα ἐπίπεδα.

4) Δείξατε ὅτι τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁριζόμετον ὑπὸ δύο τεμνομένων εὐθειῶν $x=\lambda_1 z+\alpha_1,\ y=\mu_1 z+\beta_1$, καὶ $x=\lambda_2 z+\alpha_2,\ y=\mu_2 z+\beta_2$ ἔχει ἐξίσωσιν

$$(\mu_1-\mu_2)(x-\lambda_1 z-\alpha_1)=(\lambda_1-\lambda_2)(y-\mu_1 z-\beta_1)$$

ἢ τὴν

$$(\beta_1-\beta_2)(x-\lambda_1 z-\alpha_1)=(\alpha_1-\alpha_2)(y-\mu_1 z-\beta_1)$$

ἢ

$$(\mu_1-\mu_2)(x-\lambda_2 z-\alpha_2)=(\lambda_1-\lambda_2)(y-\mu_2 z-\beta_2)$$

ἢ

$$(\beta_1-\beta_2)(x-\lambda_2 z-\alpha_2)=(\alpha_1-\alpha_2)(y-\mu_2 z-\beta_2)$$

5) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἐπιπέδου τῶν παραλλήλων εὐθειῶν

$$x=3z-1,\ y=-7z+4 \text{ καὶ } x=3z+8,\ y=-7z-11.$$

6) Εἰς ποῖον σημεῖον ἡ εὐθεῖα

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+5}{1}=\frac{z-3}{2}$$

τέμνει τὸ ἐπίπεδον $3x+5y-z=8$;

7) Δίδονται αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι

$$\frac{x-x_1}{\alpha}=\frac{y-y_1}{\beta}=\frac{z-z_1}{\alpha},\quad \frac{x-x_2}{\alpha}=\frac{y-y_2}{\beta}=\frac{z-z_2}{\gamma}.$$

Δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐπιπέδου των εἶνε

$$(x-x_1)[(y_2-y_1)\gamma-(z_2-z_1)\beta]$$
$$+(y-y_1)[(z_2-z_1)\alpha-(x_2-x_1)\gamma]$$
$$+(z-z_1)[(x_2-x_1)\beta-(y_2-y_1)\alpha]=0.$$

8) Δείξατε ὅτι συνθήκη ἵνα αἱ εὐθεῖαι

$$\frac{x-x_1}{\alpha_1}=\frac{y-y_1}{\beta_1}=\frac{z-z_1}{\gamma_1},\quad \frac{x-x_2}{\alpha_2}=\frac{y-y_2}{\beta_2}=\frac{z-z_2}{\gamma_2}$$

τέμνωνται, εἶνε

$$(x_1-x_2)(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)+(y_1-y_2)(\gamma_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2)+(z_1-z_2)(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)=0.$$

§ 52. Συνθήκη ἵνα τέσσαρα ἐπίπεδα ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον.—

Ἔστωσαν τέσσαρα ἐπίπεδα, ἔχοντα ἐξισώσεις

$$\begin{aligned} A_1 x+B_1 y+\Gamma_1 z+\Delta_1&=0\\ A_2 x+B_2 y+\Gamma_2 z+\Delta_2&=0\\ A_3 x+B_3 y+\Gamma_3 z+\Delta_3&=0\\ A_4 y+B_4 y+\Gamma_4 z+\Delta_4&=0. \end{aligned} \tag{1}$$

Συνθήκη ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ ἵνα τὰ ἐπίπεδα ταῦτα ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον (ἢ εἶνε παράλληλα πρὸς τὸ αὐτὸ ἄνυσμα) εἶνε ἡ

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 & \Delta_1\\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 & \Delta_2\\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 & \Delta_3 \end{vmatrix}=0. \tag{2}$$

Τῷ ὄντι, ἂν (x',y',z') (§ 51, α') εἶνε αἱ συντεταγμέναι τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν τριῶν πρώτων ἐκ τῶν (1), αὗται θὰ ἐπαληθεύουν τὴν τετάρτην τῶν ἐξισώσεων (1), ἤτοι θὰ εἶνε

$$A_4 x' + B_4 y' + \Gamma_4 z' + \Delta_4 = o,$$

ἥτις τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν (2). Καὶ ἀντιστρόφως, ἂν πληροῦται ἡ συνθήκη (2), τὸ σημεῖον τῆς κοινῆς τομῆς τῶν τριῶν πρώτων ἐπιπέδων (1) κεῖται ἐπὶ τοῦ τετάρτου ἐξ αὐτῶν.

§ **53. Ἐξίσωσις κεντρικῆς δέσμης ἐπιπέδων.**—

α') Καλοῦμεν *κεντρικὴν δέσμην ἐπιπέδων* τὸ σύνολον ἐπιπέδων, διερχομένων διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον καλεῖται *κέντρον τῆς δέσμης*.

β') Ἂν $\quad H_1 = o, H_2 = o, H_3 = o \quad (1)$

εἶνε αἱ ἐξισώσεις τριῶν ἐπιπέδων διερχομένων διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ἔστω τοῦ K, ἡ ἐξίσωσις τῆς κεντρικῆς δέσμης, τῆς ἐχούσης κέντρον τὸ K εἶνε

$$\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 + \mu_3 H_3 = o, \qquad (2)$$

ἐνῷ μ_1, μ_2, μ_3 εἶνε ἀριθμητικοὶ παράγοντες (ἀνεξάρτητοι τῶν x, y, z).

Τῷ ὄντι, ἡ ἐξίσωσις αὕτη ὡς πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, y, z παριστάνει ἐπίπεδον, διερχόμενον διὰ τοῦ K, ἐπειδὴ αἱ συντεταγμέναι τούτου ἐπαληθεύουν τὰς ἐξισώσεις (1), ἄρα καὶ τὴν (2). Δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τοὺς λόγους $\mu_1 : \mu_3$, $\mu_2 : \mu_3$ ὥστε ἡ (2) νὰ παριστάνῃ τυχὸν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ K. Οὕτω π.χ. νὰ διέρχεται καὶ διὰ δύο ἀκόμη σημείων, διαφόρων τοῦ K· Ἤτοι ἡ ἐξίσωσις (2) εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς κεντρικῆς δέσμης ἐπιπέδων, ἐχούσης κέντρον τὸ K.

§ **54. Συνθήκη ἵνα τέσσαρα ἐπίπεδα διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.**—

«***Συνθήκη ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ ἵνα τέσσαρα ἐπίπεδα***

$$H_1 = o, H_2 = o, H_3 = o, H_4 = o,$$

διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου εἶνε ἡ

$$\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 + \mu_3 H_3 + \mu_4 H_4 \equiv o,$$

ἐνῷ $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ εἶνε σταθεροὶ παράγοντες (ἀνεξάρτητοι τῶν x, y, z).

Διότι, ἂν τὸ ἐπίπεδον $H_4 = o$ ἀνήκῃ εἰς τὴν κεντρικὴν δέσμην

$$\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 + \mu_3 H_3 = o,$$

δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τοὺς λόγους $\mu_1 : \mu_3$, $\mu_2 : \mu_3$ ὥστε τὸ ἐπίπεδον $\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 + \mu_3 H_3 = o$ νὰ διέρχεται καὶ διὰ δύο σημείων τοῦ ἐπιπέδου $H_4 = o$, ἄρα νὰ συμπίπτῃ μὲ αὐτό. Ἀλλὰ τότε ἡ παράστασις H_4 δύναται νὰ διαφέρῃ τῆς

$$\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 + \mu_3 H_3$$

κατὰ παράγοντα σταθερὸν (διάφορον τοῦ μηδενὸς) διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῶν x, y, z (§ 39, α′).

Ἤτοι ὑπάρχει παράγων τις—μ_4, τοιοῦτος τις ὥστε νὰ πληροῦται ἡ ταὐτότης $\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 + \mu_3 H_3 + \mu_4 H_4 \equiv o$.

Ἀντιστρόφως, ἂν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τέσσαρας παράγοντας $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ διαφόρους τοῦ μηδενός, τοιούτους, ὥστε νὰ ἔχωμεν τὴν ταὐτότητα $\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 + \mu_3 H_3 + \mu_4 H_4 \equiv o$, τὰ ἐπίπεδα $H_1 = o$, $H_2 = o$, $H_3 = o$, $H_4 = o$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Διότι, ἂν θέσωμεν ἐν αὐτῇ ἀντὶ τῶν x, y, z τὰς συντεταγμένας τῆς τομῆς τῶν τριῶν πρώτων ἐπιπέδων $H_1 = o$, $H_2 = o$, $H_3 = o$, θὰ ἔχωμεν $\mu_4 H_4 = o$ ἢ $H_4 = o$, ἐξ ἧς ἕπεται ὅτι καὶ τὸ ἐπίπεδον $H_4 = o$ διέρχεται διὰ τῆς τομῆς τῶν τριῶν ἄλλων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Ἡ ἐξίσωσις $A x + B y + \Gamma z = o$ ἐπιπέδου, διερχομένου διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων εἶνε καὶ ἡ ἐξίσωσις τῆς κεντρικῆς δέσμης ἐπιπέδων, ἐχούσης κέντρον τὸ $x = o$, $y = o$, $z = o$, ἂν A, B, Γ εἶνε τυχοῦσαι σταθεραί. Διατί;

2) Ἡ ἐξίσωσις $A(x - x_0) + B(y - y_0) + \Gamma(z - z_0) = o$, ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ (x_0, y_0, z_0) εἶνε καὶ ἐξίσωσις τῆς κεντρικῆς δέσμης, ἐχούσης κέντρον τὸ (x_0, y_0, z_0). Διατί;

3) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἐπιπέδου τῆς κεντρικῆς δέσμης, $5x - y + 2z - 1 = o$, $3y + x - 7z = o$, $2z - x - y + 3 = o$, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τῶν σημείων (1, 1, 1), (3, 1, − 1).

4) Τί ἕπεται ἐκ τῆς ταυτότητος $\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 + \mu_3 H_3 + \mu_4 H_4 \equiv o$, ἂν εἷς ἢ περισσότεροι τῶν παραγόντων μ μηδενισθοῦν;

§ 55. Συνθήκη ἵνα δύο εὐθεῖαι τέμνωνται.—

α′) Ἔστωσαν

$$\begin{cases} x = \lambda_1 z + \alpha_1 \\ y = \mu_1 z + \beta_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \lambda_2 z + \alpha_2 \\ y = \mu_2 z + \beta_2 \end{cases}$$

αἱ ἐξισώσεις δύο εὐθειῶν. Ζητεῖται ἡ συνθήκη, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ πληροῦν οἱ συντελεσταὶ τῶν ἐξισώσεων τούτων, ἵνα αἱ εὐθεῖαι αὗται τέμνωνται.

Ἂν x′, y′, z′ εἶνε αἱ συντεταγμέναι τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν εὐθειῶν, αὗται θὰ ἐπαληθεύουν τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις. Ἑπομένως θὰ εἶνε

$$z' = \frac{\alpha_2-\alpha_1}{\lambda_1-\lambda_2} = \frac{\beta_2-\beta_1}{\mu_1-\mu_2}.$$

Ἡ ζητουμένη συνθήκη εἶνε ἡ

$$\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\lambda_2-\lambda_1} = \frac{\beta_2-\beta_1}{\mu_2-\mu_1},$$

ἢ ἡ $\quad (\alpha_1-\alpha_2)(\mu_1-\mu_2) = (\beta_1-\beta_2)(\lambda_1-\lambda_2)$.

Ἂν αὕτη πληροῦται αἱ ἐν λόγῳ εὐθεῖαι τέμνονται. Διότι τότε αἱ ἀνωτέρω ἐξισώσεις δίδουν μίαν τιμὴν τοῦ z, ἔστω τὴν z′, θὰ εἶνε δὲ

$$x' = \lambda_1 z' + \alpha_1 = \lambda_2 + z' + \beta_2$$
$$y' = \mu_1 z' + \beta_1 = \mu_2 + z' + \beta_2$$

ἐν ᾧ x′, y′ παραστάνουν τὰς δύο ἄλλας συντεταγμένας τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν.

β′) Ἂν εἶνε $\lambda_1=\lambda_2$, $\mu_1=\mu_2$ αἱ εὐθεῖαι εἶνε παράλληλοι (τέμνονται εἰς τὸ ἄπειρον).

γ′) Ἂν $\quad H_1=o,\ H_2=o$
$\quad H_3=o,\ H_4=o, \quad (1)$

εἶνε αἱ ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν, ἐπειδὴ τὰ τέσσαρα ἐπίπεδα

$$H_1 = o,\ H_2 = o,\ H_3 = o,\ H_4 = o$$

θὰ τέμνωνται εἰς ἓν σημεῖον, ἂν αἱ εὐθεῖαι τέμνωνται, θὰ εἶνε

$$\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 + \mu_3 H_3 + \mu_4 H_4 \equiv o. \qquad (2)$$

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐπιπέδου τῶν εὐθειῶν, εἶνε $\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 = o$, ἢ ἡ $\mu_3 H_3 + \mu_4 H_4 = o$. Διότι αἱ ἐξισώσεις αὗται παριστάνουν τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ἐπειδὴ πληροῦται ἡ ταὐτότης (2).

Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο διέρχεται διὰ τῆς εὐθείας $H_1 = o$, $H_2 = o$ καθὼς καὶ διὰ τῆς $H_3 = o$, $H_4 = o$.

§ 56. Περὶ τομῆς εὐθείας καὶ ἐπιπέδου.—

α′) Ἔστωσαν $\quad x = \lambda z + \alpha,\ y = \mu z + \beta$
αἱ ἐξισώσεις εὐθείας καὶ $\quad A x + B y + \Gamma z + \Delta = o \quad (1)$

ἡ ἐξίσωσις ἐπιπέδου. Ζητοῦνται αἱ συντεταγμέναι τῆς τομῆς αὐτῶν.

Ἂν παραστήσωμεν διὰ x′, y′, z′ τὰς συντεταγμένας τῆς τομῆς, αὗται θὰ ἐπαληθεύουν τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις.

Ὅθεν ἡ κοινὴ λύσις τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων ὁρίζει τὰς συντεταγμένας x′, y′, z′ τῆς τομῆς.

Εἰσάγοντες τὰς τιμὰς τῶν x, y ἐκ τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων εἰς τὴν τρίτην, εὑρίσκομεν

$$(\lambda\, A + \mu\, B + \Gamma)\, z + (A\, \alpha + B\, \beta + \Delta) = o. \qquad (2)$$

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ z′, ἐκ τῶν δύο δὲ πρώτων ἐκ τῶν δοθεισῶν τὰς τῶν x′, y′.

β′) Ἂν ἡ (2) πληροῦται διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ z, ἤτοι ἂν εἶνε

$$\lambda\, A + \mu\, B + \Gamma = o,\; A\, \alpha + B\, \beta + \Delta = o, \qquad (3)$$

πᾶν σημεῖον τῆς εὐθείας εἶνε καὶ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου. Ἤτοι ἡ εὐθεῖα κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου. Καὶ ἀντιστρόφως, ἂν ἡ εὐθεῖα κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου πληροῦται ἡ συνθήκη (3).

§ 37. **Συνθήκη ἵνα δύο εὐθεῖαι εἶνε παράλληλοι.**—

α′) Ἂν αἱ ἐξισώσεις δύο εὐθειῶν παραλλήλων εἶνε αἱ

$$\begin{cases} x = \lambda_1\, z + \alpha_1 \\ y = \mu_1\, z + \beta_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \lambda_2\, z + \alpha_2 \\ y = \mu_2\, z + \beta_2, \end{cases}$$

αἱ προβολαὶ τούτων ἐπὶ τοῦ xz θὰ εἶνε παράλληλοι. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν $\lambda_1 = \lambda_2$ (§ 29, α′)

Ὁμοίως αἱ προβολαὶ τῶν παραλλήλων ἐπὶ τοῦ yz θὰ εἶνε παράλληλοι καὶ θὰ ἔχωμεν $\mu_1 = \mu_2$.

Ἀντιστρόφως, ἂν εἶνε $\lambda_1 = \lambda_2$ $\mu_1 = \mu_2$, αἱ εὐθεῖαι εἶνε παράλληλοι, ἐπειδὴ ἔχουν τὰς προβολάς αὐτῶν ἐπὶ τοῦ xz καὶ τοῦ yz παραλλήλως (§ 29, β′).

β′) Κατὰ ταῦτα ἡ εὐθεῖα

$$\begin{cases} x = \lambda\, z + \alpha \\ y = \mu\, z + \beta \end{cases}$$

εἶνε παράλληλος τῇ

$$\begin{aligned} x &= \lambda\, z \\ y &= \mu\, z, \end{aligned}$$

ἥτις διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων.

γ′) Ἂν διὰ δοθέντος σημείου M_1 $(x_1, y_1 z_1)$ ζητῆται νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς ἄλλην, ἔχουσαν ἐξισώσεις

$$\begin{cases} x = \lambda\, z + \alpha \\ y = \mu\, z + \beta, \end{cases}$$

παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ζητουμένη θὰ ἔχῃ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς

$$\begin{cases} x = \lambda z + \alpha \\ y = \mu z + \beta' \end{cases} \qquad (1)$$

ἐν ᾧ ἄγνωστα εἶνε τὰ α, β'. Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα αὕτη θὰ διέρχεται διὰ τοῦ M_1, θὰ ἔχωμεν

$$\begin{cases} x_1 = \lambda z_1 + \alpha' \\ y_1 = \mu z_1 + \beta'. \end{cases} \qquad (2)$$

Δι' ἀφαιρέσεως τῶν (2) καὶ (1) ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις τῆς ζητουμένης εὐθείας,

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda (z - z_1) \\ y - y_1 = \mu (z - z_1). \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Εὕρετε, ἂν αἱ εὐθεῖαι

$$4x - y - 2z = 1,\ x - 3y + 5z = 5$$

καὶ $$2x + y + z = 3,\ 7x - 2y - 8z = -6$$

τέμνωνται, καὶ εἰς ποῖον σημεῖον;

2) Εὕρετε, ἂν αἱ εὐθεῖαι $x = 5z - 2$, $y = -z + 3$

καὶ $x = 4z + 7$, $y = 2x - 24$

κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἐπιπέδου των.

3) Τίς εἶνε ἡ συνθήκη ἵνα ἡ εὐθεῖα

$$A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0,\ A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0$$

τέμνῃ ἕνα τῶν ἀξόνων, π. χ. τὸν ἄξονα τῶν z;

4) Ἐξετάσατε τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ προηγούμενον διὰ τὴν εὐθεῖαν

$$x = \lambda z + \alpha,\ y = \mu z + \beta.$$

5) Δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον ὁρίζουν δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι

$$x = \lambda_1 z + \alpha_1,\ y = \mu_1 z + \beta_1, \text{ καὶ } x = \lambda_2 z + \alpha_2,\ y = \mu_2 z + \beta_2$$

εἶνε ἡ

$$(\mu_1 - \mu_2)(x - \lambda_2 z - \alpha_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)(y - \mu_2 z - \beta_2)$$

ἢ ἡ $$(\beta_1 - \beta_2)(x - \lambda_2 z - \alpha_2) = (\alpha_1 - \alpha_2)(y - \mu_2 z - \beta_2).$$

6) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἐπιπέδου, ἐν ᾧ κεῖνται αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι

$$x = 3z - 1,\ y = -7z + 4 \text{ καὶ } x = 3z + 8,\ y = -7z - 11,$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ
Μετρικαὶ ἰδιότητες ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

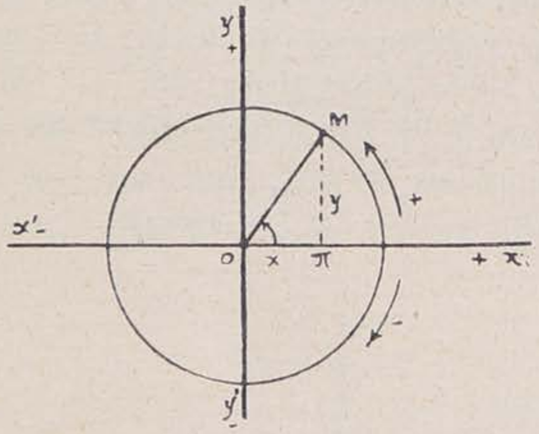
§ **58. Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ οἱασδήποτε γωνίας.**— α΄) Ἔστω oxy σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων καὶ περιφέρεια κύκλου, ἔχουσα κέντρον τὴν ἀρχὴν o, ἀκτῖνα δὲ ρ (σχ. 58). Ἂν τυχὸν σημεῖον Μ τῆς περιφερείας ταύτης ἔχῃ συντεταγμένας x, y καὶ παραστήσωμεν τὴν γωνίαν xoM διὰ τοῦ φ, οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας αὐτῆς ὁρίζονται ὑπὸ τῶν τύπων

$$\text{ημ}\,\varphi = \frac{y}{\rho},\ \text{συν}\,\varphi = \frac{x}{\rho},\ \text{εφ}\,\varphi = \frac{y}{x},\ \text{σφ}\,\varphi = \frac{x}{y}.$$

β΄) Τὸ ἡμίτονον ἔχει τὸ σημεῖον τῆς τεταγμένης y τοῦ σημείου Μ, ἤτοι εἶνε θετικὸν μὲν διὰ τὰ σημεῖα, τὰ κείμενα ὑπεράνω τοῦ ἄξονος τῶν x, ἀρνητικὸν δὲ διὰ τὰ κείμενα κάτω αὐτοῦ. Τὸ συνημίτονον ἔχει τὸ σημεῖον τῆς τετμημένης x τοῦ Μ· ἤτοι εἶνε θετικὸν μὲν διὰ τὰ σημεῖα, τὰ κείμενα δεξιὰ τοῦ ἄξονος τῶν y, ἀρνητικὸν δὲ διὰ τὰ κείμενα ἀριστερὰ αὐτοῦ. Ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ συνεφαπτομένη εἶνε θετικαὶ μὲν διὰ τὰ σημεῖα τὰ ἔχοντα ἡμίτονον καὶ συνημίτονον ὁμόσημα, ἀρνητικαὶ δὲ διὰ τὰ ἔχοντα αὐτὰ ἑτερόσημα.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω τύπων ἔχομεν

$$\text{ημ}^2\varphi + \text{συν}^2\varphi = 1,\ \text{εφ}\,\varphi = \frac{\text{ημ}\,\varphi}{\text{συν}\,\varphi},\ \text{σφ}\,\varphi = \frac{\text{συν}\,\varphi}{\text{ημ}\,\varphi}.$$



(Σχ. 58)

§ **59. Περὶ πολικῶν συντεταγμένων ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.**— α΄) Τὴν θέσιν σημείου τινὸς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ὁρίζομεν καὶ ὡς ἑξῆς.

Λαμβάνομεν σημεῖόν τι αὐτοῦ ὡρισμένον, ἔστω τὸ o, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν ***πόλον***. Δι' αὐτοῦ φέρομεν εὐθεῖαν xox΄ τὴν ὁποίαν καλοῦμεν ***πολικὸν ἄξονα***. Ἐπ' αὐτοῦ θεωροῦμεν θετικὴν φορὰν τὴν ἐκ τοῦ o πρὸς τὸ x καὶ λαμβάνομεν τὸ ἄνυσμα oΘ, ἔχον μῆκος ἴσον μὲ τὴν θετικὴν μονάδα τοῦ μήκους (σχ. 59).

Δοθέντος σημείου Μ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ καλοῦμεν *πολικὴν μὲν ἢ ἐπιβατικὴν ἀκτῖνα* αὐτοῦ τὸ ἄνυσμα οΜ· τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος οΜ, παριστάνομεν συνήθως διὰ τοῦ ρ, τὸ ὁποῖον θεωρεῖται θετικόν· *πολικὴν δὲ γωνίαν* αὐτοῦ καλοῦμεν τὴν γωνίαν xοΜ καὶ παριστάνομεν αὐτὴν διὰ τοῦ θ. Τὰ ρ, θ καλοῦνται *πολικαὶ συντεταγμέναι* τοῦ σημείου Μ, σημειώνομεν δὲ συνήθως Μ (ρ, θ).

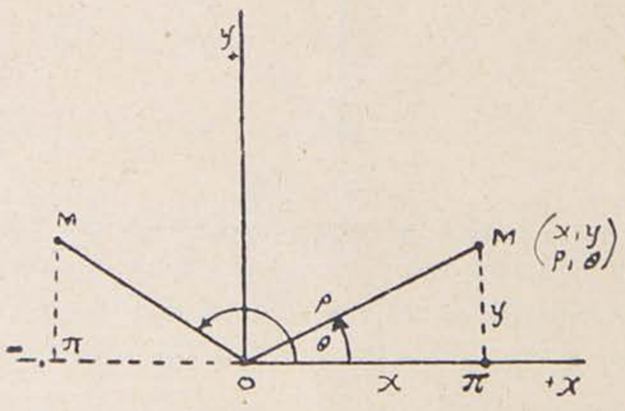
β′) Εἰς δοθὲν σημεῖον Μ ἀντιστοιχεῖ μία τιμὴ τοῦ ρ θετικὴ καὶ μία τιμὴ τοῦ θ (θεωροῦντες τὴν μικροτέραν τῶν γωνιῶν xοΜ). Ἀντιστρόφως, ἂν δοθοῦν ἡ τιμὴ τοῦ ρ καὶ ἡ τιμὴ τοῦ θ, ὑπάρχει ἓν μόνον σημεῖον Μ, ἔχον ὡς πολικὰς συντεταγμένας τὰς τιμὰς ταύτας τῶν ρ, θ.

γ′) Λαμβάνομεν πάντα τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, ὑποθέτοντες τὸ ρ μεταβαλλόμενον ἀπὸ τοῦ ο μέχρι τοῦ $+\infty$, τὴν δὲ γωνίαν θ μεταβαλλομένην ἀπὸ τοῦ ο μέχρι τοῦ 2π.

δ′) Ἐνίοτε εἶνε ἀνάγκη νὰ θεωροῦμεν καὶ τιμὰς τοῦ ρ ἀρνητικάς. Οὕτω, ἂν δι' ἓν σημεῖον Μ ἔχωμεν πολικὰς συντεταγμένας (ρ, θ), ἐνῷ τὸ ρ εἶνε ἀρνητικὸν καὶ ἴσον μὲ $-\rho'$, τὸ σημεῖον τοῦτο θὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ ἔχον συντεταγμένας $(-\rho, \theta+\pi)$ ἢ τὰς $(\rho', \theta+\pi)$.

§ 60. Σχέσεις μεταξὺ εὐθυγράμμων καὶ πολικῶν συντεταγμένων.—

α′) Ἂν διὰ τοῦ πόλου ο φέρωμεν εὐθεῖαν yοy′ κάθετον τῷ πολικῷ ἄξονι xοx′ (σχ. 59) καὶ λάβωμεν ἐπ' αὐτῆς θετικὴν φορὰν τὴν ἐκ τοῦ ο πρὸς τὸ y, καλέσωμεν δὲ (x, y) τὰς εὐθυγράμμους ὀρθογωνίους συντεταγμένας τοῦ σημείου Μ ὡς πρὸς τὸ ὀρθογώνιον σύστημα τῶν ἀξόνων οxy καὶ (ρ,θ) τὰς πολικὰς αὐτοῦ συντεταγμένας (ὑποθέτοντες ὅτι ἡ μονὰς μήκους οΘ εἶνε ἡ αὐτὴ καὶ διὰ τὰ δύο συστήματα) θὰ ἔχωμεν (§ 58) $x = \rho$ συνθ, $y = \rho$ ημθ.



(Σχ. 59)

Οἱ τύποι οὗτοι δίδουν τὰς εὐθυγράμμους ὀρθογωνίους συντεταγμένας τοῦ σημείου διὰ τῶν πολικῶν αὐτοῦ συντεταγμένων.

β') Ἵνα εὕρωμεν τὰς πολικὰς συντεταγμένας ρ, θ τοῦ σημείου Μ διὰ τῶν εὐθυγράμμων x, y, ἔχομεν

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad \text{εφ}\,\theta = \frac{y}{x},$$

(ἐνῷ τὸ σημεῖον Μ θὰ κεῖται ἄνωθεν ἢ κάτωθεν τοῦ ἄξονος τῶν x, καθόσον τὸ y εἶνε θετικὸν ἢ ἀρνητικόν).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Ποῦ κεῖνται πάντα τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἔχουν $\rho = \alpha$, ἢ ἐκεῖνα, διὰ τὰ ὁποῖα εἶνε $\theta = \theta o$, ἐνῶ α καὶ θο εἶνε ὡρισμένοι ἀριθμοί;

2) Τίνες εἶνε αἱ πολικαὶ συντεταγμέναι τῶν σημείων

$$(2, o), (o, 3), (-4, o), (o, -1), (3, -3), (1, 1), (-2, 2);$$

3) Τίνες εἶνε αἱ ὀρθογώνιαι συντεταγμέναι τῶν σημείων, τῶν ἐχόντων πολικὰς συντεταγμένας $(1, 15^o)$, $(3, 210^o)$, $(2, 31^o)$;

4) Εὕρετε ὅτι ἑκάστη τῶν ἑπομένων ἐξισώσεων εἰς πολικὰς συντεταγμένας παριστάνει εὐθεῖαν γραμμήν.

$$\rho \;\text{συν}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = 2\,\alpha, \quad \rho \;\text{συν}\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \alpha.$$

Εὕρετε τὴν τομὴν τῶν εὐθειῶν τούτων.

5) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν εἰς εὐθυγράμμους ὀρθογωνίους συντεταγμένας, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις $\rho \;\text{συν}\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 2\,\alpha$ εἰς πολικὰς συντεταγμένας.

6) Δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις εὐθείας γραμμῆς, διερχομένης διὰ τῶν σημείων (ρ_1, θ_1), (ρ_2, θ_2), εἰς πολικὰς συντεταγμένας, εἶνε

$$\rho_1\,\rho_2\;\text{ημ}\,(\theta_1 - \theta_2) + \rho_2\,\rho\;\text{ημ}\,(\theta - \theta_1) + \rho_2\,\rho\;\text{ημ}\,(\theta_2 - \theta) = o.$$

§ 61. Μῆκος ἀνύσματος καὶ γωνίαι αὐτοῦ μὲ ἄξονας ὀρθογωνίους.—

α') Δίδεται τὸ ἄνυσμα $M_1 M_2$ διὰ τῶν ἄκρων αὐτοῦ $M_1 (x_1, y_1)$, $M_2 (x_2, y_2)$ ὡς πρὸς ὀρθογωνίους ἄξονας oxy καὶ ζητεῖται τὸ μῆκος $(M_1 M_2) = \rho$ καὶ αἱ γωνίαι τοῦ ἀνύσματος τούτου μὲ τὰ θετικὰ μέρη τῶν ἀξόνων τῶν συντεταγμένων ox καὶ oy.

Παριστῶμεν τὰς γωνίας ταύτας διὰ τῶν φ καὶ ψ ἀντιστοίχως.

Ἂν ἐκ τῆς ἀρχῆς o φέρωμεν τὸ ἄνυσμα oM ὁμορρόπως ἴσον τῷ $M_1 M_2$ καὶ θέσωμεν

$$x_2 - x_1 = \alpha, \quad y_2 - y_1 = \beta,$$

αἱ μὲν συντεταγμέναι τοῦ Μ θὰ εἶνε α, β, αἱ δὲ γωνίαι xoM καὶ yoM θὰ εἶνε ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς φ καὶ ψ. Ὑποθέτομεν ὅτι αἱ γωνίαι φ καὶ ψ εἶνε θετικαί, ἂν προκύπτουν ἡ μὲν φ διὰ στροφῆς τῆς οx ἐν τῷ ἐπιπέδῳ οxy περὶ τὸ ο κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, ἡ δὲ ψ διὰ στροφῆς τῆς οy κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν, πρὸς δὲ εἶνε

$$\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}.$$

Ἂν Π εἶνε ἡ ὀρθὴ προβολὴ τοῦ Μ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x, ἔχομεν ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου οΠΜ

$$\boxed{\begin{aligned} &\rho^2 = \alpha^2 + \beta^2 \\ &\text{συν}\,\varphi = \text{ημ}\,\psi = \frac{\alpha}{\rho} \\ &\text{ημ}\,\varphi = \text{συν}\,\psi = \frac{\beta}{\rho} \\ &\text{εφ}\,\varphi = \text{σφ}\,\psi = \frac{\beta}{\alpha} \end{aligned}} \qquad (1)$$

$$\text{ἢ } \rho = \pm\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \pm\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\text{συν}\,\varphi = \text{ημ}\,\psi = \frac{x_2 - x_1}{\rho},\ \text{ημ}\,\varphi = \text{συν}\,\psi = \frac{y_2 - y_1}{\rho},\ \text{εφ}\,\varphi = \text{σφ}\,\psi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Ἐκ τῶν δύο σημείων τῶν πρὸ τοῦ ριζικοῦ λαμβάνομεν τὸ + μέν, ἂν ἡ θετικὴ φορὰ ἐπὶ τῆς εὐθείας, τὴν ὁποίαν ὁρίζουν τὰ σημεῖα M_1, M_2 εἶνε ἡ ἐκ τοῦ M_1 πρὸς τὸ M_2, τὸ — δέ, ἂν εἶνε ἡ ἐκ τοῦ M_2 πρὸς τὸ M_1.

β΄) Οἱ τύποι (1) ἀληθεύουν καὶ ὅταν ἐπὶ τῆς εὐθείας οΜ ληφθῇ ὡς θετικὴ φορὰ ἡ ἐκ τοῦ Μ πρὸς τὸ ο, ὑποτεθῇ δ' οὕτω τὸ ρ ἀρνητικόν, ἀρκεῖ νὰ παριστάνωμεν διὰ φ καὶ ψ τὰς γωνίας τῆς Μο μὲ τὰ θετικὰ μέρη τῶν ἀξόνων οx καὶ οy ἀντιστοίχως. Διότι, θεωροῦντες τὸ σημεῖον Μ΄ (—α, —β), συμμετρικὸν τοῦ Μ ὡς πρὸς τὴν ἀρχήν, παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο θὰ ἔχῃ πολικὰς συντεταγμένας (—ρ, φ), ἐνῷ τὸ —ρ εἶνε θετικόν. Ἑπομένως ἔχομεν

$$\text{συν}\,\varphi = \frac{-\alpha}{-\rho} = \frac{\alpha}{\rho},\ \text{ημ}\,\varphi = \frac{-\beta}{-\rho} = \frac{\beta}{\rho}.$$

γ΄) Ὡς γνωστὸν (§ 18, α΄) ὁ λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$ παριστάνει τὸν συντελεστὴν διευθύνσεως ἢ τὸν γωνιακὸν συντελεστὴν λ τοῦ ἀνύσματος M_1M_2. Ἑπομένως ἔχομεν

$$\lambda = \text{εφ}\,\varphi.$$

Ἤτοι «***ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως ἢ ὁ γωνιακὸς συντελεστὴς ἀνύσματός τινος ἰσοῦται μὲ τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν σχηματίζει τοῦτο μὲ τὸ θετικὸν μέρος τοῦ ἄξονος τῶν*** x».

§ **62. Μῆκος ἀνύσματος καὶ γωνίαι αὐτοῦ μὲ πλαγιογωνίους ἄξονας συντεταγμένων.**—

α΄) Δίδονται οἱ πλαγιογώνιοι ἄξονες οxy καὶ τὸ ἄνυσμα $M_1M_2(\alpha,\beta)$.

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος $(M_1, M_2) = \varrho$ καὶ αἱ γωνίαι αὐτοῦ μὲ τοὺς ἄξονας. Ἂν ἐκ τῆς ἀρχῆς o φέρωμεν τὸ ἄνυσμα oM ὁμορρόπως ἴσον τῷ $M_1 M_2$ καὶ παραστήσωμεν διὰ τῶν φ καὶ ψ τὰς γωνίας τοῦ M_1M_2 μὲ τὰ θετικὰ μέρη τῶν ἀξόνων τῶν x καὶ y ἀντίστοίχως, θὰ εἶνε $(M_1M_2)=(oM)=\varrho, \varphi=$ γων. xoM, $\psi=$ γων. yoM. Ἂν παραστήσωμεν διὰ θ τὴν γωνίαν xoy τῶν ἀξόνων θὰ εἶνε (σχ. 60)

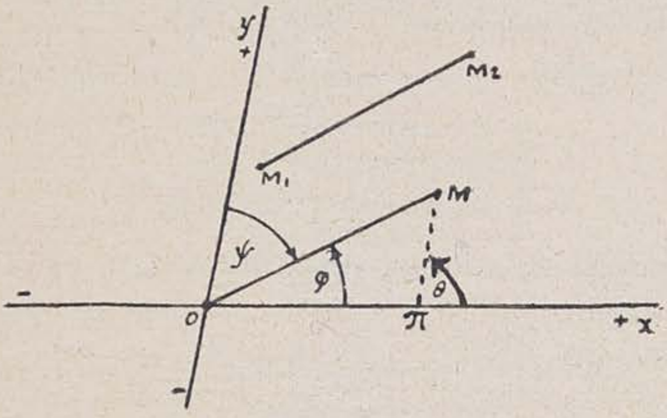
$$\varphi + \psi = \theta$$

Ὡς γνωστὸν ἔχομεν, θεωροῦντες τὸ τρίγωνον oΠM,

$$\frac{\rho}{\eta\mu\theta} = \frac{\alpha}{\eta\mu\psi} = \frac{\beta}{\eta\mu\varphi} \qquad (1)$$

ἐπειδὴ (ὅταν τὸ M κεῖται ἐν τῇ γωνίᾳ xoy$=\theta$) ἔχομεν

γων oΠM $= \pi - \theta$, γων. ΠMo $= \psi$, γων ΠoM $= \varphi$.



(Σχ. 60)

Αἱ σχέσεις (1) ἀληθεύουν διὰ πᾶσαν θέσιν τοῦ M ἐν τῷ ἐπιπέδῳ oxy. Διότι ἀφ' ἑνὸς πᾶσαι αἱ γωνίαι, αἱ ἔχουσαι πλευρὰς ἐπὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἔχουν ἡμίτονα ἀπολύτως ἴσα. Ἑπομένως, ὁπουδήποτε τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἂν κεῖται τὸ M, αἱ γωνίαι oΠM, ΠMo καὶ ΠoM, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶνε ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τῶν γωνιῶν θ, ψ, φ θὰ ἔχουν ἡμίτονα ἀπολύτως ἴσα πρὸς τὰ τῶν θ, ψ, φ. Ἀφ' ἑτέρου παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν τὸ M κεῖται ἄνω (κάτω) τοῦ ἄξονος τῶν x, τὸ ημφ καὶ τὸ β εἶνε θετικὰ (ἀρνητικά), ὁ δὲ λόγος $\frac{\beta}{\eta\mu\,\varphi}$ θετικός, ὡς καὶ τὸ $\frac{\rho}{\eta\mu\,\upsilon}$. Ἀνάλογα παρατηροῦμεν καὶ διὰ τὸ $\frac{\alpha}{\eta\mu\psi}$. Ἐπίσης ἀληθεύουν αἱ (1) καὶ ὅταν ἐπὶ τῆς εὐθείας oM ληφθῇ ὡς θετικὴ φορὰ ἡ ἐκ τοῦ M πρὸς τὸ o (§ 61, β').

Παρατηροῦμεν ἤδη ὅτι εἶνε

$$\frac{\rho}{\eta\mu\vartheta}=\frac{\alpha}{\eta\mu\psi}=\frac{\beta}{\eta\mu\varphi}=\frac{k_1\,\rho+k_2\,\alpha+k_3\,\beta}{k_1\eta\mu\vartheta+k_2\,\eta\mu\psi+k_3\,\eta\mu\varphi},$$

οἱαιδήποτε καὶ ἂν εἶνε αἱ τιμαὶ τῶν k_1, k_2, k_3.

Θέτοντες κατὰ σειρὰν

$$k_1=o,\ k_2=\sigma\upsilon\nu\,\varphi,\ k_3=\sigma\upsilon\nu\,\psi$$
$$k_1=\sigma\upsilon\nu\,\varphi,\ k_2=o,\ k_3=-\sigma\upsilon\nu\,\vartheta$$
$$k_1=\sigma\upsilon\nu\,\psi,\ k_2=-\sigma\upsilon\nu\,\vartheta,\ k_3=o$$

εὑρίσκομεν

$$\frac{\rho}{\eta\mu\vartheta}=\frac{\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi+\beta\sigma\upsilon\nu\psi}{\eta\mu\psi\,\sigma\upsilon\nu\varphi+\eta\mu\varphi\,\sigma\upsilon\nu\psi}=\frac{\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi+\beta\sigma\upsilon\nu\psi}{\eta\mu(\varphi+\psi)}=\frac{\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi+\beta\sigma\upsilon\nu\psi}{\eta\mu\vartheta}$$

$$\frac{\alpha}{\eta\mu\psi}=\frac{\rho\sigma\upsilon\nu\varphi-\beta\sigma\upsilon\nu\vartheta}{\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\varphi-\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\vartheta}=\frac{\rho\sigma\upsilon\nu\varphi-\beta\sigma\upsilon\nu\vartheta}{\eta\mu(\vartheta-\varphi)}=\frac{\rho\sigma\upsilon\nu\varphi-\beta\sigma\upsilon\nu\vartheta}{\eta\mu\psi}$$

$$\frac{\beta}{\eta\mu\varphi}=\frac{\rho\sigma\upsilon\nu\psi-\alpha\sigma\upsilon\nu\vartheta}{\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\psi-\eta\mu\psi\sigma\upsilon\nu\vartheta}=\frac{\rho\sigma\upsilon\nu\psi-\alpha\sigma\upsilon\nu\vartheta}{\eta\mu(\vartheta-\psi)}=\frac{\rho\sigma\upsilon\nu\psi-\alpha\sigma\upsilon\nu\vartheta}{\eta\mu\varphi}.$$

Ἐκ τούτων ἔχομεν

$$\left.\begin{aligned}\rho&=\alpha\,\sigma\upsilon\nu\varphi+\beta\,\sigma\upsilon\nu\psi\\ \alpha&=\rho\,\sigma\upsilon\nu\varphi-\beta\,\sigma\upsilon\nu\vartheta\\ \beta&=\rho\,\sigma\upsilon\nu\psi-\alpha\,\sigma\upsilon\nu\vartheta\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Πολλαπλασιάζοντες ταύτας κατὰ σειρὰν ἐπὶ ρ, $-\alpha$, $-\beta$ καὶ προσθέτοντες, εὑρίσκομεν

$$\rho^2=\alpha^2+\beta^2+2\,\alpha\,\beta\,\sigma\upsilon\nu\vartheta,\qquad(3)$$

ἥτις ἀληθεύει διὰ πᾶσαν θέσιν τοῦ Μ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

Ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως τοῦ ἀνύσματος εἶνε

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\eta\mu\varphi}{\eta\mu\psi}=\frac{\eta\mu\varphi}{\eta\mu(\vartheta-\varphi)}=\frac{\eta\mu(\vartheta-\psi)}{\eta\mu\psi}.$$

Ἐκ τῶν τύπων (1) εὑρίσκομεν τὰ ημφ, ημψ, ἐκ δὲ τῶν δύο τελευταίων ἐκ τῶν (2) τὰ συνφ, συνψ, καὶ συνάγομεν ὅτι,

β') ἂν (α, β) εἶνε αἱ συντεταγμέναι προβολαὶ ἀνύσματος M_1M_2 ***ὡς πρὸς ἄξονας εὐθυγράμμους, σχηματίζοντας γωνίαν ϑ, τὸ μὲν μῆκος αὐτοῦ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου***

$$\boxed{\rho=(oM)=\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2+2\,\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\vartheta}}$$

αἱ δὲ γωνίαι φ=xoM, ψ=yoM, τὰς ὁποίας σχηματίζει τοῦτο μὲ τοὺς ἄξονας τῶν x καὶ τῶν y ἀντιστοίχως ὁρίζονται ὑπὸ τῶν σχέσεων

$$\begin{array}{|c|}\hline \eta\mu\varphi = \dfrac{\beta\eta\mu\theta}{\rho},\ \eta\mu\psi = \dfrac{\alpha\eta\mu\theta}{\rho} \\ \sigma\upsilon\nu\varphi = \dfrac{\alpha + \beta\sigma\upsilon\nu\theta}{\rho},\ \sigma\upsilon\nu\psi = \dfrac{\beta + \alpha\sigma\upsilon\nu\theta}{\rho} \\ \hline\end{array} \qquad (4)$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\beta\eta\mu\theta}{\alpha + \beta\sigma\upsilon\nu\theta},\quad \varepsilon\varphi\psi = \frac{\alpha\eta\mu\theta}{\beta + \alpha\sigma\upsilon\nu\theta}. \qquad (5)$$

Ἐκ τῶν δύο σημείων τοῦ ῥιζικοῦ τῆς τιμῆς τοῦ ρ λαμβάνομεν τὸ $+$, ἂν ἐπὶ τῆς εὐθείας $M_1 M_2$ θετικὴ φορὰ εἶνε ἡ ἐκ τοῦ M_1 πρὸς τὸ M_2, τὸ $-$ δέ, ἂν εἶνε ἡ ἐκ τοῦ M_2 πρὸς τὸ M_1.

γ′) Ἂν $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ εἶνε τὰ ἄκρα τοῦ δοθέντος ἀνύσματος, οἱ ἀνωτέρω τύποι τρέπονται εἰς τοὺς προκύπτοντας ἐξ αὐτῶν διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως

$$\alpha = x_2 - x_1,\ \beta = y_2 - y_1.$$

§ 63. Γωνίαι δοθείσης εὐθείας μετὰ τῶν ἀξόνων τῶν συντεταγμένων.—

α′) Ἔστω ἡ εὐθεῖα

$$A x + B y + \Gamma = o, \qquad (1)$$

ἐπὶ τῆς ὁποίας εἶνε ὡρισμένη ἡ θετικὴ φορά, ὡς πρὸς ἄξονας oxy, σχηματίζοντας γωνίαν θ.

Ζητοῦνται αἱ γωνίαι φ, ψ, τὰς ὁποίας σχηματίζει αὕτη μὲ τὰ θετικὰ μέρη τῶν ἀξόνων ox καὶ oy.

Ὡς γνωστόν, τὸ ἄνυσμα ($\alpha = B$, $\beta = -A$) εἶνε *παράλληλον* τῇ εὐθείᾳ (§ 25, ζ′).

Ἑπομένως, ἂν ρ παριστάνῃ τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος τούτου, θὰ εἶνε

$$\rho = \pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\sigma\upsilon\nu\theta}$$

$$\left.\begin{aligned} \eta\mu\varphi &= \frac{-A\eta\mu\theta}{\rho},\ \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{B - A\sigma\upsilon\nu\theta}{\rho},\ \varepsilon\varphi\varphi = \frac{-A\,\eta\mu\theta}{B - A\sigma\upsilon\nu\theta} \\ \eta\mu\psi &= \frac{B\eta\mu\theta}{\rho},\ \sigma\upsilon\nu\psi = \frac{-A + B\sigma\upsilon\nu\theta}{\rho},\ \varepsilon\varphi\psi = \frac{B\eta\mu\theta}{B\sigma\upsilon\nu\theta - A} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν δύο σημείων τοῦ ῥιζικοῦ λαμβάνομεν τὸ $+$ ἢ τὸ $-$ ἂν τὸ ἄνυσμα (B, $-A$) ἔχει τὴν θετικὴν ἢ τὴν ἀρνητικὴν φορὰν τῆς εὐθείας.

β′) Ἂν παραστήσωμεν τὸν συντελεστὴν διευθύνσεως τῆς δοθείσης εὐθείας διὰ λ, θὰ εἶνε $\alpha = 1$, $\beta = \lambda$, ἢ $-A : B = \lambda$.

Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν

$$\varrho = \pm\sqrt{1+\lambda^2+2\,\lambda\,\sigma\upsilon\nu\theta},\quad \varepsilon\varphi\varphi = \frac{\lambda\eta\mu\theta}{1+\lambda\sigma\upsilon\nu\theta},\quad \varepsilon\varphi\psi = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta+\lambda}.$$

γ') Καθ' ἣν περίπτωσιν οἱ ἄξονες εἶνε ὀρθογώνιοι, θὰ εἶνε $\theta = \frac{\pi}{2}$, καὶ οἱ ἀνωτέρω τύποι (α',(2)) γίνονται

$$\varrho = \pm\sqrt{A^2+B^2}$$

$$\eta\mu\,\varphi = \frac{-A}{\varrho},\ \sigma\upsilon\nu\,\varphi = \frac{B}{\varrho},\ \varepsilon\varphi\,\varphi = -\frac{A}{B},\ \varepsilon\varphi\psi = -\frac{B}{A},\quad (3)$$

ἢ

$$\varrho = \pm\sqrt{1+\lambda^2},\quad \varepsilon\varphi\,\varphi = \lambda,\ \varepsilon\varphi\psi = \frac{1}{\lambda}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων (5, — 3), (2, — 1) καὶ ἡ γωνία τῆς εὐθείας αὐτῶν μὲ τὸν ἄξονα τῶν x εἰς ὀρθογωνίους ἄξονας.

2) Αἱ συντεταγμέναι τῶν κορυφῶν τριγώνου εἶνε (2, 1), (5, 3), (1, — 4). Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν αὐτοῦ καὶ αἱ γωνίαι αὐτῶν μὲ τὸν ἄξονα τῶν x (εἰς ὀρθογωνίους ἄξονας)

3) Αἱ συντεταγμέναι δύο σταθερῶν σημείων M_1 M_2 εἶνε ἀντιστοίχως (x_1, y_1), (x_2, y_2).

Εὕρετε ἐξίσωσιν, ἥτις συνδέει τὰς συντεταγμένας (x, y) σημείου M, ἀπέχοντος ἴσον τῶν M_1 καὶ M_2. Τίς ὁ τόπος τῶν σημείων M;

4) Ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x δίδονται τὰ σημεῖα A (α, ο), A' (— α, ο), ἐπὶ δὲ τοῦ τῶν y τὰ B (ο,6), B' (ο,—6). Εὕρετε τὰς διευθύνσεις τῶν πλευρῶν τοῦ παραλληλογράμμου ABA'B'.

5) Εὕρετε τὴν γωνίαν τῆς εὐθείας 2 y—x = ο μὲ τὸν ἄξονα τῶν x καὶ τῶν y α') εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους 6') εἰς ἄξονας σχηματίζοντας γωνίαν 45^0 γ') εἰς ἄξονας σχηματίζοντας γωνίαν 60^0.

6) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν εὐθείας, διερχομένης διὰ τοῦ σημείου (3, — 5) καὶ σχηματιζούσης γωνίαν 45^0 ἢ 30^0 ἢ 60^0 μὲ τὸν ἄξονα τῶν x.

7) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν διαμέσων τριγώνου, ἔχοντος κορυφὰς (2, 3), (4, — 5), (— 3, — 6) εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους.

8) Δείξατε ὅτι ἐν τετραπλεύρῳ αἱ εὐθεῖαι, αἵτινες συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν αὐτοῦ καὶ ἡ εὐθεῖα, ἥτις συνδέει τὰ μέσα τῶν διαγωνίων αὐτοῦ τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὸ μέσον αὐτῶν.

9) Δείξατε ὅτι, ἂν Z καὶ E εἶνε τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ἔναντι πλευρῶν τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, τὰ μέσα τῶν ΑΓ, ΒΔ, ΖΕ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

10) Δίδονται τὰ σημεῖα M_1 (x_1, y_1), M_2 (x_2, y_2), M_3 (x_3, y_3) καὶ ἄνυσμα μήκους ρ. Εὕρετε τὸν τόπον τῶν σημείων M (x, y), ὥστε νὰ εἶνε

$$(MM_1)^2 + (MM_2)^2 - 2\,(MM_3)^2 = \rho^2.$$

11) Δείξατε, ὅτι ὄχι μόνον εἰς ἑκάστην εὐθεῖαν ἀντιστοιχεῖ εἷς συντελεστὴς διευθύνσεως, ἀλλὰ καὶ τοὐναντίον εἰς πάντα δοθέντα ἀριθμὸν λ ἀντιστοιχεῖ μία μόνη εὐθεῖα, διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου καὶ ἔχουσα τὸν λ ὡς συντελεστὴν διευθύνσεως. (Ἐκ τῆς $\varepsilon\varphi\,\varphi = \frac{\lambda\eta\mu\theta}{1+\lambda\sigma\upsilon\nu\theta}$, ἔχομεν ὅτι εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ λ ἀντιστοιχεῖ μία τοῦ εφ φ .

§ 64. **Γωνία δύο ἀνυσμάτων καὶ δύο εὐθειῶν.**— *α'*) Δίδονται δύο εὐθεῖαι ἐν τῷ ἐπιπέδῳ $0xy$ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία αὐτῶν.

Λαμβάνομεν δύο ἀνύσματα T_1 (α_1, β_1), T_2 (α_2, β_2) ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ἀντιστοίχως, ἔχοντα φορὰς τὰς θετικὰς φορὰς τῶν εὐθειῶν.

Ἂν παραστήσωμεν διὰ ρ_1, ρ_2 τὰ μήκη τῶν ἀνυσμάτων καὶ φ_1, φ_2 καὶ ψ_1, ψ_2 τὰς γωνίας ἑκάστου αὐτῶν μὲ τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων ἀντιστοίχως (σχηματίζοντας γωνίαν ϑ), θὰ ἔχωμεν

$$\left.\begin{aligned} \eta\mu\varphi_1 &= \frac{\beta_1\eta\mu\vartheta}{\rho_1}, \quad \sigma\upsilon\nu\varphi_1 = \frac{\alpha_1+\beta_1\sigma\upsilon\nu\vartheta}{\rho_1}, \rho_1 = \sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2-2\alpha_1\beta_1\sigma\upsilon\nu\vartheta} \\ \eta\mu\varphi_2 &= \frac{\beta_2\eta\mu\vartheta}{\rho_2}, \quad \sigma\upsilon\nu\varphi_2 = \frac{\alpha_2+\beta_2\sigma\upsilon\nu\vartheta}{\rho_2}, \rho_2 = \sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2-2\alpha_2\beta_2\sigma\upsilon\nu\vartheta} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Φέρομεν ἐκ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων ἀνύσματα ὁμορρόπως ἴσα πρὸς τὰ T_1,T_2, καὶ ἔστω ω ἡ γωνία τῶν θετικῶν μερῶν τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν.

Θὰ ἔχωμεν $\qquad \omega = \varphi_2 - \varphi_1$

Ἑπομένως

$$\eta\mu\omega = \eta\mu\,(\varphi_2 - \varphi_1) = \eta\mu\varphi_2\;\sigma\upsilon\nu\varphi_1 - \eta\mu\varphi_1\;\sigma\upsilon\nu\varphi_2$$
$$\sigma\upsilon\nu\,\omega = \sigma\upsilon\nu\,(\varphi_2 - \varphi_1) = \sigma\upsilon\nu\varphi_2\;\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + \eta\mu\varphi_2\;\eta\mu\varphi_1.$$

Εἰσάγοντες τὰς τιμὰς τῶν $\eta\mu\varphi_1$, $\sigma\upsilon\nu\varphi_1$, . . . ἐκ τῶν (1) εὑρίσκομεν

$$\eta\mu\,\omega = \frac{(\alpha_1\,\beta_2 - \alpha_2\,\beta_1)\,\eta\mu\vartheta}{\rho_1\;\rho_2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\,\omega = \frac{\alpha_1\;\alpha_2 + \beta_1\,\beta_2 + (\alpha_1\;\beta_2 + \alpha_2\;\beta_1)\,\sigma\upsilon\nu\vartheta}{\rho_1\;\;\rho_2} \qquad (2)$$

$$\varepsilon\varphi\;\omega = \frac{(\alpha_1\;\beta_2 - \alpha_2\;\beta_1)\;\eta\mu\;\vartheta}{\alpha_1\;\alpha_2 + \beta_1\;\beta_2 + (\alpha_1\;\beta_2 + \alpha_2\;\beta_1)\;\sigma\upsilon\nu\;\vartheta}.$$

β') Ἂν οἱ συντελεσταὶ διευθύνσεως τῶν ἀνυσμάτων T_1, T_2 παρασταθοῦν διὰ τῶν λ_1, λ_2, ἀντιστοίχως, θέσωμεν δ' εἰς τοὺς ἀνωτέρω τύπους ἀντὶ α_1, α_2 τὴν 1, ἀντί β_1, β_2 τὰ λ_1, λ_2 ἀντιστοίχως, ἔχομεν

$$\eta\mu\;\omega = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)\,\eta\mu\;\vartheta}{\rho_1\;\rho_2},\; \sigma\upsilon\nu\;\omega = \frac{1 + \lambda_1\;\lambda_2 + (\lambda_1\;+\;\lambda_2)\;\sigma\upsilon\nu\;\vartheta}{\rho_1\quad\rho_2},$$

$$\varepsilon\varphi\;\omega = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)\;\eta\mu\;\vartheta}{1 + \lambda_1\;\lambda_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\;\sigma\upsilon\nu\;\vartheta}. \qquad (3)$$

$$\rho_1 = \sqrt{1+\lambda_1^2 + 2\;\lambda_1\;\sigma\upsilon\nu\;\vartheta}\cdot \quad \rho_2 = \sqrt{1+\lambda_2^2 + 2\;\lambda_2\,\sigma\upsilon\nu\;\vartheta}.$$

γ') Ἂν οἱ ἄξονες εἶνε ὀρθογώνιοι οἱ τύποι οὗτοι τρέπονται εἰς τοὺς ἁπλουστέρους

$$\eta\mu\, \omega = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\rho_1\, \rho_1},\ \sigma\upsilon\nu\, \omega = \frac{1 + \lambda_1 \lambda_2}{\rho_1\, \rho_2},\ \varepsilon\varphi\, \omega = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1 \lambda_2}$$
$$\varrho_1 = \sqrt{1 + \lambda_1^2},\quad \varrho_2 = \sqrt{1 + \lambda_2^2}. \qquad (4)$$

δ') Ἂν αἱ ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν πρὸς τὰς ὁποίας τὰ ἀνύσματα T_1, T_2 εἶνε παράλληλα εἶνε

$$A_1\, x + B_1\, y + \Gamma_1 = o$$
$$A_2\, x + B_2\, y + \Gamma_2 = o,$$

θέσωμεν δὲ $\alpha_1 = B_1$, $\alpha_2 = B_2$, $\beta_1 = -A_1$, $\beta_2 = -A_2$ εἰς τὸν τρίτον τῶν (2), εὑρίσκομεν

$$\varepsilon\varphi\, \omega = \frac{(A_1\, B_2 - A_2\, B_1)\, \eta\mu\, \theta}{(A_1\, A_2 + B_1\, B_2) - (A_1\, B_2 + A_2\, B_1)\sigma\upsilon\nu\, \theta}. \qquad (5)$$

Οὕτω ὁρίζεται ἡ γωνία δύο εὐθειῶν ἐκ τῶν συντελεστῶν τῶν ἐξισώσεων αὐτῆς καὶ τῆς γωνίας τῶν ἀξόνων.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων ὁ τύπος (5) τρέπεται εἰς τὸν

$$\varepsilon\varphi\, \omega = \frac{A_1\, B_2 - A_2\, B_1}{A_1\, A_2 + B_1\, B_2}. \qquad (6)$$

§ 65. Συνθήκη καθετότητος δύο εὐθειῶν ἢ δύο ἀνυσμάτων.—

α') Ἵνα δύο εὐθεῖαι εἶνε κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας αὐτῶν νὰ ἰσοῦται μὲ μηδέν. Ἑπομένως πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν (§ 64, α' (2))

$$\alpha_1\, \alpha_2 + \beta_1\, \beta_2 + (\alpha_1\, \beta_2 + \alpha_2\, \beta_1)\, \sigma\upsilon\nu\, \theta = o \qquad (1)$$

Αὕτη ἐκφράζει τὴν συνθήκην καθετότητος τῶν ἀνυσμάτων $T_1\, (\alpha_1, \beta_1)$, $T_2\, (\alpha_2, \beta_2)$ καὶ τῶν εὐθειῶν ἐφ' ὧν κεῖνται.

β') Ἂν λ_1, λ_2 εἶνε οἱ συντελεσταὶ διευθύνσεως τῶν ἀνυσμάτων, ἢ τῶν εὐθειῶν ἐφ' ὧν κεῖνται, ἡ ἀνωτέρω συνθήκη τρέπεται εἰς τὴν

$$1 + \lambda_1 \lambda_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\, \sigma\upsilon\nu\, \theta = o. \qquad (2)$$

γ') Ἂν οἱ ἄξονες εἶνε ὀρθογώνιοι, ἡ συνθήκη καθετότητος θὰ εἶνε

$$1 + \lambda_1\, \lambda_2 = o. \qquad (3)$$

δ') Ἂν αἱ ἐξισώσεις δύο εὐθειῶν εἶνε

$$A_1\, x + B_1\, y + \Gamma_1 = o$$
$$A_2\, x + \Gamma_2\, y + \Gamma_2 = o,$$

ἡ συνθήκη καθετότητος αὐτῶν εἶνε

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 - (A_1 B_2 + A_2 B_1) \text{ συν } \vartheta = o, \qquad (4)$$

εἰς ὀρθογωνίους δι' ἄξονας

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = o. \qquad (5)$$

ε') Ἂν δοθῇ ἡ εὐθεῖα $A x + B y + \Gamma = o$, τὸ ἄνυσμα (A, B) εἶνε κάθετον ἐπ' αὐτήν. Διότι οἱ συντελεσταὶ διευθύνσεως τῆς εὐθείας $\left(\text{ἤτοι } - \frac{A}{B}\right)$ καὶ τοῦ ἀνύσματος τούτου $\left(\text{ἤτοι } \frac{B}{A}\right)$ πληροῦν τὴν συνθήκην καθετότητος (εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους).

§ **66. Ἐξίσωσις εὐθείας διερχομένης διὰ δοθέντος σημείου καὶ καθέτου πρὸς ἄλλην δοθεῖσαν.**—

α') Ἔστω ἡ ἐξίσωσις τῆς δοθείσης εὐθείας $A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 = o$ (1) καὶ $M_1 (x_1, y_1)$ δοθὲν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς διὰ τοῦ M_1 διερχομένης εὐθείας καὶ καθέτου τῇ δοθείσῃ (1), ἐχούσῃ συντελεστὴν διευθύνσεως

$$\lambda_1 = - \frac{A_1}{B_1}.$$

Ἡ ζητουμένη εὐθεῖα, ὡς διερχομένη διὰ τοῦ M_1, θὰ ἔχῃ ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς (§ 24, δ')

$$y - y_1 = \lambda (x - x_1).$$

Ἵνα δὲ αὕτη εἶνε κάθετος τῇ δοθείσῃ, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε $1 + \lambda\lambda_1 + (\lambda + \lambda_1) \text{ συν } \vartheta = o$, ἢ $B_1 - A_1 \lambda + (B_1 \lambda - A_1) \text{ συν } \vartheta = o$.

Ἐκ ταύτης ἔχομεν

$$\lambda = \frac{A_1 \text{ συν } \vartheta - B_1}{B_1 \text{ συν } \vartheta - A_1}.$$

Ἑπομένως ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶνε ἡ

$$(y - y_1)(B_1 \text{ συν } \vartheta - A_1) = (x - x_1)(A_1 \text{ συν } \vartheta - B_1).$$

β') Ἂν οἱ ἄξονες εἶνε ὀρθογώνιοι, θὰ εἶνε συν$\vartheta = o$, καὶ ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις γίνεται

$$B_1 (x - x_1) - A_1 (y - y_1) = o.$$

§ **67. Ἐξίσωσις εὐθείας διερχομένης διὰ τῆς τομῆς δύο ἄλλων καὶ καθέτου πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.**—

α') Ἔστωσαν

$$\left.\begin{array}{l} A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 = o \\ A_3 x + B_3 y + \Gamma_3 = o \end{array}\right\} \qquad (1).$$

αἱ ἐξισώσεις δύο τεμνομένων εὐθειῶν ($A_2\, B_3 \neq A_3\, B_2$) καὶ ἡ ἐξίσωσις ἄλλης εὐθείας (εἰς ἄξονας σχηματίζοντας γωνίαν ϑ),

$$A_1\, x + B_1\, y + \Gamma_1 = o \qquad (2).$$

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἥτις ἄγεται διὰ τῆς τομῆς τῶν (1) κάθετος τῇ (2).

Ὡς γνωστόν, ἡ ἐξίσωσις τῆς ζητουμένης εὐθείας, ὡς διερχομένης διὰ τῆς τομῆς τῶν (1), θὰ εἶνε (§ 32, β′)

$$\mu_2(A_2\, x + B_2 y + \Gamma_2) + \mu_3(A_3 x + B_3 y + \Gamma_3) = o \qquad (3)$$

$$\text{ἢ} \quad (\mu_2 A_2 + \mu_3 A_3)\, x + (\mu_2 B_2 + \mu_3 B_3)\, y + \mu_2 \Gamma_2 + \mu_3 \Gamma_3 = o.$$

Ἵνα δὲ αὐτὴ εἶνε κάθετος τῇ (2) πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε

$$[A_1(\mu_2 A_2 + \mu_3 A_3) + B_1(\mu_2 B_2 + \mu_3 B_3)] - [A_1(\mu_2 B_2 + \mu_3 B_3) + B_1(\mu_2 A_2 + \mu_3 A_3)]\,\text{συν}\,\vartheta = o$$

Ἐκ ταύτης προσδιορίζομεν τὴν τιμὴν τοῦ λόγου $\frac{\mu_2}{\mu_3}$, τὴν ὁποίαν εἰσάγοντες εἰς τὴν (3) ἔχομεν τὴν ζητουμένην ἐξίσωσιν.

β′) Ἂν οἱ ἄξονες εἶνε ὀρθογώνιοι, θὰ εἶνε συν $\vartheta = o$ καὶ ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις θὰ εἶνε ἁπλουστέρα.

§ 68. Ἐξίσωσις εὐθείας διερχομένης διὰ δοθέντος σημείου καὶ σχηματιζούσης δοθεῖσαν γωνίαν μὲ δοθεῖσαν εὐθεῖαν.—

α′) Ἔστω $M_1\,(x_1,\, y_1)$ δοθὲν σημεῖον, λ_1 ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως δοθείσης εὐθείας, καὶ ω δοθεῖσα γωνία.

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις εὐθείας, ἥτις ἄγεται διὰ τοῦ M_1 καὶ σχηματίζει γωνίαν ω μὲ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

Ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶνε τῆς μορφῆς (§ 24, δ′)

$$y - y_1 = \lambda\,(x - x_1) \qquad (1).$$

Ἡ γωνία ω τῶν δύο εὐθειῶν ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ τύπου (§ 64, β′)

$$\text{εφ}\,\omega = \frac{(\lambda - \lambda_1)\,\text{ημ}\,\vartheta}{1 + \lambda\,\lambda_1 + (\lambda + \lambda_1)\,\text{συν}\,\vartheta} \qquad (2).$$

ἐνῷ ϑ εἶνε ἡ γωνία τῶν ἀξόνων. Ἐκ ταύτης ἔχομεν τὴν τιμὴν τοῦ λ

$$\lambda = -\frac{\lambda_1\,\text{ημ}\,\vartheta + \text{εφ}\,\omega(1 + \lambda_1\,\text{συν}\,\vartheta)}{(\lambda_1 + \text{συν}\,\vartheta)\,\text{εφ}\,\omega - \text{ημ}\,\vartheta},$$

τὴν ὁποίαν εἰσάγοντες εἰς τὴν (1) λαμβάνομεν τὴν ζητουμένην ἐξίσωσιν.

β') Ἂν ζητῆται ἡ ἐξίσωσις εὐθείας, διερχομένης διὰ τοῦ M_1 καὶ σχηματιζούσης γωνίαν ω μὲ τὸν ἄξονα τῶν x, θὰ ἔχωμεν ἀντὶ τῆς (2) τὴν

$$\varepsilon\varphi\,\omega = \frac{\lambda\ \eta\mu\ \vartheta}{1 + \lambda\ \sigma\upsilon\nu\ \vartheta},$$

καὶ ἐξ ἧς εὑρίσκομεν

$$\lambda = -\frac{\varepsilon\varphi\,\omega}{\sigma\upsilon\nu\ \vartheta\ \varepsilon\varphi\,\omega - \eta\mu\ \vartheta}.$$

γ') Ἂν οἱ ἄξονες εἶνε ὀρθογώνιοι, θὰ θέσωμεν ἀνωτέρω ημ θ = 1, συν θ = ο καὶ ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις θὰ εἶνε ἁπλουστέρα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Εὕρετε τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου, τοῦ ἔχοντος κορυφὰς (2, 5), (—1, 4), (3, 2) εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους.

2) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς εὐθείας, ἥτις διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων καὶ εἶνε παράλληλος τῇ εὐθείᾳ $2x - 7x + 11 = o$.

3) Εὕρετε τὰς ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἄγονται ἐκ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου, τοῦ ἔχοντος πλευρὰς

$$2x + 7y - 3 = o,\quad y - 5x + 1 = o,\quad 3x - 4y + 2 = o,$$

ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς ἔναντι πλευρὰς αὐτῶν.

4) Εὕρετε τὰς ἐξισώσεις τῶν τριῶν ὕψῶν τοῦ τριγώνου (1, 2), (3, — 4), (— 2, — 5) καὶ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς αὐτῶν.

5) Εὕρετε τὰς ἐξισώσεις τῶν καθέτων εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου (1, 2), (3, — 4), (— 2, — 5) καὶ τὰς συντεταγμένας τῆς τομῆς αὐτῶν.

6) Δείξατε ὅτι αἱ ἐξισώσεις τῶν τριῶν ὕψῶν τριγώνου, ἔχοντος κορυφὰς M_1 (x_1, y_1), M_2 (x_2, y_2), M_3 (x_3, y_3) εἶνε

$$(x-x_1)\ (x_2-x_3) + (y-y_1)\ (y_2-y_3) = o$$
$$(x-x_2)\ (x_3-x_1) + (y-y_2)\ (y_3-y_1) = o$$
$$(x-x_3)\ (x_1-x_2) + (y-y_3)\ (y_1-y_2) = o,$$

καὶ ὅτι ταῦτα διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

7) Εὕρετε τὰς ἐξισώσεις τῶν καθέτων εὐθειῶν εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου M_1 (x_1, y_1), M_2 (x_2, y_2), M_3 (x_3, y_3) καὶ δείξατε ὅτι αὗται τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

(Ἡ μὲν μία τούτων εἶνε

$$(x_2-x_3)\,x + (y_2-y_3)\,y - \frac{1}{2}\left(x_2^2 - x_3^2\right) - \frac{1}{2}\left(y_2^2 - y_3^2\right) = o,$$

αἱ δὲ δύο ἄλλαι προκύπτουν ἐκ ταύτης διὰ κυκλικῆς ἀλλαγῆς τῶν x_1, x_2, x_3, καὶ y_1, y_2, y_3).

8) Εὕρετε τὰς ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν, αἵτινες διέρχονται διὰ τοῦ σημείου (3, — 5) καὶ τέμνουν τὴν $7x + 2y - 4 = o$ κατὰ γωνίαν 45^0.

9) Δείξατε ὅτι εἰς πλαγιογωνίους ἄξονας (σχηματίζοντας γωνίαν θ) αἱ κάθετοι εὐθεῖαι ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν x καὶ y ἔχουν συντελεστὰς διευθύνσεως — 1 : συν θ, — συν θ.

10) Εύρετε τὰς συντεταγμένας τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου $(1, -3)$ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν $2x - 3y - 1 = o$ (εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους).

11) Εύρετε τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον εἶνε συμμετρικὸν τοῦ $M(x, y)$ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν

$$y = \lambda x + \beta.$$

12) Ἐπὶ ὀρθογωνίων ἀξόνων κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον ΟΑΒΓ, μεταβλητόν, ἀλλ' ἔχον σταθερὰν περίμετρον. Δείξατε, ὅτι ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς Β κάθετος ἐπὶ τὴν διαγώνιον ΑΓ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου· εὕρετε τοῦτο.

§ 69. Ἀπόστασις δοθέντος σημείου ἀπὸ δοθείσης εὐθείας.

α΄) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις δοθείσης εὐθείας $Ax + By + \Gamma = o$ (1) καὶ (x', y') αἱ συντεταγμέναι δοθέντος σημείου M' ὡς πρὸς ἄξονας σχηματίζοντας γωνίαν ϑ.

Ζητεῖται ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου M' ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας (1).

Ἂν (x_1, y_1) εἶνε αἱ συντεταγμέναι τοῦ ποδὸς M_1 τῆς καθέτου, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ M' ἐπὶ τὴν (1), παραστήσωμεν δὲ διὰ τοῦ R τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν, θὰ ἔχωμεν (§ 62, α΄ (3)).

$$R^2 = (x'-x_1)^2 + (y'-y_1)^2 + 2(x'-x_1)(y'-y_1)\,\sigma\upsilon\nu\,\vartheta \quad (2)$$

Ἐπειδὴ ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἔχει συντελεστὴν διευθύνσεως $-A : B$, ἡ δὲ εὐθεῖα $M_1 M'$ τὸν $(y'-y_1) : (x'-x_1)$, ἡ συνθήκη καθετότητος αὐτῶν εἶνε (§ 65, β΄)

$$1 - \frac{y'-y_1}{x'-x_1} \cdot \frac{A}{B} + \left(\frac{y'-y_1}{x'-x_1} - \frac{A}{B}\right)\sigma\upsilon\nu\,\vartheta = o.$$

Γράφομεν αὐτὴν ὡς ἑξῆς

$$-\frac{y'-y_1}{x'-x_1} \cdot \frac{A}{B} + \frac{y'-y_1}{x'-x_1}\,\sigma\upsilon\nu\,\vartheta = \frac{A\,\sigma\upsilon\nu\,\vartheta - B}{B}$$

ἢ

$$\frac{y'-y_1}{x'-x_1}\left(\sigma\upsilon\nu\,\vartheta - \frac{A}{B}\right) = \frac{A\,\sigma\upsilon\nu\,\vartheta - B}{B}$$

ἢ

$$\frac{x'-x_1}{A - B\,\sigma\upsilon\nu\,\vartheta} = \frac{y'-y_1}{B - A\,\sigma\upsilon\nu\,\vartheta} =$$

$$= \frac{Ax' + By' - (Ax_1 + By_1)}{A^2 + B^2 - 2AB\,\sigma\upsilon\nu\,\vartheta} = \frac{Ax' + By' + \Gamma}{A^2 + B^2 - 2AB\,\sigma\upsilon\nu\,\vartheta},$$

ἐπειδὴ τοῦ M_1 κειμένου ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας, ἔχομεν

$$Ax_1 + By_1 + \Gamma = o.$$

Ἑπομένως $\quad -(Ax_1 + By_1) = \Gamma.$

Παριστῶντες διὰ ρ τοὺς ἀνωτέρω ἴσους λόγους, εὑρίσκομεν

$$x'-x_1 = \rho(A - B\,\sigma\upsilon\nu\,\vartheta)$$
$$y'-y_1 = \rho(B - A\,\sigma\upsilon\nu\,\vartheta).$$

Ὑπολογίζομεν τὰ $(x'-x_1)^2, (y'-y_1)^2, 2(x'-x_1)(y'-y_1)$ ἐκ τῶν ἀνωτέρων ἰσοτήτων, καὶ εἰσάγοντες τὰς τιμὰς αὐτῶν εἰς τὴν (2), εὑρίσκομεν

$$R^2 = \rho^2 (A^2 + B^2 - 2\,A\,B\,\sigma\upsilon\nu\,\vartheta)\,\eta\mu^2\vartheta$$

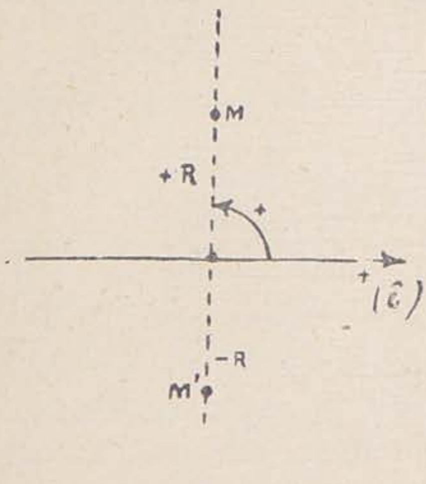
ἢ $$R^2 = \frac{(A\,x' + B\,y' + \Gamma)^2}{(A^2 + B^2 - 2\,A\,B\,\sigma\upsilon\nu\,\vartheta)^2}\,(A^2+B^2-2AB\sigma\upsilon\nu\vartheta)\eta\mu^2\vartheta,$$

ἐξ οὗ ἕπεται

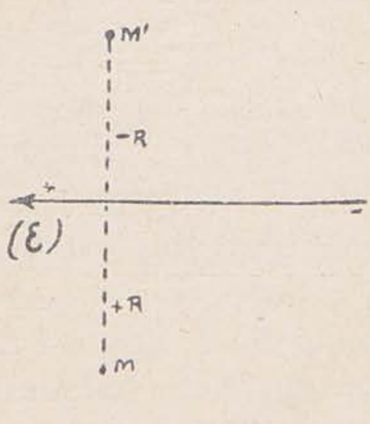
$$\boxed{R = \frac{(A\,x' + B\,y' + \Gamma)\,\eta\mu\,\vartheta}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2\,A\,B\,\sigma\upsilon\nu\,\vartheta}}.} \qquad (3)$$

Ἐκ τῶν δύο σημείων τοῦ παρονομαστοῦ λαμβάνομεν τὸ $+$ ἢ τὸ $-$, ὥστε ἡ ἀπόστασις R νὰ εἶνε θετικὴ ἢ ἀρνητική, καθόσον τὸ σημεῖον $M'(x', y')$ κεῖται εἰς τὸ θετικὸν ἢ τὸ ἀρνητικὸν μέρος τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν (§ 27). Παρατηρητέον, ὅτι ἂν τὸ θετικὸν μέρος τῆς δοθείσης εὐθείας, διαφόρου τοῦ ἄξονος τῶν y, (ἀρχόμενον ἀπὸ τὸν πόδα M_1 τῆς ἐπ' αὐτὴν καθέτου ἐκ τοῦ M') στραφῇ περὶ τὸν πόδα M_1 κατὰ φορὰν ἀντίθετον τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν ὡρολογίου συναντᾷ τὸ δοθὲν σημεῖον, ἡ μή, ἂν ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου ἀπ' αὐτῆς εἶνε θετική, ἢ ἀρνητική. Κατὰ ταῦτα διὰ τὸ σχῆμα 61 καὶ 62 ἡ μὲν ἀπόστασις τοῦ M ἀπὸ τῆς (ε) εἶνε $+R$, τοῦ δὲ M' ἡ $-R$.

Τὰ αὐτὰ ἰσχύουν καὶ ἂν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα εἶνε ἄξων τῶν y, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι, τὸ θετικὸν μέρος αὐτοῦ θὰ στραφῇ κατὰ φορὰν τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν ὡρολογίου.



(Σχ. 61)



Σχ. (62)

β′) Κατὰ ταῦτα ἡ ἀπόστασις R_0 τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων ἀπὸ τῆς εὐθείας $A\,x + B\,y + \Gamma = 0$ εἶνε

$$R_0 = \frac{\Gamma\ \eta\mu\ \vartheta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\,\sigma\upsilon\nu\,\vartheta}} \qquad (4)$$

γ') Ἂν οἱ ἄξονες τῶν συντεταγμένων εἶνε ὀρθογώνιοι, οἱ ἀνωτέρω τύποι (3) καὶ (4) ἁπλοποιοῦνται, ἐπειδὴ θὰ εἶνε ημ θ=1, συν θ=ο, καὶ ἔχομεν

$$\boxed{R = \frac{Ax' + By' + \Gamma}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}} \qquad R_0 = \frac{\Gamma}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (5)$$

Ἐφαρμογή. Ἔστω ἡ εὐθεῖα $3x - 5y + 6 = o$ καὶ τὸ σημεῖον $(2, -1)$ ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους. Ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τῆς εὐθείας εἶνε θετική. Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον $(2, -1)$ κεῖται εἰς θετικὸν μέρος τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν· εἶνε δὲ ἴση μὲ $17 : \sqrt{34}$. Ἡ ἀπόστασις τῆς ἀρχῆς ο (ο, ο) ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας εἶνε θετικὴ καὶ ἴση μὲ $6 : \sqrt{34}$.

§ 70. Ἀνηγμένη μορφὴ τῆς ἐξισώσεως εὐθείας.—

α') Ἔστω $\quad Ax + By + \Gamma = o \qquad (1)$

ἡ ἐξίσωσις δοθείσης εὐθείας (ε) ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους καὶ φ ἡ γωνία αὐτῆς μὲ τὸν ἄξονα τῶν x (σχ. 63).

Ἔχομεν ὡς γνωστὸν (§ 63, γ')

$$\eta\mu\varphi = \frac{-A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad \sigma\upsilon\nu\,\varphi = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Γράφομεν τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν ὡς ἑξῆς

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{\Gamma}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = o,$$

ἢ

$$\frac{Ax + By + \Gamma}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = o.$$

Οὕτω ἡ ἐξίσωσις τῆς δοθείσης εὐθείας λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$-x\,\eta\mu\,\varphi + y\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi + R_0 = o, \text{ ἢ } R = o \qquad (2)$$

ἐνῷ R_0 παριστάνει τὴν ἀπόστασιν τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων ἀπὸ τῆς εὐθείας, τὸ δὲ R τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου (x, y) ἀπ' αὐτῆς, ἥτις ἰσοῦται μὲ μηδέν, ὅταν τὸ σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας.

β') Ἂν οἱ ἄξονες σχηματίζουν γωνίαν θ, καὶ φ, ψ εἶνε αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ εὐθεῖα μὲ τὸν ἄξονα τῶν x καὶ y ἀντιστοίχως ἔχομεν (§ 63, α')

$$\eta\mu\,\varphi = \frac{-A\,\eta\mu\,\vartheta}{\rho}, \quad \eta\mu\,\psi = \frac{B\,\eta\mu\,\vartheta}{\rho}, \quad \rho = \pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\,\sigma\upsilon\nu\,\vartheta}$$

καὶ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$-x\ \eta\mu\ \varphi + y\ \eta\mu\ \psi + R_0 = 0, \text{ ἢ } R = 0.$$

γ′) Ἐὰν ἀντὶ τῶν γωνιῶν φ καὶ ψ εἰσαγάγωμεν ἐν τῇ ἀνωτέρω ἐξισώσει τὰς γωνίας α καὶ β, τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ κάθετος (k) ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν μὲ τὸν ἄξονα τῶν x καὶ y ἀντιστοίχως, θὰ ἔχωμεν (σχ. 62)

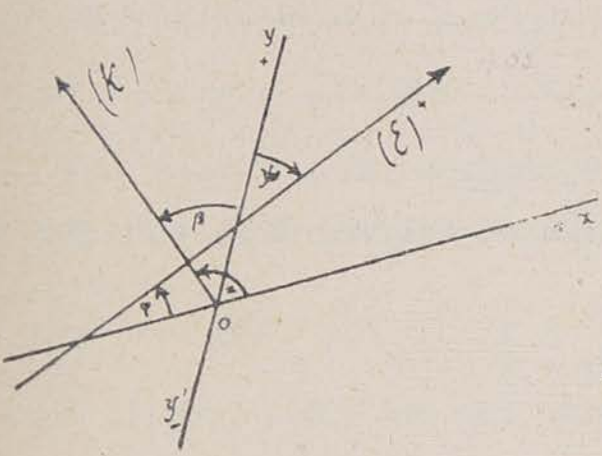
$$-x\ \eta\mu\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + y\ \eta\mu\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) + R_0 = 0,$$

Ἐπειδὴ εἶνε $\alpha = \varphi + \frac{\pi}{2}$, $\beta = \psi - \frac{\pi}{2}$.

