496.

Γεωμετρήσων εἰσίτω· ὀυ κωλύω.

Τῷ μὴ θέλοντι, συζυγώσω τὰς θύρας.

Α. ΤΑΚΟΥΕΤΙΟΥ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΜΕΤΑ ΣΗΜΕΙΩΣΕΩΝ ΤΟΥ ΟΥΙΣΤΩΝΟΣ

ἐξελληνισθέντα μὲν ἐκ τῆς Λατινίδος φωνῆς ὑπὸ τοῦ

ΠΑΝΙΕΡΩΤΑΤΟΥ ΑΡΧΙΕΠΙΣΚΟΠΟΥ

ΚΥΡΙΟΥ

ΕΥΓΕΝΙΟΥ τοῦ ΒΟΥΛΓΑΡΕΩΣ

Ἱεροδιακόνου ἔτι ὄντος, καὶ σχολαρχοῦντος ἔντε Ἰωαννίνοις, καὶ ἐν τῇ Ἀθωνιάδι Ἀκαδημίᾳ, καὶ ἐν Κωνσταντινουπόλει, πρὸς ἀκρόασιν τῶν παρ' αὐτῷ μαθητιόντων.

Τὰ νῦν δὲ τύποις ἐκδοθέντα ὑπὸ τῆς Αὐταδελφότητος τῶν

ΖΩΣΙΜΑΔΩΝ

Α. καὶ Ν. καὶ Ζ. καὶ Μ.

ἐπὶ τῷ διανεμηθῆναι δωρεὰν τοῖς φιλεπιστήμοσιν Ἑλλήνων Νεανίσκοις.

Ἐν Βιέννῃ τῆς Αὐστρίας.

ἐν τῇ Ἑλληνικῇ Τυπογραφίᾳ Γεωργίου Βενδώτη.

1805.

Γεωμετρήσων εἰσίτω· οὐ κωλύω.

Τῷ μὴ θέλοντι, συζυγώσω τὰς θύρας.

ΑΦΗΓΗΣΙΣ ΙΣΤΟΡΙΚΗ

Περὶ ἀρχῆς καὶ προόδε

Τῶν Μαθηματικῶν Ἐπιςημῶν.

Τὴν ἔκθεσιν τῶν ςοιχείων τῶν Μαθηματικῶν ἀναβαλλομένῳ, πάρεργε ἂν ἔσεσθαι περὶ ἀρχῆς τε τέτων, καὶ τιμιότητος, βραχέ᾽ ἄττα ἔδοξέ μοι προδιελθεῖν, ὡς ἂν γνοῖεν οἱ τῆς Μαθήσεως Θιασῶται, οἵᾳ τινι φέροντες σφᾶς ἀυτὲς ἀφοσιώσονται ἐπιςήμῃ, καὶ ἅμα διδαχθεῖεν, οἱ ὧν ἂν τύχωσιν ἀφῃρημένοι τὴν γνῶσιν, τέτων προχειρότατα ποιέμενοι τὴν κατάγνωσιν, ἡλίκον τῶν Ἕξεων τὸ ἀξίωμα, περὶ ὧν τὴν κτῆσιν, ὅσες δήποτε ἐπὶ σοφίᾳ γνωριμωτάτες ὁ παλαιὸς ἤνεγκε χρόνος, ἀμύθητον ὅσην τὴν σπεδὴν κατεβάλοντο. Ἐν χρήσει δέ μοι ἧκε τὴν προτεθεῖσαν ἀφήγησιν συγκομισομένῳ, τὰ ὑπὸ Πέτρε τε Ῥάμε ἐν ὅλῳ τῷ τῶν Σχολῶν Α΄. Βιβλίῳ, περὶ τῶν Μαθηματικῶν ἱςορηθέντα, ἅπερ ἐκ τῶν Πρόκλε, Λαερτίε, Ὀυϊτρευΐε, Γελλίε, Πολυβίε, Τζέτζε, καὶ ἄλλων, ἀκριβῶς ἐχ ἧττον, ἢ δαψιλῶς ἐκεῖνος συγγράψας ἐξέδοτο.

Πρώτη μὲν ὖν (εἰ χρὴ πιςέυειν Ἰωσήπῳ) τῶν ἐπιςημῶν ἀνθρώποις ὑπῆρξεν ἡ Μάθησις. Αὐτὸς γὰρ ἐν τῷ Α΄. τῶν Ἀρχαιολογιῶν Κεφ. Γ΄., τὲς ἀπὸ Σήθε, φησὶ, τὴν τῶν ἐρανίων παρατηρήσαντας διακόσμησιν, καὶ ἀςέρων περιόδες, ἵνα μὴ τοῖς εἰσέπειτα τὰ εὑρημένα ἐξίτηλα γένηται, παγκόσμιόν τινα τε Ἀδὰμ προειρηκότος τὸν ὄλεθρον, τὸν μὲν κατ᾽ ἰσχὺν πυρὸς, τὸν δὲ κατὰ πλῆθος, καὶ βίαν ὕδατος, στήλας δύω ἱδρυσαμένους, τὴν μὲν ἐκ πλίνθου, τὴν δ᾽ ἑτέραν ἐκ λίθων, ἀμφοτέραις ἐγγράψαι τὰ εὑρημένα, ἵνα καὶ τῆς πλινθίνης ἀφανισθείσης ὑπὸ τῆς ἐπομβρίας, ἡ λιθίνη μείνασα, παράσχῃ μαθεῖν τοῖς ἀνθρώποις, τὰ ἐγγεγραμμένα δηλοῦσα. Καὶ πλινθίνην δὲ ὑπ᾽ αὐτῶν ἀνατεθῆναι, φησὶ, μένει δὲ ἄχρι τοῦ δεῦρο κατὰ τὴν Συριάδα. Ταῦτα γοῦν ἡμῖν Ἰώσηπος, παρ᾽ ᾧ καὶ ἡ τούτων πίστις μενέτω.

Μετὰ δὲ τὸν κατακλυσμὸν, Ἀσσυρίους τε, καὶ Χαλδαίους πρώτους ἁπάντων περὶ τὰ Μαθήματα ἐνασχοληθῆναι, αὐτός τε Ἰώσηπος ἐστὶ παραδεδωκὼς, καὶ Πλίνιος, καὶ Διόδωρος, καὶ Κικέρων. Ἐκ δὲ Χαλδαίων, καὶ Ἀσσυρίων, παρ᾽ οἷς ἀνέφυσάν τε, καὶ θάλλειν ἤρξαντο, ἐνεπιδημῆσαι τοῖς Αἰγυπτίοις, ὑπὸ Ἀβραάμου μετενεχθείσας τὰς Ἕξεις. Οὗτος γὰρ Θεῷ κελεύοντι πειθαρχήσας, ἐξελθών τε τῆς γῆς αὐτοῦ, καὶ τῆς συγγενείας, καὶ τὴν Χαννανίτιδα πρῶτον παροικήσας, εἶτ᾽ ἐντεῦθεν εἰς Αἴγυπτον μεταναστεύσας, κατιδών τε τοὺς Αἰγυπτίους, Σοφίας τε ἱμέρῳ ἥττονας ὄντας, καὶ πρὸς παιδείαν Φύσεως ἔχοντας εὖ, ὡς αὐτὸς Ἰώσηπος μαρτυρεῖ Βιβλ. Α΄. Κεφ. Θ΄., Ἀριθμητικήν τε, καὶ Ἀστρονομίαν, ἧς ἡγεῖσθαι τὴν Γεωμετρίαν ἐπάναγκες ἦν, αὐτοῖς ἐκοινώνησε, τοῦ ἔθνους ἐντυχὼν τοῖς λογιωτάτοις. Τοὺς δ᾽ Αἰγυπτίους ἐπὶ πλεῖστον τὸ εἶδος τοῦτο τῆς Μαθηματικῆς παιδείας ἠκριβωκέναι εἰκὸς, καὶ ὑπὸ ἀρίστους πρώτους αὐτοὺς εὑρετὰς, κατὰ Σχολῆς περιουσίαν μαρτυρουμένους ἐν Α΄. Μεταφ. Κεφ. Α΄. „Ἐφεῖσθαι γὰρ ἐν Αἰγύπτῳ τοῖς „Ἱερεῦσι δημοσίᾳ περὶ τὰς τοιαύτας σχολάζειν τέχνας.

Τὸ δ᾽ ἀπ᾽ ἐντεῦθεν, ἡ Μάθησις ἐξ Αἰγύπτου διαπλεύσασα, πρὸς τοὺς ἀν᾽ Ἑλλάδα Φιλοσόφους διαπεφοίτηκε. Θαλῆς τε γὰρ ὁ Μιλήσιος, ὃς ἔτει πρὸ Χριστοῦ φπδ΄. ἐτύγχανε γεγονὼς, πρω-τος Ἑλλήνων κατάρας εἰς Αἴγυπτον, ἐκεῖθεν ἐπὶ τὴν Ἑλλάδα τὴν Γεωμετρίαν μετακομίσαι ἱστόρηται, ὃς δὴ πρὸς τοῖς ἄλλοις, καὶ τῶν ἐν τῷ πρώτῳ τῶν στοιχείων τὴν Ε΄. εὑρηκὼς ᾄδεται, καὶ τὴν ΙΕ΄., καὶ Κϛ΄., καὶ τῶν ἐν τῷ Δ΄. δὲ, Β΄., καὶ Γ΄., καὶ Δ΄., καὶ Ε΄., ἐφ' ᾗ καὶ βοῦν θῦσαι λέγεται, ὑπερησθεὶς τῷ εὑρήματι. Ὁ δ' αὐτὸς καὶ τὰς Ἰσημερίας, καὶ τὰς Τροπὰς πρῶτος παρατηρεῖν ἤρξατο (1), πρῶτός τε Ἡλίου ἔκλειψιν προειρήκει, ὡς Ἱππίας τε, καὶ Ἀριστοτέλης μνημονεύει· καὶ Σελήνης δὲ, ἣν, τοῦ Τζέτζου μαρτυροῦντος, Κύρῳ τῷ βασιλεῖ Περσῶν προηγόρευκεν. Ἐφ' οἷς καὶ τῶν Μαθημάτων ἐν Ἕλλησιν οὗτος πατὴρ, καὶ πρόξενος ἤκουσε.

Μετὰ δὲ Θάλητα, Πυθαγόρας ὁ Σάμιος, Φιλοσόφων ἐκεῖνος ὁ ἀρχαιότατος, διαφερόντως τὰ τῶν Μαθημάτων προήγαγέ τε, καὶ διεκάλλυνεν, οὕτω μέντοι περὶ τὸ Ἀριθμητικὸν εἶδος σπουδάσας (2), ὡς ἐξ ἀριθμῶν καὶ πᾶσαν τὴν κατ' αὐτὸν τοῦ φιλοσοφεῖν ἰδέαν συστήσασθαι· οὕτω δέ τοι καὶ τὸ Γεωμετρικὸν ἀκριβώσας, ὡς πρῶτος, ᾗ φησὶ Λαέρτιος, τὴν Γεωμετρίαν ἀποσπάσαι τῆς ὕλης, καὶ οἷον ἀποκαθᾶραι, κἀντεῦθεν δαιμόνιόν τι πτερυξάμενος, εἰς περίνοιαν τῆς ΛΒ΄., καὶ ΜΔ΄., καὶ ΜΖ΄., καὶ ΜΗ΄., τῶν τοῦ Α΄. Βιβλίου Προτάσεων ἐξαρθῆναι, ὧν δὴ μάλιστα τῆς ΛΒ΄., καὶ ΜΖ΄. γεραίρεται, ἐφ' ἧς τῇ εὑρέσει ὑπεργαννύμενος, καὶ Ἑκατόμβην λέγεται θῦσαι, ὡς παρὰ τῷ Λαερτίῳ μαρτυρεῖ Ἀπολλόδωρος. Τοῦ δ' αὐτοῦ καὶ ἡ τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν ἔκθεσις, ἐδέτῳ ἄλλῳ τῶν

---

(1) Αὐτὰς δὲ καὶ τῆς Ἄρκτου τῆς ἐλάσσονος εὑρετὴς λέγεται. Λαέρ. ἐν βίῳ· καὶ Θέων εἰς τὰ Ἀράτ. Φαινόμ. Καὶ ὁ Παλ. Ὁμήρ. Σχολ. παρὰ Μεναγ. ἐν Σημειώσ. εἰς τὸν Λαέρτ.

(2) Ἰωάν. Μαλαλ. Χρονικ. Τόμ. Α΄. Σελ. 201. Πυθαγόρας, φησὶν, ὁ Σάμιος Ἀριθμητικὴν συνεγράψατο. Εἰ καὶ μηδὲν αὐτὸν συγγεγραφέναι φατέον μετὰ Πλουτάρχου περὶ Τύχ. Ἀλεξ. καὶ Λουκ. περὶ τῆς ἐν τῷ ἀσπάσασθαι διαμαρτίας· καὶ Λαερτ. ἐν τῷ Προοιμ.· καὶ Πορφ. ἐν βίῳ Πυθαγ. καὶ ἄλλων, ἀλλὰ καὶ τὸ Ἀβάκιον αὐτῷ ἀπονέμεται.

Κανονικῶν ἐν σώμασι σχημάτων ἀνατίθεται τὸ πεντάριθμον. Καὶ Ἀςρολογίαν δὲ, ϗ Μȣσικὴν, αὐτός τε ἤσκει, ϗ ἑτέρȣς ἐδίδασκεν· οὐδὲ γὰρ ὅπως φύσεως ὀξύτητι διενεγκὼν, τὰ θαυμασὰ ἐκεῖνα ἐξευρεῖν οἷος ἐγένετο, ἀλλὰ καὶ πρῶτος γυμνάσιον συγκροτῆσαι φέρεται, εἰς ὅπερ ἦν τῇ Νεολαίᾳ θαμίζȣσι, τὰς καλλίςας τάυτας, καὶ τιμιωτάτας τῶν τεχνῶν ἐκπαιδέυεσθαι.

Ἐπὶ δὲ τῷ Πυθαγόρᾳ ϗ Ἀναξαγόρας ἐγένετο ὁ Κλαζομένιος, ϗ Οἰνοπίδης ὁ Χῖος, ὧν ὁ Πλάτων μέμνηται ἐν Ἐρασαῖς, ἔνθα νεανίσκȣς εἰσάγει περὶ Ἀναξαγόρȣ, ϗ Οἰνοπίδȣ, ἐπὶ Κύκλων καταγραφαῖς ἀλλήλοις προσδιαφιλονεικȣ͂ντας. Ἀριςοτέλης γȣ͂ν ϗ Γεωμετρικὴν ἀναφέρει πραγματείαν τῷ Ἀναξαγόρᾳ συγγραφεῖσαν (1). Ὅ,τε Λαέρτιος καὶ περὶ Ἡλίȣ διέξεισιν, ὡς κατασκευάσειεν ἐκεῖνος τῆς Πελοποννήσȣ μείζονα εἶναι (ἀμέλειτοι ἐν σπαργάνοις ἔτει τῆς Ἀςρονομικῆς θεωρίας ἐνειλιμμένης). Καὶ περὶ τῆς Σελήνης, ὡς καὶ περὶ τῶν ἐν αὐτῇ οἰκητόρων, ἔςιν ἄττα φιλοσοφήσειεν. Οἰνοπίδῃ δὲ ὁ Πρόκλος τήν τε ΙΒʹ., ϗ τὴν ΚΓʹ. τȣ͂ Αʹ. Βιβλίȣ προσαναγράφει (2). Τȣ́των ἑξῆς γενέσθαι φέρονται Βρίσων τε, ϗ Ἀντιφὼν, ϗ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος, οἱ τὸν Κύκλον τετραγωνίσαι ἀποπειρασάμενοι, ϗ τȣ́τȣ γε ἕνεκα ὑπὸ Ἀριςοτέλȣς ἐλεγχόμενοι ἅμα, καὶ κλεϊζόμενοι· ὧν Ἱπποκράτης τῇ εὐκλείᾳ διήνεγκεν, ὁ ἐξ ἐμπόρȣ φιλόσοφός τε, καὶ Γεωμέτρης, ὃς παρὰ τὸν τȣ͂ Κύκλȣ τετραγωνισμὸν, ϗ τȣ͂ διπλασιασμȣ͂ τȣ͂ Κύβȣ πρῶτος λέγεται πειραθῆναι, διὰ τῆς τῶν δυεῖν μέσων εὑρέσεως, ἣν δήπȣ μέθοδον, ὡς ἐπίσημόν τε, καὶ διαφέρȣσαν κοινῇ οἱ εἰσέπειτα πάντες ἠσπάσαντο. Ὁ δ᾽ αὐτὸς κἀντεῦθεν ȣ̓ μικρόν τινα καρπȣ͂ται

(1) Πλȣ́ταρχος δὲ ϗ τετραγωνισμον Κύκλȣ γράψαι τὸν Ἀναξαγόραν ἐν εἱρκτῇ κατεχόμενον παρέδωκε (Βιβλ. περὶ Ἐξορ. Σελ. 607) διὰ τὸν Μῦδρον.

(2) Οἰνοπίδης δὲ ἐςὶν ὁ ϗ τὸν Μηνίσκȣ τετραγωνισμὸν εὑρών. . Παρὰ Πρόκλ. ἐν Βιβλ. Βʹ. τῶν εἰς Ἐυκλ.

τὸν ἔπαινον, ὅτι πρῶτος (μαρτυροῦντος τοῦ Πρόκλου) καὶ τὰ ὑπὸ τῶν ἄλλων εὑρεθέντα εἰς ἓν συνειλοχὼς, ϗ διαταξάμενος, τὰ στοιχεῖα τῆς Μαθήσεως συνεγράψατο.

Ὁ δὲ Δημόκριτος οὐδὲν ἧττον ἢ ἐν Φιλοσοφίᾳ, ϗ περὶ τὸ Μαθηματικὸν εἶδος θαυμάζεται, εἰ ϗ μηδὲν τῶν αὐτοῦ, οὔτε Φυσικὸν, οὔτε Μαθηματικὸν σπούδασμα, εἰς ἡμᾶς ὁ χρόνος παρέπεμψε, φθόνῳ (εἰσὶν οἳ φασὶν) Ἀριστοτέλους, τοῦ μόνα τὰ ἑαυτοῦ ἐφιεμένου τοῖς πᾶσιν ἀναγινώσκεσθαι. Τὴν γεμὴν κατὰ Δημόκριτον φιλοσοφίαν Πέτρος ὁ Γασσένδος ἀρτίως ἀνεδείματο, βίβλον ἀμφιλαφῆς σοφίας μεστὴν συγγραψάμενος. Ἐπὶ τούτοις δὲ ϗ Θεόδωρος ὁ Κυρηναῖος, καίτοι οὐδὲν οὐδὲ αὐτοῦ τῶν Μαθηματικῶν εὑρημάτων περιὸν, ἐκ γοῦν τούτου μέγας τις γενέσθαι μνημονεύεται, ὅτι Πλάτωνος καθηγήσασθαι ἔλαχε.

Ἀλλ' εἰς τὸν Πλάτωνα τέως ἡμᾶς φέρων ὁ λόγος κατήγαγεν, οὐ μᾶλλον τὰς Μαθηματικὰς κατηγλάϊσεν ἕξεις, ὅστις οὐδείς. Τό, τε γὰρ τῆς Γεωμετρίας ἐκεῖνος χρῆμα προσθήκαις προήγαγε ταῖς ἐπισημοτάταις, ϗ τὴν Ἀναλυτικὴν ἐξεῦρεν, ἀσφαλεστάτην οὖσαν τοῦ συλλογίζεσθαι, ϗ τὰ ζητούμενα εἰς φῶς ἄγειν μέθοδον· καὶ τάγε φιλοσοφούμενα τοῖς ἀπὸ τῶν Μαθημάτων θαυμασιωτέροις λόγοις συγκαταμίξας τε, ϗ διευκρινήσας, εἰς τ' αὐτὸ τὰς Ἕξεις ἐν τοῖς αὐτοῦ βιβλίοις συνῆψε, ϗ συνηρμόσατο. Τὸ γάρτοι περιαδόμενον ἐκεῖνο, μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω, πρὸ τῶν πυλώνων τῆς Ἀκαδημίας προγράψας, οὐκ ἀλλοτρίαν, οὐδ' ἀλυσιτελῆ, ϗ ἀπρόσφορον τὴν Μαθηματικὴν τυγχάνουσαν, οἰκείαν δὲ, ϗ φίλην, ϗ οὐ μετρίαν τὴν συντέλειάν τε, καὶ τὸν κόσμον ἐκπρεπῆ παρεχομένην, τῇ ὑγιεῖ, καὶ ἀσφαλεστέρᾳ Φιλοσοφίᾳ λαμπρῶς ἐδήλωσεν. Ἀλλὰ γὰρ ὅσος τῆς Μαθηματικῆς παιδείας ὑπῆρξεν οὗτος θεραπευτής τε καὶ ἐπαινέτης, τῷ τὰ ἐκείνου ὑπομνήματα μετιόντι συνιδεῖν ῥᾴδιον.

Ἐκ γοῦν τῆς τοῦ Πλάτωνος Ἀκαδημίας οὐκ εὐαρίθμων ἐξεῤῥυηκότων ἀνδρῶν, τριῶν ἐπὶ δέκα τῶν ἐκείνου γνωρίμων ὁ Πρόκλος μέμνηται περὶ τὰ Μαθηματικὰ διαφερόντως ἐσπουδακότων. Καὶ γὰρ καὶ Λεωδάμας ὁ Θάσιος, ϗ Ἀρχύτας ὁ Ταραντινὸς, ϗ Θεαίτητος ὁ Ἀθηναῖος, ἐπὶ πλεῖστον τὴν Ἕξιν προήγαγον. Λεωδάμας μὲν γὰρ, τὴν ἣν ὑπὸ Πλάτωνος παρειλήφει ἀνάλυσιν ἐπιμελῶς γυμνάσας, δι᾽ αὐτῆς πολλῶν εὑρετὴς ὀφθῆναι ὑπὸ Λαερτίου γεραίρεται. Τὸν δὲ Θεαίτητον, ϗ τά γε παρ᾽ αὐτοῦ εὑρημένα (ἐν οἷς τά τε γραφέντα αὐτῷ στοιχεῖα θαυμάζεται, ϗ τὰ περὶ τῆς τῶν κανονικῶν Σωμάτων ἐγγραφῆς) κατέστησε περιώνυμον, οὐδὲν ἧττον δὲ καὶ οἱ παρὰ Πλάτωνος ἔπαινοι, τοῦ ϗ τῶν διαλόγων ἕνα τῶν αὐτοῦ ἐπ᾽ ὀνόματι τῷ ἐκείνου ἐπιγράψασθαι ἀξιώσαντος. Τῷ δὲ Ἀρχύτᾳ ϗ στοιχεῖα φέρεται γεγραμμένα· ϗ περὶ διπλασιασμοῦ τοῦ Κύβου ἔργον παρ᾽ Εὐτοκίῳ ἀναγινώσκεται. Κᾀκεῖνο δὲ τῷ Ἀνδρὶ τείνει εἰς κλέος οὐ μέτριον, ὅτι πρῶτος τὰ Μαθηματικὰ ταῖς ἀνθρώπων χρήσεσι προσβιβάσας, ϗ περιστερὰν ἐκ ξύλου ἱπταμένην ἐτερατεύσατο, πολλῷ τῷ χρόνῳ τοῦ Δαιδάλου ὕστερος γεγονὼς, δαιδάλειόν τι μηχάνημα. Ὁ δὲ Ἀρχύτας πρὸς τῇ Μαθηματικῇ δεξιότητι, ϗ στρατηγικὴν ἐμπειρίαν ἐπιδειξάμενος, ἐν ταῖς πατρίοις μάχαις πεντάκις μὲν ἡγήσατο τῶν οἰκείων, πεντάκις δὲ καὶ τρόπαιον ἔστησε. Καὶ Νεοκλείδου δέ τις φήμη διαῤῥεῖ, οὐ τοσοῦτον ἀπὸ τῶν εὑρημάτων, ὅσον ἀπὸ Λέοντος θαυμαζομένου, τοῦ αὐτοῦ διακούσαντος. Οὗτος γὰρ ϗ στοιχεῖα τῆς ὅλης Μαθήσεως συγγράψαι λέγεται, τελεωτέραν τε ἀναδεῖξαι τὴν Ἕξιν, ϗ τῇ χρήσει δεξιωτέραν, ὡς ἐν δίκῃ ϗ τοῖς ἐπισημοτέροις τῶν Στοιχειογράφων συγκαταλέγεσθαι.

Εὔδοξος δὲ ὁ Κνίδιος, τ᾽ ἄλλα μὲν τοῖς πρὸ αὐτοῦ ἴσος, τὰ δὲ Ἀριθμητικὰ ϗ πολλῷ κρείσσων ἀναδειχθεὶς, ϗ (εἰ τῷ Σχολιαστῇ χρὴ πιστεύειν) ὅλον αὐτὸς τὸ πέμπτον Βιβλίον ἐκδεδωκὼς, ϗ στοιχεῖα συνέγραψε, γενικώτερα ἀποδές. Ὁ δ᾽ αὐτὸς καὶ τὰς, αἷς ὁ Πλάτων ἐπεκεχειρήκει, Τομὰς ἐπήυξησε, καὶ τῶν Ἀϛρονομικῶν ὑποθέσεων πρῶτος δημιεργὸς ἀνεφάνη, ϗ δὴ ϗ τὰς τῆς Γεωμετρίας πηγὰς, παραπλησίως τῷ Ἀρχύτᾳ, εἰς ὀργανικάς τε, ϗ μηχανικὰς τέχνας μετωχετεύσατο. Ἐπὶ τέτοις δὲ ϗ Ἀμύκλας ὁ Ἡρακλεώτης, Μέναιχμός τε, ϗ ὁ τέτε ὁμαίμων Δεινόϛρατος, Ἑλικών τε ὁ Κυζικηνὸς, ϗ Θεύδιος, ϗ Ἑρμότιμος ὁ Κολοφώνιος, Φίλιππός τε ὁ Μεδμαῖος, οἱ πάντες Πλατωνικοὶ, ἐπὶ τὸ κρεῖττον τυγχάνεσι τὴν Γεωμετρίαν προαγαγόντες, ϗ τελεώτερον. Μέναιχμος μὲν γὰρ, τὰς Κωνικὰς ἐπινοήσας τομὰς, διὰ τέτων τὰς δύο ἐθηράσατο μέσας, ἣν δήπε εὕρεσιν πρὸ τῶν λοιπῶν ἔθετο ὁ Εὐτόκιος. Ὅ,τε Θεύδιος, ϗ ὁ Ἑρμότιμος, καθόλε τε μᾶλλον, ϗ ἀκριβέϛερα τὰ ϛοιχεῖα ἀπέδωκαν. Καὶ ἕτοι μὲν δὴ ἐκ τῆς τε Πλάτωνος Ἀκαδημίας οἱ πάντες εἰσὶν, οἱ τὴν Μαθηματικὴν φιλοσοφίαν, ὡς Πρόκλος φησὶ, καταρτίσαντες. Ἐφ᾽ οἷς ϗ Ξενοκράτης, ὁ τε μὲν Πλάτωνος ὁμιλητὴς, τε δὲ Ἀριστοτέλες καθηγητὴς χρηματίσας, καὶ Ἀριστοτέλης αὐτὸς, ἐ μετρίαν τὴν ἀπὸ τῶν Μαθημάτων ἠνέγκαντο δόξαν. Ἐκείνε γεν ποτε ϗ διακεσαι τις ἐπιθυμήσας, ἐπεὶ Γεωμετρίας ἄμοιρος ἐτύγχανεν ὢν, ἄπιθι, ἤκεσε, κώπην γὰρ Φιλοσοφίας ἐ κέκτησαι.

Περὶ δὲ τε Ἀριστοτέλες τὶ ἂν ϗ εἴποιμι; Οὕτω τὰ ἐκείνε βιβλία τῶν Μαθηματικῶν τόπων εἰσὶν ἀνάπλεα, ὡς ὅλην ἐξ αὐτῶν πραγματείαν τὸν Βλαγκάνον συνειλοχέναι. Δύο δὲ τῶν ἐκ τῆς ἐκείνε Σχολῆς μάλιϛα θρυλλέμενοι φέρονται, Εὔδημός τε, ϗ Θεόφραϛος· ὧν ὁ μὲν, δύω περὶ ἀριθμῶν βιβλία συνέγραψε, τέτταρα δὲ περὶ Γεωμετρίας, ἓν δὲ περὶ ἀτόμων Γραμμῶν. Ἐκεῖνος δὲ μαθηματικὴν συνέταξεν Ἱϛορίαν, ἐξ ἧς Πρόκλος τε, ϗ ἄλλοι, τὰ παρ᾽ αὐτοῖς ἠρανίσαντο. Ἀριϛαίῳ δὲ, καὶ Ἰσιδώρῳ, καὶ Ὑψικλεῖ, Γεωμετρῶν τὰ πρῶτα τελεσι, τὰς περὶ τῶν ϛερεῶν μάλιϛα προσοφείλομεν βίβλȣς. Ἐπὶ πᾶσι δὲ ὁ Εὐκλείδης, τὰ τοῖς ἄλλοις εὑρημένα εἰς ἓν ἀθροίσας, διατάξας, προσαυξήσας, ἀκριβέςερόν τε ἀποδείξας, ἐκεῖνα ἡμῖν κατέλιπε τὰ ςοιχεῖα, δι᾽ ὧν ἁπανταχȣ̃ γῆς οἱ μαθητιῶντες ςοιχειȣ̃σθαι εἰώθασιν. Εὐκλείδῃ δὲ ἐν ἔτει πρὸ Χριςȣ̃ σπδ΄. τὸ ζῆν καταλύσαντι, ἐπεγένοντο μετὰ Ἑκατονταετηρίδα σχεδὸν, Ἐρατοσθένης, ϗ Ἀρχιμήδης· ὧν Ἐρατοσθένȣς μὲν, πλὴν ὀλίγων, πάντα μικρȣ̃ δεῖν ἀπώλετο τὰ συγγράμματα, Ἀρχιμήδȣ δὲ πολλὰ μὲν ἠφάνιςαι, πολλὰ δὲ ϗ σώζεται, ἐς δεῦρο περιφερόμενα.

Ἀρχιμήδην δὲ εἰπὼν, Κολοφῶνα οἷόν τινα τῆς ἐν ἀνθρώποις λεπτονοίας, ϗ τῆς Μαθηματικῆς ἁπάσης παιδείας πέρας τε, καὶ ἀκρότητα τυγχάνω διανοȣ̃μενος. Τȣ́τȣ τὰς πολλȣ̃ θαύματος ἀξίας εὑρέσεις Πολύβιός τε, ϗ Πλȣ́ταρχος, ϗ Τζέτζης, ϗ ἄλλοι, τῇ μνήμῃ παρέδωκαν. Ἐκείνῳ δὲ σύγχρονος ἦν ϗ Κόνων, γεωμέτρης ὁ αὐτὸς, ϗ ἀςρονόμος, ἐφ᾽ ᾧ προαποθανόντι, ἐν τοῖς περὶ τετραγωνισμȣ̃ τῆς Παραβολῆς Ἀρχιμήδης ἐπιπενθεῖ. Ἑξῆς δὲ μετὰ Ἀρχιμήδην, ϗ Κόνωνα, χρόνȣ ȣ̓ πάνυ πολλȣ̃ παραῤῥεύσαντος, Ἀπολλώνιος ἐγένετο ὁ Περγαῖος, ἕτερος ἕτος Γεωμετρῶν ὕπατος, ὁ καθ᾽ ὑπερβολὴν ἐπαίνȣ μέγας Γεωμέτρης ὑμνȣ́μενος. Τȣ́τȣ ἑπτὰ περίεσι βιβλία περὶ Κώνȣ τομῶν, φρενὸς λεπτοτάτης ἀποκυήματα. Τῷ δ᾽ αὐτῷ ϗ τῶν Εὐκλειδείων τὸ ΙΔ΄. ϗ ΙΕ΄. προσαναγράφεται, τὰ ὑπὸ Ὑψικλέȣς κατ᾽ ἐπιτομὴν προβαλλόμενα. Ἵππαρχος δὲ, καὶ Μενέλαος, περὶ Ὑποτεινȣσῶν τῶν ἐν τῷ Κύκλῳ, ὁ μὲν ἓξ, ἐκεῖνος δὲ δυοκαίδεκα βιβλία πρώτω συνεγραψάτην, ἐφ᾽ οἷς ϗ χάριτος πολλῆς ἐτυχέτην, ϗ εὐκλείας διαφερȣ́σης, ὡς ἐπὶ ὠφελεῖ τε, ϗ ἀναγκαίῳ εὑρήματι· τȣ̃ δὲ Μενελάȣ ϗ περὶ Τριγώνων σφαιρικῶν βιβλία τρία ἔτι περίεσι. Καὶ Θεοδοσίȣ δὲ τȣ̃ Τριπολίτȣ βιβλία ἰσάριθμα περὶ τῶν Σφαιρικῶν ἅπασιν ἐν χερσὶ περιφέρεται. Καὶ οὗτοι μὲν οὖν, πλὴν Μενελάου, καὶ Ἰσιδώρου, καὶ Ὑψικλέους, ἅπαντες πρὸ τοῦ Κοσμοσωτηρίου ἔτους ἠκμακότες εἰσίν.

Ἔτει δὲ τῷ ἀπὸ τῆς Θεογονίας ἑβδομηκοστῷ, Κλαύδιος ὁ Πτολεμαῖος ἤνθησεν, ὁ τῶν Ἀστρονόμων ὕπατος, ἀνὴρ θαυμασιώτατος γεγονὼς, καὶ τὴν Θνητῶν φύσιν (ἣ λέγεται) ὑπερηρμένος· οὐχ ὅπως περὶ τὴν Ἀστρονομίαν διενεγκὼν, ἀλλὰ κἀν τοῖς Γεωμετρικοῖς ὀφθεὶς ἐμπειρότατος, οἷά περ πρὸς ἄλλοις πολλοῖς τῶν αὐτῷ συγγραφέντων, καὶ τὰ περὶ τῶν Ὑποτεινουσῶν ἐν ἓξ μὲν ὑπὸ Μενελάου βιβλίοις, ἐν δὲ δυοκαίδεκα ὑπὸ Ἱππάρχου ἐκπονηθέντα, ἐν μόνοις πέντε ἐκείνῳ κατ᾽ ἐπιτομὴν ἐκδεδομένα τοῖς Θεωρήμασι. Καὶ Πλουτάρχου δὲ τοῦ περιωνύμου ἐν Φιλοσόφοις Μαθηματικὰ ἄττα προβλήματα φέρεται. Τὰ δέ τοι Εὐτοκίου τοῦ Ἀσκαλωνίτου, ἐλλογιμώτατα συγγεγραμμένα εἰς τὰ Ἀρχιμήδους τε, καὶ τὰ Ἀπολλωνίου ὑπομνήματα, τίς ἀγνοεῖ; Ἐξ αὐτοῦ οὖν, καὶ τὰ Φίλωνος, καὶ Διοκλέους, καὶ Νικομήδους, καὶ Σπόρου, καὶ Ἥρωνος, περὶ τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ Κύβου, ὡς ἡμᾶς ἥκει καταλεγόμενα. Ὁ δὲ Ἥρων κἀν τοῖς Μηχανικοῖς οὐδὲν ἧττον, ἢ τοῖς Γεωμετρικοῖς, φύσεως μεγέθει διέπρεψε, καθ᾽ ὃν καὶ ἡ τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ Κύβου ἐπίνοια, τῶν κατ᾽ ἄλλους ἁπασῶν προκριτέα εἶναι τῷ Πάππῳ ἐν Γ΄. βιβλίῳ, Προτάσει Ζ΄. μεμαρτύρηται. Καὶ τὰ Κτησιβίου δὲ τοῦ Ἀλεξανδρέως, ᾧ καὶ τὸ τῶν Ἀντλιῶν χρῆμα ὀφείλομεν, παρά τε Οὐιτρουΐῳ, Πρόκλῳ, καὶ Πλινίῳ, καὶ Ἀθηναίῳ τῷ Δειπνοσοφιστῇ, πολλοῦ λόγου κρίνεται ἄξια. Οὐδὲν ἧττον δὲ καὶ Γεμίνου παρὰ Μαθηματικοῖς ἀνδράσι τὸ κλέος· τηλικοῦτος γὰρ ἀνεδείχθη καὶ οὗτος, οἷον ἐν πολλοῖς τῷ Πρόκλῳ καὶ αὐτοῦ Εὐκλείδου πρότερον τίθεσθαι.

Ὁ δὲ Ἀλεξανδρεὺς Διόφαντος, τοιοῦτος τὰ Ἀριθμητικὰ ὤφθη, οἷοι κατὰ τὴν Γεωμετρίαν Ἀρχιμήδης, καὶ Ἀπολλώνιος, καὶ Εὐκλείδης εἰσὶ κλεϊζόμενοι. Ἁπάσης γὰρ ἐκεῖνος τῷ ὄντι τῆς Ἀριθμητικῆς λεπτονοίας, καθηγεμὼν οἷα γεραίρεται. Τότε γὰρ δὴ ἐπίνοια καὶ ἡ θαυμαςὴ τέχνη, ἣν Ἄλγεβραν ὀνομάζουσιν, ἡ καθ' ἡμᾶς ὑπὸ Φραγγίσκου Βιέτα, ϗ Ῥενάτου Καρτεσίου, ϗ ἄλλων μετ' ἐκείνους, καθολικωτέρα καταςᾶσα, ϗ ἐπὶ πολὺ ἀκριβείας, ϗ τελειότητος προαχθεῖσα. Λοιποὶ δὲ ἐν τοῖς παλαιοῖς διὰ φήμης ἄγονται, Νικόμαχος ἐν Ἀριθμητικοῖς, ϗ Γεωμετρικοῖς, ϗ Μουσικοῖς διαβόητος, καὶ Σερένιος ἐν δυσὶ βιβλίοις, τοῖς περὶ Κυλίνδρου, ϗ Κώνου τομῶν, ἐν Γεωμέτραις γνωριμώτατος, καὶ Πρόκλος ἐπ' αὐτοῖς, ϗ Πάππος, ϗ Θέων. Ἡλίκος γὰρ τὴν ἐν τοῖς Μαθήμασι σοφίαν ὁ Πρόκλος, οἵ τε εἰς τὰ Εὐκλείδου ὑπομνηματισμοὶ, ϗ τ' ἄλλα, ἅττα πάνυ σοφῶς συνέθετο, μαρτυρεῖ. Λύκιος δὲ οὗτος τὸ γένος ὤν, καὶ λόγοις τοῖς ἀπὸ Φιλοσοφίας, ϗ τῶν Μαθημάτων ἐνδιαπρέψας, ϗ ἔτει ἀπὸ Χριςοῦ υπε΄. τὸ ζῆν ἐκμετρήσας, διακριτέος τοῦ ὁμωνύμου Πρόκλου, ὅστις Ἀναςασίου ἐν τῇ Κωνςαντίνου τὰ αὐτοκρατορικὰ σκῆπτρα κατέχοντος, ἔτει Σωτηρίῳ τῷ φιδ΄. Οὐιταλιανῷ τὴν Αὐτοκρατορίδα τῶν πόλεων πολιορκοῦντι, τῇ τῶν Ὀπτικῶν μεθοδείᾳ κατόπτρων, τὸ ναυτικὸν κατενέπρησεν, ἣ διέξεισιν ἱςορῶν ὁ Ζωναρᾶς, καὶ Ῥάμος ἐκ τούτου, καὶ Βαρόνιος ὕςερον. Ὁ δὲ Ῥάμος ϗ Θέωνα, τὸν ἧττου λόγου πολλοῦ γενόμενον ἄξιον, θαυμασίοις μεθ' ὑπερβολῆς ἐγκωμίοις ἐξαίρει, ἐκείνου εἶναι καὶ τὰ παρὰ πάντων εἰς τόδε τῷ Εὐκλείδῃ προσαναγεγραμμένα ςοιχεῖα διατεινόμενος. Ἀλλ' ἐπιεικῶς ὁ Ῥάμος, πανταχοῦ τῷ Εὐκλείδῃ ὢν οὐ πάνυ τοι δίκαιος, ἄλλως δὲ οὐδὲ τῷ λόγῳ ςεῤῥῷ τὴν εἰκασίαν αὐτοῦ προσερείδων, ἐνταῦθα οὐκ ἀκουςέος. Τελευταῖον δὲ οὐραγὸς οἷον τετάχθω ὁ Πάππος, ὁ χρόνῳ μὲν (ὡς ἄρα περὶ τὸ υ΄. ἀκμάσας ἀπὸ Θεογονίας) τῶν παλαιῶν μικροῦ δεῖν γενόμενος ὁ ἔσχατος, εὐκλείας δὲ περιουσίᾳ, ϗ τῇ περὶ τὰς Μαθηματικὰς ἐπιςήμας τελειότητι, ἐν τοῖς πρώτοις ἀριθμητέος, ὃν δὴ, ἡ τοὺς Ὑψικλεῖς τε, ϗ Κτησιβίους, ϗ Διοφάντους τὸ πρὶν ἐνεγκαμένη τῶν Ἀλεξανδρέων πόλις, τὸ φορὸν τῶν μεγαλοφυΐᾳ διαπρεψάντων

Ἀνδρῶν ἔδαφος, ἐπ᾽ ἀγαθῷ μεγάλῳ τῆς μαθήσεως καὶ τοῦτον ἐξήνεγκε. Συγγέγραπται δὲ τῷ Πάππῳ συλλογῶν Μαθηματικῶν βιβλία ὀκτὼ τοὐλάχιστον, ὧν δύο μὲν τὰ πρῶτα (ἐμὴ τῶν Βιβλιοθηκῶν παρέῤῥιπταί που, λανθάνοντα) τῷ χρόνῳ ἠφάνισται· λοιπὰ δὲ τὰ ἓξ τοσούτων ἐστὶ, καὶ τηλικούτων ἐκ παντὸς μονονουχὶ τῆς Μαθήσεως εἴδους καλλίστων τε, καὶ τιμιωτάτων εὑρημάτων ἀνάμεσα, ὡς ἐν τοῖς πρώτοις τῶν σωζομένων παλαιῶν ὑπομνημάτων, κοινῇ ψήφῳ τάττεσθαι ἐναρίθμια.

Τὰ τοίνυν περὶ ἀρχῆς τε, καὶ προόδου τῆς Μαθηματικῆς ἕξεως, διὰ βραχέων οὕτως ὑμῖν ἱστορήσθω, ἐξ ὧν τὰ κατὰ χρόνον, καὶ χρῆσιν, καὶ ἀξίαν πρεσβεῖα τῶν τοιούτων ἐπιστημῶν λαμπρῶς ἀναφαίνεται. Καὶ μὲν δὴ τῶν τὰ πρῶτα ἐν Σοφίᾳ φερόντων οἱ αὐτοὶ, τήν τε ἄλλην Φιλοσοφίαν ἀποκυήσαντες ὤφθησαν, καὶ τὴν Μαθηματικὴν ταύτην, ὡς ἐν ἑνὶ τοκετῷ ἀδελφὰς οἱονεὶ διδύμους, ἃς εἴτις ἀλλήλων διασπάσας πρὸς βίαν ἀπαγαγεῖν πειραθείη, καὶ χωρὶς στῆσαι, ἀπηνῶς οὗτος νὴ Δία κατὰ τῶν ἐκ φύσεως ἐχηκότων τὴν ὁμογένειαν ἐνεχθήσεται, καὶ ἀπανθρώπως. Τοῦτο γὰρ ἐπὶ τῶν Διδύμων συμβαίνειν εἴωθε, τὸ θατέρου ἀρθέντος, ὑπεκλύεσθαι καὶ θάτερον, καὶ κατατήκεσθαι.

ΠΙΝΑΞ

ΤΩΝ

ΕΜΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ.

	Σελ.
ΒΙΒΛΙΌΝ Α΄.	1
ΒΙΒΛΙΌΝ Β΄.	65
ΒΙΒΛΙΌΝ Γ΄.	90
ΒΙΒΛΙΌΝ Δ΄.	128
ΒΙΒΛΙΌΝ Ε΄.	157
ΜΈΡΟΣ Α΄.	162
ΜΈΡΟΣ Β΄.	183
ΜΈΡΟΣ Γ΄.	189
ΒΙΒΛΙΌΝ ϛ΄.	199
ΒΙΒΛΙΌΝ ΙΒ΄.	261
ΒΙΒΛΙΌΝ ΙΒ΄.	294

Α'ΝΔΡΕ'ΟΥ ΤΑΚΟΥΕΤΙ'ΟΥ ΜΕΤΑ' ΣΗΜΕΙΩ'ΣΕΩΝ ΤΟ͂Υ ΟΥ'Ι'ΣΤΩΝΟΣ.

Τῶν ςοιχείων τῆς Γεωμετρίας.

ΒΙΒΛΙ'ΟΝ Α'.

Ε'πιςήμης ἔργον, τὸ ἐξ ἐννοιῶν τινων ἁπλȣςέρων, ἃς ἐνῆκεν ὁ Δημιȣργὸς τῇ λογικῇ Φύσει, ἐπιφέρειν ὅ,τι μὴ πρότερον ἔγνωςο· κἀκτȣτȣ ἕτερον αὖθις, ὥςε βαθμίδα ὡσανεὶ προϋφεςηκέναι πρὸς τὴν ἑψομένην, ἀεὶ τὴν γνῶσιν, ἥτις ἡγήσατο. Γένοιτο γὰρ ἂν τȣ͂ τοιȣ͂δε λόγȣ ἀκριβῶς ἐχομένοις, ἀπὸ τῶν ἐλαχίςων τε ϗ καθ᾽ αὐτὰ πλȣτȣ́ντων τὸ γνώριμον, ἁλωτὰ τῇ γνώσει ῥαδίως, ϗ αὐτὰ τὰ λίαν ἀφανῆ ϗ δυσκάτοπτα. Ταύτην δέ τοι τὴν Ε'πιςήμαις συνήθη τε ϗ προσήκȣσαν Μέθοδον, ὡς ȣ̓κ ἀνηνύτως, αἷς ἡ περὶ τὸ Ποσὸν ὑπόκειται θεωρία, πρὸ τῶν ἄλλων ἠσπάσαντο εἰσηγήσεις, πάντες ἴσασιν, ὅσοι τῆς κατ᾽ αὐτὰς μελέτης κἂν ἄκροις δακτύλοις ἐγεύσαντο. Μαρτυρήσειε δ᾽ ἂν τῷ λεγομένῳ καὶ μόνη (μηδὲν ἐπιὸν ἤδη λέγειν περὶ τῶν ἄλλων εἰδῶν τῆς Μαθήσεως) ἡ Γεωμετρία, ἀπὸ τῶν προδηλοτάτων ἐπ᾽ αὐτὰ δὴ τὰ ἀδηλότατα ἐν βραχεῖ ἀναφερομένη, ϗ ἐπὶ τὰ πάνυ ὑψηλά τε ϗ ἄποπτα ἀπὸ τῶν λίαν ταπεινῶν, αὐτίκα μάλα ἱπταμένη μετάρσιος. Προκαταβάλλονται γὰρ ἐν αὐτῇ ἁπλȣ͂σταταί τινες, ϗ ῥᾷςαι νοηθῆναι Α'ρχαὶ, αἷς λόγȣ μετέχων καὶ νȣ͂, ȣ̓δεὶς ἡδέως ȣ̓κ ἂν συναινέσειεν. Εἶθ᾽ ἑξῆς ὑποτίθεται ταύτῃ ȣ̓δὲ συγχωρεῖται ὅλως ȣ̓δὲν, ὅ,τι μὴ λογισμοῖς ἀπταίςοις ἀσφαλῶς εἴη ἐπιφερόμενον. Κἀντεῦθεν τέως Θεωρήμασί τισιν, οἷασȣ͂ν μὲν αἰσθήσεώς τε, ϗ γνώσεως ὅτι πορρωτάτω ἀφιδρυμένοις, παντὸς δὲ λόγȣ, ϗ θαύματος ὑπερῃρημένοις, μετὰ τȣ̃ ἀσφαλȣ̃ς ϗ ἀναμφιλέκτȣ τῆς πίςεως, τὸ πρὸς σαφήνειαν εἰλικρινές τε, ϗ διηκριβωμένον ἐπαυγάζει, ὡς ȣ̓κ ἄντις ῥαδίως ἐλπίσειεν.

Ἀρχῶν δὲ τῶν κατὰ τὴν Γεωμετρίαν Εἴδη τρία τὰ ἐφεξῆς. Ὁρισμοὶ, Αἰτήματα, Ἀξιώματα· ὧν οἱ μὲν, τῶν ἐν χρήσει παραληφθησομένων εἰσὶ φωνῶν ἀναπτύξεις· τὰ δὲ, οἷά περ οὐ χαλεπῶς ὑπὸ τῶν εὖ ἐχόντων τὰς φρένας ἀπαιτȣμένων, διδόμενα· τὰ δὲ, ἅττα αὐτολαμπῆ ϗ καταφανῆ πεφυκότα, τῷ κατὰ Φύσιν λόγῳ ποδηγέτῃ παρεπομένοις, κοινῇ παῖσȣσί τε, ϗ σπȣδάζȣσι τοῖς πᾶσιν ἠξίωται. Αὐτῶν δὲ τȣ́των αἱ Ἀποδείξεις εἰσὶν ἐχόμεναι, αἷς γε τῶν ἐν τοῖς Μαθήμασιν ἀληθειῶν, ταῖς κατὰ τȣ̀ς λογισμȣ̀ς ἀνάγκαις διαπιςȣμένων ϗ κρατυνομένων, κἂν ἄκων ὑπενδοίη πειθεὶς, καὶ ὁ περιφανὴς τὸ θράσος καὶ τὴν ἀπόνοιαν. Καὶ τοίνυν πρῶτος ἡγεῖται ὁ περὶ Γραμμῶν λόγος, ϗ τῶν ποικίλων Γωνιῶν, ἃς, ἐφ᾽ ἓν συνιȣ̃σαι σημεῖον ἐκεῖναι, ἀποτελȣ̃σιν. Εἶτ᾽ ἐν ὀκτὼ ταῖς πρώταις Προτάσεσι, τὰ περὶ τῶν ἐπιπέδων Τριγώνων πραγματεύεται, ἅματε ϗ τὴν τῶν ἐπιπέδων Γωνιῶν φύσιν προσεκτιθέμενος. Μεθ᾽ ἃς, Γωνίας μὲν ϗ Γραμμὰς διχοτομεῖν, Καθέτȣς δὲ καθιέναιτε, ϗ ἀφιέναι μεθοδεύει. Ἑξῆς δὲ τὰ λοιπὰ τῶν Τριγώνων πάθη, ναιμὴν ϗ τῶν Παραλλήλων Εὐθειῶν ἑρμηνεύει. Ἐπὶ τȣ́τοις ὅσα περ τοῖς Τετραπλεύροις παρακολȣθεῖν οἶδε, ϗ ἰδίᾳ τοῖς Παραλληλογράμμοις διασκέπτεται· καὶ δείκνυσίγε τίνι δήποτε λόγῳ τὰ Πολύγωνα, κἂν ἀτακτοίη τὸ σχῆμα, εἰς Ὀρθογώνια ἂν ἀναχθεῖεν, ἢ ἁπλῶς Παραλληλόγραμμα, ἢ καὶ Τρίγωνα, τὰ μᾶλλον ἐν τοῖς σχήμασι κανονιζόμενά τε, ϗ γνωριζόμενα. Τελευταῖον δὲ οὐραγεῖ τὸ Πυθαγόρȣ διαβεβοημένον Θεώρημα, ϗ τὸ ἐκείνȣ ἀντίςροφον.

Ὁρισμοί.

α. Σημεῖον ἐςὶ τὸ ἐν τῷ μεγέθει ἀδιαίρετον. ἤτοι τὸ μηδὲ τῇ ἐπινοίᾳ διαιρεθῆναι δυνάμενον. Ἔςι δέ πως παντὸς μεγέθȣς τὸ Σημεῖον ἀρχὴ, οἷα δὴ ϗ Μονὰς ἀριθμȣ̃.

β. Γραμμὴ δὲ μέγεθος μόνον κατὰ μῆκος· μῆκος ϗ γὰρ ἀπλατές. Νοεῖται δὲ κατὰ Σημείȣ ῥοὴν ἀναφύεσθαι.

γ. Γραμμῆς δὲ πέρατα Σημεῖα.

κ. ι. δ. Εὐθεῖα Γραμμή ἐςιν, ἥτις ἐξ ἴσȣ τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς Σημείοις κεῖται. Ἢ ὡς Ἀρχιμήδῃ ὥρισαι· Εὐθεῖα Γραμμὴ ἐςὶν, ἡ ἐλαχίςη τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχȣσῶν, ἤτοι τῶν ἀπὸ τȣ̃ αὐτȣ̃ ἐπὶ τὸ αὐτὸ Σημεῖον ἀχθῆναι δυναμένων.

Ἢ ὡς τῷ Πλάτωνι, ἧς τὰ ἄκρα συνεπισκιάζει τὰ μέσα, ἐποπτεύουσιν ἀμέλει θατέρῳ τῶν ἐπ' αὐτῆς εὐθὺ προηγμένης περάτων. Εἷς δὲ ἁπάντων ὁ νοῦς. Ἧς τὰ ἄκρα τοῖς μέσοις ἐπιπροσθεῖ.

Ὄργανον δὲ τὸ εἰς καταγραφὴν Εὐθείας δεξιῶς ἔχον, ἐστὶν ὁ Κανὼν, ὅνπερ καὶ ἀστραβῆ, ἢ μὴ, τυγχάνοντα, οὕτως ἐπικρίνειν εἰώθασιν. Ἄγεται μὲν κατὰ τὸν Κανόνα Γραμμὴ, καὶ παρ' αὐτὸν ἀντιστραφέντα τὰ πέρατα, ὥστε τὸ δεξιτερὸν κατὰ τὸ ἀριστερὸν γενέσθαι, καὶ ἀνάπαλιν, δευτέρα αὖθις ἐπὶ τῆς πρώτης. Εἰ μὲν οὖν ἀκριβῶς ἐκείνῃ προσεφαρμόζηται, εὐθὺς ὁ Κανών. εἰδ' οὖν, ἥκιστα δῆλον ὅτι. (1) Εὐθύ γε, οὗ ἂν τὸ μέσον ἀμφοῖν τοῖν ἐσχάτοιν ἐπίπροσθεν ᾖ. Πλάτ. Παρμενίδ.

Ἐπιφάνεια δὲ ἐστὶ μέγεθος, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει· καὶ δυεῖν ἄρα πλουτεῖ διαστάσεων. Νοεῖται δὲ Γραμμῆς ῥοῇ φύεσθαι. ε.

Ἐπιφανείας δὲ πέρατα Γραμμαί. ς.

Ἐπίπεδον, εἴτουν ἐπίπεδος Ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς Γραμμαῖς κεῖται. ζ. κ. 2. Ἢ ὡς ὁ Ἥρων, ἐπίπεδος Ἐπιφάνειά ἐστιν, ἐφ' ἧς ἁπανταχοῦ Εὐθεῖα ἔχει προσαρμοσθῆναι. Φύεται γὰρ καὶ αὕτη ἐξ Εὐθείας ῥυείσης ἐπ' εὐθείας· ἄλλως γὰρ ἂν καταγραφείη, καὶ ἐξ Εὐθείας ῥυείσης μὴ ἐπίπεδος Ἐπιφάνεια. Ἢ, ἐπίπεδος Ἐπιφάνειά ἐστιν, ἧς τὰ ἄκρα συνεπισκιάζει τὰ μέσα, θατέρῳ δηλονότι τῶν ἐπ' αὐτῆς εὐθὺ προηγμένης περάτων ἐποπτεύουσιν. Ἢ ἐπίπεδος Ἐπιφάνειά ἐστιν ἡ ἐλαχίστη τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν. Εἷς δὲ καὶ τούτων ὁ νοῦς.

Τοῦ μὲν οὖν Σώματος ἐνταῦθα, ἤτοι τοῦ Στερεοῦ ὁ Εὐκλείδης τὸν ὁρισμὸν οὐκ ἀπέδωκεν, οὔπω περὶ αὐτοῦ ἐν τούτοις πραγματευσόμενος. Μήτις δὲ καὶ τοῦτο ἐφίοιτο, Σῶμα μέγεθός ἐστι κατὰ μῆκος, καὶ πλάτος, καὶ βάθος. Τρεῖς τοίνυν εἰσὶ διαστάσεις τῷ Σώματι, δύο δὲ τῇ Ἐπιφανείᾳ, μία δὲ τῇ Γραμμῇ. Τῷ δὲ Σημείῳ οὐδεμία.

Ἐπίπεδος Γωνία ἐστὶν ἡ ἐν Ἐπιπέδῳ δύο Γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, η. καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν Γραμμῶν κλίσις.

Γωνίαν ἄρα συναποτελοῦσιν αἱ δύο Γραμμαὶ βα, γα, ἀλλήλων μὲν ἁπτόμεναι κατὰ τὸ α, μηδαμῶς δὲ ἐπ' εὐθείας κείμεναι· ἤτοι μὴ μίαν Γραμμὴν συναποτελοῦσαι. κ. 3.

Πλευραὶ δὲ, εἴτουν σκέλη τῆς Γωνίας εἰσὶν, αἱ συνιστῶσαι τὴν Γωνίαν γραμμαί. θ.

Κορυφὴ δὲ τῆς Γωνίας ἐστὶ τὸ Σημεῖον α, καθ' ὃ τὰ σκέλη ἀλλήλοις συνίασι. ι.

---

(1) Ἐκ τοῦ ιγ'. Ἀξιώμ.

κ. 4. Γωνία μία προκειμένη, ἑνὶ γράμματι κατὰ κορυφὴν κειμένῳ, πλειόνων δὲ ἐφ' ἓν σημεῖον κειμένων ἑκάστη, τρισὶ γράμμασιν ἐπισημαίνεσθαι εἴωθεν, ὧν τὸ ἐν μέσῳ τὴν τῆς Γωνίας κορυφὴν ὑποδεικνύειν ἐτάχθη, καίτοι ϗ πρὸς τοῦτο, ἓν μόνον τῆς Γωνίας τοῖς σκέλεσιν ἀποχρήσειε παρεγκείμενον. Οὕτως ἡ ὑπὸ τῶν Γραμμῶν βα, γα περιεχομένη, ἢ τοῖς τρισὶ γράμμασι βαγ, εἴτουν ϗ τῷ ἑνὶ μόνῳ α περισημαίνεται.

κ. 5. ια. Γωνίαι ἴσαι, ἢ μᾶλλον ὅμοιαί εἰσιν, ὧν ἐπ' ἀλλήλαις τῶν Κορυφῶν ἐπιτιθεμένων, ϗ αἱ Πλευραὶ συνεφαρμόζονται. Πρὸς γε μὴν ἰσότητα Γωνιῶν, τὰς Πλευρὰς ἴσας εἶναι, ἥκιστα ἀπαιτεῖται.

ιβ. Ἄνισοι δὲ, ἤτοι ἀνόμοιοι, ὧν ἐὰν αἱ Κορυφαὶ ἀλλήλαις, ϗ Πλευρὰ τῇ Πλευρᾷ ὦσι προσεπικείμεναι, ἡ λοιπὴ τῆς λοιπῆς ἐξίσταται. Ἐκείνη δὲ μείζων, ἧς Πλευρὰ ἡ ἐκπίπτουσα. Ἄμφω δὲ τὼ ὁρισμὼ ταῖς εὐθυγράμμοις (ὅρα μοι ὁρ. ιγ.) Γωνίαις προσήκετον.

Ἀλλὰ ϗ αὐξομένων τῷ μήκει, ἢ μειουμένων τῶν σκελῶν, ἡ Γωνία ἀναύξης μένει τε ϗ ἀμείωτος.

Ἐπεὶ δὲ ἐν τῇ τῶν Γραμμῶν κλίσει Γωνίας ἡ φύσις κεῖται, ἡ δὲ τῶν Γραμμῶν κλίσις ποσὸν οὐκ ἔστιν· οὐδ' ἡ Γωνία ἄρα ποσόν τι ἔσται. Εἴη γὰρ ἂν ἄλλως ϗ ἡ Καμπυλότης, πρὸς ἣν ἐκείνη τοσούτῳ διενήνοχεν, ὅσῳ ϗ θραῦσις κάμψεως. Ἴσας τοίνυν σὺν Εὐκλείδῃ ϗ τοῖς ἄλλοις Γεωμέτραις τὰς Γωνίας ἀποκαλοῦντες, οὐδὲν, ὅτι μὴ τὸ ὅμοιον, ϗ ἐμφερὲς τῆς τῶν Πλευρῶν κλίσεως πρὸς ἀλλήλας, ϗ τὸ ἀκριβὲς τῆς αὐτῶν τούτων προσεφαρμόσεως ἐπ' ἀλλήλαις, τῇ τῆς Ἰσότητος κλήσει ὑποσημαίνειν βουλόμεθα. Ἀλλὰ περὶ τούτου μετὰ τὴν ις'. Πρότ. τοῦ Γ'. Βιβλ. ἐντύχοις ἂν πλείοσι.

Μήποτε δ' ἄρα αὐξήσεώς τε ϗ μειώσεως δεκτικὴ οὖσα, ϗ τὸ ποσὸν τῇ Γωνίᾳ παρέπεται; Εὐθεῖαι γὰρ δύο συνιοῦσαι ἀλλήλαις ἐφ' ἓν σημεῖον, πῇ μὲν μείζονα, πῇ δ' ἐλάσσω τὴν πρὸς ἀλλήλας ἔχουσαι νεῦσιν, αὐτόθεν ϗ μείζονα Γωνίαν συνιστᾷν πεφύκασιν, ἢ ἐλάσσονα. Ταύτητοι καὶ (ἐν ὁρισμ. ιε. ϗ ις.) ἡ μὲν Ἀμβλεῖα μείζων τῆς Ὀρθῆς ὥρισται. Ὀξεῖα δὲ, ἡ Ὀρθῆς ἐλάττων. Καὶ δῆλον ἄρα ἐκ τούτων ὅτι συμβαίνει τὸ ποσὸν τῇ Γωνίᾳ, καθ' ὃ ϗ ἴση πρὸς ἴσην ἀκούει, ϗ πρὸς ἄνισον ἄνισος. Τῷ δ' αὐτῷ λόγῳ ϗ ἡ Καμπυλότης τὸ ποσὸν ἔοικεν ἐπιδέχεσθαι. Πᾶσα γὰρ Γραμμὴ, ϗ Ἐπιφάνεια πᾶσα, Γραμμῆς εὐθείας ϗ ἐπιπέδου Ἐπιφανείας κατὰ τὸ μᾶλλον, ἢ ἧττον ἀπέχουσα, μείζονος ἂν εἴη πρὸς ἄλλην, ἢ γοῦν ἐλάσσονος τυχοῦσα τῆς κάμψεως.

κ.6.7. ιγ. Γωνία Εὐθύγραμμος καλεῖται, ὅταν αἱ περιέχουσαι αὐτὴν Γραμμαὶ Εὐ-
8 9. 10. θεῖαι ὦσι. Καμπυλόγραμμος δὲ, ὅταν Καμπύλαι. Μικτὴ δὲ, τῆς μὲν Εὐθείας

ούσης, τῆς δὲ Καμπύλης. (ὅρα τὰ ἐν τῷ μετὰ τὴν ιϛ. τοῦ γ. βιβλ. Πο-
ρίσματα.)

Ὅταν Εὐθεῖα γδ, ἐπ᾽ Εὐθεῖαν αβ σταθεῖσα, ἐπὶ μηδέτερα κλίνῃ, καὶ ιδ. χ. 11.
τὰς ἐφεξῆς Γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ (τὴν ὑπὸ αγδ τῇ ὑπὸ βγδ) ὀρθὴ ἐστὶν
ἑκατέρα τῶν ἴσων Γωνιῶν, καὶ ἡ ἐφεστηκεῖα Εὐθεῖα γδ, Κάθετος καλεῖται ἐφ᾽
ἣν ἐφέστηκε.

Καὶ ἄλλως, ὀρθὴ Γωνία (ἡ ὑπὸ βαγ) ἐστὶν, ἥπερ ἑτέρωθεν ἀναφύε- χ. 12.
ται ἴση (ἡ ὑπὸ γαδ) τῆς ἑτέρας τῶν Πλευρῶν (βα) προηγμένης.

Δύο Κανόνες πρὸς ὀρθὴν Γωνίαν συνεστηκότες, τὸν Γνώμονα συναποτε- χ. 13.
λοῦσι, τὸ εἰς Πυθαγόραν εὑρετὴν, παρὰ Οὐϊτρουΐῳ (1) Κεφ. β. βιβλ. θ., ἀνα-
φερόμενον ὄργανον. Ἔστι δὲ τοσαύτη τῆς ὀρθῆς Γωνίας ἡ δύναμις, πρός τε
κατασκευὴν ἐν ἅπασι, καὶ καταμέτρησιν, καὶ μόρφωσιν, καὶ στηριγμὸν, ὡς μη-
δὲν μονονουχὶ ἐκείνης ἄνευ ἐν τοῖς τοιούτοις περαίνεσθαι. Τοῦ δὲ δὴ Γνώμονος
βάσανος ἡ ἐφεξῆς γινέσθω. Ἐπὶ τῆς τυχούσης εζ κατὰ τὸ τυχὸν σημεῖον α, χ. 14.
ἡ τοῦ Γνώμονος Πλευρὰ αβ, προσεφαρμοζέσθω τῇ Γραμμῇ αε, διὰ δὲ θατέ-
ρας τῶν τοῦ Γνώμονος Πλευρῶν ἀγέσθω Εὐθεῖα ἡ αγ. Εἶτα ἀντιστρεφομένου
τοῦ Γνώμωνος πρὸς τὸ ζ, ἢν μὲν ἄμφω αὐτοῦ αἱ Πλευραὶ ταῖς Εὐθείαις αγ,
αζ ἐπ᾽ ἀκριβὲς ἐφαρμόζοιντο, δεῖγμα τοῦτο ἡμῖν ἔσται σαφὲς τῆς τούτου εὐθύ-
τητος. Ὁ δὲ λόγος ἐξ αὐτοῦ τοῦ ιδ. ὁρισμοῦ εὔδηλος.

Ἀμβλεῖα Γωνία (βαγ) ἐστὶν, ἡ μείζων Ὀρθῆς (ζαγ). ιε. χ. 15.

Ὀξεῖα δὲ (λαι) ἡ ἐλάσσων Ὀρθῆς ζαι. ιϛ. χ. 16.

Σχῆμα ἐπίπεδον, ἐστὶν ἐπίπεδος Ἐπιφάνεια, ὑπὸ μιᾶς, ἢ πλειόνων Γραμ- ιζ.
μῶν πανταχόθεν περατουμένη.

Κύκλος ἐστὶ Σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς Γραμμῆς περιεχόμενον, ἣ καλεῖ- ιη. χ. 17.
ται Περιφέρεια, πρὸς ἣν ἀφ᾽ ἑνὸς Σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων (α)
πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι Εὐθεῖαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

Κέντρον δὲ τοῦ Κύκλου τὸ Σημεῖον (α) καλεῖται. ιθ.

Διάμετρος δὲ τοῦ Κύκλου ἐστὶν Εὐθεῖα (ἡ βγ) διὰ τοῦ Κέντρου ἠγμένη, καὶ κ.
περατουμένη ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ Κύκλου Περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα
τέμνει τὸν Κύκλον· ὅπερ ἐκ τῆς ἀκριβῶς τῶν Ἡμικυκλίων ἐπ᾽ ἄλληλα ἐφαρ-
μόσεως, ἐστὶν εὐδηλότατον.

Ἡμιδιάμετρος (ἣν Ἀκτῖνα καλοῦσιν) ἐστὶν ἡ Εὐθεῖα (αζ) ἡ ἀπὸ τοῦ Κέντρου κα.
ἐπὶ τὴν Περιφέρειαν ἠγμένη.

---

(1) Vitruvius.

σχ. 18. κβ. Ἡμικύκλιον δὲ ἐςὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα (βλγ) ὑπό τε Διαμέτρου (βγ) ϗ τῆς ἀπολαμβανομένης, ὑπ' αὐτῆς, τοῦ Κύκλου Περιφερείας, τουτέςι τῆς Ἡμιπεριφερείας (βλγ).

Γεννᾶται δ' ὁ Κύκλος ὡδί. Εὐθεῖα (ἡ αβ), ἐὰν θάτερον (α) τῶν περάτων ἀκινητοῦσα περιαχθείη, ἡ μὲν τὸν Κύκλον ἀναφύσει, θάτερον δὲ τῶν ἐπ' αὐτῆς πέρας (β), τὴν Περιφέρειαν.

Ἀναφαίνεται δὲ ϗ ἐν αὐτῇ τῇ γενέσει, παντὸς θαύματος οὕτω ἀξία ἡ Κύκλου φύσις. Τὸ μὲν, ὅτι κινήσει τε ϗ ἠρεμίᾳ, τοῖς μαχομένοις δὴ τούτοις συναπαρτίζεται, τῆς μὲν Γραμμῆς, ὡς εἴρηται, περιαγομένης, τοῦ δὲ ἑτέρου τῶν ἐπ' αὐτῆς περάτων ἀτρεμοῦντος· Τὸ δ' ὅτι ἅπαντα τὰ σημεῖα, τὰ ἐπὶ τῆς Γραμμῆς τῆς γεννώσης, κατὰ τὸ αὐτὸ τοῦ χρόνου περιόδους ἀνίσους διαπεραίνοντα, οὐκ ἰσοταχῶς προβαίνει κινούμενα. Τὸ δ' ὅτι ϗ ἡ τὸν Κύκλον ὁρίζουσα Περιφέρεια, ἐκ τῶν ἐναντίων πως ϗ αὐτὴ δοκεῖ συγκροτεῖσθαι, ϗ ἄκρων ἄνευ μέσου λόγον ἐχόντων· ἀμέλειτοι ἐκ κοίλου τε ϗ κυρτοῦ, ὧν μεσιτεύει τὸ εὐθὲς, οἷά πού ϗ τὸ ἴσον μεταξὺ μείζονος ϗ ἐλάσσονος. Ὃ δὲ ϗ μᾶλλον ἄντις θαυμάσειεν· ϗ πλάτους παντὸς ἀμοιρούσης τῆς Γραμμῆς, ᾗ ταῦτα δὴ τἀναντία παρασυμβέβηκεν. Ἐπὶ τούτοις οὖν ϗ Ἀριςοτέλης λίαν θαυμάσας ἐγένετο. Ἀλλὰ γὰρ μακρῷ ταῦτα ὑπερπαίει τῷ θαύματι, ἃ περὶ Κύκλου, ἐν τῇ συνάμα τοῖς Κυλινδρικοῖς ϗ Δακτυλιοειδέσι, τύποις ἡμῖν ἐκδοθείσῃ κατὰ τὸ αχνβ. Φυσικῇ τε ϗ Μαθηματικῇ Διαλέξει, ἐπραγματευσάμεθα. Ἃ δὴ ϗ μέτιθι βουληθεὶς ἐν ἐκείνοις.

Τὴν Περιφέρειαν οἱ ἀπὸ τῶν Μαθημάτων, εἰς 360 (ἃς Μοίρας καλοῦσι) μερίζειν εἰώθασι, διὰ τὸ ἐν ταῖς χρήσεσι πάντως τοῦ Ἀριθμοῦ περιδέξιον. Τὴν δὲ Ἡμιπεριφέρειαν εἰς 180. Τὸ δὲ Τεταρτημόριον εἰς 90.

κγ. Εὐθύγραμμα Σχήματά ἐςι τὰ ὑπὸ Εὐθειῶν περιεχόμενα.

κδ. Τρίγωνον, ἢ Τρίπλευρον, τὸ ὑπὸ τριῶν Εὐθειῶν περιεχόμενον. Πρὸς ὅ, ἅτε δὴ τῶν λοιπῶν ἁπάντων εὐθυγράμμων Σχημάτων ἁπλούςατον ὄν, ἐκεῖνα πέφυκεν ἀναλύεσθαι.

σχ. 19. κε. Τρίγωνον Ἰσόπλευρον ἐςὶ τὸ τρεῖς ἴσας ἔχον Πλευράς.

σχ. 20 κϛ. Ἰσοσκελὲς δὲ τὸ τὰς δύο μόνας.

σχ. 21. κζ. Σκαληνὸν δὲ τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσας ἔχον Πλευράς.

σχ. 22. κη. Ὀρθογώνιον Τρίγωνον ἐςὶ τὸ ἔχον ὀρθὴν Γωνίαν.

σχ. 23. κθ. Ἀμβλυγώνιον δὲ τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν Γωνίαν.

σχ. 24. λ. Ὀξυγώνιον δὲ τὸ ϗ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον Γωνίας.

σχ. 25. λα. Τῶν δὲ Τετραπλεύρων Σχημάτων Ὀρθογώνιον ἐςὶ, τὸ ϗ τὰς τέτταρας

Γωνίας ἔχον ὀρθὰς, καὶ ἐκ τᾶ ἀκολέθε ἴσας, κἂν ἴσας ἔχῃ τὰς Πλευρὰς, κἄντε ϗ μή. καλεῖται δὲ τὸ β΄. ϗ Ἑτερόμηκες. Ἐκεῖνο δὲ,

Τετράγωνον τὸ Ἰσόπλευρόν τε ϗ Ὀρθογώνιον, ϗ ταύτῃ δέ τοι ϗ Ἰσογώνιον. Ἅπαν οὖν Τετράγωνον ἐςὶν Ὀρθογώνιον, ἐμὴν δὲ ἀνάπαλιν. λβ. χ. 26.

Ῥόμβος δὲ, ὃ Ἰσόπλευρον μὲν, ἐκ Ἰσογώνιον δέ. λγ.

Ῥομβοειδὲς δὲ, τὸ τὰς ἀπεναντίον Πλευράςτε ϗ Γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ ἔτε Ἰσόπλευρον ἐςὶν, ἔτε Ἰσογώνιον. λδ. χ. 27.

Παραλληλόγραμμον δὲ ἐςὶν, ἔπερ αἱ ἀπεναντίον Πλευραὶ, (αβ, ζγ) ϗ (βζ, αγ) εἰσὶ παράλληλοι. Τὶ δὲ τὸ παραλλήλες εἶναι, ἐχόμενα ὁριοθήσεται. λε. χ. 28.

Ἅπαν ἒν Ὀρθογώνιον Ἑτερόμηκες ϗ Τετράγωνον, ἐςὶ Παραλληλόγραμμον, ἀνάπαλιν δὲ ἐδαμῶς. Ὁμοίως δὲ ϗ Ῥόμβοι, ϗ Ῥομβοειδῆ Παραλληλόγραμμα, ἀνάπαλιν δε ἐδαμῶς.

Παράλληλοι εἰσὶν Εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἔσαι, ϗ ἐκβαλλόμεναι ἐπ' ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἴσοις ἀλλήλων ἀεὶ ἀπέχεσι διαςήματι. λς. χ. 29.

Τὰ δὲ ἴσα διαςήματα διὰ τῶν μεταξὺ Καθέτων λαμβάνεται. Ταύτῃ τοι πασῶν τῶν ἐπὶ ἑτέραν αβ τῶν δύο Παραλλήλων, καθέτων πλ, ἴσων ἀλλήλαις ἐσῶν, Παράλληλοι αἱ αβ, γζ Εὐθεῖαι εἰρήσονται. Εὐθείας οὖν τῆς λπ, ἐπ' Εὐθεῖαν τὴν αβ Καθέτε, δὶ αὐτῆς ἀεὶ πρὸς Κάθετον ἀγομένης, τὸ πέρας λ, τὴν γζ Παράλληλον διαγράφεται. Οὕτωτοι καὶ αἱ Παράλληλοι τὴν γένεσιν ἴσχεσι.

Ἐν τέτοις ἀλλ' οὖν τὸν Στοιχειωτὴν, Παραλλήλες Εὐθείας ὁρισάμενον, „τὰς ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἔσας, ϗ ἐκβαλλομένας ἐπ' ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ „μέρη, ἐπὶ μηδέτερα δὲ συμπιπτέσας ἀλλήλαις, αἰτιάσαιτο τυχὸν ἄντις ὡς ὁρισμὸν ἀποδεδωκότα ἐλλιπῶς ἔχοντα, τῇ τε Ὑπερβολῇ ϗ Κογχοειδεῖ πρὸς Εὐθεῖαν παραβαλλομέναις, ϗ δυσὶν ἴσαις Παραβολαῖς ταῖς περὶ τὸν αὐτὸν Ἄξωνα, πρὸς ἀλλήλας, ϗ πλείοσιν ἄλλαις γραμμαῖς τὸν νοῦν προσέχων, ἃς ἐπ' ἄπειρον μὲν προεκβαλλομένας, ϗ ἀεὶ ἔγγιον ἐπὶ, παντὸς δοθέντος, ἐλάσσονι διαςήματι γινομένας, ἔτε συμπίπτειν ποτὲ ἀλλήλαις συμβαίνει, ἔτε μὴν παραλλήλες εἶναι, παρὰ τὸ μηδὲ ἐπίσης ἀφίςαθαι. Αὐτὸ γὰρ τἔτο ἐδ' ἐπὶ τῶν Εὐθειῶν καθ' αὐτὸ γνώριμον ἐςὶ, τὸ διεςάναι δὶ ἴσε, ἐπεὶ οὐ συνίασι. Γένοιτο γὰρ ἂν καὶ ταύτας τυχὸν, γίνεθαι μὲν ἀεὶ καὶ ἀεὶ μᾶλλον ἐγγίες, συμπίπτειν δὲ ἐφ' ἓν ἐδαμῶς ἐδέποτε. Ὥςε ἐ καλῶς τὴν τῆς παραλληλίας τῶν Γραμμῶν φύσιν, ὁ παρ' Εὐκλείδῃ ὁρισμὸς ἔοικεν ἀναπτύσσειν. Ἀλλὰ γὰρ ἕτερος ὑποτυχὼν, αἰτίας ἂν τῆς περὶ τέτε ὅλης, τὸν ἄνδρα ἀπήλλαξεν. Οὐδὲ γὰρ ἀνάγκη τοὺς ἐν τοῖς Μαθήμασιν ὁρισμοὺς, μὴ πραγματιώδεις ὄντας, ὀνοματώδεις δὲ μόνον, τὴν φύσιν τοῦ ὁριζομένου ἐπ᾽ ἀκριβὲς ἀναπτύσσειν. Ἔνθεν τοι καὶ Εὐκλείδης Εὐθείας προειπὼν Παραλλήλους, τὰς ἐπ᾽ ἄπειρον μὲν ἐφ᾽ ἑκάτερα ἐκβαλλομένας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἐπὶ μηδέτερα δὲ συμπιπτούσας, ἐμμένων δὲ καὶ ἐφεξῆς ἀεὶ ταύτῃ γε τῇ σημασίᾳ τῶν Παραλλήλων, μᾶλλον δὲ, καὶ τὸ μόναις ταῖς Παραλλήλοις, καὶ ἐπίσης ἀλλήλων ἀφεστώσαις προσιδιάζον ἐν ταῖς Εὐθείαις, διὰ τοῦ ὁρισμοῦ παραθέμενος, οὐ πάνυτι δικαίαν τὴν δίκην, δῆλον ὅτι δικάζεται.

σχ. 30. 31. λζ. Παραλληλογράμμου τε, καὶ παντὸς Τετραπλεύρου Διάμετρος, ἤτοι Διαγώνιος, ἐστὶν ἡ διὰ τῶν ἀπεναντίον Γωνιῶν ἠγμένη Εὐθεῖα (αβ)

λη. Τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων Εὐθειῶν περιεχόμενα, Πολύπλευρά τε ἐστὶ, καὶ Πολύγωνα.

σχ. 32. λθ. Γωνία δὲ ἐκτὸς σχήματος Εὐθυγράμμου ἐστὶν, ἡ συνισταμένη, Πλευρᾶς ἔξω τοῦ Σχήματος ἐκβαλλομένης. Τοιαῦται εἰσὶν αἱ ὑπὸ ζβγ, καὶ ηγα, καὶ θαβ. Τοσούτων τοίνυν ἐκτὸς Γωνιῶν Σχῆμα ἕκαστον δεκτικὸν ἂν εἴη, ὁπόσων, καὶ ἐντὸς εὐμοιρεῖ καὶ Πλευρῶν.

μ. Γραμμὴ, Γωνία, Σχῆμα διχάζεσθαι, ἢ δίχα τέμνεσθαι λέγεται, ἐὰν εἰς μέρη δύο ἴσα ἀλλήλοις, τούτων ἕκαστον ᾖ διαιρούμενον. Παραπλησίως δὲ καὶ τριχάζεσθαι, ἢ τρίχα τέμνεσθαι λέγεται, τὸ εἰς τρία ἀλλήλοις ἴσα διανεμόμενον. Καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Α ἰ τ ή μ α τ α.

Αἴτημα ἐστὶν, ὅπερ, ὅτι ῥαδίως ἔχει τελεῖσθαι, αὐτόθεν δῆλον τυγχάνει. Ἠτήσθω τοίνυν.

α. Ἀπὸ παντὸς Σημείου, ἐπὶ πᾶν Σημεῖον, εὐθεῖαν Γραμμὴν ἀγαγεῖν.

β. Καὶ πεπερασμένην Εὐθεῖαν, κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ᾽ εὐθείας ἐκβάλλειν.

γ. Καὶ παντὶ Κέντρῳ καὶ Διαστήματι Κύκλον γράφεσθαι.

Ἀ ξ ι ώ μ α τ α.

Ἀξίωμα ἐστὶν ἔννοια κοινὴ, καθ᾽ αὑτὴν τὸ γνώριμον ἔχουσα.

α. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα. Καὶ τὸ θατέρου τῶν ἴσων μεῖζον, ἢ ἔλαττον, καὶ θατέρου πάντως.

β. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

γ. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενα ἐστὶν ἴσα.

δ. Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα.

Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπὰ ἐστὶν ἄνισα. ε.

Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ, ἢ τῶν ἴσων ἡμίση, ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ, ἢ ϛ.
τῶν ἴσων διπλάσια, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Καὶ τὰ τριπλάσια δὲ, καὶ τὰ τετραπλάσια ὡσαύτως. Ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ἀνίσων τὰ ἡμίση, ἢ διπλάσια, ἢ τριπλάσια, ἢ κξ. ἄνισα ἐστί.

Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ οὐκ ὀρθῶς ζ.
ὁ Κλάβιος ἀντιστρέφειν παρεβιάσατο, ψευδὲς ὂν ὅτι καθόλου τὰ ἴσα ἐπ' ἄλληλα ἐφαρμόζει. Τὰ γὰρ ἀνόμοια τῶν Μεγεθῶν, κἂν ἴσα ᾖ, οὐκ εἰσὶν ἐφαρμόζοντα. Ἐὰν οὖν πρὸς τῷ ἴσῳ, ληφθῇ καὶ τὸ ὅμοιον, ἕξει δὴ χώραν τ' ἀντίστροφον· καθ' ὃ καὶ ἡμῖν κείσθω τὸ ἑξῆς.

Εὐθεῖαι ἴσαι ἐπ' ἀλλήλας ἐφαρμόζουσι. Καὶ Γωνίαι εὐθύγραμμοι ὡσαύ- η.
τως. Καὶ Κύκλοι δὲ ἴσοι ὄντες ἐπ' ἀλλήλους ἐφαρμόζουσι. Καὶ τοῦ αὐτοῦ, ἢ ἴσων Κύκλων Περιφέρειαι ἴσαι, ἤτοι τόξα, ἐπ' ἀλλήλας ἐφαρμόζουσι. Καὶ Τετράγωνα, ἢ ἕτερα ὁποιαδηποτοῦν Σχήματα, ὅμοιά τε καὶ ἴσα ὄντα, ἐπ' ἄλληλα ἐφαρμόζει.

Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον αὐτοῦ ἐστιν· ἴσον δὲ ἅπασι τοῖς αὐτοῦ μέρε- θ.
σιν ἅμα ληφθεῖσι.

Καὶ πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ Γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. ι.

Τὸ γεμὴν παρ' Εὐκλείδῃ ια'. τῶν Ἀξιωμάτων, ὅτι ἐὰν εἰς δύο Εὐθείας
„(αβ, γζ) Εὐθεῖα ἐμπίπτουσα (ηι) τὰς ἐντὸς, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη Γωνίας
„(ὑπὸ βλπ, ζπλ) δύο Ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλόμεναι αἱ δύο αὗται κ. 33.
„Εὐθεῖαι ἐπ' ἄπειρον συμπεσοῦνται ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο Ὀρ-
„θῶν ἐλάσσονες Γωνίαι" ἐπεὶ μηδέν τι σαφέστερόν ἐστι τοῦ δεικνυμένου τῷ αὐτῷ
Εὐκλείδῃ ἐν Προτ. κθ'., ὡς ἀμέλει, „ἐὰν αἱ (ὑπὸ βλπ, ζπλ) Γωνίαι δυσὶν
„Ὀρθαῖς ὦσιν ἴσαι, αἱ Εὐθεῖαι (αβ, γζ) οὐδέ ποτε συμπεσοῦνται. Ταύτητοι τῆς
τῶν Ἀξιωμάτων τάξεως σὺν Γεμίνῳ, καὶ Πρόκλῳ, καὶ τοῖς ἄλλοις τῶν Γεωμετρῶν,
καὶ αὐτοὶ ἐκσυρίττομεν. Οὐδὲ γὰρ οὐδ' Ἀξίωμα τὸ τοιοῦτον, ἀλλὰ Θεώρημα ἄν-
τικρυς, ὅπερ ἡμῖν μετὰ τὴν λγ'. τοῦ ἀνὰ χεῖρας Βιβλίου δειχθήσεται, τοῦ λϛ'.
εἰς τοῦτο ὁρισμοῦ ὑπεργήσοντος. Τούτου δὲ τὰ ἐφεξῆς δύο ἀντεισαγαγεῖν ἔδο-
ξεν, οἷς ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς Παραλληλίας αὐτίκα μάλα τ' ἀληθὲς ἐπιλάμπει.
Ἔστω τοίνυν Ἀξίωμα τὸ ἑπόμενον.

Τῶν Εὐθειῶν αἱ Παράλληλοι κοινῇ χρῶνται Καθέτῳ· τουτέστιν ἡ πρὸς τὴν ια.
ἑτέραν τῶν Παραλλήλων Κάθετος, αὐτὸ τοῦτο ἐστὶ καὶ πρὸς τὴν ἑτέραν.

Καὶ Κάθετοι δύο (λξ, πι), ἀπὸ τῶν Παραλλήλων μέρη ἴσα ἑκατέρας ιβ. κ. 29.
ἑκατέρωθεν (τὰ λτ, ξι) ἐναπολαμβάνουσι.

Τὸ μὲν παρ' Εὐκλείδῃ ιά. Ἀξίωμα (καίτοι οὐ μικρὰ τείνον εἰς ἀπόδειξιν τῶν ἃ παρέπεται ταῖς Παραλλήλοις παθήματα, ἄλλως τε δὲ καὶ παντὶ τῷ προσέχοντι ἅλις καταφανῶς ἔχον) εἰκὸς τὸν ὁρισμὸν ἀνωτέρω τῶν Παραλλήλων μετακινήσαντα, κἀκείνου ἕτερον ἀντεισενεγκόντα, καὶ τοῦτ' ἐντεῦθεν τὸν Συγγραφέα μετασκευάσασθαι, καὶ τὰ ἀνωτέρω δύο Ἀξιώματα, ἅτε δὴ τῷ κατ' αὐτὸν ὁρισμῷ τῶν Παραλλήλων μᾶλλον συγγενῆ, καὶ οἰκεῖα τυγχάνοντα, ἀντικαταστῆσαι.

ιγ. Δύο Εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσι· τριῶν τοὐλάχιστον εἰς τοῦτο ἀπαιτουμένων.

ιδ. Δυσὶν Εὐθείαις Τμῆμα κοινὸν οὐκ ἔστι· καὶ πᾶσαι αἱ Εὐθεῖαι κατὰ Σημεῖον ὑπ' ἀλλήλων πεφύκασι τέμνεσθαι.

κ. 34. Οἷον τῇ αφ Εὐθείᾳ ἐμπεσοῦσα ἡ ψδ, καὶ ἐκβληθεῖσα, οὐ μένουσα κατὰ τὴν δα χωρήσει, ἀλλ' ἐπὶ τὸ ε, ὡς ἐκείνην τὴν αφ, κατὰ Σημεῖον μόνον τὸ δ διατέμνειν. Τοῦτὶ δὲ τ' Ἀξίωμα τῇ ἐννοίᾳ τῆς Εὐθείας προσέχουσιν, ἐστὶν ἐκδηλότατον· μᾶλλον δὲ, καὶ ἐξ αὐτοῦ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς Γραμμῆς, τῆς μήκους μόνου ἀπλατοῦς οὔσης, σαφὲς ὅτι ἅπασαι αἱ Γραμμαὶ, κἄν τε Εὐθεῖαι τύχωσι, κἄν τε Καμπύλαι, κἂν συμμίγδην Εὐθεῖαι τε ἅμα καὶ Καμπύλαι, δι' ἀλλήλων ἰοῦσαι, κατά γε Σημεῖον τὰς τομὰς ποιούμεναι ἔσονται.

Ἐπειδὴ δὲ εἰσὶν οἱ τῶν ἐπὶ λεπτότητι ἑαυτοὺς μακαριζόντων, ἐν τῷ φιλοσοφεῖν περιττοὶ, δυνατὴν ἥγηνται τὴν τῶν Γραμμῶν κατά τι μέρος ἑαυτῶν σύμμιξιν, ἔδοξε δὴ τούτοις χαρισαμένους, εἰς τοὐμφανέστερον πειράσασθαι προενεγκεῖν τὸ Ἀξίωμα.

κ. 35. Καὶ δὴ ἐχέτωσαν εἰ δυνατὸν, Εὐθεῖαι δύο αφ, δψ Τμῆμα κοινὸν τὸ αδ. καὶ Κέντρῳ τῷ δ γεγράφθω Κύκλος, τέμνων τὰς Εὐθείας κατὰ β καὶ γ· καὶ Τόξον εἰλήφθω τὸ βζ ἴσον τῷ βγ, καὶ νοείσθω ἠγμένη ἡ Εὐθεῖα ζδ.

Αἱ τοίνυν Εὐθεῖαι γδ, καὶ ζδ τὴν αὐτὴν ὅλως ἔλαχον θέσιν πρὸς τὴν βδ. Ἀλλ' ἀμὴν ἡ Εὐθεῖα γδ συνάμα τῇ βδ, κοινὸν λέγονται ἔχειν Τμῆμα τὸ δα. Ἄρα καὶ ἡ Εὐθεῖα ζδ, κοινὸν ἔχει μετὰ τῆς βδ, τὸ Τμῆμα δα. Καὶ ἔστιν ἄρα ταῖς τρισὶν Εὐθείαις γδ, βδ, ζδ, κοινὸν Τμῆμα τὸ δα.

Ληφθήτω οὖν αὖθις Τόξον τὸ ζη, ἴσον τοῖς πρότερον βζ, καὶ γβ. καὶ νοείσθω ἠγμένη Εὐθεῖα ηδ. Καὶ δῆλον αὖθις, ὡς αἱ Εὐθεῖαι βδ, ηδ, τὴν αὐτὴν ἔλαχον θέσιν πρὸς τὴν ζδ. Ἀλλ' ἤδη δέδεικται τὴν βδ μετὰ τῆς ζδ, κοινὸν ἔχειν Τμῆμα τὸ δδ. Κοινὸν ἄρα ἔσται καὶ ταῖς Εὐθείαις ηδ, ζδ, Τμῆμα τὸ δα.

Οὐκοῦν αἱ τέτταρες ἤδη Εὐθεῖαι γδ, βδ, ηδ, ζδ, Τμῆμα κοινὸν ἔχουσι τὸ δα. Καὶ τὸν αὐτὸν ὅλως τρόπον, δι' ὅλης τῆς τοῦ Κύκλου Περιφερείας, Τόξων ληφθέντων τοῖς προτέροις ἴσων, ῥᾴδιον ἂν εἴη δεῖξαι, πάσας ἅμα τὰς

Καὶ ἄλλως ἂν δείξειας. Τὸ βπω ἐστὶν Ἡμικύκλιον· ἀποτέτμηται γὰρ ἀπὸ τῆς Διαμέτρου βω. ὡσαύτως τὸ γπω, Ἡμικύκλιον καὶ αὐτό· ἀποτέμνεται γὰρ ἀπὸ τῆς Διαμέτρου γδω· τὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ Κύκλου Ἡμικύκλια ἴσα (ὁρ.

κυκλόθεν ἠγμένας Εὐθείας, Τμῆμα ἐχούσας κοινὸν τὸ δα. Τηλικοῦτον οὖν τὸ ἄτοπον ἕψεται, δισσὰς, τεθέντος, Εὐθείας τήν τε γδ, ϗ βδ, κοινοῦ Τμήματος εὐμοιρεῖν. Ἀδύνατον ἄρα Εὐθείας δύο κοινὸν Τμῆμα κεκτῆσθαι. κ.) Τὸ ἄρα βκω, ἴσον τῷ γκω· τὸ ὅλον τῷ μέρει. Ὅπερ ἀδύνατον. (Ἀξ. θ.)

Τῷ δὲ τεθέντι Ἀξιώματι, ϗ ἡ ἰσχὺς πᾶσα τοῦ κατὰ τὰ Σχολαστήρια τεθρυλλημένου, ἐρείρισαι λόγου, τοῦ ἐκ Σημείων ὅλως ἀδιαιρέτων τε, ϗ ἀριθμῷ ὡρισμένων, μηδὲν ἔχειν τῶν Μεγεθῶν συγκεῖσθαι, ὡδὶ δεικνῦντος. Συγκείσθω εἰ δυνατὸν, Μεγέθη ἐκ σημείων· περὶ δὲ τὸ αὐτὸ Κέντρον νοείσθωσαν γεγραμμέναι, ὁποσαισοῦν δόξῃ, Κύκλων Περιφέρειαι· τεθείσθω δὲ τὴν ἁπασῶν ἐξωτάτην, ἤτοι τὴν μεγίστην, ἐκ δέκα μυριάδων Σημείων συνεστάναι, ἀφ' ὧν ἑκάστου ἐπὶ τὸ κοινὸν Κέντρον ἠγμέναι νοείσθωσαν Γραμμαὶ εὐθεῖαι. κ. 36.

Ἐκ μὲν οὖν τοῦ ἀναπτυχθέντος Ἀξιώματος, ἀσφαλὲς ὅτι οὐδαμῆ αἱ Εὐθεῖαι ἐκεῖναι συναναμίγνυνται, οὐδὲ πρὶν, ἢ πρὸς αὐτὸ τὸ Κέντρον ἀφικέσθαι, ἀλλήλαις συνίασι. Ταύτῃτοι ϗ πᾶσαι τὰς ἐν μέσῳ Περιφερείας διήκουσαι, ἐν ταύταις Σημεῖα, τοῖς ἐν τῇ ἐξωτάτω ἐπισημανοῦσι πάντως ἰσάριθμα. Ὥστε ϗ ἐξ ἰσαρίθμων Σημείων ἅπασαι αἱ ὁμόκεντροι Περιφέρειαι συγκεκρότηνται, ϗ ἐκ τοῦ ἀκολούθου, αἱ πᾶσαι ἀλλήλαις ἴσαι εἰσίν· οὕτω δέ τοι, ὡς τὴν ἐπὶ τοῦ ὑποκειμένου τουδὶ Χάρτου καταγεγραμμένην, μηδέν τι τῆς τοῦ Στερεώματος Περιφερείας τὸ μέγεθος ἀπολείπεσθαι. Καὶ ἄλλαις οὖν ἀριθμὸν μονονοὺ ὑπερβεβηκείαις Ἀποδείξεσι τῆς τοιᾶσδε κατακλυζομένης ἀπάτης, μίαν δὴ ταύτην πρὸ τῶν πολλῶν ἐνταυθὶ παραθέσθαι ἠξίωτα, ἅτε δὴ πανταχοῦ περιαδομένην, ϗ ἐκ τοῦ προτεθέντος Ἀξιώματος ἀμέσως ἐξηρτημένην.

Τῶν ἴσων Κύκλων αἱ Διάμετροι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ αἱ τούτων δὲ Ἡμιδιάμετροι, εἴτουν αἱ Ἀκτῖνες, ὁμοίως. Καὶ ἐὰν Κύκλων δύο αἱ Ἀκτῖνες, εἴτουν αἱ Διάμετροι ἴσαι ὦσιν, οἱ Κύκλοι ἴσοι εἰσί. Ταῦτα δὲ ϗ ἐπὶ Τετραγώνων Πλευραῖς τε ϗ Διαμέτροις, ϗ ὁποιωνοῦν ἄλλων Σχημάτων ὁμοίων τε καὶ ἴσων ταῖς ὁμολογούσαις Πλευραῖς τε, ϗ Διαμέτροις (περὶ ὧν ἐν τῷ ια'. ὁρ. τοῦ Ε'. Βιβλ., ϗ ὁρισμ. α'. τοῦ ϛ'.) παραπλησίως κρατεῖ· ϗ ἀνάπαλιν. ιε.

Καὶ ἡ τοῦ μείζονος δὲ Κύκλου Διάμετρος μείζων, ϗ ἡ τοῦ ἐλάσσονος ἐλάσσων, ϗ ἀνάπαλιν. Ὡσαύτως δὲ ϗ ἐπὶ Τετραγώνων Πλευραῖς τε ϗ Διαμέτροις, ϗ ὁποιωνοῦν ἄλλων Σχημάτων ὁμολόγοις Πλευραῖς τε, ϗ Διαμέτροις τὰ αὐτὰ ἠξίωται· ϗ ἀνάπαλιν. ις.

Τῶν Προτάσεων αἱ μέν τι προβάλλουσι ποιητέον, ϗ καλοῦνται Προβλήματα· αἱ δὲ μόνῃ τῇ θεωρίᾳ ἐφηρεμοῦσι, ϗ Θεωρήματα ἐπιλέγονται.

Πραγματεύεται δὲ τουτὶ τὸ πρῶτον Βιβλίον, τὰ περὶ τῶν πρωτίστων τοῖς Τριγώνοις τε, ϗ Παραλληλογράμμοις παρεπομένων παθῶν. Ἐν ᾧ ϗ Προτάσεις ἐπισημότεραί εἰσιν αἱ ἐφεξῆς· ΛΕ. ΛΖ. ΜΑ. ΜΔ. ΜΕ. ΜΖ.

Πρότασις Α.

„Ἐπὶ τῆς δοθείσης Εὐθείας (αβ) πεπερασμένης, Τρίγωνον ἰσόπλευ-„ρον συστήσασθαι.

κ. 37. Κέντρῳ μὲν τῷ α, Διαστήματι δὲ τῷ αβ (1) Κύκλος γεγράφθω ὁ ζγβ. Καὶ Κέντρῳ μὲν τῷ β, Διαστήματι δὲ τῷ αὐτῷ βα, Κύκλος γεγράφθω ὁ αγλ. Καὶ ἀπὸ τοῦ γ Σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ Κύκλοι, ἐπεζεύχθωσαν Εὐθεῖαι (2) αἱ γα, γβ.

Φημὶ δὴ τὸ συνεστὸς Τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον. Ἡ γὰρ αγ Εὐθεῖα, ἴση (3) τῇ αβ· ἀλλὰ ϗ ἡ βγ ἴση τῇ βα (4). Ἄρα αἱ αγ, βγ ἴσαι (5) ἀλλήλαις εἰσίν. Αἱ τρεῖς ἄρα τοῦ Τριγώνου Πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Τὸ ἄρα αγβ Τρίγωνον καὶ (6) ἰσόπλευρόν ἐστι, ϗ ἐπὶ τῆς δοθείσης πεπερασμένης Εὐθείας συνέσταται τῆς αβ· Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις Β.

„Πρὸς τῷ δοθέντι Σημείῳ (α), τῇ δοθείσῃ Εὐθείᾳ (εζ) ἴσην Εὐθεῖαν „θέσθαι.

κ. 38. Εἰλήφθω δὴ τῷ Διαβήτῃ διάστημα τὸ εζ (7)· ϗ μετήχθω ἀπὸ τοῦ α ἐπὶ τὸ δ. Καὶ ἔσται πάντως ἡ ἀχθεῖσα (8) Εὐθεῖα αδ, ἴση τῇ δοθείσῃ (9) εζ.

Ἄλλως.

κ. 39. Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν Σημεῖον τὸ α, ἡ δὲ δοθεῖσα Εὐθεῖα ἡ εζ, ϗ ἐπεζεύχθω ἀπὸ τοῦ α Σημείου ἐπὶ τὸ ε (10) Εὐθεῖα ἡ αε. Καὶ συνεστάθω ἐπ' αὐτῆς Τρίγωνον ἰσόπλευρον (11) τὸ αβε. Καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς βα, βε (12) Εὐθεῖαι αἱ αλ, εθ. Καὶ Κέντρῳ μὲν τῷ ε, Διαστήματι δὲ τῷ εζ (13), Κύκλος γεγράφθω ὁ μνζ. Καὶ πάλιν (14) Κέντρῳ μὲν τῷ β, Διαστήματι δὲ τῷ βν, Κύκλος γεγράφθω ὁ νξο.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ε Σημεῖον, Κέντρον ἐστὶ τοῦ μζν Κύκλου, ἴση ἐστὶν (15) ἡ εζ τῇ εν. Καὶ πάλιν ἐπεὶ τὸ β, Κέντρον ἐστὶ τοῦ νξο Κύκλου (16), ἴση ἐστὶν ἡ βο

---

(1) *Αἴτ. γ.* (2) *Αἴτ. α.* (3) Ὅρ. ιη. (4) Ὅρ. ιη. (5) *Ἀξ. α.* (6) Ὅρ. κε. (7) *Αἴτ. γ.* (8) *Αἴτ. α.* (9) *Ἀξ. α.* (10) *Αἴτ. α.* (11) α. Βιβ. α. (12) *Αἴτ. β.* (13) *Αἴτ. γ.* (14) *Αἴτ. γ.* (15) Ὅρ. ιη. (16) Ὅρ. ιη.

τῇ βυ. Ἀλλ' ἀπ' αὐτῶν αἱ βα ϗ βε, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. (1) Λοιπὴ ἄρα ἡ αο, λοιπῇ τῇ ευ (2) ἴση ἐςί. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ εζ ἴση τῇ ευ· καὶ ἡ αο ἄρα (3) ἴση τῇ εζ. Πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι Σημείῳ τῷ α, τῇ δοθείσῃ Εὐθείᾳ τῇ εζ, ἴση Εὐθεῖα κεῖται ἡ αο. Ο. Ε. Π.

Πρότασις Γ.

,, Δύο δοθεισῶν Εὐθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονος (αβ) τῇ ἐλάσσονι (γ) ,, ἴσην Εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Λαβὼν τῷ Διαβήτῃ (4) τὸ Διάςημα τῆς ἐλάσσονος γ, μετάςησον ἐπὶ τὴν μείζονα, ἀπὸ τῦ α ἐπὶ τὸ ε. σχ. 40.

Ἢ Οὕτω.

Κείσθω πρὸς τῷ α Σημείῳ, τῇ γ Εὐθείᾳ, ἡ αδ ἴση (5)· ϗ Κέντρῳ μὲν τῷ α, Διαςήματι δὲ τῷ αδ (6), Κύκλος γεγράφθω ὁ δζε. Ἴση οὖν ἡ αε τῇ αδ. (7) Ἀλλὰ καὶ ἡ γ τῇ αδ (8) ἐςὶν ἴση. Ἄρα ἡ αε ἴση τῇ γ (9). Δύο ἄρα δοθεισῶν Εὐθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονος αβ, τῇ ἐλάσσονι γ ἴση ἀφήρηται ἡ αε. Ο. Ε. Π. σχ. 41.

Πρότασις Δ.

,, Ἐὰν δύο Τρίγωνα (φ, ψ) τὰς δύο Πλευρὰς ταῖς δυσὶ Πλευραῖς ἴσας σχ. 42.
,, ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ (ἤτοι τὴν μὲν βα τῇ ζλ, τὴν δὲ γα τῇ ιλ) ϗ τὴν
,, Γωνίαν (α) τῇ Γωνίᾳ (λ) ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων Εὐθειῶν περιεχομέ-
,, νην· ϗ τὴν Βάσιν (βγ) τῇ Βάσει (ζι) ἴσην ἕξει, ϗ τὸ Τρίγωνον (φ) τῷ
,, Τριγώνῳ (ψ) ἴσον ἔςαι, ϗ αἱ λοιπαὶ Γωνίαι ταῖς λοιπαῖς Γωνίαις ἴσαι ἔ-
,, σονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ (ἤτοι ἡ μὲν β τῇ ζ, ἡ δὲ γ τῇ ι) ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι
,, Πλευραὶ ὑποτείνυσι.

Ἐπιτιθεμένυ γὰρ τῦ Τριγώνυ ψ ἐπὶ τῷ Τριγώνῳ φ, αἱ Πλευραὶ λζ, λι ἀκριβῶς ἐφαρμόσυσι ταῖς ἴσαις (10) Πλευραῖς αβ, αγ, ὕτως ὥςε τὰ τρία Σημεῖα τὰ, λ, ζ, ι ἐπιπεσεῖν ἐπὶ τοῖς τρισὶν α, β, γ. Ἄρα ϗ ἡ Βάσις ζι ὅλη, ἐπὶ Βάσεως τῆς βγ ὅλης ἐπιπεσεῖται. Ἀλλὰ ϗ αἱ Γωνίαι ζ, β, ὡσαύτως δὲ ϗ αἱ ι, γ· ϗ ὅλα τὰ Τρίγωνα ἐπ' ἄλληλα ἐφαρμόσει. Καὶ πάντα ἄρα ἴσα (11) ἔςαι.

---

(1) *Ἐκ Κατασκ.* (2) *Ἀξ. γ.* (3) *Ἀξ. α.* (4) *Αἴτ. γ.* (5) *β. Βιβλ. α.* (6) *Αἴτ. γ.* (7) *Ὅρ. ιη,* (8) *Ἐκ Κατασ.* (9) *Ἀξ. α.* (10) *Ἀξ. η.* (11) *Ἀξ. ζ.*

Σχόλιον.

Παραπλησίῳ δὲ λόγῳ καὶ τὸ ἐφεξῆς Θεώρημα, οὗ παρὰ πόδας ἡ χρῆσις, ἐξέσαι δεῖξαι.

„Ἐὰν δύο Τριγώνων (φ, ψ) αἱ Πλευραὶ βγ, καὶ ζι ἴσαι ὦσι, καὶ αἱ „πρὸς ταύτας τὰς Πλευρὰς Γωνίαι (ἀμέλειτοι αἱ β καὶ γ, ταῖς ζ καὶ ι) ἴσαι „ὦσιν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ τ᾽ ἄλλα πάντα, καὶ αὐτὰ τὰ Τρίγωνα ἴσα ἀλ„λήλοις ἔσαι.

κ. 43. Ἐπεὶ γὰρ αἱ Γωνίαι β καὶ γ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς Γωνίαις ζ καὶ ι, ἐὰν τὴν Πλευρὰν ζι ἐπιθῇς, ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ Πλευρᾶς βγ, αὗται ἐπ᾽ ἀλλήλας (1) ἐφαρμόσουσιν. Οὕτω δέ τοι διὰ τὴν ἰσότητα τῶν Γωνιῶν ζ, β, καὶ ι, γ, καὶ ἡ ζλ ἐπιπεσεῖται (2) ἐπὶ τὴν βα, καὶ ἡ ιλ ἐπὶ τὴν γα. Ἐπιπεσεῖται δὲ ἄρα καὶ τὸ Σημεῖον λ ἐπὶ τὸ Σημεῖον α, (ἐκπεσὸν γὰρ τοῦ α, οὐδ᾽ αἱ πλευραὶ ζλ, ιλ ταῖς Πλευραῖς βα, γα ἐπικείσονται) καὶ ἀκριβῶς ἄρ᾽ οὕτω τὰ πάντα ἐφαρμόζοντα, (3) ἴσα ἔσαι.

Πρότασις Ε.

„Τῶν Ἰσοσκελῶν Τριγώνων αἱ πρὸς τὴν Βάσιν Γωνίαι (α, γ) ἴσαι ἀλ„λήλαις εἰσί.

κ. 44. Νοείσθω δὴ τὸ Τρίγωνον αβγ δὶς κείμενον, τῇ γεμὴν θέσει ἀντεσραμμένον ΓΒΑ. Ἐπεὶ τοίνυν ἐν τοῖς δυσὶ Τριγώνοις αβγ, καὶ ΓΒΑ, ἡ μὲν αβ Πλευρὰ ὑποτίθεται ἴση τῇ ΓΒ, ἡ δὲ γβ τῇ ΑΒ, καὶ ἡ Γωνία β τῇ Γωνίᾳ Β· καὶ ἡ πρὸς τὴν Βάσιν Γωνία α, τῇ Γωνίᾳ Γ, ἤτοι τῇ γ (ἡ αὐτὴ γάρ ἐςιν) ἴση (4) ἐςίν. Ο. Ε. Δ.

Ἄλλως.

„Τῶν Ἰσοσκελῶν Τριγώνων αἱ πρὸς τὴν Βάσιν Γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις „εἰσὶ, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων Εὐθειῶν, καὶ αἱ ὑπὸ τὴν Βάσιν ἴσαι ἀλ„λήλαις εἰσί.

κ. 45. Τοῦ Ἰσοσκελοῦς αβγ προσεκβεβλήσθωσαν ἐπ᾽ εὐθείας τῶν αβ, αγ, αἱ βδ, γε. Καὶ εἰλήφθω ἐπὶ μὲν τῆς βδ τυχὸν Σημεῖον τὸ ζ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος αε, τῇ ἐλάσσονι αζ, ἴση ἡ αη (5), καὶ ἐπεζεύχθωσαν (6) αἱ ζγ, ηβ.

---

(1) Ἀξ. η. (2) Ἀξ. η. (3) Ἀξ. ζ. (4) δ. Βιβ. α. (5) γ. Βιβ. α. (6) Αἰτ. α.

Ἐπεὶ οὖν ἐϛιν ἡ μὲν αζ, ἴση τῇ αη (1), ἡ δὲ αβ, τῇ αγ (2), ꙋ Γωνία δὲ κοινὴ ἐϛιν ἡ περιεχομένη ὑπὸ ζαη· ꙋ Βάσις ἄρα (3) ἡ ζγ, Βάσει τῇ βη ἴση ἐϛὶ, ꙋ τὸ αζγ Τρίγωνον, τῷ αηβ Τριγώνῳ, ꙋ ἡ ὑπὸ αγζ τῇ ὑπὸ αβη, ꙋ ἡ ὑπὸ αζγ τῇ ὑπὸ αηβ. Ἀλλ' ἔϛι δὴ ꙋ λοιπὴ ἡ βζ, λοιπῇ τῇ γη (4) ἴση. Ἐδείχθη δὲ ꙋ ἡ ζγ, ἴση τῇ βη, ꙋ ἡ ὑπὸ βζγ τῇ ὑπὸ γηβ ἴση· ꙋ τὰ λοιπὰ ἄρα τοῖς λοιποῖς (5) ἴσα ἔϛαι, ἥτε ὑπὸ βγζ τῇ ὑπὸ ηβγ ἴση ἔϛαι. Καὶ ἐὰν ἄρα ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τῶν αγζ, ꙋ αβη τῶν ἴσων δεδειγμένων, ἔϛαι καὶ λοιπὴ (6) ἡ ὑπὸ αγβ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ αβγ ἴση, αἵ πρὸς τὴν Βάσιν εἰσίν. Ἀλλὰ ꙋ ἡ ὑπὸ ζβγ, ꙋ ὑπὸ βγη (τῶν πάντων ἐν αὐτοῖς τοῖς Τριγώνοις ἴσων δειχθέντων) ἴσαι ꙋ αὐταὶ ἀλλήλαις εἰσὶν, αἵ ὑπὸ τὴν Βάσιν εἰσί. Τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν Τριγώνων αἱ πρὸς τὴν Βάσιν, ꙋ αἱ ὑπὸ τὴν Βάσιν κξ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

Ἆρ' οὖν τὸ Ἰσόπλευρον Τρίγωνον, ἐϛὶ ꙋ Ἰσογώνιον.

Πρότασις ϛ.

„ Ἐὰν Τριγώνȣ (αβγ) αἱ δύο Γωνίαι (α ꙋ γ) ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, ꙋ αἱ „ Πλευραὶ (αβ, βγ) αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας Γωνίας ὑποτείνȣσαι, ἴσαι ἀλλήλαις „ ἔσονται.

Νοείσθω δὶς τὸ Τρίγωνον κείμενον, τῇ γεμὴν θέσει ἀντεϛραμμένον, αβγ, ΓΒΑ. Τῆς οὖν Πλευρᾶς γα, ἐξισȣμένης τῇ Πλευρᾷ ΓΑ, ꙋ τῆς Γωνίας α τῇ Γ, ꙋ τῆς γ τῇ Α, ꙋ τὰ λοιπὰ πάντα ἴσα (7) ἔϛαι. Καὶ δὴ ꙋ ἡ Πλευρὰ αβ τῇ Πλευρᾷ ΓΒ, ἤτοι τῇ γβ. (ἡ αὐτὴ γάρ ἐϛιν) Ο. Ε. Δ. κ. 46.

Ἄλλως.

Εἰ μὴ γὰρ, ἔϛω ἑτέρα, οἷον ἡ αβ, μείζων τῆς αγ, ꙋ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς αβ, τῇ ἐλάσσονι αγ, ἴση (8) ἡ βδ, ꙋ ἐπεζεύχθω (9) ἡ δγ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐϛὶν ἡ δβ τῇ αγ (10), δύο δὴ αἱ δβ, βγ, δυσὶ ταῖς αγ, γβ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ Γωνία ἡ ὑπὸ δβγ, τῇ ὑπὸ αγβ (11) ἐϛὶν ἴση· Βάσις ἄρα ἡ δγ, Βάσει τῇ αβ (12) ἴση ἐϛί· ꙋ τὸ αγβ τῷ δβγ Τριγώνῳ ἴσον ἔϛαι, τῷ ἐλάσσονι τὸ μεῖζον· ὅπερ ἄτοπον. Ἆρα κτ. κ. 47.

(1) Κατασκ. (2) Ἐξ ὑποθ. (3) δ. Βιβ. α. (4) Ἀξ. γ. (5) δ. Βιβ. α. (6) Ἀξ. γ. (7) Σχόλ. τῆς δ'. (8) γ. Βιβ. α. (9) Αἴτ. α. (10) Ἐκ κατ. ꙋ ὑποθ. (11) Ἐξ ὑποθ. (12) δ. Βιβ. α.

Πόρισμα.

Τὸ ἄρα Ἰσογώνιον Τρίγωνον, ἐστὶ καὶ Ἰσόπλευρον.

Πρότασις Ζ.

„Ἐπὶ τῆς αὐτῆς Εὐθείας (αβ) δυσὶ ταῖς αὐταῖς Εὐθείαις (αγ, γβ) „ἄλλαι δύο Εὐθεῖαι (αβ, δβ) ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ οὐ συσταθήσονται πρὸς „ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ Σημείῳ (γ καὶ δ) ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη (τὰ κατὰ γ καὶ δ), τὰ „αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι (α καὶ β) ταῖς ἐξ ἀρχῆς Εὐθείαις.

κ. 48. Εἰ γὰρ, ἐπιζευχθείσης τῆς γδ (1) ἔσται ἡ ὑπὸ αγδ, ἴση τῇ ὑπὸ (2) αδγ. Μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ αδγ, τῆς ὑπὸ δγβ. (3) Πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ γδβ, μείζων τῆς ὑπὸ δγβ. Ἀλλὰ καὶ ἴση (4), ἴσων ὑποτιθεμένων τῶν βγ, βδ, ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς κτ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Η.

„Ἐὰν δύο Τρίγωνα (αβγ, δεζ) τὰς δύο Πλευρὰς, ταῖς δυσὶ Πλευραῖς „ἴσας ἔχῃ (τὰς αβ, αγ ταῖς δε, δζ) ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν „Βάσιν (βγ) τῇ Βάσει (εζ) ἴσην· καὶ τὴν Γωνίαν τῇ Γωνίᾳ ἴσην ἕξει (τὴν ὑπὸ „βαγ, τῇ ὑπὸ εδζ) τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων Εὐθειῶν περιεχομένην.

κ. 49. Ἐφαρμοσάσης γὰρ τῆς βγ ἐπὶ τὴν ἴσην (5) εζ, καὶ αἱ αβ, αγ ἐφαρμόσουσιν ἐπὶ τὰς εδ, δζ. Εἰ μὴ γὰρ, συσταθήσονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς Εὐθείας, δυσὶ ταῖς αὐταῖς Εὐθείαις, ἄλλαι δύο Εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ Σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι, ὅπερ (6) ἀδύνατον. Ἐφαρμόσουσιν ἄρα· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, ἐπὶ τὴν ὑπὸ εδζ ἐφαρμόσει, καὶ (7) ἴση αὐτῇ ἔσται. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Θ.

„Τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον Γωνίαν (βαγ) δίχα τεμεῖν.

κ. 50. Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς αβ τυχὸν Σημεῖον τὸ δ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς αγ τῇ αδ (8) ἴση ἡ αε. Καὶ ἐπεζεύχθω (9) ἡ δε. Καὶ συνεστάσθω ἐπὶ τῆς δε, Τρίγωνον (10) Ἰσόπλευρον τὸ δζε· καὶ ἐπεζεύχθω (11) ἡ δζ. Λέγω δὴ ὡς αὕτη τὴν ὑπὸ βαγ δίχα τεμεῖ.

---

(1) Αἴτ. α. (2) ε. Βιβ. α. (3) Ἀξ. α. (4) ε. Βιβ. α. (5) Ἀξ η. (6) ζ. Βιβ. α. (7) Ἀξ. ζ. (8) γ. Βιβ. α. (9) Αἴτ. α. (10) α. Βιβ. α. (11) Αἴτ. α.

Καὶ γὰρ δα, δζ ἴσαι ταῖς εα, εζ (1). ἡ δὲ Βάσις αζ κοινή· ἡ ἄρα ὑπὸ δαζ ἴση (2) τῇ ὑπὸ ζαε. Δίχα ἄρα (3) τέτμηται ἡ ὑπὸ βαγ. Ο. Ε. Π.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ἐκ τούτου δῆλον πῶς ἂν εἰς 4, ἢ 8, ἢ 16, ἢ κξ. ἴσας ἀλλήλαις ἡ δοθεῖσα Γωνία τέμνεσθαι ἔχοι· τῶν ἡμίσεων δηλονότι ἐφεξῆς ὑποδιχαζομένων.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Οὐδεὶς οὐδέπω καὶ νῦν οἷος ὤφθη μέθοδον ὑποθέσθαι, καθ' ἣν Κύκλῳ τε, καὶ Εὐθείᾳ χρωμένοις, εἴη ἂν τὴν δοθεῖσαν Γωνίαν εἰς ἴσας ὁσασδηποτοῦν ὑποτέμνειν. Ὁ γεμὴν Πάππος, καὶ ὁ Ἀρχιμήδης Γραμμάς τινας τῶν Καμπύλων, οἷον τὴν Τετραγωνίζουσαν, καὶ τὴν Σπειροειδῆ, εἰς τοῦτο συντελούσας εἰσήνεγκαν· ὧν ὁ πρῶτος καὶ Γωνίαν τετριχοτόμηκε Βιβλ. δ. Προτ. λα., τῇ Ὑπερβολῇ κεχρημένος, ὃ καὶ διὰ τῆς Παραβολῆς, ἢ καὶ διὰ τῆς Κογχοειδοῦς διανύσαι ῥᾴδιον.

Μηχανικῶς δὲ εἰς ὁσασδηποτοῦν ἴσας τὴν δοθεῖσαν Γωνίαν τεμεῖς, ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς (α) τῆς Γωνίας, ὡς ἀπὸ Κέντρου, Κύκλου τόξον ὑπὸ τῶν τῆς Γωνίας σκελῶν ἐναπολαμβανόμενον καταγράψῃς, καὶ τοῦτο εἰς ὁσαδηποτοῦν ἂν δόξῃ, μέρη ἀλλήλοις ἴσα διέλῃς· Οὕτω γὰρ ἂν αἱ ἀπὸ τοῦ Κέντρου α, διὰ τῶν κατὰ τὰς διαιρέσεις Σημείων ἐξιοῦσαι Εὐθεῖαι, εἰς μέρη ἰσάριθμά τε καὶ ἰσάλληλα, τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον Γωνίαν διαμερίσειαν. σχ. 51.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ι.

„Τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν πεπερασμένην (αβ) δίχα τεμεῖν.

Συνεστάθω ἐπ' αὐτῆς ἰσόπλευρον Τρίγωνον (4) τὸ αγβ. (ὑπουργήσειε δ' ἂν οὐδὲν ἧττον καὶ τὸ Ἰσοσκελές) δίχα τε ἡ πρὸς τῷ γ Γωνία τετμήσθω (5) τῇ Εὐθείᾳ γδ. Φημὶ δὴ ὡς τῇ αὐτῇ, καὶ ἡ αβ κατὰ τὸ δ διχασθήσεται. σχ. 52.

Ἴσων γὰρ οὐσῶν ἀλλήλαις τῶν αγ, γβ, κοινῆς δὲ τῆς γδ, ἴσης δὲ τῆς ὑπὸ αγδ, τῇ ὑπὸ δγβ (6), καὶ αἱ Βάσεις αδ, βδ ἴσαι (7) ἀλλήλαις ἔσονται. Δίχα ἄρα τέτμηται (8) ἡ δοθεῖσα αβ. Ο. Ε. Π.

Ἀρκέσει δὲ κατὰ τὰς Πράξεις, Κέντροις τοῖς α καὶ β, Κύκλους δύο καταγράψαι, τέμνοντας ἀλλήλους κατὰ ε, καὶ ζ, καὶ τὴν (9) εζ ἐπιζευγνύναι. σχ. 53.

---

(1) Κατασ. (2) η. Βιβ. α. (3) Ὅρ. μ. (4) α. Βιβ. α. (5) θ. Βιβ. α. (6) Ἐκ κατασ. (7) δ. Βιβ. α. (8) Ὅρ. μ. (9) Αἴτ. α.

Πρότασις ΙΑ.

„Τῇ δοθείσῃ Εὐθείᾳ (αβ) ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος Σημείου (γ), πρὸς „ὀρθὰς Γωνίας εὐθεῖαν Γραμμὴν ἀγαγεῖν.

κ. 54. Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς αβ τυχὸν Σημεῖον τὸ δ, καὶ κείσθω ἴση τῇ γδ ἡ γε (1), καὶ ἐπὶ τῆς δε Τρίγωνον ἰσόπλευρον συνεστάθω (2) τὸ δζε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζγ (3)· Φημὶ δὴ ταύτην πρὸς ὀρθὰς ἦχθαι.

Ἴσαι γὰρ (4) ἡ μὲν δζ τῇ ζε, ἡ δὲ γδ τῇ γε, ἡ δὲ γζ κοινή. Ἄρ' οὖν (5) καὶ ἡ ὑπὸ δγζ, ἴση τῇ ὑπὸ ζγε· εἰσὶ δὲ ἐφεξῆς. Ἄρα (6) ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα. Ο. Ε. Π.

Ἐπὶ ταῖς κατὰ ταύτην, καὶ τὴν ἐφεξῆς Πράξεσιν ὁ Γνώμων ἡμῖν ὑπουργήσει.

Πρότασις ΙΒ.

„Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν ἄπειρον (αβ), ἀπὸ τοῦ δοθέντος Σημείου (γ) „ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν Γραμμὴν ἀγαγεῖν.

κ. 55. Κέντρῳ μὲν τῷ γ, Κύκλος γεγράφθω, τέμνων τὴν δοθεῖσαν κατὰ τὰ η καὶ ε Σημεῖα, ὁ εζη· καὶ δίχα τετμήσθω ἡ εη κατὰ τὸ θ· (7) καὶ ἐπεζεύχθω (8) ἡ γθ· Φημὶ δὴ ταύτην εἶναι τὴν Ζητουμένην.

Ἐπιζευχθεισῶν γὰρ καὶ τῶν ηγ, εγ, ἴσων τε οὐσῶν (9), αἱ μὲν ηθ, καὶ εθ ἴσαι ἀλλήλαις (10) εἰσίν, ἡ δὲ γθ κοινή. Ἄρ' οὖν καὶ ἡ ὑπὸ ηθγ ἴση ἔσται (11) τῇ ὑπὸ εθγ· ταύτῃ δέ τοι καὶ Ὀρθαί. (12) Καὶ Κάθετος ἄρα ἡ θγ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος Σημείου γ, κτ. Ο. Ε. Π.

Πρότασις ΙΓ.

„Ὡς ἂν Εὐθεῖα (ἡ αβ) ἐπ' Εὐθεῖαν (τὴν γδ) σταθεῖσα, Γωνίας ποιῇ, „ἤτοι δύο Ὀρθάς, ἢ δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει.

κ. 56. Εἰ μὲν γὰρ ἴση ἡ ὑπὸ γβα τῇ ὑπὸ αβδ, δύο Ὀρθαὶ (13) εἰσίν. Εἰ δ' οὔ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ β πρὸς ὀρθὰς (14) ἡ βε. Αἱ ἄρα ὑπὸ γβε, καὶ εβδ Ὀρθαὶ εἰσίν. Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ γβε ἴση δυσὶ ταῖς ὑπὸ γβα, καὶ ὑπὸ αβε (15)· κοινῆς προστεθείσης τῆς ὑπὸ εβδ, ἔσονται (16) αἱ δύο ὑπὸ γβε, καὶ ὑπὸ εβδ, ἴσαι ταῖς τρισὶν ὑπὸ γβα, αβε, εβδ. Πάλιν ἐπεὶ ἡ ὑπὸ δβα, δυσὶ ταῖς ὑπὸ δβε,

(1) γ. Βιβ. α. (2) α. Βιβ. α. (3) Αἴτ. α. (4) Ἐκ Κατ. (5) η. Βιβ. α. (6) Ὅρ. ιδ. (7) ι. Βιβ. α. (8) Αἴτ. α. (9) Ὅρ. ιη. (10) Ἐκ Κατ. (11) η. Βιβ. α. (12) Ὅρ. ιδ. (13) Ὅρ. ιδ. (14) ια. Βιβ. α. (15) Ἀξ. θ. (16) Ἀξ. β.

εβα ἴση ἐςί (1)· κοινῆς προςεθείσης τῆς ὑπὸ αβγ, ἔσονται αἱ ὑπὸ δβα, αβγ, τρισὶ ταῖς ὑπὸ δβε, εβα, αβγ ἴσαι. (2) Αἱ δύο ἄρα ὑπὸ δβα, αβγ, δυσὶ ταῖς ὑπὸ γβε, εβδ Ὀρθαῖς προδειχθείσαις, ἴσαι (3) εἰσίν. Ο. Ε. Δ.

Πορίσματα.

Ὡς εἴγε Εὐθεῖαι πλείες μιᾶς, ἐπὶ τὴν αὐτὴν Εὐθεῖαν, κατὰ τὸ αὐτὸ Σημεῖον συςαθῶσι, παραπλησίως ἐπέςαι δεῖξαι, ὅτι Γωνίας ποιῶσι δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσας. Α'.

Καὶ ἐὰν Εὐθεῖαι δύο αβ, ϗ γδ, ἀλλήλας τέμνωσι κατὰ τὸ ε, Γωνίας ποιήσεσι τὰς πάσας τέτταρσιν Ὀρθαῖς ἴσας. Δῆλον δὲ ἐκ τῆς Προτάσεως. Β'.

Καὶ αἱ περὶ τὸ αὐτὸ δὲ Σημεῖον Γωνίαι, αἱ πᾶσαι τέτταρας Ὀρθὰς συγκροτῆσιν· ὅπερ φανερὸν ἐκ τῆ δευτέρε Πορίσματος. Γ'. κ. 57.

Πρότασις ΙΔ.

„Ἐὰν πρός τινι Εὐθείᾳ (γδ) ϗ τῷ πρὸς αὐτῇ Σημείῳ (δ), δύο Εὐθεῖαι „(αδ, βδ) μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς Γωνίας (αδγ, βδγ) „δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ Εὐθεῖαι „(αδ, βδ).

Εἰ μὴ γάρ, ἔςωσαν ἐπ' εὐθείας, αἱ αδ, εδ· ἄρα (4) αἱ ὑπὸ αδγ, ϗ γδε δύο Ὀρθὰς συναποτελῆσιν· Ὅπερ (5) ἄτοπον· ὑπετέθη γὰρ τὰς ὑπὸ αδγ, ϗ βδγ δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσας εἶναι. κ. 58.

Πόρισμα.

Ἐντεῦθεν ἐπὶ τῶν Κατοπτρικῶν δείκνυται, τὴν τῆ Φωτὸς Ἀκτῖνα ἐν τῷ ἀνακλᾶσθαι, διὰ τῆς κατὰ τὴν ἀντανάκλασιν Γωνίας, ἥπερ ἴση ἐς ἀεὶ ἡ Γωνία τῆς ἐπιπτώσεως, ὁδὸν φέρεσθαι ἁπασῶν τὴν συντομωτάτην. Τῶν γὰρ ὑπὸ βεδ, αεζ συνεξισημένων ἀλλήλαις, αἱ Εὐθεῖαι αε ϗ εβ ἅμα ληφθεῖσαι, Εὐθειῶν τῶν τυχεσῶν, οἷον τῶν αζ ϗ ζβ ἅμα ληφθεισῶν, εἰσὶν ἐλάσσονες. Ἀπὸ γὰρ τῆ Σημείε β, ἤχθω Κάθετος (6) ἡ βγ, ϗ γενέσθωσαν αἱ βδ, γδ ἴσαι (7) ἀλλήλαις· ἤχθωσαν δὲ ἐπιζευγνύμεναι (8) καὶ εγ, ζγ. Ἐπὶ μὲν οὖν τῶν Τριγώνων βεδ, ϗ γεδ, τῆς μὲν δε κοινῆς ἔσης, τῶν δὲ βδ, ϗ δγ (9) ἴσων ἀλλήλαις ἐσῶν, τῆςτε ὑπὸ βδε, τῇ ὑπὸ γδε (10) συνεξισε- κ. 59.

(1) Ἀξ. θ. (2) Ἀξ. β. (3) Ἀξ. α. (4) ιγ. Βιβ. α. (5) κα. τῆ θ. Ἀξιώμ. (6) ιβ. Βιβ. α. (7) γ. Βιβ. α. (8) Αἴτ. α. (9) Ἐκ Κατ. (10) Ὀρ. ιδ.

μένης, ϗ τὰ λοιπὰ πάντα (1) ἴσα ἔςαι. Ἔςαι δὲ ἡ βε, ἴση τῇ γε, ϗ ἡ ὑπὸ βεδ, ἴση τῇ ὑπὸ δεγ. Ἐὰν οὖν ταῖς ἴσαις βε, γε, κοινὴ προςεθῇ ἡ εα, ἔσονται (2) αἱ βε καὶ εα ἅμα ληφθεῖσαι, ἴσαι ταῖς γε καὶ εα ἅμα ληφθείσαις. Ἐπεὶ δὲ ϗ αἱ ὑπὸ βεδ, αεζ ἴσαι (3) ἀλλήλαις εἰσὶν, ἡ δὲ ὑπὸ βεδ φθᾶσα ἐδείχθη ἴση τῇ ὑπὸ δεγ· ἄρα (4) ϗ ἡ ὑπὸ αεζ, ἴση ἔςαι τῇ ὑπὸ δεγ. Κοινῆ δὲ προςεθείσης τῆς ὑπὸ δεα, δύο αἱ ὑπὸ δεα ϗ δεγ, δυσὶ ταῖς ὑπὸ δεα ϗ αεζ (5), ἔσονται ἴσαι. Ἀλλὰ μὴν αἱ ὑπὸ δεα, ϗ αεζ δυσὶν (6) Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ἄρα ϗ αἱ ὑπὸ δεγ ϗ δεα, δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. Καὶ ἑπομένως (διὰ ταύτην τὴν Πρότασιν) αἱ Εὐθεῖαι αε, εγ, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις, τετέςι Εὐθεῖαν μίαν συνιςῶσι τὴν γα, ἥτις ἴση ἐδείχθη δυσὶ ταῖς Εὐθείαις αε ϗ εβ ἅμα ληφθείσαις.

Ὡσαύτως ἐπὶ τῶν Τριγώνων βδζ, γδζ ῥᾴδιον δεῖξαι, ἴσας ἀλλήλαις εἶναι τὰς Εὐθείας βζ, ϗ γζ· ϗ προςεθείσης κοινῆς τῆς αζ, αἱ δύο βζ, αζ ἅμα, ἴσαι ἔσονται δυσὶ ταῖς γζ, αζ ἅμα. Ἀλλὰ μὴν ἡ γα, (ἤτοι αἱ δύο αε, εβ ἅμα) ἐλάσσων ἐςὶ τῶν αζ, ϗ γζ ἅμα (7) (ἤτοι τῶν αζ, ζβ ἅμα). Αἱ ἄρα Εὐθεῖαι αε, εβ, ἅμα ληφθεῖσαι, ἐλάσσονές εἰσι τῶν δύο Εὐθειῶν αζ, ζβ ἅμα ληφθεισῶν. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΙΕ.

,,Ἐὰν δύο Εὐθεῖαι (αβ, δγ) τέμνωσιν ἀλλήλας (κατά τι Σημεῖον τὸ ε), ,,τὰς κατὰ κορυφὴν (ε) Γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιήσεσι.

σχ. 60. Τετέςι τὴν ὑπὸ αεγ τῇ ὑπὸ δεβ. καὶ τὴν ὑπὸ αεδ τῇ ὑπὸ βεγ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ αε ἐπ' Εὐθεῖαν τὴν δγ ἐφέςηκεν, ἔσονται (8) αἱ ὑπὸ αεδ, ϗ αεγ δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι. Πάλιν ἐπεὶ ἡ εγ, ἐπ' Εὐθεῖαν τὴν αβ ἐφέςηκεν, ἔσονται (9) αἱ ὑπὸ αεγ, ϗ βεγ δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι. Δύο ἄρα αἱ ὑπὸ αεδ, ϗ αεγ, δυσὶ ταῖς ὑπὸ βεγ, ϗ αεγ ἴσαι εἰσί. Καὶ ἀφαιρεθείσης κοινῆς τῆς ὑπὸ αεγ, ἔςαι (10) ἡ ὑπὸ αεδ ἴση τῇ ὑπὸ βεγ. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ϗ ἡ ὑπὸ αεγ ἴση οὖσα τῇ ὑπὸ βεδ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

Ἐντεῦθεν οἱ τοῖς ἐλεφαντίνοις, ϗ διὰ τοῦτο ἐλαςικοῖς Σφαιριδίοις ἐν ταῖς Παιδιαῖς χρώμενοι, τὴν τοῦ ἀντιπαίζοντος Σφαῖραν ἀντικρέεσθαι παιδευέσθωσαν.

---

(1) δ. Βιβ. α. (2) Ἀξ. β. (3) Καθ' ὑπόθ. (4) Ἀξ. α. (5) Ἀξ. β. (6) ιγ. Βιβ. α. (7) Ὁρ. δ. (8) ιγ. Βιβ. α. (9) Διὰ τὴν αὐτ. (10) Ἀξ. γ.

Ἔξω τῶν Σφαιριδίων ᾧ μὲν ἀποκρυςέον τὸ β, ᾧ δὲ τὸ α. Πλευρὰ δὲ εὐθύγραμμος ἡ γδ. Εὐθεῖα δὲ ἡ βε πρὸς ὀρθὰς ἐφιςαμένη (1) ἐπὶ τὴν γδ. Καὶ κείσθω ἡ δε ἴση τῇ δβ (2), καὶ ἐπεζεύχθω (3) ἡ αε, τέμνουσα τὴν γδ κατὰ τὸ ζ· ἐπεζεύχθω δὲ καὶ ἡ βζ. Ἐὰν οὖν ἡ Σφαῖρα κατὰ τὴν Εὐθεῖαν αζε προσωθείη, ὡς ἂν προσβάλῃ τῷ Σημείῳ ζ, ἀνακάμψασα ὡς τὸ β σπεύσεται. Ἐπὶ μὲν γὰρ τῶν Τριγώνων βζδ, καὶ εζδ, ἡ μὲν ζδ Πλευρὰ κοινή, ἡ δὲ δβ, ἴση τῇ δε (4), ἥτε ὑπὸ βδζ, ἴση τῇ ὑπὸ εδζ (5). Τὰ ἄρα Τρίγωνα (6) ἴσα ἀλλήλοις· καὶ ἔςαι ἄρα ἡ ὑπὸ βζδ, ἴση τῇ ὑπὸ δζε. τοιγαροῦν καὶ (7) τῇ κατὰ κορυφὴν ὑπὸ αζγ ἴση. Ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν ὑπὸ αζγ Γωνία ἐςὶν ἡ κατ' ἐπίπτωσιν, ἡ δὲ ὑπὸ βζδ Γωνία ἡ κατ' ἀντανάκλασιν, αἱ δὲ κατὰ τὰς προσβολὰς τῶν ἐλαςικῶν Σωμάτων ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· εὔδηλον ἄρα ὅτι τὴν Σφαῖραν α, ἐλαςικὴν ὑποτιθεμένην, καὶ ἐπὶ τὸ ε διϊθυνομένην, μετὰ τὴν ἀντανάκλασιν ἡ ἀποκρουσθησομένη Σφαῖρα β ἐκδέξεται. Ο. Ε. Δ. σχ. 61.

Πρότασις Ις.

„Παντὸς Τριγώνου (αβγ) μιᾶς τῶν Πλευρῶν (βγ) ἐκβληθείσης (ἐπὶ „τὸ δ) ἡ ἐκτὸς Γωνία (ὑπὸ αγδ) ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον (ὑπὸ γαβ, „καὶ αβγ) μείζων ἐςί.

Τετμήσθω ἡ αγ δίχα (8) κατὰ τὸ ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ βε (9) ἐκβεβλήσθω (10) κατὰ τὸ ζ, καὶ κείσθω τῇ βε ἴση (11) ἡ εζ, καὶ ἐπεζεύχθω (12) ἡ ζγ, καὶ διήχθω ἡ αγ ἐπὶ τὸ η (13). σχ. 62.

Ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν αε, ἴση τῇ εγ (14), ἡ δὲ βε, ἴση τῇ εζ (15), ἡ δὲ ὑπὸ αεβ, ἴση (16) τῇ κατὰ κορυφὴν ὑπὸ ζεγ, ἔςαι καὶ ἡ ὑπὸ εγζ (17) ἴση τῇ ὑπὸ εαβ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ αγδ μείζων (18) τῆς ὑπὸ εγζ. Ἄρα μείζων ἔςαι (19) καὶ τῆς ὑπὸ γαβ. Ἡ ἄρα ἐκτὸς (20) οὖσα ὑπὸ αγδ, μείζων τῆς ἑτέρας τῶν ἀπεναντίων, ἤτοι τῆς ὑπὸ γαβ.

Παραπλησίως καὶ τὴν βγ δίχα τεμὼν, δείξεις τὴν ὑπὸ βγη, ἤτοι τὴν ἴσην αὐτῇ (21) ὑπὸ αγδ, μείζονα καὶ τῆς ὑπὸ αβγ. Ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα. Ἀφ' ἑνὸς Σημείου πρὸς τὴν αὐτὴν Εὐθεῖαν, Εὐθείας ἀγαγεῖν πλείονας δυοῖν ἀδύνατον (Ις. καὶ Ε'. Βιβλ. α.) ἴσας ἀλλήλαις.

---

(1) ιβ. Βιβλ. α. (2) γ. Βιβ. α. (3) Ἀξ. α. (4) Ἐκ κατ. (5) Ἐκ. κατ. (6) δ. Βιβ. α. (7) ιε. Βιβ. α. (8) ι. Βιβ. α. (9) Αἰτ. α. (10) Αἰτ. β. (11) γ. Βιβ. α. (12) Αἰτ. α. (13) Αἰτ. β. (14) Ἐκ κατ. (15) Ἐκ κατ. (16) ιε. Βιβ. α. (17) δ. Βιβ. α. (18) Ἀξ. θ. (19) Ἀξ. α. (20) Ὁρ. λθ. (21) ιε. Βιβ. α.

Πρότασις ΙΖ.

„Παντὸς Τριγώνȣ, αἱ δύο Γωνίαι, δύο Ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ „μεταλαμβανόμεναι.

σχ. 63. Ἐκβεβλήσθω ἡ βγ ἐπὶ τὸ δ. Καὶ ἐπεὶ Τριγώνȣ τȣ͂ αβγ ἐκτὸς Γωνία ἡ ὑπὸ αγδ, μείζων ἐςὶ τῆς ἐντὸς (1) καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑπὸ αβγ. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ αγβ, καὶ ἔσονται αἱ ὑπὸ αγδ, καὶ αγβ, μείζονες τῶν ὑπὸ αβγ, βγα. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ αγδ, αγβ, δυσὶν Ὀρθαῖς (2) ἴσαι εἰσίν. Αἱ ἄρα ὑπὸ αβγ, βγα, δύο Ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσίν. Ὁμοίως δὲ ὁποιαιȣ͂ν δύο τῶν ἐπὶ τȣ͂ Τριγώνȣ, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, ἴσαι δείκνυνται. Ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΙΗ.

„Παντὸς Τριγώνȣ, ἡ μείζων Πλευρὰ (αγ) τὴν μείζονα Γωνίαν (β) ὑ„ποτείνει, καὶ ἡ ἐλάσσων (αβ) τὴν ἐλάσσονα (γ).

σχ. 64. Ἀπὸ τῆς μείζονος αγ, ἀπειλήφθω (3) ἡ αδ ἴση τῇ ἐλάσσονι αβ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ (4) βδ· ἔςαι δὲ ἡ ὑπὸ αβδ, ἴση (5) τῇ ὑπὸ αδβ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ αδβ, μείζων (6) τῆς ὑπὸ αγβ. Ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αβδ (7) μείζων τῆς ὑπὸ αγβ. Πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ (ἤτοι ἡ β) μείζων τῆς ὑπὸ αγβ (ἤτοι τῆς γ).

Ἄλλως.

σχ. 65. Οὐ γάρ ȣ̉͂τε ἴσαι ἀλλήλαις, αἱ β, καὶ γ. (ἄλλως ἦν ἂν καὶ ἡ αβ (8) ἴση τῇ αγ) ὅπερ ἐςὶ κατὰ τῆς ὑποθέσεως. οὐδὲ μὲν οὖν ἡ β, ἐλάσσων τῆς γ. Εἰ γὰρ, κείσθω ἡ ὑπὸ δγβ, ἴση τῇ β· καὶ ἔςαι ἡ βδ ἴση τῇ δγ (9). Καὶ κοινῆς προσεθείσης τῆς δα, ἔςαι ἡ βα, ἴση δυσὶ ταῖς (10) γδ, δα. Ἀλλ' ἡ βα ἐλάσσων (11) τῆς αγ. Ἄρα αἱ γδ, δα ἅμα ληφθεῖσαι ἐλάσσονές εἰσι τῆς (12) αγ. Ἀλλὰ τȣ͂το κατὰ τȣ͂ ὁρισμȣ͂ φέρεται (13) τῆς Εὐθείας, ἥτις ἐςὶν ἡ ἐλαχίςη τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχȣσῶν. Οὔτ' ἄρα ἴση ἡ β τῇ γ, οὐδὲ μὲν οὖν ἐλάσσων ἡ β τῆς γ. μείζων ἄρα. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα. Τȣ͂ ἄρα Σκαληνοῦ, αἱ τρεῖς Γωνίαι ἄνισοι.

Πρότασις ΙΘ.

„Παντὸς Τριγώνȣ ὑπὸ τὴν μείζονα Γωνίαν (β) ἡ μείζων Πλευρὰ (αγ) „ὑποτείνει.

---

(1) ις. Βιβ. α. (2) ιγ. Βιβ. α. (3) γ. Βιβ. α. (4) Αἴτ. α. (5) ε. Βιβ. α. (6) ις. Βιβ. α. (7) Ἀξ. α. (8) ς. Βιβ. α. (9) ς. Βιβ. α. (10) Ἀξ. β. (11) Ἐξ ὑποθ. (12) Ἀξ. α. (13) Ὁρ. δ.

Εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴση ἐςὶν ἡ αγ τῇ αβ, ἢ ἐλάσσων. Ἀλλ' εἰ τὸ πρῶτον, ἔςαι (1) ἄρα καὶ ἡ β Γωνία ἴση τῇ γ, ὅπερ ὐκ ἔςι. (2) Εἰ δὲ τὸ δεύτερον, ἐλάσσων ἄρα ἡ Γωνία (3) β τῆς γ, ὅπερ ὐκ ἔςι. (4) Εἴπερ ὐδ' ἴση, ὐδ' ἐλάσσων, ἔςιν ἄρα μείζων ἡ αγ. κτ. Ο. Ε. Δ. σχ. 66.

Πόρισμα. Καὶ μείζων ἄρα ἐπὶ τῶν ὀρθογωνίων, καὶ ἀμβλυγωνίων Τριγώνων, ἡ τὴν ὀρθὴν, ἢ ἀμβλεῖαν Γωνίαν ὑποτείνουσα, ἀεὶ τῶν λοιπῶν.

Πρότασις Κ.

„Παντὸς Τριγώνυ αἱ δύο Πλευραὶ, τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντη „μεταλαμβανόμεναι.

Ἔςι δὲ τῷ Ἀρχιμήδει Ἀξίωμα ἄντικρυς, ὅτι ἐκ τῦ κατ' αὐτὸν ὁρισμῦ τῆς Εὐθείας (5) ἀμέσως ἐπιφέρεται. Δείξειας δ' ἂν αὐτὴν σὺν Εὐκλείδῃ οὕτω. σχ. 67.

Διήχθω ἡ βα ἐπὶ τὸ δ Σημεῖον, ὥςε ἴσην εἶναι τὴν αδ τῇ αγ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δγ. (6) Καὶ ἔςαι ἡ ὑπὸ αδγ ἴση τῇ ὑπὸ (7) αγδ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ βγδ μείζων (8) τῆς ὑπὸ αγδ, ἄρα μείζων (9) καὶ τῆς ὑπὸ αδγ· μείζων ἄρα (10) καὶ ἡ βδ Πλευρὰ τῆς βγ. Ἀλλ' ἡ βδ, ἴση ταῖς βα, αγ, (11) μείζονες ἄρα αἱ βα, αγ, τῆς βγ. Ὁμοίως δείξομεν ὅτι καὶ αἱ αβ, βγ, μείζονές εἰσι τῆς αγ· αἱ δὲ βγ, γα, τῆς αβ. Ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα. Παντὸς τετραπλεύρου τῶν δύο προσεχῶς συνεσῶν Πλευρῶν, ἀεὶ ἐλάσσων ἡ Διαγώνιος.

Πρότασις ΚΑ.

„Ἐὰν Τριγώνυ, ἐπὶ μιᾶς τῶν Πλευρῶν (βγ), ἀπὸ τῶν περάτων (τῶν „βγ), δύο Εὐθεῖαι (βδ, γδ) ἐντὸς συςαθῶσιν, αἱ συςαθεῖσαι τῶν λοι„πῶν τῦ Τριγώνυ δύο Πλευρῶν (τῶν αβ, αγ) ἐλάσσονες μὲν ἔσονται, „μείζονα δὲ Γωνίαν περιέξυσι (τὴν ὑπὸ βδγ, τῆς ὑπὸ βαγ).

Διήχθω ἡ βδ ἐπὶ τὸ ε. Καὶ δὴ ἐπὶ τῦ αβε Τριγώνυ, αἱ αβ, καὶ αε (12) μείζονές εἰσι τῆς βε. Κοινὴ προσκείσθω ἡ εγ. Αἱ ἄρα βα, αγ, τῶν βε, εγ μείζονες εἰσί. Πάλιν ἐπὶ τῦ Τριγώνυ γεδ, αἱ γε, εδ, μείζονες (13) τῆς γδ. Κοινὴ προσκείσθω ἡ δβ, καὶ ἔσονται γε, εβ, μείζονες τῶν γδ, δβ. Ἐκείνων δὲ μείζονες ἐδείχθησαν αἱ βα, αγ. Αἱ ἄρα βα, αγ πολλῷ μείζονες ἔσονται τῶν γδ, δβ. Ο. Η. τὸ Α'. σχ. 68.

Ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ βδγ μείζων τῆς ὑπὸ δεγ (14), ἡ δὲ ὑπὸ δεγ μείζων

---

(1) ε. Βιβ. α. (2) Διὰ τὴν ὑπόθ. (3) ιη. Βιβ. α. (4) Διὰ τὴν ὑπόθ. (5) Ὁρ. δ. (6) Αἴτ. α. (7) ε. Βιβ. α. (8) Ἀξ. θ. (9) Ἀξ. α. (10) ιθ. Βιβ. α. (11) Ἀξ. θ. (12) κ. Βιβ. α. (13) κ. Βιβ. α. (14) ις. Βιβ. α. (15) ις. Βιβ. α.

τῆς ὑπὸ βαε. (15) Α῎ρα ἡ ὑπὸ βδγ πολλῷ μείζων τῆς ὑπὸ βαε, ἤτοι τῆς ὑπὸ βαγ. Ο. Η. τὸ Β′.

Πρότασις ΚΒ.

„Ε᾽κ τριῶν Εὐθειῶν (α, β, γ), ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι „πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, Τρίγωνον συςήσασθαι.

σ. 69. Ε᾽κκείσθω τις Εὐθεῖα ἡ δε πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ δ, ἄπειρος δὲ κατὰ τὸ ε· κ) κείσθω (1) τῇ μὲν α ἴση ἡ δζ, τῇ δὲ β ἴση ἡ ζη, τῇ δὲ γ ἴση ἡ ηθ. Καὶ Κέντρῳ μὲν τῷ ζ, Διαςήματι δὲ τῷ ζδ (2), Κύκλος γεγράφθω ὁ δηλ. Καὶ Κέντρῳ πάλιν τῷ η, Διαςήματι δὲ τῷ ηθ, Κύκλος γεγράφθω ὁ κλθ, κ) ἐπεζεύχθωσαν αἱ κζ, κη. Λέγω ὅτι ἐκ τριῶν Εὐθειῶν τῶν ἴσων ταῖς α, β, γ Τρίγωνον συνέςηκε τὸ κζη.

Η῾ γὰρ κζ ἴση (3) τῇ ζδ· ἴση ἄρα (4) τῇ α. Η῾ δὲ ηζ ἴση (5) τῇ β· ἡ δὲ ηκ ἴση (6) τῇ ηθ· ἴση ἄρα (7) τῇ γ. Ε᾽κ τριῶν ἄρα, κτ. Ο. Ε. Π.

Πρότασις ΚΓ.

„Πρὸς τῇ δοθείσῃ Εὐθείᾳ (αβ), κ) τῷ πρὸς αὐτῇ Σημείῳ (α), τῇ „δοθείσῃ Γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ (δγε), ἴσην Γωνίαν εὐθύγραμμον συςήσασθαι.

σ. 70. Εἰλήφθω ἐπὶ τῶν Πλευρῶν τῆς δοθείσης Γωνίας, τυχόντα Σημεῖα τὰ δ, ε, κ) ἐπεζεύχθω Εὐθεῖα ἡ δε. (8) Καὶ ἐκ τριῶν Εὐθειῶν, ἴσων τρισὶ ταῖς γδ, δε, γε, Τρίγωνον συνεςάσθω (9) τὸ αζη, ὥςε ἴσην εἶναι τὴν μὲν γδ τῇ αζ, τὴν δὲ γε τῇ αη, κ) ἔτι τὴν δε τῇ ζη. Τῶν τοίνυν τριῶν ταῖς τρισὶ Πλευραῖς ἐπὶ τῶν Τριγώνων, ἑτέρας τῇ ἑτέρᾳ ἴσων ὄσῶν (10), εὔδηλον ὅτι κ) ἡ ὑπὸ ζαη, ἴση (11) ἐςὶ τῇ ὑπὸ δγε. Ο. Ε. Π.

Πόρισμα Α.

σ. 71. Ε᾽ντεῦθεν κ) Γραμμὴν ἀπρόσβατον τὴν αβ, καταμετρεῖν ῥᾴδιον. Α᾽πὸ γὰρ τȣ͂ τυχόντος Σημείȣ γ παρατετηρήσθω Γωνία ἡ ὑπὸ αγβ, κ) καταμετρηθήτωσαν αἱ Εὐθεῖαι αγ, κ) βγ. Ε᾽πὶ δὲ τȣ͂ τυχόντος ἐπιπέδȣ, ȣ῟πέρ ἐςιν ἐπιβῆναι, πρὸς τῷ Σημείῳ ζ τῷ ἐπὶ τῆς ἀπείρȣ Εὐθείας εζ, συνεςάσθω Γωνία ἴση (12) τῇ ὑπὸ αγβ ἡ ὑπὸ δζε· κ) ληφθήτωσαν αἱ ζη,

---

(1) γ. Βιβ. α. (2) Αἴτ. γ. (3) Ο῾ρ. ιη. (4) Α᾽ξ. α. (5) Ε᾽κ Κατασ. (6) Ο῾ρ. ιη. (7) Α᾽ξ. α. (8) Αἴτ. α. (9) κβ. Βιβ. α. (10) Ε᾽κ κατ. (11) η. Βιβ. α. (12) κγ. Βιβ. α.

ϗ ζθ (1) ἴσαι ταῖς γα, γβ, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ ἐπεζεύχθω (2) ἡ ηθ. Ἡ δὲ ἔσται πάντως ἴση τῇ ἀπροσβάτῳ Εὐθείᾳ αβ.

Ἐπὶ γὰρ τῶν Τριγώνων αγβ, ηζθ, αἱ αγ, γβ Πλευραὶ ἴσαι (3) εἰσὶ ταῖς ηζ, ζθ, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ αγβ, ἴση τῇ (4) ὑπὸ ηζθ· ἔσται ἄρα (5) ϗ Βάσις ἡ αβ, ἴση Βάσει τῇ ηθ.

Πόρισμα Β.

Ἢ ὡς τῷ Θάλητι μεμεθόδευται. Ἔστω Γραμμὴ ἀπρόσιτος ἡ αδ, ἐφ' κ. 72.
ἣν πρὸς τῷ κατὰ τὸ πέρας αὐτῆς Σημείῳ α (6), ἤχθω Κάθετος ἡ αγ, ϗ εἰλήφθω Γωνία ἡ ὑπὸ αγδ, ϗ ταύτῃ ἐπὶ θάτερα τῆς Γραμμῆς αγ, ἴση (7) συνεστάτω ἡ ὑπὸ αγβ, ϗ διήχθω ἡ αβ (8) ἐπὶ τὸ β· ϗ ἔσται πάντως ἡ αβ προσβάσιμος τῇ αδ ἀπροσβάτῳ ἴση. Ἐπὶ γὰρ τῶν Τριγώνων αβγ, αδγ, ἡ μὲν αγ ἐστὶ κοινή, αἱ δὲ ὑπὸ δαγ, ϗ βαγ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν (9), ἥτε ὑπὸ δγα ἴση τῇ ὑπὸ αγβ (10). Ἄρα ϗ ἡ αβ Πλευρὰ ἴση (11) τῇ αδ.

Σχόλιον.

Χαριζομένους τοῖς Πρωτοπείροις, ἔδοξέ τινα εἰς πρᾶξιν οὐ μικρὸν συντελοῦντα περὶ τῶν Γωνιῶν ὑποθέσθαι.

Γωνίας μέτρον ἐστὶ, Κύκλου τοῦ λζβλ, τοῦ Κέντρῳ α, τῇ κορυφῇ τῆς Γω- κ. 73.
νίας καταγραφομένου ἡ Περιφέρεια, φερ' εἰπεῖν βγ, ἡ ὑπὸ τῶν σκελῶν τῆς Γωνίας αη, αθ ἐναπολαμβανομένη· ὅπερ ἐκ τῆς ἐσχάτης τοῦ ϛ'. Βιβλίου Προτάσεως ἔσται κατάδηλον.

Ὁπόσαι τοίνυν αἱ τῆς Περιφερείας βγ μοῖραι, τοσούτων εἶναι μοιρῶν εἰρήσεται ϗ ἡ ὑπὸ θαη Γωνία. Ἐπεὶ δὲ τὴν ὀρθὴν Γωνίαν ὑπὸ βαζ, τῆς ὅλης Περιφερείας καταμετρεῖ τὸ τεταρτημόριον βζ, τὸ μοίρας τὰς πάσας 90 περιέχειν ὑποτιθέμενον, ταύτητοι πᾶσα ὀρθὴ Γωνία μοιρῶν εἶναι λέγεται 90. Ὁμοίως, ἐπεὶ τὰς δύο Ὀρθὰς τήν τε ὑπὸ βαζ, ϗ τὴν ὑπὸ ζαλ, καταμετρεῖ ἡ Ἡμιπεριφέρεια βζλ, ἡ εἰς 180 μοίρας διατετμῆσθαι ὑποτιθεμένη. Ὀρθὰς δὲ τέσσαρας καταμετρεῖ ἡ ὅλη Περιφέρεια ἡ εἰς μοίρας 360 διανεμομένη· διάτοι τοῦτο αἱ μὲν δύο Ὀρθαὶ μοιρῶν εἶναι λέγονται 180, αἱ δὲ τέτταρες μοιρ. 360. Τούτων οὕτω προσεσημειωμένων πράξεις ἐπὶ Γωνιῶν συνίστανται αἱ ἐφεξῆς.

---

(1) γ. Βιβ. α. (2) Αἰτ. α. (3) Ἐκ κατ. (4) Ἐκ κατ. (5) δ. Βιβ. α. (6) ια. Βιβ. α. (7) κγ. Βιβ. α. (8) Αἰτ. β. (9) Ἀξ. ι. (10) Ἐκ Κατ. (11) Σχ. δ. Βιβ. α.

χ. 74. Α. Πρὸς τῷ ἐπὶ τῆς δοθείσης βλ, δοθέντι Σημείῳ β, Γωνίαν συςήσασθαι ἴσην τῇ δοθείσῃ α. Κέντρῳ μὲν τῷ α (1) Περιφέρεια γεγράφθω ἡ γζ. Κέντρῳ δὲ τῷ β, ϗ Διαςήματι ἴσῳ, Τόξον γεγράφθω τὸ λψ, ἐξ ȣ̃ ἀφῃρήσθω τὸ λξ, ἴσον τῷ γζ, ϗ ἐπεζεύχθω (2) ἡ βξ· ϗ ἔςαι πάντως ἡ ὑπὸ λβξ, ἴση τῇ δοθείσῃ Γωνίᾳ τῇ κατὰ τὸ α.

χ. 75. Β΄. Τῆς δοθείσης Γωνίας ὑπὸ ξοπ, ὅσαι εἰσὶν αἱ μοῖραι προσευρεῖν. Ἡμικυκλίȣ κερατίνȣ διαφανȣ̃ς, εἰς 180 μοίρας διῃρημένȣ, κείσθω τὸ μὲν Κέντρον ἐπὶ τὴν κορυφὴν τῆς Γωνίας ο, ἡ δὲ Ἡμιδιάμετρος ολ, ἐπὶ τὴν Πλευρὰν οπ. Τὸ δὲ Τόξον λμ, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς Γωνίας σκελῶν ἐναπολαμβανόμενον, δείξει πάντως ὅσων μοιρῶν ἡ δοθεῖσα Γωνία.

Γ΄. Γωνίαν δοθείσας μοίρας τὰς 42, συςήσασθαι περιέχȣσαν· Ἤχθω Εὐθεῖα φπ, ἐφ᾽ ἧς τῷ Σημείῳ ο ληφθέντι κείσθω τὸ τȣ̃ Ἡμικυκλίȣ Κέντρον, ὡς τὴν Ἡμιδιάμετρον ολ ἐφαρμόσαι ἐπὶ τὴν οπ· ἀπὸ δὲ τȣ̃ λ, ἀριθμηθήτωσαν μοῖραι 42 ἄχρι τȣ̃ μ. Ἡ γοῦν ἀπὸ τȣ̃ ο διὰ τȣ̃ μ ἀχθεῖσα Εὐθεῖα, δώσει τὴν ὑπὸ μολ μοιρῶν 42.

Τȣ́των ἁπάντων ἡ δεῖξις ἤρτηται ἐκ τῆς ἐϛάτης Προτάσεως τȣ̃ ϛ΄. Βιβλίȣ.

Πόρισμα.

χ. 76. Δοθείσης τῆς ὑπὸ βαζ Γωνίας, δῆλον ἐςὶ ϗ τὸ ἐκείνης πρὸς δύο Ὀρθὰς ἀναπλήρωμα (ἤτοι ἡ ὑπὸ γαζ). Οἷον ἐὰν ᾖ Γωνία ἡ ἀπὸ βαζ μοιρῶν 70, ἔςαι πάντως ἡ ὑπὸ γαζ μοιρῶν 110. Οἱ γὰρ ἀριθμοὶ ἅμα προσληφθέντες, μοίρας τὰς πάσας 180, τὸ δυοῖν ὀρθῶν Γωνιῶν μέτρον συναποτελȣ̃σι.

Πρότασις ΚΔ.

„Ἐὰν δύο Τρίγωνα (τὰ αβγ, δεζ) τὰς δύο Πλευρὰς (τὰς αβ, αγ) „ταῖς δυσὶ Πλευραῖς (ταῖς δε, δζ) ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ „Γωνίαν (τὴν ὑπὸ βαγ) τῆς Γωνίας (ὑπὸ εδζ) μείζονα ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν „ἴσων Εὐθειῶν περιεχομένην, ϗ τὴν Βάσιν (βγ) τῆς Βάσεως (εζ) μείζο„να ἕξει.

χ. 77. Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἡ ὑπὸ βαγ τῆς ὑπὸ εδζ (3), συνεςάτω (4) τῇ ὑπὸ βαγ ἴση ἡ ὑπὸ εδη, ϗ κείσθω (5) ἡ δη ἴση ὁποτέρᾳ τῶν αγ, δζ. Καὶ

---

(1) Αἴτ. γ. (2) Αἴτ. α. (3) Ἐξ ὑποθ. (4) κγ. Βιβ. α. (5) γ. Βιβ. α.

τοίνυν ἡ Βάσις (1) βγ ἴση ἔςαι τῇ Βάσει εη. Ἀλλὰ γὰρ τὸ ζδη ἐςὶν (2) Ἰσοσκελὲς· ἄρα ἡ ὑπὸ δηζ, ἴση τῇ ὑπὸ δζη. (3) καὶ μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ δζη τῆς ὑπὸ (4) εηζ· πολλῷ δὲ μείζων ἡ ὑπὸ εζη τῆς ὑπὸ εηζ. Ἄρ᾽ οὖν (5) ἡ Πλευρὰ εη μείζων τῆς εζ. Ἔςι δὲ εη ἴση (6) τῇ βγ· ἄρα ἡ βγ μείζων τῆς εζ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΚΕ.

„Ἐὰν δύο Τρίγωνα (αβγ, δεζ) τὰς δύο Πλευρὰς (αβ, αγ) ταῖς δυσὶ „Πλευραῖς (δε, δζ) ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ Βάσιν (βγ) τῆς „Βάσεως (εζ) μείζονα ἔχῃ· καὶ τὴν Γωνίαν (ὑπὸ βαγ) τῆς Γωνίας (ὑπὸ „εδζ) μείζονα ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων Εὐθειῶν περιεχομένην.

Εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴση ἐςὶν αὐτῇ, ἢ ἐλάσσων. Ἀλλ᾽ εἰ μὲν ἐκεῖνο, ἔςαι δὴ (7) καὶ ἡ βγ, ἴση τῇ εζ (κατὰ τῆς ὑποθ.). Ἀλλ᾽ οὐδεμὴν τοῦτο· εἰ γὰρ ἐλάσσων ἡ ὑπὸ βαγ τῆς ὑπὸ εδζ, ἔςαι καὶ ἡ Βάσις (8) βγ, ἐλάσσων Βάσεως τῆς εζ (κατὰ τῆς ὑποθέσ.). Ἐὰν ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ. σχ. 78.

Πρότασις Κς.

„Ἐὰν δύο Τρίγωνα (αβγ, δεζ) τὰς δύο Γωνίας (τὰς ὑπὸ αβγ, καὶ „αγβ) ταῖς δυσὶ Γωνίαις (ταῖς ὑπὸ δεζ, καὶ δζε) ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν Πλευρὰν μιᾷ Πλευρᾷ ἴσην ἔχῃ, ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις „Γωνίαις (βγ, καὶ εζ), ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μιᾷ τῶν ἴσων Γωνιῶν, „(τὴν αβ τῇ δε, ἢ τὴν αγ τῇ δζ)· καὶ τὰς λοιπὰς Πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς „Πλευραῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν Γωνίαν τῇ λοιπῇ „Γωνίᾳ (τὴν ὑπὸ βαγ τῇ ὑπὸ εδζ).

Κείσθωσαν δὴ πρῶτον ἴσαι αἱ Πλευραὶ βγ, εζ αἱ πρὸς ταῖς ἴσαις Γωνίαις, καὶ τὰ λοιπὰ πάντα ἴσα ἔςαι (9). σχ. 79.

Κείσθω δεύτερον ἡ αβ ἴση τῇ δε, ἀλλ᾽ ἡ βγ μείζων τῆς εζ, καὶ ἀφαιρεθήτω (10) ἀπὸ τῆς βγ μείζονος ἡ βθ, ἴση δὲ τῇ ἐλάσσονι, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αθ (11)· καὶ οὕτως ἐπὶ τῶν Τριγώνων βαθ, καὶ εδζ, τῶν δύο Πλευρῶν, καὶ τῆς ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένης Γωνίας, ἴσων οὐσῶν ταῖς δυσὶν (ἑκατέρας ἑκατέρᾳ), καὶ τῇ ὑπὸ τούτων περιεχομένῃ Γωνίᾳ· ἔςαι καὶ ἡ ὑπὸ αθβ ἴση

---

(1) δ. Βιβ. α. (2) Ἐξ κατ. (3) ε. Βιβ. α. (4) Ἀξ. α. (5) ιθ. Βιβ. α. (6) Ἐξ κατ. (7) δ. Βιβ. α. (8) κδ. Βιβ. α. (9) Σχόλ. Πρ. δ. (10) γ. Βιβ. α. (11) Αἰτ. α.

τῇ (1) ὑπὸ δζε. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ αγβ ἴση (2) τῇ ὑπὸ δζε. Ἄρα ἡ ὑπὸ αγβ (3) ἴση ἔςαι τῇ ὑπὸ αθβ· ὅπερ ἀδύνατον (διὰ τὴν ιϛ'.).

Κείσθω τρίτον δζ = αγ. Ἐὰν ᾖ οὖν ϗ εζ = βγ (διὰ τὸ α'.) ϗ τὰ λοιπὰ ἴσα ἔςαι. Εἰδ' οὔν, ἀλλ' ἡ βγ > εζ, ληφθήτω γθ = εζ, ϗ ὁμοίως ἐφοδεύσει τὰ τῆς ἀποδείξεως, ὡς ἐπὶ τȣ̃ β'.

Ἐὰν ἄρα δύο Τρίγωνα κτ. Ο. Ε. Δ.

Σχόλιον.

Ἔδοξέ τινα ἐνταῦθα περὶ τῆς ἐν τῷ Ἰσοσκελεῖ Τριγώνῳ παρενθέσθαι Καθέτȣ, ὑφ' ἧς ἥτε Βάσις, ϗ ὑφ' ἣν ἐκείνη ὑποτείνει, ἡ Γωνία δίχα τέμνεσθαι πεφύκασιν. Ἔςω τοίνυν Ἰσοσκελὲς Τρίγωνον τὸ αβγ, ȣ̃ κορυφὴ μὲν α, Βάσις δὲ ἡ βγ, σκέλη δὲ ἴσα ἀλλήλοις τὰ αβ, αγ. Φημὶ δή·

κ. 80. Α. Ἐὰν ἀπὸ τῆς κατὰ τὴν κορυφὴν α Γωνίας, Κάθετος ἀχθῇ πρὸς τὴν Βάσιν ἡ αδ, δίχα τεμεῖ αὕτη τήν τε Βάσιν βγ, ϗ τὴν Γωνίαν ὑπὸ βαγ, ὑφ' ἣν ἡ Βάσις ὑποτείνει. Ἐπὶ γὰρ τῶν Τριγώνων αβδ, αγδ, τῶν μὲν Πλευρῶν αβ, ϗ αγ ἴσων (4) ἀλλήλαις ȣ̓σῶν, τῆς δὲ αδ κοινῆς ἑκατέρῳ, τῶν τε Γωνιῶν ὑπὸ αβδ, ϗ ὑπὸ αγδ (5) ἴσων ἀλλήλαις, ϗ τῶν ὑπὸ αδβ, ϗ αδγ (6) ὁμοίως ἴσων ȣ̓σῶν· ϗ τὰ λοιπὰ (7) πάντα ἴσα ἔςαι. Ἄρα ϗ ἡ Πλευρὰ βδ, ἴση ἔςαι τῇ γδ, ϗ ἡ ὑπὸ βαδ, ἴση τῇ ὑπὸ γαδ. Ἡ ἄρα Κάθετος αδ (8) ἐπὶ τȣ̃ Ἰσοσκελȣ̃ς, τήν τε Βάσιν βγ δίχα τέμνει, ϗ τὴν κατὰ τὴν κορυφὴν ὑπὸ βαγ Γωνίαν.

Β. Ἐὰν ἡ Εὐθεῖα αδ ἀπὸ τῆς κατὰ τὴν κορυφὴν Γωνίας ἀχθεῖσα, δίχα τέμνῃ τὴν Βάσιν· δίχα δήπȣ τεμεῖ ϗ τὴν κατὰ τὴν κορυφὴν Γωνίαν α, ϗ ἐπὶ τὴν Βάσιν πρὸς ὀρθὰς ἐπιςήσεται. Τῆς γὰρ Βάσεως βγ δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ δ, τὰ δύο Τρίγωνα αβδ, ϗ αγδ τὰς δύο Πλευρὰς ταῖς δυσὶ Πλευραῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ϗ τὴν Βάσιν τῇ Βάσει, ϗ ἔςαι (9) ἄρα ἐπ' αὐτῶν, ϗ ἡ ὑπὸ βαδ ἴση τῇ ὑπὸ γαδ, ϗ ὑπὸ αδβ, ϗ αδγ. Οὐκȣ̃ν ἡ μὲν κατὰ τὴν κορυφὴν α (10) δίχα ἔςαι τετμημένη, ἡ δὲ αδ πρὸς ὀρθὰς (11) ἐπὶ τὴν Βάσιν ἐφεςηκεῖα.

Τὸ δ' αὐτὸ ϗ διὰ τῆς δ. ῥαδίως δείκνυται.

Γ. Ἐὰν ἡ αδ τὴν κατὰ κορυφὴν Γωνίαν δίχα τέμνῃ, δίχα τε, ϗ πρὸς ὀρθὰς ϗ τὴν Βάσιν βγ τεμεῖ. Ἐπὶ γὰρ τῶν Τριγώνων βαδ, ϗ δαγ, αἱ βα, ϗ

(1) δ. Βιβ. α. (2) Ἐξ. ὑποθ. (3) Ἀξ. α. (4) Ὅρ. κϛ. (5) ε. Βιβ. α. (6) Ὅρ. ιδ. (7) κϛ. Βιβ. α. (8) Ὅρ. μ. (9) η. Βιβ. α. (10) Ὅρ. μ. (11) Ὅρ. ιδ.

αγ, ἴσαι εἰσὶν (1), ἡ δὲ αδ κοινὴ, ἥτε ὑπὸ βαδ ἴση ἐςὶ τῇ (2) ὑπὸ γαδ. Ἄρα ϗ αἱ Βάσεις βδ, ϗ γδ (3) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἥτε ὑπὸ αδβ ἴση τῇ ὑπὸ αδγ. Ἄρα ἡ μὲν βγ Βάσις (4) δίχα τέτμηται, ἡ δὲ αβ (5) πρὸς ὀρθὰς ἐπ' αὐτὴν ἐφέςηκε.

Ἐὰν ἐπὶ τȣ̃ ἰσοσκελȣ̃ς Τριγώνȣ αβγ ἀχθῇ Εὐθεῖα ἡ δε, ἡ τὴν Βάσιν βγ δίχα τε, ϗ πρὸς ὀρθὰς τέμνȣσα κατὰ τὸ δ, προαχθεῖσα αὕτη διὰ τῆς κορυφῆς τȣ̃ Τριγώνȣ α διελεύσεται. Ἐὰν γὰρ περὶ τὴν δε ὡς περὶ Ἄξονα τὸ ἀρισερὸν εδβ τȣ̃ αβγ Τριγώνȣ περιαχθῇ, ὥςε τῷ δεξιτερῷ εδγ ἐπιπεσεῖν, ἐφαρμόσȣσι μὲν αἱ ἴσαι ὀρθαὶ Γωνίαι αἱ πρὸς τῷ δ, ἐφαρμόσȣσι δὲ ϗ αἱ ἴσαι Πλευραὶ δβ, δγ, ἐφαρμόσȣσι δὲ ϗ αἱ ἴσαι Γωνίαι, αἱ κατὰ τὰ β ϗ γ ἐπ' ἀλλήλας (6). Καὶ συμπεσȣ̃νται ἄρα αἱ Πλευραὶ βα, γα, ὡσαύτως δὲ ϗ ὅλα τὰ Τρίγωνα βαδ, γαδ· ταύτητοι ϗ ἡ πλευρὰ δα, ταῖς Πλευραῖς βα, γα, κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον α συναντήσει, τȣτέςι διὰ τῆς κορυφῆς α τȣ̃ Τριγώνȣ αβγ διελεύσεται. Δ.

Ἄλλως.

Εἰ μὴ γὰρ, μὴ διερχέσθω ἡ δε προαχθεῖσα διὰ τῆς κορυφῆς α, διατεμνέτω δὲ θατέραν τῶν Πλευρῶν, οἷον τὴν αβ, κατὰ τὸ ζ, ϗ ἐπεζεύχθω (7) ἡ ζγ. Ἐπὶ μὲν ȣ̃ν τῶν Τριγώνων βζδ, ϗ δζγ, ἡ μὲν βδ, ἴση τῇ γδ, ἡ δὲ δζ κοινὴ, ἥτε ὑπὸ βδζ, ἴση τῇ ὑπὸ γδζ (8). Ἄρα ϗ (9) ἡ ὑπὸ ζβδ, ἴση τῇ ὑπὸ ζγδ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ζβδ, ἴση τῇ ὑπὸ αγβ (10) τȣ̃ Ἰσοσκελȣ̃ς πρὸς τὴν Βάσιν Γωνίαι ȣ̃σαι. Ἄρα ἡ ὑπὸ ζγδ, ἴση τῇ ὑπὸ αγδ, τὸ μέρος τῷ ὅλῳ, ὅπερ ȣ̓κ ἔςιν. (11) Ἀλλ' ἐπ' αὐτῶν δὴ τῶν Τριγώνων, δείκνυται ϗ ἡ βζ, ἴση τῇ γζ· κοινῆς οὖν προςεθείσης τῆς ζα, ἔςαι ἡ βα, ἴση δυσὶ ταῖς (12) γζ, ζα· ἡ δὲ βα ἴση τῇ γα (13). Ἄρα αἱ γζ, ζα, αἱ δύο, ἴσαι τῇ μιᾷ γα, ἐπὶ τȣ̃ Τριγώνȣ γζα, ὅπερ (14) ȣ̓κ ἔςιν. Οὐκ ἄρα διὰ τȣ̃ ζ διελεύσεται κτ. κ. 81.

Ἐὰν Εὐθεῖα ἡ αδ, ἀπὸ τῆς τȣ̃ Τριγώνȣ αβγ κορυφῆς α, ἐπὶ τὴν Βάσιν βγ πίπτȣσα, ταύτην δίχα τε, ϗ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, Ἰσοσκελὲς ἔςαι τὸ Τρίγωνον. Ἐπὶ γὰρ τῶν Τριγώνων βαδ, γαδ, ἡ μὲν αδ κοινὴ, αἱ δὲ βδ, γδ ἴσαι ἀλλήλαις, ϗ αἱ ὑπὸ βδα, ϗ γδα (15) ἴσαι ἀλλήλαις. Ἄρα ϗ ἡ βα ἴση (16) τῇ γα. Καὶ Ἰσοσκελὲς ἄρα (17) τὸ Τρίγωνον βαγ. Ε. κ 80.

---

(1) Ἐξ ὑπόθ. (2) Ἐξ ὑπ. (3) δ. Βιβ. α. (4) Ὅρ. μ. (5) Ὅρ. ιδ. (6) Ἀξ. η. (7) Αἰτ. α. (8) Ἐξ ὑποθ. (9) δ. Βιβ. α. (10) Ἐξ ὑποθ. ϗ ε. Βιβ. α. (11) Ἀξ. θ. (12) Ἀξ. β. (13) Ἐξ ὑποθ. (14) κ. Βιβ. α. (15) Ἐξ ὑποθ. (16) δ. Βιβ. α. (17) Ὅρ. κς.

ς'. Ἐάν Εὐθεῖα ἡ αδ, Τριγώνε τε̃ αβγ, τὴν κατὰ τὸ α Γωνίαν δίχα τέμνεσα, ἐπὶ τὴν ἀπεναντίον Πλευρὰν βγ, πρὸς ὀρθὰς ἐπιςῆ, Ἰσοσκελὲς ἔςαι τὸ Τρίγωνον. Ἐπὶ γὰρ τῶν Τριγώνων αβδ, αγδ, ἡ μὲν αδ κοινὴ, αἱ δὲ ὑπὸ βαδ, ϗ βδα, ἴσαι ταῖς ὑπὸ γαδ, ϗ γδα (1) ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. Ἄρα (2) ϗ βα, ἴση τῇ γα. Ἰσοσκελὲς ἄρα (3) τὸ Τρίγωνον.

Πρότασις ΚΖ.

„Ἐὰν εἰς δύο Εὐθείας (αβ, γδ) Εὐθεῖα ἐμπίπτεσα (ἡ ζε) τὰς ἐναλ-
„λὰξ Γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ (ἤτοι τὴν ὑπὸ αεζ τῇ ὑπὸ εζδ, καὶ τὴν
„ὑπὸ γζε τῇ ὑπὸ ζεβ), Παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ Εὐθεῖαι.

κ. 82. Ἐκ τε̃ κατ' Εὐκλείδην ὁρισμε̃ τῶν Παραλλήλων. Εἰ μὴ εἰσὶ Παράλληλοι, ἐκβαλλόμεναι αἱ αβ, γδ συμπεσε̃νται, ἤτοι ἐπὶ τὰ βδ μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ αγ. Ἐκβεβλήσθωσαν, ϗ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ η· καὶ ἔςαι ἄρα τὸ εηζ Τρίγωνον. Τοιγαρε̃ν ἡ ὑπὸ αεζ ἐκτὸς (4), μείζων ἔςαι τῆς ὑπὸ εζη ἐντός. Ἀλλὰ (5) ϗ ἴση, ὅπερ ἐκ ἔςιν· οὐκ ἄρα συμπεσε̃νται. Καὶ Παράλληλοι (6) ἄρα εἰσί.

κ. 83. Ἐκ δὲ τε̃ ἀντεισενεχθέντος τῶν Παραλλήλων ὁριςμε̃ ὡδί. Ἀπὸ τε̃ Σημείε ε, ἤχθω (7) πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς γδ, ἡ εθ. Καὶ ἀπὸ τε̃ ζ ὁμοίως, πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς αβ, ἤχθω ἡ ζη. Ἐπὶ μὲν οὖν τῶν Τριγώνων ζηε, ϗ εθζ, ἡ μὲν ὑπὸ ηεζ ἴση τῇ ὑπὸ εζθ (8), ἥτε ὑπὸ ζηε, ἴση τῇ ὑπὸ εθζ (9). ἡ δὲ ζε Πλευρὰ κοινή. Ἄρα (10) ἡ ζη, ἴση τῇ εθ· εἰσὶ δὲ ἄμφω Κάθετοι ἐπὶ τῆς αβ· ἡ μὲν ζη ἐκ κατασκευῆς· ἡ δὲ θε, ὅτι τῇ ὑπὸ εθζ (ἐκ κατ.) Ὀρθῇ, ἴση ἡ ἐναλλὰξ ὑπὸ θεβ (ἐξ ὑποθέσ.), ἴσαι ἄρα αἱ πρὸς τὴν αὐτὴν αβ Κάθετοι ζη, θε. Ἴσοις ἄρα ἀπέχεσαι διαςήμασιν αἱ αβ, ϗ γδ (11) Παράλληλοι εἰσί.

κ. 84. Ἀλλὰ γὰρ ἔςωσαν αἱ λοιπαὶ ἐναλλὰξ αἱ ὑπὸ βεζ, ϗ γζε ἴσαι ἀλλήλαις. Καὶ ἐπεὶ αἱ δύο ὑπὸ βεζ ϗ αεζ (12) δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ὁμοίως δὲ ϗ αἱ ὑπὸ γζε, ϗ εζδ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ἴσαι ἄρα ἔσονται (13) αἱ δύο ἅμα, ταῖς δυσὶν ἅμα. Ἀφαιρεθεισῶν ἄρα τῶν ὑπὸ βεζ, ϗ γζε ἴσων (14) ἐσῶν, ἴσαι ἔσονται ϗ αἱ ὑπὸ αεζ, ϗ εζδ (15) ἀλλήλαις. Καὶ ἔτως ἐφοδεύσει ὡς ἀνωτέρω ἡ δεῖξις.

---

(1) Ἐξ ὑποθ. (2) Σχόλ. δ. ϗ κς. Βιβ. α. (3) Ὁρ. κς. (4) ις. Βιβ. α. (5) Ἐξ ὑποθ. (6) Ὁρ. λς. Εὐκλείδ. (7) ιβ. Βιβ. α. (8) Ἐξ ὑποθ. (9) Ἐκ κατ. (10) κς. Βιβ. α. (11) Ὁρ. λς. Τακκετίε. (12) ιγ. Βιβ. α. (13) Ἀ'ξ. ι. (14) Ἐξ ὑποθ. (15) Ἀ'ξ. γ.

Η῞ ϗ οὕτως· ἐὰν αἱ Ἐναλλὰξ λοιπαὶ ὑπὸ βεζ, ϗ γζε ἴσαι ὦσι, τὰς αβ, ϗ γδ Παραλλήλες διὰ τῦ ἀντεισενεχθέντος ὁρισμῦ δείξω. Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ἐμπιπτέσης εζ ἐπ᾽ ἄπειρον ἑκατέρωθεν προηγμένης, ἑτέρωθεν τυχὸν Σημεῖον τὸ ι, ἑτέρωθεν δὲ ἀφαιρεθήτω (1) ἡ κζ ἴση τῇ ει. Καὶ ἀπὸ τῦ ι Σημείε, ἐπὶ τῆς γδ δεηθὰν προεκβληθείσης, ἤχθω πρὸς Ὀρθὰς (2) ἡ ιδ· ὡσαύτως δὲ ϗ ἀπὸ τῦ κ Σημείε ἐπὶ τῆς αβ ἡ κα. χ. 85.

Ἐπεὶ οὖν αἱ ὑπὸ βεζ, ϗ βει (3) δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, αἵτε ὑπὸ εζγ, ϗ ὑπὸ γζκ ὡσαύτως, αἱ δύο ἅμα, ταῖς δυσὶν ἅμα (4) ἔσονται ἴσαι. Ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ βεζ, ϗ εζγ εἰσὶν ἴσαι (5) ἀλλήλαις, ἀφαιρεθεῖσαι καταλείψεσι τὰς ὑπὸ ιεβ, ϗ κζγ (6) ἀλλήλαις ἴσας. Ἐπὶ τοίνυν τῶν Τριγώνων εακ ϗ ζδι, ἡ μὲν ὑπὸ αεκ, ἴση τῇ ὑπὸ δζι, ἴσων δειχθεισῶν τῶν κατὰ κορυφὴν αὐταῖς (7)· ἡ δὲ ὑπὸ καε, ἴση (8) τῇ ὑπὸ ιδζ, ἄμφω γὰρ ὀρθαί· ἡ δὲ εκ Πλευρὰ, ἴση τῇ ζι (κοινὴ γὰρ ἑκατέραις ἡ ζε), προστετέθη δὲ ἡ ει ἴση τῇ κζ (9). Ἄρα (10) ϗ ἡ ὑπὸ εκα, ἴση τῇ ζιδ, ἥτε κα Πλευρὰ ἴση τῇ ιδ. Παραπλησίως δὲ ϗ ἐπὶ τῶν Τριγώνων ιεβ, κζγ, ἴση δειχθήσεται ἡ ιβ, τῇ κγ. Καὶ ἀφαιρεθεῖσαι ἄρα (11) ἴσαι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ λοιπαὶ γα, δβ· ἀλλὰ ϗ Κάθετοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς αβ· ἡ μὲν γα ἐκ κατασ., ἡ δὲ δβ, ὅτι ἴση τῇ κατὰ τὸ δ (ἐκ κατ.) Ὀρθῇ ἡ ἐναλλὰξ ὑπὸ δββ (ἐξ ὑποθ.)· Ἴσαι ἄρα αἱ πρὸς τὴν αὐτὴν αβ Κάθετοι γα, δβ, καὶ ἴσοις τοίνυν ἀπέχεσαι τοῖς διαςήμασιν αἱ αβ, γδ εἰσὶ (12), ϗ Παράλληλοι.

Ἐπὶ τῶν Τριγώνων ακε, διζ, ((ιγ) βεζ + αεζ = γζε + εζδ, ϗ βεζ = γζε, (ἐξ ὑποθ.)) αεκ = ιζδ. Καὶ καε = ιδζ (ἐκ κατ.) ϗ ζι = εκ, ὥςε (κς.) εκα = ζιδ, ϗ κα = ιδ. Ἀλλ᾽ ἐπὶ τῶν Τριγώνων κγζ ϗ εβι, ἡ ὑπὸ γζκ ὡς ἴση τῇ ὑπὸ ιεβ, ὡς ἴσαι ταῖς κατὰ κορυφὴν δειχθείσαις ἴσαις (ιε) Καὶ γκζ = ειβ ὡς δέδεικται· ϗ κζ = ει (ἐκ κατασ.) ἄρα ϗ κγ = ιβ· ὥςε ϗ γα = βδ.

Πρότασις ΚΗ.

„Ἐὰν εἰς δύο Εὐθείας (αβ, γδ) Εὐθεῖα ἐμπίπτεσα (ἡ εζ), τὴν ἐκτὸς „Γωνίαν (τὴν ὑπὸ εηβ) τῇ ἐντὸς ϗ ἀπεναντίον, ϗ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη (τῇ „ὑπὸ ηθδ) ἴσην ποιῇ· ἢ τὰς ἐντὸς, ϗ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη (τὰς ὑπὸ βηθ, ϗ „ηθδ) ἴσας δυσὶν ὀρθαῖς ποιῇ, Παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ Εὐθεῖαι αβ, γδ.

Ἐπειδὴ γὰρ ἡ ὑπὸ εηβ, ἴση τῇ ὑπὸ (13) ηθδ, ἡ δὲ ὑπὸ εηβ (14) ἴση τῇ αηθ. Ἄρα αἱ (15) ὑπὸ αηθ, ϗ ηθδ ἴσαι· εἰσὶ δὲ ἐναλλάξ. Ἄρα (16) Παράλληλος ἡ αβ πρὸς τὴν γδ. χ. 86.

Πάλιν ἐπεὶ αἱ ὑπὸ βηθ ϗ ηθδ (17) δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Εἰσὶ δὲ ϗ χ. 87.

---

(1) γ. Βιβ. α. (2) ιβ. Βιβ. α. (3) ιγ. Βιβ. α. (4) Ἀξ. ι. (5) Ἐξ ὑποθ. (6) Ἀξ. γ. (7) ιε. Βιβ. α. (8) Ἀξ. ι. (9) Ἀξ. β. (10) κς. Βιβ. α. (11) Ἀξ. γ. (12) λς. ὁρισμ. Τακυετίε. (13) Ἐξ ὑποθ. (14) ιε. Βιβ. α. (15) Ἀξ. α. (16) κζ. Βιβ. α. (17) Ἐξ ὑποθ.

αἱ ὑπὸ αηθ, βηθ (1) δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ δύο ἄρα ἅμα ληφθεῖσαι, ἴσαι εἰσὶ ταῖς δυσὶν (2) ἅμα ληφθείσαις· κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ βηθ· ϗ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αηθ (3) λοιπῇ τῇ ὑπὸ ηθδ ἴση ἔςαι. Εἰσὶ δὲ ἐναλλάξ. Ἄρα κτ.

Πόρισμα.

Ἐκ μὲν οὖν τοῦ Β΄. μέρους, φανερὸν ὅτι ἅπαν Ὀρθογώνιον ἐςὶ ϗ Παραλληλόγραμμον.

Πρότασις ΚΘ.

„Ἡ εἰς τὰς Παραλλήλους Εὐθείας (αβ, γδ) Εὐθεῖα ἐμπίπτουσα (εζ) τάς „τε ἐναλλὰξ Γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ (τὴν ὑπὸ βηθ, τῇ ὑπὸ ηθγ, καὶ „τὴν ὑπὸ αηθ, τῇ ὑπὸ ηθδ), ϗ τὴν ἐκτὸς (ὑπὸ εηβ) τῇ ἐντὸς, ϗ ἀπεναντίον, „ϗ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη (τῇ ὑπὸ ηθδ) ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς, ϗ ἐπὶ τὰ αὐτὰ „μέρη (τὰς ὑπὸ βηθ, ϗ ηθδ) δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

κ. 88. Α΄. Εἰ γὰρ μὴ, ἔςω μείζων φέρ᾽ εἰπεῖν ἡ ὑπὸ αηθ, τῆς ὑπὸ ηθδ. Κοινὴ προσειλήφθω ἡ ὑπὸ βηθ, ϗ ἔσονται αἱ δύο, ὑπὸ αηθ, ϗ βηθ, μείζονες (4) τῶν δύο ὑπὸ βηθ, ϗ ηθδ. Ἄρα αἱ ὑπὸ βηθ, καὶ ηθδ, δυοῖν ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσί. Καὶ ἐκβαλλόμεναι ἄρα ἐπ᾽ ἄπειρον κατὰ ταῦτα τὰ μέρη αἱ αβ, γδ συμπεσοῦνται, ϗ οὐδὲ Παράλληλοι (5) ἔσονται· ὅπερ ἐςὶ κατὰ τῆς ὑποθέσεως. Ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αηθ τῇ ὑπὸ ηθδ. Ο. Η. τὸ Α΄.

Β΄. Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ αηθ, ἴση (6) τῇ ὑπὸ εηβ. Καὶ ἡ ὑπὸ εηβ ἄρα ἴση (7) τῇ ὑπὸ ηθδ. Ο. Η. τὸ Β΄.

Γ΄. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ βηθ. Αἱ ἄρα ὑπὸ εηβ ϗ βηθ, ταῖς ὑπὸ βηθ ϗ ηθδ (8) ἴσαι εἰσίν. Ἀλλ᾽ ἐκεῖναι (9) δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ἄρα καὶ αὗται. Ο. Η. τὸ Γ΄.

Καὶ ὧδε μὲν Εὐκλείδης, κατὰ τὸν παρ᾽ αὐτῷ τῶν Παραλλήλων ὁρισμὸν, καὶ τὸ ιά. Ἀξίωμα. Ὁ δὲ Τακουέτιος ὁ τὸν ὁρισμὸν μετασκευάσας, καὶ τὸ Ἀξίωμα ἐκσυρίξας

Ἄλλως.

κ. 89. Α΄. Ἀπὸ ξ ϗ λ, ἤχθωσαν Κάθετοι αἱ ξρ, ϗ λπ (10). Κάθετοι δὲ πάντως ἔσονται ἐπ᾽ ἄμφω τὰς Παραλλήλους (11) αβ, ϗ γζ· καὶ δὴ, καὶ

(1) ιγ. Βιβ. α. (2) Ἀξ. ι. (3) Ἀξ. γ. (4) Ἀξ. δ. (5) Ἀξ. ια. καὶ ὁρ. λς. (6) ιε. Βιβ. α. (7) Ἀξ. α. (8) Ἀξ. β. (9) ιγ. Βιβ. α. (10) ιβ. Βιβ. α. (11) Ἀξ. ια.

ἀλλήλαις (1) ἴσαι. Ἀλλὰ ϗ ἴσα ἀπὸ τῶν Παραλλήλων (2) ἐναπολήψονται μέρη, τὰ ρλ, πξ. Τὰ ἄρα Τρίγωνα φ, ϗ ψ, ἀμοιβαδὸν ἔςαι ἰσόπλευρα. Ἄρα καὶ (3) αἱ ὑπὸ ρλξ, πξλ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· αἱ δέ εἰσιν ἐναλλάξ. Ἄρα. Ο. Η. τὸ Α'. Εὔδηλον δὲ ὅτι ϗ αἱ λοιπαὶ ἐναλλὰξ αἱ ὑπὸ βλξ, ϗ ὑπὸ λξγ, διὰ τὴν ΙΓ' τȣ̃ Βιβλίȣ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

Β'. Ἡ ὑπὸ ηλβ ἴση τῇ ὑπὸ (4) αλξ· ἀλλ' αὕτη ἴση ἐδείχθη τῇ ὑπὸ λξζ. Ἄρα (5) ἡ ὑπὸ ηλβ, ἴση τῇ ὑπὸ λξζ, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς ϗ ἀπεναντίον, κτ. Ο. Η. τὸ Β'. Ὡσαύτως δὲ ϗ ἡ ἐκτὸς ὑπὸ ηλρ, ἴση δειχθήσεται τῇ ὑπὸ λξγ ἐντὸς ϗ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Γ'. Ἡ ὑπὸ αλξ ἴση (6) τῇ ὑπὸ ζξλ. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ ζξλ, ϗ γξλ (7) δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ἄρα ϗ αἱ ὑπὸ αλξ, ϗ γξλ, δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ο. Η. τὸ Γ'. Οὕτω δὲ δειχθήσονται ϗ αἱ ὑπὸ βλξ, ζξλ δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι.

Πόρισμα. Παντὸς Παραλληλογράμμȣ, αἱ δύο Γωνίαι αἱ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη πάντη μεταλαμβανόμεναι, δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. Καὶ αἱ τέτταρες ὀρθαῖς τέτρασιν.

Πόρισμα.

Ἐντεῦθεν τῷ Ἐρατοσθένει ἑπόμενοι, τὴν τῆς γῆς Περίμετρον καταμετρεῖν παιδευόμεθα. Παρατετηρηκὼς γὰρ ἐκεῖνος Συήνης τῆς κατ' Αἴγυπτον πόλεως, θέρȣς τρεπόμενον πρὸς Κάθετον ἐπηρτῆσθαι τὸν ἥλιον, Γνώμονι δὲ χρησάμενος, ϗ ἀπὸ τῆς ἐν Αἰγύπτῳ Ἀλεξανδρείας, τῆς ὑπὸ τὸν αὐτὸν μονονȣ̃ Μεσημβρινὸν τελȣ́σης, μοίρας σχεδὸν ἑπτὰ σὺν πεμπτημορίῳ ἀπέχοντα τὸν Φωςῆρα κατειληφὼς, τοσȣ̃τον ἀμέλειτοι ἀπὸ τȣ̃ ἐπ' αὐτὴν κατὰ κορυφὴν Σημείȣ ἀποκλίνοντα· λαβὼν δὲ ϗ τὴν μεταξὺ τῶν πόλεων διάςασιν, ςαδίων ὡσεὶ 5000 τυγχάνȣσαν, δυνάμει τῆς ἀνὰ χεῖρας Προτάσεως τὴν ὅλην τῆς γῆς Περίμετρον ἐθηράσατο λόγῳ τοιῷδε.

Ἔςω α μὲν ἡ πόλις Συήνη, β δὲ ἡ Ἀλεξάνδρεια, ἔνθα Γνώμων ςηρίζεται πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὸν Ὁρίζοντα ὁ βγ. Ἔςωσαν δὲ ϗ αἱ δα, ϗ γη Ἀκτῖνες αἱ ἀφ' ἡλίȣ πρός γε τὴν αἴσθησιν ἀλλήλαις παράλληλοι· ἡ δὲ δα ἀκτὶς ἐπὶ τὸν κατὰ τὴν Συήνην Ὁρίζοντα Κάθετος, διὰ τȣ̃ ζ Κέντρȣ τῆς γῆς διїȣ̃σα· ἡ δὲ γη Ἀκτὶς ἐπὶ τὸν κατὰ τὴν Ἀλεξάνδρειαν Ὁρίζοντα πλαγιάζȣσα, διὰ τῆς κορυφῆς τȣ̃ Γνώμονος διήκȣσα, ϗ μετ' αὐτȣ̃ Γωνίαν τὴν ὑπὸ ηγζ, μοιρῶν δηλονότι $7\frac{1}{5}$ συνιςῶσα· ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ηγζ, ἴση ἐςὶ τῇ ἐναλλὰξ (8) ὑπὸ αζβ, ἧς μέτρον τὸ Τόξον αβ, τὸ μοιρῶν ὂν $7\frac{1}{5}$, τὴν τῆς γῆς Περίμετρον τοιαύτῃ τινὶ ἀναλογίᾳ ἐξεύρατο. Ὡς ἔχȣσι μοῖραι $7\frac{1}{5}$, πρὸς ςαδίȣς 5000, οὕτως

σχ. 90.

---

(1) Ὅρ. λς. (2) Ἀξ. ιβ. (3) η. Βιβ. α. (4) ιε. Βιβ. α. (5) Ἀξ. α. (6) Διὰ μέρος Α'. (7) ιγ. Βιβ. α. (8) κθ. Βιβ. α.

ὅλος ὁ Κύκλος μοιρῶν ὢν 360, ἔχει πρὸς 250000. Τοσέτων ἄρα ςαδίων τὴν ὅλην τῆς γῆς Περίμετρον ὁριςέον. Ο. Η. Ε.

Πρότασις Λ.

„ Αἱ τῇ αὐτῇ Εὐθεία (εζ) Παράλληλοι (αβ, γδ), ϗ ἀλλήλαις εἰσὶ Πα-„ ράλληλοι.

κ. 91. Ἐμπιπτέτω εἰς αὐτὰς Εὐθεῖα ηκ, ϗ ἴση ἔςαι ἡ ὑπὸ αηθ τῇ (1) ὑπὸ ηθζ· καὶ αὕτη δὲ (2) ἴση τῇ ὑπὸ θκδ. Ἄρα (3) ϗ ἡ ὑπὸ αηκ, ἴση τῇ ὑπὸ ηκδ. Ἄρα αἱ Εὐθεῖαι αβ, ϗ γδ (4) ἀλλήλαις εἰσὶ Παράλληλοι.

Πρότασις ΛΑ.

„ Διὰ τȣ̃ δοθέντος Σημείȣ (α) τῇ δοθείσῃ Εὐθείᾳ (βγ) παράλληλον „ εὐθεῖαν Γραμμὴν ἀγαγεῖν (τὴν εζ).

κ. 92. Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς βγ τυχὸν Σημεῖον τὸ δ, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ αδ (5), ϗ συνεςάτω πρὸς τῷ α Σημείῳ τῆς δα τῇ ὑπὸ αδγ ἴση (6) ἡ ὑπὸ δαε, ϗ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῆς αε, Εὐθεῖα ἡ αζ. Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο Εὐθείας τὰς βγ, εζ, ἐμπεσȣ̃σα ἡ αδ, τὰς ἐναλλὰξ Γωνίας, τὰς ὑπὸ εαδ, αδγ ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκε, παράλληλος ἄρα (7) ἡ εζ τῇ βγ. Ο. Ε. Π.

κ. 93. Εἰς δὲ Πρᾶξιν ἀρκέσει ἀχθείσης τῆς αδ, Τόξον γράψαι τὸ ιπ, ϗ Κέντρῳ μὲν τῷ α, Διαςήματι δὲ τῷ αὐτῷ, τὸ Τόξον ξφ. Ἐὰν γὰρ ἀπὸ τέτȣ ἀφαιρεθῇ τὸ ξβ ἴσον τῷ ιπ, ἡ διὰ τȣ̃ α ϗ β Εὐθεῖα ἔςαι ἡ ζητȣμένη Παράλληλος.

Ἡ δεῖξις ἤρτηται ἐκ τῆς ΚΘ'. τȣ̃ Γ'. Βιβλίȣ.

Ἄλλως.

κ. 94. Κέντρῳ τῷ τυχόντι ο Κύκλος γεγράφθω, διϊὼν μὲν τῇ Περιφερείᾳ διὰ τȣ̃ δοθέντος Σημείȣ α, τέμνων δὲ ϗ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν κατὰ Σημεῖα ξ ϗ π· τῷ δὲ Τόξῳ πα, ἴσον εἰλήφθω Τόξον τὸ ξν, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ αν· ἡ δὲ ἔςαι ἡ ζητȣμένη Παράλληλος.

Ἤρτηται δὲ ἡ δεῖξις ἐκ τῆς ΚΘ'. τȣ̃ Γ'. Βιβλίȣ, ϗ τῆς ΚΖ'. τȣ̃ ἀνὰ χεῖρας. Ταύτην δ' εὑρήσεις ἐν τῷ Λήμματι τῷ πρὸς τὴν Ις'. Πρότασιν, τῶν ἐκ τῶν τȣ̃ Ἀρχιμήδȣ ἐκλελεγμένων Θεωρημάτων.

---

(1) κθ. Βιβ. α. (2) Αὐτ. (3) Ἀξ. α. (4) κζ. Βιβ. α. (5) Αἴτ. α. (6) κγ. Βιβ. α. (7) κζ. Βιβ. α.

Σχόλιον.

Ἀποδέδεικται ἡμῖν ἄρα τὰ ἐπὶ τῶν παραλλήλων Εὐθειῶν θεωρέμενα, διά τε τȣ̃ κατ' Εὐκλείδην Ἀξιώματος, ϗ ἐκείνȣ ἄνευ· ἐπεὶ πολλοῖς εἰς τάξιν Θεωρήματος, ϗ ἥπȣ ὐκ ἀλόγως ἀνάγεται. Ἀλλὰ ϗ αἱ τρεῖς ἀνωτέρω Προτάσεις, ΚΖ΄. ΚΗ΄. ϗ ΚΘ΄. φημὶ, ἃς ὁ Τακȣέτιος μὴ ἐξηρτημένως τȣ̃ εὐκλειδείȣ Ἀξιώματος προθέμενος δεῖξαι, εἰς τὰς ΚΗ. ΚΘ. ΚΖ. μεταςήσας συνέχεε, τῆς προσηκȣ́σης παρ' ἡμῶν ἔτυχον χώρας ϗ τάξεως. Ἤδη οὖν ϗ τὸ Ἀξίωμα ἐκεῖνο πειρατέον ἀποδεῖξαι, τὸ συνεχῶς ἐν τοῖς ἐφεξῆς εἰς χρῆσιν παραληφθησόμενον.

Θεώρημα.

„Ἐὰν Εὐθεῖα (αγ) εἰς Εὐθείας (τὰς αβ, ϗ γδ) ἐμπίπτȣσα, τὰς ἐντὸς „ϗ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη Γωνίας (ὑπὸ βαγ, ϗ δγα) δυοῖν Ὀρθῶν ἐλάσσονας „ποιῇ, ἐκβαλλόμεναι αἱ Εὐθεῖαι αβ, ϗ γδ συμπεσȣ̃νται ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ „μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο Ὀρθῶν ἐλάσσονες.

Δεῖξις ἡ κατὰ Πτολεμαῖον.

Λῆμμα Α.

„Αἱ ἀπὸ δυοῖν Ὀρθαῖς ἴσων ἐκβαλλόμεναι ȣ̓ συμπίπτȣσι.

Εἰσὶ γὰρ Παράλληλοι (1). Ἄρα καὶ τὸ ἀνάπαλιν, αἱ ἀπ' ἐλασσόνων συμπίπτȣσι. Χρῄζει δὲ πάντως τὸ ἐπιφερόμενον δείξεως· οὐ γὰρ ἐξ ἀνάγκης ἔχει τ' ἀκόλȣθον, ὅπȣ γε ἐπ' ἀμφοῖν τῶν ὑποθέσεων ἐνδοιάσειέ τις μήποτε ἐπίσης ἐπαληθεύοι τῶν Γραμμῶν τὸ ἀσύμπτωτον.

Λῆμμα Β.

„Ἡ εἰς τὰς Παραλλήλȣς (αβ, γδ) Εὐθεῖα ἐμπίπτȣσα (εζ), τὰς ἐντὸς „ϗ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη Γωνίας (ὑπὸ βεζ, ϗ δζε) δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ.

Ἔςιν ἡ παρ' Εὐκλείδῃ ΚΘ΄. Ἐπειδὴ δὲ διὰ τȣ̃ εἰς ἀπόδειξιν ὑποκειμένȣ ιά. Ἀξιώματος τῷ Στοιχειωτῇ κατεσκεύαςαι, τὸ διάλληλον φεύγων τῶν ἀποδείξεων ὁ Πτολεμαῖος, ἄλλως ἀποδεικνύειν πειρᾶται ὡς ἐφεξῆς.

Εἰ μὴ γὰρ, ἢ ἐλάσσονας, ἢ μείζονας. Ἀλλ' εἰ μὲν τȣ̃το, αἱ λοιπαὶ ὑπὸ αεζ, ϗ γζε, δυοῖν Ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν (2)· ἀλλὰ καὶ μείζονες αἱ σ. 95.

---

(1) κη. Βιβ. α. (2) ιγ. Βιβ. α.

αὐταί (1). Εἴθ' ἐκεῖνο, αἱ λοιπαὶ μείζονες (2)· ἀλλὰ ϗ ἐλάσσονες αἱ αὐταί (3). Ἄτοπον δὲ ἑκάτερον· δυσὶν ἄρα Ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ. Ταῦτα Πτολεμαῖος.

Ἀλλὰ μήποτε παραλογισμὸς ἐν τύτοις λανθάνει (φησὶν ὁ Πρόκλος); Κωλύει γὰρ ὐδὲν τὸν ἀσυμπτώτυς λέγοντα τὰς ἀπ' ἐλατσόνων ἢ δύο Ὀρθῶν ἐκβαλλομένας, τὰς μὲν τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ δύο Ὀρθῶν μείζυς λέγειν, τὰς δὲ ἐπὶ θάτερα δύο Ὀρθῶν ἐλάσσονας.

Θεώρημα Α.

„Ἐὰν εἰς δύο Εὐθείας (τὰς αβ, γδ), Εὐθεῖα ἐμπίπτυσα (ἡ εζ) τὰς ἐν„τὸς ϗ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυοῖν Ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ (τὰς ὑπὸ βεζ, καὶ „δζε), αἱ Εὐθεῖαι (αβ, ϗ γδ) συμπεσῦνται ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο Ὀρ„θῶν ἐλάσσονες (ὑπὸ βεζ, ϗ δζε).

κ. 96. Εἰ μὴ γάρ, ἢ ἐπ' ὐδέτερα συμπεσῦνται ἢ ἐφ' ἕτερα, τὰ μέρη α ϗ γ, ἔνθα αἱ τῶν Ὀρθῶν εἰσι μείζονες, ἢ αἱ Ὀρθαῖς δυσὶν ἴσαι· προσθείην δ' ἂν ἢ ἐφ' ἑκάτερα. Ἀλλ' εἰ μὲν ἐπ' ὐδέτερα, Παράλληλοι (4) ἔσονται αἱ Εὐθεῖαι αβ, γδ. Ἀλλὰ τοιαῦται ὖσαι, τὰς ἐντὸς ϗ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, δυσὶν Ὀρθαῖς ἔχυσιν ἴσας (5)· ἔσονται ἄρα αἱ ὑπὸ εβζ, ϗ δζε, δυσὶν Ὀρθαῖς ϗ ἴσαι, καὶ μή.

κ. 97. Ἀλλὰ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ η, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ ὑπὸ αεζ, γζε δυοῖν Ὀρθῶν μείζονες· καὶ Τρίγωνον συςήσεται τὸ ηεζ. Καὶ δὴ αἱ μὲν ὑπὸ ηεζ, ϗ ηζε, μείζονές εἰσι δυοῖν (6) Ὀρθῶν, αἱ δὲ ὑπὸ ηεζ, ϗ ζεβ (7) δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί· μείζονες ἄρα αἱ ὑπὸ ηεζ, ϗ ηζε, τῶν ὑπὸ ηεζ, καὶ ζεβ· ϗ κοινῆς ἀφαιρεθείσης τῆς ὑπὸ ηεζ, μείζων ἡ ὑπὸ ηζε (8) τῆς ὑπὸ βεζ. Ἐπὶ ἄρα τῦ εζη Τριγώνυ, ἐλάσσων ἡ ἐκτὸς ὑπὸ βεζ, τῆς ὑπὸ ηζε ἐντὸς ϗ ἀπεναντίον. Ὅπερ (9) ὐκ ἔςι.

Ὡσαύτως τὸ ἄτοπον δειχθήσεται καὶ τῶν ὑπὸ αεζ, ϗ γζε, ἐφ' ἃ μέρη συμβαίνειν λέγεται ἡ σύμπτωσις, Ὀρθῶν ὑποτιθεμένων· ἄλλως τε δέ, ϗ ἀντιφάσκοντα τεθείσεται πρὸς τὸ προσληφθὲν Α. Λῆμμα.

Τελευταῖον ὐδ' ἂν ἐφ' ἑκάτερα συνέλθοιεν· ὐ γὰρ Εὐθεῖαι δύο χωρίον ποτὲ περιέξυσι (10).

Πᾶσα ἄρα ἀνάγκη συνελθεῖν αὐτάς, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο Ὀρθῶν ἐλάσσονες.

---

(1) Ἐξ ὑποθ. (2) ιγ. Βιβ. α. (3) Ἐξ ὑποθ. (4) Ὁρ. λε. (5) Λῆμ. β. (6) Ἐξ. ὑποθ. (7) ιγ. Βιβλ. α. (8) Δ'ξ. γ. (9) ις. Βιβ. α. (10) Δ'ξ. ιγ.

Καὶ ταῦτα μὲν οὕτω σαθροῖς θεμελίοις ἐπῳκοδόμηται.

Δεῖξις ἡ κατὰ Πρόκλον.

Α'ξίωμα.

„Ε'ὰν ἀφ' ἑνὸς Σημείȣ δύο ἐκβάλλωνται Εὐθεῖαι, Γωνίαν ποιȣ̃σαι ἐπ' „ἄπειρον, πᾶν πεπερασμένον Μέγεθος ὑπερβάλλει ἡ διάστασις αὐτῶν τῶν εἰς „ἄπειρον ἐκβαλλομένων.

Τῷ δ' Α'ξιώματι τȣ́τῳ ϗ Α'ριστοτέλης ἐχρήσατο, δεικνὺς τὸν κόσμον μὴ εἶναι ἄπειρον. Α'πείρων γὰρ ȣ̓σῶν τῶν ἀπὸ τȣ̃ Κέντρȣ πρὸς τὴν Περιφέρειαν ἐκβαλλομένων, ἄπειρον τὸ μεταξύ. Πεπερασμένȣ γὰρ ὄντος αὐξῆσαι τὴν διάστασιν ἀδύνατον. Ω'̃στε ȣ̓κ ἄπειροι αἱ Εὐθεῖαι.

Λῆμμα.

„Ε'ὰν Παραλλήλων Εὐθειῶν τὴν ἑτέραν (αβ), Εὐθεῖά τις (ἡ εζ) τέμνῃ· „τεμεῖ προεκβληθεῖσαν ϗ τὴν λοιπήν (γδ).

Ε'πεὶ γὰρ Εὐθεῖαι δύο εἰσὶν ἀφ' ἑνὸς Σημείȣ τȣ̃ ζ εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι, αἱ ζα, ζθ, παντὸς Μεγέθȣς μείζονα ἔχȣσι διάστασιν (1)· ὥστε ϗ τȣ́τȣ ὅσον ἐστὶ τὸ μεταξὺ τῶν Παραλλήλων· ὅταν οὖν μεῖζον ἀλλήλων διαστῶσι τῆς τȣ́των διαστάσεως, τεμεῖ ἡ ζθ τὴν γδ. Ε'ὰν ἄρα Παραλλήλων τὴν ἑτέραν τέμνῃ τις Εὐθεῖα κτ κ. 98.

Θεώρημα.

„Ε'̃στωσαν δύο Εὐθεῖαι (αἱ αβ, γδ), ϗ ἐμπιπτέτω εἰς αὐτὰς ἡ εζ, „ἐλάσσονας δύο Ο'ρθῶν ποιȣ̃σα, τὰς ὑπὸ βεζ, δζε· λέγω ὅτι συμπε„σȣ̃νται αἱ Εὐθεῖαι κατὰ ταῦτα τὰ μέρη, ἐφ' ἃ αἱ τῶν δύο Εὐθειῶν εἰ„σιν ἐλάσσονες.

Ε'πειδὴ γὰρ αἱ ὑπὸ βεζ, δζε ἐλάσσȣς εἰσὶ δύο Ο'ρθῶν· τῇ ὑπεροχῇ τῶν δύο Ο'ρθῶν ἔστω ἴση ἡ ὑπὸ θεβ (2), ϗ ἐκβεβλήσθω ἡ θε (3) ἐπὶ τὸ κ. Ε'πεὶ οὖν εἰς τὰς κθ, γδ ἐμπέπτωκεν ἡ εζ, ϗ ποιεῖ τὰς ἐντὸς δυσὶν Ο'ρθαῖς ἴσας, τὰς ὑπὸ θεζ, ϗ δζε, Παράλληλοί εἰσιν αἱ (4) θκ, γδ Εὐθεῖαι. Α'λλὰ τέμνει τὴν κθ (5) ἡ αβ, τεμεῖ ἄρα (6) ϗ τὴν γδ. κ. 99.

---

(1) *Διὰ τὸ Α'ξ.* (2) *κγ. Βιβ. α.* (3) *Αἴτ. β.* (4) *κη. Βιβ. α.* (5) *Ε'κ κατ.* (6) *Διὰ τὸ Λῆμμα.*

Α'λλ' ὐδὲ τύτοις ἔοικεν ἀγαπᾷν ὁ νεώτερος Τακυέτιος, ἐπαπορεῖ δὲ δι' ὃν λόγον ἐν ὁρισμῷ λϛ'. φθάσας ἐξέθετο.

Δεῖξις ἡ κατὰ Κλάβιον.

Λῆμμα Α.

σχ. 100. Ε'ὰν ἐπὶ τῆς Εὐθείας βθ πρὸς ὀρθὰς ἀχθείσης τῆς βο, Γωνία συςαθῇ ὀξεῖα ἡ ὑπὸ βοφ, αἱ ἄλλαι Κάθετοι ρπ, τσ, αἱ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βθ ἀγόμεναι, ϗ ἀπὸ τῆς αὐτῆς οφ περατύμεναι, ἀεὶ ἐλάττονες, ϗ ἐλάττονες ἔσονται.

Ε'πεὶ ἀχθείσης τῆς βπ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς οφ (ἣ καὶ ἐπὶ τὰ μέρη τῆς ὀξείας Γωνίας κείσεται· δεῖ γὰρ τὰς δύο τὰς ὑπὸ βοπ, καὶ βπο, δυοῖν Ο'ρθῶν εἶναι ἐλάσσονας (1)· ἀδύνατον δὲ τὴν μὲν Ο'ρθὴν εἶναι, τὴν δὲ Α'μβλεῖαν ἐπὶ τῦ Τριγώνυ πβο)· εἶτα καὶ ἐπὶ τῆς βθ πρὸς ὀρθὰς ἀχθείσης τῆς πρ, ϗ τῆς ρσ ὁμοίως πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς οφ, ϗ τῆς στ ὡσαύτως πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς βθ, κτ· φανερὸν ὅτι ἡ μὲν βο, μείζων (2) ἔςαι τῆς βπ, ἡ δὲ τῆς πρ, ἡ δὲ τῆς ρσ, ἡ δὲ τῆς στ, ὡς ὑποτείνυσαι τὴν Ο'ρθὴν, ὑποτεινυσῶν τὴν Ο'ξεῖαν.

Λῆμμα Β.

Τῆς ὑπὸ τσπ Α'μβλείας ὔσης, αἱ πρ, οβ, κτ· αἱ πρὸς Ο'ρθὰς ὖσαι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βθ, ἐφ' ἃ μέρη ἐςὶν ἡ Α'μβλεῖα, ἀεὶ μείζονες ἔσονται, ϗ μείζονες· οἷον ἡ μὲν σρ, ἀεὶ μείζων τῆς στ, τῆς δὲ σρ μείζων ἡ πρ, τῆς δὲ πρ μείζων ἡ βπ, τῆς δὲ βπ, ἡ βο, ὡς ἐν τῷ α'. Λήμματι.

Λῆμμα Γ.

Ε'πειδὴ τοίνυν ἐπὶ τῆς βτ πρὸς ὀρθὰς ἤχθησαν ἴσαι αἱ τσ, βψ, ἐπιζευχθείσης τῆς σψ, αἱ ὑπὸ σψβ, ϗ ψστ Ο'ρθαὶ ἄμφω ἔσονται. Εἰ μὴ γὰρ, ἀλλ' ἡ ἑτέρα Ο'ξεῖα ᾖ, ἡ γῦν Α'μβλεῖα, αἱ Κάθετοι ψβ, ϗ στ, ἴσαι μὲν οὔ, ἄνισοι δ' ἂν εἶεν, ϗ ἡ μὲν μείζων, ἡ δὲ ἐλάσσων. Ω'ς ἐπὶ τῶν ἀνωτ. Λημμάτων.

Θεώρημα.

,,Ε'ὰν Εὐθεῖα ἡ αο, εἰς Εὐθείας τὰς οδ, αλ ἐμπίπτυσα, τὰς ὑπὸ

(1) ιζ. Βιβ. α. (2) ιθ. Βιβ. α.

„ αοδ, ϗ οαλ, δυοῖν Ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, λέγω δὴ ὅτι προεκβληθεῖ-„ σαι αἱ οδ καὶ αλ, συμπεσῦνται ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο Ὀρθῶν ἐ-„ λάσσονες.

Ἐὰν γὰρ ἐπὶ τὰ μέρη τῆς ὑπὸ αοδ Ὀξείας, πρὸς ὀρθὰς ἀχθῇ ἀπὸ τῦ α Σημείυ ἡ αβ ἐπὶ τῆς οδ, ληφθῇ δὲ ἐπὶ τῆς αλ, τυχὸν Σημεῖον τὸ ε, ἐπὶ δὲ τῆς αβ πρὸς ὀρθὰς ἀχθῇ ἡ εζ, εἶτα ληφθῇ ἡ εκ ἴση τῇ αε, καὶ προαχθείσης τῆς εμ ἴσης τῇ εζ, συζευχθῇ ἡ κμ· ἴση ἔςαι καὶ αὕτη τῇ αζ, ἥτε ὑπὸ εμκ, ἴση τῇ Ὀρθῇ ὑπὸ αζε (ὅτι αἱ δύο εκ, εμ, ἴσαι ταῖς δυσὶν αε, εζ, περιέχυσι δὲ ϗ Γωνίας ἴσας τὰς κατὰ τὴν κορυφὴν ε). Ληφθεῖσα δὲ ἡ ζη ἴση τῇ αζ, ἴση ἔςαι ϗ τῇ μκ· καὶ συζευχθεῖσα ἡ ηκ, πρὸς ὀρθὰς ςήσεται ἐπὶ τῆς αη (ὡς δῆλον ἐκ τῦ γ'. Λήμματος), τῶν μκ, ζη ἴσων τε ὑσῶν ἀλλήλαις, ϗ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς ζμ ἱςαμένων. — ϰ. 100.

Ἐὰν ἄρα ϗ τῇ ακ, ἴση ληφθῇ ἡ κλ, ϗ τῇ αη ἴση ηθ, προαχθείσης τῆς ηκ ἐπὶ τὸ ν, ϗ τῆς κν ἴσης ληφθείσης τῇ ηκ, ἐπιζευγνυμένη ἡ λν, ἴση δειχθήσεται τῇ αη, ἥτε πρὸς τῷ ν Γωνία Ὀρθὴ, καθάπερ ἡ ὑπὸ αηκ. Καὶ ἐὰν ἐπιζευχθῇ ἡ λθ, πρὸς ὀρθὰς ςήσεται ϗ αὐτὴ ἐπὶ τὴν αθ. Κείσθω οὖν ἡ λγ ἴση τῇ αλ, ϗ θι ἴση τῇ αθ· ἐὰν ἐπιζευχθῇ ϗ ἡ γι, πρὸς ὀρθὰς ϗ αὕτη ςήσεται ἐπὶ τὴν αι.

Ἀλλὰ γὰρ ληφθείσης τῆς μὲν ζη ἴσης τῇ αζ, ϗ τῆς ηθ ἴσης τῇ αη, ϗ τῆς θι ἴσης τῇ αθ, ϗ οὕτως ἐφεξῆς, ἔςαι ποτ' ὅτε ἡ αι, μείζων ἔςαι τῆς αβ, ϗ οὕτως ἡ βδ ἐντὸς τῦ Τριγώνυ αιγ ἐνσχεθήσεται· ἐὰν ἄρα προαχθείη ἡ βδ, ἔξω τέως τῦ πεπερασμένυ διαςήματος τῦ Τριγώνυ γενήσεται. Ἐπεὶ δὲ ὐκ ἂν συνέλθοι ποτὲ τῇ βάσει ιγ, τῇ διὰ τὰς ὑπὸ δβι, ϗ γιβ τὰς δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ὔσας, πρὸς αὐτὴν Παραλλήλῳ (1), συμπεσεῖται ἄρα ἡ βδ τῇ αγ Πλευρᾷ κατὰ τὸ υ. Ἄρ' οὖν αἱ οβδ, ϗ αλ, εἰς ἃς ἐμπίπτει ἡ αο, ἢ ἡ αβ, ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δυοῖν Ὀρθῶν προεκβαλλόμεναι ὐκ εἰσὶν ἀσύμπτωτοι.

Καὶ αὕτη μὲν ἡ κατὰ Κλάβιον ἀπόδειξις, ἣν μηδαμῶς μὲν ἠρτῆσθαι τῆς θεωρίας τῶν Παραλλήλων ὁ Τακυέτιος ἔφησεν, εἶναι δὲ διεξοδικωτάτην τε, ϗ ἐργωδεςάτην.

Δεῖξις ἡ κατὰ Τακυέτιον. — ϰ. 101.

Κείσθωσαν αἱ ὑπὸ γβα, δαβ δυοῖν Ὀρθῶν ἐλάσσονες, ϗ ἔςωσαν αἱ ὑπὸ γβα, φαβ δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι (συςάσης ἀμέλειτοι τῆς ὑπὸ φαβ ἴσης τῇ (2)

(1) κη. Βιβ. α. (2) κγ. Βιβ. α.

ὑπὸ μβγ)· ϗ ἔσονται αἱ βγ, αφ Παράλληλοι (1), ἡ δὲ ὑπὸ φαβ, μείζων (2) τῆς ὑπὸ δαβ, τῇ ὑπεροχῇ τῆς ὑπὸ φαδ. Τȣ́των οὕτω κειμένων, προσληπτέον δίκην Α'ξιώματος καθ' αὐτὸ τὸ γνώριμον ἔχοντος, ὅτι μεταξὺ τῶν αδ καὶ αφ ἐπ' ἄπειρον προηγμένων, ἐξέςαι τῇ αμ Παράλληλον ἀγαγεῖν τὴν ψφ, ἥτις μείζων εἴη τῆς αβ. Εἰλήφθω τῇ φψ ἴση ἡ αρ, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ ψρ. Ε'πεὶ τοίνυν αἱ αρ, φψ Παράλληλοί εἰσιν, αἱ ἐναλλὰξ ὑπὸ φψα, ϗ ραψ, ἔσονται (3) ἴσαι. Εἰσὶ δὲ ϗ αἱ Πλευραὶ φψ, ψα, ἴσαι ταῖς ρα, αψ (4). Α'ρα καὶ αἱ ὑπὸ ρψα, φαψ (5) ἴσαι εἰσί. Καὶ ἡ ρψ Παράλληλός (6) ἐςι τῇ αφ. Α'λλὰ ϗ ἡ βγ Παράλληλός ἐςι τῇ αφ. Α'ρα αἱ ρψ, ϗ βγ (7) Παράλληλοι εἰσίν. Ε'ςιν ἄρα ἡ βγ ϗ παράλληλος τῇ ρψ, ϗ ἐγκεκλεισμένη τῷ Τριγώνῳ αρψ· καὶ δὴ ἐπ' ἄπειρον προεκβαλλομένη, ϗ ὔτε τῇ Παραλλήλῳ ρψ συμπεσεῖν δυναμένη, ȣ̓δὲ ἐπὶ τὸ α γενέσθαι (8), τῇ αδ προεκβληθείσῃ ἡ βγ ἐξ ἀνάγκης συμπεσεῖται. Ο. F. Δ.

Αὐτὸς δὲ τȣ̃το ὡδέπως δείκνυμι.

κ. 102. Διὰ τȣ̃ δ Σημείȣ ἤχθω (9) ἡ δε Παράλληλος πρὸς τὴν αβ· προεκβεβλήσθω δὲ ἐπ' εὐθείας τῇ δε ἡ εφ (10) ἐπ' ἄπειρον, ὁμοίως δὲ ϗ τῇ δγ ἡ γχ, ϗ ἤχθω Κάθετος ἀπὸ τȣ̃ α ἐπὶ τὴν δγ προεκβληθεῖσαν (11) ἡ αθ. Μεταξὺ δὲ τῶν δχ, δφ εἰς ἄπειρον διαζευγνυμένων, κείσθω πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς δχ ἡ μλ (12) μείζων τῆς αθ· ϗ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μλ μείζονος ἡ ρλ ἴση τῇ (13) ἐλάσσονι αθ, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ ρα, ἥτις (μεταξὺ τῶν Σημείων ρ ϗ α παρεμπίπτȣσαν) τεμεῖ τὴν δφ κατὰ τὸ ζ, διὰ δὲ τὰς ἴσας Καθέτȣς (ὁρ. λς'.) αθ, ρλ, Παράλληλός ἐςι πρὸς τὴν δλ. Διὰ γȣ̃ν τȣ̃ Σημείȣ ζ, ἤχθω Παράλληλος τῇ αγ ἡ ζκ. Αὗται δὴ ἔσονται ϗ ἴσαι ἀλλήλαις· ἐὰν γὰρ ἀπὸ ζ πρὸς Ο'ρθὰς ἀχθῇ ἐπὶ τῆς δλ ἡ ζι (14), ἐπὶ τῶν Τριγώνων κζι, γαθ, αἱ ὑπὸ ζκι, ϗ ζικ, ἴσαι ταῖς ὑπὸ αγθ, ϗ αθγ ἑκατέρα ἑκατέρᾳ (15). Α'λλὰ ϗ ἡ Πλευρὰ ζι ἴση τῇ αθ (16). Α'ρα (17) ϗ ζκ ἴση τῇ αγ. Καὶ Γωνία δὲ ἡ ὑπὸ βαγ ἴση (18) τῇ ὑπὸ δεγ, ἡ δὲ τῇ ὑπὸ εζκ. Α'ρα ϗ ὑπὸ βαε (19) ἴση τῇ ὑπὸ εζκ.

Ω'ςε ἐπεὶ αγ δέδεικται ἴση τῇ ζκ, ἐφαρμόσȣσι (20). Καὶ Γωνία δὲ ἡ ὑπὸ

(1) κη. Βιβ. α. (2) Ο'ρ. ιβ. (3) κθ. Βιβ. α. (4) Ε'κ κατ. (5) δ. Βιβ. α. (6) κζ. Βιβ. α. (7) λ. Βιβ. α. (8) Α'ξ. ιγ. ϗ ιδ. (9) λα. Βιβ. α. (10) Α'ιτ. β. (11) ιβ. Βιβ. α. (12) ιβ. Βιβ. α. (13) γ. Βιβ. α. (14) ιβ. Βιβ. α. (15) κθ. Βιβ. α. ϗ διὰ τὴν κατ. (16) Ο'ρ. λς. (17) κς. Βιβ. α. (18) κθ. Βιβ. α. (19) Α'ξ. γ. (20) Α'ξ. η.

βαε, ἴση ἔστα τῇ ὑπὸ εζη ὁμοίως ἐφαρμόσει· ὡσαύτως δὲ καὶ ὑπὸ αγδ τῇ ὑπὸ ζκδ· καὶ ἐὰν ἄρα νοήσῃς τὸ βαγδ κείμενον ἐπὶ τῦ δζκ Τριγώνυ, ὥστε τὴν αγ πεσεῖν ἐπὶ ζκ, καὶ αβ πεσεῖται ἐπὶ ζδ, καὶ γδ ἐπὶ κδ. Ἀλλ' αἱ ζδ, κδ, οὕτως αὗταί εἰσιν αἱ αβ, γδ προεκβληθεῖσαι, καὶ συμπίπτυσαι ἐπὶ τὸ δ. Ἐὰν ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

Ἐκ δὴ τύτυ φανερὸν τὰς μὴ Παραλλήλυς Εὐθείας προεκβαλλομένας τέως συμπίπτειν· περὶ οὗ ἦν ἐνδοιάζειν, διὰ τὸν ἐπαχθέντα λόγον Ὁρισμ. λϛ'. Ἔστωσαν γὰρ Εὐθεῖαι μὴ Παράλληλοι αἱ αβ, γδ, εἰς ἃς ἐμπίπτυσα ἡ αγ· διὰ δὲ τῦ γ ἤχθω ἡ γε Παράλληλος πρὸς τὴν (1) αβ. Ἔσονται δὴ αἱ ὑπὸ εγα, καὶ βαγ (2) δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι· ἄρα αἱ ὑπὸ δγα, καὶ βαγ (3) δυοῖν Ὀρθῶν εἰσιν ἐλάσσονες. Ἄρα διὰ τὸ προαποδεδειγμένον Θεώρημα, αἱ αβ, καὶ γδ συμπεσῦνται. κ. 103.

Πόρισμα Β'.

Φανερὸν δὲ καὶ ὅτι ἐὰν Εὐθεῖα ἡ γδ ἐπ' ἄπειρον προεκβάλλοιτο, ἀπείρυς Εὐθείας ἀλλήλαις Παραλλήλυς, ἐπ' ἄπειρον καὶ αὐτὰς (δεῆσαν) προεκβαλλομένας τεμεῖ, τὰς αβ, εζ, ηθ, ικ. κτ. Εἰ γὰρ ἡ αβ Παραλλήλυ τῆς εζ ἐπίσης (4) ἀφίσαται, τέμνεται δὲ ὑπὸ τῆς γδ, ὐκ ἄρα σώζει καὶ πρὸς αὐτὴν τὸ παράλληλον. Ἡ ἄρα δγ ὐδὲ πρὸς τὴν εζ ἔσαι Παράλληλος (εἰ γὰρ, ἦν ἂν (5) καὶ πρὸς τὴν αβ ἣν τέμνει· ὅπερ ὐκ ἔσι (6))· τέμνει ἄρα ἡ δγ καὶ τὴν εζ. Διὰ δὲ τὸν αὐτὸν λόγον μηδὲ πρὸς τὴν ηθ, ἢ ικ, κτ. παράλληλος ὖσα ἡ δγ, τέμνει καὶ ταύτας προεκβληθεῖσα, καὶ ἀπείρυς Παραλλήλυς ἐπ' ἄπειρον. κ. 104.

Προτάσεως ΛΒ'. Μέρος Α'.

„Παντὸς Τριγώνυ μιᾶς τῶν Πλευρῶν προεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς Γωνία „(ὑπὸ αγδ), δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον (ταῖς κατὰ τὸ α καὶ β) ἴση ἐσί.

Ἤχθω διὰ τῦ γ τῇ βα Παράλληλος ἡ γε (7)· ἐπεὶ δὲ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτει ἡ αγ, ἔσαι (8) ἡ ὑπὸ εγα, ἴση τῇ ὑπὸ γαβ· ὡσαύτως ἐμπιπτύσης καὶ τῆς βδ, ἔσαι (9) καὶ ἡ ὑπὸ δγε, ἴση τῇ ὑπὸ γβα. Ἡ ἄρα ὅλη ὑπὸ αγδ, ἴση δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον. Ο. Ε. Δ. κ. 105.

---

(1) λα. Βιβ. α. (2) κθ. Βιβ. α. (3) Ὁρ. θ (4) Ὁρ. λϛ. (5) λ. Βιβ. α. (6) Διὰ τὸ Πόρ. τὸ ἀνωτ. (7) λα. Βιβ. α. (8) κθ. Βιβ. α. (9) κθ. Βιβ α.

Πορίσματα.

Α. Η᾿ ἄρα ἐκτὸς ἑκατέρας τῶν ἐντὸς, ϗ ἀπεναντίον μείζων. Ε῎ςι δὲ ἡ παρ' Εὐκλείδῃ Ις΄. ἧς τὴν δεῖξιν εἰς τό δε ὁ Τακκέτιος ὑπερέθετο.

κ. 106. Β. Καὶ Γωνιῶν τῶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς Βάσεως αβ, μείζων τῆς ὑπὸ αγβ περιεχέσης, ἡ ὑπὸ αδβ περιεχομένη. Προαχθείσης γὰρ τῆς βδ κατὰ τὸ ε, ἡ ὑπὸ βδα μείζων τῆς ὑπὸ δεα, ἡ δὲ τῆς ὑπὸ εγδ· τὸ δὲ ἦν τὸ δεύτερον τῆς ΚΑ΄. Προτ. μέρος, ὅπερ ἐνταῦθα δεῖξαι ὁ Τακκέτιος ὑπέσχετο.

κ 107. Γ. Ω῾ς ἂν Εὐθεῖαι αἱ αβ, αγ ἐπὶ τῆς αὐτῆς Εὐθείας δε, ἀπὸ τῦ αὐτῦ Σημείε α ςαθῶσιν ἡ μὲν πρὸς ὀρθὰς ἡ αβ, ἡ δὲ πλαγίως ἡ αγ, κείσεται μὲν ἡ Κάθετος αβ, ἐφ' ἃ μέρη ἐςὶν ἡ ὀξεῖα Γωνία ὑπὸ αγβ, ἡ δὲ μὴ πρὸς ὀρθὰς, τὴν ὀρθὴν Γωνίαν ὑπὸ αβγ ὑποτενεῖ. Εἰ μὴ γὰρ, ὑποτεινέτω μὲν (κειμένη ἔνθα ἡ αζ) ἡ Κάθετος, τὴν ὑπὸ αγζ Α᾿μβλεῖαν, ὑποτεινέτω δὲ ἡ μὴ πρὸς ὀρθὰς αγ, τὴν ὑπὸ αζγ Ο᾿ξεῖαν· καὶ ὅτως ἔςαι ἡ μὲν ὑπὸ αζε Ο᾿ρθὴ (1) μείζων τῆς ὑπὸ αγε Α᾿μβλείας, ἡ ἐκτὸς τῆς ἐντὸς ϗ ἀπεναντίον, ἡ δὲ ὑπὸ αγδ Ο᾿ξεῖα (2) μείζων τῆς ὑπὸ αζγ Ο᾿ρθῆς, ἡ ἐκτὸς τῆς ἐντὸς ϗ ἀπεναντίον (3)· τῦτο δὲ ἄτοπον (4). Α῎ρα κτ.

Προτάσεως ΛΒ΄. Μέρος Β΄.

„Καὶ αἱ ἐντὸς τῦ Τριγώνε Γωνίαι δυσὶν Ο᾿ρθαῖς ἴσαι. Διὸ ϗ μοίρας 180 συναποτελῦσιν.

κ. 108. Μιᾶς γὰρ τῶν Πλευρῶν αβ κατὰ τὸ ζ προεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς ὑπὸ ζβγ, δυσὶ ταῖς ἐντὸς (5) ϗ ἀπεναντίον α ϗ γ ἴση ἐςί. Κοινῆ γῦν προςεθείσης τῆς ὑπὸ γβα, δυσὶ ταῖς ὑπὸ ζβγ, γβα (6) αἱ τρεῖς τῦ Τριγώνε ἴσαι εἰσίν. Α᾿λλ' αἱ δύο δυσὶν Ο᾿ρθαῖς εἰσιν ἴσαι (7). Καὶ αἱ τρεῖς ἄρα (8) τῦ Τριγώνε ἐντὸς Γωνίαι δυσὶν Ο᾿ρθαῖς ἴσαι εἰσί.

Α῎λλως.

κ. 109. Διὰ τῆς Γωνίας γ ἤχθω εζ παράλληλος τῇ ὑποτεινέσῃ αβ (9). Καὶ ἐπεὶ αἱ ἐναλλὰξ η ϗ κ, ϗ αἱ ἄλλαι θ ϗ λ ἴσαι (10) ἀλλήλαις εἰσίν· αἱ δὲ τρεῖς η, ι, θ (11) δυσὶν Ο᾿ρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Α῎ρα (12) καὶ αἱ τρεῖς ι, κ, λ δυσὶν Ο᾿ρθαῖς ἴσαι εἰσί.

---

(1) Ε᾿ξ ὑποθ. (2) Ε᾿ξ ὑποθ. (3) Πόρ. α. (4) Ο᾿ρ. ιδ. ιε. ις.΄ (5) Διὰ τὸ α΄. Μέρος. (6) Α᾿ξ. β. (7) ιγ. Βιβ. α. (8) Α᾿ξ. α. (9) λα. Βιβ. α. (10) κθ. Βιβ. α. (11) α. Πόρι. τῆς ΙΓ΄. τῦ Α΄. (12) Α᾿ξ. α.

Ἐγὼ δὲ καὶ Ἄλλως δείξω.

Ληφθήτω ἐπὶ μιᾶς τῶν Πλευρῶν, οἷον τῆς αβ, τυχὸν Σημεῖον τὸ ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γε. Διὰ μὲν οὖν τὸ Α΄. Μέρος ἡ ὑπὸ γεβ ἴση ταῖς ὑπὸ εαγ, καὶ αγε· ὡσαύτως ἡ ὑπὸ γεα, ἴση ταῖς ὑπὸ εβγ, καὶ βγε. Αἱ δύο ἄρα αἱ ἐφεξῆς πρὸς τῷ ε, τρισὶ ταῖς ὑπὸ βγα, καὶ γαβ, καὶ αβγ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλ᾽ ἐκεῖναι δυσὶν Ὀρθαῖς (1) ἴσαι εἰσίν. Ἄρα καὶ αὗται. κ. 110.

Πορίσματα.

Οὑτινοσοῦν εὐθυγράμμου Τριγώνου, αἱ τρεῖς Γωνίαι ἅμα ληφθεῖσαι, εἰσὶν ἴσαι ταῖς οὑτινοσοῦν Εὐθυγράμμου τρισὶ Γωνίαις ἅμα ληφθείσαις. Δ.

Καὶ ἐὰν ἐν Τριγώνῳ ἡ μία Ὀρθὴ ᾖ, ἢ μείζων Ὀρθῆς· αἱ λοιπαὶ Ὀξεῖαι εἰσίν, ἡ δὲ Γωνία ὑφ᾽ ἣν ἡ μὴ μεγίστη τῶν ἐν τῷ Τριγώνῳ Πλευρῶν ὑποτείνει, ἀείποτε (2) Ὀξεῖα ἐστί. Ε.

Μιᾶς δὲ ἐν τῷ Τριγώνῳ Ὀρθῆς οὔσης, δύο ἅμα αἱ λοιπαὶ μίαν Ὀρθὴν συναποτελοῦσι. Ϛ.

Καὶ ἡ δυσὶ ταῖς λοιπαῖς ἅμα ἐν τῷ Τριγώνῳ ἴση οὖσα Γωνία, Ὀρθὴ ἔσται. Ζ.

Δοθεισῶν τῶν μοιρῶν μιᾶς τινος τῶν Γωνιῶν, φανερὸν ὅσας μοίρας καὶ δύο αἱ λοιπαὶ ἅμα συναποτελοῦσι· καὶ ἀνάπαλιν. Η.

Ἐὰν Τριγώνου αἱ δύο Γωνίαι, ἤτοι ἑκατέρα ἰδίᾳ, ἢ ἅμα, Τριγώνου ταῖς δυσὶ Γωνίαις, ἤτοι ἑκατέρᾳ ἰδίᾳ, ἢ ἅμα ἴσαι ὦσι, καὶ ἡ λοιπὴ τῇ λοιπῇ ἴση ἔσται. Ἐκ δὲ τούτου τοῦ Πορίσματος καὶ τῆς ΚϚ΄. τὸ Β΄. Μέρος ῥαδίως δείκνυται. Θ.

Δυοῖν Τριγώνων ἐὰν Γωνία Γωνίᾳ, μία μιᾷ ἴση ᾖ, καὶ αἱ λοιπαὶ ταῖς λοιπαῖς ἴσαι ἔσονται, εἴτε ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, εἴτε καὶ ἅμα. Ι.

Τῆς κατὰ κορυφὴν Γωνίας τοῦ Ἰσοσκελοῦς ὀρθῆς οὔσης, τῶν λοιπῶν πρὸς τὴν Βάσιν (3) ἡμίσεια Ὀρθῆς ἑκατέρα ἔσται. Καὶ τοῦ Ἰσοσκελοῦς αἱ πρὸς τὴν Βάσιν Γωνίαι ἀεὶ ὀξεῖαι. Καὶ ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ Ἰσοσκελοῦς ἐπὶ τὴν Βάσιν ἀγομένη Κάθετος (4) ἐντὸς πίπτει τοῦ Τριγώνου. ΙΑ.

Ἡ τοῦ ἰσοπλεύρου Τριγώνου Γωνία, τριτημόρια δύο Ὀρθῆς μιᾶς περιέχει, ἤτοι τριτημόριον ἓν (5) δυοῖν Ὀρθῶν· ὥστε ἐπεὶ Ὀρθαὶ δύο μοιρῶν εἰσιν 180, ἔσται δὴ τριτημόριον δυοῖν Ὀρθῶν, ἤτοι ἡ τοῦ Ἰσοπλεύρου Γωνία μοιρ. 60. Ταῦτα δὲ τριτημόριά ἐστι δύο Ὀρθῆς μιᾶς, ἥτις μοιρῶν ἐστιν 90. ΙΒ.

---

(1) ιγ. Βιβ. α. (2) ιη. Βιβ. α. (3) ε. Βιβ. α. καὶ ϛ. Πόρ. τῶν ἐνταῦθα. (4) Πόρ. γ. τῶν ἐνταῦθα. (5) Διὰ ταύτην καὶ τὸ Πόρ. τῆς Ε. Βιβλ. α.

σχ. 111. ΙΓ. Ἐντεῦθεν ϗ Γωνίαν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ βαγ, τριχοτομῆσαι ῥᾴδιον, Τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ αδγ ἐπὶ τῆς ἑτέρας τῶν Πλευρῶν αγ (1) συστήσαντας, ϗ τὴν ὑπὸ δαγ Γωνίαν (2) δίχα τεμόντας. Τῆς γὰρ ὑπὸ δαγ δύο τριτημόρια Ὀρθῆς (3) περιεχούσης, εὔδηλον ὅτι τῶν ὑπὸ βαδ, ϗ δαε, ϗ εαγ ἑκάστη Ὀρθῆς ἐστι τριτημόριον.

σχ. 112. ΙΔ. Ἁπασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ Σημείου α, ἐπί τινα Εὐθεῖαν βγ ἀχθῆναι δυναμένων Εὐθειῶν, ἐλαχίστη ἐστὶν ἡ Κάθετος αδ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ αεδ Γωνία ὀξεῖα, ἡ δὲ ὑπὸ αδε ὀρθὴ (4)· ϗ ἡ αδ ἐλάσσων ἔσται (5) τῆς αε ϗ οἱασοῦν ἄλλης.

ΙΕ. Ἀφ' ἑνός γε Σημείου ἐπὶ μίαν Εὐθεῖαν, μίαν μόνην ἔξεστι πρὸς ὀρθὰς ἀγαγεῖν.

Ις. Διὰ δὲ τοῦ Α'. Μέρους τῆς ἀνὰ χεῖρας Προτάσεως, ϗ τὴν ἀστέρων Παράλλαξιν, τουτέστι τὴν τοῦ ἀληθοῦς ἀπὸ τοῦ φαινομένου τόπου διαφορὰν διορίζειν καταμανθάνομεν.

σχ. 113. Ἔστω γῆς Κέντρον τὸ α, β δὲ ἔνθα ὁ παρατηρῶν, ϗ δβγ ἡ τοῦ ἀστέρος γ γωνιώδης Διάστασις ἡ ἀπὸ τοῦ κατὰ κορυφὴν Σημείου δ τῷ παρατηροῦντι καθορωμένη· ἔσω δὲ γωνιώδης Διάστασις ἡ ὑπὸ δαγ ἡ ἀληθής. Τοῦ μὲν οὖν αβγ Τριγώνου ἡ ἐκτὸς Γωνία ὑπὸ δβγ ἡ διὰ τῆς παρατηρήσεως διδομένη, δυσὶ ταῖς ἐντὸς ϗ ἀπεναντίον ὑπὸ βαγ, ϗ βγα ἴση (6) ἐστίν. Οὐκοῦν ἡ ὑπὸ βγα, ἔστι τῶν ὑπὸ δβγ, ϗ δαγ διαφορά. Ἐὰν οὖν ἡ ὑπὸ δαγ ἡ δι' ἐπιλογισμοῦ γινωσκομένη, ἀπὸ τῆς ὑπὸ δβγ, ἣν ἡ παρατήρησις δίδωσιν ἀφαιρεθῇ, ἡ τούτων τῶν Γωνιῶν διαφορὰ (ἤτοι ἡ ὑπὸ βγα) ἣν Παράλλαξιν ἀποκαλοῦμεν, ἔσται κατάδηλος. Ο. Η. Ε.

ΙΖ. Φανερὸν δὲ ϗ ἀπὸ τοῦ Β'. Μέρους ταύτης τῆς Προτ., ὅτι παντὸς Τριγώνου αἱ δύο Γωνίαι, δύο Ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, ἥτις ἦν ἡ ΙΖ'. Πρότ. ἡ εἰς τόδε τῷ Ταxουετίῳ ὑπερτεθεῖσα.

σχ. 114. ΙΗ. Ἐπὶ τοῦ ὀρθογωνίου σκαληνοῦ Τριγώνου τῶν ὀξειῶν Γωνιῶν, ὑφ' ἣν μὲν τῶν τὴν ὀρθὴν Γωνίαν β περιεχουσῶν Πλευρῶν, ἡ μείζων βγ ὑποτείνει, ἡμισείας Ὀρθῆς μείζων ἐστὶν (ἤτοι ἡ α)· ὑφ' ἣν δὲ, ἡ ἐλάσσων βα, ἡμισείας Ὀρθῆς ἐλάσσων (ἤτοι ἡ γ). Αἱ γὰρ ὀξεῖαι Γωνίαι α ϗ γ ἅμα ληφθεῖσαι (7) Γωνίαν ὀρθὴν συναποτελοῦσιν. Ἆρα ὑφ' ἣν μὲν ἡ μείζων Πλευρὰ βγ ὑποτείνει, ἡμισείας Ὀρθῆς ἐστι μείζων (8), ἡ α· ὑφ' ἣν δ' ἡ ἐλάσσων, ἐλάσσων, ἡ γ.

---

(1) α. Βιβ. α. (2) θ. Βιβ. α. (3) Πόρ. ἀνωτ. (4) Πόρ. ε. (5) ιθ. Βιβ. α. (6) Διὰ τὴν ἀνὰ χεῖρας. (7) Διὰ τὸ ς. Πόρ. (8) ιη. Βιβ. α.

Ἐντεῦθεν ϗ Πύργȣ, ἤτοι παντὸς Σημείȣ μετεώρȣ τὸ ὕψος διὰ τῆς ἡλίȣ σκιᾶς καταμετρεῖν δυνησόμεθα. Ἡλίȣ γὰρ ὑπὲρ τὸν Ὁρίζοντα μοίραις 45 ὑψȣμένȣ, εἰσὶν αἱ τῶν σωμάτων σκιαὶ κατ' ἐπιπέδȣ προβαλλόμεναι, τῷ ἐκείνων ὕψει ἀκριβῶς ἴσαι. Ἐπεὶ διὰ τὴν ὑπὸ αβγ Ὀρθὴν, ϗ τὴν ὑπὸ αγβ ἡμίσειαν (1) Ὀρθῆς, ἔσαι ϗ ἡ ὑπὸ βαγ ἡμίσεια Ὀρθῆς (2). Τῶν οὖν πρὸς τὴν Βάσιν Γωνιῶν ἴσων ὄντων, αἱ Πλευραὶ αβ, βγ ἴσαι (3) ἔσονται. Καταμετρηθείσης ἄρα τῆς βγ, ἔσαι δήλη ϗ ἡ αβ, τὸ τȣ̃ Πύργȣ ἀπὸ τȣ̃ Ὁρίζοντος ὕψωμα. ΙΘ. σχ. 115.

Ἐκ δὲ δὴ τȣ́των ϗ Γραμμὴν ἀπρόσβατον τὴν αβ καταμετρεῖν ῥᾴδιον. Τρίγωνον γὰρ Ἰσόπλευρον τὸ τυχὸν αδε, τῷ ἐπ' αὐτὸ Σημείῳ α ϗ τῇ Πλευρᾷ αδ πρὸς τῷ τῆς ἀπροσβάτȣ Σημείῳ α, κατὰ τὴν αὐτὴν ὑποτεθείσθω προσκείμενον. Ἀπὸ δὲ τȣ̃ Σημείȣ α ὡσεὶ Διόπτρας, διὰ Πλευρᾶς τῆς αε ὡσεὶ Διόπτρας, πάντα τὰ ἐπὶ τῆς Εὐθείας αγ Σημεῖα παρατηρείσθω, εὐθύτε κατ' αὐτὴν κινείσθω, ὥςε διὰ τῆς εδ Πλευρᾶς κατὰ τὴν γζ κειμένης, τὸ β τῆς ἀπροσβάτȣ ἀντικρὺ διοπτάνεσθαι· οὕτω ϗ γὰρ ἡ αγ βατὴ τῇ ἀπροσβάτῳ αβ ἴση ἔσαι. Ἐπὶ γὰρ τῶν βαγ, δαε, κοινὴ μὲν ἡ κατὰ τὸ α Γωνία, ἴσαι δ' ἀλλήλαις αἱ κατὰ τὸ ε ϗ γ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αδε τῇ ὑπὸ αβγ, ἡ λοιπὴ (4) τῇ λοιπῇ. Ἀλλὰ τὸ αδε ὑπετέθη Ἰσόπλευρον εἶναι, ϗ ἑπομένως (5) Ἰσογώνιον· τὸ ἄρα αβγ Ἰσογώνιον, ϗ ἐκ τȣ̃ ἀκολȣ́θȣ (6) ϗ Ἰσόπλευρον. Ἴση ἄρα τῇ βατῇ αγ ἡ ἀπρόσβατος αβ. Κ. σχ. 116.

Σχόλιον.

Τȣ̃ Καλλίςȣ τȣ̃δε, ϗ εὐφορωτάτȣ ἐν Θεωρήμασιν, οὗ πολλὴ δι' ὅλων τῶν Μαθημάτων ἡ χρῆσις, εὑρετὴν γενέσθαι τὸν Πυθαγόραν Εὔδημος ὁ ἀρχαῖος Γεωμέτρης μάρτυς ἐςί· συνεχῶς δὲ τȣ̃ αὐτȣ̃ μέμνηται ϗ Ἀριςοτέλης, ὃς ϗ δεῖγμα οἷον αὐτὸ ἀκριβȣ̃ς προβάλλεται ἀποδείξεως. Ἀλλ' ὥσπερ ἐπὶ τῶν Τριπλεύρων ἔγνωμεν ἐκ τȣ́τȣ τȣ̃ Θεωρήματος, ὅσαις Ὀρθαῖς αἱ πᾶσαι τρεῖς Γωνίαι εἰσὶν ἰσοδύναμοι, οὕτω ϗ ἐπὶ παντὸς Σχήματος εὐθυγράμμȣ, ὅσας αἱ ἐν αὐτῷ συναποτελȣ̃σι Γωνίας ὀρθὰς, διὰ τῶν ἐφεξῆς τριῶν Θεωρημάτων παιδευθησόμεθα.

Θεώρημα Α'.

„ Παντὸς Τετραπλεύρȣ αἱ τέτταρες Γωνίαι, τέτρασιν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί.

---

(1) Σχόλ. κγ. Βιβ. α. (2) Πόρ. ς. (3) ς. Βιβ. α. (4) Πόρ. ϑ. (5) Πόρ. τῆς Ε'. Βιβ. α. (6) Πόρ. τῆς ς'. τȣ̃ α'.

κ. 117. Ἐπιζευγνυμένης γὰρ διὰ τῶν ἀπεναντίον Γωνιῶν τῆς βδ, εἰς δύο Τρίγωνα τὸ Σχῆμα ἀναλυθήσεται, ἐφ᾽ ὧν ἑκατέρϐ αἱ Γωνίαι πᾶσαι δυσὶν (1) Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί.

Θεώρημα Β.

„Ἐπὶ παντὸς Σχήματος εὐθυγράμμϐ ἅπασαι αἱ Γωνίαι, δὶς τοσαύ-„τας πλὴν τεττάρων, Ὀρθὰς συναποτελϐσι Γωνίας, ὅσαι εἰσὶν αἱ τϐ „Σχήματος Πλευραί.

κ. 118. Ἀπὸ τϐ ἐντὸς τϐ Σχήματος Σημείϐ τυχόντος τϐ α, ἤχθωσαν ἐπὶ πάσας τὰς Γωνίας Εὐθεῖαι, εἰς τοσαῦτα τὸ Σχῆμα διαμερίζϐσαι Τρίγωνα, ὅσαι αἱ ἐπ᾽ αὐτῷ Πλευραί. Ἐπεὶ οὖν ἕκαςα τῶν Τριγώνων, δυσὶν Ὀρθαῖς (2) ἴσας φέρϐσι τὰς Γωνίας, πάντα πάντῃ δὶς τοσαύτας Ὀρθὰς παρέξϐσιν, ὅσαι αἱ τϐ Σχήματος Πλευραί. Ἀλλ᾽ αἱ περὶ τὸ Σημεῖον α Γωνίαι (3) τέτρασιν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ἐὰν ἄρα ἀπὸ πασῶν τῶν ἐν τοῖς Τριγώνοις Γωνιῶν, τὰς περὶ τὸ α ἀφέλῃς, δὶς τοσαύταις Ὀρθαῖς ἴσαι πλὴν τεττάρων, καταλειφθήσονται αἱ Γωνίαι, ὅσαι εἰσὶ τϐ Σχήματος αἱ Πλευραί.

Πόρισμα.

Καὶ φανερὸν ἄρα τῶν εὐθυγράμμων Σχημάτων τὰ ἰσάριθμα τὰς Πλευράς, ϗ ἑλικῶς εἰσιν Ἰσογώνια. Ὅπερ ϐκ ἔξω θαύματος.

Πρᾶξις.

Τὸν τϐ Σχήματος Παρονομαςὴν διπλασιάσαντι, ἀπό τε τϐ Παραγομένϐ τὸν ἀριθμὸν 4 ἀφελόντι, κατάλοιπος ἔςαι ὁ τῶν ὀρθῶν Γωνιῶν ἀριθμός, αἷς αἱ ἐντὸς τϐ Σχήματος Γωνίαι συνεξισϐνται.

Θεώρημα Γ.

„Ἐπὶ παντὸς Σχήματος εὐθυγράμμϐ, ἅπασαι αἱ ἐκτὸς Γωνίαι τέ-„τρασιν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί.

κ. 119. Αἱ γὰρ ἐφεξῆς δύο, δυσὶν Ὀρθαῖς (4) ἴσαι εἰσίν. Ἄρα αἱ ἐντὸς ἅμα πᾶσαι, συνάμα ταῖς ἐκτὸς ἅμα πάσαις, δὶς τοσαύταις Γωνίαις Ὀρθαῖς, ὅσαι αἱ τϐ Σχήματος Πλευραὶ, ἴσαι εἰσίν. Ἀλλὰ ϗ αἱ ἐντὸς ἅμα πᾶσαι (5)

---

(1) λβ. Βιβ. α. (2) λβ. Βιβ. α. (3) γ. Πόρ. τῆς ΙΓ. τϐ Α΄. (4) ιγ. Βιβ. α. (5) Ἀνωτ. Θεώρ. β.

συνάμα τέτταρσιν Ὀρθαῖς, δὶς τοσαύταις Ὀρθαῖς, ὅσαι αἱ τῦ Σχήματος Πλευραὶ, ἴσαι εἰσίν. Ἄρα αἱ ἐκτὸς μόναι (1) τέτταρσιν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί.

Π ό ρ ι σ μ α.

Θαυμαστὸν τῷ ὄντι τῦτὶ τῶν Εὐθυγράμμων τὸ πάθος· ἐξ ὗ κἀκεῖνο παρέπεται, ὅτι ϗ τὰ ὁπωσῦν τῷ εἴδει διαφέροντα ἐκτὸς εἰσὶν ὁλικῶς Ἰσογώνια, ὥστε ϗ Τριγώνυ τὰς τρεῖς ἐκτὸς, ἴσας εἶναι ταῖς χιλίαις ἐκτὸς Γωνίαις τῦ χιλιογώνυ Σχήματος. Τῦτο δὴ τὸ παράδοξον.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΓ.

„ Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ Παραλλήλυς (αβ, γδ) ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπι-„ ζευγνύυσαι Εὐθεῖαι (αγ, βδ), ϗ αὐταὶ ἴσαι τε ϗ Παράλληλοι εἰσί.

Ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς αδ, αἵτε ὑπὸ βαδ, ϗ αδγ ἴσαι ἀλλήλαις (2) εἰσὶν, αἵτε αβ ϗ γδ Πλευραὶ (3) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἥτε αδ κοινή. Ἄρα ϗ αγ (4) ἴση τῇ βδ. Ο. Η. τὸ Α΄. σχ. 120.

Ἀλλὰ ϗ ὑπὸ δαγ ἴση τῇ ὑπὸ αδβ. Ἄρα ϗ αγ (5) τῇ βδ Παράλληλος ἐστίν. Ο. Η. τὸ Β΄.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Ἐὰν Εὐθείας δύο Παραλλήλυς μὲν, ἀνίσυς δὲ, τὰς αβ, γδ, ἐπιζευγνύωσι δύο Εὐθεῖαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη αγ, βδ, προεκβαλλόμεναι αὗται αἱ ἐπιζευγνύυσαι, συμπεσῦνται ἐφ᾽ ἃ μέρη ἐστὶν ἡ τῶν Παραλλήλων ἐλάσσων γδ. Ἐὰν γὰρ ἀπὸ τῆς μείζονος ληφθῇ (6) βε, ἴση τῇ ἐλάσσονι γδ, ἐπιζευχθῇ δὲ ἡ εγ (7), αἱ εγ, ϗ βδ ἔσονται (8) Παράλληλοι. Οὐκοῦν αἱ ὑπὸ δβε, ϗ βεγ δυσὶν Ὀρθαῖς (9)· ἀλλ᾽ ἔστι δὴ ἡ ὑπὸ βεγ, μείζων τῆς ὑπὸ (10) εαγ. Ἄρα αἱ ὑπὸ δβα, ϗ βαγ, δυσῖν Ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσίν. Αἱ ἄρα Εὐθεῖαι βδ ϗ αγ ἀπ᾽ ἐλασσόνων ἢ δύο Ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι συμπεσῦνται (11). σχ. 121.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΔ.

„ Τῶν Παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον Πλευραί τε ϗ Γωνίαι „ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἡ Διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

---

(1) Ἀξ. γ. (2) κθ. Βιβ. α. (3) Ἐξ ὑποθ. (4) δ. Βιβ. α. (5) κζ. Βιβ. α. (6) γ. Βιβ. α. (7) Αἴτ. α. (8) λγ. Βιβ. α. (9) κθ. Βιβ. α. (10) ις. Βιβ. α. (11) Σχόλ. τὸ μετὰ τὴν λα. Βιβ. α.

σχ. 122. Καὶ γὰρ (1) ὑπὸ αβγ, ϗ βγδ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί· καὶ ὁμοίως ὑπὸ γβδ, ϗ βγα. Ἄρα (2) αἱ ὅλαι ὑπὸ αβδ, ϗ ὑπὸ αγδ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Ὡσαύτως δειχθήσονται ϗ αἱ λοιπαὶ ἀπεναντίον α, ϗ δ Γωνίαι ἴσαι. Ἐπὶ μὲν οὖν τῶν γαβ, ϗ γδβ Τριγώνων, δυοῖν ταῖς δυσὶ Γωνίαις ἴσων δειχθεισῶν ἑκατέρας ἑκατέρᾳ, ϗ ἡ γβ Πλευρὰ κοινή ἐϛιν· ἄρα ϗ αβ Πλευρὰ (3) ἴση τῇ γδ, ϗ αγ ἴση τῇ βδ. Ὥϛε ἴσαι ἀλλήλαις ϗ αἱ Πλευραὶ αἱ ἀπεναντίον, καὶ ὅλον δὲ τὸ Τρίγωνον (4) ἴσον ἐϛὶν ὅλῳ τῷ Τριγώνῳ, τὸ γαβ, τῷ γδβ. Ο. Ε. Δ.

Πορίσματα.

σχ. 123. Α'. Παραλληλόγραμμον, οὗ ἡ μία τῶν Γωνιῶν ὀρθὴ οἷον ἡ α, ἐϛὶν Ὀρθογώνιον, ἤτοι ϗ τὰς λοιπὰς Ὀρθὰς ἔχει. Αἱ γὰρ ἐντὸς δύο, αἱ κατὰ τὸ α ϗ γ (5) δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ἡ δὲ α Ὀρθή (6), ἄρα ϗ ἡ γ. Αἱ δὲ ἀπεναντίον ἴσαι (7)· ἄρα ϗ αἱ λοιπαὶ Ὀρθαὶ εἰσί.

Β'. Παραλληλόγραμμα τὰ μίαν μιᾷ ἴσην Γωνίαν τῶν ἐν αὐτοῖς ἕτερον πρὸς ἕτερον, ἔχοντα, καὶ τὰς λοιπὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἕξει ἑκάϛην ἑκάϛῃ, καὶ Ἰσογώνια ἔϛαι. Δειχθήσεται δὲ ὡς ϗ τὸ ἀνωτέρω.

σχ. 124. Γ'. Κἀντεῦθεν ϗ τῶν Ὀρέων τά τε ὑπὲρ τὸν Ὁρίζοντα ὕψη, καὶ τὰς ὁριζοντείȣς Γραμμὰς καταμετρεῖν παιδευόμεθα· οἷον ἔϛω αεικλ ὄρȣς Πλευρά, ἐπ᾽ αὐτῆς δὲ Γνώμων μέγας, ἤ τι ἕτερον ἀντὶ Γνώμονος ὑπȣργȣ̃ν, οὕτω πηγνύσθω, ὡς τὴν μὲν τȣ̃ Γνώμονος Πλευρὰν παράλληλον τῷ Ὁρίζοντι βα, ἅπτεσθαι τῆς κορυφῆς α, τὴν δὲ βε πρὸς ὀρθὰς ἵϛασθαι. Ἐφεξῆς δὲ μεθιϛάσθω τὸ ἔργανον ἐπὶ Σημείȣ τȣ̃ ε, κατὰ εδι, ϗ ιθκ προσωτέρω, ϗ κμλ. Ἐπεὶ γὰρ τῶν Παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον Πλευραὶ, ϗ Γωνίαι (8) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, εἰκός γε συμπληρȣμένȣ τȣ̃ Παραλληλογράμμȣ τὴν μὲν αν ἴσην εἶναι τῇ βε, τὴν δὲ εν, τῇ βα, ϗ τὰς Γωνίας ȣ̓δὲν ἧττον· ϗ ἐπὶ τῶν ἄλλων Παραλληλογράμμων ὡσαύτως. Ἡ μὲν οὖν ὁριζόντειος κειμένη Πλευρὰ τȣ̃ Γνώμονος βα, δε, κτ. τὴν ὁριζόντειον Γραμμὴν τȣ̃ ὄρȣς λρ καταμετρήσει, ἡ δὲ Κάθετος τὸ ὑπὲρ τὸν Ὁρίζοντα ὕψος αρ, τοσάκις λαμβανόμεναι δηλονότι, ὅσαι γε αἱ τȣ̃ Ὀργάνȣ ἀλλεπάλληλοι μεταϛάσεις ϗ ἐφαρμόσεις.

σχ. 125. Δ'. Ἐντεῦθεν δὲ καὶ ἀϛρονομικῷ Τεταρτημορίῳ χρωμένοις, Πύργȣ ὕψος καταμετρεῖται τὸ αβ· ὅπȣ γὰρ ἡ τȣ̃ ὑψώματος Γωνία ἐν τῷ Τεταρτημορίῳ

---

(1) κθ. Βιβ. α. (2) Ἀξ. β. (3) κς. Βιβ. α. (4) δ. Βιβ. α. (5) κθ. Βιβ. α. (6) Ἐξ ὑποθ. (7) λδ. Βιβ. α. (8) λδ. Βιβ. α.

ἡμίσεια ἐςὶν Ὀρθῆς τῷ κατὰ τὸ ε παρατηρȣ̃ντι, ἀχθήτω ἡ δε πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὸν Ὁρίζοντα, ἰσοϋψὴς τῷ ἄχρι τȣ̃ ὀφθαλμȣ̃ τȣ̃ σώματος ἀναςήματι, ϗ διὰ τȣ̃ ὀφθαλμȣ̃ εθ τῇ δβ παράλληλος (1), ϗ ἔςαι πάντως τὸ εθβδ Παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον (2), καὶ Πλευρὰ ἡ βθ, Πλευρᾷ τῇ δε τȣ̃ ἀναςήματος ἴση (3), καὶ θε ἴση τῇ βδ, ἤτοι τῇ τȣ̃ παρατηρȣ̃ντος ἀπὸ τȣ̃ Πύργȣ ἀποςάσει. Ἐπὶ μὲν οὖν τȣ̃ Τριγώνȣ αθε, τῆς μὲν ὑπὸ αθε Ὀρθῆς ȣ̓́σης (4), τῆς δὲ ὑπὸ αεθ ἡμισείας Ὀρθῆς (5) ὁμολογȣμένης, ἔςαι δὴ ϗ ἡ ὑπὸ θαε (6) ἡμίσεια Ὀρθῆς, ἥτε θε, εἴτȣν ἡ τȣ̃ παρατηρȣ̃ντος ἀπὸ τȣ̃ Πύργȣ ἀπόςασις, ἴση τῇ (7) θα, ἤτοι τῷ ὑπὲρ τὸν ὀφθαλμὸν τȣ̃ Πύργȣ ὑψώματι. Τῇ γȣ̃ν θα προςεθείσης τῆς θβ, ἴσης τῇ εδ, τῷ τȣ̃ ὀφθαλμȣ̃ δηλονότι ὑψώματι, παρέςαι τὸ ὅλον τȣ̃ Πύργȣ ὕψωμα, αβ.

Ἐντεῦθεν τελευταῖον καὶ Γεωδαῖται Ἀγρȣ̃ παραλληλογράμμȣ αδ, τὸ χωρίον ῥᾷςα διχάζȣσιν. Ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς Διαγωνίȣ γβ, ταύτηςτε τȣ̃ μεσαιτάτȣ Σημείȣ ε (8) ληφθέντος, ὁποιαδηποτȣ̃ν Εὐθεῖα, οἷα ἡ εθ, διὰ τȣ̃ Σημείȣ ε ἠγμένη τὸ χωρίον διχάσεται. Τὸ γὰρ αβγ Τρίγωνον (9) ἴσον τῷ γβδ, τὸ δὲ γεθ ἴσον τῷ βεη (δίατε τὰς ὑπὸ ηβε, ϗ θγε (10) ἐναλλὰξ ἴσας ȣ̓́σας, ϗ τὰς ὑπὸ ηεβ, ϗ γεθ (11) τὰς κατὰ κορυφὴν, ϗ αὐτὰς ἴσας, καὶ τὴν γε ἴσην (12) τῇ βε) τυγχάνει (13). Ἐὰν οὖν τῷ Τραπεζίῳ αηεγ, ἀντὶ Τριγώνȣ τȣ̃ ηεβ, προςθῇς Τρίγωνον τὸ γεθ, καὶ Τραπεζίῳ τῷ βεθδ, ἀντὶ τȣ̃ εγθ, τὸ ἴσον Τρίγωνον ηεβ προςθῇς, ἔςαι τὸ μὲν αηθγ Τραπέζιον, ἴσον τῷ Τριγώνῳ αβγ, τὸ δὲ βηθδ, τῷ βγδ. Ἀλλὰ τὰ Τρίγωνα ἴσα. Ἄρα ϗ τὰ Τραπέζια. Ο. Ε. Δ. Ε. σχ. 126.

