ΠΡΟΧΕΙΡΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΝΩΤΑΤΕΣ ΣΧΟΛΕΣ
Π.Μ., Μ.Η. ΚΑΙ Α.Τ. ΤΟΥ Ε.Μ.Π.

ΑΠΟ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ
Ν. ΚΡΙΤΙΚΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΟΥ Ε.Μ.Π.

ΤΟΜΟΣ Ι

ΑΘΗΝΑΙ
1960

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΜΕΓΕΘΗ - ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

§ 1. Στίς φυσικομαθηματικές καί στίς τεχνικές ἐπιστῆμες συναντοῦμε διάφορα "μεγέθη", π.χ. στήν Ἀριθμητική: τό πλῆθος τῶν ἀντικειμένων πού ἀποτελοῦν μίαν ὁμάδα, στή Γεωμετρία: τό μῆκος ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος, τό ἐμβαδό μιᾶς ἐπίπεδης ἐπιφάνειας, τόν ὄγκο ἑνός γεωμετρικοῦ στερεοῦ, στή Φυσική: τό χρόνο, τή μάζα ἑνός ὑλικοῦ σώματος, τό βάρος, τήν πίεση, τή ροπή ἑνός ζεύγους δυνάμεων, τήν ταχύτητα καί ἐπιτάχυνση ἑνός κινητοῦ σημείου, τή θερμοκρασία, στίς Τεχνικές ἐπιστῆμες: τήν παροχή ἑνός ὑδραγωγείου, τήν ἰσχύ μιᾶς ἀτμομηχανῆς.

Ὅλα τά μεγέθη αὐτά εἶναι **μετρήσιμα**, μποροῦν δηλαδή νά παρασταθοῦν ἀπό ἀριθμούς, ἀλλά μέ κάποια σημαντική διαφορά: μερικά, ὅπως π.χ. τά ἕξι πρῶτα καί τρία τελευταῖα μποροῦμε νά τά καθορίσουμε μέ ἕνα μόνο ἀριθμό (θετικό, ἀρνητικό ἤ μηδέν), ἐνῶ τ'ἄλλα πέντε πού ἀναφέραμε καί πού παρουσιάζονται μέ μία διεύθυνση μέσα στό χῶρο, χρειάζονται γιά τόν τέλειο καθορισμό τους τρεῖς ἀριθμούς. Τά πρῶτα θά τά λέμε "β α θ μ ω τ ά" καί τά δεύτερα, "δ ι α ν υ σ μ α τ ι κ ά" μεγέθη. Ὅπως θά ἴδοῦμε, ἡ παράσταση τῶν διανυσματικῶν μέ ἀριθμούς μπορεῖ νά γίνῃ κατά διαφόρους τρόπους. Σ'ἕναν ἀπ' αὐτούς τούς τρόπους χρησιμοποιοῦμε δύο ἀριθμούς γιά νά καθορίσουμε τή "δ ι ε ύ θ υ ν σ η" τοῦ διανυσματικοῦ μεγέθους καί ἕναν τρίτο γι'αὐτό πού θά καλοῦμε "π ρ ο σ η μ α σ μ έ ν ο μ έ τ ρ ο" ἤ "τ ι μ ή" τοῦ διανυσματικοῦ μεγέθους.

Π.χ. μετρώντας μέ ἕνα δυναμόμετρο μιά δύναμη βρίσκουμε γιά τιμή της τόσα χιλιόγραμμα βάρος (kgr*).

Οἱ ἀριθμοί πού παριστάνουν τά βαθμωτά μεγέθη ἤ τίς τιμές τῶν διανυσματικῶν μεγεθῶν λέγονται "σ υ γ κ ε κ ρ ι μ έ ν ο ι π ρ α γ μ α τ ι κ ο ί ἀ ρ ι θ μ ο ί" ὅταν ὀνομάζουμε κάθε φορά τό ἀντίστοιχο μέγεθος. Π.χ. συγκεκριμένοι ἀριθμοί εἶναι οἱ ἑξῆς: 6 ἀκροατές, 6 μέτρα ἀνά δευτερόλεπτο ταχύτητα, -3 βαθμοί Κελσίου θερμοκρασία, -3 μέτρα ὑψόμετρο ὡς πρός τήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας, $\frac{1}{2}$ χιλιόγ. kgr* βάρος, $\frac{1}{2}$ κιλοβάτ ἰσχύς, -2520,5 δολλάρια κέρδος (= +2520,5 δολλάρια ζημία), $2\sqrt{2}$ μέτρα μῆκος, $-2\sqrt{2}$ μέτρα ἔργια (Erg) ἔργο, 10π γωνιακή ταχύτητα στό δευτερόλεπτο (= 5 ὁλόκληρες στροφές στό δευτερόλεπτο) κτλ.

Τά σύμβολα πού χρησιμοποιήσαμε: $6, -3, \frac{1}{2}, \pm 2520{,}5, 2\sqrt{2}, 10\pi, 5$, μόνα τους - δηλαδή χωρίς καμιά ὀνομασία ἀντίστοιχου μεγέθους - λέγονται "ἀ φ η ρ η μ έ ν ο ι" πραγματικοί ἀριθμοι.

Ἕνας ἀφηρημένος πραγματικός ἀριθμός ἀπαρτίζεται ἀπό δύο στοιχεῖα: ἀπό τήν "ἀ π ό λ υ τ η τ ι μ ή" του, πού εἶναι ἕνας ἀριθμός τῆς προαλγεβρικῆς Ἀριθμητικῆς καί ἀπό τό πρόσ η μ ο" + ἤ - πού γράφεται μπροστά. Ὑπενθυμίζουμε τίς ἀκόλουθες συμβάσεις:

1η : $+0 = -0 = 0$

2α : $+3 = 3\ , +\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ , +\pi = \pi$ κτλ.

Μέ λόγια: τούς θετικούς ἀριθμούς τούς ταυτίζουμε μέ τήν ἀπόλυτη τιμή τους, δηλ. μέ τούς ἀντίστοιχους ἀριθμούς τῆς προαλγεβρικῆς Ἀριθμητικῆς.

3η : $+\alpha = \alpha$

$-\alpha =$ ἀντίθετος τοῦ α,

ὅπου ἀντίθετος τοῦ α σημαίνει τόν πραγματικό ἀριθμό πού ἔχει τήν ἴδια ἀπόλυτη τιμή μέ τόν α ἀλλά διαφορετικό πρόσημο. Ὥστε τό σύμβολο $-\alpha$ σημαίνει ἕνα θετικό ἀριθμό, ἄν ὁ α εἶναι ἀρνητικός ἀριθμός. Εἶναι καλό νά ἀποφεύγεται ἡ ἔκφραση: "ἴσοι καί ἀντίθετοι πραγματικοί ἀριθμοί" τό ἐπίθετο "ἀντίθετοι" φτάνει.

§ 2. Οἱ πραγματικοί ἀριθμοί διακρίνονται σέ σύμμετρους (ἤ ρητούς) καί ἀσύμμετρους, Οἱ σύμμετροι εἶναι ἤ "ἀ κ έ ρ α ι ο ι"

$$0\ ,\ \pm 1\ ,\ \pm 2\ ,\ \pm 3\ ,\ \pm 4\ ,\ldots$$

ἤ "κ λ α σ μ α τ ι κ ο ί"

$$\pm\frac{1}{2} \quad \pm\frac{3}{2} \quad \pm\frac{5}{2}\ ,\ldots$$

$$\pm\frac{1}{3} \quad \pm\frac{2}{3} \quad \pm\frac{4}{3}\ ,\ldots$$

$$\pm\frac{1}{4} \quad \pm\frac{3}{4} \quad \pm\frac{5}{4}\ ,\ldots \qquad \text{κτλ.}$$

Ἑπομένως σύμμετρος εἶναι κάθε ἀριθμός πού ἐκφράζεται μ' ἕνα **κ λ ά σ μ α**

$$\alpha/\nu$$

ὅπου α ἕνας τυχαῖος ἀκέραιος καί ν ἕνας "φ υ σ ι κ ό ς" ἀριθμός (δηλαδή ἀκέραιος θετικός: $\nu = 1,2,3,4,\ldots$).

Μποροῦμε ἐπίσης νά ποῦμε: ἕνας ἀφηρημένος ἀριθμός λέγεται σύμμετρος ὅταν ἰσοῦται μέ τό πηλίκο

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \alpha_1/\alpha_2 = \alpha_1 : \alpha_2$$

δύο ἀκεραίων α_1, α_2 ὅπου ἐννοεῖται $\alpha_2 \neq 0$.

Ἕνας σύμμετρος μπορεῖ νά ἐκφραστῆ καί μέ ἕνα "δ ε κ α δ ι κ ό ἀ ρ ι θ μ ό" εἴτε τερματιζόμενο, ὅπως π.χ. οἱ

$$-\frac{2741}{5\cdot 10^2} = -\frac{5482}{1000} = -5{,}482 \qquad \frac{541}{2\cdot 10^4} = \frac{2705}{10^5} = 0{,}02705$$

εἴτε ἀτέρμονα ἀλλά τότε "π ε ρ ι ο δ ι κ ό", ὅπως π.χ. οἱ

$$-\frac{4}{3} = -1,\overline{3}333\ldots, \qquad \frac{31}{55} = 0,5\overline{63}6363\ldots$$

Οἱ ἀσύμμετροι ἀριθμοί εἶναι οἱ ἀτέρμονες μή περιοδικοί δεκαδικοί ἀριθμοί μέ τό + ἤ τό − μπροστά τους· π.χ.

$$-5,10100100010000\ldots$$

$$143,2422442224442222444\ldots$$

Τούς ἀφηρημένους πραγματικούς ἀριθμούς μποροῦμε νά τούς "δ ι α τ ά ξ ο υ μ ε" μέ βάση τίς μεγεθικές σχέσεις τους.

Πράγματι, ἀπό δύο ἄνισους πραγματικούς ἀριθμούς $\alpha,\beta\,(\alpha\neq\beta)$ ὁ ἕνας εἶναι μικρότερος τοῦ ἄλλου· π.χ. ἀπό τούς −3,9 καί 1,75 ὁ πρῶτος εἶναι μικρότερος τοῦ δευτέρου:

$$-3,9 < 1,75$$

Ἀπό τούς

$$\alpha = -5,21221222122221\ldots$$

$$\beta = -5,2124222422224\ldots$$

μικρότερος εἶναι ὁ δεύτερος: $\beta < \alpha$

Ἡ μεγεθική αὐτή σχέση $<$ ἔχει τή λεγόμενη ἰδιότητα τῆς μεταβατικότητας (transitivité), δηλαδή ἀπό τό σύστημα τῶν δύο σχέσεων

$$\alpha < \beta \qquad \text{καί} \qquad \beta < \gamma$$

ἕπεται ἡ

$$\alpha < \gamma .$$

Τήν ἴδια ἰδιότητα ἔχει φυσικά καί ἡ "ἀ ν τ ί θ ε τ η" μεγεθική σχέση $>$.

Μέ βάση τά παρα πάνω μποροῦμε νά διατάξουμε τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἔτσι πού ἀπό δύο ἄνισους ἀριθμούς "π ρ ο η γ ο ύ μ ε ν ο ς" νά εἶναι πάντοτε ἤ ὁ μικρότερος (1η διάταξη) ἤ ὁ μεγαλύτερος (2η διάταξη "ἀ ν τ ί θ ε τ η" τῆς πρώτης).

Μέ τούς πραγματικούς ἀριθμούς ἐκτελοῦμε τέσσερεις βασικές πράξεις: πρόσθεση, ἀφαίρεση, πολλαπλασιασμό καί διαίρεση. Ἡ πρόσθεση καί ὁ πολλαπλασιασμός ἔχουν τίς ἀκόλουθες βασικές ἰδιότητες:

1η $\alpha+\beta = \beta+\alpha$, $\alpha\beta = \beta\alpha$ (ἀντιμεταθετικότητα)

2η $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$, $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ (προσεταιριστικότητα)

3η $(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma+\beta\gamma$ (ἐπιμεριστικότητα)

4η Ἀπό τίς σχέσεις $\alpha\beta = 0$ καί $\alpha \neq 0$ ἕπεται ἡ $\beta = 0$.

Οἱ παραπάνω πράξεις ἐκτελούμενες πάνω σέ σύμμετρους ἀριθμούς πεπερασμένο πλῆθος φορές, ἔχουν, γιά ἀποτέλεσμα, πάλι σύμμετρο ἀριθμό. Ἑπομένως:

σύμμ + ἀσύμμ = ἀσύμμ πάντοτε

συμμ $\neq 0$ ἐπί ἀσύμμ = ἀσυμμ πάντοτε κτλ.

Ἀντίθετα, τό ἄθροισμα, ἡ διαφορά, τό γινόμενο, τό πηλίκο δύο ἀσυμμέτρων "μ π ο ρ ε ῖ" νά εἶναι σύμμετρος. Π.χ.

$+\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$, $\pi \dfrac{4}{\pi} = 4$ ἐνῶ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ = ἀσυμμ.

§ 3. Ἡ ἀπόλυτη τιμή ἑνός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ α παριστάνεται μέ $|\alpha|$ καί ἔχει τήν ἀκόλουθη "χ α ρ α κ τ η ρ ι σ τ ι κ ή" ἰδιότητα:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \text{ἄν} \quad \alpha \geqq 0 \\ -\alpha & \text{ἄν} \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

Ἀπ' αὐτήν ἕπονται ἀμέσως τά ἑξῆς:

$$|\alpha| = |-\alpha| \qquad |\alpha| \geqq 0 \qquad -|\alpha| \leqq 0$$

$$-|\alpha| \leqq \alpha \leqq |\alpha|$$

Εὐκολοαπόδεικτη εἶναι καί ἡ

"Π ρ ό τ α σ η". Ἀπό τή σχέση $-\vartheta \leqq \alpha \leqq \vartheta$ ἕπεται ὅτι $\vartheta \geqq 0$ καί ὅτι

$$|\alpha| \leqq \vartheta$$

Μέ τή βοήθεια τώρα τῶν παραπάνω ἀποδείχνουμε εὔκολα τή βασική σχέση

$$|\alpha+\beta| \leqq |\alpha|+|\beta|$$

γιά δύο όποιουσδήποτε πραγματικούς άριθμούς α,β. Ἡ σχέση αὐτή, μέ μαθηματική ἐπαγωγή, ἐπεκτείνεται σέ ὁσουσδήποτε ν προσθετέους:

$$|\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu| \leqq |\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_\nu|$$

Πόρισμα τῆς παραπάνω βασικῆς σχέσης εἶναι ἡ ἑξῆς:

$$|\alpha-\beta| = |\beta-\alpha| \geqq \begin{cases} |\alpha|-|\beta| \\ |\beta|-|\alpha| \end{cases}$$

Π.χ.

$$|3+(-4)| = |-1| \leqq |3|+|-4| = 7 \quad , \quad |-3+(-4)| \leqq |-3|+|-4| = 7$$

$$|3-(-4)| = |7| \geqq \begin{cases} 3-4 = -1 \\ 4-3 = 1 \end{cases} \quad , \quad |(-3)-(-4)| = 1 \geqq \begin{cases} 3-4 = -1 \\ 4-3 = 1 \end{cases}$$

Ὑπενθυμίζουμε τέλος τίς δύο ἰδιότητες

$$|\alpha\cdot\beta| = |\alpha|\cdot|\beta| \quad , \quad \left|\frac{\alpha}{\gamma}\right| = \frac{|\alpha|}{|\gamma|} \qquad \text{ὅπου } \gamma \neq 0$$

§ 4. Εἶναι σκόπιμο ν'ἀποφεύγη κανείς νά λέγη "ἀλγεβρικός ἀριθμός" ἀντί "πραγματικός ἀριθμός", γιατί στά Ἀνώτερα Μαθηματικά "ἀ λ γ ε β ρ ι κ ό ς ἀ ρ ι θ μ ό ς" λέγεται ἐκεῖνος πού εἶναι λύση (ρίζα) κάποιας ἀλγεβρικῆς ἐξίσωσης

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_\mu x^\mu = 0$$

μέ ἀκέραιους συντελεστές $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$. Μέ ἄλλα λόγια, ἕνας ἀριθμός ρ (πραγματικός ἤ καί μιγαδικός) λέγεται ἀλγεβρικός, ἄν ὑπάρχουν ἕνας φυσικός ἀριθμός μ καί μ+1 ἀκέραιοι $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$ τέτοιοι ὥστε

$$\alpha_0 + \alpha_1\rho + \ldots + \alpha_\mu\rho^\mu = 0$$

Ἀλγεβρικός ἀριθμός "ε ἶ ν α ι" κάθε σύμμετρος $\frac{\alpha}{\nu}$, γιατί εἶναι λύση μιᾶς ἐξίσωσης μέ ἀκέραιους συντελεστές, π.χ. τῆς

$$-\alpha + \nu x = 0$$

Ἀλγεβρικοί ὅμως εἶναι καί οἱ ἀριθμοί $+\sqrt{2}, i, 3+i$ (ὅπου $i = \sqrt{-1}$), γιατί εἶναι λύσεις ἀντιστοίχως τῶν ἐξισώσεων

$$-2+0x+x^2 = 0 \quad , \quad 1+0x+x^2 = 0 \quad , \quad 10-6x+x^2 = 0$$

Τό 1851 ὁ Louiville κατασκεύασε πραγματικούς, ἀριθμούς πού δέν μποροῦν νά εἶναι λύσεις καμιᾶς ἀλγεβρικῆς ἐξίσωσης μέ ἀκέραιους συντελεστές. Αὐτοί οἱ ἀριθμοί εἶναι ἐπομένως μή ἀλγεβρικοί καί λέγονται "ὑ π ε ρ β α τ ι κ ο ί". Ὑπερβατικός ἀριθμός εἶναι ὁ π, ὅπως ἀπόδειξε τό 1882 ὁ Lindemann. Ἐπομένως ὑπερβατικοί ἀριθμοί εἶναι καί οἱ ἀκόλουθοι:

$$-\pi\ ,\ \pm 2\pi\ ,\ \pm 3\pi\ ,\ \pm 4\pi\ ,\ldots$$
$$\pm \pi i\ ,\ \pm 2\pi i\ ,\ \pm 3\pi i\ ,\ \pm 4\pi i,\ldots$$

§ 5. Στίς πρακτικές ἀριθμητικές ἐφαρμογές τούς δεκαδικούς ἀριθμούς, πού εἶναι εἴτε ἀτέρμονες εἴτε ἔχουν δεκαδικά ψηφία περισσότερα ἀπό ὅσα χρειάζονται γιά τήν ἐπιδιωκόμενη προσέγγιση, τούς συντέμνουμε καί τούς "σ τ ρ ο γ γ υ λ ε ύ ο υ μ ε", διατηρώντας κάθε φορά τά λίγα μόνο δεκαδικά ψηφία δεξιά ἀπό τό κόμμα τά ὁποῖα χρειαζόμαστε. Ἔτσι π.χ. χρησιμοποιοῦμε στή θέση τοῦ $\sqrt{2}$ τόν ἀριθμό 1,414 καί στή θέση τοῦ π, πότε τόν 3,14 πότε τόν 3,1416 κτλ. Ἐπίσης, ἐνῶ ὑπάρχουν μετρήσιμα φυσικά μεγέθη στά ὁποῖα ἀποδίνουμε μίαν ἐντελῶς ὁρισμένη τιμή, τουλάχιστο ὑπό ὡρισμένες συνθῆκες (π.χ. τό μῆκος τοῦ ἄξονα μιᾶς κυλινδρικῆς χαλύβδινης ράβδου ὑπό ὁρισμένη θερμοκρασία, τάση κτλ.), ὅμως αὐτή ἡ ἀκριβής τιμή δέν μπορεῖ νά βρεθῆ μέ μετρήσεις, ἀφοῦ κάθε μέτρηση εἶναι συνυφασμένη μέ λάθη. Ἄλλως τε στίς τεχνικές ἐφαρμογές ἡ ἀκριβής αὐτή τιμή οὔτε χρειάζεται οὔτε θά ἦταν εὐχείριστη στήν περίπτωση ὅπου θά ἐκφραζόταν μέ πολυψήφιο δεκαδικό ἀριθμό. Ὅ,τι ἀπαιτεῖται εἶναι μία εὔχρηστη ἀριθμητική τιμή πού προσεγγίζει τήν ἀκριβῆ, περισσότερο ἤ λιγότερο ἀνάλογα μέ τόν ἐπιθυμητό μεγαλύτερο ἤ μικρότερο βαθμό ἀκριβείας.

Τήν κατά προσέγγιση ἰσότητα δύο ἀριθμῶν θά τήν δηλώνουμε μέ τό σημάδι ≈ πού θά διαβάζεται π ε ρ ί π ο υ ἴ σ ο Ἔτσι θά γράφουμε

$$\sqrt{2} \approx 1,414 \qquad \pi \approx 3,14 \quad , \quad \pi \approx 3,1416$$

Ἄς ὑποθέσουμε τώρα πώς ἡ ἀκριβής τιμή α μιᾶς ποσότητας εἶναι γνωστή καί πως α_1 εἶναι ἡ προσεγγιστική τιμή πού χρησιμοποιοῦμε. Τή διαφορά

$$\alpha - \alpha_1 = \text{ἀκρ.τιμή} - \text{προσεγγ.τιμή}$$

θά τήν καλοῦμε σ φ ά λ μ α τῆς προσεγγίζουσας τιμῆς α_1 (ἤ, συντομώτερα, τῆς προσέγγισης α_1).

Ἄς σημειωθῆ πώς οἱ Ἀγγλοσάξωνες συγγραφεῖς προτιμοῦν νά καλοῦν σφάλμα τόν ἀντίθετο ἀριθμό:

$$\alpha_1 - \alpha = \text{προσεγγ.τιμή} - \text{ἀκρ.τιμή}$$

καί πώς μερικοί συγγραφεῖς καλοῦν σφάλμα τήν ἀπόλυτη τιμή

$$|\alpha - \alpha_1| = |\alpha_1 - \alpha|$$

Ἄς σημειωθῆ ἀκόμη πώς οἱ περισσότεροι συγγραφεῖς χρησιμοποιοῦν τόν ὅρο ἀ π ό λ υ τ ο σ φ ά λ μ α γιά ὅ,τι ἐμεῖς καλέσαμε παραπάνω σ φ ά λ μ α .

Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό μας, τό σφάλμα τῆς παραπάνω προσέγγισης α εἶναι

> 0 ἄν $\alpha_1 < \alpha$ (προσέγγιση ἀπό κάτω)

< 0 ἄν $\alpha_1 > \alpha$ (προσέγγιση ἀπό πάνω)

π.χ. τό σφάλμα τῶν δύο τιμῶν 3,14 καί 3,1416 πού προσεγγίζουν τό π, εἶναι > 0 γιά τήν πρώτη, < 0 γιά τή δεύτερη. Ἔχουμε δέ πάντοτε:

$$\text{ἀκριβής τιμή} = \text{προσεγγίζουσα τιμή} + \text{σφάλμα της}$$

§ 6. Τά παραπάνω προϋποθέτουν γνωστή τήν ἀκριβῆ τιμή τῆς προσεγγιζόμενης ποσότητος. Συνήθως ὅμως ἡ προϋπόθεση αὐτή δέν εἶναι πραγματοποιημένη καί τό σφάλμα μιᾶς χρησιμοποιούμενης προσεγγιστικῆς τιμῆς δέν εἶναι ἐπακριβῶς γνωστό, οὔτε κἄν κατά τό πρόσημό του. Ὅ,τι μόνο ξέρουμε, συνήθως, εἶναι ὅτι τό σφάλμα δέν ὑπερβαίνει "κ α τ' ἀ π ό λ υ τ η τ ι μ ή" κάποιο θετικό ἀριθμό, πού θά καλοῦμε "ἄ ν ω φ ρ ά γ μ α" τοῦ σφάλματος. Π.χ. ἐπειδή

$$0 < \pi - 3{,}14 < \frac{2}{1000} \quad \text{καί} \quad |\pi - 3{,}1416| < \frac{1}{10^5}$$

τό σφάλμα τῆς τιμῆς 3,14 γιά τό π ἔχει ἄνω φράγμα τό 0,002 καί τό τῆς τιμῆς 3,1416, τό 0,00001. Ἀνάλογα, ὅταν γιά ἕνα βάρος ποῦμε πώς ἔχει μέτρο

$$5{,}3426 \quad \pm\, 0{,}0002 \quad \text{kgr}^*,$$

αὐτό θά σημαίνη ὅτι ὁ ἀριθμός 5,3426 kgr* εἶναι μία προσέγγιση τοῦ θεωρούμενου βάρους καί ὅτι τό σφάλμα δέν ὑπερβαίνει κατ'ἀπόλυτη τιμή τά 0,2 τοῦ gr*. Κατά ταῦτα ἡ ἀκριβής τιμή τοῦ βάρους εἶναι ἕνας (ἄγνωστος) ἀριθμός κείμενος μεταξύ τῶν 5,3424 καί 5,3428 kgr*. Πάντως τό ἀκέραιο μέρος καί τά τρία πρῶτα δεκαδικά ψηφία τοῦ ἄγνωστου αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι 5,342, ἄρα ἐπακριβῶς γνωστά.

§ 7. Τό βαθμό τῆς ἀκριβείας μιᾶς προσέγγισης τόν προσδιορίζει ἡ ἀπόλυτη τιμή τοῦ λόγου

$$\frac{\text{σφάλμα}}{\text{ἀκριβής τιμή}} \qquad \left(= \frac{\pm \text{ ἄνω φράγμα τοῦ σφάλματος}}{\text{προσεγγ.τιμή}} \right)$$

Ὁ λόγος αὐτός θά λέγεται ἀ ν α λ ο γ ι κ ό σ φ ά λ μ α. (Οἱ περισσότεροι συγγραφεῖς χρησιμοποιοῦν τόν ὅρο "σ χ ε τ ι κ ό σ φ ά λ μ α"). Π.χ. γιά τίς προσεγγίσεις 3,14 καί 3,1416 τοῦ π ἔχουμε ἀντιστοίχως

$$\text{ἀναλ. σφάλμα} = \frac{\pi - 3{,}14}{\pi} < \frac{0{,}002}{3} < \frac{1}{1000}$$

$$|\text{ἀναλ. σφάλμα}| = \frac{|\pi - 3{,}1416|}{\pi} < \frac{0{,}00001}{3} = \frac{1}{300000}$$

καί γιά τό παραπάνω βάρος:

$$|\text{ἀναλ. σφαλμα}| \leqq \frac{0{,}0002}{5{,}3424} < \frac{2}{50000}$$

Τό ἀναλογικό σφάλμα εἶναι ἀριθμός χωρίς διάσταση (μποροῦμε νά τόν θεωρήσουμε σάν ἀφηρημένο ἀριθμό)˙ δέν ἐξαρτιέται φυσικά ἀπό τήν ἐκλογή τῆς μονάδας μέ τήν ὁποία μετροῦμε τό ἀντίστοιχο μέγεθος. Συχνά τόν ἐκφράζουμε σέ ἑκατοστά (τόσα στά ἑκατό˙ τ%). Π.χ. γιά τό παραπάνω βάρος ἔχουμε

$$|\text{ἀναλογ.σφάλμα}| < \frac{\frac{2}{50000}\cdot 100}{100} = \frac{\frac{2}{500}}{100} = \frac{2}{500}\ \%.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

§ 8. Ταξιθετήσεις. ν δοσμένα πράγματα μποροῦν νά καταταχθοῦν σέ σειρά μέ διαφορετικούς τρόπους. Κάθε τέτοια κατάταξη λέγεται ταξιθέτηση ἤ μετάθεση τῶν ν πραγμάτων. Ἄν τά καταστασσόμενα πράγματα εἶναι διαφορετικά τό ἕνα ἀπό τό ἄλλο, λαβαίνουμε "ταξιθετήσεις χωρίς ἐπανάληψη", ἄν εἶναι τά ἴδια κατά ὁμάδες: ταξιθετήσεις μέ ἐπανάληψη" ἤ "ἐπαναληπτικές μεταθέσεις".

Παράδειγμα ταξιθετήσεων χωρίς ἐπανάληψη (τῶν πραγμάτων α,β,γ): αβγ, αγβ, βαγ, βγα, γαβ, γβα.

Παράδειγμα μεταθέσεων μέ ἐπανάληψη (τῶν πραγμάτων α,β, β,β): αβββ , βαββ , ββαβ.

Ἡ σειρά σέ καθεμιά ἀπ'αὐτές τίς ταξιθετήσεις νοεῖται (λογαριάζεται) ἀπό τ'ἀριστερά πρός τά δεξιά.

§ 9. Τό πλῆθος τῶν διαφορετικῶν ταξιθετήσεων ν πραγμάτων δέν ἐξαρτιέται, ὅπως εἶναι φανερόν, ἀπό τήν ἰδιαίτερη φύση τῶν πραγμάτων, ἔχει ἐξάρτηση ἀπό τό ν, εἶναι συνάρτηση μόνο τοῦ ν.

Πρόταση 1. Τό πλῆθος τῶν διαφορετικῶν ταξιθετήσεων χωρίς ἐπανάληψη ν πραγμάτων ἰσοῦται μέ τό γινόμενο 1.2...ν τῶν ν πρώτων στή σειρά φυσικῶν ἀριθμῶν.

Τό γινόμενο αὐτό παρασταίνεται μέ τό ν! πού διαβάζεται ὡς ἑξῆς: νί παραγοντικό. Ἔχουμε λοιπόν

$$\nu! = 1.2\ldots\nu$$

Ἀπό σκοπιμότητα εἰσάγουμε καί τό σύμβολο

$$0! = 1.$$

§ 10. Τό πλῆθος τῶν μεταθέσεων μέ ἐπανάληψη ν πραγμάτων ἀπό τά ὁποῖα k εἶναι τά ἴδια, τά ὑπόλοιπα ν-k διαφορετικά καί μεταξύ τους καί ἀπό τά ἀναφερθέντα k, ἰσοῦται μέ

$$\frac{\nu!}{k!} = (k+1)\ldots\nu$$

Τό παραπάνω πλῆθος γράφεται καί ἔτσι:

$$\frac{\nu!}{k!\underbrace{1!\ldots1!}_{\nu-k\ \text{φορές}}}$$

Γενικῶς ἰσχύει ἡ

Πρόταση 2. Τό πλῆθος τῶν μεταθέσεων (μέ ἐπανάληψη) ν πραγμάτων πού κατανέμονται σέ μ ὁμάδες ἀποτελούμενες ἡ καθεμιά ἀπό τά ἴδια πράγματα σέ πλῆθος ἀντιστοίχως $k_1, k_2, \ldots, k_\mu$ ἰσοῦται μέ

$$\frac{\nu!}{k_1!k_2!\ldots k_\mu!}$$

Φυσικά $k_1+k_2+\ldots+k_\mu = \nu$. Ὁ τύπος αὐτός γιά τό πλῆθος τῶν μεταθέσεων μέ ἐπανάληψη ἐπεκτείνεται προφανῶς στήν περίπτωση ὅπου ἕνας ἤ περισσότεροι ἀπό τούς ἀριθμούς $k_1, k_2, \ldots, k_\mu$ εἶναι μηδέν, ἀρκεῖ μόνον νά ἰσχύη ἡ σχέση

$$k_1+k_2+\ldots+k_\mu = \nu$$

§ 11. Ἔστω 534216 μία μετάθεση τῶν ἕξι φυσικῶν ἀριθμῶν 1,2,...,6. Τά στοιχεῖα 3 καί 2 λέμε ὅτι παρουσιάζουν "παράβαση" μέσα στή μετάθεση, ἐπειδή τό 3 ἔρχεται μέσα σ' αὐτήν πρίν ἀπό τό 2, ἐνῶ μέσα στή σειρά τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ὁ 2 ἔρχεται πρίν ἀπό τό 3. Ὁμοίως τά στοιχεῖα 3 καί 1 παρουσιάζουν παράβαση, ἐπίσης τά 5 καί 3. Ἀντίθετα τά στοιχεῖα 3 καί 4 ἤ τά 4 καί 6 παρουσιάζουν "τήρηση".

Ἄν ὁ ὅλος ἀριθμός τῶν παραβάσεων μέσα σέ μιά μετάθεση τῶν ν φυσικῶν 1,2,...,ν εἶναι ἄρτιος, ἡ μετάθεση λέγεται ἄρτια, ἄν εἶναι περιττός, ἡ μετάθεση λέγεται περιττή. Π.χ. ἡ παραπάνω μετάθεση 534216 εἶναι περιττή διότι περιέχει συνολικά έννιά παραβάσεις, τίς ἑξῆς: (53), (54), (52), (51), (32), (31), (4,2),(41), (21).

Πρόταση 3. Ἄν μέσα σέ μιά μετάθεση τῶν 1, 2,..., ν ἀντιμεταθέσουμε (ἐναλλάξουμε) δύο στοιχεῖα, γειτονικά ἤ ὄχι, ἡ μετάθεση ἀλλάζει εἶδος, δηλ. ἀπό ἄρτια γίνεται περιττή καί ἀπό περιττή ἄρτια.

Π.χ. ἡ 514236 πού προκύπτει ἀπό τήν περιττή μετάθεση 534216 μέ ἐναλλαγή τῶν δύο στοιχείων 1 καί 3 εἶναι ἄρτια(πράγματι περιέχει 6 παραβάσεις),

Πόρισμα. Οἱ ἄρτιες μεταθέσεις τῶν 1,2,..., ν ($ν \geqq 2$) εἶναι ἰσοπληθεῖς μέ τίς περιττές, ἄρα τό πλῆθος των εἶναι $\frac{ν!}{2}$

§ 12. Κυκλική ἐναλλαγή (ἤ τροπή) τῶν στοιχείων μιᾶς μετάθεσης ν πραγμάτων λέγεται ἡ ἀντικατάσταση τοῦ πρώτου στοιχείου τῆς μετάθεσης μέ τό δεύτερο, τοῦ δεύτερου μέ τό τρίτο τοῦ(ν-1)-στοῦ μέ τό νιοστό καί τοῦ νιοστοῦ μέ τό πρῶτο.

Π.χ. ἡ κυκλική ἐναλλαγή τῶν στοιχείων τῆς μετάθεσης 534216 παρέχει τή μετάθεση 342165.

Ἀπό μία μετάθεση ν πραγμάτων μέ διαδοχικές κυκλικές ἐναλλαγές προκύπτουν ν διάφορες μεταθέσεις τῶν ν πραγμάτων. Π.χ. ἀπό τή μετάθεση 312 προκύπτουν οἱ 123, 312, 231.

Ἡ κυκλική ἐναλλαγή τῶν στοιχείων μιᾶς μετάθεσης τῶν

1,2,...,ν τῆς ἀλλάζει τό εἶδος ὅταν ὁ ἀριθμός ν εἶναι ἄρτιος (δηλαδή μίαν ἄρτια μετάθεση τήν κάμνει περιττή καί μίαν περιττή ἄρτια), δέν τῆς ἀλλάζει τό εἶδος, ὅταν ὁ ν εἶναι περιττός.

§ 13. Διατάξεις. Ἀπό ν διάφορα πράγματα μποροῦμε μέ διαφορετικούς τρόπους νά πάρουμε μ καί νά τά τακτοποιήσουμε σέ μιά σειρά. Κάθε τέτοια διατεταγμένη ὁμάδα μ πραγμάτων ἀπό τά δοσμένα ν λέγεται διάταξη χωρίς ἐπανάληψη τῶν ν πραγμάτων ἀνά μ. Π.χ. οἱ διατάξεις τεσσάρων πραγμάτων α,β,γ,δ ἀνά δύο εἶναι

*	αβ	αγ	αδ
βα	*	βγ	βδ
γα	γβ	*	γδ
δα	δβ	δγ	*

Οἱ ἀστερίσκοι γράφτηκαν γιά νά πάρη ὁ παραπάνω πίνακας κάποια συμμετρία. Ἄν στή θέση τους τοποθετήσουμε ἀντιστοίχως τίς ὁμάδες αα, ββ, γγ, δδ ἀπό δύο ἴδια πράγματα, ὁ πίνακας θά μᾶς δώση τό σύνολο τῶν "διατάξεων μέ ἐπανάληψη τῶν πραγμάτων α,β,γ,δ ἀνά δύο".

Τό πλῆθος τῶν διαφορετικῶν διατάξεων ν δοσμένων πραγμάτων ἀνά μ δέν ἐξαρτιέται προφανῶς ἀπό τήν ἰδιαίτερη φύση τῶν πραγμάτων, ἀλλά μόνο ἀπό τίς τιμές τῶν μ καί ν.

Πρόταση. Τό πλῆθος τῶν διατάξεων χωρίς ἐπανάληψη ν πραγμάτων ἀνά μ εἶναι:

$$\nu(\nu-1)\ldots(\nu-\mu+1) = \frac{\nu!}{(\nu-\mu)!}$$

ὅπου φυσικά $\mu \leqq \nu$.

Τό πλῆθος τῶν διατάξεων μέ ἐπανάληψη ν διαφόρων πραγμάτων ἀνά k εἶναι: ν^{k}

ὅπου τώρα τό k ἐπιτρέπεται νά ὑπερβαίνη τό ν.

§ 17. <u>Συνδυασμοί</u>. Ἀπό ν διάφορα πράγματα μποροῦμε μέ διαφορετικούς τρόπους νά ξεχωρίσουμε μ, ὅπου $1 \leqq \mu \leqq \nu$, ἀδιαφορῶντας γιά τή σειρά μέ τήν ὁποίαν ἐνδεχομένως τά ξεχωρίσαμε καί προσέχοντας μόνο στό ποιά πράγματα ἀποτελοῦν τήν ὁμάδα πού ξεχωρίσαμε. Κάθε τέτοια ὁμάδα μ πραγμάτων ἀπό τά ν λέγεται συνδυασμός χωρίς ἐπανάληψη τῶν ν πραγμάτων ἀνά μ.

Στό συνδυασμό τά στοιχεῖα δέν εἶναι καταταγμένα σέ σειρά ἀντίθετα μέ κεῖνο πού συμβαίνει στή διάταξη ν πραγμάτων ἀνά μ.

§ 15. Πάλιν ὁ ἀριθμός τῶν διαφόρων συνδυασμῶν ν πραγμάτων ἀνά μ δέν ἐξαρτιέται ἀπό τήν ἰδιαίτερη φύση τῶν πραγμάτων, ἀλλά μόνο ἀπό τά μ καί ν.

<u>Πρόταση 1</u>. Τό πλῆθος τῶν διαφόρων συνδυασμῶν χωρίς ἐπανάληψη ν πραγμάτων ἀνά μ ἰσοῦται μέ

$$\frac{\nu!}{(\nu-\mu)!\mu!} = \frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-\mu+1)}{1.2.3\ldots\mu}$$

Τό πλῆθος αὐτό σημειώνεται μέ τό σύμβολο $\binom{\nu}{\mu}$ πού διαβάζεται νί ἀνά μί. Ἔχουμε λοιπόν

$$\binom{\nu}{\mu} = \frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-\mu+1)}{1.2\ldots\mu} = \frac{\nu!}{(\nu-\mu)!\mu!}$$

Μέσα σ' αὐτό τό σύμβολο $\binom{\nu}{\mu}$ τό μ εἶναι ὡς τώρα ἕνας φυσικός ἀριθμός $\leqq \nu$. Ἀπό σκοπιμότητα θέτουμε τώρα:

$$\binom{\nu}{0} = \frac{\nu!}{(\nu-0)!0!} = \frac{\nu!}{\nu!} = 1$$ γιά κάθε φυσικό καί

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{(0-0)!0!} = \frac{1}{1} = 1$$

<u>Πρόταση 2</u>. Τό σύμβολο $\binom{\nu}{\mu}$ ἔχει τίς ἑξῆς δύο βασικές ἰδιότητες:

$$\binom{\nu}{\mu} = \binom{\nu}{\nu-\mu}$$

γιά ἀκέραια ν καί μ πού ἱκανοποιοῦν τίς σχέσεις $\nu \geqq 0$, $0 \leqq \mu \leqq \nu$ καί

$$\binom{\nu}{\mu} = \binom{\nu-1}{\mu} + \binom{\nu-1}{\mu-1}$$

γιά φυσικά ν καί μ πού ἱκανοποιοῦν τίς σχέσεις $\nu \geqq 1$, $1 \leqq \mu \leqq \nu$.

§ 16. Ἀριθμητικό τρίγωνο τοῦ Pascal. Ἔτσι λέγεται ἕνας τριγωνικός πίνακας ἀπό ἀριθμούς οἱ ὁποῖοι εἶναι, κατά ὁριζόντια σειρά, οἱ τιμές τοῦ συμβόλου $\binom{\nu}{\mu}$ γιά $\nu = 0,1,2,\ldots, k$ ὅπου k ἕνας φυσικός ἀριθμός καί $\mu = 0,1,\ldots,\nu$ ἑκάστοτε, δηλ. γιά τή θεωρούμενη κάθε φορά τιμή τοῦ ν.

Π.χ. γιά $k = 4$ ἔχουμε τόν πίνακα

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

§ 17. Τύπος τοῦ διωνύμου. Ἔστω ἕνα διώνυμο α+β. Ὁ τύπος τοῦ διωνύμου δίνει τό ἀνάπτυγμα τῆς δύναμης $(\alpha+\beta)^\nu$, ὅπου ν φυσικός ἀριθμός, δηλαδή τό ἀκέραιο πολυώνυμο τῶν γραμμάτων α καί β μέ τό ὁποῖο ἰσοῦται ἡ παραπάνω δύναμη τακτοποιημένο ὡς πρός τά γράμματα αὐτά. Ὁ ὅρος τακτοποιημένο σημαίνει ὅτι ἔχουν γίνει οἱ συμπτύξεις τῶν ὅμοιων ὡς πρός τά γράμματα α καί β ὅρων καί ὅτι οἱ ἀνόμοιοι ὅροι πού προκύπτουν ἔχουν γραφῆ μέ μιάν ὁρισμένη τάξη, π.χ. κατά τίς φθίνουσες δυνάμεις τοῦ α. Ἰδού αὐτός ὁ τύπος:

$$(\alpha+\beta)^\nu = \binom{\nu}{0}\alpha^\nu\beta^0 + \binom{\nu}{1}\alpha^{\nu-1}\beta + \binom{\nu}{2}\alpha^{\nu-2}\beta^2 + \ldots +$$

$$+ \binom{\nu}{k}\alpha^{\nu-k}\beta^k + \ldots + \binom{\nu}{\nu-1}\alpha\beta^{\nu-1} + \binom{\nu}{\nu}\alpha^0\beta^\nu$$

ή, χωρίς τά σύμβολα $\binom{\nu}{\mu}$,

$$(\alpha+\beta)^\nu = \alpha^\nu + \frac{\nu}{1}\alpha^{\nu-1}\beta + \frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2}\alpha^{\nu-2}\beta^2 + \dots$$

$$+ \frac{\nu(\nu-1)\dots(\nu-k+1)}{1.2\dots k}\alpha^{\nu-k}\beta^k + \dots + \frac{\nu}{1}\alpha\beta^{\nu-1} + \beta^\nu$$

Π.χ. $(2\gamma-3\delta)^5 = \{2\gamma+(-3\delta)\}^5 = (2\gamma)^5 + 5(2\gamma)^4(-3\delta) + 10(2\gamma)^3(-3\delta)^2 + 10(2\gamma)^2(-3\delta)^3 + 5\,2\gamma(-3\delta)^4 + (-3\delta)^5 = 32\gamma^5 - 240\gamma^4\delta + 720\gamma^3\delta^2 - 1080\gamma^2\delta^3 + 810\gamma\delta^4 - 243\delta^5$

Είδικῶς γιά $\alpha = 1$ καί $\beta = x$ ὁ τύπος γίνεται

$$(1+x)^\nu = 1 + \nu x + \frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \dots$$

$$+ \frac{\nu(\nu-1)\dots(\nu-k+1)}{1\cdot 2\dots k}x^k + \dots + x^\nu$$

Ὁ Newton ἔκαμε ἐπέκταση αὐτοῦ τοῦ τελευταίου τύπου στήν περίπτωση ὅπου ὁ ἐκθέτης ν δέν εἶναι φυσικός ἀριθμός. Π.χ. ἡ δύναμη $(1+x)^{1/2} = \sqrt{1+x}$ ἰσοῦται, ὅταν $|x| < 1$, μέ τό ἄθροισμα τῆς συγκλίνουσας σειρᾶς:

$$1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$+ \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\dots\left(-\frac{2k-3}{2}\right)\frac{x^k}{k!} + \dots$$

Αὐτό σημαίνει ὅτι ὅταν $|x| < 1$, τό ἄθροισμα s_k τῶν $k+1$ πρώτων ὅρων, πού εἶναι γραμμένοι πρίν ἀπό τά τελευταῖα ἀποσιωπητικά, ἔχει διαφορά $\sqrt{1+x} - s_k$ ἀπό τόν ἀριθμό $+\sqrt{1+x}$ ὅσο θέλουμε μικρή ἀπολύτως, μόλις τό k ληφθῆ ἀρκετά μεγάλο:

$|\overset{}{\underset{+}{\sqrt{1+x}}} - s_k| <$ κάθε δοσμένου θετικοῦ ἀριθμοῦ ε

φθάνει τό k νά εἶναι καταλλήλως μεγάλο:

$k >$ κατάλληλου ἀριθμοῦ A

§ 18. <u>Ἔννοια τῆς πιθανότητας</u>. Θά ἐξηγήσουμε τήν ἔννοια σ'ἕνα παράδειγμα. Μία κληρωτίδα περιέχει 90 κλήρους ἀριθμημένους ἀπό τό 1 ὥς τό 90. Ἡ κλήρωση συνίσταται στό (συγχρονο) τράβηγμα 5 κλήρων. Οἱ κληρώσεις πού περιέχουν ἕναν ὁρισμένο κλῆρο, π.χ. τόν 3, εἶναι τόσες ὅσοι εἶναι οἱ συνδυασμοί 89 πραγμάτων ἀνά 4. Οἱ κληρώσεις αὐτές λέγονται εὐνοϊκές γιά τό γεγονός: μεταξύ τῶν 5 τραβηγμένων κλήρων νά βρίσκεται ὁ ὑπ'ὄψη κλῆρος 3. Οἱ διάφορες δυνατές κληρώσεις, οἱ εὐνοϊκές καί οἱ μή εὐνοϊκές γιά τό παραπάνω γεγονός, εἶναι τόσες ὅσοι οἱ συνδυασμοί 90 πραγμάτων ἀνά 5, ὅλες ἐξ ἴσου πιθανές κατά παραδοχή. Ὁ λόγος

$$\binom{89}{4}:\binom{90}{5} = \frac{\text{πλῆθος εὐνοϊκῶν περιπτώσεων γιά τό γεγονός}}{\text{πλῆθος ὅλων τῶν δυνατῶν ἐξ ἴσου πιθανῶν περιπτώσεων}}$$

εἶναι, ἐξ ὁρισμοῦ, ἡ πιθανότητα τοῦ γεγονότος. Σύμφωνα μ'αὐτά ἡ πιθανότητα νά βγῆ ὁ κλῆρος 3 μεταξύ τῶν 5 πού τραβοῦμε ἰσοῦται μέ

$$\frac{89\cdot88\cdot87\cdot86}{1\cdot2\cdot3\cdot4} : \frac{90\cdot89\cdot88\cdot87\cdot86}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ Ι ΚΑΙ ΙΙ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1. Ἡ ἰσχύς P σέ ἵππους (H.P.) τήν ὁποία μεταβιβάζει ἕνα (κυκλωτό) λουρί παρέχεται ἀπό τόν τύπο

$$P = \frac{\pi n d(T_1 - T_2)}{33000}$$

ὅπου d ἡ διάμετρος σέ πόδια (1 foot = 30,48 cm) τοῦ τροχοῦ τόν ὁποῖο θέτει σέ κίνηση τό λουρί, n ὁ ἀριθμός τῶν στροφῶν του ἀνά λεπτό καί T_1, T_2 οἱ τάσεις σέ lb (1 lb = 1 pound = = 0,4536 kgr*) τοῦ λουριοῦ, στό τεντωμένο καί στό χαλαρό του μέρος. Ἐάν $T_1 = 2T_2$, νά ὑπολογιστοῦν οἱ τάσεις γιά n = 100, d = 4ft, P = 3,5 H.P.

2. Ἄν δεχτοῦμε ὅτι 1 inch = 2,54 cm καί 1 kgr* = 2,205 lb, πόσα kgr* ἀνά cm^2 εἶναι 1 lb ἀνά in^2;

3. Ἕνας ἵππος (H.P.) ἰσχύς ἰσοῦται μέ 33.000 foot.lb ἀνά λεπτό. Ἄν 1 gr*.cm ἰσοῦται μέ 981 ἔργια καί 10^7 ἔργια ἀνά δευτερόλεπτο κάνουν ἕνα βάττ, νά ὑπολογιστῆ πόσα βάτ κάνει ἕνας ἵππος ἰσχύς.

4. Παραστῆστε μέ ἀτέρμονες δεκαδικούς ἀριθμούς τούς σύμμετρους ἀριθμούς

$$\frac{57}{40}\ ,\quad -\frac{14}{1250}\ ,\quad -\frac{269983}{9990000}\ ,\quad \frac{11989}{999000}$$

5. Παραστῆστε μέ κοινά κλάσματα τούς σύμμετρους ἀριθμούς
$25,\overline{352}352\ldots$, $-281,46\overline{72}72\ldots$, $0,049\overline{38}38\ldots$, $-7,62\overline{1024}1024\ldots$

6. Γράψτε μέ μορφή δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ δύο σύμμετρους καί δυό ἀσύμμετρους ἀπό τό διάστημα
$$-7,2573577357773\ldots < x < -7,2573477377773\ldots$$

7. Ἀποδεῖξτε τήν πρόταση: Ἱκανή συνθήκη γιά τή σχέση
$$|x_2 - x_1| < \varepsilon$$
εἶναι νά ὑπάρχη ἕνας πραγματικός ἀριθμός α τέτοιος ὥστε
$$|x_1 - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{καί} \quad |x_2 - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

8. Ἄν x_1 καί x_2 εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί δεῖξτε ὅτι ἡ παράσταση
$$\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{|x_1 - x_2|}{2}$$
ἰσοῦται μέ τόν μεγαλύτερο - πιό ἀκριβολογημένα: μέ τόν ὄχι μικρότερο - ἀπό τούς δύο ἀριθμούς x_1 καί x_2. Αὐτός ὁ ὄχι μικρότερος ἀπό τούς x_1 καί x_2 σημειώνεται διεθνῶς μέ
$$\mathrm{Max}(x_1, x_2)$$
ὅπου Max = Maximum.

Ὅμοια δεῖξτε ὅτι
$$\frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{|x_1 - x_2|}{2} = \mathrm{Min}(x_1, x_2)\,,$$
Min = Minimum.