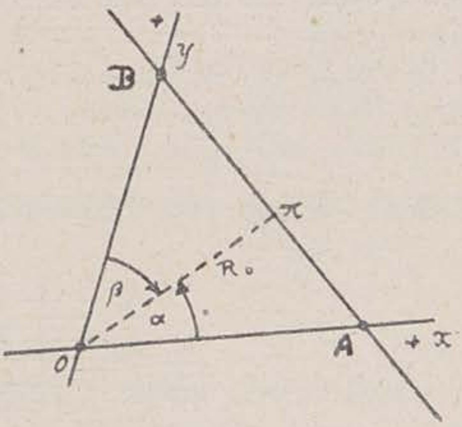
Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τῆς (ε) λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\boxed{x\ \sigma\upsilon\nu\ \alpha + y\ \sigma\upsilon\nu\ \beta + R_0 = 0} \qquad (3)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη λέγεται *ἀνηγμένη μορφὴ* τῆς ἐξισώσεως τῆς δοθείσης εὐθείας.



(Σχ. 63)



(Σχ. 64)

δ′) Ἀντιστρόφως, δοθείσης τῆς ἀνηγμένης μορφῆς ἐξισώσεως εὐθείας

$$x\ \sigma\upsilon\nu\ \alpha + y\ \sigma\upsilon\nu\ \beta + R_0 = 0,$$

εὑρίσκομεν ἐκ ταύτης τὴν συνήθη ἐξίσωσιν τῆς εὐθείας διὰ τῶν συντεταγμένων αὐτῆς ἐπὶ τὴν ἀρχήν, (§ 24, ζ′) ἂν γράψωμεν τὴν δοθεῖσαν ὡς ἑξῆς

$$x\ \frac{\sigma\upsilon\nu\ \alpha}{-R_0} + y\ \frac{\sigma\upsilon\nu\ \beta}{-R_0} - 1 = 0$$

ἢ

$$\frac{x}{\alpha'} + \frac{y}{\beta'} = 1$$

ἐν ᾧ α′, β′ παριστάνουν τὰς συντεταγμένας τῆς εὐθείας ἐπὶ τὴν ἀρχήν, ἤτοι θὰ εἶνε $\alpha' = (oA)$, $\beta' = (oB)$ (σχ. 64).

Ἐπειδὴ τυχὸν σημεῖον, κείμενον ἐπί τινος τῶν διχοτόμων τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου, ἀπέχει ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ἀποστάσεις ἀπολύτως ἴσας, ἀλλ' ἀντιθέτους, αἱ ἐξισώσεις τῶν διχοτόμων τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου εἶνε

$$R_1 + R_2 = o,\ R_1 + R_3 = o,\ R_2 + R_3 = o \qquad (3)$$

β') Διὰ προσθέσεως δύο τῶν ἐξισώσεων (2) κατὰ μέλη εὑρίσκομεν τὴν τρίτην ἐξ' αὐτῶν. Ἑπομένως

«*αἱ τρεῖς διχοτόμοι τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου*» (§ 32, δ').

Ὁμοίως, ἂν ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη δύο τῶν ἐξισώσεων (3) εὑρίσκομεν τὴν μίαν τῶν (2). Ἑπομένως

«*αἱ διχοτόμοι δύο ἐξωτερικῶν γωνιῶν τριγώνου καὶ μιᾶς ἐσωτερικῆς γωνίας αὐτοῦ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου*» (§ 32, δ').

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Εὕρετε τὰς ἐξισώσεις τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τῶν εὐθειῶν $4x - 3y - 2 = o$, $5y + 12x + 3 = o$
καὶ τὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αὗται (ἄξονες ὀρθογώνιοι).

2) Λύσατε τὸ αὐτὸ πρόβλημα διὰ τὰς εὐθείας

$$y = \lambda_1 x + \beta_1,\ y = \lambda_2 x + \beta_2.$$

3) Ἔχοντες τὰς ἐξισώσεις τῶν διχοτόμων

$$R_1 - R_2 = o,\ R_2 - R_3 = o,\ R_3 - R_1 = o$$

καὶ τῶν $R_1 + R_2 = o,\ R_2 + R_3 = o,\ R_3 + R_1 = o,$

παρατηροῦμεν ὅτι $R_1 + R_2 + R_3 = o$ παριστάνει εὐθεῖαν, διερχομένην διὰ τῆς τομῆς τῶν $R_1 = o$, $R_2 + R_3 = o$. Ἐκ τούτου ἕπεται εὐκόλως ὅτι, αἱ διχοτόμοι τῶν τριῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν τριγώνου τέμνουν τὰς ἀπέναντι αὐτῶν πλευρὰς τοῦ τριγώνου εἰς τρία σημεῖα, ἅτινα κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας $R_1 + R_2 + R_3 = o$.

4) Δείξατε ὅτι $R_1 + R_2 - R_3 = o$ εἶνε ἡ ἐξίσωσις εὐθείας, διερχομένης διὰ τῆς τομῆς τῶν $R_1 = o$, $R_2 + R_3 = o$ καὶ διὰ τῆς τομῆς τῶν $R_2 = o$ καὶ $R_3 - R_1 = o$ καὶ τῆς τομῆς τῶν $R_3 = o$, $R_1 - R_2 = o$. Ἑπομένως, αἱ διχοτόμοι δύο ἐσωτερικῶν γωνιῶν τριγώνου καὶ τῆς τρίτης ἐξωτερικῆς αὐτοῦ τέμνουν τὰς ἀπέναντι αὐτῶν πλευρὰς τοῦ τριγώνου εἰς σημεῖα, κείμενα ἐπὶ μιᾶς εὐθείας. Τοιαῦται εὐθεῖαι ὑπάρχουν τρεῖς, ἔχουσαι ἐξισώσεις

$$R_1 - R_2 - R_3 = o,\ R_2 - R_3 - R_1 = o,\ R_3 - R_1 - R_2 = o.$$

5) Ἐξετάσατε τὴν δέσμην, ἥτις ἔχει ἐξίσωσιν $\mu_1 R_1 + \mu_2 R_2 = o$ καὶ ἰδιαιτέρως τὰς ἀκτῖνας δι' ἃς εἶνε $\mu_1 : \mu_2 = 1, -1, o, \infty$.

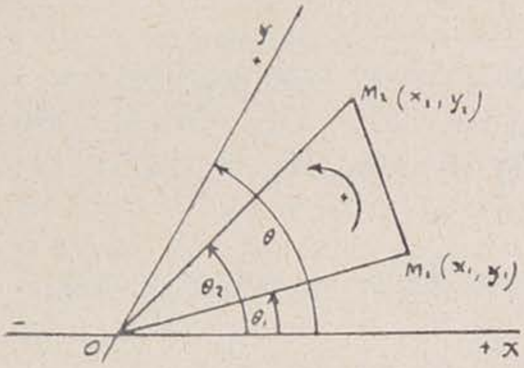
Ἐξετάσατε τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν αἱ $R_1 = o$, $R_2 = o$ εἶνε παράλληλοι.

6) Εὕρετε τὰς ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν, αἵτινες διέρχονται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων, καὶ διαιροῦν τὸ μέρος xoy, καὶ $x'oy$ τοῦ ἐπιπέδου εἰς 2, 4, 8, . . ἴσα μέρη.

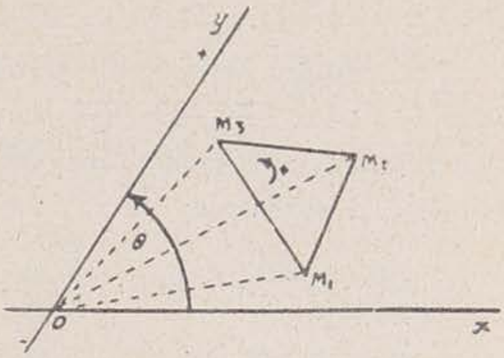
§ 73. Ἐμβαδὸν τριγώνου διὰ τῶν συντεταγμένων τῶν κορυφῶν αὐτοῦ.—

α΄) Ἔστω τὸ τρίγωνον oM_1M_2 ὡς πρὸς ἄξονας σχηματίζοντας γωνίαν θ, ἔχον κορυφὰς τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων καὶ τὰ σημεῖα M_1, M_2, ἔχοντα εὐθυγράμμους μὲν συντεταγμένας (x_1, y_1), (x_2, y_2) ἀντιστοίχως, πολικὰς δὲ (ϱ_1, θ_1), (ϱ_2, θ_2) (σχ. 66)

Ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τούτου, τὸ ὁποῖον παριστάνομεν διὰ τοῦ E.



(Σχ. 66)



(Σχ. 67)

Ἂν εἶνε $\theta_2 > \theta_1$, ὅτε ἡ φορὰ καθ' ἣν διαγράφεται ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου oM_1M_2 εἶνε ἡ θεωρουμένη ὡς θετική, ἔχομεν ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς Τριγωνομετρίας, ὅτι

$$E = \frac{1}{2}(oM_1)(oM_2)\text{ ημ }(\theta_2 - \theta_1) = \frac{1}{2}\varrho_1\varrho_2\text{ ημ }(\theta_2 - \theta_1).$$

Ἀλλ' εἶνε ημ $(\theta_2 - \theta_1) =$ ημ θ_2 συν θ_1 — ημ θ_1 συν θ_2 καὶ (§ 64, α΄)

$$\text{συν}\,\theta_1 = \frac{x_1 + y_1\text{ συν }\theta}{\varrho_1},\quad \text{συν}\,\theta_2 = \frac{x_2 + y_2\text{ συν }\theta}{\varrho_2},$$

$$\text{ημ}\,\theta_1 = \frac{y_1\text{ ημ }\theta}{\varrho_1},\quad \text{ημ}\,\theta_2 = \frac{y_2\text{ ημ }\theta}{\varrho_2}.$$

Ἑπομένως εἶνε

$$\boxed{E = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - y_1 x_2)\text{ ημ }\theta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\text{ ημ }\theta}$$

Ἂν εἶνε $\theta_2 < \theta_1$, ὅτε ἡ φορὰ καθ' ἣν διαγράφεται ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου oM_1M_2 εἶνε ἡ θεωρουμένη ὡς ἀρνητική, τὸ E θὰ εἶνε ἀρνητικὸν καὶ θὰ ἔχωμεν

$$E = \frac{1}{2}\varrho_1\varrho_2\text{ ημ }(\theta_1 - \theta_2) = -\frac{1}{2}(x_1 y_2 - y_1 x_2)\text{ ημ }\theta$$

Ὅθεν τὸ ἐξαγόμενον $\frac{1}{2}(x_1 y_2 - y_1 x_2)$ ημ θ δίδει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ο M_1 M_2 ὄχι μόνον ἀπολύτως, ἀλλὰ καὶ μὲ τὸ ἁρμόζον εἰς αὐτὸ σημεῖον. Ἂν μὲν τοῦτο εἶνε θετικὸν, τὰ σημεῖα ο, M_1, M_2 διαδέχονται ἄλληλα, ὥστε ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου νὰ διαγράφεται κατὰ φορὰν ἀντίθετον τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν ὡρολογίου, ἂν δ' ἀρνητικὸν κατὰ τὴν ἀντίθετον ταύτης.

β') Ἔστω τὸ τρίγωνον $M_1M_2M_3$, ἔχον καὶ τὰς τρεῖς κορυφὰς αὐτοῦ ἐκτὸς τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων M_1 (x_1, y_1), M_2 (x_2, y_2), M_3 (x_3, y_3) (σχ. 67).

Συνδέομεν τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων ο μὲ τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου διὰ τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων οM_1, οM_2, οM_3. Οὕτω σχηματίζονται τὰ τρίγωνα οM_1 M_2, οM_2 M_3, οM_3 M_1, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἐμβαδὰ ἀντιστοίχως

$$\frac{1}{2}(x_1y_2 - y_1x_2)\text{ημ}\,\theta,\quad \frac{1}{2}(x_2y_3 - y_2x_3)\text{ημ}\,\theta,\quad \frac{1}{2}(x_3y_1 - y_3x_1)\text{ημ}\,\theta.$$

Ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τῶν τριγώνων τούτων, ὡς καὶ τοῦ M_1 M_2 M_3, ὡς θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, καθόσον ἡ περίμετρος αὐτοῦ διαγράφεται κατὰ τὴν θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν φοράν, παραστήσωμεν δὲ τὰ ἐμβαδὰ τῶν M_1 M_2 M_3, οM_1 M_2, οM_2 M_3, οM_3 M_1 διὰ τῶν E, E_{12}, E_{23}, E_{31} ἀντιστοίχως, θὰ ἔχωμεν, ὡς εὐκόλως φαίνεται σχ. (67) ὅτι $M_1 M_2 M_3 = \text{ο}M_1 M_2 \# \text{ο}M_2 M_3 \# \text{ο}M_3 M_1$

Ἄρα $$E = E_{12} + E_{23} + E_{31}.$$

Ἑπομένως εἶνε

$$E = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - y_1 x_2 + x_2 y_3 - y_2 x_3 + x_3 y_1 - y_3 x_1)\ \text{ημ}\,\theta.$$

Ὁ τύπος οὗτος δίδει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου M_1 M_2 M_3 ὄχι μόνον κατ' ἀπόλυτον τιμήν, ἀλλ' ὁρίζει καὶ τὴν φορὰν καθ' ἣν διαδέχονται ἀλλήλας αἱ κορυφαὶ αὐτοῦ M_1, M_2, M_3, γράφεται δὲ καὶ ὡς ἑξῆς

$$E = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\ \text{ημ}\,\theta.$$

γ') Ἂν οἱ ἄξονες εἶνε ὀρθογώνιοι, θὰ εἶνε ημ θ = 1 καὶ ὁ ἀνωτέρω τύπος, ὡς καὶ ὁ ἐν τῷ α') ἁπλοποιοῦνται.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Κατασκευάσατε διάφορα τρίγωνα $oM_1 M_2$, κείμενα εἰς τὰς διαφόρους γωνίας τῶν ἀξόνων oxy, καὶ εὕρετε ἐκ τοῦ σχήματος τὸ σημεῖον ἑκάστου ἐμβαδοῦ αὐτῶν. Τὰ τρίγωνα $oM_2 M_1$ ἔχουν ἀντίθετον σημεῖον τῶν $oM_1 M_2$. Διατί;

2) Δείξατε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου $oM_2 M_1$ ἰσοῦται μὲ $\frac{1}{2}(x_2 y_1 - y_2 x_1)$.ημ θ.

3) Ἂν εἶνε $M_1(-5, 1)$, $M_2(3, 4)$ εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου $oM_1 M_2$ καὶ τὸ σημεῖον αὐτοῦ.

4) Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου (ο, ο), (α, ο), (ο, β).

5) Ἂν εἶνε $M_1(2, 5)$ πρὸς ποῖον μέρος τῆς εὐθείας oM_1 κεῖται τὸ σημεῖον $M_2(4, 3)$;

6) Ἐκφράσατε ὅτι τὸ σημεῖον $M(x, y)$ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥτις συνδέει τὸ ο μὲ τὸ $M_1(x_1, y_1)$.

7) Εὕρετε τὸν τύπον τοῦ ἐμβαδοῦ E τοῦ τριγώνου $M_1 M_2 M_3$, ὅταν διὰ τοῦ M_3 ἀχθῇ σύστημα συντεταγμένων παράλληλον καὶ ὁμόρροπον πρὸς τὸ παλαιόν, ὥστε νὰ εἶνε $M_1(x_1', y_1')$, $M_2(x_2', y_2')$, $x_1' = x_1 - x_3$, $y_1' = y_1 - y_3$, $x_2' = x_2 - x_3$, $y_2' = y_2 - y_3$, ὅτε θὰ ἐφαρμοσθῇ ὁ τύπος

$$E = \frac{1}{2}(x_1' y_2' - y_1' x_2')\,\text{ημ}\,\theta$$

8) Διά τινος σημείου ο' (α, β) φέρατε νέον σύστημα ἀξόνων παράλληλον καὶ ὁμόρροπον πρὸς τὸ παλαιόν. Δείξατε ὅτι ὁ τύπος τοῦ ἐμβαδοῦ E τριγώνου $M_1 M_2 M_3$ μένει ἀμετάβλητος, ἑπομένως ὅτι δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ συστήματος τῶν εὐθυγράμμων ἀξόνων.

9) Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου (3, 1), (4, −2), (−1, −2), καὶ τὸ σημεῖον αὐτοῦ.

10) Δείξατε ὅτι τὰ τρίγωνα $M_2 M_3 M_1$, $M_3 M_1 M_2$ ἔχουν τὸ αὐτὸ σημεῖον μὲ τὸ $M_1 M_2 M_3$· ἐπίσης τὰ $M_1 M_3 M_2$, $M_3 M_2 M_1$, $M_2 M_1 M_3$ τὸ ἀντίθετον τῶν προηγουμένων.

11) Τίς εἶνε ἡ συνθήκη ἵνα τὰ σημεῖα M_1, M_2, M_3 κεῖνται ἐπ' εὐθείας;

12) Τὰ σημεῖα (1, −2), (−3, 2), (4, −1) κεῖνται ἐπ' εὐθείας; Διατί;

§ 74. Ἐμβαδὸν ἁπλοῦ κυρτοῦ ν-κορύφου διὰ τῶν συντεταγμένων τῶν κορυφῶν αὐτοῦ.—

α') Καλοῦμεν *ν-κόρυφον* (ἢ *ν-πλευρον*) τὸ εὐθύγραμμον σχῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζουν ν σημεῖα $M_1, M_2, \ldots, M_{\nu-1}, M_\nu$, (ἢ ν πλευραὶ $M_1 M_2$, $M_2 M_3, \ldots, M_\nu M_1$) μετὰ τῶν ν πλευρῶν (κορυφῶν) αὐτοῦ, αἵτινες συνδέουν ἀνὰ δύο διαδοχικὰ σημεῖα (καθ' ἃς τέμνονται ἀνὰ δύο διαδοχικαὶ πλευραί) αὐτοῦ.

β') Ἔστωσαν $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, . . ,$M_\nu(x_\nu, y_\nu)$ αἱ κορυφαὶ τοῦ ἁπλοῦ κυρτοῦ ν-κορύφου $M_1 M_2 . . M_\nu$ εἰς ἄξονας σχηματίζοντας γωνίαν θ.

Ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ν-κορύφου τούτου διὰ τῶν συντεταγμένων τῶν κορυφῶν αὐτοῦ.

Συνδέομεν τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων o μὲ τὰς κορυφὰς $M_1, . . , M_\nu$ διὰ τῶν $oM_1, oM_2, . . . , oM_\nu$, ὅτε προκύπτουν τὰ ν τρίγωνα $oM_1 M_2, oM_2 M_3, . . . , oM_\nu M_1$.

Ἂν E παριστάνῃ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ν—κορύφου, $E_{12}, E_{23}, . , E_{\nu 1}$ τὰ τῶν τριγώνων κατὰ σειράν, λάβωμεν δὲ τὸ θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν σημεῖον αὐτῶν καθόσον ἡ περίμετρος αὐτῶν διαγράφεται κατὰ τὴν θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν φοράν, θὰ ἔχωμεν

$$E = E_{12} + E_{23} + . . + E_{\nu 1},$$

ἤτοι $E = \frac{1}{2} [(x_1 y_2 - y_1 x_2) + (x_2 y_3 - y_2 x_3) + . . + (x_\nu y_1 - y_\nu x_1)] \eta\mu\, \theta$.

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εἶνε θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, ἂν τὰ σημεῖα $M_1, M_2, . ., M_\nu$ ὁρίζουν τὴν θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν φοράν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Δείξατε ὅτι ὁ ἀνωτέρω τύπος τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ν κορύφου εἶνε ἀνεξάρτητος τοῦ συστήματος τῶν εὐθυγράμμων συντεταγμένων, εἰς ὃ ἀναφέρεται.

2) Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετρακορύφου εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους

$$(1,2), (-3, 4), (-1, -1), (3, -2).$$

3) Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετρακορύφου

$$(2, 1), (4, -3), (-2, -5), (-1, 4)$$

εἰς ἄξονας σχηματίζοντας γωνίαν 60°.

4) Εὕρετε εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀκτακορύφου

$$(1, o), (\sqrt{2} : 2, \sqrt{2} : 2), (o, 3), (-\sqrt{2} : 2, \sqrt{2} : 2), (-1, o),$$
$$(-\sqrt{2} : 2, -\sqrt{2} : 2), (o, -1), (\sqrt{2} : 2, -\sqrt{2} : 2).$$

5) Δείξατε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τοῦ ἔχοντος ὡς ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τὰς

$$A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 = o, A_2 x + A_2 y + \Gamma_2 = o, A_3 x + B_3 y + \Gamma_3 = o$$

εἶνε $\dfrac{\eta\mu\theta}{2 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix}^2$ ἐνῷ $\gamma_1 . \gamma_2 \gamma_3$ εἶνε οἱ συντελεσταὶ τῶν $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ ἐν τῇ ὁριζούσῃ τῶν συντελεστῶν τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων, ὅταν αὕτη ἀναπτυχθῇ ὡς πρὸς τὰ στοιχεῖα τῆς στήλης τῶν Γ.

Περὶ γεωμετρικῶν τόπων

§ 75. **Ὁρισμοί.** –

α´) Λέγομεν ὅτι γραμμή τις εἶνε ὁ γεωμετρικὸς τόπος σημείων, πληρούντων κοινήν τινα ἰδιότητα, 1) ἄν, πᾶν σημεῖον, πληροῦν τὴν ἐν λόγῳ ἰδιότητα, κεῖται ἐπὶ τῆς γραμμῆς· 2) ἄν, πᾶν σημεῖον τῆς γραμμῆς πληροῖ τὴν ἰδιότητα ταύτην.

Ἂν ἡ συνθήκη, τὴν ὁποίαν πληροῦν τὰ σημεῖα, ἐκφρασθῇ διὰ τῶν συντεταγμένων αὐτῶν x, y ὡς πρὸς ἄξονας εὐθυγράμμους, προκύπτει ἐξίσωσίς τις, ἔστω ἡ

$$\varphi\,(x, y) = 0,$$

περιέχουσα τὰ x, y, ἥτις θὰ ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων τῶν σημείων, τῶν κειμένων ἐπὶ τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου.

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη, ἐπαληθευομένη ὑπὸ μόνων τῶν συντεταγμένων τῶν σημείων τούτων καλεῖται ἐξίσωσις τοῦ ἐν λόγῳ γεωμετρικοῦ τόπου.

Ὅθεν «***ὁ γεωμετρικὸς τόπος σημείων, ἐχόντων κοινὴν ἰδιότητα, παρίσταται ὑπὸ ἐξισώσεως φ (x, y) = 0, ἥτις ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων τῶν σημείων τούτων, καὶ μόνον ὑπ' αὐτῶν***».

β´) Ἂν ἔχωμεν δύο ἐξισώσεις

$$\varphi_1\,(x, y, a) = 0, \quad \varphi_2\,(x, y, a) = 0 \qquad (1)$$

ἐνῷ x, y εἶνε αἱ συντεταγμέναι ἑνὸς σημείου καὶ *a* μία παράμετρος, δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ *a* αἱ ἐξισώσεις αὗται παριστάνουν, ἐν γένει, δύο γραμμὰς καμπύλας, αἵτινες τέμνονται, ἐν γένει, εἰς ἓν ἢ περισσότερα σημεῖα.

Μεταβαλλομένου τοῦ *a* αἱ γραμμαὶ αὗται μεταβάλλονται, ἡ δὲ τομὴ αὐτῶν γράφει ἕνα τόπον. Ὁ τόπος τῶν σημείων αὐτῶν ἔχει ἐξίσωσιν

$$\varphi\,(x, y) = 0, \qquad (2)$$

ἥτις προκύπτει, ἂν ἐπαλειφθῇ τὸ *a* μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (1). Διότι, ἡ ἐξίσωσις (2) ἐπαληθεύεται ὑπὸ πασῶν τῶν κοινῶν λύσεων τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ μόνον ὑπ' αὐτῶν.

γ´) Ἂν αἱ ἐξισώσεις τῶν δύο κινητῶν καμπύλων περιέχουν περισσοτέρας τῆς μιᾶς παραμέτρους, συνδεομένας πρὸς ἀλλήλας διά τινων σχέσεων, ὥστε μία μόνον ἐξ αὐτῶν νὰ μένῃ ἀνεξάρτητος, ἡ ἐξίσωσις φ (x, y) = 0, ἥτις προκύπτει διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς τῶν παραμέτρων ἐκ πασῶν τῶν ἐξισώσεων, εἶνε ἡ ἐξίσωσις τοῦ τόπου τῆς τομῆς τῶν καμπύλων. Π. χ. ἂν

$$\varphi_1\,(x, y, a_1, a_2, a_3) = 0, \quad \varphi_2\,(x, y, a_1, a_2, a_3) = 0 \qquad (1')$$

εἶνε αἱ ἐξισώσεις τῶν δύο τεμνομένων γραμμῶν καὶ

$$\sigma_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0, \quad \sigma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0 \qquad (2')$$

αἱ ἐξισώσεις, αἵτινες ἐκφράζουν τὰς μεταξὺ τῶν παραμέτρων $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ὑπαρχούσας σχέσεις, ἡ ἐξίσωσις τοῦ τόπου θὰ εὑρεθῇ ἐκ τῆς ἀπαλοιφῆς τῶν α_1, α_2, α_3 μεταξὺ τῶν (1′) καὶ (2′).

Λέγοντες ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x, y) = 0$ προκύπτει ἐκ τῆς ἀπαλοιφῆς τῶν α_1, α_2, α_3 μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (1′) καὶ (2′), ἐννοοῦμεν ὅτι, ἡ σχέσις $\varphi(x, y) = 0$ ἀποτελεῖ τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην εἰς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ὑπόκεινται τὰ x, y, ἵνα ταῦτα ἀνήκουν εἰς μίαν λύσιν $(x, y, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ τῶν ἐξισώσεων (1′) καὶ (2′).

§ 76. Ἐφαρμογαὶ γεωμετρικῶν τόπων.—

α′) Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ «**ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο σταθερῶν σημείων (α_1, β_1), (α_2, β_2) εἶνε ἴσαι**».

Ἂν x, y εἶνε ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ζητεῖται ὁ τόπος, ἡ συνθήκη τὴν ὁποίαν πληροῦν τὰ σημεῖα ἐκφράζεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$(x - \alpha_1)^2 + (y - \beta_1)^2 = (x - \alpha_2)^2 + (y - \beta_2)^2$$

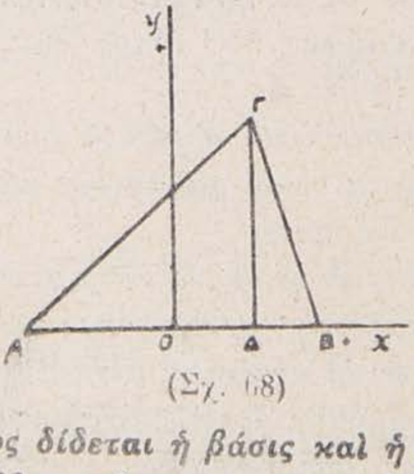
ἢ τῆς

$$2(\alpha_2 - \alpha_1)x + 2(\beta_2 - \beta_1)y = \alpha_2^2 - \alpha_1^2 + \beta_2^2 - \beta_1^2.$$

Αὕτη παριστάνει εὐθεῖαν, ἥτις εἶνε κάθετος εἰς τὸ σημεῖον

$$\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \; \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\right)$$

τῆς εὐθείας τῶν δοθέντων σημείων ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ταύτην.



(Σχ. 68)

β′) «**Τριγώνου τινὸς δίδεται ἡ βάσις καὶ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ. Ζητεῖται ὁ τόπος τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου**».

Λαμβάνομεν τὴν βάσιν ὡς ἄξονα τῶν x ὀρθογωνίων ἀξόνων, ἐχόντων ἀρχὴν τὸ μέσον αὐτῆς. Ἔστω ἡ βάσις $(AB) = 2\gamma$ καὶ $(A\Gamma)^2 - (B\Gamma)^2 = \delta^2$, καὶ $\Gamma(x, y)$ ἡ κορυφὴ τοῦ τριγώνου (σχ.68).

Ἔχομεν $(A\Gamma)^2 = (\gamma + x)^2 + y^2$, $(B\Gamma)^2 = (\gamma - x)^2 + y^2$.

Ἑπομένως $(A\Gamma)^2 - (B\Gamma)^2 = 4\gamma x = \delta^2$,

ἢ
$$x = \frac{\delta^2}{4\gamma}.$$

Ἤτοι, ὁ ζητούμενος τόπος εἶνε εὐθεῖα κάθετος ἐπι τὴν βάσιν, ἀπέχουσα τῆς ἀρχῆς ἀπόστασιν $\frac{\delta^2}{4\gamma}$.

γ΄) «***Εἰς πλαγιογώνιον σύστημα συντεταγμένων εὐθεῖά τις κινεῖται οὕτως, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν συντεταγμένων αὐτῆς ἐπὶ τὴν ἀρχὴν νὰ εἶνε σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ γ. Ζητεῖται ὁ τόπος τῶν σημείων τῆς εὐθείας, τὰ ὁποῖα διαιροῦν τὸ μεταξὺ τῶν ἀξόνων τμῆμα αὐτῆς εἰς μέρη, ἔχοντα δεδομένον λόγον***».

Ἔστωσαν α καὶ β αἱ συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τῆς εὐθείας AB (ἤτοι $(oA) = \alpha$, $(oB) = \beta$), καὶ M σημεῖον αὐτῆς, ὥστε νὰ εἶνε $(AM):(MB) = \lambda$. Ἂν εἶνε $M(x, y)$ θὰ ἔχωμεν

$$x = \frac{\alpha}{1+\lambda}, \quad y = \frac{\lambda\beta}{1+\lambda} \qquad (1)$$

Ἀλλὰ πρέπει νὰ εἶνε $\alpha + \beta = \gamma$ (2).

Ἀπαλείφοντες τὰ α, β μεταξὺ τῶν (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν

$$\lambda x + y = \frac{\lambda\gamma}{1+\lambda},$$

ἥτις παριστᾷ τὸν ζητούμενον τόπον, ὅστις εἶνε εὐθεῖα γραμμή.

δ΄) «***Δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν παραλλήλους εὐθείας A_1B_1, . . πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ΑΒ. Τὰς τομὰς A_1, B_1 τῶν ΓΑ καὶ ΓΒ ὑπ᾽ αὐτῆς συνδέομεν μὲ τὰς ἀπέναντι κορυφὰς αὐτοῦ Β καὶ Α ἀντιστοίχως. Ζητεῖται ὁ τόπος τῶν τομῶν Μ τῶν εὐθειῶν τούτων A_1B, B_1A, . .***».

Λαμβάνομεν τὴν ΓΒ καὶ ΓΑ ὡς ἄξονας συντεταγμένων. Ἂν θέσωμεν $(\Gamma B) = \alpha$, $(\Gamma A) = \beta$, ἐπειδὴ ἡ παράλληλος A_1B_1 τῇ AB τέμνει τοὺς ἄξονας εἰς τὰ σημεῖα B_1 καὶ A_1, τὰ (ΓA_1), (ΓB_1) εἶνε ἀνάλογα τῶν β καὶ α. Ἔστω $(\Gamma A_1) = \frac{\beta}{\lambda}$, $(\Gamma B_1) = \frac{\alpha}{\lambda}$, ἐνῷ λ παριστάνει παράμετρον μεταβλητήν. Εἰς ἑκάστην τῶν θεωρουμένων παραλλήλων ἀντιστοιχεῖ μία τιμὴ τοῦ λ, καὶ ἀντιστρόφως.

Αἱ ἐξισώσεις τῶν A_1B καὶ AB_1 εἶνε αἱ

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{\lambda y}{\beta} = 1, \quad \frac{\lambda x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1.$$

Ἀπαλείφοντες τὸ λ ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων, εὑρίσκομεν

$$\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\frac{x}{\alpha}=\left(1-\frac{y}{\beta}\right)\frac{y}{\beta},$$

ἢ
$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta},$$

ἢ
$$\left(\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta}\right)\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}-1\right)=o.$$

Ἂν τεθῇ

$$\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta}=o$$

ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς διὰ τοῦ Γ διαμέσου τοῦ τριγώνου.

Ἂν τεθῇ

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}-1=o$$

ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς εὐθείας ΑΒ, τῆς ὁποίας πάντα τὰ σημεῖα ἀνήκουν εἰς τὸν τόπον, ὡς διακρίνει τις, ἂν τὸ $Α_1$ συμπέσῃ μὲ τὸ Α καὶ τὸ $Β_1$ μὲ τὸ Β.

ε΄) «***Περὶ τὰ σημεῖα M_1 (x_1, y_1), M_2 (x_2, y_2) στρέφονται δύο εὐθεῖαι, μένουσαι διαρκῶς κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν τομῶν αὐτῶν***».

Αἱ ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν εἶνε

$$y-y_1=\lambda_1(x-x_1),\quad y-y_2=\lambda_2(x-x_2),$$

ἐνῷ τὰ λ_1, λ_2 εἶνε παράμετροι, συνδεόμεναι διὰ τῆς σχέσεως

$$\lambda_1\lambda_2+1=o$$

(ἕνεκα τῆς καθετότητος τῶν εὐθειῶν), ἂν οἱ ἄξονες εἶνε ὀρθογώνιοι.

Ἀπαλείφοντες τὰ λ_1, λ_2 μεταξὺ τῶν τριῶν ἐξισώσεων, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ τόπου

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}\cdot\frac{y-y_2}{x-x_2}+1=o,$$

ἢ
$$(y-y_1)(y-y_2)+(x-x_1)(x-x_2)=o$$

ἢ καὶ $x^2+y^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y+(x_1x_2+y_1y_2)=o.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Δίδονται δύο σταθεραὶ εὐθεῖαι οΑ, οΒ καὶ σημεῖον M_1 (x_1, y_1) Διὰ τοῦ M_1 φέρομεν εὐθείας μεταβλητὰς $M_1B_1A_1$, $M_1B_2A_2$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν τομῶν τῶν εὐθειῶν A_1B_2, A_2B_1.

2) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν ὀρθογωνίων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς δοθὲν τρίγωνον.

3) Ἐπὶ τῶν ἀξόνων ἀντιστοίχως λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Α (α, ο), Β (ο, б) καὶ τὰ Α΄ Β΄ ὥστε νὰ εἶνε (οΑ) + (οΒ) = (οΑ΄) + (οΒ΄). Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν ΑΒ΄, Α΄Β.

4) Τριγώνου τινὸς oAB ἡ μὲν γωνία o εἶνε σταθερὰ κατὰ θέσιν καὶ μέγεθος, τὸ δὲ ἄ ροισμα τῶν πλευρῶν αὐτῆς (oA)+(oB) = k (σταθερόν). Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς AB λαμβάνεται σημεῖον M, ὥστε νὰ εἶνε (AM) : (MB) = μ : ν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων M.

5) Μεταβλητοῦ τριγώνου εἶνε σταθερὰ ἡ βάσις (AB) = 2 α κατὰ μέγεθος καὶ θέσιν, αἱ δὲ γωνίαι αὐτοῦ A καὶ B πληροῦν τὴν σχέσιν σφ. A+σφ. B=k= =(σταθερόν). Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῆς τρίτης κορυφῆς αὐτοῦ.

6) Δίδονται τὰ σημεῖα A (α_1, α_2), B (β_1, β_2), Γ (γ_1, γ_2) καὶ εὐθεῖα μήκους λ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου M, ὥστε νὰ εἶνε

$$(MA)^2 + (MB)^2 - 2\,(M\Gamma)^2 = \lambda^2.$$

7) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν τομῶν τῶν διαγωνίων παραλληλογράμμων ἐγγεγραμμένων εἰς δοθὲν τετράπλευρον (λαμβανομένων τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου ὡς ἀξόνων).

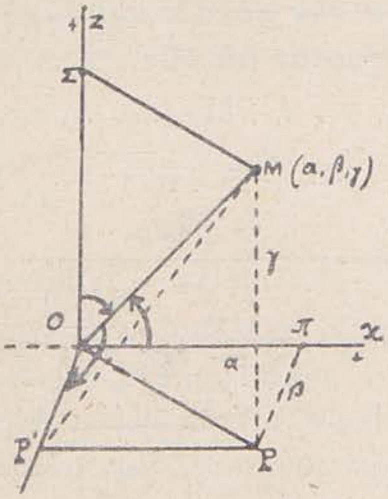
Μετρικαὶ ἰδιότητες ἐν τῷ διαστήματι.

§ 77. Μῆκος ἀνύσματος καὶ γωνίαι αὐτοῦ μὲ τοὺς ἄξονας συντεταγμένων.—

α') Δίδεται τὸ ἄνυσμα $M_1 M_2$ (α, β, γ) ἐν τῷ διαστήματι ὡς πρὸς ὀρθογωνίους ἄξονας*) καὶ ζητεῖται τὸ μῆκος καὶ τὰ συνημίτονα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ μὲ τοὺς ἄξονας (σχ. 69).

Ἂν ἐκ τῆς ἀρχῆς φέρωμεν τὸ ἄνυσμα oM ὁμορρόπως ἴσον τῷ δοθέντι, παραστήσωμεν δὲ διὰ ρ τὸ μῆκος τούτου καὶ διὰ a, b, c τὰ συνημίτονα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ μὲ τοὺς ἄξονας, τὰ ὁποῖα καλοῦνται *διευθύνοντα συνημίτονα τοῦ ἀνύσματος oM* θὰ εἶνε

$$(oM) = \varrho,\ M\ (\alpha, \beta, \gamma),\ \ (o\Pi) = \alpha,\ \ (\Pi P) = \beta,\ (PM) = \gamma.$$



(Σχ. 69)

*) καὶ ἐν τοῖς ἑξῆς προκειμένου περὶ τοῦ χώρου τῶν τριῶν διαστάσεων ὑποθέτομεν ὅτι οἱ ἄξονες εἶνε ὀρθογώνιοι, ἐνόσῳ δὲν ἀναφέρεται ὅτι εἶνε πλαγιογώνιοι.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου οΠΡ ἔχομεν

$$(oP)^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

ἐκ δὲ τοῦ οΡΜ,

$$(oM)^2 = \varrho^2 = (oP)^2 + \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

Ἐπομένως,

$$\boxed{\varrho = \pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} \qquad (1)$$

Ἐκ τῶν δύο σημείων τοῦ ῥιζικοῦ λαμβάνομεν τὸ + ἢ — καθόσον τὸ οΜ (ἢ τὸ M_1 M_2) ἔχει τὴν θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν φορὰν τῆς εὐθείας M_1 M_2.

Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων οΠΜ, οΡ′ Μ, οΣΜ ἔχομεν ἀντιστοίχως

$$\boxed{a = \frac{\alpha}{\varrho},\ b = \frac{\beta}{\varrho},\ c = \frac{\gamma}{\varrho}} \qquad (2)$$

β′) Οἱ ἀνωτέρω τύποι ἀληθεύουν διὰ πᾶσαν θέσιν τοῦ σημείου Μ ἐν τῷ διαστήματι.

Διότι, ἂν μὲν τοῦτο κεῖται δεξιὰ τοῦ ἐπιπέδου yz, τὸ α εἶνε θετικὸν καὶ ἡ γωνία xoM ὀξεῖα, ἄρα τὸ a εἶνε θετικόν, ἂν δὲ κεῖται ἀριστερὰ τοῦ yz, τὸ α θὰ εἶνε ἀρνητικὸν καὶ ἡ γωνία xoM ἀμβλεῖα· ἄρα τὸ a εἶνε ἀρνητικόν. Ἀνάλογα παρατηροῦμεν καὶ διὰ τὰ β, b καὶ γ, c.

γ′) Ἂν εἰς τὰς (2) ὑποτεθῇ ὅτι εἶνε $\varrho = 1$, θὰ ἔχωμεν $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma$. Ἤτοι, «***τὰ συνημίτονα τῶν γωνιῶν ἀνύσματος, ἔχοντος μῆκος ἴσον μὲ τὴν μονάδα καὶ ἀρχὴν τὸ ο ἰσοῦνται μὲ τὰς συντεταγμένας τοῦ πέρατος αὐτοῦ***».

δ′) Ἂν εἶνε M_1 (x_1, y_1, z_1), M_2 (x_2, y_2, z_2), θὰ ἔχωμεν (§ 19, α′)

$$\alpha = x_2 - x_1,\ \beta = y_2 - y_1,\ \gamma = z_2 - z_1$$

Ἐπομένως θὰ εἶνε

$$\varrho = \pm\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$a = \frac{x_2 - x_1}{\varrho},\ b = \frac{y_2 - y_1}{\varrho},\ c = \frac{z_2 - z_1}{\varrho}.$$

Ὁ πρῶτος τῶν τύπων τούτων δίδει τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο σημείων M_1, M_2 διὰ τῶν συντεταγμένων αὐτῶν.

ε′) Παρατηρητέον ὅτι, ἂν a, b, c εἶνε τὰ διευθύνοντα συνημίτονα τοῦ ἀνύσματος οΜ, τὰ αὐτὰ διευθύνοντα συνημίτονα θὰ ἔχῃ καὶ πᾶσα εὐθεῖα παράλληλος καὶ ὁμόρροπος τῷ οΜ. Ἐπομένως «***παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι εὐθεῖαι ἔχουν ἴσα διευθύνοντα συνημίτονα, ἐνῷ παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι ἔχουν διευθύνοντα συνημίτονα ἀντίθετα***».

ζ΄) Ἐὰν φαντασθῶμεν σφαῖραν, ἔχουσαν κέντρον τὴν ἀρχὴν ο καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν 1, εἰς ἑκάστην ἀκτῖνα αὐτῆς ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι ἰσοῦνται μὲ τὰ διευθύνοντα συνημίτονα τῆς ἀκτῖνος.

Ἀντιστρόφως, εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ταύτης ἀντιστοιχεῖ μία ἀκτὶς αὐτῆς, περατουμένη εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο, τῆς ὁποίας τὰ διευθύνοντα συνημίτονα ἰσοῦνται μὲ τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου τούτου. Ἐπειδὴ δὲ εἰς πάσας τὰς παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους εὐθείας τοῦ χώρου ἀντιστοιχεῖ μία ἀκτὶς τῆς σφαίρας παράλληλος καὶ ὁμόρροπος αὐταῖς, ἕπεται ὅτι·

«***εἰς τὸ σύνολον τῶν παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων εὐθειῶν τοῦ χώρου, τῶν ἐχουσῶν διευθύνοντα συνημίτονα*** a, b, c ***ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον Μ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τῆς ἐχούσης κέντρον ο καὶ ἀκτῖνα 1, ἔχον συντεταγμένας*** a, b, c ***καὶ ἀντιστρόφως εἰς ἓν σημεῖον Μ (***a, b, c***) τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ταύτης ἀντιστοιχεῖ μία ὡρισμένη φορὰ οΜ μὲ διευθύνοντα συνημίτονα (***a, b, c***), ἤτοι τὸ σύνολον εὐθειῶν παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων, ἐχουσῶν διευθύνοντα συνημίτονα (***a, b, c***)***».

Διὰ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως ἔχομεν τὴν ἀπεικόνισιν τῶν διαφόρων φορῶν τοῦ χώρου διὰ τοῦ συνόλου τῶν σημείων τῆς ἐν λόγῳ σφαίρας.

§ 78. Σχέσεις μεταξὺ τῶν διευθυνόντων συνημιτόνων ἀνύσματος.

α΄) Ἂν τοὺς ἀνωτέρω τύπους (2) ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ προσθέσωμεν, εὑρίσκομεν

$$\boxed{a^2 + b^2 + c^2 = 1} \qquad (1)$$

Ἤτοι «***τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διευθυνόντων συνημιτόνων*** a, b, c ***ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα***».

β΄) Ἐκ τῆς σχέσεως (1) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἓν τῶν a, b, c κατ' ἀπόλυτον τιμήν, ὅταν γνωρίζωμεν τὰ δύο ἄλλα.

γ΄) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι «***ἂν (***a, b, c***) εἶνε αἱ συντεταγμέναι τυχόντος σημείου σφαίρας, ἐχούσης κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ 1, θὰ εἶνε*** $a^2+b^2+c^2=1$».

§ **79. Γωνίαι εὐθείας μὲ τοὺς ἄξονας.**—

α΄) Ἔστωσαν
$$\frac{x-x_1}{\alpha}=\frac{y-y_1}{\beta}=\frac{z-z_1}{\gamma}$$
αἱ ἐξισώσεις δοθείσης εὐθείας, τῆς ὁποίας ζητοῦνται αἱ γωνίαι μὲ τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων.

Ἐπειδὴ τὸ ἄνυσμα (α, β, γ) εἶνε παράλληλον τῇ εὐθείᾳ, ἂν a, b, c εἶνε τὰ διευθύνοντα συνημίτονα αὐτῶν, θὰ ἔχωμεν
$$a=\frac{\alpha}{\rho},\ b=\frac{\beta}{\rho},\ c=\frac{\gamma}{\rho},\ \rho\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$$
ἐκ τῶν ὁποίων ὁρίζονται αἱ ζητούμεναι γωνίαι ἐκ τῶν συνημιτόνων αὐτῶν a, b, c.

β΄) Ἂν αἱ ἐξισώσεις τῆς δοθείσης εὐθείας εἶνε
$$x=\lambda z+\alpha,\quad y=\mu z+\beta,$$
ἐπειδὴ αὕτη εἶνε παράλληλος πρὸς τὸ ἄνυσμα (λ, μ, 1) (§ 45, γ΄) θὰ εἶνε
$$a=\frac{\lambda}{\rho},\ b=\frac{\mu}{\rho},\ c=\frac{1}{\rho},\quad \rho=\pm\sqrt{\lambda^2+\mu^2+1}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Ποῦ κεῖνται πάντα τὰ σημεῖα, τὰ ἔχοντα ἀπόστασιν ρ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς ο; Τίς εἶνε ἡ σχέσις, ἥτις συνδέει τὰς συντεταγμένας ἑκάστου τῶν σημείων τούτων;

2) Εὕρετε ὅτι, ἂν εἶνε $a=b=c$, θὰ εἶνε $a=\sqrt{3}:3$.

3) Ἐπὶ σφαίρας ἐχούσης κέντρον τὴν ἀρχὴν ο καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ 1, εὕρετε τὰ ὀκτὼ σημεῖα, τῶν ὁποίων αἱ τρεῖς συντεταγμέναι εἶνε ἀπολύτως ἴσαι. Τίνα τὰ a, b, c τῶν εἰς τὰ σημεῖα αὐτὰ ἀντιστοιχούντων ἀνυσμάτων, ἐχόντων ἀρχὴν τὸ ο, καὶ εὕρετε τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τῶν διέδρων γωνιῶν, τῶν ὁποίων δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς τομαί.

4) Ποῦ κεῖνται πάντα τὰ σημεῖα M, διὰ τὰ ὁποῖα εἰς τὰ ἀνύσματα oM ἀντιστοιχεῖ ἡ αὐτὴ γωνία xoM;

5) Δείξατε ὅτι, ὄχι μόνον εἰς τὰς γωνίας xoM, yoM, zoM ἀντιστοιχεῖ μία μόνη τιμὴ τῶν a, b, c, ἀλλὰ καὶ τοὐναντίον, εἰς τὰ a, b, c ἀντιστοιχεῖ μία μόνη γωνία xoM, yoM, zoM περιεχομένη μεταξὺ 0^0 καὶ 180^0.

6) Ἂς ὑποτεθῇ ὅτι ἡ γωνία xoM λαμβάνεται αὐθαιρέτως. Δείξατε ὅτι τότε ἡ γωνία yoM δὲν δύναται νὰ ληφθῇ αὐθαιρέτως. Δείξατε τοῦτο γεωμετρικῶς, καὶ ἐκ τῆς $a^2+b^2+c^2=1$, ἐκ τῆς ὁποίας συνάγεται ὅτι $a^2+b^2<1$.

7) Δείξατε ὅτι ημ² (xôM) + ημ² (yôM) + ημ² (zôM) = 2.

8) Εὕρετε ὅτι ἂν (x, y, z) εἶνε αἱ συντεταγμέναι τοῦ M, καὶ (oM) = ρ, θὰ εἶνε
$$ax+by+cz=\rho,$$
(προβάλλοντες τὴν τεθλασμένην oΠPM ἐπὶ τῆς oM).

9) Τίνας τιμὰς ἔχουν τὰ a, b, c διὰ τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων, ἡ εὐθείας κειμένης ἐπὶ τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων;

10) Δείξατε ὅτι εἰς πλαγιογωνίους ἄξονας εἶνε
$\rho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta\,\sigma\upsilon\nu\,(xoy) + 2\,\alpha\gamma\,\sigma\upsilon\nu\,(xoz) + 2\,\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu\,(yoz)$.

11) Ἐκφράσατε ἀναλυτικῶς ὅτι τὸ σημεῖον (x, y, z) ἀπέχει ἰσάκις ἀπὸ τῶν A (α, β, γ), $A_1 (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$.

12) Εὕρετε τὰ μήκη καὶ τὰ διευθύνοντα συνημίτονα τῶν ἓξ ἀκμῶν τοῦ τετραέδρου (1, 2, 1), (2, — 1, 3), (— 1, 2, — 3), (ο, ο, ο).

§ 80. Γωνία δύο ἀνυσμάτων καὶ δύο εὐθειῶν.—

α΄) Δίδονται δύο ἀνύσματα $T_1 (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $T_2 (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$.

Ζητεῖται ἡ γωνία τῶν ἀνυσμάτων τούτων.

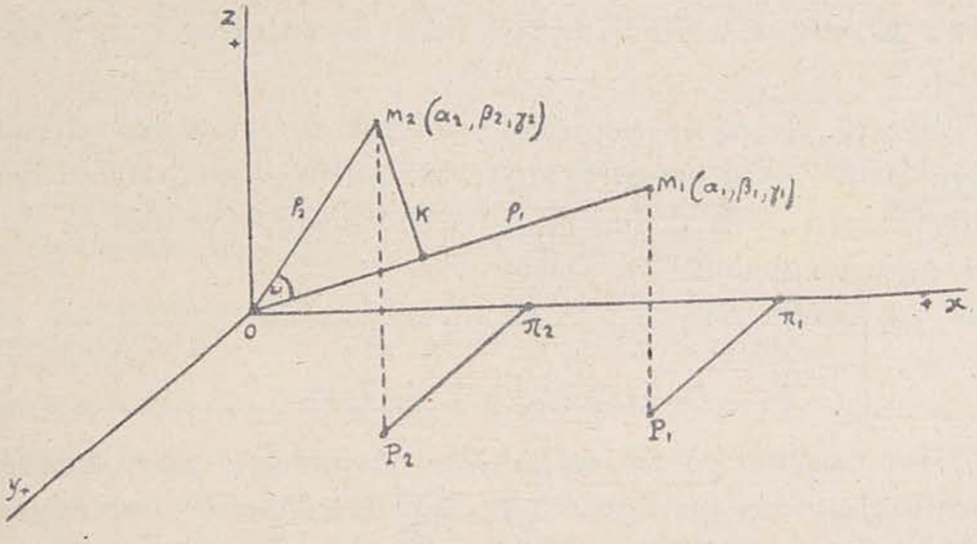
Ἐκ τῆς ἀρχῆς ο φέρομεν τὰ ἀνύσματα oM_1, oM_2 ὁμορρόπως ἴσα πρὸς τὰ δοθέντα, καὶ ἔστω ἡ γωνία τούτων $M_1\, o\, M_2 = \omega$, καὶ $(oM_1) = \varrho_1$, $(oM_2) = \varrho_2$ (σχ. 70).

Θὰ ἔχωμεν (§ 77, α΄)

$$\varrho_1^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2, \quad \varrho_2^2 = \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2.$$

Ἂν a_1, b_1, c_1 καὶ a_2, b_2, c_2 εἶνε τὰ διευθύνοντα συνημίτονα τῶν ἀνυσμάτων τούτων, ἐπειδὴ εἶνε $M_1 (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $M_2 (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, ἔχομεν

$$oM_2 = o\Pi_2 \mathrel{+\!\!\!\!\!\parallel} \Pi_2 P_2 \mathrel{+\!\!\!\!\!\parallel} P_2 M_2 \qquad (1)$$



(Σχ. 70)

Προβάλλοντες τὰ ἴσα τῆς (1) ὀρθῶς ἐπὶ τῆς εὐθείας oM_1 εὑρίσκομεν

$$\pi\varrho o\beta.oM_2 = \pi\varrho o\beta.o\Pi_2 + \pi\varrho o\beta.\Pi_2 P_2 + \pi\varrho o\beta.P_2 M_2$$

ἢ
$$\varrho_2\,\sigma\upsilon\nu\,\omega = \alpha_2\,a_1 + \beta_2\,b_1 + \gamma_2\,c_1.$$

Ἤτοι
$$\boxed{\sigma\upsilon\nu\,\omega = a_1\,a_2 + b_1\,b_2 + c_1\,c_2 = \frac{\alpha_1\,\alpha_2 + \beta_1\,\beta_2 + \gamma_1\,\gamma_2}{\varrho_1\;\varrho_2}}$$

Ἂν καὶ τὰ δύο ἀνύσματα ἔχουν τὰς θετικὰς ἢ ἀρνητικὰς φορὰς τὸ ἐξαγόμενον εἶνε θετικόν, ἄλλως ἀρνητικόν.

Ὅθεν «***τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας δύο ἀνυσμάτων ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ὁμωνύμων διευθυνόντων συνημιτόνων τῶν ἀνυσμάτων***».

β΄) Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω τύπου εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι

$$\eta\mu^2\,\omega = (b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 + (c_1 a_2 - a_1 c_2)^2 + (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2.$$

γ΄) Ἂν ζητῆται ἡ γωνία ω δύο εὐθειῶν, ἐχουσῶν ἐξισώσεις

$$\frac{x-x_1}{\alpha_1} = \frac{y-y_1}{\beta_1} = \frac{z-z_1}{\gamma_1}, \quad \frac{x-x_2}{\alpha_2} = \frac{y-y_2}{\beta_2} = \frac{z-z_2}{\gamma_2}$$

θὰ ἔχωμεν τοὺς ἀνωτέρω τύπους· ἂν δὲ αἱ ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν εἶνε

$$x = \lambda_1 z + \alpha_1,\ y = \mu_1 z + \beta_1 \text{ καὶ } x = \lambda_2 z + \alpha_2,\ y = \mu_2 z + \beta_2$$

θὰ ἔχωμεν

$$\sigma\upsilon\nu\,\omega = \frac{1+\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2}{\rho_1\,\rho_2},\quad \rho_1 = \pm\sqrt{1+\lambda_1^2+\mu_1^2},\quad \rho_2 = \pm\sqrt{1+\lambda_2^2+\mu_2^2}$$

ἐπειδὴ ἡ πρώτη τῶν εὐθειῶν εἶνε παράλληλος πρὸς τὸ ἄνυσμα $(\lambda_1, \mu_1, 1)$ ἡ δὲ δευτέρα πρὸς τὸ $(\lambda_2, \mu_2, 1)$.

§ 81. Συνθήκη καθετότητος δύο ἀνυσμάτων ἢ δύο εὐθειῶν.—

α΄) Ἐκ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως ἕπεται ὅτι, ἵνα δύο ἀνύσματα, ἔχοντα διευθύνοντα συνημίτονα (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) συντεταγμένας δὲ προβολὰς $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ ἀντιστοίχως, εἶνε κάθετα ἐπ᾿ ἄλληλα, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν

$$\boxed{\begin{array}{l}\sigma\upsilon\nu\,\omega = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0\\ \text{ἢ}\quad \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0\end{array}} \qquad (1)$$

Ἤτοι «***πρέπει τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ὁμωνύμων διευθυνόντων συνημιτόνων (ἢ τῶν ὁμωνύμων συντεταγμένων προβολῶν) αὐτῶν νὰ ἰσοῦται μὲ μηδέν***».

β΄) Κατ᾿ ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι ἡ συνθήκη καθετότητος δύο εὐθειῶν, ἐχουσῶν ἐξισώσεις

$$x = \lambda_1 z + \alpha_1,\ y = \mu_1 z + \beta_1, \text{ καὶ } x = \lambda_2 z + \alpha_2,\ y = \mu_2 z + \beta_2$$

εἶνε ἡ $\boxed{\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + 1 = 0}$ (2)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Εὕρετε τὰς προβολὰς τοῦ ἀνύσματος (2, — 5, — 3) ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἐχούσης διευθύνοντα συνημίτονα $a = b = c = \sqrt{3} : 3$

2) Εὕρετε τὴν γωνίαν δύο ἀνυσμάτων, ἐχόντων διευθύνοντα συνημίτονα (a, b, c), $(\sqrt{3} : 3, \sqrt{3} : 3, \sqrt{3} : 3)$ ἀντιστοίχως.

3) Εὕρετε τὰς γωνίας, τὰς ὁποίας σχηματίζει τὸ ἄνυσμα, τὸ ἔχον διευθύνοντα συνημίτονα $(\sqrt{3} : 3, \sqrt{3} : 3, \sqrt{3} : 3)$, μὲ τὰ ἔχοντα τοιαῦτα $(-\sqrt{3} : 3, -\sqrt{3} : 3, -\sqrt{3} : 3)$, καὶ $(\sqrt{3} : 3, -\sqrt{3} : 3, \sqrt{3} : 3)$.

4) Τίς ἡ γωνία δύο εὐθειῶν παραλλήλων τῷ ἐπιπέδῳ xy, ἐχουσῶν διευθύνοντα συνημίτονα (a, b, o), (a′, b′, o) ἀντιστοίχως;

5) Θεωρήσατε δύο σημεῖα $M_1 (a_1, b_1, c_1)$, $M_2 (a_2, b_2, c_2)$ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας, ἐχούσης κέντρον τὴν ἀρχὴν o καὶ ἀκτῖνα 1. Εὕρετε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς $M_1 M_2$ τοῦ τριγώνου $oM_1 M_2$ καὶ ἀκολούθως τὸν τύπον τῆς § 80, α′.

6) Λύσατε τὸ ἀνάλογον πρόβλημα, ὅταν τὸ τρίγωνον $oM_1 M_2$ ἔχῃ ὀρθὴν τὴν γωνίαν o· εὕρετε τὸν τύπον (1) τῆς § 81, α′.

7) Ἐπὶ σφαίρας ἐχούσης κέντρον τὴν ἀρχὴν o καὶ ἀκτῖνα 1 ἔστω ὀρθογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ, μὲ ὀρθὴν γωνίαν τὴν Α. Ἔστω τὸ σημεῖον Α ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x, τὸ Β ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν xz, καὶ τὸ Γ ἐπὶ τοῦ xy. Αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου, ἤτοι αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ ἀκτῖνες oA, oB, oΓ μεταξὺ των ἀνὰ δύο ἔστωσαν α, β, γ.

Τότε α εἶνε ἡ ὑποτείνουσα καὶ β, γ αἱ κάθετοι πλευραί. Τὰ διευθύνοντα συνημίτονα τῶν ἀκτίνων oA, oB, oΓ εἶνε ἀντιστοίχως (1, o, o), (συν γ, o, συν (90° — γ)), (συν β, συν (90° — β), o). Ἐὰν προσδιορίσωμεν τὸ συν α διὰ τοῦ τύπου τῆς § 80, α′, εὑρίσκομεν ἕνα τῶν θεμελιωδῶν τύπων τῆς σφαιρικῆς Τριγωνομετρίας δι' ὀρθογώνια τρίγωνα, τὸν συν α = συν β συν γ.

§ 82. Διευθύνοντα συνημίτονα εὐθείας καθέτου ἐπὶ δύο ἄλλας.—

Ἔστωσαν (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) τὰ διευθύνοντα συνημίτονα δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, ἔστω τῶν (ε_1) καὶ (ε_2).

Ζητοῦνται τὰ διευθύνοντα συνημίτονα (a, b, c) εὐθείας (ε), καθέτου ἐπὶ τὰς (ε_1) καὶ (ε_2).

Ἕνεκα τῆς καθετότητος τῶν (ε) καὶ (ε_1) θὰ ἔχωμεν (§ 81, α′)

$$a\,a_1 + b\,b_1 + c\,c_1 = o. \qquad (1)$$

Ὁμοίως, ἕνεκα τῆς καθετότητος τῶν (ε) καὶ (ε_2) θὰ εἶνε

$$a\,a_2 + b\,b_2 + c\,c_2 = o. \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ εἶνε (§ 78, α′)

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

τοὐλάχιστον ἓν τῶν a, b, c εἶνε διάφορον τοῦ μηδενός. Ὑποθέτοντες τὸ $c \neq o$ καὶ λύοντες τὸ σύστημα τῶν (1) καὶ (2) ὡς πρὸς τοὺς λόγους $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ εὑρίσκομεν

$$a : (b_1 c_2 - b_2 c_1) = b : (c_1 a_2 - c_2 a_1) = c : (a_1 b_2 - a_2 b_1), \quad (3)$$

Ἂν παραστήσωμεν τοὺς ἴσους λόγους (3) διὰ k θὰ εἶνε

$$a = (b_1 c_2 - b_2 c_1).\ k,\ b = (c_1 a_2 - a_1 c_2).\ k,\ c = (a_1 b_2 - b_1 a_2).\ k.$$

Ὑψοῦντες ταύτας εἰς τὸ τετράγωνον καὶ προσθέτοντες κατὰ μέλη ἔχομεν

$$1 = [(b_1 c_2 - c_1 b_2)^2 + (c_1 a_2 - a_1 c_2)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2].\ k^2$$

Ἀλλ' ἂν ω παριστάνῃ τὴν γωνίαν τῶν (ε_1), (ε_2) θὰ εἶνε (§ 80, β')

$$1 = \eta\mu^2\, \omega.\ k^2$$

Ἑπομένως $\qquad k^2 = 1 : \eta\mu^2\, \omega$

Ἄρα

$$a = (b_1 c_2 - b_2 c_1) : \eta\mu\, \omega,\ b = (c_1 a_2 - c_2 a_1) : \eta\mu\, \omega,\ c = (a_1 b_2 - a_2 b_1) : \eta\mu\, \omega.$$

§ **83. Σχέσεις μεταξὺ τῶν διευθυνόντων συνημιτόνων τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων** oxyz **καὶ** ox'y'z'.—

α') Ἂν διὰ τῆς ἀρχῆς o συστήματος ὀρθογωνίων ἀξόνων oxyz φέρομεν τρεῖς εὐθείας ox', oy', oz' ἀνὰ δύο καθέτους ἐπ' ἀλλήλας, θὰ ἔχωμεν νέον σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων ox'y'z'. Ἐὰν (a_1, b_1, c_1) εἶνε τὰ διευθύνοντα συνημίτονα τοῦ ἄξονος τῶν x' καὶ (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3) τοῦ τῶν y' καὶ z' ὡς πρὸς τὸ σύστημα oxyz, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὴν (§ 78, α')

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= 1, \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 &= 1, \\ a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 &= 1, \end{aligned}\right| \quad (1)$$

Ἐπειδὴ δ' οἱ ἄξονες ox'y'z' εἶνε ἀνὰ δύο κάθετοι θὰ εἶνε

$$\left.\begin{aligned} a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 &= o, \\ a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 &= o, \\ a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 &= o. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Παρατηροῦντες ἤδη ὅτι τὰ διευθύνοντα συνημίτονα τοῦ ἄξονος τῶν x ὡς πρὸς τὸ σύστημα ox'y'z' εἶνε (a_1, a_2, a_3) τοῦ δὲ τῶν y καὶ

z τὰ (b_1, b_2, b_3) καὶ (c_1, c_2, c_3) ἀντιστοίχως, ἔχομεν κατ' ἀναλογίαν

$$\left.\begin{array}{l} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1, \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

καὶ

$$\left.\begin{array}{l} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = 0 \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

ϐ') Ἂν (x, y, z) εἶνε αἱ συντεταγμέναι σημείου τινὸς Μ τοῦ χώρου ὡς πρὸς τὸ σύστημα $oxyz$ καὶ (x', y', z') αἱ συντεταγμέναι αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸ $ox'y'z'$, δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὰ x, y, z διὰ τῶν x', y', z' καὶ τῶν ἐννέα ἀνωτέρω διευθυνόντων συνημιτόνων, καθὼς καὶ τὰ x', y', z' διὰ τῶν x, y, z (§ 22, γ', δ').

Παρατηρητέον ὅτι τὸ σύστημα $ox'y'z'$ προκύπτει ἐκ τοῦ $oxyz$ διὰ στροφῆς τούτου περὶ τὴν ἀρχὴν o.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Παρατηρήσατε τί προκύπτει, ἂν ὁ ἄξων τῶν z' συμπίπτῃ μὲ τῶν z, ὁπότε ἔχομεν στροφὴν τοῦ ἀρχικῶς δοθέντος συστήματος ἀξόνων περὶ τὸν ἄξονα τῶν z κατὰ γωνίαν τινὰ φ.

2) Λύσατε τὰς ἐξισώσεις αἵτινες δίδουν τὰ x', y', z' (§ 22 δ') ὡς πρὸς x, y, z καὶ δώσατε γεωμετρικὴν ἑρμηνείαν εἰς τὸν ἐν τῇ λύσει προκύπτοντα παρονομαστὴν τῶν κλασμάτων. Δείξατε ὅτι ὁ παρονομαστὴς οὗτος εἶνε ἴσος μὲ ± 1 καὶ μάλιστα $+1$, ἂν τὰ δύο συστήματα συμπίπτουν διὰ στροφῆς καὶ κατὰ φορὰν τοὐναντίον δὲ -1, ἂν δὲν εἶνε τοῦτο δυνατόν.

3) Ἔστω ὅτι εἰς τὸ παλαιὸν σύστημα τῶν συντεταγμένων αἱ συντεταγμένα (x, y, z) σημείου τινὸς Μ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$. Δείξατε διὰ τῶν τύπων μετασχηματισμοῦ ὅτι καὶ αἱ νέαι συντεταγμέναι (x', y', z') τοῦ σημείου τούτου ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \rho^2.$$

4) Δείξατε ὅτι τὸ σύστημα τῶν ἀνωτέρω ἐν λόγῳ ἐξισώσεων (§ 22) ἰσχύει καὶ ὅταν τὸ παλαιὸν σύστημα τῶν ἀξόνων εἶνε ὀρθογώνιον, τὸ δὲ νέον πλαγιογώνιον.

5) Αἱ συντεταγμέναι ἑνὸς σημείου Μ (x, y, z) ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1.$$

Εὕρετε τὴν ἀντίστοιχον ἐξίσωσιν τὴν ὁποίαν ἐπαληθεύουν τὰ (x', y', z') τοῦ αὐτοῦ σημείου ὡς πρὸς τὸ νέον σύστημα τῶν ἀξόνων.

§ 84. Γωνία εὐθείας καὶ ἐπιπέδου. —

α') Πρὸς εὕρεσιν τῆς γωνίας εὐθείας καὶ ἐπιπέδου, ἐπειδὴ αὕτη εἶνε συμπλήρωμα τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ εὐθεῖα μὲ τὴν κάθετον εὐθεῖαν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὰ διευθύνοντα συνημίτονα τῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον καθέτου εὐθείας.

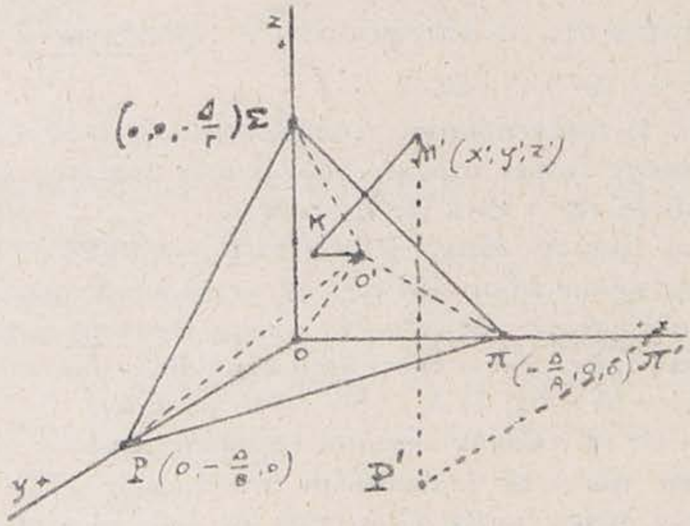
Ἔστω $$Ax + By + \Gamma z + \Delta = o \qquad (1)$$

ἡ ἐξίσωσις τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου, καὶ oo′ τὸ ἐκ τῆς ἀρχῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κάθετον ἄνυσμα, R_o τὸ ἀπόλυτον μῆκος τοῦ oo′ καὶ (a,b,c) τὰ διευθύνοντα συνημίτονα αὐτοῦ. Ἂν Π, P, Σ εἶνε τὰ σημεῖα καθ' ἃ τὸ ἐπίπεδον (1) τέμνει τοὺς ἄξονας, ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων oo′Π, oo′P, oo′Σ εὑρίσκομεν (σχ. 71).

$$(oo') = (o\Pi)\, a = (oP).b = (o\Sigma).\, c$$

ἢ $$(oo') = -\frac{\Delta}{A}\, a = -\frac{\Delta}{B}\, b = -\frac{\Delta}{\Gamma}\, c.$$

Ἑπομένως $$\frac{(o'o)}{\Delta} = \frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{\Gamma} \qquad 2)$$



(Σχ. 71)

(Ἐὰν εἶνε Δ = o, θεωροῦμεν ἄλλο ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ δοθέν, διὰ τὸ ὁποῖον θὰ εἶνε Δ ≠ o, ἐνῷ τὰ διευθύνοντα συνημίτονα τοῦ ἐπ' αὐτὸ καθέτου ἀνύσματος θὰ εἶνε τὰ αὐτά).

Ἐκ τῶν (2) ἔχομεν

$$\frac{(o'o)}{\Delta} = \frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{\Gamma} = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}$$

καὶ $$a = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}},\quad b = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}.$$

$$c = \frac{\Gamma}{\pm\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}},\quad R_o = \frac{\Delta}{\pm\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}} \qquad (3)$$

Οἱ ἀνωτέρω τύποι ὁρίζουν τὰ a, b, c, R_0 καὶ λαμβάνομεν τὸ σημεῖον + ἢ — τοῦ ριζικοῦ, ἂν τὸ ἄνυσμα (Α,Β,Γ) ἔχῃ φορὰν συμπίπτουσαν μὲ τὴν φοράν, ἥτις βαίνει ἀπό τινος σημείου τοῦ ἐπιπέδου πρὸς τὸ θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν μέρος τοῦ χώρου ὡς πρὸς αὐτό.

Ἀνάλογα παρατηροῦμεν ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τῆς τιμῆς τοῦ R_0. Ἤτοι θεωροῦμεν τοῦτο θετικόν, ἂν ἡ ἀρχὴ κεῖται εἰς τὸ θετικὸν μέρος τοῦ χώρου ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον.

β′) Ἐκ τῶν (2) ἕπεται ὅτι τὰ Α, Β, Γ εἶνε συντεταγμέναι προβολαὶ ἀνύσματος, παραλλήλου πρὸς τὸ ἄνυσμα (a, b, c), τὸ ἔχον ἀρχὴν τὸ ο καὶ μῆκος ἴσον τῇ μονάδι, ἤτοι· «***τὸ ἄνυσμα (Α, Β, Γ) εἶνε κάθετον τῷ ἐπιπέδῳ*** $A x + B y + \Gamma z + \Delta = o$».

γ′) Ἂν τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως $A\ x + B\ y + \Gamma\ z + \Delta = o$ διαιρέσωμεν διὰ $\pm\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}$ εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου ὑπὸ τὴν ***ἀνηγμένην*** μορφὴν (§ 70, γ′)

$$\boxed{a\,x + b\,y + c\,z + R_0 = o}$$

ἐνῶ (a, b, c) εἶνε τὰ διευθύνοντα συνημίτονα τῆς εὐθείας, ἥτις εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, R_0 δὲ παριστάνει τὴν ἀπόστασιν τοῦ ἐπιπέδου ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων.

δ′) Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις δοθείσης εὐθείας

$$\frac{y-x_1}{\alpha} = \frac{y-y_1}{\beta} = \frac{z-z_1}{\gamma}$$

καὶ ἡ ἐξίσωσις δοθέντος ἐπιπέδου $A\,x + B\,y + \Gamma\,z + \Delta = o$.

Ζητεῖται ἡ γωνία αὐτῶν.

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἄνυσμα (Α, Β, Γ) εἶνε κάθετον τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ (α, β, γ) εἶνε παράλληλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ. Ἡ ζητουμένη γωνία, ἥτις ἔστω ω, εἶνε συμπλήρωμα τῆς γωνίας τῶν δύο τούτων ἀνυσμάτων. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν (§ 80)

$$\eta\mu\ \omega = \frac{A\,\alpha + B\,\beta + \Gamma\,\gamma}{\pm\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$$

ε′) Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης συνάγομεν ὅτι, «***ἵνα ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα εἶνε παράλληλος πρὸς τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε*** $A\,\alpha + B\,\beta + \Gamma\,\gamma = o$».

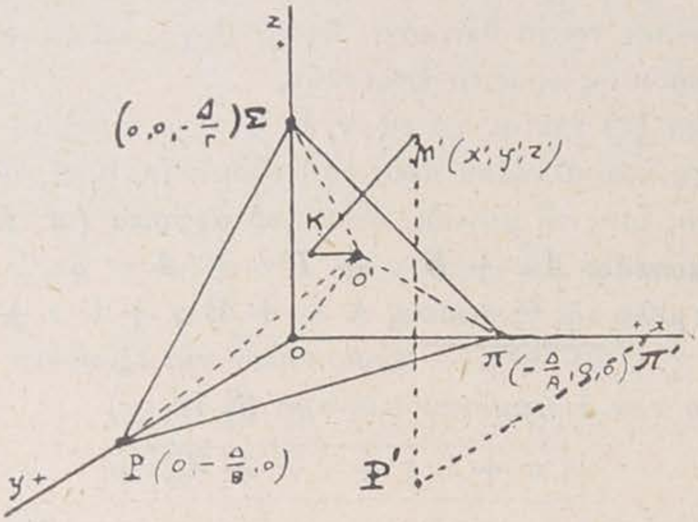
§ **85. Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ δοθέντος ἐπιπέδου.**— Ἔστω ἡ ἐξίσωσις δοθέντος ἐπιπέδου

$$A\,x + B\,y + \Gamma\,z + \Delta = o \qquad (1)$$

καὶ (x′, y′, z′) αἱ συντεταγμέναι δοθέντος σημείου Μ′.

Ζητεῖται ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου M′ ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου.

Ἔστω R ἡ ζητουμένη ἀπόστασις (KM′) (σχ.72). Ἐκ τῆς ἀρχῆς o φέρομεν τὸ ἄνυσμα oo′ κάθετον τῷ ἐπιπέδῳ, ἔστωσαν δὲ (a, b, c) τὰ διευθύνοντα συνημίτονα τούτου. Ἐπειδὴ ἔχομεν



(Σχ. 72)

$$KM' = Ko' \# o'o \# o\Pi' \# \Pi'P' \# P'M',$$

θὰ εἶνε

$$\text{προβ.}\,(KM')_{oo'} = \text{πρ.}\,(Ko')_{oo'} + \text{πρ.}\,(o'o)_{oo'} + $$
$$+ \text{προβ.}\,(o\Pi')_{oo'} + \text{πρ.}\,(\Pi'P')_{oo'} + \text{πρ.}\,(P'M')_{oo'}$$

Ἀλλ' εἶνε

$(o\Pi') = x'$, $(\Pi'P') = y'$, $(P'M') = z'$, $\text{πρ.}\,(KM')_{oo'} = (KM')$, $\text{πρ.}(Ko')_{oo'} = o$, $\text{πρ.}(o'o)_{oo'} = o'o$, $\text{πρ.}(o\Pi')_{oo'} = ax'$, $\text{πρ.}(\Pi'P')_{oo'} = by'$, $\text{πρ.}(P'M')_{oo'} = cz'$.

Ἑπομένως ἔχομεν $\quad R = ax' + by' + cz' + o'o \qquad (2)$

Λαμβάνοντες τὰς τιμὰς τῶν a, b, c, R_0, ἐκ τῶν (3) τῆς § 84 εὑρίσκομεν

$$\boxed{R = \frac{A\,x' + B\,y' + \Gamma\,z' + \Delta}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}} \qquad (3)$$

Ἐκ τῶν δύο σημείων τοῦ ῥιζικοῦ λαμβάνομεν τὸ + ἢ —, ἂν τὸ σημεῖον M′ κεῖται εἰς τὸ θετικὸν ἢ τὸ ἀρνητικὸν μέρος τοῦ χώρου ὡς πρὸς τὸ (1).

Ἂν τὸ σημεῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, θὰ εἶνε R = o, καὶ τοὐναντίον. Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου δύνατα νὰ ἔχῃ τὴν μορφὴν (§ 84, γ′) $\quad a\,x + d\,y + c\,z + R_0 = o.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Εὕρετε τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου (2, —5.3) ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου διὰ τὸ ὁποῖον εἶνε $a = b = c = \sqrt{3} : 3$, $Ro = -6$. Πρὸς ποῖον μέρος τοῦ ἐπιπέδου κεῖται τὸ σημεῖον;

2) Εὕρετε, ἂν τὰ σημεῖα (1, ο, 5), (2, —1, 4), (7, 2, 2), (3, $\sqrt{2}$, —2) κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου διὰ τὸ ὁποῖον εἶνε

$$a = \sqrt{3} : 3 = c, \quad b = -\sqrt{3} : 3, \quad R_0 = -7\sqrt{3} : 3.$$

3) Εἰς τίνα σημεῖα τὸ ἐπίπεδον δι' ὃ εἶνε δεδομένα τὰ a, b, c, R_0 τέμνει τοὺς ἄξονας;

4) Σημείου τινὸς εἶνε γνωστὰ τὰ x, y. Εὕρετε τὸ z, ἐὰν γνωρίζετε ὅτι κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, διὰ τὸ ὁποῖον εἶνε

$$a = 4 : \sqrt{50}, \; b = \sqrt{2} : 2, \; c = -3 : \sqrt{50}, \; R_0 = -\sqrt{2} : 5.$$

5) Εὕρετε τὰς ἀποστάσεις τοῦ σημείου (x, y, z) ἀπὸ τῶν τριῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων.

6) Ἐξετάσατε τὴν θέσιν τῶν ἐπιπέδων, διὰ τὰ ὁποῖα ἐκ τῶν τριῶν a, b, c ἓν ἢ δύο εἶνε ἴσα μὲ μηδέν.

7) Εἰς τίνα σχέσιν εὑρίσκονται μεταξύ των τὰ ἐπίπεδα διὰ τὰ ὁποῖα εἶνε ἀντιστοίχως (a, b, c, R_0), $(-a, -b, -c, R_0)$;

§ 86. Γωνία δύο ἐπιπέδων καὶ συνθήκη καθετότητος αὐτῶν.—

α΄) Ἔστωσαν

$$\left.\begin{aligned} A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1 &= o \\ A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2 &= o \end{aligned}\right\} . \qquad (1)$$

αἱ ἐξισώσεις δύο ἐπιπέδων. Ζητεῖται ἡ γωνία αὐτῶν.

Ἐπειδὴ τὰ ἀνύσματα (A_1, B_1, Γ_1), (A_2, B_2, Γ_2) εἶνε ἀντιστοίχως κάθετα ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἔχομεν, ἂν ω παριστάνῃ τὴν γωνίαν τῶν δύο ἐπιπέδων (§ 80)

$$\sigma\upsilon\nu\, \omega = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + \Gamma_1 \Gamma_2}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + \Gamma_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + \Gamma_2^2}} \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν δύο σημείων τοῦ παρονομαστοῦ λαμβάνομεν τὸ + μέν, ἂν καὶ τὰ δύο ἀνύσματα (A_1, B_1, Γ_1), (A_2, B_2, Γ_2) κεῖνται πρὸς τὸ θετικὸν ἢ τὸ ἀρνητικὸν μέρος τοῦ χώρου ὡς πρὸς ἕκαστον τῶν ἀντιστοίχων ἐπιπέδων· μὲ τὸ — δέ, ἂν τὸ ἓν κεῖται πρὸς τὸ θετικὸν καὶ τὸ ἄλλο πρὸς τὸ ἀρνητικὸν μέρος τοῦ χώρου ὡς πρὸς τὸ ἀντίστοιχον ἐπίπεδον.

β΄) Ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως (2) ἕπεται ὅτι «***ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα τὰ δύο ἐπίπεδα (1) τέμνωνται καθέτως εἶνε***

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + \Gamma_1 \Gamma_2 = o».$$

§ 87. Ἐξισώσεις εὐθείας καθέτου ἐπὶ ἐπίπεδον.—

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις δοθέντος ἐπιπέδου

$$A x + B y + \Gamma z + \Delta = o$$

καὶ σημεῖον M′ (x′, y′, z′).

Ζητοῦνται αἱ ἐξισώσεις τῆς διὰ τοῦ M' καθέτου εὐθείας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

Αἱ ἐξισώσεις τῆς εὐθείας θὰ εἶνε τῆς μορφῆς (§ 45)

$$\frac{x-x'}{\alpha}=\frac{y-y'}{\beta}=\frac{z-z'}{\gamma}$$

ἐνῷ ἄγνωστα εἶνε τὰ α, β, γ.

Ἐπειδὴ τὸ μὲν ἄνυσμα (α, β, γ) εἶνε παράλληλον τῇ εὐθείᾳ, τὸ (Α,Β,Γ) κάθετον τῷ ἐπιπέδῳ, ἡ δὲ εὐθεῖα εἶνε κάθετος τῷ ἐπιπέδῳ, τὰ (α, β, γ), (Α, Β, Γ) εἶνε παράλληλα. Ἑπομένως ἔχομεν

$$\frac{\alpha}{A}=\frac{\beta}{B}=\frac{\gamma}{\Gamma}.$$

Ἂν θέσωμεν $\frac{\alpha}{A}=\lambda$, θὰ εἶνε $\alpha=A.\lambda$, $\beta=B.\lambda$, $\gamma=\Gamma.\lambda$.

Ἑπομένως αἱ ἐξισώσεις τῆς διὰ τοῦ M' εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον θὰ εἶνε αἱ

$$\frac{x-x'}{A}=\frac{y-y'}{B}=\frac{z-z'}{\Gamma}.$$

§ **88. Ἐξίσωσις ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ εὐθεῖαν.**—

Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις δοθείσης εὐθείας

$$\frac{x-x_1}{\alpha}=\frac{y-y_1}{\beta}=\frac{z-z_1}{\gamma}$$

καὶ M' (x',y',z') δοθὲν σημεῖον.

Ζητεῖται ἡ ἐξίσωσις τοῦ διὰ τοῦ M' ἀγομένου ἐπιπέδου, καθέτου τῇ εὐθείᾳ.

Ἡ ἐξίσωσις ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ M' εἶνε

$$A\,(x-x')+B\,(y-y')+\Gamma\,(z-z')=0$$

ἐνῷ ἄγνωστα εἶνε τὰ Α, Β, Γ.

Ἐπειδὴ τὸ μὲν ἄνυσμα (Α, Β, Γ) εἶνε κάθετον τῷ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ (α, β, γ) παράλληλον τῇ εὐθείᾳ θὰ εἶνε

$$\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}=\frac{\Gamma}{\gamma}.$$

Ἂν τεθῇ $\frac{A}{\alpha}=\lambda$, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις τοῦ καθέτου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ἐπιπέδου εἶνε

$$\alpha\,(x-x')+\beta\,(y-y')+\gamma\,(z-z')=0.$$

§ **89. Ἐξίσωσις ἐπιπέδου καθέτου ἄλλῳ δοθέντι.**—

Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις δοθείσης εὐθείας αἱ

$$\left.\begin{array}{l} A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1=0 \\ A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2=0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

δοθέντος δ' ἐπιπέδου ἡ

$$A x + B y + \Gamma z + \Delta = o \qquad (2)$$

Ζητεῖται ἡ ἐξίσωσις ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῆς (1) καὶ καθέτου τῷ (2).

Τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον ὡς διερχόμενον διὰ τῆς (1) θὰ ἔχῃ ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς (§ 41, β')

$$\mu_1 (A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1) + \mu_2 (A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2) = o \qquad (3)$$

ἢ $$(\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2) x + (\mu_1 B_1 + \mu_2 B_2) y + (\mu_1 \Gamma_1 + \mu_2 \Gamma_2) z + \mu_1 \Delta_1 + \mu_2 \Delta_2 = o.$$

Ἵνα τοῦτο εἶνε κάθετον τῷ (2) πρέπει καί ἀρκεῖ νὰ εἶνε (§ 86, β')

$$(\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2) A + (\mu_1 B_1 + \mu_2 B_2) B + (\mu_1 \Gamma_1 + \mu_2 \Gamma_2) \Gamma = o.$$

Ἐκ ταύτης εὑρίσκεται ὁ λόγος $\mu_1 : \mu_2$, εἰσάγοντες δὲ τὴν τιμήν αὐτοῦ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην ἐξίσωσιν.

§ 90. Ἐξίσωσις εὐθείας καθέτου ἄλλῃ δοθείσῃ εὐθείᾳ.— Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις δοθείσης εὐθείας

$$\frac{x-x_1}{\alpha} = \frac{y-y_1}{\beta} = \frac{z-z_1}{\gamma} \qquad (1)$$

καὶ (x', y', z') αἱ συντεταγμέναι δοθέντος σημείου M'.

Ζητοῦνται αἱ ἐξισώσεις τῆς διὰ τοῦ M' ἀγομένης καθέτου εὐθείας τῇ (1).

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ διὰ τοῦ M' ἀγομένου καθέτου ἐπιπέδου τῇ (1) εἶνε (§ 88) $\alpha (x-x') + \beta (y-y') + \gamma (z-z') = o \qquad (2)$

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ M' καὶ τῆς δοθείσης εὐθείας εἶνε (§ 48)

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x' & y' & z' & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & o \end{vmatrix} = o \qquad (3)$$

Αἱ ἐξισώσεις (2) καὶ (3) εἶνε αἱ ἐξισώσεις τῆς διὰ τοῦ M' ἀγομένης καθέτου εὐθείας τῇ (1), ὡς τομῆς τῶν ἐπιπέδων (2) καὶ (3).

§ 91. Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ δοθείσης εὐθείας.— Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις δοθείσης εὐθείας

$$\frac{x-x_1}{\alpha} = \frac{y-y_1}{\beta} = \frac{z-z_1}{\gamma}$$

καὶ M' (x', y', z') δοθὲν σημεῖον.

Ζητεῖται ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου ἀπὸ τῆς εὐθείας.

Ἔστω $(M'K) = r$ ἡ ζητουμένη ἀπόστασις. Θεωροῦντες καὶ τὸ σημεῖον M_1 τῆς δοθείσης εὐθείας, ἔχομεν ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $M'KM_1$

$$r^2 = (M'K)^2 = (M'M_1)^2 - (KM_1)^2.$$

Αἱ προβολαὶ τοῦ ἀνύσματος $M'M_1$ εἶνε $(x_1 - x',\ y_1 - y',\ z_1 - z')$. Ἡ (KM_1) παριστάνει τὴν ἀπόστασιν τοῦ M_1 ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἄγεται διὰ τοῦ M' κάθετον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἔχει ἐξίσωσιν (§ 88)

$$\alpha (x - x') + \beta (y - y') + \gamma (z - z') = o.$$

Ἑπομένως ἡ ἀπόστασις αὕτη ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ τύπου (§ 85)

$$(KM_1)^2 = \frac{[\alpha (x_1 - x') + \beta (y_1 - y') + \gamma (z_1 - z')]^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

Ἄρα εὑρίσκομεν

$$r^2 = \frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)[(x_1-x')^2+(y_1-y')^2+(z_1-z')^2] - [\alpha(x_1-x')+\beta(y_1-y')+\gamma(z_1-z')]^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$$

$$= \frac{[\gamma(y_1-y')-\beta(z_1-z')]^2+[\alpha(z_1-z')-\gamma(x_1-x')]^2+[\beta(x_1-x')-\alpha(y_1-y')]^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$$

Ἤτοι

$$\boxed{r = \pm \sqrt{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ x_1 - x' & y_1 - y' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ y_1 - y' & z_1 - z' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ z_1 - z' & x_1 - x' \end{vmatrix}^2} : \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$$

Λαμβάνομεν τὸ σημεῖον $+$ ἢ $-$ τοῦ ῥιζικοῦ καθόσον τὸ δοθὲν σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς θετικῆς φορᾶς τῆς καθέτου εὐθείας ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ M'.

§ 92. Ἀπόστασις δύο εὐθειῶν.—

α′) Ἔστωσαν

$$\frac{x - x_1}{\alpha_1} = \frac{y - y_1}{\beta_1} = \frac{z - z_1}{\gamma_1}, \qquad (1)$$

$$\frac{x - x_2}{\alpha_2} = \frac{y - y_2}{\beta_2} = \frac{z - z_2}{\gamma_2} \qquad (2)$$

αἱ ἐξισώσεις δύο εὐθειῶν. Ζητεῖται ἡ ἀπόστασις αὐτῶν.

Διὰ τῆς εὐθείας (1) φέρομεν ἐπίπεδον παράλληλον τῇ (2) (ἂν αἱ εὐθεῖαι δὲν τέμνωνται). Τοῦτο ἔχει ἐξίσωσιν (§ 49)

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & x - x_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & y - y_1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & z - z_1 \end{vmatrix} = o.$$

Ἂν εὕρωμεν τὴν ἀπόστασιν τυχόντος σημείου τῆς (2), ἄρα καὶ τοῦ M_2 (x_2, y_2, z_2) ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου τούτου, αὕτη θὰ παριστάνῃ τὴν ἀπόστασιν τῶν εὐθειῶν (1) καὶ (2).

Ἡ ἀπόστασις αὕτη δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & x_2 - x_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & y_2 - y_1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} : \pm \sqrt{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2}$$

β΄) Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι, «***ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα αἱ δύο εὐθεῖαι(1) καὶ (2) τέμνωνται εἶνε***

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & x_2 - x_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & y_2 - y_1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = o.$$

γ΄) ***Ἐξίσωσις τῆς κοινῆς καθέτου δύο εὐθειῶν.*** Ἂν ζητῆται ἡ ἐξίσωσις τῆς κοινῆς καθέτου τῶν εὐθειῶν (1) καὶ (2), εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἐπιπέδου (P), τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς o καὶ εἶνε παράλληλον πρὸς ἑκάστην τῶν (1), (2).

Αὕτη εἶνε (§ 49)

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & x \\ \beta_1 & \beta_2 & y \\ \gamma_1 & \gamma_2 & z \end{vmatrix} = o.$$

Ἀκολούθως εὑρίσκομεν τὰς ἐξισώσεις τῶν δύο ἐπιπέδων, τῶν διερχομένων διὰ τῶν εὐθειῶν (1) καὶ (2) ἀντιστοίχως, καθέτων δὲ τῷ (P) (§ 89). Αἱ ἐξισώσεις αὗται παριστάνουν τὴν κοινὴν κάθετον τῶν (1), (2) ἐπειδὴ αὕτη εἶνε τομὴ τῶν ἐπιπέδων τούτων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Δείξατε ὅτι ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις τῶν εὐθειῶν

$x = \lambda_1 z + \alpha_1,\ y = \mu_1 z + \beta_1$, **καὶ** $y = \lambda_2 z + \alpha_2,\ y = \mu_2 z + \beta_2$ **εἶνε**

$$(\alpha_1 - \alpha_2)(\mu_1 - \mu_2) - (\beta_1 - \beta_2)(\lambda_1 - \lambda_2) : \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2 + (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1)^2}$$

2) Εὕρετε τὸ μῆκος καὶ τὰς ἐξισώσεις τῆς ἐλαχίστης ἀποστάσεως τῆς εὐθείας, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ σημείου $M_1\ (x_1, y_1, z_1)$ **καὶ παραλλήλου τῷ ἀνύσματι** (α, β, γ) **ἀπὸ τοῦ ἄξονος τῶν** x **ἢ τῶν** y **ἢ τῶν** z.

3) Εὕρετε τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν τῶν εὐθειῶν

$$x - x_1 : \alpha = y - y_1 : \beta = z - z_1 : \gamma \text{ καὶ } x = y = z$$

καὶ τὰς ἐξισώσεις τῆς κοινῆς καθέτου αὐτῶν.

4) Εὕρετε τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν τῶν εὐθειῶν

$$x = \alpha,\ y = \beta, \text{ καὶ } x = y = z$$

5) Δίδεται τὸ τετράεδρον

$$M_1\ (3, 2, -4),\ M_2\ (1, -4, 5), M_3\ (6, 5, 9),\ M_4\ (2, -3, 1).$$

Φέρατε δι' ἑκάστης τῶν ἀκμῶν αὐτοῦ $M_1 M_2$ **καὶ** $M_3 M_4$ **ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰς ἄλλας. Εὕρετε τὰς ἐξισώσεις τῶν ἐπιπέδων τούτων, τὸ μῆκος, τὰ**

διευθύνοντα συνημίτονα καὶ τὰς ἐξισώσεις τῆς ἐλαχίστης ἀποστάσεως τῶν ἀκμῶν M_1 M_2 καὶ M_3 M_4.

6) Εὕρετε τὸ μῆκος καὶ τὰ διευθύνοντα συνημίτονα τῆς ἐλαχίστης ἀποστάσεως τῶν εὐθειῶν

$x - x_1 : \alpha,\ y - y_1 : \beta = z - z_1 : \gamma$ καὶ $x - x_2 : \alpha = y - y_2 : \beta = z - z_2 : \gamma$.

§ 93. Ἐμβαδὸν τριγώνου διὰ τῶν συντεταγμένων τῶν κορυφῶν αὐτοῦ.—

Ἔστωσαν $M_1 (y_1, y_1, z_1)$, $M_2 (x_2, y_2, z_2)$, $M_3 (x_3, y_3, z_3)$ αἱ κορυφαὶ τοῦ τριγώνου M_1 M_2 M_3.

Ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τούτου.

Ἂν E παριστάνῃ τὸ ζητούμενον ἐμβαδόν, E_z, E_y, E_x τὰ ἐμβαδὰ τῶν ὀρθῶν προβολῶν τοῦ M_1 M_2 M_3 ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων xy, xz, yz καὶ a, b, c τὰ διευθύνοντα συνημίτονα τῆς καθέτου εὐθείας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον M_1 M_2 M_3, θὰ ἔχωμεν (§ 11, δ')

$$E_z = E.c,\ E_y = E.b,\ E_x = E\,a.$$

Ὑψοῦντες τὰς ἰσότητας ταύτας εἰς τὸ τετράγωνον καὶ προσθέτοντες κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$E_z^2 + E_y^2 + E_x^2 = E^2 (a^2 + b^2 + c^2) = E^2.$$

Ἐπομένως $$E^2 = E_x^2 + E_y^2 + E_z^2.$$

Ἤτοι «***τὸ τετράγωνον τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου τινὸς ἐν τῷ διαστήματι ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἐμβαδῶν τῶν ὀρθῶν προβολῶν αὐτοῦ ἐπὶ τὰ συντεταγμένα ἐπίπεδα***».

Ἐκφράζοντες τὰ E_x, E_y, E_z διὰ τῶν συντεταγμένων τῶν κορυφῶν τῶν ἀντιστοίχων τριγώνων, εὑρίσκομεν

$$E^2 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \frac{1}{4}\begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \frac{1}{4}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2$$

ἢ συμβολικῶς

$$E = \pm \frac{1}{2}\sqrt{|x,y,\ 1|^2 + |y,z,\ 1|^2 + |z,x,\ 1|^2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Αἱ τρεῖς κορυφαὶ τριγώνου (1, 6, 1), (ο, — 1, — 1), (2, 3, 1) κεῖνται ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου, ἐνῷ ἡ θετικὴ φορὰ τῆς καθέτου ἐπ' αὐτὸ ἔχει διευθύνοντα συνημίτονα

$$\left(\frac{3}{\sqrt{35}},\ \frac{1}{\sqrt{35}},\ \frac{5}{\sqrt{35}}\right).$$

Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, ἂν τὰ τρία σημεῖα τῶν κορυφῶν αὐτοῦ θεωρούμενα ἀπὸ τῆς ἀρχῆς ο κατὰ σειρὰν διαδέχονται ἄλληλα κατὰ τὴν θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν φοράν.

2) Εὕρετε τὴν θετικὴν φορὰν τοῦ ὑπὸ τῶν (1, ο, ο), (ο, 1, ο), (ο, ο, 1) ὁριζομένου ἐπιπέδου, καθὼς καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τούτου.

3) Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τυχόντος ἐπιπέδου πολυγώνου (§ 11, ε').

4) Ἐπὶ σφαίρας, ἐχούσης κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ 1, λαμβάνομεν δύο σημεῖα (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) ἅτινα μὲ τὸ κέντρον ο ὁρίζουν ἓν τρίγωνον. Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τούτου διὰ τῆς γωνίας ω, τῶν εἰς τὰ σημεῖα ἀντιστοιχουσῶν ἀκτίνων, καὶ τῶν περιεχουσῶν αὐτὴν πλευρῶν αὐτοῦ. Ἐπίσης διὰ τῶν συντεταγμένων τῶν κορυφῶν αὐτοῦ καὶ εὕρετε διὰ συγκρίσεως τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας ω.

§ 94. Ὄγκος τετραέδρου διὰ τῶν συντεταγμένων τῶν κορυφῶν αὐτοῦ.—

Ἔστωσαν

$M_1\,(x_1, y_1, z_1)$, $M_2\,(x_2, y_2, z_2)$, $M_3\,(x_3, y_3, z_3)$, $M_4\,(x_4, y_4, z_4)$

αἱ συντεταγμέναι τῶν κορυφῶν τετραέδρου $M_1\,M_2\,M_3\,M_4$.

Ζητεῖται ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου τούτου.

Ἐὰν διὰ V παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ὄγκον, διὰ E τὸ ἐμβαδὸν τῆς τριγωνικῆς βάσεως $M_1\,M_2\,M_3$ καὶ διὰ τοῦ $υ$ τὸ ὕψος αὐτοῦ (ἀγόμενον ἐκ τῆς κορυφῆς M_4 ἐπὶ τὴν βάσιν $M_1\,M_2\,M_3$), θὰ ἔχωμεν

$$V = \frac{1}{3} E.\,υ.$$

Ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν E δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (§ 93).

$$E = \pm \frac{1}{2} \sqrt{|x, y, 1|^2 + |y, z, 1|^2 + |z, x, 1|^2}$$

τὸ δὲ ὕψος $υ$ εἶνε ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου $M_4\,(x_4, y_4, z_4)$ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τῶν M_1, M_2, M_3 καὶ ἔχει ἐξίσωσιν (§ 47, α').

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = o.$$

Ἄρα εἶνε (§ 85)

$$υ = \frac{\begin{vmatrix} x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}}{\pm\sqrt{|x, y, 1|^2 + |y, z, 1|^2 + |z, x, 1|^2}}$$

Ἑπομένως ἔχομεν

$$V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

Ὁ ὄγκος V θεωρεῖται θετικὸς (ἢ ἀρνητικός), ὅταν ἡ κορυφὴ M_4 κεῖται εἰς τὸ θετικὸν (ἢ ἀρνητικὸν) μέρος τοῦ χώρου ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως, ἂν καὶ τὸ ἐμβαδὸν ***E*** τῆς βάσεως εἶνε θετικόν. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ παρατηρητής, ἱστάμενος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως M_1 M_2 M_3 καὶ ἔχων τὴν κεφαλὴν αὐτοῦ πρὸς τὴν κορυφὴν τοῦ τετραέδρου M_4, βλέπει τὴν περίμετρον $M_1M_2M_3$ τῆς βάσεως διαγραφομένην κατὰ τὴν θετικὴν φοράν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1) Εὕρετε τὸν ὄγκον τοῦ τετραέδρου (o, o, o), (2, 5, — 1), (— 3, 2, 4), (2, 5, 3).

2) Εὕρετε τὸν ὄγκον τοῦ τετραέδρου (1, 2, 3), (1, — 2, 5), (— 4, 3, —5), (2, 2, 5) καὶ ὁρίσατε τὴν θέσιν τῆς κορυφῆς αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν βάσιν.

3) Τὸ ἐπίπεδον (2, 1, 2), (- 3, 2, 4), (— 1, — 5, 3) διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων, ἢ διὰ τοῦ (4, 5, - 1); Διατί;

4) Διὰ 4 στοιχείων M_1, M_2, M_3, M_4 σχηματίζονται 24 μεταθέσεις αὐτῶν. Ἑπομένως διὰ 4 σημείων (μὴ κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου) ὁρίζονται 24 τετράεδρα, μὲ ὄγκους διαφέροντας τὸ πολὺ κατὰ σημεῖον. Δείξατε ὅτι 12 τῶν τετραέδρων τούτων εἶνε θετικὰ καὶ 12 ἀρνητικά.

5) Ἐπὶ σφαίρας ἐχούσης κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν συντεναγμένων καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ 1, λαμβάνομεν τρία σημεῖα (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3). Εὕρετε τὸν ὄγκον τοῦ τετραέδρου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὰ τρία σημεῖα καὶ τὴν ἀρχὴν o.

§ 95. Πολικαὶ συντεταγμέναι ἐν τῷ διαστήματι.—

α΄) Δοθέντος ἐν τῷ διαστήματι συστήματος ὀρθογωνίων ἀξόνων oxyz (σχ. 73) δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὴν θέσιν σημείου τινὸς M τοῦ χώρου διὰ τῶν ἑξῆς τριῶν ποσοτήτων, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται ***πολικαὶ συντεταγμέναι*** τοῦ σημείου.

1) διὰ τοῦ ἀριθμοῦ ρ, ὅστις παριστάνει τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος oM, τὸ ὁποῖον καλεῖται ***ἐπιβατικὴ ἀκτὶς*** τοῦ M, δηλαδὴ διὰ τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου M ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων o, τὸ ὁποῖον καλεῖται καὶ ***πόλος***· 2) διὰ τῆς γωνίας $\varphi = zoM$, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ oM μὲ τὸν ἄξονα oz· 3) διὰ τῆς γωνίας $\psi = xoP$, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον xoy ὀρθὴ προβολὴ oP τῆς oM μὲ τὸν ἄξονα ox, ἥτις γωνία μετρεῖ τὴν δίεδρον γωνίαν τῶν ἐπιπέδων zox, zoM.

Αἱ πολικαὶ συντεταγμέναι τοῦ M σημειώνονται συνήθως ὡς ἑξῆς M (ϱ, φ, ψ).

Ἡ ἐπιβατικὴ ἀκτὶς ϱ, λαμβανομένη συνήθως θετική, μεταβάλλεται ἀπὸ 0 μέχρι $+\infty$˙ ἡ γωνία φ μεταβάλλεται συνήθως ἀπὸ 0^0 μέχρις 180^0, ἡ δὲ γωνία ψ, διὰ τὴν μέτρησιν τῆς ὁποίας θετικὴ φορὰ θεωρεῖται ἡ τῆς ὀρθῆς γωνίας xoy (ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά), ἀπὸ 0^0 μέχρι 360^0.

Ἐνίοτε προτιμᾶται ἀντὶ τῆς γωνίας φ = zoM ἡ συμπληρωματικὴ αὐτῆς φ′ = PoM, ἥτις λαμβάνεται ἀπὸ 0^0 μέχρις $+ 90^0$ διὰ τὰ σημεῖα M, τὰ κείμενα ἄνω τοῦ ἐπιπέδου xy, καὶ ἀπὸ 0^0 μέχρις -90^0 διὰ τὰ κείμενα κάτω τοῦ xy.

β′) Διὰ νὰ εὕρωμεν τύπους χρησιμεύοντας διὰ τὴν μετάβασιν ἐκ τῶν εὐθυγράμμων ὀρθογωνίων συντεταγμένων εἰς πολικάς, καὶ ἀντιστρόφως, ἔχομεν ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου oPM

$$(oP) = (oM)\ \text{συν}\ (PoM) = \varrho\ \text{συν}\ (90^0 - \varphi) = \varrho\ \text{ημ}\ \varphi˙$$

$$(PM) = (oM)\ \text{ημ}\ (90^0 - \varphi) = \varrho\ \text{συν}\ \varphi.$$

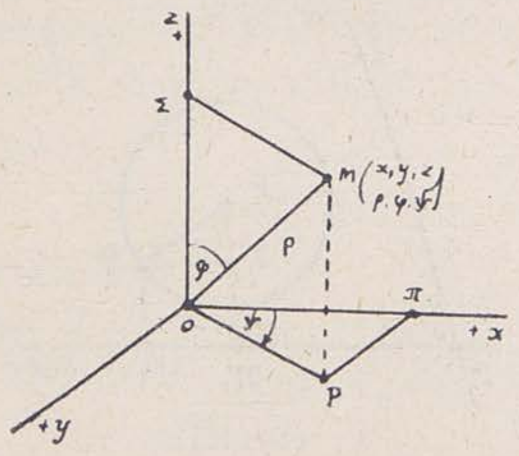
Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου oΠP ἔχομεν

$$(o\Pi) = (oP)\ \text{συν}\ \psi = \varrho\ \text{ημ}\ \varphi .\ \text{συν}\ \psi˙$$

$$(\Pi P) = (oP)\ \text{ημ}\ \psi = \varrho\ \text{ημ}\ \varphi .\ \text{ημ}\ \psi$$

Ἤτοι (ἐπειδὴ εἶνε (oΠ) = x, (ΠP) = y, (PM) = z)

$$\boxed{x = \varrho\ \text{ημ}\ \varphi\ \text{συν}\ \psi,\ y = \varrho\ \text{ημ}\ \varphi\ \text{ημ}\ \psi,\ z = \varrho\ \text{συν}\ \varphi} \quad (1)$$



(Σχ. 73)

Οἱ τύποι (1) δίδουν τὰς εὐθυγράμμους συντεταγμένας x,y,z, διὰ τῶν πολικῶν ϱ, φ, ψ. Διαιροῦντες τὴν δευτέραν διὰ τῆς πρώτης (κατὰ μέλη), εὑρίσκομεν

$\varepsilon\varphi\,\psi = \frac{y}{x}$. Ἐκ τῆς τρίτης τῶν (1) εὑρίσκομεν $\sigma\upsilon\nu\,\varphi = \frac{z}{\rho}$.
Ἔχομεν ὡς γνωστὸν (§ 77, α΄).

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Οὕτω οἱ τύποι, οἵτινες δίδουν τὰς πολικὰς συντεταγμένας ρ, φ, ψ διὰ τῶν εὐθυγράμμων x, y, z εἶνε

$$\boxed{\varepsilon\varphi\,\psi = \frac{y}{x},\ \sigma\upsilon\nu\,\varphi = \frac{z}{\rho},\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad (2)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1) Ποῦ κεῖνται πάντα τὰ σημεῖα σφαίρας, ἐχούσης κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ 1, διὰ τὰ ὁποῖα τὸ φ ἢ τὸ ψ εἶνε τὸ αὐτό;

2) Ποῦ κεῖνται πάντα τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ αὐτὸ ρ ἴσον μὲ α διάφορα δὲ φ καὶ ψ;

3) Τί παριστάνει ἡ ἐξίσωσις ψ=γ εἰς πολικὰς συντεταγμένας ;

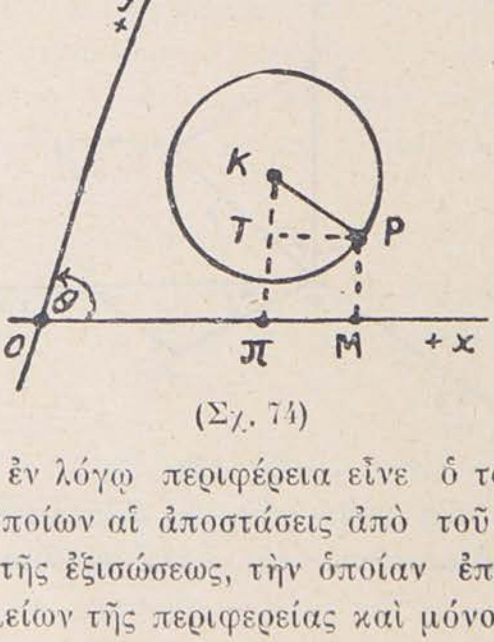
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

Περὶ περιφερείας κύκλου

§ 96. Ἐξίσωσις περιφερείας κύκλου.—

α΄) Ἔστωσαν ἄξονες πλαγιογώνιοι oxy ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, σχηματίζοντες γωνίαν θ καὶ περιφέρεια κύκλου ἐν αὐτῷ, ἔχουσα κέντρον Κ (α,β) καὶ ἀκτῖνα ρ (σχ. 74).

Ζητεῖται ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας ταύτης.



(Σχ. 74)

Ὡς γνωστόν, ἡ ἐν λόγῳ περιφέρεια εἶνε ὁ τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ ἰσοῦται μὲ ρ. Πρὸς εὕρεσιν τῆς ἐξισώσεως, τὴν ὁποίαν ἐπαληθεύουν αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων τῆς περιφερείας καὶ μόνον αὐταί, ἀρκεῖ νὰ ἐκφράσωμεν, ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ τυχόντος σημείου Μ (x, y) τῆς περιφερείας ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ (α, β) εἶνε ἴση μὲ ρ.

Ἀλλ' ἐπειδὴ αἱ συντεταγμέναι προβολαὶ τοῦ ἀνύσματος ΚΜ, αἱ (ΡΤ) καὶ (ΤΚ) εἶνε (x—α), καὶ (y—β), τὸ δὲ τετράγωνον $(ΚΡ)^2$ τοῦ μήκους αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ (§ 62, (3))

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2(x-\alpha)(y-\beta)\,\text{συν}\,\theta$$

ἕπεται ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας εἶνε

$$\boxed{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2(x-\alpha)(y-\beta)\,\text{συν}\,\theta = \rho^2} \qquad (1)$$

Διότι, αἱ συντεταγμέναι τοῦ τυχόντος σημείου τῆς περιφερείας ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, ἐπειδὴ τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς παριστάνει τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τυχόντος σημείου Μ τοῦ ἐπιπέδου ἀπὸ τὸ Κ, τὸ ὁποῖον διὰ τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ἰσοῦται μὲ ρ^2. Ἂν δὲ τὸ σημεῖον κεῖται ἐκτὸς ἢ ἐντὸς τοῦ κύκλου, τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως αὐτοῦ ἀπὸ τὸ Κ θὰ εἶνε μεγαλύτερον ἢ μικρότερον τοῦ ρ^2, καὶ ἡ ἐξίσωσις δὲν θὰ ἐπαληθεύεται.

β') Ἂν οἱ ἄξονες εἶνε ὀρθογώνιοι, ὁπότε θὰ εἶνε συν θ = ο, ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, τοῦ ἔχοντος κέντρον Κ (α, β), καὶ ἀκτῖνα ρ, θὰ εἶνε

$$\boxed{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \rho^2} \qquad (2)$$

γ') Ἂν τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εἶνε ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων, ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας αὐτοῦ θὰ εἶνε (α=β=ο)

$$x^2 + y^2 + 2\,x\,y\,\text{συν}\,\theta = \rho^2,$$

εἰς ἄξονας πλαγιογωνίους,

καὶ

$$\boxed{x^2 + y^2 = \rho^2} \qquad (3)$$

εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους ($\theta = 90^\circ$).

δ') Ἂν τὸ κέντρον Κ τοῦ κύκλου κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x, εἶνε δὲ Κ (α, ο) ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας αὐτοῦ θὰ εἶνε

$$(x-\alpha)^2 + y^2 = \rho^2 \qquad (4)$$

εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους.

Ἂν κέντρον εἶνε τὸ σημεῖον Κ (ο, β) ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y, θὰ ἔχωμεν ὡς ἐξίσωσιν τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ($\theta = 90^\circ$)

$$x^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2 \qquad (5)$$

Ἂν ἡ περιφέρεια ἐφάπτεται τῶν ἀξόνων καὶ ἔχῃ ἀκτῖνα ϱ, ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς θὰ εἶνε $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$

$$(x-\varrho)^2 + (y-\varrho)^2 = \varrho^2 \qquad (6)$$

ἐπειδὴ ἔχομεν Κ (ϱ, ϱ).

ε΄) Ἀναπτύσσοντες τὴν ἐξίσωσιν (2)

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \varrho^2,$$

εὑρίσκομεν

$$x^2 - 2\,\alpha\, x + \alpha^2 + y^2 - 2\,\beta\, y + \beta^2 - \varrho^2 = o,$$

ἢ $$x^2 + y^2 - 2\,\alpha\, x - 2\,\beta\, y + (\alpha^2 + \beta^2 - \varrho^2) = o.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶνε τῆς μορφῆς

$$x^2 + y^2 + A\, x + B\, y + \Gamma = o,$$

ἐνῶ ἐτέθη

$$-2\,\alpha = A, \; -2\,\beta = B, \alpha^2 + \beta^2 - \varrho^2 = \Gamma.$$

Ἂν τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης πολλαπλασιασθοῦν ἐπί τινα σταθερὰν ποσότητα (διάφορον τοῦ μηδενὸς), ἔστω τὴν λ, θὰ ἔχωμεν

$$\lambda\, x^2 + \lambda\, y^2 + A\,\lambda\, x + B\,\lambda\, y + \lambda\,\Gamma = o$$

ἢ $$\lambda\, x^2 + \lambda\, y^2 + A'\, x + B'\, y + \Gamma' = o,$$

ἐνῶ ἐτέθη $$A' = \lambda\, A, B' = \lambda\, B, \Gamma' = \lambda\, \Gamma.$$

Ἤτοι, «***ἡ γενικὴ ἐξίσωσις περιφερείας κύκλου εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους εἶνε δευτέρου βαθμοῦ ὡς*** x ***καὶ*** y, ***ἐν τῇ ὁποίᾳ ἐλλείπει ὁ ὅρος μὲ τὸ*** xy, ***οἱ δὲ συντελεσταὶ τοῦ*** x^2 ***καὶ*** y^2 ***εἶνε ἴσοι· ἑπομένως εἶνε τῆς μορφῆς***

$$x^2 + y^2 + A\, x + B\, y + \Gamma = o».$$

ϛ΄) «***Πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς***

$$x^2 + y^2 + A\, x + B\, y + \Gamma = o$$

παριστάνει, ἐν γένει, περιφέρειαν κύκλου ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους».

Πράγματι δυνάμεθα νὰ ἀναγάγωμεν τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εἰς τὴν μορφὴν (2), ἂν γράψωμεν αὐτὴν ὡς ἑξῆς

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2+B^2}{4} - \Gamma.$$

Θέτομεν ἤδη

$$\frac{A}{2} = -\alpha, \frac{B}{2} = -\beta, \quad \varrho^2 = \frac{A^2+B^2}{4} - \Gamma$$

ὅτε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\varrho^2$, ἥτις παριστάνει περιφέρειαν κύκλου, ἔχουσαν κέντρον τὸ Κ $\left(\alpha=-\frac{A}{2}, \beta=-\frac{A}{2}\right)$ καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ $\varrho=\sqrt{\frac{A^2+B^2}{4}-\Gamma}$.

Ἡ περιφέρεια αὕτη εἶνε πραγματική, ἂν τὸ $\frac{A^2+B^2}{4}-\Gamma$ εἶνε θετικόν· περιορίζεται εἰς τὸ κέντρον αὐτῆς, ἂν εἶνε $\frac{A^2+B^2}{4}-\Gamma=0$, εἶνε δὲ φανταστική, ἂν τὸ $\frac{A^2+B^2}{4}-\Gamma$ εἶνε ἀρνητικόν.

ζ΄) Ἂν οἱ ἄξονες εἶνε πλαγιογώνιοι καὶ σχηματίζουν γωνίαν θ, ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας κύκλου μετὰ τὴν ἀναγωγὴν εἶνε τῆς μορφῆς

$$x^2+y^2+2\,xy\,\sigma\upsilon\nu\,\theta+A\,x+B\,y+\Gamma=0.$$

Ἤτοι «***ἡ περιφέρεια κύκλου εἰς ἄξονας πλαγιογωνίους παρίσταται ὑπὸ ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς*** x ***καὶ*** y, ***περιεχούσης τὰ τετράγωνα τῶν*** x ***καὶ*** y ***μὲ συντελεστὰς ἴσους καὶ τὸ διπλάσιον γινόμενον αὐτῶν, πολλαπλασιασμένον ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας τῶν ἀξόνων***».

η΄) Ἀντιστρόφως, πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς

$$x^2+y^2+2\,xy\,\sigma\upsilon\nu\,\theta+A\,x+B\,y+\Gamma=0,$$

ἐνῷ θ παριστάνει τὴν γωνίαν τῶν ἀξόνων, παριστάνει περιφέρειαν κύκλου.

Διότι δύναται αὕτη νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2\,(x-\alpha)\,(y-\beta)\,\sigma\upsilon\nu\,\theta=\varrho^2,$$

ἂν τεθῇ

$$A=-2\,\alpha-2\,\beta\,\sigma\upsilon\nu\theta,\ B=-2\,\beta-2\,\alpha\,\sigma\upsilon\nu\theta,$$

$$\Gamma=\alpha^2+\beta^2+2\,\alpha\,\beta\,\sigma\upsilon\nu\,\theta-\varrho^2.$$

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν τὸ κέντρον (α, β) καὶ τὴν ἀκτῖνα ρ τῆς περιφερείας, ἐνῷ εἶνε

$$\alpha=\frac{-A+B\sigma\upsilon\nu\theta}{2\,\eta\mu^2\theta},\quad \beta=\frac{-B+A\sigma\upsilon\nu\theta}{2\,\eta\mu^2\theta},$$

$$\varrho^2=\alpha^2+\beta^2+2\,\alpha\,\beta\,\sigma\upsilon\nu\,\theta-\Gamma.$$

Ἡ περιφέρεια αὕτη εἶνε πραγματική, ἂν τὸ

$$\alpha^2+\beta^2+2\,\alpha\,\beta\,\sigma\upsilon\nu\theta-\Gamma$$

εἶνε θετικόν· φανταστική, ἂν τοῦτο εἶνε ἀρνητικόν· καταντᾷ δὲ σημεῖον, ἂν τοῦτο εἶνε ἴσον μὲ μηδέν.

θ′) Ἡ γενικωτέρα ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, y εἶνε τῆς μορφῆς

$$A x^2 + B x y + \Gamma y^2 + \Delta x + E y + Z = o.$$

Ἵνα αὕτη παριστάνῃ περιφέρειαν κύκλου εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους, πρέπει νὰ ἔχωμεν $A = \Gamma$, $B = o$· εἰς πλαγιογωνίους δέ, ἂν εἶνε $A = \Gamma$ καὶ $B = 2\ A\ \text{συν}\,\theta$, ἐνῷ θ παριστάνει τὴν γωνίαν τῶν ἀξόνων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Ἄξονες ὀρθογώνιοι). **1)** Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς περιφερείας κύκλου, ἐχούσης κέντρον (— 3, —5) καὶ ἀκτῖνα 4. Ποῦ κεῖται ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων ὡς πρὸς τὸν κύκλον τοῦτον;

2) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς περιφερείας, τῆς ἐχούσης κέντρον (2, − 3) καὶ διερχομένης διὰ τῆς ἀρχῆς.

3) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς περιφερείας, ἐχούσης κέντρον (5, ο) καὶ ἐφαπτομένης τῆς εὐθείας $x = y$.

4) Εὕρετε τὴν τομὴν τῆς περιφερείας

$$\alpha\,(x^2 + y^2) + \beta\,x + \gamma\,y + \delta = o$$

μὲ τοὺς ἄξονας, καὶ δείξατε ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἀνυσμάτων τοῦ ἄξονος τῶν **x**, τῶν ἐχόντων ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων καὶ πέρας τὰς τομὰς τοῦ ἄξονος μὲ τὴν περιφέρειαν ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἀντιστοίχων ἀνυσμάτων ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y.

5) Ἔστωσαν λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 τέσσαρες ἀριθμοί, πληροῦντες τὴν σχέσιν $\lambda_1 \lambda_2 = \mu_1\ \mu_2$.

Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν περιφερείας, τεμνούσης τοὺς ἄξονας εἰς τὰ σημεῖα (λ_1, o), (λ_2, o), (o, μ_1), $(o\ \mu_2)$.

6) Εὕρετε τὸ κέντρον καὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου

$$2\,(x^2 + y^2) - 2\,x + 6\,y - 3 = o,$$

7) Εὕρετε τὰς ἐξισώσεις τῶν περιφερειῶν, αἵτινες ἐφάπτονται τοῦ ἄξονος τῶν x (τῶν y) εἰς τὸ σημεῖον $x = \alpha$ $(y = \beta)$.

8) Σημεῖον κινεῖται, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τῶν συντεταγμένων αὐτοῦ νὰ εἶνε ἰσοδύναμον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως αὐτοῦ ἀπὸ τῆς εὐθείας $x + y = \alpha$. Τίνα γραμμὴν γράφει τὸ σημεῖον;

9) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς περιφερείας, τῆς ἐχούσης κέντρον τὴν ἀρχὴν καὶ διερχομένης διὰ τοῦ σημείου (— 5, 3).

10) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς περιφερείας, τῆς ἐχούσης κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων καὶ ἐφαπτομένης τῆς εὐθείας $A\,x + B\,y + \Gamma = o$.

11) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει κέντρον (3, — 2) καὶ ἐφάπτεται τῆς εὐθείας $y = 7x + 11$.

12) Δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις περιφερείας κύκλου εἰς πολικὰς συντεταγμένας,

έχούσης ἀκτῖνα α καὶ κέντρον μὲ πολικὰς συντεταγμένας (ρ_0, θ_0) εἶνε

$$\rho^2 + \rho_0^2 - 2\,\rho\,\rho_0\ \text{συν}\,(\theta - \theta_0) = \alpha^2.$$

13) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει ἀκτῖνα ρ, διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων, ὁ ἄξων τῶν y ἐφάπτεται αὐτῆς, ὁ δὲ τῶν x διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς (εἰς ἄξονας σχηματίζοντας γωνίαν 45°).

14) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς περιφερείας, ἥτις διέρχεται διὰ τῶν σημείων (2, 3), (4, 5), (6, 1), ἢ διὰ τῶν (ο, ο), (2, 3), (3, 4).

15) Εὕρετε τὸ κέντρον καὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας

$$x^2 + y^2 + x\,y + 4\,x - 6\,y + 1 = o.$$

16) Κατασκευάσατε τὴν περιφέρειαν, ἥτις ἔχει ἐξίσωσιν

$x^2 + y^2 + 5x = 3$, ἢ $x^2 + y^2 - 8x - 1 = o$, ἢ $x^2 + y^2 = 16$, ἢ $x^2 + y^2 + x + y = 8$.

17) Φέρατε τὰς ἐξισώσεις

$$x^2 + y^2 - 6\,x = 8\,y - 9,$$
$$x^2 + y^2 \quad 8\,x = 6\,y - 9,$$
$$x^2 + 5y^2 - 7\,x = 5\,y + 3 + 4\,y^2$$

εἰς τὴν μορφὴν $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2$, καὶ τίνα θέσιν ἔχουν αἱ περιφέρειαι αὗται ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας;

§ 97. Ἐξίσωσις περιφερείας ὁριζομένης ἐκ τριῶν σημείων αὐτῆς.

Ἔστωσαν $M_1\,(x_1, y_1)$, $M_2\,(x_2, y_2)$, $M_3\,(x_3, y_3)$ τρία σημεῖα, μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας (εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους). Ζητεῖται ἡ ἐξίσωσις τῆς δι' αὐτῶν διερχομένης περιφερείας.

Ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις θὰ εἶνε τῆς μορφῆς

$$x^2 + y^2 + A\,x + B\,y + \Gamma = o \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια θὰ διέρχεται διὰ τῶν M_1, M_2 καὶ M_3, θὰ ἔχωμεν

$$\left.\begin{array}{l} x_1^2 + y_1^2 + A\,x_1 + B\,y_1 + \Gamma = o, \\ x_2^2 + y_2^2 + A\,x_2 + B\,y_2 + \Gamma = o, \\ x_3^2 + y_3^2 + A\,x_3 + B\,y_3 + \Gamma = o. \end{array}\right| \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν τριῶν τούτων ἐξισώσεων εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν Α, Β, Γ. Αἱ τιμαὶ τούτων εἶνε κλάσματα, ἔχοντα κοινὸν παρονομαστὴν τὸ

$$x_1\,(y_2 - y_3) + x_2\,(y_3 - y_1) + x_3\,(y_1 - y_2),$$

ἢ τὴν ὁρίζουσαν $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$

ἥτις εἶνε διάφορος τοῦ μηδενός, διότι τὰ τρία δοθέντα σημεῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας (§ 31, ϛ'). Αἱ τιμαὶ τῶν Α, Β, Γ τιθέμεναι ἐν τῇ ἐξισώσει (1) δίδουν τὴν ζητουμένην ἐξίσωσιν, ἥτις γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

προκύπτουσα ἐκ τῶν (1) καὶ (2) δι' ἀπαλοιφῆς τῶν Α, Β, Γ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν περιφερείας, περιγεγραμμένης εἰς τὸ τρίγωνον (2, 3), (— 5, 1), (3, — 2).

2) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς περιφερείας, τῆς διερχομένης διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων καὶ τῶν σημείων (x_1, y_1), (x_2, y_2).

3) Εὕρετε τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας, ἥτις διέρχεται διὰ τριῶν σημείων M_1 (x_1, y_1), M_2 (x_2, y_2), M_3 (x_3, y_3) μὴ κειμένων ἐπ' εὐθείας καὶ δείξατε ὅτι αὕτη εἶνε πραγματική.

4) Εὕρετε τὴν ἀκτῖνα καὶ τὴν ἐξίσωσιν τῆς περιφερείας, ἥτις διέρχεται διὰ τῶν σημείων (ο, ο), (1, 2), (— 2, — 4).

§ 98. Θέσις εὐθείας ὡς πρὸς περιφέρειαν.—

α') Ἔστω περιφέρεια κύκλου, ἔχουσα κέντρον Κ (α, β) καὶ ἀκτῖνα ρ, τὸ ὁποῖον ἐκφράζομεν ἐνίοτε συμβολικῶς διὰ τοῦ (α, β, ρ), εἰς ἄξονας σχηματίζοντας γωνίαν θ καὶ εὐθεῖα μὲ ἐξίσωσιν τὴν

$$Ax + By + \Gamma = 0 \qquad (1)$$

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τῆς εὐθείας πρὸς τὴν περιφέρειαν ἐκ τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν. Γνωρίζομεν ὅτι, ἂν ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου Κ (α, β) τῆς περιφερείας ἀπὸ τῆς εὐθείας εἶνε μεγαλυτέρα, ἢ ἴση, ἢ μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος ρ, ἡ εὐθεῖα κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ἢ ἐφάπτεται αὐτοῦ, ἢ τέμνει αὐτὸν καὶ τὴν περιφέρειαν. Ἀλλ' ἡ ἀπόστασις τοῦ Κ (α, β) ἀπὸ τῆς εὐθείας (1), ἀπολύτως θεωρουμένη, εἶνε (§ 69, α')

$$\frac{(A\alpha + B\beta + \Gamma)\,\eta\mu\,\theta}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\,\sigma\upsilon\nu\,\theta}} \qquad (2)$$

Πρέπει λοιπὸν αὕτη νὰ εἶνε μεγαλυτέρα, ἢ ἴση, ἢ μικροτέρα τοῦ ρ κατὰ τὰς τρεῖς ἀναφερθείσας περιπτώσεις ἀντιστοίχως.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι «***ἵνα ἡ εὐθεῖα** $Ax + By + \Gamma = 0$ **κεῖται ἐκτὸς τῆς περιφερείας (α,β,ρ), ἢ ἐφάπτεται αὐτῆς, ἢ τέμνῃ αὐτήν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ παράστασις***

$$\frac{(A\alpha+B\beta+\Gamma)^2\,\eta\mu^2\theta}{A^2+B^2-2AB\,\sigma\upsilon\nu\theta} - \rho^2$$

ἢ ἡ $(A\alpha+B\beta+\Gamma)^2 \eta\mu^2\theta - \varrho^2 (A^2+B^2-2AB\sigma\upsilon\nu\theta)$, *νὰ εἶνε θετική, ἢ μηδέν, ἢ ἀρνητική»*.

β΄) Δίδεται εὐθεῖα διερχομένη διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων

$$A x + B y = o \qquad (3)$$

καὶ περιφέρεια (α, β, ϱ).

Ζητεῖται νὰ εὕρωμεν τὰς ἐξισώσεις εὐθειῶν, παραλλήλων τῇ (3) καὶ ἐφαπτομένων τῆς περιφερείας.

Πᾶσα εὐθεῖα παράλληλος τῆς (3) ἔχει ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς (§ 29, δ΄)

$$A x + B y + \Gamma = o \qquad (4)$$

ἐν ᾧ ἄγνωστον εἶνε τὸ Γ. Ἀλλ' ἵνα αὕτη ἐφάπτεται τῆς περιφερείας, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν

$$(A\alpha + B\beta + \Gamma)^2 \eta\mu^2\theta - \varrho^2 (A^2 + B^2 - 2AB\sigma\upsilon\nu\theta) = o,$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν

$$A\alpha + B\beta + \Gamma = \pm \frac{\varrho}{\eta\mu\theta} \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\sigma\upsilon\nu\theta}$$

Ἀπαλείφοντες τὸ Γ μεταξὺ ταύτης καὶ τῆς (4) εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$A(x-\alpha) + B(y-\beta) = \pm \frac{\varrho}{\eta\mu\theta} \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\sigma\upsilon\nu\theta},$$

ἥτις δι' ἕκαστον τῶν σημείων + ἢ — παριστᾷ εὐθεῖαν ἐφαπτομένην τῆς δοθείσης περιφερείας.

γ΄) Ἂν δοθῇ ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως λ τῆς ἐφαπτομένης, αὕτη θὰ εἶνε παράλληλος τῇ εὐθείᾳ $y = \lambda x$ καὶ ἀρκεῖ τότε νὰ ληφθῇ $A = -\lambda$, $B = 1$ καὶ αἱ δύο ἐφαπτόμεναι θὰ ἔχουν ἐξισώσεις τὰς

$$(y-\beta) - \lambda(x-\alpha) \pm \frac{\varrho}{\eta\mu\theta} \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda\,\sigma\upsilon\nu\theta} = o.$$

δ΄) Ἂν οἱ ἄξονες εἶνε ὀρθογώνιοι θὰ ἔχωμεν $\eta\mu\theta = 1$, $\sigma\upsilon\nu\theta = o$ καὶ οἱ ἀνωτέρω τύποι ἁπλοποιοῦνται.

§ **99. Κοινὰ σημεῖα δοθείσης περιφερείας καὶ εὐθείας.**— Δίδεται ἡ εὐθεῖα $A x + B y + \Gamma = o$ (1)

καὶ ἡ περιφέρεια

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2(x-\alpha)(y-\beta)\,\sigma\upsilon\nu\theta - \varrho^2 = o \qquad (2)$$

Ζητοῦνται αἱ συντεταγμέναι τῶν κοινῶν σημείων τῆς περιφερείας καὶ τῆς εὐθείας ταύτης.

Αἱ συντεταγμέναι τῶν κοινῶν σημείων πρέπει νὰ ἐπαληθεύουν τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2). Πρέπει λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὰς κοινὰς λύσεις τῶν (1) καὶ (2).

Πρὸς τοῦτο, ἂν μὲν εἶνε $B \neq o$, λαμβάνομεν τὴν τιμὴν τοῦ y ἐκ τῆς (1) καὶ εἰσάγομεν αὐτὴν εἰς τὴν (2). Οὕτω εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x. Ἂν ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχῃ τὰς ῥίζας αὐτῆς πραγματικὰς καὶ ἀνίσους, ἢ πραγματικὰς καί ἴσας, ἢ φανταστικάς, ἡ εὐθεῖα (1) θὰ τέμνῃ τὴν περιφέρειαν (2) εἰς δύο σημεῖα διάφορα ἀλλήλων, ἢ θὰ ἐφάπτεται αὐτῆς, ἢ θὰ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου.

Ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τούτων συνάγομεν ὅτι τὸ ὑπόρριζον τὸ ὁποῖον παρουσιάζεται εἰς τοὺς τύπους τῶν ῥιζῶν τῆς ἐν λόγῳ ἐξισώσεως δὲν δύναται νὰ διαφέρῃ τῆς παραστάσεως

$$\varrho^2 (A^2 + B^2 - 2\, A\, B\, \text{συν}\theta) - (A\, \alpha + B\, \beta + \Gamma)^2\, \text{ημ}^2\theta$$

εἰμὴ κατὰ παράγοντα θετικόν.

Ἐὰν εἶνε $B = o$, ἡ (1) τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $x = k$. Εἰσάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x εἰς τὴν (2), εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν β′ βαθμοῦ ὡς πρὸς y, ἔχουσαν ῥίζας τὰς τεταγμένας τῶν κοινῶν σημείων τῆς εὐθείας καὶ περιφερείας. Ὅταν τὸ ὑπόρριζον τῶν τιμῶν τοῦ y εἶνε θετικόν, αἱ δύο τιμαὶ εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, ἡ δ' εὐθεῖα τέμνει τὴν περιφέρειαν· ὅταν εἶνε ἴσον μὲ μηδέν, αἱ δύο ῥίζαι συμπίπτουν εἰς μίαν καὶ ἡ εὐθεῖα ἐφάπτεται τῆς περιφερείας· ὅταν δ' εἶνε ἀρνητικόν, ἡ εὐθεῖα κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Εὕρετε τὴν θέσιν τῆς εὐθείας $2x - 7y + 1 = o$ ὡς πρὸς τὴν περιφέρειαν $X^2 + y^2 = 9$, καὶ τὰς συντεταγμένας τῶν κοινῶν σημείων, ἂν ὑπάρχουν.

2) Εὕρετε τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς εὐθείας $5y - x + 2 = o$ καὶ τῆς περιφερείας $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 9$.

3) Δείξατε ὅτι, ἂν $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ εἶνε σημεῖα περιφερείας, ἡ ἐκ τοῦ κέντρου αὐτῆς κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν $M_1 M_2$ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς $M_1 M_2$. Ἐπομένως, «*τὰ μέσα παραλλήλων χορδῶν κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ κέντρου κάθετος ἐπὶ ταύτας*».

4) Εὕρετε τὰς τομὰς τῆς περιφερείας $(x-\varrho)^2 + (y-2\varrho)^2 - 25\varrho^2 = o$ καὶ τῆς εὐθείας $4x + 3y - 35\varrho = o$.

5) Εὕρετε τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην, ἵνα ἡ εὐθεῖα $y = \lambda y + \beta$ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας $x^2 + y^2 - \varrho^2 = o$.

§ 100. Ἐξίσωσις εὐθείας ἐφαπτομένης περιφερείας.—

α′) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις περιφερείας κύκλου K (α, β, ϱ) εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \varrho^2 \qquad (1)$$

καὶ $M_1(x_1, y_1)$ ἓν σημεῖον αὐτῆς. Ζητεῖται ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἥτις ἐφάπτεται τῆς περιφερείας εἰς τὸ σημεῖον M_1.

Ἐὰν λ παριστάνῃ τὸν ἄγνωστον συντελεστὴν διευθύνσεως τῆς ἐν λόγῳ εὐθείας, ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς εἶνε

$$y - y_1 = \lambda (x - x_1) \qquad (2)$$

Τὸ ἄνυσμα KM_1 ἔχει συντεταγμένας προβολὰς $(x_1 - \alpha, y_1 - \beta)$ συντελεστὴν δὲ διευθύνσεως $(y_1 - \beta) : (x_1 - \alpha)$.

Ἵνα ἡ εὐθεῖα (2) ἐφάπτεται τῆς (1) πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν

$$\lambda . \frac{y_1 - \beta}{x_1 - \alpha} = -1, \qquad (\S\ 65, \gamma')$$

ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι

$$\lambda = -\frac{x_1 - \alpha}{y_1 - \beta}.$$

Εἰσάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ λ εἰς τὴν (2), εὑρίσκομεν

$$(x - x_1)(x_1 - \alpha) + (y - y_1)(y_1 - \beta) = o.$$

Ταύτην γράφομεν καὶ ὡς ἑξῆς

$$[(x - \alpha) - (x_1 - \alpha)](x_1 - \alpha) + [(y - \beta) - (y_1 - \beta)](y_1 - \beta) = o$$

ἢ $\quad (x - \alpha)(x_1 - \alpha) + (y - \beta)(y_1 - \beta) = (x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2.$

Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ M_1 κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, θὰ εἶνε

$$(x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 = \varrho^2.$$

Ἑπομένως, ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις γίνεται

$$\boxed{(x - \alpha)(x_1 - \alpha) + (y - \beta)(y_1 - \beta) = \varrho^2} \qquad (3)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη προκύπτει ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, ἐὰν ἀναλύσωμεν τὰ τετράγωνα εἰς τοὺς παράγοντας αὐτῶν, ὅτε θὰ εἶνε

$$(x - \alpha)(x - \alpha) + (y - \beta)(y - \beta) = \varrho^2,$$

καὶ ἔπειτα θέσωμεν ἀντὶ τῶν x καὶ y τῶν δευτέρων παραγόντων τὰς συντεταγμένας τοῦ δοθέντος σημείου ἀντιστοίχως.

β') Ἂν εἶνε $\alpha = o$, $\beta = o$, ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ (x_1, y_1) θὰ εἶνε

$$x\, x_1 + y\, y_1 = \varrho^2.$$

Τὴν ἐξίσωσιν ταύτην (καθὼς καὶ ἐν τῇ προηγουμένῃ περιπτώσει) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ ὡς ἑξῆς.

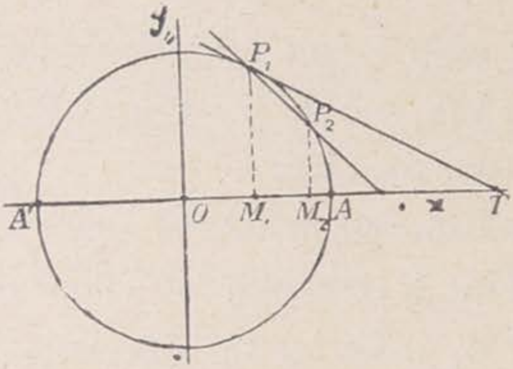
γ') Ἐν γένει, «***Ἐὰν θεωρήσωμεν εὐθεῖαν, τέμνουσαν καμπύλην τινὰ εἰς δύο σημεῖα P_1 (x_1, y_1) καὶ P_2 (x_2, y_2), στρέφεται δ' αὕτη περὶ τὸ σημεῖον P_1 οὕτως, ὥστε τὸ P_2 νὰ πλησιάζῃ συνεχῶς τὸ P_1, καθ' ἣν στιγμὴν τὸ P_2 συμπίπτῃ μὲ τὸ P_1, θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα εἶνε ἐφαπτομένη τῆς θεωρουμένης καμπύλης εἰς τὸ P_1***».

Οὕτω προκειμένου περὶ τῆς περιφερείας, τῆς ἐχούσης κέντρον τὸ ο (σχ. 75) καὶ ἐξίσωσιν $x^2 + y^2 = \varrho^2$, ἡ ἐξίσωσις τῆς τεμνούσης $P_1 P_2$ εἶνε

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \qquad (4)$$

Ἐπειδὴ τὰ P_1, P_2 κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας ἔχομεν

$$x_1^2 + y_1^2 = \varrho^2, \quad x_2^2 + y_2^2 = \varrho^2.$$



(Σχ. 75)

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν, ἀφαιροῦντες αὐτὰς κατὰ μέλη

$$x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 = 0,$$

ἢ
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = - \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (4), εὑρίσκομεν

$$y - y_1 = - \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}(x - x_1).$$

Ἀλλ' ὅταν τὸ P_2 πέσῃ εἰς τὸ P_1, θὰ εἶνε $x_2 = x_1$ καὶ $y_2 = y_1$. Οὕτω ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης $P_1 T$ τῆς περιφερείας εἰς τὸ P_1 θὰ εἶνε

$$y - y_1 = - \frac{2x_1}{2y_1}(x - x_1)$$

ἢ
$$x x_1 + y y_1 = x_1^2 + y_1^2$$

ἢ
$$\boxed{x x_1 + y y_1 = \varrho^2} \qquad (5)$$

ϛ') Ἂν οἱ ἄξονες σχηματίζουν γωνίαν θ, εὑρίσκομεν κατ' ἀνάλογον τρόπον ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας τῆς ἐφαπτομένης τῆς περιφερείας (α, β, ρ) εἰς τὸ σημεῖον $M_1 (x_1, y_1)$ εἶνε

$$(x - \alpha)(x_1 - \alpha) + (y - \beta)(y_1 - \beta) + [(x - \alpha)(y_1 - \beta) + (x_1 - \alpha)(y - \beta)] \text{ συν } \theta = \varrho^2.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης εὐθείας εἰς τὸ σημεῖον (5, 4) τῆς περιφερείας $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 10$.

2) Δίδεται ἡ περιφέρεια κύκλου $x^2 + y^2 = 25$. Ἡ εὐθεῖα $x = 4$ τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα. Εὕρετε τὰς ἐξισώσεις τῶν ἐφαπτομένων τῆς περιφερείας εἰς τὰ σημεῖα ταῦτα καὶ δείξατε ὅτι αὗται τέμνωνται ἐπί τινος σημείου τοῦ ἄξονος τῶν x.

3) Ἔστω ὅτι ἡ περιφέρεια $x^2 + y^2 = \rho^2$ τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὰ σημεῖα A_1, A_2. Εὕρετε τὴν τετμημένην ἐπὶ τὴν ἀρχὴν $x = (oT)$ τῆς ἐφαπτομένης M_1T τῆς περιφερείας εἰς δοθὲν σημεῖον αὐτῆς M_1 (x_1, y_1), ἐν ᾧ εἶνε $x_1 = (o\Pi_1)$ καὶ δείξατε διὰ τῆς σχέσεως $x\,x_1 = \rho^2 = (oA_1)^2$ ὅτι τὰ σημεῖα A_1, A_2, Π_1, T ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν σημειοσειράν. Πῶς κινεῖται τὸ T, ὅταν τὸ Π_1 διατρέχῃ τὸ τμῆμα $A_1\,A_2$;

4) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς περιφερείας, ἥτις εἶνε ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον, τὸ ἔχον πλευρὰς

$A_1\,x + B_1\,y + \Gamma_1 = o$, $A_2\,x + B_2\,y + \Gamma_2 = o$, $A_3\,x + B_3\,y + \Gamma_3 = o$.

5) Τίς ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα ἡ εὐθεῖα

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$$

ἐφάπτεται τῆς περιφερείας

$$A\,x^2 + A\,y^2 + B\,x + \Gamma\,y + \Delta = o;$$

§ 101. Ἐφαπτόμεναι περιφερείας ἀγόμεναι ἐκ σημείου κειμένου ἐκτὸς αὐτῆς. Πόλος καὶ πολικὴ εὐθεῖα.—

α΄) Ἔστω περιφέρεια κύκλου (α, β, ϱ) εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους καὶ σημεῖον P (ξ, η), κείμενον ἐκτὸς αὐτῆς.

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις εὐθείας, διερχομένης διὰ τοῦ P καὶ ἐφαπτομένης τῆς περιφερείας.

Ἂν M_1 (x_1, y_1) εἶνε τὸ σημεῖον καθ' ὃ ἡ ζητουμένη εὐθεῖα ἐφάπτεται τῆς περιφερείας, τὰ x_1, y_1 θὰ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν τῆς περιφερείας. Ἤτοι θὰ εἶνε

$$(x_1-\alpha)^2 + (y_1-\beta)^2 = \varrho^2 \qquad (1)$$

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ M_1 (x_1, y_1) θὰ εἶνε,

$$(x-\alpha)(x_1-\alpha) + (y-\beta)(y_1-\beta) = \varrho^2,$$

ἐπειδὴ δ' ἡ εὐθεῖα αὕτη διέρχεται διὰ τοῦ P θὰ εἶνε

$$(\xi-\alpha)(x_1-\alpha) + (\eta-\beta)(y_1-\beta) = \varrho^2 \qquad (2)$$

Πρὸς εὕρεσιν τῶν x_1, y_1 ἀρκεῖ νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2). Καὶ ἂν μὲν προκύψουν λύσεις πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, ἔχομεν δύο διακεκριμένα σημεῖα ἐπαφῆς, ἤτοι δύο ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας, διερχομένας διὰ του P· ἂν δὲ προκύψουν λύσεις ἴσαι, ἔχομεν δύο ἐφαπτομένας συμπιπτούσας· ἂν δὲ προκύψουν λύσεις φανταστικαί, δὲν ὑπάρχουν ἐφαπτόμεναι πραγματικαὶ τῆς περιφερείας, διερχόμεναι διὰ τοῦ Ρ.

Ἡ πρώτη περίπτωσις συμβαίνει, ὅταν ἡ παράστασις ἐκ τῆς ὁποίας ἐξαρτᾶται τὸ σημεῖον τῆς ὑπορρίζου ποσότητος, καὶ κατ' ἀκολουθίαν αἱ ρίζαι τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2), εἶνε θετική. Εἶνε δὲ αὕτη ἡ $(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2-\rho^2$. Ἐπειδὴ δὲ εἶνε $(\mathrm{KP})^2=(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2$, ἕπεται ὅτι

1) ***«ὅταν τὸ σημεῖον Ρ κεῖται ἐκτὸς τοῦ δοθέντος κύκλου, ἔχομεν δύο ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας, διερχομένας διὰτοῦ Ρ»·***

2) ***«ὅταν τὸ Ρ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ὑπάρχει μία»·***

3) ***«ὅταν τὸ Ρ κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου, δὲν ὑπάρχει πραγματικὴ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου, διερχομένη διὰ τοῦ Ρ».***

β') Καλοῦμεν *πολικὴν εὐθεῖαν* τοῦ σημείου Ρ (ξ, η) ὡς πρὸς τὴν περιφέρειαν (α, β, ρ) τὴν εὐθεῖαν

$$(x-\alpha)(\xi-\alpha)+(y-\beta)(\eta-\beta)=\rho^2, \qquad (3)$$

ἥτις διέρχεται διὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς (x_1, y_1) τῶν διὰ τοῦ Ρ διερχομένων ἐφαπτομένων τῆς περιφερείας (ἕνεκα τῆς (2)), ἢ τὴν χορδὴν τῶν ἐπαφῶν τῶν διὰ τοῦ Ρ διερχομένων ἐφαπτομένων τῆς περιφερείας. Τὸ σημεῖον Ρ καλοῦμεν *πόλον* τῆς πολικῆς (3).

Ἡ ἀπόλυτος ἀπόστασις, ἔστω (ΚΠ), τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας ἀπὸ τῆς πολικῆς (3) τοῦ σημείου Ρ (ξ, η) δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$(\mathrm{K\Pi})=\frac{\rho^2}{\sqrt{(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2}}. \qquad (4)$$

Ἑπομένως, ἢ ἔχομεν δύο πραγματικὰ καὶ διακεκριμένα σημεῖα τομῆς τῆς πολικῆς τοῦ Ρ μὲ τὴν περιφέρειαν, ἢ ἕν, ἢ δύο φανταστικά, δηλαδὴ οὐδὲν πραγματικόν, καθόσον τὸ $(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2$ ἢ τὸ $(\mathrm{KP})^2$ εἶνε μεγαλύτερον τοῦ ρ^2, ἢ ἴσον μὲ ρ^2, ἢ μικρότερον τοῦ ρ^2.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι *1)* ***«ἂν ὁ πόλος Ρ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ἡ πολικὴ τούτου τέμνει τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ εἰς δύο σημεῖα διακεκριμένα»·*** *2)* ***«ἂν ὁ πόλος Ρ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἡ πολικὴ αὐτοῦ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο»·*** *3)* ***«ἂν ὁ πόλος Ρ κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου ἡ πολικὴ αὐτοῦ κεῖται ἐκτὸς αὐτοῦ».***

γ') Δοθείσης τῆς πολικῆς σημείου τινὸς ὡς πρὸς δοθεῖσαν περιφέρειαν, π. χ. τὴν (ο, ο, ρ) εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν πόλον αὐτῆς. Τῷ ὄντι, ἂν $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$

εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς δοθείσης πολικῆς καὶ (ξ, η) εἶνε αἱ ἄγνωστοι συντεταγμέναι τοῦ ζητουμένου πόλου αὐτῆς, ἡ πολικὴ τούτου θὰ ἔχῃ ἐξίσωσιν

$$\xi x + \eta y = \varrho^2.$$

Ἵνα ἡ εὐθεῖα αὕτη συμπίπτῃ μὲ τὴν δοθεῖσαν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν (28, γ′)

$$\frac{\xi}{A} = \frac{\eta}{B} = \frac{-\varrho^2}{\Gamma} \qquad (5)$$

ἐξ' ὧν ὁρίζονται τὰ ξ, η. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι «***εἰς δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἀντιστοιχεῖ εἷς πόλος***» «***ἂν δ' ἡ δοθεῖσα πολικὴ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου, ἤτοι ἂν εἶνε Γ=ο, ὁ πόλος αὐτῆς κεῖται εἰς τὸ ἄπειρον***».

Τοὐναντίον, ἂν ἡ δοθεῖσα πολικὴ εἶνε ἡ κατ' ἐκδοχὴν (ἐπ' ἄπειρον) εὐθεῖα, ὅτε θὰ εἶνε Α =ο, Β = ο ἐν τῇ ἐξισώσει

$$A x + B y + \Gamma = o$$

θὰ ἔχωμεν ξ=ο, η=ο ἐκ τῶν (5), ἤτοι «***ὁ πόλος τῆς κατ' ἐκδοχὴν εὐθείας εἶνε τὸ κέντρον τῆς περιφερείας***».

ϛ′) Σχετικαὶ θέσεις πόλου καὶ πολικῆς. Ἔστω Ρ (ξ, η) σημεῖόν τι καὶ πολικὴ τούτου ὡς πρὸς τὴν περιφέρειαν κύκλου (α, β, ϱ) ἡ

$$(\xi - \alpha)(x - \alpha) + (\eta - \beta)(y - \beta) = \varrho^2.$$

Τὸ ἄνυσμα ΚΡ ἔχει συντεταγμένας προβολὰς (ξ—α, η—β) συντελεστὴν δὲ διευθύνσεως (η—β) : (ξ—α). Τὸ ἄνυσμα τοῦτο εἶνε κάθετον τῇ πολικῇ τοῦ Ρ, ἐπειδὴ εἶνε

$$\left(\frac{\eta-\beta}{\xi-\alpha}\right)\left(-\frac{\xi-\alpha}{\eta-\beta}\right) = -1.$$

Ἑπομένως «***ἡ πολικὴ πόλου τινὸς Ρ εἶνε κάθετος τῇ διακέντρῳ τοῦ σημείου Ρ, ἡ δὲ ἀπόστασις αὐτῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου, ἔστω ἡ (ΚΠ), ἔχει τὴν ἰδιότητα ὅτι (β′, (4))***

$$(K\Pi)\,(KP) = \varrho^2. \qquad (6)$$

ε′) Ἰδιότης τῶν πόλων καὶ πολικῶν. «***Ὅταν σημεῖον γράφῃ ὡρισμένην τινὰ εὐθεῖαν, ἡ πολικὴ τούτου στρέφεται περὶ τὸν πόλον τῆς εὐθείας***» καὶ ἀντιστρόφως, «***ἐὰν εὐθεῖα στρέφεται περὶ δοθὲν σημεῖον, ὁ πόλος αὐτῆς γράφει τὴν πολικὴν τοῦ σημείου τούτου***».

Τῷ ὄντι, ἔστω Ρ (ξ,η) δοθὲν σημεῖον. Ἡ πολικὴ τούτου ὡς πρὸς τὴν περιφέρειαν (α,β,ϱ) ἔχει ἐξίσωσιν

$$(\xi - \alpha)(x - \alpha) + (\eta - \beta)(y - \beta) = \varrho^2 \qquad (7)$$

Ἔστωσαν (x', y') αἱ συντεταγμέναι σημείου τινὸς τῆς εὐθείας ταύτης, ἤτοι, ἔστω ὅτι εἶνε

$$(\xi - \alpha)(x' - \alpha) + (\eta - \beta)(y' - \beta) = \varrho^2 \qquad (8)$$

Ἡ πολικὴ τοῦ (x', y') ἔχει ἐξίσωσιν

$$(x' - \alpha)(x - \alpha) + (y' - \beta)(y - \beta) = \varrho^2$$

αὕτη δὲ διέρχεται διὰ τοῦ $P(\xi, \eta)$, ἕνεκα τῆς (8). Ἤτοι, ἡ πολικὴ σημείου τινὸς τῆς πολικῆς τοῦ P διέρχεται διὰ τοῦ P.

Ἀντιστρόφως, ἔστωσαν (x', y') αἱ συντεταγμέναι τοῦ πόλου εὐθείας τινός, ἔστω τῆς (γ), διερχομένης διὰ τοῦ $P(\xi, \eta)$. Ἡ πολικὴ τοῦ (x', y') ἔχει ἐξίσωσιν

$$(x' - \alpha)(x - \alpha) + (y' - \beta)(y - \beta) = \varrho^2$$

ἐπειδὴ δὲ αὕτη διέρχεται διὰ τοῦ (ξ, η) θὰ εἶνε

$$(x' - \alpha)(\xi - \alpha) + (y' - \beta)(\eta - \beta) = \varrho^2.$$

Ἀλλ' αὕτη ἐκφράζει ὅτι ὁ πόλος (x', y') κεῖται ἐπὶ τῆς πολικῆς τοῦ $P(\xi, \eta)$.

ϛ') Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι «***ὅταν τρία σημεῖα κεῖνται ἐπ' εὐθείας, αἱ πολικαὶ αὐτῶν διέρχονται δι' ἑνὸς σημείου· καὶ ὅταν τρεῖς εὐθεῖαι διέρχωνται δι' ἑνὸς σημείου, οἱ πόλοι αὐτῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας***».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Εὕρετε τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων, αἵτινες ἄγονται διὰ τοῦ σημείου $(5, -3)$ τῆς περιφερείας $x^2 + y^2 = 16$.

2) Εὕρετε τὸν πόλον τῆς πολικῆς $x x_0 + y y_0 = \rho^2$ ὡς πρὸς τὴν περιφέρειαν $x^2 + y^2 = \rho^2$.

3) Εὕρετε τὴν πολικὴν τοῦ σημείου $(2, 3)$ καὶ τὸν πόλον τῆς εὐθείας $\frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\mu} = 1$ ὡς πρὸς τὴν περιφέρειαν $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \rho^2$, ἢ ὡς πρὸς τὴν $A x^2 + A y^2 + B x + B y + \Delta = 0$.

4) Εὕρετε τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 8$, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τοῦ σημείου $(3, 5)$.

5) Εὕρετε τὸν πόλον τῆς εὐθείας $3x + 4y = 7$ ὡς πρὸς τὴν περιφέρειαν $x^2 + y^2 = 14$, ἢ τῆς $2x + 3y = 6$ ὡς πρὸς τὴν

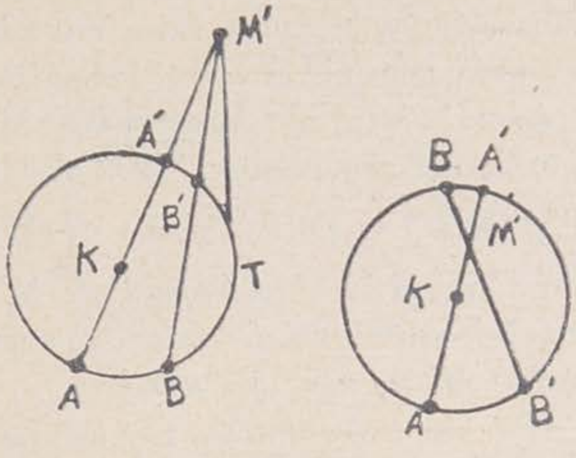
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 12.$$

6) Εὕρετε τὰς πολικὰς τῶν σημείων $(4, 4)$, $(4, 5)$ ὡς πρὸς τὰς περιφερείας $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 13$, καὶ $x^2 + y^2 - 3x - 4y = 8$ ἀντιστοίχως.

§ **102. Δύναμις σημείου ὡς πρὸς κύκλον.**—

α΄) Ἔστω ὅτι δίδεται ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου (α, β, ρ) εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους καὶ σημεῖόν τι Μ΄ (x΄, y΄) τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ (σχ.76). Ἔχομεν (§ 61, α΄)

$$(x'-\alpha)^2 + (y'-\beta)^2 = (KM')^2.$$



(Σχ. 76)

Ἡ ἀπόστασις (ΚΜ΄) τοῦ σημείου Μ΄ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου· διὰ τὰ σημεῖα Μ΄, τὰ κείμενα ἐντὸς τοῦ κύκλου εἶνε μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος· διὰ τὰ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ εἶνε ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα· διὰ δὲ τὰ ἐκτὸς αὐτοῦ εἶνε μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

«τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως τῆς περιφερείας κύκλου (ὅταν τὸ δεύτερον μέλος εἶνε μηδὲν) εἶνε ἀρνητικὸν μὲν διὰ τὰ σημεῖα τὰ κείμενα ἐντὸς αὐτοῦ, μηδὲν διὰ τὰ κείμενα ἐπὶ τῆς περιφερείας καὶ θετικὸν διὰ τὰ κείμενα ἐκτὸς αὐτοῦ, ἂν ἀντὶ τῶν x *καὶ* y *τεθοῦν αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων τούτων».*

β΄) Ἐν γένει, ἔχομεν

$$(KM')^2-\rho^2=[(KM')+\rho]\,[(KM')-\rho] = (M'A)\,(M'A')=(M'B)(M'B'),$$

ἐνῷ Α, Α΄ καὶ Β,Β΄ εἶνε τὰ σημεῖα, καθ᾽ ἃ ἡ διὰ τοῦ Μ΄ διάκεντρος, ἢ τυχοῦσα τέμνουσα τῆς περιφερείας, τέμνει αὐτήν.

Ἄρα *«ἂν εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως τῆς περιφερείας κύκλου ἀντικαταστήσωμεν τὰ* x, y *διὰ τῶν συντεταγμένων* x΄, y΄ *τυχόντος σημείου Μ΄ τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ἐξαγόμενον παριστάνει τὸ σταθερὸν γινόμενον τῶν μηκῶν δύο ἀνυσμάτων, ὁριζομένων ἐπὶ πάσης διατεμνούσης τοῦ κύκλου, διὰ τοῦ Μ΄ ἀγομένης καὶ ἐχόντων ἀρχὴν μὲν τὸ δοθὲν σημεῖον πέρας δὲ τὰ σημεῖα τομῆς αὐτῆς μὲ τὴν περιφέρειαν».*

γ') Παρατηρητέον ὅτι, ὅταν τὸ Μ' κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου, τὰ δύο ἀνύσματα εἶνε ὁμόρροπα καὶ τὰ μήκη αὐτῶν ἔχουν γινόμενον θετικόν· ἂν δὲ κεῖται ἐντός, τὰ ἀνύσματα εἶνε ἀντίρροπα καὶ τὸ γινόμενον τῶν μηκῶν αὐτῶν εἶνε ἀρνητικόν· ἂν δὲ τὸ Μ' κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, τὸ ἓν τούτων ἔχει μῆκος ἴσον μὲ μηδέν.

δ') Ἂν τὸ δοθὲν σημεῖον Μ' κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ὡς γνωστόν· τὸ γινόμενον τῶν μηκῶν τῶν δύο ἐν λόγῳ ἀνυσμάτων ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ μήκους ἑκάστης τῶν ἐφαπτομένων Μ'Τ, αἵτινες ἄγονται ἐκ τοῦ σημείου εἰς τὴν περιφέρειαν. Ἤτοι εἶνε (σχ. 76).

$$(M'A)\,(M'A') = (M'B)\,(M'B') = (M'T)^2$$

ε') Τὸ γινόμενον τῶν δύο ἐν λόγῳ ἀνυσμάτων Μ'Α, Μ'Α', ἢ Μ'Β, Μ'Β', ὁπουδήποτε τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἂν κεῖται τὸ σημεῖον Μ,' καλεῖται *δύναμις τοῦ σημείου Μ' ὡς πρὸς τὸν κύκλον.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Τίς ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν δύναμιν ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν κύκλον;

2) Πῶς μεταβάλλεται ἡ δύναμις σημείου ὡς πρὸς κύκλον, ὅταν τὸ σημεῖον διατρέχῃ εὐθεῖαν, διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου;

§ 103. Θέσεις περιφερειῶν πρὸς ἀλλήλας.—

α') Δίδονται δύο περιφέρειαι διὰ τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+A_1x+B_1y+\Gamma_1 &= o \\ x^2+y^2+A_2x+B_2y+\Gamma_2 &= o \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Ζητεῖται ἡ θέσις τῶν περιφερειῶν πρὸς ἀλλήλας.

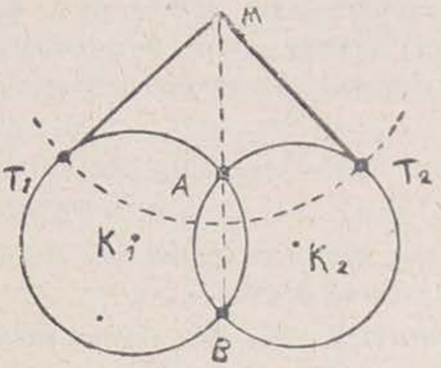
Ἀφαιροῦντες τὰς (1) κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(A_1-A_2)\,x+(B_1-B_2)\,y+\Gamma_1-\Gamma_2=o \qquad (2)$$

ἡ ὁποία ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῶν κοινῶν λύσεων τῶν (1) καὶ δύναται νὰ ἀντικαταστήσῃ μίαν ἐξ' αὐτῶν. Ἐὰν ἡ ὑπὸ τῆς (2) παριστωμένη εὐθεῖα τέμνῃ τὴν μίαν τῶν περιφερειῶν, αἱ περιφέρειαι (1) τέμνωνται, ὡς διερχόμεναι διὰ τῶν σημείων τῆς τομῆς· ἐὰν δὲ ἡ εὐθεῖα ἐφάπτεται τῆς μιᾶς περιφερείας, αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται ἀλλήλων κατὰ τὸ σημεῖον αὐτό. Ἂν δ' ἡ εὐθεῖα (2) κεῖται ἐκτὸς τῶν κύκλων, αἱ περιφέρειαι κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων.

β') Ἡ εὐθεῖα (2) καλεῖται ***κοινὴ χορδὴ*** ἢ ***ριζικὸς ἄξων τῶν δύο περιφερειῶν*** (1). Οὗτος ἔχει τὴν ἰδιότητα ὅτι, ἕκαστον σημεῖον αὐτοῦ ἔχει τὴν αὐτὴν δύναμιν ὡς πρὸς τοὺς δύο κύκλους. Ἡ ἰδιότης αὐτὴ προκύπτει ἐκ τοῦ ὅτι, τὸ πρῶτον μέλος ἑκάστης τῶν (1) διὰ τὰς συντεταγμένας (x, y) τοῦ τυχόντος σημείου τοῦ ἐπιπέδου παριστάνει τὴν δύναμιν τοῦ σημείου τούτου ὡς πρὸς ἕκαστον τῶν κύκλων. Ἐπομένως, ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ἐχόντων ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς τοὺς κύκλους (1), παρίσταται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$x^2 + y^2 + A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 = x^2 + y^2 + A_2 x + B_2 y + \Gamma_2$$



(Σχ. 77)

ἢ ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως (2) τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν (1).

γ') Ἐπειδὴ ἡ δύναμις σημείου κειμένου ἐκτὸς κύκλου, ὡς πρὸς τὸν κύκλον ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἐφαπτομένης τῆς περιφερείας, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου, ἕπεται ὅτι εἶνε (σχ. 77)

$$(MT_1)^2 = (MA)(MB) = (MT_2)^2.$$

Ἦτοι «***ὁ τόπος τῶν σημείων ἀπὸ τῶν ὁποίων ἄγονται ἴσαι ἐφαπτόμεναι εἰς δύο περιφερείας κύκλων εἶνε ἡ εὐθεῖα τῆς κοινῆς χορδῆς τῶν περιφερειῶν τούτων***».

δ') Ἔστωσαν K_1, K_2 τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ K_3 τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως τρίτης περιφερείας

$$x^2 + y^2 + A_3 x + B_3 y + \Gamma_3 = 0.$$

Αἱ τρεῖς αὗται περιφέρειαι, ἀνὰ δύο λαμβανόμεναι, ὁρίζουν τρεῖς ριζικοὺς ἄξονας, τῶν ὁποίων αἱ ἐξισώσεις εἶνε

$$K_2 - K_3 = 0,$$

$$K_3 - K_1 = 0,$$

$$K_1 - K_2 = 0.$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν δύο ἐκ τούτων προκύπτει ἡ τρίτη ἕπεται ὅτι

«***οἱ τρεῖς ριζικοὶ ἄξονες τῶν τριῶν περιφερειῶν (λαμβανομέ-***

νων ἀνὰ δύο) τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον τὸ ὁποῖον καλεῖται *ῥιζικὸν κέντρον* τῶν τριῶν περιφερειῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Ὁμὰς πρώτη. 1) Τί συμβαίνει ὡς πρὸς τὸν ῥιζικὸν ἄξονα δύο περιφερειῶν, ἂν αὗται εἶνε ὁμόκεντροι, ἢ ἂν ἡ μία περιορισθῇ εἰς τὸ κέντρον αὐτῆς;

2) Ὅταν δύο περιφέρειαι τέμνωνται ὀρθογωνίως, ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς μιᾶς ἐφαπτομένη τῆς ἄλλης ἰσοῦται μὲ τὴν ἀντίστοιχον ἀκτῖνα. Εὕρετε τὴν συνθήκην, ἥτις ἐκφράζει τὴν καθετότητα δύο περιφερειῶν, ὅταν δοθοῦν αἱ ἐξισώσεις αὐτῶν.

3) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς περιφερείας, τῆς ἐχούσης κέντρον $(3, -4)$ καὶ τεμνούσης τὴν $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 9$ ὀρθογωνίως.

4) Εὕρετε τὴν τομὴν τῶν δύο περιφερειῶν τοῦ προηγουμένου προβλήματος μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ ῥιζικοῦ ἄξονος.

5) Ἔστω ὅτι αἱ περιφέρειαι K_1, K_2 δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον. Κατασκευάσατε τὸν ῥιζικὸν ἄξονα αὐτῶν τῇ βοηθείᾳ ἑνὸς κύκλου K_3 ὅστις τέμνει τοὺς K_1 καὶ K_2.

6) Τίνα σχέσιν πρέπει νὰ πληροῦν τὰ $(\alpha_1, \beta_1, \rho_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \rho_2)$ ἵνα αἱ ἀντίστοιχοι περιφέρειαι ἐφάπτονται;

7) Εὕρετε τὰς ἐξισώσεις, ἐκ τῶν ὁποίων προσδιορίζονται αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου καὶ ἡ ἀκτὶς περιφερείας, διερχομένης διὰ δύο σημείων $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ καὶ ἐφάπτεται τῆς $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \rho^2$ χωρὶς νὰ λύσετε τὰς ἐν λόγῳ ἐξισώσεις. Διακρίνατε, ὅτι ὑπάρχουν δύο λύσεις.