Σχόλιον.

Ἐκ τȣ́τȣ δὴ τȣ̃ Θεωρήματος ϗ τȣ̃ ὁρισμȣ̃, ὅνπερ τȣ̃ δευτέρȣ Βιβλίȣ προτακτέον, εὐμαρῶς ἡ τȣ̃ ὀρθογωνίȣ Παραλληλογράμμου ἐπιφέρεται καταμέτρησις· τȣ̃ γὰρ τοιȣ́τȣ τὸ χωρίον πολλαπλασιασμῷ τῶν δύο προσεχῶν Πλευρῶν αβ, ϗ βγ παράγεται. Οἷον ἐὰν ἡ μὲν αβ ποδῶν ᾖ τεττάρων, ἡ δὲ βγ ποδῶν ὀκτὼ, ἀγομένων ἐπὶ 8 τῶν 4, Παραγόμενον ἔςαι τὸ ποδῶν 32 ἄθροισμα τετραγώνων, ὑφ' ὧν τὸ τȣ̃ Ὀρθογωνίȣ χωρίον καταμετρεῖται. σχ. 127.

(1) λα. Βιβ. α. (2) Ὁρ. λε. ϗ Πόρι. α. τῆς ἀνὰ χεῖρας. (3) λδ. Βιβ. α. (4) κθ. Βιβ. α. (5) Ἐξ ὑποθ. (6) Πόρ. ς. τῆς λβ'. τȣ̃ α'. (7) ς. Βιβ. α. (8) ι. Βιβ. α. (9) λδ. Βιβ. α. (10) κθ. Βιβ. α. (11) ιε. Βιβ. α. (12) Ἐξ ὑποθ. (13) κς. Βιβ. α.

Πρότασις ΛΕ.

„Τὰ Παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς Βάσεως (αβ) ὄντα, καὶ ἐν „ταῖς αὐταῖς Παραλλήλοις (αβ, γδ) ἴσα ἀλλήλοις ἐςί.

σχ. 128. Ἐπεὶ γὰρ αἱ αγ, βε Παράλληλοί εἰσιν, ἐμπίπτει δὲ εἰς αὐτὰς ἡ γδ, ἡ ὑπὸ αγη, τῇ ἐκτὸς ὑπὸ βεδ ἴση (1) ἐςίν. Ἔςι δὲ καὶ αγ ἴση τῇ βε (2), αἵτε γε, ϗ ηδ ἴσαι τῇ αὐτῇ τρίτῃ αβ, ἄρα ϗ (3) ἀλλήλαις. Κοινῆς δὲ προςεθείσης τῆς εη, ἔςαι (4) γη ἴση τῇ εδ. Ἄρα τὸ αγη Τρίγωνον, τῷ βεδ Τριγώνῳ (5) ἴσον ἐςί. Ἐὰν τοίνυν ἀφαιρεθῇ κοινῇ τὸ εθη Τρίγωνον, ἔςαι τὸ αγεθ Τραπέζιον ἴσον τῷ βθηδ Τραπεζίῳ (6). Κοινὴ προςεθείσθω τὸ αθβ, ϗ ἔςαι τὸ αγεβ, ἴσον (7) τῷ αηδβ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Λϛ.

„Τὰ Παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων Βάσεων (βγ, ζη) ὄντα, ϗ „ἐν ταῖς αὐταῖς Παραλλήλοις (αθ, βη) ἴσα ἀλλήλοις ἐςί.

σχ. 129. Ἡ μὲν βγ ἴση τῇ ζη (8)· ἡ δὲ ζη τῇ εθ (9). Ἄρα βγ ἴση (10) τῇ εθ· εἰσὶ δὲ ϗ παράλληλοι (11). Ἄρα ϗ αἱ ταύτας ἐπιζευγνῦσαι βε, καὶ γθ, ἴσαι τε εἰσὶ (12) ϗ παράλληλοι, καὶ Παραλληλόγραμμον ἄρα τὸ βεθγ (13). Πρὸς αὐτὸ δὲ τό,τε αβγδ, ϗ τὸ εζηθ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εἰσι Βάσεως, ϗ ἐν ταῖς αὐταῖς Παραλλήλοις (14) εἰσίν. Ἑκάτερον ἄρα τῷ τρίτῳ ἴσον (15) ἐςί, καὶ ἀλλήλοις (16) ἄρα· τὰ δέ εἰσιν ἐπὶ ἴσων Βάσεων, ϗ τ. Ἄρακτ. Ο. Ε. Δ.

Ἡ μὲν οὖν ΚΕʹ. ϗ Λϛʹ. ἄμφω καθόλȣ ἔσονται ἐν Προτά. Αʹ: τȣ͂ ϛʹ. Βιβλίȣ δεικνύμεναι.

Πορίσματα.

Αʹ. Κἂν ἄρα εἰς ἄπειρον προεκτείνοιτο τὸ ἐπὶ τῆς αὐτῆς, ἤτοι ἴσης Βάσεως Παραλληλόγραμμον, ἐν ταῖς αὐταῖς Παραλλήλοις μένον, ἴσον ἐς ἀεὶ ἔςαι.

Βʹ. Καὶ πόλεις ἢ χῶραι παραλληλόγραμμοί τε, ϗ ἰσομεγέθεις ἀλλήλαις εἶεν ἂν χιλιοπλασίως τὴν Περίμετρον διαφέρȣσαι.

Γʹ. Καὶ Σχήματα ἰσοπερίμετρα ὅτι πλεῖςον τὰ Ἐμβαδὸν πολλάκις διοίσȣσι.

Δʹ. Καὶ ȣ̓δὲ ἀεὶ τὰ ἴσα (ὃ τῷ Κλαβίῳ ἠξίωται (17)) ἐπ' ἄλληλα ἐφαρμόσȣσι.

---

(1) κθ. Βιβ. α. (2) λδ. Βιβ. α. (3) Ἀξ. α. (4) Ἀξ. β. (5) δ. Βιβ. α. (6) Ἀξ. γ. (7) Ἀξ. β. (8) Ἐξ ὑποθ. (9) λδ. Βιβ. α. (10) Ἀξ. α. (11) Ἐξ ὑποθ. (12) λγ. Βιβ. α. (13) Ὁρ. λε. (14) Ἐκ κατ. (15) λε. Βιβ. α. (16) Ἀξ. α. (17) Ἀξ. ζ.

Σχόλιον.

Ἐκ τῶν αὐτῶν δὲ Θεωρημάτων, ϗ ἡ παντὸς Παραλληλογράμμου γεζδ σχ. 130.
ῥᾷστα ληφθήσεται καταμέτρησις, πολλαπλασιαζομένης ἐπὶ τῷ ὕψει τῆς Βάσεως. Τὸ γὰρ Ἐμβαδὸν τοῦ Ὀρθογωνίου γβ, ἴσου ὄντος (1) τῷ Παραλληλογράμμῳ γζ, παράγεται ὑπὸ τῆς γδ πολλαπλασιαζομένης (2) διὰ βδ, ἤτοι τῆς ἴσης (3) ζη.

Πρότασις ΛΖ.

„Τὰ Τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς Βάσεως ὄντα (βγ) ϗ ἐν ταῖς αὐταῖς
„Παραλλήλοις (βγ, ϗ αδ), ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Ἐκβληθείσης τῆς αδ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη κατὰ τὰ ε ϗ ζ Σημεῖα, σχ. 131
διὰ μὲν τοῦ β (4) Παράλληλος ἤχθω πρὸς τὴν αγ ἡ βε, διὰ δὲ τοῦ γ, Παράλληλος πρὸς τὴν βδ ἡ γζ.

Ἴσα οὖν ἀλλήλοις ἐστὶ τὰ γαεβ, ϗ βδζγ (5) Παραλληλόγραμμα. Καὶ ἔστι τοῦ μὲν γαεβ ἥμισυ, τὸ Τρίγωνον (6) γαβ, τοῦ δὲ βδζγ ἥμισυ, τὸ Τρίγωνον βδγ· τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση (7) ἴσα ἐστίν. Ἄρα τὰ βαγ, ϗ βδγ Τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς Βάσεως κτ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΛΗ.

„Τὰ Τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων Βάσεων ὄντα (βγ, εζ), ϗ ἐν ταῖς αὐ-
„ταῖς Παραλλήλοις (βζ, αδ), ἴσα ἀλλήλοις εἰσί.

Ἐκβεβλήσθω ἡ αδ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, καὶ διὰ μὲν τοῦ β ἤχθω ἡ βη σχ. 132.
Παράλληλος τῇ γα (8), διὰ δὲ τοῦ ζ, ἤχθω ἡ ζθ Παράλληλος τῇ εδ. Ἐπεὶ οὖν ἴσα τὰ Παραλληλόγραμμα βηαγ, ϗ εδθζ (9), ἐστι δ' αὐτῶν ἡμίση (10) τὰ Τρίγωνα βαγ, ϗ εδζ· τὰ ἄρα (11) βαγ ϗ εδζ ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Ο. Ε. Δ.

Καὶ αὗται δὲ αἱ Προτάσεις ἐν τῇ Α' τοῦ ϛ'. Βιβλίου καθόλου κεῖσονται.

Σχόλιον.

Τὰ αὐτὰ δὲ κἀνταῦθα ἐπὶ τῶν Τριγώνων σημειωτέον, ἃ φθάσασιν ἀνωτέρω (12) ἐπὶ τῶν Παραλληλογράμμων ἡμῖν σεσημείωται.

---

(1) λε. *Βιβ. α.* (2) Σχόλ. τῆς *ΛΔ'*. τοῦ *α'*. *Βιβλ.* (3) Ὅρ. λϛ. (4) λα. *Βιβ. α.* (5) λε. *Βιβ. α.* (6) λδ. *Βιβ. α.* (7) *Ἀξ.* ϛ. (8) λα. *Βιβ. α.* (9) λϛ. *Βιβ. α.* (10) λδ. *Βιβ. α.* (11) *Ἀξ.* ϛ. (12) *Πόρ. μετὰ τὴν λϛ.*

Πόρισμα.

σχ. 133. Ἐντεῦθεν δὲ καὶ Τρίγωνον τὸ τυχὸν χωρίον αβγ ἐπὶ τῶν ἀγρῶν ῥᾷστα τοῖς Γεωδαίταις διχάζεται, τῆς μὲν Βάσεως αγ δίχα τεμνομένης, Εὐθείας δὲ τῆς βδ ἐπιζευγνυμένης. Τὰ γὰρ αβδ, καὶ δβγ Τρίγωνα ἰσοϋψῆτε ὄντα, καὶ ἴσας ἔχοντα τὰς Βάσεις (1), ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶ, διὰ τὴν ἀνωτέρω.

Πρότασις ΛΘ.

„Τὰ ἴσα Τρίγωνα (βαγ, βδγ) τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς Βάσεως (βγ) καὶ „ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς Παραλλήλοις (βγ, αδ) εἰσί.

σχ. 134. Εἰ μὴ γὰρ, ἔστω Παράλληλος ἡ αε, προηγμένης (2) βδ, ἢ γοῦν ἡ αζ, καὶ ἐπιζευχθήτω ἡ εγ, ἢ γοῦν ἡ ζγ (3)· καὶ ἔσται ἄρα τὸ βεγ, ἢ τὸ βζγ ἴσον (4) τῷ βαγ. Ἀλλὰ καὶ τὸ βδγ ἴσον (5) τῷ βαγ. Ἄρα (6) τὸ βεγ, ἢ τὸ βζγ ἴσον ἔσται τῷ βδγ· τὸ ὅλον τῷ μέρει, ἢ γοῦν τὸ μέρος τῷ ὅλῳ. Τὸ δὲ ἀδύνατον (7)· οὐθ' ἡ αε ἄρα ὑπὲρ τὴν αδ, οὐθ' ἡ αζ ὑπὸ τὴν αδ Παράλληλός ἐστι τῇ βγ. Καὶ Παράλληλος ἄρα ἡ αδ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Μ.

„Τὰ ἴσα Τρίγωνα (βαγ, δεζ) τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων Βάσεων (βγ, δζ) ὄν„τα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς Παραλλήλοις εἰσί.

σχ. 135. Εἰ μὴ γὰρ, ἤχθω (8) διὰ τοῦ α Παράλληλος ἡ αθ, προεκβληθείσης τῆς δε κατὰ τὸ θ, ἡ ακ, καὶ ἐπεζεύχθω (9) ἡ θζ, ἢ γοῦν ἡ κζ· καὶ ἔσται ἄρα τὸ δθζ, ἢ τὸ δκζ ἴσον (10) τῷ βαγ. Ἀλλὰ καὶ τὸ δεζ ἐστὶν ἴσον (11) τῷ βαγ. Ἄρα (12) τὸ δθζ, ἢ γοῦν τὸ δκζ ἴσον ἐστὶ τῷ δεζ, τὸ ὅλον τῷ μέρει, ἢ γοῦν τὸ μέρος τῷ ὅλῳ· τὸ δὲ ἀδύνατον (13). Οὐθ' ἡ αθ ἄρα, οὐθ' ἡ ακ, οὐθ' ἑτέρα τις, ἀλλ' ἢ μόνη ἡ αε Παράλληλός ἐστι πρὸς τὴν βζ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΜΑ.

„Ἐὰν Παραλληλόγραμμον (τὸ αβγδ) Τριγώνῳ (τῷ βεγ) Βάσιν τε ἔχῃ „τὴν αὐτὴν (βγ), καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς Παραλλήλοις ᾖ (αε, βγ), διπλάσιον ἔσται „τὸ Παραλληλόγραμμον τοῦ Τριγώνου.

---

(1) Ἐκ Κατ. (2) λα. Βιβ. α. (3) Αἰτ. α. (4) λζ. Βιβ. α. (5) Ἐξ ὑποθ. (6) Ἀξ. α. (7) Ἀξ. θ. (8) λα. Βιβ. α. (9) Αἰτ. α. (10) λη. Βιβ. α. (11) Ἐξ ὑποθ. (12) Ἀξ. α. (13) Ἀξ. θ.

Ἐπιζευχθείσης τῆς αγ (1), τὸ βαγ Τρίγωνον (2) ἴσον τῷ βεγ. Ἀλλὰ τὸ αβγδ (3) διπλάσιον τοῦ βαγ, ἄρα (4) καὶ τοῦ βεγ. Ο. Ε. Δ. κ. 136.

Πορίσματα.

Τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ἑτέρας τῶν τοῦ Παραλληλογράμμου Πλευρῶν ὡς ἐπὶ Βάσεως αβ συνεστὸς, καὶ ἐπὶ τὴν ἀπεναντίον ἐκείνου γδ Πλευρὰν τῇ κορυφῇ ε προσπίπτον αεβ Τρίγωνον, ἡμίσειά ἐστι τοῦ Παραλληλογράμμου αβδγ. Α. κ. 137.

Καὶ ἐὰν ἀπὸ τοῦ μεσαιτάτου Σημείου γ, μιᾶς τῶν Πλευρῶν αβ τοῦ Παραλληλογράμμου, ἐπί τινα τῶν ἐφ' ἕτερα τὰ μέρη Γωνιῶν δ, ἐπιζευχθείη ἡ γδ, Τρίγωνον συστήσεται τὸ γδβ, τοῦ Παραλληλογράμμου τεταρτημόριον. Β'. κ. 138.

Ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ ἐπὶ τῆς ἡμισείας τῆς Πλευρᾶς ὡς Βάσεως, ἐπὶ τὴν ἀπεναντίον περατούμενον, τεταρτημόριον ἐστὶ τοῦ Παραλληλογράμμου Τρίγωνον. Γ'. κ. 139.

Σχόλιον.

Ἔκτε τῆς προκειμένης, καὶ τοῦ προσημμένου τῇ Λϛ'. Σχολίου, φανερὸν ὅτι παντὸς Τριγώνου αβγ τὸ Ἐμβαδὸν παράγεται πολλαπλασιασμῷ τοῦ ὕψους βδ διὰ τῆς ἡμισείας τῆς Βάσεως αγ, ἢ γοῦν πολλαπλασιασμῷ τῆς Βάσεως αγ, διὰ τῆς ἡμισείας τοῦ ὕψους βδ. Καὶ ἐὰν ἄρα δοθῇ μία ἡτισοῦν τοῦ Τριγώνου Πλευρὰ, καὶ προσέτι τὸ τοῦ αὐτοῦ ὕψος, τουτέστιν ἡ ἀπὸ τῆς ἀπεναντίον Γωνίας ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν Πλευρὰν, ἤν γε δέῃ προαχθεῖσαν Κάθετος, ῥᾴδιον ἔσται τὴν ἀκριβῆ τοῦ Τριγώνου λαβεῖν καταμέτρησιν. Οἷον ἐὰν ἡ μὲν Βάσις αγ ποδῶν ᾖ 100, τὸ δὲ ὕψος βδ ποδῶν δὸς εἰπεῖν 85, πεπολλαπλασιάσθω 50 διὰ 85, καὶ προκύψουσι 4250 Πόδες τετράγωνοι, ὑφ' ὧν τὸ Ἐμβαδὸν τοῦ αβγ Τριγώνου συναπαρτίζεται. Τὸ δὲ δὴ ὕψος, ἤτοι ἡ Κάθετος βατοῦ μὲν ὄντος τοῦ Τριγώνου, οὐδὲν ἧττον ἢ αἱ Πλευραὶ, μηχανικῶς ἡμῖν ἐπιγνωσθήσεται, ἀβάτου δὲ, γεωμετρικῶς διὰ τῆς ΙΒ. καὶ τῆς ΙΓ'. τοῦ Β'. Βιβλίου (ὡς ἐν τῷ ἐκεῖσε Σχολίῳ) ἔσται κατάδηλον. κ. 140.

Ἐπὶ τοῦ ὀρθογωνίου Τριγώνου, τὸ ὕψος θατέρᾳ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν Γωνίαν Πλευρῶν ταυτίζεται. Ἔνθεντοι καὶ ταύτης ἡ ἡμίσεια τῇ ἑτέρᾳ ὅλῃ πολλαπλασιασθεῖσα, τὸ Ἐμβαδὸν τοῦ Τριγώνου παρέξεται.

---

(1) Αἴτ. α. (2) λζ. Βιβ. α. (3) λδ. Βιβ. α. (4) Ἀξ. ϛ.

Πρότασις ΜΒ.

„Τῷ δοθέντι Τριγώνῳ (αγβ) ἴσον Παραλληλόγραμμον (δεζβ) συςή-„σασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ Γωνίᾳ (θ).

σχ. 141. Βάσιν τὴν αβ δίχα τεμὼν (1) κατὰ τὸ δ, ϗ πρὸς τῷ δ Σημείῳ τῇ δοθείσῃ Γωνία θ, ἴσην θέμενος (2) τὴν ὑπὸ εδβ, ἀγαγὼντε διὰ μὲν β Παράλληλον τῇ δε, διὰ δὲ γ Παράλληλον (3) τῇ αβ, ἕξεις τὸ δεζβ Παραλληλόγραμμόντε, ϗ ἐν Γωνίᾳ ἴσῃ τῇ δοθείσῃ (4) συνεςὸς, καὶ δὴ καὶ (ἐπιζευχθείσης τῆς (5) γδ) διπλάσιον (6) τȣ̃ Τριγώνȣ βγδ· κἀντεῦθεν καὶ ἴσον (7) τῷ βαγ, διπλασίονι ϗ αὐτῷ (8) τȣ̃ βγδ πεφυκότι.

Πόρισμα.

σχ. 142. Δοθέντι τῷ αγβ Τριγώνῳ ἐξέςαι λαβεῖν ϗ ἴσον Ὀρθογώνιον, ἀχθείσης μὲν διὰ γ Παραλλήλȣ (9) τῇ αβ, δίχα δὲ τμηθείσης τῆς αβ (10) κατὰ τὸ ζ, καὶ ἀπὸ τȣ̃ β Καθέτȣ (11) ἀχθείσης τῆς βε· τὸ γὰρ ὑπὸ ζβ, ϗ βε ἔςαι τὸ ζητȣ́μενον.

Πρότασις ΜΓ.

„Παντὸς Παραλληλογράμμȣ (αβγδ) τῶν περὶ τὴν Διάμετρον (αγ) „Παραλληλογράμμων (ηζ, εθ), τὰ Παραπληρώματα (κβ, κδ) ἴσα ἀλλή-„λοις ἐςί.

σχ. 143. Τὰ γὰρ αδγ, ϗ αβγ Τρίγωνα ἴσα (12) ἀλλήλοις ἐςίν, ὡσαύτως δὲ ϗ κζγ ἴσον κηγ, ϗ αθκ ἴσον αεκ· ἐὰν οὖν ἀπὸ τῶν ἴσων ἀφέλῃς τὰ ἴσα, λοιπὸν τὸ κδ, λοιπῷ τῷ κβ (13) ἴσον ἔςαι.

Πρότασις ΜΔ.

„Παρὰ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν (αβ) τῷ δοθέντι Τριγώνῳ (γ) ἴσον Πα-„ραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐν τῇ δοθείσῃ Γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ (δ).

σχ. 144. Συνεςάθω Παραλληλόγραμμον (14) τὸ ηθ ἴσον τῷ δοθέντι Τριγώνῳ γ, ἐν Γωνίᾳ δοθείσῃ τῇ ὑπὸ ηδθ, ϗ προυχθήτω ἐπ' εὐθείας τῇ θδ (15) ἡ δε ἴση (16) τῇ δοθείσῃ αβ. Ἐξαχθήτω δὲ ϗ ἡ κη κατὰ τὸ συνεχὲς,

---

(1) ι. Βιβ. α. (2) κγ. Βιβ. α. (3) λα. Βιβ. α. (4) Ἐκ κατ. (5) Αἴτ. α. (6) μα. Βιβ. α. (7) Ἀξ. ς. (8) λη. Βιβ. α. (9) λα. Βιβ. α. (10) ι. Βιβ. α. (11) ιβ. Βιβ. α. (12) λδ. Βιβ. α. (13) Ἀξ. γ. (14) μβ. Βιβ. α. (15) Αἴτ. β. (16) γ. Βιβ. α.

ϗ διὰ τοῦ ε ἤχθω εζ Παράλληλος (1) τῇ δη, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ (10) ζδ, ϗ προεκβεβλήσθω ὥστε συμπεσεῖν (*) τῇ κθ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ λ. Καὶ διὰ τοῦ λ ἀχθήτω Παράλληλος (2) τῇ θε ἡ λμ, ϗ ταύτῃ συμπιπτέτωσαν αἱ ηδ, ζε προεκβληθεῖσαι κατὰ ν ϗ μ (συμπεσοῦνται δὲ πάντως, ἅτε δὴ ἀπ᾽ ἐλαττόνων, ἢ δύο Ὀρθῶν, τῶν ὑπὸ λδν, ϗ λζμ, μετὰ τῆς ὑπὸ ζλμ, ἐκβαλλόμεναι (3))· φημὶ δὴ τὸ δμ Παραλληλόγραμμον εἶναι τὸ ζητούμενον.

Καὶ γὰρ τὸ δμ ἴσον τῷ δκ (4)· ἀλλὰ δκ ἴσον τῷ δοθέντι Τριγώνῳ (5) γ. Ἄρα ϗ δμ, ἴσον (6) τῷ Τριγώνῳ γ. Συνέστη δὲ ϗ Γωνία ἡ ὑπὸ θδη ἴση (7) τῇ δοθείσῃ Γωνίᾳ δ· ἡ δὲ ὑπὸ νδε ἴση τῇ θδη (8). Ἄρα ϗ ἡ ἐν τῷ παραβεβλημένῳ Παραλληλογράμμῳ Γωνία ὑπὸ νδε, ἴση ἐστὶ τῇ δοθείσῃ (9) Γωνίᾳ δ. Ἡ δὲ Πλευρὰ δε, ἴση (10) ϗ αὐτὴ τῇ δοθείσῃ Εὐθείᾳ αβ. Ἄρα κτ. Ο. Ε. Π.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, πῶς ἂν εἴη ϗ παρὰ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν παραβαλεῖν ἴσον τε, ϗ ἰσογώνιον τῷ δοθέντι Παραλληλόγραμμον.

Σχόλιον.

Ἐκ τῆς Προτάσεως καὶ τοῦ προστεθέντος Πορίσματος, τὴν γεωμετρικὴν σχ. 145. Διαίρεσιν οἷά τις ἐστὶ διδασκόμεθα. Καθάπερ γὰρ τὸν διὰ Πολλαπλασιασμοῦ Παραγόμενον ἀριθμὸν, δίκην Ὀρθογωνίου τινὸς εὐλόγως θεωροῦμεν, οὗ δύο αἱ τυχοῦσαι προσεχεῖς Πλευραὶ εἰσιν οἱ Παράγοντες (11), οὕτως ἡμῖν ϗ ἀντὶ μὲν Διαιρετέου τὸ Ὀρθογώνιον κείσεται, ἀντὶ δὲ τοῦ Διαιρέτου ϗ τοῦ Πηλίκου, αἱ περὶ ἑκάστην τῶν Γωνιῶν Πλευραὶ προσληφθήσονται. Ἐπεὶ δὲ τὸν κείμενον Διαιρετέον ἀριθμὸν, διαφέρουσι τοῖς Διαιρέταις μερίζοντες, διαφέροντα ϗ τὰ Πηλίκα ποριζόμεθα· διὰ τοῦτο δὴ ϗ Ὀρθογώνιον χωρίον δοθὲν, τῇ τυχούσῃ Εὐθείᾳ, ὡς Πλευρᾷ παραβαλεῖν δυνησόμεθα, ἢ πρὸς ὀρθὰς ἑτέρα τις ἐπικείσεται, ἀντὶ τῶν Πλευρῶν τῆς ἑτέρας. Οἷον ἔστω Ὀρθογώνιον τὸ αβ, ἐκ δυοκαίδεκα τετραγώνων ποδῶν συνιστάμενον, οὗ Πλευραὶ ἡ μὲν αγ τριποδιαία, ἡ δὲ αε τετραποδιαία. Ἔστω δὲ ἰσομέγεθες Ὀρθογώνιον παρὰ Πλευρὰν διποδιαίαν (ἥτις ἀντὶ Μεριστοῦ ἔσται) παραβαλεῖν, ὡς ἐντεῦθεν Πλευρὰν ἑτέραν ἀναφανῆναι, ἥτις ἂν ὡς Πηλίκον λογίζοιτο. Ἐπὶ τῆς αε προαχθείσης εἰλήφθω

---

(1) λα. Βιβ. α. (2) Αἴτ. α. (*) Θεώρ. πρὸ τῆς λβ΄. (3) λ α Βιβ. α. (4) Θεώρ. τὸ πρὸ τῆς λβ΄. (5) μγ. Βιβ. α. (6) Ἐκ Κατ. (7) Ἀξ. α. (8) Ἐκ κατ. (9) ιε. Βιβ. α. (10) Ἀξ. α. (11) Ἐκ κατ.

Γραμμὴ διποδιαία ἡ εθ, παρ' ἣν παραβεβλήσθω (1) Ὀρθογώνιον τὸ εη ἴσον τῷ αβ. Οὕτω γὰρ ἡμῖν ϗ ἡ ἑτέρα τοῦ Ὀρθογωνίου Πλευρὰ προκύψει ἡ ει ἑξαποδιαία, ἥτις ἔσαι Πηλίκον τὸ ζητούμενον. Ἐπειδὴ δὲ διὰ τὰ Παραλληλόγραμμα βθ αι, αἱ Εὐθεῖαι βδ, αε ἴσαι εἰσὶ ταῖς Εὐθείαις εθ, ζι (2) ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, εἰς Πρᾶξιν ἅλις ἔσαι, ἐὰν ἐπὶ τῆς γβ προαχθείσης ληφθῇ ἡ βδ διποδιαία, ϗ διὰ τῶν Σημείων δ ϗ ε ἀχθῇ Εὐθεῖα ἡ δε κατὰ τὸ συνεχὲς προεκβαλλομένη, ὥςε συμπεσεῖν (3) τῇ Εὐθείᾳ γα κατὰ τὸ συνεχὲς προεκβαλλομένῃ ἐπὶ τὸ ζ· ἔσαι γὰρ ἡ αζ Εὐθεῖα ἡ ζητουμένη. Τὸ δὲ τῆς τοιασδὶ Διαιρέσεως εἶδος Παραβολὴ ἤκουσε, τοῦ Ὀρθογωνίου χωρίου αβ (ἢ τοῦ ἴσου ἐκείνῳ εη) παρὰ τὴν Εὐθεῖαν βδ (ἤτοι τῇ ἴσῃ εθ) παραβαλλομένου. Τούτου δὲ ἕνεκα ϗ ἡ Διαίρεσις Παραβολὴ τὰ πολλὰ ἐξωνόμασαι τοῖς ἀρχαιοτέροις Γεωμέτραις, οἳ ϗ τὴν διὰ Κανόνος ϗ Διαβήτου Γεωμετρικὴν κατασκευὴν, τῆς ἐν ἀριθμοῖς δι' ἐπιλογισμῶν τελουμένης, προσφυεςέραν ᾤοντο τυγχάνειν ϗ κρείττονα.

Πρότασις ΜΕ.

„ Τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ (βαγ) ἴσον Παραλληλόγραμμον συςήσασθαι,
„ πρὸς τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν (ιπ) ϗ ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ Γωνίᾳ (θ).

χ. 146. Ἀναλελύσθω τὸ Εὐθύγραμμον, εἰς Τρίγωνα ὅσα ἂν οἷόν τε ᾖ, τὰ φ, χ, ψ· παρὰ δὲ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν ιπ (4) Παραλληλόγραμμον παραβεβλήσθω τὸ ιυ, ἐν τῇ κατὰ τὸ ι Γωνίᾳ ἴσῃ τῇ δοθείσῃ θ, ἴσον τῷ Τριγώνῳ φ. Ὡσαύτως παρὰ τὴν ρυ παραβεβλήσθω τὸ ρσ ἴσον τῷ Τριγώνῳ χ, καὶ παρὰ τὴν τσ τὸ τω, ἴσον τῷ Τριγώνῳ ψ. Φημὶ δὴ ὅτι τὸ ιω Παραλληλόγραμμον ἐςὶ τὸ ζητούμενον. Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ υρτ, ἴση τῇ κατὰ τὸ ι, ἴσαι γὰρ ἄμφω τῇ δοθείσῃ (5), ἡ δὲ κατὰ τὸ ι ϗ ἡ ὑπὸ ιρυ δυσὶν Ὀρθαῖς (6) ἴσαι εἰσὶ, ϗ αἱ ὑπὸ ιρυ, ϗ υρτ δυσὶν Ὀρθαῖς (7) ἴσαι ἔσονται, καὶ ἑπομένως αἱ ιρ ϗ τρ (8) ἐπ' εὐθείας ἔσονται κείμεναι. Παραπλησίως δὲ δειχθήσονται καὶ αἱ ρτ, ϗ λτ ἐπ' εὐθείας κείμεναι, ὥςε μίαν εἶναι Εὐθεῖαν τὴν ιλ. Πάλιν αἱ ὑπὸ τρυ, ϗ συρ (9) δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ἀλλὰ ϗ αἱ ὑπὸ τρυ ϗ ιρυ δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι ἐδείχθησαν, ἐὰν ἄρα κοινὴ ἀφαιρεθῇ ἡ ὑπὸ τρυ, ἔςαι ἡ ὑπὸ συρ (10) ἴση τῇ ὑπὸ ιρυ. Κοινὴ προσήφθω ἡ ὑπὸ ρυπ, καὶ ἔσονται αἱ ὑπὸ ιρυ ϗ ρυπ, ἴσαι ταῖς ὑπὸ συρ, ϗ ρυπ (11). Ἀλλ' ἐκεῖναι δυσὶν Ὀρθαῖς (12)

---

(1) *Διὰ τὸ ἀνωτ. Πόρισμα.* (2) λδ. *Βιβ.* α. (3) *Πόρ.* α τοῦ *Σχολίου τοῦ μετὰ τὴν ΛΑ. Πρότ.* (4) μδ. *Βιβ.* α. (5) *Ἀξ.* α. ϗ ἐκ *Κατ.* (6) κθ. *Βιβ* α. (7) *Ἀξ.* β. (8) ιδ. *Βιβ.* α. (9) *Ἐκ κατ.* ϗ κθ. *Βιβ.* α. (10) *Ἀξ.* γ. (11) *Ἀξ.* β. (12) κθ. *Βιβ.* α.

ἴσαι εἰσὶν, ἄρα ϗ αὗται αἱ ὑπὸ συρ, ϗ ρυπ (1) δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. Καὶ κεῖνται ἄρα ἐπ' εὐθείας, ϗ (2) αἱ πυ, ϗ συ. Ὡσαύτως δὲ δείξω ϗ τὰς υσ, ωσ ἐπ' εὐθείας εἶναι κειμένας, ὥςε ϗ τὴν πω μίαν Εὐθεῖαν εἶναι. Ἐπειδὴ ἦν ἡ μὲν ιρ ἴση τῇ πυ, ἡ δὲ ρτ ἴση τῇ υσ, ἡ δὲ τλ ἴση τῇ σω (3)· ἄρα καὶ ὅλη ἡ ιλ (4) ἴση ὅλῃ τῇ πω ἐςίν. Ἀλλαμὴν ϗ αἱ ὑπὸ λιπ ϗ ιπω δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι (εἰσὶ γὰρ αἱ ἐντὸς ϗ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τȣ Παραλληλογράμμȣ φ) (5) εἰσίν. Ἄρα αἱ ιλ ϗ πω παράλληλοι εἰσίν (6). Ἐδείχθησαν δὲ καὶ ἴσαι αἱ ἄρα ιπ ϗ λω (7) ϗ ἴσαι, ϗ Παράλληλοι εἰσί· καὶ ἔςιν ἄρα τὸ πλ Παραλληλόγραμμον· Ἀλλ' ἔςι δὴ τὸ μὲν φ Παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ φ Τριγώνῳ, τὸ δὲ χ τῷ χ, τὸ δὲ ψ τῷ ψ (8). Ἄρα καὶ τὸ ὅλον Παραλληλόγραμμον πλ, τῷ ὅλῳ Εὐθυγράμμῳ βαγ (9) ἴσον ἐςί. Παρεβλήθη δὲ τὸ Παραλληλόγραμμον καὶ παρὰ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν τὴν ιπ, ϗ ἐν Γωνίᾳ τῇ κατὰ τὸ ι, ἴσῃ τῇ δοθείσῃ θ, γέγονεν ἄρα Ο. Ε. Π.

Σχόλιον.

Ἐκ δὲ ταύτης τῆς Προτάσεως καταφανὲς, ϗ πῶς ἔςαι Παραλληλόγραμμον ἐν τῇ δοθείσῃ Γωνίᾳ συςήσασθαι, ἴσον δυσὶν ἢ πλείοσιν Εὐθυγράμμοις ἅμα ληφθεῖσι.

Πόρισμα.

Ἐξεύροι δ' ἄντις ϗ τὴν ὑπεροχὴν εὐμαρῶς ἐντεῦθεν, ᾗ Εὐθυγράμμῳ Εὐθύγραμμον ὑπερέχεται τῷ μείζονι τὸ ἔλαττον· ἀμέλειτοι ἐὰν παρὰ τὴν αὐτὴν Εὐθεῖαν ιπ, ϗ ἐν τῇ αὐτῇ Γωνίᾳ πιλ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη παραβάλλοι ἑκατέρῳ ἴσον Παραλληλόγραμμον· ᾧ γὰρ Παραλληλογράμμῳ τὸ μεῖζον ὑπερέχει τὸ ἔλαττον, ἡ τῶν Εὐθυγράμμων διαφορὰ ἔςαι. Ο. Η. Ε.

Σχόλιον.

Κείσθω δ' ἐνταῦθα ϗ τὸ ἐφεξῆς Πρόβλημα, ὡς πάνυ ὠφέλιμον ἐσόμενον ἐπὶ Πράξει τῆς ἐν τῷ Β'. Βιβλ. ΙΔ'. Προτάσεως.

Πρόβλημα.

„Τῷ δοθέντι Τετραπλεύρῳ μὴ ὀρθογωνίῳ (εζ) ἴσον Ὀρθογώνιον κα-
„ταγράψαι.

---

(1) *Ἀξ. α.* (2) *ιδ. Βιβ. α.* (3) *λδ. Βιβ. α.* (4) *Ἀξ. β.* (5) *κθ. Βιβ. α.* (6) *κη. Βιβ. α.* (7) *λγ. Βιβ. α.* (8) *Ἐκ κατ.* (9) *Ἀξ. α. ϗ θ.*

σχ. 147. Ἀναλελύσθω εἰς Τρίγωνα, Εὐθείας (1) ἐπιζευχθείσης τῆς αγ, τὸ δοθὲν Τετράπλευρον. Ἀπὸ δὲ τῶν ἀπεναντίον Γωνιῶν, πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν ἐπ᾿ αὐτὴν αἱ βξ, ζι (1)· ϗ δίχα τετμήσθω ἡ αγ (3) κατὰ τὸ σ· ἀπὸ δὲ τȣ̃ σ, Κάθετος ἀχθήτω ἡ σλ (4) ἴση δυσὶ ταῖς βξ, ϗ ζι (5). Τὸ γȣ̃ν Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ λσ ϗ σα, ἴσον ἔςαι τῷ δοθέντι Τετραπλεύρῳ βζ.

Ἡ δεῖξις σαφὴς ἐκ τῆς ΜΑ΄. καὶ τȣ̃ μετ᾿ αὐτὴν Σχολίȣ, ἣν ϗ μετὰ τὴν Α΄. Πρότ. τȣ̃ Β΄. Βιβλ. διὰ τȣ̃ ἐκεῖσε Πορίσματος εὑρήσεις ἐκτεθειμένην.

Πρότασις Μς.

„Ἀπὸ τῆς δοθείσης Εὐθείας (αβ) Τετράγωνον ἀναγράψαι.

σχ. 148. Ἤχθωσαν πρὸς ὀρθὰς ἀπὸ τῶν α καὶ β περάτων (6) ἴσαι τῇ δοθείσῃ Εὐθείᾳ (7) αβ, αἱ αγ, βε, καὶ ἐπεζεύχθω (8) ἡ γε. Ἐπεὶ οὖν αἱ κατὰ α ϗ β εἰσὶν (9) Ὀρθαὶ, Παράλληλοι (10) ἔσονται αἱ αγ, βε· ἀλλὰ καὶ ἴσαι (11). Οὐκȣ̃ν ϗ γε ἡ ἐπιζευγνύȣσα Παράλληλός ἐςι (12) πρὸς τὴν αβ, ϗ δὴ ϗ ἴση, ὥςε τὸ Σχῆμα Ἰσόπλευρον· ἀλλὰ ϗ αἱ γ ϗ ε, ἀπ᾿ ἐναντίον οὖσαι, ταῖς β ϗ α Γωνίαις ἴσαι (13) εἰσὶ, ϗ ἑπομένως Ὀρθαί. Ἄρα ϗ ὀρθογώνιον τὸ Σχῆμα, ἤτοι (14) Τετράγωνον. Ο. Ε. Π.

Σχόλιον.

σχ. 149. Οὕτως εὐμαρῶς καὶ Ὀρθογώνιον συςήσεις ἐπὶ τῆς δοθείσης αβ, ὑπὸ δυοῖν τῶν αβ ϗ αγ περιεχόμενον, τὰς αγ ϗ βδ ἴσας τῇ δοθείσῃ πρὸς ὀρθὰς ἀγαγὼν, ϗ τὴν γδ ἐπιζεύξας.

Πρότασις ΜΖ.

„Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις Τριγώνοις (αβγ) τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν Γω-
„νίαν ὑποτεινȣ́σης Πλευρᾶς (αγ) Τετράγωνον, ἴσον ἐςὶ τοῖς ἀπὸ τῶν
„τὴν ὀρθὴν Γωνίαν περιεχȣσῶν Πλευρῶν (αβ, γβ) Τετραγώνοις.

σχ. 150. Ἐπεζεύχθωσαν (15) αἱ ιγ, βζ, ϗ ἤχθω βε (16) Παράλληλος τῇ αζ. Ἐὰν οὖν ταῖς ὑπὸ ιαβ, ζαγ Ὀρθαῖς ȣ̃σαις, ϗ ἴσαις, προςεθῇ κοινὴ ἡ ὑπὸ βαγ, ἔσονται αἱ ὅλαι (17) ὑπὸ ιαγ, ζαβ ἴσαι ἀλλήλαις. Εἰσὶ δὲ ἐπὶ τῶν

---

(1) Αἴτ. α. (2) ιβ. Βιβ. α. (3) ι Βιβ. α. (4) ιβ. Βιβ. α. (5) γ. Βιβ. α. (6) ια. Βιβ. α. (7) γ. Βιβ. α. (8) Αἴτ. α. (9) Ἐκ κατ. (10) κη. Βιβ. α. (11) Ἐκ κατ. (12) λγ. Βιβ. α. (13) λδ. Βιβ. α. (14) Ὁρ. λβ. (15) Αἴτ. α. (16) λα. Βιβ. α. (17) Ἀξ. β.

Τριγώνων ιγα, ϗ βζ, ϗ αἱ δύο Πλευραὶ αἱ ια, καὶ αγ, ἴσαι ταῖς δυσὶ Πλευραῖς βα (1) ϗ αζ, αἱ περιέχȣσαι τὴν ἴσην Γωνίαν ταῖς περιεχȣ́σαις, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· ἄρα τὰ Τρίγωνα ιγα, καὶ βζα (2) ἴσα ἀλλήλοις ἐςί. Ταῦτα δὲ ἐπεὶ μετὰ τῶν Παραλληλογράμμων αβλι, ϗ ψαζε, ὑφέςηκεν ἐπὶ τῆς αὐτῆς Βάσεως αι, ϗ αζ, ϗ εἰσὶ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς Παραλλήλοις ταῖς αι, γλ, ϗ ταῖς αζ, βε, τῶν Παραλληλογράμμων (3) αὐτῶν ἡμίση ἐςί. Τὰ ἄρα Παραλληλόγραμμα αβλι, ϗ ψαζε (4) ἴσα ἀλλήλοις ἐςί. Τῷ δ' αὐτῷ λόγῳ Εὐθειῶν ἀχθεισῶν τῶν αφ, ϗ βρ, δείξομεν ϗ τὰ Παραλληλόγραμμα εγ, καὶ βφ, ἴσα ἀλλήλοις ὄντα. Τὸ ὅλον ἄρα αρ, δυσὶ τοῖς βι, ϗ βφ ἴσον ἔςαι. Ο. Ε. Δ.

Ε'λήφθη τὴν λβγ Παράλληλον εἶναι τῇ ια, ἤτοι τὰς λβ, ϗ γβ ἐπ' εὐθείας κειμένας ἀλλήλαις Εὐθεῖαν μίαν συναποτελεῖν. Τȣ̃το δὲ δῆλον (5) τῶν ὑπὸ λβα, ϗ αβγ Ο'ρθῶν ȣ̓σῶν καθ' ὑπόθεσιν.

Πορίσματα.

Ο'ρθογωνίȣ ἄρα ϗ Ι'σοσκελȣ̃ς τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινȣ́σης τὴν ὀρθὴν Γωνίαν Τετράγωνον, διπλάσιον τȣ̃ ἀπὸ τȣ̃ σκέλȣς. Α'.

Καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Διαγωνίȣ, διπλάσιον τȣ̃ ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς τȣ̃ Τετραγώνȣ. Β'. *

Καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραπλάσιον τȣ̃ ἀπὸ τῆς ἡμισείας. Ε'πὶ γὰρ τȣ̃ ἰσοσκελȣ̃ς Ο'ρθογωνίȣ αβγ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς Γωνίας β Καθέτȣ ἀχθείσης τῆς βε (6), ἡ ὑπὸ εβγ ἡμίσειά ἐςιν Ο'ρθῆς· ἀλλὰ ϗ ἡ ὑπὸ βγα ἡμίσεια ϗ αὐτὴ (7) ἐςὶν Ο'ρθῆς. Τὸ ἄρα βεγ Ι'σοσκελές (8) ἐςιν· ἔςι δὲ ϗ ὀρθογώνιον (9). Α'ρα τὸ ἀπὸ βγ Τετράγωνον, διπλάσιόν ἐςι (10) τȣ̃ ἀπὸ εγ Τετραγώνȣ. Α'λλ' ἡ εγ ἡμίσειά ἐςι (11) τῆς αγ, τό,τε ἀπὸ τῆς ὅλης αγ, διπλάσιον τȣ̃ ἀπὸ βγ, ϗ τὸ ἀπὸ βγ διπλάσιον τȣ̃ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης, (12) ἤτοι τȣ̃ ἀπὸ τῆς εγ. Τὸ ἄρα ἀπὸ αγ Τετράγωνον τῆς ὅλης, διπλάσιον ὂν τȣ̃ διπλασίονος, τετραπλάσιόν ἐςι τȣ̃ ἀπὸ τῆς ἡμισείας εγ. Ο. Ε. Δ. Γ'.* σχ.151.

Καὶ Καθέτȣ δὲ ἀπὸ τȣ̃ ε Σημείȣ ἀχθείσης ἐπὶ τὴν βγ Πλευράν, ὡσαύτως δειχθήσεται τὸ ἀπὸ τῆς Διαγωνίȣ αγ, ὀκταπλάσιον εἶναι τȣ̃ ἀπὸ τῆς Δ'. *

(1) Ο'ρ. λβ (2) δ. Βιβ. α. (3) μα. Βιβ. α. (4) Α'ξ. ς. (5) ιδ. Βιβ. α. (6) Διὰ τὸ Α'. τῶν ἐν τῷ Σχολ. τῷ μετὰ τὴν Κς. (7) ε. ϗ λβ. Βιβ. α. (8) ς. Βιβ. α. (9) Ε'κ κατ. (10) Τῶν ἀνωτ. Πόρ. Α'. (11) Διὰ τὸ Α'. τῶν ἐν τῷ ῥηθέντι Σχολ. (12) Τῶν ανωτ. Πόρ. Α'.

ἡμισείας τῆς Πλευρᾶς δγ. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ϗ τὸ ἀπὸ τῆς Διαγωνίȣ αγ Τετράγωνον, ἑκκαιδεκαπλάσιον ἔςαι τȣ̃ ἀπὸ τȣ̃ τῆς Διαγωνίȣ τεταρτημορίȣ ζγ, ϗ τριακοδιπλάσιον τȣ̃ ἀπὸ τȣ̃ τῆς Πλευρᾶς τεταρτημορίȣ θγ, ϗ οὕτως ἐφεξῆς. Ὥςε ἀπὸ τῶν ὀρθῶν Γωνιῶν ἐπ' ἄπειρον ἀγομένων τῶν βε, εδ, δζ, ζθ, κτ. πρὸς ὀρθὰς, ϗ ἐναλλὰξ τῆς τε Διαγωνίȣ (ἤτοι τῆς Ὑποτεινȣ́σης), ϗ τῆς Πλευρᾶς διχαζομένων, τήν τε τῶν Τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν ἀγομένων Καθέτων βε, εδ, δζ, κτ. ϗ τὴν ἀπὸ τῶν Τμημάτων τῶν διχαζομένων αγ, εγ, ζγ, κτ. ἢ βγ, δγ, θγ, κτ. πρόοδον εἶναι κατὰ τὰ μόρια $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}$, κτ.

κ. 152. Ε'. Ἐπὶ παντὸς Τριγώνȣ αβγ, ἐὰν ἀπὸ τῆς Γωνίας α, ἐπὶ τὴν Βάσιν (προηγμένην δεῆσαν) πρὸς ὀρθὰς ἀχθῇ ἡ αδ, ἔςαι ἡ τῶν Τετραγώνων διαφορὰ τȣ̃ τε ἀπὸ τῆς ἑτέρας τῶν Πλευρῶν αβ, ϗ τȣ̃ ἀπὸ τȣ̃ ὁμόρȣ Τμήματος βδ, ἴση τῇ διαφορᾷ τῶν Τετραγώνων τȣ̃ τε ἀπὸ τῆς λοιπῆς Πλευρᾶς αγ, ϗ τȣ̃ ἀπὸ ταύτῃ ὁμόρȣ Τμήματος δγ. Ἐπεὶ γὰρ αἱ πρὸς τῷ δ Ὀρθαὶ εἰσιν (1), ἔςαι ἐπὶ τȣ̃ αβδ Τριγώνȣ, τὸ $\frac{\alpha\beta}{\text{Τετρ.}} = (2)\ \frac{\alpha\delta}{T.} + \frac{\beta\delta}{T.}$· κοινῆ δὲ ἑκατέρωθεν ἀφαιρεθέντος τȣ̃ $\frac{\beta\delta}{T.}$, ἔςαι (3) $\frac{\alpha\beta}{T.} - \frac{\beta\delta}{T.} = \frac{\alpha\delta}{T.}$. Τὸ αὐτὸν δὲ τρόπον ἐπὶ τȣ̃ Τριγώνȣ αδγ, δεῖξαι ἐςὶ τὸ $\frac{\alpha\gamma}{T.} - \frac{\delta\gamma}{T.} = \frac{\alpha\delta}{T.}$ Ἄρα $\frac{\alpha\beta}{T.} - \frac{\beta\delta}{T.}\ (4) = \frac{\alpha\gamma}{T.} - \frac{\delta\gamma}{T.}$. Ο. Ε. Δ.

κ. 153. ς'. Ἐπὶ τȣ̃ Τριγώνȣ αβγ, Καθέτȣ ἀχθείσης τῆς αδ, μεῖζον μὲν ἔςαι τὸ τῆς Βάσεως βγ Τμῆμα, τὸ τῇ μείζονι τῶν Πλευρῶν αγ προσκείμενον, ἔλαττον δὲ τὸ τῇ ἐλάσσονι αβ. Τῆς γὰρ αγ Πλευρᾶς μείζονος (5) ȣ̓́σης, τῆς δὲ αβ ἐλάσσονος, ἔςαι ϗ $\frac{\alpha\gamma}{T.}$ μεῖζον (6) ἢ αβ. Ἀλλ' $\frac{\alpha\gamma}{T.}\ (7) = \frac{\alpha\delta}{T.} + \frac{\delta\gamma}{T.}$, καὶ $\frac{\alpha\beta}{T.} = \frac{\alpha\delta}{T.} + \frac{\beta\delta}{T.}$. Ἄρα τὸ τῶν Τετραγώνων $\frac{\alpha\delta}{T.}$ ϗ $\frac{\delta\gamma}{T.}$ ἄθροισμα, μεῖζον ἐςὶ τȣ̃ τῶν Τετραγώνων $\frac{\alpha\delta}{T.}$ ϗ $\frac{\beta\delta}{T.}$ ἀθροίσματος. Τȣ̃ ἄρα κοινȣ̃ ἀφαιρεθέντος (8) $\frac{\alpha\delta}{T.}$, ὑπολειφθήσεται τὸ $\frac{\delta\gamma}{T.}$, μεῖζον τȣ̃ $\frac{\delta\beta}{T.}$, καὶ οὕτω τὸ Τμῆμα δγ, τȣ̃ Τμήματος βδ (9) μεῖζον ἔςαι. Ο. Ε. Δ.

κ. 154. Ζ'. Ἐὰν ἐπὶ τȣ̃ Τριγώνȣ αβε, τὸ ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς βε Τετράγωνον μεῖζον ᾖ τῶν ἀπὸ τῶν Πλευρῶν αβ καὶ αε Τετραγώνων ἅμα ληφθέντων, ἡ ὑπὸ βαε, ὑφ' ἣν ὑποτείνει ἡ βε, Ὀρθῆς ἔςαι μείζων.

---

(1) Ὁρ. ιδ. (2) μζ. Βιβ. α. (3) Ἀξ. γ. (4) Ἀξ. α. (5) Ἐξ ὑποθ. (6) Ἀξ. ις. (7) μζ. Βιβ. α. (8) Ἀξ. ε. (9) Ἀξ. ις.

Ἤχθω γὰρ ἐπὶ τῆς αβ (1) ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ Σημείου α, πρὸς ὀρθὰς ἡ αζ, ἴση τῇ Πλευρᾷ αε, ϗ ἐπεζεύχθω (2) ἡ βζ. Διὰ μὲν οὖν τὴν ὑπὸ βαζ Ὀρθὴν, ἔςαι τὸ ἀπὸ τῆς βζ Τετράγωνον (3) ἴσον τοῖς ἀπὸ βα ϗ αζ Τετραγώνοις ἅμα ληφθεῖσιν, ἤτοι (διὰ τὰς ἴσας ζα, ϗ εα) τὸ ἀπὸ τῆς βζ Τετράγωνον (4), ἴσον ἔςαι τοῖς ἀπὸ τῶν βα, αε Τετραγώνοις ἅμα ληφθεῖσιν. Ἀλλὰ (5) τὸ ἀπὸ τῆς βε Τετράγωνον, μεῖζον ἐςὶ τῶν ἀπὸ βα καὶ αε Τετραγώνων ἅμα ληφθέντων. Ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς βε Τετράγωνον (6) μεῖζον ἐςὶ τοῦ ἀπὸ τῆς βζ Τετραγώνου, ἤτε βε Εὐθεῖα μείζων (7) ἔςαι τῆς βζ. Ἔνθεντοι ϗ ἡ ὑπὸ βαε (8) τῆς ὑπὸ βαζ Ὀρθῆς, μείζων τυγχάνει. Ο. Ε. Δ.

Παραπλησίως ἐὰν ἐπὶ τοῦ Τριγώνου αβγ, τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τῆς ὑπο- Η'.
τεινούσης τὴν ὑπὸ βαγ Τετράγωνον, ἔλαττον ᾖ τῶν Τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν Πλευρῶν βα ϗ γα, ἅμα ληφθέντων, δειχθήσεται ἡ ὑπὸ βαγ, Ὀρθῆς ἐλάσσων. Ἀχθείσης γὰρ ἐπὶ τῆς αβ Πλευρᾶς, Καθέτου τῆς αζ ἴσης τῇ αγ, ἐπιζευχθείσης τε τῆς βζ, ἔςαι (9) $\beta\zeta = \underset{T.}{\beta\alpha} + \underset{T.}{\alpha\zeta}$. Ἀλλ' $\underset{T.}{\alpha\zeta} = \underset{T.}{\alpha\gamma}$ (10)· ἄρα $\underset{T.}{\alpha\zeta} = \underset{T.}{\beta\alpha} + \underset{T.}{\alpha\gamma}$. Ἀλλὰ (11) $\underset{T.}{\beta\gamma}$ ἔλαττόν ἐςιν ἢ $\underset{T.}{\beta\alpha}$ ϗ $\underset{T.}{\alpha\gamma}$. ἄρα $\underset{T.}{\beta\gamma}$ ἔλαττον ἢ $\underset{T.}{\beta\zeta}$, καὶ ἑπομένως (12) ἡ βγ ἐλάσσων τῆς βζ. Ἔνθεντοι καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, τῆς ὑπὸ (13) βαζ Ὀρθῆς ἐλάσσων. Ο. Ε. Δ.

Σχόλιον.

Τὸ ἀποδειχθὲν Θεώρημα, ὅπερ Εὐκλείδης ἐν Προτ. ΛΑ. Βιβ. ς'. ἐπὶ πάνθ' ἁπλῶς τὰ ἐμφερῆ ἀλλήλοις ἐναποδέδειχε Σχήματα, Πυθαγόρειον φερωνύμως ἀπὸ τοῦ εὑρόντος ὠνόμαςαι, ὑπὲρ οὗ ϗ θῦσαι λέγεται Πυθαγόρας ταῖς Μούσαις, (ᾗ Πρόκλος μαρτυρεῖ, ϗ Οὐϊτρούϊος, ϗ ἄλλοι) ὑπερησθεὶς τῷ εὑρήματι, ἐφ' ᾧ καὶ τῆς ἐκείνων ᾤετο ἀπολελαυκέναι ἐλλάμψεως· ἀμέλειτοι τὸν παροχέα τῶν φώτων ἐν ταῖς κατὰ τὰς ἐπιςήμας θεωρίαις, ϗ χορηγὸν τῆς Σοφίας ἠγνόει Κύριον, εἰδὲ ϗ ἔγνω, ἀλλ' οὐχ ὡς θεὸν ἐδόξαζεν. Ἔςι δὲ πυκνή τε, ϗ παντὸς μείζων ἡ τοῦ Θεωρήματος τούτου δι' ὅλης τῆς Μαθήσεως χρῆσις, ἐπ' ἄλλοις τε πάνυ πολλοῖς συντελοῦντος, ϗ τὴν εἰς τὰ ἀ-

(1) ια. Βιβ. α. (2) Αἴτ. α. (3) μζ. Βιβ. α. (4) Ἀξ. ιε. (5) Ἐξ. ὑποθ. (6) Ἀξ. α. (7) Ἀξ. ις. (8) κε. Βιβ. α. (9) μζ. Βιβ. α. (10) Ἐκ κατ. ϗ Ἀξ. ιε. (11) Ἐξ ὑποθ. (12) Ἀξ. ις. (13) κε. Βιβ. α.

σύμμετρα τῶν Μεγεθῶν φέρȣσαν, τὸ μέγα τῆς γεωμετρικῆς Φιλοσοφίας μυςήριον ὑπανοίγοντος.

κ. 155. Ὅτι γὰρ ἡ τȣ̃ Τετραγώνȣ Πλευρὰ ἀσύμμετρος τυγχάνει ȣ̓̃σα τῇ Διαγωνίῳ, Θεώρημα φέρεται πάλαι τοῖς Γεωμετρȣ̃σι τεθρυλλημμένον, καὶ πρὸ πάντων Ἀρις. ϗ Πλάτωνι, ὃς, ϗ τὸν τȣ̃το μὴ εἰδότα, ȣ̓δὲ ἄνθρωπον ἠξίȣ καλεῖν, συγκατέλεγε δὲ τοῖς κτήνεσιν. Ἡ δὲ δὴ τȣ̃ τοιȣ́τȣ ἀποῤῥήτȣ γνῶσις, τῇ προεκτεθείσῃ ΜΖ΄. Προτάσει τὴν ἀρχὴν ἔοικε προσοφείλειν. Ἐπεὶ γὰρ ἐπὶ τȣ̃ Τετραγώνȣ, Ὀρθή ἐςιν ἡ κατὰ τὸ α Γωνία, τὸ ἀπὸ τῆς Διαμέτρȣ γβ Τετράγωνον, ἴσον πάντως δυσὶν ἔςαι τοῖς ἀπὸ τῶν Πλευρῶν αβ, αγ Τετραγώνοις, ϗ δὴ ἐκ τȣ́τȣ, ϗ τȣ̃ ἑτέρȣ (1) διπλάσιον. Τȣ̃ γȣ̃ν ἀπὸ τῆς Διαμέτρȣ γβ Τετραγώνȣ ὑποτιθεμένȣ ὡς 2, τȣ̃ δὲ ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς αβ ὡς 1, ἡ μὲν γβ Διαγώνιος ῥίζα τετραγωνικὴ ἔςαι Δυάδος, ἡ δὲ Πλευρὰ αβ, ῥίζα τετραγωνικὴ Μονάδος, ἤτοι μονὰς, ὧν ὁ λόγος (ὡς ἐν ἄλλοις εἰρήσεται) ἀριθμοῖς πάντῃ ἀνέκφρας ος, δι᾽ ὃ ϗ ἀσύμμετροι λέγονται.

Αὕτη δὲ τὸ ἡ ἀσύμμετρον τῆς Πλευρᾶς ϗ τῆς Διαγωνίȣ ἐπὶ τῶν Τετραγώνων ἀποδεικνῦσα, ἐχάτη μὲν ἐςὶ τῶν παρ᾽ Εὐκλείδῃ τȣ̃ Ι΄ Βιβλ. Προτάσεων, δείκνυται δὲ παρὰ Τακȣετίȣ, ἐν τοῖς ὑπ᾽ αὐτȣ̃ φιλοπονηθεῖσι ςοιχείοις τῶν Ἀριθμητικῶν, κατὰ τὸ Σχόλιον τὸ μετὰ τὴν ΙΑ΄. Πρότ. τȣ̃ Β΄. Βιβλίȣ.

Ἐν οἷς ἐπιςῆσαι ἄξιον, ὡς εἰ ϗ μηδεὶς ἕτερος παρῆν λόγος, εἰς δεῖξιν τȣ̃ μὴ ἐξ ὡρισμένων τῷ ἀριθμῷ Σημείων τὰ Μεγέθη συνίςαθαι, ἤρκεσεν ἂν ȣ̓̃τος ϗ μόνος. Οὐδὲ γὰρ ἂν ἦν Μεγέθη ὅλως ἀλλήλοις ἀσύμμετρα, εἰ πάντων ἦν μέτρον κοινὸν λαβεῖν τὸ Σημεῖον.

Ἐπὶ τȣ́τοις ἅπασι προκείσθω καὶ Προβλήματα τρία, τὰ ἐκ τῆς ΜΖ΄. ἀπηρτημένα, ὧν πυκνοτάτη ἡ χρῆσις, τὰ ἐφεξῆς.

Πρόβλημα Α΄.

„ Τετραγώνων ὁποσωνȣ̃ν δοθέντων, ἴσον τοῖς πᾶσι Τετράγωνον ἀνα-
„ γράψαι.

κ. 156. Κείσθω Τετράγωνα τρία, ὧν Πλευραὶ αβ, βγ, γε, ϗ συνεςάσθω Γωνία ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ζβψ, ἧς αἱ Πλευραὶ ἐπ᾽ ἄπειρον ἔςωσαν προεκτεινόμεναι. Ἐπὶ δὲ τῶν Πλευρῶν (2) μετηνέχθωσαν αἱ αβ, ϗ βγ, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ αγ, καὶ ἔςαι πάντως τὸ ἀπὸ τῆς αγ Τετράγωνον (3) ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, ϗ βγ. Εἶτα ἡ αγ μετηνέχθω ϗ αὐτὴ ἀπὸ τȣ̃ β ἐπὶ τὸ φ, ἤτε γε τρίτη τῶν

(1) Α΄. Πόρ. τῶν ἀνωτ. (2) γ. Βιβ. α. (3) μζ. Βιβ. α.

δοθεισῶν Πλευρῶν, μετατιθέσθω ἐπὶ βε, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ εφ· καὶ ἔςαι δὴ τὸ ἀπὸ τῆς εφ (1) Τετράγωνον ἴσον τοῖς ἀπὸ βφ, ϗ εβ (ἤτοι εγ), τȣτέςιν ἴσον τρισὶ τοῖς δοθεῖσι, τοῖς ἀπὸ αβ, ϗ βγ, ϗ γε. Ο. Ε. Π.

Πρόβλημα Β'.

„Δυοῖν δοθεισῶν Εὐθειῶν ἀνίσων (αβ, βγ) Τετράγωνον ἀναγράψαι, „ᾧ τὸ ἀπὸ τῆς μείζονος (αβ) Τετράγωνον, ὑπερέχει τὸ ἀπὸ τῆς (βγ) „ἐλάσσονος.

Κέντρῳ μὲν τῷ β, Διαςήματι δὲ τῷ βα Κύκλος γεγράφθω· ἐπὶ δὲ τῆς Διαμέτρȣ αζ, ἀπὸ τȣ̃ Κέντρȣ β ἐπὶ ζ, ἐκκείσθω ἡ βγ, ἀπὸ δὲ τȣ̃ γ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ γε προσπίπτȣσα ἐπὶ τὴν Περιφέρειαν πρὸς τὸ ε. Καὶ τὸ ἀπὸ τῆς γε Τετράγωνον ἐςὶ τὸ ζητȣ́μενον· ἤτοι ἡ ὑπεροχὴ τȣ̃ ἀπὸ τῆς αβ Τετραγώνȣ, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ τῆς γβ Τετράγωνον. σχ. 157.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ βε· καὶ δὴ τὸ ἀπὸ τῆς βε τετράγ. ἴσον (2) τοῖς ἀπὸ βγ ϗ γε, ἅμα ληφθεῖσιν. Ἄρα κτ.

Πρόβλημα Γ'.

„Παντὸς ὀρθογωνίȣ Τριγώνȣ, τὰς δύο εἰδὼς Πλευρὰς πάντῃ μετα-„λαμβανομένας, ϗ τὴν λοιπὴν εὑρήσεις.

Πλευραὶ αἱ τὴν ὀρθὴν Γωνίαν περιέχȣσαι, ἔςωσαν αἱ αγ, αβ, ἡ μὲν ποδῶν 6, ἡ δὲ 8. Δεῖ δὴ προσευρεῖν ὅσων τυγχάνει ποδῶν ἡ βγ, ἡ ὑπὸ τὴν ὀρθὴν Γωνίαν ὑποτείνȣσα. σχ. 158.

Πεπολλαπλασιάσθων οἱ 6 ϗ 8 δι' ἀλλήλων μὲν ȣ̈, εἰς ἑαυτὸν δ' ἕκαςος· καὶ ἀνακύψει δὴ τῶν Πλευρῶν Τετράγωνα, τῆς μὲν 36, τῆς δὲ 64· τȣ́των κεφάλαιον ἐπαθροιζομένων τὰ 100. Τοιγαρȣ̃ν ἡ τετραγώνειος ῥίζα τῶν 100, ἥτις ἐςὶν ἡ 10, δώσει τȣ̀ς πόδας τῆς ζητȣμένης Πλευρᾶς βγ. Ἡ δὲ δεῖξις σαφής (3). Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἄθροισμα τῶν Τετραγώνων τῶν ἀπὸ αβ, ϗ αγ, ἴσον ἐςὶ τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς βγ, ἡ ῥίζα πάντως τȣ̃ τηλίκȣ ἀθροίσματος, ἡ αὐτὴ ἔςαι τῇ ῥίζῃ, ἤτοι τῇ Πλευρᾷ βγ.

Ἀλλ' ἔςωσαν δὴ δοθεῖσαι αἱ Πλευραὶ αβ, ϗ βγ, ἡ μὲν ποδῶν ȣ̈σα 10, ἡ δὲ 6· δεῖ δὴ προσευρεῖν τὴν αγ, ὅσων ἐςί. Τὸ ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς αβ Τετράγωνον 36, ἀφῃρήσθω ἀπὸ τȣ̃ Τετραγώνȣ 100 τȣ̃ ἀπὸ τῆς βγ. Τὸ δὲ

(1) μζ. Βιβ. α. (2) μζ. Βιβ. α. (3) μζ. Βιβ. α.

κατάλοιπον 64 Τετράγωνον ἔϛαι τὸ ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς αγ. Ἐὰν οὖν ἐξέλῃς ϗ ἀπὸ τȣ́τȣ τὴν Τετραγωνικὴν ῥίζαν, ἕξεις 8, ὃς ἔϛαι ὁ ἀριθμὸς τῶν ποδῶν τῶν ἐπὶ τῆς Πλευρᾶς αγ.

Πρότασις ΜΗ.

„Ἐὰν Τριγώνȣ τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν Πλευρῶν (αβ) Τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς „ἀπὸ τῶν λοιπῶν τȣ̃ Τριγώνȣ δύο Πλευρῶν (αγ, βγ) Τετραγώνοις, ἡ „περιεχομένη Γωνία (ὑπὸ αγβ) ὑπὸ τῶν λοιπῶν τȣ̃ Τριγώνȣ δύο Πλευρῶν „Ὀρθὴ ἐϛί.

χ. 159. Εἰ μὴ γὰρ, ἔϛω ἡ ὑπὸ αγβ Ὀρθῆς μείζων, ἢ γοῦν ἐλάσσων. Ἄρα (ὡς ἐν ΙΒʹ. καὶ ΙΓʹ. Προτ. τȣ̃ Βʹ. Βιβλ., ταῖς ἐκ ταύτης ȣ̓δαμῶς ἠρτημέναις δειχθήσεται) τὸ ἀπὸ τῆς αβ Τετράγωνον ȣ̓κ ἔϛαι ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν αγ ϗ βγ Τετραγώνοις· ὅπερ ἐϛὶ κατὰ τῆς ὑποθέσεως.

Ἄλλως.

Ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ γζ ἐπὶ τῆς γβ, ἴση τῇ αγ, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ βζ. Καὶ δὴ τὸ ἀπὸ τῆς βζ Τετράγωνον (1), ἴσον ἐϛὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ζγ, ϗ γβ, ἤτοι τοῖς ἀπὸ τῶν αγ ϗ βγ (2), τȣτέϛι τῷ ἀπὸ (3) τῆς αβ Τετραγώνῳ. Αἱ ἄρα αβ, ϗ ζβ (4) ἀλλήλαις ἴσαι εἰσίν· ἐπὶ ἄρα τῶν Τριγώνων, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν Πλευρῶν (5), ἔϛαι ϗ ὑπὸ αγβ, ἴση τῇ ὑπὸ βγζ. Ἄρα ϗ αἱ πρὸς τῷ γ ἐφεξῆς Γωνίαι (6) ὀρθαὶ, οἵαν δεῖξαι πρȣ̈́κειτο τὴν ὑπὸ αγβ.

---

(1) μζ. Βιβ. α. (2) Ἐκ κατ. (3) Ἐξ ὑποθ. (4) Ἀξ. ιε. (5) η. Βιβ. α. (6) Ὅρ. ιδ.

Τῶν ϛοιχείων τῆς Γεωμετρίας.

ΒΙΒΛΙ'ΟΝ Β'.

Βραχεῖα μὲν ἡ Βίβλος τὸν ὄγκον, διαφέρουσα δέ τοι τῶν ἐν αὐτῇ θεωρουμένων τῇ χρήσει καὶ τιμιότητι. Ὅπερ εἰ καὶ τοῖς ἐντυγχάνουσι τῶν Νεανίσκων αὐτίκα μὲν οὔπω, προσωτέρω ἀλλ' οὖν γενομένοις, εὖ οἶδ' ὅτι ἐξ αὐτῆς ἔϛαι τῆς πείρας κατάδηλον.

Καὶ δὴ θεωρεῖ μὲν ἡ Βίβλος τῶν Εὐθειῶν τὰς δυνάμεις, οἷα περ ἐϛὶ τὰ Τετράγωνα, παραβάλλει δὲ καὶ Τετραγώνοις αὐτοῖς καὶ Ὀρθογωνίοις, τοῖς γε ἀπὸ, καὶ ὑπὸ Εὐθειῶν ὅλων περιεχομένοις, Ὀρθογώνια παντοῖα, τὰ ὑπὸ τῶν, ἢ δίχα, ἢ ἄλλως πως τετμημένων Εὐθειῶν ἀνακύπτοντα. Καὶ πολλῆς οὖν τὸ ϛοιχειῶδες τουτὶ μέρος γέμον τῆς ὠφελείας πολλῶν τε ἕνεκα κρίνεται, καὶ τούτου πρὸ πάντων, ὅτι τῶν Ἀλγεβραϊκῶν πράξεων ταῖς κυριωτέραις προκαταβάλλει τοὺς θεμελίους, τῶν μὲν τριῶν πρωτίϛων ἐν αὐτῷ Προτάσεων εἰς ἀπόδειξιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τεινουσῶν, τῆς δὲ τετάρτης εἰς ἐξαγωγὴν τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν ξυντελούσης, τῶν δὲ λοιπῶν ἀπὸ μὲν ϛ'. ἕως Η'. ταῖς κατὰ τὴν περιώνυμον Ἄλγεβραν, ἀπὸ δὲ Η'. ἕως τῆς ἐσχάτης ταῖς κατὰ τὴν Τριγωνομετρίαν πράξεσι ξυμβαλλομένων. Οὐ τοίνυν μικροψυχητέον τοῖς πρωτοπείροις, τραχυτέρας πως ἐν αὐταῖς πρώταις ἐπιβολαῖς καὶ δυσαντιβλέπτου ἀπαντώσης τῆς Βίβλου. Παρὰ γὰρ τὸ τὰς πλείους τῶν ἐν αὐτῇ δείξεων τῷ προδηλοτάτῳ ἐκείνῳ προσερείδεσθαι Ἀξιώματι, τῷ τὸ ὅλον ἴσον ἅπασι τοῖς ἐν αὐτῷ μέρεσιν ἀποφαινομένῳ, καὶ οἷς οὐ τέλεον ἐκ πρώτης ἐπιβάλλειν δοκοῦσιν, ἐνδελεχῶς ἐπικύπτοντες, ἔϛαι ποθ' ὅτε καθ' ἑαυτοὺς θαυμάσονται, ὅτι πράγματα σφίσι παρεῖχε τὰ οὕτω σαφῆ τε καὶ γνώριμα.

Ὁρισμοί.

Πᾶν Παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον (τὸ καὶ ἁπλῶς Ὀρθογώνιον καλούμενον) περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν Γωνίαν περιεχουσῶν Εὐθειῶν αγ, αβ.

χ. 160. Τȣ́των γὰρ τῇ μὲν αγ τὸ ὕψος, τῇ δὲ αβ τὸ τȣ͂ Ὀρθογωνίȣ διορίζεται πλάτος. Εἶτα νοȣμένης τῆς αγ πρὸς ὀρθὰς φέρεσθαι δι᾽ ὅλης τῆς αβ, ἢ ϗ τῆς αβ ὡσαύτως δι᾽ ὅλης τῆς αγ, τὸ Ἐμβαδὸν τȣ͂ Ὀρθογωνίȣ τῇ τοιᾷδε κινήσει τὴν γένεσιν λήψεται. Καὶ εἰκότως ἄρα πολλαπλασιασμῷ τῶν δύο προσεχῶν Πλευρῶν ἐπ᾽ ἀλλήλαις, γεννᾶσθαι τὰ Ὀρθογώνια λέγεται.

χ. 161. Ὅτε τοίνυν ἡμῖν ὑποτίθεται τὸ ὑπὸ αγ, γβ, ἢ συντόμως τὸ αγβ, οὐδὲν ἀλλ᾽ ἢ τὸ ὑπὸ τῶν Εὐθειῶν αγ ϗ γβ, ἢ τῶν ταύταις παρισȣμένων, ἑκατέρας ἑκατέρᾳ πρὸς ὀρθὴν Γωνίαν συςαθεισῶν, ὑποδηλȣ͂ται περιεχόμενον Ὀρθογώνιον. Παραπλησίως, ϗ διὰ τȣ͂ ὑπὸ αβ ϗ βγ, εἴτȣν αβγ, τὸ ὑπὸ δυοῖν Εὐθειῶν ἴσων ταῖς αβ, ϗ βγ περιεχόμενον ὑποσημαίνεται Ὀρθογώνιον, τῶν τὴν ὀρθὴν Γωνίαν περιλαμβανȣσῶν.

Ὀρθογώνιον δὲ τὸ μὲν Ἑτερόμηκες, τὸ δὲ Τετράγωνον. Καὶ Ἑτερόμηκες μὲν τὸ τὰς προσεχεῖς Πλευρὰς ἔχον ἀνίσȣς, ἤτοι τὸ ὑπὸ δυεῖν Εὐθειῶν ἀνίσων περιεχόμενον. Τετράγωνον δὲ τὸ ἀπὸ δύο ἴσων, ἤτοι τὸ ἀπὸ μιᾶς ἐφ᾽ ἑαυτὴν ἀγομένης περιεχόμενον.

Ὑποθέσεις.

Κείσθω τὸ μὲν $=$ σημεῖον Ἰσότητος.

τὸ δὲ $+$ σημεῖον Προσθέσεως.

τὸ δὲ $-$ σημεῖον Ὑφαιρέσεως.

τὸ δὲ 0 ἀντὶ τȣ͂ Μηδενός.

τὸ δὲ $\times$ σημεῖον Πολλαπλασιασμȣ͂, ὅπερ ȣ̓δ᾽ ἀεὶ παρεντίθεσθαι φιλεῖ, τῶν ἐπιπολλαπλασιαζομένων ἀμέσως τὰ πολλὰ παρασυναπτομένων οἷον αβ, ἀντὶ $\alpha \times \beta$.

τὸ δὲ $:$ σημεῖον Διαιρέσεως· οἷον $\alpha : \beta$ σημαίνει τὸ α διαιρȣ́μενον διὰ τȣ͂ αβ· ὃ ϗ ἐν εἴδει κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ πολλάκις εἴωθε γράφεσθαι.

τὸ δὲ Τ σημεῖον Τετραγώνȣ.

τὸ δὲ Κ σημεῖον Κύβȣ.

τὸ δὲ $\sqrt{}$ σημεῖον τῆς Τετραγωνικῆς ῥίζης.

τὸ δὲ $\sqrt[3]{}$ σημεῖον τῆς Κυβικῆς.

τὸ δὲ $::$ σημεῖον τῶν ἴσων λόγων οἷον $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$.

τὸ δὲ $\div$ σημεῖον τῆς συνεχȣ͂ς Ἀναλογίας.

Πρότασις Α.

„Ἐὰν ὦσι δύο Εὐθεῖαι (αβ, αγ), τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὁσα-
„δηποτȣ̃ν Τμήματα (αε, εζ, ζγ), τὸ περιεχόμενον Ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν
„δύο Εὐθειῶν (αβ, αγ), ἴσον ἐϛὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτȣ (αβ), ϗ ἑκάϛȣ
„τῶν Τμημάτων (αε, εζ, ζγ) περιεχομένοις Ὀρθογωνίοις.

Ἤχθω ἀπὸ τȣ̃ α, ἐπὶ τῆς αγ πρὸς ὀρθὰς (1) ἡ αη, ϗ κείσθω ἴση τῇ κ. 162.
ἀτμήτῳ αβ. Καὶ διὰ τȣ̃ η τῇ αγ Παράλληλος (2) ἤχθω ἡ ηθ· διὰ δὲ τῶν ε, ζ, γ, τῇ αη Παράλληλοι αἱ εκ, ζλ, γθ.

Ἴσον δὴ ἐϛι τὸ ηγ, τοῖς ηε, κζ, λγ (3). Καὶ ἔϛι τὸ μὲν ηε τὸ ὑπὸ ηαε, ταυτὸν εἰπεῖν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ἀτμήτȣ αβ, ϗ τȣ̃ Τμήματος αε. Τὸ δὲ κζ τὸ ὑπὸ κεζ, τὸ ὑπὸ κε (ἥτις ἴση τῇ ηα (4)), τȣτέϛι τῆς αγ, ϗ εζ. Τὸ δὲ λγ, ὁμοίως ὑπὸ λζγ, ἤτοι ὑπὸ αβ ϗ ζγ (5).

Πόρισμα.

Κρατυνθείη δ' ἂν ἐντεῦθεν πληρεϛέρας τυγχάνȣσα δείξεως, καὶ ἡ τȣ̃ κ. 163.
προβλήματος ἐπίλυσις, τȣ̃ ἐν τῷ Σχολίῳ τῷ μετὰ τὴν ΜΕ΄. τȣ̃ Α΄. Βιβλ. προτεθέντος. Τȣ̃ γὰρ Τετραπλεύρȣ βζ, διὰ τῆς Εὐθείας αγ εἰς τὰ δύο Τρίγωνα αβγ ϗ αζγ ἀναλυθέντος, δίχα τμηθείσης τῆς αγ κατὰ τὸ σ, ἀπό τε τῶν ἀπεναντίον Γωνιῶν β ϗ ζ, ἐπὶ τῆς κοινῆς Βάσεως αγ Καθέτων ἀχθεισῶν τῶν βξ ϗ ζι, ϗ ἀπὸ τȣ̃ σ πρὸς ὀρθὰς ἠγμένης τῆς σλ, ϗ ἰσομήκȣς ταῖς δυσὶν ἅμα βξ ϗ ζι ληφθείσης, δεικτέον ὅτι τὸ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ γσ ϗ σλ, ἴσον τῷ Τετραπλεύρῳ βζ. Ἐπειδὴ γὰρ τὰ Τρίγωνα αβγ, αζγ (6) ἴσα τοῖς Ὀρθογωνίοις τοῖς ὑπὸ γσ ϗ βξ, ϗ ὑπὸ γσ ϗ ζι, θάτερον θατέρῳ· ἐπεί τε Εὐθεῖα ἡ λσ, ἴση ἐϛὶ ταῖς βξ ϗ ζι ἅμα ληφθείσαις, εἰς τε μέρη τέτμηται τὰ σδ ϗ δλ, ἃ ἴσα ἐλήφθη τοῖς βξ ϗ ζι, τὸ ἕτερον τῷ ἑτέρῳ. Τὰ ἄρα Τρίγωνα, ἤτοι τὸ Τετράπλευρον βζ, τοῖς Ὀρθογωνίοις γδ, λε τοῖς ὑπὸ τῆς ἀτμήτȣ γσ, ϗ ἑκατέρȣ τῶν μερῶν τῆς τετμημένης σλ, τȣτέϛι (δυνάμει τῆς ἀνὰ χεῖρας Προτάσ.) τῷ Ὀρθογωνίῳ λγ τῷ ὑπὸ τῶν λσ ϗ γσ, ἐξ ἀνάγκης συνεξισȣ̃ται.

Σχόλιον.

Τὰ δὴ πρῶτα δέκα τῶν ἐν τῷ παρόντι Βιβλίῳ Θεωρημάτων ἀληθεύει

(1) ια. Βιβ. α. (2) ΛΔ. τȣ̃ α΄. (3) Α΄ξ. θ. (4) ΛΔ. τȣ̃ κ΄. (5) Ὅρ. τȣ̃ β΄. (6) μα. Βιβ. α.

οὐδὲν ἧττον ϗ ἐπὶ ἀριθμῶν, ἣν εἰς μέρη κατὰ τὰς Γραμμὰς διαιροῖντο. Ἀναφύεται γὰρ ϗ τὰ ἀριθμητικὰ Ὀρθογώνια διὰ πολλαπλασιασμοῦ δυοῖν ἀριθμῶν· τὰ δὲ ἀριθμητικὰ Τετράγωνα, δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ καθ' ἑαυτὸν πολλαπλασιαζομένου.

Οἷον ἔστω ἀριθμὸς μὴ τετμημένος ὁ 9, τετμημένος δὲ ὁ 12 εἰς μέρη ταυτὶ τὰ τρία, 3 ϗ 4, ϗ 5· ϗ ἔσται δὴ τὸ Ὀρθογώνιον ὑπὸ 9 ϗ 12 = 108, ἴσον τοῖς τρισὶν Ὀρθογωνίοις 27, ϗ 36, ϗ 45, ὧν τὸ μὲν ὑπὸ 9 ϗ 3, τὸ δὲ ὑπὸ 9 ϗ 4, τὸ δὲ ὑπὸ 9 ϗ 5 συναπαρτίζεται.

Ἢ γοῦν ἀριθμὸς ἔστω 432, ὡσεὶ Πολλαπλασιαστέος τετμημένος εἰς 400, ϗ 30, ϗ 2· ἀριθμὸς δὲ, οἷον Πολλαπλασιαστὴς ὁ 8 μὴ τετμημένος. Καὶ ἔσται $8 \times 432 = 3456$, ἴσος $8 \times 400 = 3200 + 8 \times 30 = 240 + 8 \times 2 = 16$. Κἀντεῦθεν οὖν τὴν ἀπόδειξιν ληπτέον τῆς κατὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν πράξεως.

Πρότασις Β.

σχ. 164. „Ἐὰν εὐθεῖα Γραμμὴ (αβ) τμηθῇ ὡς ἔτυχε (κατὰ τὸ γ), τὰ ὑπὸ
„τῆς ὅλης (αβ) ϗ ἑκατέρου τῶν Τμημάτων (αγ, γβ) περιεχόμενα Ὀρθο-
„γώνια, ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης Τετραγώνῳ.

Ληφθήτω δὴ ἡ ζ = τῇ αβ.

$$\text{Ὀρθογ. } \zeta\alpha\beta = \left.\begin{array}{l}\text{Ὀρθογ. } \zeta\alpha\gamma\\ \text{Ὀρθογ. } \zeta\gamma\beta\end{array}\right\} (1).$$

Τουτέστιν ἐπεὶ ἡ ζ = τῇ αβ.

$$\text{Τετράγ. τὸ ἀπὸ } \alpha\beta = \begin{array}{l}\text{Ὀρθογ. } \beta\alpha\gamma)\\ \text{Ὀρθογ. } \alpha\beta\gamma)\end{array}$$

Ἄλλως.

σχ. 165. Ἀναγεγράφθω αβδε Τετράγωνον ἀπὸ Εὐθείας τῆς αβ (2), καὶ ἀπὸ τοῦ Σημείου γ ἤχθω (3) πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς αβ ἡ γθ. Αἱ γοῦν πρὸς τῷ γ Γωνίαι Ὀρθαὶ οὖσαι, ταῖς κατὰ τὸ α ϗ β ἴσαι εἰσίν· αἵ τε Εὐθεῖαι αε, γθ, βδ πρὸς ἀλλήλας Παράλληλοί (4) εἰσι, τά τε αθ, ϗ βθ Παραλληλόγραμμα ὀρθογώνια (5). Ἔστι δὲ ϗ ἡ Εὐθεῖα γθ τῇ Εὐθείᾳ αε (6), ἤτοι τῇ αβ (7) ἴση. Ἔνθεν τοι τὰ αθ ϗ βθ Ὀρθογώνιά εἰσιν ὑπὸ (8) τῆς ὅλης αβ, ϗ

---

(1) Α. τοῦ β΄. (2) Μϛ. τοῦ α΄. (3) ΙΑ. τοῦ α΄. (4) ΚΗ τοῦ α΄. (5) Ὁρ. τοῦ β΄. (6) ΛΔ. τοῦ α΄. (7) Ἐκ κατ. (8) Ὁρ. τοῦ β.

τῶν Τμημάτων αγ, γβ περιεχόμενα, ἃ δὴ ϗ ἅμα ληφθέντα, τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς αβ συνεξισοῦται.

Ἔςω ἀριθμὸς 8 εἰς 5 ϗ 3 τετμημένος. Τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τοῦ ὅλου $8 \times 8 = 64$, ἴσον ἐςὶ τοῖς Ὀρθογωνίοις $8 \times 3 = 24$, ϗ $8 \times 5 = 40$.

Πρότασις Γ.

„Ἐὰν εὐθεῖα Γραμμὴ (αβ) ὡς ἔτυχε τμηθῇ (κατὰ τὸ γ), τὸ ὑπὸ τῆς „ὅλης (αβ) ϗ ἑνὸς τῶν Τμημάτων (βγ) περιεχόμενον Ὀρθογώνιον, ἴσον „ἐςὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν Τμημάτων (αγ, γβ) περιεχομένῳ Ὀρθογωνίῳ, ϗ τῷ „ἀπὸ τοῦ προειρημένου Τμήματος (βγ) Τετραγώνῳ. κ. 166.

Ληφθήτω δὴ ἡ $\zeta = \gamma\beta$.

$$\text{Ὀρθογ. } \alpha\beta\zeta = \left.\begin{matrix}\text{Ὀρθογ. } \alpha\gamma\zeta \\ \text{Ὀρθογ. } \gamma\beta\zeta\end{matrix}\right\} (1). \text{ Ἀλλὰ } \zeta = \gamma\beta.$$

$$\text{Ἄρα Ὀρθογ. } \alpha\beta\gamma = \left.\begin{matrix}\text{Ὀρθ. } \alpha\gamma\beta \\ \text{Τετρ. } \gamma\beta\end{matrix}\right)$$

Ἄλλως.

Ἀναγεγράφθω (2) γὰρ Ὀρθογ. τὸ αδ, ὑπὸ τῆς ὅλης αβ καὶ τοῦ Τμήματος γβ, ϗ ἀπὸ τοῦ Σημείου γ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ γε. Διὰ γοῦν τὴν γε Εὐθεῖαν, ἥτις τῇ βδ (3), ϗ ἑπομένως τῇ βγ (4) ἴση ἐςὶ, τὸ Ὀρθογώνιον αδ τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης αβ ϗ τοῦ Τμήματος βγ περιεχόμενον, ἴσον ἐςὶ τῷ τε Ὀρθογωνίῳ αε τῷ ὑπὸ τῶν Τμημάτων αγ ϗ γβ, ϗ τῷ ἀπὸ τοῦ εἰρημένου Τμήματος γβ Τετραγώνῳ γδ. κ. 167.

Ἔςω ἀριθμὸς 7 εἰς 3 καὶ 7 τετμημένος. Τὸ γοῦν Ὀρθογ. $7 \times 3 = 21$ ἴσον ἐςὶ τῷ Ὀρθογ. $3 \times 4 = 12$, ϗ τῷ Τετραγ. $3 \times 3 = 9$, ἅμα ληφθεῖσι. Ὡσαύτως δὲ ϗ τὸ Ὀρθογώνιον $7 \times 4 = 28$, ἴσον ἐςὶ τῷ Ὀρθογ. $3 \times 4 = 12$, ϗ τῷ Τετραγ. $4 \times 4 = 16$, ἅμα ληφθεῖσι.

Πρότασις Δ.

„Ἐὰν εὐθεῖα Γραμμὴ (ζλ) τμηθῇ ὡς ἔτυχε (κατὰ τὸ ξ), τὸ ἀπὸ „τῆς ὅλης Τετράγωνον, ἴσον ἐςὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν Τμημάτων (ζξ, ξλ) Τε„τραγώνοις, ϗ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν Τμημάτων (ζξ, ξλ) περιεχομένῳ Ὀρθογωνίῳ. κ. 168.

---

(1) *Α.* τοῦ β΄. (2) Σχόλ. τὸ τῆς *Μϛ*΄. τοῦ α΄. (3) *ΚΗ.* ϗ *ΛΔ.* τοῦ α΄. (4) *Ἐκ κατ.*

$$\text{Τετράγ. } ζλ = \left.\begin{array}{l}\text{Ὀρθογ. } ζλξ\\ \text{Ὀρθογ. } λζξ\end{array}\right\}\ (1)$$

$$\text{Ἀλλ᾿ Ὀρθογ. } ζλξ = \left.\begin{array}{l}\text{Ὀρθογ. } ζξλ\\ \text{Τετραγ. } ξλ\end{array}\right\}\ (2)$$

$$\text{Καὶ Ὀρθογ. } λζξ = \left.\begin{array}{l}\text{Ὀρθογ. } ζξλ\\ \text{Τετραγ. } ζξ\end{array}\right\}\ (3)$$

$$\text{Ἄρα Τετράγ. } ζλ = \left.\begin{array}{l}\text{δὶς Ὀρθ. } ζξλ\\ \text{Τετ. } ξλ\\ \text{Τετ. } ζξ\end{array}\right\}$$

Ἄλλως.

κ. 169. Ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ζλ Εὐθείας Τετράγωνον (4) τὸ ζλδη, καὶ ἀχθείσης τῆς Διαμέτρου ηλ ἐπὶ τοῦ ζηλ Τριγώνου, διά τε τὰς ἴσας Πλευρὰς ζη ϗ ζλ, ϗ δὴ ϗ διὰ τὴν κατὰ τὸ ζ ὀρθὴν Γωνίαν, ἔσονται αἱ ὑπὸ ζηλ, ϗ ζλη ἡμίσειαι (6) Ὀρθῆς, ϗ ἀλλήλαις ἴσαι· διὰ γοῦν τοῦ ξ Σημείου, ἤχθω πρὸς τὴν ζη (6) Παράλληλος ἡ ξκ, ἥτις Παράλληλος ἔςαι ϗ τῇ λδ, τεμεῖ δὲ καὶ τὴν Διάμετρον ηλ κατὰ τὸ γ. Διὰ δὲ τοῦ Σημείου γ, Παράλληλος ὁμοίως ἤχθω τῇ ζλ ϗ τῇ ηδ, ἡ θι. Ἐπεὶ τοίνυν ἅπασαι αἱ τοῦ Τετραγώνου ζδ Γωνίαι Ὀρθαί εἰσιν, ἔσονται δὴ ϗ πάντα τὰ παραλληλόγραμμα ζγ, ξι, θκ, γδ ὀρθογώνια (7). Ἐπεὶ δὲ καὶ αἱ ξκ καὶ ζη Παράλληλοι, ἔςαι ἡ ἐκτὸς Γωνία (8) λγξ, ἴση τῇ ἐντὸς ϗ ἀπεναντίον ζηλ, ἤτοι τῇ ὑπὸ ζλη ἡμισείᾳ οὔσῃ Ὀρθῆς. Ἄρα ἐπὶ τοῦ λξγ Τριγώνου αἱ ξγ, ξλ, ἴσαι (9) εἰσίν· ἴσαι δὲ ϗ τοῦ Ὀρθογωνίου ξι (10) αἱ ἀπεναντίον Πλευραὶ ξλ, γι, ϗ ξγ, λι. Τὸ ἄρα ξι (11) Τετράγωνόν ἐςιν ἀπὸ τῆς ξλ Εὐθείας. Ὡσαύτως δὲ δειχθήσεται ϗ τὸ θκ Τετράγωνον εἶναι ἀπὸ τῆς Εὐθείας θγ, ἤτοι (12) ἀπὸ τῆς ζξ. Ἀλλ᾿ αἱ γξ ϗ ξλ ἴσαι εἰσὶν, ἔςαι τὸ ζγ Ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν ζξ καὶ ξλ Τμημάτων τῆς δοθείσης Εὐθείας ζλ. Ἀλλὰ γὰρ τὰ Ὀρθογώνια ζγ ϗ γδ ἴσα (13) εἰσὶ, διὸ ϗ ἅμα ληφθέντα, ἴσα ἐςὶ τῷ δὶς Ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῶν Τμημάτων ζξ, ξλ. Ἔνθεν τοι τὸ ζδ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης Εὐθείας ζλ, ἴσον ἐςὶ τοῖς θκ ϗ ξι, τοῖς ἀπὸ τῶν Τμημάτων ζξ, ξλ Τε-

(1) Β. τοῦ β΄. (2) Γ. τοῦ β΄. (3) Διὰ τὴν αὐτ. (4) Μϛ. τοῦ α΄. (5) Πόρ. δ΄. τῆς ΛΒ. τοῦ α΄. (6) ΛΔ. τοῦ α΄. (7) Πόρ. α΄. τῆς ΛΔ. τοῦ α΄. (8) ΚΘ. τοῦ α΄. (9) ϛ. τοῦ α΄. (10) ΛΔ. τοῦ α΄. (11) Ὁρ. ΛΒ. τοῦ α΄. (12) ΛΔ. τοῦ α΄. ϗ ἀξ. ιε. (13) ΜΓ. τοῦ α΄.

τραγώνοις, σὺν τοῖς ζγ ϗ γδ, ἤτοι σὺν τῷ δὶς Ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῶν αὐτῶν Τμητάτων. Ο. Ε. Δ.

Ἔςω ἀριθμὸς 10 εἰς μέρη 7 ϗ 3 τετμημένος. Τὸ Τετράγωνον $10 \times 10 = 100$, ἴσον τοῖς Τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ τῶν μερῶν $7 \times 7 = 49$, ϗ $3 \times 3 = 9$, καὶ τοῖς δυσὶν Ὀρθογωνίοις $7 \times 3 = 21$, ϗ $7 \times 1 = 21$. Ἢ γȣ̃ν ἔςω ἀριθμὸς 12, εἰς μέρη 10 ϗ 2 τετμημένος· τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τȣ̃ ὅλȣ $12 \times 12 = 144$, ἴσον ἐςὶ τοῖς Τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ τῶν μερῶν $10 \times 10 = 100$, ϗ $2 \times 2 = 4$, συνάμα τῷ δὶς Ὀρθογωνίῳ $10 \times 2 = 20$, ἤτοι $2 \times 10 \times 2 = 40$. Ἐξ ὧν ϗ ἡ τῆς Τετραγωνικῆς ῥίζης Ἐξαγωγὴ ἤρτηται.

Πορίσματα.

Ἐκ τȣ́των δὲ φανερὸν, ὅτι τὰ Παραλληλόγραμμα ξι ϗ θκ, τὰ περὶ Α΄.
τὴν Διάμετρον (ὅρα τὸ ἄνωτ. Σχῆμα) τȣ̃ Τετραγώνȣ, Τετράγωνα ἐςί.

Καὶ ὅτι ἡ Διάμετρος παντὸς Τετραγώνȣ δίχα τέμνει τὰς δι' ὧν ἄγεται Β΄.
Γωνίας. Ἔςι γὰρ ἡ μὲν ὑπὸ ζλδ Ὀρθὴ, ἡ δὲ ὑπὸ ζλη ἡμίσεια Ὀρθῆς.

Καὶ ὅτι τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας, τȣ̃ ἀπὸ τῆς ὅλης ἐςὶ Γ΄. σχ. 170.
Τετραγώνȣ τεταρτημόριον. Ἐὰν γὰρ αἱ ξκ, θι παραλλήλῳ κινήσει πρὸς τὰ μεσαιτάτω τῶν ζλ, ηδ, ϗ ηζ, δλ χωρήσωσι, τάτε δύο Ὀρθογώνια ζγ, γδ, ϗ τὰ δύο Τετράγωνα ξι, ϗ θκ εἰς τέσσαρα Τετράγωνα ἀλλήλοις ἴσα ἀποτελευτήσȣσι τὰ λγ, ικ, γη, ξθ. Ὡσαύτως δὲ δῆλον ϗ ὅτι ϗ ἅπαν Ὀρθογώνιον (ἢ γȣ̃ν ϗ ἁπλῶς ἅπαν Παραλληλόγραμμον) τὸ ὑπὸ δύο ὁποιωνȣ̃ν Εὐθειῶν, τȣ̃ Ὀρθογωνίȣ (ἢ καὶ τȣ̃ Παραλληλογράμμȣ τȣ̃ τῷ δοθέντι ἰσογωνίȣ) τȣ̃ ὑπὸ τῶν ἡμισειῶν ἐςὶ τετραπλάσιον.

Καὶ ὅτι ἅπαν Τετράγωνον ζδ ἴσον ἐςὶ τῷ δὶς Ὀρθογωνίῳ ζκ, ξδ τῷ Δ΄. σχ. 171.
ὑπό τε τῆς Πλευρᾶς τȣ̃ Τετραγώνȣ δλ, ἤτοι ζλ, ϗ τῆς ἡμισείας ταύτης, οἷον τῆς ζξ περιεχομένῳ. Καὶ ὅτι ἅπαν Παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ δὶς Παραλληλογράμμῳ τῷ ἰσογωνίῳ, τῷ ὑπὸ τῆς ἑτέρας τῶν Πλευρῶν ϗ τȣ̃ ἡμίσεως τῆς ἑτέρας.

Πρότασις Ε.

„Ἐὰν εὐθεῖα Γραμμὴ (πφ) τμηθῇ εἰς ἴσα (κατὰ τὸ ρ) καὶ εἰς ἄνισα σχ. 172.
„(κατὰ τὸ σ), τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης Τμημάτων (πσ, σφ) περιεχόμενον Ὀρθογώνιον, μετὰ τȣ̃ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν (ρσ) Τετραγώνȣ, ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας (πρ) Τετραγώνῳ.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ὀρθογών. } \pi\sigma\varphi = \text{Ὀρθ. } \pi\varrho \times \sigma\varphi \\ \qquad\qquad\qquad\ \ \text{Ὀρθ. } \varrho\sigma\varphi\end{array}\right\} (1)$$

$$\begin{array}{l}\text{Ὀρθογ. } \pi\varrho \times \sigma\varphi = \text{Ὀρθ. } \varrho\varphi\sigma \\ \qquad\qquad\qquad\ \ \text{Τȣτέϛιν (2)}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ὀρθογ. } \pi\varrho \times \sigma\varphi = \text{Ὀρθ. } \varrho\sigma\varphi \\ \qquad\qquad\qquad\ \ \text{Τετρ. } \sigma\varphi\end{array}\right\}$$

$$\text{Ἄρα Ὀρθογ. } \pi\sigma\varphi = \left.\begin{array}{l}\text{Ὀρθογ. } \varrho\sigma\varphi \\ \text{Ὀρθογ. } \varrho\sigma\varphi \\ \text{Τετρ. } \sigma\varphi\end{array}\right\}$$

Προσιθέσθω κοινῇ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ ρσ, ϗ ἔϛαι

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ὀρθογών. } \pi\sigma\varphi \\ \text{Τετράγ. } \varrho\sigma\end{array}\right\} = \left.\begin{array}{l}\text{Ὀρθογ. } \varrho\sigma\varphi \\ \text{Ὀρθογ. } \varrho\sigma\varphi \\ \text{Τετραγ. } \sigma\varphi \\ \text{Τετραγ. } \varrho\sigma\end{array}\right\} = \varrho\varphi^{\text{T}} = \pi\varrho^{\text{T}}\ (3).$$

Ἄλλως.

κ. 173. Ἐπὶ τῆς Εὐθείας πφ, ἀπὸ τῆς ἡμισείας ρφ ἀναγεγράφθω Τετράγωνον (4) τὸ ρζ, ϗ ἀχθείσης τῆς Διαμέτρȣ φε, διὰ τȣ̃ σ ἤχθω (5) Παράλληλος τῇ ρε ἢ φζ, ἡ ση τέμνȣσα τὴν Διάμετρον κατὰ τὸ θ, καὶ διὰ τȣ̃ θ ὁμοίως (6) Παράλληλος τῇ πφ ἢ τῇ εζ, ἡ κι τέμνȣσα τὴν ρε κατὰ τὸ λ, καὶ διὰ τȣ̃ π ὡσαύτως Παράλληλος τῇ ρλ ἡ πκ. Ἐπειδὴ τοίνυν τὸ σι Τετράγωνόν ἐϛι (7) περὶ τὴν Διάμετρον τȣ̃ Τετραγώνȣ ρζ, ἔϛαι σφ = σθ (8)· ϗ ἐπεὶ τὸ σλ Παραλληλόγραμμόν (9) ἐϛιν, ἔϛαι ϗ ἡ ρσ = λθ (10) ϗ ρλ = σθ = σφ. Ἔϛι δὲ (11) πρ = ρφ = φζ· τὸ ἄρα πλ = σζ (12). Κοινῇ προσιθέσθω τὸ ρη, ϗ ἔϛαι πθ + λη = ρζ. Ἀλλὰ τὸ μὲν πθ ἐϛὶ τὸ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῶν τῆς πφ Εὐθείας ἀνίσων Τμημάτων πσ, σφ, τὸ δὲ λη ἐϛὶ (13) τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν ρσ, τὸ δὲ ρζ (14) ἐϛὶ τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ρφ. Ἐὰν ἄρα Εὐθεῖα ἡ πφ εἰς ἴσα τμηθῇ κατὰ τὸ ρ, ϗ εἰς ἄνισα κατὰ τὸ σ, ἔϛαι κτ. Ο. Ε. Δ.

Ἐκ δὲ δὴ ταύτης ϗ τῆς ἐφεξῆς Προτάσεως ἤρτηται ἡ Γεωμετρικὴ κα-

(1) *Α. τȣ̃ β'.* (2) *Γ. τȣ̃ β'.* (3) *Δ. τȣ̃ β'.* (4) *Μϛ. τȣ̃ α'.* (5) *ΛΑ. τȣ̃ α'.* (6) *Αὐτ.* (7) *Α. Πόρ. τῆς ἀνωτ.* (8) *Ὅρ. λβ. Βιβ. α'.* (9) *Ἐκ κατ.* (10) *ΛΔ. τȣ̃ α'.* (11) *Ἐξ ὑποθ.* (12) *Ὅρ. λβ. Βιβ. α'.* (13) *Α. Πόρ. τῆς ἀνωτ. καὶ ΛΔ. τȣ̃ α'. Βιβ.* (14) *Ἐκ κατασκ.*

τασκευὴ τῶν Ἐξισώσεων τῶν τετραγωνικῶν ϗ διατεθειμένων, ὡς ἐπὶ τῆς ΚΗ'. ϗ ΚΘ'. τοῦ ς'. Βιβλ. πληρέστερον ἀναπτυχθήσεται.

Ἔστω ἀριθμὸς ὁ 8 εἰς ἴσα τετμημένος 4 ϗ 4, ϗ εἰς ἄνισα 5 καὶ 3. Καὶ ἔσται τὸ Ὀρθογώνιον $5 \times 3 = 15$ μετὰ τοῦ Τετραγώνου $1 \times 1 = 1$, ἴσον τῷ Τετραγώνῳ $4 \times 4 = 16$.

Πορίσματα.

Ἐκ δὴ τούτων φανερὸν ὅτι τὸ Ὀρθογώνιον πσφ τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων Τμημάτων, ἔλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας πρ, ἢ ρφ Τετραγώνου. Α'.

Ὅσῳ ἔγγιον τῷ μέσῳ ρ τὸ κατὰ τὴν ἄνισον τομὴν Σημεῖον σ γίνεται, τοσούτῳ μεῖζον ἔσται τὸ πσφ Ὀρθογώνιον· ὅσῳ τε ἀπωτέρω ἐκεῖνο, τοσούτῳ ἔλαττον τοῦτο γε. Τὸ γὰρ σ προσιὸν μὲν ἐλαττοῖ, ἀπιὸν δὲ ἐπαύξει τὴν μεταξὺ τῶν τομῶν ρσ, ἔνθεντοι ϗ τὸ ἀπὸ τῆς ρσ Τετράγωνον (1) μειωθήσεται ἀναλόγως, ϗ αὐξηθήσεται. Ἀλλὰ διὰ τὴν ἐν χερσὶ Πρότ. $\rho\sigma^{T} + \pi\sigma\varphi = \pi\rho^{T}$· ὅσῳ ἄρα ἧττον τὸ $\rho\sigma^{T}$, τοσούτῳ μεῖζον ἔσται τὸ Ὀρθογ. πσφ, καὶ τοὐναντίον. Β'.

Ὅσῳ ἔγγιον γίνεται τὸ Σημεῖον σ τοῦ μέσου ρ, τοσούτῳ ἔλαττον ἔσται τὸ ἄθροισμα τῶν Τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν ἀνίσων Τμημάτων πσ, σφ· ὅσῳ δὲ ποῤῥωτέρω, τοσούτῳ μεῖζον ἔσται τὸ ῥηθὲν ἄθροισμα. Καὶ γὰρ (2) $\pi\varphi^{T} = \pi\sigma^{T} + \sigma\varphi^{T} + 2\ \pi\sigma\varphi$· ἀλλαμὴν ἐγγυτέρω μὲν τοῦ σ τῷ ρ γινομένου μεῖζον τὸ πσφ καθίσταται Ὀρθογώνιον (3), ἀπωτέρω δὲ ἔλαττον, τὸ ἄρα σ τῷ μέσῳ ρ προσιὸν, ἐλάσσονα τὰ $(\pi\sigma^{T} = \sigma\varphi^{T})$ Τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων Τμημάτων, μείζονα δὲ ἀπιὸν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀναδείκνυσι. Γ'.

Ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων Τμημάτων Ὀρθογώνιον πσφ, τετράκις ληφθὲν, ἔλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ὅλης πφ Τετραγώνου. Τὸ γὰρ ἀπὸ τῆς ἡμισείας πρ Τετράγωνον, τετράκις ληφθὲν, ἴσον (4) τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης πφ Τετραγώνῳ. Ἀλλὰ τὸ πσφ Ὀρθογ. (5) ἔλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ρφ, ἢ πρ Τετραγώνου, ἔνθεντοι καὶ τὸ πσφ τετράκις, ἔλασσον τοῦ ἀπὸ πρ Τετραγ. τετράκις· ἔλαττον ἄρα ϗ τοῦ ἀπὸ τῆς ὅλης πφ Τετραγώνου. Ο. Ε. Δ. Δ'.

Ἐὰν Εὐθεῖαι δύο ἴσαι ἀλλήλαις αβ, ϗ γδ, οὕτωτοι κατὰ τὰ Σημεῖα ε ϗ ζ τετμημέναι, ὥστε τὸ Ὀρθογώνιον αεβ τὸ ὑπὸ τῶν Τμημάτων τῆς ἑτέρας ἴσον εἶναι τῷ Ὀρθογωνίῳ γζδ, τῷ ὑπὸ τῶν Τμημάτων τῆς ἑτέρας, ἔσται Ε'. σχ. 174.

(1) Ἀξ. ς. (2) Δ'. τοῦ β'. (3) Πόρ. ἀνωτ. (4) Πόρ. Γ. τῆς Δ. τοῦ β'. (5) Πόρ. α'. τῶν Ἀνωτέρω.

δὴ ϗ τȣτων τὰ Τμήματα ἴσα τῷ ἑτέρῳ τὸ ἕτερον, τῷ μείζονι τὸ μεῖζον, καὶ τῷ ἐλάσσονι τὸ ἔλασσον, ἐὰν ᾖ τὰ Τμήματα ἄνισα. Ἐὰν μὲν γὰρ τὰ ε ϗ ζ Σημεῖα εἰς ἴσα τέμνῃ τὰς Εὐθείας αβ ϗ γδ, δῆλον ὅτι τὸ μὲν $\alpha\varepsilon = \gamma\zeta$, τὸ δὲ $\varepsilon\beta = \zeta\delta$. Ἐὰν δὲ ἄλλως, τετμήσθωσαν δὴ αἱ αβ ϗ γδ, ἡ μὲν κατὰ τὸ μ, ἡ δὲ κατὰ τὸ ν, ἄμφω εἰς ἴσα. Οὕτω γὰρ ἐπεὶ τὰ τȣτων ἡμίση μβ, ϗ νδ, ἴσα (1) ἐςὶ, πάντως ϗ $\mu\beta^{T} = \nu\delta^{T}$ (2). Ἀλλὰ γὰρ διὰ τὴν Πρότ. $\mu\beta^{T} = \alpha\varepsilon\beta + \mu\varepsilon^{T}$, καὶ $\nu\delta^{T} = \gamma\zeta\delta + \nu\zeta^{T}$, ἄρα (3) $\alpha\varepsilon\beta + \mu\varepsilon^{T} = \gamma\zeta\delta + \nu\zeta^{T}$. Ἐὰν οὖν ἀφαιρεθῇ τὰ ὑποτεθέντα ἴσα Ὀρθογώνια (4), ἔςαι $\mu\varepsilon^{T} = \nu\zeta^{T}$, καὶ δὴ ϗ $\mu\varepsilon = \nu\zeta$. Τȣτων οὖν ταῖς ἴσαις αμ ϗ γν προςεθεισῶν, ϗ ἀπὸ τῶν ἴσων μβ, νδ ἀφαιρεθεισῶν, ἔςαι (5) $\alpha\varepsilon = \gamma\zeta$, ϗ $\varepsilon\beta = \zeta\delta$. Ο. Ε. Δ.

κ. 175. ϛ'. Τὸ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπό τε τȣ ἀθροίσματος ϗ τῆς διαφορᾶς δυοῖν Εὐθειῶν πρ καὶ ρσ, ἴσον ἐςὶ τῇ διαφορᾷ τῶν Τετραγώνων, τῶν ἀπὸ αὐτῶν τȣτων τῶν Εὐθειῶν, καὶ γὰρ $\pi\sigma\varphi + \rho\sigma^{T} = \pi\rho^{T}$. Ἐὰν οὖν ἀφέλῃς ἑκατέρωθεν $\rho\sigma^{T}$, ἔςαι $\pi\sigma\varphi = \pi\rho^{T} - \rho\sigma^{T}$. Ἐπεὶ δὲ πσ, τῶν Εὐθειῶν πρ καὶ ρσ τὸ ἄθροισμά ἐςι, ϗ (διότι $\rho\varphi = \pi\rho$) σφ ἐςὶν ἡ τȣτων διαφορὰ, δῆλον τὸ προτεθέν.

Πρότασις ϛ.

κ. 176. „Ἐὰν εὐθεῖα Γραμμὴ (αβ) τμηθῇ δίχα (κατὰ τὸ γ), προςεθῇ „δέ τις αὐτῇ Εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας (ἡ βζ), τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ „προσκειμένῃ (αζ), ϗ τῆς προσκειμένης (βζ) περιεχόμενον Ὀρθογώνιον, „μετὰ τȣ ἀπὸ τῆς ἡμισείας (γβ) Τετραγώνȣ, ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγ„κειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς (ἔςι δὲ „αὕτη ἡ γζ) ἀναγραφέντι Τετραγώνῳ.

Πρόσθες ἐπ' εὐθείας ἑτέρωθεν τὴν λα ἴσην τῇ προσκειμένῃ βζ. Καὶ δὴ ἐπεὶ ταῖς ἴσαις αγ ϗ βγ, ἴσαι προσετέθησαν αἱ αλ ϗ βζ, ἔςι πάντως ἡ λζ εἰς ἴσα τετμημένη κατὰ τὸ γ, ϗ εἰς ἄνισα κατὰ τὸ β.

$$\text{Ἄρα}\ \left.\begin{array}{ll}\text{Ὀρθογών.} & \lambda\beta\zeta \\ \text{Τετραγ.} & \gamma\beta\end{array}\right\} = \text{Τετραγ.}\ \gamma\zeta.\ (6).$$

Ἀλλὰ γὰρ ἐπεὶ ἴσαι ἀλλήλαις αἱ λβ ϗ αζ

Ὀρθογών. $\lambda\beta\zeta = \alpha\zeta\beta$

(1) Ἀξ. ϛ. (2) Ἀξ. ιε. (3) Ἀξ. α. (4) Ἀξ. γ. (5) Ἀξ. β. ϗ γ. (6) Διὰ τὴν ἄνωτ.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Ἄρα Ὀρθογών. } \alpha\zeta\beta \\ \text{Τετραγ. } \gamma\beta\end{array}\right\} = \text{Τετραγ. } \gamma\zeta.$$

Ἄ λ λ ω ς.

Κατασκευάσαντες τὸ σχῆμα ὥσπερ καὶ τὸ ἀνωτέρω, ἔξομεν τὸ αν Ὀρθογώνιον, ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ (ἤτοι ὑπὸ τῆς αζ) καὶ τῆς προσκειμένης (ἤτοι τῆς βζ). τὸ δὲ κη Τετράγωνον ἀπὸ τῆς γβ, ἥτις ἐςὶν ἡμίσεια τῆς αβ. τὸ δέ γε Τετράγωνον ἀπὸ τῆς γζ, ἥτις ἐςὶν ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης. Ἐπεὶ οὖν τὸ Ὀρθογώνιον θε ἴσον ἐςὶ τῷ Ὀρθογωνίῳ ακ (καὶ γὰρ (1) $\alpha\kappa = \kappa\beta = \theta\varepsilon$ (2)), τὸ δὲ λοιπὸν χωρίον ἑκατέρωσε κοινὸν, δῆλον τὸ προτεθέν. σχ. 177.

Ἔςω ἀριθμὸς 6 τετμημένος εἰς ἴσα 3 καὶ 3, τῷ δὲ προσεθείσθω ἀριθμὸς 2, καὶ ἔςαι τὸ Ὀρθογώνιον $8 \times 2 = 16 + 3 \times 3$ τῷ Τετραγώνῳ $9 = 5 \times 5 = 25$.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

Ἐὰν οὖν τρεῖς Εὐθεῖαι αζ, γζ, βζ ἀριθμητικῶς ὦσιν ἀνάλογοι (τουτέςιν ἐὰν ἡ αγ διαφορὰ τῆς πρώτης πρὸς τὴν δευτέραν, ἴση ᾖ τῇ διαφορᾷ γβ τῆς δευτέρας πρὸς τὴν τρίτην), ἔςαι τὸ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων αζ, καὶ βζ, συνάμα τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς διαφορᾶς αγ, ἢ γβ, ἴσον τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης γζ. Α. σχ. 178.

Ἔνθεντοι καὶ τὸ Ὀρθογώνιον αν (ἐπὶ τοῦ προαναγραφέντος Σχήματος) ἔλαττόν ἐςι τοῦ Τετραγώνου γε, τῇ ἐλλείψει τοῦ Τετραγώνου κη. Ἡ δὲ ἔλλειψις, τῆς αβ δοθείσης, ἡ αὐτὴ ἀεὶ μένει, ὁσησοῦν καὶ τύχοι ἡ βζ Εὐθεῖα αὐξήσεως. Παρὰ δὲ τὴν αὔξησιν αὐτῆς ταύτης τῆς βζ, τὸ Ὀρθογώνιον αν τοῦ Τετραγώνου γε μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἐγγυτέρω γίνεται καὶ λόγῳ καὶ Σχήματι, ὥςε τὴν διαφορὰν κη, πρὸς τὸ Μέγεθος τῶν Σχημάτων αν καὶ γε, ὡς μηδὲ λόγου τινὸς οὖσαν τέως ὀλιγωρεῖσθαι. Β.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ζ.

„Ἐὰν εὐθεῖα Γραμμὴ (αβ) τμηθῇ ὡς ἔτυχε (κατὰ τὸ γ), τὸ ἀπὸ τῆς „ὅλης (αβ) καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν Τμημάτων (αγ), τὰ συναμφότερα Τετράγωνα, σχ. 179.

---

(1) λ. Βιβ. α. (2) μγ. Βιβ. α.

„ ἴσα ἐςὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης (αβ) ϗ τȣ̃ εἰρημένȣ Τμήματος (αγ) περιε-
„ χομένῳ Ὀρθογωνίῳ, ϗ τῷ ἀπὸ τȣ̃ λοιπȣ̃ Τμήματος (γβ) Τετραγώνῳ.

$$\text{Τετράγωνον τὸ ἀπὸ } \alpha\beta = \left.\begin{array}{l}\text{Ὀρθογ. } \beta\gamma\alpha \text{ δίς}\\ \text{Τετραγ. } \alpha\gamma\\ \text{Τετραγ. } \gamma\beta\end{array}\right\} \text{(1)}$$

Πρόσθες ἑκατέρωσε Τετράγ. αγ, καὶ ἔςαι

$$\left.\begin{array}{l}\text{Τετράγ. } \alpha\beta\\ \text{Τετραγ. } \alpha\gamma\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\beta\gamma\alpha \text{ Ὀρθ. δίς}\\ \text{Τετραγ. } \alpha\gamma \text{ δίς}\\ \text{Τετραγ. } \gamma\beta.\end{array}\right.$$

Ἀλλὰ τὸ βγα Ὀρθογ. δὶς, σὺν τῷ Τετραγ. τῷ ἀπὸ αγ δὶς, ἴσον ἐςὶ (2) τῷ ὑπὸ βαγ δίς. Ἐὰν ἄρα ἀντὶ τȣ̃ βγα δὶς, καὶ ἀντὶ τȣ̃ Τετραγ. αγ δὶς, ληφθῇ τὸ βαγ δὶς, ἔςαι.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Τετράγ. } \alpha\beta\\ \text{Τετραγ. } \alpha\gamma\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\beta\alpha\gamma \text{ Ὀρθογ. δίς}\\ \beta\gamma \text{ Τετραγ.}\end{array}\right.$$

Ἄλλως.

σχ. 180. Κατασκευασθέντος τȣ̃ Σχήματος ὡς εἶναι τὸ μὲν αδ, Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης αβ, τὸ δὲ αλ, Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τȣ̃ Τμήματος αγ, ἀχθείσης τε τῆς Διαμέτρȣ εβ, ϗ προεκβληθείσης τῆς λγ ἕς γε τὸ ζ, ἥτις ἂν τέμνῃ καὶ τὴν Διάμετρον κατὰ τὸ η, διὰ δὲ τȣ̃ η Παραλλήλȣ τῇ αβ καὶ εδ, ἀχθείσης τῆς θι, ἔσονται αἱ θρ ϗ θι Εὐθεῖαι, τῇ τε ὅλῃ αβ, ϗ ἀλλήλαις ἴσαι (ἀμέλειτοι γὰρ θρ = θα + αρ, καὶ αρ (3) = αγ, καὶ αθ = γη (4) = γβ (4)· ἔνθεντοι θρ = αγ + γβ = αβ = θι (6).), καὶ θε, θη ὁμοίως τῷ Τμήματι αγ, ϗ ἀλλήλαις ἴσαι. Ἐπεὶ τοίνυν ἴσα τὰ δύο Ὀρθογώνια θδ ϗ θλ, τὰ ὑπὸ τῆς ὅλης αβ, ϗ τȣ̃ Τμήματος αγ· ταῦτα δὲ μετὰ τȣ̃ γι Τετραγώνȣ τȣ̃ ἀπὸ τȣ̃ ἑτέρȣ Τμήματος γβ, τὸ αὐτὸ πληρȣ̃σι χωρίον, ὃ ϗ τὰ Τετράγωνα αδ, ϗ αλ, τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ὅλης ὂν, τὸ δὲ ἀπὸ τȣ̃ Τμήματος, δῆλον τὸ προτεθέν.

Ἔςω ἀριθμὸς 13 ὡς ἔτυχε τετμημένος εἰς 9 ϗ 4, καὶ ἔςαι $13 \times 13 = 169$· ϗ $9 \times 9 = 81$, τὰ συναμφότερα Τετράγωνα 250, ἴσα τῷ $13 \times 9 = 117$, ϗ $13 \times 9 = 117$, ϗ $4 \times 4 = 16$, ἅπερ ἅμα 250.

---

(1) *Δ*. τȣ̃ β'. (2) *Γ*. τȣ̃ β'. (3) Ἐκ κατασκ. ϗ Ὅρ. *ΛΒ*. τȣ̃ α'. (4) λδ. Βιβ. α. (5) *Α*. Πόρ. τῆς *Δ*. τȣ̃ β'. (6) *ΛΔ*. τȣ̃ α'.

Διὰ μὲν τῆς Δ΄. τῶν τȣ̃ παρόντος Βιβλίȣ Προτάσεων τὸ ἀπὸ τῆς Δυωνύμȣ ῥίζης παρίςαται ἡμῖν Τετράγωνον, διὰ δὲ τῆς Ζ΄. ταύτης, τὸ ἀπὸ τȣ̃ λοιπȣ̃ τῆς ῥίζης Τετράγωνον ὑπεξάγεται, κατὰ τὸ ἐφεξῆς

Π ό ρ ι σ μ α.

Ἐὰν ἀπὸ Εὐθείας τῆς αβ, μέρος ἀφαιρεθῇ τὸ αγ, τὸ ἀπὸ τȣ̃ λοιπȣ̃ βγ Τετράγωνον, τȣ̃ τε ἀπὸ τῆς ὅλης αβ, ϗ τȣ̃ ἀπὸ τȣ̃ ἀφαιρεθέντος Τμήματος αγ, συναμφοτέρων τῶν Τετραγώνων, διαφέρει τῷ δὶς ὑπὸ βαγ Ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπό τε τῆς ὅλης ϗ τȣ̃ ἀφῃρημένȣ Τμήματος περιεχομένῳ. κ. 181.

Καὶ γὰρ δυνάμει τῆς ἀνὰ χεῖρας Προτ. Ζ΄. $\alpha\beta^{\mathrm{T}} + \alpha\gamma^{\mathrm{T}} = 2\,\beta\alpha\gamma + \gamma\beta^{\mathrm{T}}$. Ἐὰν ȣ̃ν ἑκατέρωθεν ἀφαιρεθῇ τὸ $2\beta\alpha\gamma$, ἔςαι $\alpha\beta^{\mathrm{T}} + \alpha\gamma^{\mathrm{T}} - 2\beta\alpha\gamma = \gamma\beta^{\mathrm{T}}$. Ο. Ε. Δ.

Τῷ ὄντι δὲ ἐπὶ τȣ̃ ἀνωτέρω ἀναγεγραμμένȣ Σχήματος τὸ γι Τετράγ. = Τετραγ. αδ, ϗ Τετραγ. αλ — Ὀρθογ. θδ — Ὀρθογ. θλ· τȣτέςι $\beta\gamma^{\mathrm{T}} = \alpha\beta^{\mathrm{T}} + \alpha\gamma^{\mathrm{T}} - 2\beta\alpha\gamma$.

Π ρ ό τ α σ ι ς Η.

„Ἐὰν Εὐθεῖα (λζ) εἰς ἴσα τμηθῇ (κατὰ τὸ ι), προςεθῇ δέ τις αὐτῇ „Εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας (ἡ ζξ), τὸ ὑπὸ τῆς ἡμισείας (ιλ), ϗ τῆς συγκειμένης „ἔκ τε τῆς ἡμισείας ϗ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς (ιξ) περιεχόμενον Ὀρ„θογώνιον (λιξ), τετράκις ληφθὲν μετὰ τȣ̃ ἀπὸ τῆς προσκειμένης (ζξ) Τε„τραγώνȣ, ἴσον ἐςὶ τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης ϗ τῆς προσκειμένης, „ὡς ἀπὸ μιᾶς (λξ) ἀναγραφέντι. κ. 182.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Τετράγ. ιξ}\\ \text{Τετραγ. ιζ}\end{array}\right\} = \begin{array}{l}\text{2ξιζ Ὀρθογ.}\\ \text{ζξ Τετραγ.}\end{array} \quad (1).$$

Τȣτέςιν, ἐπεὶ ἐξ ὑποθέσεως $\zeta\iota = \iota\lambda$, ϗ $\iota\zeta^{\mathrm{T}} = \lambda\iota^{\mathrm{T}}$ · ϗ $\xi\iota\zeta = \xi\iota\lambda = \lambda\iota\xi$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Τετράγ. ιξ}\\ \text{Τετραγ. λι}\end{array}\right\} = \begin{array}{l}\text{2λιξ Ὀρθογ.}\\ \text{ζξ Τετραγ.}\end{array}$$

Ἐὰν ἄρα τοῖς ἴσοις κοινὸν προσθῇς τὸ 2λιξ, ἔςαι

$$\left.\begin{array}{l}\text{Τετράγ. ιξ}\\ \text{Τετραγ. λι}\\ \text{Ὀρθ. λιξ δὶς}\end{array}\right\} \quad \text{Τȣτέςι (2) Τετράγ. λξ} = \left.\begin{array}{l}\text{2λιξ Ὀρθογ.}\\ \text{2λιξ Ὀρθογ.}\\ \text{ζξ Τετραγ.}\end{array}\right\}$$

(1) Διὰ τὴν ἀνωτ. (2) Δ. τȣ̃ α΄.

Ἄλλως.

κ. 183. Ἀναγεγράφθω Τετράγωνον τὸ ξδ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς λξ, καὶ ἀχθείσης τῆς Διαμέτρου λα, διὰ τῶν ι καὶ ζ Σημείων ἤχθωσαν Παράλληλοι τῇ λδ καὶ ξα, αἱ ιβ καὶ ζε τέμνουσαι τὴν Διάμετρον κατὰ τὰ Σημεῖα ρ καὶ σ· διὰ δὲ τῶν Σημείων ρ καὶ σ, ἤχθωσαν Παράλληλοι τῇ λξ καὶ δα, αἱ τν καὶ μθ. Ἐπεὶ γοῦν ἡ λζ εἰς ἴσα τέτμηται κατὰ τὸ ι, ἔσαι (1) τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας λι Τετράγωνον τι, τεταρτημόριον τοῦ ἀπὸ τῆς ὅλης λζ Τετραγώνου μζ· καὶ τὰ τέσσαρα Ὀρθογώνια τι, ρζ, μρ, οπ (2) Τετράγωνα ἔσαι ἀλλήλοις ἴσα. Ἔτι παρὰ τὰς ζπ, πσ τῶν ἴσων Τετραγώνων Πλευρὰς, καὶ δι' αὐτὸ τοῦτο ἴσας, ἴσα ἔσαι (3) καὶ τὰ Ὀρθογώνια ζν, πθ. Ἀλλὰ ζθ (4) = δσ, καὶ πθ (5) = σβ. Ἄρα καὶ ζν (6) = μβ· καὶ δὴ τὰ τέσσαρα Ὀρθογώνια ζν, πθ, σβ, μβ ἴσα ἀλλήλοις ἔσαι. Ἐπεὶ τοίνυν ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ καὶ αἱ λι, ιρ, ἔσαι τὸ ρξ (τουτέσι τὸ Τετράγωνον ρζ μετὰ τοῦ Ὀρθογωνίου ζν) Ὀρθογώνιον ὑπό τε τῆς ἡμισείας λι, καὶ ιξ τῆς συγκειμένης ἔκτε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον. Τὰ ἄρα τέσσαρα Τετράγωνα τι, ρζ, μρ, οπ μετὰ τῶν τεσσάρων Ὀρθογωνίων ζν, πθ, βμ, βσ, ἴσα τῷ Ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆς ἡμισείας λι, καὶ τῆς συγκειμένης ἔκτε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ἤτοι τῆς ιξ περιεχομένῳ, τετράκις ληφθέντι. Ἀλλ' ἔσι δὴ καὶ τὸ εθ Τετράγωνον ἀπὸ τῆς προσκειμένης ζξ. Ἐὰν ἄρα Εὐθεῖα ἡ λζ εἰς ἴσα τμηθῇ κατὰ τὸ ι, προςεθῇ δέ τις αὐτῇ Εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἡ ζξ, ἔσαι κτ. Ο. Ε. Δ.

Ἔσω ἀριθμὸς 12 εἰς ἴσα 6 καὶ 6 τετμημένος, καὶ τούτῳ προσκείσθω ἀριθμὸς ἕτερος 4. Καὶ ἔσαι τὰ τέτταρα Ὀρθογώνια 10 × 6 = 240 μετὰ τοῦ Τετραγώνου 4 × 4 = 16, ἴσα τῷ Τετραγώνῳ 16 × 16 = 256.

Ὁ δὲ Εὐκλείδης οὕτω προτίθησι τὸ Θεώρημα.

„Ἐὰν, φησὶν, εὐθεῖα Γραμμὴ (ιξ) τμηθῇ ὡς ἔτυχε (κατὰ τὸ ζ), τὸ „τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης (ιξ) καὶ ἑνὸς τῶν Τμημάτων (ιζ) περιεχόμενον Ὀρ„θογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ Τμήματος (ζξ) Τετραγώνου, ἴσον ἐσὶ „τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης (ιξ) καὶ τοῦ εἰρημένου Τμήματος (ιζ), ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγρα„φέντι Τετραγώνῳ.

Οἷον ἔσω ἀριθμὸς 10 εἰς 6 καὶ 4 τετμημένος, καὶ ἔσαι τὸ παραγόμενον

---

(1) Πόρ. γ'. τῆς Δ'. τοῦ β'. (2) Πόρ. τὸ αὐτό. (3) Δς. τοῦ α'. (4) ΜΓ. τοῦ α'. (5) Διὰ τὴν αὐτήν. (6) Ἀξ. γ.

6×10 τετράκις ληφθὲν $= 240$, καὶ $4 \times 4 = 16$· τὰ δὲ $240 + 16 = 256$ $= \overline{10 + 6} \times \overline{10 + 6}$.

Πρότασις Θ.

„ Ἐὰν εὐθεῖα Γραμμὴ (αγ) τμηθῇ εἰς ἴσα (κατὰ τὸ β), ϗ εἰς ἄνισα κα- σχ. 184.
„ τὰ τὸ ζ, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης Τμημάτων (αζ, ζγ) Τετράγωνα,
„ διπλάσιά ἐςι τȣ̃ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας (αβ), ϗ τȣ̃ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν το-
„ μῶν (βζ) Τετραγώνȣ.

$$\text{Τετράγ. } αζ \text{ (1)} = \left.\begin{array}{l} \text{Ὀρθ. } 2αβζ \\ \text{Τετραγ. } αβ \\ \text{Τετραγ. } βζ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Κοινȣ̃ οὖν προςεθέντος τȣ̃ Τετραγ.} \\ ζγ. \text{ ἔςαι.} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Τετράγ. } αζ \\ \text{Τετραγ. } ζγ \end{array}\right\} = \left.\begin{array}{ll} \text{Ὀρθογ. } 2αβζ \text{ δίς} & \\ \text{Τετρ.} & αβ \\ \text{Τετρ.} & βζ \\ \text{Τετρ.} & ζγ \end{array}\right\}$$

Ἀλλ' Ὀρθογ. $αβζ = γβζ$, ὅτι $αβ = βγ$ ἐξ ὑποθέσεως.

$$\text{Ἄρα } \left.\begin{array}{l} \text{Τετράγ. } αζ \\ \text{Τετραγ. } ζγ \end{array}\right\} = \left.\begin{array}{ll} \text{Ὀρθογ. } γβζ \text{ δίς} & \\ \text{Τετρ.} & αβ \\ \text{Τετρ.} & βζ \\ \text{Τετρ.} & ζγ \end{array}\right\}$$

Ἀλλὰ $γβζ$ δὶς $+ ζγ^{Τ}$ (2) $= βγ^{Τ} + βζ^{Τ}$· ἤτοι $= αβ^{Τ} + βζ^{Τ}$, ἐὰν ἄρα ταῦτα ἀντ' ἐκείνων τεθῇ ἔςαι

$$\left.\begin{array}{l} \text{Τετράγ. } αζ \\ \text{Τετραγ. } ζγ \end{array}\right\} = \left.\begin{array}{l} \text{Τετραγ. } αβ \text{ δίς} \\ \text{Τετραγ. } βζ \text{ δίς} \end{array}\right\}$$

Ἄλλως.

Ἤχθω ἀπὸ τȣ̃ β τῇ αζ πρὸς ὀρθὰς (3) ἴση τῇ βα ἡ βε, καὶ ἐπιζευχ- σχ. 185.
θεισῶν τῶν βε, ζε, ἤχθω διὰ τȣ̃ γ ἡ γπ Παράλληλος τῇ βε (4), καὶ διὰ τȣ̃ π ἡ πη Παράλληλος τῇ αζ· ἐπεζεύχθω δὲ ἡ απ· Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ αβε Γωνία ἐςὶν Ὀρθή, ϗ αἱ αβ καὶ βε ἴσαι ἀλλήλαις, ἔσονται δὴ (5) αἱ ὑπὸ βαε, ϗ βεα ἡμίσειαι Ὀρθῆς. Διὰ δὲ τὸν αὐτὸν λόγον ϗ αἱ ὑπὸ βεζ ϗ βζε,

(1) Δ. τȣ̃ β'. (2) Ζ. τȣ̃ β'. (3) ΙΑ. τȣ̃ α'· (4) ΛΑ. τȣ̃ α'. (5) Πόρ. ιά. τῆς ΛΒ. τȣ̃ α'.

ἡμίσ. Ὀρθῆς, ὥςε ἡ ὅλη ὑπὸ αεπ Ὀρθή. Ἀλλὰ καὶ τῆς ὑπὸ εβζ Ὀρθῆς ὄσης, ἤτε ὑπὸ εηπ, ϗ ὑπὸ πγζ (1) ἔσονται Ὀρθαί· ἡμίσεια δὲ Ὀρθῆς ἡ ὑπὸ ηεπ, ἡ ἄρα λοιπὴ (2) ὑπὸ ηπε, ἡμίσεια Ὀρθῆς ϗ αὐτή. ἄρ' οὖν (3) ϗ ηε ἴση τῇ ηπ. Ὡσαύτως δὲ δείξεις ϗ τὴν γπ ἴσην εἶναι τῇ γζ. Τὸ τοίνυν ἀπὸ αε Τετράγωνον ἴσον (4) τοῖς ἀπὸ αβ καὶ βε, διπλάσιον δὲ (5) τοῦ ἀπὸ αβ. Παραπλησίως δὲ ϗ τὸ ἀπὸ επ, διπλάσιον τοῦ ἀπὸ ηπ (6). Ἀλλ' ἡ ηπ ἴση τῇ βγ (7), τὸ ἄρα ἀπὸ επ διπλάσιον ϗ τοῦ ἀπὸ βγ. Ἀλλαμὴν τὸ ἀπὸ απ ἴσον τοῖς ἀπὸ αε ϗ επ ἅμα (8) ληφθεῖσι· τὸ ἄρα ἀπὸ απ διπλάσιον τῶν ἀπὸ αβ ϗ βγ. Τῷ δὲ δὴ ἀπὸ απ ἴσα (9) τὰ ἀπὸ αγ καὶ γπ (τῆς ὑπὸ αγπ Ὀρθῆς ὄσης, ἐπεὶ (10) ϗ ἡ ὑπὸ πγζ Ὀρθὴ δέδεικται), τὰ ἄρα ἀπὸ αγ ϗ γπ διπλάσια τῶν ἀπὸ αβ ϗ βγ. Ἀλλὰ γὰρ ϗ ἡ γπ ἴση ἐδείχθη τῇ γζ, τὰ ἄρα ἀπὸ αγ ϗ γζ, ἅπερ ἐςι τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων Τμημάτων Τετράγωνα, διπλάσια τῶν ἀπὸ αβ ϗ βγ, τοῦ μὲν ἀπὸ τῆς ἡμισείας ὄντος, τοῦ δὲ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν. Ο. Ε. Δ.

Ἔςω ἀριθμὸς 32 τετμημένος εἰς ἴσα 16 ϗ 16, καὶ εἰς ἄνισα 20 ϗ 12. Τὰ τοίνυν Τετράγωνα $20 \times 20 = 400$ καὶ $12 \times 12 = 144$, διπλάσιά ἐςι τῶν Τετραγώνων τοῦ τε $16 \times 16 = 256$, ϗ $4 \times 4 = 16$.

Πρότασις Ι.

κ. 186. „Ἐὰν εὐθεῖα Γραμμὴ (ζι) τμηθῇ δίχα (κατὰ τὸ λ), προςεθῇ δέ τις αὐ„τῇ Εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας (ἡ ιξ), τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ (ζξ), „ϗ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης (ιξ), τὰ συναμφότερα Τετράγωνα, διπλάσιά ἐςι „τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας (ζλ), ϗ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας „ϗ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς (λξ) ἀναγραφέντος Τετραγώνου.

Προσκείσθω δὴ ἐπ' εὐθείας ἡ πζ ἑτέρωθεν ἴση τῇ ιξ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ ζλ, ιλ ἴσαι εἰσὶν ἐξ ὑποθ., ϗ ταύταις ἴσαι προσετέθησαν, ἔσονται αἱ πλ, ξλ ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ οὕτως ἡ πξ εἰς ἴσα τέτμηται κατὰ τὸ λ, ϗ εἰς ἄνισα κατὰ τὸ ι. Καὶ τοίνυν

$$\left.\begin{array}{l}\text{Τετράγ. πι}\\ \text{Τετραγ. ιξ}\end{array}\right\} (11) = \left\{\begin{array}{l}\text{Τετραγ. πλ δὶς}\\ \text{Τετραγ. λι δὶς}\end{array}\right.$$

(1) *ΚΗ.* τοῦ α΄. (2) *ΛΒ.* τοῦ α΄. (3) ς. τοῦ α΄. (4) *ΜΖ.* τοῦ α΄. (5) *Α.* Πόρ. τῆς *ΜΖ.* τοῦ α΄. (6) *Διὰ τὴν αὐτ.* (7) *ΛΔ.* τοῦ α΄. (8) *ΜΖ.* τοῦ α΄. (9) *Διὰ τὴν αὐτ.* (10) *ΙΓ.* τοῦ α΄. (11) *Διὰ τὴν ἀνωτ.*

Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ πι Τετράγ. ταυτόν ἐςι τῷ ἀπὸ ζξ, ϗ Τετράγ. τὸ ἀπὸ πλ τῷ ἀπὸ λξ, ϗ τὸ ἀπὸ λι τῷ ἀπὸ ζλ.

$$\text{Ἄρα}\ \left.\begin{array}{l}\text{Τετράγ. ζξ}\\ \text{Τετραγ. ιξ}\end{array}\right\} = \left.\begin{array}{l}\text{Τετραγ. λξ}\\ \text{Τετραγ. ζλ}\end{array}\right\}\ \text{δίς.}$$

Ἄ λ λ ω ς.

Ἤχθω ἀπὸ τȣ̃ λ Σημείȣ, τῇ Εὐθείᾳ ζι πρὸς Ὀρθὰς (1) καὶ ἴση τῇ ζλ ἡ λι, ἡ λε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζε, ιε. διὰ δὲ τȣ̃ ε ἤχθω ἡ επ (2) Παράλληλος τῇ ζξ, καὶ διὰ τȣ̃ ξ, ἡ ξπ Παράλληλος τῇ λε. Καὶ ἐπεὶ Παράλληλοί εἰσιν αἱ ελ, πξ, αἱ ει, πξ μὴ Παράλληλοι, προαχθεῖσαι (3) συμπεσοῦνται πȣ, οἷον κατὰ τὸ η· ἐπεζεύχθω δὲ ϗ ἡ ζη. Ἐπειδὴ τοίνυν ἡ ὑπὸ ζλε Ὀρθὴ, αἱ δὲ ζλ, λε ἴσαι, ἔσονται αἱ ὑπὸ λζε, λεζ (4) ἡμίσειαι Ὀρθῆς. Παραπλησίως δὲ καὶ αἱ ὑπὸ λιε ϗ λει (5) ἔσονται ἡμίσειαι Ὀρθῆς· κἀντεῦθεν ἡ ὅλη ὑπὸ ζει Ὀρθή. Ἡ δὲ δὴ Γωνία ὑπὸ ξιη, ἴση τῇ λιε (6), ϗ ἑπομένως Ὀρθῆς ἡμίσεια καὶ αὐτή. Διὰ δὲ τὰς Παραλλήλȣς ελ, πη, ἃς τέμνει ἡ ζξ κατὰ τὸ λ ϗ ξ, ϗ τὴν ὑπὸ ελξ Ὀρθὴν, ἔςαι δὴ καὶ ἡ ἐναλλὰξ (7) ὑπὸ ηξλ Ὀρθή. Ταύτητοι ἐπὶ τȣ̃ Τριγώνȣ ηξι τῆς μὲν κατὰ τὸ ξ Γωνίας Ὀρθῆς ȣ̓́σης, τῆς δὲ κατὰ τὸ ι ἡμισείας Ὀρθῆς, ἔςαι ϗ ἡ ὑπὸ ξηι ἡμίσεια (8) ϗ αὐτὴ Ὀρθῆς· διὸ ϗ αἱ Πλευραὶ ξη, ξι ἀλλήλαις (9) ἴσαι. Τῆς γȣ̃ν τȣ̃ λπ Παραλληλογράμμȣ Γωνίας τῆς κατὰ τὸ λ Ὀρθῆς ȣ̓́σης, ϗ ἡ ἀπεναντίον π Ὀρθὴ (10) ἂν εἴη. Ὥςε ϗ ἐπὶ τȣ̃ επη Τριγώνȣ, τῆς μὲν κατὰ τὸ π Ὀρθῆς δειχθείσης, τῆς δὲ κατὰ τὸ η ἡμισείας Ὀρθῆς, ἔςαι δὴ καὶ ἡ ὑπὸ πεη Ὀρθῆς ἡμίσεια (11), αἵτε Πλευραὶ πε, πη ἀλλήλαις (12) ἴσαι. Ἀλλὰ γὰρ ἐν τῷ Ὀρθογωνίῳ λπ, επ = λξ (13), ἄρα ϗ λξ = πη. Ἤδη μὲν οὖν ἐπὶ τȣ̃ ὀρθογωνίȣ Τριγώνȣ ζλε, ἴσων οὐσῶν τῶν ζλ καὶ λε, τὸ ἀπὸ ζε Τετράγωνον (14) διπλάσιόν ἐςι τȣ̃ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ζλ· ἐπὶ δὲ τȣ̃ ὀρθογωνίȣ Τριγώνȣ επη, ἴσων ὁμοίως ȣ̓σῶν τῶν πε, πη, τὸ ἀπὸ εη Τετράγωνον διπλάσιόν ἐςι (15) τȣ̃ ἀπὸ επ, ἢ λξ, ἤτοι τȣ̃ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκτε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης. Τὰ δέ τοι ἀπὸ ζε ϗ εη Τετράγωνα, ἴσα ἐςὶ (16) τῷ ἀπὸ τῆς ζη Τετραγώνῳ, τȣτέςι τοῖς Τετραγώνοις (17) τοῖς δυσὶ, ϰ. 187.

---

(1) *ΙΑ. τȣ̃ α΄.* (2) *ΛΑ. τȣ̃ α΄.* (3) *Πόρ. α΄. τȣ̃ Σχολ. τῆς ΛΑ. τȣ̃ α΄.* (4) *Πόρ. ια΄. τῆς ΛΒ. τȣ̃ α΄.* (5) *Δἰ αὐτ.* (6) *ΙΕ. τȣ̃ α΄.* (7) *ΚΘ. τȣ̃ α΄.* (8) *Πόρ. ς΄· τῆς ΛΒ. τȣ̃ α΄.* (9) *ς. τȣ̃ α΄.* (10) *ΛΔ. τȣ̃ α΄.* (11) *ς. Πόρ. τῆς ΛΒ. τȣ̃ α΄.* (12) *ς. τȣ̃ α΄.* (13) *ΛΔ. τȣ̃ α΄.* (14) *Πόρ. α΄. τῆς ΜΖ. τȣ̃ α΄.* (15) *Διὰ τὴν αὐτ.* (16) *ΜΖ. τȣ̃ α΄.* (17) *Διὰ τὴν αὐτ.*

τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ζξ, τῆς ἔκτε τῆς ὅλης ϗ τῆς προσκειμένης, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ξη, ἤτοι τῆς ιξ, ἥτις ἐςὶν ἡ προσκειμένη. Τὰ ἄρα Τετράγωνα (1) τό,τε ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ ζξ, ϗ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης ξι, τὰ συναμφότερα, διπλάσιά ἐςι τῶν Τετραγώνων τȣ̃τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας ζλ, ϗ τȣ̃ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκτε τῆς ἡμισείας ϗ τῆς προσκειμένης, λξ, τῶν συναμφοτέρων. Ο. Ε. Δ.

Ἔςω Ἀριθμὸς 40 τετμημένος εἰς ἴσα 20 καὶ 20, καὶ τȣ́τῳ προσκείσθω ἀριθμὸς 14. Καὶ ἔςαι δὴ τὰ Τετράγωνα $54 \times 54 = 2916$, καὶ $14 \times 14 = 196$. διπλάσια τῶν Τετραγώνων $20 \times 20 = 400$, ϗ $34 \times 34 = 1156$.

Πρότασις ΙΑ.

„Τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν (αβ) τεμεῖν (κατὰ τὸ γ), ὥςε τὸ ὑπὸ τῆς ὅ-„λης καὶ τȣ̃ ἑτέρȣ τῶν Τμημάτων περιεχόμενον Ὀρθογώνιον (αβγ), ἴσον „εἶναι τῷ ἀπὸ τȣ̃ λοιπȣ̃ Τμήματος (αγ) Τετραγώνῳ. —

κ. 188. Ἀπὸ α ἤχθω Κάθετος πρὸς Ὀρθὰς τῇ αβ ἴση ἡ αζ· ἀχθεῖσα δὲ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ χ, ἐπεζεύχθω δὲ ἡ χβ· τῇ δὲ χβ ἀπὸ τῆς ζα προαχθείσης, ἀποτετμήσθω ἴση ἡ χι· εἶτα ἀποτετμήσθω ἡ αγ ἴση τῇ αι. Φημὶ ὡς γέγονεν οὕτω τὸ ἐπιταχθέν. Πληρωθέντος γὰρ τȣ̃ Τετραγώνȣ αβσζ, καὶ ἀχθείσης διὰ γ πρὸς ὀρθὰς, ϗ πληρωθέντος ϗ τȣ̃ Ὀρθογωνίȣ ζιλξ, ἐπεὶ ἡ ζα εἰς ἴσα μὲν τέτμηται κατὰ τὸ χ, προσετέθη δέ τις αὐτῇ Εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας ἡ αι, ἔςαι:

$$\left.\begin{matrix}\text{Ὀρθογ. } \zeta\iota\alpha \\ \text{Τετραγ. } \chi\alpha\end{matrix}\right\} = (2)\ \text{Τετραγ. } \chi\iota = \chi\beta^{T}\ (3) = \left.\begin{matrix}\chi\alpha^{T} \\ \alpha\beta^{T}\end{matrix}\right\}\ (4).$$

Ἀφαιρεθέντος τοίνυν ἑκατέρωθεν τȣ̃ $\chi\alpha^{T}$

Ἔςαι Ὀρθογ. ζια = Τετραγ. αβ ἤτοι ζλ = ασ.

Ἀφαιρεθέντος δὲ ϗ τȣ̃ κοινȣ̃ χωρίȣ αξ, ἔςαι αλ = γσ.

Ἀλλὰ τὸ αλ Τετράγωνον ἐςὶν ἀπὸ τῆς αγ, ἐπειδὴ αγ = αι ἐκ κατασκευῆς, τὸ δὲ γσ Ὀρθογώνιον ἐςὶ τὸ ὑπὸ αβγ, ὅτι τῇ βσ ἴση ἡ αβ· τὸ ἄρα Ὀρθογώνιον αβγ, ἴσον τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ αγ· Τέτμηται ἄρα ἡ δοθεῖσα Εὐθεῖα αβ, κατὰ τὸ αἰτηθέν.

---

(1) Ἀξ. α΄. (2) ς. τȣ̃ β΄. (3) Ἐκ κατ. ϗ ἀξ. ιϛ. (4) ΜΖ. τȣ̃ ε΄.

Σχόλιον.

Τῶν ἐπὶ τοῦ παρόντος Βιβλίου Προτάσεων τὰς μὲν πρώτας δέκα, καὶ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν ἀληθευούτας κατειλήφαμεν, τὴν δὲ δὴ πρώτην ἐπὶ τῇ δεκάτῃ ἀριθμητικῶς ἐκθέσθαι ἀμήχανον, οὐδὲ γὰρ ἔςιν εὑρεῖν ἀριθμὸν τοιαύτην τινὰ τὴν τομὴν ἐπιδεχόμενον, ὡς τὸ ὑπὸ τοῦ ὅλου καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν μερῶν παραγόμενον, ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ Τετραγώνῳ· ὃ δήπου καὶ ἐν τῷ Σχολίῳ τῷ μετὰ τὴν ΚΘ΄. τοῦ τρίτου Βιβλίου τῶν ςοιχείων τῆς Ἀριθμητικῆς, τῆς προσηκούσης τετύχηκε δείξεως. Ἀλλ᾽ εὕροι ἄντις ἐν ἀῤῥήτοις ἀριθμοῖς Πηλικότητας, τοῖς γραμμικοῖς Τμήμασιν αγ καὶ γβ ἀντιςοιχούσας. Οἷον ἔςω αβ = 2, ἀμέλειτοι προσκείσθω δυαδικὸς ἀριθμὸς διαιρετέος εἰς μέρη, ὧν τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος Τετράγωνον, ἴσον εἴη τῷ Ὀρθογωνίῳ, τῷ ὑπὸ τῆς ὅλης δυάδος καὶ τοῦ ἐλάττονος. Ἔςαι γὰρ τὸ μὲν τῶν μερῶν μεῖζον $αγ = \sqrt{5} - 1$. τὸ δὲ γβ τὸ ἔλαττον $= 3 - \sqrt{5}$. Οὕτω γὰρ οὐ μόνον τὸ ἐκ τουτωνὶ τῶν μερῶν ἄθροισμα ἴσον τῇ δυάδι παρίςαται, ἀλλὰ δὴ καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος μέρους Τετράγωνον, καὶ τὸ ὑπὸ τῆς δυάδος καὶ τοῦ ἐλάσσονος μέρους ἀνακύπτον, ἴσα ἄμφω τῇ αὐτῇ Πηλικότητι, ἥτις ἐςὶν $6 - 2\sqrt{5}$. Τῆς γοῦν προτεθείσης τομῆς θαυμασία ἡ δύναμις, περὶ ἧς ὅρα τὴν Λ΄. τοῦ ς΄. Βιβλίου.

Πρότασις ΙΒ.

„Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις Τριγώνοις (αγβ), τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν „Γωνίαν (γ) ὑποτεινούσης (αβ) Πλευρᾶς Τετράγωνον, μεῖζον ἐςὶ τῶν ἀπὸ „τῶν τὴν ἀμβλεῖαν Γωνίαν περιεχουσῶν Πλευρῶν (αγ, βγ) Τετραγώνων, „τῷ περιεχομένῳ δὶς, ὑπό τε μιᾶς (βγ) τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν Γωνίαν „(αγβ), ἐφ᾽ ἣν ἐκβληθεῖσαν ἡ Κάθετος πίπτει (αζ), καὶ τῆς ἀπολαμβανομέ„νης ἐκτὸς (ζγ) ὑπὸ τῆς Καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ Γωνίᾳ. κ. 189.

$$\text{Καὶ γὰρ Τετράγ. } αβ\ (1) = \left.\begin{matrix} αζ^{T} \\ βζ^{T} \end{matrix}\right\}$$

$$\text{Ἀλλαμὴν } βζ^{T} = \left.\begin{matrix} βγ^{T} \\ γζ^{T} \\ 2βγζ \end{matrix}\right\}\ (2).$$

(1) ΜΖ. τοῦ ά. (2) δ. Βιβ. β΄.

Ἄρα τεθέντων τῶν ἴσων ἀντὶ τῶν ἴσων, ἔϛαι

$$\text{Τετράγ. } \alpha\beta^{T} = \left.\begin{array}{r}\alpha\zeta^{T}\\ \beta\gamma^{T}\\ \gamma\zeta^{T}\\ 2\beta\gamma\zeta\end{array}\right\}$$

Ἐπεὶ τοίνυν τὰ $\alpha\zeta^{T} + \gamma\zeta^{T} = \alpha\gamma^{T}$ (1), ἔϛαι Τετράγ. $\alpha\beta = \alpha\gamma^{T} + \beta\gamma^{T} + 2\beta\gamma\zeta$. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΓ.

σχ. 190. „Ἐπὶ παντὸς Τριγώνȣ ($\alpha\gamma\beta$) τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν Γωνίαν (γ) ὑ„ποτεινȣ́σης Πλευρᾶς ($\alpha\beta$) Τετράγωνον, ἔλαττόν ἐϛι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν „ὀξεῖαν Γωνίαν περιεχȣσῶν Πλευρῶν ($\alpha\gamma$, $\beta\gamma$) Τετραγώνων, τῷ περιε„χομένῳ δὶς Ὀρθογωνίῳ ($\beta\gamma\zeta$), ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν Γωνίαν „(ἤτοι τῆς $\beta\gamma$), ἐφ᾽ ἣν πίπτει ἡ Κάθετος ($\alpha\zeta$), ϗ τῆς ἀπολαμβανομένης „ἐντὸς ($\gamma\beta$) ὑπὸ τῆς Καθέτȣ ($\alpha\zeta$) πρὸς τῇ ὀξείᾳ Γωνίᾳ (γ).

$$\beta\gamma^{T}\ (2) = \left.\begin{array}{r}2\beta\zeta\gamma\\ \beta\zeta^{T}\\ \zeta\gamma^{T}\end{array}\right\}$$

$$\text{Καὶ } \alpha\gamma^{T}\ (3) = \left.\begin{array}{r}\zeta\gamma^{T}\\ \alpha\zeta^{T}\end{array}\right\}$$

$$\text{Τὰ ἄρα δύο } \alpha\gamma^{T} + \beta\gamma^{T} = \left.\begin{array}{r}2\beta\zeta\gamma\\ \beta\zeta^{T}\\ 2\zeta\gamma^{T}\\ \alpha\zeta^{T}\end{array}\right\}$$

Ἀλλὰ γὰρ τὸ $\beta\zeta\gamma$ Ὀρθογ. δὶς, μετὰ τȣ̃ ἀπὸ $\zeta\gamma$ Τετραγώνȣ δὶς, ἴσον ἐϛὶ (4) τῷ δὶς ὑπὸ $\beta\gamma\zeta$. Ἐὰν ἄρα ταῦτα ἀντὶ ἐκείνων τεθῇ, ἔϛαι

$$\alpha\gamma^{T} + \beta\gamma^{T} = \left.\begin{array}{r}2\beta\gamma\zeta\\ \beta\zeta^{T}\\ \alpha\zeta^{T}\end{array}\right\}$$

Τὰ δὲ δὴ $\alpha\zeta^{T} + \beta\zeta^{T} = \alpha\beta^{T}$ (5), ἐὰν ἄρα ϗ τȣ̃το ἀντὶ ἐκείνων τεθῇ, $\alpha\gamma^{T} + \beta\gamma^{T} = 2\beta\gamma\zeta + \alpha\beta^{T}$.

Τȣτέϛι τὰ ἀπὸ $\alpha\gamma$ καὶ $\beta\gamma$ Τετράγωνα ὑπερέχει τὸ ἀπὸ $\alpha\beta$ Τετράγωνον, τῷ δὶς Ὀρθογωνίῳ $\beta\gamma\zeta$.

(1) ΜΖ. τȣ̃ ά. (2) δ. Βιβ. ά. (3) ΜΖ. τȣ̃ ά. (4) Γ. τȣ̃ β΄. (5) ΜΖ. τȣ̃ ά.

Πόρισμα.

Ἔϛαι δὲ οὐδὲν ἧττον ἀληθείας ἐχομένη ἡ Πρότασις, κἂν εἰ Ἀμβλείας τῆς σχ. 191.
ὑπὸ αβγ τυχούσης (1), ἡ αζ Κάθετος ἔξω τοῦ Τριγώνου πεσεῖται ἐπὶ τῆς γβ Πλευρᾶς προεκβληθείσης. Ἡ δὲ δεῖξις σχεδὸν ἡ αὐτὴ, ἢ ὧδεπως ἔχουσα.

$$\text{Τετράγ. } \alpha\gamma\ (2) = \left.\begin{array}{l} \text{Ὀρθογ. } \gamma\beta\zeta \text{ δίς} \\ \text{Τετρ. } \gamma\beta \\ \text{Τετρ. } \alpha\beta \end{array}\right\}$$

Κοινῆ τοίνυν προστεθέντος τοῦ Τετραγώνου ἀπὸ γβ

$$\text{Ἔϛαι } \left.\begin{array}{l} \text{Τετράγ. } \alpha\gamma \\ \text{Τετραγ. } \gamma\beta \end{array}\right\} = \left.\begin{array}{l} 2\gamma\beta\zeta \text{ Ὀρθογ.} \\ 2\ \gamma\beta \text{ Τετραγ.} \\ \alpha\beta \text{ Τετραγ.} \end{array}\right\}$$

$$\text{Ἀλλὰ τὸ } 2\gamma\beta\zeta \text{ Ὀρθογ.} + 2\gamma\beta^T\ (3) = 2\beta\gamma\zeta$$

$$\text{Ἄρα } \left.\begin{array}{l} \text{Τετράγ. } \alpha\gamma \\ \text{Τετραγ. } \gamma\beta \end{array}\right\} = \left.\begin{array}{l} 2\beta\gamma\zeta \text{ Ὀρθογ.} \\ \alpha\beta \text{ Τετραγ.} \end{array}\right\}$$

Ἄλλως.

Καθόλου δ' ἂν μᾶλλον δειχθείη ἡ τοῦ Παρόντος ΙΓ'. εἴτε ἐντὸς τοῦ Τριγώνου τῆς πρὸς Κάθετον ἀγομένης πιπτούσης, εἴτε καὶ ἐκτός, ὡδί

$\beta\gamma^T + \gamma\zeta^T$ (4) $= 2\beta\gamma\zeta + \beta\zeta^T$. Ἐὰν οὖν προστεθῇ $\alpha\zeta^T$, ἔϛαι $\beta\gamma^T + \gamma\zeta^T + \alpha\zeta^T = 2\beta\gamma\zeta + \beta\zeta^T + \alpha\zeta^T$. Ἀλλὰ $\gamma\zeta^T + \alpha\zeta^T = \alpha\gamma^T$. Ἄρα $\beta\gamma^T + \alpha\gamma^T = 2\beta\gamma\zeta + \beta\zeta^T + \alpha\zeta^T$ (5). Ἀλλὰ καὶ $\beta\zeta^T + \alpha\zeta^T$ (6) $= \alpha\beta^T$. Ἄρα $\beta\gamma^T + \alpha\gamma^T = 2\beta\gamma\zeta + \alpha\beta^T$. Ο. Ε. Δ.

Σχόλιον Α'.

Ἐκ δὴ ταύτης καὶ τῆς ΜΖ'. τοῦ α'., καὶ παντὸς Τριγώνου, οὗ δῆλαι μὲν ἂν εἶεν αἱ Πλευραὶ, ἄβατον δὲ τὸ χωρίον, λαβεῖν ἐξέϛαι τὴν καταμέτρησιν. Διὰ γὰρ τούτων τῶν Θεωρημάτων, καίτοι ἐμποδὼν ἱϛαμένου τοῦ τόπου, τὴν εἰς τοῦτο ἀπαιτουμένην Κάθετον ἐξευρίσκομεν. Ἡ δέ τοι Κάθετος ἡμῖν διὰ τοῦ ἡμίσεος τῆς Πλευρᾶς ἐφ' ἣν πίπτει πολλαπλασιαθεῖσα, τὸ χωρίον ἀποδώσει τὸ τοῦ Τριγώνου, ὡς δῆλον ἐκ τοῦ Σχολίου τοῦ μετὰ τὴν ΜΑ'. τοῦ α'.

---

(1) *Πόρ. γ'. τῆς ΛΒ. τοῦ α'.* (2) *ΙΒ. τοῦ β'.* (3) *Γ. τοῦ α'.* (4) *Ζ. τοῦ β'.* (5) *ΜΖ. τοῦ β'.* (6) *Διὰ τὴν αὐτ.*

ϰ. 192. Οἷον ἔςω Τρίγωνον τὸ τυχὸν αβγ, ϗ τέτε δῆλαι αἱ Πλευραί· δεῖ οὖν δήλην κατασῆσαι ϗ τὴν Κάθετον αζ, τὴν ἀπό τινος Γωνίας α, ἐπὶ τὴν ὑποτείνεσαν αὐτὴν Πλευρὰν βγ ἀγομένην.

ϰ. 193. Τὸ γὰρ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς αβ, τῆς τὴν ὀξεῖαν Γωνίαν γ ὑποτεινέσης, ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τε ἀθροίσματος τῶν Τετραγώνων τῶν ἀπὸ αγ ϗ γβ, ὑπόλοιπον (1) ἔσαι τὸ δὶς Ὀρθογ. βγζ. Ἔνθεντοι καὶ τε λοιπε τε δε τὴν ἡμίσειαν (τετέςι τὸ Ὀρθογ. βγζ) διὰ τῆς προδήλε ὅσης Πλευρᾶς βγ διελόμενος, ἕξεις Εὐθεῖαν τὴν γζ. Καὶ ἐὰν ἄρα τὸ ἀπὸ γζ Τετράγωνον ἀφέλης ἀπὸ τε Τετραγώνε τε ἀπὸ αγ, κομίσῃ δὴ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ αζ, οὗ περ ἡ Τετραγωνικὴ ῥίζα παρέξει τὴν Κάθετον αζ.

Κείσθω γὰρ δὴ ἡ μὲν $\alpha\beta = 13$, ἡ δὲ $\beta\gamma = 14$, ἡ δὲ $\alpha\gamma = 15$· καὶ ἔςαι $\alpha\beta^{T} = 169$, καὶ $\beta\gamma^{T} + \alpha\gamma^{T} = 196 + 225 = 421$· διὸ τὸ $2\beta\gamma\zeta$ ($= \beta\gamma^{T} + \alpha\gamma^{T} - \alpha\beta^{T} = 421 - 169$) $= 252$. Καὶ ἑπομένως τὸ $\beta\gamma\zeta = 126$, ϗ $\gamma\zeta = 9$. Ἄρ' οὖν $\alpha\zeta^{T}$ ($= \alpha\gamma^{T} - \gamma\zeta^{T} = 225 - 81$) $= 144$, καὶ $\alpha\zeta = 12$. Τὸ δὲ τε Τριγώνε χωρίον ἔςαι $12 \times 7 = 6 \times 14 = 84$.

Δυνήσῃ δὲ αὐτὸ τετο λαβεῖν καὶ διὰ τῆς ΙΒ΄. Προτάσεως· ἀρκέσει γεμὴν ἡ ΙΓ΄. εἰς τετο. Οὐδὲν γάρ ἐςι Τρίγωνον, ἐφ' ὅτῳ ἡ ἀπότινος τῶ Γωνιῶν ἐπὶ τὴν ταύτην ὑποτείνεσαν Κάθετον, ὀκ ἐντὸς αὐτε τε Τριγώνε πεσεῖται.

ϰ. 194. Ἀλλ' ἵνα μὴ ϗ τέτε δεῖγμα τοῖς νεωτέροις προσδέηται, ὅπως ἀμέλει ϗ διὰ τῆς ΙΒ΄. ἐπὶ τῶν ἀμβλυγωνίων Τριγώνων, (ἐφ' ὧν ἐκτὸς συμβαίνει πίπτειν τὴν ἀπὸ τῆς ἑτέρας τῶν Ὀξειῶν Κάθετον) τὸ Πρόβλημα ἐπιλυόμεθα. Φέρε δὴ κείσθω Τρίγωνον ἀμβλυγώνιον τὸ αγβ· ϗ τέτε ἡ μὲν $\alpha\gamma = 20$, ἡ δὲ $\alpha\beta = 13$, ἡ δὲ $\beta\gamma = 11$. Καὶ ἔςαι $\alpha\gamma^{T} = 400$, καὶ $\alpha\beta^{T} + \beta\gamma^{T} = 169 + 121 = 290$. Ἔνθεντοι $\alpha\gamma^{T} - \alpha\beta^{T} - \beta\gamma^{T} = 400 - 290 = 110 = 2\gamma\beta\zeta$. Καὶ $\gamma\beta\zeta = 55$, ϗ $\beta\zeta = 5$. Καὶ $\beta\zeta^{T} = 25$, ϗ $\alpha\beta^{T} - \beta\zeta^{T} = 169 - 25 = 144 = \alpha\zeta^{T}$. Καὶ τοίνυν $\alpha\zeta = 12$, καὶ $\frac{1}{2}\,\alpha\zeta \times \beta\gamma = 6 \times 11 = 65$, ὅπέρ ἐςι τὸ χωρίον τε Τριγώνε αβγ.

Σχόλιον Β΄.

ϰ. 195. Ἐπὶ παντὸς Τριγώνε (αγβ) ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς (α) ἐπὶ τὴν Βάσιν (γβ) προεκβληθεῖσαν ἣν δεήσοι, ἀχθῇ Κάθετος ἡ αζ, ἔςαι ἡ διαφορὰ τῶν Τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν Πλευρῶν (αγ, αβ), ἴση τῷ δὶς Ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπό τε τῆς Βάσεως γβ, ϗ ($\zeta\gamma - \frac{1}{2}\beta\gamma$) τῆς ἀποςάσεως, ἣν ἡ Κάθετος ἔχει

(1) ΙΓ. τε β΄.

ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς Βάσεως. Ὅρα τὴν Καθόλου Ἀριθμητ. Σελ. 103. κατὰ τὴν Α'. ἔκδοσιν.

Διὰ γὰρ δὴ ταύτην τὴν Πρότασιν $\alpha\gamma^{T} + \beta\gamma^{T} = \alpha\beta^{T} + 2\beta\gamma\zeta$. Ἐὰν οὖν ὑφέλῃ τις ἑκατέρωθεν $\alpha\beta^{T} + \beta\gamma^{T}$, ἔσται $\alpha\gamma^{T} - \alpha\beta^{T} = 2\beta\gamma\zeta - \beta\gamma^{T}$. Ἀλλὰ γὰρ $\beta\gamma^{T}$ (1) $= 2\beta\gamma \times \frac{1}{2}\beta\gamma$. Ἄρα $\alpha\gamma^{T} - \alpha\beta^{T} = 2\beta\gamma \times \gamma\zeta - \frac{1}{2}\beta\gamma$. „Φανερὸν δὲ τὸ τῆς ἐπιφορᾶς. Ἐὰν γὰρ τοὺς $2\beta\gamma \times \gamma\zeta - \frac{1}{2}\beta\gamma$ Παρά-„γοντας πολλαπλασιάσῃς, ἕξεις Παραγόμενον τὸ $2\beta\gamma\zeta - 2\beta\gamma \times \frac{1}{2}\beta\gamma$, ὡς „ἀνωτέρω.

Ἐὰν δὲ αἱ Πλευραὶ $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ ἴσαι ὦσι, ἐπιπεσεῖται πάντως ἡ $\alpha\zeta$ Κά- ϰ. 196.
θετος κατὰ (2) τὸ μέσον τῆς Βάσεως. Ὥστε τήν τε διαφορὰν τῶν ἀπὸ τῶν Πλευρῶν Τετραγώνων, καὶ τὴν τῆς Καθέτου ἀπὸ τοῦ μεσαιτάτου τῆς Βάσεως ἀπόστασιν τέλεον ἐξαφανίζεσθαι.

Καὶ ἐὰν ἡ ἑτέρα τῶν πρὸς τὴν Βάσιν Γωνιῶν Ὀρθὴ ᾖ, οἷον ἡ β, ἡ ϰ. 197.
Κάθετος $\alpha\zeta$ τῇ Πλευρᾷ $\alpha\beta$ εἰς ἓν συμπεσεῖται. Ἡ δὲ διαφορὰ τῶν ἀπὸ τῶν Πλευρῶν Τετραγώνων, τῷ Τετραγώνῳ αὐτῷ (3) τῷ ἀπὸ τῆς Βάσεως συνεξισωθήσεται. Ἡ δὲ τῆς Καθέτου ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς Βάσεως ἀπόστασις, ἴση ἔσται αὐτῇ τῇ ἡμισείᾳ τῆς Βάσεως. Τοὔτοι καὶ τὸ δὶς Ὀρθογώνιον τὸ ὑπό τε τῆς Βάσεως καὶ τῆς τοσῆσδε ἀποστάσεως, ἤτοι τὸ ὑπὸ τῆς Βάσεως καὶ τῆς ἡμισείας τῆς Βάσεως (4), ἴσον ἔσται καὶ αὐτῷ τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς Βάσεως. Καὶ ἔσται ἄρα ἡ διαφορὰ τῶν Τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν Πλευρῶν, ἴση τῷ δὶς Ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπό τε τῆς Βάσεως, καὶ τῆς ἀποστάσεως ἣν ἔχει ἡ Κάθετος ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς Βάσεως.

Σχόλιον. Γ'.

Ἐπὶ παντὸς Τριγώνου $\alpha\beta\pi$ ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς α, Εὐθεῖα ἀχθῇ ἡ ϰ. 198.
$\alpha\gamma$, τὴν Βάσιν $\beta\pi$ δίχα τέμνουσα κατὰ τὸ γ, τὰ ἀπὸ τῶν Πλευρῶν $\alpha\beta$, $\alpha\pi$ Τετράγωνα ἅμα ληφθέντα, διπλάσια ἔσται τῶν Τετραγώνων, τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς Βάσεως $\beta\gamma$, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς διχοτομούσης τὴν Βάσιν $\alpha\gamma$, ἅμα ληφθέντων.

Ἀπὸ τῆς κορυφῆς α, ἤχθω Κάθετος ἡ $\alpha\zeta$ τῇ Βάσει, καὶ πιπτέτω δὴ ἀχθεῖσα μεταξὺ τῶν Σημείων γ καὶ π (5). Καὶ ἔσται ἡ μὲν ὑπὸ $\alpha\gamma\beta$ Ἀμ-

---

(1) Πόρ. δ. τῆς Δ. τοῦ β'. (2) Ἀριθ. α'. τοῦ Σχολ. τῆς Κϛ. τοῦ α'. (3) Πρόβλ. β'. μετὰ τὴν ΜΖ. τοῦ α'. (4) Δ. Πόρ. τῆς Δ. τοῦ β'. (5) Γ. Πόρ. τῆς ΔΒ. τοῦ α'.

βλεῖα, ἡ δὲ ὑπὸ $\alpha\gamma\pi$ Ὀξεῖα. Ἔνθεντοι (διὰ τὴν ΙΒ΄.) $\alpha\beta^T = \alpha\gamma^T + \beta\gamma^T + 2\beta\gamma\zeta$. Διὰ δὲ τὴν ΙΓ΄. $\alpha\pi^T = \alpha\gamma^T + \gamma\pi^T - 2\pi\gamma\zeta$. Ἀλλαμὴν $\beta\gamma = \pi\gamma$. Ἄρα ϗ $\gamma\beta^T = \gamma\pi^T$ (1), καὶ $2\beta\gamma\zeta = 2\pi\gamma\zeta$ (2). Διὸ ϗ $\gamma\beta^T + \gamma\pi^T =$ (3) $2\gamma\beta^T$, καὶ $2\beta\gamma\zeta - 2\pi\gamma\zeta = 0$. Ἐὰν ἄρα τοῖς ἴσοις ἴσα προσθῇς, τὰ ἀθροιζόμενα ἴσα ἔσαι· καὶ τοίνυν $\alpha\beta^T + \alpha\pi^T = 2\alpha\gamma^T + 2\beta\gamma^T$. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

Τῶν αὐτῶν δὲ μενȣσῶν, τῆςτε Βάσεως φημὶ $\beta\pi$, ϗ τῆς Εὐθείας $\alpha\gamma$ τῆς τὴν Βάσιν διχοτομȣ́σης, ὅπως ἂν ἄλλως ᾖ πρὸς τὴν Βάσιν αὐτὴν κεκλιμένη, οἷον ἡ $A\gamma$, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπὸ τῶν Πλευρῶν Τετραγώνων ἀεὶ τὸ αὐτὸ ἔσαι. Ἀεὶ γὰρ $\alpha\beta^T + \alpha\pi^T = A\beta^T + A\pi^T$, καὶ ȣ̎τως ἐν ἅπασι.

Προσαρμοσθείη δ' ἂν τȣτὶ τὸ Θεώρημα ϗ ταῖς τῶν Καμπύλων Ἁπτομέναις, ϗ Διαμέτροις, ϗ Τεταγμέναις. Οἷον ἁπτέσθωσαν αἱ Εὐθεῖαι $\alpha\beta$, $\alpha\pi$, Κωνικὴν οἱανδηποτȣ̃ν τομὴν, ἢ τομὰς ἀντιθέτȣς κατὰ τὰ Σημεῖα β ϗ π· καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ $\beta\pi$, δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ γ· ϗ ἔσαι ἡ $\beta\gamma$ ἢ ἡ $\pi\gamma$, Τεταγμένη πρὸς τὴν Διάμετρον $\alpha\gamma$. Ἔνθεντοι τὰ Τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν Ἁπτομένων $\alpha\beta$, $\alpha\pi$, διπλάσια ἔσαι τῶν Τετραγώνων, τȣ̃τε ἀπὸ τῆς Ἁπτομένης $\beta\gamma$, ἢ $\pi\gamma$, ϗ τῆς Διαμέτρȣ τῆς μεταξὺ τῆςτε Τεταγμένης, καὶ τῆς συνόδȣ τῶν Ἁπτομένων ἐναπολαμβανομένης $\alpha\gamma$.

Πρότασις ΙΔ.

„Τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ ($\phi\chi\psi$) ἴσον Τετράγωνον συςήσασθαι.

σχ. 199. Εὐθεῖαν λαβὼν τὴν τυχȣ̃σαν $\iota\alpha$, ἐπ' αὐτῆς τῷ Εὐθυγράμμῳ $\phi\chi\psi$, ἴσον σύςησον Παραλληλόγραμμον (4) ὀρθογώνιον τὸ $\gamma\iota$, οὗ αἱ Πλευραὶ αἱ $\iota\alpha$, $\gamma\alpha$, ἐὰν ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, αὐτὸ ἔσαι τὸ ζητȣ́μενον Τετράγωνον. ἀνίσων δὲ ȣ̓σῶν τὴν μείζονα Πλευρὰν $\iota\alpha$ προεκβαλὼν ἐπὶ τὸ λ, ὥςε τὴν $\alpha\lambda$ ἴσην εἶναι τῇ $\alpha\gamma$, δίχα τέμε τὴν $\iota\lambda$ κατὰ τὸ ζ. Καὶ Κέντρῳ μὲν τῷ ζ, Διαςήματι δὲ τῷ $\zeta\iota$, ἢ $\zeta\lambda$, Κύκλον γράψον· πρόαγε δὲ ϗ τὴν $\gamma\alpha$, ὥςε προαχθεῖσαν τῇ τȣ̃ Κύκλȣ Περιφερείᾳ ἀπαντῆσαι κατὰ τὸ β· Φημὶ δὴ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $\alpha\beta$ Τετράγωνον, ἴσον ἐςὶ τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ $\phi\chi\psi$.

Ἤχθω ϗ γὰρ Εὐθεῖα ἡ $\zeta\beta$, καὶ ἐπεὶ ἡ $\iota\lambda$ Εὐθεῖα εἰς ἴσα τέτμηται κατὰ τὸ ζ, ϗ εἰς ἄνισα κατὰ τὸ α, ἔσαι

---

(1) Ἀξ. ιε. (2) Ας. τȣ̃ α΄. (3) Ἀξ. θ. (4) ΜΕ. τȣ̃ α΄.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ὀρθογ. } ι\alpha\lambda \\ \text{Τετρ. } \zeta\alpha\end{array}\right\} (1) = \text{Τετραγ. } \zeta\lambda = (2)\ \zeta\beta = (3) \left.\begin{array}{l}\text{Τετρ. } \zeta\alpha. \\ \text{Τετρ. } \alpha\beta.\end{array}\right\}$$

Ἀφαιρεθέντος ἄρα ἑκατέρωθεν τȣ͂ Τετραγώνȣ τȣ͂ ἀπὸ ζα, ἔςαι

$$\text{Ὀρθογ. } ι\alpha\lambda = \text{Τετραγ. } \alpha\beta.$$

Τȣτέςιν ἐπεὶ αἱ αγ, αλ ἴσαι εἰσὶν, ἔςαι τὸ Ὀρθογώνιον γι, ἤτοι τὸ Εὐθύγραμμον (4) φχψ = Τετραγ. αβ. Ο. Ε. Δ.

Σχόλιον.

Ἡ κατ' Εὐκλείδην κατασκευὴ, διὰ τῆς ΜΖ'. τȣ͂ Α'., τὸ Εὐθύγραμμον μετασχηματιζόμενον λαμβάνει εἰς Ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ δέ τοι ἐργώδης ἡ μεταμόρφωσις αὕτη τȣ͂ Σχήματός ἐςι, ῥᾴδιον ἴσως τὸ πρόβλημα τόνδε τὸν τρόπον ἐπιλυθήσεται.

Τὸ δοθὲν Εὐθύγραμμον εἰς τοσαῦτα Τετράγραμμα ἀναλελύσθω εἰς ὅσα ἂν ἐξῇ. Εἶθ' ἑκάςοις Τετραγράμμοις ἰδίᾳ (5), Ὀρθογώνια συνεςάσθω ἴσα. Ἐὰν δέ τι ὑπόλοιπον ᾖ (ὡς ἐπὶ τȣ͂ προτεθέντος Σχήματος), ἁπλȣ͂ν Τρίγωνον οἷον τὸ φ, συνεςάσθω δὴ (6) καὶ τȣ́τῳ Ὀρθογώνιον ἴσον. Εἶτα ἑκάςοις Ὀρθογωνίοις, διὰ τῆς ἀνὰ χεῖρας Προτ. ΙΔ'. συνεςάσθω Τετράγωνα ἴσα, καὶ τελευταῖον Τετράγωνον ἓν (7) τοῖς κειμένοις ἅπασιν ἴσον· καὶ ἔςαι πάντως ἴσον ϗ τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ φχψ.

---

(1) *Ε. τȣ͂ β'.* (2) *Ἐ'κτε κατασκ. ϗ τȣ͂ Ὁρ. τȣ͂ Κύκλȣ.* (3) *ΜΖ. τȣ͂ α'.* (4) *Ἐκ κατασκ.* (5) *Σχόλ. Β. τῆς ΜΕ. τȣ͂ α'.* (6) *Πόρ. τῆς ΜΒ. τȣ͂ α'.* (7) *Πρόβλ. Α. Σχολ. τῆς ΜΖ. τȣ͂ α'.*

Τῶν ςοιχείων τῆς Γεωμετρίας.

ΒΙΒΛΙ΄ΟΝ Γ΄.

Τȣ̃ ἐν τοῖς ἐπιπέδοις τῶν Σχημάτων τελεωτάτȣ, τὰ πάθη τὰ βασιμώτατα ἐπὶ τȣ̃ παρόντος Βιβλίȣ δείκνυνται. Ὅσης δὲ τὸ Βιβλίον γέμει τῆς ὠφελείας, αὐτὸς ὁ Κύκλος περὶ ὃν ἡ πραγματεία, δῆλον καθίςησιν, ἀφ᾽ ȣ̂ τὰ ἐπὶ ὅλων τῶν μαθημάτων θαυμαζόμενα ὡς ἀπὸ πηγῆς πρόεισι πολυχεύμονος. Τȣ́των δὲ τὰ ἐπισημότερα τῶν Θεωρημάτων ἐςὶ τὰ ἐφεξῆς, τὸ Ις΄., τὸ Κ΄., τὸ ΚΑ΄., ϗ ΚΒ΄., τὸ ΛΑ΄, ϗ ΛΒ΄., ϗ ΛΕ΄., ϗ Λς΄.

Τοῖς δέ τοι πάθεσι τȣ̃ Κύκλȣ ἐπισυνάπτεται καὶ ἡ διαφόρων Γραμμῶν πρὸς ἀλλήλας παράθεσις, τῶν μὲν ἐντὸς τῆς ἐκείνȣ Περιφερείας, τῶν δὲ καὶ ἔξωθεν ἐπ᾽ αὐτὴν ἀγομένων. Ἐπὶ τȣ́τοις δὲ καὶ ὅσα συμβαίνει τοῖς Κύκλοις ἐπιθεωρεῖται, ȣ̔̂ς Κύκλοι τέμνȣσιν ἄλλοι, ϗ ὧν αὖ Κύκλοι, ἢ γȣ̃ν Εὐθεῖαι εἰσὶν ἁπτόμεναι. Ἀλλὰ ϗ τῶν Γωνιῶν ὅσαι τε πρὸς τὸ Κέντρον, ϗ ὅσαι δήποτε πρὸς τὴν Περιφέρειαν εἰσὶν, ἀλλήλαις παρεξετάζονται. Ἑνί τε λόγῳ τὰ πρώτιςα οἱονεὶ τῆς πρακτικῆς Γεωμετρίας ςοιχεῖα, ἅττα μάλιςα τȣ̃ Κύκλȣ ἐξήρτηται, ἐπὶ τȣ̃ ἀνὰ χεῖρας Βιβλίȣ ἐκτίθεται.

Ὁρισμοί.

Α΄. Ἴσοι Κύκλοι εἰσὶν, ὧν αἱ Διάμετροι ἢ αἱ Ἡμιδιάμετροι ἶσαι εἰσί.

σ. 200. *Β΄.* Εὐθεῖα Κύκλȣ ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἁπτομένη τȣ̃ Κύκλȣ κατὰ τὸ β ϗ ἐκβαλλομένη ȣ̓ τέμνει τὸν Κύκλον.

Γ΄. Κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, οἵτινες ἁπτόμενοι ἀλλήλων ȣ̓ τέμνȣσιν ἀλλήλȣς.

σ. 201. *Δ΄.* Ἐν Κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν τȣ̃ Κέντρȣ (α) Εὐθεῖαι λέγονται (αἱ δγ, θλ), ὅταν αἱ ἀγόμεναι ἀπὸ τȣ̃ Κέντρȣ ἐπ᾽ αὐτὰς Κάθετοι (αμ, αν) ἴσαι εἰσί. Ὡς εἴπερ αἱ ἀπὸ τȣ̃ Κέντρȣ ἀγόμεναι Κάθετοι ὦσιν ἄνισοι, μᾶλλον τȣ̃ Κέντρȣ ἀπέχειν εἰρήσεται (ἡ πρ) Εὐθεῖα, ἐφ᾽ ἣν ἡ ἀπὸ τȣ̃ Κέντρȣ Κάθετος (αμ) μείζων ἐςὶν, ἧττον δὲ (ἡ στ) ἐφ᾽ ἣν ἡ ἀπὸ τȣ̃ Κέντρȣ (αν) ἐλάσσων.

Τμῆμα Κύκλου ἐστὶ τὸ περιεχόμενον Σχῆμα ὑπό τε Εὐθείας καὶ Κύκλου Περιφερείας, οἷον τὰ αδβ καὶ βγα. Ἡ δὲ αβ τῶν Τμημάτων ἑκατέρου Βάσις. Ε. σχ. 202.

Γωνία ἐν Τμήματι ἐστὶν (ἡ ὑπὸ αεβ, καὶ ὑπὸ αθβ) ἡ περιεχομένη ὑπὸ δυοῖν Εὐθειῶν (αε καὶ βε, ἢ αθ καὶ βθ) τῶν ἐφ' ἑντι τῶν τῆς Περιφερείας Σημείων (οἷον ε ἢ θ) ἀπὸ τῶν περάτων τῆς Βάσεως (αβ) ἀγομένων. ς´.

Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν Γωνίαν Εὐθεῖαι ἀπολαμβάνωσί τινα Περιφέρειαν, ἐπ' ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι ἡ Γωνία· οἷον ἐν τῷ Σχήματι, ἐπὶ τῆς Περιφερείας αγβ. Ζ´.

Τομεὺς δὲ Κύκλου ἐστὶν, ὅταν πρὸς τῷ Κέντρῳ αὐτοῦ τοῦ Κύκλου (κ) συσταθῇ ἡ Γωνία, τὸ περιεχόμενον Σχῆμα ὑπό τε τῶν τὴν Γωνίαν περιεχουσῶν Εὐθειῶν (κλ καὶ κμ), καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν Περιφερείας, οἷον τὸ κλμ. Η´.

Τμήματος δὲ Γωνία ἐστὶν, ἡ περιεχομένη ὑπό τε Εὐθείας καὶ Κύκλου Περιφερείας, οἷον ἡ ὑπὸ βαγ, καὶ ἡ ὑπὸ βθλ, καὶ ἡ ὑπὸ βθδ. Θ´.

Ἡ ἐντὸς τοῦ Κύκλου γεγραμμένη Εὐθεῖα βγ λέγεται τῶν τόξων βαγ καὶ βιγ Ὑποτείνουσα, καὶ δὴ καὶ τῆς πρὸς τῷ Κέντρῳ ὑπὸ βδγ Γωνίας ὡσαύτως Ὑποτείνουσα καὶ Χορδή. Καὶ ἐὰν ἀπὸ τοῦ πέρατος α τοῦ τόξου αβ, Διάμετρος ἀχθῇ ἡ αι, ἐπ' αὐτῇ δὲ ἀπὸ θατέρου πέρατος καὶ τοῦ τόξου αβ, πρὸς Ὀρθὰς ἡ βη, ἔσται αὕτη τῶν τόξων βα καὶ βι, ἢ γοῦν τῶν πρὸς τῷ Κέντρῳ Γωνιῶν ὑπὸ βδα καὶ ὑπὸ βδι, Ἡμίτονον ὀρθὸν ἢ καὶ ἁπλῶς Ἡμίτονον, ἡ δὲ ηα ἔσται τοῦ τόξου αβ, ἢ τῆς ὑπὸ αδβ Γωνίας (ὥσπερ δὴ καὶ ἡ ηι τοῦ τόξου βι, ἢ τῆς ὑπὸ βδι) Ἡμίτονον πλάγιον. Ἐὰν δὲ προεκβληθεῖσα ἡ Ἡμιδιάμετρος δβ, τῇ κατὰ τὸ α τοῦ Κύκλου ἁπτομένῃ εἰς συμπέσῃ κατὰ τὸ Σημεῖον ε, ἡ μὲν αε καλεῖται τῶν τόξων αβ καὶ βι, ἢ γοῦν τῶν ὑπὸ αδβ καὶ βδι Γωνιῶν Ἁπτομένη, ἥτε δε Εὐθεῖα, πρὸς τὰ αὐτὰ τόξα τε καὶ Γωνίας Τέμνουσα. Ἔτι τῆς πρὸς τῷ Κέντρῳ ὀρθῆς Γωνίας ὑπὸ αδκ, τὸ δκ (ὅπερ ἐνταῦθα Ἡμιδιάμετρος τοῦ Κύκλου ἐστὶ) ἰδίως Ἡμίτονον ὁλοκερές τε καὶ ὁλικὸν ἀκούει. Ἐπὶ τούτοις δὲ καὶ τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονον βλ τῆς ὑπὸ βδκ (ἥτις Παραπλήρωμα διατελεῖ τῆς ὑπὸ αδβ πρὸς Ὀρθήν) Συνημίτονον τῆς ὑπὸ αδβ Γωνίας ὠνόμασαι. Ἡ δὲ θκ Ἁπτομένη, ἡ δὲ θδ Τέμνουσα πρός γε τὴν αὐτὴν Γωνίαν ὑπὸ βδκ, Συναπτομένη δέ τοι καὶ Συντέμνουσα πρὸς τὴν ὑπὸ αδβ. Ι´. σχ. 203.

Ὅμοια Τμήματα Κύκλου ἐστὶ τὰ δεχόμενα Γωνίας ἴσας. ΙΑ´.

Πρότασις Α.

„Τοῦ δοθέντος Κύκλου τὸ Κέντρον εὑρεῖν.

Σχ. 204. Διήχθω τις εἰς αὐτὸν ὡς ἔτυχεν Εὐθεῖα ἡ βγ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ π Σημεῖον (1), καὶ ἀπὸ τοῦ π τῇ βγ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω (2) ἡ πλ, ϗ διήχθω ἐπὶ τὸ ζ, καὶ τετμήσθω ἡ λζ δίχα κατὰ τὸ α. Λέγω δὴ ὅτι τὸ α Κέντρον ἐστὶ τοῦ Κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν ἔστω τὸ ξ ἐκτὸς τῆς Εὐθείας ζλ (οὐ γὰρ ἀμέλειτοι ἐπὶ ταύτης ἀλλοθίπου ἂν εἴη παρὰ τὸ α, τέμοι γὰρ ἂν τὸ παρὰ τὸ α Σημεῖον τὴν λζ εἰς ἄνισα), καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βξ, πξ, γξ. Καὶ ἐπεὶ Κέντρον εἶναι δοκεῖ τοῦ Κύκλου τὸ ξ, ἔσονται αἱ βξ, γξ ἴσαι ἀλλήλαις, τὰ δέ τοι βξπ ϗ πξγ ἀμοιβαδὸν Ἰσόπλευρα. Ἐπεὶ ϗ βπ = πγ (3), ϗ ἡ ξπ ἐπ' ἀμφοῖν κοινή, ἄρ' οὖν καὶ ἡ ὑπὸ ξπγ Γωνία (4) = ξπβ. Ἄρα ἡ ὑπὸ ξπγ (5) Ὀρθή ἐστι, ϗ τῇ ὑπὸ λπγ Ὀρθῇ ϗ αὐτὴ (6) οὖσα ἴση· τὸ μέρος τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἄτοπον.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτων φανερὸν ὅτι ἐὰν ἐν Κύκλῳ τις Εὐθεῖα (λζ) Εὐθεῖάν τινα (βγ) δίχα ϗ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπὶ τῆς Τεμνούσης ἐστὶ τὸ Κέντρον τοῦ Κύκλου.

Σχ. 205. Ὅτι ῥᾷστα δὲ διὰ Γνώμονος τὸ τοῦ Κύκλου Κέντρον λαμβάνεται τῆς κορυφῆς τοῦ γνώμονος π τῇ Περιφερείᾳ τοῦ Κύκλου προσαπτομένης. Ἐὰν γὰρ Εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ δε τὰ καθ' ἃ αἱ τοῦ γνώμονος Πλευραὶ τὴν τοῦ Κύκλου τέμνουσι Περιφέρειαν, Σημεῖα δ ϗ ε συνάπτουσα, δίχα δὲ τμηθῇ κατὰ τὸ α, ἔσται δὴ τοῦτο Κέντρον τοῦ Κύκλου τὸ α. Ἀλλ' ἡ δεῖξις ἐκ τῆς ΛΑ'. τοῦ παρόντος Βιβλίου ληφθήσεται.

Πρότασις Β.

„Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς Περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα Σημεῖα (β, γ),
„ἡ ἐπὶ τὰ αὐτὰ Σημεῖα ἐπιζευγνυμένη Εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ Κύκλου.

Σχ. 206. Ληφθήτω γὰρ ἐπὶ τῆς βγ Εὐθείας Σημεῖον ἕτερον παρὰ τὰ δύο τὸ ξ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κέντρου α ἐπεζεύχθωσαν αἱ αβ, αξ, αγ. Ἐπεὶ οὖν αἱ αβ, αγ ἴσαι εἰσὶ, ϗ αἱ πρὸς τῇ βάσει Γωνίαι (7) β ϗ γ ἔσονται ἴσαι. Ἡ δὲ ἐκ-

(1) *Ι. τοῦ α'.* (2) *ΙΑ. τοῦ α'.* (3) *Ἐκ κατ.* (4) *Η. τοῦ α'.* (5) *Ὁρ. ΙΔ. τοῦ α'.* (6) *Ἐκ κατ.* (7) *Ε. τοῦ α'.*

τὸς ὑπὸ αξγ (1) μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς β, μείζων δήπου ἔσται ϗ τῆς ἴσης ἐκείνῃ γ. Καὶ τοίνυν ἐπὶ τοῦ ξαγ Τριγώνου, ἡ Πλευρὰ αγ, ἅτε δὴ ὑποτείνουσα τὴν μείζονα Γωνίαν ὑπὸ αξγ μείζων ἐστίν (2), ἡ δὲ αξ, ὡς ὑποτείνουσα τὴν ἐλάσσονα γ ἐλάσσων. Ἀλλὰ μὴν ἡ αγ ἀφικνεῖται ἀπὸ τοῦ Κέντρου ἄχρι τῆς Περιφερείας, ἄρ' ἡ αξ οὐδαμῶς ἀφίξεται. Τοιγαροῦν τὸ ταύτης πέρας ξ εἴσω πεσεῖται τοῦ Κύκλου. Τοῦτο δ' αὐτὸ δειχθήσεται καὶ περὶ τοῦ τυχόντος ἄλλου Σημείου τῶν ἐπὶ τῆς βγ. Ἡ ὅλη ἄρα βγ πεσεῖται ἐντὸς τοῦ Κύκλου.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὁποιαδηποτ' οὖν ἂν ἄρα Εὐθεῖα τοῦ Κύκλου ἅψηται, κατὰ Σημεῖον μόνον ἐφάψεται. Εἴπερ γὰρ κατὰ δύο ἅπτοιτο τῆς Περιφερείας Σημεῖα, εἴη ἂν ἡ διὰ τῶν δύο τουτωνὶ Σημείων ἀγομένη Εὐθεῖα, τοῦ Κύκλου ἐντὸς (3) πίπτουσα· τοῦτο δὲ τῆς Ἁπτομένης τὸν Ὁρισμὸν σαφῶς ἀνατρέπει. Παραπλησίῳ δὲ λόγῳ (ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων ἐπὶ τὰ στερεὰ μεταβᾶσιν) ἔχοι ἂν ἀποδειχθῆναι ϗ ἅπαν Ἐπίπεδον κατὰ Σημεῖον τῆς Σφαίρας ἐφάπτεσθαι.

Π ρ ό τ α σ ι ς Γ.

„Ἐὰν ἐν Κύκλῳ Εὐθεῖα τις (βλ) διὰ τοῦ Κέντρου, Εὐθεῖάν τινα (γζ) „μὴ διὰ τοῦ Κέντρου δίχα τέμνῃ, ϗ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ, καὶ ἐὰν πρὸς „ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, ϗ δίχα αὐτὴν τεμεῖ.

Α΄. Ἀπὸ τοῦ Κέντρου α ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, αζ, καὶ ἐπεὶ αἱ γξ, ζξ ϰ 207.
ἴσαι (4) ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ αἱ αγ ϗ αζ, ὡς ἀπὸ τοῦ Κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις, ἡ δὲ αξ ἐπ' ἀμφοῖν τοῖς Τριγώνοις κοινή. Ἄρα (5) αἱ ὑπὸ αξγ, ϗ ὑπὸ αξζ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἑπομένως (6) Ὀρθαί Ο. Η. τὸ Α΄.

Β΄. ἐπεὶ ἐξ ὑποθέσεως αἱ ὑπὸ αξγ ϗ αξζ Ὀρθαὶ, ἔσται ϗ τὸ ἀπὸ αγ Τετράγωνον (7) ἴσον τοῖς Τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ αξ ϗ ξγ. Ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ἀπὸ αζ, ἴσον τοῖς ἀπὸ αξ καὶ ξζ. Τὰ δέ τοι ἀπὸ αγ ϗ αζ Τετράγωνα (8) ἀλλήλοις ἴσα ἐστίν, ἄρα καὶ τὰ δύο ἀπὸ αξ ϗ ξγ, ἴσα ἔσται τοῖς δυσὶν ἀπὸ αξ ϗ ξζ· καὶ τοῦ κοινοῦ ἀπὸ αξ ἑκατέρωθεν ἀφαιρεθέντος, ἔσται τῷ ἀπὸ γξ ἴσον τὰ ἀπὸ ζξ. Ἄρα ϗ ἡ γξ ἴση τῇ ζξ. Ο. Η. τὸ Β΄.

---

(1) Πόρ. α΄. τῆς ΛΒ. τοῦ α΄. (2) ιθ. Βιβ. α΄. (3) Διὰ ταύτην. (4) Ἐξ ὑποθ. (5) Η. τοῦ α΄. (6) Ὁρ. ΙΔ. τοῦ α΄. (7) ΜΖ. τοῦ α΄. (8) Ἀξ. ιε.

Πορίσματα.

Α'. Ἡ ἡμίσεια τῆς Χορδῆς τῆς ὁποιανδήποτε Γωνίαν πρὸς τῷ Κέντρῳ ȣ̃σαν ὑποτεινȣ́σης, τȣ̃ ἡμίσȣς τῆς αὐτῆς Γωνίας ὀρθὸν Ἡμίτονον ἐςίν. Ἐὰν γὰρ ἐπὶ τῇ Χορδῇ γζ, ἥτις ὑποτείνει τὴν πρὸς τῷ Κέντρῳ Γωνίαν ὑπὸ γαζ, Κάθετος ἀπὸ τȣ̃ Κέντρȣ ἀχθῇ ἡ αξ, ἔσονται ἐπὶ τῶν Τριγώνων (1) αἱ γξ, ζξ ἀλλήλαις ἴσαι, ἡ δὲ αξ κοινή, αἵτε πρὸς τῷ ξ Γωνίαι Ὀρθαί. Ἄρα ἡ ὑπὸ γαξ ἡμίσεια ἔςαι τῆς Γωνίας τῆς ὑπὸ γαζ, ἡ δὲ γξ Εὐθεῖα ἡμίσεια τῆς Χορδῆς γζ. Ἀλλ' ἡ γξ Ἡμίτονόν (2) ἐςιν ὀρθὸν τῆς ὑπὸ γαξ. Ἡ ἄρα ἡμίσεια τῆς Χορδῆς, τῆς ὁποιανδήποτε Γωνίαν πρὸς τῷ Κέντρῳ ȣ̃σαν ὑποτεινȣ́σης, τȣ̃ ἡμίσȣς τῆς αὐτῆς Γωνίας ὀρθὸν Ἡμίτονον ἐςί.

Β'. Καὶ ἐὰν παντὸς Τριγώνȣ ἰσοπλεύρȣ ἢ καὶ ἰσοσκελȣ̃ς αγζ, ἡ μὲν Γωνία α ὡς Κέντρον ληφθῇ, θάτερον δὲ τῶν ἴσων σκελῶν αγ ὡς Διάςημα, ϗ Κύκλος γραφῇ, διελεύσεται δὴ ὁ Κύκλος καὶ διὰ τȣ̃ ζ (3). Ἔνθεντοι δυνάμει τῆς προκειμένης Προτάσ., ἐὰν Εὐθεῖα ἡ αξ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τȣ̃ ἰσοσκελȣ̃ς Τριγώνȣ ἀγομένη διχοτομοίη τὴν Βάσιν, ἔςαι ἐπ' αὐτῇ ϗ πρὸς ὀρθάς· ἐὰν δὲ ἐπ' αὐτῇ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, ταύτην διχοτομήσει. Κἀντεῦθεν δ' ἂν ἔχοιεν ἐπαχθῆναι καὶ τὰ λοιπά, ἅπερ ἐν τῷ Σχολίῳ τῷ μετὰ τὴν Κϛ'. τȣ̃ α'. Βιβλίȣ ἄλλοθέν ἐςιν ἐπιφερόμενα.

Σχόλιον.

κ. 208. Ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τȣ̃ ἰσοσκελȣ̃ς Τριγώνȣ αβγ, ἐπὶ τὸ τυχὸν Σημεῖον τῆς Βάσεως Γραμμὴ εὐθεῖα ἀχθῇ, ἔςαι τὸ ἀπὸ τῆς ἀγομένης Τετράγωνον μετὰ τȣ̃ ὑπὸ τῶν Τμημάτων τῆς Βάσεως Ὀρθογωνίȣ, ἴσον τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς αβ ἢ αγ.

Ἤτοι γὰρ ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς α ἀγομένη Εὐθεῖα πρὸς ὀρθὰς κείσεται ἐπὶ τῇ Βάσει βγ, ἢ ȣ̓χί· καὶ κείσθω δὴ πρῶτον πρὸς ὀρθὰς ὡς ἡ αδ. Ἔςαι ȣ̃ν $βδ = δγ$ (4)· διὸ δὴ ϗ τὸ Ὀρθογώνιον $βδγ = βδ^{T}$ ἢ $δγ^{T}$. Ἀλλὰ $αδ^{T} + βδ^{T} =$ (5) $αβ^{T}$· ὅπερ ἐςιν $αδ^{T} + βδγ$ Ὀρθογ. $= αβ^{T}$. Ο. Η. τὸ ἀποδειχθησόμενον.

Ἀλλὰ γὰρ ἔςαι ἀγομένη Εὐθεῖα ἡ αε, μὴ πρὸς ὀρθὰς ȣ̃σα ἐπὶ τῆς Βάσεως· ἤχθω δὲ δὴ ϗ πρὸς ὀρθὰς ἡ αδ, ἢ ϗ τὴν Βάσιν κατὰ τὸ δ δίχα τε-

---

(1) *Διὰ τὴν Πρότ.* (2) *Ὅρ. Ι. τȣ̃ β'.* (3) *Ὅρ. ΙΗ. ΙΘ. ϗ Κϛ. τȣ̃ α'. Βιβλ.* (4) *Πόρ. β. τῶν ἀνωτ.* (5) *ΜΖ. τȣ̃ α'.*

μεῖ (1)· καὶ ἐπεὶ Εὐθεῖα ἡ $\beta\gamma$ εἰς ἴσα τέτμηται κατὰ τὸ δ, καὶ εἰς ἄνισα κατὰ τὸ ε, ἔσται (2) τὸ Ὀρθογώνιον $\beta\varepsilon\gamma + \varepsilon\delta^{T} = \beta\delta^{T}$. Κοινῇ οὖν προσκείσθω τὸ $\alpha\delta^{T}$· καὶ ἔσται $\beta\varepsilon\gamma + \varepsilon\delta^{T} + \alpha\delta^{T} = \beta\delta^{T} + \alpha\delta^{T}$. Ἀλλαμὴν $\varepsilon\delta^{T} + \delta\alpha^{T}$ $=$ (3) $\alpha\varepsilon^{T}$, καὶ $\beta\delta^{T} + \alpha\delta^{T} =$ (4) $\alpha\beta^{T}$. Ἄρα $\beta\varepsilon\gamma + \alpha\varepsilon^{T} = \alpha\beta^{T}$. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Δ.

„Ἐὰν ἐν Κύκλῳ δύο Εὐθεῖαι ($\beta\gamma$, $\zeta\lambda$) μὴ διὰ τοῦ Κέντρου ἄμφω οὖσαι, „τέμνωσιν ἀλλήλας, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Ἐὰν γὰρ τούτων ἡ ἑτέρα $\lambda\zeta$ διὰ τοῦ Κέντρου διηγμένη τύχοι, σαφὲς ὡς ἥκιστα αὕτη διὰ τῆς ἑτέρας τῆς μὴ διὰ τοῦ Κέντρου ἄγεσθαι ὑποτιθεμένης $\beta\gamma$, δίχα τμηθήσεται. κ. 209.

Εἰ δ' οὐδετέρα διὰ τοῦ Κέντρου α ἐστὶν, ἀπὸ τοῦ Κέντρου ἤχθω ἡ $\alpha\xi$· ἐὰν οὖν ἀμφότεραι αἱ $\beta\gamma$ καὶ $\zeta\lambda$ δίχα τετμημέναι ὦσι κατὰ τὸ ξ, εἶεν ἂν καὶ αἱ ὑπὸ $\alpha\xi\gamma$ καὶ $\alpha\xi\lambda$ Ὀρθαὶ (5), καὶ ἐπομένως ἀλλήλαις ἴσαι· τὸ μέρος τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἀδύνατον.

Πρότασις Ε.

„Ἐὰν δύο Κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ Κέντρον.

Ἄλλως γὰρ τῆς $\alpha\beta$ ἐπιζευχθείσης, καὶ ἀχθείσης τῆς $\alpha\gamma\zeta$, εἶεν ἂν ἴσαι αἱ $\alpha\zeta$ καὶ $\alpha\gamma$, τῷ μέρει τὸ ὅλον, ἐπεὶ ἑκατέρα τούτων ἴση τῇ τρίτῃ $\alpha\beta$ (6). κ. 210.

Πρότασις ϛ.

„Ἐὰν δύο Κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντός, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ „Κέντρον.

Ὁμοίως τῇ ἀνωτέρω δειχθήσεται. κ. 211.

Πρότασις Ζ.

„Ἐὰν Κύκλου ἐπὶ τῆς Διαμέτρου ληφθῇ τι Σημεῖον ὃ μή ἐστι Κέντρον τοῦ „Κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ Σημείου προσπίπτωσιν Εὐθεῖαι τινὲς πρὸς τὸν Κύκλον „($\gamma\beta$, $\gamma\lambda$, $\gamma\xi$, $\gamma\zeta$.) κ. 212.

„Α'. Μεγίστη μὲν ἔσται ἐφ' ἧς τὸ Κέντρον (α) ἡ $\gamma\beta$.

---

(1) Πόρ. β'. τῶν ἀνωτ. (2) Ε. τοῦ β'. (3) ΜΖ. τοῦ α'. (4) Διὰ τὴν αὐτ. (5) Διὰ τὴν ἀνωτ. (6) Ὁρ. ΙΗ'. τοῦ α'. καὶ Ἀξ. α'.

„Β΄. Ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπή, ἤτοι τὸ λοιπὸν τῆς Διαμέτρου μέρος γζ.

„Γ΄. Τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ Κέντρου, τῆς ἀπωτέρω „μείζων ἐστί.

„Δ΄. Δύο δὲ μόνον Εὐθεῖαι ἴσαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ Σημείου (γ) ὃ Κέντρον „μή ἐστι, πεσοῦνται πρὸς τὸν Κύκλον ἑκατέρωθεν.

Δείκνυτ. τὸ Α΄. Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Κέντρου α, Εὐθεῖα ἡ αλ, καὶ ἐπεὶ αλ, αβ ἴσαι εἰσὶ, κοινῆς αὐταῖς προστεθείσης τῆς αγ, ἔσονται λα, αγ ἅμα ἴσαι τῇ βγ. Ἀλλὰ μὴν λα, αγ μείζονές εἰσι (1) τῆς γλ· ἄρα καὶ βγ μείζων τῆς γλ. Ὡσαύτως καὶ οἱασοῦν ἄλλης μείζων ἡ γβ δειχθήσεται.

Β΄. Ἀπὸ τοῦ Κέντρου ἤχθω καὶ ἡ αξ. Ἡ μὲν οὖν αξ (τουτέστιν ἡ αζ) ἐλάσσων ἐστὶ (2) τῶν αγ καὶ γξ ἅμα ληφθεισῶν. Ἀφαιρεθείσης ἄρα τῆς κοινῆς αγ, ὑπολειφθήσεται ἡ γζ ἐλάσσων τῆς γξ. Ὡσαύτως δ᾽ ἂν καὶ οἱασοῦν ἄλλης ἐλάσσων οὖσα ἡ γζ δειχθείη.

Γ΄. Ἐπὶ τῶν Τριγώνων γξα, γλα ἡ Πλευρὰ λα ἴση τῇ ξα, ἡ δὲ γα ἐπ᾽ ἀμφοῖν κοινὴ, ἡ δὲ ὑπὸ λαγ Γωνία μείζων τῆς ὑπὸ ξαγ. Ἄρα καὶ ἡ Βάσις (3) λγ μείζων τῆς Βάσεως ξγ.

Δ΄. Φανερὸν ἐκ τῶν προαποδειχθέντων, ἐὰν γὰρ τρεῖς ἴσας ἀλλήλαις ἀχθῆναι δυνατὸν, οἷον τὰς γξ, γι, γπ, εἶεν ἂν αἱ δύο τούτων, οἷον αἱ γι, γπ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος καὶ ἀλλήλαις ἴσαι. Ὃ τῷ Γ΄. μέρει τῆς Προτάσεως ἀντιπεριπίπτει.

Π ό ρ ι σ μ α.

Παραπλησίῳ δὲ λόγῳ μετὰ Θεοδοσίου ἐπιφέρομεν, ὅτι τῶν τόξων τῶν μεγίστων Κύκλων τῶν ἀπὸ τοῦ τυχόντος Σημείου, ὃ μή ἐστι Πόλος τοῦ δοθέντος Κύκλου, ἐπὶ τῆς Ἐπιφανείας τῆς Σφαίρας πρὸς τὸν Κύκλον αὐτὸν ἀγομένων, μέγιστον μέν ἐστιν, ἐφ᾽ οὗ ὁ τοῦ Κύκλου Πόλος, ἐλάχιστον δὲ τὸ λοιπόν. Τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ τὸ ἔγγιον τοῦ διὰ τοῦ Πόλου, τοῦ ἀπωτέρω μεῖζον ἐστί. Δύο δὲ μόνον Τόξα ἴσα ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ Σημείου, ὃ μὴ Πόλος ἐστὶ προσπεσοῦνται πρὸς τὸν Κύκλον ἑκατέρωθεν. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ ἐπὶ τῶν πλειόνων Προτάσεων τοῦδε τοῦ Βιβλίου μετιόντας ἔνι συλλογίζεσθαι, ἐπὶ γὰρ τῶν τοιούτων ἀπὸ τῶν Ἐπιπέδων ἐπὶ τὰ στερεὰ μεταβαίνειν ἐστὶν εὐχερέστατον.

---

(1) *Κ. τοῦ ά.* (2) *Διὰ τὴν αὐτήν.* (3) *ΚΔ. τοῦ ά.*

Πρότασις Η.

„Ἐὰν Κύκλου ληφθῇ τι Σημεῖον ἐκτὸς (α), ἀπὸ δὲ τοῦ Σημείου πρὸς τὸν „Κύκλον διαχθῶσιν Εὐθεῖαι τινὲς (αβ, αγ, αζ, αξ, απ, αρ), ὧν μία μὲν „διὰ τοῦ Κέντρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχε·

„Α΄. Τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην Περιφέρειαν προσπιπτουσῶν Εὐθειῶν, „μεγίστη μὲν (ἡ αβ) ἡ διὰ τοῦ Κέντρου (ψ).

„Β΄. Τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ Κέντρου (αβ) τῆς ἀπώτε„ρον μείζων ἐστί.

„Γ΄. Τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν Περιφέρειαν προσπιπτουσῶν Εὐθειῶν, ἐλα„χίστη μέν ἐστιν ἡ μεταξὺ τοῦ τε Σημείου (α) καὶ τῆς Διαμέτρου.

„Δ΄. Τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης, τῆς ἀπώτερον ἐστὶν „ἐλάσσων.

„Ε΄. Δύο δὲ μόναι Εὐθεῖαι ἴσαι προσπεσοῦνται ἀπὸ τοῦ Σημείου (α) „πρὸς τὸν Κύκλον, ἐφ᾽ ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης, ἤτοι πρὸς τὴν κυρτὴν ἢ καὶ „πρὸς τὴν κοίλην αὐτὴν διαγόμεναι.

Α΄. Ἀπὸ τοῦ Κέντρου ψ ἤχθω ἡ ψγ. Ἐπεὶ γοῦν ψγ, ψβ ἴσαι ἀλλή- κ. 213.
λαις εἰσὶ, κοινῆς προστεθείσης τῆς αψ, ἔσονται αψ, ψγ ἅμα ληφθεῖσαι ἴσαι τῇ αβ. Ἀλλ᾽ αἱ αψ, ψγ ἅμα (1) τῆς αγ μείζονές εἰσιν, ἄρα καὶ ἡ αβ μείζων τῆς αγ. Ὡσαύτως δὲ καὶ οἱασοῦν ἄλλης ἡ αβ μείζων δειχθήσεται.

Β΄. Ἤχθω ἡ ψζ. Αἱ γοῦν γψ, ψα Πλευραὶ ἴσαι ταῖς Πλευραῖς ζψ, ψα, ἡ δὲ ὑπὸ γψα μείζων τῆς ὑπὸ ζψα. Ἄρα (2) ἡ Βάσις γα μείζων τῆς Βάσεως ζα.

Γ΄. Ἤχθω ἡ ψπ. Αἱ γοῦν δύο απ, πψ ἅμα μείζονές εἰσι τῆς αψ. Ἀφαιρεθεισῶν ἄρα τῶν ἴσων ψπ, ψξ ὑπολειφθήσεται ἡ αξ ἐλάσσων τῆς απ. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ἡ αξ οἱασοῦν ἄλλης ἐλάσσων δειχθήσεται.

Δ΄. Ἤχθω ἡ ψρ. Αἱ γοῦν απ, πψ ἐλάσσονές εἰσιν ἅμα ληφθεῖσαι (3), τῶν αρ, ρψ ἅμα ληφθεισῶν. Ἀφαιρεθεισῶν ἄρα τῶν ἴσων ψπ, ψρ, ὑπολειφθήσεται ἡ απ ἐλάσσων τῆς αρ.

Ε΄. Φανερὸν ἐκ τῶν προαποδειχθέντων. Ἐὰν γὰρ πλείους δυοῖν ἴσαι ἀλλήλαις ἀχθῆναι δύνανται, προσπεσοῦνται δὴ δύο ἴσαι Εὐθεῖαι, ἤτοι πρὸς τὴν κυρτὴν ἢ καὶ πρὸς αὐτὴν τὴν κοίλην, πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος· ὃ τῷ Β΄. ἢ τῷ Δ΄. μέρει ἀντιπεριπίπτον ἐστί.

---

(1) *Κ. τοῦ κ΄.* (2) *ΚΔ. τοῦ α΄.* (3) *ΚΑ. τοῦ α΄.*

Πρότασις Θ.

„ Ἐὰν Κύκλȣ ληφθῇ τι Σημεῖον ἐντός (α), ἀπὸ δὲ τȣ͂ Σημείȣ πρὸς „ τὸν Κύκλον προσπίπτωσι πλείȣς ἢ δύο Εὐθεῖαι ἴσαι, τὸ ληφθὲν Σημεῖον „ Κέντρον ἔςαι τȣ͂ Κύκλȣ.

Κατάδηλον τὸ Θεώρημα ἐκ τȣ͂ Δ΄. μέρȣς τῆς Ζ΄. τȣ͂ παρόντος.

Ὁ δὲ Εὐκλείδης οὕτω τοι δείκνυσι.

κ. 214. Ἔςω φησὶ Κύκλος ὁ αβγ, ἐντὸς δὲ αὐτȣ͂ Σημεῖον τὸ δ, καὶ αἱ ἀπὸ τȣ͂ δ προσπίπτȣσαι Εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις δα, δβ, δγ. Λέγω δὴ ὅτι τὸ δ Κέντρον ἐςί.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αβ, βγ, καὶ τετμήσθωσαν δίχα (1) κατὰ τὰ Σημεῖα ε ϗ ζ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ε δ, δζ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ η, κ, θ, λ Σημεῖα. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐςὶν ἡ αε τῇ εβ (2), κοινὴ δὲ ἡ εδ, ἥτε δα ἴση (3) τῇ δβ, Γωνία ἄρα (4) ἡ ὑπὸ αεδ Γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βεδ ἴση ἐςί, καὶ ἄμφω ἄρα (5) Ὀρθαί. Ἡ ηκ ἄρα τὴν αβ, καὶ δίχα τέμνει καὶ πρὸς ὀρθάς, ὥςε ἐπὶ τῆς Τεμνȣ́σης ηκ ἔςαι τὸ Κέντρον (6) τȣ͂ Κύκλȣ. Τȣ͂το δὲ ὁμοίως ῥάδιον ἔςαι ϗ ἐπὶ τῆς λθ δεῖξαι. Κοινὸν δὲ τȣτὶ μόνον ἐςὶ ταῖς ηκ, λθ τὸ Σημεῖον καθ' ὃ τέμνονται τὸ δ, τὸ δ ἄρα Σημεῖον ἔςι τὸ Κέντρον τȣ͂ Κύκλȣ.

Δείκνυσι δὲ ϗ ἄλλως.

κ. 215. Μὴ γάρ φησιν, ἀλλ' εἰ δυνατὸν ἔςω τὸ ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ δε διήχθω ἐπὶ τὰ ζ, η Σημεῖα, ἡ δὲ ζη Διάμετρός ἐςι τȣ͂ Κύκλȣ. Καὶ ἐπεὶ ἐπ' αὐτῆς εἴληπταί τι Σημεῖον, ὃ μή ἐςι Κέντρον τȣ͂ Κύκλȣ τὸ δ (7), μεγίςη μὲν ἔςαι ἡ δη, μείζων δὲ ἡ μὲν δγ τῆς δβ, ἡ δὲ δβ τῆς δα (8), ἀλλὰ ϗ ἴση (9). Ὅπερ ἀδύνατον.

Πρότασις Ι.

„ Κύκλος ȣ̓ τέμνει Κύκλον κατὰ πλείονα Σημεῖα ἢ δύο.

κ. 216. Τεμνέτω γὰρ εἰ δυνατὸν κατὰ πλείονα ἢ δύο, οἷον κατὰ β, γ, δ, ἀπὸ δὲ τȣ͂ Κέντρȣ α τȣ͂ βεζ Κύκλȣ ἐπεζεύχθωσαν Εὐθεῖαι αβ, αγ, αδ· αὗται δὲ ἔσονται ἴσαι (10). Ἐπεὶ δὲ ἐπὶ τὰς τομάς εἰσι περατȣ́μεναι, αἱ αὗται

---

(1) *Ι.* τȣ͂ *ά.* (2) *Ἐκ κατ.* (3) *Ἐξ ὑποϑ.* (4) *Η.* τȣ͂ *ά.* (5) *Ὁρ. ΙΔ.* τȣ͂ *ά.* (6) *Διὰ* τὸ Πόρ. τῆς *Δ.* τȣ͂ *γ΄.* (7) *Μέρος Α΄.* τῆς Ζ. τȣ͂ *γ΄.* (8) *Διὰ Γ΄.* μέρος τῆς αὐτῆς. (9) *Ἐξ.* ὑποϑ. (10) *Ὁρ. ΙΗ.* τȣ͂ *ά.*

ϗ πρὸς τὴν Περιφέρειαν τȣ̃ ηβϑ Κύκλȣ προσπεσȣ̃νται. Α῎ρα (1) τὸ α Κέντρον ἔςαι ϗ τȣ̃ ηβϑ Κύκλȣ, καὶ δύο ἄρα Κύκλων τεμνόντων ἀλλήλȣς τὸ αὐτὸ ἔςαι Κέντρον. Ο῞περ (2) ἀδύνατον.

Πρότασις ΙΑ.

„Ε᾽ὰν δύο Κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, ϗ ληφθῇ αὐτῶν τὰ Κέν„τρα (η ϗ ζ), ἡ ἐπὶ τὰ Κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη Εὐθεῖα, ἐκβαλλομένη „ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν Κύκλων.

Μὴ γὰρ, ἀλλ᾽ εἰ δυνατὸν πιπτέτω ὡς ἡ ζηδϑ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αζ, αη. Ε᾽πεὶ γȣ̃ν αἱ αη, ηζ τῆς ζα (ταυτὸν δ᾽ εἰπεῖν (3) τῆς ζϑ) μείζονές (4) εἰσιν, ἀφαιρείσθω κοινὴ ἡ ζη, ϗ ἔςαι ἡ λοιπὴ αη, τῆς λοιπῆς ηϑ μείζων, ἴση δὲ ἡ αη τῇ ηδ (5). Η῾ ἄρα ηδ μείζων τῆς ηϑ, τὸ μέρος τȣ̃ ὅλȣ. Ο῞περ ἀδύνατον. σχ. 217.

Πρότασις ΙΒ.

„Ε᾽ὰν δύο Κύκλοι ἅπτωνται ἀλλήλων ἐκτὸς, ἡ ἐπὶ τὰ Κέντρα αὐτῶν „ἐπιζευγνυμένη Εὐθεῖα διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

Εἰ μὴ γὰρ, ἔςω τὰ Κέντρα τῶν Κύκλων ὡς τὰ α, β, τὴν μὴ διὰ τῆς ἐπαφῆς σ ἀγομένην Εὐθεῖαν αβ, τέμνȣσαν δὲ τȣ̀ς Κύκλȣς κατὰ ο ϗ π περατȣ̃ντα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ασ, βσ. Ε῎σονται δὲ αἱ ασ, βσ ἅμα (6) μείζονες τῆς αβ. Α᾽λλαμὴν ἡ μὲν ασ ἴση τῇ αο, ἡ δὲ βσ ἴση τῇ βπ (7), αἱ ἄρα ασ ϗ βπ ἅμα μείζονες τῆς ὅλης αβ. Ο῞περ ἀδύνατον. σχ. 218.

Πόρισμα.

Ε᾽κ ταύτης ἄρα ϗ τῆς πρὸ αὐτῆς φανερὸν, ὡς ἐὰν Κύκλοι δύο ἅπτωνται ἀλλήλων εἴτε ἐντὸς εἴτε ἐκτὸς, ἡ ἀπὸ τȣ̃ Κέντρȣ τȣ̃ ἑτέρȣ διὰ τῆς ἐπαφῆς ἀγομένη Εὐθεῖα, διὰ τȣ̃ Κέντρȣ τȣ̃ ἑτέρȣ προεκβαλλομένη διελεύσεται. Η῾ γὰρ τοιαύτη Εὐθεῖα ȣ̓δὲν διοίσει τῆς ἐπὶ τὰ Κέντρα ἐπιζευγνυμένης, ἥτις (διὰ τὴν ΙΑ΄. ϗ ΙΒ΄.) ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται, καὶ διὰ τῆς ἐπαφῆς διελεύσεται.

---

(1) *Διὰ τὴν ἀνωτ.* (2) *Ε. τȣ̃ γ΄.* (3) Ο῾ρ. *ΙΗ. τȣ̃ α΄.* (4) *Κ. τȣ̃ α΄.* (5) Ο῾ρ. *ΙΗ. τȣ̃ α΄.* (6) *Κ. τȣ̃ α΄.* (7) Ο῾ρ. *ΙΗ. τȣ̃ α΄.*

Πρότασις ΙΓ.

„Κύκλος Κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα Σημεῖα ἢ καθ᾽ ἕν, ἐάν τε „ἐντὸς, ἐάν τε ἐκτὸς ἐφάπτηται. Ὁμοίως δὲ ϗ Εὐθεῖα Κύκλου οὐκ ἐφάπτε„ται κατὰ πλείονα Σημεῖα ἢ καθ᾽ ἕν.

κ. 219. Ἁπτέσθω γὰρ ἐντὸς (εἰ δυνατὸν) Κύκλος Κύκλου, ἐν μέρει Περιφερείας τῷ γλ. Ἡ γοῦν ἐπὶ τὰ Κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη Εὐθεῖα, ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὴν συναφὴν (1) πεσεῖται τῶν Κύκλων, οἷον κατὰ τὸ γ. Ἀλλ᾽ ἐπεζεύχθωσαν ϗ αἱ αλ, βλ. Ἐπεὶ τοίνυν αἱ βλ, βγ (ὡς ἀπὸ τοῦ Κέντρου ἐπὶ τὴν Περιφέρειαν ξλγ) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί· κοινῆς προστεθείσης τῆς αβ, ἡ αβ καὶ βλ ἅμα ἴσαι τῇ αγ εἰσί. Τῇ δὲ αγ ἴση ἡ αλ, ὡς ἀπὸ τοῦ Κέντρου α πρὸς τὴν Περιφέρειαν πλγ, ἄρα αἱ αβ, βλ ἅμα ἴσαι τῇ αλ εἰσίν. Ὅπερ (2) ἀδύνατον.

Ἀλλ᾽ ἁπτέσθω Κύκλος Κύκλου ἐκτὸς (εἰ δυνατὸν) κατὰ πλείονα Σημεῖα ἢ καθ᾽ ἕν, οἷον κατὰ τὸ Τόξον ξλ. Ἡ γοῦν Εὐθεῖα απ ἡ ἐπὶ τὰ Κέντρα α ϗ π ἐπιζευγνυμένη, διελεύσεται πάντως (3) διὰ τῆς ἐπαφῆς, οἷον κατὰ τὸ ξ. Ἤδη μὲν οὖν ἤχθωσαν ϗ αἱ αλ, πλ, καὶ οὕτως αἱ δύο τοῦ Τριγώνου Πλευραὶ αλ, πλ ἅμα, ἴσαι ἔσονται ταῖς αξ, πξ, ἤτοι τῇ ὅλῃ απ. Ὅπερ (4) ἀδύνατον.

Τελευταῖον δὲ ἡ βζ Εὐθεῖα ἁπτέσθω τοῦ Κύκλου (εἰ δυνατὸν) κατὰ μέρος τὸ γε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἀπὸ τοῦ Κέντρου π Εὐθεῖαι αἱ πγ, πε. Αὗται δὴ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καὶ ἰσοσκελὲς ἄρα τὸ πγε Τρίγωνον. Διὸ (5) αἱ ὑπὸ πγε, πεγ Ὀξεῖαι εἰσὶ, ϗ ἡ ἐπὶ τῇ βζ Κάθετος ἀπὸ τοῦ Κέντρου π (6), πεσεῖται μεταξὺ γ ϗ ε, οἷον κατὰ τὸ δ, καὶ ἔσονται ἄρα τὰ σκέλη πγ καὶ πε ἴσα τῇ μεταξὺ τούτων Καθέτῳ (7). Ὅπερ (8) ἄτοπον.

Πόρισμα.

κ. 220. Οἱ ἐπὶ τῆς αὐτῆς Εὐθείας τὰ ἑαυτῶν Κέντρα ἔχοντες Κύκλοι, ϗ ταύτην κατὰ τὸ αὐτὸ Σημεῖον τέμνοντες β, ἐν τῷ αὐτῷ Σημείῳ β ἀλλήλων καθάπτονται.

Ἄλλως τε ἡ παροῦσα Πρότασις ΙΓ. ἐξ αὐτῆς τῆς τῶν παραβαλλομένων

---

(1) *ΙΑ. τοῦ γ'.* (2) *Διὰ τὴν Κ. τοῦ α'.* (3) *ΙΒ. τοῦ α'.* (4) *Διὰ τὴν Κ. τοῦ α'.* (5) *Πόρ. ια'. τῆς ΛΒ. τοῦ α'.* (6) *Πόρ. Γ. τῆς αὐτ.* (7) *Ὅρ. ΙΗ. τοῦ α'.* (8) *Διὰ τὸ ιδ'. Πορ. τῆς ΛΒ. τοῦ α'.*

ἀλλήλαις Γραμμῶν ἐννοίας ἐςὶ κατάδηλος. Οὐ γὰρ ὂδ' Εὐθεῖα ϗ Κύκλȣ Περιφέρεια, ὂδὲ Περιφερειῶν ἀνίσων διαφέρȣσαι Καμπυλότητες, ὂδὲ Κυρταὶ δύο, ὅτι μὴ κατὰ Σημεῖων ἀλλήλων ἅπτεσθαι δυνήσονται· κατὰ μέρη γὰρ ἐφαρμόζειν ȣ̓ δυνατόν. Ἐφαρμόσειαν δὲ, εἰ κατὰ μέρος τι πεφύκεσαν ἅπτεσθαι.

Πρότασις ΙΔ.

„Ἐν Κύκλῳ αἱ ἴσαι Εὐθεῖαι (βγ, λζ) ἴσον ἀπέχȣσιν ἀπὸ τȣ̃ Κέντρȣ. „Καὶ αἱ ἴσον ἀπέχȣσαι ἀπὸ τȣ̃ Κέντρȣ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

Ἀπὸ τȣ̃ Κέντρȣ α ἐπεζεύχθωσαν αἱ αβ, αλ, ϗ ἤχθωσαν αἱ αξ, αι πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῶν βγ, λζ (1), καὶ ἔσονται αἱ βγ, λζ δίχα τετμημέναι (2) κατὰ ξ ϗ ι. σχ. 221.

Ἐπεὶ γȣ̃ν αἱ βγ, λζ ἴσαι ἀλλήλαις (3) εἰσὶν, ἴσα ἔςαι ϗ τȣ́των τὰ ἡμίση ξβ, ιλ, καὶ δὴ ϗ τὰ ἀπὸ τȣ́των (4) Τετράγωνα ἀλλήλοις ἴσα. Ἀλλὰ γὰρ τὸ ἀπὸ αβ Τετράγωνον (5) ἴσον τοῖς ἀπὸ αξ ϗ βξ, καὶ τὸ ἀπὸ αλ Τετράγωνον (6) ἴσον τοῖς ἀπὸ αι καὶ ιλ, τὰ δὲ ἀπὸ αβ ϗ αλ Τετράγωνα (7) ἀλλήλοις ἴσα ἐςὶν, ἄρα τὰ ἀπὸ αξ ϗ ξβ Τετράγωνα ἴσα τοῖς ἀπὸ αι ϗ ιλ, τὰ συναμφότερα τοῖς συναμφοτέροις. Ἀλλαμὴν τὰ ἀπὸ βξ καὶ ιλ ἴσα ἀλλήλοις ἐδείχθη, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ αξ ϗ αι Τετράγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἐςίν· Ἄρα (8) ϗ αἱ Κάθετοι αξ ϗ αι ἴσαι, καὶ αἱ βγ, ϗ ζλ Εὐθεῖαι (9) ἐπίσης εἰσὶν ἀπὸ τȣ̃ Κέντρȣ α ἀπέχȣσαι. Ο. Η. τὸ Α'.

Ἀνάπαλιν δὲ, ἐὰν αἱ ξα, ια ἀποςάσεις ὦσιν ἴσαι, τότε δὴ ἀφαιρεθέντων τῶν Τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν ἴσων Εὐθειῶν ξα, ια, ὁμοίως ἀποδειχθήσεται τὰ λοιπὰ Τετράγωνα τὰ ἀπὸ ξβ, ιλ ἴσα ἀλλήλοις εἶναι, ἐκ τȣ̃ ἀκολȣ́θȣ δὲ ϗ τὰς Εὐθείας ξβ, ιλ ἴσας ἀλλήλαις εἶναι. Αὗται δὲ ἡμίσειαι εἰσὶ τῶν Εὐθειῶν (10) βγ, ζλ, ἄρα ϗ αὗται εἰσὶν ἴσαι. Ο. Η. τὸ Β'.

Πρότασις ΙΕ.

σχ. 222.

„Ἐν Κύκλῳ μεγίςη μέν ἐςιν ἡ Διάμετρος, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον „τȣ̃ Κέντρȣ, τῆς ἀπώτερον μείζων ἐςί.

Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τὸ Κέντρȣ ἐπὶ τὰς βγ, ζη Κάθετοι αἱ εθ, εκ. Καὶ ἐπεὶ ἔγγιον μὲν τȣ̃ Κέντρȣ ἡ βγ, ἀπώτερον δὲ ἡ ζη, μείζων ἄρα ἡ εκ (11)

Ἄλλως. *Ἡ* αεδ = εμ + εν. *Αἱ δὲ* εμ + εν > μν, ἄρα αδ > μν, *Πάλιν* εμ + εν = εζ + εη. *Καὶ* μεν > ζεη, ἄρα μν > ζη. Ο. Ε. Δ.

---

(1) *ΙΒ.* τȣ̃ *ά.* (2) *Γ.* τȣ̃ *γ'.* (3) Ἐξ ὑποθ. (4) *Ἀ'ξ* ιέ. (5) *ΜΖ.* τȣ̃ *ά.* (6) *Διὰ τὴν αὐτ.* (7) *Δὶ* Ὅρ. *ΙΗ.* τȣ̃ *ά.* ϗ *Ἀ'ξ.* ιέ. (8) *Ἀ'ξ.* ιέ. (9) Ὅρ. *Δ.* τȣ̃ *γ'.* (10) *Γ.* τȣ̃ *γ'.* (11) Ὅρ. *Δ.* τȣ̃ *γ'.*

τῆς εθ. Κείσθω τῇ εθ ἴση ἡ ελ, κ̉ διὰ τȣ̃ λ τῇ εκ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ λμ διήχθω ἐπὶ τὸ ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εμ, εν, εζ, εη.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἡ εθ τῇ ελ, ἴση ἐςὶ (1) καὶ ἡ βγ τῇ μν. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἡ μὲν αε τῇ εμ, ἡ δὲ εδ τῇ εν, ἡ ἄρα αδ ταῖς εμ, εν ἴση ἐςίν. Αἱ δὲ, μείζονές εἰσι (2) τῆς μν, καὶ ἡ αδ ἄρα μείζων τῆς μν, κ̉ δὴ κ̉ τῆς ταύτῃ ἴσης βγ. Πάλιν ἐπεὶ αἱ δύο εμ, εν ἴσαι ταῖς δυσὶν εζ, εη, ἡ δὲ ὑπὸ μεν μείζων τῆς ὑπὸ ζεη, Βάσις ἄρα ἡ μν Βάσεως τῆς ζη (3) μείζων ἐςίν. Α᾿λλὰ ἡ μν τῇ βγ ἐδείχθη ἴση, ἄρα ἡ βγ τῆς ζη μείζων ἐςί.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ις.

„Η῾ τῇ Διαμέτρῳ τȣ̃ Κύκλȣ (γβ) πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾿ ἄκρας (β) ἀγομένη „(ιζ), ἐκτὸς πεσεῖται τȣ̃ Κύκλȣ, καὶ προαγομένη ἅπτεται τȣ̃ Κύκλȣ μὴ „τέμνȣσα· καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε Εὐθείας καὶ τῆς Περιφερείας, „ἑτέρα Εὐθεῖα (κατὰ τὴν ἐπαφὴν β) ȣ̉ παρεμπεσεῖται, ὅτι μὴ Τέμνȣσα.

χ. 223. Α΄. Ληφθήτω δὴ ἐπὶ τῆς ιβζ Εὐθείας Σημεῖον τὸ τυχὸν λ, καὶ ἐπεζεύχθω ἀπὸ τȣ̃ Κέντρȣ ἡ αλ. Καὶ ἐπεὶ ἐπὶ τȣ̃ Τριγώνȣ λαβ ἡ ὑπὸ αβλ Ο᾿ρθή ἐςιν (ἐξ ὑποθ.), ἔςαι ἡ ὑπὸ αλβ (4) Ο᾿ξεῖα. Α᾿ρα ἡ αλ ἡ ὑποτείνουσα τὴν μείζονα Γωνίαν ὑπὸ αβλ, μείζων ἐςὶ τῆς αβ τῆς ὑποτεινȣ́σης (5) τὴν ἐλάσσονα ὑπὸ αλβ. Α᾿λλ᾿ ἡ αβ ἄχρι τῆς Περιφερείας μόνον ἥκει, ἡ ἄρα αλ ἐπέκεινα τῆς Περιφερείας γενήσεται, κ̉ τό γε λ ἐκτὸς πεσεῖται τȣ̃ Κύκλου. Αὐτὸ δὲ τȣ̃το κ̉ περὶ παντὸς ἄλλȣ Σημείȣ τῶν ἐπὶ τῆς ιζ δειχθήσεται, πλὴν τȣ̃ β. Η῾ ὅλη ἄρα ιζ ἅπτεται τȣ̃ Κύκλȣ κατὰ τὸ β μὴ τέμνȣσα (6). Ο. Η. τὸ Α΄.

Β΄. Υ῾πὸ τὴν βζ (εἰ δυνατὸν) εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε Εὐθείας καὶ τῆς Περιφερείας, παρεμπιπτέτω ἑτέρα Εὐθεῖα ἡ ρβ. Ε᾿πεὶ δὲ ἡ ὑπὸ ζβα Ο᾿ρθὴ (ἐξ ὑποθ.), ἔςαι ἡ ὑπὸ ρβα Ο᾿ξεῖα· οὐκ ἄρα ἐπὶ τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἴςαται ἡ βρ. Η῎χθω γȣ̃ν ἀπὸ τȣ̃ Κέντρȣ α ἐπὶ τῇ βρ πρὸς ὀρθὰς ἡ αο, πρός γε τὴν βρ (7) πίπτȣσα, κ̉ τὴν Περιφέρειαν κατὰ τὸ π. Καὶ τοίνυν ἡ μὲν αβ, ἅτε δὴ ὑποτείνȣσα τὴν μείζονα Γωνίαν ὑπὸ αοβ (ἥτις Ο᾿ρθή), μείζων ἐςὶ (8) τῆς αο τῆς ὑποτεινούσης τὴν ἐλάσσονα Ο᾿ξεῖαν ὑπὸ οβα. Α᾿λλαμὴν ἡ αβ ἴση τῇ απ, ἡ ἄρα απ μείζων τῆς αο, τὸ μέρος τȣ̃ ὅλȣ. Ο῞περ ἀδύνατον.

---

(1) ΙΔ. τȣ̃ γ΄. (2) Κ. τȣ̃ α΄. (3) ΚΔ. τȣ̃ α΄. (4) Πόρ. Ε. τῆς ΛΒ. τȣ̃ α΄. (5) ΙΘ. τȣ̃ α΄. (6) Ο῞ρ. β. Βιβλ. γ΄. (7) Γ. Πόρ. τῆς ΛΒ. τȣ̃ α΄. (8) ΙΘ. τȣ̃ α΄.

Σχόλιον Α'.

Ἡ παρ' Εὐκλείδῃ Πρότασις οὑτωσὶν ἐκφέρεται.

„Ἡ τῇ Διαμέτρῳ τοῦ Κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πε-„σεῖται τοῦ Κύκλου, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε Εὐθείας καὶ τῆς Περιφε-„ρείας, ἑτέρα Εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται, καὶ ἡ μὲν τοῦ Ἡμικυκλίου Γωνία ἁπά-„σης ὀξείας Γωνίας Εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν, ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων. Τε-τραμεροῦς οὖν οὕτω τῆς Προτάσεως προκειμένης, τὸ μὲν Α'. καὶ Β'. μέρος Ἀν-δρέας ὁ Τακκέτιος (ὡς ἔστιν ἰδεῖν ἀνωτέρω) καλῶς ἀποδέδειχε, τὸ δὲ δὴ Γ'. καὶ Δ'. οἷον δή τινας παραδόξους θέσεις μηδενὶ ἑδραίῳ λόγῳ προσερειρισμένας, οὐδὲ λόγου ἠξίωσε. Δοκεῖ δὲ ὡς οὐκ ὀρθῶς περὶ τούτων ὑπειληφώς, εἴπερ γὰρ Εὐθύγραμμός τις Γωνία ὑπὸ αβρ, τῆς μὲν Ὀρθῆς ὑπὸ αβζ ἐλάσσων (ὅπερ ἐστὶν Ὀξεῖα), τῆς δὲ τοῦ Ἡμικυκλίου Γωνίας αβπ μείζων ὑποτεθείη, ἢ γοῦν εἰ δυνατὸν τὴν τυχοῦσαν Εὐθύγραμμον ὑπὸ ζβρ, εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε Ἁπτομένης ζβ καὶ τῆς Περιφερείας πβ παρεμπεσεῖν, κατὰ τὸ β Σημεῖον κορυφουμένην, εἴη ἂν ἐκ τοῦ ἀκολούθου καὶ Εὐθεῖαν μεταξὺ τῆς τε Ἁπτομένης καὶ τῆς Περιφερείας ἀγαγεῖν δυνατὸν, τὸν Κύκλον μηδαμῶς τέμνουσαν. Ἀλλὰ τοῦτο ἐν τῷ Β'. μέρει ὡς ἔχον ἀδυνάτως ἐδείκνυτο.

Πορίσματα.

Ἐκ δὴ τούτων αὖθις φανερὸν, ὡς ἡ Εὐθείας τε καὶ Περιφερείας ἐπαφὴ ἐν ἀδιαιρέτῳ ἐστί. Α.

Καὶ ὅτι ἐὰν Κέντροις τοῖς ἐπὶ τῇ αὐτῇ Εὐθείᾳ ἐπ' ἄπειρον προεκβαλλομένῃ ληφθεῖσι, διὰ τοῦ β ἀγόμενοι Κύκλοι ὑπὲρ ἀριθμὸν, ὃν ἂν εἴποις, γραφῶσιν, ἅπαντες ἁπλῶς οἵτε ἐλάσσονες καὶ οἱ μείζους, τῆς ιζ Εὐθείας κατὰ τὸ αὐτὸ Σημεῖον β καθάψονται. Ὅρα τὸ Πόρ. τὸ μετὰ τὴν ΙΓ'. τοῦ παρόντος. Β.

Καὶ οἱ Κύκλοι ἄρα οἱ κατὰ Μέγεθος τοῦ δοθέντος ἀεὶ μεῖζον προσευρυνόμενοι, ἔγγιον ἀεὶ ἐπ' ἄπειρον τῆς Ἁπτομένης γίνονται, καίτοι οὐδέποτε αὐτῇ, πλὴν ἢ κατὰ τὸ Σημεῖον τῆς ἐπαφῆς συναπτόμενοι, ὃ σαφέστατον ἅμα καὶ θαύματος ἄξιον. Γ.

Καὶ Γραμμὴ ἄρα ἡ τυχοῦσα εἰς ἀεὶ διαιρετὰ διαιρετὴ πέφυκεν. Ἐὰν γὰρ ἀπό τινος τῶν ἐπὶ τῆς Διαμέτρου Σημείων, ἐπὶ τὴν Ἁπτομένην ιζ προσπίπτουσα διαχθῇ Εὐθεῖα ἡ απ (ἐν Σχήμ. τοῦ Πορίσμ. τοῦ μετὰ τὴν ΙΓ'. τοῦ παρόντος), οἱ ὑπὲρ ἀριθμὸν γραφόμενοι Κύκλοι, ὧν τὰ Κέντρα ἐπὶ τῆς Εὐθείας αβ τῆς ἐπ' ἄπειρον προεκβαλλομένης, καθάψονται μὲν τῆς Εὐθείας ιζ (διὰ τὸ Β'. Δ.

Πόρ. τῶν ἀνωτ.), καθάψονται δὲ καὶ ἀλλήλων (διὰ τὸ Πόρ. τὸ μετὰ τὴν ΙΓ'. τοῦ Πορ.), ἀλλ' ἐν σημείῳ τῷ αὐτῷ β. Οὐδαμοῦ δὲ ἤτοι ἀλλήλοις, ἢ τῇ ιζ Εὐθείᾳ, πλὴν ἢ κατὰ τὸ β συναφθήσονται. Ὥστε καὶ τὴν Εὐθεῖαν απ ἐξ ἀνάγκης τεμοῦσιν ἐπ' ἄπειρον, τουτέστιν εἰς ὁποσωνοῦν δοθέντων ἔτι πλείονα.

Ε'. Καὶ τὴν κατὰ τὴν ἐπαφὴν Γωνίαν ὑπὸ λβπ (ἐν Σχήμ. τῷ τῆς Προτ.) (τὴν ὑπό τε τῆς Ἁπτομένης δηλονότι βζ, καὶ τῆς Περιφερείας βπ περιεχομένην) οὐδεμία Εὐθεῖα δυνήσεται τεμεῖν.

ϛ'. Διά γε μὴν τῶν Περιφερειῶν τῶν κατὰ τὸ αὐτὸ Σημεῖον β συναπτομένων (ὅρα Σχῆμ. τοῦ Πορ. τῆς ΙΓ'.) τμηθείη ἂν καὶ ἀπομειωθείη ἡ κατὰ τὴν ἐπαφὴν Γωνία ἐπ' ἄπειρον. Κἂν τούτῳ δή, καὶ ἐν τῷ Γ'. Πορίσματι τοῦ τῶν ἀσυμπτώτων Γραμμῶν παραδόξου κεῖται ἡ πᾶσα φύσις, οἷαι ἀμέλει εἰσὶν Εὐθεῖα τε καὶ Ὑπερβολή, ἐπ' ἄπειρον μὲν ἄμφω προεκβαλλόμεναι, καί γε Διαστήματι τῷ παντὸς δοθέντος ἐλάσσονι ἀλλήλαις πελάζουσαι, μηδαμοῦ δὲ μηδαμῇ συμπίπτουσαι. Οὗ δὴ εὐστόχως τε ἥψατο, καὶ δεῖξιν ἀπέδωκε καὶ Μάριος Βεττῖνος ὁ Ἰησουΐτης, καὶ πρό γε τούτου Βαρόκιος καὶ Κάρδανος ἐκ τῶν τοῦ Ῥαββὶ Μωϋσέως τοῦ ἀπὸ Ναρβόνης, οὗ καὶ τὴν κατασκευὴν ἡμῖν ὁ Κάρδανος ὑποτίθησιν ἐν τοῖς περὶ Λεπτότητος Βιβλ. Ιϛ'. Καὶ ταῦτα μὲν ὁ Τακ. Ἡ δὲ κατὰ τὴν ἐπαφὴν (ἡ λέγεται) Γωνία, ὡς ὁ Οὐΐστων ἐκ τῶν τοῦ Οὐαλλισίου περὶ Γωνίας γεγραμμένων εἰληφὼς ἀποφαίνεται, διὰ τῶν κατὰ τὸ αὐτὸ Σημεῖον ἁπτομένων Περιφερειῶν ἥκιστα μειοῦται, ὡς οὐδὲ Γωνία οὖσα, οὐδὲ τὸ ποσὸν ἔχουσα. Καὶ γὰρ Γωνία ἐστὶν (κατὰ τὸν Η'. τοῦ Α'. Βιβλ. Ὁρισμὸν) ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο Γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν Γραμμῶν κλίσις. Ἡ δὲ πι Εὐθεῖα (ἐν Σχήμ. τοῦ μετὰ τὴν ΙΓ'. Πορίσμ.) μιᾶς ἢ πλειόνων Περιφερειῶν κατὰ τὸ αὐτὸ Σημεῖον β ἁπτομένη, ἐν αὐτῷ τῷ τῆς ἐπαφῆς Σημείῳ (ἐν ἐκείνῳ γὰρ ὑφέστηκεν ἡ Γωνία, εἴτις ἐστίν) οὐδεμίαν ἔχει κλίσιν πρὸς τὰς Περιφερείας αὐτάς, ἐκείναις δὲ πάντη ἐστὶ συμπίπτουσα. Ἀλλὰ περὶ μὲν τούτων τοσαῦτα. Ὅτι δὲ καὶ τὸ ϛ'. τουτὶ Πόρισμα συνᾴδει τῷ Γ'., φανερόν.

Πάντως δὲ εἰ κλίσιν ἔχει ἡ Εὐθεῖα, καθ' ὃν δὴ ἡ τοῦ Σημείου ῥοὴ ἔχει διορισμόν, πῶς ἄν τις φαίη τὴν Ἁπτομένην Εὐθεῖαν κλίσιν ἔχειν πρὸς τὴν Περιφέρειαν, ἣν ἥκιστα τέμνει.

Ζ'. Κἀντεῦθεν ἐξ ὧν ὁ Οὐΐστων ἀποφαίνεται, δῆλον ὅτι ἡ ὑπὸ αβπ (ἐν Σχήμ. τῷ τῆς Προτ.) τοῦ Ἡμικυκλίου Γωνία, τῇ Εὐθυγράμμῳ τε καὶ Ὀρθῇ ὑπὸ αβζ ἴση ἐστίν. Εἰ γὰρ ὁ μεταξὺ τῆς τε Εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας, ἧς ἐκείνη ἅπτεται τόπος πβζ, πρός γε τὸ β Σημεῖον οὐκ ἔστι Γωνία, ὡς οὐδὲ τὸ ποσὸν ἔχουσα, καὶ τούτου ἄρα ἀπὸ τῆς ὑπὸ αβζ ἀφαιρεθέντος, ὑπολειφθήσεται οὐδὲν ἧττον ἡ ὀρθὴ Γωνία ἀμείωτος, ἥτε τοῦ Ἡμικυκλίου Γωνία ὑπὸ αβπ, Ὀρθὴ ἔτι ὑπολειφθήσεται.

Τὸ γεμὴν ἐν τῷ ἐφεξῆς Σχολίῳ (περὶ ἔ τῷ εὐκλεεῖ Οὐαλλιςίῳ πληρέςερον γέγραπται, ἐν τόμῳ Β΄. τῶν μαθηματικῶν ἐκείνε πονημάτων, ἐν τῇ περὶ Γωνίας τῆς κατ' ἐπαφὴν, ἠ τῆς τε Ἡμικυκλίε Γεωμετρικῇ ἐρεύνῃ, Σελίδι 605 — 630, καὶ ἐν τῇ ὑπὲρ ἐκείνης ἀπολογίᾳ Σελίδι 631 — 664.) ὑποτιθέμενον Ζήτημα ὑπερβάντες, εἴγε τε χρόνε εἰσὶ φειδόμενοι οἱ μαθητιῶντες, τῆς ΙΖ΄. ἠ τῶν ἄλλων Προτάσεων ἀπτέοθωσαν.

Σχόλιον Β΄.

Δείκνυται ἅμα καὶ ἐπιλύεται ὁ παραλογισμὸς τῶν παραδόξων, τῶν ἐκ τῆς κατὰ τὴν ἐπαφὴν Γωνίας ἐπιφέρεσθαι εἰωθότων.

Ταῦτα μὲν οὖν τὰ ἐκ τῆς Ις΄. Προτάσ. ἄχρι τεδε ἐπαχθέντα, οὐδὲν ἧττον ἔχει τε ἀσφαλε̃ς τὸ παράδοξον· τὰ δὲ παρὰ ταῦτα ἐκ τῆς αὐτῆς ἐπιφέρεσθαι εἰωθότα ὑπὲρ πᾶσαν ὅλως διανοίας ἐςὶ κατάληψιν. Ἀνθ' ὅτε δὴ καὶ εἰς ὑπόνοιαν ἐμπεσεῖν μοι ποτὲ ἐγένετο, μήτι ἐνταῦθα λανθάνει τοιε̃τον, οἷον ἀγνοέμενον εἰς ἀπάτην συνωθεῖν ἠ αὐτὲς ἐχ ἥκιςα τὲς ἐπὶ φρενῶν θαυμαζομένες λεπτότητι, κἀπὶ τὸ τὰ παραδοξότατα ἐκεῖνα ὑποτιθέναι ἐπείγειν· τῷ ὄντι δὲ ἠ κατειληφέναι μοι δοκῶ, ὃ φθάσας ὑπονενόηκα. Τὰ δὲ δὴ παράδοξα, ἅπερ ἐκ τῆς Ις΄. ἐπιφέρειν εἰώθασιν, ὡς ἐκ τῶν πολλῶν τὰ κεφαλαιωδέςερα λαβεῖν, ἔςι τάδε.

Ἡ κατὰ τὴν ἐπαφὴν Γωνία ὑπὸ σαπ, οἱασεν Ὀξείας ἐλάσσων ἐςίν. *Α. χ.* 224.
Ἔςω γὰρ Ὀξεῖα ἡ ὑπὸ ραο, ἀφ' ἧς δυνατὸν ἀφελεῖν ἡμίσειαν, καὶ ἀπὸ τῆς λοιπῆς αὖθις ἡμίσειαν, ἠ ἔτως ἐφεξῆς ἄνευ πέρατος, ἔτω γάρ τοι ἡ Ὀξεῖα οἱασεν δοθείσης ἐλάσσων ἂν γένοιτο. Ἀλλὰ γὰρ εἰ ἠ ἐπ' ἄπειρον ἔτως αὕτη ἀπομειωθείη, ἀεὶ γεμὴν τῆς λοιπῆς Γωνίας, οἷον τῆς ὑπὸ σαο, ἡ ἑτέρα τῶν Πλευρῶν σα (1) ἐντὸς τε Κύκλε πεσεῖται. Ἔνθεντοι ἠ ἡ κατὰ τὴν ἐπαφὴν Γωνία παο, ὑπὸ τῆς Ὀξείας περιχεθήσεται, ἠ μέρος ἐκείνης ἔςαι, ἠ αὐτῆς ἐλάσσων.

Ἡ Γωνία τε Ἡμικυκλίε βαπ, καίτοι τῆς Ὀρθῆς ἐλάσσων ἐσα, ἀλλ' *Β΄.*
οἱασεν Ὀξείας μείζων ἐςίν. Ὅτι διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ὁποσηεν ἂν εἴη τὸ μέγεθος ἡ Ὀξεῖα, οἷα ἡ ὑπὸ βασ, ἐντὸς τῆς τε Ἡμικυκλίε Γωνίας ὑπὸ βαπ κείσεται.

Καὶ ταῦτα δὴ τὰ δύο ἐν αὐτῇ τῇ Ις΄. ἐκφέρεται, ὥςε ἠ διαπορεῖν ἐνίες,

---

(1) *Ις. τε γ΄.*

πότερον γνήσια τοῦ Στοιχειωτοῦ ἐστιν, ἢ γοῦν ὑπό τινος παρεισήνεκται. Ὕπεστι δὲ περὶ τούτου ἐνδοιάζειν οὐκ ἀπεικότως, καὶ γὰρ καὶ Ἀπολλώνιος, οὗ μέγα δὴ ἐπὶ Γεωμετρίᾳ τὸ κλέος, τὸ αὐτὸ τοῦτο πάθημα ἐπί τε τῆς Ἐλλείψεως, καὶ τῆς Ὑπερβολῆς, καὶ τῆς Παραβολῆς ἀποδείξας, τά γε τοιαῦτα ὑποσυνάψαι παρείασε.

Γ'. Γωνία ὀρθὴ ἡ ὑπὸ οαβ (μᾶλλον δὲ καὶ ἡ τυχοῦσα Ὀξεῖα ὑπὸ οασ) ἀπείρους τῶν κατὰ τὴν ἐπαφὴν Γωνίας ἐστὶ περιέχουσα ἴσας, καὶ ἄπειρον ἄρα τὴν πρὸς ταύτην ὑπεροχὴν ἕξει. Ἡ γὰρ ὑπὸ οαβ εἰς ἀπείρους ἂν διαιρεθείη Ὀξείας ἀεὶ ἐλάσσους τε καὶ ἐλάσσους, ὧν ἑκάστη μείζων τῆς κατὰ τὴν ἐπαφὴν Γωνίας ὑπὸ παο (1) ὑπετέθη.

Δ'. Ἡ κατὰ τὴν ἐπαφὴν Γωνία ὑπὸ παο, τῆς Ὀρθῆς ὑπὸ βαο μέρος πραγματιῶδες τυγχάνει, ἅτε δὴ συνάμα τῇ τοῦ Ἡμικυκλίου Γωνίᾳ ὑπὸ βαπ τὴν Ὀρθὴν ἀπαρτίζουσα. Ἀλλὰ καὶ οὕτως ἔμπης ἔχουσα, ὁποσονοῦν ἂν πολλαπλασιαθείη, τῷ ὅλῳ ἑαυτῆς συνεξισωθῆναι οὐ δύναται· κἀντεῦθεν καὶ ἴσα ἀπειροπληθῆ προστιθέμενα ἀλλήλοις, τὸ ἄπειρον οὐ συνίστησι.

Ε'. Καὶ μετάβασίς δέ τις ὧδε τελεῖται ἐκ τοῦ ἐλάττονος ἐπὶ τὸ μεῖζον, καὶ διὰ τῶν μεταξὺ ἁπάντων ἡ πρόοδος, διὰ δὲ τοῦ ἴσου οὐδαμῶς· ἢ ὃ εἰς ταυτὸ φέρει, τοῦ αὐτοῦ τὸ μὲν μεῖζον ἔστι λαβεῖν, τὸ δὲ ἔλαττον, ἴσον δὲ οὐδαμῶς. Ἐὰν γὰρ Εὐθεῖα ἡ αβ κατὰ θάτερον αὐτῆς τῶν περάτων α στηριζομένη οὕτω κινηθῇ, ὥστε τῇ Ἁπτομένῃ αο ἐφαρμόσαι, συστήσει δήπου Ὀξείας τὰς ὑπὸ βαρ, βασ, καὶ ἄλλας ὅσασοῦν δυνατῶς ἐχούσας. Αἳ δὲ καίτοι ἀεὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον μεγεθυνόμεναι, ἀεὶ ἀλλ' οὖν τῆς τοῦ Ἡμικυκλίου Γωνίας ὑπὸ βαπ (2) ἐλάσσονες ἔσονται. Ἐν ᾧ δ' ἂν πρῶτον ἡ αβ τῇ Ἁπτομένῃ αο ἐφαρμόσῃ, Ὀρθὴ αὐτίκα ἡ ὑπὸ οαβ συνίσταται, ἥτις μείζων τῆς τοῦ Ἡμικυκλίου Γωνίας καθέστηκε.

Ταῦτα τοίνυν καὶ τούτων ἔτι πλείω ἐκ τῆσδε τῆς ΙϚ. Προτ. ἐπιφέρεται, ἅπερ εἰ ὡς προτίθεται, οὕτω καὶ ἔχει, πόρρω καταλήψεως οἱασοῦν δεόντως ἀπόκειται, καὶ ἔστιν ὅλως ὑπὲρ διάνοιαν. Ταύτητοι καὶ τῶν παραδόξων δὴ τούτων ἑαυτὸν ἀπαλλάττων ὁ Πελετάριος, τὴν κατὰ τὴν ἐπαφὴν Γωνίαν ἀνεπίδεκτον πάμπαν εἶναι ποσότητος ἀπεφήνατο, καὶ μὲν οὖν καὶ πέρας ἂν εἶχεν ἐκείνῳ τὸ περὶ τούτου, εἰ πάσης ἁπλῶς Γωνίας τὸ ποσόν τι εἶναι ἀπέφησεν. Ἀλλὰ γὰρ τοῦ ἀληθοῦς λίαν ἀπήχθη, ἐντεῦθεν ἁπάσας τὰς τοῦ Ἡμικυκλίου Γωνίας ἴσας ἀλλήλαις τυγχάνειν ἀπισχυρισάμενος, ὅπερ

---

(1) *Παράδ. Α.* (2) *Παράδ. Β'.*

οὐκ ἂν ἐπέφερε συνεὶς, ὡς ὅπερ αὐτὸς τῇ κατὰ τὴν ἐπαφὴν Γωνίᾳ προσεῖναι ὑπείληφε, κοινὸν ἁπασῶν τῶν Γωνιῶν τυγχάνει παρακολούθημα. Ἐγὼ δὲ οὐδὲ τῷ Κλαβίῳ, ἐν οἷς κατὰ τοῦ Πελεταρίου διείλεκται, συναινεῖν ἔχω, ἐπίσης γὰρ ἑκάτερον τοῦ ἀληθοῦς διαμαρτάνειν ἡγοῦμαι, τὸν μὲν ἁπάσαις ὅσαις ταῖς Γωνίαις τοῦ ποσοῦ μετεῖναι οἰόμενον, τὸν δὲ πλὴν τῶν κατὰ τὴν ἐπαφὴν ἁπάσαις. Ἕτεροι δὲ ἀπαντήσει μιᾷ ἅπασαν ἐκ μέσου ποιῆσαι δυσχέρειαν οἰηθέντες, ἀπαραθέτους ἀλλήλαις εἶναι τάς τε καμπυλογράμμους, καὶ τὰς εὐθυγράμμους Γωνίας ὑπέθεντο, ἐρωτώμενοι δὲ τοῦ χάριν εἰσὶν ἀπαράθετοι, ἅλις αὐτοῖς ἔχειν, εἰ φαῖεν ἐνόμισαν, ὅτι ἡ κατὰ τὴν ἐπαφὴν Γωνία ὁσακισοῦν ἐπιπολλαπλασιασθείη, συνεξισοῦσθαι ἤτοι Ὀρθῇ, ἢ Ὀξείᾳ τινὶ Γωνίᾳ, οὐδέποτ᾽ ἀφίξεται.

Ἀλλὰ μὴν τοῦτο δὴ τὸ παραδοξότατον ἐστὶν ἐν ἀρχῇ αἰτούμενον· τί δήποτε ἡ κατὰ τὴν ἐπαφὴν Γωνία, καίτοι τῆς Ὀρθῆς μέρος τυγχάνουσα, ὁσακισοῦν ἐπιπολλαπλασιασθείη, οὐκ ἂν ταύτῃ συνεξισωθείη ποτέ, σχολῇ γὰρ ἂν ὑπερσχοίη αὐτήν. Πρὸς ἃ ἐκεῖνοι τὴν κατ᾽ ἐπαφὴν Γωνίαν οὐδὲ μέρος τῆς Ὀρθῆς εἶναι διδόασι, παρὰ τὸ μὴ συνεξισοῦσθαι αὐτῇ ἐπιπολλαπλασιαζομένην. Ἀλλ᾽ οἱ τὰ παράδοξα ἐκεῖνα εἰσηγούμενοι, καὶ ἀποδεχόμενοι αὐτοῖς ὑπεξανίστανται, κἀντεῦθεν (φασὶ) τοῦθ᾽ ἥκιστα ἕπεται, μηδαμῶς εἶναι μέρος ἀληθὲς καὶ πραγματιῶδες, ὅτι καὶ τῇ τοῦ Ἡμικυκλίου προστεθεῖσα, ὁλοσχερῆ τὴν Ὀρθὴν ἀποδίδωσι, τουτὶ δὲ καὶ μόνον μὴ μέρος εἶναι Πηλίκον κἀκεῖνοι διδόασι. Τοὺς δὲ τοιῷδε λόγῳ τὰ προσπίπτοντα δυσχερῆ ἐπιλύσασθαι προελομένους, ἔδει δήπου τὴν κατ᾽ ἐπαφὴν Γωνίαν μηδένα ὅλως τρόπον μέρος εἶναι τῆς Εὐθυγράμμου ἀποδεικνύειν πειρᾶσθαι, οὐδὲ τῇ προσλήψει τῆς τοῦ Ἡμικυκλίου τὴν Ὀρθὴν συναπαρτίζειν διϊσχυρίζεσθαι, τοῦθ᾽ ὅπερ ἡμεῖς σὺν Θεῷ ποιήσειν αὐτοὶ πειρασόμεθα.

Ἐμοὶ γοῦν δοκεῖ ὅτι τὸ πᾶν τῆς ἐπιλύσεως ἐξ αὐτοῦ δὴ τοῦ κατ᾽ Εὐκλείδην ὁρισμοῦ τῆς Γωνίας ἤρτηται. Ταύτην γὰρ τοῖς ἐς βάθος φιλοκρινοῦσι φανερὸν, ὅτι φύσει πᾶσα Γωνία ποσότητός ἐστιν ἀνεπίδεκτος· ταύτης γὰρ τῆς ἐξαπάτης ἐκποδὼν γενομένης, αὐτίκα πάντα ἡμῖν οἰχήσεται τὰ παράδοξα. Ἐγὼ γὰρ οὕτως εἰμὶ δόξης ἔχων· Ὅρ. η. Βιβ. α΄.

Ὅτι οὐδεμία Γωνία ποσόν ἐστι, τρόπος δέ τις μᾶλλον ἡ Γωνία ποσότητος. Α΄.
Ὥρισται γὰρ ἐκείνην (Ὅρ. Η. τοῦ Α΄.) δυοῖν εἶναι Γραμμῶν ἀλλήλων ἁπτομένων, καὶ μὴ ἐπ᾽ εὐθείας κειμένων κλίσιν, ἡ δὲ τῶν Γραμμῶν πρὸς ἀλλήλας κλίσις οὐκ ἔστι ποσὸν, τρόπος δέ τις ποσότητος, τῆς γὰρ καμπυλότητος τὸ ποσὸν εἶναι παραιτουμένης, πῶς ἂν αὐτὸ ἡ κλίσις περιποιοῖτο, μηδὲν ἐκείνης

διαφέρουσα μᾶλλον, ἢ ὅσον ἡ κλάσις τῆς κάμψεως; Εἶτα καὶ ποσόντι οὖσα ἡ Γωνία, εἴη ἂν πάντως ἤτοι Γραμμὴ, ἢ Ἐπιφάνεια, ἢ Σῶμα. Ἀλλ' ὅτι μὲν οὐδὲ Γραμμὴ, οὐδὲ Σῶμα καθ' αὐτὸ δῆλον, ὅτι δὲ οὐδ' Ἐπιφάνειά τις ἐστιν, ἐντεῦθεν ἀποδεῖξαι ῥᾴδιον, τῆς μὲν γὰρ Ἐπιφανείας ἴδιον, ἡ διὰ ἀφαιρέσεως τῶν μερῶν ἀπομείωσις, τῆς δὲ Γωνίας οὐδαμῶς. Ἀλλ' οὐδ' ἂν εἴη (ὅπερ ἂν ἴσως τις ὑπολάβοι) ἡ Γωνία Ἐπιφάνειά τις ἀόριστος, ἐπεὶ πᾶσα Γωνία ὡρισμένη καθέστηκε.

Β'. Τῶν οὖν Γωνιῶν μὴ ποσῶν, ποσοῦ δὲ τρόπων τινῶν οὐσῶν, ἡ κατὰ παράθεσιν σχέσις οὐκ ἂν εἴη κατ' ἰσότητα ἢ ἀνισότητα, κατὰ δὲ τὸ ὅμοιον ἢ ἀνόμοιον.

Γ'. Ἐπειδὰν δὲ ἴσαι ἢ ἄνισοι ἀλλήλαις παρατιθέμεναι αἱ Γωνίαι λέγονται, τοῦτο δὴ νοητέον ἐκείνας ὁμοίους, ἢ ἀνομοίους εἶναι λέγεσθαι. Ταύτας δὲ ἴσας τε καὶ ἀνίσους ὁ Στοιχειωτὴς ὀνομάζειν προείλετο, τὰς πρὸ ἔργου μᾶλλον οἱ ἐσομένας φωνὰς, ἐπὶ τῇ τῶν Εὐθυγράμμων θεωρίᾳ παραλαβὼν, ᾗ δή που χρήσει καὶ αὐτοὶ στοιχήσομεν.

Δ'. Ὅμοιαι δὲ Γωνίαι εἰσὶν, ὧν ἄμφω αἱ Πλευραὶ ἐπιτιθεμένων ἐφαρμόζουσιν, ἀνόμοιοι δὲ ὧν οὐκ ἐφαρμόζουσιν αἱ Πλευραί. Οὐδὲν γὰρ ἀμέλει ἡ Γωνία ἕτερόν ἐστιν, ὅτι μὴ δυοῖν Γραμμῶν πρὸς ἀλλήλας κλίσις, οὐκοῦν καὶ Γωνίαι ὅμοιαι, αὐτὸ τοῦτο εἰσὶ τῶν Γραμμῶν ὅμοιαι κλίσεις. Οὐκ ἔσονται δὲ τῶν Γραμμῶν ὅμοιαι κλίσεις, εἰμὴ ἄμφω ἐπιτιθέμεναι ἀλλήλαις προσεφαρμόζουσι. Γωνίαι ἄρα ὅμοιαι εἰσὶν, ὧν ἐφαρμόζουσιν αἱ Πλευραὶ, ἀνόμοιαι δὲ ὧν οὐκ ἐφαρμόζουσι.

Ε'. Καὶ τοίνυν σαφές ἐστι, μηδεμίαν Γωνίαν καμπυλόγραμμον συνεξισοῦσθαι ἔχειν Γωνίᾳ μηδεμιᾷ εὐθυγράμμῳ. Ἐπειδὴ γὰρ ἡ τῶν Γωνιῶν ἰσότης οὐδέν ἐστιν ἕτερον παρὰ τὴν τούτων αὐτῶν ὁμοιότητα (Θέσ. Β. καὶ Γ.), ἡ δὲ ὁμοιότης τῶν Γωνιῶν ἐν τῇ τῶν Πλευρῶν κεῖται προσεφαρμόσει (Θέσ. Δ.)· ἀδύνατον δὲ προσεφαρμόζειν Γωνίαν καμπυλόγραμμον Γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ, ἄρα κτ. Οὐκ ἄρα Ὀρθῶς ὁ Πρόκλος ἴσα καταγεγραφὼς Ἡμικύκλια, συλλογίζεται

κ. 225. ὅτι τῶν ἴσων Ἡμικυκλίων εαδ, γαβ αἱ Γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, κἀντεῦθεν ἐπιφέρει, ὅτι εἰ προστεθῇ Γωνία ἡ ὑπὸ βαε, ἔσται ἡ ὑπὸ βαδ καμπυλόγραμμος ἴση τῇ ὑπὸ γαε Ὀρθῇ. Τί δαί; ψεύδεται τὸ Ἀξίωμα, ὡς εἰ τοῖς ἴσοις, ἢ ἀπὸ τῶν ἴσων, ἴσα προσθῇς ἢ ἀφέλῃς, τὰ ἀθροιζόμενα ἢ τὰ λοιπὰ ἴσα ἔσται; Οὐ μὰ Δί', ἀλλὰ τοῖς ποσοῦ δεκτικοῖς μόνοις τουτὶ προσανῆκον ἐστίν. Αἱ δὲ Γωνίαι ποσοῦ εἰσιν ἀνεπίδεκτοι, τὸ δὲ Ἀξίωμα ὡς ἂν ἔχῃ κἀπὶ τῶν Γωνιῶν χώραν, οὕτως ὤφειλεν ἐκφέρεσθαι καὶ νοεῖσθαι, τὸ τὰς ὁμοίας δηλονότι Γωνίας, προσαπτομένας ταῖς ὁμοίαις Γωνίαις, ϗ ὁμοίως κειμέναις, Γωνίας ὁμοίας παρέχειν. Ὁ δὲ Πρόκλος παρατίθησι μὲν Γωνίας ὁμοίας, προσάπτει δὲ ἑκατέραις τρίτην κοινὴν, τὴν παρὰ τὸ τὴν ἑτέραν Εὐθεῖαν ἔχειν, θατέραν δὲ καμπύλην τῶν Πλευρῶν, μὴ ὁμοίως προσαπτομένην.