9. Νά δειχθῆ ὅτι, ἄν ὁ ἀριθμός ρ μηδενίζει τό ἀκέραιο πολυώνυμο
$$x^{\nu} + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$$
τότε
$$|\rho| \leqq \mathrm{Max}\big(1, (|\alpha_{\nu-1}| + \ldots + |\alpha_1| + |\alpha_0|)\big).$$

10. Ἕνα ἐργοστάσιο κατασκευάζει σιδηροδοκούς μέ διατομή διπλοῦ ταῦ (Ι) καί ἐγγυᾶται τίς διαστάσεις τῶν διατομῶν αὐτῶν μόνο κατά προσέγγιση, μέ ἄνω φράγμα ἀναλογικοῦ σφάλματος 2,5%. Τί συνέπειες ἔχει αὐτό γιά μιά σιδηροδοκό πού παραγγέλνεται νά ἔχη "ὕ ψ ο ς" 10 cm (ἤ 15 cm);

11. Κατά πόσους διάφορους τρόπους μποροῦν νά πάρουν 7 σπουδαστές 7 βραβεῖα ἄνισης ἀξίας (ἐξυπακούεται ὅτι ὁ καθένας παίρνει ἕνα βραβεῖο). Κατά πόσους διάφορους τρόπους μποροῦν νά πάρουν 10 σπουδαστές τά παραπάνω βραβεῖα; Κατά πόσους διάφορους τρόπους μποροῦν νά πάρουν 10 σπουδαστές 7 χρηματικά βραβεῖα ἀπό τά ὁποῖα 4 εἶναι τῶν 2000 δρχ., 2 τῶν 1000 καί 1 τῶν 5000 δραχμῶν;

12. Γιά νά φανῆ ἐναργέστερα πόσο δυνατά αὐξάνει τό $\nu!$ ὅταν αὐξάνη τό ν, δεῖξτε ὅτι ὅσο μεγάλος καί ἄν εἶναι ὁ αὐθαίρετα ὁρισμένος θετικός ἀριθμός ϑ ὑπάρχει ἕνας κατάλληλος φυσικός ἀριθμός N_ϑ τέτοιος ὥστε γιά $\nu \geq N_\vartheta$ νά ἰσχύη ἡ ἀνισότητα $\nu! > \vartheta^\nu$.

Ὑπόδειξη: Προσπαθῆστε νά βρῆτε τήν ἀπόδειξη πρῶτα γιά μιάν εἰδική τιμή τοῦ ϑ, π.χ. γιά $\vartheta = 5$, κατόπιν γενικεῦστε τήν.

13. Ἐπαναληπτικός συνδυασμός ν διαφορετικῶν πραγμάτων ἀνά ϱ λέγεται κάθε ὁμάδα ἀπό ϱ (ἀκατάτακτα) στοιχεῖα πού τό καθένα τους χωριστά θεωρεῖται ὅτι εἶναι τό ἴδιο μέ ἕνα ὁποιοδήποτε ἀπό τά δοσμένα ν πράγματα. Ἐπομένως δέν ἀποκλείεται τώρα μέσα στό συνδυασμό ἕνα στοιχεῖο νά παρουσιάζεται τό ἴδιο ἕως ϱ φορές. Τό ϱ μπορεῖ τώρα φυσικά νά ὑπερβαίνη τό ν. Δεῖξτε ὅτι τό πλῆθος τῶν διαφόρων συνδυασμῶν μέ ἐπανάληψη ν διαφόρων πραγμάτων ἀνά ϱ ἰσοῦται μέ $\binom{\nu+\varrho-1}{\varrho}$

14. Βρῆτε τά ἀναπτύγματα τῶν

$$(x-y)^7\ ,\ (x+1)^6\ ,\ (x-5)^4\ ,\ (1-\omega)^8\ ,\ \left(x+\frac{1}{x}\right)^5$$

Προσδιορίστε τούς ὅρους πού εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀπό τό x μέσα στά ἀναπτύγματα τῶν $\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3x}\right)^9$, $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{3\mu}$ ὅπου μ φυσικός ἀριθμός. Γράψτε τούς τρεῖς πρώτους ὅρους ἀπό τά ἀναπτύγματα τῶν $\sqrt[3]{1-x} = (1-x)^{1/3}$, $(1+x)^{3/4}$, $+\sqrt[4]{5+x} = +\sqrt[4]{5}(1+x/5)^{1/4}$

15. Νά δειχθῆ ὅτι

$$\binom{\nu}{1}+\binom{\nu}{3}+\binom{\nu}{5}+\ldots = \binom{\nu}{0}+\binom{\nu}{2}+\binom{\nu}{4}+\ldots$$

ὅπου ν φυσικός ἀριθμός. Ἐπίσης ὅτι

$$\binom{\nu}{0}+\binom{\nu}{1}+\binom{\nu}{2}+\ldots+\binom{\nu}{\nu} = 2^\nu$$

Ἐπαληθεῦστε τίς δύο σχέσεις γιά $\nu = 10$ καί 11.

16. Ἀπό τούς συντελεστές τοῦ ἀναπτύγματος τῆς $(\alpha+\beta)^\nu$ ποιός εἶναι ὁ μέγιστος; Ποιός εἶναι ὁ μέγιστος ἀπό τούς ὅρους τοῦ ἀναπτύγματος τῆς $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^\nu$; Γενικῶς, ποιός εἶναι ὁ μέγιστος ἀπό τούς ὅρους τοῦ ἀναπτύγματος τῆς $(\alpha+\beta)^\nu$, ὅταν α καί β δοσμένοι θετικοί ἀριθμοί καί ν δοσμένος φυσικός ἀριθμός;

17. Δεῖξτε ὅτι

$$\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1-\frac{1}{\nu}}{2!}+\frac{\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\nu}\right)}{3!}+\ldots+\frac{\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\nu}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{\nu}\right)}{k!}+\ldots+\frac{\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\ldots\left(1-\frac{\nu-1}{\nu}\right)}{\nu!}$$

Χρησιμοποιῆστε αὐτόν τόν τύπο γιά νά ἐρευνῆστε τό εἶδος τῆς μεταβολῆς τῆς $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$ ὅταν ὁ ἐκθέτης ν διατρέχῃ αὐξάνοντας τούς φυσικούς ἀριθμούς.

<u>Ὑποδ</u>. Θά φανῆ ὅτι ἡ $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$ αὐξάνει μαζί μέ τόν φυσ.ν

18. Δεῖξτε ὅτι τό ἀνάπτυγμα τῆς δύναμης $(\alpha+\beta+\gamma)^{\nu}$ ἑνός τριωνύμου, μέ ἐκθέτη ν φυσικό ἀριθμό, δίνεται ἀπό τόν τύπο

$$(\alpha+\beta+\gamma)^{\nu} = \sum_{\mu_1+\mu_2+\mu_3=\nu} \frac{\nu!}{\mu_1!\mu_2!\mu_3!}\,\alpha^{\mu_1}\beta^{\mu_2}\gamma^{\mu_3}$$

ὅπου τό σύμβολο $\sum\limits_{\mu_1+\mu_2+\mu_3=\nu}$ σημαίνει ὅτι γίνεται ἄθροιση ὅλων τῶν ἀνόμοιων (σχετικῶς μέ τά γράμματα α,β,γ) ὅρων πού προκύπτουν ἀπό τόν γραμμένο γενικό ὅρο, ὅταν ἀντικαταστήσουμε μέσα σ' αὐτόν τά μ_1, μ_2, μ_3 μέ ἀκεραίους ἀριθμούς ≥ 0 οἱ ὁποῖοι ἱκανοποιοῦν τήν σχέση $\mu_1+\mu_2+\mu_3 = \nu$. Κάμετε ἐπαλήθευση γιά $\nu = 4$.

19. Ἀπό μιά τράπουλα μέ 52 χαρτιά τραβοῦμε στήν τύχη 10 χαρτιά. Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα, ἀπό τά 10 πέντε νά εἶναι κόκκινα καί πέντε μαῦρα; Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα νά εἶναι καί τά δέκα κόκκινα;

20. Ρίχνουμε δυό ζάρια. Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα νά ἐμφανιστῆ ἄθροισμα σημείων 8; - Ρίχνουμε τρία ζάρια. Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα νά ἐμφανιστῆ ἄθροισμα σημείων 11, ποιά νά ἐμφανιστῆ ἄθροισμα 12;

21. Ἕνας στοιχηματίζει ὅτι σέ 4 ρίψεις τοῦ ζαριοῦ θά ἐμφανιστῆ τουλάχιστο μιά φορά τό 6 καί ἕνας ἄλλος στοιχιματίζει ὅτι δέν θά ἐμφανιστῆ τό 6. Ποιός εἶναι ὁ πλεονεκτῶν ἀπό τούς δυό στοιχηματίες;

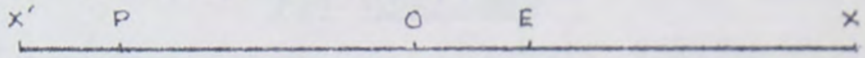
ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

ΤΕΤΜΗΜΕΝΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΕΥΘΕΙΑΣ

§ 19. Ἔστω X΄X μία (ἀπέρατη) εὐθεία. Πάνω σ᾽αὐτήν διακρίνουμε δύο ἀντίθετες φορές (ἤ κατευθύνσεις), δηλαδή δύο ἀντίθετους τρόπους διάταξης τῶν σημείων της. Τή μιά ἀπ᾽αὐτές, συνήθως τήν ἀπό τά ἀριστερά μας πρός τά δεξιά, τήν ἐκλέγουμε γιά θετική φορά, ἡ ἄλλη λέγεται τότε ἀρνητική. Μιά εὐθεία καί μιά θετική φορά πάνω σ᾽αὐτήν ἀποτελοῦν ἐκεῖνο πού λέγεται προσανατολισμένη εὐθεία.

Ἕνα σημεῖο O πάνω σέ μιά προσανατολισμένη εὐθεία X΄X τήν χωρίζει σέ μιά θετική ἡμιευθεία, ἔστω τήν $\overrightarrow{OX}$, καί μιάν ἀρνητική, τήν $\overrightarrow{OX'}$. Πάνω στή θετική ἡμιευθεία θεωροῦμε τό σημεῖο E πού ἀπέχει ἀπό τό O ἀπόσταση ἴση μέ τήν μονάδα μήκους πού ἐκλέγουμε. Στό O ἀντιστοιχίζουμε τόν ἀριθμό 0, στό E τόν ἀριθμό ἕνα. Σέ κάθε ἄλλο σημεῖο P τῆς εὐθείας X΄X ἀντιστοιχίζουμε τόν πραγματικό ἀριθμό πού ἔχει 1ο πρόσημο τό +, ἄν τό P ἀνήκη στή θετική ἡμιευθεία, τό −, ἄν τό P ἀνήκη στήν ἀρνητική ἡμιευθεία καί 2ο ἀπόλυτη τιμή τό μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος OP (μέ μονάδα τό τμῆμα OE). Ἀπό τίς ἰδιότητες τῶν σημείων τῆς εὐθείας καί τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἕπεται ὅτι σέ κάθε σημεῖο τῆς εὐθείας X΄X ἀντιστοιχεῖ ἔτσι καί ἕνας ὁρισμένος πραγματικός ἀριθμός καί ὅτι ἀντιστρόφως κάθε πραγματικός ἀριθμός εἶναι ἀντίστοιχος ἑνός ὁρισμένου σημείου τῆς εὐθείας. Ὁ ἀριθμός λέγεται τετμημένη (**abscisse**) τοῦ σημείου καί παριστάνεται γενικά μέ τό γράμμα **x** συνήθως. Γιά νά δηλώσουμε ὅτι τό σημεῖο Μ ἔχει τετμημένη τό **x** γράφουμε Μ(**x**)· π.χ. Ρ(−3) σημαίνει τό σημεῖο Ρ πού ἔχει τετμημένη −3, δηλαδή τό σημεῖο τῆς ἀρνητικῆς ἡμιευθείας



ΟΧ′ σέ ἀπόσταση τριῶν μονάδων ΟΕ ἀπό τό Ο. Τό σημεῖο Ο λέγεται ἀρχή τῶν τετμημένων ἤ καί συντεταγμένων καί συντομώτερα ἀρχή, τό Ε λέγεται μοναδιαῖο σημεῖο. Μιά εὐθεία πάνω στήν ὁποία ἔχουν ἐκλεγῆ ἡ ἀρχή Ο καί τό μοναδιαῖο σημεῖο Ε λέγεται ἄξονας τετμημένων ἤ συντεταγμένων, συντομώτερα δέ ἄξονας. Θετική φορά του εἶναι ἡ ἀπό τό Ο πρός τό Ε. Ἡ θετική ἡμιευθεία $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OE}$ λέγεται καί θετικός ἡμιάξονας· τά σημεῖα του, πλήν τοῦ Ο, ἔχουν θετικές τετμημένες. Ἀντιθέτως τά σημεῖα τοῦ ἀρνητικοῦ ἡμιάξονα $\overrightarrow{OX'}$ ἔχουν ἀρνητικές τετμημένες, πλήν τοῦ Ο φυσικά.

§ 20. Τό σημεῖο πού ἔχει τετμημένη ἕνα σύμμετρο ἀριθμό $\frac{\alpha}{\beta} \neq 0$ προσδιορίζεται ὡς ἑξῆς (τά α καί β εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί, ὁ $\beta \neq 0$):

1η περίπτωση: $|\beta| = 1$. Τότε παίρνουμε ἐφεξῆς, ἀρχίζοντάς ἀπό τό σημεῖο Ο, $|\alpha|$ τμήματα ἴσα μέ τό ΟΕ, κατά τή θετική φορά ἄν $\frac{\alpha}{\beta} > 0$, κατά τήν ἀρνητική ἄν $\frac{\alpha}{\beta} < 0$.

2η περίπτωση: $|\beta| > 1$. Τότε διαιροῦμε τό τμῆμα ΟΕ σέ $|\beta|$ ἴσα μέρη, θεωροῦμε ἕνα ἀπό αὐτά τά "ὑποπολλαπλάσια" τοῦ ΟΕ καί ἀρχίζοντας πάλιν ἀπό τό σημεῖο Ο, παίρνουμε ἐφεξῆς $|\alpha|$ τμήματα ἴσα μέ τό ὑποπολλαπλάσιο αὐτό, κατά τή θετική φορά ἄν $\frac{\alpha}{\beta} > 0$, κατά τήν ἀρνητική, ἄν $\frac{\alpha}{\beta} < 0$.

Τό σημεῖο Ρ στό ὁποῖο καταλήγουμε σέ κάθε περίπτωση εἶναι ἐκεῖνο πού ἔχει τετμημένη $\frac{\alpha}{\beta}$: $P\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$.

Τό σημεῖο πού ἔχει τετμημένη ἕναν ἀσύμμετρο ἀριθμό

$$x = \varepsilon \cdot A \ , \ y_1 y_2 y_3 , \ldots ,$$

ὅπου $\varepsilon = \pm 1$, A ἕνας ἀκέραιος $\geqq 0$ καί $y_1, y_2, y_3, \ldots$, μιά δοσμένη διαδοχή ψηφίων, προσδιορίζεται γενικά ὡς ἑξῆς: Θεωροῦμε τά ἄπειρα εὐθύγραμμα τμήματα $A_\nu B_\nu$ γιά $\nu = 1,2,3,4,\ldots$ πού τά ἄκρα τους A_ν καί B_ν ἔχουν ἀντιστοίχως τετμημένες τούς σύμμετρους ἀριθμούς

$$\alpha_\nu = \varepsilon\left(A + \frac{y_1}{10} + \ldots + \frac{y_\nu}{10^\nu}\right) \ ,$$

καί
$$\beta_\nu = \alpha_\nu \pm \frac{1}{10^\nu} \ .$$

Τά τμήματα αὐτά ἀποτελοῦν μιάν ἀτέρμονα διαδοχή μέ τίς ἑξῆς ἰδιότητες: 1ο τό καθένα τους (πλήν τοῦ πρώτου) $A_{\nu+1} B_{\nu+1}$ κεῖται μέσα στό προηγούμενό του $A_\nu B_\nu$, 2ο τό μῆκος τοῦ $A_\nu B_\nu$ ἰσοῦται μέ $\frac{1}{10^\nu}$ (ὅταν πάρουμε μονάδα τό ΟΕ), ἄρα γίνεται μικρότερο ἀπό κάθε αὐθαίρετα δοσμένο μῆκος, ἀρκεῖ ὁ δείκτης ν νά εἶναι κατάλληλα μεγάλος.

Ἑπομένως, σύμφωνα μέ τίς ἰδιότητες τῶν σημείων μιᾶς εὐθείας, ὅλα αὐτά τά ἄπειρα τμήματα $A_\nu B_\nu (\nu = 1,2,3,4,\ldots)$ ἔχουν ἕνα καί μόνο ἕνα κοινό σημεῖο· αὐτό τό σημεῖο εἶναι κεῖνο πού ἔχει τετμημένη τόν παραπάνω ἀσύμμετρο ἀριθμό.

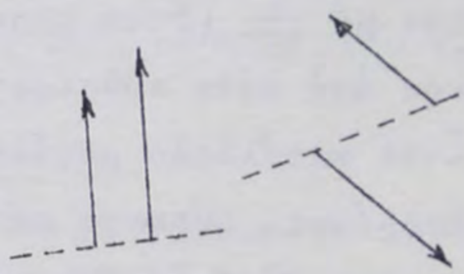
Εἰδικῶς, κατασκευάζεται ἀπό τά Ο καί Ε μέ κανόνα καί διαβήτη κάθε σημεῖο πού ἔχει τετμημένη ἀσύμμετρο ἀριθμό, ὅταν αὐτός προκύπτη ἀπό τόν ἀριθμό (ἕνα) 1 μέ τίς ἑξῆς μόνο πράξεις (ἐκτελεσμένες πεπερασμένο ἀριθμό φορές): πρόσθεση, ἀφαίρεση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση καί ἐξαγωγή τετραγωνικῆς ρίζας. Π.χ. τό σημεῖον μέ τετμημένη $+\sqrt{2} = +\sqrt{1+1}$, τό $M(-\sqrt{5}+\sqrt{3})$ κλπ.

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

§ 21. Ἐφαρμοσμένο (ἤ ἐφαρμοστό) διάνυσμα καλοῦμε ἕνα τμῆμα εὐθείας μαζί μέ μιά φορά (κατεύθυνση) σάνω σ'αὐτό. Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ δίνει λοιπόν γένεση σέ δύο ἐφαρμοσμένα διανύσματα: τό ένα πού τό σημειώνουμε $\overrightarrow{AB}$, έχει πρώτο άκρο ή αρχή τό σημείο Α καί δεύτερο άκρο ή πέρας τό Β, τό άλλο, $\overrightarrow{BA}$, έχει αρχή τό Β καί πέρας τό Α. Από σκοπιμότητα εισάγουμε καί τά μηδενικά εφαρμοσμένα διανύσματα $\overrightarrow{AA}$ $\overrightarrow{BB}$, κτλ. μέ αρχή καί πέρας πού συμπίπτουν.

Δύο εφαρμοσμένα διανύσματα λέγονται παράλληλα όταν κείνται πάνω σέ μιάν καί τήν ίδια ευθεία ή πάνω σέ δύο παράλληλες ευθείες. Γιά δύο τέτοια διανύσματα χρησιμοποιούμε καί τήν έκφραση: τά δυό διανύσματα έχουν τήν ίδια (ή κοινή)διεύθυνση.

Δυό παράλληλα, όχι μηδενικά διανύσματα ή έχουν τήν ίδια φορά (κατεύθυνση) (είναι ομόρροπα) ή έχουν αντίθετες φορές (είναι αντίρροπα). Έτσι σέ κάθε ορισμένη διεύθυνση είναι υπαγμένες δύο φορές (κατευθύνσεις), η μία αντίθετη της άλλης.



Δύο εφαρμοσμένα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται ίσα: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, εάν είναι 1ον ισόμηκα: $AB = \Gamma\Delta$. 2ον παράλληλα: $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, 3ον ομόρροπα: $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Φυσικά η τρίτη συνθήκη του ορισμού έχει ως τώρα νόημα μόνο γιά μή μηδενικά διανύσματα· δυό οποιαδήποτε εφαρμοσμένα μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AA}$ καί $\overrightarrow{BB}$ λέγονται ίσα (γιατί ικανοποιούν τίς δυό πρώτες συνθήκες, επιτρέπεται δέ νά δεχθούμε πώς ικανοποιούν καί τήν τρίτη).

Η έτσι ορισμένη ισότητα ικανοποιεί τό αίτημα:
"Τά ενί τρίτω ίσα καί αλλήλοις ίσα εστίν".

Σύμφωνα μ'αυτά, τά διάφορα εφαρμοσμένα διανύσματα του χώρου κατανέμονται σέ κλάσεις ίσων μεταξύ τους διανυσμάτων. Δύο εφαρμοσμένα διανύσματα από διάφορες κλάσεις είναι άνισα, δηλαδή διαφέρουν κατά τό ένα τουλάχιστον από τά εξής τρία στοιχεία: μήκος, διεύθυνση, φορά.

§ 22. Εισάγουμε τώρα τήν έννοια του ελεύθερου διανύσματος ή απλώς διανύσματος. Καλούμε μή μηδενικό διάνυσμα τό σύστημα ενός μήκους $\neq 0$, μιάς διευθύνσεως καί μιάς υπαγμένης φοράς, καί μηδενικό διάνυσμα τό σύστημα ενός μηδενικού μήκους μιάς οποιασδήποτε διευθύνσεως καί μιάς οποιασδήποτε υπαγμένης φοράς. Έτσι ένα (ελεύθερο) διάνυσμα αντιπροσωπεύει μιά ολόκληρη κλάση ίσων μεταξύ τους εφαρμοσμένων διανυσμάτων, εκείνων πού έχουν τά ίδια μέ αυτό στοιχεία: μήκος, διεύθυνση καί φορά.

Ένα (ελεύθερο) διάνυσμα (ενίοτε καί ένα εφαρμοσμένο) τό σημειώνουμε μέ ένα μόνο γράμμα επιγραμμισμένο: $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ κτλ.

Μέτρο ή απόλυτη τιμή $|\overline{\alpha}|$ ενός διανύσματος $\overline{\alpha}$ καλείται τό στοιχείο μήκος πού μαζί μέ τά άλλα στοιχεία, διεύθυνση καί φορά, αποτελούν εξ ορισμού τό διάνυσμα $\overline{\alpha}$.

Δύο μή μηδενικά διανύσματα $\overline{\alpha}$ καί $\overline{\beta}$ λέγονται ίσα όταν τά τρία στοιχεία: μήκος, διεύθυνση, φορά πού αποτελούν τό $\overline{\alpha}$ συμπίπτουν αντιστοίχως μέ τά τρία στοιχεία πού αποτελούν τό $\overline{\beta}$.

Δύο μή μηδενικά διανύσματα $\overline{\gamma}$ καί $\overline{\delta}$ λέγονται παράλληλα: $\overline{\gamma}//\overline{\delta}$ όταν έχουν κοινό τό στοιχείο διεύθυνση, ομόρροπα, όταν έχουν κοινά τά στοιχεία διεύθυνση καί φορά.

Γιά νά σημειώσουμε ότι τό εφαρμοσμένο, μή μηδενικό διάνυσμα $\overline{AB}$ έχει τά ίδια στοιχεία: μήκος, διεύθυνση καί φορά, μέ τό (ελεύθερο) διάυνυσμα $\overline{\alpha}$ γράφουμε $\overline{\alpha} = \overline{AB}$. Γιά ένα μηδενικό διάνυσμα $\overline{\beta}$ γράφουμε $\overline{\beta} = 0$.

Δύο μή μηδενικά διανύσματα λέγονται αντίθετα, όταν συμπίπτουν ώς πρός τά στοιχεία μήκος καί διεύθυνση, διαφέρουν όμως ώς πρός τό στοιχείο φορά.

Ελεύθερα διανύσματα συναντούμε πολύ συχνά στή Γεωμετρία καί στίς εφαρμογές τῶν Μαθηματικῶν. Π.χ. οἱ παράλληλες μετατοπίσεις (μονολεκτικά: οἱ μεταφορές, translations) στό χῶρο προσδιορίζονται μέ ελεύθερα διανύσματα. Όμοια ἡ ροπή ενός "επιπέδου ζεύγους δυνάμεων" παριστάνεται μέ ένα ελεύθερο διάνυσμα.

§ 23. Δύο εφαρμοσμένα διανύσματα $\overline{ΑΒ}$ καί $\overline{ΒΓ}$ από τά όποια τό δεύτερο έχει αρχή τό πέρας τοῦ πρώτου τά λέμε επακόλουθα.

Τό άθροισμα δύο επακόλουθων εφαρμοσμένων διανυσμάτων $\overline{ΑΒ}$ καί $\overline{ΒΓ}$ εἶναι εξ ορισμοῦ τό διάνυσμα $\overline{ΑΓ}$· γράφουμε $\overline{ΑΒ}+\overline{ΒΓ} = \overline{ΑΓ}$.

Ορίζουμε τώρα τό άθροισμα $\bar{\alpha}+\bar{\beta}$ δύο (ελεύθερων) διανυσμάτων $\bar{\alpha}$ καί $\bar{\beta}$ ὡς εξῆς: Παίρνουμε δύο επακόλουθα εφαρμοσμένα διανύσματα $\overline{ΑΒ}$ καί $\overline{ΒΓ}$, αντιπροσωπευτικά τῶν $\bar{\alpha}$ καί $\bar{\beta}$ αντιστοίχως, δηλαδή $\bar{\alpha} = \overline{ΑΒ}$ καί $\bar{\beta} = \overline{ΒΓ}$· τό $\bar{\alpha}+\bar{\beta}$ εἶναι εξ ορισμοῦ τό (ελεύθερο) διάυνυσμα πού έχει μῆκος ΑΓ, διεύθυνση δέ καί φορά στήν περίπτωση φυσικά όπου $ΑΓ \neq 0$) τή διεύθυνση καί φορά τοῦ $\overline{ΑΓ}$.

$$\bar{\alpha}+\bar{\beta} = \overline{ΑΒ}+\overline{ΒΓ} = \overline{ΑΓ} \quad , \quad \text{όπου } \bar{\alpha} = \overline{ΑΒ} \text{ καί } \bar{\beta} = \overline{ΒΓ}$$

Γιά τό έτσι ορισμένο άθροισμα ισχύουν οἱ ιδιότητες:

(23.1) $\bar{\alpha}+\bar{\beta} = \bar{\beta}+\bar{\alpha}$ (αντιμετάθεσης)

(23.2) $(\bar{\alpha}+\bar{\beta}) + \bar{\gamma} = \bar{\alpha} +(\bar{\beta}+\bar{\gamma})$ (προσεταιρισμοῦ)

Μέ μέθοδο ανάλογη πρός εκείνην πού χρησιμοποιεῖται στήν πρόσθεση αριθμῶν, ἡ παραπάνω έννοια τοῦ αθροίσματος δύο διανυσμάτων επεκτείνεται σέ περισσότερα από δύο προσθετέα διανύσματα π.χ.

$$\bar{\alpha}+\bar{\beta}+\bar{\gamma}+\bar{\delta} = \left\{(\bar{\alpha}+\bar{\beta})+\bar{\gamma}\right\}+\bar{\delta}$$

Διαφορά $\bar{\alpha}-\bar{\beta}$ δύο διανυσμάτων $\bar{\alpha}$ καί $\bar{\beta}$ εἶναι εξ ορισμοῦ τό διάνυσμα $\bar{\alpha}+\bar{\beta}_1$, όπου $\bar{\beta}_1$ τό αντίθετο τοῦ $\bar{\beta}$.

Ισχύει ἡ σχέση

$$\bar{\beta} + (\bar{\alpha}-\bar{\beta}) = \bar{\beta}+(\bar{\alpha}+\bar{\beta}_1) = \bar{\alpha}+(\bar{\beta}+\bar{\beta}_1) = \bar{\alpha}$$

§24. Γινόμενο $\lambda\overline{\alpha}$ ἑνός διανύσματος $\overline{\alpha} \neq 0$ ἐπί ἕναν πραγματικό ἀριθμό $\lambda \neq 0$ λέγεται τό (ἐλεύθερο) διάνυσμα πού ἔχει 1ο μέτρο (ἤ μῆκος) τό $|\lambda|\cdot|\overline{\alpha}|$, 2ον διεύθυνση τήν ἴδια μέ τό $\overline{\alpha}$ καί 3ο τήν ἴδια φορά μέ τό $\overline{\alpha}$ ὅταν $\lambda > 0$, τήν ἀντίθετη ὅταν $\lambda < 0$. Στήν περίπτωση ὅπου εἴτε $\overline{\alpha} = 0$ εἴτε $\lambda = 0$, θέτουμε $\lambda\overline{\alpha}$ = μηδενικό διάνυσμα. Ἀντί $\lambda\overline{\alpha}$ γράφουμε ἐνίοτε καί $\overline{\alpha}\lambda$.

Τό ἔτσι ὁρισμένο γινόμενο ἔχει τίς ἰδιότητες:

(24.1) $\lambda_1(\lambda_2\overline{\alpha}) = (\lambda_1\lambda_2)\overline{\alpha} = \lambda_2(\lambda_1\overline{\alpha})$

(24.2) $(\lambda_1+\lambda_2)\overline{\alpha} = \lambda_1\overline{\alpha} + \lambda_2\overline{\alpha}$

(24.3) $\lambda(\overline{\alpha}+\overline{\beta}) = \lambda\overline{\alpha} + \lambda\overline{\beta}$

Τό διάνυσμα $(-1)\overline{\alpha}$, πού εἶναι κατά τόν ὁρισμό, τό ἀντίθετο τοῦ $\overline{\alpha}$, τό γράφουμε συντομώτερα $-\overline{\alpha}$. Ὅμοια τό $\left(-\frac{3}{2}\right)\overline{\alpha}$ γράφεται καί $-\frac{3}{2}\overline{\alpha}$.

§ 25. Τή σχέση $\overline{\beta} = \lambda\overline{\alpha}$ μεταξύ δύο διανυσμάτων $\overline{\beta}$ καί $\overline{\alpha}$ συμφωνοῦμε νά τή γράφουμε. ὅταν $\overline{\alpha} \neq 0$, καί ὡς ἑξῆς:

$$\frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}} = \lambda \quad .$$

Μέ ἄλλα λόγια, εἰσάγουμε τήν ἔννοια τοῦ λόγου $\frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}$ δύο παραλλήλων ἐλευθέρων ἤ ἐφαρμοσμένων διανυσμάτων $\overline{\beta}$ καί $\overline{\alpha}$, ἀπό τά ὁποῖα τό $\overline{\alpha}$ ὑποτίθεται $\neq 0$.

Ὁ λόγος αὐτός εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ πραγματικός ἀριθμός μέ ἀπόλυτη τιμή τό λόγο $\frac{|\overline{\beta}|}{|\overline{\alpha}|}$ τῶν μέτρων τῶν διανυσμάτων καί μέ πρόσημο τό σύν ἤ τό πλήν καθόσον τά δύο διανύσματα εἶναι ὁμόρροπα ἤ ἀντίρροπα.

ΤΕΤΜΗΜΕΝΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΥ ΠΡΟΣ ΑΞΟΝΑ

§ 26. Ἔστω Χ΄Χ ἕνας ἄξονας συντεταγμένων καί $\overline{AB}$ ἕνα ἐφαρμοσμένο διάνυσμα πάνω στόν ἄξονα ἤ σέ εὐθεία παράλληλη πρός αὐτόν.

Καλοῦμε τετμημένη $(\overline{AB})$ τοῦ διανύσματος $\overline{AB}$ τόν λόγο $\frac{\overline{AB}}{\overline{OE}}$

Ἀπ'ἐδῶ ἕπεται ὅτι

$$\overline{AB} = (\text{τετμημ.}\overline{AB})\ \overline{OE} = (\overline{AB})\ \overline{OE}$$

Ἴσα ἐφαρμοσμένα διανύσματα // X΄X ἔχουν προφανῶς ἴσες τετμημένες· ἀντιστρόφως δύο ἐφαρμοσμένα διανύσματα // X΄X πού ἔχουν ἴσες τετμημένες εἶναι ἴσα.

Τέλος γιά τυχόν σημεῖο M(x) τοῦ ἄξονα X΄X ἔχουμε:

Τετμημένη τοῦ $\overline{OM}$ = τετμημ. τοῦ σημείου M = x. Ὅμοια ὁρίζουμε τήν τετμημένη ἑνός (ἐλεύθερου) διανύσματος $\overline{\alpha}$//X΄X:

Τετμημένη τοῦ $\overline{\alpha} = \dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{OE}}$ = ἕνας πραγματικός ἀριθμός λ, ἀπ'ὅπου ἕπεται, κατά τούς ὁρισμούς τῶν §25, §26.

$$\overline{\alpha} = \lambda \cdot \overline{OE}$$

§27. <u>Πρόταση 1.(τοῦ Chasles)</u>. Ἄν Α,Β,Γ εἶναι σημεῖα τοῦ ἄξονα (κείμενα πάνω σ'αὐτόν μέ ὁποιαδήποτε διάταξη), ἰσχύει ἡ σχέση

$$(\overline{A\Gamma}) = (\overline{AB}) + (\overline{B\Gamma})$$

Συνεπῶς ἡ τετμημένη τοῦ ἀθροίσματος διανυσμάτων παράλληλων πρός X΄X ἰσοῦται μέ τό(ἀλγεβρικό) ἄθροισμα τῶν τετμημένων τῶν προσθετέων διανυσμάτων.

<u>Πόρισμα 1</u>. Γιά ἕνα ἐφαρμοσμένο διάνυσμα $\overline{AB}$ τοῦ ἄξονα X΄X ἔχουμε τή σχέση

τετμημ.$\overline{AB}$ = ($\overline{AB}$) = τετμημ.Β−τετμημ.Α = τετμ.πέρατος − τετμ.ἀρχῆς.

<u>Πόρισμα 2</u>. Ἡ τετμημένη τοῦ μέσου M ἑνός τμήματος M_1M_2 τοῦ X΄X ἰσοῦται μέ τό ἡμιάθροισμα τῶν τετμημένων τῶν ἄκρων:

$$\text{τετμ.}M = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

ὅπου x_1 καί x_2 οἱ τετμημένες τῶν M_1 καί M_2.

<u>Πρόταση 2</u>. Ὁ λόγος $\dfrac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}$ δύο (ἐφαρμοσμένων ἤ ἐλεύθερων)διανυσμάτων $\overline{\beta}$ καί $\overline{\alpha}$//X΄X, ἀπό τά ὁποῖα φυσικά τό $\overline{\alpha} \neq 0$, ἰσοῦται

μέ τό λόγο τῶν τετμημένων τους:

$$\frac{\text{τετμημ. } \overline{\beta}}{\text{τετμημ. } \overline{\alpha}}$$

ΜΕΡΙΚΟΣ ΛΟΓΟΣ

§ 28. Ἄς εἶναι $M_1(x_1)$ καί $M_2(x_2)$ δυό διάφορα ὁρισμένα σημεῖα τοῦ ἄξονα $x'x$. Καλοῦμε μερικό λόγο $(M_1M_2M_3)$ ἑνός σημείου $M_3(x_3) \neq M_2$ τοῦ ἄξονα ὡς πρός τό διατεταγμένο ζεῦγος σημείων M_1, M_2 τό λόγο

$$\frac{\overline{M_1M_3}}{\overline{M_3M_2}} = \frac{(M_1M_3)}{(M_3M_2)} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3}$$

Ὁ λόγος (M_1M_2M) εἶναι θετικός ὅταν τό $M(x)$ κεῖται στό ἐσωτερικό τοῦ τμήματος M_1M_2, εἶναι μηδέν ὅταν $M \equiv M_1$, εἶναι ἀρνητικός ὅταν τό M κεῖται ἔξω ἀπό τό τμῆμα M_1M_2 μπορεῖ νά πάρη κάθε ἀπό πρίν δοσμένη θετική τιμή καθώς καί κάθε ἀρνητική τιμή $\neq -1$, διότι γιά δοσμένη τιμή $\lambda \neq -1$ τοῦ λόγου $(M_1M_2M) = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$ βρίσκουμε ὅτι τό M πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἔχη τετμημένη

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \tag{28.1}$$

Ὅταν τό M ἀπομακρύνεται ἀπεριόριστα ἀπό τά M_1 καί M_2 (καθ'ὁποιαδήποτε φορά), ὁ $(M_1M_2M) =$

$$(M_1M_2M) = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = -1 + \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x}$$

ἔχει διαφορά ἀπό τό -1 τόν ἀριθμό $\frac{x_1 - x_2}{x_2 - x}$ πού γίνεται ἀπολύτως ὅσο θέλουμε μικρός ἀρκεῖ τό σημεῖο M νά ληφθῆ πάνω στόν $x'x$ καταλλήλως μακρυά ἀπό τά M_1 καί M_2. Γι'αὐτό συμφωνοῦμε νά εἰσαγάγουμε ἕνα "ἐπ'ἄπειρο" σημεῖο M_∞ τῆς εὐθείας $x'x$, γιά τό ὁποῖο ὁρίζουμε τιμή λόγου $(M_1M_2M_\infty)$ τό -1.

Συμπληρώνοντας τίς παραπάνω συμβάσεις ὁρίζουμε γιά τό σημεῖο $M \equiv M_2$ ἀντίστοιχο μερικό λόγο $(M_1M_2M_2)$ τόν "καταχρηστικό ἀριθμό" ἄπειρο: ∞

ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΩΝ Η ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

§ 29. Ἄς εἶναι $M_1(x_1),\ldots,M_\nu(x_\nu)$ ν σημεῖα τοῦ ἄξονα $X'X$. Στά σημεῖα αὐτά θεωροῦμε τοποθετημένες μάζες $m_1,\ldots,m_\nu$ ἀντιστοίχως, πού μποροῦν νά εἶναι ὁμόσημες ἤ ὄχι· στήν περίπτωση ὅπου δέν εἶναι ὁμόσημες ὑποθέτουμε ὅτι $m_1+\ldots+m_\nu \neq 0$. Ἡ Μηχανική καλεῖ κέντρο τῶν μαζῶν αὐτῶν ἕνα σημεῖο Κ τοῦ χώρου μέ τήν ἰδιότητα: γιά κάθε σημεῖο Μ τοῦ χώρου ἰσχύει ἡ σχέση

$$m_1\cdot\overline{M_1M}+\ldots+m_\nu\cdot\overline{M_\nu M}=(m_1+\ldots+m_\nu)\cdot\overline{KM}$$

Ἕνα τέτοιο σημεῖο Κ ὑπάρχει καί εἶναι μονότροπα ὁρισμένο. Στήν προκειμένη περίπτωση κεῖται πάνω στόν ἄξονα $X'X$, ὅπως καί τά σημεῖα $M,\ldots,M_\nu$, καί ἔχει τετμημένη

$$x=\frac{m_1x_1+\ldots+m_\nu x_\nu}{m_1+\ldots+m_\nu}$$

Στά παραπάνω σημεῖα ἄς ἔχουν ἐφαρμοστῆ παράλληλες δυνάμεις.

Ἄν μιάν ἀπό τίς δύο φορές πού εἶναι ὑπαγμένες στήν κοινή τους διεύθυνση, τήν ἐκλέξουμε γιά θετική φορά, τότε οἱ δυνάμεις θά παριστάνουνται ἀπό ἀντιστοίχους πραγματικούς ἀριθμούς $\delta_1,\ldots,\delta_\nu$, καί τό πρόβλημα τοῦ κέντρου τους ἀνάγεται στά προηγούμενα μέ ἀντικατάσταση τῶν $m_1,\ldots,m_\nu$ ἀπό τά $\delta_1,\ldots\delta_\nu$

ΔΙΠΛΟΣ Η ΑΝΑΡΜΟΝΙΚΟΣ ΛΟΓΟΣ

§ 30. Διπλός λόγος τεσσάρων διαφόρων σημείων $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$, $M_3(x_3)$, $M_4(x_4)$ τοῦ ἄξονα $X'X$ παρμένων μέ τή σειρά M_1, M_2, M_3, M_4 (ἡ ὁποία εἶναι ἄσχετη πρός τή διάταξή τους πάνω στήν εὐθεία $x'x$) καλεῖται τό πηλίκο τοῦ μερικοῦ λόγου $(M_1M_2M_3)$ διά τοῦ μερικοῦ λόγου $(M_1M_2M_4)$, παριστάνεται δέ μέ σύμβολο $(M_1M_2M_3M_4)$:

$$(M_1M_2M_3M_4) = \frac{\overline{M_1M_3}}{\overline{M_3M_2}} : \frac{\overline{M_1M_4}}{\overline{M_4M_2}} = \frac{(\overline{M_1M_3})}{(\overline{M_3M_2})} : \frac{(\overline{M_1M_4})}{(\overline{M_4M_2})} =$$

$$= \frac{(\overline{M_1M_3})\cdot(\overline{M_4M_2})}{(\overline{M_3M_2})\cdot(\overline{M_1M_4})} = \frac{(x_3-x_1)(x_4-x_2)}{(x_3-x_2)(x_4-x_1)}$$

Ἡ ἔννοια ἐπεκτείνεται ὡς ἑξῆς στήν περίπτωση ὅπου ἕνα ἀπό τά τέσσαρα σημεῖα εἶναι τό ἐπ'ἄπειρο σημεῖο M_∞ τῆς εὐθείας $x'x$.

$$(M_\infty M_2M_3M_4) = \frac{\overline{M_4M_2}}{\overline{M_3M_2}} = -(M_4M_3M_2) = \frac{x_4-x_2}{x_3-x_2}$$

$$(M_1M_\infty M_3M_4) = \frac{\overline{M_1M_3}}{\overline{M_1M_4}} = -(M_3M_4M_1) = \frac{x_3-x_1}{x_4-x_1}$$

$$(M_1M_2M_\infty M_4) = -\frac{\overline{M_4M_2}}{\overline{M_1M_4}} = -(M_2M_1M_4) = \frac{x_4-x_2}{x_4-x_1}$$

$$(M_1M_2M_3M_\infty) = -\frac{\overline{M_1M_3}}{\overline{M_3M_2}} = -(M_1M_2M_3) = \frac{x_3-x_1}{x_3-x_2}$$

Μιά νέα ἐπέκταση ἐπιτρέπει, ἕνα ἀπό τά τέσσερα σημεῖα νά συμπίπτη μέ ἕνα ἀπό τά τρία (διάφορα μεταξύ τους) ἄλλα. Ἔτσι π.χ. ἔχουμε

$$(M_1M_2M_3M_3) = 1 \quad , \quad (M_1M_2M_3M_2) = 0 \quad , \quad (M_1M_2M_3M_1) = \infty$$

§ 31. Ἐάν γιά μιάν καταταγμένη τετράδα $M_1M_2M_3M_4$ εἶναι

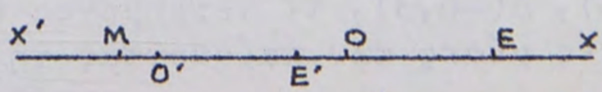
$$(M_1M_2M_3M_4) = -1 \ ,$$

τότε ἡ τετράδα λέγεται ἁρμονική· ἐπίσης λέμε στήν περίπτωση αὐτή, ὅτι τό ζεῦγος M_3, M_4 χωρίζει ἁρμονικά τό ζεῦγος M_1,M_2.

ΑΛΛΑΓΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ.

§ 32. Ἐάν πάνω στήν εὐθεία $X'X$ πάρουμε νέα ἀρχή τό σημεῖο O' πού ἔχει παλιά τετμημένη x_o καί ἀφήσουμε ἀμετάβλητα τή θετική φορά τοῦ ἄξονα καθώς καί τή μονάδα μήκους, τότε οἱ τετμημένες x καί x' ἑνός καί τοῦ ἰδίου σημείου M τῆς εὐθείας ὡς πρός τά δυό συστήματα συντεταγμένων συνδέονται διά τῆς σχέσεως

$$x = x_o + x' \ .$$



Διότι $x\cdot\overline{OE} = \overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M} = x_o\overline{OE} + x'\overline{O'E'} =$
$x_o\overline{OE} + x'\overline{OE} = (x_o+x')\cdot\overline{OE}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

22. Ξεκινώντας ἀπό τά σημεῖα O (o) καί E(1) τοῦ ἄξονα τῶν τετμημένων $X'X$ κατασκευάστε μέ κανόνα καί διαβήτη τά σημεῖα πού ἱκανοποιοῦν μέ τίς τετμημένες τους τήν ἐξίσωση $3x^2+20x+12 = 0$. Τά σημεῖα αὐτά λέμε ὅτι παριστάνονται ἀπό τήν παραπάνω ἐξίσωση.

Κατασκευάστε ὁμοίως ἐκεῖνα πού παριστάνονται ἀπό τήν ἐξίσωση $x^4-10x^2+19 = 0$

23. Ποιά σημεῖα M(x) τοῦ ἄξονα $X'X$ παριστάνει ἡ καθεμιά ἀπό τίς ἀκόλουθες σχέσεις:

$x-5 > 2$, $x + 3/2 < 4$, $x+\sqrt{2} < -4$, $x^2-3x-4 < 0$,
$x^3-2x^2+2x > 0$;

24. Δεῖξτε ὅτι ὁ ἀριθμός $|\beta-\alpha|$, ὅπου α καί β δοσμένοι πραγματικοί ἀριθμοί μπορεῖ νά ἑρμηνευθῆ γεωμετρικά ὡς (ἀπροσήμαστη) ἀπόσταση δυό ὁρισμένων σημείων τοῦ ἄξονα $X'X$. Χρησιμοποιώντας αὐτήν τήν ἑρμηνεία χαρακτηρίστε γεωμετρικά τά σημεῖα M(x) πού παριστάνει ἡ καθεμιά ἀπό τίς ἀκόλουθες σχέσεις:

$|x-2| = 5$, $|x+2| = 5$, $|x+2| < 5$,
$|x+2| > 5$, $|x-x_o| \geqq \theta$, $|x-x_o| \leqq \theta$,

ὅπου x_o πραγματικός καί θ θετικός ἀριθμός.

Ποῖα σημεῖα M(x) παριστάνονται ἀπό τό σύστημα τῶν σχέσεων $|x+1| < 1$ καί $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{3}{4}$;

25. Ποιές εἶναι οἱ τετμημένες τῶν διανυσμάτων $\overline{AB}$, $\overline{\Gamma\Delta}$, $\overline{EZ}$ ὅταν τά σημεῖα A,B,Γ,Δ,E,Z ἔχουν τετμημένες $-\frac{5}{2}$, $\frac{1}{3}$, $+\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, 1 , $+\sqrt{3}$ ἀντιστοίχως; Χαράξτε τά σημεῖα πάνω στόν ἄξονα.

(ii) Ποιές εἶναι οἱ τετμημένες τῶν περάτων τῶν διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$, ὅταν τά μέν διανύσματα ἔχουν τετμημένες -6 καί 3 ἀντιστοίχως, οἱ δέ ἀρχές των ἔχουν τετμημένες -5/2 και -4;

(iii) Δίνονται τά πέρατα $M_2(-3)$ καί $N_2(5)$ δυό διανυσμάτων $\overline{M_1M_2}$ καί $\overline{N_1N_2}$ καθώς καί οἱ τετμημένες -7,5 καί 4,6 τῶν διανυσμάτων αὐτῶν. Ζητοῦνται οἱ τετμημένες τῶν ἀρχῶν τους M_1, N_1

26. Οἱ μέσες τῶν τμημάτων AB καί ΓΔ, ὅπου A(-3,5), B(7,5), Γ(4,3), Δ(-6,3), τί τετμημένες ἔχουν; Σχεδιάστε τά τμήματα καί τίς μέσες των παίρνοντας τή μονάδα μήκους OE = 2 cm.

27. Ἐάν P_1, P_2, P_3, P_4 εἶναι τυχόντα σημεῖα τοῦ ἄξονα $x'x$ δεῖξτε ἀναλυτικῶς (δηλαδή μέ τίς τετμημένες) ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση
$$(\overline{P_1P_2})(\overline{P_3P_4}) + (\overline{P_1P_3})(\overline{P_4P_2}) + (\overline{P_1P_4})(\overline{P_2P_3}) = 0$$

28. Ἄς ἔχουν τά σημεῖα Α,Β,Γ,Δ τίς τετμημένες −2,4,1,6 ἀντιστοίχως. Ὑπολογίστε τό μερικό λόγο (ΑΒΓ) καθώς καί τό διπλό λόγο (ΒΑΔΓ). Ὑπολογίστε τίς τετμημένες τῶν σημείων Ζ καί Η πού "διαιροῦν ἐσωτερικῶς" τό τμῆμα ΑΒ κατά τούς μερικούς λόγους $(ΑΒΖ) = \frac{3}{5}$ καί $(ΑΒΗ) = \frac{5}{4}$, ἐπίσης τίς τετμημένες τῶν σημείων Κ καί Λ πού "διαιροῦν ἐξωτερικῶς" τό τμῆμα ΑΒ κατά τούς μερικούς λόγους $(ΑΒΚ) = -\frac{2}{7}$ καί $(ΑΒΛ) = -\frac{5}{2}$.

Κατασκευάστε τά σημεῖα Ζ,Η,Κ,Λ ἀπό τά Α καί Β χωρίς νά χρησιμοποιήσετε τίς τετμημένες πού βρήκατε.

Ποιά εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ σημείου Μ γιά τό ὁποῖο (ΑΒΓΜ) = 5; Ποιά ἡ τετμημένη τοῦ σημείου Ν πού μαζί μέ τό σημεῖο Α χωρίζει ἁρμονικά τό ζεῦγος Β, Γ;

29. Χρυσή τομή ἑνός τμήματος ΑΒ καλεῖται, ὅπως εἶναι γνωστό, ἡ (ἐσωτερική) διαίρεσή του σέ δυό μέρη τέτοια ὥστε ὁ λόγος τοῦ τμήματος πρός τό ἕνα μέρος (κατ'ἀνάγκη τό μεγαλύτερο ἀπό τά θεωρούμενα δυό) νά εἶναι ἴσος μέ τό λόγο τοῦ μέρους αὐτοῦ πρός τό ἄλλο. Ὑπολογίστε τόν ἀντίστοιχο μερικό λόγο (ΑΒΜ) ὅπου Μ σημεῖο διαιρέσεως τοῦ ΑΒ κατά χρυσή τομή.

Πῶς κατασκευάζεται μέ κανόνα καί διαβήτη ἡ χρυσή τομή;

30. Δεῖξτε ὅτι ὁ διπλός λόγος μιᾶς τετράδας ὁρισμένων σημείων Α,Β,Γ,Δ τοῦ ἄξονα $x'x$ δέν ἀλλάζει τιμή ὅταν μέσα στή μετάθεση ΑΒΓΔ ἐναλλάξουμε τό ἕνα μέ τό ἄλλο, δυό ὁποιαδήποτε ἀπό τά σημεῖα ἀρκεῖ νά ἐναλλάξουμε μεταξύ τους καί τά ὑπόλοιπα δυό:
$$(ΑΒΓΔ) = (ΒΑΔΓ) = (ΓΔΑΒ) = (ΔΓΒΑ) \ .$$

31. Δεῖξτε ὅτι
$$(ΑΒΔΓ) = 1:(ΑΒΓΔ) \ , \quad (ΑΓΒΔ) = 1-(ΑΒΓΔ) \ .$$

32. Βασιζόμενοι στίς ἀσκήσεις 9 καί 10 δεῖξτε ὅτι οἱ 24 μεταθέσεις τεσσάρων δοσμένων σημείων τοῦ ἄξονα δίνουν 24 διπλούς λόγους μέ ἕξι ἐν γένει διαφορετικές τιμές καί ὅτι ὁ ἀριθμός αὐτός τῶν διαφορετικῶν τιμῶν κατεβαίνει στό τρία, ὅταν ἡ τετράδα κατά τινα διάταξη εἶναι ἁρμονική. Ἐκφράσατε τίς ἕξι διαφορετικές τιμές συναρτήσει τῆς μιᾶς ἀπό αὐτές, ἀφοῦ παραστήσετε αὐτή τή μιά μέ τό γράμμα λ.