8) Λύσατε τὸ προηγούμενον πρόβλημα διὰ κατασκευῆς περιφερείας, διερχομένης διὰ τῶν M_1 καὶ M_2 καὶ τεμνούσης τὴν δοθεῖσαν εἰς δύο σημεῖα. (Ἡ εὐθεῖα, ἥτις συνδέει τὰ σημεῖα ταῦτα καὶ ἡ $M_1 M_2$ εἶνε οἱ ῥιζικοὶ ἄξονες, τοὺς ὁποίους ὁρίζει ἡ βοηθητικὴ περιφέρεια μὲ τὴν δοθεῖσαν καὶ τὴν ζητουμένην. Αἱ ἐφαπτόμεναι, αἵτινες ἄγονται ἐκ τῆς τομῆς τῶν ῥιζικῶν ἀξόνων πρὸς τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν ὁδηγοῦν εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν δύο λύσεων).

9) Δείξατε ὅτι ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ δυνάμεις ὡς πρὸς δύο περιφερείας $K_1=o$, $K_2=o$ ἔχουν λόγον $\lambda : 1$, εἶνε περιφέρεια, ἔχουσα ἐξίσωσιν $K_1 - \lambda K_2 = o$, ἥτις διέρχεται διὰ τῶν τομῶν τῶν K_1 καὶ K_2. Τίνα μερικὴν περίπτωσιν ἔχομεν, ἂν $\lambda=1$;

10) Εὕρετε τὰς συντεταγμένας τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας $K_1 - \lambda K_2 = o$ καὶ διερευνήσατε τὸ ἐξαγόμενον.

11) Δείξατε ὅτι ἡ συνθήκη ἵνα δύο περιφέρειαι

$$x^2 + y^2 + \beta_1 x + \gamma_1 y + \delta_1 = o, \quad x^2 + y^2 + \beta_2 x + \gamma_2 y + \delta_2 = o$$

τέμνωνται ὀρθογωνίως εἶνε $\beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 2(\delta_1 + \delta_2)$.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι «*δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν περιφέρειαν, τέμνουσαν τρεῖς δοθείσας ὀρθογωνίως*». Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν αὐτῆς καὶ δείξατε ὅτι τὸ κέντρον ταύτης εἶνε τὸ ῥιζικὸν κέντρον τῶν τριῶν δοθεισῶν.

Ὁμὰς δευτέρα. (Γεωμετρικῶν τόπων). 1) Εὕρετε τὸν τόπον τῶν σημείων διὰ τὰ ὁποῖα τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο ὡρισμένων σημείων εἶνε σταθερόν.

(Λύσις. Ἂν Α, Α΄ τὰ δοθέντα σημεῖα καὶ (ΑΑ΄) $=2\gamma$. λάβωμεν δὲ αὐτὴν ὡς ἄξονα τῶν x καὶ τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον ταύτης ὡς ἄξονα τῶν y, ὑποθέσωμεν δὲ Μ (x,y) καὶ (ΜΑ΄) $= \rho'$, (ΜΑ) $= \rho$, θὰ εἶνε $\rho^2 + \rho'^2 =$ σταθ. ἔστω $= \lambda^2$. Ἢ $(\gamma - x)^2 + y^2 + (\gamma + x)^2 + y^2 = \lambda^2$, Ἢ $x^2 + y^2 = \frac{\lambda^2 - 2\gamma^2}{2}$.

Ἂν $\lambda^2 > 2\gamma^2$ ὁ τόπος εἶνε περιφέρεια κύκλου).

2) Εὕρετε τὸν τόπον τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα ἔχουν λόγον δοθέντα.

(Λύσις. Ἂν ἡ εὐθεῖα τῶν σταθερῶν σημείων Α, Β ληφθῇ ὡς ἄξων τῶν x καὶ (ΑΒ) $= \gamma$, τὸ Α ὡς ἀρχὴ ὀρθογωνίων ἀξόνων, θὰ εἶνε (ΜΑ) : (ΜΒ) $=$ σταθ. $= \lambda$. Ἂν εἶνε Μ (x, y), θὰ ἔχωμεν $(MA)^2 = x^2 + y^2$, $(MB)^2 = (\gamma - x)^2 + y^2$. Ἐξ οὗ ἕπεται $x^2(1-\lambda^2) + y^2(1-\lambda^2) + 2\gamma\lambda^2 x - \gamma^2\lambda^2 = o$. Αὕτη παριστάνει περιφέρειαν κύκλου.

Εὕρετε τὴν ἀκτῖνα καὶ τὸ κέντρον αὐτῆς. Δείξατε ὅτι ἡ περιφέρεια αὕτη τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x εἰς δύο σημεῖα ἁρμονικὰ μετὰ τῶν Α καὶ Β).

3) Τριγώνου τινὸς γνωρίζομεν τὴν βάσιν (ΑΒ) $= \gamma$ καὶ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς γωνίαν Γ. Εὕρετε τὸν τόπον τῆς κορυφῆς Γ.

(Λύσις. Παριστάνοντες διὰ Α καὶ Β τὰς ἄλλας γωνίας τοῦ τριγώνου καὶ λαμβάνοντες τὸ μέσον τῆς ΑΒ ὡς ἀρχὴν ὀρθογωνίων ἀξόνων τὴν δὲ ΑΒ ὡς ἄξονα τῶν x, ἂν εἶνε Γ (x, y) θὰ ἔχωμεν,

$$\text{εφ}\,A = y : \left(\frac{\gamma}{2} + x\right),\ \text{εφ}\,B = y : \left(\frac{\gamma}{2} - x\right),\ \text{εφ}\,\Gamma = -\,\text{εφ}\,(A + B).$$

Ἂν θέσωμεν εφ Γ $= -$ (εφ Α $+$ εφ Β) : (1 $-$ εφ Α. εφ Β) καὶ εἰσαγάγωμεν τὰς τιμὰς τῶν εφ Α. εφ Β λαμβάνομεν

$$x^2 + y^2 - \gamma\,\text{σφ}\,\Gamma\,y - \frac{\gamma^2}{4} = o.$$

Εὕρετε τὸ κέντρον καὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας ταύτης).

4) Τριγώνου τινὸς γνωρίζομεν τὴν βάσιν (ΑΒ) $= \gamma$ καὶ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς γωνίαν Γ. Εὕρετε τὸν τόπον τῶν τομῶν τῶν ὑψῶν αὐτοῦ.

(Λύσις. Ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τὸ προηγούμενον ζήτημα καὶ παριστῶντες διὰ τῶν Α΄ καὶ Β΄ τὰς γωνίας, τὰς σχηματιζομένας ὑπὸ τῆς ΑΒ καὶ τῶν παρ' αὐτὴν ὑψῶν, ἔχομεν $A' + B' = \Gamma$. Ἄρα

$$\text{εφ}\,A' = y : \frac{\gamma}{2} + x,\quad \text{εφ}\,B' = y : \frac{\gamma}{2} - x.$$

Ἐξ ἧς ἕπεται $$x^2 + y^2 + \gamma\,\text{σφ}\,\gamma\,y - \frac{\gamma^2}{4} = o).$$

5) Ἀπό τινος σημείου M_0 (x_0, y_0) ἄγονται ἀκτῖνες M_0 Μ πρὸς πάντα τὰ σημεῖα περιφερείας $x^2 + y^2 = \rho^2$. Ἐφ' ἑκάστης τῶν ἀκτίνων λαμβάνεται ση-

μεῖον Ρ, ὥστε νὰ εἶνε $(M_0 P):(PM)=\lambda$. Εὕρετε τὸν τόπον τῶν σημείων Ρ.

(Λύσις. Ἄν θ εἶνε ἡ πολικὴ γωνία καὶ ρ ἡ ἐπιβατικὴ ἀκτὶς τοῦ Μ, αἱ συντεταγμέναι αὐτοῦ θὰ εἶνε ρ συν θ, ρ ημ θ, αἱ δὲ συντεταγμέναι τοῦ Ρ

$$P\left(x=\frac{x_0+\lambda\,\rho\,\text{συν}\,\theta}{1+\lambda},\ y=\frac{y_0+\lambda\,\rho\,\text{ημ}\,\theta}{1+\lambda}\right)$$

Ἀπαλείφομεν τὸ θ, εὑρίσκοντες τὸ συνθ καὶ ημ θ, ὅτε

$$\left(x-\frac{x_0}{1+\lambda}\right)^2+\left(y-\frac{y_0}{1+\lambda}\right)^2=\frac{\lambda^2\rho^2}{(1+\lambda)^2}\,.$$

Εὕρετε τὴν θέσιν τῆς περιφερείας αὐτῆς πρὸς τὴν δοθεῖσαν).

Περὶ σφαίρας

§ 104. Ἐξίσωσις σφαίρας.—

α') Ἐν τῷ χώρῳ τῶν τριῶν διαστάσεων ἀντίστοιχος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν περιφέρειαν κύκλου ἐν τῷ ἐπιπέδῳ εἶνε ἡ τῆς σφαίρας. Εἶνε δὲ αὕτη ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ ἓν ὡρισμένον σημεῖον (*κέντρον*) εἶνε ἴσαι μὲ δοθεῖσαν ἀπόστασιν.

Ἵνα εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν σφαίρας, ἐχούσης κέντρον Κ (α, β, γ) εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους καὶ ἀκτῖνα ρ, παρατηροῦμεν ὅτι ἂν (x, y, z) εἶνε αἱ συντεταγμέναι τυχόντος σημείου Μ τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς, αἱ μὲν συντεταγμέναι προβολαὶ τοῦ ἀνύσματος ΚΜ εἶνε (x—α, y—β, z—γ) τὸ δὲ μῆκος αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ ρ. Κατὰ ταῦτα ἡ ἐξίσωσις τῆς σφαίρας ταύτης, τὴν ὁποίαν συμβολικῶς θὰ παριστάνωμεν διὰ Κ (α, β, γ, ρ), εἶνε

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\rho^2 \qquad (1)$$

Γενικώτερον δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=k \qquad (2)$$

παριστάνει πάντοτε σφαῖραν, ἔχουσαν κέντρον τὸ σημεῖον Κ (α, β, γ) καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ $\sqrt{k}$. Ἡ σφαῖρα αὕτη εἶνε πραγματική, ἢ ἀνάγεται εἰς τὸ κέντρον αὐτῆς, ἢ εἶνε φανταστική, ἂν εἶνε

$$k>o,\ \text{ἢ}\ k=o,\ \text{ἢ}\ k<o.$$

β') Ἐὰν ἀναπτύξωμεν τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (2) λαμβάνομεν

$$x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-k)=o \qquad (3)$$

Ἐπομένως, «***ἡ ἐξίσωσις τῆς σφαίρας ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους εἶνε β' βαθμοῦ ὡς πρὸς*** x, y, z, ***περιέχουσα ἐκ τῶν δευτεροβαθμίων ὅρων μόνα τὰ τετράγωνα τῶν*** x, y, ***καὶ*** z ***μὲ συντελε-***

στὰς ἴσους (μὲ τὴν μονάδα)».

γ΄) Ἐκλέγοντες καταλλήλως τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, λαμβάνομεν μερικὰς περιπτώσεις τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς. Οὕτω π. χ. ἂν κέντρον τῆς σφαίρας εἶνε ἡ ἀρχὴ (ο, ο, ο) ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς θὰ εἶνε

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2} \qquad (4)$$

Ἂν τὸ κέντρον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ εἶνε Κ (α, ο, ο) θὰ ἔχωμεν

$$(x-\alpha)^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2$$

Ἂν τὸ κέντρον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x, διέρχεται δ' ἡ σφαῖρα διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς θὰ εἶνε

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2\,\varrho\, x.$$

Ἂν ἡ σφαῖρα Κ (α,β,γ,ρ) διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς, θὰ ἔχωμεν

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2\,\alpha\, x + 2\,\beta\, y + 2\,\gamma\, z.$$

δ΄) «***Πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς***

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 + \mathrm{A}\,x + \mathrm{B}\,y + \Gamma\, z + \Delta = 0} \qquad (5)$$

παριστάνει, ἐν γένει, σφαῖραν».

Τῷ ὄντι, ἡ ἐξίσωσις αὕτη δύναται νὰ λάβῃ τὴν μορφὴν (1), ἐὰν θέσωμεν

$\mathrm{A} = -2\,\alpha,\ \mathrm{B} = -2\,\beta,\ \Gamma = -2\,\gamma,\ \Delta = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \varrho^2,$

ὅτε ἔχομεν

$$\alpha = -\frac{\mathrm{A}}{2},\ \beta = -\frac{\mathrm{B}}{2},\ \gamma = -\frac{\Gamma}{2},\ \varrho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \Delta.$$

Οὕτω ἡ (5) λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\left(x + \frac{\mathrm{A}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\mathrm{B}}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{\Gamma}{2}\right)^2 = \frac{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\Gamma^2}{4} - \Delta, \quad (5')$$

ἥτις παριστάνει σφαῖραν, ἔχουσαν κέντρον τὸ σημεῖον

$$\left(-\frac{\mathrm{A}}{2}, -\frac{\mathrm{B}}{2}, -\frac{\Gamma}{2}\right).$$

Ἡ σφαῖρα αὕτη θὰ εἶνε πραγματική, ἢ ἓν σημεῖον, ἢ φανταστική, ἂν τὸ $\dfrac{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\Gamma^2}{4} - \Delta$ εἶνε θετικόν, (ὅτε ἡ ἀκτὶς αὐτῆς εἶνε ἴση μὲ $\sqrt{\dfrac{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\Gamma^2}{4} - \Delta}$), ἢ μηδέν, ἢ ἀρνητικόν.

ε') Ἡ γενικὴ ἐξίσωσις τοῦ β' βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰς τρεῖς συντεταγμένας x, y, z εἶνε

$$A x^2 + B y^2 + \Gamma z^2 + \Delta x y + E x z + Z y z + H x + \Theta y + I z + K = o$$

καὶ ἔχει δέκα ὅρους. Ἵνα αὕτη παριστᾷ σφαῖραν (εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους) πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε $A = B = \Gamma$ καὶ $\Delta = E = Z = o$.

ϛ') Ἡ ἐξίσωσις σφαίρας, διερχομένης διὰ τεσσάρων σημείων $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, $M_4(x_4, y_4, z_4)$, μὴ κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου εἶνε

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = o \qquad (6)$$

Διότι ἡ ἐξίσωσις τῆς σφαίρας ταύτης θὰ εἶνε τῆς μορφῆς

$$x^2 + y^2 + z^2 + A x + B y + \Gamma z + \Delta = o, \qquad (7)$$

ἐν ᾧ ἄγνωστα εἶνε τὰ Α, Β, Γ, Δ. Ἀλλ' ἐπειδὴ αὕτη διέρχεται διὰ τῶν M_1, M_2, M_3, M_4 θὰ εἶνε

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + A x_1 + B y_1 + \Gamma z_1 + \Delta &= o, \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + A x_2 + B y_2 + \Gamma z_2 + \Delta &= o, \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 + A x_3 + B y_3 + \Gamma z_3 + \Delta &= o, \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 + A x_4 + B y_4 + \Gamma z_4 + \Delta &= o. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Ἀπαλείφοντες τὰ Α, Β, Γ, Δ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (7) καὶ (8) εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην ἐξίσωσιν, ἥτις τίθεται καὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν (6).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Δίδεται σφαῖρα μὲ κέντρον (5, — 1, — 3) καὶ ἀκτῖνα 10. Εὕρετε ἂν τὰ σημεῖα (1, 2, — 3), (o o, o), (5, — 1, 7), (o, 1, o) κεῖνται ἐντὸς ἢ ἐπὶ ἢ ἐκτὸς τῆς σφαίρας.

2) Εἰς τίνα σημεῖα τέμνει ὁ ἄξων τῶν z τὴν σφαῖραν

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = \rho^2;$$

Δείξατε ὅτι τὸ γινόμενον τῶν μηκῶν δύο ἀνυσμάτων ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν z, τῶν ἐχόντων τὰ ἄκρα αὐτῶν εἰς τὸ o καὶ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἰσοῦται μὲ $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \rho^2$. Τί συνάγεται ὅσον ἀφορᾷ τὰς φορὰς τῶν ἀνυσμάτων τούτων;

3) Εὕρετε τὰς τομὰς τῆς σφαίρας

$$x^2 + y^2 + z^2 + A x + B y + \Gamma z + \Delta = o$$

μετὰ τῶν ἀξόνων. Δείξατε δὲ ὅτι τὸ γινόμενον τῶν δύο τιμῶν τῶν x, y, z εἶνε τὸ αὐτό.

4) Ἔστωσαν τὰ ζεύγη (λ_1, λ_2), (μ_1, μ_2), (ν_1, ν_2) ἐξ ἀριθμῶν, οἵτινες πληροῦν τὰς σχέσεις $\lambda_1 \lambda_2 = \mu_1 \mu_2 = \nu_1 \nu_2$. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς σφαίρας, ἥτις τέμνεται ὑπὸ τῶν ἀξόνων εἰς τὰ σημεῖα (λ_1, λ_2), (μ_1, μ_2), (ν_1, ν_2) καὶ εὕρετε τὴν γεωμετρικὴν σημασίαν τῶν συντελεστῶν τῆς ἐξισώσεως (παραβάλατε μὲ τὴν ἐξίσ. (5')).

$$x^2 + y^2 + z^2 + A x + B y + \Gamma z + \Delta = o.$$

5) Εὕρετε τὸ κέντρον καὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας

$$3 (x^2 + y^2 + z^2) - 7 x + 2 y + 11 z = 1.$$

6) Δείξατε ὅτι ἡ σφαῖρα $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ εἶνε συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν καὶ τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων.

7) Λύσατε τὴν ἐξίσωσιν $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ ὡς πρὸς x ἢ y ἢ z καὶ διερευνήσατε τὰ ἀντίστοιχα ἐξαγόμενα, ὡς πρὸς τὴν πραγματικότητα τῶν συντεταγμένων πρὸς τὰς ὁποίας γίνεται ἡ λύσις.

8) Δείξατε ὅτι πᾶσαι αἱ ἐξισώσεις

$$A_0 (x^2 + y^2 + z^2) + A x + B y + \Gamma z + \Delta = o,$$

αἵτινες διαφέρουν κατὰ τὴν σταθερὰν Δ, παριστάνουν ὁμοκέντρους σφαίρας.

9) Ὑπὸ τῆς ἀρχῆς καὶ τῶν σημείων (5, — 1, 3), (2, 7, — 4), (o, 3, o) ὁρίζεται ἓν τετράεδρον. Εὕρεται τὴν ἐξίσωσιν τῆς περιγεγραμμένης εἰς αὐτὸ σφαίρας, τὴν ἀκτῖνα καὶ τὸ κέντρον αὐτῆς.

10) Ἡ ἐξίσωσις σφαίρας, ἐχούσης κέντρον τὴν ἀρχὴν καὶ ἀκτῖνα ρ εἶνε $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς σφαίρας εἰς πολικὰς συντεταγμένας.

§ 103. Θέσεις ἐπιπέδου ὡς πρὸς σφαῖραν.—

α΄) Δίδεται ἡ σφαῖρα Κ (α, β, γ, ρ) καὶ ἐπίπεδον

$$A x + B y + \Gamma z + \Delta = o \qquad (1)$$

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν.

Γνωρίζομεν ὅτι, ἂν ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου εἶνε μεγαλυτέρα, ἢ ἴση, ἢ μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος ρ, τὸ ἐπίπεδον κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας, ἢ ἐφάπτεται αὐτῆς, ἢ τέμνει τὴν σφαῖραν. Ἀλλ' ἡ ἀπόστασις τοῦ Κ (α, β, γ) ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου (1) εἶνε (εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους) ἴση μὲ

$$\frac{A \alpha + B \beta + \Gamma \gamma + \Delta}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}$$

Αὐτὴ θὰ εἶνε κατ' ἀπόλυτον τιμὴν μεγαλυτέρα, ἢ ἴση, ἢ μικροτέρα τοῦ ρ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι,

«*ἵνα τὸ δοθὲν ἐπίπεδον κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας, ἢ ἐφάπτε-*

ται αὐτῆς, ἢ τέμνῃ τὴν σφαῖραν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ παράστασις:

$$\frac{(A\alpha + B\beta + \Gamma\gamma + \Delta)^2}{A^2 + B^2 + \Gamma^2} - \varrho^2$$

ἢ ἡ κατὰ θετικὸν παράγοντα διαφέρουσα ταύτης

$$(A\alpha + B\beta + \Gamma\gamma + \Delta)^2 - \varrho^2 (A^2 + B^2 + \Gamma^2),$$

νὰ εἶνε θετική, ἢ μηδὲν ἢ ἀρνητική».

β΄) Ἂν ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας Κ $(\alpha, \beta, \gamma, \varrho)$ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου $Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$ εἶνε μικρότερα τοῦ ϱ, τὸ ἐπίπεδον τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ περιφέρειαν κύκλου, τῆς ὁποίας ἐξισώσεις εἶνε αἱ

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - \varrho^2 = 0, \quad Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0 \qquad (2)$$

γ΄ Ἂν ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου εἶνε ἴση μὲ τὸ μηδέν, ἡ τομὴ θὰ εἶνε περιφέρεια μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας.

δ΄) Δίδεται ἡ σφαῖρα Κ $(\alpha, \beta, \gamma, \varrho)$ καὶ ἐπίπεδον

$$Ax + By + \Gamma z = 0.$$

Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον τῷ δοθέντι καὶ ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας.

Τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον ὡς παράλληλον τῷ $Ax + By + \Gamma z = 0$ θὰ ἔχῃ ἐξίσωσιν $Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$ ἐν ᾧ ἄγνωστον εἶνε τὸ Δ. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο θὰ ἐφάπτεται τῆς σφαίρας, θὰ εἶνε

$$A\alpha + B\beta + \Gamma\gamma + \Delta = \pm \varrho\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}$$

Ἀπαλείφοντες τὸ Δ μεταξὺ τῆς ἐξισώσεως ταύτης καὶ τῆς προηγουμένης, εὑρίσκομεν

$$A(x-\alpha) + B(y-\beta) + \Gamma(z-\gamma) = \pm \varrho\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}$$

ὡς ἐξισώσεις δύο ἐπιπέδων ἐφαπτομένων τῆς σφαίρας καὶ παραλλήλων τῷ δοθέντι.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Τίνα θέσιν ἔχει τὸ ἐπίπεδον $3x - 7y + z = 4$ ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν

$$2(x^2 + y^2 + z^2) - 11x + 5y + 4z = 3;$$

2) Εὕρετε τὴν τομὴν τῆς σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2$ καὶ τοῦ ἐπιπέδου $Ax + By + \Gamma = 0$. Εὕρετε τὰς προβολὰς τῆς τομῆς ταύτης ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων xz καὶ yz.

3) Αἱ ἐξισώσεις τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας Κ $(\alpha, \beta, \gamma, \varrho)$ ἀγομένης καθέτου εὐθείας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον $Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$ εἶνε

$$\frac{x-\alpha}{A} = \frac{y-\beta}{B} = \frac{z-\gamma}{\Gamma},$$

ἢ $x = \alpha + \lambda A$, $y = \beta + \lambda B$, $z = \gamma + \lambda \Gamma$. Εὕρετε τὰς συντεταγμένας τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας τομῆς, καθὼς καὶ τὰς συντεταγμένας τῶν σημείων καθ' ἃ ἡ κάθετος τέμνει τὴν σφαῖραν.

4) Ἂν Σ παριστάνῃ τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως τῆς σφαίρας Κ $(\alpha, \beta, \gamma, \rho)$ καὶ Ε τῆς τοῦ ἐπιπέδου $Ax + By + \Gamma z + \Delta = o$ (τοῦ β' ὄντος μηδέν), ἐπειδὴ διὰ πᾶν σημεῖον τῆς περιφερείας τῆς τομῆς αὐτῶν εἶνε $\Sigma = o$, $E = o$ θὰ εἶνε καὶ $\begin{cases} \Sigma + \lambda E = o \\ E = o \end{cases}$ ἐνῷ τὸ λ παριστάνει τυχοῦσαν παράμετρον. Ἑπομένως δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὰς ἐξισώσεις $\Sigma + \lambda E = o$, $E = o$ ὡς ἐξισώσεις τῆς περιφερείας τομῆς. Δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\Sigma + \lambda E = o$ παριστάνει σφαῖραν, διερχομένην διὰ τῆς περιφερείας $\Sigma = o$, $E = o$, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ εἶνε κάθετος τῷ $E = o$.

Δείξατε ἀκόμη ὅτι, ἡ $\Sigma + \lambda E = o$ παριστάνει πάσας τὰς τοιαύτας σφαίρας, ἐὰν τὸ λ μεταβάλλεται ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $+\infty$.

5) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τοῦ πλήθους τῶν σφαιρῶν, αἵτινες διέρχονται διὰ τοῦ κύκλου $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = \rho^2$, $z = o$.

6) Ἐξετάσατε ὑπὸ τίνα συνθήκην ὑπάρχουν σφαῖραι μεταξὺ τοῦ πλήθους τούτου τῶν σφαιρῶν (τοῦ προηγουμένου ζητήματος), αἵτινες ἐφάπτονται τοῦ ἐπιπέδου yz, ἢ τοῦ xz. Εὕρετε τὴν ἁρμόζουσαν τιμὴν τῆς παραμέτρου λ.

7) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς σφαίρας, ἥτις διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς καὶ τοῦ κύκλου $4x - 5y + z = 1$, $3(x^2 + y^2 + z^2) - x + 4y - 7z = 11$.

8) Εἰς τίνα σχέσιν εὑρίσκεται τὸ ἐπίπεδον $Ax + By + \Gamma z = o$ πρὸς τὴν σφαῖραν $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + \Gamma z = o$; (Εὕρετε τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῶν).

9) Δείξατε ὅτι δι' ἑκάστης εὐθείας τοῦ χώρου διέρχονται δύο ἐπίπεδα, ἐφαπτόμενα μιᾶς σφαίρας. Τὰ ἐπίπεδα δύνανται νὰ εἶνε πραγματικὰ καὶ διάφορα ἀλλήλων, πραγματικὰ καὶ συμπίπτοντα, ἢ φανταστικά. (Πρὸς ἀπόδειξιν ἐκφράσατε ὅτι τὸ ἐπίπεδον $E_1 + \lambda E_2 = o$ τῆς ἀξονικῆς δέσμης $E_1 = o$, $E_2 = o$ ἐφάπτεται τῆς σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$. Λαμβάνετε οὕτω ἐξίσωσιν β' βαθμοῦ ὡς πρὸς λ).

10) Εὕρετε τὰς ἐξισώσεις τῶν δύο ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα διέρχονται διὰ τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ ἐφάπτονται τῆς σφαίρας $(x-2)^2 + (y-5)^2 + (z-8)^2 = 1$.

11) Ἔστω ὅτι τὸ σημεῖον M_1 (x_1, y_1, z_1) κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$. Εὕρετε τὴν συνθήκην, ἥτις ἐκφράζει ὅτι ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τοῦ M_1 ἐφάπτεται τῆς σφαίρας. Εἰσαγάγετε εἰς τὴν συνθήκην ἀντὶ τῶν συντελεστῶν τῆς ἐξισώσεως τοῦ ἐπιπέδου Α, Β, Γ τὰς συντεταγμένας x, y, z τοῦ σημείου ἀφῆς, ὅτε ἡ συνθήκη γίνεται $x x_1 + y y_1 + z z_1 = \rho^2$. Συνάγετε οὕτω ὅτι «*πάντα τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα, τὰ διὰ τοῦ* (x_1, y_1, z_1) *διερχόμενα ἐφάπτονται τῆς σφαίρας κατὰ τὸν κύκλον*

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2, \quad x x_1 + y y_1 + z z_1 = \rho^2».$$

Παρατηρήσατε ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἥτις συνδέει τὴν ἀρχὴν μὲ τὸ (x_1, y_1, z_1) εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον $x x_1 + y y_1 + z z_1 = \rho^2$.

§ 106. Θέσεις εὐθείας ὡς πρὸς σφαῖραν. Ἐφαπτόμεναι εὐθεῖαι καὶ κῶνος τῶν ἐφαπτομένων σφαίρας.—
α΄) Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις εὐθείας $M_1 M_2$

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2} = \frac{z-z_1}{z_1-z_2} \tag{1}$$

καὶ ἡ σφαῖρα $\quad . \quad x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2 \qquad (2)$

Ζητοῦνται τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς εὐθείας καὶ τῆς σφαίρας (ἂν ὑπάρχουν τοιαῦτα).

Ἂν $M\,(x, y, z)$ εἶνε τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας $M_1 M_2$ καὶ θέσωμεν $(M_1 M) : (M M_2) = \lambda$, θὰ εἶνε

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \tag{3}$$

Ἂν τὸ M εἶνε ἐπὶ τῆς σφαίρας, αἱ συντεταγμέναι αὐτοῦ θὰ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν τῆς σφαίρας. Οὕτω θὰ ἔχωμεν τότε

$$\lambda^2 (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - \varrho^2) + 2\lambda\,(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2-\varrho^2)+$$
$$+ (x_1^2 + y_1^2\ z_1^2 - \varrho^2) = 0. \tag{4}$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς πρὸς λ, εὑρίσκομεν ἢ δύο τιμὰς πραγματικὰς λ_1, λ_2 καὶ διακεκριμένας, ἢ δύο ἴσας, ἢ δύο φανταστικάς. Εἰς τὰς τιμὰς ταύτας τοῦ λ ἀντιστοιχοῦν αἱ συντεταγμέναι (x,y,z) τῶν κοινῶν σημείων (3) τῆς εὐθείας καὶ τῆς σφαίρας. Αἱ τρεῖς περιπτώσεις ὅσον ἀφορᾷ τὰς τιμὰς τοῦ λ ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς ποσότητος

$$\Delta = (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 - \varrho^2)^2 -$$
$$(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \varrho^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - \varrho^2) \tag{5}$$

Τοῦτο γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$\Delta = \varrho^2 (M_1 M_2)^2 - 4\,E^2 \tag{6}$$

ἐνῷ εἶνε

$$4\,E^2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (z_1 x_2 - z_2 x_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \tag{6'}$$

Τὸ E εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου $oM_1 M_2$ (§ 93).

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ r τὸ μῆκος τῆς καθέτου ἐκ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων ἐπὶ τὴν $M_1 M_2$, θὰ ἔχωμεν

$$E = \frac{1}{2}(M_1 M_2)\,r, \text{ καὶ } 4\,E^2 = (M_1 M_2)^2\, r^2$$

Ἑπομένως τὸ Δ εἶνε θετικόν, ἢ ἴσον μὲ μηδέν, ἢ ἀρνητικόν, ἂν τὸ ϱ εἶνε μεγαλύτερον, ἢ ἴσον, ἢ μικρότερον τοῦ r.

Ὅθεν «***ἡ εὐθεῖα M_1 M_2 τέμνει τὴν σφαῖραν εἰς δύο σημεῖα πραγματικὰ καὶ διακεκριμένα, ἢ συμπίπτοντα εἰς ἕν, ἢ φανταστικά, ἂν ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἀπὸ τῆς εὐθείας εἶνε μικροτέρα, ἢ ἴση, ἢ μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς***».

Ὅταν τὰ δύο σημεῖα τῆς τομῆς συμπίπτουν, θὰ εἶνε $\Delta = o$, καὶ $\lambda_1 = \lambda_2$, ἡ δὲ εὐθεῖα M_1 M_2 λέγεται *ἐφαπτομένη τῆς σφαίρας*.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι

β΄) «***ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα ἡ εὐθεῖα M_1M_2 ἐφάπτεται τῆς σφαίρας*** $x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2$ ***εἶνε***

$$(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 - \varrho^2)^2 =$$

$$(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \varrho^2)\ (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - \varrho^2) \qquad (7)$$

γ΄) Ἔστω M_1 σημεῖόν τι, κείμενον ἐκτὸς τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2=\varrho^2$ καὶ $M\,(x, y, z)$ τυχὸν σημεῖον εὐθείας, διερχομένης διὰ τοῦ M_1 καὶ ἐφαπτομένης τῆς σφαίρας. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω αἱ συντεταγμέναι τοῦ M θὰ ὑπόκεινται εἰς τὴν συνθήκην

$$\boxed{(x_1x+y_1y+z_1z-\varrho^2)^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2-\varrho^2)(x^2+y^2+z^2-\varrho^2)} \qquad (8)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη θὰ ἐπαληθεύεται τότε καὶ μόνον τότε ὑπὸ τῶν (x, y, z), ὅταν τοῦτο κεῖται ἐπὶ ἐφαπτομένης τῆς σφαίρας, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἐκ τοῦ M_1. Ἐπειδὴ πᾶσα ἐπιφάνεια γεννωμένη ὑπὸ εὐθείας διερχομένης διὰ σταθεροῦ σημείου καλεῖται ***κωνικὴ ἐπιφάνεια ἢ κῶνος***, διὰ τοῦτο καλοῦμεν τὴν ἐπιφάνειαν, τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦν πᾶσαι αἱ διὰ τοῦ M_1 ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι τῆς σφαίρας, ***κῶνον τῶν ἐφαπτομένων τῆς σφαίρας***, ἔχοντα κορυφὴν τὸ M_1.

Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις (8) εἶνε ἡ ἐξίσωσις τοῦ κώνου τούτου.

δ΄) Ἐκ τῆς μορφῆς τῆς ἐξισώσεως (8) προκύπτει ὅτι, τὸ σύνολον τῶν σημείων τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, καθ᾽ ἣν τὸ ἐπίπεδον

$$x_1\, x + y_1\, y + z_1\, z = \varrho^2 \qquad (9)$$

τέμνει τὴν σφαῖραν
$$x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2 \qquad (10)$$

εἶνε σημεῖα τοῦ κώνου τῶν ἐφαπτομένων τῆς σφαίρας διὰ τοῦ σημείου M_1. Ὁμοίως παρατηροῦμεν ἐκ τῆς (8) ὅτι, πάντα τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα εἶνε κοινὰ τοῦ ἐπιπέδου (9) καὶ τοῦ κώνου τῶν ἐφαπτομένων, ὀφείλουν νὰ κεῖνται καὶ ἐπὶ τῆς σφαίρας (10). Ἑπομένως, ὁ κῶνος τῶν ἐφαπτομένων ἐφάπτεται τῆς σφαίρας κατὰ τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, τῆς ἐχούσης ἐξισώσεις (9) καὶ (10). Ἡ μορφὴ τῆς ἐξισώσεως (8) δεικνύει προσέτι ὅτι, ἡ εὐθεῖα, ἥτις συνδέει τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων μὲ τὸ σημεῖον M_1 εἶνε ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας κάθετος (§ 87) ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου (9), (10). Ὅθεν, «**ὁ κῶνος τῶν ἐφαπτομένων τῆς σφαίρας, τῶν ἀγομένων ἀπό τινος σημείου, κειμένου ἐκτὸς αὐτῆς, εἶνε ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος**».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Εὕρετε, ἂν ἡ εὐθεῖα, ἥτις συνδέει τὰ σημεῖα (5, 2, — 1), (4, — 2, 7) τέμνει τὴν σφαῖραν $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, καὶ εἰς τίνα σημεῖα;

2) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τοῦ κώνου τῶν ἐφαπτομένων, ὅστις ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ σημείου (α, ο, ο) καὶ τῆς σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$.

3) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τοῦ κώνου τῶν ἐφαπτομένων τῆς σφαίρας
$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = \rho^2$$
διὰ τοῦ σημείου M_1 (x_1, y_1, z_1).

4) Πότε ἡ εὐθεῖα $x=y=z$ ἐφάπτεται τῆς σφαίρας Κ (α, β, γ, ρ);

5) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τοῦ κώνου τῶν ἐφαπτομένων τῆς σφαίρας Κ (α, β, γ, ρ) διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων.

6) Εὕρετε τὴν τομὴν τῆς σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ καὶ τῆς εὐθείας $x = x_1 + \lambda a$, $y = y_1 + \lambda b$, $z = z_1 + \lambda c$. (Εὑρίσκει τις, ἐν γένει, δύο τιμὰς τοῦ λ ἐκ τῆς ἐξισώσεως
$$\lambda^2 + 2\lambda(a x_1 + b y_1 + c z_1) + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \rho^2 = o.$$
Ὡς συντεταγμένας τοῦ μέσου τῆς χορδῆς τῆς σφαίρας ἐπὶ τῆς εὐθείας εὑρίσκομεν
$$x = x_1 + \lambda' a,\ y = y_1 + \lambda' b,\ z = z_1 + \lambda' c,$$
ἐνῷ τὸ λ′ εἶνε τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως ὡς πρὸς λ. Ἀκολούθως εὑρίσκομεν $\lambda' = -(a x_1 + b y_1 + c z_1)$. Εἰσάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὰς τῶν x, y, z καὶ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ a, b, c ἀντιστοίχως, λαμβάνομεν $a x + b y + c z = o$, ἥτις εἶνε ἐξίσωσις ἐπιπέδου, ἐφ' οὗ κεῖνται τὰ μέσα τῶν παραλλήλων χορδῶν τῆς θεωρηθείσης. Τοῦτο καλεῖται *διαμετρικὸν ἐπίπεδον τῆς σφαίρας* κατὰ τὴν διεύθυνσιν (a, b, c), εἶνε δὲ τοῦτο κάθετον πρὸς τὰς χορδὰς ταύτας).

7) Ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (8) τοῦ κώνου τῶν ἐφαπτομένων διὰ τοῦ σημείου M_1 θέσωμεν $x_1 = k a$, $y_1 = k b$, $z_1 = k c$, ἵνα ἐκφράσωμεν ὅτι τὸ M_1 κεῖται ἐπὶ διαμέτρου διερχομένης ἐκ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων καὶ ἐχούσης διευθύνοντα συνημίτονα (a, b, c), εὑρίσκομεν
$$\left(a x + b y + c z - \frac{\rho^2}{k^2}\right)^2 = \left(x^2 + y^2 + z^2 - \rho^2\right)\left(1 - \frac{\rho^2}{k^2}\right).$$
Ἐὰν τὸ M_1 ἀπομακρύνεται εἰς ἄπειρον ἐπὶ τῆς ἐν λόγῳ διαμέτρου, ὁ κῶνος τῶν ἐφαπτομένων καταντᾷ κύλινδρος ἐφαπτομένων, ἔχων ἐξίσωσιν
$$(a x + b y + c z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - \rho^2.$$
Οὗτος ἐφάπτεται τῆς σφαίρας κατὰ τὰ σημεῖα περιφερείας μεγίστου κύκλου, καθ' ὃν τέμνεται ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου τῇ διευθύνσει (a, b, c).

8) Τίς εἶνε ἡ γεωμετρικὴ σημασία ἑκάστης τῶν ἐκφράσεων

$$a x + b y + c z \text{ καὶ } x^2 + y^2 + z^2 - \rho^2;$$

Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς σημασίας ταύτης δύναται νὰ ἐξαχθῇ ἀπ' εὐθείας ἡ ἐξίσωσις τοῦ κυλίνδρου τῶν ἐφαπτομένων.

9) Εὕρετε ἄνευ μετασχηματισμοῦ τῶν συντεταγμένων (κατὰ τὸ προηγούμενον ζήτημα) τὴν ἐξίσωσιν τοῦ κυλίνδρου τῶν ἐφαπτομένων, ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν διεύθυνσιν (a, b, c) τῆς σφαίρας

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = \rho^2.$$

§ 107. Ἐξίσωσις ἐπιπέδου ἐφαπτομένου σφαίρας εἰς δοθὲν σημεῖον αὐτῆς.—

α΄) Ἔστω σφαῖρα Κ $(\alpha, \beta, \gamma, \varrho)$ καὶ M_1 (x_1, y_1, z_1) σημεῖον κείμενον ἐπ' αὐτῆς.

Ζητεῖται ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐπιπέδου, τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ M_1 καὶ ἐφαπτομένου τῆς σφαίρας.

Πᾶν ἐπίπεδον ἔχει ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $A x + B y + \Gamma z + \Delta = 0$, ὡς διερχόμενον δὲ διὰ τοῦ M_1 θὰ εἶνε $A x_1 + B y_1 + \Gamma z_1 + \Delta = 0$.

Ἄρα ἡ ἐξίσωσις τῶν ἐπιπέδων τῶν διερχομένων διὰ τοῦ M_1 εἶνε

$$A (x - x_1) + B (y - y_1) + \Gamma (z - z_1) = 0$$

ἐν ᾧ ἄγνωστα εἶνε τὰ Α, Β, Γ. Τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς σφαίρας εἰς τὸ M_1 θὰ εἶνε κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα

$$KM_1 \ (x_1 - \alpha, y_1 - \beta, z_1 - \gamma) \text{ εἰς τὸ } M_1.$$

Ἑπομένως θὰ εἶνε

$$\frac{A}{x_1 - \alpha} = \frac{B}{y_1 - \beta} = \frac{\Gamma}{z_1 - \gamma}.$$

Ἂν τοὺς ἴσους τούτους λόγους παραστήσωμεν διὰ λ θὰ εἶνε

$$A = (x_1 - \alpha)\lambda, \ B = (y_1 - \beta)\lambda, \ \Gamma = (z_1 - \gamma)\lambda.$$

Ἄρα ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς σφαίρας εἰς τὸ M_1 (x_1, y_1, z_1) εἶνε

$$(x - x_1)(x_1 - \alpha) + (y - y_1)(y_1 - \beta) + (z - z_1)(z_1 - \gamma) = 0$$

ἢ $$\boxed{(x - \alpha)(x_1 - \alpha) + (y - \beta)(y_1 - \beta) + (z - \gamma)(z_1 - \gamma) = \varrho^2} \quad (1)$$

ἐπειδὴ εἶνε $(x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 + (z_1 - \gamma)^2 = \varrho^2$.

β΄) Ἂν κέντρον τῆς σφαίρας εἶνε ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων $(\alpha, \beta, \gamma = 0)$ ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου αὐτῆς εἰς τὸ M_1 θὰ εἶνε

$$\boxed{x x_1 + y y_1 + z z_1 = \varrho^2} \qquad (2)$$

γ') Παρατηρητέον ὅτι ἐπὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς τὸ σημεῖον $M_1(x_1, y_1, z_1)$ τῆς σφαίρας κεῖνται πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι, αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο.

Τῷ ὄντι, ἂν τὸ M_1 κεῖται ἐπὶ τῆς σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2$, θὰ εἶνε
$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \varrho^2 \qquad (3)$$

Θεωροῦντες τὰς τομὰς τῆς σφαίρας καὶ τῆς εὐθείας, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ M_1 καὶ τοῦ σημείου $M_2(x_2, y_2, z_2)$, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν (§, 106, (4))
$$\lambda^2 (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - \varrho^2) + 2\lambda (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 - \varrho^2) = o$$
ἕνεκα τῆς (3). Ἡ μία τῶν τιμῶν τοῦ λ, ἔστω ἡ λ_1, εἶνε μηδέν, καὶ ἀντιστοιχεῖ εἰς αὐτὴν τὸ M_1, ἡ δὲ ἄλλη, ἔστω ἡ λ_2, εἶνε
$$\lambda_2 = -2 \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 - \varrho^2}{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - \varrho^2}.$$

Ἐὰν τὸ δεύτερον σημεῖον τομῆς τῆς εὐθείας καὶ τῆς σφαίρας συμπίπτῃ μὲ τὸ M_1, ἤτοι ἂν ἡ εὐθεῖα $M_1 M_2$ καταντήσῃ ἐφαπτομένη τῆς σφαίρας εἰς τὸ M_1, θὰ εἶνε $\lambda_2 = o$, καὶ τοὐναντίον.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι «***ἵνα ἡ ἐκ τοῦ σημείου M_1 τῆς σφαίρας εἰς τὸ σημεῖον M_2 ἀγομένη εὐθεῖα εἶνε ἐφαπτομένη τῆς σφαίρας εἰς τὸ M_1, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε***
$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = \varrho^2».$$

Δι' ἑκάστου σημείου M_1 τῆς σφαίρας ἄγονται ἄπειροι εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι αὐτῆς. Γράφοντες ἀνωτέρω ἀντὶ τῶν (x_2, y_2, z_2) τὰ (x, y, z), εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις
$$x x_1 + y y_1 + z z_1 = \varrho^2 \qquad (4)$$
ἐπαληθεύεται τότε μόνον, ὅταν τὸ σημεῖον $M(x, y, z)$ κεῖται ἐπὶ ἐφαπτομένης τῆς σφαίρας εἰς τὸ M_1. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐξίσωσις (4) παριστᾷ ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας εἰς τὸ M_1 (§ 107, β') ἕπεται ὅτι:

«***αἱ ἄπειροι ἐφαπτόμεναι σφαίρας, ἐχούσης κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων καὶ ἀκτῖνα ϱ, αἵτινες ἄγονται διά τινος σημείου αὐτῆς $M_1(x_1, y_1, z_1)$ κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον εἶνε τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς σφαίρας εἰς τὸ M_1***».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς τὸ σημεῖον $M_1(x_1, y_1, z_1)$ τῆς σφαίρας προκύπτει καὶ ἐκ τῆς ἐξισώσεως τοῦ κώνου τῶν ἐφαπτομένων τῆς σφαίρας, ἂν ἡ κορυφὴ M_1 θεωρηθῇ κειμένη ἐπὶ τῆς σφαίρας.

2) Εὕρετε τὰς τομὰς τῆς εὐθείας $x=\lambda a$, $y=\lambda b$, $z=\lambda c$, ἥτις διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων, καὶ τῆς σφαίρας

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+\Gamma z=o.$$

3) Εὕρετε τὰς συντεταγμένας ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς σφαίρας Κ $(\alpha, \beta, \gamma, \rho)$ εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς M_1 (x_1, y_1, z_1).

4) Δείξατε ὅτι, τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα εἰς σημεῖα τῆς σφαίρας

$$x^2+y^2+z^2=\rho^2,$$

ἔχοντα τετμημένην x_1, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τοῦ ἄξονος τῶν x, τὸ ὁποῖον μὲ τὰ σημεῖα $x=-\rho$, $x=x_1$, $x=\rho$ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν σημειοσειράν.

5) Ἂν τὸ ἐπίπεδον $Ax+By+\Gamma z+\Delta=o$ εἶνε ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2=\rho^2$, τίνες αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς; Τίνα σχέσιν ἔχουν μὲ τὰ Α, Β, Γ, Δ;

6) Εὕρετε τὸ σημεῖον ἐπαφῆς ἐπιπέδου διερχομένου διὰ σημείου $M'(x', y', z')$, κειμένου ἐκτὸς σφαίρας καὶ ἐφαπτομένου αὐτῆς. (Ἂν x_1, y_1, z_1 εἶνε αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου ἐπαφῆς, θὰ εἶνε $xx_1+yy_1+zz_1=\rho^2$ ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου, καὶ ἀκόμη θὰ εἶνε $x'x_1+y'y_1+z'z_1=\rho^2$. Ἀλλ' αὕτη ἐκφράζει ὅτι τὸ x_1, y_1, z_1 κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $xx'+yy'+zz'=\rho^2$, ἤτοι ὅτι εἶνε σημεῖον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, καθ' ὃν τέμνεται ἡ σφαῖρα ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τούτου. Ἀντιστρόφως, τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς ἕκαστον τῶν σημείων τῆς περιφερείας ταύτης διέρχεται διὰ τοῦ Μ′. Διότι, ἂν (x_1, y_1, z_1) εἶνε ἓν τοιοῦτον σημεῖον, θὰ εἶνε $x_1x'+y_1y'+z_1z'=\rho^2$. Ἀλλ' αὕτη ἐκφράζει ὅτι, τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον $xx_1+yy_1+zz_1=\rho^2$ διέρχεται διὰ τοῦ (x', y', z').

7) Δείξατε ὅτι τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα εἰς τὰ ἄκρα διαμέτρου τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2=\rho^2$ εἶνε παράλληλα.

§ 108. Ἐπίπεδα ἐφαπτόμενα σφαίρας ἐκ σημείου ἐκτὸς αὐτῆς. Πόλος καὶ πολικὸν ἐπίπεδον.—

α′) Ἔστω ἡ σφαῖρα Κ $(\alpha, \beta, \gamma, \varrho)$ καὶ σημεῖον Ρ (ξ, η, ζ), κείμενον ἐκτὸς αὐτῆς.

Ζητεῖται ἡ ἐξίσωσις ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ Ρ καὶ ἐφαπτομένου τῆς σφαίρας.

Ἂν M_1 (x_1, y_1, z_1) εἶνε τὸ σημεῖον καθ' ὃ ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ Ρ ἐφάπτεται τῆς σφαίρας, ἡ ἐξίσωσις τούτου θὰ εἶνε (§ 107, (1))

$$(x-\alpha)(x_1-\alpha)+(y-\beta)(y_1-\beta)+(z-\gamma)(z_1-\gamma)=\varrho^2.$$

Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο διέρχεται διὰ τοῦ Ρ θὰ εἶνε

$$(\xi-\alpha)(x_1-\alpha)+(\eta-\beta)(y_1-\beta)+(\zeta-\gamma)(z_1-\gamma)=\varrho^2 \qquad (1)$$

Ἀφ' ἑτέρου εἶνε καὶ

$$(x_1-\alpha)^2+(y_1-\beta)^2+(z_1-\gamma)^2=\varrho^2 \qquad (2)$$

Ὅθεν αἱ συντεταγμέναι (x_1, y_1, z_1) τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν ἐκ τοῦ P ἀγομένων ἐφαπτομένων ἐπιπέδων τῆς σφαίρας $(\alpha, \beta, \gamma, \varrho)$ πρέπει νὰ ἐπαληθεύουν τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2). Ἂν τὰ (x_1, y_1, z_1) θεωρηθοῦν ὡς μεταβλητά, ἡ μὲν (1) παριστάνει ἐπίπεδον, διερχόμενον διὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς, ἡ δὲ (2) εἶνε αὐτὴ ἡ ἐξίσωσις τῆς σφαίρας. Τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) παριστάνει περιφέρειαν κύκλου, καθ' ἣν τέμνεται ἡ σφαῖρα (2) ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου (1), ἂν τὰ (x_1, y_1, z_1) θεωρηθοῦν ὡς μεταβλητά. Ἡ περιφέρεια αὕτη εἶνε πραγματική, ἂν τὸ ἐπίπεδον (1) τέμνῃ τὴν σφαῖραν, ἤτοι ἂν τὸ σημεῖον P κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας. Ἡ περιφέρεια αὕτη ἀνάγεται εἰς ἓν σημεῖον, ὅταν τὸ P κεῖται ἐπὶ τῆς σφαίρας· εἶνε δὲ φανταστική, ἂν τὸ P κεῖται ἐντὸς τῆς σφαίρας.

β') Τὸ ἐπίπεδον $(x-\alpha)(\xi-\alpha)+(y-\beta)(\eta-\beta)+(z-\gamma)(\zeta-\gamma)=\varrho^2$ καλεῖται *πολικὸν ἐπίπεδον τοῦ σημείου* P (ξ, η, ζ) ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν $(\alpha, \beta, \gamma, \varrho)$, τὸ δὲ P *πόλος τοῦ πολικοῦ τούτου ἐπιπέδου* ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν.

Εὐκόλως ἀποδεικνύονται αἱ ἑξῆς ἰδιότητες.

γ') «***Ἐὰν ὁ πόλος P κεῖται ἐντὸς τῆς σφαίρας, τὸ πολικὸν ἐπίπεδον αὐτοῦ κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας***». «***Ἂν ὁ πόλος κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας, τὸ πολικὸν ἐπίπεδον αὐτοῦ τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ περιφέρειαν κύκλου, κατὰ τὰ σημεῖα τῆς ὁποίας ἐφάπτονται τῆς σφαίρας ἐπίπεδα διερχόμενα διὰ τοῦ πόλου***». «***Ἂν ὁ πόλος κεῖται ἐπὶ τῆς σφαίρας, τὸ πολικὸν ἐπίπεδον εἶνε αὐτὸ τὸ ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο***».

δ') «***Τὸ πολικὸν ἐπίπεδον κατ' ἐξοχὴν σημείου (κειμένου εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν) εἶνε ἐπίπεδον, διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου (διαμετρικὸν ἐπίπεδον) τῆς σφαίρας.***» «***Ὁ πόλος τοῦ κατ' ἐξοχὴν (ἐπ' ἄπειρον) ἐπιπέδου εἶνε τὸ κέντρον τῆς σφαίρας***».

ε') «***Τὸ πολικὸν ἐπίπεδον σημείου P ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν, τὴν ἔχουσαν κέντρον K, εἶνε κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν KP***».

ϛ') «***Ἂν Π εἶνε τὸ σημεῖον καθ' ὃ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου K τῆς σφαίρας κάθετος εὐθεῖα ἐπὶ τὸ πολικὸν ἐπίπεδον τοῦ P, τέμνει αὐτό, θὰ εἶνε $(KP)(K\Pi)=\varrho^2$***».

ζ') «***Ἐὰν σημεῖόν τι κινῆται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου, τὸ πολικόν αὐτοῦ ἐπίπεδον στρέφεται περὶ τὸν πόλον τοῦ ἐπιπέδου***» · καὶ ἀντιστρόφως, «***ἂν ἐπίπεδον στρέφεται περὶ ἓν σημεῖον, ὁ πόλος αὐτοῦ κινεῖται ἐπὶ τοῦ πολικοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου***».

Τῷ ὄντι, ἂν τὸ M′ (x, y', z') κεῖται ἐπὶ τοῦ πολικοῦ ἐπιπέδου τοῦ σημείου P (ξ, η, ζ) θὰ εἶνε

$$(x'-\alpha)(\xi-\alpha)+(y'-\beta)(\eta-\beta)+(z'-\gamma)(\zeta-\gamma)=\varrho^2.$$

Ἀλλ' αὕτη ἐκφράζει ὅτι τὸ P (ξ, η, ζ) κεῖται ἐπὶ τοῦ πολικοῦ ἐπιπέδου τοῦ M′ (x', y', z')

$$(x-\alpha)(x'-\alpha)+(y-\beta)(y'-\beta)+(z-\gamma)(z'-\gamma)=\varrho^2.$$

η′) «***Ἂν ἐκ τοῦ P φέρωμεν δύο εὐθείας PAA′, PBB′, τεμνούσας τὴν σφαῖραν εἰς τὰ A, A′ καὶ B, B′ ἀντιστοίχως, αἱ εὐθεῖαι AB′ καὶ A′B τέμνονται ἐπὶ τοῦ πολικοῦ ἐπιπέδου τοῦ P***».

§ **109. Ἀντίστροφοι ἢ συζυγεῖς πολικαί.** —

α′) Ἔστωσαν $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ δύο τυχόντα σημεῖα καὶ τὰ πολικὰ ἐπίπεδα αὐτῶν ὡς πρὸς σφαῖραν, ἔχουσαν κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων καὶ ἀκτῖνα ϱ, τὰ

$$x x_1 + y y_1 + z z_1 - \varrho^2 = o, x x_2 + y y_2 + z z_2 - \varrho^2 = o, \quad (1)$$

ἢ $\qquad E_1 = o, \qquad E_2 = o,$

ἂν διὰ τῶν E_1, E_2 παραστήσωμεν τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἐξισώσεων (1).

Ἔστω P σημεῖόν τι τῆς εὐθείας $P_1 P_2$, καὶ ἔστω

$$(P_1 P):(P P_2)=\lambda.$$

Τὸ πολικὸν ἐπίπεδον τοῦ P θὰ ἔχῃ ἐξίσωσιν

$$x\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}+y\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}+z\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}-\varrho^2=o,$$

ἢ $x x_1 + y y_1 + z z_1 - \varrho^2 + \lambda(x x_2 + y y_2 + z z_2 - \varrho^2) = o,$

ἢ $\qquad E_1 + \lambda E_2 = o.$

Ἤτοι «***ἐὰν σημεῖόν τι P διατρέχῃ εὐθεῖαν $P_1 P_2$, τὸ πολικὸν ἐπίπεδον αὐτοῦ στρέφεται περὶ εὐθεῖαν, ἥτις εἶνε τομὴ τῶν πολικῶν ἐπιπέδων τῶν P_1 καὶ P_2***».

Ἀντιστρόφως, ἂν σημεῖον διατρέχῃ τὴν εὐθεῖαν $E_1=o$, $E_2=o$, τὸ πολικὸν ἐπίπεδον αὐτοῦ στρέφεται περὶ τὴν εὐθεῖαν $P_1 P_2$. Ἐπομένως ἡ σχέσις τῶν εὐθειῶν $P_1 P_2$ καὶ $E_1=o$, $E_2=o$ εἶνε ἀμοιβαία.

Τὰς εὐθείας ταύτας $P_1 P_2$ καὶ $E_1=o$, $E_2=o$ καλοῦμεν *ἀντιστρόφους ἢ συζυγεῖς πολικὰς* ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν (o,o,o,ϱ).

Κατὰ ταῦτα, ἑκάστη εὐθεῖα ἐν τῷ χώρῳ ἔχει πάντοτε μίαν ὡρισμένην ἀντίστροφον πολικὴν αὐτῆς ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν.

β') Ἐπειδὴ τὰ διευθύνοντα συνημίτονα τῆς εὐθείας $P_1 P_2$ εἶνε ἀνάλογα τῶν $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$, τῆς δὲ εὐθείας $E_1 = o$, $E_2 = o$ ἀνάλογα τῶν $y_1 z_2 - y_2 z_1$, $z_1 x_2 - z_2 x_1$, $x_1 y_2 - x_2 y_1$ ἕπεται εὐκόλως ὅτι «***αἱ ἀντίστροφοι πολικαὶ ὡς πρὸς σφαῖραν εἶνε κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας***».

γ') Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ἡ ἑξῆς κατασκευὴ τῆς ἀντιστρόφου πολικῆς δοθείσης εὐθείας.

Ἐὰν τὸ διαμετρικὸν (διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διερχόμενον) ἐπίπεδον καὶ κάθετον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τέμνῃ αὐτὴν εἰς τὸ σημεῖον P, τὴν δὲ σφαῖραν κατὰ περιφέρειαν μεγίστου κύκλου Π, ἡ ἀντίστροφος πολικὴ τῆς δοθείσης εὐθείας εἶνε ἡ πολικὴ τοῦ σημείου P ὡς πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου Π ἐν τῷ διαμετρικῷ ἐπιπέδῳ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι, αἱ ἀντίστροφοι πολικαὶ κεῖνται, ἐν γένει, ἐπὶ διαφόρων ἐπιπέδων, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία τέμνει πάντοτε τὴν σφαῖραν, ἐνῷ ἡ ἄλλη κεῖται ἐκτὸς αὐτῆς. Ἐὰν ἡ μία εἶνε ἐφαπτομένη τῆς τῆς σφαίρας, ἡ ἄλλη εἶνε ἡ κάθετος ἐπ' αὐτὴν καὶ ἐφαπτομένη τῆς σφαίρας, κειμένη ἐπὶ τοῦ ἀντιστοίχου ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς σφαίρας. Μόνον ἐν τῇ περιπτώσει αὐτῇ αἱ ἀντίστροφοι πολικαὶ τέμνονται.

δ') Ἐπειδὴ ὁ πόλος ἐφαπτομένου ἐπιπέδου σφαίρας εἶνε τὸ σημεῖον ἐπαφῆς αὐτοῦ, καὶ ἀντιστρόφως, ἐπειδὴ ὁ πόλος ἑκάστου ἐπιπέδου διερχομένου διὰ δοθείσης εὐθείας κεῖται ἐπὶ τῆς ἀντιστρόφου πολικῆς, ἕπεται ὅτι

«***ἡ μία τῶν ἀντιστρόφων πολικῶν εἶνε ἡ εὐθεῖα, ἥτις συνδέει τὰ σημεῖα ἐπαφῆς δύο ἐφαπτομένων ἐπιπέδων τῆς σφαίρας, ἀγομένων διὰ τῆς ἄλλης εὐθείας***».

ε') Ἐπειδὴ εὐθεῖά τις τέμνει τὴν σφαῖραν εἰς δύο σημεῖα (πραγματικὰ ἢ φανταστικὰ) ἕπεται ὅτι «***δι' ἑκάστης εὐθείας δύνανται νὰ ἀχθοῦν δύο ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τῆς σφαίρας (πραγματικὰ ἢ φανταστικά)***».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Εὕρετε τὸ πολικὸν ἐπίπεδον τοῦ σημείου $P_1 (x_1, y_1, z_1)$ ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν $A_0 (x^2 + y^2 + z^2) + A x + B y + \Gamma z + \Delta = o$. Ποῖον τὸ πολικὸν ἐπίπεδον τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν ταύτην;

2) Δείξατε ὅτι ὁ πόλος τοῦ πολικοῦ ἐπιπέδου $A x + B y + \Gamma x + \Delta = o$ ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ ἔχει συντεταγμένας

$$\left(- \frac{A}{\Delta} \rho^2, \ - \frac{B}{\Delta} \rho^2, \ - \frac{\Gamma}{\Delta} \rho^2 \right)$$

3) Εὕρετε τὸν πόλον τοῦ ἐπιπέδου $Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$ ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν Κ (α, β, γ, ρ).

4) Δείξατε ὅτι αἱ ἰδιότητες μεταξὺ πόλων καὶ πολικῶν εἶνε ἀνεξάρτητοι τοῦ συστήματος τῶν συντεταγμένων πρὸς τὸ ὁποῖον ἀναφέρονται.

5) Ἐξετάσατε τὴν θεωρίαν τοῦ κώνου καὶ τοῦ κυλίνδρου τῶν ἐφαπτομένων ἀπὸ τῆς ἀπόψεως τῆς θεωρίας τῶν πολικῶν. Εὕρετε τὰς διαφόρους θέσεις τοῦ πολικοῦ ἐπιπέδου καὶ τοῦ ἀντιστοίχου κώνου τῶν ἐφαπτομένων, ὅταν ὁ πόλος διατρέχῃ μίαν διάμετρον τῆς σφαίρας καὶ ἰδιαιτέρως, ὅταν οὗτος απομακρύνεται εἰς ἄπειρον ἐπ' αὐτῆς.

6) Τρία τυχόντα ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τῆς σφαίρας τέμνονται πάντοτε ἐπί τινος σημείου τῆς διαμέτρου, ἥτις εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν σημείων ἐπαφῆς.

7) Ἐὰν διά τινος σημείου Ρ φέρωμεν εὐθεῖαν, τέμνουσαν τὴν σφαῖραν εἰς δύο σημεῖα M_1 καὶ M_2, ἡ τομὴ τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων εἰς τὰ M_1, M_2 κεῖνται ἐπὶ τοῦ πολικοῦ ἐπιπέδου τοῦ Ρ.

8) Ἡ ἀντίστροφος πολικὴ τῆς εὐθείας $x = x_1 + \lambda a$, $y = y_1 + \lambda b$, $z = z_1 + \lambda c$ ὡς πρὸς τὴν σφαίραν $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ δύναται νὰ παρασταθῇ ὑπὸ τῶν $x x_1 + y y_1 + z z_1 = \rho^2$, $ax + by + cz = 0$ ἐκ τῶν ὁποίων ἡ πρώτη παριστάνει τὸ πολικὸν ἐπίπεδον τοῦ σημείου (x_1, y_1, z_1), ἡ δὲ δευτέρα τὸ πολικὸν ἐπίπεδον τοῦ ἐπ' ἄπειρον σημείου τῆς δοθείσης εὐθείας.

9) Τίνες αἱ ἐξισώσεις τῆς ἀντιστρόφου πολικῆς τῆς εὐθείας

$$x = x_1 + \lambda a, \quad y = y_1 + \lambda b, \quad z = z_1 + \lambda c,$$

ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν Κ (α, β, γ, ρ);

10) Εὕρετε τὰς ἀντιστρόφους πολικὰς ἑκάστου τῶν ἀξόνων ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν Κ (α, β, γ, ρ).

11) Δείξατε ὅτι ἡ ἀντίστροφος πολικὴ μιᾶς διαμέτρου σφαίρας εἶνε ἡ κατ' ἐκδοχὴν εὐθεῖα τοῦ ἐπὶ τὴν διάμετρον καθέτου διαμετρικοῦ ἐπιπέδου.

12) Δείξατε (δι' ὑπολογισμοῦ) ὅτι τὰ πολικὰ ἐπίπεδα πάντων τῶν σημείων τοῦ ἄξονος τῶν x ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν $x^2+y^2 + z^2=2\rho z$ διέρχονται διὰ τοῦ ἄξονος τῶν y, καὶ ἀντιστρόφως. Ἐπομένως ὁ ἄξων τῶν x καὶ y εἶνε ἀντίστροφοι πολικαὶ ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν αὐτήν.

13) Πᾶσαι αἱ διά τινος σημείου τῆς σφαίρας διερχόμεναι ἐφαπτόμεναι αὐτῆς δύνανται νὰ θεωρηθοῦν κατὰ ζεύγη ὡς ἀντίστροφοι πολικαί.

14) Ἐξετάσατε τὴν ἀξονικὴν δέσμην τῶν πολικῶν ἐπιπέδων πάντων τῶν σημείων μιᾶς ἐφαπτομένης σφαίρας. Θεωρήσατε ἰδιαιτέρως τὴν περίπτωσιν διὰ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς καὶ τὸ κατ' ἐκδοχὴν σημεῖον τῆς ἐφαπτομένης.

15) Αἱ ἀντίστροφοι πολικαὶ πασῶν τῶν δι' ἑνὸς σημείου τοῦ χώρου διερχομένων εὐθειῶν (κεντρικῆς ἢ καὶ στερεᾶς δέσμης) εἶνε τὸ πολικὸν ἐπίπεδον τοῦ σημείου (κέντρου). Ἡ πρότασις αὕτη ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς. «*Ἂν εὐθεῖα κεῖται ἐπί τινος ὡρισμένου ἐπιπέδου (ἢ διέρχεται διά τινος ὡρισμένου σημείου), ἡ ἀντίστροφος πολικὴ αὐτῆς διέρχεται διὰ τοῦ πόλου τοῦ ἐπιπέδου (ἢ κεῖται εἰς τὸ πολικὸν ἐπίπεδον τοῦ σημείου)*».

16) Ἂν εὐθεῖα στρέφεται περὶ σημεῖον P ἐπί τινος ἐπιπέδου E (γράφουσα ἐπίπεδον δέσμην), ἡ ἀντίστροφος πολικὴ αὐτῆς στρέφεται περὶ τὸν πόλον τοῦ E ἐν τῷ πολικῷ ἐπιπέδῳ τοῦ P (γράφει ὁμοίως ἐπίπεδον δέσμην).

17) Εὕρετε τὴν συζυγῆ ἐπίπεδον δέσμην πρὸς ἐκείνην, τῆς ὁποίας τὸ ἐπίπεδον εἶνε διαμετρικὸν τῆς σφαίρας, κέντρον δὲ τὸ τῆς σφαίρας.

18) Διὰ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν πρὸς ὡρισμένην διεύθυνσιν ἑνὸς διαμετρικοῦ ἐπιπέδου σφαίρας ὁρίζεται μία δέσμη ἐπίπεδος. Τίς ἡ συζυγὴς αὐτῆς;

§ 110. Δύναμις σημείου ὡς πρὸς σφαῖραν.—

α΄) Ἔστω ἡ σφαῖρα K (α, β, γ, ρ) καὶ τυχὸν σημεῖον τοῦ χώρου M′ (x′, y′, z′). Ἐπειδὴ εἶνε

$$(x'-\alpha)^2 + (y'-\beta)^2 + (z'-\gamma)^2 = (KM')^2$$

ἡ δὲ ἀπόστασις ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διὰ τὰ σημεῖα M′, τὰ κείμενα ἐντὸς τῆς σφαίρας εἶνε μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος, διὰ τὰ ἐπ᾽ αὐτῆς ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα, καὶ διὰ τὰ ἐκτὸς αὐτῆς μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος, ἕπεται ὅτι

«***Τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως τῆς σφαίρας (ὅταν τὸ β′ εἶνε μηδὲν) εἶνε ἀρνητικὸν μὲν διὰ τὰ σημεῖα τὰ κείμενα ἐντὸς αὐτῆς, μηδὲν διὰ τὰ ἐπ᾽ αὐτῆς, καὶ θετικὸν διὰ τὰ ἐκτὸς αὐτῆς, ἂν ἀντὶ τῶν*** x, y, z ***τεθοῦν αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων τούτων***».

β΄) Ἐν γένει ἔχομεν

$$(KM')^2 - \rho^2 = [(KM') + \rho][(KM') - \rho] = (M'A)(M'A') = (M'B)(M'B')$$

ἐνῷ A, A′, B, B′, εἶνε τὰ σημεῖα καθ᾽ ἃ ἡ ἐκ τοῦ M′ διάκεντρος τῆς σφαίρας καὶ τυχοῦσα τέμνουσα αὐτῆς τέμνουν τὴν σφαῖραν.

Ἑπομένως «***ἂν εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως τῆς σφαίρας ἀντικαταστήσωμεν τὰ*** x, y, z ***διὰ τῶν*** x′, y′, z′ ***συντεταγμένων τοῦ τυχόντος σημείου M′ τοῦ χώρου, τὸ ἐξαγόμενον παριστάνει τὸ σταθερὸν γινόμενον τῶν μηκῶν τῶν δύο ἀνυσμάτων, τῶν ὁριζομένων ἐπὶ πάσης διατεμνούσης τῆς σφαίρας, καὶ ἐχόντων ἀρχὴν τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ πέρας τὰ σημεῖα τομῆς αὐτῆς μὲ τὴν σφαῖραν***».

Τὸ σταθερὸν τοῦτο γινόμενον καλεῖται *δύναμις τοῦ σημείου M′ ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν*.

γ΄) Ἂν τὸ M′ κεῖται ἐντὸς τῆς σφαίρας τὰ δύο ἀνύσματα εἶνε ἀντίρροπα καὶ τὸ γινόμενόν αὐτῶν ἀρνητικόν· ἂν τὸ M′ κεῖται ἐπὶ τῆς σφαίρας, τὸ ἓν τούτων ἔχει μῆκος μηδέν· ἂν δὲ τὸ M′ κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας τὰ δύο ἀνύσματα εἶνε ὁμόρροπα καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶνε θετικόν.

δ') Ἂν τὸ Μ' κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας, τὸ γινόμενον τῶν μηκῶν τῶν δύο ἐν λόγῳ ἀνυσμάτων Μ'Α, Μ'Α' ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ μήκους ἑκάστης τῶν ἐφαπτομένων τῆς σφαίρας, αἵτινες ἄγονται ἐκ τοῦ Μ'. Ἤτοι ἔχομεν

$$(M'A)\,(M'A') = (M'B)\,(M'B') = (M'T)^2,$$

ἂν Τ εἶνε τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς μιᾶς τῶν ἐφαπτομένων.

§ **111 Θέσεις σφαιρῶν πρὸς ἀλλήλας.**—

α') Ἔστωσαν δύο σφαῖραι

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 + A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = o \\ x^2 + y^2 + z^2 + A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = o \end{array}\right\} \quad (1)$$

Ζητεῖται ἡ θέσις τῶν σφαιρῶν τούτων πρὸς ἀλλήλας.

Ἀφαιροῦντες τὰς ἐξισώσεις (1) κατὰ μέλη εὑρίσκομεν,

$$(A_1 - A_2)\,x + (B_1 - B_2)\,y + (\Gamma_1 - \Gamma_2)\,z + \Delta_1 - \Delta_2 = o. \quad (2)$$

Αὕτη ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῶν κοινῶν λύσεων τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ δύναται νὰ ἀντικαταστήσῃ μίαν ἐξ αὐτῶν ἐν τῷ συστήματι (1).

Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον (2) τέμνῃ τὴν μίαν τῶν σφαιρῶν (1) (κατὰ περιφέρειαν κύκλου), αἱ δοθεῖσαι σφαῖραι τέμνονται κατὰ τὴν περιφέρειαν ταύτην. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἐφάπτεται τῆς μιᾶς τῶν σφαιρῶν, αἱ σφαῖραι ἐφάπτονται κατὰ τὸ σημεῖον τοῦτο (ἐκτὸς ἢ ἐντός, καθόσον ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων αὐτῶν εἶνε ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων τῶν σφαιρῶν). Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον (2) κεῖται ἐκτὸς τῆς μιᾶς τῶν σφαιρῶν (1), αἱ σφαῖραι δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον (ἡ μία κεῖται ἐκτὸς ἢ ἐντὸς τῆς ἄλλης, καθόσον ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων αὐτῶν εἶνε μεγαλυτέρα τοῦ ἀθροίσματος ἢ μικροτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκτίνων τῶν σφαιρῶν).

β') Τὸ ἐπίπεδον (2) καλεῖται *ριζικὸν ἐπίπεδον* τῶν δύο σφαιρῶν (1) καὶ ἔχει τὴν ἰδιότητα ὅτι «***ἕκαστον σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἐπιπέδου (2) ἔχει τὴν αὐτὴν δύναμιν ὡς πρὸς ἑκάστην τῶν σφαιρῶν (1)***» εἶνε δὲ τοῦτο ὁ τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου ἀπὸ τῶν ὁποίων ἄγονται ἴσαι ἐφαπτόμεναι εἰς τὰς δύο σφαίρας.

γ') Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι «***τὸ ριζικὸν ἐπίπεδον δύο σφαιρῶν εἶνε κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τῶν κέντρων (διάκεντρον) τῶν δύο σφαιρῶν***».

δ') Ἔστωσαν $K_1 = o,\ K_2 = o,\ K_3 = o$ (3)

αἱ ἐξισώσεις τριῶν σφαιρῶν. Συνδυάζοντες αὐτὰς ἀνὰ δύο εὑρίσκομεν τὰς ἐξισώσεις τριῶν ριζικῶν ἐπιπέδων

$$K_2 - K_3 = o, \quad K_3 - K_1 = o, \quad K_1 - K_2 = o \quad (4).$$

Ἐπειδὴ ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν ἐξισώσεων τούτων κατὰ μέλη προκύπτει ταὐτότης, ἕπεται ὅτι

«***τὰ τρία ριζικὰ ἐπίπεδα, ἅτινα ὁρίζονται ὑπὸ τριῶν σφαιρῶν, τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, ἥτις καλεῖται ριζικὸς ἄξων τῶν τριῶν σφαιρῶν***».

Ὁ ριζικὸς ἄξων τριῶν σφαιρῶν εἶνε ὁ τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, ἀπὸ τῶν ὁποίων ἄγονται ἴσαι ἐφαπτόμεναι εἰς τὰς τρεῖς σφαίρας.

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι «***τὰ διευθύνοντα συνημίτονα τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν σφαιρῶν (3), τὸν ὁποῖον ὁρίζουν δύο ἐκ τῶν ἐξισώσεων (4), εἶνε ἀνάλογα τῶν E_x , E_y , E_z , τὰ ὁποῖα παριστάνουν τὰ ἐμβαδὰ τῶν ὀρθῶν προβολῶν τοῦ τριγώνου τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν (3) ἐπὶ τὰ συντεταγμένα ἐπίπεδα***».

Ἐπίσης ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι

«***ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν σφαιρῶν (3) εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν καὶ τέμνει αὐτὸ κατὰ τὸ ριζικὸν κέντρον (§ 103, δ΄) τῶν περιφερειῶν, καθ' ἃς αἱ (3) τέμνονται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τούτου***».

ε΄) Ἔστωσαν $K_1=o$, $K_2=o$, $K_3=o$, $K_4=o$

αἱ ἐξισώσεις τεσσάρων σφαιρῶν. Ἀνὰ δύο λαμβανόμεναι ὁρίζουν 6 ριζικὰ ἐπίπεδα, ἀνὰ τρεῖς δὲ ὁρίζουν 4 ριζικοὺς ἄξονας, οἵτινες εἶνε ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπὶ τὰς ἕδρας τοῦ ὑπὸ τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν ὁριζομένου τετραέδρου. Αἱ ἐξισώσεις τῶν 6 ριζικῶν ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα εἶνε ἀντιστοίχως κάθετα ἐπὶ τὰς ἀκμὰς τοῦ ἐν λόγῳ τετραέδρου εἶνε

$$K_1 - K_2 = o,\ K_2 - K_3 = o,\ K_3 - K_4 = o,$$
$$K_1 - K_3 = o,\ K_1 - K_4 = o,\ K_2 - K_4 = o.$$

Ἐπειδὴ ἑκάστη τῶν τριῶν τελευταίων ἐξισώσεων προκύπτει διὰ προσθέσεως τῶν τριῶν πρώτων, ἀφοῦ προηγουμένως πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ καταλλήλους ἀριθμούς, ἕπεται ὅτι,

«***τὰ ἓξ ριζικὰ ἐπίπεδα, ἑπομένως καὶ οἱ τέσσαρες ριζικοὶ ἄξονες, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον***». Τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται *ριζικὸν κέντρον* τῶν τεσσάρων σφαιρῶν. Αἱ ἐφαπτόμεναι, αἵτινες δύνανται νὰ ἀχθοῦν ἐκ τοῦ ριζικοῦ κέντρου τῶν σφαιρῶν εἰς αὐτάς, ἔχουν ἴσα μήκη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Τίς εἶνε ὁ τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ὡς πρὸς δοθεῖσαν σφαῖραν ἔχουν τὴν αὐτὴν δύναμιν;

2) Ποῖον εἶνε τὸ ριζικὸν ἐπίπεδον δύο ὁμοκέντρων σφαιρῶν;

3) Δείξατε ὅτι ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα δύο σφαῖραι

$$K_1\ (\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ \rho_1),\ K_2\ (\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2,\ \rho_2)$$

τέμνωνται καθέτως εἶνε

$$(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\beta_1-\beta_2)^2+(\gamma_1-\gamma_2)^2=\rho_1^2+\rho_2^2$$

4) Πόση εἶνε ἡ δύναμις τοῦ σημείου $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+\Gamma z+\Delta=o.$$

5) Τίς ἡ ἐξίσωσις τοῦ ριζικοῦ ἐπιπέδου τῶν σφαιρῶν

$$x^2+y^2+z^2+A_1x+B_1y+\Gamma_1z=o,\ x^2+y^2+z^2+A_2x+B_2y+\Gamma_2z=o;$$

6) Δείξατε ὅτι ἀναγκαία συνθήκη ἵνα αἱ σφαῖραι

$$x^2+y^2+z^2+A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1=o,\ x^2+y^2+z^2+A_2x+B_2y+\Gamma z_2+\Delta_2=o$$

τέμνωνται καθέτως εἶνε

$$A_1\ A_2+B_1\ B_2+\Gamma_1\ \Gamma_2=2\ (\Delta_1+\Delta_2).$$

Ἐπειδὴ ἡ συνθήκη αὕτη εἶνε γραμμικὴ ὡς πρὸς τοὺς συντελεστὰς ἑκάστης τῶν ἐξισώσεων τῶν σφαιρῶν, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν σφαῖραν, τέμνουσαν τέσσαρας δοθείσας καθέτους. Τὸ κέντρον ταύτης εἶνε τὸ ριζικὸν κέντρον τῶν τεσσάρων σφαιρῶν.

7) Ἡ ἐξίσωσις $K_1-\lambda\ K_2=o$ παριστᾷ σφαῖραν, ἥτις δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ δυνάμεις ὡς πρὸς τὰς σφαίρας $K_1=o$, $K_2=o$ ἔχουν λόγον λ.

8) Ἐὰν ἐν τῇ ἐξισώσει $K_1-\lambda\ K_2=o$ θεωρηθῇ τὸ λ ὡς μεταβλητὴ παράμετρος, ἡ ἐξίσωσις $K_1-\lambda\ K_2=o$ παριστᾷ δέσμην σφαιρῶν. Πᾶσαι αἱ σφαῖραι τῆς δέσμης ταύτης διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς περιφερείας κύκλου $K_1=o$, $K_2=o$. Πάντα τὰ ζεύγη τῆς δέσμης τῶν σφαιρῶν ἔχουν τὸ αὐτὸ ριζικὸν ἐπίπεδον $K_1-K_2=o$. Ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τούτου ἔχει τὴν αὐτὴν δύναμιν ὡς πρὸς πάσας τὰς σφαίρας τῆς δέσμης.

9) Ἐὰν κατασκευασθῇ σφαῖρα, τέμνουσα καθέτως τὰς δύο σφαίρας $K_1=o$, $K_2=o$, τὸ κέντρον αὐτῆς κεῖται ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἐπιπέδου $K_1-K_2=o$. Ἀντιστρόφως, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν σφαῖραν περὶ ἕκαστον σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἐπιπέδου, κείμενον ἐκτὸς τῶν σφαιρῶν $K_1=o$, $K_2=o$, ἥτις νὰ τέμνῃ τὰς δοθείσας σφαίρας καθέτως. Αὕτη τέμνει ὁμοίως πάσας τὰς σφαίρας τῆς δέσμης $K_1-\lambda\ K_2=o$ καθέτως.

10) Ἐξετάσατε ἐν τῇ δέσμῃ $K_1-\lambda\ K_2=o$ τὰς περιπτώσεις

$$\lambda=o,\ \lambda=1,\ \lambda=-\infty,\ \lambda=\infty.$$

11) Ὁρίσατε τὸ ριζικὸν ἐπίπεδον δύο σφαιρῶν $K_1=o$, $K_2=o$, μὴ τεμνομένων, τῇ βοηθείᾳ μιᾶς σφαίρας $K_3=o$, τεμνούσης τὰς $K_1=o$, καὶ $K_2=o$.

12) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς σφαίρας, ἥτις διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων καὶ ἀνήκει εἰς τὴν δέσμην, ἡ ὁποία ὁρίζεται ὑπὸ τῶν

$$2\,(x^2+y^2+z^2)-3x+y-8z=1,\quad 7\,(x^2+y^2+z^2)-x+2y+6z=11.$$

13) Ἐξετάσατε ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὰς ἀσκήσεις 8, 9, 10 τὸ γεωμετρικὸν σχῆμα, τὸ ὁποῖον παριστάνει ἡ ἐξίσωσις $K_1-\lambda\ K_2-\mu\ K_3=o$, ἐὰν τὰ λ καὶ μ εἶνε μεταβληταὶ παράμετροι. Εὕρετε τὸν ριζικὸν ἄξονα τῶν σφαιρῶν $K_1=o$, $K_2=o$, $K_3=o$ ὡς καὶ πάσας τὰς σφαίρας, αἵτινες τέμνουν αὐτὰς καθέτως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

Περὶ ἐλλείψεως

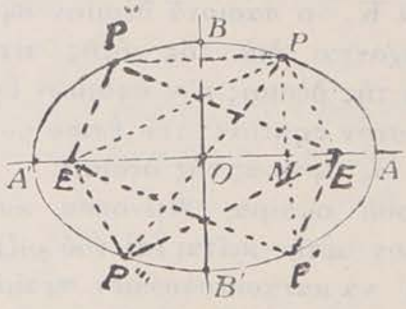
§ 112. Ὁρισμοὶ καὶ ἰδιότητες τῆς ἐλλείψεως. —

α΄) ***Ἔλλειψις*** καλεῖται ὁ τόπος τῶν σημείων ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα αὐτοῦ ἔχουν ἄθροισμα σταθερόν.

β΄) Τὰ δοθέντα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου λέγονται *ἑστίαι* τῆς ἐλλείψεως, σημειώνομεν δ' αὐτὰ συνήθως διὰ τῶν Ε καὶ Ε΄ (σχ. 78). Ἡ ἀπόστασις τῶν Ε καὶ Ε΄ λέγεται ***ἑστιακὴ ἀπόστασις*** τῆς ἐλλείψεως καὶ παρίσταται συνήθως διὰ τοῦ 2 γ· ἤτοι θέτομεν (Ε΄Ε)=2 γ. Ἀνύσματα ἔχοντα ἀρχὴν τὴν μίαν τῶν ἑστιῶν ἐλλείψεως καὶ πέρας ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως καλοῦνται συνήθως *ἑστιακαὶ ἀκτῖνες τῆς ἐλλείψεως*.