Ἔνθεντοι ἐπεὶ αὕτη ἡ τῶν Γωνιῶν φύσις, ἡ τῶν ἁπτομένων Γραμμῶν ϛ'.
πρὸς ἀλλήλας κλίσις, οὐδέποτ' ἔϛαι Γωνία Γωνίας μέρος, οὐδὲ γὰρ κλίσις τις μέρος ἂν εἴη ἑτέρας κλίσεως, οὐδὲ μὲν οὖν Γωνία ἀπὸ Γωνίας ἀφαιρεῖσθαι δυνήσεται, οὐ γὰρ ἂν ἀφέλῃτις κλίσιν ἀπὸ κλίσεως κτ. Ταῦτα γὰρ καὶ τὰ τοιαῦτα, οὐχὶ ταῖς τῶν Πλευρῶν κλίσεσιν, αἳ ποσοῦ εἰσιν ἀνεπίδεκτοι, ταῖς δὲ μεταξὺ τῶν Πλευρῶν Ἐπιφανείαις ἐϛὶ προσήκοντα.

Τελευταῖον ἐκ τῶν ἤδη εἰρημένων ὑποσυνάψομεν, ὅπως νοητέον τὰ πα- Ζ'.
ρὰ τῶν Γεωμέτρων ϗ τῷ Εὐκλείδῃ πρὸ πάντων λεγόμενα, τὰ περὶ τομῆς Γωνιῶν, ϗ αὐξήσεώςτε ϗ μειώσεως τῆς αὐτῶν, ϗ ὅτι Γωνία Γωνίας διπλασία, ἢ τριπλασία, ϗ τὰ παραπλήσια. Ταῦτα γὰρ οἰόμεθα μὴ κυρίως ἐκείνους, ἀναλογικῶς δὲ περὶ Γωνιῶν λέγειν, ἑλέσθαι τε τῶν φωνῶν τὰς χρησιμωτέρας, καὶ ὧν οὐδένα κίνδυνον φέρει ἀπάτης, ἕως ἂν μένῃ ἐπὶ τῶν
εὐθυγράμμων Γωνιῶν παραληφθεῖσα ἡ χρῆσις. Καὶ δὴ τὸ Γωνίαν ὑπὸ ϰ. 226.
Εὐθείας τινὸς, φέρ' εἰπεῖν τῆς δα διαιρεῖσθαι, οὐδὲν ἄλλο σημαίνειν φαμὲν, ἢ τὸ μεταξὺ τῶν Πλευρῶν εα, γα, ἄλλην Πλευρὰν παρεμπίπτειν, ἥτις καινὰς κλίσεις δύο σὺν ἑκατέρᾳ τῶν Πλευρῶν, τουτέϛι δύο καινὰς Γωνίας συνίϛησι. Τὸ δὲ τὴν ὑπὸ εαγ διπλασίαν εἶναι τῆς ὑπὸ εαδ, οὐδὲν ἄλλο ἔϛαι, ἢ τὸ μεταξὺ τῶν Εὐθειῶν εα, γα, τρίτην παρεμπίπτειν τινὰ πρὸς ἑκατέραν ἐκείνων ὁμοίαν τὴν ἐπίκλισιν ἔχουσαν, ἐξ οὗ δὴ συμβαίνει καὶ τὰς εα, δα ταῖς γα καὶ δα ἐπιτιθεμένας, μηδαμῶς ἀμειβομένων τῶν κλίσεων ἐφαρμόζειν· ὡς εἴτις οὕτως εἴη συλλογιζόμενος (Γωνία ἡ ὑπὸ εαδ, ἴση ἐϛὶ Γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ιλπ, ἥτε ὑπὸ δαγ ἴση τῇ ὑπὸ πλρ, ἄρα καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ εαγ, ἴση ἔϛαι ὅλῃ τῇ ὑπὸ ιλρ) οὐδὲν ἄλλο φήσει, ἢ ὅτι ἡ τῶν Εὐθειῶν κλίσις εαδ ὁμοία ἐϛὶν, ἢ γοῦν ἡ αὐτὴ τῇ τῶν Εὐθειῶν κλίσει ιλπ. Ἡ δὲ κλίσις τῶν Εὐθειῶν δαγ, ὁμοία ἐϛὶ τῇ κλίσει τῶν Εὐθειῶν πλρ, ἄρ' οὖν καὶ ἡ κλίσις τῶν Εὐθειῶν εαγ, ὁμοία ἔϛαι τῇ κλίσει τῶν Εὐθειῶν ιλρ. Σὺ δέ μοι ϗ οὕτω (ὃ πάντως εἰς ταυτὸ φέρει κατὰ τὴν Δ. Θέσ.) τὴν ἐπιφορὰν ταύτην ὑποσυνάψεις· αἱ Πλευραὶ εδ ἐφαρμόζουσι ταῖς Πλευραῖς ιλπ, καὶ αἱ δαγ ταῖς πλρ, ἄρα καὶ αἱ εαγ ταῖς ιλρ· ἥτις δὴ συνέπεια οὐδὲν ἧττον ἔϛαι σαφὴς, ἢ εἴπερ συνάψειας, ὅτι τοῖς ἴσοις ἴσων προϛεθέντων τὰ ὅλα ἴσα ἐϛί. Παραπλησίως δὲ, ϗ εἴτινες ἄλλαι χρήσεις ταῖς

ποσότησι προσιδιάζεται, ἐπὶ τὰς Γωνίας εἰώθασι μεταφέρεσθαι, τῆς τῶν Θεωρημάτων ἀληθείας σωζομένης ἑρμηνευθήσονται.

Τούτων οὖν οὕτω κειμένων, τὰ περὶ τὰς Γωνίας παράδοξα ἐκεῖνα ῥᾷστα ἡμῖν ἐπιλυθήσεται. Ταῦτα γὰρ οὐκ ἄλλοθεν ἤπου τὴν ἀρχὴν ἔσχεν, ἢ ἐκ τοῦ τὰς Γωνίας ἀντὶ ποσῶν προσλαμβάνεσθαι, καὶ ἔστιν ἄρα (ὡς ἑνὶ λόγῳ ἀπαντῆσαι) τὰ πάντα ψευδῆ κυριολεκτουμένων τῶν φράσεων. Οὕτω γὰρ ἐκεῖνα ληφθέντα τοῖς ποσοῦ μετέχουσι προσοικειωθήσεται, οὗ τὴν Γωνίαν ἀνεπίδεκτον εἶναι φθάσαντες ἀπεδείξαμεν.

Καὶ τοίνυν ἡ κατὰ τὴν ἐπαφὴν Γωνία, οὔκουν οὐδ᾽ ἐλάσσων ἐστὶν ἁπάσης Ὀξείας, οὐδὲ μέρος τὸ τυχὸν Γωνίας τῆς εὐθυγράμμου, οὐδ᾽ ἐν τῇ Εὐθυγράμμῳ ἀπειράκις ἐστὶ περιεχομένη, πολλοῦγε καὶ δεῖ, εἰ οὐδὲ ἅπαξ· οὐδὲν γὰρ τῶν τοιούτων τῇ τῶν γραμμῶν πρόσεστι κλίσει, ἐν ᾗ πᾶσα κεῖται ἡ φύσις ἡ τῆς Γωνίας. Ἐὰν δὲ μὴ κυρίως, ἀναλογικῶς δέ πως ἐκεῖνα ὑποτεθῇ λαμβανόμενα, οὐδὲν ἤδη περιέξει, ὃ τῆς κοινῆς αἰσθήσεως καὶ τοῦ λόγου εἴη ἀλλότριον, οὕτω καὶ γὰρ τό,τε τὴν κατ᾽ ἐπαφὴν Γωνίαν (ὅρα τὸ Σχῆμ. ἐν τῷ Α΄. τῶν Παραδόξων), τὴν ὑπὸ παο ἐλάσσονα εἶναι οἱασοῦν Ὀξείας, καὶ τὸ τὴν τοῦ Ἡμικυκλίου ὑπὸ παβ οἱασοῦν Ὀξείας μείζονα, οὐδὲν ἄλλο σημαίνει, ἢ ὅτι ὑπὸ τὴν Ἁπτομένην οα, οὐδεμίαν ἐστὶν ἀγαγεῖν Εὐθεῖαν πρὸς τὴν ἐπαφὴν, ἥτις μὴ τέμνοι τὴν Περιφέρειαν· ὃ δήπου πάθημα ἐστὶ τῆς Κύκλου φύσεως παντὸς θαύματος ἄξιον, οὐμὴν δὲ τοιοῦτον, οἷον ὑπὲρ κατάληψιν εἶναι πᾶσαν, καὶ τῷ λόγῳ ἀντιμαχόμενον. Παραπλήσιος δὲ τῷ ἐκτεθέντι ἔσται καὶ τῶν παραδόξων τοῦ τε Γ΄. καὶ τοῦ Δ΄. ὁ νοῦς. Καὶ οὕτω διὰ μόνου τοῦ κατ᾽ Εὐκλείδην Ὁρισμοῦ, ἀκριβῶς ἐπιγνοῦσι τῆς Γωνίας τὴν φύσιν, πᾶσα ἡμῖν ἡ ἐκ τῶν παραδοξοτάτων ἐκείνων ἐπιπολάζουσα τῇ διανοίᾳ ἀχλὺς, οἱονεὶ φωτὸς ἐπιλάμψαντος διασκίδναται.

Πρότασις ΙΖ.

„Ἀπὸ τοῦ δοθέντος Σημείου (β), τοῦ δοθέντος Κύκλου (ορ) ἐφαπτομένην „εὐθεῖαν Γραμμὴν ἀγαγεῖν.

σχ. 227. Ἐπεζεύχθω τὸ Κέντρον α τοῦ δοθέντος Κύκλου, καὶ τὸ δοθὲν Σημεῖον β, διὰ Εὐθείας τῆς αβ, τεμνούσης τὴν τοῦ Κύκλου Περιφέρειαν κατὰ τὸ ο. Καὶ Κέντρῳ μὲν τῷ α, Διαστήματι δὲ τῷ αβ Κύκλος γεγράφθω, καὶ ἀπὸ τοῦ ο ἤχθω οπ (1) πρὸς ὀρθὰς τῇ αβ, προσπίπτουσα τῷ Κύκλῳ βπ κατὰ τὸ π, καὶ

(1) *Ι. τοῦ α΄.*

ἐπεζεύχθω πα, τέμνȣσα τὴν τȣ̃ δοθέντος Κύκλȣ ορ Περιφέρειαν κατὰ τὸ ι, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βι. Λέγω δὴ ὅτι αὕτη ἔςαι ἡ τȣ̃ Κύκλȣ ορ Ἐφαπτομένη.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ βα, ια Πλευραὶ ἴσαι ταῖς πα, οα εἰσὶν (1), ἡ ἑτέρα τῇ ἑτέρᾳ, ἡ δὲ πρὸς τῷ α Γωνία κοινὴ ἐπὶ τῶν Τριγώνων ιαβ, οαπ, ἔςαι δὴ ϗ ὑπὸ αοπ (2) ἴση τῇ ὑπὸ αιβ. Ἀλλαμὴν ἡ ὑπὸ αοπ Ὀρθή (3) ἐςιν, ἄρα ϗ ἡ ὑπὸ αιβ Ὀρθή ἐςιν. Ἄρα (4) ἡ βι Ἐφαπτομένη τȣ̃ Κύκλȣ ἐςὶ κατὰ τὸ ι. Ο. Ε. Π.

Σχόλιον.

Διὰ τῆς ΛΑ'. τȣ̃ Παρόντος, πάνυ καλῶς ἀπὸ τȣ̃ δοθέντος Σημείȣ ο τȣ̃ δοθέντος Κύκλȣ βπ, ἐφαπτομένην κατὰ τὸ β, τὴν οβ εὐθεῖαν Γραμμὴν ἄγειν παιδευόμεθα, σχ. 228.

Τὴν ἐπιζευγνύȣσαν τὸ α Κέντρον, ϗ τὸ δοθὲν Σημεῖον ο, δίχα τέμνοντες (5) κατὰ τὸ ρ, ϗ Κέντρῳ μὲν τῷ ρ, Διαςήματι δὲ τῷ ρα Κύκλον γράφοντες τὸν δοθέντα τέμνοντα κατὰ τὸ β, καὶ τὴν οβ ἐπιζευγνῦντες, ἥτις ἔςαι ἡ Ἐφαπτομένη.

Ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς αβ, ἔςαι ἡ ὑπὸ αβο, ἅτε δὴ Γωνία ἐν τῷ Ἡμικυκλίῳ ȣ̓̃σα (διὰ τὴν ΛΑ'. τȣ̃ παρ.), Ὀρθή. Ὥςε διὰ τὴν Ις'. τȣ̃ αὐτȣ̃, ἡ οβ τȣ̃ Κύκλȣ βπ ἔςαι Ἐφαπτομένη.

Πρότασις ΙΗ.

„Ἐὰν Κύκλȣ ἐφάπτηταί τις Εὐθεῖα (γλ), ἀπὸ δὲ τȣ̃ Κέντρȣ (α) ἐπὶ „τὴν ἀφὴν (β) ἐπιζευχθῇ τις Εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα Κάθετος ἔςαι ἐπὶ „τὴν Ἁπτομένην.

Μὴ γὰρ, ἀλλ' ἀπὸ τȣ̃ α Κέντρȣ Κάθετος ἤχθω ἄλλη (6) ἡ αζ, τέμνȣσα τὸν Κύκλον κατὰ τὸ ο (7)· ϗ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ αζβ Ὀρθὴ ὑποτίθεται, ἔςαι ἡ ὑπὸ αβζ (8) Ὀξεῖα. Ἡ ἄρα αβ (ἤτοι ἡ αο) μείζων (9) τῆς αζ, τὸ μέρος τȣ̃ ὅλȣ. σχ. 229.

Πρότασις ΙΘ.

„Ἐὰν Κύκλȣ ἐφάπτηταί τις Εὐθεῖα (βγ), ἀπὸ δὲ τῆς ἀφῆς (α) τῇ Ἐφα-

---

(1) Ὅρ. ΙΗ. τȣ̃ ά. (2) Δ. τȣ̃ ά. (3) Ἐκ κατ. (4) Ις'. τȣ̃ γ'. (5) ΙΑ. τȣ̃ ά. (6) Ι. τȣ̃ ά. (7) Μέρ. τῆς Ις. τȣ̃ ά. (8) Πόρ. Ε. τῆς ΛΒ. τȣ̃ ά. (9) ΙΘ. τȣ̃ ά.

„πτομένη πρὸς ὀρθὰς Γωνίας εὐθεῖα Γραμμὴ (αι) ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης „ἔςαι τὸ Κέντρον τȣ̃ Κύκλȣ.

χ. 230. Μὴ γὰρ, ἀλλ' ἔςω τὸ Κέντρον μὴ ἐπὶ τῆς αι, κατὰ τὸ ψ, καὶ ἀπὸ τȣ́τȣ ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπεζεύχθω ἡ ψα, καὶ ἔςαι ἡ ὑπὸ ψαγ (1) Ὀρθή, καὶ δὴ ϗ ἴση τῇ ὑπὸ ιαγ, τῇ (καθ' ὑπόθ.) ϗ αὐτῇ Ὀρθῇ, τὸ μέρος τῷ ὅλῳ.

Πρότασις Κ.

„Ἐν Κύκλῳ ἡ πρὸς τῷ Κέντρῳ Γωνία (ὑπὸ βαγ) διπλασίων ἐςὶ τῆς πρὸς „τῇ Περιφερείᾳ (ὑπὸ βζγ), ὅταν τὴν αὐτὴν Περιφέρειαν (βγ) Βάσιν ἔχω- „σιν αἱ Γωνίαι.

χ. 231. Α'. Τῶν βα, βζ Πλευρῶν συμπιπτȣσῶν, εἰ τύχοι, ἐπεὶ αἱ ἀπὸ τȣ̃ Κέντρȣ πρὸς τὴν Περιφέρειαν αζ, αγ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἔσονται δὴ (2) αἱ πρὸς τῷ ζ ϗ γ Γωνίαι ἀλλήλαις ἴσαι. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ βαγ (3) ἴση ἐςὶ ταῖς δυσὶν ἀπεναντίον ἅμα ληφθείσαις, ἄρα ἡ ὑπὸ βαγ διπλασίων ἐςὶ τῆς κατὰ τὸ ζ.

χ. 232. Β'. Ἐὰν δὲ αἱ αβ ϗ αγ τῆς πρὸς τῷ Κέντρῳ Πλευραὶ, μεταξὺ τῶν βζ ϗ γζ, τῶν πρὸς τῇ Περιφερείᾳ Πλευρῶν, ὦσι πίπτȣσαι, ἀχθείσης διὰ τȣ̃ Κέντρȣ τῆς ζχ, ἡ μὲν ὑπὸ βαχ (διὰ τὸ Α'.) διπλασίων τῆς ὑπὸ βζχ, ἡ δὲ ὑπὸ χαγ διπλασίων τῆς ὑπὸ χζγ. Ἡ ἄρα (4) ὅλη ὑπὸ βαγ διπλασίων τῆς ὅλης ὑπὸ βζγ.

Ἔςω ἡ ὑπὸ χαβ μοιρ. 6, καὶ ἔςαι (5) ἡ ὑπὸ χζβ μοιρ. 3. Ἔςω δὲ ϗ ἡ ὑπὸ χαγ μοιρ. 4, καὶ ἔςαι (6) ἡ ὑπὸ χζγ μοιρ. 2· τοιγαρȣ̃ν χαβ + χαγ = μοιρ. 6 + 4 = μοιρ. 10 = βαγ. Αἱ δὲ χζβ + χζγ = μοιρ. 3 + 2 = μοιρ. 5 = βζγ, ὁ δὲ δεκαδικὸς ἀριθμὸς τȣ̃ πενταδικȣ̃ διπλασίων ἐςίν, ἄρα ϗ ἡ ὑπὸ βαγ τῆς ὑπὸ βζδ διπλασίων ἐςί.

χ. 233. Γ'. Ἐὰν ἡ βζ τεμνη τὴν αγ, ἤτε ὑπὸ βαγ Γωνία, ϗ ἡ ὑπὸ βζγ ἐκτὸς ἀλλήλων κείμεναι ὦσιν, ἐπεζεύχθω ἡ αζ, ϗ διήχθω πρὸς τὸ λ· Καὶ δὴ ὅλης τῆς ὑπὸ λαγ (7) διπλασίονος ȣ̆σης ὅλης τῆς ὑπὸ λζγ, ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἡ ὑπὸ λαβ διπλασίων ἑτέρωθεν, ϗ ἡ ὑπὸ λζβ ταύτης ὑποδιπλασίων, λοιπὴ ἡ ὑπὸ βαγ (8) λοιπῆς τῆς ὑπὸ βζγ διπλασίων ἔςαι. Ο. Ε. Δ.

Ἔςω λαγ μοιρ. 12, ϗ λαβ μοιρ. 2, καὶ ἔσονται (9) λζγ μοιρ. 6, ϗ

---

(1) Διὰ τὴν ἀνωτ. (2) Ε. τȣ̃ α'. (3) ΛΒ. τȣ̃ α'. (4) Διὰ ΙΒ. τȣ̃ πέμπτȣ τὴν ἐκ ταύτης μηδαμῶς ἠρτημένην. (5) Διὰ τὸ Α'. (6) Διὰ τὸ αὐτό. (7) Διὰ τὸ Α'. (8) Διὰ τὴν ΙΘ. τȣ̃ Ε'. τὴν ἐκ ταύτης μηδαμῶς ἠρτημένην. (9) Διὰ τὸ Α'.

λζβ μοιρ. 1. Ἄρα $\lambda\alpha\gamma - \lambda\alpha\beta =$ μοιρ. $12 - 2 =$ μοιρ. $10 = \beta\alpha\gamma$. Καὶ $\lambda\zeta\gamma - \lambda\zeta\beta =$ μοιρ. $6 - 1 = 5 = \beta\zeta\gamma$, ἡ ἄρα ὑπὸ βαγ διπλασίων ἐϛὶ τῆς ὑπὸ βζγ.

Πρότασις ΚΑ.

„Ἐν Κύκλῳ, αἱ ἐν τῷ αὐτῷ Τμήματι (βπσγ) Γωνίαι (βπγ, βσγ) „ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

Ἔϛω δὴ Α΄. μεῖζον Ἡμικυκλίȣ τὸ Τμῆμα βπσγ, καὶ ἀπὸ τȣ̃ Κέντρȣ ἤχθωσαν αἱ αβ, αγ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ βαγ διπλασίων ἐϛὶ (1) τῆςτε ὑπὸ βπγ καὶ τῆς ὑπὸ βσγ, ϗ οἱασȣ̃ν ἄλλης τῆς πρὸς τῇ Περιφερείᾳ ȣ̓́σης, ἐκεῖναι ἄρα αἱ ὑπὸ βπγ ϗ βσγ, καὶ ὅσαι ἄλλαι ἐν τῷ αὐτῷ Τμήματι (2), ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. σχ. 234.

Ἀλλ᾽ ἔϛω δὴ Β΄. τὸ Τμῆμα, ἤτοι Ἡμικύκλιον, ἢ ἔλαττον Ἡμικυκλίȣ, τὸ βπζγ· καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ ποβ ἴση ἐϛὶ (3) τῇ ὑπὸ ζογ, ἡ δὲ ὑπὸ πβζ ἴση τῇ ὑπὸ πγζ (4). Ἄρα ϗ λοιπὴ (5) ὑπὸ βπο, ἴση ἔϛαι τῇ λοιπῇ ὑπὸ οζγ. σχ. 235.

Πόρισμα.

Ἐντεῦθεν ἐπὶ τῶν ὀπτικῶν ἐπιφέρομεν, ὅτι Γραμμὴ πᾶσα οἷον ἡ βγ, ὑπὸ τȣ̃ ὀφθαλμȣ̃ τȣ̃ ὅπȣποτ᾽ ἂν τύχῃ κειμένȣ τῆς Περιφερείας, ἧς ἡ Γραμμή ἐϛιν Ὑποτείνȣσα, ἰσομεγέθης ὁρᾶται, ὡς ἄρα διὰ Γωνιῶν πανταχȣ̃ ἴσων, τῶν ὑπὸ βπγ ϗ βζγ ὀπτανομένη.

Σχόλιον.

Ἐὰν ἐπὶ Περιφερείας βογ τῆς αὐτῆς, βεβηκεῖαι ὦσι Γωνίαι δύο ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ τȣ́των ἡ ἑτέρα ὑπὸ βζγ πρὸς τῇ Περιφερείᾳ ᾖ τῇ ἀντιθέτῳ πρὸς τὴν βογ, ἔϛαι δὴ ἑκατέρα τῶν Γωνιῶν πρὸς τῇ Περιφερείᾳ, τῇ πρὸς τὴν βογ ἀντιθέτῳ, τȣτέϛιν ἡ τῇ ὑπὸ βζγ ἴση Γωνία οὔθ᾽ ὑπὲρ τὴν Περιφέρειαν ἀφίξεται, ȣ̓́τε εἴσω τῆς Περιφερείας πεσεῖται.

Πιπτέτω γὰρ εἰ δυνατὸν εἴσω τῆς Περιφερείας κατὰ τὸ ι ἡ ὑπὸ βιγ, ἡ τῇ ὑπὸ βζγ τῇ πρὸς τῇ Περιφερείᾳ ἴση, καὶ προήχθω ἡ βι, ὥϛε προσ- σχ. 236.

---

(1) Διὰ τὴν ἀνωτ. (2) Λξ. ϛ΄. (3) ΙΕ. τȣ̃ α΄. (4) Διὰ τὸ Α΄. μέρος. (5) Πόρ. Θ. τῆς ΛΒ. τȣ̃ α΄.

πεσεῖν τῇ Περιφερείᾳ κατὰ τὸ π, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ πγ. Καὶ ἐπεὶ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ Τμήματι Γωνίαι (1) ὑπὸ βπγ, βζγ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἡ δὲ ὑπὸ βιγ (2) ἴση τῇ ὑπὸ βζγ, ἄρα ϗ ἡ ὑπὸ βιγ ἐκτὸς, ἴση τῇ ὑπὸ βπγ ἐντός. Ὅπερ (3) ἄτοπον.

Ἀλλὰ γὰρ εἰ δυνατὸν πιπτέτω τῆς Περιφερείας ἐπέκεινα ἡ Γωνία ἀφικνȣμένη τȣ͂ Κύκλȣ ἐκτὸς, κατὰ τὸ ε, ἀπὸ δὲ τȣ͂ Σημείȣ θ, καθ᾽ ὃ τέμνει τὴν Περιφέρειαν, ἤχθω ἐπὶ τὸ γ ἡ θγ. Καὶ ἔςαι ὁμοίως ἡ ὑπὸ βθγ (4) ἴση τῇ ὑπὸ βζγ· ἡ δὲ ὑπὸ βεγ (5) ἴση τῇ αὐτῇ ὑπὸ βζγ. Ἄρα ἡ ὑπὸ βθγ ἴση τῇ ὑπὸ βεγ, ὅπερ (6) ἀδύνατον. Ο. Ε. Δ.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον, ϗ τȣ͂ Τμήματος Ἡμικυκλίȣ ὄντος ἢ γȣ͂ν Ἡμικυκλίȣ ἐλάσσονος, ἀποδεῖξαι ῥάδιον, ὅτι ἡ τῇ πρὸς τῇ Περιφερείᾳ ἴση, ὔτε ἐπέκεινα τῆς Περιφερείας γενήσεται, ὔτε ἐντὸς, ἀλλ᾽ ἐπ᾽ αὐτὴν δὴ τὴν Περιφέρειαν ἀκριβῶς ἀφίξεται.

Πρότασις ΚΒ.

„Τῶν ἐν τοῖς Κύκλοις Τετραπλεύρων (αβγζ), αἱ ἀπεναντίον Γωνίαι „δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί.

κ. 237. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ βζ, γα. Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ αβγ μετὰ δυοῖν τῶν κατὰ τὸ ο ϗ π, δυσὶν Ὀρθαῖς (7) ἰσȣ͂ται, καὶ ἡ μὲν ο ἴση τῇ ι, ἡ δὲ π ἴση τῇ σ (8), ἡ ἄρα ὑπὸ αβγ σὺν δυσὶ ταῖς κατὰ τὸ σ καὶ ι, δυσὶν Ὀρθαῖς συνεξισȣ͂ται. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ϗ ἡ ὑπὸ βαζ ϗ ὑπὸ βγζ δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι δειχθήσονται.

Πόρισμα Α΄.

Καὶ ἐὰν ἄρα τις τῶν τȣ͂ Τετραπλεύρȣ τȣ͂ ἐν τῷ Κύκλῳ Πλευρῶν προαχθῇ, οἷον ἡ αζ κατὰ τὸ δ, ἔςαι ἡ ἐκτὸς Γωνία ὑπὸ γζδ, ἴση τῇ τȣ͂ Τετραπλεύρȣ ἀντιθέτῳ β. Ἡ γὰρ τῇ ἐκτὸς ἐφεξῆς ὑπὸ γζα, ὁποτέρᾳ ἂν τȣ́των προςεθείη (9) Ὀρθὰς δύο συςήσει.

Πόρισμα Β΄.

Καὶ περὶ Ῥόμβον, ἢ ῥομβοειδὲς Σχῆμα Κύκλος ȣ̓κ ἂν ἔχοι γραφῆναι.

---

(1) *Διὰ ταύτην τὴν ἀνὰ χεῖρας.* (2) *Ἐξ ὑποθ.* (3) *Πόρ. Α. τῆς ΛΒ. τȣ͂ α΄.* ἤτοι *Ις. τȣ͂ α΄.* (4) *Διὰ τὴν Πρότ.* (5) *Ἐξ ὑποθ.* (6) *Διὰ τὸ αὐτὸ Πόρισμα. Ἤτοι Ις. τȣ͂ α΄.* (7) *ΛΒ. τȣ͂ α΄.* (8) *ΚΑ. τȣ͂ γ΄.* (9) *Διὰ ταύτ. ϗ τὴν ΙΓ. τȣ͂ α΄.*

Τέτων γὰρ αἱ ἀπεναντίον δύο Γωνίαι, ἤτοι ἐλάσσονές εἰσι δυοῖν Ὀρθῶν ἢ μείζονες.

Πρότασις ΚΓ.

„Ἐπὶ τῆς αὐτῆς Εὐθείας (αβ) δύο Τμήματα Κύκλων ὅμοια, ϗ ἄνισα „(τὰ αγβ, αδβ) οὐ συςαθήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Συςαθήτω γὰρ εἰ δυνατὸν, ϗ διήχθω ἡ αδγ, ϗ ἐπεζεύχθωσαν αἱ γβ, δβ. Ἐπεὶ οὖν ὅμοιον ἐςὶ τὸ αγβ Τμῆμα τῷ αδβ Τμήματι· ὅμοια δὲ Τμήματα ἐςὶ τὰ δεχόμενα Γωνίας ἴσας (1), ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αγβ τῇ ὑπὸ αδβ, ἡ ἐντὸς τῇ ἐκτός. Ὅπερ (2) ἀδύνατον. κ. 238.

Πρότασις ΚΔ.

„Τὰ ἐπὶ ἴσων Εὐθειῶν (αβ, γδ) ὅμοια Τμήματα Κύκλων αεβ, γζδ „ἴσα ἀλλήλοις εἰσί.

Αἱ γὰρ ἴσαι Εὐθεῖαι ἐπιτεθεῖσαι ἀλλήλαις ἐφαρμόσεσι, κἀντεῦθεν ἐφαρμοσασῶν ἀλλήλαις ϗ τῶν Περιφερειῶν, ἴσα ἔςαι πάντως τὰ ὅμοια Τμήματα. Εἰδὲ παραλλάξῃ καὶ μὴ ἐφαρμόσῃ ἡ γθηδ Περιφέρεια, ἥτις τῦ αεβ Τμήματος ὑποτίθεται εἶναι, τῇ γηδ Περιφερείᾳ, τεμεῖ ἄρα Κύκλος κατὰ πλείονα ἢ δύο Σημεῖα Κύκλον ἕτερον, οἷον κατὰ τὰ γ, ϗ η, ϗ δ. Ὅπερ (3) ἀδύνατον. κ. 239.

Εἰ δὲ τέως ἐφαρμοσασῶν τῶν ἴσων Εὐθειῶν, ἡ ἑτέρα τῶν Περιφερειῶν ᾖ περιέχεσα, ἡ δὲ ἑτέρα περιεχομένη, διαχθείσης Εὐθείας τῆς αεζ, καὶ ἐπιζευχθεισῶν τῶν ζβ, εβ, ἔςαι ἡ ὑπὸ αεβ ἴση τῇ ὑπὸ αζβ (4), καὶ δὴ ϗ ἄνισοι (5). Ὅπερ ἀδύνατον. κ. 240.

Σχόλιον.

Τὰς ἀμέσως προηγεμένας δύο, ὡς ἐκ ἀναγκαίας ἔσας παρέδραμεν ὁ Τακέτιος, ϗ ὡς περὶ ὁμοίων Τμημάτων διαλεγομένας, ὧν ἄνευ τῆς τῶν Ἀναλογιῶν θεωρίας, ἀκριβῆ (φησὶ) λαβεῖν μὴ ἐξεῖναι περίνοιαν, καί τοι ἐδὲ πάντῃ ταύτας ἐκεῖνος ὤφθη ἀποσυρίξας, ἐν γὰρ τοῖς Πορίσμασι τοῖς μετὰ τὴν ἐσχάτην τῦ ϛ΄. Βιβλίε, λόγον ἐκείνων ἐποίησεν. Αὐτοὶ δὲ κἀνταῦθα τὰ

(1) Ὁρ. ΙΑ. τῦ γ΄. (2) Ις. τῦ α΄. (3) Ι. τῦ γ΄. (4) Ὁρ. ΙΑ. τῦ γ. (5) Ις. τῦ α΄. ϗ Α. Πόρ. τῆς ΛΒ. τῦ αὐτῦ.

Εὐκλείδȣ ἐξ αὐτȣ͂ ἀνελλιπῶς λαβόντες ἐδείξαμεν, ὡς ἂν μήτι δόξω τοῖς ἐντυγχάνȣσιν ὑπερτίθεσθαι, πάνυ πολλȣ͂ τȣ͂ λόγȣ δεόμενον.

Πρότασις ΚΕ.

„Κύκλȣ Τμήματος δοθέντος (αβγ) προσαναγράψαι τὸν Κύκλον, οὗπέρ „ἐςι Τμῆμα.

σχ. 241. Ὑποτεινέτωσαν ὡς ἔτυχε τὸ Τμῆμα Εὐθεῖαι δύο αἱ αβ ϗ βγ, καὶ δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ Σημεῖα ι ϗ λ (1), ἀπὸ δὲ τῶν Σημείων ι ϗ λ πρὸς ὀρθὰς (2) ἀγέσθωσαν ἑκατέρᾳ τῶν Εὐθειῶν αἱ ιο, λο, τέμνȣσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ ο· φημὶ δὴ τȣ͂το εἶναι τὸ τȣ͂ Κύκλȣ Κέντρον, ȣ͂ Τμῆμα ἐτέθη τὸ αβγ.

Ἐπειδὴ γὰρ τὸ Κέντρον ἐφ᾽ ἑκατέρας (3) εἶναι δεῖ, ϗ ἐπὶ τῆς ιχ δηλονότι ϗ ἐπὶ τῆς λψ, ἔςαι ἄρα ἐπὶ τȣ͂ κοινȣ͂ ταύταις ὄντος Σημείȣ τȣ͂ ο.

Ἄλλως παρ᾽ Εὐκλείδῃ.

σχ. 242. Τῆς αγ Ὑποτεινȣ́σης δίχα (4) τμηθείσης κατὰ τὸ δ, ἐὰν ἀπὸ τȣ͂ δ πρὸς ὀρθὰς ἀχθῇ (5) ἡ δβ, ϗ ἐπιζευχθῇ ἡ αβ, ἡ ὑπὸ αβδ ἤτοι μείζων ἔςαι τῆς ὑπὸ βαδ, ἢ ἴση, ἢ ἐλάσσων· ϗ εἰ μὲν μείζων συνεςάσθω πρὸς τῷ α ἡ ὑπὸ βαε (6) ἴση τῇ ὑπὸ αβδ, ϗ διήχθω ἐπὶ τὸ ε ἡ δβ, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ εγ, ϗ ἔςαι ἡ αε (7) ἴση τῇ βε. Ἐπειδὴ δὲ ϗ αδ ἴση (8) τῇ δγ, ἥτε δε κοινὴ, ϗ ὑπὸ αδε ἴση τῇ ὑπὸ εδγ, Ὀρθαὶ γὰρ ἄμφω, ἔςαι ϗ ἡ αε (9) ἴση τῇ εγ· ὥςε ἴσαι ἀλλήλαις αἱ τρεῖς αε, βε, γε. Τὸ ἄρα Σημεῖον ε (10) Κέντρον ἔςαι τȣ͂ Κύκλȣ, ὃν ἄντις διὰ τῶν α, β ϗ γ Σημείων ἀγόμενον προσαναγράψειε.

σχ. 243. Ἐὰν δὲ ἡ ὑπὸ αβδ ἴση ᾖ τῇ ὑπὸ βαδ, ἴσαι (11) ἔσονται καὶ αἱ αδ, δβ ἀλλήλαις, καὶ δὴ ϗ ἡ δγ, ἥτις (12) ἴση ἐλήφθη τῇ αδ. Ὥςε τῶν τριῶν ἴσων ȣ̓σῶν (13), Κέντρῳ τῷ δ, ϗ Διαςήματι τῷ ἐκείνων ὁ Κύκλος προσαναγραφήσεται.

σχ. 244. Ἐὰν δὲ ὑπὸ αβδ ἐλάσσων ᾖ τῆς ὑπὸ βαδ, συνεςάσθω ἡ ὑπὸ βαε (14) ἴση τῇ ὑπὸ αβδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εγ, ἥτις ἴση ὁμοίως (15) δειχθήσεται τῇ αε ϗ ἑπομένως τῇ εβ. Ὥςε τὸ ε Κέντρον εἶναι (16), ᾧ ἂν προσαναγραφείη ὁ Κύκλος.

---

(1) *Ι.* τȣ͂ α΄. (2) *ΙΑ.* τȣ͂ α΄. (3) *Πόρ* τῆς *Α.* τȣ͂ γ΄. (4) *Ι.* τȣ͂ α΄ (5) *ΙΑ.* τȣ͂ α΄. (6) *ΚΓ.* τȣ͂ α΄. (7) ς. τȣ͂ α΄. (8) Ἐκ κατ. (9) *Δ.* τȣ͂ α΄. (10) Θ. τȣ͂ γ΄. (11) ς. τȣ͂ α΄. (12) Ἐκ κατ. (13) *Διὰ* τὴν Θ. τȣ͂ γ΄. (14) *ΚΓ.* τȣ͂ α΄. (15) *Δ.* τȣ͂ α΄. (16) Θ. τȣ͂ γ΄.

Πρᾶξις.

Κέντρῳ ληφθέντι ἐπὶ τȣ͂ δοθέντος Τόξου τῷ τυχόντι β, καὶ Διαστήματι ὡσαύτως τῷ τυχόντι βκ, Κύκλος γεγράφθω ὁ ακγλ, τέμνων τὸ δοθὲν Τόξον κατὰ τὰ Σημεῖα α ϗ γ. Εἶτα Κέντροις ληφθεῖσιν ἑκατέρωθεν ἐπὶ τȣ͂ Τόξȣ, ἐν Διαστήματι ἴσῳ τῷ πρότερον Κύκλοι γεγράφθωσαν τέμνοντες τὸν γραφέντα πρὶν ἄμφω κατὰ δύο Σημεῖα. Οὕτω γὰρ αἱ τὰς τομὰς ἐπιζευγνῦσαι Εὐθεῖαι, τέμνȣσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ Σημεῖον κ, δώσȣσι τὸ Κέντρον. Ὅρα τὴν Πρᾶξιν τῆς Ι΄. τȣ͂ Α΄. ϗ τὸ Πόρ. τῆς Α΄. τȣ͂ Γ΄. σχ. 245.

Πρότασις Κς.

„Ἐν τοῖς ἴσοις Κύκλοις (ἢ πάντως ϗ ἐν ἑνὶ ϗ τῷ αὐτῷ Κύκλῳ), αἱ ἴσαι „Γωνίαι ἐπὶ ἴσων Περιφερειῶν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς Κέντροις, ἐάν „τε πρὸς ταῖς Περιφερείαις ὦσι βεβηκεῖαι.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βγ, εζ, καὶ αἱ μὲν ηβ, ηγ ἴσαι ταῖς θε, θζ (1), ἡ δὲ ὑπὸ βηγ ἴση (2) τῇ ὑπὸ εθζ, ἄρα (3) ϗ Βάσις βγ ἴση τῇ Βάσει εζ. Ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ α Γωνία ἴση τῇ πρὸς τῷ δ (4), τὸ ἄρα βαγ Τμῆμα (5) ὅμοιον τῷ εδζ· ἔστι δὲ ἐπὶ ἴσων Εὐθειῶν τῶν βγ, εζ, ἄρα (6) ϗ ἴσα ἀλλήλοις. Ὥστε ἐὰν ἀπὸ τῶν ἴσων (7) Κύκλων ἀφαιρεθῶσιν, ἔσται τὰ λοιπὰ (8) ἴσα, ϗ προστεθέντα ἄρα ἐφαρμόσει (9), ἤτε βκγ Περιφέρεια ἴση τῇ ελζ. σχ. 246.

Πρότασις ΚΖ.

„Ἐν τοῖς ἴσοις Κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων Περιφερειῶν βεβηκεῖαι Γωνίαι, ἴσαι „ἀλλήλαις εἰσίν, ἐάν τε πρὸς τοῖς Κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς Περιφερείαις ὦσι „βεβηκεῖαι.

Ἀλλὰ μὴ ἔστωσαν ἴσαι, μείζων δὲ ἡ ὑπὸ βηγ τῆς ὑπὸ εθζ, καὶ συνεστάθω πρὸς τῷ η ἡ ὑπὸ βηκ ἴση τῇ ὑπὸ (10) εθζ. Οὐκȣ͂ν (11) ἡ βκ Περιφέρεια ἴση τῇ εζ, ταύτῃ δὲ ϗ ἡ βγ (12) ἴση, ἄρα ἡ βκ ἴση τῇ βγ, τὸ μέρος τῷ ὅλῳ. σχ. 247.

Ὡς ἂν οὖν οὕτως ἴσαι ἀποδειχθῶσιν αἱ πρὸς τοῖς Κέντροις, ἴσαι ἔσονται (13) ϗ αἱ πρὸς ταῖς Περιφερείαις.

---

(1) Ἀξ. ιε. (2) Ἐξ ὑποθ. (3) Δ. τȣ͂ α΄. (4) Κ. τȣ͂ γ΄. ϗ Ἀξ. ς. (5) ΙΑ. Ὅρ. τȣ͂ γ΄. (6) ΚΔ. τȣ͂ γ΄. (7) Ἐξ. ὑποθ. (8) Ἀξ. γ΄. (9) Ἀξ. η΄. (10) ΚΓ. τȣ͂ α΄. (11) Διὰ τὴν ἀνωτ. (12) Ἐξ ὑποθ. (13) Κ. τȣ͂ γ΄.

Πόρισμα.

κ. 248. Εὐθεῖα ἡ εζ, ἡ κατὰ τὸ μεσαίτατον α Περιφερείας τινὸς οἷον τῆς βγ, ἁπτομένη τοῦ Κύκλου, Παράλληλός ἐςι τῇ βγ Εὐθείᾳ τῇ ὑποτεινούσῃ τὴν αὐτὴν Περιφέρειαν. Ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς δα, ἐπιζευχθεισῶν δὲ ϗ τῶν δβ, δγ, ϗ ἴσων οὐσῶν (1) ἐπὶ τῶν Τριγώνων, τῆς δὲ δη κοινῆς, ἐπεὶ ἡ Περιφέρεια βα ἴση (2) τῇ Περιφερείᾳ αγ, ϗ ὑπὸ βδη ἴση (3) ἐςὶ τῇ ηδγ, ἄρα (4) ϗ ὑπὸ βηδ ἴση τῇ ὑπὸ γηδ, ϗ (5) ἄμφω Ὀρθαί. Ἀλλὰ ϗ αἱ ἐντὸς ὑπὸ εαδ ϗ βαδ Ὀρθαὶ (6), ἄρα (7) βγ Παράλληλός ἐςι τῇ εζ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΚΗ.

„Ἐν τοῖς ἴσοις Κύκλοις (καὶ ἐν τῷ αὐτῷ δὲ πάντως), αἱ ἴσαι Εὐ„θεῖαι (βγ, εζ) ἴσας Περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα (βαγ) τῇ μεί„ζονι (εδζ), τὴν δὲ ἐλάττονα (βηγ) τῇ ἐλάττονι (εθζ).

κ. 249. Τῶν γὰρ Κέντρων κ ϗ λ (8) ληφθέντων, ϗ τῶν Εὐθειῶν κβ, κγ, λε, ϗ λζ ἐπιζευχθεισῶν, ϗ ἴσων ἀλλήλαις (9) οὐσῶν, ἐπεὶ ϗ ἡ βγ (10) ἴση τῇ εζ, ἔςαι ϗ ἡ ὑπὸ βκγ ἴση (11) τῇ ὑπὸ ελζ. Ἀλλαμὴν αἱ ἴσαι Γωνίαι ἐπὶ ἴσων Περιφερειῶν βεβήκασιν (12), ἄρα ἡ βηγ ἴση τῇ εθζ, ἄρα ϗ αἱ λοιπαὶ (13) ἡ βαγ ἴση τῇ εδζ.

Πόρισμα.

Ἐν τοῖς ἴσοις ἄρα Κύκλοις, ἢ ἐν τῷ αὐτῷ, αἱ μὴ ἴσαι Εὐθεῖαι, οὐχὶ ἴσας Περιφερείας ἀφαιροῦσιν, ἀλλ' ἡ μὲν μείζων μείζονα, ἡ δὲ ἐλάσσων ἐλάσσονα.

Πρότασις ΚΘ.

„Ἐν τοῖς ἴσοις Κύκλοις, ὑπὸ τὰς ἴσας Περιφερείας ἴσαι Εὐθεῖαι ὑ„ποτείνουσι.

κ. 250. Ἐπιζευχθεισῶν γὰρ ὁμοίως τῶν Εὐθειῶν ὡς ἀνωτέρω, ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ Περιφέρειαι (14) βηγ, εθζ, ἴσαι ϗ αἱ ὑπὸ βηγ ϗ ελζ Γωνίαι εἰσί (15). Ἀλλὰ ϗ αἱ κβ, κγ ἴσαι εἰσὶ (16) ταῖς λε, εζ, ἄρα (17) καὶ βγ ἴση τῇ εζ.

---

(1) Ἀρ. ιή. (2) Ἐξ ὑποθ. (3) Διὰ τὴν Πρότ. (4) Δ. τοῦ ά. (5) Ὁρ. ΙΔ. τοῦ ά. (6) ΙΗ. τοῦ γ'. (7) ΚΗ. τοῦ ά. (8) Α. τοῦ γ'. (9) Ἀξ. ιέ. (10) Ἐξ ὑποθ. (11) Κ. τοῦ ά. (12) Κς. τοῦ γ'. (13) Ἀξ. γ'. (14) Ἐξ ὑποθ. (15) ΚΖ. τοῦ γ'. (16) Ἀξ ιέ. (17) Δ. τοῦ ά.

Πόρισμα.

Ὑπὸ ἄρα τὰς ἀνίσȣς Περιφερείας, Εὐθεῖαι ἄνισοι ὑποτείνȣσι, μείζων μὲν ὑπὸ τὴν μείζονα, ἐλάσσων δὲ ὑπὶ τὴν ἐλάσσονα.

Σχόλιον.

Τῶν ἀμέσως προηγησαμένων Δ΄. Προτάσεων, ὁ Τακȣέτιος τὴν τάξιν ἀντέστρεψε, προτάξας μὲν εἰς Κϛ΄. ϗ ΚΖ΄. τὴν ΚΗ΄. ϗ ΚΘ΄., ὑποσυνάψας δὲ μετὰ ταύτας ἐκείνας, ὡς ἂν προχειροτέρας ἔχειν λαβεῖν τὰς δείξεις ἡγȣ́μενος. Ἀλλ᾽ αὐτοὶ κἀντȣ́τοις τῷ Στοιχειωτῇ κατ᾽ ἴχνος ἀκολȣθεῖν ἔγνωμεν, τῆς ἐκ τῶν τοιῶνδε μεταθέσεων ἐπιγινομένης συγχύσεως τȣ̀ς νέȣς ἀπαλλάττοντες.

Πρότασις Λ.

„ Τὴν δοθεῖσαν Περιφέρειαν (αβγ) δίχα τεμεῖν.

Ἐπεζεύχθω μὲν ἡ αγ, ἀπὸ δὲ τȣ̃ ο Σημείȣ (καθ᾽ ὃ ἂν δίχα (1) τμηθείη) πρὸς ὀρθὰς (2) ἤχθω ἡ οβ. Φημὶ δὴ, ὡς αὕτη τὴν Περιφέρειαν προσπεσȣ̃σα κατὰ τὸ β δίχα τέμνει. σχ. 251.

Ἐπιζευχθεισῶν γὰρ τῶν αβ, γβ, αἱ αο ϗ οβ ἴσαι ταῖς γο ϗ οβ, ἡ δὲ ὑπὸ αοβ ἴση (3) τῇ ὑπὸ γοβ, ἄρα (4) ἡ αβ ἴση τῇ γβ, ἄρα ἡ Περιφέρεια αβ ἴση (5) τῇ Περιφερείᾳ γβ.

Πρᾶξις.

Κέντροις μὲν α ϗ β, Διαστήμασι δὲ ἴσοις, κύκλοι γεγράφθωσαν τεμνόμενοι, ἡ δὲ ἐπιζευγνύȣσα τὰς κατατομὰς δίχα τὸ τόξον τεμεῖ (6). σχ. 252.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τȣ́τȣ φανερὸν, ὡς ἡ ἡμίσεια τῆς Ὑποτεινȣ́σης τὴν Περιφέρειαν, ἐστὶ τȣ̃ ἡμίσȣς τῆς Περιφερείας Ἡμίτονον ὀρθὸν, καὶ ἀνάπαλιν, τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονον διπλασιαζόμενον, ὑποτείνει τὴν διπλασίονα Περιφέρειαν. Ἔστι δὲ πάντως τῷ παρόντι παραπλήσιον τὸ πρῶτον Πόρισμα τῆς τρίτης Προτάσεως τȣ̃ Γ΄. τὸ περὶ τῆς Ὑποτεινȣ́σης τὴν πρὸς τῷ Κέντρῳ Γωνίαν ἀποφαινόμενον.

---

(1) *Ι. τȣ̃ ά.* (2) *ΙΑ. τȣ̃ ά.* (3) *Ἐκ κατ.* (4) *Δ. τȣ̃ ά.* (5) *ΚΗ. τȣ̃ γ́.* (6) *Διὰ ταύτην ϗ τὴν Πρᾶξ. τῆς Ι. τȣ̃ ά.*

Πρότασις ΛΑ.

„Ἐν Κύκλῳ ἡ μὲν ἐν τῷ Ἡμικυκλίῳ Γωνία (βγζ) Ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ „ἐν τῷ μείζονι Τμήματι ἐλάττων Ὀρθῆς, ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι μείζων Ὀρ„θῆς, καὶ ἔτι ἡ μὲν τοῦ μείζονος Τμήματος Γωνία μείζων ἐστὶν Ὀρθῆς, ἡ δὲ „τοῦ ἐλάττονος τμήματος Γωνία ἐλάττων ἐστὶν Ὀρθῆς.

κ. 253. Α΄. Ἐπεζεύχθω ἡ αγ, ἐπεὶ οὖν ἴσαι αἱ αβ, αγ (1), καὶ αἱ ὑπὸ αβγ, αγβ (2) ἴσαι εἰσί. Διὰ αὐτὸ δὲ τοῦτο καὶ αἱ ὑπὸ αγζ καὶ αζγ ἴσαι εἰσίν, ἡ ἄρα ὅλη ὑπὸ βγζ, δυσὶ ταῖς κατὰ τὸ β καὶ ζ ἴση ἐστίν. Ἀλλ᾽ αἱ τρεῖς (3) δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ἡ ἄρα ὑπὸ βγζ Ὀρθή.

Β΄. Προαχθείσης τῆς ζγ κατὰ τὸ δ, αἱ ὑπὸ δγβ καὶ βγζ (4) δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ἡ δὲ ὑπὸ βγζ Ὀρθὴ οὖσα (5) δέδεικται, ἄρα ἡ ὑπὸ δγβ Ὀρθή. Ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ δγβ ἐκτὸς τῆς κατὰ ζ (6) μείζων ἐστίν, ἡ ἄρα κατὰ τὸ ζ, ἥτις ἐστὶν ἐν τῷ γζηβ Τμήματι, ὃ μεῖζον ἐστὶν Ἡμικυκλίου, Ὀρθῆς ἐλάττων ἐστί.

Γ΄. Ἐπειδὴ τὸ βθγζ ἐν τῷ Κύκλῳ Τετράπλευρόν ἐστιν, αἱ ἀπεναντίον τούτου Γωνίαι θ καὶ ζ δυσὶν Ὀρθαῖς (7) εἰσί. Ἔστι δὲ ἡ κατὰ τὸ ζ (8) ἐλάττων Ὀρθῆς, ἡ ἄρα κατὰ τὸ θ ἐν τῷ ἐλάσσονι τοῦ Ἡμικυκλίου Τμήματι οὖσα, μείζων ἐστὶν Ὀρθῆς.

Δ΄. Αὐτόθεν (ὡς Εὐκλείδης φησὶν) ἐστὶ φανερὸν, ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ βγζ (9) Ὀρθὴ, ἡ ἄρα περιεχομένη ὑπὸ τῆς βγ Εὐθείας, καὶ τῆς γζη Περιφερείας (ἥτις ἐστὶν ἡ Γωνία τοῦ μείζονος Τμήματος), μείζων Ὀρθῆς ἐστι· καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ δγβ (10) Ὀρθὴ, ἄρα ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς βγ Εὐθείας, καὶ τῆς γθβ Περιφερείας (ταυτὸν εἰπεῖν ἡ Γωνία τοῦ ἐλάσσονος Τμήματος) ἐλάττων Ὀρθῆς ἐστί.

Σχόλιον.

Τὸ δὴ Δ΄. τῆς προτεθείσης Προτ. μέρος, ὃ μὲν Τακκέτιος παρέδραμεν, αὐτοὶ δὲ σὺν Οὐΐσωνι, ἐξ αὐτοῦ τοῦ Εὐκλείδου ἀποκαταστῆσαι δεῖν ἔγνωμεν.

Πορίσματα.

κ. 254. Α΄. Ἐντεῦθεν οὖν καὶ τοῦ γνώμονος βάσανον ἔνι λαβεῖν, εἰ ἐπ᾽ ἀκριβές ἐστιν·

---

(1) Ὁρ. ΙΗ. τοῦ α΄. (2) Ε. τοῦ α΄. (3) ΛΒ. τοῦ α΄. (4) ΙΓ. τοῦ α΄. (5) Διὰ τὸ Α΄. (6) Πόρ. α΄. τῆς ΛΒ. τοῦ α΄. (7) ΚΒ. τοῦ γ΄. (8) Διὰ τὸ Β΄. (9) Διὰ τὸ Α΄. (10) Διὰ τὸ Α΄. καὶ τὴν ΙΓ. τοῦ α΄.

Ὀρθογώνιος. Ἐὰν γὰρ τοῦ τυχόντος Σημείου α ἐπὶ Κύκλου Περιφερείας, ἡ τοῦ γνώμονος κορυφὴ ἁπτομένη, αἱ Πλευραὶ διὰ τῶν περάτων τῆς τοῦ Κύκλου διήκωσι Διαμέτρου, Ὀρθὴ μὲν ἔσται ἡ Γωνία, ἀκριβὴς δὲ ὁ γνώμων. Ἄλλως δ' οὐδαμῶς.

Καὶ ἐὰν τῶν τοῦ γνώμονος Πλευρῶν πρὸς τοῖς Σημείοις β καὶ γ ἀκινητέντων, ἡ κορυφὴ α ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπὶ τὸ αὐτὸ περιάγοιτο, Κύκλον ἀναγράψει, οὗ Διάμετρος ἡ βγ. Β'.

Ἐντεῦθεν δὲ καὶ ἀπ' ἄκρας γ τῆς δοθείσης Εὐθείας βγ, Εὐθεῖαν πρὸς Κάθετον τῇ δοθείσῃ ῥᾳδίως ἄγειν παιδευόμεθα, κύκλον μὲν γράφοντες διὰ τοῦ πέρατος τῆς Εὐθείας γ ἀγόμενον, καὶ τὴν βδ ἐπιζευγνῦντες Διάμετρον, καὶ τὴν γδ, ἥτις ἔσται ἡ ζητουμένη. Γ'. σχ. 255.

Ἐπὶ τοῦ Ὀρθογωνίου Τριγώνου βγδ, τῆς ὑποτεινούσης τὴν ὑπὸ βγδ ὀρθὴν Γωνίαν βδ δίχα τμηθείσης (1), καὶ τῆς γα ἐπιζευχθείσης, εἰς Τρίγωνα δύο ἰσοσκελῆ τὰ βαγ, γαδ τὸ Τρίγωνον γβδ τμηθήσεται. Ὁ δὲ Κύκλος, ὃς ἂν Κέντρῳ μὲν τῷ α, Διαστήματι δὲ τῷ αβ ἀναγραφείη, καὶ διὰ τῆς κορυφῆς γ τῆς ὀρθῆς Γωνίας διελεύσεται. Ἔστι δὲ παραληπτέον εἰς δεῖξιν Α'. τὸ Β'. Δ'.

Ἐπεὶ δὲ ἡ μικτόγραμμος Γωνία τοῦ μείζονος Τμήματος Ὀρθῆς μείζων ἐστὶν, ἥτε τοῦ ἐλάττονος Ὀρθῆς ἐλάσσων (2), ἡ ἄρα τοῦ Ἡμικυκλίου Γωνία τῇ εὐθυγράμμῳ Ὀρθῇ ἴση ἔσται· τοῦθ' ὅπερ ἀνωτέρω ἐξ ἄλλης ἀρχῆς ἐδείκνυμεν (3). Ε'.

Πρότασις ΛΒ.

„Ἐὰν Κύκλου ἐφάπτηταί τις Εὐθεῖα (γζ), ἀπὸ δὲ τῆς ἀφῆς ἐπὶ τὸν „Κύκλον, διαχθῇ τις Εὐθεῖα (αβ) τέμνουσα τὸν Κύκλον, ἃς ποιεῖ Γωνίας „πρὸς τῇ Ἐφαπτομένῃ ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ Κύκλου Τμή„μασι Γωνίαις.

Διήχθω δὴ Α'. ἡ τέμνουσα αβ διὰ τοῦ Κέντρου, καὶ ἔσται ἡ ὑπὸ γαβ (4) Ὀρθή. Ἀλλὰ καὶ ἡ κατὰ τὸ λ Ὀρθή (5) ἐστιν, ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς Ἐφαπτομένης καὶ τῆς Τεμνούσης, ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ Τμήματι. σχ. 256.

Διήχθω δὴ Β'. ἡ τέμνουσα αβ μὴ διὰ τοῦ Κέντρου, διήχθω δὲ καὶ διὰ τοῦ Κέντρου ἡ απ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βπ· καὶ ἐπεὶ ἡ ἐν τῷ Ἡμικυκλίῳ ὑπὸ αβπ Ὀρθή ἐστι (6), δύο ἄρα αἱ ὑπὸ βπα καὶ παβ ἴσαι ἔσονται (7) μιᾷ Ὀρθῇ. σχ. 257.

---

(1) *Ι. τοῦ α'.* (2) *Μέρ. Δ. τῆς Προτ.* (3) *Πόρ. Ζ. τῆς Ις. τοῦ γ'.* (4) *ΙΗ. τοῦ γ'.* (5) *ΛΑ. τοῦ γ'.* (6) *ΛΑ. τοῦ γ'.* (7) *Πόρ. ς. τῆς ΛΒ. τοῦ α'.*

Α'λλὰ ϗ ἡ ὑπὸ γαπ Ο'ρθή (1) ἐςὶν, ἀφαιρεθείσης ἄρα τῆς κοινῆς ὑπὸ βαπ, ἡ κατὰ τὸ π (ἤτοι ἡ κατὰ τὸ λ (2)) ἴση τῇ ὑπὸ γαβ.

Πάλιν αἱ ὑπὸ ζαβ καὶ γαβ ἴσαι (3) εἰσὶ δυσὶν Ο'ρθαῖς, καὶ ἐν τῷ Τετραπλεύρῳ βοαλ, αἱ ἀπεναντίον (4) ο ϗ λ ἴσαι εἰσὶ δυσὶν Ο'ρθαῖς. Αἱ δύο ἄρα ὑπὸ ζαβ ϗ γαβ, ἴσαι δυσὶ ταῖς κατὰ τὸ ο ϗ λ. Α'λλ' ἡ κατὰ τὸ λ ἴση ἐδείχθη ἀνωτέρω τῇ ὑπὸ γαβ, ἐὰν ἄρα τὰ ἴσα ἀπὸ τῶν ἴσων ἀφαιρεθῇ, ἔςαι ἡ ὑπὸ ζαβ ἡ ὑπὸ τῆς Ε'φαπτομένης ϗ τῆς Τεμνούσης, ἴση τῇ κατὰ τὸ ο τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ Τμήματι.

Πρότασις ΛΓ.

„Ε'πὶ τῆς δοθείσης Εὐθείας (βγ) γράψαι Τμῆμα Κύκλου, δεχόμενον „Γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ Γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

σχ. 258. Ε'ὰν ἡ δοθεῖσα Γωνία ὀξεῖα ᾖ, οἷα ἡ ὑπὸ αβζ, ἀπὸ τοῦ β ἤχθω τῇ αβ (5) πρὸς ὀρθὰς ἡ βλ, πρὸς δὲ τῷ πέρατι γ τῆς δοθείσης Εὐθείας βγ, συνεςάθω Γωνία (6) ἡ ὑπὸ βγι ἴση τῇ ὑπὸ γβλ, ἧς δὴ συςάσης τεμεῖ ἡ Πλευρὰ γι τὴν βλ κατὰ τὸ ι. Εἶτα Κέντρῳ μὲν τῷ ι, Διαςήματι δὲ τῷ ιβ Κύκλος γεγράφθω διερχόμενος (ἐπεὶ ἴσαι μὲν αἱ πρὸς τῇ Βάσει (7) Γωνίαι, ἴσαι δὲ αἱ τὰς Γωνίας ὑποτείνουσαι (8) ιβ, ιγ Πλευραί) διὰ τοῦ γ, καὶ Τμῆμα ἔχων τὸ βπγ, δεχόμενον Γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ ὑπὸ αβζ.

Ε'πειδὴ γὰρ ἡ αβ τῇ Διαμέτρῳ βλ πρὸς ὀρθάς (9) ἐςιν, ἡ αβ ἐφάπτεται τοῦ Κύκλου (10), τὸν δὲ τέμνει ἡ βγ. Α'ρα ἡ ἐν τῷ ἐναλλὰξ Τμήματι βπγ Γωνία (11) ἴση τῇ δοθείσῃ ὑπὸ αβζ.

Ε'ὰν δὲ ἡ δοθεῖσα ὑπὸ ρβγ Α'μβλεῖα ᾖ, διὰ παραπλησίας τῆς κατασκευῆς, ἔςαι τὸ γοβ τὸ ζητούμενον Τμῆμα.

Σχόλιον.

Διὰ δὲ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ϗ Κύκλου Περιφέρειαν ἀγαγεῖν ἔξεςαι, ἥτις τῆς δοθείσης Εὐθείας αρ κατὰ τὸ δοθὲν Σημεῖον ἅπτοιτο, καὶ δι' ἄλλου Σημείου τοῦ γ, ὃ ἐκτὸς εἴη τῆς δοθείσης αρ διήκοι. Α'μέλειτοι τῆς βγ ἐπιζευχθείσης, ϗ τῇ δοθείσῃ αρ πρὸς ὀρθὰς ἀχθείσης τῆς βλ, ἐὰν γένη-

(1) *ΙΗ.* τοῦ γ'. (2) *ΚΑ.* τοῦ γ'. (3) *ΙΓ.* τοῦ α'. (4) *ΚΒ.* τοῦ γ'. (5) *ΙΑ.* τοῦ α'. (6) *ΚΓ.* τοῦ α'. (7) *Ε'κ κατ.* (8) *ς.* τοῦ α'. (9) *Ε'κ κατ.* (10) *Ις.* τοῦ γ'. (11) *ΛΒ.* τοῦ α'.

ται ἡ ὑπὸ βγι ἴση τῇ ὑπὸ βγ, ἡ τῶν Εὐθειῶν βλ καὶ γι τομὴ τὸ Κέντρον παρέξει, ἡ δὲ ιβ ἢ ιγ τὴν Διάμετρον, οἷς ὁ Κύκλος γεγράψεται.

Πρότασις ΛΔ.

„Ἀπὸ τοῦ δοθέντος Κύκλου Τμῆμα ἀφελεῖν, δεχόμενον Γωνίαν ἴσην τῇ „δοθείσῃ Γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἀχθείσης τῆς Ἐφαπτομένης τοῦ Κύκλου αβ (1), πρὸς τῷ β Σημείῳ τῆς ἐπαφῆς συνεστάθω (2) Γωνία ἡ ὑπὸ αβγ, ἴση τῇ δοθείσῃ· οὕτω γὰρ ἡ βγ, ἀφελεῖ Τμῆμα τὸ βγδ, δεχόμενον Γωνίαν (3) ἴσην τῇ δοθείσῃ Γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ. χ. 259.

Πρότασις ΛΕ.

„Ἐὰν ἐν Κύκλῳ δύο Εὐθεῖαι (γλ, βζ) τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν „τῆς μιᾶς Τμημάτων περιεχόμενον Ὀρθογώνιον (γολ), ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν „τῆς ἑτέρας Τμημάτων περιεχομένῳ Ὀρθογωνίῳ (βοζ).

Ἐὰν οὖν ἀλλήλας τέμνωσι κατὰ τὸ Κέντρον α, αὐτόθεν εὔδηλον τὸ λεγόμενον, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν Ἡμιδιαμέτρων Τετράγωνα τοῦ αὐτοῦ Κύκλου ἴσα ἐστί.

Ἐὰν δὲ ἡ ἑτέρα γλ διαγομένη διὰ τοῦ Κέντρου α, τὴν ἄλλην βζ δίχα τέμνῃ, ἐπεὶ καὶ πρὸς ὀρθὰς (4) τέμνει, τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ ζο, Ὀρθογώνιον ἐστὶ τὸ ὑπὸ βοζ. Ἐπεζεύχθω δὴ ἡ αζ, καὶ ἔσται Ὀρθογ. $\gamma o\lambda + \alpha o^{T}$ (5) $= \alpha\lambda^{T} = \alpha\zeta^{T} = \alpha o^{T} + o\zeta^{T}$ (6). Ἐὰν οὖν ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν αo^{T}, ἔσται Ὀρθογ. $\alpha o\lambda = o\zeta^{T} = \beta o\zeta$. Ο. Ε. Δ. χ. 260.

Ἐὰν δὲ ἡ ἑτέρα γλ διὰ τοῦ Κέντρου ἀγομένη, τέμνῃ τὴν ἑτέραν βζ εἰς ἄνισα κατὰ τὸ ο, ἀπὸ τοῦ Κέντρου α ἀχθεῖσά τις Εὐθεῖα ἡ αι, τεμνέτω δίχα (7) τὴν βζ κατὰ τὸ ι, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αβ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ αιβ (8) Ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ γλ εἰς ἴσα τέτμηται κατὰ τὸ α, καὶ εἰς ἄνισα κατὰ τὸ ο, ἔσται Ὀρθογ. $\gamma o\lambda + \alpha o^{T} =$ (9) $\alpha\lambda^{T} = \alpha\beta^{T} =$ (10) $\alpha\iota^{T} + \beta\iota^{T}$. Ἀλλ' αo^{T} (11) $= \alpha\iota^{T} + \iota o^{T}$, ἄρα Ὀρθογ. $\gamma o\lambda + \alpha\iota^{T} + \iota o^{T} = \alpha\iota^{T} + \beta\iota^{T}$. Κοινὴ οὖν ἀφῃρήσθω $\alpha\iota^{T}$, καὶ ἔσται Ὀρθογ. $\gamma o\lambda + \iota o^{T} = \beta\iota^{T}$, τὸ δὲ $\beta\iota^{T} =$ (12) $\beta o\zeta + \iota o^{T}$. Ἐὰν ἄρα κἀντεῦθεν τὸ κοινὸν ιo^{T} ἀφαιρεθῇ, ἔσται Ὀρθογ. $\gamma o\lambda =$ Ὀρθογ. $\beta o\zeta$. χ. 261.

---

(1) ΙΖ. τοῦ γ΄. (2) ΚΓ. τοῦ α΄. (3) ΛΒ. τοῦ γ΄. (4) Γ. τοῦ γ΄. (5) Ε΄. τοῦ β΄. (6) ΜΖ. τοῦ α΄. (7) Ι. τοῦ α΄. (8) Γ. τοῦ γ΄. (9) Ε. τοῦ β΄. (10) ΜΖ. τοῦ α΄. (11) Διὰ τὴν αὐτ. (12) Ε. τοῦ β΄.

κ. 262. Ἐὰν δὲ οὐδετέρα τῶν Εὐθειῶν γλ, ζβ διὰ τȣ͂ Κέντρȣ διάγηται, ἐπεζεύχθω ἡ αο, ϗ διήχθω ἑκατέρωθεν πρὸς τὴν Περιφέρειαν ψχ, καὶ κατὰ τὸ δειχθὲν ἀνωτέρω, τῶν Ὀρθογωνίων ζοβ καὶ γολ ἑκάτερον ἴσον ἐςὶ τῷ ψοχ, ὥςε ϗ ἀλλήλοις αὐτὰ ἴσα ἔςαι.

Ἄλλως.

κ. 263. Ἐν γένει δ᾽ ἂν ȣ̔́τως ἡ ἀπόδειξις ῥαδίως ἀποδοθείη, ἐπιζευχθεισῶν τῶν γζ, λβ. Ἐπὶ τῶν Τριγώνων ἡ μὲν ὑπὸ ζγλ ἴση τῇ ὑπὸ ζβλ (1), ἡ δὲ ὑπὸ γοζ ἴση τῇ ὑπὸ βολ (2)· ἄρα (3) Ἰσογώνιά ἐςὶ τὰ Τρίγωνα. Ὥςε κατὰ τὴν Δ΄ τȣ͂ ϛ΄. Βιβλίȣ τὴν ἐκ τῆς ἀνὰ χεῖρας μηδαμῶς ἠρτημένην, γο : οζ :: βο : ολ. Καὶ ἑπομένως κατὰ τὴν Ιϛ΄. τȣ͂ αὐτȣ͂ ϛ΄. γο × ολ = οζ × βο. Ο.Ε.Δ.

Πρότασις Λϛ.

κ. 264. „Ἐὰν Κύκλȣ ληφθῇ τι Σημεῖον ἐκτὸς (β), ϗ ἀπ᾽ αὐτȣ͂ πρὸς τὸν Κύκ-
„λον προσπίπτωσι δύο Εὐθεῖαι, ϗ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν Κύκλον (βγ),
„ἡ δὲ ἐφάπτηται (βζ), ἔςαι τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς Τεμνȣ́σης (γβ), ϗ τῆς ἐκτὸς
„ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τȣ͂ τε Σημείȣ ϗ τῆς κυρτῆς Περιφερείας (βο) πε-
„ριεχόμενον Ὀρθογώνιον (γβο), ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς Ἐφαπτομένης (βζ) Τε-
„τραγώνῳ.

Ἐὰν ȣ̓͂ν ἡ Τέμνȣσα βγ διὰ τȣ͂ Κέντρȣ α διάγοιτο, ἐπεζεύχθω ἡ αζ, ϗ ἔςαι ἡ ὑπὸ αζβ (4) Ὀρθή. Ἐπεὶ δὲ ἡ γο εἰς ἴσα τέτμηται κατὰ τὸ α, ϗ προσετέθη αὐτῇ Εὐθεῖα τις ἐπ᾽ εὐθείας ἡ οβ, ἔςαι $\left.\begin{matrix}\text{Ὀρθογ. (5) γβο}\\ \text{Τετραγ. αο}\end{matrix}\right\} = \alpha\beta^{T}$.

Ἤτοι Ὀρθογ. $\gamma\beta o + \alpha\zeta^{T}$ (6) $= \beta\zeta^{T} + \alpha\zeta^{T}$. Καὶ ἀφαιρεθέντος ἄρα τȣ͂ κοινȣ͂ $\alpha\zeta^{T}$, ἔςαι $\gamma\beta o = \beta\zeta^{T}$.

κ. 265. Ἐὰν δὲ μὴ ἡ γβ διὰ τȣ͂ Κέντρȣ α διάγηται, ἐπεζεύχθωσαν Εὐθεῖαι αἱ αβ, αζ, αο ϗ αλ. Καὶ ἡ ἀπὸ τȣ͂ Κέντρȣ α, εἰ δίχα τέμνει τὴν ογ κατὰ τὸ λ, ἡ ὑπὸ (7) αλο Ὀρθὴ ἔςαι. Ὡσαύτως δὲ ϗ ἡ ὑπὸ αζβ (8) Ὀρθὴ ἔςαι. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γο εἰς ἴσα τέτμηται κατὰ τὸ λ, ϗ προσετέθη αὐτῇ Εὐθεῖά τις ἐπ᾽ εὐθείας ἡ οβ,

Ἔςαι $\left.\begin{matrix}\text{Ὀρθογ. γβο}\\ \text{Τετρα. λο}\end{matrix}\right\}$ (9) $= \lambda\beta^{T}$. Κοινῇ προσειλήφθω τὸ $\alpha\lambda^{T}$.

---

(1) *ΚΑ.* τȣ͂ γ΄. (2) *ΙΕ.* τȣ͂ α΄. (3) Θ. Πόρ. τῆς *ΛΒ.* τȣ͂ α΄. (4) *ΙΗ.* τȣ͂ γ΄. (5) ϛ. τȣ͂ β΄. (6) *ΜΖ.* τȣ͂ α΄. (7) *Γ.* τȣ͂ γ΄. (8) *ΙΗ.* τȣ͂ γ΄. (9) ϛ. τȣ͂ β΄.

Καὶ ἔςαι $\left.\begin{array}{l}\text{Ὀρθογ. } \gamma\beta o \\ \text{Τετραγ. } \lambda o \\ \text{Τετραγ. } \alpha\lambda\end{array}\right\} = \lambda\beta^{T} + \alpha\lambda^{T}$.

Ἀλλὰ τὰ μὲν $\lambda o^{T} + \alpha\lambda^{T} = \alpha o^{T} = \alpha\zeta^{T}$, τὰ δὲ $\lambda\beta^{T} + \alpha\lambda^{T} = \alpha\beta^{T}$ (1), ἄρα Ὀρθογ. $\gamma\beta o + \alpha\zeta^{T} = \alpha\beta^{T} =$ (2) $\alpha\zeta^{T} + \beta\zeta^{T}$· καὶ τȣ̃ κοινȣ̃ ἀφαιρεθέντος $\alpha\zeta^{T}$, ἔςαι $\gamma\beta o = \beta\zeta^{T}$. Ο. Ε. Δ.

Ἄλλως.

Ῥᾴδιον δ' ἂν εἴη ϗ γενικώτερον τὴν ἀπόδειξιν ἀποδȣ̃ναι ὡδί.

Ἤχθω γζ ϗ ζο· καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ βζο τῇ κατὰ τὸ γ (3) ἴση ἐςίν, ἡ δὲ κατὰ τὸ β ἐπὶ τῶν Τριγώνων κοινή, τὰ γβζ καὶ ζβο Τρίγωνα ἔςαι (4) Ἰσογώνια. Ἄρα (Δ. τȣ̃ ϛʹ. ἥτις ἐκ τῆς δε ȣ̓δαμῶς ἤρτηται) ἔςι $\gamma\beta : \beta\zeta :: \beta\zeta : \beta o$, ϗ ἑπομένως (κατὰ τὴν ΙΖʹ. τȣ̃ ϛʹ., ἥτις ȣ̓δ' αὐτὴ ταύτης ἐξήρτηται ὅλως) $\gamma\beta \times \beta o = \beta\zeta^{T}$. Ο. Ε. Δ. σχ. 266.

Πορίσματα.

Ἐὰν ἀπὸ τȣ̃ αὐτȣ̃ Σημείȣ β τȣ̃ ἐκτὸς τȣ̃ Κύκλȣ ὄντος, ὁποσαιȣ̃ν διαχθῶσι Τέμνȣσαι βγ, ἅπαντα τὰ ὑπὸ γβο Ὀρθογώνια ἴσα ἀλλήλοις ἔςαι, ἐπεὶ τȣ́των ἕκαςον ἴσον ἐςὶ (5) τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς Ἐφαπτομένης βζ. Αʹ. σχ. 267.

Καὶ αἱ ἀπὸ τȣ̃ αὐτȣ̃ δὲ ἐκτὸς τȣ̃ Κύκλȣ ὄντος Σημείȣ Ἐφαπτόμεναι τȣ̃ Κύκλȣ βζ, βπ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἑκατέρῳ γὰρ τῶν ἀπὸ τȣ́των Τετραγώνων (6) ἴσον τὸ ὑπὸ γβο Ὀρθογώνιον. Βʹ.

Καὶ δύο δὲ ἀπὸ τȣ̃ ἐκτὸς τȣ̃ Κύκλȣ β ἀχθεῖεν ἂν Εὐθεῖαι μόναι τȣ̃ Κύκλȣ Ἐφαπτόμεναι αἱ βζ· βπ, εἰ γὰρ ϗ τρίτην ἀχθῆναι δυνατὸν ἦν Ἐφαπτομένην, ἦν ἂν ϗ αὐτὴ (7) ἴση ταῖς βζ, βπ, ϗ τῆς ἑτέρας τȣ́των μηδοπωςȣ̃ν διαφέρȣσα. Γʹ.

Κἀντεῦθεν μετὰ τȣ̃ Μαυρολύκȣ, ἐὰν ὕψος ὄρȣς τὸ δα δῆλον ᾖ, γινώσκηται δὲ ϗ ἡ ὁριζόντειος αβ, ἡ τῆς γῆς Ἐφαπτομένη κατὰ τὸ β, ἔνθα πρῶτον ἡ κορυφὴ τȣ̃ ὄρȣς, τοῖς αὐτȣ̃ ἀφιςαμένοις ἀφανὴς γίνεται, τὴν Διάμετρον τῆς γῆς δε (ἣν ἔνι λαβεῖν ἐπὶ τῆς αδ προαχθείσης ἄχρι τῆς Περιφερείας) καταμετρεῖν παιδευόμεθα. Ἔςαι γὰρ (8) τὸ Ὀρθογών. $\alpha\epsilon \times \alpha\delta = \alpha\beta^{T}$, ὥςε διαιρεθὲν τὸ ἤδη δῆλον ὂν Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς αβ, διὰ τȣ̃ ὕψȣς τȣ̃ ὄρȣς αδ, Δʹ. σχ. 268.

---

(1) ΜΖ. τȣ̃ αʹ. (2) Διὰ τὴν αὐτ. (3) ΛΒ. τȣ̃ γʹ. (4) Θ. Πόρ τῆς ΛΒ. τȣ̃ αʹ. (5) Διὰ τὴν Πρότ. (6) Διὰ τὴν Πρότ. (7) Διὰ τὸ βʹ. Πόρ. (8) Διὰ τὴν Πρότ.

ꙋ αὐτȣ̃ δήλȣ ὑποτιθεμένȣ, τὸ Πηλίκον δώσει Εὐθεῖαν τὴν αε, ἀφ' ἧς ἐὰν ἀφαιρεθῇ τὸ τȣ̃ ὄρȣς ὕψος αδ, λοιπὴ πάντως ἔϛαι ἡ εδ τῆς γῆς Διάμετρος.

Ἐπὶ παντὸς Ὀρθογωνίȣ Τριγώνȣ αβγ, τὸ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τȣ̃ ἀθροίσματος τῆς τε Ὑποτεινȣ́σης ꙋ τῆς ἑτέρας τῶν Πλευρῶν, ꙋ ὑπὸ τῆς διαφορᾶς τῶν αὐτῶν περιεχόμενον, ἴσον ἐϛὶ τῷ ἀπὸ τῆς λοιπῆς Πλευρᾶς Τετραγώνῳ. Ἐὰν γὰρ Κέντρῳ τῷ γ, Διαϛήματι δὲ τῷ γβ Κύκλος γραφῇ, τὴν Ὑποτείνȣσαν τέμνων κατὰ τὸ δ, διαχθῇ δὲ ἡ αγ ἄχρι πρὸς τὴν Περιφέρειαν ε, ἔϛαι ἡ μὲν αε ἴση τῷ ἀθροίσματι τῷ ἐκ τῆς Ὑποτεινȣ́σης αγ, καὶ τῆς Πλευρᾶς βγ (ἐπεὶ βγ = γε (1)), ἡ δὲ αδ ἡ διαφορὰ τῆς Ὑποτεινȣ́σης αγ, ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς γβ (ἐπεὶ γα = γβ (2)). Ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν αε τέμνȣσα τὸν Κύκλον ἐϛὶν (3), ἡ δὲ αβ ἐφαπτομένη (4) αὐτȣ̃, ἔϛαι τὸ ὑπὸ εαδ (ταυτὸν εἰπεῖν τὸ ὑπὸ τȣ̃ ἀθροίσματος τῆς Τεμνȣ́σης ꙋ τῆς Πλευρᾶς, καὶ ὑπὸ τῆς τȣ́των αὐτῶν διαφορᾶς περιεχόμενον Ὀρθογώνιον), ἴσον τῷ ἀπὸ αβ (ταυτὸν εἰπεῖν τῷ ἀπὸ τῆς λοιπῆς Πλευρᾶς) Τετραγώνῳ (5). Ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

σχ. 268, ϛ'. Ἐὰν ἀπὸ τῆς α Γωνίας τȣ̃ αβγ Τριγώνȣ, ȣ̃ ἄνισοι αἱ Πλευραὶ αβ, αγ, Κάθετος ἀχθῇ ἐπὶ τὴν Βάσιν (ἣν δέοι προαχθεῖσαν) ἡ αλ, ἔϛαι τὸ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τȣ̃ ἀθροίσματος ꙋ τῆς διαφορᾶς τῶν Πλευρῶν αβ, αγ, ἴσον τῷ Ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τȣ̃ ἀθροίσματος καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν Εὐθειῶν λβ, λγ, τῶν ἀπό τε τῆς Καθέτȣ αλ, ꙋ τῶν πρὸς τὴν Βάσιν Γωνιῶν β ꙋ γ ἀπολαμβανομένων.

Κέντρῳ μὲν γὰρ τῷ α, Διαϛήματι δὲ τῷ αγ, τῷ τῆς ἐλάσσονος Πλευρᾶς δηλονότι, Κύκλος γεγράφθω τέμνων τὴν μείζονα τῶν Πλευρῶν αβ κατὰ τὸ δ, τὴν δὲ Βάσιν (ἣν δέοι προαχθεῖσαν) κατὰ τὸ ο. Προήχθω δὴ ꙋ ἡ βα μείζων Πλευρὰ, ἄχρι τῆς Περιφερείας κατὰ τὸ ε, καὶ ἐπεὶ ἴσαι (6) αἱ αγ, αδ, αε, ἔϛαι μὲν εβ τῶν Πλευρῶν τὸ ἄθροισμα, ἔϛαι δὲ βδ τῶν Πλευρῶν ἡ διαφορά. Ἐπεὶ δὲ ἴσαι (7) αἱ λγ, λο, ἔσονται ἐπὶ τȣ̃ Α'. Σχήμ. αἱ βγ ꙋ βο, ἐπὶ δὲ τȣ̃ Β'. Σχήμ. αἱ βο ꙋ βγ, τὸ ἄθροισμα ꙋ ἡ διαφορὰ τῶν ἐναπολαμβανομένων λβ ꙋ λγ. Ἀλλαμὴν (8) τὸ εβδ = γβο, ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

Ἐπὶ γȣ̃ν τȣ̃ Α'. τῶν δύο Σχημάτων, ȣ̃τως ἄν τις τὸ Θεώρημα προτείνειεν.

Ἐὰν ἀπὸ τῆς Γωνίας α τȣ̃ αβγ Τριγώνȣ, Κάθετος ἀχθῇ ἐπὶ τῇ Βάσει ἡ βγ, εἰς Τμήματα δύο τὰ βλ, λγ αὐτὴν κατατέμνȣσα, τὸ Ὀρθογώνιον

---

(1) Ὅρ. ΙΗ. τȣ̃ α'. (2) Διὰ τὸν αὐτ. (3) Ἐκ κατ. (4) Ἐκ κατ. καὶ διὰ τὴν Ις. τȣ̃ γ'. (5) Διὰ ταύτην τὴν Προτ. (6) Ὅρ. ΙΗ. τȣ̃ α'. (7) Γ. τȣ̃ γ'. (8) Α. Πόρ. τῆς παρέσ.

τὸ ὑπὸ τȣ̃ ἀθροίσματος, ϗ τῆς διαφορᾶς τῶν Πλευρῶν αβ, αγ, ἴσον ἐϛὶ τῷ Ὀρθογωνίῳ, τῷ ὑπότε τῆς Βάσεως βγ, ϗ τῆς διαφορᾶς τῶν Τμημάτων τῆς αὐτῆς Βάσεως βο. Ἡ δὲ τȣ̃ Θεωρήματος τȣ̃δε χρῆσις κατὰ τὴν ἐπίπεδον Τριγωνομετρίαν ἐπισημοτάτη ἐϛί.

Πρότασις ΛΖ.

„Ἐὰν Κύκλȣ ληφθῇτι Σημεῖον ἐκτὸς (β), ἀπὸ δὲ τȣ̃ Σημείȣ πρὸς τὸν „Κύκλον προσπίπτωσι δύο Εὐθεῖαι, ϗ ἡ μὲν αὐτῶν (βγ) τέμνῃ τὴν Κύκλον, „ἡ δὲ (βζ) προσπίπτῃ, ᾖ δὲ τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης τεμνȣ́σης (γβ) ϗ τῆς ἐκτὸς „ἀπολαμβανομένης (βο) μεταξὺ τȣ̃ τε Σημείȣ ϗ τῆς κυρτῆς Περιφερείας, ἴσον „τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτȣ́σης (βζ) Τετραγώνῳ, ἡ προσπίπτȣσα (βζ) ἐφά-„ψεται τȣ̃ Κύκλȣ κατὰ τὸ ζ.

Ἀπὸ τȣ̃ β ἤχθω (1) Ἐφαπτομένη ἡ βπ, ϗ ἐπεζεύχθωσαν αἱ επ, εζ, εβ· καὶ ἐπεὶ τῷ Ὀρθογωνίῳ γβο, ἴσον ἐϛὶ τὸ ἀπὸ βζ Τετράγωνον (2), ϗ τὸ ἀπὸ (3) βπ, ἔϛαι δὴ ταῦτα ἀλλήλοις ἴσα τὰ Τετράγωνα, ϗ μέντοι (4) ϗ αἱ Εὐθεῖαι βζ, βπ ἴσαι ἀλλήλαις· τὰ ἄρα ζεβ, πεβ Τρίγωνα ἐϛὶν ἀλλήλοις Ἰσόπλευρα, ἄρα ϗ αἱ κατὰ τὸ ζ ϗ π Γωνίαι (5) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἀλλὰ γὰρ ἡ κατὰ τὸ π (6) Ὀρθή ἐϛιν, ἄρα ϗ ἡ κατὰ τὸ ζ Ὀρθή ἐϛιν, ὥϛε (7) ἡ βζ ἐϛὶν Ἐφαπτομένη. Ο. Ε. Δ. κ. 269.

Πορίσματα.

Ἡ ἄρα ὑπὸ εβζ (8) ἴση ἐϛὶ τῇ ὑπὸ εβπ. Ὃ ϗ ἄμεινον ἂν ταχθείη μετὰ τὸ Β′. Πόρισμα τῆς Λϛ′. τȣ̃ Γ′. ἀνωτέρω. Α′.

Καὶ ἐὰν Εὐθεῖαι δύο ἴσαι ἀλλήλαις βζ, βπ, ἀπό τινος Σημείȣ τῶν ἐκτὸς τȣ̃ Κύκλȣ, πρὸς τὴν κυρτὴν προσπίπτωσι Περιφέρειαν, ᾖ δὲ τȣ́των ἡ ἑτέρα βπ Ἐφαπτομένη τȣ̃ Κύκλȣ, ϗ ἡ ἑτέρα πάντως βζ τȣ̃ αὐτȣ̃ Κύκλȣ ἐφάψεται. Ἴσων γὰρ ȣ̓σῶν (9), ϗ τὰ ἀπὸ τȣ́των Τετράγωνα (10) ἴσα ἀλλήλοις ἔϛαι. Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ βπ (11) = γβο, ἄρα ϗ $\beta\zeta^{T}$ (12) = γβο, ἄρα διὰ τὴν ΛΖ′. τὴν ἀνὰ χεῖρας, ἡ βζ ἁπτομένη ἐϛὶ τȣ̃ Κύκλȣ. Β′.

(1) *ΙΖ. τȣ̃ γ′.* (2) *Ἐξ ὑποθ.* (3) *Διὰ τὴν Λϛ. τȣ̃ γ′.* (4) *Ἀξ. ιε′.* (5) *Η. τȣ̃ α′.* (6) *ΙΗ. τȣ̃ γ′.* (7) *Ιϛ. τȣ̃ γ′.* (8) *Η. τȣ̃ α′.* (9) *Ἐξ ὑποθ.* (10) *Ἀξ. ιε.* (11) *Λϛ. τȣ̃ γ′.* (12) *Ἀξ. α′.*

Τῶν ϛοιχείων τῆς Γεωμετρίας.

ΒΙΒΛΙ'ΟΝ Δ'.

Προβληματώδης ἐϛὶν ἅπασα ἡ ἐν χερσὶ Βίβλος, διδάσκειν δὲ προτίθεται ἡμᾶς, τίνι δήποτε μεθόδῳ τῶν Σχημάτων μάλιϛα τὰ κανονικὰ, καὶ τεταγμένα ἀκέοντα, ἐγγράφεταί τε τῷ Κύκλῳ καὶ περιγράφεται. Ἡ δὲ χρῆσις τῆς Βίβλου ἐπὶ τῇ κατασκευῇ τῶν ὀχυρωμάτων ἐϛὶ πυκνοτάτη, καὶ μέντοι καὶ ἐξ αὐτῆς, οἱονεὶ Πηγῆς, τὰ τῶν Ἡμιτόνων καὶ Ἁπτομένων, καὶ Τεμνεσῶν θαυμαζόμενα κανόνια, τὰ ἐπ' ἀγαθῷ μεγίϛῳ τῶν μαθηματικῶν ἐπιϛημῶν ἐπινοηθέντα ἐξοχετεύεται.

Ταύτῃ δέτοι καὶ πρὸς τὴν Τριγωνομετρικὴν μάθησιν ἔχει ἡ Βίβλος πολὺ τὸ ἀνύσιμον· οὐδὲ γὰρ ἄλλως ἢ πολύγωνα Κύκλοις ἐγγράφοντες, τῶν Ὑποτεινεσῶν τέτων καὶ Ἁπτομένων, καὶ Τεμνεσῶν κατασκευάζειν παιδευόμεθα τὰ κανόνια, δι' ὧν, καὶ Σχημάτων αὐτῶν, καὶ σωμάτων Μεγέθη καταμετρεῖται. Καὶ μὴν καὶ τάςγε τῶν ἀϛέρων, ἃ καλεῖν εἰώθασι φάσεις, τήντε τεταρτημορικὴν δηλαδὴ καὶ τὴν ἑκτημορικὴν, καὶ ὅσας ἄλλας, σχολῇ γ' ἄντις ἄνευ τῆς παρὰ τῆςδε τῆς Βίβλου ἐπικερίας ὀρθῶς διακρίνειεν, ἅτε δὴ καὶ τέτων τῆς τῶν πολυγώνων ἐν Κύκλῳ ἐγγραφῆς ὅλως ἐξηρτημένων. Εἰδὲ καὶ Κύκλε τὸ ἐμβαδὸν, καὶ οἷον τετραγωνισμόντινα λαβεῖν ἔνι, οὐκ ἄνποθεν ἄλλοθεν ἐδὲ τῦτο, ὅτι μὴ ἐκ πολυγωνίων καὶ Τετραγωνικῶν χωρίων, ὑπὲρ ἀριθμὸν τῷ Κύκλῳ ἐγγραφομένωντε, καὶ περὶ αὐτὸν γραφομένων, εἰς πέρας ἀγαγεῖν δυνησόμεθα· καὶ τῶν Κύκλων δὲ ὃν ἔχεσι πρὸς ἀλλήλες διπλασίονα λόγον, ἐκ τε διπλασίονος τῶν ἐν τέτοιςτε καὶ περὶ αὐτὲς Πολυγώνων ὑποσυνάπτομεν. Τόγε μὴν τῆς κατὰ τὰ Στρατιωτικὰ Ἀρχιτεκτονικῆς χρήσει ὂν εἶδος, τῇ ἐν Κύκλῳ τῶν Πολυγωνίων Σχημάτων ἐγγραφῇ, οὕτω πυκνῶς φέρεται κεχρημένον, ὥϛε εἰκότως τῷδε τῷ Βιβλίῳ, οἷον ἀρχικῇ τινι ἕξει προσανατίθεσθαι.

Ὁρισμοί.

Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς Κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ἤ (ὃ ταυτόν ἐςι) Κύκλος περὶ Σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάςη τῶν τȣ̃ Εὐθυγράμμȣ Γωνιῶν, πρὸς αὐτῇ ἐςι τῇ τȣ̃ Κύκλȣ Περιφερείᾳ. Ἔςι δ' ὁ παρ Εὐκλείδῃ Γ'. ϗ ϛ'. Α'.

Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ Κύκλον περιγράφεσθαι λέγεται, ἤ (ὃ ταυτόν ἐςι) Κύκλος εἰς Σχῆμα ἐγγράφεσθαι, ὅταν ἑκάςη Πλευρὰ τῆς τȣ̃ Κύκλȣ Περιφερείας ἐφάπτηται. Οἱ παρ Εὐκλείδῃ Δ'. ϗ Ε'. ἐν ἑνὶ τȣ́τῳ σαφῶς περιέχονται. Β'.

Σχήματα δὲ τεταγμένα καὶ κανονικὰ λέγεται τὰ Ἰσόπλευρά τε καὶ Ἰσογώνια. Γ'.

Τȣ̀ς δὲ περὶ τῆς ἐγγραφῆς ϗ περιγραφῆς τῶν Εὐθυγράμμων πρὸς τὰ Εὐθύγραμμα (τὸν Α'. ϗ Β'. φημὶ παρ Εὐκλείδῃ), τȣ̀ς διὰ τῆς προσεπιπτώσεως τῶν Γωνιῶν ἐπὶ τὰς Πλευρὰς ἀποδιδομένȣς, καὶ δὴ ϗ τὸν παρὰ τῷ αὐτῷ Ζ'., καθ' ὃν Εὐθεῖαν εἰς Κύκλον ἐναρμόζεσθαι λέγει, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ἐπὶ τῆς Περιφερείας ᾖ τȣ̃ Κύκλȣ, ὡς περιττȣ̀ς ἄρα δοκȣ̃ντας οἱ περὶ Τακȣέτιον παραγράφȣσι.

Πρότασις Α.

„Εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον (βδ), τῇ δοθείσῃ Εὐθείᾳ (α) μὴ μείζονι ȣ̓́σῃ „τῆς τȣ̃ Κύκλȣ Διαμέτρȣ, ἴσην Εὐθεῖαν ἐναρμόσαι. χ. 270.

Ἤτοι ἡ τȣ̃ δοθέντος Κύκλȣ ἀγομένη Διάμετρος βδ ἴση τῇ δοθείσῃ α, ϗ γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθὲν· ἢ εἴπερ μείζων, εἰλήφθω ἡ βγ (1) ἴση τῇ ἐλάσσονι α, καὶ Κέντρῳ μὲν τῷ β, Διαςήματι δὲ τῷ βγ (2) Κύκλος γεγράφθω, καὶ (3) ἐπεζεύχθω ἡ βε, ἡ δὲ ἔςαι ἴση (4) τῇ βγ, ϗ ἑπομένως (5) τῇ α.

Πρότασις Β.

„Εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον, τῷ δοθέντι Τριγώνῳ (χ) ἰσογώνιον Τρίγω„νον ἐγγράψαι.

Ἤχθω Ἁπτομένη τȣ̃ Κύκλȣ ἡ εζ κατὰ τὸ δ, ϗ συνεςάθω ἡ ὑπὸ εδη χ. 271.

(1) Γ. τȣ̃ α'. (2) Αἴτ. γ'. (3) Αἴτ. α'. (4) Ὁρ. ΙΗ. τȣ̃ α'. (5) Ἐκ κατ. καὶ διὰ τὸ Α'. Ἀξ.

κατὰ τὸ δ (1) ἴση τῇ τȣ̃ Τριγώνȣ Γωνίᾳ γ, ὁμοίως δὲ ϗ ἡ ὑπὸ ζδθ ἴση τῇ α, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ηθ· φημὶ δὴ ὅτι γέγονε τὸ ἐπιταχθέν.

Ἡ γὰρ κατὰ τὸ θ Γωνία ἴση (2) τῇ ὑπὸ εδη, τȣτέςι (3) τῇ ἐν τῷ δοθέντι Τριγώνῳ γ, ἡ δὲ κατὰ τὸ η τῇ ὑπὸ ζδθ, ἤτοι τῇ α, ἡ ἄρα λοιπὴ ὑπὸ ηδθ (4) ἴση ἔςαι λοιπῇ τῇ κατὰ τὸ β. Ἄρα εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον κτ. Ο. Ε. Π.

Πρότασις Γ.

„Περὶ τὸν δοθέντα Κύκλον, τῷ δοθέντι Τριγώνῳ (ιλκ) ἰσογώνιον Τρί„γωνον περιγράψαι.

σχ. 272. Προήχθω ἑκατέρωθεν ἡ Πλευρὰ ικ, ὥςε συςῆναι τὰς ἐκτὸς Γωνίας ο, ν, καὶ συνεςάθωσαν δὴ κατὰ τὸ Κέντρον α (5) αἱ ὑπὸ ηαβ, ηαζ ἴσαι ταῖς κατὰ τὸ ο ϗ ν Γωνίαις. Εἶτα κατὰ τὰ Σημεῖα η, β, ζ Εὐθεῖαι ἁπτέσθωσαν τȣ̃ Κύκλȣ τρεῖς, συμπίπτȣσαι κατὰ τὰ Σημεῖα γ, ε, δ.

Ἐπεὶ οὖν ἐπὶ τȣ̃ Τετραπλεύρȣ γηαβ, αἱ κατὰ τὸ β ϗ η Γωνίαι ἄμφω (6) εἰσὶν Ὀρθαὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ ἄρα δύο ἥτε ὑπὸ ηαβ, ϗ ἡ κατὰ τὸ γ (7) ἴσαι εἰσὶ δυσὶν Ὀρθαῖς, ϗ ἴσαι ἄρα εἰσὶ ταῖς κ ϗ ο· ὥςε ἀφαιρεθεισῶν τῶν ἴσων (8) ὑπὸ ηαβ ϗ ο, ἔςαι ἡ γ λοιπὴ ἴση τῇ λοιπῇ κ. Ὡσαύτως δὲ δειχθήσεται ϗ ἡ ι ἴση τῇ δ, ἄρα (9) ϗ ἡ λοιπὴ ε, ἴση τῇ λοιπῇ λ. Ἰσογώνιον ἄρα τὸ δεγ τῷ ιλκ, ϗ περιγέγραπται εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον. Ο. Ε. Π.

Ὅτι δὲ ϗ Ἐφαπτόμεναι προαχθεῖσαι συμπίπτȣσιν ἀλλήλαις, ȣ̃τως ἂν δείξαις. Αἱ Γωνίαι ι, ν, ϗ κ, ο, καθ' ἑκατέραν τὴν συζυγίαν δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι (10) εἰσίν. Αἱ δὲ ι ϗ κ δυοῖν Ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν (11), αἱ ἄρα ο ϗ ν (τȣτέςιν (12) αἱ ὑπὸ ηαβ ϗ ηαζ) δυοῖν Ὀρθῶν μείζονές εἰσι, ϗ ἡ λοιπὴ ἄρα ὑπὸ βαζ (13) δυοῖν Ὀρθῶν ἐλάσσων ἐςὶ· ἡ ἄρα Περιφέρεια βηζ τῆς Ἡμιπεριφερείας (14) μείζων ἐςὶν, ἡ δὲ ζβ ἐλάσσων, ταύτητοι ϗ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ζβ Εὐθεῖα, ὑπὲρ τὸ Κέντρον α (τȣτέςι μεταξὺ α ϗ ε) κείσεται. Ἐπεὶ δὲ αἱ ὑπὸ αζε, αβε (15) εἰσὶν Ὀρθαὶ, φανερὸν ὅτι αἱ ὑπὸ βζε, ζβε ἐλάσσονές εἰσι δυοῖν Ὀρθῶν. Ὥςε (16) αἱ Εὐθεῖαι γβε ϗ δζε προαχθεῖσαι πεσȣν-

---

(1) ΚΓ. τȣ̃ ά. (2) ΛΒ. τȣ̃ γ'. (3) Ἐκ κατασ. (4) Πόρ. θ'. τῆς ΛΒ. τȣ̃ ά. (5) ΚΓ. τȣ̃ ά. (6) ΙΗ. τȣ̃ γ'. (7) Θεώρ. Α'. τȣ̃ Σχολ. μετὰ τὴν ΛΒ. τȣ̃ ά. (8) Ἐκ κατασ. (9) Πόρ. Θ'. τῆς ΛΒ. τȣ̃ ά. (10) ΙΓ. τȣ̃ ά. (11) ΙΖ. Πόρ. τῆς ΛΒ. τȣ̃ ά. (12) Ἐκ κατ. (13) Γ. Πόρ. τῆς ΛΒ. τȣ̃ ά. (14) Σχόλ. τῆς ΚΓ. τȣ̃ ά. (15) ΙΗ. τȣ̃ γ'. (16) Σχολ. τῆς ΛΑ. τȣ̃ ά.

ται καθ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο Ὀρθῶν ἐλάσσονες, οἷον κατὰ τὸ ε. Παραπλησίῳ δὲ λόγῳ δειχθήσεται ϗ ἡ σύμπτωσις ἡ τῶν λοιπῶν.

Ἄλλως.

Πρὸς τῷ Κέντρῳ α τȣ̃ δοθέντος Κύκλȣ, τῷ ἐπὶ τῆς Ἡμιδιαμέτρȣ βα, σχ. 273.
συνεςάθωσαν ὡς ἀνωτέρω αἱ ὑπὸ βαη, ζαβ ἴσαι ταῖς ο ϗ ν ταῖς ἐκτὸς ȣ̓̃σαις Γωνίαις τῷ Τριγώνῳ ιλκ, ἑτέρα τῇ ἑτέρᾳ· κατὰ δὲ τὰ Σημεῖα ζ, η, β ἐφαπτέσθωσαν τȣ̃ Κύκλȣ αἱ τρεῖς Εὐθεῖαι Γωνίας ὀρθὰς συνιςῶσαι τὰς αβγ, αηγ, ϗ τὰς αβε, αζε, ϗ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βη, βζ, ἑκατέρωθεν τῆς βα Ἡμιδιαμέτρȣ Τρίγωνα συνιςῶσαι τὰ βαη ϗ βαζ. Ἐὰν οὖν ἀπὸ τῶν δύο ὀρθῶν Γωνιῶν ὑπὸ αβγ ϗ αηγ τȣ̃ βαη Τριγώνȣ, ἃς πρὸς τοῖς β ϗ η Γωνίας ἔχει, ἀφαιρεθῶσι, λοιπαὶ αἱ ὑπὸ ηβγ ϗ βηγ δυοῖν Ὀρθῶν ἐλάσσονες ἔσονται, ὥςε αἱ Ἐφαπτόμεναι βγ, ηγ προαχθεῖσαι καθ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο Ὀρθῶν ἐλάσσονες (1), συνελεύσονται τέως κατά τι Σημεῖον· ὡσαύτως δὲ καὶ αἱ βε, ζε συνελεύσονται προαχθεῖσαι ϗ αὐταί· προεκβεβλήσθωσαν οὖν καὶ συμπιπτέτωσαν, αἱ μὲν κατὰ τὸ γ, αἱ δὲ κατὰ τὸ ε· ἐπεὶ τοίνυν ἐπὶ τȣ̃ Τετραπλεύρȣ αβγη, αἱ κατὰ τὰ β ϗ η Σημεῖα εἰσὶν Ὀρθαί, αἱ ὑπὸ βαη ϗ βγη ἴσαι εἰσὶ (2) δυσὶν Ὀρθαῖς. Ἀλλὰ ϗ αἱ ο, ι δυσὶν Ὀρθαῖς (3) ἴσαι εἰσὶ, ϗ τȣ́των ἡ ο ἴση (4) τῇ ὑπὸ βαη, ἄρα ϗ ἡ ὑπὸ βγη ἴση τῇ ι. Ὡσαύτως δὲ δειχθήσεται ϗ ἡ ὑπὸ βεζ ἴση τῇ κ· ἀλλ' αἱ ι ϗ κ ἅμα ληφθεῖσαι, δυοῖν Ὀρθῶν (5) ἐλάσσονές εἰσιν, ἄρα αἱ ὑπὸ ηγε καὶ γεζ δυοῖν Ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, ταύτητοι αἱ Εὐθεῖαι γη, εζ προεκβληθεῖσαι συμπεσȣ̃νται. Συμπιπτέτωσαν οὖν κατὰ τὸ δ· καὶ ἐπεὶ αἱ γ ϗ ε Γωνίαι τȣ̃ γδε Τριγώνȣ, ἴσαι ἐδείχθησαν ταῖς ι ϗ κ τȣ̃ ικλ, ἡ ἑτέρα τῇ ἑτέρᾳ, ἔςαι πάντως ἴση ϗ ἡ λοιπὴ τῇ λοιπῇ (6), ἤτοι ἡ δ τῇ λ. Καὶ Ἰσογώνιον ἄρα ἐδείχθη τὸ γδε Τρίγωνον τῷ δοθέντι ιλκ, ϗ περιγέγραπται δὲ (7) ϗ περὶ τὸν δοθέντα Κύκλον. Ο. Ε. Π.

Πρότασις Δ.

„Εἰς τὸ δοθὲν Τρίγωνον Κύκλον ἐγγράψαι.

Αἱ δύο Γωνίαι γ καὶ ε δίχα τετμήσθωσαν δι' Εὐθειῶν τῶν γα, εα, σχ. 274.

(1) Σχολ. τῆς ΛΑ. τȣ̃ α΄. (2) Θεώρ. α΄. τῆς ΛΒ. τȣ̃ α΄. (3) ΙΓ. τȣ̃ α΄. (4) Ἐκ κατ. (5) ΛΒ, τȣ̃ α΄, Πόρ. ιζ΄. (6) Θ. Πόρ. τῆς ΛΒ. τȣ̃ α΄. (7) Ἐκ κατ.

συνισσῶν κατὰ τὸ α (διὰ τὸ τὰς δύο τȢ Τριγώνȣ Γωνίας γ ϗ ε δυοῖν Ὀρθῶν (1) ἐλάσσονας εἶναι, ϗ ἔτι τὰς ὑπὸ αγε ϗ αεγ ἔτι ἐλάσσονας)· ἀπὸ δὲ τȣ α (2) πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ αβ, αη, αζ. ΤȢ γȣν Κύκλȣ, ὃς ἂν Κέντρῳ μὲν τῷ α, Διαςήματι δὲ τῷ αβ γραφείη, διὰ τῶν Σημείων ζ ϗ η διερχομένȣ ἐφάψονται αἱ τρεῖς τȣ Τριγώνȣ Πλευραί, καὶ ὅτως εἰς τὸ Τρίγωνον ἐγγεγραμμένος ἔςαι ὁ Κύκλος.

Ἐπὶ γὰρ τῶν Τριγώνων γαβ ϗ γαη, αἱ μὲν ὑπὸ αβγ ϗ αηγ ἴσαι εἰσὶν, ὡς ἄμφω (3) Ὀρθαὶ, αἱ δὲ ὑπὸ αγβ ϗ αγη ὁμοίως (4) ἀλλήλαις ἴσαι, ἄρα ϗ (5) ὑπὸ γαβ ἴση τῇ ὑπὸ γαη, καὶ ἑπομένως (6) ἡ αβ ἴση τῇ αη. Ὡσαύτως δ' ἄντις δείξειε ϗ τὰς αβ ϗ αζ ἴσας ȣσας, ϗ τοίνυν ὁ α Κέντρῳ ϗ Διαςήματι τῷ αβ ἐγγραφόμενος (7), ϗ διὰ τȣ η ϗ ζ διελεύσεται· ϗ ἐπεὶ αἱ κατὰ τὰ β ϗ η ϗ ζ Γωνίαι εἰσὶν (8) Ὀρθαὶ, αἱ τȣ Τριγώνȣ Πλευραὶ (9) ἐφάπτονται τȣ Κύκλȣ, ὥςε ἐγγεγραμμένος ἔςαι (10) ὁ Κύκλος εἰς τὸ δοθὲν Τρίγωνον. Ο. Ε. Π.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

Α. Ἐντεῦθεν οὖν γινωσκομένων τῶν τȣ Τριγώνȣ Πλευρῶν, δῆλα ἡμῖν ἔςαι ϗ τȣτων τὰ Τμήματα, τὰ διὰ τῶν ἐπαφῶν τȣ ἐγγεγραμμένȣ εἰς τὸ Τρίγωνον Κύκλȣ γινόμενα.

ϰ. 275. Οἷον ἔςω δγ = 12, καὶ δε = 16, ϗ γε = 18, καὶ ἔςαι δγ + δε = 12 + 16 = 28· ἐὰν ἀπὸ τȣτων ἀφαιρεθῇ γε = 18 = γη + εζ, λοιπὰ ἔςαι ηδ + δζ = 10, ἄρα (11) ηδ = 5 = δζ, καὶ ηγ = 7 = γβ, καὶ βε = 11 = ζε.

Β'. Δοθεισῶν τῶν τȣ Τριγώνȣ Πλευρῶν, ϗ τῆς Ἡμιδιαμέτρου τȣ ἐγγεγραμμένȣ εἰς τὸ Τρίγωνον Κύκλȣ, ῥᾴδιον ἐςὶ τὸ ἐμβαδὸν τȣ Τριγώνȣ προσευρεῖν, νοητέον γὰρ τὰς ἄλλας αγ καὶ αε, ὡς ἐπὶ τȣ ἀνωτ. Σχήματος ἠγμένας. Ἐπιζευχθείσης γὰρ ϗ τῆς αδ, ἡ τȣ Κύκλȣ Ἡμιδιάμετρος αὐτὸ τὸ ὕψωμα ἐςὶ τῶν τριῶν Τριγώνων γαε, εαδ, δαγ, εἰς ἃ τὸ ὅλον Τρίγωνον γδε διανέμεται, αἱ δὲ τȣτȣ Πλευραὶ Βάσεις ἐκείνων. Ἡ ἄρα Ἡμιδιάμετρος ἐπιπολλαπλασιαθεῖσα τῷ τῶν Πλευρῶν ἡμιαθροίσματι, δώσει (12) τὸ ἐμβαδὸν τȣ Τριγώνȣ γδε.

---

(1) *ΙΖ. Πόρ. τῆς ΛΒ. τȣ α'.* (2) *ΙΒ. τȣ α'.* (3) *Ἐκ κατ.* (4) *Ἐκ κατ.* (5) *Θ. Πόρ. τῆς ΛΒ. τȣ α'.* (6) *Κϛ. τȣ α'.* (7) *Θ. τȣ γ'.* (8) *Ἐκ κατασ.* (9) *Ιϛ. τȣ γ'.* (10) *Ὅρ. Β. τȣ δ'.* (11) *Β. Πόρ. τῆς Λϛ. τȣ γ'.* (12) *Σχόλ. τῆς ΜΑ. τȣ α'. ϗ Πρότ. Α. τȣ β'.*

Οἷον ἔςω αβ = 5, αἱ δὲ Πλευραὶ ὡς ἀνωτέρω 12, 16, 18, τούτων δὲ ἡμιάθροισμα 23, καὶ ἔςαι 5 × 23 = 115, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ Τριγώνου.

Πρότασις Ε.

„Περὶ τὸ δοθὲν Τρίγωνον Κύκλον γράψαι, ἤτοι (ὃ ταυτόν εἰς!) „τριῶν δοθέντων Σημείων μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων (β, γ, δ), Κύκλον δι „αὐτῶν ἀγόμενον γράψαι.

Ἐπιζευχθεισῶν τῶν βγ, γδ, καὶ δίχα τμηθεισῶν κατὰ τὰ ο καὶ ε (1), καὶ ἀχθεισῶν πρὸς ὀρθὰς τῶν (2) οα καὶ εα, τῶν κατὰ τὸ α συνιουσῶν, τὸ α Κέντρον ἔςαι, ᾧ ἂν καταγραφείη ὁ διὰ β καὶ γ καὶ δ διαγόμενος Κύκλος. κ. 276.

Ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῶσιν αἱ αβ, αγ, αδ, ἐπὶ τῶν Τριγώνων αἱ δο, αο Πλευραὶ ἴσαι ἔσονται (3) ταῖς γο, αο, αἵτε πρὸς τῷ ο Γωνίαι ἄμφω Ὀρθαὶ, ὥςε (4) ἡ αδ ἴση τῇ αγ· ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ αβ ἴση τῇ αγ. Καὶ τῶν τριῶν οὖν οὕτως (5) ἴσων οὐσῶν, τὸ α (6) Κέντρον ἔςαι τοῦ Κύκλου τοῦ διὰ τῶν Σημείων ἀγομένου β, γ, δ.

Πρᾶξις.

Κέντροις ταῖς β καὶ γ καὶ δ ἐὰν τρεῖς ἴσους ἀλλήλοις γράψῃς Κύκλους τεμνομένους, αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τῶν Κύκλων τομὰς Εὐθεῖαι, καθ' ὃ συνίασι Σημεῖον, τὸ τοῦ ζητουμένου Κύκλου δώσουσι Κέντρον. κ. 277.

Πόρισμα.

Ἐκ δὲ τούτων καὶ περὶ Τετράπλευρον (αβγζ), οὗ ἂν αἱ ἀπεναντίον Γωνίαι ὑπὸ αβγ, αζγ δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι ὦσι, Κύκλον γράφειν διδασκόμεθα.

Ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς αγ, Κύκλος περὶ τὸ δοθὲν Τρίγωνον (7) αβγ γραφήσεται. Ἐὰν οὖν κατὰ τὴν ἀντίθετον Περιφέρειαν ληφθῇ τι Σημεῖον τὸ δ, καὶ ἐπιζευχθῶσιν αἱ αδ, δγ, ἔσονται δὴ τοῦ αβγδ Τετραπλεύρου αἱ ἀπεναντίον Γωνίαι β καὶ δ (8) δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι. Ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τοῦ αβγζ Τετραπλεύρου αἱ ἀπεναντίον β καὶ ζ (9) δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ἐὰν ἄρα ἀφαιρεθῇ ἑκατέρωθεν ἡ β, ἔςαι ἡ κατὰ τὸ δ ἴση τῇ κατὰ τὸ ζ. Ἄμφω δὲ τῇ αὐτῇ Περιφερείᾳ αβγ βεβήκασι, καὶ τούτων ἡ ἑτέρα δ πρὸς τῇ ἀντιθέτῳ Περιφερείᾳ ἐςὶν, κ. 278.

(1) Ι. τοῦ α'. (2) ΙΑ. τοῦ α'. (3) Ἐκ κατ. καὶ Γ. τοῦ γ'. (4) Δ. τοῦ α'. (5) Ἀξ α'. (6) Θ. τοῦ γ'. (7) Διὰ τὴν Πρότ. (8) ΚΒ. τοῦ γ'. (9) Ἐξ ὑποθ.

ἄρα (1) ϗ ἡ ζ. Ἔυθεντοι ὁ διὰ τῶν τριῶν Γωνιῶν α, β, γ, τȣ̃ Τετραπλεύρȣ αβγζ ἠγμένος, ἤχθη πάντως ϗ διὰ τῆς τετάρτης ζ. Ο. Ε. Π.

Σχόλιον.

χ. 279. Κατὰ τὴν διαφορὰν τȣ̃ Τριγώνȣ, περὶ ὃ ὁ Κύκλος γράφεται, διαφέρȣσαν ϗ τὸ τȣ̃ περιγραφομένȣ Κύκλȣ Κέντρον ἴσχει τὴν θέσιν. Ἐὰν μὲν γὰρ Ὀξυγώνιον τύχῃ, ἔσαι δὴ τὸ Κέντρον ἐντὸς τȣ̃ Τριγώνȣ, διὰ γὰρ τὴν ὑπὸ βγδ (2) τὴν ἐν τῷ μείζονι Τμήματι, τὸ Κέντρον α ἐν αὐτῷ τῷ μείζονι Τμήματι πεσεῖται, ȣ̃ Βάσις ἡ βδ· ὡσαύτως δὲ δειχθήσεται, ὅτι τὸ Κέντρον α ἐν τοῖς μείζοσιν εἰσὶ Τμήμασιν, ὧν Βάσεις αἱ βγ ϗ δγ, ὥςε ἐντὸς τȣ̃ Τριγώνȣ βγδ ἔσαι τὸ α Κέντρον. Ἐν δὲ τῷ ὀρθογωνίῳ Τριγώνῳ, περὶ ὃ ἂν εἴη περιγεγραμμένος ὁ Κύκλος, τὸ Κέντρον θ κείσεται ἐπὶ τῆς ὑποτεινȣ́σης τὴν ὀρθὴν Γωνίαν εη (3). Ἀμβλυγωνίȣ δὲ τȣ̃ Τριγώνȣ ὄντος κείσεται τὸ τȣ̃ περιγραφομένȣ περὶ αὐτὸ Κύκλȣ Κέντρον μ (4) ἐκτὸς τȣ̃ Τριγώνȣ.

Α'. Ἐὰν ἀπὸ τȣ̃ Κέντρȣ α, ἐφ' ἑκάςην τῶν Γωνιῶν β, γ, δ τȣ̃ ὀξυγωνίȣ Τριγώνȣ ἐπιζευχθῶσιν Εὐθεῖαι αβ, αγ, αδ (Σχ. 1.), τεμȣ̃σι δὴ τὸ Τρίγωνον εἰς Τρίγωνα τρία ἰσοσκελῆ τὰ αβγ, αβδ, αγδ, διὰ τὴν τῶν Ἡμιδιαμέτρων ἰσότητα. Διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον, ϗ ἐὰν ἐπιζευχθῇ (Σχ. 2) ἐπὶ τȣ̃ ὀρθογωνίȣ Τριγώνȣ, περὶ ὃ περιγέγραπται ὁ Κύκλος, ἡ ζθ, διελεῖ γε κἀκεῖνο εἰς ἰσοσκελῆ δύο τὰ εθζ, ζθη, ὃ ϗ ἀνωτέρω (5) σεσημείωται. Ἐὰν δὲ ἐπὶ ἑκάςης τῶν τȣ̃ Ἀμβλυγωνίȣ (Σχ. 3) Γωνιῶν, ἀπὸ τȣ̃ Κέντρȣ μ τȣ̃ περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένȣ Κύκλȣ ἐπιζευχθῶσιν αἱ μι, μκ, μλ, συςήσονται ὡσαύτως Τρίγωνα τρία ἰσοσκελῆ, ὧν τὸ μὲν ιμλ, ȣ̃ Βάσις ἡ τὴν Ἀμβλεῖαν ὑποτείνȣσα, ἐκτὸς κείσεται τȣ̃ Ἀμβλυγωνίȣ, ϗ σὺν ἐκείνῳ Τετράπλευρον τὸ ιμλκ συςήσει τοῖς δυσὶν ἰσοσκελέσι ιμκ, κμλ ἴσον.

χ. 280, Β'. Ἐπὶ τȣ̃ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένȣ ὀξυγωνίȣ Τριγώνȣ βγδ, ἐὰν ἀπὸ τȣ̃ Κέντρȣ α Ἡμιδιάμετροι ἀχθῶσιν αἱ αθε, αιζ, ακη, πρὸς ὀρθὰς τέμνȣσαι τὰς Πλευρὰς βγ, γδ, βδ, αὗται δὴ δίχα τεμȣ̃σι (6) τάς τε Πλευρὰς κατὰ θ, ι, κ, ϗ τὰς Περιφερείας, ἃς ὑποτείνȣσιν αἱ Πλευραὶ κατὰ ε, ζ, η, ϗ τὰς πρὸς τῷ α Γωνίας τῶν ἰσοσκελῶν Τριγώνων.

Ὁμοίως δὲ ϗ ἐπὶ τȣ̃ Ὀρθογωνίȣ λξμ τȣ̃ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμέ-

---

(1) Σχόλ. τὸ μετὰ τὴν ΚΑ. τȣ̃ γ'. (2) ΛΑ. καὶ Σχόλ. τῆς ΚΑ. τȣ̃ γ'. (3) Αὐτ. (4) Αὐτ. (5) Πόρ. δ'. τῆς ΛΑ. τȣ̃ γ'. (6) Γ. τȣ̃ γ'. ϗ Σχόλ. Ὁρ. α'. τῆς Κς. τȣ̃ α'. ϗ Λ. τȣ̃ γ'.

νȣ, αἱ πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι ἐπὶ τῶν Πλευρῶν νρσ, νπτ, ταύταις τε (1) κατὰ ρ ϗ π, ϗ ἃς αὗται ὑποτείνȣσι Περιφερείας κατὰ σ, τ, καὶ τὰς πρὸς τῷ ν Γωνίας δίχα τέμνȣσιν, ἡ δὲ νο τὴν Περιφέρειαν λομ, ἣν ἡ Διάμετρος λμ ὑποτείνει, κατὰ τὸ ο δίχα τέμνει.

Ἐπὶ δὲ τȣ̃ Ἀμβλυγωνίȣ ἡ υφ δίχα τέμνȣσα τὴν ὑποτείνȣσαν ψψ, ϗ τὸ Τόξον ψχψ διαχθεῖσα δίχα (2) τέμνει, ϗ δὴ ϗ αἱ λοιπαὶ να, υα ϗ τὰς Πλευρὰς, ϗ ἃς αἱ Πλευραὶ ὑποτείνȣσι Περιφερείας.

Ἔνθεντοι ἐπὶ τȣ̃ ὀξυγωνίȣ Τριγώνȣ αἱ ἡμίσειαι τῶν Πλευρῶν βθ, θγ, γι, κτ. ἔσονται τῶν ὑπὸ βαε, εαγ, γαζ, κτ. (3) Ἡμίτονα ὀρθά. (Σχ. 1).

Καὶ παραπλησίως ἐπὶ τȣ̃ Ὀρθογωνίȣ (Σχ. 2.) ϗ Ἀμβλυγωνίȣ (Σχ. 3), ἡ μὲν λρ ὀρθόν ἐςιν Ἡμίτονον τῆς ὑπὸ λνσ, ἡ δὲ ξπ τῆς ὑπὸ ξνπ ἐπ' ἐκείνȣ, ἐπὶ δὲ τȣ́τȣ ἡ μὲν ψο τῆς ὑπὸ ψυα, ἡ δὲ ωι τῆς ὑπὸ ωυα. Πάλιν ἐπὶ τȣ̃ Ὀρθογωνίȣ ἡ λν Ἡμιδιάμετρος, ὁλικὸν Ἡμίτονον ἐςὶ τῆς ὑπὸ λνο (4)· καὶ ἐπεὶ τὸ αὐτό ἐςιν ἑκάςης Γωνίας, ϗ τȣ̃ παραπληρώματος εἰς Ὀρθὰς δύο (5) ὀρθὸν Ἡμίτονον, ἐπὶ τȣ̃ Ἀμβλυγωνίȣ ἡ ψθ, ὀρθὸν Ἡμίτονον ἔςαι τῆς τε ὑπὸ ψυφ ϗ τῆς ὑπὸ ψυχ.

Ἡ πρὸς τῷ Κέντρῳ Γωνία ὑπὸ βαε, ἥτις βέβηκεν ἐπὶ τῆς βε ἡμισείας τῆς Περιφερείας βεγ, ἴση ἐςὶ τῇ πρὸς τῇ Περιφερείᾳ ὑπὸ βδγ, ἥτις βέβηκεν ἐπὶ τῆς ὅλης Περιφερείας βγ· ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ βαγ τῆς τε ὑπὸ βαε (6) ϗ τῆς ὑπὸ βδγ (7) διπλασίων ἐςὶ, φανερὸν (8) ὅτι αἱ ὑπὸ βαε ϗ βδγ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὡσαύτως δὲ ἴσαι δειχθήσονται ϗ αἱ ὑπὸ γαθ ϗ γδβ, καὶ αἱ ὑπὸ γαζ ϗ γβδ (Σχ. 1). Αἱ δὲ ὑπὸ λνο ϗ λξμ ἐπὶ τȣ̃ Ὀρθογωνίȣ (Σχ. 2), ὅτι ἄμφω Ὀρθαὶ οὖσαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, δῆλον. Ἐπὶ δὲ τȣ̃ Ἀμβλυγωνίου (Σχ. 3.) ὅτι ἡ ὑπὸ ψυχ ἡ βεβηκεῖα ἐπὶ τῷ ἡμίσει τȣ̃ Τόξȣ ψχ, ἴση τῇ ὑπὸ ψωψ, τῇ βεβηκείᾳ ἐπὶ τὸ ὅλον Τόξον ψχψ, ὅτω δείκνυται· ἐπεζεύχθωσαν αἱ ψχ, χψ· ἡ πρὸς τῷ Κέντρῳ ὑπὸ ψυφ, ἥτις βέβηκεν ἐπὶ τῆς ἡμισείας ψφ τῆς Περιφερείας ψφψ, δειχθήσεται ὡς ἀνωτέρω ἴση τῇ ὑπὸ ψχψ, ἥτις βέβηκεν ἐπὶ τῆς ὅλης Περιφερείας ψφψ. Ἀλλ' ἐπὶ τȣ̃ Τετραπλεύρȣ ψχψω αἱ μὲν ἀπεναντίον χ ϗ ω (9) δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ἤτοι ταῖς ὑπὸ ψυφ ϗ ψυχ (10), ἐὰν ἄρα ἀφαιρεθῶσιν αἱ ἴσαι ὑπὸ ψχψ, ψυφ, ἔςαι λοιπὴ ψυχ ἴση ψωψ.

Παντὸς Τριγώνȣ βγδ (Σχ. 1.) αἱ Πλευραὶ βγ, βδ, γδ εἰσὶ πρὸς ἀλ-

---

(1) Αὐτ. (2) Λ. τȣ̃ γ. (3) Πόρ. α'. τῆς Γ. τȣ̃ γ. (4) Ὁρ. Ι. τȣ̃ γ. (5) Αὐτ. (6) Διὰ τὸ Β'. τῶν ἀνωτ. (7) Κ. τȣ̃ γ. (8) Ἀξ. ς'. (9) ΚΒ. τȣ̃ γ. (10) ΙΓ. τȣ̃ α'.

λήλας ὡς τὰ Ἡμίτονα τῶν Γωνιῶν ὑπὸ βδγ, βγδ, γβδ, ὑφ' ἃς ἐκεῖναι αἱ Πλευραὶ ὑποτείνεσιν. Εἰσὶ γὰρ πάντως αἱ Πλευραὶ βγ, βδ, γδ, ὡς τὰ αὐτῶν ἡμίση βθ, βκ, γι· τετέςιν ὡς τὰ Ἡμίτονα τῶν Γωνιῶν (1) τῶν ὑπὸ βαε, βαη, γαζ. Ἀλλ' αὗται αἱ Γωνίαι ταῖς πρὸς τῇ Περιφερείᾳ ἴσαι εἰσὶν, (2) ἡ μὲν δηλονότι τῇ δ, ἡ δὲ τῇ γ, ἡ δὲ τῇ β· ἄρα αἱ Πλευραὶ βγ, βδ, γδ εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ὡς τὰ Ἡμίτονα τῶν Γωνιῶν, ὑφ' ἃς ἐκεῖναι αἱ Πλευραὶ ὑποτείνεσι. Ἐκ δὲ δὴ τέτε μόνε τε Πορίσματος, τὸ πλεῖςον μέρος τῆς ἐπιπέδε Τριγωνομετρίας ἐπιφέρεται, ὅπερ ἀκριβῶς σημειωτέον.

ж. 281. ς'. Κἀντεῦθεν τὴν ἀπὸ τῆς γῆς ἀπόςασιν τῆς Σελήνης καταμετρεῖν παιδευόμεθα· δοθείσης γὰρ διὰ τῶν Ἀςρονομικῶν παρατηρήσεων τῆς παραλλακτικῆς Γωνίας ὑπὸ αγβ, καὶ τῆς ὑπὸ δβγ, καὶ δὴ καὶ τῆς ταύτην παραπληρέσης εἰς δύο Ὀρθὰς ὑπὸ γβα, καὶ μέντοι καὶ τῆς Ἡμιδιαμέτρε τῆς γῆς αβ, ἐρῦμεν ὡς τὸ Ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αγβ, πρὸς τὸ Ἡμίτονον τῆς ὑπὸ γβα, ὕτως αβ πρὸς αγ (3) κτ.

ж. 282. Ζ'. Ἐντεῦθεν δὲ καὶ τῆς Ἡλιακῆς ἀφ' ἡμῶν ἀποςάσεως ἔνι τὸ μέτρον λαβεῖν· καὶ γὰρ αὖθις ἐὰν διὰ τῶν Ἀςρονομικῶν παρατηρημάτων, ἡ τῆς κατὰ μῆνα παραλλάξεως Γωνία (ἐν ᾧ μάλιςα διχότομος ἐςὶν ἡ Σελήνη) ληφθῇ ὑπὸ σηγ, καὶ ἡ τῆς Σελήνης ἀπόςασις σγ, ἀναλογισόμεθα ὧδε· τὸ Ἡμίτονον τῆς ὑπὸ σηγ, πρὸς τὸ Ἡμίτονον τῆς Ὀρθῆς ησγ (ἤτοι πρὸς τὴν Ἡμιδιάμετρον (4)), ὕτω σγ ἡ τῆς Σελήνης ἀπὸ τῆς γῆς ἀπόςασις, πρὸς γη τὴν τε Ἡλίε. Ο.Ε.Δ.

Πρότασις ς.

„Εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον Τετράγωνον ἐγγράψαι.

ж. 283. Ἤχθωσαν Διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλας τέμνεσαι (5) αἱ αγ, βδ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αβ, βγ, γδ, δα. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἡ βε τῇ εδ (6), ἡ δὲ εα ἐπὶ τῶν Τριγώνων βεα, αεδ κοινή, ἥτε ὑπὸ βεα ἴση τῇ ὑπὸ (7) αεδ, ἄρα (8) βα ἴση τῇ αδ. Ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ αβ ἴση δειχθήσεται τῇ βγ, καὶ ἡ αδ τῇ δγ, καὶ τὸ αβγδ Ἰσόπλευρον ἔςαι, καὶ δὴ τὸ αὐτὸ καὶ Ὀρθογώνιον· ἐπειδὴ γὰρ αἱ βδ καὶ αγ Διάμετραι ἐτέθησαν, ἔςαι τὰ βαδ, αδγ, δγβ, γβα (9) Ἡμικύκλια, καὶ αἱ ἐν αὐτοῖς (10) Γωνίαι α, β, γ, δ Ὀρθαί. Τετράγωνον ἄρα (11) ἐςὶ τὸ αβγδ, καὶ ἐγγέγραπται (12) εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον.

---

(1) Πόρ. γ'. τε παρόντος Σχολ. (2) Πόρ. δ'. τῶν ἀνωτ. (3) Πόρ. ε'. (4) Ὁρ. Ι. τε γ'. (5) ΙΑ. τε α'. (6) Ὁρ. ΙΗ. τε α'. (7) Ἐκ κατ. (8) Δ. τε α'. (9) ΚΒ. Ὁρ. τε α'. (10) ΛΑ. τε γ'. (11) Ὁρ. Λβ. τε α'. (12) Ὁρ. Δ. τε δ'.

Πρότασις Ζ.

„Περὶ τὸν δοθέντα Κύκλον Τετράγωνον περιγράψαι.

Τῶν Διαμέτρων τᴕ Κύκλᴕ ὡς ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω ἀχθεισῶν, κατὰ τὰ Σημεῖα α, β, γ, δ ἤχθωσαν αἱ Ἐφαπτόμεναι ζθ, θι, ιη, ηζ· καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς ταῖς ἐπαφαῖς Γωνίαι (1) Ὀρθαί εἰσιν, οἷον αἱ ὑπὸ ζαε, ζβε ϗ αἱ λοιπαὶ, ἐπιζευχθείσης τῆς αβ, αἱ ὑπὸ ζαβ ϗ ζβα ἐλάσσονές εἰσι δυοῖν Ὀρθῶν (2)· ϗ δεικνυμένᴕ τᴕ́τᴕ ϗ ἐπὶ τῶν λοιπῶν, αἱ Ἐφαπτόμεναι προεκβληθεῖσαι συμπεσᴕ̃νται, ϗ συςήσεται ᴕ̔́τω τὸ ζηιθ, ὅ φημὶ δὴ εἶναι Τετράγωνον. σχ. 285.

Καὶ γὰρ ἐπειδὴ ὑπὸ ζαε ἴση τῇ ὑπὸ αεδ, ἔςαι (3) ἡ ζη Παράλληλος πρὸς τὴν βδ, διὰ δὲ τὸν αὐτὸν λόγον ϗ ἡ θι Παράλληλος πρὸς τὴν βδ, ὥςε ϗ πρὸς (4) ἀλλήλας. Ὁμοίως δὲ ϗ αἱ ζθ καὶ ηι Παράλληλοι εἰσὶ τῇ αγ καὶ ἀλλήλαις, τοιγαρᴕ̃ν αἱ ζη ϗ θι (ἐπὶ τῶν Παραλληλογράμμων ζδ ϗ βι) ἴσαι ἔσονται (5) τῇ αὐτῇ βδ, ϗ δὴ (6) ϗ ἀλλήλαις· ὡσαύτως δὲ ἐπὶ τῶν Παραλληλογράμμων ζγ, αι, αἱ ζθ, ηι ἴσαι εἰσὶ τῇ αὐτῇ αγ ϗ ἀλλήλαις. Ἀλλαμὴν αἱ αγ, βδ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἄρα αἱ τέσσαρες ζη, ηι, ιθ, θζ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ὥςε Ἰσόπλευρον ἐςὶ τὸ ζηθι. Ἐπεὶ δὲ ϗ αἱ πρὸς τῷ β ἐφεξῆς (7) Ὀρθαὶ εἰσὶν, ἄρα ϗ αἱ ἀπεναντίον ἐπὶ τῶν Παραλληλογράμμων Γωνίαι, ἤτοι ἡ η ϗ ἡ ι Ὀρθαὶ (8) εἰσὶ, καὶ (9) ἑπομένως ϗ αἱ ζ ϗ θ, ὥςε ϗ Ὀρθογώνιον τὸ αὐτὸ ζηιθ, ϗ Τετράγωνον (10) ἄρα, ϗ εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον (11) περιγεγραμμένον. Ο. Ε. Π.

Σχόλιον.

Τὸ εἰς τὸν Κύκλον περιγεγραμμένον Τετράγωνον διπλάσιόν ἐςι τᴕ̃ εἰς τὸν αὐτὸν ἐγγεγραμμένᴕ.

Ἐπειδὴ γὰρ ἡ ὑπὸ βαγ ἐν τῷ Ἡμικυκλίῳ (12) Ὀρθή ἐςι, τὸ ἀπὸ τῆς Ὑποτεινᴕ́σης βγ Τετράγωνον (13) ἴσον ἐςὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αβ ϗ αγ, ϗ ἑπομένως (14) τὸ ἀπὸ βγ, ἤτοι τὸ ἀπὸ εζ περιγεγραμμένον εἰς τὸν Κύκλον Τετράγωνον, διπλάσιόν ἐςι τᴕ̃ ἀπὸ αβ εἰς τὸν αὐτὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένᴕ. σχ. 286.

Καὶ τᴕ̃ ἀπὸ τῆς Ἡμιδιαμέτρᴕ δὲ αη Τετραγώνᴕ, τὸ μὲν περιγεγραμ-

---

(1) *ΙΗ.* τᴕ̃ *γ'*. (2) *Σχόλ.* τῆς *ΛΑ.* τᴕ̃ *α'*. (3) *ΚΖ.* τᴕ̃ *α'*. (4) *Λ.* τᴕ̃ *α'*. (5) *ΛΔ.* τᴕ̃ *α'*. (6) *Ἀξ α'*. (7) *Ἐκ κατ.* (8) *ΛΔ* τᴕ̃ *α'*. (9) *Διὰ τὴν αὐτ.* (10) *ΛΒ.* Ὁρ. τᴕ̃ *α'*. (11) *Ἐκ κατ.* Ὁρ. *Α.* τᴕ̃ *δ'*. (12) *ΛΑ.* τᴕ̃ *γ'*. (13) *ΜΖ.* τᴕ̃ *α'*. (14) Α. Πόρ. τῆς *ΜΖ.* τᴕ̃ *α'*.

μένον εἰς τὸν Κύκλον τετραπλάσιον, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον διπλάσιον. Ἀλλ᾽ αδ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου Πλευρὰ Διάμετρός ἐστι τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἡ δὲ Πλευρὰ ἡ τούτου Διάμετρός ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς Ἡμιδιαμέτρου βη, ἡ ἄρα τῶν Τετραγώνων πρόοδος τῶν ἀπὸ τῶν Διαμέτρων πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν Πλευρῶν, κατὰ ὑποδιπλασίονα λόγον συνεχῶς χωρεῖ, ἡ δὲ ἀνάπαλιν τῶν ἀπὸ τῶν Πλευρῶν πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν Διαμέτρων κατὰ διπλασίονα, καὶ ἡ μὲν τῶν ἀπὸ τῶν Διαμέτρων τῶν Κύκλων πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν Ἡμιδιαμέτρων κατὰ ὑποτετραπλασίονα, ἡ δὲ ἀνάπαλιν τῶν ἀπὸ τῶν Ἡμιδιαμέτρων πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν Διαμέτρων κατὰ λόγον τετραπλασίονα.

Πρότασις Η.

„Εἰς τὸ δοθὲν Τετράγωνον Κύκλον ἐγγράψαι.

κ. 287. Δίχα τετμήσθωσαν αἱ αβ ϗ αδ (1), ἀπὸ δὲ τῶν τομῶν ζ ϗ ε, ἤχθωσαν ἡ μὲν (2) ζη ὁποτέρᾳ τῶν αδ, βγ, ἡ δὲ εθ ὁποτέρᾳ τῶν αβ, δγ, καὶ Κέντρῳ μὲν τῷ κ, Διαστήματι δὲ τῷ κζ ὁ κε Κύκλος γεγράφθω· φημὶ δὴ ὅτι οὗτος ἐγγεγραμμένος ἔσται εἰς τὸ δοθὲν Τετράγωνον, ἐπειδὴ γὰρ Παραλληλόγραμμον ἐστὶ (3) τὸ ακ, ἔσται ἡ αζ ἴση τῇ ἀπεναντίον (4) εκ, ἡ δὲ αε τῇ ζκ. Ἀλλ᾽ αἱ αζ ϗ αε, ἅτε δὴ τῶν αβ ϗ αδ ἴσων (5) ἡμίσειαι, ἴσαι (6) ἀλλήλαις εἰσὶν, ἄρα ϗ κζ ἴση τῇ κε· ὡσαύτως δὲ δείξω ἴσας εἶναι ϗ τὰς κη, κε, ὥστε ἐπεὶ αἱ τρεῖς κζ, κε, κη ἴσαι ἀλλήλαις, ὁ Κέντρῳ μὲν τῷ κ, Διαστήματι δὲ τῷ κζ γραφόμενος Κύκλος, ἥξει ϗ διὰ τῶν Σημείων ε, η, θ, καὶ τούτου δὲ ἐφάψονται αἱ Εὐθεῖαι κατὰ τὰ αὐτὰ Σημεῖα· ἐπειδὴ γὰρ αἱ Γωνίαι α ϗ β (7) Ὀρθαί εἰσι, ϗ αἱ κατὰ τὸ ε ϗ θ ἀπεναντίον (8) Ὀρθαὶ ἔσονται· ὡσαύτως δὲ διὰ τὸ Ὀρθὸν τῶν α ϗ δ, Ὀρθαὶ ϗ αἱ κατὰ ζ ϗ η· ἄρα (9) αἱ αβ, αδ, βγ, γδ Ἐφαπτόμεναι εἰσὶ τοῦ Κύκλου, ϗ οὕτως ἐγγέγραπται ὁ Κύκλος (10) εἰς τὸ δοθὲν Τετράγωνον. Ο. Ε. Π.

Πρότασις Θ.

„Περὶ τὸ δοθὲν Τετράγωνον Κύκλον περιγράψαι.

κ. 288. Ἐπιζευχθεισῶν τῶν αγ, βδ, Κέντρῳ τῷ ε, Διαστήματι δὲ τῷ εα, ὁ γραφόμενος Κύκλος ἥξει ϗ διὰ β ϗ γ ϗ δ· ἐπειδὴ γὰρ αἱ αδ, δβ ἴσαι

---

(1) Ι. τοῦ α΄. (2) ΛΑ. τοῦ α΄. (3) Ἐκ κατ. (4) ΛΔ. τοῦ α΄. (5) ΛΒ. Ὁρ. τοῦ α΄. (6) Ἀξ. ς΄. (7) Ἐξ ὑποθ. (8) ΛΔ. τοῦ α΄. (9) Ις. τοῦ γ΄. (10) Ὁρ. Β. τοῦ δ΄.

ταῖς γδ, δβ, ϗ Βάσις ἡ αβ ἴση τῇ βάσει βγ, ἄρα ϗ ἡ ὑπὸ αδβ ἴση ἐςὶ (1) τῇ ὑπὸ βδγ· ἡ δὲ ὑπὸ αδγ Ὀρθή (2), ἄρα ὑπὸ αδε, εδγ ἡμίσεια Ὀρθῆς ἑκατέρα. Παραπλησίως δείξω ϗ τὰς ὑπὸ εαδ ϗ εγδ ἡμισείας εἶναι Ὀρθῆς, ὥςε εα ϗ εγ (3) ἴσαι ἔσονται τῇ αὐτῇ εδ ἑκατέρα, ϗ δὴ (4) ϗ ἀλλήλαις· ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι ϗ τῇ εβ. Ὁ ἄρα Κέντρῳ τῷ ε, ϗ Διαςήματι τῷ εα γραφόμενος Κύκλος ἥξει ϗ διὰ β ϗ γ ϗ δ, ἄρα κτ. (5). Ο. Ε. Π.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

Ἐντεῦθεν δὲ φανερὸν, ὡς ἡ ὑπὸ εβα ἡ ὑπό τε τῆς Ἁπτομένης εβ, καὶ τῆς Τεμνέσης βα ἡμίσειά ἐςιν Ὀρθῆς, ἤτοι μοιρ. 45. ἡ δὲ ὑπὸ αβδ ἡμιόλειον Ὀρθῆς, ἤτοι μοιρ. 135. Ὥςε ἡ πλευρὰ αβ τε̃ ἐγγραφομένε εἰς τὸν Κύκλον Τετραγώνε (ἢ ὃ ταυτόν ἐςιν, ἡ Εὐθεῖα ἡ ἀποτέμνεσα τὸ τεταρτημόριον τῆς ὅλης Περιφερείας) ἐναρμοζομένη τῷ Κύκλῳ διατέμνει αὐτὸν εἰς Τμήματα δύο, ὧν τὸ μὲν μεῖζον βθα (6) Γωνίαν περιέχει τὴν ὑπὸ βγα ἢ βζα ἡμίσειαν ἔσαν Ὀρθῆς, τὸ δ' ἔλαττον αιβ Γωνίαν ἡμιόλειον ἔσαν Ὀρθῆς. Ταύτη τοι ϗ ἡ ἐν τῷ τεταρτημορικῷ Τμήματι Γωνία ἴση ἐςὶν Ὀρθῇ ϗ ἡμισείᾳ Ὀρθῆς ἅμα ληφθείσαις, ἡ δὲ Γωνία ἡ βεβηκεῖα ἐπὶ Περιφερείᾳ τεταρτημορικῇ, ἴση ἐςὶν ἡμισείᾳ Ὀρθῆς.

Καὶ ἐὰν ἐπὶ τῆς αβ (ἥτις ἐςὶ τε̃ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένε Τετραγώνε Πλευρὰ) ὡς ἐπὶ Διαμέτρε, Κέντρῳ τῷ μεσαιτάτῳ Σημείῳ η, ϗ Διαςήματι τῷ ηα, ἢ ηβ Κύκλος γραφῇ ἐλάσσων, διελεύσεται δὴ ἡ τέτε Περιφέρεια διὰ τε̃ κ, ὃ Κέντρον ἐςὶ τε̃ Κύκλε. Ἐὰν δὲ ϗ περὶ τὸν μείζονα Κύκλον γεγραμμένον τύχῃ Τετράγωνον, διήξει πάντως ἡ τε̃ ἐλάσσονος Κύκλε Περιφέρεια ϗ διὰ τῆς τε̃ περιγεγραμμένε Τετραγώνε Γωνίας ε. Περὶ γὰρ τὸ Τετράγωνον αεβκ, ὃ ἡ μὲν τῶν Γωνιῶν κ πρὸς τῷ Κέντρῳ ἐςὶ τε̃ Κύκλε, ἡ δὲ ε τῇ τε̃ περιγεγραμμένε Τετραγώνε Γωνίᾳ συμπίπτει, περιγέγραπται (7) ὁ ἐλάσσων Κύκλος.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ι.

„Ἰσοσκελὲς Τρίγωνον συςήσασθαι (βαγ), ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ „Βάσει Γωνιῶν (αβγ ἢ αγβ), διπλασίονα τῆς λοιπῆς (ἤτοι τῆς κατὰ κορυ„φὴν α).

Α'. ϰ. 289.

* Καὶ ἐὰν ἀπὸ μέσε τῆς τεταρτημορ. Περιφερ. ἐπὶ τὸ πέρας αὐτῆς ἐπιζευχθῇ ιβ, ἡ ὑπὸ τῶν δύο τεμνεσῶν ιβ, αβ τῆς μὲν ὀκτημόριον τῆς ὅλης Περιφερείας, τῆς δὲ τεταρτημό-

Β'.

ριον ἀποτεμνέσης, Γωνία ὑπὸ ιβα τεταρτημόριον ἔςαι Ὀρθῆς. Ὁμοίως δὲ ϗ ἡ ὑπό τε τῆς Ἁπτομένης εβ, ϗ τῆς ἀποτεμνέσης ὀκτημόριον ιβ, οἷον ἡ ὑπὸ εβι, τεταρτημόριον ἐςὶν Ὀρθῆς. Ὡσαύτως δὲ ϗ ἡ βεβηκεῖα ἐπὶ τῇ ὀκτημορικῇ Περιφερείᾳ ιβ, ἤτοι ἡ ὑπὸ βγι τεταρτημ. ϗ αὐτὴ Ὀρθῆς. Καὶ

---

(1) *Η.* τε̃ *ά.* (2) *Ἐξ ὑποθ.* (3) ϛ. τε̃ *ά.* (4) *Ἀξ. ά.* (5) *Ὁρ. Α.* τε̃ *δ'.* (6) *ΛΒ.* τε̃ *γ'.* (7) *Θ.* τε̃ *δ'.*

κ. 289. Ἐκκείσθω τὶς Εὐθεῖα ἡ αβ, καὶ οὕτω τετμήσθω κατὰ τὸ δ (1), ὥστε τὸ ὑπὸ αβδ Ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ αδ Τετραγώνῳ. Καὶ Κέντρῳ μὲν τῷ α, Διαστήματι δὲ τῷ αβ Κύκλος γεγράφθω, καὶ τῷ γραφέντι Κύκλῳ ἐνηρμόσθω (2) ἡ βγ ἴση τῇ αδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αγ, καὶ ἔσται τὸ βαγ Τρίγωνον τὸ ζητούμενον.

ἑξαπλασίων ἄρα τούτων ἑκάστης ἡ ἐν τῷ τεταρτημορικῷ Τμήματι ὑπὸ αιβ.

κ. 290. Ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς γδ, περὶ τὸ γδα Κύκλος (3) γεγράφθω· καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ αβδ ἴσον ἐστὶ τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ αδ, ἤτοι τῷ ἀπὸ βγ, ἐφάπτεται πάντως ἡ βγ (4) τοῦ Κύκλου δο, ὃν τέμνει ἡ γδ. Ἄρα ἡ ὑπὸ βγδ (5) ἴση ἔσται τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ Τμήματι ὑπὸ γαδ. Κοινῆς δὲ προστεθείσης τῆς ὑπὸ δγα, ἔσται ἡ ὑπὸ βγα ἴση τῇ α καὶ τῇ ὑπὸ αγδ ἅμα ληφθείσαις. Ἀλλὰ τὰ σκέλη αγ καὶ αβ ἴσα ἐστὶ, καὶ (6) ἡ ὑπὸ αβγ ἴση τῇ ὑπὸ βγα, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αβγ ἴση ἐστὶ τῇ α καὶ τῇ ὑπὸ αγδ ἅμα ληφθείσαις. Ἀλλαμὴν καὶ ἡ ἐκτὸς ὑπὸ βδγ (7) ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον α, καὶ ὑπὸ αγδ ἅμα ληφθείσαις, αἱ δύο ἄρα ὑπὸ γβδ καὶ γδβ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἑπομένως (8) ἡ δγ ἴση ἐστὶ τῇ βγ, ἤτοι (9) τῇ αδ. Ἄρα αἱ Γωνίαι α, καὶ ὑπὸ αγδ (10) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί· δέδεικται δὲ ἡ ὑπὸ αβγ ἴση ἀμφοῖν ἅμα, τῆς ἄρα κατὰ τὸ α διπλασίων ἐστί. Ἄρα Ο. Ε. Π.

Σχόλιον.

Ἐκ τῆς τοῦ Προβλήματος δὲ κατασκευῆς δῆλον, ὅτι τῆς ἑτέρας τῶν ἴσων τοῦ Ἰσοσκελοῦς Πλευρῶν διδομένης, τὸ ζητούμενον συνίσταται Τρίγωνον. Δεῆσαν δὲ ἐπὶ τῆς Βάσεως βγ δοθείσης Ἰσοσκελὲς τοιοῦτον συστήσασθαι, ὅπερ ἀμέλει ἑκατέρα τῶν πρὸς τὴν Βάσιν Γωνιῶν διπλασίων εἴη τῆς λοιπῆς, πρῶτον ἐπὶ τῆς βγ ὡς ἐπὶ σκέλους, τὸ Τρίγωνον βγδ (11) κατασκευαστέον, οὗ κορυφὴ μὲν ἡ γ, Βάσις δὲ ἡ βδ, εἶτα πρὸς τῷ γ Σημείῳ τῆς βγ, Γωνίαν θετέον τὴν ὑπὸ βγα ἴσην (2) τῇ γβδ, καὶ προεκβληθείσης τῆς βδ ὥστε συμπεσεῖν τῇ γα κατὰ τὸ α, συστήσεται τὸ αβγ Τρίγωνον κατὰ τὸ ἐπιταχθὲν ἐπὶ τῆς δοθείσης Βάσεως βγ.

Ἐπειδὴ γὰρ αἱ ὑπὸ βδγ καὶ αγβ, ὡς τῇ αὐτῇ τρίτῃ, ἴσαι ἐτέθησαν (13) καὶ ἀλλήλαις, καὶ τούτων ἡ μὲν ὑπὸ βδγ (14) ἴση δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ

(1) *ΙΑ.* τοῦ β΄. (2) Α. τοῦ δ΄. (3) *Ε.* τοῦ δ΄. (4) *ΛΖ.* τοῦ γ΄. (5) *ΛΒ.* τοῦ γ΄. (6) *Ε.* τοῦ α΄. (7) *ΛΒ.* τοῦ α΄. (8) ς. τοῦ α΄. (9) Ἐκ κατασ. (10) *Ε.* τοῦ α΄. (11) *Διὰ* τοῦ αυωτ. Προβλ. (12) *ΚΓ.* τοῦ α΄. (13) Ἐκ κατ. (14) *ΛΒ.* τοῦ α΄.

ἀπεναντίον τῇ τε α καὶ τῇ ὑπὸ δγα, ἡ δὲ ὑπὸ βγα ἴση ταῖς ὑπὸ βγδ καὶ δγα, κοινῆς ἄρα ἀφαιρεθείσης τῆς ὑπὸ δγα, ἔςαι ἡ ὑπὸ βγδ ἴση τῇ α· ταύτης ἄρα διπλασίων ἑκατέρα τῶν πρὸς τὴν Βάσιν τοῦ μείζονος Τριγώνου ἔςαι, ὅτι κἀκείνης.

Πορίσματα.

Ἑκατέρα τῶν πρὸς τῇ Βάσει Γωνιῶν β καὶ γ τοῦ ἤδη συςάντος ἰσοσκελοῦς Τριγώνου, δυσὶ πεμπτημορίοις δυοῖν Ὀρθῶν ἴση ἐςὶ, τουτέςι τέσσαρσι πεμπτημορίοις μιᾶς Ὀρθῆς, ἡ δὲ λοιπὴ α ἕν ἐςι πεμπτημόριον δυοῖν Ὀρθῶν, ἤτοι πεμπτημόρια δύο μιᾶς. Δῆλον δὲ τὸ λεγόμενον ἔκ τε τῆς ἀνὰ χεῖρας Προτάσεως, καὶ ἐκ τῆς ΛΒ'. τοῦ πρώτου. Α'.

Ἐπειδὴ οὖν μέτρον δυοῖν Ὀρθῶν τὸ Ἡμικύκλιον ἐςὶ, μοιρῶν ἀμέλει 180, ἔςαι δὴ τὸ μὲν τῶν δύο Ὀρθῶν πεμπτημόριον, οἵα ἡ α Γωνία μοιρ. 36. τὰ δὲ δύο πεμπτημόρια τῶν δύο Ὀρθῶν, οἵα ἡ κατὰ τὸ β Γωνία, μοιρ. 72. Καὶ ἐπεὶ ἡ Ὀρθὴ μοιρ. ἐςιν 90, τὸ ταύτης πεμπτημόριον μοιρ. ἐςὶ 18· ἄρα ἡ κατὰ τὸ α Γωνία (μοιρ. οὖσα 36) δύο πεμπτημόρια μιᾶς Ὀρθῆς περιέχει. Ἡ δὲ κατὰ τὸ β Γωνία (μοιρ. οὖσα 72) τέτταρα πεμπτημόρια μιᾶς Ὀρθῆς, ἢ δύο πεμπτημόρια δυοῖν περιέχει· τὰ γὰρ δύο πεμπτημόρια δυοῖν Ὀρθῶν τέτταρα ἐςὶ μιᾶς, καὶ τὸ πεμπτημόριον δυοῖν δύο μιᾶς. Καὶ ἐν γένει διὰ τῶν μορίων τῶν Ὀρθῶν ἐπιλογιζόμενοι τὰς Γωνίας, τῇ ἡμισείᾳ τοῦ τῶν Ὀρθῶν ἀριθμοῦ, τὸν ἀριθμὸν τῶν μορίων διπλασιάζομεν, καὶ ἀνάπαλιν. Οἷον ἐάν τις Γωνία ἓξ Ὀρθῆς πεμπτημόρια περιέχουσα τύχῃ, περιέξει πάντως ἡ αὐτὴ δυοῖν Ὀρθῶν τρία πεμπτημόρια.

Ἐπεὶ δὲ ἡ ὑπὸ βαγ (ὅρα τὸ Σχ. τῆς Προτ.) δυοῖν Ὀρθῶν ἐςὶ πεμπτημόριον, ἤτοι δύο δεκατημόρια, μοιρ. ἀμέλει 36, ἔςαι πάντως ἡ αὐτὴ δεκατημόριον Ὀρθῶν τεττάρων, ἤτοι τῆς ὁλοσχεροῦς τοῦ Κύκλου Περιφερείας, μοιρ. 360. Ἔνθεντοι ἡ Εὐθεῖα βγ Πλευρὰ ἐςὶ τοῦ κανονικοῦ Δεκαγώνου τοῦ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγραφομένου, οὗ Ἡμιδιάμετρος ἡ Εὐθεῖα αβ, εἴτουν ἡ αγ. Β'.

Ἐὰν ἡ τοῦ Κύκλου Ἡμιδιάμετρος αβ (Σχ. τῷ αὐτ.) οὕτω τμηθῇ κατὰ τὸ δ, ὥςε τὸ ὑπὸ αβδ Ὀρθογώνιον, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης Ἡμιδιαμέτρου καὶ τοῦ ἐλάσσονος Τμήματος, ἴσον εἶναι τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τοῦ δα μείζονος Τμήματος, ἔςαι τὸ μεῖζον τῶν Τμημάτων ἡ Πλευρὰ τοῦ Δεκαγώνου τοῦ εἰς τὸν Κύκλον, οὗ Ἡμιδιάμετρος ἡ αβ, ἐγγραφομένου. Φανερὸν γὰρ τῇ ἀποδείξει τῆς ἐν χερσὶ Προτάσ., ὅτι τὸ αδ Τμῆμα ἴσον ἐςὶ τῇ Βάσει βγ. Γ'.

Ἐὰν Κέντρῳ μὲν τῷ γ, Διαςήματι δὲ τῷ γβ ἢ γδ Κύκλος γραφῇ, ἐ- Δ'.

πειδὴ τὸ βγδ Ἰσοσκελὲς τῷ βαγ Ἰσοσκελεῖ ἐςὶν ἰσογώνιον (1), ἔςαι δὴ ἡ Βάσις βδ Πλευρὰ τȣ̃ κανονικȣ̃ Δεκαγώνȣ (2), ὅπερ ἂν εἰς τὸν Κύκλον ἐγγραφείη. Καὶ ἐπεὶ ἡ τȣ̃ Κύκλȣ Ἡμιδιάμετρος γβ = (3) αδ Πλευρά ἐςι τȣ̃ Ἐξαγώνȣ (4), ὅπερ ἂν εἰς τὸν αὐτὸν Κύκλον ἐγγραφείη, ἐὰν ἄρα Εὐθεῖα τις οἷον ἡ αβ, ὕτω τμηθῇ κατὰ τὸ δ, ὥςε τὸ ὑπὸ αβδ Ὀρθογώνιον, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης αβ ϗ τȣ̃ ἐλάσσονος Τμήματος βδ, ἴσον εἶναι τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τȣ̃ μείζονος Τμήματος αδ, ἔςαι τὸ μὲν μεῖζον τῶν Τμημάτων αδ Πλευρὰ τȣ̃ Ἐξαγώνȣ, τὸ δὲ ἔλαττον δβ Πλευρὰ τȣ̃ Δεκαγώνȣ τȣ̃ εἰς τὸν αὐτὸν Κύκλον ἐγγραφομένȣ. Καὶ αὕτη ἐςὶν ἡ παρὰ τῷ Εὐκλείδῃ ἐν Βιβλ. ΙΓ΄. Πρότ. Θ.

Ε΄. Ἐντεῦθεν δὲ παιδευόμεθα τὴν τȣ̃ Κύκλȣ τεταρτημορικὴν Περιφέρειαν εἰς μέρη πέντε ἴσα ἀλλήλοις, ϗ (τῆς δίχα τομῆς συνεχιζομένης (5)) εἰς μέρη 10, 20, 40, κξ. τέμνειν. Ἐπειδὴ γὰρ ἡ βγ Εὐθεῖα Πλευρὰ ἐςὶ τȣ̃ κανονικȣ̃ Δεκαγώνȣ (6) τȣ̃ εἰς τὸν Κύκλον, ȣ̃ Κέντρον μὲν τὸ α, Ἡμιδιάμετρος δὲ ἡ αβ, ἐγγραφομένȣ, ἔςαι δὴ τὸ Τόξον βγ δεκατημόριον τῆς ὅλης Περιφερείας, ἤτοι πεμπτημόριον τῆς Ἡμιπεριφερείας. Ἔνθεντοι ἡ ἡμίσεια τȣ̃ Τόξȣ βγ δεκατημόριον ἔςαι τῆς Ἡμιπεριφερείας, πεμπτημόριον δὲ τῆς τεταρτημορικῆς.

Πρότασις ΙΑ.

„Εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον Πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε ϗ ἰσογώνιον „(ἤτοι κανονικὸν) ἐγγράψαι.

Σχ. 291. Συνεςάθω Τρίγωνον (7), ȣ̃ ἑκατέρα τῶν πρὸς τῇ Βάσει Γωνιῶν διπλασίων εἴη τῆς λοιπῆς, τῷ δὲ συςαθέντι Ἰσογώνιον ἐγγεγράφθω (8) εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον τὸ γαδ, ϗ τȣ̃ ἐγγραφέντος αἱ πρὸς τὴν Βάσιν Γωνίαι ὑπὸ αγδ, αδγ δίχα (9) τετμήσθωσαν διὰ τῶν γε ϗ δβ Εὐθειῶν, τῶν τῇ Περιφερείᾳ κατὰ τὰ Σημεῖα ε ϗ β προσπιπτȣσῶν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αβ, βγ, γδ, δε, εα.

Ἐπεὶ οὖν αἱ Γωνίαι ζ, η, θ, ι, κ ἴσαι (10) ἀλλήλαις εἰσὶ, ϗ αἱ Περιφέρειαι πάντως αἷς βεβήκασιν αε, εδ, βγ, αβ, γδ (11), ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, ϗ δὴ ϗ αἱ τὰς ἴσας Περιφερείας ὑποτείνȣσαι Εὐθεῖαι (12) ἴσαι

(1) *Διὰ τὴν ἀπόδ. τῆς Ι. τȣ̃ παρόντ.* (2) *Πόρ. β΄. τῆς παρȣ́σ.* (3) *Διὰ τὴν κατ. ταύτ. τῆς Ι.* (4) *Α. Πόρ. τῆς ΙΕ. τȣ̃ δ΄.* (5) *Λ. Βιβ. γ΄.* (6) *Πόρ. Β. ταύτ.* (7) *Κατὰ τὴν ἀνατ.* (8) *Β. τȣ̃ δ΄.* (9) *Θ. τȣ̃ α΄.* (10) *Ἐκ κατ.* (11) *Κς. τȣ̃ γ΄.* (12) *ΚΘ. τȣ̃ γ΄.*

ἀλλήλαις εἰσὶν, ὥςε τὸ Πεντάγωνον ἐςὶν ἰσόπλευρον· ἀλλ' ἔςι δὴ ϗ ἰσογώνιον, ἐπεὶ αἱ τέτε Γωνίαι βαε, αεδ, κτ. βεβήκασιν ἐπὶ ἴσων (1) Περιφερειῶν βγδε, αβγδ, κξ. γέγονεν ἄρα (2) τὸ ἐπιταχθέν.

Πορίσματα.

Ἡ τε ἰσοπλεύρε τε ϗ ἰσογωνίε Πενταγώνε Γωνία ἴση ἐςὶν ἓξ πεμπτημορίοις μιᾶς Γωνίας Ὀρθῆς (ἤτοι (3) τρισὶ πεμπτημορίοις δυοῖν Ὀρθῶν). Ἐπειδὴ γὰρ αἱ πρὸς τῷ α τρεῖς Γωνίαι ἴσαι εἰσὶν ὡς ἐπὶ ἴσων Περιφερειῶν βγ, γδ, δε βεβηκεῖαι, ἡ δὲ μεταξὺ ἴση ἐςὶ δυσὶ (4) πεμπτημορίοις Ὀρθῆς, φανερὸν ὅτι αἱ τρεῖς ἅμα (ταυτὸν δὲ εἰπεῖν ἡ τε Πενταγώνε Γωνία) ἴση ἔςαι ἓξ πεμπτημορίοις μιᾶς Ὀρθῆς.

Ὥςε ἐπεὶ τὸ πεμπτημόριον τῆς Ὀρθῆς μοιρ. ἐςὶ 18, ἔςαι ἡ τε Πενταγώνε Γωνία μοιρ. 18 ἑξάκις, ἤτοι μοιρ. 108. ἐν ᾧ δὲ φαμὲν ἓξ πεμπτημόρια Ὀρθῆς τὴν τε Πενταγώνε Γωνίαν περιέχειν, δῆλον ὅτι πεμπτημορίῳ Ὀρθῆς, τὴν Ὀρθὴν αὐτὴν ὑπερέχειν ἀποφαινόμεθα.

Ἐκ δὲ τῆς κατὰ τὴν ἐπίλυσιν τε Προβλήματος κατασκευῆς φανερὸν γίνεται, ϗ ὅπως ἐπὶ τῆς δοθείσης Εὐθείας γδ Πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε, ϗ ἰσογώνιον ἔνι συςήσαθαι. Συνεςάθω γὰρ ἐπ' αὐτῆς ὡς ἐπὶ Βάσεως (5) τὸ ἰσοσκελὲς γαδ, οὗπερ ἑκατέρα τῶν πρὸς τῇ Βάσει Γωνιῶν διπλασίων εἴη τῆς λοιπῆς, καὶ περὶ αὐτὸ συςαθὲν Κύκλος (6) γεγράφθω καὶ δίχα τετμήθωσαν (7) αἱ πρὸς τῇ Βάσει Γωνίαι δι Εὐθειῶν τῶν γε, δβ τῇ Περιφερείᾳ προσπιπτεσῶν κατὰ Σημεῖα τὰ ε ϗ β, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αβ, βγ, γδ, δε, εα. Οὕτω ϗ γὰρ Πεντάγωνον συςήσεται ἰσόπλευρόν τε ϗ ἰσογώνιον ἐπὶ τῆς δοθείσης Εὐθείας γδ, ὡς ἐκ τῆς ἀποδείξεως τῆς Προτάσεως δῆλον ἐςί. Ἀλλὰ καὶ δι ἄλλης τετο μεθόδε συνίςαθαι τὸ ἐφεξῆς διδάξεται Πρόβλημα.

Σχόλιον Α'.

Ἐν γένει μὲν οὖν τῶν κανονικῶν Σχημάτων τὰ μὲν περιττόπλευρα ἐγγράφεσθαι πέφυκεν εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον δι ἰσοσκελῶν Τριγώνων, ὧν αἱ πρὸς τῇ Βάσει ἴσαι Γωνίαι, τῶν κατὰ κορυφὴν τυγχάνεσιν ἔσαι πολλαπλα-

(1) *ΚΖ.* τε *γ'.* (2) *Ὅρ. γ'.* ϗ *α'.* (3) *Α'. Πόρ.* τῆς ἀνωτ. (4) *Αὐτ.* (5) *Σχολ.* τῆς *Ι.* τε *δ'.* (6) *Ε.* τε *δ'.* (7) *Θ.* τε *α'.*

σίονες, τὰ δὲ ἀρτιόπλευρα δι' ἰσοσκελῶν Τριγώνων, ὧν αἱ πρὸς τῇ Βάσει ἴσαι Γωνίαι, τῶν κατὰ κορυφὴν εἰσὶ πολλαπλασίονες ἡμιόλειοι. Οἷον ἐπὶ τοῦ Ἰσοσκελοῦς αγδ, ἐὰν ἡ Γωνία γ, ἢ δ τριπλασίων ᾖ τῆς α, ἡ γδ ἔσται Πλευρὰ Ἑπταγώνου· ἐὰν δὲ τετραπλασίων, Ἐννεαγώνου κξ. Ἐὰν δὲ ἡ γ ἢ δ ᾖ 1½ τῆς α, ἔσται ἡ γδ Πλευρὰ Τετραγώνου, καὶ ἐὰν ἡ γ ἢ δ ᾖ 2½ τῆς α, ὑποτενεῖ ἡ γδ ἑκτημόριον τῆς ὅλης Περιφερείας· καὶ ἐὰν ἡ γ, ἢ δ ᾖ 3½, ἔσται ἡ γδ Πλευρὰ Ὀκταγώνου, κξ. Καθάπερ γὰρ ἐπὶ τοῦ τῆς ἐν χερσὶ Προτάσεως Ἰσοσκελοῦς, τῶν πρὸς τῇ Βάσει διχοτομουμένων Γωνιῶν τὰ μέρη, συνάμα τῇ κατὰ κορυφὴν Γωνίᾳ βεβήκασιν ἐπὶ πέντε ἴσοις Τόξοις τῆς ὅλης Περιφερείας, διὸ καὶ τοῦ τοιοῦδε Τριγώνου εἰς τὸν Κύκλον ἐγγραφομένου, ἡ Βάσις Πλευρὰ ἐστὶ τοῦ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγραφομένου τὸν αὐτὸν ἰσοπλεύρου τε καὶ ἰσογωνίου Πενταγώνου. Τὸν αὐτὸν δὴ τρόπον, καὶ ἐὰν ἡ ἑτέρα τῶν πρὸς τῇ Βάσει τοῦ Ἰσοσκελοῦς Γωνιῶν, τριπλασίων τύχῃ τῆς κατὰ κορυφὴν, τῶν πρὸς τῇ Βάσει τριχοτομουμένων Γωνιῶν τὰ μέρη συνάμα τῇ κατὰ κορυφὴν Γωνίᾳ, ἐπὶ Τόξων ἑπτὰ βεβήσονται ἰσαρίθμων τοῖς μέρεσι τῆς ὅλης Περιφερείας, διὸ καὶ τοῦ τοιοῦδε Τριγώνου εἰς τὸν Κύκλον ἐγγραφομένου ἡ Βάσις Πλευρὰ ἔσται τοῦ κανονικοῦ Τετραγώνου, ὅπερ ἂν εἰς τὸν αὐτὸν Κύκλον ἐγγραφείη. Ὡσαύτως δὲ δῆλον ἔσται καὶ περὶ τῶν λοιπῶν. Ἔστω καὶ γὰρ α ὁ ἀριθμὸς τῶν Πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ Σχήματος ὅπερ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγράψαι δεῖ, ἔσται δὲ ἡ τοῦ εἰς ἐγγραφὴν τούτου ὑπουργοῦντος Ἰσοσκελοῦς Γωνία πρὸς τῇ Βάσει, πρός γε τὴν κατὰ κορυφὴν Γωνίαν τοῦ αὐτοῦ, ὡς $\frac{\alpha - 1}{2}$ πρὸς 1· ὥστε ἐὰν Μονὰς ἀντὶ τῆς κατὰ κορυφὴν Γωνίας ὑποτεθῇ, τὰς πρὸς τῇ Βάσει Γωνίας τοῦ Ἰσοσκελοῦς, συνάμα τῇ κατὰ κορυφὴν διὰ τῶνδε δὴ τῶν ἀριθμῶν, ἐπὶ τῇ ἐγγραφῇ οὑτινοσοῦν Σχήματος κανονικοῦ ἐκθετέον. Ἀμέλειτοι ἐπὶ μὲν τοῦ

Ἰσοπλεύρου Τριγώνου	$1 + 1 + 1 = 3.$
Ἐπὶ δὲ τοῦ Τετραγώνου	$1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + 1 = 4.$
Ἐπὶ δὲ τοῦ Πενταγώνου	$2 + 2 + 1 = 5.$
Ἐπὶ δὲ τοῦ Ἑξαγώνου	$2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + 1 = 6.$
Ἐπὶ δὲ τοῦ Ἑπταγώνου	$3 + 3 + 1 = 7.$
Ἐπὶ δὲ τοῦ Ὀκταγώνου	$3\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} + 1 = 8.$
Ἐπὶ δὲ τοῦ Ἐννεαγώνου	$4 + 4 + 1 = 9.$
Ἐπὶ δὲ τοῦ Δεκαγώνου	$4\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} + 1 = 10.$

Καὶ ἐπὶ τῶν ἑξῆς δὲ ὡσαύτως χωρητέον.

Σχόλιον Β΄.

Εὐμήχανος μὲν ἡ κατ' Εὐκλείδην τῦ Πενταγώνυ εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον ἐγγραφὴ, προχειροτέρα δὲ πολλῷ ἡ κατὰ Πτολεμαῖον ἐν πρώτῳ Βιβλ. τῦ Ἀλμαγέςυ· ἔςι δὲ τοιαύτη.

Ἤχθωσαν αἱ Διάμετροι εδ, βζ πρὸς ὀρθὰς τεμνόμεναι κατὰ τὸ α, ϗ δίχα (1) τετμήσθω ἡ αδ Ἡμιδιάμετρος κατὰ τὸ γ, ϗ Κέντρῳ μὲν τῷ γ, Διαςήματι δὲ τῷ γβ Κύκλος γεγράφθω, τέμνων τὴν εδ Διάμετρον κατὰ τὸ η. Οὕτω ϗ γὰρ ἡ ἐπιζευγνυμένη Εὐθεῖα ηβ Πλευρά ἐςι τῦ Πενταγώνυ, ἡ δὲ αη τῦ Δεκαγώνυ. ϰ. 292.

Ἀλλ' ἐνταῦθα τὴν δεῖξιν ἐπαγαγεῖν τῦ λεγομένυ ὐχ οἷον τε, ἅτε δὴ ἐκ τῆς Ι΄. τῦ κατ' Εὐκλείδην ΙΓ΄. Βιβλίυ ἐξηρτημένην, ἣν ὅρα παρὰ τῷ Κλαβίῳ ἐν τῷ Σχολίῳ τῷ μετὰ τὴν Ι΄. τῦ ΙΓ΄. Βιβλίυ.

Ἐπὶ γῦν τῆς Ι΄. ἐκείνης τῦ κατ' αὐτὸν ΙΓ΄. ἀποδείκνυσιν ὁ Εὐκλείδης, ὅτι ἡ Πλευρὰ τῦ εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον ἐγγεγραμμένυ ἰσοπλεύρυ τε ϗ ἰσογωνίυ Πενταγώνυ, ἴσα δύναται τῇ τε τῦ Ἑξαγώνυ Πλευρᾷ, ϗ τῇ τῦ Δεκαγώνυ τῶν εἰς τὸν αὐτὸν Κύκλον ἐγγραφομένων. Ἀλλ' ὅτι δὴ τῦ Ἑξαγώνυ Πλευρὰ τῇ τῦ Κύκλυ Ἡμιδιαμέτρῳ ἴση ἐςὶ, φανερὸν ἔςαι ἐκ τῦ Α΄ Πορίσματος τῆς ΙΕ΄. τῦ Δ΄. Ὅτι δὲ ϗ ἡ τῦ εἰς τὸν αὐτὸν ἐγγραφομένυ Κύκλον Δεκαγώνυ Πλευρὰ, τὸ μεῖζον ἐςὶ τῶν Τμημάτων τῆς Ἡμιδιαμέτρου, τῆς κατὰ τὴν ΙΑ΄. Πρότ. τῦ Β΄. Βιβλίυ τετμημένης, φανερὸν ϗ τῦτο ἤδη ἐγένετο ἐν τῷ Γ΄. Πορίσματι τῆς Ι΄. τῦ παρόντος Δ΄. Ἀλλὰ ϗ ἐπὶ τῦ Τριγώνυ αβη τῦ ὀρθογωνίυ κατὰ τὸ α, ὅτι μὲν ἡ αβ Πλευρὰ Ἡμιδιάμετρός ἐςι τῦ Κύκλυ δῆλον· ὅτι δὲ ϗ ἡ αη Πλευρὰ, τὸ μεῖζον ἐςὶ Τμῆμα τῆς Ἡμιδιαμέτρυ αε, τῆς κατὰ τὴν ΙΑ΄. τῦ Β΄. τετμημένης, ἐπιγνοίη τις ἂν τὴν ἐπὶ τῆς ΙΑ΄. τῦ Β΄. κατασκευὴν, τῇ τῦ ἐν χερσὶ Σχολίυ παραθέμενος. Ἄρα διὰ τὴν Ι΄. τῦ ΙΓ. ϗ τὴν ΜΖ΄. τῦ Α΄. ἡ βη ἔςαι ἡ Πλευρὰ τῦ Πενταγώνυ τῦ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγραφομένυ, ἡ δὲ τῆς Ι΄. τῦ ΙΓ΄. ἀπόδειξις κατὰ τὸ τέλος τῦ ἕκτυ Βιβλίυ παρατεθείσεται.

Ἡ δὲ παράθεσις τῶν κατασκευῶν τῆς τε ΙΑ΄. τῦ Β΄., ϗ τῆς κατὰ τὸν Πτολεμαῖον ἐπιλύσεως τῦ Προβλήματος, ὕτω γινέσθω· ἐπὶ μὲν ἐκείνης ἡ αβ (2) ἴση ὖσα τῇ αε, ϗ πρὸς ὀρθὰς δίχα ἐτέμνετο κατὰ τὸ θ, καὶ ἐπεζεύγνυτο ἡ θε, ϗ προήγετο ἡ θα κατὰ τὸ κ, ὡς εἶναι τὴν θκ ἴσην τῇ θε, ϰ. 293.

---

(1) Ι. τῦ ά.

ᾳ τῷ μέρει τῆς προαχθείσης τῷ ακ ἴση ἀπετέμνετο ἀπὸ τῆς αε ἡ αη, ᾳ ὅτω τὸ ἀπὸ τῆς αη Τετράγωνον ἴσον τῷ ὑπὸ αεη Ὀρθογωνίῳ ἐδείκνυτο.

Ἐπὶ δὲ ταύτης παραπλησίως (4) $\alpha\beta = \alpha\varepsilon = \alpha\delta$· δίχα δὲ τέτμηται ἡ αδ κατὰ τὸ γ, ᾳ ἐπεζεύχθη ἡ γβ, τὸ δὲ ταυτὸν ἐςιν ὡς εἰ δίχα τμηθείη ἡ αβ κατὰ τὸ θ, ᾳ ἐπιζευχθείη ἡ εθ. Ἐπεὶ δὲ ἡ $\varepsilon\vartheta = \beta\gamma$ (ἐν γὰρ τοῖς αβγ, αθε Τριγώνοις $\alpha\gamma = \alpha\vartheta$, ὅτι τῶν ἴσων ἡμίσειαι, καὶ $\alpha\beta = \alpha\varepsilon$, ὅτι τῦ αὐτῦ Κύκλυ Ἡμιδιάμετροι, ἤτε ὑπὸ $\gamma\alpha\beta = \vartheta\alpha\varepsilon$, ἄρα ᾳ $\beta\gamma = \vartheta\varepsilon$), ἐὰν ληφθῇ $\vartheta\kappa = \vartheta\varepsilon$, ᾳ $\gamma\beta = \gamma\eta$, ἔςαι $\gamma\eta = \vartheta\kappa$, ἀλλ' $\alpha\gamma = \alpha\vartheta$, ἄρα $\alpha\kappa = \alpha\eta$. Καὶ ὡσαύτως ἄρα κἀνταῦθα, κατὰ τὴν τῆς ΙΑ΄. τῦ Β΄. κατασκευὴν, τὸ ἀπὸ τῆς αη Τετράγωνον ἴσον τῷ ὑπὸ αεη Ὀρθογωνίῳ.

Πρόβλημα.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης Εὐθείας (αβ) Πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε ᾳ ἰσογώνιον (ὅπερ ἐςι κατὰ τὰς ὕςερον εἰπεῖν, τεταγμένον) ὅτω συςήσεις.

σχ. 294. Τῆς αβ τμηθείσης (1) κατὰ τὸ γ, ὡς τὸ Ὀρθογώνιον ὑπὸ αβγ ἴσον εἶναι τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ αγ, ἀπὸ τῆς αβ ἑκατέρωθεν προαχθείσης, ληφθήτωσαν αδ ᾳ βε ἴσαι ἑκατέρα τῷ μείζονι τμήματι αγ, καὶ Κέντροις α ᾳ δ, Διαςήματι δὲ τῷ αβ, γραφήτωσαν Κύκλοι τέμνοντες ἀλλήλυς κατὰ τὸ ζ· ᾳ πάλιν Κέντροις β ᾳ ε, Διαςήματι τῷ αὐτῷ γραφήτωσαν ὁμοίως Κύκλοι ἀλλήλυς τέμνοντες κατὰ τὸ η· καὶ τέως Κέντροις τοῖς ζ ᾳ η, ᾳ τῷ αὐτῷ Διαςήματι αβ, Κύκλοι γραφήτωσαν ἀλλήλυς τέμνοντες κατὰ τὸ ι· Τὰ γῦν Σημεῖα α, ζ, ι, η, β, ἐπιζευγνύμενα δώσει τὸ τεταγμένον Πεντάγωνον (τυτέςι τὸ Ἰσόπλευρόν τε ᾳ Ἰσογώνιον) ἐπὶ τῆς δοθείσης Εὐθείας αβ.

Καὶ ἐκ μὲν τῆς κατασκευῆς δῆλον ὅτι Ἰσόπλευρον· εἶναι δὲ ᾳ Ἰσογώνιον ὧδε δειχθήσεται. Ἀχθείσης τῆς δζ, τὸ αδζ ἔςαι (2) Ἰσοσκελὲς, ἐπεί τε ἡ τύτυ Βάσις αδ, τὸ μεῖζον Τμῆμα ἐςὶ τῆς δζ Πλευρᾶς, τῆς κατ' ἄκρον ᾳ μέσον λόγον (3) τμηθείσης (ἴση γὰρ ἡ δζ τῇ αβ, ᾳ ἡ αδ τῇ αγ), ἡ ἄρα ὑπὸ δαζ ἴση ἐςὶ δυσὶ πεμπτημορίοις (4) δυεῖν Ὀρθῶν. Ὥςε ἡ λοιπὴ ὑπὸ ζαβ ἴση ἔςαι (5) τρισὶ πεμπτημορίοις δυεῖν Ὀρθῶν, ὅπερ ἐςὶν ἓξ πεμπτημορίοις μιᾶς Ὀρθῆς, ταύτῃ δέ τοι ᾳ Γωνία ἐςὶν αὐτὴ (6) τῦ Πενταγώνυ τῦ τεταγμένυ. Ὡσαύτως δὲ δειχθήσεται ὅτι ᾳ ἡ ὑπὸ ηβα, πεμπτημορίοις ἓξ μιᾶς Ὀρθῆς ἰσυμένη, τῇ ὑπὸ ζαβ ἴση ἐςί. Διὸ ᾳ τὰς λοιπὰς ἐπάναγκες

---

(1) *ΙΑ. τῦ β΄.* (2) *Ἐκ κατ.* (3) *Παράθυ τὴν Λ. τῦ ς΄. μετὰ τῆς ΙΑ. τῦ β΄.* (4) *Λ. Πόρ. τῆς Ι. τῦ δ΄.* (5) *ΙΓ. τῦ α΄.* (6) *Λ. Πόρ. τῆς ΙΑ. τῦ δ΄.*

(λέγω τὰς ζ ϗ ι ϗ η) ἴσας ταύταις εἶναι, ὡς δῆλον ἐκ τῆς Η'. τȣ̃ Α'., τῆς ζη ὑποτείνεσθαι νοȣμένης.

Α'χθεισῶν γὰρ τῶν ζη, ζβ, διὰ τὰ ἐπὶ ἴσων Βάσεων αδ ϗ βε ἴσα Τρίγωνα αζδ, εβη, παράλληλοι ἔσονται (1) αἱ Εὐθεῖαι ζη, δε· ἔνθεντοι αἱ ἐναλλὰξ Γωνίαι ὑπὸ δαζ, αζη, ϗ ὑπὸ εβη, βηζ (2) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, ϗ τȣ́των ἑκάςη δυσὶ πεμπτημορίοις δυεῖν Ο'ρθῶν ἴση ἔςαι· ἐπεὶ δὲ ἐπὶ τȣ̃ Ι'σοσκελȣ̃ς αζβ, ἡ κατὰ κορυφὴν α τρισὶ πεμπτημορίοις δυεῖν Ο'ρθῶν (3) ἴση ἐςὶν, ἑκατέρα τῶν πρὸς τὴν Βάσιν ἑνὶ πεμπτημορίῳ ἴση ἔςαι. Διὸ ϗ τῆς βζ δίχα τεμνȣ́σης τὴν ὑπὸ αζη, ἡ ὑπὸ ζβη (ἐπεὶ αβη — αβζ ἀπὸ τριῶν, πεμπτημόριον ἓν ἀφήρηται) περιέξει πεμπτημόρια δύω, ϗ ἡ ὑπὸ ζηβ δύω, ϗ ἡ ὑπὸ βζη ἕν. Καὶ τοίνυν τȣ̃ βζη Ι'σοσκελȣ̃ς ὄντος (4), τὰ βαζ, ζιη, Ι'σόπλευρά τε ἀλλήλοις ἐςὶ. ϗ δη (5) ϗ Ι'σογώνια, ἥτε ὑπὸ ζιη περιέξει δυεῖν Ο'ρθῶν τρία πεμπτημορια, ϗ ὑπὸ ιζη ἕν, ϗ ὑπὸ ιηζ ἕν· ὥςε αἱ ὑπὸ ιζη, ηζα ἅμα ληφθεῖται, πεμπτημόρια συςήσȣσι τρία· ὡσαύτως δὲ δειχθήσεται ὅτι ϗ ἡ ὑπὸ ιηβ τρία πεμπτημόρια περιέχȣσα ἐςί. Τὸ ἄρα Πεντάγωνον ἐςὶν ἰσογώνιον, ϗ συνέςη ȣ̃τως ἡμῖν ἐπὶ τῆς δοθείσης Εὐθείας αβ Πεντάγωνον τεταγμένον. Ο. Ε. Π.

Καὶ ἄλλως δὲ ἐπὶ τῆς δοθείσης Εὐθείας αβ Πεντάγωνον τεταγμένον συςήσεται, ἐὰν ἐπὶ τῆς αβ ὡς ἐπὶ Βάσεως, ἐξ ἀντιθέτȣ ἰσοσκελὲς Τρίγωνον συςῇ τὸ αβχ, ȣ̃ ἡ πρὸς τὴν Βάσιν Γωνία ὑπὸ βαχ ϗ αβχ διπλασίων ᾖ τῆς πρὸς τῇ κορυφῇ χ. Προαχθεισῶν γὰρ τῶν χα, χβ ἐπὶ ζ ϗ η, ὥςε τὰς αζ, βη ἴσας εἶναι τῇ αβ ἑκατέραν, ϗ Κέντροις τοῖς ζ ϗ η, ϗ Διαςήμασι τοῖς αζ, βη, Κύκλων γραφέντων κατὰ δισσὰ Σημεῖα τεμνομένων, ὧν πορρωτέρω τῆς αβ τὸ ι, ϗ ἐπιζευχθεισῶν τῶν ζι ϗ ηι, φημὶ δὴ ὅτι συνέςη κτ. Η' δὲ δεῖξις παραπλησία ἐςὶ τῇ ἀνωτέρω, ἀχθείσης γὰρ τῆς αη, ἡ τῶν Εὐθειῶν αβ, ζη Παραλληλία, τῇ τῶν Τριγώνων αβη, ζαβ (6) ἰσότητι ἀποδειχθήσεται (7). x. 295.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΒ.

„Περὶ τὸν δοθέντα Κύκλον Πεντάγωνον περιγράψαι ἰσόπλευρόν τε ϗ „ἰσογώνιον.

Ε'γγραφήτω δὴ Πεντάγωνον ὡς ἀνωτέρω ηθικμ ἰσόπλευρόν τε ϗ ἰσογώ- x. 296.

---

(1) M. τȣ̃ ά. (2) KZ. τȣ̃ ά. (3) ΛΒ. τȣ̃ ά. (4) ς. τȣ̃ ά. (5) Η. τȣ̃ ά. (6) Δ. τȣ̃ ά. (7) M. τȣ̃ ά.

νιον, ϗ ἀχθήτωσαν Ἁπτόμεναι κατὰ τὰ Σημεῖα η, θ, ι, κ, μ, συμπίπτȣσαι κατὰ β, γ, δ, ε, ζ. Οὕτω γὰρ γενήσεται τὸ ζητȣμενον.

Ἀχθήτωσαν ἀπὸ τȣ̃ Κέντρȣ Εὐθεῖαι αη, αβ, αθ, αγ, αι, ϗ ἐπεὶ αἱ βη, βθ ἀπὸ τȣ̃ αὐτȣ̃ Σημείȣ β ἅπτονται τȣ̃ Κύκλȣ, ἴσαι (1) ἔσονται· τῶν δὲ Τριγώνων ηαβ, θαβ ἀμοιβαδὸν Ἰσοπλεύρων ὄντων, ἴσαι ἔσονται (2) αἱ Γωνίαι, ἡ μὲν ξ τῇ ο, ἡ δὲ π τῇ σ. Ἐντεῦθεν τοι ϗ ὅλη ἡ κατὰ τὸ β διπλασίων ἔςαι τῆς ο, ὅλη δὲ ἡ ὑπὸ θαη διπλασίων ἔςαι τῆς σ. Διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον ϗ αἱ Γωνίαι, ἤτε κατὰ τὸ γ, ϗ ἡ ὑπὸ θαι διπλασίονές εἰσιν, ἡ μὲν τῆς τ, ἡ δὲ τῆς υ. Ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ ηαθ ϗ θαι ἴσαι (3) εἰσὶ, βεβήκασι γὰρ ἐπὶ ἴσαις Περιφερείαις ταῖς ηθ, θι (4), ἄρ᾽ οὖν ϗ τȣ́των αἱ ἡμίσειαι σ ϗ υ ἴσαι εἰσί. Ἐπεὶ τοίνυν ἐπὶ τῶν Τριγώνων βαθ, γαθ, αἱ δύο Γωνίαι σ ϗ υ ἴσαι εἰσὶ, ϗ αἱ πρὸς τῷ θ δύω (5) Ὀρθαὶ, ἤτε αθ Πλευρὰ κοινὴ, ἔςαι ϗ (6) βθ ἴση τῇ γθ, ἤτε κατὰ τὸ ο Γωνία ἴση τῇ κατὰ τὸ τ· ὡσαύτως ἂν ϗ αἱ βη, ζη ἴσαι δειχθεῖεν, ὥςε αἱ γβ, ζβ διπλασίονες οὖσαι τῶν ἴσων βη, βθ, ἴσαι εἰσί. Οὐκ ἄλλως ϗ αἱ λοιπαὶ τȣ̃ περιγεγραμμένȣ Πενταγώνȣ Πλευραὶ ἴσαι δεικνύμεναι, Ἰσόπλευρον αὐτὸ παραςήσȣσιν· ἔςι δὲ τὸ αὐτὸ καὶ Ἰσογώνιον, ἐπειδὴ γὰρ αἱ κατὰ τὰ β ϗ γ Γωνίαι διπλασίονες ἀπεδείχθησαν τῶν ο ϗ τ, ἑκατέρα ἑκατέρας, ἔσονται δὴ ϗ αὐταὶ ἴσαι, ϗ ὡσαύτως ϗ αἱ λοιπαί. Περιγέγραπται ἄρα περὶ τὸν δοθέντα Κύκλον τὸ τεταγμένον Πεντάγωνον. Ο. Ε. Π.

Σχόλιον.

Τῇ αὐτῇ μεθόδῳ περὶ τὸν Κύκλον, ϗ ὁποιονδηποτȣ̃ν ἄλλο ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον Σχῆμα περιγραφήσεται, τȣ̃ παραπλησίȣ πρῶτον τῷ Κύκλῳ ἐγγραφομένȣ, τȣτέςιν ἐὰν ἀχθῶσιν Ἁπτόμεναι τȣ̃ Κύκλȣ κατὰ τὰ Σημεῖα η, θ, ι, κ, κξ. καθ᾽ ἃ αἱ τȣ̃ ἐγγεγραμμένȣ Γωνίαι τῇ Περιφερείᾳ προσπίπτȣσι.

Πρότασις ΙΓ. ϗ ΙΔ.

„Εἰς τὸ δοθὲν Πεντάγωνον, ὅ ἐςιν ἰσόπλευρόν τε ϗ ἰσογώνιον, Κύκλον

α. 297. „ἐγγράψαι, ϗ περὶ αὐτὸ περιγράψαι.

Αἱ δύω τȣ̃ Πενταγώνȣ Γωνίαι β ϗ γ δίχα τετμήσθωσαν διὰ τῶν Εὐθειῶν βα ϗ γα τῶν συνιȣσῶν κατὰ τὸ α, ἀπὸ δὲ τȣ̃ α ἀχθήτω Κάθετος ἡ αλ.

---

(1) Β. Πόρ. Δς. τȣ̃ γ΄. (2) Η. τȣ̃ α΄. (3) Κς. ϗ ΚΘ. τȣ̃ γ΄. (4) Ἐκ κατ. (5) ΙΗ. τȣ̃ γ΄. (6) Κς. τȣ̃ α΄.

Ὁ τοίνυν Κέντρῳ τῷ α διὰ τοῦ λ καταγραφόμενος Κύκλος, ἁπασῶν τῶν τοῦ Πενταγώνου Πλευρῶν ἅψεται· ὁ δέ τοι Κέντρῳ τῷ α διὰ τοῦ β καταγραφόμενος, διελεύσεται καὶ διὰ τῶν Σημείων γ, δ, ε, ζ.

Μέρος Α΄. Ἀπὸ τῶν Γωνιῶν τῶν κατὰ δ, ε, ζ, ἀχθήτωσαν καὶ αἱ δα, εα, ζα· ἐν γοῦν τοῖς Τριγώνοις δγα, βγα, ἐν οἷς ἴσαι μὲν αἱ Πλευραὶ δγ, αγ (1) ταῖς βγ, γα, ἴσαι δὲ (2) αἱ Γωνίαι π καὶ ο, καὶ αἱ η καὶ ι (3) ἔσονται ἴσαι· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὅλαι Γωνίαι αἱ κατὰ β καὶ δ ἴσαι (4). Ταύτῃ τοι τῆς η (5) Γωνίας ἡμισείας οὔσης τῆς β, καὶ ἡ ι ἡμίσεια ἔσται τῆς δ, ὥστε καὶ τὴν δ δίχα τετμημένην εἶναι διὰ τῆς δα. Διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον, καὶ αἱ λοιπαὶ τοῦ Πενταγώνου Γωνίαι ε καὶ ζ, δίχα τετμημέναι εἰσὶ, διὸ καὶ αἱ Ἡμιγωνίαι ἅπασαι ἀλλήλαις ἴσαι εἰσὶν· ἤχθωσαν δὲ καὶ αἱ Κάθετοι αμ, ασ, αν, αρ, καὶ ἐπειδὴ ἐπὶ τῶν Τριγώνων λβα, μβα, αἱ Γωνίαι η καὶ ὑπὸ βλα, ἴσαι εἰσὶ ταῖς Γωνίαις ξ καὶ ὑπὸ βμα, ἥτε βα Πλευρὰ κοινὴ, ἔσονται δὴ (6) καὶ αἱ αλ, αμ ἴσαι· ὡσαύτως δείξω καὶ τὰς λοιπὰς αμ, ασ, αν, αρ ἀλλήλαις ἴσας εἶναι· Ὁ ἄρα Κέντρῳ τῷ α διὰ τοῦ λ γραφόμενος Κύκλος, καὶ διὰ τῶν μ, σ, ν, ρ διελεύσεται· ἐπείτε αἱ πρὸς τῷ λ, καὶ μ, καὶ σ, καὶ ν, καὶ ρ Γωνίαι Ὀρθαί εἰσιν, (7) ἅψεται δὴ ὁ Κύκλος (8) τῶν πέντε τοῦ Πενταγώνου Πλευρῶν. Ο. Η. τὸ Α΄.

Μέρος Β΄. Ἐπὶ τοῦ Τριγώνου γαβ, τῶν Γωνιῶν ο καὶ η ἴσων δειχθεισῶν, ἔσονται αἱ Πλευραὶ (9) αγ, αβ ἴσαι ἀλλήλαις, ὡσαύτως δὲ καὶ αἱ αβ, αζ, αε, αδ· διὸ καὶ ὁ Κέντρῳ τῷ α διὰ τοῦ β καταγραφόμενος Κύκλος, καὶ διὰ τῶν γ, δ, ε, ζ, διελεύσεται. Περὶ τὸ τοίνυν Πεντάγωνον ὁ Κύκλος περιγέγραπται. Ο. Η. τὸ Β΄.

Σχόλιον.

Τῇ αὐτῇ δὲ μεθόδῳ, εἴς τε καὶ περὶ ὁποιονοῦν Σχῆμα ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, Κύκλος ἐγγραφήσεται καὶ περιγραφήσεται, δυεῖν ὁποιωνοῦν Γωνιῶν, αἱ ἂν ἐγγὺς ἀλλήλων ὦσι, δίχα τεμνομένων, οἷον τῶν δγβ, γβζ, διὰ τῶν Εὐθειῶν γα, βα, καὶ ἀπὸ τοῦ κατὰ τὴν σύμπτωσιν Σημείου α, ἐφ᾽ ἡστινοσοῦν τῶν Πλευρῶν βγ πρὸς ὀρθὰς ἀχθείσης τῆς αλ· τῶν γὰρ Κύκλων, τῶν Κέντρῳ μὲν τῷ α, Διαστήμασι δὲ τοῖς αλ, αβ καταγραφομένων, θάτερος μὲν εἰς τὸ Πολύγωνον ἐγγεγραμμένος ἔσται, θάτερος δὲ περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένος.

---

(1) Ἐξ ὑποθ. (2) Ἐκ κατ. (3) Δ. τοῦ α΄. (4) Ἐξ ὑποθ. (5) Ἐκ κατ. (6) Κς. τοῦ α΄. (7) Ἐκ κατ. (8) Ις. τοῦ γ΄. (9) Κς. τοῦ α΄.

Πορίσματα.

Α΄. Κἀντεῦθεν ἐὰν Γωνίαι δύω προσεχεῖς αἱ β, γ τȣ̃ τεταγμένȣ Σχήματος, διχοτομηθῶσι ταῖς βα, γα Εὐθείαις, ταῖς συμπιπτȣ́σαις κατὰ τὸ α, ἀπὸ δὲ τȣ̃ κατὰ τὴν σύμπτωσιν Σημείȣ α, Εὐθεῖαι ἀχθῶσιν αἱ αδ, αε, αζ ἐπὶ τὰς λοιπὰς τȣ̃ Σχήματος Γωνίας, δίχα τμηθήσονται αἱ πᾶσαι Γωνίαι, ϗ τὸ τεταγμένον Σχῆμα (1) διαιρεθήσεται εἰς τοσαῦτα Τρίγωνα ἰσοσκελῆτε ϗ ἀλλήλοις ἴσα, ὅσαι αἱ τȣ̃ Σχήματος Πλευραί. Ἀπὸ δὲ τȣ̃ α, ἐπὶ τὰς τȣ̃ Σχήματος Πλευρὰς πρὸς ὀρθὰς ἀχθεισῶν τῶν αλ, αμ, κτ., δίχα (2) τμηθήσονται αἱ Πλευραί, αἵτε Τέμνȣσαι ἐκεῖναι, ὡς Ἡμιδιάμετροι τȣ̃ ἐγγραφομένȣ Κύκλȣ, ϗ ἀλλήλαις ἴσαι εἰσί.

Β΄. Δοθείσης τοίνυν τῆς τȣ̃ τεταγμένȣ Σχήματος Πλευρᾶς, ϗ τῆς τȣ̃ εἰς αὐτὸ ἐγγραφομένȣ Κύκλȣ, ῥᾴδιον τὴν τȣ̃ ἐμβαδȣ̃ καταμέτρησιν λαβεῖν, πολλαπλασιάζοντες τὴν μὲν Ἡμιδιάμετρον τῇ ἡμισείᾳ τῆς Πλευρᾶς, τὸ δὲ ἐντεῦθεν παραγόμενον τῷ τȣ̃ Σχήματος παρονομαςῇ. Οὕτω τοι τὸ τȣ̃ Πενταγώνȣ βγδεζ ἐμβαδὸν, ἐςὶν αλ × λβ × 5.

Πρότασις ΙΕ.

„ Εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον Ἑξάγωνον ἰσόπλευρόντε ϗ ἰσογώνιον ἐγ-
„ γράψαι.

κ. 298. Ἤχθω Διάμετρος ἡ ζαβ, καὶ Κέντρῳ τῷ β διὰ τȣ̃ α Κύκλος γεγράφθω, τέμνων τὸν δοθέντα κατὰ γ ϗ δ, ϗ πάλιν Κέντρῳ τῷ ζ, διὰ τȣ̃ α γεγράφθω Κύκλος τέμνων τὸν δοθέντα κατὰ ε ϗ η, ϗ ἐπεζεύχθω τὰ Σημεῖα β, γ, ε, ζ, η, δ, αἱ γὰρ ἐπιζευχθεῖσαι Εὐθεῖαι δώσȣσι τὸ ζητȣ́μενον.

Ἀχθεισῶν γὰρ ἀπὸ τȣ̃ Κέντρȣ α, αγ, αε, αη, αδ, φανερὸν ὅτι τὰ Τρίγωνα θ, ι, μ, λ, ἰσόπλευρα (3) ἐςίν· ἐπειδὴ δὲ τῶν Γωνιῶν ἑκατέρα ὑπὸ γαβ, εαζ, τριτημόριον (4) δυεῖν Ὀρθῶν ἐςι, ϗ ἑπομένως τριτημόρια δύω ἄμφω, δῆλον (5) ὅτι ἡ ὑπὸ εαγ τριτημόριόν ἐςι ϗ αὐτὴ δυεῖν Ὀρθῶν· Αἱ τοίνυν ὑπὸ εαγ, γαβ ἴσαι εἰσίν· εἰσὶ δὲ ϗ αἱ Πλευραὶ εα, αγ ἴσαι ταῖς Πλευραῖς βα, αγ, ϗ Βάσις ἄρα (6) εγ ἴση τῇ Βάσει γβ, τȣτέςι (ὡς ἐδείχθη) τῇ Ἡμιδιαμέτρῳ αγ, ὥςε καὶ τὸ ν Ἰσόπλευρον ἐςί. Ὡσαύτως δὲ

---

(1) *Γ. Ὁρ. τȣ̃ δ΄. ϗ Πρότ. ς. ἢ Κς. τȣ̃ α΄.* (2) *Ἀριθ. Α. τȣ̃ Σχολ μετὰ τὴν Κς. τȣ̃ α΄.* (3) *Α. τȣ̃ α΄.* (4) *ΙΒ. Πορ· τῆς ΛΒ. τȣ̃ α΄.* (5) *ΙΓ. τȣ̃ α΄.* (6) *Δ. τȣ̃ α΄.*

δειχθήσεται Ἰσόπλευρον εἶναι ϗ τὸ κ· ϗ ἐπεὶ οὖν ἅπαντα τὰ Τρίγωνα θ, ι, κ, λ, μ, ν ἰσόπλευρά ἐςι, φανερὸν ὅτι ἑκάςη τῶν ἐν αὐτοῖς Πλευρῶν γβ, βδ, δη, ηζ, ζε, εγ, ἴση ἐςὶ τῇ Ἡμιδιαμέτρῳ τȣ Κύκλȣ αγ, ἤτοι αβ, ϗ δὴ ϗ ἀλλήλαις ἴσαι αἱ αὐταί. Τὸ ἄρα Ἑξάγωνον ἰσόπλευρον ἐςίν· ἔςι δὲ ϗ Ἰσογώνιον, ἑκάςη γὰρ τῶν ἐν αὐτῷ Γωνιῶν, ε, γ, β, δ, η, ζ, σύγκειται ἐκ δυεῖν Γωνιῶν τῶν τȣ Ἰσοπλεύρȣ, εἰς ἄρα τὸν δοθέντα Κύκλον, Ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε ϗ ἰσογώνιον ἐνεγραψάμεθα.

Πορίσματα.

Α΄. Ἡ τȣ εἰς τὸν Κύκλον περιγεγραμμένȣ Ἑξαγώνȣ Πλευρὰ (ἤτοι ἡ μοιρῶν 60 Ὑποτείνȣσα) ἴση τῇ Ἡμιδιαμέτρῳ ἐςὶν, ὥςε τὸ 30 μοιρ. Ἡμίτονον, ἴσον ἐςὶ τῆς Ἡμιδιαμέτρȣ (1) τῇ ἡμισείᾳ.

Β΄. Ἡ τȣ τεταγμένȣ Ἑξαγώνȣ Γωνία, τέτταρσι τριτημορίοις μιᾶς Ὀρθῆς ἴση ἐςὶν, ἴση γὰρ ταῖς δυσὶ τȣ ἰσοπλεύρȣ Τριγώνȣ Γωνίαις ἅμα, ὧν ἑκάςη (2) δυσὶ τριτημορίοις μιᾶς Ὀρθῆς ἴση ἐςίν· ὥςε περιέχει Ὀρθήν τε ϗ τριτημόριον Ὀρθῆς, τȣτέςι μοιρ. 90 + 30 = μοιρ. 120.

Γ΄. Καὶ ἐὰν ἀχθῇ Διάμετρος ἡ οσ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν ἑτέραν ζβ, ϗ Κέντροις μὲν τοῖς ο ϗ σ, Διαςήματι δὲ τῷ οα, τομαὶ γένοιντο κατὰ ξ ϗ π, ϗ κατὰ ρ ϗ τ, ἐπιζευχθῇ δὲ τὰ Σημεῖα ξ, ε, ο, γ, π, β, τ, δ, σ, η, ρ, ζ, συςήσεται Δωδεκάγωνον τεταγμένον, μιᾷ τȣ Διαβήτȣ διανοιγῇ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγραφόμενον, τȣθ' ὅπερ ἐν τοῖς Γνωμονικοῖς πολλῆς ἐςι χρήσεως. Κἀντεῦθεν καταμανθάνομεν ϗ τὴν τεταρτημορικὴν Περιφέρειαν οζ, εἰς μέρη τρία ἀλλήλοις ἴσα οε, εξ, ξζ τριχομεῖν, ϗ ἐκ τȣ ἀκολȣθȣ συνεχεῖ (3) τῇ διχοτομίᾳ, εἰς μέρη ἴσα 6, 12, 24, 48, κτ. διαμερίζειν. σχ. 299.

Δ΄. Ἐκ δὲ τῶν δειχθέντων ῥᾷςα ϗ ἡ τȣ ἰσοπλεύρȣ Τριγώνȣ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγραφὴ ἐπιφέρεται. Ἀχθείσης γὰρ τῆς Διαμέτρȣ βζ, Κέντρῳ τῷ β, διὰ τȣ α Κέντρȣ καταγραφήτω Τόξον τὸ γαδ· τῶν γὰρ Σημείων γ, ζ, δ ἐπιζευχθέντων Εὐθείαις, συςήσεται τὸ ζητȣμενον Ὀρθογώνιον.

Ε΄. Ἡ τȣ ἰσοπλεύρȣ Τριγώνȣ Πλευρὰ γχδ, τῆς πρὸς ὀρθὰς ἐπ' αὐτὴν Διαμέτρȣ βζ τεταρτημόριον τὸ βχ ἀποτέμνει. Αἱ γὰρ ὑπὸ αγχ, βγχ ἐπὶ ἴσων Περιφερειῶν τῶν βδ, δη βεβηκεῖαι, ἴσαι (4) εἰσίν· αἵ τε Πλευραὶ σχ. 300.

(1) Α. Πόρ. τῆς Γ. τȣ γ. ϗ Δ. Πόρ. τῆς Δ. τȣ γ. (2) Πόρ. ΙΒ. τῆς ΛΒ. τȣ ά. (3) Δ. τȣ γ. (4) ΚΘ. τȣ γ.

αγ, γχ ἴσαι ταῖς Πλευραῖς βγ, γχ, ἄρα καὶ αἱ αχ, βχ (1) ἴσαι εἰσίν· ἡ ἄρα βχ τεταρτημόριόν ἐστι τῆς Διαμέτρου βζ.

Ἄλλως. Διὰ τὰς ὑπὸ αγχ, βγχ τὰς ὡς πρότερον ἴσας, καὶ τὰς πρὸς τῷ χ Ὀρθὰς (2) καὶ διὰ τοῦτο ἴσας, καὶ διὰ τὴν γχ κοινὴν, ἔσται (3) αχ = βχ.

Πρόβλημα.

x. 301. Ἑξάγωνον τεταγμένον ἐπὶ τῆς δοθείσης Εὐθείας βγ, ῥᾷστα συστήσεις, Τρίγωνον συστήσας (4) ἰσόπλευρον ἐπ' αὐτῆς, καὶ Κέντρῳ μὲν τῷ α, Διαστήματι δὲ τῷ αβ Κύκλον γράψας· οὗτος γὰρ τοῦ ζητουμένου Ἑξαγώνου δεκτικὸς ἐστί. Δῆλον ἔκ τε τῆς Προτάσεως, καὶ τοῦ Α'. τῶν Πορισμάτων.

Θεώρημα.

„Τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς τοῦ ἰσοπλεύρου Τριγώνου, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ Τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τῆς Ἡμιδιαμέτρου τοῦ Κύκλου, εἰς ὃν „ἐγγέγραπται τὸ Τρίγωνον· ἔνθεντοι καὶ πρὸς τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς „Διαμέτρου, ἐστὶν ὡς 3 πρὸς 4. Ἔστι δὲ αὕτη ἡ ΙΒ'. Πρότ. τοῦ ΙΓ'. Βιβλίου παρὰ τῷ Στοιχειωτῇ.

x. 302. Ἀχθήτω Ἡμιδιάμετρος ἡ αδ· τὸ γοῦν Τετράγωνον τὸ ἀπὸ ζδ, ἴσον ἐστὶ τοῖς Τετραγώνοις (5) τοῖς ἀπὸ ζα, δα, καὶ τῷ δὶς Ὀρθογ. ὑπὸ ζαχ. Ἀλλὰ τὸ δὶς Ὀρθογ. ζαχ, ἴσον ἐστὶ τῷ Τετραγ. τῷ ἀπὸ τῆς Ἡμιδιαμέτρου ζα, ἤτοι τῆς δα (καὶ γὰρ ἐπεὶ αχ καὶ χβ ἴσαι (6) εἰσὶ, τὸ Ὀρθογ. ζαχ δὶς ληφθὲν, ἴσον ἐστὶ τοῖς δυσὶν Ὀρθογωνίοις, τῷ τε ὑπὸ ζα καὶ αχ, καὶ τῷ ὑπὸ ζα καὶ χβ, τουτέστι τῷ Ὀρθογωνίῳ ζαβ (7), ἤτοι τῷ Τετραγ. τῷ ἀπὸ ζα), ἄρα τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ ζδ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ Τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τῆς Ἡμιδιαμέτρου.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης Διαμέτρου ζβ Τετράγωνον, τετραπλάσιόν ἐστι (8) τοῦ Τετραγώνου τοῦ ἀπὸ ζα, φανερὸν ὅτι τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ ζδ, πρὸς τὸ Τετράγ. τὸ ἀπὸ τῆς Διαμέτρου, ἐστὶν ὡς 3 πρὸς 4.

Πόρισμα.

Κἀντεῦθεν ἕπεται, ὡς ἡ τοῦ ἰσοπλεύρου Τριγώνου Πλευρὰ, ἐστὶ πρὸς τὴν

---

(1) *Δ.* τοῦ ά. (2) Ἐξ. ὑποθ. (3) *Κς.* τοῦ ά. (4) *Α.* τοῦ ά. (5) *ΙΒ.* τοῦ β'. (6) *Ε.* Πόρ. τῶν ἀνωτ. (7) *Δ.* τοῦ β'. (8) *Γ.* Πόρ. Προτ. *Δ.* τοῦ β'.

Διάμετρον, ὡς ἡ Τετραγωνικὴ ῥίζα τȣ̃ τριαδικȣ̃ πρὸς 2, ἥτις ἐςὶν ἡ ῥίζα ἡ τετραγώνειος τȣ̃ τετραδικȣ̃ ἀριθμȣ̃. Ταύτῃτοι ϗ Γραμμαὶ αὗται τῶν ἀσυμμέτρων τυγχάνȣσι.

Πρότασις Ις.

„ Εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον, Πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε ϗ ἰσογώ-
„ νιον ἐγγράψαι.

Ἐγγραφήτω δὴ (1) εἰς τὸν Κύκλον ἐναρμοσθεῖσα τȣ̃ Πενταγώνȣ Πλευρὰ ἡ αγ, ϗ Πλευρὰ (2) ἡ αδ τȣ̃ Ἰσοπλεύρȣ Τριγώνȣ, ἥτε γδ Περιφέρεια δίχα τμηθήτω κατὰ τὸ ε, οὕτω γὰρ ἡ γε Εὐθεῖα, ἥτις ἂν ἐπιζευχθείη, ἔςαι ἡ τȣ̃ Πεντεκαιδεκαγώνȣ Πλευρά. ϗ. 303.

Ἐὰν γὰρ ὅλη ἡ Περιφέρεια ὑποτεθείη 15, ἔςαι ἡ μὲν αγ Περιφέρεια, 3, ἡ δὲ αδ, 5, διὸ δὴ ἡ γδ, 2, ϗ ἐπομένως ἡ γε, 1.

Πορίσματα.

Α΄. Διὰ τῆς ὑποτεθείσης μεθόδȣ, ὑπὲρ ἀριθμὸν ὅσα τεταγμένα Σχήματα εἰς τὸν Κύκλον ἐγγράφεται. Ἐὰν γὰρ δυοῖν τεταγμένων αἱ Πλευραὶ αγ, αδ τῷ Κύκλῳ ἐναρμοσθῶσιν, ἡ τῶν Περιφερειῶν διαφορὰ γδ τȣτέτων ἔςαι περιεκτικὴ Πλευρῶν τȣ̃ καινȣ̃ τεταγμένȣ Σχήματος, ὅσαις μονάσι διαφέρȣσιν ἀλλήλων οἱ τῶν προτέρων Παρονομαςαί. Ὅ,τε Παρονομαςὴς τȣ̃ καινȣ̃ λαμβάνεται σχήματος, τῶν Παρονομαςῶν τῶν προτέρων ἀλλήλοις ἐπιπολλαπλασιαζομένων.

Οἷον ἐὰν ᾖ καθ᾽ ὑπόθ. ἡ μὲν αδ Τετραγώνȣ Πλευρὰ, ἡ δὲ αγ Δεκαγώνȣ, ἡ τῶν Παρονομαςῶν διαφορὰ ἔςαι 6· ϗ τοίνυν ἡ Περιφέρεια γδ ἓξ Πλευρῶν τȣ̃ καινȣ̃ Σχήματος ἔςαι περιεκτικὴ, ἐκεῖνο δέτοι Πλευρῶν ἐςὶ 40, οἱ γὰρ Παρονομαςαὶ 4 ϗ 10, ἀλλήλοις ἐπιπολλαπλασιασθέντες παρέχȣσι 40.

Β΄. Κἀντεῦθεν διδασκόμεθα τὴν τεταρτημορικὴν Περιφέρειαν, εἰς μέρη ἴσα 15 διαμερίζειν (ϗ δὴ ϗ συνεχεῖ τῇ διχοτομίᾳ (1) εἰς 30, 60, 120, κξ. μέρη), τὴν Περιφέρειαν δηλονότι γε πεντεκαιδεκατημόριον τῆς ὅλης ȣ̃σαν, δὶ ἐπανειλημμένης διχοτομίας εἰς μέρη τέτταρα ἀλλήλοις ἴσα διαμερίζοντες. Καὶ Καθόλȣ ἐπὶ ὁτινοσȣ̃ν τεταγμένȣ Σχήματος τȣ̃ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένȣ, δοθείσης τῆς Πλευρᾶς βχ, τὴν τȣ̃ Κύκλȣ τεταρτημορικὴν Περιφέρειαν, ἐπανειλημμένῃ διχοτομήσει τῆς Περιφερείας βχ, εἰς τοσαῦτα ϗ. 304.

---

(1) *ΙΑ. τȣ̃ δ΄.* (2) *Δ. Πόρ. τῆς ΙΕ. τȣ̃ δ΄.* (3) *Λ. τȣ̃ γ΄.*

μέρη ἴσα, ὅσαι αἱ τȣ̃ Σχήματος εἰσὶ Πλευραὶ διαιρεῖν ἐξέςαι, ϗ ἐπαναλήψει τῆς διχοτομήσεως εἰς δὶς, τετράκις, ὀκτάκις κτ. τοσαῦτα ἴσα ἀλλήλοις, ὅσαι αἱ Πλευραὶ τȣ̃ Σχήματος.

Γ΄. Ἐπεὶ δὲ ἡ τεταρτημορικὴ Περιφέρεια εἰς μοίρας τετμημένη 90 ὑποτίθεται, ϗ ἑκάςη δὲ τῶν μοιρῶν εἰς ἑξηκοςημόρια Α΄. 60, φανερὸν ὡς τὸ τεταρτημόριον τῆς ὅλης Περιφερείας, ἑξηκοςημόρια $90 \times 60 = 5400$ περιέχον ἐςί· καὶ ἐὰν τοίνυν διὰ τȣ̃ ἄνωτ. Πορίσμ. τὸ τεταρτημόριον εἰς 120 μέρη διαιρεθῇ, τȣ́των ἕκαςον ἑξηκοςημόρια πρῶτα $45 = \frac{5400}{120}$, τȣτέςι τρία τεταρτημόρια μοίρας μιᾶς περιέχον ἔςαι. Ἡ δὲ ȣ̔́τω βραχεῖα Περιφέρεια ἄνευ ἐπιςήμȣ ἀπάτης εἰς μέρη ὁποσαȣ̃ν ἴσα, ὡς εἰ ϗ εὐθεῖα τις (1) Γραμμὴ ἦν, δυνήσεται διαιρεῖσθαι. Διαιρείσθω τοίνυν εἰς τρία ἴσα, ὧν τὰ 15 ἑξηκοςημόρια Α΄. ἤτοι τῆς μοίρας τὸ τεταρτημόριον δώσȣσι, τὸ δὲ ἥμισυ $15 + 15$, τὴν δ᾽ ὅλην μοίραν $15 + 45$. Πάλιν διὰ τριχοτομίας τȣ̃ Τόξȣ 15, Τόξον ἕξομεν 5, ϗ τῇ εἰς ἴσα πέντε τȣ̃δε τομῇ Τόξον ἑξηκοςημορίȣ Α΄. ἑνὸς, ϗ σαφὴς ἄρα ὁ τρόπος καθ᾽ ὃν Κύκλος ἀποχρῶν τὸ Μέγεθος, εἰς ἑξηκοςημόρια δεύτερα ἂν διαιρεθείη, ϗ ἐφεξῆς. Ἐὰν δὲ τὸ ῥηθὲν Τόξον ἤτοι ἡ Περιφέρεια 45 καμπυλωτέρα ᾖ, ἢ ὥςε δίκην εὐθείας Γραμμῆς διαιρεῖσθαι ἔχειν, προαγαγόντες τὴν δίχα τομὴν, εἰς Τόξον ὅτι ἔγγιςα Εὐθείας γινόμενον τέως ἀφιξόμεθα. Οὕτωτοι τὸ $22\frac{1}{2}$ τρία ὀκτημόρια περιέχει, ϗ $11\frac{1}{4}$ τρία δεκαθ᾽ ἑκτημόρια μοίρας, ϗ ȣ̔́τως ἐφεξῆς· καὶ δῆλον ἄρα ὅπως ὁ Κύκλος εἰς τὰς μοίρας τας ἑαυτȣ̃, ϗ τὰς τῶν μοιρῶν ἡμισείας, ϗ τὰ τεταρτημόρια, ϗ τὰ ὀκτημόρια, κξ., ἢ γȣ̃ν, εἰ ȣ̔́τω δόξῃ, εἰς ἑξηκοςημόρια Α΄., Β΄., Γ΄., κξ. μηχανικῶς γȣ̃ν δύναται διαιρεῖσθαι.

Σχόλιον Α΄.

Ἡ δὲ τȣ̃ Κύκλȣ Περιφέρεια διαιρεῖσθαι γεωμετρικῶς ἔχει εἰς μέρη
4, 8, 16, κξ. διὰ τῆς ϛ΄. Προτ. τȣ̃ Δ΄., ϗ τῆς Θ΄. τȣ̃ Α΄.
3, 6, 12, κξ. διὰ τῆς ΙΕ΄. τȣ̃ Δ΄., ϗ Πορ. Δ΄. ϗ Γ΄.
5, 10, 20, κξ. διὰ τῆς ΙΑ΄., ϗ Πορ. Β΄. ϗ Ε΄., ϗ Ι΄. τȣ̃ Δ΄.
15, 30, 60, κξ. διὰ τῆς Ιϛ΄. τȣ̃ Δ΄., ϗ Πορ. Β΄.

Σχόλιον Β΄.

Οὕπω δὲ ἡ μέθοδος εὕρηται, τȣ̃ διὰ Κύκλȣ ϗ Εὐθείας ἐγγράφεσθαι

(1) Σχόλ. τῆς Ι΄. τȣ̃ ϛ΄.

τῷ Κύκλῳ τεταγμένα Σχήματα, κατ' ἀριθμὲς Πλευρῶν τὲς ἑξῆς 7, 9, 11, 13, 14, 17, κξ., τῆς τοιαύτης ἐγγραφῆς ἠρτημένης ἐκ τῆς διαιρέσεως τῆς Περιφερείας εἰς μέρη τινὰ, ἣν δὴ διαίρεσιν καταθύμιον ἔς γε ᾗ νῦν οἱ Γεωμετρῦντες ἔχυσι. Ἀλλ' ἐξέςαι τῆς τῦ Κύκλυ Περιφερείας εἰς μοίρας 360 διαιρεθείσης, μηχανικῶς Σχήματα ὁποιαδηποτῦν τεταγμένα εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον ἐγγράφειν ὕτω.

Πρόβλημα Α'.

Τὰς 360 μοίρας (τυτέςι τὴν ὅλην Περιφέρειαν) δίελε διὰ τῦ Παρονομαςῦ τῦ ἐγγραπτέυ Πολυγωνίυ (τῦ Ἐννεαγωνίυ φέρε), ἰσαρίθμων δὲ ταῖς τῦ Πηλίκυ μονάσι (οἷον κατὰ τὰ τεθέντα ὧδε 40) μοιρῶν Γωνίαν τὴν ὑπὸ ακκ πρὸς τῷ Κέντρῳ λαβὼν, ᾗ τὴν ακ ἐπιζεύξας, Πλευρὰν ἕξεις τῦ Ἐννεαγωνίυ τῦ ζητυμένυ, ὅπερ ἂν εἰς τὸν Κύκλον ἐγγραφείη. χ. 305.

Πρόβλημα Β'.

Ἐπὶ δὲ τῆς δοθείσης Εὐθείας, Σχῆμα τεταγμένον καταγράψεις διὰ τῦ ἐφεξῆς πίνακος.

Ἡ ὀρθὴ Γωνία πρὸς τὴν τῦ Σχήματος Γωνίαν ἐςὶν					Διαφ.
Ἐπὶ μὲν τῦ	Πενταγώνυ	ὡς	5	πρὸς 6	1
	Ἑξαγώνυ	ὡς	3	πρὸς 4	1
	Ἑπταγώνυ	ὡς	7	πρὸς 10	3
	Ὀκταγώνυ	ὡς	2	πρὸς 3	1
	Ἐννεαγώνυ	ὡς	9	πρὸς 14	5
	Δεκαγώνυ	ὡς	5	πρὸς 8	3
	Ἑνδεκαγώνυ	ὡς	11	πρὸς 18	7
	Δωδεκαγώνυ	ὡς	3	πρὸς 5	2

Δεῆσαν τοίνυν ἐπὶ τῆς δοθείσης Εὐθείας χβ Ἑπτάγωνον τεταγμένον καταγράψαι, Κέντρῳ μὲν τῷ χ, Διαςήματι δὲ τῷ χβ Κύκλος γεγράφθω, ᾗ τύτυ τεταρτημόριον ἀποτετμήσθω τὸ βο, εὑρὼν δὲ ἐκ τῦ Πίνακος τὸν τῆς ὀρθῆς Γωνίας πρὸς τὴν τῦ Ἑπταγώνυ λόγον, ὡς 7 πρὸς 10, ᾗ τὴν διαφορὰν 3, μέρισον τὸ τεταρτημόριον εἰς Τόξα 7 ἴσα ἀλλήλοις, οἷς δὴ τοσαῦτα ἐφεξῆς πρόσθες ἀπὸ τῦ ο κατὰ τὸ ν, ὅσαι μονάδες ἐν τῇ διαφορᾷ. Εἶτα διὰ τῶν τριῶν Σημείων β, χ, ξ (1) Κύκλον κατάγραψον, ὅς τις τῦ ἐπὶ τῆς δοθείσης χβ Ἑπταγωνίυ ἐςὶ χωρητικός. χ. 306.

(1) Ε. τῦ δ'.

Ο῾ δέ τοι Πίναξ διὰ τȢ Β΄. Θεωρήματος τȢ ἐν τῷ Σχολ. τῷ μετὰ τὴν ΛΒ΄. τȢ πρώτȢ Βιβλ. κατεσκευάσθη, δἰ οὗ δὴ Θεωρ. εὑρίσκεται ὅσαις δήποτε Γωνίαις ὀρθαῖς, ἅπασαι αἱ ἐφ᾽ ὁποιωȢν εὐθυγράμμῳ Σχήματι Γωνίαι ἅμα ληφθεῖσαι ἴσαι εἰσίν. Ο῾ γὰρ ἀριθμὸς τῶν ὀρθῶν Γωνιῶν διαιρεθεὶς διὰ τȢ ΠαρονομαστȢ τȢ Σχήματος, τὸν λόγον παρονομάζει τὸν τῆς Γωνίας τȢ Σχήματος πρὸς τὴν Ο᾽ρθήν.

Ε᾽πειδὴ δὲ περὶ τῶν τεταγμένων Σχημάτων πολλὰ εἰς τόδε παρετέθη, τὸ θρυλλέμενον τȢ ΠρόκλȢ Θεώρημα πέρας τῷ Βιβλίῳ ἐπιτιθέσθω.

Θεώρημα.

Τῶν τεταγμένων Σχημάτων τρία μόνα, τȢτέστιν 6 μὲν Τρίγων. ἰσόπλ., 4 δὲ Τετράγ., 3 δὲ Ε῾ξάγ. χωρίον πληρȢν δύνανται, μίαν δηλονότι Ε᾽πιφάνειαν συνεχῆ συνιστῶντα· δείκνυται δὲ ὧδε.

Εἰς τȢτο γὰρ ἀπαιτεῖται, τὸ κατ᾽ ἐκεῖνο τὸ εἶδος Γωνίας ὁποσασȢν, συνιȢσας εἰς ἓν Σημεῖον Ο᾽ρθὰς τέτταρας συναποτελεῖν· τοσαῦται γὰρ περὶ τὸ αὐτὸ Σημεῖον Γωνίαι συνίστανται (1). Οἷον ἐκ Τριγώνων φέρ᾽ εἰπεῖν ἰσοπλεύρων τὸ χωρίον πληρȢται, ὁποσωνȢν τῶν κατ᾽ αὐτὰ Γωνιῶν, μ, λ, ν, κ, θ, ι περὶ τὸ αὐτὸ Σημεῖον α συναπτομένων, καὶ Ο᾽ρθὰς τέτταρας συνιστωσῶν. Α᾽λλ᾽ 6 τȢ ἰσοπλ. Τριγ. Γωνίαι Ο᾽ρθὰς τέτταρας συναποτελȢσιν (ἴση γὰρ ἑκάστη ἐστὶ δυσὶ τριτημορίοις (2) Ο᾽ρθῆς, αἵτε 6 τριτημορίοις 12, τȢτέστιν Ο᾽ρθ. 4), τέτταρες δὲ τȢ Τετραγ. ὡς δῆλον, καὶ 3 δὲ τȢ Ε῾ξαγώνȢ (ἴση γὰρ ἑκάστη 4 τριτημορίοις (3) Ο᾽ρθῆς, αἵτε 3 τριτημορίοις 12, τȢτέστιν Ο᾽ρθ. 4). Α᾽ρα κτ.

Ο῞τι δὲ ȣδὲν ἄλλο Σχῆμα τȢτο δύναται φανερὸν ἔσται, εἴτις τὴν κατ᾽ αὐτὸ Γωνίαν εὑρεθεῖσαν ὡς ἀνωτέρω παντὶ ἀριθμῷ πολλαπλασιάσαι, ἀεὶ γὰρ τὸ γινόμενον τῆς τῶν Ο᾽ρθῶν τετράδος ἤτοι ὑπερέχον ἔσται, ἢ ἐλλεῖπον.

---

(1) Γ. Πόρ. τῆς ΙΓ. τȢ α΄. Ο῞ρα τὸ Σχ. τῆς ΙΕ. Προτ. (2) ΙΒ. Πόρ. τῆς ΛΒ. τȢ α΄. (3) Β. Πόρ. τῆς ΙΕ. τȢ δ΄.

Τῶν ςοιχείων τῆς Γεωμετρίας.

ΒΙΒΛΙ'ΟΝ Ε'.

Εἰς μὲν κατασκευὴν τῶν τȣ̃ ς'. Προτάσεων, τόδε τὸ Ε'. ἀναγκαιότατον κρίνεται, τὰ δ' ἐν αὐτῷ πραγματευόμενα εἰς χρῆσιν ἥκει πυκνότατα· ὁ δέ τοι τȣ̃ ἐπιχειρεῖν τρόπος ἐκ τῆς Γεωμετρικῆς ἀναλογίας λαμβανόμενος, λεπτότατός τε τυγχάνει ὢν, ϗ ἀσφαλέςατος ϗ συντομώτατος. Διὸ ϗ τῇ κατ' αὐτὸν τȣ̃ συλλογίζεσθαι μεθόδῳ, οἷα Λογικῇ τινι μαθηματικῇ, ἥτε Γεωμετρία, ϗ ἡ Α'ριθμητική, ϗ Μȣσική, ϗ Α'ςρονομία, ϗ Στατική, ϗ τὰ λοιπὰ τῶν Μαθημάτων εἴδη μάλιςα κέχρηνται, ἐπεὶ ϗ ἀναλογίαις τισὶν ἀλλήλαις συνημμέναις αἱ ἕξεις αὗται βεβήκασι, τȣ̀ περὶ τὰ ἀνάλογον ἔχοντα συλλογίζεσθαι τȣ̀ς τρόπȣς παρὰ τȣ̃ Πέμπτȣ τȣ̃δε Βιβλίȣ αἱ πᾶσαι ἐρανιζόμεναι. Η' μὲν οὖν πρακτικὴ ἀκȣ́ȣσα Γεωμετρία, ἡ περὶ τὴν τῶν Γραμμῶν, ϗ Σχημάτων, ϗ Σωμάτων καταμέτρησιν ἐνασχολȣμένη, ἐκ τῆς τῶν Α'ναλογιῶν διδασκαλίας τὸ πλεῖςον μέρος ἐξῆπται, αἵτε Α'ριθμητικαὶ μέθοδοι ἅπασαι κομιδῇ διὰ τῶν τȣ̃ Πέμπτȣ τȣ́τȣ Βιβλίȣ Προτάσεων, ϗ ἄνευ τȣ̃ Ζ'. ϗ Η'. ϗ Θ'. τῶν κατὰ πρόθεσιν περὶ Α'ριθμῶν πραγματευομένων, δείκνυσθαι δύνανται. Τὴν δὲ Μȣσικὴν τῶν Α'ρχαίων, τί ἄλλο ἢ Γεωμετρικὰς Α'ναλογίας ταῖς τῶν φωνῶν ὑπηχήσεσι προσαρμοζομένας, ὀρθῶς κρίνειν ἑλόμενος ὀνομάσαις; Αὐτὸ δὲ τȣ̃το ϗ περὶ τῆς Στατικῆς τῆς περὶ τὰ τῶν Σωμάτων βάρη ἔχοις ἂν ἀποφήνασθαι. Συνελόντι γȣ̃ν φάναι, τὴν τῶν Α'ναλογιῶν διδασκαλίαν ἀπὸ τῶν Μαθηματικῶν ἀφελῶν, ȣ̓δὲν ὅ,τι ϗ λόγȣ ἄξιον καταλείψεις.

Ο'́σον οὖν τοῖς Γεωμετρικοῖς ἡ τῶν Α'ναλογιῶν συμβάλλεται ἐπιςήμη, ȣ̓δεὶς ἀγνοεῖ τῶν Μαθηματικῶν· ταύτην Εὐκλείδης ἐν ὅλῳ τῷ Ε'. ϗ ς'. Βιβλ. ἐπραγματεύσατο. Α'λλὰ γὰρ εἰ ϗ αὐτῷ τε ϗ τοῖς λοιποῖς τῶν ςοιχείων δημιȣργοῖς πλεῖςον ὀφείλεται ὑφ' ἡμῶν, ἐν οἷς μέντοι περὶ τῆς Α'ναλογίας εἰρήκασιν ἐνδεῖν τι ἔτι δοκεῖ. Τὸ δὲ πᾶν τῆς δυσχερείας περὶ τὸν Ε'. τȣ̃ Ε'. Βιβλ. ὁρισμὸν ςρέφεται, ἔνθα ὁ Εὐκλείδης διδάσκει, τί ἐςι τὸ τέτταρα Μεγέθη εἶναι ἀνάλογον, εἴτ᾽ οὖν λόγους δύω τοὺς αὐτοὺς, ἢ ὁμοίους, ἢ ἴσους τυγχάνειν. Καὶ δὴ λόγους δύω ἴσους, εἴτ᾽ οὖν ὁμοίους εἶναι ἀπέδωκεν, ὅτε τὰ ἡγόμενα ἐν αὐτοῖς ὁτωοῦν ἀριθμῷ ἐπίσης παλλαπλασιαζόμενα, πρὸς τὰ ἑπόμενα ὁτωοῦν καὶ αὐτὰ ἀριθμῷ ἐπίσης πολλαπλασιασθέντα, ἀείτοι ἢ ἴσα ἅμα μείζονα, ἢ ἅμα ἐλάσσονα ἐστί (1). Κἀκ τούτου οὖν τοῦ Ὁρισμοῦ, πάσας ἔπειτα τὰς τοῦ Ε΄. καὶ ϛ΄. τῶν Βιβλίων ἀποδείξεις ἤτοι ἐμμέσως, ἢ καὶ ἀμέσως ἐπιφέρει. Καὶ ἡ μὲν κατ᾽ Εὐκλ. διδασκαλία αὕτη ἐστὶν, ἃς δὲ δυσκολίας ἔστι περιέχουσα, οὐκ ὀλίγαι εἰσί· Α΄. καὶ γὰρ τοῦτο βέβαιον ἐστὶ, τὸν ἐκτεθέντα Ὁρισμὸν, τὴν μὲν τῶν ἴσων λόγων φύσιν οὐχὶ, τούτων δὲ παθήματι μόνον διασαφεῖν. Εἶτα ἐκεῖνο τὸ κατὰ τὰ πολλαπλάσια ἴδιον τίθεται πάντως, ἤτοι ὡς Σημεῖον ἀδιάπταιστον τῶν ἴσων λόγων, ὥστε ἐκείνου ἀποδειχθέντος ἤδη, περὶ ὡντινωνοῦν λόγων ἐπιφέρειν ἐξεῖναι ἀσφαλῶς, ὅτι ἴσοι εἰσὶν, ἢ γοῦν ὁ νοῦς ἐκείνου τοιοῦτος τις ἐστὶ, τὸ τὰ λόγον τὸν αὐτὸν ἔχοντα Μεγέθη μηδὲν ἕτερον ὑπολαμβάνειν, ἢ τὸ τὰ αὐτῶν πολλαπλάσια κατά γε τὸν εἰρημένον τρόπον ὑπερέχειν ἢ ὑπερέχεσθαι. Εἰ μὲν οὖν τὸ Α΄., δεῖξαι ὤφειλε τὸ πάθημα ἐκεῖνο πᾶσι τε καὶ μόνοις τοῖς ἴσοις τῶν λόγων παρακολουθεῖν, ἵν᾽ ἐξ αὐτοῦ ἡ τῶν λόγων ἰσότης ἀσφαλῶς εἶχεν ἐπισυνάγεσθαι· τοῦτο δὲ οὐκ εὐκαταφρόνητόν τι Θεώρημα τυγχάνει γε ὂν, ἀλλ᾽ οἷον οὔτ᾽ Εὐκλείδης αὐτὸς, οὔτ᾽ ἄλλος τις παρὰ τὸν Εὐκλείδην εἰς τόδε ἀπέδειξεν. Εἰ δὲ τὸ Β΄., ἕξομεν δὴ τὴν πληροφορίαν τοῦ ἀληθεύειν τὰ Θεωρήματα κατά γε τὸν νοῦν τοῦ Ὁρισμοῦ λαμβανόμενα, οὐμὴν δὲ τῇ τῶν ἀποδείξεων δυνάμει, καὶ ἀσφαλὴς ἡμῖν καὶ βεβαία ἔσται ἡ τῶν λόγων ἰσότης. Οἷον (εἰς γὰρ δεῖγμα κείσθω ἡ Α΄. τοῦ ϛ΄.) ἐκ τῆς παρ᾽ Εὐκλείδῃ ἀποδείξεως βεβαίως εἰσόμεθα, τὸν λόγον τὸν τῶν Τριγώνων αβγ, δεζ ἴσον εἶναι τῷ λόγῳ τῷ τῶν Βάσεων αγ, δζ, ἀντὶ τῆς τῶν λόγων ἰσότητος, οὐδὲν ὅτι μὴ τὸ τῶν πολλαπλασίων εἰρημένον ἴδιον ἐννοοῦντες, οὐμὴν δὲ καὶ τοὺς τῶν Τριγώνων λόγους ἐκείνους τοῖς λόγοις τῶν Βάσεων ἀληθῶς καὶ κυρίως συνεξισοῦσθαι κατανοήσομεν, μήπω ἀποδειχθὲν τὸ τοιόνδε τῶν πολλαπλασίων πάθος τῇ τῶν λόγων ἀληθεῖ καὶ κυρίᾳ ἰσότητι ἐξ ἀνάγκης παρέπεσθαι. Ὅπως ἂν οὖν ὁ Ὁρισμὸς οὗτος ληφθῇ, αἱ τοῦ Ε΄. καὶ τοῦ ϛ΄. Βιβλίου ἀποδείξεις οὐκ ἀσαλεύτως πεπήγασιν, ἕως οὗτις ἀποδείξῃ τὴν ἀληθῆ καὶ κυρίαν τῶν λόγων ἰσότητα, τῷ τῶν πολλαπλασίων ἐκείνῳ πάθει ἀεὶ ἀπαραιτήτως συνέπεσθαι. Ἄλλως δὲ, καὶ εἰ πάντα ὀρθῶς ἔχειν καὶ βεβαίως τὰ περὶ τούτων τεθῇ, ὅγε μὴν τῶν πολλαπλασίων λαβύρινθος οὗτος

(1) Ὁ Ὁρισμ. οὗτος ἀναπτύσσεται κατωτ. μετὰ τὸν ϛ΄. Ὁρισμ.

ϗ ἐμοὶ ϗ πᾶσιν ἀεὶ ἀπαρέσκων ὤφθη, τοῖς δὲ πρωτοπείροις ϗ πράγματα πολλὰ παρεχόμενος, ὧν ὅτω πολλάκις τὴν διάνοιαν συμποδίζει, ὡς μὴ ἐξαρκεῖν πρὸς τὴν ἔξοδον. Διατοῦτο τοίνυν τὴν μυελοῦ δίκην, ϗ οἱονεὶ ψυχὴν τῆς Γεωμετρίας ϗ ἁπάσης τῆς Μαθήσεως τελοῦσαν τῶν Ἀναλογιῶν εἰσήγησιν, τοῦ ἐλλείμματος αὐτοὶ τοῦδε ἀπαλλάξαι φροντίσαντες, ταῦτα τὰ τρία ποιῆσαι πειρασόμεθα.

Α΄. Δείξω ὅτι τὰ τοῦ Ε΄. Βιβλίου Θεωρήματα, τὰ διὰ τῶν πολλαπλασίων παρ' Εὐκλείδου δεικνύμενα, ὅσα ϗ Ἀξιώματα ἐν τούτοις δύνασθαι, διασαφήσεώς τινος ἤπερ ἀποδείξεως χρήζοντα. Οὕτω γὰρ δὴ ἡ τῶν Ἀναλογιῶν γνῶσις, ἣν ἡ τῶν πολλαπλασίων ἔκθεσις δυσχερῆτε ϗ πολλῆς ἐχομένην ἀσαφείας εἰς τόδε ἀπέφηνε, εὐχερής τε ϗ σαφὴς καταστήσεται.

Β΄. Ἀποδείξομεν, ὅτι ὁσάκις τὰ τῶν ἡγουμένων ὁποιαδήποτε Ἰσοπολλαπλάσια τοῖς τῶν ἑπομένων Ἰσοπολλαπλασίοις παρατιθέμενα, ἤτοι ὡσαύτως μείζονά ἐστιν, ἢ ὡσαύτως ἐλάσσονα, ἢ ὡσαύτως ἴσα, οἱ λόγοι ἀληθῶς τε ϗ κυρίως ἴσοι, εἴτ' οὖν ὅμοιοι εἰσί. Τούτου γὰρ τεθέντος ϗ κατασκευασθέντος, ἅπασαι αἱ κατ' Εὐκλείδην ἀποδείξεις, ϗ ὅλη ἡ κατ' αὐτὸν περὶ τῶν Ἀναλογιῶν διδασκαλία τὸ ἑδραῖον ἕξει ϗ ἔμπεδον, ἵν' εἴτις ταῖς ἡμετέραις μὴ ἀρέσκοιτο δείξεσι, πρὸς τὰς Εὐκλειδείους καίτοι διεξοδικὰς οὔσας, ἀλλ' ἀσφαλεῖς ἤδη ϗ στερεὰς τρέποιτο. Διορισόμεθα δὲ ϗ δὴ ϗ ἀποδείξομεν, ϗ τῶν ἴσων λόγων ἄλλο τι γνώρισμα ἐναργέστατον ϗ πρῶτον, ἐξ οὗ ἁπάσας τὰς τοῦ Ε΄. Βιβλίου Προτάσεις, ὁ βουλόμενος ἐπάγειν δυνήσεται.

Γ΄. Καὶ περὶ Παρονομαστῶν τῶν λόγων, ϗ περὶ συνθέσεως πραγματεύσομαι, πραγματείαν τοῖς εἰς τὰ βαθύτερα τῆς Γεωμετρίας χωρῆσαι ἐφιεμένοις ἀναγκαιοτάτην· ἔνθα καὶ τὸ Ἀξίωμα ἀποδείξομεν, ἢ μᾶλλον εἰπεῖν τὸ Θεώρημα, τὸ ἄχρι τούτου ἀναποδείκτως ὑποτιθέμενον, ὅτι ὁ λόγος ὁ ἐκ τῶν ἄκρων ἐξ ὁποσωνοῦν λόγων τῶν κατὰ τὸ μέσον ἴσχει τὴν σύνθεσιν. Τοῖς γεμὴν πρωτοπείροις ἅλις ἕξει, εἰ τοὺς Ὁρισμοὺς ϗ τῶν Μερῶν τὸ Α΄. μετέλθοιεν.

Ὑπόμνησις τοῖς τὴν Γεωμετρίαν διδασκομένοις.

Ὅσον εἰς τὴν Γεωμετρικὴν μάθησιν ἡ τῶν Ἀναλογιῶν ἐπιστήμη συντελοῦσά ἐστιν, οὐδεὶς τῶν Μαθηματικῶν (ὃ καλῶς τῷ Τακουετίῳ σεσημείωται) ἀγνοεῖ, μυελὸς γάρ πως οὗτος τῶν Μαθηματικῶν ἐστιν ἐπιστημῶν, ϗ οἱ παντοῖοι τοῦ περὶ τὰ ἀνάλογα συλλογίζεσθαι τρόποι λυσιτελέστατοι εἰσὶν ἅμα ϗ ἀσφαλέστατοι, ὡς τούτων ἄνευ οὐδὲ βραχύτι χωρῆσαι δυνατὸν ὄν. Τήν γε μὴν Διδασκαλίαν ταύτην, ταῖς ἀνθρώπων ψυχαῖς τῷ κοινῷ λόγῳ σύμφυτον εἶναι ἡγοῦμαι, καὶ τοὺς ποικίλους τοῦ περὶ τῶν Ἀναλογικῶν συλλογίζεσθαι τρόπους, οὓς δι' ὅλου τοῦ ἐν χερσὶ Βιβλίου μετὰ πολλῶν δυσκολιῶν παραδίδωσιν ὁ Στοιχειωτὴς, οὐ τοσοῦτον ἀποδείξεως κυρίως, ἢ ἐκθέσεώς τινος, καὶ τῆς ἐκ τῶν παραδειγμάτων διασαφήσεως δεῖσθαι ὑπολαμβάνω· καί μοι, οἱ διὰ μακρᾶς Προτάσεων περιόδου τὴν εἰσήγησιν ταύτην εὐχερῆ καταστῆσαι πειρώμενοι, αὐτὸ τὸ καθ' αὑτὸ φανώτατον συσκιάζειν δοκοῦσι, καὶ πολλῷ δυσχερέστερον ἀπεργάζεσθαι. Αὐτὸ δὴ τὸ Κεφάλαιον ἐν ὀλίγοις τοῦ πράγματος ὑποθήσω. Σαφὲς οὖν ἐστιν, ὡς Πηλικότητες τέτταρες ἀναλογικαὶ, ὡς ἄρα ὁμοίους τε καὶ ἴσους τοὺς πρὸς ἀλλήλας λόγους ἔχουσαι ἀκούουσιν, ὅτε τούτων ἡ πρώτη τοσάκις τὴν δευτέραν περιενήνοχεν, ὁσάκις ἡ τρίτη τὴν τετάρτην, ἢ ὅτε τοσάκις ἡ Α΄. περιέχεται ἐν τῇ Β΄., ὁσάκις ἡ Γ΄. ἐν τῇ Δ΄. Οὗτωτοι 16 : 8 : : 4 : 2, ἢ γοῦν 3 : 9 : : 4 : 12 λόγοι ὅμοιοι εἰσὶν, ἐπὶ γὰρ τοῦ προτέρου παραδείγματος τὰ ἑπόμενα 8 καὶ 2, ἐν τοῖς ἡγουμένοις αὐτῶν 16 καὶ 4, ἑκάτερον ἐν ἑκατέρῳ δὶς περιέχονται, καὶ ὁ λόγος ἐπ' ἀμφοῖν θεωρεῖται διπλάσιος. Κἀν τῷ Β΄. δὲ παραδείγματι οἱ λόγοι ὅμοιοι εἰσὶν, ἐπειδὴ τὰ ἑπόμενα 9 καὶ 12, τρὶς τὰ ἡγούμενα τὰ ἑαυτῶν ἑκάτερον περιέχει, ὅθεν καὶ ὁ λόγος ὑποτριπλασίων ἑκατέρωσε λέγεται. Οὐδ' ἔστι τις τῶν συμμέτρων Πηλικοτήτων λόγος, ὁ μὴ δι' ἀριθμῶν ὡρισμένων, οὐδ' ἔστι τις τῶν ἀσυμμέτρων ἀλλήλοις, ὁ μὴ δι' ἀριθμῶν τῷ ἀληθεῖ ἐς ἄπειρον ἐγγὺς γινομένων ἐξενεχθῆναι δυνάμενος. Ὁ δέ τοι λόγος δυεῖν Πηλικοτήτων, τῆς μὲν ἡγουμένης, τῆς δ' ἑπομένης, τῷ διὰ τῆς τοῦ ἡγουμένου διὰ τοῦ ἑπομένου διαιρέσεως ἀνακύπτοντι Πηλίκῳ ἐκφέρεται· οὕτως ὁ λόγος 16 πρὸς 8 ἴσα δύναται τῷ $\frac{16}{8}$, ἤτοι $\frac{2}{1} = 2$, λόγος γὰρ διπλάσιος ἐστίν· ὅ,τε λόγος 3 πρὸς 9 ἐστὶ $\frac{3}{9}$ ἤτοι $\frac{1}{3}$, τουτέστιν ὑποτριπλασίων· ὁ δὲ λόγος 8 πρὸς 3 ἐστὶν $\frac{8}{3}$ ἤτοι $2\frac{2}{3}$, τουτέστι διπλάσιος ἐπιδίτριτος, τὸ δὲ πηλίκον τοῦτο τοῦ λόγου Ἐκθέτης κατονομάζεται· Ἐκ μὲν οὖν τῶν εἰρημένων φανερὸν ὅτι τοὺς ὁμοίους λόγους ὁποιουσοῦν ὄντας, οὐ μόνον δι' ἀριθμῶν διαφερόντων, ἀλλὰ καὶ διὰ τῶν αὐτῶν ὀρθότατα ἐκτιθέμεθα, τῷ ὄντι γὰρ τὸν διπλασίονα λόγον ἐπίσης καὶ τῷ 2 πρὸς 1, καὶ τῷ 16 πρὸς 8, καὶ τῷ 4 πρὸς 2 ἐπίσης σημαίνομεν· ὁμοίως δὲ καὶ τὸν ὑποτριπλασίονα, καὶ τῷ 1 πρὸς 3, καὶ τῷ 4 πρὸς 12, καὶ τῷ 3 πρὸς 9 παραπλησιώτατα ὑποδηλοῦμεν. Ἐὰν οὖν τέτταρες Πηλικότητες ὦσιν ἀνάλογοι Α : Β : : α : β, ζητεῖται ἐν τῷδε τῷ Ε΄. Βιβλ. ὅσοις δήποτε ὁμοίοις τρόποις, οἱ ὅμοιοι οὗτοι λόγοι ἀμείβεσθαί τε, καὶ δὴ καὶ συντίθεσθαι ἀλλήλοις πεφύκασιν, ὥστε καὶ τοὺς ἀνακύπτοντας ἐντεῦθεν λόγους ἑκατέρωθεν ὁμοίους τυγχάνειν; Ἀπαντητέον δὲ πάντως, ὅτι ἅπασι τοῖς τρόποις, ἃς ἄντις ἔχοι ἐπινοῆσαι. Ἐπειδὴ γὰρ ὅ,τε λόγος A πρὸς B, ϗ ὁ α πρὸς β ὅμοιοι ἀλλήλοις εἰσὶ, διὰ τῶν αὐτῶν ἑκάτερος ἀριθμῶν παραστῆναι δυνήσεται ὧδε, A : B : : 9 : 3, ϗ α : β : : 9 : 3· ἔνθεντοι ϗ πάντες ἁπλῶς οἱ λόγοι, οἳ ἂν ἑκατέρωθεν, ἢ τῇ Ἐναλλὰξ τῶν ὅρων μεταλήψει, ἢ τῇ Ἀνάπαλιν, ἢ Συνθέσει, ἢ Διαιρέσει, ἢ δι' Ἀντιστροφῆς, ἢ Μίξεως ἀνακύψειαν, διὰ τῶν αὐτῶν ὅλως ἀριθμῶν ἐξενεχθεῖεν, ϗ ἑπομένως ϗ λόγον τὸν αὐτὸν ἑκατέρωθεν διασώσειαν. Οἷον δήπου A + B : B : : α + β : β· τοῦ γὰρ αὐτοῦ λόγου παραστατικὴ ἡ 9 + 3 : 3, ἥτις ἐστὶν ἡ τοῦ λόγου σύνθεσις· ὡσαύτως δὲ ϗ περὶ τῶν ἄλλων οἰητέον. Ἀλλὰ δὴ τοῦτο μάλιστα τοῖς μαθητιῶσι παρατηρείσθω, τὸ τοὺς πάντῃ ὁμοίους λόγους οὓς μετίασι, ϗ τρόπῳ πάντῃ παραπλησίῳ ἀμείβειν τε ϗ διατάσσειν, ὡς οὕτως ἐκ τῆς παραπλησίας ἀμοιβῆς τε ϗ διατάξεως ὁμοιοτάτων πανταχοῦ ϗ τῶν λόγων ἀναφυησομένων, ϗ θαυμάζειν ἔπεισιν, ὅτι μηδένα τῶν τὰ Γεωμετρικὰ στοιχεῖα ἄχρι τούτου ἐκδεδωκότων, ἐν τῷ τόδε τὸ Ε'. Βιβλίον ὑποτιθέναι, τὸ ῥᾶστον τοῦτο ϗ προχειρότατον τῶν ἴσων λόγων τεκμήριον, εἰς ἀνάπτυξίν τε καὶ διασάφησιν τῆς τῶν Ἀναλογιῶν διδασκαλίας προχειρισάμενος φαίνεται. Ἀλλ' αὐτοὶ τοῦ περὶ τῶν ὁμοίων λόγων ἐπιχειρεῖν, τοὺς κυριωτέρους τῶν τρόπων, οἷς ἡ Γεωμετρία κέχρηται, ἐπὶ τοῦ βραχέος τοῦδε Πίνακος ὑποθῶμεν· καὶ δὴ ἔστω

	A : B : : α : β : : 9 : 3.
Καὶ ἐναλλὰξ	A : α : : B : β : : 9 : 9 : : 3 : 3.
Ἀνάπαλιν	B : A : : β : α : : 3 : 9.
Ἐν Συνθ.	A + B : B : : α + β : β : : 9 + 3 = 12 : 3.
Ἐν Διαιρ.	A — B : B : : α — β : β : : 9 — 3 = 6 : 3.
Ἐν Ἀντιστρ.	A : A + B : : α : α + β : : 9 : 9 + 3 = 12.
	A : A — B : : α : α — β : : 9 : 9 — 3 = 6.
Ἐν Μίξει	A + B : A — B : : α + β : α — β : : 9 + 3 : 9 — 3 : : 12 : 6.
Ὅθεν δὴ ϗ εἰ	A : B : : α : β, ϗ B : Γ : : β : γ, ἔσται A : Γ : : α : γ.
	9 : 3 : : 9 : 3, ϗ 3 : 1 : : 3 : 1, ἔσται 9 : 1 : : 9 : 1.

Ἔνθα ὁ λόγος τοῦ A : Γ (τουτέστιν 9 : 1) συγκεῖσθαι λέγεται ἐκ τῶν λόγων τοῦ A : B, ϗ τοῦ B : Γ (τουτέστιν 9 : 3 ϗ 3 : 1).

Δι' ἴσου τεταγμένως	A : B : : α : β·	8 : 3 : : 16 : 6.
Καὶ	B : Γ : : δ : α·	3 : 2 : : 24 : 16.
Ἔσται γὰρ	A : Γ : : δ : β·	8 : 2 : : 24 : 6.

Ἔνθα ὥσπερ ὁ λόγος A : Γ (8 : 2) σύγκειται ἐκ τῶν λόγων A : B, ϗ B : Γ (τουτέστιν 8 : 3 ϗ 3 : 2) ἐπ' εὐθείας κειμένων, οὕτως ὁ λόγος τοῦ δ πρὸς β (24 : 6). σύγκειται ἐκ τῶν λόγων δ : α, καὶ α : β (τουτέστιν 24 : 16 καὶ 16 : 6), ἀλλὰ μετατεθέντων.

Ἀλλὰ γὰρ περὶ τῆς τῶν λόγων συνθέσεως εὑρήσεις πλείονα ἐν Ὅρ. Ε΄. τοῦ ϛ΄. Βιβλίου.

Τελευταῖον ἐὰν ᾖ $Α : Β :: Γ : Δ :: 9 : 8$

$α : β :: γ : δ :: 3 : 4$

Ἔσται καὶ $Α \times α : Β \times β :: Γ \times γ : Δ \times δ :: 9 \times 3 : 8 \times 4 :: 27 : 32$.

Καὶ $\frac{Α}{α} : \frac{Β}{β} :: \frac{Γ}{γ} : \frac{Δ}{δ} :: \frac{9}{3} : \frac{8}{4} :: 3 : 2$.

Ὁ τούτους τοίνυν τοὺς τρόπους τοῦ περὶ τὰ ἀνάλογον ὄντα ἐπιχειρεῖν ἀκριβῶς εἰδὼς, καὶ τούτοις χρῆσθαι κατὰ τὸ δέον ἐπιστάμενος, τῶν τοῦ Ε΄. Βιβλίου ἐν μέρει Προτάσεων (εἰ μή τις τὰς Ἀξιωματικὰς οὔσας καὶ ἐναργεστάτας ἐξέλοι) σπανιώτατα δεηθήσεται. Ὅθεν δὴ καὶ εἰ παρ' ἐμοὶ ἦν, ὅλην ἄνωθεν τὴν τῶν Ἀναλογιῶν διδασκαλίαν, καὶ χωρὶς τῆς παρ' Εὐκλείδῃ μεθόδου αὐτὸς ὑποθείην ἄν. Ἐπεὶ δὲ τῷ Τακουετίῳ τῷ τῆς Εὐκλειδείου τάξεως ἄλλως ἀκριβεῖ ἐν ἅπασιν ἀκολούθῳ, ἅπασαν κἀνταῦθα τὴν τοῦ Στοιχειωτοῦ εἰσήγησιν ἀνελλιπῆ, καὶ ὡς ἔχει παρ' ἐκείνῳ τάξεως ἔδοξεν ὑποθέσθαι, καὶ αὐτοὶ τὴν ἰδίαν πρόθεσιν ὑπερβησόμεθα.

ΜΕΡΟΣ Α΄.

Τὰ τῶν Ἀναλογιῶν στοιχεῖα Μεθόδῳ εὐχερεστέρᾳ ἐκτίθεται.

Ὁ ρ ι σ μ ο ί.

Α΄. Μέρος ἐστὶ Μέγεθος Μεγέθους, τὸ ἔλαττον τοῦ μείζονος ὅταν (ποσάκις δηλ. ἐπαναληφθὲν) καταμετρῇ τὸ μεῖζον· μέρη δὲ ὅταν οὐ καταμετρῇ.

Οἷον μῆκος ποδιαῖον μέτρον ἐστὶ μήκους τοῦ δεκαποδιαίου, ἐὰν γὰρ δεκάκις ἐπαναληφθῇ, καταμετρήσει αὐτό· μῆκος δὲ τὸ τετραποδιαῖον οὐ μέρος, μέρη δὲ τοῦ δεκαποδιαίου ἐστὶν, ἐπαναληφθὲν γὰρ οὐ καταμετρεῖ, ἀλλὰ δὶς μὲν ἐλλείπει, τρὶς δὲ ὑπερέχει. Τὰ δέ τοι μέρη ἤτοι συμμέτρως ἔχει πρὸς τὸ ὅλον ὡς ἐπὶ τοῦ τεθέντος, ἢ γοῦν καὶ ἀσυμμέτρως, ὡς ἐάν τις τὴν Πλευρὰν τοῦ Τετραγώνου παραβάλλῃ πρὸς τὴν τοῦ αὐτοῦ Διαγώνιον. Ὅρα τὸ Σχόλ. τῆς ΜΖ΄. τοῦ Α΄. Βιβλίου.

Μέγεθος Μεγέθυς πολλαπλάσιόν ἐςι, τὸ μεῖζον τῦ ἐλάσσονος ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τῦ ἐλάσσονος, τυτέςιν ὅταν τὸ ἔλαττον μέρος τῦ μείζονος ᾖ, εἴτ' ὖν ὃ ταυτόν ἐςιν, ὅταν τὸ μεῖζον περιεκτικὸν ἐπ' ἀκριβὲς ᾖ τῦ ἐλάττονος πλεονάκις ἐπαναληφθέντος. Β'.

Λόγος ἐςὶ δύο Μεγεθῶν ὁμογενῶν, ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις. Γ'.

Ἐπὶ παντὸς δὲ λόγυ ὅροι δύω εἰσὶν, ὧν ὁ μὲν πρωτοταγὴς Ἡγύμενον τῦ λόγυ καλεῖται, τυτέςιν ὁ δὶ Ὀρθῆς ἐκφερόμενος, ὁ δὲ ἑξῆς Ἑπόμενον.

Τῦ ἡγυμένυ τε ϗ ἑπομένυ συνισυμένων, ὁ λόγος τῆς Ἰσότητος εἶναι λέγεται, ἀνίσων δὲ ὄντων, Ἀνισότητος, ϗ μείζονος μὲν ἀνισότητος, εἰ τὸ ἡγύμενον μεῖζον ᾖ, ἐλάσσονος δὲ, ἢν ἔλαττον.

Λόγος λογικός ἐςιν, ὁ ἐν τοῖς συμμέτροις τῶν Μεγεθῶν θεωρύμενος, ϗ ἀριθμοῖς ἐκφέρεσθαι δυνάμενος, ἄλογος δὲ, ὁ ἐν τοῖς ἀσυμμέτροις τῶν Μεγεθῶν θεωρύμενος, ϗ δὶ ἀριθμῶν ἀνέκφραςος. Δ'.

Οἷον ὁ λόγος 2 πρὸς 1 λογικός ἐςιν, ὁ δὲ $\sqrt{2}:1$ ἄλογος, ϗ γὰρ $\sqrt{2}$ ὐδενὶ ἂν ἀριθμῷ ἐκφρασθείη.

Καὶ σύμμετρα μὲν Μεγέθη ἐςὶν, ἅττα κοινόν τι παραληφθὲν μέτρον καταμετρεῖ, ἀσύμμετρα δὲ, ἅττα κοινὸν ὐδὲ μέτρον καταμετρεῖ.

Λόγοι δύο A : B ϗ Γ : Δ ὅμοιοι, ἴσοι, οἱ αὐτοί εἰσιν, ὅταν τὸ θατέρυ ἡγύμενον A, ἐπίσης τε ϗ ὡσαύτως (τυτέςιν ὐδὲ μᾶλλον, ὐδέ γε ἧττον) περιέχῃ τὸ ἑπόμενον B τὸ ἑαυτῦ, ὥσπερ τὸ θατέρυ ἡγύμενον Γ περιέχει τὸ ἑπόμενον Δ τὸ ἑαυτῦ. Ε'.

Ἢ ὅταν τὸ θατέρυ ἡγύμενον A ὡσαύτως περιέχηται ἐν τῷ ἰδίῳ ἑπομένῳ B, ὥσπερ τὸ θατέρυ ἡγύμενον Γ ἐν τῷ ἰδίῳ ἑπομένῳ Δ.

Τὰ δὲ Μεγέθη τὰ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, καλεῖται Ἀνάλογον.

Λόγοι δύο ἀνόμοιοί εἰσι, τυτέςι λόγος λόγυ μείζων ἐςὶν, ὅταν τὸ θατέρυ ἡγύμενον E, μᾶλλον περιέχῃ τὸ ἴδιον ἑπόμενον Z, ἢ τὸ θατέρυ ἡγύμενον H, τὸ ἴδιον ἑπόμενον Θ· ἢ ὅταν τὸ θατέρυ ἡγύμενον, ἧττον περιέχηται ἐν τῷ ἰδίῳ ἑπομένῳ, ἢ τὸ θατέρυ ἡγύμενον ἐν τῷ ἰδίῳ. ϛ'.

Ἡ τῶν λόγων ἰσότης τε ϗ ἀνισότης ἀναπτύσσεται.

Τί δὲ βύλεται τὸ θάτερον τῶν ἡγυμένων ἤτοι ἐπίσης, ἢ μᾶλλον περιέχειν τὸ ἴδιον ἑπόμενον, ἢ θάτερον τὸ ἑαυτῦ, ἐὰν οἱ λόγοι λογικοὶ ὦσι, ὁρισθῆναι τε ϗ ἀναπτυχθῆναι περαιτέρω ϗ διὰ τῶν ἀριθμῶν δυνατόν. Οἷον ἐὰν τὸ A τριπλάσιον ᾖ τῦ B, τό,τε Γ τριπλάσιον τῦ Δ, δῆλον ὅπως τὸ

Α ἐπίσης τε ϗ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, περιεκτικὸν ὂν τυγχάνει τοῦ Β, καθ' ὃν ϗ τὸ Γ τοῦ Δ· καὶ ἐὰν τὸ Ε τριπλάσιον ᾖ τοῦ Ζ, τὸ δὲ Η διπλάσιον τοῦ Θ, φανερὸν αὖθις ὅπως τὸ Ε, μᾶλλον περιέχει τὸ Ζ, ἢ τὸ Η, τὸ Θ. Ἐὰν δὲ οἱ λόγοι τῶν ἀλόγων τύχωσι, τὸ πρᾶγμα περαιτέρω ἀναπτύξεώς ἐστιν ἀνένδεκτον. Ἔστω Μεγέθη ἀσύμμετρα τὰ Α ϗ Β, σαφὲς δὲ ὅτι τὸ Α οὐ μόνον μεῖζον τοῦ Β ἐστὶν, ἀλλὰ ϗ ὁπωσοῦν μεῖζόν ἐστίν (ἄλλως γὰρ τὸ Α περιεκτικὸν τυγχάνει τοῦ Β, ἢ Μέγεθος ἄλλο τὸ τυχὸν, ὃ μεῖζον ἂν εἴη αὐτοῦ τοῦ Α, ἢ ἔλαττον), οὐδέ γε δεῖ περαιτέρω ζητεῖν ἢ ἀναπτύξαι πειρᾶσθαι, τὶς ὁ ὡρισμένος τρόπος, καθ' ὃν τὸ Α περιέχειν λέγεται τὸ Β, ἔστι γὰρ ὁ τρόπος δι' ἀριθμῶν πάντη ἀνέκφραστος ϗ ἀδιερμήνευτος· ὥστε καθάπερ δυοῖν δοθέντων Μεγεθῶν ἀσυμμέτρων, ζητεῖν οὐ δεῖ τὶ τὸ ὁπωσοῦν, εἴτ' οὖν ὡρισμένως θάτερον περιέχειν θάτερον, οὕτω τοι ϗ Μεγεθῶν τεσσάρων, ἐν οἷς ἀνὰ δύω τὸ ἀσύμμετρον ἐστι, δοθέντων, ζητεῖν οὐ δεῖ τὶ τὸ ἐπίσης τε ϗ ὡσαύτως τὸ Γ φέρε, περιεκτικὸν εἶναι τοῦ Δ, ὥσπερ τὸ Α περιεκτικὸν τυγχάνει τοῦ Β· τοῦ γάρ τοι τρόπου καθ' ὃν τὸ Α περιεκτικόν ἐστι τοῦ Β ἀδιερμηνεύτως ἔχοντος, ϗ ἡ ταυτότης πάντως τοῦ τρόπου ὅτῳ τὸ Α περιέχει τὸ Β, τῷ ὅτῳ τὸ Γ περιέχει τὸ Δ, ὡσαύτως ἀδιερμήνευτος ἐστί.

Ἡ δὲ τῶν τρόπων ταυτότης ἐκ τοῦ κατ' Εὐκλείδην Ὁρισμοῦ τῶν ἴσων λόγων, περὶ οὗ κατωτέρω, ἢ ἐκ τοῦ κατά γε τὸν Τακκέτιον γνωρίσματος τῶν αὐτῶν, περὶ οὗ ἐφεξῆς, ὅσον τῇ φύσει τοῦ πράγματος ἐγχωρεῖ, ἀποχρώντως ἔοικεν ἀναπτύσσεσθαι.

κ. 307. Ὅτι δὲ ἀλόγου τινὸς λόγου, τοῦ Α φέρε πρὸς τὸ Β δοθέντος, δυνατοί εἰσι ϗ λόγοι ἄλλοι ἄπειροι, ἤτοι ἴσοι, ἢ μείζονες, ἢ ἐλάσσονες, ἐν ὅροις ποικίλοις συνεστῶτες, συνιδεῖν ῥᾴδιον ἐντεῦθεν. Ληφθήτω Μέγεθος ὁποιονοῦν τὸ Γ, ϗ ἀφαιρεθήτω τὸ Β ἀπὸ τοῦ ἀσυμμέτρου αὐτῷ Α, ὁσάκις ἂν ἐξῇ, οἷον τρὶς, ϗ λοιπὸν ἔστω τὸ ΕΖ· ἔστω δὲ Ο τριτημόριον τοῦ Γ, κείσθω δὲ ϗ τὸ τυχὸν Χ πρὸς μὲν τὸ Γ ἀσυμμέτρως ἔχον, τοῦ δὲ Ο μεῖζον· ἐπεὶ δὲ τὸ Α περιέχει τὸ Β πλεονάκις ἢ τρὶς, τὸ δὲ Γ περιέχει τὸ Χ ἡττονάκις ἢ τρὶς (τρὶς γὰρ ἐπ' ἀκριβὲς τὸ Γ περιεκτικὸν ἐτέθη τοῦ Ο, οὗ μεῖζον ἐλήφθη τὸ Χ), ἔσται ὁ ἄλογος λόγος τοῦ Γ πρὸς τὸ Χ, ἐλάσσων τοῦ ἀλόγου λόγου τοῦ Α πρὸς τὸ Β. Ἤδη δὲ κείσθω ϗ τὸ Π τεταρτημόριον ὂν τοῦ Γ, ϗ ἔστω τὸ τυχὸν Ψ, τῷ μὲν Γ ἀσύμμετρον, τοῦ δὲ Π ἔλαττον· καὶ ἐπεὶ τὸ Α περιέχει τὸ Β ἡττονάκις ἢ τετράκις, τὸ δὲ Γ περιέχει τὸ Ψ πλεονάκις ἢ τετράκις (τὸ γὰρ Γ ἐπ' ἀκριβὲς τετράκις περιεκτικὸν ἐτέθη τοῦ Π, οὗπερ ἔλαττον ἐλήφθη τὸ Ψ), ἔσται δὴ ὁ ἄλογος λόγος τοῦ Γ πρὸς τὸ Ψ, μείζων τοῦ ἀλόγου λόγου τοῦ Α πρὸς τὸ Β.