33. Γιά νά εἶναι ἡ τετράδα Α,Β,Γ,Δ ἁρμονική, δηλαδή (ΑΒΓΔ)=−1, πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἔχουμε πρῶτον

$$\frac{2}{(\overline{AB})} = \frac{1}{(\overline{A\Gamma})} + \frac{1}{(\overline{A\Delta})}$$

δηλαδή μέ λόγια: ὁ ἀριθμός $(\overline{AB})$ νά εἶναι ἁρμονικό μέσο τῶν ἀριθμῶν $(\overline{A\Gamma})$ καί $(\overline{A\Delta})$, ἤ δεύτερον $(\overline{KA})^2 = (\overline{K\Gamma})(\overline{K\Delta})$, ὅπου Κ ἡ μέση τοῦ τμήματος ΑΒ, δηλαδή μέ λόγια: ὁ ἀριθμός $(\overline{KA})$ νά εἶναι γεωμετρικό μέσο τῶν ἀριθμῶν $(\overline{K\Gamma})$ καί $(\overline{K\Delta})$, ἐπομένως τό τμῆμα ΚΑ μέση ἀνάλογος τῶν ΚΓ καί ΚΔ, ἤ τρίτον $(\overline{K\Lambda})^2 = (\overline{KA})^2 + (\overline{\Lambda\Gamma})^2$, ὅπου Κ καί Λ οἱ μέσες τῶν τμημάτων ΑΒ καί ΓΔ.

Τά παραπάνω ἐξυπακούουν ὅτι κανένα ἀπό τά τέσσερα σημεῖα δέν εἶναι τό ἐπ'ἄπειρο σημεῖο τοῦ ἄξονα· πῶς πρέπει νά τροποποιηθοῦν στήν περίπτωσην αὐτήν;

34. Ποιός εἶναι ὁ τύπος ἀλλαγῆς τῶν συντεταγμένων, ὅταν ἀλλάξουμε ὄχι μόνο τήν ἀρχή πάνω στόν ἄξονα Χ΄Χ **ἀλλά καί τό** "βασικό" διάνυσμα; Δηλ. ὅταν $\overline{O'E'} = \alpha \cdot \overline{OE}$, ὅπου α πραγματικός ἀριθμός $\neq 0$;

35.* Λέμε ὅτι ἀπεικονίσαμε μιάν εὐθεία Χ΄Χ πάνω στόν ἑαυτό της ὅταν σέ κάθε σημεῖο της Ρ ἀντιστοιχίσαμε κατά κάποιο νόμο ἕνα σημεῖο της P_1 ἔτσι πού 1ον δυό διαφορετικά σημεῖα Ρ καί Ρ΄ νά ἔχουν διαφορετικές "εἰκόνες" P_1 καί P_1', δηλαδή διαφορετικά ἀντίστοιχα σημεῖα, καί 2ον κάθε σημεῖο τῆς εὐθείας νά εἶναι εἰκόνα (ἀντίστοιχο) κάποιου σημείου τῆς εὐθείας. Παραδείγματα ἀπεικονίσεων μᾶς δίνουν οἱ μετακινήσεις μιᾶς εὐθείας πάνω στόν ἑαυτό της. Ἀναλυτική παράσταση μιᾶς ἀπεικονίσεως λέγεται ἡ ἀριθμητική σχέση μεταξύ τῆς τετμημένης $\mathbf{x}$ τοῦ Ρ καί τῆς τετμημένης $\mathbf{x}_1$ τῆς εἰκόνας του P_1 σέ ἕνα σύστημα συντεταγμένων πάνω στήν εὐθεία. Δεῖξτε ὅτι ἡ γενική ἀναλυτική παράσταση τῶν ἀπεικονίσεων πού παρέχονται ἀπό τίς διάφορες μετακινήσεις τῆς Χ΄Χ πάνω στόν ἑαυτό της εἶναι ἡ ἀκόλουθη (οἱ τετμημένες τῶν ἀντίστοιχων σημείων νοοῦνται στό ἴδιο σύστημα τετμημένων)

$$(\mathbf{x}_1 = \pm\,\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)$$

ὅπου $\mathbf{x}_0$ ἕνας αὐθαίρετα ὁρισμένος πραγματικός ἀριθμός. Πότε ἰσχύει τό +, πότε τό − ;

36.* Ὁμογραφική ἀπεικόνιση (ἤ συντόμως, ὁμογραφία) λέγεται ἡ ἀπεικόνιση πού ἔχει ἀναλυτική παράσταση τήν

$$\mathbf{x}_1 = \frac{\alpha\mathbf{x}+\beta}{\gamma\mathbf{x}+\delta}$$

ὅπου α,β,γ,δ τέσσερεις αὐθαίρετα ὁρισμένοι πραγματικοί ἀριθμοί πού ἱκανοποιοῦν τή σχέση $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Δεῖξτε ὅτι ἡ ὁμογραφία περιέχει σάν μερικές περιπτώσεις τίς ἀπεικονίσεις πού παρέχουν οἱ μετακινήσεις τῆς εὐθείας πάνω στόν ἑαυτό της. Ἐπίσης ὅτι περιλαμβάνει τίς ἀπεικονίσεις κατά τίς ὁποῖες ὁ λόγος ἑνός τυχαίου (= ὁποιουδήποτε) τμήματος ΠΡ τῆς εὐθείας πρός τήν εἰκόνα του Π, P_1 εἶναι σταθερός (δηλ. ἀνεξάρτητος ἀπό τό θεωρούμενον τμῆμα)· οἱ ἀπεικονίσεις αὐτές λέγονται ὁμοιότητες. Ἐπίσης περιλαβαίνει τήν "ἀντιστροφή ὡς πρός ἕνα σημεῖο Κ τῆς εὐθείας", δηλαδή τήν ἀπεικόνιση γιά τήν ὁποία ἰσχύει ἡ σχέση $(\overline{KP})(\overline{KP_1})$ = σταθερός ἀριθμός γιά ὅλα τά ζεύγη ἀντιστοίχων σημείων P καί P_1. Τέλος δεῖξτε ὅτι ἡ ὁμογραφία ἀφήνει ἀναλοίωτο τό διπλό λόγο:

$$(ΑΒΓΔ) = (A_1B_1\Gamma_1\Delta_1)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

Ὁρισμοί

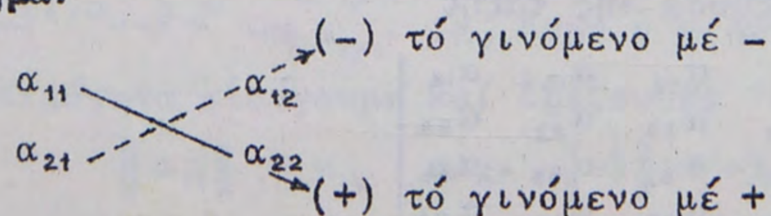
§ 33. Ὁρίζουσα $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$ τοῦ τετραγωνικοῦ πίνακα ἀριθμῶν (ἤ γραμμάτων πού παριστάνουν ἀριθμούς) $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ λέγεται ἡ παράσταση $\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}$. Ἑπομένως ἔχουμε τόν τύπο

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{s} \alpha_{1\sigma_1}\alpha_{2\sigma_2}$$

ὅπου $\sigma_1\sigma_2$ τυχούσα μετάθεση τῶν δεικτῶν 1,2 καί s τό πλῆθος τῶν παραβάσεών της, π.χ.

$$\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5(-1) - (-4)\ 2 = 3$$

Ἕνας πρακτικός κανόνας γιά τή μόρφωση τῆς ὁρίζουσας $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$, πού λέγεται ὁρίζουσα 2ης τάξης ὑποδηλώνεται στό ἀκόλουθο σχῆμα:



§ 34. Ὁρίζουσα $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$ τοῦ τετραγωνικοῦ πίνακα 3ης τάξης

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

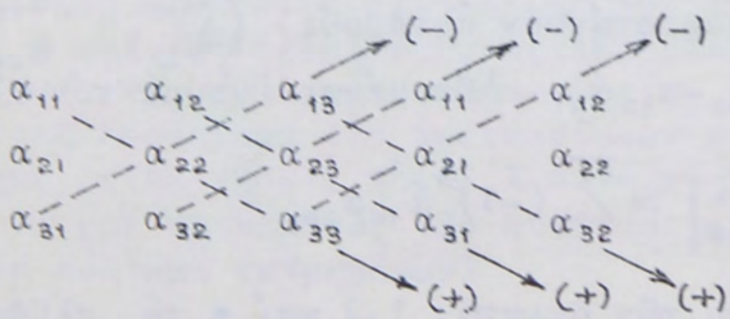
λέγεται ἡ παράσταση

$$\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}+\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}+\alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32}-\alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32}-\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33}$$
$$-\alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31}$$

Ἐπομένως ἔχουμε τόν τύπο

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{s} \alpha_{1\sigma_1}\alpha_{2\sigma_2}\alpha_{3\sigma_3}$$

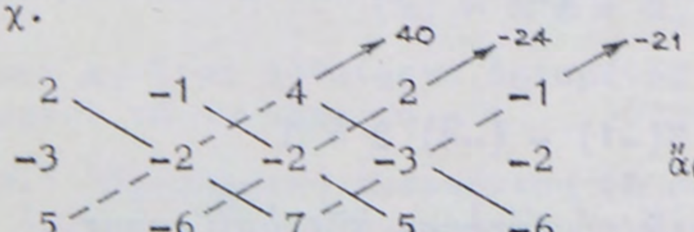
ὅπου $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ τυχοῦσα μετάθεση τῶν δεικτῶν 1,2,3 καί s τό πλῆθος τῶν παραβάσεών της. Ὁ πρακτικός κανόνας τοῦ Sarrus γιά τή μόρφωση τῆς παραπάνω ὁρίζουσας 3ης τάξης ὑποδηλώνεται στό ἀκόλουθο σχῆμα:



Τά 3 γινόμενα μέ −

Τά 3 γινόμενα μέ +

Π.χ.



ἄρα $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -2 & -2 \\ 5 & -6 & 7 \end{vmatrix} = 122-73=49$

§ 35. Ὁρίζουσα 4ης τάξης

$$(35.1) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix}$$

καλεῖται ἡ (ἀκέραια ἀλγεβρική) παράσταση

$$\sum(-1)^{s}\ \alpha_{1\sigma_1}\ \alpha_{2\sigma_2}\ \alpha_{3\sigma_3}\ \alpha_{4\sigma_4}$$

μέ τούς 4! = 24 ὅρους πού προκύπτουν ὅταν βάλουμε στή θέση τῶν $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4$ κάθε μετάθεση τῶν δεικτῶν 1,2,3,4 καί στή θέση τοῦ s τό πλῆθος τῶν παραβάσεών της. Ἰδού μερικοί ὅροι τῆς ὁρίζουσας:

$$\alpha_{11}\ \alpha_{22}\alpha_{33}\alpha_{44}-\alpha_{11}\ \alpha_{22}\alpha_{34}\alpha_{43}-\alpha_{11}\ \alpha_{23}\alpha_{32}\alpha_{44}+\alpha_{11}\ \alpha_{23}\alpha_{34}\alpha_{42}+\ldots$$

Πρακτικός κανόνας γιά τή μόρφωσή της, ὅμοιος μέ κείνους πού ὑποδηλώθηκαν στά παραπάνω δυό σχήματα δ έ ν ὑπάρχει. Ὁ ὑπολογισμός της, ὅταν τά στοιχεῖα τοῦ πίνακα εἶναι ἀριθμητικῶς δοσμένα, γίνεται μέ μεθόδους πού προκύπτουν ἀπό τήν παρακάτω θεωρία.

§ 36. Εἶναι τώρα φανερός ὁ δρόμος τῆς γενικεύσεως. Ἔχουμε γιά τήν ὁρίζουσα νιοστῆς τάξης (ν φυσικός ≧ 2) τόν ὁρισμό:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{2\nu} \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} = \sum(-1)^{s}\alpha_{1\sigma_1}\alpha_{2\sigma_2}\ \cdots\ \alpha_{\nu\sigma_\nu}$$

ὅπου $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\ldots\sigma_\nu$ τυχούσα μετάθεση τῶν δεικτῶν 1,2,...,ν καί s τό πλῆθος τῶν παραβάσεών της. Π.χ. ὁ ὅρος $\alpha_{11}\alpha_{22}\ldots\alpha_{\nu\nu}$ ἀπό τήν "πρωτεύουσα διαγώνιο" τοῦ πίνακα ἀντιστοιχεῖ στή μετάθεση 12...ν τῶν δεικτῶν στηλῶν 1,2,...,ν καί προσημαίνεται πάντοτε μέ +, ἐπειδή ἡ μετάθεση περιέχει μηδέν παραβάσεις· ὁ ὅρος πού προέρχεται ἀπό τήν ἄλλη διαγώνιο τοῦ πίνακα ἀντιστοιχεῖ στή μετάθεση ν(ν−1)...3 2 1 τῶν δεικτῶν στηλῶν 1,2,...,ν ἡ ὁποία περιέχει $\frac{(\nu-1)\nu}{2}$ παραβάσεις καί ἑπομένως ὁ ὅρος αὐτός ἰσοῦται μέ

$$(-1)^{\frac{(\nu-1)\nu}{2}}\alpha_{1\nu}\alpha_{2\nu-1}\cdots\alpha_{\nu-1,2}\alpha_{\nu 1}=\begin{matrix}\alpha_{1\nu}\alpha_{2\nu-1}\cdots\alpha_{\nu 1}\ \text{ὅταν } \nu = 4\mu \text{ ἤ } 4\mu+1\\ -\alpha_{1\nu}\alpha_{2\nu-1}\cdots\alpha_{\nu 1}\ \text{ὅταν } \nu = 4\mu+2 \text{ ἤ } 4\mu+3\end{matrix}$$

Ἀπό σκοπιμότητα εἰσάγουμε καί ὁρίζουσες 1ης τάξης:

$$\|\alpha_{11}\| = \alpha_{11} \quad \text{π.χ.} \quad \|-5\| = -5$$

Μεταβάλαμε ἐδῶ κατά τι τό συμβολισμό τῆς ὀρίζουσας γιά νά μή γίνεται σύγχυση μέ τήν ἀπόλυτη τιμή.

'Ιδιότητες

§ 37. i) 'Η ὀρίζουσα νιοστῆς τάξεως εἶναι ἄθροισμα $\nu!$ ὅρων.

Κάθε ὅρος εἶναι γινόμενο ν στοιχείων τοῦ πίνακα τῆς ὀρίζουσας, ἑνός στοιχείου ἀπό κάθε γραμμή καί ἑνός ἀπό κάθε στήλη, προσημασμένο μέ ἕνα κατάλληλο πρόσημο πού καθορίζεται ὡς ἑξῆς:

Γράφουμε τούς ν παράγοντας τοῦ γινομένου μέ μιάν ὁποιαδήποτε σειρά καί προσέχουμε στή μετάθεση $\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_\nu$ τῶν δεικτῶν $1,2,\ldots,\nu$ τῶν γραμμῶν ἀπό τίς ὁποῖες εἶναι παρμένοι κατά τήν ὑπ'ὄψη σειρά οἱ παράγοντες, καθώς καί στή μετάθεση $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_\nu$ τῶν δεικτῶν τῶν στηλῶν στίς ὁποῖες ἀνήκουν οἱ ἴδιοι παράγοντες. Τό πρόσημο τοῦ γινομένου δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$(-1)^{\text{πλῆθος παραβάσεων τῆς } \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_\nu + \text{πλῆθος παραβάσεων τῆς } \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_\nu}$$

Μέ ἄλλα λόγια, μπροστά στό γινόμενο $\alpha_{\gamma_1\sigma_1}\alpha_{\gamma_2\sigma_2}\ldots\alpha_{\gamma_\nu\sigma_\nu}$ γράφουμε τό +, ὅταν οἱ μεταθέσεις $\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_\nu$ καί $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_\nu$ εἶναι ὁμοειδεῖς (δηλαδή καί οἱ δύο ἄρτιες ἤ καί οἱ δύο περιττές), τό πρόσημο −, ὅταν οἱ δυό μεταθέσεις εἶναι ἑτεροειδεῖς.

Π.χ. στήν ὀρίζουσα 4ης τάξεως (35.1) ἔχουμε τό γινόμενο $\alpha_{23}\alpha_{44}\alpha_{11}\alpha_{32}$ μέ πρόσημο τοῦ

$$(-1)^{\text{πλῆθος παραβάσεων τῆς } 2413 + \text{πλῆθος παραβάσεων τῆς } 3412} = (-1)^{3+4} = -1$$

§ 38. (ii) 'Εάν μιά γραμμή (ἤ μιά στήλη) τῆς ὀρίζουσας ἀποτελῆται ἀπό μηδενικά ἡ τιμή τῆς ὀρίζουσας εἶναι τό μηδέν.

Γενικότερα, ἕναν κοινόν παράγοντα τῶν στοιχείων μιᾶς γραμμῆς (ἤ μιᾶς στήλης) τῆς ὀρίζουσας μποροῦμε νά τόν βγάλουμε ὡς πολλαπλασιαστή ἔξω ἀπό τό σύμβολο τῆς ὀρίζουσας· ἀντιστρόφως ἕναν πολλαπλασιαστή μιᾶς ὀρίζουσας μποροῦμε νά τόν εἰσαγάγουμε μέσα στό σύμβολο τῆς ὁρίζουσας ὡς κοινό παράγοντα τῶν στοιχείων μιᾶς γραμμῆς (ἤ μιᾶς στήλης). Π.χ.

$$\begin{vmatrix} 2\cdot4 & 2\cdot3 & 2\cdot(-5) \\ 2 & -1 & 6 \\ -\frac{1}{2} & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & 6 \\ -\frac{1}{2} & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-186,5) = -373$$

39.(iii) Ἡ τιμή μιᾶς ὁρίζουσας δέν μεταβάλλεται ἄν οἱ γραμμές της γραφοῦν ὡς στῆλες, μέ τήν ἴδια σειρά, καί οἱ στῆλες ὡς γραμμές. Π.χ.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & 6 \\ -1 & 10 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 10 \\ -5 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -373 \ .$$

§ 40. (iv) Ἐάν ἐναλλάξουμε μεταξύ τους δυό γραμμές (ἤ δυό στῆλες) μιᾶς ὁρίζουσας, ἡ τιμή της ἀλλάζει πρόσημο μόνο.

Π.χ. $\begin{vmatrix} 8 & -6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} = 20$ (Ἐναλλαγή 2 γραμμῶν).

§ 41 (v) Ἐάν τά στοιχεῖα μιᾶς γραμμῆς εἶναι ἴσα ἤ γενικότερα ἀνάλογα πρός τά ἀντίστοιχα στοιχεῖα μιᾶς ἄλλης γραμμῆς ἡ ὁρίζουσα ἔχει τήν τιμήν μηδέν. Τό ἴδιο ἰσχύει καί γιά τίς στῆλες.

Π.χ. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 4 & -8 & 5 \\ \frac{1}{2} & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 7 \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} 4 & (-2)4 & 5 \\ \frac{1}{2} & (-2)^1\!/\!_2 & -1 \\ -1 & (-2)(-1) & 7 \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 4 & 5 \\ ^1\!/\!_2 & ^1\!/\!_2 & -1 \\ -1 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

§ 42. (vi) Ἐάν τά στοιχεῖα μιᾶς γραμμῆς (ἤ στήλης) μιᾶς ὁρίζουσας εἶναι διώνυμα, ἡ ὁρίζουσα ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν δύο ὁριζουσῶν πού προκύπτουν ὅταν ἀπό τά διώνυμα κρατήσουμε τή μιά φορά τόν πρῶτο, τήν ἄλλη φορά τό δεύτερο προσθετέο.

Π.χ. $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x_1 & -y_1 & -z_1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$

§ 43 (vii) Ἐάν στά στοιχεῖα μιᾶς γραμμῆς προσθέσουμε τά ἀντίστοιχα στοιχεῖα μιᾶς ἄλλης πολλαπλασιασμένα ἐπί μιά καί τήν ἴδια ποσότητα, ἡ τιμή τῆς ὁρίζουσας δέν μεταβάλλεται: τά ἴδια πράγματα ἰσχύουν καί γιά στῆλες.

Π.χ. $\begin{vmatrix} \alpha_{11}+\omega\alpha_{31} & \alpha_{12}+\omega\alpha_{32} & \alpha_{13}+\omega\alpha_{33} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \omega\alpha_{31} & \omega\alpha_{32} & \omega\alpha_{33} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + 0 \ .$$

Ἡ παραπάνω ἰδιότητα μπορεῖ νά χρησιμοποιηθῆ γιά νά πετύχουμε μέσα σέ μιά στήλη ἤ μιά γραμμή τό μηδενισμό ὅλων τῶν στοιχείων ἐκτός ἀπό ἕνα πού εἶναι $\neq 0$, χωρίς νά μεταβληθῆ ἡ τιμή τῆς ὁρίζουσας. Αὐτό φυσικά ἀπλουστεύει τόν ὑπολογισμό τῆς τιμῆς τῆς ὁρίζουσας. Π.χ.

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 2,5 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 2,5+5\left(-\frac{1}{2}\right) & -3+4\left(-\frac{1}{2}\right) & 2+(-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & 2,5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & 2,5 \\ -3+5\cdot\frac{3}{5} & 1+4\cdot\frac{3}{5} & 4+(-1)\cdot\frac{3}{5} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & 2,5 \\ 0 & \frac{17}{5} & \frac{17}{5} \end{vmatrix} = -5\cdot 5\cdot\frac{17}{5} - 5\cdot 2,5\cdot\frac{17}{5} = -85 - \frac{85}{2} = -127,5 \ .$$

§ 44. Ὁρισμοί. Καλοῦμε ἐλάσσονα ἀντίστοιχη στό στοιχεῖο $\alpha_{\kappa\lambda}$ (καί συντομώτερα: ἐλάσσονα τοῦ στοιχείου $\alpha_{\kappa\lambda}$) μιᾶς ὁρίζουσας

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11}\cdots\alpha_{1\lambda}\cdots\alpha_{1\nu} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{\kappa 1}\cdots\alpha_{\kappa\lambda}\cdots\alpha_{\kappa\nu} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{\nu 1}\cdots\alpha_{\nu\lambda}\cdots\alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} \qquad \nu \geqq 2$$

τήν ὁρίζουσα πού εἶναι τάξεως μικρότερης (= ἐλάσσονας) κατά 1 καί ἔχει πίνακα ἐκεῖνον πού προκύπτει ἀπό τόν πίνακα τῆς Δ, ὅταν παραλείψουμε τήν $\kappa^{\text{στή}}$ γραμμή καί τή $\lambda^{\text{στή}}$ στήλη στίς ὁποῖες ἀνήκει τό στοιχεῖο $\alpha_{\kappa\lambda}$. Π.χ. ἡ ἐλάσσονα τοῦ στοιχείου α_{11} τῆς Δ εἶναι ἡ ὁρίζουσα τάξεως ν−1

$$\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23}\cdots & \alpha_{2\nu} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33}\cdots & \alpha_{3\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{\nu 2} & \alpha_{\nu 3}\cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

Καλοῦμε προσημασμένη ἐλάσσονα τοῦ στοιχείου $\alpha_{\kappa\lambda}$ (ἄλλοι λένε: ἀλγεβρικό συμπλήρωμα τοῦ $\alpha_{\kappa\lambda}$) τήν ἐλάσσονα τοῦ $\alpha_{\kappa\lambda}$ πολλαπλασιασμένην ἐπί $(-1)^{\kappa+\lambda}$, παρμένην δηλαδή μέ +, ἄν $k+\lambda$ = ἄρτιος ἀριθμός, μέ −, ἄν $k+\lambda$ = περιττός ἀριθμός. Γιά συντομία θά παραστήσουμε τήν προσημασμένη ἐλάσσονα τοῦ $\alpha_{\kappa\lambda}$ μέ $A_{\kappa\lambda}$. Π.χ. ὁ πίνακας τῶν προσημασμένων ἐλασσόνων τῆς ὁρίζουσας

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -5 & -2 \end{vmatrix} \qquad \text{εἶναι:}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 8 & -11 \\ -11 & -11 & 22 \\ -13 & -18 & 11 \end{pmatrix}$$

Προχωροῦμε τώρα στή διατύπωση μιᾶς ὄγδοης ἰδιότητας.

§ 45 (viii) Τυχοῦσα ὁρίζουσα $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{\nu 1} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}$ τάξης $\nu \geqq 2$ ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν στοιχείων μιᾶς γραμμῆς (ἤ μιᾶς στήλης) ἐπί τίς προσημασμένες ἐλάσσονες τῶν στοιχείων αὐτῶν:

(45.1) $$\Delta = \alpha_{\kappa 1}A_{\kappa 1}+\alpha_{\kappa 2}A_{\kappa 2}+\dots+\alpha_{\kappa\nu}A_{\kappa\nu} = \sum_{\lambda=1}^{\nu}\alpha_{\kappa\lambda}A_{\kappa\lambda}$$

ὅπου k ἕνας ὁποιοσδήποτε ἀλλ' ὁρισμένος ἀπό τούς δεῖχτες 1, 2,...,ν. Ὅμοια

(45.2) $$\Delta = \alpha_{1\lambda}A_{1\lambda}+\alpha_{2\lambda}A_{2\lambda}+\dots+\alpha_{\nu\lambda}A_{\nu\lambda} = \sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_{\kappa\lambda}A_{\kappa\lambda}$$

ὅπου λ ἕνας ὁποιοσδήποτε ἀλλ' ὁρισμένος ἀπό τούς δεῖχτες 1,2,..,ν

Π.χ. $$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12}\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13}\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}$$

$$= -\alpha_{21}\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{22}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{23}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}$$

$$= -\alpha_{12}\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{22}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{32}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{vmatrix} \quad \text{κτλ.}$$

Εἰδικῶς

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & 6 \\ -7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4\cdot(-1-12)+2(5+42)+3(10-7) = $$
$$= 3\cdot(10-7)-6\cdot(8-14)+1\cdot(-4+10) = 51$$

Τό ἄθροισμα $\alpha_{\kappa 1}A_{\kappa 1}+\alpha_{\kappa 2}A_{\kappa 2}+\dots+\alpha_{\kappa\nu}A_{\kappa\nu}$ λέγεται τό ἀνάπτυγμα τῆς ὁρίζουσας Δ κατά τά στοιχεῖα τῆς $k^{\text{στῆς}}$ γραμμῆς της· τό ἄθροισμα $\alpha_{1\lambda}A_{1\lambda}+\alpha_{2\lambda}A_{2\lambda}+\dots+\alpha_{\nu\lambda}A_{\nu\lambda}$ λέγεται ἀνάπτυγμα τῆς ὁρίζουσας κατά τά στοιχεῖα τῆς $\lambda^{\text{στῆς}}$ στήλης της.

Μέ βάση τήν παραπάνω ἰδιότητα μποροῦμε νά ἀναγάγουμε τόν ὑπογισμό μιᾶς ὁρίζουσας τάξεως ν(≧ 2) στόν ὑπολογισμό ὁριζουσῶν τάξεως ν−1. Π.χ.

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -5 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} -5\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+0\begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 4 & -5 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} -4\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & -1 \\ 6 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -79+5\cdot 77 - 4\cdot 22 = 218$$

Θά ἠμπορούσαμε ἐξ ἄλλου, πρίν ἀναπτύξουμε κατά τά στοιχεῖα τῆς 1ης γραμμῆς νά πετύχουμε τό μηδενισμό καί δυό ἀκόμα στοιχείων τῆς γραμμῆς αὐτῆς μέ τή μέθοδο πού ὑποδείξαμε στόν παράγραφο 43. Ἔτσι, προσθέτοντας τά στοιχεῖα τῆς 1ης στήλης πολλαπλασιασμένα ἐπί 5 στά ἀντίστοιχα τῆς 2ης στήλης καί τά ἴδια στοιχεῖα πολλαπλασιασμένα ἐπί 4 στά ἀντίστοιχα τῆς 4ης στήλης λαβαίνουμε μιάν ἴση ὀρίζουσα πού ἀναπτύσσουμε ὡς πρός τήν 1η γραμμή:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 14 & 2 & 9 \\ 4 & 15 & -1 & 18 \\ 6 & 30 & 4 & 25 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 14 & 2 & 9 \\ 15 & -1 & 18 \\ 30 & 4 & 25 \end{vmatrix}$$

$$= -14\cdot(-25-72)+2\cdot(375-540)-9\cdot(60+30) = 1358-330-810 = 218$$

§ 46 (ix) Τό ἄθροισμα τῶν γινομένων πού λαβαίνουμε πολλαπλασιάζοντας τά στοιχεῖα μιᾶς γραμμῆς μιᾶς ὀρίζουσας ἐπί τίς προσημασμένες ἐλάσσονες τῶν στοιχείων μιᾶς ἄλλης γραμμῆς εἶναι ἴσο μέ μηδέν.

Πράγματι τό ἄθροισμα αὐτό εἶναι ἀνάπτυγμα μιᾶς ὀρίζουσας πού ἔχει δυό γραμμές μέ τά ἴδια ἀντιστοίχως στοιχεῖα.

Τά ἴδια πράγματα ἰσχύουν καί γιά στῆλες. Ἡ ἰδιότητα διατυπώνεται στίς ἀκόλουθες σχέσεις, ὅπου ρ καί σ δυό διάφοροι ἀριθμοί φυσικοί $\leqq \nu$:

$$\alpha_{\rho 1}A_{\sigma 1}+\alpha_{\rho 2}A_{\sigma 2}+\ldots+\alpha_{\rho\nu}A_{\sigma\nu} = \sum_{\lambda=1}^{\nu}\alpha_{\rho\lambda}A_{\sigma\lambda} = 0$$

$$\alpha_{1\rho}A_{1\sigma}+\alpha_{2\rho}A_{2\sigma}+\ldots+\alpha_{\nu\rho}A_{\nu\sigma} = \sum_{\lambda=1}^{\nu}\alpha_{\lambda\rho}A_{\lambda\sigma} = 0$$

Π.χ. χρησιμοποιώντας τό ἀριθμητικό παράδειγμα τοῦ § 44 ἔχουμε.

$$\sum_{\lambda=1}^{3}\alpha_{1\lambda}A_{2\lambda}=5\cdot(-11)+(-3)\cdot(-11)+1\cdot 22=2\cdot(-11)+22=0$$
$$\sum_{\lambda=1}^{3}\alpha_{\lambda 3}A_{\lambda 2}=1\cdot 8+4\cdot(-11)+(-2)(-18)=8-44+36=0$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

37. Ὑπολογίστε μέ τόν κανόνα τοῦ Sarrus τίς ὀρίζουσες

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 6 & -1 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -6 & 1/2 & 3 \\ -5/3 & -2 & 4 \\ 6 & -7 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1/3 & -1/4 & 5 \\ 2 & -6 & 7 \\ -2 & 3 & 3/2 \end{vmatrix}.$$

Τίς ἴδιες ὀρίζουσες ὑπολογίστε τις ἀναπτύσσοντας κατά τά στοιχεῖα μιᾶς γραμμῆς ἤ μιᾶς στήλης

38. Ὑπολογίστε τήν ὀρίζουσα

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

ἀφοῦ, χωρίς νά μεταβάλετε τήν τιμή της, μηδενίσετε δυό ἀκόμα στοιχεῖα τῆς 2ης στήλης. Γιά ἔλεγχο κάμετε τόν ὑπολογισμό της καί ὕστερα ἀπό μηδενισμό 3 στοιχείων στήν 1η γραμμή αὐτή τή φορά.

39. Ὑπολογίστε τίς προσημασμένες ἐλάσσονες τῶν διαφόρων στοιχείων τῆς ὀρίζουσας

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 1 \\ 7 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

καί ἐπαληθεῦστε ὅλες τίς σχέσεις πού ἰσχύουν σύμφωνα μέ τίς ἰδιότητες viii καί ix τῶν §§ 45, 46.

40. Χωρίς ὑπολογισμούς βρῆτε τήν τιμή τῶν ὀριζουσῶν

$$\begin{vmatrix} 7 & -4 & 3 & 2 \\ 14 & -8 & 6 & 4 \\ -1 & 2 & -4 & -1 \\ 5 & 10 & 0 & -5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 8-7\cdot 2 & 9-3\cdot 2 & -6+5\cdot 2 \\ 7 & 3 & -5 \\ 8 & 9 & -6 \end{vmatrix}$$

41. Δεῖξτε ὅτι ὅταν ὅλα τά στοιχεῖα μιᾶς ὀρίζουσας τά κείμενα πάνω (ἤ κάτω) ἀπό τήν πρωτεύουσα διαγώνιο μηδενίζονται, ἡ τιμή τῆς ὀρίζουσας ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τῶν στοιχείων τῆς πρωτεύουσας διαγωνίου.

42. Ὑπολογίστε τίς ὀρίζουσες

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}$$

Τήν τιμή τῆς δεύτερης ἀναλύστε την σέ γινόμενο παραγόντων πρωτοβαθμίων ὡς πρός τά x_1, x_2, x_3.

43.* Σάν γενίκευση τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως δεῖξτε ὅτι

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{\nu-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{\nu-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{\nu-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_\nu & x_\nu^2 & \dots & x_\nu^{\nu-1} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)\dots(x_\nu-x_1) \\ \quad .(x_3-x_2)(x_4-x_2)\dots(x_\nu-x_2) \\ \quad\quad .(x_4-x_3)\dots(x_\nu-x_3) \\ \quad\quad\quad \dots\dots\dots \\ \quad\quad\quad\quad .(x_\nu-x_{\nu-1}) \end{array}$$

Τί ἕπεται ἀπ'ἐδῶ γιά τό μηδενισμό τῆς ὁρίζουσας αὐτῆς πού λέγεται τοῦ **Vandermonde**;

Ὑπόδ. Γιά τήν ἀπόδειξη νά χρησιμοποιήσετε τή μέθοδο τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς. Ἀφαιρώντας διαδοχικά ἀπό τή νιοστή στήλη, ἀπό τή $(\nu-1)^{\sigma\tau\acute{\eta}}$,..., ἀπό τή 3η καί ἀπό τή δεύτερη τήν προηγούμενη ἑκάστοτε στήλη πολλαπλασιασμένην ἐπί x_1 λαβαίνετε μιάν ἴση ὁρίζοῦσα πού εὔκολα ἀνάγεται σέ μιάν ὁρίζουσα Vandermonde τάξεως ν-1.

44.* Ἀποδεῖξτε ὅτι

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & x & x & \dots & x \\ x & \beta_2 & x & \dots & x \\ x & x & \beta_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & \beta_\nu \end{vmatrix} = x(\beta_1-x)\dots(\beta_\nu-x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\beta_1-x}+\dots+\frac{1}{\beta_\nu-x}\right)$$

Ὑπόδ. Μπορεῖτε νά χρησιμοποιήσετε καί ἐδῶ τή μέθοδο τῆς ἐπαγωγῆς.

Γιά τό σκοπό αὐτόν ἐξετάστε πῶς ἡ παράσταση στό δεξιό μέλος γιά $\nu = \rho+1$ προκύπτει ἀπό τήν ἴδια παράσταση γιά $\nu = \rho$.

45.* Δεῖξτε ὅτι

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11}\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{12} & \alpha_{11}\beta_{21}+\alpha_{12}\beta_{22} \\ \alpha_{21}\beta_{11}+\alpha_{22}\beta_{12} & \alpha_{21}\beta_{21}+\alpha_{22}\beta_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11}\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{12}+\alpha_{13}\beta_{13} & \sum\alpha_{1\lambda}\beta_{2\lambda} & \sum\alpha_{1\lambda}\beta_{3\lambda} \\ \alpha_{21}\beta_{11}+\alpha_{22}\beta_{12}+\alpha_{23}\beta_{13} & \sum\alpha_{2\lambda}\beta_{2\lambda} & \sum\alpha_{2\lambda}\beta_{3\lambda} \\ \alpha_{31}\beta_{11}+\alpha_{32}\beta_{12}+\alpha_{33}\beta_{13} & \sum\alpha_{3\lambda}\beta_{2\lambda} & \sum\alpha_{3\lambda}\beta_{3\lambda} \end{vmatrix}$$

καί γενικά

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\nu1} & \alpha_{\nu2} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1\nu} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{\nu1} & \beta_{\nu2} & \dots & \beta_{\nu\nu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum\alpha_{1\lambda}\beta_{1\lambda} & \sum\alpha_{1\lambda}\beta_{2\lambda} & \dots & \sum\alpha_{1\lambda}\beta_{\nu\lambda} \\ \sum\alpha_{2\lambda}\beta_{1\lambda} & \sum\alpha_{2\lambda}\beta_{2\lambda} & \dots & \sum\alpha_{2\lambda}\beta_{\nu\lambda} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\alpha_{\nu\lambda}\beta_{1\lambda} & \sum\alpha_{\nu\lambda}\beta_{2\lambda} & \dots & \sum\alpha_{\nu\lambda}\beta_{\nu\lambda} \end{vmatrix}$$

Ὑπόδ. Μιά μέθοδος ἀποδείξεως ἀναλύει τήν ὁρίζουσα τοῦ 2ου μέλους σέ ἄθροισμα ν^ν ὁριζουσῶν ἀπό τίς ὁποῖες οἱ $\nu^\nu-\nu!$ εἶναι πάντοτε μηδενικές, οἱ δέ ὑπόλοιπες ν! παρουσιάζονται ὡς γινόμενα τῆς 1ης ὀρίζουσας τοῦ ἀριστεροῦ μέλους ἐπί ἕναν ἕναν ὅρο τῆς δεύτερης ὀρίζουσας.

46. Μιά ὀρίζουσα $\begin{vmatrix} \alpha_{11} \cdots \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{\nu 1} \cdots \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}$ λέγεται ἀντισυμμετρική (ἄλλοι λένε ἡμισυμμετρική), ὅταν εἶναι πάντοτε $\alpha_{\kappa\lambda} = -\alpha_{\lambda\kappa}$ (καί ἐπομένως ειδικά $\alpha_{\kappa\kappa} = 0$).

Δεῖξτε ὅτι κάθε ἀντισυμμετρική ὀρίζουσα περιττῆς τάξης εἶναι $= 0$.

Μελετῆστε τίς ἀντισυμμετρικές ὀρίζουσες τάξης 2 καί 4.

47.* Ἔστω $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} \cdots \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{\nu 1} \cdots \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}$ μιά ὀρίζουσα $\neq 0$. Θέτουμε $\beta_{\kappa\lambda} = \frac{A_{\lambda\kappa}}{\Delta}$ ὅπου $A_{\kappa\lambda}$ ἡ προσημασμένη ἐλασσονα τοῦ στοιχείου $\alpha_{\kappa\lambda}$

Ἡ ὀρίζουσα $\Delta' = \begin{vmatrix} \beta_{11} \cdots \beta_{1\nu} \\ \beta_{\nu 1} \cdots \beta_{\nu\nu} \end{vmatrix}$ λέγεται ἀντίστροφη τῆς Δ.

Δεῖξτε ὅτι $\Delta \cdot \Delta' = 1$.

48. Μιά ὀρίζουσα $\begin{vmatrix} \alpha_{11} \cdots \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{\nu 1} \cdots \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}$ λέγεται συμμετρική ὅταν εἶναι πάντοτε $\alpha_{\kappa\lambda} = \alpha_{\lambda\kappa}$ (δηλαδή ὅταν δυό ὁποιαδήποτε στοιχεῖα μέ θέσεις συμμετρικές ὡς πρός τήν πρωτεύουσα διαγώνιο εἶναι ἴσα).

Δεῖξτε ὅτι σέ μιάν τέτοια ὀρίζουσα ἰσχύει γιά τίς προσημασμένες ἐλάσσονες ἡ σχέση $A_{\kappa\lambda} = A_{\lambda\kappa}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

§ 47. Καλεῖται γραμμική ἐξίσωση μέ ν ἀγνώστους $x_1,\ldots,x_\nu$ μιά ἐξίσωση τῆς μορφῆς $A_1x_1+\ldots+A_\nu x_\nu = B$, ὅπου $A_1,\ldots,A_\nu$, B δοσμένοι ἀριθμοί. Μιά τέτοια ἐξίσωση εἶναι πρωτοβάθμια λοιπόν (ἐκτός ἐάν ὅλοι οἱ συντελεστές $A_1,\ldots,A_\nu$, τῶν ἀγνώστων εἶναι μηδέν:

$$|A_1|+\ldots+|A_\nu| = 0 ,$$

ὁπότε ἡ ἐξίσωση λέγεται βαθμοῦ μηδέν στήν περίπτωση ὅπου εἶναι $B \neq 0$ καί δέν ἔχει ὁρισμένο βαθμό στήν περίπτωση $B = 0$). Σύστημα μ γραμμικῶν ἐξισώσεων καλεῖται κάθε ὁμάδα μ γραμμικῶν ἐξισώσεων μέ τούς ἴδιους ἀγνώστους τίς ὁποῖες θεωροῦμε συγχρόνως ἐπαληθευτέες:

$$
(47.1) \qquad
\begin{array}{l}
\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2+\ldots+ \alpha_{1\nu}x_\nu = \beta_1 \\
\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2+\ldots+ \alpha_{2\nu}x_\nu = \beta_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_{\mu 1}x_1 + \alpha_{\mu 2}x_2+\ldots+ \alpha_{\mu\nu}x_\nu = \beta_\mu
\end{array}
$$

Τό μ ἔπρεπε ἐδῶ νά εἶναι $\geqq 2$. Δεχόμαστε ὅμως καί τήν τιμή $\mu = 1$ παραβιάζοντας ὀλίγο τήν ἐτυμολογική σημασία τῶν λέξεων "σύστημα" καί "ὁμάς".

Λύση $(x_1',\ldots,x_\nu')$ ἑνός συστήματος (47.1) καλοῦμε μιά νιάδα τιμῶν τῶν ἀγνώστων:

$$x_1 = x_1',\ldots, x_\nu = x_\nu' ,$$

ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ (ἤ ἐπαληθεύει) ὅλες τίς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος. Δυό λύσεις $(x'_1,\ldots,x'_\nu)$ καί $(x''_1,\ldots,x''_\nu)$ λέγονται διαφορετικές ἄν μέσα σ'αὐτές ἕνας τουλάχιστο ἄγνωστος παίρνει δυό διαφορετικές τιμές:

$$|x'_1-x''_1|+\ldots+|x'_\nu-x''_\nu| \neq 0 \, .$$

Παρακάτω γιά συντομία θά λέμε "γραμμικό σύστημα" ἀντί σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων".

ΣΥΣΤΗΜΑ CRAMMER

§ 48. Τό γραμμικό σύστημα (47.1) θά τό καλοῦμε σύστημα Cramer, ὅταν 1o ὁ ἀριθμός τῶν ἀγνώστων εἶναι ἴσος μέ τόν ἀριθμό τῶν ἐξισώσεων: $\nu = \mu$, καί 2o ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων εἶναι $\neq 0$:

$$\text{(48.1)} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1\nu} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \alpha_{\nu1} & \ldots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} \neq 0$$

Στήν περίπτωση αὐτή τό σύστημα ἔχει μιά καί μόνο λύση:

$$x_1 = \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_{12}\alpha_{13}\ldots & \alpha_{1\nu} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \beta_\nu & \alpha_{\nu2}\alpha_{\nu3}\ldots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12}\alpha_{13}\ldots & \alpha_{1\nu} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \alpha_{\nu1} & \alpha_{\nu2}\alpha_{\nu3}\ldots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

$$\text{(48.2)} \qquad x_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_1\alpha_{13}\ldots & \alpha_{1\nu} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \alpha_{\nu1} & \beta_\nu\alpha_{\nu3}\ldots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12}\alpha_{13}\ldots & \alpha_{1\nu} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \alpha_{\nu1} & \alpha_{\nu2}x_{\nu3}\ldots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_\nu = \begin{vmatrix} \alpha_{11}\ldots & \alpha_{1,\nu-1} & \beta_1 \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \alpha_{\nu1}\ldots & \alpha_{\nu,\nu-1} & \beta_\nu \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}\ldots & \alpha_{1\nu-1}\alpha_{1\nu} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \alpha_{\nu1}\alpha_{\nu2}\ldots & \alpha_{\nu\nu-1}\alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

Αὐτό προκύπτει ὡς ἑξῆς: Πολλαπλασιάζουμε τίς ἐξισώσεις:

$$\text{(48.3)} \qquad \begin{aligned} \alpha_{11}x_1+\ldots+\alpha_{1\nu}x_\nu &= \beta_1 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \;\;\cdot\;\cdot \\ \alpha_{\nu1}x_1+\ldots+\alpha_{\nu\nu}x_\nu &= \beta_\nu \end{aligned}$$

τοῦ συστήματος ἐπί $A_{11},\ldots,A_{\nu1}$ ἀντιστοίχως (ὅπου, κατά τόν § 44, $A_{\kappa\lambda}$ σημαίνει τήν προσημασμένη ἐλάσσονα τοῦ στοιχείου $\alpha_{\kappa\lambda}$

τῆς Δ) καί προσθέτουμε κατά μέλη. Θά λάβουμε, ἀφοῦ τακτοποιήσουμε ὡς πρός $x_1, \ldots, x_\nu$ τό ἀποτέλεσμα, τή σχέση

$$x_1 \sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_{\kappa 1} A_{\kappa 1} + x_2 \sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_{\kappa 2} A_{\kappa 1} + \ldots + x_\nu \sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_{\kappa\nu} A_{\kappa 1} = \beta_1 A_{11} + \beta_2 A_{21} + \ldots + \beta_\nu A_{\nu 1}$$

Ἀλλά σύμφωνα μέ τίς σχέσεις (45.2) καί (46.1) ἔχουμε

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_{\kappa 1} A_{\kappa 1} = \Delta \quad , \quad \sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_{\kappa 2} A_{\kappa 1} = 0 \quad , \quad \sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_{\kappa\nu} A_{\kappa 1} = 0$$

καί σύμφωνα μέ τήν πρόταση γιά τό ἀνάπτυγμα μιᾶς ὁρίζουσας κατά τά στοιχεῖα τῆς 1ης στήλης της εἶναι

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \ldots \alpha_{1\nu} \\ \beta_2 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \ldots \alpha_{2\nu} \\ \beta_\nu & \alpha_{\nu 2} & \alpha_{\nu 3} \ldots \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} = \beta_1 A_{11} + \beta_2 A_{21} + \ldots + \beta_\nu A_{\nu 1} \,.$$

Ἐπομένως $x_1 \cdot \Delta$ ἰσοῦται μέ τήν τελευταία αὐτή ὁρίζουσα. Ἄρα, ἄν τό σύστημα (48.3) ἔχει λύση, ἡ τιμή τοῦ ἀγνώστου x_1 μέσα σ' αὐτήν δέν μπορεῖ νά εἶναι ἄλλη ἀπό ἐκείνην πού δίνει ὁ πρῶτος τύπος (48.2). Ὅμοια πράγματα ἀποδείχνονται μέ ἀντίστοιχο τρόπο γιά τούς ἀγνώστους $x_1, \ldots, x_\nu$. Ἐπομένως ἡ μόνη δ υ ν α τ ή λύση τοῦ συστήματος (48.3) εἶναι ἡ νιάδα τιμῶν (48.2).

Εἰσάγουμε τώρα τή νιάδα αὐτήν μέσα στήν πρώτη ἐξίσωση (48.3) γιά νά ἰδοῦμε ἄν πράγματι τήν ἐπαληθεύει. Θά λάβουμε ἀφοῦ διώξουμε τόν παρανομαστή Δ καί γράφουμε τήν ἐξίσωση μέ δεξιό μέλος μηδενικό:

$$\alpha_{11} \begin{vmatrix} \beta_1 \alpha_{12} \ldots \alpha_{1\nu} \\ \cdots\cdots \\ \beta_\nu \alpha_{\nu 2} \ldots \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} + \alpha_{12} \begin{vmatrix} \alpha_{11} \beta_1 \alpha_{13} \ldots \alpha_{1\nu} \\ \cdots\cdots \\ \alpha_{\nu 1} \beta_\nu \alpha_{\nu 3} \ldots \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} +$$

$$\ldots + \alpha_{1\nu} \begin{vmatrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_{1\nu-1} \beta_1 \\ \cdots\cdots \\ \alpha_{\nu 1} \ldots \alpha_{\nu\nu-1} \beta_\nu \end{vmatrix} - \beta_1 \begin{vmatrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_{1\nu} \\ \cdots\cdots \\ \alpha_{\nu 1} \ldots \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} = 0$$

ἤ μετακινώντας τή στήλη τῶν β ἔτσι πού νά γίνη τελευταία μέσα σέ κάθε ὁρίζουσα καί πολλαπλασιάζοντας ὅλους τούς προσθετέους ὅρους ἐπί $(-1)^{\nu-1} = (-1)^{\nu+1}$,

$$\alpha_{11}\begin{vmatrix} \alpha_{12} \dots \alpha_{1\nu}\ \beta_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_{\nu 2} \dots \alpha_{\nu\nu}\ \beta_\nu \end{vmatrix} - \alpha_{12}\begin{vmatrix} \alpha_{11}\ \alpha_{13} \dots \alpha_{1\nu}\ \beta_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_{\nu 1}\ \alpha_{\nu 3} \dots \alpha_{\nu\nu}\ \beta_\nu \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{\nu+1}\alpha_{1\nu}\begin{vmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{1\nu-1}\beta_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_{\nu 1} \dots \alpha_{\nu\nu-1}\beta_\nu \end{vmatrix} + (-1)^{\nu+2}\beta_1\begin{vmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{1\nu} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_{\nu 1} \dots \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} = 0 .$$

Τό ἀριστερό μέλος τῆς τελευταίας σχέσεως εἶναι ὅμως τό ἀνάπτυγμα τῆς ὁρίζουσας τάξεως $\nu+1$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \dots & \alpha_{1\nu} & \beta_1 \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} \dots & \alpha_{1\nu} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \dots & \alpha_{2\nu} & \beta_2 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} \dots & \alpha_{\nu\nu} & \beta_\nu \end{vmatrix}$$

κατά τά στοιχεῖα τῆς 1ης γραμμῆς πού ἔχει τά ἴδια ἀντιστοίχως στοιχεῖα μέ τή δεύτερη γραμμή ἄρα τό μέλος αὐτό εἶναι πράγματι 0, ὅ.ἔ.δ. Ὅμοια δείχνεται ὅτι ἡ νιάδα τῶν τιμῶν (48.2) ἐπαληθεύει καί κάθε ἄλλη ἐξίσωση τοῦ συστήματος (48.3) Ἔχουμε λοιπόν τήν

<u>Πρόταση 1</u>. Ἕνα σύστημα Cramer (48.3) ἔχει μιάν καί μόνο μιά λύση, ἡ δέ τιμή κάθε ἀγνώστου μέσα σ'αὐτήν ἰσοῦται μέ τό κλάσμα πού ἔχει παρονομαστή τήν ὁρίζουσα Δ τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων καί ἀριθμητή τήν ὁρίζουσα ἡ ὁποία προκύπτει ἀπό τή Δ ὅταν ἀντικαταστήσουμε μέσα της τή στήλη τῶν συντελεστῶν τοῦ ὑπ'ὄψη ἀγνώστου μέ τά δεύτερα μέλη τῶν ἐξισώσεων ἀντι - στοίχως.

Θεώρημα τῆς ἀπαλοιφῆς

§ 49. Πρόταση 2. Γιά νά εἶναι ἡ λύση τοῦ συστήματος Cramer (48.3) λύση καί μιᾶς ἀκόμα ἐξίσωσης.

(49.1) $$\alpha_{\nu+1,1}x_1 + \alpha_{\nu+1,2}x_2 + \ldots + \alpha_{\nu+1,\nu}x_\nu = \beta_{\nu+1}$$

πρέπει καί ἀρκεῖ νά μηδενίζεται ἡ ὁρίζουσα τάξεως ν+1.