γ΄) Ἐὰν καλέσωμεν 2 α τὸ σταθερὸν ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων σημείου τινὸς τῆς ἐλλείψεως ἀπὸ τῶν ἑστιῶν αὐτῆς, θὰ ἔχωμεν διὰ πᾶν σημεῖον Ρ τῆς ἐλλείψεως (σχ. 78)

$$(\mathrm{EP}) + (\mathrm{E'P}) = 2\ \alpha.$$



(Σχ. 78)

δ΄) Τὰ σημεῖα Α καὶ Α΄ τῆς εὐθείας ΕΕ΄, τὰ ἀπέχοντα ἀπὸ τὸ μέσον Ο τοῦ τμήματος ΕΕ΄ ἀποστάσεις ἴσας μὲ $\pm$ α κεῖνται προφανῶς ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως. Ἐπίσης ἀνήκουν εἰς τὴν ἔλλειψιν τὰ σημεῖα Β καὶ Β΄, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον Ο τοῦ ΕΕ΄ καὶ ἀπέχουν ἀπὸ τὰ Ε καὶ Ε΄ ἀποστάσεις ἴσας μὲ α, ἀπὸ δὲ τοῦ Ο ἀποστάσεις ἴσας μὲ $\pm$ β, ἐν ᾧ εἶνε $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$.

ε΄) Ἡ ἔλλειψις εἶνε συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΑ΄, ἥτις διέρχεται διὰ τῶν ἑστιῶν αὐτῆς· ἐπίσης ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΒ΄, κάθετον ἐπὶ τὴν ΕΕ΄ εἰς τὸ μέσον Ο τοῦ τμήματος ΕΕ΄. Ἡ πρώτη συμμετρία ἀποδεικνύεται, ἂν λάβωμεν δύο σημεῖα Ρ, Ρ΄ συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΕΕ΄, ὅτε ἔχομεν (σχ. 78)

$$(\mathrm{EP}) = (\mathrm{EP'}),\ \text{καὶ}\ (\mathrm{E'P}) = (\mathrm{E'P'}).$$

Ἑπομένως, ἂν εἶνε

$(ΕΡ) + (Ε'Ρ) = 2\,α$, θὰ εἶνε καὶ $(ΕΡ') + (Ε'Ρ') = 2\,α$.

Ὅτι ἡ εὐθεῖα ΒΒ' εἶνε ἄξων συμμετρίας τῆς ἐλλείψεως, φαίνεται ἂν λάβωμεν δύο σημεῖα Ρ καὶ Ρ'' συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΒ', ὅτε ἔχομεν

$$(ΕΡ) = (Ε'Ρ''),\quad (Ε'Ρ) = (ΕΡ'').$$

Διότι τὸ τρίγωνον ΕΡΕ' στρεφόμενον περὶ τὴν ΒΒ' δύναται νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ Ε'Ρ''Ε.

Ὥστε, ἂν εἶνε

$(ΕΡ) + (Ε'Ρ) = 2\,α$, θὰ εἶνε καὶ $(ΕΡ'') + (Ε'Ρ'') = 2\,α$.

Ἐπίσης ἡ ἔλλειψις εἶνε συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Ο. Διότι, ἂν τὸ τρίγωνον ΕΡΕ' στραφῇ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτοῦ περὶ τὸ Ο, μέχρις ὅτου ἡ ΕΕ' ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς Ε'Ε, τὸ σημεῖον Ρ θὰ λάβῃ τὴν θέσιν Ρ''', συμμετρικὴν τῆς πρώτης ὡς πρὸς τὸ Ο καὶ θὰ εἶνε

$$(ΕΡ) = (Ε'Ρ'''),\quad (Ε'Ρ) = (ΕΡ''').$$

Ὥστε, ἂν εἶνε $(ΕΡ) + (Ε'Ρ) = 2\,α$

θὰ εἶνε καὶ $(ΕΡ''') + (Ε'Ρ''') = 2\,α$.

ϛ') Καλοῦνται κυρίως ***ἄξονες συμμετρίας τῆς ἐλλείψεως*** τὰ τμήματα ΑΑ' καὶ ΒΒ' τῶν ἀξόνων συμμετρίας αὐτῆς, ἐνῷ εἶνε $(ΑΑ') = 2α$, $(ΒΒ') = 2\,β$. Ἐπειδὴ εἶνε $α > β$, τὰ μήκη α καὶ β καλοῦνται ***μείζων*** (ἢ ***μέγας***) καὶ ***ἐλάσσων*** (ἢ ***μικρὸς***) ἡμιάξων τῆς ἐλλείψεως. Τὰ ἄκρα Α, Α', Β, Β' τῶν δύο ἀξόνων τῆς ἐλλείψεως καλοῦνται ***κορυφαὶ τῆς ἐλλείψεως***, τὸ δὲ Ο ***κέντρον*** τῆς ἐλλείψεως.

ζ') Καλεῖται ***ἐκκεντρότης*** τῆς ἐλλείψεως ὁ λόγος $\frac{γ}{α}\left(ἢ\ \frac{2\,γ}{2\,α}\right)$ τῆς ἑστιακῆς ἀποστάσεως πρὸς τὸν μέγαν ἄξονα αὐτῆς.

η' Ἡ περιφέρεια κύκλου δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἔλλειψις, τῆς ὁποίας αἱ ἑστίαι συνέπεσαν εἰς τὸ κέντρον. Ὅθεν ἡ ἐκκεντρότης τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου εἶνε μηδέν.

θ') Πῶς γράφομεν ἔλλειψιν διὰ συνεχοῦς κινήσεως. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐλλείψεως συνάγομεν ὅτι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν αὐτὴν διὰ συνεχοῦς κινήσεως ὡς ἑξῆς. Στερεώνομεν εἰς τὰς ἑστίας αὐτῆς Ε καὶ Ε' δύο καρφίδας καὶ περὶ αὐτὰς θέτομεν νῆμα περιφερικόν, ἔχον μῆκος ἴσον μὲ τὴν ἀπόστασιν (ΕΕ'), ηὐξημένον κατὰ τὸ σταθερὸν μῆκος 2 α. Ἔπειτα τείνομεν διηνεκῶς τὸ νῆμα διὰ τῆς αἰχμῆς γραφίδος, τὴν ὁποίαν κινοῦμεν ἐπὶ τοῦ χάρτου, ἢ τοῦ ἐπιπέδου, μέχρις ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀναχωρήσεως. Ἐκ τούτου, καθὼς καὶ ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐλλείψεως, συνάγομεν, ὅτι ἡ ἔλλειψις εἶνε κλειστὴ γραμμή, μερικὴ δὲ περίπτωσις αὐτῆς εἶνε ἡ περιφέρεια κύκλου.

ι′) Ἰδιότης σημείων κειμένων ἐκτὸς ἐλλείψεως. Ἐὰν σημεῖόν τι κεῖται ἐντὸς ἐλλείψεως, αἱ ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τῶν ἑστιῶν αὐτῆς ἔχουν ἄθροισμα μικρότερον τοῦ $2\,\alpha$· ἂν δὲ κεῖται ἐκτὸς τῆς ἐλλείψεως, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ἀπὸ τῶν ἑστιῶν εἶνε μεγαλύτερον τοῦ $2\,\alpha$.

Διότι, ἔστω π. χ. τὸ σημεῖον Ν ἐντὸς τῆς ἐλλείψεως (σχ. 79). Προεκτείνοντες τὴν Ε′Ν μέχρι ὅτου τμήσῃ τὴν ἔλλειψιν, ἔστω εἰς τὸ σημεῖον Μ, καὶ φέροντες τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΕΜ, θὰ ἔχωμεν

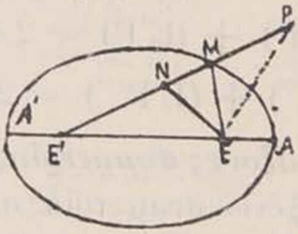
$$(ΕΝ) < (ΕΜ) + (ΝΜ).$$

Ἑπομένως $(Ε'Ν) + (ΕΝ) < (Ε'Ν) + (ΕΜ) + (ΝΜ).$

Ἐπειδὴ δὲ εἶνε

$$(ΕΜ) + (Ε'Ν) + (ΝΜ) = (Ε'Μ) + (ΕΜ) = 2\,\alpha,$$

θὰ εἶνε $$(Ε'Ν) + (ΕΝ) < 2\,\alpha.$$



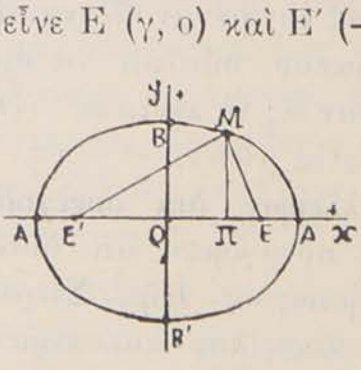
(Σχ. 79)

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι, ἂν τὸ σημεῖον Ρ κεῖται ἐκτὸς τῆς ἐλλείψεως θὰ εἶνε $(ΕΡ) + (Ε'Ρ) > 2\,\alpha$.

§ 113. Ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως.—

α′) Λαμβάνομεν ἄξονας συντεταγμένων οxy τοὺς δύο ἄξονας ΑΑ′ καὶ ΒΒ′ τῆς ἐλλείψεως καθέτους εἰς τὸ μέσον τούτων ο (σχ. 80).

Παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε Ε (γ, o) καὶ Ε′ $(-\gamma, o)$. Ἐὰν θεωρήσωμεν



(Σχ. 80)

μεν τὸ τυχὸν σημεῖον Μ (x, y) τοῦ ἐπιπέδου, θὰ εἶνε ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων Ε′ΜΠ καὶ ΕΜΠ ἀντιστοίχως, ἂν τεθῇ

$$(EM) = \varrho,\ (E'M) = \varrho',$$

$$\varrho'^2 = (x+\gamma)^2 + y^2, \text{ ἢ } \varrho' = \sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2}$$

$$\varrho^2 = (x-\gamma)^2 + y^2, \text{ ἢ } \varrho = \sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2}$$

θεωροῦντες τὰς ἀποστάσεις (EM), (E'M) ὡς θετικάς. Ἐπομένως ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως εἶνε κατὰ τὸν ὁρισμὸν αὐτῆς

$$\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} + \sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2} = \varrho + \varrho' = 2\alpha.$$

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν

$$2(x^2+y^2+\gamma^2) + 2\sqrt{(x^2+y^2+\gamma^2)^2 - 4\gamma^2 x^2} = 4\alpha^2.$$

Ὑψοῦντες τὰ ἴσα εἰς τὸ τετράγωνον εὑρίσκομεν,

$$(x^2 + y^2 + \gamma^2)^2 - 4\gamma^2 x^2 = [(x^2 + y^2 + \gamma^2) - 2\alpha^2]^2.$$

Ἐκ ταύτης δ' εὑρίσκομεν

$$(\alpha^2 - \gamma^2)\, x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^2 (\alpha^2 - \gamma^2).$$

Ἐπειδὴ εἶνε $\alpha > \gamma$ καὶ $\alpha^2 - \gamma^2 = \beta^2$ (§ 112, δ') λαμβάνομεν, διαιροῦντες τὰ ἴσα διὰ $\alpha^2 \beta^2$,

$$\boxed{\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1}$$

Τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἐπαληθεύουν αἱ συντεταγμέναι πάντων τῶν σημείων, διὰ τὰ ὁποῖα εἶνε $\varrho + \varrho' = 2\alpha$ καὶ μόνον αὐτῶν. Τῷ ὄντι, ἂν P_0 (x_0, y_0) εἶνε τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, κείμενον ἐκτός, ἢ ἐντός, τῆς ἐλλείψεως, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ oP_0 τέμνει τὴν ἔλλειψιν, ἔστω εἰς τὸ M (x, y) καὶ θὰ εἶνε $x_0 < x$, καὶ $y_0 < y$, ἐὰν τὸ P_0 κεῖται πλησιέστερον πρὸς τὸ o ἢ τὸ M. Τοὐναντίον, ἂν τὸ P_0 κεῖται ἀπώτερον τοῦ o ἢ τὸ M θὰ εἶνε $x_0 > x$, $y_0 > y$. Ἐπομένως, ἂν τὸ P_0 κεῖται ἐντὸς τῆς ἐλλείψεως θὰ εἶνε

$$\frac{x_0^2}{\alpha^2} + \frac{y_0^2}{\beta^2} < 1,$$

ἂν δ' ἐκτὸς

$$\frac{x_0^2}{\alpha^2} + \frac{y_0^2}{\beta^2} > 1.$$

ϛ') Καὶ ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῆς ἐλλείψεως συνάγομεν ὅτι, ἡ ἔλλειψις εἶνε συμμετρικὴ ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων καὶ ὡς πρὸς τὴν ἀρχήν. Διότι, ἂν π. χ. αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου (x_1, y_1) ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν, καὶ αἱ τοῦ $(-x_1, -y_1)$ ἐπαληθεύουν αὐτήν. Ἤτοι, ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων εἶνε κέντρον συμμετρίας τῆς ἐλλείψεως. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰ σημεῖα $(x_1, -y_1)$ καὶ $(-x_1, y_1)$. Δηλαδὴ ὁ ἄξων τῶν x καὶ τῶν y εἶνε ἄξονες συμμετρίας τῆς ἐλλείψεως.

§ 114. Σπουδὴ τοῦ σχήματος ἐλλείψεως ἐκ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς.—

α′) Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐλλείψεως

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

ὡς πρὸς y, εὑρίσκομεν

$$y = \pm \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2}.$$

Ἐκ τούτου παρατηροῦμεν ὅτι, εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ x ἀντιστοιχοῦν δύο ἀντίθετοι τιμαὶ τοῦ y, πραγματικαί, ἴσαι, ἢ φανταστικαί, ἂν εἶνε $\alpha^2 - x^2 > 0$, ἢ $\alpha^2 - x^2 = 0$, ἢ $\alpha^2 - x^2 < 0$ ἀντιστοίχως. Αἱ πραγματικαὶ τιμαὶ τοῦ x εἰς τὰς ὁποίας ἀντιστοιχοῦν πραγματικαὶ τιμαὶ τοῦ y εἶνε ἐκεῖναι, διὰ τὰς ὁποίας ἔχομεν

$$\alpha^2 - x^2 \geq 0, \text{ ἢ } \alpha^2 \geq x^2, \text{ ἢ } |x| \leq \alpha.$$

Διὰ $x = \pm \alpha$ εἶνε $y = 0$, καὶ διὰ $x = 0$, $y = \pm \beta$.

Ὅθεν ἡ ἔλλειψις τέμνει τοὺς ἄξονας εἰς τὰ σημεῖα $A(\alpha, 0)$ $A'(-\alpha, 0)$ καὶ $B(0, \beta)$, $B'(0, -\beta)$ ἀντιστοίχως, περιέχεται δ' αὕτη μεταξὺ τῶν τεσσάρων εὐθειῶν $x = \pm \alpha$, $y = \pm \beta$, ἀντιστοίχως παραλλήλων πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y καὶ τῶν x. Αἱ τέσσαρες αὗται εὐθεῖαι, τεμνόμεναι, σχηματίζουν ὀρθογώνιον, περιγεγραμμένον περὶ τὴν ἔλλειψιν καὶ ἔχον ἐμβαδὸν $4\,\alpha\,\beta$.

β′) Διὰ $x = \pm \gamma$ εὑρίσκομεν $y = \pm \dfrac{\beta^2}{\alpha}$. Συνήθως τίθεται $\dfrac{\beta^2}{\alpha} = p$, καλεῖται δὲ τὸ p *ἡμιπαράμετρος* τῆς ἐλλείψεως.

γ′) Ἐὰν εἶνε $\alpha = \beta$, ὅτε τὸ $\gamma = 0$ ἡ ἔλλειψις καταντᾷ περιφέρεια κύκλου. Ἤτοι, καὶ οὕτω φαίνεται ὅτι ἡ περιφέρεια κύκλου δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἔλλειψις, ἔχουσα ἴσους ἄξονας.

δ′) Εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ x ἀπολύτως μικροτέραν τοῦ α ἀντιστοιχοῦν δύο πραγματικαὶ τιμαὶ τοῦ y, ἀντίθετοι. Ὅταν τὸ $|x|$ αὐξάνῃ ἀπὸ 0 μέχρις α, ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ y ἐλαττοῦται ἀπὸ β μέχρι τοῦ 0. Καὶ ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι τὸ σχῆμα τῆς ἐλλείψεως ἀποτελεῖται ἀπὸ κλειστὴν καμπύλην, κειμένην εἰς πεπερασμένην ἀπόστασιν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Συνδέσατε τὰς κορυφὰς Β. Β′ τῆς ἐλλείψεως μὲ τὰς ἑστίας αὐτῆς Ε, Ε′ δι' εὐθειῶν καὶ δείξατε ὅτι σχηματίζεται ῥόμβος μὲ πλευρὰν α.

2) Εὕρετε τὰς ἑστίας τῆς ἐλλείψεως, τῆς ἐχούσης ἡμιάξονας $\alpha = 5$, $\beta = 3$.

3) Εὕρετε τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν καὶ τὴν ἐκκεντρότητα τῆς ἐλλείψεως.

$$\frac{x^2}{26} + \frac{y^2}{19} = 1$$

4) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐλλείψεως, τῆς ἐχούσης $\beta=3$ καὶ ἡμιπαράμετρον $p=1$.

5) Εὕρετε τὴν τομὴν τῆς ἐλλείψεως $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$ μὲ τὰς εὐθείας, τὰς διχοτομούσας τὰς γωνίας τῶν ἀξόνων.

6) Εὕρετε τὰ σημεῖα καθ' ἃ αἱ εὐθεῖαι $y=\pm\lambda x$ τέμνουν τὴν ἔλλειψιν

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1.$$

7) Εὕρετε, ἂν τὰ σημεῖα $(1,-3)$, $(-4,1)$, $(3.2,4)$ κεῖνται ἐντός, ἢ ἐκτός, ἢ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως, ἥτις χαρακτηρίζεται ὑπὸ τῶν $\alpha=5$, $\beta=3$.

8) Εὕρετε τοὺς ἡμιάξονας ἐλλείψεως, τῆς ὁποίας γνωρίζετε τὰς ἑστίας καὶ τὴν ἡμιπαράμετρον.

9) Εὕρετε καὶ κατασκευάσατε ἐκ δύο ἐκ τῶν μεγεθῶν α, β, γ, p τὰ δύο ἄλλα. Εὕρετε προσέτι πῶς μεταβάλλεται τὸ β ὅταν αὐξάνεται τὸ α, τὸ δὲ p μένῃ σταθερόν.

10) Τμῆμα εὐθείας μὲ σταθερὸν μῆκος ὀλισθαίνει, ὥστε τὰ ἄκρα αὐτοῦ νὰ κεῖνται ἐπὶ τῶν πλευρῶν ὀρθῆς γωνίας. Δείξατε ὅτι ἕκαστον τῶν σημείων αὐτοῦ γράφει ἔλλειψιν.

§ 113 Πολικαὶ ἐξισώσεις τῆς ἐλλείψεως.—

α') **Ὡς πρὸς πόλον τὸ κέντρον αὐτῆς.** Ἔστω ἡ ἔλλειψις

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1 \tag{1}$$

καὶ $M(x,y)$ ἓν σημεῖον αὐτῆς, τοῦ ὁποίου ἔστωσαν ρ, ω αἱ πολικαὶ συντεταγμέναι ὡς πρὸς πόλον τὸ κέντρον τῆς ἐλλείψεως o.

Ἔχομεν προφανῶς

$$x=\rho\,\text{συν}\,\omega,\qquad y=\rho\,\text{ημ}\,\omega \tag{2}$$

Εἰσάγοντες τὰς τιμὰς ταύτας τῶν x, y εἰς τὴν (1) εὑρίσκομεν

$$\frac{\rho^2\,\text{συν}^2\,\omega}{\alpha^2}+\frac{\rho^2\,\text{ημ}^2\,\omega}{\beta^2}=1$$

ἢ

$$\frac{\text{συν}^2\,\omega}{\alpha^2}+\frac{\text{ημ}^2\,\omega}{\beta^2}=\frac{1}{\rho^2} \tag{3}$$

ἥτις εἶνε ***ἡ πολικὴ ἐξίσωσις*** τῆς ἐλλείψεως ὡς πρὸς πόλον τὸ κέντρον αὐτῆς.

Τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ ὡς ἑξῆς,

$$\rho^2=\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2\,\text{ημ}^2\,\omega+\beta^2\,\text{συν}^2\,\omega} \tag{4}$$

Παρατηροῦντες ὅτι εἶνε $\text{ημ}^2\,\omega=1-\text{συν}^2\,\omega$ καὶ $\alpha^2-\beta^2=\gamma^2$, εὑρίσκομεν

$$\rho^2=\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2-\gamma^2\,\text{συν}^2\,\omega} \tag{5}$$

Θέτοντες

$$\frac{\gamma}{\alpha}=\varepsilon \tag{6}$$

(ἐνῶ εἶνε $\varepsilon < 1$)

εὑρίσκομεν $$\varrho^2 = \frac{\beta^2}{1 - \varepsilon^2 \text{συν}^2 \omega} \tag{7}$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (5) παρατηροῦμεν ὅτι, διὰ $\omega = 0$ τὸ ϱ λαμβάνει τὴν μεγίστην αὐτοῦ τιμὴν α. Ὅταν τὸ ω μεταβάλλεται ἀπὸ 0 μέχρι $\frac{\pi}{2}$, τὸ ϱ ἐλαττοῦται ἀπὸ α μέχρι τοῦ β.

β') Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι, ἡ περιφέρεια κύκλου, ἥτις ἔχει κέντρον τὸ τῆς ἐλλείψεως καὶ ἀκτῖνα α ἐφάπτεται τῆς ἐλλείψεως εἰς τὰ ἄκρα Α καὶ Α΄ τοῦ μεγάλου αὐτῆς ἄξονος καὶ εἶνε ***περιγεγραμμένη*** αὐτῆς, ἐνῶ ἡ μὲ ἀκτῖνα β, ὁμοίως γραφομένη περιφέρεια, ἐφάπτεται τῆς ἐλλείψεως εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Β΄ τοῦ μικροῦ ἄξονος αὐτῆς, καὶ εἶνε ***ἐγγεγραμμένη*** εἰς αὐτήν.

γ') Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (3) παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν δοθείσης τῆς ἀκτῖνος ϱ τοῦ σημείου $M(\varrho, \omega)$ τῆς ἐλλείψεως, κατασκευάσωμεν τὴν κάθετον αὐτῆς $\varrho' = (OM')$, θὰ εἶνε $M'(\varrho', \omega' = \omega + 90^0)$, καὶ θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{\varrho'^2} = \frac{\text{συν}^2 \omega'}{\alpha^2} + \frac{\text{ημ}^2 \omega'}{\beta^2} \tag{8}$$

Καὶ ἐπειδὴ εἶνε $\text{συν}\,\omega' = -\text{ημ}\,\omega$, $\text{ημ}\,\omega' = \text{συν}\,\omega$, λαμβάνομεν διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (3) καὶ (8)

$$\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{\varrho'^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} \tag{9}$$

Ἤτοι «***τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀντιστρόφων δύο καθέτων ἐπ' ἀλλήλας πολικῶν ἀκτίνων τῆς ἐλλείψεως εἶνε σταθερόν***».

δ') **Πολικὴ ἐξίσωσις ἐλλείψεως ὡς πρὸς πόλον μίαν τῶν ἑστιῶν αὐτῆς.** Ἔστω πόλος ἡ ἑστία Ε΄ τῆς ἐλλείψεως καὶ πολικὸς ἄξων ὁ μέγας ἄξων αὐτῆς ΑΑ΄. Ἂν ϱ, φ εἶνε αἱ πολικαὶ συντεταγμέναι τυχόντος σημείου Μ τῆς ἐλλείψεως καὶ x, y αἱ ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι αὐτοῦ, εὑρίσκομεν (σχ. 80, σελ. 198)

$$(E'M)^2 = (x+\gamma)^2 + y^2,\ (EM)^2 = (x-\gamma)^2 + y^2,\ (E'M)^2 - (EM)^2 = 4\gamma x,$$

ἢ καὶ

$$[(E'M) + (EM)]\,[(E'M) - (EM)] = 4\gamma x.$$

Ἐπειδὴ $$(E'M) + (EM) = 2\alpha$$

ἔχομεν,

$$(E'M) - (EM) = \frac{2\gamma x}{\alpha},\quad (E'M) + (EM) = 2\alpha, \tag{10}$$

ἐκ τούτων δ' εὑρίσκομεν διὰ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως αὐτῶν κατὰ μέλη

$$(E'M) = \alpha + \frac{\gamma x}{\alpha},\quad (EM) = \alpha - \frac{\gamma}{\alpha} x \tag{11}$$

Ἀφ' ἑτέρου εὑρίσκομεν ἐπειδὴ εἶνε $(E'M) = \varrho$,

$$x = (oΠ) = (oE') + (E'Π) = -\gamma + \varrho\ \sigma\upsilon\nu\ \varphi.$$

Ἑπομένως $\quad \varrho = \alpha + \frac{\gamma}{\alpha}\,(-\gamma + \varrho\ \sigma\upsilon\nu\ \varphi)$

ἢ $\quad \varrho = \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha} + \varrho\,\frac{\gamma}{\alpha}\,\sigma\upsilon\nu\ \varphi = \frac{\beta^2}{\alpha} + \varepsilon\,\varrho\ \sigma\upsilon\nu\ \varphi$

ἢ $\quad \varrho = p + \varepsilon\,\varrho\ \sigma\upsilon\nu\ \varphi$

καὶ $$\varrho = \frac{p}{1 - \varepsilon\ \sigma\upsilon\nu\ \varphi}, \qquad (12)$$

ἥτις εἶνε ἡ πολικὴ ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως ὡς πρὸς πόλον τὴν ἑστίαν αὐτῆς E'.

Διὰ $\varphi = \frac{\pi}{2}$ εὑρίσκομεν $\varrho = p$, καὶ διὰ $\varrho = \alpha$, συν $\varphi = \varepsilon$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Εὕρετε τὰς ἐπιβατικὰς ἀκτῖνας, αἵτινες διχοτομοῦν τὰς γωνίας τῶν ἀξόνων τῆς ἐλλείψεως

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

2) Εὕρετε τῆς αὐτῆς ἐλλείψεως τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀντιστρόφων τῶν ἐπιβατικῶν ἀκτίνων (πόλου ο), αἵτινες εἶνε παράλληλοι πρὸς τὰς εὐθείας $7x + 4y - 1 = 0$ καὶ $4x - 7y + 3 = 0$.

3) Εὕρετε τὴν ἐκκεντρότητα τῆς ἀνωτέρω ἐλλείψεως καὶ τὰς πολικὰς αὐτῆς ἐξισώσεις.

4) Δείξατε τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐξισώσεως α') (3) ὅτι ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων διχοτομεῖ πᾶσαν δι' αὐτοῦ διερχομένην χορδὴν τῆς ἐλλείψεως

5) Δίδονται δύο ἐλλείψεις

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \frac{x^2}{\alpha_1^2} + \frac{y^2}{\beta_1^2} = 1$$

ἔχουσαι τὴν αὐτὴν ἐκκεντρότητα ε. Δείξατε ὅτι εἶνε ὄχι μόνον $\alpha : \alpha_1 = \beta : \beta_1$, ἀλλὰ καὶ ὅτι δύο τυχοῦσαι ἐπιβατικαὶ ἀκτῖνες (πόλου ο) ρ, ρ_1 ἀντιστοιχοῦσαι εἰς πολικὴν γωνίαν ω ἔχουν λόγον $\rho : \rho_1 =$ μὲ $\alpha : \alpha_1$. Αἱ δύο ἐλλείψεις ἔχουν θέσεις ὁμοίως κειμένας καὶ λέγονται *ὅμοιαι*. Ἐξ' οὗ ἕπεται ὅτι ἡ ἰσότης τῶν ἐκκεντροτήτων δύο ἐλλείψεων εἶνε ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα αὗται εἶνε ὅμοιαι.

6) Δείξατε ὅτι δι' ἔλλειψιν, ἔχουσαν ἄξονας α, β καὶ ἐκκεντρότητα ε εἶνε $\alpha = p : (1 - \varepsilon^2)$, $\beta = p : \sqrt{1 - \varepsilon^2}$, $\gamma = \varepsilon p : (1 - \varepsilon^2)$.

7) Ἐκφράσατε τὰ β, γ, p διὰ τῶν α καὶ ε.

8) Ἔλλειψίς τις (τῆς τροχιᾶς τοῦ πλανήτου Ἑρμοῦ) ἔχει $\varepsilon = 0,2$. Κατασκευάσατε ὁμοίαν αὐτῆς ἔλλειψιν.

9) Ἡ ἀπόστασις τῆς Γῆς ἀπὸ τοῦ Ἡλίου ἐν τῷ περιηλίῳ εἶνε πρὸς τὴν ἐν τῷ ἀφηλίῳ ὡς 29 : 30. Εὕρετε τὸ ε τῆς γηΐνης τροχιᾶς.

10) Τίνα τιμὴν ἔχει τὸ ε ἐλλείψεως, ἐὰν εἶνε δι' αὐτὴν $\gamma = \beta$;

§ 116. Εὕρεσις σημείων ἐλλείψεως διὰ τῆς περιγεγραμμένης καὶ ἐγγεγραμμένης εἰς αὐτὴν περιφερείας.—

α΄) Ἔστω ἡ ἔλλειψις (σχ. 81)

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1$$

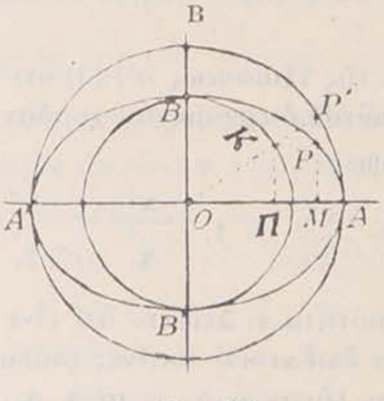
Ἔχομεν $$y=\pm\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2} \qquad (1)$$

Ἡ περιγγεγραμμένη περιφέρεια εἰς τὴν δοθεῖσαν ἔλλειψιν ἔχει ἐξίσωσιν (§ 115, β΄) $x^2+y^2=\alpha^2$, ἢ $y=\pm\sqrt{\alpha^2-x^2}$ (2)

Ἐὰν ἡ εἰς τὴν τετμημένην (οΜ)=x ἀντιστοιχοῦσα τεταγμένη τῆς μὲν ἐλλείψεως εἶνε ἡ (ΜΡ), τῆς δὲ περιγεγραμμένης περιφερείας ἡ (ΜΡ΄), καὶ παρασταθοῦν αὗται διὰ τοῦ y καὶ y΄ ἀντιστοίχως πρὸς διάκρισιν, θὰ εἶνε ἕνεκα τῶν (1) καὶ (2)

$$y=\frac{\beta}{\alpha}\,y', \text{ ἢ } (\text{ΜΡ})=(\text{ΜΡ}')\,\frac{\beta}{\alpha}.$$

Ἤτοι «***διὰ νὰ εὕρωμεν σημεῖα ἐλλείψεως μὲ ἡμιάξονας α καὶ β, ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν περιφέρειαν μὲ κέντρον ο καὶ ἀκτῖνα α, τὰς δὲ τεταγμένας τῶν σημείων ταύτης, μετρουμένας ἀπὸ τοῦ ἄξονος τῶν x, νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ β : α***».



(Σχ. 81)

β΄) Ἐὰν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐλλείψεως λύσωμεν ὡς πρὸς x, εὑρίσκομεν κατ᾽ ἀνάλογον τρόπον ὅτι «***διὰ νὰ εὕρωμεν σημεῖα ἐλλείψεως μὲ ἡμιάξονας α, β, ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν περιφέρειαν μὲ κέντρον ο καὶ ἀκτῖνα β, τὰς τετμημένας δὲ τῶν σημείων ταύτης, μετρουμένας ἀπὸ τοῦ ἄξονος τῶν y, νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ α : β***».

γ΄) Συνδυάζοντες τἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι

«***διὰ νὰ εὕρωμεν σημεῖον ἐλλείψεως μὲ ἡμιάξονας α, β, κατασκευάζομεν τὰς ὁμοκέντρους περιφερείας μὲ κέντρον ο καὶ ἀκτῖνας α καὶ β· φέρομεν ἐκ τοῦ κέντρου τυχοῦσαν εὐθεῖαν οΚΡ΄, τέμνουσαν τὰς περιφερείας, ἔστω εἰς τὰ Κ καὶ Ρ΄***

ἐκ τῆς τομῆς Κ τῆς εὐθείας μὲ τὴν ἐσωτερικὴν περιφέρειαν φέρομεν εὐθεῖαν παράλληλον τῷ ox, ἐκ δὲ τοῦ Ρ′ παράλληλον τῷ oy. Ἡ τομὴ Ρ τῶν δύο τούτων εὐθειῶν εἶνε σημεῖον τῆς ἐλλείψεως».

Διότι εἶνε

$$(\text{ΜΡ}) : (\text{ΜΡ}')=(\text{ΠΚ}) : (\text{ΜΡ}')=(\text{oΚ}) : (\text{oΡ}')=\beta:\alpha,$$

ἢ

$$y : y' = \beta : \alpha.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Κατασκευάσατε τυχοῦσαν περιφέρειαν. Φέρατε τυχὸν σύστημα παραλλήλων χορδῶν αὐτῆς, καὶ βραχύνατε ἑκάστην ἐξ αὐτῶν ἑκατέρωθεν τοῦ μέσου αὐτῆς κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Τίς εἶνε ὁ τόπος τῶν ἄκρων αὐτῶν;

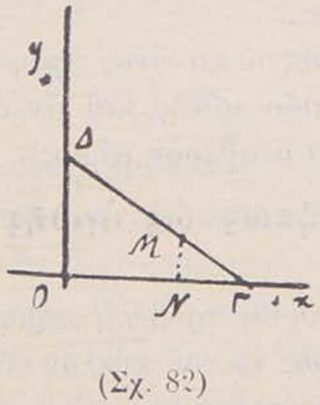
2) Κατασκευάσατε τὴν ἔλλειψιν μὲ ἡμιάξονας $\alpha = 5$, $\beta = 3$.

§ **117. Παραγωγὴ ἐλλείψεως διὰ συνεχοῦς κινήσεως.**— α.) Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ox, oy κάθετοι ἐπ᾽ ἀλλήλας. Ἔστω ὅτι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΔ (ἔχον σταθερὸν μῆκος) κινεῖται οὕτως, ὥστε τὰ ἄκρα αὐτοῦ νὰ κεῖνται ἐπὶ τῶν ox, oy ἀντιστοίχως. Ζητεῖται νὰ εὕρωμεν τὸν τόπον τῶν θέσεων τυχόντος σημείου Μ τοῦ τμήματος τούτου (σχ. 82).

Ἂν θέσωμεν (ΔΜ) $= \alpha$, (ΜΓ) $= \beta$, ὁ ζητούμενος τόπος εἶνε ἔλλειψις μὲ ἡμιάξονας α καὶ β.

Τῷ ὄντι, ἂν x, y εἶνε αἱ συντεταγμέναι τοῦ Μ ὡς πρὸς τοὺς ὀρθογωνίους ἄξονας oxy, φέρωμεν δὲ καὶ τὴν ΜΝ παράλληλον τῷ oy ἔχομεν

$$(\text{oN})=x,\quad (\text{NM}) = y,\quad \frac{(\text{NΓ})}{(\text{MΓ})} = \frac{(\text{oN})}{(\text{ΔM})},\ \text{ἢ}\ (\text{NΓ}) = \frac{\beta x}{\alpha}$$



(Σχ. 82)

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΜΝΓ ἔχομεν

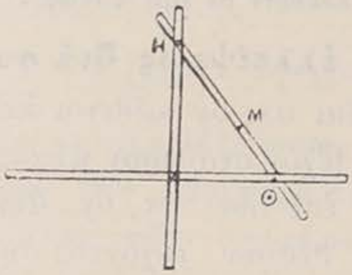
$$\beta^2 = y^2 + \frac{\beta^2 x^2}{\alpha^2}$$

ἢ

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη παριστάνει τὸν τόπον τοῦ σημείου Μ, ὅστις εἶνε ἔλλειψις μὲ ἡμιάξονας α καὶ β. Ὅταν ἡ ΓΔ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἄξονος οχ, τὸ Μ θὰ λάβῃ θέσιν ἔστω τὴν Α, καὶ θὰ εἶνε (οΑ)=(ΔΜ)=α. Ἀκολούθως, ὅταν τὸ ἄκρον Δ κινῆται ἐπὶ τοῦ οy ἀπομακρυνόμενον τοῦ ο, τότε τὸ Γ προσεγγίζει πρὸς τὸ ο, καὶ τὸ Μ γράφει τόξον ἐλλείψεως ΑΜΒ. Ὅταν ἡ ΓΔ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἄξονος οy, τὸ Μ λαμβάνει τὴν θέσιν ἔστω Β, καὶ εἶνε (οΒ) = (ΜΓ) = β.

ϐ′) Ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος στηρίζεται ἡ κατασκευὴ ὀργάνου, χρησιμεύοντος πρὸς γραφὴν ἐλλείψεως, τὸ ὁποῖον καλεῖται ***ἐλλειψογράφος κανών***.



(Σχ. 83)

Τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ σταυροειδῆ γνώμονα (σχ.83), φέροντα δύο εὐθεῖς αὔλακας καθέτους πρὸς ἀλλήλους, ἐντὸς τῶν ὁποίων εἰσάγονται καὶ ὀλισθαίνουν δύο ἀκίδες, Η καὶ Θ, στηριγμέναι εἰς τὰ ἄκρα κανόνος, ὁ ὁποῖος φέρει γραφίδα, στερεωμένην ὁπουδήποτε τοῦ κανόνος (διὰ κοχλίου). Ὅταν τὰ ἄκρα τοῦ κανόνος ὀλισθαίνουν ἐντὸς τῶν αὐλάκων, ἡ αἰχμὴ Μ τῆς γραφίδος γράφει, συμφώνως πρὸς τἀνωτέρω, τόξον ἐλλείψεως.

Ἡ διὰ τοῦ ἐλλειψογράφου κανόνος γραφὴ τῆς ἐλλείψεως γίνεται ἄνευ τῆς χρήσεως τῶν ἑστιῶν αὐτῆς, καὶ ἄνευ νήματος (μὴ διατηροῦντος ἐν τῇ πραγματικότητι σταθερὸν μῆκος).

§ 118. Περὶ ἐλλείψεως ὡς ὀρθῆς προβολῆς περιφερείας κύκλου.—

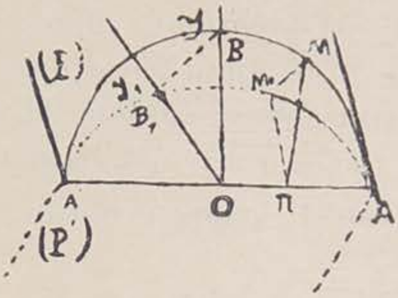
α′) Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ὀρθὴ προβολὴ περιφερείας κύκλου ἐπὶ ἐπίπεδον μὴ παράλληλον πρὸς τὸ τοῦ κύκλου εἶνε ἔλλειψις.

Ὑποθέτομεν ὅτι τὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁποίου γίνεται ἡ ὀρθὴ προβολὴ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας. Διότι αἱ ὀρθαὶ προβολαὶ τῆς περιφερείας ἐπὶ παραλλήλων ἐπιπέδων εἶνε γραμμαὶ ἴσαι.

Ἔστω (Ε) τὸ ἐπίπεδον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, (Ρ′) τὸ τῆς προβολῆς, ΑΑ′ ἡ διάμετρος τῆς περιφερείας καθ' ἣν τέμνονται τὰ

(Ε) καὶ (Ρ′), ἔστω δὲ καὶ οΒ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, ἡ κάθετος τῇ ΑΑ′ (σχ. 84).

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ὡς πρὸς ἄξονας τὰς εὐθείας ΑΑ′ καὶ οΒ $\qquad x^2 + y^2 = \alpha^2 \qquad (1)$



(Σχ. 84)

Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ὀρθὴ προβολὴ τοῦ Β εἶνε τὸ B_1, τοῦ δὲ τυχόντος σημείου τῆς περιφερείας Μ (x, y) τὸ M_1. Ἂν παραστήσωμεν τὴν γωνίαν τῶν (Ε) καὶ (Ρ′) διὰ τοῦ ω, ἔχομεν προφανῶς

$$(oB_1) = (oB)\ \sigma\upsilon\nu\ \omega,\ (\Pi M_1) = (\Pi M)\ \sigma\upsilon\nu\ \omega.$$

Ἂν τεθῇ $(oB_1) = \beta$, λάβωμεν δ' ὡς ἄξονας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ (Ρ′) τὰς εὐθείας ΑΑ′ καὶ oB_1, ἐπειδὴ εἶνε $(oB) = (oA) = \alpha$, θὰ ἔχωμεν

$$\beta = \alpha\ \sigma\upsilon\nu\ \omega,\ (\Pi M_1) = y_1,\ (o\Pi) = x = x_1,\ y_1 = y\ \sigma\upsilon\nu\ \omega.$$

Ἐκ τούτων ἕπεται

$$\frac{\beta}{\alpha} = \sigma\upsilon\nu\ \omega, \qquad y_1 = y\frac{\beta}{\alpha}, \qquad x = x_1, \qquad y = y_1\frac{\alpha}{\beta} \qquad (2)$$

Εἰσάγοντες εἰς τὴν (1) τὰς τιμὰς τῶν x, y ἐκ τῶν (2) εὑρίσκομεν

$$x_1^2 + y_1^2\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^2,$$

ἢ

$$\frac{x_1^2}{\alpha^2} + \frac{y_1^2}{\beta^2} = 1, \text{ ἢ } \frac{x_1^2}{\alpha^2} + \frac{y_1^2}{\alpha^2\ \sigma\upsilon\nu^2\ \omega} = 1.$$

Ἄρα «***ἡ ὀρθὴ προβολὴ δοθείσης περιφερείας εἶνε ἔλλειψις, ἔχουσα μέγαν ἄξονα ἴσον μὲ τὴν διάμετρον τῆς περιφερείας, μικρὸν δὲ τὸ γινόμενον τῆς διαμέτρου τῆς περιφερείας ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας τῶν δύο ἐπιπέδων***».

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι, δοθεῖσαν ἔλλειψιν μὲ ἄξονας 2α, 2β δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς ὀρθὴν προβολὴν περιφερείας κύκλου, κειμένης ἐπὶ ἐπιπέδου, σχηματίζοντος γωνίαν ω μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἐλλείψεως, ἥτις γωνία ὁρίζεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$\sigma\upsilon\nu\ \omega = \frac{\beta}{\alpha}.$$

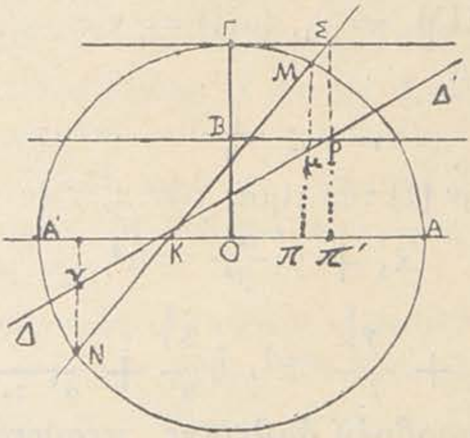
β´) «*Δίδονται οἱ ἄξονες ΑΟΑ΄ καὶ ΒΟΒ΄ ἐλλείψεως καὶ ζητοῦνται αἱ τομαὶ αὐτῆς ὑπὸ δοθείσης εὐθείας ΔΔ΄*» (σχ. 85).

Φανταζόμεθα τὸ ἐπίπεδον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, τῆς ὁποίας ὀρθὴ προβολὴ εἶνε ἡ ἔλλειψις, ἐφαρμόζον μὲ τὸ ἐπίπεδον τῆς ἐλλείψεως. Τότε ἕκαστον σημεῖον μετὰ τῆς προβολῆς αὐτοῦ θὰ κεῖται ἐπὶ εὐθείας καθέτου τῇ ΑΑ΄. Αἱ ἀποστάσεις τούτων ἀπὸ τῆς ΑΑ΄ θὰ ἔχουν λόγον β : α, ἂν 2α, 2β εἶνε τὰ μήκη τῶν ἀξόνων τῆς ἐλλείψεως.

Γράφομεν λοιπὸν περιφέρειαν κύκλου ΑΓΑ΄Α μὲ διάμετρον τὴν ΑΑ΄ (τῆς ὁποίας ὀρθὴ προβολὴ εἶνε ἡ ἔλλειψις).

Ἐκ τῶν σημείων Β καὶ Γ φέρομεν εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὸν ἄξονα ΑΑ΄.

Ἔστω Ρ τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἐκ τοῦ Β παράλληλος τέμνει τὴν ΔΔ΄ καὶ Σ τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον τούτου εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς περιφερείας. Ἂν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα τέμνῃ τὴν ΑΑ΄ εἰς τὸ Κ, ἡ εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου τῆς περιφερείας, ἥτις προβάλλεται κατὰ τὴν ΔΔ΄ εἶνε ἡ ΚΣ. Ἡ εὐθεῖα ΚΣ τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα, ἔστω τὰ Μ καὶ Ν, τῶν ὁποίων αἱ ὀρθαὶ προβολαὶ, ἔστωσαν τὰ μ καὶ ν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἐλλείψεως, κεῖνται ἐπὶ τῆς ΔΔ΄ καὶ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως. Ἤτοι τὰ σημεῖα αὐτὰ μ, ν εἶνε αἱ τομαὶ τῆς ΔΔ΄ καὶ τῆς ἐλλείψεως.



(Σχ. 85)

γ´) «*Δίδεται ἔλλειψις καὶ σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς. Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη τῆς ἐλλείψεως διὰ τοῦ δοθέντος σημείου*».

Ἔστω πρῶτον ὅτι τὸ δοθὲν σημεῖον Ρ κεῖται ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως, ἐχούσης ἄξονας ΑΟΑ΄ καὶ ΒΟΒ΄. Ὑποθέτομεν ὅτι ΡΤ εἶνε ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη, τέμνουσα τὴν ΑΑ΄ εἰς τὸ Τ. Γράφομεν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου μὲ διάμετρον τὸν μεγάλον ἄξονα ΑΑ΄ τῆς ἐλλείψεως (τῆς ὁποίας περιφερείας ὀρθὴ προβολὴ εἶνε ἡ ἔλλειψις). Προεκτείνομεν τὴν τεταγμένην τοῦ P μέχρις ὅτου τμήσῃ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ἔστω εἰς τὸ P′. Ἐκ τῆς κατασκευῆς τῆς P′T ἐφαπτομένης τῆς περιφερείας εἰς τὸ P′, εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον T ἐπὶ τῆς εὐθείας AA′. Ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν PT, ἡ ὁποία εἶνε ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη τῆς ἐλλείψεως εἰς τὸ P.

Ἔστω δεύτερον τὸ δοθὲν σημεῖον P ἐκτὸς τῆς ἐλλείψεως. Ὑποθέτομεν ὅτι PT εἶνε ζητουμένη ἐφαπτομένη, ἐνῷ T εἶνε ἡ τομὴ αὐτῆς μὲ τὸν ἄξονα AA′ τῆς ἐλλείψεως. Ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον P′, ἀντίστοιχον τοῦ P εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, νὰ φέρωμεν τὰς ἐφαπτομένας P′T, P′T′, τῆς περιφερείας, τῆς ἐχούσης διάμετρον τὴν AA′ καὶ αἱ PT, PT′ εἶνε δύο ἐφαπτόμεναι τῆς ἐλλείψεως, ἀγόμεναι διὰ τοῦ σημείου P.

Τὸ P′ εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς. Φέρομεν πρῶτον τὴν PBΛ τέμνουσαν ἔστω εἰς τὸ Λ τὴν AA′, ἐνῷ B εἶνε κορυφὴ τῆς ἐλλείψεως.

Ἀκολούθως φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΛΓ, ἐνῷ Γ εἶνε τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον τοῦ B ἐν τῇ περιφερείᾳ. Αὕτη τέμνει τὴν τεταγμένην τοῦ P εἰς τὸ ζητούμενον σημεῖον P′.

§ 119. Συζυγεῖς διάμετροι ἐλλείψεως καὶ ἰδιότητες αὐτῶν.—

α′) Ὁ τόπος τῶν μέσων χορδῶν παραλλήλων περιφερείας κύκλου εἶνε, ὡς γνωστόν, χορδὴ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς, ἥτις καλεῖται διάμετρος τῆς περιφερείας ταύτης.

Καλοῦμεν συζυγεῖς διαμέτρους περιφερείας κύκλου δύο διαμέτρους αὐτῆς, τῶν ὁποίων ἡ μία εἶνε ὁ τόπος τῶν μέσων χορδῶν παραλλήλων τῆς ἄλλης, εἶνε δὲ αὗται, ὡς γνωστόν, κάθετοι ἐπ᾽ ἀλλήλας.

Τμῆμα εὐθείας, τεμνούσης ἔλλειψιν εἰς δύο (διάφορα) πραγματικὰ σημεῖα, καὶ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν σημείων τούτων, καλεῖται *χορδὴ τῆς ἐλλείψεως*.

Καλοῦμεν *διάμετρον ἐλλείψεως* χορδὴν διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς.

β′) Θεωροῦμεν ἤδη σύστημα χορδῶν παραλλήλων ἐν τῇ περιφερείᾳ

$$x^2 + y^2 = \alpha^2, \tag{1}$$

τῆς ὁποίας ὀρθὴ προβολὴ εἶνε ἡ ἔλλειψις

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \tag{2}$$

καὶ ἔστω $P_1 P_2$ μία τῶν ἐν λόγῳ χορδῶν καὶ P'_1, P'_2 αἱ ὀρθαὶ προβολαὶ τῶν P_1, P_2 ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς ἐλλείψεως. Τὸ τμῆμα (εὐθείας) P'_1 P'_2 εἶνε χορδὴ τῆς ἐλλείψεως.

Ἐπειδὴ τμήματα εὐθύγραμμα παράλληλα καὶ ἴσα ἔχουν προβολὰς τμήματα εὐθύγραμμα παράλληλα καὶ ἴσα, ἕπεται ὅτι

«***σύστημα παραλλήλων χορδῶν περιφερείας κύκλου προβάλλεται κατὰ σύστημα χορδῶν παραλλήλων τῆς ἐλλείψεως, ἥτις εἶνε ὀρθὴ προβολὴ τῆς περιφερείας· τὰ δὲ μέσα τῶν πρώτων προβάλλονται εἰς τὰ μέσα τῶν δευτέρων, καὶ ὁ τόπος τῶν μέσων τῶν πρώτων ἔχει προβολὴν τὸν τόπον τῶν μέσων τῶν δευτέρων***».

Ἐπειδὴ ὁ πρῶτος τῶν τόπων εἶνε διάμετρος τῆς περιφερείας καὶ ὁ τῶν δευτέρων θὰ εἶνε χορδή, διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἐλλείψεως, ἤτοι διάμετρος τῆς ἐλλείψεως.

γ') Ἂν θεωρήσωμεν τὰς προβολὰς δύο συζυγῶν διαμέτρων περιφερείας κύκλου, ἑκάστη εἶνε τόπος τῶν μέσων χορδῶν παραλλήλων πρὸς τὴν ἄλλην, ἤτοι εἶνε διάμετροι τῆς ἐλλείψεως.

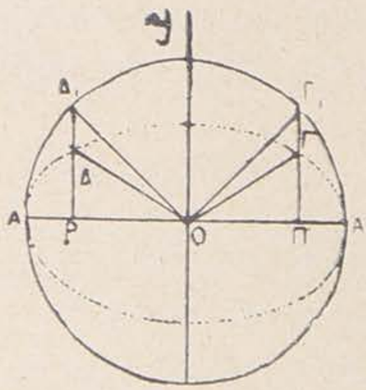
Τὰς τοιαύτας διαμέτρους τῆς ἐλλείψεως καλοῦμεν *συζυγεῖς διαμέτρους* αὐτῆς.

Ἐπομένως «***αἱ συζυγεῖς διάμετροι περιφερείας κύκλου προβάλλονται κατὰ συζυγεῖς διαμέτρους τῆς ἀντιστοίχου αὐτῇ ἐλλείψεως***».

δ') «***Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο συζυγῶν διαμέτρων ἐλλείψεως εἶνε σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀξόνων αὐτῆς***».

Ἔστωσαν οΓ καὶ οΔ συζυγεῖς ἡμιδιάμετροι τῆς ἐλλείψεως (2) καὶ $о\Gamma_1$, $о\Delta_1$ αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπὶ τῆς περιφερείας, τῶν ὁποίων εἶνε ὀρθαὶ προβολαί (σχ. 86). Ἐὰν (x_1, y_1) εἶνε αἱ συντεταγμέναι τοῦ Γ_1 θὰ εἶνε Γ_1 (x_1, y_1), Δ_1 $(-y_1, x_1)$, ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων $оП\Gamma_1$ καὶ $оР\Delta_1$. Θὰ ἔχωμεν δὲ καὶ (§ 118, (2))

$$\Gamma\left(x_1,\ y_1\frac{\beta}{\alpha}\right),\quad \Delta\left(-y_1, x_1\frac{\beta}{\alpha}\right),$$



(Σχ. 86)

ἐπειδὴ ἡ ἔλλειψις (2) εἶνε ὀρθὴ προβολὴ τῆς περιφερείας (1).

Ἐπομένως εἶνε

$$(o\Gamma)^2 = x_1^2 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} y_1^2, \quad (o\Delta)^2 = y_1^2 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} x_1^2$$

$$\text{Ἄρα } (o\Gamma)^2 + (o\Delta)^2 = \left(x_1^2 + y_1^2\right) + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\left(x_1^2 + y_1^2\right) = \alpha^2 + \beta^2,$$

ἐπειδὴ εἶνε $\qquad x_1^2 + y_1^2 = \alpha^2$

τοῦ Γ_1 κειμένου ἐπὶ τῆς περιφερείας (1).

Ἑπομένως $4\,(o\Gamma)^2 + 4\,(o\Delta)^2 = (2\alpha)^2 + (2\beta)^2$.

ε΄) ***«Τὸ γινόμενον τῶν συντελεστῶν διευθύνσεως δύο συζυγῶν διαμέτρων ἐλλείψεως, ἐχούσης ἡμιάξονας*** α, β, ***εἶνε σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ*** $\quad -\beta^2 : \alpha^2$ ».

Τῷ ὄντι, ἔστω $y = \lambda x$ ἡ εὐθεῖα ἐφ' ἧς κεῖται διάμετρός τις τῆς ἐλλείψεως (2). Πρὸς εὕρεσιν τῆς εὐθείας τῆς συζυγοῦς διαμέτρου ταύτης, παρατηροῦμεν ὅτι, εἰς τὴν εὐθεῖαν $y = \lambda x$ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς ἐλλείψεως ἀντιστοιχεῖ ἡ (§ 118, (2))

$$y\,\frac{\beta}{\alpha} = \lambda x$$

ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς περιφερείας (1).

Ἤτοι ἡ εὐθεῖα $y = \lambda x$ τῆς διαμέτρου τῆς ἐλλείψεως (2) εἶνε ὀρθὴ προβολὴ τῆς εὐθείας $y = \lambda \frac{\alpha}{\beta} x$ τῆς διαμέτρου περιφερείας (1).

Ἡ εὐθεῖα τῆς συζυγοῦς διαμέτρου ταύτης ἐν τῇ περιφερείᾳ εἶνε, ὡς γνωστόν, κάθετος ἐπ' αὐτήν, ἄρα ἔχει συντελεστὴν διευθύνσεως $-\frac{\beta}{\alpha\lambda}$, ἐξίσωσιν δὲ

$$y = -\frac{\beta}{\alpha\lambda} x.$$

Ἡ προβολὴ ταύτης εἶνε ἡ εὐθεῖα τῆς συζυγοῦς διαμέτρου, τῆς κειμένης ἐπὶ τῆς $y = \lambda x$, τῆς ἐλλείψεως καὶ ἔχει ἐξίσωσιν (§ 118, (2))

$$y\,\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\beta}{\alpha\lambda} x, \quad \text{ἢ} \quad y = -\frac{\beta^2}{\alpha^2\lambda} x.$$

Ὅθεν, αἱ δύο θεωρηθεῖσαι συζυγεῖς διάμετροι τῆς ἐλλείψεως ἔχουν συντελεστὰς διευθύνσεως

$$\lambda \quad \text{καὶ} \quad -\frac{\beta^2}{\alpha^2\lambda}$$

τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον εἶνε ἴσον μὲ $-\frac{\beta^2}{\alpha^2}$.

ϛ΄) Ἐὰν φ, ψ παριστάνουν τὰς γωνίας ἑκάστης τῶν συζυγῶν διαμέτρων τῆς ἐλλείψεως (2) μὲ τὸν ἄξονα τῶν x θὰ εἶνε (§ 61, γ΄)

$$\text{εφφ. εφ}\,\psi = -\frac{\beta^2}{\alpha^2} \qquad (3)$$

ἢ

$$\frac{\text{συνφ συν}\,\psi}{\alpha^2} + \frac{\text{ημ φ ημ}\,\psi}{\beta^2} = 0 \qquad (4)$$

Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον εφφ.εφψ εἶνε ἀρνητικόν, ἡ μία τῶν γωνιῶν φ, ψ εἶνε ὀξεῖα ἡ δ' ἄλλη ἀμβλεῖα. Ἔστω ὅτι ἡ φ εἶνε ὀξεῖα. Αὐξανομένης τῆς φ, αὐξάνεται καὶ ἡ εφ φ, ἐπομένως ἡ εφ ψ, ἀπολύτως θεωρουμένη, ἐλαττοῦται, ἤτοι ἡ γωνία ψ αὐξάνει. Ἐπειδὴ ἀφ' ἑτέρου εἶνε

$$\varepsilon\varphi\,(\psi-\varphi)=\frac{\varepsilon\varphi\,\psi-\varepsilon\varphi\,\varphi}{1+\varepsilon\varphi\,\varphi\;\varepsilon\varphi\,\psi}$$

καὶ ἕνεκα τῆς (3) εἶνε ἀρνητική, πρέπει ἡ γωνία (ψ—φ) νὰ εἶνε ἀμβλεῖα. Ἐὰν εἶνε $\varphi=0^0$, ἐκ τῆς (3) προκύπτει ὅτι $\psi=90^0$. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι

«***Δύο συζυγεῖς διάμετροι ἐλλείψεως χωρίζονται ὑπὸ τῶν ἀξόνων αὐτῆς. Ἂν ἡ πρώτη αὐτῶν, στρεφομένη, διαγράφῃ τὸ πρῶτον τεταρτημόριον τῆς ἐλλείψεως, ἡ δευτέρα, στρεφομένη ὁμοίως, διαγράφει τὸ δεύτερον τεταρτημόριον αὐτῆς.***

Οἱ ἄξονες τῆς ἐλλείψεως εἶνε συζυγεῖς διάμετροι αὐτῆς καὶ αἱ μόναι ἐπ' ἀλλήλας κάθετοι».

ζ') Τῇ βοηθείᾳ τῆς τελευταίας ταύτης ἰδιότητος δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τοὺς ἄξονας δεδομένης ἐλλείψεως. Πρὸς τοῦτο, μὲ διάμετρον τυχοῦσαν διάμετρον αὐτῆς γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν κύκλου. Συνδέομεν διὰ χορδῶν τὸ σημεῖον τομῆς ταύτης καὶ τῆς ἐλλείψεως μὲ τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου. Αἱ διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἐλλείψεως ἀγόμεναι ἀντιστοίχως παράλληλοι χορδαὶ πρὸς τὰς χορδὰς αὐτὰς εἶνε οἱ ἄξονες. Διότι εἶνε κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας καὶ ἑκάστη διχοτομεῖ μίαν χορδήν, ἥτις εἶνε παράλληλος τῇ ἄλλῃ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1) Ἐν περιφερείᾳ κύκλου περιγεγραμμένῃ εἰς ἔλλειψιν ἐγγράψατε κανονικὸν ὀκτάγωνον συμμετρικὸν πρὸς τοὺς ἄξονας, καθὼς καὶ τὸ ἀντίστοιχον σχῆμα ἐν τῇ ἐλλείψει.

2) Ποῖον ζεῦγος συζυγῶν διαμέτρων κεῖται συμμετρικῶς ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας τῆς ἐλλείψεως; (Χρησιμοποιήσατε τὰς ἀντιστοίχους διαμέτρους τῆς περιφερείας κύκλου ἢ τὴν ἐξίσωσιν $\varepsilon\varphi\,\varphi.\ \varepsilon\varphi\,\psi=-\beta^2:\alpha^2$ καὶ δείξατε ὅτι αἱ ζητούμεναι διάμετροι εἶνε αἱ διερχόμεναι διὰ τῶν κορυφῶν τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὴν ἔλλειψιν ὀρθογωνίου).

3) Νὰ εὑρεθῇ ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως τῆς διαμέτρου, ἥτις ἔχει συζυγῆ τὴν σχηματίζουσαν γωνίαν 45^0 μὲ τὸν ἄξονα τῶν x καὶ κατασκευάσατε αὐτὴν τῇ βοηθείᾳ τῆς περιφερείας κύκλου.

4) Εὕρετε τὰς τομὰς τῆς εὐθείας $y=3x-5$ καὶ ἐλλείψεως, τῆς ὁποίας δίδονται μόνον οἱ ἄξονες, χωρὶς νὰ κατασκευασθῇ ἡ ἔλλειψις.

5) Ἔστω $M_1\,(x_1,\ y_1)$ σημεῖόν τι ἐλλείψεως, ἐχούσης ἄξονας $2\alpha,\ 2\beta$, ὅτε $xy_1-yx_1=0$ εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς ἀντιστοίχου πρὸς αὐτὸ διαμέτρου αὐτῆς. Δείξατε ὅτι ἡ συζυγὴς αὐτῆς διάμετρος εἶνε

$$\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=0$$

καὶ εὕρετε τὰς συντεταγμένας τῶν ἄκρων ταύτης.

6) Δείξατε τῇ βοηθείᾳ τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὴν ἔλλειψιν περιφερείας, ὅτι ἑκάστη εὐθεῖα τέμνει τὴν ἔλλειψιν εἰς δύο, ἐν γένει, σημεῖα, τὰ ὁποῖα εἶνε πραγματικὰ καὶ διάφορα ἀλλήλων, ἢ συμπίπτοντα, ἢ φανταστικά.

§ 120. Ἐξίσωσις ἐλλείψεως ὡς πρὸς δύο συζυγεῖς διαμέτρους αὐτῆς.—

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις ἐλλείψεως ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας αὐτῆς

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \qquad (1)$$

Ἂν δύο συζυγεῖς διάμετροι αὐτῆς σχηματίζουν γωνίας φ καὶ ψ ἀντιστοίχως μὲ τὸν ἄξονα τῶν x θὰ εἶνε (§ 119, Ϛ′)

$$\frac{\text{συν}\,\varphi \,.\, \text{συν}\,\psi}{\alpha^2} + \frac{\text{ημ}\,\varphi\ \text{ημ}\,\psi}{\beta^2} = 0 \qquad (2)$$

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ $2\alpha'$, $2\beta'$ τὰ μήκη τῶν εἰς τὰς γωνίας φ καὶ ψ ἀντιστοιχουσῶν διαμέτρων, θὰ ἔχωμεν (§ 115, (3))

$$\frac{\text{συν}^2\,\varphi}{\alpha^2} + \frac{\text{ημ}^2\,\varphi}{\beta^2} = \frac{1}{\alpha'^2} \qquad (3)$$

$$\frac{\text{συν}^2\,\psi}{\alpha^2} + \frac{\text{ημ}^2\,\psi}{\beta^2} = \frac{1}{\beta'^2} \qquad (4)$$

Λαμβάνομεν ἤδη τὴν εἰς τὴν γωνίαν φ ἀντιστοιχοῦσαν εὐθεῖαν τῆς διαμέτρου ὡς ἄξονα τῶν x′, τὴν δὲ εἰς τὴν ψ ὡς ἄξονα τῶν y′ ἑνὸς νέου (πλαγιογωνίου) συστήματος ἀξόνων. Ἔχομεν τοὺς τύπους μετασχηματισμοῦ (§ 21, ε′)

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\,\text{συν}\,\varphi + y'\,\text{συν}\,\psi \\ y &= x'\,\text{ημ}\,\varphi + y'\,\text{ημ}\,\psi \end{aligned}\right\}$$

Εἰσάγοντες τὰς τιμὰς ταύτας τῶν x, y εἰς τὴν (1) καὶ λαμβάνοντες ὑπ᾽ ὄψιν τὰς (2), (3) καὶ (4) εὑρίσκομεν

$$\frac{x'^2}{\alpha'^2} + \frac{y'^2}{\beta'^2} = 1,$$

ἥτις εἶνε ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως ὡς πρὸς ἄξονας τὰς εὐθείας τῶν συζυγῶν διαμέτρων αὐτῆς $2\alpha'$, $2\beta'$.

Ἐκ ταύτης συνάγομεν ὅτι ἡ ἔλλειψις εἶνε συμμετρικὴ καὶ ὡς πρὸς τὰς συζυγεῖς διαμέτρους αὐτῆς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1) Τίς εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως, τῆς ἐχούσης ἡμιάξονας $\alpha = 7$, $\beta = 5$ ὡς πρὸς σύστημα συζυγῶν διαμέτρων αὐτῆς, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ ὡς ἄξων τῶν x θεωρουμένη εἶνε παράλληλος τῇ εὐθείᾳ $2x + 7y - 4 = 0$;

2) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν ἐλλείψεως, ἐχούσης ἄξονας 2α, 2β ὡς πρὸς τὰς συζυγεῖς διαμέτρους αὐτῆς, αἵτινες εἶνε συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας αὐτῆς.

§ **121. Θέσεις εὐθείας ὡς πρὸς ἔλλειψιν· ἐξίσωσις εὐθείας ἐφαπτομένης ἐλλείψεως εἰς δοθὲν σημεῖον αὐτῆς.—**

α΄) Ἔστω ἡ ἔλλειψις ὡς πρὸς ἄξονας τὰς εὐθείας τῶν συζυγῶν διαμέτρων αὐτῆς $2\alpha'$, $2\beta'$,

$$\frac{x^2}{\alpha'^2}+\frac{y^2}{\beta'^2}=o \qquad (1)$$

καὶ ἡ εὐθεῖα

$$A\,x+B\,y+\Gamma=o \qquad (2)$$

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τῆς εὐθείας (2) ὡς πρὸς τὴν ἔλλειψιν (1).

Πρὸς τοῦτο λύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2). Εὑρίσκοντες τὴν τιμὴν τοῦ y (διὰ τοῦ x) ἐκ τῆς (2) καὶ εἰσάγοντες αὐτὴν εἰς τὴν (1), εὑρίσκομεν,

$$(A^2\alpha'^2+B^2\beta'^2)x^2+2A\Gamma\,\alpha'^2x+(\Gamma^2-B^2\beta'^2)\,\alpha'^2=o \qquad (3)$$

Αἱ δύο ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως (3) εἶνε αἱ τετμημέναι τῶν κοινῶν σημείων τῆς εὐθείας (2) καὶ τῆς ἐλλείψεως (1).

Τὸ εἶδος τῶν ῥιζῶν ταύτης ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ

$$A^2\Gamma^2\alpha'^4-(A^2\alpha'^2+B^2\beta'^2)(\Gamma^2-B^2\beta'^2)\alpha'^2=\alpha'^2\beta'^2B^2(A^2\alpha'^2+B^2\beta'^2-\Gamma^2), \quad (4)$$

ἤτοι ἐκ τοῦ σημείου τοῦ $A^2\,\alpha'^2+B^2\,\beta'^2-\Gamma^2$.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι

«***Ἡ τυχοῦσα εὐθεῖα (2) τέμνει τὴν ἔλλειψιν (1) εἰς δύο πραγματικὰ καὶ διακεκριμένα σημεῖα, ἢ εἰς δύο πραγματικὰ καὶ συμπίπτοντα, ἢ εἰς δύο φανταστικά, ἐὰν τὸ***

$$A^2\,\alpha'^2+B^2\,\beta'^2-\Gamma^2$$

εἶνε θετικόν, ἢ μηδέν, ἢ ἀρνητικόν».

β΄) Ἐπειδὴ ἡ ἔλλειψις παρίσταται ὑπὸ ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y τέμνεται δὲ ὑπὸ εὐθείας γραμμῆς, ἐν γένει, εἰς δύο σημεῖα λέγεται ***καμπύλη δευτέρου βαθμοῦ*** (§ 23, θ, ια΄).

Ἡ περιφέρεια κύκλου εἶνε ἐπίσης καμπύλη δευτέρου βαθμοῦ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ὡς μερικὴ περίπτωσις τῆς ἐλλείψεως.

γ΄) Ἐν ᾗ περιπτώσει τὰ δύο σημεῖα τομῆς εὐθείας καὶ ἐλλείψεως συμπίπτουν εἰς ἕν, λέγομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ***ἐφάπτεται*** τῆς ἐλλείψεως εἰς τὸ σημεῖον ἐκεῖνο. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ εὑρίσκομεν ἐκ τῆς (3), θέτοντες

$$A^2\,\alpha'^2+B^2\,\beta'^2=\Gamma^2$$

$$x=-\frac{A}{\Gamma}\,\alpha'^2 \qquad (5)$$

Παριστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην διὰ x_1 καὶ εἰσάγοντες αὐτὴν εἰς τὴν (2), λαμβάνομεν τὴν τεταγμένην, ἔστω y_1, τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς

$$y_1 = -\frac{B}{\Gamma}\beta'^2 \qquad (6)$$

Δυνάμεθα ἤδη νὰ ἐκφράσωμεν διὰ τῶν x_1, y_1 τὰ

$$\frac{A}{\Gamma} \quad \text{καὶ} \quad \frac{B}{\Gamma}$$

καὶ εὑρίσκομεν

$$\frac{A}{\Gamma} = -\frac{x_1}{\alpha'^2}, \quad \frac{B}{\Gamma} = -\frac{y_1}{\beta'^2}.$$

Εἰσάγοντες τὰς τιμὰς τούτων εἰς τὴν (2) ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἐλλείψεως εἰς τὸ σημεῖον M_1 (x_1, y_1)

$$\boxed{\frac{xx_1}{\alpha'^2} + \frac{yy_1}{\beta'^2} = 1} \qquad (7)$$

ϛ') Τὴν ἐξίσωσιν (7) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ διὰ τῆς γενικωτέρας πορείας, τὴν ὁποίαν ἐφηρμώσαμεν διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ἐφαπτομένης περιφερείας κύκλου (§ 109, γ').

Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν εὐθεῖαν, ἥτις τέμνει τὴν ἔλλειψιν (1) ἔστω εἰς τὰ σημεῖα M_1 (x_1, y_1), M_2 (x_2, y_2). Αὕτη ἔχει ἐξίσωσιν

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1) \qquad (8)$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ τὰ M_1, M_2 κεῖνται ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως εἶνε

$$\frac{x_1^2}{\alpha'^2} + \frac{y_1^2}{\beta'^2} = 1, \quad \frac{x_2^2}{\alpha'^2} + \frac{y_2^2}{\beta'^2} = 1,$$

ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν

$$\frac{x_2^2 - x_1^2}{\alpha'^2} + \frac{y_2^2 - y_1^2}{\beta'^2} = 0,$$

ἢ

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{\beta'^2}{\alpha'^2}\,\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} \qquad (9)$$

Οὕτω ἡ ἐξίσωσις τῆς τεμνούσης M_1 M_2 δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$y - y_1 = -\frac{\beta'^2}{\alpha'^2}\,\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}(x - x_1).$$

Ὑποθέτομεν ἤδη ὅτι τὸ σημεῖον M_2 συμπίπτει μὲ τὸ M_1 καὶ θὰ εἶνε $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$, ὅτε ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἐλλείψεως εἰς τὸ M_1 γίνεται

$$y - y_1 = -\frac{\beta'^2}{\alpha'^2}\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

ἢ
$$\frac{xx_1}{\alpha'^2} + \frac{yy_1}{\beta'^2} = \frac{x_1^2}{\alpha'^2} + \frac{y_1^2}{\beta'^2} = 1.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἐλλείψεως ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας αὐτῆς 2α, 2β εἰς τὸ σημεῖον M (x_1, y_1) εἶνε

$$\frac{xx}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1.$$

2) Κατασκευάσατε τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον (x_1, y_1) ἐλλείψεως, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον τῆς ἐπαφῆς (x'_1, y'_1) τῆς περιφερείας, τῆς ὁποίας ὀρθὴ προβολὴ εἶνε ἡ ἔλλειψις, ἔχει τὴν αὐτὴν τετμημένην ἐπὶ τὴν ἀρχὴν καθὼς καὶ ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἐλλείψεως.

3) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἐλλείψεως

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς M_1 (x_1, y_1), θεωροῦντες αὐτὴν ὡς ὀρθὴν προβολὴν τῆς περιφερείας $x^2 + y^2 = \alpha^2$.

4) Εὕρετε τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς καὶ τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης ἐλλείψεως, ἥτις εἶνε παράλληλος πρὸς εὐθεῖαν ὁριζομένην διὰ τῶν συντεταγμένων αὐτῆς ἐπὶ τὴν ἀρχήν, ἢ εἶνε παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν

$$x \text{ συν } \varphi + y \text{ ημ } \varphi - R_0 = 0.$$

5) Λάβετε ὡς δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς τὸ προηγούμενον ζήτημα τὴν εὐθεῖαν, ἥτις συνδέει τὰς κορυφὰς τῆς ἐλλείψεως Α καὶ Β.

6) Ἡ εὐθεῖα $\frac{x}{\mu} + \frac{y}{\nu} = 1$ ἐφάπτεται τῆς ἐλλείψεως

$$\frac{x^2}{\alpha'^2} + \frac{y^2}{\beta'^2} = 1,$$

ἐὰν εἶνε
$$\frac{\alpha'^2}{\mu^2} + \frac{\beta'^2}{\nu^2} = 1.$$

Εἰς τίνα σχέσιν ὑπόκεινται τὰ α', β', ἐὰν εἶνε δεδομένα τὰ μ καὶ ν;

§ 122. Ἰδιότητες ἐφαπτομένων καὶ διαμέτρων ἐλλείψεως.—

α') Ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης ἐλλείψεως εἰς τὸ σημεῖον M_1 (x_1, y_1) αὐτῆς, ἀναφερομένης ὡς πρὸς ἄξονας τὰς συζυγεῖς διαμέτρους αὐτῆς $2\alpha'$, $2\beta'$

$$\frac{xx_1}{\alpha'^2} + \frac{yy_1}{\beta'^2} = 1$$

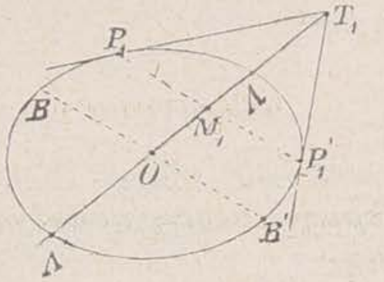
θέσωμεν $y_1 = 0$, $x_1 = \alpha'$ καὶ ἀκολούθως $y_1 = 0$, $x_1 = -\alpha'$, εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως $x = \alpha'$, $x = -\alpha'$, ἤτοι «***αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου τῆς ἐλλείψεως εἶνε παράλληλοι πρὸς τὴν συζυγῆ αὐτῆς διάμετρον***».

Τὴν ἰδιότητα ταύτην δυνάμεθα νὰ δείξωμεν καὶ ὡς ἑξῆς.

Φανταζόμεθα ὅτι μία χορδὴ τῆς ἐλλείψεως κινεῖται παραλλήλως ἑαυτῇ, μέχρις ὅτου τὰ σημεῖα τομῆς αὐτῆς μὲ τὴν ἔλλειψιν συμπέσουν εἰς ἕν, ὅτε ἡ χορδὴ καταντᾷ ἐφαπτομένη τῆς ἐλλείψεως.

Ἡ διάμετρος, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς, ὡς τόπος τῶν μέσων παραλλήλων χορδῶν, εἶνε συζυγὴς τῆς διαμέτρου, ἥτις εἶνε παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην.

β΄) Ἐὰν θεωρήσωμεν τὰς ἐφαπτομένας τῆς ἐλλείψεως εἰς δύο σημεῖα αὐτῆς P_1 (x_1, y_1), P'_1 $(x_1, -y_1)$, συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x, ἤτοι ὡς πρὸς τὴν διάμετρον $2\alpha'$, ὑπολογίσωμεν δὲ τὰς τετμημένας τούτων ἐπὶ τὴν ἀρχὴν ($y=o$), εὑρίσκομεν δι' ἑκάστην $(oT_1) = \frac{\alpha'^2}{x_1}$ (σχ. 87).



(Σχ. 87)

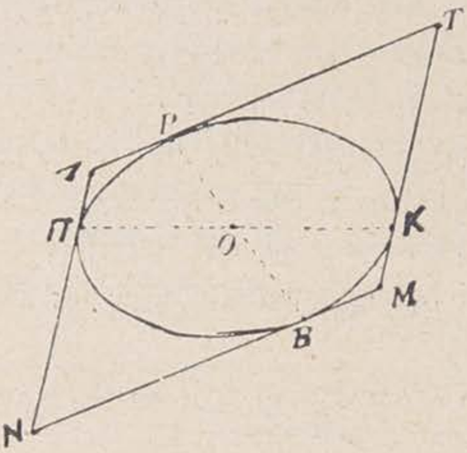
Ἤτοι, «***δύο τυχοῦσαι ἐφαπτόμεναι τῆς ἐλλείψεως P_1 T_1, P_1' T_1 τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον T_1 τῆς διαμέτρου αὐτῆς, ἥτις διχοτομεῖ τὴν χορδὴν P_1 P'_1, τὴν συνδέουσαν τὰ σημεῖα ἐπαφῆς***».

γ΄) Δύο χορδαὶ ἐλλείψεως καλοῦνται *συμπληρωματικαὶ χορδαὶ* αὐτῆς, ἂν συνδέουν τυχὸν σημεῖον τῆς ἐλλείψεως μὲ τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου αὐτῆς ἀντιστοίχως.

Ἐὰν φέρωμεν διαμέτρους ἐλλείψεως παραλλήλους πρὸς δύο συμπληρωματικὰς χορδὰς αὐτῆς ἀντιστοίχως, αἱ χορδαὶ διχοτομοῦνται ὑπ' αὐτῶν· ἤτοι ἑκάστη τῶν διαμέτρων τούτων διχοτομεῖ τὴν χορδήν, ἥτις εἶνε παράλληλος τῇ ἄλλῃ διαμέτρῳ.

Ἑπομένως «***αἱ διάμετροι ἐλλείψεως, αἱ ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς ζεῦγος συμπληρωματικῶν χορδῶν αὐτῆς, εἶνε συζυγεῖς διάμετροι***».

δ΄) Ἂν φέρωμεν τὰς ἐφαπτομένας ἐλλείψεως εἰς τὰ ἄκρα Ρ, Β καὶ Π, Κ δύο τυχουσῶν διαμέτρων αὐτῆς ΡΒ καὶ ΠΚ, σχηματίζουν αὗται παραλληλόγραμμον, περιγεγραμμένον εἰς τὴν ἔλλειψιν (σχ. 88). Τὰ σημεῖα ἐπαφῆς Ρ, Β καὶ Π, Κ ὁρίζουν παραλληλόγραμμον ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν ἔλλειψιν. Ἐὰν ἤδη φέρωμεν τὰς παραλλήλους διαμέτρους πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ παραλληλογράμμου τούτου, αὗται θὰ εἶνε συζυγεῖς διάμετροι καὶ διχοτομοῦν τὰς ἔναντι πλευρὰς τοῦ ἐν λόγῳ παραλληλογράμμου. Ἑπομένως, αἱ διάμετροι αὗται διέρχονται διὰ τῶν κορυφῶν τοῦ περιγεγραμμένου παραλληλογράμμου Ν, Τ καὶ Μ, Λ



(Σχ. 88)

ἀντιστοίχως, ἤτοι εἶνε διαγώνιοι τούτου. Ἑπομένως, ***αἱ διαγώνιοι ἑκάστου παραλληλογράμμου, περιγεγραμμένου εἰς ἔλλειψιν, εἶνε συζυγεῖς διάμετροι αὐτῆς***».

§ **123. Ἐξίσωσις ἐλλείψεως ὡς πρὸς ἄξονας διάμετρον καὶ ἐφαπτομένην αὐτῆς.**—

α') Ἔστω ἡ ἐξίσωσις ἐλλείψεως ὡς πρὸς ἄξονας τὰς συζυγεῖς διαμέτρους αὐτῆς $2\alpha'$, $2\beta'$

$$\frac{x^2}{\alpha'^2} + \frac{y^2}{\beta'^2} = 1 \qquad (1)$$

Ζητοῦμεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτῆς ὡς πρὸς νέους ἄξονας, τῶν x μὲν τὴν διάμετρον αὐτῆς $2\alpha'$, τῶν y δὲ τὴν ἐφαπτομένην αὐτῆς εἰς τὸ ἄκρον, ἔστω τὸ $(-\alpha', o)$, τῆς διαμέτρου ταύτης.

Πρὸς μετασχηματισμὸν τῆς (1) πρέπει νὰ θέσωμεν $x = x' - \alpha'$, ἐπειδὴ ἡ νέα ἀρχὴ ἔχει συντεταγμένας $(-\alpha, o)$. Διατηροῦντες ὅμως, διὰ τὴν ἁπλότητα, τὰς αὐτὰς μεταβλητὰς x καὶ y ἀντὶ τῶν x', y', εὑρίσκομεν

$$\frac{(x-\alpha')^2}{\alpha'^2} + \frac{y^2}{\beta'^2} = 1,$$

ἢ

$$\boxed{y^2 = 2\,\frac{\beta'^2}{\alpha'}\,x - \frac{\beta'^2}{\alpha'^2}\,x^2} \qquad (2)$$

β') Ἐὰν ἀναχωρήσωμεν ἀπὸ τὰς συζυγεῖς διαμέτρους, τὰς συμμετρικὰς ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας συμμετρίας τῆς ἐλλείψεως, θὰ εἶνε $\alpha' = \beta'$ καὶ αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) λαμβάνουν τὴν μορφὴν

$$x^2 + y^2 = \alpha'^2 \qquad (3)$$

καὶ
$$y^2 = 2\,\alpha' x - x^2 \qquad (4)$$

Αἱ ἐξισώσεις αὗται εἶνε ἀντιστοίχως αἱ ἐξισώσεις τῆς περιφερείας $(\text{o}, \text{o}, \alpha')$ καὶ τῆς ἐχούσης κέντρον τὸ σημεῖον $(-\alpha', \text{o})$, καὶ ἀκτῖνα α', ἐφαπτομένης δὲ τοῦ ἄξονος τῶν y, ἀλλ' εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους.

Ἐνῷ ἐν τῇ περιφερείᾳ τοῦ κύκλου αἱ ἐξισώσεις αὗται ἰσχύουν δι' ἄπειρα συστήματα ὀρθογωνίων ἀξόνων συντεταγμένων (συζυγῶν διαμέτρων αὐτῆς), προκειμένου περὶ τῆς ἐλλείψεως ἰσχύουν αὗται δι' ἓν μόνον πλαγιογώνιον σύστημα ἀξόνων, τὸ συμμετρικὸν πρὸς τοὺς ἄξονας αὐτῆς.