Ἤδη δὲ ἐπεὶ τὸ Γ πρός τι τὸ Χ, ἐλάσσονα λόγον ἔχον ἐστὶν ἢ τὸ Α πρὸς τὸ Β· καὶ πάλιν ἐπειδὴ τὸ Γ πρός τι τὸ Ψ, μείζονα λόγον ἔχον ἐστὶν ἢ τὸ Α πρὸς τὸ Β, φανερὸν ὅτι τὸ Γ πρός τι τὸ Δ, μέσον τινὰ λόγον ἢ πρὸς τὸ Χ καὶ τὸ Ψ ἕξει, ἴσον τῷ ὅνπερ ἔχει τὸ Α πρὸς τὸ Β. Ὃ δή που ἐκ τῆς κατὰ φύσιν ἐναργείας κατάδηλόν ἐστιν οὐδὲν ἧττον, ἢ εἴτις διανοεῖται ὧδε· δοτὸν μὲν τὸ μεῖζον τοῦ Κ, δοτὸν δὲ τὸ ἔλαττον τοῦ Κ, δοτὸν ἄρα καὶ τὸ ἴσον τῷ Κ.

Τὶ τὸ ἐν τῷ κατ᾽ Εὐκλείδην Ὁρισμῷ τῶν ἴσων λόγων ἐλλεῖπον.

Ὁ μὲν οὖν Εὐκλείδης, λόγους δύω Α πρὸς Β, καὶ Γ πρὸς Δ ἴσους εἶναι φησὶν, ὅταν τὰ τῶν ἡγουμένων ἰσάκις πολλαπλάσια Ε καὶ Ζ, τῶν τῶν ἑπομένων ἰσάκις πολλαπλασίων Η, Θ, καθ᾽ ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἢ ἅμα ὑπερέχῃ, ἢ ἅμα ἐλλείπῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, τουτέστιν ὅταν τοῦ Ε ὑπερέχοντος τὸ Η, καὶ τὸ Ζ ὑπερέχῃ τὸ Θ, καὶ ὅταν τοῦ Ε ὑπερεχομένου τῷ Η, καὶ τὸ Ζ ὑπερέχηται τῷ Θ, καὶ ὅταν τοῦ Ε συνισουμένου τῷ Η, καὶ τὸ Ζ συνισούμενον ᾖ τῷ Θ. Ἔνθα καλῶς σημειωτέον, ὡς ὁ Εὐκλείδης τὴν τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων ὑπεροχήν τε καὶ ἔλλειψιν, οὐκ ἀναλογικῶς καὶ καθ᾽ ὁμοιότητα ἐξεδέξατο, οὕτω γὰρ ἀλόγως τὸ αὐτὸ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀναπτύξαι ἂν ἐπεχείρησεν, ἀλλὰ τὴν ὑπεροχὴν καὶ τὴν ἔλλειψιν ἁπλῶς. Ἀλλὰ καὶ οὕτως ἔμπης τὸν τῶν Γεωμετρῶν ὑπατεύοντα, κατά τι ἐλλείπειν ἀνωτέρω ἡμῖν σεσημείωται· ἤτοι γὰρ διὰ τούτων, τὸν τῶν ἴσων λόγων Ὁρισμὸν ἀποδοῦναι σκοπῶν, τὸ τοῦ ὁριστοῦ πάθος εἰς Ὁρισμὸν ἐξείληφε· δῆλον γὰρ ὅτι ἐκ τῆς τῶν λόγων ἰσότητος, ὡς ἐξ ἀρχῆς προβλυστάνει αὕτη ἡ τῶν πολλαπλασίων ἰδιότης· ἢ γοῦν ὡς γνώρισμα τοῦτο προβάλλεται ὂν τῶν ἴσων λόγων πρῶτόν τε καὶ ἀδιάπταιστον, καὶ οὕτως ἀποδεῖξαι ὤφειλε, τοῖς ἴσοις λόγοις αὐτὸ ἀεὶ συνημμένον εἶναι, ὡς ἐκ τούτου ἐκείνους ἀεὶ ἐπιφέρεσθαι, ἥτις δὴ συνάφεια ἀσαφής τε ἐστὶ καὶ οὐκ εὐαπόδεικτος, ἢ τέως ἀντὶ τῆς τῶν λόγων ἰσότητος οὐδὲν ἕτερον ἐννοεῖ, ὅτι μὴ τὴν ἅμα τῶν πολλαπλασίων ἐκείνων ὑπεροχήν τε καὶ ἔλλειψιν· καὶ οὕτως ἐν ὅλῳ τῷ Ε΄. καὶ ϛ΄. Βιβλ. ὅταν τέσσαρα Μεγέθη Ἀνάλογον εἶναι ἀποδεικνύῃ, οὐδὲν ἕτερον εἰσόμεθα, ἢ τὴν εἰρημένην ὑπεροχήν τε καὶ ἔλλειψιν αὐτοῖς προσήκειν, ἀγνοοῦντες εἰ ὅλως ταῦτα τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος Μεγέθη Ἀνάλογον τωόν τι ἐστί

Ἀλλ᾽ ὁ Εὐκλείδης ἐν τῷ τῶν ἴσων λόγων Ὁρισμῷ, οὐδὲν ἄλλο ἢ τὸν νοῦν καθ᾽ ὃν τὰς φωνὰς ἐκείνας ἐξειλήφει, ὡς ἔθος τοῖς ἀπὸ τῶν Μαθημάτων δεῖξαι προθέμενος, συνορᾷν οὐκ ἔχω τὶ τοσοῦτον αἰτιατέος ἐστί· ϗ μάλιστα τοῦ Ὁρισμοῦ ἅπασι τοῖς ἴσοις τῶν λόγων ἀληθῶς προσήκοντος, εἴτε λογικοὶ εἶεν, εἴτ᾽ οὖν ϗ ἄλογοι, ὡς ἐν τῷ Β΄. μέρει τοῦ ἐν χερσὶ Βιβλίου ϗ αὐτὸς ὁ Τακουέτιος ἀποδείκνυσιν, ὃ ϗ τοῖς ἀκριβῶς τὸν νοῦν τῷ Ὁρισμῷ ἐπιστήσασιν αὐτόθεν κατάδηλον ἐστίν· ὅρα τὰ ἡμῖν σεσημειωμένα ἐν Ὁρισμ. Λϛ. τοῦ Α΄. Βιβλίου. Πρὸς γὰρ τὸν αὐτὸν ἡμῖν λίθον προσκρούει ἑκατέρωσε ὁ Τακουέτιος· ἀλλ᾽ ἐπεί γε τῇ κατ᾽ αὐτὸν μεθόδῳ ἐπάναγκες ἀκολουθῆσαι, ἴδωμεν τέως ὁποιονδήποτε καθόλου τεκμήριον τῶν ἴσων λόγων ἡμῖν προβάλλεται.

Γνώρισμα ἕτερον τῶν ἴσων λόγων πρῶτόν τε ϗ ἀδιάπταιστον ὑποτίθεται.

Γνώρισμα τοίνυν αὐτοὶ σαφές τε ϗ ἀδιάπταιστον, ϗ πρῶτον τοιοῦτον ὑποθησόμεθά τε ϗ δείξομεν ἐν Θεωρ. Ε΄. ϗ ϛ΄. τοῦ Β΄. Μέρους (ἀλλὰ γὰρ δείξεως ἐργώδους ἐπιδεὲς εἶναι ἥκιστα δοκεῖ τουτὶ τὸ τῶν ἴσων λόγων τεκμήριον, ὡς ἐκ τῶν Ὁρισμ. Ε΄. ϗ ϛ΄. ἀμέσως ἐπιφερόμενον, ϗ τούτων οἷόν τις ἔκθεσίς τε ϗ διασάφησις ὄν)· ἔστι δὲ τοιοῦτο.

κ. 308. Οἱ λόγοι (οἱ κατὰ τὴν μείζονα ἀνισότητα) ἴσοι εἰσὶν (οἷον ὁ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΓΖ, ϗ ὁ τῆς ΗΜ πρὸς τὴν ΝΠ), ὅταν ϗ αὐτὰ τὰ ἑπόμενα, ϗ τούτων ἅπαν ὁποιονοῦν μέρος ὅμοιον, ἐν τοῖς ἡγουμένοις ἰσαρίθμως ἀεὶ περιέχηται· οἷον ἐὰν τοῦ δεκατημορίου τῆς ΓΖ διακοσιάκις ἐν τῇ ΑΒ περιεχομένου, ϗ τὸ δεκατημόριον τῆς ΝΠ διακοσιάκις ἐν τῇ ΗΜ περιέχηται· καὶ ἐὰν τοῦ ἑκατοστημορίου τῆς ΓΖ χιλιάκις ἐν τῇ ΑΒ περιεχομένου, ϗ τὸ ἑκατοστημόριον τῆς ΝΠ χιλιάκις ἐν τῇ ΗΜ περιέχηται, ϗ οὕτως ἐφεξῆς ἐς ἄπειρον, ἔσται ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΖ, ὡς ἡ ΗΜ πρὸς τὴν ΝΠ. Οὕτω γάρ τοι κατὰ τὸν Ε΄. Ὁρισμὸν, τὸ τοῦ προτέρου λόγου ἡγούμενον ΑΒ, ἐπίσης τε ϗ ὡσαύτως (τουτέστιν οὐ μᾶλλον, οὐδ᾽ ἧττον) περιέχει τὸ ἴδιον ἑπόμενον ΓΖ, ὡς τὸ τοῦ Β΄. ἡγούμενον ΗΜ περιέχει τὸ ἴδιον ἑπόμενον ΝΠ.

Ἐὰν δὲ οἱ κατὰ τὴν ἐλάσσονα ἀνισότητα λόγοι ΓΖ πρὸς ΑΒ, καὶ ΝΠ πρὸς ΗΜ ἴσοι τεθῶσι, τὰ ἡγούμενα αὐτὰ, ϗ τῶν ἡγουμένων πᾶν ὁποιονοῦν μέρος ὅμοιον, ἐν τοῖς ἑπομένοις αὐτῶν ἰσαρίθμως ἀεὶ περιεχόμενα ἔσται· τοῦτο γὰρ αὖθις ὁ Ε΄. τῶν Ὁρισμ. ἀπαιτεῖ, τὸ ἡγούμενον ἀμέλει ΓΖ, ὡσαύτως περιέχεσθαι ἐν τῷ ἰδίῳ ἑπομένῳ ΑΒ, ὥσπερ τὸ ἡγούμενον ΝΠ ἐν τῷ ἰδίῳ αὐτοῦ ΗΜ.

Ἄνισοι δὲ λόγοι εἰσὶν, ὅταν ἤτοι τὰ ἑπόμενα αὐτὰ, ἢ τῶν ἑπομένων πᾶν ὁτιῦν μέρος ὅμοιον, μὴ ἰσαρίθμως ἐν τοῖς ἡγουμένοις περιέχηται. Καὶ τούτων μείζων μὲν ὁ λόγος, οὗτινος ἤτοι τὸ ἑπόμενον, ἢ τὸ μέρος τοῦ ἑπομένου πλεονάκις περιέχοιτο ἐν τῷ ἡγουμένῳ.

Οἷον ἐὰν ἑκατονχιλιοστημόριον τῆς ΓΖ πλεονάκις περιέχηται ἐν τῇ ΑΒ, ἢ τὸ ἑκατονχιλιοστημόριον τῆς ΝΠ ἐν τῇ ΗΜ, ἔσται ὁ λόγος ΑΒ πρὸς ΓΖ μείζων τοῦ λόγου ΗΜ πρὸς ΝΠ. * Ἕπεται δὲ καὶ τοῦτο ἐκ τοῦ ϛ΄. Ὁρισμοῦ.

Ἰσαρίθμως δὲ περιέχεσθαι λέγεται, ὧν αἱ ἀφαιρέσεις αἱ δυναταὶ ἰσάριθμοι εἰσί.

Τῷ δὲ τοιῷδε τεκμηρίῳ, καὶ ἡ τῶν ἀλόγων λόγων ἰσότης τε καὶ ἀνισότης καταφαίνεται. Οὕτω γὰρ καὶ τὰ ἡγούμενα τὰ τοῖς ἑπομένοις ὄντα ἀσύμμετρα, τῇ ἀφαιρέσει τῶν συμμέτρων τε καὶ ἀναλόγων τοῖς ἑπομένοις αὐτοῖς, εἰς τὸ μηδὲν ἀπολήγουσιν οἷον ἐξαντλούμενα.

Ὅμοια δὲ μέρη ἐστὶ τὰ ἐπίσης τε καὶ ὡσαύτως ἐν τοῖς ὅλοις αὐτῶν περιεχόμενα, ὥστε οἱονδήποτε μέρος τοῦ οἰκείου ὅλου τὸ ἕτερον εἶναι τεθείη, τοιοῦτον εἶναι καὶ τοῦ οἰκείου τὸ ἕτερον. Ὃ τῷόντι οὐδὲν ἄλλο ἐστὶν, ἢ τὰ μέρη πρὸς τὰ αὐτῶν ὅλα, καὶ δὴ καὶ ἀνάπαλιν τὰ ὅλα πρὸς τὰ μέρη αὐτῶν εἶναι ἀνάλογον, εἴτε τὰ μέρη τοῖς ὅλοις σύμμετρα ᾖ, εἴτε καὶ ἀσύμμετρα. Ζ΄.

Μέρος δὲ μέρει ὅμοιον, τὸ ὡσαύτως τὸ κατ' αὐτὸ ὅλον καταμετροῦν, οἷον ἐὰν ἑκάτερον φέρε τοῦ ὅλου τριτημόριον ᾖ, ἢ δεκατημόριον, ἢ κξ.

Μεγέθη συνεχῶς ἀνάλογον ἐστὶν (α, β, γ, δ), ὧν οἱ μεταξὺ ὅροι β, γ δὶς λαμβάνονται, διττὴν ἔχοντες τὴν σχέσιν, τὴν μὲν τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸν ἀμέσως ἡγούμενον, τὴν δὲ τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸν ἐφεξῆς ἑπόμενον· τοὺς δέ τοι συνεχεῖς λόγους οὕτως ἐκφέρομεν, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτω τὸ Β πρὸς τὸ Γ, καὶ ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτω τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, κξ Η΄.

Μεγέθη δὲ διωρισμένως ἀνάλογον ἐστὶν, ὧν οὐδεὶς τῶν ὅρων δὶς λαμβάνεται· ἃ καὶ οὕτως ἐκφέρομεν Α πρὸς Β, ὡς Γ πρὸς Δ. Θ΄.

Τὰ δὲ πλείονα τριῶν Μεγέθη ἀνάλογον εἶναι λεγόμενα, διωρισμένως ἀεὶ νοείσθω.

Ἐὰν ᾖ Μεγέθη συνεχῶς ἀνάλογον (α, β, γ, δ), τὸ πρῶτον α πρὸς τὸ τρίτον γ διπλασίονα τὸν λόγον ἔχειν λέγεται, ἢ τὸ αὐτὸ πρῶτον α πρὸς τὸ δεύτερον β, καὶ τὸ πρῶτον α πρὸς τὸ τέταρτον δ τριπλασίονα, ἢ τὸ πρῶτον α πρὸς τὸ δεύτερον β, καὶ ἐφεξῆς. Ι΄.

Ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ πρῶτον α πρὸς τὸ δεύτερον β, ὑποδιπλασίονα (τοῦτέςι τὸν ἐφ' ἡμισείας) λόγον λέγεται ἔχειν, ἢ τὸ αὐτὸ α πρὸς τὸ τρίτον γ, καὶ ὑποτριπλασίονα, ἢ τὸ αὐτὸ α πρὸς τὸ τέταρτον δ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Καὶ ἐὰν λόγος τις τριπλασίων λόγῳ τινὶ διπλασίονι ἴσος ᾖ, ἔςαι ὁ τοῦ δευτέρου ἁπλοῦς τοῦ κατὰ τὸν πρότερον ἁπλοῦ ἡμιπλασίων, τουτέςιν ἡμιόλειος. Οἷον ἔςω α, β, γ, δ ∺ καὶ Α, Β, Γ ∺· κείσθω δὲ α πρὸς δ ἐν τῇ προτέρᾳ ἀναλογίᾳ, ὡς Α πρὸς Γ ἐν τῇ δευτέρᾳ· φημὶ δὴ ὅτι Α ἔςι πρὸς Β ἐν λόγῳ ἡμιολείῳ τοῦ λόγου α πρὸς β. Ἔςω γὰρ ζ μεταξὺ β καὶ γ, ἢ ὃ ταυτόν ἐςι, μεταξὺ α καὶ δ μέσον ἀνάλογον, διὰ γοῦν τοὺς ἴσους λόγους α πρὸς δ, καὶ Α πρὸς Γ, καὶ τὰς ἀναλόγους ἑκατέρωσε μεσότητας ζ καὶ Β, ἔςαι α : ζ :: Α : Β. Ἀλλαμὴν ὁ λόγος α πρὸς ζ σύγκειται ἐκ τοῦ ὅλου λόγου α πρὸς β, καὶ τῆς ἡμισείας τοῦ αὐτοῦ β πρὸς ζ, ἄρα ὁ λόγος Α πρὸς Β, ὃς ἴσος ἐςὶ τῷ λόγῳ α πρὸς ζ, περιέχει τόν τε ὅλον λόγον α πρὸς β, καὶ τὴν κατ' αὐτὴν ἡμίσειαν, ἤτοι τὸν β πρὸς ζ· ὁ δὲ ἐκ τοῦ ὅλου καὶ τῆς ἡμισείας λόγος, ἡμιπλασίων καλεῖται, τουτέςιν ἡμιόλειος, ἔςιν ἄρα Α πρὸς Β ἐν λόγῳ ἡμιπλασίονι, ἤτοι ἡμιολείῳ τοῦ α πρὸς β. Καὶ οὕτως ἐν τοῖς Ἀςρονομικοῖς, ἐπειδὴ οἱ κύβοι τῶν ἀποςάσεων τῶν Πλανητῶν ἀφ' ἡλίου, εἰσὶ πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ ἀπὸ τῶν περιοδικῶν χρόνων Τετράγωνα, οὕτως ὥςε τὸν τριπλασίονα τῶν ἀποςάσεων λόγον, τὸν αὐτὸν εἶναι τῷ τῶν περιοδικῶν χρόνων διπλασίονι (οἱ μὲν γὰρ κύβοι ἐν λόγῳ εἰσὶ (1) τριπλασίονι, τὰ δὲ Τετράγωνα ἐν διπλασίονι (2) τῶν ἰδίων Πλευρῶν, ἤτοι τῶν ῥιζῶν σχετικῶς), λέγειν εἰώθαμεν, ὡς οἱ περιοδικοὶ χρόνοι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλους ἐν λόγῳ ἡμιπλασίονι, ἤτοι ἡμιολείῳ τῶν ἀφ' ἡλίου ἀποςάσεων.

ΙΑ'. Ὁμόλογα Μεγέθη καλεῖται, τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις, τοῖς δ' ἑπομένοις τὰ ἑπόμενα. Οἷον ἐὰν ᾖ Α : Β :: Γ : Δ, ὁμόλογα ἔςαι τὰ Α, Γ, καὶ Β, Δ.

Οἱ δὲ λοιποὶ τῶν Ὁρισμῶν εὐχερέςερον ἐν αὐταῖς ταῖς Προτάσεσι κατανοηθήσονται.

Τὸ δὲ Πέμπτον Βιβλίον Προτάσεις περιέχον ἐςὶν 25, ἐξ ὧν αἱ 10 οὐκ ἄλλης χρήσεως εἰσὶν, ἢ ἐπὶ τῷ ἐξ αὐτῶν τὰς λοιπὰς διὰ τῶν Ἰσοπολλαπλασίων ἀποδειχθῆναι· διὸ ἐκείνας παραλιπόντες, τὰς λοιπὰς 15 μόνας ὑποθήσομεν, τὴν παρ' Εὐκλείδῃ τάξιν τηρήσαντες. Ἐπιςητέον ἀλλ' οὖν ὅτι τὰ τοῦ παρόντος Βιβλίου Θεωρήματα, οὐ μόναις ταῖς Γραμμαῖς, ἀλλὰ καὶ παντὶ πο-

(1) ΛΓ. τοῦ ια'. (2) Κ. τοῦ ς'.

σότητος εἴδει προσήκοντα ἐςί· διὸ ϗ τὰς Γραμμὰς αἷς χρησόμεθα, ὡς παραςατικὰς οἱασδήποτε ποσότητος δέον ἐκδέχεσθαι.

Α'ξίωμα.

Τριῶν Μεγεθῶν δοθέντων Α, Β, Γ, δοτὸν ϗ τέταρτον Δ, πρὸς ὃ ἂν τὸ Γ, τȣ̃ τȣ̃ Α πρὸς τὸ Β λόγȣ δεκτικὸν ᾖ.

Πρότασις Α. Β. Γ. Δ. Ε. ς.

Ἐν τῇ καθ' ἡμᾶς μεθόδῳ περιτταί εἰσιν, ὧν ἡ Δ'. ἐπισημοτέρα οὖσα, ϗ τὴν χρῆσιν πυκνοτέρα, ϗ ἡμῖν κατωτέρω ἀποδειχθήσεται. Ἔςι γὰρ τὸ Α'. Λῆμμα τȣ̃ Β'. μέρȣς τȣ̃ παρόντος Βιβλίȣ.

Πρότασις Ζ.

„ Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ϗ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

Τȣτέςιν ἐὰν ὑποτεθῶσι Μεγέθη δύω τὸ μὲν Α, τὸ δὲ Β ἀλλήλοις ἴσα, δοθῇ δὲ ϗ Μέγεθος τρίτον τὸ Γ, ἔςαι δὴ Α πρὸς Γ, ὡς Β πρὸς Γ· καὶ ἀνάπαλιν τὸ Γ πρὸς τὸ Α, ὡς τὸ αὐτὸ Γ πρὸς τὸ Β.

Αὕτη ἡ Πρότασις, ὅσα δὴ ϗ αἱ ἐφεξῆς ἑπόμεναι τέσσαρες, ψιλὰ Ἀξιώματα οὖσαι, ȣ̓δεμιᾶς ἐπιδεεῖς τυγχάνȣσι δείξεως.

Σχόλιον.

Ὡσαύτως δὲ καὶ τὰ ἴσα πρὸς τὰ ἴσα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· τȣτέςιν ἐὰν ϗ ἕτερον Μέγεθος τὸ Δ φέρε δοθῇ, ὅπερ ἴσον εἴη τῷ Γ, ἔςαι Α : Γ : : Β : Δ, καὶ ἀνάπαλιν. Παραπλησίῳ δὲ τῷ λόγῳ ϗ αἱ ἐφεξῆς τρεῖς Προτάσεις σαφῶς ἀληθεύσȣσι, ϗ ἐὰν ἀντὶ τȣ̃ ἑνὸς Μεγέθȣς Γ, δύω ἴσα ὑποτεθῇ τὰ Γ ϗ Δ.

Πρότασις Η.

„ Τῶν ἀνίσων Μεγεθῶν, τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει,
„ ἤπερ τὸ ἔλαττον, ϗ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει, ἢ πρὸς
„ τὸ μεῖζον.

Οἷον ἐὰν ᾖ Μεγέθη ἄνισα τὰ Ζ, Θ, τὸ μεῖζον Ζ πρός τι τρίτον τὸ Κ, μείζονα λόγον ἕξει, ἢ τὸ ἔλαττον Θ πρὸς τὸ αὐτὸ Κ· καὶ τὸ ἔλαττον Θ πρὸς τὸ Κ, ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ μεῖζον Ζ πρὸς τὸ αὐτὸ Κ.

Καὶ τὸ αὐτὸ Κ ἐλάσσονα λόγον ἔχει πρὸς τὸ μεῖζον Ζ, ἢ πρὸς τὸ ἔλαττον Θ· τό,τε αὐτὸ Κ πρὸς τὸ ἔλαττον Θ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ πρὸς τὸ μεῖζον Ζ.

Πρότασις Θ.

„Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἴσα ἐςί· καὶ πρὸς ἃ τὸ „αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, κἀκεῖνα ἴσα ἀλλήλοις ἐςί.

Οἷον ἐὰν ᾖ Α : Γ : : Β : Γ, τὰ Α ϗ Β ἴσα.

Καὶ ἐὰν ᾖ Γ : Α : : Γ : Β, τὰ Α ϗ Β ἴσα.

Πρότασις Ι.

„Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον, ἐκεῖ„νο μεῖζον ἐςί· πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττον ἐςί.

Οἷον ἐὰν $Z : K > \Theta : K$, ἔςαι $Z > \Theta$· Διὸ

Καὶ ἐὰν $\Theta : K < Z : K$, ἔςαι $\Theta < Z$.

Ἐὰν δὲ $K : \Theta > K : Z$, ἔςαι $\Theta < Z$· Διὸ

Ἐὰν $K : Z < K : \Theta$, ἔςαι $Z > \Theta$.

Πρότασις ΙΑ.

„Οἱ τῷ αὐτῷ λόγοι οἱ αὐτοὶ (ἢ ἴσοι, ἢ ὅμοιοι, ἰσοδύναμα γὰρ ταῦτα), ϗ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί.

Οἷον ἐὰν ᾖ Α : Β : : Γ : Δ.

Καὶ Ε : Ζ : : Γ : Δ· ἔςαι Α : Β : : Ε : Ζ.

Σχόλιον.

Ὡσαύτως δὲ ϗ οἱ λόγοι οἱ τοῖς ἴσοις ἴσοι, ϗ ἀλλήλοις ἐςὶν ἴσοι· καὶ οἱ λόγοι οἱ τᾶ ἑτέρȣ τῶν ἴσων μείζονες, ἢ ἐλάσσονες, ϗ τᾶ ἑτέρȣ ὁμοίως μείζονες εἰσὶν, ἢ ἐλάσσονες. Ἢ ἐὰν ὁ ἕτερος τῶν ἴσων λόγων τρίτȣ τινὸς μείζων ᾖ, ἢ ἐλάσσων, ϗ ὁ ἕτερος τȣ̃ αὐτȣ̃ τρίτȣ μείζων ἔςαι, ἢ ἐλάσσων.

Οἷον ἐὰν ᾖ Α : Β : : Γ : Δ, ϗ $\Gamma : \Delta > E : Z$.

Ἔςαι ϗ $A : B > E : Z$.

Αὕτη δέ ἐςιν ἡ ΙΓ'. Πρότασις, ἣν ὁ Τακȣέτιος παρέδραμε. Καὶ ὡσαύτως ἐὰν ᾖ Α : Β : : Γ : Δ, ϗ $\Gamma : \Delta < E : Z$.

Ἔςαι ϗ $A : B < E : Z$.

Πρότασις ΙΒ.

„Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν Μεγέθη ἀνάλογον, ἔσαι ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς
„ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα.

Οἷον ἐὰν ᾖ $A : B :: \Gamma : \Delta :: E : Z$.

Ἔσαι $A : B :: A + \Gamma + E : B + \Delta + Z$.

Καὶ τοίνυν (ἵνα διὰ παραδείγματος τὸ ἄλλως σαφὲς λευκότερον ᾖ) ἐὰν ἕκασον Α, καὶ Γ, καὶ Ε, ἑκάσου Β, καὶ Δ, καὶ Ζ, τριπλάσιον ᾖ (τουτέσιν ἐὰν ἕκασον πρὸς ἕκασον λόγον ἔχῃ, ὃν 3 πρὸς 1), καὶ τὰ Α, Γ, Ε ἅμα ληφθέντα, τῶν Β, Δ, Ζ ἅμα ληφθέντων τριπλάσια ἔσαι (τουτέσιν ἕξει λόγον ὃν 3 πρὸς 1). Καὶ ἐπὶ τῶν ἀλόγων δὲ λόγων αὐτὸ τοῦτο ὁμοίως ἐσὶ σαφές.

Σχόλιον.

Τὴν ΙΓʹ. Πρότασιν ἐν τῷ Σχολίῳ τῷ μετὰ τὴν ΙΑʹ. ἀνωτέρω ἐθέμεθα, οὐδὲ αὐτὴν δείξεως δεομένην· τὴν δ' ἐφεξῆς ΙΔʹ. καίτοι τῷ Τακουετίῳ περιττὴν δόξασαν, ὡς οὐκ ἄχρησον ἀποκατασῆσαι κατὰ χώραν, καὶ δεῖξαι δεῖν ἔγνωμεν.

Πρότασις ΙΔ.

„Ἐὰν πρῶτον (α) πρὸς δεύτερον (β) τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον
„(γ) πρὸς τέταρτον (δ), τὸ δὲ πρῶτον (α) τοῦ τρίτου (γ) μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ δεύ-
„τερον (β) τοῦ τετάρτου (δ) μεῖζον ἔσαι· κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

Ἐὰν ἡ δοθεῖσα ἀναλογία κατ' ἰσότητα ᾖ, τῶν ἡγουμένων τοῖς ἑπομένοις ἴσων ὄντων, ἡ Πρότασις καθ' αὑτὴν δήλη. Ἐπειδὴ δὲ ἐν τῇ ἀναλογίᾳ τῇ κατὰ τὴν μείζονα ἀνισότητα, τοῦ ἑτέρου λόγου τὸ ἡγούμενον (1) ἐπίσης, ἤτοι ὡσαύτως περιέχει τὸ ἑπόμενον αὐτῷ, ὥσπερ τὸ τοῦ ἑτέρου ἡγούμενον τὸ ἑπόμενον τὸ ἴδιον· ἐν δὲ τῇ ἀναλογίᾳ τῇ κατὰ τὴν ἐλάσσονα ἀνισότητα, τὸ τοῦ ἑτέρου ἡγούμενον ἐπίσης περιέχεται ἐν τῷ ἰδίῳ ἑπομένῳ, ὥσπερ καὶ τὸ θατέρου ἐν τῷ ἰδίῳ, δῆλον ὅτι καὶ ἐν τῇ ἀναλογίᾳ τῇ κατὰ τὴν ἤτοι μείζονα, ἢ ἐλάσσονα ἀνισότητα, φανερὰ ἡ Πρότασις τῷ προσέχοντι. Εἰ δέ τις ἐκ περιουσίας ἔτι ταύτης τὴν ἀπόδειξιν ζητοίη, μετίτω τὰ ἐφεξῆς.

Αʹ. Ἐὰν ᾖ $A > \Gamma$, ἔσαι (2) $A : B > \Gamma : B$· ἀλλὰ $A : B :: \Gamma : \Delta$ (3), ἄρα $\Gamma : \Delta >$ (4) $\Gamma : B$, ἄρα (5) τὸ Δ ἔλαττον τοῦ Β· καὶ ἑπομένως $B > \Delta$.

---

(1) Ὅρ. *Ε.* τοῦ εʹ. (2) *Η.* τοῦ εʹ. (3) Ἐξ ὑποθ. (4) Σχόλ. τῆς *ΙΑ.* τοῦ εʹ. (5) *Ι.* τοῦ εʹ.

Β'. Ἐὰν ᾖ Α = Γ, ἔσαι (1) Α : Β : : Γ : Β. Ἀλλ' ἔσιν (ἐξ ὑποθ.) Α : Β : : Γ : Δ, ἔσιν ἄρα (2) Γ : Β : : Γ : Δ· καὶ ἐπομένως (3) Β = Δ.

Γ'. Ἐὰν ᾖ Α < Γ, ἔσαι Α : Β < Γ : Β (4)· ἔσι δὲ (ἐξ ὑπ.) Α : Β : : Γ : Δ, ἄρα (5) Γ : Δ < Γ : Β· ἔνθεντοι τὸ Δ μεῖζον τοῦ Β (6), καὶ ἐπομένως Β < Δ.

Πρότασις ΙΕ.

„ Μέρος (α) πρὸς Μέρος (β) ἐὰν ᾖ ὅμοια, ἐσὶν ὡς ὅλον (Α) πρὸς ὅλον „ (Β)· καὶ ἐν γένει τὰ ὅμοια μέρη εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὅλα, εἴτε σύμ„ μετρα τοῖς ὅλοις ταῦτα ᾖ, εἴτ' οὖν καὶ ἀσυμμέτρως πρὸς αὐτὰ ἔχῃ.

Τῳόντι Ἀξιώματος δίκην ληπτέον τὸ τεθὲν ἀκριβῶς ἐφισάνουσι, τί ἐσι τὸ τὰ μέρη ὅμοια εἶναι· ὅρα Ὅρ. Ζ'.

„ Ὁ δὲ Εὐκλείδης οὕτω προτίθησι τὴν Πρότ.· τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως „ πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον.

Σχόλιον.

Ἐὰν τὰ ὅμοια μέρη γβ, λι, ἀπὸ τῶν ἰδίων ὅλων αβ, ζι ἀφαιρεθῇ, καταλείψει μέρη ὅμοια τὰ αγ, ζλ, ὃ καθ' αὐτὸ δῆλον ἐσί.

Πρότασις Ις.

„ Ἐὰν τέσσαρα Μεγέθη ἀνάλογον ᾖ (Α : Β : : Γ : Δ), καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλο„ γον ἔσαι (Α : Γ : : Β : Δ).

Κείσθω τὰ Β καὶ Δ ἐλάσσονα τῶν Α καὶ Γ· εἰ γὰρ ἴσα, καθ' αὐτὸ δῆλον (ἕξει γὰρ τότε τὰ ἴσα Α καὶ Β πρὸς τὰ ἴσα Γ καὶ Δ (7), τὸν αὐτὸν λόγον, ὥσε εἶναι Α : Γ : : Β : Δ)· ἐπειδὴ τοίνυν (ἐξ ὑποθ. Α : Β : : Γ : Δ, ἔσονται διὰ τὸν Ζ'. Ὁρισμ. Β καὶ Δ τῶν ὅλων Α καὶ Γ μέρη ὅμοια. Ἔνθεντοι διὰ τὴν ἀνωτ., ὃν ἔχει λόγον πρὸς ἄλληλα τὰ ὅλα Α καὶ Γ, τὸν αὐτὸν ἔχει καὶ τὰ μέρη τὰ ὅμοια Β καὶ Δ, τουτέσιν Α : Γ : : Β : Δ.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον, καὶ ἐὰν τὰ ἡγούμενα Α καὶ Γ, τῶν ἑπομένων Β καὶ Δ ἐλάσσονα τεθῇ, ἐπειδὴ Α : Β : : Γ : Δ, ἔσονται (8) Α καὶ Γ μέρη ὅμοια τῶν ὅλων Β καὶ Δ, καὶ ἐπομένως (9) Α : Γ : : Β : Δ.

---

(1) Ζ. τοῦ έ. (2) ΙΑ. τοῦ έ. (3) Θ. τοῦ έ. (4) Η. τοῦ έ. (5) Σχόλ. ΙΑ. τοῦ έ. (6) Ι. τοῦ έ. (7) Σχόλ. τῆς Ζ. τοῦ έ. (8) Ὁρ. Ζ. τοῦ έ. (9) ΙΕ. τοῦ έ.

Σχόλιον.

Ἐὰν ᾖ Α : Β : : Γ : Δ, ἔϛαι ϗ ἀνάπαλιν Β : Α : : Δ : Γ. Καθ' αὑτὸ δὲ δῆλον.

Παῤ Εὐκλείδῃ δὲ Πορίσματος ἔχει χῶραν τῆς Δ΄. Προτ., ὅπερ ἐκείνης τῇ καθ' ἡμᾶς Μεθόδῳ περιττῆς ὔσης, ἐνταῦθα κείσθω.

Πρότασις ΙΖ.

„ Ἐὰν ἡγȣ́μενον (αβ) πρὸς ἑπόμενον (γβ), ᾖ ὡς ἡγȣ́μενον ἕτερον „ (ζι) πρὸς ἑπόμενον ἕτερον (λι), ἔϛαι ϗ ἐν διαιρέσει ὡς (αγ) ἡ ὑπεροχὴ „ τȣ̃ πρώτȣ ἡγȣμένȣ ὑπὲρ τὸ ἑπόμενον αὐτȣ̃, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον (γβ), „ ὅτως ἡ (ζλ) ὑπεροχὴ τȣ̃ δευτέρȣ ἡγȣμένȣ ὑπὲρ τὸ ἑπόμενον αὐτȣ̃, πρὸς „ τὸ αὐτὸ ἑπόμενον τὸ δεύτερον (λι).

Ταύτην ὁ Στοιχειωτὴς ὅτω προτίθησιν· ἐὰν συγκείμενα Μεγέθη ἀνά- „ λογον ᾖ, ϗ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔϛαι.

Καὶ αὕτη δὲ Ἀξιώματος δίκην ἔχει ληφθῆναι· Ἐὰν γὰρ τὰ ὅλα αβ, ζι κ. 309.
τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον πρὸς τὰ χ ϗ ψ, ϗ εἰ μέρη τινὰ ὅμοια ἀφαιρεθῇ, τὸν αὐτὸν ἕξει πρὸς τὰ χ ϗ ψ λόγον, ὃν εἶχε πρότερον· τȣτέϛιν ἡ αβ ϗ ἀπομειωθεῖσα, ἔϛαι ὀυδὲν ἧττον πρὸς τὴν χ, ὥσπερ ϗ ἡ ζι ὁμοίως ἀπομειωθεῖσα ἔχει πρὸς τὴν ψ, τȣ̃το δέ ἐϛιν ὃ τίθησιν ἡ Πρότασις· ἐπειδὴ γὰρ τίθεται αβ : γβ : : ζι : λι, ἔσονται (1) γβ ϗ λι μέρη ὅμοια τῶν ὅλων αβ ϗ ζι, τὰ δὲ αγ ϗ ζλ ἔϛαι τὸ ὅλα, ἀφ' ὧν τὰ ὅμοια μέρη ἀφήρηται· ἀλλὰ γὰρ τὰ ὅλα τὸν αὐτὸν ἦν ἔχοντα λόγον πρὸς γβ ϗ λι, τοιγαρȣ̃ν ϗ αγ ϗ ζλ (ἅτινα ἐϛὶ τὰ ὅλα αὐτὰ, ἀφ' ὧν τὰ ὅμοια μέρη ἀφήρηται), τὸν αὐτὸν ϗ μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν ἕξȣσι λόγον πρὸς γβ ϗ λι, τȣτέϛιν ἔτι δὴ αγ : γβ : : ζλ : ζι.

Ἄλλως.

Ἐπειδὴ αβ : γβ : : ζι : λι, ἄρα (2) γβ ϗ λι μέρη ὅμοια ἐϛὶ τῶν ὅλων αβ ϗ ζι. Ἔνθεντοι ϗ ἐὰν ἀπὸ τῶν ἰδίων ὅλων ἀφαιρεθῇ, καταλείψει (3) μέρη ὅμοια τὰ αγ, ζλ τῶν αβ, ζι· διὸ (4) αβ : ζι : : αγ : ζλ· διὰ δὲ τὸν αὐτὸν λόγον ϗ αβ : ζι : : γβ : λι, ἄρα (5) αγ : ζλ : : γβ : λι, καὶ ἐναλλὰξ αγ : γβ : : ζλ : λι· Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΙΗ.

„ Ἐὰν ᾖ ἡγȣ́μενον (αγ) πρὸς ἑπόμενον τὸ ἑαυτȣ̃ (γβ), ὡς ἡγȣ́μενον

(1) Ὁρ. Ζ. τȣ̃ έ. (2) Ὁρ. Ζ. τȣ̃ έ. (3) Σχόλ. ΙΕ. τȣ̃ έ. (4) ΙΕ. τȣ̃ έ. (5) ΙΑ. τȣ̃ έ.

„ἕτερον (ζλ) πρὸς ἑπόμενον τὸ ἑαυτȣ͂ (λι), ἔςαι δὴ καὶ ἐν συνθέσει (αγ
„σὺν βγ) τὸ πρῶτον ἡγȣ́μενον σὺν τῷ ἑπομένῳ αὐτȣ͂, πρὸς τὸ αὐτὸ ἑπό-
„μενον (γβ), ὥσπερ (ζλ σὺν λι) τὸ δεύτερον ἡγȣ́μενον σὺν τῷ ἑπομένῳ
„αὐτȣ͂, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον (λι).

Ο῾ δὲ Εὐκλείδης ταύτην ȣ῞τω προτίθησιν· ἐὰν διῃρημένα Μεγέθη ἀνάλο-
„γον ᾖ, ϗ συντεθέντα ἀνάλογον ἔςαι.

Αὖθις Α᾽ξιώματος δίκην ϗ αὕτη ληφθῆναι δύναται· Ε᾽ὰν γὰρ δύο Με-γέθη αγ ϗ ζλ, τὸν αὐτὸν πρὸς χ ϗ ψ λόγον ἔχοντα ᾖ, ϗ ἐπαυξηθέντα ὁμοίως, τȣτέςιν ἀναλόγως τὰ αγ, ζλ πρὸς τὰ χ ϗ ψ αὐτὰ λόγον ἕξȣσιν ἔτι τὸν αὐτόν· ἀμέλειτοι ϗ αὐξηθὲν τὸ αγ ἔςαι πρὸς τὸ χ, ὥσπερ δὴ ϗ τὸ ζλ αὐξηθὲν ὁμοίως ἐςὶ πρὸς τὸ ψ. Οὐδὲν ȣ῏ν ἀλλ᾽ ἢ τȣ͂το ἡ Πρότασις προτί-θησι· τίθεται μὲν γὰρ αγ : γβ : : ζλ : λι, ἐὰν οὖν ταῖς αγ, ζλ προςεθῶ-σιν αἱ γβ, λι, ἔσονται αἱ αγ, ζλ ὁμοίως, τȣτέςιν ἀναλόγως ἐπηυξημέναι· ϗ ἐπειδὴ τοίνυν αἱ αγ ϗ ζλ, ὁμοίως ἔχȣσαι εἰσὶ πρὸς τὰς γβ, λι, ϗ μετὰ τὸ ὁμοίως αὐξηθῆναι (τότε δὲ ἔσονται αβ, ζι) πρὸ τὰς αὐτὰς γβ, λι, ὡ-σαύτως ἔτι ἕξȣσι, τȣτέςιν ἔςαι αβ : γβ : : ζι : λι.

Α῎ λ λ ω ς.

Ε᾽πειδὴ αγ : γβ : : ζλ : λι, ἄρα (1) αγ : ζλ : : γβ : λι· ἄρα καὶ αγ + γβ : ζλ + λι : : γβ : λι (2), τȣτέςιν αβ : ζι : : γβ : λι· καὶ πάλιν ἐναλλὰξ αβ : γβ : : ζι : λι. Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α Α᾽.

Ε᾽ὰν ἡγȣ́μενον (αβ) ᾖ πρὸς ἑπόμενον (γβ), ὡς ἡγȣ́μενον ἕτερον (ζι) πρὸς ἑπόμενον ἕτερον (λι), ἔςαι ϗ τὸ πρῶτον ἡγȣ́μενον (αβ) πρὸς (αγ), τὴν ἣν ἔχει ὑπεροχὴν ὑπὲρ τὸ ἑπόμενον τὸ αὐτȣ͂, ὥσπερ τὸ ἕτερον ἡγȣ́μενον (ζι) πρὸς (ζλ), τὴν ἣν ἔχει ὑπεροχὴν ὑπὲρ τὸ ἑπόμενον τὸ ἑαυτȣ͂ (λι).

Ε᾽πειδὴ γὰρ αβ : γβ : : ζι : λι, ἔςαι ϗ ἐν διαιρέσει (3) αγ : γβ : : ζλ : λι· καὶ ἀνάπαλιν (4) βγ : γα : : ιλ : λζ· καὶ ἐν συνθέσει (5) βα : γα : : ιζ : λζ.

Τὸ δ᾽ ȣ῞τως ἐπιχειρεῖν κατ᾽ Α᾽ναςροφὴν λόγȣ καλεῖται.

Καὶ παρὰ ταῦτα, ἐὰν ἡγȣ́μενον (αγ) πρὸς τὸ ἑπόμενον αὐτȣ͂ (γβ), ᾖ ὡς ἕτερον ἡγȣ́μενον (ζλ) πρὸς τὸ ἴδιον ἑπόμενον (λι), ἔςαι ϗ κατ᾽ ἄλλον ἀνα-ςροφῆς τρόπον, τὸ πρῶτον ἡγȣ́μενον (αγ) πρὸς αὐτὸ τὸ πρῶτον ἡγȣ́μενον,

---

(1) Ις. τȣ͂ έ. (2) ΙΒ. τȣ͂ έ. (3) ΙΖ. τȣ͂ έ. (4) Σχόλ. τῆς Ις. τȣ͂ έ. (5) ΙΗ. τȣ͂ έ.

σὺν τῷ ἑπομένῳ αὐτῦ (αβ), ὡς τὸ ἕτερον ἡγύμενον (ζλ) πρὸς αὐτὸ τὸ ἕτερον ἡγύμενον σὺν τῷ ἑπομένῳ αὐτῦ (ζι).

Καὶ γὰρ αγ : γβ : : ζλ : λι· καὶ (1) ἀνάπαλιν βγ : γα : : ιλ : λζ· καὶ ἐν συνθέσει (2) βα : αγ : : ιζ : ζλ· καὶ πάλιν ἀνάπαλιν αγ : αβ : : ζλ : ζι.

Πόρισμα Β΄.

Ἐὰν ᾖ αγ : αβ : : ζλ : ζι, ἔϛαι καὶ αγ : γβ : : ζλ : λι, καὶ αβ : γβ : : ζι : λι.

Ἐπειδὴ γὰρ αγ : αβ : : ζλ : ζι, ἔϛαι ἀνάπαλιν βα : γα : : ιζ : λζ· καὶ ἐν διαιρέσει (8) βγ : γα : : ιλ : λζ· καὶ πάλιν ἀνάπαλιν αγ : γβ : : ζλ : λι· καὶ ἐν συνθέσει (4) αβ : γβ : : ζι : λι.

Ἄλλως· γα : αβ : : λζ : ζι, ἔϛαι ἀνάπαλιν βα : αγ : : ιζ : ζλ· καὶ κατ' ἀναϛροφὴν (5) αβ : βγ : : ζι : ιλ. ὅπερ ἦν θάτερον· ϗ ἐν διαιρέσει (6) αγ : γβ : : ζλ : λι, ὅπερ ἦν θάτερον.

Πρότασις ΙΘ.

„Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλον (αβ) πρὸς ὅλον (ζι), ὕτως ἀφαιρεθὲν (γβ) πρὸς ἀφαι- κ. 310.
„ρεθὲν (λι), ϗ τὸ λοιπὸν (αγ) πρὸς τὸ λοιπὸν (ζλ), ἔϛαι ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

Ὅλως ἐναργές ἐϛι καθ' ἑαυτὸ τὸ λεγόμενον, ἔχει γεμὴν διὰ τῶν προτεθέντων ἀποδειχθῆναι ὕτως· ἐπεὶ αβ : ζι : : γβ : λι, ἔϛαι καὶ ἐναλλὰξ (7) αβ : γβ : : ζι : λι, καὶ κατ' ἀναϛροφὴν λόγυ (8) αβ : αγ : : ζι : ζλ· καὶ πάλιν ἐναλλὰξ αβ : ζι : : αγ : ζλ.

Ἄλλως· αβ : ζι : : γβ : λι· ϗ ἐναλλὰξ (9) αβ : γβ : : ζι : λι, ὥϛε (10) γβ ϗ λι εἰσὶ μέρη ὅμοια τῶν ὅλων αβ ϗ ζι· ταύτῃ τοι ϗ ἐὰν ἀπὸ τῶν ἰδίων ὅλων ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπὰ (11) μέρη ὅμοια ἐϛὶν αγ ϗ ζλ· ἄρα (12) αβ : ζι : ; αγ : ζλ.

Πρότασις Κ. ϗ ΚΑ.

Ἐν τῇ καθ' ἡμᾶς μεθόδῳ εἰσὶ περιτταί, κεῖνται γεμὴν ἐν τοῖς Πορίσμασι τῶν ἐφεξῆς Προτ. ΚΒ΄. ϗ ΚΓ΄.

---

(1) Σχόλ. τῆς Ις΄. τῦ ε΄. (2) ΙΗ. τῦ ε΄. (3) ΙΖ. τῦ ε΄. (4) ΙΗ. τῦ ε΄. (5) Α΄. Πόρ. ταύτ. (11) ΙΖ. τῦ ε΄. (7) Ις. τῦ ε΄. (8) Α. Πόρ. τῆς ἀνωτ. (9) Ις. τῦ ε΄. (10) Ὅρ. Ζ. τῦ ε΄. (11) Σχόλ. τῆς ΙΕ. τῦ ε΄. (12) ΙΕ. τῦ ε΄.

Πρότασις ΚΒ.

„Ἐὰν ᾖ Α : Β : : Ξ : Π, καὶ Β : Γ : : Π : Ρ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ἔσαι δὲ ἴσου „ὡς Α πρῶτον πρὸς Γ ἔσχατον, οὕτω Ξ πρῶτον πρὸς Ρ ἔσχατον.

Ἐκφέρεται δὲ παρ᾽ Εὐκλ. οὕτως. Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν Μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐ- „τοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι᾽ ἴσου ἐν „τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσαι.

Κείσθω δὴ τὰ Γ καὶ Ρ ἐλάσσονα εἶναι τῶν Β καὶ Π (ἡ δ᾽ αὐτὴ δεῖξις καὶ μειζόνων ὑποτιθεμένων). Ἐπειδὴ (1) Β : Γ : : Π : Ρ, ἔσαι τὰ Γ καὶ Ρ, τῶν ὅλων Β καὶ Π (2) μέρη ὅμοια· καὶ ἐπεὶ τοίνυν τὰ Α καὶ Ξ, πρὸς τὰ Β καὶ Π τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἕξει δὴ καὶ πρὸς τὰ Γ καὶ Ρ, ἅ ἐσι τῶν Β καὶ Π μέρη ὅμοια, λόγον τὸν αὐτόν, καὶ τοῦτο τοίνυν οἷον Ἀξίωμα ἐσίν· ἐὰν Μεγέθη δύο πρὸς ἕτερα δύο τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ πρὸς τὰ ὅμοια μέρη τούτων τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον.

„Ἐὰν δὲ καὶ πλείονα τριῶν ἑκατέρωθεν Μεγέθη παρῇ, τῷ αὐτῷ τρό- „πῳ καὶ περὶ τῶν ἄλλων συλλογιούμεθα.

Ἄλλως· Ἐπειδὴ Α : Β : : Ξ : Π, ἔσαι (3) ἐναλλὰξ Α : Ξ : : Β : Π· ἐπεὶ δὲ καὶ Β : Γ : : Π : Ρ, ἔσαι καὶ ἐναλλὰξ Β : Π : : Γ : Ρ· ἄρα (4) Α : Ξ : : Γ : Ρ, καὶ ἐναλλὰξ Α : Γ : : Ξ : Ρ.

Πόρισμα Α΄.

Κἀντεῦθεν ἡ παραλειφθεῖσα τῷ Τακουετίῳ Κ΄. ἔχει ἐπενεχθῆναι. Ἔσω- σαν γὰρ πηλικότητες τρεῖς Α, Β, Γ, τρισὶν ἄλλαις Ξ, Π, Ρ ἀνάλογον ἔχουσαι, σύνδυο λαμβανόμεναι, τοῦτο δέ ἐσιν Α : Β : : Ξ ; Π, καὶ Β : Γ : : Π : Ρ· ἐὰν οὖν ἡ Α μείζων ᾖ τῆς Γ, ἔσαι δὴ καὶ ἡ Ξ μείζων τῆς Ρ, καὶ ἐὰν ἴση, ἴση· καὶ ἐὰν ἐλάσσων, ἐλάσσων. Κατὰ γὰρ τὴν ἐν χερσὶ Πρότ. Α : Γ : : Ξ : Ρ, καὶ ἐναλλὰξ Α : Ξ : : Γ : Ρ· ἄρα διὰ τὴν ΙΔ΄. τοῦ παρόντος Βιβλίου δῆλον τὸ προτεθέν.

Πόρισμα Β΄.

Ἐπειδὴ δὲ Α : Β : : Ξ : Π, ἔσαι καὶ ἐν συνθέσει (5) Α + Β : Β : : Ξ + Π : Π· ἔσι δὲ Β : Γ : : Π : Ρ, ἄρα διὰ τὴν ἐν χερσὶ Πρότ. ἔσαι Α + Β : Γ : : Ξ +

---

(1) Ἐξ. ὑποθ. (2) Ὁρισ. Ζ. τοῦ ε΄. (3) Ις. τοῦ ε΄. (4) ΙΑ. τοῦ α΄. (5) ΙΗ. τοῦ ε΄.

Π : Ρ· καὶ παραπλησίως ἐν διαιρέσει (1) Συλλογιζομένων, ἔςαι Α — Β : Γ : : Ξ — Π : Ρ.

Πρότασις ΚΓ.

„Ἐὰν ᾖ ὡς Α πρῶτον πρὸς Β δεύτερον, ὅτω Ξ πρῶτον πρὸς Π δεύτε-„ρον, καὶ ὡς Β δεύτερον πρὸς Γ τρίτον, ὅτω τρίτον τὸ τυχὸν Ρ πρὸς τὸ „πρῶτον Ξ, ἔςαι δι' ἴσȣ τεταραγμένως, ᾗ ὡς Α πρῶτον πρὸς Γ τρίτον, ὅτω „Ρ τρίτον πρὸς Π δεύτερον.

Ἐκφέρεται δὲ ὑπὸ τȣ̃ Στοιχειωτȣ̃ αὕτη οὕτως. Ἐὰν ᾖ τρία Μεγέθη, ᾗ „ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, „ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ᾗ δι' ἴσȣ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔςαι.

Ὡς Β ἔχει πρὸς Γ, ὅτω ᾗ (2) Π πρὸς ἄλλο ὁποιονȣ̃ν τὸ Σ δύναται ἔ-χειν. Ἤδη μὲν οὖν ἐπειδὴ Β : Γ : : Ρ : Ξ (3), καὶ πάλιν Β : Γ : : Π : Σ (4), ἔςαι καὶ Ρ : Ξ : : Π : Σ (5)· καὶ τοίνυν ᾗ ἐναλλὰξ (6) Ρ : Π : : Ξ : Σ. Εἶτα ἐπειδὴ (ἐξ ὑποθ.) Ξ : Π : : Α : Β, ᾗ Π : Σ : : Β : Γ (ἐκ κατ.), δι' ἴσȣ ἔςαι (6) Ξ : Σ : : Α : Γ· δέδεικται δὲ Ρ : Π : : Ξ : Σ, ἄρα (7) Ρ : Π : : Α : Γ.

Καλεῖται δὲ τοῖς Γεωμέτραις ἡ τοιαύτη ἀναλογία Τεταραγμένη.

Πόρισμα.

Κείσθω Μεγέθη τρία Α, Β, Γ, πρὸς τρία Ρ, Ξ, Π ἀνάλογον σύνδυο λαμβανόμενα, ἀλλὰ τεταραγμένως, τȣτέςιν ἔςω Α : Β : : Ξ : Π, καὶ Β : Γ : : Ρ : Ξ. Ἐὰν ȣ̃ν τὸ Α μεῖζον ᾖ τȣ̃ Γ, ἔςαι δι' ἴσȣ ᾗ τὸ Ρ μεῖζον τȣ̃ Π, καὶ ἐὰν ἴσον, ἴσον, καὶ ἐὰν ἔλασσον, ἔλασσον. Κατὰ γὰρ τὴν ἐν χερσὶ Πρότ. Α : Γ : : Ρ : Π, καὶ ἐναλλὰξ Α : Ρ : : Γ : Π· ἄρα διὰ τὴν ΙΔ'. τȣ̃ παρόντος δῆλον τὸ προτεθέν. Αὕτη δέ ἐςιν ἡ παραλειφθεῖσα ΚΑ'.

Πρότασις ΚΔ.

„Ἐὰν ᾖ Α πρὸς Β, ὡς Γ πρὸς Ζ, ᾗ Ι πρὸς Β, ὡς Λ πρὸς Ζ, ἔςαι ᾗ „ὡς Α σὺν Ι πρὸς Β, ὅτω Γ σὺν Λ πρὸς Ζ.

Ταύτην ὁ Στοιχειωτὴς ὅτω προβάλλεται. Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν „αὐτὸν ἔχῃ λόγον, ᾗ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ ᾗ πέμπτον πρὸς δεύ-

(1) ΙΖ. τȣ̃ έ. (2) Ἀξ. τὸ πρὸ τῆς Α'. τȣ̃ έ. (3) Ἐξ ὑποθ. (4) Ἐκ κατ. (5) ΙΑ. τȣ̃ έ. (6) Ις. τȣ̃ έ. (7) Διὰ τὴν ἀνωτ. (8) ΙΑ. τȣ̃ έ.

„τερον τὸν αὐτὸν λόγον, ϗ ἕκτον πρὸς τέταρτον· καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ „πέμπτον πρὸς δεύτερον, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ϗ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς „τέταρτον.

Ἐπειδὴ (ἐξ ὑποθ.) Ι : Β : : Λ : Ζ, ἔςαι ϗ (1) ἀνάπαλιν Β : Ι : : Ζ : Λ· ἀλλ' (ἐξ ὑποθ.) ἔςιν Α : Β : : Γ : Ζ, ϗ Β : Ι : : Ζ : Λ, ἄρα (2) δι' ἴσȣ Α : Ι : : Γ : Λ. Καὶ τοίνυν ἐν (3) συνθέσει ϗ ΑΙ : Ι : : ΓΛ : Λ· ἀλλ' ἔςιν (4) Ι : Β : : Λ : Ζ, πάλιν ἄρα δι' ἴσȣ (5) ΑΙ : Β : : ΓΛ : Ζ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΕ.

„Ἐὰν τέσσαρα Μεγέθη (αβ, γζ, ι, λ) ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιςον „(αβ) ϗ τὸ ἐλάχιςον (λ), τῶν λοιπῶν (γζ, ι) μείζονα ἐςί.

κ. 311. Κείσθω αβ : γζ : : ι : λ, ϗ ἀπὸ τȣ̃ μεγίςȣ αβ ληφθήτω απ ἴσον τῷ ι, ἀπὸ δὲ τȣ̃ γζ ληφθήτω γρ ἴσον τῷ ἐλαχίςῳ λ, καὶ ἔςαι ὅλον αβ πρὸς ὅλον γζ, ὡς τὸ ἀφαιρεθὲν απ πρὸς τὸ ἀφαιρεθὲν γρ, ὥςε ϗ τὸ λοιπὸν (6) πβ πρὸς τὸ λοιπὸν ρζ, ὡς ὅλον αβ πρὸς ὅλον γζ· ἀλλ' (7) αβ μεῖζον τȣ̃ γζ, ἄρα ϗ πβ μεῖζον τȣ̃ ρζ. Ἤδη δὲ ἐπεὶ ἡ μὲν απ ἐλήφθη ἴση τῇ ι, ἡ δὲ γρ ἴση τῇ λ, ἔςαι ϗ απ σὺν λ, τῷ ι σὺν γρ ἴσον. Ἐὰν ἄρα τῷ απ σὺν λ προςεθῇ τὸ μεῖζον πβ, τῷ δὲ ι σὺν γρ προςεθῇ τὸ ἔλαττον ρζ, ἔςαι τὸ ὅλον απβ σὺν λ, μεῖζον τȣ̃ ὅλȣ ι σὺν γρζ. Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α.

κ. 312. Ἐὰν ᾖ τρία Μεγέθη Α, Β, Γ ἀνάλογον, τὸ ἐκ τῶν ἄκρων ἡμιάθροισμα, τȣ̃ μέσȣ μεῖζον ἔςαι· ἐπεὶ γὰρ (8) Α : Β : : Β : Γ, ἔςαι (9) τὸ ἐκ τῶν ἄκρων Α ϗ Γ ἄθροισμα μεῖζον, ἢ τὸ Β δὶς ληφθὲν, ϗ ἑπομένως τὸ ἡμιάθροισμα (10) τὸ ἐκ τῶν ἄκρων μεῖζον ἐςὶ τȣ̃ Β ἅπαξ ληφθέντος.

Αἱ δὲ ἑπόμεναι Προτάσεις ȣ̓χὶ τȣ̃ Εὐκλείδȣ ȣ̓̃σαι, ἀλλ' ἐκ τῶν τȣ̃ Πάππȣ τȣ̃ ἀλεξανδρέως ϗ ἐξ ἄλλων λαμβανόμεναι, διὰ τὸ πολὺ τῆς χρήσεως, ταῖς Εὐκλειδείοις εἰώθασι παρασυνάπτεσθαι.

Π ρ ό τ α σ ι ς Κϛ.

„Ἐὰν πρῶτον (Α) πρὸς δεύτερον (Β) μείζονα λόγον ἔχῃ, ἢ τρίτον (Γ)

(1) Σχόλ. τῆς Ιϛ. τȣ̃ ε'. (2) ΚΒ. τȣ̃ ε'. (3) ΙΗ. τȣ̃ ε'. (4) Ἐξ ὑποθ. (5) ΚΒ. τȣ̃ ε'. (6) ΙΘ. τȣ̃ ε'. (7) Ἐξ ὑποθ. (8) Ὅρ. Η. τȣ̃ ε'. (9) Διὰ ταύτην τὴν Πρ. (10) Ἀξ. ϛ. τȣ̃ α'.

„πρὸς τέταρτον (Ζ), ἕξει καὶ ἀνάπαλιν δεύτερον (Β) πρὸς πρῶτον (Α) ἐλάσσο-„να λόγον, ἢ τέταρτον (Ζ) πρὸς τρίτον (Γ).

Ἐπειδὴ γὰρ τίθεται τὸ Α μείζονα λόγον ἔχον πρὸς τὸ Β, ἢ τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ, τὸ Α πάντως (1) πρός τι τὸ ΒΧ, ὃ μεῖζον ἔςαι (2) τȣ̃ Β, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ· καὶ ἀνάπαλιν τοίνυν, ἔςαι ΒΧ : Α :: Ζ : Γ· ἀλλὰ Β ἐςὶ πρὸς Α ἐν ἐλάσσονι λόγῳ (3) ἢ ΒΧ πρὸς Α, ἄρα (4) Β : Α < Ζ : Γ. σ. 313.

Σχόλιον.

Τὸ δ' αὐτὸ παραπλησίως δειχθήσεται κἀπὶ τῆς ἐλάσσονος ἀναλογίας· τȣτέςιν ἐὰν Β πρὸς Α ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ ἢ Ζ πρὸς Γ, ἕξει δὴ ἀνάπαλιν Α πρὸς Β μείζονα λόγον ἢ Γ πρὸς Ζ.

Πρότασις ΚΖ.

„Ἐὰν Α πρὸς Β μείζονα λόγον ἔχῃ ἢ Γ πρὸς Ζ, καὶ ἐναλλὰξ Α πρὸς „Γ μείζονα λόγον ἕξει ἢ Β πρὸς Ζ.

Ἐπειδὴ ὁ λόγος Α πρὸς Β μείζων τίθεται τȣ̃ λόγȣ Γ πρὸς Ζ, ἔςαι (5) ὁ λόγος Α πρὸς ἄλλο τι ΒΧ (ὅπερ ἐξ ἀνάγκης μεῖζον ἔςαι (6) τȣ̃ Β), ἴσος τῷ λόγῳ Γ πρὸς Ζ· καὶ τοίνυν ἐναλλὰξ (7) ἔςαι Α : Γ :: ΒΧ : Ζ· ἀλλὰ ΒΧ πρὸς Ζ ἐςὶν ἐν μείζονι λόγῳ (8) ἢ Β πρὸς Ζ, ἄρα (9) Α : Γ > Β : Ζ.

Σχόλιον.

Ὡσαύτως δὲ δειχθήσεται καὶ περὶ τῆς ἀναλογίας τῆς ἐλάσσονος.

Πρότασις ΚΗ.

„Ἐὰν αβ πρὸς βγ μείζονα λόγον ἔχῃ ἢ ζι πρὸς ιλ, καὶ ἐν συνθέ-„σει αγ πρὸς βγ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ζλ πρὸς ιλ.

Ἐπειδὴ τίθεται αβ, βγ ἐν μείζονι λόγῳ τυγχάνειν ἢ ζι πρὸς ιλ, ἄρα ἕτερον τι (10) τὸ ξβ (ὃ καὶ ἀνάγκη ἔλαττον εἶναι (11) τȣ̃ αβ) ἐςὶ πρὸς βγ, ὡς ζι πρὸς ιλ· καὶ τοίνυν ἐν συνθέσει (12) ξγ πρὸς βγ, ὡς ζλ πρὸς ιλ· ἄρα (13) αγ : βγ > ζλ : ιλ. σ. 314.

---

(1) *Διὰ τὸ Ἀξ. τὸ πρὸ τῆς Α. τȣ̃ ε΄.* (2) *Ι. τȣ̃ ε΄.* (3) *Η. τȣ̃ ε΄.* (4) Σχόλ. *τῆς ΙΑ. τȣ̃ ε΄.* (5) *Διὰ τὸ Ἀξ. τὸ πρὸ τῆς Α΄. τȣ̃ ε΄.* (6) *Ι. τȣ̃ ε΄.* (7) *Ις τȣ̃ ε΄.* (8) *Η. τȣ̃ ε΄.* (9) Σχόλ. *τῆς ΙΑ. τȣ̃ ε΄.* (10) *Ἀξ. τὸ πρὸ τῆς Α. τȣ̃ ε΄.* (11) *Ι. τȣ̃ ε΄.* (12) *ΙΗ. τȣ̃ ε΄.* (13) Η. *τȣ̃ ε΄. καὶ* Σχόλ. *ΙΑ. τȣ̃ ε΄.*

Σχόλιον.

Τὸ δ' αὐτὸ παραπλησίως ἀποδειχθήσεται ϗ περὶ τῆς ἀναλογίας τῆς ἐλάσσονος.

Πρότασις ΚΘ.

„Ἐὰν αγ πρὸς βγ μείζονα λόγον ἔχῃ ἢ ζλ πρὸς ιλ, ϗ ἐν διαιρέ-„σει αβ πρὸς βγ, μείζονα λόγον ἔχει ἢ ζι πρὸς ιλ.

κ. 315. Ἐπειδὴ τίθεται αγ πρὸς βγ μείζονα λόγον ἔχειν ἢ ζλ πρὸς ιλ, ἑτερόν τι πάντως (1) τὸ ξγ (ὃ ϗ ἔλαττον εἶναι ἐπάναγκες (2) του αγ) ἔσται πρὸς βγ, ὡς ζλ πρὸς ιλ· καὶ τοίνυν ἐν διαιρέσει (3) ἔσται ξβ : βγ : : ζι : ιλ· ἄρα (4) αβ : βγ > ζι : ιλ.

Σχόλιον.

Τὸ αὐτὸ παραπλησίως δειχθήσεται ϗ περὶ τῆς ἀναλογίας τῆς ἐλάσσονος.

Πρότασις Λ.

„Ἐὰν αγ πρὸς βγ μείζονα λόγον ἔχῃ ἢ ζλ πρὸς ιλ, κατὰ λόγου „ἀναστροφὴν, αγ πρὸς αβ ἐλάσσονα λόγον ἕξει ἢ ζλ πρὸς ζι.

κ. 316. Ἐπειδὴ αγ πρὸς βγ ἐν λόγῳ μείζονι ἐστὶν ἢ ζλ πρὸς ιλ, ἔσται ἐν διαιρέσει (5) αβ πρὸς βγ, ἐν λόγῳ μείζονι ἢ ζι πρὸς ιλ· ἄρα ἀνάπαλιν γβ πρὸς βα (6) ἐστὶν ἐν ἐλάσσονι λόγῳ ἢ λι πρὸς ιζ· ἄρα ἐν συνθέσει (7) γα πρὸς βα ἐν λόγῳ ἐλάσσονι ἐστὶν ἢ λζ πρὸς ιζ.

Σχόλιον.

Τὸ αὐτὸ παραπλησίως ἀποδείκνυται ϗ περὶ τῆς ἀναλογίας τῆς ἐλάσσονος· τουτέστιν ἐὰν αγ πρὸς αβ ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ ἢ ζλ πρὸς ζι, ἕξει ϗ κατ' ἀναστροφὴν του λόγου αγ πρὸς βγ μείζονα λόγον ἢ ζλ πρὸς ιλ.

Πρότασις ΛΑ.

„Ἐὰν αβ πρὸς γ μείζονα λόγον ἔχῃ ἢ ζ πρὸς ι, καὶ γ πρὸς λπ

---

(1) *Ἀξ.* τὸ πρὸ τῆς *Α.* του ε'. (2) *Ι.* του ε'. (3) *ΙΖ.* του ε'. (4) *Η.* του ε'. ϗ Σχόλ. του ε'. (5) *Διὰ* τὴν ἀνατ. (6) *Κς.* του ε'. (7) *ΚΗ.* του ε'.

„μείζονα λόγον ἔχῃ ἢ ι πρὸς σ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ἔςαι δι᾽ ἴσȣ καὶ τὸ „πρῶτον αβ, πρὸς τὸ ἔσχατον λπ μείζονα λόγον ἔχον, ἢ τὸ πρῶτον ζ „πρὸς τὸ ἔσχατον σ.

Ἐπειδὴ αβ : γ > ξ : ι, ἕτερον ἄρα (1) τὸ ξβ (ὅπερ ἐξ ἀνάγκης (2) ἔλαττον ἔςαι τȣ̃ αβ) ἐςὶ πρὸς γ ὡς ζ πρὸς ι· ϗ ἐπειδὴ γ: λπ > ι:σ, ἄρα τὸ γ πρὸς ἕτερόν τι (ὅπερ ἐξ ἀνάγκης μεῖζον ἔςαι τȣ̃ λπ) τὸ λϱ, ἔςαι ὡς τὸ ι πρὸς τὸ σ, ὥςε ϗ δι᾽ ἴσȣ (3) ξβ : λϱ : : ζ : σ· ἄρα ξβ πρὸς λπ μείζονα λόγον ἔχει (4) ἢ ζ πρὸς σ· ἄρα αβ πρὸς λπ (5) πολλῷ μείζονα λογον ἕξει ἢ ζ πρὸς σ. κ. 317.

Σχόλιον.

Τὸ δ᾽ αὐτὸ παραπλησίως δειχθήσεται ϗ περὶ τῆς ἐλάσσονος ἀναλογίας.

Πόρισμα.

Ἐκ δὲ τῆς ἀποδείξεως τῆςδε τῆς Προτάσεως φανερὸν, ὅτι ἐὰν αβ πρὸς γ μείζονα λόγον ἔχῃ ἢ ζ πρὸς ι, ϗ γ : λϱ : : ι : σ, ϗ πρῶτον αβ πρὸς ἔσχατον λϱ μείζονα λόγον ἕξει, ἢ πρῶτον ζ πρὸς ἔσχατον σ· ὃ παραπλησίως ἀληθές ἐςι ϗ ἐπὶ τῆς ἐλάσσονος ἀναλογίας.

Πρότασις ΛΒ.

„Ἐὰν αβ πρὸς γ μείζονα λόγον ἔχῃ ἢ ι πρὸς σ, ϗ γ πρὸς λπ „μείζονα ἢ ζ πρὸς ι, ἔςαι ϗ δι᾽ ἴσȣ τεταραγμένως αβ πρὸς λπ μείζονα „λόγον ἔχον, ἢ ζ πρὸς σ.

Παραπλησία ἐςὶν ἡ ἀπόδειξις τῇ ἀνωτέρω, πλὴν ὅτου ἀντὶ τῆς ΚΒ΄. ληπτέον τὴν ΚΓ΄.

Σχόλιον.

Τὸ δ᾽ αὐτὸ παραπλησίως ἀποδειχθήσεται ϗ περὶ τῆς ἐλάσσονος ἀναλογίας. Καὶ ἐκ ταύτης δὲ τῆς Προτάσεως Πόρισμα παραπλήσιον τῷ ἀπὸ τῆς ἀνωτέρω Προτ. ἐπιφέρεται.

---

(1) Ἀξ. τὸ πρὸ τῆς *Α.* τȣ̃ ε΄. (2) *Ι.* τȣ̃ ε΄. (3) *ΚΒ.* τȣ̃ ε΄. (4) *Η.* τȣ̃ ε΄. (5) *Διὰ τὴν αὐτήν.*

Πρότασις ΛΓ.

„Ἐὰν ὅλον (αβ) πρὸς ὅλον (ζι) μείζονα λόγον ἔχῃ, ἢ ἀφαιρεθὲν „(γβ) πρὸς ἀφαιρεθὲν (λι), ὅλον πρὸς ὅλον ἐλάσσονα λόγον ἕξει, ἢ „λοιπὸν (αγ) πρὸς λοιπὸν (ζλ).

κ. 318. Ἐπειδὴ αβ πρὸς ζι μείζονα λόγον ἔχει ἢ γβ πρὸς λι, ἔϛαι ἐναλλὰξ (1) αβ πρὸς γβ ἐν μείζονι λόγῳ ἢ ζι πρὸς λι· ἄρα κατὰ ἀναϛροφὴν (2) αβ πρὸς αγ ἐν ἐλάσσονι ἔϛαι, ἢ ζι πρὸς ζλ· ἄρα καὶ ἐναλλὰξ (3) αβ πρὸς ζι, ἐν ἐλάσσονι λόγῳ ἔϛαι ἢ αγ πρὸς ζλ.

Σχόλιον.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον, καὶ ἐὰν ὅλον πρὸς ὅλον ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ, ἢ ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθὲν, ὅλον πρὸς ὅλον μείζονα λόγον ἕξει, ἢ λοιπὸν πρὸς λοιπόν.

Πρότασις ΛΔ.

„Ἐὰν οἱ λόγοι (Α : Γ, καὶ Ε : Ξ) ὦσι τῶν ἴσων λόγων (Α : Β, καὶ „Ε : Ζ) διπλασίονες, ἢ τριπλασίονες, καὶ ἐφεξῆς, ἴσοι ἔσονται καὶ αὐτοί.

Ἐπειδὴ γὰρ τοῦ λόγου Α : Β διπλασίων ὁ Α : Γ, ἔϛαι (4) Α : Β :: Β : Γ· διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον Ε : Ζ :: Ζ : Ξ, ἀλλ' (5) Α : Β :: Ε : Ζ, καὶ Β : Γ :: Ζ : Ξ (καὶ γὰρ Β : Γ :: Α : Β :: Ε : Ζ :: Ζ : Ξ), δι' ἴσου τοίνυν (6) Α : Γ : : Ε : Ξ.

Πρότασις ΛΕ.

„Ἐὰν οἱ ἴσοι λόγοι (Α : Γ :: Ε : Ξ) διπλασίονες ὦσιν, ἢ τριπλασίονες, „καὶ ἐφεξῆς, τῶν λόγων Α : Β καὶ Ε : Ζ, ἔσονται καὶ οὗτοι ἀλλήλοις ἴσοι.

Εἰ μὴ γὰρ ἔϛω ὡς Α πρὸς Β, οὕτως Ε πρὸς ἄλλο τι τὸ Φ, ὅπερ ἄνισον ἂν εἴη τοῦ Ζ, καὶ ἔϛω ὡς Ε : Φ :: Φ : Χ· καὶ ἐπεὶ τοίνυν τῶν ἴσων λόγων Α : Β καὶ Ε : Φ διπλασιονές εἰσιν οἱ λόγοι Α : Γ καὶ Ε : Χ, καὶ ὁ λόγος Ε : Χ ἴσος ἔϛαι (7) τῷ λόγῳ Α : Γ, τουτέϛιν (ἐξ ὑποθ.) τῷ λόγῳ Ε : Ξ· ἄρ' οὖν (8) ἴσα τὰ Ξ καὶ Χ, οὐκοῦν καὶ τὰ μέσα Ζ καὶ Φ ἴσα ἔϛαι· ἄρα Α : Β :: Ε : Ζ. Ο. Ε. Δ.

Ἐκ τῆς ἀντιφατικῆς ὀρθῶς συνεπεράνθη ἡ ἀπόφαντις.

---

(1) ΚΖ τοῦ έ. (2) Δ. τοῦ έ. (3) ΚΖ. τοῦ έ. (4) Ὁρ. Ι. τοῦ έ. (5) Ἐξ ὑποθ. (6) ΚΒ τοῦ έ. (7) Διὰ τὴν ἀνωτ. (8) Θ. τοῦ έ.

ΜΕ'ΡΟΣ Β'.

Ο' κατ' Εὐκλείδην διὰ τῶν Πολλαπλασίων Ο'ρισμὸς τῶν ἴσων λόγων ἀποδείκνυται καὶ προτίθεται, καὶ δείκνυται τὸ μᾶλλον ἄμεσον, καὶ εὐχερέστερον γνώρισμα τῆς τῶν λόγων Ι'σότητος.

Τὰ τῶν Α'ναλογιῶν στοιχεῖα, μεθόδῳ (εἰ μὴ ἀπατώμεθα) προχειροτέρᾳ εἰσηγησαμένοις, λοιπὸν ἡμῖν, ὃ τὸ Β'. ἦν τῶν ὑπεσχημένων, πληρῶσαι. Ε'νταῦθα τοίνυν (τὸ ὑπὸ μηδενὸς εἰς τόδε γενόμενον) ἀποδείξομεν, μηδὲν ὅ,τι μὴ καθ' αὐτὸ τῇ ἐναργείᾳ τῦ κατὰ φύσιν φωτὸς ἐστι συμφανὲς λαμβάνοντες, ὡς λόγοι δύω ἀλλήλοις ἴσοι εἰσὶν, ὅτε τὰ ὁποιαδήποτε Ι'σοπολλαπλάσια τῶν ἡγυμένων, τοῖς τῶν ἑπομένων Ι'σοπολλαπλασίοις παραβαλλόμενα, ἀεὶ ἢ ἅμα μείζονα εἰσὶν, ἢ ἅμα ἐλάσσονα, ἢ ἅμα ἴσα. Οὗ δὴ τῆς δείξεως χαλεπῆς τε ὕσης ϗ διεξοδικῆς, ὡς ἐξ αὐτῶν τῶν πραγμάτων ἔσαι φανερὸν, ῥᾷς ἄντις ἐπιγνοίη πρωθυστέρως πως τὸν Εὐκλείδην χωρῆσαι, τὸν ἐκ τῆς ἀναποδείκτυ εἰς τόδε ταύτης ἰδιότητος τῶν πολλαπλασίων, ἧς ἡ ἐπιφορὰ ὕτως ἀσαφὴς οὖσα τυγχάνει, ϗ τῆς τῶν λόγων Ι'σότητος τοσῦτον ἀπέχυσα, ὡς ἐκ γνωρίσματος πρώτυ τε ϗ βασιμωτάτυ τῶν ἴσων λόγων, ἐπὶ τὴν τύτων θεωρίαν ὁρμησάμενον.

Λῆμμα Α'.

„Ε'σω Α : Β : : Γ : Ζ· κείσθω δὲ τῶν ἡγυμένων Α ϗ Γ, ὁποιαδήποτε „Ι'σοπολλαπλάσια τὰ Ι ϗ Π, τυτέστιν ἤτοι διπλάσια, ἢ τριπλάσια ϗ ἐφεξῆς, „ἔσω δὲ ϗ τῶν ἑπομένων Β ϗ Ζ, ὁποιαδήποτε Ι'σοπολλαπλάσια τὰ Λ ϗ Ρ.

„Ε'σαι δὲ δὴ Ι : Λ : : Π : Ρ, ἥτις ἐστὶν ἡ Δ'. τῦ παρόντος Βιβλίυ, ἡ ἐν „τῷ Α'. μέρει παραλειφθεῖσα.

Ε'πειδὴ γὰρ Α : Β : : Γ : Ζ, καὶ Ι τὸ διπλάσιον τῦ Α ἔσαι πρὸς τὸ Β, ὡς τὸ Π τὸ διπλάσιον τῦ Γ ἐστὶ πρὸς τὸ Ζ, καὶ Ι τὸ τριπλάσιον τῦ Α ἔσαι πρὸς τὸ Β, ὡς τὸ Π τὸ τριπλάσιον τῦ Γ ἐστὶ πρὸς τὸ Ζ, ϗ τῦτο ἐς ἄπειρον, ὅπερ ὐδενὸς ἧττον Α'ξιώματος αὐτολαμπές ἐστι ϗ αὐτόπιστον. Ε'πεὶ οὖν Ι : Β : : Π : Ζ, ἔσαι ϗ Ι πρὸς Λ τὸ διπλῦν τῦ Β, ὡς Π πρὸς Ρ τὸ διπλῦν τῦ Ζ, καὶ ὕτως ἐς ἄπειρον, ὅπερ αὖθις ὐδενὸς τῶν Α'ξιωμάτων δεύτερον εἰς σαφήνειαν· δῆλον ἄρα τὸ προτεθέν.

Α῎λλως. Ἐκ τῶν Προτ. Ις΄., ΙΕ΄., καὶ ΙΑ΄. τοῦ ε.

Ἐπειδὴ Α : Β : : Γ : Ζ, ἐναλλὰξ Α : Γ : : Β : Ζ· ἀλλὰ (ΙΕ΄.) Α : Γ : : Ι : Π, καὶ Β : Ζ : : Λ : Ρ· ἄρα διὰ τὴν ΙΑ΄. Ι : Π : : Λ : Ρ, καὶ ἐναλλὰξ Ι : Λ : : Π : Ρ.

Λῆμμα Β΄.

„Ἐὰν τὰ Μεγέθη Α καὶ Β κοινὸν ἔχῃ μέτρον τὸ Γ, ἔσται τὸ Α τοσάκις „λαμβανόμενον, ὁσάκις ἐςὶ τὸ Γ ἐν τῷ Β, ἴσον τῷ Β τοσάκις λαμβανομέ„νῳ, ὁσάκις ἐςὶ τὸ Γ ἐν τῷ Α.

Περιεχέσθω γὰρ δὴ καθ' ὑπόθ. τὸ Γ ἐν τῷ Β τετράκις, ἐν δὲ τῷ Α ἑξάκις, ὡς εἶναι μὲν τὸ Β = 4Γ, εἶναι δὲ τὸ Α = 6Γ· Τοιγαροῦν 6Γ (τουτέσι τὸ Α) ἐπιπολλαπλασιασθὲν τῷ 4 (τουτέσι τοσάκις ληφθὲν, ὁσάκις τὸ Γ ἐςὶν ἐν τῷ Β), δώσει δὴ 24Γ· ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ 4Γ (τουτέσι τὸ Β) ἐπιπολλαπλασιασθὲν τῷ 6 (τουτέσι τοσάκις ληφθὲν, ὁσάκις τὸ Γ ἐςὶν ἐν τῷ Α), δώσει δὴ 24Γ· Τὸ ἄρα Α τοσάκις λαμβανόμενον, ὁσάκις τὸ Γ ἐςὶν ἐν τῷ Β, τῷ Β τοσάκις λαμβανομένῳ, ὁσάκις τὸ Γ ἐςὶν ἐν τῷ Α, ἴσον ἐςί.

Θεώρημα Α΄.

κ. 319. „Ἐὰν ὁ λόγος αβ πρὸς ζι μείζων ᾖ τοῦ λόγου λ πρὸς ρ, τοιαῦτα δυ„νατὸν ληφθῆναι τῶν ἡγουμένων αβ καὶ λ Ἰσοπολλαπλάσια, τοιαῦτα δὲ „Ἰσοπολλαπλάσια καὶ τῶν ἑπομένων ζι καὶ ρ, ὡς τοῦ πολλαπλασίου τοῦ ἡγουμένου „(αβ) τοῦ μείζονος λόγου, ὑπερέχοντος τὸ πολλαπλάσιον τοῦ ἑπομένου (ζι), „τὸ τοῦ ἡγουμένου (λ) τοῦ ἐλάσσονος λόγου πολλαπλάσιον, μὴ ὑπερέχειν τὸ „πολλαπλάσιον τοῦ ἰδίου ἑπομένου (ρ).

Ἔςω ὁ λόγος αβ πρὸς ζι μείζων τοῦ λόγου λ πρὸς ρ, ἔςωσαν δὲ καὶ αβ καὶ λ οἱ τῶν λόγων μείζονες ὅροι· Ἐπεὶ τοίνυν αβ πρὸς ζι μείζονα λόγον ἔχει ἢ λ πρὸς ρ, ἑτερόν τι τὸ φ ἕξει πρὸς τὸ ζι, τὸν αὐτὸν λόγον (1) ὃν τὸ λ πρὸς τὸ ρ· καὶ ἐπειδὴ ὁ λόγος φ : ζι τῷ λόγῳ λ πρὸς ρ ἴσος ἐςὶ, ἐτέθη δὲ ὁ λόγος αβ πρὸς ζι μείζων τοῦ λόγου λ πρὸς ρ, ἔσαι καὶ ὁ λόγος αβ πρὸς ζι μείζων τοῦ λόγου φ πρὸς ζι, καὶ ἑπομένως αβ μεῖζον ἐςὶ τοῦ φ, ἃ δὴ πάντα καθ' αὐτὰ δῆλα ἐςὶ· τοίνυν ἀπὸ τοῦ αβ δυνατὸν ληφθῆναι τὸ αγ ἴσον τῷ φ, καὶ ἔσαι αγ : ζι : : λ : ρ. Ἀφαιρείσθω τοιγαροῦν τὸ λοιπὸν βγ ἀπὸ αγ, ὁσάκις ἂν ἐξῇ, οἷον τρὶς, εἶτα τετμήσθω τὸ αγ εἰς τοσαῦτα ἴσα μέρη, φέρε

---

(1) Λξ. τὸ πρὸ τῆς Α. τοῦ ε.

ξξ, εἰς ὃ ἐκ τούτων ἓν ληφθῆναι ἂν ἔχοι πλεονάκις ἀπὸ τοῦ ζι, ἢ βγ ἀπὸ αγ, οἷον τετράκις, ϗ λοιπὸν ἔστω τὸ ξι, ὅπερ ἔλαττον ἔσται ἑνὸς μορίου· ϗ τοῦτο δὲ δυνατὸν εἶναι καθ᾽ αὐτό τε δῆλον, ϗ ἐκ τῆς Α΄. τοῦ Γ΄. Βιβλίου ἐπιφερόμενον ἐστὶ, τῆς τῶν Ἀναλογιῶν μηδαμῶς ἐξηρτημένης· τῶν δὲ δὴ μορίων ἐκείνων τὸ Μέγεθος ἔστω Π.

Ἐπεὶ τοιγαροῦν τὸ Π κοινόν ἐστι μέτρον τῶν Μεγεθῶν αγ, ζξ, ἄρα τὸ αγ τοσάκις ληφθὲν, ὁσάκις τὸ π ἐγχωρεῖ ἐν τῷ ζξ, τουτέστι τετράκις, ἴσον ἐστὶ τῷ ζξ τοσάκις ληφθέντι, ὁσάκις τὸ π ἔνεστιν ἐν τῷ αγ, τουτέστιν ἑξάκις. Εἶτα ἐπειδὴ τὸ λοιπὸν ξι ἑνὸς μορίου ἔλαττον ἐστὶ, τουτέστι τοῦ π, ἔσται τὸ ξι τοσάκις λαμβανόμενον, ὁσάκις τὸ π ἐστὶν ἐν τῷ αγ, τουτέστιν ἑξάκις ἔλαττον εἴτέτι τοῦ αγ. Ἔτι ἐπειδὴ τὸ βγ ἡττονάκις ἀφαιρεθῆναι δύναται ἀπὸ τοῦ αγ, ἢ τὸ π ἀπὸ τοῦ ζι (ὑπετέθη γὰρ τὸ μὲν βγ ἀπὸ τοῦ αγ ἀφαιρεῖσθαι ἔχειν τρὶς, τὸ δὲ π ἀπὸ τοῦ ζι τετράκις), πρόδηλόν ἐστιν ὡς τὸ βγ τοσάκις λαμβανόμενον, ὁσάκις ἐστὶ τὸ π ἐν τῷ ζι, τουτέστι τετράκις, μεῖζον ἔσται τοῦ αγ, ϗ ἑπομένως πολλῷ μεῖζον ἢ τὸ ξι λαμβανόμενον ἑξάκις, ὅπερ ἀνωτέρω ἐδείχθη ἔλαττον ὂν τοῦ αγ. Ἀλλαμὴν ἐδείχθη ὅτι τὸ αγ τετράκις, ϗ τὸ ζξ ἑξάκις λαμβανόμενα ἴσα ἐστὶν, ἐὰν ἄρα τῷ αγ τετράκις λαμβανομένῳ προστεθῇ τετράκις τὸ βγ, ϗ τῷ ζξ ἑξάκις λαμβανομένῳ προστεθῇ τὸ ξι ἑξάκις, ἔσονται τὰ 4 αγ ϗ 4 βγ, τουτέστι τὰ 4 αβ, μείζονα τῶν 6 ζξ ϗ 6 ξι, τουτέστι τῶν 6 ζι· ἐπειδὴ δὲ τὰ 4 αγ ἴσα ἦν τοῖς 6 ζξ, ἔσται τὰ 4 αγ ἐλάσσονα τῶν 6 ζι· ἀλλ᾽ ἐτίθετο ἀνωτέρω αγ : ζι : : λ : ρ, ἄρα (διὰ τὸ Α΄. Λῆμ.) τὰ 4 λ ἐλάσσονά ἐστι τῶν 6 ρ· καὶ ἐλήφθη ἄρα τῶν ἡγουμένων αβ ϗ λ τὰ Ἰσοπολλαπλάσια, τουτέστι τὰ τετραπλάσια, ϗ δὴ ϗ τῶν ἑπομένων ζι ϗ ρ τὰ Ἰσοπολλαπλάσια, ἤτοι τὰ ἑξαπλάσια, ϗ μὴν ἐδείχθη ὅτι τὸ πολλαπλάσιον τοῦ ἡγουμένου αβ (τουτέστι τὰ 4 αβ) ὑπερέχει τὸ πολλαπλάσιον τοῦ ἑπομένου ζι (τουτέστι τὸ 6 ζ), τὸ δέ τοι πολλαπλάσιον τοῦ ἡγουμένου λ (ὅπέρ ἐστι 4 λ) οὐχ ὑπερέχει τὸ πολλαπλάσιον τοῦ ἑπομένου ρ (τουτέστι τὸ 6 ρ). Ο. Ε. Δ.

Θεώρημα Β΄.

„Ἐὰν τῶν ἡγουμένων (α, γ) ὁποιαοῦν Ἰσοπολλαπλάσια, ὁποιοισοῦν „τῶν ἑπομένων (β, ζ) Ἰσοπολλαπλασίοις, ἤτοι ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ τούτων „ἅμα μείζονα, ἢ ἐλάσσονα, ὁ λόγος (α : β) τῷ λόγῳ (γ : ζ) ἴσος ἔσται.

Εἰ γὰρ μὴ, ἀλλ᾽ ἔστω ὁ λόγος α : β > γ : ζ. Διὰ δὲ τὸ ἀνωτέρω Θεώρημα, τοιαῦτ᾽ ἄττα μὲν τῶν ἡγουμένων α ϗ γ, τοιαῦτ᾽ ἄττα δὲ τῶν ἑπομένων λαβεῖν ἔνι ἰσοπολλαπλάσια, ὡς τὸ τοῦ ἡγουμένου α πολλαπλάσιον ὑπερέχον τὸ πολλαπλάσιον τοῦ ἑπομένου β, τὸ θατέρου ἡγουμένου γ πολλαπλάσιον ἥκιστα ὑπερέχειν τὸ πολλαπλάσιον τοῦ ἑτέρου ἑπομένου ζ· ἄτοπον δὲ ὡς τὴν ὑπόθεσιν περιτρέπον. Ἄρα κτ.

Ἐν τῇδε τῇ ἀποδείξει, οἷα κἀν ταῖς ἑξῆς, τῶν ἐν τῷ Ε΄. Βιβλίῳ αἱ Προτάσεις παραλαμβάνονται αἱ αὐτοφανεῖς καὶ αὐτόπιστοι.

Θεώρημα Γ΄.

„Ἐὰν τοιαῦτα μὲν τῶν ἡγουμένων (Ξ, Ρ), τοιαῦτα δὲ τῶν ἑπομένων „(Π, Σ) Ἰσοπολλαπλάσια ληφθῆναι δυνατὸν ᾖ, ὡς τοῦ πολλαπλασίου θατέρου τῶν ἡγουμένων (Ξ) τὸ τοῦ ἑπομένου (Π) πολλαπλάσιον ὑπερέχοντος, „τὸ θατέρου τῶν ἡγουμένων (Ρ) πολλαπλάσιον, τὸ τοῦ ἑπομένου αὐτῷ (Σ) „πολλαπλάσιον μηδαμῶς ὑπερέχειν, ἔσται ὁ λόγος (Ξ : Π), καθ᾽ ὃν τὸ τοῦ „ἡγουμένου πολλαπλάσιον ὑπερέχει τὸ πολλαπλάσιον τοῦ ἑπομένου, μείζων „θατέρου (Ρ : Σ).

Ἀνίσους γοῦν εἶναι τοὺς τοιούσδε λόγους οὕτω κατασκευάζω. Εἰ γὰρ ἴσοι, τὰ τῶν ἡγουμένων ὁποιαδήποτε Ἰσοπολλαπλάσια (ὡς ἐκ περιουσίας σαφὲς ἐκ τοῦ Α΄. Λήμματος), τῶν ἑπομένων ὁποιωνδηποτοῦν Ἰσοπολλαπλασίων ἢ ἅμα μείζονα, ἢ ἅμα ἐλάσσονα, ἢ ἅμα τούτοις ἴσα. Περιτρέπει δὲ τουτὶ τὴν ὑπόθεσιν.

Τὸν δὲ δὴ λόγον (Ξ : Π), καθ᾽ ὃν τὸ τοῦ ἡγουμένου Ἰσοπολλαπλάσιον ὑπερέχον τίθεται, μείζονα τυγχάνειν, ὧδέ πως δείκνυμι. Εἰ γὰρ μὴ, ἔστω δὴ ὁ λόγος (Ρ : Σ) μείζων τοῦ λόγου (Ξ : Π), ἆρ οὖν (κατὰ τὸ Α΄. Θεώρ.) τοιαῦτα δὴ ληφθῆναι δυνατὸν τῶν ἡγουμένων Ρ καὶ Ξ Ἰσοπολλαπλάσια, τοιαῦτα δὲ καὶ τῶν ἑπομένων Σ καὶ Π, ὡς τὸ τοῦ ἡγουμένου Ρ τοῦ κατὰ τὸν μείζονα λόγον πολλαπλάσιον, ὑπερέχον τὸ πολλαπλάσιον τοῦ ἑπομένου Σ τόγε τοῦ ἡγουμένου Ξ πολλαπλάσιον, μὴ ὑπερέχειν τὸ πολλαπλάσιον τοῦ ἑπομένου Π. Οὔκουν δὲ τοιαῦτα (ὅπερ ἐκ τοῦ Α΄. τῶν Θεωρημάτων εὐαπόδεικτον ἐστὶν), ὡς τοῦ πολλαπλασίου τοῦ Ξ ὑπερέχοντος τὸ τοῦ Π πολλαπλάσιον, τὸ πολλαπλάσιον τοῦ Ρ μὴ ὑπερέχειν τὸ πολλαπλάσιον τοῦ Σ. Ὅπερ οὐδὲν ἧττον ἀναιρεῖ τὰ τῆς ὑποθέσεως.

Θεώρημα Δ΄.

„Τοῦ λόγου ἀλόγου τυγχάνοντος, οὐδὲν ὅ,τιοῦν τῶν τοῦ ἡγουμένου πολ-

„λαπλασίων, οὐδενὶ ὁτῳοῦν τῶν τοῦ ἑπομένου πολλαπλασίων ἴσον ἂν εἴη.
„Ταύτῃ δέ τοι ἐν οἷς διὰ τῶν πολλαπλασίων ζητεῖται ἡ τῶν ἀλόγων ἀνα-
„λογιῶν ἰσότης, νοητέον μόνον τῶν πολλαπλασίων τὸ ἅμα τῆς ὑπερο-
„χῆς καὶ ἐλλείψεως.

Ἔστω δὴ λόγος ἄλογος Α : Β. Εἴπερ οὖν τὸ Α ποσάκις ληφθὲν, ἰσωθῆναι εἶχε τῷ Β ποσάκις ληφθέντι, ὡς ὑφ' ἑκατέρου ἴσην πηλικότητα συσταθῆναι τὴν Ζ, ἑκάτερον ἂν Α καὶ Β ἦν ἂν τῷ αὐτῷ Ζ συμμέτρως ἔχον, καὶ σύμμετρα ἂν ἤτην, κατὰ τῆς ὑποθέσεως.

Ἐπειδὴ δὲ τῶν Θεωρημάτων τὸ Β'. οὐδὲν ἧττον τοῖς ἀλόγοις, ἢ τοῖς λογικοῖς τῶν λόγων προσῆκον ἐστὶ, τῇ ἅμα ὑπεροχῇ τε καὶ ἐλλείψει τὴν ἅμα ἰσότητα προστιθέμεθα σὺν τῷ Εὐκλείδει.

Τοῖς παρὰ τοῦ Στοιχειωτοῦ ἐν Ὁρισμοῖς Ε'. καὶ ϛ'. ὑποτιθεμένοις ὧδε δειχθεῖσιν, ἅπασαι ἤδη αἱ ἐν τῷ Ε'. καὶ ϛ'. Βιβλίῳ ἀποδείξεις ἔχουσι τὸ ἑδραῖον· καὶ δῆλον ἄρα ὡς τὸ τῆς ἅμα νοουμένης ὑπεροχῆς, εἴτουν ἐλλείψεως τεκμήριον, ἀπταίστως ἔχει εἰς διαγνώρισιν τῆς τῶν λόγων ἰσότητος, οὐχ ἁπλῶς μέντοι, οὐδὲ ἀμέσως, τῆς δὲ ἣν φθάσαντες παρεχόμεθα δείξεως ὀρθῶς πρῶτον κατανοηθείσης.

Ἀλλὰ γὰρ ἐπεὶ τὸ διὰ τῶν πολλαπλασίων τεκμήριον καίτοι ἀσφαλὲς, πορρώτερον γεμὴν ὂν τυγχάνει καὶ πεπλεγμένον, ἕτερον ἀντ' ἐκείνου σαφέστατόν τε ἅμα καὶ ἐγγυτάτω ὂν, ᾗ μοι ὑπέσχηται, προθήσομαί τε καὶ δείξω.

Θεώρημα Ε'.

„Ἐὰν τὰ ἑπόμενα (γζ, νπ), καὶ τῶν ἑπομένων ἕκαστον μέρος ὅμοιον x. 320.
„(οἷον δεκατημόριον, ἑκατοστημόριον, χιλιοστημόριον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς πέ-
„ρατος ἄνευ), ἐν τοῖς ἡγουμένοις (αβ, ημ) ἰσαρίθμως ἀεὶ ὦσι περιεχόμενα,
„οἱ λόγοι (αβ πρὸς γζ, καὶ ημ πρὸς νπ) ἴσοι ἔσονται.

Σεσημειώσθω, ὅτι τὴν ἰσάριθμον ἑκατέρωσε περιοχὴν ἐκ τῆς ἰσαρίθμου ἑκατέρωθεν ἀφαιρέσεως τεκμαιρόμεθα.

Δείκν. Εἰ μὴ γοῦν, ἔσται τῶν λόγων ὁ ἕτερος, οἷον ὁ αβ πρὸς γζ, μείζων τοῦ λόγου ημ πρὸς νπ· καὶ δῆλον τοίνυν, ὅτι Εὐθεῖα τις (οἷον ἡ αδ) ἐλάσσων τῆς αβ λόγον ἕξει πρὸς γζ, ὃν ημ πρὸς νπ· οὐδὲν δὲ ἧττον σαφὲς, ὅτι καί τι τῶν ἐπὶ τῆς γζ μορίων (οἷον εἰπεῖν φέρε τὸ τριακοστὸν), ἔλαττον τῆς διαφορᾶς δβ· Ἔστω δὴ ἡ γε τριακοστὸν τῆς γζ, καὶ ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τῆς αβ ὁσάκις ἂν ἐξῇ, οἷον χιλιάκις, ἔστω δὲ ὅλον τὸ ἀφαιρεθὲν αξ·

καὶ ἐπεὶ αξ εἶναι τίθεται 1000 πρὸς 1 τὴν γε, ἡ δὲ γζ 30 πρὸς μονάδα τὴν γε, ἔςαι αξ : γζ : : 1000 : 30.

κ. 320. Ἤδη οὖν ληφθήτω ϗ ἀπὸ τῆς νπ μέρος τὸ νρ ὅμοιον τῷ ληφθέντι γε, ἡλίκον τριακοςόν· καὶ ἐπεὶ καθ' ὑπόθεσιν αἱ γε ϗ νρ ἰσαρίθμως ἐν ταῖς αβ, ημ περιεχόμεναί εἰσιν, ἐκείνων τε ἡ γε ἀπὸ τῆς αβ ὁσάκις ἐξῆν ἀφῄρηται, οἷον χιλιάκις, ϗ αὐτὴ δὴ ἡ νρ ἀπὸ τῆς ημ χιλιάκις ἂν ἔχοι ἀφαιρεθῆναι. Ἐπεὶ δέ τοι τὸ ὅλον ἀφαιρεθὲν ηκ ἐςὶ 1000 πρὸς 1 τὴν νρ, ϗ νπ ἐςὶ 30 πρὸς τὴν αὐτὴν νρ, ἔςαι δὴ ηκ : νπ : : 1000 : 30, τουτέςιν ὡς αξ πρὸς γζ. Ἤδη δὲ τῆς γε ἀφαιρεθείσης ὁσάκις ἐξῆν ἀπὸ τῆς αβ, καὶ καταλιπούσης τὴν ξβ, τῆς τε ξβ ἐλάσσονος οὔτω τῆς γε ὑποτιθεμένης, ἡ γε τριακοςημόριον οὖσα τῆς γζ ἐλάσσων ἐλήφθη τῆς δβ· τοιγαροῦν ἡ ξβ πολλῷ ἐλάσσων τῆς δβ, ὥςε ἡ αξ μείζων τῆς αδ, ϗ ἑπομένως αξ : γζ > αδ : γζ· ἐτίθετο δὲ αδ : γζ : : ημ : νπ, ἄρα αξ : γζ > ημ : νπ, τουτέςι πολλῷ μείζων τοῦ ηκ πρὸς νπ· ἄτοπον δὲ, ἐδείχθη ϗ γὰρ αξ : γζ : : ηκ : νπ. Ἀδύνατον ἄρα τοὺς δοθέντας λόγους αβ πρὸς γζ ϗ ημ πρὸς νπ εἶναι ἀνίσους, ὥςε ἴσοι εἰσίν. Ο. Ε. Δ.

Θεώρημα ς'.

„Ἐὰν ἤτοι τὰ ἑπόμενα (γζ, νπ), ἢ τῶν ἑπομένων ὁποιαδήποτε μό„ρια ὅμοια (οἷον δεκατημόρια), μὴ ἰσαρίθμως ἐν τοῖς ἡγουμένοις (αβ, ημ) „περιεχόμενα ᾖ, οἱ λόγοι (αβ : γζ, ϗ ημ : νπ) ἄνισοι ἔσονται, ϗ τούτων „μείζων, οὗ τὸ τοῦ ἑπομένου μόριον πλεονάκις ἐμπεριέχεται.

κ. 321. Ἔςω δὴ περιεχόμενον τὸ γε, δεκατημόριον φέρε τοῦ γζ, ἐν τῷ αβ χιλιάκις, καὶ ἔςω αξ 1000 πρὸς 1 τὴν γε, τὸ δὲ λοιπὸν ξβ ἔλαττον τοῦ γε. Εἶτα δὴ νρ δεκατημόριον τοῦ νπ περιεχέσθω ἐν τῷ ημ 997κις, ὡς εἶναι τὸ ηκ 997 πρὸς 1 τὴν νρ, καὶ δῆλον ὡς τὸ λοιπὸν κμ ἔλαττον τοῦ νρ, κἀντεῦθεν 1000κις τὸ νρ μεῖζον τοῦ ημ. Ἀλλὰ γὰρ ἔςω ησ 1000 πρὸς 1 τὴν νρ, καὶ ἐπεὶ αξ ἐςὶ 1000 πρὸς 1 τὴν γε, καὶ ησ 1000 πρὸς 1 τὴν νρ, καὶ δὴ ϗ γζ 10 πρὸς γε, ϗ νπ 10 πρὸς νρ, ἔςαι αξ : γζ : : ησ : νπ, ἄρα αβ : γζ ἐν μείζονι λόγῳ, ἤπερ ησ : νπ, ϗ ἑπομένως ἐν πολλῷ μείζονι, ἢ ημ πρὸς νπ. Ο. Ε. Δ.

Καὶ ἔςιν ἄρα ἡμῖν ἀναμφήριςον ϗ ῥᾷςον νοηθῆναι τεκμήριον, πρὸς τὴν τῶν ἴσων τε ϗ ἀνίσων λόγων ἐπίκρισιν. Ἐξ οὗ ϗ πάσας, ὁπόσαι μὴ αὐτόπιςοί εἰσιν, ἔχοιμεν ἂν τὰς τοῦ Ε'. Βιβλίου Προτάσεις, ἃς διὰ Ἰσοπολλαπλασίων ὁ Στοιχειωτὴς ἐπεχείρησεν, ἀποδεῖξαι, εἰμὴ πάρεργον ἔσεσθαι τοῖς μαθητιῶσιν ἐγνώκειμεν, κατὰ τὴν ἐν τῷ Α'. μέρει μέθοδον αὐτὰς ὑποθέσθαι.

ΜΕΡΟΣ Γ.

Περὶ τῶν κατὰ τὲς λόγες Παρονομασῶν, καὶ τέτων Ἀλγορίθμε, καὶ Συνθέσεως.

§. Α.

Διαίρεσις τῶν λόγων.

Διαιρεῖται δὴ πρὸ πάντων ὁ λόγος εἰς λογικὸν ϗ ἄλογον, ὡς εἴρηται ἐν Ὁρ. Δ., ὁ δὲ λογικὸς εἰς τὸν κατ' ἰσότητα ϗ ἀνισότητα, ὃς ϗ ὑποδιαιρεῖται εἰς τὸν κατὰ τὴν μείζονα ἀνισότητα, ἔνθα τὸ ἡγέμενον μεῖζον τῦ ἑπομένε, ϗ εἰς τὸν κατ' ἐλάσσονα ἀνισότητα, ἔνθα τὸ ἡγέμενον ἔλαττον τῦ ἑπομένε.

Τῦ δὲ δὴ λογικῦ λόγε τῦ κατὰ τὴν μείζονα τῶν ἀνισοτήτων εἴδη πέντε. Ὁ μὲν γὰρ Πολλαπλάσιος, ὁ δ' Ἐπιμόριος, ὁ δ' Ἐπιμερὴς, ὁ δὲ πολλαπλάσιος Ἐπιμόριος, ὁ δὲ πολλαπλάσιος Ἐπιμερής.

Καὶ Πολλαπλάσιος μὲν, ὅτε ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα τῶν ὅρων πλεονάκις περιέχων ἐςὶν, οἷον δὶς, τρὶς, τετράκις, κξ., ὃς ϗ φερωνύμως ἀπὸ τῆς περιοχῆς διπλάσιος ἀκέει, ϗ τριπλάσιος, ϗ τετραπλάσιος, κξ.

Ἐπιμόριος δὲ λόγος, ὅτε ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα τῶν ὅρων ἅπαξ περιέχει, ϗ μόριόντι τῶν ἐν αὐτῷ, οἷος ὁ λόγος 3 πρὸς 2, ἢ 6 πρὸς 4, ὃς καλεῖται ϗ Ἡμιόλειος· ὁ γάρ τοι μείζων τὸν ἐλάσσονα ἅπαξ περιέχει, καὶ τέτε ἡμίσειαν· καὶ ὁ λόγος 4 πρὸς 3, ἢ 16 πρὸς 12, ὃς ϗ Ἐπίτριτος λέγεται, τῦ μείζονος τὸν ἐλάσσονα ἅπαξ, ϗ τέτε πρὸς τριτημόριον περιέχοντος, ϗ ὅτως ἐφεξῆς.

Λόγος δὲ ἐπιμερής ἐςιν, ὅτε ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα τῶν ὅρων ἅπαξ περιέχει, ϗ τέτε μέρη μὴ μόριον συναποτελῦντα. Τοιῦτος ὁ λόγος 8 πρὸς 5, ϗ 14 πρὸς 10, τὸ γὰρ 8 περιέχει τὸ 5 ἅπαξ, ϗ ἔτι πρὸς 3, ἅτινά ἐςι τρία πεμπτημόρια τῦ αὐτῦ ἀριθμῦ 5, ἅπερ ἅμα ληφθέντα μόριον ἓν τῦ πενταδικῦ ὐδαμῶς δίδωσιν· ὡσαύτως δὲ ϗ 14 περιέχει τὰ 10 ἅπαξ, ϗ δὶς 2, τετέςι δύο πεμπτημόρια τῦ ἀριθμῦ 10, ἅττα ἅμα ληφθέντα (ἤτοι 4) ἕντι μόριον τῦ 10 ἥκιςα συναποτελεῖ. Προσετέθη γῦν τὸ μόριον μὴ συναποτελεῖν, εἴη γὰρ ἂν εἴπερ ἄλλως ὁ λόγος Ἐπιμόριος.

Λόγος δὲ πολλαπλάσιος ἐπιμόριος ἐςὶν, ὅτε ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα πλεονάκις περιέχει, ϗ ἔτι πρὸς αὐτȣ͂ μόριον, οἷος ὁ λόγος 5 πρὸς 2, ϗ 10 πρὸς 4 κξ.

Λόγος δὲ πολλαπλάσιος ἐπιμερὴς ἐςιν, ὅτε ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα πλεονάκις περιέχει, ϗ ἔτι μέρη τȣ͂ αὐτȣ͂, μηδέν τι μόριον συναποτελȣ͂ντα· τοιȣ͂τος ὁ λόγος 8 πρὸς 3, ϗ 16 πρὸς 6, κξ.

§. Β΄.

Περὶ Παρονομαςȣ͂ τȣ͂ λόγȣ τȣ͂ λογικȣ͂.

Παρονομαςὴς τȣ͂ λογικȣ͂ λόγȣ ἐςὶν, ὁ σαφῶς τε ϗ εὐκρινῶς ἐκδηλῶν τὴν θατέρȣ τῶν ἀριθμῶν σχέσιν πρὸς θάτερον, ἀμέλειτοι ὁ ȣ̔́τως ἔχων πρὸς τὴν μονάδα, ὡς ὁ μείζων τῶν ὅρων πρὸς τὸν ἐλάσσονα, ϗ παραδεικνὺς ὁσάκις ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα περιέχει, ἢ (ὃ ταυτόν ἐςιν) ὁσάκις ὁ ἐλάσσων ἐν τῷ μείζονι περιέχεται. Τȣ͂ γȣ͂ν λόγȣ 27 πρὸς 9 Παρονομαςής ἐςιν ὁ 3, ἔςι γὰρ τὰ 3 πρὸς τὴν μονάδα, ὡς 27 πρὸς 9· ὅθεν δείκνυται διὰ τȣ͂ 3, ὅτι τρὶς ἐν τῷ ἡγȣμένῳ τὸ ἑπόμενον περιέχεται.

Λόγȣ δὲ παντὸς ὁ Παρονομαςὴς ἐξευρίσκεται, τȣ͂ μείζονος τῶν ὅρων διαιρȣμένȣ διὰ τȣ͂ ἐλάσσονος, οὕτω γάρ τοι τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως Πηλίκον, τȣ͂ λόγȣ Παρονομαςὴς ἔςαι, καθότιγε τὸ Πηλίκον ἐςὶ πρὸς τὴν Μονάδα, ὡς ὁ Διαιρετέος πρὸς τὸν Διαιρέτην, ταυτὸν εἰπεῖν, ὡς τῶν ὅρων ὁ μείζων πρὸς τὸν ἐλάσσονα.

Οἷον δὴ κείσθω λόγος 60 πρὸς 6· διαιρείσθω δὲ τὰ 60 διὰ 6, ϗ Πηλίκον ἀνακύψει τὸ 10, ὃ ὁ τȣ͂ λόγȣ τυγχάνει Παρονομαςής. Ἀλλὰ κείσθω λόγος 60 πρὸς 16, διαιρείσθω δὲ 60 διὰ 16, Πηλίκον ἀνακύψει $3\frac{3}{4}$, ὅς ἐςιν ὁ Παρονομαςής.

§. Γ΄.

Περὶ Παρονομαςῶν τῶν λόγων τῶν ἀλόγων.

Τῶν ἀλόγων λόγων ἐφ᾽ ἑνί τι κοινὸν ἑπόμενον ἀναχθέντων, τὰ τȣ͂ κοινȣ͂ ἑπομένȣ ἡγȣμενα, οἱ Παρονομαςαὶ αὐτῶν ἔσονται, τὸ δέ τοι κοινὸν ἑπόμενον ἔργον τε, ϗ τάξιν Μονάδος πληρώσει.

Λόγȣ δὲ ȣ̓δενὸς, ὃς ἂν ἄλογος ᾖ, μόνȣ ἐκκειμένȣ τὸν Παρονομαςὴν δυνατὸν παραςῆσαι. Ἐὰν δὲ δύω ἢ πλείȣς τύχωσι καθ᾽ ἕτερόν τινα νȣ͂ν, οἱ τȣ́των Παρονομαςαὶ παραςαῖεν δεικνȣ͂ντες δηλονότι, ὅπως τῶν λόγων ὁ ἕτερος ἔχει πρὸς θάτερον, ὃ δήπερ ἄριςα σεσημειωκὼς φέρεται Γρηγόριος ὁ παρὰ τȣ͂

Ἁγίε βικεντίε ἐν Βιβλ. Η΄. τε Γεωμετρικε πονήματος αὐτε Ὁρ. Β΄. Οὗτος οὖν πολλοῖς τε ϗ ἐπισήμοις εὑρήμασι τὴν Γεωμετρικὴν ἐπαυξήσας, ἐν τῷ Η΄. μάλιςα Βιβλίῳ τε εἰρημένε Συγγράμματος, ὡς καινήν τινα σχεδὸν ἐπιςήμην περὶ Ἀναλογιῶν δειμάμενος εἰκότως γεραίρεται.

Κείσθωσαν οὖν ἄλογοι λόγοι Α πρὸς Β, ϗ Γ πρὸς Δ, ϗ ἀναχθήτωσαν πρὸς τὲς λόγες $\zeta : \vartheta$, ϗ $\eta : \vartheta$ κοινὸν ἔχοντες ἑπόμενον τὸ ϑ, ὥςε εἶναι τὸν λόγον $\zeta : \vartheta = A : B$, ϗ τὸν λόγον $\eta : \vartheta = \Gamma : \Delta$. Ἐπὶ δὴ τέτων τὸ κοινὸν ἑπόμενον ϑ, τὸ ἔργον ἐκτελέσει τὸ τῆς Μονάδος, τὰ δὲ ἡγέμενα ζ ϗ η ἔσονται οἱ Παρονομαςαὶ τῶν λόγων ζ πρὸς ϑ, ϗ η πρὸς ϑ (τετέςι τῶν λόγων Α πρὸς Β, ϗ Γ πρὸς Δ)· παραδεικνύεσι γὰρ ὅπως ὁ ἕτερος τῶν λόγων ἔχει πρὸς θάτερον, καὶ γὰρ $\zeta : \eta$, ὡς ὁ λόγος $\zeta : \vartheta$ πρὸς τὸν λόγον $\eta : \vartheta$, ἤτοι ὁ $A : B$ πρὸς τὸν $\Gamma : \Delta$.

§. Δ΄.

Ἀξιώματα.

Οἱ λόγοι ($\zeta : \vartheta$ ϗ $\eta : \vartheta$), οἷς κοινόν ἐςιν ἑπόμενον (τὸ ϑ), λόγον ἔχεσι πρὸς ἀλλήλες, ἡλίκον τὰ ἡγέμενα (ζ ϗ η)· ἔςι δὲ ἡ Β΄. τῶν ἐν τῷ Η΄. Βιβλ. παρὰ Γρηγ. τῷ εἰρημένῳ. Α΄.

Τετέςι δὲ ὁ λόγος $\eta : \vartheta$ τοσέτῳ μείζων ἐςὶ τε $\zeta : \vartheta$, ὅσῳ τὸ η μεῖζον τυγχάνει τε ζ.

Οἱ λόγοι ($\iota : \lambda$, ϗ $\iota : \mu$) οἷς κοινόν ἐςι τὸ ἡγέμενον, τὸν κατὰ τὰ ἑπόμενα λόγον ἀντιπεπόνθασιν· ἔςι δὲ Πρότ. Ζ΄. τῶν ἐν τῷ Η΄. Βιβλ. παρὰ Γρηγ. Β΄.

Τῦτο δέ ἐςιν, ὅτι ὁ λόγος $\iota : \lambda$ ἐςὶ πρὸς τὸν λόγον $\iota : \mu$, ὡς ἀντιςρόφως μ ἑπόμενον πρὸς λ ἑπόμενον, ἤτοι ὁ λόγος $\iota : \lambda$ τοσέτῳ μείζων τε $\iota : \mu$, ὅσῳ τὸ μ μεῖζον τε λ.

Οἱ λογικοὶ τῶν λόγων εἰσὶ πρὸς ἀλλήλες ὡς οἱ τέτων Παρονομαςαί. Γ΄.

Οἷον κείσθωσαν λόγοι 12 πρὸς 3, ϗ 15 πρὸς 6, ὧν Παρονομαςαὶ 4 ϗ $2\frac{1}{2}$· καὶ κατὰ τὸν Ὁρισμὸν (1) $12 : 3 = 4 : 1$, ὁ δὲ λόγος $15 : 6 = 2\frac{1}{2} : 1$· ἀλλαμὴν $4 : 1$ ἐςὶ πρὸς τὸν λόγον $2\frac{1}{2} : 1$, ὡς (2) $4 : 2\frac{1}{2}$, ἄρα ϗ ὁ λόγος $12 : 3$ ἐςὶ πρὸς τὸν λόγον $15 : 6$, ὡς ὁ Παρονομαςὴς 4 πρὸς τὸν Παρονομαςὴν $2\frac{1}{2}$.

---

(1) §. *Β*. (2) §. *Δ*. *Ἀξ*. *α΄*.

§. Ε΄.

Η῾ τῶν λογικῶν λόγων πρόθεσις ϗ ἀφαίρεσις.

Προςίθενται οἱ λόγοι τῶν κατ᾿ αὐτὰς Παρονομαςῶν προςιθεμένων· ὁ γάρτοι λόγος, ὃν τὸ τῶν Παρονομαςῶν ἄθροισμα ἔχει πρὸς τὴν μονάδα, τὸ τῶν δοθέντων λόγων τυγχάνει ἄθροισμα.

Κείσθωσαν λόγοι 12 : 3 ϗ 15 : 6, καὶ τέτων Παρονομαςαὶ 4 ϗ $2\frac{1}{2}$ προςιθέμενοι ἀλλήλοις ϗ $6\frac{1}{2}$ συναποτελȣ̃ντες· ὁ τοίνυν λόγος $6\frac{1}{2}$ πρὸς 1, ἴσος κρίνεται τοῖς λόγοις 12 : 3 ϗ 15 : 6· Δῆλον δὲ ἐκ τῶν Α᾿ξιωμ. τȣ̃ Α ϗ τȣ̃ Γ΄.

Α᾿φαιρȣ̃νται δὲ ἀφαιρȣμένȣ τȣ̃ ἐλάσσονος τῶν Παρονομαςῶν ἀπὸ τȣ̃ μείζονος, ὃν γὰρ ἔχει λόγον τὸ λοιπὸν πρὸς τὴν μονάδα, τοιȣ̃τον ἔχει τὸ λοιπὸν, μετὰ τὸ τὸν ἐλάσσονα τῶν λόγων ἀπὸ τȣ̃ μείζονος ἀφαιρεθῆναι. Δῆλον ϗ τȣ̃το ἔκτε τȣ̃ Α΄. ϗ τȣ̃ Γ΄. Α᾿ξιώμ.

Κείσθωσαν οἱ λόγοι 12 : 3 ϗ 15 : 6, ὧν Παρονομαςαὶ 4 ϗ $2\frac{1}{2}$, ἀφαιρεθήτω δὲ ὁ ἐλάσσων $2\frac{1}{2}$ ἀπὸ τȣ̃ μείζονος 4, ὥςε λοιπὸν εἶναι $\frac{3}{2}$. Τὰ γȣ̃ν $\frac{3}{2}$ πρὸς τὴν 1, ἐςὶν ὡς ὁ λοιπὸς λόγος, μετὰ τὴν γενομένην ἀφαίρεσιν τȣ̃ 15 : 6 ἤτοι τȣ̃ $2\frac{1}{2}$: 1, ἀπὸ τȣ̃ λόγȣ 12 : 3, ἤτοι 4 : 1.

§. ϛ΄.

Η῾ τῶν ἀλόγων λόγων πρόθεσις ϗ ἀφαίρεσις.

Οἱ δοθέντες λόγοι (Α : Β καὶ Γ : Δ) ἀναχθήτωσαν ἐπὶ τȣ̀ς τὸ αὐτὸ ἔχοντας ἑπόμενον (ζ : θ ϗ η : θ) τὸ θ· τῶν γȣ̃ν ἡγȣμένων ζ ϗ η προςεθέντων ἀλλήλοις, ἔςαι τὸ ἄθροισμα ζη πρὸς τὸ ἑπόμενον θ, ἴσον τοῖς λόγοις ζ : θ ϗ η : θ, τȣτέςι τοῖς λόγοις Α : Β ϗ Γ : Δ.

Η῾ δὲ τέτων ἀφαίρεσις τελεῖται τῶν δοθέντων λόγων ἐπὶ τὸ αὐτὸ κοινὸν ἑπόμενον ἀναγομένων, ϗ τȣ̃ ἐλάσσονος ἡγȣμένȣ, οἷον τȣ̃ η, ἀπὸ τȣ̃ μείζονος φέρε ζ ἀφαιρȣμένȣ· ὁ γάρτοι τȣ̃ λοιπȣ̃ πρὸς θ, ἐςὶν ὁ λοιπὸς, μετὰ τὸ τὸν λόγον η : θ, ἤτοι τὸν Γ : Δ ἀφαιρεθῆναι ἀπὸ τȣ̃ λόγȣ ζ : θ, ἤτοι τȣ̃ Α : Β. Δῆλον ἐκ τȣ̃ Α΄. Α᾿ξιώματος.

§. Ζ΄.

Ο῾ τῶν λογικῶν λόγων πολλαπλασιασμὸς, ϗ ἡ τέτων διαίρεσις.

Οἱ τῶν λόγων Παρονομαςαὶ ἐπ᾿ ἀλλήλοις πολλαπλασιαθέντες, δώϛυσι τὸν Παρονομαςὴν τȣ͂ λόγȣ, τȣ͂ ἐκ τῶν δοθέντων διὰ πολλαπλασιασμȣ͂ παρακύπτοντος.

Τȣτέςιν ὁ λόγος, ὃν πρὸς τὴν μονάδα ἔχει ὁ διὰ πολλαπλασιασμȣ͂ ἐπ' ἀλλήλοις τῶν Παρονομαςῶν παρηγμένος ἀριθμὸς, αὐτὸς ὁ ἐκ τȣ͂ πολλαπλασιασμȣ͂ τῶν λόγων ἐςὶ γινόμενος. Δῆλον δὲ ἐκ τῶν Α'ξιωμ. Α'. ϗ Γ'. · ὁ γὰρ τῶν λόγων πολλαπλασιασμὸς, ȣ̓δὲν ὅ,τι μὴ θατέρȣ ἐπὶ θατέρῳ ἐπανειλημμένη τις πολλάκις πρόσθεσις ἐςί· τȣ͂τον δὲ τελεῖσθαι ἐπαναληφθείσης πολλάκις τῆς τῶν ἡγȣμένων προσθέσεως, πρόδηλόν ἐςιν ἔκ τε τȣ͂ Α'. ϗ τȣ͂ Γ'. Α'ξιώματος.

Οἷον δὴ κείσθωσαν λόγοι 9 : 3 ϗ 20 : 4, ϗ τȣ́των Παρονομαςαὶ 3 ϗ 5, οἳ ϗ ἐπ' ἀλλήλοις πολλαπλασιαζόμενοι παρέχȣσι 15. Ο῾ τοίνυν λόγος 15 : 1, ἡλίκος ἐςὶν ὁ διὰ πολλαπλασιασμȣ͂ τῶν λόγων 9 : 3, ἤτοι (3 : 1), καὶ 20 : 4 (ἤτοι 5 : 1) παραγόμενος.

Η῾ δὲ δὴ τȣ́των διαίρεσις τελεῖται, τȣ͂ Παρονομαςȣ͂ τȣ͂ μείζονος λόγȣ διαιρȣμένȣ διὰ τȣ͂ Παρονομαςȣ͂ τȣ͂ λόγȣ τȣ͂ ἐλάσσονος. Ο῾ γὰρ τȣ͂ πηλίκȣ λόγος πρὸς τὴν μονάδα, ἐςὶν ἡλίκος ὁ ἐκ τῆς διαιρέσεως τȣ͂ μείζονος τῶν δοθέντων λόγȣ διὰ τȣ͂ ἐλάσσονος· Δῆλον ἐκ τȣ͂ Α'. ϗ Γ'. τῶν Α'ξιωμάτων· ἡ γὰρ λόγȣ διὰ λόγȣ ἑτέρȣ διαίρεσις, οὐδὲν ὅτι μὴ ἀφαίρεσις ἐςὶ θατέρου ἀπὸ θατέρȣ πολλάκις ἐπανειλημμένη.

§. Η'.

Ο῾ τῶν ἀλόγων λόγων πολλαπλασιασμός.

Κείσθωσαν λόγοι Α : Β ϗ Γ : Δ ἐπ' ἀλλήλοις πολλαπλασιαςέοι, καὶ γινέσθω Α : Β : : Δ : Ε. Ο῾ τοίνυν λόγος Γ : Ε ἐςὶν ὁ παραγόμενος διὰ πολλαπλασιασμȣ͂ τῶν λόγων Α : Β ϗ Γ : Δ.

Η῾ μὲν οὖν Πρᾶξις τȣ͂ παρὰ τȣ͂ ἁγίȣ Βικεντίȣ ἐπίκλην Γρηγορίȣ ἐςὶν ἐν Η'. Βιβλ. Προτ. ΟΕ'., ȣ̓̓θ' ὑπ' αὐτȣ͂ μέντοιγε, ȣ̓̓θ' ὑφ' ἑτέρȣ τινὸς δεδειγμένη, ἣν αὐτὸς ȣ̓̓τω δείκνυμι.

Ο῾ λόγος Γ : Ε παράγεται πολλαπλασιασμῷ τῶν λόγων Γ : Δ, καὶ Δ : Ε, ὡς δῆλον ἐκ τῆς ἀποδείξεως τȣ͂ §. ΙΒ'. τῆς ἐντεῦθεν μηδαμῶς ἠρτημένης. Α'λλ' οἱ λόγοι Γ : Δ ϗ Δ : Ε, ἐκ κατασκευῆς, οἱ αὐτοί εἰσι τοῖς Γ : Δ καὶ Α : Β, ἄρα ὁ λόγος Γ : Ε, ἐςὶν ἡλίκος ὁ ἐκ πολλαπλασιασμȣ͂ τῶν λόγων Α : Β ϗ Γ : Δ ἀναθορῶν. Ο. Ε. Δ.

§. Θ΄.

Ἡ τῶν ἀλόγων λόγων Διαίρεσις.

Κείσθω λόγος ὁ Γ : Ε διαιρετέος διὰ τȣ̃ λόγȣ Α : Β, καὶ δὴ γινέσθω Α : Β : : Γ : Δ. Ὁ γȣ̃ν λόγος Δ : Ε τὸ Πηλίκον ἐςί.

Ὁ γάρ τοι λόγος Γ : Δ (τȣτέςιν ἐκ κατασκευῆς ὁ Α : Β) πολλαπλασιασθεὶς διὰ τȣ̃ λόγȣ Δ : Ε, παράγει τὸν λόγον Γ : Ε, ὡς δῆλον ἐκ τῆς ἀποδείξεως τῆς ἐν §. ΙΒ΄. τῆς ἐντεῦθεν μηδαμῶς ἠρτημένης, ὁ ἄρα λόγος Δ : Ε ἐςὶ τὸ Πηλίκον, πολλαπλασιασθὲν γὰρ ἐπὶ τῷ διαιρέτῃ, ὅς ἐςιν ὁ λόγος Α : Β, ἀποκαθίςησι τὸν λόγον Γ : Ε, ὅςτις ἦν ὁ διαιρετέος.

§. Ι΄.

Περὶ Συνθέσεως τῶν λόγων, ϗ ταύτης Ὁρισμός.

Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅτε τῶν κατὰ τȣ̀ς λόγȣς πηλικοτήτων (ἤτοι τῶν Παρονομαςῶν) ἐπ᾽ ἀλλήλαις πολλαπλασιαζομένων, λόγον τινὰ συνιςῶσιν· ἔςι δὲ παρ᾽ Εὐκλείδῃ ὁ Ε΄. τῶν τȣ̃ ϛ΄. Βιβλ. Ὁρισμῶν.

Κείσθωσαν λόγοι ὁποσοιȣ̃ν, ϗ τȣ́των Παρονομαςαὶ 2, 3, $1\frac{1}{4}$. Πολλαπλασιαζέσθωσαν δὲ ἐπ᾽ ἀλλήλοις οἱ Παρονομαςαὶ 2 ϗ 3, τό,τε παραγόμενον 6, Παρονομαςὴς τȣ̃ λόγȣ ἔςαι, τȣ̃ συγκειμένȣ ἐκ τῶν ἁπλȣςέρων λόγων, ὧν Παρονομαςαὶ οἱ ἐπ᾽ ἀλλήλοις πολλαπλασιασθέντες. Ἀμέλειτοι ὁ λόγος 6 : 1 σύνθετός ἐςιν ἐκ τῶν λόγων 6 : 3 ϗ 12 : 4· ὡς εἴγε ϗ τὸν Παρονομαςὴν 6 πολλαπλασιάσαις περαιτέρω, καὶ διὰ τȣ̃ τρίτȣ τῶν ἐκτεθέντων ἁπλȣςέρων Παρονομαςῶν, οἷον διὰ $1\frac{1}{4}$, ἀνακύψει δὴ ὁ $7\frac{1}{2}$ Παρονομαςὴς τȣ̃ λόγȣ τȣ̃ συνθέτȣ ἐκ τῶν τριῶν δοθέντων λόγων, ὧν Παρονομαςαὶ ἦσαν 2, 3, $1\frac{1}{4}$.

§. ΙΑ΄.

Ἡ τῶν λόγων σύνθεσις πολλαπλασιασμὸς τῶν αὐτῶν ἄντικρυς ἐςί· ϗ πᾶς δὲ λόγος ἐκ τῶν αὐτῶν ἐκείνων λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ἐξ ὧνπερ διὰ πολλαπλασιασμȣ̃ παράγεται.

Ὡς γὰρ ἐκ τȣ̃ Ἀξιωμ. τȣ̃ Δ΄. ϗ §. Ζ΄. δῆλον ἐςὶ, λόγος ἐκ λόγων πλειόνων πολλαπλασιασμῷ παραγόμενος ἐςὶν, ὃν τὸ ἐκ τῶν Παρονομαςῶν τῶν ἀλλήλοις ἐπιπολλαπλασιαζομένων γινόμενον, ἔχει πρὸς τὴν μονάδα, ἤτοι πρὸς τὸ κοινῇ ἑπόμενον· ἀλλὰ καὶ κατά γε τὸν παρ' Εὐκλείδῃ ὁρισμὸν, λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὃν τὸ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν Παρονομαστῶν γινόμενον ἔχει πρὸς τὴν μονάδα, ἤτοι πρὸς τὸ κοινῇ ἑπόμενον. Ὁ ἄρα λόγος ἐκ τῶν αὐτῶν συντίθεται, ἐξ ὧν καὶ διὰ πολλαπλασιασμοῦ παράγεται.

Σχόλιον.

Πρὸς ῥᾳοτέραν τῆς ἐφεξῆς ἀποδείξεως σύνεσιν παρατηρητέον, ὡς τὰ Μεγέθη ἐπιδέχεται τὸν ἐπ' ἀλλήλοις πολλαπλασιασμὸν, καὶ τὴν δι' ἀλλήλων διαίρεσιν κατά τινα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς ἀναλογίαν. Καθάπερ γὰρ ἀριθμὸς δι' ἀριθμοῦ πολλαπλασιάζεσθαι λέγεται, ὅταν ὡς ἡ μονὰς ἔχει πρὸς τὸν ἕτερον, οὕτως ὁ λοιπὸς πρὸς τρίτον ἀριθμὸν, ὃς τὸ παραγόμενον εἶναι λέγεται, οὕτω δὴ καὶ Μέγεθος διὰ Μεγέθους πολλαπλασιάζεσθαι λέγεται, ὅταν ὡς ὁποιαδήποτε Εὐθεῖα ἀντὶ μονάδος ληφθεῖσα πρὸς τὴν ἑτέραν τῶν δοθεισῶν ἔχει, οὕτως ἡ ἑτέρα πρὸς ἄλλην τινὰ τετάρτην, ἥτις καὶ αὐτὴ τὸ παραγόμενον εἶναι ἀκούεται. Παραπλησίως δὲ, ὥσπερ ἀριθμὸς δι' ἀριθμοῦ διαιρεῖσθαι λέγεται, ὅταν ὡς θάτερος ἔχει πρὸς θάτερον, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τρίτον, ὃς τὸ Πηλικον καλεῖται, οὕτω τοι καὶ Μέγεθος διὰ Μεγέθους διαιρεῖσθαι ῥηθήσεται, ὅταν ληφθείσης τινὸς πηλικότητος ἀντὶ μονάδος, ὡς θάτερον ἔχει πρὸς θάτερον, οὕτω τοι ἡ μονὰς πρός τι ἄλλο, ὃ δὴ Πηλίκον ὁμοίως κληθήσεται.

§ ΙΒ΄.

Ἐὰν ὦσιν ὁποιοιδηποτοῦν καὶ ὁσοιδηποτοῦν ἤτοι ἀριθμοὶ, ἢ Μεγέθη, ὁ τοῦ Α΄. λόγος πρὸς τὸν ἔσχατον, συγκείμενός ἐστιν ἐκ τῶν λόγων τῶν μεταξύ.

Ἐν μὲν ἀριθμοῖς Θέωνί τε καὶ Εὐτοκίῳ καὶ τῷ Οὐιτελλίωνι ἀποδέδεικται, ἐπὶ δὲ τῶν Μεγεθῶν ὅς τις οὐδεὶς ὁ εἰς τόδε κατασκευάσας τὸ προτεθέν. Ταύτῃ τοι καὶ ὁ ῥηθεὶς ἀνωτέρω Γρηγόριος Γεωμετρῶν τὰ πρῶτα γενόμενος, ἐν τῷ Η΄. Βιβλ. ἐν ἀρχ. Β΄., ταῖς ἀρχαῖς ὑπείληφε δεῖν τὸ τοιοῦτο συγκαταλέγεσθαι, εἰς ὅ τις ἀποδείξει αὐτὸ κρατύνας, τοῖς Θεωρήμασιν ἐναρίθμιον τάξειε.

Αὐτοὶ γοῦν τὴν ἐν γένει τοῦ τοιοῦδε ἀπόδειξιν παρασχεῖν ὧδε ἐπιχειροῦμεν.

Δείκνυται ἐν τοῖς Μεγέθεσι.

Κείσθω Μεγέθη ὁποιαοῦν καὶ ὁποσαοῦν τὰ Α, Β, Γ, Δ· δεικτέον τὸν Α : Δ λόγον συγκείμενον εἶναι ἐκ τῶν λόγων Α : Β, καὶ Β : Γ, καὶ Γ : Δ.

Γινέσθω ὡς Β : Γ, οὕτω Χ : Β, καὶ ἔσονται οἱ λόγοι Α : Β καὶ Β : Γ ἐπὶ τοὺς λόγους ἀνηγμένοι Α : Β καὶ Χ : Β, τοὺς ἔχοντας ἑπόμενον τὸ αὐτὸ τὸ Β. Ἐνθεντοι καὶ τῶν τοιῶνδε λόγων Παρονομασαὶ ἔσονται Α καὶ Χ, τὸ δὲ ἑπόμενον Β (1) ἔργον πληρώσει μονάδος, ἣ δὴ πρὸς πάντας τοὺς ἀριθμητικοὺς Παρονομασὰς κοινόντι τίθεται εἶναι ἑπόμενον.

Βουληθέντας τοίνυν τὰ μεγέθη Α καὶ Χ δι' ἀλλήλων πολλαπλασιάσαι, λαβεῖν δεῖ (2) ὡς Β ἡ μονάς ἐστι πρὸς Χ, οὕτως Α πρὸς ἄλλοτι τὸ Ζ, ὃ δὴ τὸ παραγόμενον ἔσαι πολλαπλασιασμῷ τῷ τοῦ Α διὰ τοῦ Χ, ἢ (ὃ ταυτόν ἐστι) τῷ τοῦ Χ διὰ τοῦ Α. Οἷον εἰ καὶ ἀριθμοὺς ἐπ' ἀλλήλοις πολλαπλασιάσαι θελήσαις τοὺς Ρ, Σ, σχοίης ἂν τὴν μονάδα πρὸς τὸν ἕτερον τὸν Σ, ὡς τὸν ἕτερον Ρ πρὸς τὸ ἀπ' ἐντεῦθεν διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ παραγόμενον, φέρε τὸ Υ.

Ἐπεὶ γοῦν τὸ Ζ, τὸ παρηγμένον εἶναι ἐτέθη πολλαπλασιασμῷ τῷ τῶν Παρονομασῶν Α καὶ Χ, ἔσαι δὴ ὁ λόγος (3) τοῦδε τοῦ γενομένου Ζ πρὸς τὴν μονάδα Β, ὃ τὸ κοινὸν εἶναι ἑπόμενον εἴρηται, ἡλίκος ὁ πολλαπλασιασμῷ τῶν λόγων Α : Β καὶ Χ : Β γινόμενος, ὡς κἀν τῇ τῶν Ἀριθμητικῶν λόγων πολλαπλασιάσει ἐν §. Ζ' συμβαίνειν δέδεικται, καθ' ἣν ἐὰν οἱ Παρονομασαὶ ἐπ' ἀλλήλοις πολλαπλασιασθῶσιν, ὁ τοῦ παραγομένου λόγος πρὸς τὴν μονάδα, ἡλίκος ὁ ἐκ τοῦ τῶν λόγων πολλαπλασιασμοῦ τυγχάνει γε ὤν.

Ἀλλαμὴν ἐκ κατασκ. ὁ λόγος Χ : Β, αὐτόχρημα ἐστὶν ὁ Β : Γ, ἄρα καὶ ὁ λόγος Ζ : Β παράγεται πολλαπλασιασμῷ τῶν λόγων Α : Β καὶ Β : Γ· Ἐπεὶ δέτοι ἐκ κατασκ. ὡς Β : Χ, οὕτως ἐστὶ καὶ Α : Ζ, καὶ ἀνάπαλιν Ζ : Α : : Χ : Β, τουτέστιν ἐκ κατασκ. ὡς Β : Γ· τοιγαροῦν καὶ ἐναλλὰξ Ζ : Β : : Α : Γ· Δέδεικται δὲ ὅτι Ζ : Β παράγεται πολλαπλασιασμῷ τῶν λόγων Α : Β καὶ Β : Γ, ἄρα καὶ ὁ λόγος Α : Γ παράγεται πολλαπλασιασμῷ τῶν λόγων Α : Β καὶ Β : Γ. Ἀλλὰ γὰρ ἐν §. ΙΑ'. ἐδείχθη τὸν λόγον συγκείμενον εἶναι ἐκ τῶν αὐτῶν λόγων, ἐξ ὧν καὶ πολλαπλασιασμῷ παράγεται. Ὁ ἄρα λόγος Α : Γ σύνθετος ὢν τυγχάνει ἐκ τῶν λόγων Α : Β καὶ Β : Γ.

Τὸν αὐτὸν δήπου τρόπον δειχθήσεται, ὅτι καὶ ὁ λόγος Α : Δ σύνθετός ἐστιν ἐκ τῶν λόγων Α : Γ καὶ Γ : Δ· Ὁ ἄρα λόγος Α : Δ σύνθετος ὢν τυγχάνει ἐκ τῶν λόγων Α : Β, καὶ Β : Γ, καὶ Γ : Δ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς ἐς ἄπειρον. Ο. Ε. Δ.

---

(1) §. Γ'. (2) Σχόλ. τὸ ἀνωτ. (3) §. Ι. Ὅρ.

Δείκνυται κἀπὶ τῶν ἀριθμῶν.

Τὴν αὐτὴν πάντη δεῖξιν χῶραν ἔχειν κἀπὶ τῶν Ἀριθμῶν ἤδη δείξω, ὅθεν δὴ κἀκείνης τὸ ἀληθὲς ϗ ἑδραῖον μᾶλλον ἀναφανήσεται. 8 2 $\frac{8}{3}$ — 4 1 $\frac{4}{3}$ — 3 $\frac{3}{4}$ 1

Κείσθωσαν ἀριθμοὶ ὁποιοιδηποτȣ̃ν τρεῖς 8, 4, 3, ϗ γινέσθω 4 : 8 : : 3 1 : 2, καὶ 4 : 3 : : 1 : $\frac{3}{4}$· καὶ δῆτα ἔσονται οἱ λόγοι 8 : 4 ϗ 2 : 1, καὶ δὴ ϗ οἱ 4 : 3 ϗ 1 : $\frac{3}{4}$, ἀλλήλοις ἴσοι· καὶ δι' ἴσȣ δὲ (1) 8 : 3 : : 2 : $\frac{3}{4}$.

Εἶτα γινέσθω ὡς $\frac{3}{4}$: 1 : : 1 : $\frac{4}{3}$· καὶ ἔσονται οἱ λόγοι 2 : 1 ϗ 1 : $\frac{3}{4}$ (τȣτέςιν οἱ λόγοι 8 : 4 ϗ 4 : 3) ἀναγόμενοι ἐπὶ τȣ̀ς δύω λόγȣς 2 : 1 ϗ $\frac{4}{3}$: 1, κοινὸν ἔχοντας ἑπόμενον τὴν μονάδα· ἔνθεντοι 2 ϗ $\frac{4}{3}$ ἔσονται (2) τῶν λόγων 8 : 4 ϗ 4 : 3 Παρονομαςαί. Πεπολλαπλασιάσθωσαν οὖν δι' ἀλλήλων οἱ Παρονομαςαὶ 2 ϗ $\frac{4}{3}$, γινέσθω δηλονότι 1 : $\frac{4}{3}$: : 2 : $\frac{8}{3}$, καὶ ἔςαι $\frac{8}{3}$ τὸ παραγόμενον ἐκ 2 ϗ $\frac{4}{3}$, οἳ παρονομαςαί εἰσι τῶν λόγων 8 : 4 ϗ 4 : 3 ἐπ' ἀλλήλοις πολλαπλασιασθέντων. Ὁ ἄρα λόγος τȣ̃δε τȣ̃ παραγομένȣ $\frac{8}{3}$ πρὸς 1, ἡλίκος ἐςὶν (3) ὁ παραγόμενος ἐκ τȣ̃ πολλαπλασιασμȣ̃ τῶν λόγων 8 : 4 ϗ 4 : 3· ἀλλὰ γὰρ ἐπεὶ ἐκ τῆς κατασκ. 1 : $\frac{4}{3}$ = 2 : $\frac{8}{3}$, ἔςαι ϗ ἀνάπαλιν $\frac{8}{3}$: 2 = $\frac{4}{3}$: 1· πάλιν δὲ ἐκ τῆς κατασκ. $\frac{4}{3}$: 1 = 1 : $\frac{3}{4}$, ἄρα $\frac{8}{3}$: 2 = 1 : $\frac{3}{4}$, καὶ δὴ ϗ ἐναλλὰξ $\frac{8}{3}$: 1 = 2 : $\frac{3}{4}$. Ἐδείχθη δὲ ὡς ὁ λόγος $\frac{8}{3}$: 1 ἐςὶν ὁ παραγόμενος ἐκ τȣ̃ πολλαπλασιασμȣ̃ τῶν λόγων 8 : 4 ϗ 4 : 3, ἄρα ϗ ὁ λόγος 2 : $\frac{3}{4}$ ἐςὶν ὁ παραγόμενος ἐκ τȣ̃ πολλαπλασιασμȣ̃ τῶν λόγων 8 : 4 ϗ 4 : 3· δέδεικται δὲ ἀνωτέρω τὸν λόγον 2 : $\frac{3}{4}$ ἴσον εἶναι τῷ λόγῳ 8 : 3, ἄρα ϗ ὁ λόγος 8 : 3 παράγεται ϗ αὐτὸς ἐκ τȣ̃ πολλαπλασιασμȣ̃ τῶν λόγων 8 : 4 ϗ 4 : 3. Καὶ τοίνυν διὰ τὰ ἐν §. ΙΑ'., ὁ λόγος 8 : 3 ἐκ τῶν λόγων 8 : 4 ϗ 4 : 3 συγκείμενος ἐςίν. Ο. Ε. Δ.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται, ϗ πλειόνων ἢ τρεῖς προκειμένων ἀριθμῶν, τὸν λόγον 8 : 25 συγκείμενον εἶναι ἐκ τῶν λόγων 8 : 3 (οὗτος γάρ ἐςιν ἐκ τῶν 8 : 4 ϗ 4 : 3) ϗ 3 : 25· τόν τε λόγον 8 : 73 συγκεῖσθαι ἐκ τῶν λόγων 8 : 25 (οὗτος γάρ ἐςιν ἐκ τῶν 8 : 4, ϗ 4 : 3, ϗ 3 : 25) ϗ 25 πρὸς 73, καὶ ȣ̃τως εἰς ἄπειρον. 8 3 25 73

(1) ΚΒ. τȣ̃ ε'. (2) §. Β'. (3) §. Ζ'.

§. ΙΓ΄.

Ὁποσωνοῦν λόγων δοθέντων Α : Β, καὶ Γ : Δ, καὶ Ε : Ζ, λόγον παραχεῖν τὸν ἐξ ἁπάντων συγκείμενον.

Ἐὰν γένηται ὡς Α : Β, οὕτως ὅ,τι τύχοι Η : Θ· καὶ ὡς Γ : Δ, οὕτω Θ : Ι· καὶ ὡς Ε : Ζ, οὕτω Ι : Κ, ὁ λόγος Η : Κ συγκείμενος ἔσαι ἐκ τῶν λόγων Η : Θ, καὶ Θ : Ι, καὶ Ι : Κ, ὡς ἐν §. ἀνωτ. ἀποδέδεικται· ἀμέλειτοι διὰ τὴν κατασκ. ἐκ τῶν δοθέντων λόγων Α : Β, Γ : Δ, Ε : Ζ.

§. ΙΔ΄.

Ὁ λόγος οὐκ ἔσιν ἴσος τοῖς λόγοις ἐξ ὧνπερ συντίθεται.

Δυεῖν μεταξὺ πηλικοτήτων Η, Κ πηλικότητες ἄλλαι παρεμβεβλήσθωσαν, εἴτε συνεχῶς ἀνάλογοι αὗται εἶεν, εἴτε καὶ μή. Ὁ γοῦν λόγος τῆς πρώτης Η πρὸς τὴν ἐσχάτην Κ οὐκ ἔσιν ἴσος τοῖς λόγοις τοῖς μεταξὺ Η : Θ, Θ : Ι, Ι : Κ, καίτοι ἐξ αὐτῶν δὴ τούτων συγκείμενος.

Τὸ γὰρ ἐξ αὐτῶν συγκεῖσθαι οὐδὲν ἕτερον σημαίνει, ἢ τὸ ἐξ ἐκείνων ἐπαλλήλοις τοῖς πολλαπλασιασμοῖς παράγεσθαι, ὡς δέδεικται ἐν §. ΙΑ΄. Ἐπεὶ οὖν ὁ λόγος Η : Κ, ἐκ τῶν λόγων Η : Θ, καὶ Θ : Ι, καὶ Ι : Κ παρῆκται ἐπαλλήλως πολλαπλασιασθέντων, ὡς ἐκ τῆς ἀποδείξεως τῆς ἐν §. ΙΒ΄. δῆλον, ἀδύνατον τοὺς λόγους Η : Θ, Θ : Ι, Ι : Κ, ἴσους τυγχάνειν ἅμα ληφθέντας τῷ λόγῳ Η : Κ, εἰ μήπου κατὰ συμβεβηκὸς, ἥτε τῶν λόγων πρόσθεσις καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς τὸν αὐτὸν λόγον συςήσειαν. Ἐφ᾽ ᾧ δὲ τοῖς εἰρημένοις λόγοις λόγον ἴσον λαβεῖν, δέον αὐτοὺς προςιθέναι, ὡς εἴρηται ἐν §. Ε΄. καὶ ς΄., ἐκ γὰρ τῆς τοιαύτης προσθέσεως, λόγος ἀνακύψει ἴσος τοῖς δοθεῖσιν ἅπασιν. Ὁ δήπου λόγος, ἧπερ ἔφην, ἀεὶ διοίσει τοῦ κατὰ σύνθεσιν, εἴτουν πολλαπλασιασμὸν ἀνακύπτοντος.

Τῶν στοιχείων τῆς Γεωμετρίας.

ΒΙΒΛΙΌΝ ϛ΄.

Ἡ ἐν τῷ ἀνωτέρῳ Ε΄. Βιβλίῳ ἐν γένει ἐκτεθεῖσα τῶν ἀναλογιῶν διδασκαλία, ἐπὶ τοῦ ἐν χερσὶν ϛ΄. τοῖς ἐπιπέδοις τῶν Σχημάτων προσεφαρμόζεται. Ἔστι δὲ οὕτως ἀναγκαία ἡ τῶν ἐνταῦθα παραδιδομένων γνῶσις, ὡς τούτων ἄνευ ἐς τὰ ἄδυτα τῆς Γεωμετρίας χωρεῖν, ϗ τοὺς ἀπὸ τῶν μαθημάτων ἡδίστους καρποὺς δρέπεσθαι, μὴ ἐξεῖναι. Ἑκάστης οὖν τῶν Προτάσεων ἰδίᾳ ἔδει ἐξυφαίνειν ἐγκώμιον, τοσαύτη ἡ ἐξ ἁπασῶν ἀποφερομένη ὠφέλεια.

Ἐπιχειρεῖ δὲ τουτὶ τὸ ϛ΄. Βιβλ. τὴν καλλίστην περὶ τῆς Γεωμετρικῆς ἀναλογίας διδασκαλίαν, τὴν προσφάτως ἐκτεθεῖσαν, παντοίαις τε ϗ πάντη ἐπιστημωτάταις προσάπτειν ταῖς χρήσεσιν, ἀπό τε τῶν ἐν σχήμασιν ἁπλουστάτων Τριγώνων τὴν καταρχὴν ποιούμενον, τάς τε ἐν αὐτοῖς πλευρὰς καὶ τὰ χωρία, ὅπως ἔχουσιν ἀναλογίας πρὸς ἄλληλα ἐξετάζει· εἶτα ϗ τῶν Γραμμῶν τὰς ἀναλόγους, ϗ τὰς τῶν Σχημάτων αὐξήσεις τε ϗ μειώσεις, τὰς κατ᾽ ἰσότητα λόγων ὁρίζεται, ϗ ὅτῳ δήποτε τρόπῳ ἐκεῖνα αὔξειν ἔνι, ἢ μειοῦν κατὰ λόγον τὸν δοθέντα κατασκευάζει· ἔτι τε μὴν ϗ τὴν Ἀναλογικὴν μέθοδον, ἥτις Χρυσῆ γεραίρεται, ϗ ἧς δι᾽ ὅλης τῆς Ἀριθμητικῆς πυκνοτάτη ἡ χρῆσις, ἐκτίθησί τε ϗ ἀναπτύσσει· κἀπὶ τοῦ ὀρθογωνίου Τριγώνου, οὐχ ὅπως τὸ Τετράγωνον, ἀλλὰ δὴ ϗ τὸ Πεντάγωνον ϗ τὸ Ἑξάγωνον, καὶ ἁπλῶς τῶν Πολυγώνων ὁποιονοῦν, τὰ ἀπὸ τῆς Ὑποτεινούσης, τοῖς δυσὶν οὐχ ὅπως Τετραγώνοις, ἀλλὰ ϗ Πενταγώνοις ϗ Ἑξαγώνοις, ϗ ἁπλῶς τῶν Πολυγώνων ὁποιοισοῦν τοῖς ὁμοίοις, ϗ ἀπὸ τῶν δύω Πλευρῶν τῶν τὴν Ὀρθὴν περιεχουσῶν Γωνίαν συνισταμένοις ἅμα ληφθεῖσι συνεξισοῦσθαι ἀποδείκνυσι· τελευταῖον δὲ ῥάστας τινὰς ϗ ἀσφαλεστάτας προτίθησι τὰς ἀρχὰς, αἷς ἂν δι᾽ ἁπάσης Μαθηματικῆς ἐπιστήμης ἐξείη τῶν τε Γραμμῶν, ϗ τῶν Ἐπιφανειῶν, ϗ τῶν στερεῶν Σωμάτων λαμβάνειν τὴν καταμέτρησιν.

Ὁρισμοί.

Ὅμοια Σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, ὅσα τάς τε Γωνίας ἴσας ἔχει κα- Α΄.

τὰ μίαν, ϗ τὰς περὶ τὰς ἴσας Γωνίας Πλευρὰς ἀνάλογον, ἤ (ὃ ταυτόν ἐςι) τὰς μεταξὺ τῶν ἴσων, ἢ ϗ τὰς Ὑποτεινȣ́σας τὰς ἴσας.

σχ. 322. Οἷον τὰ Τρίγωνα χ, ψ ὅμοια εἰρήσεται, ἐὰν ἡ Γωνία α ἴση ᾖ τῇ Γωνίᾳ ζ, ϗ ἡ β τῇ ι, ϗ ἡ γ τῇ λ· καὶ μὴν ϗ ἐὰν ᾖ αβ : ζι :: βγ : λι, ϗ βγ : λι :: γα : λζ, ϗ γα : λζ :: αβ : ζι, ἢ γȣ̃ν ϗ ἐναλλὰξ (1) ἐὰν ᾖ αβ : βγ :: ζι : λι, ϗ βγ : γα :: ιλ : λζ, ϗ γα : αβ :: λζ : ζι· γινομένης ἀεὶ τῆς παραθέσεως μεταξὺ τῶν Πλευρῶν τῶν περὶ τὰς ἴσας Γωνίας, ἢ (ὃ ταυτόν ἐςι) τῶν μεταξὺ τῶν ἴσων, ἢ τῶν τὰς ἴσας ὑποτεινȣσῶν.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ϗ ἡ τῶν λοιπῶν εὐθυγράμμων Σχημάτων ἁπάντων ὁμοιότης ἀναπτυχθήσεται.

Β΄. Ἀντιπεπονθότα δὲ Σχήματα ἐςὶν, ὅταν ἑκατέρῳ τῶν Σχημάτων ἡγȣ́μενοί τε ϗ ἑπόμενοι ὅροι (ἀντιςρόφως) ὦσι.

σχ. 323. Οἷον ἐπὶ τῶν Παραλληλογράμμων χ ϗ ψ, ἐὰν ᾖ αγ : γβ :: ζγ : γλ.

Ἡγȣ́μενοι τοίνυν εἰσὶν ὅροι αγ ϗ ζγ, ὧν ἐν ἑτέρῳ τῶν Σχημάτων ἕτερος, ὁ μὲν αγ ἐν τῷ χ, ὁ δὲ ζγ ἐν τῷ ψ· ἑπόμενοι δὲ οἱ γβ ϗ γλ, ὧν ὁμοίως ἐν τῷ ἑτέρῳ τῶν Σχημάτων ὁ ἕτερος, ἀλλ᾽ ἀντιςραφείσης τῆς τάξεως, ὁ μὲν γὰρ γβ ἐν τῷ ψ, ὁ δὲ γλ ἐν τῷ χ· ἐντεῦθεν γὰρ ϗ τὰ Παραλληλόγραμμα χ, ψ ἀντιπεπονθότα ἤκȣστε. Τὸ δ᾽ αὐτόμοι νόει ϗ περὶ τῶν ἄλλων Σχημάτων.

Πηλικότητες δὲ τέσσαρες πρὸς ἀναλογίαν ἀντιπεπόνθασι, τῆς Α΄. πρὸς τὴν Γ΄., ὃν ἡ Δ΄. πρὸς τὴν Β΄. λόγον ἐχȣ́σης, ἢ τῆς Α΄. πρὸς τὴν Δ΄., ὃν ἡ Γ΄. πρὸς τὴν Β΄. Οἷον ἐὰν ᾖ Α : Γ :: Δ : Β, ἢ γȣ̃ν Α : Δ :: Γ : Β, ἔσονται αἱ Α, Β, Γ, Δ ἀντιπεπονθεῖαι ἀνάλογον.

σχ. 324. Γ΄. Ὕψος ἐπὶ παντὸς Σχήματος ἐςὶν ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ τὴν βάσιν Κάθετος ἀγομένη ΑΠ· ἔςι δὲ παρ᾽ Εὐκλείδῃ ὅρος δ΄.

Οἷον τȣ̃ Τριγώνȣ ΑΒΓ ὕψος ἐςὶν ἡ Κάθετος ΑΠ, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἀγομένη ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΓ, ἤτοι ἐντὸς τȣ̃ Τριγώνȣ, ἢ ϗ ἐκτὸς ἣν δέοι προαχθεῖσαν· Ἡ δὲ δὴ Βάσις ϗ ἡ κορυφὴ κατὰ τὸ δοκȣ̃ν μεταλαμβάνονται.

Δ΄. Τόξα ὅμοια Κύκλων λέγεται, τὰ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον πρὸς τὰς ὅλας Περιφερείας.

Οἷον ἐὰν ἑκάτερον ᾖ τῆς ἰδίας Περιφερείας τριτημόριον, ἢ τεταρτημόριον, κξ.

Καὶ Τμήματα δὲ Κύκλων ὅμοιά ἐςιν, οἷς Τόξα ὅμοια ἐςί. Τὸ δ᾽ αὐτό μοι νοείσθω ϗ περὶ τῶν ὁμοίων Τομέων.

---

(1) Ις. τȣ̃ ε΄.

Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν οἱ τούτων Ἐκθέται ἐπ' ἀλλήλοις πολλαπλασιασθέντες, τὸν ἐκείνου Ἐκθέτην παράγωσι· τὸ δὲ τοῦ λόγου Ἐκθέτην λαμβάνειν, ἐστὶ διαιροῦντας διὰ τοῦ ἑπομένου τὸ ἡγούμενον. Ε'.

Οὕτως ἐκ τῶν λόγων $\alpha:\beta$ καὶ $\varrho:\sigma$, σύγκειται ὁ λόγος $\alpha\times\varrho$ πρὸς $\beta\times\sigma$, καὶ γὰρ $\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\varrho}{\sigma}=\frac{\alpha\times\varrho}{\beta\times\sigma}$· ἢ ἐὰν γένηται $\varrho:\sigma=\beta:\gamma$, ἐκ τῶν λόγων $\alpha:\beta$ καὶ $\varrho:\sigma$, σύγκειται ὁ λόγος $\alpha:\gamma$· Τηνικαῦτα γὰρ $\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\varrho}{\sigma}=(1)\ \frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha\times\beta}{\beta\times\gamma}=(2)\ \frac{\alpha}{\gamma}$.

Οὕτωτοι καὶ τὸ διπλοῦν τοῦ τριπλοῦ ἑξαπλοῦν ἐστίν· οὐκ ἄλλως δὲ καὶ ὁ λόγος 4 : 3 σύγκειται ἐκ τῶν λόγων 4 πρὸς ὁντιναοῦν ἀριθμὸν (οἷον πρὸς 7), καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ (φέρε τοῦ 7) πρὸς 3, καὶ γὰρ $\frac{4}{7}\times\frac{7}{3}=\frac{4}{3}$.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δῆλον, καὶ ὅτι λόγος ὁποιοσοῦν ἐκ πλειόνων λόγων συγκεῖσθαι δύναται· οὕτως ὁ λόγος $\alpha:\varepsilon$ συγκεῖσθαι δύναται ἐκ τῶν λόγων $\alpha:\beta$, καὶ $\beta:\gamma$, καὶ $\gamma:\delta$, καὶ $\delta:\varepsilon$.

Πρότασις Α.

„Τὰ Τρίγωνα (αβγ, δεζ), καὶ τὰ Παραλληλόγραμμα (αξφγ, δπρζ) „τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, τουτέστι τὰ ἐν ταῖς αὐταῖς ὄντα παραλλήλοις, „πρὸς ἄλληλα ἐστὶν ὡς αἱ Βάσεις (αγ, δζ).

Ἐκ τοῦδε ὅλον τὸ ϛ'. Βιβλ. ἐξῆπται τοῦ Θεωρήματος, καὶ εἴτι ἁπλῶς ἐπὶ Σχημάτων εἴτε ἐπιπέδων, εἴτε καὶ στερεῶν, διὰ τῆς ἀναλογίας φέρεται ἀποδεδειγμένον· Ὁ μὲν οὖν Εὐκλείδης διὰ τῶν πολλαπλασίων τὸ προτεθὲν ἀποδείκνυσιν, ἐξ ὧν πολλὴ ἐκ πρώτης τοῦ Βιβλίου ἀφετηρίας τοῖς πρωτοπείροις συμβαίνει δυσχέρεια· καὶ τοίνυν ἄλλην ἡμῖν ἀποδοτέον δεῖξιν εὐχερεστέραν, ἐκ τοῦ Ε'. λαβοῦσι ταύτην Θεωρήματος τοῦ Β'. μέρους τοῦ Ε'. Βιβλίου, ἢ γοῦν ἐκ τοῦ ἑτέρου ἐκείνου τῶν ἴσων λόγων τεκμηρίου τοῦ πρώτουτε καὶ ἀπταίστου, ὃ μεταξὺ τῶν ὅρων τοῦ Ε'., πρὸ τοῦ Ζ'. δηλ. Ὁρισμοῦ, παρετέθη, ὧδε. κ. 325.

Ληφθήτω δὴ τῆς Βάσεως δζ μόριον ἡλικονοῦν, οἷον τὸ δη τεταρτημόριον, καὶ ἀχθήτω εη, καὶ ἔσται τὸ δεη τεταρτημόριον τοῦ Τριγώνου δεζ. (3). Διόπερ ἥτε δη Εὐθεῖα, καὶ τὸ δεη Τρίγωνον εἰσὶ τῶν ἑπομένων ὅμοια μόρια (4). Ἀφαιρεθήτω τοίνυν δη ἀπὸ τῆς Βάσεως αγ, ὁσάκις ἂν ἐξῇ, οἷον ὀκτάκις· καὶ ἐπειδὴ αἱ γθ, θι, ικ, καὶ αἱ λοιπαὶ ἴσαι εἰσὶ τῇ δη ἑκάστη, ἔσται δὴ καὶ τὰ

(1) ΛΔ. τοῦ ε'. (2) ΙΕ. τοῦ ε'. (3) ΔΗ. Βιβλ. α'. (4) Ὁρ. Ζ. τοῦ ε'.

ὀκτὼ Τρίγωνα γβθ, θβι, ιβκ ϗ τὰ λοιπὰ, τῷ Τριγώνῳ δεη ἴσα ἕκαστον (1)· καὶ ὁσάκις ἄρα ἡ δη περιέχεται ἐν τῷ ἡγεμένῳ αγ, τοσάκις τὸ Τρίγωνον δεη περιέχεται ἐν τῷ ἡγεμένῳ αβγ· Τῷ αὐτῷ δὲ λόγῳ δείξω, καὶ ἡλικασοῦν τῶν ἑπομένων (τῆς τε Βάσεως φημὶ δζ, ϗ τοῦ Τριγώνου δεζ) ὁμοίας μερίδας, ἐν τοῖς ἡγεμένοις (λέγω τῇ Βάσει αγ, ϗ τῷ Τριγώνῳ αβγ) ἰσαρίθμως ἀεὶ περιέχεσθαι· Ἄρα διὰ τὸ Ε΄. Θεώρ. τοῦ Β΄. μέρους τοῦ Ε΄. Βιβλίου, τουτέστι διὰ τὸ ἕτερον ἐκεῖνο τῶν ἴσων λόγων τεκμήριον, ὡς Βάσις αγ πρὸς Βάσιν δζ, οὕτω ϗ Τρίγωνον τὸ αβγ πρὸς Τρίγωνον ἐστὶ τὸ δεζ. Ο. Ε. Δ.

Ἐπεὶ δὲ τὰ Παραλληλόγραμμα αφ ϗ δρ διπλασίονα ἐστὶ (2) τῶν Τριγώνων αβγ, δεζ, ἔσαι δὴ ϗ αὐτὰ πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ Βάσεις.

Πορίσματα.

κ. 326. Α. Τὰ Τρίγωνα (αβγ, ζιλ) ϗ τὰ Παραλληλόγραμμα, τὰ ἴσας ἔχοντα τὰς Βάσεις αγ, ζλ, ἢ τὴν αὐτὴν, εἰσὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ ὕψη βξ, ιφ. Ἔστωσαν ϗ γὰρ φσ ϗ ξρ ἴσαι ταῖς ἴσαις βάσεσι ζλ, αγ, ϗ ἔσονται φσ, ξρ ἀλλήλαις ἴσαι· ἀχθήτωσαν οὖν αἱ σι, ρβ, καὶ ἐὰν ἐπὶ τῶν Τριγώνων ξβρ, φισ ληφθῶσιν αἱ βξ, ιφ ὡς Βάσεις, ἔσονται αἱ ξρ, σφ τούτων ὕψη· Ἐπεὶ δὲ ταῦτα ἴσα εἰσὶν, ἔσονται ξβρ, φισ πρὸς ἄλληλα (3) ὡς αἱ Βάσεις βξ, ιφ· ἀλλ᾽ ἐκ κατασκ. ξρ ἴση τῇ αγ ἐστὶ, ϗ φσ ἴση τῇ ζλ, ἔνθεντοι ϗ τὰ Τρίγωνα ξβρ, φισ, ἴσα ἐστὶ (4) τοῖς Τριγώνοις αβγ, ζιλ· Ἄρα καὶ τὰ Τρίγωνα αβγ, ζιλ, εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ὡς βξ πρὸς ιφ.

κ. 325. Β΄. Τὰ Τρίγωνα (αβγ, δεζ), καὶ τὰ Παραλληλόγραμμα (αφ, δρ), ἅτινα ἐστὶν ὡς αἱ Βάσεις αγ, δζ, τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχουσιν, ἐν ταῖς αὐταῖς δηλονότι Παραλλήλοις σταθῆναι δυνήσονται. Ἔστι δὲ τὸ ἀντίστροφον τῆς Α΄. Προτάσεως.

Εἰ μὴ γὰρ, οὐδὲ ἡ βε Παράλληλος πρὸς τὴν αζ. Ἀχθήτω δὴ διὰ τοῦ ε Σημείου ἡ εσ Παράλληλος πρὸς τὴν αζ, τέμνουσα τὴν γβ κατὰ τὸ σ, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ ασ. Τὰ τοίνυν Τρίγωνα ασγ, δεζ ἐν ταῖς αὐταῖς ὄντα Παραλλήλοις, εἰσὶ πρὸς ἄλληλα (5) ὡς αἱ Βάσεις αγ, δζ· ἀλλὰ ϗ τὰ Τρίγωνα αβγ, δεζ εἰσὶ (6) ϗ αὐτὰ ὡς αἱ Βάσεις αγ, δζ, ἄρα τὸ Τρίγωνον ασγ (7) ἴσον ἐστὶ τῷ Τριγώνῳ αβγ, τὸ μέρος τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἄτοπον. Οὐκ ἄρα διὰ τοῦ ε Σημείου Εὐθεῖα τις πρὸς τὴν αζ Παράλληλος ἀχθῆναι δυνήσεται ἀλ-

---

(1) ΛΗ. Βιβ. α΄. (2) ΜΑ τοῦ α΄. (3) Α. τοῦ ς΄. (4) ΛΗ. τοῦ α΄. (5) Διὰ τὴν Πρότ. (6) Ἐξ ὑποθ. (7) Διὰ τὴν ΙΑ. ϗ Θ. τοῦ ε΄.

λη παρὰ τὴν βε· Καὶ ἑπομένως τὰ ἔχοντα πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις Τρίγωνα αβγ, δεζ, ἐν ταῖς αὐταῖς Παραλλήλοις εἰσί.

Ἐπειδὴ δὲ καὶ τὰ Παραλληλόγραμμα αφ, δρ, τὰ τῶν Τριγώνων αβγ, δεζ (1) διπλάσια, ἐπὶ ταῖς αὐταῖς μὲν βάσεσι, ταῖς αὐταῖς δὲ παραλλήλοις εἰσὶν, αἷς καὶ τὰ Τρίγωνα, φανερὸν ὅτι καὶ τὰ Παραλληλόγραμμα (2), ἅτινα εἰσὶν ὡς αἱ Βάσεις, ἐν ταῖς αὐταῖς καὶ ταῦτα Παραλλήλοις ἐςί.

Τὰ Τρίγωνα (αβγ, ζιλ) καὶ τὰ Παραλληλόγραμμα, ἅ ἐςι πρὸς ἄλληλα ὡς ὕψη τὰ βξ, ιφ, τὰς Βάσεις αγ, ζλ ἴσας ἔχει· Ἔςι δὲ ἀντίςροφον τῷ Α΄. Πορίσματι. Γ΄. κ. 327.

Κατασκευαθέντων γὰρ τῶν Τριγώνων ξβρ, φισ, ὡς ἐν τῷ Α΄. Πορίσμ., δειχθήσεται ὡς ἀνωτ. τὸ Τρίγωνον αβγ = Τριγ. ξβρ, καὶ τὸ ζιλ = φισ· Ἀλλαμὴν ἐξ ὑποθ. αβγ : ζιλ :: βξ : ιφ, ἄρα ξβρ : φισ :: βξ : ιφ· Ἐὰν οὖν ληφθῶσιν αἱ βξ, ιφ, ὡς Βάσεις τῶν Τριγώνων ξβρ, φισ, ἔσονται ξρ, φσ, τὰ τούτων ὕψη· Καὶ ἐπειδὴ τὰ Τρίγωνα ἐςὶν ὡς αἱ Βάσεις, τὰ ὕψη ξρ, φσ (3) ἴσα ἔςαι· ἀλλ᾽ ἐκ κατασκ. ξρ = αγ καὶ φσ = ζλ, ἄρα αγ καὶ ζλ ἔσονται ἴσαι.

Πρότασις Β.

„Ἐὰν Τριγώνου παρὰ μίαν τῶν Πλευρῶν (βγ) ἀχθῇ τις Εὐθεῖα παράλ-„ληλος (ζλ), ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ Τριγώνου Πλευράς (τουτέςιν αζ : ζβ :: „αλ : γλ).

„Καὶ ἐὰν αἱ τοῦ Τριγώνου Πλευραὶ (βα, γα) ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ „ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη Εὐθεῖα (ζλ), παρὰ τὴν λοιπὴν ἔςαι τοῦ Τρι-„γώνου Πλευρὰν (βγ) παράλληλος.

Μέρος Α΄. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ βλ, γζ· Ἐπεὶ οὖν ἡ ζλ τίθεται Παράλληλος εἶναι πρὸς τὴν βγ, ἔςαι τὰ Τρίγωνα ζβλ, λγζ ὡς ἐπὶ τῆς αὐτῆς Βάσεως ζλ, ἀλλήλοις (4) ἴσα, ὥςε τὸ Τρίγωνον χ πρὸς ἑκάτερον, λόγον ἕξει (5) τὸν αὐτὸν, τουτέςι χ : ζβλ :: χ : λγζ· ἀλλὰ τὸ Τρίγωνον χ ἐςὶ πρὸς τὸ Τρίγωνον ζβλ, ὡς αζ (6) πρὸς ζβ· καὶ πάλιν τὸ Τρίγωνον χ ἐςὶ πρὸς τὸ Τρίγωνον λγζ, ὡς (7) αλ πρὸς λγ, ἄρα (8) καὶ αζ : ζβ :: αλ : λγ. Ο. Η. τὸ Α΄. κ. 328.

Μέρος Β΄. Ὡς αζ πρὸς ζβ, οὕτω (9) τὸ Τρίγωνον χ πρὸς τὸ Τρίγωνον

(1) *ΜΑ.* τοῦ α΄. (2) *ΙΕ.* τοῦ ε΄. (3) *Διὰ τὸ Β΄. Πόρ.* τῆς παρούσης. (4) *ΛΖ.* τοῦ α΄. (5) Ζ. τοῦ ε΄. (6) *Διὰ* τὴν ἀνωτ. (7) *Διὰ* τὴν αὐτήν. (8) *ΙΑ.* τοῦ ε΄. (9) *Διὰ* τὴν ἀνωτ.

ζβλ. Πάλιν ὡς αλ πρὸς λγ, οὕτω (1) τὸ Τρίγωνον χ πρὸς τὸ Τρίγωνον λγζ· τίθεται δὲ αζ : ζβ : : αλ : λγ, ἄρα (2) Τρίγωνον χ πρὸς Τρίγωνον ζβλ, ὡς Τρίγωνον χ πρὸς Τρίγωνον λγζ· Ὥςε τὰ Τρίγωνα (3) ζβλ καὶ λγζ, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς Βάσεως ὄντα, ἴσα ἀλλήλοις ἐςί· καὶ ἑπομένως (4) αἱ ζλ, βγ Παράλληλοι εἰσίν. Ο. Η. τὸ Β'.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

κ. 329. Α'. Ἐὰν παρὰ μίαν τῦ Τριγώνυ Πλευρὰν (βγ) πλείονες ἀχθῶσι Παράλληλοι (ιξ, ζλ), ἔςαι ἅπαντα τὰ τῶν Πλευρῶν Τμήματα ἀλλήλοις ἀνάλογον.

Ἀχθήτω γὰρ ἡ ζπ Παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ· Αἱ γῦν Εὐθεῖαι ζσ, σπ ἴσαι εἰσὶ (5) ταῖς λξ, ξλ· ἀλλὰ (6) βι : ιζ : : πσ : σζ, ἄρα ϗ βι : ιζ : : γξ : ξλ.

κ. 330. Β'. Ἐὰν ὦσι Κύκλοι δύω ἔνδοθεν ἁπτόμενοι, ἀπὸ δὲ τῦ Σημείυ τῆς ἐπαφῆς ἀχθῇ αβ ἡ τῦ μείζονος τῶν Κύκλων Διάμετρος, τέμνυσα τὸν ἐλάσσονα κατὰ τὸ γ, ἀχθῇ δὲ ϗ ὁποιαδήποτε ἄλλη ἡ αδ, τέμνυσα τὸν ἐλάσσονα κατὰ τὸ ε, ἔςαι μὲν ἡ αγ Διάμετρος (7) τῦ ἐλάσσονος τῶν Κύκλων, ἔσονται δὲ αἱ Διάμετροι ταῖς Ὑποτεινύσαις ἀνάλογον, ϗ ἡ διαφορὰ τῶν Διαμέτρων πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν Ὑποτεινυσῶν ὡσαύτως· τυτέςιν αβ : αδ : : αγ : αε : : βγ : δε, ἢ ϗ ἐναλλὰξ αγ : γβ : : αε : εδ, καὶ αβ : βγ : : αδ : αε. Ἐὰν γὰρ ἀχθῶσιν αἱ Εὐθεῖαι βδ, γε, διὰ τὰς ὑπὸ αδβ, αεγ Ὀρθὰς (8) ὔσας, ϗ διὰ τῦτο ἴσας, αἱ βδ, γε (9) Παράλληλοι ἔσονται· Ἄρα (10) αγ : γβ : : αε : εδ. Ο. Η. τὸ Α'.

Καὶ ἐν συνθέσει (11) αβ : βγ : : αδ : δε. Ο. Η. τὸ Β'.

Καὶ ἐν ἀντιςροφῇ (12) βα : αγ : : δα : αε. Ο. Η. τὸ Γ'.

Π ρ ό τ α σ ι ς Γ.

„ Ἐὰν Τριγώνυ Γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνυσα τὴν Γωνίαν Εὐθεῖα „ (βζ), τέμνῃ ϗ τὴν Βάσιν (αγ), τὰ τῆς Βάσεως Τμήματα (αζ, ζγ), τὸν „ αὐτὸν ἕξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τῦ Τριγώνυ Πλευραῖς (αβ, γβ).

„ Καὶ ἐὰν τὰ Βάσεως Τμήματα (αζ, ζγ), τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς „ λοιπαῖς τῦ Τριγώνυ Πλευραῖς (αβ, γβ), ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν το-

---

(1) *Διὰ τὴν αὐτήν.* (2) *ΙΑ. τῦ ε'.* (3) *Θ. τῦ ε'.* (4) *ΛΘ. τῦ α'.* (5) *ΛΔ. τῦ α'.* (6) *Β. τῦ ς'.* (7) *Πόρισμα τῆς ΙΒ. τῦ γ'.* (8) *ΛΑ. τῦ γ'.* (9) *ΚΘ. τῦ α'.* (10) *Διὰ τὴν παρῦσ.* (11) *ΙΗ. τῦ ε'.* (12) *Διὰ τὸ Α'. Πόρ. τῆς ΙΗ. τῦ ε'.*

„ μὴν ἐπιζευγνυμένη Εὐθεῖα (βζ), δίχα τέμνει τὴν τȣ̃ Τριγώνȣ Γωνίαν (ὑπὸ „ αβγ).

Μέρος Α΄. Προαχθήτω ἡ γβ, ὥςε τὴν προεκβληθεῖσαν βγ ἴσην εἶναι τῇ βα· καὶ ἐπειδὴ ἐν τῷ Τριγώνῳ ψ, αἱ Πλευραὶ λβ, αβ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, ϗ αἱ Γωνίαι (1) αἱ κατὰ τὸ λ ϗ ξ ἴσαι ἔσονται· Ἐπεὶ δὲ ϗ ἡ ἐκτὸς ὑπὸ αβγ δυσὶ ταῖς ἐντὸς ϗ ἀπεναντίον ἴση (2) ἐςὶν, ἡ Γωνία ι, ἥτις ἐξ ὑποθέσεως, τῆς ὑπὸ αβγ ἡμίσεια ἐςὶ, τῇ κατὰ τὸ λ Γωνίᾳ ἴση ἔςαι, ὥςε αἱ αλ ϗ ζβ Παράλληλοι (3) εἰσί· Καὶ τοίνυν ἐπὶ τȣ̃ Τριγώνȣ αγλ (4), αζ : ζγ : : λβ (τȣτέςιν αβ) : βγ. Ο. Η. τὸ Α΄. ϰ. 331.

Μέρος Β΄. Προεκβληθείσης ὡς ἀνωτέρω τῆς γβ, ὡς τὴν λβ ἴσην εἶναι τῇ αβ, ἐπειδὴ τίθεται εἶναι αζ : ζγ : : αβ (ταυτὸν εἰπεῖν λβ) βγ, ἔσονται αἱ αλ, ζβ (5) Παράλληλοι, καὶ ȣ̔́τως ἡ ἐκτὸς Γωνία ι ἔςιν ἴση (6) τῇ ἐντὸς λ, ἤτε ἐναλλὰξ π, ἴση τῇ ξ· Ἀλλὰ γὰρ τῶν λβ, αβ ἴσων ȣ̓σῶν, ϗ αἱ Γωνίαι (7) λ ϗ ξ ἴσαι εἰσίν· ἄρα ϗ αἱ ι ϗ π ἴσαι Γωνίαι εἰσὶ, ϗ δίχα ἄρα τέτμηται ἡ ὑπὸ αβγ Ο. Η. τὸ Β΄.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ἐὰν ἡ τὴν Γωνίαν τȣ̃ Τριγώνȣ δίχα τέμνȣσα Εὐθεῖα, ϗ τὴν Βάσιν δίχα τέμνῃ, τὸ Τρίγωνον τῇ δυνάμει τῆς ἐν χερσὶ Προτάσεως, Ἰσοσκελὲς ἔςαι, ϗ ἡ διχοτομȣ̃σα Εὐθεῖα ἐπὶ τὴν Βάσιν πρὸς ὀρθὰς (8) ςήσεται.

Π ρ ό τ α σ ι ς Δ.

„ Τῶν Ἰσογωνίων Τριγώνων ἀνάλογον εἰσὶν αἱ Πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας „ Γωνίας, ϗ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας Γωνίας ὑποτείνȣσαι Πλευραὶ, τȣτέ„ ςιν ὅτι τὰ Ἰσογώνια Τρίγωνα ὅμοια (9) ἐςί. ϰ. 332.

Ἐπὶ τῶν Τριγώνων χ, ψ, ἔςω ἡ Γωνία α ἴση τῇ ζ, ϗ ἡ γ τῇ λ, ϗ ϗ ἡ β τῇ ι. Φημὶ δὴ ὅτι αβ : ζι : : αγ : ζλ, ϗ αγ : ζλ : : γβ : λι, ϗ γβ : λι : : βα : ιζ· ϗ ὁμοίως αβ : αγ : : ζι : ζλ, ϗ αγ : γβ : : ζλ : λι, ϗ γβ : βα : : λι : ιζ.

Ἐὰν γὰρ ἡ ζ Γωνία τῇ ταύτης ἴση α ἐπιτεθῇ, αἱ Πλευραὶ ζι, ζλ, ταῖς αβ, αγ Πλευραῖς ἐφαρμόσȣσι· ϗ ἐπειδὴ ἡ ἐκτὸς ὑπὸ αιλ, καθ᾽ ὑπόθ., ϰ. 333.

---

(1) Ε. τȣ̃ α΄. (2) ΛΒ. τȣ̃ α΄. (3) ΚΘ. τȣ̃ α΄. (4) Β. τȣ̃ ϛ΄. (5) Β. τȣ̃ ϛ΄. (6) ΚΖ. τȣ̃ α΄. (7) Ε. τȣ̃ α΄. (8) Διὰ τὸν Γ΄. Ἀριθμ. τȣ̃ Σχολ. τȣ̃ μετὰ τὴν Κϛ. τȣ̃ α΄. (9) Ὁρ. Α΄. τȣ̃ ϛ΄.

ἴση ἐςὶ τῇ ἐντὸς β, ἔσονται (1) ιλ, βγ Παράλληλοι· ἄρα (2) βι : ια : : γλ : λα, ϗ ἐν συνθέσει βα : ιζ : : γα : λζ. Ἐὰν δὲ ἡ λ Γωνία τῇ ἴσῃ γ ἐπιτεθῇ, ὡσαύτως δείξω, ὅτι ϗ αγ : ζλ : : βγ : ιλ· ϗ τελευταῖον ἐὰν ἡ ι Γωνία τῇ ἴσῃ β ἐπιτεθῇ, δείξω παραπλησίως, ὅτι ϗ βγ : ιλ : : αβ : ζι. Ἐπεὶ δέ τοι τὰ ἡγέμενα βα, αγ, γβ, πρὸς τὰ ἑπόμενα ιζ, ζλ, λι, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα ἐςὶν, ἔςαι δὴ ϗ ἐναλλὰξ (3) βα : αγ : : ιζ : ζλ, καὶ αγ : γβ : : ζλ : λι, ϗ γβ : βα : : λι : ιζ· Ὥςε δῆλον ἐςὶ τὸ προτεθέν.

Πορίσματα.

κ. 333. Α. Ἐὰν Τριγώνε παρὰ μίαν τῶν Πλευρῶν βγ, Παράλληλος ἀχθῇ ἡ ιλ, συςήσεται Τρίγωνον τὸ ιζλ ὅμοιον τῷ ὁλοσχερεῖ Τριγώνῳ βζγ· Ὅθεν δὴ γζ ἔςαι πρὸς λζ, ὡς βγ πρὸς λι, ϗ ἐναλλὰξ γζ : βγ : : λζ : λι· ϗ πάλιν ζβ : ζγ : : ζι : ζλ.

Ἐπειδὴ γὰρ αἱ λι, βγ παράλληλοι εἰσὶν, ἔσονται αἱ ἐκτὸς (4) ὑπὸ ζιλ, ζλι, ἴσαι ταῖς ἐντὸς β ϗ γ, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ἡ δὲ κατὰ τὸ ζ κοινή· ὥςε Ἰσογώνια ἔςαι τὰ Τρίγωνα, ϗ τὰς Ὑποτεινέσας ὑπὸ τὰς ἴσας Γωνίας β, ϗ ὑπὸ ζιλ, τετέςι τὰς γζ, λζ, πρὸς τὰς βγ, λι, αἳ ὑποτείνεσιν ὑπὸ τὴν κοινὴν Γωνίαν ζ, ἀνάλογον ἔχοντα· ὁμοίως δὲ ϗ τὰς περὶ τὴν κοινὴν (5) Γωνίαν ζ, τετέςι ζβ : ζγ : : ζι : ζλ.

κ. 334. Β΄. Ἐὰν Τριγώνε τὰς Παραλλήλες αγ, λξ τέμνῃ τις Εὐθεῖα ἡ βζ, ἡ ἀπὸ τῆς ἀντιθέτε Γωνίας β ἠγμένη, τεμεῖ αὐτὰς ἀνάλογον.

Κατὰ γὰρ τὸ Α΄. Πόρισμα, αζ : λι : : ζβ : ιβ, ϗ ζγ : ιξ : : ζβ : ιβ· ὥςε αζ : λι : : ζγ : ιξ, ϗ ἐναλλὰξ αζ : ζγ : : λι : ιξ (6).

κ. 335. Γ΄. Καὶ μεταξὺ δυεῖν Παραλλήλων αβ, γδ, ἐὰν Εὐθεῖαι δύο εζ, ηθ διατέμνωσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ ι, τὰ τέτων Τμήματα ει, ιζ, ηι, ιθ, ἔςαι ἀνάλογον· Τὰ γὰρ ειη, ζιθ Τρίγωνα διὰ τὰς ἐν τῷ ι κατὰ κορυφὴν (7) ἴσας ὄσας, ϗ τὰς ἐναλλὰξ (8) κατὰ ε ϗ ζ, ϗ η ϗ θ, αἳ ϗ αὐταὶ ἴσαι εἰσὶν, Ἰσογώνια ἔςαι ϗ ὅμοια· Ἄρα ει : ιζ : : ηι : ιθ.

Δ΄. Ἐκ δὲ δὴ τε Α΄. Πορίσματος, ϗ πύργε, ἢ τε τυχόντος ἄλλε μετεώρε σημείε τὸ ὕψος, μόνῃ τῇ ὑπὸ τῆς ςηριχθείσης βακτηρίας πεμπομένῃ σκιᾷ, καταμετρεῖν παιδευόμεθα.

κ. 336. Πήξας γὰρ πρὸς ὀρθὰς τὴν βακτηρίαν ζλ ἐπὶ τε ἐδάφες, ὅτως ὥςε

---

(1) ΚΘ. τε α΄. (2) Β. τε ς΄. (3) Ις. τε ε΄. (4) ΚΖ. τε α΄. (5) Α. Ὅρ. τε ς΄. (6) Ις. τε ε΄. (7) ΙΕ. τε α΄. (8) ΚΖ. τε α΄.

τὴν ἀφ' ἡλίȣ ἀκτῖνα βα, τὸ τȣ͂ πύργȣ περατȣ͂σαν σκίασμα, ϗ διὰ τȣ͂ λ χω-
ρεῖν, ἕξεις ἐπι τȣ͂ τριγώνȣ αψβ, τὴν ζλ πρὸς τὸ ψβ ὕψωμα τȣ͂ πύργȣ πα-
ράλληλον. Ἔνθεντοι ϗ ὡς αζ ἡ τῆς βακτηρίας ἀπ' ἄκρας τȣ͂ σκιάσματος ἀπό-
στασις, πρὸς ζλ τὸ τῆς βακτηρίας ὑπὲρ γῆν μῆκος, ȣ͂τως αψ ἡ τȣ͂ πύργȣ
ἀπ' ἄκρας τȣ͂ σκιάσματος ἀπόστασις, πρὸς ψβ τὸ τȣ͂ πύργȣ αὐτȣ͂ ὕψος. Εὐ-
χερȣ͂ς δὲ ȣ͂σης τῆς τῶν τριῶν πρώτων καταμετρήσεως, ῥᾷστα ϗ τὸ Δ'., τȣτέστι
τὸ ζητȣ́μενον ὕψος εὑρεθήσεται. Ο. Ε. Ε.

Ἐντεῦθεν δὲ ϗ τῶν Κανονίων, τῶν τὰ Ἡμίτονα, ϗ τὰς Ἁπτομένας, καὶ Ε'. ϰ. 337.
τὰς Τεμνȣ́σας περιεχόντων, τὴν ἀρχὴν λαμβάνομεν· Ἔστω γὰρ Κύκλȣ Ἡμιδιά-
μετρος ἡ αγ, μερῶν φέρε 100000, ϗ Γωνία ἡ ὑπὸ ΒαΔ μοιρῶν 80· ϗ ἐπεὶ ἡ
μοιρῶν 60 Ὑποτείνȣσα (1) ἴση ἐστὶ τῇ Ἡμιδιαμέτρῳ αγ, ἡ ΔΒ, ἥτις ἐστὶ τὸ Ἡ-
μίτονον μοιρῶν 30, τῇ ἡμισείᾳ τῆς Ἡμιδιαμέτρȣ, ἤτοι $\frac{1}{2}$ αγ ἴση ἔσται (2), ϗ
μέρη 50000 περιέξει. Ἐπὶ γȣ͂ν τȣ͂ ὀρθογωνίȣ Τριγώνȣ αδβ, τὸ Τετράγωνον τὸ ϰ. 338.
ἀπὸ αβ (3) ἴσον ἐστὶ τοῖς δυσὶ Τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ αδ ϗ βδ· Τετραγωνισθή-
τω τοίνυν ἡ Διάμετρος αβ, διὰ πολλαπλασιασμȣ͂ 100000 × 100000, ϗ ἀπὸ
τȣ͂ ἐντεῦθεν ἀνακύπτοντος Τετραγώνȣ, τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ βδ ἀφαιρεθή-
τω, ϗ λοιπὸν ἔσται Τετράγωνον τὸ ἀπὸ αδ, ἤτοι τὸ ἀπὸ τȣ͂ Συνημιτόνȣ ζβ,
τȣ͂ τῇ αδ ἴσȣ (4), ἐξ ȣ͂ δὴ ἐξαχθείσης τῆς ῥίζης, δήλη ἔσται ἡ βζ, εἴτȣν ἡ
αδ. Ἀφαιρεθεῖσα δὲ ϗ αὕτη ἀπὸ τῆς Ἡμιδιαμέτρȣ αγ = 100000, το πλάγιον
Ἡμίτονον δγ καταλείπει· Εἶτα διὰ τῆς ἑξῆς ἀναλογίας (5) αδ : βδ : : αγ :
εγ, δήλη ἔσται ϗ ἡ Ἐφαπτομένη εγ· ἐπειδὴ δὲ (6) ἐστὶν αδ : αβ : : αγ : αε,
δήλη ἔσται ϗ ἡ Τέμνȣσα αε· Τῇ δ' αὐτῇ μεθόδῳ ϗ ἐκ τῆς βζ, ἥτις ἐστὶ τὸ
ὀρθὸν Ἡμίτονον τῆς ὑπὸ βαη μοιρ. 60, ληφθήσεται τὸ τῆς αὐτῆς Γωνίας
πλάγιον Ἡμίτονον, ϗ ἡ Ἁπτομένη, ϗ ἡ Τέμνȣσα. Ἤδη δὲ ἐπεὶ (7) τὸ εἰς
τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένον Τετράγωνον (8), διπλάσιον ἐστὶ τȣ͂ Τετραγώνȣ τȣ͂
ἀπὸ τῆς Ἡμιδιαμέτρȣ, ἐὰν ἡ Ἡμιδιάμετρος ὑποτεθῇ 100000, ἔσται ἡ Πλευρὰ
τȣ͂ Τετραγώνȣ τȣ͂ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένȣ (τȣτέστιν ἡ μοιρ. 90 ὑποτεί-
νȣσα) ἴση τῇ τετραγωνείῳ ῥίζῃ τȣ͂ ἀριθμȣ͂ 100000 × 100000 × 2· ὅθεν
δὴ γινώσκεται ϗ ἡ ἡμίσεια Πλευρὰ, τȣτέστι τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονον (9) μοιρ. 45,
καὶ ἑπομένως ϗ τὸ πλάγιον Ἡμίτονον, ϗ ἡ Ἁπτομένη, ϗ ἡ Τέμνȣσα· Καὶ ἐν
γένει ἐὰν δοθῇ ὁ τῆς Ὑποτεινȣ́σης οὑτινοσȣ͂ν τόξȣ λόγος, ὃν ἔχει πρὸς τὴν

---

(1) *Α. Πόρ. τῆς ΙΕ. τȣ͂ Δ'.* (2) Α. *Πόρ. τῆς Γ. τȣ͂ γ'.* (3) *ΜΖ. τȣ͂ α'.* (4) *ΛΔ. τȣ͂ α'.* (5) *Α. Πόρ. τῆς Δ. τȣ͂ ς'.* (6) *Διὰ τὴν αὐτήν.* (7) Ὅρα Σχῆμ. (8) Σχόλ. *πὸ μετὰ τὴν ς. ϗ Ζ. τȣ͂ δ'.* (9) *Διὰ τὸ* Α'. *Πόρ. τῆς Γ. τȣ͂ γ'.*

Ἡμιδιάμετρον, εὑρεθήσεται τῆς τȣ̃ τόξȣ ἡμισείας τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονον, ϗ τὸ πλάγιον, ϗ ἡ Ἁπτομένη, ϗ ἡ Τέμνȣσα· Ὃς δ' ἂν πλειόνων ἐφίοιτο, μετίτω τὸ τȣ̃ περικλεȣ̃ς Οὐαλλισίȣ πόνημα, τὸ περὶ τῶν τομῶν τῆς Γωνίας, ἐν τῷ Β'. τεύχει τῶν ἐκείνȣ συγγραμμάτων, Σελ. 533—601.

ϰ. 339. ϛ'. Κἀντεῦθεν ἐὰν ἀπὸ ἡςινοσȣ̃ν Γωνίας α τȣ̃ Τριγώνȣ αβγ τȣ̃ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένȣ, Κάθετος ἐπὶ τὴν Βάσιν ἀχθῇ ἡ αε, ἀχθῇ δὲ ϗ ἡ τȣ̃ Κύκλȣ Διάμετρος αδ, ἔςαι δὴ ἡ Κάθετος αε, πρὸς τὴν ἑτέραν τῶν Πλευρῶν τῶν περὶ τὴν Γωνίαν, φέρε πρὸς τὴν αγ, ὡς ἡ ἑτέρα Πλευρὰ αβ, πρὸς τὴν τȣ̃ Κύκλȣ Διάμετρον αδ. Ἀχθείσης γὰρ τῆς βδ, τὰ Τρίγωνα αεγ, αβδ, Ἰσογώνια ἐςὶ, ϗ γὰρ αἱ γ ϗ δ Γωνίαι (1) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ὡς ἐπὶ τῆς αὐτῆς Περιφερείας βα βεβηκεῖαι· αἱ δὲ Γωνίαι ἥτε (2) ὑπὸ αβδ ϗ ἡ (3) ὑπὸ αεγ ὀρθαὶ ϗ ἴσαι· ὥςε ϗ αἱ ὑπὸ βαδ ϗ εαγ ἀλλήλαις (4) ἴσαι εἰσί· Τὰ ἄρα Τρίγωνα διὰ τὴν ἐν χερσὶ Προτ. ὅμοια, ϗ ȣ̔́τως αε : αγ : : αβ : αδ. Ο. Ε. Δ.

ϰ. 340. Ζ'. Τὴν τȣ̃ Κύκλȣ Διάμετρον αβ (προεκβληθεῖσαν ἣν δέοι) τεμνέτω πρὸς ὀρθὰς Εὐθεῖα ἄπειρος ἡ εζ κατὰ τὸ γ, ἐπὶ δὲ τῆς Εὐθείας εζ, ληφθέντος τȣ̃ τυχόντος σημείȣ ε ἐκτὸς τȣ̃ Κύκλȣ, ἐπεζεύχθω ἡ αε τέμνȣσα τὸν Κύκλον κατὰ τὸ δ· ἔςαι γὰρ ȣ̔́τως ἡ Ὑποτείνȣσα αδ πρὸς τὴν τȣ̃ Κύκλȣ Διάμετρον αβ, ὡς αγ πρὸς αε· Ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς Εὐθείας δβ, τὰ Τρίγωνα αδβ καὶ αγε Ἰσογώνια ἐςίν· ἡ μὲν γὰρ α ἑκατέροις κοινὴ, αἱ δὲ κατὰ τὸ γ ϗ δ Γωνίαι ὀρθαὶ (5) εἰσίν· ἔνθεντοι ϗ ἡ τρίτη ἴση ἔςαι (6) τῇ τρίτῃ· Τοιγαρȣ̃ν διὰ τὴν ἀνὰ χεῖρας Πρότασιν, τὰ Τρίγωνα ὅμοια ἐςὶ, ϗ αδ : αβ : : αγ : αε.

Τῶν δέ τοι σημείων β ϗ γ συμπιπτόντων, ἡ τȣ̃ Κύκλȣ Διάμετρος μέση ἀνάλογος ἐςὶ τῶν αδ ϗ αε· ἔςαι γὰρ δὴ αδ : αβ = αβ : αε.

Πρότασις Ε.

„Ἐὰν δύω Τρίγωνα τὰς Πλευρὰς ἁπάσας ἔχῃ ἀνάλογον, Ἰσογώνια ἔ-
„ςαι τὰ Τρίγωνα.

ϰ. 341. Τȣτέςιν ἐὰν αβ ᾖ πρὸς ρζ ὡς αγ πρὸς ρπ, ϗ αγ : ρπ : : γβ : πζ, καὶ γβ : πζ : : αβ : ρζ, λέγω δὴ ὅτι αἱ Γωνίαι αἱ ἀπεναντίον τοῖς ἡγȣμένοις, ταῖς Γωνίαις ταῖς ἀπεναντίον τοῖς ἑπομένοις ἴσαι εἰσί· τȣτέςιν ἡ μὲν γ τῇ ι, ἡ δὲ β τῇ ζ, ἡ δὲ α τῇ ξ.

---

(1) *ΚΑ. τȣ̃ γ'.* (2) *ΛΑ. τȣ̃ γ'.* (3) *Ἐξ ὑποθ.* (4) *Θ. Πόρ. τῆς ΛΒ. τȣ̃ α'.* (5) *Ἡ μὲν ἐξ ὑποθ. ἡ δὲ διὰ τὴν ΛΑ. τȣ̃ γ'.* (6) *Διὰ τὸ Θ. Πόρ. τῆς ΛΒ. τȣ̃ α'.*

Γωνίαι	Ἡγϐμ.	Ἑπόμ.	Γωνίαι.
γ	αβ	ρζ	ι
β	αγ	ρπ	ζ
α	γβ	πζ	ξ

Ταῖς Γωνίαις α ϗ γ ποίει ἴσας τὰς χ ϗ ψ, ὥςε τὰς Πλευρὰς συνελθεῖν κατὰ τὸ ν· οὕτω δέ τοι ϗ αἱ β ϗ ν (1) ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. Ἐπειδὴ οὖν τὰ Τρίγωνα Φ ϗ Τ Ἰσογώνια ἐςὶν, ἔχει αβ : ρν : : αγ : ρπ (2), ἄρα αβ : ρζ : : αβ : ρν, ϗ ἑπομένως αἱ ρν, ρζ (3) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Ὡσαύτως δείξω ἴσας εἶναι ϗ τὰς πν, πζ· κἀντεῦθεν τὰ Τρίγωνα Φ ϗ Σ Ἰσόπλευρα ἐςὶν, ἀκολϐθως δὲ ϗ αἱ Γωνίαι ι, ζ, ξ ἴσαι εἰσὶ (4) ταῖς χ, ν, ψ, τϐτέςι (5) ταῖς γ, β, α Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ς.

„Ἐὰν δύω Τρίγωνα Τ ϗ Σ, μίαν μιᾷ Γωνίᾳ ἴσην ἔχει (τὴν α τῇ ξ), „περὶ δὲ τὰς ἴσας Γωνίας τὰς Πλευρὰς ἀνάλογον (αβ : αγ : : ρζ : ρπ), τὰ „Τρίγωνα ἔςαι ὅμοια.

Ταῖς Γωνίαις α ϗ γ ἴσαι γινέσθωσαν αἱ χ ϗ ψ, ὥςε τὰς Πλευρὰς συνελθεῖν κατὰ τὸ ν, ϗ Γωνίαι γοῦν (6) β ϗ ν ἴσαι ἔσονται ϗ αὐταί· Οὕτω δέ τοι δεῖξαι ῥάδιον, ὡς ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω, ἴσας εἶναι ϗ τὰς ρζ, ρν, ἡ δὲ ρπ ἐπ᾽ ἀμφοῖν, τῷ τε Φ ϗ τῷ Σ κοινή· ἀλλὰ γὰρ ϗ αἱ Γωνίαι ξ ϗ χ ἀλλήλαις ἴσαι, ὡς συνεξισϐμεναι τῇ αὐτῇ α, ἡ μὲν χ ἐκ κατασκ., ἡ δὲ ξ ἐξ ὑποθ., ἄρα ϗ αἱ ι ϗ ζ (7) ἴσαι ϗ αὐταὶ εἰσὶ ταῖς ψ ϗ ν· Ὥςε τὸ Σ Τρίγωνον Ἰσογώνιον ὂν ἐςὶ τῷ Φ Τριγώνῳ, τϐτέςιν ἐκ κατασκ. τῷ Τ· Ἄρ᾽ οὖν τὰ Τρίγωνα Σ ϗ Τ (8) ὅμοια ἐςί. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Ζ.

„Ἐὰν δύο Τρίγωνα (αβγ, ζιλ), μίαν Γωνίαν (β) μιᾷ Γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας Γωνίας (α, ζ) τὰς Πλευρὰς ἀνάλογον (ὡς εἶναι βα „: αγ : : ιζ : ζλ), τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν, ἅμα ἤτοι ἐλάσσονα, ἢ μὴ ἐ„λάσσονα Ὀρθῆς, ὅμοια ἔςαι τὰ Τρίγωνα.

Εἴπερ αἱ γ ϗ λ Ὀρθαὶ, διὰ τὰς β ϗ ι τὰς ἴσας εἶναι τιθεμένας, Ἰσογώνια (9) ἔςαι τὰ Τρίγωνα, ϗ δὴ (10) ϗ ὅμοια. χ. 342.

(1) Πόρ. Θ. τῆς ΛΒ. τϐ ά. (2) Διὰ τὴν ἀνωτ. (3) Θ. τϐ έ. (4) Η. τϐ ά. (5) Διὰ τὴν κατασκ. (6) Θ. Πόρ. τῆς ΛΒ. τϐ ά. (7) Δ. τϐ ά. (8) Δ. τϐ ς́. (9) Θ. Πόρ. τῆς ΛΒ. τϐ ά. (10) Δ. τϐ ς́.

Ἐὰν δὲ αἱ Γωνίαι γ ϗ λ μὴ ὀρθαὶ ὦσιν, ὁμογενεῖς δὲ (τȣ̃το δέ ἐςιν, ἤτοι ἅμα Ὀρθῆς ἐλάσσονες, ἢ μείζονες), αἴτε α ϗ ζ Γωνίαι τύχωσιν ἴσαι, διὰ τὰς συνιςȣ̃σθαι ὑποτιθεμένας β ϗ ι, ȣ̓δὲν ἧττον τὰ Τρίγωνα (1) Ἰσογώνια ἔςαι, ϗ δὴ (2) ϗ ὅμοια. Κείσθωσαν γεμὴν αἱ α ϗ ζ μὴ ἴσαι, καὶ ἔςω ἡ α μείζων, πρὸς δὲ τῷ α σημείῳ τῆς αβ Εὐθείας, τῇ Γωνίᾳ ζ ἴση συνεςάσθω ἡ ὑπὸ βαδ· καὶ διὰ τὰς β ϗ ι τὰς ἴσας, ϗ λοιπαὶ αἱ ὑπὸ αδβ ϗ λ ἴσαι (3) ἔσονται, τάτε Τρίγωνα αβδ, ζιλ (4) ὅμοια, καὶ ιζ : ζλ : : βα : αδ· ἀλλὰ ιζ : ζλ (5) : : βα : αγ, ἄρα (6) αγ = αδ. Καὶ οὕτως ἐπὶ τȣ̃ Ἰσοσκελȣ̃ς αγδ, αἱ πρὸς τὴν Βάσιν Γωνίαι γ ϗ ὑπὸ αδγ (7) ὀξεῖαι, ἤτοι Ὀρθῆς ἐλάσσονες εἰσί· Τοίνυν ἡ ὑπὸ αδβ ἀμβλεῖα (8) ἐςὶ, καὶ ἐκ τȣ̃ ἀκολȣ́θȣ ϗ ἡ κατὰ τὸ λ· ἀλλ᾽ ἡ κατὰ τὸ λ αὐτὴ ὁμογενὴς εἶναι ἐτέθη τῇ γ, ϗ ἑπομένως ὀξεῖα, ἡ αὐτὴ ἄρα ἑκάτερον, ὅπερ ἀδύνατον· Οὐκ ἄρα ἡ ὑπὸ βαγ τῇ Γωνίᾳ ζ ἄνισος ἐςίν· ἐπεὶ δὲ ἴσαι, τὰ αβγ, ζιλ Τρίγωνα Ἰσογώνιά τε ἐςὶ ϗ ὅμοια. Ο. Ε. Δ.

Ταύτην δὴ τὴν Πρότασιν ὑπὸ Τακȣετίȣ ȣ̓ καλῶς παραλειφθεῖσαν, ἐπάναγκες εἶναι ἔγνω ἀποκαταςῆσαι ὁ Οὐίςων, ὡς πάνυ οὖσαν πολύχρηςον.

Πορίσματα.

Α´. Τῶν αὐτῶν τεθέντων, ἔςαι ἡ Γωνία α = τῇ Γων. ζ, ϗ ἡ γ = λ.

Β´. Ἐὰν δύω Τρίγωνα Σ, Φ (ὅρα ἐν Σχήμ. τῆς Ε´. ἀνωτ.), μίαν μιᾷ Γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ζ τῇ ν, τὰς δὲ περὶ τὰς ἄλλας Γωνίας ξ ϗ χ Πλευρὰς ἴσας, τάςτε λοιπὰς Γωνίας ι ϗ ψ, ἤτοι ἅμα ὀρθὰς, ἢ ἅμα ὀξείας, ἢ ἅμα ἀμβλείας, τὰ Τρίγωνα ἴσα ἔςαι. Ὅμοια γάρ ἐςι διὰ τὴν παρȣ̃σαν, ϗ τὸ Σχόλ. τῆς Ζ´. τȣ̃ Ε´., ἡ ἄρα χ = ξ (9), καὶ ἑπομένως (10) ϗ Τρίγωνον Τριγώνῳ.

Πρότασις Η.

„Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ Τριγώνῳ (αβζ), ἀπὸ τῆς ὀρθῆς Γωνίας ἐπὶ τὴν „Βάσιν Κάθετος ἀχθῇ (βγ), τὰ πρὸς τῇ Καθέτῳ Τρίγωνα, ὅμοια ἐςὶ τῷ „τε ὅλῳ ϗ ἀλλήλοις.

κ. 343. Ἐπὶ τῶν Τριγώνων αβζ ϗ Λ, ἡ μὲν κατὰ τὸ ζ Γωνία κοινὴ, αἱ δὲ ὑπὸ αβζ ϗ χ ἐξ ὑποθέσ. ὀρθαὶ, ϗ διὰ τȣ̃το ἴσαι· ἄρα ϗ αἱ λοιπαὶ α ϗ ξ (11)

---

(1) Θ. Πόρ. τῆς ΛΒ. τȣ̃ α´. (2) Δ. τȣ̃ ς´. (3) Θ. Πόρ. τῆς ΛΒ. τȣ̃ α´. (4) Δ. τȣ̃ ς´. (5) Ἐξ ὑποθ. (6) Θ. ϗ ΙΑ. τȣ̃ ε´. (7) Πόρ. ΙΑ. τῆς ΛΒ. τȣ̃ α´. (8) ΙΓ. τȣ̃ α´. (9) Ὅρ. Α. τȣ̃ ς´. (10) Δ. τȣ̃ α´. (11) Θ. Πόρ. τῆς ΛΒ. τȣ̃ α´.

ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί· Τὸν αὐτὸν δὴ τρόπον δειχθήσεται, ϗ τὰ Τρίγωνα αβζ ϗ Ρ ὅμοια εἶναι, ἧτε Γωνίαι ἴση τῇ ζ. Κἀντεῦθεν δῆλον ἔςαι, ὅτι ϗ τὰ Ρ ϗ Λ ἀλλήλοις ὅμοια, αἱ γὰρ Γωνίαι ι καὶ ζ, α καὶ ξ, υ ϗ χ ἴσαι ἀλλήλαις. Ο. Ε. Δ.

Πορίσματα.

Ἡ βγ μέση ἀνάλογος ἐςὶ τῶν αγ, γζ. Α'.

Ἐπειδὴ γὰρ ἐπὶ τῶν Τριγώνων Ρ ϗ Λ, ἴσαι εἰσὶν αἱ Γωνίαι ι ϗ ζ, ὧν ἡ μὲν ἀπεναντίον ἐςὶ τῆς Πλευρᾶς αγ, ἡ δὲ τῆς γβ, ἴσαι δὲ ϗ αἱ α ϗ ξ, ὧν ἡ μὲν ἀπεναντίον ἐςὶ τῆς Πλευρᾶς γβ, ἡ δὲ τῆς γζ, φανερὸν (1) ὅτι αγ: γβ : : γβ : γζ.

Ἡ βζ μέση ἀνάλογος ἐςὶ τῶν αζ, γζ· ἡ δὲ αβ μέση τῶν ζα ϗ γα. Β'.

Ἐπὶ γὰρ τῶν Τριγώνων αβζ ϗ Λ, ἴσαι μὲν αἱ Γωνίαι ὑπὸ αβζ, ϗ ἡ κατὰ τὸ χ, ὧν τὴν μεν ὑποτείνει ἡ αζ, τὴν δὲ ἡ βζ· ἴσαι δὲ ϗ αἱ α ϗ ξ, ὧν τὴν μὲν ὑποτείνει ἡ βζ, τὴν δὲ ἡ γζ· ὥςε (2) αζ : βζ : : βζ : γζ.

Παραπλησίως, ἐπεὶ ἐν τοῖς Τριγώνοις αβζ ϗ Ρ, ἴσαι μὲν αἱ Γωνίαι ὑπὸ αβζ ϗ υ, ὧν τὴν μὲν ὑποτείνει ἡ αζ, τὴν δὲ ἡ αβ, ἴσαι δὲ ϗ αἱ κατὰ τὸ ζ ϗ ι, ὧν τὴν μὲν ὑποτείνει ἡ αβ, τὴν δὲ ἡ αγ, ἔςαι πάλιν αζ : αβ : : αβ : αγ.

Ἐπὶ τῶν τριῶν τετωνὶ Τριγώνων αβζ, ϗ Ρ, ϗ Λ, αἱ τὰς ἴσας Γωνίας ὑποτείνεσαι ἀνάλογον (3) εἰσίν. Ὅθεν ἐὰν τε Α'. λόγε οἱ ὅροι ἀπὸ τε Τριγώνε αβζ, οἱ δὲ τε Β'. ἀπὸ τε Ρ, οἱ δὲ τε Γ'. ἀπὸ τε Λ ληφθῶσιν, ἔςαι αβ : βζ : : αγ : γβ : : βγ : γζ· καὶ πάλιν βα : αζ : : γα : αβ : : γβ : βζ· καὶ τελευταῖον αζ : ζβ : : αβ : βγ : : βζ : ζγ. Τέτῳ γὰρ τῷ τρόπῳ ἀναλογιζομένοις, οἱ ὁμόλογοι τῶν ὅρων ταῖς ἴσαις τῶν Γωνιῶν πανταχῇ ὑποκείσονται. Γ'.

Πρότασις Θ.

„ Τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν (αβ) κατὰ τὸν δοθέντα λόγον (ζι : ιλ) τεμεῖν.

Ἀχθήτω ἄπειρος ἡ αψ, ϗ ἐπ' αὐτῆς ληφθήτωσαν απ, πρ ἴσαι ταῖς ζι, ιλ· ἀπὸ δὲ τε ρ ἐπεζεύχθω ἡ ρβ, ϗ πρὸς αὐτὴν διὰ τε π ἤχθω Παράλληλος ἡ πγ. Φημὶ δὴ ὡς οὕτως ἐγένετο τὸ ἐπιταχθέν· δῆλον δὲ ἐκ τῆς Β', Προτάσ. τε ς'. Βιβλίε. κ. 344.

(1) Δ. τε ς'. (2) Δ. τε ς'. (3) Δ. τε ς'.

Πορίσματα.

Α'. Ἐντεῦθεν τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν αβ οὕτω τεμεῖς, ὡς εἶναι τὴν ὅλην πρὸς τὴν ἀποτμηθεῖσαν βγ, ἐν λόγῳ δοθέντι τῷ κατὰ μείζονα ἀνισότητα· τουτέστιν ὡς ἡ ζλ πρὸς τὴν λι, ἐὰν ἐπί τινος μὴ πεπερασμένης Εὐθείας τῆς αψ, λάβῃς μὲν τὴν αρ = ζλ, λάβῃς δὲ ἐπὶ τῆς ρα τὴν ρπ = λι, καὶ ἐπιζεύξῃς τὴν ρβ, ϗ πρὸς αὐτὴν Παράλληλον ἀγάγῃς τὴν πγ.

Β'. Κἀντεῦθεν αὖθις, τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν αγ οὕτω προεκβάλλειν δυνήσῃ ἐπὶ τὸ β, ὡς τὴν ὅλην προαχθεῖσαν αβ εἶναι πρὸς τὴν προσκειμένην βγ, ἐν λόγῳ δοθέντι τῷ κατὰ μείζονα ἀνισότητα, τουτέστιν ὡς ζλ πρὸς λι, λαβὼν ἀμέλειτοι ἐπὶ Εὐθείας μὴ πεπερασμένης τῆς αψ, τὴν μὲν αρ = ζλ, τὴν δὲ ρπ ἐπὶ τῆς ρα ἴσην τῇ λι, ϗ ἐπιζεύξας τὴν πγ, ϗ Παράλληλον ἀγαγὼν πρὸς αὐτὴν τὴν ρβ, ἥτις ἐπὶ τῆς αγ προεκβληθείσης, τὸ Σημεῖον β διορίσει.

Γ'. Κἀντεῦθεν τέως τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν αγ οὕτω προεκβαλεῖν ἕξεις, ὡς εἶναι τὴν αγ πρὸς τὴν ὅλην προεκβληθεῖσαν, ἐν λόγῳ δοθέντι τῷ κατ' ἐλάσσονα ἀνισότητα, τουτέστιν ὡς ἔχει ἡ ζι πρὸς τὴν ζλ, ἀμέλειτοι λαβὼν ἐπὶ Εὐθείας μὴ πεπερασμένης τῆς αψ, Εὐθείας τὰς απ, αρ, ταῖς ζι, ζλ ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ϗ ἐπιζεύξας τὴν πγ, ϗ πρὸς αὐτὴν Παράλληλον ἀγαγὼν τὴν ρβ, ἥτις ἐπὶ τῆς Εὐθείας αγ προεκβληθείσης, τὸ Σημεῖον β διορίσει.

Πρότασις Ι.

„Τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν ἄτμητον (αβ), τῇ δοθείσῃ Εὐθείᾳ (αι) τετμη-
„μένῃ ὁμοίως τεμεῖν (κατὰ λ ϗ π)

κ. 345. Ἐπεζεύχθω ἡ βι ἐπὶ τὰ πέρατα τῶν δοθεισῶν Εὐθειῶν, ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ Σημείου α κατὰ γωνίαν ἠγμένων, παρὰ δὲ τὴν ἐπιζευχθεῖσαν, ἀπὸ τῶν Σημείων ζ ϗ γ ἤχθωσαν Παράλληλοι πρὸς τὴν αβ, ἣν χρὴ τεμεῖν, προσπιπτουσαι κατὰ Σημεῖα τὰ λ ϗ π· Φημὶ δὴ ὡς ἐγένετο τὸ ἐπιταχθέν.

Δῆλον δὲ ἐκ τοῦ Α'. Πορίσμ. τῆς Β'. τοῦ ϛ'.

κ. 346. Καὶ ἄλλως δέπως, ἐὰν ἡ τετμημένη Εὐθεῖα ια μείζων ᾖ τῆς ἣν χρὴ τεμεῖν, βπ, ἔστωσαν Κύκλοι τρεῖς ἀλλήλων ἐφαπτόμενοι περὶ Διαμέτρους τὰς ιζ, ιγ, ια, ἐνηρμόσθω δὲ ϗ ἡ βπ ὑποτείνουσα, ἀπὸ τοῦ ι Σημείου εἰς τὴν τοῦ μείζονος τῶν Κύκλων προσπίπτουσα Περιφέρειαν. Οὕτω γὰρ οἱ δύω ἐλάσσονες Κύκλοι, κατὰ τὰ Σημεῖα λ ϗ π, τὴν βπ Εὐθεῖαν τεμοῦσι, κατὰ λόγον

(1) τῶν τομῶν τῶν τῆς Διαμέτρε ια. Ἐὰν δὲ ἡ ια Εὐθεῖα τετμημένη ᾖ εἰς μέρη τέτταρα, τεσσάρων Κύκλων δεήσει, ϗ ἐὰν εἰς πέντε, πέντε, ϗ οὕτως ἐς ἄπειρον.

Σχόλιον.

Ἐκ δὲ ταύτης τῆς Προτάσεως, ϗ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν εἰς ὁσαδήποτε μέρη ἀλλήλοις ἴσα διαιρεῖν παιδευόμεθα, συνάπτοντες μὲν κατὰ γωνίαν τῇ Εὐθείᾳ αβ (ὡς ἐν τῷ Σχήμ. τῆς Προτ.), ἣν χρὴ τεμεῖν, Εὐθεῖαν μὴ πεπερασμένην τὴν αι, ϗ ταύτην εἰς μέρη ὅσα ἂν δόξῃ ἴσα ἀλλήλοις διαιρεντες τῷ διαβήτῃ, οἷον εἰς αγ, γζ, ζι, κξ., ϗ τὴν ιβ ἐπιζευγνῦντες, ϗ πρὸς αὐτὴν Παραλλήλες τὰς ζλ, γπ ἄγοντες.

Ἄλλως δὲ ϗ ῥᾴδιον, ὡς παρὰ τῷ Μαυρολύκῳ. Ἔςω ἡ αβ τριχοτομητέα, ϗ ἀχθήτω ἤτοι αὐτῆς ὕπερθεν ἢ ἔνερθεν, παράλληλος ἡ ισ μὴ πεπερασμένη, ἀπὸ δὲ τῆς ισ ὑπὸ τὴν αβ κειμένης, ληφθήτωσαν τῷ διαβήτῃ μέρη τρία ἴσα τὰ ιπ, πρ, ρσ, ἅπερ ἂν ἅμα μείζονα ᾖ τῆς αβ, ἐλάσσονα δὲ, ἐὰν ἡ ισ ὑπὲρ τὴν αβ τεθῇ· διὰ δὲ ι ϗ α, ϗ δὴ ϗ διὰ σ ϗ β, ἀχθήτωσαν Εὐθεῖαι συμπίπτεσαι κατὰ τὸ γ (2). Αἱ γεν ἀπὸ τε γ διὰ π ϗ ρ ἀγόμεναι Εὐθεῖαι, τὴν δοθεῖσαν αβ τριχοτομήσεσιν. Ἡ δὲ δεῖξις σαφὴς ἐκ τε Β'. Πορίσμ. τῆς Δ'. Προτ. ϰ. 347.

Ἄλλως ἔτι σὺν Μαυρολύκῳ τὸ αὐτὸ τετο ἐκπερανεμεν. Οἷον κείσθω αβ, ἣν εἰς τέτταρα δεῖ τεμεῖν, καὶ ἀχθήτω Εὐθεῖα μὴ πεπερασμένη ἡ αχ, ϗ πρὸς αὐτὴν Παράλληλος ἡ βψ, ἐδ᾽ αὐτὴ πέρας ἔχεσα· Ἐκ δὴ τέτων ληφθήτωσαν τῷ διαβήτῃ μέρη ἴσα τὰ αλ, λξ, ξπ, ϗ βυ, υσ, σρ, ἐφ᾽ ἑκατέρας δηλ. μονάδι ἐλάσσονα τῶν ἃ χρὴ ἐπὶ τῆς αβ λαβεῖν. αἱ γὰρ διὰ τέτων ἀγόμεναι Εὐθεῖαι λρ, ξσ, πυ, εἰς τέτταρα τὴν δοθεῖσαν αβ τεμεσι. Ἐπειδὴ γὰρ ἐκ κατασκ. αἱ λξ ϗ ρσ ἴσαι τε εἰσὶ ϗ Παράλληλοι, ϗ αἱ ταύτας ἐπιζευγνύεσαι λρ ϗ ξσ (3) ἴσαι ἔσονται ϗ αὐταὶ ϗ Παράλληλοι· ὡσαύτως δὲ ϗ αἱ ξσ ϗ πυ Παράλληλοι εἰσίν. Ἐπειδὴ τοίνυν ἡ απ εἰς μέρη τρία ἴσα ἀλλήλοις τέτμηται, εἰς τρία ἴσα ϗ ἡ αι (4) τετμημένη ἔςαι· παραπλησίως δὲ ϗ ἡ βγ εἰς τρία ἴσα· ἡ τοίνυν ὅλη αβ εἰς ἴσα τέτταρα. ϰ. 348.

Αὗται δὴ αἱ δύω πράξεις εὐχερέςεραι τῆς κατ᾽ Εὐκλείδην εἰσὶ, ὡς ἐφ᾽ ὧν ἐλάσσονες αἱ ἀγόμεναι Παράλληλοι.

---

(1) Β. Πόρ. τῆς Β'. τε ς'. (2) Σχόλ. ΛΓ. τε α'. (3) ΛΓ. τε α'. (4) Α. Πόρ. τῆς Β. τε ς'.

Πόρισμα.

κ. 349. Ἐντεῦθεν δὴ τὸ Τραπέζιον αβγδ, ὅπερ αἱ αδ καὶ βγ Πλευραὶ παράλληλοι εἰσὶν, εἰς μέρη ὁποσαοῦν ἀλλήλοις ἴσα διαμερίζειν μανθάνομεν· Προεκβεβλήσθω γὰρ ἡ βγ εἰς τὸ ε, εἰς ὃ τὴν γε ἴσην εἶναι τῇ αδ. Διὰ γοῦν τὰς ἐναλλὰξ Γωνίας ὑπὸ δαζ καὶ ζεγ, καὶ τὰς αδζ καὶ εγζ (1) ἴσας οὔσας, καὶ δὴ καὶ διὰ τὰς Βάσεις αδ, γε τὰς ἐκ κατασκευῆς ἴσας, τὰ Τρίγωνα αδζ καὶ ζγε (2) ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἔνθεντοι καὶ τὸ Τρίγωνον αβε τῷ Τραπεζίῳ αβγδ ἴσον ἐστί· Καὶ διαιρεθείσης τοίνυν τῆς Βάσεως (3) εἰς ἴσα ὁσαδηποτοῦν μέρη, οἷον εἰς τρία βη, ηρ, ρε, καὶ ἐπιζευχθεισῶν τῶν αη, αρ, ἔσται τὸ αβη Τρίγωνον, καὶ τὸ αηρ, καὶ τὸ αρε, τοῦ Τραπεζίου τριτημόρια. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΙΑ.

„Δυεῖν δοθεισῶν Εὐθειῶν (αβ, βγ) τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

κ. 350. Ἐπεζεύχθω ἡ αγ, ἀπὸ δὲ τῆς βα προεκβληθείσης ληφθήτω ἡ αζ = βγ, διὰ δὲ ζ παρὰ τὴν αγ παράλληλος ἀχθήτω ἡ ζχ μὴ πεπερασμένη, πρὸς ἣν κατὰ τὸ λ ἡ βγ προεκβληθεῖσα καὶ αὐτὴ προσπιπτέτω. Φημὶ δὴ ὅτι αβ : βγ : : βγ : γλ· Καὶ γὰρ αβ : αζ : : βγ : γλ (4)· ἀλλὰ (5) αζ = βγ, ἄρα αβ : βγ : : βγ : γλ· ἧτε γλ ἡ τρίτη οὕτως ἐστὶν ἀνάλογος. Ο. Η. Ε.

Ἄλλως.

κ. 351. Συνεστάθωσαν αἱ αβ, βγ πρὸς ὀρθὰς, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αγ, ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἀχθήτω μὴ πεπερασμένη ἡ γχ, πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς αγ, ἥπερ κατὰ τὸ λ προσαντάτω ἡ αβ προεκβληθεῖσα· Φημὶ δὴ τὴν αβ εἶναι πρὸς τὴν βγ, ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν βλ. Δῆλον δὲ ἐκ τοῦ Α΄. Πορίσματος τῆς Η΄. Προτάσεως.

Σχόλιον.

Δυνατὸν δὲ τὴν δοθεῖσαν ἀναλογίαν, μὴ μόνον διὰ τριῶν ὅρων, ἀλλ᾽ ἔτι καὶ δι᾽ ἄλλων ὑπὲρ ἀριθμὸν πλειόνων προάγεσθαι, καὶ τό γε ἄθροισμα τῆς τῶν ἐς ἄπειρον ἀναλογούντων ὅρων προόδου ὑπ᾽ ὀφθαλμοῖς τίθεσθαι. Περὶ τούτου ἄριστα τῷ Γρηγορίῳ τῷ ἀπὸ τοῦ ἁγίου Βικεντίου, ἐν Β΄. Βιβλ. τοῦ αὐτοῦ πονήματος διείληπται, τὴν τῆς Γεωμετρικῆς προόδου εἰσήγησιν ἀκριβῶς ὑποθεμένῳ. Ταύ-

---

(1) ΚΖ. τοῦ α΄. (2) Κϛ. τοῦ α΄. (3) Διὰ τὸ ἀνὰ χεῖρας Σχόλ. (4) Β. τοῦ ϛ΄. (5) Ἐκ κατ.

τητοι ϗ ἡμῖν ἐπιτετμημένην τοῦ προκειμένου τὴν κατασκευὴν ϗ ἀπόδειξιν ἐνταῦθα ἀποδοτέον.

Λῆμμα Α′.

„Τοῦ κατὰ τὴν ἐλάσσονα ἀνισότητα λόγου λξ πρὸς πρ ἀεὶ συνεχιζο- „μένου, εἰς Μέγεθος παντὸς τοῦ δοθέντος μεῖζον ἥκειν συμβαίνει. κ. 352.

Ἔςω λξ : λρ : : λρ : πλ, κξ: ἔςαι δὴ ϗ ἀνάπαλιν (1) πλ : ρλ : : ρλ : ξλ· ἄρα ϗ ἐν διαιρέσει (2) πρ : ρλ : : ρξ : ξλ, καὶ ἐναλλὰξ (3) πρ : ρξ : : ρλ : ξλ. Ἀλλαμὴν ρλ μείζων ἐςὶ τῆς ξλ, ἄρα ϗ πρ μείζων τῆς ρξ· Ὡσαύτως δείξω ϗ τὴν ιπ μείζονα εἶναι τῆς πρ, ϗ οὕτως ἐφεξῆς· Ἐπειδὴ τοίνυν συνεχιζομένου τοῦ λόγου λξ πρὸς λρ, τῷ πρώτῳ λξ ἀεὶ προσεπιγίγνεται τὰ μέρη ξρ, ρπ, πι, κξ: διηνεκῆ τὴν αὔξησιν ἀπεργαζόμενα, φανερὸν ὡς οὕτως ἥκειν συμβαίνει πρός τι Μέγεθος, ὅπερ ἂν παντὸς τοῦ δοθέντος μεῖζον εἴη. Ο. Ε. Δ.

Λῆμμα Β′.

„Τοῦ κατὰ τὴν μείζονα ἀνισότητα λόγου αβ πρὸς γβ διηνεκῶς συνεχι- „ζομένου, εἰς Μέγεθος παντὸς τοῦ δοθέντος ἔλαττον ἥκειν συμβαίνει.

Κείσθω ἡ λξ, ὅσον ἂν βούλοιο βραχυτάτη, καὶ γινέσθω (4) βγ : βα : : λξ : λρ. Δυνατὸν οὖν τὸν λόγον λξ πρὸς λρ ἐπὶ τοσοῦτον συνεχίζεσθαι, ὥςε ὅρον τινὰ ἐμπεσεῖν (οἷον φέρε τὸν λι), ὃς μείζων εἴη τοῦ αβ (5). Ἀλλὰ γὰρ ἰσαρίθμως τῷ λόγῳ λξ πρὸς λρ, κατὰ ὅρους τοὺς γβ, εβ, ζβ, συνεχιζέσθω ϗ ὁ λόγος αβ πρὸς γβ, ϗ ἔςαι ἡ ζβ ἐλάσσων τῆς ξλ. κ. 353.

Ἐκ γὰρ δὴ τῆς κατασκευῆς φανερὸν, ὅτι ιλ, πλ, ρλ, ξλ ἀνάλογον εἰσὶ ταῖς αβ, γβ, εβ, ζβ· Τοιγαροῦν δι᾽ ἴσου (6) ιλ : ξλ : : αβ : ζβ, καὶ ἐναλλὰξ (7) ιλ : αβ : : ξλ : ζβ. Ἀλλὰ γὰρ (8) ἡ ιλ μείζων τῆς αβ, ἄρα ϗ ἡ ξλ μείζων τῆς ζβ. Ο. Ε. Δ.

Πρόβλημα:

„Τὸν δοθέντα λόγον τὸν κατὰ μείζονα ἀνισότητα αβ πρὸς βγ, δι᾽ ἀ- „πείρων συνεχῶς ὅρων προαγαγεῖν, ϗ τῶν ἁπάντων τὸ ἄθροισμα προθέσθαι.

---

(1) Σχόλ. τῆς Ις. τοῦ ε′. (2) ΙΖ. τοῦ ε′. (3) Ις. τοῦ ε′. (4) Πόρ. Γ. τῆς Θ. τοῦ ϛ′. (5) Λῆμ. Α′. (6) ΚΒ. τοῦ ε′. (7) Ις. τοῦ ε′. (8) Ἐκ κατ.

κ. 354. Α᾽χθήτωσαν Κάθετοι αἱ αλ, βξ, ἴσαι ταῖς δοθείσαις αβ, βγ, διὰ δὲ λ ϗ ξ ἀχθήτω Εὐθεῖα συνιοῦσα (1) τῇ αβγ προεκβληθείσῃ κατὰ τὸ ψ· Φημὶ δὴ Α΄., ὡς ἐὰν ἀπὸ τοῦ γ πρὸς ὀρθὰς ἀγάγῃς τὴν γπ, ἔσται ἡ γπ τρίτη ἀνάλογος. Μεταχθήτω δὴ ἡ γπ εἰς τὴν γε, ἀπὸ δὲ τοῦ ε Κάθετος ἀνήχθω ἡ ερ, ϗ ἔσται ἡ τετάρτη· μετηνέχθω ἡ ερ εἰς τὴν εζ, ϗ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ζσ, ϗ ἔσται ἡ πέμπτη· καὶ οὕτω τοίνυν ὁ λόγος αβ : βγ, τουτέστιν ὁ αλ πρὸς βξ, διὰ τῶν ὅρων αλ, βξ, γπ, ερ, ζσ, κξ: εἴτ᾽ οὖν διὰ τῶν αβ, βγ, γε, εζ, ζι, κξ: ἐς ἄπειρον προαχθήσεται· Α῎πας γὰρ ὅρος, οἷον ὁ ζσ, ἀφαιρεθῆναι δυνήσεται ἀπὸ τοῦ λοιποῦ ζψ· ἐπειδὴ γὰρ ἡ λα, ἤτοι ἡ αβ, ἐλάσσων τῆς αψ, ϗ ἡ ζσ ἐλάσσων ἔσται ϗ αὐτὴ τῆς ζψ (2).

Λέγω δὲ Β΄., ὡς ἡ αψ ἴση ἐστὶ τῷ ὅλῳ ἀθροίσματι τῶν ἐς ἄπειρον ἀναλογούστων.

Α΄. Μέρος. αψ : βψ :: αλ : βξ (3), τουτέστιν ὡς αβ : βγ· καὶ τοίνυν ἐναλλὰξ ϗ ἀνάπαλιν (4) αβ : αψ :: βγ : βψ· ἄρα (5) αψ : βψ :: βψ : γψ· Α᾽λλὰ μὴν (6) αψ : βψ :: λα : ξβ, καὶ βψ : γψ :: ξβ : πγ, ἄρα λα : ξβ :: ξβ : πγ. Ω῾σαύτως δείξω ξβ : πγ :: πγ : ρε, καὶ ἐφεξῆς ἐς ἄπειρον.

Β΄. Μέρος. Α῎παν τὸ τῶν ἀπειροπληθῶν ὅρων ἄθροισμα, οὐδ᾽ ἔλασσον ἐστὶ τῆς αψ, οὐδέγε μεῖζον, ἴσον ἄρα· Καὶ μεῖζον μὲν οὐχὶ, δέδεικται γὰρ ἀνωτέρω ὡς ἡ πγ ἐλάσσων τῆς γψ, ἥτε ρε τῆς εψ, ϗ ἡ σζ τῆς ζψ, ϗ οὕτως ἐφεξῆς τέρματος ἄνευ· δυνήσονται ἄρα ἅπαντες οἱ ὅροι πγ, ρε, σζ, κξ: πέρατος ἄνευ, ἐπ᾽ Εὐθείας τῆς αψ ἀλλήλων ἐχόμενοι συστεθῆναι, οὕτως ὥστε μηδέποτε τοῦ σημείου ψ ἐφικνεῖσθαι, ἐπὶ παντὸς οὑτινοσοῦν ἀριθμοῦ πέρας ἔχοντος πληθυνόμενος· Ο῞τι δὲ οὐδ᾽ εἰ ὑπὲρ ἀριθμὸν ἡ τῶν ὅρων πρόοδος συνεχίζοιτο, τὴν Εὐθεῖαν αψ ὑπερβαλέσθαι δυνήσεται, ἐκ τούτου ἂν εἴη φανερὸν, ὅτι ἅπασα ἡ ἐπ᾽ ἄπειρον προήκουσα τῶν ὅρων πρόοδος, ἐπ᾽ αὐτὴν τὴν αψ ἔχει μετενεχθῆναι, ὥστε οὐδέποτ᾽ ἂν τῆς Εὐθείας αψ μείζων γένοιτο ἡ τοιάδε πρόοδος· ἀλλὰ γὰρ οὐδὲ ἐλάσσων ἂν εἴη τῆς αψ, ἤδη ϗ γὰρ ἐδείχθη τὰς αψ, βψ, γψ συνεχῶς εἶναι ἀνάλογον· Καὶ ὡσαύτως ἂν δειχθείη ϗ ἐπὶ τῶν λοιπῶν εψ, ζψ, ιψ, κξ: Ε᾽πειδὴ τοίνυν μεταγομένων τῶν ἀνάλογον ὄντων πγ, ερ, ζσ, κξ: εἰς τὰς γε, εζ, ζι, κξ:, τὰ λοιπὰ εψ, ζψ, ιψ, κξ: ἀεὶ συνεχῶς ἀνάλογον ἐστὶν, ὡς δέδεικται· ἐφικ-

---

(1) Σχ. μετὰ τὴν ΛΓ. τοῦ α΄. (2) Ε᾽κ τοῦ Α. Πόρ. τῆς Δ. τοῦ ϛ΄. ϗ ἐκ τῆς ΙΔ. τοῦ ε΄. (3) Διὰ τὸ αὐτὸ Πόρισμα. (4) Ις. τοῦ ε΄. μετὰ τοῦ Σχολίου. (5) Β. Πόρ. τῆς ΙΗ. τοῦ ε΄. (6) Α. Πόρ τῆς Δ. τοῦ ϛ΄.

τὸν τέως ἐςὶ πρός τι λοιπὸν (1), ὅ ἂν τῦ δοθέντος παντὸς εἴη ἔλαττον· ταύτη τοι ϗ τῶν ἀναλόγων τὸ ἄθροισμα, ἅπαν ὑπερβάλλει μέγεθος, ὅπερ ἂν τῆς αψ ἔλαττον εἴη. Ἐπεὶ δὲ δὴ ὔτε μεῖζον τυγχάνει ὄν, ὔτε ἔλαττον τῆς αψ, τῇ αὐτῇ ἴση ἔςαι. Ο. Ε. Δ.

Θεώρημα.

„Ἡ τῶν πρώτων ὅρων διαφορὰ, ϗ ὁ ὅρος ὁ πρῶτος, ϗ ὅλον τὸ τῶν „ἀπείρων ἀναλογιῶν ἄθροισμα συνεχῶς ἀνάλογον ἐςί.

Ἐν τῷ ἀνωτ. Σχήματι ἀχθήτω ἡ ξχ Παράλληλος τῇ αψ, ϗ λχ ἔςαι ἡ διαφορὰ τῦ Α΄. ὅρυ αλ, τυτέςι τοῦ αβ, ϗ τῦ Β΄. βξ, ἤτοι βγ. Παραλλήλυ τοίνυν ὔσης τῆς χξ πρὸς τὴν αψ, ἔςαι λχ : χξ : : λα : αψ (2) Ἀλλαμὴν χξ = αβ, ϗ λα = αβ, ἄρα ἡ λχ διαφορὰ ἐςὶ πρὸς αβ τὸν πρῶτον ὅρον, ὡς αβ ὁ πρῶτος ὅρος πρὸς αψ τὸ ὅλον ἄθροισμα. Ο. Ε. Δ.

Τὸ δ᾽ αὐτὸ καθόλυ τε ϗ συντόμως δειχθήσεται ἐν οἱωδήποτε ποσῦ γένει τοιῷδε τρόπῳ. Ἔςω συνεχῶς ἀνάλογον ὁποιαῦν (κἂν ἀριθμοὶ ὦσιν) αψ, βψ, γψ, κξ:, τὰ δὲ πάντα ἐπὶ τὸ πρῶτον μετηνέχθω τὸ αψ· καὶ ὔτως ἔσονται αβ, βγ, γε, εζ, κξ: τῶν ἀναλόγων διαφοραὶ, αἵτινες ἅπασαι συνάμα τῇ ἐχάτῃ πηλικότητι ιψ συνεξισῦνται τῇ πρώτῃ αψ· Ἐπειδὴ τοίνυν τῶν ἀναλόγων ἐς ἄπειρον συνεχιζομένων, ἡ ἐχάτη ποσότης διὰ τῦ Β΄. Λήμματος οἴχεται, σαφὲς ἂν εἴη, τῶν ἐς ἄπειρον ἀναλόγων τὰς διαφορὰς συνισῦσθαι τῷ πρώτῳ ὅρῳ αψ· Εἶτα ἐπειδὴ αψ : βψ : : βψ : γψ, ϗ (3) κατ᾽ ἀντιςροφὴν, ὡς αβ διαφορὰ πρὸς αψ πρῶτον ὅρον, ὅυτω βγ ἡ δευτέρα διαφορὰ πρὸς βψ τὸν ὅρον τὸν Β΄., ϗ ἐφεξῆς ὁμοίως. Ἄρα ὡς αβ πρώτη διαφορὰ πρὸς αψ πρῶτον ὅρον, ὔτως (4) ἅπασαι αἱ διαφοραὶ (τυτέςιν ὡς ἤδη δέδεικται τὸ πρῶτον ποσὸν αψ) πρὸς τὸ ὅλον ἄθροισμα τῶν ἀπείρων. Ο. Ε. Δ. κ. 355.

Πρότασις ΙΒ.

„Τριῶν δοθεισῶν Εὐθειῶν (αβ, βγ, αζ), τετάρτην ἀνάλογον προ„σευρεῖν.

Διατετάχθωσαν αἱ δοθεῖσαι Εὐθεῖαι ὡς ἐπὶ τῦ Σχήματος· ἀχθήτω κ. 356.
δὲ ϗ Εὐθεῖα ἡ βζ, πρὸς ἣν Παράλληλος ἡ γψ, μὴ πεπερασμένη, ἢ δή-

(1) Λῆμ. Β΄. (2) Α. Πόρ. τῆς Δ. τῦ ϛ΄. (3) Α. Πόρ. τῆς ΙΗ. τῦ ε΄. (4) ΙΒ. τῦ ε΄.

πε γψ προσαντάτω ἡ αζ προεκβληθεῖσα κατὰ τὸ λ. Φημὶ δὲ δὴ ὡς αβ : βγ : : αζ : ζλ· δῆλον δὲ ἐκ τῆς Β΄. τε Παρόντος· ὥςε ἡ ζλ ἡ ζητεμένη ἐςὶ τετάρτη ἀνάλογος.

Σχόλιον.

Καλῶς ὁ ἡμέτερος Βεττῖνος, ἐν τοῖς αὐτε θησαυροῖς τῆς Μαθηματικῆς φιλοσοφίας, ἐκ τῆς ΛΕ΄. τε Γ΄. ϗ τῆς ΙΔ΄. τε ἀνὰ χεῖρας, ἧ τῆς παρέσης ἐδόλως ἐξήρτηται, τριῶν δοθεισῶν τὴν τετάρτην, ϗ δυεῖν τὴν τρίτην παρίςησιν ὧδέ πως.

κ. 357. Ε'ὰν ὦσι τρεῖς Εὐθεῖαι, ἡ δευτέρα γβ, ϗ ἡ τρίτη βδ ἐπ' εὐθείας ἐκκείσθωσαν, ϗ τέτων ἡ πρώτη βα ἀπτέσθω κατὰ τὸ β ὑπὸ τῇ τυχέσῃ Γωνίᾳ· εἶτα διὰ τῶν Σημείων γ, α, ϗ δ (1), Κύκλος γεγράφθω, οὗ τῇ Περιφερείᾳ ἡ αβ πρώτη προεκβληθεῖσα προσαντάτω κατὰ τὸ ψ· Ἡ γὰρ βψ ἡ τετάρτη ἔςαι ἀνάλογον.

Ε'πειδὴ γὰρ τὰ Ο'ρθογώνια αβψ, γβδ (2) ἴσα ἀλλήλοις ἐςὶν, ἔςαι αβ : βγ : : βδ : βψ διὰ τὴν ΙΔ΄. τε Παρόντος, τὴν ἐκ ταύτης ὥσπερ εἴρηται, μηδόλως ἐξηρτημένην.

κ. 358. Ε'ὰν δὲ ὦσι δύω Εὐθεῖαι αβ, βγ, τῇ δευτέρᾳ βγ ἐπ' εὐθείας προσκείσθω ἡ βδ ἴση τῇ βγ· εἶτα πρὸς τὴν γδ προσπιπτέτω ἡ πρώτη αβ κατὰ τὸ β ἐν οιᾳδήποτε Γωνίᾳ· Καὶ τὰ λοιπὰ ὡς ἀνωτέρω· Ε'ςαι γὰρ ἡ βψ ἡ ζητεμένη τρίτη ἀνάλογον.

Ἡ ἀπόδειξις παραπλησία ἐςίν· Ι'σων γὰρ ὄντων τῶν ὑπὸ αβψ, γβδ Ο'ρθογωνίων, ἔςαι αβ : βγ : : βδ = βγ : βψ.

Πρότασις ΙΓ.

„Δυεῖν δοθεισῶν Εὐθειῶν (αγ, γβ), μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

κ. 359. Ἡ ἐκ τῶν δύω τῶν δοθεισῶν συγκειμένη αβ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ ξ, ϗ Κέντρῳ τῷ ξ γεγράφθω Κύκλος διὰ α ϗ β· Εἶτα ἀπὸ τε γ πρὸς Ο'ρθὰς ἤχθω ἡ γζ, πρὸς τὴν Περιφέρειαν κατὰ τὸ ζ προσπίπτεσα.

Λέγω δὴ ὡς αγ : γζ : : γζ : γβ.

Α'χθήτωσαν γὰρ αἱ αζ, βζ, ϗ τὸ (3) αζβ Τρίγωνον ἔςαι ὀρθογώνιον, ἀπὸ δὲ τῆς τέτε ὀρθῆς Γωνίας ἡ Κάθετος ζγ ἐπὶ τὴν Βάσιν, ὥςε αγ : γζ : : γζ : γβ (4)

---

(1) *Ε.* τε γ΄. (2) *ΛΕ.* τε γ΄. (3) *ΛΑ.* τε γ΄. (4) *Α.* Πόρ. τῆς Η. τε ς΄.

Πορίσματα.

Κἀντεῦθεν δῆλον, ὡς εἴγε ἐξ οὑτινοσῦν τῶν κατὰ τὴν περιφέρειαν Σημείων ζ, ἐπὶ τὴν Διάμετρον κάθετος ἀχθείη ἡ ζγ, ἡ τοιαύτη μέση ἔσαι ἀνάλογον, μεταξὺ τῶν τῆς Διαμέτρȣ τμημάτων αγ ϗ γβ. Α΄.

Δῆλον δὲ, ϗ ὅτι ἡ μέση ἀνάλογον γζ τὸ τῶν ἄκρων ἡμιάθροισμα αξ ȣδέποτε ὑπερβαλέσθαι δυνήσεται· ἀλλὰ τῶν ἀκροτήτων ἀνίσων ȣσῶν, ἡ μέση γζ τȣ̃ ἡμιαθροίσματος ἐλάσσων ἔσαι, τȣ̃θ᾽ ὅπερ κἀκτῆς ΚΕ΄. τȣ̃ Ε΄. Βιβλίȣ ἐν εἴδει πορίσματος ἐπεφέρετο. Β΄.

Σχόλιον περὶ τὸ Β΄. Πόρισμα.

Πρόβλημα.

Ἐπὶ τῶν Τριῶν ἀναλόγων, δοθέντος τȣ̃ ἀθροίσματος τῶν ἄκρων αβ, ϗ τῆς μέσης δε, τὰς ἀκρότητας αὐτὰς προσευρεῖν. Δεῖ δὲ τὴν μέσην δε τῆς ἡμισείας τȣ̃ ἀθροίσμ. αβ μὴ εἶναι μείζονα (κατὰ τὸ Β΄. Πόρ.).

Περὶ τὴν αβ ὡς περὶ Διάμετρον Κύκλος γεγράφθω· τȣ̃ δὲ δι᾽ Κύκλȣ κατὰ τὸ β (ὃ θάτερον ἐσὶν ὁποτερονȣ̃ν τῶν τῆς Διαμέτρȣ περάτων) ἀπτέσθω ἡ Εὐθεῖα ηβ τῇ δοθείσῃ δε ἴση, ϗ διὰ τȣ̃ η ἀχθήτω ηζ τῇ αβ Παράλληλος, ἥτις διὰ τὸ τὴν δε, ἤτοι τὴν ηβ τῆς τȣ̃ Κύκλȣ Ἡμιδιαμέτρȣ μὴ μείζονα εἶναι, προσπεσεῖται τῷ Κύκλῳ κατὰ τὸ ζ· ἀπὸ δὲ τȣ̃ ζ Σημείȣ ἐπὶ τὴν Διάμετρον αβ, καθείσθω Κάθετος ἡ ζγ, αὕτη γὰρ τὴν αβ τεμεῖ κατὰ τὰς ζητȣμένας ἀκρότητας αγ, γβ.

Ἡ γὰρ ζγ (διὰ τὸ Α΄. Πόρ τῶν ἐνταῦθα) ἡ μέση ἐσὶν ἀνάλογος τῶν αγ, γβ· διὰ δὲ τὴν ΛΔ΄. τȣ̃ Α΄. $\zeta\gamma = \eta\beta$, τȣτέσιν (ἐκ κατασκ.) $\zeta\gamma = \delta\epsilon$· ὥσε περανθῆναι τὸ ζητȣμενον.

Ἀριθμητικῶς δὲ εὑρεθήσονται αἱ αγ, γβ, τῶν αὐτῶν ὡς ἀνωτέρω δοθέντων, ἐὰν ἀχθείσης τῆς ζξ, ἐκ τȣ̃ αὐτῆς Τετραγώνȣ $= \frac{1}{4}\,\alpha\beta^{\mathrm{T}} =$ Τετραγ. τῷ ἀπὸ $\frac{1}{2}\,\alpha\beta$, ἀφαιρεθῇ $\zeta\gamma^{\mathrm{T}} = \delta\epsilon^{\mathrm{T}}$, καταλειφθῇ δὲ $\xi\gamma^{\mathrm{T}}$. Ἡ γὰρ ἐκ τȣ́τȣ Τετραγωνικὴ ῥίζα ξγ προσεθεῖσα μὲν τῇ ἡμισείᾳ τῆς αβ, ἀφαιρεθεῖσα δὲ ἀπὸ τῆς αὐτῆς ἡμισείας, τῇ μὲν θατέραν τὴν αγ, τῇ δὲ θατέραν τὴν γβ τῶν ζητȣμένων ἀκροτήτων παρέξεται.

Κἀντεῦθεν δὴ ϗ τρεῖς, ϗ ἑπτὰ, ϗ πεντεκαίδεκα μέσαι ἀνάλογον ῥᾶσα προσευρεθήσονται, κατ᾽ ἀριθμȣ̀ς δηλονότι τηλικȣ́τȣς, ἡλίκοι ἐκ τῆς συνεχȣ̃ς ἀναλογίας 1, 2, 4. 8, 16 κξ: προθέσει ἀνακύπτȣσιν· ἤτοι γὰρ μία = 1, ἢ τρεῖς = 1 + 2, ἢ ἑπτὰ = 1 + 2 + 4, ϗ ȣ̃τως ἑξῆς. Γ΄.

Ἔςωσαν δοθεῖσαι πηλικότητες α ϗ ε, ϗ τέτων μέση ἡ μ ἡ διὰ τὴν ἀνὰ χεῖρας Πρότασιν ἐξευρισκομένη. Εἶτα μεταξὺ α ϗ μ ληφθήτω μέση ἡ λ, μεταξὺ δὲ μ ϗ ε μέση ἡ ν, ϗ ἔσονται λ, μ, ν, τρεῖς αἱ εὑρεθεῖσαι μέσαι μεταξὺ α ϗ ε· Ὡς εἴγε ϗ ἐφεξῆς μέσαι ληφθῶσι τῶν α ϗ λ, λ ϗ μ, μ ϗ ν, ν ϗ ε, ἔσονται δὴ ἑπτὰ αἱ πᾶσαι μεταξὺ τῶν α ϗ ε, αἱ δὲ αὖθις καὶ μεταξὺ τέτων μέσαι, συνάμα ταῖς ἑπτὰ προτέραις, μέσας τὰς πάσας μεταξὺ τῶν α ϗ ε παρέξϐσι πεντεκαίδεκα. Καὶ ἔτως ἐς ἄπειρον.

Σχόλιον.

Πρὄργϐ δ᾽ ἂν εἴη ἐνταῦθα, ϗ περὶ τῆς τῶν δυεῖν μέσων εὑρέσεως, δυεῖν δοθεισῶν ἀκροτήτων, βραχέ᾽ ἄττα ἡμᾶς διελθεῖν. Εἰς μὲν οὖν τὴν τϐ Προβλήματος τϐδε ἐπίλυσιν, τϐ Πλάτωνος προτρεψαμένϐ, τῶν ἀν Ἑλλάδα γεωμετρισάντων, ὅς τις ϐδεὶς τὴν παρ᾽ ἑαυτϐ σπϐδὴν εἰσενέγκας ϐκ ἔςι νεανικώτατα. Κεῖνται δὲ παρ᾽ Εὐτοκίῳ ἐν Ὑπομνήμασι (1) τοῖς εἰς τὰ Ἀρχιμήδϐ ποικίλοι τρόποι καταλεγόμενοι, λεπτῆς ἐπιγεννήματα φρενὸς, Πλάτωνος, ϗ Ἀρχύτα τϐ ταραντινϐ, ϗ Μεναίχμϐ, ϗ Ἐρατοσθένϐς, ϗ Φίλωνος τϐ Βυζαντίϐ, ϗ Ἥρωνος, ϗ Ἀπολλωνίϐ τϐ περγαίϐ, ϗ Νικομήδϐ, ϗ Διοκλέϐς, ϗ Σπόρϐ, ϗ Πάππϐ. Οἷς δὴ ϗ ἄλλϐς ἔτι προσέθεντο ὅ,τε Οὐερνέρος, ϗ ὁ Γρηγόριος ὁ ἀπὸ ἁγ. Βικεντίϐ, ϗ Ῥενάτος ὁ Καρτέσιος. Ἐξ ὧν δὴ μεθόδων τρεῖς μόνας τὰς τῶν λοιπῶν εὐχερεςέρας ἔδοξεν ἡμῖν ὑποθέσθαι.

Ἡ Μέθοδος ἡ κατὰ Πλάτωνα.

„Μεταξὺ τῶν δοθεισῶν αβ, βγ, μέσας δύω προσευρεῖν.

σχ. 360. Κείσθωσαν αἱ αβ, βγ πρὸς ὀρθὰς, ϗ προσεκβεβλήσθωσαν ἐπ᾽ ἄπειρον πρὸς χ καὶ ψ. Εἶτα ληφθήτωσαν γνώμονες δύω (οὕτως ὁ ἡμέτερος Κλαύδιος ὁ Ῥίχαρδος· ὁ γάρ τοι Πλάτων ἑνὶ ἐκέχρητο φέροντι ἐν τῇ ἑτέρᾳ τῶν Πλευρῶν δε πρὸς ὀρθὰς ἐνεςηριγμένον τὸν γε, δι᾽ ὅλης τῆς δε εἰρημένης Πλευρᾶς ἀπαρεγκλίτως ἀγόμενον), καὶ θατέρϐ μὲν τῶν γνωμόνων ἡ Γωνία δ ἐφηρμόσθω τῇ Εὐθείᾳ βχ, οὕτως ἀλλ᾽ οὖν ὥςε καὶ τὴν ἑτέραν τῶν Πλευρῶν χωρεῖν διὰ τϐ α· κατὰ δὲ τὸ Σημεῖον ε, καθ᾽ ὃ ἡ ἑτέρα τϐ γνώμονος Πλευρὰ τέμνϐσα εἴη τὴν Εὐθεῖαν βψ, ἐφαρμοσθέντος τϐ δευτέρϐ γνώμονος, χωρείτω ἡ τϐτϐ ἑτέρα Πλευρὰ διὰ τϐ γ. Φημὶ δῆτα ὡς αἱ βδ, βε, αἱ δύω μέσαι εἰσὶ μεταξὺ τῶν δοθεισῶν αβ ϗ βγ. Ἔςαι γὰρ αβ : βδ : : βδ : βε : : βε : βγ.

(1) Ὑπομν. Θεωρ. Α. Βιβ. β΄. περὶ Σφαίρας ϗ Κυλίνδρϐ.

Ἡ δὲ ἀπόδειξις σαφὴς ἐκ τȣ Α. Πορίσμ. Προτ. Β΄. Βιβλ. ϛ΄. Τὸ γὰρ αδε Ὀρθογώνιον τρίγωνόν ἐστιν, ἀπὸ δὲ τῆς ἐν τȣ́τῳ ὀρθῆς Γωνίας Κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν κατηνέχθη ἡ δβ· ὥστε κατὰ τὸ εἰρημ. Πόρ. αβ : βδ : : βδ : βε. Διὰ δὲ τὸν αὐτὸν τȣ̃τον λόγον ϗ βδ : βε : : βε : βγ. Δοθεισῶν ἄρα τῶν αβ, βγ, εὕρηνται δύω μέσαι συνεχῶς ἀνάλογον βδ, δε. Ο. Ε. Π.

Ἡ δὲ δὴ μέθοδος αὕτη πρὸ ἁπασῶν τῶν ἄλλων ἐστὶν εὐξύνετος.

Μέθοδος ἡ κατὰ φίλωνα τὸν Βυζάντιον.

Αἱ δύω Εὐθεῖαι αβ, βγ πρὸς Γωνίαν ὀρθὴν συνεστάθωσαν, ϗ πληρωθήτω τὸ Ὀρθογώνιον αβγδ, ϗ προεκβεβλήσθωσαν αἱ δα, δγ ἐπ' ἄπειρον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ τȣ̃ αβγδ Ὀρθογωνίȣ Διαγώνιοι βδ, αγ, ἀλλήλας τέμνȣσαι κατὰ τὸ ε· καὶ Κέντρῳ μὲν τῷ ε, Διαστήματι δὲ τῷ εβ, Κύκλος γεγράφθω, ὃς ἅτε δὴ Ὀρθογωνίȣ, ϗ διὰ τῶν λοιπῶν Γωνιῶν διελεύσεται τῆς γ, ϗ δ, ϗ α (1). Τȣ̃ γὰρ Κύκλου περὶ τὸ Ὀρθογώνιον περιγράφεσθαι (2) δυναμένȣ, τὰ μὲν α, β, γ, δ σημεῖα ἐπὶ τῆς Περιφερείας ἔσται, διὰ δὲ τὰς Ὀρθὰς ὑπὸ αβγ, βγδ, αἱ αγ ϗ βδ Διάμετροι ἔσονται Κύκλȣ τȣ̃ αὐτȣ̃ (3), ὧν ἡ κατατομὴ ε τȣ̃ Κύκλȣ Κέντρον. Εἶθ' ὁ Κανὼν ȣ̔́τω προσηρμόσθω ἐπὶ τȣ̃ σημείȣ β, ὥστε τὰς ἀπολαμβανομένας βη ϗ ξζ ἴσας εἶναι ἀλλήλαις. Φημὶ δὴ τὰς αζ, γη, τὰς δύω μέσας τυγχάνειν μεταξὺ τῶν δοθεισῶν αβ καὶ βγ· εἶναι γὰρ αβ : αζ : : αζ : γη : : γη : βγ. χ. 361.

Ἐπειδὴ γὰρ βη, ξζ (4) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, ϗ αἱ ξη, βζ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται· καὶ ἴσα ἄρα τὰ Ὀρθογώνια ξηβ, βζξ, τȣτέστι τὰ Ὀρθογώνια (5) δηγ, δζα· καὶ ἔστιν οὕτως ηδ : δζ : ἀντιπεπονθότως (6) αζ : ηγ. Ἀλλ' ἐπὶ τȣ̃ Τριγώνȣ ζηδ (διὰ τὴν βα Παράλληλον τῇ Βάσει ηδ) ηδ : δζ : : βα : αζ (7), ἄρα (8) βα : αζ : : ηδ : δζ. Αὖθις ἐπειδὴ δέδεικται ἤδη αζ : ηγ : : βα : αζ, ἔστι δὲ βα : αζ : : ηδ : δζ, τȣτέστι (διὰ τὸ Παράλληλον εἶναι τὴν γβ τῇ βάσει δζ, ἐπὶ τȣ̃ ηδζ Τριγώνȣ) ὡς ηγ : γβ· ἔσται δὴ (9) ϗ αζ : ηγ : : ηγ : γβ. Πᾶσαι τοίνυν αἱ τέσσαρες βα, αζ, ηγ, γβ συνεχῶς ἀνάλογον εἰσί, ϗ ἑπομένως μεταξὺ τῶν δοθεισῶν αβ, βγ, εὕρηνται αἱ δύω μέσαι. Ο. Ε. Ε.

Αὗται αἱ δύω μέθοδοι, καίτοι εὐφυῶς τε ϗ ῥᾳδίως τὴν εὕρεσιν ἐπιτη-

---

(1) ΛΑ. τȣ̃ γ΄. (2) Πόρ. τῆς Ε. τȣ̃ δ΄. (3) ΛΑ τȣ̃ γ΄. (4) Ἐκ κατ. (5) Α. Πόρ. τῆς Λϛ. τȣ̃ γ΄. (6) Διὰ τὴν ΙΔ. τὴν ταύτης μὴ ἐξηρτημένην. (7) Α. Πόρ. τῆς Δ. τȣ̃ ϛ΄. (8) ΙΔ. τȣ̃ ε΄. (9) Διὰ τὴν αὐτήν.

δεύϰσαι, διὰ γεμὴν τὴν κατὰ ἀπόπειραν τϰ͂ τε Γνώμονος καὶ τϰ͂ Κανόνος χρῆσιν, Γεωμετρικαὶ ϰ̓κ εἰσί.

Η′ Μέθοδος ἡ κατὰ Καρτέσιον.

κ. 362. Παρασκευασθήτω τοιϰ͂τοτι ὄργανον. Κανόνες δύω συμπεπήχθωσαν κατὰ τὸ αὐτὸ Σημεῖον υ περιαγόμενοι, ὡς ἔχειν εὐχερῶς τῇ περιαγωγῇ ἀνοίγεσθαι, ἢ κλείεσθαι· τοῖς δὲ Κανόσιν ἐνεστηριγμένοι ἔστωσαν πλείονες γνώμονες, ἀλλήλοις συνημμένοι κατὰ τὰ σημεῖα β, γ, δ, ε, ζ, η, τοιῷδε νόμῳ, ὡς τῶν Κανόνων υχ, υψ ἀπ' ἀλλήλων τῇ ἀνοιγῇ ἀπαγομένων, τὸν γνώμονα βγ, προωθεῖν τὸν γδ τὸν ἐν τῷ Κανόνι υψ, τὸν δε γνώμονα γδ, προωθεῖν τὸν δε τὸν ἐν τῷ Κανόνι υχ· καὶ ὡσαύτως ὑπὸ μὲν τϰ͂ δε τὸν εζ προτελαύνεσθαι, ὑπὸ τϰ́τϰ δὲ τϰ͂ εζ τὸν ηζ, ϗ ϰ̔́τως ἐφεξῆς. Ἐν ᾧ δὲ οἱ Κανόνες υχ, υψ συγκλειόμενοι ἀλλήλοις προσάγονται, ἅπαντα τὰ Σημεῖα β, γ, δ, ε, ζ, η, ἐν ἑνὶ ϗ τῷ αὐτῷ Σημείῳ τῷ α συμπίπτειν. Διὰ γϰ͂ν τϰ͂ τοιϰ͂δε ὀργάνϰ μεταξὺ δυεῖν δοθεισῶν, ϰ̓ μονον δύω, ἀλλὰ ϗ τέσσαρες, ϗ ἓξ, ϗ ὁπόσας ἂν βϰ́λοιο, ἐξευρίσκονται. Ὅπερ ϰ̔́τε διὰ τῶν Κωνικῶν τομῶν, ϰ̓δὲ καθ' ἑτερόν τινα τῶν παρὰ τοῖς ῥηθεῖσι Γεωμέτραις εὑρημένων μεθόδων ἀνυςὸν ὅλως.

Πρὸς εὕρεσιν μέσων δυεῖν, τριῶν δεῖ Γνωμόνων, εἰς δὲ τεσσάρων, γνωμόνων πέντε, ϗ ἑξῆς.

Τῶν τοίνυν δοθεισῶν ἡ ἐλάσσων μετηνέχθω ἐπὶ τὸν Κανόνα υχ, ϗ ἔστω αὕτη ἡ υβ· ἡ δὲ δὴ μείζων ἐπὶ τὸν ἕτερον Κανόνα τὸν υψ, ϗ ἔςω υε· καὶ προσηρμόσθω δὴ τῶν Γνωμόνων ὁ Α′. τῷ σημείῳ β, κἀνταῦθα ςηριχθήτω. Ἀνοιγέσθωσαν δὲ οἱ Κανόνες, ἕως οὗ ἡ τϰ͂ τρίτϰ Γνώμονος Πλευρὰ διέλθοι διὰ τϰ͂ ε. Φημὶ γὰρ ὡς ϰ̔́τως αἱ υγ ϗ υδ, εἰσὶν αἱ δύω ζητϰ́μεναι μέσαι μεταξὺ τῶν δοθεισῶν υβ, υε· εἰσὶ γὰρ υβ : υγ : : υγ : υδ : : υδ : υε.

Ἡ δὲ δεῖξις κατάδηλος ἐκ τϰ͂ Β′. Πορίσματος τῆς Η′ Προτάσεως τϰ͂ ς′. Βιβλίϰ. Ἐκ γὰρ τῆς τϰ͂ ὀργάνϰ κατασκευῆς, ἡ ἐν τῷ υγδ Τριγώνῳ Γωνία ἡ πρὸς τῷ γ, ὀρθὴ οὖσα τυγχάνει, ἀφ' ἧς ἡ γβ Κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν υδ· ἄρα διὰ τὸ εἰρημένον Πόρ. υβ : υγ : : υγ : υδ. Αὖθις δὲ κἀν τῷ Τριγώνῳ υδε, τῆς πρὸς τῷ δ Γωνίας Ὀρθῆς ϰ̓́σης, ϗ ἀπὸ ταύτης Καθέτϰ ἐπὶ τὴν Βάσιν υε ἀγομένης τῆς δγ, ἔςαι υγ : υδ : : υδ : υε. Καὶ εἰσὶν ἄρα υβ, υγ, υδ· υε αἱ τέσσαρες συνεχῶς ἀνάλογον· ὥςε μεταξὺ τῶν δύω δοθεισῶν υβ, υε, εὕρηνται μέσαι δύο υγ, υδ. Ο. Ε. Π.

Ἐὰν δὲ μεταξὺ τῶν υβ, υη, τέσσαρες ὦσιν αἱ ζητϰ́μεναι μέσαι, ἀνοιγέσθωσαν οἱ Κανόνες, ὡς τὴν τȣ͂ Ε΄. τῶν γνωμόνων Πλευρὰν ζη διέρχεσθαι διὰ τȣ͂ η, καὶ ȣ̓́τως ἔσονται αἱ υγ, υδ, υε, υζ, τέσσαρες μέσαι ἀνάλογον μεταξὺ τῶν υβ ϗ υη. Ἡ δὲ δεῖξις κατάδηλος ἐκ τȣ͂ αὐτȣ͂ Πορίσματος.

Ἡ δὲ δὴ Μέθοδος αὕτη, καίτοι δι' ὀργάνȣ περαινομένη, ὃ πολλῷ πλέον τȣ͂ Πλατωνικȣ͂ ἐκείνȣ ἐςὶν ἐργωδέςερον, θαυμαςὴ τῷ ὄντι ἐςὶ, καὶ διὰ τὸ μηδὲν ποιεῖν κατ' ἀπόπειραν, ϗ διὰ τὸ μὴ πρὸς εὕρεσιν δυεῖν μόνων, ἀλλὰ ϗ τεσσάρων ἢν δέοι, ϗ ἕξ, ϗ ὁποσωνȣ͂ν ἐξαρκεῖν.

Διὰ δὲ τῶν δύω μέσων, τῆς ἐπιλύσεως τυγχάνει καὶ τὸ Δηλιακὸν πρόβλημα, ὁ τȣ͂ Κύβȣ διπλασιασμὸς, ϗ Σώματα τὰ τυχόντα κατὰ λόγον τὸν δοθέντα (1) αὔξεσθαι, ἢ μειȣ͂σθαι δύναται, καθάπερ τὰ ἐπίπεδα τῶν Σχημάτων (2) διὰ μιᾶς μέσης εὑρισκομένης. Πρῶτος δὲ ὁ τὴν εἰς τȣ͂το φέρȣσαν τεμὼν φέρεται ὁ Ἱπποκράτης, ᾧ ϗ πάντες ἑξῆς οἱ γεωμετρήσαντες παρηκολȣθηκότες εἰσί.

Καὶ περὶ μὲν τῆς τῶν δύω μεσοτήτων ἐν δυσὶ δεδομέναις ἀκρότησι θήρας τοσαῦτα· Τῶν τις δὲ καθ' ἡμᾶς Γεωμετρίας ἕξιν ἑαυτῷ προσεῖναι οἰόμενος θαυμασίαν, αὐτῆς τῆς νύσσης ἐπ' ἀκριβὲς ᾠήθη ἱκέσθαι τȣ͂ σκοπȣμένȣ, πρῶτος μὲν αὐτὸς μετὰ τοσȣ́τȣς, ϗ μόνος, γεωμετρικώτατα τὴν εὕρεσιν ἐπισκευάσασθαι ἡγησάμενος, πολλὰ μέντοι παραλογισθεὶς ϗ τὸν παρὰ τοῖς εἰδόσιν ἔλεγχον μὴ διαφυγών. Τȣ͂τον οὖν ἀπευθῦναι ὑπὸ ἄλλων εἰς τȣ͂το παρορμηθέντες, αὐτοὶ τὸν ἀγῶνα ἀνεβαλόμεθα, ὅσον δὲ εὐλόγως, αὐτὴν εἴση μετιὼν τὴν ὑφ' ἡμῶν ἐκδοθεῖσαν ἀντίῤῥησιν, ἣν ἐν αὐτῷ τῷ τέλει τȣ͂ ἀνὰ χεῖρας Βιβλίȣ Σοὶ ὑποθήσομεν.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ἐντεῦθεν δὲ λαβεῖν ἔνι τὴν μέθοδον τȣ͂ τὸν τυχόντα λόγον τὸν κατὰ ἐλάσσονα ἀνισότητα, ἕως οὗ δόξειε, προαγαγεῖν. Κείσθω λόγος κατ' ἐλάσσονα ἀνισότητα ὁ αξ πρὸς αγ, ὃν διὰ πλειόνων ὅρων δέον προαγαγεῖν. Ἐπὶ τῆς αγ ὡς ἐπὶ διαμέτρȣ, Ἡμικύκλιον γεγράφθω, ᾧτινι ἀπὸ τȣ͂ α Σημείȣ ἐνηρμόσθω ἡ αβ = αξ· Προαχθήτωσαν δὲ ἐπ' ἄπειρον αἱ αβ, αγ, κατὰ τὰ Σημεῖα φ ϗ π· ἐπιζευχθήτω δὲ ἡ βγ, ϗ πρὸς ὀρθὰς ἀχθήτωσαν αἱ γδ, δε, εζ, ζη, κξ:· Καὶ διὰ τὰς Ὀρθὰς (3) ὑπὸ αβγ, χ. 363.