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} \cdots\cdots \alpha_{1\nu} & \beta_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \alpha_{\nu 1} \cdots\cdots \alpha & \beta_\nu \\ \alpha_{\nu+1,1} \cdots\cdots \alpha_{\nu+1,\nu} & \beta_{\nu+1} \end{vmatrix}$$

Μετ.
p. 184

ἡ ὁποία λέγεται ἐπαυξημένη τῆς ὁρίζουσας

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\nu 1} & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

Ἀποδείχνουμε τήν πρόταση εἰσάγοντας τή λύση (48.2) μέσα στήν ἐξίσωση (49.1) καί μετασχηματίζοντας τή σχέση, πού προκύπτει, μέ τή μέθοδο πού χρησιμοποιήθηκε στό τελευταῖο μέρος τῆς ἀποδείξεως τοῦ προηγουμένου παραγράφου.

Ἐπίλυση τυχόντων γραμμικῶν συστημάτων

§ 50. Ὅταν τό γραμμικό σύστημα (47.1) δέν εἶναι σύστημα Cramer, ἤ θά ἔχουμε $\mu \neq \nu$ ἤ θά ἔχουμε $\mu = \nu$ ἀλλά ὁρίζουσα συντελεστῶν $\begin{vmatrix} \alpha_{11} \cdots \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{\nu 1} \cdots \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} = 0$.

Γιά νά πραγματευθοῦμε κατά τρόπο γενικό τήν ἐπίλυση καί αὐτῶν τῶν συστημάτων εἰσάγουμε τίς ἀκόλουθες ἔννοιες:

Ἔστω ὅτι ὁ πίνακας

(50.1) $$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \cdots\cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \cdots\cdots & \alpha_{2\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} \cdots\cdots & \alpha_{\mu\nu} \end{pmatrix}$$

δέν ἀποτελεῖται μόνο ἀπό μηδενικά στοιχεῖα. Παραλείποντας ν-ρ στῆλες καί μ-ρ γραμμές μποροῦμε νά μορφώσουμε $\binom{\nu}{\rho}\cdot\binom{\mu}{\rho}$

μένουν ρ στηλ. μένουν ρ γραμ.

ὁρίζουσες τάξεως ρ (έννοεῖται ὅτι $1 \leqq \rho \leqq \nu$ καί $1 \leqq \rho \leqq \mu$).

Ἐάν ὅλες αὐτές οἱ ὁρίζουσες εἶναι = 0, θά εἶναι ἴσες μέ 0 καί ὅλες οἱ ὁρίζουσες ἀνώτερης τάξεως πού, στήν περίπτωση $\rho <$ καί τοῦ ν καί τοῦ μ, μποροῦν νά μορφωθοῦν ἀπό τόν πίνακα, μέ παράλειψη λιγότερων γραμμῶν καί στηλῶν. Κατά τήν ὑπόθεση μας ὅμως, οἱ ὁρίζουσες 1ης τάξεως $\|\alpha_{\kappa\lambda}\|$, πού προκύπτουν ἀπό τόν πίνακα μέ παράλειψη ν-1 στηλῶν καί μ-1 γραμμῶν, δέν εἶναι ὅλες μηδενικές. Ἄρα θά ὑπάρχῃ ἕνας ὁρισμένος φυσικός ἀριθμός δ(≦ καί τοῦ ν καί τοῦ μ) μέ τίς ἰδιότητες: $\delta \leq \min(\mu,\nu)$

1ο μιά τουλάχιστο ἀπό τίς ὁρίζουσες τάξεως δ, τίς ὁποῖες μορφώνουμε ἀπό τόν πίνακα παραλείποντας ν-δ στῆλες καί μ-δ γραμμές εἶναι ≠ 0 καί 2ο ἤ δέν ὑπάρχει ὁρίζουσα ἀπό τόν πίνακα ἡ ὁποία νά εἶναι τάξεως > δ (αὐτό συμβαίνει ὅταν εἴτε δ = μ εἴτε δ = ν) ἤ ὅλες οἱ ὁρίζουσες τάξεως >δ, τίς ὁποῖες μποροῦμε ν'ἀποκτήσουμε ἀπό τόν πίνακα παραλείποντας λιγότερες ἀπό ν-δ στῆλες καί ἀπό μ-δ γραμμές, εἶναι ἴσες μέ 0.

Γιά νά συμβαίνῃ τό τελευταῖο πρέπει καί ἀρκεῖ προφανῶς νά μηδενίζωνται ὅλες οἱ ὁρίζουσες τάξεως δ+1 πού προκύπτουν ἀπό τόν πίνακα μέ παράλειψη ν-δ-1 στηλῶν καί μ-δ-1 γραμμῶν. Ὁ ἀριθμός δ λέγεται διάσταση (ἤ βαθμός) τοῦ πίνακα (50.1). Κάθε μή μηδενική ὁρίζουσα τάξεως δ ἀπό τόν πίνακα λέγεται πρωτεύουσα ὁρίζουσα τοῦ πίνακα. Ὁ πίνακας ἔχει μιάν τουλάχιστο πρωτεύουσα ὁρίζουσα.

Ὅταν ὁ πίνακας (50.1) ἀποτελῆται μόνο ἀπό μηδενικά στοιχεῖα, τότε ὁρίζουμε τή διάστασή του δ ἴση μέ τό 0. Ἕνας τέτοιος πίνακας δέν ἔχει φυσικά καμιά πρωτεύουσα ὁρίζουσα.

Παραδείγματα:

Ὁ πίνακας $\begin{pmatrix} -5 & -4 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$ ἔχει διάσταση 2, διότι 1ον ὑπάρχει μιά τουλάχιστο ὁρίζουσα τάξεως 2 ἀπό τόν πίνακα ἡ ὁποία δέν μηδενίζεται, π.χ. ἡ $\begin{vmatrix} -5 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ καί 2ο δέν μπο-

$$\left|\begin{matrix}\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\end{matrix}\right| = (-\alpha)\cdot 0+\beta\cdot 0+(-\gamma)\cdot 0+\delta\cdot 0=0,\dots$$

ροῦμε νά μορφώσουμε ἀπό τόν πίνακα καμμιάν ὁρίζουσα τάξεως > 2.

Πρωτεύουσες ὁρίζουσες ὑπάρχουν τρεῖς, οἱ ἀκόλουθες:

$$\begin{vmatrix} -5 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -1 & 1/2 \end{vmatrix}.$$

Οἱ τρεῖς ὑπόλοιπες δευτεροτάξιες ὁρίζουσες μηδενίζονται καί γι'αὐτό δέν εἶναι πρωτεύουσες. Ὁ πίνακας

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \\ 5 & 11 & 9 \end{pmatrix}$$

ἔχει διάστηση 2, διότι π.χ. $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$ καί ἡ μόνη ὑπάρχουσα ὁρίζουσα ἀνώτερης τάξεως

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \\ 5 & 11 & 9 \end{vmatrix}$$

(πού προκύπτει ἀπό τόν πίνακα ὅταν παραλείψουμε μηδέν στῆλες καί μηδέν γραμμές), ἰσοῦται μέ 0. Πρωτεύουσες ὁρίζουσες ὑπάρχουν ἐννέα: ὅλες οἱ δευτεροτάξιες ὁρίζουσες ἀπό τόν πίνακα εἶναι $\neq 0$. Ὁ πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 8 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

ἔχει διάσταση 3, διότι π.χ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 8 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 8\cdot(12+15) = 216 \neq 0,$$

δέν εἶναι δέ δυνατό νά μορφώσουμε ἀπό τόν πίνακα καμιάν ὁρίζουσα ἀνώτερης τάξεως. Πρωτεύουσες ὁρίζουσες ὑπάρχουν δυό: ἡ μιά προκύπτει μέ παράλειψη τῆς τελευταίας γραμμῆς, ἡ ἄλλη μέ παράλειψη τῆς πρώτης. Οἱ δυό ἄλλες τριτοτάξιες ὁρίζουσες εἰναι = 0, ἄρα ὄχι πρωτεύουσες.

Ἡ διάσταση καί οἱ πρωτεύουσες ὁρίζουσες τοῦ πίνακα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων σ'ἕνα γραμμικό σύστημα (47.1) θά λέγωνται διάσταση καί πρωτεύουσες ὁρίζουσες τοῦ συστήματος. Ἔτσι διάσταση ἑνός συστήματος Cramer εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν ἐξισώσεών του = ἀριθμός τῶν ἀγνώστων.

§ 51. Ἔστω ἡ

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1\delta} \\ \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2\delta} \\ \alpha_{\delta 1} & \cdots & \alpha_{\delta\delta} \end{vmatrix}$$

πρωτεύουσα ὁρίζουσα τοῦ συστήματος (47.1). Ἐξυπακούουμε φυσικά ὅτι ἡ διάσταση δ εἶναι $\geqq 1$. Ἐάν $\delta < \mu$, τότε καλοῦμε ἐπαυξημένες ὁρίζουσες τῆς παραπάνω πρωτεύουσας ὁρίζουσας τίς ἀκόλουθες μ-δ ὁρίζουσες τάξεως δ+1:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1\delta} & \beta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{\delta 1} & & \alpha_{\delta\delta} & \beta_\delta \\ \alpha_{\delta+1\,1} & \cdots & \alpha_{\delta+1\,\delta} & \beta_{\delta+1} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1\delta} & \beta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{\delta 1} & \cdots & \alpha_{\delta\delta} & \beta_\delta \\ \alpha_{\delta+2\,1} & \cdots & \alpha_{\delta+2\,\delta} & \beta_{\delta+2} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1\delta} & \beta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{\delta 1} & \cdots & \alpha_{\delta\delta} & \beta_\delta \\ \alpha_{\mu 1} & \cdots & \alpha_{\mu\delta} & \beta_\mu \end{vmatrix}$$

Ἀνάλογα μορφώνονται οἱ ἐπαυξημένες ὁρίζουσες κάθε ἄλλης πρωτεύουσας ὁρίζουσας τοῦ γραμμικοῦ συστήματος. Π.χ. στό σύστημα

$$\begin{cases} -7x + 5y + 6z = 1 \\ 2x + 6y + 3z = -2 \\ -5x + 11y + 9z = 0 \end{cases}$$

ὅπου x,y,z οἱ ἄγνωστοι, ἡ διάσταση δ ἰσοῦται μέ 2.

Ἡ πρωτεύουσα ὁρίζουσα $\begin{vmatrix} -7 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ πού ἀνήκει στίς δυό πρῶτες ἐξισώσεις καί στούς δυό ἀγνώστους x,y ἔχει μιάν ἐπαυξημένη τήν $\begin{vmatrix} -7 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ -5 & 11 & 0 \end{vmatrix}$. Ἡ πρωτεύουσα ὁρίζουσα $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 9 \end{vmatrix}$ ἔχει ἑαπυξημένη τήν $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -5 & 9 & 0 \\ -7 & 6 & 1 \end{vmatrix}$. Ἡ πρωτεύουσα ὁρίζουσα $\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 11 & 9 \end{vmatrix}$ ἔχει ἐπαυξημένη τήν $\begin{vmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 11 & 9 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ κτλ.

Στό σύστημα

$$\begin{cases} 4x_1-3x_2-2x_3+0x_4=5 \\ -8x_1+6x_2+4x_3+0x_4=-1 \end{cases}$$

πού ἔχει διάσταση $\delta = 1$, ὑπάρχουν προφανῶς 6 πρωτεύουσες ὁρίζουσες. Ἀπό αὐτές ἡ $\|4\|$ πού ἀνήκει στήν πρώτη ἐξίσωση καί στόν ἄγνωστο x_1, ἔχει ἐπαυξημένη τήν $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -8 & -1 \end{vmatrix}$, ἡ πρωτεύουσα $\|4\|$ πού ἀνήκει στή δεύτερη ἐξίσωση καί στόν ἄγνωστο x_3, ἔχει ἐπαυξημένη τήν $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$ κτλ.

§ 52. Πρόταση 3 (τοῦ Rouché). Ἄν τό γραμμικό σύστημα (47.1) διαστάσεως $\delta \geqq 1$ εἶναι ἐπιλύσιμο, δηλαδή ἄν ἔχη μιά τουλάχιστο λύση, τότε ἤ θά εἶναι $\delta = \mu$ ἤ ἄν $\delta < \mu$, κάθε ἐπαυξημένη μιᾶς ὁποιασδήποτε πρωτεύουσας ὁρίζουσαι τοῦ συστήματος θά εἶναι ἴση μέ 0.

Ἀντιστρόφως, ἄν $\delta = \mu$ ἤ ἄν $1 \leqq \delta < \mu$ καί ὅλες οἱ ἐπαυξημένες μιᾶς μόνο κιόλας πρωτεύουσας ὁρίζουσας εἶναι $=0$ τότε τό σύστημα εἶναι ἐπιλύσιμο. (Κατά τό πρῶτο μέρος τῆς προτάσεως, θά εἶναι τότε ἴσες μέ 0 καί ὅλες οἱ ἐπαυξημένες ὁρίζουσες κάθε ἄλλης πρωτεύουσας ὁρίζουσας τοῦ συστήματος).

Ἀποδειξη. 1ο μέρος τῆς πρότασης : ὑποθέτουμε ὅτι τό σύστημα ἔχει τουλάχιστο μιά λύση ($x_1 = \xi_1, \ldots, x_\nu = \xi_\nu$). Ἄς εἶναι ἡ $P = \begin{vmatrix} \alpha_{11} \cdots \alpha_{1\delta} \\ \cdots\cdots \\ \alpha_{\delta 1} \cdots \alpha_{\delta\delta} \end{vmatrix}$ πρωτεύουσα ὁρίζουσα τοῦ συστήματος καί $\delta < \mu$. Ἔχουμε νά δείξουμε ὅτι ὅλες οἱ ἐπαυξημένες τῆς P εἶναι μηδενικές. Τό σύστημα

$$\begin{array}{l} \alpha_{11}x_1+\ldots+\alpha_{1\delta}x_\delta = \beta_1-\alpha_{1\delta+1}\xi_{\delta+1}-\ldots-\alpha_{1\nu}\xi_\nu \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{\delta 1}x_1+\ldots+\alpha_{\delta\delta}x_\delta = \beta_\delta-\alpha_{\delta\delta+1}\xi_{\delta+1}-\ldots-\alpha_{\delta\nu}\xi_\nu \end{array}$$

μέ ἀγνώστους τά $x_1, \ldots, x_\delta$ εἶναι σύστημα Cramer, συνεπῶς ἔχει μόνο μιά λύση· ἄρα αὐτή δέν μπορεῖ νά εἶναι ἄλλη ἀπό τή ($x_1 = \xi_1, \ldots, x_\delta = \xi_\delta$).

Ἡ λύση αὐτή εἶναι λύση καί τῆς ἐξισώσεως

$$\alpha_{\rho 1}x_1+\ldots+\alpha_{\rho\delta}x_\delta = \beta_\rho-\alpha_{\rho\delta+1}\xi_{\delta+1}-\ldots-\alpha_{\rho\nu}\xi_\nu$$

γιά $\varrho = \delta+1, \delta+2, \ldots, \mu$ σύμφωνα μέ τήν ὑπόθεσή μας. Ἄρα, κατά τό θεώρημα τῆς ἀπαλοιφῆς τοῦ § 49, θά ἔχουμε

$$0 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_{1\delta} & \beta_1 - \alpha_{1\delta+1}\xi_{\delta+1} - \ldots - \alpha_{1\nu}\xi_\nu \\ \cdots & \cdots \\ \alpha_{\delta 1} \ldots \alpha_{\delta\delta} & \beta_\delta - \alpha_{\delta\delta+1}\xi_{\delta+1} - \ldots - \alpha_{\delta\nu}\xi_\nu \\ \alpha_{\varrho 1} \ldots \alpha_{\varrho\delta} & \beta_\varrho - \alpha_{\varrho\delta+1}\xi_{\delta+1} - \ldots - \alpha_{\varrho\nu}\xi_\nu \end{vmatrix} =$$

(52.1)

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_{1\delta} & \beta_1 \\ \cdots & \cdots \\ \alpha_{\delta 1} \ldots \alpha_{\delta\delta} & \beta_\delta \\ \alpha_{\varrho 1} \ldots \alpha_{\varrho\delta} & \beta_\varrho \end{vmatrix} - \xi_{\delta+1} \begin{vmatrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_{1\delta} & \alpha_{1\delta+1} \\ \cdots & \cdots \\ \alpha_{\delta 1} \ldots \alpha_{\delta\delta} & \alpha_{\delta\delta+1} \\ \alpha_{\varrho 1} \ldots \alpha_{\varrho\delta} & \alpha_{\varrho\delta+1} \end{vmatrix} - \ldots - \xi_\nu \begin{vmatrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_{1\delta} & \alpha_{1\nu} \\ \cdots & \cdots \\ \alpha_{\delta 1} \ldots \alpha_{\delta\delta} & \alpha_{\delta\nu} \\ \alpha_{\varrho 1} \ldots \alpha_{\varrho\delta} & \alpha_{\varrho\nu} \end{vmatrix}$$

Οἱ ὁρίζουσες πού πολλαπλασιάζουν τά $\xi_{\delta+1}, \ldots, \xi_\nu$ εἶναι μηδενικές ἐπειδή εἶναι τάξεως $\delta+1$ μεγαλύτερης ἀπό τή διάσταση δ τοῦ πίνακα τῶν α.

Ἄρα

(52.2)
$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_{1\delta} & \beta_1 \\ \cdots & \cdots \\ \alpha_{\delta 1} \ldots \alpha_{\delta\delta} & \beta_\delta \\ \alpha_{\varrho 1} \ldots \alpha_{\varrho\delta} & \beta_\varrho \end{vmatrix} = 0$$

γιά $\varrho = \delta+1, \delta+2, \ldots, \mu$ ὅ.ἔ.δ.

Μέ ὅμοιο τρόπο δείχνουμε ὅτι οἱ ἐπαυξημένες καί κάθε ἄλλης πρωτεύουσας ὁρίζουσας τοῦ συστήματος εἶναι $= 0$.

2ο μέρος τῆς πρότασης. Ὑποθέτουμε πρῶτα ὅτι $\delta = \mu$. Τότε τό ν πού εἶναι $\geqq \delta$ θά εἶναι καί $\geqq \mu$. Ἔστω $\begin{vmatrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_{1\mu} \\ \alpha_{\mu 1} \ldots \alpha_{\mu\mu} \end{vmatrix}$ μιά πρωτεύουσα ὁρίζουσα τοῦ συστήματος (ἡ μόνη ὑπάρχουσα ἐάν $\nu = \mu$). Τό σύστημα (47.1) μπορεῖ νά γραφῆ καί ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1\mu}x_\mu = \beta_\nu - \alpha_{1\mu+1}x_{\mu+1} - \ldots - \alpha_{1\nu}x_\nu \\ \cdots \\ \alpha_{\mu 1}x_1 + \ldots + \alpha_{\mu\mu}x_\mu = \beta_\mu - \alpha_{\mu\mu+1}x_{\mu+1} - \ldots - \alpha_{\mu\nu}x_\nu \end{array}$$

Φυσικά, ἐάν $\nu = \mu$, τά 2α μέλη γίνονται $\beta_1, \ldots \beta_\mu$ ἀντιστοίχως. Ἀπ'ἐδῶ φαίνεται ὅτι ἀφοῦ δώσουμε αὐθαίρετες τιμές στούς ἀγνώστους $x_{\mu+1}, \ldots, x_\nu$ (τῶν ὁποίων οἱ συντελεστές δέν εἰσέρχονται εἰς τήν ὑπ'ὄψη πρωτεύουσα ὁρίζουσα), τό σύστημα καταντᾶ σύστημα Cramer ὡς πρός τούς ἀγνώστους $x_1, \ldots, x_\mu$ καί ἔχει μιά μόνο λύση γι'αὐτούς (λύση πού ἐξαρτᾶται φυσικά ἀπό τίς αὐθαίρετες τιμές τῶν $x_{\mu+1},\dots,x_\nu$ τίς ὁποῖες ἐκλέξαμε). Ἄρα τό σύστημα (47.1) εἶναι ἐπιλύσιμο καί οἱ ν-δ ἄγνωστοι πού δ έ ν ἀντιπροσωπεύονται διά τῶν συντελεστῶν τους μέσα στήν ὑπ'ὄψη πρωτεύουσα ὁρίζουσα μποροῦν νά πάρουν ἐκ τῶν προτέρων αὐθαίρετα ὁρισμένες τιμές. Γι'αὐτό λέμε ὅτι τό σύστημα ἔχει "μιάν (ν-δ) - παραμετρικήν ἀπειρία λύσεων".

Ὑποθέτουμε δεύτερο ὅτι $1 \leqq \delta < \mu$ καί ὅτι μιά ἀπό τίς πρωτεύουσες ὁρίζουσες τοῦ συστήματος (47.1), π.χ. αὐτή πού καλέσαμε P ἀρχίζοντας τήν ἀπόδειξη, ἔχει ὅλες τίς μ-δ ἐπαυξημένες της μηδενικές. Ἔχουμε νά δείξουμε ὅτι τό σύστημα εἶναι ἐπιλύσιμο. Γιά τό σκοπό αὐτό γράφουμε τίς δ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος, οἱ ὁποῖες ἀντιπροσωπεύονται διά τῶν συντελεστῶν τους μέσα στήν ὑπ'ὄψη πρωτεύουσα ὁρίζουσα

$$P = \begin{vmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{1\delta} \\ \alpha_{\delta 1} \dots \alpha_{\delta\delta} \end{vmatrix}$$

ὡς ἑξῆς:

$$(52.3) \qquad \begin{array}{l} \alpha_{11}x_1+\dots+\alpha_{1\delta}x_\delta = \beta_1-\alpha_{1\delta+1}x_{\delta+1}-\dots-\alpha_{1\nu}x_\nu \\ \alpha_{\delta 1}x_1+\dots+\alpha_{\delta\delta}x_\delta = \beta_\delta-\alpha_{\delta\delta+1}x_{\delta+1}-\dots-\alpha_{\delta\nu}x_\nu \end{array}$$

Ἐννοεῖται πάλιν ὅτι, ἐάν $\delta = \nu$, τά 2α μέλη γίνονται $\beta_1,\dots,\beta_\delta$ ἀντιστοίχως. Οἱ δ αὐτές ἐξισώσεις ἀποτελοῦν σύστημα Cramer ὡς πρός τούς ἀγνώστους $x_1,\dots,x_\delta$. Ἄρα ἄν μέν $\nu = \delta$, θά ὑπάρχῃ μιά μόνο νιάδα τιμῶν.

$$x_1 = \xi_1, \dots, x_\nu = \xi_\nu$$

τῶν ἀγνώστων ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ τό (52.3), δηλαδή τίς δ πρῶτες ἐξισώσεις τοῦ (47.1)· ἄν ὅμως $\delta < \nu$ τότε γιά κάθε α ὑ θ α ί ρ ε τ η ἐκλογή

$$x_{\delta+1} = \xi^*_{\delta+1}, \dots, x_\nu = \xi^*_\nu$$

τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων $x_{\delta+1},\dots,x_\nu$ ὑπάρχει ἕνα καί μόνο ἕνα σύστημα ἀντίστοιχων τιμῶν

$$x_1 = \xi^*_1, \dots, x_\delta = \xi^*_\delta$$

τῶν ἀγνώστων $x_1, \ldots, x_\delta$ τέτοιο ὥστε ἡ νιάδα

$$(\xi_1^*, \ldots, \xi_\delta^*, \ldots \xi_{\delta+1}^*, \ldots, \xi_\nu^*)$$

νά ἱκανοποιῆ τίς ἐξισώσεις τοῦ (47.1) πού ἀντιπροσωπεύονται μέσα στήν πρωτ.ὁρίζουσα P. Λέγω τώρα ὅτι ἡ παραπάνω νιάδα ἱκανοποιεῖ καί κάθε ἄλλη ἐξίσωση τοῦ (47.1).

Πράγματι αὐτή ἡ ἐξίσωση γράφεται καί ὡς ἑξῆς:

$$(52.4) \qquad \alpha_{\varrho 1}x_1 + \ldots + \alpha_{\varrho\delta}x_\delta = \beta_\varrho - \alpha_{\varrho\delta+1}x_{\delta+1} - \ldots - \alpha_{\varrho\nu}x_\nu$$

γιά $\varrho = \delta+1, \delta+2, \ldots, \mu$. Ἀπό τήν ὑπόθεσή μας ὅτι ὅλες οἱ ἐπαυξημένες τῆς ὁρίζουσας P μηδενίζονται, δηλαδή ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση (52.2), καί ὅτι ἡ διάσταση τοῦ πίνακα τῶν α εἶναι ἴση μέ δ, ἕπεται ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση (52.1) ἐπομένως, κατά τόν § 49,ἡ λύση $x_1 = \xi_1^*, \ldots, x_\delta = \xi_\delta^*$ τοῦ συστήματος Cramer τό ὁποῖο προκύπτει ἀπό τό (52.3) ὅταν ἀντικαταστήσουμε τά $x_{\delta+1}, \ldots, x_\nu$ μέ τά $\xi_{\delta+1}^*, \ldots, \xi_\nu^*$, εἶναι λύση καί τῆς ἐξίσωσης πού προκύπτει ἀπό τήν (52.4), μέ τήν ἴδια ἀντικατάσταση, ὅ.ἔ.δ.

§ 53. <u>Σχόλιο.</u> Ἐάν ἡ διάσταση τοῦ συστήματος (47.1) εἶναι τό 0, δηλαδή ἐάν ὅλοι οἱ συντελεστές τῶν ἀγνώστων εἶναι 0, τότε προφανῶς γιά νά εἶναι τό σύστημα ἐπιλύσιμο πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἔχουμε

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_\mu = 0 \quad .$$

Στήν περίπτωση αὐτή οἱ τιμές καί τῶν ν ἀγνώστων μποροῦν νά ληφθοῦν αὐθαίρετα.

Ἀπό τό σχόλιο αὐτό καί ἀπό τό 2ο μέρος τῆς προηγούμένης ἀπόδειξης ἕπεται ἡ

<u>Πρόταση 4 (τοῦ Rouché).</u> Ὅταν τό γραμμ. σύστημα (47.1) διαστάσεως δ ($\geqq 0$) εἶναι ἐπιλύσιμο, ν-δ ἄγνωστοι, τῶν ὁποίων οἱ συντελεστές δέν περιέχονται μέσα σέ μιάν (ἐλεύθερα ἐκλεγμένη) πρωτεύουσα ὁρίζουσα, μποροῦν νά πάρουν αὐθαίρετες τιμές· οἱ ὑπόλοιποι δ ἄγνωστοι καθορίζονται

συναρτήσει τῶν τιμῶν αὐτῶν μονότροπα ἀπό τό σύστημα Cramer τό ὁποῖο ἀποτελοῦν ὡς πρός αὐτούς τούς δ ἀγνώστους οἱ δ ἐξισώσεις στίς ὁποῖες ἀνήκει ἡ ὑπ'ὄψη πρωτεύουσα ὁρίζουσα.

Αὐτά τά ἐκφράζουμε λέγοντας ὅτι τό (47.1) ἔχει μιᾶν (ν-δ) παραμετρικήν ἀπειρία λύσεων.

Παραδείγματα.

Τό σύστημα
$$\begin{cases} -5x+2y+3z = 4 \\ 6x-2y-4z = -26 \\ -y+z = 2 \\ x-z = -5 \end{cases}$$
ἔχει διάσταση 2.

Μιά πρωτεύουσα ὁρίζουσά του εἶναι ἡ $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ στήν ὁποία ἀντιπροσωπεύονται ἡ 3η καί ἡ 4η ἐξίσωση καθώς καί οἱ ἄγνωστοι y καί z. Ἐπαυξημένες τῆς ὁρίζουσας αὐτῆς ὑπάρχουν δυό.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -17, \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ -2 & -4 & -26 \end{vmatrix} = 0 .$$

Ἐπειδή ἡ μιά ἐξ αὐτῶν εἶναι $\neq 0$, τό σύστημα δέν ἔχει λύση.

Τό σύστημα
$$\begin{cases} -5x+2y+3z \quad 21 \\ 6x-2y-4z = -26 \\ -y+z = 2 \\ x-z = -5 \end{cases}$$
ἔχει διάσταση 2

Μιά πρωτεύουσα ὁρίζουσά του εἶναι ἡ $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ πού ἀνήκει στίς δύό τελευταῖες ἐξισώσεις καί στούς δυό ἀγνώστους y καί z. Ἡ ὁρίζουσα αὐτή ἔχει καί τίς δυό ἐπαυξημένες της

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 2 & 3 & 21 \end{vmatrix} \quad \text{καί} \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ -2 & -4 & 26 \end{vmatrix}$$

μηδενικές. Ἄρα τό σύστημα ἔχει μιάν (3-2) παραμετρικήν (δηλ. μονοπαραμετρικήν) ἀπειρία λύσεων, τίς ὁποῖες βρίσκουμε παίρνοντας τήν τιμή τοῦ x αὐθαίρετα καί ὁρίζοντας συναρτήσει αὐτῆς τά y καί z ἀπό τό σύστημα τῶν δυό τελευταίων ἐξισώσεων· ἔτσι ἔχουμε $y = 3+x$, $z = 5+x$.

ΟΜΟΓΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

§ 54. Τό σύστημα (47.1) λέγεται ὁμογενές ἄν $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_\mu = 0$. Ἕνα ὁμογενές σύστημα εἶναι πάντοτε ἐπιλύσιμο: μιά προφανής λύση του εἶναι ἡ "μηδενική": $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_\nu = 0$.

Προκύπτει τό ἐνδιαφέρον ζήτημα, πότε τό σύστημα ἔχει καί "ὄχι μηδενικές" λύσεις. Τήν ἀπάντηση τήν πορίζόμαστε ἀμέσως ἀπό τίς προτάσεις 3 καί 4. Ἰδού ἡ διατύπωσή της:

Πρόταση 5. Γιά νά ἔχη τό γραμμικό ὁμογενές σύστημα

$$(54.1)\qquad \begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1\nu}x_\nu = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\mu 1}x_1 + \ldots + \alpha_{\mu\nu}x_\nu = 0 \end{array}$$

διαστάσεως δ ($\geqq 0$) μιάν τουλάχιστο ὄχι μηδενική λύση (γιά τήν ὁποία ἑπομένως $|x_1| + \ldots + |x_\nu| \neq 0$), πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι $\delta < \nu$.

Στήν περίπτωση αὐτή τό σύστημα ἔχει φυσικά ὄχι μόνο μιάν, ἀλλ' ἄπειρες ὄχι μηδενικές λύσεις, ἀφοῦ ν–δ ἄγνωστοι, τῶν ὁποίων οἱ συντελεστές δ έ ν εἰσέρχονται σέ μιάν (ἐλεύθερα ἐκλεγμένη) πρωτεύουσα ὁρίζουσα, μποροῦν νά πάρουν αὐθαίρετες τιμές.

Πρόταση 6. Δυό ἀξιοσημείωτες περιπτώσεις ὅπου $\delta < \nu$ εἶναι οἱ ἑξῆς: α) Τό σύστημα ἔχει τόσες ἐξισώσεις ὅσους καί ἀγνώστους: $\mu = \nu$, ἡ δέ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων εἶναι $= 0$ (διότι τότε $\delta < \nu$).

β) Τό σύστημα ἔχει περισσοτέρους ἀγνώστους ἀπό ἐξισώσεις $\nu > \mu$. (Διότι τότε ἡ διάσταση δ, πού εἶναι $\leqq \mu$, θά εἶναι ἀναγκαστικά $< \nu$).

Πρόταση 7. Ἄν $(\xi_1, \ldots, \xi_\nu)$ εἶναι λύση τοῦ ὁμογενοῦς συστήματος (54.1), θά εἶναι λύση καί ἡ νιάδα $(\lambda\xi_1, \ldots, \lambda\xi_\nu)$, ὅπου ὁ (κοινός) πολλαπλασιαστής εἶναι αὐθαίρετα ὁρισμένος ἀριθμός. Ἄν $(\xi_1', \ldots, \xi_\nu')$ καί $(\xi_1'', \ldots, \xi_\nu'')$ εἶναι λύσεις τοῦ

(54.1), θά εἶναι λύση του καί ἡ νιάδα $(\xi_1'+\xi_1'',\ldots,\xi_\nu'+\xi_\nu'')$. Ἄρα καί ἡ νιάδα $(\lambda'\xi_1'+\lambda''\xi_1'',\ldots,\lambda'\xi_\nu'+\lambda''\xi_\nu'')$ ὅπου λ' καί λ'' αὐθαίρετα ὁρισμένοι ἀριθμοί.

<u>Πρόταση 8.</u> Ἄν τό ὁμογενές γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{c} \alpha_{11}x_1+\ldots+\alpha_{1\mu}x_\mu+\alpha_{1\mu+1}x_{\mu+1}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{\mu 1}x_1+\ldots+\alpha_{\mu\mu}x_\mu+\alpha_{\mu\mu+1}x_{\mu+1}=0 \end{array}$$

μέ μ ἐξισώσεις καί $\mu+1$ ἀγνώστους ἔχει διάσταση $\delta=\mu$, τότε μιά ὄχι μηδενική λύση του εἶναι ἡ

$$\xi_1=\begin{vmatrix} \alpha_{12}\ldots\alpha_{1\mu+1} \\ \cdots\cdots \\ \alpha_{\mu 2}\ldots\alpha_{\mu\mu+1}\end{vmatrix},\quad \xi_2=-\begin{vmatrix} \alpha_{11}\alpha_{13}\ldots\alpha_{1\mu+1} \\ \cdots\cdots \\ \alpha_{\mu 1}\alpha_{\mu 3}\ldots\alpha_{\mu\mu+1}\end{vmatrix},\ \ldots,$$

$$\xi_{\mu+1}=(-1)^\mu\begin{vmatrix} \alpha_{11}\ldots\alpha_{1\mu} \\ \cdots\cdots \\ \alpha_{\mu 1}\ldots\alpha_{\mu\mu}\end{vmatrix}$$

ὅλες δέ οἱ λύσεις του περιέχονται μέσα στή λύση:

$$x_1=\lambda\xi_1\qquad x_2=\lambda\xi_2\ ,\ldots,\ x_{\mu+1}=\lambda\xi_{\mu+1}$$

ὅπου λ αὐθαίρετα ὁρισμένος ἀριθμός.

<u>Σχόλιο.</u> Ἡ λύση $(\lambda\xi_1,\ldots,\lambda\xi_{\mu+1})$ μέ λ αὐθαίρετο λέγεται: "γενική λύση" τοῦ συστήματος (54.2), ἐπειδή περιέχει ὅλες τίς λύσεις τοῦ συστήματος τούτου.

Παραδείγματα

Τό ὁμογ. σύστημα $\begin{cases} 2x+4y=0 \\ -3x+6y=0\end{cases}$

διαστάσεως 2 ἴσης μέ τόν ἀριθμό τῶν ἀγνώστων ἔχει μόνο μιά λύση, τή μηδενική: $x=0$, $y=0$. Τό σύστημα: $2x-5y-3z=0$, $-x+2y+z=0$, $-3x+2y-z=0$, $-5x+6y+z=0$ διαστάσεως $2<$ ἀπό τόν ἀριθμό 3 τῶν ἀγνώστων ἔχει μιά μονοπαραμετρική ἀπειρία λύσεων (ἀπό τίς ὁποῖες ἡ μιά εἶναι ἡ μηδενική: $x=y=$ $=z=0$, οἱ ἄπειρες ἄλλες φυσικά ὄχι μηδενικές λύσεις). Ἐπειδή τώρα, ὅπως ἕπεται ἀπό τήν ἀπόδειξη τῆς πρότασης 3 (§52), τό σύστημα ἔχει τίς ἴδιες λύσεις μέ τό σύστημα τῶν δυό πρώτων ἐξισώσεων μόνο, τό ὁποῖον ἔχει ἐπίσης διάσταση 2, ἐφαρμόζουμε στό σύστημα αὐτό

$$\begin{aligned} 2x-5y-3z &= 0 \\ -x+2y+z &= 0 \end{aligned}$$

τήν πρόταση 8 καί βρίσκουμε

$$x = \lambda \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \lambda \ , \quad y = -\lambda \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda \quad z = \lambda \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -\lambda$$

ὅπου λ αὐθαίρετος ἀριθμός (ἡ παράμετρος, ὅπως λέμε, τῆς γενικῆς λύσης).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

49. Ἐφαρμόζοντας τούς τύπους Cramer (48.2) ἐπιλύστε τά συστήματα:

$$\begin{cases} 5x-3y = 4 \\ -x-4y = -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+3y-2 = 0 \\ 5x-2y+4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8x-2y+5 = 0 \\ -2y+3x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-3y+5z-1 = 0 \\ 4y-\ x+2z = -2 \\ 6z-2y-4x = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2y+4z = 0 \\ 9z+x+3y+1 = 0 \\ -4y+16z+x = 0 \end{cases} .$$

50. Ἔστω φ τυχών πραγματικός αριθμός πού παριστάνει, π.χ, σέ μοῖρες, μιά γωνία. Δεῖξτε ὅτι τό γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x'\text{συν}\varphi - y'\text{ημ}\varphi &= x \\ x'\text{ημ}\varphi + y'\text{συν}\varphi &= y \end{aligned}$$

μέ ἀγνώστους $x'y'$ καί μέ 2α μέλη x, y αὐθαίρετα ὁρισμένους ἀριθμούς x,y, ἔχει μιά μοναδική λύση, πού ἐξαρτιέται φυσικά ἀπό τίς θεωρούμενες τιμές τῶν x καί y · δῶστε τή λύση αὐτή, ἐννοεῖται συναρτήσει τῶν x,y,φ. Πάρτε εἰδικῶς $\varphi = 45^\circ$, 1 60°, -30°.

51. Μέ βάση τή θεωρία τῶν §§ 52, 53 ἐπιλύστε τά συστήματα

$$\begin{cases} 5x+4y+z+2t = -25 \\ -2x+3y+z+2t = 10 \\ 5x+0y+4z+8t = -25 \\ -5x+y-2z-4t = 25 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x+5y+2z-5t = 1 \\ -3x+8y-2z-t = 2 \\ -10x+11y-6z+3t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+8y+20z = -6 \\ -5x+2y-6z = 2 \\ -4x+6y+4z = -1 \\ -18x+16y-4z = 2 \end{cases} .$$

52. Ἐπιλύσατε τά ὁμογενῆ συστήματα:

$$\begin{cases} 5x-4y = 0 \\ 2x+y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x-3y+5z = 0 \\ -2x-y+z = 0 \\ -14x+3y-7z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x-4y+2z-t = 0 \\ -4x+2y+t = 0 \\ -3y+2z+4t = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x-3y-2z = 0 \\ -2x+3y+4z = 0 \\ x-y-z = 0 \\ 3x-y+z = 0 \end{cases} .$$

53. Γιά ποιές τιμές τοῦ γράμματος λ τό σύστημα

$$\begin{cases} x+2y+(\lambda+2)z = 10 \\ 2x+3y+(\lambda+3)z = 16 \\ 3x+(6\lambda-1)y+7z = 26 \end{cases}$$

ἔχει 1) μιά μοναδική λύση 2) μηδέν λύσεις, 3) ἄπειρες λύσεις; Ὑπολογίστε τίς λύσεις στίς περιπτώσεις 1) καί 3).

54. Ἐπιλύστε τό σύστημα (διερευνώντας το ὡς πρός τίς διάφορες τιμές τοῦ λ):

$$\begin{cases} \lambda x+y+z = 1 \\ x+\lambda y+z = \lambda \\ x+y+\lambda z = \lambda^2 \end{cases} .$$

55. Διρευνῆστε τό γραμμικό ὡς πρός x,y,z σύστημα

$$\begin{cases} x+\alpha y+\alpha^2 z = A \\ x+\beta y+\beta^2 z = B \\ x+\gamma y+\gamma^2 z = \Gamma \end{cases}$$

ὅπου τά γράμματα α,β,γ, A,B,Γ παριστάνουν αὐθαιρέτους (δηλαδή ἐλεύθερα ἐκλεγμένους) πραγματικούς ἀριθμούς.

Ὑποδ. Χρησιμοποιώντας τήν ὁρίζουσα Vandermonde (Ἄσκηση 43) θά ἐξετάστε γιά τήν ὁρίζουσα Δ τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων τίς περιπτώσεις $\Delta \neq 0$ καί $\Delta = 0$, σέ κάθε δέ περίπτωση ἄν, καί ποιοί περιορισμοί ἐπιβάλλονται στά Α, Β, Γ γιά νά εἶναι τό σύστημα ἐπιλύσιμο. Σέ κάθε περίπτωση ἐπιλυσιμότητας νά δοθῆ ἡ "γενική λύση".

56. Ἐπιλύστε τά συστήματα:

$$\begin{cases} 2x-3y = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x-3y+2z = 0 \\ -2x-y+3z = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases}$$

Ὑποδ. Τά δυό συστήματα ἀποτελοῦνται ἀπό ἕνα γραμμικό μέρος καί μιάν δευτεροβάθμια ἐξίσωση. Γι'αὐτό βρίσκουμε πρῶτα τή "γενική λύση" τοῦ γραμμικοῦ μέρους καί αὐτήν τήν εἰσάγουμε στή δευτεροβάθμια ἐξίσωση γιά νά προσδιορίσουμε τήν παράμετρο πού ὑπάρχει μέσα στή γενική λύση τοῦ γραμμικοῦ μέρους.

57.* Ἄς καλέσουμε ἄθροισμα καί διαφορά τῶν δύό νιάδων ἀριθμῶν $(\xi_1,\dots,\xi_\nu)$, $(\eta_1,\dots,\eta_\nu)$

τίς νιάδες

$(\xi_1+\eta_1, \ldots, \xi_\nu+\eta_\nu)$ καί $(\xi_1-\eta_1, \ldots, \xi_\nu-\eta_\nu)$

'Αποδεῖξτε ὅτι ἡ "γενική λύση" τοῦ μή ὁμογενοῦς γραμμικοῦ συστήματος (47.1), πού ὑποθέτουμε ἐπιλύσιμο, βρίσκεται, ἄν σέ μιάν ὁποιαδήποτε ὁ ρ ι σ μ έ ν η λύση του ("εἰδική λύση", ὅπως λέμε) προσθέτουμε τή "γενική λύση" τοῦ ἀντίστοιχου ὁμογενοῦς συστήματος

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1+\ldots+\alpha_{1\nu}x_\nu = 0 \\ \alpha_{\mu 1}x_1+\ldots+\alpha_{\mu\nu}x_\nu = 0 \end{cases}$$

Παρατήρηση. "'Αντίστοιχο ὁμογενές" σημαίνει πώς ὁ πίνακας τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων εἶναι ὁ ἴδιος καί μόνον τά 2α μέλη τοῦ (47.1) ἀντικαταστάθηκαν μέ μηδενικά.

58.* 'Εάν τό (47.1), μέ ν ἀγνώστους καί μέ διάσταση δ, εἶναι ἐπιλύσιμο, δεῖξτε ὅτι δέν μποροῦν νά πάρουν αὐθαίρετες τιμές περισσότεροι ἀπό ν–δ ἄγνωστοι τοῦ συστήματος.

'Υπόδ. 'Αφοῦ ξεχωρίσετε αὐθαίρετα ν–δ+1 ἀγνώστους θά δείξετε ὅτι μεταξύ αὐτῶν τῶν ἀγνώστων ὑφίσταται μιά σχέση πού εἶναι συνέπεια μιᾶς δ-διάστατης ὁμάδας ἀπό δ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος καί πού δεσμεύει τήν τιμή ἑνός τουλάχιστο ἀπό τούς ν–δ+1 ἀγνώστους συναρτήσει τῶν τιμῶν τῶν ὑπόλοιπων ν–δ.

59.* Γιά νά εἶναι μιά ὁρίζουσα τάξης ρ ἀπό τόν πίνακα

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \cdots & \alpha_{\mu\nu} \end{pmatrix}$$

πρωτεύουσα ὁρίζουσα τοῦ πίνακα ἀρκεῖ 1ο νά μή μηδενίζεται καί 2ο νά μηδενίζωνται ὅλες οἱ (μ–ρ)(ν–ρ) ὁρίζουσες τάξεως ρ+1 ἀπό τόν πίνακα οἱ ὁποῖες τήν ἔχουν γιά ἐλάσσονα.

'Υποδ. Χωρίς βλάβη τῆς γενικότητας (γιατί; μπορεῖτε νά συλλογιστῆτε πάνω στήν ὁρίζουσα $D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1\rho} \\ \alpha_{\rho 1} & \cdots & \alpha_{\rho\rho} \end{vmatrix}$ ἡ ὑπόθεση διατυπώνεται τότε ἔτσι:

1ο $D \neq 0$ 2ο $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1\rho} & \alpha_{1\tau} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{\rho 1} & \cdots & \alpha_{\rho\rho} & \alpha_{\rho\tau} \\ \alpha_{\sigma 1} & \cdots & \alpha_{\sigma\rho} & \alpha_{\sigma\tau} \end{vmatrix} = 0$

γιά $\rho+1 \leqq \sigma \leqq \mu$ καί $\rho+1 \leqq \tau \leqq \nu$. Θά δεῖξτε τώρα ὅτι συνέπεια αὐτῆς τῆς ὑποθέσεως εἶναι ἡ ἐπιλυσιμότητα τοῦ συστήματος

$$\begin{matrix} \alpha_{11}x_1+\ldots+\alpha_{1\nu}x_\nu = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{\mu 1}x_1+\ldots+\alpha_{\mu\nu}x_\nu = 0 \end{matrix}$$

μέ αὐθαίρετες τίς τιμές τῶν $x_{\rho+1}, \ldots, x_\nu$ καί ἀπ'αὐτό θά συμπεράνετε ὅτι μηδενίζονται ὅλες οἱ ὁρίζουσες τάξεως ρ+1 ἀπό τόν πίνακα

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{\mu 1} & \cdots & \alpha_{\mu\nu} \end{pmatrix}.$$

60.* Γιά νά εἶναι τό σύστημα (47.1) ἐπιλύσιμο πρέπει καί ἀρκεῖ οἱ δυό πίνακες $\begin{pmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{\mu 1} \dots \alpha_{\mu\nu} \end{pmatrix}$ καί $\begin{pmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{1\nu} & \beta_1 \\ \alpha_{\mu 1} \dots \alpha_{\mu\nu} & \beta_\mu \end{pmatrix}$ νά ἔχουν τήν ἴδια διάσταση.

Ὑποδ. Ἡ ἀπόδειξη μοιάζει μέ τήν ἀπόδειξη τῆς Προτάσεως 3, (§ 52).

61.* ρ νιάδες ἀριθμῶν

$$\begin{array}{l} (\xi_{11}, \xi_{12}, \dots, \xi_{1\nu}) \\ (\xi_{21}, \xi_{22}, \dots, \xi_{2\nu}) \\ \dots\dots\dots\dots \\ (\xi_{\rho 1}, \xi_{\rho 2}, \dots, \xi_{\rho\nu}) \end{array}$$

λέγονται γραμμικά ἐξαρτημένες, ἐάν ὑπάρχουν ρ ἀριθμοί λ_1, $\lambda_2, \dots, \lambda_\rho$, ὄχι ὅλοι μηδενικοί, τέτοιοι ὥστε νά ἰσχύουν οἱ ν σχέσεις

$$\begin{array}{l} \lambda_1\xi_{11} + \lambda_2\xi_{21} + \dots + \lambda_\rho\xi_{\rho 1} = 0 \\ \lambda_1\xi_{12} + \lambda_2\xi_{22} + \dots + \lambda_\rho\xi_{\rho 2} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_1\xi_{1\nu} + \lambda_2\xi_{2\nu} + \dots + \lambda_\rho\xi_{\rho\nu} = 0 \end{array} .$$

Ἐάν τέτοιοι ἀριθμοί λ δέν ὑπάρχουν, οἱ νιάδες λέγονται γραμμικά ἀνεξάρτητες. Δεῖξτε τώρα ὅτι γιά νά εἶναι οἱ ρ νιάδες γραμμικά ἀνεξάρτητες, πρέπει καί ἀρκεῖ ὁ πίνακας

$$\begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \dots & \xi_{1\nu} \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_{\rho 1} & \xi_{\rho 2} \dots & \xi_{\rho\nu} \end{pmatrix}$$

νά ἔχη διάσταση ρ.

Διατυπῶστε μιάν ἄμεση συνέπεια τούτου γιά μ νιάδες, ὅπου $\mu > \nu$.

Παρατήρηση. Στόν παραπάνω ὁρισμό δέν ἀποκλείουμε τήν τιμή $\rho = 1$ γιά τό φυσικό ἀριθμό ρ. Αὐτό σημαίνει πώς ἡ μηδενική νιάδα $(0, 0, \dots, 0)$ εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ γραμμικά ἐξαρτημένη καί ἡ μή μηδενική $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\nu)$, ὅπου δηλ. $|\xi_1| + \dots + |\xi_\nu| \neq 0$, γραμμικά ἀνεξάρτητη.

62.* Ὁρισμός. Ἡ νιάδα

$(m_1\xi_{11} + m_2\xi_{21} + \dots + m_\rho\xi_{\rho 1}, \dots, m_1\xi_{1\nu} + m_2\xi_{2\nu} + \dots + m_\rho\xi_{\rho\nu})$

ὅπου $m_1, m_2, \dots, m_\rho$ ρ αὐθαίρετα δοσμένοι ἀριθμοί, λέγεται γραμμικός συνδυασμός τῶν ρ νιάδων

$(\xi_{11}, \dots, \xi_{1\nu})$, $(\xi_{21}, \dots, \xi_{2\nu})$, ..., $(\xi_{\rho 1}, \dots, \xi_{\rho\nu})$.

Δεῖξτε ὅτι ἕνα ὁ μ ο γ ε ν έ ς γραμμικό σύστημα (54.1) διαστάσεως $\delta < \nu$, ἔχει ἄπειρες ὁμάδες ἀπό ν–δ γραμμικά ἀνεξάρτητες λύσεις, ὅτι κάθε γραμμικός συνδυασμός τῶν ν–δ λύσεων μιᾶς τέτοιας ὁμάδας εἶναι λύση τοῦ συστήματος καί ὅτι κάθε λύση τοῦ συστήματος εἶναι γραμμικός συνδυασμός τῶν ν–δ λύσεων τῆς ὁμάδας πού θεωροῦμε.

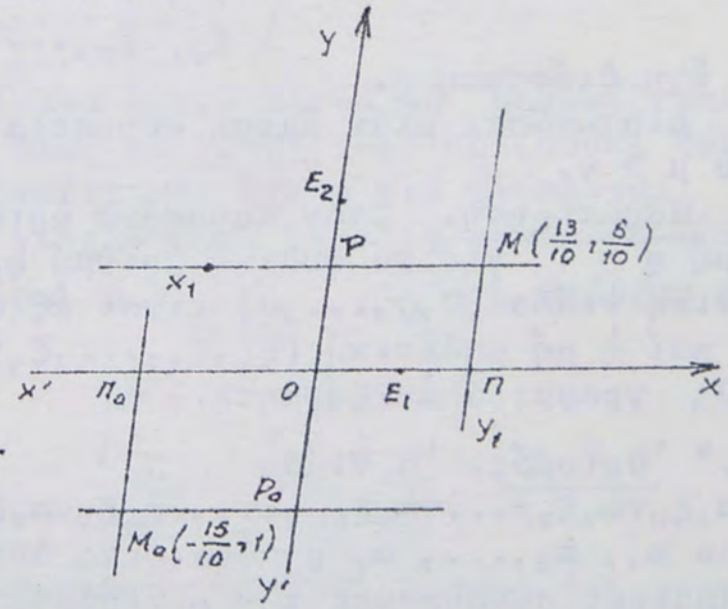
Κατά ταῦτα ἡ "γενική λύση" τοῦ συστήματος εἶναι γραμμικός συνδυασμός (μέ ν−δ αὐθαιρέτους πολλαπλασιαστές $m_1, \ldots m_{\nu-\delta}$) ν−δ γραμμικῶς ἀνεξάρτητων λύσεων τοῦ συστήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΗΜΕΙΟΥ.

§ 55. Εἶναι γνωστό πῶς καθορίζεται ἡ θέση ἑνός σημείου στό ἐπίπεδο μέ τίς ἀποστάσεις του ἀπό δυό καθέτους ἄξονας μέσα στό ἐπίπεδο, δηλαδή μέ δυό ἀριθμούς, ἀφοῦ γίνη ἐκλογή μιᾶς μονάδας μήκους. Μιά γενίκευση τῆς μεθόδου αὐτῆς εἶναι τά παρακάτω:



Ἄς εἶναι X΄X καί Y΄Y δυό (ἀπέρατες) εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου πού κόβονται σέ ἕνα σημεῖο O. Πάνω στήν X΄X παίρνουμε τό O γιά ἀρχή συντεταγμένων καί ἕνα σημεῖο $E_1 \neq O$ γιά μοναδιαῖο σημεῖο· ὅμοια: πάνω στήν Y΄Y παίρνουμε γιά ἀρχή τό O καί ἕνα σημεῖο $E_2 \neq O$ γιά μοναδιαῖο σημεῖο. Ὕστερα ἀπό τίς ἐκλογές αὐτές ἀντιστοιχεῖ σέ κάθε σημεῖο M τοῦ ἐπιπέδου ἕνα ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν (x,y) ὡς ἑξῆς: Ἀπό τό M φέρνουμε τήν εὐθεία $MY_1//OY$ καί $MX_1//OX$. Ἄς εἶναι Π καί P τά σημεῖα ὅπου αὐτές οἱ εὐθεῖες κόβουν τούς ἄξονες Χ΄Χ καί Υ΄Υ. Τό Π ἔχει πάνω στόν ΟΧ μιάν τετμημένη $x = (\overline{O\Pi})$, τό Ρ ἔχει πάνω στόν ΟΥ μιάν τετμημένη $y = (\overline{OP})$. Ἔτσι στό Μ ἀντιστοιχεῖ μονότροπα τό διατεταγμένο ζεῦγος ἀριθμῶν (x,y).

Ἀντίστροφα, κάθε ζεῦγος (x_o,y_o) εἶναι ἀντίστοιχο ἑνός σημείου M_o τοῦ ἐπιπέδου· τό M_o κατασκευάζεται προφανῶς ὡς ἑξῆς: Πάνω στόν ἄξονα ΟΧ θεωροῦμε τό σημεῖο Π_o πού ἔχει τετμημένη x_o καί πάνω στόν ΟΥ, τό σημεῖο P_o μέ τετμημένη y_o. Ἀπό τό Π_o φέρνουμε τήν παράλληλη πρός τόν ΟΥ, ἀπό τό P_o τήν παράλληλη πρός τόν ΟΧ.

Τό σημεῖο τομῆς των εἶναι τό ζητούμενον M_o.

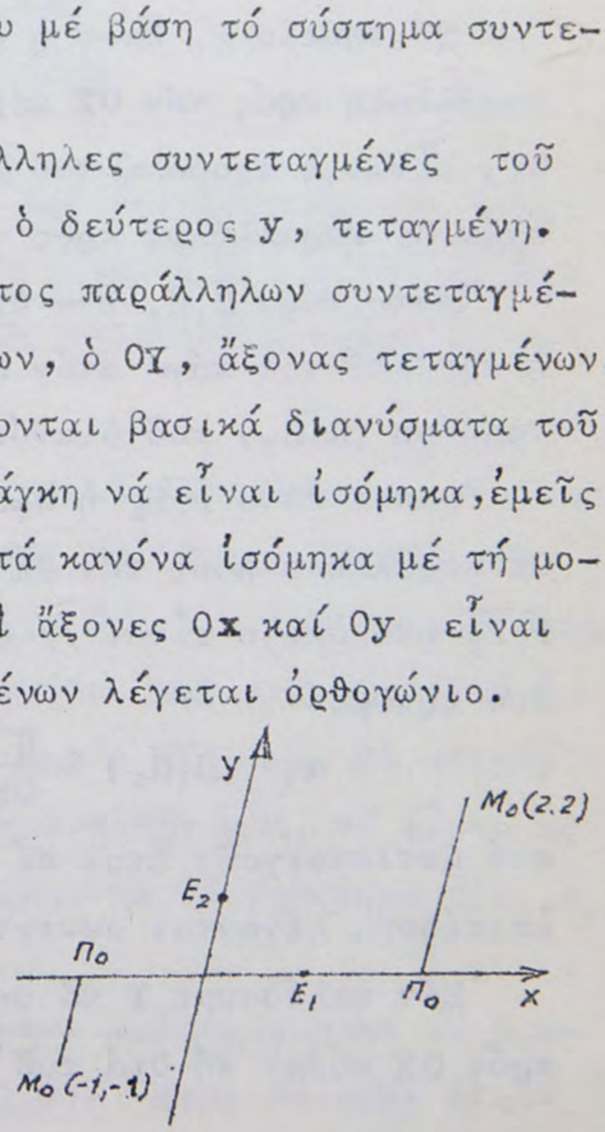
Ἡ παραπάνω ἀντίστοίχιση διατεταγμένων ζευγῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν (x,y) στά σημεῖα Μ τοῦ ἐπιπέδου λέγεται "ἀναλυτική παράσταση τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου μέ βάση τό σύστημα συντεταγμένων ΧΟΥ".

Οἱ ἀριθμοί x, y λέγονται παράλληλες συντεταγμένες τοῦ σημείου Μ, ὁ πρῶτος x, τετμημένη, ὁ δεύτερος y, τεταγμένη.

Τό Ο λέγεται ἀρχή τοῦ συστήματος παράλληλων συντεταγμένων, ὁ ἄξονας ΟΧ, ἄξονας τετμημένων, ὁ ΟΥ, ἄξονας τεταγμένων.

Τά διανύσματα $\overline{OE}_1$ καί $\overline{OE}_2$ λέγονται βασικά διανύσματα τοῦ συστήματος· φυσικά δέν ὑπάρχει ἀνάγκη νά εἶναι ἰσόμηκα, ἐμεῖς ὅμως παρακάτω θά τά ὑποθέτουμε κατά κανόνα ἰσόμηκα μέ τή μονάδα μήκους πού ἐκλέξαμε. Ὅταν οἱ ἄξονες Ox καί Oy εἶναι κάθετοι, τό σύστημα τῶν συντεταγμένων λέγεται ὀρθογώνιο.

56. Δεύτερος τρόπος κατασκευῆς τοῦ σημείου $M_o(x_o,y_o)$, δηλαδή τοῦ σημείου πού ἔχει συντεταγμένες (x_o,y_o), μέ χάραξη μιᾶς μόνο παράλληλης εὐθείας, εἶναι ὁ ἀκόλουθος, πού βασίζεται στίς ἐν-

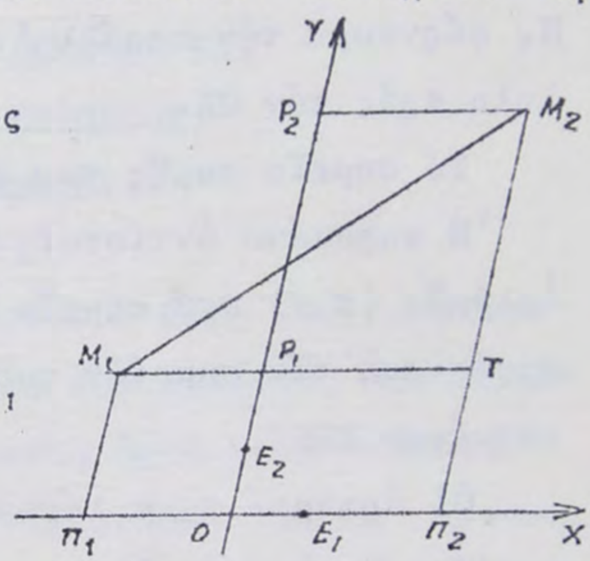


νοιες τοῦ § 26:

Ἀπό τήν ἀρχή Ο προχωροῦμε πάνω στόν ΟΧ κατά τό διάνυσμα $\overline{O\Pi_o}$ πού ἔχει τετμημένη x_o. Ἀπό τό πέρας Π_o προχωροῦμε π α ρ ά λ λ η λ α πρός τόν ἄξονα ΟΥ κατά τό διάνυσμα $\overline{\Pi_o M_o}$ πού ἔχει τετμημένη y_o. Τό σημεῖο M_o ὅπου καταλήγουμε, εἶναι τό ζητούμενο.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

§ 57. Ἄς εἶναι M_1 ἕνα σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου. Τό σημεῖο Π_1 ὅπου ἡ διά τοῦ M_1 παράλληλη πρός τόν ΟΥ κόβει τόν ΟΧ, λέγεται, ὅπως εἶναι γνωστό, προβολή τοῦ M_1 πάνω στόν ΟΧ παραλλήλως πρός τόν ΟΥ.



Ὅμοια:

Τό σημεῖο P_1 ὅπου ἡ διά τοῦ M_1 παράλληλη πρός τόν ΟΧ κόβει τόν ΟΥ, εἶναι ἡ προβολή τοῦ M_1 πάνω στόν ΟΥ παραλλήλως πρός τόν ΟΧ.

Ἔστω τώρα $\overline{M_1M_2}$ ἕνα διάνυσμα μέσα στό ἐπίπεδο καί $\overline{\Pi_1\Pi_2}$ ἡ προβολή του πάνω στόν ΟΧ παραλλήλως πρός τόν ΟΥ. Ἡ τετμημένη $(\overline{\Pi_1\Pi_2})$ τοῦ διανύσματος $\overline{\Pi_1\Pi_2}$ λέγεται τετμημένη τοῦ $\overline{M_1M_2}$.

Ὅμοια ἔστω $\overline{P_1P_2}$ ἡ προβολή τοῦ διανύσματος $\overline{M_1M_2}$ πάνω στόν ΟΥ παράλληλα πρός τόν ΟΧ· ἡ τετμημένη $(\overline{P_1P_2})$ τοῦ διανύσματος $\overline{P_1P_2}$ (τό ὁποῖο εἶναι // OE_2) λέγεται τεταγμενη τοῦ $\overline{M_1M_2}$. Οἱ δυό ἀριθμοί

$$\alpha_1 = (\overline{\Pi_1\Pi_2}) = \frac{\overline{\Pi_1\Pi_2}}{OE_1} \qquad \alpha_2 = (\overline{P_1P_2}) = \frac{\overline{P_1P_2}}{OE_2}$$

πού ἀντιστοιχοῦν ἔτσι σέ κάθε ἐφαρμοσμένο διάνυσμα $\overline{M_1M_2}$ τοῦ ἐπιπέδου, λέγονται συντεταγμένες του ὡς πρός τό σύστημα ΧΟΥ.

Ἐάν καλέσουμε Τ τό σημεῖο ὅπου ἡ διά τοῦ M_1 παράλληλη πρός ΟΧ κόβει τή διά τοῦ M_2 παράλληλη πρός ΟΥ, τότε προφανῶς

$\overline{M_1T} = \overline{\Pi_1\Pi_2}$, $\overline{TM_2} = \overline{P_1P_2}$, ἄρα καί

$$\text{τετμ. τοῦ } \overline{M_1M_2} = \alpha_1 = \frac{\overline{M_1T}}{\overline{OE_1}}$$

$$\text{τεταγμ. τοῦ } \overline{M_1M_2} = \alpha_2 = \frac{\overline{TM_2}}{\overline{OE_2}} .$$

Εἰδικά: ἕνα μηδενικό διάνυσμα $\overline{M_1M}$ ἔχει συντεταγμένες $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Τήν ἐν γένει θλασμένη γραμμή M_1TM_2 θά τήν καλοῦμε διάγραμμα τῶν συντεταγμένων καί τό τρίγωνο M_1TM_2 τρίγωνο γιά τίς συντεταγμένες τοῦ διανύσματος $\overline{M_1M_2}$. Ἕνα διάνυσμα $\overline{OM}$ μέ ἀρχή $O(o,o)$ καί πέρας τό $M(\mathbf{x},y)$ ἔχει συντεταγμένες $\alpha_1 = \mathbf{x}$, $\alpha_2 = y$.

Ἀπό τίς σχέσεις (57.1) καί ἀπό τήν $\overline{M_1M_2} = \overline{M_1T} + \overline{TM_2}$ (βλ. § 23) ἕπεται ἡ σχέση

(57.2) $$\overline{M_1M_2} = \alpha_1\overline{OE}_1 + \alpha_2\overline{OE}_2$$

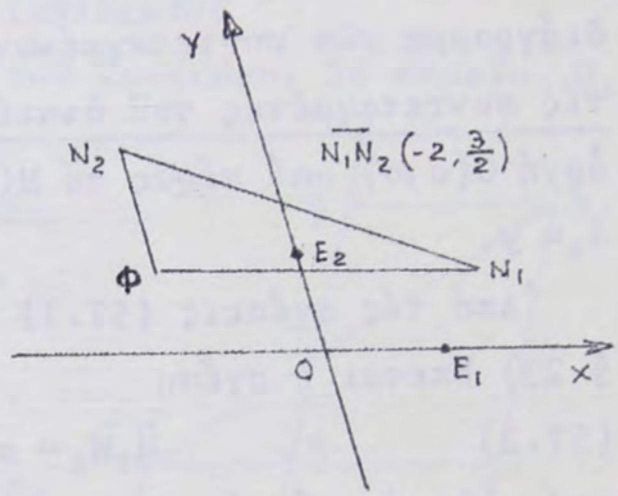
καί εἰδικά γιά τό σημεῖο $M(\mathbf{x},y)$ ἡ σχέση

(57.3) $$\overline{OM} = \mathbf{x}\overline{OE}_1 + y\overline{OE}_2$$

Δυό ἴσα διανύσματα: $\overline{M_1M_2} = \overline{N_1N_2}$ τοῦ ἐπιπέδου ἔχουν ἴσες ὁμώνυμες συντεταγμένες: τετμ. $\overline{M_1M_2}$ = τετμ. $\overline{N_1N_2}$, τεταγμ.$\overline{M_1M_2}$ = = τεταγμ. $\overline{N_1N_2}$. Ἀντίστροφα: ἀπό τίς τελευταῖες σχέσεις ἕπεται ἡ $\overline{M_1M_2} = \overline{N_1N_2}$.

§ 58. Ἕνα ἐλεύθερο διάνυσμα $\overline{\alpha}$ πού ἔχει διεύθυνση τή διεύθυνση μιᾶς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου XOY θά λέγεται παράλληλο μέ τό ἐπίπεδο: $\overline{\alpha}$//XOY. Ὑπάρχουν τότε ἄπειρα, ἴσα μεταξύ τους ἐφαρμοσμένα διανύσματα $\overline{M_1M_2}$ τοῦ ἐπιπέδου XOY πού ἔχουν τά ἴδια στοιχεῖα: μῆκος, διεύθυνση καί φορά, μέ τό $\overline{\alpha}$. Οἱ κοινές συντεταγμένες (α_1,α_2) τῶν διανυσμάτων αὐτῶν $\overline{M_1M_2}$ θά εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ οἱ συντεταγμένες τοῦ $\overline{\alpha}$. Συμβολικά θά γράφουμε $\overline{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2)$ ἤ $\overline{\alpha}(\alpha_1/\alpha_2)$.

Τό μηδενικό ἐλεύθερο διάνυσμα (πού πρέπει φυσικά νά θεωρῆται // XOY) ἔχει συντεταγμένες (0,0). Ἔτσι σέ κάθε ἐλεύθερο διάνυσμα $\overline{\alpha}$//ΧΟΥ ἀντιστοιχεῖ ἕνα καί μόνο ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν: τό ζεῦγος τῶν συντεταγμένων του (α_1, α_2). 'Αντίστροφα: κάθε διατεταγμένο ζεῦγος ἀριθμῶν (β_1, β_2) εἶναι ἀντίστοιχο ἑνός καί μόνο ἑνός ἐλευθέρου διανύσματος $\overline{\beta}$//ΧΟΥ, πού τά τρία στοιχεῖα του προσδιορίζονται ὡς ἑξῆς: 'Από τό τυχόν σημεῖο N_1 τοῦ ΧΟΥ προχωροῦμε, παράλληλα πρός τόν ΟΧ καί ὁμόρροπα μέ τό $\overline{OE_1}$ ἄν $\beta_1 > 0$, ἀντίρροπα ἄν $\beta_1 < 0$ κατά ἕνα μῆκος $N_1\Phi = \beta_1 \cdot OE_1$. 'Από τό σημεῖο Φ, ὅπου φθάσαμε, προχωροῦμε παράλληλα πρός τόν ΟΥ καί ὁμόρροπα μέ τό $\overline{OE_2}$ ἄν $\beta_2 > 0$, ἀντίρροπα ἄν $\beta_2 < 0$, κατά ἕνα μῆκος $\Phi N_2 = |\beta_2| \cdot OE_2$.



Τό ζητούμενο διάνυσμα $\overline{\beta}$ ἔχει προφανῶς γιά στοιχεῖα τό μῆκος, τή διεύθυνση καί τή φορά, τοῦ διανύσματος $\overline{N_1N_2}$.

'Η παραπάνω ἀντιστοιχία τῶν διατεταγμένων ζευγῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν πρός τά ἐλεύθερα διανύσματα τά // μέ τό ΧΟΥ ἔχει λοιπόν τήν ἰδιότητα, σέ δυό διαφορετικά (=ἄνισα) ἐλεύθερα διανύσματα νά ἀντιστοιχοῦν δυό διαφορετικά διατεταγμένα ζεύγη πραγματικῶν ἀριθμῶν καί ἀντιστρόφως δυό διαφορετικά ζεύγη ἀριθμῶν νά εἶναι ἀντίστοιχα δυό διαφορετικῶν ἐλευθ. διανυσμάτων.

Γι'αὐτό τή λέμε ἀμφιμονότροπη ἤ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία. 'Επίσης λέμε ὅτι ἡ παραπάνω ἀντιστοιχία παρέχει μιάν ἀμφιμονοσήμαντη ἀναλυτική παράσταση τῶν ἐλευθερ. διανυσμάτων πού εἶναι // ΧΟΥ.

Τά ἐλεύθερα διανύσματα πού θεωροῦμε στούς παρακάτω παραγράφους αὐτοῦ τοῦ κεφαλαίου ἐξυπακούονται ὅλα παράλληλα μέ τό ΧΟΥ.

§ 59. ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Δυό ἐπακόλουθα διανύσματα $\overline{M_1M_2}$ καί $\overline{M_2M_3}$ τοῦ ΧΟΥ προβάλλονται πάνω στόν ΟΧ παράλληλα πρός τόν ΟΥ κατά δυό ἐπίσης ἐπακόλουθα διανύσματα $\overline{\Pi_1\Pi_2}$ καί $\overline{\Pi_2\Pi_3}$. Ἄρα κατά τό θεώρημα τοῦ Chasles (§ 27):

$$\text{τετμ}\overline{M_1M_3} = (\overline{\Pi_1\Pi_3}) = (\overline{\Pi_1\Pi_2})+(\overline{\Pi_2\Pi_3}) = \text{τετμ.}\overline{M_1M_2}+\text{τετμ.}\overline{M_2M_3}$$

Ὅμοια πράγματα ἰσχύουν γιά τίς τεταγμένες. Ἀπ' ἐδῶ ἕπεται ἡ

<u>Πρόταση 1</u>. Οἱ συντεταγμένες τοῦ ἀθροίσματος $\overline{\alpha}+\overline{\beta}$ δύο ἐλευθ. διανυσμάτων $\overline{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2)$ καί $\overline{\beta}(\beta_1,\beta_2)$ ἰσοῦνται ἀντιστοίχως μέ τό ἄθροισμα τῶν ὁμώνυμων συντεταγμένων τῶν $\overline{\alpha}$ καί $\overline{\beta}$, δηλ. εἶναι $(\alpha_1+\beta_1,\ \alpha_2+\beta_2)$.

<u>Πόρισμα 1</u>. Οἱ συντεταγμένες ἑνός διανύσματος $\overline{M_1M_2}$ τοῦ ΟΧΥ συνδέονται ὡς ἑξῆς μέ τίς συντεταγμένες (x_1,y_1) καί (x_2,y_2) τῶν ἄκρων του:

τετμ. τοῦ $\overline{M_1M_2} = x_2-x_1$ = τετμ. τοῦ πέρατος−τετμ. τῆς ἀρχῆς του

τεταγμ. τοῦ $\overline{M_1M_2} = y_2-y_1$ = τεταγμ. τοῦ πέρατος − τεταγμ. τῆς ἀρχῆς του.

Διότι $\qquad \overline{OM_1}+\overline{M_1M_2}=\overline{OM_2}$.

<u>Πόρισμα 2</u>. Οἱ συντεταμγένες (x,y) τῆς μέσης Μ ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος M_1M_2 τοῦ ΧΟΥ ἰσοῦνται μέ τά ἡμιαθροίσματα τῶν ὁμώνυμων συντεταγμένων (x_1,y_2) καί (x_2,y_2) τῶν ἄκρων:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \quad , \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

Πράγματι ἀπό τή σχέση $\overline{M_1M}=\overline{MM_2}$ ἕπονται, κατά τό πόρισμα αἱ σχέσεις $x-x_1=x_2-x$, $y-y_1=y_2-y$.

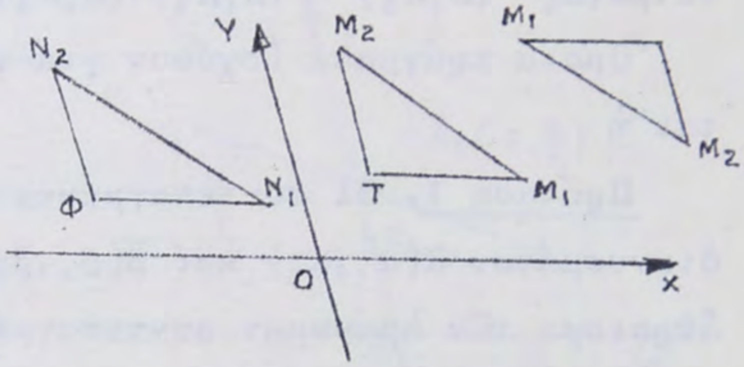
§ 60. <u>Πρόταση 2</u>. Ἐάν τά δυό διανύσματα $\overline{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2)$, $\overline{\beta}(\beta_1,\beta_2)$ εἶναι παράλληλα καί $\overline{\alpha}\neq 0$, τεθῆ δέ $\dfrac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}=\lambda$, τότε

$$(60.1) \qquad \beta_1=\lambda\alpha_1 \quad , \quad \beta_2=\lambda\alpha_2 \ . \quad ,$$

δηλαδή οἱ συντεταγμένες τοῦ ἑνός εἶναι ἀνάλογες πρός τίς ὁμώνυμες συντεταγμένες τοῦ ἄλλου διανύσματος.

Ἀντιστρόφως: ἐάν οἱ συντεταγμένες τοῦ ἑνός διανύσματος εἶναι ἀνάλογες πρός τίς ὁμώνυμες συντεταγμένες τοῦ ἄλλου, τότε τά δυό διανύσματα εἶναι παράλληλα.

Ἡ ἀπόδειξη προκύπτει εὔκολα ἀπό τήν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων M_1TM_2 καί $N_1\Phi N_2$ σέ συνδυασμό μέ τήν ἰδιότητα: $\overline{M_1T} \uparrow\uparrow \overline{N_1\Phi}$ ἤ $\overline{M_1T} \uparrow\downarrow \overline{N_1\Phi}$ καθόσο $\overline{\alpha} \uparrow\uparrow \overline{\beta}$ ἤ $\overline{\alpha} \uparrow\downarrow \overline{\beta}$.



<u>Πόρισμα 1</u>. Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά τήν παραλληλία τῶν διανυσμάτων $\overline{\alpha}(\alpha_1, \alpha_2)$ καί $\overline{\beta}(\beta_1, \beta_2)$ εἶναι ὁ μηδενισμός τῆς ὁρίζουσας

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} : \ \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0 \ .$$

<u>Πόρισμα 2</u>. Δυό ἀντίθετα διανύσματα $\overline{\alpha}$ καί $-\overline{\alpha}$ ἔχουν ὁμώνυμες συντεταγμένες ἀντίθετες: ἐάν $\overline{\alpha}(\alpha_1, \alpha_2)$ τότε $-\overline{\alpha}(-\alpha_1, -\alpha_2)$.

<u>Πόρισμα 3</u>. Ἡ διαφορά $\overline{\alpha}-\overline{\beta}$ δυό διανυσμάτων $\overline{\alpha}(\alpha_1, \alpha_2)$, $\overline{\beta}(\beta_1, \beta_2)$ ἔχει συντεταγμένες $(\alpha_1-\beta_1, \alpha_2-\beta_2)$. Γενικώτερα:

Ὁ "γραμμικός συνδυασμός" $\lambda\overline{\alpha}+\mu\overline{\beta}$, ὅπου λ καί μ πραγματικοί ἀριθμοί, ἔχει συντεταγμένες $(\lambda\alpha_1+\mu\beta_1 \, , \, \lambda\alpha_2+\mu\beta_2)$.

ΜΕΡΙΚΟΣ ΛΟΓΟΣ

§ 61. Ἄς εἶναι $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ δυό διάφορα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ΧΟΥ καί $M(x,y)$ τυχόν σημεῖο τῆς εὐθείας M_1M_2. Ὁ μερικός λόγος (M_1M_2M) δίνεται ἀπό τίς σχέσεις

$$(M_1M_2M) = \frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}} = \frac{x-x_1}{x_2-x} = \frac{y-y_1}{y_2-y} \quad .$$

Ἐάν δοθῆ ἡ τιμή λ τοῦ μερ. λόγου (M_1M_2M) καί ζητηθοῦν οἱ συντεταγμένες τοῦ σημείου Μ, πού "διαιρεῖ τό τμῆμα M_1M_2 (ἐσωτερικῶς ἄν $\lambda > 0$, ἐξωτερικῶς ἄν $\lambda < 0$) κατά τό λόγο λ" τότε δέν ἔχουμε παρά νά θέσουμε τά δυό τελευταῖα κλάσματα ἴσα μέ λ καί νά ἐπιλύσουμε ὡς πρός x καί y ἀντιστοίχως. Ἔτσι βρίσκουμε ἄν $\lambda \neq -1$.

$$(61.1) \qquad x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \quad , \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \quad .$$

Ἐάν $\lambda = -1$, τότε, κατά τή συμφωνία μας, τό Μ εἶναι τό ἐπ' ἄπειρο σημεῖο τῆς εὐθείας M_1M_2 γιά τό ὁποῖο δέν εἰσάγονται παράλληλες συντεταγμένες.

ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΩΝ Η ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

§ 62. Ἄς εἶναι $M_1(x_1,y_1), \ldots, M_\nu(x_\nu,y_\nu)$ ν σημεῖα τοῦ ΧΟΥ. Θεωροῦμε τοποθετημένες σ'αὐτά μάζες $m_1, \ldots, m_\nu$, ὁμόσημες ἤ ὄχι· στήν περίπτωση ὅπου δέν εἶναι ὁμόσημες ὑποθέτουμε $m_1 + \ldots + m_\nu \neq 0$. Ἡ μηχανική καλεῖ κέντρο τῶν μαζῶν αὐτῶν ἕνα σημεῖο Κ τοῦ χώρου τό ὁποῖο ἔχει τήν ἑξῆς ἰδιότητα: γιά κάθε σημεῖο Ρ τοῦ χώρου ἔχουμε

$$(62.1) \qquad m_1\overline{M_1P} + \ldots + m_\nu\overline{M_\nu P} = (m_1 + \ldots + m_\nu)\ \overline{KP} \ .$$

Ἀπόδειξη ὅτι ἕνα τέτοιο σημεῖο Κ ὑπάρχει καί εἶναι μονότροπα ὁρισμένο:

1) Γιά νά ἔχῃ ἕνα σημεῖο Κ τήν ἰδιότητα (62.1) πρέπει νά εἶναι (ἄν λάβουμε $P \equiv K$):

$$(62.2) \qquad m_1\overline{M_1K} + \ldots + m_\nu\overline{K_\nu M} = (m_1 + \ldots + m_\nu)\ \overline{KK} = 0 \ .$$

Αὐτό ὅμως καί ἀρκεῖ, διότι τότε γιά τυχόν σημεῖο Ρ εἶναι

$$\begin{aligned} m_1\overline{M_1P} + \ldots + m_\nu\overline{M_\nu P} &= m_1(\overline{M_1K} + \overline{KP}) + \ldots + m_\nu(\overline{M_\nu K} + \overline{KP}) \\ &= m_1\overline{MK} + \ldots + m_\nu\overline{M_\nu K} + m_1\overline{KP} + \ldots + m_\nu\overline{KP} \\ &= 0 + (m_1 + \ldots + m_\nu)\overline{KP}. \end{aligned}$$

2) Τό ζητούμενο σημεῖο Κ πρέπει νά βρίσκεται μέσα στό ΧΟΥ. Διότι, ὅταν τό Ρ παρθῆ μέσα στό ΧΟΥ, τό $m_1\overline{M_1P} + \ldots + m_\nu\overline{M_\nu P}$ εἶναι διάνυσμα //μέ ΧΟΥ, ἄρα καί τό ἴσο του $(m_1 + \ldots + m_\nu)\overline{KP}$,

συνεπῶς τό $\overline{KP}$ εἶναι τότε // μέ XOY καί ἑπομένως τό K βρίσκεται μέσα στό XOY.

3) Ὑπάρχει ἕνα σημεῖο $K(x_0, y_0)$ τοῦ XOY γιά τό ὁποῖο ἰσχύει ἡ (62.2).

Γι'αὐτό πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι

$$m_1(x_0-x_1)+\ldots+m_\nu(x_0-x_\nu)=0 \quad \text{ἤ} \quad x_0=\frac{m_1x_1+\ldots+m_\nu x_\nu}{m_1+\ldots+m_\nu}$$

$$m_1(y_0-y_1)+\ldots+m_\nu(y_0-y_\nu)=0 \quad \text{ἤ} \quad y_0=\frac{m_1y_1+\ldots+m_\nu y_\nu}{m_1+\ldots+m_\nu}\ .$$

4) Τό σημεῖο K εἶναι μονότροπα ὁρισμένο. Διότι ἀπό τίς σχέσεις $m_1\overline{M_1P}+\ldots+m_\nu\overline{M_\nu P}=(m_1+\ldots+m_\nu)\,\overline{KP}$

$$m_1\overline{M_1P}+\ldots+m_\nu\overline{M_\nu P}=(m_1+\ldots+m_\nu)\,\overline{K^*P}$$

ἕπεται ἡ $(m_1+\ldots+m_\nu)\ \overline{KP}=(m_1+\ldots+m_\nu)\,\overline{K^*P}$, ἄρα ἡ $\overline{KP}=\overline{K^*P}$, ἄρα $K\equiv K^*$.

Στά παραπάνω σημεῖα $M_1, \ldots, M_\nu$ ἄς ἔχουν ἐφαρμοστῆ παράλληλες δυνάμεις. Τό κέντρο τους ὁρίζεται καί βρίσκεται ὅπως παραπάνω, ἀφοῦ ἀντικαταστήσουμε τίς μάζες $m_1, \ldots, m_\nu$ μέ τά προσημασμένα μέτρα $\delta_1, \ldots, \delta_\nu$ τῶν δυνάμεων.

ΑΛΛΑΓΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΜΕ ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΤΟΥ

§ 63. Ἐάν μέσα στό ἐπίπεδο XOY πάρουμε γιά νέα ἀρχή συντεταγμένων ἕνα σημεῖο O΄ πού ἔχει παλιές συντεταγμένες (δηλαδή συντεταγμένες ὡς πρός τούς ἀρχικούς ἄξονες OX, OY) τό ζεῦγος (x_0, y_0) καί γιά νέα βασικά διανύσματα, δυό διανύσματα $\overline{O'E'_1}$ καί $\overline{O'E'_2}$ ἴσα ἀντιστοίχως μέ τά βασικά $\overline{OE}_1$ καί $\overline{OE}_2$ τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος, τότε οἱ νέοι ἄξονες O΄X΄ καί O΄Y΄ θά εἶναι παράλληλοι καί προσανατολισμένοι ὁμόρροπα μέ τούς παλιούς OX καί OY, οἱ δέ παλιές συντεταγμένες (x,y) τοῦ ὁποιουδήποτε σημείου M τοῦ ἐπιπέδου θά συνδέωνται μέ τίς νέες συντεταγμένες (x',y') τοῦ ἴδιου σημείου M διά τῶν σχέσεων $x=x_0+x'$, $y=y_0+y'$ διότι

$x\,\overline{OE}_1 + y\overline{OE}_2 = \overline{OM}$

$= \overline{OO'} + \overline{O'M} =$

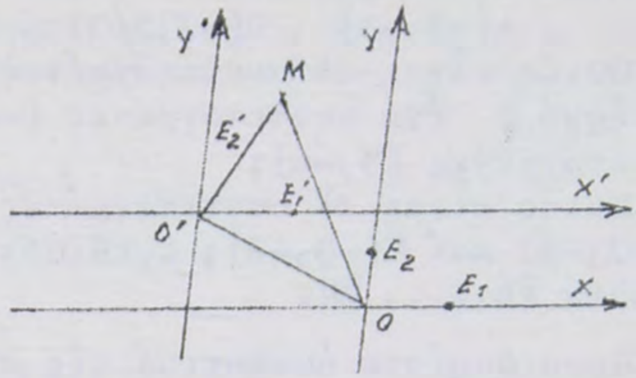
$(x_0\overline{OE}_1 + y_0\overline{OE}_2) +$

$+ (x'\overline{O'E'_1} + y'\overline{O'E'_2}) =$

$= x_0\overline{OE}_1 + y_0\overline{OE}_2 +$

$+ x'\overline{OE}_1 + y'\overline{OE}_2 =$

$= (x_0+x')\overline{OE}_1 + (y_0+y')\overline{OE}_2$.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ .

63. Σχεδιάστε μέ τή μέθοδο τοῦ § 56 τά ἀκόλουθα σημεῖα
$A(25/5,5)$, $B(-3,3/1,5)$, $\Gamma(-2,4/-4)$, $\Delta(1,8/-3,5)$
παίρνοντας τή γωνία $\widehat{XOY} = 60$ μοῖρες καί $OE_1 = 2$ cm, $OE_2 = 1$cm.

Κατασκευάστε μέ κανόνα καί διαβήτη σέ ὀ ρ θ ο γ ώ ν ι ο σύστημα συντεταγμένων καί μέ $OE_1 = OE_2 = 1$ cm τά ἀκόλουθα σημεῖα

$Z(+\sqrt{2},+\sqrt{3})$, $H(-\frac{7}{2}, +\sqrt{5})$, $\Theta(-1+\sqrt{6}), -\sqrt{5-\sqrt{2}})$

$I(4\sqrt{2},-2\sqrt{7})$

64. Ποιά σχέση θέσεως, τό ἕνα πρός τό ἄλλο, ἔχουν τά 4 σημεία $A(\alpha_1,\alpha_2)$, $A'(\alpha_1,-\alpha_2)$, $A''(-\alpha_1,-\alpha_2)$, $A'''(-\alpha_1,\alpha_2)$.

Τό σύστημα συντεταγμένων ὑποτίθεται ὁποιοδήποτε.

65 . Ποιά σημεῖα $M(x,y)$ τοῦ ἐπιπέδου παριστάνονται ἀπό τίς ἀκόλουθες σχέσεις παρμένες μιά μιά (μέ ἄλλα λόγια: ποιά σημεῖα ἱκανοποιοῦν μέ τίς συντεταγμένες τους τίς ἀκόλουθες σχέσεις παρμένες μιά μιά): $x = 0$, $y = 0$, $x = 3$, $x = -3$, $y = 5$, , $y = -5$, $x^2-1 = 0$, $x > 3$, $x < -3$, $y > 5$, $y < -5$ $x-5 > 2$, $x^2-1 > 0$, $(y-2)(y-1) < 0$, $|x+2| = 5$, $|y^2| - 4|y| + 3 = 0$, $|x-4| < 3$.

66. Ποιά σημεῖα $M(x,y)$ τοῦ ἐπιπέδου ἱκανοποιοῦν μέ τίς συντεταγμένες των τό σύστημα τῶν σχέσεων $|x| < 3$, $|y| < 3$, ποιά τό σύστημα $|x| \leqq 3$, $|y| \leqq 3$, ποιά τό $x = 3$, $|y| < 3$, ποιά τό $|x| < 2$, $|y| < 5$, ποιά τό $|x| < 2$, $|y| > 5$, ποιά τό $|x| > \vartheta_1$, $|y| > \vartheta_2$ ὅπου ϑ_1, ϑ_2 δοσμένοι θετικοί ἀριθμοι;

67. Σέ ὀρθογ. σύστημα συνταγ. μέ $OE_1 = OE_2 = 1$ cm κατασκευάστε, χρησιμοποιῶντας τά τρίγωνα γιά τίς συντεταγμένες τους, 4 ἐφαρμοσμένα διανύσματα πού ἔχουν ἀντιστοίχως τίς συντεταγμένες $(-3,5)$, $(-\sqrt{5},-2)$, $(4,5/2,5)$, $(7/2, -\sqrt{3})$.

Ποιές εἶναι οἱ συντεταγμένες τῶν διανυσμάτων $\overline{AB}$ καί $\overline{\Gamma\Delta}$ ὅταν τά ἄκρα τους ἔχουν τίς ἀκόλουθες συντεταγμένες:

$A(-5,-3)$, $B(-2,5/3)$, $\Gamma(7/-4,5)$, $\Delta(-3,5/6)$,

ΠΟιές εἶναι οἱ συντεταγμένες τοῦ πέρατος τοῦ $\overline{K\Lambda}$ ὅταν ἡ μέν ἀρχή Κ ἔχη συντεταγμένες $(-4,3)$, τό δέ διάνυσμα ἔχη συντεταγμένες $(5,-6)$;

Ποιές εἶναι οἱ συντεταγμένες τοῦ σημείου Μ, ὅταν $\overline{MN}(-5,-4)$ καί $N(-3,-2)$; Σχεδιάστε καί ὅλα τά παραπάνω διανύσματα $\overline{AB},\ldots,\overline{MN}$.

68. Προσιδορίστε ἀναλυτικά τίς συντεταγμένες τῆς μέσης τοῦ τμήματος ΑΒ καθώς καί τοῦ ΓΔ, ὅπου $A(5,2/7,1)$, $B(-6,4/-3,7)$ $\Gamma(-4,3/6,5)$, $\Delta(3,9/-7,3)$. Σχεδιάστε σέ ὀρθογ.σύστημα συντεταγμ. καί μέ $OE_1 = OE_2 = 1$ cm τά δύο τμήματα ΑΒ καί ΓΔ, διχοτομῆστε τα μέ κανόνα καί διαβήτη, τέλος παραβάλετε τίς ὑπολογισμένες συντεταγμένες μέ ἐκεῖνες πού προκύπτουν ἀπό τό σχέδιο διά μετρήσεων.

69. Οἱ συντεταγμένες τῶν διανυσμάτων πού ἀρχίζουν σέ τυχόν σημεῖον τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονα ΟΧ καί τελειώνουν σέ τυχόν σημεῖον τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονα ΟΥ τί πρόσημα ἔχουν; Ὅμοια ἐρώτηση γιά τίς συντεταγμένες τῶν διανυσμάτων πού ἀρχίζουν σ' ἕνα σημεῖο τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονα ΟΧ καί τελειώνουν σ'ἕνα τοῦ ἀρνητικοῦ ἡμιάξονα ΟΥ. Ὅταν $\overline{\alpha}(-5,3)$, $\overline{\beta}(1/2,-4)$, $\overline{\gamma}(4,3/2)$ τί συντεταγμένες ἔχει τό διάνυσμα $8\overline{\alpha}-4\overline{\beta}+0,5\overline{\gamma}$; Ποιό διάνυσμα παράλληλο πρός ΟΧ πρέπει καί ἀρκεῖ νά προστεθῆ στό $\overline{\alpha}(-5,3)$ γιά νά εἶναι τό ἄθροισμα ἕνα διάνυσμα // ΟΥ, ποιό γιά νά εἶναι τό ἄθροισμα $//\overline{\beta}(1/2,-4)$; Ποιό διάνυσμα παράλληλο πρός $\overline{\gamma}(4,\frac{3}{2})$ πρέπει νά ἀφαιρεθῆ ἀπό τό $\overline{\beta}(\frac{1}{2},-4)$ γιά νά εἶναι τό ἀποτέλεσμα διάνυσμα παράλληλο πρός τό $\overline{\alpha}(-5,3)$;

70. Ἄς εἶναι $\overline{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2)$ καί $\overline{\beta}(\beta_1,\beta_2)$ δυό διανύσματα μή παράλληλα (ἐπομένως καί μή μηδενικά). Δεῖξτε καί ἀναλυτικά καί γεωμετρικά ὅτι τυχόν διάνυσμα $\overline{\gamma}(\gamma_1,\gamma_2)$ μπορεῖ νά ἀναλυθῆ, κατά ἕνα καί μόνο τρόπο ἄλλως τε, σέ ἄθροισμα δυό διανυσμάτων $\overline{\gamma}_\alpha$ καί $\overline{\gamma}_\beta$ παράλληλων ἀντιστοίχως πρός $\overline{\alpha}$ καί $\overline{\beta}$. Κάμετε μιάν ἀριθμητική ἐφαρμογή μέ τά ἑξῆς δεδομένα: $\overline{\alpha}(-6,-3)$, $\overline{\beta}(1,-2)$, $\overline{\gamma}(4,5)$.

71. Ὑπολογίστε τίς συντεταγμένες τοῦ σημείου M_3 πού ἔχει ὡς πρός τά σημεῖα $M_1(4,-3)$ καί $M_2(-1,2)$ μερικό λόγο $(M_1,M_2,M_3)=2$ ἐπίσης τοῦ σημείου M_4 γιά τό ὁποῖο $(M_1M_2M_4) = -5$. Τέλος ὑπολογίστε τό μερικό λόγο $(M_1M_2T_x)$ τοῦ σημείου T_x ὅπου ἡ εὐθεία M_1M_2 κόβει τόν ΟΧ, καθώς καί τόν $(M_1M_2T_y)$, ὅπου T_y τό σημεῖο τομῆς τῆς M_1M_2 μέ τόν ΟΥ.

72. Δεῖξτε γεωμετρικά ὅτι τρία σημεῖα $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_3(x_3,y_3)$ βρίσκονται πάνω σ' εὐθεία, ὅταν καί μόνον ὅταν τά διανύσματα $\overline{P_1P_2}$ καί $\overline{P_1P_3}$ εἶναι παράλληλα. Συμπεράνατε ἀπ' ἐδῶ ὅτι ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά κεῖνται τά τρία σημεῖα πάνω σέ εὐθεία εἶναι ἡ

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} = 0$$

πού γράφεται καί ἔτσι:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

73. Ἐπαληθεῦστε ἀναλυτικά ὅτι τά τέσσερα σημεῖα
$P_1(5,-3)$, $P_2(2,4)$, $P_3(-1,11)$, $P_4(8,-10)$.
βρίσκονται πάνω σέ μιάν εὐθεία καί ὑπολογίστε τό διπλό τους λόγο $(P_1P_2P_3P_4)$. Ἐπαληθεῦστε ἀναλυτικά ὅτι τά 3 σημεῖα
$K_1(-5,-2)$, $K_2(3,-1)$, $K_3(11,0)$
βρίσκονται πάνω σέ εὐθεῖα καί προσδιορίστε τίς συντεταγμένες τοῦ σημείου K_4 τό ὁποῖο μαζί μέ τό K_3 χωρίζει ἁρμονικά τό ζεῦγος K_1, K_2.

74. Δεῖξτε ὅτι τρία τυχόντα διανύσματα $\overline{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2)$, $\overline{\beta}(\beta_1,\beta_2)$, $\overline{\gamma}(\gamma_1,\gamma_2)$ εἶναι "γραμμικῶς ἐξαρτημένα", ὅτι δηλαδή ὑπάρχουν τρεῖς ἀριθμοί λ,μ,ν, ὄχι ὅλοι μηδενικοί, γιά τούς ὁποίους ἰσχύει ἡ σχέση

$$\lambda\overline{\alpha} + \mu\overline{\beta} + \nu\overline{\gamma} = 0 \quad .$$

Κάμετε μιάν ἀριθμητική ἐφαρμογή μέ $\overline{\alpha}(-8,5)$, $\overline{\beta}(-3,-2)$, $\overline{\gamma}(1,3)$, προσδιορίζοντας τή γενική ἔκφραση τῆς τριάδας τῶν πολλαπλασιαστῶν λ,μ,ν.

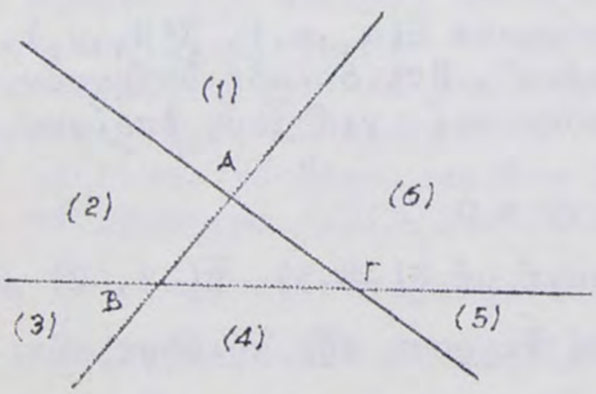
75.* Ἐφαρμόστε τή συνθήκη ιά τήν εὐθυγραμμία τριῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου ("Ασκηση 72) γιά ν' ἀποδείξετε ἀναλυτικά τό γνωστό θεώρημα τοῦ Μενελάου: Ἐάν πάνω στίς εὐθεῖες ΑΒ, ΒΓ, καί ΓΑ τῶν πλευρῶν ἑνός τριγώνου ΑΒΓ πάρουμε τρία σημεῖα $Γ_1$ $Α_1$ καί $Β_1$ ἀντιστοίχως, τέτοια ὥστε τό γινόμενο τῶν μερικῶν λόγων $(ΑΒΓ_1)$, $(ΒΓΑ_1)$, $(ΓΑΒ_1)$ νά ἰσοῦται μέ -1, τότε τά τρία σημεῖα $Γ_1, Α_1, Β_1$ βρίσκονται σέ εὐθυγραμμία· ἀντιστρόφως, ἐάν τά $Γ_1$, $Α_1, Β_1$ βρίσκωνται πάνω σέ εὐθεία τότε $(ΑΒΓ_1)(ΒΓΑ_1)(ΓΑΒ_1) = -1$.

76. Τρία ἐφαρμοσμένα διανύσματα $\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma}$ ἔχουν κοινή ἀρχή. Δεῖτε ὅτι γιά νά βρίσκωνται τά πέρατά τους σέ εὐθυγραμμία πρέπει καί ἀρκεῖ νά ὑφίσταται μιά σχέση $\lambda\overline{\alpha}+\mu\overline{\beta}+\nu\overline{\gamma} = 0$, ὅπου οἱ ἀριθμ. πολλαπλασιαστές λ,μ,ν δέν εἶναι ὅλοι μηδέν καί ἱκανοποιοῦν τή συνθήκη $\lambda+\mu+\nu = 0$.

77. Βρῆτε τίς συντεταγμένες τοῦ κέντρου τριῶν ἴσων μαζῶν τοποθετημένων στίς κορυφές $A(\alpha_1,\alpha_2)$, $B(\beta_1,\beta_2)$, $\Gamma(\gamma_1,\gamma_2)$ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ. Δεῖξτε μέ τά μέσα πού διαθέτετε ὡς τώρα ὅτι τό κέντρο αὐτό συμπίπτει μέ τό κοινό σημεῖο τῶν τριῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου.

78.* Δεῖξτε καί γεωμετρικά καί ἀναλυτικά ὅτι εἶναι δυνατόνά τοποθετηθοῦν τέτοιες προσημασμένες μάζες m_1, m_2, m_3 στίς κορυφές τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ὥστε τό κέντρο τους νά συμπίπτη μέ τό αὐθαίρετα ὁρισμένο σημεῖο P τοῦ ἐπιπέδου. Οἱ τρεῖς ἀριθμοί (m_1,m_2,m_3) λέγονται βαρυκεντρικές συντεταγμένες τοῦ P ὡς πρός τό τρίγωνο ἀναφορᾶς ΑΒΓ.

Δεῖξτε ὅτι οἱ βαρ. συντ. τοῦ P δέν εἶναι μονότροπα καθορισμένες ἀπό τό σημεῖο P, ἀλλ' ὅτι παραμένει σ' αὐτές αὐθαίρετος ἕνας κοινός πολλαπλασιαστής $\neq 0$· ἔτσι οἱ βαρυκεντρ. συντ. ἑνός ὁρισμένου σημείου P εἶναι τῆς μορφῆς $(\varrho\mu_1,\varrho\mu_2,\varrho\mu_3)$ ὅπου μ_1,μ_2,μ_3 ὁρισμένοι ἀριθμοί ὄχι ὅλοι μηδενικοί πού ἱκανοποιοῦν μάλιστα τή σχέση $\mu_1+\mu_2+\mu_3\neq 0$ καί ϱ αὐθαίρετος ἀριθμός $\neq 0$. Ἐκφράστε τούς λόγους $m_1:m_3$, $m_2:m_3$ συναρτήσει τῶν (παράλληλων) συντεταγμένων (x,y) τοῦ P. Τέλος ἐρευνῆστε τίς βαρ.συντ. τοῦ P γιά τίς διάφορες δυνατές θέσεις τοῦ P ὡς πρός τό τρίγωνο ΑΒΓ: 1ο πάνω σέ μιά πλευρά τοῦ ΑΒΓ ἤ πάνω σέ μιά προέκτασή της,
2ο στό ἐσωτερικό τοῦ ΑΒΓ,
3ο στό ἐξωτερικό τοῦ ΑΒΓ μέσα στό καθένα ἀπό τά 6 χωρία στά ὁποῖα οἱ προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒΓ χωρίζουν τό ἐξωτερικό αὐτό.



79.* Ἐάν ἀλλάξουμε ὄχι μόνο τήν ἀρχή συντεταγμένων ἀλλά καί τά βασικά διανύσματα τοῦ συστήματος, τότε οἱ σχέσεις μεταξύ τῶν παλιῶν συντεταγμένων (x,y) καί τῶν νέων (x',y') ἑνός καί τοῦ ἴδιου σημείου P τοῦ ἐπιπέδου εἶναι τῆς μορφῆς

$$x = x_0+\alpha_1 x'+\beta_1 y' \quad ; \quad y = y_0+\alpha_2 x'+\beta_2 y'$$

μέ
$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Ὑποδ. Θά ἐκφράστε τά νέα βασικά διανύσματα διά τῶν παλιῶν καί θά ἐργαστῆτε ὅπως καί στόν § 63.