γ') Ἐὰν ἡ δοθεῖσα ἔλλειψις ἀναφέρεται ὡς πρὸς τοὺς (ὀρθογωνίους) ἄξονας συμμετρίας αὐτῆς, θὰ εἶνε

$$\alpha' = \alpha, \ \beta' = \beta, \ \frac{\beta^2}{\alpha} = p,$$

ἐνῷ p παριστάνει τὴν ἡμιπαράμετρον τῆς ἐλλείψεως (§ 114, β').

Ἐν τῇ περιπτώσει αὐτῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως ὡς πρὸς ἄξονας τὸν μέγαν ἄξονα αὐτῆς AA' καὶ τὴν ἐφαπτομένην αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον A' εἶνε

$$\boxed{y^2 = 2\,p\,x - \frac{p}{\alpha}\,x^2} \qquad (5)$$

ΑΣΚΗΣΙΣ. 1) Κατασκευάσατε τυχὸν παραλληλόγραμμον ἢ ὀρθογώνιον περιγεγραμμένον εἰς ἔλλειψιν. Τίνα θέσιν πρέπει νὰ ἔχουν περιγεγραμμένοι ῥόμβοι;

§ 124. Ἔκκεντρος γωνία σημείων ἐλλείψεως.—

Ἔστω ἡ ἔλλειψις ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας αὐτῆς 2α καὶ 2β

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

Γράφοντες αὐτὴν ὡς ἑξῆς

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 = 1, \qquad (1)$$

παρατηροῦμεν ὅτι τὰ μικρότερα τῆς μονάδος κλάσματα

$$\frac{x}{\alpha} \quad \text{καὶ} \quad \frac{y}{\beta}$$

δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς συνημίτονον καὶ ἡμίτονον τῆς αὐτῆς γωνίας, ἔστω τῆς $υ$. Θέτοντες λοιπὸν

$$x = α \text{ συν } υ, \quad y = β \text{ ημ } υ, \qquad (2)$$

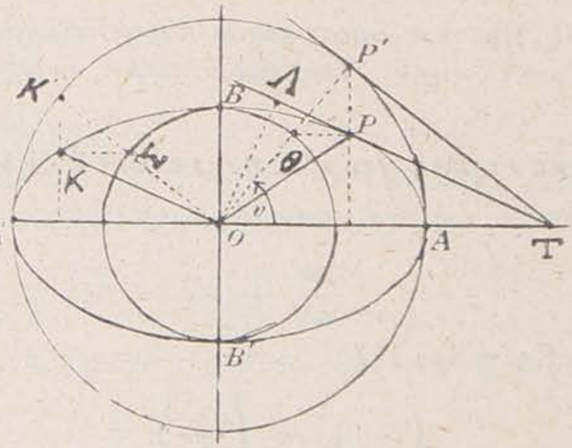
λαμβάνομεν δι' ἕκαστον ζεῦγος τιμῶν τῶν x, y αἵτινες ἐπαληθεύουν τὴν (1) καὶ μόνον δι' αὐτάς, μίαν ὡρισμένην τιμὴν τοῦ $υ$ ἐκ τῶν (2). Καὶ ἀντιστρόφως, αἱ (2) δίδουν ἓν ζεῦγος τιμῶν διὰ τὰ x, y δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ $υ$, τὸ ὁποῖον ζεῦγος ἐπαληθεύει τὴν (1). Διότι εἶνε

$$\frac{x^2}{α^2} + \frac{y^2}{β^2} = \text{συν}^2 υ + \text{ημ}^2 υ = 1.$$

Ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις (1) καὶ αἱ ἐξισώσεις (2) ὁρίζουν τὰ αὐτὰ ζεύγη τιμῶν x, y, λέγομεν ὅτι αἱ δύο ἐξισώσεις (2) εἶνε ἰσοδύναμοι πρὸς τὴν (1). Τὴν μεταβλητὴν παράμετρον $υ$, τῇ βοηθείᾳ τῆς ὁποίας δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν πάντα τὰ σημεῖα τῆς ἐλλείψεως, καλοῦμεν *ἔκκεντρον γωνίαν* τοῦ σημείου x, y τῆς ἐλλείψεως εἰς ἣν ἀντιστοιχεῖ τοῦτο.

Ἐπειδὴ τυχὸν σημεῖον τῆς ἐλλείψεως ὁρίζεται ὑπὸ τῆς ἐκκέντρου γωνίας αὐτοῦ, διὰ τοῦτο τὸ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς (x, y) παριστάνομεν συμβολικῶς διὰ τοῦ ($υ$), ἂν ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς αὐτὸ ἔκκεντρος γωνία εἶνε $υ$.

Πρὸς εὕρεσιν τῆς γεωμετρικῆς σημασίας τῆς ἐκκέντρου γωνίας θεωροῦμεν τὴν ἔλλειψιν καὶ τὰς εἰς αὐτὴν περιγεγραμμένην καὶ ἐγγεγραμμένην περιφερείας (σχ. 89). Ἔστω ὅτι τυχοῦσα ἡμιδιάμετρος (ἀκτὶς) τῆς ἐλλείψεως τέμνει τὴν μὲν ἐγγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Θ, τὴν δὲ περιγεγραμμένην εἰς τὸ Ρ΄. Τὸ ἀντίστοιχον πρὸς αὐτὰ (116, γ΄) σημεῖον Ρ τῆς ἐλλείψεως θὰ ἔχῃ τετμημένην τὴν τοῦ



(Σχ. 89)

Ρ΄ καὶ τεταγμένην τὴν τοῦ Θ. Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ Ρ ἔχει συντεταγμένας ($α$ συν $υ$, $β$ ημ $υ$), ἕπεται ὅτι τὸ $υ$ παριστάνει τὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ἀκτὶς ΟΘΡ΄ μὲ τὸν θετικὸν ἄξονα τῶν x.

Ἤτοι «*ἡ ἔκκεντρος γωνία τυχόντος σημείου ἐλλείψεως εἶνε ἡ πολικὴ γωνία τοῦ ἀντιστοίχου πρὸς αὐτὸ σημείου τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὴν ἔλλειψιν περιφερείας, ἂν ὡς πολικὸς ἄξων ληφθῇ ὁ θετικὸς ἡμιάξων αὐτῆς*».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Εὕρετε τὴν ἔκκεντρον πολικὴν γωνίαν τοῦ σημείου (3, — 1, 6) τῆς ἐλλείψεως

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

2) Ὑπὸ τίνων ἐξισώσεων ὁρίζεται ἡ ἔκκεντρος γωνία ἑνὸς σημείου τῆς ἐλλείψεως

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$

τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὸν μέγαν ἄξονα αὐτῆς εἰς μίαν τῶν ἑστιῶν;

3) Εὕρετε τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου $\upsilon = 45^\circ$ τῆς ἐλλείψεως

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

4) Τίνα σχέσιν ἔχουν μεταξύ των αἱ ἔκκεντροι γωνίαι τῶν ἄκρων διαμέτρου τινὸς ἐλλείψεως;

§ 123. Ἰδιότητες συζυγῶν διαμέτρων ἐλλείψεως.—

α) «*Τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, τὸ ὁποῖον ὁρίζουν δύο συζυγεῖς ἡμιδιάμετροι ἐλλείψεως μὲ ἄξονας 2α, 2β, εἶνε σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ* $\frac{1}{2}\alpha\beta$».

Τῷ ὄντι ἂν oP, oK εἶνε δύο συζυγεῖς ἡμιδιάμετροι τῆς ἐλλείψεως

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$

(x_1, y_1) αἱ ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι τοῦ P καὶ (x_2, y_2) αἱ τοῦ K, θὰ εἶνε (σχ. 90)

$$x_1 = \alpha \text{ συν } \upsilon,\quad y_1 = \beta \text{ ημ } \upsilon,\quad x_2 = -\alpha \text{ ημ } \upsilon,\quad y_2 = \beta \text{ συν } \upsilon.$$

Ἐπειδὴ ἂν υ εἶνε ἡ ἔκκεντρος γωνία τοῦ P, ἡ τοῦ K θὰ εἶνε $(\upsilon + 90^\circ)$.

Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν E τοῦ τριγώνου oPK εἶνε (§ 73, α΄)

$$E = \frac{1}{2}\left(x_1 y_2 - y_1 x_2\right) = \frac{1}{2}\alpha\beta.$$

β) Ἂν αἱ συζυγεῖς ἡμιδιάμετροι ἔχουν μήκη α΄, β΄, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου oPK εἶνε ἴσον μὲ $\frac{1}{2}\alpha'\beta' \text{ ημ } \omega$, ἐὰν ω παριστάνῃ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν τῶν συζυγῶν τούτων διαμέτρων. Οὕτω θὰ ἔχωμεν τότε

$$\frac{1}{2}\alpha\beta = \frac{1}{2}\alpha'\beta' \text{ ημ}\omega,$$

ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι $\quad \text{ημ } \omega = \frac{\alpha\beta}{\alpha'\beta'}.$

Διὰ τοῦ τύπου τούτου δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν δύο συζυγῶν διαμέτρων $2\alpha'$, $2\beta'$ τῆς ἐλλείψεως, τῆς ἐχούσης ἄξονας 2α, 2β.

γ') Ἡ γωνία ω γίνεται ἐλαχίστη, ὅταν τὸ $\alpha'\beta'$ γίνῃ μέγιστον. Ἀλλ' εἶνε (§ 118, β')

$$2\,\alpha'\beta' = \alpha'^2 + \beta'^2 - (\alpha' - \beta')^2 = \alpha^2 + \beta^2 - (\alpha' - \beta')^2$$

ἐξ' οὗ ἕπεται ὅτι, ὅταν εἶνε $\alpha' = \beta'$ τὸ $\alpha'\beta'$ γίνεται μέγιστον. Τοῦτο συμβαίνει ὅταν αἱ συζυγεῖς διάμετροι εἶνε συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας τῆς ἐλλείψεως καὶ ἡ ἔκκεντρος γωνία, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν α', γίνῃ 45^0. Ἀλλ' ἂν (x, y) εἶνε αἱ συντεταγμέναι τυχόντος σημείου P τῆς ἐλλείψεως καὶ α' τὸ μῆκος (oP') θὰ εἶνε

$$x = \alpha\,\text{συν}\,\upsilon,\ y = \beta\,\text{ημ}\,\upsilon,\ x^2 + y^2 = \alpha'^2 = \alpha^2\,\text{συν}^2\,\upsilon + \beta^2\,\text{ημ}^2\upsilon.$$

Ἄρα διὰ $\upsilon = 45^0$ καὶ $\alpha' = \beta'$ θὰ εἶνε

$$\alpha'^2 = \beta'^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2},$$

καὶ ἂν φ παριστάνῃ τὴν γωνίαν τῆς μιᾶς τῶν διαμέτρων μὲ τὸν ἄξονα τῶν x,

$$\text{εφ}\,\frac{\omega}{2} = \text{εφ}\,\varphi = \frac{\beta}{\alpha}$$

Ἤτοι «***ἐκ πάντων τῶν ζευγῶν συζυγῶν διαμέτρων ἐλλείψεως τὸ ζεῦγος τῶν ἴσων καὶ συμμετρικῶς κείμενον ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας αὐτῆς σχηματίζει τὴν ἐλαχίστην γωνίαν***».

δ') Πρὸς εὕρεσιν τῆς ἀποστάσεως (oΛ) τοῦ κέντρου τῆς ἐλλείψεως ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς $P\,(x_1, y_1)$, ἥτις εἶνε παράλληλος τῇ OK, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ P

$$(x_1 = \alpha\,\text{συν}\,\upsilon,\ y_1 = \beta\,\text{ημ}\,\upsilon)$$

εἶνε
$$\frac{x\,\text{συν}\,\upsilon}{\alpha} + \frac{y\,\text{ημ}\,\upsilon}{\beta} = 1.$$

Ἑπομένως ἡ ἐν λόγῳ ἀπόστασις εἶνε ἀπολύτως ἴση μὲ

$$1 : \sqrt{\frac{\text{συν}^2\,\upsilon}{\alpha^2} + \frac{\text{ημ}^2\,\upsilon}{\beta^2}} = \alpha\beta : \sqrt{\alpha^2\,\text{ημ}^2\,\upsilon + \beta^2\,\text{συν}^2\,\upsilon} = \frac{\alpha\beta}{\beta'}$$

Διότι εἶνε

$$x_2 = -\alpha\,\text{ημ}\,\upsilon, y_2 = \beta\,\text{συν}\,\upsilon,\ x_2^2 + y_2^2 = (oK)^2 = \beta'^2 = \alpha^2\text{ημ}^2\upsilon + \beta^2\text{συν}^2\upsilon.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Ἡ ἰδιότης α') διατυποῦται καὶ ὡς ἑξῆς. «*Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ προκύπτοντα, ἂν συνδέσωμεν δι' εὐθειῶν τὰ ἄκρα δύο τυχουσῶν συζυγῶν διαμέτρων ἔχουν ἐμβαδὰ ἴσα*». Δείξατε ὅτι ἡ ἰδιότης αὕτη ἰσχύει καὶ διὰ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ προκύπτοντα, ἂν φέρωμεν τὰς ἐφαπτομένας τῆς ἐλλείψεως εἰς τὰ ἄκρα συζυγῶν διαμέτρων αὐτῆς.

2) Δείξατε ὅτι

$$\text{εφ}\,\omega = -\,\text{εφ}\,(\psi-\varphi) = -\frac{2\alpha\beta}{\gamma^2\,\text{ημ}\,(2\upsilon)},$$

ἐνῷ ω παριστάνει τὴν ὀξεῖαν γωνίαν συζυγῶν διαμέτρων καὶ υ τὴν ἔκκεντρον γωνίαν, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν φ. Διὰ $\upsilon=45^0$ ἕπεται ἡ ἰδιότης γ'). Δείξατε ὅτι εἶνε διὰ τὴν ἐλαχίστην γωνίαν τῶν συζυγῶν διαμέτρων ω,

$$\text{εφ}\,\frac{\omega}{2} = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \text{ημ}\,\omega = \frac{2\,\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}, \quad \text{συν}\,\omega = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}.$$

3) Ὑπολογίσατε διὰ τοῦ μήκους α' μιᾶς ἡμιδιαμέτρου τὴν ἀντίστοιχον ἔκκεντρον γωνίαν υ καὶ τὴν γωνίαν φ τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ α' μὲ τὸν ἄξονα τῶν x.

Δείξατε τῇ βοηθείᾳ τῆς (§ 125,γ') ὅτι εἶνε

$$\left(\text{εφ}\,\upsilon = \sqrt{\frac{\alpha^2-\alpha'^2}{\alpha'^2-\beta^2}},\quad \text{εφ}\,\varphi = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\frac{\alpha^2-\alpha'^2}{\alpha'^2-\beta^2}}\right).$$

4) Εἰς δοθὲν παραλληλόγραμμον μὲ διαγωνίους 2α', 2β', τῶν ὁποίων ἡ ὀξεῖα γωνία εἶνε ἴση μὲ ω, δύναται πάντοτε νὰ περιγραφῇ μία μόνη ἔλλειψις, τῆς ὁποίας αἱ ἐν λόγῳ διαγώνιοι εἶνε συζυγεῖς διάμετροι. (Εὑρίσκομεν ἐν πρώτοις τοὺς ἡμιάξονας α καὶ β ἐκ τῶν $\alpha^2+\beta^2=\alpha'^2+\beta'^2$, καὶ $\alpha\beta=\alpha'\beta'\,\text{ημ}\,\omega$.

Ἔχομεν $\alpha+\beta=\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2+2\alpha'\beta'\,\text{ημ}\,\omega}$, $\alpha-\beta=\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2-2\alpha'\beta'\,\text{ημ}\,\omega}$.

Τὴν θέσιν τοῦ ἄξονος α εὑρίσκομεν ἀκολούθως κατὰ τὸ προηγούμενον ζήτημα ἐκ τῆς εφ φ).

5) Ἐφαρμόσατε τὸ προηγούμενον ζήτημα διὰ $\alpha'=13$, $\beta'=6$, $\text{ημ}\,\omega=\frac{7}{13}$.

6) Ὡς ἀποστάσεις R, R' τοῦ κέντρου ἐλλείψεως ἀπὸ δύο ἐφαπτομένων αὐτῆς καθέτων ἐπ' ἀλλήλας εἶνε (παράβ. μὲ § 121 Ἄσκ. 4).

$$R^2=\alpha^2\,\text{συν}^2\,\varphi+\beta^2\,\text{ημ}^2\,\varphi,\quad R'^2=\alpha^2\,\text{ημ}^2\,\varphi+\beta^2\,\text{συν}^2\,\varphi.$$

Ἑπομένως $R^2+R'^2=\alpha^2+\beta^2$.

Δείξατε ὅτι ὁ τόπος τῶν τομῶν καθέτων ἐπ' ἀλλήλας ἐφαπτομένων ἐλλείψεως εἶνε περιφέρεια κύκλου, ἔχουσα κέντρον τὸ τῆς ἐλλείψεως καὶ ἀκτῖνα $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

§ 126. Πόλος καὶ πολικὴ ὡς πρὸς ἔλλειψιν.—

α') Ἔστω ἡ ἔλλειψις ὡς πρὸς ἄξονας (πλαγιογωνίους) τὰς συζυγεῖς διαμέτρους αὐτῆς 2α', 2β'

$$\frac{x^2}{\alpha'^2}+\frac{y^2}{\beta'^2}=1 \tag{1}$$

καὶ σημεῖον P (ξ, η) τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς. Ἂν (x_1, y_1) εἶνε αἱ συντεταγμέναι τῆς ἀφῆς,τῆς διὰ τοῦ P ἀγομένης ἐφαπτομένης τῆς (1), εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε

$$\frac{\xi x_1}{\alpha'^2} + \frac{\eta y_1}{\beta'^2} = 1 \qquad (2)$$

εἶνε δὲ καὶ

$$\frac{x_1^2}{\alpha'^2} + \frac{y_1^2}{\beta'^2} = 1 \qquad (3)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3) εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν x_1, y_1. Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος (2) καὶ (3) εὑρίσκομεν ὅτι ὑπάρχουν δύο ἐφαπτόμεναι διὰ τοῦ P εἰς τὴν (1), ἂν τὸ P κεῖται ἐκτὸς τῆς ἐλλείψεως, μία ἂν τὸ P κεῖται ἐπ' αὐτῆς, καὶ οὐδεμία, ἂν τὸ P κεῖται ἐντὸς τῆς ἐλλείψεως. Ἂν ἐν τῇ (2) θέσωμεν ἀντὶ τῶν x_1, y_1 τὰ x, y ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{\xi x}{\alpha'^2} + \frac{\eta y}{\beta'^2} = 1 \qquad (4)$$

παριστάνει τὴν εὐθεῖαν, ἥτις διέρχεται διὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν διὰ τοῦ P ἀγομένων ἐφαπτομένων τῆς ἐλλείψεως καὶ λέγεται *πολικὴ* εὐθεῖα τοῦ σημείου P, ὡς πρὸς τὴν ἔλλειψιν (1) τὸ δὲ P καλεῖται *πόλος* τῆς εὐθείας (4).

Παρατηρητέον ὅτι, ἂν ὁ πόλος P κεῖται ἐκτὸς τῆς ἐλλείψεως, ἡ πολικὴ αὐτοῦ τέμνει τὴν ἔλλειψιν· ἂν ὁ πόλος κεῖται ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως, ἡ πολικὴ αὐτοῦ ἐφάπτεται τῆς ἐλλείψεως εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο· ἂν ὁ πόλος κεῖται ἐντὸς τῆς ἐλλείψεως, ἡ πολικὴ κεῖται ἐκτὸς αὐτῆς.

ϐ') Καθὼς δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν πολικὴν εὐθεῖαν δοθέντος σημείου ὡς πρὸς δοθεῖσαν ἔλλειψιν, οὕτω καὶ δοθείσης εὐθείας ὡς πολικῆς ἐλλείψεως, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν πόλον αὐτῆς.

Τῷ ὄντι, ἂν $\quad A x + B y + \Gamma = o$

εἶνε πολικὴ ὡς πρὸς τὴν ἔλλειψιν (1) καὶ καλέσωμεν x_1, y_1 τὰς συντεταγμένας τοῦ πόλου αὐτῆς, ἡ εὐθεῖα

$$\frac{x_1 x}{\alpha'^2} + \frac{y_1 y}{\beta'^2} = 1$$

πρέπει νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν δοθεῖσαν.

Ἑπομένως θὰ εἶνε

$$x_1 = -\frac{A}{\Gamma}\alpha'^2, \quad y_1 = -\frac{B}{\Gamma}\beta'^2.$$

Διὰ $\Gamma = o$ εὑρίσκομεν ὅτι ὁ πόλος κεῖται εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν.

γ') Ἔστω ὅτι δύο σημεῖα $P_1 (x_1, y_1)$, $P_2 (x_2, y_2)$ κεῖνται οὕτως ὡς πρὸς τὴν ἔλλειψιν (1) ὥστε τὸ P_2 νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς πολικῆς τοῦ P_1. Τότε θὰ εἶνε

$$\frac{x_1 x_2}{\alpha'^2} + \frac{y_1 y_2}{\beta'^2} = 1$$

Ἀλλ' αὕτη ἐκφράζει ὅτι τὸ P_1 κεῖται ἐπὶ τῆς πολικῆς

$$\frac{x_2 x}{\alpha'^2} + \frac{y_2 y}{\beta'^2} = 1$$

τοῦ P_2. Ἑπομένως,

«*ἐὰν σημεῖόν τι P_2 κεῖται ἐπὶ τῆς πολικῆς τοῦ P_1, τὸ P_1 κεῖται ἐπὶ τῆς πολικῆς τοῦ P_2, καὶ ἀντιστρόφως*».

Τὴν ἰδιότητα ταύτην δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς.

δ') «*Ἐὰν σημεῖόν τι κινῆται ἐπί τινος εὐθείας, ἡ πολικὴ αὐτοῦ στρέφεται περὶ τὸν πόλον τῆς εὐθείας· καὶ ἀντιστρόφως, ἂν εὐθεῖά τις στρέφεται περὶ ἓν σημεῖον, ὁ πόλος αὐτῆς κινεῖται ἐπὶ τῆς πολικῆς τοῦ σημείου*».

«*Εἰς τὰ σημεῖα μιᾶς εὐθείας ἀντιστοιχοῦν ὡς πολικαὶ αἱ ἀκτῖνες μιᾶς ἐπιπέδου δέσμης, καὶ ἀντιστρόφως*».

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος ἕπεται ὅτι, αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς χορδῆς ἐλλείψεως διέρχονται διὰ τοῦ πόλου τῆς χορδῆς ἢ καὶ

ε') «*αἱ ἐφαπτόμεναι ἐλλείψεως, αἵτινες ἄγονται ἐκ τινος σημείου P_1, κειμένου ἐκτὸς αὐτῆς, ἐφάπτονται αὐτῆς εἰς τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς πολικῆς τοῦ P_1*».

Διὰ τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα ἡ πολικὴ σημείου P_1 καλεῖται καὶ *χορδὴ τῶν ἐπαφῶν* τῶν διὰ τοῦ P_1 ἐφαπτομένων τῆς ἐλλείψεως.

ς') «*Αἱ πολικαὶ τῶν σημείων μιᾶς διαμέτρου ἐλλείψεως εἶνε παράλληλοι πρὸς τὴν συζυγῆ αὐτῆς διάμετρον*».

Διότι ἐὰν ὁ πόλος P_1, διατρέχῃ μίαν διάμετρον τῆς ἐλλείψεως, τὴν ὁποίαν πρὸς εὐκολίαν λαμβάνομεν ὡς ἄξονα τῶν x, ἔχομεν ὡς πολικὴν αὐτοῦ τὴν

$$\frac{x x_1}{\alpha'^2} = 1, \quad \text{ἢ} \quad x = \frac{\alpha'^2}{x_1}.$$

Εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα φθάνομεν καὶ ἂν ἀναχωρήσωμεν ὄχι ἀπὸ τὸν πόλον, ἀλλὰ ἀπὸ τὴν πολικὴν $A x + \Gamma = 0$, ἥτις εἶνε παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y. Ὁ πόλος ταύτης εἶνε τὸ σημεῖον τοῦ ἄξονος τῶν x $\left(x_1 = -\frac{A}{\Gamma}\alpha'^2, \ y_1 = 0\right)$.

Ὑποθέτοντες ἐνταῦθα ὅτι τὸ $\Gamma = 0$, λαμβάνομεν $x_1 = \infty$. Ἤτοι, ζ΄) «*Ὁ πόλος μιᾶς διαμέτρου ἐλλείψεως εἶνε τὸ κατ᾽ ἐκδοχὴν σημεῖον τῆς συζυγοῦς αὐτῆς διαμέτρου. Ἢ, ἐκ δύο συζυγῶν διαμέτρων ἐλλείψεως ἑκάστη εἶνε ἡ πολικὴ τοῦ κατ᾽ ἐκδοχὴν σημείου τῆς ἄλλης*».

Ἐπειδὴ ὁ πόλος διαμέτρου τινός εἶνε τὸ κατ᾽ ἐκδοχὴν σημεῖον τῆς συζυγοῦς αὐτῆς διαμέτρου, καὶ ἐπειδὴ πᾶσαι αἱ διάμετροι διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου, ἕπεται ὅτι (ϛ΄), πάντα τὰ κατ᾽ ἐκδοχὴν σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας, ἥτις καλεῖται *κατ᾽ ἐκδοχὴν εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου*. Ἡ κατ᾽ ἐκδοχὴν δ᾽ αὕτη εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου εἶνε ἡ πολικὴ τοῦ κέντρου τῆς ἐλλείψεως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Δείξατε ὅτι αἱ ἰδιότητες αἱ ἀφορῶσαι τὸν πόλον καὶ τὴν πολικὴν ὡς πρὸς ἔλλειψιν εἶνε ἀνεξάρτητοι τοῦ συστήματος τῶν ἀξόνων ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον ἀναφέρονται.

2) Δείξατε ἀπ᾽ εὐθείας ὅτι, εἰς τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας, ἥτις ἔχει ἐξισώσεις

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

ἀντιστοιχοῦν ὡς πολικαὶ αἱ ἀκτῖνες τῆς δέσμης $E_1 + \lambda E_2 = o$, ἐνῷ $E_1 = o$, $E_2 = o$ εἶνε αἱ πολικαὶ τῶν σημείων (x_1, y_1) καὶ (x_2, y_2) ἀντιστοίχως καὶ λ παριστάνει μεταβλητὴν παράμετρον, ἥτις λαμβάνει πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $+\infty$. Ἐξετάσατε ἰδιαιτέρως τὰς περιπτώσεις διὰ τὰς τιμὰς

$$o, \infty, +1, -1 \text{ τοῦ } \lambda.$$

3) Δείξατε ὅτι, ἐὰν διά τινος σημείου P ἀχθῇ τυχοῦσα ἀκτίς, τέμνουσα τὴν ἔλλειψιν εἰς τὰ σημεῖα M_1, M_2, αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῆς εἰς τὰ σημεῖα ταῦτα τέμνονται εἰς σημεῖον K τῆς πολικῆς τοῦ P.

4) Δοθέντος σημείου, κειμένου ἐκτὸς ἐλλείψεως φέρατε δι᾽ αὐτοῦ δύο ἐφαπτομένας τῆς ἐλλείψεως τῇ βοηθείᾳ τῶν πολικῶν.

5) Εὕρετε γεωμετρικῶς τὸν πόλον δοθείσης πολικῆς, μὴ τεμνούσης τὴν ἔλλειψιν.

6) Εὕρετε τὸν τόπον τῶν πόλων πασῶν τῶν ἐφαπτομένων τῆς περιφερείας $x^2 + y^2 = \rho^2$ ὡς πρὸς τὴν ἔλλειψιν

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

§ 127. Ἰδιότητες τῶν ἑστιῶν ἐλλείψεως.—

α΄) Ἔστω ἡ ἔλλειψις

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \qquad (1)$$

καὶ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς P (x,y) εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχοῦν αἱ ἑστιακαὶ ἀκτῖνες (EP) = ϱ, (E΄P) = ϱ΄. Ἔχομεν (§ 115, (11))

$$\varrho' = \alpha + \varepsilon x, \; \varrho = \alpha - \varepsilon x, \qquad \left(\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}\right) \qquad (2)$$

Θέτοντες $x = \alpha$ συν υ, ἐνῶ υ παριστάνει τὴν ἔκκεντρον γωνίαν τοῦ σημείου P, καὶ πολλαπλασιάζοντες τὰς (2) κατὰ μέλη εὑρίσκομεν, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι εἶνε $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$, $\gamma = \varepsilon\, \alpha$ καὶ τὴν (§ 125,δ')

$$\varrho\, \varrho' = \alpha^2 \text{ ημ}^2\, \upsilon + \beta^2 \text{ συν}^2\, \upsilon = \beta'^2$$

ἐνῶ β' παριστάνει τὸ μῆκος τῆς OP', συζυγοῦς ἡμιδιαμέτρου τῆς oP. Ἑπομένως «***τὸ γινόμενον δύο ἑστιακῶν ἀκτίνων ἐλλείψεως, ἀντιστοιχουσῶν εἰς δοθὲν σημεῖον αὐτῆς, ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ μήκους τῆς εἰς τὸ σημεῖον ἀντιστοιχούσης συζυγοῦς ἡμιδιαμέτρου τῆς ἐλλείψεως***».

ϛ') Ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν ἀπόστασιν τῶν ἑστιῶν E καὶ E' τῆς ἐλλείψεως ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης εἰς δοθὲν σημεῖον αὐτῆς P (υ), ἔχομεν ὡς ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης

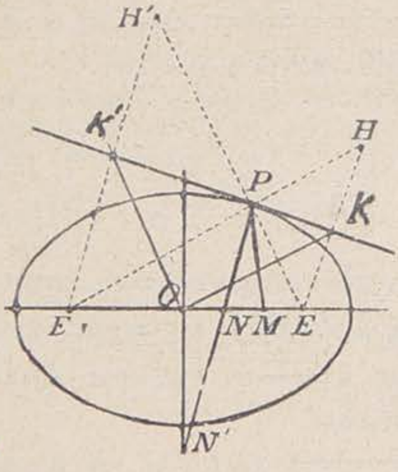
$$\frac{x \text{ συν } \upsilon}{\alpha} + \frac{y \text{ ημ } \upsilon}{\beta} = 1.$$

Παριστάνοντες διὰ τοῦ R καὶ R' τὰς ζητουμένας ἀποστάσεις (EK), (E'K') (σχ. 90), ἀπολύτως θεωρουμένας ἀπὸ τῶν E καὶ E', ἔχομεν (§ 69 γ')

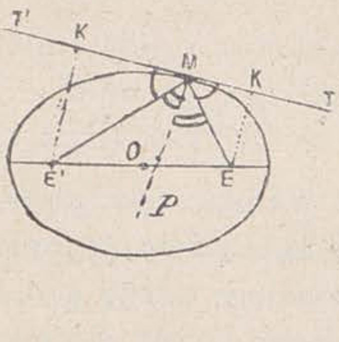
$$R = \frac{\beta}{\beta'}\left(\alpha - \gamma \text{ συν } \upsilon\right)\text{, } \quad R' = \frac{\beta}{\beta'}\left(\alpha + \gamma \text{ συν } \upsilon\right)$$

ἢ $$R = \frac{\beta}{\beta'}\left(\alpha - \varepsilon\, x\right)\text{, } \quad R' = \frac{\beta}{\beta'}\left(\alpha + \varepsilon\, x\right)$$

ἢ καὶ $$R = \frac{\beta}{\beta'}\,\varrho,\ R' = \frac{\beta}{\beta'}\,\varrho', (\varrho = (EP),\ \varrho' = (E'P), (OP') = \beta').$$



(Σχ. 90)



(Σχ. 91)

Πολλαπλασιάζοντες τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι εἶνε $\varrho\,\varrho' = \beta'^2$, εὑρίσκομεν

$$RR' = \beta^2$$

Ἤτοι, «***τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τῶν ἑστιῶν ἐλλείψεως*** *ἀπό τινος ἐφαπτομένης αὐτῆς εἶνε σταθερὸν καὶ ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ μικροῦ ἡμιάξονος αὐτῆς».*

γ') Ἐκ τῶν ἰσοτήτων

$$R = \frac{\beta}{\beta'}\varrho, \quad R' = \frac{\beta}{\beta'}\varrho'$$

εὑρίσκομεν διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη

$$R : \varrho = R' : \varrho'.$$

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΡΕΚ, ΡΕ'Κ' εἶνε ὅμοια, ἐνῶ Κ καὶ Κ' εἶνε τὰ σημεῖα καθ' ἃ αἱ ἐκ τῶν Ε, Ε' κάθετοι ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον Ρ τέμνουν αὐτήν. Ἑπομένως αἱ γωνία Ε'ΡΚ' καὶ ΕΡΚ εἶνε ἴσαι. Ἤτοι

«***ἡ ἐφαπτομένη ἐλλείψεως εἰς ἓν σημεῖον αὐτῆς σχηματίζει ἴσας γωνίας μὲ τὰς εἰς αὐτὸ ἀντιστοιχούσας ἑστιακὰς ἀκτῖνας***».

ϛ') Ἐὰν φέρωμεν τὴν κάθετον ΡΝ ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἐλλείψεως εἰς τὸ σημεῖον Ρ, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν *κάθετον τῆς ἐλλείψεως εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς Ρ*, δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα καὶ ὡς ἑξῆς (σχ. 90 καὶ 91).

«***ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ κάθετος εἰς ἓν σημεῖον ἐλλείψεως εἶνε αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ ἑστιακαὶ ἀκτῖνες αὐτῆς, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο***».

ε') Ἐὰν λάβωμεν τὸ σημεῖον Η συμμετρικὸν τοῦ Ε ὡς πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον Ρ τῆς ἐλλείψεως ἤτοι (ΚΗ) = (ΕΚ), θὰ ἔχωμεν (σχ. 90)

$$\text{γων. } HPK = \text{γων. } EPK = \text{γων. } E'PK'.$$

Ἑπομένως τὰ σημεῖα Ε', Ρ, Η κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.

Ἀλλ' εἶνε διὰ τοῦτο

$$(E'H) = (E'P) + (PH) = (E'P) + (EP) = 2\alpha, \quad (PH = PE).$$

Ἤτοι «***ὁ τόπος τῶν σημείων ἅτινα εἶνε συμμετρικὰ ἑκάστης τῶν ἑστιῶν ἐλλείψεως (ἐχούσης ἄξονας 2α, 2β) ὡς πρὸς κινουμένην ἐφαπτομένην αὐτῆς εἶνε περιφέρεια κύκλου, ἔχουσα ἀκτῖνα μὲν 2α κέντρον δὲ τὴν ἄλλην αὐτῆς ἑστίαν***».

ϛ') Ἐπειδὴ τὸ μέσον τῆς ΕΕ' εἶνε τὸ Ο, τῆς ΕΗ τὸ Κ, τῆς Ε'Η' τὸ Κ' (Η' εἶνε τὸ συμμετρικὸν τοῦ Ε' ὡς πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Ρ) ἕπεται ὅτι αἱ ΟΚ καὶ ΟΚ' εἶνε παράλληλοι πρὸς τὰς Ε'Η καὶ ΕΗ' ἀντιστοίχως. Ἑπομένως ἔχομεν

$$(OK) = \frac{1}{2} E'H, \quad \text{καὶ } (OK') = \frac{1}{2}(EH').$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ εἶνε $(E'H) = (EH') = 2\alpha$, ἕπεται ὅτι εἶνε

$$(OK) = (OK') = \alpha,$$

ἤτοι, «***ὁ τόπος τῶν ποδῶν τῶν καθέτων, τὰς ὁποίας φέρομεν ἐκ τῶν ἑστιῶν ἐλλείψεως ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας αὐτῆς εἶνε ἡ περιφέρεια κύκλου, ἡ περιγεγραμμένη εἰς τὴν ἔλλειψιν***».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1) Ἀποδείξατε διὰ τῶν συντελεστῶν διευθύνσεως τῆς καθέτου PN καὶ τῶν ἑστιακῶν ἀκτίνων ἐλλείψεως EP, E'P, ὅτι αἱ γωνίαι EPN, E'PN εἶνε ἴσαι.

2) Κατασκευάσατε τὴν κάθετον ἐλλείψεως εἰς ἓν σημεῖον αὐτῆς.

3) Κατασκευάσατε τὰς ἐφαπτομένας ἐλλείψεως, τὰς διερχομένας δι' ἑνὸς σημείου αὐτῆς, κειμένου ἐκτὸς αὐτῆς, τῇ βοηθείᾳ τῶν δύο τελευταίων προτάσεων ε' καὶ ϛ'.

4) Ἀπό τινος ἑστίας ἐλλείψεως ἀναχωροῦν ἀκτῖνες (προσπτώσεως) φωτὸς ἢ θερμότητος, ἢ ἤχου, διευθυνόμεναι πρὸς ἅπαντα τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου. Τίνα ἰδιότητα θὰ ἔχουν αἱ ἀκτῖνες ἀνακλάσεως ἐκ τῶν διαφόρων σημείων τῆς ἐλλείψεως ὡς πρὸς τὰς ἑστίας αὐτῆς;

5) Ἔστω ὅτι ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ κάθετος ἐλλείψεως εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς P τέμνουν τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὰ σημεῖα T καὶ N. Δείξατε ὅτι εἶνε

$$(oT)\,(oN) = \gamma^2.$$

6) Εὕρετε τὸ μῆκος τῆς MN (σχ. 90), ἥτις καλεῖται *ὑποκάθετος*, καὶ τῆς PN, τὸ ὁποῖον καλεῖται *μῆκος τῆς καθέτου* τῆς ἐλλείψεως, τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐκκέντρου γωνίας τοῦ P καὶ δείξατε ὅτι εἶνε $(PN) = \dfrac{\beta\beta'}{\alpha}$, ἐνῷ β' εἶνε τὸ μῆκος τῆς συζυγοῦς ἡμιδιαμέτρου τῆς oP.

7) Δείξατε ὅτι, εὐθεῖά τις τέμνει ἔλλειψιν, ἐφάπτεται αὐτῆς, ἢ κεῖται ἐκτὸς αὐτῆς, ἂν ὁ ποὺς τῆς καθέτου, ἥτις ἄγεται ἔκ τινος ἑστίας αὐτῆς ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν κεῖται ἐντὸς ἢ ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἢ ἐκτὸς τῆς περιφερείας, ἥτις εἶνε περιγεγραμμένη εἰς τὴν ἔλλειψιν.

§ 128. Διευθετοῦσαι ἐλλείψεως—

α') Καλοῦμεν *διευθετούσας* ἐλλείψεως τὰς πολικὰς εὐθείας τῶν ἑστιῶν αὐτῆς.

Τὰς ἐξισώσεις τῶν διευθετουσῶν τῆς ἐλλείψεως, ἥτις ἔχει ἄξονας 2α, 2β, εὑρίσκομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῆς πολικῆς τοῦ M_1 (x_1, y_1)

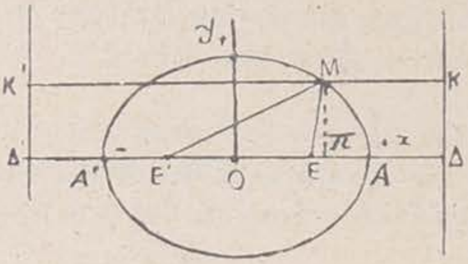
$$\frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1,$$

ἂν θέσωμεν $x_1 = \pm\gamma$, $y_1 = o$, ὅτε εὑρίσκομεν

$$\boxed{x = \pm\frac{\alpha^2}{\gamma}} \qquad (1)$$

Ὡς παρατηροῦμεν αἱ διευθετοῦσαι ἐλλείψεως εἶνε εὐθεῖαι, ἀπέχουσαι ἀποστάσεις $\pm \frac{\alpha^2}{\gamma} = \pm \frac{\alpha}{\varepsilon}$ ἀπὸ τὸ κέντρον αὐτῆς καὶ εἶνε κάθετοι ἐπὶ τὸν μέγαν ἄξονα αὐτῆς (σχ. 92), αἱ ΔΚ,Δ'Κ'.

Αἱ διευθετοῦσαι τῆς ἐλλείψεως κεῖνται ἐκτὸς αὐτῆς. Διότι εἶνε $\frac{\alpha^2}{\gamma} > \alpha$ $\left(\text{ἐπειδὴ εἶνε } \alpha > \gamma, \frac{\alpha}{\gamma} > 1 \text{ καὶ } \frac{\alpha^2}{\gamma} > \alpha\right)$.



(Σχ. 92)

β') Ἔστω Μ (x, y) τυχὸν σημεῖον τῆς ἐλλείψεως. Ζητοῦμεν τὸν λόγον τῶν ἀποστάσεων τοῦ Μ ἀπὸ τῆς ἑστίας Ε καὶ τῆς ἀντιστοίχου πρὸς αὐτὴν διευθετούσης (σχ. 92).

Ἔχομεν (§115, δ')

$$(\text{EM}) = \varrho = \alpha - \varepsilon\, x\,, (\text{MK}) = (\Pi\Delta) : (\text{O}\Delta) - (\text{O}\Pi),$$

καὶ $$(\text{MK}) = \frac{\alpha^2}{\gamma} - x = \frac{\alpha}{\varepsilon} - x = \frac{1}{\varepsilon}(\alpha - \varepsilon x),$$

ἐν ᾧ ΜΚ εἶνε ἡ ἐκ τοῦ Μ κάθετος ἐπὶ τὴν διευθετοῦσαν ΔΚ, ἥτις ἔχει ἐξίσωσιν $$x = \frac{\alpha^2}{\gamma} = \frac{\alpha^2}{\varepsilon}\,.$$

Ἑπομένως $$(\text{EM}) : (\text{MK}) = \varepsilon.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε

$$(\text{E'M}) : (\text{MK'}) = \varepsilon \qquad (2)$$

ἤτοι, «***ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου ἐλλείψεως ἀπό τινος τῶν ἑστιῶν αὐτῆς καὶ τῆς ἀντιστοίχου αὐτῆς διευθετούσης εἶνε σταθερὸς καὶ ἴσος μὲ τὴν ἐκκεντρότητα τῆς ἐλλείψεως***».

γ') Ἡ πολικὴ τυχόντος σημείου M_1 (x_1, y_1) διευθετούσης ἐλλείψεως, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἑστίαν Ε, ἔχει τὴν ἐξίσωσιν

$\left(\text{ἐπειδὴ εἶνε } x_1 = \frac{\alpha^2}{\gamma}\right)$ $$\frac{x}{\gamma} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1,$$

διέρχεται δ' αὕτη διὰ τῆς ἑστίας Ε. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως τῆς πολικῆς ταύτης εἶνε $-\frac{\beta^2}{\gamma y_1}$, ἐν ᾧ ἡ εὐθεῖα ἥτις συνδέει τὸ σημεῖον M_1 μὲ τὸ Ε ἔχει συντελεστὴν διευθύνσεως $\frac{\gamma y_1}{\beta^2}$, ἐπεται ὅτι «*ἡ εὐθεῖα, ἥτις συνδέει μίαν τῶν ἑστιῶν ἐλλείψεως μὲ τὸν πόλον τυχούσης χορδῆς διερχομένης διὰ τῆς ἑστίας, εἶνε κάθετος ἐπ' αὐτήν*» ἢ «*τὸ τμῆμα ἐφαπτομένης ἐλλείψεως, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τοῦ σημείου ἐπαφῆς καὶ μιᾶς διευθετούσης αὐτῆς φαίνεται ἐκ τῆς ἀντιστοίχου ἑστίας ὑπὸ γωνίαν ὀρθήν*».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1) Ποία εἶνε ἡ διευθετοῦσα περιφερείας κύκλου καὶ εἰς τίνας τρέπονται αἱ ἰδιότητες β') καὶ γ';

2) Φέρατε τῇ βοηθείᾳ τῆς προτάσεως γ') ἐκ τυχόντος σημείου τῆς διευθετούσης τὰς δύο ἐφαπτομένας εἰς τὴν ἔλλειψιν.

3) Δείξατε ὅτι μία ἔλλειψις εἶνε ὡρισμένη, ἂν δοθῇ μία ἑστία, ἡ ἀντίστοιχος ταύτης διευθετοῦσα καὶ ἡ ἐκκεντρότης αὐτῆς.

4) Τῇ βοηθείᾳ τῆς προτάσεως β') δυνάμεθα εὐκόλως νὰ κατασκευάσωμεν τὰς τομὰς ἐλλείψεως ὑπὸ εὐθείας ΜΚ παραλλήλου πρὸς τὸν κύριον ἄξονα αὐτῆς. (Γράφομεν μὲ κέντρον Ε περιφέρειαν κύκλου μὲ ἀκτῖνα $\rho = \frac{\beta^2}{\alpha}$, φέρομεν διὰ τοῦ $\Delta\left(\frac{\alpha^2}{\gamma}, o\right)$ παράλληλον πρὸς τὴν ΚΕ. Τὰς τομὰς ταύτης μὲ τὴν περιφέρειαν συνδέομεν δι' εὐθειῶν μὲ τὸ Ε. Αὗται τέμνουν τὴν ΜΚ εἰς τὰ ζητούμενα σημεῖα. Παρατηρητέον ὅτι εἶνε $E\Delta = \frac{\rho}{\varepsilon}$).

§ 129. Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας περικλειομένης ὑπὸ ἐλλείψεως.—

α') Ἐὰν διὰ τοῦ E παραστήσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῆς ἐλλείψεως

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$

καὶ διὰ τοῦ E' τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τῆς περιφερείας, τῆς ὁποίας ὀρθὴ προβολὴ εἶνε ἡ ἔλλειψις, θὰ ἔχωμεν (§ 10, ϛ')

$$E = E' \text{ συν } \omega,$$

ἐν ᾧ ω παριστάνει τὴν γωνίαν τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἐλλείψεως μὲ τὸ τοῦ κύκλου.

Ἀλλ' εἶνε (§ 118, α') $\text{συν}\,\omega = \frac{\beta}{\alpha}$

Ἐπομένως ἔχομεν

$$E = E' \frac{\beta}{\alpha} = \pi\,\alpha^2\,\frac{\beta}{\alpha} = \pi\,\alpha\,\beta.$$

$$\boxed{E = \pi\,\alpha\,\beta} \qquad (1)$$

β') Ἀνάλογα παρατηροῦμεν καὶ διὰ τυχὸν τμῆμα ἐπιφανείας, περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ἐλλείψεως, ὡς πρὸς τὸ ἀντίστοιχον πρὸς αὐτὸ τοῦ κύκλου. Οὕτω π.χ., ἂν δύο κυκλικοὶ τομεῖς ἔχουν ἴσα ἐμβαδὰ καὶ οἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐλλειπτικοὶ τομεῖς ἔχουν ἴσα ἐμβαδά. Ἂν ὁ κύκλος χωρισθῇ εἰς ν ἴσα μέρη, ἔχοντα ἴσα ἐμβαδά, καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐλλείψεως χωρίζεται ὑπὸ τῶν ἀντιστοιχουσῶν αὐτῇ γραμμῶν εἰς ν μέρη, ἔχοντα ἴσα ἐμβαδά. Ἂν ὁ κύκλος χωρισθῇ εἰς 4 ἴσα μέρη διὰ δύο διαμέτρων αὐτοῦ, καθέτων ἐπ' ἀλλήλας, ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐλλείψεως θὰ χωρισθῇ εἰς τέσσαρα τεταρτημόρια διὰ τῶν δύο αὐτῆς ἀντιστοίχων συζυγῶν διαμέτρων.

Ὅθεν «***ἡ ἐπιφάνεια, ἥτις περιέχεται ὑπὸ ἐλλείψεως, χωρίζεται εἰς 4 ἰσοδύναμα μέρη διὰ δύο συζυγῶν διαμέτρων αὐτῆς***».

γ΄) Ὁ τύπος (1) δύναται νὰ γενικευθῇ, ἂν ἀντὶ τῶν α, β εἰσαγάγωμεν τὰ μήκη δύο συζυγῶν ἡμιδιαμέτρων αὐτῆς α΄, β΄ καὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν αὐτῶν ω, ὑποτιθεμένην γνωστήν.

Ἐπειδὴ δὲ εἶνε (§ 125, β΄)

$$\alpha\,\beta = \alpha'\,\beta'\,\eta\mu\,\omega,$$

ἕπεται ὅτι

$$\boxed{E = \pi\,\alpha'\,\beta'\,\eta\mu\,\omega} \qquad (2)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1) Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν ἐλλείψεως διὰ τῶν

$$p = \frac{\beta^2}{\alpha} \text{ καὶ } \varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

2) Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν ἐλλείψεως διὰ τοῦ μεγάλου ἄξονος 2α καὶ τῆς ἐκκεντρότητος αὐτῆς ε.

3) Διαιρέσατε τὴν ἐπιφάνειαν τὴν ὁποίαν περικλείει ἔλλειψις, ἀναχωροῦντες ἀπὸ τὸν μέγαν ἄξονα, εἰς 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10 μέρη ἰσοδύναμα.

4) Λύσατε ἀνάλογον πρόβλημα πρὸς τὸ προηγούμενον ἀναχωροῦντες ἀπὸ τυχοῦσαν ἡμιδιάμετρον τῆς ἐλλείψεως.

5) Εὕρετε τὰ μήκη τῶν ἀξόνων καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ἐλλείψεως, τῆς ὁποίας αἱ ἴσαι συζυγεῖς διάμετροι, αἱ ἔχουσαι μῆκος $2\alpha'$, ἔχουν κλίσιν πρὸς ἀλλήλας 45^0.

6) Εὕρετε τὰ α, β, γ, p, ε καί τὰς διευθετούσας τῶν ἐλλείψων

α΄) $3x^2 + y^2 = 5$. β΄) $2x^2 + y^2 = 1$. γ΄) $9x^2 + y^2 - 16 = 0$.
δ΄) $9x^2 + 4y^2 = 36$. ε΄) $y^2 + 5x^2 - 29 = 0$. ϛ΄) $3x^2 + 4y^2 = 12$.
ζ΄) Τίνα θέσιν ἔχει ἡ εὐθεῖα $y + y = 2$ ὡς πρὸς ἑκάστην τούτων;

7) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἐλλείψεως $9x^2+7y^2=16$ εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς (1, —1), καὶ τῆς $5x^2 + y^2 = 29$ εἰς τὸ (2, 3).

8) Εὕρετε τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἐλλειπτικῶν ἐπιφανειῶν τῆς ἀσκήσεως 6).

Περὶ ὑπερβολῆς

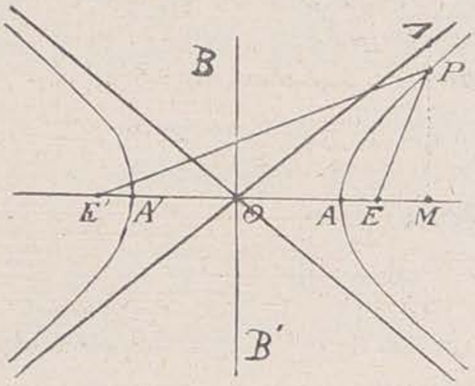
§ **130. Ὁρισμοὶ καὶ ἰδιότητες ὑπερβολῆς.**—

α΄) *Ὑπερβολὴ* καλεῖται ὁ τόπος τῶν σημείων ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων αὐτοῦ ἔχουν διαφορὰν ἴσην μὲ σταθερὸν μῆκος, ἔστω 2α.

β΄) Τὰ δύο δοθέντα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου παριστάνομεν συνήθως διὰ τῶν Ε καὶ Ε΄ λέγονται δὲ *ἑστίαι* τῆς ὑπερβολῆς. Ἡ ἀπόστασις (ΕΕ΄) τῶν ἑστιῶν Ε καὶ Ε΄ καλεῖται *ἑστιακὴ ἀπόστασις* τῆς ὑπερβολῆς καὶ παρίσταται συνήθως διὰ τοῦ 2γ. Ἀνύσματα ἔχοντα ἀρχὴν μίαν τῶν ἑστιῶν τῆς ὑπερβολῆς καὶ πέρας σημεῖον αὐτῆς καλοῦνται *ἑστιακαὶ ἀκτῖνες τῆς ὑπερβολῆς*.

γ΄) Ὁ λόγος $\frac{\gamma}{\alpha}$ παρίσταται συνήθως διὰ τοῦ ε καὶ καλεῖται *ἐκκεντρότης* τῆς ὑπερβολῆς, εἶνε δὲ $\varepsilon > 1$, διότι ἔχομεν $2\gamma > 2\alpha$, ἢ $\gamma > \alpha$, καὶ $\frac{\gamma}{\alpha} = \varepsilon > 1$.

δ΄) Ἂν σημεῖόν τι Ρ κεῖται ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς (σχ. 93) θὰ εἶνε



(Σχ. 93)

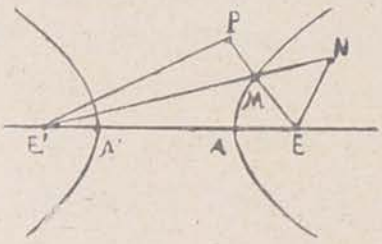
$$(\text{Ε΄Ρ}) - (\text{ΕΡ}) = 2\alpha. \qquad (1)$$

Ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς κεῖνται τὰ σημεῖα Α καὶ Α΄ τῆς εὐθείας Ε΄Ε, τὰ ἀπέχοντα ἀπὸ τὸ μέσον Ο τοῦ ἀνύσματος Ε΄Ε ἀποστάσεις ἴσας μὲ $\pm\alpha$.

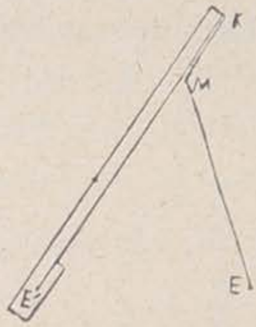
ε΄) Εὐκόλως ἀποδεικνύεται κατ᾽ ἀναλογίαν ὡς καὶ διὰ τὴν ἔλλειψιν (§ 112,ε΄) ὅτι ἡ ὑπερβολὴ εἶνε συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΑ΄ καὶ ὡς πρὸς τὴν ἐπ᾽ αὐτὴν κάθετον ΒΒ΄ εἰς τὸ σημεῖον Ο, καθὼς καὶ ὡς πρὸς τὸ μέσον Ο τοῦ τμήματος ΕΕ΄. Διὰ τοῦτο τὸ σημεῖον Ο καλεῖται *κέντρον* τῆς ὑπερβολῆς, αἱ δὲ εὐθεῖαι ΑΑ΄ καὶ ΒΒ΄ *ἄξονες συμμετρίας* ἢ ἁπλῶς *ἄξονες* τῆς ὑπερβολῆς.

Ἂν τὰ πρὸς τὸ μέρος ΒΒ′ σημεῖα τῆς ὑπερβολῆς, πρὸς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται τὸ σημεῖον Ε, θεωρηθοῦν ὅτι ἔχουν ἀποστάσεις θετικὰς ἀπὸ τῶν ἑστιῶν, αἱ ἀποστάσεις τῶν ἄλλων σημείων αὐτῆς ἀπὸ τῶν ἑστιῶν πρέπει νὰ θεροῦνται ἀρνητικαί, ὅτε ἡ ἀνωτέρω σχέσις (1) ἀληθεύει διὰ πάντα τὰ σημεῖα τῆς ὑπερβολῆς.

ϛ′) Ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι πᾶν σημεῖον Ρ (σχ. 94) κείμενον ἐκτὸς ὑπερβολῆς καὶ μεταξὺ αὐτῆς, ἐνῷ χώρῳ περιέχεται ἡ ΒΒ′, δίδει διαφορὰν (Ε′Ρ)—(ΕΡ) $<$ 2α, πᾶν δὲ σημεῖον Ν κείμενον ἐντὸς τῆς ὑπερβολῆς δίδει (Ε′Ν) — (ΕΝ) $>$ 2α.



(Σχ. 94)



(Σχ. 95)

ζ′) Τὰ σημεῖα τῆς ὑπερβολῆς, τὰ κείμενα δεξιὰ τοῦ ΒΒ′ λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν *τὸν δεξιὸν κλάδον* αὐτῆς, τὰ δὲ ἀριστερὰ τῆς ΒΒ′ τὸν *ἀριστερὸν κλάδον* αὐτῆς.

Ἑπομένως ἡ ὑπερβολὴ ἀποτελεῖται ἐκ τῶν δύο κλάδων, κειμένων ἑκατέρωθεν τοῦ ἄξονος αὐτῆς ΒΒ′, ἀποτελούντων ἕνα τόπον.

η′) Θέτομεν συνήθως

$$\gamma^2 - \alpha^2 = \beta^2, \quad \text{ἢ} \quad \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

θ′) Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τόξον ὑπερβολῆς διὰ συνεχοῦς κινήσεως ὡς ἑξῆς.

Λαμβάνομεν κανόνα Κ (σχ. 95) καὶ στηρίζομεν τὸ ἓν ἄκρον αὐτοῦ εἰς τὴν μίαν ἑστίαν, ἔστω τὴν Ε′, ὥστε νὰ δύναται νὰ στρέφεται περὶ τὸ σημεῖον τοῦτο. Ἔπειτα λαμβάνομεν νῆμα, ἔχον μῆκος μικρότερον τοῦ μήκους τοῦ κανόνος κατὰ 2α καὶ προσδένομεν τὸ ἓν ἄκρον τούτου εἰς τὸ ἄκρον Κ τοῦ κανόνος, τὸ δὲ ἄλλο ἄκρον εἰς τὴν ἑστίαν Ε. Ἀκολούθως διὰ γραφίδος Μ τείνομεν διηνεκῶς τὸ νῆμα κατὰ μῆκος τοῦ κανόνος καὶ στρέφοντες αὐτὸν περὶ τὸ Ε′ γράφομεν διὰ τῆς γραφίδος συνεχὲς τόξον ὑπερβολῆς.

§ **131. Ἐξίσωσις ὑπερβολῆς· ἀσύμπτωτοι αὐτῆς.**—

α′) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ὑπερβολῆς (σχ. 93), λαμβάνομεν ὡς ἄξονας ὀρθογωνίους συντεταγμένων τὰς εὐθείας ΑΑ′ καὶ ΒΒ′ ἀντιστοίχως (μὲ ἀρχὴν τὸ O). Ἂν P(x,y) εἶνε τυχὸν σημεῖον τῆς ὑπερβολῆς καὶ θέσωμεν (EP) = ϱ, (E′P) = ϱ′, θὰ ἔχωμεν,

$$\varrho' = \sqrt{(\gamma + x)^2 + y^2}, \qquad \varrho = \sqrt{(\gamma - x)^2 + y^2}$$

Ἑπομένως εἶνε

$$\sqrt{(\gamma + x)^2 + y^2} - \sqrt{(\gamma - x)^2 + y^2} = \varrho' - \varrho = 2\alpha \quad (1)$$

Ἐργαζόμενοι καθὼς καὶ ἐν τῇ ἐλλείψει εὑρίσκομεν

$$(\alpha^2 - \gamma^2)\, x^2 + \alpha^2\, y^2 = \alpha^2\, (\alpha^2 - \gamma^2).$$

Θέτοντες $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$ καὶ διαιροῦντες τὰ μέλη ταύτης διὰ τοῦ $-\alpha^2\beta^2$, εὑρίσκομεν

$$\boxed{\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1} \qquad (2)$$

ἥτις εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς ὑπερβολῆς.

β′) Καθὼς ἐν τῇ ἐλλείψει οὕτω καὶ ἐνταῦθα ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις (2) περιέχει τὰ τετράγωνα τῶν x, y, ἕπεται ἡ συμμετρία τῆς ὑπερβολῆς ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας τῶν x, τῶν y καὶ ὡς πρὸς τὴν ἀρχήν.

γ′) Ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν εὐθεῖαν $y = \lambda x$, διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς O, εὑρίσκομεν ὡς τετμημένας τῶν κοινῶν σημείων ταύτης καὶ τῆς ὑπερβολῆς (2) τὰς

$$x = \pm \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2\lambda^2}},$$

αἵτινες εἶνε πραγματικαί, ἐὰν εἶνε $\beta^2 - \alpha^2\lambda^2 \geq o$, ἢ ἐὰν $|\lambda| \leq \frac{\beta}{\alpha}$.

Ἑπομένως, ἂν κατασκευάσωμεν τὰς εὐθείας $y = \pm \frac{\beta}{\alpha} x$, συμμετρικῶς κειμένας ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας, παρατηροῦμεν ὅτι, πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ τῆς ἀρχῆς O περιεχομένη μεταξὺ τῶν εὐθειῶν $y = \pm \frac{\beta}{\alpha} x$, ἐν αἷς περιέχεται καὶ ὁ ἄξων τῶν x, τέμνουν τὴν ὑπερβολὴν εἰς δύο πραγματικὰ σημεῖα, ἐνῷ αἱ εὐθεῖαι, αἱ διὰ τῆς ἀρχῆς διερχόμεναι καὶ κείμεναι μεταξὺ τῶν $y = \pm \frac{\beta}{\alpha} x$, ἐνῷ κεῖται καὶ ὁ ἄξων τῶν y, δὲν ἔχουν κοινὸν (πραγματικὸν) σημεῖον μὲ τὴν ὑπερβολήν.

δ′) Πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου τῆς ὑπερβολῆς καλεῖται ***διάμετρος τῆς ὑπερβολῆς*** καὶ ***πρωτεύουσα*** μέν, ἂν τέμνῃ ταύτην εἰς πραγματικὰ σημεῖα, ***δευτερεύουσα*** δέ, ἂν δὲν τέμνῃ πράγματι αὐτήν. Διὰ τοῦτο καὶ ὁ ἄξων τῶν x λέγεται συνήθως ***πρωτεύων ἄξων*** τῆς ὑπερβολῆς, ἐνῷ ὁ τῶν y ***δευτερεύων ἄξων*** αὐτῆς.

ε') Ἐὰν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (2) ὡς πρὸς y ἔχομεν

$$y = \pm \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{x^2 - \alpha^2} \qquad (3)$$

Ἐκ τούτου παρατηροῦμεν ὅτι, τὸ y ἔχει πραγματικὰς τιμὰς μόνον ἐὰν εἶνε $|x| \geq \alpha$.

Διὰ $x = \pm \alpha$, ἔχομεν $y = o$, ἤτοι ἡ ὑπερβολὴ τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὰ δύο σημεῖα A (α, ο), A′ (— α, ο), ἀπέχοντα ἀλλήλων κατὰ 2α καὶ κείμενα μεταξὺ τῶν ἑστιῶν αὐτῆς. Τὰ σημεῖα A, A′ καλοῦνται ***κορυφαὶ τῆς ὑπερβολῆς***, τὰ δὲ (AA′)=2α καὶ (BB′)=2β λέγονται *μήκη τῶν ἀξόνων αὐτῆς*. Αἱ εὐθεῖαι $x = \pm \alpha$ ἐφάπτονται τῆς ὑπερβολῆς εἰς τὰ σημεῖα (α, ο) καὶ (— α, ο).

Αὐξανομένου τοῦ x ἀπὸ τῆς τιμῆς α, αὐξάνεται καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ y. Διὰ $x = \pm \gamma$, εὑρίσκομεν $y = \pm \frac{\beta^2}{\alpha} = \pm p$,
καὶ καλοῦμεν τὴν ποσότητα ταύτην p *ἡμιπαράμετρον* τῆς ὑπερβολῆς.

Αὐξανομένου τοῦ x ἀπὸ τοῦ α μέχρι τον $+\infty$, αὐξάνεται καὶ τὸ y ἀπολύτως ἀπὸ τοῦ ο μέχρι τοῦ $+\infty$, ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι ἡ ὑπερβολὴ ἔχει σημεῖα, κείμενα εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν. Εἰς τιμὰς τοῦ x ἀρνητικὰς ἀντιστοιχοῦν σημεῖα τῆς καμπύλης, ἀποτελοῦντα ἄλλον κλάδον, συμμετρικὸν τοῦ προηγουμένου ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y.

ϛ') Ἐὰν τὴν (3) γράψωμεν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$y = \pm \frac{\beta}{\alpha} x \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{x}\right)^2} \qquad (4)$$

παρατηροῦμεν ὅτι, αὐξανομέου τοῦ x ἀπολύτως μέχρι τοῦ ∞, αὐξάνετα καὶ τὸ y ὁμοίως. Ἐν τούτοις, αὐξανομένου τοῦ x ἀπολύτως ὁ λόγος $\left(\frac{\alpha}{x}\right)$ ἐλαττοῦται ἀπολύτως καὶ τείνει εἰς τὸ μηδέν, αἱ δὲ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ y τείνουν πρὸς τὰς τιμὰς τοῦ $\pm \frac{\beta}{\alpha}$ x. Ἑπομένως θεωροῦντες τὴν εὐθεῖαν $y = \frac{\beta}{\alpha} x$, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ὑπερβολὴ πλησιάζει διηνεκῶς ταύτην, ὅταν τὸ x αὐξάνεται ἐπ' ἄπειρον. Ἤτοι ἡ ἀπόστασις σημείου τινός Σ (x, y) τῆς ὑπερβολῆς ἀπὸ τῆς εὐθείας

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x \qquad (5)$$

τείνει εἰς τὸ μηδέν, ὅταν τὸ x τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον.

Τῷ ὄντι ἔχομεν (σχ. 93) $(MP) = y = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{x^2 - \alpha^2}$.

Ἡ ἀντίστοιχος τεταγμένη (ΜΛ) τῆς εὐθείας (5), ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ αὐτὸ x, εἶνε

$$(\text{ΜΛ}) = \frac{\beta}{\alpha}\,x.$$

Ἡ διαφορὰ τῶν (ΜΛ) καὶ (ΜΡ) εἶνε

$$(\text{ΜΛ}) - (\text{ΜΡ}) = (\text{ΡΛ}) = \frac{\beta}{\alpha}\,x - \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2-\alpha^2}$$

ἢ

$$(\text{ΡΛ}) = \frac{\beta}{\alpha}\left(x - \sqrt{x^2-\alpha^2}\,\right)$$

Ταύτην γράφομεν καὶ ὡς ἑξῆς

$$(\text{ΡΛ}) = \frac{\beta}{\alpha}\,\frac{\alpha^2}{(x+\sqrt{x^2-\alpha^2}\,)} = \frac{\alpha\beta}{x+\sqrt{x^2-\alpha^2}}$$

Ὅταν τὸ x τείνῃ εἰς ∞, τὸ (ΡΛ) τείνει εἰς τὸ μηδέν. Ἄρα καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ Ρ ἀπὸ τὰς εὐθείας (5) κατὰ μείζονα λόγον τείνει εἰς τὸ μηδέν.

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἰσχύει καὶ διὰ τὴν εὐθεῖαν $y = -\dfrac{\beta}{\alpha}\,x$ καὶ ἀποδεικνύεται ὁμοίως.

ζ') Αἱ εὐθεῖαι $y = \pm\dfrac{\beta}{\alpha}\,x$ καλοῦνται ἀσύμπτωτοι τῆς ὑπερβολῆς (2). Ἐν γένει «***εὐθεῖά τις καλεῖται ἀσύμπτωτος ἀπεράντου τινὸς κλάδου καμπύλης, ὅταν ἡ ἀπόστασις σημείου κειμένου ἐπὶ τοῦ κλάδου τούτου ἀπὸ τῆς εὐθείας ἔχῃ ὅριον τὸ μηδέν, ὅταν τὸ σημεῖον τοῦτο ἀπομακρύνεται ἐπ' ἄπειρον ἐπὶ τοῦ κλάδου***».

Αἱ ἐξισώσεις $\boxed{y = \pm\dfrac{\beta}{\alpha}\,x}$

τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ὑπερβολῆς (2) προκύπτουν ἐκ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς (2), ἂν γράψωμεν

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 0, \text{ ἢ } \left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta}\right)\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right) = 0$$

ὅτε θὰ εἶνε $\dfrac{x}{\alpha} - \dfrac{y}{\beta} = 0$, καὶ $\dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{y}{\beta} = 0.$

η') Διὰ $\alpha = \beta$ αἱ δύο ἀσύμπτωτοι εἶνε κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, αἱ ἐξισώσεις αὐτῶν εἶνε

$$x = \pm\,y,$$

τῆς δ' ὑπερβολῆς $\quad x^2 - y^2 = \alpha^2,$

ἥτις καλεῖται (πρὸς διάκρισιν) *ἰσοσκελὴς ὑπερβολή*.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1) Κατασκευάσατε τὴν ὑπερβολήν, ἥτις ἔχει $\gamma = 3$ καὶ $\alpha=2$.

2) Δείξατε ὅτι πᾶσα εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸν κύριον ἄξονα ὑπερβολῆς τέμνει αὐτὴν εἰς δύο σημεῖα πραγματικά.

3) Εὕρετε τὰς ἑστίας τῆς ὑπερβολῆς

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

καὶ κατασκευάσατε τὰς ἀσυμπτώτους αὐτῆς.

4) Ποία εἶνε ἡ ἐξίσωσις ὑπερβολῆς, ἐχούσης κύριον ἄξονα 2α, καὶ ἡμιπαράμετρον p;

5) Εὕρετε τὰ ἄκρα σημεῖα τῆς διαμέτρου ὑπερβολῆς ἥτις ἔχει ἐξίσωσιν $y = \pm \lambda x$, καὶ διερευνήσατε τὸ ἐξαγόμενον.

6) Ἐκ δύο ἐκ τῶν μεγεθῶν α, β, γ, p ὑπολογίσατε τὰ ἄλλα.

7) Εἰς τὴν ἔλλειψιν εἶνε πάντοτε $\alpha > \beta$. Ὑπάρχει ἡ σχέσις αὐτὴ καὶ διὰ τὴν ὑπερβολήν;

8) Ὑπερβολῆς τινος γνωρίζομεν τὰς ἀσυμπτώτους καὶ τὰς κορυφάς. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ ἑστίαι αὐτῆς.

9) Τίνα γραμμὴν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = -1;$$

§ 132 Πολικαὶ ἐξισώσεις ὑπερβολῆς· συζυγεῖς ὑπερβολαί.—

α') Ὡς πρὸς πόλον τὸ κέντρον τῆς ὑπερβολῆς. Ἔστω ἡ ὑπερβολὴ

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \qquad (1)$$

καὶ σημεῖον αὐτῆς P (x,y), ἔχον πολικὰς συνιεταγμένας (ϱ, ω) ὡς πρὸς πόλον τὸ κέντρον O τῆς ὑπερβολῆς (σχ. 93). Ἔχομεν

$$x = \varrho \text{ συν } \omega, \quad y = \varrho \text{ ημ } \omega \qquad (2)$$

Εἰσάγοντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν (1), εὑρίσκομεν τὴν πολικὴν ἐξίσωσιν τῆς ὑπερβολῆς

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\text{συν}^2 \omega}{\alpha^2} - \frac{\text{ημ}^2 \omega}{\beta^2}, \qquad (3)$$

ἢ

$$\varrho^2 = \frac{\alpha^2 \beta^2}{\beta^2 \text{ συν}^2\omega - \alpha^2 \text{ημ}^2\omega}. \qquad (4)$$

Θέτοντες $\text{ημ}^2 \omega = 1 - \text{συν}^2 \omega$ καὶ $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὴν (4) καὶ ὡς ἑξῆς

$$\varrho^2 = \frac{\alpha^2\beta^2}{\gamma^2 \text{ συν}^2\omega - \alpha^2} \qquad (5)$$

ἢ θέτοντες $\gamma = \alpha\varepsilon$, ἐν ᾧ εἶνε $\varepsilon > 1$ ἔχομεν

$$\varrho^2 = \frac{\beta^2}{\varepsilon^2 \text{ συν}^2 \omega - 1} \qquad (6)$$

β´) Ἐκ τῆς (5) παρατηροῦμεν ὅτι, τὸ ρ λαμβάνει τὴν ἐλαχίστην αὐτοῦ τιμὴν διὰ ω = ο, εἶνε δὲ τότε ρ=α, ἐνῷ αὐξάνεται τοῦτο μετὰ τοῦ ω. Ἐνῷ εἰς τὴν ἔλλειψιν τὸ ρ εἶνε πεπερασμένον,ἐν τῇ ὑπερβολῇ αὐξάνεται τοῦτο εἰς ἄπειρον, καθόσον τὸ ω τείνει νὰ λάβῃ τιμὴν τοιαύτην, ὥστε νὰ εἶνε

$$\gamma^2 \text{ συν}^2\, \omega - \alpha^2 = o, \quad \text{ἢ} \quad \beta^2 \text{ συν}^2\, \omega - \alpha^2 \text{ ημ}^2\, \omega = o \tag{7}$$

Ἐὰν λοιπὸν τὸ ω αὐξάνεται ἀπὸ τῆς τιμῆς μηδέν, τὸ ρ θὰ γίνῃ ἀπείρως μέγα, ὅταν θὰ εἶνε

$$\text{εφ } \omega = \frac{\beta}{\alpha} \tag{8}$$

Ὅταν τὸ ω αὐξάνεται ἀπὸ τῆς τιμῆς ταύτης, τὸ ρ^2 θὰ εἶνε ἀρνητικὸν τὸ δὲ ρ φανταστικὸν μέχρις ὅτου τὸ ω γίνῃ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶνε

$$\text{εφ } \omega = -\frac{\beta}{\alpha} \tag{9}$$

Διὰ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ ω τὸ ρ γίνεται ἄπειρον καὶ ἀκολούθως αὐξανομένου τοῦ ω ἀπὸ τῆς τιμῆς ταύτης, ἐλαττοῦται μέχρις ὅτου διὰ ω = 180° λάβῃ πάλιν τὴν ἐλαχίστην αὐτοῦ τιμὴν α.

γ´) Ἐπειδὴ διὰ τῶν ἐξισώσεων (8) καὶ (9) ὁρίζονται αἱ ἀσύμπτωτοι τῆς ὑπερβολῆς, ἔπεται ὅτι «***αἱ ἀσύμπτωτοι τῆς ὑπερβολῆς εἶνε διάμετροι αὐτῆς, τέμνουσαι τὴν ὑπερβολὴν εἰς τὸ ἄπειρον***».

δ´) Αἱ δύο ἀσύμπτωτοι τῆς ὑπερβολῆς χωρίζουν τὰς πρωτευούσας διαμέτρους αὐτῆς, ἀπὸ τῶν δευτερευουσῶν διαμέτρων ταύτης, ἐν αἷς περιλαμβάνεται καὶ ὁ ἄξων τῶν y. Διὰ δευτερεύουσάν τινα διάμετρον τὸ

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2 \beta^2}{\beta^2 \text{ συν}^2\, \omega - \alpha^2 \text{ ημ}^2\, \omega}$$

εἶνε ἀρνητικόν. Ἂν λάβωμεν ἑκατέρωθεν τοῦ Ο ἐπὶ τῆς δευτερευούσης διαμέτρου, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς ὡρισμένην τιμὴν ω, τὸ μῆκος $r = \sqrt{-\rho^2}$ εὑρίσκομεν δύο σημεῖα ἔστω τὰ P_1, P'_1, συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ Ο. Δι᾿ ἕκαστον τῶν σημείων τούτων εἶνε

$$r^2 = -\rho^2$$

καὶ ἑπομένως (3)

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\text{ημ}^2\, \omega}{\beta^2} - \frac{\text{συν}^2\, \omega}{\alpha^2} \tag{10}$$

Εἰσάγοντες εἰς ταύτην ἀντὶ τῶν r συν ω καὶ r ημ ω τὰς εὐθυγράμμους συντεταγμένας x καὶ y τοῦ P_1, εὑρίσκομεν

$$\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 1. \tag{11}$$

Ἐκ τούτων ἔπεται ὅτι, ὁ τόπος τῶν σημείων P_1 καὶ P'_1 εἶνε ἐπίσης ὑπερβολή. Ὁ κύριος ἄξων ταύτης συμπίπτει μὲ τὸν ἄξονα τῶν y τῆς

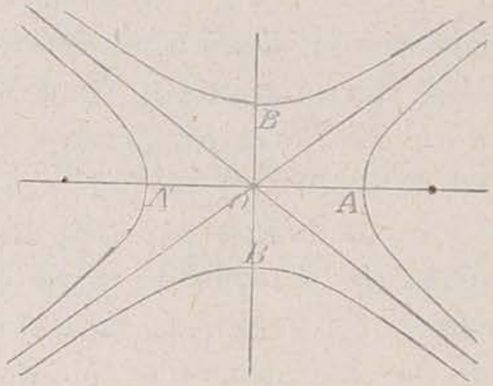
(1), αἱ κορυφαὶ αὐτῆς ἀπέχουν ἀπόστασιν β ἀπὸ τὸ κέντρον Ο, ἡ δὲ ἑστιακὴ ταύτης ἡμιαπόστασις εἶνε $\gamma = \pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ ὡς καὶ τῆς (1). Οὕτω ἡ δευτέρα αὕτη ὑπερβολὴ (11) εἶνε ὡρισμένη καὶ καλεῖται *συζυγὴς ὑπερβολὴ* τῆς δοθείσης (1), ἡ δὲ (1) συζυγὴς τῆς (11). Ἡ εὐθεῖα ΒΒ΄, ἥτις εἶνε δευτερεύων ἄξων τῆς (1) εἶνε πρωτεύων ἄξων ταύτης, ὁ δὲ ΑΑ΄ δευτερεύων αὐτῆς ἄξων (σχ. 96).

Ἐκ τούτων παρατηροῦμεν ὅτι

«***αἱ συζυγεῖς ὑπερβολαί, ἔχουσαι ἐξισώσεις***

$$\boxed{\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = \pm 1,}$$

ἔχουν τὰς αὐτὰς ἀσυμπτώτους καὶ τοιαύτην θέσιν πρὸς ἀλλήλας, ὥστε ὁ δευτερεύων ἄξων τῆς μιᾶς εἶνε πρωτεύων τῆς ἄλλης».



(Σχ. 96)

ε΄) Πολικὴ ἐξίσωσις ὑπερβολῆς ὡς πρὸς πόλον μίαν τῶν ἑστιῶν αὐτῆς. Ἂν λάβωμεν ὡς πόλον μίαν τῶν ἑστιῶν τῆς ὑπερβολῆς (1), ἔστω τὴν Ε καὶ πολικὸν ἄξονα τὸν x, παραστήσωμεν δὲ διὰ (ρ, φ) τὰς πολικὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου αὐτῆς Ρ (x,y), παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε (σχ. 93)

$$(E'P)^2 = (\gamma+x)^2 + y^2, \quad (EP)^2 = (\gamma-x)^2 + y^2,$$

Ἄρα $\quad [(E'P) + (EP)]\,[(E'P) - (EP)] = 4\,\gamma\,x.$

Ἐπειδὴ δὲ εἶνε $(E'P) - (EP) = 2\,\alpha$, ἕπεται ὅτι ἔχομεν

$$(E'P) + (EP) = \frac{2\gamma x}{\alpha}$$

$$(E'P) - (EP) = 2\,\alpha.$$

Ἄρα $\quad (E'P) = \frac{\gamma x}{\alpha} + \alpha, \quad (EP) = \frac{\gamma x}{\alpha} - \alpha.$

Ἀφ' ἑτέρου ἔχομεν

$$x = (oM) = (oE) + (EM)$$

ἢ $$x = \gamma + \rho\ \text{συν}\ \varphi$$

ἐνῶ τὰ ϱ καὶ συν φ εἶνε ὁμόσημα μὲν διὰ τὰ σημεῖα τοῦ δεξιοῦ κλάδου, ἑτερόσημα δὲ διὰ τὰ τοῦ ἀριστεροῦ.

Εἰσάγοντες τὴν τιμὴν τοῦ x εἰς τὴν ἀνωτέρω παράστασιν τοῦ (ΕΡ) ἔχομεν διὰ τὸν δεξιὸν κλάδον

$$(\text{ΕΡ}) = \varrho = \frac{\gamma}{\alpha}(\gamma + \varrho\,\text{συν}\,\varphi) - \alpha,$$

ἐξ οὗ ἕπεται
$$\varrho = \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{\alpha} + \varrho\,\frac{\gamma}{\alpha}\,\text{συν}\,\varphi$$

ἢ
$$\varrho = \frac{p}{1 - \varepsilon\,\text{συν}\,\varphi},$$

(ἐνῶ εἶνε $\dfrac{\gamma}{\alpha} = \varepsilon,\ \gamma^2 - \alpha^2 = \beta^2,\ \dfrac{\beta^2}{\alpha} = p$)

ἥτις εἶνε ἡ πολικὴ ἐξίσωσις τῆς ὑπερβολῆς (1) ὡς πρὸς πόλον τὴν ἑστίαν αὐτῆς Ε.

Ἵνα τὸ σημεῖον Ρ γράφῃ ὁλόκληρον τὸν δεξιὸν κλάδον τῆς ὑπερβολῆς, ἀρκεῖ τὸ φ νὰ μεταβάλλεται ἀπὸ $\varphi_1 = \text{τοξ.συν}\left(-\dfrac{\alpha}{\gamma}\right)$ μέχρι τοῦ $2\pi - \varphi_1$. Ἤτοι διὰ τὰ σημεῖα τοῦ δεξιοῦ κλάδου ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν

$$\varphi_1 < \varphi < 2\pi - \varphi_1$$

διότι διὰ τὰς τιμὰς ταύτας τοῦ φ τὸ ϱ λαμβάνει τιμὰς θετικάς.

Ἵνα τὸ σημεῖον Ρ γράφῃ τὸν ἀριστερὸν κλάδον τῆς ὑπερβολῆς (1), ἀρκεῖ τὸ φ νὰ μεταβάλλεται ἀπὸ $\varphi_2 = \pi - \varphi_1$ μέχρι $2\pi - \varphi_2 = \pi + \varphi_1$. Ἤτοι διὰ πάντα τὰ σημεῖα τοῦ ἀριστεροῦ κλάδου ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν

$$\pi - \varphi_1 < \varphi < \pi + \varphi_1,$$

ἐνῷ διὰ τὰς τιμὰς ταύτας τοῦ φ τὸ ϱ εἶνε ἀρνητικὸν (§ 130, ε΄).

Οὕτω ἡ ἐξίσωσις

$$\boxed{\varrho = \frac{p}{1 - \varepsilon\,\text{συν}\,\varphi}}$$

δίδει τοὺς δύο κλάδους τῆς ὑπερβολῆς (1) ὅταν τὸ φ λαμβάνῃ πάσας τὰς τιμὰς τὰς μεταξὺ τῶν φ_1 καὶ $2\pi + \varphi_1$. Ἤτοι τὸν δεξιὸν μὲν κλάδον διὰ τὰς τιμὰς ἀπὸ ϑ_1, ἐν ᾧ ϑ_1 εἶνε ἡ γωνία τῆς ἀσυμπτώτου $y = \dfrac{\beta}{\alpha}x$ μὲ τὸν ἄξονα τῶν x, μέχρι $2\pi - \vartheta_1$· τὸν ἀριστερὸν δὲ διὰ τὰς ἀπὸ $2\pi - \vartheta_1$ μέχρι $2\pi + \vartheta_1$, ἀρκεῖ διὰ τὰς τελευταίας ταύτας τιμὰς νὰ λαμβάνωμεν τὴν ἀντίστοιχον ἐπιβατικὴν ἀκτῖνα κατὰ τὴν ἀντίθετον φορὰν ἐκείνης, τὴν ὁποίαν ὁρίζει ἡ γωνία φ.

Παρατηροῦμεν ὅτι διὰ $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ἔχομεν $\varrho = p$, ἤτοι ἡ ἐπιβατικὴ ἀκτὶς τῆς ἑστίας Ε, ἡ καθετος ἐπὶ τὸν πρωτεύοντα ἄξονα τῆς ὑπερβολῆς ἰσοῦται μὲ τὴν ἡμιπαράμετρον αὐτῆς p.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Εὕρετε, ἂν ἡ διάμετρος τῆς ὑπερβολῆς

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1,$$

ἡ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν $2x - 7y + 1 = 0$ εἶνε πρωτεύουσα ἢ δευτερεύουσα διάμετρος αὐτῆς.