(1) Ὅρα τὸ Σχόλ. τὸ μετὰ τὴν ΙΗ. τȣ͂ ιβ΄. (2) Ὅρα τὸ Δ. Πόρ. τῆς Κ. τȣ͂ ϛ΄.
(3) ΛΑ. τȣ͂ γ΄. ϗ Ὅρ. ΙΔ. τȣ͂ α΄.

αγδ, αδε, αεζ, αζη, κξ: ἔσονται (1) αἱ αβ, αγ, αδ, αε, αζ, αη, κξ: συνεχῶς ἀνάλογον.

κ. 364. Τὸ δ᾽ αὐτὸ λαβεῖν ἔςαι, ϗ τῆς ὑπὸ αβγ Ὀρθῆς μὴ ὅσης. Συνεςάθωσαν γὰρ κατὰ Γωνίαν τὴν τυχῦσαν βαγ αἱ Εὐθεῖαι αβ, αγ, ϗ προαχθήτωσαν ὡς ἀνωτέρω κατὰ φ ϗ π, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ βγ· τῇ δὲ ὑπὸ αβγ Γωνίᾳ ἴσαι γινέσθωσαν αἱ ὑπὸ αγδ, αδε, αεζ, κξ: Τὰ δὴ Τρίγωνα αβγ, αγδ, αδε, κτ:, διὰ τὰς Γωνίας τάςδε, ϗ τὴν κατὰ τὸ α κοινὴν, Ἰσογώνια (2) ἔςαι, ϗ κατ᾽ ἀκολυθίαν ὅμοια (3). Ἄρα αβ : αγ : : αγ : αδ : : αδ : αε : : αε : αζ, κξ.

Πρότασις ΙΔ.

,, Τῶν ἴσων τε, καὶ μίαν (γ) μιᾷ (ξ) ἴσην ἐχόντων Γωνίαν Παραλληλογράμμων (Χ ϗ Ψ), ἀντιπεπόνθασιν αἱ Πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας Γωνίας (τυτέςιν αγ : γβ : : ζξ : ξλ). Καὶ ὧν Παραλληλογράμμων μίαν μιᾷ ,, ἴσην ἐχόντων Γωνίαν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ Πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας ,, Γωνίας, ἴσα ἐςὶν ἐκεῖνα.

κ. 365. Κείσθωσαν αἱ Πλευραὶ ὅτως ἐπ᾽ εὐθείας, ὥςε τὰς ἴσας Γωνίας γ ϗ ξ πρὸς τὰ ἀντίθετα εἶναι τῆς αβ Εὐθείας· ϗ διὰ τὰς Γωνίας γ ϗ ὑπὸ λγβ τὰς δυσὶν Ὀρθαῖς (4) ἴσας, ἔσονται αἱ ὑπὸ λγβ ϗ ξ δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι ϗ αὐταί· ἔνθεντοι ϗ ζξ, λγ, ἐπ᾽ εὐθείας (5) ἔσονται κείμεναι.

Δείκν. τὸ Α΄. Μέρος. Αἱ ιλ ϗ σβ προεκβαλλόμεναι συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ π. Τὸ γῦν Παραλληλόγρ. Χ ἐςὶ πρὸς τὸ Παραλληλόγρ. Ρ, ὡς αγ (6) πρὸς γβ, τό,τε Ψ ὁμοίως πρὸς τὸ Ρ (7) ὡς ζξ πρὸς ξλ· ἀλλὰ καθ᾽ ὑπόθ. Χ ϗ Ψ ἴσα ἐςὶ, ϗ ἑπομένως (8) Χ : Ρ : : Ψ : Ρ, ἄρα (9) αγ : γβ : : ζξ : ξλ.

Τὸ Β΄. Μέρος. αγ : γβ : : ζξ : ξλ (10)· ἔςι δὲ αγ : γβ : : Χ : Ρ (11)· ϗ πάλιν ζξ : ξλ : : Ψ : Ρ (12)· ἄρα (13) Χ : Ρ : : Ψ : Ρ· ὅθεν δὴ τὰ Χ ϗ Ψ ἴσα (14) ἐςί.

Πόρισμα.

Ἐντεῦθεν ἤρτηται ἡ τῦ τῶν ἀναλογιῶν κανόνος τῦ κατ᾽ ἀντιπεπόνθησιν

(1) Β. Πόρ. τῆς Η΄. τῦ ς΄. (2) Θ. Πόρ. τῆς ΛΒ. τῦ α΄. (3) Δ. τῦ ς΄. (4) ΙΓ. τῦ α΄. (5) ΙΔ. τῦ α΄. (6) Α. τῦ ς΄. (7) Διὰ τὴν αὐτήν. (8) Ζ. τῦ ε΄. (9) ΙΑ. τῦ ε΄. (10) Ἐξ ὑποθ. (11) Α. τῦ ς΄. (12) Διὰ τὴν αὐτ. (13) ΙΑ. τῦ ε΄. (14) Θ. τῦ ε΄.

δεῖξις, δι᾽ οὗ ἐκ τριῶν ὅρων δοθέντων ὁ τέταρτος προσευρίσκεται, πολλαπλασιασμῷ τῶν δύω προτέρων ἐπ᾽ ἀλλήλοις, καὶ διαιρέσει τοῦ γινομένου διὰ τοῦ τρίτου, ὅθεν ἀνακύπτει ὁ ὅρος ὁ Δ΄. Καθάπερ γὰρ ἐπὶ τοῦ κατ᾽ εὐθεῖαν χωροῦντος Κανόνος ἡ τῶν λόγων θεωρεῖται ἰσότης, οἷον ἐὰν ᾖ $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$, ἔσται $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, ἔνθα τὸ τοῦ Α΄. διὰ τοῦ Β΄. διαιρεθέντος πηλίκον, τῷ τοῦ Γ΄. διὰ τοῦ Δ΄. ἴσον τυγχάνει, οὕτως ἐπὶ τοῦ κατ᾽ ἀντιπεπόνθησιν κανόνος θεωρεῖται ἡ τῶν Ὀρθογωνίων ἰσότης, οὕτως ὥστε τὸ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τοῦ Α΄. καὶ τοῦ Β΄. ἴσον εἶναι τῷ Ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τοῦ Γ΄. καὶ τοῦ Δ΄. Οἷον ἐὰν ὦσιν α, β, γ, δ ἀντιπεπονθότες ἀνάλογον· τουτέστιν (1) ἐὰν $\alpha : \gamma :: \delta : \beta$, ἔσται διὰ τὴν ἀνὰ χεῖρας Πρότασιν $\alpha \times \beta = \gamma \times \delta$· Καὶ τοίνυν ἐὰν τὰ γινόμενα ταῦτα ἴσα ὄντα διὰ τοῦ τρίτου γ διαιρεθῶσιν, ἀνακύψει πηλίκον $\frac{\alpha \times \beta}{\gamma} = \delta$, ὅς ἐστι τῶν ὅρων ὁ Δ΄.

Ἔστωσαν πηλικότητες $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\lambda\iota$, $\iota\zeta$ ἀντιπεπονθεῖαι ἀνάλογον· ἔσται $\iota\zeta = \frac{\alpha\beta \times \beta\gamma}{\lambda\iota}$. Οἷον ἔστω $\alpha\beta$ Γραμμή τις ὀργειῶν 40, καὶ $\beta\gamma$ ὀργειῶν 4, ἔσται $\alpha\beta \times \beta\gamma$ ὀργειῶν 160, ἤτοι πλέθρον Ἀγγλικόν. σχ. 366.

Ἀλλὰ προκείσθω δὴ πλέθρον ἕτερον ἴσον τὸ ψ, οὗ μῆκος ὀργειῶν 16 τὸ ιλ, καὶ ζητείσθω ἡ τούτου Πλευρὰ ιζ. Διὰ γοῦν τὴν τῶν Ὀρθογωνίων Χ, Ψ, ἰσότητα, ἐπεὶ τὸ Χ ἐπιμηκέστερον ὂν τυγχάνει τοῦ ἰσομεγέθους Ψ, ἧττον ἔσται τὸ εὖρος. Διὸ τὸ ἔλαττον μῆκος λι ἐπὶ τοῦ πλέθρου Ψ, μεῖζον τὸ εὖρος ιζ ἀπαιτεῖ, ὡς ἡ φύσις βούλεται τοῦ κατὰ τὴν ἀντιπεπόνθησιν κανόνος. Καὶ τῶν ἴσων τοίνυν Ὀρθογωνίων $\alpha\beta \times \beta\gamma$, καὶ $\lambda\iota \times \iota\zeta$ διὰ τῆς λι διαιρεθέντων, ἀνακύψει πηλίκον $\frac{\alpha\beta \times \beta\gamma}{\lambda\iota} \left(= \frac{40 \times 4}{16} = \frac{160}{16}\right) = \iota\zeta = 10$. Τὸ ἄρα πλέθρον τὸ Ψ εὖρος ἔλαχεν ὀργειῶν 10. Ο. Ε. Ε.

Πρότασις ΙΕ.

„Τῶν ἴσων καὶ μίαν (γ) μιᾷ (ξ) ἴσην ἐχόντων Γωνίαν Τριγώνων (αγλ, „ζγβ), ἀντιπεπόνθασιν αἱ Πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας Γωνίας (τουτέστιν $\alpha\gamma : \gamma\beta :: \zeta\xi : \xi\lambda$).

„Καὶ ὧν μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων Γωνίαν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ Πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας Γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

(1) Ὅρ. Β. τοῦ ς΄.

σχ. 367. Κείσθωσαν αγ, ξβ ἐπ' εὐθείας, ὡς ἐν τῇ ἀνωτ. Προτ., ϗ ἔτως ἔσονται ϗ αἱ λγ, ξζ ἐπ' εὐθείας κείμεναι ϗ αὐταὶ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ λβ, καὶ τὰ λοιπὰ τῆς δείξεως χωρήσει ὡς ϗ ἀνωτέρω.

Πόρισμα.

Τὰ Παραλληλόγραμμα ϗ τὰ Τρίγωνα, ὧν αἵτε Βάσεις ϗ τὰ ὕψη ἀντιπεπόνθασιν, ἴσα ἐςὶ, ϗ ἀνάπαλιν.

Δῆλον ἐκ τῶν προηγησαμένων δύω Προτάσεων. Ἔνθα μὲν ἒν τὰ Παραλληλόγραμμα ϗ τὰ Τρίγωνα ὀρθογώνια ἐςὶν ἀντιπεπονθότα τὰ ὕψη, ϗ τὰς Βάσεις, ἴσα εἶναι φανερόν· ἔνθα δὲ δὴ πλαγιογώνια, ἐπειδὴ ϗ ταῦτα τοῖς ὁμοςίχοις Ὀρθογωνίοις τοῖς ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἢ ἴσης Βάσεως ϗ ἰσοϋψέσιν ἴσα (1) ἐςὶν, ἔσονται δὴ ϗ ταῦτα ἐδὲν ἧττον συνισάμενα, εἰ τὰ ὕψη ϗ τὰς Βάσεις ἀντιπεπόνθασιν.

Καὶ ἀνάπαλιν, ἐπειδὴ τὰ ἴσα Παραλληλόγραμμά τε ϗ Τρίγωνα ὀρθογώνια ὄντα, ἀντιπεπόνθασι τὰς Βάσεις ϗ τὰ ὕψη, τὰ δέ τοι πλαγιογώνια Παραλληλόγραμμά τε ϗ Τρίγωνα, τοῖς τὴν αὐτὴν ἢ ἴσας ἔχεσι τὰς Βάσεις ϗ ἰσοϋψέσιν ἐν ὀρθαῖς Γωνίαις ἴσα (2) ἐςὶν, ἔσονται δὴ ἁπλῶς τὰ ἴσα Παραλληλόγραμμά τε ϗ Τρίγωνα, ὁποῖάποτ' ἂν ᾖ, ἀντιπεπονθότα τάς τε Βάσεις ϗ τὰ ὕψη.

Σχόλιον.

σχ. 368. Ἔςω Τρίγωνα δύω αβγ, δβε, ὧν αἱ πρὸς τῷ β Γωνίαι ἅμα ληφθεῖσαι δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ἔςωσαν δὲ ϗ αἱ Πλευραὶ αἱ περὶ τὰς Γωνίας ὑπὸ αβγ, δβε, ἀντιπεπονθεῖαι· ἔςαι τὰ Τρίγωνα ταῦτα ἀλλήλοις ἴσα· Ἐὰν δὲ τὰ Τρίγωνα ἴσα ᾖ, αἱ περὶ τὰς Γωνίας αβγ, δβε Πλευραὶ ἀντιπείσονται.

Πληρέσθω γὰρ τὰ Παραλληλόγραμμα βζ, βη, ϗ διὰ τὰς πρὸς τῷ β Γωνίας τὰς δυσὶν Ὀρθαῖς συνεξισωμένας, αἱ Εὐθεῖαι γβ, βε ἐπ' εὐθείας (3) ἔσονται κείμεναι· διὰ δὲ τὰς Παραλλήλες γβε ϗ δζ, αἱ ἐναλλὰξ (4) ὑπὸ αβγ, βδζ ἴσαι εἰσί· Ἐπειδὴ δὲ (5) αβ : βδ :: εβ : βγ· ἴση δὲ ἡ εβ τῇ δζ (6), ἔςαι ϗ αβ : βδ :: δζ : βγ· Ὅπερ ἐςὶν, ἐπεὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας Γωνίας αβγ, βδζ (7) ἀντιπεπόνθασι, τὰ Παραλληλόγραμμα (8) βη, εζ ἴσα ἐςὶ, καὶ ἑπομένως ϗ τὰ (9) τέτων ἡμίση αβγ, δβε.

---

(1) Λε. Λς. ΛΖ. ΛΗ. τε ά. ϗ Ὅρ. Γ. τε ς́. (2) Αὐτ. ΙΔ. τε ά. (4) ΚΖ. τε ά· (5) Ἐξ ὑποθ. (6) ΛΔ. τε ά. (7) Ὅρ. Β. τε ς́. (8) ΙΔ. τε ς́. (9) ΛΔ. τε ά.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον τῶν Τριγώνων αβγ, δβε, ἴσων ὄντων, ϗ Γωνίας τὰς ὑπὸ αβγ, δβε, δυσὶν Ὀρθαῖς ἰσȣμένων, αβ : βδ : : εβ : βγ. Πληρȣ́σθω γὰρ δὴ τὰ Παραλληλόγραμμα βζ, βη, ἅτινα ἔςαι (1) τῶν ἴσων Τριγώνων διπλάσια, ϗ διὰ τȣ̃το ἴσα, διὰ δὲ τὰς Παραλλήλȣς (2) γβε, δζ ϗ ἰσογώνια. Αἱ ἄρα περὶ τὰς ἴσας Γωνίας Πλευραὶ (3) ἀντιπεπόνθασι, τȣτέςιν αβ : βδ : : δζ ἤτοι βε : βγ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Ις.

„Ἐὰν τέσσαρες Εὐθεῖαι (αβ, ζι, ιλ, βγ) ἀνάλογον ὦσι (τȣτέςιν ἐὰν „ᾖ αβ : ζι : : ιλ : βγ), τὸ Ὀρθογώνιον (Χ) τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμε-„νον (αβ, βγ), ἴσον ἐςὶ τῷ Ὀρθογωνίῳ (Ψ) τῷ ὑπὸ τῶν μέσων (ζι, ιλ) „περιεχομένῳ.

„Καὶ ἐὰν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον Ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ „τῶν μέσων περιεχομένῳ Ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες Εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔ-„σονται.

Μέρος Α΄. Ἐπὶ τῶν Ὀρθογωνίων Χ ϗ Ψ, περὶ τὰς ὀρθὰς ϗ ἑπομένως ἴσας Γωνίας τὰς β ϗ ι, ἔςιν ἐξ ὑποθ. αβ : ζι, ὥσπερ κατ᾽ ἀντιπεπόνθησιν ιλ : βγ· Ἄρα τὰ (4) Χ ϗ Ψ ἴσα ἐςί. Ο. Ε. Δ. σ. 369.

Μέρος Β΄. Ἐπειδὴ τὰ Χ καὶ Ψ τίθεται ἴσα, αἱ ἄρα (5) περὶ τὰς ἴσας Γωνίας β ϗ ι ἀντιπεπόνθασιν, αβ : ζι : : ιλ : βγ. Ο. Ε. Δ.

Πορίσματα.

Κἀντεῦθεν πρὸς τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν αβ, τὸ δοθὲν Ὀρθογώνιον Ψ παραβαλεῖν ῥᾴδιον, ληφθείσης δηλονότι αβ : ζι : : ιλ : βγ (6), καὶ τȣ̃ Ὀρθογωνίȣ Χ ὑπὸ αβ ϗ βγ (7) κατασκευασθέντος· Οὕτω γάρ τοι τὸ Χ Ὀρθογώνιον ἴσον ἔςαι (8) τῷ δοθέντι Ψ, πρὸς τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν αβ παραβεβλημένον· Τὸ δ᾽ αὐτὸ ϗ ἄλλως ἐκτελέσεις διὰ τȣ̃ Πορίσμ. ϗ τȣ̃ Σχολίȣ τῆς ΜΔ΄. Προτάσεως τȣ̃ Α΄. Βιβλίȣ. Α΄.

Ἐντεῦθεν δὲ ἤρτηται ϗ ἡ τȣ̃ κατ᾽ εὐθεῖαν τῶν ἀναλογιῶν κανόνος ἀπόδειξις, καθ᾽ ὃν ἐκ τριῶν ὅρων δοθέντων τὸν Δ΄. ἀνάλογον ἐξευρίσκομεν, ἐπιπολλαπλασιάζοντες ἐπ᾽ ἀλλήλοις τὸν Β΄. ϗ τὸν Γ΄., ϗ τὸ γινόμενον διαιρȣ̃ντες διὰ τȣ̃ Α΄. Διὰ γὰρ τὴν ἀνὰ χεῖρας Πρότ., ἐὰν ᾖ αβ : ζι : : ιλ : βγ, Β΄.

(1) Διὰ τὴν αὐτήν. (2) ΚΖ. τȣ̃ α΄. (3) ΙΔ. τȣ̃ ς΄. (4) ΙΔ. τȣ̃ ς΄. (5) Διὰ τὴν αὐτήν. (6) ΙΒ. τȣ̃ ς΄. (7) Σχόλ. τῆς Μς. τȣ̃ α΄. (8) Διὰ τὴν παρȣ̃σαν.

ἔςαι $αϐ \times βγ = ζι \times ιλ$· καὶ διαιρεμένων τῶν ἴσων διὰ τῦ αὐτῦ αϐ, ἔςαι $ϐγ = \frac{ζι \times ιλ}{αβ}$. Οὕτω κἂν ἀριθμοῖς τοῖς κειμένοις 5, 3, 10, τὸν τέταρτον εὑρεῖν δεῆσαν ἀνάλογον, ἡ τῆς κατ' εὐθεῖαν ἀναλογίας Μέθοδος ἀπαιτεῖ τὸν 3 ϗ 10 τὰς ἀριθμὰς ἐπιπολλαπλασιάζειν ἀλλήλοις, ϗ τὸν γινόμενον 30 διὰ τῦ Α'. 5 διαιρεῖν, ὡς ἐντεῦθεν τῦ ζητεμένε 6 ἀριθμῦ ἀνακύπτοντος.

κ. 370. Γ'. Ἐντεῦθεν δὲ ϗ ἡ πρακτικὴ Μέθοδος κατασκευάζεται, καθ' ἣν οἱ Θυροποιοὶ, ϗ τῶν τεχνιτῶν ὅσοις Ὀρθογωνίων τινῶν ἐλασσόνων χωρίων πρόκειται λαμβάνειν τὴν καταμέτρησιν. Τὸ γὰρ Ὀρθογώνιον χωρίον, Εὐθεῖαν μόνον καταμετρήσαντες, ϗ ἄνευ τῦ ἐκ τῶν Ἀριθμητικῶν ἀναλογισμῦ, ὅσον αὐτό ἐςιν ἔγνωσαν. Οἷον εἰ δέοι φέρε, ὅσων ἐςὶ ποδῶν Τετραγώνων τὸ Ὀρθογώνιον αϐγδ εἰπεῖν, ἀπὸ τῆς β Γωνίας τῇ Πλευρᾷ ϐγ παραϐεβλήσθω ποδιαῖον μέτρον τὸ βε, ἀπὸ δὲ τῆς α Γωνίας τῆς ἐπὶ θατέρῳ πέρατι τῆς πλευρᾶς αβ, δι' ἄκρε τῦ ποδιαίε μέτρε σπαρτίον τεινέσθω, προσπίπτον τῇ Πλευρᾷ δγ (προεκβληθείσῃ ἢν δέοι) κατὰ τὸ ζ· Ὅσων οὖν ἐςι ποδῶν τὸ μῆκος, ἢ γῦν ὅσων δήποτε ὁποιωνῦν ὁμοίων μορίων ποδὸς ἡ Εὐθεῖα δζ, τοσέτων ποδῶν Τετραγωνικῶν, ἢ ποδὸς Τετραγωνικῶν ὁμοίων μορίων ἔςαι τὸ Ὀρθογώνιον αϐγδ. Διὰ γὰρ δὴ τὰς β ϗ δ Ὀρθὰς, ϗ τὰς ὑπὸ βαε, δζα, τὰς ἐναλλὰξ ἐν ταῖς Παραλλήλοις αβ, δζ, ϗ δὴ ϗ διὰ τὰς ὑπὸ ϐεα, δαζ, τὰς ἐναλλὰξ ϗ αὐτὰς ἐν ταῖς Παραλλήλοις ϐε, αδ, τὰ Τρίγωνα εϐα, αδζ (1) ἔςαι ὅμοια· ἔνθεντοι ϗ εϐ:ϐα::αδ:δζ. Καὶ διὰ τὴν ἐν χερσὶ τοίνυν Πρότασιν, ἔςαι τὸ Ὀρθογ. $ϐα \times αδ$ = Ὀρθογωνίῳ $εϐ \times δζ$· ἀλλὰ $ϐα \times αδ$ ἐςὶ τὸ καταμετρέμενον Ὀρθογώνιον, ᾧπερ ἴσον εὕρηται τὸ Ὀρθογώνιον $εϐ \times δζ$, οὗ ὕψος εϐ τὸ ποδιαῖον, τοσέτας Τετραγωνικὰς περιέχοντος πόδας, ἢ γοῦν ποδὸς μόρια Τετραγωνικὰ, ὅσων ποδῶν εἶναι τίθεται τὸ μῆκος, ἢ γῦν ὅσων ποδὸς μερῶν ὁμοίων τὸ τῆς Βάσεως (2) δζ. Ὅσων ἄρα ποδῶν ἡ δζ τῷ μήκει, τοσέτων Τετραγωνικῶν ἔςαι ποδῶν ϗ τὸ Ὀρθογώνιον τὸ αϐγδ. Ο. Ε. Δ.

Ἐὰν δὲ τὸ βε μέτρον διποδιαῖον τύχῃ, ἢ τριποδιαῖον, κτ., τὸ τῦ Ὀρθογωνίε χωρίον ἐν ποσὶ Τετραγωνικοῖς ληφθήσεται, πολλαπλασιαζομένης τῆς δζ διὰ 4, ἢ διὰ 9 κξ: κατὰ λόγον, τυτέςι διὰ τῦ Τετραγώνε τῦ ἀριθμῦ τῶν ποδῶν, ἐξ ὧν τὸ μέτρον αὐτὸ συγκεκρότηται.

Δ'. Ἐὰν Εὐθεῖαι τέσσαρες αϐ, ζι, ιλ, ϐγ ὦσιν ἀνάλογον, τὸ Τρίγωνον αϐγ τὸ ὑπὸ τῆς πρώτης ὡς Βάσεως, ϗ τῆς τετάρτης ὡς ὕψυς, ἴσον ἔςαι

---

(1) Δ. τῦ ϛ'. (2) Ἕπεται ἐκ τῆς Α'. τῦ ϛ'.

τῷ Τριγώνῳ ἐςὶ τῷ ὑπὸ τῆς δευτέρας ὡς Βάσεως, ϗ τῆς τρίτης ὡς ὕψȣς. Εἰσὶ γὰρ τῶν Ὀρθογωνίων Χ καὶ Ψ (ἃ διὰ ταύτην τὴν ἐν χερσὶ Πρότ. ἴσα τυγχάνει) (1) ἡμίσειαι. Ὅρα τὸ Σχῆμ. τȣ̃ Πορ. τῆς ΙΔʹ., ϗ (ὃ ταυτόν) τὸ τῆς Ιϛʹ.

Ἐὰν δύο Τρίγωνα αγλ, ζξϐ, τὰς γ ϗ ξ Γωνίας ἴσας ἔχῃ, ᾖ δὲ τὸ Ὀρθογώνιον αγ × γλ τὸ ὑπὸ τῶν Πλευρῶν τῆς Γωνίας γ, ἴσον τῷ Ὀρθογωνίῳ ζξ × ξβ τῷ ὑπὸ τῶν Πλευρῶν τῆς Γωνίας ξ, τὰ Τρίγωνα αγλ, ζξβ, ἴσα ἔςαι. Καὶ ἀνάπαλιν, ἐὰν τὰ Τρίγωνα αγλ, ζξϐ, οἷς αἱ πρὸς τῷ γ ϗ ξ Γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ἴσα ᾖ, τὰ Ὀρθογώνια αγ × γλ, ϗ ζξ × ξϐ ἴσα ἔςαι· Τȣ̃το δ' αὐτὸ ϗ τοῖς ἰσογωνίοις τῶν Παραλληλογράμμων συμϐαίνει. Διὰ γὰρ τὰ ἴσα Ὀρθογ αγ × γλ, ζξ × ξϐ, ἔςαι κατὰ τὴν ἀνὰ χεῖρας αγ : ζξ : : ξϐ : γλ· Ταύτῃτοι ἐπειδὴ ἐπὶ τῶν Τριγώνων αγλ, ζξϐ τῶν ἰσογωνίων πρὸς γ ϗ ξ, αἱ περὶ τὰς ἴσας Γωνίας Πλευραὶ ἀντιπεπόνθασι, τὰ Τρίγωνα αγλ, ζξϐ ἔσονται (2) ἴσα. Ο. Η. τὸ Αʹ. *Ε.*

Εἶτα ἐχέτω τὰ ἴσα Τρίγωνα αγλ, ζξϐ, τὰς πρὸς τῷ γ ϗ ξ Γωνίας ἴσας (3), ϗ ἔσονται αἱ περὶ τὰς ἴσας Γωνίας Πλευραὶ ἀντιπεπονθεῖαι ἀνάλογον, τȣτέςιν αγ : ζξ : : ξϐ : γλ· ϗ ἑπομένως κατὰ τήνδε τὴν Προτ., ἔςαι Ὀρθογών. αγ × γλ = Ὀρθογων. ζξ × ξβ. Ο. Η. τὸ ἕτερον. Ὅρα τὰ Σχήμ. τὰ ἐν τῇ ΙΕʹ. Προτ.

Αὐτὰ δὲ ταῦτα ϗ περὶ τῶν ἰσογωνίων Παραλληλογράμμων ϗ ὁμοίως ἐχόντων ἀποδειχθήσεται, εἰ μόνον ἀντὶ τῆς ΙΕʹ. ἡ ΙΔʹ. ληφθῇ· ὅρα ϗ τὰ ἐν αὐτῇ Σχήματα.

Ἐὰν ᾖ Α πρὸς Β ἐν μείζονι λόγῳ ἢ Γ πρὸς Δ, ἔςαι τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων Ὀρθογώνιον μεῖζον τȣ̃ ὑπὸ τῶν μέσων· ἐὰν δὲ ἐν ἐλάσσονι ἔλαττον. *ϛʹ.*

Αʹ. Ἐπειδὴ γὰρ Α μείζονα λόγον ἔχει πρὸς Β, ἢ Γ πρὸς Δ, ἑτερόν τι τὸ Ε (τȣ̃ Α ἔλαττον) ἔςαι πρὸς Β, ὡς Γ πρὸς Δ· ὥςε διὰ ταύτην Ε × Δ = Β × Γ· Ἀλλὰ γὰρ Ε < Α, ἄρα Α × Δ > Β × Γ.

Βʹ. Εἰ δὲ Α πρὸς Β ἐν ἐλάσσονι λόγῳ ᾖ, ἢ Γ πρὸς Δ, ἔςαι τι ἕτερον τὸ Ζ (τȣ̃ Α μεῖζον) πρὸς Β = Γ : Δ· ὥςε Ζ × Δ = Β × Γ· Καὶ ἑπομένως Α × Δ < Β × Γ.

Ἔνθεντοι ἐὰν τῶν ἀνίσων Ὀρθογωνίων αἱ Πλευραὶ ȣ̃τω διαταχθῶσιν, ὡς τȣ̃ μὲν τῶν Ὀρθογωνίων μείζονας τὰς Πλευρὰς ἐν ἄκροις, τὰς δὲ τȣ̃ ἐλάσσο- *Ζʹ.*

(1) ΛΔ. τȣ̃ αʹ. (2) ΙΕ. τȣ̃ ϛʹ. (3) Διὰ τὴν αὐτήν.

νος ἐν μέσοις ἐκκεῖσθαι, ὁ μὲν Α΄. πρὸς τὸν Β΄. ὅρον μείζονα τὸν λόγον ἕξει, ἢ ὁ τρίτος πρὸς τὸν Δ΄.

Ἐὰν δὲ αἱ μὲν τȣ ἐλάσσονος Ὀρθογωνίȣ Πλευραὶ ἐν ἄκροις, αἱ δὲ τȣ μείζονος ἐν μέσοις, ἔςαι ὁ τȣ Α΄. πρὸς τὸν Β΄. ὅρον λόγος ἐλάσσων, ὁ δὲ τȣ Γ΄. πρὸς τὸν Δ΄. μείζων.

Σχόλιον.

Ἀλλ' ἐνταῦθα ϗ τὸ θρυλλȣμενον ἐκεῖνο τȣ Πτολεμαίȣ Θεώρημα, ὡς ἐν „ὁτῳοῦν Τετραπλεύρῳ, ὃ ἂν εἰς Κύκλον ἐγγεγραμένον ᾖ, τὸ ὑπὸ τῶν Δια„γωνίων αγ ϗ βδ περιεχόμενον Ὀρθογώνιον, ἴσον ἐςὶ τοῖς δυςὶν Ὀρθογω„νίοις τοῖς ὑπὸ τῶν ἀντιθέτων τȣ Τετραπλεύρȣ Πλευρῶν, οἷον αϐ ϗ γδ, „ἢ αδ ϗ ϐγ, ὡς ἐκ τῆς δε δὴ ϗ τῶν πρὸ ταύτης δειχθέντων ἐξηρτημένον, πρȣ̈ργȣ ἂν εἴη προθέσθαι ϗ δεῖξαι.

χ. 371. Συνεςάθω γὰρ ἡ ὑπὸ ϐαε ἴση τῇ ὑπὸ γαδ· Διὰ γȣ̃ν ταύτας τὰς ἐκ κατασκευῆς ἰσȣμένας, ϗ τὰς ὑπὸ αϐε, αγδ, τὰς διὰ τὸ τῇ αὐτῇ Περιφερείᾳ αδ βεϐηκέναι ἴσας (1) ἀλλήλαις, ἔςαι τὰ Τρίγωνα αβε, αγδ ἀλλήλοις (2) ὅμοια, καὶ ȣ̒τως αϐ : ϐε : : αγ : γδ· καὶ ἑπομένως (3) Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων αϐ × γδ, ἴσον ἔςαι τῷ Ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων αγ × βε. Παραπλησίως διὰ τὰς ὑπὸ ϐαε, γαδ ἴσας ἐκ κατασκ. Γωνίας, κοινῆς προςεθείσης τῆς ὑπὸ γαε, ἔςαι ἡ ὑπὸ ϐαγ ἴση τῇ ὑπὸ εαδ. Διὰ δὲ τὰς ὑπὸ αδε, αγβ, τὰς τῇ αὐτῇ Περιφερείᾳ αβ βεϐηκείας ϗ διὰ τȣ̃το (4) ἴσας, ἔςαι τὰ Τρίγωνα (5) αδε, αγϐ ὅμοια, ϗ αδ : δε : : αγ : βγ. Ἔνθεντοι ϗ (6) Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων αδ × βγ = Ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων αγ × δε· Ἀλλὰ τὰ Ὀρθογώνια αγ × βε, ϗ αγ × δε, ἴσα ἐςὶ (7) τῷ Ὀρθογωνίῳ αγ × βδ. Ἄρα τὸ Ὀρθογώνιον αγ × βδ τὸ ὑπὸ τῶν Διαγωνίων, ἴσον ἐςὶ τοῖς δυςὶν Ὀρθογωνίοις τοῖς ὑπὸ τῶν ἀντιθέτων Πλευρῶν, τῷ τε ὑπὸ αβ × γδ, ϗ τῷ ὑπὸ αδ × ϐγ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΙΖ.

„Ἐὰν τρεῖς Εὐθεῖαι (αβ, ζλ, βγ) ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων (αβ, βγ) περιεχόμενον Ὀρθογώνιον ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης (ζλ) Τετραγώνῳ.

---

(1) *ΚΑ.* τȣ γ΄. (2) Θ. *Πόρισμ.* τῆς *ΛΒ* τȣ α΄. (3) *Διὰ τὴν ἀνὰ χεῖρας.* (4) *ΚΑ.* τȣ γ΄. (5) Θ. *Πόρ.* τῆς *ΛΒ.* τȣ α΄. (6) *Διὰ τὴν παρȣ̃σαν.* (7) *Α.* τȣ β΄.

„ Καὶ εἰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον Ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ
„ τῆς μέσης Τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς Εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Μέρος Α΄. Τῇ μέσῃ ζλ ληφθήτω ἴση ἡ ξ· καὶ ἐπειδὴ καθ' ὑπόθεσιν αβ : ζλ : : ζλ : βγ, ἡ δὲ δὴ ξ = ζλ, ἔσαι ϗ αβ : ζλ : : ξ : βγ· Ὥςε (1) τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων αβ × βγ Ὀρθογώνιον ἴσον τῷ Ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων ζλ × ξ, τȣτέςι τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ ζλ. χ. 372.

Μέρος Β΄. Δείκνυται ὁμοίως ἐκ τȣ̃ δευτέρȣ μέρȣς τῆς ἀνωτέρω.

Πορίσματα.

Ἐκ δὲ δὴ ταύτης, ϗ τῆς ΙΓ΄. εὔδηλον ἐςὶν, ὡς ἐὰν ἐν Κύκλῳ Κάθετος ἡ ζγ ἐπὶ τῆς Διαμέτρȣ ςαθῇ αβ, τὸ ὑπὸ αγβ Ὀρθογώνιον ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπὸ τῆς ζγ Τετραγώνῳ. Ὅρα τὸ ἐν τῇ ΙΓ΄. Σχῆμα. Α΄.

Κἀντεῦθεν πρὸς τὴν δοθεῖσαν αβ, τὸ ἀπὸ τῆς δοθείσης ζλ Τετράγωνον ζξ ῥάδιον παραβαλεῖν, εὑρόντας τὴν πρὸς τὰς αβ καὶ ζλ τρίτην ἀνάλογον βγ (2), καὶ ἐκ τῆς δοθείσης ϗ τῆς εὑρεθείσης, Ὀρθογώνιον (3) τὸ ὑπὸ αβγ συςήσαντας. Τȣ̃το γὰρ ἔσαι τῷ δοθέντι Τριγώνῳ ζξ (4) ἴσον, πρὸς τὴν δοθεῖσαν αβ ἤδη παραβεβλημένον. Β΄.

Κἀνθένδε δήλη ἔτι ἡ Μέθοδος τȣ̃ τὸν δοθέντα λόγον αβ πρὸς ζλ περαιτέρω προαγαγεῖν, ἤτοι τȣ̃ δυεῖν δοθειςῶν αβ ϗ ζλ τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν· ἐὰν ἀμέλει τις τὸ ἀπὸ τȣ̃ ἑπομένȣ ζλ Τετράγωνον πρὸς τὸ ἡγȣ́μενον αβ παραβάλῃ· τρίτην γὰρ ȣ̃τω λήψεται ἀνάλογον τὴν βγ. Ἐὰν δὲ ἐπὶ ἀριθμῶν δοθῇ τις λόγος ὁποιοσȣ̃ν, ὁ τρίτος ἀνάλογος εὑρεθήσεται, πολλαπλασιαθέντος τȣ̃ ἑπομένȣ καθ' ἑαυτὸ, καὶ τȣ̃ ἐντεῦθεν ἀνακύψαντος τῷ πολλαπλασιασμῷ διὰ τȣ̃ ἡγȣμένȣ διαιρεθέντος· Τὸ γάρ τοι πηλίκον (5) ἔσαι ὁ ζητȣ́μενος τρίτος ἀνάλογον. Γ΄.

Ἐντεῦθεν δ' αὖθις ϗ Γραμμὴν ἀπρόσβατον, ἧς θάτερον τῶν περάτων ἂν εἴη προσβάσιμον, καταμετρεῖν διδασκόμεθα. Ἔςω γὰρ ἀπρόσβατος Εὐθεῖα ἡ γζ, ϗ προαγέσθω πέρατος ἄνευ πρὸς τὸ Α. Ἀγέσθω δὲ ἀπὸ τȣ̃ γ Σημείȣ ϗ Κάθετος ἡ γβ, ϗ πρὸς ὁποῖον ἂν δόξῃ τῶν ἐπὶ τῆς Καθέτȣ Σημείων β Γνώμων ἐφηρμόσθω, ἤτοι Γωνία ὀρθὴ συνεςάσθω ἡ ὑπὸ αβζ, ὡς δι' ἑτέρας μὲν τῶν Πλευρῶν βζ τὸ τῆς δοθείσης πέρας ζ, δι' ἑτέρας δὲ τῆς βα τὸ Σημεῖον τῆς αὐτῆς προαχθείσης διοπτάνεσθαι. Εἶτα μετρείσθω ἡ προσβατὴ Δ΄. χ. 373.

---

(1) Διὰ τὴν ἀνωτέρ. (2) ΙΑ. τȣ̃ α΄. (3) Σχόλ. τῆς Μς. τȣ̃ α΄. (4) Διὰ τὴν ἀνὰ χεῖρας. (5) Δῆλον ἐκ τῆς ΙΖ. τȣ̃ ς΄. ϗ τȣ̃ β΄. Πορ. τῆς Ις. τȣ̃ ς΄.

αγ, ϗ ἐκ τῆς ἐφεξῆς ἀναλογίας σαφὲς ἔσαι (1) ἡ ἀπρόσβατος αγ : γϐ : : γϐ : γζ. Ἐὰν οὖν τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς γϐ διὰ τῆς αγ διαιρεθῇ, τὸ πηλίκον (2) δώσει τὴν ζητουμένην Εὐθεῖαν γζ. Ο. Ε. Ε.

Ἐντεῦθεν τέως ϗ ἢν δοθῇ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ αγ ϗ γβ, τῶν τμημάτων τῆς δοθείσης αβ, ἴσον τουτέσι τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς γζ (ὅρα τὸ Σχῆμ. τῆς ΙΓ΄. Προτ.), ἥτις μὴ μείζων εἴη τῆς ἡμισείας τῆς αβ, ῥᾴδιον ἔσαι ἐξευρεῖν τὰς τοῦ Ὀρθογωνίου Πλευρὰς αγ ϗ γβ. Τουτέσι τὴν δοθεῖσαν αβ οὕτω διελεῖν ἐξέσαι κατὰ τὸ γ, ὡς τὸ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῶν αὐτῆς τμημάτων αγ, γβ, ἴσον εἶναι τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς δοθείσης Εὐθείας γζ, ἥτις μὴ μείζων εἴη τῆς ἡμισείας τῆς αβ. Ἐπειδὴ γὰρ ἡ δοθεῖσα γζ (διὰ τὴν ἐν χερσὶ Πρότασιν) μέση ἀνάλογος ἐσὶ μεταξὺ τῶν αγ ϗ γϐ, ἅτινά ἐσι τὰ τμήματα τῆς δοθείσης αβ, τὸ ἐνταῦθα Πρόβλημα εἰς ταυτὸ φέρει ἐκείνῳ, οὗπερ ὑπετέθη ἡ λύσις ἐν τῷ Σχολίῳ τοῦ Β΄. Πορίσματος τῆς ΙΓ΄. Προτάσεως τοῦ παρόντος Βιβλίου.

Σχόλιον Α΄.

κ. 374. „Ἐὰν Τριγώνου οὑτινοσοῦν (3) τοῦ αϐγ, ἡ κατὰ κορυφὴν Γωνία ὑπὸ ϐαγ „δίχα τμηθῇ τῇ Εὐθείᾳ δα, ἥτις τὴν Βάσιν βγ τέμνουσα εἴη, κατὰ τὰ „Τμήματα βδ ϗ δγ, ἔσαι ἡ διαφορὰ τῶν Ὀρθογωνίων, τοῦ τε ὑπὸ τῶν Πλευ„ρῶν αβ ϗ αγ, ϗ τοῦ ὑπὸ τῶν Τμημάτων τῆς Βάσεως βδ ϗ δγ, ἴση τῷ Τε„τραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς αδ τῆς διχοτομούσης τὴν ὑπὸ βαγ Γωνίαν· τουτέσιν „Ὀρθογώνιον ὑπὸ βαγ — Ὀρθογωνίου ὑπὸ βδγ = αδ$^{\mathrm{T}}$.

Γεγράφθω γὰρ Κύκλος περὶ τὸ Τρίγωνον αβγ, ϗ προεκβεβλήσθω ἡ αδ, ὥσε εἰς τὴν Περιφέρειαν προσπεσεῖν κατὰ τὸ ε· καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς εγ ἐν τῷ Τριγώνῳ αεγ, διὰ τοῦ Σημείου δ ἀχθήτω πρὸς τὴν Βάσιν εγ παράλληλος ἡ δζ· ἔσαι γοῦν τὰ αδζ ϗ αεγ Τρίγωνα (4) ὅμοια. Ἀλλὰ γὰρ διὰ τὰς ὑπὸ ϐαδ, εαγ (5) τὰς ἴσας, ϗ τὰς ὑπὸ αβδ, αεγ, τὰς ἐν τῷ αὐτῷ Τμήματι αβεγ, ϗ ἑπομένως ϗ αὐτὰς (6) ἴσας, ϗ τὰ Τρίγωνα αβδ, αεγ, ϗ αὐτὰ (7) ἐσὶν ὅμοια, τὰ ἄρα Τρίγωνα αβδ, αδζ ὅμοια ἐσὶ, καὶ αβ : αδ : : αδ : αζ· Ταύτητοι διὰ τὴν ἐν χερσὶ Πρότασιν τὸ βαζ Ὀρθογώνιον ἴσον τῷ ἀπὸ αδ Τετραγώνῳ· ἀλλ᾽ (8) αδ : αζ : : δε : ζγ, ἄρα αβ : αδ : : δε : ζγ·

---

(1) *Α. Πόρ. τῆς Η. τοῦ ϛ΄.* (2) *Διὰ τὸ ἀνωτ. Γ. Πόρ.* (3) *Ὅρα Ἀριθμητ. καθολ. Σελ.* 103. *τῆς Α΄ ἐκδόσ.* (4) *Α. Πόρ. τῆς Δ. τοῦ ϛ΄.* (5) *Ἐξ ὑποθ.* (6) *ΚΑ. τοῦ γ΄.* (7) *Θ. Πόρ. τῆς ΛΒ. τοῦ α΄. ϗ τὴν Δ. τοῦ ϛ΄.* (8) *Β. τοῦ ϛ΄.*

Καὶ (1) Ὀρθογών. $βα \times ζγ$ = Ὀρθογ. $αδε$ = (2) Ὀρθογωνίῳ $βδγ$. Ἄμφω δὲ τὰ Ὀρθογώνια, τό,τε ὑπὸ $βαζ$, ϗ τὸ ὑπὸ $βα \times ζγ$, τȣτέςι (3) τὸ ὑπὸ $βαγ = αδ^T + βδγ$· Καὶ ἀφαιρεθέντος τοίνυν ἑκατέρωθεν τȣ̃ Ὀρθογωνίȣ $βδγ$, ἔςαι $βαγ - βδγ = αδ^T$. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

Ἐὰν τȣ̃ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένȣ Τριγώνȣ $αβγ$ ἡ κατὰ κορυφὴν Γωνία $α$ δίχα τμηθῇ δἰ Εὐθείας τῆς $αε$ τῆς Κύκλῳ μὲν τῷ αὐτῷ ἐνηρμοσμένης, τὴν δὲ Βάσιν κατὰ τὸ $δ$ τεμνȣ́σης, ἔςαι $βα : αδ :: εα : αγ$· Τὰ γὰρ $βαδ$, $εαγ$ Τρίγωνα ὅμοια ἐςὶν, ὡς ἐκ τȣ̃ προληφθέντος Σχολίȣ κατάδηλον ἐςί.

Σχόλιον Β'.

Καὶ τȣ̃ ἐφεξῆς δὲ Προβλήματος, τȣ̃ ἐν τοῖς Σφαιρικοῖς ȣ̓κ ἀχρήςȣ τυγχάνοντος, ἐκ τῶν προαποδεδειγμένων ληφθείη ἂν ἡ ἐπίλυσις. Ἔςι δὲ τὸ Πρόβλημα τοιȣ̃τον.

„Κύκλȣ δοθέντος τȣ̃ $ζδμ$, διὰ δυοῖν Σημείων $β$ ϗ $γ$ τῶν ἐν αὐτῷ, „Περιφέρειαν Κύκλȣ ἑτέρȣ ἀγαγεῖν, ἥτις ἂν τὴν τȣ̃ δοθέντος Κύκλȣ Περι-„φέρειαν δίχα τέμνοι.

Διὰ τȣ̃ Κέντρȣ $α$ ϗ τȣ̃ ἑτέρȣ τῶν δοθέντων Σημείων $β$, ἀχθήτω Εὐθεῖα μὴ πεπερασμένη $βαμε$· ἀχθήτω δὲ ἀπὸ τȣ̃ Κέντρȣ $α$ Κάθετος $αδ$, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ $βδ$· Ἐν δὲ τῷ Τριγώνῳ $αβδ$, διὰ τὴν ὑπὸ $βαδ$ Ὀρθὴν, ἔςαι ἡ ὑπὸ $αβδ$ (4) ὀξεῖα· Ἐπὶ δὲ τῆς $βδ$ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ $δε$, ἥτις διὰ τὰς ὑπὸ $αβδ$, $βδε$, τὰς δυεῖν Ὀρθῶν ἔσας (5) ἐλάσσονας, διατεμεῖ τὴν μὴ πεπερασμένην $βαμε$, οἷον κατὰ τὸ $ε$. Διὰ μὲν οὖν τῶν Σημείων $βγε$, ἐὰν Κύκλος γραφῇ ὁ $βρε$ (6), λέγω ὅτι τελεσθήσεται τὸ ζητȣ́μενον. σχ. 375.

Ἀχθήτω γὰρ ἡ τȣ̃ ἤδη καταγραφέντος Κύκλȣ $βρε$ ὑποτείνȣσα, διὰ τȣ̃ Κέντρȣ $α$ τȣ̃ δοθέντος Κύκλȣ χωρȣ̃σα, ϗ ἐφ᾽ ἑτέρας τῶν Περιφερειῶν τομῆς $η$, δηλ. ἡ $ηαφ$. Ἀχθήτω δὲ ϗ ἡ τȣ̃ δοθέντος Κύκλȣ $ζδμ$ Διάμετρος $ηαζ$ διὰ τῆς αὐτῆς τῶν Περιφερειῶν τομῆς $η$.

Ἐπειδὴ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς Γωνίας τȣ̃ Τριγώνȣ $βδε$, ἡ Κάθετος ἤχθη $δα$ ἐπὶ τῆς Βάσεως $βε$, ἔσονται (7) $αβ$, $αδ$, $αε$ $\div$. Ὅθεν δὴ διὰ τὴν παρȣ̃σαν

---

(1) Ις. τȣ̃ ϛ'. (2) ΛΕ. τȣ̃ γ'. (3) Α. τȣ̃ β'. (4) Ε. Πόρ. τῆς ΛΒ. τȣ̃ α'. (5) Σχόλ. τῆς ΛΑ. τȣ̃ α'. (6) Ε. τȣ̃ δ'. (7) Α. Πόρ. τῆς Η. τȣ̃ ϛ'.

Πρότ. Ὀρθογών. $\beta\alpha\epsilon = \alpha\delta^T$, τυτέσι διὰ τὰς τῦ δοθέντος Κύκλυ ζδμ ἴσας Ἡμιδιαμέτρυς $\alpha\delta$, $\alpha\eta$, $\alpha\zeta$, ἔσαι τὸ Ὀρθογών. $\beta\alpha\epsilon$ = Ὀρθογ. $\eta\alpha\zeta$. Ἐπεὶ δὲ ἐν τῷ Κύκλῳ $\beta\varrho\epsilon$, αἱ Εὐθεῖαι $\beta\epsilon$, $\eta\phi$ ἀλλήλας τέμνυσι κατὰ τὸ α, ἔσαι (1) Ὀρθογ. $\beta\alpha\epsilon$ = Ὀρθογ. $\eta\alpha\phi$· Ὥστε τὸ Ὀρθογ. $\eta\alpha\zeta$ = Ὀρθογ. $\eta\alpha\phi$· καὶ ἐπομένως (2) $\alpha\zeta = \alpha\phi$, τά,τε Σημεῖα ζ καὶ ϕ συμπεσῦνται, καὶ τό γε τόξον ζδη (3) τῷ τόξῳ ζμη ἴσον ἐσί. Ο. Ε. Ε.

Σχόλιον Γ.

σ. 376. Ἐν ὁτῳῦν Κύκλῳ, οὗ Διάμετρος ἡ $\alpha\beta$, καὶ τῶν τόξων $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, ὀρθὰ Ἡμίτονα ἐσὶ τὰ $\gamma\epsilon$, $\delta\zeta$, Ἡμίτονα δὲ πλάγια τὰ $\alpha\epsilon$, $\alpha\zeta$, Ὑποτείνυσαι δὲ αἱ $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, ἔσαι $\alpha\epsilon$ πρὸς $\alpha\zeta$ ὡς $\alpha\gamma^T : \alpha\delta^T$. Τυτέσι τὰ πλάγια τῶν Ἡμιτόνων εἰσὶν ὡς τὰ Τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν Ὑποτεινυσῶν.

Ἀχθεισῶν γὰρ τῶν $\beta\delta$, $\beta\gamma$, ἔσονται (4) $\beta\alpha$, $\alpha\gamma$, $\alpha\epsilon$ $\div$· καὶ (5) παραπλησίως $\beta\alpha$, $\alpha\delta$, $\alpha\zeta$ $\div$, ἄρα (6) $\beta\alpha \times \alpha\zeta = \alpha\delta^T$, καὶ $\beta\alpha \times \alpha\epsilon = \alpha\gamma^T$· Ἀλλὰ (7) $\alpha\epsilon : \alpha\zeta :: \beta\alpha \times \alpha\epsilon : \beta\alpha \times \alpha\zeta$, ἄρα $\alpha\epsilon : \alpha\zeta :: \alpha\gamma^T : \alpha\delta^T$.

Πρότασις ΙΗ.

„Ἀπὸ τῆς δοθείσης Εὐθείας ($\varrho\sigma$), τῷ δοθέντι Πολυγώνῳ εὐθυγράμ-
„μῳ ($\beta\pi$) ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον Εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

σ. 377. Τὸ δοθὲν Πολύγωνον $\beta\pi$ εἰς Τρίγωνα ἀναλύσας, ἐπὶ τῆς δοθείσης Εὐθείας $\varrho\sigma$, ποίησον Γωνίας (8) τὰς ϱ καὶ ξ ἴσας ταῖς Γωνίαις β καὶ α· συμπεσῦνται δὲ (9) αἱ Πλευραὶ κατὰ τὸ χ· Πάλιν ἐπὶ τῆς $\chi\sigma$ σύσησον Γωνίας τὰς υ καὶ ι ἴσας ταῖς Γωνίαις τ καὶ γ, καὶ συνελεύσονται αἱ Πλευραὶ κατὰ τὸ ψ· Λέγω κτ.

Ἐπειδὴ γὰρ αἱ Γωνίαι ϱ καὶ ξ ἴσαι ταῖς β καὶ α ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ αἱ ϵ καὶ κ (10) ἴσαι ἔσονται ἀλλήλαις. Ἐπειδὴ δὲ (11) καὶ υ καὶ τ συνισῦνται, ἔσαι καὶ ὅλη ἡ $\epsilon\upsilon$ = ὅλη τῇ $\kappa\tau$. Ὡσαύτως δὲ ἐπεὶ ξ καὶ ι = ταῖς α καὶ γ ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ ἡ ὅλη $\xi\iota$ τῇ ὅλῃ $\alpha\gamma$ ἴση ἔσαι. Καὶ ἐπειδὴ αἱ υ καὶ ι ταῖς τ καὶ γ ἴσαι εἰσὶ, καὶ αἱ (12) ψ καὶ π ἴσαι ἔσονται ἀλλήλαις· Τὰ ἄρα Πολύγωνα $\varrho\psi$ καὶ $\beta\pi$ ἰσογώνια ἐσί· Λοιπὸν οὖν δεῖξαι, ὅτι καὶ

(1) *ΛΕ.* τῦ γ΄. (2) Α. τῦ ς΄. (3) Ὁρ. *Κ.* τῦ α΄. (4) *Β.* Πόρ. τῆς *Η.* τῦ ς΄. (5) *Διὰ τὸ αὐτό.* (6) *Διὰ τὴν ἀνὰ χεῖρας.* (7) *Α.* τῦ ς΄. (8) *ΚΓ.* τῦ α΄. (9) *ΙΖ. Πόρ.* τῆς *ΛΒ.* τῦ α΄. καὶ τὸ Σχόλ. τῆς *ΛΑ.* τῦ αὐτῦ. (10) Θ. *Πόρ.* τῆς *ΛΒ.* τῦ α΄. (11) *Ἐκ κατασ.* (12) Θ. *Πόρ.* τῆς *ΛΒ.* τῦ α΄.

τὰς Πλευρὰς ἀνάλογον· ρσ : σχ :: (1) βζ : ζλ· καὶ πάλιν σχ : σψ :: ζλ : ζπ (2). Ἄρα καὶ δι' ἴσε (3) ρσ : σψ :: βζ : ζπ, κτ.

Πόρισμα.

Ἐντεῦθεν δὴ καὶ τὲς Γεωγραφικὲς, καὶ Χωρογραφικὲς, καὶ Γεωδαιτικὲς πίνακας, καὶ τὰς ἀγρῶν, καὶ χωρῶν, καὶ οἰκοδομημάτων ἰχνογραφίας διαγράφειν μεθοδευόμεθα· Οὐδὲν γὰρ ἄλλο οἱ τῶν τοιέτων καταγραφεῖς ποιῦντες εἰσὶν, ἢ τὰ μεγαλα τῶν Σχημάτων πρὸς τὰ βραχύτερα μὲν, ὅμοια δὲ ἀνάγοντες· τῦθ' ὅπερ ἡ ἐν χερσὶ Πρότασις ποιεῖν ὑποτίθησι.

Πρότασις ΙΘ.

„Τὰ ὅμοια Τρίγωνα (Χ, Ψ) ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐςὶ τῶν ὁμολόγων „(τετέςι τῶν τὰς ἴσας Γωνίας ὑποτεινεσῶν) Πλευρῶν αγ καὶ ζι.

Τετέςιν ἐὰν (4) ᾖ αγ : ζι :: ζι : απ τρίτην, τὸ Τρίγωνον Χ ἐςὶ πρὸς τὸ Τρίγωνον Ψ, ὡς αγ πρώτη πρὸς απ τὴν τρίτην ἀνάλογον. Ὅρα τὸν Ι'. Ὁρισμ. τῦ Ε'. Βιβλίε. κ. 378.

Ἐπειδὴ τὰ Χ καὶ Ψ ὅμοια ἐςὶ, (5) βα : ιλ :: αγ : ιζ· Ἀλλ' ἐκ κατασκευῆς αγ : ιζ :: ιζ : απ, ἄρα (6) βα : λι :: ιζ : απ· Ἄρα (τῆς βπ ἐπιζευχθείσης) ἐπὶ τῶν Τριγώνων πβα καὶ Ψ, αἱ Πλευραὶ αἱ περὶ τὰς Γωνίας α καὶ ι τὰς (διὰ τὸν Ὁρισμ. τῶν ὁμοίων Τριγώνων) ἴσας, ἀντιπεπόνθασιν, ὥςε (7) τὰ παβ καὶ Ψ ἴσα ἐςίν· Ἀλλὰ τὸ Χ πρὸς τὸ πβα ἐςὶν (8) ὡς Βάσις αγ πρὸς Βάσιν απ, ἄρα καὶ Χ πρὸς Ψ, ὡς αγ πρὸς απ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Κ.

„Τὰ ὅμοια Πολύγωνα (αβγδε, ζηθικ) διαιρεῖται Α'. εἴς τε ὅμοια Τρί- κ. 379.
„γωνα (Φ, Σ καὶ Π, Τ καὶ Ρ, Υ) καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος· Β'. καὶ ὁμόλογα „τοῖς ὅλοις· Καὶ Γ'. Πολύγωνον πρὸς Πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔ„χει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος Πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον Πλευρὰν (αβ, ζη), „τετέςιν ἤπερ αἱ μεταξὺ τῶν ἴσων Γωνιῶν β, η, καὶ βαε, ηζκ ἔχεσι πρὸς „ἀλλήλας.

Μέρος Α'. Ἐπειδὴ τὰ Πολύγωνα ὅμοια ἐςὶ (9), πάντως καὶ Ἰσογώνια·

---

(1) *Δ.* τῦ *ς'.* (2) *Διὰ τὴν αὐτήν.* (3) *ΚΒ.* τῦ *ε'.* (4) *ΙΑ.* τῦ *ς'.* (5) *Δ.* τῦ *ς'.* (6) *ΙΑ.* τῦ *ε'.* (7) *ΙΕ.* τῦ *ς'.* (8) Α. τῦ *ς'.* (9) *Α.* Ὁρ. τῦ *ς'.*

καὶ τῶν ἐν τȣ́τοις Γωνιῶν ἡ μὲν α ἴση τῇ ζ, ἡ δὲ β τῇ η, ἡ δὲ γ τῇ θ, ἡ δὲ δ τῇ ι, ἡ δὲ ε τῇ κ. Ἐπεὶ δὲ (1) αβ : βγ : : ζη : ηθ, αἵτε β καὶ η Γωνίαι ἴσαι, δῆλον (2) ὡς ὅμοια ἐϛὶ τὰ Τρίγωνα φ ϗ σ. Παραπλησίως ὅμοια δειχθήσονται εἶναι ϗ τὰ Ρ ϗ Υ· Εἶτα ἐπεὶ αἱ ὑπὸ βγδ, ηθι ὁλοχερεῖς, ϗ δὴ ϗ αἱ ἀπ' αὐτῶν ἀφαιρȣ́μεναι ὑπὸ βγα, ηθζ ἴσαι εἰσὶ, ϗ αἱ λοιπαὶ αγδ ϗ ζθι ἴσαι δήπȣ ἔσονται· Ὡσαύτως δείξω ϗ τὰς ὑπὸ αδγ ϗ ζιθ συνιϛᾶσθαι ἀλλήλαις· ὥϛε ϗ ἡ τρίτη (3) ὑπὸ γαδ τῇ τρίτῃ ὑπὸ θζι ἴση ἔϛαι· Καὶ τοίνυν (4) ϗ τὰ π ϗ τ Τρίγωνα ὅμοια ἐϛὶ ϗ αὐτά. Δῆλον ἄρα τὸ Α'.

Μέρος Β'. Ἐπειδὴ ὅμοια τὰ Φ ϗ Σ, ὁ λόγος τȣ͂ Φ πρὸς τὸ Σ διπλασίων (5) ἔϛαι τȣ͂ λόγȣ τῆς γα πρὸς τὴν θζ. Διὰ δὲ τὸν αὐτὸν λόγον ϗ ὁ λόγος τȣ͂ Π πρὸς τὸ Τ διπλασίων ἔϛαι τȣ͂ λόγȣ τῆς γα πρὸς τὴν θζ· Ἄρα (6) Φ : Σ : : Π : Τ· Ὡσαύτως δείξω Π : Τ : : Ρ : Υ· Τοιγαρȣ͂ν (7) ὡς ἓν τῶν ἡγȣμένων Φ πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων Σ, οὕτω πάντα ἅμα τὰ ἡγȣ́μενα Φ, Π, Ρ πρὸς πάντα τὰ ἑπόμενα Σ, Τ, Υ ἅμα, ὅπερ ἐϛὶν, ȣ̔́τω τὸ Πολύγωνον πρὸς τὸ Πολύγωνον. Ο. Η. τὸ Β'.

Μέρος Γ'. Ὁ λόγος τȣ͂ Φ πρὸς τὸ Σ (8) διπλασίων ἐϛὶ τȣ͂ λόγȣ αβ πρὸς ζη Ἀλλ' ὁ λόγος τȣ͂ Πολυγώνȣ πρὸς τὸ Πολύγωνον φθάσας ἐδείχθη ἴσος τῷ λόγῳ τȣ͂ Φ πρὸς τὸ Σ· ἄρα ϗ ὁ λόγος τȣ͂ Πολυγώνȣ πρὸς τὸ Πολύγωνον διπλασίων ἐϛὶ τȣ͂ λόγȣ τῆς αβ πρὸς τὴν ζη. Ο. Η. τὸ Γ'.

Πορίσματα.

Α'. Ἅπαντα τὰ κανονικὰ τῶν Σχημάτων, οἷε τὰ ἰσόπλευρα Τρίγωνα, ϗ τὰ Τετράγωνα, καὶ τὰ Πεντάγωνα, κξ: εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ἐν λόγῳ διπλασίονι τῶν Πλευρῶν. Τὰ γὰρ κανονικὰ πάντα ἀλλήλοις ὅμοια, ὡς δῆλον ἐκ τȣ͂ Α'. Ὁρ. τȣ͂ ϛ'.

Β'. Καὶ ἐὰν ὦτι τρεῖς Εὐθεῖαι ἀνάλογον, ἔϛαι ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, ὡς τὸ τυχὸν ἐπίπεδον Σχῆμα (εἴτε Τρίγωνον ᾖ, εἴτε Τετράπλευρον, εἴτε Πολύγωνον ὁποιονȣ͂ν) τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης, πρὸς τὸ ὅμοιον Σχῆμα ϗ ὁμοίως καταγεγραμμένον τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. Ἢ γȣ͂ν ἔϛαι τῶν ἀναλογων Εὐθειῶν ἡ Α'. πρὸς τὴν Γ'., ὡς ὁποιονȣ͂ν τῶν ἐπιπέδων Σχημάτων τὸ ἀπὸ τῆς Β'., πρὸς τὸ ὅμοιον ϗ ὁμοίως καταγεγραμμένον τὸ ἀπὸ τῆς Γ'. Κατὰ γὰρ τὸν Ι'. τȣ͂ Ε'. Ὁρισμὸν, τῶν τριῶν ἀναλόγων ἡ Α'. ἐϛὶ πρὸς τὴν Γ'. ἐν λόγῳ διπλα-

---

(1) *Διὰ τὸν αὐτόν.* (2) ϛ'. τȣ͂ ϛ'. (3) Θ. *Πόρ. τῆς ΛΒ. τȣ͂ ά.* (4) *Δ. τȣ͂ ϛ'.* (5) *Διὰ τὴν ἀνωτέρω.* (6) *ΛΔ. τȣ͂ έ.* (7) *ΙΒ. τȣ͂ έ.* (8) *Διὰ τὴν ἀνωτέρω.*

σίονι τῆς Α΄. πρὸς τὴν Β΄., ἢ τῆς Β΄. πρὸς τὴν Γ΄. Ὅθεν διὰ τὴν ΙΘ΄. ϗ τὴν παροῦσαν Κ΄. δῆλον τὸ προτεθέν.

Ἐὰν ἐφ᾽ οἱοισδήποτε Σχήμασιν ὁμοίοις, αἱ Πλευραὶ αβ, ζη (ὅρα τὸ Σχ. τῆς Προτ.) αἱ μεταξὺ τῶν ἴσων Γωνιῶν δῆλαι ὦσι, ϗ ὁ λόγος ὁ τῶν Σχημάτων ἔσαι κατάδηλος. Οἷον ἔσω αβ δυοῖν ποδῶν, ϗ ζη ποδ: ἕξ, καὶ γινέσθω 2 : 6 : : 6 : 18. Ἔσαι γάρ τοι τὸ ἔλαττον (1) τῶν Σχημάτων πρὸς τὸ μεῖζον ὡς 2 πρὸς 18, τουτέσιν ὡς 1 πρὸς 9. Ἐξευρίσκεται δὲ ὁ τρίτος ἀνάλογον ἀριθμὸς (2), τοῦ δευτέρου τῶν δοθέντων καθ᾽ ἑαυτὸν πολλαπλασιαζομένου, ϗ τοῦ γινομένου διὰ τοῦ Α΄. διαιρουμένου. Γ΄.

Ἐκ τῆς αὐτῆς δὲ ταύτης Προτάσεως ϗ ἡ ἀρίση μέθοδος ἐπιφέρεται, τοῦ τὸ δοθὲν ὁποιονοῦν εὐθύγραμμον Σχῆμα προσαύξειν, ἢ ἀπομειοῦν κατὰ λόγον τὸν δοθέντα. Δ΄.

Οἷον ἐθελήσας Πενταγώνου οὗ Πλευρὰ ἡ αβ, ἕτερον συσήσασθαι πενταπλάσιον Πεντάγωνον, μεταξὺ τῶν ὅρων τοῦ δοθέντος λόγου αβ πρὸς βγ εὑρὲ (3) μέσην ἀνάλογον τὴν βχ, καὶ ἀπ᾽ αὐτῆς ποίησον (4) Πεντάγωνον τῷ δοθέντι ὅμοιον· τὸ γὰρ τοιοῦτο πενταπλοῦν ἔσαι τοῦ δοθέντος. κ. 380.

Διὰ γὰρ τὸ Β΄. Πόρ. τῆς ἐν χερσὶ, τὸ ἀπὸ τῆς αβ Πεντάγωνον ἐσὶ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βχ, ὡς ἡ αβ πρώτη πρὸς τὴν βγ τρίτην.

Ἤδη δὲ ἐπεὶ ϗ ὁ τῶν Κύκλων λόγος διπλασίων ἐσὶ τοῦ λόγου τῶν Διαμέτρων, ὡς δειχθήσεται ἐν τῇ Β΄. Προτ. τοῦ ΙΒ΄. Βιβλίου, αὕτη ἡ πρᾶξις ϗ πρὸς τοὺς Κύκλους αὐτοὺς ἐπαρκέσει.

Τῶν ὁποιωνοῦν ὁμοίων Σχημάτων εἰδὼς τὸν λόγον, εἴσῃ δὴ ϗ τὸν λόγον ὃν ἔχουσιν αἱ τούτων Πλευραὶ, αἱ μεταξὺ τῶν ἴσων Γωνιῶν προτεινόμεναι. Αὗται γὰρ ἐν ὑποδιπλασίονι λόγῳ εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας τοῦ ὃν ἔχει τὰ Σχήματα. Ε΄.

Οἷον ἔσω τὸ Φ, Π, Ρ πρὸς τὸ Σ, Τ, Υ (ὅρα τὸ Σχ. τῆς Κ΄.) ὡς 4 πρὸς 9. Μεταξὺ δὲ 4 ϗ 9 ἀριθμὸς μέσος ἀνάλογον εὑρεθήτω ὁ 6, ὃ τελεῖται (5) τῆς Τετραγωνικῆς ὑπεξαγομένης ῥίζης ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ $36 = 4 \times 9$. Καὶ ἐπειδὴ 4, 6, 9 $\div$, τά δέ τοι Σχήματα Φ, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ὡς 4 πρὸς 9, ἔσονται αἱ ἐκείνων ὁμόλογοι Πλευραὶ (6) ὡς 4 πρὸς 6, ταυτὸν εἰπεῖν ὡς 2 πρὸς 3.

Κᾀντεῦθεν εὐθύνειν ἐσὶ τοὺς ἀπαιδεύτως οἰομένους, τοὺς τῶν ὁμοίων Σχη- ς΄.

---

(1) *Β. Πόρ. ταύτης.* (2) *Γ. Πόρισμ. τῆς ΙΖ. τοῦ ς΄.* (3) *ΙΓ. τοῦ ς΄.* (4) *ΙΗ. τοῦ ς΄.* (5) *Δῆλον ἐκ τῆς ΙΖ. τοῦ ς΄.* (6) *Πόρ. Β. τῆς παρούσ.*

μάτων λόγȣς ἐπίσης χωρεῖν τοῖς λόγοις τῶν ἐν ἐκείνοις Πλευρῶν. Ἐὰν γὰρ δυοῖν ȣ̓ μόνον Τριγώνων ὁμοίων, ἀλλὰ ϗ Τετραγώνων, Πενταγώνων, Ἑξαγώνων, κξ: (ἢ ϗ Κύκλων), αἱ Πλευραὶ (εἴτ᾽ οὖν αἱ Διάμετροι) ὦσι πρὸς ἀλλήλας ὡς 2 πρὸς 1, τὰ Σχήματα αὐτὰ, τȣτέςι τὰ ὑπὸ τῶν Σχημάτων περιειλημμένα χωρία ἔσονται ὡς 4 πρὸς 1· Καὶ ἐὰν αἱ Πλευραὶ ὦσιν ὡς 3 πρὸς 1, τὰ Σχήματα ἔςαι ὡς 9 πρὸς 1, ἐν διπλασίονι δηλονότι λόγῳ τȣ̃ τῶν Πλευρῶν ἢ τῶν Διαμέτρων· Εἰσὶ γὰρ 4, 2, 1 ∺· ὁμοίως δε ϗ 9, 3, 1 ∺.

Σχόλιον.

ϰ. 381. Ἐπειδὴ τῶν Τετραγώνων Ε, Κ ὁ λόγος διπλασίων ἐςὶ τȣ̃ λόγȣ τῶν Πλευρῶν ξρ, συ, ταύτητοι ὁ λόγος ὁ διπλασίων τῶν ξρ φέρε ϗ συ, διὰ τȣ̃ λόγȣ $ξρ^T$ πρὸς $συ^T$ συνεχῶς εἴωθεν ἐπισημαίνεσθαι. Οἷον ἐὰν ἐπὶ τῶν Πλευρῶν ξρ ϗ συ, συςαθῶσιν ὁποιαδήποτε Σχήματα, ὅμοιά τε ϗ ὁμοίως κείμενα, ἐπειδὴ αὐτὰ ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων Πλευρῶν ξρ, συ, ἔσονται πρὸς ἄλληλα ὡς Τετράγωνον τὸ Ε πρὸς Τετράγωνον τὸ Κ, ὅπερ ἐςιν ὡς $ξρ^T$: πρὸς $συ^T$.

Πρότασις ΚΑ.

„Τὰ τῷ αὐτῷ Εὐθυγράμμῳ (γ) ὅμοια, ϗ ἀλλήλοις ὅμοια (α, β) εἰσί.

ϰ. 382. Δῆλον ἐκ τȣ̃ Α'. Ὁρισμ. τȣ̃ ϛ'., ϗ τȣ̃ Α'. Ἀξιώμ. τȣ̃ Α'., ϗ τῆς ΙΑ'. τȣ̃ Ε'.

Ἐπειδὴ γὰρ τό,τε α καὶ τὸ β, ἑκατέρῳ δηλονότι τὼ Σχήματε τῷ αὐτῷ γ ὁμοίω ἐςὸν, ἑκατέρω δήπȣ ἔσεσθον τῷ αὐτῷ καὶ ἰσογωνίῳ ἀνάλογον ἔχοντε, ϗ τὰς περὶ τὰς ἴσας Γωνίας Πλευρὰς ταῖς τȣ̃ γ· Καὶ ἰσογωνίω ἄρα τὼ α ϗ β Τριγώνω ϗ ἀλλήλοιν, ϗ ἀνάλογον ἔχοντε τὰς περὶ τὰς ἴσας Γωνίας Πλευρὰς, ϗ δὴ ϗ ὁμοίω.

Πρότασις ΚΒ.

„Ἐὰν τέσσαρες (ἢ πλείȣς) Εὐθεῖαι (ζι, λπ, ϗ ξρ, συ) ἀνάλογον ὦ-
„σι, ϗ τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν Εὐθύγραμμα ὅμοιά τε, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα
„(Α, Β, ϗ Ε, Κ) ἀνάλογον ἔςαι· καὶ ἀνάπαλιν

„Κἂν τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν Εὐθύγραμμα (Α, Β, ϗ Ε, Κ) ὅμοιά τε ϗ ὁ-
„μοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ, ϗ αὗται αἱ Εὐθεῖαι (ζι, λπ, ϗ ξρ,
„συ) ἀνάλογον ἔσονται.

ϰ. 383. Ἡ δεῖξις τȣ̃ Α'. Μέρȣς ἐκ τῆς ΛΔ'. τȣ̃ Ε' ἐςὶ σαφής· Ἐπειδὴ γὰρ οἱ λόγος Α : Β ϗ Ε : Κ (1) εἰσὶ διπλασίονες τῶν λόγων ζι : λπ ϗ ξρ : συ· οἱ δὲ (2) ἴσοι, κἀκεῖνοι ἄρα.

Τὸ δέ τοι Β'. Μέρος, ϗ αὐτὸ δῆλον ἐκ τῆς ΛΕ'. τȣ͂ Ε'. Ἐπειδὴ γὰρ ἴσοι οἱ λόγοι ὅ,τε Α : Β ϗ ὁ Ε : Κ· διπλασίονες δὲ (3) οὗτοι εἰσὶ τῶν λόγων ζι : λπ ϗ ξρ : συ, ἔσονται δὴ ϗ ἐκεῖνοι ἀλλήλοις ἴσοι.

Πορίσματα.

Κἀντεῦθεν τὴν ἀρχὴν οἶδεν ἡ μέθοδος τȣ͂ πολλαπλασιάζειν τε, ϗ διαιρεῖν τὰς ῥίζας τὰς τετραγωνείȣς. Ἐὰν γὰρ ἐπ' ἀλλήλαις πολλαπλασιαθῶσιν αἱ ποσότητες, αἷς τὰ ἐπίσημα τῶν ῥιζῶν προσῆπται, τῷ δέ τοι γινομένῳ ἐπισημειωθῇ τὸ τῆς αὐτῆς ῥίζης Σημεῖον, τῶν δοθεισῶν ȣ̂τω ῥιζῶν ἀνακύψει τὸ παραγόμενον. Οἷον κείσθωσαν $\surd 5$ ϗ $\surd 3$, ἃς χρὴ ἐπιπολλαπλασιάσαι, φημὶ δὴ ὡς τὸ γινόμενον ἐςὶ $\surd 15$· ὅρος γὰρ δὴ πολλαπλασιασμȣ͂ οὗτος, τὸ τὴν μονάδα εἶναι πρὸς τὸν πολλαπλασιάζοντα (φέρε 1 : $\surd 3$), ὡς ὁ πολλαπλασιαςέος ($\surd 5$) πρὸς τὸ παραγόμενον. Ὥςε διὰ τὴν ἀνὰ χεῖρας Πρότασιν, τὸ ἀπὸ μονάδος Τετράγωνον ἐςὶ πρὸς τὸ ἀπὸ τȣ͂ πολλαπλασιαςȣ͂, ὡς τὸ ἀπὸ τȣ͂ πολλαπλασιαςέȣ πρὸς τὸ ἀπὸ τȣ͂ παραγομένȣ. Τȣ͂το δέ ἐςιν, εἴπερ ἀντὶ τȣ͂ Παραγομένȣ ἀριθμȣ͂ τεθῇ τὸ π, ἔςαι $1 : 3 :: 5 : \pi^{T}$· ἀλλ' $1 : 3 :: 5 : 15$, ἄρα $\pi^{T} = 15$, καὶ ἑπομένως $\pi = \surd 15$. — Α'.

Αὖθις εἰ δέοι $\surd 15$ διελεῖν διὰ $\surd 5$, πηλίκον ἔςαι $\surd 3$, διαιρȣμένȣ δηλονότι τȣ͂ 15 διὰ 5, ϗ πρὸ τȣ͂ πηλίκȣ 3 τȣ͂ ἐπιςήμȣ τῆς ῥίζης προτασσομένȣ· ὅρος γὰρ διαιρέσεως τὸν διαιρέτην ἔχειν πρὸς τὸν διαιρετέον, ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸ πηλίκον· Ὥςε διὰ τὴν παρȣ͂σαν Πρότασιν, τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τȣ͂ διαιρέτȣ, ἐςὶ πρὸς τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τȣ͂ διαιρετέȣ, ὡς τὸ ἀπὸ μονάδος Τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τȣ͂ πηλίκȣ. Τȣτέςιν ἐὰν ἀντὶ τȣ͂ πηλίκȣ τεθῇ λ, ἔςαι $5 : 15 :: 1 : \lambda^{T}$· ἀλλὰ $5 : 15 :: 1 : 3$, ἄρα $\lambda^{T} = 3$, ϗ ἑπομένως $\lambda = \surd 3$.

Ἐὰν εὐθεῖα Γραμμὴ αβ τμηθῇ ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ γ, τὸ Ὀρθογών. τὸ ὑπὸ τῶν Τμημάτων αγ, γβ περιεχόμενον, μέσον ἀνάλογον ἐςὶ μεταξὺ τῶν ἀπὸ τῶν Τμημάτων αὐτῶν Τετραγώνων. Καὶ πάλιν τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης αβ ϗ τȣ͂ ἑτέρȣ τῶν Τμημάτων αγ, ἢ γβ περιεχόμενον Ὀρθογώνιον, μέσον ἀνάλογον ἐςὶ μεταξὺ τῶν Τετραγώνων, τȣ͂ τε ἀπὸ τῆς ὅλης αβ, ϗ τȣ͂ ἀπὸ τȣ͂ εἰρημένȣ Τμήματος αγ ἢ γβ. Καταγραφέντος γὰρ ὡς ἐπὶ Διαμέτρȣ τῆς — Β'. χ. 384.

(1) ΙΘ. ϗ Κ. τȣ͂ ς'. (2) Ἐξ. ὑποθ. (3) Διὰ τὰς ἀνωτ.

$\alpha\beta$, τῦ Ἡμικυκλίȣ $\alpha\zeta\beta$, ϗ ἀχθείσης ἐπὶ τὴν Διάμετρον Καθέτȣ τῆς $\gamma\zeta$, ἐὰν πληρωθῇ τὸ ὀρθογώνιον Τρίγωνον $\alpha\zeta\beta$, εὔδηλον ὅτι (1) $\alpha\gamma : \gamma\zeta :: \gamma\zeta : \gamma\beta$, ἄρα διὰ ταύτην $\alpha\gamma^T : \gamma\zeta^T :: \gamma\zeta^T : \gamma\beta^T$· Τȣτέϛιν (2) $\alpha\gamma^T : \alpha\gamma\beta :: \alpha\gamma\beta : \gamma\beta^T$.

Ἀλλὰ γὰρ (3) $\beta\alpha : \alpha\zeta :: \alpha\zeta : \alpha\gamma$· ὥϛε $\beta\alpha^T : \alpha\zeta^T :: \alpha\zeta^T : \alpha\gamma^T$· Ἄρα (4) $\beta\alpha^T : \beta\alpha\gamma :: \beta\alpha\gamma : \alpha\gamma^T$. Τὸν αὐτὸν δὲ δήπȣ τρόπον ϗ $\alpha\beta^T : \alpha\beta\gamma :: \alpha\beta\gamma : \beta\gamma^T$.

Πρότασις ΚΓ.

„Τὰ ἰσογώνια Παραλληλόγραμμα (Χ, Ψ) λόγον ἔχει τὸν συγκείμε-„νον ἐκ τῶν Πλευρῶν (τȣτέϛι τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν λόγων τῶν Πλευ-„ρῶν $\alpha\gamma : \gamma\beta$, ϗ $\lambda\gamma : \gamma\zeta$).

κ. 385. Ὅπερ ἐϛὶν, ἐὰν γένηται $\gamma\beta : \Xi :: \lambda\gamma : \gamma\zeta$, ἔϛαι (5) $X : \Psi :: \alpha\gamma : \Xi$. Ὅρα τὰ ἡμῖν ἀποδεδειγμένα Βιβλ. Ε΄. Μέρ. Γ΄. Ἀριθ. ΙΓ΄, καὶ τὰ ἐν Ὅρ. Ε΄. τȣ̃ ϛ΄. Βιβλίȣ.

Κείσθωσαν γὰρ αἱ $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ οὕτως ἐπ' εὐθείας, ὥϛε τὰς ἴσας Γωνίας ὑπὸ $\alpha\gamma\lambda$, $\beta\gamma\zeta$ ἐπὶ τὰ ἀντίθετα τῆς $\alpha\beta$ Εὐθείας ἀφορᾶν, ϗ οὕτως (6) ἔσονται αἱ $\gamma\lambda$, $\gamma\zeta$ ἐπ' εὐθείας ϗ αὐταὶ κείμεναι.

Συμπιπτέτωσαν οὖν αἱ $\iota\lambda$, $\sigma\beta$ κατὰ τὸ π· Καὶ τοίνυν τὸ Χ Παραλληλόγραμμον (7) ἐϛὶ πρὸς τὸ Παραλληλόγραμμον Ρ, ὡς $\alpha\gamma$ πρὸς $\gamma\beta$, τὸ δὲ Ρ πρὸς τὸ Ψ (8) ὡς $\lambda\gamma$ πρὸς $\gamma\zeta$ (τȣτέϛιν ὡς $\gamma\beta$ πρὸς Ξ). Ὥϛε (9) δι' ἴσου $X : \Psi :: \alpha\gamma : \Xi$. Ο. Ε. Δ.

Πορίσματα.

Α. Ἐκ ταύτης οὖν ϗ τῆς ΛΔ΄ τȣ̃ Α΄. δῆλον, ὅτι τὰ Τρίγωνα τὰ μίαν (οἷον τὴν πρὸς τῷ γ) ἴσην Γωνίαν ἔχοντα, λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τῶν λόγων τῶν Πλευρῶν $\alpha\gamma : \gamma\beta$, ϗ $\lambda\gamma : \gamma\zeta$ τῶν περὶ τὰς ἴσας Γωνίας.

Β΄. Ὅτι τὰ Ὀρθογώνια, ϗ δὴ (10) ϗ τὰ ὁποιαδήποτε Παραλληλόγραμμα, λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τῶν λόγων Βάσεως πρὸς Βάσιν, ϗ ὕψȣς πρὸς ὕψος. Ὡσαύτως δ' ἄντις εἰσβαλεῖν ἔχει ϗ περὶ τῶν Τριγώνων (11) τῶν τε ὀρθογωνίων ϗ ὁποιωνȣ̃ν ἄλλων.

---

(1) *Α. Πόρ. τῆς Η. τȣ̃ ϛ΄.* (2) *Α. Πόρ. τῆς ΙΖ. τȣ̃ ϛ΄.* (3) *Β. Πόρ. τῆς Η. τȣ̃ ϛ΄.* (4) *Διὰ τὴν ΙΖ. τȣ̃ ϛ΄.* (5) *Διὰ τὸν Ε΄. Ὁρισμ. τȣ̃ ϛ΄.* (6) *ΙΓ. ΙΔ. τȣ̃ α΄.* (7) *Α. τȣ̃ ϛ΄.* (8) *Διὰ τὴν αὐτήν.* (9 *ΚΒ. τȣ̃ ε΄.* (10) *ΛΕ. ϗ Λϛ. τȣ̃ α΄., καὶ Ὅρ. Γ. τȣ̃ ϛ΄.* (11) *Ὁρισμ. Γ. τȣ̃ ϛ. ϗ ΛΖ. ϗ ΛΗ. τȣ̃ α΄.*

Δῆλον δὲ ϗ ὅπως ἡ τῶν Τριγώνων ϗ τῶν Παραλληλογράμμων ἀναλογία παρίσαται. Ἔςωσαν γὰρ Παραλληλόγραμμα τὰ Χ ϗ Ψ, ϗ τέτων Βάσεις αἱ αγ, γβ, ὕψη δὲ τὰ γλ, γζ. Καὶ γινέσθω (1) ὡς γλ ὕψος, πρὸς ὕψος τὸ γζ, οὕτω τῶν Βάσεων ἡ ἑτέρα γβ πρὸς Ξ. Ἔςαι γὰρ δὴ τὸ Παραλληλόγραμμον Χ πρὸς τὸ Παραλληλόγραμμον Ψ, ὡς αγ πρὸς Ξ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΔ.

„Παντὸς Παραλληλογράμμε (σζ) τὰ περὶ τὴν Διάμετρον (αβ) Παραλ-„ληλόγραμμα (γλ, ξι), ὅμοια ἐςὶ τῷ τε ὅλῳ ϗ ἀλλήλοις, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ἀμέλειτοι τὰς ὁμολόγες Πλευρὰς, ἤτοι ἐπ' εὐθείας κειμένας, ἢ παραλλήλες γὲν ἔχοντα.

Διὰ τὴν ΚΖ'. τῆ Α'. ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ ὑπὸ βγε, βσα, καὶ αἱ ὑπὸ βλε, βζα· Διὰ τὴν αὐτὴν δὲ ϗ ἡ ὑπὸ γελ ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ γιζ, τετέςι (διὰ τὴν αὐτ.) τῇ ὑπὸ σαζ· ἡ δὲ δὴ κατὰ τὸ β ϗ τῷ ὅλῳ σζ, ϗ τῷ μέρει γλ κοινὴ ὗσα ἐςίν· Ὥςε τό,τε ὅλον σζ, ϗ τὸ μέρος γλ, ἰσογώνια ἀλλήλοις ἐςί. Λοιπὸν δ' ἂν εἴη καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας Πλευρὰς ἔχειν ἀνάλογον. κ. 386.

Ἐπειδὴ τοίνυν ἐπὶ τῶν Τριγώνων βγε, βσα, παράλληλός ἐςιν ἡ γε πρὸς τὴν σα, ἔςαι (2) βγ : γε : : βσ : σα, καὶ γε : εβ : : σα : αβ. Ἐπειδὴ δὲ κἀν τοῖς Τριγώνοις ελβ, αζβ, ἡ ελ παράλληλός ἐςι πρὸς τὴν αζ, ἔςαι εβ : ελ : : αβ : αζ, καὶ (3) δἰ ἴσε ἄρα γε : ελ : : σα : αζ· Τὰ ἄρα (4) γλ ϗ σζ, τό,τε μέρος δηλαδὴ ϗ τὸ ὅλον ὅμοια ἐςί· Ὡσαύτως δὲ δείξω ϗ τὸ ξι ὅμοιον τυγχάνειν τῷ ὅλῳ σζ· Ἄρα (5) τὰ γλ ϗ ξι ϗ ἀλλήλοις ὅμοια ἐςί.

Ἐπεὶ δὲ ϗ τῶν Πλευρῶν αἱ ὁμόλογοι, ἤτοι ἐπ' εὐθείας κείμεναι εἰσὶν ὡς αἱ βγ ϗ βσ, αἴτε βλ ϗ βζ, ἢ γὲν πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι εἰσὶν, ὡς αἱ γε ϗ σα, αἴτε ελ ϗ αζ, δῆλον ὅτι τὰ Παραλληλόγραμμα γλ ϗ σζ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἐςί. Καὶ τὸν αὐτὸν τρόπον ϗ τὰ ξι ϗ σζ Παραλληλόγραμμα ὁμοίως ἀναγεγράφθαι, ϗ ἑπομένως ϗ τὰ γλ ϗ ξι, δειχθήσεται. Α. Η. Δ.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Ἐξέσω δὴ τῇ ἐκτεθείσῃ προτάσει Προβλήματα δύω παρασυνάψαι,

(1) *ΙΒ. τῆ ς'.* (2) *Α. Πόρισμ. τῆς Δ. τῆ ς'.* (3) *ΚΒ. τῆ ε'.* (4) *Ὅρ. Α. τῆ ς'.* (5) *ΚΑ. τῆ ς'.*

ἃ πολλὴν ἔχοντα ἐστὶν ἐν τοῖς Κωνικοῖς τὴν συντέλειαν· Τούτων τὸ μὲν Α΄. πρὸς τὴν Ἔλλειψιν τείνει, τὸ δὲ Β΄. πρὸς τὴν Ὑπερβολήν.

Πρόβλημα Α΄.

κ. 387. „Τριῶν δοθεισῶν Εὐθειῶν α, β, γ, ὧν ἡ τρίτη γ τῆς πρώτης α ἐλάσ-
„σων ἐστὶ, ϗ Ὀρθογωνίου τοῦ δεζκ συσταθέντος ὑπό τε τῆς πρώτης α = δε,
„ϗ τῆς δευτέρας β = εζ, τῇ δευτέρᾳ ἕτερον Ὀρθογώνιον παραβαλεῖν, εὖρος
„ἔχον τῇ τρίτῃ γ ἶσον, ϗ ἐλλεῖπον Ὀρθογωνίῳ ὁμοίῳ τε ϗ ὁμοίως ἀναγε-
„γραμμένῳ, τῷ ὑπό τε τῆς πρώτης ϗ τῆς δευτέρας συσταθέντι Ὀρθογωνίῳ.

Ἀχθείσης τῷ Ὀρθογωνίῳ εκ τῆς Διαμέτρου δζ, ἀπὸ τῆς δε Πλευρᾶς, ἥτις τῇ πρώτῃ α ἴση ἐστὶν, ἀφαιρεθήτω εη ἴση τῇ τρίτῃ γ. Διὰ δὲ τοῦ η ἀχθήτω ηθ παράλληλος τῇ Πλευρᾷ εζ, συμπίπτουσα τῇ Διαμέτρῳ κατὰ τὸ θ. Διὰ δὲ τοῦ θ ἀχθήτω θι παράλληλος τῇ Πλευρᾷ δε, συμπίπτουσα τῇ εζ κατὰ τὸ ι· Λέγω δὴ ὡς οὕτως ἐτελέσθη τὸ ἐπιταχθέν· τὸ γὰρ ηειθ Ὀρθογώνιον τὸ ζητούμενον ἦν· Ἐὰν γὰρ προεκβληθῶσιν αἱ ηθ, ιθ, ὡς συντελεσθῆναι τὰ Ὀρθογώνια ιλ, ημ· ἐπεὶ τὰ εκ ϗ ιλ Ὀρθογώνια περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον ὄντα ἐστὶν, ὅμοιά τε (1) ἔσται ἀλλήλοις, ϗ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα. Συσταθέντος τοίνυν τοῦ Ὀρθογωνίου εκ ὑπό τε τῆς πρώτης α, ϗ τῆς δευτέρας β τῶν δεδομένων, ἤτοι τοῦ ὑπὸ δε ϗ εζ, παραβέβληται δὴ τῇ δευτέρᾳ εζ ἕτερον Ὀρθογώνιον· τοῦτο δὲ ἦν τὸ ηι ἔχον μὲν εὖρος τὸ ηε τῇ τρίτῃ γ ἶσον, ἐλλεῖπον δὲ Ὀρθογωνίῳ τῷ ιλ, ὁμοίῳ τε ὄντι ϗ ὁμοίως ἀναγεγραμμένῳ αὐτῷ τῷ εκ, τῷ ὑπό τε τῆς πρώτης ϗ τῆς δευτέρας τῶν δοθεισῶν συσταθέντι. Ο. Ε. Π.

Πρόβλημα Β΄.

κ. 388. „Τριῶν δοθεισῶν Εὐθειῶν α, β, γ, ϗ Ὀρθογωνίου συσταθέντος τοῦ δεζκ
„ὑπό τε τῆς πρώτης α ἤτοι δε, ϗ τῆς δευτέρας β ἤτοι εζ, τῇ δευτέρᾳ ἕτερον
„Ὀρθογώνιον παραβαλεῖν, εὖρος μὲν ἔχον τῇ τρίτῃ γ ἶσον, ὑπερέχον δὲ
„Ὀρθογωνίῳ, ὃ ἂν ὅμοιόν τε ϗ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον ᾖ, τῷ ὑπό τε τῆς
„πρώτης ϗ τῆς δευτέρας συσταθέντι.

Ἀχθείσης τῷ Ὀρθογωνίῳ εκ τῆς Διαμέτρου δζ, προεκβεβλήσθω ἡ δε ἕς γε τὸ η, ὥστε εἶναι τὴν προσκειμένην εη τῇ τρίτῃ τῶν δοθεισῶν γ ἴσην· Καὶ διὰ τοῦ η ἀχθήτω ηθ τῇ Πλευρᾷ εζ παράλληλος, συμπίπτουσα τῇ Δια-

(1) Διὰ ταύτην τὴν ἐν χερσί.

μέτρῳ δζ προεκβληθείσῃ κ̀ αὐτῇ κατὰ τὸ θ, καὶ συμπληρέσθω τὸ Ὀρθογώνιον εηθι· Φημὶ δὴ ὡς οὕτως ἔςαι τετελεσμένον τὸ ἐπιταχθέν· προεκβληθεισῶν γὰρ τῶν θι, δκ, κζ, πληρωθέντων τε τῶν Ὀρθογωνίων ημ, λι, ἐπειδὴ τὰ εκ, λι Ὀρθογώνια περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον ἐςὶν, ἔσονται (1) ὅμοιά τε ἀλλήλοις κ̀ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα. Ὥςε συςαθέντος τȣ̃ Ὀρθογωνίȣ εκ ὑπό τε τῆς πρώτης δε, κ̀ τῆς δευτέρας εζ τῶν δεδομένων, τῇ δευτέρᾳ εζ Ὀρθογώνιον ἕτερον παρεβλήθη τὸ ηι, ᾧ εὖρος μὲν τὸ εη ἴσον τῇ τρίτῃ γ, ὑπεροχὴ δὲ ἡ κατὰ τὸ Ὀρθογώνιον λι, ὅπερ ὅμοιόν τε κ̀ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον ἐςὶ τῷ Ὀρθογωνίῳ εκ, τῷ ὑπό τε τῆς πρώτης κ̀ τῆς δευτέρας τῶν δοθεισῶν συςαθέντι. Ο. Ε. Π.

Πρότασις ΚΕ.

„Τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ (Β) ὅμοιον, κ̀ ἄλλῳ τῷ δοθέντι (Α) ἴσον „τὸ αὐτὸ συςήσασθαι.

„Τȣτέςι δυοῖν εἰδῶν δοθέντων (Α κ̀ Β), τρίτον παραβαλεῖν τῷ μὲν ἴσον „(οἷον τῷ Α), τῷ δ᾽ ὅμοιον (οἷον τῷ Β).

„Καὶ πολλῶν δὲ δοθέντων εἰδῶν, οὐ χαλεπὸν παραβαλεῖν εἶδος πᾶσι „μὲν ἴσον, ἑνὶ δὲ τῷ τυχόντι ἐξ αὐτῶν ὅμοιον.

Ἐπὶ τῆς γζ πλευρᾶς τȣ̃ Εὐθυγράμμȣ Β, ᾧ τὸ ὅμοιον ζητȣ́μενον ἐςὶ, σ. 389.
συνεςάσθω Ὀρθογώνιον τὸ Π (2) ἴσον τῷ Β· εἶτα ἐπὶ τῆς ζσ (3) Ὀρθογώνιον τὸ Ρ ἴσον τῷ Α· Καὶ δῆλον ὅτι (4) γζ κ̀ ζι ἐπ᾽ εὐθείας κείμεναι εἰσί. Μεταξὺ δὲ τῶν γζ κ̀ ζι μέση εὑρεθήτω (5) ἀνάλογος ἡ ζλ, καὶ ἐπ᾽ αὐτῆς (6) Εὐθύγραμμον ὅμοιον τῷ δοθέντι Β· Ἔςαι δὴ τȣ̃το αὐτὸ κ̀ ἴσον τῷ δοθέντι Α.

Ἐπειδὴ γὰρ ἐκ κατασκευῆς αἱ τρεῖς γζ, ζλ, ζι ἀνάλογον εἰσὶ, τὸ Εὐθύγραμμον Β ἐςὶ πρὸς τὸ αὐτῷ ὅμοιον, τὸ ἀπὸ τῆς ζλ (7), ὡς γζ πρὸς ζι, τȣτέςιν (8) ὡς Π πρὸς Ρ· Καὶ ἐναλλὰξ τοίνυν ὡς Εὐθύγραμμον Β πρὸς Εὐθύγραμμον Π, οὕτως Εὐθύγραμμον τὸ ἀπὸ ζλ πρὸς Εὐθύγραμμον Ρ. Ἀλλὰ γὰρ ἐκ κατασκ. τὸ Β Εὐθύγραμμον ἴσον τῷ Π, ἄρα κ̀ τὸ ἀπὸ ζλ, ὃ τῷ Β ὅμοιον ᾖ, ἴσον τῷ Ρ, ἤτοι (ἐκ κατασκ.) τῷ δοθέντι Α. Ο. Ε. Π.

Πρότασις Κϛ.

„Ἐὰν ἀπὸ Παραλληλογράμμȣ (βδ) Παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ (τὸ

---

(1) *Διὰ τὴν Πρότ.* (2) *ΜΕ τȣ̃ α΄.* (3) *Διὰ τὴν αὐτήν.* (4) *ΙΔ. τȣ̃ α΄.* (5) *ΙΓ. τȣ̃ ϛ΄.* (6) *ΙΗ. τȣ̃ ϛ΄.* (7) *Β. Πόρ. τῆς Κ. τȣ̃ ϛ΄.* (8) *Α τȣ̃ ϛ΄.*

„ ζν) ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ, ϗ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν Γωνίαν ἔχον (τὴν α) αὐτῷ,
„ περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον ἐςὶ τῷ ὅλῳ.

κ. 390. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ αε, γε· ϗ εἰμὴ ἡ αεγ μία Διάμετρος ἐςὶ κοινὴ τῶν βδ ϗ ζν, ἔςω δὴ τῷ βδ Διάμετρος Εὐθεῖα ἄλλη ἡ αηγ, τέμνϐσα τὴν ζε κατὰ τὸ η· ἤχθω δὲ ϗ τῇ Εὐθείᾳ αζ παράλληλος ἡ ηθ. Τὰ τοίνυν Παραλληλόγραμμα ζθ ϗ βδ ἔσονται περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον αηγ, ϗ ταύτῃ δέ τοι (1) ϗ ὅμοια ϗ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα· Καὶ ὥσπερ ἄρα βα πρὸς αδ (2), οὕτω τοι ϗ ζα πρὸς αθ· Ἀλλὰ γὰρ ϗ βα : αδ : : αζ : αν, ἐπεὶ τὰ βδ ϗ ζν ὅμοια (3) ἐςίν· ἄρα ζα : αθ : : ζα : αν. Ὅπερ ἄτοπον.

Πορίσματα.

κ. 391. Α. Ἐντεῦθεν δὴ τὴν σύνθεσιν τῶν κινήσεων, ἥτις ἐςὶν ἀναλογιζόμεθα. Κινείσθω γὰρ κατὰ τὸ αὐτὸ τῷ χρόνϐ Σῶμα τὸ α, δυνάμει μὲν τῇ αζ πρὸς Εὐθεῖαν τὴν αζ, δυνάμει δὲ τῇ ασ πρὸς Εὐθεῖαν τὴν ασ (οὕτω δηλ. ὡς μόνῃ μὲν τῇ αζ δυνάμει μόνην Εὐθεῖαν βαίνειν ἂν τὴν αζ, μόνῃ δὲ αὖ τῇ ασ τὴν ασ, ἐν χρόνῳ τῷ δοθέντι), πληρϐσθω δὲ τὸ Παραλληλόγραμμον ασβζ· Τῇ τοίνυν τῶν δυνάμεων εἰς ταυτὸ συνελεύσει, τὸ Σῶμα α τὴν Διαγώνιον αβ, κατὰ χρόνον τὸν δοθέντα φανερὸν ὅτι διελεύσεται. Γενήσεται γὰρ τῷ Σώματι α παραπλησίως τὰ τῆς κινήσεως, καθάπερ εἴγε, ἐν ᾧ ὁμαλῇ τῇ κινήσει ἀπὸ τῷ α ἐπὶ τὸ σ σπεύδει μεταφερόμενον, κατ᾽ Εὐθεῖαν τὴν ασ, προΐει δὴ ϗ αὐτὴ ἡ ασ Εὐθεῖα, ἀεὶ παράλληλος ἑαυτῇ χωρϐσα, κατὰ κίνησιν ὡσαύτως ὁμαλὴν ἐν τῷ αὐτῷ τῷ χρόνϐ, τῷ ἐφ᾽ ἑαυτῆς Σημείῳ α τὴν αζ Εὐθεῖαν περαίνϐσα. Οὕτω γάρ τοι ἑκάτερος τῶν κινημάτων ὁ διορισμὸς, ὁ μὲν κατὰ σβ, ὁ δὲ κατὰ ζβ ἅμα διασωθήσονται. Ταύτῃ τοι ἐν ᾧ τὸ Σῶμα α, ἐν πηλίκῳ τῷ χρόνϐ (οἷον τεταρτημορίῳ) ἐςγ᾽ ἐπὶ τὸ ξ ἀφίξεται, τηλικϐτον ϗ τῆς ασ (τϐτέςι τεταρτημόριον) διερχόμενον, ἐν τῷ αὐτῷ ἡ ασ ἐπὶ τὴν θέσιν ιγ μετενεχθήσεται, ϗ τὸ ἐπ᾽ αὐτῆς Σημεῖον α τεταρτημόριον ἐπίσης διαδραμεῖται ἀπὸ τῆς Εὐθείας αζ, ἐν ἴσῳ (τεταρτημορικῷ δηλ.) τῷ δοθέντος χρόνϐ τῷ Διαςήματι, ὥςε (4) εἶναι σα : αζ : : ξα : αδ· Οὗ χάριν ϗ τῆς ξλ παραλλήλϐ ἀχθείσης τῇ αζ, ϗ τεμνϐσης τὴν ιγ κατὰ τὸ ε, τὰ Παραλληλόγραμμα σζ ϗ ξ ὅμοια (5) τυγχάνειν ἀλλήλοις ϗ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, τὸ δὲ Σῶμα α ὑφ᾽ ἑκατέρας τῆς κινήσεως, ἐν πέρατι τῷ αὐτῷ τεταρτημορίϐ τῷ δοθέντος χρόνϐ, ἐπὶ τὸ Σημεῖον ε ἀφικνεῖσθαι. Ἐπεὶ δέ τοι τὰ Πα-

(1) ΚΔ. τῷ ς΄. (2) Ὁρ. Α τῷ ς΄. (3) Καθ᾽ ὑπό. (4) ΙΕ. τῷ ε΄. (5) Ὁρ. Α. τῷ ς΄.

ραλληλόγραμμα ταῦτα ϗ Γωνίαν ἔχει κοινὴν τὴν α, δυνάμει τῆς ἐν χερσὶ Προτάσεως, περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον εἰσὶ τὴν αβ, τό,τε κατὰ τὸ ε γενόμενον Σῶμα ἐπὶ τῆς Διαγωνίȣ αβ ταύτης ἐςί. Καὶ τὸν αὐτὸν τȣ̃τον τρόπον τὸ Σῶμα, ἐν πηλικῳȣ̃ν ἄλλῳ τȣ̃ δοθέντος χρόνȣ μορίῳ, εὑρεθήσεταί πȣ τῆς Εὐθείας αβ, κατὰ δὲ τὸ τȣ̃ χρόνȣ πέρας ἐν τῷ Σημείῳ κείσεται β. Ὥςε τῇ τῶν ȣ̃τως ἐχȣσῶν δυνάμεων συνελεύσει, τὸ Σῶμα α τὴν Διαγώνιον αβ βήσεται, καθ᾽ ὃν ἂν χρόνον, μόνῃ μὲν τῇ ασ δυνάμει Εὐθεῖαν τὴν ασ, μόνῃ δὲ τῇ αζ τὴν αζ ἰδίᾳ ςαδιεύσειε.

Χωρείτω τοίνυν Σῶμα τὸ τυχὸν ἐν χρόνῳ τῷ τυχόντι Εὐθεῖαν τὴν δα, δυνάμει τῇ δα. Τὸ γȣ̃ν αὐτὸ ἰσοχρονίως τὴν αξ = δα κατὰ τὸν αὐτὸν ἂν δήπȣ διορισμὸν χωρήσειεν, εἰμήτινι ἑτέρᾳ δυνάμει ἀπήγετο διειργόμενον· Ὥςε εἰ τὸ κατὰ τὸ α Σῶμα ἀπὸ τῆς κατὰ τὸν αξ διορισμὸν κινήσεως ἐκτρεπόμενον, ἐν χρόνῳ τῷ αὐτῷ Εὐθεῖαν τὴν αε διαγράφει, ἀχθείσης τῆς ξε ϗ τȣ̃ Παραλληλογράμμȣ ξι πληρωθέντος, φανερὸν (1) ὅτι τὸ Σῶμα τὴν αε Εὐθεῖαν ἀχθήσεται, τῇ συνελεύσει δυεῖν δυνάμεων, τῆς μὲν ἐνȣ́σης δα ἢ αξ, τῆς δὲ ἐπιγιγνομένης αι τῷ Σώματι ὄντι ἐν τῷ α, κατὰ διορισμὸν τὸν τῆς Εὐθείας αι. Β.

Διὸ ϗ ἀνάπαλιν, ἐάν τι Σῶμα δυνάμει τῇ αβ διαγράφον εἴη Εὐθεῖαν τὴν αβ, παραπλήσιον ἂν εἴη, ὡς εἴγε ϗ τὴν αὐτὴν ἔβαινεν αβ ἐν χρόνῳ τῷ αὐτῷ, τῇ συνελεύσει δυεῖν δυνάμεων, αἳ ἀνάλογοι εἶεν ταῖς Πλευραῖς αζ, ασ Παραλληλογράμμȣ τινὸς τȣ̃ σζ, οὗ Διαγώνιος ἂν εἴη ἡ αβ, ϗ αἵτινες κατ᾽ αὐτὰς τὰς Πλευρὰς αζ, ασ τύχοιεν διευθυνόμεναι. Γ.

Ἐντεῦθεν δὴ μετὰ τȣ̃ περικλεȣ̃ς Νεύτωνος εἰσβάλλομεν, ὡς τὰ ὑπὸ τῶν περὶ Κέντρα τινὰ ἀκίνητα τῶν δυνάμεων περιαγομένων Σωμάτων καταγραφόμενα χωρία, ἴςαται μὲν ἐν ἐπιπέδοις ἀκινήτοις, ἐςὶ δὲ ϗ τοῖς χρόνοις ἀνάλογον. Διαιρείσθω γὰρ δὴ ὁ χρόνος εἰς μέρη ἴσα, ϗ κατὰ μὲν τὸ Α΄. τȣ̃ χρόνȣ μέρος διερχέσθω τὸ Σῶμα τῇ ἐνȣ́σῃ οἱ δυνάμει Εὐθεῖαν τὴν αβ. Τὸ αὐτὸ οὖν Σῶμα, κατά γε τὸ Β΄. μέρος τȣ̃ χρόνȣ, εἰ μηδὲν ἦν τὸ προσιςάμενον, εὐθὺ πρὸς τὸ κ ἐχώρησεν ἂν, Εὐθεῖαν καταγράψαν τὴν βκ ἴσην τῇ αβ, ȣ̃τω δὴ ὥςε τῶν ἀκτίνων ἐπὶ τὸ κέντρον ἀχθεισῶν, ἴσα (2) εἶναι τὰ ἐμβαδὸν ασβ, σβκ. Ἀλλὰ γὰρ τῷ Σώματι κατὰ τὸ β γεγονότι ἐπενεργείτω ἐπίκεντρός τις δύναμις προσβολῇ μιᾷ, ἀλλ᾽ εὐτόνῳ, ἀπὸ μὲν τῆς βκ ἐκκλῖναι, τὴν δὲ βγ ἀχθῆναι αὐτὸ ἐπείγȣσα· καὶ φανερὸν ὅτι τῆς ἐπικέντρȣ ἐνταῦθα δυ- Δ΄. κ. 392

(1) *Α. Πόρ. ταύτ.* (2) *ΛΗ. Βιβλ. α΄.*

νάμεως πρὸς τὴν ἐνȣ̃σαν ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν βκ ἐχȣ́σης, τȣ̃ Παραλληλογράμμȣ βγδκ τὸ Σῶμα βήσεται τὴν βδ (1) τὴν Διαγώνιον, καὶ τȣ̃ δευτέρȣ χρονικȣ̃ παραῤῥεύσαντος μορίȣ, κείσεται κατὰ το δ, ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ μετὰ τȣ̃ προτέρȣ Τριγώνȣ σαβ. Ἀλλ' ἐπεζεύχθω ἡ σδ, καὶ τὸ χωρίον, τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ τὸ κέντρον ἀχθείσης, τȣτέστι τὸ Τρίγωνον σβδ (2) ἴσον ἔσται τῷ Τριγώνῳ σβκ, τȣτέστι (3) τῷ Τριγώνῳ τῷ πρώτῳ σαβ. Παραπλησίῳ
κ. 393. τῷ λόγῳ ἐν τῷ τρίτῳ τȣ̃ χρόνȣ μορίῳ, τὸ Σῶμα ἀπὸ τȣ̃ δ ἐπὶ τὸ ε ἂν μετασταίη τῇ αὐτῷ περιȣ́σῃ δυνάμει κινȣ́μενον, ὡς εἶναι τὴν δε ἴσην τῇ δβ· ἀλλ' εἴγε δύναμις ἐπίκεντρος, εἴτε μείζων, εἴτ' οὖν ἐλάσσων ἐπενεργήσασα αὖθις κατὰ τὸ δ πρὸς τὸ σ ὤσειεν, εὑρεθείη ἂν αὖθις τὸ Σῶμα ἐπί τι Σημεῖον θ τῆς θε παραλλήλȣ ȣ̓́σης τῇ σδ, τὴν Διαγώνιον ὁμοίως δθ κατὰ τὸ τρίτον τȣ̃ χρόνȣ διαπεραιȣ́μενον· καὶ τῆς ἀκτῖνος θσ ἐπὶ τὸ κέντρον ἀχθείσης, ἔσται τὸ Τρίγωνον σθδ, ἐπὶ τȣ̃ αὐτȣ̃ ἐπιπέδȣ μετὰ τȣ̃ Τετραπλεύρȣ σαβδ, τῷ Τριγώνῳ σδε (4), καθὰ καὶ τοῖς λοιποῖς σβδ, σαβ ἴσον. Τὸν αὐτὸν δὴ τρόπον, τῆς ἐπικέντρȣ δυνάμεως κατ' ἀκολȣθίαν ἐπιδρᾶν νοȣμένης κἀπὶ τῶν Σημείων θ, ο, μ, ξ, τὸ Σῶμα ἐν ἑκάστῳ τῶν χρονικῶν μορίων τὰς Διαγωνίȣς θο, ομ, μξ διαδραμεῖται, τὰς ἐπὶ τȣ̃ αὐτȣ̃ ἐπιπέδȣ ȣ̓́σας, καὶ ἀεὶ τὰ Τρίγωνα τοῖς προτέροις Τριγώνοις ἴσα καταγραφήσεται, καὶ ȣ̓́τως ἐν ἴσοις μὲν τοῖς χρόνοις, ἐπιπέδῳ δὲ τῷ αὐτῷ, χωρία ἴσα διαπεραιωθήσεται, ὡς εἶναι τὰ ἀθροίσματα τῶν χωρίων σαθσ, σαξσ τοῖς τῶν χρόνων ἀνάλογον. Αὐξȣμένȣ τοίνυν τȣ̃ ἀριθμȣ̃, καὶ μειȣμένȣ τȣ̃ εὔρȣς τȣ̃ τῶν Τριγώνων ἐπ' ἄπειρον, ἡ τȣ́των ἐσχάτη περίμετρος αβδθομξ κξ: Γραμμήτις ἔσται καμπύλη, ἀφ' ἧς τὰ ἐν τῷ ἀκινήτῳ ἐπιπέδῳ περιγραφόμενα χωρία, τοῖς χρόνοις ἀεὶ χωρήσει ἀνάλογον. Ο. Ε. Δ.

Ε'. Ἐντεῦθεν ἔτι μετὰ τȣ̃ αὐτȣ̃ Νεύτωνος ἐπιφέρομεν, πάντα τὰ κατὰ καμπύλην τινὰ κινȣ́μενα Σώματα, καὶ τὰ περί τι Κέντρον οἷον τὸ σ χωρία (ὅρα τὸ ἀνωτ. Σχῆμα) τοῖς χρόνοις ἀνάλογον καταγράφοντα, ὑπό τινος ἐπικέντρȣ δυνάμεως ἐπὶ αὐτὸ δὴ τὸ Κέντρον σπευδȣ́σης διηνεκῶς ἐπείγεσθαι. Ἐπειδὴ γὰρ τὸ Σῶμα τῇ ἐνȣ́σῃ δυνάμει, ἴσας τὰς Εὐθείας αβ, βκ, ἐν ἴσοις τοῖς χρόνοις σταδιεύειν οἷον ἐστὶν, ἐπιζευχθεισῶν τῶν σα, σβ, σκ, ἴσα ἔσται (5) τὰ Τρίγωνα βσα, σβκ. Ἐπεὶ δέτοι τὸ Σῶμα ἐξ ὑποθέσεως ἴσα τὰ ἐμβαδὸν σαβ, σδβ ἰσοχρονίως καταγράφει, συνεξισωθήσεται ἀλλήλοις καὶ τὰ Τρίγωνα σαβ, σδβ. Ταύτητοι καὶ τὰ Τρίγωνα σβκ, σβδ ἴσα ἀλλήλοις

(1) Διὰ τὸ Α. Πόρ. ταύτ. (2) ΛΖ. τȣ̃ α'. (3) Λξ. Α. τȣ̃ α'. (4) ΛΖ. τȣ̃ α'. (5) ΛΗ. τȣ̃ α'.

ἔςαι, καὶ ὡς ἐπὶ τῆς βάσεως ἱςάμενα τῆς αὐτῆς σβ, τὰ Σημεῖα δ ꙃ κ, ἐπὶ Εὐθείας κείμενα ἕξει τῆς αὐτῆς δη (1), ἥτις ἂν εἴη αὐτῇ τῇ βάσει παράλληλος. Ἔνθεντοι ἀχθείσης τῆς δγ Παραλλήλȣ πρὸς τὴν κβ. ἔσονται μὲν αἱ βκ, βγ τȣ͂ Παραλληλογράμμȣ κγ Πλευραὶ, ἔςαι δὲ ἡ βδ Διαγώνιος. Ὥςε τὸ Σῶμα ἀπὸ τῆς Εὐθείας αβκ ἐκκλῖνον κατὰ τὸ Σημεῖον β, ꙃ τὴν Διαγώνιον βδ καταγράφον, ἐν ᾧ ἂν χρόνῳ τὴν Πλευρὰν βκ διῆλθεν, εἰμήτις καινὴ αὐτῷ κατὰ τὸ β ὄντι ἐνεγίνετο δύναμις, ἐπειχθήσεται δὴ κατ' αὐτὸ τὸ β Σημεῖον (2) δυνάμει τῇ βγ, τῇ σπευδȣ́σῃ ἐπὶ τὸ σ, ὃ τὸ κέντρον εἶναι τίθεται τῶν δυνάμεων· Καὶ ȣ̔́τως ἐφεξῆς κἂν τοῖς λοιποῖς τῶν Σημείων δ, θ, ο, μ, ξ. Ο. Ε. Δ.

Ἐπειδὴ τοίνυν ἐπὶ τȣ͂ τῶν πρωτευόντων πλανητῶν συςήματος, τῶν ἀκτίνων πρὸς τὸν ἥλιον ἀγομένων, ἀεὶ τὰ χωρία τοῖς χρόνοις ἐςὶν ἀνάλογον, οἷα δήπȣ τοῖς ἀςρονομȣ͂σιν ἐςὶ προδηλότατον, φανερὸν ὡς οἱ πλάνητες πρὸς αὐτὸν τυγχάνȣσι τὸν ἥλιον ἐπειγόμενοι δυνάμει διηνεκεῖ πρὸς τὸν φωςῆρα σπευδȣ́σῃ. Ὡσαύτως δὲ καὶ περὶ τῶν δευτερευόντων ἐν πλάνησι συλλογιςέον, ὥςγε πρὸς τȣ̀ς αὐτῶν ἑκάςȣ προέχοντας. ϛ'.

Κείσθω τȣ͂ Παραλληλογράμμȣ βγελ Διάμετρος ἡ βε, ꙃ προεκβληθεισῶν τῶν γε, λε, γινέσθω Παραλληλόγραμμον τὸ αξει, τῷ Παραλληλογράμμῳ βλεγ ὁμοιόν τε, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον, διάμετρον ἔχον τὴν αε. Φημὶ δὴ ὅτι τῶν Παραλληλογράμμων γλ, ξι, αἱ Διάμετροι βε, αε ἐπ' εὐθείας κείμεναι εἰσί. Προεκβληθεισῶν γὰρ ꙃ τῶν βγ, αξ, καὶ τῶν βλ, αι, πληρȣ́σθω Παραλληλόγραμμον τὸ σζ· καὶ ἐπειδὴ (3) γε : ει :: λε : εξ, ἔςαι (4) ꙃ γι : ιε :: λξ : ξε, ꙃ (5) ἐναλλὰξ γι : λξ :: ιε : ξε, τȣτέςι (6) σα : αζ :: ξα : αι. Τὰ τοίνυν Παραλληλόγραμμα σζ, ξι, ἀλλήλοις τε (7) ὅμοια ἐςὶ, ꙃ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ꙃ κοινὴν ἔχοντα Γωνίαν τὴν πρὸς τῷ α, ὥςε (8) ꙃ περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον ἵςαται. Ὡσαύτως δὲ δειχθήσεται ꙃ τὰ σζ, γλ Παραλληλόγραμμα περὶ τὴν αὐτὴν εἶναι Διάμετρον ꙃ αὐτά. Ὥςε δῆλον τὰς αε, εβ Διαμέτρȣς μέρη τῆς ὁλικῆς Διαμέτρȣ αβ τυγχάνειν, ꙃ ἑπομένως ἐπ' εὐθείας κεῖσθαι. Ζ'. σ. 394. Η'.

Ἐὰν Τρίγωνα δύω αξε, εγβ, τὰς δύω Πλευρὰς αξ, ξε, ταῖς δυσὶ Πλευραῖς εγ, γβ ἀνάλογον ἔχοντα, κατὰ μίαν Γωνίαν τὴν ὑπὸ ξεγ ȣ̔́τω συςαθῶσιν, ὡς τὰς ὁμολόγȣς Πλευρὰς παραλλήλȣς ἔχειν κειμένας, τȣ-

(1) ΛΘ. τȣ͂ α'. (2) Α. Πόρ. τῆς παρȣ́σ. (3) Ἐξ ὑποθ. (4) ΙΗ. τȣ͂ ε'. (5) Ιϛ. τȣ͂ ε'. (6) ΛΔ. τȣ͂ α'. (7) Ὁρ. Α. τȣ͂ ϛ'. (8) Διὰ ταύτην τὴν ἐν χερσί.

τέσι τὴν μὲν αξ τῇ εγ, τὴν δὲ ξε τῇ γβ, ἕξει ϗ τὰς λοιπὰς τῶν Πλευρῶν αε ϗ εβ ἐπ᾽ εὐθείας κειμένας. Προεκβληθεισῶν γὰρ τῶν ξε ϗ γε, ϗ ταύταις Παραλλήλων ἀχθεισῶν τῶν αι, βλ, πληρέσθω δὴ τὰ Παραλληλόγραμμα ξι, γλ, ἃ διὰ τὰς Παραλλήλους ξα, γι, βλ, ϗ αι, ξλ, γβ, ἔσαι (1) ἰσογώνια ϗ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, διὰ δὲ τὰς ἀνάλογον αξ : ξε : : εγ : γβ, ϗ ὅμοια (2). Ἔνθεντοι διὰ τὸ πρὸ τούτου Πόρισμα, ϗ τούτων αἱ Διαγώνιοι αε, εβ ἐπ᾽ εὐθείας κείμεναι εἰσίν. Ο. Ε. Δ.

Τὸ δὴ Πόρισμα τοῦτο τὴν ΛΒ΄. τοῦ ϛ΄. ἡμῖν παρίστησιν, ἣν τοῦ Συγγραφέως ὑπερδραμόντος, αὐτοὶ ἐκ τῆς ἐν χερσὶ ταύτης Κϛ΄, ϗ τοῦ Ζ΄. τῶν μετ᾽ αὐτὴν Πορισμάτων, ἀμέσως ἐπιφερομένην ἀποκαταστῆσαι ἐνταῦθα ἐδικαιώσαμεν.

Πρότασις ΚΖ.

„ Πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν Εὐθεῖαν (αβ) παραβαλλομένων Παραλ-
„ ληλογράμμων (αδ, αζ), ϗ ἐλλειπόντων εἴδεσι Παραλληλογράμμοις (γε,
„ ιθ) ὁμοίοις τε, ϗ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας (τῆς αβ) ἀναγρα-
„ φομένῳ (αδ), μέγιστον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον Παραλ-
„ ληλόγραμμον (αδ), ὅμοιον ὂν τῷ ἐλλείμματι (γε).

σ. 395. Παραβεβλήσθωσαν παρὰ τὴν Εὐθεῖαν αβ δίχα τετμημένην κατὰ τὸ γ, Παραλληλόγραμμα τό,τε αγδλ, ϗ ὁποιονοῦν ἄλλο τὸ αιζη, ἐλλείποντα εἴδεσι Παραλληλογράμμοις, τὸ μὲν γβεδ, τὸ δὲ ιβθζ, ὁμοίοις τε ϗ ὁμοίως κειμένοις τῷ αδ, τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς αβ· Λέγω δὴ ὅτι τὸ Παραλληλόγραμμον αδ τοῦ Παραλληλογράμμου αζ μεῖζον ἐστί.

Τῆς δὲ δὴ Προτάσεως ταύτης δύω ἂν εἶεν αἱ διαφοραί, ἤτοι γὰρ τοῦ Παραλληλογράμμου αζ ἡ Βάσις αι τῆς αγ ἡμισείας μείζων, ἢ γοῦν ἐλάσσων.

Κείσθω δὴ μείζων (ὡς ἐπὶ τοῦ ἀνωτ. καταγραφέντος Σχήματος)· Καὶ ἐπειδὴ τὰ Παραλληλόγραμμα γε, ιθ, κοινὴν ἔχει Γωνίαν τὴν ὑπὸ γβε, εἴτ᾽ οὖν τὴν ὑπὸ ιβθ, ὅμοιά τε (3) ϗ ὁμοίως κείμενα ἐστίν, εἰσὶ δή που (4) ϗ περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον βζδ· Διὸ προεκβληθείσης τῆς ιζ ἐπὶ τὸ κ, ἔσαι τὸ γζ = τῷ (5) ζε· Κοινῇ γοῦν προσεθείσθω τὸ ιθ, ϗ ἔσαι γθ = ιε· Ἀλλὰ διὰ τὴν δίχα κατὰ τὸ γ τετμημένην αβ, ἔστιν ηγ = γθ (6), ἄρα καὶ ηγ = ιε· Προσεθείσθω κοινὸν τὸ γζ, ϗ ἔσαι αζ = γζ + ιε·

(1) ΚΖ. τοῦ α΄. (2) Α. Ὅρ. τοῦ ϛ΄. (3) Ἐξ ὑποθ. (4) Διὰ τὴν ἀνωτ. (5) ΜΓ. τοῦ α΄. (6) Λϛ. τοῦ α΄.

ἀλλά γε (τουτέστιν (1) αδ, διὰ τὰς ἴσας Βάσεις αγ, γβ) μεῖζον τῆς γζ + ιε, ἄρα αδ μεῖζον τοῦ αζ.

Ἀλλ' ἔστω δὴ ἡ αι ἐλάσσων τῆς αγ· Καὶ ἐπειδὴ τὰ Παραλληλόγραμμα γε, ιθ, κοινὴν ἔχει Γωνίαν τὴν ὑπὸ γβε, εἴτ' οὖν τὴν ὑπὸ ιβθ, καὶ ὅμοια (2) ἐστὶ καὶ ὁμοίως κείμενα, περὶ τὴν αὐτὴν (3) Διάμετρον ἐστὶ βθζ· Ἀχθήτω τοίνυν ἡ Διάμετρος, καὶ καταγραφήτω τὸ Σχῆμα, καὶ διὰ τὰς ἴσας αγ, γβ (4) ἴσαι ἔσονται αἱ λδ, δε· Ὅθεν δὴ καὶ τὰ Παραλληλόγραμμα (5) ηδ, δθ ἴσα καὶ αὐτὰ ἔσαι. Ὥστε τὸ Παραλληλόγραμμον δθ ἐστὶ τοῦ Παραλληλογράμμου ηκ μεῖζον· Ἀλλαμὴν (6) δθ = δι, ἄρα τὸ δι μεῖζον ἐστὶ τοῦ ηκ· Κοινὴ προσεθείσθω τὸ ακ, καὶ ἔστω τὸ Παραλληλόγραμμον αδ τοῦ Παραλληλογράμμου αζ μεῖζον ἔσαι. κ. 396.

Πάντων τοίνυν τῶν παρὰ τὴν Εὐθεῖαν παραβαλλομένων Παραλληλογράμμων, καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι Παραλληλογράμμοις, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ, μέγιστον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον Παραλληλόγραμμον, ὅμοιον ὂν τῷ ἐλλείμματι. Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ἔστω παρὰ τὴν αὐτὴν Εὐθεῖαν αβ παραβεβλημένα Παραλληλόγραμμα τὰ αζ, ατ, ἐλλείποντα Παραλληλογράμμοις τοῖς ιθ, πρ, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ αδ ἢ γε, τῷ παρὰ τὴν ἡμίσειαν τῆς αβ, οὕτως ἀλλ' οὖν ὥστε εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν Εὐθειῶν ιβ + πβ = αβ, τουτέστιν ὥστε εἶναι απ = ιβ, καὶ γι = γπ· Φημὶ δὴ ὅτι τὰ Παραλληλόγραμμα αζ, ατ ἴσα ἐστί. Α'. κ. 397.

Διὰ γὰρ τὰς ἴσας αγ, γβ, καὶ τὰς ἴσας ὁμοίως πγ, γι, ἔσονται καὶ (7) ην = νθ, καὶ ξν = νζ. Κἀπὶ τοῦ Τριγώνου ζξτ, διὰ τὰς Εὐθείας νδ, δΛ τὰς ταῖς Πλευραῖς τξ, ζξ Παραλλήλους, ἔσαι (8) ζδ = δτ, καὶ ξΛ = Λτ· Ἔνθεντοι διὰ τὴν τῶν Βάσεων Ἰσότητα (9) ἔσαι νλ = νε, καὶ νΛ = νκ, καὶ ἑπομένως ξλ = ζε = (10) ζγ = (11) ξγ, καὶ 2ξλ, τουτέστι ξΓ = 2ξγ, τουτέστι ξι· Κοινὴ προσεθείσθω τὸ αξ, καὶ ἔσαι ατ = αζ. Ο. Ε. Δ.

Ἐὰν παρὰ τὴν Εὐθεῖαν αβ παραβληθῇ Παραλληλόγραμμα ἴσα τὰ Β'.

(1) Διὰ τὴν ἀντ. (2) Διὰ τὴν ὑπόθ. (3) Διὰ τὴν ἀνωτ. (4) ΛΔ. τοῦ α'. (5) Λς. τοῦ α'. (6) ΜΓ. τοῦ α'. (7) Διὰ τὴν ΛΔ. τοῦ α'. (8) Β. τοῦ ς'. (9) Λς. τοῦ α'. (10) ΜΓ. τοῦ α'. (11) Λς. τοῦ α'.

ατ, αζ, ἐλλεῖποντα Παραλληλογράμμοις ιθ, πρ, τῷ Παραλληλογράμμῳ αδ, εἴτ' οὖν γε, τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς αβ ἀναγραφομένῳ ὁμοίοις τε ϗ ὁμοίως κειμένοις, ἔσαι $\iota\beta + \pi\beta = \alpha\beta$, τȣτέςιν $\alpha\pi = \iota\beta$. Προεκβληθείσης γὰρ τῆς ικ ἐπὶ τὸ μ, διότι (1) $\alpha\tau = \alpha\zeta$, ἀφαιρεθέντος τȣ̃ κοινȣ̃ αξ, ἔσαι τὸ $\eta\tau = \pi\zeta =$ (2) θμ· ἄρα (3) ϗ $\eta\xi = \zeta\theta$, καὶ (4) ἑπομένως $\alpha\pi = \iota\beta$.

Πρότασις ΚΗ.

„Παρὰ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν (αβ), τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ (γ) ἴσον „Παραλληλόγραμμον (αι) παραβαλεῖν, ἐλλεῖπον εἴδει Παραλληλογράμμῳ „(ξν) ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι (δ). Δεῖ δὴ τὸ διδόμενον Εὐθύγραμμον (γ), „ᾧ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν, μὴ (5) μεῖζον εἶναι (τȣ̃ αη) τȣ̃ ἀπὸ τῆς ἡμι„σείας (τῆς αβ δηλ.) παραβαλλομένȣ, ὁμοίων ὄντων, τȣ̃ τε ἀπὸ τῆς ἡμι„σείας παραβαλλομένȣ (αη), ϗ τȣ̃ ἐλλείμματος τȣ̃ ἀπὸ τῆς ἡμισείας (εζ), „ϗ τȣ̃ (δ), ᾧ δεῖ ὅμοιον (ξν) ἐλλείπειν τ, Παραλληλογράμμȣ.

κ. 398. Δίχα τετμήσθω ἡ αβ κατὰ τὸ ε, ϗ ἐπὶ τῆς αε (6) συνεςάτω τῷ δοθέντι Παραλληλογράμμῳ δ ὅμοιον Παραλληλόγραμμον τὸ αη, ϗ πληρȣ́σθω τὸ Παραλληλόγραμμον αζ· ὅτω δὲ ἔσαι ϗ τὸ εζ τῷ αη, ϗ ἑπομένως τῷ δοθέντι δ ὅμοιον· ἔσαι δὲ τὸ αὐτὸ εζ τῷ αη ϗ ὁμοίως κείμενον ϗ ἴσον· Ἐπεὶ δέ τοι ὡς ὁ διορισμὸς βȣ́λεται, τὸ αη ȣ̓κ ἔλαττον ἐςὶ τȣ̃ Εὐθυγράμμȣ γ, ἔσαι δήπȣ ἤτοι ἴσον αὐτῷ ἢ αὐτȣ̃ μεῖζον· Καὶ εἰ μὲν $\alpha\eta = \gamma$, ἐγένετο ἤδη τὸ ζητηθέν· Παρὰ γὰρ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν αβ, τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ γ ἴσον παρεβλήθη Παραλληλόγραμμον τὸ αη, ἐλλεῖπον εἴδει Παραλληλογράμμῳ τῷ εζ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι δ.

Εἰ δὲ τὸ αη Παραλληλόγραμμον τȣ̃ Εὐθυγράμμȣ γ μεῖζον εἴη, εὑρεθήτω δὴ (7) ἡ ὑπεροχὴ τȣ̃ αη ἢ τȣ̃ εζ ἡ ὑπὲρ τὸ γ· ϗ τῇ μὲν ὑπεροχῇ ἴσον, τῷ δὲ εζ ὅμοιόν τε ϗ ὁμοίως κείμενον συνεςάτω (8) Παραλληλόγραμμον τὸ κλ, κοινὴν ἔχον Γωνίαν μετὰ τȣ̃ εζ τὴν πρὸς τῷ η· ϗ οὕτω τὰ Παραλληλόγραμμα εζ, κλ, περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον ηιβ (9) εἰσί. Προεκβληθήτω δὴ ἡ κι πρὸς τὸ μ ϗ ν, ἡ δὲ λι πρὸς τὸ ξ, καὶ ἔσαι τὰ Παραλληλόγραμμα ξν, εζ, περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον ηβ, ϗ ἑπομένως (10) ὅμοια, ὥςε (11) ϗ τὸ ξν ὅμοιον ἐςὶ τῷ δοθέντι δ· Ἐπειδὴ δὲ κλ ἐςὶν ἡ ὑπεροχὴ τȣ̃

---

(1) Ἐξ ὑπ. (2) ΜΓ. τȣ̃ α'. (3) Α. τȣ̃ ς'. (4) ΛΔ. τȣ̃ α'. (5) Διὰ τὴν πρὸ ταύτ. (6) ΙΗ. τȣ̃ ς'. (7) Διὰ τὸ Πόρ. τῆς ΜΕ. τȣ̃ α'. (8) Διὰ τὴν ΚΕ. τȣ̃ ς'. (9) Κς. τȣ̃ ς'. (10) ΚΔ. τȣ̃ ς'. (11) ΚΑ. τȣ̃ ς'.

Παραλληλογράμμου εζ, ὑπὲρ τὸ δοθὲν Εὐθύγραμμον γ, ἐὰν ἀπὸ τοῦ Παραλληλογράμμου εζ ἀφαιρεθῇ τὸ κλ, ἔσται τὸ λοιπὸν ἴσον τῷ γ· Καὶ ἔσται τοίνυν τὸ Εὐθύγραμμον γ ἴσον τοῖς Παραλληλογράμμοις εν, ιζ ἅμα ληφθεῖσι, τουτέστι (διὰ (1) τὸ εν = ακ, ϗ (2) ιζ = ει) ἴσον τῷ Παραλληλογράμμῳ αι. Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα Εὐθεῖαν αβ, τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ γ ἴσον Παραλληλόγραμμον παρεβλήθη τὸ αι, ἐλλεῖπον εἴδει Παραλληλογράμμῳ τῷ ξν, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι δ. Ο. Ε. Π.

Σχόλιον.

Ἐκ τῆς δευτέρας ὑποθέσεως καὶ τοῦ Α΄. τῶν Πορισμάτων τῆς ἀνωτέρω Προτ., ϗ ἄλλη τις μέθοδος ἀνακύπτει τῆς κατασκευῆς τοῦ Προβλήματος. Ἀμέλειτοι ἐὰν ἐπὶ τῆς δοθείσης αβ, συσταθέντων ὡς πρότερον τῶν αη, εζ τῷ δοθέντι δ ὁμοίων, προεκβληθῶσιν ἥτε τοῦ εζ Πλευρὰ εη, ϗ ἡ Διαγώνιος βη, ϗ περὶ ταύτην ἐν Γωνίᾳ, ἥτις ἂν εἴη τῇ ὑπὸ εηζ ἀντίθετος κατὰ κορυφὴν, γένηται (3) Παραλληλόγραμμον σητπ, ἴσον τῇ ὑπεροχῇ τοῦ αη, εἴτ᾽ οὖν τοῦ εζ ὑπὲρ τὸ Εὐθύγραμμον γ, ϗ τῷ εηζβ ὅμοιον ϗ ὁμοίως κείμενον· ἔνθεντοι γὰρ τὸ στ ὅμοιον ἔσται ϗ ὁμοίως κείμενον, ϗ δὴ (4) ϗ ἴσον τῷ κλ ἐν τῇ κατασκευῇ τῇ ἀνωτέρω. Προεκβληθεισῶν τοίνυν τῶν αθ, βζ, πσ, πτ, πληρούσθω τὰ Παραλληλόγραμμα απ, φρ, ϗ ἔσται (5) φρ ὅμοιον τῷ εζ, ϗ ἑπομένως ϗ τῷ δοθέντι δ, διὰ δὲ τὰ στ ϗ κλ ὅμοια ὄντα, ϗ ὁμοίως κείμενα ϗ ἴσα, ἔσται ση = ηλ, τουτέστι (6) φε = εξ· ὅθεν δὴ (7) αφ = ξβ, καὶ (8) απ = αι = γ. Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα Εὐθεῖαν αβ, τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ γ ἴσον Παραλληλόγραμμον παρεβλήθη τὸ απ, ἐλλεῖπον εἴδει Παραλληλογράμμῳ τῷ φρ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι δ. κ. 399.

Πορίσματα.

Ἐὰν τὸ δοθὲν Παραλληλόγραμμον δ Τετράγωνον ᾖ, τὸ Πρόβλημα οὕτως ἐξενεχθήσεται. Α΄. κ. 400.

„Παρὰ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν αβ, τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ γ ἴσον „Ὀρθογώνιον παραβαλεῖν ἐλλεῖπον Τετραγώνῳ· Καὶ παρὰ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν παραβληθήσεται Ὀρθογώνιον τὸ αι, ἐλλεῖπον Τετραγώνῳ τῷ ξν, ἢ

---

(1) Λϛ. τοῦ ά. (2) ΜΓ. τοῦ ά. (3) ΚΕ. τοῦ ϛ΄. (4) Α΄ξ. Δ. τοῦ ά. (5) ΚΔ. τοῦ ϛ΄. (6) ΛΔ. τοῦ ϛ΄. (7) Α΄ξ. Γ. τοῦ ά. (8) Δ. Πόρ. τῆς ἀνωτ.

Ὀρθογώνιον τὸ απ ἐλλεῖπον Τετραγώνῳ τῷ φρ· Ἐνθέντοι ἐπεὶ διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς Προτ. ταύτης, ἢ γοῦν τὴν ἐν τῷ Σχολίῳ, τὸ Ὀρθογώνιον αι συνάμα τῷ Τετραγώνῳ κλ, ἢ (ὃ ταυτόν ἐστι) τὸ Ὀρθογώνιον απ συνάμα τῷ Τετραγώνῳ στ, ἴσον ἐστὶ τῷ Τετραγώνῳ αη, ἢ τῷ εζ, φανερὸν ὅτι ἡ Ε΄. Πρότασις τοῦ Β΄. Βιβλίου, ἐκ ταύτης τῆς ΚΗ΄. τοῦ ϛ΄. ἀμέσως ἐπιφέρεται· Οὕτω γάρ ἐστι προτιθεμένη ἡ τοῦ Β΄. πέμπτη.

„Ἐὰν ἡ Εὐθεῖα ἡ αβ εἰς ἴσα τετμημένη αε, εβ, καὶ εἰς ἄνισα αξ, ξβ, „ἢ αφ, φβ, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων Τμημάτων περιεχόμενον Ὀρθογώνιον αι, „ἢ απ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ εζ, ἢ εφ Τετραγώνου κλ, ἢ στ, ἴσον „ἐστὶ τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας αε, ἢ εβ. Αὕτη γὰρ δὴ ἡ Πρότασις τῆς ἐν χερσὶν ΚΗ΄., ἡ ἐν μέρει ληφθεῖσα ὑπόθ. δηλ. τοῦ τὸ δοθὲν Παραλληλόγρ. εἶναι Τετράγ. ἐστὶ, περὶ ἧς ἐν τῷ Πορίσματι εἴρηται.

Β΄. Δοθείσης τῆς Εὐθείας αβ καὶ τοῦ Εὐθυγράμμου γ, διὰ ταύτης τῆς ΚΗ΄. καὶ τοῦ μετ᾽ αὐτὴν Σχολίου, ληφθήσεται ἡ ξβ, ἢ φβ Πλευρὰ τοῦ Τετραγώνου, ᾧ ἐλλείπει τὸ Ὀρθογώνιον αι, ἢ απ, τὸ τῷ Εὐθυγράμμῳ γ ἴσον, καὶ παρὰ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν αβ παραβεβλημένον. Ἀντὶ γὰρ τῆς ἀγνοουμένης πηλικότητος κείσθω υ, καὶ $αν = αβ \times υ$, καὶ $ξν = υ^{T}$· ὥστε $αι = αν - ξν = αβ \times υ - υ^{T} = γ$. Τὸ δ᾽ αὐτὸ ἐπαχθήσεται καὶ ἢν ὑποτεθῇ $υ = φβ$, ἔσται γὰρ $απ = αρ - φρ = αβ \times υ - υ^{T} = γ$. Καὶ τοῦτο δὴ τὸ πρῶτον τυγχάνει (1) τῶν διατεθειμένων Τετραγωνικῶν ἐξισώσεων εἶδος, ὅπερ ἐκ τῆς ΚΗ΄. ταύτης οἱ πάλαι τῶν Γεωμετρῶν ἐπελύοντο, πηλικότητα ἐξευρίσκοντες ἀγνοουμένην τὴν ξβ, ἢ φβ παραβολῇ Ὀρθογωνίου τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ γ ἴσου, παρὰ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν αβ, εἴδει Τετραγώνῳ ἐλλείποντος. Πρόδηλον δὲ ὡς τὸ πρῶτον τουτὶ εἶδος διττῆς ἐστιν ἐπιδεκτικὸν ἐπιλύσεως, τὸ γάρτοι υ ἤτοι διὰ τῆς ξβ, ἢ διὰ τῆς φβ ἔχοι ἂν ἀναπτύσσεσθαι, ὧν ἡ μὲν ξβ διὰ τῆς ἐν τῇ προτάσει, ἡ δὲ φβ διὰ τῆς ἐν τῷ Σχολίῳ κατασκευῆς ἐξευρεθήσεται. Δῆλον δὲ καὶ ἐκ τοῦ Β΄. Πορίσματ. τῆς ΚΖ΄. Προτ., ὡς αἱ δύω ἐκεῖναι πηλικότητες ἅμα ληφθεῖσαι $ξβ + φβ$, τῇ δοθείσῃ Εὐθείᾳ αβ ἴσαι εἰσί· Διὸ οὐδὲ εἰς εὕρεσιν ἑκατέρας διττῆς ἐστι κατασκευῆς χρεία, θατέρας γὰρ εὑρεθείσης, οἷον τῆς ξβ, καὶ ἡ ἑτέρα, τουτέστιν ἡ αξ, εἴτ᾽ οὖν ἡ φβ ἔσται κατάδηλος.

Γ΄. Καὶ ἡ Μέθοδος δὲ, ᾗ χρῆσθαι εἰώθασιν οἱ νεώτεροι εἰς τὴν τῶν ἐξισώσεων τοῦ τοιούτου εἴδους ἐπίλυσιν, ἐκ τῆς κατασκευῆς καὶ αὐτὴ τῆς ἐν χερσὶν

(1) Ὅρα Οὐγτρέδου κλεῖδα Μαθηματ. Κ. ις. ἀριθμ. θ.

ΚΗ'. ἐπάγεται· Ἐπεὶ γὰρ υ ἤτοι $\varphi\beta = \alpha\xi$ ἐςὶν, ἢ $\xi\beta$, ϗ $\alpha\xi = \frac{1}{2}\ \alpha\beta + \varepsilon\xi$, ϗ $\varepsilon\xi = \varkappa\iota$, καὶ διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς ΚΗ'. Προτ. $\varkappa\iota^{T} = \varepsilon\beta^{T} - \gamma =$ (1) $\frac{1}{4}\ \alpha\beta^{T} - \gamma$, ἔςαι κι, ἢ $\varepsilon\xi = \sqrt{\frac{1}{4}\ \alpha\beta^{T} - \gamma}$· Καὶ υ ἄρα ἔςαι:

Ἤτοι $\alpha\xi = \frac{1}{2}\ \alpha\beta + \sqrt{\frac{1}{4}\ \alpha\beta^{T} - \gamma}$.

Ἢ $\xi\beta = \frac{1}{2}\ \alpha\beta - \sqrt{\frac{1}{4}\ \alpha\beta - \gamma}$.

Ὥςε ἐπὶ τῇ ἐξισώσει $\alpha\beta \times \upsilon - \upsilon^{T} = \gamma$, ἡ μέθοδος ἐςὶ $\frac{1}{2}\ \alpha\beta \pm \sqrt{\frac{1}{4}\ \alpha\beta^{T} - \gamma} = \upsilon$· Ὅρα Οὐγτρέδιον ἔνθα ἀνωτ.

Ἔνθεντοι ἐπὶ τῇ ἐξισώσει $\alpha\beta \times \upsilon - \upsilon^{T} = \gamma$, δοθείσης τῆς Εὐθείας αβ, ϗ τῦ Εὐθυγράμμυ γ, εὐχερέςερον εὑρεθήσεται ἡ υ, ἐὰν τῷ Εὐθυγράμμῳ γ ἴσον (2) Τετράγωνον συςαθῇ, οὗτινος Πλευρὰ ἐκ τῆς τοιᾶςδε κατασκευῆς εὑρισκομένη εἴη ω, ἢ δήπερ ἀπὸ τῦ ε μεσαιτάτυ τῆς δοθείσης αβ Κάθετος ἀχθείη ἴση ἡ εχ, ϗ Κέντρῳ μὲν τῷ χ, Διαςήματι δὲ τῷ $\chi\xi = \frac{1}{2}\ \alpha\beta$, τόξον Κύκλυ καταγραφείη τέμνον τὴν αβ κατὰ τὸ ξ· Τηνικαῦτα γὰρ αἱ αξ, ξβ, ἔσονται αἱ δυνάμεις τῆς υ· Καὶ γὰρ $\upsilon =$ (3) $\frac{1}{2}\ \alpha\beta \pm \sqrt{\frac{1}{4}\ \alpha\beta^{T} - \gamma}$. Ἀλλ' ἐκ κατασκ. ἔςι $\chi\xi^{T} = \frac{1}{4}\ \alpha\beta^{T}$, ϗ $\chi\varepsilon^{T} = \gamma$, ἄρα $\varepsilon\xi^{T}$ ἤτοι (4) $\chi\xi^{T} - \chi\varepsilon^{T} = \frac{1}{4}\ \alpha\beta^{T} - \gamma$· Ἄρα $\varepsilon\xi = \sqrt{\frac{1}{4}\ \alpha\beta - \gamma}$, ϗ $\alpha\xi = \frac{1}{2}\ \alpha\beta + \varepsilon\xi = \frac{1}{2}\ \alpha\beta + \sqrt{\frac{1}{4}\ \alpha\beta^{T} - \gamma}$, ὥσπερ δὴ ϗ $\xi\beta = \frac{1}{2}\ \alpha\beta - \varepsilon\xi = \frac{1}{2}\ \alpha\beta - \sqrt{\frac{1}{4}\ \alpha\beta^{T} - \gamma}$. Δ. σχ. 401.

Πρότασις ΚΘ.

„Παρὰ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν (αβ), τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ (γ) ἴσον „Παραλληλόγραμμον (αι) παραβαλεῖν, ὑπερβάλλον εἴδει Παραλληλογράμ- „μῳ (μλ) ὁμοίῳ τῷ δοθέντι (δ).

Δίχα τετμήσθω ἡ αβ κατὰ τὸ ε, ϗ ἐπὶ τῆς εβ Εὐθείας (5) συνεςάσθω Παραλληλόγραμμον τῷ δοθέντι δ ὅμοιον τὸ βεζη· τοῖς δὲ δὴ γ ϗ εη ἅμα ληφθεῖσιν ἴσον, τῷ δὲ ζεβη ὅμοιον, ϗ ὁμοίως κείμενον γινέσθω (6) Παραλληλόγραμμον τὸ ζκιθ, κοινὴν ἔχον σὺν ἐκείνῳ Γωνίαν τὴν πρὸς τῷ ζ. Ἔσονται (7) τοίνυν τὰ Παραλληλόγραμμα εη, θκ περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον ζβι. Προεκβληθήτωσαν δὴ αἱ αβ, ηβ, ἐπὶ λ ϗ μ· καὶ ἐπειδὴ ὅμοιον τὸ εη τῷ δ ἐκ κατασκευῆς, ϗ μὴν (8) ϗ τῷ μλ, ὅτι περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον εἰσὶ τὰ εη, μλ, ἕπεται δήπυ (9) ϗ τὸ μλ αὐτὸ τῷ δ ὅμοιον εἶναι. Προεκβληθείσης οὖν τῆς μκ, πληρέσθω τὸ Παραλληλόγραμμον αμ, ϗ ἔςαι ακ (10) = κβ = σχ. 402.

(1) Γ. Πόρισ. τῆς Δ. τῦ β'. (2) ΙΔ. τῦ β'. (3) Γ. Πόρ. τῆς παρέσ. (4) ΜΖ. τῦ α. (5) ΙΗ. τῦ ς'. (6) ΚΕ. τῦ ς'. (7) Κς. τῦ ς'. (8) ΚΔ. τῦ ς'. (9) ΚΑ. τῦ ς'. (10) Λς. τῦ α'.

(1) βθ. Ἐὰν οὖν τοῖς ἴσοις ακ, βθ, κοινὸν προςεθῇ τὸ κλ, ἔςαι αἱ Παραλληλόγρ. ἴσον τοῖς Παραλληλογράμμοις κλ ϗ βθ ἅμα ληφθεῖσι· Τὸ δέ τοι κθ (τουτέςιν $\epsilon\eta + \kappa\lambda + \beta\vartheta$) ἴσον ἐςὶ τοῖς $\epsilon\eta + \gamma$ ἐκ κατασκευῆς, ἀφαιρεθέντος ἄρα τοῦ κοινοῦ εη, ἔςαι $\gamma = \eta\lambda + \beta\vartheta = \alpha\iota$. Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα Εὐθεῖαν αβ, τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ γ ἴσον Παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ αι, ὑπερβάλλον εἴδει Παραλληλογράμμῳ τῷ μλ, ὁμοίῳ τῷ δοθέντι δ. Ο. Ε. Π.

Πορίσματα.

κ. 403. Α΄. Ἐὰν ᾖ τὸ Παραλληλόγραμμον δ Τετράγωνον, αἰτεῖται τὸ Πρόβλημα „παρὰ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν αβ, τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ γ ἴσον Ὀρθο-„γώνιον παραβαλεῖν, ὑπερβάλλον Τετραγώνῳ.“ Ἐπεὶ δὲ διὰ τὴν κατασκ. Ὀρθογώνιον τὸ αι συνάμα τῷ Τετραγώνῳ εη, ἴσον ἐςὶ τῷ Τετραγ. κθ, εὔδηλον ὡς ἡ ϛ΄. τῶν τοῦ Β΄. Βιβλίου Προτάσεων, ἐκ ταύτης τῆς ΚΘ΄. τοῦ ϛ΄. ἀμέσως ἂν ἐπαχθείη. Αὕτη γὰρ ἐκείνη. „Ἐὰν Εὐθεῖα ἡ αβ δίχα ᾖ τετμημένη κατὰ „τὸ ε, προςεθῇ δέ τις αὐτῇ Εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας ἡ βλ, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης „σὺν τῇ προσκειμένῃ αλ ϗ τῆς προσκειμένης βλ περιεχόμενον Ὀρθογώνι-„ον, ἤτοι τὸ αι, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας Τετραγώνου εη, ἴσον ἐςὶ τῷ Τε-„τραγώνῳ κθ, τῷ ἀπό τε τῆς ἡμισείας ϗ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς ελ „ἤ κι ἀναγραφέντι“ Οὐδὲν οὖν ἕτερον ἡ τοῦ Β΄. ἕκτη προτίθησι Πρότασις, ἢ τὸν κατὰ τὴν ΚΘ΄. τοῦ ϛ΄. διορισμὸν, ὃν ἡ ἐν τῷ Πορίσματι ὑπόθεσις βούλεται.

Β΄. Δοθείσης τῆς αβ καὶ τοῦ Εὐθυγράμμου γ, διὰ τῆς ἐν χερσὶ Προτάσ. εὗρον οἱ πάλαι τῶν Γεωμετρῶν τὰς αλ, λι, ὑφ᾽ ὧν τὸ αι Ὀρθογώνιον τὸ ἴσον τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ γ περιέχεται, καὶ ὃ παρὰ τὴν δοθεῖσαν αβ οὕτω παραβαλεῖν δεῖ, ὡς ὑπερβάλλειν εἴδει Τετραγώνῳ. Αἱ γεμὴν Πλευραὶ αὗται παρὰ τοῖς ὕςερον ἀναλυςαῖς (2) διὰ τῆς ἀναλύσεως τῶν κατὰ τὸ Β΄. ϗ Γ΄. εἶδος διατεθειμένων Τετραγωνικῶν ἐξισώσεων ἐξευρίσκονται. Ἐὰν γὰρ ἀντὶ τῆς Πλευρᾶς λι τεθῇ ε, ἔςαι $\mu\lambda = \epsilon^{T}$, ϗ $\alpha\mu = \epsilon \times \alpha\beta$· ὥςε αι τουτέςι τὸ $\gamma = \epsilon^{T} + \epsilon \times \alpha\beta$, ὃ τὸ τρίτον ἐςὶ τῶν Τετραγωνικῶν ἐξισώσεων εἶδος, καθ᾽ ὃ διὰ τῆς παρούσης Προτάσ. ἐξευρίσκεται τὸ ε, τουτέςιν ἡ βλ, ἤτοι ἡ λι, παραβολῇ Ὀρθογωνίου τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ γ ἴσου, παρὰ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν αβ, ϗ ὑπερβάλλοντος Τετραγώνῳ. Εὑρεθείσης δὲ τῆς Πλευρᾶς λι, ἤτοι ε, δήλη ἅμα ἔςαι ϗ ἡ ἑτέρα Πλευρὰ $\alpha\lambda = \alpha\beta \times \epsilon$, ἣν οἱ νεώτεροι εὑρεῖν ἐπιτηδεύονται τῇ κατὰ τὸ Β΄. εἶδος ἀναλύσει τῆς ἐξισώσεως.

---

(1) ΜΓ. τοῦ α΄. (2) Ὅρα Οὐγτρέδ. ἐν Κλειδὶ Κ΄. Ιϛ΄. Ἀριθμ. Θ.

Καὶ τοῦτο δὲ τὸ Β΄. εἶδος τῶν διατεθειμένων Τετραγωνικῶν ἐξισώσεων, εὑρεθεισῶν διὰ τὸ ἄνωτ. Πόρ. τῶν τῷ Ὀρθογωνίῳ αι (τῷ Εὐθυγράμμῳ γ ἴσου, παρὰ τὴν δοθεῖσαν αβ παραβεβλημένου, καὶ ὑπερβάλλοντος εἴδει Τετραγώνῳ) Πλευρῶν αλ, λι, οὕτω κατασκευάζεσθαι δύναται. Γ΄.

Ἀναγεγράφθω δὴ (1) τὸ ἀπὸ τῆς αλ, εἴτ' οὖν τῆς ιφ Τετράγωνον ιφπρ, οὗ ἂν μέρος εἴη τὸ Ὀρθογώνιον αι· Καὶ ἐπειδὴ $\alpha\lambda = \iota\varrho$, καὶ $\beta\lambda = \lambda\iota$, ἔσται (2) $\lambda\varrho = \alpha\beta$· Ἐὰν οὖν ἀντὶ τῆς αλ τεθῇ α, ἔσται τὸ $\varphi\varrho = \alpha^{T}$, καὶ $\alpha\varrho = \alpha \times \alpha\beta$· Ἔνθεν τοι αι, εἴτ' οὖν $\gamma = (\varphi\varrho - \alpha\varrho =)\ \alpha^{T} - \alpha \times \alpha\beta$· Καὶ τοῦτο τὸ τῶν Τετραγωνικῶν ἐξισώσεων Β΄. εἶδος, ὃ δεῖ διὰ τοῦ παρόντος Πορίσματος κατασκευάζειν.

Καὶ τῶν Νεωτέρων δὲ αἱ μέθοδοι (3) (τουτέστι $\sqrt{\tfrac{1}{4}\ \alpha\beta^{T} + \gamma} + \tfrac{1}{2}\ \alpha\beta = \alpha$, καὶ $\sqrt{\tfrac{1}{4}\ \alpha\beta + \gamma} - \tfrac{1}{2}\ \alpha\beta = \varepsilon$), δι' ὧν ἐκ μὲν τῆς ἐξισώσεως $\alpha^{T} - \alpha \times \alpha\beta = \gamma$ εὑρίσκεται τὸ α, ἐκ δὲ τῆς ἐξισώσεως $\varepsilon^{T} + \varepsilon \times \alpha\beta = \gamma$ εὑρίσκεται τὸ ε, κατασκευῇ τῆς ἀνὰ χεῖρας Προτάσ. ἐπαχθῆναι δύνανται· Ἐπειδὴ γὰρ $\varepsilon\beta = \tfrac{1}{2}\ \alpha\beta$, ἔσται $\varepsilon\eta =$ (4) $\tfrac{1}{4}\ \alpha\beta^{T}$, διὰ δὲ τὴν τῆς παρούσ. κατασκευὴν $\kappa\vartheta = \varepsilon\eta + \gamma = \tfrac{1}{4}\ \alpha\beta^{T} + \gamma$, καὶ τούτου ἡ Πλευρὰ κι, εἴτ' οὖν ἡ $\varepsilon\lambda = \sqrt{\tfrac{1}{4}\ \alpha\beta^{T} + \gamma}$, ᾗπερ ἐὰν ἡ αε, ἢ γοῦν $\tfrac{1}{2}\ \alpha\beta$ προστεθῇ, ἔσται αλ ἤτοι $\alpha = \sqrt{\tfrac{1}{4}\ \alpha\beta^{T} + \gamma} + \tfrac{1}{2}\ \alpha\beta$· Ἐὰν οὖν ἀπὸ $\varepsilon\lambda = \sqrt{\tfrac{1}{4}\ \alpha\beta^{T} + \gamma}$ ἀφαιρεθῇ εβ, ἤτοι $\tfrac{1}{2}\ \alpha\beta$, ὑπολειφθήσεται βλ, εἴτ' οὖν $\varepsilon = \sqrt{\tfrac{1}{4}\ \alpha\beta^{T} + \gamma} - \tfrac{1}{2}\ \alpha\beta$. Δ΄.

Ἐκ τούτων δὲ τῶν μεθόδων ἐφ' ἑκατέρας τῆς ἐξισώσεως, εἴτε τῆς $\alpha^{T} - \alpha \times \alpha\beta = \gamma$, εἴτε τῆς $\varepsilon^{T} + \varepsilon \times \alpha\beta = \gamma$, δοθείσης τῆς Εὐθείας αβ, καὶ τοῦ Εὐθυγράμμου γ, εὐχερέστερον ἐξευρίσκονται αἱ α καὶ ε, ἐὰν τῷ Εὐθυγράμμῳ γ Τετράγωνον ἴσον (5) κατασκευασθῇ, οὗπερ ἡ ἐντεῦθεν εὑρισκομένη Πλευρὰ εἴη ν, ᾗπερ ἀπὸ τοῦ μεσαιτάτου τῆς Εὐθείας αβ Κάθετος ἀχθείη εξ, καὶ ἐπιζευχθείη ξβ, ᾗ δήπερ ἴση ἐπὶ τῆς εβ προεκβληθείσης ληφθείη ἡ ελ· ἔσται γὰρ $\alpha\lambda = \alpha$, καὶ $\beta\lambda = \varepsilon$· Ἐπειδὴ γὰρ $\varepsilon\xi^{T} =$ (6) γ, ἔσται $\varepsilon\beta^{T} + \varepsilon\xi^{T} = \tfrac{1}{4}\ \alpha\beta^{T} + \gamma =$ (7) $\xi\beta^{T} = \varepsilon\lambda^{T}$· Ὥστε $\varepsilon\lambda$ (8) $= \sqrt{\tfrac{1}{4}\ \alpha\beta^{T} + \gamma}$, καὶ $\alpha\lambda =$ (9) $\tfrac{1}{2}\ \alpha\beta + \sqrt{\tfrac{1}{4}\ \alpha\beta^{T} + \gamma} = \alpha$, καὶ $\beta\lambda =$ (10) $\sqrt{\tfrac{1}{4}\ \alpha\beta^{T} + \gamma} - \tfrac{1}{2}\ \alpha\beta = \varepsilon$. Ε΄. σχ. 404.

(1) Μσ. τοῦ ά. (2) Ἀξ. Γ. τοῦ ά. (3) Ὅρα Οὐγτρέδ. ἔνθα ἄνωτ. (4) Γ. Πόρ. τῆς Δ. τοῦ β΄. (5) ΙΔ. τοῦ β΄. (6) Ἐκ κατ. (7) ΜΓ. τοῦ ά. (8) Ἀξ. ιέ. (9) Ἀξ. β΄. (10) Ἀξ. γ΄.

Πρότασις Λ.

„Τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν (αβ) ὅτω τεμεῖν, ὡς εἶναι τὴν ὅλην αβ πρὸς „τὸ ἕτερον τῶν Τμημάτων αγ, ὡς τὸ αὐτὸ ἐςὶ Τμῆμα πρὸς τὸ λοιπὸν (γβ).

„Τȣτέςιν (ὡς οἱ Γεωμέτραι φασὶ) τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν πεπερασμένην „ἄκρον ϗ μέσον λόγον τεμεῖν.

σχ. 405. Ἐπὶ τῆς Εὐθείας αβ ἀναγραφήτω Τετράγωνον τὸ αβτζ, ϗ παρὰ τὴν Εὐθεῖαν ζα, τῷ Τετραγώνῳ ζβ παραβληθήτω (1) ἴσον Ὀρθογώνιον τὸ ζξλι, ὑπερβάλλον εἴδει αλ τῷ ζβ ὁμοίῳ· τὸ γȣ̃ν αλ Τετράγωνον ἐςίν· Ἐπεὶ δὲ $\zeta\lambda = \zeta\beta$, κοινȣ̃ ἀφαιρεθέντος τȣ̃ ζγ, ἔςαι $\alpha\lambda = \xi\beta$, διὰ δὲ τὰς Ὀρθὰς ϗ ἑπομένως ἴσας Γωνίας ὑπὸ ξγβ, αγλ (2), ἔςαι $\xi\gamma : \gamma\lambda :: \alpha\gamma : \gamma\beta$· Ἀλλὰ (3) $\xi\gamma = \alpha\zeta = \alpha\beta$, ϗ $\gamma\lambda = \alpha\gamma$, ἄρα $\alpha\beta : \alpha\gamma :: \alpha\gamma : \gamma\beta$· Γέγονε τοίνυν τὸ ζητȣ́μενον.

Ἄλλως.

σχ. 406. Διὰ τὴν ΙΑ΄. τȣ̃ Β΄. ὅτω τέμε τὴν αβ κατὰ τὸ γ, ὡς τὸ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ αβ, γβ, ἴσον εἶναι τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ αγ· Οὕτω γὰρ ἔςαι τετελεσμένον κτ.

Ἔςαι γὰρ διὰ τὴν ΙΖ΄. $\alpha\beta : \alpha\gamma :: \alpha\gamma : \gamma\beta$.

Τῆς δὲ τομῆς ταύτης θαυμασία ἡ δύναμις εἰς τὴν τῶν Κανονικῶν σχημάτων ἐγγραφὴν ϗ παράθεσιν.

Πρότασις ΛΑ.

σχ. 407. „Ἐν τοῖς Ὀρθογωνίοις Τριγώνοις (αγβ), τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν Γωνίαν „ὑποτεινȣ́σης Πλευρᾶς εἶδος (ζ) ἴσον ἐςὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν Γωνίαν πε„ριεχȣσῶν Πλευρῶν εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις ϗ ὁμοίως ἀναγραφομένοις (κ ϗ λ).

Ἡ κατὰ τὸ Α΄. Βιβλίον ΜΖ΄. ἐπὶ τȣ̃ παρόντος καθολικεύεται.

Ἀπὸ τῆς ὀρθῆς Γωνίας γ καθείσθω Κάθετος ἡ γξ· ἐπεὶ δὲ αἱ τρεῖς αβ, βγ, βξ (4) ἀνάλογον εἰσὶν, ἔςαι ζ πρὸς τὸ αὐτῷ ὅμοιον κ, ὡς (5) αβ πρώτη πρὸς βξ τρίτην. Πάλιν ἐπειδὴ (6) βα, αγ, αξ, τρεῖς ἀνάλογον εἰσὶν, ἔςαι ζ πρὸς τὸ αὐτῷ ὅμοιον λ, ὡς βα πρώτη πρὸς αξ τρίτην· Ἐπεὶ τοίνυν ζ πρὸς κ ὡς αβ πρὸς βξ, ϗ ζ πρὸς λ ὡς αβ πρὸς αξ, ἔςαι ϗ ζ πρὸς

---

(1) ΚΘ. τȣ̃ ς΄. (2) ΙΔ. τȣ̃ ς΄. (3) ΛΔ. τȣ̃ α΄. (4) Πόρ. Β΄. τῆς Η. τȣ̃ ς΄. (5) Β. Πόρ. τῆς Κ. τȣ̃ ς΄. (6) Β. Πόρ. τῆς Κ. τȣ̃ ς΄.

κ ϗ λ ἅμα ληφθέντα, ὡς αβ (1) πρὸς βξ ϗ αξ ἅμα ληφθείσας. Ἀλλαμὴν ἡ αβ ταῖς δυσὶ βξ, αξ ἴση ἐςίν, ἄρα καὶ τὸ ζ τοῖς δυσὶ κ καὶ λ ἴσον ἐςί. Ο. Ε. Δ.

Πορίσματα.

Ἐκ ταύτης δὲ τῆς Προτάσεως ϗ Σχημάτων ὁποσωνȣ̃ν ϗ ὁποιωνȣ̃ν ὁμοίων πλήθει, ἕντι ληφθήσεται ἴσον τε ϗ ὅμοιον παραπλησίᾳ μεθόδῳ τῇ κατὰ τὸ Α΄. Πρόβλημα τὸ ἐν τῷ Σχολίῳ τῷ μετὰ τὴν ΜΖ΄. τȣ̃ Α΄., δἰ ȣ̃ ὁποσοισȣ̃ν Τετραγώνοις ἴσον ἓν ἀνεγράφετο, πλὴν ὅσον ἐν τῇ ἀποδείξει ἀντὶ τῆς ΜΖ΄. τȣ̃ Α΄. ληπτέον τὴν ΛΑ΄. τȣ̃ ϛ΄.

Τῷ δ᾽ αὐτῷ λόγῳ, ϗ διὰ τȣ̃ Β΄. Προβλήματος τȣ̃ ἐν τῷ αὐτῷ ἐκείνῳ Σχολίῳ, δοθήσεται ϗ ἡ τῶν ὁμοίων Σχημάτων ὁμοία ȣ̃σα διαφορά· τȣτέςιν ȣ̓ μόνον συνάπτεσθαι δύναται, ἀλλὰ ϗ ἀφαιρεῖσθαι τὰ Σχήματα τὰ ὅμοια ἀπ᾽ ἀλλήλων, ὁποῖα ποτ᾽ ἂν ᾖ, τὸ ἔλαττον δηλονότι ἀπὸ τȣ̃ μείζονος, καθάπερ ἐν τῷ εἰρημένῳ Σχολίῳ ϗ τὰ Τετράγωνα ἀλλήλοις τε συνάπτεται ϗ ἀπ᾽ ἀλλήλων ἀφαιρεῖται.

Πρότασις ΛΒ.

Οὐδὲν ȣ̓δὲ χρήσιμον ἐςὶν ἐν αὐτῇ, ȣ̓δὲ λόγȣ ἄξιον· Ὑπετέθη δὲ ὅμως ἡμῖν ἀνωτέρω ἐν τῷ Η΄. Πορίσματι τῶν μετὰ τὴν Κϛ΄. Πρότασιν.

Πρότασις ΛΓ.

„Ἐν τοῖς ἴσοις Κύκλοις, ἢ τῷ αὐτῷ, αἱ Γωνίαι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχȣ-
„σι ταῖς Περιφερείαις ἐφ᾽ ὧν βεβήκασιν (ακγ, ζηδ), ἐάν τε πρὸς τοῖς Κέν-
„τροις (ὡς αἱ αβγ, ζξδ), ἐάν τε πρὸς ταῖς Περιφερείαις (ὡς αἱ αργ, ζσδ)
„ὦσι βεβηκεῖαι· ἔτι δὲ ϗ οἱ Τομεῖς, ἅτε πρὸς τοῖς Κέντροις συνιςάμενοι.

Τὸ γȣ̃ν περὶ τῶν πρὸς τοῖς Κέντροις Γωνιῶν, ϗ δὴ ϗ τὸ περὶ τῶν Τομέων παραπλησίῳ λόγῳ δειχθήσεται, ᾧ κἀπὶ τῆς Α΄. Προτάσ. τȣ̃ παρόντος Βιβλίȣ ἐδείχθη τὰ τὸ αὐτὸ ἔχοντα ὕψος Τρίγωνα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ Βάσεις, εἰμὴ ὅτι ἀντὶ τῆς ἐκεῖσε ληφθείσης ΛΗ΄. Προτάσ. τȣ̃ Α΄. Βιβλίȣ, ληπτέον ἐνταῦθα τὴν ΚΘ΄. τȣ̃ Γ΄., καὶ ἀντὶ δὲ τȣ̃ ε ἐκεῖσε τȣ̃ ἐπὶ τῆς κορυφῆς τȣ̃ Τριγώνȣ δεζ, θετέον ἐνταῦθα ξ, ᾧπερ ἡ κατὰ κορυφὴν Γωνία ἐπισημαίνεται τῆς τε Γωνίας ϗ τȣ̃ Τομέως δξζ, ἀντὶ δὲ τῶν ἐν ἐκείνοις Τριγώνων, χ. 408.

---

(1) ΚΔ. τȣ̃ ε΄.

ληφθήτωσαν ὧδε αἱ πρὸς τοῖς Κέντροις β ϗ ξ Γωνίαι, ϗ δὴ ϗ οἱ Τομεῖς, ϗ τελευταῖον ἀντὶ τῶν ἐν ἐκείνοις Βάσεων, ὧδε αἱ Περιφέρειαι.

Ὁσάκις γὰρ μόριον ὁποιονῦν τριτημόριον φέρε τὸ δη, τῆς Περιφερείας δζ, περιέχεται ἐν τῇ Περιφερείᾳ αγ, τοσάκις τὸ ὅμοιον μόριον, οἷον τὸ ὑπὸ δξη, τῆς ὑπὸ δξζ Γωνίας ἔϛαι περιεχόμενον ἐν τῇ Γωνίᾳ τῇ ὑπὸ αβγ. Δῆλον δὲ ὅτι ϗ ὁποιονδήποτε ἕτερον μόριον τῆς Περιφερείας δζ, ϗ τῆς Γωνίας ὑπὸ δξζ, ἐν τῇ Περιφερείᾳ αγ, κἀν τῇ Γωνίᾳ τῇ ὑπὸ αβγ ἰσαρίθμως ἀεὶ περιέχεται. Κατὰ ἄρα τὸ γνώρισμα τῶν ἴσων λόγων τὸ παρὰ Τακουετίῳ, ἔϛαι ἡ ὑπὸ αβγ Γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ δξζ Γωνίαν, ὡς ἡ Περιφέρεια αγ πρὸς τὴν Περιφέρειαν δζ. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται ϗ τὸν Τομέα αβγ εἶναι πρὸς τὸν Τομέα δξζ, ὡς ἡ Περιφέρεια αγ πρὸς τὴν Περιφέρειαν δζ.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ πρὸς τῇ Περιφερείᾳ Γωνίαι ρ ϗ σ ἡμίσειαι (1) εἰσὶ τῶν πρὸς τῷ Κέντρῳ Γωνιῶν ὑπὸ αβγ, ζξδ, τὸ περὶ τούτων δεδειγμένον ϗ περὶ ἐκείνων ἔϛαι.

Πορίσματα.

κ. 409. Α'. Ἡ πρὸς τῷ Κέντρῳ Γωνία ὑπὸ βαγ ἐϛὶ πρὸς τὰς τέσσαρας Ὀρθὰς, ὡς ἡ Περιφέρεια βγ ἐφ' ἧ βέβηκε, πρὸς τὴν ὅλην Περιφέρειαν.

Ἐπειδὴ γὰρ τὰς τέσσαρας Ὀρθὰς, τουτέϛι (2) πάσας τὰς περὶ τὸ αὐτὸ Κέντρον α Γωνίας καταμετρεῖ ὅλη ἡ τοῦ Κύκλου Περιφέρεια, τὴν μίαν ἄρα ὀρθὴν Γωνίαν, ἤτοι τὴν ὑπὸ βαζ, καταμετρήσει τῆς ὅλης Περιφερείας τὸ τεταρτημόριον βζ. Ἀλλὰ γὰρ ὡς ἔχει ἡ ὑπὸ βαγ Γωνία πρὸς τὴν Ὀρθὴν ὑπὸ βαζ, οὕτω (διὰ ταύτην τὴν ΛΓ'.) ϗ ἡ Περιφέρεια βγ πρὸς τὸ τεταρτημόριον βζ, ἄρα (3) ἡ ὑπὸ βαγ ἐϛὶ πρὸς τὰς τέσσαρας Ὀρθὰς, ὡς τὸ τόξον βγ ἐϛὶ πρὸς τὰ τέτταρα τεταρτημόρια, τουτέϛι πρὸς τὴν ὅλην Περιφέρειαν.

κ. 410. Β'. Τῶν ἀνίσων Κύκλων αἱ Περιφέρειαι ιλ, βγ, αἱ ἴσας ὑποτείνουσαι τὰς Γωνίας, εἴτε τὰς πρὸς τῷ Κέντρῳ, οἷαι αἱ ὑπὸ ιαλ ϗ βαγ, εἴτε τὰς πρὸς τῇ Περιφερείᾳ ὅμοιαι εἰσί· καὶ ἀνάπαλιν.

Πρῶτον ϗ γὰρ κείσθωσαν αἱ ἴσαι Γωνίαι πρὸς τοῖς Κέντροις· ϗ ἡ Περιφέρεια ιλ ἐϛὶ πρὸς τὴν ἰδίαν ὅλην Περιφέρειαν, ὡς (4) ἡ ὑπὸ ιαλ Γωνία, τουτέϛιν ἡ ὑπὸ βαγ πρὸς τέτταρας Ὀρθάς· ἦτε Περιφέρεια βγ ἐϛὶ πρὸς τὴν ἰδίαν αὐτῆς ὅλην Περιφέρειαν (5), ὡς ἡ αὐτὴ Γωνία ἡ ὑπὸ βαγ πρὸς τέτταρας

---

(1) Κ. τοῦ γ'. (2) Διὰ τὸ Γ'. Πόρ. τῆς ΙΓ. τοῦ α'. μετὰ τοῦ Σχολ. τῆς ΚΓ. τοῦ α'. (3) ΚΔ. τοῦ ε'. (4) Διὰ τὸ Α'. Πόρ. (5) Διὰ τὸ Α'. Πόρ.

Ὀρθάς· Ἄρα ἡ ιλ (1) ἐςὶ πρὸς τὴν ἰδίαν ὅλην Περιφέρειαν, ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν ἰδίαν, καὶ ἑπομένως (2) αἱ Περιφέρειαι ιλ ϗ βγ ὅμοιαι εἰσί.

Ἐὰν δὲ αἱ ἴσαι Γωνίαι ξ ϗ κ πρὸς ταῖς Περιφερείαις ὦσι, κείσθωσαν δὴ χ. 411.
ἐπὶ τῶν αὐτῶν Περιφερειῶν βεβηκεῖαι, ϗ Γωνίαι πρὸς τοῖς κέντροις ἔςαι αἱ ὑπὸ ιαλ, βαγ, ϗ (3) ἔσονται ϗ αὗται ἴσαι. Ὅθεν (διὰ τὸ Α΄. μέρος) τὰ τόξα, τουτέςιν αἱ Περιφέρειαι ιλ ϗ βγ ὅμοιαι εἰσί.

Καὶ ἀνάπαλιν. Τῶν ἀνίσων Κύκλων αἱ ὅμοιαι Περιφέρειαι βγ ϗ ιλ ὑποτείνουσι Γωνίας ἴσας, κἄντε πρὸς τοῖς Κέντροις αὗται ὦσι, κἄντε πρὸς ταῖς Περιφερείαις· Ὡς ἐξ αὐτοῦ δὴ τοῦ Σχήματος, ϗ τῆς Κ΄. τοῦ Γ΄. Βιβλίου καταδηλον ἐςί.

Ἡμιδιάμετροι δύω αβ ϗ αγ, ἀπὸ τῶν ὁμοκέντρων Περιφερειῶν τόξα ἀ- Γ΄.
πολαμβάνουσιν ὅμοια τὰ ιλ, βγ. Τοῦθ᾽ ὅπερ εὔδηλον ἐςὶν ἐκ τοῦ Β΄. Πορίσματος.

Ἠγμένων τῶν Εὐθειῶν βγ, ιλ, τὰ Τμήματα βκγ, ιξλ, ἃ δεκτικὰ Δ΄. χ. 412.
ἴσων ἐςὶ Γωνιῶν τῶν κ, ξ, ὅμοια ἐςί· καὶ ἀνάπαλιν.

Διὰ γὰρ τὸ Β΄. Πόρισμα, αἱ Περιφέρειαι βγ, ιλ, ϗ ἑπομένως καὶ αἱ βκγ ϗ ιξλ ὅμοιαι εἰσί· Ἄρα (4) ϗ τὰ Τμήματα βκγ, ιξλ ὅμοια ἐςί.

Ἔτι ϗ τὰ ἀπεναντίον Τμήματα, διὰ τὰς βγ ϗ ιλ ὁμοίας Περιφερείας, ϗ αὐτὰ ὅμοια ἐςί.

Ἀνάπαλιν δὲ, τὰ ὅμοια Τμήματα βκγ, ιξλ, δεκτικά ἐςι Γωνιῶν ἴσων τῶν κ ϗ ξ. Διὰ γὰρ (5) τὰς ὁμοίας Περιφερείας βκγ, ιξλ, αἱ ἀπεναντίον Περιφέρειαι βγ, ιλ ὅμοιαι ἔσονται, αἵτε Γωνίαι κ ϗ ξ αἱ ἐπ᾽ αὐταῖς βεβηκεῖαι ταῖς Περιφερείαις (6) ἀλλήλαις ἴσαι.

Ἔτι αἱ ἐν τοῖς Τμήμασι βγ, ιλ Γωνίαι, τῶν ἴσων Γωνιῶν κ ϗ ξ (7) παραπληρώματα ἐςὶ πρὸς δύω Ὀρθὰς, ϗ διὰ τοῦτο ἴσαι.

Τὰ ὅμοια Τμήματα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς Εὐθείας, ἢ τῶν ἴσων, ἴσα ἀλ- Ε΄.
λήλοις ἐςί. Δῆλον ἐκ τοῦ ἀνωτ. Πορίσματος, ϗ ἐκ τοῦ Σχολίου τῆς ΚΑ΄. τοῦ Γ΄., καὶ ἐκ τοῦ Ζ΄. Ἀξιώμ. τοῦ Α΄. Βιβλίου· Περιέχει δὲ τουτὶ τὸ Πόρισμα τὰς Προτάσεις, τήν τε ΚΓ΄. ϗ ΚΔ΄. τοῦ Γ΄. Βιβλίου, ἃς ὁ μὲν Τακουέτιος παρέλιπεν, αὐτοὶ δὲ ἀνειλήμμεθα· Ἡ γάρ τοι ἐν ἐκείνοις ΚΓ΄. οὕτως ἐκφέρεσθαι „εἴωθεν. Ἐπὶ τῆς αὐτῆς Εὐθείας δύω Τμήματα Κύκλου ὅμοια ϗ ἄνισα οὐ „συςαθήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη“· Ἡ δὲ ΚΔ΄. οὕτω· „Τὰ ἐπὶ ἴσων Εὐθειῶν „ὅμοια Τμήματα Κύκλων ἴσα ἀλλήλοις εἰσί.

---

(1) *Διὰ τὴν ΙΑ. τοῦ ε΄.* (2) *Ὁρ. Δ. τοῦ ϛ΄.* (3) *Διὰ τὴν Κ. τοῦ γ΄.* ϗ *τὸ ϛ΄. Ἀξ. τοῦ α΄.* (4) *Δ. Ὁρισμ. Βιβλ. ϛ΄.* (5) *Ὁρ. Δ. τοῦ ϛ΄.* (6) *Β. Πόρ. τῶν ἀνωτ.* (7) *ΚΒ. τοῦ γ΄.*

ϛ'. Ἐκ ταύτης δ' ἔτι τῆς Προτάσ. ϗ τῶν ἐξ αὐτῆς Πορισμάτων, ῥᾷϛα εἴληπται τὰ τῆς πράξεως τȣ͂ συνιϛᾶν, ϗ καταμετρεῖν τὰς Γωνίας, ὅπερ ἐν τῷ Σχολίῳ τῷ μετὰ τὴν ΚΓ'. τȣ͂ Α'. Βιβλίȣ πλατύτερον ἀνεπτύχθη.

Σχόλιον.

Ἐνταῦθα δὲ γενομένοις, τὸ ἐν τῷ Δ'. Βιβλίῳ ἡμῖν ὑποσχεθὲν ἀποτιτέον· ἐπηγγέλλετο γὰρ ἐν ἐκείνοις ἡ τῆς Ι'. Προτάσεως τȣ͂ ΙΓ'. τῶν ϛοιχείων ἀπόδειξις. Ἔχει γȣ͂ν τὸ θεώρημα ȣ̔́τω.

„ Ἐὰν εἰς Κύκλον Πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ (τὸ αβγδε), ἡ τȣ͂
„ Πενταγώνȣ Πλευρὰ (αβ) δύναται τῇ τε τȣ͂ Ἑξαγώνȣ, ϗ τῇ τȣ͂ Δεκαγώνȣ,
„ τῶν εἰς τὸν αὐτὸν Κύκλον ἐγγραφομένων.

κ. 413. Ἀχθείσης γὰρ τῆς Διαμέτρȣ αη, ϗ τῆς Ἡμιδιαμέτρȣ ζβ, ἀπὸ τȣ͂ Κέντρȣ ζ ἀχθήτω Κάθετος πρὸς αβ ἡ ζθ, ἥτις προεκβληθεῖσα προσπιπτέτω τῇ τȣ͂ Κύκλȣ Περιφερείᾳ κατὰ τὸ κ. Αὕτη δὴ ϗ τὸ τόξον ακβ (τȣτέϛι (1) τὸ πεμπτημόριον τῆς ὅλης Περιφερείας) δίχα τεμεῖ (2) κατὰ τὸ κ· Ἐπιζευχθήτωσαν αἱ βκ, κα, ϗ ἐπειδὴ ακ τῆς ὅλης Περιφερείας δεκατημόριον ἐϛὶν, ἔϛαι ἡ ακ Εὐθεῖα (3) πλευρὰ τȣ͂ Δεκαγώνȣ τȣ͂ κανονικȣ͂ (τȣτέϛι τȣ͂ ἰσοπλεύρȣ τε καὶ ἰσογωνίȣ) τȣ͂ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγράφεσθαι δυναμένȣ. Ἀπὸ γȣ͂ν τȣ͂ Κέντρȣ ζ Κάθετος ἀχθήτω ἐπὶ τὴν ακ ἡ ζν, ἥτις προεκβαλλομένη προσπιπτέτω τῇ Περιφερείᾳ τȣ͂ Κύκλȣ κατὰ τὸ μ. Αὕτη δὴ τὸ τόξον αμκ δίχα τέμνȣσα ἔϛαι κατὰ τὸ μ, ϗ τεμεῖ δὲ ϗ τὴν τȣ͂ Πενταγώνȣ Πλευρὰν βα κατὰ τὸ λ· Ἐπιζευχθήτω ἡ κλ· διὰ γȣ͂ν τὰς Ἡμιπεριφερείας αβη ϗ αεη, αἳ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καὶ μὴν ϗ διὰ τὰ τόξα αβγ, αεδ τὰ ἀλλήλοις ϗ αὐτὰ ἴσα, ἔϛαι τὸ τόξον γη τȣ͂ τόξȣ γηδ ἡμίσεια, ἢ γȣ͂ν καὶ τȣ͂ ακβ. Ἔνθεντοι Τόξ: γη = Τόξ: ακ = 2 Τόξ: κμ· ὁμοίως δὲ ϗ Τόξ: γβ = Τόξ: αβ = 2 Τόξ: βκ· Ἄρα γη + γβ τὰ συναμφότερα Τόξα = 2 Τόξ: κμ + 2 Τόξ: κβ, τȣτέϛι τὸ Τόξον βγη = 2 Τόξ: βκμ· ὥϛε ϗ Γωνία ἡ ὑπὸ βζη = (4) 2 Γωνίαις βζμ. Ἀλλὰ γὰρ ἐπὶ τȣ͂ Τριγώνȣ αβζ, ἡ ἐκτὸς Γωνία ἡ ὑπὸ βζη = (5) ταῖς ὑπὸ αβζ ϗ βαζ ἅμα ληφθείσαις, τȣτέϛι (διὰ τὰς αζ ϗ βζ ἴσας ȣ̓͂σας) (6) = 2 Γων: αβζ = 2 Γων. βαζ, ἤτοι (διὰ τὰ ἀνωτ.) = 2 Γωνίαις βζμ, ἢ λζβ· ἐν ἄρα τοῖς Τριγώνιος λζβ, ζαβ, διὰ τὰς ὑπὸ βζλ ϗ βαζ ἴσας ȣ̓͂σας, ϗ τὴν πρὸς τῷ β κοινὴν, ἔϛαι δὴ (7) ϗ ἡ ὑπὸ βλζ = βζα,

---

(1) Κϛ. τȣ͂ γ'. (2) Λ. τȣ͂ γ'. (3) ΚΖ. τȣ͂ γ'. (4) ΛΓ. τȣ͂ ϛ'. (5) ΛΒ. τȣ͂ α'. (6) Ε. τȣ͂ α'. (7) Θ. Πόρ. τῆς ΛΒ. τȣ͂ α'.

καὶ ἑπομένως (1) $\alpha\beta : \beta\zeta :: \zeta\beta : \beta\lambda$· ταὐτητοι (2) καὶ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ $\alpha\beta\lambda = \beta\zeta^{T}$. Ἤδη οὖν ἐπὶ τῶν Τριγώνων αλν, κλν, διὰ τὰς πρὸς τῷ ν Ὀρθὰς, ϗ τὰς αν, νκ (3) ἴσας ὄσας, ϗ διὰ τὴν λν κοινὴν τυγχάνουσαν, ἔστιν (4) $\alpha\lambda = \lambda\kappa$, ϗ ἡ ὑπὸ $\lambda\alpha\kappa = \alpha\kappa\lambda$, ἄρα ἐπὶ τῶν Τριγώνων βακ, καλ, διά τε τὴν πρὸς τῷ α κοινὴν, ϗ τὰς ὑπὸ αβκ ϗ ακλ ἴσας ὄσας, ἔσται (5) ϗ ἡ ὑπὸ $\alpha\kappa\beta = \alpha\lambda\kappa$, καὶ τὰ Τρίγωνα βακ, καλ ἔσται ὅμοια· Ὅθεν $\beta\alpha : \alpha\kappa :: \kappa\alpha : \alpha\lambda$, καὶ Ὀρθογώνιον τὸ $\beta\alpha\lambda = \alpha\kappa^{T}$· Ἀλλ᾿ Ὀρθογών. $\alpha\beta\lambda$ + Ὀρθογων. $\beta\alpha\lambda$ = (6) $\alpha\beta^{T}$, ἄρα $\alpha\beta^{T} = \beta\zeta^{T} + \alpha\kappa^{T}$. Ἀλλὰ βζ τοῦ Κύκλου Ἡμιδιάμετρος ἐστὶ, ϗ ἑπομένως (7) Πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ Ἑξαγώνου τοῦ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένου, ἤτε ακ Πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ Δεκαγώνου τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένου. Ἄρα τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς τοῦ Πενταγώνου τοῦ κανονικοῦ, ἴσον τοῖς Τετραγώνοις, τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς τοῦ κανονικοῦ Ἑξαγώνου, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς τοῦ Δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν Κύκλον ἐγγράφεσθαι νοουμένων, ἅμα ληφθεῖσιν. Ο. Ε. Δ.

Τῶν στοιχείων τῆς Γεωμετρίας.

ΒΙΒΛΙΌΝ ΙΒ΄.

Ἡμῖν δὲ Ζ΄.

Τοῖς ἓξ προεκτεθεῖσι Βιβλίοις τρία ἔτι τὰ στοιχεῖα τῶν Ἀριθμῶν περιέχοντα, τὸ Ζ΄, ϗ Η΄, ϗ Θ΄. ὁ Εὐκλείδης παρασυνάπτει, προστιθεὶς ϗ Ι΄., ἐν ᾧ περὶ τῶν ἀσυμμέτρων αὐτῷ πηλικοτήτων γίνεται λόγος. Αὐτοὶ δὲ ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων ἀμέσως ἐπὶ τὰ στερεὰ μεταβαίνομεν, τὴν περὶ Ἀριθμῶν ἐν μέρει ἐνστησάμενοι πραγματείαν· ἐπεὶ ϗ τοῖς μαθητιῶσιν ᾠήθημεν εὐχερεστέραν οὕτω τὴν τάξιν ἔσεσθαι τῆς διδασκαλίας, εἰ μόνα αὐτοῖς τὰ πρὸς τὴν τῶν Γεωμετρικῶν προτεθείη στοιχείωσιν, μὴ ὑφ᾿ ἑτέρας μεταξὺ θεωρίας τῆς ἐκεί-

---

(1) *Δ. τοῦ ς΄.* (2) *ΙΖ. τοῦ ς΄.* (3) *Γ. τοῦ γ΄.* (4) *Δ. τοῦ α΄.* (5) *Θ. Πόρ. τῆς ΛΒ. τοῦ α΄.* (6) *Β. τοῦ β΄.* (7) *Δ. Πόρ. τῆς ΙΕ. τοῦ δ΄.*

νων εἰσηγήσεως διακοπτομένης. Τὰς μέντοι ἐν τῷ παρόντι κἂν τῷ ἐφεξῆς Βιβλίῳ Προτάσεις ἀνακαλέμενοι, ἐχ᾽ ἕβδομον ἐδὲ ὄγδοον τὰ Βιβλία ἐπιγραψόμεθα, ἑνδέκατον δὲ ϗ δωδέκατον, ὡς ἂν μή τις σύγχυσις ἐπακολεθείη ἐν ταῖς τῶν Προτάσεων ἀνακλήσεσι, τῆς κατ᾽ Εὐκλείδην (συνήθες ἤδη καταςάσης ἅπασι) τάξεως ἡμῖν διαςρεφομένης.

Διμερὲς δέ πως ἐςὶ τὸ παρὸν Βιβλίον· ἐν αὐτῷ γὰρ πρὸ πάντων οἱ πρῶτοι οἱονεὶ θεμέλιοι προκαταβάλλονται, οἷς ἅπασα ἡ περὶ τῶν Στερεῶν, τετέςι τῶν Σωμάτων ἐφήδραςαι διδασκαλία, μετὰ ταῦτα δὲ ὡς ἐν μέρει Β΄. τῶν Παραλληλεπιπέδων τὰ πάθη προτίθενται.

Τὰς γὲν πρωτίςας τῶν ςερεῶν ἀρχὰς ἡ ΙΑ΄. τῶν ςοιχείων ὑποτίθησι Βίβλος, ὧν ἄνευ τὰ πάθη τῶν Σωμάτων ἀγνοῦντας, τηνάλλως μοχθεῖν εἰκὸς περὶ πολλὰ τῶν μαθηματικῶν πραγματειῶν εἴδη. Τά τε γὰρ κατὰ τὸν Θεοδόσιον Σφαιρικά, ϗ τὰ τῆς σφαιρικῆς ὡσαύτως Τριγωνομετρίας, ναιμὴν ϗ τῆς πρακτικῆς Γεωμετρίας τὰ πλεῖςα, καὶ τὰ τῆς Στατικῆς, καὶ τὰ τῆς Γεωγραφίας, τῇ θεωρίᾳ τῶν ςερεῶν ἐπερείδεται, καὶ ὅσα δὲ μικρὸν ἁπαντᾷ δυσχερέςερα, ἔντε τοῖς Γνωμωνικοῖς ϗ ταῖς τῦ Κώνε τομαῖς, κἂν τοῖς Αςρονομικοῖς, ϗ Διοπτρικοῖς, ϗ Ὀπτικοῖς, τῶν κατὰ τὰ ςερεὰ ἀρχῶν ἀκριβῶς νοεμένων, ῥαδίω καθίςαται ϗ μᾶλλον εὐξύνετα. Ὥςε οἱ ἐν τῷ πραγματεύεσθαι περὶ τῶν Γεωμετρικῶν ςοιχείων τὸ ἀνὰ χεῖρας ϗ τὸ μετ᾽ αὐτὸ Βιβλίον παρατρέχοντες, κολοβὴν ϗ πάντη ἀτελῆ τῆς Γεωμετρίας δῆλοι εἰσὶ ποιέμενοι τὴν εἰσήγησιν.

Ὁρισμοί.

Α΄. Στερεόν ἐςι τὸ μῆκος ϗ πλάτος ϗ βάθος ἔχον.

Β΄. Στερεῦ δὲ πέρας ἐπιφάνεια.

σ. 414. Γ΄. Εὐθεῖα (αβ) πρὸς ἐπίπεδον (γγ) ὀρθή ἐςι (τετέςι Κάθετος), ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς Εὐθείας (γα), ϗ ὄσας ἐν τῷ αὐτῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ (γγ) πρὸς ὀρθὰς (ὑπὸ βαγ, βαγ) ᾖ.

σ. 415. Δ΄. Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν (τετέςι κάθετον) ἐςὶν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι (λπ) Εὐθεῖαι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων, τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσι.

σ. 416. Ε΄. Εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐςὶν, ὅταν ἀπὸ τῦ μετεώρε πέρατος τῆς Εὐθείας (λ) ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Κάθετος ἀχθῇ ἡ λξ, ϗ ἀπὸ τῦ γενομένε Σημείε ξ, ϗ ἀπὸ τῦ ἐν τῷ ἐπιπέδω πέρατος ζ τῆς Εὐθείας λζ, Εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ ἡ ξζ, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα Γωνία ὑπὸ λζξ, ὑπὸ τῆς ἀχθείσης ϗ τῆς ἐφεςώσης, τετέςιν ἡ ὑπὸ ξζλ.

Ἐπιπέδε (ρε) πρὸς ἐπίπεδον λπ κλίσις ἐςὶν, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα Γωνία (αβγ) ὑπὸ τῶν πρὸς ὀρθὰς τῇ κοινῇ τομῇ (ξε) ἀγομένων (αβ ϗ γβ) πρὸς τῷ αὐτῷ Σημείῳ (β) ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων. ϛ'. χ. 417.

Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὁμοίως κεκλίσθαι λέγεται, καὶ ἕτερον πρὸς ἕτερον, ὅταν αἱ εἰρημέναι τῶν κλίσεων Γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι. Ζ'.

Παραπλησίως δὲ, Εὐθεῖα πρὸς ἐπίπεδον, ϗ ἑτέρα πρὸς ἕτερον, ἢ τὸ αὐτὸ, ἐὰν αἱ εἰρημέναι (ἐν τῷ Ε'. Ὁρισ.) τῶν κλίσεων Γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι.

Παράλληλα ἐπίπεδα ἐςὶ τὰ, ὅσον ἂν καὶ προαχθείη, ἴσοις ἀείποτε ἀπ' ἀλλήλων ἀφεςῶτα τοῖς διαςήμασι. Η'.

Ἢ (ὡς Εὐκλείδ. ὡρίσατο) τὰ ἀσύμπτωτα.

Ὅμοια ςερεὰ Σχήματα (εὐθύγραμμα) ἐςὶ, τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τὸ πλῆθος. Θ'.

Στερεὰ γωνία ἐςὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων, ἢ δύω ἐπιπέδων Γωνιῶν (βαγ, γαξ, βαξ) περιεχομένη, μὴ ἐσῶν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, πρὸς ἑνὶ Σημείῳ συνιςαμένων. Ι'. χ. 418.

Ἴσαι δὲ Γωνίαι ςερεαί εἰσιν αἱ (ἣν ἐν ἀλλήλοις ἐντεθῶσιν) ἐφαρμόζεσαι. ΙΑ'.

Καθάπερ γὰρ Γωνία ἐπίπεδος ἐςὶν ἡ τῶν Γραμμῶν κλίσις, οὕτωτοι ςερεά ἐςι Γωνία ἡ τῶν Γωνιῶν κλίσις τῶν ἐπιπέδων· Καὶ περὶ ἀμφοῖν τοίνυν ἐπίσης συλλογιςέον. Ὅρα τὸ Σχόλ. τὸ μετὰ τὴν Ιϛ'. τε Γ'.

Πρίσμα ἐςὶ Σχῆμα ςερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ὧν δύω τὰ ἀπεναντίον ξζε, αγβ παράλληλά τε ἐςὶ, ϗ ἴσα, ϗ ὅμοια. ΙΒ'. χ. 419.

Παραλληλεπίπεδον ἐςὶ Σχῆμα ςερεὸν, ὑπὸ Τετραπλεύρων ἀπεναντίον παραλλήλων περιεχόμενον. ΙΓ'. χ. 420.

Ἐὰν ὑπὸ ἓξ ἐπιπέδων ἀπεναντίον παραλλήλων Τετραγώνων τὸ ςερεὸν ᾖ περιεχόμενον, Κύβος ἐςί. ΙΔ'.

Ἴσατε ϗ ὅμοια ςερεὰ Σχήματα ἐςὶ, τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τῷ πλήθει ϗ τῷ μεγέθει. ΙΕ'.

Τῦτον δὴ τὸν Ὁρισμὸν, ὃς δέκατός ἐςι τὸν ἀριθμὸν παρ' Εὐκλείδει παρελελείπει μὴ καλῶς ποιήσας ὁ Τακκέτιος, ϗ διὰ τῦτο μὴ πάνυτοι ἀκριβῶς τὰς ἀποδείξεις τῆς ΚΕ'. ϗ ΚΗ'. τῶν προτάσεων ἀποδεδωκώς.

Πρότασις Α.

κ. 421. ,,Εὐθείας γραμμῆς μέρος μέν τι (τὸ αγ) οὐκ ἔςιν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ,,ἐπιπέδῳ (ξε), μέρος δέ τι (γβ) ἐν τῷ μετεώρῳ.

Ἔςι καθ᾽ αὑτὸ τὸ λεγόμενον ἐκφανὲς, ἐννοήσασι τὶ δή ποτε ἐςὶν ἐπίπεδον, καὶ τὶ εὐθεῖα Γραμμή· Ὅρα Ὁρισμ. Ζ΄. καὶ Δ΄. τοῦ Α΄. Βιβλίου.

Πρότασις Β.

,,Πᾶν Τρίγωνον ἐν ἑνί ἐςιν ἐπιπέδῳ· Καὶ δύω Εὐθεῖαι τέμνουσαι ἀλ- ,,λήλας ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

κ. 422. Τὸ Α΄. μέρος καθ᾽ αὑτὸ δῆλον, οὐδὲν γὰρ ἄλλο τὸ Τρίγωνον, ἢ ἐπίπεδος Ἐπιφάνεια ὑπὸ τριῶν Εὐθειῶν περιεχομένη. Κἀντεῦθεν δὴ καὶ ἐκ τῆς ἀνωτ. Προτ. εὔδηλον καὶ τὸ Β΄.

Πρότασις Γ.

κ. 423. ,,Ἐὰν δύω ἐπίπεδα (αβ, γδ) τέμνῃ ἄλληλα, ἡ (εζ) κοινὴ αὐτῶν το- ,,μὴ Εὐθεῖα ἐςί.

Φανερὸν ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἐπιπέδου. Ἔςιν ἀλλ᾽ οὖν καὶ οὕτω δεικνύειν· εἰ μὴ γὰρ Εὐθεῖα ἡ κοινὴ τομὴ εζ, ἀγέσθω ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου γδ Εὐθεῖα επζ, ἐπὶ δὲ τοῦ αβ Εὐθεῖα εξζ· καὶ αἱ δύω τοίνυν εξζ, επζ Εὐθεῖαι περιέξουσι χωρίον, ὅπερ ἄτοπον.

Πρότασις Δ.

κ. 424. ,,Ἐὰν Εὐθεῖα (βα) δύο Εὐθείαις (γαχ, ζασ) τεμνούσαις ἀλλήλας, ,,πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν ἐπιςαθῇ, καὶ τῷ δι᾽ αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ,,ὀρθὰς ἔςαι.

Ἀλλ᾽ εἰ μὴ, ἑτέρα τις ἄρα Εὐθεῖα ἡ βπ τῷ διὰ τῶν Εὐθειῶν χαγ, σαζ πρὸς ὀρθὰς ἐφιςάσθω, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ απ, καὶ ταύτῃ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ζαγ ἀγέσθω κάθετος ἡ ξπ, ἡ δὴ προεκβληθεῖσα ἐξ ἀνάγκης τεμεῖ τινα τῶν Εὐθειῶν γαχ, ζασ, ἢ ἑκατέραν, ὁπήποτ᾽ ἂν ᾖ τέως τὸ Σημεῖον π. Ἐὰν γὰρ ἡ Εὐθεῖα πξ τῇ ἑτέρᾳ τῶν Εὐθειῶν, οἷον τῇ ζασ παράλληλος ᾖ, ἡ πξ τὴν ἑτέραν (1) τεμεῖ γαχ· εἰδ᾽ οὐδετέρᾳ παράλληλος ᾖ, τεμεῖ (2) ἑκατέραν. Τε-

---

(1) Β. Πόρ. τοῦ Σχολ. τοῦ μετὰ τὴν ΛΑ. τοῦ α΄. (2) Α. Πόρισμα ἢ Σχόλ. μετὰ τὴν ΛΑ. τοῦ α΄.

μνέτω τοίνυν τὴν γαχ κατὰ τὸ ξ, καὶ ἐπιζευχθήτω ἡ βξ· καὶ ἐπειδὴ ἡ ὑπὸ βαξ Γωνία (ἐξ ὑποθ.) ὀρθὴ οὖσα ἐςὶ,

Ἔςαι Τετράγ. βξ = (1) Τετραγ. βα } Τετραγ. αξ }

Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ ἡ βπ ὀρθὴ τίθεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ζαγ, καὶ ἐπομένως (2) Ὀρθὴν συνίςησι μετὰ τῆς απ τὴν ὑπὸ βπα,

Ἔςιν ἄρα Τρετάγ. βα = (3) Τετραγ. βπ } Τετραγ. απ }

Ἐπεὶ δὲ καὶ ὑπὸ απξ ἐκ κατασκ. Ὀρθὴ οὖσα ἐςί.

Τετράγ. αξ = (4) Τετραγ. ξπ } Τετραγ. απ }

Ἄρα Τετράγ. βξ = Τετραγ. βπ } Τετραγ. ξπ } Τετραγ. απ } Τετραγ. απ }

Ἄρα Τετράγ. βξ μεῖζον ἐςὶ τῶν Τετραγ. βπ καὶ ξπ, καὶ ἐπομένως (5) ἡ ὑπὸ βπξ οὐκ ἔςιν Ὀρθή. Οὐκ ἄρα ἡ βπ ὀρθή ἐςιν (6) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου γαζ· ὥςε δῆλον τὸ προτεθέν.

Σχόλιον.

Ἐκ τοῦ τεθέντος ὡς ἡ βπ ὀρθή ἐςιν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ζαγ, ὀρθῶς ἐδείχθη τὴν βπ μὴ εἶναι ὀρθὴν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου. Ἔνθεντοι καὶ τῇ ἀποφάσει τοῦ θεωρήματος, ἡ τοῦ θεωρήματος αὐτοῦ ἀλήθεια κατ᾽ ὀρθὴν δεῖξιν κατεσκευάσθη. Ἡ δὲ δεῖξις αὕτη κατά γε τὸ οὐσιῶδες Ἰωάννου Κλερμαντίου ἐςί.

Πρότασις Ε.

„Ἐὰν Εὐθεῖα (αρ) τρισὶν Εὐθείαις (βα, γα, ζα) ἁπτομέναις ἀλλή„λων, πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς (τοῦ Σημείου δηλ. α) ἐπιςαθῇ, αἱ „τρεῖς Εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

Ἔςω γὰρ εἰ δυνατὸν, ἡ μία τούτων βα ἐν ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τῷ ρξ, τῷ τέμνοντι τὸ λπ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ αἱ λοιπαὶ δύω γα, ζα, Εὐθείᾳ τῇ αξ· Ἐ- κ. 425.

---

(1) ΜΖ. τοῦ ά. (2) Ὁρ. Γ. τοῦ ιά. (3) Διὰ τὴν ΜΖ. τοῦ ά. (4) ΜΖ. τοῦ ά. (5) Δ. Πόρ. τῆς ΜΖ. τοῦ ά. (6) Δῆλον ἐκ τοῦ Γ. Ὁρισμ. τοῦ ια.

πειδὴ τοίνυν ἡ ρα (ἐξ ὑποθ.) πρὸς ὀρθὰς ἐφίςαται ἐπὶ τῶν δύω γα, ζα, ἐπὶ τῦ ἐπιπέδυ λπ ὀρθὴ (1) ἔςαι· Ὥςε ἐπειδὴ ἡ αξ ὀρθὴν συνίςησι (2) τὴν ὑπὸ ραξ· ἔςι δὲ (ἐξ ὑποθ.) ϗ ἡ ὑπὸ ραβ ὀρθὴ, αἱ ἄρα ὑπὸ ραβ ραξ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὅπερ ἄτοπον.

Πρότασις ϛ.

κ. 426. „Ἐὰν δύω Εὐθεῖαι (αβ, γδ) τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ (εζ) πρὸς ὀρθὰς ὦσι, „παράλληλοι ἔσονται αἱ Εὐθεῖαι.

Αἰτεῖσθαι εἶχεν ὡς καθ' αὑτὸ δῆλον, ἀλλ' ἔμπης ϗ ὕτως ἂν ἀποδειχθείη.

Ἐπιζευχθείσης τῆς βδ, ἀγέσθω ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ζε ἡ δη πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς βδ, ϗ ἴση τῇ βα, ϗ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δα, ηα, ηβ· Αἱ μὲν οὖν Εὐθεῖαι βδ, δη ταῖς βδ, βα (3) ἴσαι εἰσίν· αἵ τε ὑπὸ βδη (4), δβα εἰσὶν ὀρθαί. Ἄρα (5) αἱ αδ ϗ βη ἴσαι εἰσί· Τὰ τοίνυν Τρίγωνα αβη, ηδα ἰσόπλευρα ἐςὶ, ϗ ἑπομένως αἱ ὑπὸ αβη, αδη (6) ἴσαι· Ἀλλ' αβη Ὀρθὴ (7) ἐςὶν, ἄρα ϗ ἡ ὑπὸ αδη. Ἀλλὰ γάρ εἰσιν Ὀρθαὶ ϗ ἡ ὑπὸ βδη, ϗ ἡ ὑπὸ γδη, ἡ μὲν ἐκ κατασκευῆς, ἡ δὲ ἐκ τῦ Γ. Ὁρισμῦ· Ἄρα ἡ Εὐθεῖα ηδ ταῖς τρισὶ γδ, αδ, βδ πρὸς ὀρθὰς ἐφίςαται· ὥςε αἱ γδ, καὶ αδ, καὶ βδ, ἐν ἑνὶ καὶ τῷ αὐτῷ (8) εἰσιν ἐπιπέδῳ. Ἀλλαμὴν ϗ αἱ αβ, ϗ αδ, ϗ βδ (9) ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, ἄρα αἱ αβ, γδ, ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ εἰσίν· Ἐπειδὴ δὲ αἱ ὑπὸ αβδ, γδβ εἰσὶν (10) Ὀρθαὶ, ἔσονται (11) αἱ αβ, γδ παράλληλοι. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Ζ.

κ. 427. „Ἡ τὰς ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ Εὐθείας (αβ, γδ) τέμνυσα (εζ) ἐν τῷ „αὐτῷ, ἐν ᾧ ϗ αὐταὶ, ἐςὶν ἐπιπέδῳ.

Δειχθείη δ' ἂν ϗ διὰ τῆς Β'. τοῦ παρόντος.

Αἰτεῖσθαι δύναται, δειχθείη δ' ἂν τῷ βυλομένῳ ὧδε.

Εἰ μὴ γὰρ, ἐπεζεύχθω ἡ εηζ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐκείνῳ, ϗ δὴ αἱ δύο εζ, εηζ χωρίον περιέξυσιν· ὅπερ (12) ἄτοπον.

Ἄλλως: Τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ αἱ Εὐθεῖαι αβ, γδ, τεμνέσθω ὑφ' ἑτέρυ ἐπιπέδυ διὰ τῶν Σημείων ε ϗ ζ· Καὶ εἰ μή ἐςιν ἡ Εὐθεῖα εζ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν αβ, γδ, ὐκ ἔςαι ἡ εζ κοινὴ τομή· Ἔςω τοίνυν ἡ εηζ ϗ δὴ εηζ (13) Εὐθεῖά τις ἔςαι, καὶ αἱ δύω Εὐθεῖαι εζ ϗ εηζ περιέξυσι χωρίον· ὅπερ ἄτοπον.

---

(1) *Διὰ τὴν ἀνωτ.* (2) *Γ.* Ὁρ. *ιά.* (3) Ἐκ *κατ.* (4) Ὁρ *Γ. τῦ ιά.* (5) *Δ. τῦ ά.* (6) *Η. τῦ ά.* (7) *Γ.* Ὁρισμ. *τῦ ιά.* (8) *Διὰ τὴν ἀνωτ.* (9) *Β. τῦ ιά.* (10) Ὁρ. *Γ. τῦ ιά.* (11) *ΚΘ. τῦ ά. ϗ* Ὁρ. *Λϛ. τῦ ά.* (12) *Ἀξ. ιγ'.* (13) *Γ. τῦ ιά.*

Πόρισμα.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὡς ἡ εζ ἡ τὰς παραλλήλους αβ, γδ τέμνουσα, ἐν τῷ αὐτῷ σὺν αὐταῖς ἐστιν ἐπιπέδῳ. Ἀεὶ γὰρ αἱ παράλληλοι (1) ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ εἰσί.

Πρότασις Η.

„Ἐὰν ἡ ἑτέρα (αβ) τῶν παραλλήλων (αβ, γδ) ἐπιπέδῳ τινὶ (τῷ εζ) „πρὸς ὀρθὰς ᾖ, ϗ ἡ λοιπὴ (γδ) τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. χ. 428.

Εἶχε μὲν αἰτεῖσθαι, δεῆσαν δέ, οὕτω δειχθείη, καθάπερ ἡ ϛ΄. Ἐπιζευχθεισῶν γὰρ τῶν βδ, αδ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ εζ, ἀχθήτω ηδ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς βδ, ϗ ἴση τῇ βα, ϗ ἐπιζευχθεισῶν καὶ τῶν ηα, ηβ, δειχθήσεται ὡς ἐπὶ τῆς ϛ΄. Προτάσ., ὡς ηδ ϗ τῇ αδ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ὥστε ἡ ηδ (2) πρὸς ὀρθὰς ἐπιστήσεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αβδ, τουτέστιν (3) ἐπὶ τοῦ γδβα· ἔνθεντοι ἡ ὑπὸ γδη (4) ὀρθὴ οὖσα ἐστίν· Ἀλλὰ ϗ ἡ ὑπὸ γδβ ὀρθή ἐστιν (ἐπεὶ μετὰ τῆς ὑπὸ αβδ ὀρθῆς Ὀρθὰς δύω (5) συνίστησιν), ἡ ἄρα γδ (6) πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ηδβ, ἤτοι τοῦ εζ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Θ.

„Αἱ τῇ Εὐθείᾳ (γδ) τῇ αὐτῇ παράλληλοι (αβ, εζ), ϗ μὴ οὖσαι αὐ„τῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ϗ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι. χ. 429.

Ἔχοι μὲν ἂν αἰτεῖσθαι, δεικτέα γεμήν.

Ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν παραλλήλων αβ, γδ, ἀχθήτω ηκ κάθετος ἐπὶ τῆς γδ· ὡσαύτως δὲ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν παραλλήλων εζ, γδ, ἀχθήτω θκ κάθετος ἐπὶ τὴν γδ, ϗ ἐπιζευχθήτω ἡ ηθ· Ἄρ οὖν (7) ἡ Εὐθεῖα γκ ὀρθή ἐστιν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ηκθ· καὶ ἐπειδὴ αἱ αη, εθ, παράλληλοι εἰσὶ πρὸς τὴν γκ, ἔσονται δὴ (8) αἱ αη, εθ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ηκθ· Ἄρα (9) αἱ αη, εθ παράλληλοι εἰσίν. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Ι.

„Ἐὰν δύω Εὐθεῖαι (αγ, βγ) ἁπτόμεναι ἀλλήλων, παρὰ δύω Εὐ„θείας (δζ, εζ) ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι (παράλληλοι αἱ Α΄. ταῖς Β΄. δηλ.) „μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας Γωνίας (τὰς γ ϗ ζ) περιέξουσι. χ. 430.

---

(1) Ὁρ. Λϛ. τοῦ α΄. (2) Δ. τοῦ ια΄. (3) Διὰ τὸ ἀνωτ. Πόρ. (4) Γ. Ὁρ. ια΄. (5) ΚΖ. τοῦ α΄. (6) Δ. τοῦ ια΄. (7) Δ. τοῦ ια΄. (8) Η. τοῦ ια΄. (9) ϛ. τοῦ ια΄.

Γινέσθωσαν αἱ γα, γβ ἴσαι ταῖς ζδ, ζε, ϗ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δε, αβ, ϗ αἱ δα, ζγ, εβ· ἐπειδὴ τοίνυν αἱ αγ, ζδ παράλληλοι εἰσὶ, ϗ ἴσαι, ϗ αἱ αδ, γζ (1) ἴσαι τε εἰσὶ ϗ παράλληλοι· Ὡσαύτως δὲ ϗ αἱ βε, γζ, παράλληλοί τε εἶναι ϗ ἴσαι ἀποδειχθήσονται· ὥςε ϗ αἱ αδ, βε (2) παράλληλοί τε εἰσὶ ϗ (3) ἴσαι· τοιγαροῦν (4) ἴσαι αἱ αβ, δε. Ἐπεὶ οὖν ἐπὶ τῶν Τριγώνων βαγ, εδζ, αἱ τρεῖς ταῖς τρισὶ Πλευραῖς ἴσαι εἰσὶν ἑκάςη ἑκάςῃ, φανερὸν ὅτι αἱ Γωνίαι γ ϗ ζ (5) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΑ.

κ. 431. „Ἀπὸ τοῦ δοθέντος Σημείου μετεώρου (γ) ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπε-„δον (αβ), ὃ μὴ ἔχοι πέρας, κάθετον εὐθεῖαν Γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αβ ἀχθήτω ἄπειρος ἡ τυχοῦσα δζ, πρὸς ἣν κάθετος ἀπὸ τοῦ γ καθείσθω (6) ἡ γε, ἐπὶ τὴν αὐτὴν δὲ κάθετος ἀφείσθω ἀπὸ τοῦ ἐπ' αὐτῆς ε (7) ἡ εμ· Εἶτα ἐπὶ τὴν αμ πρὸς ὀρθὰς (8) καθείσθω ἀπὸ τοῦ γ ἡ γη· λέγω δὴ τὴν γη πρὸς ὀρθὰς ἐφίςασθαι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αβ.

Διὰ τοῦ η ἀχθήτω ηθ παράλληλος τῇ δζ.

Ἐκ τῆς κατασκευῆς οὖν ἡ δε πρὸς ὀρθὰς ἐφέςηκεν ἐπὶ τὰς γε ϗ εμ· ὥςε ἡ δε (9) ὀρθή ἐςιν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου γεμ, καὶ δὴ (10) ϗ ἡ θη· ἄρα ἡ γη (11) πρὸς ὀρθὰς ἐφέςηκεν ἐπὶ θη· Ἀλλ' ἐκ τῆς κατασκευῆς ἡ γη πρὸς ὀρθὰς ἐφέςηκε κἀπὶ τὴν εμ, ἡ ἄρα γη (12) Ὀρθή ἐςιν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αβ. Ο. Η. τὸ προτεθέν.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ἡ Ὀρθὴ γη ἀπὸ τοῦ μετεώρου Σημείου γ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον αβ, ἐςὶν ἡ ἁπασῶν ἐλαχίςη τῶν Εὐθειῶν, ὅσαι δήποτε ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ Σημείου ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ἄγεσθαι δύνανται. Ἀχθήτω ϗ γὰρ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ Σημείου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὁποιαδήποτε Εὐθεῖα ἄλλη, φέρε ἡ γε, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ εη· Ἐπὶ γοῦν τοῦ γεη Τριγώνου, ἡ ὑπὸ εηγ (13) ὀρθὴ Γωνία ἐςίν· ὥςε ἡ ὑπὸ γεη ἐςὶν (14) ὀξεῖα· ἔνθεν τοι ἡ γε Πλευρὰ τῆς Πλευρᾶς γη μείζων (15) ἐςί· Καὶ τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται ϗ ὅ-

---

(1) *ΛΓ.* τοῦ *ά.* (2) *Διὰ τὴν ἀνακ.* (3) *Ἀξ. ά.* (4) *ΛΓ.* τοῦ *ά.* (5) *Η.* τοῦ *ά.* (6) *ΙΒ.* τοῦ *ά.* (7) *ΙΑ.* τοῦ *ά.* (8) *ΙΒ.* τοῦ *ά.* (9) *Δ.* τοῦ *ια.* (10) *Η.* τοῦ *ιά.* (11) *Ὀρ. Γ.* τοῦ *ιά.* (12) *Δ.* τοῦ *ιά.* (13) *Ὀρ. Γ.* τοῦ *ιά.* (14) *Ε. Πόρ.* τῆς *ΛΒ.* τοῦ *ά.* (15) *ΙΘ.* τοῦ *ά.*

ποιασῦν ἄλλης Πλευρᾶς, τῆς ἀπὸ τῦ μετεώρυ Σημείυ γ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ἀγομένης, τὴν Ὀρθὴν γη εἶναι ἐλάσσονα.

Προτασις ΙΒ.

„Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ (εζ) ἀπὸ τῦ πρὸς αὐτῷ δοθέντος Σημείυ (α) „πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν Γραμμὴν ἀναςῆσαι. κ. 432.

Ἀπὸ τῦ τυχόντος μετεώρυ Σημείυ δ, ὅ τῷ ὑποκειμένῳ εζ ἐπιπέδῳ ὑπερκείμενον ᾖ, καθείσθω ἡ δβ (1) ἐπ' αὐτὸ τὸ ἐπίπεδον ὀρθή, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς βα, ἀχθήτω ἡ αγ παράλληλος τῇ δβ· φημὶ δὴ ὡς ὕτως ἐτελέσθη τὸ ἐπιταχθέν· Ἡ δὲ δεῖξις σαφὴς ἐκ τῆς Η΄.

Σχόλιον.

Πρακτικῶς δὲ ἀπὸ τῦ δοθέντος Σημείυ κ, ἐπὶ τῦ ἐπιπέδυ εζ, κάθετος ἀνίςαται, ἐὰν ὁ Γνώμων ξκν, τῇ μὲν κατ' αὐτὸν ὀρθῇ Γωνίᾳ κ, τῷ δοθέντι Σημείῳ, τῇ δὲ Πλευρᾷ ξκ, τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ὕτω προσαρμοσθῇ, ὡς ἐπὶ τῦ ἐπιπέδυ τὴν ξκ Πλευρὰν τῦ Γνώμονος περὶ τὴν κν ἀκινητῦσαν περιάγεσθαι ἔχειν. Ἡ γάρ τοι κατὰ τὴν Πλευρὰν κν ἀγομένη Εὐθεῖα, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἀπὸ τῦ πρὸς αὐτῷ δοθέντος Σημείυ κ ἔςαι (2) ὀρθή.

Πρότασις ΙΓ.

„Ἀπὸ τῦ Σημείυ (γ) τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ (αβ) δύω Εὐθεῖαι (δγ, εγ) „πρὸς ὀρθὰς ὐκ ἀναςήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. κ. 433.

Εἶεν γὰρ ἂν ἄλλως (διὰ τὴν ϛ΄.) παράλληλοι, ὅπερ ἀδύνατον.

Σχόλιον.

Ἐκ ταύτης οὖν τῆς Προτάσ. δειχθῆναι δύναται καὶ ἡ ΛΗ΄. τῦ παρόντος ΙΑ΄., ἣν ὁ Τακυέτιος παρέδραμεν, ὕτως ἔχυσαν.

„Ἐὰν ἐπίπεδον (ζρ) πρὸς ἐπίπεδον (βξ) ἕτερον ὀρθὸν ᾖ, καὶ ἀπό τι- κ. 434.
„νος Σημείυ (λ) τῶν ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων (ζρ), ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον (βξ) „κάθετος ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς (χρ) πεσεῖται τῶν ἐπιπέδων ἡ ἀγο-„μένη Κάθετος.

Ἀχθήτω γὰρ ἀπὸ τῦ λ Σημείυ ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς χρ κάθετος ἡ λπ, ἔςαι δὴ (3) αὕτη τῷ ἐπιπέδῳ βξ ὀρθή· ἀλλὰ διὰ τὴν παρῦσαν Πρότ.

(1) Διὰ τὴν ἀνωτ. (2) Δ. τῦ ιά. (3) Ὅρ. Δ. τῦ ϛ΄.

ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ Σημείου λ, τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ βξ δύο Εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς οὐκ ἀνασταθήσονται, ἄρα ἡ λπ Εὐθεῖα, ἥτις μόνη ἀπὸ τοῦ λ Σημείου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ξβ πρὸς ὀρθὰς ἀχθῆναι δύναται, πεσεῖται (1) ἐπὶ τῆς κοινῆς τῶν ἐπιπέδων τομῆς χρ.

Πρότασις ΙΔ.

σχ. 435. „Πρὸς ἃ ἐπίπεδα (ζη, λπ) ἡ αὐτὴ Εὐθεῖα (αβ) ὀρθή ἐστι, παράλ-„ληλα ἐστὶ τὰ ἐπίπεδα.

Ἐπὶ θατέρου τῶν ἐπιπέδων ζη ληφθήτω Σημεῖον τὸ τυχὸν γ, καὶ δι' αὐτοῦ ἀχθήτω γε παράλληλος πρὸς τὴν αβ, ἀπαντῶσα τῷ ἐπιπέδῳ λπ κατὰ τὸ ε. Ἔσται γοῦν ἡ γε (2) ὀρθὴ πρὸς ἄμφω τὰ ἐπίπεδα ζη καὶ λπ· Ἐὰν οὖν ἐπιζευχθῶσιν αἱ Εὐθεῖαι αγ, βε, ἔσονται αἱ Γωνίαι α καὶ β (3) ὀρθαί· ἄρα αἱ αγ, βε (4) παράλληλοι εἰσί, τὸ δὲ αγεβ Παραλληλόγραμμον, ἡ δὲ γε, ἥτις ἐδείχθη πρὸς ἄμφω τὰ ἐπίπεδα ὀρθὴ οὖσα, ἴση ἐστὶ (5) τῇ αβ· Ὡσαύτως δείξω, καὶ ὅσαι ἂν ἀχθῶσι πρὸς ἄμφω τὰ ἐπίπεδα Ὀρθαί, ἁπάσας ἴσας εἶναι· Τοιγαροῦν (6) τὰ ἐπίπεδα εἰσὶ παράλληλα. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΙΕ.

σχ. 436. „Ἐὰν δύο Εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων (βα, γα), παρὰ δύο Εὐθείας „ἁπτομένας ἀλλήλων (εδ, ζδ) παράλληλοι ὦσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖ-„σαι, παράλληλα ἐστὶ τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα.

Ἀπὸ τοῦ α ἀχθήτω αη ὀρθὴ πρὸς τὸ εζ ἐπίπεδον (7), ἀγέσθωσαν δὲ καὶ αἱ ηθ, ηι παράλληλοι πρὸς τὰς δε, δζ· καὶ ἔσονται αἱ αὐταὶ παράλληλοι (8) καὶ πρὸς τὰς αβ, αγ· Ἐπειδὴ τοίνυν αἱ ὑπὸ ιηα, θηα εἰσὶν (9) Ὀρθαί, ἔσονται καὶ αἱ ὑπὸ γαη (10) βαη Ὀρθαί· Ἡ ἄρα ηα ἡ πρὸς τὸ εζ ἐπίπεδον ὀρθὴ οὖσα, καὶ πρὸς τὸ βγ (11) ὀρθὴ ἐστί· Τὰ ἄρα βγ, εζ (12) ἐπίπεδα παράλληλα ἐστίν. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Ιϛ.

σχ. 437. „Ἐὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα (αβ, γδ) ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς τέμνηται „(τοῦ εθζη), αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ (εθ, ηζ) παράλληλοι εἰσί.

---

(1) Ἐκ κατασκ. (2) *Η* τοῦ ια΄. (3) Γ. Ὁρισμ. τοῦ ια΄. (4) *ΚΘ.* τοῦ α΄. (5) *ΛΔ.* τοῦ α΄. (6) *Η.* Ὁρισμ. τοῦ ια΄. (7) *ΙΑ.* τοῦ ια΄. (8) Θ. τοῦ ια΄. (9) *Γ.* Ὁρισ. τοῦ ια΄. (10) *ΚΖ.* τοῦ α΄. (11) *Δ.* τοῦ ια΄. (12) *Διὰ* τὴν ἄνωτ.

Ἀλλ' εἰμὴ, ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τῷ τέμνοντι ἔσαι, συμπεσοῦνται κατά τι σημεῖον τὸ ι (1)· Ὥςε ἐπειδὴ ὅλαι θει, ζηι εἰσὶν (2) ἐν τοῖς ἐπιπέδοις αβ, γδ προεκβληθεῖσι, καὶ τά γε ἐπίπεδα προεκβληθέντα συμπεσοῦνται κατὰ τὸ ι· ὅπερ ἄτοπον ἐςὶν, ἅτε κατὰ τοῦ Η'. τῶν Ὁρισμῶν τοῦ παρόντος φερόμενον.

Σχόλιον.

Ἐὰν δυοῖν ἐπιπέδων αζ, βζ, αἱ μετὰ τρίτου ἐπιπέδου τοῦ αε κοιναὶ τομαὶ αδ, βε ὦσι παράλληλοι, ἔςαι καὶ ἡ δι' ἀλλήλων τῶν αζ, βζ κοινὴ τομὴ γζ ταῖς αδ, βε παράλληλος. Τεμνέσθωσαν γὰρ τὰ τρία ταῦτα ἐπίπεδα ἐπιπέδοις παραλλήλοις τοῖς αβγ, δεζ, καὶ ἔσονται (3) αβ, βγ, γα, ταῖς δε, εζ, ζδ παράλληλοι τῶν τριῶν ἑκάςη ἑκάςῃ· ὥςε (4) ἡ ὑπὸ αβγ = δεζ, καὶ βαγ = εδζ· Ἀλλὰ γὰρ (διὰ τὸ Παραλληλόγραμμον αε) αβ = δε (5), τοιγαροῦν (6) βγ = εζ, καὶ γα = ζδ· Παραλλήλους δὲ τυγχάνειν τὰς βγ, εζ, καὶ τὰς γα, ζδ φθάσαν ἐδείχθη, ἄρα (7) ἡ γζ καὶ ταῖς αδ καὶ βε παράλληλος ἐςί. χ. 438.

Πρότασις ΙΖ.

„ Ἐὰν δύω Εὐθεῖαι βδ, ηθ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνωνται, εἰς „ τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται. χ. 439.

„ Ἀχθήτωσαν ἐν τοῖς ἐπιπέδοις φξ καὶ τυ, αἱ Εὐθεῖαι βη, θδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βθ διήκουσα διὰ τοῦ ἐπιπέδου ρσ κατὰ τὸ ζ, ἐπεζεύχθωσαν δὲ καὶ αἱ ζγ, ζι. Τὸ γοῦν διὰ τοῦ Τριγώνου βθδ ἐπίπεδον τέμνον τὰ παράλληλα τῶν ἐπιπέδων, κοινὰς τομὰς ποιεῖται τὰς ζγ, δθ (8) παραλλήλους· ὥςε βγ : γδ : : βζ : ζθ (9). Πάλιν τὸ Τρίγωνον βηθ τέμνον τὰ παράλληλα τῶν ἐπιπέδων, τομὰς ποιεῖται (10) τὰς βη, ζι παραλλήλους· ἄρα ηι : ιθ : : βζ : ζθ (11), τουτέςιν (ὡς δέδεικται) ὡς βγ : γδ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΙΗ.

„ Ἐὰν Εὐθεῖα (ζε) ἐπιπέδῳ τινὶ (αβ) πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ πάντα τὰ „ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ (αβ) πρὸς ὀρθὰς ἔςαι. χ. 440.

Ἀγέσθω διὰ τῆς ζε ἐπίπεδον, οἷον τὸ ηγ, κοινὴν ἔχον τομὴν μετὰ τοῦ αβ τὴν γδ· ἐν αὐτῷ δὲ ἀχθήτωσαν κάθετοι πρὸς τὴν γδ κοινὴν το-

---

(1) Α. Πόρ. μετὰ τὴν ΛΑ τοῦ α'. (2) Α. τοῦ ια'. (3) Διὰ ταύτην. (4) Ι. τοῦ ια'. (5) ΛΔ. τοῦ α'. (6) Κς. τοῦ α'. (7) ΛΓ. τοῦ α'. (8) Διὰ τὴν ἄνωτ. (9) Β. τοῦ ς'. (10) Διὰ τὴν ἄνωτ. (11) Β. τοῦ ς'.

μὴν αἱ κθ· καὶ ἐπεὶ ἡ ζε (1) ὀρθή ἐςι πρὸς τὴν γδ, ἔσονται αἱ κθ (2) παράλληλοι πρὸς τὴν ζε· τίθεται δὲ ἡ ζε ὀρθὴ εἶναι τῷ ἐπιπέδῳ αβ· ἄρα ϗ αἱ κθ ὀρθαὶ (3) εἰσὶ τῷ ἐπιπέδῳ αβ· ὥςε τὸ ἐπίπεδον γη (4) τῷ ἐπιπέδῳ αβ ὀρθὸν ἐςί.

Πρότασις ΙΘ.

κ. 441. „Ἐὰν δύο ἐπίπεδα (μζ, ηδ) τέμνοντα ἄλληλα, ἐπιπέδῳ τινὶ (αβ) πρὸς „ὀρθὰς ᾖ, ϗ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ (κλ) τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ (αβ) πρὸς ὀρθὰς ἔςαι.

Ἐπειδὴ τὸ μζ ἐπίπεδον ὀρθὴν ἔχει λαχὸν τὴν θέσιν ἐπὶ τȣ̃ ἐπιπέδȣ αβ, δῆλον (5) ὡς ἀπὸ τȣ̃ λ δυνατὸν Κάθετον ἀχθῆναι ἐπὶ τȣ̃ ἐπιπέδȣ αβ, ἐν ἐπιπέδῳ τῷ μζ, ἥτις ἂν ἀμέλει ἐν τῷ μζ ἐπιπέδῳ ἀχθεῖσα, κάθετος εἴη ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς εζ. Ὡσαύτως δὲ διὰ τὸ ὀρθὸν τίθεσθαι ϗ τὸ ηδ τῷ αβ (6) ἀχθείη ἂν κἂν τῷ ηδ ἐπιπέδῳ ἀπὸ τȣ̃ αὐτȣ̃ Σημείȣ λ, Κάθετος ἐπὶ τȣ̃ ἐπιπέδȣ τȣ̃ ὑποκειμένȣ αβ· Ἀλλὰ γὰρ ἀπὸ τȣ̃ λ Σημείȣ (7), μία ἂν ἀχθείη μόνη ὀρθὴ τῷ αβ· Ἄρ᾽ ἐπάναγκες τὴν ἀπὸ λ Ὀρθὴν τῷ αβ, ἐν ἀμφοῖν εἶναι τοῖς ἐπιπέδοις τῷ τε μζ, ϗ τῷ ηδ, ϗ ταύτην εἶναι ἑπομένως τὴν τȣ́των κοινὴν τομὴν, τȣτέςι τὴν λκ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Κ.

κ. 442. „Ἐὰν ςερεὰ Γωνία (α) ὑπὸ τριῶν ἐπιπέδων Γωνιῶν περιέχηται (βαγ, „γαδ, δαβ), δύο ὁποιαιȣ̃ν τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσὶ πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἐὰν αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, δῆλον τὸ εἰρημένον· Ἐὰν δὲ ἄνισοι, ἔςω δὴ μεγίςη τȣ́των ἡ ὑπὸ βαδ, ϗ ἔςαι ϗ οὕτω δυεῖν τῶν λοιπῶν ἐλάσσων ἅμα εἰλημμένων. Ἀφαιρείσθω γὰρ ἀπὸ τῆς μεγίςης ὑπὸ βαδ ἡ ὑπὸ βαε ἴση τῇ ὑπὸ βαγ, γινέσθωσάν τε ἴσαι αἱ αγ, αε, διὰ δὲ τȣ̃ ε ἀγέσθω Εὐθεῖα, ἀπαντῶσα ταῖς αβ, αδ κατὰ τὰ β ϗ δ, ϗ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βγ, δγ· Καὶ ἐπεὶ (8) αἱ ὑπὸ βαε, βαγ ἴσαι εἰσὶ, ϗ αἱ Πλευραὶ βα, αε ἴσαι ταῖς Πλευραῖς βα, αγ, ϗ αἱ Βάσεις βε, βγ ἴσαι (9) ἔσονται ϗ αὐταί. Ἀλλὰ γὰρ βγ, γδ μείζονες (10) εἰσὶ τῆς βδ, ἀφαιρεθεισῶν ἄρα τῶν ἴσων βε, βγ, ἡ γδ μείζων τῆς εδ· Ἀλλ᾽ αἱ Πλευραὶ εα, αδ, ἴσαι ταῖς Πλευραῖς (11) γα, αδ· ἄρα ἡ ὑπὸ γαδ (12) μείζων τῆς ὑπὸ εαδ· Ἐδείχθη δὲ ἡ ὑπὸ βαγ

---

(1) Ἐξ ὑποθ. καὶ διὰ τὸν Γ. Ὁρισμ. τȣ̃ ιά. (2) ΚΘ. τȣ̃ ά. (3) Η. τȣ̃ ιά. (4) Δ. Ὁρισμ. τȣ̃ ιά. (5) Ὁρ. Δ. τȣ̃ ιά. (6) Διὰ τὸν αὐτ. (7) ΙΓ. τȣ̃ ιά. (8) Ἐκ κατασκ. (9) Δ τȣ̃ ά. (10) Κ. τȣ̃ ά. (11) Ἐκ κατ. (12) ΚΕ. τȣ̃ ά.

ἴση οὖσα τῇ ὑπὸ βαε· Αἱ δύω ἄρα ἅμα βαγ, γαδ, μείζονες εἰσὶ τῆς ὅλης ὑπὸ βαδ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΚΑ.

,,Ἅπασα στερεὰ Γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων, ἢ τεσσάρων Ὀρθῶν περιέχεται.

Ἔστω Γωνία στερεὰ ἡ α, ταῖς δὲ Γωνίαις ταῖς ἐπιπέδοις ὑφ᾽ ὧν αὐτὴ πε- κ. 443.
ριέχεται, ὑποτεινέσθωσαν αἱ Εὐθεῖαι βγ, γδ, δε, εζ, ζβ, ἐν ἑνὶ καὶ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ αἱ πᾶσαι εἶναι ὑποτιθέμεναι. Τούτου οὖν γινομένου, Πυραμὶς συστασθήσεται (1), ἧς ἡ Βάσις ἐστὶ τὸ Πολύγωνον βγδεζ, κορυφὴ δὲ ἡ α, πλευραὶ δὲ τοσαῦτα Τρίγωνα η, θ, ι, κ, λ, ὅσαι αἱ ἐπίπεδοι Γωνίαι αἱ συνιστῶσαι τὴν στερεάν α· Ἤδη μὲν οὖν ἐπειδὴ αἱ δύω Γωνίαι ὑπὸ αβζ καὶ αβγ (2) μείζονες εἰσὶ τῆς ὑπὸ ζβγ, καὶ αἱ δύω αγβ, αγδ μείζονες τῆς ὑπὸ βγδ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ἔσονται τῶν Τριγώνων η, θ, ι, κ, λ, αἱ περὶ τὴν Βάσιν Γωνίαι ἅμα ληφθεῖσαι, ἁπασῶν ἅμα τῶν Γωνιῶν τῆς Βάσεως β, γ, δ, ε, ζ μείζονες· Ἀλλ᾽ αἱ τῆς Βάσεως Γωνίαι συνάμα τέσσαρσιν Ὀρθαῖς, δὶς τοσαύτας συναποτελοῦσιν (3) Ὀρθάς, ὅσαι εἰσὶν αἱ Πλευραί, ἢ (ὃ ταυτόν ἐστιν) ὅσα τὰ Τρίγωνα· Ἄρα πᾶσαι αἱ τῶν Τριγώνων περὶ τὴν Βάσιν Γωνίαι συνάμα τέσσαρσιν Ὀρθαῖς, συναποτελοῦσιν Ὀρθὰς πλέον, ἢ δὶς τοσαύτας, ὅσα τὰ Τρίγωνα· Ἀλλ᾽ αἱ αὐταὶ Γωνίαι αἱ περὶ τὴν Βάσιν, συνάμα ταῖς Γωνίαις ὑφ᾽ ὧν περιέχεται ἡ στερεά, συναποτελοῦσι δὶς τοσαύτας Ὀρθὰς (4), ὅσα τὰ Τρίγωνα· Αἱ ἄρα Γωνίαι ὑφ᾽ ὧν ἡ στερεὰ Γωνία α περιέχεται Ὀρθῶν τεσσάρων ἐλάσσονες εἰσί. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

Ἐκ ταύτηςτε καὶ τῆς πρὸ αὐτῆς ἀπόχρη εἰσβαλεῖν, ὡς ἐκ τριῶν ἐπιπέδων Γωνιῶν, αἳ ἂν ὦσιν Ὀρθῶν τεσσάρων ἐλάσσονες, εἰ μόνον αἱ δύω τῆς λοιπῆς μείζονες ὦσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, Γωνία στερεὰ συνίστασθαι δύναται.

Σχόλιον.

Ἐκ δὲ τῆς αὐτῆς ταύτης κατασκευάζεται καὶ τὸ διαβόητον Θεώρημα, ὅτι τῶν ἐπιπέδων Σχημάτων κανονικῶν ὄντων καὶ ἴσων, τρία μόνα ἐστὶν ἅττα Σῶμα κανονικὸν περιέχειν δύνανται· ἀμέλειτοι τῶν μὲν ἰσοπλεύρων Τριγώ-

(1) Ὅρα *Α.* Ὁρ. τοῦ ιβ΄. (2) *Διὰ* τὴν ἀνωτ. (3) *Β.* Θεώρ. τοῦ Σχολίου τοῦ μετὰ τὴν *ΛΒ.* τοῦ *α΄.* (4) *Διὰ* τὴν *ΛΒ.* τοῦ *α΄.*

νων, ἤτοι 4, ἢ 8, ἢ 20, τῶν δὲ Τετραγώνων 6, τῶν δὲ Πενταγώνων 12· ὥςε πέντε μόνα ἀριθμεῖσθαι τὰ κανονικὰ Σώματα, ἡ Πυραμὶς ἡ ὑπὸ 4, τὸ Ὀκτάεδρον τὸ ὑπὸ 8, τὸ Εἰκοσάεδρον τὸ ὑπὸ 20 ἰσοπλεύρων Τριγώνων περιεχόμενον, ὅ,τε Κῦβος ὁ ὑπὸ Τετραγώνων 6, καὶ τὸ Δωδεκάεδρον τὸ ὑπὸ 12 Πενταγώνων ἰσοπλεύρων τε ϗ ἰσογωνίων περατέμενον. Ὅτι δὲ Σῶμα τεταγμένον τε ϗ κανονικὸν λέγεται τὸ ὑπὸ ἐπιπέδων κανονικῶν ϗ ἀλλήλοις ἴσων περιοριζόμενον, φανερόν.

Δείκν. Ἐκ δυοῖν ἰσοπλεύρων Τριγώνων, Γωνία ςερεὰ συςαθῆναι ἐ δύναται. Τρία γὰρ ἐπὶ τέτῳ τἐλάχιςον (1) ἀπαιτεῖται.

Ὑπὸ τριῶν οὖν ἰσοπλεύρων Τριγώνων εἰς ἓν σημεῖον συνιόντων, Γωνία ςερεὰ συνίςασθαι δύναται ἡ τῆς Πυραμίδος, ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἡ τε Ὀκταέδρε, ὑπὸ δὲ πέντε ἡ τε Εἰκοσαέδρε, ἐπεὶ τῶν τε ἰσοπλεύρε Τριγώνε Γωνιῶν, 3 ληφθεῖσαι, ϗ 4, ϗ 5, ὀρθῶν τεσσάρων ἐλάσσονες εἰσὶν, ὡς ἐκ τε ΙΒ΄. Πορίσματος τῆς ΛΒ΄. τε Α΄. συνάγεται.

Ἐπεὶ δέ τοι τρεῖς πενταγωνικαὶ Γωνίαι (2) τεσσάρων Ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσὶ, Πεντάγωνα τρία εἰς ταυτὸ συνιόντα σημεῖον, Γωνίαν ςερεὰν τὴ τε Δωδεκαέδρε συναποτελεῖν δύνανται.

Ὡς δὲ ϗ ὑπὸ τριῶν Τετραγώνων εἰς ἓν σημεῖον συνιόντων Γωνίαν κυβικὴν συςαθῆναι δυνατὸν, καθ᾽ αὑτὸ δῆλον· ὥςε πέντε τὰ συνιςάμενα κανονικὰ Σώματα.

Ὅτι δὲ παρὰ ταῦτα ἄλλο ἂν συςαθείη κανονικὸν Σῶμα, ἔτω δείκνυται.

Αἱ ἓξ τε ἰσοπλεύρε Τριγώνε Γωνίαι συναποτελῦσι 4 Ὀρθὰς, ἡ γὰρ μία τριτημόρια δύω (3) Ὀρθῆς, ϗ ἐκ τε ἀκολέθε αἱ ἓξ δυοκαίδεκα τριτημόρια Ὀρθῆς δώσεσι, ταυτὸν εἰπεῖν Ὀρθὰς τέσσαρας. Ταύτῃ τοι ὑπὸ ἓξ ἰσοπλεύρων Τριγώνων Γωνία ςερεὰ ἐκ ἂν συςαθείη· πολλῷ δὲ μᾶλλον ἐκ ἂν ἐκ πλειόνων.

Ὑπὸ τεσσάρων Τετραγώνων Γωνίαν ςερεὰν μὴ ἔχειν ἂν συςαθῆναι καθ᾽ αὑτὸ δῆλον, πολλῷ δὲ μᾶλλον μὴ ἐκ πλειόνων.

Γωνίαι πενταγωνικαὶ 4 Ὀρθῶν τεσσάρων μείζονες εἰσὶ, τέτων γὰρ ἑκάςη ἓξ πεμπτημόρια ὀρθῆς (4) περιενήνοχε. Ὑπὸ ἄρα τεσσάρων Πενταγώνων Γωνία ςερεὰ συςαθῆναι ἀδυνατεῖ, πολλῷ δὲ μᾶλλον ὑπὸ πλειόνων.

Ἀλλ᾽ ἐδ᾽ ἐξ ἄλλων ὁποιωνὲν κανονικῶν Σχημάτων, Γωνία ἂν ςερεάτις

---

(1) Ὁρ. Ι. τε ιά. (2) Ὡς δῆλον ἐκ τε Α. Πορ. τῆς ΙΑ. τε δ΄. (3) ΙΒ. Πόρ. τῆς ΛΒ. τε ά. (4) Α. Πόρ. τῆς ΙΑ· τε δ΄.

συςαίη· Τρεῖς γὰρ ἑξαγωνικαὶ Γωνίαι, τέσσαρσιν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ἡ γὰρ μία τέσσαρα τριτημόρια Ὀρθῆς περιείληφεν (1)· ὥςε αἱ τρεῖς τριτημόρ. Ὀρθῆς 12, ταυτὸν εἰπεῖν Ὀρθὰς 4· Οὐκ ἄρα ἐκ τριῶν Ἑξαγώνων συςαίη ἄντις Γωνία ςερεά· πολλῷ οὖν μᾶλλον ἐκ ἂν ἐκ πλειόνων.

Ἐπεὶ δὲ αἱ τρεῖς ἑξαγωνικαὶ Γωνίαι 4 Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, αἱ τρεῖς ἄρα Γωνίαι ὁποιωνῦν ἄλλων Σχημάτων τῦ Ἑξαγώνυ μειζόνων ὄντων, οἷον αἱ τρεῖς τῦ Ἑπταγώνυ, ἢ τῦ Ὀκταγώνυ, κξ: ὀρθῶν τεσσάρων μείζονες ἔσονται· Καὶ δῆλον ἄρα ὡς τῶν κανονικῶν Σχημάτων τὰ λοιπὰ πάντα, ἀνεπιτηδείως ἔχει πρὸς τὴν τῆς ςερεᾶς Γωνίας σύςασιν, καὶ παρὰ τὰ εἰρημένα πέντε ὐδὲν ἄλλο Σῶμα κανονικὸν δοθήσεται.

Πρότασις ΚΒ.

„Ἐὰν ὦσι τρεῖς Γωνίαι ἐπίπεδοι (α, β, γ), ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μεί- „ζονες εἰσὶ πάντη μεταλαμβανόμεναι, περιέχωσι δὲ αὐτὰς ἴσαι Εὐθεῖαι (αδ „= αε = βζ = βη = γθ = γι), δυνατὸν ἔςαι ἐκ τῶν ἐπιζευγνυυσῶν (δε, „ζη, θι) τὰς ἴσας Εὐθείας Τρίγωνον συςήσασθαι. ϰ. 444.

Ἐὰν αἱ ἐπιζευγνύυσαι Εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, εὔδηλον ἐςὶν ἐξ αὐτῶν Τρίγωνον δυνατὸν εἶναι συςήσασθαι· Ἐὰν δὲ ἄνισοι, ϗ τύτων μεγίςη μὲν ἡ δε ἐλάσσων εἴη τῶν λοιπῶν δύω ζη + θι, δυνατὸν ϗ ὕτως ἐξ αὐτῶν Τρίγωνον (2) συςήσασθαι. Ἔςι δὲ ἐλάσσων· ἐπὶ γὰρ τῆς γθ συνεςάσθω Γωνία ἡ ὑπὸ θγκ ἴση τῇ β, ϗ ἔςω γκ = γθ, ϗ ἐπεζεύχθωσαν αἱ κθ, κι· διὰ γῦν τὰς κγ, γθ, αἳ ταῖς βζ, βη ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ϗ τὴν ὑπὸ κγθ = β, ἔςαι (3) ϗ κθ = ζη. Ἐπεὶ δὲ β + θγι, ταυτὸν εἰπεῖν ἡ ὑπὸ κγι (4) μείζων τυγχάνει (5) τῆς Γωνίας α, αἱ δὲ Πλευραὶ κγ, γι, ταῖς Πλευραῖς δα, αε ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ἄρα ἡ Βάσις κι τῆς Βάσεως δε μείζων (6) ὖσα ἐςίν· Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν Πλευρῶν κθ + θι (τυτέςι ζη + θι) μεῖζον ἐςὶ (7) τῆς κι, ϗ ἑπομένως πολλῷ μεῖζον τῆς δε. Ἄρα κτ:

Σχόλιον.

Ἔςω Τρίγωνα τρία ἰσοσκελῆ (ὡς ἐπὶ τῦ ἀνωτ. Σχήμ.) αδε, βζη, γθι, ὧν τὰ σκέλη αδ, αε, βζ, βη, γθ, γι ἀλλήλοις ἴσα εἰσὶ, ϗ αἱ κατὰ κορυφὴν Γωνίαι α, β, γ ἅμα ληφθεῖσαι τεσσάρων Ὀρθῶν ἐλάσσονες, ἀλλ' ϰ. 445.

(1) *Β. Πόρ. τῆς ΙΕ. τῦ δ'.* (2) *ΚΒ. τῦ α'.* (3) *Δ. τῦ α'.* (4) *Ἐκ κατ.* (5) *Ἐξ ὑποθ.* (6) *ΚΔ. τῦ α'.* (7) *Κ. τῦ α'.*

ὕτως ὥςε τὰς δύω τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντη μεταλαμβανομένας, ὑπὸ δὲ τῶν βάσεων αὐτῶν δε, ζη, θι Τρίγωνον (1) τὸ λμν συνίςασθαι, ἔχον ἐν αὐτῷ τὴν μὲν **λμ** = δε, τὴν δὲ μν = ζη, τὴν δὲ νλ = θι· ἐφ᾽ ὧν ἂν νοοῖντο δύο τῶν ἰσοσκελῶν Πλευραὶ αἱ προσεχεῖς ἀλλήλαις εἰς Εὐθεῖαν μίαν συνιέναι, ἀμέλειτοι τὰς μὲν **γι** ϗ αδ εἰς τὴν φλ, τὰς δὲ αε ϗ βζ εἰς τὴν φμ, τὰς δὲ βη ϗ γθ εἰς τὴν φν, συνιςαμένης τῆς κατὰ τὸ φ ςερεᾶς Γωνίας ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων Γωνιῶν α, β, γ, ϗ συνεξισυμένων ἀλλήλαις τῶν φλ, φμ, φν. Τύτων οὕτω προτεθέντων, ἐὰν περὶ τὸ Τρίγωνον λμν (2) Κύκλος περιγραφῆ, ἡ κάθετος φξ, ἡ ἀπὸ τῆς ςερεᾶς Γωνίας ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον τῦ Κύκλυ καταγομένη, ἐπ᾽ αὐτὸ τὸ Κέντρον πεσεῖται.

Τῶν γὰρ ξλ, ξμ, ξν ἠγμένων, ἐπὶ τῶν ὀρθογωνίων Τριγώνων ξφλ, ξφμ, ξφν, ἔςαι (3) $φλ^T = φξ^T + λξ^T$, καὶ $φμ^T = φξ^T + μξ^T$, καὶ $φν^T = φξ^T + νξ^T$. Καὶ ἐὰν τοίνυν ἀπὸ ἑκάςυ τῶν ἴσων Τετραγώνων (4) $φλ^T$, ϗ $φμ^T$, ϗ $φν^T$, ἀφαιρεθῇ τὸ $φξ^T$, καταλειφθήσεται τὰ $λξ^T$, καὶ $μξ^T$, ϗ $νξ^T$ ἀλλήλοις ἴσα, ὥςε καὶ αἱ ξλ, ξμ, ξν ἶσαι ἔσονται Εὐθεῖαι· καὶ ἑπομένως ὁ διὰ **λ**, ϗ μ, ϗ ν διϊὼν κύκλος, τὸ Κέντρον ἔχει (5) κατὰ τὸ ξ.

Ἡ δὲ τῆς Προτάσεως ἀλήθεια σαφὴς, κᾂν ὀξυγώνιον ᾖ τὸ λμν Τρίγωνον, κᾂν ὀρθογώνιον, κᾂν τέως ἀμβλυγώνιον. Ὅρα τὸ Σχόλ. τῆς Ε΄. Προτ. τῦ Δ΄. Βιβλίυ, ϗ παράθυ τὰ ἐκεῖσε ἐν ἀριθμ. Β΄. Σχήματα τοῖς ἐνταῦθα προκειμένοις τρισί.

Πόρισμα.

Τῶν τοιύτων ἰσοσκελῶν Τριγώνων αδε, βζη, γθι τεθέντων, ἐὰν ἐκ τῶν κατ᾽ αὐτὰ βάσεων Τρίγωνον τὸ λμν συςαθῇ, ἔςαι τῶν ἴσων σκελῶν ὁποιονῦν οἷον τὸ αδ, ἢ τὸ αε, ἢ τὸ βζ, κξ: μεῖζον τῆς Ἡμιδιαμέτρυ τῦ Κύκλυ τῦ περὶ τὸ Τρίγωνον τὸ λμν περιγεγραμμένυ. Καὶ γὰρ αδ (6) = φλ, ϗ ἐπὶ τῦ ὀρθογωνίυ Τριγώνυ ξφλ, ἡ πλευρὰ φλ ἡ ὑποτείνυσα τὴν ὀρθὴν Γωνίαν, μείζων ἐςὶ (7) τῆς ξλ τῆς ὑποτεινύσης (8) τὴν ὀξεῖαν.

Πρότασις ΚΓ.

σ. 444.445. „Ἐκ τριῶν Γωνιῶν ἐπιπέδων (α, β, γ), ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες

(1) *Διὰ τὴν ἐν χερσὶ ταύτην ϗ τὴν ΚΒ. τῦ α΄.* (2) *Ε. τῦ δ΄.* (3) *ΜΕ. τῦ α΄.* (4) *Α΄ξ. ΙΕ. τῦ α΄.* (5) *Θ. τῦ γ΄.* (6) *Ἐκ κατ.* (7) *ΙΘ. τῦ α΄.* (8) *Ε. Πόρ. τῆς ΛΒ. τῦ α΄.*

„εἰσὶ πάντῃ μεταλαμβανόμεναι (1), ϛερεὰν Γωνίαν συϛήσασθαι. Δεῖ δὴ (2)
„τὰς τρεῖς τεσσάρων Ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι.

Γινέσθωσαν ἅπασαι αἱ τῶν Γωνιῶν Πλευραὶ (τουτέϛιν αἱ αδ, αε, βζ, βη, γθ, γι) ἀλλήλαις ἴσαι· καὶ ἐπιζευχθεισῶν τῶν δε, ζη, θι, συνεϛάσθω (3) Τρίγωνον τὸ λμν, οὗτινος ἂν αἱ Πλευραὶ λμ, μν, νλ, ταῖς δε, ζη, θι ἴσαι εἶεν, ἑκάϛη ἑκάϛῃ, καὶ περὶ τὸ Τρίγωνον (4) Κύκλος γεγράφθω, οὗ Ἡμιδιάμετρος ἡ ξλ· Καὶ ἐπειδὴ τῶν Γωνιῶν α, β, γ ἑκάϛη τῶν Πλευρῶν τῆς Ἡμιδιαμέτρου ξλ (5) μείζων οὖσα ἐϛὶν, ἔϛαι ϗ τὸ $\alpha\delta^T$ μεῖζον τοῦ $\xi\lambda^T$. Εὑρεθήτω τοίνυν (6) Πλευρά τις ξφ Τετραγώνου, ᾧ ἂν τὸ $\alpha\delta^T$ ὑπερέχοι τὸ $\xi\lambda^T$, καὶ ἀπὸ τοῦ Κέντρου ξ ἀνιϛάσθω (7) ξφ, τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ Κύκλου ὀρθὴ, ἐπεζεύχθωσάν τε αἱ φλ, φμ, φν· Λέγω δὴ ὡς ἐγένετο τὸ ζητούμενον.

Ἐπειδὴ γὰρ ἡ ξ Γωνία ἐπὶ τοῦ ξφλ Τριγώνου ὀρθὴ, ἔϛαι $\varphi\lambda^T =$ (8) $\varphi\xi^T + \xi\lambda^T = \alpha\delta^T$ (9), καὶ $\varphi\lambda = \alpha\delta$· Τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται, ὅτι ϗ $\varphi\mu = \alpha\varepsilon$· Ἐπεὶ δὲ ϗ $\lambda\mu = \delta\varepsilon$, ἔϛαι (10) ἡ ὑπὸ λφμ Γωνία = Γωνίᾳ τῇ α· Ὡσαύτως δειχθήσεται ὡς ϗ ἡ ὑπὸ $\mu\varphi\nu = \beta$, καὶ ἡ ὑπὸ $\nu\varphi\lambda = \gamma$· Γέγονε τοίνυν τὸ ζητούμενον.

Πρότασις ΚΔ.

„Τὰ ἐπίπεδα τὰ τὸ Παραλληλεπίπεδον περιέχοντα, Α΄. Παραλληλό-
„γραμμά εἰσί. Β΄. τὰ ἀπεναντίον ὅμοια. Γ΄. καὶ ἴσα.

Μέρος Α΄. Τὸ ἐπίπεδον αζ τὸ τέμνον τὰ ἐπίπεδα βδ, ζθ, τὰ ἐκ τοῦ ΙΓ. Ὁρισμ. παράλληλα, ποιεῖ (11) τὰς βα, ζε τομὰς παραλλήλους. Πάλιν τὸ ἐπίπεδον αζ τὸ τέμνον τὰ ἐπίπεδα αθ, βη, τὰ ἐκ τοῦ ΙΓ΄. Ὁρισμοῦ παράλληλα, ποιεῖται τὰς τομὰς (12) αε, βζ παραλλήλους· ὥϛε τὸ βαεζ παραλληλόγραμμον ἐϛί· Τῷ δ᾽ αὐτῷ τούτῳ λόγῳ ϗ τὰ λοιπὰ τοῦ Παραλληλεπιπέδου ἐπίπεδα παραλληλόγραμμα ὄντα δειχθήσεται. x. 446.

Μέρος Β΄. Ἐπειδὴ κατὰ τὸ Α΄. Μέρος αἱ αβ, βγ, παράλληλοί εἰσὶ ταῖς εζ, ζη, ἔσονται δὴ (13) αἱ ὑπὸ αβγ ϗ εζη ἴσαι ἀλλήλαις. Τὰ ἄρα Παραλληλόγραμμα βδ ϗ ζθ ἰσογώνια (14) ἐϛί. Ταύτητοι ἐπεὶ ϗ αἱ Πλευραὶ τούτοις ἐναλλὰξ ἴσαι εἰσὶ (15), τουτέϛιν ἡ μὲν $\alpha\beta = \varepsilon\zeta$, ἡ δὲ $\beta\gamma =$

---

(1) Ἐκ τῆς Κ. τοῦ ια΄. (2) Ἐκ τῆς ΚΑ. τοῦ ια΄. (3) ΚΒ. τοῦ ια΄. ϗ ΚΒ. τοῦ α΄. (4) Ε. τοῦ δ΄. (5) Διὰ τὸ Πόρ. τὸ τοῦ ἀνωτ. Σχολίου. (6) Κατὰ τὸ Β. Πρόβλημα τοῦ Σχολίου τοῦ μετὰ τὴν ΜΖ. τοῦ α΄. (7) ΙΒ τοῦ ια΄. (8) ΜΖ. τοῦ α΄. (9) Ἐκ κατασκ. (10) Η. τοῦ α΄. (11) Ιϛ. τοῦ ια΄. (12) Διὰ τὴν αὐτ. (13) Ι. τοῦ ια΄. (14) ΚΖ. ϗ ΛΔ. τοῦ α΄. (15) ΛΔ. τοῦ α΄.

ζη, ἡ δὲ γδ = ηθ, ϗ ἡ δα = θε, ὅμοια δήπȣ (1) ἔςαι τὰ ἀπεναντίον Παραλληλόγραμμα βδ, ζθ. Ὡσαύτως δὲ δειχθήσεται ϗ τῶν ἀπεναντίον τὰ λοιπὰ εἶναι ὅμοια.

Μέρος Γ΄. Δῆλον αὐτὸ ἔκτε τȣ̃ Α΄. Μέρȣς, ϗ τῆς Δ΄. ἢ τῆς Η΄. τȣ̃ Α΄. Ἐπιζευχθεισῶν γὰρ τῶν αγ, εη, ἐπειδὴ ἐπὶ τῶν Τριγώνων αβγ, εζη, αἱ Πλευραὶ αβ, βγ, ταῖς Πλευραῖς εζ, ζη, ἑτέρα τῇ ἑτέρᾳ ἴσαι εἰσὶν (2), ἥτε ὑπὸ αβγ τῇ ὑπὸ εζη (3) ἴση, ϗ Βάσις αγ Βάσει εη ἴση (4) ἔςαι, καὶ Τρίγωνον τὸ αβγ Τριγώνῳ τῷ εζη ἴσον· Ἀλλὰ τὰ ἀπεναντίον Παραλληλόγραμμα βδ, ζθ τῶν Τριγώνων (5) ἐκείνων διπλασίονα ἐςὶ, ἔςαι τὰ Παραλληλόγραμμα ἴσα. Ὡσαύτως δὲ δειχθήσεται ϗ δύο ὁποιαȣ̃ν τῶν ἀπεναντίον Παραλληλόγραμμα ἴσα ἀλλήλοις εἶναι.

Πορίσματα.

κ. 447. Α. Τὸ Παραλληλεπίπεδον αβ, ἢ ϗ Πρίσμα ὁποιονȣ̃ν ὑπὸ τȣ̃ ἐπιπέδȣ γδ τεμνόμενον τȣ̃ τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις ασ, ρβ παραλλήλȣ, τομὴν ποιεῖται τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις ὁμοίαν τε ϗ ἴσην. Δειχθήσεται δὲ ὥσπερ ἐδείκνυται τῆς Προτάσ. ἀνωτ. τὸ Β΄. ϗ τὸ Γ΄.

Β΄. Τῇ δ᾽ αὐτῇ τομῇ τὰ περατȣ̃ντα Παραλληλόγραμμα αζ, σζ, κτ:, διαιρεθήσεται εἰς μέρη (6) Παραλληλόγραμμα τὰ αν, γζ, ϗ σν, δζ, κξ: ὅμοια (7) τοῖς μέρεσι σδ, δβ, εἰς ἃ πᾶσα Εὐθεῖα τῶν κατὰ τὰς Πλευρὰς, οἷον ἡ σβ, τῇ αὐτῇ τομῇ κατατέμνεται.

Γ΄. Καὶ παρὰ ταῦτα, ἐὰν τὸ ςερεὸν τὸ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλȣ τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τμηθὲν, παραλληλεπίπεδον ᾖ, τὰ Παραλληλόγραμμα μέρη τὰ ἀλλήλοις ἀντίθετα, εἰς ἃ διατέμνονται τὰ ἀπεναντίον πλευρικὰ Ἐπίπεδα, ὅμοιά τε (8) ἔσονται ϗ ἴσα.

Πρότασις ΚΕ.

κ. 448. „Ἐὰν ςερεὸν Παραλληλεπίπεδον (αβ), ἢ ϗ Πρίσμα ὁποιονȣ̃ν, ἐπιπέ„δῳ (γδ) τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔςαι ὡς ἡ „Βάσις εδ πρὸς τὴν Βάσιν δζ, ȣ̃τω τὸ ςερεὸν αδ πρὸς τὸ ςερεὸν γβ.

Δείκνυται τὸν αὐτὸν τρόπον ὡς ϗ ἡ Α΄. τȣ̃ ϛ΄.

---

(1) Σχόλ. τῆς Ζ. τȣ̃ ε΄., ϗ Ὁρ. Α. τȣ̃ ϛ΄. (2) ΛΔ. τȣ̃ α΄. (3) Ι. τȣ̃ ια΄. (4) Δ. τȣ̃ α΄. (5) ΛΔ. τȣ̃ α΄. (6) Ἐκ τȣ̃ Α. Μέρȣς τῆς Προτ. (7) Α. τȣ̃ ϛ΄. ϗ Ὁρ. Ζ. τȣ̃ ε΄. (8) Β. ϗ Γ. Μέρος τῆς Προτ.

Διαιρεθήτω ἡ δβ Εὐθεῖα εἰς ἴσα ὁποσαδήποτε μέρη, οἷον εἰς τέτταρα δη, ηθ, θι, ιβ· καὶ ἐπὶ τῆς Βάσεως δζ, διὰ τῶν σημείων τῶν διαιρέσεων η, θ, ι, ἀχθήτωσαν Εὐθεῖαι ηκ, θλ, ιμ, ταῖς τῆς Βάσεως δζ ἀπεναντίον Πλευραῖς δν, βζ, παράλληλοι· Καὶ οὕτως ἡ Βάσις εἰς τέτταρα (1) ὅμοιά τε, καὶ ἴσα (2) Παραλληλόγραμμα διαιρεθήσεται τὰ δκ, ηλ, θμ, ιζ, δι' ὧν δὴ τῶν Πλευρῶν ηκ, θλ, ιμ, διερχέσθωσαν τὰ ἐπίπεδα ηξ, θφ, ιπ, τοῖς τοῦ στερεοῦ ἐπιπέδου γβ ἀπεναντίον ἐπιπέδοις γδ, ρβ παράλληλα. Καὶ οὕτω διαιρεθήσεται ἐκεῖνο εἰς ἐπίπεδα στερεὰ τέτταρα, τὰ δξ, ηφ, θπ, ιρ, ὧν ἕκαστον (3) ὁμοίοις τε, καὶ ἴσοις πλήθει τε καὶ μεγέθει ἐπιπέδοις περιεχόμενον ἐστὶ, καὶ διὰ τοῦτο ἀλλήλοις (4) ἴσα τυγχάνει. Ταύτῃτοι τὸ ἐπίπεδον δκ, καὶ τὸ στερεὸν δξ εἰσὶ τῶν ἑπομένων τῶν δζ καὶ γβ μόρια (5) ὅμοια. Ἀφῃρήσθω τοίνυν ἡ Εὐθεῖα δη ἀπὸ τῆς δσ ὁσάκις ἂν ἐξῇ, οἷον δὶς, καὶ ὑπολειφθήσεται στ τῆς δη ἐλάσσων· ἀπὸ δὲ δὴ τῶν σημείων τῶν διαιρέσεων υ καὶ τ, ἀχθήτωσαν Εὐθεῖαι, ταῖς τῆς Βάσεως εδ Πλευραῖς ταῖς ἀπεναντίον εσ, νδ παράλληλοι, καὶ δι' αὐτῶν ἀχθήτω τὰ ἐπίπεδα τοῖς ἀπεναντίον τοῦ στερεοῦ αδ ἐπιπέδοις ασ, γδ παράλληλα· Καὶ ἐπειδὴ αἱ δυ, υτ, τῇ δη ἑκατέρα ἴση ἐστὶν, ἔσται (6) καὶ τὰ Παραλληλόγραμμα νυ, υχ, τῷ Παραλληλογράμμῳ δκ ὅμοιόν τε, καὶ ἴσον ἑκάτερον· καὶ δὴ καὶ ἑκάτερον τῶν στερεῶν γυ, υψ, τῷ στερεῷ δξ (ἅτε δὴ ὁμοίοις (7) τε καὶ ἴσοις πλήθει τε καὶ μεγέθει ἐπιπέδοις περιεχόμενα) (8) ἴσον. Ἀλλὰ γὰρ διὰ τὴν στ Εὐθεῖαν, ἥτις τῆς δη ἐλάσσων ἐστὶν, ἔσται καὶ ἡ Βάσις ετ τῆς Βάσεως δκ ἐλάσσων (9), καὶ τὸ στερεὸν ατ τοῦ στερεοῦ δξ ἔλαττον (ἐὰν γὰρ τῶν στερεῶν τούτων, ἐπὶ ἐπιπέδων ἴσων ὄντων τῶν ασ, γδ, ἐντὸς θατέρου θάτερον συσταθῆναι ὑποτεθῇ, διὰ τὴν στ ἐλάσσονα οὖσαν τῆς δη, τὸ στερεὸν ατ μέρει τινὶ μόνον τοῦ στερεοῦ δξ συνεξισωθήσεται). Ὁσάκις τοίνυν τὸ ἐπίπεδον δκ περιέχεται ἐν τῷ ἡγουμένῳ δε, τοσάκις καὶ τὸ στερεὸν δξ ἐν τῷ ἡγουμένῳ δα ἔσται περιεχόμενον. Καὶ τὸν αὐτὸν τρόπον δεῖξαι δυνατὸν, ὅσα δήποτε τῶν ἑπομένων (τῆς τε βάσεως δζ καὶ τοῦ στερεοῦ γβ) ὅμοια μόρια ἐν τοῖς ἡγουμένοις (τῇ τε βάσει εδ καὶ τῷ στερεῷ αδ) ἰσαρίθμως ἐμπεριέχεσθαι· Ἄρα (10) βάσις εδ πρὸς βάσιν δζ, ὡς τὸ στερεὸν αδ πρὸς τὸ στερεὸν γβ. Ο. Ε. Δ. κ 449.