80. Μεταφορά (translation) ἑνός σχήματος καλεῖται μιά μετατόπιση ὅλων τῶν σημείων του P κατά διανύσματα $\overline{PP_1}$ ἴσα μεταξύ τους. Ἔτσι ἡ μεταφορά χαρακτηρίζεται ἀπό ἕνα ἐλεύθερο διά-

νυσμα $\overline{α}$, πού ἔχει μῆκος διεύθυνση καί φορά τά τρία αὐτά κοινά στοιχεῖα τῶν ἴσων διανυσμάτων $\overline{PP_1}$. Ἐάν τό $\overline{α}$ εἶναι //XOY, τότε ἡ μεταφορά τοῦ XOY κατά τό διάνυσμα $\overline{α}$ εἶναι μιά είδική μετακίνηση τοῦ ἐπιπέδου XOY πάνω στόν ἑαυτό του. Οἱ σχέσεις πού συνδέουν τίς συντεταγ. (x_1, y_1) τοῦ P_1 μέ τίς συντεταγμ. (x, y) τοῦ P ὡς πρός ἕνα καί τό ἴδιο σύστημα συντεταγμ. τοῦ ἐπιπέδου XOY λέγονται ἀναλυτική παράσταση τῆς μεταφορᾶς τοῦ XOY πάνω στόν ἑαυτό του.

Ὕστερα ἀπό αὐτές τίς ἐξηγήσεις δεῖξτε ὅτι ἡ γενική ἀναλυτική παράσταση τῆς μεταφορᾶς τοῦ ἐπιπέδου XOY πάνω στόν ἑαυτό του εἶναι ἡ ἑξῆς:

$$x_1 = x_0 + x \quad , \quad y_1 = y_0 + y$$

ὅπου (x_0, y_0) δοσμένο ζεῦγος ἀριθμῶν μέ προφανῆ γεωμετρική σημασία.

81. Ὁ ὁρισμός τῆς ἀπεικόνισης ἑνός ἐπιπέδου πάνω στόν ἑαυτό του εἶναι ἐντελῶς ἀντίστοιχος πρός τόν ὁρισμό πού δώκαμε στήν ἄσκηση 35.* Ἕνα παράδειγμα ἀπεικόνισης παρέχει ἡ "ὁμοθεσία μέ κέντρο ἕνα σημεῖο K τοῦ ἐπιπέδου καί μέ λογο ἕναν ἀριθμό $λ \neq 0$". Ἔτσι καλεῖται ἡ ἀντιστοίχησι σέ κάθε σημεῖο P τοῦ ἐπιπέδου τοῦ σημείου P_1 γιά τό ὁποῖο ἰσχύει ἡ σχέση $\overline{KP_1} = λ\overline{KP}$. Δεῖξτε τώρα ὅτι ἡ γενική ἀναλυτική παράσταση μιᾶς ὁμοθεσίας μέσα στό ἐπίπεδο εἶναι τῆς μορφῆς

$$x_1 - x_0 = λ(x - x_0) \quad , \quad y_1 - y_0 = λ(y - y_0) \, .$$

Δεῖξτε δεύτερον ὅτι σέ μιάν ὁμοθεσία γιά κάθε ζεῦγος σημείων N, P τοῦ ἐπιπέδου ἰσχύει ἡ σχέση $\overline{NP} // \overline{N_1P_1}$ καί ἡ $\overline{N_1P_1} = λ\overline{NP}$ ὅπου N_1, P_1 οἱ "εἰκόνες" (δηλαδή τά ἀντίστοιχα σημεῖα) τῶν N, P. (Ἀπ' ἐδῶ ἕπεται ὅτι δυό ὁμόθετα σχήματα S καί S_1 εἶναι ὅμοια).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΚΑΙ ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΜΕ ΜΙΑΝ ΕΞΙΣΩΣΗ.

§ 64. Ἄς ἔχουν δοθῆ δυό σημεῖα $P_1(x_1,y_1)$ καί $P_2(x_2,y_2)$ τῆς εὐθείας ε τοῦ ἐπιπέδου ΧΟΥ. Γιά νά κεῖται τό σημεῖο $P(x,y)$ τοῦ ἐπιπέδου πάνω στήν ε πρέπει καί ἀρκεῖ τά διανύσματα $\overline{P_2P}$ καί $\overline{P_2P_1}$ νά εἶναι παράλληλα, ἄρα (πόρισμα 1 τοῦ § 60) νά ἰσχύει ἡ σχέση

(64.1) $$\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 \\ x_1-x_2 & y_1-y_2 \end{vmatrix} = 0$$

πού γράφεται καί ὡς ἑξῆς

(64.2) $$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad ,$$

διότι $$\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 \\ x_1-x_2 & y_1-y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & 0 \\ x_1-x_2 & y_1-y_2 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Ἡ ἐξίσωση αὐτή (64.1) ἀφοῦ τακτοποιηθῆ ὡς πρός x, y παίρνει τή μορφή:

$$(y_1-y_2)x - (x_1-x_2)y + x_1y_2-x_2y_1 = 0$$

ἤ $$Ax+By+\Gamma = 0 \quad , \text{ ὅπου } |A|+|B|\neq 0 \quad ,$$

εἶναι δηλαδή πρωτοβάθμια ὡς πρός τά γράμματα x, y.

§ 65. Ἀντίστροφα: ἄς ἔχη δοθῆ μιά τέτοια ἐξίσωση

(65.1) $$A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$$

ὅπου $|A_1| + |B_1| \neq 0$.

Ποιά σημεῖα $M(x,y)$ τήν ἐπαληθεύουν ἄραγε; Ὅτι ὑπάρχουν ἄπειρα τέτοια σημεῖα εἶναι φανερό. Εἰδικῶς, ἄν π.χ. $A_1 \neq 0$, μποροῦμε νά δώσουμε στό y μιάν αὐθαίρετη τιμή y_0 καί νά βροῦμε τήν κατάλληλη ἀντίστοιχη τιμή τοῦ x ἀπό τόν τύπο

$$x_0 = -\frac{B_1 y_0 + \Gamma_1}{A_1} \quad .$$

Γιά ἕνα τέτοιο σημεῖο $M_0(x_0,y_0)$ ἰσχύει τότε ἡ σχέση $A_1x_0 + B_1y_0 + \Gamma_1 = 0$ ἀπό ὅπου προκύπτει ἡ $\Gamma_1 = -(A_1x_0 + B_1y_0)$. Ἄν εἰσαγάγουμε τήν τιμή αὐτή τοῦ Γ_1 μέσα στήν (65.1) θά λάβουμε τήν ἰσοδύναμη ἐξίσωση

$$A_1x + B_1y - (A_1x_0 + B_1y_0) = 0$$

$$ἤ \quad A_1(x-x_0) + B_1(y-y_0) = 0 \quad ,$$

τέλος τήν ἰσοδύναμη

(65.2) $$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ B_1 & -A_1 \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Ἡ τελευταία ἐξίσωση λέγει ὅτι κάθε σημεῖο $M(x,y)$ πού τήν ἱκανοποιεῖ, ὁρίζει μέ τό $M_0(x_0y_0)$ ἕνα διάνυσμα $\overline{M_0M}$ // πρός τό διάνυσμα $(B_1,-A_1)$. Ἄρα ὅλα τά σημεῖα $M(x,y)$ πού ἱκανοποιοῦν τήν (65.1) βρίσκονται πάνω στήν εὐθεία ε_1 πού περνᾶ ἀπό τό σημεῖο $M_0(x_0,y_0)$ καί εἶναι // πρός τό διάνυσμα $(B_1,-A_1)$. Ἀντίστροφα κάθε σημεῖο $N(\xi,\eta)$ τῆς ε_1 ὁρίζει μέ τό M_0 ἕνα διάνυσμα $\overline{M_0N}//(B_1,-A_1)$ καί ἐπομένως ἱκανοποιεῖ τή σχέση

$$\begin{vmatrix} \xi-x_0 & \eta-y_0 \\ B_1 & -A_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$ἤ \quad A_1(\xi-x_0) + B_1(\eta-y_0) = 0 \quad ἤ \quad A_1\xi + B_1\eta + \Gamma_1 = 0 \quad .$$

Ὥστε ἡ (65.1) παριστάνει μιάν εὐθεία. Τήν ἴδια εὐθεία παριστάνει φυσικά καί ἡ ἐξίσωση $\varrho A_1x + \varrho B_1y + \varrho\Gamma_1 = 0$, ὅπου ϱ αὐθαίρετος πολλαπλασιαστής $\neq 0$. Ἔχουμε λοιπόν τήν πρόταση:

<u>Πρόταση</u>. Οἱ εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου παριστάνονται μέ πρωτοβάθμιες ἐξισώσεις $Ax+By+\Gamma = 0$. Ἀντίστροφα, κάθε τέτοια ἐξίσωση $Ax+By+\Gamma = 0$ παριστάνει μιάν εὐθεία, πού εἶναι μάλιστα

// πρός τό διάνυσμα (Β,−Α).

Παραδείγματα.

α) Ἡ εὐθεία διά τῶν σημείων $P_1(-5,3)$ καί $P_2(-4,2)$ ἔχει ἐξίσωση

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ἤ $\quad x(3-2)-y(-5+4)+(-10+12)=0 \quad$ ἤ $\quad x+y+2=0$.

β) ἡ εὐθεία διά τοῦ $M_o(-1,2)$, ἡ // πρός τό διάνυσμα $(-3,-4)$, ἔχει ἐξίσωση

$$\begin{vmatrix} x-(-1) & y-2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 0 \quad ἤ \quad \frac{x-(-1)}{-3} = \frac{y-2}{-4}$$

ἤ $$4x - 3y + 10 = 0 \quad .$$

γ) ἡ ἐξίσωση $4x+5y+6=0$ παριστάνει τήν εὐθεία πού περνᾶ ἀπό τό σημεῖο $M_o(x=3\ ,\ y=-\frac{4\cdot 3+6}{5}=-\frac{18}{5})$ καί εἶναι // πρός τό διάνυσμα $(5,-4)$.

Παρατήρηση.

Γιά συντομία θά λέμε παρακάτω "ἡ εὐθεία $Ax+By+\Gamma=0$" ἀντί "ἡ εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου ἡ ὁποία παριστάνεται ἀπό τήν ἐξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$"

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

§ 66. Ἄν ἡ εὐθεία $Ax+By+\Gamma=0$ εἶναι // Oy, τότε θά εἶναι καί τό διάνυσμα $(B,-A)//Oy$, ἄρα $B=0$. Ἡ εὐθεία λοιπόν ἡ // Oy ἔχει ἐξίσωση $Ax+\Gamma=0$, ἤ $x=-\frac{\Gamma}{A}=C$ (ὁρισμένος ἀριθμός, σταθερά). Ἀντιστρόφως, κάθε τέτοια ἐξίσωση $x=\alpha$ παριστάνει εὐθεία // Oy. Ὅμοια οἱ εὐθεῖες οἱ // Ox ἔχουν ἐξισώσεις $By+\Gamma=0$ ἤ $y=C$. Ἀντιστρόφως κάθε τέτοια ἐξίσωση $y=\beta$ παριστάνει εὐθεία // Ox (Ἡ παραλληλία δυό εὐθειῶν περιλαβαίνει κατά σύμβαση σάν μερική περίπτωση τήν σύμπτωση τῶν δυό εὐθειῶν).

§ 67. Ὅταν ἡ εὐθεῖα $Ax+By+\Gamma = 0$ περνᾶ ἀπό τήν ἀρχή $O(0,0)$ τότε $\Gamma = 0$. Ἀντίστροφα, ἄν $\Gamma = 0$ ἡ εὐθεία $Ax + By+\Gamma=0$ περνᾶ ἀπό τήν ἀρχή. Ἄν τώρα ἐπί πλέον ἡ εὐθεία $Ax+By = 0$ δέν εἶναι $//Oy$, τότε καί διάνυσμα $(B,-A)$ ⫽ OY, ἄρα καί $B\neq 0$. Ἑπομένως η ἐξίσωση μπορεῖ νά πάρη τή μορφή $y = -\frac{A}{B}x$ ἤ $y=\lambda x$ (ὅπου λ κάποιος ὁρισμένος ἀριθμός, ἐνδεχομένως καί μηδέν). Ἀντίστροφα ἡ $y = \lambda x$, μέ λ ἕναν αὐθαίρετα ὁρισμένο ἀριθμό, παριστάνει εὐθεία διά τῆς ἀρχῆς O, μή παράλληλη πρός OY. Ὅμοια βλέπουμε ὅτι ἡ $x = ky$, ὅπου k αὐθαίρετος ἀριθμός, εἶναι ἡ γενική ἐξίσωση τῶν εὐθειῶν διά τοῦ O τῶν ⫽ Ox.

§ 68. Ὅταν ἡ $Ax+By+\Gamma = 0$ παριστάνει εὐθεία ⫽ Oy, τότε ὅπως εἴδαμε $B \neq 0$ καί ἡ ἐξίσωση μπορεῖ νά πάρη τή μορφή

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{\Gamma}{B} \qquad ἤ \qquad y = \lambda x+\beta$$

ὅπου λ καί β ὁρισμένοι ἀριθμοί. Ἀντίστροφα ἄν δοθοῦν, μέ ἐλεύθερη ἐκλογή, οἱ ἀριθμοί λ καί β, τότε ἡ ἐξίσωση $y = \lambda x+\beta$ παριστάνει εὐθείαν ⫽ Oy, ἡ ὁποία κόβει τόν OY στό σημεῖο $(0,\beta)$.

§ 69. Ἐάν ἡ εὐθεία $Ax+By+\Gamma = 0$ δέν περνᾶ ἀπό τό O καί δέν εἶναι παράλληλη οὔτε πρός OX οὔτε πρός OY, τότε $A \neq 0$, $B \neq 0$, $\Gamma \neq 0$ καί ἡ ἐξίσωση μπορεῖ νά πάρη τή μορφή

$$\frac{x}{-\frac{\Gamma}{A}} + \frac{y}{-\frac{\Gamma}{B}} = 1 \qquad ἤ \qquad \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1 .$$

Τά σημεῖα ὅπου ἡ παραπάνω εὐθεία κόβει τούς ἄξονες OX καί OY ἔχουν συντεταγμένες

$$\left(-\frac{\Gamma}{A}, 0\right) \text{ καί } \left(0, -\frac{\Gamma}{B}\right) \quad ἤ \quad (\alpha,0) \text{ καί } (0,\beta).$$

Ἀντίστροφα, ἡ εὐθεία πού τέμνει τούς ἄξονες σέ δυό σημεῖα $(\alpha,0)$ καί $(0,\beta)$ διαφορετικά τό ἕνα ἀπό τό ἄλλο, ἔχει ἐξίσωση $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$. Ὁ ἀριθμός α λέγεται ἀρχική τετμημένη τῆς εὐθείας, ὁ β ἀρχική τεταγμένη τῆς εὐθείας.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

§ 70. Πρόταση. Γιά νά εἶναι ἕνα διάνυσμα $\bar{\delta}(\alpha,\beta)$ παράλληλο πρός μιάν εὐθεία $Ax+By+\Gamma=0$ πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἔχουμε

$$A\alpha + B\beta = 0 \quad .$$

Πράγματι ἀπό τά προηγούμενα προκύπτει ὡς συνθήκη παραλληλίας ἡ

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ B & -A \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Ἐφαρμογή. Ἡ εὐθεία πού περνᾶ ἀπό τό σημεῖο $M_0(x_0,y_0)$ καί εἶναι παράλληλη πρός τό μή μηδενικό διάνυσμα $\bar{\delta}(\alpha,\beta)$ ἔχει ἐξίσωση

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ \alpha & \beta & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ἤ

$$-\beta(x-x_0) + \alpha(y-y_0) = 0 \quad .$$

Ἡ ἐξίσωση αὐτή στήν περίπτωση ὅπου $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ (ὅπου δηλαδή ἡ εὐθεία καί τό διάνυσμα δέν εἶναι παράλληλα οὔτε πρός ΟΧ οὔτε πρός ΟΥ) γράφεται καί ἔτσι

(70.1) $$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} \quad .$$

Ὅταν $\alpha = 0$ (ὁπότε $\beta \neq 0$), ἡ ἐξίσωση μπορεῖ νά πάρη τή μορφή $x-x_0 = 0$, πού ἀπό σκοπιμότητα συμφωνοῦμε νά γράφουμε καί ἔτσι

$$\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{\beta} \quad .$$

ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΜΕ ΔΟΣΜΕΝΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

§ 71. Δίνεται ἡ ἐξίσωση $Ax+By+\Gamma = 0$ τῆς εὐθείας.

1ος τρόπος σχεδιάσεώς της. Ὑπολογίζουμε ἀπό τήν ἐξίσωση τίς συντεταγμένες (x_1,y_1) καί (x_2,y_2) δυό διαφορετικῶν σημείων P_1 καί P_2 τῆς εὐθείας, σχεδιάζουμε τά σημεῖα αὐτά μέ τή μέθοδο τοῦ § 56 καί χαράζουμε τέλος τήν εὐθεία P_1P_2.

2ος τρόπος σχεδίασης 'Υπολογίζουμε τίς συντεταγμένες (x_0,y_0) ἑνός σημείου M_0 τῆς εὐθείας, σχεδιάζουμε τό σημεῖο αὐτό, κατόπιν χαράζουμε τό τρίγωνο M_0TM γιά τίς συντεταγμένες ἑνός διανύσματος $\overline{M_0M}$ πού ἔχει συντεταγμένες ἀνάλογες πρός $(B,-A)$· ἡ ἀπέρατη εὐθεία M_0M εἶναι ἡ ζητούμενη.

§ 72. Δίνεται ἡ ἐξίσωση $y = \lambda x+\beta$ μιᾶς εὐθείας. Γιά νά τή σχεδιάσουμε προσδιορίζουμε πάνω στόν ΟΥ τό σημεῖο $B(0,\beta)$ πού ἀνήκει στήν εὐθεία, κατόπιν σχεδιάζουμε τό τρίγωνο ΒΤΛ γιά τίς συντεταγμένες ἑνός διανύσματος $\overline{BΛ}$ πού ἔχει συντεταγμένες ἀνάλογες πρός $(1,\lambda)$· ἡ εὐθεία ΒΛ εἶναι ἡ ζητούμενη.

'Εάν ἡ δινόμενη ἐξίσωση ἔχει τή μορφή $x = ky+\alpha$ τότε προσδιορίζουμε τό σημεῖο $A(\alpha,0)$ τοῦ ἄξονα ΟΧ τό ὁποῖον ἀνήκει στήν εὐθεία καί σχεδιάζουμε τό τρίγωνο γιά τίς συντεταγμένες ΑΩΝ ἑνός διανύσματος $\overline{AN}$ μέ συντεταγμένες ἀνάλογες πρός $(k,1)$ ἡ εὐθεία ΑΝ εἶναι ἡ ζητούμενη.

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

§ 73. "Αν τούς ἴσους λόγους πού ἀποτελοῦν τά μέλη τῆς ἐξίσωσης (70.1) τούς ἐξισώσουμε μέ τόν αὐθαίρετο ἀριθμό t, ἡ ἐξίσωση (70.1) μπορεῖ νά ἀντικατασταθῆ μέ τό σύστημα

(73.1) $\quad x = x_0+\alpha t \quad , \quad y = y_0+ \beta t$.

Τό σύστημα αὐτό παριστάνει ὅλα τά σημεῖα τῆς εὐθείας (70.1) (δηλαδή τῆς εὐθείας πού περνᾶ ἀπό τύ σημεῖο $M_0(x_0,y_0)$ καί εἶναι παράλληλη πρός τό μή μηδενικό διάνυσμα (α,β)) καί μόνο σημεῖα τῆς εὐθείας αὐτῆς, ὅταν τό t διατρέχη τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

('Εννοεῖται ὅτι ὅταν λέμε ὅλα τά σημεῖα τῆς εὐθείας δέν λαβαίνουμε ὑπ'ὄψει τό ἐπ'ἄπειρο σημεῖο της, τό ὁποῖο δέν ἔχει παράλληλες συντεταγμένες κατ'ἀντίθεση πρός τά ἄλλα σημεῖα της καί γι'αὐτό μένει ἀναγκαστικά ἔξω ἀπό τίς ἀναπτυσσόμενες στοιχειώδεις ἀναλυτικές θεωρίες).

Σέ κάθε τιμή τοῦ γράμματος t ἀντιστοιχεῖ ἕνα σημεῖο τῆς εὐθείας· ἀντιστρόφως, κάθε σημεῖο τῆς εὐθείας εἶναι ἀντίστοιχο μιᾶς τιμῆς τοῦ γράμματος t.

Μέ ἄλλα λόγια, τά σημεῖα τῆς εὐθείας προσδιορίζονται ἕνα πρός ἕνα (χαρακτηρίζονται ἕνα πρός ἕνα) ἀπό τίς πραγματικές τιμές τοῦ γράμματος t.

Γι'αὐτό τό t λέγεται <u>παράμετρος</u> τῶν σημείων τῆς εὐθείας καί τό σύστημα (73.1) <u>ἀναλυτική παραμετρική παράσταση τῆς εὐθείας</u>.

Στό γράμμα t μπορεῖ νά δοθῆ καί μιά ἁπλῆ γεωμετρική σημασία: ἡ τιμή τοῦ t γιά κάθε σημεῖο M τῆς εὐθείας ἰσοῦται μέ τό λόγο $\frac{\overline{M_oM}}{\overline{\delta}}$ ὅπου $\overline{\delta}$ τό διάνυσμα (α,β) τό παράλληλο μέ τήν εὐθεία.

Ἡ ἀπαλοιφή τῆς παραμέτρου t μεταξύ τῶν δυό ἐξισώσεων (73.1) δίνει τήν ἐξίσωση

$$\begin{vmatrix} x-x_o & y-y_o \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0$$

τῆς εὐθείας, τή γνωστή ἀπό τόν § 70.

§ 74. Μιάν ἄλλη παραμετρική παράσταση τῆς εὐθείας πορίζόμαστε ἀπό τόν μερικό λόγο $(M_1M_2M) = \lambda$, ὅπου $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ δυό (διαφορετικά) σημεῖα τῆς εὐθείας. Ἔχουμε, σύμφωνα μέ τόν § 61, γιά κάθε σημεῖο $M(x,y) \neq M_2$ τῆς εὐθείας τίς σχέσεις

$$(74.1) \qquad x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \quad , \quad y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

ὅπου $\lambda = (M_1M_2M)$ ἕνας ἀριθμός $\neq -1$, πού ἐξαρτᾶται ἀπό τό M. Ἀντίστροφα, σέ κάθε τιμή $\neq -1$ τοῦ λ ἀντιστοιχεῖ δυνάμει τῶν σχέσεων (74.1) ἕνα ζεῦγος ἀριθμῶν (x,y) πού εἶναι συντεταγμένες ἑνός σημείου τῆς εὐθείας διαφορετικοῦ ἀπό τό M_2. Ἄν λάβουμε ὑπ'ὄψη τίς ἐπεκτάσεις πού κάμαμε στόν § 28, μποροῦμε νά εἰποῦμε ὅτι τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν λ συμπληρωμένο μέ τόν καταχρηστικό ἀριθμό ∞ καί τό σύνολο τῶν σημείων τῆς εὐθείας συμπληρωμένο μέ τό ἐπ'ἄπειρο σημεῖο της βρίσκονται σέ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία. Γι'αὐτό οἱ ἐξισώσεις (74.1) λέγονται ἀναλυτική παραμετρική παράσταση τῆς εὐθείας M_1M_2 μέ παράμετρο τό λ. Ἡ παράμετρος λ ἔχει καί ἐδῶ μιάν ἁπλή γεωμετρ. σημασία: εἶναι ὁ μερικός λόγος (M_1M_2M), ὅπου M τό σημεῖο τῆς εὐθείας M_1M_2 τό ἀντίστοιχο στήν ὑπ'ὄψη τιμή τοῦ λ. Ἡ ἀπαλοιφή τοῦ λ μεταξύ τῶν δυό ἐξισώσεων (74.1), τίς ὁποῖες γράφουμε ὡς ἑξῆς:

$$x_1\frac{1}{1+\lambda} + x_2\frac{\lambda}{1+\lambda} = x$$
$$y_1\frac{1}{1+\lambda} + y_2\frac{\lambda}{1+\lambda} = y$$

ὁδηγεῖ, βάσει τοῦ θεωρήματος τοῦ § 49 ἄν χρησιμοποιήσουμε καί τήν ταυτότητα

$$1\cdot\frac{1}{1+\lambda} + 1\cdot\frac{\lambda}{1+\lambda} = 1$$

στή γνωστή ἐξίσωση τῆς εὐθείας M_1M_2:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ἤ} \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

§ 75. Εἶναι φανερό ὅτι ἡ ἀναλυτική παραμετρική παράσταση μιᾶς καί τῆς ἴδιας εὐθείας μπορεῖ νά γίνη μέ ἐκλογή παραμέτρου κατά ἄπειρους διαφορους τρόπους. Ἀρκεῖ π.χ. μέσα στίς ἐξισώσεις (73.1) νά θέσουμε $t = c_1\tau + c_2$, ὅπου τ ἡ νέα παράμετρος καί c_1, c_2 δυό αὐθαίρετα ὁρισμένοι ἀριθμοί μέ $c_1 \neq 0$ γιά νά ἀποκτήσουμε μιά καινούργια παραμετρική παράσταση τῆς ἴδιας εὐθείας. Ὅμοια ἄν μέσα στίς (74.1) θέσουμε $\lambda = \omega^3 + c$ ὅπου ω ἡ νέα παράμετρος καί c ἕνας αὐθαίρετα ὁρισμένος ἀριθμός, θά λάβουμε μιά καινούργια παραμετρική παράσταση τῆς εὐθείας M_1M_2. Ἀλλάζοντας τήν ἐκλογή τῶν σταθερῶν c_1, c_2, c βρίσκουμε ἔτσι κιόλας ἄπειρες διάφορες παραμετρικές παραστάσεις τῆς ἴδιας εὐθείας. Αὐτή ἡ ἐλευθερία στήν ἐκλογή τῆς παραμέτρου εἶναι ἕνα πλεονέκτημα τῆς ἀναλυτ. παραμετρ.παραστάσεως διότι ἐπιτρέπει τήν προσαρμογή τῆς παραστάσεως σέ διάφορους ἐπιδιωκόμενους εἰδικούς σκοπούς.

<u>Ἐφαρμογή</u>. Ἄν μιᾶς εὐθείας ε ζητοῦνται τά σημεῖα $M(x,y)$ πού ἱκανοποιοῦν μιάν ἀλγεβρική ἐξίσωση νιοστοῦ βαθμοῦ ὡς πρός x, y

$$\sum A_{\kappa\lambda} x^{\kappa} y^{\lambda} = 0 \quad , \quad 0 \leqq k+\lambda \leqq \nu \quad , \tag{75.1}$$

τότε παίρνουμε π.χ. τήν ἀναλυτική παράσταση (73.1) τῆς εὐθείας καί εἰσάγουμε τίς ἐκφράσεις τῶν x καί y συναρτήσει τοῦ t μέσα στήν (75.1)· ἔτσι πορίζόμαστε τήν ἀλγεβρική ἐξίσωση

$$\sum A_{\kappa\lambda}(x_0+\alpha t)^{\kappa}(y_0+\beta t)^{\lambda} = 0 \quad , \quad 0 \leqq k+\lambda \leqq \nu \quad , \tag{75.2}$$

ἐν γένει βαθμοῦ νιοστοῦ ὡς πρός τόν ἄγνωστο t. Οἱ λύσεις (οἱ ρίζες) της (τό πολύ ν κατά τόν ἀριθμό ὅταν ἡ (75.2) δέν εἶναι μιά ταυτότητα ὡς πρός t) δίνουν τίς τιμές τῆς παραμέτρου t στίς ὁποῖες ἀντιστοιχοῦν διά τῶν (73.1) τά ζητούμενα σημεῖα $M(x,y)$ τῆς εὐθείας ε.

ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ.

§ 76. Δίδονται οἱ πρωτοβάθμιες ἐξισώσεις $A_1x+B_1y+\Gamma_1 = 0$, $A_2x+B_2y+\Gamma_2 = 0$. Ζητεῖται νά προσδιοριστῆ ἡ σχετική θέση τῶν δυό εὐθειῶν πού παριστάνουν. Τό πρόβλημα ἀνάγεται στή διερεύνηση τοῦ γραμμικοῦ συστήματος τῶν δυό δοσμένων ἐξισώσεων καί στή γεωμετρική ἑρμηνεία τῶν ἀποτελεσμάτων τῆς διερευνήσεως. Ἰδού ἡ πραγμάτευση ταχτοποιημένη σ'ἕναν πίνακα:

$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ τό σύστημα έ- χει διάσταση $\delta = 2$.	Τό σύστημα έχει μιά μονάδική λύση: $x = \begin{vmatrix} -\Gamma_1 & B_1 \\ -\Gamma_2 & B_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ $y = \begin{vmatrix} A_1 & -\Gamma_1 \\ A_2 & -\Gamma_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$	Οἱ δυό εὐθεῖες τέμνονται. Συντεταγμένες τοῦ σημείου τομῆς εἶναι οἱ διπλανές τιμές x,y.
$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$ τό σύστημα έ- χει διάσταση $\delta = 1$ (διότι κιόλας $\lvert A_1\rvert + \lvert B_1\rvert \neq 0$	Μιά τουλάχιστο άπό τίς ὀρίζουσες $\begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix}$ εἶναι $\neq 0$. τό σύστημα δέν έχει λύση	Οἱ δυό εὐθεῖες εἶναι παράλληλες χωρίς νά συμπίπτουν, έχουν κοινό έπ'άπειρο σημεῖο (ή κοινή διεύθυνση πού χαρακτηρίζεται άπό τό διάνυσμα $(B_1,-A_1)//(B_2,-A_2)$).
	$\begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = 0$ τό σύστημα έχει μιά μονοπαραμετρική άπειρία λύσεων	Οἱ δυό εὐθεῖες συμπίπτουν: έχουν κοινά όλα τους τά σημεῖα πού άποτελοῦν ένα μονοπαραμετρικῶς άπειρο πλῆθος.

Άπό τήν παραπάνω διερεύνηση προκύπτουν οἱ άκόλουθες άναγκαῖες καί ἱκανές συνθῆκες:

1) Γιά νά τέμνωνται δυό εὐθεῖες $A_1x+B_1y+\Gamma_1 = 0$, $A_2x+B_2y+\Gamma_2 = 0$:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (\text{ή } A_1 : B_1 \neq A_2 : B_2)$$

2) Γιά νά εἶναι παράλληλες χωρίς νά συμπίπτουν:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

καί διάσταση τοῦ $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \end{pmatrix}$

ἴση μέ 2, ή $(A_1:A_2 = B_1 : B_2 \neq \Gamma_1 : \Gamma_2)$.

3) Γιά νά συμπίπτουν:

διάσταση τοῦ πίνακα $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \end{pmatrix}$ ἴση μέ 1,

(ή $A_1:B_1:\Gamma_1 = A_2:B_2:\Gamma_2$ πρᾶγμα πού σημαίνει $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$ $\Gamma_1 = \lambda\Gamma_2$, όπου $\lambda \neq 0$).

ΔΕΣΜΗ ΕΥΘΕΙΩΝ

§ 77. Ἔτσι καλεῖται τό σύνολο τῶν εὐθειῶν ἑνός ἐπιπέδου οἱ ὁποῖες περνοῦν ἀπό ἕνα καί τό ἴδιο σημεῖο Κ. Τό σημεῖο αὐτό μπορεῖ νά βρίσκεται στό ἄπειρο, δηλ. νά εἶναι τό ἐπ'ἄπειρο σημεῖο μιᾶς εὐθείας ε τοῦ ἐπιπέδου, ὁπότε ἡ δέσμη ἀποτελεῖται ἀπό ὅλες τίς εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου τίς παράλληλες μέ τήν ε (μέ συμπερίληψη ἐννοεῖται τῆς ε). Τό Κ λέγεται κέντρο τῆς δέσμης.

Ἐάν τό Κ δίνεται μέ τίς συντεταγμένες του (x_0, y_0), τότε ἡ γενική ἐξίσωση τῶν εὐθειῶν τῆς δέσμης εἶναι

(77.1) $$A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0$$

ὅπου Α καί Β αὐθαίρετοι συντελεστές μέ $|A| + |B| \neq 0$. Οἱ τιμές τοῦ λόγου $A:B$ (μέ συμπερίληψη τῆς "καταχρηστικῆς τιμῆς" ∞ γιά $A \neq 0$, $B = 0$) ἀντιστοιχοῦν ἀμφιμονότροπα στίς εὐθεῖες τῆς δέσμης, γι'αὐτό ὁ λόγος $A:B$ λέγεται παράμετρος τῶν εὐθειῶν τῆς δέσμης.

Ἄν τό Κ δίνεται ὡς τό ἐπ'ἄπειρο σημεῖο μιᾶς εὐθείας $A_0x+B_0y+\Gamma_0 = 0$ τοῦ ἐπιπέδου, τότε ἡ γενική ἐξίσωση τῶν εὐθειῶν τῆς δέσμης εἶναι

(77.2) $$A_0x + B_0y + \Gamma = 0$$

ὅπου Γ ἕνας αὐθαίρετα ὁρισμένος ἀριθμός, ἡ παράμετρος τῶν εὐθειῶν τῆς δέσμης.

Ἐάν τό Κ δίνεται ὡς τό κοινό (ἐπ'ἄπειρο ἤ ὄχι) σημεῖο δυό διαφορετικῶν εὐθειῶν

$$A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 \quad , \quad A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$$

τοῦ ἐπιπέδου, τότε ἡ γενική ἐξίσωση τῶν εὐθειῶν τῆς δέσμης εἶναι

(77.3) $$\lambda_1(A_1x+B_1y+\Gamma_1) + \lambda_2(A_2x+B_2y+\Gamma_2) = 0 \ ,$$

ὅπου λ_1 καί λ_2 δυό αὐθαίρετοι πολλαπλασιαστές ὄχι καί οἱ δυό μηδενικοί: $|\lambda_1| + |\lambda_2| \neq 0$. Πάλιν οἱ εὐθεῖες τῆς δέσμης ἀντιστοιχοῦν ἀμφιμονότροπα στίς τιμές τοῦ λόγου $\lambda_1 : \lambda_2$ (μέ συμπερίληψη τῆς "καταχρηστικῆς τιμῆς" ∞, γιά $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$). Γι' αὐτό ὁ λόγος $\lambda_1 : \lambda_2$ λέγεται παράμετρος τῶν εὐθειῶν τῆς δέσμης. Τό κέντρο Κ τῆς δέσμης εἶναι στό ἄπειρο ὅταν

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2 \neq \Gamma_1 : \Gamma_2 .$$

Σύμφωνα μέ τά παραπάνω λέμε: ἡ δέσμη εὐθειῶν εἶναι ἕνα παραμετρικό πλῆθος (ἤ σύνολο) πραγμάτων· τό καθένα τους χαρακτηρίζεται (προσδιορίζεται) μέ ἕναν ἀριθμό, τήν τιμή τοῦ συμβόλου τό ὁποῖο καλέσαμε παράμετρο: τοῦ $A:B$ στήν περίπτωση (77.1), τοῦ Γ στήν (77.2), τοῦ $\lambda_1 : \lambda_2$ στήν (77.3).

Ὅσον ἀφορᾶ τό σύνολο τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου, αὐτό εἶναι διπαραμετρικό, διότι γιά νά προσδιοριστῆ μιά εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου πρέπει νά δοθοῦν δυό ἀριθμοί, π.χ. οἱ τιμές τῶν λόγων δυό συντελεστῶν τῆς ἐξίσωσης $Ax+By+\Gamma = 0$ πρός τόν τρίτο.

ΣΥΝΘΗΚΗ ΓΙΑ Ν'ΑΝΗΚΟΥΝ 3 ΕΥΘΕΙΕΣ ΣΕ ΜΙΑ ΔΕΣΜΗ.

§ 78. Τρεῖς εὐθεῖες $A_1x+B_1y+\Gamma_1 = 0$, $A_2x+B_2y+\Gamma_2 = 0$, $A_3x+B_3y+\Gamma_3 = 0$ ἀνήκουν σέ μιά καί τήν ἴδια δέσμη ὅταν καί μόνον ὅταν

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Αὐτό ἕπεται εὔκολα ἀπό τή θεωρία τῶν γραμμικῶν συστημάτων ἤ ἀπό τόν § 77.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

Σημείωση. Ὅπου πρόκειται νά γίνῃ σχεδίαση, ἄς ληφθῆ τό σύστημα τῶν συντεταγμένων ὀρθογώνιο καί $OE_1 = OE_2 = 1$ cm.

82. Γράψτε τακτοποιημένες τίς ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν M_1M_2 καί P_1P_2 ὅπου $M_1(-5,2)$, $M_2(-2,-4)$ καί $P_1(-3/-4,5)$, $P_2(-5,3/8)$.

• Γράψτε τακτοποιημένη τήν ἐξίσωση τῆς εὐθείας
α) πού περνᾶ ἀπό τό $M_o(-7,2)$ καί εἶναι // πρός τό διάνυσμα $(-2,-3)$.
β) πού περνᾶ ἀπό τό $P_o(4,5)$ καί εἶναι // πρός τό διάνυσμα $(-4,6)$.
Γράψτε μέ τή μορφή $y = \lambda x+\beta$ τίς ἐξισώσεις τῶν δυό εὐθειῶν πού ἔχουν τεταγμένες στήν ἀρχή -3 καί 4 καί εἶναι παράλληλες πρός τά διανύσματα $(-3,2)$ καί $(-4,-9)$ ἀντιστοίχως. Γράψτε μέ τή μορφή $x = ky+\alpha$ τήν ἐξίσωση τῆς εὐθείας πού ἔχει τετμημένη στήν ἀρχή $-3/4$ καί εἶναι παράλληλη πρός τό διάνυσμα $(5,-6)$.
Ποιές εἶναι οἱ ἀρχικές συντεταγμένες τῶν εὐθειῶν
$2x-3y+5 = 0$, $-4x+3y = 2$, $1/2\,x - 1/3\,y - 4 = 0$;

83. Σχεδιάστε μέ τόν πρῶτο τρόπο πού ὑποδείχτηκε στόν § 71 τίς εὐθεῖες $\frac{x}{4}-\frac{y}{5} = 1$, $\frac{x}{3}+2y = 1$, $2,5x+3,4y-4 = 0$, $x+y = -4$.
Σχεδιάστε μέ τόν 2ο τρόπο, πού ὑποδείχτηκε στόν § 71, τίς εὐθεῖες $4x-5y+2 = 0$, $-6x+2y+3 = 0$, $x-y+3 = 0$, $-5x-3y+4,5=0$.
Σχεδιάστε τίς εὐθεῖες $y = \frac{1}{2}x-3$, $y = -4x + \frac{3}{4}$, $y = \frac{1}{4}x+5$, $x = 2y-3$.

84. Βρῆτε γραφικῶς κατά προσέγγιση (δηλαδή μέ σχεδίαση καί μέ μετρήσεις πάνω στό σχέδιο) τίς συντεταγμένες τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν εὐθειῶν $4,2x-3y+2 = 0$, $6x+3,5y-5,4 = 0$. Παραβάλατέ τις μέ τίς συντεταγμένες πού βρίσκετε ἀκριβῶς ἀναλυτικά δηλ. μέ ἀριθμητικό λογισμό.

85. Ποιά εἶναι ἡ ἐξίσωση τῆς εὐθείας πού περνᾶ ἀπό τό $P_o(-5,4)$ καί διαιρεῖ ἐσωτερικά τό τμῆμα M_1M_2, ὅπου $M_1(-2,-3)$ καί $M_2(1,2)$ κατά τό λόγο $(M_1M_2P) = 3/4$; Ποιός εἶναι ὁ μερικός λόγος (N_1N_2T), ὅπου $N_1(3,-4)$, $N_2(-4,5)$ καί T τό σημεῖο τομῆς τῆς εὐθείας N_1N_2 μέ τήν $5x-4y+2 = 0$; (Νά χρησιμοποιήσετε ἐδῶ τήν ἀναλυτική παραμετρική παραμετρική παράσταση (74.1). Ἀφοῦ κάμετε ἕνα σχέδιο, παραβάλατε τήν τιμή τοῦ (N_1N_2T) πού βρίκατε ἀναλυτικά μέ τήν κατά προσέγγιση τιμή πού προκύπτει γραφικά).

86. Βρῆτε τίς ἐξισώσεις τῶν 3 διαμέσων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὅπου $A(-5,3)$, $B(-2,-4)$, $\Gamma(2,1)$ καί δεῖξτε ἀναλυτικά ὅτι οἱ τρεῖς αὐτές εὐθεῖες τέμνονται σ'ἕνα σημεῖο (προσδιορίστε καί τίς συντεταγμένες του). Γενικεῦστε, παίρνοντας ἕνα τρίγωνο $P_1P_2P_3$ ὅπου $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_3(x_3,y_3)$.

87. Ἀπό τό $K_o(-5,3)$ προβάλλουμε τό $\Lambda(4,-2)$ πάνω στήν εὐθεία

$x+2y = 4$. Ποιές εἶναι οἱ συντεταγμένες τῆς προβολῆς; (Χρησιμοποιῆστε τήν μέθοδο τοῦ § 75, Ἐφαρμογή). Ἀπό τό $K(\alpha,\beta)$ ὅπου $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, προβάλλουμε τά διάφορα σημεῖα $P_1(x_1,0)$ τοῦ OX πάνω στόν OY. Ποιά εἶναι ἡ τεταγμένη τῆς προβολῆς $P_2(0,y_2)$ τοῦ $P_1(x_1,0)$ ἐκφρασμένη συναρτήσει τῆς τετμημένης x_1 τοῦ P_1.

88. Μέ τή βοήθεια τῆς τελευταίας ἀσκήσεως καί κάποιας συμπληρώσεως, ἀποδεῖξτε τό θεώρημα τοῦ Πάππου: Ὁ διπλός λόγος 4 σημείων μιᾶς εὐθείας ε παραμένει ἀναλοίωτος ὅταν ἀπό ἕνα "κέντρο προβολῆς K", πού δέν κεῖται πάνω στήν ε, προβάλουμε τά 4 σημεῖα πάνω σέ μιάν ἄλλη εὐθεία ε_1 τοῦ ἐπιπέδου τό ὁποῖο ὁρίζουν ἡ ε καί τό K (ἡ ε_1 δέν θά περιέχη τό K).

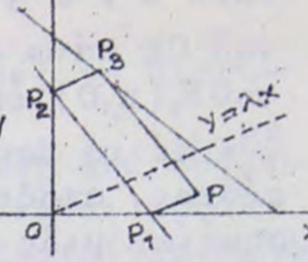
89. Ἄς εἶναι $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ δυό διαφορετικά σημεῖα. Θέτουμε $x = tx_1+(1-t)x_2$, $y = ty_1+(1-t)y_2$, ὅπου t αὐθαίρετος ἀριθμός $\geqq 0$ καί $\leqq 1$. Δεῖξτε ὅτι οἱ ἐξισώσεις αὐτές παρέχουν τήν ἀναλυτική παραμετρική παράσταση τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος P_1P_2. Χρησιμοποιῆστε μιάν τέτοια παράσταση γιά νά δείξετε ὅτι τό εὐθύγραμμο τμῆμα μέ ἄκρα τό $M_1(5,-6)$ καί τό $M_2(4,2)$ ἔχει ἕνα σημεῖο M πάνω στήν εὐθεία $4x+3y-6 = 0$ καί γιά νά προσδιορίσετε τίς συντεταγμένες τοῦ M.

90. Μιά δέσμη εὐθειῶν ὁρίζεται ἀπό τίς δυό εὐθεῖες της: $2x-4y+2 = 0$, $3x+2y-5 = 0$. Ποιά εἶναι ἡ ἐξίσωση α) ἐκείνης τῆς εὐθείας τῆς δέσμης πού περνᾶ ἀπό τό σημεῖο (8,9) β) ἐκείνης πού περνᾶ ἀπό τό O(o,o), γ) ἐκείνης πού εἶναι // πρός τό διάνυσμα (-5,3) , δ) ἐκείνης πού εἶναι // πρός τήν εὐθεία $2x+3y = 0$, ε) ἐκείνης πού διαιρεῖ τό τμῆμα AB, ὅπου A(0,3) καί B(4,0), κατά τό λόγο (ABP) = -3/7;

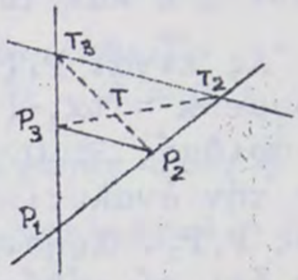
91. Δεῖξτε ὅτι οἱ ἄπειρες εὐθεῖες
$$(2\lambda+3)x + (4-5\lambda)y + (6+3\lambda) = 0$$
τίς ὁποῖες λαμβάνουμε δίνοντας στό λ κάθε πραγματική τιμή, περνοῦν ὅλες ἀπό ἕνα καί τό ἴδιο σημεῖο K· τοῦ K νά προσδιοριστοῦν καί οἱ συντεταγμένες. Γενικεῦστε, θεωρῶντας τό μονοπαραμετρικό πλῆθος εὐθειῶν
$$(\alpha_1\lambda+\beta_1)x + (\alpha_2\lambda+\beta_2)y + (\alpha_3\lambda+\beta_3) = 0$$
ὅπου λ ἡ παράμετρος καί ἡ διάσταση τοῦ πίνακα
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}$$
ἴση μέ 2.

92. Δεῖξτε ὅτι ἄν τά δυό σημεῖα $P_1(x_1,y_1)$ καί $P_2(x_2,y_2)$ δέν ἀνήκουν στήν εὐθεῖα $Ax+By+\Gamma = 0$, οἱ δυό ἀριθμοί $Ax_1+By_1+\Gamma$ καί $Ax_2+By_2+\Gamma$ εἶναι ὁμόσημοι ἤ ἑτερόσημοι καθόσον τά σημεῖα P_1 καί P_2 βρίσκονται ἀπό τήν ἴδια ἤ ἀπό διάφορες μεριές τῆς εὐθείας $Ax+By+\Gamma = 0$.

93. Μιά εὐθεία μετακινεῖται παράλληλα πρός τόν ἑαυτό της ἔτσι πού ν' ἀποκόβη πάνω στούς ἄξονες OX καί OY δυό διανύσματα $\overline{OP}_1$ καί $\overline{OP}_2$ ἀντιστοίχως, μέ σταθερό τό λόγο $\frac{(\overline{OP}_1)}{(\overline{OP}_2)} = k$. Πάνω στό τμῆμα P_2P_1 κατασκευάζεται τό παραλληλόγραμμο $P_2P_1P\,P_3$ μέ $P_2P_3 // P_1P //$ πρός δοσμένη εὐθεία $y = \lambda x$ καί μέ P_3 πάνω στήν ἐπίσης δοσμένη εὐθεία $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$. Ζητεῖται νά προσδιοριστῆ ἀναλυτικά ὁ γεωμετρ. τόπος τῆς 4ης κορυφῆς P. (Νά πάρετε γιά παράμετρο τό $t = (\overline{OP}_2)$ καί νά ἐκφράσετε τά x καί y τοῦ P διά τοῦ t).



94. Ἄς εἶναι $P_1P_2P_3$ ἕνα τρίγωνο. Κόβουμε τίς εὐθεῖες P_1P_2 καί P_1P_3 μέ μιά μεταβλητή εὐθεία τῆς ἴδιας διεύθυνσης μέ τήν P_2P_3. Ἄς εἶναι T_2 καί T_3 τά δυό σημεῖα τομῆς. Νά προσδιοριστῆ ἀναλυτικά ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν κοινῶν σημείων τῶν εὐθειῶν P_2T_3 καί P_3T_2. (Νά πάρετε γιά ἄξονες συντεταγμένων τίς εὐθεῖες P_1P_2, P_1P_3).



95. Σέ ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, μέ $OE_1 = OE_2$, ποιόν γεωμετρικό τόπο παριστάνει ἡ ἐξίσωση $y = |x|$ (δηλαδή ποιός εἶναι ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων πού οἱ συντεταγμένες των (x,y) ἱκανοποιοῦν τήν ἐξίσωση $y = |x|$); Ποιόν τόπο παριστάνει ἡ $y = |x-5|$, ἡ $y = |x+2|$, ἡ $x = |y+5|$; Ποιόν τόπο παριστάνει ἡ $y = |\lambda x+\beta|$, ποιόν ἡ $x = |kx+\alpha|$; Ποιόν τοπο παριστάνει ἡ $2|x|-3|y|+4 = 0$, ποιόν ἡ $|x+y| = \vartheta$, ὅπου ϑ ὁρισμένος θετικός ἀριθμός, ποιόν ἡ $|x|+|y| = \vartheta$;

96.* Σέ ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, μέ $OE_1 = OE_2$, ποιόν τόπο παριστάνει ἡ ἐξίσωση $y = |x+3|+|x-1|$, ποιόν ἡ $y = |x+1|+|x-2|+|x-3|$, ποιόν ἡ $y = |x+2|+|x|+|x-3|+|x-4|$; Γενικεύοντας βρῆτε τό γεωμετρ. τόπο πού παριστάνεται ἀπό τήν ἐξίσωση

$$y = |x-x_1| + |x-x_2| + \ldots + |x-x_{2\mu-1}|$$

ἤ ἀπό τήν

$$y = |x-x_1| + |x-x_2| + \ldots + |x-x_{2\mu-1}| + |x-x_{2\mu}| \quad ,$$

ὅπου μ ἕνας ὁρισμένος φυσικός ἀριθμός καί $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2\mu-1} < x_{2\mu}$ ἐπίσης ὁρισμένοι πραγματικοί ἀριθμοί. Πῶς μπορεῖ νά σχεδιασθῆ ὁ γεωμ. τόπος μέ τόν ἁπλούστερο τρόπο; Τί γίνεται ὁ τόπος ἄν ἐπιτραπῆ ἡ σύμπτωση μερικῶν ἀπό τούς ἀριθμούς $x_1, \ldots, x_{2\mu}$, π.χ. ἄν $x_1 < x_2 = x_3 < x_4 < \ldots < x_{2\mu}$;

97.* Ἔστω $P_1P_2P_3$ ἕνα τρίγωνο μέ κορυφές $P_1(\alpha_1,\beta_1)$, $P_2(\alpha_2,\beta_2)$ $P_3(\alpha_3,\beta_3)$. Καλοῦμε (m_1,m_2,m_3) τίς βαρυκεντρικές συντεταγμένες ὡς πρός τό τρίγωνο $P_1P_2P_3$ τοῦ τυχόντος σημείου M τοῦ ἐπιπέδου (βλ. προηγούμενη ἄσκηση 78). Δεῖξτε ὅτι μιά εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου παριστάνεται ἀπό μιάν ἐξίσωση

$$c_1m_1 + c_2m_2 + c_3m_3 = 0$$

πρωτοβάθμια καί ὁμογενῆ ὡς πρός m_1, m_2, m_3, ὅπου οἱ συντελεστές c_1, c_2, c_3 δέν ἔχουν καί οἱ τρεῖς τήν ἴδια τιμή.
Ἀντιστρόφως ἄν $\Gamma_1m_1 + \Gamma_2m_2 + \Gamma_3m_3 = 0$
εἶναι μιά ἐξίσωση πρωτοβάθμια καί ὁμογενής ὡς πρός m_1, m_2, m_3, μέ δυό τουλάχιστο ἄνισους συντελεστές:
$|\Gamma_1-\Gamma_2| + |\Gamma_2-\Gamma_3| \neq 0$, τότε ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων M τοῦ ἐπιπέδου τά ὁποῖα ἱκανοποιοῦν τήν ἐξίσωση μέ τίς βαρυκεντρικές των συντεταγμένες εἶναι μιά εὐθεία.