2) Εὕρετε τὴν ἐκκεντρότητα τῆς ὑπερβολῆς

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1,$$

3) Δείξατε ὅτι εἶνε $\alpha = p : (\varepsilon^2 - 1)$, $\beta = p : \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$, $\gamma = \varepsilon p : (\varepsilon - 1)$, p=ἡμιπαράμετρος.

4) Ἐκφράσατε τὰ β, γ, p διὰ τῶν α καὶ ε.

5) Τίνα σχέσιν ἔχει τὸ ε διὰ τὴν ἰσοσκελῆ ὑπερβολήν; Τίς ἡ συζυγὴς ὑπερβολὴ ταύτης;

6) Εὕρετε τὴν γωνίαν θ τῶν ἀσυμπτώτων ἐκ τῆς ἐκκεντρότητος ε.

$$\left(\text{Προκύπτει ημ } \frac{\theta}{2} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1} : \varepsilon, \text{ συν } \frac{\theta}{2} = 1 : \varepsilon, \text{εφ } \frac{\theta}{2} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}\right).$$

Ἑπομένως δύο ὑπερβολαί, ἔχουσαι τὴν αὐτὴν ἐκκεντρότητα ἔχουν ἴσας γωνίας ἀσυμπτώτων καὶ τοὐναντίον.

7) Δείξατε ὅτι δύο ὑπερβολαί, ἔχουσαι τὴν αὐτὴν ἐκκεντρότητα εἶνε ὅμοιαι πρὸς ἀλλήλας.

Ἡ ἰσότης τῶν ἐκκεντροτήτων δύο ὑπερβολῶν εἶνε ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα αὗται εἶνε ὅμοιαι.

8) Δείξατε ὅτι ὑπάρχουν ἄπειροι ὑπερβολαί, ἔχουσαι τὰς αὐτὰς ἀσυμπτώτους καὶ ὅτι πᾶσαι αὗται εἶνε ὅμοιαι πρὸς ἀλλήλας. Ἡ ἰσότης τῆς γωνίας τῶν ἀσυμπτώτων εἶνε ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα αὗται εἶνε ὅμοιαι.

9) Ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\alpha^2} = \lambda,$$

ὅπου λ παριστάνει μεταβλητήν τινα παράμετρον, παριστάνει ἀπείρους ὑπερβολάς. Τίνα σχέσιν ἔχουν αὗται πρὸς ἀλλήλας; Ἐξετάσατε ἰδιαιτέρως τὰς περιπτώσεις $\lambda = 0, \pm 1, \pm k, \infty$. Τὸ ζεῦγος τῶν ἀσυμπτώτων παρουσιάζεται οὕτω ὡς ὁριακὴ περίπτωσις εἰς τὸ σύστημα τοῦτο τῶν ὑπερβολῶν.

10) Ἔστω ρ (πόλος ἡ ἀρχὴ) πρωτεύουσά τις ἡμιδιάμετρος μιᾶς ὑπερβολῆς καὶ ρ′ ἡ πρωτεύουσα κάθετος ἡμιδιάμετρος τῆς συζυγοῦς αὐτῆς ὑπερβολῆς.

Δείξατε ὅτι εἶνε

$$\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\rho'^2} = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}$$

11) Δείξατε ὅτι αἱ κοιναὶ ἀσύμπτωτοι δύο συζυγῶν ὑπερβολῶν εἶνε αἱ διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖον ὁρίζουν αἱ κορυφαὶ A, A′, B, B′.

12) Δείξατε ὅτι, αἱ τέσσαρες ἑστίαι δύο συζυγῶν ὑπερβολῶν κεῖνται ἐπὶ περιφερείας κύκλου, γραφομένης μὲ κέντρον τὸ o, ἥτις καλεῖται συνήθως περιφέρεια τῶν ἑστιῶν.

13) Δείξατε τῇ βοηθείᾳ τῆς (πόλος τὸ o)

$$r^2\left(\frac{\sigma\upsilon\nu^2\,\omega}{\alpha^2}-\frac{\eta\mu^2\,\omega}{\beta^2}\right)-1=\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}-1,$$

ὅτι ἡ ὑπερβολὴ χωρίζει πάντα τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου διὰ τὰ ὁποῖα τὸ

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}-1$$

εἶνε θετικόν, ἀπὸ ἐκεῖνα διὰ τὰ ὁποῖα εἶνε ἀρνητικόν. Εἰς τίνα τῶν περιοχῶν τούτων κεῖται τὸ κέντρον καὶ ἑστίαι αὐτῆς;

§ 133. Θέσεις εὐθείας ὡς πρὸς ὑπερβολήν.—

α′) Ἔστω ἡ ὑπερβολὴ

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1 \qquad (1)$$

καὶ ἡ εὐθεῖα

$$y=\lambda\,x+\mu \qquad (2)$$

Ζητεῖται ἡ θέσις τῆς εὐθείας ὡς πρὸς τὴν ὑπερβολήν.

Θέτοντες εἰς τὴν (1) τὴν τιμὴν τοῦ y ἐκ τῆς (2) λαμβάνομεν

$$(\beta^2-\alpha^2\lambda^2)\,x^2-2\,\alpha^2\lambda\,\mu\,x-\alpha^2(\beta^2+\mu^2)=o \qquad (3)$$

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τῶν x_1, x_2 τὰς ρίζας τῆς (3) καὶ διὰ y_1, y_2 τὰς ἀντιστοίχους εἰς αὐτὰς τιμὰς τοῦ y ἐκ τῆς (2), συνάγομεν ὅτι, ἡ ὑπερβολὴ (καθὼς καὶ ἡ ἔλλειψις) ἔχει, ἐν γένει, μὲ τυχοῦσαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς δύο κοινὰ σημεῖα. Τὰ σημεῖα αὐτὰ εἶνε πραγματικὰ καὶ διάφορα ἀλλήλων, ἢ συμπίπτοντα εἰς ἕν, ἢ φανταστικά, ἂν τὸ $\alpha^2\beta^2(\mu^2+\beta^2-\alpha^2\lambda^2)$ εἶνε θετικόν, ἢ μηδέν, ἢ ἀρνητικόν.

Ἐὰν εἶνε $\beta^2-\alpha^2\lambda^2>o$, ἢ $\lambda^2<\frac{\beta^2}{\alpha^2}$,

ἡ εὐθεῖα (2) εἶνε παράλληλος πρὸς μίαν τῶν πρωτευουσῶν διαμέτρων τῆς ὑπερβολῆς, καὶ ἔχει δύο κοινὰ σημεῖα μετ' αὐτῆς πραγματικὰ καὶ διακεκριμένα. Ἐὰν αἱ τετμημέναι τῶν κοινῶν τούτων σημείων εἶνε x_1, x_2, ἕπεται ἐκ τῆς (3) ὅτι τὸ γινόμενον $x_1 . x_2$ εἶνε ἀρνητικόν. Ἑπομένως τὰ σημεῖα τομῆς κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ ἄξονος τῶν y, ἤτοι ὅτι ἡ εὐθεῖα τέμνει καὶ τοὺς δύο κλάδους τῆς ὑπερβολῆς.

Ἐὰν εἶνε $\beta^2-\alpha^2\lambda^2<o$, ἢ $\lambda^2>\frac{\beta^2}{\alpha^2}$,

ἡ εὐθεῖα (2) εἶνε παράλληλος πρὸς μίαν τῶν δευτερευουσῶν διαμέτρων τῆς ὑπερβολῆς, καὶ τὰ σημεῖα τομῆς τῆς ὑπερβολῆς καὶ αὐτῆς εἶνε πραγματικὰ καὶ διάφορα ἀλλήλων, ἢ πραγματικὰ καὶ συμπίπτοντα εἰς ἕν, ἢ φανταστικά, ἂν εἶνε $\mu^2>\alpha^2\lambda^2-\beta^2$, ἢ $\mu^2=\alpha^2\lambda^2-\beta^2$, ἢ $\mu^2<\alpha^2\lambda^2-\beta^2$.

Ἐν τῇ περιπτώσει καθ' ἣν εἶνε $\mu^2 > \alpha^2 \lambda^2 - \beta^2$, τὰ σημεῖα τομῆς κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἄξονος τῶν y, ἢ εἰς τὸν αὐτὸν κλάδον τῆς (1), ἐπειδὴ τὸ $x_1 . x_2$ εἶνε θετικόν.

Ἐὰν εἶνε $\beta^2 - \alpha^2 \lambda^2 = o$, ἢ $\lambda^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$,

ἡ εὐθεῖα (2) εἶνε παράλληλος πρὸς μίαν τῶν ἀσυμπτώτων τῆς (1). Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ ἐξίσωσις (3) καταντᾷ

$$2 \lambda \mu x + \beta^2 + \mu^2 = o \tag{4}$$

ἥτις ἔχει τὴν ῥίζαν $x = -\frac{\beta^2 + \mu^2}{2 \lambda \mu}$ (5)

Ἑπομένως ἑκάστη εὐθεῖα παράλληλος πρὸς μίαν τῶν ἀσυμπτώτων τῆς (1) τέμνει αὐτὴν εἰς μόνον ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν ἐὰν εἶνε, ὄχι μόνον $\beta^2 - \alpha^2 \lambda^2 = o$, ἀλλὰ καὶ $\mu = o$· ἤτοι ἐὰν ἡ εὐθεῖα (2) συμπίπτῃ μὲ μίαν τῶν ἀσυμπτώτων.

β') Τὴν περίπτωσιν ἥτις χαρακτηρίζεται ὑπὸ τοῦ $\beta^2 - \alpha^2 \lambda^2 = o$ δυνάμεθα νὰ ἐξετάσωμεν καὶ ἄλλως. Ἐὰν ἐν τῇ ἐξισώσει τοῦ β' βαθμοῦ

$$A x^2 + 2 B x + \Gamma = o$$

θεωρηθοῦν οἱ συντελεσταὶ Α, Β, Γ ὡς μεταβληταὶ ποσότητες καὶ θεωρήσωμεν τὰς ῥίζας αὐτῆς

$$x_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - A\Gamma}}{A} = \frac{(-B + \sqrt{B^2 - A\Gamma})(-B - \sqrt{B^2 - A\Gamma})}{A(-B - \sqrt{B^2 - A\Gamma})}$$

$$x_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - A\Gamma}}{A} = \frac{(-B - \sqrt{B^2 - A\Gamma})(-B + \sqrt{B^2 - A\Gamma})}{A(-B + \sqrt{B^2 - A\Gamma})}$$

παρατηροῦμεν ὅτι τίθενται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$x_1 = \frac{\Gamma}{-B - \sqrt{B^2 - A\Gamma}}, \quad x_2 = \frac{\Gamma}{-B + \sqrt{B^2 - A\Gamma}}$$

Ἐκ τούτων διακρίνομεν ὅτι, διὰ $A = o$ ἡ ῥίζα x_2 γίνεται ἄπειρος, ἐνῷ ἡ x_1 γίνεται ἴση μὲ $-\frac{\Gamma}{2B}$. Ἐὰν καὶ τὸ Β γίνῃ ἴσον μὲ μηδέν, τότε καὶ τὸ x_1 γίνεται ἄπειρον καὶ αἱ δύο ῥίζαι x_1 καὶ x_2 εἶνε ἴσαι, ἐπειδὴ διὰ $A = B = o$ εἶνε καὶ $B^2 - A\Gamma = o$.

Παρατηροῦμεν ὅθεν, ὅτι «*ἂν ἐν τῇ ἐξισώσει* $Ax^2 + Bx + \Gamma = o$ *μηδενισθῇ ὁ συντελεστὴς* A, *ἐνῷ εἶνε* $B \neq o$, *ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει μίαν ῥίζαν πεπερασμένην καὶ μίαν ἄπειρον· ἐὰν δὲ μηδενισθῇ τὸ* A *καὶ τὸ* B *συγχρόνως καὶ αἱ δύο ῥίζαι εἶνε ἴσαι καὶ ἄπειροι*», Ἐφαρμόζοντες τὴν ἰδιότητα ταύτην εἰς τὴν (3) διὰ τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν εἶνε $\beta^2 - \alpha^2\lambda^2 = 0$, παρατηροῦμεν ὅτι αὕτη ἔχει μίαν πεπερασμένην ῥίζαν καὶ μίαν ἄπειρον, ἐνόσῳ τὸ μ εἶνε διάφορον τοῦ μηδενός. Ἀλλ' ἂν εἶνε καὶ $\mu = 0$, καὶ αἱ δύο ῥίζαι εἶνε ἴσαι καὶ ἀπείρως μεγάλαι. Ἤτοι,

γ΄) «***ἑκάστη εὐθεῖα παράλληλος πρὸς μίαν ἀσύμπτωτον τέμνει τὴν ὑπερβολὴν εἰς ἓν σημεῖον, κείμενον εἰς περασμένην ἀπόστασιν καὶ εἰς ἄλλο, κείμενον εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν. Αἱ ἀσύμπτωτοι τέμνουν αὐτὴν εἰς δύο σημεῖα, κείμενα εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν καὶ συμπίπτοντα εἰς ἕν, εἶνε δὲ αὗται αἱ μόναι εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου διὰ τὰς ὁποίας συμβαίνει τοῦτο***».

ϛ΄) Διὰ τοῦτο, θεωροῦμεν συμπίπτοντα εἰς ἓν τὰ ἐπ' ἄπειρον σημεῖα τοῦ δεξιοῦ καὶ ἀριστεροῦ κλάδου τῆς ὑπερβολῆς, τὰ κείμενα εἰς τὰς γωνίας xoy καὶ $x'oy'$ τῶν ἀξόνων, καθὼς καὶ τὰ κείμενα εἰς τὰς γωνίας yox' καὶ xoy'. Οὕτω ἡ ὑπερβολὴ ἔχει δύο σημεῖα, κείμενα εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν (κατ' *ἐκδοχὴν*) καὶ αἱ δύο ἀσύμπτωτοι αὐτῆς θεωροῦνται ὡς ἐφαπτόμεναι αὐτῆς μὲ σημεῖα ἐπαφῆς τὰ κατ' ἐκδοχὴν σημεῖα ταύτης ἀντιστοίχως.

ε΄) Ἐπειδὴ τυχοῦσα εὐθεῖα τέμνει ὑπερβολήν, ἐν γένει, εἰς δύο σημεῖα ἡ ὑπερβολὴ εἶνε καμπύλη δευτέρου βαθμοῦ (§ 23, ια΄).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Εὕρετε τὰ σημεῖα τομῆς τῆς εὐθείας $7x - 3y + 2 = 0$ καὶ τῆς ὑπερβολῆς

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{81} = 1.$$

2) Τίνα σχέσιν πρέπει νὰ πληροῦν τὰ Α, Β, Γ, ἵνα ἡ εὐθεῖα $Ax + By + \Gamma = 0$ ἐφάπτεται τῆς ὑπερβολῆς

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1\,;$$

3) Δείξατε ὅτι ὁ τόπος τῶν τομῶν τῶν καθέτων ἐπ' ἀλλήλας ἐφαπτομένων τῆς ὑπερβολῆς

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

εἶνε περιφέρεια κύκλου, ἔχουσα κέντρον τὸ κέντρον τῆς ὑπερβολῆς καὶ ἀκτῖνα $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$.

4) Ὑπάρχουν ἐφαπτόμεναι παράλληλοι πρὸς πρωτεύουσαν διάμετρον ὑπερβολῆς;

5) Μεταξὺ τίνων ὁρίων μεταβάλλονται οἱ συντελεσταὶ διευθύνσεως τῶν ἐφαπτομένων ὑπερβολῆς; Διατί;

6) Ἐὰν εἶνε $\beta^2 - \alpha^2\lambda^2 < 0$, εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ λ ἀντιστοιχοῦν δύο παράλληλοι ἐφαπτόμεναι, τῶν ὁποίων αἱ ἐξισώσεις εἶνε

$$y = \lambda x \pm \sqrt{\alpha^2\lambda^2 - \beta^2}.$$

Εὕρετε τὰ σημεῖα ἐπαφῆς αὐτῶν.

§ **134. Συζυγεῖς διάμετροι ὑπερβολῆς.**—

α΄) Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα

$$y = \lambda x + \mu \qquad (1)$$

τέμνει τὴν ὑπερβολὴν

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \qquad (2)$$

εἰς δύο πραγματικὰ σημεῖα καὶ διακεκριμένα, ἔστω τὰ $M_1 (x_1, y_1)$ καὶ $M_2(x_2, y_2)$. Αἱ τετμημέναι τούτων x_1 καὶ x_2 εἶνε ρίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$(\beta^2 - \alpha^2 \lambda^2) x^2 - 2\alpha^2\lambda \mu x - \alpha^2(\beta^2 + \mu^2) = o \qquad (3)$$

Ἡ τετμημένη x τοῦ μέσου τῆς χορδῆς $M_1\,M_2$ εἶνε

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\lambda \mu \alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2 \lambda^2} \qquad (4)$$

Ἐὰν τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x εἰσαγάγωμεν εἰς τὴν (1), εὑρίσκομεν τὴν τεταγμένην τοῦ μέσου τῆς $M_1\,M_2$, ἤτοι

$$y = \frac{\mu \beta^2}{\beta^2 - \alpha^2 \lambda^2} \qquad (5)$$

Ἐκ τῶν (4) καὶ (5) εὑρίσκομεν διὰ διαιρέσεως

$$y = \frac{\beta^2}{\lambda \alpha^2} x \qquad (6)$$

ἥτις δὲν περιέχει τὸ μ καὶ ἥτις ἀληθεύει διὰ τὰς συντεταγμένας τῶν μέσων τῶν χορδῶν, αἵτινες εἶνε παράλληλοι πρὸς τὴν (1). Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ (6) ὡς διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου τῆς ὑπερβολῆς Ο παριστάνει μίαν διάμετρον τῆς ὑπερβολῆς, ἕπεται ὅτι

«***τὰ μέσα παραλλήλων χορδῶν ὑπερβολῆς κεῖνται ἐπὶ μιᾶς διαμέτρου αὐτῆς***».

β΄) Ἐὰν θέσωμεν

$$\lambda = \varepsilon\varphi\, \varphi, \qquad \frac{\beta^2}{\lambda \alpha^2} = \varepsilon\varphi\, \psi,$$

παρατηροῦμεν ὅτι μεταξὺ τῶν συντελεστῶν διευθύνσεως τῶν παραλλήλων χορδῶν καὶ τοῦ τόπου τῶν μέσων αὐτῶν ὑπάρχει ἡ σχέσις

$$\varepsilon\varphi\, \psi . \varepsilon\varphi\, \varphi = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \qquad (7)$$

ἢ

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\, \varphi\, \sigma\upsilon\nu\, \psi}{\alpha^2} - \frac{\eta\mu\, \varphi\, \eta\mu\psi}{\beta^2} = o \qquad (8)$$

Ἡ συμμετρία τῆς (8) ὡς πρὸς ψ καὶ φ δεικνύει ὅτι, ὅταν αἱ παράλληλοι χορδαὶ σχηματίζουν γωνίαν ψ μὲ τὸν ἄξονα τῶν x, ἡ διχοτομοῦσα ταύτας διάμετρος σχηματίζει μὲ αὐτὸν γωνίαν φ.

γ΄) Δύο διάμετροι, τῶν ὁποίων οἱ συντελεσταὶ διευθύνσεως πληροῦν τὴν σχέσιν (7) καλοῦνται *συζυγεῖς διάμετροι τῆς ὑπερβολῆς*. Ἐπειδὴ εἰς ἑκάστην διάμετρον τῆς ὑπερβολῆς ἀντιστοιχεῖ μία συζυγὴς αὐτῆς, ὁριζομένη ἐκ τῆς (7), ἕπεται ὅτι,

«***ὑπάρχουν ἄπειρα ζεύγη συζυγῶν διαμέτρων ὡς πρὸς τὰς ὁποίας ἡ ὑπερβολὴ εἶνε συμμετρικὴ εἰς τρόπον ὥστε ἑκάστη τῶν διαμέτρων ἑνὸς τοιούτου ζεύγους διχοτομεῖ τὰς χορδάς, αἵτινες εἶνε παράλληλοι τῇ ἄλλῃ. Τὸ γινόμενον τῶν συντελεστῶν διευθύνσεως δύο τοιούτων συζυγῶν διαμέτρων εἶνε σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ $\beta^2 : \alpha^2$***».

ϛ') Ἐπειδὴ ἡ εφ φ καὶ εφ ψ εἶνε ὁμόσημοι, ἕπεται ὅτι, αἱ γωνίαι φ καὶ ψ εἶνε ἀμφότεραι ὀξεῖαι ἢ ἀμβλεῖαι. Διὰ φ = ο εἶνε ψ = 90^0. Ἐὰν τὸ φ αὐξάνεται, τὸ ψ ἐλαττοῦται. Ἐφ' ὅσον εἶνε εφ φ $< \frac{\beta}{\alpha}$, πρέπει νὰ εἶνε εφ ψ $> \frac{\beta}{\alpha}$. Ἐὰν εἶνε εφ φ $= \frac{\beta}{\alpha}$, θὰ εἶνε καὶ εφ ψ $= \frac{\beta}{\alpha}$, ἤτοι

«***δύο δυζυγεῖς διάμετροι ὑπερβολῆς διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς τῶν ἀξόνων γωνίας. Ἐὰν ἡ μία εἶνε πρωτεύουσα διάμετρος, ἡ ἄλλη εἶνε δευτερεύουσα. Ἐὰν ἡ μία στρέφεται κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, ἡ ἄλλη στρέφεται ἀντιθέτως. Ὁ πρωτεύων καὶ ὁ δευτερεύων ἄξων τῆς ὑπερβολῆς εἶνε αἱ μόναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας συζυγεῖς διάμετροι αὐτῆς. Ἑκάστη ἀσύμπτωτος θεωρεῖται ὅτι προέκυψεν ἐκ τῆς συμπτώσεως δύο συζυγῶν διαμέτρων***».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Κατασκευάσατε τοὺς ἄξονας δοθέντος τοῦ σχήματος ὑπερβολῆς.

2) Παρατηρήσατε ὅτι ἐν ὑπερβολῇ δύο ζεύγη συζυγῶν διαμέτρων αὐτῆς δὲν χωρίζουν ἄλληλα, ἐνῷ τοῦτο συμβαίνει πάντοτε ἐν τῇ ἐλλείψει.

3) Ἐν τῇ ἐλλείψει ὑπάρχει μερικὴ περίπτωσις (ἡ περιφέρεια κύκλου) καθ' ἣν ἀνὰ δύο συζυγεῖς διάμετροι εἶνε κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας. Ὑπάρχει τοιαύτη περίπτωσις διὰ τὴν ὑπερβολήν;

4) Ἔστω M_1 (x_1, y_1) σημεῖόν τι τῆς ὑπερβολῆς

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

καὶ $xy_1 - yx_1 = ο$ ἡ ἐξίσωσις τῆς εἰς αὐτὸ ἀντιστοιχούσης διαμέτρου αὐτῆς. Δείξατε ὅτι ἡ συζυγὴς ταύτης διάμετρος ἔχει τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = ο$$

Εὕρετε τὰς συντεταγμένας τῆς τομῆς ταύτης μὲ τὴν συζυγῆ τῆς δοθείσης ὑπερβολήν.

$$\left(\text{Εὑρίσκεται } \pm \frac{\alpha}{\beta} y_1 \text{ καὶ } \pm \frac{\beta}{\alpha} x_1 \right)$$

5) Ἔστωσαν α′ καὶ β′ δύο συζυγεῖς ἡμιδιάμετροι. Ἔστω ὅτι αὗται κεῖνται εἰς τὴν γωνίαν xoy τῶν ἀξόνων. Ἐὰν (x_1, y_1) εἶνε αἱ συντεταγμέναι τοῦ πέρατος τῆς α′, αἱ τοῦ πέρατος τῆς β′ θὰ εἶνε

$$\frac{\alpha}{\beta} y_1, \quad \frac{\beta}{\alpha} x_1.$$

Εὕρετε ὅτι ὑπάρχει ἡ σχέσις $\alpha'^2 - \beta'^2 = \alpha^2 - \beta^2$.

6) Δείξατε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ὁρίζουν αἱ α′ καὶ β′ ἰσοῦται μὲ $^1/_2$ αβ, ἤτοι σταθερόν.

7) Ἔστω ω ἡ γωνία τῶν α′ καὶ β′. Δείξατε ὅτι εἶνε α′ β′ ημ ω = αβ.

8) Δείξατε ὅτι, ἂν α′ αὐξάνεται, πρέπει νὰ αὐξάνεται καὶ τὸ β′, ἐνῷ ἡ γωνία τούτων ω ἐλαττοῦται. Διὰ τὰς ἀσυμπτώτους τὰ α′ καὶ β′ συμπίπτουν, τὸ ω γίνεται 0^0, τὰ δὲ α′ καὶ β′ ἀπείρως μεγάλα.

9) Ὑπάρχουν καὶ ἐν τῇ ὑπερβολῇ ἴσαι συζυγεῖς διάμετροι ὡς ἐν τῇ ἐλλείψει;

10) Δείξατε ὅτι αἱ ἀσύμπτωτοι τῆς ὑπερβολῆς

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

συμπίπτουν μὲ τὰς δύο ἴσας συζυγεῖς διαμέτρους τῆς ἐλλείψεως

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

11) Ἐφαρμόσατε τὰ ζητήματα ἀπὸ τοῦ 4) μέχρι τοῦ 10) διὰ τὴν ἰσοσκελῆ ὑπερβολήν. Δείξατε ὅτι εἶνε πάντοτε $\varphi + \psi = 90^0$.

§ 135. Ἐξίσωσις ὑπερβολῆς ὡς πρὸς συζυγεῖς διαμέτρους αὐτῆς.—

Ἔστω 2α′ τὸ μῆκος πρωτευούσης διαμέτρου τῆς ὑπερβολῆς

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$

καὶ φ ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει αὕτη μὲ τὸν ἄξονα τῶν x.

Ἡ συζυγὴς ταύτης δευτερεύουσα διάμετρος, ἥτις τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x ὑπὸ γωνίαν ἔστω τὴν ψ, ἔχει ὡρισμένον μῆκος 2β′ καὶ θὰ ἔχωμεν (§ 132, (10))

$$\frac{\text{συν}^2\,\varphi}{\alpha^2} - \frac{\text{ημ}^2\,\varphi}{\beta^2} = \frac{1}{\alpha'^2} \qquad (1)$$

$$-\left(\frac{\text{συν}^2\psi}{\alpha^2} - \frac{\text{ημ}^2\,\psi}{\beta^2}\right) = \frac{1}{\beta'^2} \qquad (2)$$

Ἐὰν ἤδη λάβωμεν τὰς εὐθείας τῶν δύο τούτων συζυγῶν διαμέτρων ὡς νέους ἄξονας τῶν x′ καὶ y′ ἀντιστοίχως (οἵτινες θὰ εἶνε πλαγιογώνιοι), εὑρίσκομεν, ἐργαζόμενοι ὡς ἐν τῇ ἐλλείψει

$$\boxed{\frac{x'^2}{\alpha'^2} - \frac{y'^2}{\beta'^2} = 1}$$

ἥτις εἶνε ἐξίσωσις τῆς ὑπερβολῆς ὡς πρὸς ἄξονας τὰς εὐθείας τῶν συζυγῶν διαμέτρων αὐτῆς 2α′, 2β′.

ΑΣΚΗΣΙΣ 1) Δείξατε ὅτι διὰ τὴν ἰσοσκελῆ ὑπερβολήν, ἐπειδὴ εἶνε $\alpha = \beta$, $\psi + \varphi = 90^0$, $\alpha' = \beta'$, εἶνε πάντοτε $x'^2 - y'^2 = \alpha'^2$, ὅταν ληφθοῦν ὡς ἄξονες δύο συζυγεῖς διάμετροι αὐτῆς.

§ 136. Ἐξίσωσις εὐθείας ἐφαπτομένης εἰς δοθὲν σημεῖον ὑπερβολῆς.—

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις ὑπερβολῆς ὡς πρὸς ἄξονας τὰς συζυγεῖς διαμέτρους αὐτῆς $2\alpha'$, $2\beta'$

$$\frac{x^2}{\alpha'^2} - \frac{y^2}{\beta'^2} = 1 \qquad (1)$$

Θεωροῦντες τὴν ἐφαπτομένην τῆς ὑπερβολῆς εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς M_1 (x_1, y_1) ὡς ὅριον τῆς εὐθείας, ἥτις τέμνει αὐτὴν εἰς τὰ σημεῖα M_1 καὶ M_2 (x_2, y_2), ὅταν αὕτη στρέφεται περὶ τὸ M_1 μέχρις ὅτου τὸ M_2 πέσῃ εἰς τὸ M_1, ἐργαζόμενοι δὲ ἀκριβῶς ὡς ἐν τῇ ἐλλείψει προκειμένου περὶ τῆς ἐφαπτομένης εἰς δοθὲν σημεῖον αὐτῆς (§ 121, δ΄) καὶ θέτοντες $-\beta'^2$ ἀντὶ τοῦ β'^2, εὑρίσκομεν ὡς ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης τῆς ὑπερβολῆς (1) εἰς τὸ σημεῖον M_1 (x_1, y_1)

$$\boxed{\frac{xx_1}{\alpha'^2} - \frac{yy_1}{\beta'^2} = 1} \qquad (2)$$

Ἂν ἡ ὑπερβολὴ ἀναφέρεται ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας αὐτῆς, ὅτε ἔχει ἐξίσωσιν

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον M_1 (x_1, y_1) αὐτῆς εἶνε

$$\boxed{\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1} \qquad (2')$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Εὕρετε τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου καὶ ἑκάστης τῶν ἑστιῶν ὑπερβολῆς ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον M_1 (x_1, y_1) αὐτῆς.

2) Εὕρετε τὰς συντεταγμένας ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τῆς ἐφαπτομένης

$$\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$$

ὑπερβολῆς.

3) Ἐξετάσατε τὴν θέσιν τῆς εὐθείας $y = \lambda x + \mu$ ὡς πρὸς τὴν ὑπερβολὴν

$$\frac{x^2}{\alpha'^2} - \frac{y^2}{\beta'^2} = 1$$

ἀναφερομένων ὡς πρὸς τὰς συζυγεῖς διαμέτρους αὐτῆς $2\alpha'$, $2\beta'$. Δείξατε ὅτι αἱ ἐξισώσεις τῶν ἀσυμπτώτων ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας αὐτῆς εἶνε

$$\left(\frac{x^2}{\alpha'^2} - \frac{y^2}{\beta'^2}\right) = 0$$

4) Μετασχηματίσατε τὰς ἐξισώσεις ὡς πρὸς ὀρθογωνίους ἄξονας

$$\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta}\right) = o$$

τῶν ἀσυμπτώτων ὑπερβολῆς, λαμβάνοντες ὡς ἄξονας συντεταγμένων τὰ συζυγεῖς διαμέτρους αὐτῆς $2\alpha'$, $2\beta'$. Δείξατε ὅτι οὕτω προκύπτουν ὡς ἐξισώσεις τῶν ἀσυμπτώτων αἱ

$$\frac{x}{\alpha'} - \frac{y}{\beta'} = o, \quad \frac{x}{\alpha'} + \frac{y}{\beta'} = o.$$

5) Δείξατε ὅτι αἱ ἀσύμπτωτοι ὑπερβολῆς εἶνε αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον προκύπτει, ἂν ἐκ τῶν ἄκρων δύο συζυγῶν διαμέτρων φέρωμεν παραλλήλους πρὸς αὐτάς.

6) Ὑπερβολῆς τινος γνωρίζομεν τὸ μῆκος $2\alpha'$ καὶ $2\beta'$ καὶ τὴν θέσιν τῶν δύο τούτων συζυγῶν διαμέτρων.

Κατασκευάσατε τὰς ἀσυμπτώτους καὶ τοὺς ἄξονας αὐτῆς.

7) Γράψατε τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης ὑπερβολῆς ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$y = \frac{\beta'}{\alpha'} x \sqrt{1 + \frac{\beta'^2}{y_1^2}} - \frac{\beta'^2}{y_1}$$

καὶ εὕρετε ἐκ ταύτης τὰς ἀσυμπτώτους (ὡς ἐφαπτομένας τῶν ἐπ' ἄπειρον σημείων).

§ 137. Ἰδιότητες ἐφαπτομένων καὶ διαμέτρων ὑπερβολῆς. Ἐξίσωσις ὑπερβολῆς ὡς πρὸς διάμετρον καὶ ἐφαπτομένην αὐτῆς.—

Ἐργαζόμενοι ὡς ἐν τῇ ἐλλείψει (§ 122) καὶ θέτοντες $-\beta'^2$ ἀντὶ τοῦ β'^2 ἔχομεν τὰς ἑξῆς ἰδιότητας.

α΄) «***Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἄκρα διαμέτρου ὑπερβολῆς εἶνε παράλληλοι πρὸς τὴν συζυγῆ αὐτῆς διάμετρον, ἑπομένως καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι***».

β΄) «***Δύο ἐφαπτόμεναι ὑπερβολῆς τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς διαμέτρου αὐτῆς, ἥτις διχοτομεῖ τὴν χορδὴν τῶν σημείων τῆς ἐπαφῆς***».

γ΄) Καλοῦμεν *περιγεγραμμένον παραλληλόγραμμον εἰς ὑπερβολήν*, τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶνε ἐφαπτόμεναι τῆς ὑπερβολῆς.

«***Αἱ διαγώνιοι ἑκάστου παραλληλογράμμου περιγεγραμμένου εἰς ὑπερβολὴν εἶνε συζυγεῖς διάμετροι αὐτῆς***».

δ΄) Ἐὰν ἀναφέρωμεν ὑπερβολὴν ὡς πρὸς νέους ἄξονας, ἐκ τῶν ὁποίων ὡς ἄξων τῶν x εἶνε ἡ διάμετρος αὐτῆς $2\alpha'$, ὡς ἄξων δὲ τῶν y ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ ἓν ἄκρον τῆς διαμέτρου ταύτης, εὑρίσκομεν ὡς ἐξίσωσιν αὐτῆς, ἂν ἐργασθῶμεν ὡς ἐν τῇ ἐλλείψει (ἀφήνοντες ἀμετάβλητον τὸ y ἐν τῇ ἐξισώσει τῆς ὑπερβολῆς, θέσωμεν δὲ x+α′ ἀντὶ τοῦ x),

$$y^2 = 2\frac{\beta'^2}{\alpha'}x + \frac{\beta'^2}{\alpha'^2}x^2. \qquad (1)$$

Ἐν ᾗ περιπτώσει ἀναχωροῦμεν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων εὑρίσκομεν

$$\boxed{y^2 = 2px + \frac{p}{\alpha}x^2}$$

ἐπειδὴ θὰ εἶνε $p = \frac{\beta^2}{\alpha}$, $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Ἐὰν R παριστάνῃ τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου ο ὑπερβολῆς ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον P, εἶνε δὲ (oP) = α′, ἡ δὲ συζυγὴς αὐτῆς ἡμιδιάμετρος (oK) = β′, εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ τριγώνου oPK τὴν σχέσιν $R = \frac{\alpha\beta}{\beta'}$. Δείξατε ἐκ τούτου τὴν ἰδιότητα ὅτι «*ὁ τόπος τῶν τομῶν καθέτων ἐπ' ἀλλήλας ἐφαπτομένων ὑπερβολῆς εἶνε περιφέρεια κύκλου μὲ ἀκτῖνα* $\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$ *καὶ κέντρον τὸ τῆς ὑπερβολῆς*».

2) Κατασκευάσατε τὰς ἐφαπτομένας ὑπερβολῆς εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου αὐτῆς, καὶ εἰς τὰ ἄκρα τῆς συζυγοῦς αὐτῆς διαμέτρου τὰς ἐφαπτομένας τῆς συζυγοῦς ὑπερβολῆς καὶ δείξατε δὲ ὅτι τὸ οὕτω προκύπτον παραλληλόγραμμον ἔχει ἐμβαδὸν σταθερόν.

§ 138. Ἐξίσωσις ὑπερβολῆς ὡς πρὸς ἄξονας τὰς ἀσυμπτώτους αὐτῆς.—

Ἔστω ἡ ὑπερβολὴ

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \qquad (1)$$

Ζητοῦμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτης ὡς πρὸς ἄξονας τὰς ἀσυμπτώτους αὐτῆς.

Ἂν ἡ ἀσύμπτωτος αὐτῆς, ἥτις διέρχεται διὰ τῆς γωνίας xoy, σχηματίζῃ τὴν γωνίαν φ μὲ τὸν ἄξονα τῶν x, ἡ ἄλλη ἀσύμπτωτος σχηματίζει μὲ τὸν αὐτὸν ἄξονα τὴν γωνίαν —φ. Ἐὰν λάβωμεν ὡς νέον ἄξονα τῶν x′ τὴν δευτέραν ταύτην ἀσύμπτωτον, καὶ ὡς ἄξονα τῶν y′ τὴν πρώτην, ἔχομεν τοὺς ἑξῆς τύπους μετασχηματισμοῦ τῶν συντεταγμένων

$$x = (x' + y')\,\text{συν}\,\varphi$$

$$y = (-x' + y')\,\text{ημ}\,\varphi, \qquad (2)$$

τοὺς ὁποίους εὑρίσκομεν ἐκ τῶν γενικῶν τύπων (§ 20, ϛ′) ἂν θέσωμεν ἀντὶ τοῦ φ τὸ —φ καὶ ἀντὶ τοῦ ψ τὸ φ.

Εἰσάγοντες τὰς τιμὰς τῶν x καὶ y ἐκ τῆς (2) εἰς τὴν (1) καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι εἶνε

$$\varepsilon\varphi\ \varphi = \frac{\beta}{\alpha},\ \sigma\upsilon\nu\ \varphi = \frac{\alpha}{\gamma},\ \eta\mu\ \varphi = \frac{\beta}{\gamma},$$

εὑρίσκομεν

$$\boxed{x'\,y' = \frac{\gamma^2}{4}} \tag{3}$$

Τὸ σύστημα τῶν ἀσυμπτώτων εἶνε ἐν γένει πλαγιογώνιον μόνον δ' ἐν τῇ περιπτώσει τῆς ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς εἶνε ὀρθογώνιον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Διὰ γωνίαν τῶν ἀσυμπτώτων $\omega = 2\varphi$ εἶνε $\eta\mu\ \omega = \frac{2\,\alpha\beta}{\gamma^2}$. Δείξατε ἐντεῦθεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ὑπὸ τῶν δύο ἀσυμπτώτων καὶ τυχόντος σημείου τῆς ὑπερβολῆς, εἶνε σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ $\frac{\alpha\beta}{2}$.

2) Δείξατε διὰ τῆς ἐξισώσεως $x'y' = \frac{\gamma^2}{4}$ ὅτι ἡ ὑπερβολὴ προσεγγίζει διηνεκῶς τὰς ἀσυμπτώτους αὐτῆς καθόσον ἀπομακρύνεται εἰς ἄπειρον, χωρὶς ποτὲ νὰ τὰς συναντήσῃ.

3) Ἐφαρμόσατε τὰς ἐξισώσεις μετασχηματισμοῦ

$$x = (x'+y')\ \sigma\upsilon\nu\ \varphi$$
$$y = (-x'+y')\ \eta\mu\ \varphi$$

εἰς τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1.$$

(Θὰ εὕρετε τὴν

$$\frac{x'}{2x'_1} + \frac{y'}{2y'_1} = 1$$

ὡς ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης ὡς πρὸς τὰς ἀσυμπτώτους, ἐνῷ $x'.y'$ καὶ $x'_1.y'_1$ παριστάνουν τὰς νέας συντεταγμένας τῶν σημείων x, y καὶ x_1, y_1).

4) Δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις

$$y = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma^2}\,\frac{1}{x+\dfrac{\delta}{\gamma}}$$

παριστάνει ὑπερβολήν, τῆς ὁποίας αἱ ἀσύμπτωτοι εἶνε παράλληλοι μὲ τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων.

§ 139. Σχέσεις μεταξὺ χορδῶν ἐφαπτομένων καὶ ἀσυμπτώτων ὑπερβολῆς.

α') Ἔστω ἡ ἐξίσωσις ὑπερβολῆς ὡς πρὸς τὰς ἀσυμπτώτους αὐτῆς

$$x\,y = \frac{\gamma^2}{4} \tag{1}$$

καὶ ἡ εὐθεῖα

$$\frac{x}{\mu} + \frac{y}{\nu} = 1 \tag{2}$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς τομὰς ταύτης μὲ τὴν ὑπερβολὴν (1), εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν τιμὴν τοῦ y ἐκ τῆς (2) καὶ εἰσάγομεν ταύτην εἰς τὴν (2). Εὑρίσκομεν οὕτω τὴν ἐξίσωσιν

$$4\,\nu\,x^2 - 4\,\mu\,\nu\,x + \gamma^2\,\mu = 0 \qquad (3)$$

τὸ εἶδος τῶν ῥιζῶν τῆς ὁποίας ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ σημείου τοῦ

$$4\,\mu\,\nu\,(\mu\,\nu - \gamma^2).$$

Ἐὰν τὰ μ, ν εἶνε ἑτερόσημα, ἢ ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει ἂν εἶνε $\mu\,\nu > \gamma^2$, αἱ ῥίζαι τῆς (3) καὶ τὰ σημεῖα τομῆς τῆς (1) καὶ (2) εἶνε πραγματικὰ καὶ διακεκριμένα. Ἐὰν M_1 (x_1, y_1), M_2 (x_2, y_2) εἶνε τὰ σημεῖα τομῆς, εὑρίσκομεν ὡς συντεταγμένας τοῦ μέσου M (x, y) τῆς χορδῆς $M_1\,M_2$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Ἐκ τῆς (3) καὶ τῆς (2) εὑρίσκομεν

$$x = \frac{\mu}{2}, \quad y = \frac{\nu}{2} \qquad (4)$$

Ἀλλ' αὗται εἶνε καὶ αἱ συντεταγμέναι τοῦ μέσου τμήματος τῆς εὐθείας (2), τὸ ὁποῖον κεῖται μεταξὺ τῶν ἀξόνων· ἤτοι μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων. Ἑπομένως ἔχομεν ὅτι (σχ. 97)

«***ἐὰν εὐθεῖά τις τέμνῃ ὑπερβολὴν εἰς τὰ σημεῖα M_1, M_2, τὰς δ' ἀσυμπτώτους αὐτῆς εἰς τὰ T_1, T_2, τὸ μέσον τῆς χορδῆς $M_1\,M_2$ συμπίπτει μὲ τὸ μέσον τοῦ τμήματος $T_1\,T_2$, καὶ ἑπομένως εἶνε $(M_1\,T_1) = (M_2\,T_2)$ καὶ $(M_1\,T_2) = (M_2\,T_1)$***».

Διὰ τῆς ἰδιότητος ταύτης δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν εὐκόλως σημεῖα ὑπερβολῆς, ἂν γνωρίζωμεν τὰς ἀσυμπτώτους καὶ ἓν σημεῖον αὐτῆς ἔστω τὸ M_1 (σχ. 97). Πρὸς τοῦτο, φέρομεν διὰ τοῦ M_1 τυχοῦσαν εὐθεῖαν, ἥτις τέμνει τὰς ἀσυμπτώτους, ἔστω εἰς τὰ T_1 καὶ T_2.

Λαμβάνομεν τὸ ἄνυσμα $T_2\,M_2$, ἀπὸ τοῦ T_2, ἴσον πρὸς τὸ M_1T_1. Τὸ M_2 εἶνε σημεῖον τῆς ὑπερβολῆς. Δυνάμεθα οὕτω νὰ εὕρωμεν ὁσαδήποτε σημεῖα τῆς ὑπερβολῆς, μεταχειριζόμενοι ὁμοίως καὶ ἕκαστον τῶν οὕτω εὑρισκομένων.

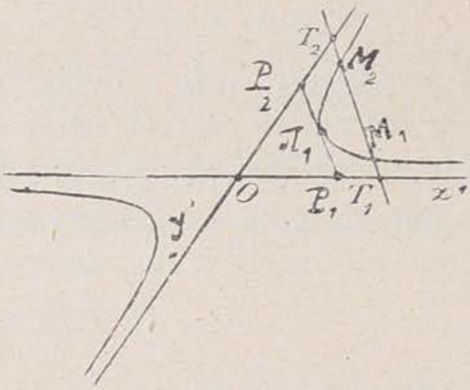
β') Ἐὰν ἐν τῇ (3) εἶνε $\mu\,\nu = \gamma^2$, τὰ δύο σημεῖα τομῆς M_1 καὶ M_2 συμπίπτουν εἰς ἕν, καὶ ἡ εὐθεῖα (2), θὰ εἶνε ἐφαπτομένη τῆς ὑπερβολῆς (1). Ἐκ τῶν (3) καὶ (2) εὑρίσκομεν ὅτι αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τῆς ἁφῆς εἶνε (αἵτινες δίδονται ὑπὸ τῶν (4)).

$$x = \frac{\mu}{2}, \quad y = \frac{\nu}{2} \qquad (5)$$

Ἑπομένως ἔχομεν ὅτι (σχ. 97)

«*τὸ μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων ὑπερβολῆς περιεχόμενον τμῆμα εὐθείας, ἐφαπτομένης αὐτῆς, διχοτομεῖται ὑπὸ τοῦ σημείου ἀφῆς αὐτῆς*».

Ἐκ τῶν (5) εὑρίσκομεν ἀμέσως ὅτι, ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης



(Σχ. 97)

ὑπερβολῆς ὡς πρὸς ἄξονας τὰς ἀσυμπτώτους αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον M_1 (x_1, y_1) εἶνε

$$\boxed{\frac{x}{2\,x_1} + \frac{y}{2\,y_1} = 1} \qquad (6)$$

γ′) Ἐπειδὴ αἱ συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν μ καὶ ν εὐθείας ἐφαπτομένης ὑπερβολῆς πληροῦν τὴν σχέσιν (6)

$$\mu\,\nu = 4\,x_1\,y_1 = \gamma^2,$$

ἕπεται ὅτι «*ἑκάστη ἐφαπτομένη ὑπερβολῆς ὁρίζει μετὰ τῶν ἀσυμπτώτων αὐτῆς τρίγωνον, ἔχον ἐμβαδὸν σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ αβ*».

Διότι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τοιούτου τριγώνου ἰσοῦται μὲ

$$\frac{1}{2}\,\mu\,\nu\;\eta\mu\,\omega = \frac{1}{2}\gamma^2\,\frac{2\,\alpha\beta}{\gamma^2} = \alpha\beta,$$

ἐν ᾧ ω παριστάνει τὴν γωνίαν τῶν ἀσυμπτώτων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Κατασκευάσατε εἰς τὸ σημεῖον (x_1, y_1) ὑπερβολῆς τὴν ἐφαπτομένην αὐτῆς διὰ τῶν σχέσεων $2\,x_1 = \mu$, $2\,y_1 = \nu$.

2) Εὐθεῖά τις κινεῖται οὕτως, ὥστε τὸ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον σχηματίζει μὲ τὰς πλευρὰς σταθερᾶς γωνίας, νὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν σταθερόν. Τίνα τόπον γράφει τὸ μέσον τῆς κινουμένης πλευρᾶς τοῦ τριγώνου;

3) Ὑπερβολῆς τινος γνωρίζομεν μίαν ἀσύμπτωτον καὶ τρία σημεῖα. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ ὑπερβολὴ καὶ ἡ ἄλλη αὐτῆς ἀσύμπτωτος διὰ τῆς χρήσεως τῶν χορδῶν τοῦ τριγώνου τῶν τριῶν σημείων.

4) Δείξατε ὅτι τὸ μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων τμῆμα ἐφαπτομένης ὑπερβολῆς εἶνε ἴσον μὲ τὴν διάμετρον αὐτῆς, τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ἐφαπτομένην ταύτην.

5) Δείξατε ὅτι αἱ συντεταγμέναι τοῦ μέσου χορδῆς παραλλήλου τῇ διαμέτρῳ $y = \lambda\, x$ εἶνε

$$\left(-\frac{\nu}{2\lambda}, \frac{\nu}{2}\right)$$

καὶ δείξατε ἐντεῦθεν ὅτι $y = -\lambda\, x$ εἶνε ἡ συζυγὴς διάμετρος τῆς $y = \lambda\, x$.

Ἰδιαιτέρως $y = x$, καὶ $y = -x$ εἶνε αἱ ἐξισώσεις τῶν ἀξόνων.

6) Δείξατε ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ σημεῖα (x_1, y_1), (x_2, y_2) τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον

$$\left(\frac{2\, x_1\, x_2}{x_1 + x_2}, \frac{2\, y_1\, y_2}{y_1 + y_2}\right)$$

καὶ ὅτι τοῦτο κεῖται ἐπὶ τῆς διαμέτρου, ἥτις διχοτομεῖ τὴν χορδὴν τῶν ἐπαφῶν.

7) Εὐθεῖά τις $\nu x + \mu\, y = \mu\nu$ κινεῖται οὕτως, ὥστε νὰ ἐφάπτεται τῆς ὑπερβολῆς $4\, x\, y = \gamma^2$. Τίνα τόπον γράφει τὸ σημεῖον Ρ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχόμενον τμῆμα $T_1\, T_2$ τῆς ἐφαπτομένης εὐθείας, ὥστε νὰ εἶνε $(T_1\, P) : (P\, T_2) = \lambda$;

8) Δύο ὑπερβολαὶ ἔχουν τὰς αὐτὰς ἀσυμπτώτους, ἀλλὰ διαφόρους ἑστιακὰς ἀποστάσεις. Αἱ ἐξισώσεις αὐτῶν ὡς πρὸς τὰς ἀσυμπτώτους των εἶνε

$$4\, x\, y = \gamma_1^2, \quad 4\, x\, y = \gamma_2^2$$

Τυχοῦσα διάμετρος τέμνει τὴν πρώτην ὑπερβολήν, ἔστω εἰς τὸ σημεῖον M_1 καὶ τὴν δευτέραν εἰς τὸ M_2. Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὸ M_1 καὶ M_2 θὰ εἶνε τότε παράλληλοι.

9) Εὕρετε τὰς συντεταγμένας τῶν ἑστιῶν καὶ τῶν κορυφῶν τῆς ὑπερβολῆς $4\, x\, y = \gamma^2$, ἐὰν ἡ γωνία τῶν ἀσυμπτώτων εἶνε ω. Εὕρετε τὰ α καὶ β διὰ τῶν γ καὶ ω.

10) Ὑπερβολῆς τινος γνωρίζομεν τὰς ἀσυμπτώτους καὶ τὰς συντεταγμένας ἑνὸς σημείου αὐτῆς ὡς πρὸς τὰς ἀσυμπτώτους. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ὑπερβολῆς ὡς καὶ τὰ α, β αὐτῆς.

11) Δείξατε διὰ τῆς $\mu\, \nu = \gamma^2$, ὅτι ἑκάστη περιφέρεια, διερχομένη διὰ τῶν ἑστιῶν ὑπερβολῆς τέμνει τὰς ἀσυμπτώτους εἰς τὰς τομὰς δύο ἐφαπτομένων τῆς ὑπερβολῆς. Δείξατε ὅτι ἡ ἰδιότης αὕτη ἰσχύει καὶ διὰ τὴν περιφέρειαν, ἥτις ἔχει τὸ κέντρον αὐτῆς ἐπὶ τοῦ πρωτεύοντος ἄξονος καὶ τέμνει καθέτως τὴν περιφέρειαν τῶν ἑστιῶν (ὑποθέτοντες ὅτι ἡ περιφέρεια τέμνει ἐν γένει τὰς ἀσυμπτώτους).

§ 140. Πόλος καὶ πολικὴ ὡς πρὸς ὑπερβολήν.—

α′) Ἔστω ἡ ὑπερβολὴ ὡς πρὸς ἄξονας τὰς συζυγεῖς διαμέτρους αὐτῆς $2\alpha'$, $2\beta'$

$$\frac{x^2}{\alpha'^2} - \frac{y^2}{\beta'^2} = 1$$

Θὰ θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τῆς ὑπερβολῆς ὡς κείμενον ἐκτὸς αὐτῆς, ἂν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν εὐθεῖαν δι' αὐτοῦ μὴ τέμνουσαν τὴν ὑπερβολήν· τοὐναντίον, θὰ θεωροῦμεν ἓν σημεῖον ὡς κείμενον ἐντὸς τῆς ὑπερβολῆς, ἂν οὐδεμίαν τοιαύτην εὐθεῖαν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν.

Ἐργαζόμενοι ἀκριβῶς ὡς ἐν τῇ ἐλλείψει (§ 126) θέτοντες $-\beta'^2$ ὅπου β'^2 εὑρίσκομεν ὅτι

«***ἐκ σημείου M_1 (x_1, y_1) τοῦ ἐπιπέδου ὑπερβολῆς δυνάμεθα νὰ φέρωμεν δύο ἐφαπτομένας αὐτῆς, ἐν γένει, αἵτινες εἶνε πραγματικαί, ἢ συμπίπτουν εἰς μίαν, ἢ εἶνε φανταστικαί, ἂν τὸ σημεῖον M_1 κεῖται ἐκτός, ἢ ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς, ἢ ἐντὸς αὐτῆς***».

Ἡ εὐθεῖα

$$\frac{xx_1}{\alpha'^2} - \frac{yy_1}{\beta'^2} = 1$$

καλεῖται *πολικὴ* τοῦ σημείου M_1, τὸ ὁποῖον καλεῖται *πόλος*, καὶ ἀποδεικνύονται ἀνάλογοι ἰδιότητες δι' αὐτὰ ὡς ἐν τῇ ἐλλείψει.

β') «***Ἡ πολικὴ ἑνὸς σημείου ἀσυμπτώτου ὑπερβολῆς εἶνε παράλληλος πρὸς αὐτήν· αὕτη συμπίπτει μὲ αὐτήν, ἂν τὸ σημεῖον εἶνε τὸ κατ' ἐξοχὴν σημεῖον τῆς ἀσυμπτώτου***».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Εὕρετε τὰς συντεταγμένας τοῦ πόλου τῆς εὐθείας $Ax + By + \Gamma = o$ ὡς πρὸς τὴν ὑπερβολὴν

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

2) Δοθείσης εὐθείας νὰ κατασκευασθῇ ὁ πόλος αὐτῆς.

3) Ἀποδείξατε τὴν ἀνωτέρω πρότασιν β') διὰ λογισμοῦ. (Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως τῆς πολικῆς τοῦ (x_1, y_1) εἶνε

$$\pm\frac{\beta}{\alpha}, \text{ ἂν εἶνε } y_1 = \pm\frac{\beta}{\alpha}x_1.$$

§ 141. Ἰδιότητες τῶν ἑστιῶν ὑπερβολῆς.—

α') Ἔστω ἡ ὑπερβολὴ

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \qquad (1)$$

καὶ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς M (x,y). Ἐὰν τεθῇ $(E'M) = \varrho'$, $(EM) = \varrho$, ἔχομεν ὡς γνωστὸν (§ 131, *α'*)

$$\varrho^2 = (\gamma - x)^2 + y^2, \quad \varrho'^2 = (\gamma + x)^2 + y^2 \qquad (2)$$

Δι' ἀφαιρέσεως αὐτῶν κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$(\varrho' + \varrho)(\varrho' - \varrho) = 4\gamma x$$

καὶ $$\varrho' + \varrho = \frac{2\gamma x}{\alpha} = 2\varepsilon x, \quad \left(\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} \text{ ἐκκεντρότης}\right)$$

Ἐκ τῶν $\qquad \varrho' + \varrho = 2\,\varepsilon\,x,\ \varrho' - \varrho = 2\,\alpha$

ἕπεται $\qquad \varrho = \varepsilon\,x - \alpha,\ \varrho' = \varepsilon\,x + \alpha \qquad (3)$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τούτων εὑρίσκομεν

$$\varrho\varrho' = \varepsilon^2 x^2 - \alpha^2 = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2} x^2 - \alpha^2 = \frac{\beta^2 x^2}{\alpha^2} + x^2 - \alpha^2$$

ἢ ἕνεκα τῆς ἐξισώσεως τῆς ὑπερβολῆς

$$\varrho\varrho' = \frac{\beta^2 x^2}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2 y^2}{\beta^2}. \qquad (4)$$

Ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας ΟΜ εἶνε $Y = \frac{y}{x} X$, ἡ τῆς ΟΜ′,συζυγοῦς διαμέτρου τῆς ΟΜ, θὰ εἶνε (§ 134, γ′) $Y = \frac{x}{y}\frac{\beta^2}{\alpha^2} X$. Αὕτη θὰ τέμνῃ τὴν συζυγῆ ὑπερβολὴν τῆς (1) εἰς τὸ σημεῖον

$$M' \left(\pm \frac{\alpha}{\beta} y,\ \pm \frac{\beta}{\alpha} x\right).$$

Οὕτω θὰ εἶνε $(OM') = \beta'^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} x^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2} y^2$.

Ἑπομένως ἔχομεν $\qquad \varrho\varrho' = \beta'^2, \qquad (5)$

ἤτοι, «***τὸ γινόμενον τῶν ἑστιακῶν ἀκτίνων ἑνὸς σημείου ὑπερβολῆς ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ἀντιστοίχου συζυγοῦς ἡμιδιαμέτρου αὐτῆς***».

ϛ′) Ἂν ζητοῦμεν τὰς ἀποστάσεις $(EZ) = R, (E'Z') = R'$ τῶν ἑστιῶν ὑπερβολῆς ἀπό τινος ἐφαπτομένης αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον $P(x_1, y_1)$ (σχ. 98), ἐχούσης ἐξίσωσιν

ἔχομεν $$\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$$

$$R = \left(\frac{yx_1}{\alpha^2} - 1\right) : \sqrt{\frac{x_1^2}{\alpha^4} + \frac{y_1^2}{\beta^4}} = \beta(\varepsilon x_1 - \alpha) : \sqrt{\frac{\beta^2 x_1^2}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2 y_1^2}{\beta^2}}$$

$$R' = \left(-\frac{yx_1}{\alpha^2} - 1\right) : \sqrt{\frac{x_1^2}{\alpha^4} + \frac{y_1^2}{\beta^4}} = -\beta(\varepsilon x_1 + \alpha) : \sqrt{\frac{\beta^2 x_1^2}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2 y_1^2}{\beta^2}}$$

Ἑπομένως, ἕνεκα τῶν (3) καὶ (4) ἔχομεν

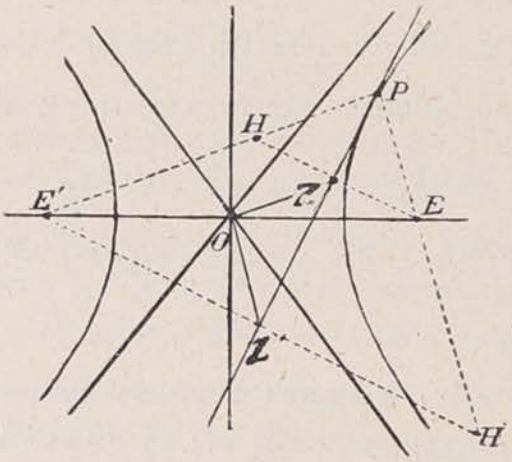
$$R = \beta\,\varrho : \beta',\quad R' = -\beta\,\varrho' : \beta',\ \text{καὶ}\ R\,R' = -\frac{\beta^2 \varrho\varrho'}{\beta'^2} \qquad (6)$$

ἐὰν ϱ,ϱ′ παριστάνουν τὰς ἑστιακὰς ἀκτῖνας τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς καὶ β′ τὴν συζυγῆ ἡμιδιάμετρον, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο. Ἄρα εἶνε ἕνεκα τῆς (5)

$$R\,R' = -\,\beta^2, \tag{7}$$

ἤτοι, «***τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τῶν ἑστιῶν ὑπερβολῆς ἀπό τινος ἐφαπτομένης αὐτῆς εἶνε σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ δευτερεύοντος ἡμιάξονος αὐτῆς***».

Τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον φανερώνει ὅτι αἱ ἑστίαι κεῖνται πάντοτε ἑκατέρωθεν τῆς ἐφαπτομένης, ἐνῶ ἐν τῇ ἐλλείψει κεῖνται αὗται πάντοτε πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς.



(Σχ. 98)

γ′) Ἐκ τῶν R καὶ R′ τῆς (6) ἔχομεν, θεωροῦντες τὰς ἀπολύτους τιμάς,

$$R : \varrho = R' : \varrho' \tag{8}$$

Ἐκ τούτου ἕπεται ἡ ὁμοιότης τῶν τριγώνων Ρ Ε Ζ, Ρ Ε′ Ζ′ (ἐνῷ Ζ, Ζ′ εἶνε οἱ πόδες τῶν καθέτων ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην ἐκ τῶν Ε καὶ Ε′) καὶ ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν ΕΡΖ, Ε′ΡΖ′· ἤτοι

«***ἡ ἐφαπτομένη ὑπερβολῆς διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῶν ἑστιακῶν αὐτῆς ἀκτίνων τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς***».

δ′) Καλοῦμεν *κάθετον ὑπερβολῆς* εἰς ἓν σημεῖον αὐτῆς τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο τῆς ἀφῆς. Ἐὰν φέρωμεν τὴν κάθετον τῆς ὑπερβολῆς εἰς τὸ σημεῖον Ρ, παρατηροῦμεν ὅτι αὕτη διχοτομεῖ τὴν παραπληρωματικὴν γωνίαν τῶν ἑστιακῶν ἀκτίνων τοῦ σημείου Ρ.

ε′) Ὡς ἐν τῇ ἐλλείψει ἀποδεικνύεται καὶ ἐνταῦθα ὅτι (σχ. 98)

«***ὁ τόπος τῶν συμμετρικῶν σημείων (Η καὶ Η′) ἑκάστης τῶν***

ἑστιῶν ὑπερβολῆς, ἐχούσης πρωτεύοντα ἄξονα 2α, ὡς πρὸς μεταβλητὴν ἐφαπτομένην αὐτῆς εἶνε περιφέρεια κύκλου, ἔχουσα κέντρον τὴν ἄλλην ἑστίαν καὶ ἀκτῖνα 2α».

ϛ΄) Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὡς ἐν τῇ ἐλλείψει ὅτι (σχ. 98)

«ὁ τόπος τῶν ποδῶν (Ζ καὶ Ζ΄) τῶν καθέτων, αἵτινες ἄγονται ἐκ τῶν ἑστιῶν ὑπερβολῆς, ἐχούσης πρωτεύοντα ἄξονα 2α, ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας αὐτῆς εἶνε περιφέρεια κύκλου ἔχουσα κέντρον τὸ τῆς ὑπερβολῆς καὶ ἀκτῖνα α».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς καθέτου ὑπερβολῆς εἰς ἓν σημεῖον αὐτῆς καὶ δείξατε ὡς ἐν τῇ ἐλλείψει ἀναλόγους ἰδιότητας αὐτῆς.

2) Κατασκευάσατε εἰς δοθὲν σημεῖον ὑπερβολῆς τὴν ἐφαπτομένην καὶ τὴν κάθετον αὐτῆς.

3) Κατασκευάσατε τὰς ἐφαπτομένας ὑπερβολῆς, τὰς διερχομένας διὰ σημείου κειμένου ἐκτὸς αὐτῆς (τῇ βοηθείᾳ τῶν συμμετρικῶν σημείων τῶν ἑστιῶν).

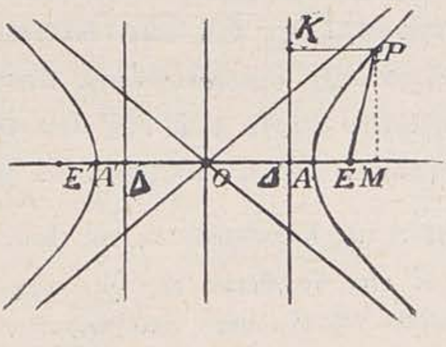
4) Δείξατε ὅτι ἡ ἀπόστασις μιᾶς ἑστίας ὑπερβολῆς ἀπὸ μιᾶς ἀσυμπτώτου ἰσοῦται μὲ β.

5) Δείξατε ὅτι ἔλλειψις καὶ ὑπερβολή, αἵτινες ἔχουν τὰς αὐτὰς ἑστίας, τέμνονται καθέτως· ἤτοι εἰς ἓν σημεῖον τομῆς αὐτῶν ἡ ἐφαπτομένη τῆς μιᾶς εἶνε κάθετος τῆς ἄλλης.

§ 142. Διευθετοῦσαι ὑπερβολῆς.—

α΄) Καλοῦμεν *διευθετούσας* ὑπερβολῆς τὰς πολικὰς εὐθείας τῶν ἑστιῶν αὐτῆς. Τὰς ἐξισώσεις τῶν διευθετουσῶν ὑπερβολῆς εὑρίσκομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1,$$



(Σχ. 99)

ἐὰν θέσωμεν $x_1 = \pm \gamma$, $y_1 = 0$, ὅτε ἔχομεν

$$x = \pm \frac{\alpha^2}{\gamma} \qquad (1)$$

Ὅθεν, αἱ διευθετοῦσαι τῆς ὑπερβολῆς εἶνε εὐθεῖαι κάθετοι ἐπὶ τὸν πρωτεύοντα ἄξονα αὐτῆς καὶ ἀπέχουν ἀπὸ τοῦ κέντρου ταύτης ἀποστάσεις $\pm \frac{\alpha^2}{\gamma} = \pm \frac{\alpha}{\varepsilon}$ ἀντιστοίχως (σχ. 99).

β') Ἐὰν εὕρωμεν διὰ τυχὸν σημεῖον P (x, y) τῆς ὑπερβολῆς τὴν ἀπόστασιν (EP) καὶ τὴν (KP) ἀπὸ τῆς διευθετούσης ΔΚ, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ E, ἔχομεν

$$(EP) = \varrho = \varepsilon x - \alpha$$

$$(KP) = (\Delta M) = (OM) - (O\Delta) = x - \frac{\alpha}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}(\varepsilon x - \alpha).$$

Ἑπομένως $\qquad \dfrac{(EP)}{(KP)} = \varepsilon,$

ἤτοι, «***ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἑνὸς σημείου ὑπερβολῆς ἀπὸ τῆς μιᾶς τῶν ἑστιῶν καὶ τῆς ἀντιστοίχου αὐτῆς διευθετούσης εἶνε σταθερὸς καὶ ἴσος μὲ τὴν ἐκκεντρότητα τῆς ὑπερβολῆς***».

Ὁ λόγος οὗτος εἶνε διὰ τὴν ὑπερβολὴν μὲν μεγαλύτερος τῆς μονάδος, ἐνῶ διὰ τὴν ἔλλειψιν μικρότερος αὐτῆς.

γ') Ἐὰν σημεῖόν τι M_1 (x_1, y_1) κεῖται ἐπὶ τῆς διευθετούσης, τῆς ἀντιστοίχου εἰς τὴν ἑστίαν E, θὰ εἶνε $x_1 = \dfrac{\alpha^2}{\gamma}$, ἡ δὲ πολικὴ τούτου ἔχει ἐξίσωσιν

$$\frac{x}{\gamma} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1.$$

Συγκρίνοντες τοὺς συντελεστὰς διευθύνσεως ταύτης καὶ τῆς εὐθείας EM_1 εὑρίσκομεν, ὡς ἐν τῇ ἐλλείψει, ὅτι

«***ἡ εὐθεῖα ἥτις συνδέει τὴν μίαν ἑστίαν ὑπερβολῆς μὲ τὸν πόλον τυχούσης χορδῆς, διερχομένης διὰ τῆς ἑστίας, εἶνε κάθετος ἐπ' αὐτήν***». Ἤ, «***τὸ τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης ὑπερβολῆς, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τοῦ σημείου ἁφῆς καὶ τῆς διευθετούσης αὐτῆς φαίνεται ἀπὸ τὴν ἀντίστοιχον ἑστίαν αὐτῆς ὑπὸ γωνίαν ὀρθήν***».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Εὕρετε τὰς διευθετούσας τῆς ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς.

2) Κατασκευάσατε (μὲ τὴν βοήθειαν τῆς γ') τὰς δύο ἐφαπτομένας ὑπερβολῆς, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἀπὸ σημεῖον διευθετούσης αὐτῆς.

3) Ὑπερβολῆς τινος δίδεται μία ἑστία, ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς διευθετοῦσα καὶ ἡ ἐκκεντρότης. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ ὑπερβολή.

4) Δείξατε ὅτι, ἂν σημεῖόν τι δὲν κεῖται ἐπὶ ὑπερβολῆς ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ἀπὸ τῆς μιᾶς ἑστίας καὶ τῆς ἀντιστοίχου αὐτοῦ διευθετούσης εἶνε διάφορος τοῦ ε.

Περὶ παραβολῆς

§ 143. Ὁρισμοὶ καὶ ἰδιότητες παραβολῆς.—

α΄) *Παραβολὴ* καλεῖται ὁ τόπος τῶν σημείων ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ δοθὲν σημεῖον καὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν αὐτοῦ.

Τὸ δοθὲν σημεῖον καλεῖται *ἑστία*, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα *διευθετοῦσα* τῆς παραβολῆς. Ἂν ΔΔ εἶνε ἡ διευθετοῦσα καὶ Μ σημεῖον τῆς παραβολῆς, Ε δὲ ἡ ἑστία αὐτῆς, θὰ ἔχωμεν (ΕΜ) = (ΛΜ), ἐνῶ (ΛΜ) παριστάνει τὴν ἀπόστασιν τοῦ Μ ἀπὸ τῆς ΔΔ (σχ. 100).

β΄) Ἡ παραβολὴ εἶνε συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΕΧ τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν διευθετοῦσαν ΔΔ ἐκ τῆς ἑστίας αὐτῆς Ε. Ἡ εὐθεῖα αὕτη ΟΧ καλεῖται καὶ *ἄξων τῆς παραβολῆς*.

γ΄) Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τόξον παραβολῆς διὰ συνεχοῦς κινήσεως ὡς ἑξῆς.

Στηρίζομεν ἐπὶ χάρτου κανόνα οὕτως, ὥστε ἡ ἀκμὴ αὐτοῦ νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν διευθετοῦσαν τῆς παραβολῆς, ἔστω τὴν ΔΔ. Ἔπειτα λαμβάνομεν γνώμονα καὶ δένομεν εἰς τὸ ἓν ἄκρον τῆς ὑποτεινούσης αὐτοῦ τὸ ἄκρον νήματος, τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος ὅσον καὶ ἡ παρακειμένη πλευρὰ τοῦ γνώμονος, τὸ δὲ ἄλλο ἄκρον τοῦ νήματος εἰς τὴν δοθεῖσαν ἑστίαν τῆς παραβολῆς Ε. Ἀκολούθως ἐφαρμόζομεν τὴν ἄλλην πλευρὰν τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ γνώμονος ἐπὶ τοῦ κανόνος καὶ διὰ τῆς αἰχμῆς γραφίδος τείνομεν τὸ νῆμα ὥστε, ἡ γραφὶς νὰ ἐφάπτεται τῆς καθέτου πλευρᾶς τοῦ γνώμονος. Ἔπειτα μετακινοῦμεν ἐπὶ τοῦ κανόνος τὸν γνώμονα καὶ διὰ τῆς αἰχμῆς τῆς γραφίδος, ἔχοντες διηνεκῶς τὸ νῆμα τεταμένον κατὰ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ γνώμονος, γράφομεν τόξον παραβολῆς, ἐχούσης ἑστίαν τὸ δοθὲν σημεῖον Ε καὶ διευθετοῦσαν τὴν εὐθεῖαν ΔΔ. Διότι ἕκαστον σημεῖον αὐτῆς ἀπέχει ἰσάκις ἀπὸ τὸ Ε καὶ τὴν ΔΔ.

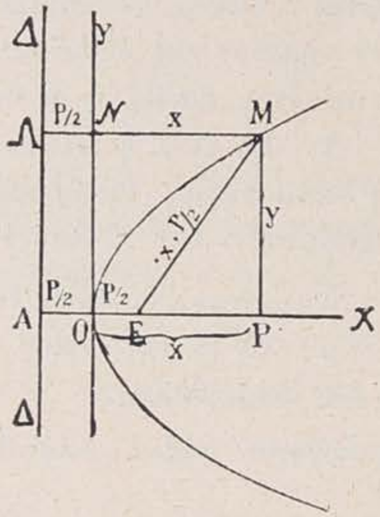
§ 144. Ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς.—

α΄) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς παραβολῆς, λαμβάνομεν ὡς ἀρχὴν ὀρθογωνίων συντεταγμένων τὸ μέσον Ο τοῦ τμήματος ΕΑ τῆς εὐθείας, ἥτις ἄγεται ἐκ τῆς ἑστίας Ε κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΔ (σχ. 100). Τὴν εὐθεῖαν ΟΕ λαμβάνομεν ὡς θετικὸν ἄξονα τῶν x, τὴν δ' ἐπ' αὐτῆς κάθετον Oy ὡς θετικὸν ἄξονα τῶν y. Παριστάνομεν τὸ μῆκος (ΑΕ) διὰ τοῦ p, ἤτοι θέτομεν (ΟΕ) $= \frac{p}{2}$ καὶ καλεῖται τὸ p *ἡμιπαράμετρος* τῆς παραβολῆς. Ἔστω τυχὸν σημεῖον $M(x, y)$ τῆς παραβολῆς καὶ $(ΛΜ)$, (EM) αἱ ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τῆς διευθετούσης ΔΔ καὶ τῆς ἑστίας Ε.

Θὰ εἶνε $(EP) = (OP) - (OE)$, $(EM) = (ΛM)$.

Ἀλλ' εἶνε

$(PM) = y, (OP) = x, (EM)^2 = (PM)^2 + (EP)^2, (ΛM) = (ΛN) + (NM)$.



(Σχ. 100)

Ἑπομένως ἔχομεν

$$(EM)^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2, \qquad (ΛM) = \frac{p}{2} + x$$

Ἄρα $$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 + = \left(\frac{p}{2} + x\right)^2,$$

ἢ $$\boxed{y^2 = 2\,p\,x} \qquad (1)$$

ἥτις εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς. Αὕτη ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων τῆς ἀρχῆς Ο (ο,ο), ἄρα ἡ παραβολὴ διέρχεται δι' αὐτῆς, ἥτις καλεῖται ***κορυφὴ τῆς παραβολῆς***. Ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει μόνον τὸ τετράγωνον τοῦ y, ἡ παραβολὴ εἶνε συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x, ἤτοι ὡς πρὸς τὸν ἄξονα αὐτῆς.

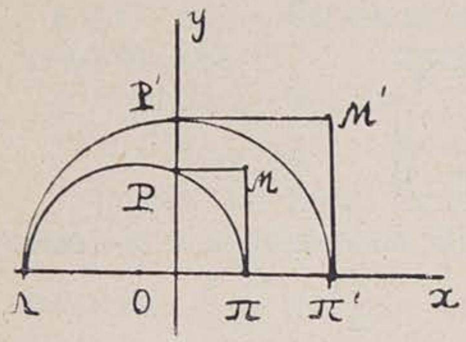
β') Αἱ συντεταγμέναι σημείου κειμένου ἐκτὸς τῆς παραβολῆς, π. χ. τοῦ Α $\left(-\frac{p}{2}, o\right)$, τιθέμεναι εἰς τὴν $y^2 - 2\,p\,x$ δίδουν ἐξαγόμενον θετικόν, αἱ δὲ συντεταγμέναι σημείου κειμένου ἐντὸς τῆς παραβολῆς, π. χ. τοῦ Ε $\left(\frac{p}{2}, o\right)$, δίδουν ἐξαγόμενον θετικόν.

γ') Ἡ ἐξίσωσις (1) ἐπαληθεύεται μόνον διὰ θετικὰς τιμὰς τοῦ **x**· ἤτοι τὸ x δύναται νὰ μεταβάλλεται ἀπὸ ο μέχρι τοῦ $+\infty$, ὅτε τὸ y μεταβάλλεται ἐπίσης ἀπὸ ο μέχρι τοῦ $\pm\infty$. Ἑπομένως ἡ παραβολὴ κεῖται δεξιὰ τοῦ ἄξονος τῶν y. Διὰ $x = \frac{p}{2}$ εὑρίσκομεν $y = \pm p$, αἵτινες εἶνε αἱ τεταγμέναι, αἵτινες ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν ἑστίαν τῆς παραβολῆς καὶ ἥτις ὁρίζεται, ὅταν δοθῇ ἡ ἡμιπαράμετρος αὐτῆς.

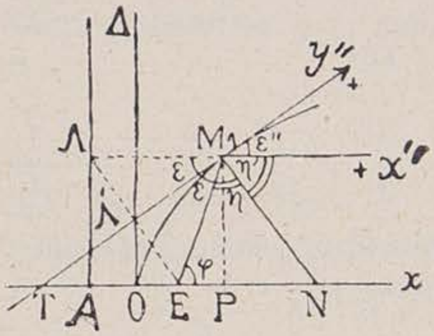
ϛ′) Δοθείσης τῆς ἡμιπαραμέτρου p, τῆς κορυφῆς O καὶ τοῦ ἄξονος παραβολῆς, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν σημεῖα αὐτῆς ὡς ἑξῆς (σχ. 101).

Λαμβάνομεν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς O τοῦ ἄξονος τὸ τμῆμα OΛ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶνε (OΛ) = 2 p. Γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, διερχομένην διὰ τοῦ Λ, μὲ κέντρον κείμενον ἐπὶ τοῦ ἄξονος Ox, ἔστω τὴν ΛΡΠ. Ἡ κάθετος εὐθεῖα ἐπὶ τὸν ἄξονα Ox εἰς τὸ σημεῖον αὐτοῦ O τέμνει τὴν περιφέρειαν, ἔστω εἰς τὸ σημεῖον P. Ἐκ τοῦ ἄκρου Π τῆς διαμέτρου ΛOΠ φέρομεν παράλληλον τῇ oy καὶ λαμβάνομεν (ΠΜ)=(OP). Τὸ σημεῖον M εἶνε σημεῖον τῆς παραβολῆς. Διότι εἶνε

$$(OP)^2 = (ΠM)^2 = (ΛO)\ (OΠ),$$



(Σχ. 101)



(Σχ. 102)

ἢ ἂν τεθῇ $(OΠ) = x,\ (OP) = (ΠM) = y$

θὰ εἶνε $y^2 = 2\,p.\ x$

ἤτοι τὸ σημεῖον M κεῖται ἐπὶ παραβολῆς, ἐχούσης ἡμιπαράμετρον p.

Ὁμοίως ἂν γράψωμεν τὴν περιφέρειαν ΛΡ′Π′, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ σημεῖον M′ ἔχον τετμημένην $x = (OΠ')$ καὶ τεταγμένην $y = (Π'M')$ κεῖται ἐπὶ τῆς παραβολῆς $y^2 = 2\,p\,x$.

ε′) Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) ἔχομεν

$$y^2 = 2\,x.p,$$

ἤτοι τὸ y εἶνε μέσον ἀνάλογον τοῦ 2 x καὶ τοῦ p. Ἡ ἰδιότης αὕτη ὁδηγεῖ εἰς τὴν ἑξῆς εὕρεσιν σημείων τῆς παραβολῆς, ἐχόντων δεδομένην τετμημένην x (σχ. 102). Ἐὰν λάβωμεν ἑκατέρωθεν τῆς ἀρχῆς O τὰ σημεῖα P καὶ T, ὥστε νὰ εἶνε (OP)=x, (OT) = x (ἀπολύτως) καὶ (PN)=p, γράψωμεν δὲ περιφέρειαν μὲ διάμετρον τὴν TN, ἡ ἐκ τοῦ P κάθετος ἐπὶ τὴν TN θὰ τμήσῃ τὴν περιφέρειαν, ἔστω εἰς τὰ σημεῖα M_1, M_1', τὰ ὁποῖα εἶνε σημεῖα τῆς παραβολῆς (1). Διότι θὰ ἔχωμεν

$$y^2 = (PM_1)^2 = (PM'_1)^2 = (TP)\ (PN) = 2\ x.\ p.$$

Τὸ κέντρον τῆς περιφερείας αὐτῆς ἔχει τετμημένην

$$\frac{1}{2}\left[(x+p)-x=\right]\frac{p}{2},$$

ἤτοι εἶνε ἡ ἑστία Ε τῆς παραβολῆς (σχ. 102).

§ 143. Πολικὴ ἐξίσωσις παραβολῆς.—

Ἂν ὡς πόλον λάβωμεν τὴν ἑστίαν Ε τῆς παραβολῆς καὶ πολικὸν ἄξονα τὸν ἄξονα αὐτῆς καὶ (ρ, φ) εἶνε αἱ πολικαὶ συντεταγμέναι τυχόντος σημείου αὐτῆς M_1 (x,y), θὰ ἔχωμεν (σχ. 102)

$$(EM_1)=\rho=(\Lambda M_1)=\frac{p}{2}+x$$

Ἀλλ' εἶνε $\quad x=(OP)=(OE)+(EP)=\frac{p}{2}+\rho\ \sigma\upsilon\nu\ \varphi.$

Ἑπομένως $\quad \rho=\frac{p}{2}+\rho\ \sigma\upsilon\nu\ \varphi+\frac{p}{2}$

καὶ $\quad \rho=\frac{p}{1-\sigma\upsilon\nu\ \varphi}$

ἢ $\quad \boxed{\rho=\frac{p}{1-\varepsilon\ \sigma\upsilon\nu\ \varphi}} \qquad (\varepsilon=1)$

ἥτις εἶνε ἡ πολικὴ ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς ὡς πρὸς πόλον τὴν ἑστίαν αὐτῆς Ε.

Διὰ $\varphi=\frac{\pi}{2}$ ἔχομεν $\rho=p$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Δείξατε ὅτι ἡ παραβολὴ εἶνε ὁ τόπος τῶν κέντρων πασῶν τῶν περιφερειῶν, αἵτινες διέρχονται διὰ δεδομένου σημείου καὶ ἐφάπτονται δοθείσης εὐθείας.

2) Τίς εἶνε ἡ ἐξίσωσις παραβολῆς, ἐνῷ ἡ ἀπόστασις τῆς ἑστίας ἀπὸ τῆς κορυφῆς αὐτῆς 3.

3) Διὰ τὰ σημεῖα παραβολῆς, ἐχούσης ἡμιπαράμετρον p εἶνε $y^2-2px=0$. Διὰ τίνα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς τὸ α' μέλος τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶνε θετικὸν καὶ διὰ τίνα ἀρνητικόν;

4) Ποῦ κεῖνται τὰ σημεῖα (2, 3), (— 1, 2), (3, — 1), (9, 5, — 3) ὡς πρὸς τὴν παραβολὴν $y^2-5x=0$;

5) Πόση εἶνε ἡ ἡμιπαράμετρος τῆς παραβολῆς $y^2=5x$; Πόσον ἀπέχουν ἀπ' ἀλλήλων ἡ ἑστία καὶ ἡ κορυφὴ αὐτῆς;

6) Μεταφέρατε τὸ σύστημα τῶν συντεταγμένων παραλλήλως ἑαυτῷ, ὥστε ἡ ἑστία παραβολῆς νὰ εἶνε ἀρχὴ τῶν νέων ἀξόνων. Τίς ἡ νέα ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς;

7) Μεταφέρατε τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων εἰς τὸ σημεῖον (x_0, y_0) παραβολῆς καὶ δείξατε ὅτι αἱ ἐξισώσεις αὐτῆς ὡς πρὸς νέους ἄξονας παραλλήλους πρὸς τοὺς ἀρχικοὺς εἶνε

$$y^2+2y_0y-2px=0.$$

Διατὶ ἐλλείπει ἀπὸ αὐτὴν τὸ x_0;

8) Παραβολῆς τινος δίδεται ὁ ἄξων ἡ κορυφὴ καὶ ἓν σημεῖον Μ. Νὰ προσδιορήσετε τὴν ἡμιπαράμετρον τὴν ἑστίαν καὶ τὴν διευθετοῦσαν αὐτῆς.

9) Παραβολῆς τινος γνωρίζομεν τὸν ἄξονα τὴν κορυφὴν καὶ ἓν σημεῖον M_1 (x_1, y_1). Τίς ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς;

10) Κατασκευάσατε τὰς παραβολὰς $y^2 = 3x$, $y^2 = 5x$, $y^2 = 6x$.