---

(1) ΚΖ. τοῦ α'· καὶ Σχόλ. τῆς Ζ. τοῦ ε'. μετὰ τοῦ Δ'. Ὁρ. τοῦ ς'. (2) Λς. τοῦ α'. (3) ΚΔ. τοῦ ια'. μετὰ τῶν Πορ. (4) ΙΕ. Ὁρισ. τοῦ ια'. (5) Ζ. Ὁρ. τοῦ ε'. (6) Διὰ τὰ ἐν (1) καὶ (2) ἀνωτ. σημειωθ. (7) Διὰ τὴν ἀνωτ. μετὰ τῶν Πορ. (8) Ὁρ. ΙΕ. τοῦ ια'. (9) Α· τοῦ ς'. (10) Διὰ τὸ τῶν ἴσων λόγων γνώρισμ. τὸ ἐν τοῖς Ὁρισμ. τοῦ ε'.

Πρότασις Κϛ.

ϰ. 450. „Πρὸς τῇ δοθείσῃ Εὐθείᾳ (αβ), ϗ τῷ πρὸς αὐτῇ Σημείῳ (α), τῇ „δοθείσῃ ςερεᾷ Γωνίᾳ (γδεζ) ἴσην ςερεὰν Γωνίαν συςήσασθαι (τὴν αθιλ).

Σημείωσαι ὅτι τῶν γραμμάτων δι᾽ ὧν ἡ ςερεὰ Γωνία εἴωθεν ἐπισημαίνεσθαι, τὸ πρῶτον τασσόμενον ἐςὶ τὸ κατὰ τὸ Σημεῖον, ἐν ᾧ ἡ Γωνία κεῖται· οὕτως ἡ ςερεὰ Γωνία αθιλ ἐςὶ πρὸς τῷ α, ϗ ἡ γδεζ ἐςὶ πρὸς τῷ γ.

Ἀπὸ τȣ̃ τυχόντος σημείȣ ζ τῶν ἐπὶ τῆς Εὐθείας γζ, ἄγε (1) τὴν ζη, τῷ ἐπιπέδῳ δγε ὀρθήν, καὶ ἐπίζευξον Εὐθείας τὰς δζ, ζε, εη, ηδ, ηγ, καὶ ποίησον τὴν αθ = γδ, ϗ Γωνίαν τὴν ὑπὸ θαι = δγε, ϗ τὴν αι = γε· ἐν δὲ τῷ θαι ἐπιπέδῳ ποίησον Γωνίαν τὴν ὑπὸ θακ = Γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δγη, ϗ ακ = γη. Εἶτα ἀνάςησον (2) τὴν κλ ὀρθὴν τῷ ἐπιπέδῳ θαι, ϗ ἔςω κλ = ηζ, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ αλ. Οὕτω γὰρ ἔςαι ἡ ςερεὰ Γωνία αθιλ ἴση τῇ δοθείσῃ γδεζ· ἐπιζευχθεισῶν γὰρ τῶν θκ, ικ, θλ, ιλ, διὰ τὰς θα, ακ, αἳ ταῖς δγ, γη ἴσαι εἰσὶν ἑτέρα τῇ ἑτέρᾳ, ϗ τὰς ὑπὸ θακ ϗ δγη ἴσας ȣ̓́σας, ἔςαι (3) ϗ ἡ θκ = δη. Παραπλησίως δὲ τῇ παραθέσει τῶν Τριγώνων ιακ, εγη, δειχθήσεται (4) κι = ηε· καὶ ἐπὶ τῶν Τριγώνων θκλ, δηζ (5) δειχθήσεται θλ = δζ· καὶ ἐπὶ τῶν Τριγώνων ικλ, εηζ, ἡ ιλ = εζ· καὶ ἐπὶ τῶν Τριγώνων ακλ, γηζ, ἡ αλ = γζ· Τὰ τοίνυν Τρίγωνα αθλ, γδζ ἀλλήλοις ἰσόπλευρα ἐςί, ϗ δὴ (6) ϗ ἰσογώνια· ὅθεν ἡ ὑπὸ θαλ = δγζ. Διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον, κἀν τοῖς ἰσοπλεύροις Τριγώνοις αιλ, γεζ, ἡ ὑπὸ λαι = ζγε, ἀλλὰ ϗ ἡ ὑπὸ βαι = δγε (7). Ἐγένετο ἄρα τὸ ζητȣ̓́μενον.

Πρότασις ΚΖ.

ϰ. 451. „Ἀπὸ τῆς δοθείσης Εὐθείας (αβ), τῷ δοθέντι ςερεῷ Παραλληλεπιπέδῳ „(γδ) ὁμοιόν τε, ϗ ὁμοίως κείμενον ςερεὸν Παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι.

Ἐν Γωνίαις ἐπιπέδοις βαθ, θαι, βαι, αἳ ἴσαι ἂν εἶεν ταῖς ζγε, εγη, ζγη, συνεςάσθω Γωνία ςερεὰ ἡ α (8) τῇ ςερεᾷ Γωνίᾳ γ ἴση. Ἔτι δὲ ἔςω (9) ζγ : γε : : βα : αθ, καὶ γε : γη : : αθ : αι· Καὶ ȣ̓́τως ἔςαι δι᾽ ἴσȣ (10) ζγ : γη : : βα : αι. Πληρȣ́σθω δὲ τὸ Παραλληλεπίπεδον ακ· τȣ̃το γὰρ ὅμοιον ἔςαι τῷ δοθέντι.

---

(1) Διὰ τὴν ΙΑ. τȣ̃ ια΄. (2) ΙΒ. τȣ̃ ια΄. (3) Δ. τȣ̃ α΄. (4) Ἀξ. Γ. ϗ Δ. Πρότ. τȣ̃ α΄. (5) Διὰ τὸν Γ. Ὅρ. τȣ̃ ια΄. ϗ Δ. Πρότ. τȣ̃ λ΄. (6) Η. τȣ̃ α΄. (7) Ἐκ κατασκ. (8) Διὰ τὴν ἀνωτ. (9) ΙΒ. τȣ̃ ϛ΄. (10) ΚΒ. τȣ̃ ε.

Ἐκ γὰρ τῆς κατασκευῆς τὰ Παραλληλόγραμμα βθ, ζε, καὶ θι, εη, καὶ βι, ζη ὅμοια ἐςὶ, καὶ τούτων τὰ ἀπεναντίον (1) ἐκείνων τοῖς ἀπεναντίον· Ὥςε τὰ ἓξ ἐπίπεδα τοῦ ςερεοῦ ακ, τοῖς ἓξ ἐπιπέδοις τοῦ ςερεοῦ γδ ὅμοια ὄντα ἐςὶ, καὶ ἑπομένως (2) τὰ ςερεὰ ακ, γδ ὅμοια ἐςί.

Πρότασις ΚΗ.

„Ἐὰν ςερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ κατὰ τὰς Διαγωνίους „(αγ, εη) τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων, δίχα τμηθήσεται τὸ ςερεὸν ὑπὸ τοῦ „ἐπιπέδου. χ. 452.

Ἐπειδὴ (3) βη καὶ βε Παραλληλόγραμμα ἐςὶν, αἱ γη, αε παράλληλοι εἰσὶ τῇ αὐτῇ βζ· ἄρα καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι εἰσὶ (4), καὶ ἑπομένως ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἔσαι εἰσίν· ὥςε αἱ Εὐθεῖαι αγ, εη (5) ἐν ἑνὶ καὶ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ εἰσί. Ἤδη δὲ ὡς τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ, τέμνεται τὸ παραλληλεπίπεδον εἰς δύω Πρίσματα ἴσα, ὧδέ πως δείκνυμι.

Νοείσθω τὸ Πρίσμα αεηγδθ, ἐπὶ τοῦ ἰδίου ἐπιπέδου εαγη οὕτω κείμενον, ὡς τὰς Γωνίας δ, θ, ἔχειν ἀποκλινούσας πρὸς τὰς Γωνίας β, ζ, καὶ φανερὸν ὡς ἔτι μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων βαδγ, ζεθη κείσεται, καὶ τέως δὴ μετὰ τὴν ἐφάρμοσιν συμπεσεῖται μὲν τὸ δ τῷ β, συμπεσεῖται δὲ τὸ θ τῷ ζ, ἐπὶ τὸ αὐτό· Πιπτέτω γὰρ εἰ δυνατὸν τὸ δ ἔξω τοῦ β, οἷον κατὰ τὸ ν· ἡ μὲν οὖν ὑπὸ βαγ = (6) δγα· ἀλλ' ἡ ὑπὸ δγα = ναγ (ἡ γὰρ αὐτὴ Γωνία ἐςίν)· Ἄρα αἱ βαγ καὶ ναγ ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις, ὅπερ ἄτοπον. Συμπεσεῖται τοίνυν τὸ δ Σημεῖον τῷ β, καὶ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τὸ θ τῷ ζ, ὥςε τὸ Πρίσμα αεηγδθ προσεφαρμόζεται τῷ Πρίσματι αγηεζβ, καὶ ἑπομένως (7) ἴσα ἐςί.

Αὕτη ἡ κατὰ Τακουέτιον δεῖξις, τοῖς μὲν ὀρθοῖς τῶν Παραλληλεπιπέδων, ὧν ἀμέλει τὰ κατὰ πλευρὰν ἐπίπεδα ταῖς βάσεσι πρὸς ὀρθὰς ἵςαται, προσήκουσα ἐςί· τυχὸν δὲ καὶ ἑνός τινος, ἢ δευτέρου εἴδους τῶν πλαγίων οὐκ ἀλλοτρίως ἔχει· Ἐπειδὴ μέντοι ἐν ταῖς ἐφεξῆς Προτάσεσι τοῦδέτε, καὶ τοῦ μετὰ τόδε Βιβλίου, ἐπὶ τὰ Παραλληλεπίπεδα καθόλου ὅπως ἂν καὶ ἔχοι, ὑποτίθεται ἡ δεῖξις ἐκτεινομένη, ἐπάναγκες ἐςὶν ἐπὶ τὸν κατ' Εὐκλείδην συλλογισμὸν ἀναδραμεῖν, δι' οὗ ἐπ' ἀκριβὲς ἀποδείκνυται, πάντα πάντη τὰ παραλληλεπίπεδα, τὰ ἐπιπέδῳ τῷ αη, κατὰ τὰς Διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων

---

(1) ΚΔ. τοῦ ια΄. (2) Ὁρισμ. Θ. τοῦ ια΄. (3) ΚΔ. τοῦ ια΄. (4) Διὰ τὴν Θ. τοῦ ια΄. (5) Ζ. τοῦ ια΄. (6) ΚΖ. τοῦ α΄. (7) Λ'ξ ζ΄.

αγ, εἰ τεμνόμενα, δίχα (ὅπέρ ἐςιν εἰς Πρίσματα δύω ἴσά τε ἀλλήλοις ὄντα, ϗ δὴ ϗ ὅμοια) διατέμνεσθαι.

Τρίγωνον γὰρ Τριγώνῳ ἴσον τὸ αβγ τῷ αδγ (1), καὶ (διὰ τὴν ἰσότητα τῶν Γωνιῶν (2) β ϗ δ, ϗ τῶν (3) βαγ, δγα, ϗ τῶν βγα, δαγ) ὅμοιον (4). Διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον ϗ τὰ εζη, εθη Τρίγωνα ἴσα τε ϗ ὅμοια ἐςὶν· ἴσα δὲ δὴ ϗ ὅμοια (5) ϗ τὰ ἀπεναντίον Παραλληλόγραμμα αζ ϗ γθ, ϗ ἔτι τὰ βη ϗ αδ· τὸ δὲ αη ἀμφοῖν κοινόν· Τὰ ἄρα Πρίσματα αβγηεζ ϗ αδγηεθ, ὑπὸ ὁμοίων τε ϗ ἴσων πλήθει τε ϗ μεγέθει ἐπιπέδων περιεχόμενα, ὅμοιά τε ἐςὶν (6) ἀλλήλοις ϗ ἴσα. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΚΘ. ϗ Λ.

κ. 453. „Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς Βάσεως ὄντα (εζιμ), ϗ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ϗ διὰ „τὔτο ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις (εζιμ, ηαξλ) τυγχάνοντα ςερεὰ Παραλ-„ληλεπίπεδα (ζεαηκιμγ ϗ ζεβθλξμι), ἴσα ἀλλήλοις ἐςί.

Ἤτοι γὰρ μεταξὺ τῶν κατὰ πλευρὰν παραλλήλων ἐπιπέδων εαξμ καὶ ζηλι ὑφίςαται, ἢ ὄχί· Ἔςω δὴ τὸ Α΄. ἐκ γὔν τῆς ΚΔ΄. τὔ παρόντος ϗ τῆς Η΄. τὔ Α΄. Βιβλίυ, δῆλον ὅτι τὰ Τρίγωνα αεβ, γμξ, ϗ τὰ ηζθ, κιλ ἰσόπλευρά τε εἰσὶν ἀλλήλοις ϗ ἰσογώνια· Ταύτῃ τοι ὡς ἐπὶ τῆς προλαβὔσης, δειχθήσεται τὰ Πρίσματα γμξλικ, αεβθζη ἀλλήλοις ἐπιτιθέμενα συνεφαρμόζειν τε, ϗ ἴσα (7) τυγχάνειν· Καὶ κοινῆ ἄρα τὔ ςερεὔ ζεβθκγμι προςεθέντος, τὰ ὅλα Παραλληλεπίπεδα ζεαηκιμγ, ζεβθλξμι ἴσα εἶναι. Ο. Ε. Δ.

Ἄλλως. Ἐν τοῖς Παραλληλογράμμοις αεμγ, βεμξ αἱ ἀπεναντίον Πλευραὶ (8) ἴσαι ἀλλήλαις, τὔτέςιν αε = γμ, βε = ξμ, αγ = εμ = βξ, ϗ ἀρθείσης τῆς κοινῆς βγ, αβ = γξ· ἄρα τὰ αβε, γξμ Τρίγωνα, ἀλλήλοις ἰσόπλευρα ἐςὶ, ϗ ἑπομένως (9) ἴσα. Ὡσαύτως δὲ δειχθήσεται ϗ τὰ Τρίγωνα ζηθ, ικλ ἴσα ἀλλήλοις εἶναι, τὰ δὲ ἀπεναντίον τῶν Παραλληλεπιπέδων ἐπίπεδα ἴσα (10) ϗ αὐτά, τὔτέςιν αζ = γι, ϗ βζ = ξι, ϗ ακ = ει = βλ· διὸ ϗ τὔ κοινὔ βκ ἀφαιρὔμένυ, ἔςαι αθ = γλ. Τοιγαρὔν τὰ Πρίσματα αεβθζη ϗ γμξλικ, ὡς ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων ϗ ἴσων πλήθει τε ϗ μεγέθει περιεχόμενα (11), ἴσα ὄντα ἐςί· κοινῆ δὲ τὔτοις προςεθέντος τὔ ςερεὔ, ὗ Βάσις ἡ ζμ, ϗ ἐπίπεδον ταύτῃ ἀπεναντίον τὸ βκ, τὰ ὅλα Παραλληλεπίπεδα ζεαηκιμγ, ζεβθλξμι ἴσα ἔςαι. Ο. Ε. Δ.

---

(1) ΛΔ. τὔ α΄. (2) Διὰ τὴν αὐτ. (3) ΚΖ. τὔ α΄. (4) Δ. τὔ ς΄. (5) ΚΔ. τὔ ια΄. (6) Ὁρ. ΙΕ. τὔ ια΄. (7) Ἀξ. ζ΄. (8) ΛΔ. τὔ α΄. (9) Η. τὔ α΄. (10) ΚΔ. τὔ ια΄. (11) ΙΕ. Ὁρ. τὔ ια΄.

Ἀλλ' εἴπερ ἄρα τὸ Παραλληλεπίπεδον ζχπεμιφρ, μὴ μεταξὺ εἴη τῶν αὐτῶν πλευρικῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῷ Παραλληλεπιπέδῳ ζεαηκγμι, ἐπεὶ ἐξ ὑποθ. ηκ, αγ, ρπ, χφ, ἐν τῷ αὐτῷ εἰσιν ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ ὄντι πρὸς τὴν Βάσιν εζιμ, αἱ ρφ καὶ πχ τεμνέτωσαν τὴν μὲν ηκ κατὰ θ καὶ λ, τὴν δὲ αγ κατὰ β καὶ ξ, ἐπεζεύχθωσαν δὲ εβ, μξ, ζθ, ιλ. Καὶ οὕτω ῥᾷστα δειχθήσεται, ὡς τὰ ἐπίπεδα οἷς τὸ στερεὸν ζεβθλξμι περιέχεται Παραλληλόγραμμα, ἐστὶν ἀπεναντίον ἀλλήλοις παράλληλα· τὰ γὰρ ἀπεναντίον ἐπίπεδα τὰ Τετράπλευρα τοῦ στερεοῦ τούτου, ἐν τοῖς αὐτοῖς εἰσὶν ἐπιπέδοις, ἐν οἷς καὶ τὰ ἀπεναντίον τῶν παραλληλεπιπέδων αζιγ καὶ πζιρ, καὶ ἑπομένως (1) παράλληλα ἐστί. Τοῦ γὰρ στερεοῦ βζιξ τὰ ἀπεναντίον Τετράπλευρα βεμξ, θζιλ, ἐν τοῖς αὐτοῖς εἰσὶν ἐπιπέδοις, ἐν οἷς τὰ ἀντίθετα αγμε καὶ ηκιζ ἐπίπεδα τοῦ Παραλληλεπιπέδου αζιγ· Καὶ πάλιν τοῦ αὐτοῦ στερεοῦ βζιξ τὰ ἀπεναντίον Τετράπλευρα βεζθ καὶ μξλι, εἰσὶν ἐν τοῖς αὐτοῖς ἐπιπέδοις, ἐν οἷς καὶ τὰ ἀντίθετα πεζχ καὶ μιφρ τοῦ Παραλληλεπιπέδου πζιρ· Ἔστι δὲ τὸ Παραλληλόγραμμον ει τῷ τε στερεῷ ἐκείνῳ καὶ τοῖς παραλληλεπιπέδοις κοινόν· τὸ δὲ Τετράπλευρον βξλθ ἐστὶν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, ὃ τῷ ει (ἐξ ὑποθ.) παράλληλον ἐστὶ, δῆλον ἄρα ὅτι τὸ στερεὸν βζιξ ὑπὸ ἐπιπέδων Τετραπλεύρων, ὧν τὰ ἀπεναντίον ἀλλήλοις παράλληλα, περιεχόμενον· Καὶ τοίνυν παραλληλεπιπέδῳ τυγχάνοντι (2) τῷ στερεῷ ἐκείνῳ, ἐπεὶ (διὰ τὸ Α'. μέρος) τὰ Παραλληλεπίπεδα ζχπεμιφρ καὶ ζεαηκγμι ἴσα ἐστὶ, φανερὸν ὅτι καὶ ἀλλήλοις ταῦτα ἴσα ἐστί. Ο. Ε. Δ. x. 454.

Σχόλιον.

Παραπλησία ἐστὶν ἡ Πρότασις αὕτη τῇ ΛΕ'. τοῦ Α'. Βιβλίου, ταῦτα περὶ τῶν στερεῶν, οἷς ἐκείνη περὶ τῶν ἐπιπέδων κατασκευάζουσα. Ἔνθεντοι καὶ κατὰ τὰς λοιπὰς διαφορὰς παραπλησίως ἐκείνῃ ἀποδειχθήσεται.

Πρότασις ΛΑ.

„Τὰ ἐπὶ ἴσων Βάσεων ὄντα τῶν (αξ καὶ εη) στερεὰ Παραλληλεπίπεδα, „καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος (σ), ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. x. 455.

Ἐχέτω δὴ τὰ Παραλληλεπίπεδα πρῶτον τὰς Πλευρὰς καθέτους ταῖς βάσεσι· καὶ τοίνυν παρὰ τὴν ζη Πλευρὰν προεκβεβλημένην, παραβληθήτω Παραλληλόγραμμον ημκθ τῷ Παραλληλογράμμῳ αξ ἴσον τε καὶ ὅμοιον· καὶ πληρουμέ-

(1) Κδ. τοῦ ιά. (2) Ὅρ. ΙΓ. τοῦ ιά.

νου τοῦ Παραλληλογράμμου ημφρ, αἱ Εὐθεῖαι φμ, ρη προεξαχθεῖσαι ἀπαντάτωσαν τῇ κθ κατὰ τὰ Σημεῖα π καὶ λ. Ἤδη μὲν οὖν νοείσθωσαν ἐπὶ τῶν ηκ, ηπ, ηφ, ἐφεστάναι Παραλληλεπίπεδα, ὧν αἱ Πλευραὶ κάθετοι εἶεν ταῖς βάσεσι, καὶ ὧν ὕψος κοινὸν τὸ σ· καὶ δὴ τὸ στερεὸν εησ ἐστι πρὸς τὸ στερεὸν ηφσ, ὡς εη πρὸς ηφ (1)· τουτέστι (τῶν εη, αξ ἐξ ὑποθ. ἴσων ὄντων) ὡς αξ πρὸς ηφ· ἤτοι (ἐκ κατασκευῆς) ὡς ηκ πρὸς ηφ, τουτέστιν (2) ὡς ηπ πρὸς ηφ, τουτέστιν (3) ὡς στερεὸν ηπσ πρὸς τὸ αὐτὸ στερεὸν ηφσ· Ἐπειδὴ τοίνυν τὰ στερεὰ εησ καὶ ηπσ, τὸν αὐτὸν ἔχοντα ἐστὶ λόγον πρὸς τὸ στερεὸν ηφσ, ἔσται τὸ (4) εησ στερεὸν καὶ τῷ ηπσ ἴσον, τουτέστι τῷ στερεῷ (5) ηκσ· τουτέστιν (ἐπεὶ αἱ Βάσεις ηκ, αξ ὅμοιοίτε εἰσὶ (6) καὶ ἴσαι) τῷ στερεῷ (7) αξσ. Ο. Η. τὸ προτεθέν. Διὰ ὅλου δὲ τοῦ τοιούτου Συλλογισμοῦ τὰ στερεὰ ἐλήφθη ὀρθά.

Εἶτα ἐχέτω τὰ δοθέντα Παραλληλεπίπεδα εησ, αξσ, τὰς Πλευρὰς ταῖς βάσεσιν εη καὶ αξ πλαγίας· καὶ γινέσθω ἐπὶ εη, αξ Παραλληλεπίπεδα, ὧν ἂν αἱ Πλευραὶ ταῖς βάσεσιν ὀρθαὶ εἶεν, ἐν ὑψώματι τῷ κατὰ τὴν σ. ταῦτ' οὖν ἴσα τοῖς πλαγίοις ἔσται διὰ τὴν ΚΘ'. ἢ τὴν Λ'. Ὥστε ἐπειδὴ τὰ ὀρθὰ Παραλληλεπίπεδα (διὰ τὸ Α'. μέρος) ἀλλήλοις ἴσα ἐστὶν, ἔσται καὶ τὰ πλάγια ἴσα. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΛΒ.

Τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ Παραλληλεπίπεδα εἰσὶ πρὸς ἄλ„ληλα ὡς αἱ Βάσεις.

σχ. 456. Ἔστωσαν Βάσεις ηξ καὶ α, κοινὸν δὲ ὕψωμα τὸ κ· καὶ παρὰ τὴν γξ παραβληθήτω (8) Παραλληλόγραμμον ξθ ἴσον τῷ δοθέντι α, ἐν Γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ξγθ ἴσῃ τῇ δοθείσῃ η.

Ἐπὶ γοῦν τῶν εγ, ξθ, νοείσθω Παραλληλεπίπεδα ἐφιστάμενα, ἐν ὑψώματι τῷ κ· τὰ δὲ, μέρη ἔσται τοῦ αὐτοῦ Παραλληλεπιπέδου θεκ· Καὶ ἔσται τοίνυν (9) Παραλληλεπίπεδον ξθκ πρὸς Παραλληλεπίπεδον ξηκ, ὡς Βάσις ξθ πρὸς Βάσιν ξη, τουτέστιν (10) ὡς Βάσις α πρὸς Βάσιν ξη· Ἀλλὰ τῶν Βάσεων ξθ καὶ α ἴσων οὐσῶν, τὰ Παραλληλεπίπεδα ξθκ καὶ ακ (11) ἴσα ἐστίν· ἄρα Παραλληλεπίπεδον τὸ ακ ἐστὶ πρὸς Παραλληλεπίπεδον τὸ ξηκ, ὡς Βάσις α πρὸς Βάσιν ξη. Ο. Ε. Δ.

---

(1) ΚΕ. τοῦ ιά. (2) ΛΕ. τοῦ ά. (3) ΚΕ. τοῦ ιά. (4) Θ. τοῦ έ. (5) ΚΘ. τοῦ ιά. (6) Ἐκ κατασ. (7) Ὀρ. ΙΕ. τοῦ ιά. (8) ΜΔ. τοῦ ά. (9) ΚΕ. τοῦ ιά. (10) Ἐκ κατ. (11) Διὰ τὴν ἀνατ.

Σχόλιον.

Τὸ ἐνταῦθα περὶ τῶν Παραλληλεπιπέδων ἀποδειχθὲν, ἐν τῷ ἐφεξῆς ΙΒ΄. Βιβλ. Προτ. ϛ΄. περὶ τῶν Πυραμίδων, ϗ ἐν τῷ Α΄. Πορίσμ. μετὰ τὴν Θ΄. Πρότ. περὶ παντὸς Πρίσματος, καὶ ἐν τῇ ΙΑ. Προτάσει περὶ τῶν Κώνων, ϗ τῶν Κυλίνδρων ἀποδειχθήσεται.

Πρότασις ΛΓ.

„Τὰ ὅμοια ςερεὰ Παραλληλεπίπεδα (θα ϗ γμ) πρὸς ἄλληλα ἐν τρι- κ. 457.
„πλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων Πλευρῶν (αβ, βγ).

Ἔςω Παραλληλεπίπεδα αθ, γμ ὅμοια, ϗ πάντα δήπε τὰ ἐπ᾽ αὐτῶν ἐπίπεδα ὅμοια (1) ἔςαι, καὶ ἑπομένως αβ : βγ : : εβ : βξ (2), καὶ ζβ : βη : : εβ : βξ· ἔτι δὲ ϗ αἱ Γωνίαι (3) τῶν ἐπιπέδων ἔσονται ἴσαι. Ταχθήτωσαν οὖν ὅτω τὰ ςερεὰ αθ, γμ, ὡς τὰς μὲν ἴσας Γωνίας ὑπὸ γβξ, αβε, ἀντιθέτες κατὰ κορυφὴν κεῖσθαι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, τὰς δὲ Πλευρὰς αβ, γβ ἐπ᾽ εὐθείας, ϗ δὴ (4) ϗ τὰς εβ, ξβ, ϗ τὰς ζβ, ηβ, ὁμοίως αὐτὰς ἐπ᾽ εὐθείας. Ἐπὶ γῶν τῶν ἐπιπέδων εγ ϗ γξ νοείσθω ςερεὰ ἐφεςῶτα, τὸ μὲν κβ συνιςῶν μετὰ τῦ ςερεῦ θα ἓν παραλληλεπίπεδον, τὸ δὲ φξ συνιςῶν ὁμοίως ϗ αὐτὸ μετὰ τῦ κβ ἓν παραλληλεπίπεδον, τότε φξ ϗ αὐτὸ μετὰ τῦ γμ συνιςῶν ἓν παραλληλεπίπεδον. Τὸ τοίνυν ςερεὸν θα ἐςὶ πρὸς τὸ ςερεὸν κβ (5), ὡς αε πρὸς εγ, τετέςιν (6) ὡς αβ πρὸς βγ, τετέςιν (ὡς ἐξ ὑποθ. ἀνωτέρω δέδεικται) ὡς εβ πρὸς βξ, ἤτοι (7) ὡς εγ πρὸς γξ· ὅπερ ἐςιν (8) ὡς τὸ αὐτὸ ςερεὸν κβ, πρὸς τὸ ςερεὸν φξ· ὥςε συνεχίζεται ὁ αὐτὸς λόγος ἐπὶ τῶν τριῶν ςερεῶν θα, κβ, φξ. Ἤδη δὲ τὸ ςερεὸν κβ ἐςὶ πρὸς τὸ ςερεὸν φξ, ὡς Βάσις εγ πρὸς Βάσιν γξ, τετέςιν ὡς εβ πρὸς βξ, ὃ ταυτόν ἐςιν, ὡς ζβ πρὸς βη (9), ἤτοι ὡς τὸ ἐπίπεδον ζγ πρὸς τὸ ἐπίπεδον γη, τῦτο δὲ ἐςὶν, ὡς τὸ αὐτὸ αὖθις ςερεὸν φξ πρὸς τὸ ςερεὸν γμ· Τὰ ἄρα τέτταρα ςερεὰ θα, κβ, φξ, γμ συνεχῶς ἀνάλογον εἰσί· καὶ τοίνυν ὁ λόγος τῦ Α΄. θα πρὸς τὸ Δ΄. γμ, τριπλασίων (10) ἐςὶ τῦ λόγυ τῦ Α΄. θα, πρὸς τὸ Β΄. κβ, τετέςι (11) τῦ λόγυ αε πρὸς εγ, τετέςι τῦ λόγυ (12) τῶν ὁμολόγων Πλευρῶν αβ : βγ. Ο. Ε. Δ.

---

(1) Θ. Ὅρ. ια΄. (2) Ὅρ. Α. τῦ ϛ΄. (3) Αὐτ. (4) ΙΓ. ϗ ΙΔ. τῦ α΄. (5) ΚΕ. τῦ ια΄. (6) Α. τῦ ϛ΄. (7) Διὰ τὴν αὐτήν. (8) ΚΕ. τῦ ια΄. (9) Ἀνωτ. ἐδείχθη ἐξ ὑποθ. (10) Ὅρ. Ι. τῦ ε΄. (11) ΚΕ. τῦ ια΄. (12) Α. τῦ ϛ΄.

Α῎λλως.

κ. 458. Τῶν ὁμοίων Παραλληλογράμμων θα, πσ, ἔϛωσαν ὁμόλογοι Πλευραὶ αἱ αβ ϗ ρσ, εβ ϗ τσ, ζβ ϗ υσ· Φημὶ δὴ ὅτι τὸ ϛερεὸν θα ἐϛὶ πρὸς τὸ ϛερεὸν πσ, ἐν τριπλασίονι λόγῳ τῆς αβ πρὸς τὴν ρσ.

κ. 459. Προσεκβληθήτωσαν αἱ αβ, εβ, ζβ, ἐπὶ γ, ξ, η, ὥϛε εἶναι τὰς βγ, βξ, βη, ἴσας ταῖς ρσ, τσ, υσ ἴσας ἑκάϛην ἑκάϛῃ, ϗ πληρȣ́σθω τὸ Παραλληλόγραμμον γξ, ϗ τὸ Παραλληλεπίπεδον γμ· ϗ διὰ τὴν ὑπὸ ξβγ = (1) αβε = (2) ρστ, ϗ διὰ τὰς βγ, ξβ, τὰς ταῖς Πλευραῖς ρσ, τσ ἴσας (3) ἑτέραν ἑτέρᾳ, τὰ Παραλληλόγραμμα ξγ, ρτ, ὅμοιά τε ἔϛαι ϗ (4) ἴσα· Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ὅμοιά τε ἔϛαι ϗ ἴσα, ϗ τὰ Παραλληλόγραμμα γη ϗ ρυ, ναὶ μὴν ϗ τὰ ξη, τυ· ἔνθεντοι ϗ τὰ τȣ́τοις ἀπεναντίον Παραλληλόγραμμα (ἤτοι τὰ τοῖς ὁμοίοις ϗ ἴσοις ἀντίθετα ἐπ᾽ ἀμφοῖν τῶν Παραλληλεπιπέδων) (5) ὅμοιά τε ἀλλήλοις ϗ ἴσα ἔϛαι· Καὶ εἰσὶν ἄρα τὰ ϛερεὰ πσ, γμ (6) ὅμοιά τε ϗ ἴσα· διὸ δὴ τὰ ϛερεὰ θα, γμ (7) ὅμοια ϗ αὐτὰ ἔϛαι, ὥϛε αβ : βγ :: εβ : βξ :: ζβ : βη· Ε᾿πὶ τοίνυν τῶν Βάσεων εγ, γξ, πληρȣ́σθω τὰ Παραλληλεπίπεδα βκ, φξ, ἰσοϋψῆ τῷ παραλληλεπιπέδῳ αθ, ϗ ἔϛαι αβ : βγ ἢ πρὸς ρσ (8) :: εβ : βξ, ἢ στ :: καὶ ζβ : βη, ἢ συ· τȣτέϛιν (9) αε : εγ :: εγ : γξ :: ζγ : γη· ἤτοι (10) αθ : βκ :: βκ : φξ :: φξ : γμ, ἤτοι πσ· Α῎ρα (11) αθ ἐϛὶ πρὸς πσ, ἐν λόγῳ τριπλασίονι τȣ͂ αθ πρὸς τὸ βκ· Α᾿λλὰ μὴν αθ : βκ :: (12) αε : εγ :: (13) αβ : βγ, ἢ ρσ· ἄρα (14) τὸ ϛερεὸν αθ ἐϛὶ πρὸς τὸ ὅμοιον ϛερεὸν πσ, ἐν τριπλασίονι λόγῳ τῆς Πλευρᾶς αβ πρὸς τὴν αὐτῆς ὁμόλογον Πλευρὰν ρσ. Ο. Ε. Δ.

Πορίσματα.

Α΄. Ε῎νθεντοι ἐὰν τέσσαρες ὦσιν Εὐθεῖαι συνεχῶς ἀνάλογον, ὡς ἔχει ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, ȣ῞τως ἔχει ϗ τὸ ἀπὸ τῆς Α΄. Παραλληλεπίπεδον, πρὸς τὸ Παραλληλεπίπεδον τὸ ὅμοιόν τε, ϗ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον τὸ ἀπὸ τῆς Β΄. Διὸ ἐπὶ τῶν ὁμοίων Παραλληλεπιπέδων αθ, γμ, δοθεισῶν τῶν ὁμολόγων Πλευρῶν αβ, βγ, εὑρεθήσεται ὁ ἐκείνων πρὸς ἄλληλα λόγος· ἐὰν γὰρ γένηται αβ, βγ, χ, ψ ∺, ἔϛαι θα : γμ :: αβ : ψ. Ταύτη τοι ϗ τῶν

---

(1) *ΙΕ.* τȣ͂ α΄. (2) Ε᾿ξ ὑποθ. ϗ Ο῾ρ. *Α.* τȣ͂ ϛ΄. (3) Ε᾿κ κατασ. (4) Α᾿ξ. ζ΄. (5) *ΚΔ.* τȣ͂ ια΄. (6) *ΙΕ.* Ο῾ρ. ια΄. (7) Ε᾿ξ ὑποθ. ϗ Ο῾ρ. Θ. τȣ͂ ια΄. (8) Ε᾿κ κατ. (9) Α. τȣ͂ ϛ΄. (10) *ΚΕ.* τȣ͂ ια΄. (11) Ο῾ρ. *Ι.* τȣ͂ ε΄. (12) *ΚΕ.* τȣ͂ ια΄. (13) *Α.* τȣ͂ ϛ΄. (14) *ΙΑ.* τȣ͂ ε΄.

ςερεῶν θα, γμ δοθέντων, ϗ τȣ̃ θα τῆς τυχȣ́σης Πλευρᾶς ταχθείσης αβ, ἡ θατέρȣ τῶν ςερεῶν ὁμόλογος Πλευρὰ βγ, ἐςὶν ἡ τῶν δύω μέσων (1) ἀναλόγων προτέρα, τῶν μεταξὺ αβ ϗ ψ. Β'.

Κἀντεῦθεν λίαν σφαλλόμενοι ἀπελέγχονται, οἱ τῶν ὁμοίων ςερεῶν τὸν λόγον ἴσον εἶναι ἡγȣ́μενοι τῷ τῶν Πλευρῶν. Οὐ γὰρ δὴ ὁ ἀπὸ τῆς διπλασίας Γραμμῆς κύβος διπλάσιός ἐςιν, ὀκταπλάσιος δὲ τȣ̃ ἀπὸ τῆς ἁπλῆς· οὐδὲ ὁ ἀπὸ τῆς τριπλῆς τριπλȣ̃ς, εἰκοσαπλȣ̃ς δὲ ϗ ἑπταπλȣ̃ς· ἐπεὶ 1, 2, 4, 8 ∺, καὶ 1, 3, 9, 27 ∺. Ὁμοίως δὲ ϗ περὶ πάντων τῶν ὁμοίων ςερεῶν ὑποληπτέον, ὡς ἐφεξῆς δῆλον ἔςαι. Γ'.

Ἐκ τȣ́των δὲ ἤρτηται ϗ τὸ τεθρυλλημένον ἐκεῖνο περὶ τȣ̃ διπλασιασμȣ̃ τȣ̃ κύβȣ Πρόβλημα, περὶ ȣ̃ κατωτέρω ἐν τέρματι τȣ̃ ΙΒ'. Βιβλίȣ, ἐν οἷς ϗ ἡ μέθοδος ὑποτεθείσεται, ἧπερ ἡ τȣ̃ Κύβȣ, ϗ ἡ τῶν ὁποιωνȣ̃ν ἁπλῶς ὁμοίων ςερεῶν ἄυξησις ἢ μείωσις, κατὰ τὸν δοθέντα λόγον τελεῖται.

Σχόλιον Α'.

Τῶν Κύβων ςερεῶν ὄντων παραλληλεπιπέδων ὁμοίων ἀλλήλοις, ϗ ἑπομένως ἐν τριπλασίονι λόγῳ τῶν ἰδίων Πλευρῶν εἶναι νοȣμένων, ἅπας λόγος, ἐν ὁποιαισδήτισι πηλικότησι τριπλασίων ὢν, διὰ τῶν Κύβων τῶν αὐτῶν ἐκείνων πηλικοτήτων ἐπισημαίνεσθαι εἴωθεν, οἷον ὁ τριπλασίων λόγος τȣ̃ Α πρὸς Β, ȣ̃τως ἐκτίθεσθαι φιλεῖ $A^{K} : B^{K}$.

Σχόλιον Β'.

Τὸ ἐνταῦθα περὶ τῶν παραλληλεπιπέδων δειχθὲν ἐν τῷ ΙΒ'. Βιβλ. Προτ. Η'. περὶ τῶν Πυραμίδων, καὶ ἐν τῷ Β'. Πορίσματι τῆς Θ'. τȣ̃ αὐτȣ̃ περὶ τῶν Πρισμάτων, καὶ ἐν τῇ ΙΒ'. Προτ. περὶ τῶν Κώνων ϗ τῶν Κυλίνδρων, καὶ ἐν τῇ ΙΗ'. περὶ τῶν Σφαιρῶν.

Πρότασις ΛΔ.

„τῶν ἴσων ςερεῶν παραλληλεπιπέδων (πσ, γκ) ἀντιπεπόνθασιν αἱ Βά- χ. 460.
„σεις τοῖς ὕψεσι (τȣτέςιν ὡς ἔχει βάσις ρτ πρὸς βάσιν ζκ, ȣ̃τως ἀντιςρό-
„φως ὕψος τὸ ζγ πρὸς ὕψος τὸ συ)· καὶ ὧν ςερεῶν παραλληλεπιπέδων
„ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐςὶν ἐκεῖνα.

(1) Ὅρα τὴν ΙΓ. τȣ̃ ς'.

Μέρος Α΄. Ἔςωσαν δὴ πρῶτον αἱ πρὸς τὴν βάσιν Πλευραὶ ὀρθαί· Καὶ εἰ τῶν ςερεῶν πσ, γκ τὰ ὕψη ἴσα τεθῇ, τὸ προτεθὲν δῆλον· ἰσοϋψῆ γὰρ ὄντα, ἔςαι (1) τὰ παραλληλεπίπεδα ὡς αἱ βάσεις. Ἐκεῖνα δὲ (2) ἴσα, καὶ αἱ βάσεις ἄρα, καὶ ὁ αὐτὸς ὅτως ἔςαι λόγος ὁ κατ' ἰσότητα τῶν ὑψῶν Α΄. καὶ Β΄., τῷ κατ' ἰσότητα τῶν Βάσεων Β΄ τε καὶ Α΄.

Ἐὰν δὲ ἄνισα, ἀπὸ τῆς μείζονος ζγ ἀποτετμήσθω ἡ ζε ἴση τῇ συ, καὶ διὰ τῆς ε ἀχθήτω τὸ ἐπίπεδον ελ παράλληλον τῷ ζκ· Ἡ μὲν οὖν Βάσις ρτ ἐςὶ πρὸς τὴν Βάσιν ζκ, ὡς τὸ ςερεὸν (3) πσ πρὸς τὸ ςερεὸν εκ· τυτέςιν (ἐπεὶ ἴσα ἐξ ὑποθ. ἐςὶ τὰ ςερεὰ πσ, γκ) ὡς τὸ ςερεὸν γκ πρὸς τὸ ςερεὸν εκ, ἤτοι (4) ὡς γη πρὸς εη, τῦτο δὲ ἐςὶν (5) ὡς γζ πρὸς εζ, καὶ ἑπομένως (6) ὡς γζ ἀντιςρόφως πρὸς τὴν υσ. Ο. Ε. Δ.

Ἀλλ' ἔςωσαν δὴ αἱ Πλευραὶ πρὸς τὰς βάσεις πλαγιάζυσαι, καὶ ἐπὶ τῶν αὐτῶν Βάσεων ἀνιςάσθωσαν ἐν ὕψει τῷ αὐτῷ Παραλληλεπίπεδα ὀρθά, καὶ τύτοις (7) ἴσα ἔςαι τὰ Παραλληλεπίπεδα τὰ πλάγια· ἐπεὶ δὲ τὰ ὀρθὰ (διὰ τὸ ἀνωτ.) ἀντιπεπόνθασι τὰς βάσεις καὶ τὰ ὕψη, ἀντιπείσονται δὴ κἀκεῖνα. Ο. Ε Δ.

Μέρος Β΄. Ἔςωσαν αἱ πλευραὶ ταῖς βάσεσιν ὀρθαί, καὶ τὰ ὕψη ἴσα· Καὶ ἐπειδὴ αἱ βάσεις καὶ τὰ ὕψη (8) ἀντιπεπόνθασι, διά γε τὴν τύτων ἰσότητα συνισωθήσονται κἀκεῖναι, καὶ (9) ἑπομένως καὶ αὐτὰ Παραλληλεπίπεδα.

Εἶτα ἔςω τὰ ὕψη ἄνισα, καὶ αἱ πλευραὶ ταῖς βάσεσιν ὀρθαί, καὶ ἀπὸ τῆς μείζονος γζ ληφθήτω ἴση τῇ υσ ἡ εζ. Τὸ γῦν ςερεὸν πσ ἐςὶ πρὸς τὸ ςερεὸν εκ, ὡς (10) ρτ πρὸς ζκ, τυτέςιν (11) ὡς γζ πρὸς υσ, ἤτοι (12) ὡς γζ πρὸς εζ· ὅπερ ἐςὶν (13) ὡς γη πρὸς εη, ἤτοι (14) ὡς ςερεὸν γκ πρὸς τὸ αὐτὸ ςερεὸν εκ· Τὰ ἄρα ςερεὰ πσ καὶ γκ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον πρὸς τὸ αὐτὸ εκ, ἴσα ἀλλήλοις ἐςί. Ο. Ε. Δ.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ πλάγια τῶν Παραλληλεπιπέδων, τοῖς ἐπὶ ἴσων βάσεων ἰσοϋψέσιν ὀρθοῖς (15) ἴσα ὄντα ἐςὶ, κἀκεῖνα ἄρα, εἰ ἀντιπεπόνθασι τὰς βάσεις καὶ τὰ ὕψη, ἴσα ἀλλήλοις ἐςί.

Πορίσματα.

Τὰ περὶ τῶν Παραλληλεπιπέδων ἀποδειχθέντα ἐν Προτ. ΚΘ. Λ. ΛΑ.

---

(1) *ΛΒ.* τῦ ιά. (2) Ἐξ ὑποθ. (3) *ΛΒ.* τῦ ιά. (4) *ΚΕ* τῦ ιά. (5) *Δ.* τῦ ς΄. (6) Ἐκ κατ. (7) *Λ.* τῦ ιά. (8) Ἐξ ὑποθ. (9) *ΛΑ.* τῦ ια. (10) *ΛΒ.* τῦ ιά. (11) Ἐξ ὑποθ. (12) Ἐκ κατ. (13) *Δ.* τῦ ς΄. (14) *ΚΕ.* τῦ ιά. (15) *Λ.* τῦ ιά.

ΛΒ. ΛΓ. ΛΔ. αὐτὰ ταῦτα προσήκοντα ἐςὶ ϗ τοῖς τριγωνικοῖς Πρίσμασιν, ἅττα ἡμίση τῶν παραλληλεπιπέδων ὄντα ἐςὶν, ὡς δῆλον ἐκ τῆς ΚΗ΄. Προτάσεως· Καὶ τοίνυν

Τὰ Τριγωνικὰ πρίσματα, ὧν ἴσα τὰ ὕψη, εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ Βάσεις· καὶ ἑπομένως ἐὰν ἴσας ἔχοντα ἢ τάςτε βάσεις ϗ τὰ ὕψη, ϗ ἀλλήλοις αὐτὰ ἴσα ἔςαι. Α΄. κ. 461.

Ἐὰν ἦ ὅμοια, τέτων ὁ λόγος τριπλασίων ἔςαι τῦ λόγυ τῶν πλευρῶν τῶν ἀπεναντίον τῶν ἴσων Γωνιῶν· καὶ ἑπομένως τὰ τῆς ΛΓ΄. Προτ. Πορίσματα κἀκείνοις προσεπανήκοντα ἐςί. Β΄.

Καὶ ἐὰν ἴσα, ἀντιπεπόνθασι τὰς Βάσεις ϗ τὰ ὕψη· ϗ εἰ ἀντιπεπόνθασι τὰς Βάσεις ϗ τὰ ὕψη, ἴσα ἐςί. Γ΄.

Σχόλιον.

Τὸ δέ τοι ἐνταῦθα ἐν Προτ. ΛΔ΄. περὶ τῶν Παραλληλεπιπέδων ἀποδειχθὲν, δειχθήσεται ἐν τῷ ΙΒ΄. Βιβλ. Προτ. Θ΄. ϗ περὶ τῶν Πυραμίδων, καὶ ἐν τῷ Γ΄. Πορίσματ. τῆς Θ΄. περὶ παντὸς Πρίσματος, καὶ ἐν τῇ ΙΕ΄. Προτ. περὶ τῶν Κώνων, ϗ τῶν Κυλίνδρων.

Πρότασις ΛΕ.

Διεξοδικωτάτη οὖσα ὑπεργεῖ εἰς δεῖξιν τῇ ἐφεξῆς, ἣν αὐτοὶ καὶ ταύτης χωρὶς ἀποδείξομεν.

Πρότασις Λϛ.

„Ἐὰν τρεῖς Εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν (α, β, γ), τὸ ἐκ τῶν τριῶν ςερεὸν „Παραλληλεπίπεδον (δθ), ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης (β) ςερεῷ παραλληλε„πιπέδῳ (ιν), ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ. κ. 462.

Ἡ τῦ Παραλληλεπιπέδυ δθ βάσις ζδ, ἐχέτω Πλευρὰν τὴν εζ = α, ϗ τὴν ἑτέραν Πλευρὰν εδ = γ, τὴν δὲ δὴ τῇ βάσει ἐφιςαμένην Πλευρὰν εη = τῇ μέσῃ β, καὶ ὅτως ἔςαι τὸ δθ Παραλληλεπίπεδον ἐκ τῶν τριῶν α, β, γ. Εἶτα τῦ Παραλληλεπιπέδυ ιν αἱ τρεῖς πλευραὶ λχ, ιχ, χμ (ϗ ἑπομένως ϗ αἱ λοιπαὶ) ἴσαι ἔςωσαν τῇ μέσῃ β· ἡ δὲ κατὰ τὸ χ ςερεὰ Γωνία τέτῳ τῇ κατὰ τὸ ε ςερεᾷ Γωνίᾳ ἐκείνῳ ἴση γινέσθω, καὶ ὅτως ἔςαι τὸ ιν παραλληλεπίπεδον ἀπὸ τῆς μέσης β, ϗ ἰσογώνιον τῷ προτέρῳ· φημὶ δὴ ὅτι ϗ ἴσον.

Ἐπειδὴ γὰρ ἐξ ὑποθ. καὶ κατασκ. ὡς ζε : λχ, ὅτως ἀντιςρόφως ιχ :

δε, ἔσονται αἱ Βάσεις (1) δζ ϗ ιλ ἴσαι ἀλλήλαις. Ἀλλὰ γὰρ ϗ αἱ στερεαὶ Γωνίαι αἱ πρὸς τῷ ε, ϗ τῷ χ ἴσαι εἰσὶν, ἐὰν ἄρα ἐντὸς ἀλλήλων τεθῶσι, προσεφαρμόσουσι (2), καὶ διὰ τὴν ἰσότητα τῶν Εὐθειῶν εη ϗ χμ, τὰ Σημεῖα μ ϗ η εἰς ταυτὸ συμπεσοῦνται· Καὶ τὸ αὐτὸ ἄρα ἔσται ἑκατέρου τῶν στερεῶν πρὸς κάθετον ὕψος, ἀμέλειτοι ἀπὸ τῶν συνιόντων σημείων μ ϗ η ἐπὶ τὴν ὑποκειμένην βάσιν· ὥστε (3) τὰ στερεὰ δθ, ιν ἴσα ἐστί. Ο. Ε. Δ.

Σχόλιον.

Σημειωτέον δὲ ἐνταῦθα τοῦθ' ὃ μέγιστον τυγχάνει τὴν χρῆσιν, ὡς ἐκ τριῶν Εὐθειῶν ἥπερ ἔτυχεν ἐπ' ἀλλήλαις (4) ἀγομένων, ἰσομέγεθες ἀεὶ τὸ στερεὸν Παραλληλεπίπεδον ὀρθὸν ὂν (τουτέστιν ὑπὸ ὀρθογωνίων ἐπιπέδων περιεχόμενον) ἀνακύπτει.

αβγ.	γαβ.	βγα.
1	2	3

Ἔνθα τῶν στοιχείων τὰ μὲν πρῶτα δύω τὴν Βάσιν παρίστησι, τὸ δὲ τρίτον τὸ ὕψος. Παραθῶμεν οὖν τὸ πρωτον τῶν Σχημάτων τῷ δευτέρῳ.

Βάσις αβ πρὸς βάσιν γα (διὰ τὴν Α΄: τοῦ ς΄.), ὡς β Πλευρὰ πρὸς γ Πλευράν, τουτέστιν ἀντιστρόφως ὡς β ὕψος πρὸς γ ὕψος· Ἄρα διὰ τὴν ΛΔ΄.

$$\alpha\beta\gamma \; = \; \gamma\alpha\beta.$$

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δείξεις, ϗ τὸ Α΄. τῷ Γ΄., ϗ τὸ Γ΄. τῷ Β΄. ἴσα τυγχάνειν.

Πρότασις ΛΖ.

„Ἐὰν τέσσαρες Εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, ϗ τὰ ἀπ' αὐτῶν Παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε ϗ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ἀνάλογον ἔσται· Καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ Παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε ϗ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ᾖ, ϗ αὐταὶ αἱ Εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Δῆλον ἐκ τῆς ΛΔ΄. τοῦ Ε΄. Βιβλίου. Οἱ γὰρ τῶν Παραλληλεπιπέδων λόγοι, διὰ τὴν ΛΓ΄. τοῦ παρόντος, ἔσονται τριπλασίονες τῶν λόγων, οὓς αἱ Εὐθεῖαι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ϗ οἱ (ἐξ ὑποθ.) ἴσοι εἰσί.

Τὸ δὲ ἀνάπαλιν δῆλον αὖθις ἐκ τῆς ΛΕ΄. τοῦ Ε΄. Οἱ γὰρ λόγοι τῶν Παραλληλεπιπέδων (ἐξ ὑποθ.) ἴσοι εἰσὶ, τριπλασίονες (5) ὄντες τῶν οὓς ἔχουσι

---

(1) *ΙΔ*. τοῦ ς΄. (2) *ΙΑ*. Ὅρ. ιά. (3) *ΛΑ*. τοῦ ιά. (4) Ὅρα τὸ Α. Σχόλ. τῆς *Μ*. τοῦ ιά. (5) *ΛΓ*. τοῦ ιά.

λόγȣς αἱ ὁμόλογοι τῶν Πλευρῶν, ἀφ᾽ ὧν τὰ ὅμοια Παραλληλεπίπεδα ὁμοίως ἀναγράφεται· καὶ ἑπομένως τῶν τοιȣ́των Πλευρῶν οἱ λόγοι (1) ἔσονται ἴσοι.

Ἡ δὲ Πρότασις ἀληθεύει, ἐφ᾽ ὁποιωνȣ̃ν ϛερεῶν ὁμοίων καθόλȣ ἐκτεινομένη· πάντα γὰρ τριπλασίονα ἔχει τὸν λόγον τȣ̃ λόγȣ τῶν κατ᾽ αὐτὰ πλευρῶν, ὡς ἐν τῷ ΙΒʹ. Βιβλ. δῆλον γενήσεται.

Πόρισμα.

Ἐντεῦθεν τὴν μέθοδον ἀρυόμεθα τȣ̃ τὰς Κυβικὰς τῶν ῥιζῶν πολλαπλασιάζειν ϗ διαιρεῖν· Ἐὰν γὰρ ἐπ᾽ ἀλλήλαις πολλαπλασιασθῶσιν αἱ ὑπὸ τοῖς Κυβικοῖς ῥιζικοῖς σημείοις πηλικότητες, ϗ τῷ γινομένῳ σημεῖον Κυβικῆς ῥίζης προταχθῇ, δοθήσεται ȣ̃τω τὸ ὑπὸ τῶν δοθεισῶν Κυβικῶν ῥιζῶν παραγόμενον. Οἷον ἔϛω $\sqrt{5}^3$ πολλαπλασιαϛέα ἐν $\sqrt{4}^3$, ϗ παραγόμ. ἔϛαι $\sqrt{20}^3$· ὡς γὰρ ὁ τȣ̃ πολλαπλασιασμȣ̃ βȣ́λεται λόγος, ἡ μονὰς ἐϛὶ πρὸς τὸν πολλαπλασιαϛήν, ἤτοι $1 : \sqrt{4}^3$, ὡς ὁ πολλαπλασιαϛέος (τȣτέϛι $\sqrt{5}^3$) πρὸς τὸ ἀνακύπτον· Ἄρα (διὰ τὴν ἀνὰ χεῖρας Πρότ.) ὁ τῆς μονάδος Κῦβος ἔϛαι πρὸς τον Κύβον τȣ̃ πολλαπλασιαϛȣ̃, ὡς ὁ τȣ̃ πολλαπλασιαϛέȣ Κῦβος πρὸς τὸν τȣ̃ παραγομένȣ· τȣτέϛιν ἐὰν ἀντὶ τȣ̃ γινομένȣ ὑποτεθῇ Γ, ἔϛαι δὴ $1 : 4 :: 5 : Γ^K$, ἀλλὰ $1 : 4 :: 5 : 20$, ἄρα $Γ^K = 20$, ϗ $Γ = \sqrt{20}^3$.

Παραπλησίως κατὰ τὸν τῆς διαιρέσεως ὅρον δειχθήσεται, ὅτι $\sqrt{20}^3$ ἐὰν διαιρεθῇ διὰ $\sqrt{5}^3$, πηλίκον δώσει $\sqrt{4}^3$. Ὅρα τὸ Αʹ. Πόρ. τῆς ΚΒʹ. τȣ̃ ϛʹ.

Καὶ ἐν γένει τῶν ῥιζικῶν πηλικοτήτων, ὁποιασȣ̃ν ἂν εἶεν τάξεως, ἤτοι εἴδȣς, τὰ γινόμενα ἢ τὰ πηλίκα λαμβάνεται πολλαπλασιασμῷ, ἢ διαιρέσει τῶν ὑπὸ τοῖς ῥιζικοῖς σημείοις πηλικοτήτων, ϗ προσεπισημειώσει τῶν αὐτῶν ῥιζικῶν σημείων, ἐπὶ τοῖς γινομένοις αὐτοῖς διὰ τȣ̃ πολλαπλασιασμȣ̃, ἢ τοῖς πηλίκοις διὰ τῆς διαιρέσεως.

Πρότασις ΛΗ.

Ταύτην φθάσαντες ἀνωτέρω ἀπεδείξαμεν, ἐν τῷ Σχολίῳ τῷ μετὰ τὴν ΙΓʹ. τȣ̃ παρόντος Βιβλίȣ Πρότασιν.

Πρότασις ΛΘ.

„Ἐὰν ϛερεȣ̃ Παραλληλεπιπέδȣ (αβ) τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων (αγ, δβ), χ. 463.

(1) ΛΕ. τȣ̃ έ.

„αἱ Πλευραὶ (αε, ζγ, αζ, εγ, ϗ δθ, ηβ, δη, θβ) δίχα τμηθῶσι, διὰ „δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα (ιλπξ, φκμρ) ἐκβληθῇ, ἡ κοινὴ τομὴ (στ) τῶν „ἐπιπέδων, ϗ ἡ τȣ̃ ϛερεȣ̃ παραλληλεπιπέδȣ Διάμετρος (αβ) δίχα τέμνȣ„σιν ἀλλήλας.

Α᾿χθήτωσαν Εὐθεῖαι αἱ σα, σγ, τδ, τβ, ϗ διὰ τὰς δίχα τετμημένας δη, θβ, ϗ δθ, ηβ, ϗ τὴν ρφ Εὐθεῖαν τὴν ταῖς δη, θβ παράλληλον, ϗ τὴν Εὐθεῖαν ξπ τὴν ταῖς δθ, ηβ (1), διαιρεθήσεται τὸ ηθ Παραλληλόγραμμον εἰς τέσσαρα Παραλληλόγραμμα ἴσα, τῷ τε ὅλῳ ϗ ἀλλήλοις (2) ὅμοιά τε, ϗ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα· διὸ τὰ ξρ ϗ φπ ἐπιτεθέντα ἀλλήλοις ἐφαρμόσει, ϗ δτ = τβ (3)· Ε᾿τι τὰ Παραλληλόγραμμα ξρ, φπ, ἔχοντα Γωνίας τὰς ὑπὸ ξδρ, φβπ κοινὰς, μετὰ τȣ̃ ηθ ὁμοίȣ αὐτοῖς ὄντος Παραλληλογράμμȣ, περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον (4) εἰσίν· ὅθεν ἡ δτβ (5) Γραμμὴ εὐθεῖα ἐϛίν· ὡσαύτως ϗ ἡ ασγ εὐθεῖα ἐϛὶ, ϗ ασ = σγ· Η῎δη μὲν οὖν ἡ αδ παράλληλός τε ϗ ἴση ἐϛὶ τῇ ζη (6), ἥτε ζη παράλληλός τε ϗ ἴση ἐϛὶ τῇ γβ, ἄρα (7) αἱ αδ, γβ παράλληλοί τε εἰσὶν ἀλλήλαις καὶ ἴσαι· ταύτῃ τοι ϗ αἱ αγ, δβ, αἱ ταύτας ἐπιζευγνύȣσαι, παράλληλοί τε εἰσὶ (8) ϗ ἴσαι ἀλλήλαις· διὸ ϗ αἱ αὐτῶν ἡμίσειαι ασ, βτ ἴσαι ἔσονται. Παρὰ ταῦτα δὲ αἱ αβ, στ, ἐν τῷ αὐτῷ εἰσιν ἐπιπέδῳ (9) αγβδ· ὥϛε ἐπὶ τῶν Τριγώνων ασυ, βτυ, διὰ τὰς ὑπὸ αυσ, βυτ, τὰς κατὰ κορυφὴν ἀντικειμένας, ϗ κατ᾿ ἀκολȣθίαν (10) ἴσας, ϗ διὰ τὰς ἐναλλὰξ ὑπὸ ασυ, βτυ ἴσας ϗ αὐτὰς (11) ȣ̃σας, ϗ διὰ τὰς ασ, βτ Πλευρὰς, ἴσας ϗ αὐτὰς ἀποδειχθείσας, καὶ τὰ λοιπὰ πάντα (12) ἴσα ἔϛαι, καὶ συ = υτ, καὶ αυ = υβ· Η῾ ἄρα κοινὴ τομὴ στ, ϗ ἡ Διάμετρος αβ δίχα τέμνȣσιν ἀλλήλας. Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ε᾿πὶ παντὸς οὖν Παραλληλεπιπέδȣ, ἅπασαι αἱ Διάμετροι δίχα τέμνȣσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον υ.

Π ρ ο τ α σ ι ς Μ.

σχ. 464. „Ε᾿ὰν ᾖ δύο Πρίσματα τριγωνικὰ ἰσοϋψῆ (αβζηξγ ϗ ικλφχπ), καὶ

(1) *ΛΓ. τȣ̃ α΄.* (2) *ΚΖ. ϗ ΛΔ. τȣ̃ α΄., ϗ Ο῞ρ. Α. τȣ̃ ϛ΄.* (3) *Α᾿ξ. Ζ΄. ϗ Α.* (4) *Κϛ. τȣ̃ ϛ΄.* (5) *Ο῞ρ. ΛΖ. τȣ̃ α΄.* (6) *ΚΔ. τȣ̃ ια΄. ϗ ΛΔ. τȣ̃ α΄.* (7) *Θ. τȣ̃ ια΄. ϗ Α᾿ξ. α΄.* (8) *ΛΓ. τȣ̃ α΄.* (9) *Πόρ. τῆς Ζ. τȣ̃ ια΄.* (10) *ΙΕ. τȣ̃ α΄.* (11) *ΚΖ. τȣ̃ α΄.* (12) *Κϛ. τȣ̃ α΄.*

„ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν Παραλληλόγραμμον (ξβ), τὸ δὲ Τρίγωνον (ικλ), δι-
„ πλάσιον δὲ ᾖ τὸ Παραλληλόγραμμον τῦ Τριγώνυ, ἴσα ἔςαι τὰ Πρίσματα.

Ἐὰν γὰρ πληρωθῇ τὰ Παραλληλεπίπεδα κρ ϗ γθ, ἔςαι (1) αὐτὰ ἴσα, διὰ τὴν τῶν βάσεων γα, μκ, ϗ τὴν τῶν ὑψῶν ἰσότητα· τοιγαρῦν ϗ τὰ καθ᾽ ἡμίσειαν (2) αὐτῶν Πρίσματα ἔσονται ἴσα. Ο. Ε. Δ.

Εἰσὶ γὰρ τὰ δύο ταῦτα τριγωνικὰ Πρίσματα, παραλληλεπιπέδων ἴσων, ταῖς διαγωνίοις τετμημένων, ἡμίσειαι, τοσῦτῳ μόνον διαφέροντα, ὅτι ἐπὶ θατέρυ ἡ τομὴ κατὰ τὴν Διαγώνιον τῆς βάσεως τελεῖται, ἐπὶ δὲ θατέρυ ὐχ ὕτως.

Σχόλιον Α΄.

Ἐκ τῶν εἰς τόδε ἀποδεδειγμένων, σαφὴς ἡ τῶν τριγωνικῶν Πρισμάτων καταμέτρησις, ϗ τῶν τετραγωνικῶν, ὧν τὰ ἀπεναντίον τετραγωνικὰ ἐπίπεδα παράλληλα ἐςὶ, τυτέςι τῶν Παραλληλεπιπέδων, τῦ ὕψυς δηλονότι διὰ τῆς βάσεως πολλαπλασιασμῷ ἀγομένυ. Οἷον ἐὰν ᾖ τὸ ὕψος ποδ. 10, ἡ δὲ βάσις ποδ. τετραγ. 100 (καταμετρηθήσεται δὲ ἡ βάσις διὰ τῦ Σχολ. τῆς Λϛ΄. ἢ τῆς ΜΑ΄ τῦ Α΄.), πολλαπλασιαζέσθω 10 διὰ 100, ϗ ἀνακύψει 1000, οἵτινες εἰσὶ πόδ. κυβικοὶ, ἐξ ὧν τὸ ςεῤῥὸν τῦ Πρίσματος συγκεκρότηται.

Ἡ δὲ δεῖξις προχειροτάτη. Καθάπερ γὰρ τὸ Ὀρθογώνιον, ὕτωτοι καὶ τὸ ὀρθὸν Παραλληλεπίπεδον παράγεται ἐκ τῦ ὕψυς ἐπιπολλαπλασιαζομένυ τῇ βάσει· Τοιγαρῦν ϗ ἅπαν ὁποιονῦν Παραλληλεπίπεδον παράγεται ἐκ τῦ ὕψυς ἐπιπολλαπλασιαζομένυ τῇ βάσει, ὅτι (διὰ τὴν ΛΑ΄) ἴσον ἐςὶ τῷ ὀρθῷ Παραλληλεπιπέδῳ, τῷ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως καθιςαμένῳ, ϗ ἐν τῷ ἴσῳ ὑψώματι.

Εἶτα ἐπεὶ τὸ ὅλον Παραλληλεπίπεδον παράγεται ἐκ τῦ ὕψυς τῇ ὅλῃ βάσει ἐπιπολλαπλασιαζομένυ, φανερὸν ὡς ἡ τῦ Παραλληλεπιπέδυ ἡμίσεια (τὸ τριγωνικὸν δηλονότι Πρίσμα διὰ τὴν ΚΗ΄) παραγόμενον ἔςαι ἐκ τῦ ὕψυς τῦ ἐπιπολλαπλασιαζομένυ τῇ ἡμισείᾳ τῆς βάσεως, τυτέςι τῷ Τριγώνῳ ιλκ (ὅρα τὸ ἀνωτ. Σχῆμα).

Σχόλιον Β΄.

Διὰ τὸ τὰ πολύγωνα Πρίσματα εἰς τριγωνικὰ ἀναλύεσθαι ἔχειν, ἢ γῦν ϗ εἰς Τριγωνικὰ, ὧν ἥτε βάσις ϗ τὸ ὕψος ἴσα (3) ἀποκαθίςασθαι, ὅσα

(1) ΛΑ. τῦ ιά. (2) ΚΗ. τῦ ιά. (3) ΚΕ. τῦ ϛ.

δή ποτε περὶ τῶν τριγωνικῶν Πρισμάτων ἐν τοῖς Πρίσμασι τῆς ΛΔ'. Προτ. παραδίδοται, ϗ ἐν τῷ Α'. Σχολ. τῆςδε τῆς Μ'. Προτάσ., ἅπαντα ἀληθεύει περὶ ὁποιωνῦν πολυγωνίων Πρισμάτων λεγόμενα. Δόξαν μέντοι τῷ Τακυετίῳ, ἐκ τῶν ἐν τῷ ΙΒ'. Βιβλ. περὶ Πυραμίδων ἀποδεικνυμένων, ἅπαντα ἐπιφέρειν ἐκεῖνα, περιττὸν ἡμᾶς ἀλλαχόθεν ταῦτα πειρωμένους ἐπάγειν, τοῖς πρωτοπείροις βραδύτερον ἀσχολεῖν.

Τῶν ςοιχείων τῆς Γεωμετρίας.

ΒΙΒΛΙ'ΟΝ ΙΒ'.

Ἡμῖν δὲ Η'.

Ὅπερ ἐν τοῖς πρὸ τοῦδε βιβλίοις διὰ φροντίδος ἡμῖν ἐγένετο, τὴν τῶν μαθηματικῶν ςοιχείων ἔκθεσιν, ῥᾳοτέραν τε παρασχεῖν ϗ ἐπιτομωτέραν, τοῦτο μάλιςα ἐπιμελητέον ἡμῖν ἂν εἴη ἐπὶ τοῦ ἐν χερσὶ ΙΒ'., ἐν ᾧ τὰ πραγματευόμενα τῶν ἀναγκαιοτάτων τυγχάνοντα, ἀπαγορεύειν πολλάκις τοὺς πρωτοπείρους, παρὰ τὸ τῶν δείξεων διεξοδικὸν ϗ ἐργῶδες παραίτια γίνεται, εἰς ἀπόγνωσιν μονονουχὶ τούτους ἐμβάλλοντα· πρόθεσις δὲ ἡμῖν τὸ τραχὺ ἐξομαλίζοντας τῆς εἰσηγήσεως, μηδὲ τῆς κατὰ τοὺς Γεωμέτρας ἀκριβοῦς τῶν δείξεων ἀποςήσεσθαι. Πότερον δ' ἄρα κατὰ σκοπὸν πρᾶξιν χωρῆσαν ἡμῖν τὸ ἐγχείρημα, ὁ μετιὼν ἐπιγνώσεται, εἰ ταῦτα δὴ τὰ ἡμέτερα πρὸς τὰ ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου εἰς πλάτος ἐκτεταμένα, παραθέσθαι μὴ κατοκνήσειε.

Ὑποθέμενος οὖν ὁ Εὐκλείδης ἐν τῷ πρὸ τούτου Βιβλ. τὰ τῶν ςερεῶν ςοιχεῖα, ϗ τῶν εὐχερεςέρων ἐν σώμασιν, ὡς ἐπιφανείαις ἐπιπέδοις πεπερατωμένων ὁρισάμενος τὰ μέτρα, ἐπὶ τοῦ παρόντος ΙΒ', τὰ ὑπὸ κυρτῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενα ςερεὰ, οἷοι Κύλινδροί τε εἰσὶ ϗ Κῶνοι, ϗ Σφαῖραι διασκέπτεται, ϗ ταῦτα πρὸς ἄλληλα παρατίθησι, ϗ τούτων τὰ μέτρα προσδιορίζεται. Ἀνυσιμώτατον δὲ τὸ παρὸν Βιβλίον ὁμολογεῖται, ὡς περιέχον τὰς ἀρχὰς, αἷς οἱ ἐνδοξότατοι τῶν Γεωμετρῶν ϗ πρὸ πάντων ὁ Ἀρχιμήδης τὰς θρυλλουμένας ἐκείνας περί τε Κυλίνδρου, ϗ Κώνου, ϗ Σφαίρας ἀποδείξεις ἐπῳκοδόμησαν.

Ὁρισμοί.

Πυραμίς ἐςι σχῆμα ςερεὸν (ψλ) ἐπιπέδοις τριγωνικοῖς (αλγ, γλζ, Δ. κ. 465.
ζλβ, βλα) περιεχόμενον, ἀπὸ ἑνὸς ἐπιπέδȣ (ψ) πρὸς ἑνὶ σημείῳ (λ) συνεςώς.

Τὸ μὲν οὖν ἐπίπεδον ψ, Βάσις λέγεται· ἔςι δὲ ἤτοι Τρίγωνον, ἢ Τετράγωνον, ἢ ὁποιονȣ̃ν ἄλλο Εὐθύγραμμον, ἀφ᾽ οὗ τῶν Πλευρῶν ἑκάςȣ τὰ Τρίγωνα ἀνεγείρεται, τὰ εἰς τὸ αὐτὸ συνιόντα σημεῖον τὸ λ, ὃ Κορυφὴ λέγεται.

Καθάπερ τὸ Τρίγωνον ἐν τοῖς εὐθυγράμμοις τῶν ἐπιπέδων Σχημάτων, ȣ̃τω τοι ϗ ἡ τριγωνικὴ Πυραμὶς ἡ ἀπὸ Τριγώνȣ βάσεως συνεςῶσα, ἐν τοῖς ςερεοῖς τὸ πρώτιςον ἐςὶ ϗ ἁπλȣ́ςατον.

Ἐὰν ἔξω τȣ̃ ἐπιπέδȣ Κύκλȣ τινὸς (γλ) ληφθῇ τι Σημεῖον τὸ (α), ἀφ᾽ Β΄. κ. 466.
ȣ̃ Εὐθεῖά τις ἀχθείη μὴ πεπερασμένη ἡ αζ, ἁπτομένη τȣ̃ Κύκλȣ κατὰ τὸ γ, ἢ δὴ, μένοντος κατὰ χώραν τȣ̃ α, περὶ τὴν τȣ̃ Κύκλȣ Περιφέρειαν περιαγομένη αγζ, αὐτόσε πάλιν ἐπανέλθοι, ὅθεν κινεῖσθαι τὸ πρῶτον ἤρξατο, ἡ μὲν ἐπιφάνεια ἡ ὑπὸ τῆς Εὐθείας αγζ περιγεγραμμένη, Κωνικὴ καλεῖται ἐπιφάνεια, τὸ δὲ ὑπ᾽ αὐτῆς ϗ τȣ̃ Κύκλȣ γλ περιειλημμένον Σῶμα, Κῶνος.

Κορυφὴ δὲ τȣ̃ Κώνȣ ἡ κατὰ τὸ α.

Βάσις δὲ τȣ̃ Κώνȣ ὁ Κύκλος γλ.

Ἄξων δὲ τȣ̃ Κώνȣ ἡ Εὐθεῖα αβ, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὸ Κέντρον τῆς Βάσεως ἐπιζευγνυμένη.

Πλευρὰ δὲ τȣ̃ Κώνȣ ἡ αγ, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν Περιφέρειαν τῆς Βάσεως ἀγομένη, ἣν ὅλην εἶναι ἐν αὐτῇ τῇ τȣ̃ Κώνȣ ἐπιφανείᾳ, ἐξ αὐτῆς τῆς τȣ̃ Κώνȣ γενέσεως δῆλον.

Κῶνος ὀρθός ἐςιν, ȣ̃ ὁ ἄξων (αβ) πρὸς ὀρθὰς ἐφίςαται τῇ Βάσει. κ. 467.

Κῶνος δὲ σκαληνὸς, ἤτοι πλάγιος, οὗ ὁ ἄξων αβ ἐφεςώς ἐςι τῇ Βάσει μὴ πρὸς ὀρθάς.

Γεννᾶσθαι δὲ ἔτι νοεῖται ὁ ὀρθὸς Κῶνος ὑπὸ Τριγώνȣ ὀρθογωνίȣ τȣ̃ γβα, τȣ̃ περὶ τὴν ἑτέραν (αβ) τῶν τὴν ὀρθὴν Γωνίαν περιεχȣσῶν Πλευρῶν περιαγομένȣ.

Ἐὰν περὶ δύω Κύκλȣς ἴσȣς τε ϗ παραλλήλȣς (γλ, ξπ), Εὐθεῖα μὴ πε- Γ΄. κ. 468.
περασμένη (ἡ γξζ) περιαχθῇ, ἕως οὗ εἰς τὸ αὐτὸ ἐπανέλθοι, ὅθεν κινεῖσθαι τὴν ἀρχὴν ἤρξατο, ȣ̃τως ὥςε κινȣμένη, ἑαυτῇ τε ϗ τῇ ἐπιζευγνυȣ́σῃ τὰ τῶν Κύκλων κέντρα Εὐθείᾳ βα παράλληλος ἀεὶ εἶναι, ἡ μὲν ἐπιφάνεια ἡ ὑπὸ τῆς Εὐθείας (γξζ) περιγραφομένη, ἐπιφάνεια καλεῖται Κυλινδρική, τὸ δὲ

ὑπὸ ταύτης τῆς ἐπιφανείας, καὶ τῶν δισσῶν κυκλικῶν Βάσεων περιειλημμένον ςερεὸν, Κύλινδρος.

Βάσεις τȣ̃ Κυλίνδρȣ εἰσὶν οἱ Κύκλοι (γλ, ξπ).

Α῎ξων δὲ τȣ̃ Κυλίνδρȣ ἡ Εὐθεῖα (αβ), ἡ τὰ Κέντρα ἐπιζευγνύȣσα.

Πλευρὰ δὲ τȣ̃ Κυλίνδρȣ ἡ Εὐθεῖα (ξγ), ἡ ἐν τῇ τȣ̃ Κυλίνδρȣ ἐπιφανείᾳ ȣ̃σα, καὶ τῆς διττῆς Βάσεως ἁπτομένη.

Κύλινδρος δὲ ὀρθός ἐςιν, ἐὰν ὁ ἄξων ἐπὶ τῆς βάσεως πρὸς ὀρθὰς ἐφεςὼς ᾖ.

Κύλινδρος δὲ σκαληνὸς, ἐὰν ὁ ἄξων αὐτȣ̃ πρὸς τὴν βάσιν μὴ πρὸς ὀρθὰς ᾖ.

Γεννᾶται δὲ ὁ Κύλινδρος ὁ ὀρθὸς ὑπὸ Ο᾿ρθογωνίȣ (ξγβα), τȣ̃ περὶ τὴν μίαν τῶν ἐν αὐτῷ Πλευρῶν (αβ) περιαγομένȣ.

σχ. 469. Δ'. Κῶνοι καὶ Κύλινδροι ὅμοιοι εἰσὶν, ὧν οἱ ἄξονες ακ, ψξ, καὶ αἱ τῶν βάσεων Διάμετροι βζ, πρ ἀνάλογον εἰσὶν, ὧντε οἱ ἄξονες ἐπὶ τῶν βάσεων ἤτοι ὀρθοί εἰσὶν, ἢ ἐπίσης ἐγκεκλιμένοι.

Ε'. Σφαῖρα ἐςὶ ςερεὸν ὑπὸ μιᾶς κυρτῆς ἐπιφανείας περιειλημμένον, πρὸς ἣν ἅπασαι αἱ ἀπό τινος τῶν ἐντὸς Σημείȣ ἀγόμεναι Εὐθεῖαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

Τὸ δὲ ἐντὸς ἐκεῖνο σημεῖον Κέντρον καλεῖται.

Σφαίρας δὲ Διάμετρος, ἡ διὰ τȣ̃ Κέντρȣ ἀγομένη καὶ ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν ἑκατέρωθεν περατȣμένη.

Γεννᾶται δὲ ἡ Σφαῖρα, ἡμικυκλίȣ περὶ τὴν Διάμετρον αὐτȣ̃ μένȣσαν ἀγομένȣ.

ς'. Μεγέθη δὲ εἰς Σχήματα ἄττα ἐγγράφεσθαι, ἢ περιγράφεσθαι λέγεται, τȣτέςι Σχήματα ἐλάσσονα ἢ μείζονα, εἰς σχῆμάτι ἀποτελευτᾷν λέγεται, ἐὰν τȣ̃ εἰς ὃ ἀπολήγει ἐγγραφόμμενα ἢ περιγραφόμενα, ποσότητι τέως, οἱασȣ̃ν δοθείσης ἐλάσσονι, διαφέρειν ἔχωσι.

Ε᾿ὰν οὖν τὰ εἴςτι ἐγγραφόμενα ἐλλείπῃ ἐκείνȣ, ἐλλείψει οἱασȣ̃ν δοθείσης ἐλάσσονι, τὰ ἐγγραφόμενα εἰς ἐκεῖνο ἀπολήγειν εἰρήσεται· καὶ ἐὰν τὰ περιγραφόμενα ὑπερβάλλῃ ἐκεῖνο ὑπεροχῇ, οἱασȣ̃ν ὁμοίως δοθείσης ἐλάσσονι, τὰ περιγραφόμενα ὡσαύτως εἰς αὐτὸ ἐκεῖνο ἀποτελευτᾷν εἰρήσεται.

σχ. 470. Ζ'. Ε᾿ὰν γένηται Τρίγωνον τὸ βαγ ἐν Η῾μικυκλίῳ βδλγ, ἐπὶ δὲ τῶν Πλευρῶν βα, αγ, ὡς ἐπὶ διαμέτρων, ἡμικύκλια ἐλάσσονα καταγραφῇ τὰ βνα, αμγ, τὰ καμπυλόγραμμα τῶν Σχημάτων βδαν, αλγμ, τὰ ἐκτὸς μὲν ὑπὸ τῆς Η῾μιπεριφερείας τȣ̃ ἐλάσσονος κύκλȣ, ἐντὸς δὲ ὑπὸ τȣ̃ τόξȣ τȣ̃ μείζονος περατȣ́μενα, ἀπὸ τȣ̃ ἐξευρόντος αὐτὰ, Μηνίσκοι σύζυγοι Ι῾πποκράτȣς τȣ̃ Χίȣ κατονομάζονται.

Ε᾿ὰν τὰ τόξα βδα, αλγ ἴσα ᾖ, τεταρτημόρια δηλονότι τῆς τȣ̃ μείζονος Κύκλȣ Περιφερείας τυγχάνοντα, καλείϑωσαν οἱ τοιοίδε Μηνίσκοι τεταρτημορικοί.

Ε᾿ὰν ἡ Εὐϑεῖα εη ἀγομένη, τὰ τȣ̃ τεταρτημορικȣ̃ Μηνίσκȣ τόξα ἀνάλογον τέμνῃ κατὰ τὰ Σημεῖα ε ϗ η, ὥςε εἶναι τὸ τόξον βε πρὸς τὸ τόξον εα, ὡς τὸ τόξον βη πρὸς τὸ τόξον ηα, καλείϑων τὰ ἐμβαδὸν αεη, βεη, ἀπόμοιραι τȣ̃ Μηνίσκȣ τȣ̃ τεταρτημορικȣ̃.

Τȣ̃ Μηνίσκȣ, ἣ τȣ̃ αὐτȣ̃ Τετραγώνȣ ἀπόμοιρα λέγεται, ἐὰν ταύτῃ ἴσον εὐϑύγραμμον Σχῆμα συςαϑῆναι ἔχῃ. Η'.

Π ρ ό τ α σ ι ς Α.

„Τὰ ἐν τοῖς Κύκλοις ὅμοια Πολύγωνα πρὸς ἄλληλα ἐςὶν, ὡς τὰ ἀ- ϰ. 471.
„πὸ τῶν Διαμέτρων (αζ, ιγ) Τετράγωνα, ϗ δὴ ϗ τὰ ἀπὸ τῶν Η'μιδια-
„μέτρων (αψ, ιχ), τȣτέςι τὰ τοιαῦτα Πολύγωνα, ἐν διπλασίονι λόγῳ
„εἰσὶ τῶν Διαμέτρων, ἣ τῶν Η'μιδιαμέτρων τῶν Κύκλων, ἐν οἷς ἐκεῖνα εἰσί.

Α᾿χϑήτωσαν αἱ αξ, ζβ, ιρ, λγ· ἐπεὶ οὖν τὰ Πολύγωνα ὑποτίϑεται ὅμοια, ἴσαι ἔσονται (1) αἱ ὑπὸ ξβα, ρλι, ϗ αἱ Πλευραὶ ξβ, βα, ταῖς Πλευραῖς ρλ, λι ἀνάλογον· ὥςε ἐπὶ τῶν Τριγώνων ξαβ, ριλ, αἱ (2) πρὸς τοῖς ξ ϗ ρ σημείοις Γωνίαι ἴσαι εἰσίν· ἄρα ϗ αἱ ὑπὸ βζα ϗ λγι, αἱ ταῖς αὐταῖς Περιφερείαις βα, λι βεβηκεῖαι, ἴσαι (3) εἰσίν· Αἱ δὲ ὑπὸ ζβα, γλι, ἐν τοῖς Η'μικυκλίοις εἰσὶ, καὶ ἑπομένως (4) ὀρϑαὶ ϗ ἴσαι· ἄρα ϗ αἱ λοιπαὶ ὑπὸ βαζ, λιγ (5) ϗ αὐταὶ ἴσαι εἰσὶ, καὶ ἰσογώνια ἄρα ὄντα τὰ Τρίγωνα ζαβ, γιλ, ἔςαι (6) ϗ ὅμοια· Η'δη δὲ ἐπεὶ (ἐξ ὑποϑ.) τὰ Πολύγωνα ὅμοια ἐςὶν, ἔςαι αὐτὰ πρὸς ἄλληλα ἐν λόγῳ διπλασίονι (7) τȣ̃ λόγȣ τῶν Πλευρῶν βα, λι, ὥςε διὰ τὰ δειχϑέντα, ἐν διπλασίονι λόγῳ τȣ̃ τῶν Διαμέτρων αζ, ιγ, καὶ ἑπομένως ϗ (8) τῶν Η'μιδιαμέτρων. Ο. Ε. Δ.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

Αἱ τῶν ἐν τοῖς Κύκλοις ὁμοίων Πολυγώνων Περίμετροι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ Διάμετροι. Α'.

Ε᾿πειδὴ γὰρ ἐδείχϑη αβ : λι : : αζ : ιγ, ϗ ξβ ἔςαι πρὸς ρλ : : αζ : ιγ, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων Πλευρῶν ὁμοίως. Καὶ τοίνυν (9) πᾶσαι ἅμα αἱ

(1) Ο'ρ. *Α*. τȣ̃ ς'. (2) ς. τȣ̃ ς'. (3) *ΚΑ*. τȣ̃ γ'. (4) *ΛΑ*. τȣ̃ γ'. (5) Θ. Πόρ. τῆς *ΛΒ*. τȣ̃ α'. (6) *Δ*. τȣ̃ ς'. (7) *Κ*. τȣ̃ ς'. (8) *ΙΕ*. τȣ̃ ε'. (9) *ΙΒ*. τȣ̃ ε'.

πλευραὶ πρὸς πάσας ἅμα, τουτέστι Περίμετρος πρὸς Περίμετρον, ἔσονται ὡς αζ πρὸς ιγ.

Β'. Τῶν ἐν τοῖς Κύκλοις ὁμοίων Εὐθυγράμμων, αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ τῶν Κύκλων Διάμετροι.

Λῆμμα.

„Τὰ ἐν τῷ Κύκλῳ Πολύγωνα εἰς τὸν Κύκλον ἀποτελευτᾷ.

κ. 472. Ἐγγραφήτω Τετράγωνον τὸ αγβδ, καὶ ἐγγραφὲν, ἐπεὶ ἡμίσεια (1) ἐστὶ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν Κύκλον, μεῖζον ἔσται δήπου τῆς ἡμισείας τοῦ Κύκλου· καὶ εἰ τοίνυν αὐτὸ ἀπὸ τοῦ Κύκλου ἀφαιρεθείη, πλέον τι τῆς ἡμισείας ἀφαιρεθήσεται. Εἶτα ϗ τῶν τόξων δίχα τετμημένων κατὰ ε, κ, ι, θ, ἐγγραφήτω Ὀκτάγωνον, καὶ κατὰ τὸ ε ἀπτέσθω τοῦ Κύκλου ἡ ζη, ϗ πρὸς αὐτὴν προεκβαλλόμεναι προσπιπτέτωσαν αἱ βγ ϗ δα, κατὰ τὰ Σημεῖα η ϗ ζ· καὶ ἔσται δὴ τὸ γζ παραλληλόγραμμον (2), οὗ ἐπεὶ τὸ Τρίγωνον γεα (3) ἡμίσεια ἐστὶν, ἔσται αὐτὸ πλέον τι τῆς ἡμισείας τοῦ τμήματος γεα· Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ϗ τὰ Τρίγωνα ακδ, διβ, κξ· τῶν κατ' αὐτὰ τμημάτων, πλέον τι τῆς ἡμισείας εἰσὶν ἕκαστον μὲν ἑκάστου, πάντα δὲ πάντων· καὶ τῶν ἄρα Τριγώνων ἀπὸ τῶν τμημάτων ἐκείνων, ταυτὸν δ' εἰπεῖν ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τοῦ Κύκλου ἀφαιρεθέντων, πλέον τι τῆς ἡμισείας ἀφαιρεθήσεται. Παραπλησίῳ δὲ τῷ λόγῳ, ἢ εἴπερ ἐφεξῆς τῷ Κύκλῳ Πολύγωνα ἐγγραφείη, διπλῷ τῷ ἀριθμῷ τῶν Γωνιῶν πληθυνόμενα, ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τοῦ Κύκλου, ὑπὲρ τὴν ἡμίσειαν ἀεὶ ἀφαιρεῖσθαι ἀποδειχθήσεται· καὶ ἔσται ἄρα τελευταῖον τὸ λοιπὸν (4) παντὸς τοῦ δοθέντος ἔλαττον. Ἔνθεντοι τὰ ἐγγραφόμενα Πολύγωνα ἐλλείψει τοῦ Κύκλου, πηλικότητι οἱαστινοῦν δοθείσης ἐλάσσονι· ὅπερ ἐστιν, εἰς τὸν Κύκλον τέως ἀποτελευτήσουσι (5). Ο. Ε. Δ.

Μεθόδῳ δὲ οὐδὲν τῆς ἐκτεθείσης διαφερούσῃ ἔχοι ἂν ἀποδειχθῆναι, ὅτι ϗ τὰ εἰς τὸν Κύκλον περιγραφόμενα Πολύγωνα, εἰς αὐτὸν ἐκεῖνον τέως ϗ ἀπολήξουσιν· ἐπεὶ μέντοι ϗ τόδε πρὸς τοῖς ἄλλοις, ϗ δὴ ϗ τὸ προληφθὲν Λῆμμα οὐχ ἧττον, ἐν τῇ Γ'. Προτάσει τῶν ἀρχιμηδείων Θεωρημάτων διείληπται, περιττὸν ἐνταῦθα περὶ τούτου τὸ πλείω ὑποσυνάψαι ἐκρίναμεν.

Πρότασις Β.

„Οἱ Κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν Διαμέτρων Τετρά-

---

(1) Σχόλ. ς. ϗ Ζ. τοῦ δ'. (2) Πόρ. ΚΖ. ΚΗ. ϗ ΚΘ τοῦ γ'. (3) ΜΑ. τοῦ α'. (4) Δῆλον ἐκ τοῦ Α. Λήμμ. τοῦ Σχολ. τοῦ μετὰ τὴν ΙΑ. τοῦ ς'. (5) Ὅρ. ς. τοῦ ιβ'.

„γωνα, ἢ ὡς ἂν τȣτ᾽ αὐτὸ ἰσοδυνάμως ἐξείποις, ὁ τῶν Κύκλων λόγος δι-„πλασίων ἐςὶ τȣ̃ τῶν Διαμέτρων.

Τῶν ὁμοίων Πολυγώνων τῶν εἰς τȣ̀ς Κύκλȣς ἀεὶ καὶ ἀεὶ ἐγγραφομένων, ὁ λόγος διπλασίων ἐςὶ (1) τȣ̃ τῶν Διαμέτρων, τὰ δ᾽ ȣ̃τως ἐγγραφόμενα τοῖς Κύκλοις Πολύγωνα, εἰς αὐτȣ̀ς τέως (2) ϗ ἀπολήγȣσιν· ἄρα (διὰ τὸ ἑπόμενον καθόλȣ Πόρισμα) ϗ ὁ τῶν Κύκλων λόγος τȣ̃ τῶν Διαμέτρων διπλασίων ἐςί. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα καθόλȣ.

„Εἰ τὰ ἐν δυσί τισι Σχήμασιν (Α, Β) ἐγγραφόμενα εἰς αὐτὰ τέως „ϗ ἀπολήγȣσιν, ὃν ἂν λόγον ἔχοιε πρὸς ἄλληλα τὰ ἐγγραφόμενα, τὸν „αὐτὸν τȣ̃τον ἕξει ϗ τὰ ἐν οἷς Σχήματα.

Ἔςω λόγος Χ πρὸς Ψ, ὃν τὰ ἐγγραφόμενα ἀεὶ ἔχει πρὸς ἄλληλα. Εἰ- Ρ
μὴ τοίνυν ὁ τῶν σχημάτων Α, Β λόγος ὁ αὐτός ἐςι τῷ Χ πρὸς Ψ, ὃν ἀεὶ ΑΒΧΨ
ἔχει τὰ τοῖς σχήμασιν ἐγγραφόμενα, ἔςω δὴ Α΄. ὁ λόγος τȣ̃ Α πρὸς τὸ ΓΖ
Β, μείζων τȣ̃ λόγȣ Χ πρὸς Ψ· καὶ ἄλλη τις ἄρα Πηλικότης ἡ Ρ ἐλάσσων ȣ̃σα τȣ̃ σχήματος Α, ἔςαι πρὸς τὸ σχῆμα Β ὡς Χ πρὸς Ψ· καὶ ἐπειδὴ τὰ ἐγγραφόμενα (ἐξ ὑποθ.) εἰς τὰ Α ϗ Β ἀπολήγȣσι τελευτῶντα, ἔσονταί τινα τοῖς Α ϗ Β σχήμασιν ἐγγραφόμενα, ἅττα ἂν τȣ́των ἐλλείποι (3) ἐλάσσονι πηλικότητι, ἢ τὸ Ρ ἐλλεῖπον ἐςὶ τȣ̃ Σχήματος Α. Ἔςωσαν οὖν ἐκεῖνα Γ ϗ Ζ· τοιγαρȣ̃ν τὸ Γ μεῖζον ἔςαι τȣ̃ Ρ· καὶ δὴ τὸ Γ ἔςαι πρὸς τὸ Β, ἐν λόγῳ μείζονι (4) ἢ τὸ Ρ πρὸς τὸ Β, τȣτέςι (καθάπερ ἐτίθετο) ἢ τὸ Χ πρὸς τὸ Ψ, ἤτοι (διὰ τὴν ὑπόθ.) τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ· Ἐπειδὴ τοίνυν τὸ Γ πρὸς τὸ Β, ἐν μείζονι λόγῳ ἐςὶν ἢ πρὸς τὸ Ζ, ἔςαι τὸ Β σχῆμα ἔλαττον τȣ̃ αὐτῷ (5) ἐγγραφομένȣ Ζ, τὸ ὅλον τȣ̃ ἰδίȣ μέρȣς. Ὡσαύτως δὲ δειχθήσεται, ὅτι ϗ ὁ λόγος Β πρὸς Α, μείζων ȣ̓κ ἂν εἴη τȣ̃ Ψ πρὸς Χ, (τȣτέςιν ὅτι (6) ἀδύνατον εἶναι τὸν λόγον Α πρὸς Β ἐλάσσονα τȣ̃ λόγȣ Χ πρὸς Ψ)· ὁ ἄρα λόγος Α πρὸς Β, ἴσος ἐςὶ τῷ λόγῳ Χ πρὸς Ψ. Ο. Ε. Δ.

Παραπλησίᾳ δὲ τῇ μεθόδῳ ἀποδειχθήσεται, καὶ Σχήματα δύω τὸν αὐτὸν πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν, ὃν ἀεὶ ἔχει τὰ περιγραφόμενα, ϗ εἰς ἐκεῖνα τέως ἀπολήγοντα· οὕτως

(1) Λ. τȣ̃ ιβ΄. (2) Διὰ τὸ Λῆμ. (3) Ὅρ. ς΄. τȣ̃ ιβ΄. (4) Η. τȣ̃ ε΄. (5) Ι. τȣ̃ ε΄. (6) Κς τȣ̃ ε΄.

ΓΖ ΑΒΧΨ Ρ

Ἐ'ςω ὁ λόγος Χ πρὸς Ψ, ὃν τὰ περιγραφόμενα ἀεὶ ἔχει πρὸς ἄλληλα· Εἰ μὴ οὖν ὁ λόγος τῶν σχημάτων Α πρὸς Β, ὁ αὐτός ἐςι τῷ Χ πρὸς Ψ, ὃν ἀεὶ ἔχειν νοεῖται τὰ εἰς τὰ σχήματα περιγραφόμενα, ἔςω ὁ λόγος Α πρὸς Β πρῶτον μείζων τȣ̃ λόγȣ Χ πρὸς Ψ· Καὶ ἔςαι τοίνυν τὸ Α πρὸς ἄλλο τι Μέγεθος τὸ Ρ, ὃ μεῖζον εἴη ἐκείνȣ, ὡς Χ πρὸς Ψ: καὶ ἐπειδὴ τὰ περιγραφόμενα καθ' ὑπόθ. εἰς τὰ σχήματα Α ϗ Β ἀπολήγοντα τελευτᾷ, ἔσονταί τινα τοῖς σχήμασιν Α ϗ Β περιγραφόμενα, ἅττα αὐτὰ ὑπερέχει πηλικότητι (1) ἐλάσσονι, ἧς τὸ Ρ ὑπερέχει τὸ σχῆμα Β· Ἐ'ςω γȣ̃ν ἐκεῖνα τὰ Γ ϗ Ζ, καὶ τὸ ἄρα Ζ ἔλαττον ἔςαι τȣ̃ Ρ· ὥςε (2) ὁ λόγος Α πρὸς Ζ, μείζων ἔςαι τȣ̃ λόγȣ Α πρὸς Ρ, τȣτέςι τȣ̃ λόγȣ Χ πρὸς Ψ, ἤτοι Γ πρὸς Ζ. Ἐ'πειδὴ τοιγαρȣ̃ν ὁ λόγος Α πρὸς Ζ, μείζων ἐςὶ τȣ̃ λόγȣ Γ πρὸς Ζ, τὸ σχῆμα Α μεῖζον (3) ἔςαι τȣ̃ εἰς αὐτὸ περιγραφομένȣ Γ, τὸ μέρος τȣ̃ ὅλȣ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ λόγος τȣ̃ Α πρὸς Β μείζων ἂν εἴη τȣ̃ λόγȣ Χ πρὸς Ψ· Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται ϗ τὸν λόγον Β πρὸς Α, μὴ εἶναι τȣ̃ Ψ πρὸς Χ μείζονα, ϗ ἑπομένως (4) τὸν λόγον Α πρὸς Β, μὴ ἐλάσσονα εἶναι τȣ̃ λόγȣ Χ πρὸς Ψ. Εἴπερ τοίνυν ὁ λόγος τȣ̃ Α πρὸς Β, ȣ̓δὲ μείζων ἐςὶν, ȣ̓δ' ἐλάσσων τȣ̃ λόγȣ Χ πρὸς Ψ, ἔςαι αὐτῷ ἴσος. Ο. Ε. Δ.

Πορίσματα τῆς Β'. Προτάσεως.

Α'. Ὡ'ς οὖν Κύκλος πρὸς Κύκλον, ȣ̈τω Πολύγωνον τὸ ἐν ἐκείνῳ πρὸς Πολύγωνον τὸ ἐν τȣ́τῳ, ἑκάτερα γὰρ ἐν διπλασίονι λόγῳ τῶν Διαμέτρων εἰσὶ τῶν Κύκλων.

Β'. Ἔ'τι οἱ Κύκλοι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλȣς ἐν διπλασίονι λόγῳ τῶν οἰκείων (5) Ἡ'μιδιαμέτρων, τȣτέςιν (6) ὡς τὰ Τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν ἀκτίνων.

Γ'. Καὶ τῶν Κύκλων δὲ, ὧν αἱ Διάμετροι, ἢ αἱ Ἡ'μιδιάμετροι δῆλαι, ἐντεῦθεν ὁ λόγος ἐπιγνωσθήσεται, τῇ εὑρέσει δηλονότι (7) τῆς ἐπὶ τῶν δοθεισῶν Διαμέτρων τρίτης ἀνάλογον, πρὸς ἣν ἡ τȣ̃ Α'. Κύκλȣ Διάμετρος τὸν αὐτὸν (8) ἕξει λόγον, ὃν ὁ Α'. αὐτὸς Κύκλος πρὸς τὸν Β'. Οἷον ἔςω δὴ ἡ τȣ̃ Α'. Κύκλȣ Διάμετρος ποδ. 4, ἡ δὲ τȣ̃ Β'. ποδ. 6, ϗ ἐπεὶ 4, 6, 9 συνεχῶς ἀνάλογον (9) εἰσὶν, ἔςαι ὁ Α'. Κύκλος πρὸς τὸν Β'., ὡς 4 πρὸς 9.

---

(1) Ὅρ. ς. τȣ̃ ιβ'. (2) Η. τȣ̃ ε'. (3) Ι. τȣ̃ ε'. (4) Κς. τȣ̃ ε'. (5) ΙΕ. ϗ ΛΔ. τȣ̃ ε'. (6) Σχόλιον μετὰ τὴν Κ. τȣ̃ ς'. (7) ΙΑ. τȣ̃ ς'. (8) Διὰ ταύτ. ϗ τὸν Ι. Ὅρ. τȣ̃ ε'. (9) Γ. Πόρ. τῆς ΙΖ. τȣ̃ ς'.

Ἐντεῦθεν δέ τοι καὶ τὸν τυχόντα Κύκλον, κατὰ λόγον τὸν δοθέντα αὔξειν, ἢ μειῶν ἐξέσαι, ὡς ἀνωτέρω (1) σεσημείωται. Οἷον προκείσθω δὴ Κύκλον καταγράψειν, ὃς ἂν εἴη θατέρου δοθέντος πενταπλάσιος· ἔσω δέ τοι ἡ τοῦ δοθέντος Ἡμιδιάμετρος αβ· Ταύτης οὖν μεταξὺ καὶ τῆς Εὐθείας βγ, ἥτις ἂν εἴη πενταπλασίων τῆς αβ, εὑρεθήτω δὴ μέση ἀνάλογος ἡ βχ· Ὁ τοίνυν Κύκλος, ὃς ἂν Διαστήματι τῷ κατὰ τὴν βχ καταγραφείη, ἔσαι τοῦ δοθέντος Κύκλου πενταπλάσιος. Δ.

Ἐὰν τέτταρες εὐθεῖαι ὦσιν ἀνάλογον, τὰ εὐθύγραμμα τῶν Σχημάτων τὰ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ἀπὸ τῶν δύω προτέρων, τοῖς ἐπὶ τῶν δύω ὑστέρων, ὡς ἐπὶ διαμέτρων ἢ ἡμιδιαμέτρων Κύκλοις ἀνάλογον εἰσί. Τῶν γὰρ δοθεισῶν ἀνάλογον οὐσῶν, καὶ δὴ καὶ τῶν εὐθυγράμμων Σχημάτων, καὶ τῶν Κύκλων (2) ἐν λόγῳ ὄντων διπλασίονι τοῦ λόγου τοῦ τῶν αὐτῶν Εὐθειῶν, ἔσονται δήπου καὶ τὰ Εὐθύγραμμα (3) τοῖς Κύκλοις ἀνάλογον. Ε.

Ἔτι δὲ ἀνάπαλιν, ἐὰν Σχήματα δύω εὐθύγραμμα ὅμοια δυσὶ Κύκλοις ἀνάλογον ᾖ, ἔσονται αἱ τῶν Εὐθυγράμμων ὁμόλογοι πλευραὶ ταῖς τῶν Κύκλων διαμέτροις ἀνάλογον· Ἐπειδὴ γὰρ οἱ τῶν Σχημάτων, καὶ τῶν Κύκλων λόγοι ἴσοι ἀλλήλοις τυγχάνουσι, διπλασίονες (4) ὄντες τῶν λόγων, οὓς ἔχουσιν αἵτε ὁμόλογοι πλευραὶ, καὶ αἱ διάμετροι πρὸς ἀλλήλας, ἔσονται δὴ (5) καὶ οἱ λόγοι οὗτοι ἀλλήλοις ἴσοι. Ϛ.

Ἔνθεν τοι ἐὰν τῷ δοθέντι Κύκλῳ Α ἴσον Τετράγωνον δοθῇ τὸ Π, εὑρεθήσεται Τετράγωνον ἕτερον τὸ Χ, ὅπερ ἂν ἑτέρῳ ὁτῳοῦν Κύκλῳ Γ ἴσον εἴη. Ἐπειδὴ γὰρ ἐξ ὑποθ. Α πρὸς Π, ὡς Γ πρὸς Χ, ἔσαι καὶ ἐναλλὰξ Α : Γ : : Π : Χ· καὶ ἑπομένως (6) ἡ Ἡμιδιάμετρος τοῦ Κύκλου Α πρὸς τὴν Ἡμιδιάμετρον τοῦ Γ, ὡς ἡ Πλευρὰ τοῦ Τετραγώνου Π πρὸς τὴν τοῦ Χ. Ἐπεὶ δὲ αἱ τῶν Κύκλων Ἡμιδιάμετροι, καὶ ἡ τοῦ Τετραγώνου Π Πλευρὰ δέδονται, εὑρεθήσεται δὴ (7) ἡ Πλευρὰ τοῦ Τετραγώνου Χ, καὶ ἑπομένως (8) καὶ αὐτὸ τὸ Χ Τετράγωνον. Τὸ δ' ἐν τῷδε τῷ Πορίσματι περὶ τῶν Τετραγώνων ῥηθὲν, τὸ αὐτὸ καὶ περὶ ὁποιωνοῦν ἄλλων σχημάτων ἀλλήλοις ὁμοίων (9) εἰρημένον ἔσω. Ζ.

Ὁ ἐπὶ τῆς Ὑποτεινούσης αβ τοῦ ὀρθογωνίου Τριγώνου αβγ Κύκλος, ἴσος ἐσὶ τοῖς δυσὶ Κύκλοις, τοῖς ἐπὶ τῶν αγ, βγ Πλευρῶν τῶν περιεχουσῶν τὴν ὀρθὴν Γωνίαν· Ἐὰν γὰρ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς Γωνίας γ, ἐπὶ τὴν Ὑποτείνουσαν κά- Η. χ. 473.

---

(1) Ὅρα Δ. Πόρ. τῆς Κ. τοῦ ϛ'. (2) Κ. τοῦ ϛ'. καὶ Β. τοῦ ιβ'. (3) ΛΔ. τοῦ ε'. (4) Κ. τοῦ ϛ'. καὶ Β. τοῦ ιβ. (5) ΛΕ. τοῦ ε'. (6) Διὰ τὸ Ε. Πόρ. (7) ΙΒ. τοῦ ϛ'. (8) Μϛ. τοῦ α'. (9) ΙΒ. καὶ Ι. τοῦ ϛ'.

θετος κατενεχθῇ ἡ γξ, ἔσονται αβ, αγ, αξ (1) ∺, καὶ ὡσαύτως αβ, γβ, βξ (2) ∺, ὥςε ὁ ἐπὶ τῆς αβ Κύκλος πρὸς τȣ̀ς ἐπὶ αγ, γβ, ὡς ὁ (3) ἐπὶ αβ πρὸς τȣ̀ς αξ, βξ· καὶ ἑπομένως ὁ Κύκλος ὁ ἐπὶ αβ (4) πρὸς τȣ̀ς λοιπȣ̀ς Κύκλȣς ἅμα ληφθέντας, ἐςὶν ὡς αβ πρὸς αξ + ξβ· ἐπεὶ δὲ αβ = αξ + ξβ, ἔςαι ϗ ὁ ἐπὶ τῆς αβ Κύκλος δυσὶ τοῖς λοιποῖς ἅμα ληφθεῖσιν ἴσος.

Θ'. Ἔνθεντοι δοθεισῶν τῶν Διαμέτρων κύκλων ὡντινωνȣ̃ν, ῥᾴδιον ἐςὶ τό,τε ἄθροισμα, ϗ τὴν διαφορὰν τῶν Κύκλων ἀποδȣ̃ναι, τȣτέςι Κύκλον εὑρεῖν, ὃς ἂν ὁποσοισȣ̃ν πλήθειτε ϗ μεγέθει δοθεῖσι Κύκλοις ἴσος ᾖ, ἢ γȣ̃ν Κύκλον καταγράψαι, ȣ̔ τὸ ἐμβαδὸν τῇ ὡντινωνȣ̃ν ἀνίσων Κύκλων διαφορᾷ ἴσον εἴη· τῇ αὐτῇ ἐκείνῃ δηλονότι μεθόδῳ, δι' ἧς τῶν Τετραγώνων τό,τε ἄθροισμα, καὶ ἡ διαφορὰ παρίςαται, ἐν τῷ Σχολίῳ τῆς ΜΖ'. Προτ. τȣ̃ Α'. Βιβλίȣ· πλὴν ὅσον ἐν τῇ ἀποδείξει ἀντὶ τῆς ΜΖ'. τȣ̃ Α'., ληπτέον τὸ Η'. Πόρ. τῆς Β'. τȣ̃ ΙΒ'.

κ. 474. Ι'. Κἀντεῦθεν καὶ τὸν τῶν συζύγων Μηνίσκων τετραγωνισμὸν, ὃν πρῶτος Ἱπποκράτης ὁ Χῖος διδάξας φέρεται, δυνατὸν λαβεῖν· ἔςω γὰρ γαβ Τρίγ. ὀρθογών., ϗ βαγ Ἡμικύκλιον ἐπὶ τῆς Διαμέτρȣ βγ, ϗ βνα Ἡμικύκλ. ἐπὶ τῆς αβ, ϗ αμγ ἐπὶ τῆς αγ, ϗ ἔςαι τοίνυν τὸ Ἡμικύκλ. βαγ, τοῖς Ἡμικυκλ. βνα ϗ αμγ (5) ἅμα ληφθεῖσιν ἴσον. Ἐὰν οὖν τὸ ἀμφοτέρωσε κοινὸν χωρίον ἀφαιρεθῇ, τȣτέςι τὰ Τμήματα βα, αγ, ὑπολειφθήσονται οἱ δύο Μηνίσκοι βνα, αμγ, οἱ ὑπὸ τῶν κυκλικῶν γραμμῶν περατȣ́μενοι, τῷ εὐθυγράμμῳ Τριγώνῳ βαγ ἴσοι. Ἐὰν δὲ ἡ βα Εὐθεῖα ἴση ᾖ τῇ αγ, τȣτέςιν ἐὰν ὦσιν οἱ Μηνίσκοι τεταρτημορικοὶ, ἀχθείσης καθέτȣ τῆς αξ ἐπὶ τὴν ὑποτείνȣσαν βγ, ἔςαι τὸ μὲν βαξ Τρίγωνον ἴσον τῷ Μηνίσκῳ βνα, τὸ δὲ γξα ἴσον τῷ Μηνίσκῳ γμα. Ο. Ε. Ε.

Σχόλιον Α'.

κ. 475. Τὰ τῶν Κύκλων ὅμοια Τμήματα αβξ, ιλρ, εἰσὶν ἐν διπλασίονι λόγῳ τῶν Διαμέτρων, καὶ δὴ ϗ ἐν διπλασίονι λόγῳ τῶν Εὐθειῶν αξ, ιρ, αἳ τὰ τῶν Τμημάτων ὑποτείνȣσι τόξα. Τῶν γὰρ τόξων αβξ, ιλρ, δίχα τμηθέντων κατὰ τὰ β ϗ λ, ἐπιζευχθεισῶν τε τῶν αβ, βξ, ϗ ιλ, λρ, διὰ τὰ διχοτομηθέντα τόξα, αἱ ὑποτείνȣσαι (6) ἔσονται ἴσαι, τȣτέςιν αβ = ξβ, ϗ ιλ = ρλ, ἀλλὰ ϗ ἡ ὑπὸ αβξ (7) = ιλρ· ὥςε τὰ Τρίγωνα (8) αβξ, ιλρ ὅ-

(1) Α. Πόρ. τῆς Η. τȣ̃ ς'. (2) Αὐτ. (3) Διὰ ταύτ. τὴν Πρότ. ϗ Ὅρ. Ι. τȣ̃ ε'. (4) ΚΔ. τȣ̃ ε'. (5) Η. Πόρ. ταύτ. (6) ΚΖ. τȣ̃ γ' (7) Β. Πόρ. τῆς ΛΓ. τȣ̃ ς'. (8) ς. τȣ̃ ς'.

μοια ἐςίν· ἑπομένως δὲ (1) ἐν λόγῳ διπλασίονι εἰσὶ τῶν Πλευρῶν αβ ϗ ιλ, ἢ γȣ̃ν (2) τῶν διαμέτρων αζ, ιγ, τῶν ἐν τοῖς Κύκλοις, ἢ ϗ τῶν ὑποτεινȣσῶν αξ, ιρ. Τῷ δὲ συνεχεῖ τῶν τόξων αβ, βξ, ϗ ιλ, λρ διχασμῷ, πολύγωνα Σχήματα ὅμοια ἀεὶ ἐγγραφήσεται τοῖς τμήμασι, ϗ ἐπὶ βάσεων τῶν αὐτῶν αξ, ιρ, ἃ τέως εἰς αὐτὰ τὰ τόξα ἀπολήγει· Τοιγαρȣ̃ν καὶ τὰ τόξα αὐτὰ (3) αβξ, ιλρ εἰσὶν ἐν διπλασίονι λόγῳ τῶν διαμέτρων αζ, ιγ, ἢ τῶν ὑποτεινȣσῶν αξ, ιρ. Ο. Ε. Δ.

Σχόλιον Β΄.

Τȣ̃ τετραγωνισμȣ̃ τῶν ὁποιωνȣ̃ν μὲν συζύγων Μηνίσκων ἅμα, τῶν δὲ τεταρτημορικῶν ϗ χωρὶς, ἐν τῷ Ι΄. Πορίσματι ὑποτεθέντος, ἐξέςω δὴ ϗ ἄλλ᾽ ἄττα περὶ τȣ̃ τεταρτημορικȣ̃ Μηνίσκȣ, περίτε τȣ̃ τετραγωνισμȣ̃ τῆς ἀπομοίρας τȣ̃ αὐτȣ̃, ϗ περὶ τῆς μεθόδȣ τῆς κατατομῆς αὐτȣ̃, κατὰ τὸν δοθέντα λόγον ὑποσυνάψαι.

Πληρȣ́σθω ὁ τȣ̃ τεταρτημορικȣ̃ Μηνίσκȣ ἐλάσσων Κύκλος, ϗ τȣ́τȣ ἡ Περιφέρεια διελεύσεται διὰ τȣ̃ Κέντρȣ ξ τȣ̃ μείζονος Κύκλȣ. Ἐὰν οὖν κατὰ τὸ ἐξώτερον τȣ̃ Μηνίσκȣ τόξον βνα, ληφθῇ τυχὸν σημεῖον τὸ ε, ϗ ἐπιζευχθῇ ἡ ξε, αὕτη τεμεῖ τὰ τȣ̃ Μηνίσκȣ ἑκάτερα τόξα ἀνάλογον, κατὰ τὰ σημεῖα ε ϗ δ, ϗ διὰ τȣ̃το τὸν Μηνίσκον τεμεῖ κατὰ διττὴν ἀπόμοιραν (4) τὴν μὲν αεδ, τὴν δὲ βεδ. Ἐπειδὴ γὰρ ἡ ὑπὸ βξε Γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ μὲν τȣ̃ μείζονος κύκλȣ ἐςὶ, πρὸς δὲ τὴν περιφέρειαν τȣ̃ ἐλάσσονος, τὸ τόξον βε (5) ἔςαι δὶς τοσȣ́των μοιρῶν, ὅσων τὸ βδ· καὶ ἑπομένως ἡ Ἡμιπεριφέρεια βεα ἐςὶ πρὸς τὸ τεταρτημόριον βδα, ὡς τὸ τόξον βε πρὸς τὸ τόξον βδ, τȣτέςιν (6) ὡς τόξον εα πρὸς τόξον δα· καὶ ἐναλλὰξ τόξον βε πρὸς τόξον εα, ὡς τόξον βδ πρὸς τόξον δα. Α΄. σχ. 476.

Ἐὰν τὰ τόξα εβ, εα ἴσα ᾖ, τȣτέςιν ἐὰν τὸ σημεῖον ε συμπέσῃ τῷ ν, Β΄. σχ. 477. τῷ μεσαιτάτῳ σημείῳ τȣ̃ ἡμικυκλίȣ βνα, αἱ εὐθεῖαι νβ, να ἐπιζευγνύμεναι, πληρώσȣσι τὸ Τετράγωνον ναξβ, τὸ εἰς τὸν ἐλάσσονα κύκλον ἐγγεγραμμένον, τȣ̃ δὲ μείζονος Κύκλȣ ἐφάψονται κατὰ τὰ σημεῖα α ϗ β. Ἐπειδὴ γὰρ ἡ βνα Ἡμιπεριφέρεια τȣ̃ ἐλάσσονος κύκλȣ, δίχα τέτμηται κατὰ τὸ ν, ἔσονται αἱ Εὐθεῖαι νβ, να, τεταρτημορικῶν τόξων ὑποτείνȣσαι, ἤτοι (7) πλευ-

(1) ΙΘ. τȣ̃ ς΄. (2) Β. Πόρ. τῆς Α. τȣ̃ ιβ΄. (3) Διὰ τὸ καθόλȣ Πόρισμα. (4) Ὅρ. Ζ. τȣ̃ ιβ΄. (5) Ἕπεται ἐκ τȣ̃ Δ. Πορίσμ. τῆς Ε. Πρότ. τȣ̃ δ΄. (6) Ις. ϗ Ζ. τȣ̃ ε΄. (7) ς. τȣ̃ δ΄.

ραὶ τȣ̃ Τετραγώνȣ, ὃ ἐν τῷ ἐλάσσονι κύκλῳ δύναται ἐγγραφῆναι· διὰ δὲ τὰς ἴσας τȣ̃ μείζονος κύκλȣ ἡμιδιαμέτρȣς βξ, αξ, ἔσονται ϗ αὗται αἱ ἡμιδιάμετροι ἐν τῷ Ἡμικυκλίῳ βξα, αἱ λοιπαὶ δύο τȣ̃ Τετραγώνȣ πλευραὶ, τȣ̃ ἐν τῷ ἐλάσσονι Κύκλῳ δυναμένȣ ἐγγράφεσθαι. Ἐπεὶ δὲ ἅπαν Τετράγωνον (1) ἐςὶν ὀρθογώνιον, αἱ ὑπὸ νβξ, ναξ ὀρθαὶ ἔσονται, καὶ ἐπομένως αἱ εὐθεῖαι νβ, να, τȣ̃ μείζονος Κύκλȣ (2) ἐφάψονται.

Γ'. Ἐὰν δὲ τὰ τόξα εβ, εα (ὅρα τὸ Σχ. τȣ̃ Α'. Πορ.) ἄνισα ᾖ, ϗ αἱ ὑποτείνȣσαι εβ, εα ἄνισοι ἔσονται· ϗ ἐὰν μὲν ἡ εα μείζων ᾖ τῆς εβ, διὰ τὴν ὑπὸ βεα τὴν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ ὀρθὴν ȣ̃σαν, ἡ ὑπὸ εβα (3) ἡμισείας ὀρθῆς μείζων ἔςαι, ἡ δὲ ὑπὸ εαβ ἡμισείας ὀρθῆς ἐλάσσων. Ἔνθεντοι ἡ ὑπὸ εαξ (τȣτέςιν ἡ ὑπὸ εαβ ἡμισείᾳ ὀρθῆς τῇ βαξ ἐπαυξηθεῖσα) ἔςαι ὀρθῆς ἐλάσσων· καὶ τοίνυν ἡ εα τεμεῖπȣ τὸ τεταρτημορικὸν τόξον βδα τȣ̃ μείζονος Κυκλȣ (4), οἷον κατὰ τὸ η.

Δ'. Ἐπιζευχθεῖσα οὖν ἡ Εὐθεῖα βη, αὕτη τȣ̃ ὀρθογωνίȣ Τριγώνȣ βεη βάσις ἡ αὐτὴ, ϗ τȣ̃ βδη τόξȣ ὑποτείνȣσα ἔςαι, ὡς δῆλον· αἱ δὲ ὑπὸ εηβ, εβη ἔσονται ἴσαι, τȣτέςιν ἑκατέρα ἡμίσεια ὀρθῆς· διὰ γὰρ τὰς ὑπὸ αηβ, εηβ, τὰς (5) δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, ϗ τὴν ὑπὸ αηβ τὴν ἐν τῷ τεταρτημορικῷ τμήματι (6) ἡμιόλειον ȣ̃σαν ὀρθῆς, ἔςαι ἡ ὑπὸ εηβ ἡμίσεια ὀρθῆς, καὶ διὰ τὴν ὑπὸ ηεβ ὀρθὴν τυγχάνȣσαν, ἔςαι (7) ϗ ἡ ὑπὸ εβη ἡμίσεια ϗ αὐτὴ ὀρθῆς.

Ε'. Ἡ Βάσις βη τȣ̃ ὀρθογωνίȣ ἰσοσκελȣ̃ς Τριγώνȣ εβη, ὑπὸ τῆς εξ εὐθείας δίχατε ϗ πρὸς ὀρθὰς τέμνεται· ἡ γὰρ ὑπὸ βεξ τȣ̃ ἐπὶ τȣ̃ τεταρτημορικȣ̃ τόξȣ βξ τȣ̃ ἐλάσσονος Κύκλȣ (8) ἡμίσειά ἐςιν ὀρθῆς· διὸ ἡ ὑπὸ βεη ὀρθὴ ὑπὸ τῆς εὐθείας βξ δίχα τέμνεται. Ἀλλὰ γὰρ ἡ ὑπὸ βεη ἐςὶν ἡ τȣ̃ ἰσοσκελȣ̃ς κατὰ κορυφὴν Γωνία, ταύτητοι ἡ ἐκείνην διχοτομȣ̃σα Εὐθεῖα (9), ἡ αὐτὴ ϗ τὴν Βάσιν βη κατὰ τὸ ζ δίχα τεμεῖ, καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς δὲ ϗ κάθετος ἔςαι.

ς'. Τὰ τοίνυν Τρίγωνα βζε, ηζε, ἀλλήλαις τε ϗ τῷ ὅλῳ βεη, ϗ δὴ ϗ τῷ βξα Τριγώνῳ ὅμοια ἐςίν· ἅπαντα γάρ ἐςι Τρίγωνα ὀρθογώνιά τε ϗ ἰσοσκελῆ, οἷα Τετραγώνων ἡμίση.

Ζ'. Ἐπειδὴ ἡ βζ ἐπὶ τῆς δξ (ἥτις τȣ̃ μείζονος κύκλȣ ἡμιδιάμετρος τυγχάνει) πρὸς ὀρθὰς ἐςὶν, ἔςαι (10) αὕτη ὀρθὸν Ἡμίτονον τȣ̃ τόξȣ βδ, ϗ ἐπομένως (11) ἡ διπλάσιος τῆς βζ, ἤτοι ἡ βη, ἔςαι ὑποτείνȣσα τȣ̃ διπλασίȣ τό-

---

(1) Ὅρ. ΛΒ. τȣ̃ α'. (2) Ις. τȣ̃ γ'. (3) ΙΗ. Πόρ. τῆς ΛΒ. τȣ̃ α'. (4) Ις. τȣ̃ γ'. (5) ΙΓ. τȣ̃ α'· (6) Λ. Πόρ. τῆς Η. ϗ τῆς Θ. τȣ̃ δ'. (7) ς. Πόρ τῆς ΛΒ. τȣ̃ α'. (8) Λ. Πόρ. τῆς Η. ϗ τῆς Θ. τȣ̃ δ'. (9) Ἀριθ. Γ. τȣ̃ Σχολίȣ τῆς Κς. τȣ̃ α'. (10) Ὅρ. Ι. τȣ̃ γ'. (11) Πόρ. τῆς Λ. τȣ̃ γ'.

ξυ τῦ βδ, τυτέςι τῦ βδη. Ἀνωτέρω δὲ (ἐν ἀριθμ. Α΄.) ἐδείκνυτο, ὅτι τὸ βε τόξον τὸ ἐν τῷ ἐλάσσονι Κύκλῳ, δὶς τοσύτων μοιρῶν ἐςιν, ὅσων τὸ βδ τὸ ἐν τῷ μείζονι. Τὸ ἄρα βδη τόξον (τὸ διπλάσ. δηλον τῦ βδ), ὅμοιόν ἐςι (1) τῷ τόξῳ βε, καὶ τὸ Τμῆμα βη, ὅμοιον τῷ Τμήματι βε.

Ἡ δὲ τῦ Μηνίσκυ ἀπόμοιρα βεδ, ἴση ἐςὶ τῷ ὀρθογωνίῳ Τριγώνῳ βεζ· Τὰ γὰρ ὅμοια Τμήματα βε, βη εἰσὶν (2) ἐν λόγῳ διπλασίονι τῶν Διαμέτρων βα, βγ· τυτέςιν (3) ὡς 1 : πρὸς 2· ἔνθεντοι ἡ ἡμίσεια τῦ Τμήματος βδζ τῷ τμήματι βε ἴση ἔςαι. Ἐὰν τοίνυν ἀπὸ τῆς βεδ ἀπομοίρας ἀφαιρεθῇ τὸ Τμῆμα βε, ϗ τὸ τύτῳ ἴσον, προςεθῇ ἡ τῦ Τμήματος ἡμίσεια βδζ, συςήσεται Τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ βεζ τῇ ἀπομοίρᾳ βεδ ἴσον, ϗ ἑπομένως (4) τετραγωνίζεται ἡ ἀπόμοιρα βεδ τῦ τεταρτημορικῦ Μηνίσκυ. Η΄.

„Τὸν τεταρτημορικὸν Μηνίσκον αδβν, κατὰ τὸν δοθέντα λόγον (οἷον „τὸν φπ πρὸς πρ) εἰς ἀπομοίρας διελεῖν τὰς αεδ, βεδ, ἑκατέρας τε τῶν „μερίδων τὸν τετραγωνισμὸν ἀποδῦναι. Θ.

Ἡ Διάμετρος αβ τῦ ἐλάσσονος Ἡμικυκλίυ αεβ, διαιρείσθω (5) κατὰ τὸν δοθέντα λόγον κατὰ τὸ ι, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ ἡμικυκλίῳ, ἀπὸ τῦ σημείυ ι ἀνιςάσθω τῇ Διαμέτρῳ βα κάθετος ἡ ιε, ἀπὸ δὲ τῦ ε ἐπὶ τὸ ξ, ὃ Κέντρον ἐςὶ τῦ μείζονος Κύκλυ, ἐπιζευχθεῖσα ἡ εξ, κατατεμεῖ τὸν Μηνίσκον ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ· τὰ γὰρ ὅμοια Τρίγωνα (6) βαξ, βεζ, εἰσὶν ἐν διπλασίονι (7) λόγῳ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν αβ, βε, τυτέςι (διὰ τὰς αβ, βε, βι $\div$ (8)) ὡς (9) αβ : βι· καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ιξ, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ (10) ἔςαι τὸ βαξ Τρίγωνον πρὸς τὸ Τρίγωνον βιξ, διὰ τὸ αὐτὸ ὕψος τὸ πρὸς τὸ ξ. Ἐπειδὴ τοίνυν τὸ Τρίγωνον βαξ, πρὸς ἑκάτερον τῶν Τριγώνων βεζ, βιξ τὸν αὐτὸν (11) ἔχει λόγον, ἔςαι τὸ Τρίγων. (12) βιξ = τῷ Τριγ. βεζ = (13) τῇ ἀπομοίρᾳ βεδ· ἀλλ' ὅλος ὁ Μηνίσκος τῷ Τριγώνῳ βαξ (14) ἴσος ἐςὶ, ϗ ὕτως ἡ ἀπόμοιρα εαδ τῷ Τριγώνῳ (15) αιξ ἰσῦται· τὸ δέτοι Τρίγωνον αιξ πρὸς τὸ Τρίγωνον βιξ (16), ὡς αι πρὸς βι, τυτέςιν ὡς φπ πρὸς πρ. Ὁ ἄρα Μηνίσκος ὁ τεταρτημορικὸς ἐν τῷ δοθέντι διατέμνεται λόγῳ, ϗ ἄλλῳ τρόπῳ ὁ τῆς μερίδος βεδ τετραγωνισμὸς

(1) Ὁρ. Δ. τῦ ϛ΄. (2) Σχόλ. τῆς Α. τῦ παρ. (3) Διὰ τὸ Σχόλ. τῆς Κ. τῦ ϛ΄., ϗ τὸ Α. Πόρ. τῆς ΜΖ. τῦ α΄. (4) Η. Ὁρ. τῦ ιβ΄. (5) Θ. τῦ ϛ΄. (6) Ἀρ. ϛ. τῆς παρ. (7) ΙΘ. τῦ ϛ΄. (8) Β. Πόρ. Η. τῦ ϛ΄. (9) Ι. Ὁρ. τῦ ε΄. (10) Α. τῦ ϛ. (11) ΙΑ. τῦ ε΄. (12) Θ. τῦ ε΄. (13) Ἀριθ. Η. τῦ παρ. (14) Πόρ. Ι. ταύτ. (15) Ἀξ. Γ. τῦ α΄. (16) Α. τῦ ϛ΄.

ἀποδέδοται. Ὅθεν δὴ τὴν αὐτὴν μερίδα ϗ τῷ Τριγώνῳ βιξ, καὶ δὴ ϗ τὴν μερίδα τὴν ἑτέραν αεδ τῷ τριγώνῳ αιξ ἴσην τυγχάνειν, δῆλον ἐγένετο, ϗ δίδοται ἄρα ἀμφοῖν τῶν μερίδων ὁ τετραγωνισμός.

κ. 478. Ι'. Ἀμφοῖν δὲ τῶν Κύκλων πληρωθέντων αβγ ϗ αξβυ, ἀχθήτω πρὸς τὴν Διάμετρον τȣ̃ ἐλάσσονος αβ, παράλληλος ἡ Διάμετρος τȣ̃ μείζονος εζ, καὶ ταύτῃ πρὸς ὀρθὰς ἑτέρα αὖθις Διάμετρος τȣ̃ αὐτȣ̃ μείζονος Κύκλȣ ἡ γδ, ἥτις προεκβληθεῖσα, τόν τε Μηνίσκον ανβ δίχα τεμεῖ εἰς τὰς μερίδας ανδ ϗ βνδ, τὰς ἀλλήλαις ἴσας, ϗ τὸ Τρίγωνον αξβ εἰς δύω ἴσα Τρίγωνα τὰ αθξ, βθξ, τὰ τῷ ὅλῳ ϗ ἀλλήλοις ὅμοια· Φημὶ δὴ ὅτι τȣ̃ μηνοειδȣ̃ς χωρίȣ αηξιβεγζα τὰ κέρατα αηξζ ϗ βιξε, τοῖς τριγώνοις αθξ, βθξ, ϗ (1) ἑπομένως ταῖς τȣ̃ τεταρτημορικȣ̃ Μηνίσκȣ μερίσιν ανδ, βνδ, ἴσα εἰσὶν ἑκάτερον ἑκατέρῳ. Ἐπειδὴ γὰρ $\alpha\beta^{T} = (2)\ \alpha\xi^{T} + \beta\xi^{T} = 2\,\alpha\xi^{T}$, ἔςαι (3) τὸ Τμῆμα αδβ τȣ̃ Τμήματος αηξ διπλȣ̃ν, τὸ δ' ἥμισυ ἐκείνȣ αδθ ἴσον τῷ Τμήματι αηξ· τὰ δὲ ἐὰν ἀπὸ τῶν ὀκτημορίων τȣ̃ μείζονος κύκλȣ ἀφαιρεθῇ, τȣτέςιν ἀπὸ τȣ̃ αξδ ϗ αξζ, καταλειφθήσεται ἴσα τὰ αθξ ϗ αηξζ· ὁμοίως δὲ δείξω ὅτι ϗ τὸ βθξ = βιξε· καὶ τετραγωνίζεται ἄρα τὰ τȣ̃ ῥηθέντος μηνοειδȣ̃ς χωρίȣ κέρατα αηξζ ϗ βιξε.

ΙΑ'. Τῶν αὐτῶν τεθέντων, ἐν τῷ ἐλάσσονι Κύκλῳ πληρώθω τὸ Τετράγωνον βναξ· καὶ Κέντρῳ τῷ ν, Διαςήματι δὲ τῷ νβ, ἢ τῷ να = (4) ξβ ἢ ξα, γεγράφθω Τόξον τεταρτημορικὸν τὸ βλα, ϗ ἔςαι βλαξ Μηνίσκος τεταρτημορικὸς, τῷ Μηνίσκῳ βναδ ὅμοιός τε ϗ ἴσος· ἔνθεντοι ϗ τῷ Τριγώνῳ βνα ἢ βξα (5) ἐξισωθήσεται· Ἀλλὰ τὰ κέρατα βιξε ϗ αηξζ ἅμα ληφθέντα, τῷ αὐτῷ Τριγώνῳ (6) συνεξιςȣ̃ται· τὸ ἄρα μικτόγραμμον χωρίον βλαζε, τῷ διττῷ Τριγώνῳ βξα, ταυτὸν εἰπεῖν τῷ Τετραγώνῳ βναξ, ἴσον ἐςί.

Πρότασις Γ. ϗ Δ.

Διεξοδικαί τε εἰσὶ ϗ τοῖς Νεανίσκοις δυσχερεῖς, ϗ πρὸς ȣ̉δὲν εὐχρηςȣ̃σαι, ἢ πρὸς τὸ δι' αὐτῶν τὴν Ε'. ἀποδειχθῆναι, ἣν αὐτοὶ ϗ τȣ́των ἄνευ πολλῷ ῥᾴδιον ἀποδείξομεν.

---

(1) Ἀριθ. Θ. τȣ̃ παρόντ. Σχολ. (2) ΜΖ. τȣ̃ α'. (3) Διὰ τὸ Α. Σχόλ. ταύτ. ϗ Σχόλ. τῆς Κ. τȣ̃ ς'. (4) Ὁρ. ΛΒ. τȣ̃ α'. (5) Ι. Πόρ. ταύτ. (6) Ἀριθ. Ι'.

Πρὸς τὴν Ε΄. Πρότασιν.

Λῆμμα Α΄.

„ Ἐὰν δύο Πυραμίδες τριγωνικαὶ, ἐπιπέδοις τμηθῶσι (τοῖς ξσε, ρχψ) κ. 479.
„ πρὸς τὰς βάσεις (αβγ, ιυπ) παραλλήλοις, ἀνάλογον (κατὰ ε ϗ ψ), ἔ-
„ σονται (ξσε, ρχψ) πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ βάσεις (αγβ, ιπυ).

Ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα ξσε, αβγ παράλληλα εἰσὶ, τέμνονται δὲ ὑπὸ ἐπιπέδων βζγ, αζβ, αζγ, ἔσονται αἱ κοιναὶ τομαὶ σε, βγ, ϗ ξσ, αβ, ϗ ξε, αγ (1) παράλληλοι· Ἄρα αἱ ὑπὸ ξσε, αβγ, ϗ σξε, βαγ, ϗ ξεσ, αγβ, ἑκάϛη ἑκάϛη (2) ἴσαι εἰσί· διὸ αἱ τομαὶ ξσε, αβγ, εἰσὶν (3) ὅμοιαι· τὸν αὐτὸν τρόπον ὁμοίως εἶναι δείξω ϗ τὰς τομὰς ρχψ, ιυπ· Ὥϛε ὁ λόγος τῆς τομῆς αβγ πρὸς τὴν ξσε, διπλασίων (4) ἐϛὶ τȣ̃ λόγȣ τῆς πλευρᾶς βγ πρὸς τὴν πλευρὰν σε, καὶ ὁ λόγος τῆς τομῆς ιυπ πρὸς τὴν ρχψ, διπλασίων ἐϛὶ τȣ̃ λόγȣ τῶν Πλευρῶν υπ πρὸς χψ· Ἀλλ᾽ οἱ λόγοι βγ : σε, ϗ υπ : χψ, οἱ αὐτοὶ εἰσὶν (ἔϛι γὰρ βγ : σε : : γζ : εζ (5), τȣτέϛιν ἐξ ὑποθ. ὡς πλ πρὸς ψλ, ἤτοι (6) ὡς υπ πρὸς ψχ), τοιγαρȣ̃ν ὁ λόγος αβγ πρὸς ξσε (7) ὁ αὐτός ἐϛι τῷ λόγῳ ιυπ πρὸς ρχψ. Ο. Ε. Δ.

Λῆμμα Β΄.

„ Τὰ ἐν τῇ Πυραμίδι (ψγαζ) τρίγωνον ἐχȣ́σῃ τὴν βάσιν εἰς ἄπειρον ἐγ- κ. 480.
„ γραφόμενα Πρίσματα, εἰς αὐτὴν τὴν Πυραμίδα ἀποτελευτᾷ.

Διαιρεθήτω ἡ τῆς Πυραμίδος πλευρὰ εἰς ὁσαȣ̃ν μέρη ἴσα ἀλλήλοις αβ, βη, ηζ· διὰ δὲ β ϗ η, γενομένων τῶν τομῶν βεπ ϗ ηδν τῇ βάσει ψαγ παραλλήλων, ἐγγεγραμμένα νοείσθω τῇ Πυραμίδι Πρίσματα τριγωνικὰ τὰ βεπ μαξ καὶ ηδνκβφ, ὧν ἔξω τῆς Πυραμίδος προεκβληθέντων, νοείσθω περὶ τὴν Πυραμίδα περιγεγραμμένα Πρίσματα γιβα, πχηβ, νθζη· Ὑπεροχαὶ δὲ τῶν περιγεγραμμένων ὑπὲρ τὰ ἐγγεγραμμένα, εἰσὶ τὰ ϛερεὰ ιμ, χκ, θη, ἅπερ ἅμα ληφθέντα ἴσα ἐϛὶ τῷ Πρίσματι γιβα· καὶ γὰρ τὸ μὲν ηθ = δβ (8), ϗ ἑπομένως θη + χκ = πχηβ, τȣτέϛι (9) μεβα· τὰ ἄρα τρία θη + χκ + ιμ = γιβα. Ἐὰν οὖν ἡ αζ Πλευρὰ εἰς ἄπειρον διαιρεθῇ, ϗ ὁ τῶν Πρισμάτων ἀριθμὸς ἐπ᾽ ἄπειρον πληθυνθῇ, ἡ αβ γενήσεται (10) οἱασȣ̃ν δοθείσης ἐλάσ-

(1) Iϛ. τȣ̃ ιά. (2) I. τȣ̃ ιά. (3) Δ. τȣ̃ ϛ΄. (4) IΘ. τȣ̃ ϛ΄. (5) Λ. Πόρ. τῆς Δ. τȣ̃ ϛ΄. (6) Αὐτ. (7) ΔΔ. τȣ̃ ε΄. (8) ΚΕ. τȣ̃ ιά. (9) Διὰ τὴν αὐτ. (10) Ἐκ τȣ̃ Β. Λήμ. τȣ̃ Σχολ. μετὰ τὴν ΙΑ. τȣ̃ ϛ΄.

σων· ἄρα καὶ τὸ Πρίσμα γιβα γενήσεται τέως παντὸς τοῦ δοθέντος ἔλαττον (1). Τῶν ἄρα περιγεγραμμένων Πρισμάτων (πολλῷ δὲ μᾶλλον τῆς Πυραμίδος ψγαζ, ἥτις μέρος οὖσα ἐστὶ τῶν περὶ αὐτὴν περιγραφομένων Πρισμάτων) ἡ ὑπεροχὴ ὑπὲρ τὰ ἐγγεγραμμένα Πρίσματα, γενήσεται παντὸς δοθέντος ἐλάσσων· καὶ ἑπομένως τὰ ἐγγεγραμμένα Πρίσματα εἰς αὐτὴν τέως (2) τὴν Πυραμίδα ἀποτελευτῶντα λήξουσιν. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ε.

κ. 481. „ Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι Πυραμίδες, καὶ τριγώνους ἔχουσαι Βάσεις, „ πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ Βάσεις (απρ, εσχ).

Κείσθω δὴ τὰ ἴσα ὕψη τῶν Πυραμίδων εἶναι τὰ αφ, εψ, ὧν εἰς μέρη ἴσα μεγέθει τε καὶ πλήθει τμηθέντων, καὶ διὰ τῶν κατὰ τὰς διαιρέσεις σημείων, γενομένων τομῶν παραλλήλων ταῖς Βάσεσι, νοείσθω ἑκατέρᾳ τῶν Πυραμίδων Πρίσματα ἐγγεγράφθαι τριγωνικὰ ἰσοπληθῆ τε, καὶ ἰσοϋψῆ· Ἤδη μὲν οὖν ἐπεὶ τὰ Πρίσματα λα, ιε, ἰσοϋψῆ ὄντα ἐστὶν, ἔσται τὸ λα Πρίσμα πρὸς τὸ ιε, ὡς Βάσις (3) λξβ πρὸς Βάσιν ινκ, τουτέστιν (4) ὡς Βάσις πρα πρὸς Βάσιν σχε· Τὸν αὐτὸν τρόπον δείξω ἕκαστα τῶν Πρισμάτων τῶν ἐν τῇ Πυραμίδι πφαρ ἐγγεγραμμένων, εἶναι πρὸς ἕκαστα τῶν ἐν τῇ σψεχ, ὡς ἡ Βάσις παρ πρὸς τὴν Βάσιν σεχ· Ἄρα (5) καὶ ἅμα πάντα πρὸς ἅμα πάντα, ὡς Βάσις πρὸς Βάσιν· καὶ ἐπειδὴ αὐτὰ (6) ἀπολήγει τέως εἰς αὐτὰς τὰς Πυραμίδας, ἔσονται καὶ αὐταὶ (7) ὡς αἱ Βάσεις. Ο. Ε. Δ.

Ἡ μὲν οὖν ἀποδοθεῖσα δεῖξις ὑποτίθησι τὰς αφ καὶ εψ Πλευρὰς ἴσας οὔσας, αὐτὰ τῶν Πυραμίδων τὰ ὕψη παριστᾶν, καὶ ἑπομένως ταῖς Βάσεσι παρ, σεχ εἶναι ὀρθάς· Τὰ ἴσα δὲ ἡ δεῖξις αὐτὴ δυνήσεται, καὶ ὅπως ἂν ἔχειν πλαγιασμοῦ πρὸς τὰς Βάσεις αἱ ἴσαι Πλευραὶ ὑποτεθεῖεν, νοουμένων δηλονότι ἀφ᾽ ἑκατέρας τῶν κορυφῶν φ καὶ ψ καθέτων ἐπὶ τὰς βάσεις, καὶ τούτων εἰς ἴσα πλήθει τε καὶ μεγέθει τεμνομένων, καὶ διὰ τῶν διαιρέσεων ἐπιπέδων ἀγομένων παραλλήλων ταῖς Βάσεσιν, ἃ δὴ καὶ τὰς Εὐθείας φα, ψε διατεμοῦσιν (8) εἰς μέρη τοῖς ἐν ταῖς Καθέτοις ὅμοιά τε, καὶ ἰσάριθμα· καὶ ἅττα καὶ Βάσεις Πρισμάτων γενήσονται ἰσαρίθμων τε καὶ ἰσοϋψῶν, τῶν ἐν ἑκατέρᾳ τῇ Πυραμίδι ἐγγεγραμμένων· διὸ δὴ καὶ τὸν αὐτὸν τρόπον τὰ τῆς δείξεως προελεύσεται, ὡς εἴπερ αἱ Εὐθεῖαι φα, ψε, ταῖς Βάσεσι παρ, σεχ κάθετοι εἶεν.

---

(1) *Δῆλον ἐκ τῆς ΚΕ. τοῦ ιά.* (2) Ὅρ. ς. τοῦ ιβ΄. (3) *Α. Πόρ. τῆς. ΛΔ. τοῦ ιά.* (4) *Λῆμ. Λ΄.* (5) *ΙΒ. τοῦ ε΄.* (6) *Διὰ τὸ Λῆμ.* (7) *Καθόλου Πόρισμ. μετὰ τὴν Β. τοῦ ιβ΄.* (8) *ΙΖ. τοῦ ιά.*

Πρότασις ϛ.

„Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔσαι Πυραμίδες, ϗ πολυγώνυς ἔχυσαι Βά- „σεις, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ Βάσεις (αβ, γζξ). κ. 482.

Ἀναλυθήτωσαν αἱ Βάσεις εἰς τὰ α, β ϗ γ, ζ, ξ, Τρίγωνα, αἱ δὲ Πυραμίδες εἰς τριγωνικὰς Πυραμίδας· καὶ δὴ ἡ Πυραμὶς αχ ἐςὶ πρὸς τὴν Πυραμ. ξψ, ὡς (1) α πρὸς ξ, ϗ ἡ Πυραμὶς βχ πρὸς τὴν Πυραμίδα ξψ, ὡς β (2) πρὸς ξ· Ἄρα αἱ Πυραμίδες ἅμα αχ ϗ βχ, τυτέςιν ἡ ὅλη αβχ πρὸς τὴν Πυραμίδα ξψ, ὡς α ϗ β ἅμα (3) πρὸς ξ. Παραπλησίῳ τῷ λόγῳ ἡ Πυραμὶς αβχ ἐςὶ πρὸς τὴν Πυραμίδα ζψ, ὡς α, β (4) πρὸς ζ, καὶ πάλιν ἡ αβχ ἐςὶ πρὸς τὴν γψ (5), ὡς α, β πρὸς γ· Ἄρα ἡ αβχ (6) ἐςὶ πρὸς τὰς τρεῖς ἅμα ξψ, ζψ, γψ, τυτέςι πρὸς ὅλην τὴν Πυραμίδα ξζγψ, ὡς α, β πρὸς ξ, ζ, γ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

Ἐντεῦθεν ἕπεται τὰς Πυραμίδας, ὧν ἴσαι αἱ βάσεις, ϗ τὰ ὕψη, ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

Πρότασις Ζ.

„Πᾶσα Πυραμὶς τριτημόριον ἐςὶ Πρίσματος, ἔχοντος τὴν βάσιν ϗ τὸ „ὕψος ἴσα,

Ἢ κατ' Εὐκλείδην εἰπεῖν „πᾶν Πρίσμα τρίγωνον ἔχον Βάσιν, διαι- „ρεῖται εἰς τρεῖς Πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνυς βάσεις ἐχύσας.

Ἔςω πρῶτον Πυραμὶς τριγωνικὴ ἡ βηαγ ἴση τήν τε βάσιν ϗ τὸ ὕψος τῷ Πρίσματι βαγζεξ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βζ, αξ, αζ· τὰ τοίνυν Τρίγωνα βζγ, βζξ (7) ἴσα· Ἄρα ἡ πυραμὶς βζγα, τῇ πυραμίδι βξζα (8) ἴση ἐςί· Διὰ τὴν αὐτὴν δὲ αἰτίαν ϗ ἡ Πυραμὶς ξεαζ ἴση ἐςὶ τῇ Πυραμίδι ξβαζ, τυτέςι τῇ Πυραμίδι βξζα, εἰσὶ γὰρ ἄμφω ἡ αὐτή· τοίνυν ϗ αἱ βζ γα ϗ ξεαζ ἴσαι εἰσί, καὶ αἱ τρεῖς ἄρα βζγα, ξεαζ, ξβαζ, ἤτοι βξζα, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί· ϗ ἑπομένως αἱ τρεῖς ἅμα τῆς μιᾶς, τυτέςι τῆς βζγα εἰσὶ τριπλασίονες. Ἀλλαμὴν αἱ τρεῖς συγκροτῦσι τὸ Πρίσμα βαγζεξ, τὸ ἄρα Πρίσμα τῆς Πυραμίδος βζγα, τυτέςι (9) τῆς βηαγ ἐςὶ τριπλάσιον. Ο.Ε.Δ. κ. 483.

(1) Διὰ τὴν ἀνωτ. (2) Διὰ τὴν ἀνωτ. (3(ΚΔ. τῦ ε'. (4) Διὰ τὴν ἀνωτ. ϗ τὴν ΚΔ. τῦ ε'. (5) Διὰ τὰς ῥηθ. (6) ΚΔ. τῦ ε'. (7) ΛΔ. τῦ α'. (8) Πόρ. ἀνωτ. (9) Πόρ ἀνωτ.

κ. 484. Ἀλλ᾽ ἔςω Πυραμὶς ὁποιαδήποτε, ἔχȣσα βάσιν τε κ̀ ὕψος τὰ αὐτὰ σὺν τῷ Πρίσματι αεζθ, κ̀ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βγ, βξ, βε, κ̀ αἱ νι, νη, νθ. Ἀναλύσας οὖν τὸ μὲν Πρίσμα εἰς τριγωνικὰ Πρίσματα, τὴν δὲ Πυραμίδα εἰς τριγωνικὰς Πυραμίδας, ὄψει τὸ προτεθὲν ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀποδείξεως. Ἕκαςον γὰρ τῶν μερῶν τȣ̃ πολυγωνίȣ Πρίσματος, τριπλάσιον ἔςαι ἑκάςȣ μέρȣς τῆς πολυγωνίȣ Πυραμίδος (τȣτέςιν ἕκαςον τριγωνικὸν Πρίσμα ἑκάςης τριγωνικῆς Πυραμίδος ἔςαι τριπλάσιον), καὶ ὅλον ἄρα τὸ πολυγώνιον Πρίσμα, ὅλης τῆς πολυγωνίȣ Πυραμίδος τριπλάσιον ἐςί. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Η.

κ. 485. „Αἱ ὅμοιαι Πυραμίδες (ξαγβ, κθιν) ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν „ὁμολόγων πλευρῶν (αβ, θν).

Ἐχέτωσαν Α΄. τὴν βάσιν τρίγωνον, καὶ δὴ τῶν Παραλληλογράμμων αμ κ̀ θπ πληρȣμένων, ἐπὶ τȣ́των ἀνιςάσθω Παραλληλεπίπεδα τὰ αη, θλ, ἐν ὑψώματι τῷ τῶν Πυραμίδων, ἅττα, τῶν πυραμίδων ὁμοίων ὑποτιθεμένων, κ̀ αὐτὰ ὅμοια (1) ἐςίν· ἀχθήτωσαν δὲ κ̀ εζ, ρφ, καὶ διὰ τῶν εζ, γβ, καὶ τῶν ρφ, ιν, τμηθήσεται (2) τὰ Παραλληλεπίπεδα εἰς Πρίσματα δύο ἀλλήλοις ἴσα, ὧν ἑκάτερον χωρὶς τριπλάσιον (3) ἐςὶν ἑκατέρας τῶν Πυραμίδων ξαγβ, κθιν· ὥςε ἑκάτερον ἅμα, τȣτέςιν ὅλα τὰ Παραλληλεπίπεδα αη, θλ, ἑξαπλάσια εἶναι τῶν Πυραμίδων. Αἱ τοίνυν Πυραμίδες τοῖς παραλληλεπιπέδοις ἀνάλογον εἰσίν· ἀλλὰ τȣ́των ὁ λόγος (4) τριπλασίων ἐςὶ τȣ̃ λόγȣ τῶν πλευρῶν αβ, θν, ἄρα κἀκείνων. Ο. Ε. Δ.

κ. 486. Ὡς εἴπερ αἱ ὅμοιαι Πυραμίδες τῶν πολυγωνίων τύχωσιν, ἀναλυέσθωσαν εἰς τριγώνȣς αρ, βρ, γρ, κ̀ ξκ, εκ, ζκ, κ̀ ῥᾷςα δειχθήσεται τὴν μὲν (5) αρ ὁμοίαν εἶναι τῇ ξκ, τὴν δὲ βρ τῇ εκ, τὴν δὲ γρ τῇ ζκ. Διὰ γὰρ τὰ ὅμοια Τρίγωνα (6) α κ̀ ξ, κ̀ μιρ, ψφκ (7), ἔςαι (8) δμ : μι :: ψυ : ψφ, καὶ μι : μρ :: ψφ : ψκ· ἄρα (9) δμ : μρ :: ψυ : ψκ, καὶ ἀνάπαλιν (10) μρ : μδ :: ψκ : ψυ· τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται κ̀ μδ : ρδ :: ψυ : υκ, ἄρα (11) μρ : ρδ :: ψκ : υκ, καὶ (12) ὅμοια ἄρα ἐςὶ τὰ Τρίγωνα μρδ, ψκυ· ἔνθεντοι κ̀ αἱ πυραμίδες αρ, ξκ αἱ ὑπὸ τῶν ὁμοίων Τριγώνων τῷ πλήθει ἴσων περιεχόμεναι, ὅμοιαι (13) εἰσίν. Ὡσαύτως διὰ τὰ ὅ-

---

(1) Θ. Ὅρ. ιά. (2) ΚΗ. τȣ̃ ιά. (3) Διὰ τὴν ἀνωτ. (4) ΛΓ. τȣ̃ ιά. (5) Ἐκ τῆς Κ. κ̀ Ε. τȣ̃ ε΄. (6) Κ. τȣ̃ ς΄. (7) Ὅρ. Θ. τȣ̃ ιά. (8) Ὅρ. Α. τȣ̃ ς΄. (9) ΚΒ. τȣ̃ ε΄. (10) Σχόλ. τῆς ΙΕ. τȣ̃ ε΄. (11) ΚΒ. τȣ̃ ε΄. (12) Ε. τȣ̃ ς. (13) Ὅρ. Θ. τȣ̃ ιά.

μοια Τρίγωνα β ἢ ε, ἢ γ ἢ ζ, δειχθήσεται τὰ Τρίγωνα δχρ, υσκ, ὅμοια ἀλλήλοις εἶναι, κἀντεῦθεν ἢ τὴν Πυραμίδα βρ ὁμοίαν τῇ εκ, καὶ τέως ἢ τὴν γρ ὁμοίαν τῇ ζκ. Ἄρ' οὖν διὰ τὸ Α΄. μέρος ὁ λόγος τῶν Πυραμίδων αρ, ξκ, τριπλασίων ἐςὶ τȣ λόγȣ τῆς ιμ πρὸς τὴν ψφ· καὶ ὁ λόγος τῶν Πυραμίδων βρ, εκ, τριπλασίων ἐςὶ τȣ λόγȣ τῆς μχ πρὸς τὴν ψσ, τȣτέςιν αὖθις τȣ λόγȣ ιμ πρὸς φψ· ἢ ὁ λόγος τῶν πυραμίδων γρ, ζκ τριπλασίων ἐςὶ τȣ λόγȣ χπ πρὸς στ, τȣτέςιν αὖθις τȣ ιμ πρὸς φψ· καὶ ἐπεὶ τοίνυν ὁ λόγος ἑκάςης πρὸς ἑκάςην, τριπλασίων ἐςὶ τȣ λόγȣ ιμ πρὸς φψ, ἢ ὁ λόγος ἄρα (1) ἁπασῶν πρὸς ἁπάσας (τȣτέςιν ὁ λόγος τῆς ὅλης Πυραμίδος αβγρ πρὸς τὴν ὅλην Πυραμίδα ξεζκ) τριπλασίων ἔςαι τȣ λόγȣ τῆς πλευρᾶς ιμ πρὸς τὴν πλευρὰν φψ. Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α.

Καὶ ἐὰν ἄρα ὦσι τέτταρες Εὐθεῖαι συνεχῶς ἀνάλογον, ἔςαι ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, ὡς ἡ ἐπὶ τῆς πρώτης Πυραμὶς πρὸς τὴν ἐπὶ τῆς δευτέρας ὁμοίαντε, ἢ ὁμοίως ἀναγεγραμμένην· Καὶ ἐὰν ἄρα δεδομέναι ὦσι τῶν ὁμοίων πυραμίδων αβγρ, ξεζκ, αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ μχ, ψσ, γενομένων (ὅρα τὸ ἀνωτ. Σχῆμ.) συνεχῶς ἀνάλογον τῶν μχ, ψσ, η, θ, ἔςαι Πυραμὶς ἡ αβγρ πρὸς Πυραμίδα τὴν ξεζκ, ὡς ἡ μχ πρὸς τὴν θ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Θ.

„Τῶν ἴσων Πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν „ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἐκεῖναι ἴσαι εἰσί.

Μέρος Α΄. Ἔςωσαν πρῶτον αἱ ἴσαι Πυραμίδες τρίγωνοι βαγξ, θκνλ, σχ. 487. καὶ πληρωθέντων τῶν Παραλληλογράμμων βε, θρ, ἐπὶ τȣτων ἀνιςάσθω Παραλληλεπίπεδα τὰ βζ, θφ· ἔσονται δὲ ταῦτα (ὡς ἐπὶ τῆς Η΄. ἡμῖν ἀποδέδεικται) τῶν ἐξ ὑποθ. ἴσων Πυραμίδων ἑξαπλασίονα, ἢ ἑπομένως ἀλλήλοις ἴσα. Εἰσὶ δὲ τῶν Παραλληλεπιπέδων τȣτων ὕψη τὰ βα, θκ, ἅττα καὶ τῶν Πυραμίδων, βάσεις δὲ αἱ βε, θρ διπλασίονες (2) τῶν βάσεων τῶν Πυραμίδων βγξ, θνλ, διὸ δὴ ἢ πρὸς ταύτας ἀνάλογον· ἐπειδὴ ȣ̃ν διὰ τὴν τῶν Παραλληλεπιπέδων ἰσότητα, ἔςιν ὡς βε πρὸς θρ, ȣ̃τως (3) ἀντιςρόφως θκ πρὸς βα, ἔςαι δήπȣ ἢ βάσις βγξ πρὸς βάσιν θνλ, ὡς θκ ὕψος πρὸς βα ὕψος. Ο. Ε. Δ.

Ὡς εἴπερ αἱ ἴσαι Πυραμίδες πολυγωνίȣς τὰς Βάσεις ἔχȣσι, τῶν αὐτῶν

---

(1) *ΙΒ*. τȣ ἑ. (2) *ΛΔ*. τȣ ά. (3) *ΛΔ*. τȣ ιά.

μενόντων ὑψῶν (1), μεταμορφέσθωσαν εἰς τριγώνους, καὶ ἔσονται αὗται (2) ἐκείναις ἴσαι· ἀλλ' αἱ οὕτω μεταμορφωθεῖσαι Πυραμίδες, διὰ τὰ ἤδη δειχθέντα, ἀντιπεπόνθασι τὰς βάσεις καὶ τὰ ὕψη· ἄρα κἂν ὦσι πολύγωνοι αἱ Πυραμίδες, ἀντιπεπονθείας ἕξουσι τὰς βάσεις τοῖς ὕψεσιν. Ο. Ε. Δ.

Μέρος Β'. Ἐὰν αἱ Βάσεις τριγωνικαὶ ὦσιν, ἐπεὶ ἤδη τίθεται βγξ : θνλ : : θκ : βα, ἔσαι καὶ βε : θρ : : θκ : βα· ὥστε τὰ Παραλληλεπίπεδα βζ, θφ (3) ἴσα εἰσί, καὶ ἑπομένως καὶ τὰ τούτων ἑκτημόρια ἀλλήλοις ἴσα ἐστὶ, τουτέστιν αἱ πυραμίδες βαγξ, θκνλ. Ο. Ε. Δ.

Ἐὰν δὲ Πυραμίσι πολυγωνίους τὰς βάσεις ἐχούσαις, ἀντιπεπονθεῖαι ὦσιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, μεταμορφέσθωσαν ἐκεῖναι εἰς βάσεις τριγώνους (4) τὰς βγξ, θνλ, ἴσας ταῖς πολυγώνοις, καὶ ἔσαι δὴ βγξ πρὸς θνλ, ὡς θκ πρὸς βα. Οὕτω δέ τοι αἱ τριγωνικαὶ Πυραμίδες, κατὰ τὰ δεδειγμένα, ἔσονται ἴσαι· τοιγαροῦν καὶ αἱ πολύγωνοι Πυραμίδες, αἱ ταῖς τριγωνικαῖς (5) ἴσαι εἰσὶ, καὶ αὐταὶ ἀλλήλαις ἐκ τοῦ ἀκολούθου ἔσονται ἴσαι.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

Τὰ κατὰ τῶν Πυραμίδων ἀποδειχθέντα ἐν Προτ. ς'., καὶ Η'., καὶ Θ'., αὐτὰ ταῦτα προσήκοντα ἐστὶ καὶ οἱοιτδήποτε Πρίσμασι, διὰ τὸ ταῦτα (6) τριπλασίονα εἶναι τῶν Πυραμίδων, τῶν βάσιν τε καὶ ὕψος τὰ αὐτὰ ἐχουσῶν.

Α'. Τὰ ἰσοϋψῆ Πρίσματα ἀναλόγως ἔχει ταῖς βάσεσι, τοῦτο γὰρ δὴ περὶ τῶν Πυραμίδων ἐδείχθη Πρ. ς'.

Β'. Τῶν ὁμοίων Πρισμάτων ὁ λόγος τριπλασίων ἐστὶ τοῦ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· τοῦτο γὰρ δὴ καὶ περὶ τῶν Πυραμίδων ἐδείκνυτο ἐν Προτ. Η'., καὶ δοθεισῶν τοίνυν τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τῶν ὁμοίων Πρισμάτων, εὑρεθήσεται τῶν Πρισμάτων αὐτῶν ὁ πρὸς ἄλληλα λόγος, ὃν τρόπον ἀνωτ. καὶ περὶ τῶν Πυραμίδ. ἐλέγετο (7).

Γ'. Τῶν ἴσων Πρισμάτων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ οἷς δὲ ἀντιπεπόνθασιν, ἐκεῖνα ἴσα· τὸ αὐτὸ γὰρ καὶ περὶ τῶν Πυραμ. δέδεικται Πρ. Θ'.

Θαυμάζειν δέ μοι ἔπεισιν, ὅτι ταῦτα ὁ Εὐκλείδης παρέδραμεν, ἃ τῶν περὶ τὰ εὐθύγραμμα Στερεὰ θεωρουμένων ἐστὶ τὰ κυριώτατα.

---

(1) ΚΕ. τοῦ ς'. (2) Πόρ. τῆς ς'. Πρότ. τοῦ ιβ'. (3) ΛΔ. τοῦ ια'. (4) ΚΕ. τοῦ ς'. (5) Πόρ. τῆς ς'. τοῦ ιβ'. (6) Ζ. τοῦ ιβ'. (7) Πορ. τῆς Η.

Σχόλιον Α΄.

Ἐκ τῶν ἄχρι τοῦδε ἀποδειχθέντων ἐπαχθήσεται ἡ καταμέτρησις οἱωνδήποτε Πρισμάτων καὶ Πυραμίδων.

Τὸ γάρτοι στερεὸν τοῦ Πρίσματος παράγεται, ὑπό γε τοῦ ὕψους ἐπὶ τὴν Βάσιν πολλαπλασιαζομένου· τὸ δὲ τῆς Πυραμίδος, ὑπὸ τοῦ τριτημορίου τοῦ ὕψους ἐπὶ τὴν βάσιν πολλαπλασιαζομένου.

Ἐὰν τοῦ Πρίσματος ὕψος τεθῇ ποδ. εἶναι 5, ἡ δὲ Βάσις ᾖ 25 ποδ. τετραγ., πολλαπλασιασθέντων τῶν 25 διὰ τῶν 5, ἀνακύψουσι πόδ. 125 κυβικοὶ, ἐξ ὧν τὸ τοῦ Πρίσματος στερεὸν συγκεκρότηται.

Ἔστω γὰρ δὴ Πρίσμα πολύγωνον τὸ αθ, οὗ τῇ βάσει αε, νοείσθω ἴσον τὸ Τρίγωνον βαγ, ἐφ᾽ ᾧ Πρίσμα τὸ βε ἰσοϋψὲς τῷ αθ· ἔσονται οὖν (1) τὰ βε, αθ Πρίσματα ἀλλήλοις ἴσα· Ἀλλὰ τὸ βε πρίσμα παράγεται (2) ὑπὸ τοῦ κατ᾽ αὐτὸ ὕψους αε, διὰ τῆς βάσεως βαγ πολλαπλασιαζομένου· ἄρα καὶ τὸ αθ Πρίσμα, ὑπὸ τοῦ κατ᾽ αὐτὸ ὕψους (ὅπερ ἴσον τίθεται τῷ τοῦ Πρίσματος βε) παράγεται διὰ τῆς βάσεως αε πολλαπλασιαζομένου. χ. 488.

Κἀντεῦθεν δὲ, καὶ ἐκ τῆς Ζ΄. δῆλον καὶ θάτερον· τοῦτο δὲ ἦν ὅτι τὸ στερεὸν τῆς Πυραμίδος συνίσταται ὑπὸ τοῦ τριτημορίου τοῦ ὕψους πολλαπλασιαζομένου διὰ τῆς βάσεως.

Σχόλιον Β΄.

Ἡ τῆς κολούρου Πυραμίδος αβγεσο καταμέτρησις ἔκ τε τοῦ ὕψους γε, καὶ τῶν παραλλήλων βάσεων αβγ, ξσε, καὶ τῶν ἐπ᾽ αὐταῖς ὁμολόγων Πλευρῶν βγ, σε. χ. 489.

Ἵνα ληφθῇ τὸ εζ ὕψος τοῦ ἐλλείποντος μέρους εσξζ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν Τριγώνων βγζ, σεζ, ἔσται $βγ : σε :: γζ : εζ$, καὶ ἐν διαιρ. $βγ - σε : σε :: γζ - εζ : εζ$· καὶ δοθεισῶν τοίνυν τῶν βγ, σε, καὶ γε, εὑρεθήσεται ἡ εζ· καὶ αὕτη μὲν ἡ δεῖξις τὸ ὕψος ὑποτίθησι κάθετον ὂν τῇ Πλευρᾷ τῆς πυραμίδος εἰς ταυτὸ συμπίπτειν· Ἀλλ᾽ ὅπως ἂν καὶ πίπτειν ὑποτεθείη ἡ Κάθετος, τὸ ἐπίπεδον ξσε (προεκβληθὲν εἰ δέοι), τό,τε ὕψος τῆς Πυραμίδος, καὶ τὴν πλευρὰν αὐτῆς ζγ ὁμοίως τεμεῖ, ὡς ἀεὶ εἶναι $βγ - σε : σε$, ὡς τὸ τῆς κολούρου ὕψος Πυραμίδος, πρὸς τὸ τοῦ μέρους ὕψος τοῦ ἐλλείποντος· Καὶ τούτου τοίνυν τοῦ ὕψους οὕτως εὑρεθέντος τὸ τριτημόριον, τῇ βάσει ἐπιπολλα-

(1) Α. Πόρ. ταυτ. (2) Σχόλ. Α. τῆς Μ. τοῦ ιά.

πλασιαθὲν τῇ ἐλάσσονι ἔσε, δώσει τὸ ςερεὸν τῦ μέρες ἔσεζ τῦ ἐλλείποντος. Ἤν δὲ τῷ ὕψει τῦ ἐλλείποντος μέρες τῆς κολέρε Πυραμίδος προςεθῇ, τὸ ὕψος αὐτῆς τῆς κολέρε τόγε ὄν, παρέςαι δὴ τὸ τῆς ὁλοχερῦς Πυραμίδος ὕψωμα, οὗ τὸ τριτημόριον ἐπὶ τῇ μείζονι βάσει αβγ ἐπιπολλαπλασιαθὲν, τῆς ὅλης πυραμίδος παρέξει τὸ ςερεὸν, ἀφ᾽ ὗ, τῦ ἐλλείποντος ἀφαιρεμένε, τὸ τῆς Κολέρε μόνον ὑπολειφθήσεται.

Λῆμμα πρὸς τὴν ἐφεξῆς Ι΄.

„ Αἵ τε Πυραμίδες ϰ τὰ Πρίσματα, τὰ τοῖς Κώνοις ϰ τοῖς Κυλίνδροις εἰς „ ἄπειρον ἐγγραφόμενα, εἰς τὰς Κώνες αὐτὰς ϰ τὰς Κυλίνδρες ἀποτελευτῶσι.

Δείκνυται ὥσπερ τὸ Λῆμμα τὸ πρὸ τῆς Β΄. Προτάσεως, διά τε τῆς ς΄. Προτ. δηλονότι, ϰ τῦ Α΄ Πορίσμ. τῦ μετὰ τὴν Θ΄· εἴπερ ἀμέλει καθάπερ ἐν ἐκείνοις τὰ τῷ Κύκλῳ ἐγγεγραμμένα ἐπίπεδα, ὕτως ἐν τύτοις τάς τε Πυραμίδας ϰ τὰ Πρίσματα, ἅττα ἐπὶ τῶν τοιύτων ἐπιπέδων, ὡς ἐπὶ βάσεων ἐφιςάμενα ᾖ, ἀπό τε τῦ Κώνυ ϰ τῦ Κυλίνδρυ ἀφαιρεθείη.

Πρότασις Ι.

„ Πᾶς Κῶνος Κυλίνδρυ τρίτον μέρος ἐςὶ, τῦ τὴν αὐτὴν Βάσιν ἔχοντος αὐτῷ, ϰ ὕψος ἴσον.

σχ. 490. Ἐπὶ τῆς Βάσεως γλ, ἐγγεγραμμένον νοείσθω Πολύγωνον κανονικὸν ὁποσωνῦν πλευρῶν, ϰ ἐπ᾽ αὐτῷ ὡς ἐπὶ Βάσεως, τῷ μὲν Κώνῳ Πυραμὶς, τῷ δὲ Κυλίνδρῳ Πρίσμα· καὶ ἔςαι δὴ (1) ἡ Πυραμὶς τριτημόριον τῦ Πρίσματος. Ἐὰν δὲ αὖθις ἐγγραφῇ τῷ Κύκλῳ Πολύγωνον διπλάσιον τὰς πλευρὰς, ἐπ᾽ αὐτῷ δὲ τῷ Πολυγώνῳ ἐγγραφῇ Πυραμὶς μὲν τῷ Κώνῳ, Πρίσμα δὲ τῷ Κυλίνδρῳ, ἔςαι αὖθις ἡ Πυραμὶς τριτημόριον ῦσα τῦ Πρίσματος. τῦθ᾽ ὕτω δὲ γενήσεται ἐς ἀεί· Καὶ ἐπεὶ οὖν αἱ μὲν Πυραμίδες εἰς τὸν Κῶνον (2), τὰ δὲ Πρίσματα εἰς τὸν Κύλινδρον ἀποτελευτῶσιν, ἔςαι δὴ ϰ ἡ Κῶνος τριτημόριον τῦ Κυλίνδρυ (3). Ο. Ε. Δ.

Σχόλιον.

Σημειωτέον δὲ, ὡς αὕτη τε ϰ αἱ μετ᾽ αὐτὴν δύο Προτάσεις, ὐ μόνοις τοῖς ὀρθοῖς Κώνοις τε ϰ Κυλίνδροις, ἀλλὰ ϰ τοῖς ὁπωσῦν πλαγίοις ἀνήκυ-

---

(1) Ζ. τῦ ιβ΄. (2) Διὰ τὸ ἀνωτ. Λῆμμα. (3) Διὰ τὸ καθόλυ Πόρισμ.

σαι εἰσὶν, εἰ ϗ τὰ σχήματα ὀρθὲς μόνον παρίςησιν· ἐπιφέρονται γὰρ ἐξ ὧν ἔχεσι πάθη αἵτε Πυραμίδες, ϗ τὰ Πρίσματα, οὐ τὰ ὀρθὰ μόνα, ἀλλὰ ϗ τὰ οἱονδήτινα τρόπον πλαγιάζοντα.

Πρότασις ΙΑ.

„Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος (βαζ, πχρ) ὄντες Κῶνοι ϗ Κύλινδροι, πρὸς „ἀλλήλες εἰσὶν, ὡς αἱ βάσεις (γλ, σε). κ. 491.

Αἱ Πυραμίδες, αἱ τοῖς ἰσοϋψέσι Κώνοις ἐγγεγραμμέναι, εἰσὶν (1) ὡς αἱ βάσεις. Ἀλλ' αἱ Πυραμίδες εἰς τὲς Κώνες τέως ἀποτελευτῶσιν (2)· ἄρα ϗ οἱ Κῶνοι (3) εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· Ἐπειδὴ δὲ οἱ τῶν Κώνων Κύλινδροι, τῶν τὴν αὐτὴν Βάσιν ἐχόντων, ϗ ὕψος ἴσον, τριπλάσιοι εἰσὶν, ἔσονται δήπε ϗ αὐτοὶ ὡς αἱ Βάσεις. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

Τὸν αὐτὸν δὲ δειχθήσεται τρόπον, ϗ τὰ Πρίσματα, ϗ τὲς Κυλίνδρες, ὧν ἴσον τὸ ὕψος, τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον ταῖς Βάσεσι· μᾶλλον δὲ ϗ ὁποιαδήποτε Σώματα κυλινδροειδῆ, ἀλλήλοις ἰσοϋψῆ, ἡλίκα δηλ. ἐξ ὁποιωνῦν ἐπιπέδων, ἐπὶ τῷ αὐτῷ πολλαπλασιαζομένων ὕψει παραγόμενα, εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ Βάσεις. Ὡσαύτως δὲ ϗ περὶ τῶν Πυραμίδων καὶ τῶν Κώνων τῶν ἰσοϋψῶν, ναιμὴν καὶ τῶν ὁποιωνδήποτε Κωνοειδῶν συλλογιςέαν.

Πρότασις ΙΒ.

„Οἱ ὅμοιοι Κῶνοι ϗ Κύλινδροι (βαζ, πψρ) πρὸς ἀλλήλες ἐν τριπλα„σίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι Διαμέτρων (βζ, πρ).

Ὅρα τὰ ἐν τῇ Ι'. ϗ ΙΑ'. Προτ. Σχήματα.

Ταῖς τῶν ὁμοίων Κώνων βάσεσιν ἐγγεγράφθω Πολύγωνα κανονικὰ ὁμώνυμα, ϗ διὰ τῦτο ὅμοια (εἰ δὲ οἱ ὅμοιοι Κῶνοι τῶν σκαληνῶν τύχωσιν, ὅτω ταῖς κατ' αὐτὲς βάσεσι τὰ Πολύγωνα ἐγγεγράφθω, ὡς τὴν κλίσιν τῶν Ἀξόνων τὴν αὐτὴν ἔχειν θέσιν, ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς, ἢ τὰς Γωνίας ἑκατέρε τῶν Πολυγώνων), ἐπὶ δὲ τετωνὶ τῶν Πολυγώνων Πυραμίδες ἀνεςάθωσαν τοῖς Κώνοις ἐγγεγραμμέναι· λέγω δὴ ὅτι ϗ αὗται ὅμοιαι ἔσονται, ὃ ϗ δεῖξαι οὐ δυσχερές· ὥςε τέτων ὁ λόγος τριπλασίων ἂν εἴη (4) τῦ λόγε τῶν Πλευρῶν

(1) ς. τῦ ιβ'. (2) Λῆμμα τὸ πρὸ τῆς Ι'. (3) Καθόλε Πόρισμα. (4) Η. τῦ ιβ'.

βλ, πε, τετέστι (1) τε λόγε τῶν Διαμέτρων βζ, πρ· Εὔθεντοι ἐπεὶ αἱ Πυραμίδες (2) εἰς τὲς Κώνες ἀποτελευτῶσιν, ἔςαι ὁ τῶν Κώνων λόγος (3) τριπλασίων τε λόγε τῶν Διαμέτρων βζ, πρ. Ο. Ε. Δ.

Περὶ δὲ τῶν Κυλίνδρων ἐδὲν ἧττον σαφὲς τὸ λεγόμενον, ὧν οἱ Κῶνοι τὸ τρίτον μέρος εἰσί.

Πόρισμα.

Προαγομένε δὲ τε λόγε τῶν Διαμέτρων βζ, πρ, τῶν ἐν ταῖς βάσεσι τῶν ὁμοίων Κώνων, ἢ Κυλίνδρων, διὰ τῶν ὅρων η, θ, ὥςε εἶναι βζ : πρ : : η : θ, ἔςαι (4) ὡς βζ πρὸς θ, ἕτως ὁ Κῶνος βαζ πρὸς τὸν Κῶνον πψρ, καὶ ἕτως ὁ Κύλινδρος βμ πρὸς τὸν Κύλινδρον ρι.

Πρότασις ΙΓ.

σχ. 492. „Εἀν Κύλινδρος (βι) ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι (τῷ ρλ) τοῖς ἀ„πεναντίον ἐπιπέδοις (βπ, γι), ἔςαι ὡς ὁ Κύλινδρος (βλ) πρὸς τον Κύλιν„δρον (ρι), ἕτως ὁ Α'ξων (αξ) πρὸς τὸν Α'ξονα (ξζ).

Δείκνυται ὡς ἡ Α'. τε ϛ'.

Τὸ δὲ Θεώρημα ἐχ ἥκιςα ϗ περὶ τῆς Ε'πιφανείας ἀληθεῦον ἐςί.

Εἀν γὰρ ὁ Α'ξων ξζ εἰς ὁςαδήποτε μέρη ἴσα διαιρεθῇ, ϗ διὰ τῶν διαιρέσεων ἐπίπεδα ἀχθῇ ταῖς βάσεσι ρλ, γι παράλληλα, διαιρεθῇ δὲ ϗ ὁ Κύλινδρος, ϗ δὴ ϗ ἡ κυλινδρικὴ Ε'πιφάνεια ρι, εἰς μέρη ἰσάριθμα τοῖς εἰς ἅπερ ὁ Α'ξων ξζ διήρηται, ὧν ἕκαςον ἔντι τῶν τε ξζ ἄξονος μερῶν ἀντὶ ἄξονος ἔχοι, ἔσονται οἱ ἰσοϋψεῖς Κύλινδροι, ϗ ἐκ τε ἀκολέθε, οἱ εἰς ἒς διήρηται ὁ Κύλινδρος ρι (5), ὡς αἱ Βάσεις, τετέςιν ἀλλήλοις ἴσοι. Ο'τι δὲ δὴ ϗ αἱ κυλινδρικαὶ Ε'πιφάνειαι, εἰς ἃς ἡ τε ρι Κυλίνδρε Ε'πιφάνεια διαιρεῖται, ἴσαι ϗ αὐταὶ ἀλλήλαις εἰσὶ, φανερὸν ἐκ τῆς ἀκριβὲς ἐφαρμόσεως, ἐξ ἧς ἐδὲν ἧττον ϗ ἡ τῶν Κυλινδρίων ἰσότης ἐλέγχεται. Τοιγαρὲν ὅ,τε Κύλινδρος, ϗ ἡ κατ' αὐτὸν Ε'πιφάνεια, εἰς μόρια κατατέμνεται τοῖς εἰς ἅπερ διαιρεῖται ὁ Α'ξων ξζ ὅμοια. Εἀν τοίνυν ϗ ἀπὸ τε Α'ξονος ξα, τὸ τε Α'ξονος ξζ ὑποτεθὲν μόριον ἀφαιρεθῇ ὁσάκις ἂν ἐξῇ, διὰ δὲ τῶν σημείων τῶν ἐπιζευγνύντων τὰ μόρια, ἐπίπεδα ἀχθῇ τοῖς ἀπεναντίον βπ, ρλ παράλληλα, πρόδηλον ὅτι τοσάκις ἐν τῷ ἡγεμένῳ Α'ξονι αξ, τὸ μόριον τε ἐπομένε Α'ξονος ξζ περιεχόμενον

(1) Β. Πόρ. τῆς Α. τε ιβ'. (2) Λῆμ. τὸ πρὸ τῆς Ι. τε ιβ'. (3) Πόρ. καθόλε. (4) Ο'ρισμ. Ι. τε ε'. (5) ΙΑ. τε ιβ'.

κείσεται, ὁσάκις ἐν τῷ ἡγεμένῳ βλ Κυλίνδρῳ, ἢ τῇ κυλινδρικῇ Ἐπιφανείᾳ. τὸ ὅμοιον μόριον τȣ̃ ἑπομένȣ Κυλίνδρȣ, ἢ τῆς κυλινδρικῆς Ἐπιφανείας ρι. Ἄρα ὁ Ἄξων αξ (1) ἐςὶ πρὸς τὸν Ἄξονα ξζ, ὡς ὁ Κύλινδρος βλ πρὸς τὸν Κύλινδρον ρι, ἢ ϗ ὡς ἡ κυλινδρικὴ Ἐπιφάνεια βλ πρὸς τὴν κυλινδρικὴν Ἐπιφάνειαν ρι. Ο. Ε. Δ.

Σχόλιον.

Ἡ δὲ Πρότασις ȣ̓δὲν ἧττον χώραν ἔχει κἀπὶ τῶν πλαγίων Κυλίνδρων, ἢ ἐπὶ τῶν ὀρθῶν. Κἀπ᾽ ἐκείνων γὰρ τὰ τȣ̃ Ἄξονος μόρια ξζ, ὁμοίαν ἔχȣσι τὴν ἐπὶ τὰς ἰδίας Βάσεις κλίσιν, ἐν τοῖς Κυλινδρίοις, εἰς ἃ κατατέμνεσθαι ὑποτίθεται ὁ Κύλινδρος ρι ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων τῶν ταῖς βάσεσι παραλλήλων. Ταύτητοι ϗ δύω τὰ τυχόντα ἐντεθέντα ἀλλήλοις προσεφαρμόσει, ϗ ȣ̓͂τω τάτε Κυλίνδρια ταῦτα, ϗ τȣ́των ἔτι αἱ Ἐπιφάνειαι, μόρια ἔςαι ὅμοια τȣ̃τε Κυλίνδρȣ, ϗ τῆς κατ᾽ αὐτὸν Ἐπιφανείας ρι, τοῖς μορίοις τȣ̃ Ἄξονος ξζ ἰσάριθμα· καὶ ἑπομένως ἀπὸ τȣ̃ Κυλίνδρȣ, ἢ τῆς κυλινδρικῆς Ἐπιφανείας βλ, τοσάκις ληφθῆναι δυνάμενα, ὁσάκις ϗ τὰ τȣ̃ Ἄξονος μόρια τȣ̃ ξζ, ἀπὸ τȣ̃ ἄξονος ξα· Ἔνθεντοι ἡ αὐτὴ ὅλως ἔςαι ἀπόδειξις ϗ τȣ̃ Κυλίνδρȣ μὴ ὀρθȣ̃, πλαγιωτέρȣ δὲ τυγχάνοντος.

Πόρισμα.

Κἀντεῦθεν τȣ̃ Κυλίνδρȣ δι᾽ ἐπιπέδων τεμνομένȣ παραλλήλων ταῖς βάσεσι, ἔςαι τὰ μέρη βλ, ρι, τοῖς αὐτῶν ὕψεσιν ἀνάλογον. Ἐὰν γὰρ ὁ Κύλινδρος τῶν ὀρθῶν ᾖ, τὸ πρᾶγμα καθ᾽ αὐτὸ δῆλον, τὰ γὰρ ὕψη ȣ̓͂τως αὐτὰ τȣ̃ Ἄξονος τυγχάνει τὰ Τμήματα αξ, ξζ· εἰ δὲ δὴ πλάγιος, ἀγέσθω Εὐθεῖα ταῖς βάσεσι κάθετος, ϗ φανερὸν ὅτι ὁμοίως τῷ Ἄξονι ϗ αὐτὴ ὑπὸ τȣ̃ παραλλήλȣ ταῖς βάσεσιν ἐπιπέδȣ κατατμηθήσεται (2). Καὶ ἑπομένως ἐπεὶ τὰ μέρη βλ, ρι εἰσὶν (3) ὡς τὰ Τμήματα τȣ̃ Ἄξονος, ἔσονται δὴ ϗ ὡς τὰ Τμήματα τῆς Καθέτȣ, τȣτέςιν ὡς τὰ αὐτῶν ἐκείνων ὕψη. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΙΔ.

Οἱ ἐπὶ ἴσων Βάσεων (ηθ, μπ) ὄντες Κῶνοι τε ϗ Κύλινδροι, πρὸς ἀλλήλȣς εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη (σζ, λψ). κ. 493.

Ἀποτετμήσθω ἀπὸ τȣ̃ ὑψηλοτέρȣ Κυλίνδρȣ αρ, Κύλινδρος ὁ αξ, ἔ-

---

(1) Διὰ τὸ τῶν ἴσων λόγων γνώρισμα. (2) ΙΖ. τȣ̃ ια΄. (3) Διὰ τὸ Σχόλ. τῆς παρȣ́σ.

χων ὕψος τὸ λε ἴσον τῷ σζ, ϗ ἕτως οἱ Κύλινδροι αξ, γι (1) ἔσονται ἴσοι· ἐπειδὴ δὲ ὁ Κύλινδρος αξ ἐςὶ πρὸς τὸν Κύλινδρον αρ, ὡς (2) λε πρὸς λψ, ἔςαι (ἐπεὶ λε (3) ϗ σζ ἴσαι εἰσίν) ὡς σζ πρὸς λψ. Ο. Ε. Δ.

Τῦ τοίνυν Κυλίνδρȣ γι πρὸς τὸν Κύλινδρον αρ ἔχοντος, ὡς ἔχει ἡ σζ πρὸς τὴν λψ, ϗ τὸ τριτημόριον τῦ γι Κυλίνδρȣ, πρὸς τὸ τριτημόριον τῦ αρ, τȣτέςιν (4) ὁ γζτ Κῶνος πρὸς τὸν αψβ, ἔςαι ὁμοίως ὡς σζ πρὸς λψ.

Παρατηρητέον δὲ τοῖς νεανίσκοις, ὡς ἡ τῆς Προτάσεως τῆςδε ἀπόδειξις, κἀν τοῖς Κώνοις τε ϗ τοῖς Κυλίνδροις, οἳ ἂν ἐκπεπτωκότες εἶεν τῆς ὀρθότητος.

Π ό ρ ι σ μ α.

Α᾽ληθὲς δὲ τὸ θεώρημα κἀπὶ τῶν Πρισμάτων, ϗ δὴ ϗ τῶν Πυραμίδων, ἧτε ἀπόδειξις παραπλησιωτάτη. Α᾽λλὰ περὶ μὲν τῶν Πρισμάτων ἐκ τῦ Α΄. Πορίσμ. τῆς Θ΄. Προτ. τῦ ΙΒ΄ Βιβλίȣ, ϗ τῆς ΚΕ΄. Προτ, ϗ ἐκ τῦ Α΄. Πορ. τῆς ΚΔ΄ τῦ ΙΑ΄. Περὶ δὲ τῶν Πυραμίδων ἐκ τȣ́τȣ, ϗ τῆς Ζ΄ τῦ ΙΒ΄.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΕ.

„Τῶν ἴσων Κώνων ϗ Κυλίνδρων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ Βάσεις τοῖς ὕψε„σι, καὶ ἀνάπαλιν.

σ. 494. Δείκν. ὁμοίως τῇ ΛΔ΄ τῦ ΙΑ΄, εἰμὴ ὅτι, ἀντὶ τῆς ΛΒ΄. ϗ ΚΕ΄. τῶν ἐκεῖσε ἀναφερομένων, ληπτέον ἐνταῦθα τὴν ΙΑ΄ ϗ ΙΓ΄, ἢ τὴν ΙΔ΄ τῦ ΙΒ΄.

Μέρος Α΄. Ο᾽ρθοὶ πρῶτον οἱ Κύλινδροι ὑποτιθέμενοι, ἐὰν ὦσιν ἰσοϋψεῖς, φανερὸν ὅτι αὐτοῖς καὶ αἱ Βάσεις (διὰ τὴν τῶν Κυλίνδρων καθ᾽ ὑπόθ. ἰσότητα) ἔσονται (5) ἴσαι Ο῞θεν ἕτως ἀληθεύει τὸ προτεθέν.

Εἰδὲ δὴ τȣ́των τὰ ὕψη ἀνίσως ἔχει, ἀπὸ τῦ μείζονος λψ ληπτέον τὸ λε, ἴσον τῷ πγ ἐλάσσονι, διὰ δὲ τῦ ε ἀκτέον τὸ ἐπίπεδον χξ, παράλληλον πρὸς τὸ μπ· καὶ τότε δὴ ἡ Βάσις μπ ἐςὶ πρὸς τὴν Βάσιν υτ (6), ὡς ὁ Κύλινδρος αξ πρὸς τὸν Κύλινδρον ζδ, τȣτέςιν (ἐπεὶ οἱ Κύλινδροι αρ, ζδ, ἴσοι εἶναι ὑποτίθενται) ὡς ὁ Κύλινδρος αξ πρὸς τὸν Κύλινδρον αρ, τȣτέςιν (7) ὡς τὸ ὕψος λε πρὸς τὸ ὕψος λψ· ϗ (διὰ τὰς λε ϗ πγ ἴσας ἕσας) ἀντιςρόφως, ὡς τὸ ὕψωμα πγ πρὸς τὸ ὕψωμα λψ. Ο. Ε. Δ.

Α᾽λλ᾽ ἔςωσαν δὴ οἱ Κύλινδροι, ὡς ἂν βȣ́λοιο πλάγιοι, ἀνιςάσθωσαν δὲ ἐπὶ τῶν αὐτῶν Βάσεων, ϗ ἐν τῷ αὐτῷ ὕψει Κύλινδροι ὀρθοὶ, ϗ τȣ́ταις ἴσοι

---

(1) *ΙΑ.* τῦ ιβ΄. καὶ Σχόλ. *Ι.* τῦ ιβ΄. (2) *Πόρ.* ἀνωτ. (3) *Ἐκ* κατ. (4) *Ι.* τῦ ιβ΄. (5) *ΙΑ.* τῦ ιβ΄. (6) *Διὰ* τὴν αὐτ. (7) *ΙΔ.* τῦ ιβ΄.

(1) ἔσονται οἱ πλάγιοι· καὶ ἐπειδὴ οἱ ἴσοι Κύλινδροι ὀρθοὶ τυγχάνοντες, ἀντιπεπονθείας ἔχουσι τὰς Βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ οἱ πλάγιοι ἴσοι ὄντες, ὁμοίως καὶ αὐτοὶ ἀντιπείσονται. Ο. Ε. Δ.

Ἐπειδὴ δὲ καὶ οἱ ἴσοι Κῶνοι τῶν ἴσων (2) Κυλίνδρων, οἷς ἴσαι αἱ Βάσεις καὶ τὰ ὕψη, τριτημόρια εἰσί, καὶ τούτοις ἄρα αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν ἀντιπείσονται.

Μέρος Β΄. Ἀλλὰ γὰρ ἔσω τῶν ὀρθῶν Κυλίνδρων τὰ ὕψη ἄνισα· ἀπὸ δὲ τοῦ μείζονος λψ, ληφθήτω τῷ ἐλάσσονι πρ ἴσον τὸ λε, καὶ διὰ τοῦ ε ἀχθήτω ἐπίπεδον τὸ χξ τῇ Βάσει παράλληλον· Ὁ μὲν οὖν Κύλινδρος αξ ἐστὶ πρὸς τὸν Κύλινδρον ζδ (3), ὡς μπ πρὸς υτ, τουτέστιν ἐξ ὑποθ. ὡς πγ (4), ἢ γοῦν λε πρὸς λψ, ἢ ὡς (5) αξ πρὸς αρ· ἄρ' οὖν οἱ Κύλινδροι (6) αρ καὶ ζδ ἴσοι εἰσί· Καὶ ἐπεὶ οἱ πλάγιοι τῶν Κυλίνδρων τοῖς ὀρθοῖς ἴσοι εἰσὶν, ὧν ἴσα τὰ ὕψη καὶ αἱ Βάσεις (7)· καὶ οὗτοι ἄρα, εἴπερ αὐτοῖς ἀντιπεπόνθασιν αἱ Βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι ἔσονται. Ο. Ε. Δ.

Οἵτε Κῶνοι τριτημόρια ὄντες (8) τῶν Κυλίνδρων τῶν ἰσοϋψῶν τε καὶ ἐπὶ Βάσεων ἴσων, εἴγε αὐτοῖς ἀντιπεπόνθασιν αἱ Βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἔσονται δὴ καὶ αὐτοὶ ἀλλήλοις ἴσοι. Ο. Ε. Δ.

Σχόλιον.

Ἐπεὶ μηδὲ ἡμῖν ὁ Εὐκλείδης περὶ λόγου συνθέτου τοῦ ἐν τοῖς Σώμασιν, ὑποθέμενος φέρεται, καὶ τοῦτον αὐτοὶ διὰ βραχέων ἐνταῦθα δεῖξαι πάρεργου ἂν εἶναι ἡγούμεθα.

Α΄. Κύλινδρος πρὸς Κύλινδρον, καὶ Πρίσμα πρὸς Πρίσμα, λόγον εἰσὶν ἔχοντα σύνθετον ἐκ τῶν λόγων τῶν τε Βάσεων, καὶ τῶν ὑψῶν.

Ἔστωσαν (ὅρα τὰ ἀνωτ. Σχήμ.) Κύλινδροι ζδ καὶ αρ, ἀπὸ δὲ τοῦ ὑψηλοτέρου αρ (ἐπὶ γὰρ τῶν ἰσοϋψῶν αὐτόθεν δῆλον (9)) ἀποτετμήσθω αξ, ἰσοϋψὴς ὢν τῷ ζδ· ἔστω δὲ καὶ ὡς Βάσις υτ πρὸς Βάσιν μπ, οὕτω ζν πρὸς χ, καὶ ὡς ὕψος νδ, ἤτοι βξ πρὸς ὕψος τὸ βρ, οὕτω χ πρὸς ψ· Δεῖ δὴ δεῖξαι ὡς ὁ Κύλινδρος ζδ ἐστὶ πρὸς τὸν Κύλινδρον αρ, ὡς ζν πρὸς τὸν ψ· ὁ γοῦν Κύλ. ζδ ἐστὶ πρὸς τὸν Κύλ. αξ, ὡς (10) ἡ Βάσις υτ πρὸς τὴν Βάσιν μπ, τουτέστιν (11) ὡς ζν πρὸς χ· ὁ δὲ Κύλ. αξ ἐστὶ πρὸς τὸν Κύλ. αρ, ὡς (12) βξ πρὸς βρ, τουτέστιν ὡς (13) χ πρὸς ψ· τοιγαροῦν (14) δι' ἴσου Κύλ. ζδ πρὸς Κύλ. αρ ὡς ζν πρὸς ψ.

(1) ΙΔ. τοῦ ιβ΄. (2) Ι. τοῦ ιβ΄. (3) Ι. τοῦ ιβ΄. (4) Ἐκ κατ. (5) ΙΔ. τοῦ ιβ΄. (6) Θ. τοῦ ε΄. (7) ΙΑ. τοῦ ιβ. (8) Ι. τοῦ ιβ΄. (9) ΙΔ. τοῦ ιβ΄. (10) ΙΑ. τοῦ ιβ΄. (11) Ἐκ κατ. (12) ΙΔ. τοῦ ιβ΄. (13) Ἐκ κατ. (14) ΚΒ. τοῦ ε΄.

Περὶ δὲ τῶν Πρισμάτων ὡσαύτως δειχθήσεται, ἀλλ᾽ ἐκ τȣ̃ Α´ Πορίσμ. τῆς Θ´, ϗ ἐκ τȣ̃ Πορίσμ. τῆς ΙΔ´ Προτάσ.

Β´. Καὶ Κῶνος δὲ πρὸς Κῶνον, ϗ Πυραμὶς πρὸς Πυραμίδα, λόγον ἔχει συγκείμενον ἐκ τῶν λόγων Βάσεως πρὸς Βάσιν, ϗ ὕψȣς πρὸς ὕψος.

Εἰσὶ γὰρ τῶν τε (1) Κυλίνδρων, ϗ τῶν Πρισμάτων τριτημόρια.

Καὶ ταῦτα δὲ πάντα ἐπὶ τῶν πλαγίων Σωμάτων ȣ̓χ ἧκιςα χῶραν ἔχει, ἢ ἐπὶ τῶν ὀρθῶν, ὡς ἐξ ὧν φθάσαντες ἔφημεν ἐςὶ δῆλον.

Πρότασις Ις. ϗ ΙΖ.

Αἱ Προτάσεις αὗται ἁπασῶν ȣ̓̃σαι διεξοδικώταται πρὸς ȣ̓δὲν συντελȣ̃σιν, ἢ πρὸς τὸ δἰ αὐτῶν τὴν ΙΗ´. Πρότασιν δείκνυσθαι, ἣν αὐτοὶ εὐχερεςέρᾳ τινὶ μεθόδῳ ἀποδείξομεν.

Λῆμμα πρὸς τὴν ἐφεξῆς ΙΗ´.

„Οἱ Κύλινδροι οἱ εἰς τὸ Ἡμισφαίριον ἐγγραφόμενοι, εἰς αὐτὸ τȣ̃το „ϗ ἀπολήγȣσι.

σχ. 495. Ἔςω φψ μέγιςον τῶν ἐπὶ τȣ̃ Ἡμισφαιρίȣ Ἡμικύκλιον, ϗ τȣ́τȣ Ἡμιδιάμετρος ἡ αψ, πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς Διαμέτρȣ φυ· τετμήσθω δὲ ἡ ωψ εἰς μέρη ἴσα τὰ αμ, μν, νψ, ϗ ἀχθεισῶν διὰ τῶν κατὰ τὰς διαιρέσεις σημείων μ, ν, καθέτων κξ:, ἐγγραφέσθω εἰς τὸ Ἡμικύκλιον Ὀρθογώνια ξβρκ, εδθσ, ὧν ἔπειτα ἔξω τȣ̃ Κύκλȣ προεκβαλλομένων, νοείσθω περὶ τὸ Ἡμικύκλιον περιγραφόμενα Ὀρθογώνια ζτυφ, λοβξ, πχδε, ϗ ἔςαι πάντα ἰσοϋψῆ. Αἱ δὲ ὑπεροχαὶ τῶν περιγεγραμμένων ὑπὲρ τὰ ἐγγεγραμμένα, εἰσὶ τὰ ἐπίπεδα ζκ, λσ, χε, οθ, τρ, ἃ δὴ ἅμα ληφθέντα τὸ Ὀρθογώνιον ζτυφ συγκροτεῖ. Ἐπειδὴ γὰρ χε = δσ, ἔσονται λσ, οθ, χε ἅμα, ἴσα τῷ Ὀρθογωνίῳ λβ, τȣτέςι τῷ ξρ· ἔνθεντοι ἐὰν ἑκατέρωθεν προσθῇς τὰ ἐπίπεδα ζκ, τρ, ἔσονται ἅμα πάντα ζκ, λσ, χε, οθ, τρ, ἴσα τῷ Ὀρθογωνίῳ ζτυφ. Ἤδη μὲν οὖν ἐὰν νοηθῇ τὸ Ἡμικύκλιον μετὰ τῶν Ὀρθογωνίων περὶ τὴν Ἡμιδιάμετρον αψ μένȣσαν περιάγεσθαι, τὰ ἐγγεγραμμένα Ὀρθογώνια εθ, ξρ, Κυλίνδρȣς ἀποκυήσεσιν εἰς τὸ Ἡμισφαίριον ἐγγεγραμμένȣς, τὰ δὲ περιγεγραμμένα Κυλίνδρȣς περιγεγραμμένȣς, ἀλλήλοις τε ἐπικειμένȣς. Καὶ ὥσπερ δὴ ἡ τῶν περιγεγραμμένων ὑπεροχὴ ὑπὲρ τὰ ἐγγεγραμμένα Ὀρθογώνια, ἦν Ὀρθογώνιον τὸ ζυ, ȣ̓̃τωτοι ϗ ἡ τῶν περιγεγραμμένων Κυλίνδρων ὑπεροχὴ

---

(1) Ι. ϗ Ζ. ϗ Η. τȣ̃ ιβ´.

ὑπὲρ τȣ̀ς ἐγγεγραμμένȣς, ὁ Κύλινδρος ἔςαι ὁ ἀπὸ τȣ̃ Ὀρθογωνίȣ ζυ ἀποκυϊσκόμενος· Ἀλλὰ τὸ τȣ̃ τοιȣ́τȣ Κυλίνδρȣ ὕψος γενήσεται παντὸς δοθέντος ἔλαττον· διὸ δὴ ϗ ὁ Κύλινδρος αὐτὸς παντὸς δοθέντος (1) καταςήσεται ἐλάσσων, εἰ τῆς Διαμέτρȣ εἰς ἀεὶ πλείω πέρατος ἄνευ διαιρȣμένης, ὁ τῶν Ὀρθογωνίων, κἀντεῦθεν ὁ τῶν Κυλίνδρων ἀριθμὸς εἰς ἄπειρον πληθύνοιτο. Ἄρα ἡ τῶν εἰς τὸ Ἡμισφαίριον περιγραφομένων Κυλίνδρων (πολλῷ δὲ μᾶλλον ἡ αὐτȣ̃ τȣ̃ Ἡμισφαιρίȣ, ὃ τῶν περιγραφομένων Κυλίνδρων μέρος τυγχάνει ὂν), ὑπὲρ τȣ̃ς ἐγγραφομένȣς Κυλίνδρȣς ὑπεροχὴ, παντὸς δοθέντος μεγέθȣς ἐλάσσων τέως γενήσεται· Ὅθεν οἱ εἰς τὸ Ἡμισφαίριον ἐς ἄπειρον ἐγγραφόμενοι Κύλινδροι, εἰς αὐτὸ τȣ̃το τέως (2) ϗ ἀπολήγȣσι. Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ἀποδειχθήσεται, καὶ τȣ̀ς εἰς τὸν Κῶνον, ἢ τὸ Κωνοειδὲς, ἢ τὸ Σφαιροειδὲς, κξ: ἐγγραφομένȣς Κυλίνδρȣς, εἰς αὐτὰ ταῦτα τὰ Σχήματα τέως ἀποτελευτᾷν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΗ.

„ Αἱ Σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων Διαμέ- κ. 496.
„ τρων (βκ, ρψ).

Τῶν Ἡμιδιαμέτρων αβ, υρ, εἰς ὅσα ἂν δόξῃ μέρη ἴσα τε ϗ ἰσάριθμα διαιρȣμένων, ϗ διὰ τῶν κατὰ τὰς διαιρέσεις σημείων, καθέτων ἀγομένων, κξ: νοείσθω ἐν τοῖς μεγίςοις τῶν Σφαιρῶν Ἡμικυκλίοις ἐγγεγραμμένα εἶναι Ὀρθογώνια ἀριθμῷ ἴσα, περὶ τὰς Ἡμιδιαμέτρȣς αβ, υρ μενȣ́σας περιαγόμενα, ϗ Κυλίνδρȣς ἐν ἑκατέρῳ τῷ Ἡμισφαιρίῳ ἰσοπληθεῖς συνιςῶντα, ἀλλήλοις ἐπικειμένȣς· καὶ ἐπειδὴ κγ : γζ : : γζ : γβ (3), ἔςαι ὁ λόγος κγ πρὸς γβ, διπλασίων τȣ̃ λόγȣ (4) κγ πρὸς γζ, ἢ, ὃ ταυτόν ἐςι, τȣ̃ λόγȣ γζ πρὸς γβ. Παραπλησίως δὲ ϗ ὁ λόγος ψε : ερ, διπλασίων ἐςὶ τȣ̃ λόγȣ χε πρὸς ερ· ἀλλ' ἐκ κατασκ. κγ : γβ : : ψε : ερ, ἄρα (5) καὶ ζγ : βγ : : χε : ερ· ἀλλαμὴν ἐκ κατασκ. βγ : γξ : : ρε : εσ, τοιγαρȣ̃ν δι' ἴσȣ (6) ζγ : γξ : : χε : εσ· ὥςε οἱ Κύλινδροι (7) ζλ ϗ χπ ὅμοιοι ἀλλήλοις εἰσὶ, ϗ ἑπομένως (8) τȣ́των ὁ λόγος τριπλασίων ἐςὶ τȣ̃ λόγȣ τῶν Διαμέτρων ζι, χο, ἢ γȣ̃ν τῶν Ἡμιδιαμέτρων ζγ, χε, τῶν ἐν ταῖς βάσεσιν· ἀλλ' ὁ λόγος ζγ πρὸς χε,

(1) Δῆλον ἐκ τῆς ΙΔ. τȣ̃ ιβ'. (2) Ὁρ. ς. τȣ̃ ιβ'. (3) Α. Πόρ. τῆς ΙΓ. τȣ̃ ς'. (4) Ὁρ Ι. τȣ̃ ε'. (5) ΛΕ. τȣ̃ ε'. (6) ΚΒ. τȣ̃ ε'. (7) Ὁρ. Δ. τȣ̃ ιβ'. (8) ΙΒ. τȣ̃ ιβ'.

ἴσος ἐςὶ τῷ λόγῳ τῷ μεταξὺ τῶν Διαμέτρων τῶν Σφαιρῶν βκ, ρψ (ὡς γὰρ φθάσας ἔδειξα ζγ : χε : : γξ : εσ, τȣτέςι (1) βκ : ρψ, ἅ ἐςι τῶν γξ καὶ εσ (ἐκ κατασκ.) ἰσοπολλαπλάσια)· ὁ ἄρα λόγος τῶν Κυλίνδρων ζλ, χπ, τριπλασίων ἐςὶ τȣ̃ λόγȣ τῶν Διαμέτρων βκ, ρψ. Ὡσαύτως δὲ ἀποδείξομεν, ϗ τῶν λοιπῶν Κυλίνδρων ἕκαςον τῶν ἐν τῷ ἑτέρῳ τῶν Ἡμισφαιρίων ἐγγεγραμμένων, πρὸς ἕκαςον τῶν λοιπῶν τῶν ἐν θατέρῳ, τριπλασίονα λόγον ἔχειν τȣ̃ λόγȣ τῶν Διαμέτρων βκ, ρψ, ἄρα ϗ ὁ λόγος ἅμα πάντων πρὸς ἅμα πάντας (2), τριπλασίων ἐςὶ τȣ̃ λόγȣ τῶν Διαμέτρων βκ πρὸς ρψ· ἔνθεντοι ἐπεὶ τὰ τῶν Κυλίνδρων ἀθροίσματα, εἰς αὐτὰ τέως (3) τὰ Ἡμισφαίρια ἀπολήγȣσιν, ὁ τῶν Ἡμισφαιρίων, ϗ ἑπομένως ϗ ὁ τῶν Σφαιρῶν λόγος, τριπλασίων ἔςαι (4) τȣ̃ λόγȣ τῶν Διαμέτρων. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

Καὶ δήλȣ ἄρα τȣ̃ τῶν Διαμέτρων λόγȣ τυγχάνοντος, ϗ ὁ τῶν Σφαιρῶν αὐτῶν ἔςαι κατάδηλος· ὡς εἴπερ ἡ μὲν τῆς ἐλάσσονος Διάμετρος ᾖ ποδιαία, ἡ δὲ τῆς μείζονος δεκαποδιαία, προαγομένȣ τȣ̃ λόγȣ 1 πρὸς 10 εἰς ὅρȣς τέτταρας, 1 : 10 : : 100 : 1000, ὡς ἔχει ὁ πρῶτος τῶν ὅρων 1, πρὸς τὸν τέταρτον 1000, ὅτως ἔςαι ἡ ἐλάσσων Σφαῖρα πρός γε τὴν μείζονα.

Ἡ τῶν Κώνων ϗ τῶν Κυλίνδρων, ϗ δὴ ϗ τῶν Σφαιρῶν καταμέτρησις ὑποτεθείσεται ἐν τῷ ἐφεξῆς Βιβλίῳ ἐκ τῶν τȣ̃ Ἀρχιμήδȣ.

Σχόλιον.

Καθάπερ τὰ ὅμοια τῶν ἐπιπέδων Σχημάτων (5) διὰ μιᾶς μέσης, ὅτωτοι τὰ ὅμοια τῶν ςερεῶν διὰ μέσων δυεῖν, κατὰ τὸν δοθέντα λόγον αὔξεσθαι, ἢ μειȣ̃σθαι πεφύκασι.

κ. 497. Οἷον ἔςω Σφαῖρα, ἢ κύβος, ἢ ἕτερόν τι Σῶμα ὁποιονȣ̃ν, ὅυπερ ἀκτὶς, ἢ πλευρὰ εἴη ἡ α, κείσθω δὲ ϗ λόγος ὁποιοσȣ̃ν ὁ α πρὸς β, οἷον διπλȣ̃ς· δεῖ δὴ τȣ̃ δοθέντος Σῶμα ϗ διπλȣ̃ν δȣ̃ναι ϗ ὅμοιον.

Μεταξὺ τοίνυν τῶν ὅρων τȣ̃ δοθέντος λόγȣ α ϗ β, εὑρεθήτωσαν δύο μέσαι ἀνάλογον χ ϗ ψ, ὡς ἐν τῷ Σχολίῳ τῷ μετὰ τὴν ΙΓ΄. τȣ̃ ϛ΄. Βιβλ. ὑπεθέμεθα. Ἡ τοίνυν Σφαῖρα, ἧς Ἡμιδιάμετρος ἐςὶ χ, ἢ τὸ Σῶμα τὸ τῷ δοθέντι ὅμοιον, τὸ ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς χ γινόμενον, διπλȣ̃ν ἔςαι τȣ̃ δοθέντος.

---

(1) *ΙΕ. τȣ̃ ε΄.* (2) *ΙΑ. τȣ̃ ε΄.* (3) *Διὰ τὸ ἀνωτ. Λῆμ.* (4) *Καθόλȣ Πόρ.* (5) *Δ. Πόρ. τῆς Κ. τȣ̃ ϛ΄.*

Τὰ γὰρ ὅμοια Σώματα, ὧν αἱ ἡμιδιάμετροι, ἢ γοῦν αἱ πλευραὶ εἰσὶν α καὶ χ, ἐν λόγῳ εἰσὶ τριπλασίονι τοῦ (1) λόγου α πρὸς χ, τουτέστιν ἐν τῷ αὐτῷ (2) λόγῳ, ὃν ἔχει α πρὸς β.

Καὶ τοῦτο ἄρα ἐκεῖνο τὸ πολυθρύλλητον πρόβλημα ἐστὶν, ὃ Δηλιακὸν ἤκουσε παρὰ τοῦ ἐν Δήλῳ Ἀπόλλωνος, ὃς τοῖς Ἀθηναίοις τότ' ἂν τοῦ ἐπισκήψαντος λοιμοῦ ἀπαλλαχθήσεσθαι ἔχρησεν, ἐπειδὰν αὐτῷ τὸν βωμὸν κυβικὸν ὄντα τὸ Σχῆμα διπλασιάσειαν, ὡς Οὐαλέριος ὁ Μάξιμος Βιβλ. Η'. Κεφ. ΙΒ'. παρέδωκεν, ἐν οἷς τὸν Πλάτωνα παρίστησι, τοὺς τὸν βωμὸν ἐπὶ τούτῳ κομισαμένους, ὡς τὸν Εὐκλείδην ἀπελθεῖν κελεῦσαι, ἢ μᾶλλον ὡς τὸν Εὔδοξον, ὃ τῷ Μηναγίῳ σεσημείωται ἐν τοῖς εἰς Διογένην τὸν Λαέρτιον Βιβλ. Β'. Τμήμ. ρϛ'. Εἰδέ τις ἀκριβέστερα ἐφίεται μαθεῖν περίτε τῆς ἀφορμῆς τοῦ Προβλήματος, καὶ τῆς τοῦ αὐτοῦ ἐπιλύσεως, καὶ τῶν ἐπιστημοτέρων τοῦ τὰς δύω μέσας ἀνάλογον, ἐν δυσὶ δεδομέναις ἀκρότησιν ἐξευρίσκειν, μεθόδων, κατὰ τὴν τῶν πάλαι γεωμετρησάντων ἐπίνοιαν, μετιτέα αὐτῷ πρὸ τῶν ἄλλων τὰ τοῦ Ἐρατοσθένους περὶ τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ Κύβου, τὰ σὺν τοῖς ἄλλοις τῶν αὐτοῦ συγγραμμάτων ἐν τέλει πρὸ τῶν τοῦ Ἀράτου, ἐν Ὀξονίῳ τύποις ἐκδεδομένα κατὰ τὸ αχοβ· καὶ τὰ Οὐΐτρουΐου Ἀρχιτεκτονικὰ Βιβλ. Θ'. Κεφ. Γ'· καὶ τὰ Πλουτάρχου περὶ τοῦ δαιμονίου τοῦ Σωκράτους, ἐν τοῖς ἠθικοῖς κατὰ τὴν ἐν Φραγκοφουρτίῳ ἔκδοσιν σελίδι φοθ'· καὶ τὰ τοῦ Πάππου ἐν τῇ συλλογῇ τῶν Μαθηματικῶν Βιβλ. Γ'. Προτ. Ε'· καὶ τὰ τοῦ Εὐτοκίου (ὧν ἀνωτ. ἐν τῷ Σχολ. τῷ μετὰ τὴν ΙΓ'. τοῦ ϛ'. ἐμνήσθημεν) ὑπομνήματα εἰς τὸν Ἀρχιμήδην περὶ Σφαίρας τε καὶ Κυλίνδρου ἐν Θεωρήματ. Α'. Βιβλ. Β'.

Μεταξὺ οὖν δυοῖν ἀριθμῶν δοθέντων, μέσους δύω ἀνάλογον λαβεῖν ἔσται ὡδέπως· τὸ τοῦ προτέρου τῶν ἄκρων Τετράγωνον, διὰ τοῦ δευτέρου πολλαπλασιαζέσθω, καὶ τοῦ παραγομένου ἡ ῥίζα ἡ Κυβικὴ ἐξαιρείσθω, αὕτης καὶ γὰρ ὁ τῶν δύο μέσων πρότερος ἔσται· εἶτα τὸ Τετράγωνον τοῦ ὑστέρου τῶν ἄκρων διὰ τοῦ προτέρου πολλαπλασιαζέσθω, καὶ οὕτω τοῦ παραχθέντος ἡ Κυβικὴ ῥίζα ἐξαιρεθεῖσα, τῶν μέσων παρέξει τὸν δεύτερον· οἷον ἀριθμοὶ προκείσθωσαν ὅ,τε 8 καὶ ὁ 27, ὧν μεταξὺ δύο μέσους δέον εὑρεῖν. Πεπολλαπλασιάσθω δὲ $8 \times 8 = 64$ διὰ τῶν 27, καὶ ἀνακύψει 1728, ὧν ῥίζα Κυβικὴ 12 τῶν δύω μέσων ὁ πρῶτος. Εἶτα πεπολλαπλασιάσθω $27 \times 27 = 729$ διὰ 8, καὶ προκύψει 5832, ὧν ῥίζα Κυβικὴ 18 τῶν δύο μέσων ὁ δεύτερος· καὶ γὰρ 8, 12, 18,

(1) *Διὰ τὴν Η'. καὶ τὸ Β'. Πόρ. τῆς Θ'., καὶ διὰ τὴν ΙΒ. καὶ ΙΗ. τοῦ ιβ'.* (2) *Ὅρ. Ι. τοῦ ε'.*

27 ∺· καὶ ἐν γένει, εἰ μεταξὺ α καὶ ε μεσότητας δύο δέοι λαβεῖν τὰς μ ϗ ν, ἔςαι $\mu = \surd\, \alpha^{T} \varepsilon^{3}$, καὶ ἔςαι $\nu = \surd\, \varepsilon^{T} \alpha^{3}$.

Ἐπειδὴ γὰρ τὸ ὑπὸ α καὶ ε ὀρθογώνιον, μέσον (1) ἐςὶν ἀνάλογον τῶν ἀπ' αὐτῶν Τετραγώνων, ἔςαι δὴ α^{T}, αε, ε^{T} ∺. Ἀχθήτωσαν οὖν τὰ τρία ταῦτα ἐπίπεδα ἐπὶ τὸ αὐτὸ ὕψος τὸ α, ϗ ἀναφυήσονται (2) ςερεὰ συνεχῶς ἀνάλογον τὰ α^{K}, $\alpha^{T} \varepsilon$, $\varepsilon^{T} \alpha$ ∺ (3). Ἀχθήτωσαν δὲ πάλιν τὰ αὐτὰ ἐπίπεδα ἐπὶ ὕψος τὸ ε, ϗ ἔσονται $\alpha^{T} \varepsilon$, $\varepsilon^{T} \alpha$, ε^{K} ∺· τὰ ἄρα τέτταρα ςερεὰ α^{K}, $\alpha^{T} \varepsilon$, $\varepsilon^{T} \alpha$, ε^{K} συνεχῶς ἀνάλογον εἰσί, καὶ ἑπομένως αἱ τȣ́των κυβικαὶ ῥίζαι α, $\surd\, \alpha^{T} \varepsilon^{3}$, $\surd\, \varepsilon^{T} \alpha^{3}$, ε συνεχῶς (4) ἀνάλογον εἰσὶ ϗ αὐταί· καὶ ἐπεὶ ἐξ ὑποθ. α, μ, ν, ε ∺, ἔςαι $\mu = \surd\, \alpha^{T} \varepsilon^{3}$, καὶ $\nu = \surd\, \varepsilon^{T} \alpha^{3}$.

Ἐὰν δὲ ὁ Α΄. ὅρος ᾖ ι, ἐξαιρεθείσης τῆς Κυβικῆς ῥίζης ἀπὸ τȣ̃ ἑτέρȣ τῶν ἄκρων, ληφθήσεται τῶν δύο μεσοτήτων ἡ προτέρα, τὸ δ' ἀπὸ ταύτης Τετράγωνον, ἔςαι τῶν δύο μέσων ἡ ὑςέρα· ἐὰν γὰρ ᾖ α = ι, ἔςαι α^{T} = ι· ἔνθεντοι $\alpha^{T} \varepsilon = ι \times \varepsilon = \varepsilon$, καὶ $\surd\, \alpha^{T} \varepsilon^{3}$ (τȣτέςι μ) $= \surd\, \varepsilon^{3}$· καὶ τὸν αὐτὸν τρόπον $\surd\, \varepsilon^{T} \alpha^{3}$ (τȣτέςι ν) $= \surd\, \varepsilon^{T\,3} =$ (5) $\surd\, \varepsilon^{3} \times \surd\, \varepsilon^{3}$.

Οἷον μεταξὺ 1 καὶ 125, μέσοι ἀριθμοί εἰσιν οἱ 5 καὶ 25· ἔςι γὰρ $\surd\, 125^{3} = 5$, καὶ $5 \times 5 = 25$· εἰσὶ δὲ 1, 5, 25, 125 ∺· ἔνθεντοι ἐὰν ἀντὶ τȣ̃ δοθέντος Κύβȣ τεθῇ 1, ληφθήσεται ἡ τȣ̃ Κύβȣ Πλευρὰ, ὃς ἂν διπλάσιος ᾖ τȣ̃ δοθέντος, τῆς τȣ̃ δυαδικȣ̃ ἀριθμȣ̃ Κυβικῆς ῥίζης ἐξαιρȣμένης· ὃ καθ' αὑτὸ μὲν εὔδηλον ἐςὶν, ȣ̓χ' ἥκιςα κἀξ ἐκείνȣ ἐπιφερόμενον, ὅτι $\surd\, 2^{3}$ ἐςὶ τῶν μεταξὺ 1 ϗ 2 τῶν μέσων ὁ πρότερος.

---

(1) Β. Πόρ. τῆς ΚΒ. τȣ̃ ς΄. (2) ΛΒ. τȣ̃ ια΄. (3) Σχόλ. τῆς Λς. τȣ̃ ια΄. (4) Σχόλ. Α. τῆς ΛΓ. τȣ̃ ια΄. ϗ ΛΕ. τȣ̃ ε΄. (5) Πόρ. τῆς ΛΖ. τȣ̃ ια΄.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ἘΚ ΤΩ͂Ν ἈΡΧΙΜΗ͂ΔΟΥΣ ἘΞΑΩΤΕΥΘΕΝΤΑ

ὉΡΙΣΜΟΙ

ἤτοι

ὅρων τινῶν ἀναπτύξεις.

Ἔστω δὴ Κύκλος βεγη, οὗ Κέντρον α, Διάμετρος δὲ βγ, πρὸς ὀρθὰς ὑπὸ τῆς εη τεμνομένη κατὰ τὸ δ, ἀπὸ δὲ τοῦ Κέντρου ἀχθήτωσαν Ἡμιδιάμετροι αε, αη· Τούτων οὕτω κειμένων· κ. 1.

Α΄. Τομεὺς τῆς Σφαίρας ἐστὶν, ὁ ὑπὸ τοῦ κυκλικοῦ Τομέως αεγη, ἢ γοῦν αεβη, τοῦ περὶ τὴν Διάμετρον βγ περιηγμένου, γινόμενος.

Β΄. Τμῆμα, εἴτ᾽ οὖν μοῖρα Σφαίρας ἐστὶ, τὸ ἀπὸ τοῦ κυκλικοῦ Τμήματος εγη, ἢ γοῦν εβη, περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον βγ περιηγμένου, καταγραφόμενον.

Γ΄. Τῆς σφαιρικῆς μοίρας εβη Κορυφὴ ἐστὶ, τὸ κατὰ τὴν ἀκίνητον διάμετρον πέρας β· Βάσις δὲ ὁ ὑπὸ τῆς εη Εὐθείας καταγραφόμενος Κύκλος· Ἄξων δὲ τὸ τμῆμα τῆς διαμέτρου βδ, τὸ ἀπό τε τῆς κορυφῆς, καὶ, καὶ τοῦ τῆς βάσεως Κέντρου δ ἀπολαμβανόμενον.

Δ΄. Τῆς σφαιρικῆς μοίρας, ἢ τοῦ ἐν αὐτῇ ἐγγεγραμμένου Σώματος, ἢ Κώνου ἐπιφάνειαν εἰπὼν, ἄνευ δὴ τῆς βάσεως εἰρηκέναι ἀεὶ δῆλος ἔσομαι· καὶ Κυλίνδρου δὲ ἐπιφάνειαν ἣν εἴπω, παραπλησίως ἄνευ τῆς βάσεως νοηθήσεται, εἰμὴ τὸ ὁλικῶς προσκέοιτο, ὡς ἐν οἷς καὶ αἱ βάσεις συμπαρελήφθησαν.

Καὶ περὶ Κυλίνδρων δὲ λέγοντι καὶ Κώνων μόνοι οἱ ὀρθοὶ νοηθήσονται.

Ἀξιώματα.

Α΄. Ἡ τοῦ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένου Πολυγώνου περίμετρος, τῆς κ. 2.
τοῦ Κύκλου περιφερείας ἐλάσσων ἐστί.

Β΄. Ἡ τοῦ περὶ τὸν Κύκλον περιγεγραμμένου Πολυγώνου περίμετρος, τῆς τοῦ Κύκλου περιφερείας μείζων ἐστί.

κ. 3. Γ΄. Ἐὰν δὲ Πολύγωνον εἰς Κύκλον ἐγγεγραμμένον, περὶ τὴν διάμετρον αε, συνάμα τῷ Κύκλῳ περιαχθῇ, ἔσαι ἡ τοῦ σώματος, ὃ ὑπὸ τοῦ Πολυγώνου γίνεται, ἐπιφάνεια, ἐλάσσων τῆς ἐπιφανείας τῆς Σφαίρας· καὶ ἐὰν Πολύγωνον περὶ Κύκλον περιγεγραμμένον, περὶ τὴν διάμετρον συνάμα τῷ Κύκλῳ περιαχθῇ, ἔσαι ὡς ἀνωτ. ἡ τοῦ γινομένου ὑπὸ τοῦ Πολυγώνου σώματος ἐπιφάνεια, μείζων τῆς ἐπιφανείας τῆς Σφαίρας.

Δ΄. Ὡσαύτως ἡ τοῦ Πολυγώνου τοῦ εἰς τὸ κυκλικὸν Τμῆμα ἐγγεγραμ-
κ. 4. μένου περίμετρος, ἐλάσσων ἐσὶ τῆς τοῦ Τμήματος περιφερείας δαζ· καὶ ἐὰν τὸ εἰς τὸ Τμῆμα ἐγγεγραμμένον Πολύγωνον συνάμα τῷ Τμήματι, περὶ τὸν Ἄξονα τοῦ Τμήματος αξ περιαχθῇ, ἔσαι ἡ τοῦ σώματος, ὅπερ ὑπὸ τοῦ Πολυγώνου γίνεται ἐπιφάνεια, ἐλάσσων τῆς κατὰ τὸ Τμῆμα τῆς Σφαίρας ἐπιφανείας δαζ.

κ. 5. Ε΄. Ἡ δὲ τοῦ Πρίσματος ἐπιφάνεια ἐγγεγραμμένου μὲν εἰς τὸν Κύλινδρον, τῆς τοῦ Κυλίνδρου ἐλάσσων, περιγεγραμμένου δὲ περὶ αὐτὸν, μείζων.

κ. 6. ϛ΄. Ἥτε τῆς Πυραμίδος ἐγγεγραμμένης μὲν εἰς τὸν Κῶνον, τῆς τοῦ Κώνου ἐλάσσων, περιγεγραμμένης δὲ, μείζων.

Π ρ ό τ α σ ι ς Α.

„Ἔσω Σχήματα ὁποιαδήποτε ἤτοι τῶν ἐπιπέδων, ἢ τῶν σερεῶν, „Α, Β· ἔσω δὲ καὶ Μεγέθη ἀεὶ ἄλλα καὶ ἄλλα, ἃ τὰ δοθέντα Α καὶ Β ἀεί-„περ ἧττον καὶ ἧττον ὑπερέχοντα, εἰς αὐτὰ τέως (1) καὶ ἀπολήγοιεν, ἴσα „γεμὴν ἀλλήλοις ἀεὶ τυγχάνοντα.

„Φημὶ δὴ ὅτι καὶ τὰ Α καὶ Β Σχήματα ἀλλήλοις ἴσα ἐσί.

Ε Ζ Εἰ μὴ γὰρ, θάτερον εἶναι μεῖζον ἐπάναγκες· ἔσω οὖν τὸ Α τοῦ Β ὑ-
Α Β Χ περοχῇ τῇ κατὰ τὸ Χ. Εἰ τοίνυν ὑποτεθῇ Μεγέθη ἴσα ἀλλήλοις τὰ Ε καὶ Ζ, ἅπερ ἂν ὑπερέχοι τὰ Α καὶ Β Σχήματα ὑπεροχῇ τῆς κατὰ τὸ Χ, καθ᾽ ἣν κεῖται τὸ Α μεῖζον εἶναι τοῦ Β, μείζονι, ἔσαι δὴ τὸ Ζ τοῦ Α ἔλαττον· τίθεται δὲ τὸ Ζ ἴσον εἶναι τῷ Ε, ἔσιν ἄρα τὸ Ε τοῦ Α ἔλαττον· ἄτοπον δὲ, εἴπερ ἅπαξ τὸ Ε ὑπεροχὴν ἔχειν πρὸς τὸ Α τέθειται.

Ὡσαύτως δείξω μηδὲ τὸ Β τοῦ Α μεῖζον εἶναι ἄν· ὥσε θάτερον μὴ μεῖζον ὂν παρὰ θάτερον, ἴσα ἔσαι. Ο. Ε. Δ.

(1) Ὅρ. ϛ. Βιβλ. ιβ΄.

Πρότασις Β.

„Ἔςω Σχήματα Α ϗ Β· ἔςω δὲ ϗ Μεγέθη ἀεὶ ἄλλα ϗ ἄλλα, ἃ „τῶν δοθέντων ἀεὶ ἧττον ϗ ἧττον ἀπολειπόμενα, εἰς αὐτὰ τέως (1) καὶ „ἀπολήγοιεν, ἴσα γεμὴν ἀεὶ ἀλλήλοις τυγχάνοντα.

„Φημὶ δὴ, ὅτι ϗ τὰ Α ϗ Β Σχήματα ἴσα ἀλλήλοις ἐςί. ΑΒΖ

Εἰμὴ γὰρ, θάτερον εἶναι ἀνάγκη ἔλαττον· ἔςω οὖν τὸ Α τȣ̃ Β, ἐλ- ΟΠ
λείψει τῇ κατὰ τὸ Ζ· Εἰ τοίνυν ὑποτεθῇ Μεγέθη ἀλλήλοις ἴσα τὰ Ο ϗ Π, τῶν δοθέντων Σχημάτων Α ϗ Β, ἐλλείψει ἐλάσσονι τῇ κατὰ τὸ Ζ ἀπολείπεσθαι, καθ᾽ ἣν κεῖται τὸ Α τȣ̃ Β τυγχάνον ἔλαττον, ἔςαι δὴ τὸ Π τȣ̃ Α μεῖζον· ἦν δὲ τὸ Π ἴσον τῷ Ο, καὶ τὸ ἄρα Ο μεῖζον τȣ̃ Α· ὅπερ ἀναιρεῖ τὴν ὑπόθεσιν, ἧ τὸ Ο τȣ̃ Α ἐτέθη ἔλαττον.

Ὡσαύτως δείξω μηδὲ τὸ Β τȣ̃ Α εἶναι ἂν ἔλαττον· ὥςε θάτερον μὴ ἔλαττον ὂν παρὰ θάτερον, ἴσα ἔςαι. Ο. Ε. Δ.

Ἐπαχθεῖεν δ᾽ ἂν ἀμφότεραι αἱ προληφθεῖσαι Προτάσεις ἀμέσως, ϗ χωρὶς ἑτέρας ἀποδείξεως, ἐκ τȣ̃ καθόλȣ Πορίσματος τȣ̃ μετὰ τὴν Β′. Πρότασιν τȣ̃ ΙΒ′. Βιβλίȣ.

Πρότασις Γ.

„Αἱ τῶν εἰς τὸν Κύκλον τε ϗ περὶ τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένων τε, ϰ. 2.
„ϗ περιγεγραμμένων Πολυγώνων περίμετροι, εἰς τὴν τȣ̃ Κύκλȣ περιφέ-„ρειαν τέως ἀποτελευτῶσιν· ὁμοίως δὲ ϗ τὰ Πολύγωνα αὐτὰ εἰς τὸν Κύ-„κλον τέως ἀπολήγȣσι.

Εἴπερ ἀμέλει τῶν τόξων ἐς ἄπειρον διχοτομȣμένων, ἀεὶ πλείονες καὶ πλείȣς εἰς τὸν Κύκλον τε ϗ περὶ τὸν Κύκλον πλευραὶ ἐγγράφοιντό τε καὶ περιγράφοιντο.

Μέρος Α′. Νοείσθω δὴ εἰς τὸν Κύκλον τε ϗ περὶ τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένα τε ϗ περιγεγραμμένα Πολύγωνα ὅμοια ἀλλήλοις τῶν κανονικῶν, εἴτε δὲ ὡς ἐπὶ τῆς ΙΒ′. Προτάσεως τȣ̃ Δ′. Βιβλίȣ, εἴτ᾽ οὖν ϗ ὡς ἐπὶ τȣ̃ ὑπ᾽ ὄψιν σχήματος διαφέρει πάντως ȣ̓δέν. Δῆλον δὲ τὴν ζι εἶναι πρὸς τὴν γε (2), (τȣτέςι (3) τὴν ὅλην περιγεγραμμένην περίμετρον, εἶναι πρὸς ὅλην τὴν ἐγγεγραμμένην) ὡς ια πρὸς γα· ἀλλ᾽ ἡ ιγ ὑπεροχὴ τῆς ια ὑπὲρ τὴν γα, γίνεται τέως παντὸς δοθέντος μεγέθȣς ἐλάσσων, ἀεὶ πλειόνων τε ϗ πλειόνων ἐς

(1) Ὅρ. ς. Βιβλ. ιβ′. (2) Διὰ τὸ Α. Πόρ. τῆς Δ. τȣ̃ ς′. (3) ΙΒ. τȣ̃ ε′.

ἄπειρον Πλευρῶν ἐγγράφεσθαί τε ϗ περιγράφεσθαι νοȣμένων· ἄρ᾽ ȣ̃ν ϗ ἡ τῆς περιγεγραμμένης περιμέτρȣ ὑπεροχὴ ὑπὲρ τὴν ἐγγεγραμμένην, παντὸς μεγέθȣς δοθέντος ἐλάσσων τέως καθίςαται· καὶ πολλῷ δὴ μᾶλλον ἄρα (1) ἡ τῆς περιγεγραμμένης περιμέτρȣ ὑπὲρ τὴν τȣ̃ Κύκλȣ Περιφέρειαν ὑπεροχὴ, ἥτε τῆς ἐγγεγραμμένης περιμέτρȣ ἀπὸ τῆς αὐτῆς περιφερείας ἔλλειψις, παντὸς δοθέντος μεγέθȣς ἐλάσσονες ἔσονται. Ὥςε ἥτε ἐγγεγραμμένη ϗ ἡ περιγεγραμμένη, ἀμφότεραι αἱ περίμετροι, εἰς τὴν περιφέρειαν τέως (2) αὐτὴν ἀπολήγȣσι. Ο. Η. τὸ Α΄. Ταῦτα δὴ ἐπὶ πλέον πειρᾶσθαι κατασκευάζειν περιττὸν, ὡς αὐτόθεν τὸ δῆλον ἔχοντα.

Μέρος Β΄. Ἐπεὶ δέ τοι δέδεικται τὴν τῆς Πλευρᾶς ζι ὑπὲρ τὴν εγ ὑπεροχὴν, παντὸς, ὅπερ ἂν δοθείη, μεγέθȣς γίνεσθαι τέως ἐλάσσονα (καὶ γὰρ ζι : εγ = ια : γα)· καὶ ἡ τȣ̃ ἀπὸ ζι Τετραγώνȣ ὑπὲρ τὸ ἀπὸ τῆς εγ ὑπεροχὴ, ἔςαι τέως παντὸς δοθέντος ἐλάσσων. Ἀλλὰ γὰρ ὡς τὸ ἀπὸ ζι Τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ εγ Τετράγωνον, ȣ̔́τως ἔχει (3) ϗ τὸ περιγεγραμμένον Πολύγωνον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον Πολύγωνον· καὶ ἡ τȣ̃ περιγεγραμμένȣ τοίνυν Πολυγώνȣ ὑπὲρ τὸ ἐγγεγραμμένον ὑπεροχὴ, παντὸς ἔςαι τȣ̃ δοθέντος μεγέθȣς ἐλάσσων· καὶ πολλῷ ἄρα ἐλάσσων ἔςαι ἥτε τȣ̃ περιγεγραμμένȣ ὑπὲρ τὸν Κύκλον ὑπεροχὴ, ϗ ἡ τȣ̃ ἐγγεγραμμένȣ ἀπὸ τȣ̃ Κύκλȣ ἔλλειψις· Ἔνθεντοι ϗ τὰ εἰς τὸν Κύκλον τε ϗ περὶ τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένα τε ϗ περιγεγραμμένα Πολύγωνα, ἐπ᾽ αὐτὸν (4) τέως τὸν Κύκλον ἀποτελευτᾷ. Ο. Η. τὸ ἕτερον.

Πρότασις Δ.

Σ. 2. „Τὸ περὶ τὸν Κύκλον περιγεγραμμένον κανονικὸν (5) Πολύγωνον ζιντρ, „ἴσον ἐςὶ Τριγώνῳ, ȣ̔̃ βάσις μὲν ἡ τȣ̃ Πολυγώνȣ περίμετρος, ὕψος δὲ ἡ „τȣ̃ Κύκλȣ ἡμιδιάμετρος.

„Τὸ δὲ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένον κανονικὸν Πολύγωνον ἴσον ἐςὶ „Τριγώνῳ, ȣ̔̃ βάσις μὲν ἡ τȣ̃ ἐγγεγραμμένȣ Πολυγώνȣ περίμετρος, ὕψος „δὲ ἡ Κάθετος αο, ἡ ἀπὸ τȣ̃ Κέντρȣ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἡςτινοσȣ̃ν ἀ„γομένη.

Μέρος Α΄. Ἡ Ἡμιδιάμετρος αβ ἡ πρὸς τὴν ἐπαφὴν ἠγμένη, κάθετος ἐςὶ (6) πρὸς τὴν Ἁπτομένην ιζ. Ἐὰν ȣ̃ν ἀχθῶσιν αἱ αζ, αι, αν, κξ:, ϗ τὸ

(1) Ἀξ. Α΄. ϗ Β΄. (2) Ὁρ. ς. Βιβλ. ιβ΄. (3) Κ. τȣ̃ ς΄. Βιβλ. ϗ τὸ Σχόλ. τὰ μετ᾽ αὐτήν. (4) Ὁρισμ. ς΄ τȣ̃ ΙΒ΄ Βιβλ. (5) Ὁρ. Γ. τȣ̃ δ΄. (6) ΙΗ. τȣ̃ γ΄.

Πολύγωνον εἰς Τρίγωνα ἀναλυθῇ, ἔςαι δὴ ἡ αβ Ἡμιδιάμετρος τῶν Τριγώνων ἁπάντων ὕψος κοινὸν, ὅθεν δὴ ἴσα εἶναι φανερὸν ϗ τὰ Τρίγωνα· ὥςε τὸ Τρίγωνον τὸ τὴν βάσιν ἴσην ἔχον τῷ τῶν Πλευρῶν ζι, ιν, ντ, κξ: ἀθροίσματι, ὕψος δὲ τὸ αβ, ἴσον ἅπασιν (1) ἔςαι, τουτέςιν ὅλῳ τῷ Πολυγώνῳ, ὃ περιγέγραπται.

Μέρος Β΄. Παραπλησίως δὲ ϗ τὸ Β΄. δείκνυται.

Τῶν γὰρ δὴ τοῦ ἐγγεγραμμένου Πλευρῶν ἴσων ἀλλήλαις οὐσῶν, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Κέντρου α Κάθετοι (2) ἔσονται ἴσαι· ταύτῃ τοι ϗ τὰ εἰς ἃ τὸ ἐγγεγραμμένον Πολύγωνον ἀναλύεται, Τρίγωνα πάντα (3), ἴσα ἀλλήλοις ἐςί· καὶ παραπλησίως τοίνυν χωρεῖ τὰ τῆς δείξεως, ὥσπερ ἀνωτέρω.

Πορίσματα.

Α΄. Ἐντεῦθεν ϗ τὸ τοῦ κανονικοῦ Πολυγώνου, τοῦ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένου, ἢ περιγεγραμμένου χωρίον εὑρεῖν ἐςι, τὴν ἀπὸ τοῦ Κέντρου (4) ἐπὶ μίαν ἡντιναοῦν τῶν Πλευρῶν κάθετον, διὰ τῆς ἡμιπεριμέτρου πολλαπλασιάζουσι.

Β΄. Ἐπεὶ δέ τοι τὰ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένα τε ϗ περιγεγραμμένα Πολύγωνα, ἐπ᾽ αὐτὸν δὴ τὸν κύκλον, αἵτε τῶν Πολυγώνων περίμετροι, ἐπὶ τὴν τοῦ Κύκλου τέως περιφέρειαν (5) ἀπολήγουσιν, εὑρεθήσεται οὕτω ϗ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ Κύκλου, τῆς ἡμιδιαμέτρου διὰ τῆς ἡμιπεριφερείας πολυπλασιαζομένης.

Γ΄. Καὶ ἔςιν ἄρα ὁ Κύκλος ἴσος Τριγώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ τῇ τοῦ Κύκλου περιφερείᾳ ἴση Εὐθεῖα, ὕψος δέ γε ἡ Ἡμιδιάμετρος· ἀνακύπτει μὲν γὰρ (6) τὸ Τριγώνου χωρίον ἐκ τῆς ἡμιβάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος πολλαπλασιαζομένης. Ὡσαύτως δὲ δῆλον, ϗ τὸν τοῦ Κύκλου τομέα ἴσον εἶναι Τριγώνῳ, οὗ ὕψος μὲν ἡ τοῦ Κύκλου ἡμιδιάμετρος, βάσις δὲ Εὐθεῖα, ἡ τῷ τοῦ τομέως τόξῳ ἴση· τὸ γὰρ δὴ Πόρισμα τόδε ἐκ τῶν αὐτῶν ἀρχῶν, ἐν τῇ ἐφεξῆς Προτάσει πλατύτερον κατασκευασθήσεται.

Δ΄. Τῶν ἰσοπεριμέτρων Σχημάτων ὁ Κύκλος τὸ περιεκτικώτατον· ἔςω ϰ. 7.
γὰρ τοῦ τυχόντος Πολυγώνου (οἷον δὴ Τετραγώνου) περίμετρος εηθι ἴση τῇ περιφερείᾳ τοῦ Κύκλου, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ αζ, ϗ οὗ τὸ κέντρον ζ τῷ τοῦ Κύκλου κέντρῳ εἰς ταυτὸ γίνεται, ὃς ἂν εἰς τὸ Τετράγωνον ἐγγραφείη, ἢ περὶ αὐτὸ περιγραφείη, τὸ εηθι. Φημὶ τοίνυν ὡς τὸ τοῦ Κύκλου χωρίον τοῦ κατὰ τὸ Πολύγωνον μεῖζον ἐςί.

---

(1) Ἐκ τῆς *Α.* τοῦ ϛ΄. (2) *ΙΔ.* τοῦ γ΄. (3) *ΛΗ.* τοῦ α΄. (4) *Διὰ* τὴν παρθ. καὶ τὸ Σχόλ. τῆς *ΜΑ.* τοῦ α΄. (5) *Διὰ* τὴν *Γ΄.* (6) Σχόλ. τῆς *ΜΑ.* τοῦ α΄.

Τὸ γὰρ δὴ τȣ̃ Κύκλȣ, ἴσον ἐςὶ (1) Τριγώνῳ, ȣ̃ βάσις μὲν ἡ Περιφέρεια, ὕψος δὲ ἡ Ἡμιδιάμετρος ζα· τὸ δὲ τȣ̃ Πολυγώνȣ, ἴσον ἐςὶ Τριγώνῳ (2), ȣ̃ βάσις μὲν ἡ τȣ̃ Πολυγώνȣ περίμετρος, ἡ τῇ τȣ̃ Κύκλȣ περιφερείᾳ (καθ' ὑπόθεσιν) ἴση, ὕψος δὲ ἡ Κάθετος ζο, ἡ ἀπὸ τȣ̃ Κέντρȣ ἐπὶ τὴν τȣ̃ Πολυγώνȣ πλευρὰν ἀγομένη. Ταύτης οὖν ἐλάσσονος ἀεὶ τῆς ἡμιδιαμέτρȣ τȣ̃ Κύκλȣ ὔσης, εὔδηλον ὡς τὸ τȣ̃ Πολυγώνȣ χωρίον, τȣ̃ κατὰ τὸν κύκλον τυγχάνει ἔλαττον. Ο. Ε. Δ.

Παραπλησίως δὲ ϗ τῶν ἴσων τὰς ἐπιφανείας ςερεῶν, ἡ Σφαῖρα δειχθήσεται οὖσα τὸ περιεκτικώτατον.

Πρότασις Ε.

„Πᾶς Κύκλος ἴσος ἐςὶ Τριγώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ τȣ̃ Κύκλȣ ἐςὶ περιφέρεια, ὕψος δὲ ἡ ἡμιδιάμετρος.

κ. 8. Τῶν κανονικῶν Πολυγώνων τὰ περὶ τὸν Κύκλον περιγραφόμενα, ϗ τὰ Τρίγωνα, οἷς αἱ μὲν βάσεις ἴσαι ταῖς τῶν Πολυγώνων περιμέτροις εἰσὶ, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ τȣ̃ Κύκλȣ ἡμιδιαμέτρῳ (3), ἀεὶ ἴσα ἐςί. Ἀλλαμὴν τὰ περὶ τὸν Κύκλον ἐς ἄπειρον περιγραφόμενα Πολύγωνα, εἰς τὸν Κύκλον τέως αὐτὸν (4) ἀπολήγȣσιν· ὡσαύτως δὲ ϗ τὰ Τρίγωνα (ὡς αὐτίκα δειχθήσεται) τὰ βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν τȣ̃ περιγεγραμμένȣ Πολυγώνȣ περίμετρον, ὕψος δὲ τὴν τȣ̃ Κύκλȣ ἡμιδιάμετρον αβ ἐπίγε τὸ Τρίγωνον, ᾧ βάσις μὲν ἡ Περιφέρεια, ὕψος δὲ ἡ αβ Ἡμιδιάμετρος· ὁ ἄρα Κύκλος (5) ϗ τὸ Τρίγωνον, ᾧ βάσις μὲν ἡ Περιφέρεια, ὕψος δὲ ἡ αβ Ἡμιδιάμετρος, ἴσα ἐςί.

Ὡς δὲ τὰ ὑπό τε τῆς περιμέτρȣ τȣ̃ Πολυγώνȣ, ϗ τῆς ἡμιδιαμέτρȣ τȣ̃ Κύκλȣ Τρίγωνα, ἐπὶ τὸ ὑπό τε τῆς περιφερείας, καὶ τῆς ἡμιδιαμέτρȣ ἐςὶν ἀπολῆγον, ὧδε δείκνυμι.

Τὰ ὑπό τε τῆς περιμέτρȣ τȣ̃ περιγεγραμμένȣ Πολυγώνȣ, ϗ τῆς ἡμιδιαμέτρȣ τȣ̃ Κύκλȣ αβ Τρίγωνα, ἐςὶ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς περιφερείας τε ϗ τῆς ἡμιδιαμέτρȣ αβ Τρίγωνον, ὡς ἡ βάσις (6) πρὸς τὴν βάσιν, τȣτέςιν ὡς ἡ τȣ̃ Πολυγώνȣ περίμετρος πρὸς τὴν Περιφέρειαν, κοινȣ̃ τȣ̃ ὕψȣς αὐτοῖς τυγχάνοντος· ἡ δὲ δὴ τȣ̃ Πολυγώνȣ περίμετρος, ἐπ' αὐτὴν δὴ τὴν περιφέρειαν τέως (7) ἀποτελευτᾷ· καὶ τὰ Τρίγωνα ἄρα εἰς τὸ Τρίγωνον αὐτὸ ἀπολήξȣσι.

---

(1) Πόρ. Γ'. (2) Ἐκ τῆς Προτ. τῆς ἐν χερσί. (3) Διὰ τὴν πρὸ ταύτ. (4) Γ. Πρότ. τȣ̃ παρόντ. (5) Α. τȣ̃ παρόντ. (6) Α. τȣ̃ ϛ'. (7) Γ. τῶν Ἀρχιμ.

Πορίσματα.

Α΄. Ἐκ δὴ τῆς παρȣ́σης, ϗ τῆς ΜΑ΄ τȣ̃ α΄ Βιβλίȣ, μᾶλλον δὲ ἐκ ταύτης τε, ϗ τȣ̃ Πορίσμ. τȣ̃ μετὰ τὴν ΜΒ΄ τȣ̃ α΄ Βιβλ. φανερὸν, ὅτι τὸ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρȣ ϗ τῆς ἡμιπεριφερείας, ἢ γȣ̃ν τὸ ὑπὸ τῆς διαμέτρȣ ϗ τῆς τεταρτημορικῆς περιφερείας, ἢ τέως τὸ ὑπό τε τȣ̃ τεταρτημορίȣ τῆς διαμέτρȣ, ϗ τῆς ὁλοσχερȣ̃ς περιφερείας, ἴσον τῷ Κύκλῳ ἐςί· τὸ δὲ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρȣ, ϗ τῆς ὅλης περιφερείας, ἢ γȣ̃ν τὸ ὑπὸ τῆς διαμέτρȣ ϗ τῆς ἡμιπεριφερείας, διπλάσιον τȣ̃ Κύκλȣ ἐςί· τὸ δὲ ὑπὸ τῆς ὅλης διαμέτρȣ, ϗ τῆς ὅλης περιφερείας, τετραπλάσιον τȣ̃ Κύκλȣ ἐςί.

Β΄. Ἔςι δὲ ὁ Κύκλος πρὸς τὸ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένον Τετράγωνον, κ. 9.
ὡς ἡ ἡμιπεριφέρεια γδε πρὸς τὴν διάμετρον· πρὸς δὲ δὴ τὸ Τετράγωνον τὸ περὶ αὐτὸν περιγεγραμμένον ἐςὶν, ὡς τὸ τέταρτον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον, ἢ γȣ̃ν ὡς ἡ ἡμιπεριφέρεια πρὸς τὴν δὶς διάμετρον· πρὸς δὲ τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρȣ, ὡς ἡ περιφέρεια πρὸς τὴν διάμετρον.

Τὸ γὰρ Ὀρθογώνιον, τὸ ὑπό τε τῆς ἡμιπεριφερείας γδε, καὶ τῆς ἡμιδιαμέτρȣ γα, ἤτοι γζ (τȣτέςιν (1) αὐτὸς ὁ Κύκλος), ἐςὶ πρὸς τὸ Ὀρθογώνιον γζηε, τὸ ὑπὸ ζη ϗ ηε (ὅπερ ἐςὶ (2) πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτὸν Τετράγωνον), ὡς (3) ἡ γδε ἡμιπεριφέρεια πρὸς τὴν ζη, ἢ γȣ̃ν τὴν γε διάμετρον. Ο. Η. τὸ Α.

Ταύτῃτοι ἐςὶν ὁ Κύκλος πρὸς τὸ δὶς Ὀρθογώνιον ηζγε, τȣτέςι πρὸς τὸ ζθ Τετράγωνον τὸ περὶ αὐτὸν περιγεγραμμένον, ὡς ἡ ἡμιπεριφέρεια γδε, πρὸς τὴν δὶς διάμετρον γε. Ο. Η. τὸ Β΄.

Καὶ ὅτως ἐςὶν ὁ Κύκλος πρὸς τὸ τεταρτημόριον τȣ̃ περιγεγραμμένȣ περὶ αὐτὸν Τετραγώνȣ, τȣτέςι πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρȣ Τετράγωνον, ὡς ἡ ἡμιπεριφέρεια πρὸς τὴν ἡμιδιάμετρον, εἴτȣν ὡς ἡ περιφέρεια πρὸς τὴν διάμετρον. Ο. Η. τὸ Γ΄.

Γ΄. Ἐκ τȣ̃ Α΄. πορίσματος, διὰ τεταρτημορίȣ μηχανικῶς ἔνι λαβεῖν Ὀρθογώνιον, ἢ Τετράγωνον ἴσον Κύκλῳ, ὃς ἂν ἀπὸ τῆς αὐτῆς τῷ τεταρτημορίῳ ἡμιδιαμέτρȣ ᾖ καταγεγραμμένος· κἀντεῦθεν ὁ Κύκλȣ παντὸς τετραγωνισμὸς μηχανικῶς ληφθήσεται. Τὸ γὰρ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τεταρτημορικȣ̃ τόξȣ (4), ϗ τῆς διαμέτρȣ, ὅθεν δὴ ϗ τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς μέσης (5)

(1) Α. Πόρ. (2) Σχόλ. τὸ μετὰ τὴν ϛ΄. ϗ Ζ΄. τȣ̃ δ΄. (3) Α. τȣ̃ ϛ΄. (4) Πόρ. Δ΄. (5) ΙΓ. ϗ ΙΖ. τȣ̃ ϛ΄.

ἀναλόγε, τῆς μεταξὺ τῦτε τόξε ϗ τῆς διαμέτρε, τῷ ἀπὸ τῆς αὐτῆς τῷ τεταρτημορίῳ ἡμιδιαμέτρε Κύκλῳ συνεξισῦται· Διὸ δὴ ἐκ τύτε, ϗ ὁτῳοῦν ἑτέρῳ δοθέντι Κύκλῳ ὀρθογώνιον, ἢ τετράγωνον ἴσον τεθείσεται, διὰ τῦ Ζ΄ πορίσματος τῆς Β΄ Προτ. τῦ ιβ΄ Βιβλ.

Μηχανικῶς δὲ ληφθήσεται ἡ τῷ τεταρτημορικῷ τόξῳ ἴση Εὐθεῖα, νήματος ἢ χάρτε τῷ τόξῳ προσαρμοζομένε, ἢ ϗ τῦ τόξε αὐτῦ ἐπί τινι ἐπιπέδῳ πρὸς κανόνα κυλισμένε.

Π ρ ό τ α σ ι ς ϛ.

„Παντὸς Κύκλε ἡ περιφέρεια τὴν κατ᾽ αὐτὸν διάμετρον, ἔλαττον μὲν „ἢ τρὶς σὺν ἑπτημορίῳ (ἤτοι $\frac{10}{70}$), πλέον δὲ ἢ τρὶς σὺν $\frac{10}{71}$ περιενήνοχε.

Τῦτο δὴ τὸ θεώρημα ἀποδειξόμενος, πολύγωνα ἄττα τῶν τεταγμένων ὁ Ἀρχιμήδης προσείληφε, τὸ μὲν περὶ τὸν Κύκλον περιγεγραμμένον, τὸ δὲ εἰς τὸν αὐτὸν ἐγγεγραμμένον, πλευρῶν 96 ὂν ἑκάτερον· εἶτ᾽ ἀπέδειξεν, ὡς αἱ μὲν 96 πλευραὶ τῦ περὶ τὸν κύκλον, περιέχεσαι εἰσὶ τὴν κατ᾽ αὐτὸν διάμετρον ἧττον ἢ τρὶς ϗ $\frac{1}{7}$, ἐξ οὗ ἑπόμενον ἐςὶ τὴν περιφέρειαν, ὡς ἐκείνων ὖσαν ἐλάσσονα, ἔλαττον ἔτι τῆς διαμέτρε περιεκτικὴν εἶναι ἢ τρὶς ϗ $\frac{1}{7}$· αἱ δὲ δὴ τῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένε 96 πλευραὶ (ϗ δὴ ϗ ἡ περιφέρεια, ἥτις ἐκείνων μείζων ἐςὶ) τὴν κατὰ τὸν Κύκλον διάμετρον πλέον ἢ τρὶς ϗ $\frac{10}{71}$ περιέχεσιν· ἀλλ᾽ ἦγε τῦ τοιύτε δεῖξις, πλατυτέρα ἢ ὥςε ἐπὶ τῦ παρόντος ἐξενεχθῆναι, δόξειεν ἄν.

Ἀλλὰ γὰρ ἐπεὶ λόγε τῦ παντὸς ἄξιον ἐςὶ τὸ θεώρημα, ὡς ϗ βίβλον περὶ αὐτῦ ὅλην τὸν Ἀρχιμήδην συγγεγραφέναι, ἀκατασκεύασον ὖτω τοῖς τῶν Γεωμετρικῶν θιασώταις, παραλειφθῆναι ἐν τύτοις, ὐκ ἂν ὀρθῶς ἔχειν μοι δοκεῖ. Ταύτητοι καὶ τὴν ἀρχιμήδειον τύτε κατασκευὴν, ἣν τοῖς τῦ μεγάλε Βαῤῥοβίε ςείχοντες ἴχνεσιν ἐκτιθέμεθα, λαβὼν ἔχε.

σχ. 10. Μέρος Α΄. Ἡ παντὸς Κύκλε περίμετρος, τὸ τριπλῦν τῆς αβ διαμέτρε ὑπερέχει ὑπεροχῇ ἐλάσσονι, ἢ κατὰ τὸ $\frac{1}{7}$ τῆς αὐτῆς διαμέτρε.

Ἔςω γ τὸ τῦ Κύκλε κέντρον, καὶ αδ (τῇ ἡμιδιαμέτρῳ αγ ἴση (1)) πλευρὰ τῦ Ἑξαγώνε τῦ κανονικῦ, ὥπερ ἂν τῷ Κύκλῳ ἐγγράφοιτο· καὶ ἔςαι ἡ ὑπὸ αγδ (2) ἑκτημόριον τεττάρων ὀρθῶν. Δίχα δὴ τετμήσθω ἡ ὑπὸ αγδ διὰ τῆς γε ἀχθείσης, ὑφ᾽ ἧς ϗ ἡ αδ (3) δίχατε ϗ πρὸς ὀρθὰς κατὰ

(1) Πόρ. Α. τῆς ΙΕ. τῦ δ΄. (2) Κς. τῦ γ΄. ϗ Α. Πόρ. τῆς ΛΓ. τῦ ϛ΄. (3) Ἀριθ. Γ. τῦ Σχολ. τῆς Κς. τῦ ά.

τὸ σ τμηθήσεται. Προαχθήτω δὲ ἡ γε, εἰς ὃ ἀπαντήσῃ τῇ εα ἁπτομένῃ τοῦ Κύκλου κατὰ τὸ α· καὶ κατὰ συνεχῆ τῶν πρὸς τῷ γ Γωνιῶν διχοτομίαν, ἀχθήτωσαν πρὸς τὴν ἁπτομένην αἱ γζ, γη, γθ, γκ, ὡς εἶναι τὴν μὲν ὑπὸ αγδ = 2 αγε = 4 αγζ = 8 αγη = 16 αγθ = 32 αγκ. Εἴη δ' ἂν οὕτως ἡ ὑπὸ αγθ (ἤτοι αἱ 2 ὑπὸ αγκ) = $\frac{1}{96}$ (τουτέστιν ἐννενηκοστὸν ἑκτημόριον) τῶν τεσσάρων ὀρθῶν· καὶ ἐὰν ἐπὶ τῆς ἁπτομένης προαχθείσης ληφθῇ αλ = ακ, καὶ ἐπιζευχθῇ γλ, ἔσται αγλ = αγκ (1). Ταύτῃτοι καὶ λγκ τῆς αγκ Γωνίας διπλασίων, τουτέστιν ἴση τῇ ὑπὸ αγθ, ἤτοι $\frac{1}{96}$ τεττάρων ὀρθῶν. Ἡ δὲ δὴ λκ Εὐθεῖα τοῦ τεταγμένου σχήματος, οὗ πλευραὶ ἓξ ἐπὶ ἐννενήκοντα, ὃ ἂν περὶ τὸν Κύκλον περιγραφείη, Πλευρὰ οὖσα ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ λκ ἐννενηκοντάκις ἑξάκις ληφθεῖσα, τῆς τοῦ Κύκλου περιφερείας (2) μείζων ἔσται· Εἰ τοίνυν δειχθείη τὰς 96 λκ ἅμα ἐλάσσονας εἶναι τῆς τρὶς ληφθείσης διαμέτρου αβ σὺν $\frac{1}{7}$· ἔσται δὴ πάντως καὶ ἡ τοῦ Κύκλου περιφέρεια ἐλάσσων τῆς τρὶς ληφθείσης διαμέτρου αὐτοῦ σὺν $\frac{1}{7}$.

Ὁμοίων ὄντων τῶν Τριγώνων γεα, γασ (3), ἔσται γε : εα :: γα : ασ· ἀλλὰ γα = (4) 2 ασ, ἄρα γε = 2 εα· ἐπεὶ δέ τοι ἡ ὑπὸ αγε δίχα τέτμηται διὰ τῆς γζ (5), ἔσται εγ : γα :: εζ : ζα· καὶ ἐν συνθέσει εγ + γα : γα :: εα : ζα, καὶ ἐναλλὰξ εγ + γα : εα :: γα : ζα· ὡσαύτως δὲ δειχθήσεται καὶ ζγ + γα : ζα :: γα : ηα, καὶ ηγ + γα : ηα :: γα : θα, καὶ τελευταῖον θγ + γα : θα :: γα : κα.

Κείσθω εγ = 306, ἔσται εγ^T = 93636, ἡ δὲ δὴ (6) εα = 153· ὥστε εα^T = 23409, καὶ γα^T = (εγ^T (7) — εα^T = 93636 — 23409) 70227· ἀλλὰ $\sqrt{70225}$ = 265· ἄρα γα μείζων ἐστὶν ἢ ὅσον 265· καὶ εγ + γα μείζων ἢ 306 + 265 = 571· Ἐπεὶ δέ τοι εγ + γα : εα :: γα : ζα· ὁ δὲ λόγος εγ = γα : εα (8) μείζων ἐστὶ τοῦ λόγου 571 πρὸς 153· ἔσται δὴ (9) καὶ ὁ λόγος γα πρὸς ζα, μείζων τοῦ λόγου 571 πρὸς 153, τουτέστιν (εἴτις ἑκάτερον τῶν ἀριθμῶν διὰ 8 πολυπλασιάσαι) τοῦ λόγου 4568 πρὸς 1224· Ἐὰν οὖν ζα = 1224 ὑποτεθῇ, ἔσται (10) ἡ γα μείζων ἢ ὅσον 4568.

Κείσθω τοίνυν ζα = 1224, καὶ ἔσται ζα^T = 1498176· καὶ ἐπεὶ γα μείζων ἢ 4568, ἔσται γα^T μεῖζον ἢ ὁ ἀριθμὸς 20866624· διὸ δὴ γζ^T = ζα^T + αγ^T μεῖζον ἔσται, ἢ 1498176 + 20866624, τουτέστιν ἢ 22364800· ἀλλα-

(1) Δ. τοῦ α'. (2) Ἀξ. Β'. τῶν Ἀρχιμ. (3) Η. τοῦ ς'. (4) Ὡς ἀνωτ. (5) Γ. τοῦ ς'. (6) Ὡς ἀνωτ. (7) Β. Πρόβλ. μετὰ τὴν ΜΖ. τοῦ α'. (8) Η. τοῦ ε'. (9) Σχόλ. τῆς ΙΑ. τοῦ ε'. (10) Ι. τοῦ ε'.

μὴν $\sqrt{22363441} = 4729$· ἄρα ζγ μείζων ἢ 4729, καὶ ζγ + γα μείζων ἢ 4729 + 4568, τουτέστιν ἢ 9297· Καὶ ἐπειδὴ ζγ + γα πρὸς ζα ἐστὶν ὡς γα πρὸς ηα· ὁ δέ τοι λόγος ζγ + γα πρὸς ζα, μείζων ἐστὶν ἢ 9297 πρὸς 1224· ἔσται καὶ ὁ λόγος γα πρὸς ηα, μείζων τοῦ 9297 πρὸς 1224· ὥστε εἴγε ηα = 1224 ὑποτεθείη, ἔσται γα μείζων ἢ 9297.

Κείσθω τοίνυν ηα = 1224, καὶ ἔσται ηα^{T} = 1498176· καὶ ἐπειδὴ γα μείζων ἢ 9297, ἔσται γα^{T} μεῖζον ἢ 86434209· καὶ οὕτω γη^{T} = ηα^{T} = γα^{T}, μεῖζον ἔσται ἢ 1498176 + 86434209, τουτέστι μεῖζον ἢ 87932385· ἀλλὰ $\sqrt{87928129} = 9377$· ἄρα ἡ γη μείζων ἐστὶν ἢ 9377, καὶ ηγ + γα, μείζων ἢ 9377 + 9297, ἤτοι μείζων ἢ 18674· Καὶ ἐπείπερ ηγ + γα : ηα :: γα : θα· ὁ δὲ δὴ λόγος ηγ + γα : ηα μείζων τοῦ 18674 πρὸς 1224, τουτέστιν (εἴτις ἑκατέρου τὴν ἡμίσειαν λάβοι) τοῦ λόγου 9337 πρὸς 612, ἔσται ἄρα καὶ ὁ λόγος γα πρὸς θα, μείζων τοῦ λόγου 9337 πρὸς 612· Εἴπερ οὖν τεθείη θα = 612, ἔσται γα μείζων 9337.

Κείσθω τοίνυν θα = 612, καὶ ἔσται θα^{T} = 374544· ἐπεὶ δὲ ἡ γα μείζων 9337, ἔσται γα^{T} μεῖζον 87179569, καὶ οὕτω γθ^{T} = θα^{T} + γα^{T} μεῖζον ἔσται 374544 + 87179569, τουτέστι μεῖζον 87554113· Ἀλλὰ $\sqrt{87553449} =$ 9357· ἄρα ἡ γθ μείζων ἐστὶν ἢ 9357· καὶ θγ + αγ μείζων ἔσται ἢ 9357 + 9337· ἀμέλει τοι μείζων ἢ 18694. Καὶ ἐπεὶ θγ + γα : θα :: γα : κα· ὅ,τε λόγος θγ + γα : θα μείζων ἐστὶ τοῦ λόγου 18694 πρὸς 612, εἴτ' οὖν (ἑκατέρου ἡμισευθέντος) τοῦ λόγου 9347 πρὸς 306, ἔσται δὴ καὶ ὁ λόγος γα πρὸς κα μείζων τοῦ λόγου 9347 πρὸς 306. Ἐὰν τοίνυν ὑποτεθῇ 2ακ (ὅπερ ἐστὶ λκ) = 306, ἔσται 2αγ ἤτοι αβ μείζων 9347· ὅ,τε λόγος αβ πρὸς 9347, μείζων ἔσται τοῦ λόγου λκ πρὸς 306· καὶ ἑπομένως ὁ λόγος $3\frac{1}{7}$ αβ πρὸς $3\frac{1}{7} \times 9347 = 29376\frac{2}{7}$, μείζων ἔσται (1) τοῦ λόγου 96 λκ, πρὸς $96 \times 306 = 29376$· Οὗτος δὲ ὁ ἔσχατος λόγος ἰσότητος τυγχάνει ὤν, διὰ τὸ εἶναι 96 λκ = 29376· ἄρα $3\frac{1}{7}$ αβ μείζων ἢ $29376\frac{2}{7}$, καὶ ἔτι δὲ μείζων ἢ 29376, τουτέστιν ἢ 96 λκ· Ἡ τοῦ τεταγμένου ἄρα Πολυγώνου (οὗ πλευραὶ 96) τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένου περίμετρος, καὶ πολλῷ δὴ μᾶλλον ἡ τοῦ Κύκλου αὐτοῦ (περὶ ὃν τὸ τοιόνδε Πολύγωνον περιγέγραπται) περιφέρεια, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς κατὰ τὸν αὐτὸν κύκλον $3\frac{1}{7}$ διαμέτρου. Ο. Ε. Δ.

(1) ΙΕ. τοῦ ε΄.

Μέρος Β΄.

„Ἡ τȣ͂ Κύκλου περιφέρεια, τὴν τȣ͂ αὐτȣ͂ Κύκλου διάμετρον αβ τρὶς „ληφθεῖσαν, ὑπερέχει ὑπεροχῇ μείζονι, ἢ ὅσον $\frac{10}{71}$ μόρια τῶν ἐκ τῆς αὐ- „τῆς διαμέτρȣ.

Ἔϛω δὴ τόξον τὸ αδ τῆς ὅλης τȣ͂ Κύκλȣ περιφερείας ἑκτημόριον· συ- Σχ. 11.
νεχεῖ δὲ διχοτομήσει γινέσθω τὸ τόξον αδ = 2 αε, = 4 αζ = 8 αη = 16 αθ, καὶ ἔϛαι τὸ τόξον αθ $\frac{1}{96}$ τῆς ὅλης περιφερείας· ἀχθήτωσαν δὲ εὐθεῖαι βδ, βε, βζ, βη, βθ, καὶ εὐθεῖαι αδ, αε, αζ, αη, αθ. Ἔϛαι δὲ αθ Πλευρὰ τȣ͂ κανονικȣ͂ σχήματος τȣ͂ ἐκ πλευρῶν ἓξ ἐπὶ ἐννενήκοντα, ὅπερ ἂν εἰς τὸν κύκλον ἐγγράφοιτο, ϗ ȣ͂περ ἡ περίμετρος 96 αθ, τῆς τȣ͂ Κύκλȣ περιφερείας ἐλάσσων ἐϛὶ (1)· Τεμνέτωσαν οὖν ἀλλήλας αἱ εὐθεῖαι αδ, βε ἔνθα τὸ κ· διὰ δὲ τὰς ὑπὸ εβα, εαδ, τὰς ἐπὶ ἴσων τόξων, ϗ ἑπομένως (2) ἴσας, ϗ τὴν πρὸς τῷ ε κοινὴν, τὰ Τρίγωνα αβε, καε (3) ἔϛαι ὅμοια· ἔνθεντοι αβ : ακ : : βε : εα· Καὶ ἐν τῷ Τριγώνῳ αβδ, διὰ τὴν κατὰ τὸ β Γωνίαν, τὴν δίχα τεμνομένην (4) ὑπὸ τῆς Εὐθείας βκ, ἔϛαι (5) δβ : βα : : δκ : κα· καὶ ἐν συνθέσει δβ + βα : βα : : δα : κα· καὶ ἐναλλὰξ δβ + βα : δα : : βα : κα : : (6) βε : εα· Ὡσαύτως δὲ ἀποδειχθήσεται εβ + βα : εα : : βζ : ζα· καὶ ζβ + βα : ζα : : βη : ηα· καὶ ηβ + βα : ηα : : βη : ηα.

Κείσθω οὖν βα = 1560, ϗ ἔϛαι $\beta\alpha^{T}$ = 2433600· καὶ δα = τῇ ἡμιδιαμέτρῳ (7) αγ = 780· ὥϛε $\delta\alpha^{T}$ = 608400, καὶ $\delta\beta^{T} = \beta\alpha^{T} - \delta\alpha^{T}$ = 1825200· Ἀλλὰ $\sqrt{1825201}$ = 1351· καὶ τοίνυν δβ ἐλάσσων ἐϛὶν ἢ 1351· καὶ δβ + βα ἐλάσσων ἢ 1351 + 1560 = 2911· Ἔνθεντοι ὁ λόγος 2911 πρὸς 780, τȣτέϛιν (εἰ τῶν ἀριθμῶν ἑκάτερος διὰ 100 πολλαπλασιασθείη) ὁ λόγος 291100 πρὸς 78000, μείζων ἐϛὶ τȣ͂ λόγȣ δβ + βα πρὸς δα, ἤτοι τȣ͂ βε πρὸς εα· Ἐὰν ȣ͂ν ὑποτεθῇ εα = 78000, ἔϛαι βε ἐλάσσων 291100.

Κείσθω τοίνυν εα = 78000, καὶ ἔϛαι $\epsilon\alpha^{T}$ = 6084000000· καὶ ἐπειδὴ βε ἐλάσσων ἢ 291100, ἔϛαι $\beta\epsilon^{T}$ ἔλαττον ἢ 84739210000· καὶ $\beta\alpha^{T} = \beta\epsilon^{K} + \epsilon\alpha^{T}$, ἔλαττον ἢ 90823210000· Ἀλλαμὴν $\sqrt{90826890625}$ = 301375· ἄρα βα ἐλάσσων ἐϛὶν ἢ 301375, ϗ εβ + βα ἐλάσσων ἢ 291100 + 301375 = 592475· Ταύτητοι ὁ λόγος 592475 πρὸς 78000, τȣτέϛιν

---

(1) Ἀξ. ά. τῶν Ἀρχιμ. (2) ΚΘ. Βιβλ. Γ. (3) Θ. Πόρ τῆς ΛΒ. τȣ͂ ά. καὶ Πρότ. Δ. τȣ͂ ϛ΄. (4) ΚΘ. τȣ͂ γ΄. (5) Γ. τȣ͂ ϛ΄. (6) Ὡς ἀνωτ. (7) Δ. Πόρισ. τῆς ΙΕ. τȣ͂ δ΄.

(εἴτις τοὺς ἀριθμοὺς διὰ 324 διελόμενος, τὰ ἐντεῦθεν πηλίκα διὰ 11 ἐπιπολλαπλασιάσειε) ὁ λόγος 20053 πρὸς 2640, τοῦ λόγου εβ + βα πρὸς εα, τουτέστι τοῦ βζ πρὸς ζα μείζων ἔσται· καὶ εἰ τοίνυν θείημεν ζα = 2640, ἔσται δὴ βζ ἐλάσσων ἢ 20053.