98.* Ἔστω $\begin{cases} x = x_0+\alpha t \\ y = y_0+\beta t \end{cases}$ ἡ παραμετρική παράσταση (βλ § 73) μιᾶς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου. Ὅπως ξέρουμε, τό ἐξ ὑποθέσεως μή μηδενικό διάνυσμα (α,β) εἶναι παράλληλο πρός τήν εὐθεία. Δεῖξτε ὅτι οἱ βαρυκεντρικές συντεταγμένες τοῦ σημείου $P(t)$ τῆς εὐθείας, τό ὁποῖο ἀντιστοιχεῖ στήν τιμή t τῆς παραμέτρου, εἶναι τρεῖς ἀριθμοί m_1, m_2, m_3 ἀνάλογοι πρός τούς ἀριθμούς

$$\begin{vmatrix} \alpha_2-\alpha_3 & \beta_2-\beta_3 \\ \frac{x_0}{t}+\alpha & \frac{y_0}{t}+\beta \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}\frac{1}{t}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_3-\alpha_1 & \beta_3-\beta_1 \\ \frac{x_0}{t}+\alpha & \frac{y_0}{t}+\beta \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}\frac{1}{t}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1-\alpha_2 & \beta_1-\beta_2 \\ \frac{x_0}{t}+\alpha & \frac{y_0}{t}+\beta \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}\frac{1}{t}$$

Αὐτό μᾶς ὁδηγεῖ στό νά ὁρίσουμε τίς βαρυκεντρικές συντεταγμένες τοῦ ἐπ' ἄπειρο σημείου τῆς εὐθείας ἀνάλογες πρός τούς τρεῖς ἀριθμούς

$$m_1(\infty) = \begin{vmatrix} \alpha_2-\alpha_3 & \beta_2-\beta_3 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}, \quad m_2(\infty) = \begin{vmatrix} \alpha_3-\alpha_1 & \beta_3-\beta_1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix},$$

$$m_3(\infty) = \begin{vmatrix} \alpha_1-\alpha_2 & \beta_1-\beta_2 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}.$$

Δεῖξτε ὅτι ἀπό τούς τρεῖς αὐτούς ἀριθμούς ἕνας τουλάχιστο δέν εἶναι 0 καί ὅτι

$$m_1(\infty) + m_2(\infty) + m_3(\infty) = 0.$$

Κάμετε μιάν ἀριθμητική ἐφαρμογή παίρνοντας γιά τρίγωνο ἀναφορᾶς $P_1P_2P_3$ κεῖνο πού ἔχει τίς ἑξῆς κορυφές $P_1(1,1)$, $P_2(-1,2)$, $P_3(0,-2)$ καί ὑπολογίζοντας τίς βαρυκεντρικές συντεταγμένες τῶν ἐπ'ἄπειρο σημείων τῶν ἑξῆς εὐθειῶν: τοῦ OX, τοῦ OY, τῆς $y = x$, τῆς $y = 2x-4$, τῆς $4x-3y+5 = 0$.

99.* Δεῖξτε ὅτι τά ἐπ'ἄπειρο σημεῖα δυό παραλλήλων εὐθειῶν

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases} \quad \text{καί} \quad \begin{cases} x = x_0' + \alpha t' \\ y = y_0' + \beta t' \end{cases}$$

ἔχουν τίς ἴδιες βαρυκεντρικές συντεταγμένες, ἀλλά ὅτι τά ἐπ' ἄπειρο σημεῖα δυό μή παράλληλων εὐθειῶν

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases} \quad \text{καί} \quad \begin{cases} x = x_0' + \alpha' t' \\ y = y_0' + \beta' t' \end{cases} \qquad \text{ὅπου} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} \neq 0$$

ἔχουν διαφορετικές βαρυκεντρικές συντεταγμένες, δηλαδή οἱ ἀριθμοί $m_1(\infty)$, $m_2(\infty)$, $m_3(\infty)$ δέν εἶναι ἀνάλογοι πρός τούς $m_1'(\infty)$, $m_2'(\infty)$, $m_3'(\infty)$.

Ἄρα τά ἐπ'ἄπειρο σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχοῦν ἀμφιμονότροπα στούς λόγους $m_1(\infty):m_2(\infty):m_3(\infty)$ τριῶν ἀριθμῶν πού δέν εἶναι καί οἱ 3 μηδενικοί καί πού ἱκανοποιοῦν τήν ἐξίσωση:

$$cm_1 + cm_2 + cm_3 = 0 \qquad (c \neq 0) \quad .$$

Ἐπειδή ἡ ἐξίσωση αὐτή εἶναι πρωτοβάθμια καί ὁμογενής ὡς πρός m_1, m_2, m_3 εἶναι φυσικό, ἐπεκτείνοντας κεῖνο πού διαπιστώσαμε σέ προηγούμενη ἄσκηση ἀρ.97, νά εἰποῦμε ὅτι τά ἐπ' ἄπειρο σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ἀποτελοῦν μιάν εὐθεία, τήν ἐπ'ἄπειρο εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου καί ὅτι αὐτή ἡ εὐθεία ἔχει ἐξίσωση σέ βαρυκεντρικές συντεταγμένες: $m_1+m_2+m_3= 0$ (ἤ φυσικά $cm_1+cm_2+cm_3=0$).

Ἡ παραπάνω θεωρία μᾶς παρέχει μιάν ἀναλυτική παράσταση (δηλαδή μιά παράσταση, μέ τήν βοήθεια ἀριθμῶν τῶν ἐπ'ἄπειρο στοιχείων τοῦ ἐπιπέδου, στοιχείων μέ τά ὁποῖα γιά διαφόρους λόγους εἶναι σκόπιμο νά συμπληρώσουμε τά ἀρχικῶς παραδεγμένα στοιχεῖα (σημεῖα καί εὐθεῖες) τοῦ ἐπιπέδου.

100. Μιά ἀναλυτική παράσταση τῶν σημείων καί εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου (συμπερίληψη τῶν ἐπ'ἄπειρο στοιχείων), συγγενική μέ τή βαρυκεντρική, εἶναι ἡ ἑξῆς:

Ἔστω $P(x,y)$ τυχόν σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου. Θέτουμε:

$x_1:x_2:x_3 = x:y:1$ δηλαδή $x_1= \lambda x$, $x_2= \lambda y$, $x_3= \lambda$ ὅπου λ αὐθαίρετος ἀριθμός $\neq 0$. Ἀπό αὐτές τίς σχέσεις ἔπεται ἀντίστροφα ὅτι $x = \dfrac{x_1}{x_3}$, $y = \dfrac{x_2}{x_3}$.

Μ'αὐτόν τόν τρόπο σέ κάθε σημεῖο $P(x,y)$ ἀντιστοιχοῦν ἄπειρες τριάδες ἀριθμῶν (x_1,x_2,x_3) οἱ ὁποῖες ὅμως ἀνά δυό εἶναι ἀνάλογες ἡ μιά πρός τήν ἄλλη καί ἔχουν πάντοτε τό $x_3 \neq 0$.

Ἀντιστρόφως σέ κάθε τριάδα (x_1,x_2,x_3) μέ $x_3 \neq 0$ ἀντιστοιχεῖ ἕνα ὁρισμένο σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου, τό

$M(x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3})$. Οἱ ἀριθμοί (x_1, x_2, x_3) πού ἀντιστοιχοῦν ἔτσι στό τυχόν σημεῖο P τοῦ ἐπιπέδου λέγονται ὁμογενεῖς συντεταγμένες του.

Ἀπό τίς τριάδες (x_1, x_2, x_3) μέ $|x_1|+|x_2|+|x_3| \neq 0$ δέν χρησιμοποιήθηκαν παραπάνω ἐκεῖνες πού ἔχουν $x_3 = 0$· τίς ἔχουμε λοιπόν διαθέσιμες γιά νά τίς ἀντιστοιχίσουμε στά ἐπ'ἄπειρο σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου. Ἰδού πῶς:

Ἔστω $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$ ἡ παραμετρική παράσταση μιᾶς εὐθείας // πρός τό μή μηδενικό διάνυσμα (α, β). Τό σημεῖο τῆς $P(t)$, τό ἀντίστοιχο στήν τιμή $t \neq 0$ τῆς παραμέτρου, ἔχει ὁμογενεῖς συντεταγμένες ἀνάλογες πρός τούς 3 ἀριθμούς $\left(\frac{1}{t}x, \frac{1}{t}y, \frac{1}{t}\right)$, ἄρα δυνάμει τῶν παραμετρικῶν ἐξισώσεων, τούς $\left(\frac{x_0}{t} + \alpha, \frac{y_0}{t} + \beta, \frac{1}{t}\right)$.

Εἶναι λοιπόν φυσικό ν'ἀντιστοιχίσουμε στό ἐπ'ἄπειρο σημεῖο τῆς εὐθείας τίς ὁμογενεῖς συντεταγμένες $(x_1 = \varrho\alpha, x_2 = \varrho\beta, x_3 = 0)$ ὅπου ϱ αὐθαίρετος ἀριθμός $\neq 0$.

Δεῖξτε τώρα ὅτι τά ἐπ'ἄπειρο σημεῖα δυό παράλληλων εὐθειῶν ἔχουν τίς ἴδιες ὁμογενεῖς συντεταγμένες $(x_1, x_2, 0)$, ἀλλ' ὅτι τά ἐπ'ἄπειρο σημεῖα δυό μή παράλληλων εὐθειῶν ε καί ε΄ ἔχουν διαφορετικές ὁμογενεῖς συντεταγμένες:

$$x_1 : x_2 : 0 \neq x_1' : x_2' : 0 \cdot$$

Σάν ἀριθμητική ἐφαρμογή βρῆτε τίς ὁμογενεῖς συντεταγμένες τῶν σημείων $P_1(5,3)$, $P_2(-3,4)$ καθώς καί τῶν ἐπ'ἄπειρο σημείων τῶν ἑξῆς εὐθειῶν: $x = 0$, $y = 0$, $y = -x$, $y = 2x - 3$, $y = \lambda x + \beta$, $4x + 3y - 4 = 0$, $Ax + By + \Gamma = 0$.

101.* Δεῖξτε ὅτι μιά εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου παριστάνεται μέ μιάν πρωτοβάθμια ὁμογενῆ ἐξίσωση $A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 = 0$, ὅπου $|A_1| + |A_2| \neq 0$, καί ὅτι ἀντιστρόφως μιά τέτοια ἐξίσωση παριστάνει μιάν εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου.

Τά ἐπ'ἄπειρο σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ἱκανοποιοῦν τήν ἐξίσωση $0_1 x_1 + 0 x_2 + A_3 x_3 = 0$ ὅπου $A_3 \neq 0$ δηλ. τήν $x_3 = 0$. Ἡ ἐξίσωση αὐτή εἶναι πρωτοβάθμια καί ὁμογενής ὡς πρός x_1, x_2, x_3 γι'αὐτό πάλι λέμε ὅτι τά ἐπ'ἄπειρο σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ἀποτελοῦν μιάν εὐθεία ἡ ὁποία σέ ὁμογενεῖς συντεταγμένες ἔχει ἀναλυτική παράσταση τήν ἐξίσωση $A_3 x_3 = 0$ μέ $A_3 \neq 0$ ἤ ἁπλούστερα, $x_3 = 0$. Ἔχουμε ἄρα τήν <u>Πρόταση</u>: Κάθε εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου (μέ συμπερίληψη τῆς ἐπ'ἄπειρο εὐθείας) παριστάνεται ἀπό μιά <u>πρωτοβάθμια</u> ὁμογενῆ ἐξίσωση $A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 = 0$ καί ἀντιστρόφως.

Γιά νά ἐφαρμόσετε τά παραπάνω βρῆτε σέ ὁμογενεῖς συντεταγμένες τίς ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν Ox, Oy, τῶν $y = \lambda x + \beta$,

$x = ky+\alpha$, $4x-5y+4 = 0$, $Ax+By+\Gamma = 0$.

Μεταβῆτε τώρα ἀντιστρόφως ἀπό τήν ἀναλυτική παράσταση εὐθειῶν μέ ὁμογενεῖς συντεταγμένες: $x_1-x_3= 0$, $x_2+x_3= 0$, $-2x_1+3x_2+4x_3 = 0$ στήν ἀναλυτική παράσταση τῶν ἴδιων εὐθειῶν μέ τίς ἀντίστοιχες παράλληλες συντεταγμένες.

Ποιά εἶναι ἡ ἐξίσωση σέ ὁμογενεῖς συντεταγμένες τῆς εὐθείας διά τοῦ $P_0(4,3)$ τῆς παράλληλης πρός τό διάνυσμα $\vec{\delta}(5,-2)$; Ποιά ἡ ἐξίσωση τῆς εὐθείας πού συνδέει τό $P_1(-3,2)$ μέ τό ἐπ' ἄπειρο σημεῖο τῆς $x = 4y+3$;

Δεῖξτε ὅτι ἡ ἐξίσωση τῆς εὐθείας πού περνᾶ ἀπό τά δυό διαφορετικά σημεῖα μέ ὁμογενεῖς συντεταγμένες $M'(x'_1,x'_2,x'_3)$ καί $M''(x''_1,x''_2,x''_3)$ μπορεῖ νά γραφῆ ἔτσι

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Ἐπίσης ὅτι τά διάφορα σημεῖα τῆς εὐθείας $M'M''$ (μέ συμπερίληψη τοῦ ἐπ' ἄπειρο σημείου της) ἔχουν ὁμογενεῖς συντεταγμένες τῆς μορφῆς

$$(\lambda' x'_1+\lambda'' x''_1 \quad , \quad \lambda' x'_2+\lambda'' x''_2 \quad , \quad \lambda' x'_3 +\lambda'' x''_3) \quad .$$

ὅπου λ' καί λ'' αὐθαίρετοι πολλαπλασιαστές, ὁ ἕνας τουλάχιστο $\neq 0$. Τέλος διερευνῆστε βάσει τῆς θεωρίας τοῦ § 54 τή σχετική θέση τῶν εὐθειῶν πού παριστάνονται ἀπό τίς πρωτοβάθμιες ἐξισώσεις

$$A_1x_1+ A_2x_2+ A_3x_3= 0 \quad , \quad B_1x_1+ B_2x_2+ B_3x_3= 0 .$$

102.* Ἔστω $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3 = 0$ ἡ ἐξίσωση σέ ὁμογενεῖς συντεταγμένες) μιᾶς εὐθείας. Τήν ἴδια εὐθεία παριστάνει ἐννοεῖται ἡ ἐξίσωση $\varrho u_1x_1+\varrho u_2x_2+\varrho u_3x_3= 0$, ὅπου ϱ αὐθαίρετος ἀριθμός $\neq 0$.

Τούς 3 ἀριθμούς $(\varrho u_1,\varrho u_2,\varrho u_3)$ (ἀπό τούς ὁποίους ἕνας τουλάχιστο εἶναι $\neq 0$ καί μέσα στούς ὁποίους ὑπάρχει ἕνας αὐθαίρετος κοινός πολλαπλασιαστής $\neq 0$, ὁ ϱ) τούς καλοῦμε ὁμογενεῖς συντεταγμένες τῆς εὐθείας $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3= 0$, (ἐπειδή ὅταν δοθοῦν ἡ εὐθεία εἶναι καθορισμένη καί ἀντιστρόφως).

Σημειώνουμε ὅτι ὁ κοινός πολλαπλασιαστής δέν γράφεται συνήθως ἀλλά ἐξυπακούεται.

Πραγματευθῆτε τώρα τά ἑξῆς: Ποιές εἶναι οἱ ὁμογενεῖς συντεταγμένες τῶν εὐθειῶν ΟΧ, ΟΥ, τῆς ἐπ' ἄπειρο εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου, τῆς $x+y = 0$, τῆς $y = \lambda x+\beta$, τῆς $x = ky+\alpha$, τῆς $Ax+By+\Gamma=0$;

Ποιές εἶναι πρῶτα σέ ὁμογενεῖς συντεταγμένες (x_1,x_2,x_3), κατόπιν στίς ἀντίστοιχες παράλληλες συντεταγμένες (x,y), οἱ ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν πού ἔχουν τίς ἀκόλουθες ὁμογενεῖς συντεταγμένες ἀντιστοίχως: $(5,-3,2)$, $(0,4,2)$, $(3,0,-2)$; Ποιές εἶναι οἱ ὁμογενεῖς συντεταγμένες τῆς εὐθείας πού ἑνώνει τά σημεῖα $P_1(x_1=4,\ x_2=-5,\ x_3=7)$ καί $P_2(2,6,-3)$, γενικῶς τῆς εὐθείας πού περιέχει τά 2 σημεῖα $M'(x'_1,x'_2,x'_3)$ καί $M''(x''_1,x''_2,x''_3)$;

Ποιές εἶναι οἱ ὁμογενεῖς συντεταγμένες τοῦ σημείου πού ἀνήκει καί στίς δυό εὐθεῖες $\varepsilon'(u'_1,u'_2,u'_3)$ καί $\varepsilon''(u''_1,u''_2,u''_3)$ οἱ ὁποῖες ὑποθέτουμε ὅτι δέν συμπίπτουν; (Προσέξτε τήν ὁμοιότητα τῶν δύό τελευταίων ἀπαντήσεων!).

103.* Δεῖξτε ὅτι ὅλες οἱ εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου πού περνοῦν ἀπό ἕνα αὐθαίρετα ὁρισμένο σημεῖο K (ἐπ' ἄπειρο ἤ ὄχι) τοῦ ἐπιπέδου ἔχουν ὁμογενεῖς συντεταγμένες (u_1,u_2,u_3) οἱ ὁποῖες ἱκανοποιοῦν μιάν πρωτοβάθμια ὁμογενῆ ἐξίσωση $\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3=0$. Οἱ συντελεστές $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ εἶναι οἱ ὁμογενεῖς συντεταγμένες τοῦ K. Ἑπομένως ποιές εἶναι οἱ ὁμογενεῖς συντεταγμένες τῶν διαφόρων εὐθειῶν μιᾶς δέσμης πού ὁρίζεται ἀπό τίς μή συμπίπτουσες εὐθεῖες, $\varepsilon'(u'_1,u'_2,u'_3)$ καί $\varepsilon''(u''_1,u''_2,u''_3)$; (Συγκρίνετε τήν ἀπάντηση στό τελευταῖο ἐρώτημα μέ τό ἀποδεικτέο στό προτελευταῖο μέρος τῆς Ἀσκ.101*).

Σημειώνουμε ὅτι ἡ ἐξίσωση $\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3=0$ λέγεται ἐξίσωση τοῦ σημείου K σέ <u>εὐθειακές συντεταγμένες.</u>

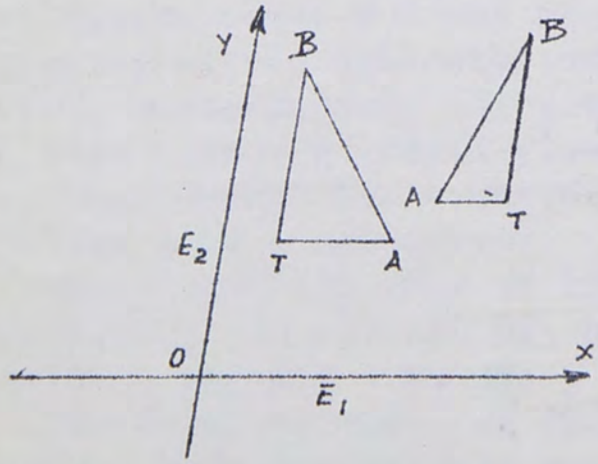
ΚΕΦΑΛΑΙΟ VIII

ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

§ 79. Ὡς ἐδῶ συσχετίσαμε διανύσματα μεταξύ τους μόνο ὅταν ἦσαν παράλληλα. Γι'αὐτό καί ἡ Ἀναλυτική Γεωμετρία πού ἐκθέσαμε λέγεται ὁμοπαραλληλική. Μεταβαίνουμε τώρα στή λεγόμενη μετρική Ἀναλυτική Γεωμετρία τοῦ ἐπιπέδου ἡ ὁποία συσχετίζει καί διανύσματα μή παράλληλα, μέ τή βοήθεια τῶν δύο βασικῶν μετρικῶν" ἐννοιῶν: 1ο τοῦ μήκους (ἤ μέτρου ἤ ἀπόλυτης τιμῆς) ἑνός διανύσματος καί 2ο τῆς γωνίας δυό μή μηδενικῶν διανυσμάτων.

ΜΗΚΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΩΝ

§ 80. Ἔστω $\bar{\alpha} = \overline{AB}$ ἕνα διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου μή παράλληλο πρός OX καί OY· ἄς ἔχη συντεταγμένες (α_1, α_2) σ'ἕνα σύστημα XOY μέ $OE_1 = OE_2 =$ ἐκλεγμένη μονάδα μήκους. Ἐάν ATB εἶναι τό συντεταγμένο διάγραμμα τοῦ $\bar{\alpha}$ θά ἔχουμε γιά τό μῆκος $|\bar{\alpha}| = AB$ τοῦ διανύσματος $\bar{\alpha} = \overline{AB}$, ἀπό τό τρίγωνο ATB: $AB^2 = AT^2 + TB^2 - 2AT \cdot TB\text{συν}\widehat{ATB} = (\overline{AT})^2 + (\overline{TB})^2 + 2(\overline{AT})(\overline{TB})\text{συν}XOY$



ἄρα

$$(80.1) \qquad |\alpha^2| = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\text{συν}\widehat{XOY}$$

καί $\qquad |\bar{\alpha}| = \underset{+}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+2\alpha_1\alpha_2 συν\widehat{XOY}}}$,

καί σέ ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων ($\widehat{XOY} = \frac{\pi}{2}$):

(80.2) $\qquad |\alpha|^2 = \alpha_1^2+\alpha_2^2 \quad , \quad |\bar{\alpha}| = \underset{+}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}$.

Οἱ τύποι αὐτοί ἰσχύουν προφανῶς καί στήν περίπτωση ὅπου $\bar{\alpha}//OX$ ἤ OY. Ἡ ἀπόσταση P_1P_2 δυό σημείων $P_1(x_1,y_1)$ καί $P_2(x_2,y_2)$ ἰσοῦται μέ τό μέτρο τοῦ διανύσματος $\overline{P_1P_2}(x_2-x_1\ ,\ y_2-y_1)$, ἄρα

(80.3) $\quad P_1P_2 = +\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+2(x_2-x_1)(y_2-y_1)συν\widehat{XOY}}$

καί σέ σύστημα ὀρθογώνιο

(80.4) $\qquad P_1P_2 = +\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

§ 81. Ἄς εἶναι $\bar{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2)$ καί $\bar{\beta}(\beta_1,\beta_2)$ δυό μή μηδενικά διανύσματα τοῦ ἐπιπέδου. Ἀπό ἕνα καί τό ἴδιο σημεῖο O_1 τοῦ ἐπιπέδου παίρνουμε τά διανύσματα $\overline{O_1A} = \bar{\alpha}$, $\overline{O_1B} = \bar{\beta}$.

Τό μέγεθος τῆς γωνίας $A\widehat{O_1}B$ τοῦ τριγώνου AO_1B (μέγεθος ἀνεξάρτητο ἀπό τήν ἐκλογή τοῦ O_1) θά λέγεται <u>στοιχειώδης γωνία</u> τῶν δύο διανυσμάτων $\bar{\alpha}$ καί $\bar{\beta}$ καί θά παριστάνεται μέ $\widehat{\bar{\alpha},\bar{\beta}} = \bar{\beta}\,\widehat{}\,\bar{\alpha}$. Τό μέτρο της $(\widehat{\bar{\alpha},\bar{\beta}}) = (\bar{\beta}\,\widehat{}\,\bar{\alpha})$ θά εἶναι, σέ ἀκτίνια, ἕνας ἀριθμός $\geqq 0$ καί $\leqq \pi$, ἴσος μέ 0 ἄν $\bar{\alpha}\upuparrows\bar{\beta}$, ἴσος μέ π ἄν $\bar{\alpha}\uparrow\downarrow\bar{\beta}$ (στίς δυό τελευταῖες εἰδικές περιπτώσεις τό σχῆμα AO_1B εἶναι τρίγωνο μέ κάποια εὐνόητη ἐπέκταση τῆς σημασίας τοῦ ὅρου τρίγωνο).

Ἀπό γνωστό τύπο τῆς τριγωνομετρίας, πού χρησιμοποιήσαμε κιόλας στόν § 80 προκύπτει τώρα

$$AB^2 = O_1A^2 + O_1B^2 - 2O_1A\cdot O_1B\,συν A\widehat{O_1}B$$

ἤ $\qquad |\overline{AB}|^2 = |\bar{\alpha}|^2+|\bar{\beta}|^2 - 2|\bar{\alpha}|\,|\bar{\beta}|\,συν(\widehat{\bar{\alpha},\bar{\beta}})$.

Ἄρα μέ χρησιμοποίηση τῶν τύπων § 80, ἔχουμε

$$2|\bar{\alpha}|\,|\bar{\beta}|\,συν(\widehat{\bar{\alpha},\bar{\beta}}) = \alpha_1^2+\alpha_2^2+2\alpha_1\alpha_2 συν\widehat{XOY} + \beta_1^2+\beta_2^2$$
$$+\ 2\beta_1\beta_2 συν\widehat{XOY} - (\beta_1-\alpha_1)^2 - (\beta_2-\alpha_2)^2 - 2(\beta_1-\alpha_1)(\beta_2-\alpha_2)συν\widehat{XOY}$$
$$= 2\alpha_1\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2 + 2(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)συν\widehat{XOY}\ .$$

Ἑπομένως:

$$(81.1) \qquad συν(\widehat{\bar{α},\bar{β}}) = \frac{α_1β_1+α_2β_2+(α_1β_2+α_2β_1)συν\widehat{XOY}}{+\sqrt{α_1^2+α_2^2+2α_1α_2συν\widehat{XOY}}\cdot +\sqrt{β_1^2+β_2^2+2β_1β_2συν\widehat{XOY}}}$$

καί σέ ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων μέ μοναδιαῖα βασικά διανύσματα:

$$(81.2) \qquad συν(\widehat{\bar{α},\bar{β}}) = \frac{α_1β_1+α_2β_2}{+\sqrt{α_1^2+α_2^2}\ +\sqrt{β_1^2+β_2^2}}\ .$$

Εἶναι φανερή ἡ σημαντική ἁπλούστευση τῶν τύπων γιά τό μῆκος τοῦ $\bar{α}$, τήν ἀπόσταση P_1P_2 καί τό $συν(\widehat{\bar{α},\bar{β}})$, ὅταν τό σύστημα ληφθῆ ὀρθογώνιο. Γι'αὐτό καί στό ἑξῆς τό σύστημα τῶν συντεταγμένων θά ἐξυπακούεται ὀρθογώνιο. Σέ ἕνα τέτοιο σύστημα τά βασικά διανύσματα $\overline{OE}_1$ καί $\overline{OE}_2$ (πού εἶναι ἰσόμηκα μέ τήν ἐκλεγμένη μονάδα μήκους) συνηθίζεται νά παριστάνωνται μέ τά λατινικά γράμματα $\bar{i}$ καί $\bar{j}$ ἀντιστοίχως. Ἔτσι, ἄν $(α_1,α_2)$ εἶναι οἱ συντεταγμένες τοῦ $\bar{α}$, θά ἔχουμε $\bar{α} = α_1\bar{i}+α_2\bar{j}$. Ἐπίσης, ἄν (x,y) εἶναι οἱ συντεταγμένες τοῦ σημείου P, θά ἔχουμε $\overline{OP} = x\bar{i}+y\bar{j}$.

ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑ ΕΝΟΣ ΠΡΩΤΟΥ ΜΕ ΕΝΑ ΔΕΥΤΕΡΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

§ 82. Ὅπως βρέθηκε σκόπιμο πάνω στήν εὐθεία νά διακρίνουμε θετική καί ἀρνητική φορά, ἔτσι εἶναι σκόπιμο νά ξεχωρίσουμε μέσα στό ἐπίπεδο μιά θετική καί μιάν ἀρνητική φορά στροφῆς.

Τό ἐπίπεδο λέγεται τότε προσανατολισμένο (orienté). Ἐποπτικά ὁ ξεχωρισμός αὐτός γίνεται ὡς ἑξῆς: Θεωροῦμε μιάν ὁρισμένη ὄψη ἀπό τίς δυό ὄψεις πού ἔχει τό ἐπίπεδο καί παραβάλλουμε τή στροφή μιᾶς ἡμιευθείας $\overrightarrow{OP}$ γύρω στό O πάνω σ'αὐτήν τήν ὄψη μέ τήν κίνηση τῶν δεικτῶν ἑνός ρωλογιοῦ πού ἡ πλάκα του θά ἦταν σχεδιασμένη πάνω στήν ἴδια ὄψη. Ἡ στροφή τῆς $\overrightarrow{OP}$ ἤ θά εἶναι ἀντίθετη πρός τήν κίνηση τῶν δεικτῶν ἤ θά εἶναι σύμφωνη μ'αὐτήν. Συνήθως ἡ φορά στροφῆς πού εἶναι ἀντίθετη πρός τήν κίνηση τῶν δεικτῶν ἐκλέγεται γιά θετική, ἡ ἄλλη φορά στροφῆς λέγεται τότε ἀρνητική. Ἕνας παρατηρητής, πού στέκεται πάνω στή θεωρούμενη ὄψη τοῦ ἐπιπέδου, βλέπει τή στροφή πού ἔχει τήν πρώτη φορά καί πού ἐκλέγεται, ὅπως εἴπαμε, συνήθως γιά θετική, νά γίνεται ἀπό τά δεξιά του πρός τά ἀριστερά.

§ 83. Ἄς εἶναι τώρα $\bar{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2)$, $\bar{\beta}(\beta_1,\beta_2)$ δυό μή μηδενικά διανύσματα καί $\bar{\alpha} = \overline{OA}$, $\bar{\beta} = \overline{OB}$. Καλοῦμε προσημασμένη γωνία τοῦ διανύσματος $\bar{\alpha}$ ὡς πρώτου μέ τό διάνυσμα $\bar{\beta}$ ὡς δεύτερο, τό γεωμετρικό μέγεθος πού ἀντιστοιχεῖ σέ μιάν ὁποιαδήποτε στροφή τῆς ἡμιευθείας $\overrightarrow{OP}$ γύρω στό O ἀπό τήν ἀρχική θέση $\overrightarrow{OA}$ στή τελική $\overrightarrow{OB}$. Τό γεωμετρικό αὐτό μέγεθος λέγεται θετικό ἤ ἀρνητικό καθόσο ἡ θεωρούμενη στροφή εἶναι θετική ἤ ἀρνητική (ἔχει θετική ἤ ἀρνητική φορά). Προφανῶς δέν εἶναι μονότροπα ὁρισμένο, οὔτε κατά τό πρόσημο οὔτε κατά τήν ἀπόλυτη τιμή, ἀπό τό δόσιμο τῶν $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ δηλαδή τῶν $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ καί μόνο. Πράγματι ἡ $\overrightarrow{OP}$ μπορεῖ, ἀφοῦ φθάση στή θέση $\overrightarrow{OB}$, νά κάμη ἕναν ἤ περισσότερους ὁλάκερους γύρους (κατά τή μιά ἤ τήν ἄλλη φορά στροφῆς) καί ἔτσι νά ξανάρθη στή θέση $\overrightarrow{OB}$. Ἀντίστοιχα μ'αὐτά εἰσάγουμε τά ἑξῆς σύμβολα γιά τή προσημασμένη γωνία τοῦ $\bar{\alpha}$ μέ τό $\bar{\beta}$: $\underset{\mu}{\underrightarrow{\bar{\alpha}\ \bar{\beta}}}$, ἄν ἡ στροφή ἔγινε κατά τή θετική φορά καί περιέχη μ ὁλάκερους γύρους, τό $\overset{\mu}{\overrightarrow{\bar{\alpha}\ \bar{\beta}}}$, ἄν ἡ στροφή ἔγινε κατά τήν ἀρνητική φορά καί περιέχη μ ὁλάκερους γύρους. Τέλος τό $\underrightarrow{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$, ἄν θέλουμε νά παραστήσουμε ὄχι μιάν ὁρισμένη ἀλλά μιάν ὁποιαδήποτε ἀπό αὐτές τίς στροφές πού φέρνουν τήν ἡμιευθεία $\overrightarrow{OP}$ ἀπό τή θέση $\overrightarrow{OA}$ στήν $\overrightarrow{OB}$. Γιά τό προσημασμένο μέτρο μιᾶς τέτοιας γωνίας χρησιμοποιοῦμε τό ἴδιο τό συμβολό της κλεισμένο μέσα σέ μιάν παρένθεση: $(\underset{\mu}{\underrightarrow{\bar{\alpha}\ \bar{\beta}}})$, $(\overset{\mu}{\overrightarrow{\bar{\alpha}\ \bar{\beta}}})$, $(\underrightarrow{\bar{\alpha}\ \bar{\beta}})$. Σύμφωνα μ'αὐτά τό σύμβολο $(\underrightarrow{\bar{\alpha}\ \bar{\beta}})$ παριστάνει ἄπειρους ἀριθμούς, τούς

$$(\underset{\mu}{\underrightarrow{\bar{\alpha}\ \bar{\beta}}}) \text{ καί } (\overset{\mu}{\overrightarrow{\bar{\alpha}\ \bar{\beta}}}) \text{ γιά } \mu = 0,1,2,3,\ldots$$

γι'αὐτό τό λέμε ἀπειροσήμαντο σύμβολο. Οἱ παραπάνω ἀριθμοί πού παριστάνει λέγονται σημασίες ή τιμές του.

Προφανώς έχουμε

$$(\bar{\alpha}\underset{\mu}{\curvearrowright}\bar{\beta}) = (\bar{\alpha}\underset{o}{\curvearrowright}\bar{\beta}) + 2\mu\pi \qquad (\bar{\alpha}\overset{\mu}{\curvearrowright}\bar{\beta}) = (\bar{\alpha}\overset{o}{\curvearrowright}\bar{\beta}) - 2\mu\pi$$

$$\text{καί}\quad (\bar{\alpha}\underset{o}{\curvearrowright}\bar{\beta}) - (\bar{\alpha}\overset{o}{\curvearrowright}\bar{\beta}) = \begin{cases} 2\pi & \text{όταν } \bar{\alpha} \not\uparrow\not\uparrow \bar{\beta} \\ 0 & \text{όταν } \bar{\alpha} \uparrow\uparrow \bar{\beta} \end{cases} .$$

Άρα δυό τυχούσες τιμές του $(\bar{\alpha}\curvearrowright\bar{\beta})$ έχουν διαφορά ίση μέ ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π ώστε π.χ.

(83.1) $\quad (\bar{\alpha}\circlearrowright\bar{\beta}) = (\bar{\alpha}\underset{o}{\curvearrowright}\bar{\beta})+2k\pi = (\bar{\alpha}\overset{o}{\curvearrowright}\bar{\beta})+2k'\pi = (\bar{\alpha}\underset{1}{\curvearrowright}\bar{\beta})+2k''\pi$, κτλ.

όπου k, k′, k″ τυχόντες ακέραιοι αριθμοί, δηλαδή $0, \pm 1, \pm 2$ $\pm 3, \dots$

Ιδού τώρα μερικές προφανείς σχέσεις

$$(\bar{\alpha}\underset{\mu}{\curvearrowright}\bar{\beta}) = -(\bar{\beta}\overset{\mu}{\curvearrowright}\bar{\alpha}) \quad \text{άρα} \quad (\bar{\alpha}\circlearrowright\bar{\beta}) = -(\bar{\beta}\circlearrowright\bar{\alpha})$$

$$(-\bar{\alpha}\underset{\mu}{\curvearrowright}-\bar{\beta}) = (\bar{\alpha}\underset{\mu}{\curvearrowright}\bar{\beta}) \quad \text{άρα} \quad (-\bar{\alpha}\circlearrowright-\bar{\beta}) = (\bar{\alpha}\circlearrowright\bar{\beta})$$

$$(\vartheta_1\bar{\alpha}\underset{\mu}{\curvearrowright}\vartheta_2\bar{\beta}) = (\bar{\alpha}\underset{\mu}{\curvearrowright}\bar{\beta}) \quad \text{άρα} \quad (\vartheta_1\bar{\alpha}\circlearrowright\vartheta_2\bar{\beta}) = (\bar{\alpha}\circlearrowright\bar{\beta}) .$$

όπου ϑ_1 καί ϑ_2 δυό θετικοί πολλαπλασιαστές. Ειδικότερα έχουμε $(\bar{\alpha},\underset{\mu}{\curvearrowright}\bar{\alpha}) = 2\mu\pi$, $(\bar{\alpha}\overset{\mu}{\curvearrowright},\bar{\alpha}) = -2\mu\pi$ γιά $\mu = 0, 1, 2, 3, \dots$

$(\bar{\alpha},\circlearrowright\bar{\alpha}) = 2k\pi$ μέ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ $(\bar{\alpha},\underset{\mu}{\curvearrowright}-\bar{\alpha}) = \pi+2\mu\pi$,

$(\bar{\alpha}\overset{\mu}{\curvearrowright},-\bar{\alpha}) = -\pi-2\mu\pi$, $(\bar{\alpha}\circlearrowright-\bar{\alpha}) = \pi+2k\pi$ μέ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Σημειώνουμε τέλος ότι ή εκλογή των θετικών φορών των αξόνων OX καί OY μέσα σ'ένα <u>προσανατολισμένο</u> επίπεδο γίνεται κατά κανόνα μέ τέτοιο τρόπο πού νά έχουμε $(\overrightarrow{OX},\underset{o}{\curvearrowright}\overrightarrow{OY}) < \pi$.

Ειδικά σέ ένα ορθογώνιο σύστημα είναι

$$(\overrightarrow{Ox}\underset{o}{\curvearrowright}\overrightarrow{Oy}) = (\bar{i}\underset{o}{\curvearrowright}\bar{j}) = +\frac{\pi}{2} .$$

§ 84. Γενικά ισχύει ή εξής πρόταση πού αντιστοιχεί στήν πρόταση του Chasles (§ 27).

<u>Πρόταση</u>. Εάν α, β, γ είναι τρία μή μηδενικά διανύσματα παράλληλα πρός τό προσανατολισμένο επίπεδο XOY, τότε

(84.1) $\quad (\bar{\alpha}\circlearrowright\bar{\gamma}) = (\bar{\alpha}\circlearrowright\bar{\beta}) + (\bar{\beta}\circlearrowright\bar{\gamma})$

<u>Απόδειξη</u>. Άς είναι $\overrightarrow{OA} = \bar{\alpha}$, $\overrightarrow{OB} = \bar{\beta}$, $\overrightarrow{O\Gamma} = \bar{\gamma}$. Παρατη-

ρoῦμε ὅτι $(\overline{OA},\overline{OB})_0 + (\overline{OB},\overline{O\Gamma})_0 = $ ἤ $(\overline{OA},\overline{O\Gamma})_0$ ἤ $(\overline{OA},\overline{O\Gamma})_1$.

"Αρα

$$\begin{aligned}\widehat{(\bar\alpha,\bar\beta)} + \widehat{(\bar\beta,\bar\gamma)} &= (\overline{OA},\overline{OB})_0 + 2k_1\pi + (\overline{OB},\overline{O\Gamma})_0 + 2k_2\pi\\ &= \text{ἤ } (\overline{OA},\overline{O\Gamma})_0 + 2(k_1+k_2)\pi \quad \text{ἤ } \quad (\overline{OA},\overline{O\Gamma})_1 + 2(k_1+k_2)\pi\\ &= (\overline{OA},\overline{O\Gamma})_0 + 2k\pi = \widehat{(\bar\alpha,\bar\gamma)}, \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}\end{aligned}$$

<u>Πόρισμα.</u> 'Από τή σχέση (84.1) ἕπεται εἰδικά (ἄν λάβουμε $\bar\alpha = \bar i$ καί λύσουμε ὡς πρός $\widehat{(\bar\beta,\bar\gamma)}$) ἡ

(84.2) $$\widehat{(\bar\beta,\bar\gamma)} = \widehat{(\bar i,\bar\gamma)} - \widehat{(\bar i,\bar\beta)}.$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜ ΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΗΣ $\widehat{(\bar\alpha,\bar\beta)}$.

§ 85. "Ας εἶναι $\overline{OA} = \bar\alpha(\alpha_1,\alpha_2)$, $\overline{OB} = \bar\beta(\beta_1,\beta_2)$ σ'ἕνα ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων μέ βασικά διανύσματα $\bar i$ καί $\bar j$ ἰσόμηκα καί μέ $(\bar i,\bar j)_0 = +\frac{\pi}{2}$. "Εχουμε

(85.1) $$(\bar\alpha,\bar\beta)_0 = \begin{cases}(\bar\alpha\hat{\ }\bar\beta) & \text{ἐάν } (\bar\alpha,\bar\beta)_0 \leqq \pi\\ 2\pi-(\bar\alpha\hat{,}\bar\beta) & \text{ἐάν } (\bar\alpha,\bar\beta)_0 \geqq \pi\end{cases}$$

"Αρα, ἐάν λάβουμε ὑπ'ὄψη τή σχέση (83.1) καί χρησιμοποιήσουμε τόν τύπο (81.2),

(85.2) $$\text{συν}\widehat{(\bar\alpha,\bar\beta)} = \text{συν}(\bar\alpha,\bar\beta)_0 = \text{συν}(\bar\alpha\hat{,}\bar\beta) = \frac{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2}{+\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\;+\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}}.$$

Εἰδικά γιά $\bar\alpha = \bar i$ λαβαίνουμε (ἐπειδή τότε $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$)

(85.3) $$\text{συν}\widehat{(\bar i,\bar\beta)} = \frac{\beta_1}{+\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}}.$$

§ 86. Γιά τό ημ$\widehat{(\bar\alpha,\bar\beta)}$ ἔχουμε

$$\text{ημ}^2\widehat{(\bar\alpha,\bar\beta)} = 1 - \frac{(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)^2}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2)(\beta_1^2+\beta_2^2)} = \frac{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}^2}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2)(\beta_1^2+\beta_2^2)}$$

Λέγω τώρα ὅτι γιά τό ημ$\widehat{(\bar\alpha,\bar\beta)}$ ἡ ἐξαγωγή τῆς τετραγωνικῆς ῥίζας τοῦ δεξιοῦ μέλους πρέπει νά γίνη ὡς ἑξῆς

(86.1) $$\text{ημ}\widehat{(\bar\alpha,\bar\beta)} = \frac{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}}{+\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\cdot+\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}}.$$

Πράγματι αὐτό ἀληθεύει γιά $\bar\alpha = \bar i(1,0)$, διότι τότε ἔχουμε $0 < (\bar i,\bar\beta)_0 < \pi$ γιά $\beta_2 > 0$ καί $\pi < (\bar i,\bar\beta)_0 < 2\pi$ γιά $\beta_2 < 0$, ἄρα $\eta\mu\widehat{(\bar{i},\bar{\beta})} = \eta\mu\widehat{(\bar{i},\bar{\beta})}_0 > 0$ ὅταν $\beta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} > 0$ καί

$\eta\mu\widehat{(\bar{i},\bar{\beta})} < 0$ ὅταν $\beta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} < 0$. Ἔχουμε λοιπόν εἰδικά

(86.2) $$\eta\mu\widehat{(\bar{i},\bar{\beta})} = \frac{\beta_2}{+\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}}$$

Ἐάν ὁμοίως εἶναι $\bar{\alpha} \neq i$, θά ἔχουμε σύμφωνα μέ τή σχέση(84,2)

$$\widehat{(\bar{\alpha},\bar{\beta})} = \widehat{(\bar{i},\bar{\beta})} - \widehat{(\bar{i},\bar{\alpha})}$$

Ἄρα, σύμφωνα μέ τούς τύπους (85.3) καί (86.2)

$$\eta\mu\widehat{(\bar{\alpha},\bar{\beta})} = \eta\mu\widehat{(\bar{i},\bar{\beta})}\sigma\upsilon\nu\widehat{(\bar{i},\bar{\alpha})} - \sigma\upsilon\nu\widehat{(\bar{i},\bar{\beta})}\eta\mu\widehat{(\bar{i},\bar{\alpha})}$$

$$= \frac{\beta_2}{+\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}}\cdot\frac{\alpha_1}{+\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}} - \frac{\beta_1}{+\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}}\cdot\frac{\alpha_2}{+\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}}{\underset{+}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}\cdot\underset{+}{\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}}} \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

§ 87. Ἀπό τούς τύπους (85.2) καί (86.1) ἕπεται, ὅταν $\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2 \neq 0$

(87.1) $$\varepsilon\varphi\widehat{(\bar{\alpha},\bar{\beta})} = \frac{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2}$$

καί εἰδικά

(87.2) $$\varepsilon\varphi\widehat{(\bar{i},\bar{\beta})} = \frac{\beta_2}{\beta_1} \,.$$

Ὅταν $\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2 = 0$, τότε $\sigma\upsilon\nu(\bar{\alpha}\,\hat{}\,\bar{\beta}) = 0$ δηλαδή $(\bar{\alpha}\,\hat{}\,\bar{\beta}) = \frac{\pi}{2}$, τά δυό διανύσματα $\bar{\alpha}$ καί $\bar{\beta}$ εἶναι κάθετα τό ἕνα πρός τό ἄλλο καί ἡ $\widehat{(\bar{\alpha},\bar{\beta})}_0$ ἰσοῦται μέ $\frac{\pi}{2}$ ἤ μέ $\frac{3\pi}{2}$, ἄρα ἡ $\varepsilon\varphi\widehat{(\bar{\alpha},\bar{\beta})} = \varepsilon\varphi\widehat{(\bar{\alpha},\bar{\beta})}_0$ ἔχει τήν καταχρηστική τιμή ∞· τήν ἴδια καταχρηστική τιμή ἔχει καί τό 2ο μέλος τῆς (87.1) διότι ὁ παρανομαστής εἶναι $= 0$, ὁ ἀριθμητής $\neq 0$.

ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΚΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

§ 88. Ἕνα σημεῖο $P(x,y) \neq 0$ μπορεῖ νά προσδιοριστῆ καί μέ τά ἑξῆς δυό ἀριθμητικά δεδομένα:

τό $\varrho = OP = |\overline{OP}|$ καί $\vartheta = \widehat{(\overline{Ox},\overline{OP})} = \widehat{(\bar{i},\overline{OP})}$

Οἱ ἀριθμοί αὐτοί λέγονται <u>πολικές</u> συντεταγμένες τοῦ P, ὁ ϱ, <u>πολική ἀκτίνα</u>, ὁ ϑ <u>πολική γωνία</u> τοῦ P. Τό σημεῖο O ἔχει πολική ἀκτίνα μηδέν, πολική γωνία ὅμως ἀπροσδιόριστη. Τό O λέγεται πόλος τοῦ παραπάνω συστήματος πολικῶν συντεταγμένων, ὁ OX πολικός ἄξονας τοῦ συστήματος˙ τέλος θά καλοῦμε τό σύστημα "συζευγμένο" μέ τό σύστημα ὀρθογωνίων συντεταγμένων XOY.

Ὅμοια ἕνα ἐλεύθερο διάνυσμα $\bar{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2) \neq 0$ (ἐξυπακούεται ὅτι $\bar{\alpha}$ // XOY) μπορεῖ νά προσδιοριστῆ καί μέ τά ἑξῆς δύο ἀριθμητικά δεδομένα πού καλοῦνται <u>πολικές</u> συντεταγμένες του.

τό μέτρο τοῦ $|\bar{\alpha}|$ καί τήν πολική του γωνία $(\widehat{\bar{\imath}, \bar{\alpha}})$ ˙

Τό μηδενικό διάνυσμα $\bar{\alpha} = 0$ ἔχει ἐξ ὁρισμοῦ μέτρο μηδέν καί πολική γωνία ἀπροσδιόριστη.

Ἐννοεῖται ὅτι ἡ πολική γωνία $\vartheta = (\widehat{\bar{\imath}, \overrightarrow{OP}})$ ἤ $(\widehat{\bar{\imath}, \bar{\alpha}})$ δέν εἶναι μονότροπα καθορισμένη ἀπό τό P ἤ τό $\bar{\alpha}$˙ παριστάνει ἄπειρους ἀριθμούς πού ἔχουν ἀνά δυό διαφορά ἴση μέ ἕνα ἀκέραιο πολλαπλάσιο τοῦ 2π. <u>Πρωτεύουσα</u> τιμή τῆς πολικῆς γωνίας ἑνός $P \neq 0$ ἤ ἑνός $\bar{\alpha} \neq 0$ καλοῦμε ἐκείνην τήν τιμή πού εἶναι $> -\pi$ καί $\leqq \pi$. Θά τήν παριστάνουμε μέ Θ. Π.χ. γιά τό P(1,0) ἤ τό $\bar{\imath}$ εἶναι $\Theta = 0$, γιά τό P(0,1) ἤ τό $\bar{\jmath}$ εἶναι $\Theta = \frac{\pi}{2}$, γιά τό P(−1,0) ἤ τό $-\bar{\imath}$ εἶναι $\Theta = \pi$, γιά τό P(0,−1) ἤ τό $-\bar{\jmath}$ εἶναι $\Theta = -\frac{\pi}{2}$.

§ 89. Μεταξύ τῶν ὀρθογώνιων συντεταγμένων τοῦ P(x,y) ἤ τοῦ $\bar{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2)$ ὡς πρός τό σύστημα XOY καί τῶν πολικῶν τους συντεταγμένων ϱ, ϑ ἤ $|\bar{\alpha}|$, $(\widehat{\bar{\imath}, \bar{\alpha}})$ ὡς πρός τό συζευγμένο μέ τό XOY σύστημα πολικ. συντεταγμένων ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες σχέσεις:

$$(89.1) \qquad \begin{gathered} x = \varrho\,\text{συν}\vartheta, \quad y = \varrho\,\text{ημ}\vartheta \\ \text{ἤ} \quad \alpha_1 = |\bar{\alpha}|\,\text{συν}(\widehat{\bar{\imath}, \bar{\alpha}}), \quad \alpha_2 = |\bar{\alpha}|\,\text{ημ}(\widehat{\bar{\imath}, \bar{\alpha}}) \;. \end{gathered}$$

Ἀντιστρόφως ἔχουμε

(89.2) $\quad \varrho = +\sqrt{x^2+y^2}$, $\sigma\upsilon\nu\vartheta = \dfrac{x}{\varrho}$, $\eta\mu\vartheta = \dfrac{y}{\varrho}$

$|\bar{\alpha}| = +\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}$, $\sigma\upsilon\nu(\bar{i}\,\widehat{\ }\,\bar{\alpha}) = \dfrac{\alpha_1}{|\bar{\alpha}|}$, $\eta\mu(\bar{i}\,\widehat{\ }\,\bar{\alpha}) = \dfrac{\alpha_2}{|\bar{\alpha}|}$.