11) Τίνα καμπύλην παριστάνει ἡ ἐξίσωσις $y^2 = -2px$.

12) Τίνα καμπύλην παριστᾷ ἡ ἐξίσωσις $x^2 = 2py$;

13) Κατασκευάσατε τὴν καμπύλην $y = x^2$ καὶ εὕρετε τὴν διευθετοῦσαν καὶ τὴν ἑστίαν αὐτῆς.

14) Φέρατε τὴν ἐξίσωσιν $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ εἰς τὴν μορφὴν

$$y + \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$$

καὶ δείξατε ὅτι παριστάνει παραβολὴν μὲ ἄξονα κατακόρυφον καὶ κορυφὴν $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\beta^2\ \ 4\alpha\gamma}{4\alpha}\right)$. Ποῦ κεῖται ἡ ἑστία αὐτῆς;

§ 146. Διάμετροι παραβολῆς· θέσεις εὐθείας ὡς πρὸς παραβολήν.—

α΄) Ἔστω ἡ παραβολὴ $y^2 = 2px$.

Ζητεῖται ἡ θέσις τυχούσης εὐθείας ὡς πρὸς αὐτήν.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῆς παραβολῆς ἕπεται ὅτι, πᾶσα εὐθεῖα $y = \beta$ παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν x, τέμνει αὐτὴν εἰς ἓν σημεῖον, ἔχον συντεταγμένας $\left(\frac{\beta^2}{2p}, \beta\right)$.

β΄) Πᾶσα εὐθεῖα παράλληλος τῷ ἄξονι τῆς παραβολῆς καλεῖται *διάμετρος* αὐτῆς.

γ΄) Πᾶσα εὐθεῖα $x = \alpha$ παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν y $(\alpha > o)$ τέμνει τὴν παραβολὴν εἰς δύο σημεῖα συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα αὐτῆς, τὰ $(\alpha, \pm\sqrt{2p\alpha})$. Διὰ $x = o$ τὰ σημεῖα ταῦτα συμπίπτουν μὲ τὴν κορυφὴν τῆς παραβολῆς. Ἑπομένως ὁ ἄξων τῶν y ἐφάπτεται τῆς παραβολῆς εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῆς O καὶ καλεῖται ***ἐφαπτομένη εἰς τὴν κορυφὴν τῆς παραβολῆς.***

δ΄) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν θέσιν τῆς εὐθείας $y = \lambda x + \beta$ ὡς πρὸς τὴν παραβολὴν $y^2 = 2px$, ἀρκεῖ νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων τούτων. Δι᾽ ἀπαλοιφῆς τοῦ x εὑρίσκομεν

$$\lambda y^2 - 2py + 2p\beta = o \qquad (1)$$

Ἐκ ταύτης συνάγομεν ὅτι ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα τέμνει τὴν παραβολήν, ἢ ἐφάπτεται αὐτῆς, ἢ δὲν ἔχει κοινὸν σημεῖον μὲ αὐτήν, ἐὰν τὸ $p^2 - 2\lambda\beta p$ εἶνε θετικόν, ἢ μηδέν, ἢ ἀρνητικόν.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ p εἶνε θετικόν, τὸ

$$p^2 - 2\lambda\beta p = 2p\left(\frac{p}{2} - \lambda\beta\right)$$

θὰ εἶνε θετικόν, ἢ μηδέν, ἢ ἀρνητικόν, ἂν τὸ $\frac{p}{2}$ εἶνε μεγαλύτερον τοῦ λ β, ἢ ἴσον μὲ αὐτό, ἢ μικρότερον τούτου. Ἀλλ' ἂν ἐκ τῆς τομῆς B (ο, β) τῆς δοθείσης εὐθείας μὲ τὸν ἄξονα τῶν y φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν, ἔστω τὴν BK, ἐνῶ K εἶνε τὸ σημεῖον καθ' ὃ αὕτη τέμνει τὸν ἄξονα τῆς παραβολῆς, θὰ ἔχωμεν (§ 70,β',γ') ἂν φ παριστάνῃ τὴν γωνίαν τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα μὲ τὸν ἄξονα τῶν x,

$$\lambda = \varepsilon\varphi\ \varphi = \frac{(OK)}{(OB)} = \frac{(OK)}{\beta}$$

ἤτοι (OK) = λ β. Ἐξ ἄλλου ἔχομεν $\frac{p}{2}$ = (OE) καὶ ἑπομένως

«***τυχοῦσα εὐθεῖα τέμνει τὴν παραβολήν, εἰς δύο σημεῖα, ἢ ἐφάπτεται αὐτῆς, ἢ κεῖται ἐκτὸς αὐτῆς, ἐὰν ἡ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν κάθετος εἰς τὴν τομὴν αὐτῆς μὲ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὴν κορυφὴν τῆς παραβολῆς τέμνῃ τὸν ἄξονα ταύτης πρὸ τῆς ἑστίας αὐτῆς, ἢ εἰς τὴν ἑστίαν, ἢ πέραν αὐτῆς***».

Οὕτω ἡ ΛΛ'Ε κάθετος τῇ ἐφαπτομένῃ M_1T εἰς τὸ σημεῖον Λ' (καθ' ὃ ἡ M_1T τέμνει τὸν ἄξονα τῶν y) διέρχεται διὰ τῆς ἑστίας E (σχ. 102).

ε') Ἔστω ὅτι ἡ εὐθεῖα y = λ x + β τέμνει τὴν παραβολὴν εἰς δύο σημεῖα M_1 (x_1, y_1), M_2 (x_2, y_2), ὅτε y_1, y_2 εἶνε αἱ ῥίζαι τῆς (1), ἡ δὲ τεταγμένη y τοῦ μέσου τοῦ M_1 M_2, τὸ ὁποῖον καλεῖται *χορδὴ* τῆς παραβολῆς, θὰ εἶνε

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{p}{\lambda}. \qquad (2)$$

Ἀλλὰ τοῦτο εἶνε ἀνεξάρτητον τοῦ β. Ἑπομένως, ἂν κατασκευάσωμεν πάσας τὰς παραλλήλους εὐθείας πρὸς τὴν y = λ x + β, ἐνῶ θεωρεῖται τὸ λ σταθερὸν καὶ μεταβλητὸν τὸ β, λαμβάνομεν ὡς τεταγμένην τοῦ μέσου ἑκάστης ἀντιστοίχου χορδῆς τῆς παραβολῆς $\frac{p}{\lambda}$.

Ἑπομένως ἔχομεν ὅτι, «***ἐν παραβολῇ τὰ μέσα παραλλήλων χορδῶν αὐτῆς κεῖνται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου τῷ ἄξονι αὐτῆς· ἤτοι ἐπὶ μιᾶς διαμέτρου αὐτῆς***».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Τίνα θέσιν ἔχουν αἱ εὐθεῖαι 4 x — 2 y + 7 = ο, 5 x — y — 1 = ο, 18 x — y + 1 = ο, x + 2 y + 6 = ο, x + y — 1 = ο ὡς πρὸς τὴν παραβολὴν y^2 — 6 x = ο;

2) Εὕρετε διὰ τὴν παραβολὴν y^2 — 3 x = ο τὸν τόπον τῶν μέσων τῶν πρὸς τὴν εὐθεῖαν 3 x — 7 y + 2 = ο παραλλήλων χορδῶν. Εἰς ποῖον σημεῖον τέμνει ὁ τόπος αὐτὸς τὴν παραβολήν;

3) Δίδεται ἡ παραβολὴ $y^2 = \frac{7}{2}x$ καὶ ἡ διάμετρος αὐτῆς $5y - 2 = o$. Τὶς εἶνε ἡ ἐξίσωσις τοῦ συστήματος παραλλήλων χορδῶν, αἵτινες διχοτομοῦνται ὑπὸ τῆς διαμέτρου ταύτης;

4) Δίδεται ἡ παραβολὴ $y^2 = 8x$ καὶ ἡ διάμετρος αὐτῆς $y + 3 = o$. Τὶς εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς χορδῆς, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ σημείου (5, 2), καὶ διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς δοθείσης διαμέτρου;

5) Δίδεται ἡ παραβολὴ $y^2 = 2px$. Κατασκευάσατε τὴν διάμετρον, ἐφ' ἧς κεῖνται τὰ μέσα τῶν χορδῶν, αἵτινες ἔχουν δοθέντα συντελεστὴν διευθύνσεως καὶ ἰδιαιτέρως ἐκείνην εἰς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ γωνία 45^0 μὲ τὸν ἄξονα τῶν x.

6) Δείξατε ὅτι εὐθεῖά τις τέμνει, ἢ ἐφάπτεται, ἢ κεῖται ἐκτὸς παραβολῆς, ἂν ἡ ἐκ τῆς ἑστίας κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τέμνῃ αὐτὴν πρό, ἢ ἐπί, ἢ ὄπισθεν τῆς διευθετούσης.

§ 147. Ἐξίσωσις εὐθείας ἐφαπτομένης εἰς δοθὲν σημεῖον παραβολῆς.—

α΄) Ἔστω ὅτι ἡ εὐθεῖα $y = \lambda x + \beta$ τέμνει τὴν παραβολὴν $y^2 = 2px$ εἰς δύο σημεῖα P_1 καὶ P_2 ὅτε θὰ εἶνε $\lambda\beta < \frac{p}{2}$.

Ἐὰν ἤδη ἡ εὐθεῖα αὕτη κινῆται παραλλήλως ἑαυτῇ, ὥστε τὸ μὲν λ νὰ διατηρῆται ἀμετάβλητον, τὸ δὲ β νὰ μεταβάλλεται ὥστε νὰ αὐξάνεται τὸ γινόμενον λβ, τότε τὰ M_1 M_2 πλησιάζουν ἄλληλα, ἐνῷ τὸ μέσον τῆς χορδῆς P_1 P_2 διαγράφει τὴν διάμετρον $y = \frac{p}{\lambda}$.

Ὅταν εἶνε $\lambda\beta = \frac{p}{2}$ τὰ P_1, P_2 συμπίπτουν εἰς ἓν σημεῖον, ἔστω τὸ M_1, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς παραβολῆς καὶ τῆς διαμέτρου $y = \frac{p}{\lambda}$, ἄρα ἔχει τεταγμένην $y_1 = \frac{p}{\lambda}$ καὶ ἑπομένως τετμημένην $x_1 = \frac{p}{2\lambda^2}$.

Τὴν εὐθεῖαν αὐτήν, ἥτις εἶνε τὸ ὅριον τῶν θέσεων εὐθείας, τεμνούσης τὴν παραβολὴν εἰς δύο σημεῖα, ὅταν κινῆται αὕτη μέχρις ὅτου ταῦτα συμπέσουν εἰς τὸ M_1 (§ 100, γ΄), καλοῦμεν διὰ τοῦτο *ἐφαπτομένην* τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σημεῖον M_1 καὶ παρατηροῦμεν ὅτι

β΄) «***ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ ἄκρον μιᾶς διαμέτρου παραβολῆς εἶνε παράλληλος πρὸς τὰς χορδάς, αἵτινες διχοτομοῦνται ὑπὸ τῆς διαμέτρου ταύτης***».

γ΄) Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι, πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἔχουσαν συντελεστὴν διευθύνσεως λ, ἀντιστοιχεῖ μία μόνη ἐφαπτομένη, αἱ δὲ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τῆς ἁφῆς αὐτῆς εἶνε $\left(\frac{p}{2\lambda^2}, \frac{p}{\lambda}\right)$.

Ἀντιστρόφως εἰς δοθὲν σημεῖον (x_1, y_1) παραβολῆς ἀντιστοιχεῖ μία ὡρισμένη ἐφαπτομένη αὐτῆς, ἔχουσα συντελεστὴν διευθύνσεως $\lambda = \frac{p}{y_1}$.

δ′) Οὕτω ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον $M_1(x_1, y_1)$ τῆς παραβολῆς $y^2 = 2px$ εἶνε

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1)$$

ἢ

$$yy_1 - y_1^2 = p(x - x_1).$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ εἶνε $\quad y_1^2 = 2\,p\,x_1$

ἕπεται ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον (x_1, y_1) εἶνε

$$\boxed{yy_1 = p(x + x_1)}$$

§ **148. Ἰδιότητες ἐφαπτομένης παραβολῆς.—**

α′) Αἱ συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τῆς ἐφαπτομένης $yy_1 = p(x + x_1)$ εἰς τὸ $M_1(x_1, y_1)$ τῆς παραβολῆς $y^2 = 2\,p\,x$, τὰς ὁποίας παριστάνομεν διὰ τῶν α καὶ β εἶνε

$$\alpha = (OT) = -x_1, \quad \beta = (o\Lambda') = \frac{p\,x_1}{y_1} = \frac{y_1}{2},$$

ἤτοι, «***ἡ ἐφαπτομένη τέμνει τὸν ἄξονα τῆς παραβολῆς εἰς ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τῆς κορυφῆς αὐτῆς ὅσον καὶ ἡ ὀρθὴ προβολὴ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῆς παραβολῆς***».

«***Ἡ τεταγμένη ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τῆς ἐφαπτομένης παραβολῆς ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς τεταγμένης τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς***».

β′) Ἵνα λοιπὸν κατασκευάσωμεν τὴν ἐφαπτομένην παραβολῆς εἰς ἓν σημεῖον αὐτῆς M_1, λαμβάνομεν ἀριστερὰ τῆς κορυφῆς μῆκος (ΟΤ) ἴσον μὲ τὴν τετμημένην τοῦ σημείου καὶ συνδέομεν τὸ Τ μὲ τὸ δοθὲν σημεῖον.

γ′) Ἐὰν ἐκ τοῦ M_1 φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν $M_1\Lambda$ κάθετον ἐπὶ τὴν διευθετοῦσαν, θὰ ἔχωμεν $(\Lambda M_1) = (EM_1)$. Ἐπειδὴ δ' εἶνε (σχ. 102)

$$(O\Lambda') = \frac{1}{2}y_1, \quad (A\Lambda) = y_1,$$

ἕπεται ὅτι τὰ Ε, Λ′, Λ κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ ὅτι $(E\Lambda') = (\Lambda'\Lambda)$. Οὕτω τὰ τρίγωνα $E\Lambda'M_1$ καὶ $\Lambda\Lambda'M_1$ εἶνε ἴσα. Ἄρα καὶ αἱ γωνίαι $EM_1\Lambda'$, $\Lambda M_1\Lambda'$ εἶνε ἴσαι, ἤτοι ἡ ε=ε′ (σχ. 102) ἡ δὲ ΕΛ′ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην.

Ἤτοι «***ἡ ἐφαπτομένη παραβολῆς διχοτομεῖ τὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν ἡ ἑστιακὴ ἀκτὶς καὶ ἡ διάμετρος τῆς παραβολῆς, αἵτινες διέρχονται διὰ τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς***».

«*Ἡ κάθετος, ἥτις ἄγεται ἐκ τῆς ἑστίας παραβολῆς ἐπὶ τυχοῦσαν ἐφαπτομένην αὐτῆς, τέμνει ταύτην εἰς τὴν τομὴν αὐτῆς μὲ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὴν κορυφὴν τῆς παραβολῆς*».

δ′) Ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην παραβολῆς εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς αὐτῆς, ἔστω τὸ M_1 καλεῖται *κάθετος τῆς παραβολῆς* εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ M_1. Ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς εἶνε (§ 66)

$$y-y_1=-\frac{y_1}{p}(x-x_1) \qquad (2)$$

Διὰ $y=o$ ἔχομεν τὴν τετμημένην αὐτῆς ἐπὶ τὴν ἀρχὴν (σχ. 102)

$$x=(ON)=x_1+p.$$

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι

$$(PN)=p. \qquad (3)$$

Τὸ τμῆμα τοῦ ἄξονος τῆς παραβολῆς τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῆς τεταγμένης τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς M_1 καὶ τῆς καθέτου αὐτῆς εἰς τὸ M_1 καλεῖται *ὑποκάθετος τῆς παραβολῆς* εἰς τὸ M_1 καὶ ἑπομένως ἔχομεν ὅτι,

«*ἡ ὑποκάθετος διὰ πάντα τὰ σημεῖα παραβολῆς εἶνε ἡ αὐτὴ καὶ ἰσοῦται μὲ τὴν ἡμιπαράμετρον αὐτῆς* p».

ε′) Διὰ νὰ φέρωμεν ἐφαπτομένην παραβολῆς ἀπὸ τυχὸν σημεῖον $M_0(x_0,y_0)$ τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὴν συνθήκην ἵνα ἡ εὐθεῖα

$$y-y_0=\lambda\,(x-x_0)$$

ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ M_0 συναντᾷ τὴν παραβολὴν εἰς δύο σημεῖα συμπίπτοντα.

Δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ x μεταξὺ τῆς ἐξισώσεως ταύτης καὶ τῆς $y=2\,p\,x$, εὑρίσκομεν

$$\lambda\,y^2-2p\,y+2\,p\,(y_0-\lambda\,x_0)=o, \qquad (4)$$

ἥτις δίδει τὰς τεταγμένας τῶν σημείων τῆς τομῆς τῆς εὐθείας καὶ τῆς παραβολῆς. Αἱ δύο ῥίζαι τῆς (4) συμπίπτουν εἰς μίαν, ἂν εἶνε

$$2\,x_0\,\lambda^2-2\,y_0\,\lambda+p=o \qquad (5)$$

. Ἐπειδὴ αὕτη εἶνε δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς λ, εὑρίσκομεν, ἐν γένει, δύο τιμὰς τοῦ λ, αἵτινες εἶνε πραγματικαὶ καὶ διάφοροι ἀλλήλων, ἢ πραγματικαὶ καὶ ἴσαι, ἢ φανταστικαί, ἂν τὸ $y_0^2-2\,p\,x_0$ εἶνε θετικόν, ἢ μηδέν, ἢ ἀρνητικόν. Ἤτοι ὑπάρχουν ἢ δύο ἐφαπτόμεναι τῆς παραβολῆς διερχόμεναι διὰ τοῦ M_0, ἢ μία, ἢ καμμία, ἂν τὸ σημεῖον τοῦτο κεῖται ἐκτός, ἢ ἐπί, ἢ ἐντὸς τῆς παραβολῆς (§ 144, β′). Ἐὰν αἱ διὰ τοῦ M_0 ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι τῆς παραβολῆς σχηματίζουν ὀρθὴν γωνίαν αἱ δύο τιμαὶ τοῦ λ, ἔστωσαν αἱ λ_1 καὶ λ_2 συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως $\lambda_1 \lambda_2 = -1$. Ἤτοι, θὰ εἶνε

$$\frac{p}{2x_0} = -1, \text{ ἢ } x_0 = -\frac{p}{2} \qquad (6)$$

Ἐπομένως τὸ σημεῖον M_0 πρέπει νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς διευθετούσης ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ. Ἀντιστρόφως δεικνύεται ὅτι, διὰ πᾶν σημεῖον τῆς διευθετούσης εἶνε $\lambda_1 \lambda_2 = -1$ καὶ ἔχομεν οὕτω τὴν ἑξῆς ἰδιότητα «***ὁ τόπος τῶν σημείων ἀπὸ τῶν ὁποίων ἄγονται ἐφαπτόμεναι παραβολῆς κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας εἶνε ἡ διευθετοῦσα αὐτῆς***».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Δίδεται ἡ παραβολὴ $y^2 = 11x$. Δείξατε ὅτι ἡ εὐθεῖα $11x - 6y + 9 = 0$ ἐφάπτεται τῆς παραβολῆς καὶ εὕρετε τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου τῆς ἁφῆς.

2) Τίς εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης τῆς παραβολῆς $y^2 = 11x$ ἥτις εἶνε παράλληλος τῇ εὐθείᾳ $2x - 7y + 3 = 0$;

3 Δίδεται παραβολή τις. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ ἐφαπτομένη εἰς δοθὲν σημεῖον αὐτῆς, ὅταν γνωρίζωμεν τὸν συντελεστὴν διευθύνσεως ταύτης.

4) Δείξατε ὅτι διὰ τὴν παραβολὴν $y = x^2$ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον $M(x_1, y_1)$ εἶνε $y + y_1 = 2xx_1$.

5) Παραβολῆς τινος γνωρίζομεν τὴν κορυφήν, τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὴν κορυφὴν καὶ ἓν σημεῖον M_0. Νὰ προσδιορισθῇ τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐφαπτομένης, καθέτου καὶ ὑποκαθέτου ἡ ἑστία τῆς παραβολῆς.

6 Δείξατε ὅτι, διὰ νὰ φέρωμεν δύο ἐφαπτομένας παραβολῆς ἀπό τινος σημείου Μ, ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν περιφέρειαν κύκλου μὲ διάμετρον τὸ τμῆμα τῆς εὐθείας τὸ συνδέον τὸ σημεῖον Μ μὲ τὴν ἑστίαν, καὶ νὰ συνδέσωμεν τὸ Μ μὲ τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῆς περιφερείας μὲ τὴν ἐφαπτομένην τῆς κορυφῆς.

7) Δίδεται τὸ σχῆμα παραβολῆς. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἑστία, ὁ ἄξων καὶ ἡ διευθετοῦσα αὐτῆς. (Τῇ βοηθείᾳ δύο παραλλήλων χορδῶν εὑρίσκομεν μίαν διάμετρον καὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς. Κατὰ τὴν ἰδιότητα (§ 144, γ') εὑρίσκομεν εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τῆς ἑστίας καὶ ἐπαναλαμβάνοντες τὴν κατασκευὴν εὑρίσκομεν τὴν ἑστίαν).

§ 149. Ἐξίσωσις παραβολῆς ὡς πρὸς διάμετρον καὶ ἐφαπτομένην αὐτῆς.—

α') Ἔστω ἡ παραβολὴ $\quad y^2 = 2px \qquad (1)$

καὶ σημεῖον αὐτῆς $M_1(x_0, y_0)$ ὡς πρὸς τοὺς ὀρθογωνίους ἄξονας Οxy (σχ. 102).

Ἐὰν μεταφέρωμεν τὸ σύστημα τῶν συντεταγμένων πρὸς τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται ἡ παραβολὴ παραλλήλως ἑαυτῷ καὶ εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς $M_1(x_0, y_0)$, καλέσωμεν δὲ x', y' τὰς νέας συντεταγμένας τυχόντος σημείου αὐτῆς $M(x, y)$, θὰ ἔχωμεν

$$x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y'.$$

Οὕτω ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται

$$y'^2 + 2\,y_0\,y' - 2\,p\,x' = o. \qquad (2)$$

Λαμβάνομεν ἤδη ὡς ἄξονα τῶν x'' τὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ M_1, τὴν δ' ἐφαπτομένην αὐτῆς εἰς τὸ M_1 ὡς ἄξονα τῶν y'' ἑνὸς νέου συστήματος ἀξόνων $M_1\,x''\,y''$ (πλαγιογωνίου) (σχ. 102).

Ἂν (x'', y'') εἶνε αἱ συντεταγμέναι τοῦ Μ ὡς πρὸς τὸ σύστημα τοῦτο τῶν ἀξόνων καὶ ε'' εἶνε ἡ γωνία τῆς ἐφαπτομένης τῆς παραβολῆς εἰς τὸ M_1 μὲ τὸν ἄξονα τῶν x (ἑπομένως καὶ μὲ τὸν x''), θὰ εἶνε (§ 147, δ')

$$\text{εφ}\,\varepsilon'' = \frac{p}{y_0}\cdot$$

Οἱ τύποι τῆς μεταβάσεως ἐκ τοῦ συστήματος τῶν συντεταγμένων $M_1\,x'\,y'$ εἰς τὸ $M_1\,x''\,y''$ θὰ εἶνε ἤδη (§ 21, ε')

$$x' = x'' + y''\,\text{συν}\,\varepsilon''$$
$$y' = y''\,\text{ημ}\,\varepsilon''.$$

Εἰσάγοντες τὰς τιμὰς τῶν x', y' εἰς τὴν (2) εὑρίσκομεν τὴν

$$y''^2\,\text{ημ}^2\,\varepsilon'' + 2\,y_0\,y''\,\text{ημ}\varepsilon'' - 2\,p\,x'' - 2\,p\,y''\,\text{συν}\,\varepsilon'' = o$$

ἥτις γίνεται, ἐπειδὴ εἶνε $y_0\,\text{ημ}\,\varepsilon'' = p\,\text{συν}\,\varepsilon''$,

$$y''^2 = \frac{2p}{\text{ημ}^2\,\varepsilon''}\,x'' \qquad (3)$$

Ἐκ τῆς $\text{εφ}\,\varepsilon'' = \dfrac{p}{y_0}$ ἕπεται $\text{ημ}^2\,\varepsilon'' = \dfrac{p^2}{p^2 + y_0^2}$

καὶ ἑπομένως

$$\frac{p}{\text{ημ}^2\,\varepsilon''} = \frac{p^2 + y_0^2}{p} = p + \frac{y_0^2}{p} = p + 2\,x_0 = 2\left(x_0 + \frac{p}{2}\right)$$

ἤτοι ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου M_0 ἀπὸ τῆς διευθετούσης.

Ἐὰν τὸ διπλάσιον τῆς ἀποστάσεως ταύτης παραστήσωμεν διὰ $2q$ καὶ γράψωμεν x καὶ y ἀντὶ τῶν x'', y'', θὰ ἔχωμεν

$$\boxed{y^2 = 2\,q\,x} \qquad (4)$$

ἥτις εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς ὡς πρὸς ἄξονας πλαγιογωνίους τὴν διάμετρον καὶ τὴν ἐφαπτομένην αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἁφῆς.

ϛ') Ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν εὐθεῖαν $y = \lambda\,x + \beta$ ὡς πρὸς τὸ σύστημα τοῦτο τῶν ἀξόνων καὶ ζητοῦμεν τὴν θέσιν αὐτῆς ὡς πρὸς τὴν παραβολὴν (4), θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν (§ 146, δ')

$$\lambda\, y^2 - 2\, q\, y + 2\, q\, \beta = o,$$

τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι δίδουν τὰς τεταγμένας τῶν κοινῶν σημείων τῆς εὐθείας καὶ τῆς παραβολῆς. Τὰ σημεῖα ταῦτα εἶνε πραγματικὰ καὶ διάφορα ἀλλήλων, ἢ πραγματικὰ καὶ συμπίπτοντα, ἢ φανταστικά, ἂν τὸ λβ εἶνε μικρότερον, ἢ ἴσον, ἢ μεγαλύτερον τοῦ $\frac{q}{2}$. Ἐὰν τὰ δύο σημεῖα συμπίπτουν εἰς ἕν, ἡ εὐθεῖα ἐφάπτεται τῆς παραβολῆς καὶ ἂν (x_1, y_1) εἶνε αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς, ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο (καλοῦντες ἤδη o τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων) θὰ εἶνε

$$y\, y_1 = q\,(x + x_1) \tag{5}$$

Διὰ $y=o$ εὑρίσκομεν $x = (oT_1) = - x_1$ ὡς τετμημένην ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τῆς ἐφαπτομένης.

Τὴν αὐτὴν τετμημένην ἐπὶ τὴν ἀρχὴν εὑρίσκομεν καὶ διὰ τὴν ἐφαπτομένην τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σημεῖον $(x_1, -y_1)$, συμμετρικὸν τοῦ M_1. Ἑπομένως

«***αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἄκρα τυχούσης χορδῆς μιᾶς παραβολῆς τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον τῆς διαμέτρου, ἥτις διχοτομεῖ τὴν χορδὴν ταύτην. Τὸ μέσον τῆς χορδῆς καὶ ἡ τομὴ τῶν δύο ἐφαπτομένων ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ τοῦ ἄκρου τῆς διαμέτρου***».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Παραβολῆς τινος γνωρίζομεν μίαν διάμετρον, τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς καὶ ἓν σημεῖον ἀκόμη. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο.

2) Δίδεται παραβολὴ καὶ ἓν σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς. Ζητεῖται νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο ἐφαπτόμεναι τῆς παραβολῆς, αἵτινες διέρχονται διὰ τοῦ σημείου, τῇ βοηθείᾳ τῆς διαμέτρου, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ σημείου.

3) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις παραβολῆς ὡς πρὸς τὸν ἄξονα αὐτῆς καὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῆς $y^2 = 5\, x$.

Τίς εἶνε ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς ὡς πρὸς τὴν ἐφαπτομένην καὶ τὴν διάμετρον τοῦ σημείου αὐτῆς $(^9/_5, 3)$;

4) Τίς εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης τῆς παραβολῆς $y^2 = 5\, x$, τῆς ὁποίας ἡ ἀφὴ ἔχει συντεταγμένας $\left(\frac{4}{5}, -2\right)$ ὡς πρὸς τὸ ὀρθογώνιον σύστημα.

§ 150. Πόλος καὶ πολικὴ ὡς πρὸς παραβολήν.—

α΄) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις παραβολῆς ὡς πρὸς διάμετρον καὶ ἐφαπτομένην εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς

$$y^2 = 2\, q\, x \tag{1}$$

καὶ σημεῖόν τι P (ξ, η) τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς. Ἂν καλέσωμεν (x_1, y_1)

τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου M_1 τῆς ἀφῆς τῆς ἐφαπτομένης τῆς παραβολῆς, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ P θὰ ἔχωμεν

$$y\,y_1 = p\,(x + x_1), \text{ καὶ } \eta\, y_1 = q\,(\xi + x_1) \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ M_1 κεῖται ἐπὶ τῆς παραβολῆς θὰ εἶνε

$$y_1^2 = 2\,q\,x_1 \qquad (3)$$

Ἐκ τῆς δευτέρας τῶν (2) καὶ τῆς (3) εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν x_1, y_1 τῶν συντεταγμένων τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς· εὑρίσκομεν δὲ ἢ δύο σημεῖα πραγματικὰ καὶ διάφορα ἀλλήλων, ἢ δύο πραγματικὰ καὶ συμπίπτοντα εἰς ἕν, ἢ δύο φανταστικά.

Ἡ ἐξίσωσις $\eta y = q\,(\xi + x)$, ἥτις ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων (x_1, y_1) τῶν σημείων ἀφῆς, παριστάνει τὴν εὐθεῖαν, ἥτις συνδέει τὰ σημεῖα τῆς ἐπαφῆς καὶ καλεῖται *πολικὴ* τοῦ σημείου P (ξ, η) ὡς πρὸς τὴν παραβολὴν (ἢ *χορδὴ τῶν ἐπαφῶν*), τὸ δὲ P λέγεται *πόλος* τῆς εὐθείας ταύτης ὡς πρὸς τὴν παραβολήν.

β') Εὐκόλως δεικνύεται ὅτι, «*ἂν τὸ σημεῖον P κεῖται ἐκτὸς τῆς παραβολῆς, ἡ πολικὴ αὐτοῦ τέμνει αὐτὴν εἰς δύο σημεῖα*»·

ἐπίσης δὲ ὅτι

γ') «*ἡ ἐφαπτομένη παραβολῆς εἶνε ἡ πολικὴ τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς, τοῦτο δὲ ὁ πόλος τῆς ἐφαπτομένης*».

δ') «*εἰς τὰ σημεῖα μιᾶς εὐθείας ἀντιστοιχοῦν ὡς πολικαὶ αἱ ἀκτῖνες μιᾶς ἐπιπέδου δέσμης· καὶ τοὐναντίον*».

ε') «*αἱ πολικαὶ τῶν σημείων μιᾶς διαμέτρου παραβολῆς εἶνε παράλληλοι πρὸς ἀλλήλας, καὶ ἑπομένως τέμνονται εἰς ἓν κατ' ἐκδοχὴν σημεῖον, τὸν πόλον τῆς διαμέτρου ταύτης*».

ς') Ἐὰν ἀναφέρωμεν τὴν παραβολὴν ὡς πρὸς τὸν ἄξονα καὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῆς, ἡ πολικὴ τοῦ σημείου P (ξ, η) θὰ ἔχῃ ἐξίσωσιν $\eta\, y = p\,(x + \xi)$.

Διὰ $\xi = \frac{p}{2}$, $\eta = o$, εὑρίσκομεν $x = \frac{-p}{2}$, ἤτοι

«*ἡ πολικὴ τῆς ἑστίας παραβολῆς εἶνε ἡ διευθετοῦσα αὐτῆς*».

ζ') Ἡ πολικὴ ἑνὸς σημείου $P_1\,(x_1, y_1)$ τῆς διευθετούσης εἶνε

$$\left(\text{ἕνεκα τῆς } x_1 = -\frac{p}{2}\right)$$

$$y\,y_1 = p\,x - \frac{p^2}{2}.$$

Αὕτη διέρχεται διὰ τῆς ἑστίας καὶ ἔχει συντελεστὴν διευθύνσεως

$\frac{p}{y_1}$. Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα, ἥτις συνδέει τὸ P_1 μὲ τὴν ἑστίαν ἔχει συντελεστὴν διευθύνσεως $-\frac{y_1}{p}$, ἕπεται ὅτι

«***ἡ εὐθεῖα ἥτις συνδέει τὴν ἑστίαν παραβολῆς μὲ τὸν πόλον τυχούσης χορδῆς αὐτῆς, διερχομένης διὰ τῆς ἑστίας, εἶνε κάθετος ἐπ' αὐτήν***».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Δείξατε ὅτι αἱ ἰδιότητες μεταξὺ πόλου καὶ πολικῆς εἶνε ἀνεξάρτητοι τοῦ συστήματος τῶν ἀξόνων ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται ἡ παραβολή.

2) Δείξατε ὅτι ὁ πόλος τῆς εὐθείας $Ax + By + \Gamma = o$ ὡς πρὸς τὴν παραβολὴν $y^2 = 2qx$ ἔχει τὰς συντεταγμένας

$$\left(\frac{\Gamma}{A}, -\frac{B}{A}q\right).$$

3) Εὕρετε τὸν πόλον τῆς εὐθείας $5x - 7y + 2 = o$ ὡς πρὸς τὴν ἑστίαν τῆς παραβολῆς $y^2 - 3x = o$.

4) Εὕρετε τὰς συντεταγμένας τῶν σημείων ἁφῆς τῶν δύο ἐφαπτομένων, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἐκ τοῦ σημείου $(-5, 3)$ πρὸς τὴν παραβολὴν $y^2 - 8x = o$.

5) Εὕρετε τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην ἵνα ἡ εὐθεῖα

$$Ax + By + \Gamma = o$$

ἐφάπτεται τῆς παραβολῆς $y^2 = 2px$.

6) Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς παραβολῆς $y^2 = 2px$ ἐὰν ληφθῇ ὡς ἀρχὴ παραλλήλων ἀξόνων πρὸς τὰς ἀρχικὰς ἡ ἑστία αὐτῆς, ἢ ἡ τομὴ τῆς διευθετούσης μὲ τὸν ἄξονα τῶν x.

7) Τί παριστάνει ἡ ἐξίσωσις $x^2 = 2py$ καὶ τίς εἶνε ὁ ἄξων συμμετρίας τῆς καμπύλης αὐτῆς;

8) Ποῦ τείνει ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως ἐφαπτομένης τῆς παραβολῆς $y^2 = 2px$ εἰς ἓν σημεῖον αὐτῆς $M_1(x_1, y_1)$, ὅταν τοῦτο ἀπομακρύνεται εἰς ἄπειρον ἐπ' αὐτῆς;

9) Εὕρετε τὴν τομὴν δύο ἐφαπτομένων τῆς παραβολῆς $y^2 = 2px$ εἰς δύο σημεῖα αὐτῆς $M_1(x_1, y_1)$ καὶ $M_2(x_2, y_2)$.

10) Εὕρετε τὴν γωνίαν τῶν ἐφαπτομένων, αἵτινες ἄγονται ἐκ τοῦ σημείου $M_1(x_1, y_1)$ εἰς τὴν παραβολὴν $y^2 = 2px$.

11) Δείξατε ὅτι εἰς τὴν παραβολὴν $y^2 = 2px$ τὸ τμῆμα τοῦ ἄξονος τῶν x, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῆς τεταγμένης τυχόντος σημείου καὶ τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ εἶνε διπλάσιον τῆς τετμημένης τοῦ σημείου.

12) Τί παριστάνει ἡ ἐξίσωσις $y^2 = -4x$ καὶ ποῦ στρέφει αὕτη τὰ κοῖλα;

Συσχέτισις τῶν καμπύλων δευτέρου βαθμοῦ

§ 151. Συσχέτισις ἐλλείψεως, ὑπερβολῆς καὶ παραβολῆς.—

α') Αἱ ἐξισώσεις τῆς ἐλλείψεως καὶ ὑπερβολῆς, ὅταν ὡς ἄξονες τῶν x μὲν λαμβάνεται ὁ μέγας καὶ ὁ πρωτεύων ἄξων αὐτῶν ἀντιστοίχως, τῶν y δὲ ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῶν, εἶνε αἱ ἑξῆς ἀντιστοίχως (§ § 123, γ', 137, δ'),

$$y^2 = 2\,p\,x - \frac{p}{\alpha}\,x^2 \qquad (1)$$

$$y^2 = 2\,p\,x + \frac{p}{\alpha}\,x^2 \qquad (2)$$

Συγκρίνοντες τὰς ἐξισώσεις ταύτας μὲ τὴν ἐξίσωσιν τῆς παραβολῆς

$$y^2 = 2\,p\,x \qquad (3)$$

παρατηροῦμεν ὅτι αὕτη προκύπτει ἐκ τῶν (1) καὶ (2), ἂν τὸ α γίνῃ ἄπειρον, ἤτοι, ἂν τὸ κέντρον τῆς ἐλλείψεως ἢ τῆς ὑπερβολῆς ἀπομακρυνθῇ εἰς ἄπειρον, διατηρουμένης σταθερᾶς τῆς ἡμιπαραμέτρου p.

Κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν τοῦτον ἡ ἐκκεντρότης ε μεταβαλλομένη καταντᾷ ἴση τῇ μονάδι. Διότι εἶνε διὰ τὴν ἔλλειψιν καὶ ὑπερβολὴν ἀντιστοίχως

$$\gamma^2 = \alpha^2 \mp \beta^2.$$

Ἐκ τούτου ἔχομεν

$$\varepsilon^2 = \frac{\gamma^2}{\alpha^2} = 1 \mp \frac{\beta^2}{\alpha^2} = 1 \mp \frac{p}{\alpha}$$

Ὅταν εἶνε ὅριον $\alpha = \infty$, θὰ ἔχωμεν $\varepsilon = 1$ (τοῦ p διατηρουμένου σταθεροῦ).

Ὅθεν δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν παραβολὴν ὡς ὅριον ἐλλείψεως, ἢ ὑπερβολῆς, ἐχούσης ἐκκεντρότητα ἴσην μὲ τὴν μονάδα.

β') Ἡ ἔλλειψις καὶ ἡ ὑπερβολὴ ὁρίζονται, ἂν γνωρίζωμεν μίαν ἑστίαν αὐτῶν, τὴν ἀντίστοιχον ταύτῃ διευθετοῦσαν καὶ τὴν ἐκκεντρότητα αὐτῶν.

Εἴδομεν ὅτι, ἐν τῇ ἐλλείψει καὶ τῇ ὑπερβολῇ ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου αὐτῶν ἀπὸ μιᾶς τῶν ἑστιῶν αὐτῶν καὶ ἀπὸ τῆς ἀντιστοίχου πρὸς αὐτὴν διευθετούσης εἶνε ἴσος μὲ τὴν ἐκκεντρότητα αὐτῆς, πρὸς δὲ ὅτι, ἡ ἰδιότης αὕτη ἰσχύει μόνον διὰ τὰ σημεῖα τὰ κείμενα ἐπὶ ἑκάστης τῶν γραμμῶν τούτων. Παρατηροῦντες ἤδη ὅτι, ἡ παραβολὴ ὁρίζεται, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ἑστίαν καὶ τὴν διευθετοῦσαν αὐτῆς, πρὸς δὲ ὅτι, ἡ ἀπόστασις παντὸς σημείου, ἐπὶ τῆς γραμμῆς ταύτης καὶ μόνον κειμένου, ἀπὸ τῆς ἑστίας αὐτῆς ἔχει λόγον πρὸς τὴν ἀπόστασιν τούτου ἀπὸ τῆς διευθετούσης ἴσον μὲ τὴν ἐκκεντρότητα αὐτῆς, ἥτις ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα, συνάγομεν ὅτι

«***ὁ τόπος τῶν σημείων ἐπιπέδου, διὰ τὰ ὁποῖα ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων αὐτῶν ἀπὸ ὡρισμένον σημεῖον καὶ ὡρισμένην εὐθεῖαν εἶνε σταθερός, εἶνε ἔλλειψις, ἢ ὑπερβολή, ἢ παραβολή, ἂν ὁ σταθερὸς λόγος εἶνε μικρότερος, ἢ μεγαλύτερος, ἢ ἴσος μὲ τὴν μονάδα. Τὸ ὡρισμένον σημεῖον εἶνε ἑστία, ἡ σταθερὰ εὐθεῖα εἶνε διευθετοῦσα τῆς ἐν λόγῳ γραμμῆς, ὁ δὲ σταθερὸς λόγος εἶνε ἡ ἐκκεντρότης αὐτῆς***».

γ΄) Παρατηρητέον προσέτι ὅτι, ἡ πολικὴ ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως, ὑπερβολῆς καὶ παραβολῆς εἶνε ὡς πρὸς πόλον μίαν ἑστίαν αὐτῶν (§ 115, δ΄, 132, ε΄, 144, α΄).

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \text{ συν } \varphi}$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη παριστάνει ἔλλειψιν ἂν εἶνε $\varepsilon < 1$, ὑπερβολὴν ἂν εἶνε $\varepsilon > 1$, παραβολὴν δὲ ἂν εἶνε $\varepsilon = 1$.

δ΄) Ἐκ τούτων ἕπεται εὐκόλως ὅτι (ἂν λέγωμεν ὅτι ἐλλείψεις (ἢ ὑπερβολαὶ) εἶνε ὅμοιαι πρὸς ἀλλήλας, ἂν τὰ μήκη τῶν ὁμωνύμων ἀξόνων αὐτῶν εἶνε ἀνάλογα),

«***πᾶσαι αἱ ἐλλείψεις (ἢ ὑπερβολαί), αἵτινες ἔχουν τὴν αὐτὴν ἐκκεντρότητα, εἶνε ὅμοιαι πρὸς ἀλλήλας ἀντιστοίχως***».

ε΄) «***πᾶσαι αἱ ἐλλείψεις, ἢ ὑπερβολαί, ἢ παραβολαί, αἵτινες ἔχουν ἴσας ἐκκεντρότητας καὶ ἴσας ἡμιπαραμέτρους εἶνε ἴσαι μεταξύ των ἀντιστοίχως***».

ϛ΄) Στηριζόμενοι ἐπὶ τῆς β΄) τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν μίαν κοινὴν ἐξίσωσιν εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους καὶ διὰ τὰς τρεῖς ἐν λόγῳ γραμμάς. Τῷ ὄντι, ἂν (x_0, y_0) εἶνε αἱ συντεταγμέναι ὡρισμένου σημείου καὶ ἡ ἀνηγμένη ἐξίσωσις ὡρισμένης εὐθείας (§ 70, α΄)

$$-x \text{ συν } \varphi + y \text{ ημ } \varphi + R_0 = 0,$$

ἡ ἐξίσωσις ἑκάστης τῶν ἐν λόγῳ γραμμῶν εἶνε

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2 (-x \text{ συν } \varphi + y \text{ ημ } \varphi + R_0)^2.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη, ὡς καὶ αἱ ἐξισώσεις τῆς ἐλλείψεως (καὶ τῆς περιφερείας κύκλου), τῆς ὑπερβολῆς, τῆς παραβολῆς καὶ ζεύγους δύο εὐθειῶν (§ 25, θ') ὡς πρὸς ἄξονας εὐθυγράμμους, εἶνε δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y, ἤτοι τῆς μορφῆς

$$A x^2 + 2 B x y + \Gamma y^2 + 2 \Delta x + 2 E y + Z = 0.$$

ζ') Διὰ τοῦτο ἡ ἔλλειψις (καὶ ἡ περιφέρεια κύκλου), ἡ ὑπερβολὴ καὶ παραβολὴ καλοῦνται καὶ *καμπύλαι δευτέρου βαθμοῦ.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 1) Ἡ ἀπόστασις μιᾶς ἑστίας ἐλλείψεως, ὑπερβολῆς καὶ παραβολῆς ἀπὸ τῆς ἀντιστοίχου αὐτῆς διευθετούσης ἀπέχει ἀπόστασιν ἴσην μὲ $\frac{p}{\varepsilon}$.

2) Ἡ ἀπόστασις τῆς ἑστίας ἀπὸ τὴν ἀντίστοιχον αὐτῆς κορυφὴν εἶνε διὰ τὴν ἔλλειψιν $\alpha - \gamma = \frac{p}{1+\varepsilon}$.

Τὴν αὐτὴν τιμὴν ἔχει ἡ ἀπόστασις $\gamma - \alpha$ διὰ τὴν ὑπερβολήν. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἔλλειψις ἢ ἡ ὑπερβολὴ καταντᾷ παραβολή, διατηρουμένης σταθερᾶς τῆς p, εὑρίσκομεν ὡς ἀντίστοιχον ἀπόστασιν τὴν $\frac{p}{2}$. Ἑπομένως αἱ ἀποστάσεις τῆς ἑστίας ἑκάστης τῶν ἐν λόγῳ καμπύλων ἀπὸ τῆς ἀντιστοίχου αὐτῆς διευθετούσης καὶ ἀπὸ τῆς κορυφῆς αὐτῆς εἶνε $\frac{p}{\varepsilon}$ καὶ $\frac{p}{1+\varepsilon}$.

3) Ἓν ζεῦγος εὐθειῶν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἐκφυλισμὸς ὑπερβολῆς, ἐὰν τὸ ὡρισμένον σημεῖον (§ 151, β') κεῖται ἐπὶ τῆς ὡρισμένης εὐθείας, ὅτε ὁ σταθερὸς λόγος εἶνε κατ' ἀνάγκην μεγαλύτερος τῆς μονάδος.

4) Ἐὰν ὀρθὴ γωνία κινῆται οὕτως, ὥστε ἡ κορυφὴ αὐτῆς νὰ διαγράφῃ δοθεῖσαν περιφέρειαν κύκλου, ἐνῷ μία τῶν πλευρῶν αὐτῆς διέρχεται διὰ ὡρισμένου σημείου ἡ ἄλλη αὐτῆς πλευρὰ περιβάλλει (εἶνε ἐφαπτομένη) μίαν καμπύλην β' βαθμοῦ. Ἡ καμπύλη αὕτη εἶνε ἔλλειψις, ἢ ὑπερβολή, ἂν τὸ σημεῖον κεῖται ἐντός, ἢ ἐκτὸς τοῦ κύκλου. Ἐὰν ἡ περιφέρεια εἶνε εὐθεῖα γραμμή, ἡ καμπύλη θὰ εἶνε παραβολή.

§ 152. Περὶ τῶν καμπύλων δευτέρου βαθμοῦ ὡς τομῶν κώνου.—

α') Ἐὰν κινητὴ εὐθεῖα συναντᾷ ἄλλην ἀκίνητον εἰς σημεῖόν τι O (σχ. 103) τὸ αὐτὸ πάντοτε καὶ κινῆται οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίζῃ μὲ τὴν ἀκίνητον εὐθεῖαν σταθερὰν γωνίαν (διάφορον τῶν 90^0 καὶ τῶν 180^0), ἡ κινητὴ εὐθεῖα παράγει ἐπιφάνειαν *ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου*, ἥτις σύγκειται ἀπὸ δύο χώνας ἀπεράτους, κειμένας ἑκατέρωθεν τοῦ O. Ἡ ἀκίνητος εὐθεῖα λέγεται *ἄξων* τοῦ κώνου, ἡ κινητὴ εὐθεῖα *γεννέτειρα* τοῦ κώνου, τὸ δὲ σημεῖον O τῆς τομῆς τῶν γεννετειρῶν μετὰ τοῦ ἄξονος λέγεται ***κορυφὴ*** τοῦ κώνου.

Ἐὰν τμήσωμεν τὸν κυκλικὸν κῶνον δι' ἐπιπέδου καθέτου τῷ ἄξονι (ἀλλὰ μὴ διερχομένου διὰ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ), ἡ τομὴ θὰ εἶνε περιφέρεια κύκλου. Τοιαύτη τομὴ τοῦ κώνου λέγεται συνήθως *βάσις τοῦ κώνου.*

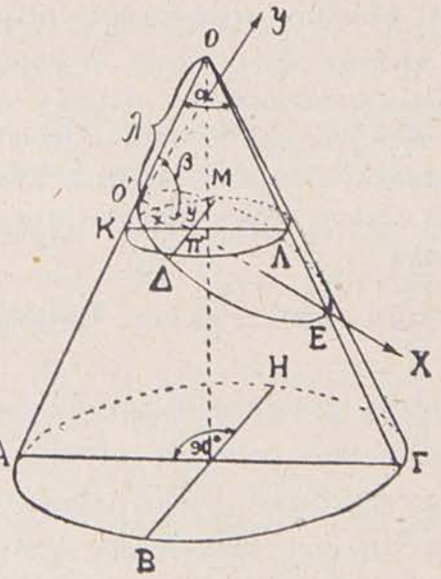
6′) Θὰ δείξωμεν ἤδη ὅτι, ἐὰν ὀρθὸν κυκλικὸν κῶνον τμήσωμεν δι' ἐπιπέδου, μὴ διερχομένου διὰ τῆς κορυφῆς οὐδὲ παραλλήλου τῇ βάσει αὐτοῦ, ἡ τομὴ θὰ εἶνε ἔλλειψις, ἢ ὑπερβολή, ἢ παραβολή, ἂν τὸ τέμνον ἐπίπεδον τέμνῃ πάσας τὰς γεννετείρας τοῦ κώνου, ἢ εἶνε παράλληλος πρὸς δύο ἐξ αὐτῶν, ἢ πρὸς μίαν τούτων.

Ἔστω ὁ ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος Ο—ΑΒΓΗ (σχ.103) καὶ ἐπίπεδόν τι Ο′ΔΕ, τέμνον αὐτὸν κατὰ τὴν γραμμὴν Ο′ΔΕ.

Διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κώνου φέρομεν τὸ ἐπίπεδον ΟΑΓ κάθετον ἐπὶ τὸ τέμνον Ο′ΔΕ. Διά τινος σημείου, ἔστω τοῦ Π, τῆς εὐθείας Ο′Ε καθ' ἣν τέμνονται τὰ ἐπίπεδα Ο′ΔΕ καὶ ΟΑΓ φέρομεν ἐπίπεδον ΚΔΛ παράλληλον τῇ βάσει τοῦ κώνου, καὶ τέμνον αὐτὸν κατὰ τὴν γραμμὴν ΚΔΛΜ.

Ἐὰν Μ εἶνε σημεῖον τῆς τομῆς τῶν δύο γραμμῶν Ο′ΔΕ καὶ ΚΔΛΜ, ἡ εὐθεῖα ΠΜ θὰ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν Ο′Ε καὶ τὴν ΚΛ.

Ἐὰν λάβωμεν ἄξονας συντεταγμένων ο′xy τὴν εὐθεῖαν Ο′Ε καὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς Ο′ΔΕ εἰς τὸ Ο′, αἱ συντεταγμέναι τοῦ Μ θὰ εἶνε (Ο′Π) = x καὶ (ΠΜ) = y. Ἐὰν θέσωμεν



(Σχ. 103)

$$(OO') = \lambda, \quad \text{γων. } A O \Gamma = \alpha, \quad \text{γων. } O O' E = \beta,$$

θά ἔχωμεν

$$y^2 = (K\Pi)\,(\Pi\Lambda)$$

ἐπειδὴ τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας ΚΔΛΜ. (1)

Ἐκ τοῦ τριγώνου Ο′ΚΠ ἔχομεν

$$\frac{(\text{ΚΠ})}{\eta\mu\,\beta} = \frac{x}{\eta\mu\left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

Ἑπομένως $\quad (\text{ΚΠ}) = \dfrac{x.\eta\mu\,\beta}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΕΛΠ ἔχομεν

$$\frac{(\text{ΠΛ})}{\eta\mu\,(\alpha+\beta)} = \frac{(\text{Ο}'\text{Ε}) - x}{\eta\mu\left(90^0 + \frac{\alpha}{2}\right)}$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν

$$(\text{ΠΛ}) = (\text{Ο}'\text{Ε}) - x)\,\frac{\eta\mu\,(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu\,\frac{\alpha}{2}}.$$

Ἐκ τοῦ τριγώνου Ο΄ΕΟ εὑρίσκομεν ὁμοίως

$$\frac{(\text{Ο}'\text{Ε})}{\eta\mu\,\alpha} = \frac{\lambda}{\eta\mu\,(\alpha+\beta)},$$

ἄρα $\quad (\text{Ο}'\text{Ε}) = \dfrac{\lambda\,\eta\mu\,\alpha}{\eta\mu\,(\alpha+\beta)}.$

Εἰσάγοντες τὰς τιμὰς τῶν (ΚΠ), (ΠΛ) εἰς τὴν (1) εὑρίσκομεν

$$y^2 = \frac{\eta\mu\,\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\,\frac{\alpha}{2}}\left[\lambda.\,\eta\mu\,\alpha.\,x - \eta\mu\,(\alpha+\beta).\,x^2\right] \qquad (2)$$

Θέτοντες (διὰ τὸ σχ. 103) (Ο΄Ε) $= 2\,\alpha'$

εὑρίσκομεν $\quad \lambda = 2\,\alpha'\,\dfrac{\eta\mu\,(\alpha+\beta)}{\eta\mu\,\alpha}$

καὶ $\quad y^2 = \dfrac{\alpha'\,\eta\mu\,(\alpha+\beta)\,\eta\mu\,\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\,\frac{\alpha}{2}}\left[2\,x - \dfrac{x^2}{\alpha'}\right]$

ἢ $\quad y^2 = 2\,p\,x - \dfrac{p}{\alpha'}\,x^2, \qquad (2')$

ἐν ᾧ ἐτέθη $\quad p = \dfrac{\alpha'\,\eta\mu\,(\alpha+\beta)\,\eta\mu\,\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\,\frac{\alpha}{2}}.$

Ἡ ἐξίσωσις (2) ἔχει τὴν μορφὴν τῆς ἐξισώσεως ἐλείψεως, ἢ ὑπερβολῆς, ἢ παραβολῆς, ὅταν ἀναφέρεται ὡς πρὸς ἄξονας διάμετρον καὶ ἐφαπτομένην αὐτῆς (§ 151, α΄).

γ΄) Ἐὰν εἶνε $\alpha + \beta < 180^0$, ὡς συμβαίνει διὰ τὸ σχ. 103, ἡ τομὴ τοῦ κυκλικοῦ κώνου καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου εἶνε ἡ ἔλλειψις (2΄).

Ἤτοι, «***ἂν ἐπίπεδον, μὴ διερχόμενον διὰ τῆς κορυφῆς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου, οὐδὲ παράλληλον τῇ βάσει αὐτοῦ, τέμνῃ πάσας*** *τὰς γεννετείρας τούτου, ἡ τομὴ θὰ εἶνε ἔλλειψις».*

ϛ') Ἐὰν εἶνε $\alpha + \beta > 180^0$, ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις (2) γίνεται

$$y^2 = \frac{\eta\mu\ \beta}{\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\alpha}{2}} \left[\lambda.\ \eta\mu\ \alpha.\ x + \eta\mu\ (\alpha + \beta).\ x^2 \right]$$

ἥτις παριστάνει ὑπερβολὴν ὡς πρὸς ἄξονας διάμετρον καὶ ἐφαπτομένην εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς. Ἤτοι

«***ἐὰν ἐπίπεδον, μὴ διερχόμενον διὰ τῆς κορυφῆς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου, τέμνῃ αὐτὸν καὶ εἶνε παράλληλον πρὸς δύο γεννετείρας αὐτοῦ, ἡ τομὴ εἶνε ὑπερβολή, τῆς ὁποίας οἱ κλάδοι κεῖνται ἐπὶ τῶν δύο χωνῶν τοῦ κώνου ἀντιστοίχως***».

ε') Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον τὸ τέμνον τὸν κῶνον καὶ παράλληλον πρὸς δύο γεννετείρας αὐτοῦ, κινηθῇ παραλλήλως ἑαυτῷ μέχρις ὅτου διέλθῃ διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου, ἡ τομὴ τοῦ ἐπιπέδου καὶ τοῦ κώνου θὰ εἶνε αἱ δύο γεννέτειραι, πρὸς τὰς ὁποίας τὸ ἀρχικὸν ἐπίπεδον εἶνε παράλληλον. Ἤτοι ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ ὑπερβολὴ καταντᾷ εἰς δύο εὐθείας, τεμνομένας εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου.

ϛ') Ἐὰν εἶνε $\alpha + \beta = 180^0$ θὰ εἶνε

$$\eta\mu\ \beta = \eta\mu\ \alpha = 2\ \eta\mu \frac{\alpha}{2}\ \sigma\upsilon\nu\ \frac{\alpha}{2},\ \eta\mu\ (\alpha + \beta) = 0$$

καὶ ἡ ἐξίσωσις (2) γίνεται

$$y^2 = 4\ \lambda.\ \eta\mu^2 \frac{\alpha}{2}\ x,$$

ἥτις παριστάνει παραβολήν.

Ἤτοι, «***ἂν ἐπίπεδον, μὴ διερχόμενον διὰ τῆς κορυφῆς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου, τέμνῃ αὐτὸν καὶ εἶνε παράλληλον πρὸς μίαν γεννέτειραν τούτου, ἡ τομὴ εἶνε παραβολή***».

ζ') Ἐὰν τὸ τέμνον τοῦτο τὸν κῶνον ἐπίπεδον κινηθῇ παραλλήλως ἑαυτῷ μέχρις ὅτου διέλθῃ διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου, ἡ τομὴ ἐφάπτεται τοῦ κώνου κατὰ μῆκος τῆς γεννετείρας πρὸς τὴν ὁποίαν τὸ ἀρχικὸν ἐπίπεδον εἶνε παράλληλον. Ἤτοι ἐν τῇ περιπτώσει αὐτῇ ἡ ὑπερβολὴ καταντᾷ εἰς δύο εὐθείας συμπιπτούσας καὶ διερχομένας διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Οἱ κυριώτεροι τῶν τύπων τοῦ πρώτου μέρους

1) Σχέσις τοῦ μήκους (Α′Β′) τῆς ὀρθῆς προβολῆς ἀνύσματος, ἔχοντος μῆκος (ΑΒ) ἐπὶ εὐθεῖαν μεθ' ἧς σχηματίζει γωνίαν γ

$$(A'B') = (AB)\text{συν}\,\gamma. \qquad \text{(σελ. 11)}$$

2) Σχέσις τοῦ ἐμβαδοῦ Ε′ τῆς ὀρθῆς προβολῆς ἐπιπέδου σχήματοςἔχοντος ἐμβαδὸν Ε, ὅταν ἡ γωνία τῶν ἐπιπέδων εἶνε γ

$$E' = E\ \text{συν}\,\gamma \qquad \text{(σελ. 16)}$$

3) Συντελεστὴς διευθύνσεως λ ἀνύσματος Τ (α, β) $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$ (σελ. 34)

4) Ἰδιότης παραλλήλων ἀνυσμάτων $T_1(\alpha_1, \beta_1), T_2(\alpha_2, \beta_2)$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} \qquad \text{(σελ. 34)}$$

Τύποι ἀλλαγῆς ἀξόνων ἐν τῷ ἐπιπέδῳ

5) ἂν οἱ νέοι ἄξονες εἶνε παράλληλοι πρὸς τοὺς ἀρχικοὺς

$$x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta \qquad \text{(σελ. 36)}$$

6) ἂν οἱ νέοι ἄξονες ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀρχὴν μὲ τοὺς παλαιοὺς

$$\begin{aligned} x &= \vartheta'_1\, x' + \eta'_1\, y' \\ y &= \vartheta'_2\, x' + \eta'_2\, y' \end{aligned} \qquad \text{(σελ. 37)}$$

7) ἂν οἱ παλαιοὶ ἄξονες εἶνε ὀρθογώνιοι οἱ δὲ νέοι πλαγιογώνιοι

$$\begin{aligned} x &= x'\,\text{συν}\,\varphi + y'\,\text{συν}\,\psi \\ y &= x'\,\text{ημ}\,\varphi + y'\,\text{συν}\,\psi \end{aligned} \qquad \text{(σελ. 38)}$$

8) ἂν τὸ νέον σύστημα προκύπτῃ ἐκ τοῦ παλαιοῦ διὰ στροφῆς αὐτοῦ περὶ τὴν ἀρχὴν κατὰ γωνίαν φ

$$\begin{aligned} x &= x'\,\text{συν}\,\varphi - y'\,\text{ημ}\,\varphi \\ y &= x'\,\text{ημ}\,\varphi + y'\,\text{συν}\,\varphi \end{aligned} \qquad \text{(σελ. 38)}$$

9—10) Ἐξισώσεις εὐθειῶν παραλλήλων τῷ ἄξονι τῶν y, ἢ τῶν x

$$x = \alpha, \quad y = \beta. \qquad \text{(σελ. 46)}$$

11) Ἐξισώσεις εὐθειῶν διχοτομουσῶν τὰς γωνίας xoy καὶ x′oy

$$x = \pm y \qquad \text{(σελ. 46)}$$

12) Ἐξίσωσις εὐθείας διερχομένης διὰ δύο σημείων $M_1(x_1, y)$, $M_2(x_2, y_2)$

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2}, \quad \text{ἢ} \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(σελ. 47)}$$

13) Ἐξίσωσις εὐθείας ἐχούσης συντεταγμένας ἐπὶ τὴν ἀρχὴν α, β

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1. \qquad \text{(σελ. 48)}$$

14—15) Ἐξίσωσις εὐθείας ἐχούσης συντελεστὴν διευθύνσεως λ διερχομένης διὰ τοῦ σημείου M_1 (x_1, y_1) ἢ ἐχούσης τεταγμένην ἐπὶ τὴν ἀρχὴν β

$y - y_1 = \lambda\,(x - x_1), \quad y = \lambda x + \beta$ (σελ. 48 καὶ 49)

16) Γενικὴ μορφὴ τῆς ἐξισώσεως εὐθείας

$$A x + B y + \Gamma = o \qquad \text{(σελ. 51)}$$

17) Ἄνυσμα παράλληλον τῇ εὐθείᾳ $A x + B y + \Gamma = o$

$$(B, -A). \qquad \text{(σελ. 53)}$$

18—19) Συνθήκη ἵνα δύο εὐθεῖαι συμπίπτουν

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = \Gamma_1 : \Gamma_2 \qquad \text{(σελ. 60)}$$

20) Συνθήκη ἵνα δύο εὐθεῖαι εἶνε παράλληλοι

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2. \qquad \text{(σελ. 60)}$$

21—22) Συνθῆκαι ἵνα τρεῖς εὐθεῖαι

$A_1x + B_1y + \Gamma_1 = o, \quad A_2x + B_2y + \Gamma_2 = o, \quad A_3x + B_3y + \Gamma_3 = o$

διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ ἵνα τρία σημεῖα $M_1\,(x_1, y_1)$, $M_2\,(x_2, y_2)$, $M_3\,(x_3, y_3)$ κεῖνται ἐπ' εὐθείας

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} = o, \qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = o. \qquad \text{(σελ. 65)}$$

23) Ἐξίσωσις ἐπιπέδου δέσμης εὐθειῶν, ἐχούσης κέντρον τὴν τομὴν τῶν $H_1 = o, H_2,$ $\quad H_1 + \mu H_2 = o,$ (σελ. 67)

24) Συνθήκη ἵνα τρεῖς εὐθεῖαι $H_1 = o$, $H_2 = o$, $H_3 = o$ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου

$$\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 + \mu_3 H_3 \equiv o \qquad \text{(σελ. 67)}$$

25) Γενικὴ μορφὴ τῆς ἐξισώσεως ἐπιπέδου

$$A x + B y + \Gamma z + \Delta = o \qquad \text{(σελ. 76)}$$

26) Ἐξίσωσις ἐπιπέδου ἔχοντος συντεταγμένας ἐπὶ τὴν ἀρχὴν α, β, γ

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1 \qquad \text{(σελ. 78)}$$

27—8) Συνθῆκαι ἵνα δύο ἐπίπεδα συμπίπτουν, ἢ εἶνε παράλληλα,

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = \Gamma_1 : \Gamma_2 = \Delta_1 : \Delta_2 \qquad \text{(σελ. 85)}$$

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2\ \Gamma_1 : \Gamma_2 \qquad \text{(σελ. 85)}$$

29) Συνθήκη ἵνα τὸ ἄνυσμα $T\,(\alpha, \beta, \gamma)$ εἶνε παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ $A x + B y + \Gamma z + \Delta = o$

$$A \alpha + B \beta + \Gamma \gamma = o \qquad \text{(σελ. 86)}$$

30) Ἐξίσωσις ἀξονικῆς δέσμης ἐπιπέδων, ἐχούσης ἄξονα τὴν εὐθεῖαν $H_1 = o$, $H_2 = o$

$$H_1 + \mu H_2 = o \qquad \text{(σελ. 88)}$$

31) Συνθήκη ἵνα τὰ ἐπίπεδα $H_1 = o$, $H_2 = o$, $H_3 = o$ διέρχωνται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας

$$\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 + \mu_3 H_3 \equiv o \qquad \text{(σελ. 89)}$$

Ἐξισώσεις εὐθείας ὁριζομένης διὰ δύο προβαλλόντων αὐτὴν ἐπιπέδων (§ 43)

32) ἂν ἡ εὐθεῖα τέμνῃ τὸ xy εἰς τὸ (α, β, o)

$$x = \lambda z + \alpha, \quad y = \mu z + \beta \qquad \text{(σελ. 91)}$$

33) ἂν ἡ εὐθεῖα εἶνε παράλληλος τῷ xy, ἀλλ' ὄχι τῷ ἄξονι τῶν y

$$x = \lambda x + \beta, \quad z = \gamma \qquad \text{(σελ. 91)}$$

34) ἂν ἡ εὐθεῖα εἶνε παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν y

$$x = \alpha, \quad z = \gamma \qquad \text{(σελ. 91)}$$

35) Ἐξισώσεις εὐθείας διερχομένης διὰ δύο σημείων $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2} = \frac{z-z_1}{z_1-z_2} \qquad \text{(σελ. 92)}$$

36) Ἐξισώσεις εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ σημείου $M_1(x_1, y_1, z_1)$ καὶ παραλλήλου τῷ ἀνύσματι T (α, β, γ)

$$\frac{x-x_1}{\alpha} = \frac{y-y_1}{\beta} = \frac{z-z_1}{\gamma} \qquad \text{(σελ. 93)}$$

37—38) Ἐξίσωσις ἐπιπέδου, διερχομένου διὰ τριῶν σημείων

$$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$$

καὶ συνθήκη ἵνα τὰ $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_2)$, $M_4(x_4, y_4, z_4)$ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (σελ. 95 καὶ 96)

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = o, \qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = o$$

39—40) Ἐξίσωσις ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ σημείου $M_1(x_1, y_1, z_1)$ καὶ παραλλήλου πρὸς τὰ ἀνύσματα $T_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $T_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$. Συνθήκη ἵνα αἱ εὐθεῖαι

$$\frac{x-x_1}{\alpha_1} = \frac{y-y_1}{\beta_1} = \frac{z-z_1}{\gamma_1}, \quad \frac{x-x_2}{\alpha_2} = \frac{y-y_2}{\beta_2} \frac{z-z_2}{\gamma_2}$$

κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ (σελ. 98)

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = o, \quad \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = o$$

41) Συνθήκη ἵνα τέσσαρα ἐπίπεδα ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 & \Delta_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 & \Delta_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 & \Delta_3 \\ A_4 & B_4 & \Gamma_4 & \Delta_4 \end{vmatrix} = o \qquad (\text{σελ. } 101)$$

42) Ἐξίσωσις κεντρικῆς δέσμης ἐπιπέδων, ἐχούσης κέντρον τὴν τομὴν τῶν $H_1 = o$, $H_2 = o$, $H_3 = o$

$$\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 + \mu_3 H_3 = o \qquad (\text{σελ. } 102)$$

43) Συνθήκη ἵνα τὰ ἐπίπεδα $H_1=o$, $H_2=o$, $H_3=o$, $H_4=o$ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου

$$\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 + \mu_3 H_3 + \mu_4 H_4 \equiv o \qquad (\text{σελ } 102)$$

44—45) Σχέσεις μεταξὺ εὐθυγράμμων συντεταγμένων (x, y) καὶ πολικῶν (ρ, ϑ) ἑνὸς σημείου

$$x = \rho \text{ συν } \vartheta, \quad y = \rho \text{ ημ } \vartheta. \qquad (\text{σελ. } 108)$$

$$\text{εφ } \vartheta = \frac{y}{x}, \quad \rho^2 = x^2 + y^2. \qquad (\text{σελ.} 109)$$

46) Μῆκος ρ ἀνύσματος (α, β) καὶ γωνίαι αὐτοῦ φ καὶ ψ μὲ ἄξονας ὀρθογωνίους

$$\rho = \pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \quad \text{εφ } \varphi = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \text{εφ } \psi = \frac{\alpha}{\beta}. \qquad (\text{σελ. } 110)$$

47) Μῆκος ρ ἀνύσματος (α, β) καὶ γωνίαι αὐτοῦ φ, ψ μὲ ἄξονας σχηματίζοντας γωνίαν ϑ (σελ. 112—113)

$$\rho = \pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\text{συν}\vartheta}, \quad \text{εφ } \varphi = \frac{\beta \text{ ημ } \vartheta}{\alpha+\beta\text{συν } \vartheta}, \quad \text{εφ } \psi = \frac{\alpha \text{ ημ } \vartheta}{\beta+\alpha\text{συν } \vartheta}$$

48) Γωνίαι φ, ψ εὐθείας $Ax + By + \Gamma = o$ μετὰ τῶν ἀξόνων

$$\text{εφ } \varphi = \frac{-A \text{ ημ } \vartheta}{B - A \text{ συν } \vartheta}, \quad \text{εφ } \psi = \frac{B \text{ ημ } \vartheta}{B \text{ συν } \vartheta - A} \qquad (\text{σελ. } 113)$$

49) Γωνία ω δύο ἀνυσμάτων $T_1 (\alpha_1, \beta_1)$, $T_2 (\alpha_2, \beta_2)$

$$\text{εφ } \omega = \frac{(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \text{ ημ } \vartheta}{\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \text{ συν } \vartheta} \qquad (\text{σελ. } 115)$$

50) Γωνία ω δύο εὐθειῶν

$$A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 = o, \quad A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 = o$$

$$\text{εφ } \omega = \frac{(A_1 B_2 - A_2 B_1) \text{ ημ } \vartheta}{A_1 A_2 + B_1 B_2 - (A_1 B_2 + A_2 B_1) \text{ συν } \vartheta} \qquad (\text{σελ. } 116)$$

51—52) Συνθῆκαι καθετότητος δύο ἀνυσμάτων, ἢ εὐθειῶν εἰς ἄξονας πλαγιογωνίους καὶ ὀρθογωνίους

$$1+\lambda_1\lambda_2+(\lambda_1+\lambda_2)\,\sigma\upsilon\nu\,\vartheta=o,\quad 1+\lambda_1\lambda_2=o$$ (σελ. 116)

53) Ἀπόστασις R σημείου M′ (x′, y′) ἀπὸ τῆς εὐθείας

A x + B y + Γ = o εἰς ἄξονας σχηματίζοντας γωνίαν ϑ

$$R=\frac{(A\,x'+B\,y'+\Gamma)\,\eta\mu\,\vartheta}{\pm\sqrt{A^2+B^2-2\,A\,B\,\sigma\upsilon\nu\,\vartheta}}$$ (σελ. 121)

54) Ἐμβαδὸν E τριγώνου διὰ τῶν συντεταγμένων τῶν κορυφῶν αὐτοῦ

$$E=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}\eta\mu\,\vartheta$$ (σελ.128)

55) Μῆκος ϱ ἀνύσματος καὶ διευθύνοντα συνημίτονα αὐτοῦ (a, b, c) (σελ. 136)

$$\varrho=\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2},\ a=\frac{\alpha}{\rho},\ b=\frac{\beta}{\rho},\ c=\frac{\gamma}{\rho}.$$

56) Σχέσεις διευθυνόντων συνημιτόνων (a, b, c) ἀνύσματος

$$a^2+b^2+c^2=1$$ (σελ. 137)

57) Γωνία ω δύο ἀνυσμάτων $T_1\,(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$, $T_2\,(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$

$$\sigma\upsilon\nu\,\omega=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=\frac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2}{\rho_1\ \rho_2}$$ (σελ. 139)

58) Συνθήκη καθετότητος δύο ἀνυσμάτων $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$, $(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$

$$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=o,\ \text{ἢ}\ \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=o$$ (σελ. 140)

59) Συνθήκη καθετότητος δύο εὐθειῶν

$$x=\lambda_1z+\alpha_1,\ y=\mu_1z+\beta_1,\ \text{καὶ}\ x=\lambda_2z+\alpha_2,\ y=\mu_2z+\beta_2$$

$$\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2+1=o$$ (σελ. 140)

60) Συντεταγμέναι προβολαὶ ἀνύσματος καθέτου τῷ ἐπιπέδῳ

A x + B y + Γ z + Δ = o, αἱ (A, B, Γ) (σελ. 145)

61) Ἀπόστασις R σημείου M′ (x′, y′, z′) ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου

A x + B y + Γ z + Δ = o

$$R=\frac{A\,x'+B\,y'+\Gamma\,z'+\Delta}{\pm\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}$$ (σελ.146)

62) Συνθήκη καθετότητος δύο ἐπιπέδων

$$A_1A_2+B_1B_2+\Gamma_1\Gamma_2=o$$ (σελ.147)

63) Ἀπόστασις r σημείου M′ (x′, y′, z′) ἀπὸ τῆς εὐθείας

$$\frac{x-x_1}{\alpha}=\frac{y-y_1}{\beta}=\frac{z-z_1}{\gamma} \qquad \text{(σελ. 150)}$$

$$r=\pm\sqrt{\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ x_1-x' & y_1-y'\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\beta & \gamma\\ y_1-y' & z_1-z'\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\gamma & \alpha\\ z_1-z' & x_1-x'\end{vmatrix}^2} : \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$$

64) Ἀπόστασις δύο εὐθειῶν

$$\frac{x-x_1}{\alpha_1}=\frac{y-y_1}{\beta_1}=\frac{z-z_1}{\gamma_1} \quad \text{καὶ} \quad \frac{x-x_2}{\alpha_2}=\frac{y-y_2}{\beta_2}=\frac{z-z_2}{\gamma_2}$$

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & x_2-x_1\\ \beta_1 & \beta_2 & y_2-y_1\\ \gamma_1 & \gamma_2 & z_2-z_1\end{vmatrix} : \pm\sqrt{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\beta_1 & \gamma_1\\ \beta_2 & \gamma_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\gamma_1 & \alpha_1\\ \gamma_2 & \alpha_2\end{vmatrix}^2} \qquad \text{(σελ.151)}$$

65) Ἐμβαδὸν E τριγώνου διὰ τῶν συντεταγμένων τῶν κορυφῶν αὐτοῦ (σελ. 152)

$$M_1\,(x_1, y_1, z_1),\ M_2\,(x_2, y_2, z_2),\ M_3\,(x_3, y_3, z_3)$$

$$E=\pm\frac{1}{2}\sqrt{|x, y, 1|^2+|y, z, 1|^2+|z, x, 1|^2}$$

66) Ὄγκος V τετραέδρου διὰ τῶν συντεταγμένων τῶν κορυφῶν αὐτοῦ

$$V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix} \qquad \text{(σελ.154)}$$

67) Σχέσεις μεταξὺ εὐθυγράμμων συντεταγμένων (x, y, z) καὶ πολικῶν (ρ, φ, ψ) ἐν τῷ διαστήματι (σελ. 155, 156)

$$x=\rho\,\eta\mu\,\varphi\,\sigma\upsilon\nu\,\psi,\quad y=\rho\,\eta\mu\,\varphi\,\eta\mu\,\psi,\quad z=\rho\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi$$

$$\rho^2=\pm\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad \varepsilon\varphi\,\psi=\frac{y}{x},\quad \sigma\upsilon\nu\,\varphi=\frac{z}{\rho}$$

68) Ἐξίσωσις περιφερείας κύκλου (α, β, ρ) εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$ (σελ. 157)

69) Γενικὴ ἐξίσωσις περιφερείας κύκλου

$$x^2+y^2+A\,x+B\,y+\Gamma=0. \qquad \text{(σελ. 159)}$$

70) Ἐξίσωσις εὐθείας ἐφαπτομένης τῆς περιφερείας (α, β, ρ) εἰς τὸ σημεῖον M_1 (x_1, y_1)

$$(x-\alpha)(x_1-\alpha)+(y-\beta)(y_1-\beta)=\rho^2 \qquad \text{(σελ. 165)}$$

71) Πολικὴ σημείου P (ξ, η) ὡς πρὸς περιφέρειαν (α, β, ρ)

$$(\xi-\alpha)(x-\alpha)+(\eta-\beta)(y-\beta)=\rho^2 \qquad \text{(σελ. 168)}$$

72) Δύναμις σημειου M′ (x′, y′) ὡς πρὸς περιφέρειαν K (α,β,ρ)

$(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2-\varrho^2=[(M'K)+\varrho][(M'K)-\varrho]$ (σελ. 171)

73) Ἐξίσωσις σφαίρας (α, β, γ, ϱ)

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\varrho^2$$ (σελ. 176)

74) Γενικὴ ἐξίσωσις σφαίρας (σελ. 177)

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$$

75) Ἐξίσωσις τοῦ κώνου τῶν ἐφαπτομένων εὐθειῶν διὰ τοῦ $M_1\ (x_1, y_1, z_1)$ τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2=\varrho^2$ (σελ. 183)

$$(x_1x+y_1y+z_1z-\varrho^2)=(x_1^2+y_1^2+z_1^2-\varrho^2)(x^2+y^2+z^2-\varrho^2).$$

76) Ἐξίσωσις ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς σφαίρας (α, β, γ, ϱ) εἰς τὸ σημεῖον $M_1\ (x_1, y_1, z_1)$ (σελ. 185)

$$(x-\alpha)(x_1-\alpha)+(y-\beta)(y_1-\beta)+(z-\gamma)(z_1-\gamma)=\varrho^2$$

77) Πολικὸν ἐπίπεδον τοῦ πόλου P (ξ, η, ζ) ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν (α, β, γ, ϱ) (σελ. 188)

$$(\xi-\alpha)(x-\alpha)+(\eta-\beta)(y-\beta)+(\zeta-\gamma)(z-\gamma)=\varrho^2$$

78) Ἐξίσωσις ἐλλείψεως καὶ ὑπερβολῆς ἐχούσης ἄξονας 2α, 2β

$$\frac{x^2}{\alpha^2}\pm\frac{y^2}{\beta^2}=1$$ (σελ. 199, 235)

79) Πολικὴ ἐξίσωσις ἐλλείψεως ὡς πρὸς πόλον τὸ κέντρον αὐτῆς

$$\varrho^2=\frac{\beta^2}{1-\varepsilon\ \text{συν}^2\ \omega},\quad\left(\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}<1\right)$$ (σελ. 202)

80) Πολικὴ ἐξίσωσις ἐλλείψεως καὶ ὑπερβολῆς ὡς πρὸς πόλον τὴν ἑστίαν αὐτῶν E' καὶ E ἀντιστοίχως

$$\varrho=\frac{p}{1-\varepsilon\ \text{συν}\ \varphi},\quad\left(p=\frac{\beta^2}{\alpha},\ \varepsilon\gtrless 1\right)$$ (σελ. 203,)

81) Σχέσις συντελεστῶν διευθύνσεως συζυγῶν διαμέτρων ἐλλείψεως καὶ ὑπερβολῆς

$$\text{εφ}\ \varphi.\ \text{εφ}\ \psi=\mp\frac{\beta^2}{\alpha^2}$$ (σελ. 211, 216)

82) Ἐξίσωσις ἐλλείψεως καὶ ὑπερβολῆς ὡς πρὸς συζυγεῖς διαμέτρους αὐτῶν 2α',2β' $\quad\frac{x^2}{\alpha'^2}\pm\frac{y^2}{\beta'^2}=1$ (σελ. 215,)

83) Ἐξίσωσις ἐφαπτομένης ἐλλείψεως καὶ ὑπερβολῆς εἰς τὸ σημεῖον αὐτῶν $M_1\ (x_1, y_1)$

$$\frac{xx_1}{\alpha'^2}\pm\frac{yy_1}{\beta'^2}=1$$ (σελ. 215, 249)

84) Ἐξίσωσις ἐλλείψεως καὶ ὑπερβολῆς ὡς ἄξονας διάμετρον καὶ ἐφαπτομένην αὐτῶν

$$y^2=2\,p\,x\mp\frac{p}{\alpha'}x^2\quad\left(p=\frac{\beta'^2}{\alpha'}\right)$$ (σελ. 219, 251)

85) Πολικὴ πόλου Ρ (ξ, η) ὡς πρὸς ἔλλειψιν καὶ ὑπερβολὴν

$$\frac{\xi x}{\alpha'^2} \pm \frac{\eta y}{\beta'^2} = 1 \qquad \text{(σελ. 224, 256)}$$

86) Διευθετοῦσαι ἐλλείψεως καὶ ὑπερβολῆς

$$x = \pm \frac{\alpha^2}{\gamma} = \pm \frac{\alpha}{\varepsilon} \qquad \text{(σελ. 229, 259)}$$

87) Ἐμβαδὸν Ε ἐπιφανείας περικλειομένης ὑπὸ ἐλλείψεως

$$E = \pi \, \alpha \, \beta \qquad \text{(σελ. 231)}$$

88) Ἐξισώσεις τῶν ἀσυμπτώπτων ὑπερβολῆς

$$y = \pm \frac{\beta}{\alpha} x \qquad \text{(σελ.237)}$$

89) Ἐξίσωσις ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς $x^2 - y^2 = \alpha^2$ (σελ. 237)

90) Πολικὴ ἐξίσωσις ὑπερβολῆς ὡς πρὸς πόλον τὸ κέντρον αὐτῆς

$$\varrho^2 = \frac{\beta^2}{\varepsilon^2 \sigma\upsilon\nu^2 \omega - 1} \quad \left(\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} > 1\right) \qquad \text{(σελ. 238)}$$

91) Ἐξισώσεις συζυγῶν ὑπερβολῶν

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = \pm 1 \qquad \text{(σελ. 240)}$$

92) Ἐξίσωσις καὶ ἐφαπτομένη ὑπερβολῆς ὡς πρὸς ἄξονας τὰς ἀσυμπτώτους αὐτῆς $x\,y = \frac{\alpha^2+\beta^2}{4}$, $\frac{x}{2\,x_1} + \frac{y}{2\,y_1} = 1$ (σελ. 252, 254)

93) Ἐξίσωσις παραβολῆς $y^2 = 2\,p\,x$ (σελ. 262)

94) Πολικὴ ἐξίσωσις παραβολῆς ὡς πρὸς πόλον τὴν ἑστίαν αὐτῆς Ε

$$\varrho = \frac{p}{1 - \varepsilon \, \sigma\upsilon\nu \, \varphi} \quad (\varepsilon = 1) \qquad \text{(σελ. 264)}$$

95) Ἐξίσωσις ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον $M_1(x_1, y_1)$ παραβολῆς

$$y\,y_1 = p\,(x + x_1) \qquad \text{(σελ. 268)}$$

96) Πολικὴ τοῦ πόλου Ρ (ξ, η) ὡς πρὸς τὴν παραβολὴν $y^2 = 2px$

$$\eta\,y = p\,(x + \xi) \qquad \text{(σελ. 273)}$$