Κείσθω τοίνυν ζα = 2640, καὶ ἔσται ζα$^{\text{T}}$ = 6969600· καὶ ἐπειδὴ βζ ἐλάσσων ἐστὶ 20053, ἔσται βζ$^{\text{T}}$ ἔλαττον ἢ 402122809, καὶ βα$^{\text{T}}$ = βζ$^{\text{T}}$ + ζα$^{\text{T}}$ ἔλαττον ἢ 409092409· Ἀλλὰ $\surd$ 409131529 = 20227· ἄρα βα ἐλάσσων ἢ 20227, καὶ ζβ + βα ἐλάσσων 40280· ὥστε ὁ λόγος 40280 πρὸς 2640, τουτέστιν (εἴτις ἑκάτερον διέλοι διὰ 40, ἐπιπολλαπλασιάσειε δὲ τὰ ἐντεῦθεν ἀνακύπτοντα πηλίκα διὰ 6) ὁ λόγος 6042 πρὸς 396, μείζων ἐστὶ τοῦ λόγου ζβ + βα πρὸς ζα, τουτέστι τοῦ βη πρὸς ηα· Ἐὰν οὖν τεθῇ ηα = 396, ἔσται βη ἐλάσσων ἢ 6042.

Κείσθω τοίνυν ηα = 396, καὶ ἔσται ηα$^{\text{T}}$ = 156816· καὶ ἐπειδὴ βη ἐλάσσων ἐστὶν ἢ 6042, ἔσται βη$^{\text{T}}$ ἔλαττον ἢ 36505764, καὶ βα$^{\text{T}}$ = βη$^{\text{T}}$ + ηα$^{\text{T}}$ ἔλαττον ἢ 36662580· Ἀλλαμὴν $\surd$ 36663025 = 6055· ἄρα βα ἐλάσσων ἐστὶν ἢ 6055, καὶ βη + ηα ἐλάσσων ἢ 12097· Ἐνθεντοι ὁ λόγος 12097 πρὸς 396, τουτέστιν (ἑκατέρου διπλασιασθέντος) ὁ λόγος 24194 πρὸς 792 μείζων ἐστὶ τοῦ λόγου ηβ + βα πρὸς ηα, ἤτοι τοῦ λόγου βθ πρὸς θα· Ἐὰν οὖν τεθῇ θα = 792, ἔσται βθ ἐλάσσων ἢ 24194.

Κείσθω τοίνυν θα = 792, καὶ ἔσται θα$^{\text{T}}$ = 627264, καὶ ἐπειδὴ βθ ἐλάσσων ἢ 24194, ἔσται βθ$^{\text{T}}$ ἔλαττον ἢ 585349636· καὶ βα$^{\text{T}}$ = βθ$^{\text{T}}$ + θα$^{\text{T}}$ ἔλαττον ἢ 585976900· Ἀλλὰ $\surd$ 585978849 = 24207· ἄρα ἡ βα ἐλάσσων ἐστὶν ἢ 24207· ὅ,τε λόγος αθ πρὸς αβ, μείζων ἐστὶ τοῦ λόγου 792 πρὸς 24207· τουτέστιν (ἑκατέρου διαιρεθέντος διὰ 3) μείζων τοῦ λόγου 264 πρὸς 8069· καὶ ἑπομένως ὁ λόγος 96 αθ πρὸς αβ, μείζων ἐστὶ τοῦ λόγου 96 × 264 = 25344 πρὸς 8069· καὶ ἐπειδὴ 25344, τουτέστι 25344 × 1, ὑπερέχει 25343 $\frac{34}{71}$, ὅπερ ἐστὶν 8069 × 3 $\frac{10}{71}$, ἔσται (1) ὁ λόγος 25344 πρὸς 8069 μείζων τοῦ λόγου 3 $\frac{10}{71}$ πρὸς 1· ὅθεν δὴ (2) ὁ λόγος 96 αθ πρὸς αβ μείζων ἐστὶ τοῦ λόγου 3 $\frac{10}{71}$ πρὸς 1· Καὶ τοίνυν (3) τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων μεῖζον τοῦ ὑπὸ τῶν μέσων, τουτέστιν 96 αθ, ἥτις ἐστὶν ἡ περίμετρος τοῦ Πολυγώνου, ὅπερ ἂν εἰς τὸν Κύκλον ἐγγράφοιτο, καὶ ἑπομένως ἡ τοῦ Κύκλου, εἰς ὃν ἂν ἐγγράφοιτο περιφέρεια, μείζων ἔσται ἢ 3 $\frac{10}{71}$ ἡ διάμετρος αβ. Ο. Ε. Δ.

(1) Ζ. Πόρ. τῆς Ις. τοῦ ς΄. (2) Σχόλ. τῆς ΙΑ. τοῦ ε΄. (3) ς. Πόρ. τῆς Ις. τοῦ ς΄.

Ὡς εἴπερ ἤδη εἰς Πολύγωνα τῶν πολυπλευροτέρων ἔτι τὸν κατὰ τὴν Γεωμετρίαν λογισμὸν ἐπεκτείνοιμεν, τὰ τεθέντα ὅρια ἔτι καὶ ἔτι ἂν μᾶλλον συστεῖλαι ἔχοιμεν πέρατος ἄνευ, ϗ ἐς ἄπειρον οὕτω τῆς ἀληθοῦς ἀναλογίας ἐγγὺς ἰέναι, ὃ δὴ ϗ γέγονε Λουδόλφῳ τῷ Κεϋσονίῳ, ϗ Γριμβεργέρῳ, ϗ Μετίῳ, ϗ Σνελλίῳ, ϗ ἄλλοις.

Ἐπεὶ δὲ δὴ (ὅρα Σχ. 2) ἡ ἁπτομένη μοιρῶν 36 διὰ 10 πολλαπλασιαζομένη, τὴν τοῦ περιγεγραμμένου Πενταγώνου περίμετρον δίδωσι, τὸ δέ τοι ἡμίτονον μοιρῶν 36 διὰ 10 πολλαπλασιαζόμενον, τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου παρέχεται· ὡσαύτως δὲ ἡ μὲν τῆς ἡμιμοίρας ἁπτομένη διὰ 720 πολλαπλασιαζομένη, τὴν τοῦ περιγεγραμμένου Πολυγώνου, οὗ πλευραὶ 360, τὸ δέ τοι ἡμίτονον τῆς ἡμιμοίρας διὰ 720 ἐπιπολλαπλασιαζόμενον τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου, οὗ ὁμοίως πλευραὶ 360, περίμετρον συγκροτεῖ, ϗ οὕτως ἐπ' ἄπειρον, εὔδηλον ὅπως ἐκ τῶν καταγεγραμμένων ἤδη πινάκων τῶν τε ἡμιτόνων, ϗ τῶν ἁπτομένων, οἱ ἐφεξῆς ἀριθμοὶ εὑρεθῆναι δυνήσονται.

Κατάλογος τῶν εἰς τόδε εὑρημένων ἐπισημοτέρων Ἀναλογιῶν.

Πρώτη γοῦν ἡ κατ' Ἀρχιμήδην οὕτως ἔχουσα.

Διάμετρος 7.

Περιφέρεια 22 μείζων τῆς ἀληθοῦς.

Διάμετρος 71.

Περιφέρεια 223 ἐλάσσων τῆς ἀληθοῦς.

Καὶ γὰρ $\frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$· καὶ $\frac{223}{71} = 3\frac{10}{71}$.

Οἱ μὲν οὖν λόγοι 22 πρὸς 7, καὶ 223 πρὸς 71, ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἑπόμενον ἀναγόμενοι (ὃ δὴ γίνεται, καθ' ὃν δὴ λόγον ϗ τὰ ἀριθμητικὰ τῶν κλασμάτων, ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν ἀνακαλεῖται), λόγους δώσουσι τοὺς ἐφεξῆς δὴ τούτους 1562 πρὸς 497, καὶ 1561 πρὸς 497.

Καὶ τεθείσης τοίνυν τῆς διαμέτρου μερῶν 497.

Ἔσται ἡ ὑπερπίπτουσα τῆς ἀληθοῦς περιφέρεια 1562.

Ἡ δὲ εἴσω πίπτουσα, ϗ τῆς ἀληθοῦς ἐλάσσων 1561.

Ὥστε ἑκατέρα τῆς ἀκριβῶς ἀληθευούσης διενήνοχε πηλικότητι ἐλάσσονι τῆς, ἥπερ ἂν εἴη τῆς ὅλης διαμέτρου $\frac{1}{497}$.

Ἐὰν δὲ οἱ λόγοι 7 πρὸς 22, καὶ 71 πρὸς 223 ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἑπόμενον ἐπαναχθῶσι, προκύψουσι δὴ οἱ λόγοι οὗτοι 1561 πρὸς 4906, καὶ 1562 πρὸς 4906.

Καὶ τεθείσης τοίνυν τῆς περιφερείας μερῶν 4906.

Ἔσται ἡ μὲν ἐλάττων οὖσα τῆς ἀληθοῦς διάμετρος 1561.

Ἡ δέ τοι μείζων 1562.

Ὥςε ἑκατέρα τῆς ἀκριβῶς ἀληθευούσης διαμέτρου διενήνοχε πηλικότητι ἐλάσσονι τῆς, ἥπερ ἂν εἴη τῆς ὅλης περιφερείας $\frac{1}{4908}$.

Ἣν δὲ δὴ Μέτιος παρέδωκεν ἀναλογίαν, μακρῷ τῆς κατ᾽ Ἀρχιμήδην πρὸς ἀκρίβειαν ἐςὶ διαφέρουσα· καθ᾽ ἥν,

Ἡ μὲν Διάμετρος 113.

Ἡ δὲ Περιφέρεια 355.

Ἁπασῶν γὰρ τῶν ἐν βραχέσιν ἀριθμοῖς παριςαμένων, οὐδεμία τοῦ ἀληθοῦς γίνεται ἐγγυτέρω· Ταύτῃ γὰρ τῆς διαμέτρου ὑποτεθείσης 10,000,000· προκύπτει ἡ περιφέρεια 31,415,929, ἣ δὴ τῆς ἀληθοῦς κατά γε τὸν πρῶτον χαρακτῆρα 9, διαφέρει ὑπεροχῇ μικρόντι μείζονι, ἢ ὅσον ἐςὶ τῆς διαμέτρου δύο δεκατημιλλιομόρια.

Ἀλλὰ γὰρ ἑκατέρας μακρῷ τυγχάνει ἀκριβεςέρα, ἡ δισσὴ ἐκείνη ἡ κατὰ Λουδόλφον τὸν Κεϋσόνιον, ὧν τῆς μὲν οἱ ὅροι χαρακτῆρσι συγκείμενοι εἰσὶ 21, τῆς δὲ 36.

Διάμετρος.

100,000000,000000,000000.

Περιφέρεια ἡ μείζων τῆς ἀληθοῦς.

314,159265,358979,323847.

Περιφέρεια ἐλάσσων τῆς ἀληθοῦς.

314,159265,358979,323846.

Ἡ δὲ ἀμφοῖν τῶν περιφερειῶν διαφορὰ τῆς διαμέτρου ἕν ἐςι μόριον, οὗ παρονομαςὴς ἀριθμὸς ἐκ μονάδος καὶ 20 σημείων τοῦ μηδενὸς συγκροτούμενος· ἔνθεντοι καὶ ἑκατέρα τῆς ἀληθοῦς περιφερείας διενηνοχεῖα ἐςὶ, πηλικότητι τοῦ ῥηθέντος μορίου ἐλάσσονι· ἀμέλειτοι ἑκατοντάκις μιλλιονάκις μιλλιονάκις μιλλιοςῷ.

Διάμετρος.

100000,000000,000000,000000,000000,000000.

Περιφέρεια μείζων τῆς ἀληθοῦς.

314159,265358,979323,846264,338327,950289.

Περιφέρεια ἐλάσσων τῆς ἀληθοῦς.

314159,265358,979323,846264,338327,950288.

Ἡ δὲ ἀμφοῖν τῶν περιφερειῶν διαφορὰ, ἐν αἷς ἡ ἀληθὴς μεσιτεύει, τῆς διαμέτρου μόριον ἐςὶν, οὗ παρονομαςὴς ἀριθμὸς ἐκ μονάδος καὶ 35 χαρακτήρων μηδενικῶν συγκροτούμενος· ὃ δὴ μόριον πρός γε τὴν διάμετρον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ πρὸς τὴν ὅλην γῆν ψάμμου κόκκος. Οὐδὲ γὰρ ὑπὸ τοσούτων ἡ τῆς γῆς Σφαῖρα ψάμμων συνολῦται, ὅσα δή ποτε τῶν τηλικύτων μορίων ἡ διάμετρος περιέχει.

Εἰς κενὸν ἄρ' ἄντις προσωτέρω χωρήσειε, κἂν εἰς ἄπειρον χωρεῖν δυνατὸν, εἴτις γεωμετρικῶς συλλογιζόμενος, κατὰ τὴν ὑπὸ Σνελλίϋ παραδοθεῖσαν πρόχειρον μέθοδον, τὸν λόγον προαγαγεῖν ἐθελήσειε.

Τεθείσης γὰρ δὴ τῆς περιφερείας μερῶν.

1,000000,000000,000000,000000,000000,000000.

Ἔςαι δὴ ἡ διάμετρος ὅτι ἔγγιςα μερῶν.

0,318309,886183,790671,537767,926745,028724.

Πορίσματα.

Ἐπειδὴ ἐν ἀριθμοῖς ἧττον ἀκριβέσιν ἐςὶν ἡ τῦ Κύκλυ περιφέρεια πρὸς τὴν διάμετρον, ὡς 22 πρὸς 7, ἔςαι δὴ καὶ ὁ Κύκλος ἐπὶ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν, πρὸς τὸ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον τετράγωνον, ὡς 11 πρὸς 7· πρὸς δέ γε τὸ περιγεγραμμένον, ὡς 11 πρὸς 14· πρὸς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρυ τετράγωνον, ὡς 22 πρὸς 7· ἃ δὴ πάντα ἐκ τῦ Β'. Πορ. τῆς πρὸ ταύτης Προτ. ἑπόμενα ἐςί. Α'.

Ἐπεὶ δὲ ἐν ἀριθμοῖς ἀκριβεςέροις, ἡ τῦ Κύκλυ περιφέρεια πρὸς τὴν διάμετρον λόγον ἔχει, ὃν 355 πρὸς 113· ἔςαι δὴ ἐπὶ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν ὁ Κύκλος πρὸς μὲν τὸ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον τετράγωνον, ὡς 355 πρὸς 226· πρὸς δὲ τὸ περιγεγραμμένον ὡς 355 πρὸς 452· πρὸς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρυ τετράγωνον, ὡς 355 πρὸς 113. Β'.

Ἐὰν δὲ ἀντὶ τῆς περιφερείας ὑποτεθῇ μονὰς, πέντε τῶν μηδενικῶν σημείων ἑαυτῇ ἑπόμενα φέρυσα, ἔςαι ὁ Κύκλος πρὸς μὲν τὸ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον τετράγωνον ὡς 100000 πρὸς 63662· πρὸς δὲ τὸ περιγεγραμμένον ὡς 100000 πρὸς 127324· πρὸς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρυ ὡς 100000 πρὸς 31831 ὡς ἔγγιςα. Γ'.

Ἐὰν δὲ τελευταῖον ἀντὶ τῆς διαμέτρυ ὑποτεθῇ μονὰς, πέντε τῶν μηδενικῶν σημείων ἑπόμενα φέρυσα, ἔςαι ὁ Κύκλος πρὸς μὲν τὸ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον τετράγωνον ὡς 157080 πρὸς 100000· πρὸς δὲ τὸ περιγεγραμμένον ὡς 78540 πρὸς 100000· πρὸς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρυ ὡς 314159 πρὸς 100000, ὅτι ἔγγιςα. Δ'.

Σχόλιον.

Αἱ δὲ δὴ τῆς ἐκτεθείσης ἀναλογίας ἐπισημόταται ἐπικαρπίαι, εἰσὶν αἵδε αἱ ἐφεξῆς.

„Εὕρεσις τῆς Διαμέτρȣ ἐκ τῆς περιφερείας.

Μιᾶς τινος τῶν ἐκτεθεισῶν ἀναλογιῶν, ὁ τῶν ὅρων μείζων πρῶτος τετάχθω, δεύτερος δὲ ὁ ἐλάσσων· κείσθω δὲ εἰς τρίτον ὅρον ἡ περιφέρεια· Τῶν δὲ τριῶν τȣτωνὶ κειμένων ὅρων, κατὰ τὴν χρυσῆν ἀκȣσταν μέθοδον, ζητείσθω ὁ τέταρτος ἀνάλογον, ὃς δὴ ἡ ζητȣμένη ἔςαι διάμετρος.

Οἷον εἰ τεθείη ἡ τȣ͂ μεγίςȣ κατὰ γῆν Κύκλȣ περιφέρεια, μιλλίων εἶναι τῶν κατὰ Βέλγας ὡρικῶν 8640, ϗ ζητηθείη ἡ τῆς γῆς ἐντεῦθεν διάμετρος, ὅτως οἱ ὅροι τετάξονται.

355 : 113 : : 8640 :

Καὶ ἐπιπολλαπλασιασθέντος τȣ͂ Β΄ τῶν ὅρων διὰ τȣ͂ Γ΄, ϗ τȣ͂ ἀνακύπτοντος διὰ τȣ͂ πρώτȣ διαιρεθέντος, μίλλια πρόεισι Βελγικὰ 2750 $\frac{14}{71}$ εἰς τὴν γῆς διάμετρον.

„Σεσημειώσθω, ὅτι ἐξηπατῆσθαι πεφώραται ὁ Τακȣέτιος ἐν τȣ́τοις, „τῇ περιμέτρῳ τῆς γῆς μίλλια Βελγικὰ 8640 ἀποδȣ́ς. Ἐκ γὰρ τῆς κατὰ „Σνέλλιον καταμετρήσεως, τῆς περιμέτρȣ μίλλια Βελγικὰ 6840 (ὡς ἔςι μα„θεῖν παρὰ Οὐαρενίῳ) περιεχȣ́σης, οὗτος ἔλαθε τὰς ἑκατοντάδας ϗ χιλιά„δας ἀντιμεταςήσας. Ἀλλὰ γὰρ ἐκ τȣ͂ κατὰ Σνέλλιον ἀριθμȣ͂, ἐξέςαι τοῖς „μαθητιῶσι γυμνασίας χάριν καθ᾽ ἑαυτȣ̀ς ἀναλογίσασθαι, ὅση τις ἐξ ἐκείνȣ „δοθέντος ἡ τῆς γῆς ἂν εἴη διάμετρος.

„Εὕρεσις τῆς Περιφερείας ἐκ τῆς Διαμέτρȣ.

Μιᾶς τινος τῶν ἐκτεθεισῶν Ἀναλογιῶν ὁ ἐλάσσων ὅρος πρῶτος τετάχθω, ὁ δὲ μείζων δεύτερος· ἡ δὲ δοθεῖσα διάμετρος εἰς τρίτον ὑποκείσθω· Κἀκ τȣ́των δὴ τῶν τριῶν δοθέντων ὁ τέταρτος ἀνάλογον ζητείσθω· οὗτος γὰρ δώσει τὴν ζητȣμένην περιφέρειαν.

Οἷον εἴπερ ἡ τῆς γῆς διάμετρος μίλλια Βελγικὰ ὡρικὰ περιέχειν ὑποτεθείη 2750 $\frac{14}{71}$, ζητηθείη δὲ ἡ περίμετρος, οὕτως οἱ ὅροι τετάξονται.

113 : 355 : : 2750 $\frac{14}{71}$

Καὶ ἐπιπολλαπλασιασθέντος μὲν τȣ͂ Β΄ διὰ τȣ͂ Γ΄, διαιρεθέντος δὲ τȣ͂ παραγομένȣ διὰ τȣ͂ Α΄, προελεύσεται μίλλια Βελγικὰ 8640, εἰς τὴν γῆς περίμετρον.

Ὡς δὲ βραχύτι λίαν ἡ περίμετρος αὕτη τῆς ἀληθȣ͂ς ὑπερπίπτει, εἴρηται ἡμῖν ἀνωτέρω· ὑπεροχῇ γὰρ δηλονότι μικρῷ μείζονι, ἢ ὅσον τῆς κατὰ γῆν ἡμιδιαμέτρȣ δύο ἐςὶ δεκαμιλλιοςημόρια, τȣτέςιν 9 περίπȣ, ἢ 10 ποσὶ Ῥυνλανδικοῖς, ἐξ ὧν 18000 τὸ ὡρικὸν συνίςαται μίλλιον. Ἐὰν δὲ τῶν κατὰ Λȣδόλφον ἀναλογιῶν, ϗ τῇ προτέρᾳ (ἧς οἱ ὅροι ἐκ χαρακτήρων 21 σύγκεινται) χρησώμεθα, ευρεθήσεται ή περίμετρος ανεπαισθήτως της αληθούς διαφέρουσα, ου μόνον της διαμέτρου τεθείσης μιλλίων Βελγικών 2750, όση ή της γης, αλλά και ην ή διάμετρος αυτή υποτεθείη, εκατόν είναι μιλλιονίων εκ μιλλίων των αυτών, όση τυχόν ή του στερεώματος διάμετρος εστί. Ταύτης γαρ δη κειμένης προκύψει ή περιφέρεια της αληθούς διενηνοχεία πηλικότητι ελάσσονι, ή όσον ποδός Ρ'υνλανδικού εκατοστόν μιλλιοστημόριον. Ε'άν δε επί τη ευρέσει της περιμέτρου της γης, τη κατ' Α'ρχιμήδην αναλογία χρησώμεθα, ή των περιφερειών διαφορά της γε της αληθούς μείζονος, και της ελάσσονος, υπέρ τα 5 Βελγικά μίλλια έσται· Διό δη τη κατ' Α'ρχιμήδην αναλογία, ότι μη επί βραχυτάτου μεγέθους, ήκιστα χρηστέον· χρηστέον δε μάλλον τη κατά Μέτιον ως λυσιτελεστέρα, άτε δη και εξ όρων ου πάνυ πολλών συγκειμένη, και πλέον ή χιλιάκις προς ακρίβειαν διαφερούση.

,,Η' του Κύκλου καταμέτρησις.

Η' ημιδιάμετρος τη ημιπεριφερεία επιπολλαπλασιαζομένη, το εμβαδόν του Κύκλου παρέχεται· ως δήλον εκ του Α' Πορίσμ. της ε'. του παρόντος Βιβλ. Προτάσεως.

Οίον εάν την της γης ημιδιάμετρον μιλλίων ούσαν (του κλάσματος αμελουμένου) Βελγικών 1375, διά της ημιπεριμέτρου της γης πολλαπλασιάσωμεν, τουτέστι διά μιλλίων Βελγικών 4320, προκύψει δη μίλλια Βελγικά τετράγωνα 5,940000, εις τον της γης Κύκλον μέγιστον. Η' δε διαφορά του κυκλικού ευρεθέντος χωρίου από του αληθούς λαμβάνεται, είπερ ή της ευρεθείσης ημιπεριφερείας από της ημισείας της αληθούς διαφορά, επί την δοθείσαν ημιδιάμετρον επιπολλαπλασιάζοιτο· ή γουν, είπερ ή διαφορά της ευρεθείσης ημιδιαμέτρου από της αληθούς, επί την δοθείσαν ημιπεριφέρειαν επιπολλαπλασιάζοιτο.

,,Η' του Κυκλικού τομέως αεβη, ή αεγη, κ. ι.
,,Δοθείσης της του Κύκλου ημιδιαμέτρου αε,
,,Και του κατά τον τομέα τόξου εβη, εγη καταμέτρησις.

Γινέσθω ως 113 προς 355, ούτως (1) ή δοθείσα ημιδιάμετρος προς την του Κύκλου ημιπεριφέρειαν. Είτα ως αι μοίραι 360 προς τας μοίρας του δοθέντος τόξου, ούτως (2) ή ημιπεριφέρεια ή ήδη εξευρεθείσα, προς την του κατά τον τομέα τόξου ημίσειαν εβ, ή εγ· Τούτου ουν διά της δοθείσης ημιδιαμέτρου πολλαπλασιασθέντος (3), το του ζητουμένου τομέως εμβαδόν ανακύψει.

---

(1) *ΙΕ. του ε'.* (2) *Διά την αυτήν.* (3) *Γ. Πόρ. της Δ. του παρόντ., και Σχ. της ΜΑ. του α'.*

Καὶ ἐὰν τὸ ἐμβαδὸν τȣ̃ εὐθυγράμμȣ Τριγώνȣ αεη, τῷ μείζονι τομεῖ αεβη προςεθῇ, ἢ γȣ̃ν ἀπὸ τȣ̃ ἐλάσσονος αεγη ἀφαιρεθῇ, παρέςαι τὸ τȣ̃ Κύκλȣ τμῆμα ἤτοι τὸ μεῖζον εδηβ, ἢ τὸ ἔλαττον εδηγ· τὸ δὲ τȣ̃ δε τȣ̃ Τριγώνȣ ἐμβαδὸν (1) ἐςὶ τὸ ὀρθογώνιον αδ × δε· ἔςι δὲ ἡ εδ (2) ἡμίτονον, ϗ αδ συνημίτονον τȣ̃ τόξȣ εβ, εἴτ' οὖν τȣ̃ εγ· Ἐκ τῶν τȣ̃ Τμήματος ἄρα δοθέντων τόξων εβη, ἢ εγη, ϗ τῆς βάσεως εη, ἢ γȣ̃ν ἔκτε τῆς ἡμιδιαμέτρȣ εα, ϗ τῆς βάσεως εη δοθεισῶν, ἢ τέως ἔκτε τῆς ἡμιδιαμέτρȣ εα, ϗ τȣ̃ τόξȣ εβη, ἢ γȣ̃ν εγη, εὑρεθήσονται αἱ εδ ϗ δα, ἐξ ὧν δὴ ϗ τὸ ἐμβαδὸν τȣ̃ Τριγώνȣ εαη. Ἀλλὰ γὰρ δὴ τὰ τοιαῦτα παρὰ τῆς Τριγωνομετρίας μάλιςα ζητητέα.

„Ἡ τῶν Κυλίνδρων, ϗ τῶν Κώνων καταμέτρησις.

Ταύτην δὴ ὧδε προτίθημι, ὡς ἐκ τῆς τȣ̃ Κύκλȣ καταμετρήσεως ἠρτημένην· Ἅπας οὖν Κύλινδρος, ϗ πᾶν Πρίσμα παράγεται ἐκ τȣ̃ ὕψȣς ἐπὶ τὴν βάσιν πολυπλασιαζομένȣ, ὁ δέτοι Κῶνος ϗ ἡ Πυραμὶς ἐκ τριτημορίȣ τȣ̃ ὕψȣς διὰ τῆς βάσεως πολυπλασιαζομένȣ· τριτημόρια γὰρ τῶν τε Κυλίνδρων, ϗ τῶν Πρισμάτων εἰσὶ, τῶν βάσιντε ϗ ὕψος ἴσων, κατὰ τὴν Ι' ϗ Ζ' τȣ̃ ιβ'. Βιβλίȣ.

Ἔςω τοίνυν βάσις Κυλίνδρȣ, ἢ Κώνȣ ποδῶν οὖσα 50 τετραγώνων, τὸ δὲ ὕψος ποδ. 100· καὶ πολλαπλασιαθέντων δὲ 100 διὰ 50, προκύψȣσι πόδες Κυβικοὶ 5000 εἰς τὸ τȣ̃ Κυλίνδρȣ ςερεόν· πολλαπλασιαθέντων διὰ τριτημορίȣ τȣ̃ ὕψȣς 100, τȣτέςι διὰ $33\frac{1}{3}$ τῶν 50, προκύψȣσι πόδες Κυβικοὶ $1666\frac{2}{3}$ εἰς τὸ ςερεὸν τὸ τȣ̃ Κώνȣ.

Σ. 12. „Καταμέτρησις Κώνȣ κολοβȣ̃ νπρξ, δοθεισῶν τῶν παραλλήλων „βάσεων ζζ ϗ σσ, ϗ τȣ̃ ὕψȣς υδ.

Εἰς ἐπίλυσιν τȣ̃ προτεθέντος προβλήματος τὸ Λῆμμα τὸ ἐφεξῆς προσληπτέον.

Ὃν ἔχει λόγον ἡ τῶν ἐν ταῖς βάσεσιν ἡμιδιαμέτρων διαφορὰ νυ — πδ, πρὸς τὴν ἐλάσσονα ἡμιδιάμετρον πδ, τὸν αὐτὸν ϗ τὸ ὕψος τȣ̃ κολοβȣ̃ Κώνου υδ, πρὸς τὸ ὕψος τȣ̃ ἐνδέοντος δο. Ἀχθείσης γὰρ ἐπὶ τȣ̃ νυο Τριγώνȣ τῆς δι Εὐθείας παραλλήλȣ πρὸς τὴν ον, ἔςαι (3) υι : ιν : : υδ : δο· ἀλλὰ διὰ τὸ παραλληλόγραμμον νιδπ, ἔςι (4) ιν = πδ, καὶ ἑπομένως υι = νυ — πδ· δῆλον ἄρα τὸ προτεθέν.

---

(1) Σχόλ. *ΜΑ*. τȣ̃ α'. (2) Ὁρ. *Ι*. τȣ̃ γ'. ϗ *Α*. Πόρ. τῆς *Γ*. τȣ̃ γ'. (3) *Β*. τȣ̃ ς'. (4) *ΛΔ*. τȣ̃ α'.

Καὶ τοίνυν τῶν τριῶν δοθέντων, ῥᾷστα ὁ τέταρτος δο εὑρεθήσεται, ὅπερ ἐςὶ τὸ ὕψος τὸ τȣ̃ ἐνδέοντος πορ· οὗ δὴ ὕψȣς τριτημόριον, εἴγε ἐπὶ τὴν βάσιν σσ ἐπιπολλαπλασθείη, δώσει δήπȣ τὸ ἐνδέον πορ. Εἶτα ἐὰν τὸ τριτημόριον τῶν εὐθειῶν οδ + δυ, τȣτέςι τȣ̃ ὕψȣς τριτημόριον τȣ̃ Κώνȣ ὁλοχεροῦς, ἐπιπολλαπλασιασθῇ διὰ τῆς βάσεως ζζ, δώσει δὴ τὸν Κῶνον ὁλοχερῆ νοξ· ἀφ᾽ οὗ ἐὰν ἀφαιρεθῇ τὸ ἐνδέον πορ, ὑπολειφθήσεται ὁ Κῶνος ὁ κολοβὸς νπρξ.

Σημειωτέον ἀλλ᾽ οὖν, ὡς οὐ μόνον ἐπὶ τῆς τȣ̃ ὀρθȣ̃, ἀλλ᾽ οὐδὲν ἧττον κἀπὶ τῆς τȣ̃ σκαληνȣ̃ κολοβȣ̃ Κώνȣ καταμετρήσεως, ἡ ἀπόδειξις συντελέσει, ὡς δῆλον ἐξ ὧν ἐν τοῖς περὶ τῆς κολοβῆς Πυραμίδος καταμετρήσεως, ἐν τῷ ΙΒʹ τῶν ςοιχείων εἴρηται.

Πρότασις Ζ.

„Αἱ τῶν Κύκλων περιφέρειαι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ διάμετροι, ἢ „αἱ ἡμιδιάμετροι. σχ. 13.

Τῶν γὰρ ὁμοίων πολυγώνων τῶν εἰς τȣ̀ς Κύκλȣς ἐγγράφεσθαι δυναμένων ἐπ᾽ ἄπειρον, αἱ περίμετροι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ διάμετροι (1) αζ, ιγ· Ἀλλαμὴν αἱ περίμετροι τέως ἐπ᾽ αὐτὰς δὴ (2) τὰς περιφερείας ἀποτελευτῶσιν· ἄρα κ̀ αἱ περιφέρειαι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ διάμετροι. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Η.

„Ἡ τȣ̃ Πρίσματος ἐπιφάνεια, τȣ̃τε εἰς τὸν κύλινδρον περιγεγραμμέ- σχ. 14.
„νȣ, κ̀ τȣ̃ ἐγγεγραμμένȣ, ἴση ἐςὶν ὀρθογωνίῳ, οὗ ὕψος μὲν ἡ τȣ̃ κυλίνδρȣ „πλευρὰ, ἡ δὲ βάσις ἴση τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως τȣ̃ Πρίσματος.

Μέρος Αʹ. Ἡ τȣ̃ περιγεγραμμένȣ Πρίσματος ἐπιφάνεια ἅπτεται τȣ̃ κυλίνδρȣ κατὰ τὰς Εὐθείας εα, νζ, κξ, αἵτινες εἰσὶ τȣ̃ κυλίνδρȣ πλευραί· αἱ δὲ (τȣ̃ κυλίνδρȣ ἐξ ὑποθ. ὀρθȣ̃ ὄντος) ἐπὶ τȣ̃ κατὰ τὴν βάσιν ἐπιπέδȣ (3) ὀρθαὶ εἰσὶ, κ̀ ἑπομένως καὶ πρὸς τὰς γη, ημ, κξ: εὐθείας (4) πρὸς ὀρθὰς ἐφεςήκασιν· εἰσὶ δὲ κ̀ ἀλλήλαις ἴσαι, ὥςε μίατις ὁποιαȣ̃ν τῶν τȣ̃ κυλίνδρȣ πλευρῶν ἁπάντων τῶν ὀρθογωνίων γξ, ξμ, μθ, κξ, κοινὸν ὕψωμα ἐςί· καὶ τοίνυν ἡ τȣ̃ περιγεγραμμένȣ Πρίσματος ἐπιφάνεια, ἴση (5) ἐςὶν ὀρθογωνίῳ, τῷ ὑπό τε τῆς περιμέτρȣ τῆς κατὰ τὸ Πρίσμα βάσεως, κ̀ τοῦ κατ᾽ αὐτὸ τὸ πρίσμα, ἢ γȣ̃ν τὸν Κύλινδρον ὕψȣς, εἴτ᾽ οὖν τῆς πλευρᾶς, περιεχομένῳ.

---

(1) Πόρ. Α. τῆς Δ. τȣ̃ ιβʹ. (2) Γ. τȣ̃ παρόντ. (3) Ὁρ. Γ. τȣ̃ ιβʹ. καὶ Πρότ. Η. τȣ̃ ιαʹ. (4) Ὁρ. Γ. τȣ̃ ιαʹ. (5) Κατὰ τὴν Δ. τȣ̃ ςʹ.

Ὡσαύτως δὲ δείκνυται ϗ τὸ Β´ Μέρος. Ἡ γὰρ τȣ̃ ἐγγεγραμμένȣ Κυλίνδρȣ πλευρὰ βδ, ἢ κι, ἢ πο, κξ:, κοινὸν τυγχάνει παραπλησίως ὕψος τῶν ὀρθογωνίων βδικ, ικοπ, ἃ τὴν τȣ̃ ἐγγεγραμμένȣ Πρίσματος συνίςησιν ἐπιφάνειαν.

Πρότασις Θ.

„Ἡ τῆς τεταγμένης πυραμίδος, τῆς περὶ τὸν ὀρθὸν Κῶνον περιγεγραμ-„μένης ἐπιφάνεια, ἴση ἐςὶ Τριγώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ τῆς πυραμοειδȣ̃ς βά-„σεως περίμετρος ζθλδ, ὕψος δὲ ἡ τȣ̃ Κώνȣ πλευρὰ βη.

„Ἡ δὲ τῆς τεταγμένης πυραμίδος, τῆς εἰς τὸν ὀρθὸν Κῶνον ἐγγεγραμ-„μένης ἐπιφάνεια, ἴση ἐςὶ Τριγώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ τῆς πυραμοειδȣ̃ς βά-„σεως περίμετρος, ὕψος δὲ ἡ κάθετος βξ, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τῆς „βάσεως ἀγομένη πλευράν.

σ. 15. Ἀχθήτωσαν ἐπὶ τὰς ἐπαφὰς η, κ, μ, αἱ εὐθεῖαι βη, βκ, βμ· καὶ ἔσονται αἱ εὐθεῖαι αὗται τȣ̃ Κώνȣ πλευραὶ, ϗ ἐκ τȣ̃ ἀκολȣ́θȣ ἴσαι. Ἐπεὶ δὲ ὁ Ἄξων βα ὀρθός ἐςι (1) πρὸς τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον ζκδ, ἔςαι δὴ (2) ϗ τὸ ηβα ἐπίπεδον, ἐπὶ τȣ̃ ἐπιπέδȣ ζκδ ὀρθόν· ὥςε ἡ θη (3) κάθετος ἐςὶ πρὸς τὴν αη, ἥτις ἐςὶν ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ζκδ ϗ ηβα· καὶ ἑπομένως ἡ θη (4) ὀρθή ἐςι ϗ πρὸς τὸ ἐπίπεδον ηβα, κἀντεῦθεν ϗ κάθετος (5) πρὸς τὴν βη· καὶ ἡ τȣ̃ Κώνȣ ἄρα πλευρὰ ηβ, ὕψος τȣ̃ Τριγώνȣ ζβθ ȣ̃σα ἐςί· Τὸν αὐτὸν δὴ τρόπον ἡ τȣ̃ Κώνȣ πλευρὰ, ὕψος ἔςαι ϗ τῶν λοιπῶν θβλ, λβδ, κξ:. Ἄρ᾽ οὖν τὸ Τρίγωνον τὸ ὑπό τε τῆς περιμέτρȣ ζθλδ, ϗ τῆς τȣ̃ Κώνȣ πλευρᾶς συνιςάμενον, ἴσον ἐςὶ (6) τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς πυραμίδος τῆς περὶ τὸν Κῶνον περιγεγραμμένης, ἐξαιρȣμένης τῆς βάσεως. Ο. Η. τὸ Α´.

Παραπλησία δὲ ϗ ἡ τȣ̃ Β´. Μέρȣς ἐςὶν ἀπόδειξις.

Κείσθωσαν γὰρ αἱ πλευραὶ τῆς βάσεως, τῆς κατὰ τὴν κανονικὴν ἐγγεγραμμένην πυραμίδα, ταῖς πλευραῖς τῆς περιγεγραμμένης παράλληλοι· καὶ τεμνέτω ἡ πλευρὰ γι τὸ ἐπίπεδον ηβα κατὰ τὸ ο, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ οβ· καὶ ἔςαι ἡ γι πρὸς τὸ ἐπίπεδον αοβ (7) ὀρθή, ϗ ἑπομένως πρός γε τὰς εὐθείας αο, βο, τήν τε ἀπὸ τȣ̃ κέντρȣ τῆς βάσεως, ϗ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τȣ̃ Κώνȣ (8) κάθετος· ἀλλ᾽ ἅπασαι αἱ τοιαίδε εὐθεῖαι αο, αἱ ἀπὸ τȣ̃ κέντρου πρὸς ὁποιανδήποτε τῶν τῆς πολυγώνȣ τεταγμένης βάσεως πλευρῶν κάθε-

---

(1) Ἐξ ὑποθ. (2) ΙΗ. τȣ̃ ια´. (3) ΙΗ. τȣ̃ γ´. (4) Κατὰ τὸν Δ. Ὅρ. τȣ̃ ια´. (5) Γ. Ὁρισμ. τȣ̃ ια´. (6) Δῆλον ἐκ τῆς Δ. τȣ̃ ς´. (7) Η. τȣ̃ ια´. (8) Γ. Ὅρ. τȣ̃ ια´.

τοι, ἴσαι (1) εἰσὶ, ϗ ἑπομένως ἐν ἅπασι τοῖς Τριγώνοις βαο, διά τε τὸν ἄξονα βα κοινόν τε ὄντα, ϗ πρὸς τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον ὀρθῶς ἐφεςηκότα, ϗ πᾶσαι αἱ Πλευραὶ αο ἀλλήλαις ἴσαι εἰσί· (2) ἔσονται δὴ ϗ αἱ εὐθεῖαι πᾶσαι βο ἀλλήλαις ἴσαι. Καὶ πάντα τοίνυν τὰ Τρίγωνα, ἐξ ὧν ἡ τῆς ἐγγεγραμμένης Πυραμίδος συνίςαται ἐπιφάνεια, τὸ αὐτὸ ἔχει ὕψος, τὴν κάθετον ἀμέλειτοι βο, τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς β ἑκάςȣ Τριγώνȣ ἐπὶ τὴν βάσιν· καὶ ἅμα ληφθέντα (3) (ταυτὸν δ᾽ εἰπεῖν ἡ τῆς ἐν τῷ ὀρθῷ Κώνῳ ἐγγεγραμμένης Πυραμίδος ἐπιφάνεια) ἐξισȣ̃ται Τριγώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ τῆς κατὰ τὴν ἐγγεγραμμένην Πυραμίδα βάσεως περίμετρος, ὕψος δὲ ἡ κάθετος βο. Ο. Η. τὸ Β′.

Α῎λλως. Ε῎πειδὴ τὰ Τρίγωνα, ἐξ ὧν ἡ τῆς ἐγγεγραμμένης Πυραμίδος ἐπιφάνεια σύγκειται, ἀντὶ βάσεων ἔχει, τὰς τȣ̃ τεταγμένȣ Πολυγώνȣ, ὃ τῇ τȣ̃ Κώνȣ βάσει ἐγγράφεται, πλευρὰς, αἳ ἴσαι εἰσὶν, ἀντὶ δὲ σκελῶν τὰς αὐτȣ̃ τȣ̃ ὀρθȣ̃ Κώνȣ ἴσας ἀλλήλαις πλευρὰς, ἔςαι δὴ τὰ τοιαῦτα Τρίγωνα ἀλλήλοις ἰσόπλευρα (4) ϗ ἰσογώνια, ϗ (ἅτε δὴ ἀλλήλοις (5) προσεφαρμόζοντα) ἰσοϋψῆ. Ταύτῃτοι ὡς πρότερον, τὸ τρίγωνον τὸ ὑπὸ τῷ κοινῷ ὕψει, ϗ ταῖς ἁπάντων τῶν Τριγώνων βάσεσι τὴν βάσιν ἴσην ἔχον, ἐξισȣμένην δηλονότι τῇ τȣ̃ ἐγγεγραμμένȣ Πολυγώνȣ περιμέτρῳ, τοῖς τοιοῖσδε Τριγώνοις, ταυτὸν δὲ εἰπεῖν, τῇ τῆς ἐγγεγραμμένης Πυραμίδος ἐπιφανείᾳ (6) ἴσον ἐςί.

Πρότασις Ι.

„Η῾ τȣ̃ τεταγμένȣ Πρίσματος, τȣ̃ περὶ τὸν ὀρθὸν Κύλινδρον περιγε-
„γραμμένȣ ἐπιφάνεια, ἀπολήγει (7) τέως εἰς αὐτὴν τȣ̃ Κυλίνδρȣ τὴν ἐπι-
„φάνειαν· καὶ ἡ τῆς τεταγμένης Πυραμίδος, τῆς περὶ τὸν ὀρθὸν Κῶνον περι-
„γεγραμμένης ἐπιφάνεια, εἰς αὐτὴν τέως τὴν τȣ̃ Κώνȣ ἐπιφάνειαν ἀποτελευτᾷ.

Μέρος Α′. Αἱ τῶν τεταγμένων Πρισμάτων τῶν περὶ τὸν Κύλινδρον πέρατος ἄνευ περιγραφομένων, ϗ εἰς αὐτὸν ἐγγραφομένων ἐπιφάνειαι, διαφορὰν τέως ἕξȣσι πρὸς ἀλλήλας, οἱασȣ̃ν δοθείσης ἐλάσσονα, ἧπȣ δῆλον ἐκ τῆς Η′, ϗ τῆς Γ′ τȣ̃ παρόντος. Πολλῷ οὖν μᾶλλον ἡ τȣ̃ περιγεγραμμένȣ Πρίσματος ἐπιφάνεια, τῆς αὐτȣ̃ τȣ̃ Κυλίνδρȣ ἐπιφανείας, περὶ ὃν περιγέγραπται, τῆς τȣ̃ τε περιγεγραμμένȣ ϗ τȣ̃ ἐγγεγραμμένȣ μεσιτευȣ́σης, διαφορᾷ διοίσει, οἱασδήποτε δοθείσης ἐλάσσονι· καὶ ἀποτελευτήσει ἄρα (8) ἡ τȣ̃ Πρίσματος, εἰς τὴν τȣ̃ Κυλίνδρȣ ἐπιφάνειαν, ἀεί τι μεῖον ϗ μεῖον ταύτην ὑπερέχȣσα. ϰ. 14.

(1) *ΙΔ.* τȣ̃ γ′. (2) *Δ.* τȣ̃ α′. (3) *Δῆλον* ἐκ τῆς *Α.* τȣ̃ ϛ′. (4) *Η.* τȣ̃ α′. (5) *Η. Α῎ξίω* τȣ̃ α′. (6) *Δῆλον* ἐκ τῆς *Α.* τȣ̃ ϛ′. (7) Ο῎ρ. ς. τȣ̃ ιβ′. (8) Ο῎ρ. ς. τȣ̃ ιβ′.

σχ. 15. Μέρος Β΄. Ὡσαύτως δειχθήσεται ἐκ τῆς Θ΄ καὶ τῆς Γ΄ τοῦ παρόντος.

Σεσημειώσθω, ὡς ἐπὶ τῶν σχημάτων αἱ ἡμίσειαι τῶντε Κυλίνδρων καὶ τῶν Κώνων διχοτομουμένων παρίστανται, ἐφ᾽ ᾧ μὴ τὴν τῶν γραμμῶν πληθὺν σύγχυσιν ἐμποιεῖν. Νοητέον γεμὴν τοὺς Κυλίνδρους καὶ τοὺς Κώνους ὁλοσχερεῖς, ὧν τοὺς μὲν τὰ Πρίσματα, τοὺς δὲ αἱ Πυραμίδες περιγραφόμεναι περιέχουσιν, οὕτω γὰρ καὶ μᾶλλον σαφὲς, τὰς ἐπιπέδους ἐπιφανείας περιγραφομένας, μείζονας εἶναι, ἐκ τοῦ Β΄ τῶν Ἀξιωμάτων.

Σχόλιον Α΄.

Τῶν ἐφεξῆς τεττάρων προτάσεων, καί τινων τῶν ἐξ ἐκείνων ἐπαγομένων Πορισμάτων, διεξοδικωτέραν τὴν δεῖξιν ἐπιδεχομένων, καὶ καθ᾽ ὃν δὴ τρόπον διετάχθησαν καὶ δυσχερεστέραν, οὐκ ἄχαρί τι ποιήσειν τοῖς νεανίσκοις ἔδοξα, εἰ τάς γε προτάσεις ἐκείνας, καὶ πάντα τὰ ἐξ ἐκείνων ἐπιφερόμενα πορίσματα, μεθόδῳ τινὶ κατὰ φύσιν τε ἐχούσῃ, καὶ ταύτῃ δὴ καὶ προχειροτέρᾳ, ἐκ τῆς Ι΄ ταύτης Προτάσεως ἐπαγάγοιμι.

Πορίσματα ἐκ τοῦ Α΄ Μέρους τῆς Ι΄ Προτ. ἐπαγόμενα.

σχ. 16. Α΄. Ἐντεῦθεν ἕπεται, τὴν τοῦ ὀρθοῦ Κυλίνδρου ἐπιφάνειαν γδ, ἴσην εἶναι ὀρθογωνίῳ, τῷ ὑπὸ γβ τῆς τοῦ Κυλίνδρου πλευρᾶς, καὶ βυδο τῆς περιφερείας τῆς βάσεως· αἱ γὰρ ἐπιφάνειαι τῶν πρισμάτων, τῶν περὶ τὸν Κύλινδρον πέρατος ἄνευ περιγραφομένων, ἴσαι ἀεὶ εἰσὶν (1) ὀρθογωνίοις, τοῖς ὑπὸ τῆς τοῦ Κυλίνδρου πλευρᾶς, καὶ τῶν κατὰ τὰς πρισματικὰς βάσεις περιμέτρων περιεχομένοις· Ἀλλ᾽ αἱ τοιαῦται πρισματικαὶ ἐπιφάνειαι, εἰς τὴν κυλινδρικὴν (2) τέως ἐπιφάνειαν, αἵτε τῶν πρισματικῶν βάσεων περίμετροι εἰς τὴν περιφέρειαν (3) τῆς τοῦ Κυλίνδρου βάσεως ἀπολήγουσιν· ἄρα ἡ τοῦ Κυλίνδρου ἐπιφάνεια (4) ἴση ἐστὶν ὀρθογωνίῳ, τῷ ὑπό τε τῆς τοῦ Κυλίνδρου πλευρᾶς, καὶ τῇ τῆς βάσεως περιφερείᾳ περιεχομένῳ.

Ἄλλως. Προσηρμόσθω τῇ τοῦ Κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ χάρτης ὀρθογώνιος τὸ σχῆμα, οὗ ὕψος μὲν τὸ τοῦ Κυλίνδρου, βάσις δὲ ἴση τῇ τῆς βάσεως τοῦ Κυλίνδρου περιφερείᾳ, καὶ ὅγε χάρτης καὶ ἡ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια ἀλλήλοις προ-

(1) Η. τοῦ παρ. (2) Κατὰ τὴν παρ. (3) Γ. τοῦ παρ. (4) Α. τοῦ παρ.

σεφαρμόσωσι, διὸ δὴ (1) καὶ ἰσωθήσονται. Ἔςι δὲ τὸ Α΄ πόρ. τῆς ἐφεξῆς Προτάσεως.

Β΄. Ἐντεῦθεν τὰ προσήκοντα τοῖς ὀρθογωνίοις, ϗ ταῖς τῶν ὀρθῶν Κυλίνδρων ἐπιφανείαις προσήκει, εἴπερ εἰς ὕψη μὲν τοῖς ὀρθογωνίοις ὑποτεθῶσιν αἱ τῶν Κυλίνδρων πλευραὶ, ἀντὶ δὲ βάσεων αἱ τῶν κυλινδρικῶν βάσεων περιφέρειαι, καίποτε δὲ ϗ αἱ διάμετροι, αἱ τῷ κατὰ τὰς περιφερείας τὸν αὐτὸν λόγον (2) σώζουσαι. Ταύτητοι

1. Αἱ κυλινδρικαὶ ἐπιφάνειαι αἱ ἰσοϋψεῖς (3), εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ τῶν βάσεων διάμετροι. Ἔςι δὲ τὸ β΄ Πόρ. τῆς ἐφεξῆς Προτάσεως.

2. Αἱ ἴσας ἔχουσαι τὰς βάσεις, εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας (4), ὡς αἱ τῶν Κυλίνδρων πλευραί. Ἔςι δὲ τὸ γ΄ Πόρ. τῆς ἐφεξῆς Προτάσεως.

3. Αἱ ὅμοιαι οὖσαι, ἔσονται (5) ἐν διπλασίονι λόγῳ τῶν διαμέτρων τῶν ἐν ταῖς βάσεσιν. Ἔςι δὲ τὸ δ΄. Πόρ. τῆς ἐφεξῆς Προτάσεως.

4. Ὁποιαιδήποτε δὲ, εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας (6) ἐν λόγῳ συνθέτῳ ἐκ τῶν λόγων τῶντε πλευρῶν, καὶ τῶν διαμέτρων. Ἔςι δὲ τὸ ε΄ Πόρ. τῆς ΙΑ΄ Προτάσεως ἐφεξῆς.

5. Καὶ ἴσαι τυγχάνουσαι, ἀντιπεπόνθασι (7) τὰς πλευρὰς καὶ τὰς διαμέτρους τῶν βάσεων· καὶ εἴπερ ἀντιπεπόνθασιν, ἴσαι εἰσίν. Ἔςι δὲ τὸ ϛ΄. τῆς ἐφεξῆς ΙΑ΄.

6. Ἐὰν δὲ ἡ πλευρὰ ἐπὶ τὴν τῆς βάσεως περιφέρειαν πολλαπλασιασθῇ, προκύψει δὴ (8) τὸ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας χωρίον. Ἔςι δὲ τὸ ζ΄ Πόρ. τῆς προτ. τῆς ἐφεξῆς.

Γ΄. Ἡ τοῦ ὀρθοῦ Κυλίνδρου ἐπιφάνεια γδ, ἐςὶ πρὸς τὴν βάσιν βν, ὡς ἡ τοῦ Κυλίνδρου πλευρὰ βγ πρὸς βο, ὅ τὸ τεταρτημόριον ἐςὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως· ἡ γὰρ τοῦ Κυλίνδρου ἐπιφάνεια (9) ἴση ἐςὶν ὀρθογωνίῳ, τῷ ὑπό τε τῆς πλευρᾶς βγ ϗ τῆς περιφερείας τῆς βάσεως περιεχομένῳ. Ἀλλ᾽ ἡ τοῦ Κυλίνδρου βάσις (10) ἴση ἐςὶν ὀρθογωνίῳ, τῷ ὑπὸ βο, τεταρτημορίου τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως, ϗ τῆς κατ᾽ αὐτὴν περιφερείας· ἡ ἄρα τοῦ Κυλίνδρου ἐπιφάνεια (11) ὡς βγ πρὸς βο. Ἔςι δὲ ἡ ιβ΄ Πρότ. τῶν κατωτέρω.

Δ΄. Ἔνθεντοι ἡ τοῦ Κυλίνδρου ἐπιφάνεια ηκ, τοῦ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένου, οὗπερ ἀμέλει τὸ ὕψος νκ, ἴσον ἐςὶ τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως σχ. 17.

(1) Αξ.Ζ. τοῦ α΄. (2) Ζ. τοῦ παρ. (3) Λ. τοῦ ϛ΄. καὶ Ζ. τοῦ παρ. (4) Λ. Πόρ. τῆς Λ. τοῦ ϛ΄. (5) Κ. τοῦ ϛ΄. ϗ Ζ. τοῦ παρ. (6) ΚΓ. τοῦ ϛ. (7) ΙΔ. τοῦ ϛ΄. (8) Σχόλ. τῆς ΛΔ. τοῦ α΄. (9) Διὰ τὸ Α. Πόρ. ἀνωτ. (10) Διὰ τὸ Α. Πόρ. τῆς Ε. τοῦ παρ. (11) Λ. τοῦ ϛ΄.

νη, τετραπλασίων ἐστὶ τῆς βάσεως, τουτέστι διπλασίων ἀμφοῖν τῶν βάσεων. Διὰ γὰρ τὰς νκ = νη, ἔσται ἡ Κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν βάσιν, ὡς νκ πρὸς $\frac{1}{4}$ νκ, τουτέστιν ὡς 4 πρὸς 1, ὅπερ ἐστὶ τετραπλῆ τῆς βάσεως· καὶ ἑπομένως πρὸς ἀμφοτέρας τὰς βάσεις ὡς 4 πρὸς 2· ὅπερ ἐστὶ διπλασίων τῶν βάσεων. Ἡ δὲ ἐπιφάνεια τοῦ Κυλίνδρου εκ, τοῦ περὶ τὸ ἡμισφαίριον περιγεγραμμένου, διπλασίων ἐστὶ τῆς βάσεως, ἤτοι ἀμφοτέραις ταῖς βάσεσιν ἴση· Ἐὰν δὲ ἡ τοῦ Κυλίνδρου πλευρὰ τεταρτημόριον ᾖ τῆς κατὰ τὴν βάσιν διαμέτρου, ἡ τοῦ Κυλίνδρου ἐπιφάνεια ἴση ἔσται τῇ βάσει. Ἔστι δὲ τὸ Πόρ. τὸ ἐκ τῆς ΙΒ΄ Προτ. ἐπιφερόμενον.

Σχ. 18. Ε΄. Ἔστω δὴ μέση ἀνάλογος, μεταξὺ τῆς αβ ἡμιδιαμέτρου τῆς βάσεως, καὶ τῆς 2βγ, ἤτοι τῆς τοῦ Κυλίνδρου πλευρᾶς δὶς ληφθείσης, καὶ ἔσται δὴ ὁ Κύκλος ὁ ἀπὸ ἡμιδιαμέτρου τῆς ηθ, ἴσος τῇ τοῦ Κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ γδ· διὰ γὰρ τὰς αβ, ηθ, 2βγ ∺, ἔσται ἡ βάσις βν πρὸς τὸν κύκλον ηπθ, ὡς (1) αβ πρὸς 2βγ, τουτέστιν ὡς $\frac{1}{2}$ αβ πρὸς βγ· ὅπερ ἐστίν, ὡς (2) ἡ βάσις βν πρὸς τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν γδ· ἄρ' οὖν (3) ὁ Κύκλος ηπθ τῇ τοῦ Κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστίν· Αὕτη δὲ ἡ ἐφεξῆς ἐστὶ Πρότασις.

Πορίσματα ἐκ τοῦ Β΄ Μέρους
τῆς Προτάσ. ἐπιφερόμενα.

Σχ. 19. ϛ΄. Ἡ τοῦ ὀρθοῦ Κώνου ἐπιφάνεια γβδ, ἐστὶν ἴση Τριγώνῳ, τῷ ὑπὸ βη τῆς τοῦ Κώνου πλευρᾶς, ὡς ὕψους, καὶ ὑπὸ τῆς κατὰ τὴν βάσιν τοῦ Κώνου περιφερείας γη, ὡς βάσεως περιεχομένῳ· τῶν γὰρ Πυραμίδων τῶν περὶ τὸν κῶνον πέρατος ἄνευ περιγραφομένων αἱ ἐπιφάνειαι, ἀεὶ ἴσαι εἰσὶ (4) Τριγώνοις, ὧν ἡ μὲν βη τοῦ Κώνου πλευρὰ τὸ ὕψος, αἱ δὲ τῶν κατὰ τὰς Πυραμίδας βάσεων περίμετροι εζ, αἱ βάσεις εἰσίν. Ἀλλ' αἱ μὲν τοιαίδε τῶν Πυραμίδων ἐπιφάνειαι (5), ἐπὶ τὴν κωνικὴν ἐπιφάνειαν, αἱ δὲ τῶν κατὰ τὰς Πυραμίδας βάσεων περίμετροι, ἐπὶ τὴν κατὰ τὴν βάσιν τοῦ Κώνου (6) περιφέρειαν τέως ἀπολήγουσιν· ἡ ἄρα τοῦ Κώνου ἐπιφάνεια (7) ἴση ἐστὶ Τριγώνῳ, οὗ ὕψος μὲν ἡ τοῦ κώνου πλευρά, βάσις δὲ ἡ κατὰ τὴν αὐτοῦ βάσιν περιφέρεια.

Ἄλλως. Τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ προσηρμόσθω χάρτης, κυκλόθεν πάντη ἐκείνην περιαμπέχων, ὁ δέ τοι χάρτης κατ' ἐπίπεδον ἐκτανθείς, εἶδος ἕξει το-

---

(1) *Β. Πόρ. τῆς ΙΒ. τοῦ ιβ΄.* (2) *Διὰ τὸ Γ. Πόρ. τῶν ἀνωτ.* (3) Θ. τοῦ ε΄. (4) Θ. τοῦ παρ. (5) *Κατὰ ταύτ.* (6) *Κατὰ τὴν Γ. τοῦ παρ.* (7) *Κατὰ τὴν Α. τοῦ παρ.*

μέως Κύκλȣ, οὗ ἡ μὲν ἀκτὶς τῇ τȣ̃ Κώνȣ πλευρᾷ, τὸ δὲ τόξον τῇ περιφερείᾳ τῆς τȣ̃ Κώνȣ βάσεως (1) ἴση ἔςαι. Ἀλλ' ὁ τομεὺς οὗτος (2) ἴσος ἐςὶ Τριγώνῳ, οὗ ὕψος μὲν ἡ τȣ̃ τομέως ἀκτὶς, βάσις δὲ εὐθεῖα, τῷ τȣ̃ τομέως τόξῳ ἴση τυγχάνȣσα, ἢ ὅ ταυτόν ἐςιν, οὗ ὕψος μὲν ἡ τȣ̃ Κώνȣ πλευρὰ, βάσις δὲ ἡ κατὰ τὴν βάσιν τȣ̃ Κώνȣ περιφέρεια· ἡ ἄρα τȣ̃ Κώνȣ ἐπιφάνεια, τῷ αὐτῷ Τριγώνῳ (3) ἴση ἔςαι. Ἔςι δὲ τὸ Α΄ Πόρ. τῆς ΙΓ΄ Προτ.

Ζ΄. Ἔνθεντοι ϗ τὰ τοῖς τριγώνοις προσήκοντα, ταῖς τῶν ὀρθῶν Κώνων ἐπιφανείαις προσήκει, εἴγε εἰς ὕψη μὲν τῶν τριγώνων, ὑποτεθεῖεν αἱ τῶν Κώνων πλευραὶ, εἰς δὲ βάσεις, αἱ τῶν κωνικῶν βάσεων περιφέρειαι, εἴτ' οὖν (4) αἱ ἡμιδιάμετροι· ὥςε

1. Τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν αἱ ἴσας τὰς πλευρὰς ἔχȣσαι, εἰσὶν (5) ὡς αἱ τῶν βάσεων διάμετροι.

2. Καὶ ἐὰν αἱ τῶν Κώνων βάσεις ἴσαι ὦσιν, ἔσονται (6) αἱ ἐπιφάνειαι ὡς αἱ πλευραί.

3. Καὶ αἱ ὅμοιαι ἐπιφάνειαι, ἐν διπλασίονι (7) λόγῳ εἰσὶ τῶν διαμέτρων τῶν ἐν ταῖς βάσεσι.

4. Καὶ ὁποιαιδήποτε ληφθεῖσαι (8), εἰσὶν ἐν λόγῳ συνθέτῳ ἔκτε τȣ̃ λόγȣ τῶν πλευρῶν, ϗ τȣ̃ ἐκ τῶν διαμέτρων τῶν ἐν ταῖς βάσεσι.

5. Καὶ αἱ ἴσαι οὖσαι, τάςτε πλευρὰς (9) ϗ τὰς τῶν διαμέτρων βάσεις ἀντιπεπόνθασιν· Αἱ δὲ ȣ̃τως ἀντιπεπονθεῖαι ἴσαι εἰσί.

6. Τελευταῖον δὲ ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια λαμβάνεται (10), ἐπιπολλαπλασιαζομένης τῆς τȣ̃ Κώνȣ πλευρᾶς διὰ τῆς ἡμιπεριφερείας τῆς βάσεως. Τάδε εἰσὶ τὰ Πορισμάτια Β΄, Γ΄, Δ΄, Ε΄, ϛ΄, ϗ Ζ΄ τῆς ΙΓ΄ Προτάσεως.

Η΄. Ἡ τȣ̃ ὀρθȣ̃ Κώνȣ ἐπιφάνεια γβδ ἐςὶ πρὸς τὴν βάσιν, ὡς ἡ τοῦ Κώνȣ πλευρὰ βγ, πρὸς τὴν τῆς βάσεως διάμετρον αγ· ἔςι μὲν γὰρ ἡ τȣ̃ Κώνȣ ἐπιφάνεια (11) ἴση ὀρθογωνίῳ, τῷ ὑπό τε τῆς πλευρᾶς βγ ϗ τῆς ἡμιπεριφερείας τῆς βάσεως περιεχομένῳ. Ἀλλὰ ϗ ἡ τȣ̃ Κώνȣ βάσις (12) ἴση ἐςὶν ὀρθογωνίῳ, τῷ ὑπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρȣ αγ, ϗ τῆς αὐτῆς ἡμιπεριφερείας· ἄρα (13) ἡ τȣ̃ Κώνȣ ἐπιφάνεια ἔςαι πρὸς τὴν βάσιν τȣ̃ αὐτȣ̃, ὡς βγ πρὸς αγ. Ἔςι δὲ ἡ ΙΔ΄ τῶν ἐπομένων.

---

(1) *Δῆλον ἐκ τȣ̃ Ὅρ. τȣ̃ ὀρθȣ̃ Κώνȣ, ϗ τȣ̃ τομέως τȣ̃ Κύκλȣ.* (2) *Γ. Πόρ. τῆς Δ. τȣ̃ παρ.* (3) *Ἀξ. Ζ. ϗ Α. τȣ̃ ά. Βιβλ.* (4) *Ζ. τȣ̃ παρ.* (5) Α. τȣ̃ ϛ΄. (6) *Α. Πόρ. τῆς Α. τȣ̃ ϛ΄.* (7) *ΙΘ. τȣ̃ ϛ΄.* (8) *Β. Πόρ. τῆς ΚΓ. τȣ̃ ϛ΄.* (9) *ΙΕ τȣ̃ ϛ΄.* (10) Σχόλ. τῆς *ΜΑ. τȣ̃ ά.* (11) *Κατὰ τὸ ϛ. Πόρ. τῶν ἀνωτ. ϗ τὸ* Πόρ. *τῆς ΜΒ. τȣ̃ ά.* (12) *Α. Πορισμ. τῆς Ε. τȣ̃ παρ.* (13) *Α. τȣ̃ ϛ΄.*

σχ. 20. Θ'. Κἀντεῦθεν 1. ἡ τȣ͂ ὀρθȣ͂ Κώνȣ ἐπιφάνεια, τȣ͂ ὑπὸ ἰσοπλεύρȣ Τριγώνȣ περὶ τὴν κάθετον ακ περιαγομένȣ, τὴν γένεσιν ἔχοντος, τῆς βάσεως φτ διπλασίων ἐϛίν· ἡ γὰρ βκ τȣ͂ Κώνȣ πλευρὰ, τῆς ἡμιδιαμέτρȣ τῆς βάσεως αβ διπλασίων ἐϛί.

σχ. 17. 2. Ἡ τȣ͂ Κώνȣ ἐπιφάνεια, τȣ͂ ὑπὸ ὀρθογωνίȣ ἰσοσκελȣ͂ς Τριγώνȣ εβδ, περὶ τὴν κάθετον αβ περιαγομένȣ, τὴν γένεσιν ἔχοντος, ἔϛι πρὸς τὴν βάσιν, ὡς ἡ ἐν τῷ τετραγώνῳ διαγώνιος βδ, πρὸς τὴν πλευρὰν δα.

σχ. 17. 3. Ἡ τȣ͂ ὀρθȣ͂ κυλίνδρȣ ἐπιφάνεια ηκ, ἔϛι πρὸς τὴν τȣ͂ ὀρθȣ͂ Κώνου ηβν, τȣ͂ ἴσην τήν τε βάσιν καὶ τὸ ὕψος ἔχοντος, ὡς ἡ τȣ͂ κυλίνδρȣ πλευρὰ νκ πρὸς $\frac{1}{2}$ βν, τὴν ἡμίσειαν τȣ͂ Κώνȣ πλευράν. Ἔϛι μὲν γὰρ ἡ ἐπιφάνεια ηβν πρὸς τὴν βάσιν μι (1), ὡς βν πρὸς νφ, τȣτέϛι πρὸς $\frac{1}{2}$ νη, ἤτοι ὡς $\frac{1}{2}$ βν πρὸς $\frac{1}{4}$ νη. Ἀλλ' ἡ βάσις μι ἐϛὶ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν ηκ, ὡς (2) $\frac{1}{4}$ νη πρὸς νκ· ἡ ἄρα (3) ἐπιφάνεια ηβν ἐϛὶ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν ηκ, ὡς $\frac{1}{2}$ βν πρὸς νκ· καὶ ἀνάπαλιν (4) ἡ τȣ͂ κυλίνδρȣ ἐπιφάνεια ηκ, πρὸς τὴν τȣ͂ Κώνȣ ηβν, ὡς ἡ τȣ͂ κυλίνδρȣ πλευρὰ νκ, πρὸς τὴν ἡμίσειαν πλευρὰν τȣ͂ Κώνȣ $\frac{1}{2}$ βν. Ταῦτα δὲ εἰσὶ πορίσμ. Α', Β', καὶ Γ' τῆς ΙΔ' Προτάσ. τῶν ἐφεξῆς.

σχ. 21. Ι'. Ἔϛωσαν αγ, ολ, γβ ∺, καὶ ἔϛαι ὁ ἀπὸ τῆς ολ ὡς ἀπὸ ἡμιδιαμέτρȣ Κύκλος, ἴσος τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ γβδ· Ἡ γὰρ τȣ͂ Κώνȣ βάσις γη (5), ἐϛὶ πρὸς τὴν κωνικὴν ἐπιφάνειαν γβδ, ὡς αγ πρὸς γβ, τȣτέϛιν (6) ὡς ἡ αὐτὴ βάσις τȣ͂ Κώνȣ πρὸς τὸν κύκλον οπλ· καὶ τοίνυν (7) ὁ Κύκλος οπλ τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ ἴσος ἔϛαι. Ἔϛι δὲ ἡ τῶν ἐφεξῆς ΙΕ'.

Σχόλιον.

Τȣ́τοις προϛίθεμεν προτάσεις δύο ἐκ τῶν τȣ͂ Γαλιλαίȣ ληφθείσας.

„ Α'. Οἱ κύλινδροι, ὧν αἱ ἐπιφάνειαι ἴσαι εἰσὶν, εἰσὶ πρὸς ἀλλήλȣς ὡς
„ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων ἐπ' εὐθείας, ἢ γȣ͂ν ὡς τὰ ὕψη τῶν κυλίνδρων
„ ἀντιπεπονθότως.

Οἱ γὰρ κύλινδροι (8) εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις καὶ τὰ ὕψη, τȣτέϛιν (9) ἐν διπλασίονι λόγῳ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων, καὶ ἐν ἁπλῷ λόγῳ τῶν ὑψοτήτων. Ἀλλὰ γὰρ αἱ κυλινδρικαὶ ἐπιφάνειαι εἰσὶν (10) ὡς αἱ διάμετροι τῶν

---

(1) Η. Πόρ. τῶν ἀνωτ. (2) Γ. Πόρ. τῶν ἀνωτ. (3) ΚΒ. τȣ͂ ε'. (4) Σχόλ. τῆς Ιϛ. τȣ͂ ε'. (5) Η. Πόρ. τῶν ἀνωτ. (6) Β. Πόρ. τῆς Β. τȣ͂ ιβ'. (7) Θ. τȣ͂ ε'. (8) Ἀρ. Α. ἐν τῷ Σχόλ. τῆς ΙΕ. τȣ͂ ιβ'. (9) Β. τȣ͂ ιβ'. (10) Β. Πόρ. ἀρ. Δ' τῆς Ι. τȣ͂ παρ.

βάσεων, ϗ τὰ ὕψη τῶν κυλίνδρων· οἱ ἄρα κύλινδροι εἰσὶν ὡς αἱ τῶν βάσεων διάμετροι, ϗ αἱ ἐπιφάνειαι (ἐὰν γὰρ ὁ τῶν διαμέτρων λόγος συντεθῇ τῷ λόγῳ τῷ ἐκ τῶν διαμέτρων ϗ τῶν ὑψῶν συνθέτῳ, ἀνακύψει δὴ ὁ λόγος ὁ σύνθετος, ἔκτε τȣ̃ διπλασίονος λόγȣ τῶν διαμέτρων, καὶ ἐκ τȣ̃ ἁπλοῦ τῶν ὑψῶν). Καίπερ ἴσαι τοίνυν αἱ ἐπιφάνειαι ὑποτιθέμεναι εἰσὶν, ἔσονται οἱ κύλινδροι (1) ὡς αἱ τῶν βάσεων διάμετροι ἐπ᾽ εὐθείας, ἢ γȣ̃ν (2) ὡς τὰ ὕψη ἀντιπεπονθότως.

Ἄλλως. Ἔςω ὕψη τὰ Α, α, τῶν δὲ βάσεων διάμετροι Β, β, καὶ ἔσονται αἱ ἐπιφάνειαι ὡς (3) ΑΒ ϗ αβ, αἱ δὲ βάσεις (4) ὡς ΒΒ καὶ ββ, οἱ δέ τοι κύλινδροι (5) ὡς ΑΒΒ ϗ αββ· ἀλλ᾽ ἐξ ὑποθέσ. αἱ κυλινδρικαὶ ἐπιφάνειαι ἴσαι εἰσί, τȣτέςιν $AB = \alpha\beta$, ἄρα (6) $A : \alpha :: \beta : B$· καὶ πολλαπλασιασμῷ τῶν ἡγȣμένων διὰ ΒΒ, ϗ τῶν ἑπομένων διὰ ββ, ἔςαι (7) $ABB : \alpha\beta\beta :: BB\beta : B\beta\beta ::$ (8) $B : \beta$, ϗ (9) $\alpha : A$.

„Β΄. Τῶν ἴσων κυλίνδρων ζδ, αρ, αἱ ἐπιφάνειαι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, „ἐν ὑποδιπλασίονι λόγῳ τῶν ὑψοτήτων· τȣ̃το δέ ἐςιν, ἐὰν μεταξὺ τῶν ὑψοτήτων νδ, βρ, μέση τις ἀνάλογος τεθῇ ἡ π, ἔςαι (10) νδ πρὸς π (ἢ γȣ̃ν π πρὸς βρ), ὡς ἡ τȣ̃ κυλίνδρȣ ἐπιφάνεια ζδ, πρὸς τὴν τȣ̃ κυλίνδρȣ ἐπιφάνειαν αρ. χ. 22.

Διὰ γὰρ τὰς βρ, π, νδ $\div$, ἔςαι $\pi^{T} : \nu\delta^{T}$ (11) $:: \beta\rho : \nu\delta$· ὡς (12) $\upsilon\tau : \mu\varphi :: \zeta\nu^{T} : \alpha\beta^{T}$· καὶ (13) $\pi : \nu\delta :: \zeta\nu : \alpha\beta$, τȣτέςιν (14) ὡς ἐπιφάν. ζδ πρὸς ἐπιφάνει. αο· Ἀλλὰ νδ (ἤτοι βο) ἐςὶ πρὸς βρ (15), ὡς ἡ ἐπιφάνεια αο, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν αρ· ἄρα (16) δι᾽ ἴσȣ $\pi : \beta\rho$ (ἤτοι $\nu\delta : \pi$) :: ἐπιφά. ζδ : ἐπιφάν. αρ.

Ἄλλως. Ἐὰν μεταξὺ τῶν ὑψοτήτων Α, α τεθῇ μ μέση ἀνάλογον, ὦσι δὲ Β, β τῶν βάσεων διάμετροι ὡς ἀνωτέρω, ἔσονται αἱ βάσεις ὡς ΒΒ, ββ, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι ὡς ΑΒ, αβ, οἱ δὲ κύλινδροι ὡς ΑΒΒ, αββ· καὶ ἐπεὶ οἱ κύλινδροι ἴσοι εἰσὶ, τȣτέςιν $ABB = \alpha\beta\beta$, ἔςαι $AB : \alpha\beta :: \beta : B$· καὶ ὅτι (17) $\beta\beta : BB :: A : \alpha$, ἔςαι (18) $\beta : B :: A : M$, καὶ $AB : \alpha\beta :: A : M$. Ο. Ε. Δ.

(1) Γ. Ὅρ. τȣ̃ έ. ϗ Ὅρ. Ε. τȣ̃ ς΄. (2) Ἀρ. 5. τȣ̃ β΄. Πορ. τῆς Ι. Προτ. τȣ̃ παρ. (3) Ἀρ. 4. Πορ. Β. τῆς Ι. τȣ̃ παρ. (4) Β. τȣ̃ ιβ΄. (5) Ἀρ. Α. ἐν τῷ Σχολ. μετὰ τὴν ΙΕ. τȣ̃ ιβ΄. (6) Ις. τȣ̃ ς΄. (7) Δ. τȣ̃ έ. ἢ γȣ̃ν Λῆμ. Α. τȣ̃ β΄. μέρȣς τȣ̃ έ. Βιβλ. (8) ΙΕ. τȣ̃ έ. (9) Ὡς ἀνωτ. (10) Ὅρ. Ι. τȣ̃ έ. (11) Σχόλ. τῆς Κ. τȣ̃ ς΄. (12) ΙΕ. τȣ̃ ιβ΄. (13) ΛΕ. τȣ̃ έ. (14) Ἀρ. Ι. τȣ̃ β΄. Πορ. τῆς Ι. τȣ̃ παρ. (15) Ἀρ. Β. τȣ̃ β΄. Πορίσμ. τῆς Ι. τȣ̃ παρ. (16) ΚΒ. τȣ̃ έ. (17) ΙΕ. τȣ̃ ιβ΄. (18) Ὅρ. Ι. τȣ̃ έ. ϗ Σχολ. τῆς Κ. τȣ̃ ς΄.

Πόρισμα.

Κἀντεῦθεν τὸ ὑπέρβραχυ τῶν μορίων, ἐξ ὧν τὰ φυσικὰ τῶν σωμάτων σύγκειται, ὁπωςοῦν τῇ διανοίᾳ ἐφικέσθαι ἐςίν· Ἔςω γδ κύλινδρος ἀργυροῦς, περικεχρυσωμένος κατ᾽ ἄκραν τὴν ἐπιφάνειαν, χρυσοῖς ὑμέσι περικεκαλυμμένην· ὃν δήπου κύλινδρον οἱ χρυσοχοοῦντες εἰς χρυσοῦν μίτον, ἀμύθητον ὅσου μήκους ἐλαύνουσιν. Ἔςι μὲν γὰρ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου γδ, πρὸς τὸ μῆκος τοῦ μίτου, ὡς 1 πρὸς 115600, ἐν οἷς ἡ μέση ἀνάλογον, εἴτ᾽ οὖν 115600 ἐςὶ 340· καὶ οὕτως ὁ χρυσοῦς ὑμὴν, ὑφ᾽ οὗ περικαλύπτεται ἡ τοῦ μίτου ἐπιφάνεια, 340κις λεπτοτέρα τοῦ χρυσοῦ ὑμένος, ὑφ᾽ οὗ ἡ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια γδ περικεκάλυπτο. Ὅρα Ῥωαοῦλτ. φυσ. μέρ. Α΄ Κεφ. Θ΄ Τμῆμ. ΙΑ΄.

Λῆμμα πρὸς τὸ ἑξῆς.

Σχ. 23. Ἔςωσαν αβ, γδ, εζ ἀνάλογον· καὶ ἔςω ἡ κβ ἡμίσεια τῆς αβ, ἡ δὲ εη διπλασίων τῆς εζ, καὶ οὕτως ἔσονται καὶ αἱ κβ, γδ, εη ἀνάλογον.

Ἡ γὰρ κβ εὐθεῖα ἐςὶ πρὸς τὴν αβ, ὡς (1) ἡ εζ πρὸς τὴν εη· ὥςε τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ κβ καὶ εη (2), ἴσον ἐςὶ τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ αβ καὶ εζ· Ἀλλὰ γὰρ τόδε (3) ἴσον ἐςὶ τῷ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ γδ, ἄρα καὶ τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ κβ καὶ εη, ἴσον ἐςὶ τῷ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ γδ· καὶ τοίνυν (4) κβ, γδ, εη ἀνάλογον εἰσί.

Ἄλλως. κβ : αβ : : (5) εζ : εη· ἀλλ᾽ αβ : γδ : : (6) γδ : εζ, ἄρα ἐξ ἴσου τεταραγμένως (7) κβ : γδ : : γδ : εη.

Πρότασις ΙΑ.

Σχ. 18. „Ὁ Κύκλος ὁ ἀπὸ ἡμιδιαμέτρου τῆς ηθ, ἥτις ἂν μέση ἀνάλογον „εἴη μεταξὺ τῆς τε τοῦ ὀρθοῦ κυλίνδρου πλευρᾶς βγ, καὶ τῆς διαμέτρου τῆς „βάσεως βδ, ἴσος ἐςὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ κυλινδρικῇ.

Νοείσθωσαν τοῖς Κύκλοις αβν, ηπθ περιγεγραμμένα εἶναι ὁμοειδῆ τεταγμένα πολύγωνα, καὶ διὰ τοῦτο ὅμοια τὰ νμ καὶ ρσ· ἐπὶ δὲ τοῦ νμ πολυγώνου βεβηκέναι τὸ Πρίσμα τὸ περὶ τὸν κύλινδρον περιγεγραμμένον. Ἐπειδὴ οὖν βδ, ηθ, βγ,

---

(1) ΙΕ. τοῦ ε΄. (2) Ις. τοῦ ς΄. (3) ΙΖ. τοῦ ς΄. (4) ΙΖ. τοῦ ς΄. (5) ΙΕ. τοῦ ε΄. (6) Ἐξ ὑποθ. (7) ΚΓ. τοῦ ε΄.

ἀνάλογόν εἰσι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἀνάλογον ἔσονται ϗ αἱ αδ (ἢ αν), θη, ϗ 2βγ, διὰ τὸ Λῆμμα· καὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῆς αν, ϗ τῆς περιμέτρου τοῦ Πολυγώνου νμ περιεχόμενον Τρίγωνον ἴσον τῷ περιγεγραμμένῳ Πολυγώνῳ νμ (1)· τὸ δὲ ὑπὸ τῆς βγ (ἢ εζ), ϗ τῆς αὐτῆς περιμέτρου νμ Ὀρθογώνιον, τοῦτ᾽ ἔστι (2) τὸ ὑπὸ τῆς περιμέτρου νμ, ϗ τῆς διπλασίας τῆς βγ Τρίγωνον, ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περὶ τὸν Κύλινδρον περιγεγραμμένου Πρίσματος (3). Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῆς αν, ϗ τῆς περιμέτρου νμ περιεχόμενον Τρίγωνον, ἐστὶ πρὸς τὸ Τρίγωνον τὸ ὑπὸ τῆς αὐτῆς περιμέτρου νμ, ϗ τῆς διπλασίας τῆς βγ περιεχόμενον, ὡς ἡ αν πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς βγ· ἄρα ϗ τὸ Πολύγωνον νμ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ περὶ τὸν Κύλινδρον περιγεγραμμένου Πρίσματος ἔσται, ὡς ἡ αν πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς βγ (4). Ἐπεὶ δὲ ἤδη δέδεικται, ὅτι αἱ αν, θη, 2βγ ἀνάλογον εἰσίν· ὁ λόγος ἄρα τῆς αν πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς βγ, διπλασίων ἐστὶ τοῦ λόγου τῆς αν πρὸς τὴν θη (5). Τὸ Πολύγωνον ἄρα νμ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ Πρίσματος λόγον ἔχει διπλασίονα τοῦ τῆς αν πρὸς τὴν θη. Διπλασίονα δὲ λόγον τοῦ τῆς αν πρὸς τὴν θη, ἔχει ϗ τὸ Πολύγωνον νμ πρὸς τὸ αὐτῷ ὅμοιον θρξσ, ὡς ῥᾶστα συνάγεται ἐκ τῆς Α΄. τοῦ ΙΒ΄. (ἀχθείσης γὰρ τῆς ξθ, τὰ Τρίγωνα ανκ, θηξ, ἐπεὶ ἔχει τὰς ὑπὸ ανκ, θηξ γωνίας ὀρθὰς, ϗ τὰς ὑπὸ ακν, θξη ἡμισείας τῶν ἐν τοῖς ὁμοίοις κανονικοῖς Πολυγώνοις, ἔσεται ἰσογώνιά τε ϗ ὅμοια· ϗ ἡ ακ : θξ : : αν : θη. Ἀλλὰ τὰ Πολύγωνα λόγον ἔχει διπλασίονα τῶν κατὰ τοὺς Κύκλους, εἰς οὓς ἐγγράφεται, ἡμιδιαμέτρων ακ, θξ (6)· διπλασίονα ἄρα ἕξει (7) ϗ τῶν κατὰ τοὺς Κύκλους, περὶ οὓς περιγράφεται, ἡμιδιαμέτρων αν, θη). Ἄρα τὸ Πολύγωνον νμ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρός τε τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ Πρίσματος, ϗ πρὸς τὸ Πολύγωνον θρξσ· ἴση ἄρα τῷ Πολυγώνῳ ἡ τοῦ Πρίσματος ἐπιφάνεια (8). Τῷ αὐτῷ δὲ τρόπῳ δειχθήσεται, ὅτι Πρισματικαὶ ἐπιφάνειαι ἄλλαι ἐπ᾽ ἄλλαις εἰς ἄπειρον περὶ τὸν Κύλινδρον περιγραφόμεναι, ἔσονται ἀεὶ ἴσαι Πολυγώνοις ἄλλοις ἐπ᾽ ἄλλοις εἰς ἄπειρον περὶ τὸν Κύκλον περιγραφομένοις. Ἐπεὶ δὲ τέως ἀπολήγουσιν αἱ μὲν Πρισματικαὶ ἐπιφάνειαι εἰς τὴν τοῦ Κυλίνδρου ἐπιφάνειαν (9), τὰ δὲ Πολύγωνα εἰς τὸν Κύκλον θπη (10)· ἡ τοῦ Κυλίνδρου ἄρα ἐπιφάνεια ἔσεται ἴση τῷ Κύκλῳ θπη. Ο. Ε. Δ. κ. 24. 25.

Ἐκ τοῦ ἐξαιρέτου τοῦδε Θεωρήματος ἐξέσται λαβεῖν Κύκλον Κυλινδρικῇ ἐπιφανείᾳ ἰσούμενον.

---

(1) *Δ. τοῦ παρ.* (2) *Πόρισμ. τῆς ΜΒ. τοῦ α΄.* (3) *Η. τοῦ παρ.* (4) Α. τοῦ ϛ΄. (5) Ὁρισμ. *Ι. τοῦ ε΄.* (6) Α. τοῦ ιβ΄. (7) *ΙΑ. τοῦ ε΄.* (8) Θ. τοῦ ε΄. (9) Α. τοῦ παρ. (10) *Γ. τοῦ παρ.*

Πορίσματα.

Α'. Η' τȣ̃ ὀρθȣ̃ Κυλίνδρȣ ἐπιφάνεια ἴση ἐςὶν Ο'ρθογωνίῳ, τῷ ὑπὸ τῆς τȣ̃ Κυλίνδρȣ πλευρᾶς βγ, καὶ τῆς κατὰ τὴν βάσιν περιφερείας περιεχομένῳ.

Ε'ςι γὰρ ὡς δέδεικται ἀνωτέρω ἡ διπλασία τῆς γβ πρὸς τὴν θη, ὡς ἡ αὐτὴ θη πρὸς τὴν βα, ἢ αν· τȣ̃τ' ἔςιν ὡς ἡ περιφέρεια π, πρὸς τὴν περιφέρειαν βν (1). Τὸ Τρίγωνον ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς πρώτης, τȣ̃τ' ἔςι τῆς διπλῆς βγ, καὶ τῆς τετάρτης, τȣ̃τ' ἔςι τῆς περιφερείας βν περιεχόμενον, ἴσον ἐςὶ τῷ Τριγώνῳ, τῷ ὑπὸ τῆς δευτέρας θη, καὶ τῆς τρίτης, τȣ̃τ' ἔςι τῆς περιφερείας π (2). Α'λλὰ τὸ ὑπὸ τῆς θη καὶ τῆς περιφερείας π Τρίγωνον ἰσȣ̃ται τῷ θπη κύκλῳ, (3) τȣ̃τ' ἔςι τῇ τȣ̃ Κυλίνδρȣ ἐπιφανείᾳ (4)· ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῆς διπλῆς βγ, καὶ τῆς περιφείας βν Τρίγωνον, τȣ̃τ' ἔςι τὸ ὑπὸ τῆς βγ, καὶ τῆς περιφερείας βν Ο'ρθογώνιον (5), ἴσον ἔσεται τῇ τȣ̃ Κυλίνδρȣ ἐπιφανείᾳ. Ο. Ε. Δ.

Δῆλον ἄρα ἐκ τȣ̃ Πορίσματος τȣ́τȣ, ὅτι αἱ τῶν Ο'ρθογωνίων ἰδιότητες κοιναί εἰσι καὶ πρὸς τὰς ἐπιφανείας τῶν ὀρθῶν Κυλίνδρων. Ο'θεν ἔςω

σχ. 26. 27. Β'. Αἱ ἰσοϋψεῖς Κυλινδρικαὶ ἐπιφάνειαι βμ, ξν, εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ τῶν βάσεων διάμετροι βζ, ξρ.

Τὰ γὰρ ὑπὸ τῶν περιφερειῶν γλ, σε, καὶ τῶν ἀλλήλαις ἴσων εὐθειῶν ζμ, ρν περιεχόμενα Ο'ρθογώνια, οἷς ἐξισȣ̃νται αἱ Κυλινδρικαὶ ἐπιφάνειαι (6), εἰσὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ βάσεις (7), τȣ̃τ' ἔςιν ὡς αἱ περιφέρειαι γλ, σε, ἤτοι ὡς αἱ διάμετροι βζ, ξρ (8).

Γ'. Αἱ Κυλινδρικαὶ ἐπιφάνειαι γι, αρ, ὧν αἱ βάσεις ἴσαι, εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ὡς τὰ ὕψη τι, βρ.

Τὰ γὰρ ὑπὸ ἴσων καθ' ὑπόθεσιν περιφερειῶν θη, μξ, καὶ πλευρῶν τῶν τι, βρ περιεχόμενα Ο'ρθογώνια, οἷς αἱ Κυλινδρικαὶ ἐπιφάνειαι ἐξισȣ̃νται (9), εἰσὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ τι, βρ (10).

σχ. 26. 27. Δ'. Αἱ ὅμοιαι Κυλινδρικαὶ ἐπιφάνειαι βμ, ρι, λόγον ἔχȣσι διπλασίονα, ὅνπερ ἔχȣσιν αἱ τῶν βάσεων διάμετροι βε, ξρ.

Ε'ὰν γὰρ τεθῶσιν οἱ Κύλινδροι ὅμοιοι, ἔσεται ἡ μζ πρὸς τὴν ιξ, ὡς ἡ βζ πρὸς τὴν ξρ (11), τȣ̃τ' ἔςιν ὡς περιφέρεια γλ πρὸς τὴν περιφέρειαν σε (12). Τοιγαρȣ̃ν καὶ τὰ Ο'ρθογώνια, τὰ ὑπὸ τῶν περιφερειῶν γλ, σε, καὶ τῶν πλευρῶν

---

(1) Ζ. τȣ̃ παρ. (2) Πόρ. Δ. τῆς Ις. τȣ̃ ς'. (3) Ε. τȣ̃ πας. (4) Διὰ τὴν παροῦσαν. (5) Πόρ. τῆς ΚΔ. τȣ̃ α'. (6) Πορ. Α'. (7) Δ. τȣ̃ ς'. (8) Προτ. Ζ'. καὶ Σχημ. 27 καὶ 28 τȣ̃ ΙΒ'. (9) Πορ. Α'. (10) Α. τȣ̃ ς'. (11) Ο'ρισμ. Δ. τȣ̃ ιβ'. (12) Ζ. τȣ̃ παρ.

μζ, ιξ περιεχόμενα, ὅμοια ἔσεται (1)· ἢ λόγον ἕξει διπλασίονα, οὗπερ ἔχει ἡ μζ πρὸς τὴν ιξ (2), τȣτ᾽ ἔϛιν ἡ βζ πρὸς τὴν ξρ. Α῎ρα ἢ αἱ Κυλινδρικαὶ ἐπιφάνειαι, κτ.

Ε΄. Αἱ Κυλινδρικαὶ ἐπιφάνειαι (βμ, ρι) λόγον ἔχȣσι (3) πρὸς ἀλλήλας τὸν συγκείμενον ἔκτε τȣ λόγȣ τῶν πλευρῶν (ζμ, ιξ), ἢ τȣ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων (βζ, ξρ). χ. τὸ αὐτό.

ϛ΄. Ε᾽ὰν αἱ Κυλινδρικαὶ ἐπιφάνειαι (αρ, ζδ) ὦσιν ἀλλήλαις ἴσαι, ἔσεται ὡς ἡ διάμετρος αβ πρὸς τὴν διάμετρον ζν, ὅτως ἐν ἀντιπεπονθήσει τὸ ὕψος ζη πρὸς τὸ ὕψος ρβ (4), ἢ ἀνάπαλιν. χ. 29. 30.

Ζ΄. Ε᾽κ τȣ αὐτȣ πρώτȣ Πορίσματος πορίζεται τελευταῖον ἡ τῆς Κυλινδρικῆς ἐπιφανείας καταμέτρησις, ἐὰν δηλονότι τὸ ὕψος ἐπὶ τὴν τῆς βάσεως περιφέρειαν πολλαπλασιασθῇ. Ε᾽ὰν, φέρε, τεθῇ τὸ μὲν ὕψος ποδῶν 20, ἡ δὲ τῆς βάσεως περιφέρεια ποδῶν 6· πολλαπλασιασθέντων τῶν 20 ποδῶν διὰ τῶν 6, προκύψȣσι τετραγωνικοὶ πόδες 120 εἰς τὴν τȣ Κυλίνδρȣ ἐπιφάνειαν.

Πρότασις ΙΒ΄.

Η῾ τȣ ὀρθȣ Κυλίνδρȣ ἐπιφάνεια ἐϛὶ πρὸς τὴν βάσιν αβν, ὡς ἡ τȣ Κυλίνδρȣ πλευρὰ (γβ) πρὸς τὴν βο, τεταρτημόριον ὖσαν τῆς κατὰ τὴν βάσιν διαμέτρȣ. χ. 24. 25.

Ε῎ϛω ἡ θη μέσον λόγον ἔχȣσα τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων βγ ἢ βδ· ἥτις μέσον λόγον ἕξει (5) (θ) ἢ τῶν βα (ἢ αν) 2βγ· ὁ Κύκλος ἄρα θπη ὁ ἀπὸ ἀκτῖνος τῆς θη, ἴσος ἐϛὶ τῇ καμπύλῃ ἐπιφανείᾳ τȣ Κυλίνδρȣ γδ (6). Α᾽λλ᾽ ὁ κύκλος θπη πρὸς τὴν τȣ Κυλίνδρȣ βάσιν αβν, λόγον ἔχει διπλασίονα τȣ, ὃν ἔχει ἡ θη πρὸς τὴν αν (7), τȣτ᾽ ἔϛι τὸν αὐτὸν, ὃν ἡ διπλασία τῆς βγ πρὸς τὴν ἐκ τȣ κέντρȣ βα (8), ἤτοι ἡ βγ πρὸς τὴν βο, τεταρτημόριον ὖσαν τῆς διαμέτρȣ· ἄρα ἢ ἡ Κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ἐϛὶ πρὸς τὴν βάσιν αβν, ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν βο, τεταρτημόριον ὖσαν τῆς διαμέτρȣ βδ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

Η῾ ἐπιφάνεια Κυλίνδρȣ, ὃς ἔχει τὴν πλευρὰν ἴσην τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως, ἐϛὶ τετραπλασία τῆς βάσεως. Ε᾽ὰν δὲ ἡ τȣ Κυλίνδρȣ πλευρὰ ᾖ τεταρτημορίῳ τῆς βάσεως ἴση, ἡ Κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ἔσεται ἴση τῇ βάσει. Δῆλον ἑκάτερον ἐκ τῆς Προτάσεως.

---

(1) Ο῾ρισμ. Α. τȣ ϛ΄. (2) Ι. τȣ ϛ΄. (3) ΚΓ. τȣ ϛ΄. ἢ ζ΄. τȣ παρόν. (4) ΙΔ. τȣ ϛ΄. (5) Διὰ τὸ Λημ. τὸ εἰς τὴν ΙΑ΄. (6) ΙΑ. τȣ παρόντος. (7) Πορ. τῆς Β. τȣ ιβ΄. (8) Διὰ τὴν ὑπόθεσιν ἢ τὸν Ι΄. Ο῾ρισμ. τȣ ε΄.

Πρότασις ΙΓ'.

κ. 32. 31. Ὁ Κύκλος, ȣ̔ ἡ ἐκ τȣ̃ κέντρȣ ολ μέσον ἔχει λόγον τῆς τȣ̃ ὀρθȣ̃ Κώνȣ πλευρᾶς βγ, ϗ τῆς κατὰ τὴν βάσιν τȣ̃ Κώνȣ διαμέτρȣ αγ, ἴσος ἐςὶ τῇ τοῦ Κώνȣ ἐπιφανείᾳ.

Νοείσθω περὶ μὲν τȣ̀ς κύκλȣς αγθ, οπλ, Πολύγωνα κανονικὰ, ϗ ὅμοια περιγεγραμμένα τὰ εζ, νι· ἐπὶ δὲ τȣ̃ Πολυγώνȣ εζ Πυραμὶς ἀνεςαμένη, ἥτις ἔςαι περὶ τὸν Κῶνον περιγεγραμμένη.

Ἐπειδὴ ȣ̃ν ἐξ ὑποθέσεως ἡ αγ, ἢ ἡ αθ ἐςὶ πρὸς τὴν ολ, ὡς ἡ ἀυτὴ ολ πρὸς τὴν βγ· ὁ λόγος ἄρα τῆς αθ πρὸς τὴν βγ διπλασίων ἔςαι τȣ̃ τῆς αθ πρὸς τὴν ολ (1). Ἀλλ' ὡς ἡ αθ πρὸς τὴν βγ, ȣ̔́τω τὸ ὑπὸ τῆς αθ, ϗ τῆς περιμέτρȣ εζ Τρίγωνον, πρὸς τὸ Τρίγωνον τὸ ὑπὸ τῆς βγ ϗ τῆς αὐτῆς περιμέτρȣ εζ· ὁ λόγος ἄρα τȣ̃ ὑπὸ τῆς αθ, ϗ τῆς περιμέτρȣ εζ Τριγώνȣ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς βγ, ϗ τῆς αὐτῆς περιμέτρȣ εζ Τρίγωνον, διπλασίων ἐςὶ τȣ̃ τῆς αθ πρὸς τὴν ολ. Ἔςι δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τῆς αθ, ϗ τῆς εζ περιμέτρȣ Τρίγωνον, ἴσον τῷ Πολυγώνῳ εζ (2)· τὸ δὲ ὑπὸ τῆς βγ, ϗ τῆς αὐτῆς περιμέτρȣ εζ, ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς περιγεγραμμένης Πυραμίδος (3). Ὁ λόγος ἄρα τȣ̃ Πολυγώνȣ εζ πρὸς τὴν τῆς Πυραμίδος ἐπιφάνειαν, ἐςὶν ὡσάυτως διπλασίων τȣ̃ λόγȣ τῆς αθ πρὸς τὴν ολ. Ἀλλὰ μὴν ϗ ὁ λόγος τȣ̃ Πολυγώνȣ εζ πρὸς τὸ ἐκ κατασκευῆς αὐτῷ ὅμοιον Πολύγωνον ιν, διπλασίων (4) ἐςὶ τȣ̃ λόγȣ τῆς αθ πρὸς τὴν ολ (ὡς δείκνυται ἐκ τῶν εἰς τὴν δεῖξιν τῆς ΙΑ'. τȣ̃ παρόντος παραληφθέντων)· τὸ Πολύγωνον ἄρα εζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρός τε τὴν ἐπιφάνειαν τῆς Πυραμίδος, ϗ πρὸς τὸ Πολύγωνον ιν· ἴση ἄρα τῷ Πολυγώνῳ ἡ τῆς Πυραμίδος ἐπιφάνεια (5). Τῷ αὐτῷ δὲ τρόπῳ δειχθήσεται, ὅτι ἐπιφάνειαι Πυραμίδων ἐπ' ἄπειρον μᾶλλον ϗ μᾶλλον πολυγώνων περὶ τὸν Κῶνον περιγραφομένων, ἔσονται ἀεὶ ἴσαι Πολυγώνοις ἐπ' ἄπειρον περὶ τὸν Κύκλον οπλ περιγραφομένοις. Ἐπεὶ δὲ ἔσχατον ἀπολήγȣσιν αἱ μὲν τῶν Πυραμίδων ἐπιφάνειαι εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τȣ̃ Κώνȣ (6)· τὰ δὲ Πολύγωνα εἰς τὸν Κύκλον οπλ (7)· ἡ ἐπιφάνεια ἄρα τȣ̃ Κώνȣ (8) ἴση τῷ Κύκλῳ οπλ. Ο. Ε. Δ.

Ἐκ τȣ̃ ἐξαιρέτȣ τȣ̃δε Θεωρήματος ἐξέςαι λαβεῖν Κύκλον Κωνικῇ ἐπιφανείᾳ ἰσȣ́μενον.

---

(1) Ὁρισμ. *Ι.* τȣ̃ *έ*. (2) *Δ.* τȣ̃ παρόντος. (3) Θ. τȣ̃ παρόντος. (4) Συνάγεται ἐκ τῆς Α'. τȣ̃ ιβ'. (5) Θ. τȣ̃ έ. (6) *Ι.* τȣ̃ παρόντος. (7) *Γ.* τȣ̃ παρόντος. (8) Α. τȣ̃ παρόντος.

Πορίσματα.

Α'. Ἡ τῦ ὀρθῦ Κώνυ ἐπιφάνεια ἴση ἐςὶ Τριγώνῳ, οὗ ὕψος μὲν ἡ τῦ Κώνυ πλευρὰ (βγ), βάσις δὲ ἡ τῆς βάσεως περιφέρεια (γθ). χ. 31. 32.

Ἔςω γὰρ ἡ ολ μέσον ἔχυσα λόγον τῆς τῦ Κώνυ πλευρᾶς βγ, ϗ τῆς κατὰ τὴν βάσιν ἡμιδιαμέτρυ αγ. Καὶ ἐπεὶ ἡ περιφέρεια γθ ἐςὶ πρὸς τὴν περιφέρειαν π, ὡς ἡ ἀκτὶς αγ πρὸς τὴν ολ ἀκτῖνα (1), τῦτ᾽ ἔςιν ὡς ἡ ολ πρὸς τὴν βγ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν· τὸ Τρίγωνον ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς πρώτης, τῦτ᾽ ἐςὶ τῆς περιφερείας γθ, ϗ τῆς τετάρτης βγ, ἴσον ἔςαι τῷ Τριγώνῳ, τῷ ὑπὸ τῆς δευτέρας, τῦτ᾽ ἐςὶ τῆς περιφερείας π, ϗ τῆς τρίτης ολ (2), τῦτ᾽ ἐςὶ (3) τῷ Κύκλῳ οπλ, τῦτ᾽ ἐςὶ (4) τῇ Κωνικῇ ἐπιφανείᾳ βγδ. Ο. Ε. Δ.

Δῆλον ἐκ τῦδε τῦ Πορίσματος, ὅτι αἱ Κωνικαὶ ἐπιφάνειαι ὑπόκεινται τοῖς τῶν Τριγώνων νόμοις. Ὅθεν

Β'. Αἱ Κωνικαὶ ἐπιφάνειαι (βαζ, ξχρ), ὧν αἱ πλευραὶ (βα, ξχ) ἴσαι, εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ τῶν βάσεων διάμετροι (βζ, ξρ). χ. 26. 27.

Γ'. Καὶ αἱ γζτ, αφβ, ὧν αἱ βάσεις ἴσαι, εἰσὶν ὡς αἱ πλευραὶ (γζ, αφ). χ. 28. 29.

Δ'. Αἱ δὲ ἀλλήλαις ὅμοιαι (βαζ, ξρφ) λόγον ἔχυσι διπλασίονα, οὗπερ αἱ τῶν βάσεων διάμετροι. χ. 26. 27.

Ε'. Καὶ οιαιδήποτε ἐν γένει λόγον ἔχυσι πρὸς ἀλλήλας τὸν συγκείμενον ἔκτε τῦ λόγυ τῶν πλευρῶν (βα, ξφ), ϗ τῦ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων (βζ, ξρ). Σχ. τὸ αὐτ.

ϛ'. Τῶν ἴσων Κωνικῶν ἐπιφανειῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ ταῖς διαμέτροις τῶν βάσεων· ϗ ὧν δὲ ἀντιπεπόνθασιν, ἐκεῖναι ἴσαι.

Δείκνυται ταῦτα πάντα ἐκ τῦ πρώτυ Πορίσματος, ὥσπερ δὴ ϗ ἀνωτέρω τὰ περὶ τῆς Κυλινδρικῆς ἐπιφανείας Πορίσματα δέδεικται ἐκ τῦ ἐκεῖσε πρώτου Πορίσματος.

Ζ'. Μετρηθήσεται τελευταῖον ἡ τῦ Κώνυ ἐπιφάνεια, ἐὰν ἡ πλευρὰ γζ ἐπὶ τὴν ἡμιπεριφέρειαν τῆς βάσεως πολλαπλασιαθῇ. Οἷον ἐὰν ὦσιν ἡ μὲν πλευρὰ ποδῶν 5, ἡ δὲ τῆς βάσεως περιφέρεια ποδῶν 20· πολλασιαθέντων 5 διὰ 10, προκύψυσι τετραγωνικοὶ πόδες 50 εἰς τὴν τῦ Κώνυ ἐπιφάνειαν. Πρόδηλος δὲ ὁ τῆς δείξεως λόγος ἐκ τῦ αὐτῦ πρώτυ Πορίσματος. χ. 30.

(1) Ζ. τῦ παρόν. (2) Πόρ. Δ. τῆς Ιϛ. τῦ ϛ'. (3) Ε. τῦ παρόν. (4) Ε. τῦ παρόν.

Πρότασις ΙΔ.

Σχ. 31. 32. Ἡ τοῦ ὀρθοῦ Κώνου ἐπιφάνεια ἐστὶ πρὸς τὴν βάσιν, ὡς ἡ πλευρὰ (βγ) πρὸς τὴν τῆς βάσεως ἡμιδιάμετρον (αγ).

Ἐχέτω ἡ λο μέσον λόγον τῆς τε πλευρᾶς βγ, καὶ τῆς κατὰ τὴν βάσιν ἡμιδιαμέτρου αγ· καὶ ἔσται ὁ λόγος τῆς βγ πρὸς τὴν αγ, διπλασίων τοῦ τῆς ολ πρὸς τὴν αγ (1)· ὁ δὲ κύκλος ὁ ἀπὸ ἀκτῖνος τῆς ολ ἐστὶν ἴσος τῇ Κωνικῇ ἐπιφανείᾳ γβδ (2). Ἀλλ᾽ ὁ λόγος τούτου πρὸς τὴν τοῦ Κώνου βάσιν αγθ, ἐστὶ διπλασίων τοῦ τῆς ολ πρὸς τὴν αγ (3), καὶ ἑπομένως ὁ αὐτὸς τῷ τῆς βγ πρὸς τὴν αγ· καὶ ἡ Κωνικὴ ἄρα ἐπιφάνεια γβθ ἐστὶ πρὸς τὴν βάσιν αγθ, ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν αγ. Ο. Ε. Δ.

Πορίσματα.

Σχ. 34. Α΄. Ἡ ἐπιφάνεια Κώνου, ὃς ἂν ἐκ Τριγώνου ἰσοπλεύρου περὶ κάθετον τὴν κα περιενεχθέντος εἴη γεγεννημένος, ἐστὶ διπλασία τῆς βάσεως (ξτ).

Ἔστι καὶ γὰρ ἡ πλευρὰ κβ ἴση τῇ βδ, καὶ ἑπομένως διπλασία τῆς κατ᾽ αὐτὴν ἡμισείας, τοῦτ᾽ ἔστι τῆς αβ, ἥτις ἐστιν ἡμιδιάμετρος τῆς βάσεως.

Σχ. 48. Β΄. Ἡ ἐπιφάνεια Κώνου, ὃς ἂν ἐκ Τριγώνου ὀρθογωνίου, καὶ ἰσοσκελοῦς (τοῦ εβδ) εἴη γεγεννημένος, ἐστὶ πρὸς τὴν βάσιν, ὡς ἡ ἐν τῷ Τετραγώνῳ διάμετρος πρὸς τὴν πλευράν.

Ἀχθείσης γὰρ τῆς καθέτου βα, ἡ ὀρθὴ γωνία β δίχα τμηθήσεται (4)· ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἡ ὑπὸ αβδ· ἔστι δὲ ὀρθῆς ἡμίσεια καὶ ἡ ὑπὸ αδβ (5)· ἡ ἄρα αδ ἴση τῇ βα (6). Τοιγαροῦν ἡ μὲν βδ ἐστὶ διάμετρος, ἡ δὲ αδ πλευρὰ τοῦ Τετραγώνου ακ· ἔστι δὲ ἡ αδ ἡμιδιάμετρος τῆς βάσεως πτ, ἅτε τῆς καθέτου αβ δίχα τεμνούσης τὴν εδ (7)· ἐκ τούτων ἄρα καὶ τῆς παρούσης ΙΔ΄. δῆλον τὸ Πόρισμα.

Σχ. 48. Γ΄. Ἡ Κυλίνδρου ὀρθοῦ ἐπιφάνεια (θκ) πρὸς τὴν Κώνου ὀρθοῦ ἐπιφάνειαν (θβν), ἐστὶν ὡς ἡ πλευρὰ τοῦ Κυλίνδρου πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς τοῦ Κώνου πλευρᾶς.

Ἡ γὰρ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθοῦ Κώνου θβν ἐστὶ πρὸς τὴν βάσιν μι, ὡς ἡ πλευρὰ βν πρὸς τὴν τῆς βάσεως ἡμιδιάμετρον ξν (8), τοῦτ᾽ ἔστιν ὡς ἡ ἡμίσεια τῆς πλευρᾶς βν πρὸς τὸ τεταρτημόριον τῆς διαμέτρου θν. Ἔστι δὲ ἡ βάσις μι πρὸς

---

(1) Ὁρ. Ι. τοῦ ε΄. (2) ΙΓ. τοῦ παρόντος. (3) Β. τοῦ ιβ΄. (4) Σχολ. Α΄. τῆς Κϛ΄. τοῦ ια΄. (5) Πορ. ΙΑ΄. τῆς ΛΒ΄. τοῦ α΄. (6) ϛ΄. τοῦ α΄. (7) Σχόλ. Α΄. τῆς Κϛ΄. τοῦ α΄. (8) ΙΔ. τοῦ παρόντος.

τὴν ἐπιφάνειαν τȣ̃ Κυλίνδρȣ θκ, ὡς τὸ τεταρτημόριον τῆς διαμέτρȣ πρὸς τὴν νκ πλευρὰν τȣ̃ Κυλίνδρȣ (1)· δὶ ἴσȣ ἄρα ἡ Κωνικὴ ἐπιφάνεια θβν πρὸς τὴν Κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν νκ, ὡς ἡ ἡμίσεια πλευρὰ τȣ̃ Κώνȣ πρὸς τὴν τȣ̃ Κυλίνδρȣ πλευρὰν νκ. Ο. Ε. Δ.

Λῆμμα εἰς τὴν ἑξῆς.

Ε᾿ν Τριγώνῳ τῷ νπυ ἤχθω παρὰ τὴν νυ ἡ ξδ. Λέγω δὴ, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν πν, νυ Ο᾿ρθογώνιον ἴσον ἐςὶ τῷ ὑπὸ τῶν πξ, ξδ, συνάμα τῷ ὑπὸ τῆς νξ, ϗ συναμφοτέρȣ τῆς νυ, ξδ. ϰ. 34.

Η᾿χθω ἐπὶ τὴν πλευρὰν πν κάθετος ἡ αν, ἴση τῇ νυ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ Ο᾿ρθογώνιον νο· ἤχθω δὲ ϗ ἡ διάμετρος πα· ἀπὸ δὲ τȣ̃ σημείȣ ξ ἤχθω παρὰ τὴν αν ἡ ξε, ϗ τεμνέτω τὴν πα κατὰ τὸ β· διὰ δὲ τȣ̃ β ἤχθω ἡ γζ παράλληλος τῇ νπ. Ε᾿πειδὴ ȣ̃ν ἡ αν ἐςὶν ἐκ κατασκευῆς ἴση τῇ νυ (ϗ (2) αν : ξβ (: : νπ : ξπ) : : νυ : ξδ), δῆλον ὅτι (3) ϗ ἡ ξβ ἴση ἐςι τῇ ξδ· διὰ δὴ ταῦτα τὸ Ο᾿ρθογώνιον, ον ἴσον τῷ πνυ· τό,τε ζξ ἴσον τῷ πξδ· Λείπεται ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὰ Ο᾿ρθογώνια οβ, εγ, βν ἴσα ἐςὶ τῷ ὑπότε τῆς νξ, ϗ συναμφοτέρȣ τῆς αν, ξβ, τȣ̃τ᾿ ἔςι τῆς νξ, ϗ συναμφοτέρȣ τῆς νυ, ξδ περιεχομένῳ Ο᾿ρθογωνίῳ. Ο῞περ ἐςὶ πρόδηλον· εἴγε τὸ ὑπότε τῆς ξν, ϗ συναμφοτέρȣ τῆς να, ξβ περιεχόμενον Ο᾿ρθογώνιον ἐξισȣ̃ται τοῖς τρισὶν Ο᾿ρθογωνίοις, λέγω δὴ τῷ τε ὑπὸ τῶν νξ, γα (τȣ̃τ᾿ ἔςι τῷ χωρίῳ εγ), ϗ τῷ ὑπὸ τῶν νξ, νγ (τȣ̃τ᾿ ἔςι τῷ χωρίῳ βν), ϗ τῷ ὑπὸ τῶν νξ, ξβ, τȣ̃τ᾿ ἔςι τῷ αὐτῷ χωρίῳ βν, ἑπομένως δὲ ϗ τῷ βο, ὅπερ ἐςιν ἴσον τῷ βν. Δῆλον ἄρα τὸ προτεθέν.

Πρότασις ΙΕ΄.

Ε᾿ὰν Κῶνος ὀρθὸς Ε᾿πιπέδῳ τῷ ξσρ παραλλήλῳ τῇ βάσει νφο τμηθῇ, λέγω ὅτι ὁ Κύκλος θημ, ȣ̃ ἡ ἐκ τȣ̃ Κέντρȣ θη μέσον λόγον ἔχει τȣ̃ τῆς πλευρᾶς μέρȣς νξ, ϗ συναμφοτέρȣ τῆς τῶν Κύκλων ξσρ, νφο ἡμιδιαμέτρȣ ξδ, νυ, ἴσος ἐςὶ τῇ Κωνικῇ ἐπιφανείᾳ, τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων Κύκλων ξσρ, νφο. ϰ. 35. 36.

Ε᾿χέτω δὴ τὸν μέσον λόγον ἡ μὲν θζ τῆς πν ϗ τῆς νυ· ἡ δὲ θκ τῆς πξ ϗ τῆς ξδ· καὶ διὰ τῶν θζ, θκ, καταγεγράφθωσαν Κύκλοι οἱ θζλ, θκτ. Ε᾿σεται δὴ ὁ μὲν θκτ ἴσος τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ ξπρ (4)· ὁ δὲ θζλ ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ νπο· τὸ δὲ ὑπὸ τῶν πνυ Ο᾿ρθογώνιον ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν πξδ συνάμα

(1) ΙΒ. τȣ̃ παρόντος. (2) Πορ. Α΄. τῆς Δ. τȣ̃ ϛ΄. (3) ΙΔ. ϗ Θ. σὺν τοῖς Σχολ. τῆς Ζ. τȣ̃ ε΄. (4) ΙΓ. τȣ̃ παρόντος.

τῷ ὑπὸ τῆς νξ, ᾗ συναμφοτέρυ τῆς νυ, ξδ (1) περιεχομένῳ Ὀρθογωνίῳ. Ἐπεὶ δὲ ἐκ κατασκευῆς ἡ μὲν θζ μέση ἀνάλογόν ἐςιν ἐν ταῖς πν, νυ, ἡ δὲ θκ ἐν ταῖς πξ, ξδ· ἄρα τὸ μὲν ὑπὸ τῶν πνυ Ὀρθογώνιον ἐςὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς θζ Τετραγώνῳ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν πξδ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς οκ (2). Καὶ ἐπεὶ ἐξ ὑποθέσεως ἡ θη μέσον ἔχει λόγον τῆς τε ξν, ᾗ συναμφοτέρυ τῆς ξδ, νυ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς ξν, ᾗ συναμφοτέρυ τῆς ξδ, νυ περιεχόμενον Ὀρθογώνιον, ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπὸ τῆς θη Τετραγώνῳ· τὸ ἀπὸ τῆς θζ ἄρα Τετράγωνον ἴσον ἐςὶ τοῖς ἀπὸ τῶν θη, θκ Τετραγώνοις· καὶ ἐπεὶ οἱ Κύκλοι εἰσὶν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἡμιδιαμέτρων Τετράγωνα (3), ἔσεται δὴ ὁ Κύκλος θλζ τοῖς δυσὶ Κύκλοις θκτ, θημ ἴσος. Ἀλλ' ὁ Κύκλος θλζ ἐςὶν ἴσος τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ νπο (4)· ἄρα ᾗ ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια νπο, ἴση τοῖς δυσὶ Κύκλοις θκτ, θημ. Ἀλλὰ τὸ μέρος ξπρ τῆς ὅλης ἐπιφανείας νπο ἰσῦται τῷ Κύκλῳ θκτ (5)· λοιπὸν ἄρα τὸ μεταξὺ τῶν παραλλήλων Κύκλων φφ, σσ ἐναπολαμβανόμενον τῆς Κωνικῆς ἐπιφανείας, ἴσον ἐςὶ τῷ λοιπῷ Κύκλῳ θημ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

Τὸ μέτρον ἄρα τῆς μεταξὺ δύω Κύκλων ἐναπολαμβανομένης Κωνικῆς ἐπιφανείας, ἀποφέρεται ἐκ τῶν κατὰ τὺς παραλλήλυς Κύκλυς δοθεισῶν ἡμιδιαμέτρων (νυ, ξδ), ᾗ τῆς κατὰ τὴν Κωνικὴν ταύτην ἐπιφάνειαν πλευρᾶς (νξ)· ἐὰν δηλονότι τὸ τῶν ἡμιδιαμέτρων ἄθροισμα νυ+ξδ ἐπὶ τὴν πλευρὰν νξ πολλαπλασιαθῇ, ἀπὸ δὲ τῦ προκύπτοντος ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἐξαχθῇ. Ἔσεται γὰρ δὴ ὡς 113 πρὸς 355, ὕτως ἡ ῥίζα πρὸς τὸν τέταρτον ὅρον, ὗτινος πολλαπλασιαθέντος ἐπὶ τὴν ῥίζαν, προκύψει ἡ ζητυμένη ἐπιφάνεια. Δείκνυται δὲ τῦτο ἔκ τε τῆς ΙΖ'. τῦ ϛ'., καὶ ἐκ τῦ Σχολίυ τῆς ϛ'. τῦ παρόντος, ᾗ δὴ ᾗ ἐκ τῆς ΙΕ'. τῦ ιε'. (περὶ δὲ τῶν παραληφθέντων ἀριθμῶν ὅρα τὰ ἐν τῷ Σχολίῳ τῆς ϛ'. εἰρημένα)

Λῆμμα εἰς τὴν ἑξῆς.

κ. 37. Αἱ εὐθεῖαι (βη, γθ), αἱ ἴσα τόξα ἐν Κύκλῳ ἐναπολαμβάνυσαι τὰ βγ, ηθ, παράλληλοι εἰσί.

Ἀχθείσης γὰρ τῆς γη, ἐπεὶ ἐξ ὑποθέσεως τὰ τόξα βγ, ηθ ἴσα ἐςὶν ἀλλήλοις, ᾗ αἱ ὑπὸ βηγ, θγη ἐναλλὰξ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται (6). Αἱ εὐθεῖαι ἄρα βη, γθ, παράλληλοι εἰσίν (7). Ο. Ε. Δ.

---

(1) Ἐκ τῦ Λήμματος. (2) ΙΖ. τῦ ϛ'. (3) Πορ. Β'. τῆς Β. τῦ ιβ'. (4) ΙΓ. τῦ παρόντος. (5) Διὰ τὴν αὐτὴν ΙΓ. (6) ΚΘ. τῦ γ'. (7) ΚΗ. τῦ α'.

Σχόλιον. Ἐντεῦθεν πορίζεται ῥᾳστη μέθοδος τοῦ ἀπό τινος δοθέντος σημείου τοῦ β τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ γθ παράλληλον ἀγαγεῖν τὴν βη· ὡς ἐν τῇ ΛΑ'. τοῦ Α'. σεσημείωται.

Πρότασις Ις'.

Ἐγγεγράφθω εἰς Κύκλον σχῆμα κανονικὸν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον, οὗ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν μετρείσθω ὑπὸ τετράδος (α)· καὶ ἀπὸ τοῦ τῆς διαμέτρου πέρατος ε ἤχθω ἡ εβ τὰς μιᾶ ἐλάσσους τῶν ἡμίσεων τοῦ πολυγώνου πλευρῶν ὑποτείνουσα· τὰς δ' ἐπίσης τοῦ σημείου α παρ' ἑκάτερα ἀφισαμένας γωνίας ἐπιζευγνύτωσαν εὐθεῖαι αἱ βη, γθ, δζ. Λέγω ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῆς διαμέτρου αε καὶ τῆς ὑποτεινούσης εβ περιεχόμενον, ἴσον ἔσαι τῷ ὑπὸ μιᾶς τινος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος πλευρᾶς (τῆς αβ, ἢ τῆς βδ, ἢ ἧστινοσοῦν ἄλλης) καὶ ἁπασῶν τῶν τὰς γωνίας ἐπιζευγνυσῶν εὐθειῶν βη, γθ, δζ ἅμα ληφθεισῶν περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. κ. 37.

Ἤχθωσαν αἱ εὐθεῖαι γη, δθ· καὶ ἐπειδὴ αἱ βη, γθ, δζ τόξα ἴσα ἐναπολαμβάνουσι τὰ βγ, ηθ, γδ, θζ (1), ἔσονται ἀλλήλαις παράλληλοι (2)· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ταῦτα παράλληλοί εἰσι καὶ αἱ βα, γη, δθ, εζ. Ἅπαντα ἄρα τὰ Τρίγωνα βακ, κηλ, λγμ, μθν, νδο, οζε ἰσογώνια (3)· ἔνθεν τοι ὡς ἡ βκ πρὸς κα, οὕτως ἡ ηκ πρὸς κλ· ὡς δὲ ἡ ηκ πρὸς κλ, οὕτως ἡ γμ πρὸς μλ· ὡς δὲ ἡ γμ πρὸς μλ, οὕτως ἡ θμ πρὸς μν· ὡς δὲ ἡ θμ πρὸς μν, οὕτως ἡ δο πρὸς ον· ὡς δὲ ἡ δο πρὸς ον, οὕτως ἡ ζο πρὸς οε· ὡς ἄρα (4) ἓν τῶν ἡγουμένων, τοῦτ' ἔσιν ἡ βκ πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, τοῦτ' ἔσι τὴν κα, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα ἤτοι αἱ βκ, κη, γμ, μθ, δο, οζ (τοῦτ' ἔσι πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνῦουσαι βη, γθ, δζ) πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα, ἤτοι τὰς ακ, κλ, λμ, μν, νο, οε τοῦτ' ἔσι πρὸς τὴν διάμετρον αε. Ἀλλ' ὡς ἡ βκ πρὸς κα, οὕτως ἡ εβ πρὸς βα (5)· ὡς ἄρα ἅπασαι αἱ βη, γθ, δζ ἅμα ληφθεῖσαι, πρὸς τὴν αε, οὕτως ἡ εβ

(α) Ὑπὸ τετράδος βούλεται μετρεῖσθαι τὰς πλευρὰς τοῦ Πολυγώνου, διὰ τὸ τοῦ Κύκλου κινουμένου περὶ τὴν αε διάμετρον πάσας τὰς πλευρὰς κατὰ Κωνικῶν φέρεσθαι ἐπιφανειῶν· χρησίμου ἐσομένου αὐτῷ τοῦ τοιούτου ἐν τοῖς ἑξῆς· μὴ γὰρ ὑπὸ τετράδος μετρουμένων τῶν πλευρῶν τοῦ Πολυγώνου, κἂν ἀρτιόπλευρον ᾖ, οὐ πάσας δυνατὸν κατὰ Κωνικῶν φέρεσθαι ἐπιφανειῶν, ὡς κατανοῆσαι ἔξεσιν ἐκ τῶν τοῦ ἑξαγώνου πλευρῶν· δύω γὰρ τὰς ἀπεναντίον πλευρὰς παραλλήλους οὔσας, κατὰ Κυκλινδρικῆς φέρεσθαι ἐπιφανείας συμβαίνει. ὅπερ οὐ χρήσιμον πρὸς τὰ ἑξῆς.

(1) Κς'. τοῦ Γ'. (2) Λημμ. προηγ. (3) ΚΖ'. καὶ ΙΕ'. καὶ Πορ. Θ'. τῆς ΛΒ'. τοῦ Α'. (4) ΙΒ'. τοῦ Ε'. (5) Πορ. Γ'. τῆς Η'. τοῦ ς'.

πρὸς τὴν βα. Τὸ Ὀρθογώνιον ἄρα τὸ ὑπὸ πασῶν τῶν ἐπιζευγνύȣσῶν βη, γθ, δζ ὁμȣ̃ εἰλημμένων ϗ τῆς βα περιεχόμενον, ἴσον ἐςὶ τῷ ὑπὸ τῶν αε, εβ περιεχομένῳ Ὀρθογωνίῳ (1). Ο. Ε. Δ.

Πορίσματα.

Α'. Πᾶσαι αἱ τὰς γωνίας τȣ̃ Πολυγώνȣ ἐπιζευγνῦȣσαι βη, γθ, δζ δίχα ϗ πρὸς ὀρθὰς τέμνονται ὑπὸ τῆς διαμέτρȣ αε. Ἐπεὶ γὰρ ἐν τοῖς Τριγώνοις βακ, ηακ αἱ πλευραὶ βα, ακ εἰσὶν ἴσαι ταῖς πλευραῖς αη, ακ· ἴσαι δὲ καὶ αἱ πρὸς τῷ α γωνίαι (2)· ἔσεται δὴ ϗ ἡ βκ ἴση τῇ κη (3)· καὶ δὴ ϗ αἱ πρὸς τῷ κ γωνίαι ἀλλήλαις ἴσαι, ϗ διὰ ταῦτα ὀρθαί (4). Τῷ αὐτῷ δὲ τρόπῳ δειχθήσεται, ὅτι ϗ οἱαδήτις ἄλλη ἐπιζευγνῦσα γθ διχοτομηθήσεται ὑπὸ τῆς διαμέτρȣ κατὰ τὸ μ, ὡς εἶναι τὴν γμ ἴσην τῇ μθ, ϗ τὰς πρὸς τῷ μ γωνίας ὀρθάς.

Β'. Ἐὰν ἡ τὰς γωνίας ἐπιζευγνῦσα γθ, διάμετρος ᾖ τȣ̃ Κύκλȣ, ἡ ὑπὸ τῆς ἐπιζευγνύσης εὐθείας, ϗ τῆς προσεχεσάτης τῇ διαμέτρῳ πλευρᾶς τȣ̃ ἐγγεγραμμένȣ Σχήματος περιεχομένη Γωνία γθη ἔσεται ὀξεῖα. Ἀχθείσης γὰρ τῆς γη, ἡ ἐν τῷ Ἡμικυκλίῳ γωνία γηθ ὀρθὴ ἔςαι (5)· ἡ ὑπὸ γθη ἄρα ὀξεῖα (6).

Ἐὰν δὲ ἡ τὰς γωνίας ἐπιζευγνῦσα ἐλάσσων ᾖ τῆς διαμέτρȣ, οἷα ἡ βη, ἡ ἐν τῷ ἐλάσσονι Τμήματι ὑπὸ τῆς τȣ̃ ἐγγεγραμμένȣ Σχήματος πλευρᾶς αβ, ϗ τῆς ἐπιζευγνύσης βη συνιςαμένη Γωνία αβη ὀξεῖα ἔςαι (7)· ἡ γὰρ ἐπὶ τȣ̃ τόξȣ βη ἐπιβεβηκεῖα γωνία ἐν μείζονι Τμήματι ἔςαι τῷ αβεη.

Γ'. Ἔςω Τμῆμα Κύκλȣ τὸ γαθ ἤτοι Ἡμικύκλιον, ἢ Ἡμικυκλίȣ ἔλασσον, ὑπὸ τῆς ἐπιζευγνύσης γθ περατȣμενον. Αἱ ἐγγυτάτω τῆς ἐπιζευγνύσης πλευραὶ τȣ̃ ἐγγεγραμένȣ Σχήματος γβ, θη, ὅσον ἀπόχρη ἐπὶ τὰ πρὸς τὸ Τμῆμα γαθ περαιτέρω τῶν σημείων β ϗ η προεκβληθεῖσαι, συμπεσȣ̃νται ἀλλήλαις, ϗ Τρίγωνον ἰσοσκελὲς ἐπὶ τῆς γθ ὡς βάσεως ποιήσȣσιν, ȣ̃ ἡ κορυφὴ ἔσεται πρός τινι σημείῳ τῆς διαμέτρȣ εα, περαιτέρω τȣ̃ α προεκβληθείσης.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ ὑπὸ βγθ, γθη, ἐλάσσȣς εἰσὶ δυεῖν ὀρθῶν (8)· αἱ πλευραὶ γβ, θη, προεκβληθεῖσαι ἐπὶ τὰ πρὸς τὰ β, η, συμπεσȣ̃νται ἀλλήλαις (9). Ἐπεὶ δὲ ϗ τὰ τόξα βαηθ, γβαη, ἀλλήλοις ἴσα, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται ϗ αἱ ὑπὸ βγθ, γθη (10)· καὶ αἱ πλευραὶ γβ, θη συμπεσȣ̃σαι,

(1) Ις. τοῦ ϛ'. (2) ΚΘ. τοῦ γ'. (3) Δ. τοῦ α'. (4) Ὁρισμ. ΙΔ. τοῦ α'. (5) ΛΑ. τȣ̃ γ'. (6) Πορ. Δ. τῆς λβ'. τȣ̃ α'. (7) ΛΑ. τȣ̃ γ'. (8) Πορ. Β. τῆς παρȣ́σης. (9) Σχόλ. τῆς ΛΑ. τȣ̃ α'. (10) ΚΘ. τȣ̃ γ'.

Τρίγωνον ἰσοσκελὲς ἐπὶ βάσεως τῆς γθ ποιήσεσι (1). Καὶ ἐπειδὴ ἡ βάσις δίχα, ϗ πρὸς ὀρθὰς τέμνεται ὑπὸ τῆς αμ (2)· προεκβληθεῖσα ἄρα ἡ μα, διὰ τῆς τε Τριγώνε κορυφῆς διελεύσεται (3).

Πρότασις ΙΖ΄.

Ε'ὰν ἐν Κύκλε τμήματι τῷ δαζ, ἓ ἡ βάσις δζ κάθετος ἕςηκεν ἐπὶ τὴν διάμετρον αοε, Σχῆμα ἰσόπλευρον, ϗ ἀρτιόπλευρον ἐγγραφῇ, ἀχθῇ δὲ ὡς ἐν τῇ προηγεμένῃ ϗ ἡ εὐθεῖα εβ· τὸ ὑπὸ τῆς εβ, ϗ τε τῆς διαμέτρε μέρες αο, ὅς ἐςιν ἄξων τε τμήματος, περιεχόμενον Ο'ρθογώνιον, ἴσον ἔςαι τῷ ὑπὸ μιᾶς τῶν τε ἐγγεγραμμένε Σχήματος πλευρῶν, ϗ ἁπασῶν τῶν τὰς γωνίας ἐπιζευγνυεσῶν βη, γθ μετὰ τῆς αο ἡμισείας τῆς βάσεως δζ ἅμα ληφθεισῶν περιεχομένῳ Ο'ρθογωνίῳ. σχ. 38.

Η' δὲ δεῖξις ἐςὶν ἡ αὐτὴ τῇ τῆς προηγεμένης (ἔςι γὰρ $αβ:βε::ακ:κβ::λκ:κη::λμ:μγ::νμ:μθ::νο:οδ$. Α'ρα $αβ:βε::ακ+κλ+λμ+μν+νο:βκ+κη+γμ+μθ+οδ$· τετ' ἔςιν $αβ:βε::αο:βη+γθ+δο$· καὶ $βε\times αο=αβ\times(βη+γθ+δο.)$

Σχόλιον. Ε'ὰν Τμῆμα Κύκλε τὸ δαζ, Σχῆμα ἀρτιόπλευρόν τε, ϗ ἰσόπλευρον ἐγγεγραμμένον τὸ δηαθζ δέχηται ἕτως, ὡς τὰς δύω ἀπεναντίον πλευρὰς δη, ζθ, παραλλήλες εἶναι ἀλλήλαις τε, ϗ τῷ Α'ξονι αο, δῆλον ὅτι τὸ τοιῦτον Σχῆμα περὶ τὸν Α'ξονα αο (κατὰ τὰ ἐφεξῆς Λήμματα) Περιενεχθὲν, Κυλινδρικὴν ἀπογεννήσει ἐπιφάνειαν, ἐ Κωνικήν. σχ. 41.

Λήμματα εἰς τὴν ἑξῆς.

Α. Ε'ὰν εἰς μέγιςον Κύκλον Σφαίρας σχῆμα κανονικὸν περὶ τὸν Α'ξονα αε συνιςάμενον ἐγγραφῇ (ἓ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν μετρείσθω ὑπὸ τετράδος), τε δὲ Α'ξονος μένοντος, ὁ Κύκλος μετὰ τε Σχήματος περιαγόμενος αὐτόσε πάλιν ἐπανέλθῃ, ὅθεν ἤρξατο κινεῖσθαι· λέγω ὅτι εἰς τὴν Σφαῖραν ἐγγραφήσεται Σῶμα ἐπιφανείαις ὀρθῶν Κώνων περιειλημμένον. σχ. 37.

Αἱ μὲν γὰρ Εὐθεῖαι βα, ηα, ϗ δε, ζε, ὁλοχερεῖς ἐπιφανείας Κώνων ὀρθῶν καταγράψεσιν (4), αἱ δὲ γβ, θη ϗ θζ, γδ προεκβληθεῖσαι, κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς Διαμέτρε αε ἐφ' ἑκάτερα προεκβληθείσης, ϗ πρὸς ὀρθάς τε ϗ δίχα τὰς ἐπιζευγνυέσας τεμνέσης, συμπεσενται (5)· καὶ κατα-

---

(1) ς. τε α΄. (2) Πορ. Α. τῆς παρέσης. (3) Σχολ. Δ. τῆς κς΄. τε α΄. (4) Ο'ρισμ. Β. τε ιβ΄. (5) Πορισμ. Γ. τῆς ις΄. τε παρόντος.

γράψουσιν ἄρα καὶ αὗται ὀρθῶν Κώνων ἐπιφανείας, ἐναπολαμβανομένας μεταξὺ παραλλήλων Κύκλων, ὧν τὰς περιφερείας αἱ τῶν Γωνιῶν β, γ, δ κορυφαὶ ἐν τῇ τῆς Σφαίρας ἐπιφανείᾳ καταγράφουσι.

Β. Σφαιρικοῦ Τμήματος, οὗ Ἄξων ἡ αο, ἔσω τομὴ μεγίστη ἡ δαζ· ἐν ᾗ Σχῆμα ἀρτιόπλευρόν τε, καὶ ἰσόπλευρον πλὴν τῆς βάσεως, ἐγγεγράφθω οὕτως, ὡς μηδεμίαν τῶν αὐτοῦ πλευρῶν παράλληλον εἶναι τῷ Ἄξονι αο. Ἐὰν οὖν τὸ τοιοῦτο Σχῆμα μετὰ τοῦ Τμήματος, εἰς ὃ ἐγγέγραπται, περὶ τὸν Ἄξονα αο περιενεχθῇ, λέγω ὅτι εἰς τὸ σφαιρικὸν Τμῆμα ἐγγραφήσεται Σῶμα ὑπὸ Κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον.

Δείκνυται δὲ ὡς ἐν τῷ προτέρῳ Λήμματι.

Πρότασις ΙΗ΄.

σ. 37. Τῶν αὐτῶν κειμένων τῷ πρώτῳ Λήμματι· ἐὰν ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς διαμέτρου ἐπὶ τὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου Σχήματος τῆς προσεχεστάτης τῇ διαμέτρῳ εὐθεῖα ἡ εβ ἀχθῇ, λέγω ὅτι πάσαις ταῖς Κωνικαῖς ἐπιφανείαις ταῖς εἰς τὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμέναις ἴσος ἐστὶ Κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου (Ι) δύναται τὸ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῆς διαμέτρου αε καὶ τῆς ὑποτεινούσης εβ περιεχόμενον, τοῦτ᾽ ἔστιν, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου (Ι) μέση ἐστὶν ἀνάλογον τῆς τε Διαμέτρου αε, καὶ τῆς Ὑποτεινούσης εβ.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ εὐθεῖαι βη, γθ, δζ ἴσαι εἰσὶ ταῖς εὐθείαις βκ, γμ, δο δὶς ληφθείσαις (1)· τὸ Ὀρθογώνιον ἄρα τὸ ὑπὸ μιᾶς τῶν τοῦ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένου Σχήματος πλευρῶν (τῆς αβ δηλονότι, ἢ βγ, ἢ γδ, ἢ δε) καὶ ἁπασῶν τῶν τὰς γωνίας ἐπιζευγνυουσῶν βη, γθ, δζ ἅμα ληφθεισῶν περιεχόμενον, ἴσον ἔσται τῷ ὑπὸ τῶν αβ, βκ, τῷ τε ὑπὸ τῆς βγ, καὶ τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν βκ, καὶ γμ, καὶ τῷ ὑπὸ τῆς γδ, καὶ τῆς συγκειμένης ἐκ τῆς γμ, καὶ δο, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν δε, δο περιεχομένῳ Ὀρθογωνίῳ (2)· οὕτω γὰρ ληφθήσεται δὶς ἑκάστη τῶν εὐθειῶν βκ, γμ, δο. Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῆς αβ, καὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν ἅμα ληφθεισῶν βη, γθ, δζ περιεχόμενον Ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αεβ περιεχομένῳ Ὀρθογωνίῳ (3), τοῦτ᾽ ἔστι τῷ ἀπὸ τῆς Ι τετραγώνῳ (4)· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς Ι τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπὸ τῆς αβ, καὶ βκ, ὑπὸ τῆς βγ, καὶ τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν βκ, γμ, ὑπὸ τῆς γδ, καὶ τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν γμ, δο· ὑπὸ τῆς δε, καὶ τῆς δο περιεχομένοις ὀρθογωνίοις. Ἐὰν

---

(1) Πορισμ. Α. τῆς ις΄. τοῦ παρόντος. (2) Προτ. Β. τοῦ β΄. (3) Ις. τοῦ παρόντος. (4) Ἐξ ὑποθέσεως.

δὲ γένωνται ἤδη τῶν μὲν αβ, ϗ βκ, μέση ἀνάλογον ἡ Π· τῆς δὲ βγ καὶ τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν βκ, γμ, ἡ Ξ· τῆςτε γδ ϗ τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν γμ, δο, ἡ Ρ· ϗ τῶν δε, δο, ἡ Σ· ἔσεται δὴ τὰ ἀπὸ τῶν Π, Ξ, Ρ, Σ τετράγωνα τοῖς εἰρημένοις ὀρθογωνίοις ἴσα (1)· δέδεικται δὲ ἤδη τοῖς ὀρθογωνίοις τούτοις ἴσον ϗ τὸ ἀπὸ τῆς Ι τετράγωνον. Τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς Ι ἴσον ἔσαι τοῖς ἀπὸ τῶν Π, Ξ, Ρ, Σ τετραγώνοις· Ἐπεὶ δὲ οἱ κύκλοι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐκ τοῦ κέντρου τετράγωνα (2)· ϗ ὁ ἀκτῖνι ἄρα τῇ Ι γραφεὶς κύκλος ἴσος ἔσαι πᾶσι τοῖς κύκλοις, ὧν ἀκτῖνες αἱ Π, Ξ, Ρ, Σ, ὁμοῦ ληφθεῖσιν. Ἀλλ' οἱ ἀπὸ τῶν ἀκτίνων Π, Σ γραφόμενοι κύκλοι ἴσοι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ τῶν πλευρῶν αβ, εδ παραγομέναις κωνικαῖς ἐπιφανείαις· μέση γὰρ ἐσιν ἀνάλογον ἡ Π τῆς τε αβ πλευρᾶς τοῦ Κώνου ϗ τῆς βκ ἀκτῖνος τῆς βάσεως (3). Ἐὰν δὲ ᾖ μέση ἀνάλογον ϗ τῶν εδ, δο· καὶ ὁ ἀπὸ ἀκτῖνος τῆς Ξ γραφόμενος κύκλος ἴσος ἔσαι τῷ Τμήματι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ δύω παραλλήλων κύκλων, ὧν διάμετροι αἱ γθ, βη· ϗ γὰρ ϗ ἡ Ξ μέση ἐσιν ἀνάλογον τῆςτε βγ ϗ τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν βκ, γμ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ταῦτα ϗ ὁ κύκλος ὁ ἀκτῖνι τῇ Ρ, ἴσος ἔσαι τῷ Τμήματι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων κύκλων, ὧν διάμετροι αἱ γθ, δζ. Ὁ κύκλος ἄρα ὁ ἀπὸ ἀκτῖνος τῆς Ι γραφόμενος ἴσος ἔσαι πάσαις ἅμα ληφθείσαις ταῖς κωνικαῖς ἐπιφανείαις ταῖς εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγεγραμμέναις, ὃ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΘʹ.

Κειμένων δὲ τῶν αὐτῶν τῷ δευτέρῳ Λήμματι, ἀχθείσηςτε ὡσάυτως τῆς εβ ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς διαμέτρου αε ἐπὶ τὸ πέρας τῆς προσεχεσάτης τῇ διαμέτρῳ πλευρᾶς αβ, λέγω ὅτι πάσαις ταῖς εἰς τὸ σφαιρικὸν Τμῆμα δαζ ἐγγεγραμμέναις ἐπιφανείαις, ἴσος ἐσὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέση ἐσιν ἀνάλογον τῆς ὑποτεινούσης εβ ϗ τοῦ κατὰ τὸ Τμῆμα ἄξονος αο. σχ. 38.

Ἡ δὲ δεῖξις τὰ μὲν ἄλλα ἡ αὐτὴ τῇ τῆς προηγουμένης, πλὴν ὅσον ἀντὶ τῆς Ιϛʹ. ληπτέον εἰς τοῦτο τὴν ΙΖʹ.

Πρότασις Κʹ.

Αἱ εἰς σφαῖραν ἐγγεγραμμέναι κωνικαὶ ἐπιφάνειαι εἰς τὴν τῆς σφαίρας ἐπιφάνειαν ἀπολήγουσιν.

---

(1) ΙΖ. τοῦ ϛʹ. (2) Πόρισμ. Β. τῆς βʹ. τοῦ ιβʹ. (3) Διὰ τὸ αὐτὸ πόρισμα. (4) ΙΓ. τοῦ παρ.

σχ. 39. Ἔστω δοθεῖσα ἐπιφάνεια ὁσονδηποτοῦν ἐλαχίστη ἡ Χ· Δῆλον οὖν, ὅτι δυνατόν ἐστι δοθῆναι ἐντὸς τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας αγεθ ἑτέραν ὁμόκεντρον ἐπιφάνειαν ταύτης ἐλλείπουσαν ποσότητι ἐλάσσονι πάσης δοθείσης τῆς Χ. Ἑκατέρων δὴ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου τμηθεισῶν, ἔστωσαν μέγιστοι κύκλοι οἱ αγεθ, δπλμ· ἤχθω ἡ διάμετρος αδε· καὶ ἁπτέσθω τοῦ κύκλου κατὰ τὸ δ ἡ νξ· ἐὰν οὖν τὸ τόξον αε δίχα τμηθῇ κατὰ τὸ γ· καὶ ἑκάτερον τῶν τμημάτων δίχα αὖθις ὑποτμηθῇ (ἐν δέ γε τῷ 18 σχήματι τριχοτομητέον τὸ τεταρτημορικὸν τόξον αγ, ὃ δὴ καὶ αὐτὸ γενήσεται κατὰ τὸ Γ. Πόρισμα τῆς ΙΕ'. τοῦ Δ'.), ἄχρις οὗτου ληφθήσεται τέως τόξον τὸ αβ ἔλαττον τοῦ αν (1), δῆλον ὅτι ἐὰν ὑποτείνῃ τὸ τόξον ἡ αβ, οὐκ ἐφάψεται τῆς περιφερείας δπλμ, ἀλλ' ἔσεται πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον αγθε ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου, καὶ ἀρτιοπλεύρου σχήματος, οὗ αἱ πλευραὶ ὑπὸ τετράδος μετροῦνται, καὶ οὐδεμία τούτων τῆς περιφερείας δπλμ ἐφάπτεται. Ἐὰν οὖν περὶ τὴν διάμετρον αε τὰ πάντα περιενεχθῇ, φανερὸν, ὅτι εἰς τὴν ἐκτὸς σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν κωνικαὶ ἐπιφάνειαι ἐγγραφήσονται, αἵτινες τὴν ἑτέραν ὁμόκεντρον σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν περιέξουσι, καὶ ἑπομένως μείζονες αὐτῆς ἔσονται (2)· καὶ ἐπεὶ ἡ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια δπλμ ἐλλείπει τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας αγεθ ποσότητι ἐλάσσονι πάσης δοθείσης τῆς Χ· πολλῷ δὴ μᾶλλον ἐλάσσονι ποσότητι τῆς δοθείσης Χ ἐλλείψουσιν αἱ κωνικαὶ ἐπιφάνειαι τῆς αὐτῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας αγεθ (3)· ἀπολήγουσιν ἄρα εἰς τὴν αγεθ ἐπιφάνειαν, ὃ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΑ'.

σχ. 41. Αἱ εἰς σφαιρικὸν τμῆμα τὸ δαζ ἐγγεγραμμέναι κωνικαὶ ἐπιφάνειαι εἰς αὐτὴν τὴν τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ἐπιφάνειαν ἀπολήγουσιν.

Δείκνυται τοῖς αὐτοῖς σχεδὸν τῇ προηγουμένῃ συλλογισμοῖς.

Πρότασις ΚΒ'.

σχ. 40. Δέδεικται ἐν τῇ ΙΗ'. ὅτι ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέση ἀνάλογόν ἐστι τῆς τε διαμέτρου αε καὶ τῆς εὐθείας εβ τῆς ἀγομένης ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς διαμέτρου αε ἐπὶ τὸ πέρας τῆς τοῦ σχήματος πλευρᾶς αβ τῆς προσεχεστάτης τῇ διαμέτρῳ, ἴσος ἐστὶ πάσαις ταῖς εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγεγραμμέναις κωνικαῖς ἐπιφα-

---

(1) Λημ. Β. σχολ. μετὰ τὴν ια'. τοῦ ς'. (2) Ἀξίωμ. μ. γ'. τοῦ παρόντος. (3) Ὁρισμ. ς. τοῦ ιβ'.

νείαις. Νῦν δὲ λέγω ὅτι ὁ κύκλος ἔτος ἀπολήγει τελευταῖον εἰς κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τῶ κέντρε ἐςὶν ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος αε (1).

Ἐὰν γὰρ πλείες ἀεὶ καὶ μᾶλλον πλείες εἰς ἄπειρον πλευραὶ εἰς τὸν μέγιςον ἐγγραφῶσι κύκλον (αἵγε περὶ τὴν αε περιενεχθεῖσαι, κωνικὰς ἀπογεννῶσιν ἐπιφανείας), δῆλον ὅτι ἡ αβ πλευρὰ γενήσεται τελευταῖον πάσης δοθείσης εὐθείας ἐλάσσων· καὶ ἡ διαφορὰ τῶν αε, βε γενήσεται δὴ καὶ αὕτη πάσης δοθείσες ἐλάσσων· καὶ πολλῷ δὴ μᾶλλον ἐλάσσονι ποσότητι πάσης δοθείσης διοίσει τῆς αε ἡ τὸν μέσον λόγον ἔχεσα τῶν αε, εβ, ἥτις ἀεί ἐςι μείζων τῆς εβ. Καὶ ὁ κύκλος ἄρα, ἔ ἡ ἡμιδιάμετρος μέση ἀνάλογον εἴη τῶν αε, εβ, ποσότητι πάσης δοθείσης ἐλάσσονι διοίσει τῶ κύκλε, ἔ ἡμιδιάμετρος ἡ αε, τῶτ' ἔςιν εἰς αὐτὸν ἀπολήξει (2). Ὃ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΓ'.

Δέδεικται ἐν τῇ ΙΘ'. ὅτι ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τῶ κέντρε μέση ἐςὶν ἀνάλογον τῆς ὑποτεινέσης εβ καὶ τῶ κατὰ τὸ Τμῆμα ἄξονος αο, ἴσος ἐςὶ πάσαις ταῖς εἰς τὸ σφαιρικὸν τμῆμα δαζ ἐγγεγραμμέναις κωνικῆς ἐπιφανείαις. Νῦν δὲ λέγω, ὅτι ὁ Κύκλος ἔτος ἀπολήγει εἰς Κύκλον, ἔ Ἡμιδιάμετρός ἐςιν ἡ αδ, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῶ Τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένη τῶ Κύκλε δξζν, ὅς ἐςι βάσις τῶ Τμήματος. χ. 41.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ εβ ἀπολήγει τελευταῖον εἰς τὴν αε, ὡς δῆλον ἐκ τῆς προηγεμένης δείξεως, δῆλον ὅτι καὶ ἡ μέση ἀνάλογον τῶν εβ, αο, ἀπολήξει τελευταῖον εἰς τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν αε, αο, τῶτ' ἔςιν εἰς αὐτὴν τὴν αδ (3). Καὶ ὁ Κύκλος ἄρα, οὗ ἡ ἐκ τῶ Κέντρε μέση ἐςὶν ἀνάλογον τῶν εβ, αο, ἀπολήξει εἰς τὸν Κύκλον, ἔ Ἡμιδιάμετρος ἡ αδ. Ὃ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα εἰς τὴν ἑξῆς.

Ἐὰν ἡ Διάμετρος διπλασία ᾖ τῆς Διαμέτρε, ὁ Κύκλος ἔςαι τετραπλάσιος τῶ Κύκλε.

Δείκνυται ἐκ τῆς Β'. τῶ ΙΒ'., καὶ τῶ Ι'. Ὁρισμῶ τῶ Ε'. (ἢ ἐκ τῶ Γ'. Πορίσματος τῆς Β'. τῶ ΙΒ'.).

Πρότασις ΚΔ'.

Πάσης Σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐςὶ τῶ μεγίςε Κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ. χ. 40.

---

(1) Ὁρισμ. ς. τῶ ιβ'. (2) Ὁρισμ. ς. τῶ ιβ'. (3) *Πορισμ. Β. τῆς ή. τῶ ς'.*

Τὸ ἐξαίρετον τᾶ Ἀρχιμήδους τᾶτο Θεώρημα ῥᾷστα ἂν ἀποδείξαιμεν ἐκ τῶν ἤδη κειμένων, ϗ προαποδειχθέντων ὁυτωσί.

Ἐν μεγίςῳ Κύκλῳ τῆς σφαίρας νοείσθω περὶ τὴν διάμετρον αε Σχῆμα κανονικὸν ἐγγεγραμμένον (ὃ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν ὑπὸ τετράδος μετρείσθω), ὃ περὶ τὴν αε περιενεχθὲν, ἀπογεννήσει Κωνικὰς ἐπιφανείας εἰς τὴν Σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν ἐγγεγραμμένας· καὶ ἤχθω ἡ εβ. Δέδεικται δὴ (1), ὅτι πᾶσαι αἱ Κωνικαὶ ἐπιφάνειαι, αἱ εἰς τὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμέναι, ἴσαι εἰσὶ Κύκλῳ, ὃ ἡ ἐκ τᾶ Κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ τῶν αεβ Ὀρθογώνιον, τᾶτ' ἔςιν, ὃ ἡ Ἡμιδιάμετρος μέση ἐςὶν ἀνάλογον τῶν αε, εβ. (Ὅπερ συμβαίνει ἀεὶ ὅσον ἂν τῶν ἐγγραφῶν εἰς ἄπειρον ἐχώμεθα)· ἐπεὶ δὲ αἱ εἰς τὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμέναι Κωνικαὶ ἐπιφάνειαι εἰς τὴν ἐπιφάνειαν ἀπολήγουσι τελευταῖον τῆς Σφαίρας, ἧς ἡ ἐκ τᾶ Κέντρου μέση ἐςὶν ἀνάλογον τῶν αε, εβ (2)· ὁ δὲ Κύκλος, ᾧτινι ἰσᾶνται αἱ κωνικαὶ ἐπιφάνειαι, ἀπολήγει εἰς Κύκλον, ὃ Ἡμιδιάμετρος ἐςὶν ἡ αε, τᾶτ' ἔςιν ἡ τῆς Σφαίρας διάμετρος (3)· ἡ τῆς Σφαίρας ἄρα ἐπιφάνεια ἴση ἔςαι Κύκλῳ, ὃ Ἡμιδιάμετρος ἡ αε, τᾶτ' ἔςι (4) τετραπλασίῳ τᾶ μεγίςου Κύκλου (αγεθ) τῶν ἐν αὐτῇ· ὃ ἔδει δεῖξαι.

Ὁ τὰ Ἀρχιμήδους μετιὼν εἴσεται ὅσον ἐπιτομωτέρα, ϗ σαφεςέρα τῆς τᾶ Ἀρχιμήδους δείξεως ἐςὶν, ἧπερ αὐτοὶ ἐν τῷ παρόντι Θεωρήματι ἐχρησάμεθα.

Πορίσματα.

Α'. Ἐκ τᾶ ἐξαιρέτου, ϗ θαυμασίου τᾶδε Θεωρήματος, ὃ κλέος ἀΐδιον περιεποιήσατο Ἀρχιμήδει παρὰ πᾶσι τοῖς Γεωμέτραις, ἔνεςι λαβεῖν Κύκλον ἴσον τῇ τῆς Σφαίρας ἐπιφανείᾳ· οὗτος δὲ ἐςὶν, ὃ ἡ Ἡμιδιάμετρος ἴση τῇ τῆς Σφαίρας διαμέτρῳ, ἢ ὃ ἡ Διάμετρος διπλασία τῆς τῆς Σφαίρας διαμέτρου.

Β'. Ἐντεῦθεν ϗ ἐκ τῆς Β'. τᾶ ΙΒ'. μετὰ τῆς ΙΕ'. τᾶ Ε'. δῆλον, ὅτι αἱ τῶν Σφαιρῶν ἐπιφάνειαι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ἐν λόγῳ διπλασσίονι τῶν ἐν αὐταῖς Ἡμιδιαμέτρων.

Σχόλιον.

Ῥάςη ἤδη ἐςὶν ἡ καταμέτρησις τῆς Σφαιρικῆς ἐπιφανείας τῆς ἁπασῶν τῶν καμπύλων τὰ πρωτεῖα φερούσης. Ὁ τρόπος δὲ ταύτης διττός.

Α'. Μὲν γὰρ μετρείσθω Κύκλος ὁ μέγιςος τῆς Σφαίρας, ὡς παραδέδο-

(1) *ΙΗ. τᾶ παρόντος.* (2) *Κ. τᾶ παρ.* (3) *ΚΒ. τᾶ παρ.* (4) *Διὰ τὸ προηγ. Λῆμ.*

ται ἐν τῷ μετὰ τὴν ϛ΄. τȣ̃ παρόντος Σχολίῳ, ϗ πεπολλασιάσθω διὰ 4. Οἷον ἐὰν εὑρεθῇ ἡ τȣ̃ κατὰ γῆν μεγίϛȣ Κύκλȣ ἐπιφάνεια τετραγωνικὰ μίλλια Ὡ'ρικὰ, εἴτ' ȣ̃ν Βελγικὰ περιέχȣσα 5 . 940000, ὁ ἀριθμὸς ȣ̃τος τετραπλασιασθεὶς, δίδωσι τετραγωνικὰ μίλλια Βελγικὰ 23 . 760000, εἰς τὴν τῆς γηΐνης Σφαίρας ἐπιφάνειαν.

Β΄. Δὲ ἡ τῆς Σφαίρας διάμετρος πολλαπλασιασθεῖσα διὰ τῆς περιφερείας τȣ̃ μεγίϛȣ Κύκλȣ τῶν ἐν αὐτῇ, δίδωσι τὴν τῆς Σφαίρας ἐπιφάνειαν. Οἷον εἴπερ ἡ τῆς Γῆς διάμετρος μίλλια Βελγικὰ ὡρικὰ περιέχειν ὑποτεθείη 2750 $\frac{14}{71}$, ἡ δὲ τȣ̃ κατ' αὐτὴν μεγίϛου Κύκλου περιφέρεια 8640 (1), οἱ δύω ȣ̃τοι ἀριθμοὶ, ἀμελȣμένȣ τȣ̃ κλάσματος, πολλαπλασιασθέντες ἐπ' ἀλλήλȣς, δώσȣσι πάλιν τετραγωνικὰ μίλλια ὡρικὰ 23 · 760000 εἰς τὴν ὅλην τῆς γηΐνης Σφαίρας ἐπιφάνειαν.

Τὰ δὲ τῆς δείξεως πρόδηλα ἐκ τȣ̃ Α΄. Πρίσματος τῆς Ε΄. τȣ̃ παρόντος. Τὸ γὰρ ὑπὸ τῆς κατὰ τὴν Σφαῖραν διαμέτρȣ, ϗ τῆς τȣ̃ κατ' αὐτὴν μεγίϛου Κύκλȣ περιφερείας περιεχόμενον Ὀρθογώνιον, ἐϛὶ, διὰ τὸ εἰρημένον Πόρισμα, τετραπλάσιον τȣ̃ μεγίϛȣ Κύκλȣ.

(Περὶ δὲ τῶν ἐν τῷ παρόντι Σχολίῳ παραληφθέντων ἀριθμῶν ὅρα τὰ ἐν τῷ μετὰ τὴν ϛ΄. τȣ̃ παρόντος Σχολίῳ εἰρημένα).

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΕ΄.

Πάσης Σφαιρικῆς μοίρας (δαζ) ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐϛὶ Κύκλῳ, ȣ̃ ἡμιδιάμετρος ἐϛὶν εὐθεῖα (ἡ αδ) ἡ ἀπὸ τῆς κατὰ τὴν μοῖραν κορυφῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένη τȣ̃ Κύκλȣ (δοζν), ὅς ἐϛι βάσις τῆς μοίρας. σχ. 41.

Μέρος Α΄. Ἐν μεγίϛης τομῆς μοίρᾳ Σχῆμα νοείσθω ἐγγεγραμμένον περὶ τὸν Ἄξονα αο ἰσόπλευρόν τε, ϗ ἀρτιόπλευρον χωρὶς τῆς βάσεως (ȣ̃ μηδεμία πλευρὰ ἔϛω (2) παράλληλος τῷ Ἄξονι), ὃ περὶ τὴν αο περιενεχθὲν, Κωνικὰς ἐν τῇ μοίρᾳ ἐπιφανείας ἐγγράψει· ἤχθω δὲ ϗ ἡ εβ ὁμοίως τοῖς πρότερον (3). Πᾶσαι ȣ̃ν αἱ εἰς τὸ Τμῆμα ἐγγεγραμμέναι Κωνικαὶ ἐπιφάνειαι, ἴσαι εἰσὶ Κύκλῳ, ȣ̃ ἡ ἐκ τȣ̃ Κέντρȣ μέση ἐϛὶν ἀνάλογον τῆς εὐθείας εβ, ϗ τȣ̃ κατὰ τὸ Τμῆμα Ἄξονος αο (4). Τȣ̃το δὲ συμβήσεται ἐϛαεὶ, ἐπαναλαμβανομένων τῶν ἐγγραφῶν εἰς ἄπειρον. Τοιγαρȣ̃ν, ἐπεὶ καὶ αἱ εἰς τὸ Τμῆμα ἐγγραφόμεναι Κωνικαὶ ἐπιφάνειαι εἰς Σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν Τμήματος ἀπολή-

---

(1) Ὅρα ὄπισθεν σελ. 340. (2) Ὅρα Σχολ. τῆς ΙΖ. τȣ̃ παρόντος (3) ΙΗ. ϗ ΙΘ. τȣ̃ παρόντος. (4) ΙΘ. τȣ̃ παρόντος.

γουσιν (1), ὅ,τε Κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ Κέντρου μέση ἐστὶν ἀνάλογον τῶν εβ, αο, εἰς Κύκλον, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ αδ, ἀποτελευτᾷ (2)· καὶ ἡ τῆς Σφαιρικῆς μοίρας ἄρα ἐπιφάνεια δαζ, ἴση ἔσται Κύκλῳ, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ αδ (3). Ὅ ἔδει δεῖξαι.

Μέρος Β'. Ἀπὸ τῆς κορυφῆς ε τῆς ἐλάσσονος Σφαιρικῆς μοίρας δεζ ἤχθω ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως εὐθεῖα ἡ εδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αδ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ αδε γωνία ἐστὶν ὀρθὴ (4)· ὁ ἀπὸ ἀκτῖνος ἄρα τῆς αε γραφόμενος Κύκλος, ἔσται ἴσος τοῖς ἀπὸ τῶν αδ, εδ, γραφομένοις ἅμα ληφθεῖσιν (5). Ἀλλ' ὁ μὲν ἀπὸ τῆς αε Κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ὅλῃ Σφαιρικῇ ἐπιφανείᾳ (6), ὁ δ' ἀπὸ τῆς αδ, ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς μείζονος μοίρας δαζ (7)· ὁ ἄρα ἀπὸ τῆς εδ Κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς ἐλάσσονος μοίρας δεζ.

Τοῦτὶ τὸ δεύτερον ἐστὶν ἐκ τῶν λόγου ἀξίων τοῦ Ἀρχιμήδους εὑρέσεων, ὅπερ ἡμεῖς (ὥσπερ δὴ καὶ τὸ προηγούμενον) πολὺ δὴ μᾶλλον ἐπιτομώτερον, καὶ σαφέστερον, ἤπερ αὐτὸς Ἀρχιμήδης, ἐδείξαμην.

Πόρισμα. Ἐντεῦθεν δοθείσης τῆς κατὰ τὴν Σφαῖραν διαμέτρου αε, καὶ τοῦ τῆς Σφαιρικῆς μοίρας δαζ Ἄξονος αο (ἢ δοθέντων τοῦ Ἄξονος αο, καὶ τῆς κατὰ τὴν βάσιν Ἡμιδιαμέτρου οδ), εὑρίσκεται ἡ αδ ἡμιδιάμετρος Κύκλου, ὅς ἐστιν ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς Σφαιρικῆς μοίρας, καὶ ἐντεῦθεν ἡ καταμέτρησις τῆς κατὰ τὴν Σφαιρικὴν μοῖραν ἐπιφανείας. Ἐπεὶ γὰρ εἰσὶ αε, αδ, αο ∻ (8), ἔσεται δὴ ἡ $\alpha\delta = \sqrt{(\alpha\delta \times \alpha o)}$ (9) (ἢ ἐπειδὴ τὸ Τρίγωνον αοδ ἐστὶν Ὀρθογώνιον, ἔσται $\alpha\delta = \sqrt{(\alpha o^2 + \delta o^2)}$ (10). Ὅθεν ἐὰν γένηται ὡς 113 πρὸς 355, οὕτως ἡ αδ πρὸς τέταρτον ὅρον· οὗτος ὁ τέταρτος πολλαπλασιασθεὶς διὰ τῆς αδ, δώσει ἐμβαδὸν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς Σφαιρικῆς μοίρας ἴσον. Δείκνυται ἐκ τῆς παρούσης, καὶ ἐκ τοῦ μετὰ τὴν ς'. Σχολίου σὺν τῇ ΙΕ'. τοῦ Ε'.

Πρότασις Κς'.

χ. 42. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περὶ τὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένου ὀρθοῦ Κυλίνδρου ηπσυ, ἴση ἐστὶ τῇ τῆς Σφαίρας ἐπιφανείᾳ. Καὶ ἐὰν ὁ Κύλινδρος, καὶ ἡ Σφαῖρα Ἐπιπέδοις ὀρθοῖς ἐπὶ τὸν Ἄξονα βθ τμηθῶσιν, ἕκαστον Τμῆμα τῆς Κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ἑκάστῳ τμήματι τῆς Σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἔσεται ἴσον.

Μέρος Α'. Ἐπεὶ γὰρ ἡ τοῦ Κυλίνδρου πλευρὰ ηπ ἴση ἐστὶ τῇ τῆς βάσεως διαμέτρῳ πσ (11), ἔσεται ἡ Κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ησ τετραπλασία τῆς βά-

(1) Κ. τοῦ παρόντος. (2) ΚΓ. τοῦ παρόντος. (3) Β. τοῦ παρόντος. (4) ΛΓ. τοῦ γ'. (5) Πορισμ. Η'. τῆς Β. τοῦ ιβ'. (6) Δῆλον ἐκ τῆς ΚΔ. τοῦ παρόντος. (7) Δῆλον ἐκ τοῦ πρώτου μέρους τῆς παρούσης. (8) Πορισμ. Β'. τῆς Η. τοῦ ς'. (9) ΙΖ. τοῦ ς'. (10) ΜΖ. τοῦ α'. (11) Ἐξ ὑποθέσεως.

σεως (1), τȣ̃τ' ἔϛι τȣ̃ μεγίϛȣ Κύκλου τῶν ἐν τῇ Σφαίρᾳ τῇ εἰς τὸν Κύλινδρον ἐγγεγραμμένη. Τετραπλασία δὲ τῆς τȣ́τȣ ἐπιφανείας ἐϛὶ καὶ ἡ τῆς Σφαίρας ἐπιφάνεια (2)· ἡ ἐπιφάνεια ἄρα τȣ̃ Κυλίνδρȣ ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς Σφαίρας. Ὅ ἔδει δεῖξαι.

Μέρος Β'. Ἤχθωσαν εὐθεῖαι αἱ βο, οθ. Ἐπεὶ ἡ γωνία βοθ ἐϛὶν ὀρθὴ ἐν Ἡμικυκλίῳ (3), ϗ ἡ ογ κάθετος ἐπὶ τὴν βο· ἡ ἄρα βο μέση ἐϛὶν ἀνάλογον τῆς βθ, ϗ βγ (4), τȣ̃τ' ἔϛι τῆς ιτ, ϗ τῆς ηι. Ὁ Κύκλος ἄρα, ὁ ἀπὸ ἀκτῖνος τῆς βο, ἴσος ἔϛαι, τῇ Κυλινδρικῇ ἐπιφανείᾳ ητ (5)· ἔϛι δὲ ἴσος ϗ τῷ τμήματι τῆς Σφαιρικῆς ἐπιφανείας οβκ (6)· ἡ Κυλινδρικὴ ἄρα ἐπιφάνεια ητ, ἴση τῇ Σφαιρικῇ βοκ.

Ἐπεὶ δὲ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ταῦτα ϗ ἡ Κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ηχ ἐϛὶν ἴση τῇ Σφαιρικῇ ξβρ· ϗ λοιπὴ ἄρα ἡ Κυλινδρικὴ ιχ λοιπῇ τῇ Σφαιρικῇ ξοκρ, τῇ μεταξὺ δύω παραλλήλων Κύκλων ἴση ἔϛαι. Καὶ τὸ αὐτὸ δειχθήσεται περὶ πάντων τῶν Τμημάτων.

Πόρισμα. Ἐντεῦθεν δῆλον, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια Κυλίνδρȣ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένȣ, διπλασία ἐϛὶ τῆς βάσεως.

Πρότασις ΚΖ'.

Τὰ Σφαιρικῆς ἐπιφανείας Κύκλοις παραλλήλοις τετμημένης τμήματα, λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα, ὃν τὰ τμήματα τῆς διαμέτρȣ (βγ, γδ, δα, αε, εζ, ζθ), πρὸς τȣ̀ς Κύκλȣς τȣ̀ς παραλλήλȣς ταῖς εὐθείαις. σ. 42.

Ἕπεται ἐκ τȣ̃ προηγȣμένȣ. Τὰ γὰρ τῆς Σφαιρικῆς ἐπιφανείας τμήματα οβκ, ξοκρ, μξβν κτ., ἴσα ἐϛὶ τοῖς Κυλινδρικοῖς ητ, ιχ, λν κτ. (7). Ἀλλὰ ταῦτα λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα, ὃν τὰ τȣ̃ Ἄξονος τμήματα βγ, γδ, δα (8)· κἀκεῖνα ἄρα. Ὅ ἔδει δεῖξαι.

Σχόλιον.

Ἐντεῦθεν γινώσκεται ὁ τῶν Ζωνῶν, ϗ Κλιμάτων πρὸς ἄλληλα λόγος. Ἔχει γὰρ πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ τȣ̃ Ἄξοντος τμήματα, ἅπερ γινώσκεται ἐκ τȣ̃ Πίνακος τῶν Ἡμιτόνων.

Ἐκ τῆς αὐτῆς δὲ ϗ ἡ τῶν τμημάτων τῆς Σφαιρικῆς ἐπιφανείας πορίζεται

---

(1) Πορισμ. τῆς *ΙΒ.* τȣ̃ παρόντος. (2) *ΚΔ.* τȣ̃ παρόντος. (3) *ΛΑ.* τȣ̃ *γ'.* (4) Πορισμ. *Β'.* τῆς *Η.* τȣ̃ *ϛ'.* (5) *ΙΔ.* τȣ̃ παρόντος. (6) *Ἐκ* τῆς προηγȣμένης. (7) *Ἐκ* τῆς προηγȣμένης. (8) *ΙΓ.* τȣ̃ *ιβ'.*

καταμέτρησις. Ἐπεὶ γὰρ ἐκ τοῦ Σχολίου τῆς ΚΔʹ., ἥτε ὅλη τῆς Σφαίρας γινώσκεται ἐπιφάνεια, καὶ ὁ τῶν τμημάτων πρὸς ἄλληλα λόγος, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ λόγῳ τῶν τοῦ Ἄξονος τμημάτων· φανερὸν ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν τμημάτων τῆς σφαίρας γνωσθήσεται.

Ἰστέον δ' ἔτι ὡς τὰ τέτταρα προηγούμενα Θεωρήματα, καὶ πάντα τὰ ἑπόμενα, ἐξαίσιά τε ἐστὶ, καὶ θαυμάσια, καὶ οὐκ ἂν εἴποις ὅσην σπουδὴν εἰς τὴν τούτων κατάληψιν καταβλητέον ἐστὶ τοὺς Γεωμετροῦντας.

Λῆμμα εἰς τὴν ἑξῆς.

§. 43. Ἐὰν Ἐπίπεδον (τὸ ξν) Σφαίρας ἐφάπτηται κατὰ τὸ ο, ἡ ἀπὸ τοῦ Κέντρου τῆς Σφαίρας ἐπὶ τὴν ἀφὴν ἀγομένη εὐθεῖα (αο), κάθετος ἐστὶ τῷ ἐφαπτομένῳ Ἐπιπέδῳ.

Τετμήσθωσαν τό,τε ἐπιψαῦον Ἐπίπεδον, καὶ ἡ Σφαῖρα διά τε τοῦ Κέντρου α, καὶ τοῦ τῆς ἀφῆς σημείου ο δυσὶν Ἐπιπέδοις (ὧν τομὴ ἔσται ἡ αο), ἅτινα ἐν μὲν τῇ Σφαίρᾳ Κύκλους ἀπογεννῶσι τοὺς οθ, οδ, ἐν δὲ τῷ Ἐπιπέδῳ νξ εὐθείας τὰς γο, ιο, αἵτινες τῶν Κύκλων κατὰ τὸ σημεῖον ο συνεφάψονται (1). Ἡ ἄρα αο κάθετος ἐστὶν ἑκατέρᾳ τῶν ιο, γο (2)· ἑπομένως δὲ καὶ τῷ Ἐπιπέδῳ νξ (3). Ὃ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα. Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι Σφαῖρα ἐπ' ἀκριβὲς λεία ἐν Ἐπιπέδῳ ὁριζοντείῳ ἐπ' ἀκριβὲς λείῳ τῷ νξ τῆς Γῆς κατὰ τὸ ο ἐπιψαύοντι τεθεῖσα, οὐ στήσεται, εἰμὴ κατὰ τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς ο γενομένη. Οἷον ἐὰν Σφαῖρα ἐν τῷ σημείῳ ι τεθῇ, αὕτη δὴ διά τε τὴν αὐτῆς βαρύτητα, καὶ τὴν τοῦ Ἐπιπέδου ἐπίκλισιν ἐπὶ τὸ σημεῖον ο γενήσεται. Ἀχθείσης γὰρ τῆς αι, ἡ τὴν ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ Τριγώνῳ αοι ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσα πλευρὰ αι, μείζων ἐστὶ τῆς πλευρᾶς αο (4) Διάτοι τοῦτο ἡ Σφαῖρα μᾶλλον ἀφέστηκε τοῦ Κέντρου ἐν τῷ ι οὖσα, ἤπερ ἐν τῷ ο. Οὐκ ἄρα στήσεται ἐν τῷ ι, ἀλλὰ καταβήσεται ἐπὶ τὸ ο. Ἄλλως γὰρ οὐκ ἂν ἔχοιμεν ἀποδεῖξαι τὴν τῶν ῥευστῶν κατάβασιν, οὔτε μὴν τὴν εἰς σφαιροειδῆ ἐπιφάνειαν αὐτῶν διαμόρφωσιν.

Λῆμμα εἰς τὴν Γʹ. συνέπειαν τοῦ ἑπομένου Σχολίου. Ἔστωσαν ο, π, ξ, τριῶν Κύκλων περιφέρειαι, καὶ ρ, σ, τ, τούτων ἡμιδιάμετροι· καὶ κείσθω $\rho - \sigma = \tau$· ἔσεται δὴ $o - \pi = \xi$.

Ἐστι γὰρ $o : \pi :: \rho : \sigma$ (5)· καὶ $\pi : \xi :: \sigma : \tau$· ἄρα $o - \pi : \xi :: \rho - \sigma : \tau$ (6). Ἀλλὰ $\rho - \sigma = \tau$, ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα καὶ $o - \pi = \xi$ (7).

(1) Ὁρισμ. Β. τοῦ γʹ. (2) ΙΗ. τοῦ γʹ. (3) Δ. τοῦ ιαʹ. (4) ΙΘʹ. καὶ Πορισμ. Εʹ. τῆς ΛΒ. τοῦ αʹ. (5) Ζ. τοῦ παρόντος. (6) Πορισμ. Βʹ. τῆς ΚΒ. τοῦ εʹ. (7) Ὁρισμ. Ε. τοῦ εʹ.

Πρότασις ΚΗ'.

Πᾶσα Σφαῖρα ἴση ἐςὶ Κώνῳ (τῷ φο), ὗ τὸ μὲν ὕψος (κο) ἴσον ἐςὶ τῇ Ἡμιδιαμέτρῳ τῆς Σφαίρας· ἡ δὲ βάσις (φ) ἴση τῇ τῆς Σφαίρας ἐπιφανείᾳ. κ.44 45.46

Νοείσθω περὶ τὴν Σφαῖραν σώματι πολύεδρον περιγεγραμμένον, ὗ τὰς ςερεὰς γωνίας Ἐπίπεδα ἕτερα τῆς Σφαίρας ἐπιψάυοντα ἀποτεμνέτω· οὗ γενομένε, σῶμα ἕτερον πολύεδρον περιλαμβάνον τὴν Σφαῖραν ἀπογεννήσεται τε προτέρε ἔλατσον, ἐκ πλειόνων τε γωνιῶν συνιςάμενον ϗ ἐπιφάνειαν ἔχον ἐκ πλειόνων ϗ ἐλασσόνων Ἐπιπέδων τῆς Σφαίρας ἐπιψαυόντων συγκειμένην. Ἐὰν δὲ τε πολυέδρε τέτε αἱ ςερεαὶ γωνίαι Ἐπιπέδοις ἑτέροις ἐπιψάυεσι τῆς Σφαίρας ἄυθις ἀποτμηθῶσιν, ϗ τε ἐντεῦθεν ἀπογεγεννημένε πολυέδρε αἱ γωνίαι ὁμοίως ἀποτμηθῶσιν, ϗ ὅτως ἐπ' ἄπειρον· γενήσεται τέως, ὥςε τὸ μὲν πολύεδρον ὑπερέχειν τῆς Σφαίρας ςερεῷ παντὸς δοθέντος ἀλάσσονι· τὴν δὲ τέτε ἐπιφάνειαν τὴν ἐξ Ἐπιπέδων ἐπιψαυόντων ἀπείρων, ϗ ἐλασσόνων ϗ δὴ ϗ πλειόνων (ὡς εἶπον) συγκειμένην, ὑπερέχειν ὡσάυτως τῆς Σφαιρικῆς ἐπιφανείας Ἐπιπέδῳ παντὸς δοθέντος ἀλάσσονι. Ὅπερ ἔχει μὲν ἑκάτερον ἀποδειχθῆναι, διὰ τὸ εἶναι δὲ καθ' ἑαυτὸ πρόδηλον, αἰτείσθω τέως συντομίας χάριν. Τέτων δ' ὅτω κατασκευαθέντων, τὸ Θεώρημα συντεθήσεται τῆτον τὸν τρόπον.

Τὸ ἤδη ἐκκείμενον πολύεδρον ἐκ Πυραμίδων σύγκειται, ὧν κορυφὴ μὲν κοινὴ τὸ Κέντρον ἐςὶ τῆς Σφαίρας· βάσεις δὲ τὰ ἐπιψάυοντα Ἐπίπεδα, ἐξ ὧν ἡ τε πολυέδρε σύγκειται ἐπιφάνεια. ϗ ἐπεὶ αἱ ἀπὸ τε Κέντρε α ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν ἑκάςε Ἐπιπέδε ἠγμέναι εὐθεῖαι κάθετοί εἰσιν ἑκάςῳ Ἐπιπέδῳ (1), δῆλον ὅτι πᾶσαι αἱ Πυραμίδες, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ πολύεδρον, ἴσον ἕξουσιν ὕψος, αὐτὴν δηλονότι τὴν αβ, ἥτίς ἐςι τῆς Σφαίρας ἡμιδιάμετρος. Ἐὰν ἄρα ἤδη τεθῇ Ἐπίπεδον τὸ Χ τῇ τε πολυέδρε ἐπιφανείᾳ ἴσον, ϗ ἐπ' αὐτε Πυραμὶς ἀνεςαμένη ὀρθὴ, ὕψος ἔχεσα τὴν εὐθεῖαν μν ἴσην τῇ τῆς Σφαίρας ἡμιδιαμέτρῳ αβ· φανερὸν ὅτι πᾶσαι αἱ εἰρημέναι Πυραμίδες, τετ' ἔςιν ὅλον τὸ πολύεδρον ἴσον ἔςαι τῇ Πυραμίδι νΧ (2). Καὶ τῷ αὐτῷ τρόπῳ δείκνυται ὅτι πάντα τὰ τὴν Σφαῖραν περιλάμβανοντα λοιπὰ πολύεδρα, τὰ ἐκ τῆς ἀποτμήσεως τῶν ςερεῶν γωνιῶν ἄλλα ἐπ' ἄλλοις εἰς ἄπειρον ἀπογεννώμενα, ἔσονται ἀεὶ ἴσα ταῖς Πυραμίσι (νΧ), ὧν τὸ μὲν ὕψος (μν) ἴσον τῇ τῆς Σφαίρας ἡμιδιαμέτρῳ· ἡ δὲ βάσις (Χ) ἴση ταῖς ἐπιφανείαις τῶν τὴν Σφαῖραν περιλαμ-

(1) Προηγ. Λῆμμα. (2) Δῆλον ἐκ τῆς δείξεως τῆς ς'. τε ιβ'.

βανόντων πολυέδρων. Ἐπεὶ δὲ τὰ μὲν πολύεδρα ἀπολήγει τέως εἰς τὴν Σφαῖραν, ὡς ἀνωτέρω εἶπον, αἱ δὲ Πυραμίδες (νΧ) ἀποτελευτῶσιν, ὡς μικρῷ ὕϛερον δειχθήσεται, εἰς τὸν Κῶνον. Ἡ Σφαῖρα (1) ἄρα ἴση ἔϛαι τῷ Κώνῳ. Ὅ ἔδει δεῖξαι.

Ὅτι δὲ αἱ Πυραμίδες νΧ (2) ἀποτελευτῶσιν εἰς Κῶνον, δειχθήσεται ὕτως. Αἱ τῶν πολυέδρων ἐπιφάνειαι ἀπολήγȣσιν εἰς τὴν τῆς Σφαίρας ἐπιφάνειαν, ὡς ἤτηται ἀνωτέρω. Ἐπεὶ δὲ αἱ βάσεις Χ τῶν Πυραμίδων νΧ ὑπόκεινται ἀεὶ ταῖς ἐπιφανείαις τῶν πολυέδρων ἶσαι· ἡ δὲ βάσις φ τȣ̃ Κώνȣ φο ἐϛὶν ἐξ ὑποθέσεως ἴση τῇ τῆς Σφαίρας ἐπιφανείᾳ· ἄρα ϗ αἱ βάσεις Χ ἀπολήξȣσιν εἰς τὴν βάσιν φ· ϗ ἑπομένως, ὡς αἱ Πυραμίδες νΧ πρὸς τὸν ἐξ ὑποθέσεως ἰσοϋψῆ Κῶνον, ȣ̔́τως ἡ βάσις Χ πρὸς τὴν βάσιν φ (3)· αἱ Πυραμίδες ἄρα εἰς τὸν Κῶνον ἀπολήξȣσιν.

Ἡ ἐκτεθειμένη ἡμῖν ἀπόδειξις τῆς τε παρȣ́σης, ϗ τῆς ἑπομένης προτάσεως πολύ τι διενήνοχε τῆς τȣ̃ Ἀρχιμήδȣς, ἥτις καίτοι πολλήν τινα ὀξύτητα τȣ̃ ἀνδρὸς ἐμφαίνȣσα ϗ ἐπίνοιαν· ἔϛιν ὅμως σχοινοτενής τις καὶ δυσχερεϛάτη· παραλαμβάνεται γὰρ ἐν αὐτῇ δύω τινὰ ὡς ὁμολογȣ́μενα, ϗ προτάσεις ἕνδεκα ϗ πολλαὶ ἄλλαι, ὧν ἐκεῖναι ἐξήρτηνται. Αὐτὸ δὲ τὸ Θεώρημα ȣ̔́τω προτίθησιν Ἀρχιμήδης. Πᾶσα Σφαῖρα τετραπλασία ἐϛὶ Κώνȣ, βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίϛῳ Κύκλῳ τῶν ἐν τῇ Σφαίρᾳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τȣ̃ Κέντρȣ τῆς Σφαίρας.

Πόρισμα. Ἐντεῦθεν δῆλον ὅτι τὸ Ἡμισφαίριον διπλάσιόν ἐϛι Κώνȣ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίϛῳ Κύκλῳ τῶν ἐν τῇ Σφαίρᾳ· ὕψος δὲ τὴν ἐκ τȣ̃ Κέντρȣ αὐτῆς τῆς Σφαίρας.

Τὸ Πόρισμα τόδε εἰς τὴν Λʹ. προβάλλεται ὁ Τακȣέτιος. Ἀλλʼ εἰς τὴν τȣ́τȣ δεῖξιν λαμβάνει τȣ̃ θʹ ὅπερ μόλις ἐϛὶ ϗ αὐτῆς τῆς Προτάσεως σαφέϛερον. Ὅτι δηλαδὴ τὸ Ἡμισφαίριον ἴσον ἐϛὶ Κώνῳ ἔχοντι, ὕψος μὲν τὴν ἐκ τȣ̃ Κέντρȣ τῆς Σφαίρας, βάσιν δὲ Κύκλον τῇ ἐπιφανείᾳ τȣ̃ Ἡμισφαιρίȣ ἴσον. Ὃ δὴ ϗ αὐτὸ εὐκόλως, ϗ αὐτὴ δὴ αὕτη ἡ Λʹ. ȣ̓χ ἧττον, ἐξ αὐτῆς τῆς ΚΗʹ. συνάγεται. Δέον ȣ̓̃ν ἢ τὴν Λʹ. ἐνταῦθα μετακομίσαντας εἰς Πόρισμα μεταβαλεῖν τὸ προειρημένον, ἢ γȣ̃ν τῆς Προτάσεως κατὰ χώραν μενȣ́σης, τὴν ἀπόδειξιν ἑτεροίως μεταρυθμίσαι.

Σχόλιον.

Ἐκ τȣ̃ ἐξαιρέτȣ τȣ̃δε Θεωρήματος ἢ τȣ̃ ἐν τοῖς ϛερεοῖς εὐγενεϛάτȣ Σχή-

(1) Δ. τȣ̃ παρόντος. (2) Ὁρισμ. ϛʹ. τοῦ ιβʹ. (3)

ματος πορίζεται καταμέτρησις. Ἐὰν γὰρ τὸ ἑκτημόριον τῆς διαμέτρȣ, ἢ τὸ τριτημόριον τῆς Ἡμιδιαμέτρȣ διὰ τῆς κατὰ τὴν Σφαῖραν ἐπιφανείας, γινωσκομένης ἤδη ἐκ τȣ̃ Σχολίȣ τῆς ΚΔʹ. πολλαπλασιαθῇ, προκύπτει τὸ τῆς Σφαίρας ςερεόν. Οἷον εἰ εὑρεθείη ἡ μὲν τῆς κατὰ γῆν Σφαίρας ἐπιφάνεια Τετραγωνικὰ μίλλια ὡρικὰ περιέχȣσα 23,760000· ἡ δὲ Ἡμιδιάμετρος μιλλίων ȣ̃σα ὡρικῶν 1375, ȣ̃ τὸ τριτημόριον ἐςὶ 458 $\frac{1}{3}$. Τȣ̃το δὴ πολλαπλασιαθὲν, ἀμεληθέντος τȣ̃ Κλάσματος, διὰ 23,760000, δώσει Κυβικὰ τετραγωνικὰ μίλλια ὡρικὰ 10882,080000 εἰς τὸ τῆς γηΐνης Σφαίρας ςερεόν. (Περὶ δὲ τῶν ἀριθμῶν τȣ́των ὅρα τὰ ἐν τῷ μετὰ τὴν ςʹ. τȣ̃ παρόντος σημειωθέντα Σχολίῳ).

Ἐπεὶ γὰρ ἡ Σφαῖρα ἴση ἐςὶ Κώνῳ, ȣ̃ ὕψος μὲν ἡ ἐκ τȣ̃ Κέντρȣ τῆς Σφαίρας, βάσις δὲ ἡ τῆς Σφαίρας αὐτῆς ἐπιφάνεια (1), τὸ δὲ τȣ̃ Κώνȣ ςερεὸν προκύπτει ἐκ τȣ̃ τριτημορίȣ τȣ̃ ὕψȣς, τȣ̃τ᾽ ἔςι τῆς κατὰ τὴν Σφαῖραν ἡμιδιαμέτρȣ (2), πολλαπλασιαζομένȣ διὰ τῆς βάσεως, τȣ̃τ᾽ ἔςι διὰ τῆς κατὰ τὴν Σφαῖραν ἐπιφανείας· καὶ τὸ τῆς Σφαίρας ἄρα ςερεὸν προκύψει ἐκ τȣ̃ τριτημορίȣ τῆς Ἡμιδιαμέτρȣ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν πολλαπλασιαζομένȣ.

Δοθεισῶν δὲ τῆς διαμέτρȣ καὶ τῆς περιφερείας, εὑρεθήσεται τὸ τῆς Σφαίρας ςερεὸν, ἐὰν τὸ ἑκτημόριον τῆς περιφερείας ἐπὶ τὸ Τετράγωνον τῆς διαμέτρȣ πολλαπλασιαθῇ. Ἢ, ἄλλως, ἐὰν τὸ Τετράγωνον τῆς διαμέτρȣ διαιρεθῇ διὰ 6· τὸ δὲ πηλίκον διὰ τῆς περιφερείας πολλαπλασιαθῇ· τὸ αὐτὸ γὰρ καὶ ȣ̃τω προκύψει γινόμενον, ὡς εἴπερ ἐπολλαπλασιάζετο τὸ τῆς διαμέτρȣ ἑκτημόριον ἐπὶ τὴν τῆς Σφαίρας περιφέρειαν.

Πρότασις ΚΘʹ.

Παντὶ τομεῖ Σφαίρας ἴσος ἐςὶ Κῶνος, ὁ ὕψος μὲν ἔχων ἴσον τῇ ἐκ τȣ̃ Κέντρȣ τῆς Σφαίρας· βάσιν δὲ ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τȣ̃ σφαιρικȣ̃ Τομέως.

Ἔςω πρῶτον τομεὺς Ἡμισφαιρίȣ ἐλάσσων (ὁ αεγϑ). Περὶ δὲ τὸν Τομέα νοείσθω σῶμα πολύεδρον εὐθύγραμμον περιγεγραμμένον. Ἐὰν ȣ̃ν ὁ λοιπὸς ἅπας συλλογισμὸς ὁμοίως τοῖς προηγȣμένοις διατεθῇ, τῷ αὐτῷ τρόπῳ συντεθήσεται, ἢ συναχθήσεται τὸ ζητȣ́μενον· δεικτέον δὲ τȣ̃το μόνον, ἐξ ȣ̃ ἅπας ὁ τῆς δείξεως ἤρτηται λόγος, ὅτι ἡ τȣ̃ πολυέδρȣ ἐπιφάνεια, ἡ ἐξ Ἐπιπέδων πανταχόθεν τῆς Σφαιρικῆς ἐπιφανείας εγϑ ἐπιψαυόντων συγκειμένη, μείζων ἐςὶ τῆς ἐπιφανείας εγϑ· ὅπερ ȣ̃τω γενήσεται. Νενοήσθω τῇ ἐπιφανείᾳ εγϑ προσεθῆσθαι ἑτέρα ἴση καὶ ὁμοία, ὑπὸ Ἐπιπέδων ἐπιψαυόντων ὁμοίως τοῖς σχ. 47.

(1) ΚΗ. τοῦ παρόντος. (2) ς. τοῦ παρόντος σελ. 342.

πρότερον περιλαμβανομένη· ἔσεται δὴ ὅλη ἡ ἐκ τῶν Ἐπιπέδων συγκειμένη ἐπιφάνεια, τῆς Σφαιρικῆς ὅλης μείζων (1)· καὶ ἡ ἡμίσεια ἄρα τῆς ἐκ τῶν Ἐπιπέδων συγκειμένης, μείζων ἔσαι τῆς ἡμισείας τῆς Σφαιρικῆς εγϑ.

Ἔςω δεύτερον τομεὺς μείζων Ἡμισφαιρίȣ ὁ αεβϑ. Συναμφότερος ἄρα ὁ Τομεὺς ἴσος ἐςὶ Κώνῳ, ȣ̃ ὕψος μὲν ἡ τῆς Σφαίρας ἡμιδιάμετρος· βάσις δὲ ὅλη ἡ ἐπιφάνεια (2)· τȣτ' ἔςι δυσὶ Κώνοις, ὧν τὸ μὲν ὕψος ταὐτὸν, βάσεις δὲ ἴσαι τοῖς τῆς Σφαιρικῆς ἐπιφανείας τμήμασιν εγϑ, εβϑ. Ἀλλ' ὁ εἷς τῶν Τομέων, ὅς ἐςιν ἐλάσσων Ἡμισφαιρίȣ, τȣτ' ἔςιν ὁ αεγϑ, ἴσος ἐςὶ, διὰ τὸ πρῶτον μέρος τῆς δείξεως, Κώνῳ, ȣ̃ ὕψος μὲν ἡ τῆς Σφαίρας ἡμιδιάμετρος· βάσις δὲ ἡ ἐπιφάνεια εγϑ· ὁ ἕτερος ἄρα αεβϑ ἴσος ἐςὶ τῷ λοιπῷ Κώνῳ, οὗ ὕψος μὲν ἡ Ἡμιδιάμετρος· βάσις δὲ ἡ λοιπὴ ἐπιφάνεια εβϑ. Ὃ ἔδει δεῖξαι.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ἐπεὶ ἡ μὲν ἐπιφάνεια εγϑ ἴση ἐςὶ Κύκλῳ, ȣ̃ ἀκτὶς ἡ γϑ (3)· ἡ δὲ εβϑ ἴση Κύκλῳ, ȣ̃ ἀκτὶς ἡ βϑ· ἔσονται ἄρα οἱ Τομεῖς αεγϑ, αεβϑ ἴσοι Κώνοις, ὧν ὕψος μὲν ἡ τῆς Σφαίρας ἡμιδιάμετρος· βάσεις δὲ Κύκλοι, ὧν ἡμιδιάμετροι αἱ γϑ, βϑ.

Σ χ ό λ ι ο ν.

κ. 47. Ἐντεῦϑεν πορίζεται ἥτε τῶν Τομέων καὶ ἡ τῶν τμημάτων τῆς Σφαίρας καταμέτρησις· τῶν μὲν τομέων ἐὰν (2) τὸ τριτημόριον τῆς Ἡμιδιαμέτρȣ πολλαπλασιαϑῇ διὰ τῆς Σφαιρικῆς ἐπιφανείας τῶν Τομέων, γινωσκομένης ἤδη ἐκ τῆς ΚΖ (ἢ ἐκ τȣ̃ Πορίσματος τῆς ΚΕ), ἢ διὰ τȣ̃ Κύκλȣ, ȣ̃ ἀκτὶς ἡ γϑ, ἢ βϑ. Τῶν δὲ τμημάτων, ἐὰν μετρηϑῇ ὁ Κῶνος εαϑ, καὶ ἀφαιρεϑῇ μὲν τȣ̃ Τομέως, εἴπερ ἐλάσσων ἐςὶν Ἡμισφαιρίȣ, προςεϑῇ δὲ αὐτῷ μείζονι ὄντι Ἡμισφαιρίȣ.

κ. 42. Τὸ δὲ μεταξὺ δύω κύκλων παραλλήλων ἢ μὴ παραλλήλων ἐναπολαμβανόμενον Τμῆμα μέχρι μετρηϑήσεται, ἐὰν τὰ τμήματα ξβρ, μβν γνωσϑέντα ἤδη, ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρεϑῇ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Λ΄.

κ. 48. Τὸ Ἡμισφαίριον (εοβδ) διπλάσιόν ἐςι Κώνȣ (τȣ̃ εβδ) ἔχοντος βάσιν καὶ ὕψος ταὐτὰ τῷ Ἡμισφαιρίῳ.

(1) Ἀξίωμ. *Γ.* τοῦ παρόντος. (2) *ΚΗ.* τοῦ παρόντος. (3) *ΚΕ.* τοῦ παρόντος. (4) Δῆλον ἐκ τȣ̃ Σχολ. τῆς 6.

Ὁ Κῶνος γὰρ ὁ ἔχων βάσιν μὲν ἴσην τῇ τȣ̃ Ἡμισφαιρίȣ ἐπιφανείᾳ εοβδ· ὕψος δὲ ἴσον τῇ Ἡμιδιαμέτρῳ αβ, ἐςὶ πρὸς Κῶνον τὸν εβδ, ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν (1)· τȣτ᾽ ἔςιν ὡς ἡ τȣ̃ Ἡμισφαιρίȣ ἐπιφάνεια εοβδ, πρὸς τὸν μέγιςον Κύκλον πτ. Ἐπεὶ ȣ̃ν ἡ τȣ̃ Ἡμισφαιρίȣ ἐπιφάνεια εοβθ, διπλασία ἐςὶ τȣ̃ μεγίςȣ Κύκλȣ (2)· ἄρα ϗ ὁ Κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὴν ἐπιφάνειαν εοβδ, ὕψος δὲ τὴν Ἡμιδιάμετρον αβ, διπλάσιός ἐςι τȣ̃ Κώνȣ εβδ. Ἀλλὰ τὸ Ἡμισφαίριον ἐςὶν ἴσον Κώνῳ, ȣ̃ ὕψος μὲν ἡ τῆς Σφαίρας ἡμιδιάμετρος· βάσις δὲ ἡ Ἡμισφαιρικὴ ἐπιφάνεια εοβδ (3), διπλάσιον ἄρα τὸ Ἡμισφαίριον τȣ̃ Κώνȣ εοδ. Ὅ ἔδει δεῖξαι.

Καὶ ἄλλως. Ἐπεὶ οἱ ἰσοϋψεῖς Κῶνοι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλȣς, ὡς αἱ βάσεις (4), ἔσεται δὴ ὁ Κῶνος, ȣ̃ ὕψος μὲν ἡ τῆς Σφαίρας ἡμιδιάμετρος, βάσις δὲ ἴση τῇ τῆς Σφαίρας ἐπιφανείᾳ, πρὸς τὸν Κῶνον, ȣ̃ ὕψος μὲν τὸ αὐτὸ, βάσις δὲ ἴση τῷ μεγίςῳ Κύκλῳ τῶν ἐν τῇ Σφαίρᾳ, ὡς 4 πρὸς 1 (5). Ἐπεὶ δὲ ὁ πρότερος Κῶνος ἐςὶν ἴσος τῇ Σφαίρᾳ (6), ἡ Σφαῖρα ἄρα πρὸς τὸν ὕςερον Κῶνον ἔςαι ὡς 4 πρὸς 1. Τὸ ἄρα Ἡμισφαίριον πρὸς τὸν ὕςερον Κῶνον ἐςὶν ὡς 2 πρὸς 1· ἀλλ᾽ ὁ ὕςερος Κῶνος ἔχει ταυτὰ ϗ ὕψος ϗ βάσιν τῷ Ἡμισφαιρίῳ· τὸ Ἡμισφαίριον ἄρα διπλάσιόν ἐςι Κώνȣ ἔχοντος, τό,τε ὕψος ϗ τὴν βάσιν ταυτὰ τῷ Ἡμισφαιρίῳ.

Πόρισμα. Κῶνος ὁ εβδ, ϗ ἡμισφαίριον τὸ εοβδ, ϗ Κύλινδρος ὁ εκ, ὧν ὕψος ϗ βάσις κοινὰ, εἰσὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς 1, 2, 3. Ἔςι γὰρ ὁ Κῶνος πρὸς μὲν τὸ Ἡμισφαίριον, ὡς 1 πρὸς 2 (διὰ τὴν παρȣ̃σαν)· πρὸς δὲ τὸν Κύλινδρον, ὡς 1 πρὸς 3 (διὰ τὴν Ι΄. τȣ̃ ΙΒ΄.)

Πρότασιν ΛΑ΄.

Ἐὰν Σφαῖρα ἐπιπέδῳ τῷ ιξθτ μὴ διϊόντι μὲν διὰ τȣ̃ Κέντρȣ α, τέμνοντι δὲ πρὸς ὀρθὰς τὴν διάμετρον βοκ, εἰς δύω Τμήματα τὰ ιλβη, ισκθ, ȣ̃τω τμηθῇ, ὥςε γενέθαι ὡς τὸ ὕψος οβ τȣ̃ Τμήματος ιλβθ, πρὸς τὴν τῆς σφαίρας Ἡμιδιάμετρον αβ, ȣ̃τω τὸ ὕψος οκ τȣ̃ ἑτέρȣ Τμήματος ισκθ, πρὸς ἑτέραν τὴν κν· ὡς δὲ τὸ ὕψος οκ τȣ̃ Τμήματος ισκζ, πρὸς τὴν Ἡμιδιάμετρον ακ, ἢ αβ, ȣ̃τω τὸ ὕψος βο τȣ̃ ἑτέρȣ Τμήματος ιλβθ, πρὸς ἑτέραν τὴν βδ. Λέγω σχ. 52.

Α΄. Ὅτι οἱ Κῶνοι ινθ, ιδθ, ὧν ὕψη μὲν αἱ ον, οδ· βάσις δὲ κοινὴ ὁ Κύκλος ιξθτ, ἴσοι ἔσονται τοῖς Σφαιρικοῖς τμήμασι.

---

(1) *ΙΑ.* τȣ̃ *ι΄.* (2) *ΚΔ.* τȣ̃ παρόντος. (3) Ἕπεται ἐκ τῆς *ΚΗ.* τȣ̃ παρόντος. (4) *ΙΑ.* τȣ̃ *ιβ΄.* (5) *ΚΔ.* τȣ̃ παρόντος. (6) *ΚΗ.* τȣ̃ παρόντος.

Β'. Ὅτι τὰ Τμήματα λόγον ἕξει τὸν αὐτὸν, ὃν αἱ εὐθεῖαι δο, νο.

Γ'. Ὅτι τὸ Τμῆμα ισκθ ἔςαι πρὸς τὸν εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένον μέγιςον Κῶνον ικθ, ὡς ἡ νο πρὸς τὴν κο. Τό,τε ἕτερον Τμῆμα ιλβθ, πρὸς τὸν εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένον μέγιςον Κῶνον ιβθ, ὡς ἡ δο πρὸς τὴν βο.

Μέρος Α'. Τετμήσθωσαν ἥ τε Σφαῖρα ϗ οἱ Κῶνοι ἐπιπέδῳ, διὰ τῆς Διαμέτρȣ βκ· καὶ γεγεννήσθωσαν ἐν μὲν τῇ σφαίρᾳ Κύκλος μέγιςος ὁ βλκθ· ἐν δὲ τοῖς Κώνοις Τρίγωνα τὰ βιθ, ικθ. Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐςιν ἐξ ὑποθέσεως ἡ Διάμετρος βοκ ἐπὶ τὸν Κύκλον ξτ, ἡ γωνία ιοβ ἔςαι ὀρθή (1). Ὀρθὴ δὲ ϗ ἡ ἐν τῷ Ἡμικυκλίῳ ὑπὸ βικ (2)· ἄρα, ἐπεὶ ἐν τῷ Τριγώνῳ βικ, ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας κατήχθη κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν βκ ἡ εὐθεῖα ιο, ἔσεται δὴ ἡ ιβ πρὸς τὴν ιο, ὡς ἡ βκ πρὸς πρὸς τὴν κι (3). Ὁ διπλασίων ἄρα λόγος τῆς βι πρὸς τὴν ιο, ἴσος ἐςὶ τῷ διπλασίονι λόγῳ τῆς βκ πρὸς τὴν κι· τȣτ' ἔςιν (ἐπεὶ (4) αἱ βκ, κι, κο συνεχῶς ἀνάλογον) ἴσος τῷ λόγῳ τῆς βκ πρὸς τὴν κο.

Ἐπεὶ πάλιν ἐξ ὑποθέσεως ὡς ἡ οκ, πρὸς τὴν ἡμιδιάμετρον αβ, ȣ̔́τως ἡ οβ πρὸς τὴν βδ· ἔσεται δὴ ἀνάπαλιν μὲν ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν βο, ȣ̔́τως ἡ αβ πρὸς τὴν οκ· ἐναλλάσσοντι δὲ ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν αβ, ȣ̔́τως ἡ βο πρὸς τὴν βκ· ϗ συντιθέντι, ὡς ἡ δα πρὸς τὴν βα, ȣ̔́τως ἡ βκ πρὸς οκ. Ἀλλ' ἐπεὶ δέδεικται ὅτι ὁ λόγος τῆς βκ πρὸς τὴν οκ ἐςὶ διπλασίων, τȣ͂ τῆς βι πρὸς τὴν ιο, ϗ ἐπομένως ἴσος τῷ λόγῳ τῶν Κύκλων τῶν ἀκτῖσι ταῖς βι, ιο γραφομένων (5)· ἔσεται δὴ ἄρα ἡ δα πρὸς τὴν αβ, ὡς ὁ Κύκλος, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ βι, πρὸς τὸν Κύκλον, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ ιο· ϗ ὁ Κῶνος, ȣ͂ ὕψος μὲν ἡ δα, βάσις δὲ ὁ Κύκλος, ȣ͂ ἀκτὶς ἡ ιο, τȣτ' ἔςιν ὁ ξτ, ἴσος τῷ Κώνῳ, ȣ͂ ὕψος μὲν ἡ βα· βάσις δὲ ὁ ἀπὸ ἀκτῖνος τῆς βι Κύκλος (6), τȣτ' ἔςι τῷ Σφαιρικῷ τομεῖ αιβο (7). Κοινῇ δὲ προσκειμένȣ τȣ͂ Κώνȣ ιαθ, ἔσεται δὴ συναμφότερον ὅ,τε τομεὺς αιβθ ϗ ὁ προσκείμενος Κῶνος ιαθ, ἴσος συναμφοτέρῳ τῷ Κώνῳ· τȣτ' ἔςι τὸ σφαιρικὸν Τμῆμα ιλβθ ἴσον δυσὶ Κώνοις, ὧν ὁ μὲν, ἔχει βάσιν μὲν τὸν Κύκλον ξι, ὕψος δὲ τὴν εὐθεῖαν δα· ὁ δὲ, ὕψος μὲν τὴν οβ, βάσιν δὲ τὸν αὐτὸν Κύκλον ξτ. Ἀλλ' οἱ δύω ȣ̔͂τοι Κῶνοι συνιςῶσι τὸν Κῶνον ιδθ (8)· τὸ Σφαιρικὸν ἄρα Τμῆμα ιλβθ, ἴσον ἐςὶ τῷ Κώνῳ ιδθ. Ὃ ἔδει δεῖξαι.

Διὰ δὲ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται ὅτι ϗ τὸ σφαιρικὸν Τμῆμα ισκθ, ἴσον ἐςὶ

---

(1) Ὁρισμ. Γ. τȣ͂ ια'. (2) ΛΑ. τȣ͂ γ'. (3) Πόρισμ. Γ. τῆς Η. τȣ͂ ϛ'. (4) Πορισμ. Β'. τῆς Η. τȣ͂ ϛ'. (5) Πόρισμ. Β'. τῆς Β. τȣ͂ ιβ'. (6) ΙΕ. τοῦ ιβ'. (7) ΚΘ. τοῦ παρόντος. (8) Δείκνυται ἐκ τῆς ΙΔ. τȣ͂ ιβ'. ϗ τῆς ΚΔ. τȣ͂ ε'.

τῷ Κώνῳ ινθ· πλὴν ὅσον ὁ προσκείμενος ἐν τῷ προτέρῳ Κῶνος ιαθ, ἐνταῦθα ἐςὶν ἐφαιρετέος.

(Ἐπεὶ γάρ ἐςὶ κι : ιο : : κβ : βι (1)· ἔσεται δὴ ϗ $κι^2 : ιο^2 : : κβ^2 : βι^2$ (2) : : κβ : βι (3)· ἔςι δὲ ἐξ ὑποθέσεως νκ : αβ (= κα) : : κο : οβ· ϗ συντιθέντι να : ακ : : κβ : βο : : $κι^2 : ιο^2$ (4) : : Κύκλ., ȣ̃ ἀκτὶς κι : Κύκλ., ȣ̃ ἀκτὶς ιο (= Κύκλ. ξτ)· ἄρα ὁ Κῶνος, ȣ̃ ὕψος ἡ να, ϗ βάσις ὁ ξτ = Κώνῳ, ȣ̃ ὕψος ἡ ακ καὶ βάσις ὁ ἀπὸ ἀκτῖνος τῆς κι Κύκλος (5) = τῷ σφαιρικῷ Τομεῖ αικθ (6). Ἀλλ' ὁ Κῶνος, ȣ̃ ὕψος ἡ να ϗ βάσις ὁ ξτ, ἐςὶν ἴσος τοῖς δυσὶ Κώνοις ἅμα ληφθεῖσιν, ὧν ὁ μὲν ὕψος μὲν ἔχει τὴν νο, βάσιν δὲ τὸν Κύκλον ξτ· ὁ δὲ, ὕψος μεν τὴν οα βάσιν δὲ τὸν αὐτὸν ξτ (7), τȣτ' ἔςι τοῖς Κώνοις ινθ, ιαθ· ὁ δὲ σφαιρικὸς Τομεὺς αικθ, ἴσος ἐςὶ τῷ σφαιρικῷ Τμήματι ισκθ ϗ τῷ Κώνῳ ιαθ ἅμα ληφθεῖσιν· κοινῆ δὲ ἀρθέντος τȣ̃ Κώνου ιαθ, ὁ λοιπὸς Κῶνος ινθ = τῷ λοιπῷ σφαιρικῷ Τμήματι ισκθ. Ο. Ε. Δ.)

Τὸ Β'. Μέρος δῆλον ἐκ τȣ̃ Α'. Οἱ γάρτοι Κῶνοι ιδθ, ινθ εἰσὶ πρὸς ἀλλήλȣς, ὡς αἱ δο, νο (8), ἄρα ϗ τὰ ἴσα τοῖς Κώνοις Τμήματα ιλβθ, ισκθ λόγον ἔχȣσιν, ὃν αἱ δο, νο.

Δῆλον δὲ αὐτόθεν ϗ τὸ Γ'. Ὡς γὰρ ὁ Κῶνος ιδθ πρὸς τὸν ινθ, οὕτως ἡ δο πρὸς τὴν βο (9)· καὶ τὸ ἴσον ἄρα τῷ Κώνῳ ιδθ, Τμῆμα ιλβθ, ἐςὶ πρὸς τὸν Κῶνον ιβθ, ὡς ἡ δο πρὸς τὴν βο. Τῷ αὐτῷ δὲ τρόπῳ δειχθήσεται, ὅτι ϗ τὸ Τμῆμα ισκθ ἐςὶ πρὸς τὸν Κῶνον ικθ, ὡς ἡ νο πρὸς τὴν κο.

Σχόλιον.

Ἐκ τȣ̃ πρώτȣ μέρȣς τȣ̃ παρόντος Θεωρήματος πορίζεται, ϗ ἑτέρα ȣ̓χ ἧττον εὐμήχανος τῶν σφαιρικῶν Τμημάτων καταμέτρησις. Ἐὰν δελονότι οἱ Κῶνοι ιδθ, ινθ μετρηθῶσιν· ὅπερ γενήσεται ἐὰν τὸ τριτημόριον τῶν εὐθειῶν δο, νο ἐπὶ τὸν ξτ Κύκλον πολλαπλασιαθῇ (10).

Πρότασις ΛΒ'.

Πᾶς Κύλινδρος ὀρθὸς (θκ) ἡμιόλιός ἐςι τῆς Σφαίρας, περὶ ἣν περιγέγραπται· ἥτε ἐπιφάνεια αὐτȣ̃ μετὰ τῶν βάσεων ἡμιολία ἐςὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς Σφαίρας. χ. 48.

(1) Πόρισμ. Β'. τῆς Η. τȣ̃ ϛ'. (2) ΛΔ. τȣ̃ ε'. ϗ Σχόλ. τῆς Κ. τȣ̃ ϛ'. (3) Πόρισμ. Β'. τῆς Η. τȣ̃ ϛ'. (4) Πορ. Β'. τῆς Β. τȣ̃ ιβ'. (5) ΙΕ. τȣ̃ ιβ'. (6) ΚΘ. τȣ̃ παρόντος. (7) ΚΔ. τȣ̃ ε'. ϗ ΙΔ. τȣ̃ ιβ'. (8) Δ. τȣ̃ ιβ'. (9) Διὰ τὴν αὐτήν. (10) Ὅρα τὸ μετὰ τὴν ϛ'. Σχόλιον.

Ἔςω Ἄξων κοινὸς τῇτε σφαίρᾳ ϗ τῷ Κυλίνδρῳ ὁ βξ. Εἰς δὲ τὸ Ἡμισφαίριον εοβδ ἐγγεγράφθω Κῶνος μέγιςος ὁ εβδ. Καὶ ἐπεὶ ὁ μὲν Κύλινδρος εκ (ἥμισυς τȣ̃ ὅλȣ θκ) τριπλάσιός ἐςι τȣ̃ Κώνȣ εβδ (1). Τὸ δὲ Ἡμισφαίριον διπλάσιον τȣ̃ αὐτȣ̃ Κώνȣ (2), δῆλον ὅτι ὁ Κύλινδρος εκ ἐςὶ πρὸς τὸ Ἡμισφαίριον, ὡς 3 πρὸς 2· ἄρα ϗ ὅλος ὁ Κύλινδρος θκ ἐςὶ πρὸς ὅλην τὴν σφαῖραν ξεβδ, ὡς 3 πρὸς 2· ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον.

Ἐπεὶ δὲ πάλιν ἡ τȣ̃ Κυλίνδρȣ πλευρὰ κν, ἐςὶν ἴση τῇ τῆς βάσεως διαμέτρῳ θν· ἔσεται δὴ ἡ τȣ́τȣ ἐπιφάνεια χωρὶς μὲν τῶν βάσεων τετραπλασία (3), μετὰ δὲ τῶν βάσεων, τȣ̃τ' ἔςιν ὅλη ἡ τȣ̃ Κυλίνδρȣ ἐπιφάνεια ἑξαπλασία τῆς βάσεως μι, ἥτίς ἐςιν ἴση τῷ μεγίςῳ Κύκλῳ τῶν ἐν τῇ Σφαίρᾳ. Ἀλλ' ἡ τῆς Σφαίρας ἐπιφάνεια ἐςὶ τετραπλασία τȣ̃ μεγίςȣ κύκλȣ τῶν ἐν αὐτῇ· ἡ ὅλη ἄρα ἐπιφάνεια τȣ̃ Κυλίνδρȣ θκ, ἐςὶ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς Σφαίρας, ὡς 6 πρὸς 4, τȣ̃τ' ἔςιν ὡς 3 πρὸς 2· ὅπερ ἦν τὸ δεύτερον.

Ὁ Κύλινδρος ἄρα ὁ περὶ τὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένος ἡμιόλιός ἐςι τῆς Σφαίρας· ἥτε ἐπιφάνεια αὐτȣ̃ μετὰ τῶν βάσεων, ἡμιολία τῆς ἐπιφανείας τῆς Σφαίρας. Ὃ ἔδει δεῖξαι.

Πορίσματα.

Α'. Κύλινδρος ὀρθὸς ὁ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένος, αὐτή τε ἡ Σφαῖρα, ϗ Κῶνος ὁ βάσιν ϗ ὕψος ἔχων ταὐτὰ τῷ Κυλίνδρῳ, εἰσὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς 3, 2, 1. Ἔςι γὰρ ὁ Κύλινδρος (διὰ τὴν παρȣ̃σαν) πρὸς μὲν τὴν Σφαῖραν ὡς 3 πρὸς 2· πρὸς δὲ τὸν Κῶνον, ὡς 3 πρὸς 1 (10. τȣ̃ ιβ'.)· ἄρα κτ. Ἐν τῷ αὐτῷ δὲ λόγῳ εἰσὶν ἔτι ἡ ἐπιφάνεια τȣ̃ περὶ τὸ Ἡμισφαίριον περιγεγραμμένου Κυλίνδρȣ, μετὰ τῆς βάσεως τῆς ἐπιψαυȣ́σης τȣ̃ Ἡμισφαιρίȣ, ἥτε τȣ̃ Ἡμισφαιρίȣ ἐπιφάνεια, ϗ ἡ ἑκατέρῳ κοινὴ βάσις. Ἐπεὶ γὰρ ἥτε τȣ̃ Κυλίνδρȣ ϗ ἡ τȣ̃ Ἡμισφαιρίȣ ἐπιφάνεια διπλασία ἐςὶ τῆς βάσεως (4)· ἔσεται δὴ ἡ τȣ̃ Κυλίνδρȣ μετὰ τῆς βάσεως τῆς ἐπιψαυȣ́σης, πρὸς τὴν ἑτέραν βάσιν, ὡς 3 πρὸς 1· ὅθεν δῆλον τὸ προτεθέν.

Β'. Ὅθεν ὁ Κύλινδρος θκ χωρὶς τῆς εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένης Σφαίρας (τȣ̃τ' ἔςι τὸ τȣ̃ Κυλίνδρȣ ςερεὸν κενὸν τῆς Σφαίρας, τὸ ἔξωθεν μὲν ὑπὸ τῆς ὅλης τȣ̃ Κυλίνδρȣ ἐπιφανείας, ἔσωθεν δὲ ὑπὸ τῆς κοίλης σφαιρικῆς περατȣ́μενον), ἴσον ἐςὶ τῷ ἐγγεγραμμένῳ Κώνῳ θβν. Ἐπεὶ γὰρ ὁ Κύλινδρος ἐςὶ πρὸς τὴν εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένην Σφαῖραν, ὡς 3 πρὸς 2· πρὸς τὸ κυλιν-

(1) *Ι. τȣ̃ ιβ.* (2) *Α. τȣ̃ παρόντος.* (3) *Πορισμ. τῆς ΙΒ. τȣ̃ παρόντος.* (4) *Κς. τȣ̃ παρόντος μετὰ τȣ̃ Πορίσματος.*

δρικὸν ἄρα ςερεὸν κενὸν τῆς Σφαίρας, ἔσεται ὡς 3 πρὸς 1· τȣτ' ἔςιν ὡς αὐτὸς ὁ Κύλινδρος πρὸς τὸν Κῶνον ϑβν (1)· ϗ ἑπομένως τὸ ἐκείνȣ ςερεὸν ἴσον τῷ Κώνῳ.

Γ'. Τὸ τȣ Κυλίνδρȣ ςερεὸν κενὸν Ἡμισφαιρίȣ (τȣτ' ἔςιν ὁ Κύλινδρος εκ, χωρὶς τȣ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένȣ Ἡμισφαιρίȣ εοβδ), ἴσον ἐςὶ τῷ ἐγγεγραμμένῳ Κώνῳ εβδ. Τό,τε γὰρ ςερεὸν ϗ ὁ Κῶνος τριτημόριόν ἐςι τȣ Κυλίνδρου εκ (2).

Δ'. Ἐὰν Κῶνος ὁ ηαυ Κυλίνδρῳ ἐγγεγραμμένος τῷ νη, ἔχῃ τὴν μὲν κορυφὴν ἐν τῷ Κέντρῳ α τȣ εἰς τὸν Κύλινδρον ἐγγεραμένȣ Ἡμισφαιρίȣ μοβν· τὴν δὲ βάσιν ηυ, τῇ βάσει τȣ Ἡμισφαιρίȣ παράλληλόν τε ϗ τȣ Ἡμισφαιρίȣ ἐπιψάυȣσαν κατὰ τὴν κορυφὴν β· ἀφαιρεθῇ δὲ τȣ Κυλίνδρȣ τὸ Ἡμισφαίριον, καταλειφθήσεται ςερεὸν Κυλινδρικὸν κενὸν Ἡμισφαιρίȣ, ἴσον Κώνῳ τῷ ηαυ ἔχοντι βάσιν τὴν αὐτὴν τῷ Κυλίνδρῳ τὴν ηυ. Δείκνυται ἐκ τȣ Γ'. Πορίσματος.

Ε'. Ἐὰν Κῶνος ϗ ςερεὸν ȣ̓́τως ἔχον ἑκάτερον Ἐπιπέδῳ τινὶ τμηθῶσι τῷ λχ παραλλήλῳ τῇ βάσει ηυ, γενήσεται ἐν μὲν τῷ Κώνῳ, Κύκλος ὁ ΑΕ· ἐν δὲ τῷ ςερεῷ ἐπίπεδον δακτυλιακὸν τὸ ξλχρ, κατὰ πάντα ἀλλήλοις ἰσούμενα. Ἀχθείσης γὰρ τῆς ἐν τῇ σφαίρᾳ Ἡμιδιαμέτρȣ αρ· ἔσεται $αρ^2 = αδ^2 + δρ^2$ (3)· ἐπεὶ δὲ ἡ αβ, ἴση ἐςὶ τῇ βυ, ἴση ἄρα ϗ ἡ αδ τῇ δΕ (4)· καὶ δὴ ϗ αἱ αρ, αν, δχ ἀλλήλαις ἴσαι (5). Τοιγαρȣ̃ν τὸ ἀπὸ τῆς δχ, ἴσον συναμφοτέρῳ τῷ ἀπὸ τῶν δΕ, δρ· ϗ Κύκλος ὁ ἀπὸ δχ, ἴσος συναμφοτέρῳ τῷ ἀπὸ τῶν δρ, δΕ Κύκλῳ (6)· ἀφαιρȣμένȣ δὲ ἑκατέρωθεν τȣ ἀπὸ τῆς δρ Κύκλȣ· λείπεται τὸ Δακτυλιακὸν ἐπιπέδον ξλχρ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς δΕ Κύκλῳ. σχ. 42.

ϛ'. Τὰ Τμήματα οἱȣδή τινος Κώνȣ ηαυ, ϗ Κυλινδρικȣ̃ ςερεȣ̃ χωρὶς τȣ ἐν αὐτῷ Ἡμισφαιρίȣ, τὰ μεταξὺ ἐπιπέδων ἀλλήλοις παραλλήλων ἐναπολαμβανόμενα, ἴσα ἐςὶν ἀλλήλοις· ἴσος γὰρ ὁ Κῶνος τῷ ςερεῷ· ἴση δὲ ϗ ἡ τȣ Κώνȣ κυκλικὴ τομὴ ΑΕ, τῷ τȣ ςερεȣ̃ δακτυλιακῷ Ἐπιπέδῳ ξλχρ. Ἐὰν ἄρα τὸ Ἐπίπεδον λχ ἐπὶ τὰ ἄνω, ἢ τὰ κάτω παραλλήλως ἀεὶ τῇ βάσει ἐνεχθῇ, ἀπογεννήσει ἀεὶ Τμήματα τȣ̃ τε Κώνȣ ϗ τȣ Κυλινδρικȣ̃ ςερεȣ̃ ἀλλήλοις ἴσα.

Ζ'. Ἐκ τῆς καταμετρήσεως ἄρα τȣ Κώνȣ ηαυ ἡ τȣ Κυλινδρικȣ̃ ςερεȣ̃ χωρὶς τȣ ἐν αὐτῷ Ἡμισφαιρίȣ πορίζεται καταμέτρησις (7)· ἔκ τε τῆς κολοβȣ̃ Κώνȣ οΑΕκ, ἡ τȣ δακυλιακȣ̃ Τμήματος ξλιορχτκ, τȣ μεταξὺ τῶν αὐτῶν Ἐπιπέ-

(1) *Ι. τȣ ιβ'.* (2) *Δείκνυται ὁμοίως τῷ Β'. Πορίσματι διὰ τȣ 42 Σχήματος.* (3) *ΜΖ. τȣ α'.* (4) Πορ. Α'. τῆς *Δ. τȣ ϛ'.* (5) Ὁρισμ. Ε. τȣ ιβ'. καὶ *Πρότ. ΛΔ. τȣ α'.* (6) *Πορισμ. Β'. τῆς Β. τȣ ιβ'. ϗ Πρότ. ΚΔ. τȣ ε'.* (7) Σχόλ. τῆς ϛ. τȣ παρόντος.

δων ιτ, λχ ἐναπολαμβανομένε (1). Καὶ ἐντεῦθεν ἑτέρα ἀποφέρεται μέθοδος τε οἱαδήτινα τῆς Σφαίρας τμήματα καταμετρεῖν.

Οἷον ἐὰν ζητῆται ἡ καταμέτρησις τε μεταξὺ τῶν παραλλήλων Ἐπιπέδων ξρ, οκ ἐναπολαμβανομένε Τμήματος ξοκρ, ἀφῃρήσθω τε Κυλίνδρε λτ ὁ κολοβὸς Κῶνος οΑΕκ. Ἐὰν δὲ ζητῆται ἡ τε μεταξὺ τῶν παραλλήλων Ἐπιπέδων μν, ξρ ἐναπολαμβανομένε Τμήματος μξρν, ὑφῃρήσθω τε Κυλίνδρου μχ ὁ Κῶνος ΑαΕ.

Σχόλιον.

Ὅσον Ἀρχιμήδης τῷ παρόντι ἐπηγάλλετο Θεωρήματι, ἀπόδειξίς ἐστιν, ὅτι τῷ ἰδίῳ τάφῳ Σφαῖραν εἰς Κύλινδρον ἐγγεγραμμένην ἐπιθέσθαι ἠξίωσε· καὶ τοῦτο ἴσως διὸ, ὅτι τὸν αὐτὸν λογικὸν λόγον ἔντε τοῖς σώμασι τούτοις καὶ ταῖς, ὑφ᾽ ὧν αὐτὰ τὰ σώματα περιέχεται, ἐπιφανείαις ἐνορῶν, ταύτην μᾶλλον, ἤ τινα ἄλλην τῶν τοσούτων αὐτοῦ καὶ τηλικούτων εὑρέσεων ἠγάσατο. Τοιαύτη μέντοι ταυτότης παθῶν ἔντε δακτυλίοις καὶ δακτυλίων ἐπιφανείαις δέδεικται καὶ ἡμῖν αὐτοῖς ἐν τῷ Δ΄. Βιβλίῳ τῶν κυλινδρικῶν καὶ δακτυλιακῶν (Προτ. 13. 14. 15.)· οὐ μὴν ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τῆς Σφαίρας αὐτῆς καὶ ἕτερον εὕρηται ἡμῖν, οὐχ ἧττον ἐπίσημον· τοῦτο δέ ἐστιν, ὅτι ὥσπερ ἡ Σφαῖρα λόγον ἔχει πρὸς τὸν αὐτὴν περιλαμβάνοντα ὀρθὸν Κύλινδρον, κατάτε τὸ στερεὸν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν (ὃς ἔσται ἐξ ἀνάγκης ἰσόπλευρος), ὃν ὁ 2 πρὸς τὸν 3· οὕτως ἡ αὐτὴ λόγον ἔχει πρὸς τὸν περιλαμβάνοντα ἰσόπλευρον Κῶνον, κατάτε τὸ στερεὸν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν, ὃν ἔχει ὁ 4 πρὸς τὸν 9· ἐξ οὗ δὴ ἕπεται ὅτι ὁ ἡμιόλιος λόγος, ὁ μεταξὺ Σφαίρας καὶ Κυλίνδρε εὑρημένος τῷ Ἀρχιμήδει, ὑπάρχει μεταξὺ τριῶν σωμάτων κατὰ συνέχειαν, Σφαίρας δηλονότι, Κυλίνδρε καὶ ἰσοπλεύρε Κώνε· οὗ ἑκατέρε τὴν ἀπόδειξιν μετὰ καὶ ἄλλων ἡμετέρων Θεωρημάτων (ἐξ ὧν τρανώτερον ἡ τῆς Σφαίρας θαυμασία φύσις γινώσκεται) ἐν τρισὶ καίδεκα Προτάσεσι περιλαμβανομένων, ὑποσυνάψομεν.

Πρότασις ΛΓ΄.

κ. 53. Πάσης Σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια διπλασία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τε εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένε ἰσοπλεύρε Κυλίνδρε.

Ἔστω Σφαῖρα ἡ αθβικ, καὶ ἐν αὐτῇ Τετράγωνον ἐγγεγραμμένον τὸ ακλδ· ὑφ᾽ οὗ περιενεχθέντος, καταγράφεται Κύλινδρος ἰσόπλευρος ὁ αδλκ εἰς τὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμένος· ἤχθω ἡ αλ, ἥτις ἔσται διάμετρος κοινὴ τῆτε Σφαί-

(1) Αὐτόθεν.

ρῳ καὶ τῷ Τετραγώνῳ. Ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ τῆς αλ Τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ἀλλήλαις ἴσων ακ, κλ Τετραγώνοις ἅμα ληφθεῖσιν (1), ἑνὸς ἄρα τοῦ ἀπὸ ακ ἔσται διπλάσιον. Τοιγαροῦν καὶ Κύκλος ὁ περὶ τὴν διάμετρον αλ, διπλάσιός ἐστι τοῦ περὶ τὴν ακ (2), τοῦτ' ἔστι τοῦ γν. Ἀλλὰ τοῦ περὶ τὴν αλ Κύκλου τετραπλασία ἐστὶν ἡ τῆς Σφαίρας ἐπιφάνεια (3)· διάμετρος γὰρ τῆς Σφαίρας ἡ αλ, καὶ ὁ περὶ αὐτὴν Κύκλος μέγιστος τῶν ἐν τῇ Σφαίρᾳ· ἡ τῆς Σφαίρας ἄρα ἐπιφάνεια ὀκταπλασία ἐστὶ τοῦ γν Κύκλου· ἐπεὶ δὲ ὑπόκειται ἴση τῇ ακ ἡ λκ, ἡ κυλινδρικὴ ἄρα ἐπιφάνεια αγλ τετραπλασία ἐστὶ τοῦ γν Κύκλου (4)· ἡ τῆς Σφαίρας ἄρα, ἐπεὶ δέδεικται ὀκταπλασία τοῦ αὐτοῦ Κύκλου, ἔσεται δὴ διπλασία τῆς τοῦ Κυλίνδρου ἐπιφανείας. Ὃ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΛΔ.

Πάσης Σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια πρὸς ὅλην τὴν τοῦ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένου κ. 53.
ἰσοπλεύρου Κυλίνδρου ἐπιφάνειαν ἐστὶν, ὡς 4 πρὸς 3.

Κειμένων γὰρ τῶν αὐτῶν τῇ προηγουμένῃ, ἐπεὶ ἡ τοῦ Κυλίνδρου πλευρὰ λκ, ἐστὶν ἐξ ὑποθέσεως ἴση τῇ τῆς βάσεως διαμέτρῳ ακ, ἔσεται δὴ ἡ τοῦ Κυλίνδρου ἐπιφάνεια γλ τετραπλασία τῆς βάσεως γν (5)· ὅλη ἄρα ἡ τοῦ Κυλίνδρου ἐπιφάνεια πρὸς συναμφότερον τὴν βάσιν γν, σλ, ἐστὶν ὡς 6 πρὸς 2. Δέδεικται δὲ ἐν τῇ προηγουμένῃ, ὅτι ἡ τῆς Σφαίρας ἐπιφάνεια ἐστὶ πρὸς τὴν μίαν τῶν βάσεων, ὡς 8 πρὸς 1· πρὸς συναμφότερον ἄρα ἔσται, ὡς 8 πρὸς 2· πρὸς ὅλην ἄρα τὴν τοῦ Κυλίνδρου ἐπιφάνειαν ἔσται, ὡς 8 πρὸς 6· τοῦτ' ἔστι, ὡς 4 πρὸς 3. Ὃ ἔδει δεῖξαι.

Πορίσματα.

Α΄. Ὅλη ἡ τοῦ περὶ τὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένου ὀρθοῦ Κυλίνδρου ἐπιφάνεια, ἐστὶ πρὸς ὅλην τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου κυλίνδρου ἐπιφάνειαν, ὡς 2 πρὸς 1. Ἔστι γὰρ ἡ μὲν τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν τῆς Σφαίρας, ὡς 6 πρὸς 4 (6)· ἡ δὲ τῆς Σφαίρας πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου, ὡς 4 πρὸς 3· διὰ τὴν παροῦσαν· δι' ἴσου ἄρα ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου, ὡς 6 πρὸς 3· ἢ ὡς 2 πρὸς 1.

(Ὡσαύτως ἡ τῆς περὶ ἰσόπλευρον Κύλινδρον περιγεγραμμένης Σφαίρας ἐπιφάνεια, διπλασία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς εἰς τὸν αὐτὸν Κύλινδρον ἐγγε-

---

(1) *ΜΖ.* τοῦ *α΄.* (2) *Πορ. Ε΄.* τῆς *Β.* τοῦ *ιβ΄.* (3) *ΚΔ.* τοῦ *παρόντος.* (4) *Διὰ τὸ Πόρ.* τῆς *ΙΒ.* τοῦ *παρόντος.* (5) *Πορ.* τῆς *ΙΒ.* τοῦ *παρόντος.* (6) *ΛΒ.* τοῦ *παρόντος.*

γραμμένης Σφαίρας. Ὥσπερ δὴ ϗ αὕτη διπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ περιγεγραμμένῃ Σφαίρᾳ· εἰσὶ γὰρ ἡ τῆς περιγεγραμμένης Σφαίρας ἐπιφάνεια, ϗ ὅλη ἡ τοῦ Κυλίνδρου ϗ ἡ τῆς ἐγγεγραμμένης Σφαίρας, πρὸς τὸν μεγίστον Κύκλον τῶν ἐν τῇ περιγεγραμμένῃ Σφαίρᾳ, ὡς 4 ϗ 3 ϗ 2 πρὸς 1 (1)).

Β΄. Ὅλη ἡ τοῦ περὶ τὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένου ὀρθοῦ Κυλίνδρου ἐπιφάνεια, ἡ ἐπιφάνεια τῆς Σφαίρας, περὶ ἣν ὁ κύλινδρος περιγέγραπται, ϗ ὅλη ἡ τοῦ εἰς τὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου Κυλίνδρου ἐπιφάνεια εἰσὶν ἐν ἁρμονικῇ ἀναλογίᾳ, τουτ᾽ ἔστιν ὡς 6, 4, 3.

Τρία δὲ ποσὰ εἰσὶν ἁρμονικῶς ἀνάλογον, ἐὰν γένηται τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον, ὡς ἡ διαφορὰ τοῦ πρώτου ϗ τοῦ δευτέρου, πρὸς τὴν διαφορὰν τοῦ δευτέρου ϗ τοῦ τρίτου. Οἷον ἐὰν ᾖ 6 πρὸς 3, ὡς 6 — 4 πρὸς 4 — 3 (: : 2 : 1)· ἔσονται 6, 4, 3 ἁρμονικῶς ἀνάλογον.

κ. 53. Σχόλιον. Ὁ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένος Κύλινδρος ἐστὶ, πρὸς ὅμοιον, εἴτ᾽ οὖν ἰσόπλευρον Κύλινδρον εἰς τὴν αὐτὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμένον, ὡς ἡ ἐν τῷ Τετραγώνῳ διάμετρος πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς πλευρᾶς· ἤ, ὅπερ ἐστὶ ταὐτὸν, ὡς ἡ διάμετρος τοῦ Κύκλου πρὸς τὸ ἡμίχορδον 45 μοιρῶν. Ἐν τῷ αὐτῷ δὲ λόγῳ ἐστὶ καὶ σφαῖρα ἡ περὶ Κύλινδρον ἰσόπλευρον περιγεγραμμένη, πρὸς τὴν εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένην.

Μέρος Α΄. Καταχθεισῶν γὰρ ἐν τῷ Ὀρθογωνίῳ ἰσοσκελεῖ Τριγώνῳ ακλ τῶν καθέτων κξ, ξρ· ἔσεται δὴ ϗ τὰ Τρίγωνα αξκ, αρξ Ὀρθογώνιά τε ϗ ἰσοσκελῆ (2)· ϗ αἱ αλ, ακ, αξ, αρ συνεχῶς ἀνάλογον (3)· ϗ ἡ $\alpha\rho = \frac{1}{2}\,\alpha\kappa$ (4)· ἔστι δὲ ἡ μὲν αλ, διάμετρος τῆς βάσεως τοῦ περιγεγραμμένου Κυλίνδρου· ἡ δὲ ακ, διάμετρος τῆς βάσεως τοῦ ἐγγεγραμμένου Κυλίνδρου· διὰ τὴν ὁμοιότητα ἄρα τῶν Κυλίνδρων ἔσεται ὁ περιγεγραμμένος πρὸς τὸν ἐγγεγραμένον, ἐν λόγῳ τριπλασίονι τοῦ τοῦ τῶν αλ, ακ (5)· τουτ᾽ ἔστιν ὡς αλ πρὸς αρ ($= \frac{1}{2}\,\alpha\kappa$) (6). Ἀλλ᾽ ἡ μὲν αλ ἐστὶ διάμετρος τοῦ τε Κύκλου αθβκ, ϗ τοῦ Τετραγώνου δκ· ἡ δὲ ακ, πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένου Τετραγώνου· τουτ᾽ ἔστι χορδὴ μοιρῶν 90 εἰς Κύκλον τὸν θκ, ἡ δὲ ἡμίσεια τῆς ακ, ἡμίχορδον 45 μοιρῶν (7). Ὁ περιγεγραμμένος ἄρα Κύλινδρος πρὸς τὸν ἐγγεγραμμένον, ὡς ἡ ἐν τῷ Τετραγώνῳ διάμετρος πρὸς τὴν ἡμίσιαν τῆς πλευρᾶς, ἢ ὡς ἡ τοῦ Κύκλου διάμετρος πρὸς ἡμίχορδον τὸ μοιρῶν 45.

---

(1) *Διὰ τὴν παροῦσαν ϗ τὴν ΛΒ. ϗ τὴν ΚΔ. τοῦ παρόντος.* (2) *Η. τοῦ ϛ΄.* (3) *Πόρ. Β΄. τῆς Η. τοῦ ϛ΄.* (4) Σχόλ. Α΄. τῆς *Κϛ΄. τοῦ α΄.* (5) *ΙΒ. τοῦ ιβ΄.* (6) Ὅρισμ. *Ι. τοῦ ε΄.* (7) Πορ. Α΄. τῆς *Γ. τοῦ γ΄.*

Μέρος Β'. Καὶ ἐν τῷ αὐτῷ δὲ λόγῳ ἐςὶ ϗ σφαῖρα, περὶ Κύλινδρον ἰσόπλευρον περιγεγραμμένη, πρὸς τὴν εἰς τὸν αὐτὸν ἐγγεγραμμένην. Διάμετρος γὰρ τῆς περὶ τὸν ἰσόπλευρον Κύλινδρον αδλκ περιγεγραμμένης Σφαίρας θκ ἐςὶν ἡ αλ· ἡ δὲ τῆς ἐγγεγραμμένης διάμετρος ἐςὶν ἴση τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως τȣ̃ Κυλίνδρȣ, τȣ̃τ' ἔςι τῇ ακ· ἡ περιγεγραμμένη ἄρα σφαῖρα πρὸς τὴν ἐγγεγραμμένην, ἔσεται ἐν λόγῳ τριπλασίονι τȣ̃ τῆς αλ πρὸς ακ (1)· τȣ̃τ' ἔςιν ὡς ἡ αλ πρὸς αρ ἢ πρὸς $\frac{1}{2}$ ακ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα τȣ̃ ἡγȣμένȣ Σχολίȣ. Ἡ σφαῖρα ἐςὶ πρὸς τὸν εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένον ἰσόπλευρον Κύλινδρον, ὡς ἡ τετραπλασία τῆς ἐν τῷ Τετραγώνῳ διαμέτρȣ πρὸς τὴν τριπλασίαν τῆς Πλευρᾶς· ἢ ὡς ἡ τετραπλασία τῆς διαμέτρȣ τȣ̃ Κύκλȣ πρὸς τὴν τριπλασίαν τῆς Πλευρᾶς τȣ̃ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένȣ Τετραγώνȣ.

Ἔςι γὰρ διὰ τὸ ἡγȣμενον Σχόλιον ἡ περὶ τὸν ἰσόπλευρον Κύλινδρον περιγεγραμμένη σφαῖρα πρὸς τὴν εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένην, ὡς ἐν τῷ Τετραγώνῳ ἡ τριπλῆ διάμετρος πρὸς τὴν πλευράν· ἢ ὡς ἡ τετραπλασία τῆς διαμέτρȣ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς πλευρᾶς. Ἀλλ' ἡ εἰς τὸν Κύλινδρον ἐγγεγραμμένη σφαῖρα ἐςὶ πρὸς αὐτὸν τὸν Κύλινδρον, ὡς 2 πρὸς 3 (2)· ἢ ὡς ἡ διπλασία τῆς τȣ̃ Τετραγώνȣ πλευρᾶς, πρὸς τὴν τριπλασίαν τῆς τȣ̃ αὐτȣ̃ Τετραγώνȣ πλευρᾶς. Ἄρα ἡ περὶ τὸν ἰσόπλευρον Κύλινδρον περιγεγραμμένη σφαῖρα ἐςὶ, πρὸς αὐτὸν τὸν Κύλινδρον (τȣ̃τ' ἔςιν ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένον ἰσόπλευρον Κύλινδρον), ὡς ἡ τετραπλασία τῆς ἐν τῷ Τετραγώνῳ διαμέτρȣ πρὸς τὴν τριπλασίαν τῆς Πλευρᾶς· ἢ, ὃ εἰς ταυτὸν ἥκει, ὡς ἡ τετραπλασία τῆς διαμέτρȣ τȣ̃ Κύκλȣ, πρὸς τὴν τριπλασίαν τῆς Πλευρᾶς τȣ̃ εἰς τὸν αὐτὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένȣ Τετραγώνȣ.

Πρότασις ΛΕ'.

Οἱασȣ̃ν Σφαιρικῆς μοίρας ἡ ἐπιφάνεια ιλβθ, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τȣ̃ εἰς αὐτὴν ἐγγραμμένȣ μεγίςȣ Κώνȣ ιβθ λόγον ἔχει, ὃν ἡ τȣ̃ Κώνȣ πλευρὰ βθ, πρὸς τὴν τῆς βάσεως ἡμιδιάμετρον θο. χ. 53, ἢ 52.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ τῆς μοίρας ιλβθ ἐπιφάνεια ἴση ἐςὶ Κύκλῳ, ȣ̃ Ἡμιδιάμετρος ἡ βθ (3), ἔσεται ὁ λόγος ταύτης πρὸς τὸν Κύκλον ξτ, τȣ̃τ' ἔςιν τὴν βάσιν αὐτῆς τε ϗ τȣ̃ Κώνȣ, διπλασίων τȣ̃ λόγȣ τῆς βθ πρὸς θο (4)· τȣ̃τ' ἔςι τῆς

(1) *ΙΗ.* τȣ̃ ιβ'. (2) *ΛΒ.* τȣ̃ παρόντος. (3) *ΚΕ.* τȣ̃ παρόντος. (4) *Πορ. Β'.* τῆς *Β.* τοῦ ιβ'.

Κωνικῆς ἐπιφανείας ιβθ, πρὸς τὴν αὐτὴν βάσιν ξτ (1)· φανερὸν ἦν ὅτι ὡς ἡ ἐπιφάνεια ιλβθ, πρὸς τὴν Κωνικὴν ἐπιφάνειαν ιβθ, ὅτως ἡ αὐτὴ Κωνικὴ ιβθ, πρὸς τὴν Βάσιν ξτ (2)· ὡς δὲ ἡ Κωνικὴ ιβθ, πρὸς τὴν βάσιν ξτ, ὅτως ἡ βθ πρὸς τὴν θο (3)· ὡς ἄρα ἡ τῆς Μοίρας ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐν αὐτῇ ἐγγεγραμμένην Κωνικὴν ιβθ, ὅτως ἡ βθ πρὸς τὴν θο. Ὃ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα. Ἐκ τῆς δείξεως τῆς παρέσης Προτάσεως δῆλον, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῦ εἰς Τμῆμα σφαίρας ἐγγεγραμμένυ μεγίσυ Κώνυ μέση ἐςὶν ἀνάλογον τῆς τῦ Τμήματος ἐπιφανείας ϗ τῆς ἑκατέρῳ κοινῆς βάσεως.

Πρότασις Λς΄.

κ. 48. Ἡ τῦ Ἡμισφαιρίυ ἐπιφάνεια (εοβδ), πρὸς μὲν τὴν τῦ ἐγγεγραμμένου μεγίςυ ἢ ὀρθῦ Κώνυ ἐπιφάνειαν (εβδ) λόγον ἔχει, ὃν ἐν τῷ Τετραγώνῳ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν πλευράν· πρὸς δὲ τὴν τῦ περιγεγραμμένυ ὁμοίυ, ὃν ἐν τῷ Τετραγώνῳ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν διάμετρον.

κ. 49. Μέρος Α΄. Πρόδηλον ἐκ τῆς ἀποδείξεως τῆς προηγυμένης Προτάσεως. Οἱασῦν γὰρ μοίρας, ἑπομένως δὲ ϗ τῦ Ἡμισφαιρίυ ἡ ἐπιφάνεια εοβδ, ἐςὶ πρὸς τὴν αὐτῇ ἐγγεγραμμένην Κωνικὴν, ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν δα· ἐςὶ δὲ ἡ μὲν βδ διάμετρος· ἡ δὲ δα, πλευρὰ τῦ Τετραγώνυ βαδκ· ἄρα κτ.

Μέρος Β΄. Ἔςω περὶ Κύκλον, ὗ Κέντρον τὸ α, ἡμιτετράγωνον περιγεγραμμένον τὸ εβγ· ὗ περὶ τὸν Ἄξονα αβ περιενεχθέντος, γεγεννήθω Κῶνος περὶ τὸ Ἡμισφαίριον περιγεγραμμένος. Ἐπεὶ ὖν τὸ ἀπὸ τῆς εγ διπλάσιόν ἐςι τῦ ἀπὸ τῆς εβ, ἢ τῆς θι (4)· διπλάσιος ἄρα ϗ ὁ Κύκλος, ὗ διάμετρος ἡ εγ, τῦ Κύκλυ, οὗ διάμετρος ἡ θι, τῦτ᾽ ἔςι τῦ Κύκλυ ηθδι (5)· διπλασία δὲ τῦ αὐτῦ Κύκλυ ἐςὶ ϗ ἡ ἐπιφάνεια τῦ εἰς τὸν Κῶνον εβγ ἐγγεγραμμένυ Ἡμισφαιρίυ (6)· ὁ Κύκλος ἄρα, ὗ διάμετρος ἡ εγ, ἴσος ἐςὶ τῇ τῦ Ἡμισφαιρίυ ἐπιφανείᾳ. Τοιγαρῦν ἐπεὶ ἡ τῦ Κώνυ ἐπιφάνεια εβγ, ἐςὶ πρὸς τὸν Κύκλον, ὗ διάμετρος ἡ εγ, τῦτ᾽ ἔςι πρὸς τὴν ἑαυτῦ βάσιν, ὡς ἡ πλευρὰ βε πρὸς τὴν τῆς βάσεως ἡμιδιάμετρον αε (7), ἔςεται δὴ καὶ πρὸς τὴν τῦ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένυ Ἡμισφαιρίυ ἐπιφάνειαν, ὡς ἡ εβ πρὸς τὴν αε, τῦτ᾽ ἔςιν ὡς ἡ ἐν τῷ Τετραγώνῳ διάμετρος πρὸς τὴν αὐτῦ πλευράν· ϗ ἡ ἐπιφάνεια τῦ Ἡμισφαιρίυ πρὸς τὴν περιγεγραμμένην Κωνικὴν, ὡς ἡ πλευρὰ τῦ Τετραγώνυ πρὸς τὴν Διαγώνιον. Ὃ ἔδει δεῖξαι.

---

(1) *ΙΔ.* τῦ παρόντος. (2) *Ὁρισμ. ΙΓ.* τῦ ε΄. (3) *ΙΔ.* τῦ παρόντος. (4) *Πορ. Α΄.* τῆς *ΜΖ.* τῦ α΄. (5) *Πόρ. Ε΄.* τῆ *Β.* τῦ ιβ΄. (6) *ΚΔ.* τῦ παρόντος. (7) *ΙΔ.* τῦ παρόν.

Πόρισμα. Εάν περὶ Κῶνον ὀρθογώνιον τὸν εβδ Ἡμισφαίριον περιγραφῇ, κ. 49.
ϗ εἰς αὐτὸν ἕτερον ἐγγραφῇ, ἔσεται ἡ τȣ̃ Κώνȣ ἐπιφάνεια μέση ἀνάλογον τῆς ἐπιφανείας τȣ̃ περιγεγραμμένȣ Ἡμισφαιρίȣ, ϗ τῆς τȣ̃ ἐγγεγραμμένου. Ἔςι γὰρ ἥτε τȣ̃ περιγεγραμμένȣ Ἡμισφαρίȣ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τȣ̃ Κώνȣ, ϗ ἡ τȣ̃ Κώνȣ πρὸς τὴν τȣ̃ ἐγγεγραμμένȣ, ὡς ἐν τῷ τετραγώνῳ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν πλευράν.

Πρότασις ΛΖ΄.

Πάσης Σφαίρας τό,τε ςερεὸν ϗ ἡ ἐπιφάνεια λόγον ἔχει, πρὸς τὸν περὶ κ. 49. 50.
αὐτὴν περιγεγραμμένον τετράγωνον κωνικὸν Ῥόμβον, ὃν ἡ ἐν τῷ τετραγώνῳ πλευρὰ πρὸς τὴν διάμετρον.

Περὶ τὸν μέγιςον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ Κύκλον ηθδι, περιγεγράφθω τετράγωνον τὸ εβγζ, ἐξ ȣ̃ περὶ τὸν Ἄξονα βε περιενεχθέντος, γεγεννήσθω Ῥόμβος τὴν σφαῖραν περιλαμβάνων. Καὶ γενέσθω ὡς ἡ τȣ̃ τετραγώνȣ πλευρὰ εβ (Σχῆμα 49.), πρὸς τὴν αὐτȣ̃ διάμετρον εγ, οὕτως ἡ Σ πρὸς τὴν Ρ (Σχῆμα 50.)· ὡς δὲ ἡ Σ πρὸς τὴν Ρ, ȣ̃τως ἡ Ξ πρὸς τὴν Ο· ϗ ἔσεται δὴ ὁ λόγος τῆς Σ πρὸς τὴν Ο, τριπλασίων τȣ̃ λόγȣ τῆς Σ πρὸς τὴν Ρ (1), τȣ̃τ᾽ ἔςι τῆς εβ πρὸς τὴν εγ· ὁ δὲ τῆς Ο πρὸς τὴν Ρ, διπλασίων τȣ̃ τῆς Ο πρὸς τὴν Ξ, ἢ τῆς Ρ πρὸς τὴν Σ, τȣ̃τ᾽ ἔςι τῆς εγ πρὸς τὴν εβ· ϗ ἑπομένως ἡ Ο πρὸς τὴν Ρ, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς εγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς εβ (2)· διπλασία ἄρα ἡ Ο αὐτῆς τῆς Ρ (3). Τȣ́των δὴ ȣ̃τω κατασκευασθάντων, νενοήσθω περὶ τὸν κωνικὸν Ῥόμβον σφαῖρα περιγεγραμμένη ἡ εβγζ· ϗ ἔςαι δὴ ἡ σφαῖρα ηθδι πρὸς τὴν εβγζ, ἐν λόγῳ τριπλασίονι τȣ̃ τῆς διαμέτρȣ θι (ἢ εβ), πρὸς τὴν εγ διάμετρον (4), τȣ̃τ᾽ ἔςιν ὡς ἡ Σ πρὸς τὴν Ρ (ὅπερ δέδεικται ἀνωτέρω)· ἔςι δὲ ἡ σφαῖρα εβγζ, πρὸς τὸν εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένον κωνικὸν Ῥόμβον, ὡς 2 πρὸς 1 (5)· τȣ̃τ᾽ ἔςιν ὡς ἡ Ο πρὸς τὴν Ρ (ὅπερ δέδεικται ἀνωτέρω). Δι᾽ ἴσου ἄρα ἡ σφαῖρα ηθδι, ἐςὶ πρὸς τὸν αὐτὸν Ῥόμβον, ὃς ἐςι περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένος, ὡς ἡ Σ πρὸς τὴν Ρ, τȣ̃τ᾽ ἔςιν ὡς ἐν τῷ τετραγώνῳ ἡ πλευρὰ εβ πρὸς τὴν διάμετρον εγ· ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον.

(Δείκνυται δὲ τὸ αὐτὸ καὶ ἐκ μόνης τῆς ἐποπτείας τȣ̃ 49 Σχήματος Διὰ τὸ εἶναι γὰρ τὰ Τρίγωνα εθα, εαβ, εβγ ὀρθογώνια ἔχοντα τὴν πρὸς τῷ ε γωνίαν κοινὴν, ἔσονται δὴ αἱ εθ, εα, εβ, εγ συνεχῶς ἀνά-

(1) Ὁρισμ. Ι. τȣ̃ ε΄. (2) Σχόλ. τῆς Κ. τȣ̃ ϛ΄. (3) Σχόλ. τῆς ϛ. ϗ Ζ. τȣ̃ ϛ΄. (4) ΙΗ. τȣ̃ ιβ΄. (5) Λ. τȣ̃ παρόντος.

λογον (1)· ϗ ὁ λόγος τῆς εθ πρὸς εγ, τριπλασίων τȣ̃ τῆς εβ πρὸς εγ (2)· Ἔςι δὲ ἡ μὲν εἰς τὸν κωνικὸν Ῥόμβον ἐγγεγραμμένη σφαῖρα, πρὸς τὴν περὶ αὐτὸν περιγεγραμμένην ἐν λόγῳ τριπλασίονι τȣ̃ τῶν διαμέτρων εβ, εγ (3), τȣτ᾽ ἔςιν ὡς ἡ εθ πρὸς εγ· ἡ δὲ περιγεγραμμένη πρὸς τὸν Ῥόμβον, περὶ ὃν περιγέγραπται, ὡς 2 πρὸς 1 (4)· ἢ ὡς ἡ εγ πρὸς εα. Δῆλον ἄρα ἡ ἐγγεγραμμένη σφαῖρα πρὸς τὸν Ῥόμβον, εἰς ὃν ἐγγέγραπται, ἢ (ὅπερ ἐςὶ ταυτὸν) ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένον Ῥόμβον, ὡς ἡ εθ πρὸς εα· τȣ̃τ᾽ ἔςιν ὡς ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν διάμετρον ἐν τῷ τετραγώνῳ ηθ).

Ἐκ δὲ τȣ̃ Β΄. μέρȣς τῆς προηγȣμένης φανερὸν, ὅτι ἡ τȣ̃ Ἡμισφαιρίȣ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τȣ̃ περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένȣ Κώνȣ εβγ, ϗ ἑπομένως ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τῆς Σφαίρας ηθδι, πρὸς ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τȣ̃ Ῥόμβȣ εβγζ, ἐςὶν ὡς ἡ πλευρὰ ἐν τῷ τετραγώνῳ πρὸς τὴν διάμετρον. Πάσης ἄρα Σφαίρας τό,τε ςερεὸν ϗ ἡ ἐπιφάνεια, ἐςὶ πρὸς τὸν περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένον τετράγωνον κωνικὸν Ῥόμβον (εβγζ), ὡς ἐν τῷ τετραγώνῳ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν διάμετρον. Ὃ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα Α΄. Ἡ ἐπιφάνεια τῆς περὶ κωνικὸν ἰσόπλευρον Ῥόμβον περιγεγραμμένης σφαίρας, ἡ ἐπιφάνεια τȣ̃ Ῥόμβȣ, περὶ ὃν ἡ σφαῖρα περιγέγραπται, ϗ ἡ ἐπιφάνεια τῆς εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένης σφαίρας ἔχȣσι συνεχῶς τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἐν τῷ τετραγώνῳ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν πλευράν. Δῆλον δὲ ἔκ τε τῆς προηγȣμένης ϗ τῆς παρȣ́σης.

Β΄. Ἡ μὲν τῆς περὶ Ῥόμβον κωνικὸν ἰσόπλευρον περιγεγραμμένης Σφαίρας ἐπιφάνεια, διπλασία ἐςὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς εἰς τὸν αὐτὸν Ῥόμβον ἐγγεγραμμένης Σφαίρας· ἡ δὲ τȣ̃ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένȣ Κωνικȣ̃ ἰσοπλεύρȣ Ῥόμβȣ, διπλασία ἐςὶ τῆς ἐπιφανείας τȣ̃ εἰς τὴν αὐτὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμένȣ ὁμοίȣ Ῥόμβȣ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ἐπιφάνεια τῆς περὶ Ῥόμβον περιγεγραμμένης Σφαίρας, ἥτε τȣ̃ Ῥόμβȣ, ϗ ἡ τῆς εἰς τὸν Ῥόμβον ἐγγεγραμμένης Σφαίρας εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ εγ, εβ, εα· ϗ ἔτι ἡ ἐπιφάνεια τȣ̃ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένȣ Ῥόμβȣ, ϗ ἡ ἐπιφάνεια τῆς Σφαίρας, ϗ ἡ τȣ̃ εἰς τὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμένȣ Ῥόμβȣ εἰσὶν ὡσαύτως, ὡς αἱ εγ, εβ, εα, φανερὸν ὅτι ἐν ἑκατέρᾳ τῇ πτώσει ἡ ἐπιφάνεια τῶν περιγεγραμμένων σωμάτων ἔσεται πρὸς τὴν τῶν ἐγγεγραμμένων, ὡς ἡ εγ πρὸς τὴν εα, ἢ ὡς 2 πρὸς 1.

Γ΄. Ὁ κωνικὸς ἰσόπλευρος Ῥόμβος ἐςὶν πρότερος τῶν δύω μέσων ἀναλο-

---

(1) Πορισμ. μετὰ τὸ Σχόλ. τῆς ΙΓ. τȣ̃ ϛ΄. (2) Ὁρισμ. ΙΘ. τȣ̃ ϛ΄. (3) ΙΗ. τȣ̃ ιβ΄. (4) Λ. τȣ̃ παρόντος.

γον τῆς τε εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένης, καὶ τῆς περὶ αὐτὸν περιγεγραμμένης Σφαίρας, ὡς ἐν τῇ δείξει τȣ̃ πρώτȣ μέρȣς τῆς παρȣ́σης δέδεικται· ἡ γὰρ ἐγγεγραμμένη τῷ Ῥόμβῳ Σφαῖρα, ὁ Ῥόμβος, καὶ ἡ περιγεγραμμένη εἰσὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ Σ, Ρ, Π ἐν τῷ 50 Σχήματι· ἢ ὡς αἱ εθ, εα, εγ, ἐν τῷ 49.

Δ΄. Δῆλον ἔτι ἐκ τῆς αὐτῆς δείξεως (ἢ ϗ ἐκ τῆς Λ΄. τȣ̃ παρόντος), ὅτι ἡ Σφαῖρα ἐςὶ διπλασία τȣ̃ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένȣ κωνικȣ̃ τετραγώνȣ Ῥόμβȣ. σ. 49.

Ε΄. Ἡ περὶ Ῥόμβον κωνικὸν τετράγωνον περιγεγραμμένη Σφαῖρα εβγζ, ἐςὶ πρὸς τὴν εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένην σφαῖραν ηθδι, ὡς ἐν τῷ τετραγώνῳ ἡ διάμετρος εγ πρὸς τὴν εθ ἡμίσειαν τῆς πλευρᾶς εβ, ὡς δῆλον ἐκ τῆς εἰρημένης δείξεως· ἐν δὲ τῷ αὐτῷ λόγῳ ἐςὶ ϗ ὁ περὶ σφαῖραν περιγεγραμμένος κωνικὸς τετράγωνος Ῥόμβος, πρὸς τὸν εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένον ὅμοιον Ῥόμβον· ἔςι γὰρ (διὰ τὴν ΛΖ΄. ταύτην) ὁ μὲν περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένος κωνικὸς τετράγωνος Ῥόμβος, πρὸς αὐτὴν τὴν σφαῖραν, ὡς ἡ εγ πρὸς τὴν εβ· ἡ δὲ σφαῖρα πρὸς τὸν εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένον τοιȣ̃τον Ῥόμβον, ὡς 2 πρὸς 1· ἢ ὡς ἡ εβ πρὸς τὴν εθ (Πορ. Δ΄. τῆς παρ.)· δι' ἴσȣ ἄρα ὁ Ῥόμβος ὁ περιγεγραμμένος πρὸς τὸν ἐγγεγραμμένον, ὡς ἡ εγ πρὸς τὴν εθ (ΚΒ΄. τȣ̃ ε΄.)

ς΄. Τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει Ῥόμβος κωνικὸς τετράγωνος περὶ σφαῖραν περιγεγραμμένος, πρὸς Ῥόμβον ὅμοιον εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγεγραμμένον· καὶ Κύλινδρος ἰσόπλευρος περὶ οἱανδήτινα ἄλλην σφαῖραν περιγεγραμμένος, πρὸς Κύλινδρον ὅμοιον εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγεγραμμένον, ϗ σφαῖρα, περὶ Κύλινδρον ἰσόπλευρον ἢ Ῥόμβον κωνικὸν τετράγωνον περιγεγραμμένη, πρὸς ἑτέραν εἰς τὸν αὐτὸν Κύλινδρον ἢ τὸν Κῶνον ἐγγεγραμμένην. Εἰσὶ γὰρ ἅπαντα πρὸς ἄλληλα ὡς ἐν τῷ τετραγώνῳ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς πλευρᾶς· ὡς δῆλον ἔκ τε τȣ̃ προηγȣμένȣ Πορίσματος τῆς παρȣ́σης, ϗ ἐκ τȣ̃ Σχολίȣ τῆς ΛΔ΄. τȣ̃ παρόντος.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΗ΄.

Ἡ ἐπιφάνεια οἱασȣ̃ν Σφαιρικῆς μοίρας (βθκδ), Κῶνον ἰσόπλευρον (τὸν βκδ) περιλαμβανȣ́σης, διπλασία ἐςὶ τῆς τȣ̃ περιλαμβανομένȣ Κώνȣ ἐπιφανείας. σ. 54.

Δῆλον ϗ τȣ̃το ἐκ τῆς ΛΕ΄. Ἔςι γὰρ ἡ τῆς μοίρας βθκδ ἐπιφάνεια, πρὸς τὴν τȣ̃ ἐγγεγραμμένȣ Κώνȣ ἐπιφάνειαν, ὡς ἡ βκ πρὸς τὴν βα (1)· ὑπόκειται δὲ ὁ Κῶνος βκδ ἰσόπλευρος· ἡ ἄρα κβ ἴση τῇ βδ· ϗ ἑπομένως διπλασία τῆς

(1) ΛΕ. τȣ̃ παρόντος.

βα· ἡ τῆς μοίρας ἄρα ἐπιφάνεια βθκδ, διπλασία ἐςὶ τῆς ἐπιφανείας τȣ̃ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένȣ Κώνȣ βκδ. Ὅ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμ. Α΄. Ὁ αὐτὸς δὲ διπλάσιος λόγος τηρεῖται, ϗ ἐν ταῖς ἐπιφανείαις τῆςτε τὸν ἰσόπλευρον Κῶνον περιλαμβανȣ́σης σφαιρικῆς μοίρας, ϗ τȣ̃ Κώνȣ, ϗ τῆς βάσεως τȣ̃ Κώνȣ. Δῆλον δὲ ἔκ τε τῆς παρȣ́σης καὶ ἐκ τȣ̃ Πορίσματος τῆς ΛΕ΄.

Β΄. Ἡ τῆς Κῶνον ἰσόπλευρον περιλαμβανȣ́σης σφαιρικῆς μοίρας ἐπιφάνεια, ἐςὶ πρὸς ὅλην τὴν τȣ̃ περιλαμβανομένȣ Κώνȣ ἐπιφάνειαν, ὡς 4 πρὸς 3.

Αἱ γὰρ ἐπιφάνειαι τῆςτε τὸν ἰσόπλευρον Κῶνον περιλαμβανȣ́σης σφαιρικῆς μοίρας, ϗ τȣ̃ περιλαμβανομένȣ Κώνȣ, ϗ τῆς τȣ̃ Κώνȣ βάσεως εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ὡς 4, 2, 1 (Πόρισμ. Α΄.)· ὅθεν δῆλον τὸ Πόρισμα.

Γ΄. Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἐςὶ, πρὸς ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τȣ̃ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένȣ ἰσοπλεύρȣ Κυλίνδρȣ, ὡς ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἰσόπλευρον Κῶνον περιλαμβανȣ́σης σφαιρικῆς μοίρας, πρὸς ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τȣ̃ αὐτȣ̃ Κώνȣ· τȣτ᾽ ἔςιν ὡς 4 πρὸς 3. Δῆλον ἔκ τε τῆς ΛΔ΄. τȣ̃ παρόντος ϗ ἐκ τȣ̃ Β΄. Πορίσματος τῆς παρȣ́σης.

Ἐν τῷ αὐτῷ δὲ λόγῳ ἐςὶν ὅλη ἡ ἐπιφάνεια Κυλίνδρȣ ὀρθȣ̃ περὶ Ἡμισφαίριον περιγεγραμμένȣ, πρὸς ὅλην τὴν τȣ̃ Ἡμισφαιρίȣ ἐπιφάνειαν. Ἐπεὶ γὰρ ἐςὶν ἥτε Κυλινδρικὴ (1) ϗ ἡ Ἡμισφαιρικὴ (2) διπλασία τῆς βάσεως, ἔσεται δὴ ὅλη μὲν ἡ κυλιδρικὴ τετραπλασία τῆς βάσεως· ἡ δὲ ἡμισφαιρικὴ μετὰ τῆς βάσεως τριπλασία τῆς αὐτῆς βάσεως· ὅλη ἄρα ἡ τȣ̃ Κυλίνδρȣ ἔςαι, πρὸς ὅλην τὴν τȣ̃ Ἡμισφαιρίȣ, ὡς 4 πρὸς 3.

Πρότασις ΛΘ΄.

Ἡ ἐπιφάνεια τῆς Σφαίρας πρὸς ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τȣ̃ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένȣ ἰσοπλεύρȣ Κώνȣ λόγον ἔχει, ὃν ὁ 16 πρὸς 9.

ϰ. 54. Ἔςω κέντρον τῆς σφαίρας τὸ φ· εἰς δὲ τὴν σφαῖραν Κῶνος ἰσόπλευρος ἐγγεγραμμένος ὁ βκδ· ϗ ἄξων κοινὸς τῇτε σφαίρᾳ ϗ τῷ Κώνῳ ὁ κφαο. Ἐὰν ȣ̃ν τμηθῶσι διὰ τȣ̃ ἄξονος ἥ τε Σφαῖρα ϗ ὁ Κῶνος, γενήσεται ἐν μὲν τῇ Σφαίρᾳ Κύκλος μέγιςος ὁ οβκδ· ἐν δὲ τῷ Κώνῳ Τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ βκδ, ȣ̃ τινος ἡ μία πλευρὰ βαδ διάμετρος ἔςαι τῆς τȣ̃ Κώνȣ βάσεως ξτ· ϗ ἐπεὶ ὁ τȣ̃ Κώνȣ ἄξων κα ἐςὶ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ξτ, ἔσεται ἡ γωνία καο ὀρθὴ (3)· διὰ δὴ τȣ̃το τὸ ἀπὸ τῆς βα τετράγωνον ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν καο ὀρθογωνίῳ (4).

(1) Πόρισμ. τῆς Κς. τȣ̃ παρόντος. (2) ΚΔ. τȣ̃ παρόντος. (3) Ὁρισμ. Γ. τȣ̃ ιά. (4) Πόρ. Β΄. τῆς ΙΖ. τȣ̃ ς΄.

Ἐπεὶ δὲ ἡ τȣ̃ ἰσοπλεύρȣ Τριγώνȣ πλευρὰ τεταρτημόριον τȣ̃ ἄξονος ἀποτέμνει τὴν αο (1), ἔσεται δὴ τὸ ὑπὸ τῶν καο ὀρθογώνιον, τȣ̃τ᾽ ἔςι τὸ ἀπὸ τῆς βα τετράγωνον, τριπλάσιον τȣ̃ ἀπὸ τῆς αο τετραγώνȣ (2). Τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρȣ φο τετράγωνον, ἐπεὶ ἐςὶ τετραπλάσιον τȣ̃ ἀπὸ τῆς αο τετραγώνου (3), ἔσεται δὴ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρȣ βα τετράγωνον, ὡς 4 πρὸς 3· ἄρα ϗ ὁ κύκλος οβκδ ἐςι πρὸς τὸν κύκλον ξτ, ὡς 4 πρὸς 3 (4)· ἔςιν ἄρα ὁ τετράκις κύκλος οβκδ, τȣ̃τ᾽ ἔςιν ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας δθ (5) πρὸς τὸν κύκλον ξτ, ὡς 16 πρὸς 3· ἔςι δὲ ϗ ἡ τȣ̃ ἰσοπλεύρȣ Κώνȣ βκδ ἐπιφάνεια, χωρὶς μὲν τῆς βάσεως πρὸς τὸν κύκλον ξτ, τȣ̃τ᾽ ἔςι πρὸς τὴν αὐτȣ̃ βάσιν, ὡς 2 πρὸς 1 (6)· μετὰ δὲ τῆς βάσεως, τȣ̃τ᾽ ἔςιν ὅλη ἡ τȣ̃ Κώνȣ βκδ πρὸς τὴν βάσιν, τȣ̃τ᾽ ἔςι τὸν κύκλον ξτ, ὡς 3 πρὸς 1, ἢ ὡς 9 πρὸς 3· ϗ ἐπεὶ δέδεικται ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἐςὶ πρὸς τὸν αὐτὸν κύκλον, ὡς 16 πρὸς 3· ἔσεται δὴ ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τῆς Σφαίρας, πρὸς ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τȣ̃ ἰσοπλεύρȣ Κώνȣ, ὡς 16 πρὸς 9. Ὅ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα. Δῆλον ἄρα ἐκ τῆς παρȣ́σης δείξεως, ὅτι ἡ τȣ̃ εἰς Σφαῖραν ἐγγεγραμμένȣ ἰσοπλεύρȣ Κώνȣ βάσις ξτ, ἔχει πρὸς τὸν μέγιςον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλον δθ, ὡς 3 πρὸς 4.

(Ἄλλως. Ἐπεὶ ἡ τȣ̃ ἰσοπλεύρȣ Τριγώνȣ πλευρὰ βδ, τετρατημόριον τȣ̃ Ἄξονος ἀποτέμνει τὴν αο (7)· ἔσεται δὴ ἡ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια βοδ τεταρτημόριον τῆς ἐπιφανείας τῆς ὅλης σφαίρας (8)· ϗ ἑπομένως ἡ λοιπὴ βθκδ ἴση τρισὶ τεταρτημορίοις· ἐὰν ἄρα ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τεθῇ ἴση 16· ἔσεται ἡ βθκδ ἴση 12· ἀλλ᾽ ἡ ἐπιφάνεια βθκδ ἐςὶ διπλασία τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας βκδ (9), καὶ ἐςὶ δὴ πρὸς αὐτὴν ὡς 12 πρὸς 6· ὅλη ἄρα ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια ἐςὶ πρὸς τὴν Κωνικὴν βκδ, ὡς 16 πρὸς 6. Ἐπεὶ δὲ ἡ ἐπιφάνεια τȣ̃ Κώνȣ βκδ (ὄντος ἰσοπλεύρȣ), διπλασία ἐςὶ τῆς βάσεως ξτ (10), φανερὸν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τȣ̃ Κώνȣ χωρὶς δηλονότι τῆς βάσεως, ἐςὶ πρὸς ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τȣ̃ Κώνȣ, ὡς 2 πρὸς 3, ἢ ὡς 6 πρὸς 9. Δι᾽ ἴσȣ ἄρα ὅλη ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια, πρὸς ὅλην τὴν τȣ̃ ἐγγεγραμμένȣ ἰσοπλεύρȣ Κώνȣ ἐπιφάνειαν, ὡς 16 πρὸς 9. Ὅ ἔδει δεῖξαι.)

---

(1) *Πόρ.* Ε΄. *τῆς ΙΕ. τȣ̃ ι΄.* (2) *Δ. τȣ̃ ς΄.* (3) *Πόρ. Γ΄. τῆς Δ. τȣ̃ β΄.* (4) Πορ. *Β΄. τῆς Β. τȣ̃ ιβ΄.* (5) *ΚΔ. τȣ̃ παρόντος.* (6) *Πορ.* Α΄. *τῆς ΙΗ. τȣ̃ παρόντος.* (7) *Πόρ.* Ε΄. *τῆς ΙΕ. τȣ̃ δ΄.* (8) *ΚΖ. τȣ̃ παρόντος.* (9) *Προτ. προηγ.* (10) *Πόρ.* Α΄. *τῆς ΛΗ. τȣ̃ παρόντος.*

Πρότασις Μ΄.

σχ. 55. Ἡ τῆς Σφαίρας ἐπιφάνεια πρὸς ὅλην τὴν τȣ̃ περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένȣ ἰσοπλεύρȣ Κώνȣ ἐπιφάνειαν λόγον ἔχει, ὃν ὁ 4 πρὸς 9.

Ἔςω περὶ τὸν μέγιςον τῶν ἐν τῇ Σφαίρᾳ κύκλον βπμ, Τρίγωνον ἰσόπλευρον περιγεγραμμένον τὸ δοζ, ἐξ ȣ̃ περὶ τὸν Ἄξονα οαβ περιενεχθέντος, ἀπογεγεννήσθω Κῶνος ἰσόπλευρος περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένος· περὶ δὲ τὸ ἰσόπλευρον Τρίγωνον δοζ περιγεγράφθω κύκλος ὁ νδλοζ, ὃς ἔςαι τῷ προτέρῳ ὁμόκεντρος (1), ϗ προσεκβεβλήσθω ὁ Ἄξων οαβ ἐπὶ τὸ ν. Ἐπεὶ ȣ̃ν ἡ βν τεταρτημόριόν ἐςι τȣ̃ Ἄξονος ον (2), φανερὸν ὅτι ἡ ον διπλασία ἐςὶ τῆς κβ· Τοιγαρȣ̃ν, ἐπεὶ ὁ τῶν κύκλων λόγος ἐςὶ διπλασίων τȣ̃ τῶν διαμέτρων (3)· ἔσεται δὴ ὁ κύκλος βπμ, πρὸς τὸν κύκλον νδλοζ, ὡς 1 πρὸς 4· Προδέδεικται δὲ ἐν τῇ προτέρᾳ δείξει τῆς προηγȣμένης, ὅτι ὁ κύκλος νδλοζ ἐςὶ πρὸς τὸν κύκλον ξτ, ὅς ἐςι βάσις τȣ̃ εἰς τὴν σφαῖραν λζ ἐγγεγραμμένȣ ἰσοπλεύρȣ Κώνȣ, ὡς 4 πρὸς 3. Δι᾽ ἴσȣ ἄρα ὁ κύκλος βπμ πρὸς τὸν κύκλον ξτ, ὡς 1 πρὸς 3 (4)· ἔςι δὲ ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τȣ̃ Κώνȣ δοζ, τριπλασία τȣ̃ κύκλȣ ξτ (5)· ὅλη ἄρα ἡ τȣ̃ Κώνȣ ἐπιφάνεια ἐννεαπλασία ἐςὶ τȣ̃ κύκλȣ βπμ· ἀλλὰ τȣ̃ κύκλȣ βπμ τετραπλασία ἐςὶν ἡ τῆς σφαίρας τπ ἐπιφάνεια (6)· ὅλη ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τȣ̃ ἰσοπλεύρȣ Κώνȣ δοζ ἔςαι πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, περὶ ἣν περιγέγραπται, ὡς 9 πρὸς 4. Ὅ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα. Α΄. Δῆλον ἐκ τῆς δείξεως ταύτης, ὅτι ὁ τȣ̃ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένȣ ἰσοπλεύρȣ Κώνȣ ἄξων βο, ἡμιόλιός ἐςι τῆς τῆς σφαίρας διαμέτρȣ βκ, τȣτ᾽ ἔςιν ὡς 3 πρὸς 2.

Β΄. Δῆλον δ᾽ ἔτι ἐκ τῆς αὐτῆς δείξεως, ὅτι ἡ τȣ̃ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένȣ ἰσοπλεύρȣ Κώνȣ δοζ βάσις ξτ, ἡμιολία ἐςὶ συναμφοτέρου τῆς βάσεως τȣ̃ περὶ τὴν αὐτὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένȣ Κυλίνδρȣ· ἔςι γὰρ ὁ ξτ πρὸς τὸν βπμ, ὡς 3 πρὸς 1· ἄρα ὁ ξτ πρὸς τὸν δὶς βπμ, ὡς 3 πρὸς 2.

Γ΄. Ἡ τȣ̃ ἰσοπλεύρȣ Κώνȣ δοζ ἐπιφάνεια ἡμιολία ἐςὶ τῆς ἐπιφανείας τȣ̃ περὶ τὴν αὐτὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένȣ Κυλίνδρȣ· ἔςι γὰρ ἐκείνη μὲν, διπλασία τȣ̃ ξτ κύκλȣ (7)· αὕτη δὲ, τετραπλασία τȣ̃ βπμ (8)· ἡ κωνικὴ ἄρα ἐπιφάνεια ἔςαι πρὸς τὴν κυλινδρικὴν, ὡς δὶς 3 πρὸς τετράκις 1· τȣτ᾽ ἔςιν ὡς 6 πρὸς 4· ἢ ὡς 3 πρὸς 2.

---

(1) Σχόλ. τῆς ΙΓ. ϗ ΙΔ τȣ̃ δ΄. (2) Πόρ. Ε΄. τῆς ΙΕ. τȣ̃ δ΄. (3) Β. τȣ̃ ιβ΄. (4) ΚΕ. τȣ̃ ε΄. (5) Πόρισμ. Α΄. τῆς ΙΔ. τȣ̃ παρόντος. (6) ΚΔ. τȣ̃ παρόντος. (7) Πόρ. Α΄. τῆς ΛΔ. τȣ̃ παρόντος. (8) Κς. ϗ ΚΔ. τȣ̃ παρόντος.

Δʹ. Ὁ μέγιϛος κύκλος (βπμ) τῆς εἰς Κῶνον ἰσόπλευρον (τὸν δοζ) ἐγγεγραμμένης Σφαίρας, ἡ ἐπιφάνεια τῆς αὐτῆς Σφαίρας, ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τȣ̃ Κώνȣ (δοζ), εἰς ὃν ἡ Σφαῖρα ἐγγέγραπται, ϗ ἡ ἐπιφάνεια τῆς περὶ τὸν αὐτὸν Κῶνον περιγεγραμμένης Σφαίρας νδλοζ, εἰσὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς 1, 4, 9, 16· τȣτʹ ἔϛιν ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4. Δῆλον ἐκ τῆς ΚΔʹ, ἐκ τῆς παρȣ́σης, ϗ ἐκ τῆς ΛΘʹ. τȣ̃ παρόντος.

Εʹ. Ὅθεν δοθείσης τῆς κατὰ τὴν ἐγγεγραμμένην Σφαῖραν διαμέτρȣ αβ, εὐχερῶς καταγραφήσονται Κύκλοι ταῖς εἰρημέναις ἐπιφανείαις ἴσοι. Αἱ γάρτοι ἀκτῖνες τῶν τοιȣ́των Κύκλων ἔσονται 2αβ, 4αβ (1)· ϗ τὰ μέτρα τῶν κατʹ ἐκείνȣς ἐπιφανειῶν αὐτίκα γνωσθήσονται.

ϛʹ. Ἐπεὶ ἡ τῆς περὶ Κῶνον ἰσόπλευρον περιγεγραμμένης Σφαίρας διάμετρος ον, διπλασία ἐϛὶ τῆς κατὰ τὴν ἐγγεγραμμένην Σφαῖραν διαμέτρȣ κβ, ἔσεται δὴ ἡ περιγεγραμμένη Σφαῖρα ὀκταπλασία τῆς ἐγγεγραμμένης ἐν λόγῳ δηλονότι τριπλασίονι τῶν διαμέτρων (2)· ἢ ὡς ὁ κύβος τῆς δυάδος πρὸς τὸν κύβον τῆς μονάδος (3).

Πρότασις ΜΑʹ.

Ὅλη ἡ τȣ̃ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένȣ ἰσοπλεύρȣ Κώνου ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐϛὶ τῆς ὅλης ἐπιφανείας τȣ̃ εἰς τὴν αὐτὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμένȣ ὁμοίȣ Κώνȣ. σ. 55.

Ὅλη γὰρ ἡ τȣ̃ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένȣ ἰσοπλεύρȣ Κώνȣ δοζ ἐπιφάνεια ἐϛὶ πρὸς τὴν τῆς Σφαίρας, περὶ ἣν περιγέγραπται ἐπιφάνειαν, ὡς 9 πρὸς 4 (4)· ἡ δὲ τῆς Σφαίρας πρὸς τὴν τȣ̃ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένȣ ὁμοίȣ Κώνȣ σκτ, ὡς 16 πρὸς 9 (5). Δὶ ἴσȣ ἄρα τεταραγμένως (6), ὅλη ἡ τȣ̃ περιγεγραμμένȣ ἰσοπλεύρȣ Κώνȣ ἐπιφάνεια, πρὸς ὅλην τὴν τȣ̃ ἐγγεγραμμένου ὁμοίȣ Κώνȣ, ὡς 16 πρὸς 4, ἢ ὡς 4 πρὸς 1. Ὃ ἔδει δεῖξαι.

Παραπλησίῳ δὲ τρόπῳ δείκνυται, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς περὶ Κῶνον ἰσόπλευρον περιγεγραμμένης Σφαίρας τετραπλασία ἐϛὶ τῆς ἐπιφανείας, τῆς εἰς τὸν αὐτὸν Κῶνον ἐγγεγραμμένης Σφαίρας. Δῆλον ἐκ τȣ̃ Δʹ. Πορίσματος τῆς προηγȣμένης.

---

(1) Πόρ. Βʹ. τῆς Β. τȣ̃ ιβʹ. (2) ΙΗ. τȣ̃ ιβʹ. (3) Σχόλ. τῆς ΛΓ. τȣ̃ ιαʹ. (4) Διὰ τὴν προηγȣμένην. (5) ΛΘ. τȣ̃ παρόντος. (6) ΚΓ. τȣ̃ εʹ.

Πρότασις ΜΒ΄.

Ἡ Σφαῖρα πρὸς τὸν εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένον ἰσόπλευρον Κῶνον βκγ ἐςὶν, ὡς 32 πρὸς 9.

κ. 56. Τετμήσθω ἡ σφαῖρα ϗ ὁ Κῶνος βκγ, διὰ τȣ̃ κοινȣ̃ Ἄξονος κοἐπιπέδῳ ποιȣ̃ντι ἐν μὲν τῇ Σφαίρᾳ Κύκλον μέγιςον τὸν οζκι· ἐν δὲ τῷ Κώνῳ Τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ βκγ. Διὰ δὲ τȣ̃ κέντρȣ α διήχθω ἐπίπεδον ὀρθὸν ἐπὶ τὸν Ἄξονα οκ, ἀποτέμνον Ἡμισφαίριον τὸ ζθκι, εἰς ὃ νενοήσθω Κῶνος μέγιςος ἐγγεγραμμένος ὁ ζκι. Ἐπεὶ ȣ̃ν ἡ τȣ̃ ἰσοπλεύρȣ Τριγωνȣ πλευρὰ βγ ἀποτέμνει τȣ̃ Ἄξονος οκ τεταρτημόριον τὴν οπ (1), ἔσεται δὴ ἡ πκ πρὸς τὴν ακ, ὡς 3 πρὸς 2, τȣτ᾿ ἔςιν, ὡς 9 πρὸς 6. Δέδεικται δὲ ἐν τῇ ΛΘ΄., ὅτι ἡ βάσις ξτ ἐςὶ πρὸς τὸν κύκλον οζκι, τȣτ᾿ ἔςι πρὸς τὴν βάσιν νδ, ὡς 3 πρὸς 4, εἴτ᾿ ȣ̃ν ὡς 6 πρὸς 8· ἐπεὶ ἄρα, ὁ λόγος τȣ̃ Κώνȣ βκγ πρὸς τὸν ζκι Κῶνον σύγκειται (2), ἔκ τε τȣ̃ λόγȣ τȣ̃ ὕψȣς πκ πρὸς τὸ ὕψος ακ (τȣτ᾿ ἔςι τȣ̃ 9 πρὸς 6), ϗ ἐκ τȣ̃ λόγȣ τῆς βάσεως ξτ πρὸς τὴν βάσιν νϑ (τȣτ᾿ ἔςι τȣ̃ 6 πρὸς 8), ἔσεται δὴ ὁ Κῶνος βκγ πρὸς τὸν Κῶνον ζκι, ὡς 9 πρὸς 8. Ἐπεὶ δὲ ἡ Σφαῖρα γϑ ἐςὶ τετραπλασία τȣ̃ Κώνȣ ζκι (3)· Ὁ ἰσόπλευρος ἄρα Κῶνος βκγ ἔςαι πρὸς τὴν Σφαῖραν γϑ, ὡς 9 πρὸς 32. Ὅ ἔδει δεῖξαι.

Ἄλλως. πκ πρὸς ακ, ὡς 3 πρὸς 2, ἢ ὡς 9 πρὸς 6· ϗ ἐπεί ἐςιν ξτ πρὸς γϑ, ὡς 3 πρὸς 4 (4), ἢ ὡς 9 πρὸς 8· ἔσεται ξτ πρὸς 4γϑ, ὡς 6 πρὸς 32· ὁ Κῶνος ἄρα, οὗ ὕψος μὲν πκ, βάσις δὲ ξτ, τȣτ᾿ ἔςιν ὁ Κῶνος βκγ πρὸς τὸν Κῶνον, ȣ̃ ὕψος μὲν ακ βάσις δὲ 4γϑ, τȣτ᾿ ἔςι (5) πρὸς τὴν Σφαῖραν γϑ ἐν λόγῳ ἐςὶ συγκειμένῳ, ἔκ τε τȣ̃ λόγȣ τȣ̃ 9 πρὸς 6, ϗ τȣ̃ 6 πρὸς 32 (6), ἢ ὡς 9 πρὸς 32 (7).

Πρότασις ΜΓ΄.

κ. 55. Κῶνος ἰσόπλευρος ὁ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένος, ὀκταπλάσιός ἐςι Κώνȣ ὁμοίȣ τȣ̃ εἰς τὴν αὐτὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμένȣ.

Ἔςωσαν δύω Κῶνοι ἰσόπλευροι οἱ σκτ, δοζ ὁ μὲν, ἐγγεγραμμένος εἰς τὴν Σφαῖραν, ὁ δὲ, περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένος· ϗ Ἄξων κοινὸς ὁ οκβ. Διὰ δὲ τȣ̃ Ἄξονος τετμήσθωσαν ἐπιπέδῳ τῶν τε Κώνων ἑκάτερος ϗ ἡ Σφαῖρα· ϗ

---

(1) Πόρ. Ε΄. τῆς ΙΕ. τȣ̃ δ΄. (2) Σχόλ. Β΄. τῆς ΙΕ. τȣ̃ ιβ΄. (3) Λ. τȣ̃ παρόντος. (4) Πορ. τῆς ΛΘ. τȣ̃ παρόντος. (5) ΚΗ. τȣ̃ παρόντος. (6) Σχόλ. Β΄. τῆς ΙΕ. τȣ̃ ιβ΄. (7) Ὁρισμ. Ε. τȣ̃ ϛ΄.

ἔσονται αἱ Τομαὶ αὐτῶν Τρίγωνα δύω ἰσόπλευρα, ϗ Κύκλος μέγιςος ὁ βπμ. Περὶ τὸ Τρίγωνον δοζ νενοήσθω Κύκλος περιγεγραμμένος ὁ νδοζ· ϗ ὁ Ἄξων οκβ προεκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ν. Ἐπεὶ ȣ̓͂ν ἡ τȣ͂ ἰσοπλεύρȣ Τριγώνȣ πλευρὰ δζ, ἀποτέμνει τȣ͂ Ἄξονος ον τεταρτημόριον τὴν νβ (1), δῆλον ὅτι ἡ νο διπλασία ἐςὶ τῆς βκ. Ὡσαύτως ἐπεὶ ἡ τȣ͂ ἑτέρȣ ἰσοπλεύρȣ Τριγώνȣ πλευρὰ στ ἀποτέμνει τȣ͂ Ἄξονος βκ τεταρτημόριον τὴν βγ (2), ἔσεται ὡς ἡ νο πρὸς τὴν οβ, ȣ̔́τως ἡ βκ πρὸς τὴν κγ· ϗ ἐν ἐναλλάσσοντι ὡς ἡ νο πρὸς τὴν βκ, ȣ̔́τως ἡ οβ πρὸς κγ· διπλασία δὲ ἡ νο τῆς βκ, διπλασία ἄρα ϗ ἡ οβ τῆς κγ. Διὰ τὸ εἶναι δὲ τὰ Τρίγωνα δοζ, σκτ ὅμοια, ἔσονται δὴ ϗ αἱ τῶν κωνικῶν βάσεων διάμετροι δζ, στ ἐν λόγῳ διπλασίῳ (3). Τοιγαρȣ͂ν ἐπεὶ οἱ Κῶνοι δοζ, σκτ εἰσὶν ὅμοιοι (4), ϗ ὁ λόγος αὐτῶν (5) τριπλασίων τȣ͂ λόγȣ τῶν διαμέτρων δζ, στ, αἵτινες εἰσὶ ὡς 2 πρὸς 1· ἔσεται δὴ ὁ Κῶνος δοζ πρὸς τὸν Κῶνον σκτ, ὡς 8 πρὸς 1. Ὃ ἔδει δεῖξαι.

Ἄλλως. Ἀχθεισῶν τῶν εὐθειῶν δν, σβ ἐπεὶ ἐςὶν ἡ γωνία δοζ, ἴση τῇ σκτ (6), ἄρα καὶ αἱ ἡμίσειαι αὐτῶν δον, σκβ ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις· ϗ αἱ οδν, κσβ ὀρθαὶ (7), ϗ τὰ Τρίγωνα δον, σκβ ὅμοια (8), ϗ ἑπομένως δο : σκ : ον : κβ : : 2 : 1 (9)· ἄρα ἡ δζ (= δο) : στ (= σκ) : : 2 : 1· ϗ οἱ ἰσόπλευροι Κῶνοι, ἐπεί εἰσιν ὅμοιοι, ἔσονται ὡς 8 πρὸς 1· εἰσὶ γὰρ 8, 4, 2, 1 ∺.

Πόρισμα.

Ὁ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένος ἰσόπλευρος Κῶνος ἐςὶ πρὸς τὸν εἰς τὴν αὐτὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμένον ὅμοιον Κῶνον, ὡς ἡ περὶ Κῶνον ἰσόπλευρον περιγεγραμμένη Σφαῖρα πρὸς τὴν εἰς τὸν αὐτὸν Κῶνον ἐγγεγραμμένην, τȣ̓τ' ἐςιν ὡς 8 πρὸς 1. Δῆλον ἔκ τε τῆς παρȣ́σης ϗ τȣ͂ ς'. Πορίσματος τῆς Μ'.

Καὶ ἐν γένει ἐπεὶ τὰ οἱȣδήτινος εἴδȣς ὅμοια σώματα τὰ δυνάμενα περὶ Σφαῖραν περιγραφῆναι ἢ εἰς αὐτὴν ἐγγραφῆναι, ἔχει τὰς διαμέτρȣς ἢ τὰς πλευρὰς ταῖς διαμέτροις τῶν ἐγγεγραμμένων, ἢ περιγεγραμμένων Σφαιρῶν ἀνάλογον, ϗ ἔςι πρὸς ἄλληλα ἐν λόγῳ τριπλασίονι μὲν κατά γε τὰ ςερεὰ, διπλασίονι, δὲ κατὰ τὰς ἐπιφανείας τȣ͂ λόγȣ τῶν ὁμολόγων διαμέτρων, ἢ πλευρῶν· διὰ ταῦτα δὴ (10) ὃν λόγον ἔχει ἡ περὶ σῶμα οἱονδήποτε περιγε-

(1) Πόρισμ. Ε'. τῆς ΙΕ. τȣ͂ δ'. (2) Πόρ. τὸ αὐτό. (3) Δ. τȣ͂ ς'. (4) Ὁρισμ. Δ. τȣ͂ ιβ'. (5) ΙΒ. τȣ͂ ιβ'. (6) Πόρισμ. τῆς Ε. τȣ͂ α'. (7) ΛΑ. τȣ͂ γ'. (8) Πόρ. Θ. τῆς ΛΒ. τȣ͂ α'. ϗ Προτ. Δ. τοῦ ς'. (9) Δῆλον ἐκ τῆς δείξεως τῆς Μ. τοῦ παρόντος. (10) ΛΔ. ϗ Ις. τȣ͂ ε'.

γραμμένη Σφαῖρα, πρὸς τὴν εἰς τὸ αὐτὸ σῶμα ἐγγεγραμμένην, τὸν αὐτὸν ἕξει ϗ τὸ περὶ τὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένον σῶμα, πρὸς τὸ εἰς τὴν αὐτὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμένον ὅμοιον σῶμα. Ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τῆς περὶ οἱονδήποτε σῶμα περιγεγραμμένης Σφαίρας, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς εἰς τὸ αὐτὸ σῶμα ἐγγεγραμμένης Σφαίρας, τὸν αὐτὸν ἕξει ϗ ἡ ἐπιφάνεια τȣ̃ περὶ τὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένȣ σώματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τȣ̃ εἰς τὴν αὐτὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμένȣ ὁμοίȣ σώματος.

Πρότασις ΜΔ΄.

Τῆς Σφαίρας τό,τε ςερεὸν ϗ ἡ ἐπιφάνεια ἐςὶ, πρός τε τὸ ςερεὸν ϗ τὴν
χ. 55. ἐπιφάνειαν τȣ̃ περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένȣ ἰσοπλεύρȣ Κώνȣ (δοζ), ὡς 4 πρὸς 9.

Ἔςι γὰρ ἡ μὲν Σφαῖρα τπ, πρὸς τὸν εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένον ἰσόπλευρον Κῶνον σκτ, ὡς 32 πρὸς 9 (1)· ȣ̂τος δὲ πρὸς τὸν περὶ τὴν αὐτὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένον ὅμοιον Κῶνον δοζ, ὡς 1 πρὸς 8 (2), τȣτ᾽ ἔςιν ὡς 9 πρὸς 72. Δι᾽ ἴσȣ ἄρα ἡ Σφαῖρα τπ, πρὸς τὸν περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένον ἰσόπλευρον Κῶνον δοζ, ὡς 32 πρὸς 72· τȣτ᾽ ἔςι (διαιρεθέντος ἑκατέρου τȣ̃ ὅρȣ διὰ 8), ὡς 4 πρὸς 9.

Ἄλλως. Ἡ Σφαῖρα ἐςὶ πρὸς τὸν εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένον ἰσόπλευρον Κῶνον, ὡς 32 πρὸς 9 (3)· ὁ δὲ ἐγγεγραμμένος πρὸς τὸν περὶ τὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένον, ὡς 1 πρὸς 8 (4)· τȣτ᾽ ἔςιν ὡς 4 πρὸς 32. Δι᾽ ἴσȣ ἄρα τεταραγμένως (5) ἡ Σφαῖρα, πρὸς τὸν περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένον ἰσόπλευρον Κῶνον, ὡς 4 πρὸς 9.

Δέδεικται δὲ ἐν τῇ Μ΄. Ὅτι ϗ ἡ ἐπιφάνεια τῆς Σφαίρας, ἐςὶ πρὸς ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τȣ̃ περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένȣ ἰσοπλεύρȣ Κώνȣ, ὡς 4 πρὸς 9. Τῆς Σφαίρας ἄρα τό,τε ςερεὸν ϗ ἡ ἐπιφάνεια ἐςὶ πρός τε τὸ ςερεὸν ϗ τὴν ἐπιφάνειαν τȣ̃ περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένȣ ἰσοπλεύρȣ Κώνȣ, ὡς 4 πρὸς 9· Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὅπερ ἄρα ἔχει θαυμάςας ὁ Ἀρχιμήδης ἐν τῇ Σφαίρᾳ, ϗ τῷ τὴν Σφαῖραν περιλαμβάνοντι Κυλίνδρῳ, τȣτ᾽ αὐτὸ δέδεικται ἤδη καὶ ἡμῖν ἐπὶ τῆς Σφαίρας ϗ τȣ̃ τὴν Σφαῖραν περιλαμβάνοντος ἰσοπλεύρȣ Κώνȣ. Ὅτι δηλαδὴ ἐνυπάρχει ϗ τοῖς ςερεοῖς ὁ αὐτὸς λογικὸς λόγος, ὅσπερ ἐν ταῖς ἐπιφανείαις

---

(1) *ΜΒ. τȣ̃ παρόντος.* (2) *Προτ. προηγȣμ.* (3) *ΜΒ. τȣ̃ παρόντος.* (4) *ΜΓ. τοῦ παρόντος.* (5) *ΚΓ. τοῦ ε΄.*

τούτων τῶν σωμάτων· ὡς γὰρ ἐκεῖνος ἔδειξεν ὅτι ἡ Σφαῖρα ἐστὶ, πρὸς τὸν Κύλινδρον κατά τε τὸ στερεὸν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν, ὡς 2 πρὸς 3· οὕτω δὴ καὶ ἡμῖν δέδεικται, ὅτι ἡ Σφαῖρα ἐστὶ πρὸς τὸν τὴν Σφαῖραν περιλαμβάνοντα ἰσόπλευρον Κῶνον, ὡς 4 πρὸς 9, κατά τε τὸ στερεὸν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν.

Ἐντεῦθεν δὲ τὸν αὐτὸν λόγον τοῦτ᾽ ἔστι τὸν ἡμιόλιον, ὃν παρέδωκεν Ἀρχιμήδης ὑπάρχειν μεταξὺ Σφαίρας καὶ Κυλίνδρου, συνεχίζεσθαι κατά τε τὸ στερεὸν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν, ἀπὸ τοῦ περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου Κώνου μέχρι τῆς Σφαίρας εὐμαρῶς ἀποδείξαντες, τέλος ἤδη τῷ συγγραμματίῳ ἐπιθήσομεν.

Πρότασις ΜΕ΄.

Κῶνος ἰσόπλευρος περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένος, καὶ Κύλινδρος ὀρθὸς περὶ τὴν αὐτὴν Σφαῖραν ὡσαύτως περιγεγραμμένος, καὶ αὐτὴ ἡ Σφαῖρα, περὶ ἣν ὅ,τε Κῶνος καὶ ὁ Κύλινδρος περιγεγράφαται, τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον κατά τε τὸ στερεὸν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν, τοῦτ᾽ ἔστι τὸν ἡμιόλιον. σχ. 57.

Διὰ μὲν γὰρ τὴν ΔΒ΄. τοῦ παρόντος, ὁ ὀρθὸς Κύλινδρος ὁ τὴν Σφαῖραν περιλαμβάνων, ἐστὶ πρὸς τὴν Σφαῖραν κατά τε τὸ στερεὸν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν, ὡς 3 πρὸς 2, ἢ ὡς 6 πρὸς 4. Διὰ δὲ τὴν προηγουμένην ΜΔ΄. ὁ περὶ τὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένος ἰσόπλευρος Κῶνος βαδ, ἐστὶ πρὸς τὴν Σφαῖραν κατά τε τὸ στερεὸν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν, ὡς 9 πρὸς 4. Ὁ αὐτὸς ἄρα Κῶνος ἐστὶ πρὸς τὸν Κύλινδρον, κατά τε τὸ στερεὸν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν, ὡς 9 πρὸς 6. Τὰ τρία ἄρα ταῦτα σώματα ὁ Κῶνος δηλαδὴ, ὁ Κύλινδρος καὶ ἡ Σφαῖρα λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα, ὃν οἱ ἀριθμοὶ 9, 6, 4· τοῦτ᾽ ἔστι τὸν ἡμιόλιον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Μϛ΄.

Ὁ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένος ἰσόπλευρος Κῶνος, πρὸς τὸν περὶ τὴν αὐτὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένον ὀρθὸν Κύλινδρον τὸν αὐτὸν ἔχει ἡμιόλιον λόγον, κατά τε τὰ στερεὰ καὶ τὰς ἐπιφανείας, ὅλας τε καὶ τὰς ἁπλᾶς, καὶ δὴ καὶ κατὰ ὕψη καὶ τὰς βάσεις. σχ. τὸ αὐτό.

Πρόδηλος ἡ Πρότασις ὅσον μὲν ἥκει εἰς τὰς ὁλικὰς ἐπιφανείας καὶ τὰ στερεὰ, ἐκ τῆς προηγουμένης Προτάσεως· ὅσον δ᾽ ἥκει εἰς τὰς ἁπλᾶς ἐπιφανείας, ἐκ τοῦ Γ΄. Πορίσματος τῆς Μ΄. τοῦ παρόντος· περὶ δὲ τὰ ὕψη καὶ τὰς βάσεις ἐκ τοῦ Α΄, καὶ Β΄. Πορίσματος τῆς αὐτῆς Μ΄.

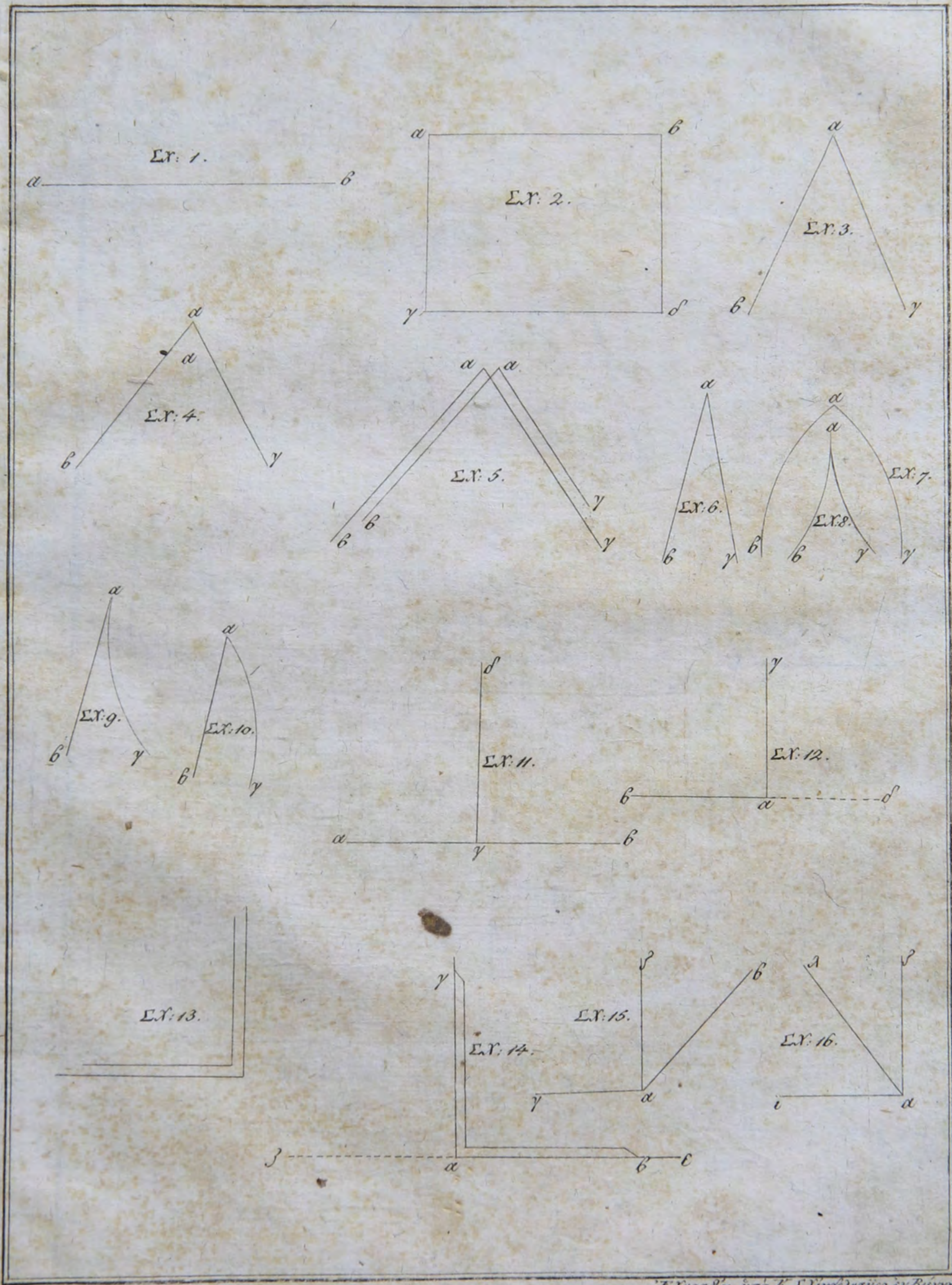
Τέλος.

Παροράματα.

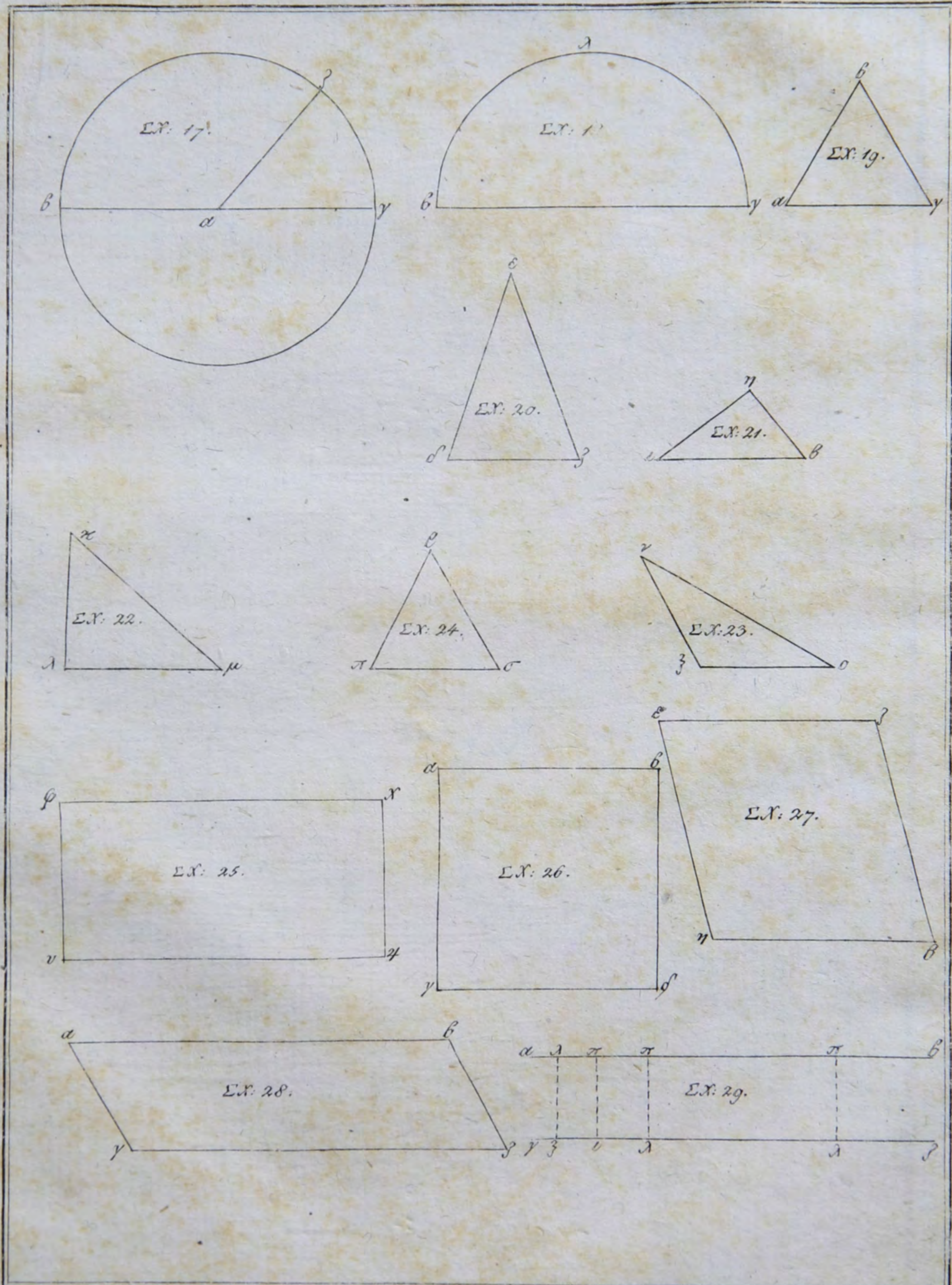
Σελ.	στίχ.	
10	22	δψ Γρ. αψ
αὐτ.	32	δδ Γρ. δα
11	8	ὁποσαισοῦν Γρ. ὁποσασοῦν
12	2	ἐφεξῆς· Γρ. ἐφεξῆς· ΛΒ.
23	9	δηλ Γρ. δκλ
αὐτ.	σημ.	(12) ϗ (13) ηʹ Γρ. κʹ
29	3	αβ Γρ. αδ
41	1	εζη Γρ. εζκ
50	18	τῷ τρίτῳ Γ. τῷ αὐτῷ τρίτῳ
55	1	ἀντὶ (10) Γρ. (2), ϗ ἀντὶ (2) Γρ. (3) καὶ καθεξῆς· πρόθες δὲ ἐν τῇ σημειώσει, (12) Σχόλ. μετὰ τὴν ΛΔ.
57	28	(εζ) Γρ. (βζ)
59	1	ϗ βζ Γρ. ϗ βζα
60	21	αβ Γρ. $\genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha\beta}{\tau}$
αὐτ.	σημ.	(6) Αʹξ. ιςʹ. Γρ. ΜΖʹ Βιβλ. αʹ
61	15	ἔσται βζ Γρ. ἔσται $\genfrac{}{}{0pt}{}{\beta\zeta}{\tau}$
62	15	τὸ ἤ Γρ. ἤ τὸ
71	5	7 × 1 Γρ. 3 × 7
77	σημ.	(2) τοῦ αʹ Γρ. τοῦ βʹ
84	14	γβ Γρ. γζ
84	σημ.	(2) Βιβλ. αʹ. Γρ. Βιβλ. βʹ
85	σημ.	(3) τοῦ αʹ Γρ. τοῦ βʹ
91	18	ϗ Γρ. β
99	20	ασ Γρ. αο
100	σημ.	(3) τοῦ αʹ Γρ. τοῦ γʹ
109	32	εδ Γρ. εαδ
113	23	πρὸς τῇ Γρ. πρὸς τῇ αὐτῇ
117	23	βη Γρ. βκ
118	25	βηγ Γρ. βκγ
122	27	σημεῖον Γρ. σημεῖον β
αὐτ.	σημ.	(11) τοῦ αʹ Γρ. τοῦ γʹ
123	1	βγ Γρ. γβλ
128	23	χρήσει Γρ. ἐν χρήσει
150	12	κύκλου, Γρ. κύκλου ἡμιδιαμέτρου,
159	22	ϗ περὶ Γρ. ϗ περὶ Ἀλγορίθμου, ϗ
161	31	τεταγμένως Γρ. τεταραγμένως
165	26	αὐτὸ Γρ. αὐτὸ οὕτως
173	27	τῶν Γρ. τῶν ὅλων
181	4	ξ : ι Γρ. ζ : ι
185	26	βζ Γρ. βζι
186	17	τῶν Γρ. τῶν τῶν
197	26	$\frac{8}{3}$ Γρ. $\begin{smallmatrix}8\\4\\8\end{smallmatrix}$
204	19	αε Γρ. δε. ϗ βα : αγ :: δα : αε
205	3	βγ Γρ. βλ
209	25	Γωνίᾳ Γρ. Γωνίᾳ (1),
215	4	πρ Γρ. λρ
231	σημ.	(2) τοῦ αʹ Γρ. τοῦ ςʹ
244	30	ξ Γρ. ξι
250	13	τ, Γρ. περιττεύει
253	16	$\sqrt{\tfrac{1}{4}\,\alpha\beta}$ Γρ. $\sqrt{\tfrac{1}{4}\,\alpha\beta^{\tau}}$
254	32	αβ × ε Γρ. αβ + ε
255	12	$\sqrt{\tfrac{1}{4}\,\alpha\beta}$ Γρ. $\sqrt{\tfrac{1}{4}\,\alpha\beta^{\tau}}$
274	21	σῶμα, Γρ. σῶμα οὐδὲν,
283	18	περιεχόμενον Γρ. περιεχόμενον ἐστί.
αὐτ.	23	ταῦτα Γρ. ταὐτὰ
294	16	τῆς κατὰ Γρ. τοῦ κατὰ
297	σημ.	(1) Ὅρ. Αʹ Γρ. (1) Ὅρ. Βʹ
304	21	τοῦ ἐπὶ Γρ. ἡ ἐπὶ
310	σημ.	(2) ΚΗ Γρ. Κ
αὐτ.	αὐτ.	(5) τοῦ εʹ Γρ. τοῦ ςʹ
314	26	η Γρ. ὁ
319	7	πρ Γρ. πγ
320	2	οὐκ Γρ. ἐκ
323	25	αὕτης Γρ. αὕτη
325	16	κορυφῆς, ϗ, Γρ. κορυφῆς β,
334	7	$\eta\alpha^{\tau} =$ Γρ. $\eta\alpha^{\tau} +$
335	29	$\beta\varepsilon^{\kappa}$ Γρ. $\beta\varepsilon^{\tau}$
378	27	ξι Γρ. ξτ
385	15	τριπλῇ Γρ. διπλῇ.

Σημ. Ἀντὶ θατέρα Γρ. ἁπανταχοῦ ἡ ἑτέρα· ϗ ἀντὶ θατέρας Γρ. τῆς ἑτέρας· ϗ ἀντὶ θατέραν Γρ. τὴν ἑτέραν· καὶ ἀντὶ θάτερον Γρ. τὸν ἕτερον.

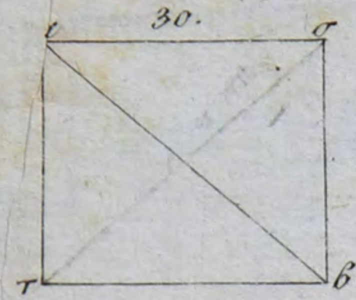
1



Ἐχαράχθη ὑπὸ Κ. Σνένδελμαϋερ ἐν Βιέννῃ

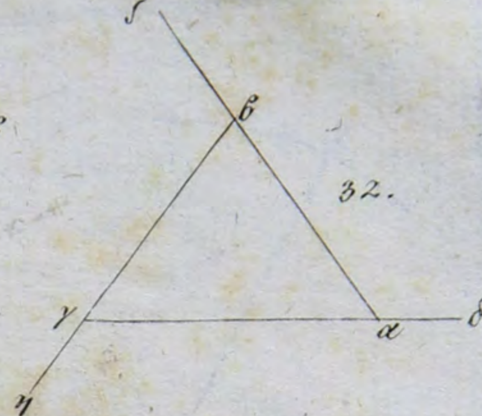

ΣΧ: 17.
β α γ ζ
ΣΧ: 1
λ β γ
ΣΧ: 19.
β α γ
ΣΧ: 20.
ε δ ζ
ΣΧ: 21.
η β
ΣΧ: 22.
κ λ μ
ΣΧ: 24.
ρ π σ
ΣΧ: 23.
ν ξ ο
ΣΧ: 25.
φ χ υ ψ
ΣΧ: 26.
α β γ δ
ΣΧ: 27.
ε ζ η θ
ΣΧ: 28.
α β γ ζ
ΣΧ: 29.
α λ π π π β
γ ξ ι λ λ ζ

30.

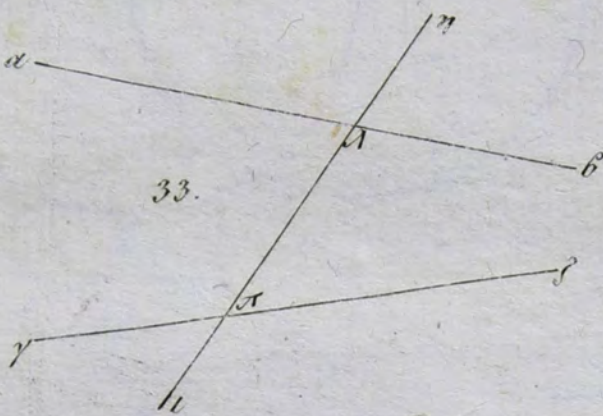


31.

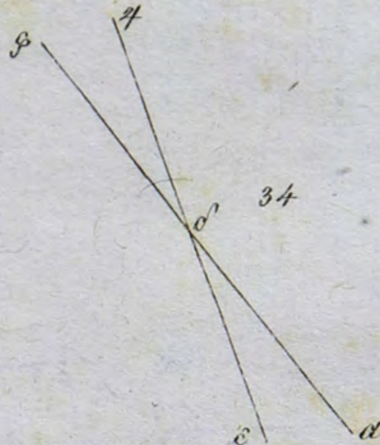
32.



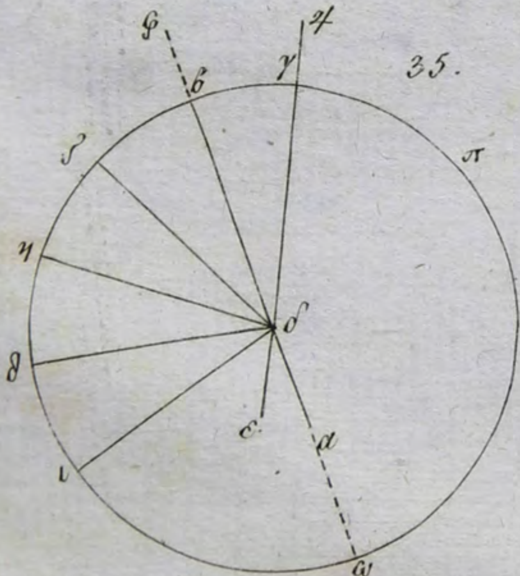
33.



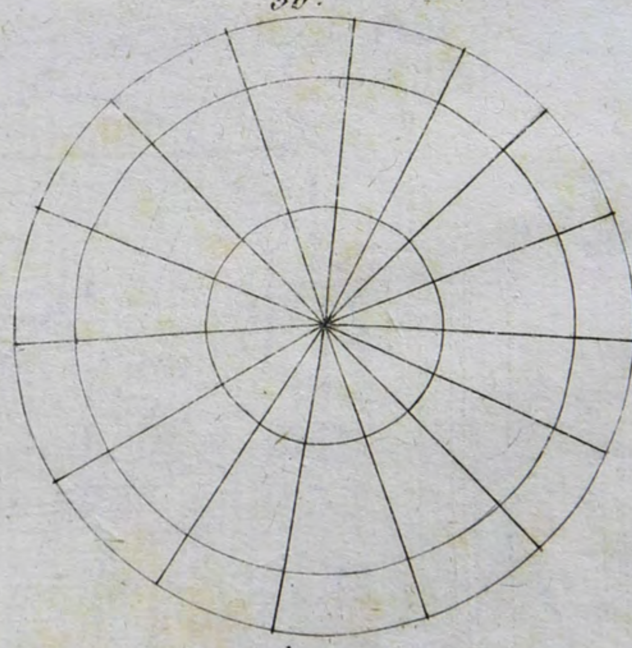
34.

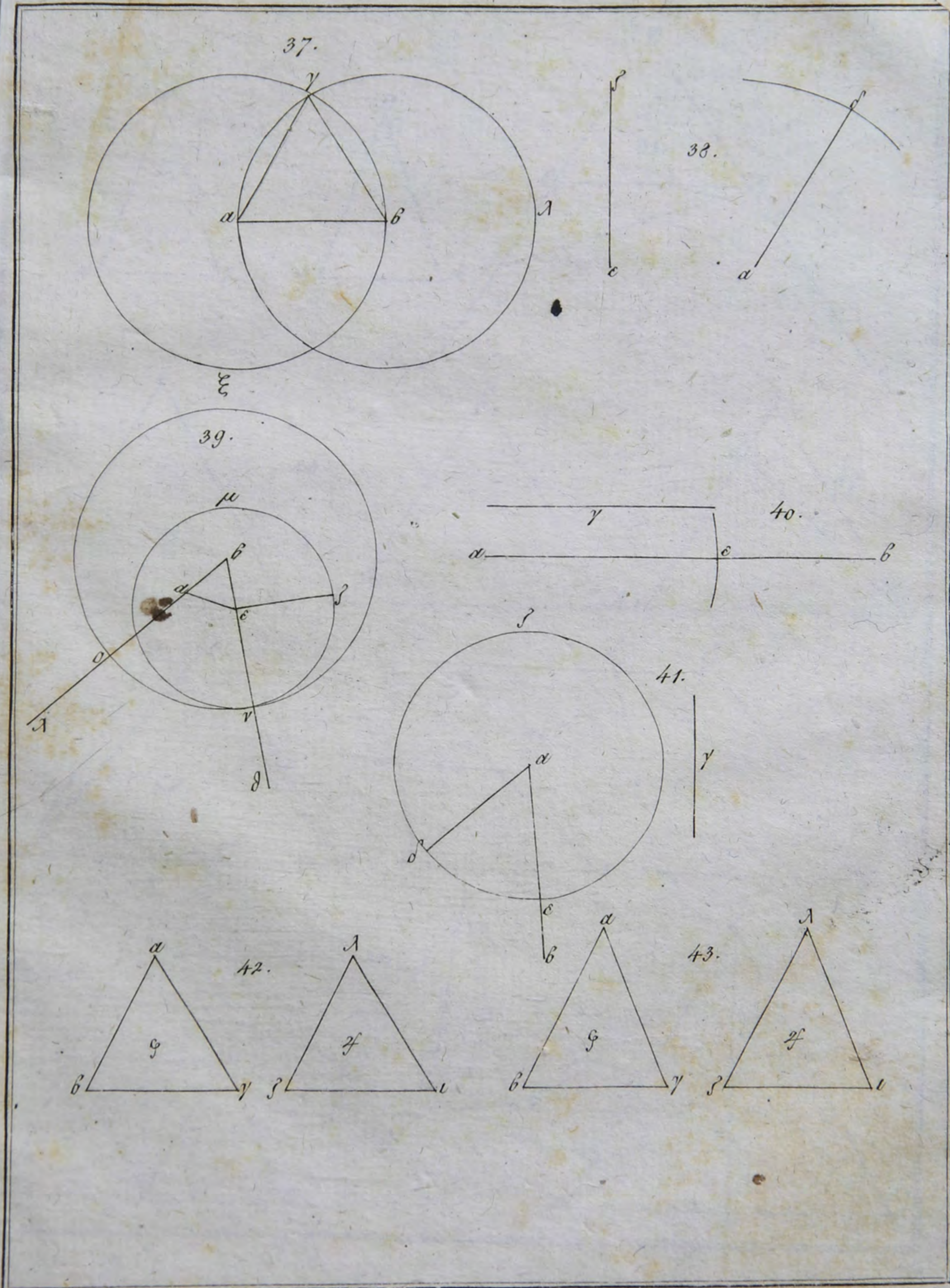


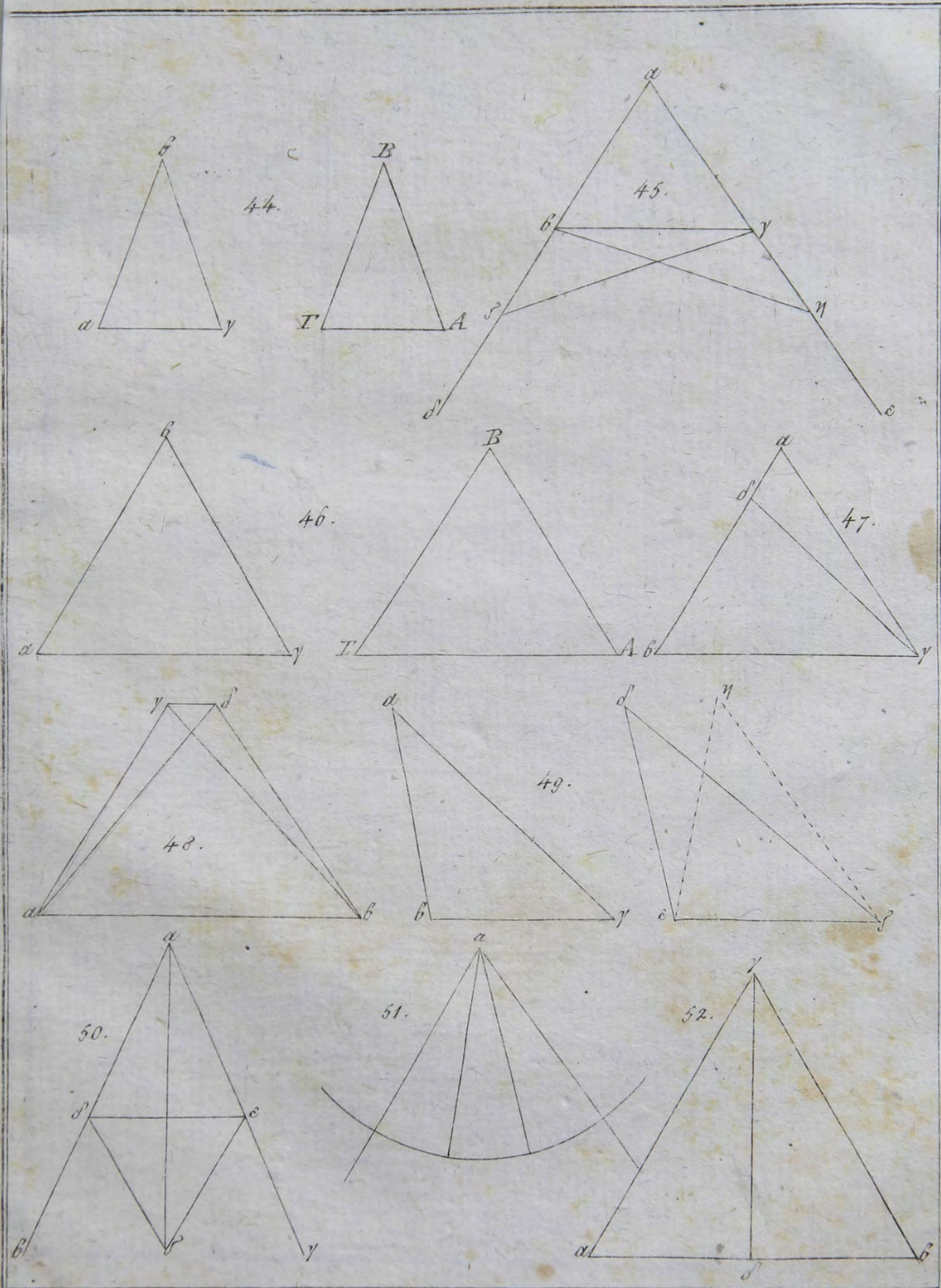
35.



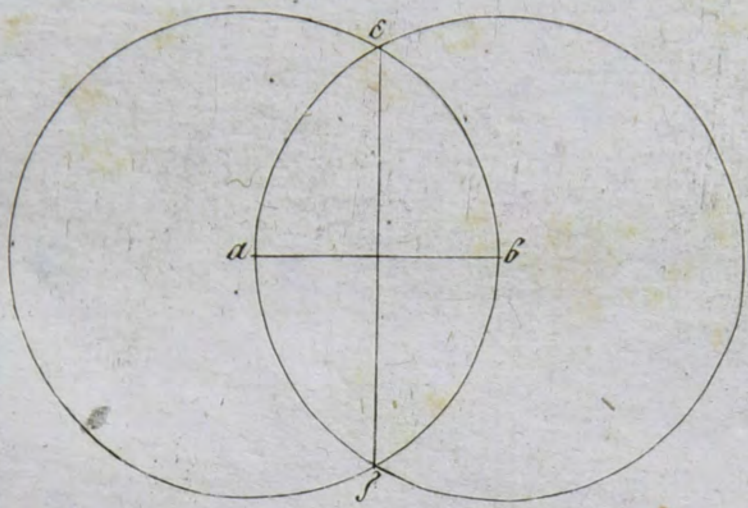
36.



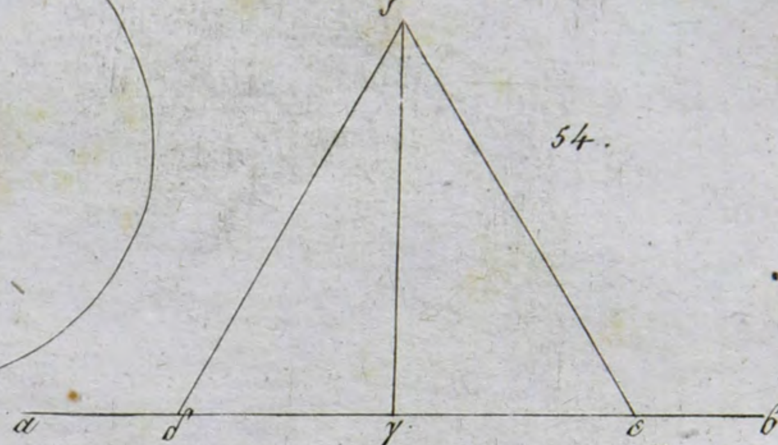

37.
38.
39.
40.
41.
42.
43.


44.
45.
46.
47.
48.
49.
50.
51.
52.

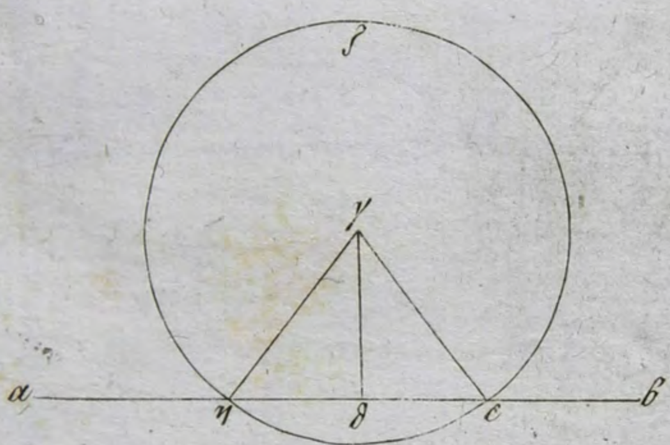
53.



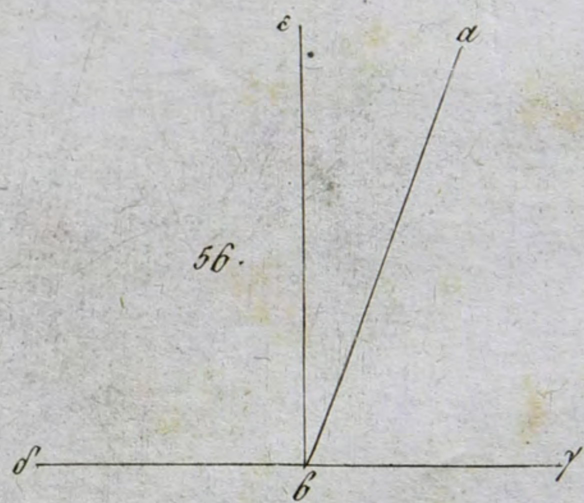
54.



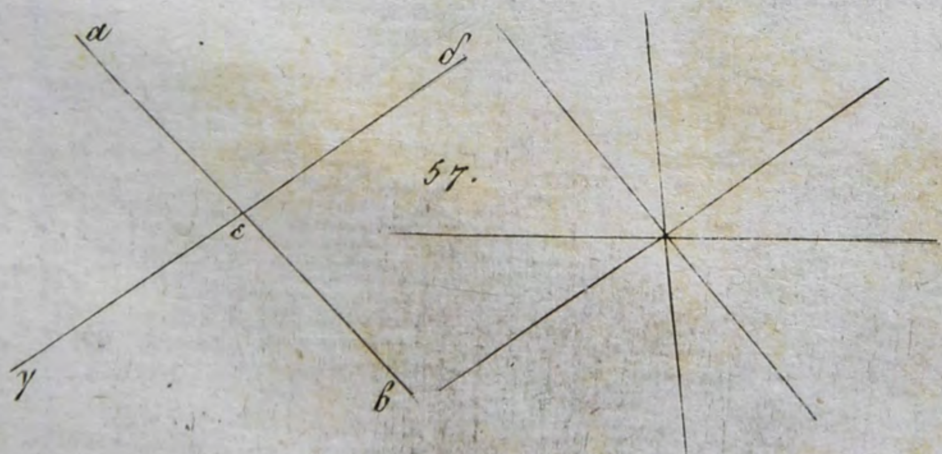
55.



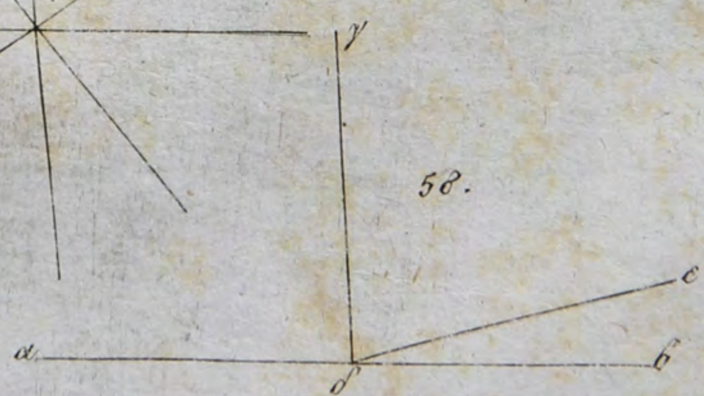
56.

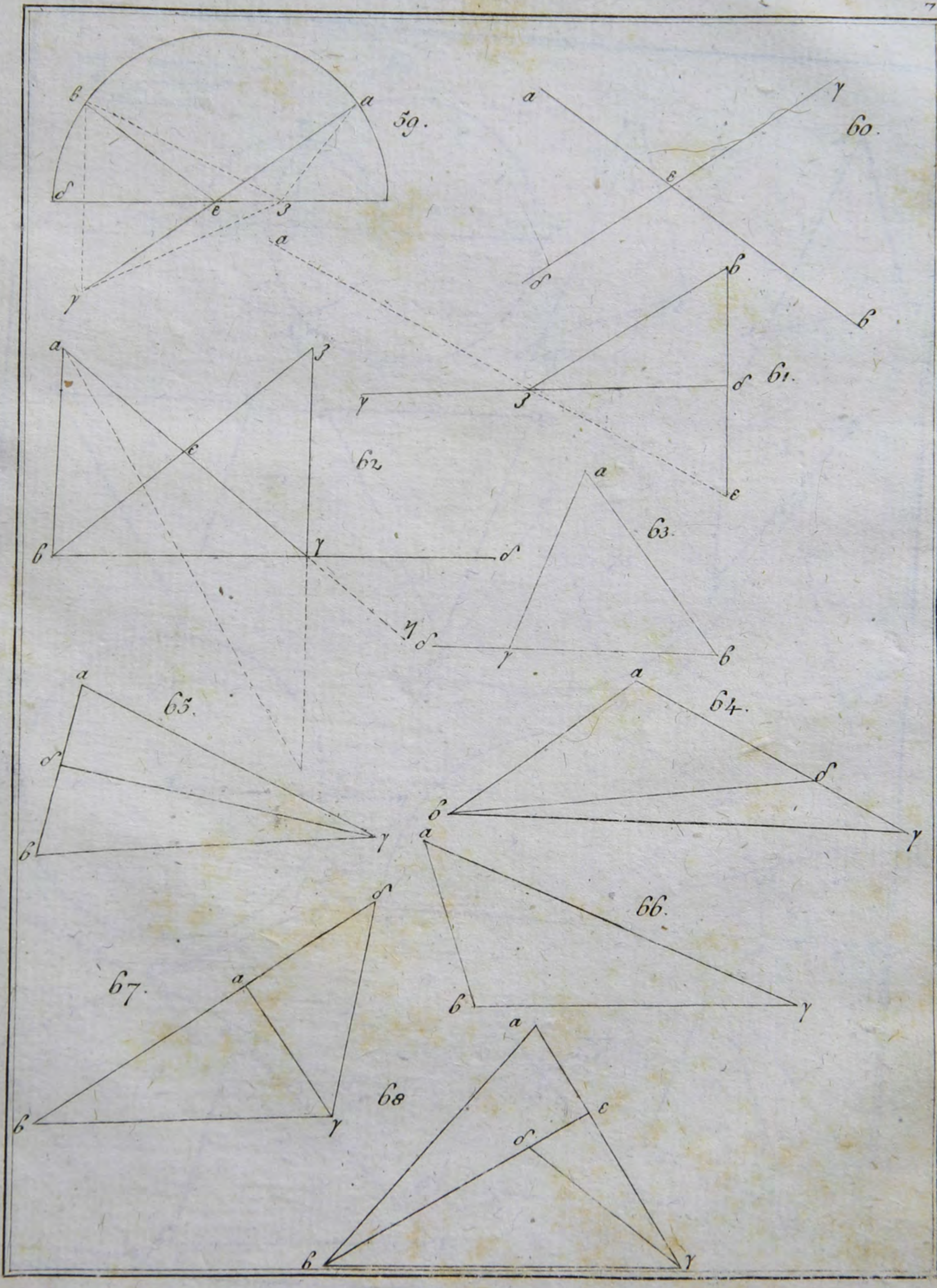


57.

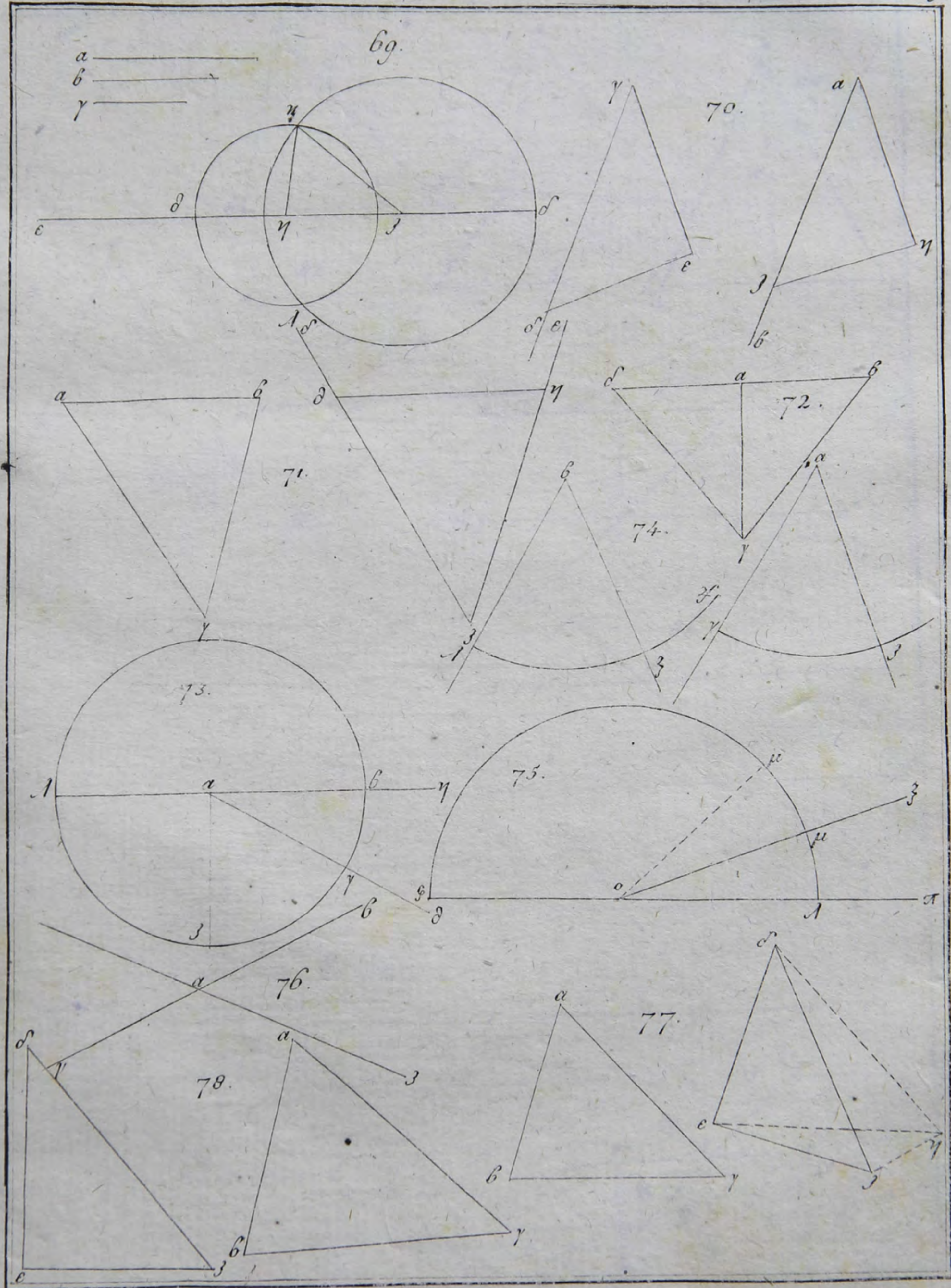


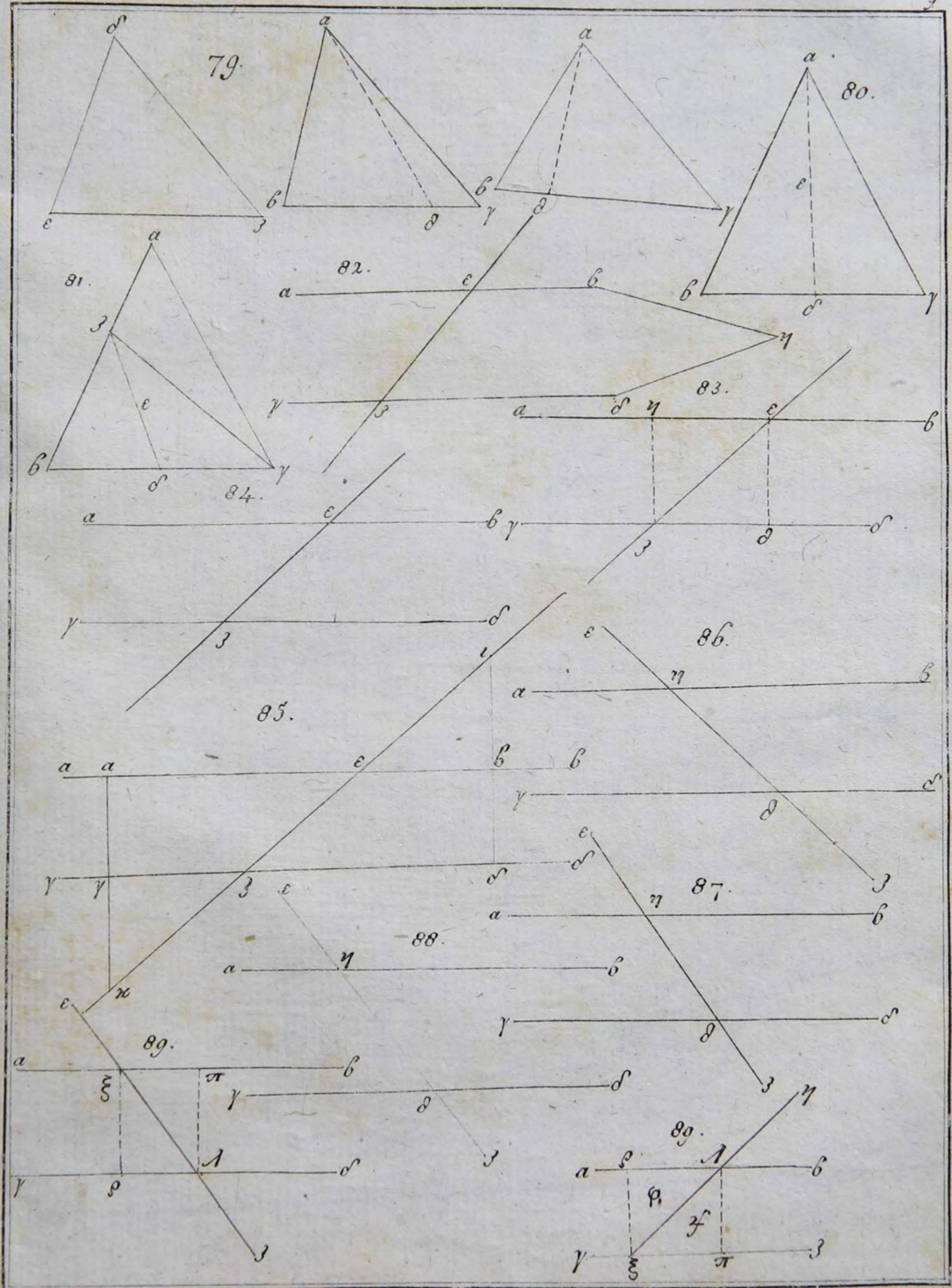
58.

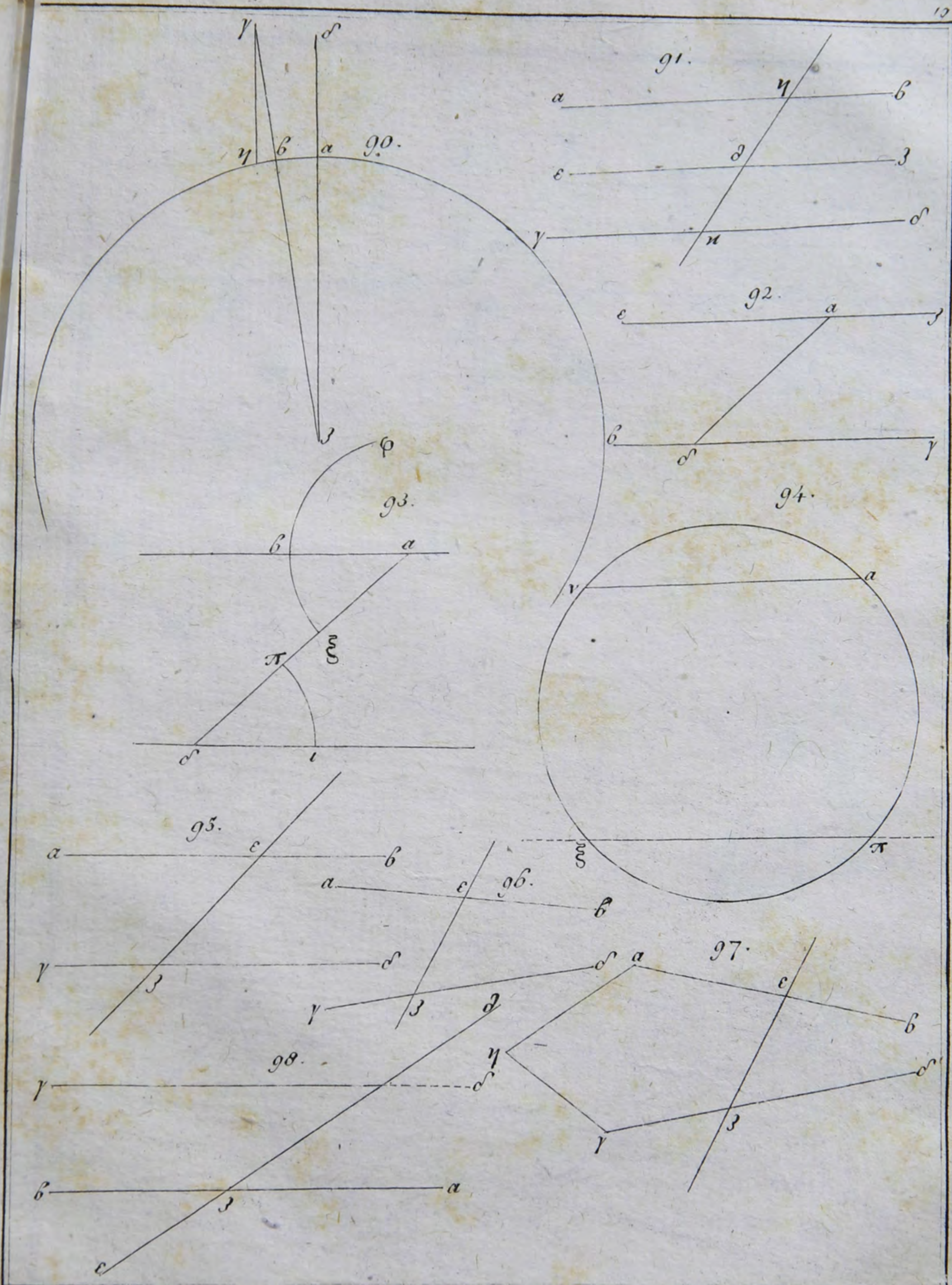


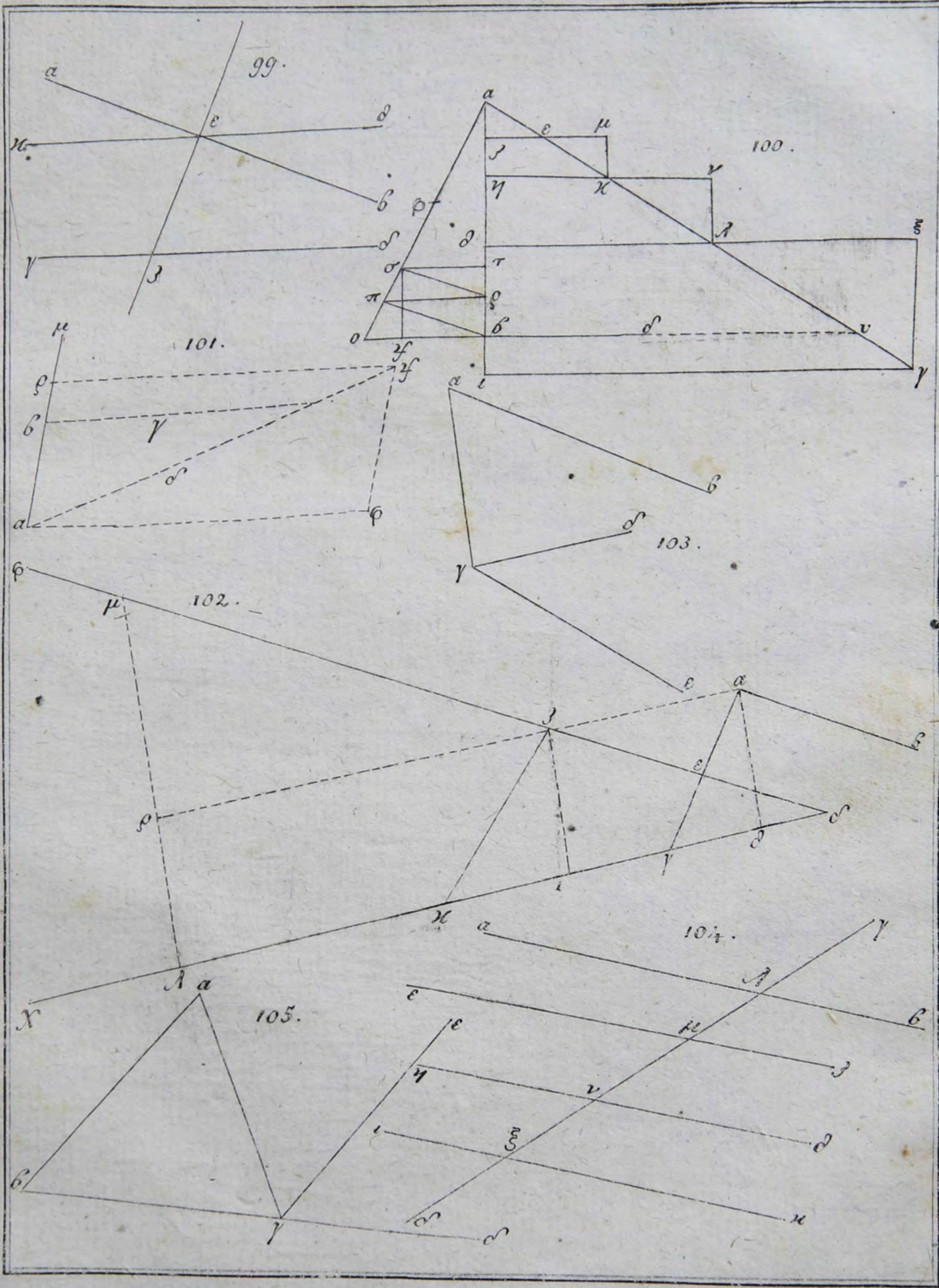

59.
β α δ ε ζ α γ
60.
α γ ε δ β
61.
β γ ζ δ ε
62.
α ζ ε β γ δ η
63.
α δ γ β
64.
α δ β γ
65.
α δ β γ
66.
α β γ
67.
δ α β γ
68
α ε δ β γ

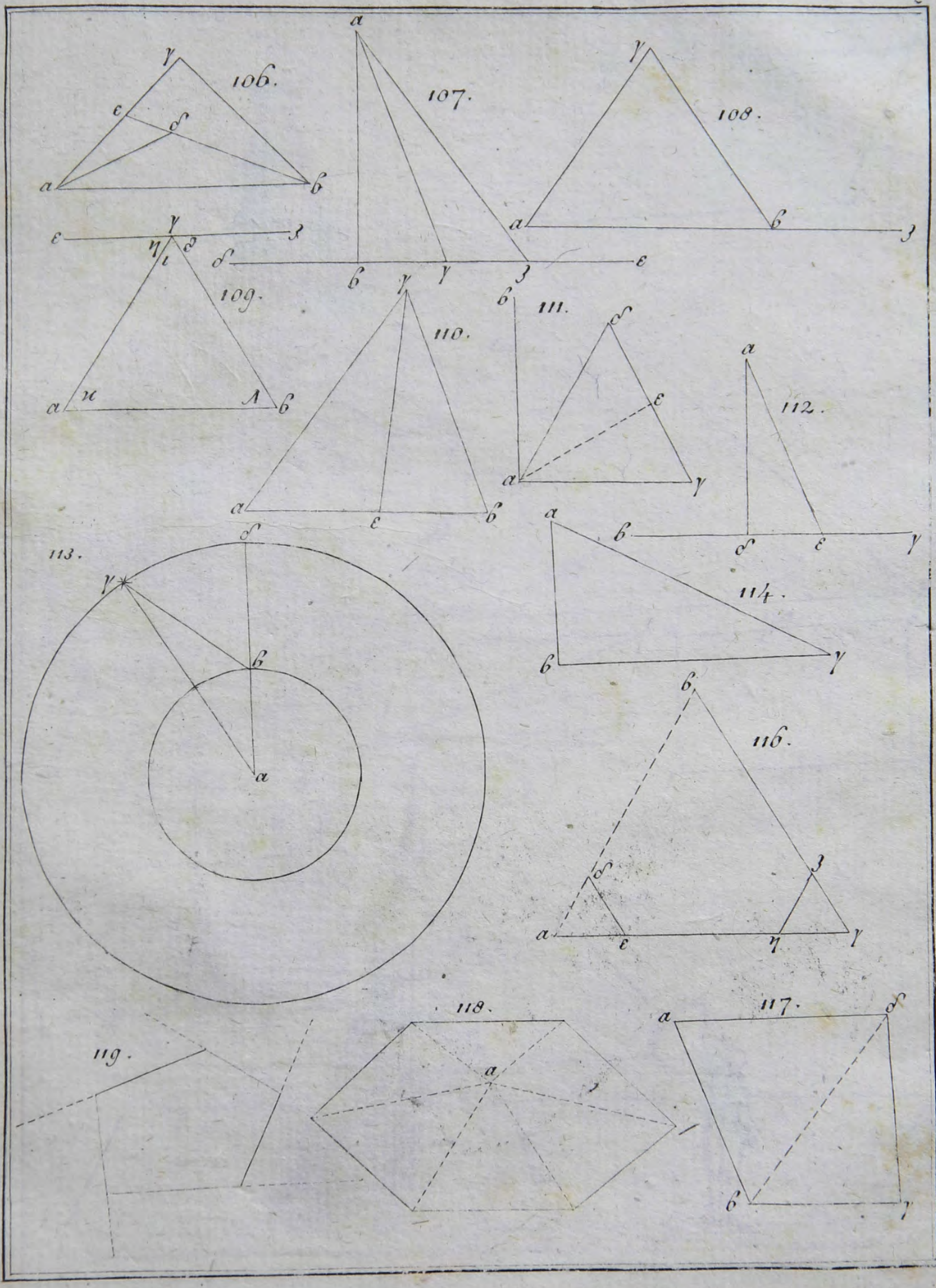
8

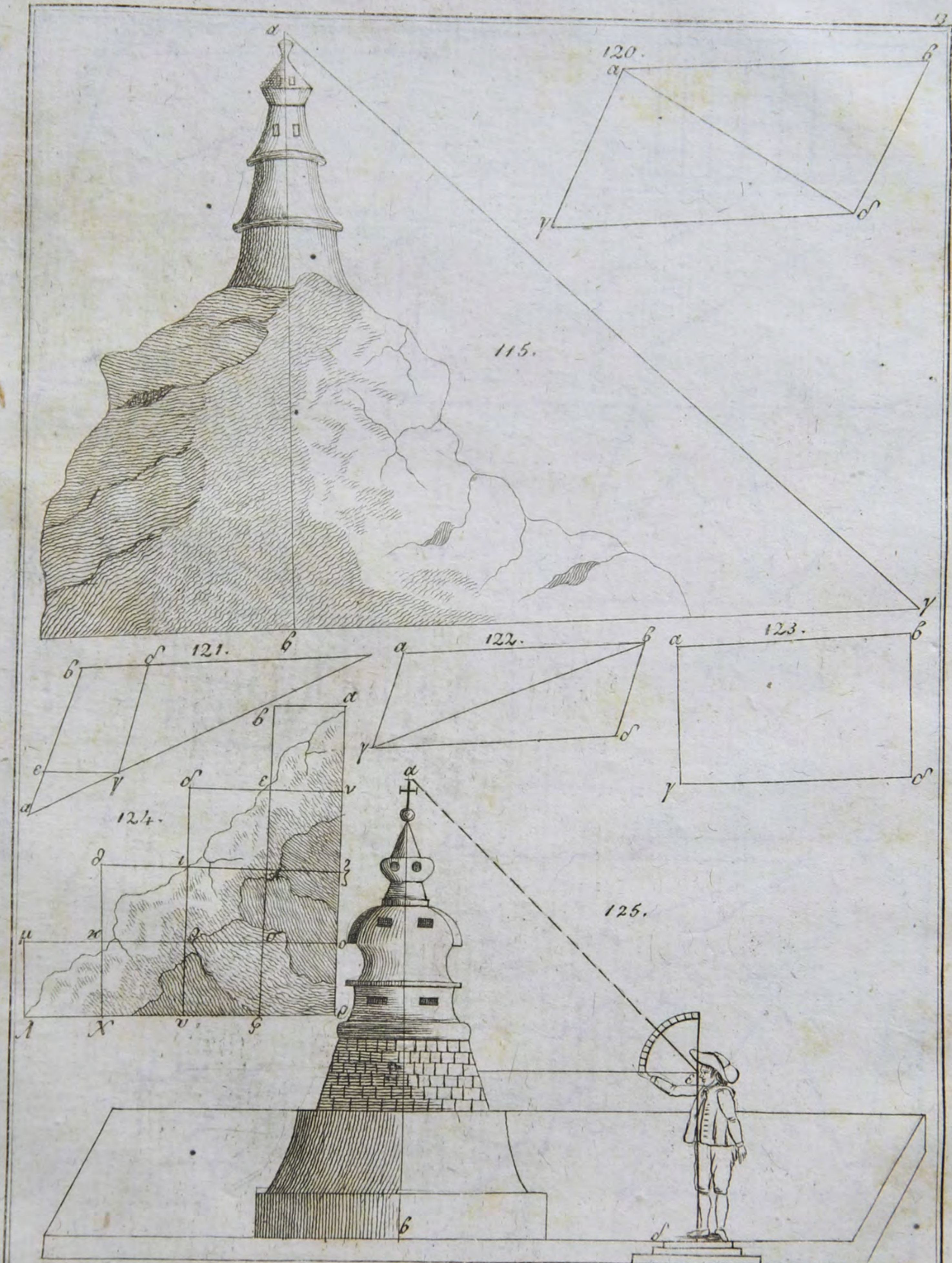


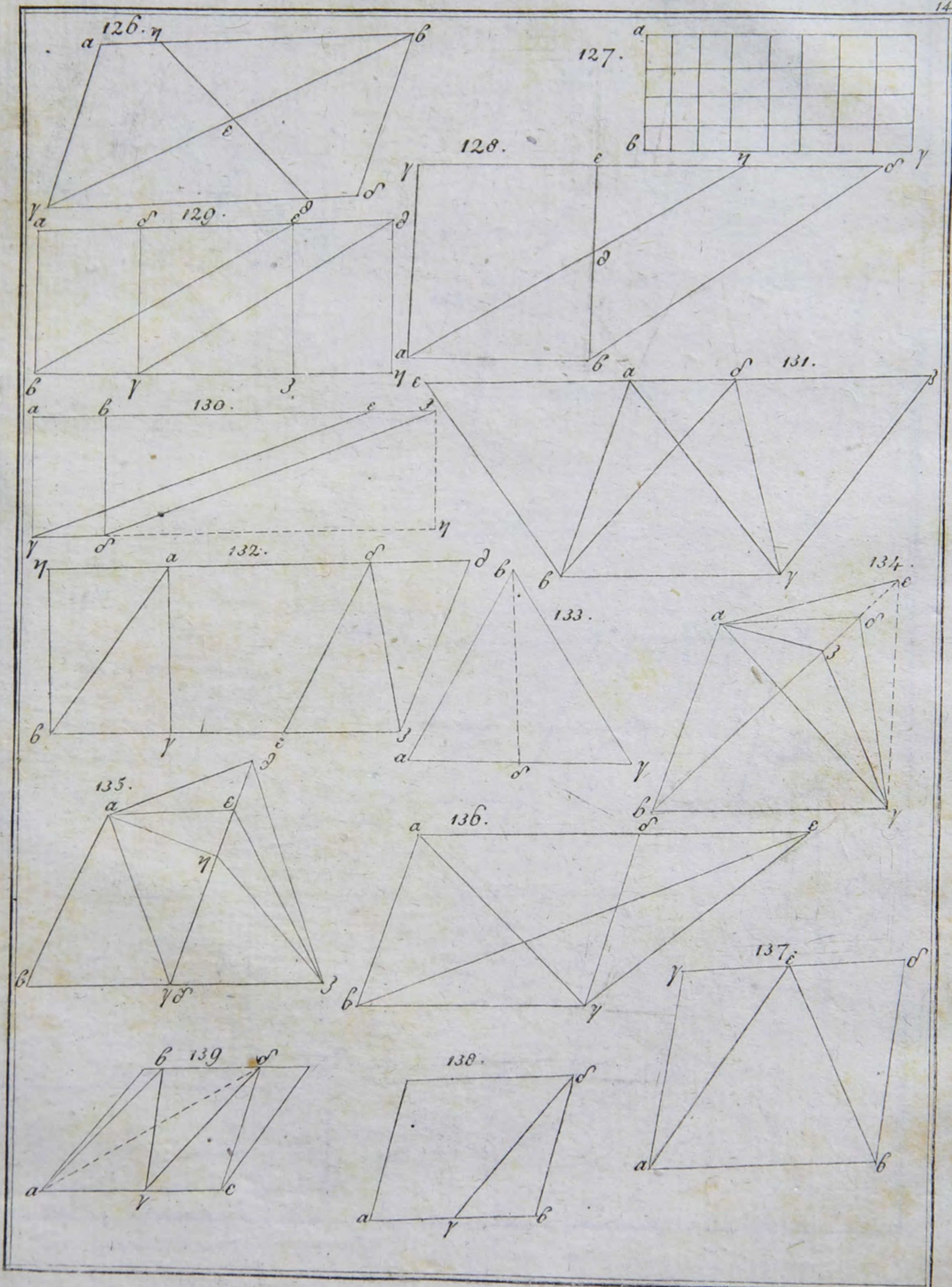

79.
80.
81.
82.
83.
84.
85.
86.
87.
88.
89.
89.

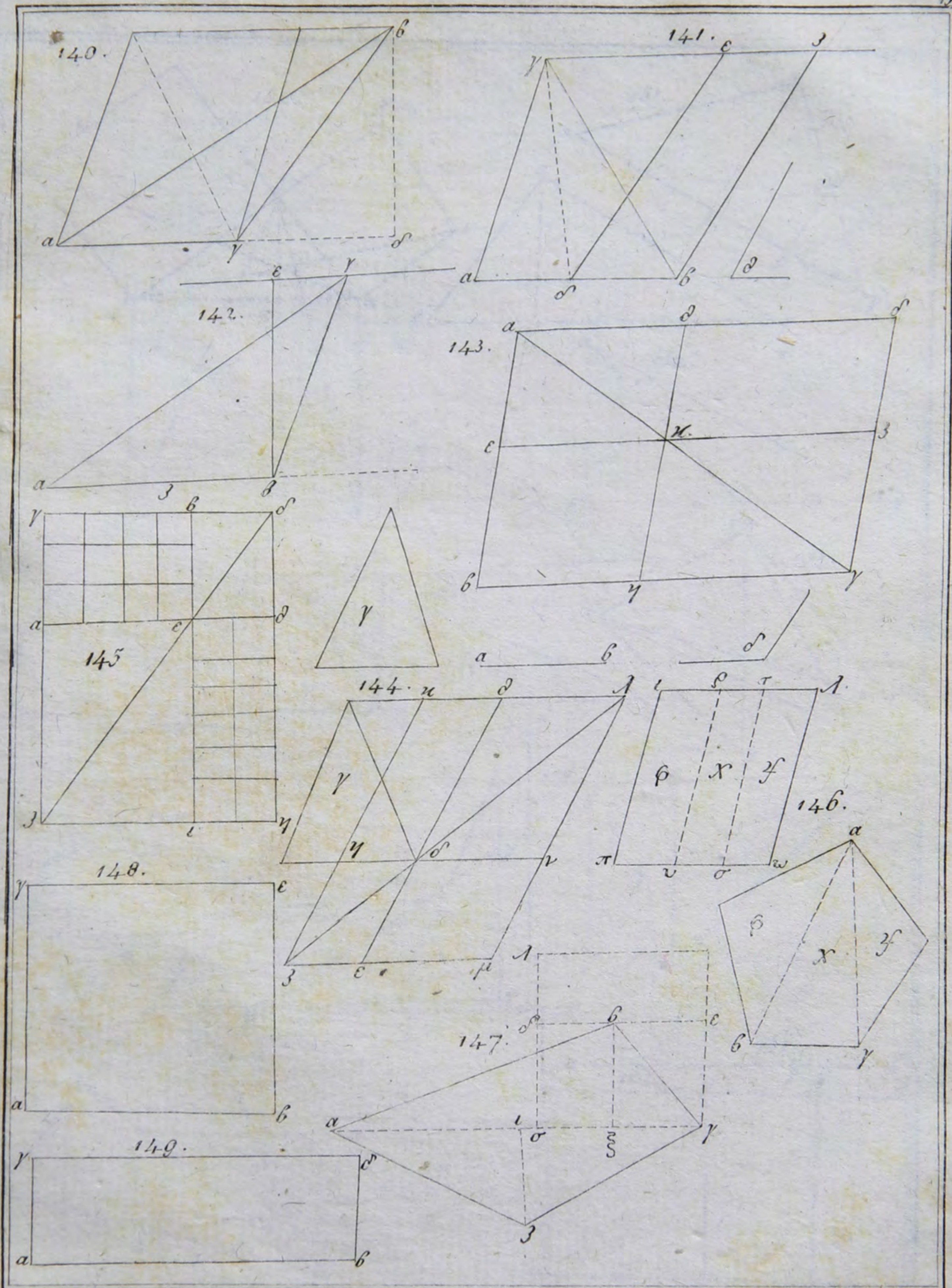

90.
γ δ
η β α
ζ
91.
α η β
ε θ ζ
γ κ δ
92.
ε α ζ
β δ γ
93.
φ
β α
ξ
π
δ ι
94.
ν α
ξ π
95.
α ε β
γ δ
ζ
96.
α ε β
γ ζ
97.
δ α
ε
β
η
δ
ζ
γ
98.
θ
γ δ
β ζ α
ε

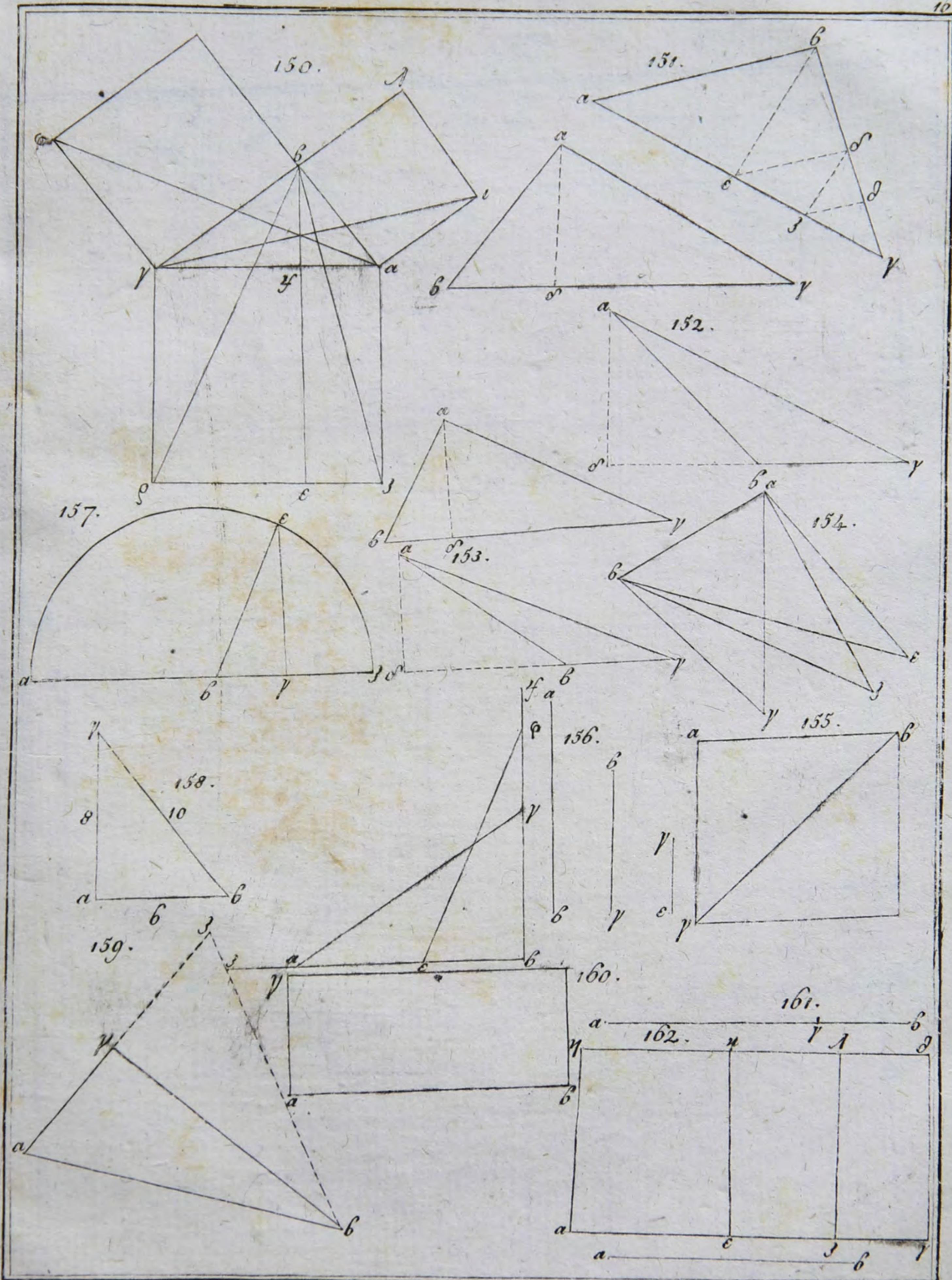

99.
100.
101.
102.
103.
104.
105.

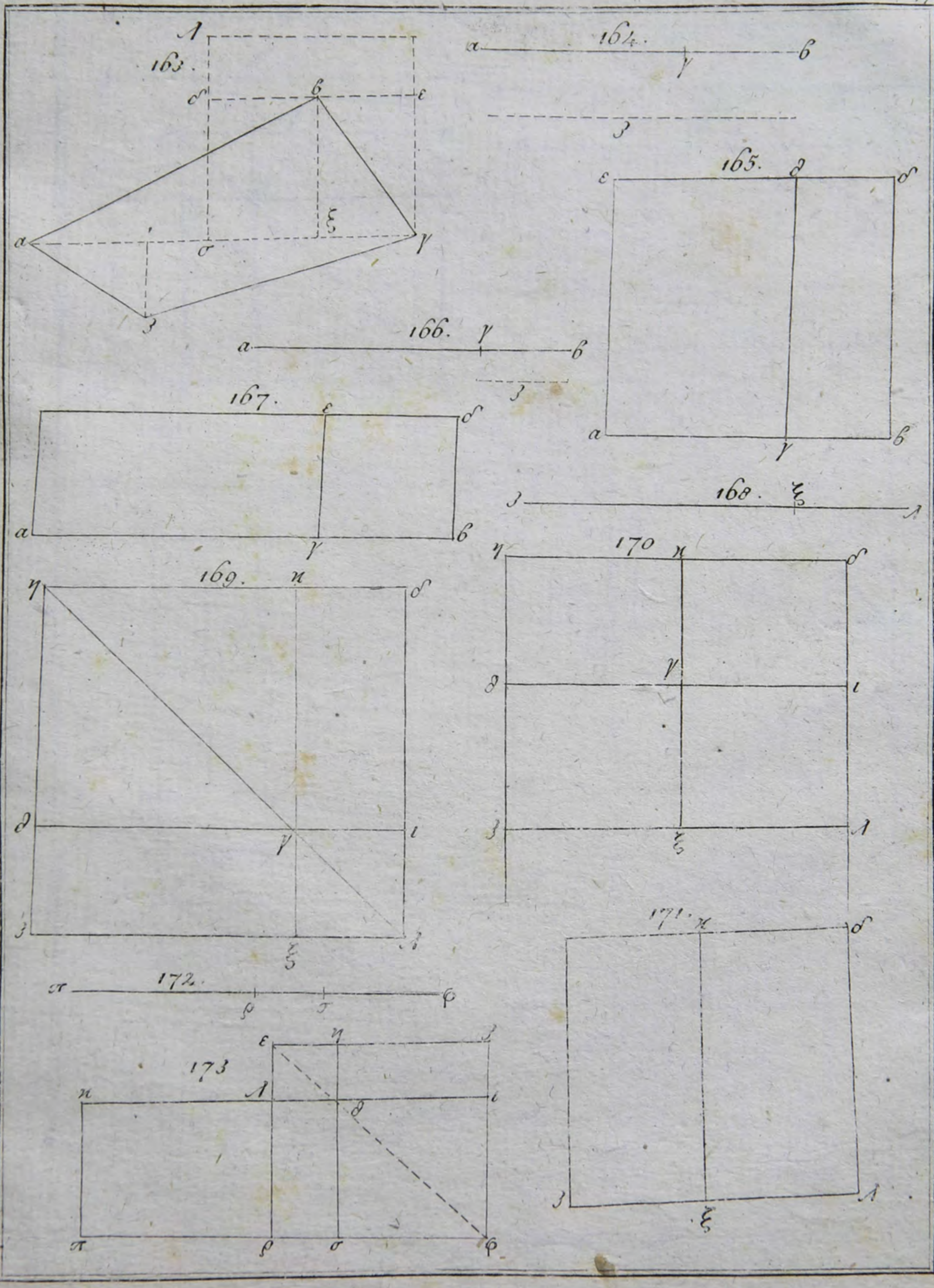

106.
107.
108.
109.
110.
111.
112.
113.
114.
116.
117.
118.
119.

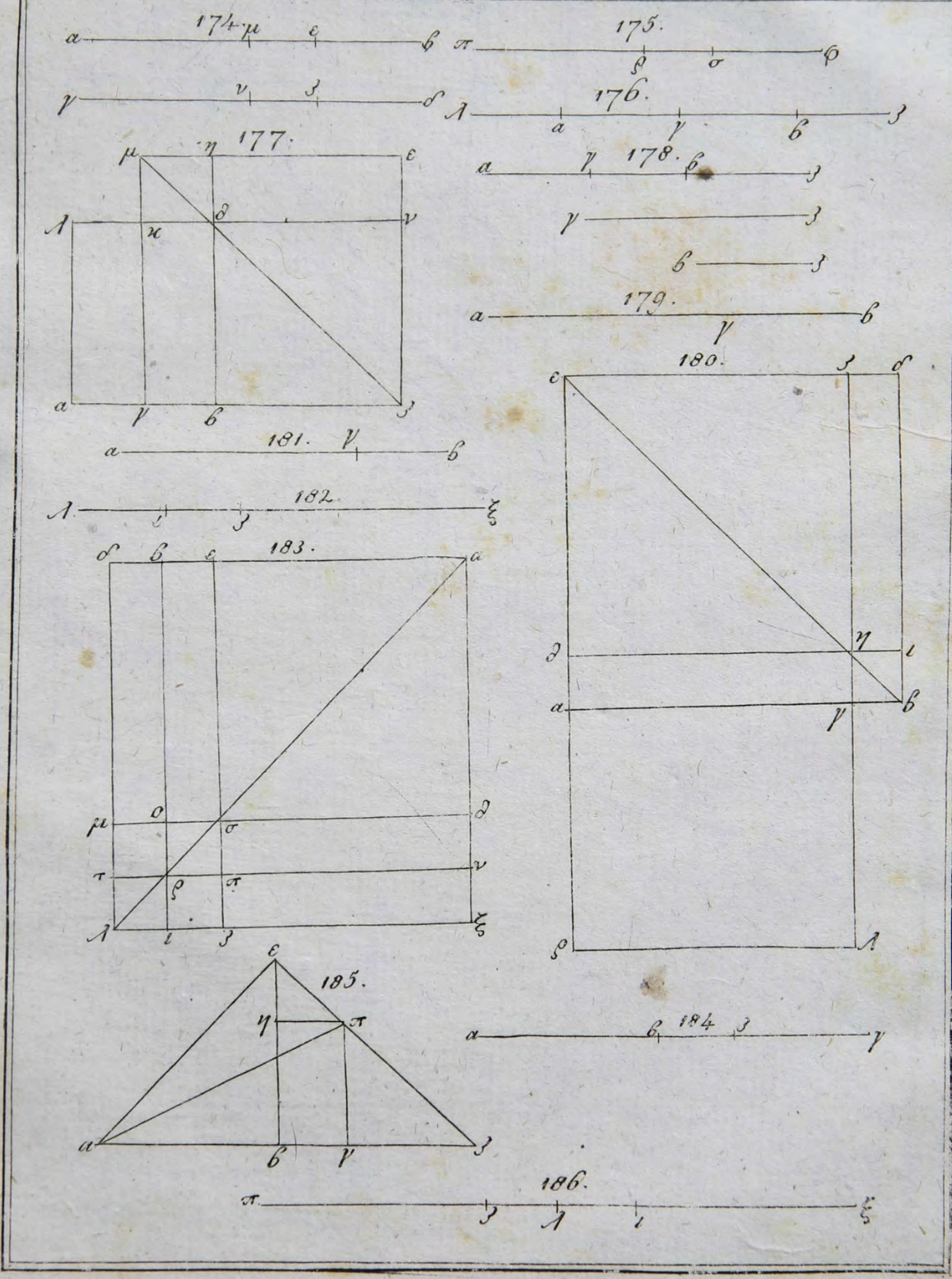

13
120.
115.
121.
122.
123.
124.
125.

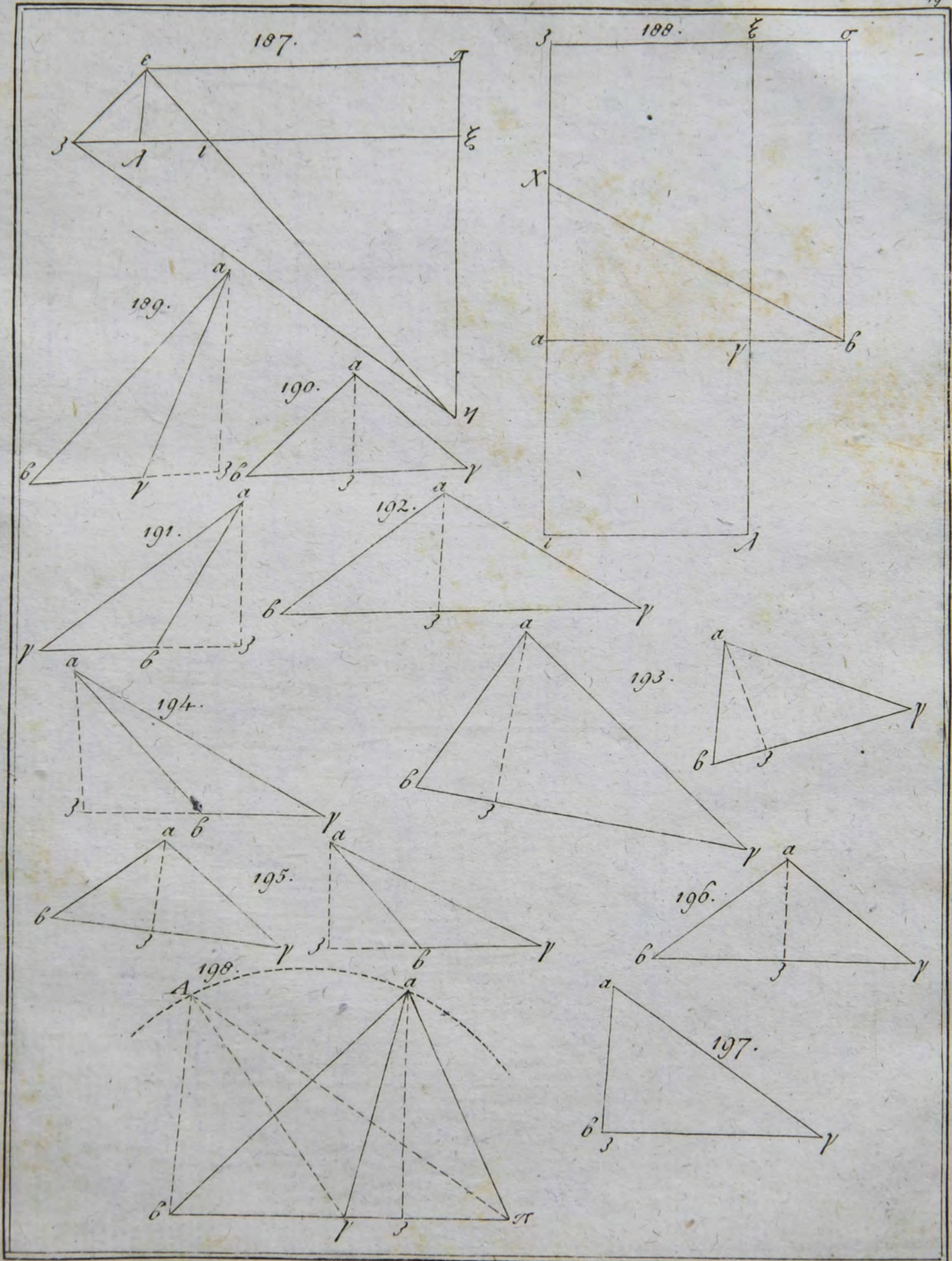

126.
127.
128.
129.
130.
131.
132.
133.
134.
135.
136.
137.
138.
139

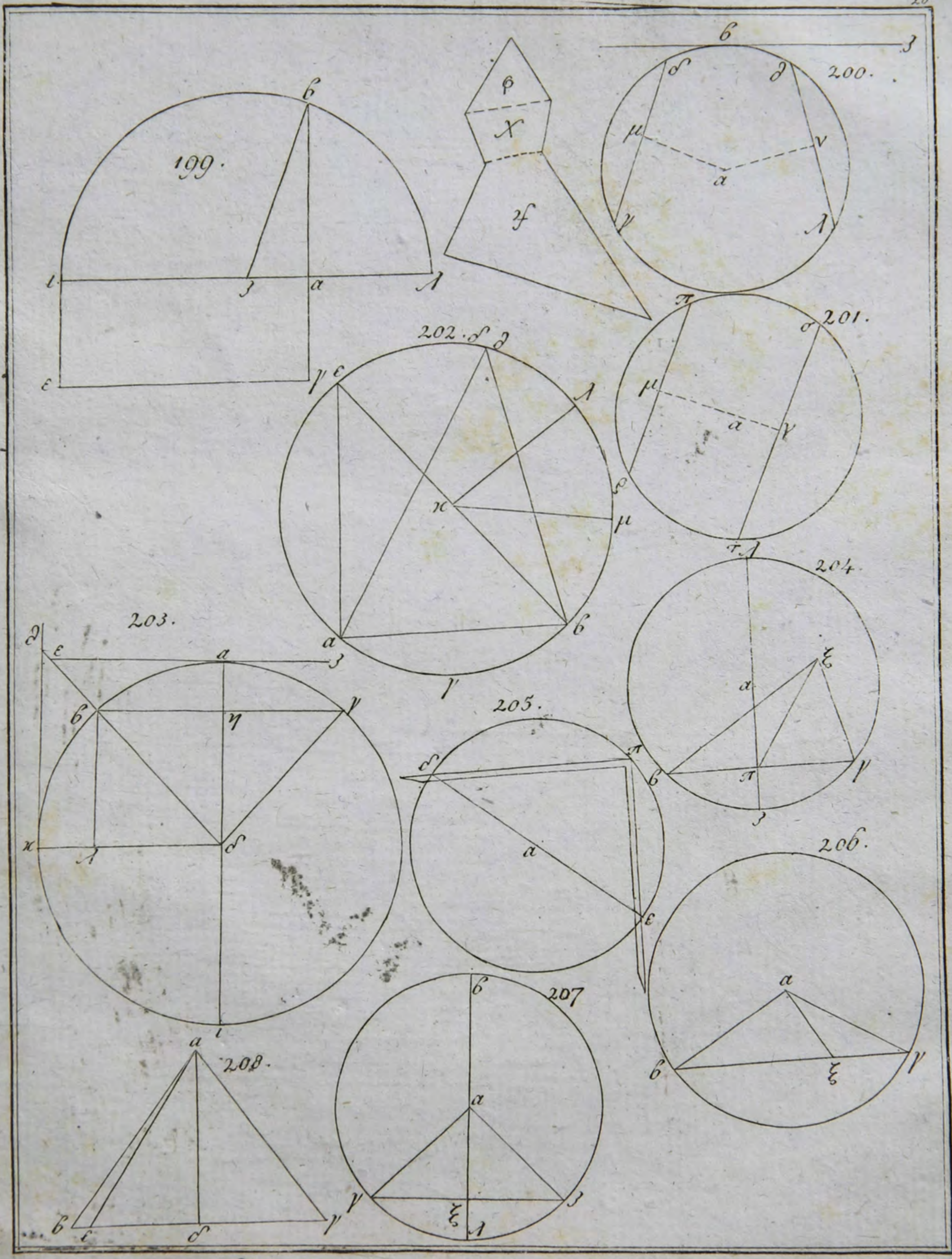

140.
141.
142.
143.
144.
145
146.
147.
148.
149.

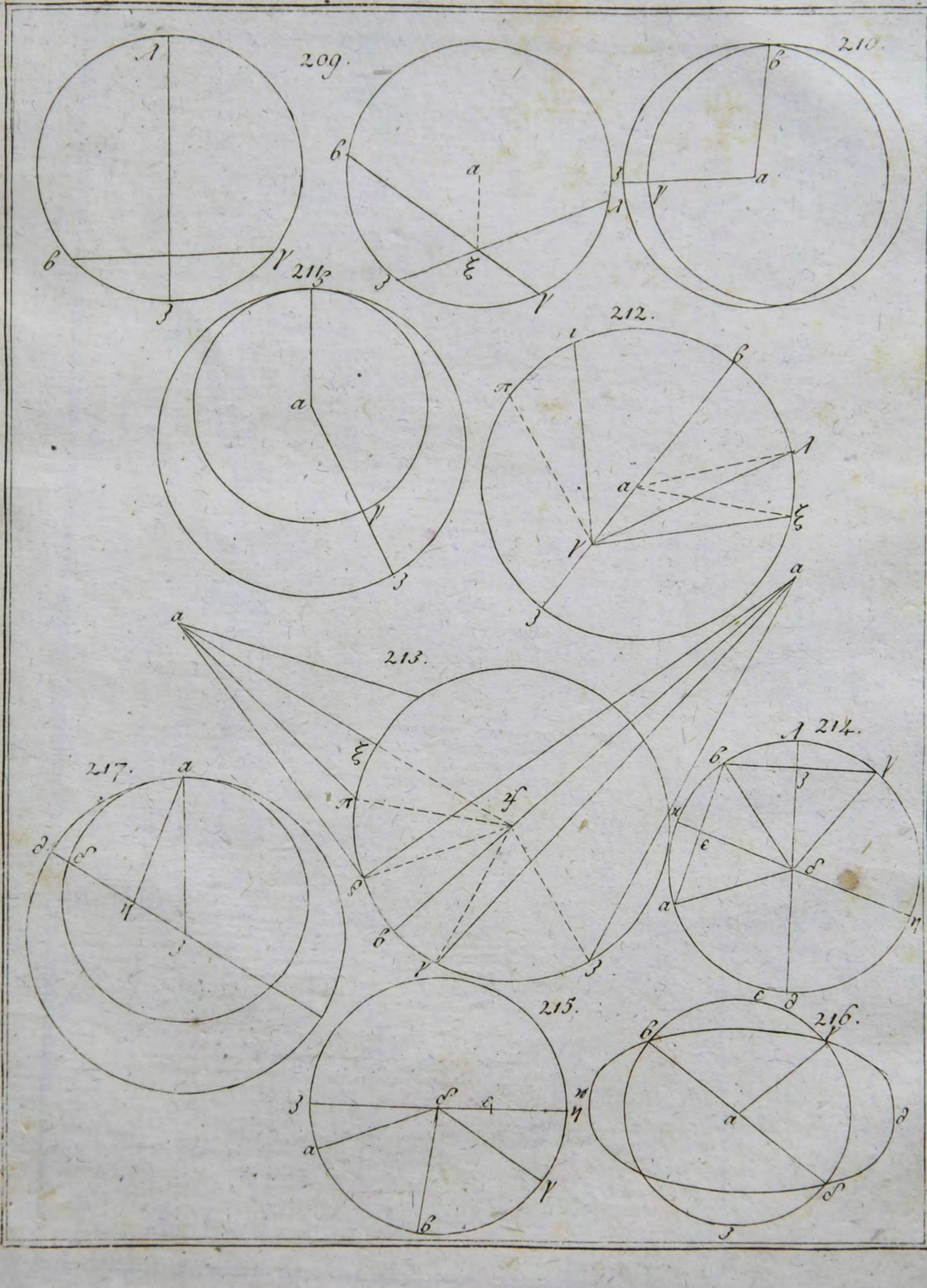

150.
151.
152.
153.
154.
155.
156.
157.
158.
8
10
6
159.
160.
161.
162.

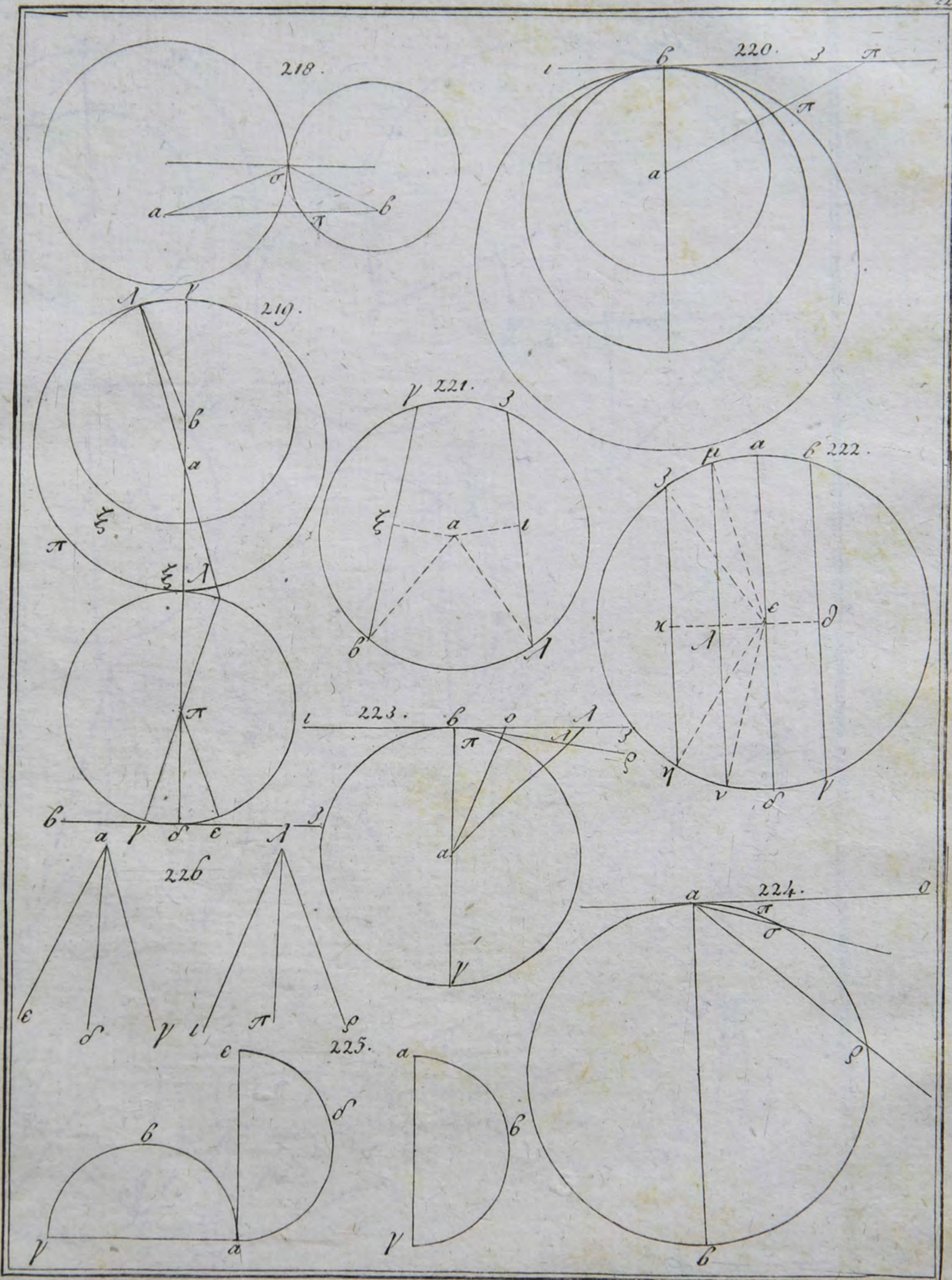

163.
λ
δ β ε
ξ
α σ γ
ζ
164.
α γ β
ζ
165.
ε θ δ
α γ β
166.
α γ β
ζ
167.
ε δ
α γ β
168.
ζ ξ λ
169.
η κ δ
θ γ ι
ζ ξ λ
170
η κ δ
θ γ ι
ζ ξ λ
171.
κ δ
ζ ξ λ
172.
π ρ σ φ
173
ε η ζ
κ λ θ ι
π ρ σ φ

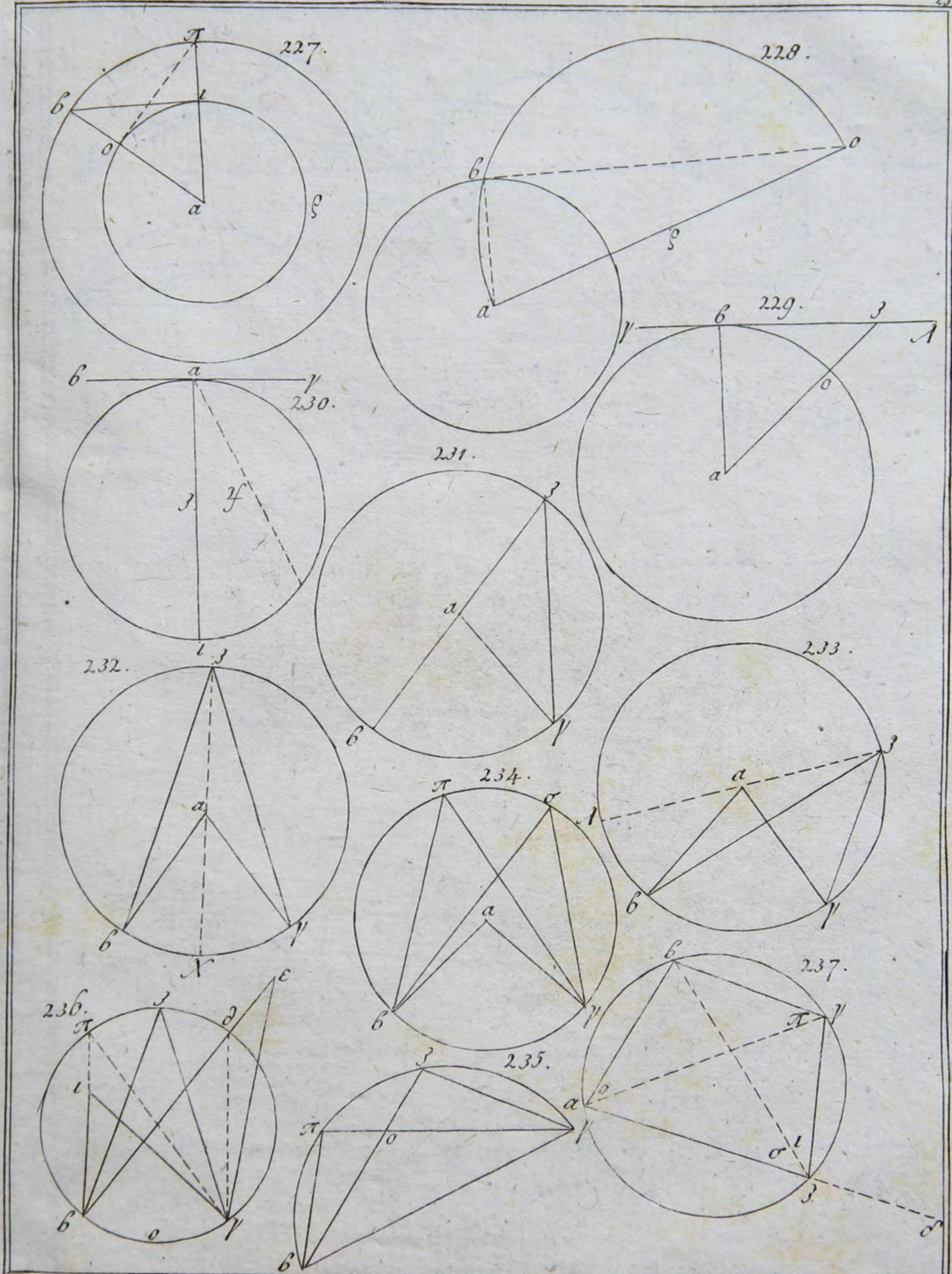

174.
175.
176.
177.
178.
179.
180.
181.
182.
183.
184.
185.
186.

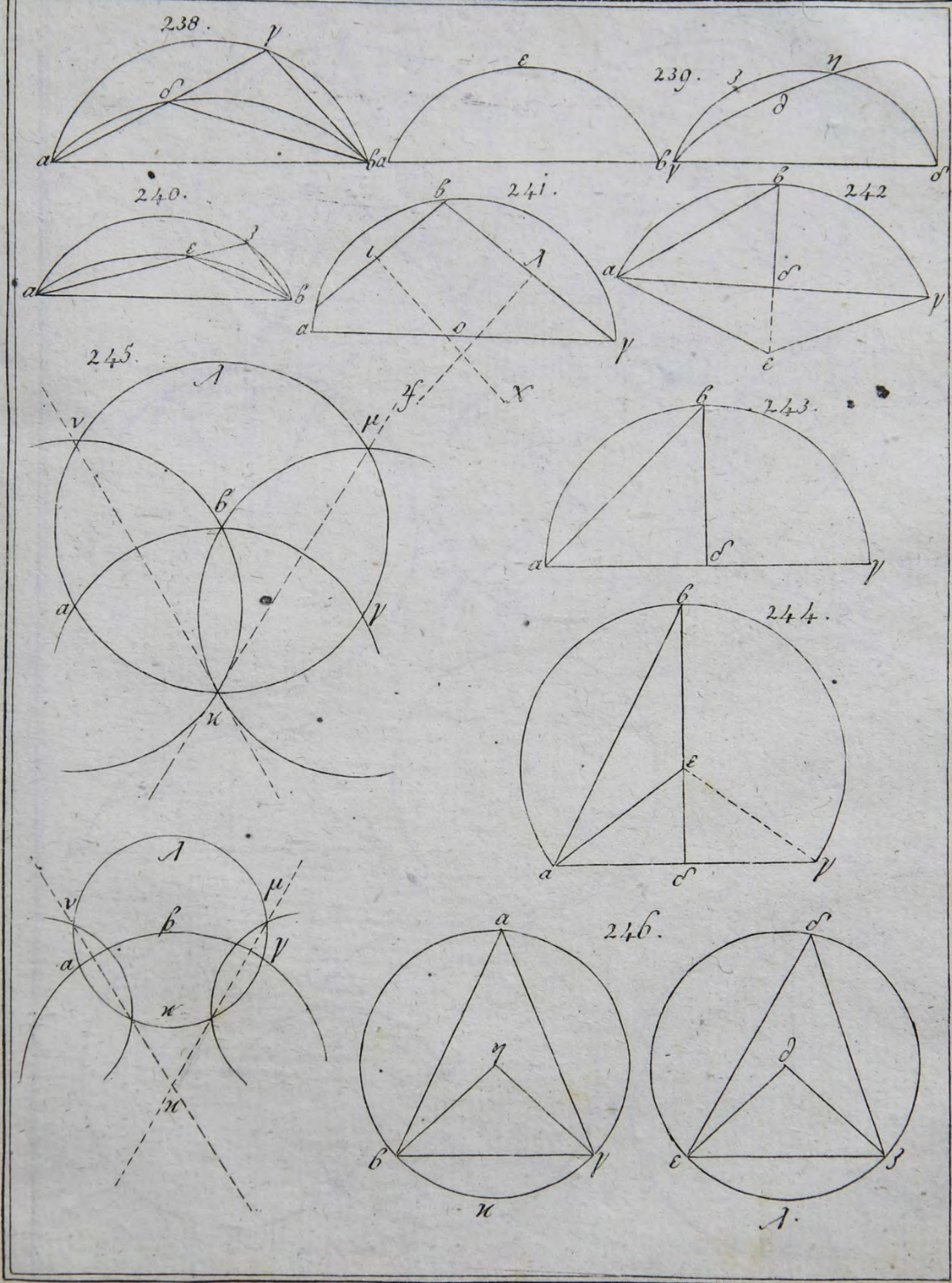

187.
ε
π
ζ
λ
ι
ξ
η
188.
ζ
ξ
σ
X
a
γ
b
ι
λ
189.
a
b
γ
ζ
190.
a
b
ζ
γ
191.
a
γ
b
ζ
192.
a
b
ζ
γ
193.
a
b
ζ
γ
194.
a
ζ
b
γ
195.
a
b
ζ
γ
a
ζ
b
γ
196.
a
b
ζ
γ
197.
a
b
ζ
γ
198.
A
a
b
γ
ζ
π

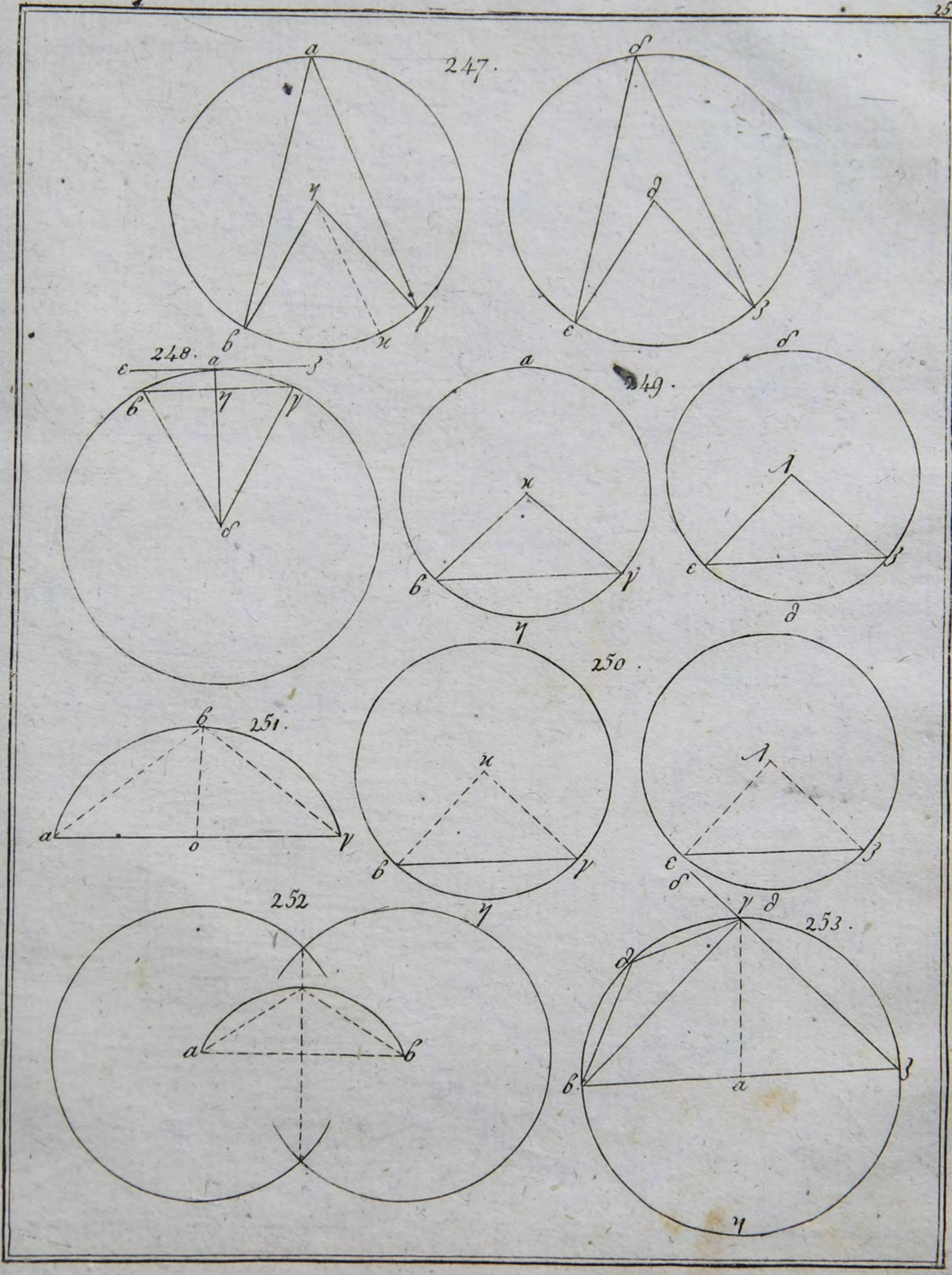

199.
200.
201.
202.
203.
204.
205.
206.
207
208.

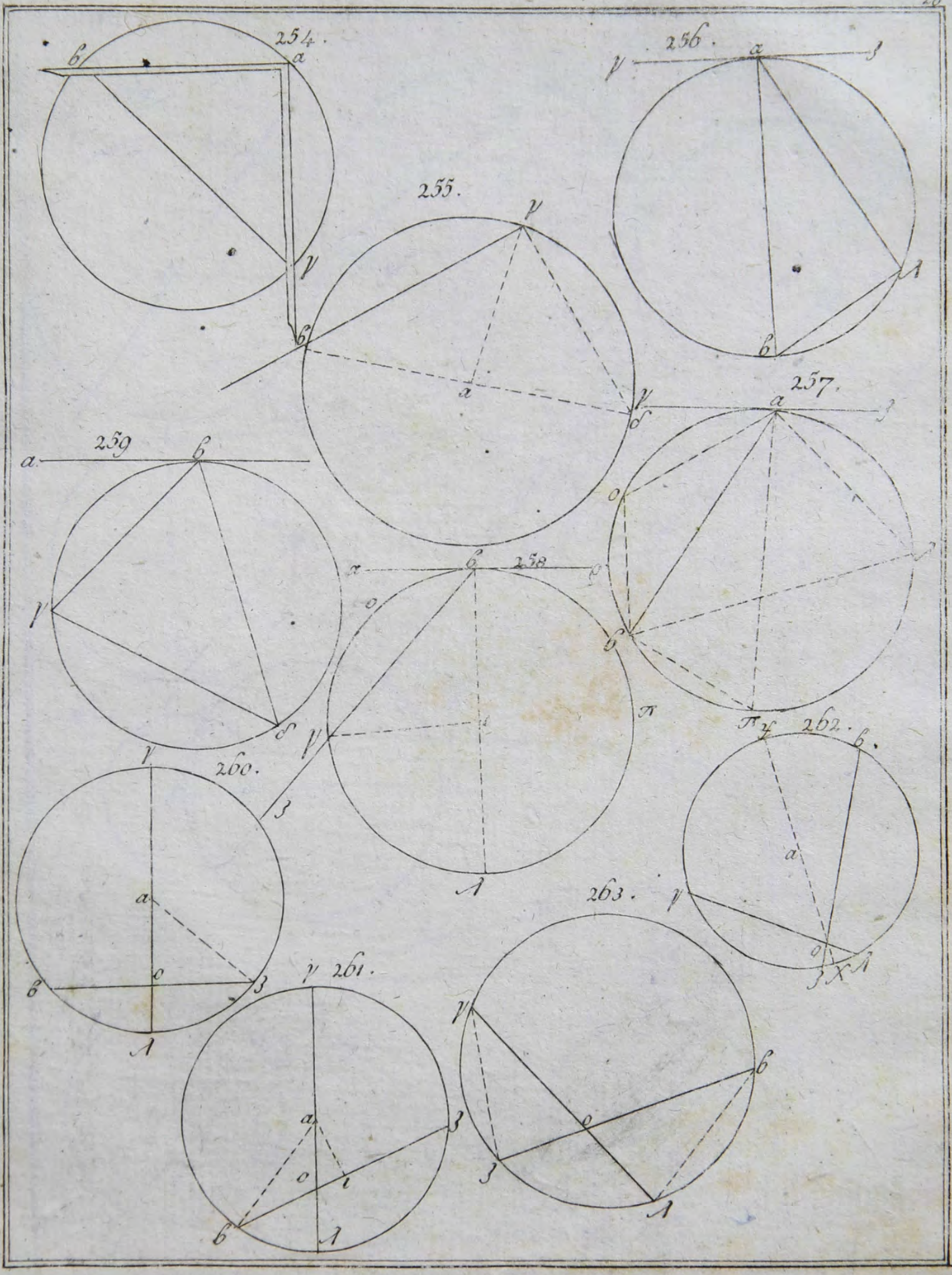

209.
210.
211.
212.
213.
214.
215.
216.
217.

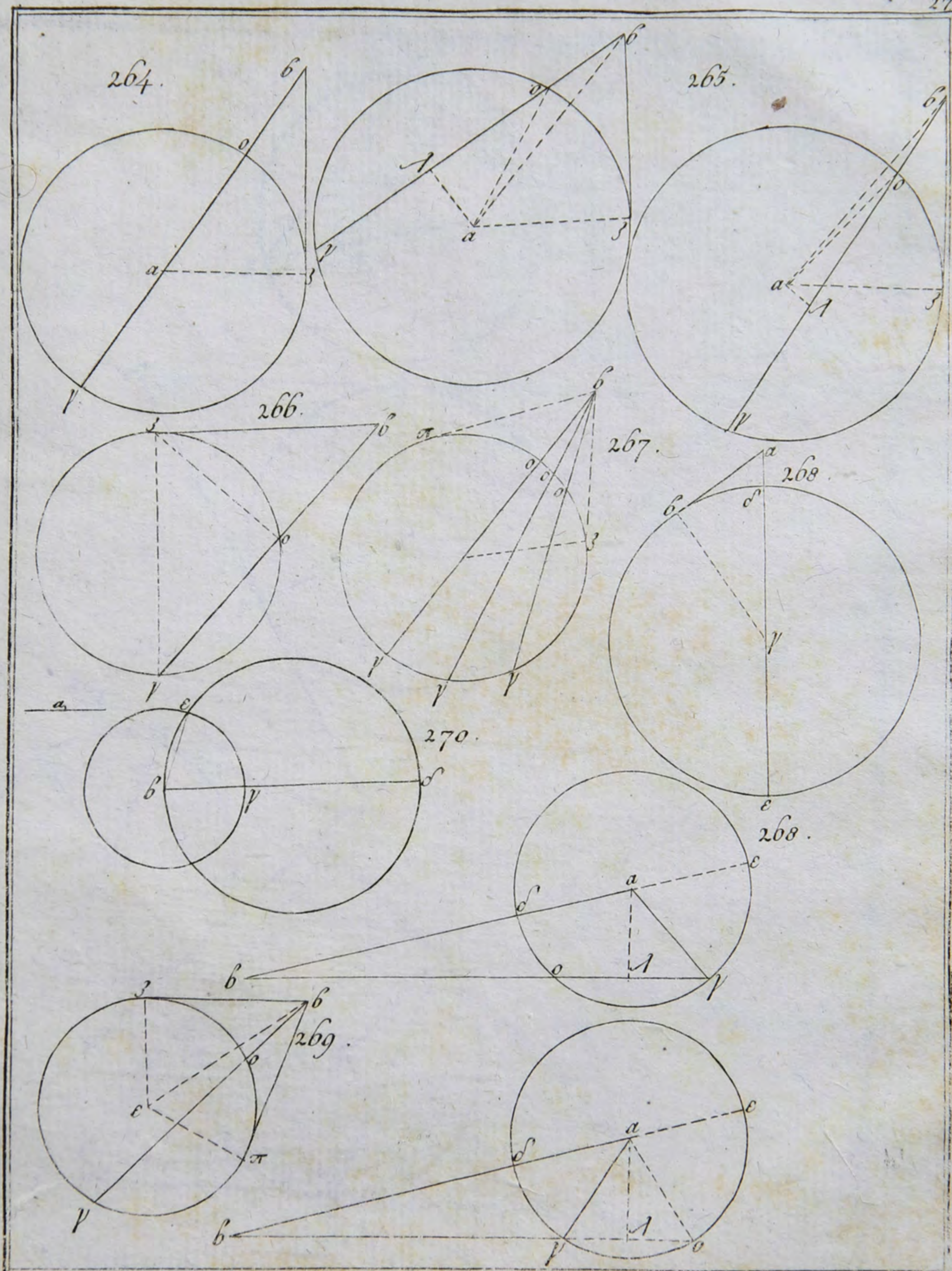

218.
219.
220.
221.
222.
223.
224.
225.
226

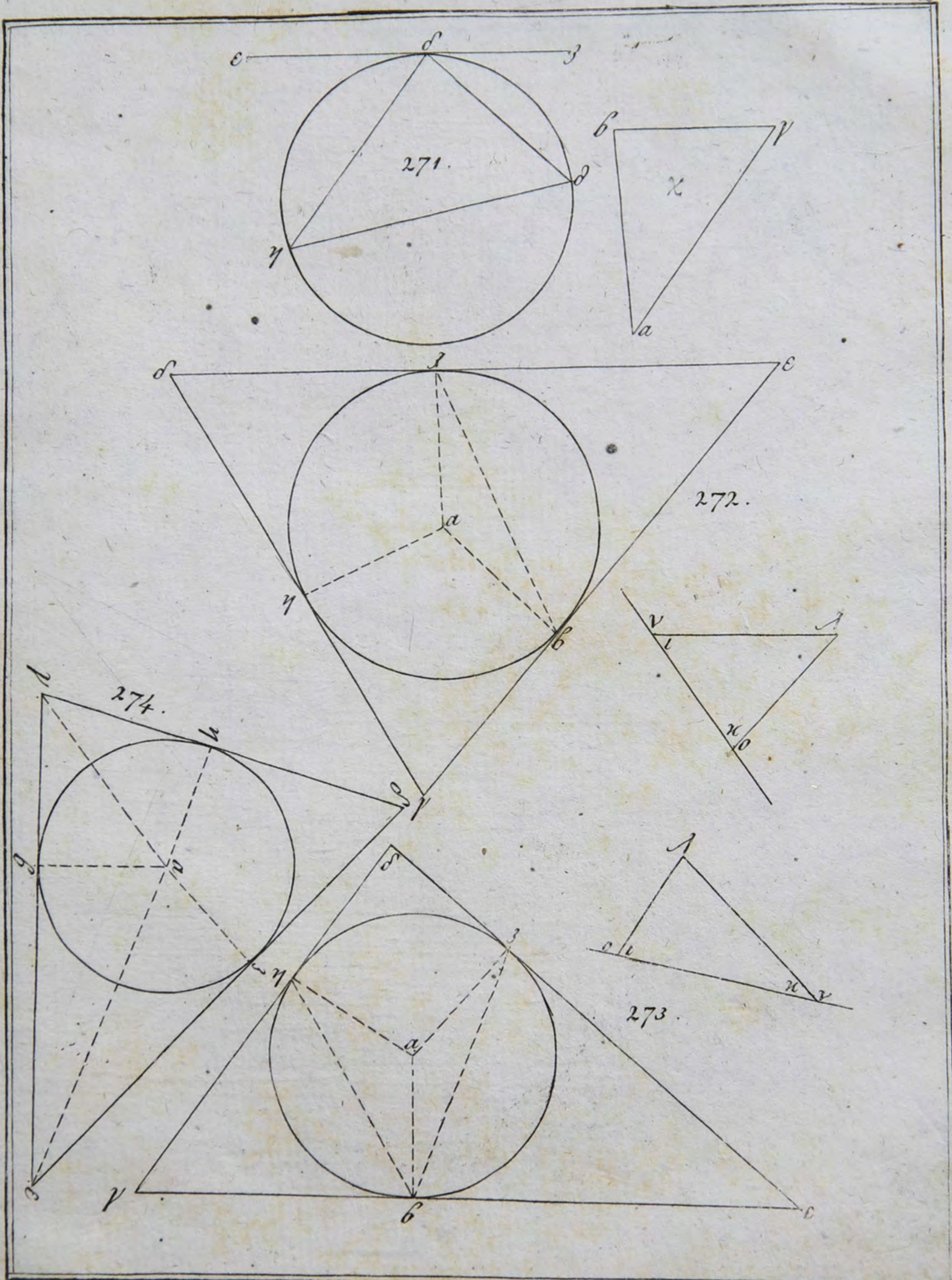

227.
228.
229.
230.
231.
232.
233.
234.
235.
236.
237.

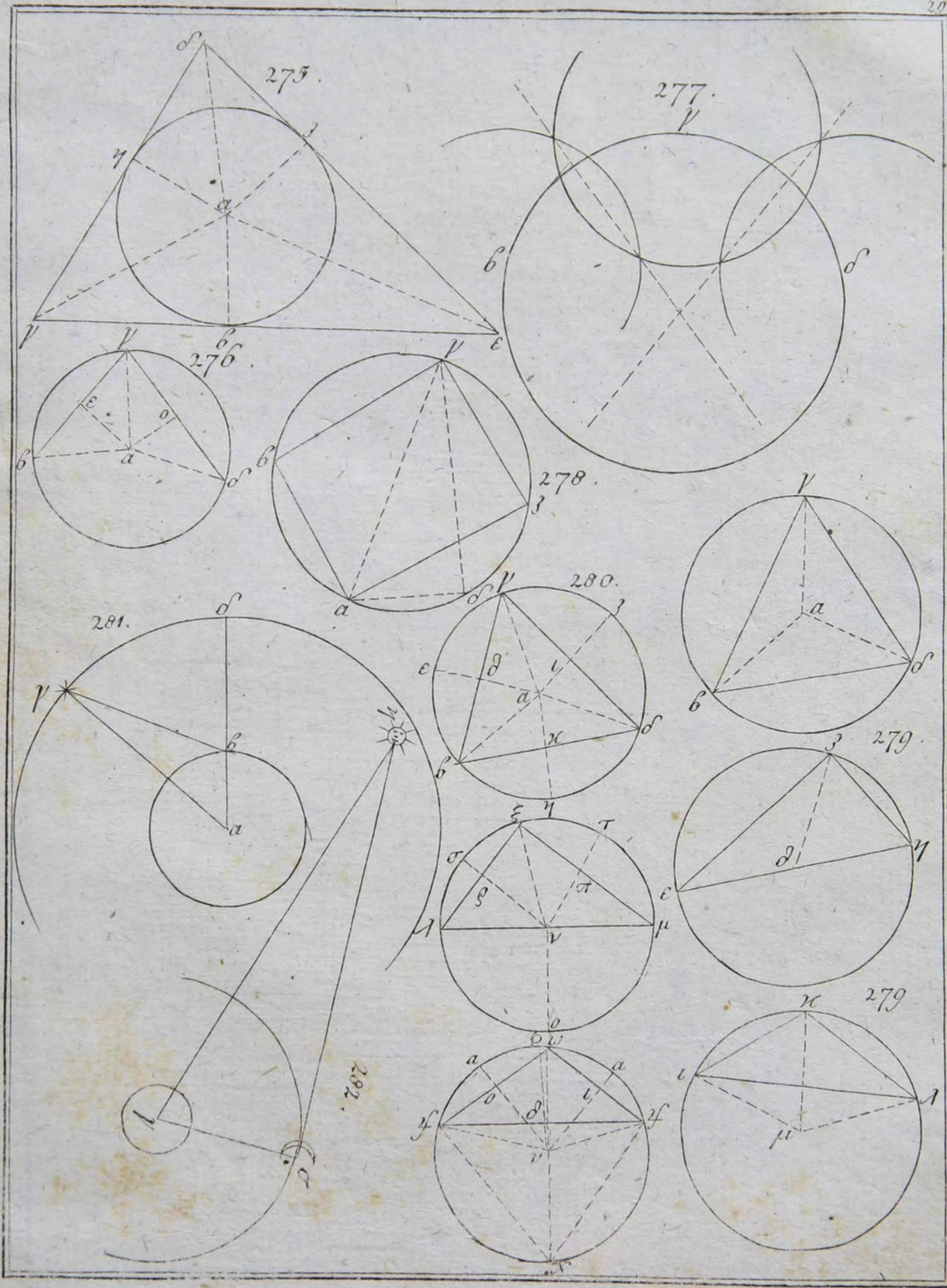

238.
239.
240.
241.
242
243.
244.
245.
246.

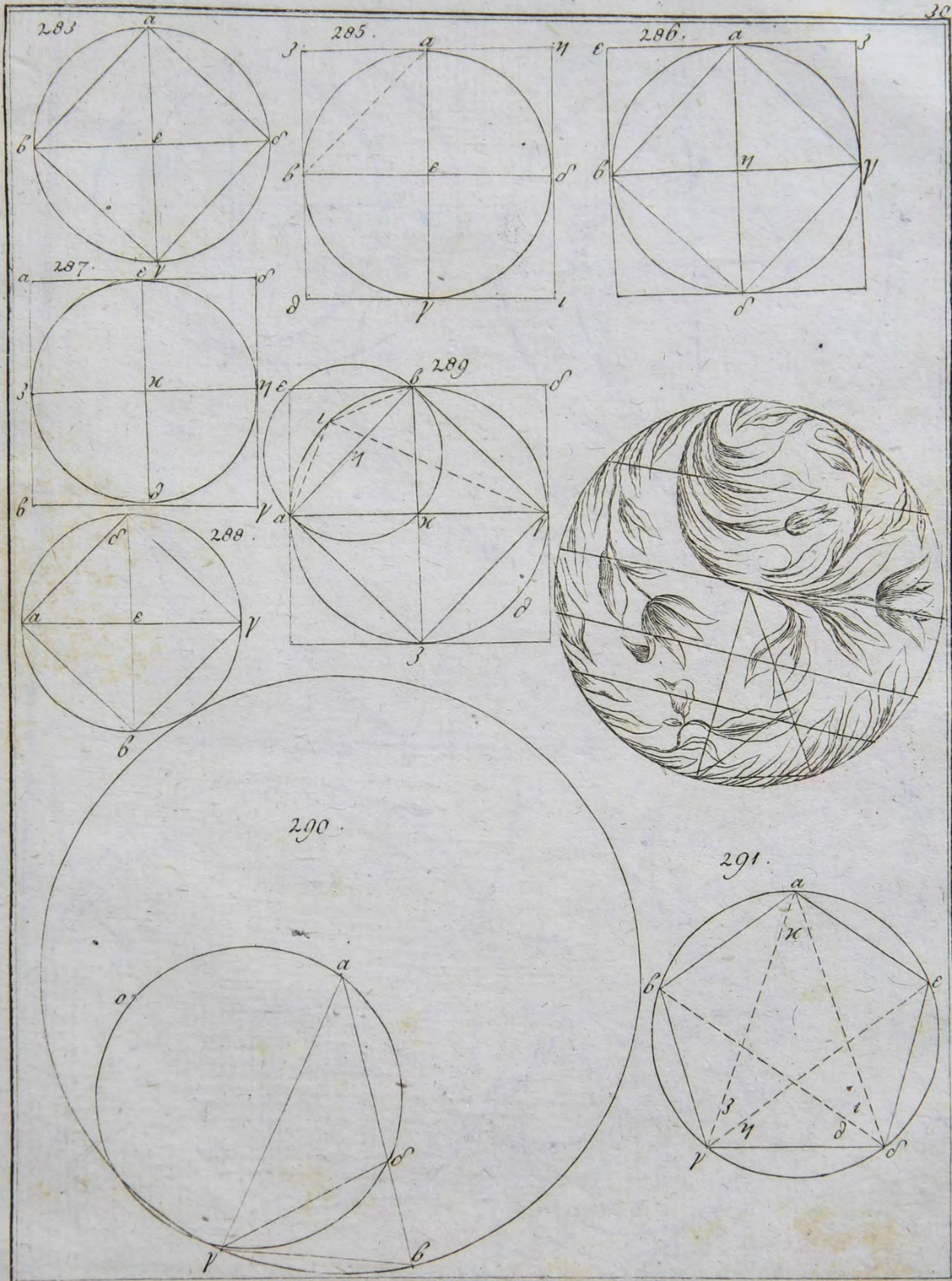

247.
248.
249.
250.
251.
252
253.

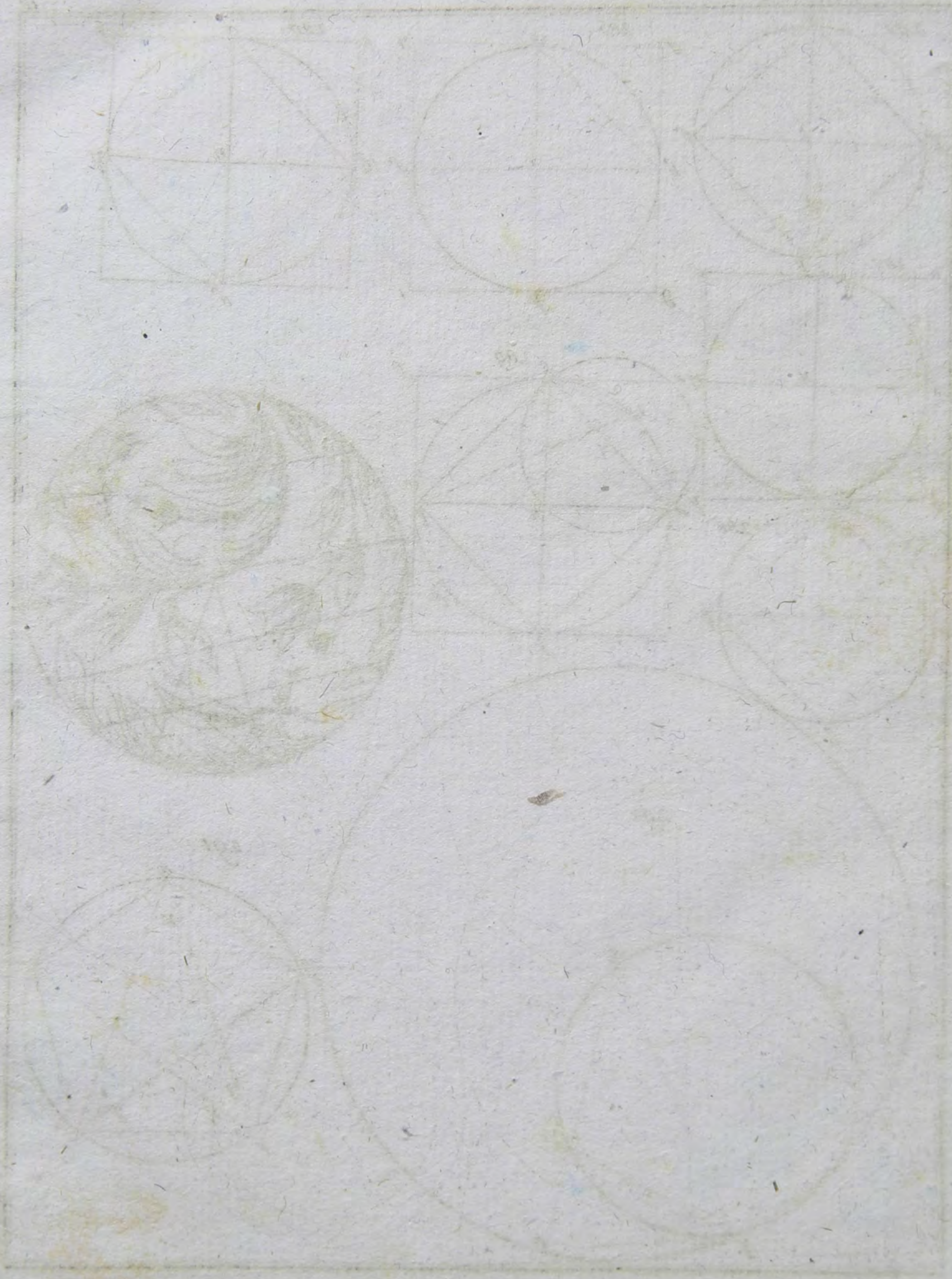

254.
255.
256.
257.
258
259
260.
261.
262.
263.

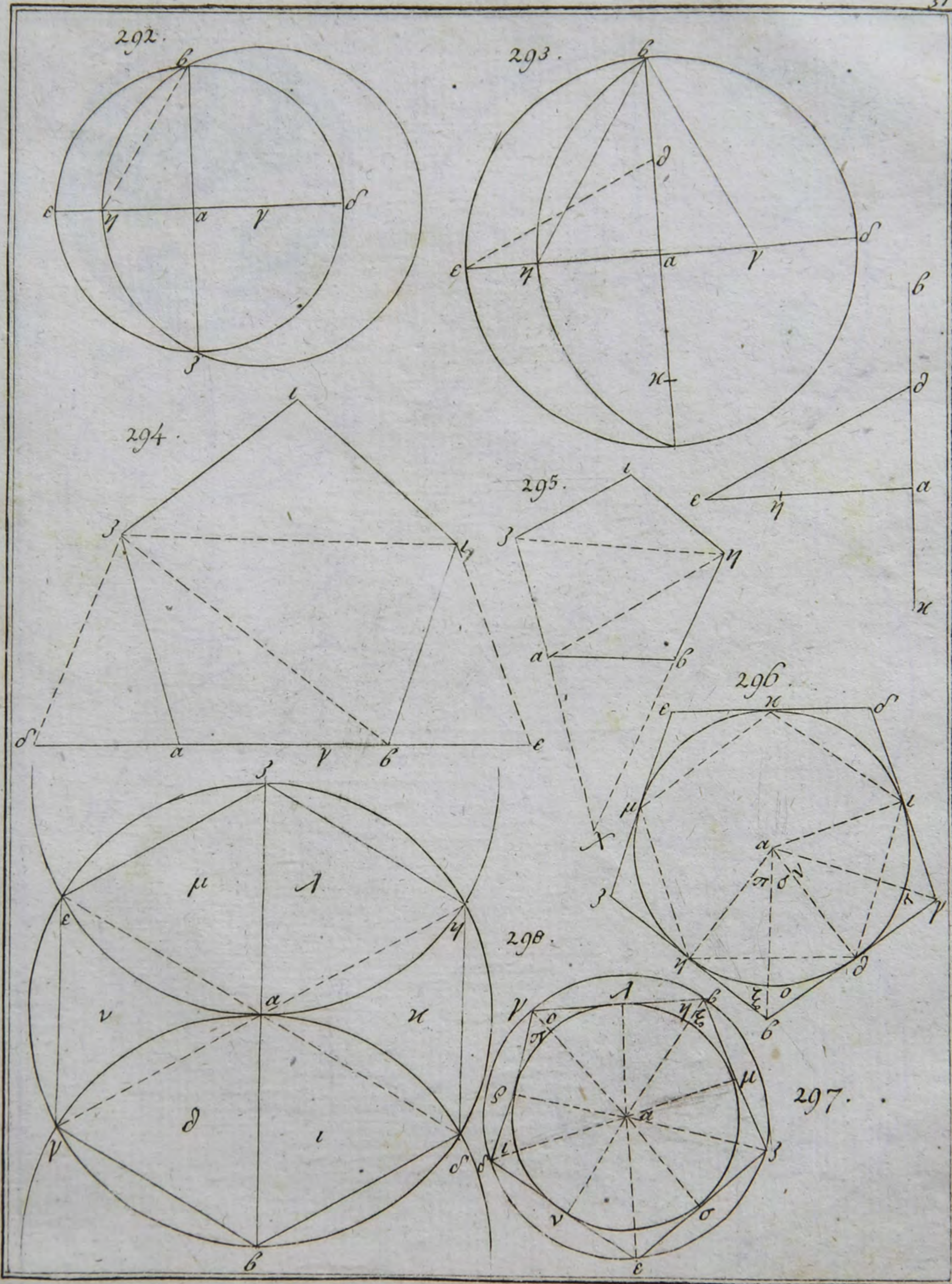

264.
265.
266.
267.
268.
270.
268.
269.


271.
272.
273.
274.

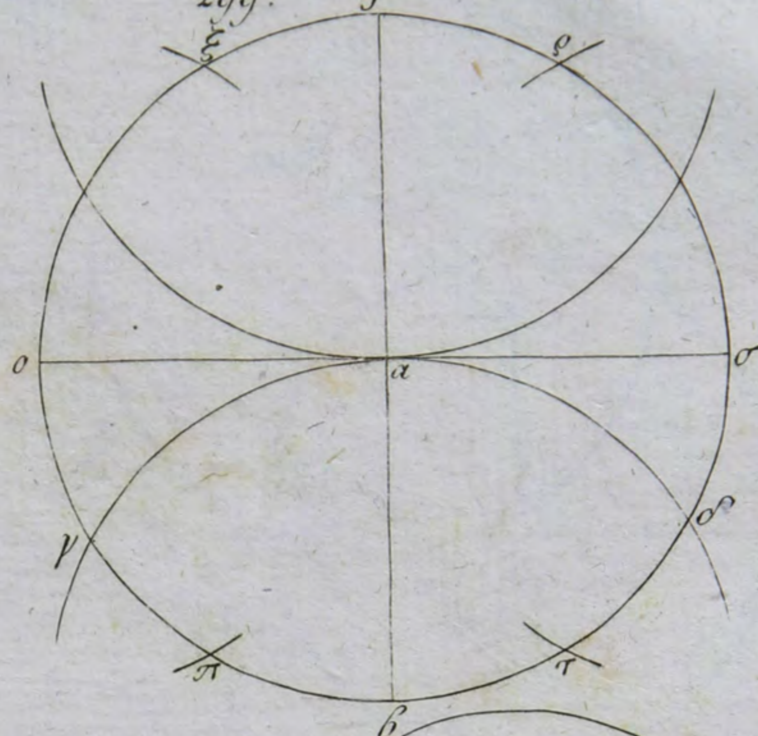

275.
276.
277.
278.
280.
281.
282.
279.
279


283.
285.
286.
287.
289
288.
290.
291.

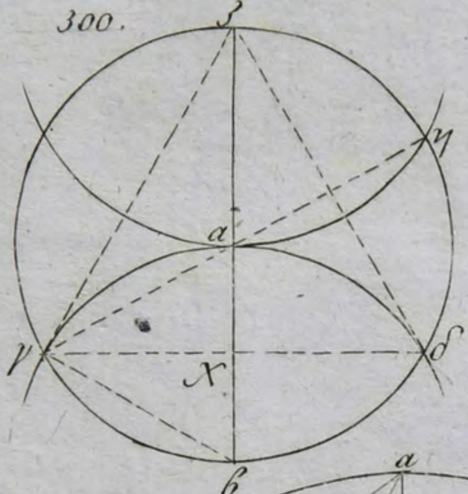



292.
293.
294.
295.
296.
297.
298.

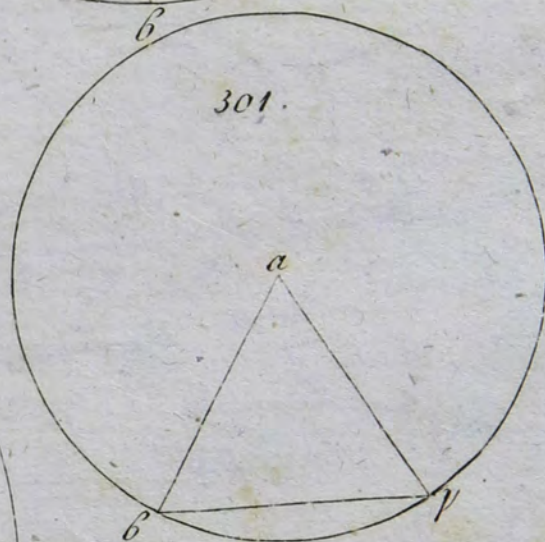
299.



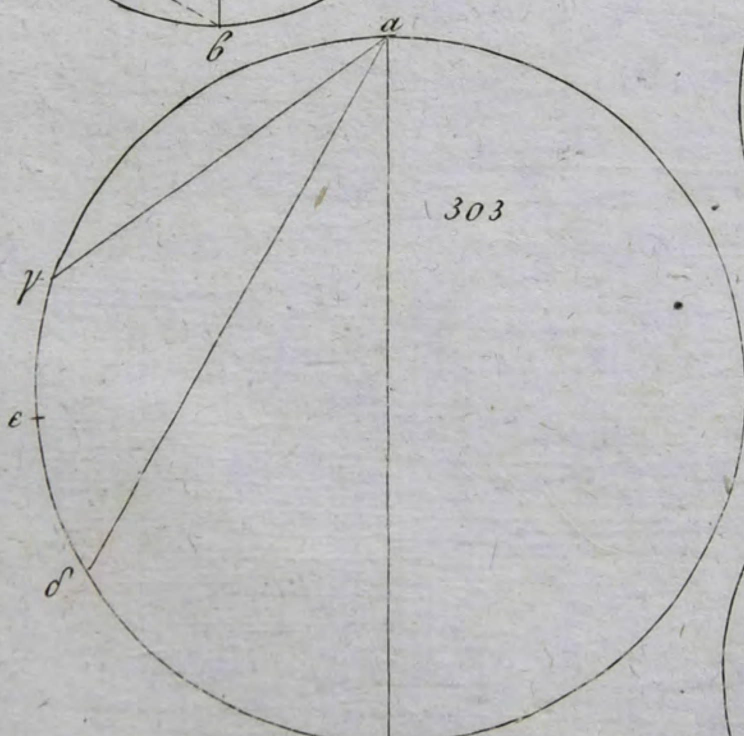
300.



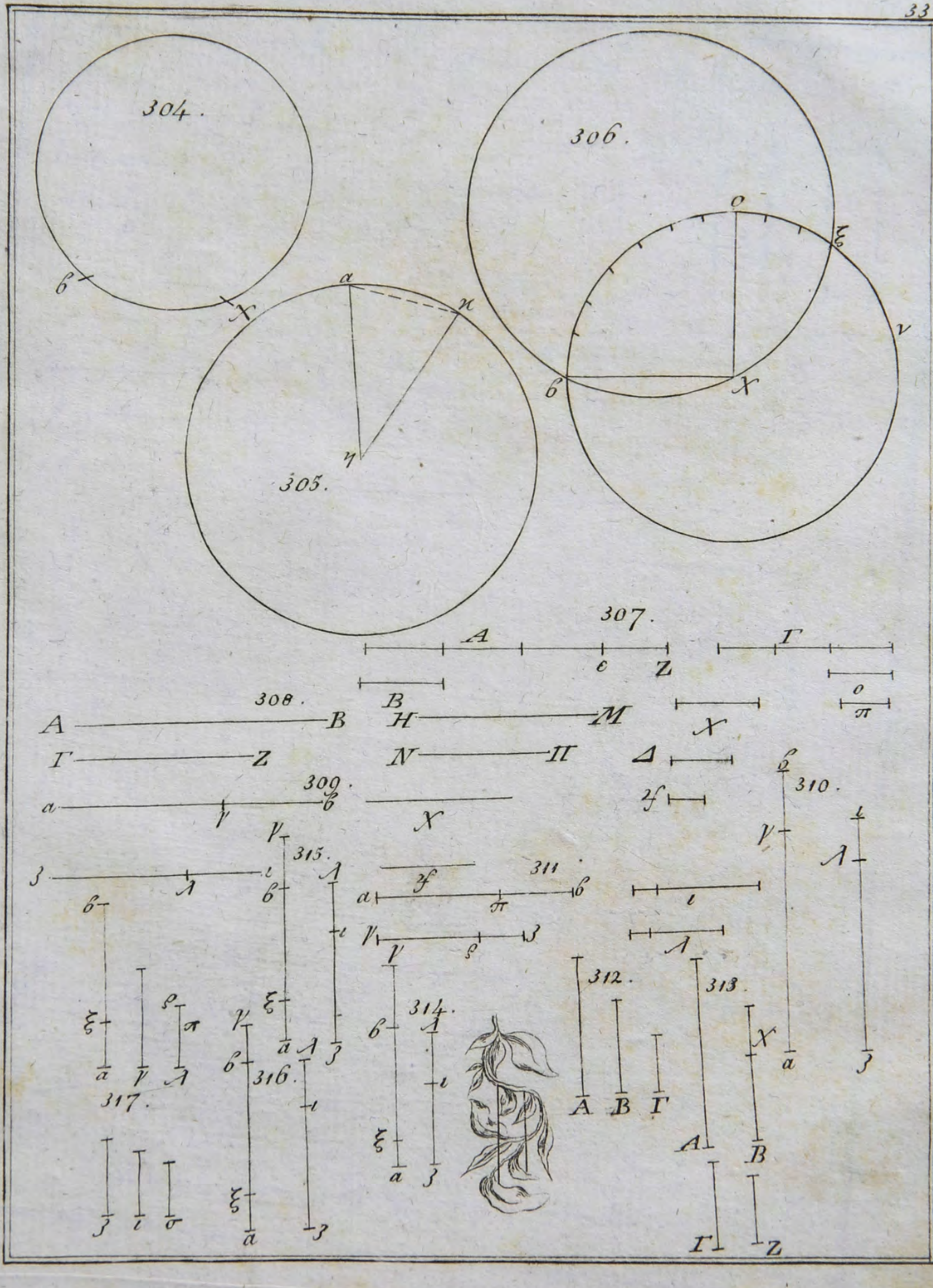
301.

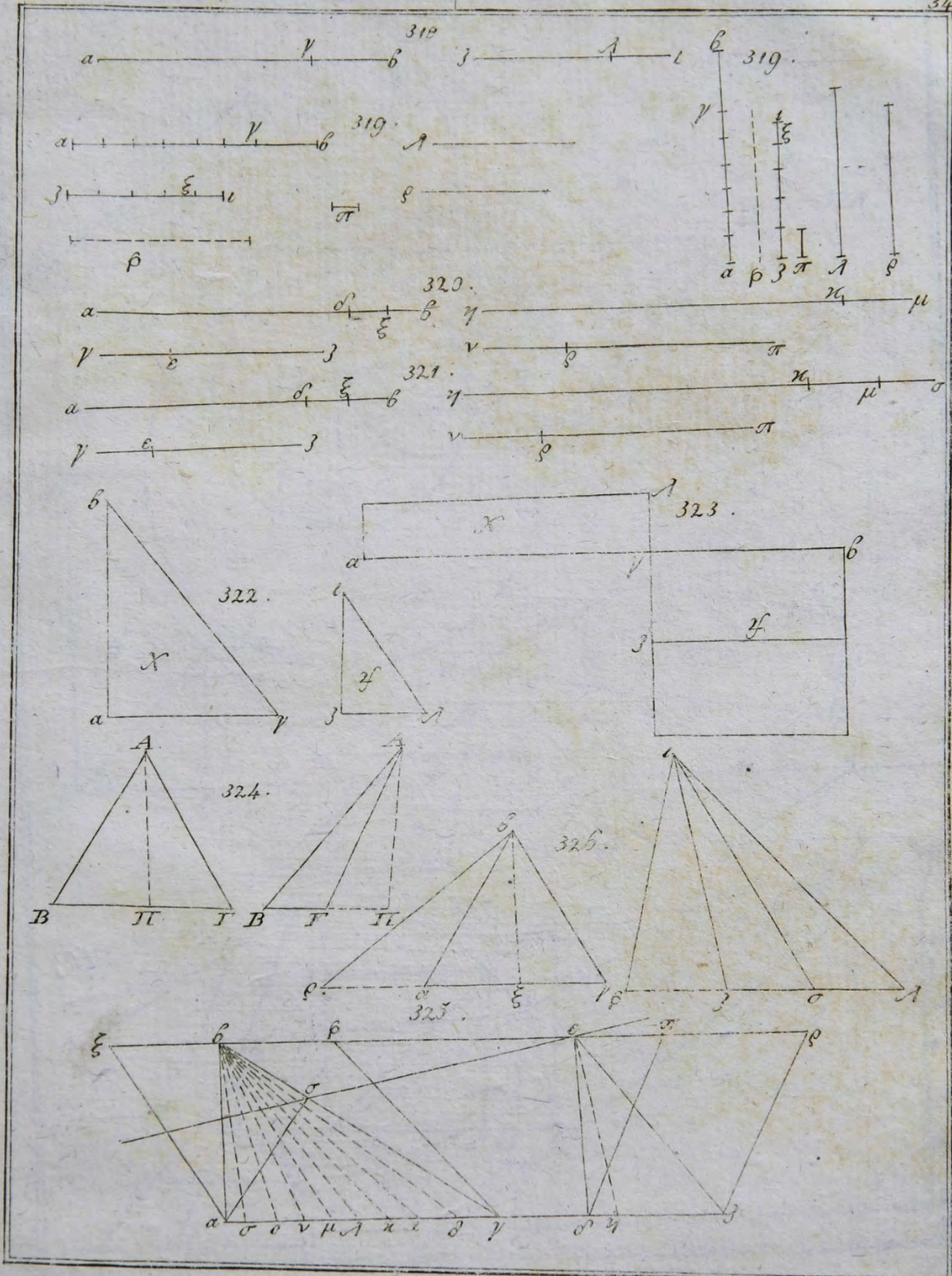


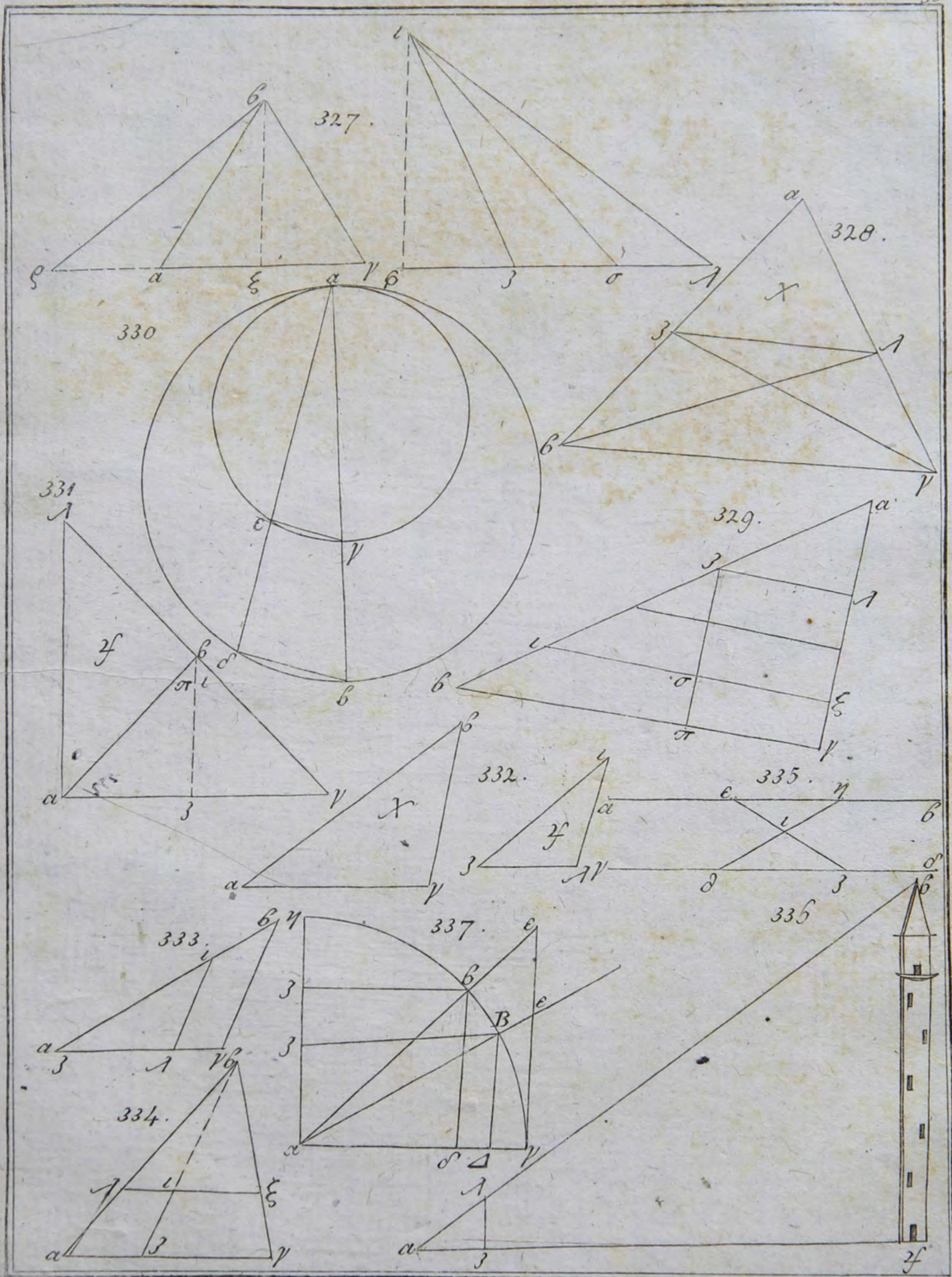
303

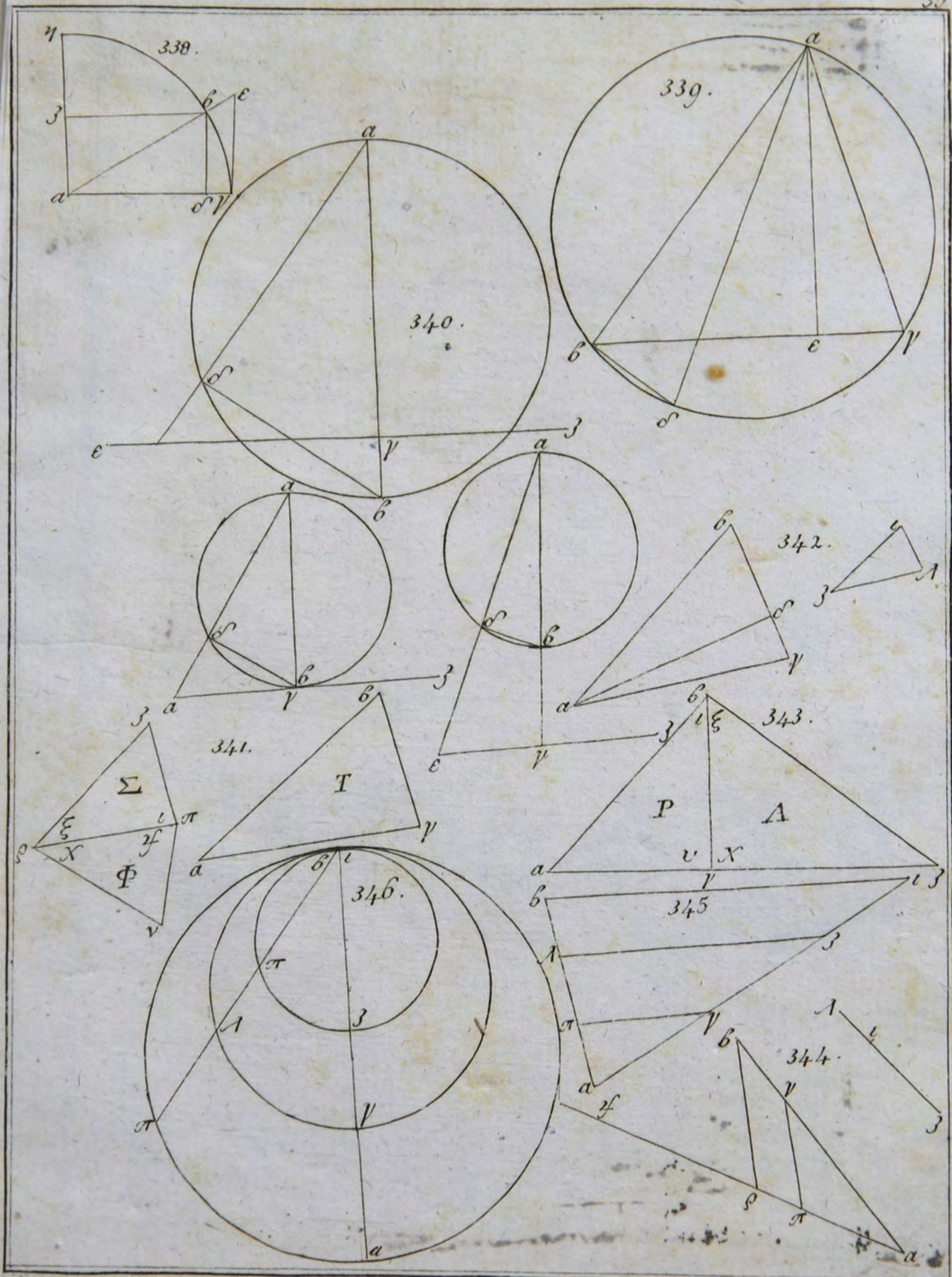


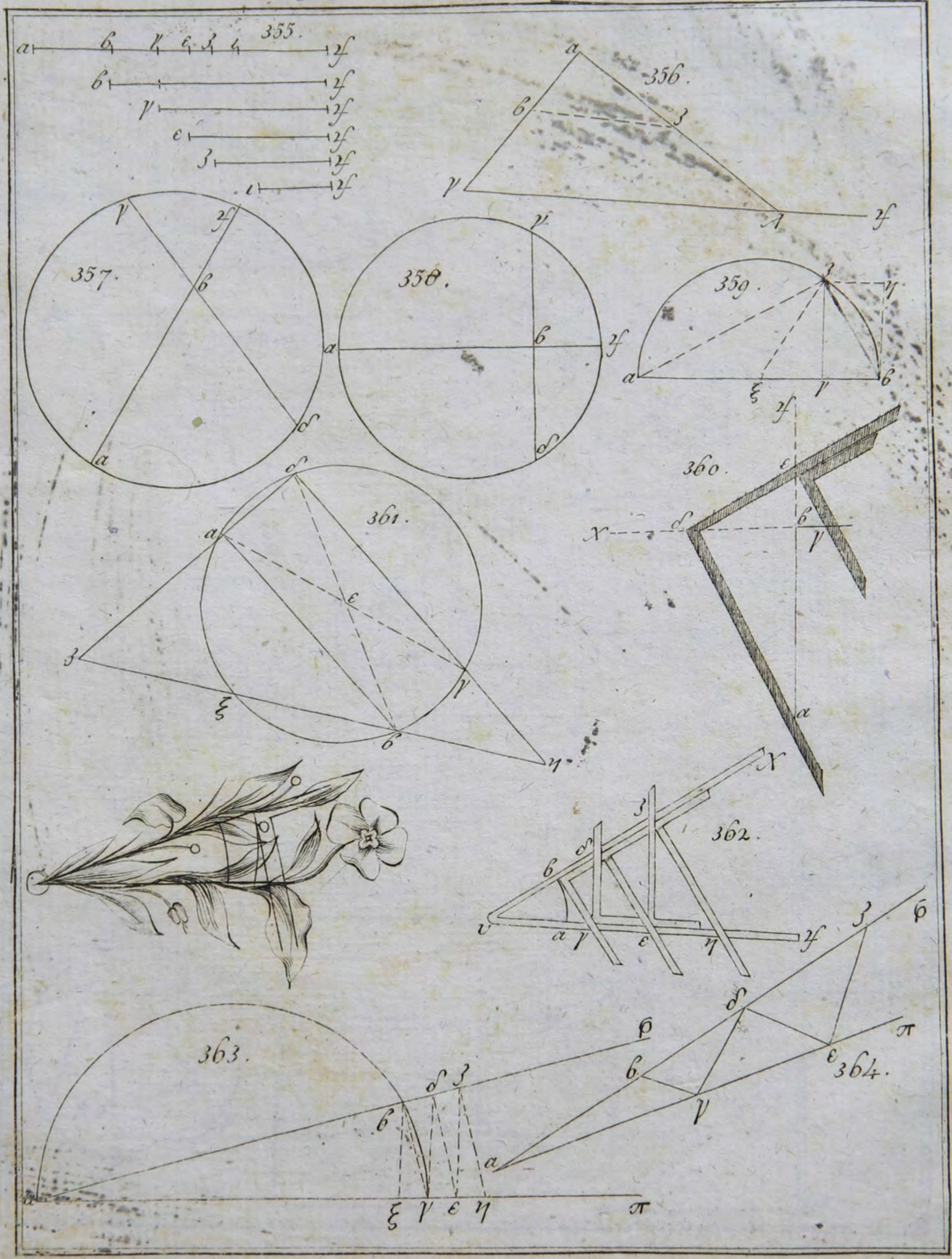
302.

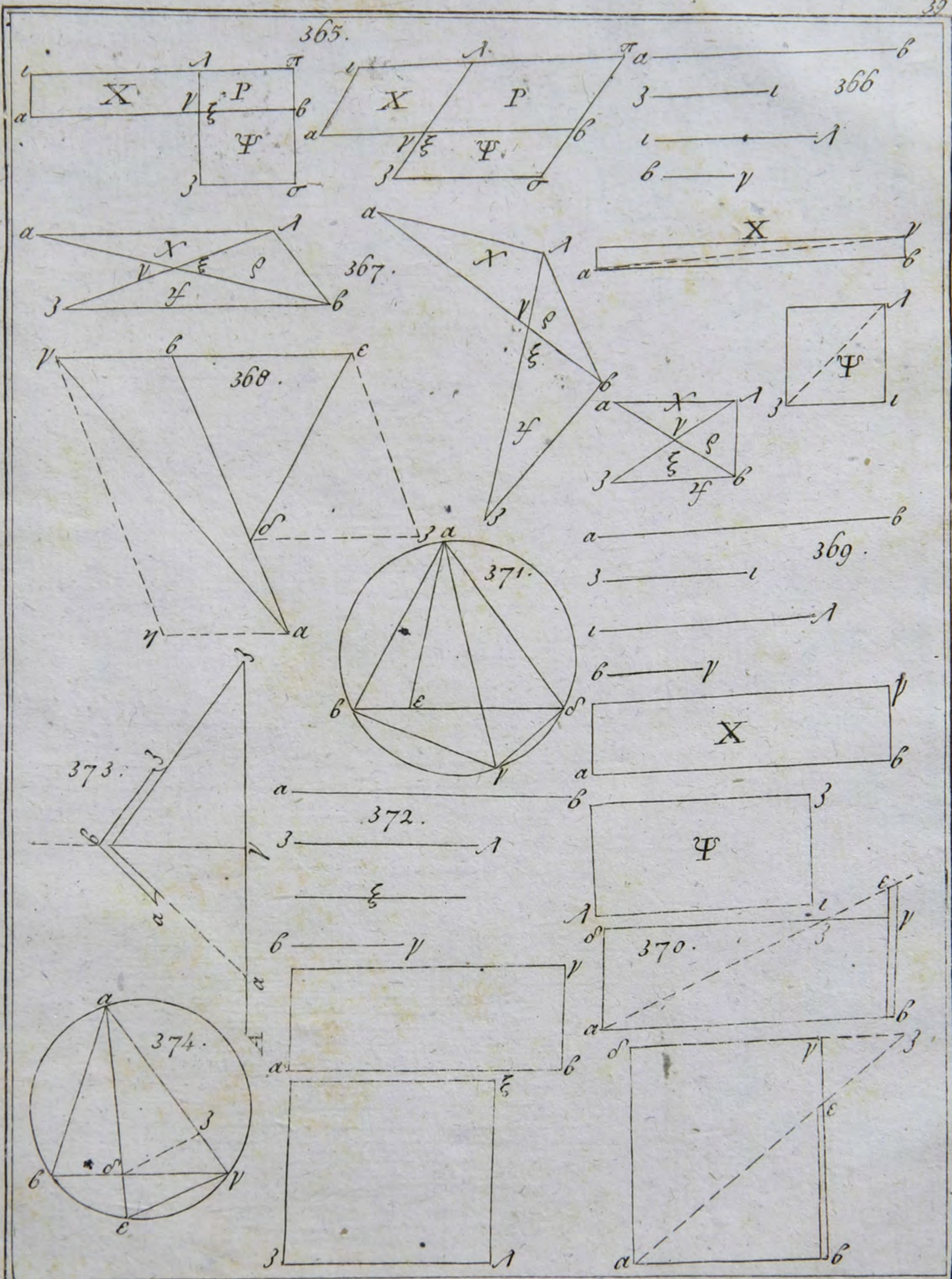

304.
305.
306.
307.
308.
309.
310.
311
312.
313.
314.
315.
316.
317.

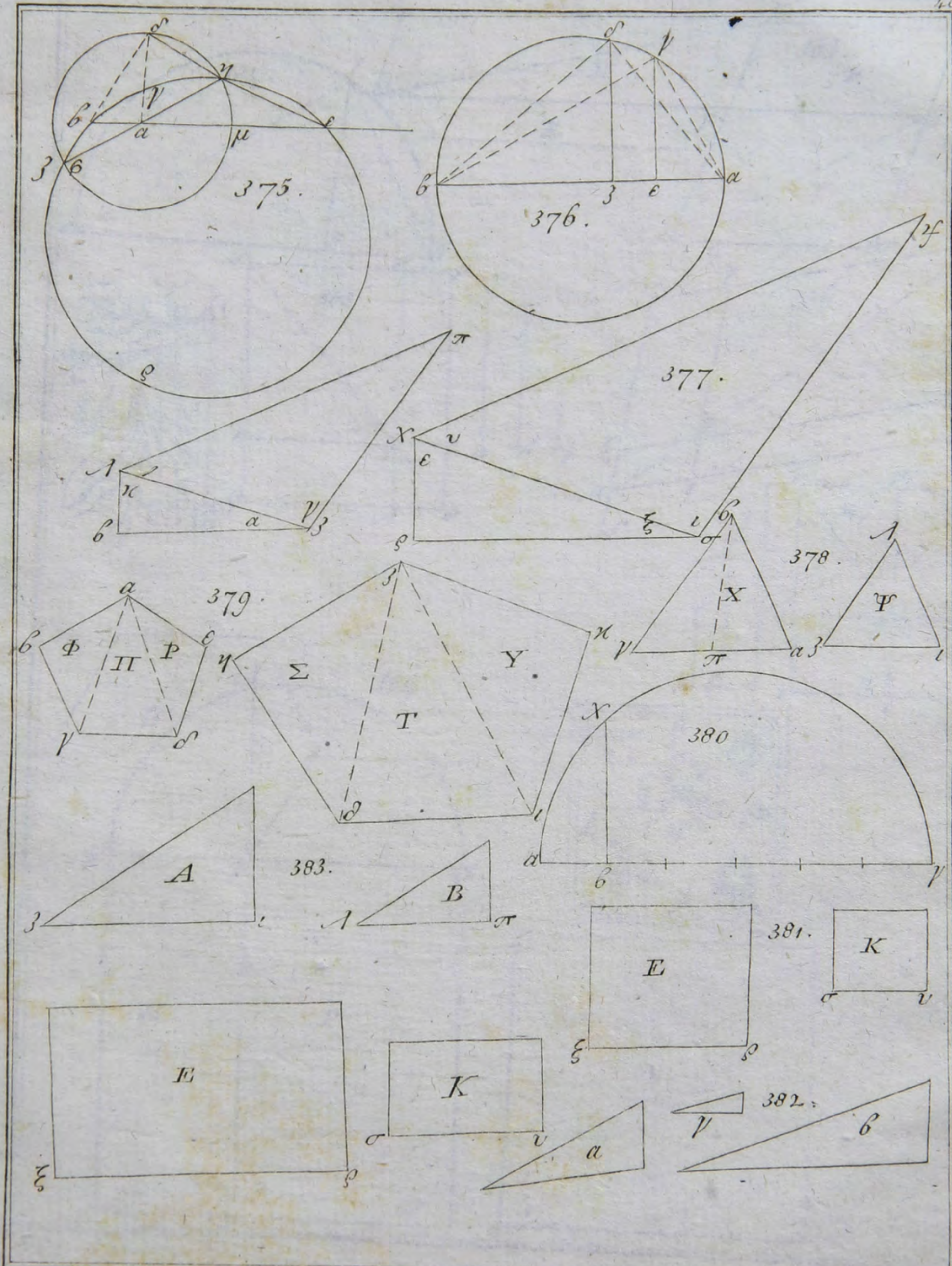

318
319
319
320
321
322
323
324
325
326

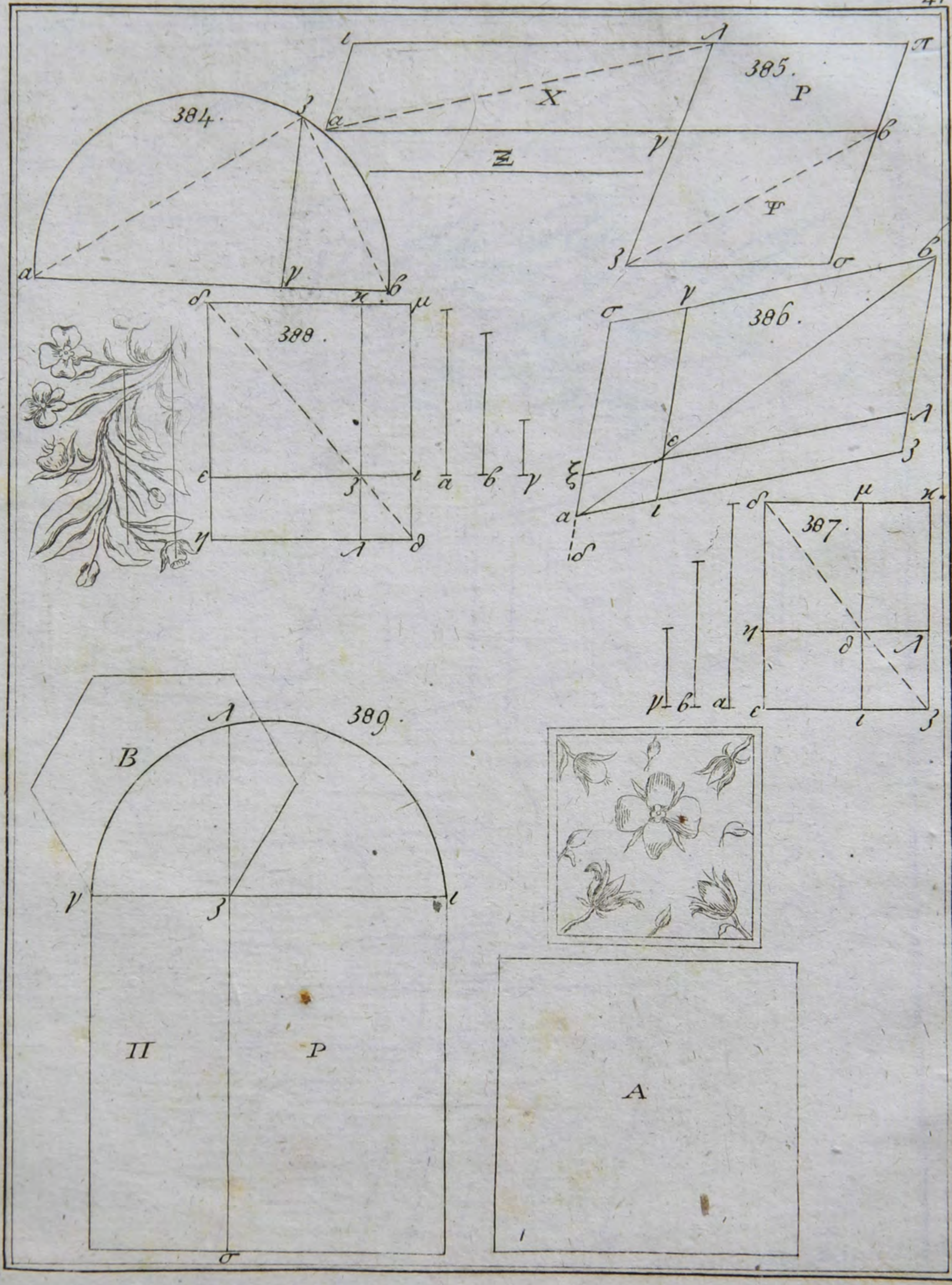

327.
328.
329.
330
331
332.
333.
334.
335.
336
337.

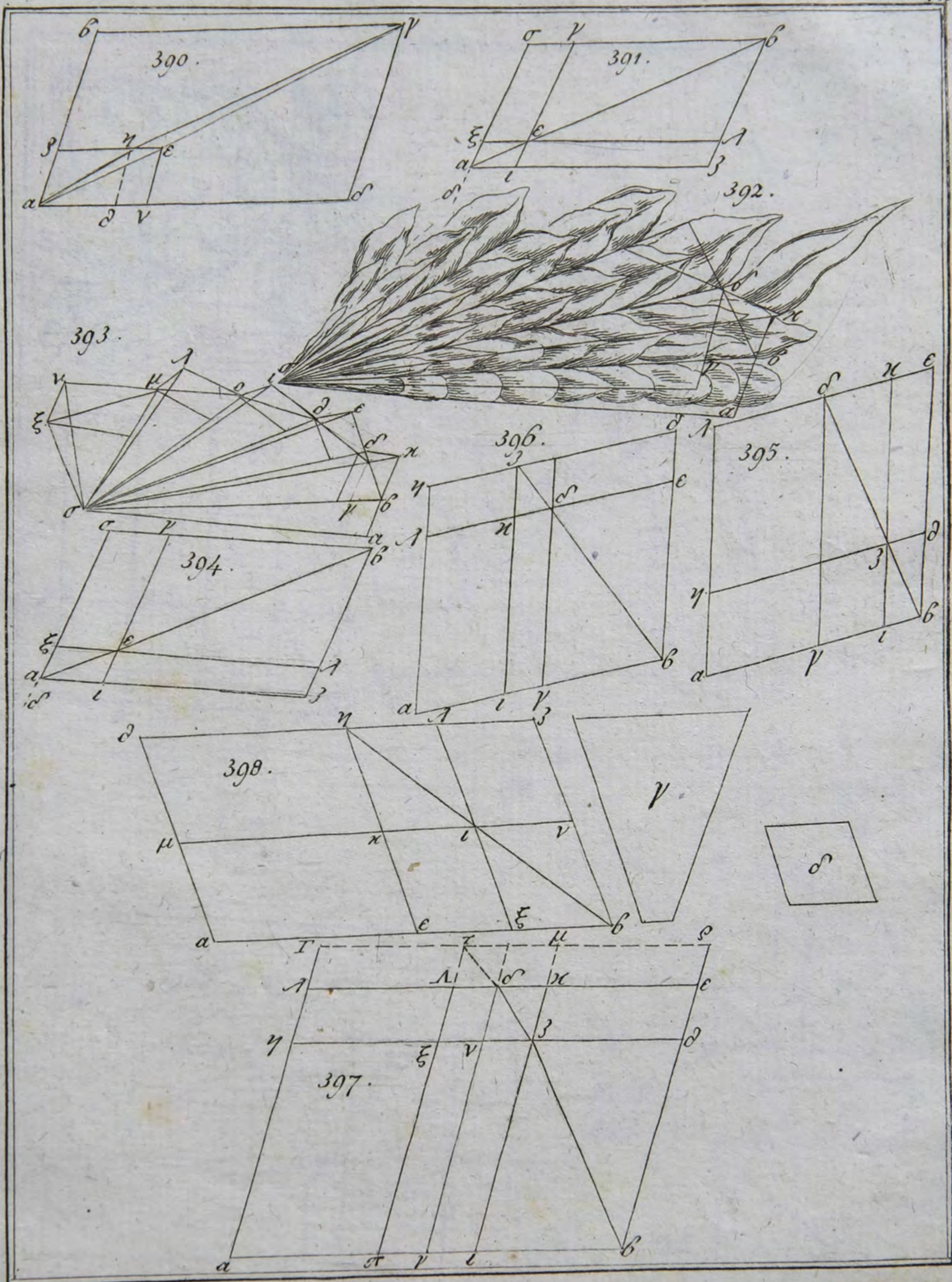

338.
339.
340.
341.
342.
343.
344.
345
346.

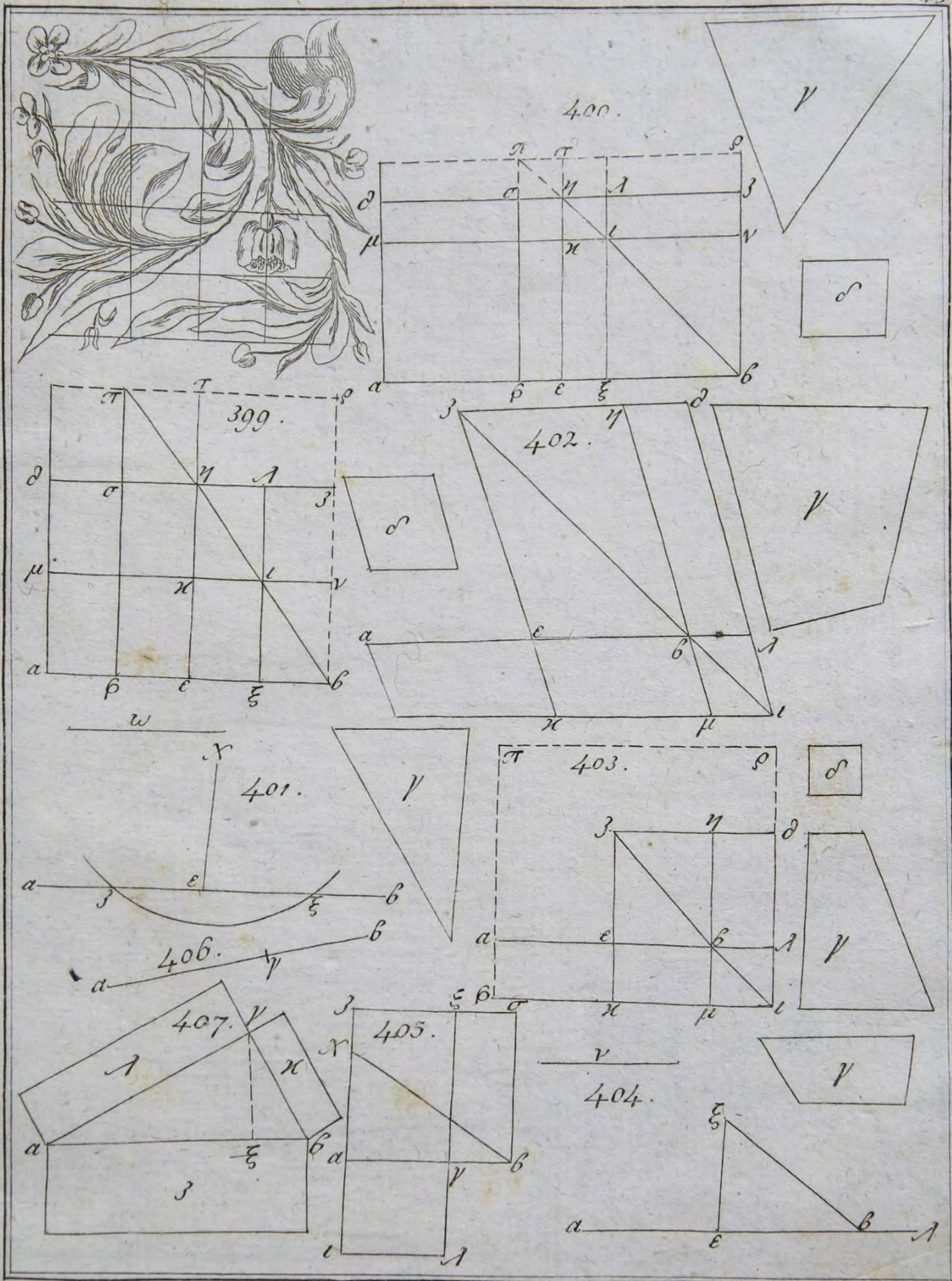

355.
356.
357.
358.
359.
360.
361.
362.
363.
364.

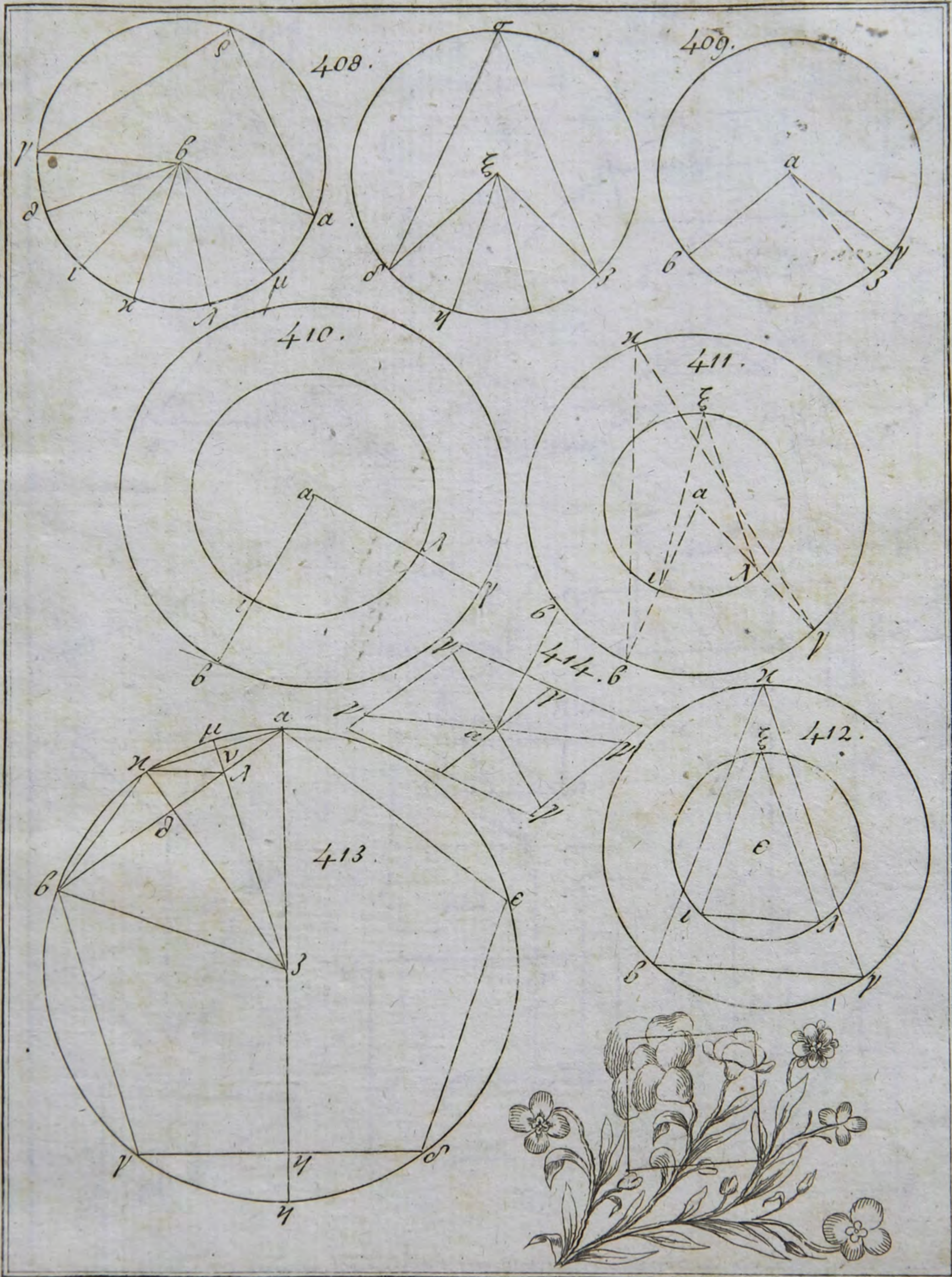

365.
366
367.
368.
369.
370.
371.
372.
373.
374.

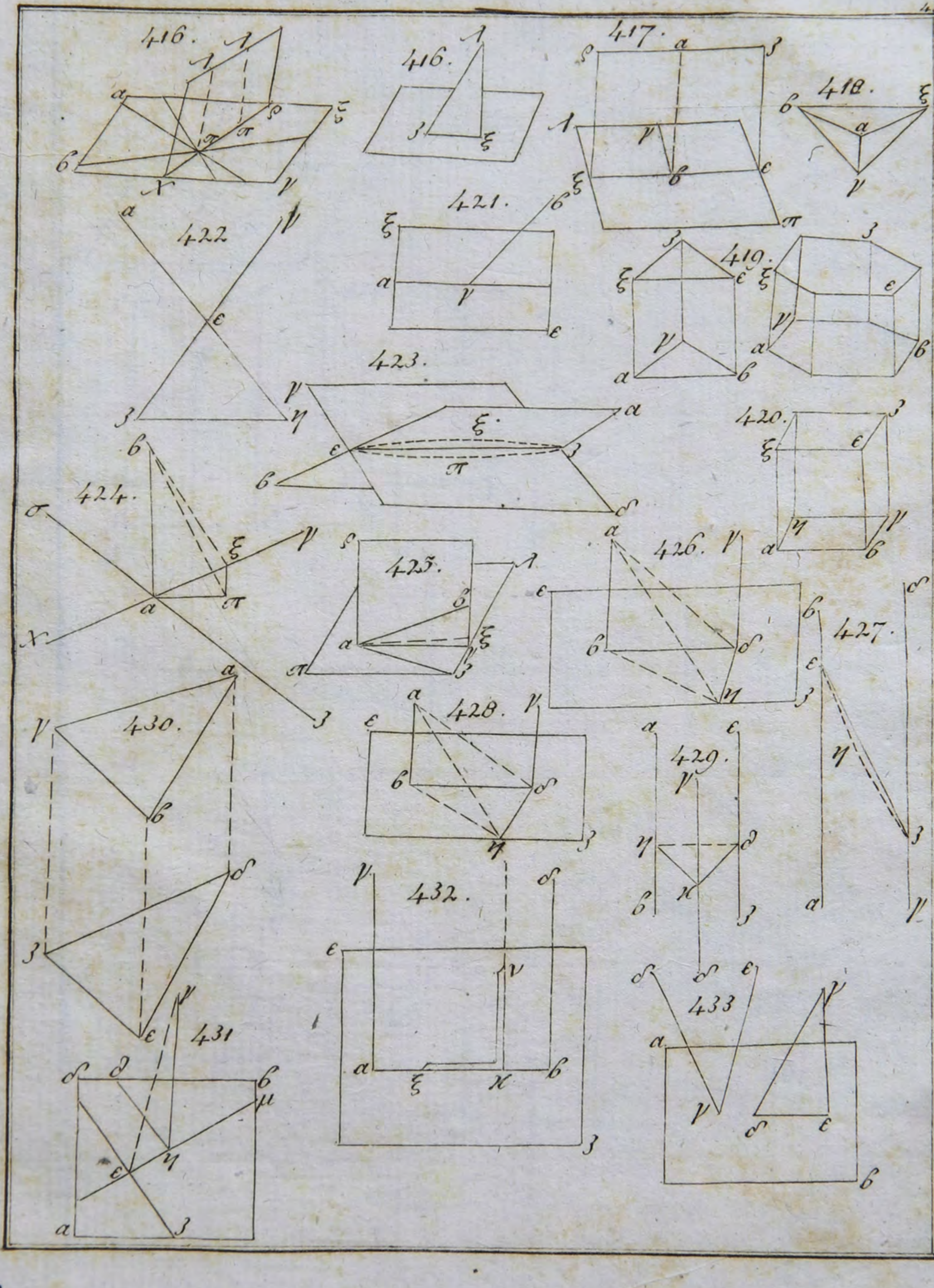

375.
376.
377.
378.
379.
380
381.
382.
383.

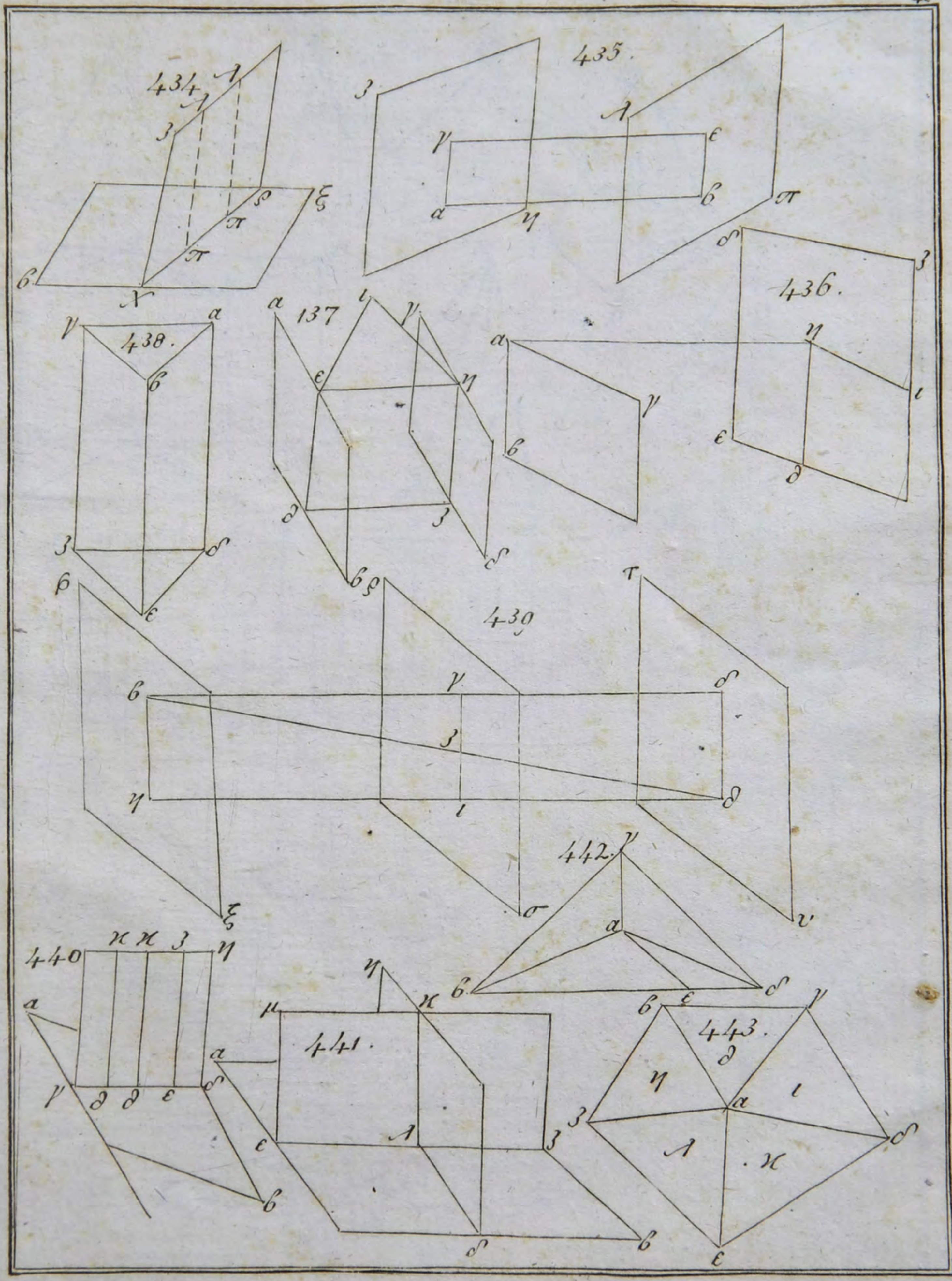

384.
385.
386.
387.
388.
389.
X
P
Ξ
Ψ
B
Π
P
A

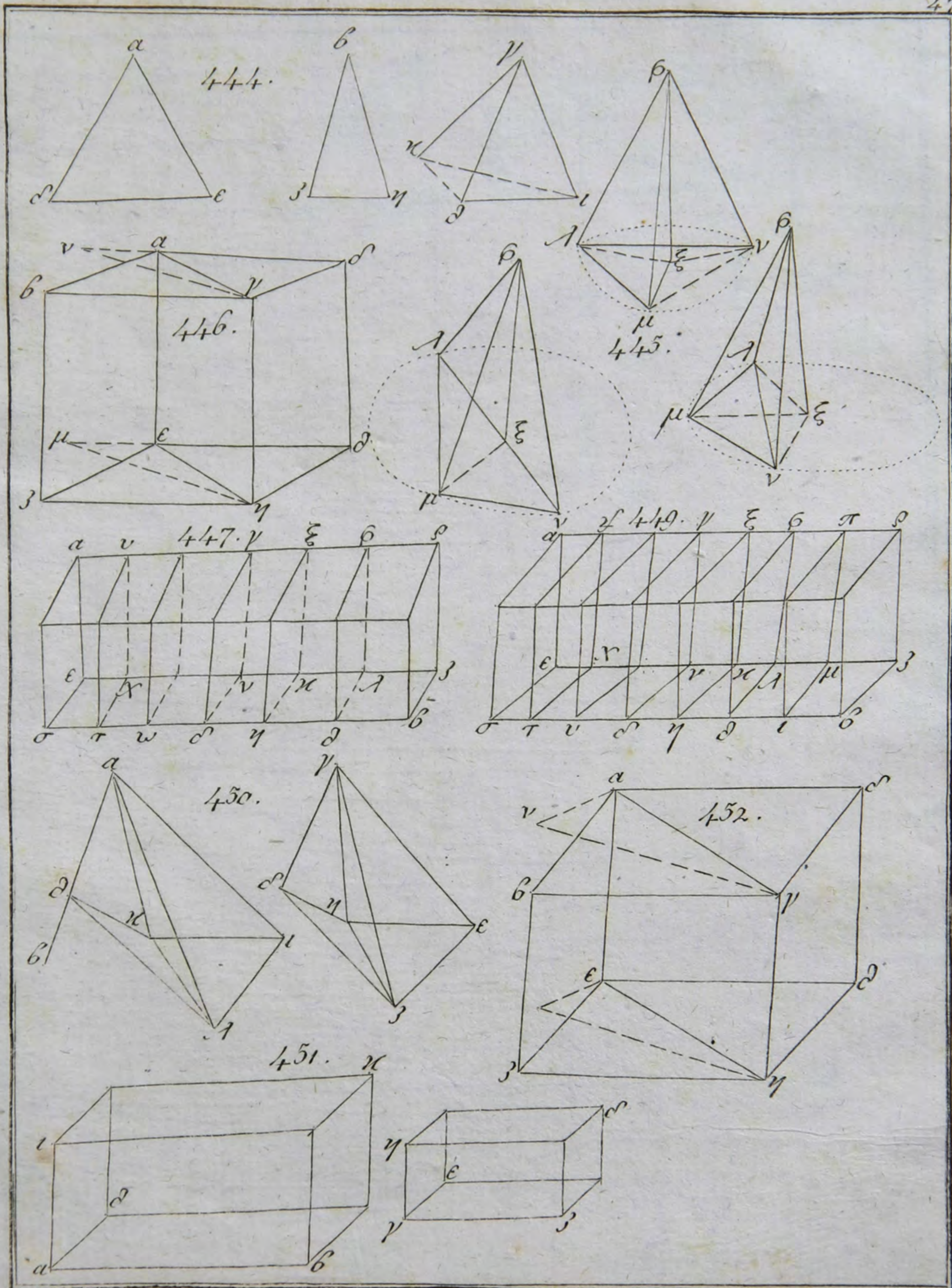

390.
391.
392.
393.
394.
395.
396.
397.
398.

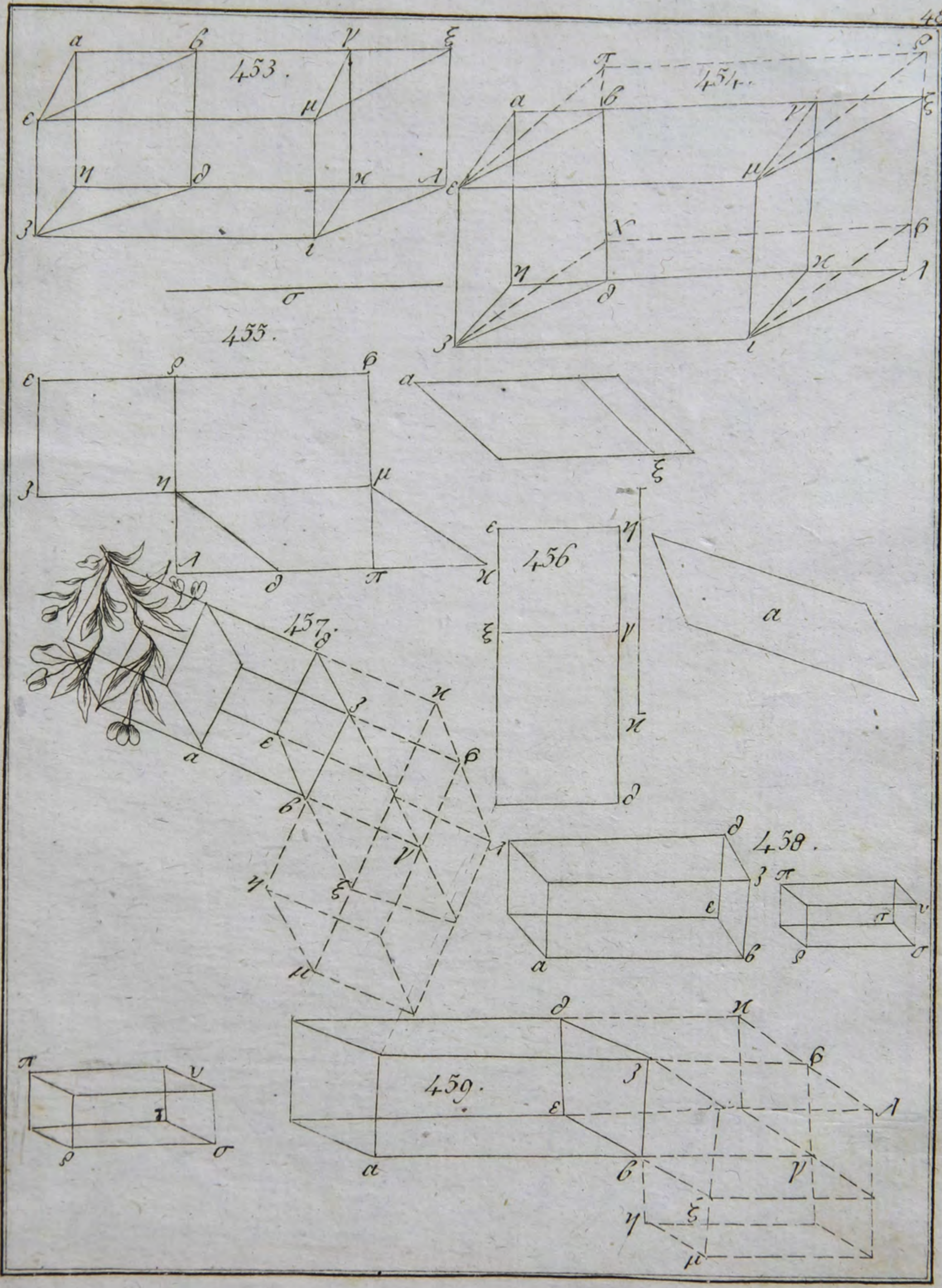

399.
400.
401.
402.
403.
404.
405.
406.
407.

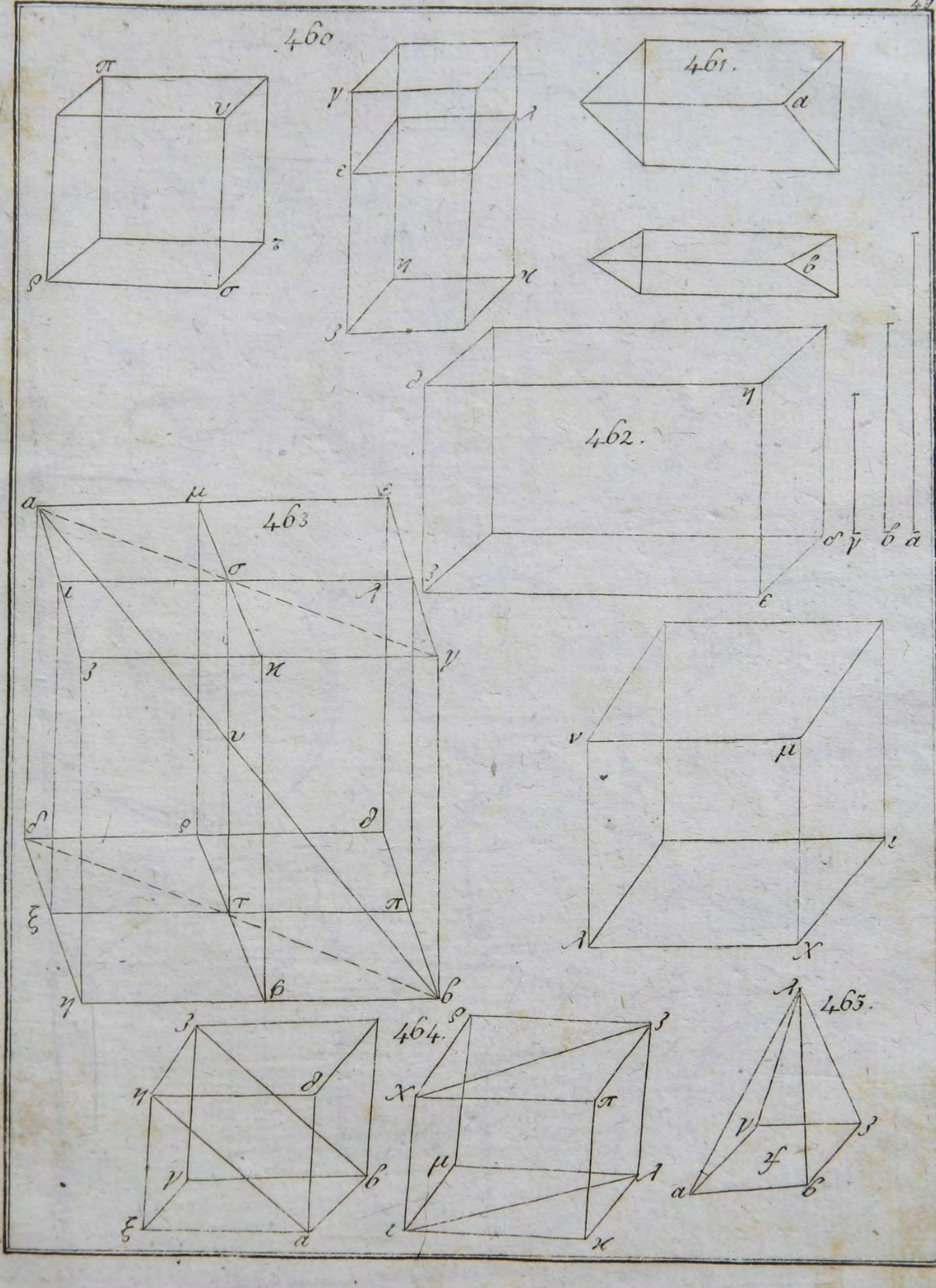

408.
409.
410.
411.
412.
413.
414.

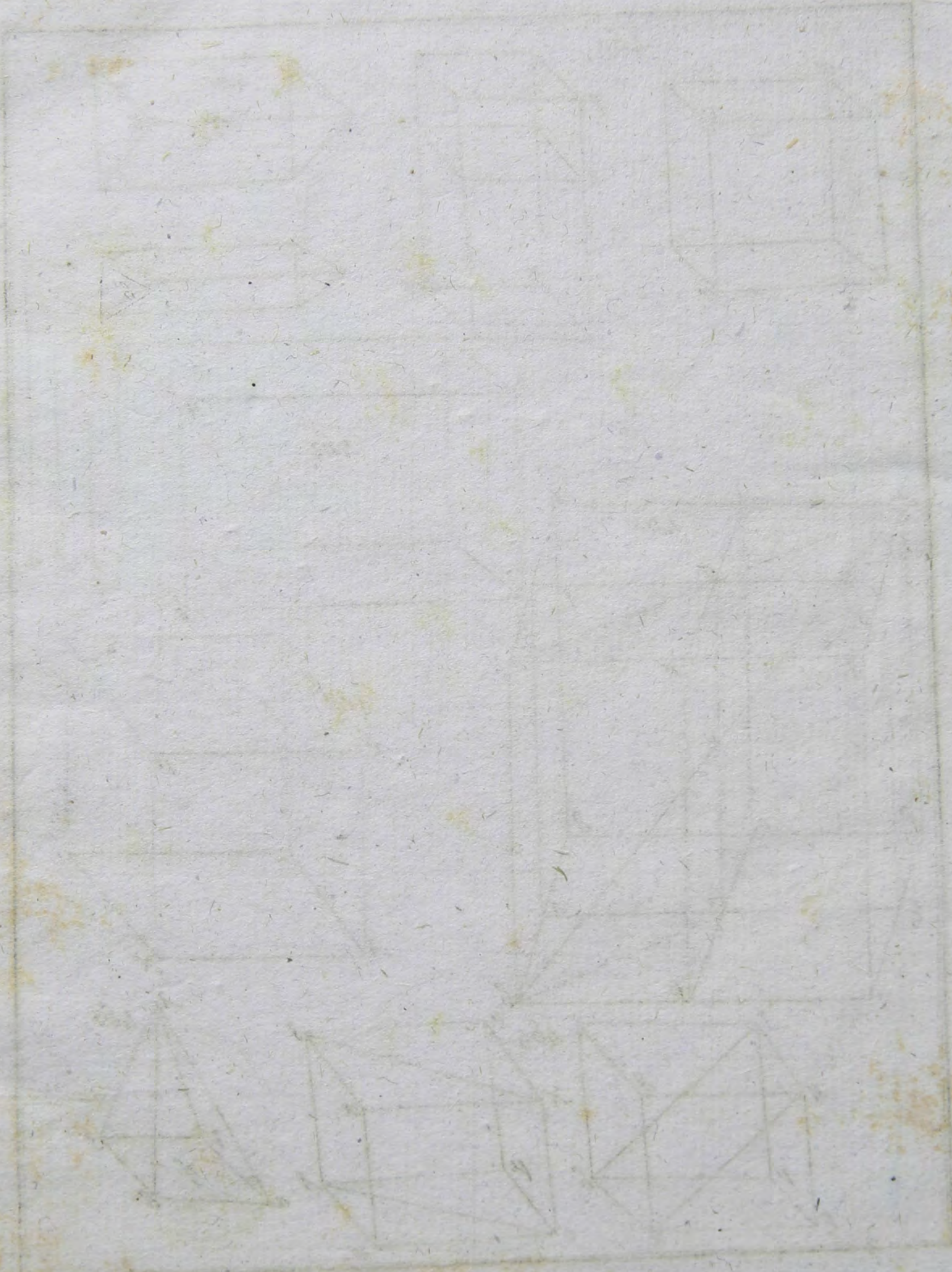

416.
416.
417.
418.
421.
422
419.
423.
420.
424.
425.
426.
427.
430.
428.
429.
432.
431
433

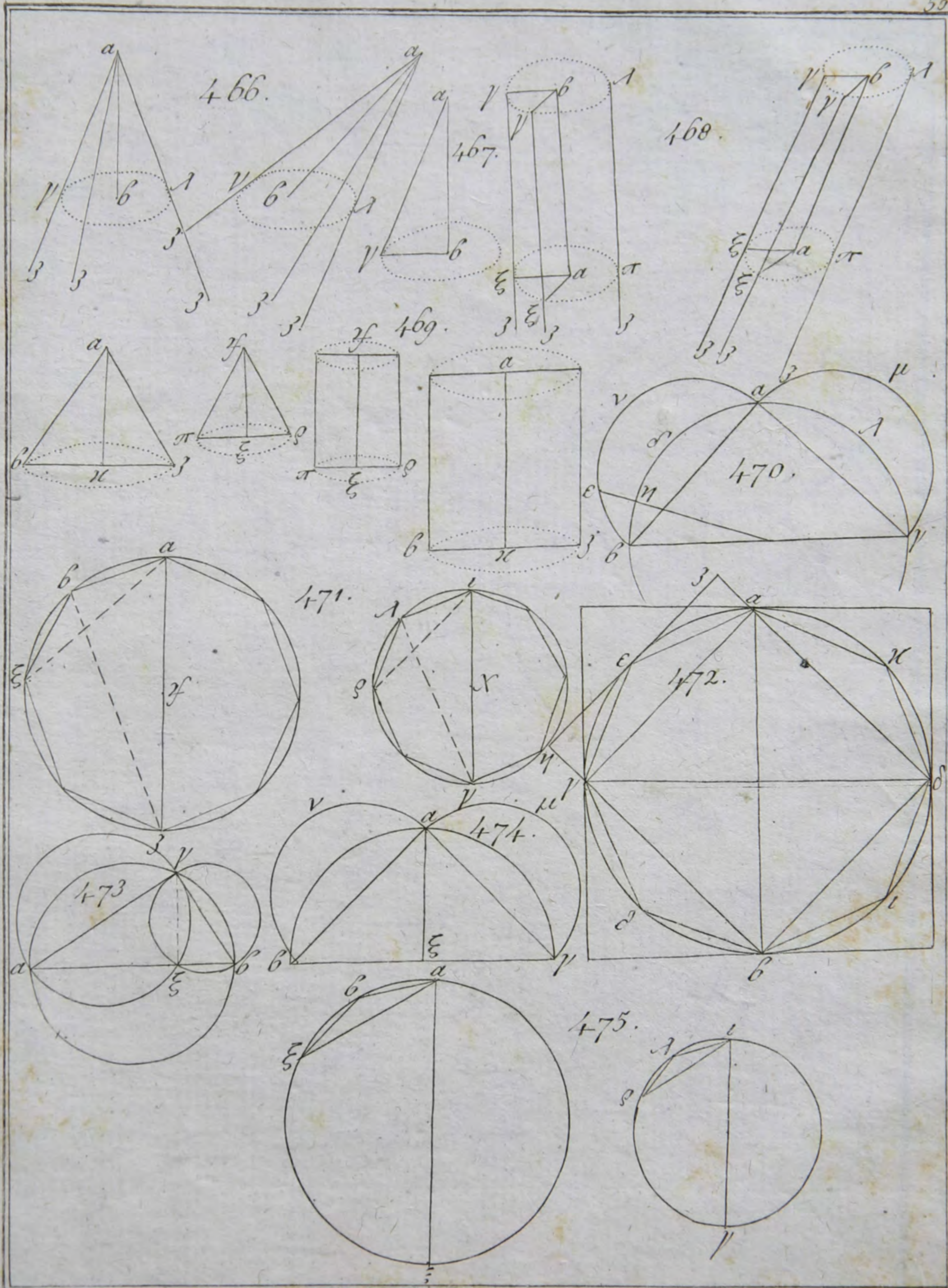

434
435.
436.
137
438.
439
440
441.
442.
443.

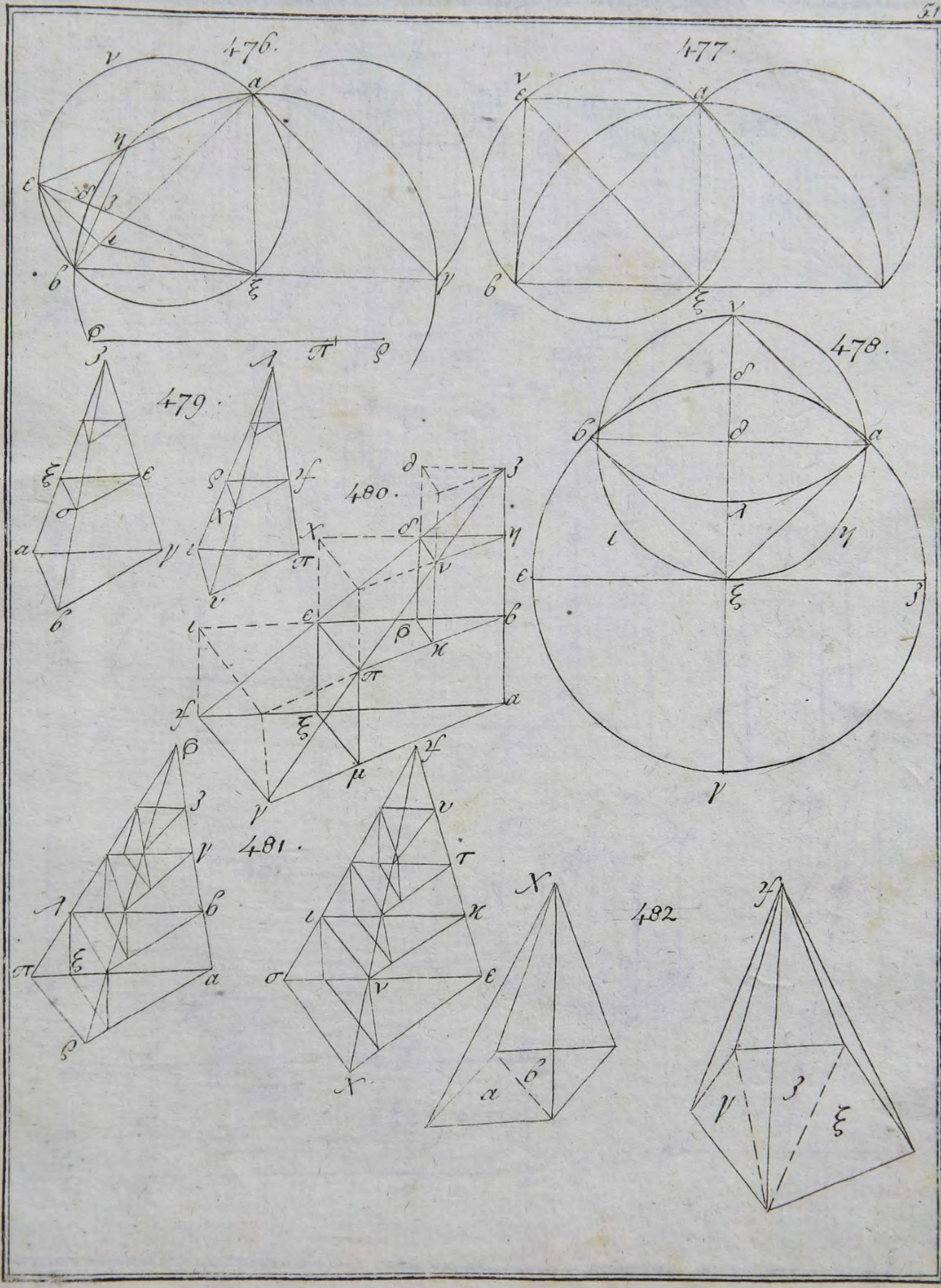

444.
α δ ε
β ζ η
γ κ θ ι
445.
ρ λ ν ξ μ
446.
ν α δ β γ μ ε θ ζ η
447.
α υ γ ξ β ρ
ε χ ν κ λ ζ
σ τ ω δ η θ β
449.
α φ γ ξ β π ρ
ε χ ν κ λ μ ζ
σ τ υ δ η θ ι β
450.
α δ β κ ι λ
γ δ η ε ζ
451.
κ ι θ α β
η ε γ ζ δ
452.
α δ ν β γ ε θ ζ η

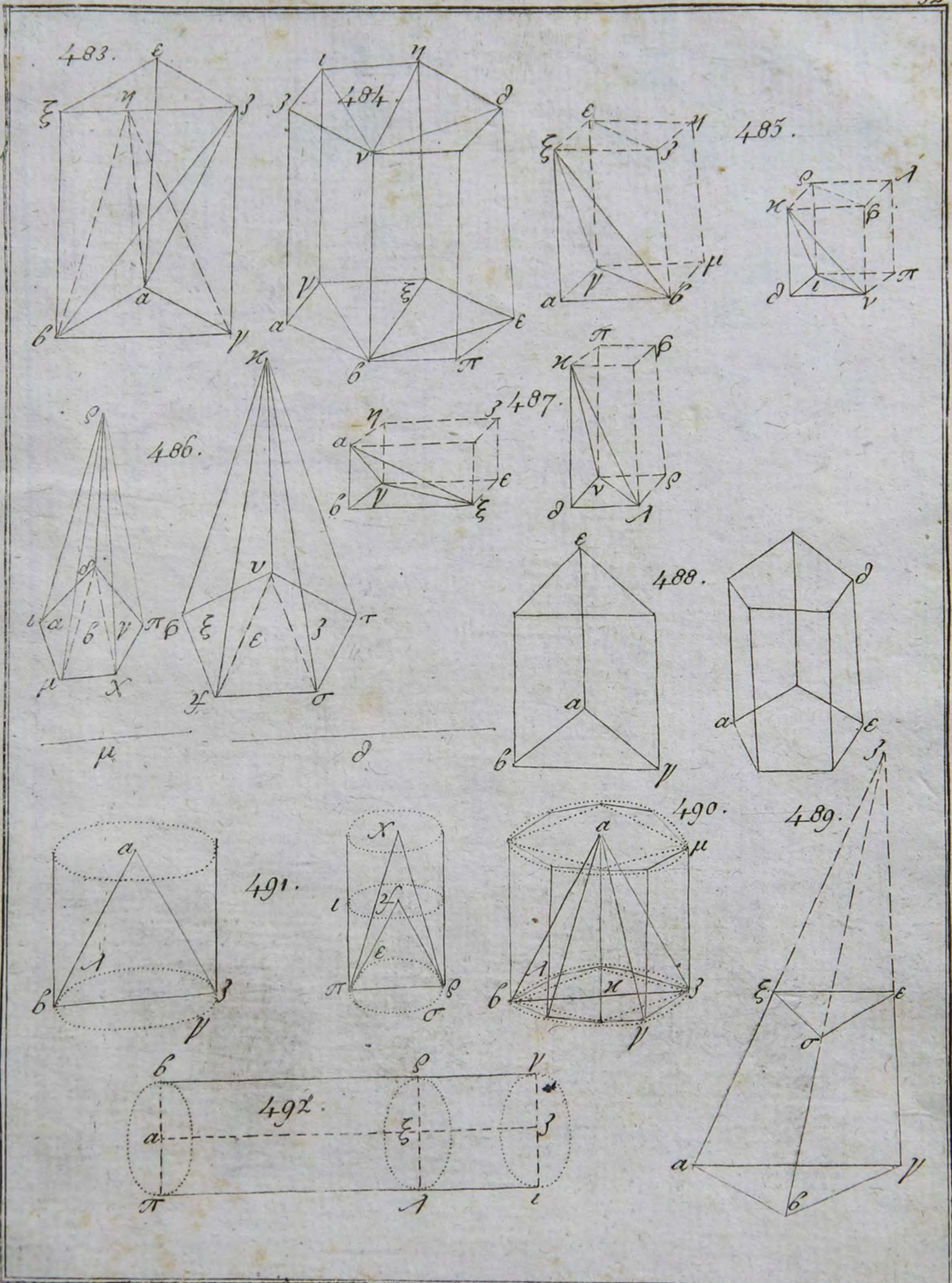

453.
454.
455.
456
457.
458.
459.

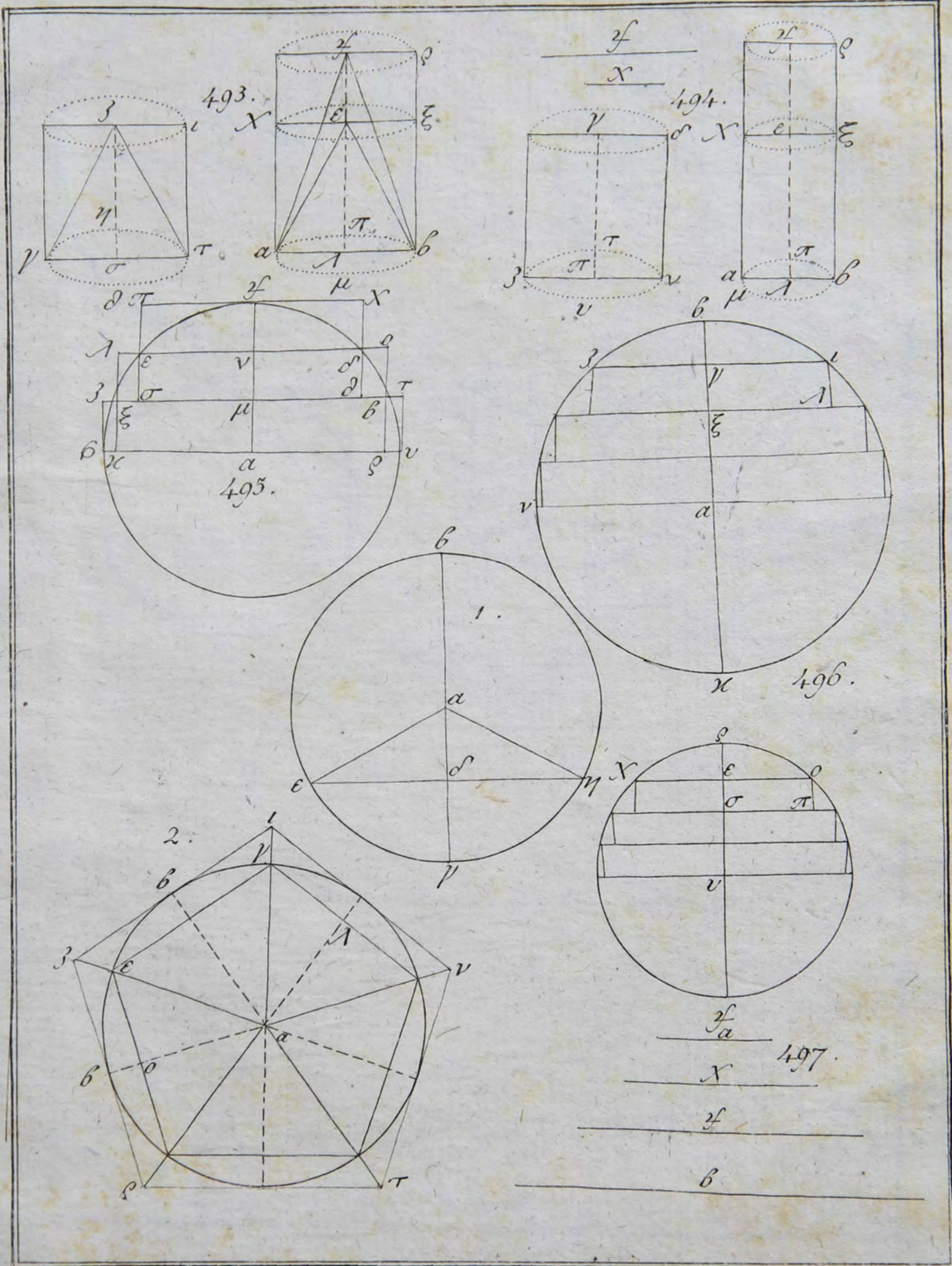

460
461.
462.
463
464.
465.

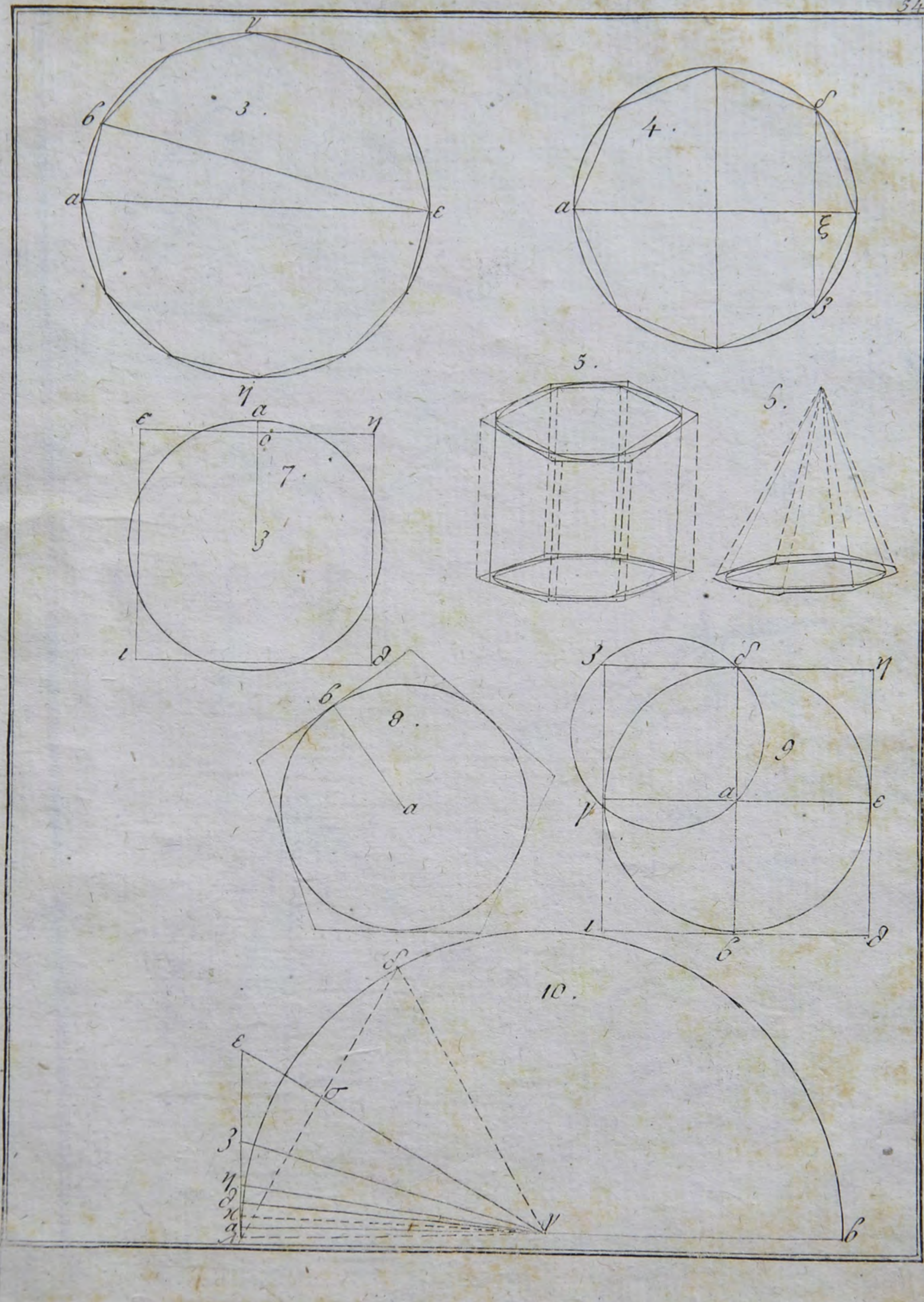


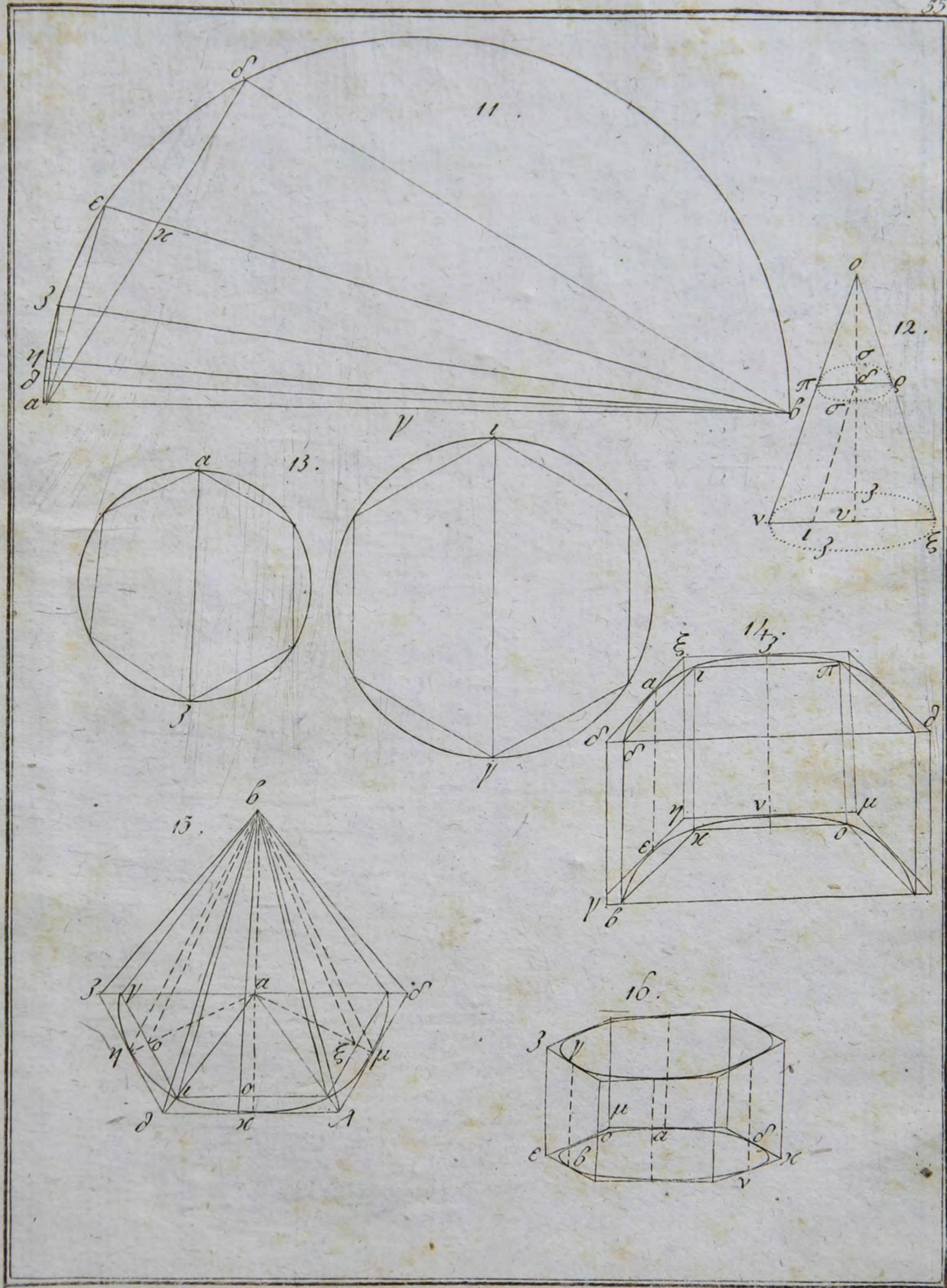

466.
467.
468.
469.
470.
471.
472.
473.
474.
475.

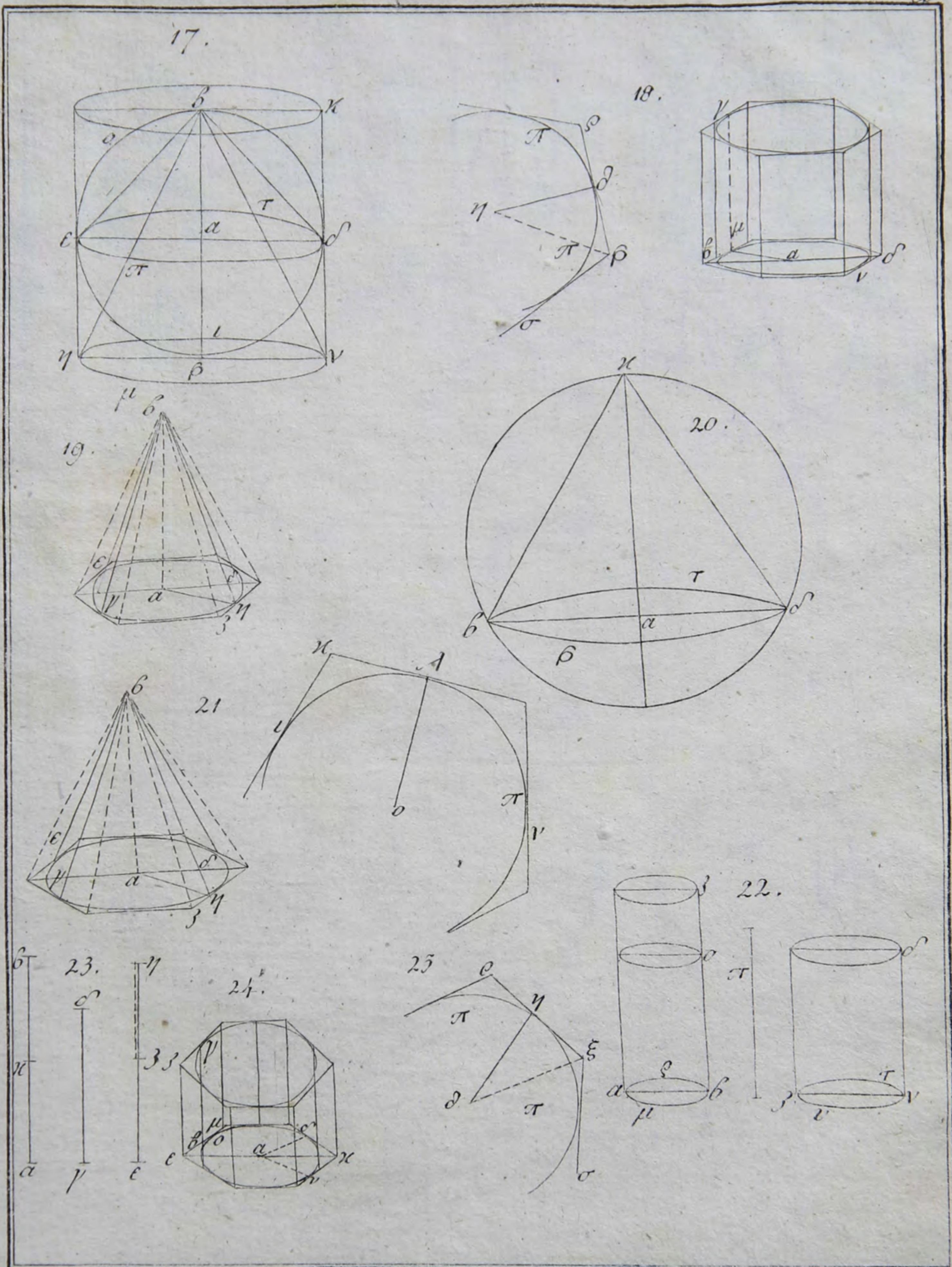

476.
477.
478.
479.
480.
481.
482.

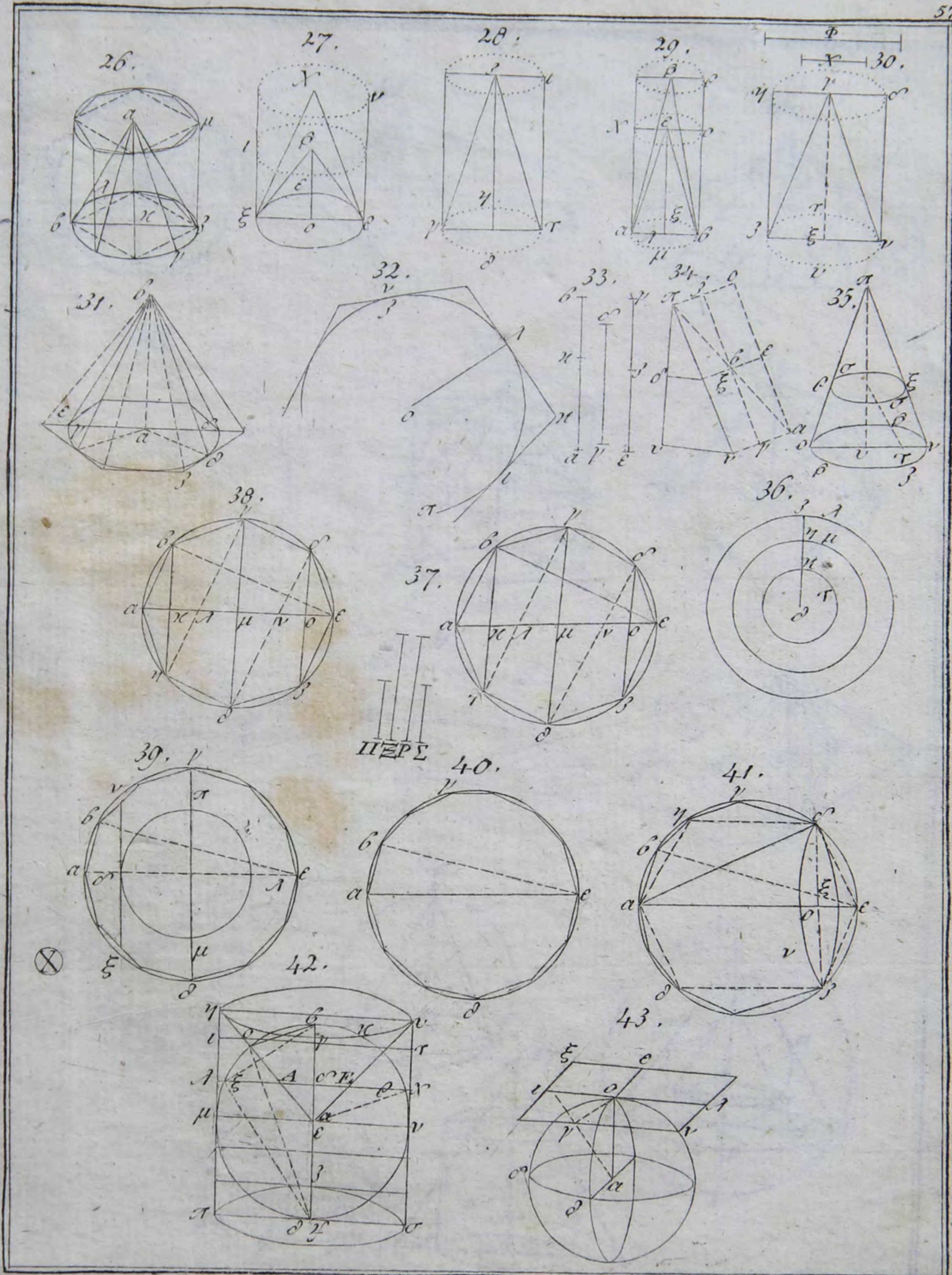

483.
484.
485.
486.
487.
488.
489.
490.
491.
492.

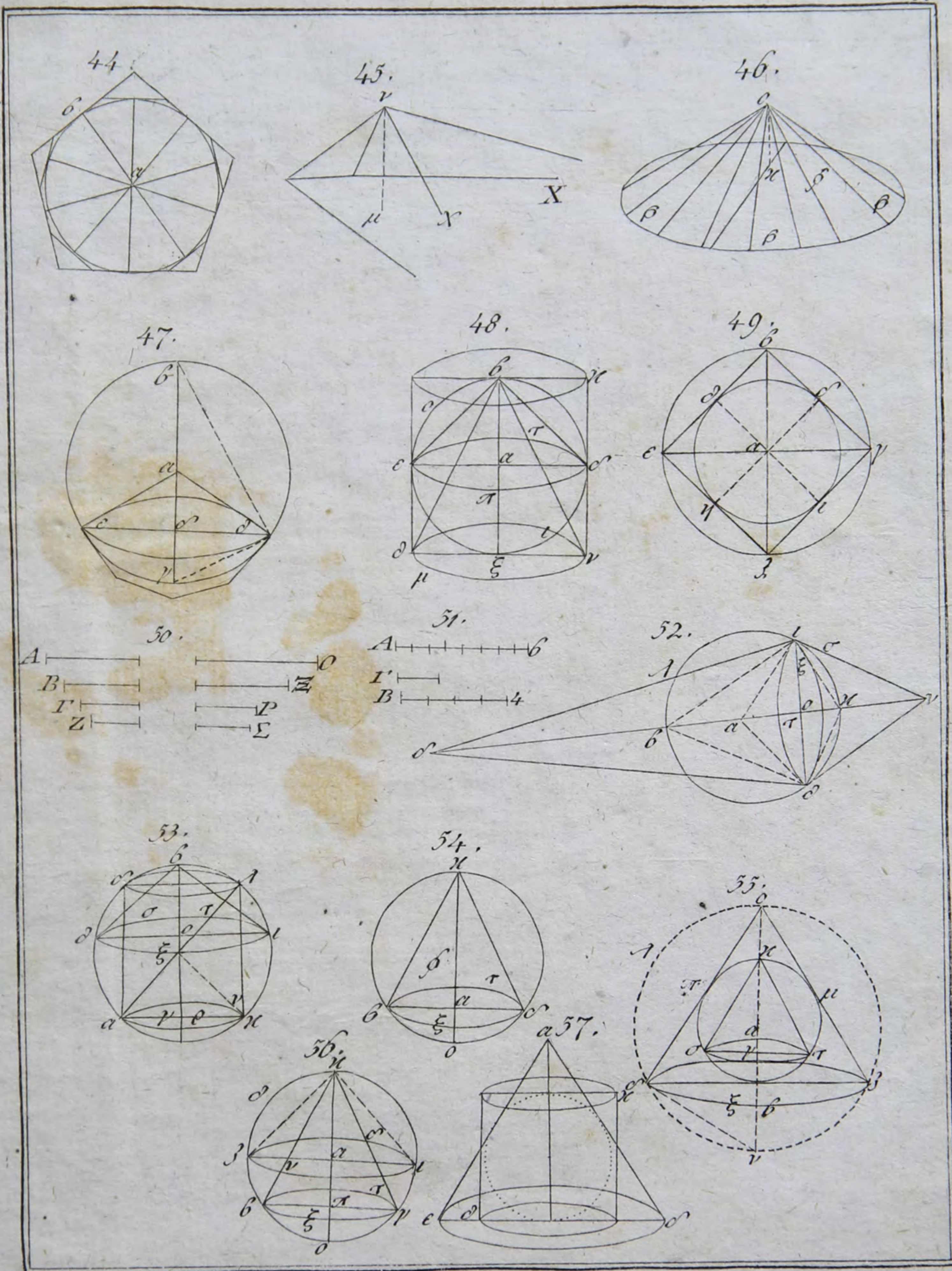

493.
494.
495.
496.
1.
2.
497.


3.
4.
5.
6.
7.
8.
9
10.


11.
12.
13.
14.
15.
16.


17.
18.
19.
20.
21
22.
23.
24.
25


26.
27.
28.
29.
30.
31.
32.
33.
34.
35.
36.
37.
38.
39.
40.
41.
42.
43.
ΠΞΡΣ


44.
45.
46.
47.
48.
49.
50.
51.
52.
53.
54.
55.
56.
57.