Οἱ ἀριθμοί $\sigma\upsilon\nu(\bar{i}\,\widehat{\ }\,\bar{\alpha})$ καί $\eta\mu(\bar{i}\,\widehat{\ }\,\bar{\alpha}) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - (\bar{i}\,\widehat{\ }\,\bar{\alpha})\right) =$
$= \sigma\upsilon\nu\left((\bar{i}\,\widehat{\ }\,\bar{j}) - (\bar{i}\,\widehat{\ }\,\bar{\alpha})\right) = \sigma\upsilon\nu(\bar{\alpha}\,\widehat{\ }\,\bar{j}) = \sigma\upsilon\nu(\bar{j}\,\widehat{\ }\,\bar{\alpha})$
λέγονται συνημίτονα κατευθύνσεως τοῦ διανύσματος $\bar{\alpha}$ (ἤ μιᾶς ὁμόρροπα προσανατολισμένης παράλληλης εὐθείας ἤ τέλος μιᾶς ἡμιευθείας $\overline{OA} \uparrow\uparrow \bar{\alpha}$). Π.χ. συνημίτονα κατευθύνσεως τοῦ διανύσματος $\bar{\delta}(-5,3)$ εἶναι οἱ ἀριθμοί $\dfrac{-5}{+\sqrt{34}}$, $\dfrac{3}{+\sqrt{34}}$), ἑπομένως τά συνημίτονα αὐτά εἶναι οἱ συντεταγμένες τοῦ διανύσματος $\dfrac{1}{+\sqrt{34}}\bar{\delta}$ πού εἶναι μοναδιαῖο (ἔχει δηλαδή μῆκος 1) καί ὁμορρόπως παράλληλο πρός τό $\bar{\delta}$.

§ 90. Ἡ πρωτεύουσα τιμή Θ τῆς πολικῆς γωνίας ἑνός σημείου $P(x,y) \not\equiv 0$ ἤ ἑνός διανύσματος $\bar{\alpha} = \overline{OP} \neq 0$, ὑπολογίζεται ἀπό τίς ὀρθογώνιες συντεταγμένες τοῦ P μέ τή βοήθεια λογαριθμικῶν πινάκων (φυσικά κατά προσέγγισι μόνο) ὡς ἑξῆς:

<u>Κανόνας:</u> Ἐάν $x \neq 0$, τότε προσδιορίζουμε μέ τή βοήθεια τῶν πινάκων τήν ὀξεία γωνία ω πού ἔχει $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{|y|}{|x|}$ καί κατόπι θέτουμε:

$$\Theta = \begin{cases} \omega & \text{ὅταν } x > 0 \text{ καί } y \geqq 0 \\ -\omega & \text{"} \quad x > 0 \quad \text{"} \quad y < 0 \\ \pi-\omega & \text{"} \quad x < 0 \quad \text{"} \quad y \geqq 0 \\ -\pi+\omega & \text{"} \quad x < 0 \quad \text{"} \quad y < 0 \end{cases} .$$

Ἐάν $x = 0$, ὁπότε $y \neq 0$, τότε ἔχουμε

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{ὅταν } y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{ὅταν } y < 0 \end{cases} .$$

Ἀπό τήν πρωτεύουσα τιμή της ἡ πολική γωνία ϑ βρίσκεται φυσικά μέ τόν τύπο

$$\vartheta = \Theta + 2k\pi \qquad \text{ὅπου} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

§ 91. Θεωροῦμε τέλος τόν τύπο (84.2) πού τώρα μπορεῖ νά γραφῆ ὡς ἑξῆς:

(91.1) $(\overline{\beta}\ \overline{\gamma})$ = πολική γωνία τοῦ $\overline{\gamma}$ - πολική γωνία τοῦ $\overline{\beta}$

Ἐάν καλέσουμε Θ_β καί Θ_γ τίς πρωτεύουσες τιμές τῶν πολικῶν γωνιῶν τῶν $\overline{\beta}$ καί $\overline{\gamma}$ ἀντιστοίχως, θά ἔχουμε λοιπόν

(91.2) $(\overline{\beta}\ \overline{\gamma}) = \Theta_\gamma + 2k_1\pi - (\Theta_\beta + 2k_2\pi) = \Theta_\gamma - \Theta_\beta + 2k\pi$,

ὅπου k_1, k_2 τυχόντες ἀκέραιοι ἀριθμοί καί k ἐπίσης ἀκέραιος $= k_1 - k_2$.

Ἀπό τίς σχέσεις $-\pi < \Theta_\beta \leqq \pi$, $-\pi < \Theta_\gamma \leqq \pi$ ἕπεται ἡ σχέση $0 \leqq |\Theta_\gamma - \Theta_\beta| < 2\pi$. Ἑπομένως ἡ $\Theta_\gamma - \Theta_\beta$ ἰσοῦται ἤ μέ τή $(\overline{\beta}\ \overline{\gamma})$ ἤ μέ τή $(\overline{\beta}\ \mathring{\overline{\gamma}})$. (Τό πρῶτο συμβαίνει ὅταν $\Theta_\beta \leqq \Theta_\gamma$ τό δεύτερο ὅταν $\Theta_\beta > \Theta_\gamma$).

Ὁ συνδυασμός τῆς τελευταίας θεωρίας μέ τήν τοῦ προηγουμένου § παρέχει τόν ἑξῆς κανόνα:

Κανόνας: Γιά νά ὑπολογίσουμε τή $(\overline{\beta}\ \overline{\gamma})$ μέ τήν βοήθεια λογαριθμικῶν πινάκων ὑπολογίζουμε πρῶτα, σύμφωνα μέ τόν κανόνα τοῦ § 90, τίς πρωτεύουσες τιμές Θ_β καί Θ_γ τῶν πολ. γωνιῶν τῶν $\overline{\beta}$ καί $\overline{\gamma}$ καί ἐφαρμόζουμε κατόπιν τόν εὐκολοθύμητο τύπο (91.2).

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.

§ 92. Πολύ χρήσιμη στή μετρική Ἀναλυτική Γεωμετρία καί ἐπιδεχτική πολλῶν ἐφαρμογῶν σ'ἄλλους κλάδους τῆς ἐπιστήμης εἶναι ἡ ἀκόλουθη ἔννοια.

Ἐσωτερικό (ἤ βαθμωτό = scalaire) γινόμενο δυό μή μηδενικῶν διανυσμάτων $\overline{\alpha}$ καί $\overline{\beta}$ λέγεται ὁ ἀριθμός

(92,1) $$|\overline{\alpha}|\cdot|\overline{\beta}|\,\text{συν}(\overline{\alpha}\,\widehat{\ }\,\overline{\beta})$$

πού παριστάνεται μέ τό σύμβολο $\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}$ καί $\overline{\alpha}\overline{\beta}$.

Ἐάν τό ἕνα τουλάχιστο ἀπό τά δυό διανύσματα εἶναι μηδενικό, τότε ἐξ ὁρισμοῦ τό ἐσωτερικό τους γινόμενο εἶναι ὁ ἀριθμός μηδέν. ("Οταν μέ τόν ἀριθμό $\bar{\alpha}\bar{\beta}$ γίγονται ἀριθμητικές πράξεις, τότε εἶναι σκόπιμο γιά περισσότερη σαφήνεια νά κλείνεται μέσα σέ παρενθέσεις).

Ἀπό τόν τύπο (81.2) ἕπεται ἡ ἀκόλουθη ἔκφραση τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου δυό διανυσμάτων $\bar{\alpha}$ καί $\bar{\beta}$ // πρός τό ἐπίπ. XOY συναρτήσει τῶν <u>ὀρθογώνιων</u> συντεταγμένων τούς (α_1,α_2) καί (β_1,β_2):

(92.2) $$\bar{\alpha}\bar{\beta} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$$

"Ωστε μολονότι ἡ παράσταση $\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2$ κατασκευάζεται ἀπό τίς συντεταγμένες τῶν $\bar{\alpha}$ καί $\bar{\beta}$ ὡς πρός ἕνα ὀρθογώνιο σύστημα, ὅμως ἡ τιμή της εἶναι ἡ ἴδια σ'ὅλα τά ὀρθογώνια συστήματα συντεταγμένων μέσα στό ἐπίπεδο, ἀρκεῖ μόνο ἐννοεῖται τά βασικά διανύσματα τῶν συστημάτων αὐτῶν νά εἶναι ἰσόμηκα μέ τήν ἴδια μονάδα μήκους. Εἶναι λοιπόν ἡ ποσότητα $\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2$ μιά ἀναλλοίωτη (un invariant), ὅπως λέμε, κατά τήν ἀλλαγή τοῦ ὀρθογώνιου συστήματος συντεταγμένων (μέ διατήρηση μόνο τοῦ κοινοῦ μήκους τῶν βασικῶν διανυσμάτων $\bar{i}$ καί $\bar{j}$). "Εχουμε κατά τόν ὁρισμό:

$$\bar{\alpha}\bar{\beta} = \begin{cases} > 0 \text{ ὅταν } \bar{\alpha} \neq 0\ ,\ \bar{\beta} \neq 0 \text{ καί } 0 \leq (\bar{\alpha}\widehat{\ \ }\bar{\beta}) < \frac{\pi}{2} \\ < 0 \text{ ὅταν } \bar{\alpha} \neq 0\ ,\ \beta \neq 0 \text{ καί } \frac{\pi}{2} < (\bar{\alpha}\widehat{\ \ }\bar{\beta}) \leq \pi \\ = 0 \text{ ὅταν } (\widehat{\bar{\alpha},\bar{\beta}}) = \frac{\pi}{2} \text{ ἤ εἴτε } \bar{\alpha} = 0, \text{ εἴτε } \bar{\beta} = 0. \end{cases}$$

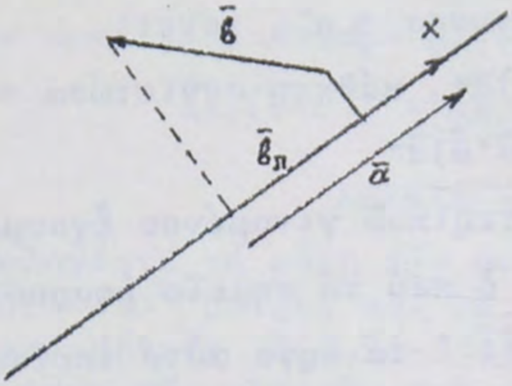
Εἰδικά ὅταν $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$ ἔχουμε:

$$\bar{\alpha}\bar{\alpha} = |\bar{\alpha}|^2, \quad \text{ἄρα} \quad |\bar{\alpha}| = +\sqrt{\bar{\alpha}\bar{\alpha}}\ .$$

Τό $\bar{\alpha}\bar{\alpha}$ γράφεται συμπτυγμένα $\bar{\alpha}^2$.

§ 93. "Αν λάβουμε ὑπ'ὄψη τό γνωστό θεώρημα περί ὀρθῆς προβολῆς (τῆς στοιχειώδους Τριγωνομετρίας) μπορoῦμε νά ἑρμηνεύσουμε ὡς ἑξῆς τό ἐσωτερ. γινόμενο $\bar{\alpha}\bar{\beta} = |\bar{\alpha}|\cdot|\bar{\beta}|\,\text{συν}(\bar{\alpha}\widehat{\ \ }\bar{\beta})$.

Τό ἐσωτερικό γινόμενο ἑνός διανύσματος $\bar{\beta}$ ἐπί ἕνα διάνυ-



σμα $\bar{\alpha} \neq 0$ ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τοῦ μήκους τοῦ $\bar{\alpha}$ ἐπί τό προσημασμένο μέτρο τῆς ὀρθῆς προβολῆς τοῦ $\bar{\beta}$ πάνω σέ ἕναν ἄξονα $\uparrow\uparrow \bar{\alpha}$ (εἰδικῶς πάνω στόν φορέα τοῦ $\bar{\alpha}$ προσανατολισμένον θετικά σύμφωνα μέ τή φορά τοῦ α).

Σύμφωνα μ'αὐτήν τήν ἑρμηνεία, ἐάν τό $\bar{\alpha}$ εἶναι μοναδιαῖο διάνυσμα ($|\bar{\alpha}| = 1$), τότε ἡ ὀρθή προβολή $\bar{\beta}_\pi$ ἑνός διανύσματος $\bar{\beta}$ πάνω σ'ἕναν ἄξονα $\uparrow\uparrow\bar{\alpha}$ ἔχει προσημασμένο μέτρο $= \bar{\alpha}\bar{\beta}$· ἐάν τό $\bar{\alpha}$ δέν εἶναι μοναδιαῖο (ἀλλά βέβαια οὔτε καί μηδενικό), τότε ἡ ὀρθή προβολή $\bar{\beta}_\pi$ ἑνός διανύσματος $\bar{\beta}$ πάνω σ'ἕναν ἄξονα $\uparrow\uparrow\bar{\alpha}$ ἔχει προσημασμένο μέτρο $\frac{\bar{\alpha}}{|\bar{\alpha}|}\cdot\bar{\beta} = \frac{\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}}{|\bar{\alpha}|}$. Σ'ἀμφότερες τίς περιπτώσεις ἡ ὀρθή προβολή $\bar{\beta}_\pi$ (πού ἰσοῦται μέ τό προσημασμένο μέτρο της ἐπί τό μοναδιαῖο διάνυσμα $\frac{\bar{\alpha}}{|\bar{\alpha}|}$ τοῦ ἄξονα προβολῆς) ἔχει τήν ἑξῆς ἔκφραση:

(93.1) $$\bar{\beta}_\pi = \frac{\bar{\alpha}\,\bar{\beta}}{|\bar{\alpha}|}\cdot\frac{\bar{\alpha}}{|\bar{\alpha}|} = \frac{(\bar{\alpha}\bar{\beta})\bar{\alpha}}{|\bar{\alpha}|^2} = \frac{(\bar{\alpha}\bar{\beta})\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}^2} .$$

Στήν ὀρθή προβολή $\bar{\beta}_\pi$ τοῦ $\bar{\beta}$ πάνω σ'ἕναν ἄξονα $\uparrow\uparrow\bar{\alpha}$ μποροῦμε νά δώσουμε καί τήν ἑξῆς σημασία πού εἶναι πολύ χρήσιμη στή Μηχανική: Ἐάν τό διάνυσμα $\bar{\beta}$ ἀναλυθῆ σέ ἄθροισμα δυό διανυσμάρων, ἕνα παράλληλο καί ἕνα κάθετο πρός τό διάνυσμα $\bar{\alpha}$, τότε τό παράλληλο εἶναι ἀκριβῶς $= \bar{\beta}_\pi = \frac{(\bar{\alpha}\bar{\beta})\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}^2}$, ἑπομένως, τό κάθετο θά εἶναι

(93.2) $$\beta_\kappa = \bar{\beta} - \bar{\beta}_\pi = \bar{\beta} - \frac{(\bar{\alpha}\bar{\beta})\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}^2} .$$

Ἡ Μηχανική χρησιμοποιεῖ τούς τύπους αὐτούς π.χ. στήν ἀνάλυση μιᾶς δύναμης πού παριστάνεται ἀπό τό διάνυσμα $\bar{\delta}$, σέ δυό συνιστῶσες δυνάμεις παράλληλα καί κάθετα ἀντιστοίχως πρός μιάν δοσμένη διεύθυνση. Ἐάν χαρακτηρίσουμε τή δοσμένη διεύθυνση μέ ἕνα μοναδιαῖο διάνυσμα $\pm \alpha^{\circ}$, τότε:

$$\text{Παράλληλη συνιστῶσα} = (\bar{\alpha}^{\circ}\bar{\delta})\bar{\alpha}^{\circ}, \text{ κάθετη συνιστώσα} = \delta - (\bar{\alpha}^{\circ}\bar{\delta})\bar{\alpha}^{\circ} .$$

Μιάν ἄλλη ἐφαρμογή τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου ἔχουμε στόν ὁρισμό τοῦ ἔργου μιᾶς δύναμης $\bar{\delta}$ πού τό σημεῖο ἐφαρμογῆς της μετακινήθηκε κατά τό διάνυσμα $\overline{AA'}$· τό ἔργο αὐτό ἰσοῦται μέ τό ἐσωτερικό γινόμενο $\overline{AA'}.\bar{\delta}$. Ἄρα τό ἔργο αὐτό εἶναι $\gtreqless 0$ καθόσο $(\widehat{\overline{AA'},\bar{\delta}}) \lesseqgtr \frac{\pi}{2}$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

§ 94. Εἴτε κατ'εὐθείαν ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου εἴτε, ὅταν τά θεωρούμενα διανύσματα εἶναι // ΧΟΥ, ἀπό τήν ἔκφρασή του (92.2) σέ ὀρθογώνιες συντεταγμένες, προκύπτουν εὔκολα οἱ ἑξῆς ἰδιότητες:

(94.1) $\bar{\alpha}\bar{\beta} = \bar{\beta}\bar{\alpha}$ (Ἰδιότητα ἀντιμετάθεσης)

(94.2) $(\bar{\alpha}+\bar{\beta})\bar{\gamma} = \bar{\alpha}\bar{\gamma}+\bar{\beta}\bar{\gamma}$ (Ἰδιότητα ἐπιμερισμοῦ)

(94.3) $\lambda(\bar{\alpha}\bar{\beta}) = (\lambda\bar{\alpha})\cdot\bar{\beta} = \bar{\alpha}(\lambda\bar{\beta})$, ὅπου λ πραγματικός ἀριθμός.

Ἰδού τώρα δυό ἐφαρμογές τῆς ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητας στό ἔργο:

<u>Πρόταση 1.</u> Τό (ἀλγεβρικό) ἄθροισμα τῶν ἔργων μιᾶς δύναμης $\bar{\delta}$ (πού δέν μεταβάλλεται στό μέγεθος, στή διεύθυνση καί στή φορά της) ὅταν τό σημεῖο ἐφαρμογῆς της μετακινηθῆ πρῶτα κατά τό διάνυσμα $\overline{AA_1}$, κατόπιν κατά τό $\overline{A_1A_2}$, ἰσοῦται μέ τό ἔργο τῆς $\bar{\delta}$ γιά μετατόπιση τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς κατά τό διάνυσμα $\overline{AA_2} = \overline{AA_1} + \overline{A_1A_2}$:

$$\overline{AA_1}\cdot\bar{\delta} + \overline{A_1A_2}\cdot\bar{\delta} = (\overline{AA_1} + \overline{A_1A_2})\bar{\delta} = \overline{AA_2}\cdot\bar{\delta} .$$

<u>Πρόταση 2.</u> Τό ἔργο τῆς συνισταμένης δυό δυνάμεων $\bar{\delta}$ καί $\bar{\delta}'$ μέ κοινό σημεῖο ἐφαρμογῆς ὅταν τοῦτο μετακινηθῆ κατά τό

διάνυσμα $\overline{AA_1}$, ἰσοῦται μέ τό (ἀλγεβρικό) ἄθροισμα τῶν ἔργων τῶν δυό συνιστωσῶν $\bar{\delta}$ καί $\bar{\delta}'$ γιά μετατόπιση τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς των κατά τό διάνυσμα $\overline{AA_1}$:

$$\overline{AA_1}(\bar{\delta}+\bar{\delta}') = \overline{AA_1}\bar{\delta} + \overline{AA_1}\cdot\bar{\delta}'$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

104. Ὑπολογίστε τά μήκη τῶν διανυσμάτων πού, σ'ἕνα σύστημα XOY μέ $\widehat{XOY} = 60^0$ μοῖρες καί $OE_1 = OE_2 = 1$ cm, ἔχουν τίς ἀκόλουθες συντεταγμένες: $\bar{\alpha}(2{,}5/-3{,}4)$, $\bar{\beta}(-5{,}2/1{,}3)$. Ὑπολογίστε ἐπίσης τά μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου $P_1P_2P_3$ ὅπου $P_1(-4,-2)$ $P_2(1,-5)$, $P_3(3,7)$ στό παραπάνω σύστημα.

105. Ὑπολογίστε τό συνημίτονο τῆς στοιχειώδους γωνίας $(\widehat{\bar{\alpha}\,\bar{\beta}})$ τῶν διανυσμάτων $\bar{\alpha}$ καί $\bar{\beta}$ τῆς προηγουμενης ἀσκήσεως καθώς καί τῶν ἑξῆς δυό: $\bar{\gamma}(3{,}7/2{,}2)$, $\bar{\delta}(2{,}3/-4{,}8)$ στό ἴδιο μέ τό παραπάνω σύστημα πλαγιογώνιων συντεταγμένων. Σχεδιάστε τά δυό παραπάνω ζεύγη διανυσμάτων ἀπό τό ἴδιο ἀρχικό σημεῖο ἑκάστοτε, προσδιορίστε γραφικά (κατά προσέγγισι ἐννοεῖται) τό συνημίτονο τῆς στοιχειώδους γωνίας των καί παραβάλατε τό ἀποτέλεσμα μέ τήν ὑπολογισμένη τιμή.

106. Ὑπολογίστε κατά προσέγγισι μισῆς μοίρας χρησιμοποιώντας πίνακες τιμῶν τοῦ συνημιτόνου καί ὄχι τῶν λογαρίθμων τῶν τιμῶν αὐτῶν (βλ. γι'αὐτό π.χ. Dupuis, **Tables de logarithmes à 5 décimales**, σελ. 149-151 ἤ Ε. Βλαλαβάνη, Πρακτικοί Μαθηματικοί Ὑπολογισμοί, σελ. 60-61) τή στοιχειώδη γωνία τῶν ἑξῆς δύο ζευγῶν διανυσμάτων σέ ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $\bar{\alpha}(4,-3)$, $\bar{\beta}(20,21)$ καί $\bar{\gamma}(-1{,}2/-3{,}5)$, $\bar{\delta}\left(\frac{56}{7}, \frac{33}{7}\right)$.

107. Ὑπολογίστε τούς τριγωνομετρ. ἀριθμούς τῶν προσημασμένων γωνιῶν $(\overrightarrow{\bar{\alpha},\bar{\beta}})$ καί $(\overrightarrow{\bar{\gamma},\bar{\delta}})$ ὅπου τά διανύσματα ἔχουν τίς ἀκόλουθες ὀρθογώνιες συντεταγμένες: $\bar{\alpha}(-1{,}2/9)$, $\bar{\beta}(-4/4{,}2)$, $\bar{\gamma}(4{,}8/-1{,}4)$ $\bar{\delta}(-5{,}6/3{,}3)$. Ἀπό τά πρόσημα τῶν συνημιτόνων καί ἡμιτόνων τους τί συμπέρασμα συνάγεται γιά τά μεγέθη $(\bar{\alpha},\bar{\beta})$ καί $(\bar{\gamma},\bar{\delta})$. Ἀφοῦ σχεδιάστε τά $\overline{OA} = \bar{\alpha}$, $\overline{OB} = \bar{\beta}$, $\overline{O\Gamma} = \bar{\gamma}$, $\overline{O\Delta} = \bar{\delta}$ ἐπαληθεῦστε γραφικῶς τό συμπέρασμά σας.

108. Ἄς εἶναι γνωστό ὅτι $(\overrightarrow{\bar{\alpha},\bar{\beta}})_\gamma = -4{,}2$ ἀκτίνια $+ 2k\pi$ καί $(\overrightarrow{\bar{\alpha},\bar{\gamma}}) = 2{,}7$ ἀκτ. $+ 2k'\pi$. Ποιά εἶναι ἡ $(\overrightarrow{\bar{\gamma},\bar{\beta}})$; Ποιά εἶναι εἰδικά ἡ τιμή $(\bar{\gamma},\bar{\beta})$ καθώς καί ἡ $(\bar{\gamma}\,\bar{\beta})$. Ποιά τιμή τῆς $(\overrightarrow{\bar{\gamma},\bar{\beta}})$ εἶναι $> -\pi$ καί $\leq \pi$; Μετατρέψτε τά προσημασμένα μέτρα πού βρήκατε, ἀπό ἀκτίνια σέ (ἑξηκονταδικές) μοῖρες. (Ἡ μετατροπή θά γίνη κατά προσέγγιση μέ χρήση ἑνός πίνακα ἀκεραίων πολ-

λαπλασίων τοῦ $\frac{1}{\pi}$. Βλ. π.χ. Dupuis σελ. 133 ἤ Βαλαβάνη σ.43).

109. Ἄς εἶναι γνωστό ὅτι $(\bar{i}\,\widehat{\ }\,\bar{\alpha}) = 3{,}7$ ἀκτίνια· πόση εἶναι ἡ $(\bar{j}\,\widehat{\ }\,\bar{\alpha})$ καί εἰδικά οἱ τιμές $(\bar{j}\,\widehat{\ }\,\bar{\alpha})_{o}$ καί $(\bar{j}\,\widehat{\ }\,\dot{\bar{\alpha}})$; Ἄς εἶναι γνωστό ὅτι $(\bar{j}\,\widehat{\ }\,\bar{\beta}) = 10$ ἀκτίνια· ὑπολογίστε τήν $(\bar{i}\,\widehat{\ }\,\bar{\beta})$ καί εἰδικά τήν $(\bar{i}\,\widehat{\ }\,\bar{\beta})_{o}$. Μετατρέψτε καί αὐτά τά μέτρα γωνιῶν σέ (ἑξηκονταδικές) μοῖρες..

110. Ποιές εἶναι οἱ ὀρθογώνιες συντεταγμένες τῶν σημείων πού ἔχουν τίς ἀκόλουθες πολικές συντεταγμένες στό συζευγμένο πολικό σύστημα:

$$M_1(\varrho = 5 \ , \ \Theta = \frac{\pi}{4}) \ , M_2(\varrho = 4 \ , \ \Theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}) \ , \ M_3(2 \ , \frac{\pi}{2}) \ ,$$

$$M_4(1 \ , \ \frac{2\pi}{3}) \ , \ M_5(3 \ , \ \frac{5\pi}{6}) \ , \ M_6(4, -\frac{\pi}{3}) \ , \ M_7(6, -\frac{3\pi}{4}) \ ,$$

$$M_8(+\sqrt{2} \ , -\frac{\pi}{8}) \ , \ M_9(+\sqrt{3} \ , -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}) \ , M_{10}(\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{12})$$

$$M_{11}(1 \ , -\frac{3\pi}{4}).$$

Σχεδιάστε μέ κανόνα καί διαβήτη τά παραπάνω σημεῖα χρησιμοποιῶντας τίς πολικές των συντεταγμένες καί παίρνοντας τή μονάδα μήκους = 1 cm. Ποιές εἶναι οἱ πολικές συντεταγμένες τῶν σημείων μέ τίς ἀκόλουθες ὀρθογώνιες συντεταγμένες ἀντιστοίχως: $(2,2)$, $(4,-4)$, $(1,+\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}/4 \ , -1/4)$, $(-6,0)$, $(0,-4)$, $(-1,-1)$, $(0,+\sqrt{2})$; Ποιές εἶναι οἱ πολικές συντεταγμένες τῶν κορυφῶν ἑνός κανονικοῦ τριγώνου πού εἶναι ἐγγραμμένο στόν κύκλο μέ κέντρο τό O καί ἀκτίνα 4 καί πού μιά κορυφή του συμπίπτει μέ τό σημεῖο $K_1(x = 2 \ , \ y = -2\sqrt{3})$; Ποιές εἶναι οἱ πολικές συντεταγμένες τῶν κορυφῶν ἑνός κανονικοῦ ν-γώνου πού εἶναι ἐγγραμμένο στόν κύκλο μέ κέντρο τό O καί ἀκτίνα τό α καί πού μιά κορυφή του συμπίπτει μέ τό σημεῖο $A_1(x = \alpha \ , \ y = 0)$; Ποιές εἶναι οἱ ὀρθογώνιες συντεταγμένες τῶν κορυφῶν τοῦ ν-γώνου αὐτοῦ γιά $\nu = 3,4,5,6$;

111. Ἄς καλέσουμε ϑ_o τήν τιμή τῆς πολικῆς γωνίας ἑνός σημείου P τή $\geqq 0$ καί $< 2\pi$.

Ὀνομάζουμε 1ο ὀγδοημόριο τοῦ ἐπιπέδου XOY τό σύνολο τῶν σημείων του γιά τά ὁποῖα $0 \leqq \vartheta_o \leqq \pi/4$, 2ο ὀγδοημόριο τό σύνολο τῶν σημείων γιά τά ὁποῖα $\pi/4 \leqq \vartheta_o \leqq \pi/2$ κ.ο.κ.

Δεῖξτε ὅτι τά σημεῖα τῶν 8 ὀγδοημορίων χαρακτηρίζονται κατά σειρά ἀπό τίς ἑξῆς σχέσεις μεταξύ τῶν ὀρθογωνίων συντεταγμένων τους:

1ο : $0 \leqq y \leqq x$, 2ο : $0 \leqq x \leqq y$, 3ο : $-y \leqq x \leqq 0 \leqq y$

4ο : $x \leqq 0 \leqq y \leqq -x$, 5ο : $x \leqq y \leqq 0$, 6ο : $y \leqq x \leqq 0$,
7ο : $y \leqq 0 \leqq x \leqq -y$ 8ο: $-x \leqq y \leqq 0 \leqq x$.

112. Ὑπολογίστε κατά προσέγγιση σέ ἀκτίνια, χρησιμοποιώντας πίνακες λογαρίθμων κατά τίς ὑποδείξεις τοῦ § 90, τήν πρωτεύουσα τιμή τῆς πολικῆς γωνίας τῶν σημείων $P_1(4,55/-2,37)$, $P_2(-1,25/0,34)$, $P_3(-6,15/-2,80)$. (Γιά τή μετατροπή τῶν μοιρῶν, πρώτων καί 2ων λεπτῶν σέ ἀκτίνια χρησιμοποιῆστε τούς πίνακες Dupyis σελ.130-131 ἤ Βαλαβάνη σελ. 58-59).

113. Ὑπολογίστε κατά προσέγγιση σέ ἀκτίνια, χρησιμοποιώντας λογαριθμικούς πίνακες καί ἀκολουθώντας τή μέθοδο τοῦ § 91, τίς γωνίες $(\bar{\alpha},\bar{\beta})$ καί $(\bar{\gamma},\bar{\delta})$ ὅπου τά διανύσματα ἔχουν τίς ἀκόλουθες ὀρθογώνιες συντεταγμένες: $\bar{\alpha}(7,4/3,8)$, $\bar{\beta}(2,4/-5,3)$ $\bar{\gamma}(-7,10/6,83)$, $\bar{\delta}(4,25/9,08)$.

114. Δικαιολογῆστε τήν ἀκόλουθη μέθοδο γιά τόν ὑπολογισμό τῶν πολικῶν συντεταγμένων (ϱ,ϑ_o) ἑνός σημείου P, πού δέν κεῖται πάνω στίς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τῶν ἀξόνων, ἀπό τίς ὀρθογώνιές του συντεταγμένες (x,y). Καλοῦμε α τόν μικρότερο, Α τόν μεγαλύτερο ἀπό τούς δύο ἀριθμούς $|x|$, $|y|$. Προσδιορίζουμε μέ τήν βοήθεια τῶν πινάκων τή γωνία γ ἀπό τή σχέση $\varepsilon\varphi\gamma = \alpha/A$ (εἶναι ἡ $\gamma < 45^0$) καί ἀφοῦ ὑπολογίσουμε τήν ποσότητα $\alpha\varepsilon\varphi\frac{\gamma}{2}$, θέτουμε γιά τό ϱ

$$\varrho = A + \alpha\varepsilon\varphi\frac{\gamma}{2}$$

Γιά τήν τιμή ϑ_o τῆς πολικῆς γωνίας τοῦ P τή $\geqq 0$ καί $< 2\pi$ θέτουμε $\vartheta_o = \gamma$ ἄν τό P ἀνήκη στό 1ο ὀγδοημόριο, $\vartheta_o = 90^0-\gamma$ ἄν τό P ἀνήκη στό 2ο ὀγδοημόριο, $\vartheta_o = 90^0+\gamma$ ἄν τό P ἀνήκη στό 3ο ὀγδοημόριο, $\vartheta_o = 180^0-\gamma$ ἄν τό P ἀνήκη στό 4ο ὀγδοημόριο, $\vartheta_o = 180^0+\gamma$ ἄν τό P ἀνήκη στό 5ο ὀγδοημόριο, $\vartheta_o = 270^0-\gamma$ ἄν τό P ἀνήκη στό 6ο ὀγδοημόριο, $\vartheta_o = 270^0+\gamma$ ἄν τό P ἀνήκη στό 7ο ὀγδοημόριο, $\vartheta_o = 360^0-\gamma$ ἄν τό P ἀνήκη στό 8ο ὀγδοημόριο.

Ἐφαρμόστε τά παραπάνω μέ $P(x = 6,4 , y = -8,7)$, $P(3,7/11)$, $P(-3/-7,8)$.

115. Ὑπολογίστε τό ἐσωτερικό γινόμενο $\bar{\alpha}\bar{\beta}$ ὅταν τά $\bar{\alpha}$ καί $\bar{\beta}$ ἔχουν ὀρθογώνιες συντεταγμένες $(4,3/-2,5)$ καί $(-3,1/-1,4)$ ἀντιστοίχως. Ἀπό τό πρόσημο αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ τί ἕπεται γιά τό μέγεθος τῆς στοιχειώδους γωνίας $\widehat{\bar{\alpha},\bar{\beta}}$; Σχεδιάστε τά δυό διανύσματα ἀπό ἕνα καί τό ἴδιο ἀρχικό σημεῖο καί ἐπαληθεῦστε τό συμπέρασμα. Ποιό εἶναι τό προσημασμένο μέτρο τῆς ὀρθῆς προβολῆς τοῦ $\bar{\gamma}(-4,6)$ πάνω σέ ἕναν ἄξονα $\uparrow\uparrow \bar{\delta}(2,3)$; Ὑπολογίστε τίς συντεταγμένες τοῦ διανύσματος πού ἔχει ἐσωτερικά γινόμενα μέ τό $\bar{\zeta}(2,-5)$ καί τό $\bar{\eta}(-4,-3)$ ἴσα ἀντιστοίχως πρό 7 καί

-6. Γενικεύοντες δεῖξτε ὅτι ὑπάρχει ἕνα μόνον ἐλεύθερο διάνυσμα (x,y) πού τά ἐσωτερικά του γινόμενα μέ δύο δοσμένα μή παράλληλα διανύσματα $\bar{\zeta}(\zeta_1,\zeta_2)$ καί $\bar{\eta}(\eta_1,\eta_2)$ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα πρός δυό αὐθαίρετα δοσμένους πραγματικούς ἀριθμούς γ_1 καί γ_2.

116. Ἐκφράστε τό συν$(\widehat{\bar{\alpha}\,\bar{\beta}})$ μέ τή βοήθεια ἐσωτερικῶν γινομένων καί μόνο. Προσέξτε τό ὅτι ἡ ἔκφραση αὐτή εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό κάθε (πλαγιογώνιο ἤ ὀρθογώνιο) σύστημα συντεταγμένων.

117. Χρησιμοποιώντας τούς τύπους τοῦ § 93 βρῆτε τίς ὀρθογώνιες συντεταγμένες τῶν δύο διανυσμάτων στά ὁποῖα ἀναλύεται τό $\bar{\delta}(6,-5)$ παράλληλα καί κάθετα πρός τή διεύθυνση τῆς εὐθείας $4x-3y+6 = 0$.

118. Ἐκτελέστε τούς ἑξῆς ἐσωτερ. πολλαπλασιασμούς:
$(5\bar{i}-3\bar{j})\cdot(4\bar{i}+6\bar{j})$, $(1,2\bar{i}+4,5\bar{j})\cdot(-5\bar{i}-3\bar{j})$,
$(\lambda\bar{\alpha}+\mu\bar{\beta})^2 = (\lambda\bar{\alpha}+\mu\bar{\beta})(\lambda\bar{\alpha}+\mu\bar{\beta})$ ὅπου λ καί μ πραγματικοί ἀριθμοί. Διερευνῆστε πότε εἶναι μηδέν τό τελευταῖο γινόμενο.

119. Ἄς εἶναι $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ δυό διανύσματα τοῦ ἐπιπέδου μή παράλληλα (ἄρα καί μή μηδενικά). Κάθε διάνυσμα $\bar{u}$ τοῦ ἐπιπέδου γράφεται μέ τή μορφή

$$\bar{u} = u^{(1)}\cdot\bar{e}_1 + u^{(2)}\cdot\bar{e}_2$$

ὅπου $u^{(1)}$ καί $u^{(2)}$ πραγματικοί ἀριθμοί (Συνήθως οἱ ἄνω δεῖκτες γράφονται χωρίς παρενθέσεις: u^1, u^2, παρά τόν κίνδυνο νά ἐκληφθοῦν γιά ἐκθέτες δυνάμεως. Ἐδῶ δέν θ'ἀκολουθήσουμε αὐτή τή συνήθεια γιά ν'ἀποφύγουμε ἀκριβῶς τόν κίνδυνο). Οἱ ἀριθμοί $(u^{(1)}, u^{(2)})$ εἶναι οἱ (παράλληλες) συντεταγμένες τοῦ διανύσματος $\bar{u}$ ὡς πρός ἕνα σύστημα συντεταγμένων ΧΟΥ πού θά εἶχε βασικά διανύσματα τά $\bar{e}_1,\bar{e}_2$ (καί ἀρχή Ο τυχοῦσα). Στό ἴδιο διάνυσμα U ἀντιστοιχεῖ μονότροπα καί τό ἑξῆς ζεῦγος ἀριθμῶν

$$u_1 = \bar{u}\bar{e}_1 \quad , \quad u_2 = \bar{u}\bar{e}_2$$

Ἀντίστροφα εἴδαμε στήν Ἄσκ. 115, 2ο μέρος της, ὅτι ἄν δοθοῦν αὐθαίρετα δυό πραγματικοί ἀριθμοί u_1, u_2 ὑπάρχει ἕνα καί μόνο ἕνα (ἐλεύθερο) διάνυσμα $\bar{u}$ τοῦ ἐπιπέδου τέτοιο ὥστε νά ἀληθεύουν συγχρόνως οἱ ἐξισώσεις $\bar{u}\bar{e}_1 = u_1$, $\bar{u}\bar{e}_2 = u_2$.

Γι'αὐτό οἱ ἀριθμοί (u_1,u_2) λέγονται ἐπίσης συντεταγμένες τοῦ διανύσματας $\bar{u}$, μόνο ὅτι γιά διάκρισι ἀπό τίς προηγούμενες $(u^{(1)}, u^{(2)})$ εἰσάγονται οἱ ἑξῆς πληρέστερες ὀνομασίες: οἱ $(u^{(1)}, u^{(2)})$ λέγονται ἀνταλλοίωτες συντεταγμένες τοῦ $\bar{u}$ ὡς πρός βάση τό ζεῦγος$(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$, οἱ (u_1,u_2), συναλλοίωτες συντεταγμένες τοῦ $\bar{u}$ ὡς πρός βάση τό ζεῦγος $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$.

Ἡ δικαιολογία τῶν ἐπιθέτων "ἀνταλλοίωτες" καί συναλλοίωτες" προκύπτει ἀπό τά ἑπόμενα. Ἀντί τῆς βάσεως$(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ πάρτε (φυσικά μέσα στό ἴδιο ἐπίπεδο) τή βάση $\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_2$ ὅπου

$$(*)\quad \begin{aligned} \bar{e}_1 &= \alpha_{11}\bar{\varepsilon}_1 + \alpha_{12}\bar{\varepsilon}_2 \\ \bar{e}_2 &= \alpha_{21}\bar{\varepsilon}_1 + \alpha_{22}\bar{\varepsilon}_2 \end{aligned} \quad \text{μέ} \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{διότι } \bar{e}_1 \not\parallel \bar{e}_2 .$$

Οἱ συντεταγμένες τοῦ $\bar{u}$ ὡς πρός τή βάση $\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_2$ ἄς εἶναι οἱ μέν ἀνταλλοίωτες $(\xi^{(1)}, \xi^{(2)})$, οἱ δέ συναλλοίωτες (ξ_1, ξ_2). Δεῖξτε ὅτι

$$\begin{aligned} \xi^{(1)} &= \alpha_{11}u^{(1)} + \alpha_{21}u^{(2)} \\ \xi^{(2)} &= \alpha_{12}u^{(1)} + \alpha_{22}u^{(2)} \end{aligned} \quad \text{καί} \quad \begin{aligned} u_1 &= \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 \\ u_2 &= \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 \end{aligned} .$$

Παραβάλατε τούς πίνακες συντελεστῶν σ'αὐτούς τούς δυό τελευταίους "γραμμικούς μετασχηματισμούς" τῶν $(u^{(1)}, u^{(2)})$ σέ $(\xi^{(1)}, \xi^{(2)})$ καί τῶν (ξ_1, ξ_2) σέ (u_1, u_2) μέ τόν πίνακα συντελεστῶν τοῦ γραμμικοῦ μετασχηματισμοῦ (*) τῶν

$$\bar{\varepsilon}_1 , \ \bar{\varepsilon}_2 \ \text{σέ} \ \bar{e}_1 , \ \bar{e}_2 .$$

Κάμετε μιάν ἀριθμητική ἐφαρμογή τῶν παραπάνω παίρνοντας:

$$\bar{e}_1 = 2\bar{i}+3\bar{j} , \quad \bar{e}_2 = -\bar{i}+3\bar{j} , \quad \bar{\varepsilon}_1 = 4\bar{i}+\bar{j} , \quad \bar{\varepsilon}_2 = -2\bar{i}+10\bar{j}$$

$$\bar{u} = -7\bar{i}-3\bar{j} .$$

120. Δεῖξτε ὅτι ἄν $\bar{u}$ καί $\bar{\upsilon}$ εἶναι δυό διανύσματα τοῦ ἐπιπέδου μέ συντεταγμένες ὡς πρός τή βάση $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ τίς ἑξῆς:

$\bar{u}(u^{(1)}, u^{(2)})$ καί (u_1, u_2), $\bar{\upsilon}(\upsilon^{(1)}, \upsilon^{(2)})$ καί (υ_1, υ_2), τότε

$$\bar{u}\bar{\upsilon} = u^{(1)}\upsilon^{(1)}\bar{e}_1^2 + (u^{(1)}\upsilon^{(2)} + u^{(2)}\upsilon^{(1)})\,\bar{e}_1\bar{e}_2 + u^{(2)}\upsilon^{(2)}\bar{e}_2^2 ,$$

καί

$$\bar{u}\bar{\upsilon} = u^{(1)}\upsilon_1 + u^{(2)}\upsilon_2 .$$

Προσέξτε πόσο ἁπλούστερος εἶναι ὁ δεύτερος τύπος ἀπό τόν πρῶτο.

Ποιοί τύποι ἕπονται ἀπό τούς παραπάνω γιά τό μῆκος τοῦ $\bar{u}$ καί γιά τό συν$(\bar{u}\bar{\upsilon})$;

Κάμετε ἀριθμητική καθώς καί σχεδιαστική ἐφαρμογή τῶν παραπάνω παίρνοντας $|\bar{i}| = |\bar{j}| = 1$ cm (καί ἐννοεῖται $\bar{i}\bar{j} = 0$),

$$\bar{e}_1 = \frac{+\sqrt{3}}{2}\,\bar{i} + \frac{1}{2}\,\bar{j} , \quad \bar{e}_2 = -2\bar{i}-2\bar{j} , \quad \bar{u} = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 ,$$

$$\bar{\upsilon} = 4\bar{i} + \frac{1}{2}\,\bar{j} .$$

121. Θέτοντας $\gamma_{11} = \bar{e}_1^2$, $\gamma_{12} = \bar{e}_1\bar{e}_2 = \bar{e}_2\bar{e}_1 = \gamma_{21}$,

$$\gamma_{22} = \bar{e}_2^2 , \quad \Gamma = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix} ,$$

ὅπου $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ μιά βάση (δηλαδή δυό διανύσματα τοῦ ἐπιπέδου μή παράλληλα), δεῖξτε πρῶτον ὅτι $\Gamma \neq 0$ καί δεύτερον ὅτι μεταξύ τῶν ἀνταλλοίωτων συντεταγμένων $(u^{(1)}, u^{(2)})$ καί τῶν συναλλοίωτων (u_1, u_2) ἑνός διανύσματος $\bar{u}$ ὡς πρός τή βάση $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$\gamma_{11}u^{(1)} + \gamma_{12}u^{(2)} = u_1 \qquad \frac{1}{\Gamma}\gamma_{22}u_1 - \frac{1}{\Gamma}\gamma_{12}u_2 = u^{(1)}$$

καί ἀντίστροφα

$$\gamma_{21}u^{(1)} + \gamma_{22}u^{(2)} = u_2 \qquad -\frac{1}{\Gamma}\gamma_{21}u_1 + \frac{1}{\Gamma}\gamma_{11}u_2 = u^{(2)}.$$

Ἄρα

$$\bar{u} = u^{(1)}\bar{e}_1 + u^{(2)}\bar{e}_2 = \frac{\gamma_{22}\bar{e}_1 - \gamma_{21}\bar{e}_2}{\Gamma}\cdot u_1 + \frac{-\gamma_{12}\bar{e}_1 + \gamma_{11}\bar{e}_2}{\Gamma}\cdot u_2 .$$

Ἑπομένως, ἄν θέσουμε

$$\bar{e}^{(1)} = \frac{\gamma_{22}}{\Gamma}\cdot\bar{e}_1 - \frac{\gamma_{21}}{\Gamma}\cdot\bar{e}_2 , \qquad \bar{e}^{(2)} = -\frac{\gamma_{12}}{\Gamma}\bar{e}_1 + \frac{\gamma_{11}}{\Gamma}\bar{e}_2 ,$$

θά ἰσχύῃ ἡ σχεσή $\qquad \bar{u} = u_1\bar{e}^{(1)} + u_2\bar{e}^{(2)}$,

δηλαδή τό u ἔχει ὡς πρός τή βάση $\bar{e}^{(1)}$, $\bar{e}^{(2)}$ ἀνταλλοίωτες συντεταγμένες τίς συναλλοίωτες συντεταγμένες του ὡς πρός τή βάση $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$. Ἡ βάση $\bar{e}^{(1)}$, $\bar{e}^{(2)}$ λέγεται ἀντίστροφη τῆς $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$. Δεῖξτε τώρα ὅτι $\bar{e}_1\bar{e}^{(1)} = 1 \quad \bar{e}_2\bar{e}^{(1)} = 0$, $\bar{e}_1\bar{e}^{(2)} = 0$, $\bar{e}_2\bar{e}^{(2)} = 1$.

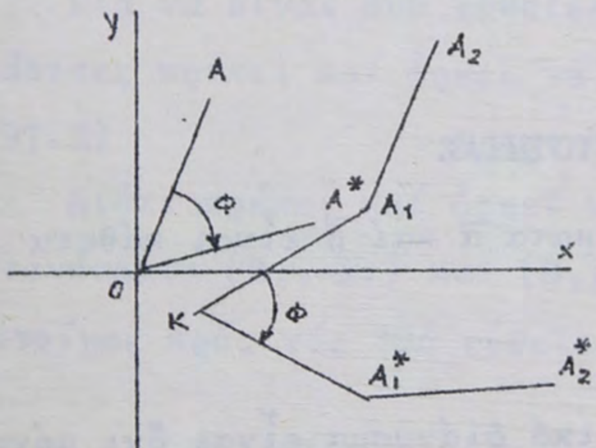
Τί γεωμετρική σημασία ἔχουν αὐτές οἱ σχέσεις;

Δεῖξτε τέλος ὅτι οἱ συναλλοίωτες συντεταγμένες τοῦ $\bar{u}$ ὡς πρός $\bar{e}^{(1)}$, $\bar{e}^{(2)}$ ἰσοῦνται ἀντιστοίχως μέ τίς ἀνταλλοίωτές του ὡς πρός $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$. Κάμετε ἀριθμητικές καί σχεδιαστικές ἐφαρμογές τῶν παραπάνω.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IX

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΤΥΠΩΝ. ΣΤΡΟΦΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ.

§ 95. Πρόβλημα. Ἕνα διάνυσμα $\bar{\alpha} = \overline{A_1A_2}$ τοῦ ἐπιπέδου XOY μέ (ὀρθογ.) συντεταγμένες (α_1,α_2) ὑποβάλλεται σέ μιά στροφή, μέσα στό ἐπίπεδο ἐννοεῖται, γύρω σ'ἕνα σημεῖο K τοῦ ἐπιπέδου κατά τήν προσημασμένη γωνία φ. Ζητοῦνται οἱ συντεταγμένες



$(\alpha_1^*\ ,\ \alpha_2^*)$ τοῦ διανύσματος $\bar{\alpha}^* = \overline{A_1^*A_2^*}$ πού προκύπτει. Ἀπό τήν ἀρχή O φέρνουμε τό $\overline{OA}=\bar{\alpha}$ καί τό στρέφουμε γύρω στό O κατά τή γωνία φ. Τό διάνυσμα $\overline{OA}^*$ πού προκύπτει εἶναι $\bar{\alpha}^* = \overline{A_1^*A_2^*}$, ἄρα ἔχει τίς ζητούμενες συντεταγμένες (α_1^*,α_2^*). Γιά νά τίς βροῦμε παρατηροῦμε ὅτι ἄν καλέσουμε (ϱ,ϑ) τίς πολικές συντεταγμένες τοῦ A (στό συζευγμένο σύστημα ἐννοεῖται), οἱ πολικές συντεταγμένες τοῦ A^* θά εἶναι $(\varrho,\vartheta+\varphi)$. Ἄρα, σύμφωνα μέ τούς τύπους (89.1)

$$\alpha_1^* = \varrho\,\text{συν}(\vartheta+\varphi) = \varrho\cdot\text{συν}\vartheta\cdot\text{συν}\varphi - \varrho\,\text{ημ}\vartheta\cdot\text{ημ}\varphi$$

$$\alpha_2^* = \varrho\,\text{ημ}(\vartheta+\varphi) = \varrho\,\text{συν}\vartheta\cdot\text{ημ}\varphi + \varrho\,\text{ημ}\vartheta\cdot\text{συν}\varphi$$

καί ἐπειδή κατά τούς ἴδιους τύπους $\alpha_1 = \varrho\,\text{συν}\vartheta$, $\alpha_2 = \varrho\,\text{ημ}\vartheta$, θά ἔχουμε

$$\begin{aligned} \alpha_1^* &= \alpha_1\,\text{συν}\varphi - \alpha_2\,\text{ημ}\varphi \\ \alpha_2^* &= \alpha_1\,\text{ημ}\varphi + \alpha_2\,\text{συν}\varphi \end{aligned} \qquad (95.1)$$

Σχόλιο. 'Από τούς τύπους αυτούς προκύπτει εκεῖνο πού καί γεωμετρικά ἀποδείχνεται εὔκολα, ὅτι δυό ἴσα ἐφαρμοσμένα διανύσματα τοῦ ἐπιπέδου δίνουν ὕστερα ἀπό στροφή γύρω σέ δυό ὁποιαδήποτε σημεῖα K_1 καί K_2 τοῦ ἐπιπέδου κατά τήν ἴδια προσημασμένη γωνία φ, δυό ἐπίσης ἴσα διανύσματα. Ἄρα οἱ παραπάνω τύποι μποροῦν νά θεωρηθοῦν ὅτι δίνουν τίς συντεταγμένες ἑνός ἐλεύθερου διανύσματος $\bar{\alpha}^*$ πού λαμβάνεται ἀπό ἕνα ἐπίσης ἐλεύθερο διάνυσμα $\bar{\alpha}$ τοῦ ἐπιπέδου μέ στροφή τοῦ $\bar{\alpha}$ κατά τήν προσημασμένη γωνία φ γύρω σέ τυχόν σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου.

Πόρισμα. Ἄν τό διάνυσμα (α_1,α_2) στραφῆ γύρω σέ τυχόν σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου (π.χ. γύρω στήν ἀρχή του ἄν εἶναι ἐφαρμοσμένο) κατά $+\frac{\pi}{2}$, τότε θά λάβουμε ἕνα διάνυσμα μέ συντεταγμένες $(-\alpha_2,\alpha_1)$.

ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑΣ

§ 96. Δυό μή μηδενικά διανύσματα $\bar{\alpha}$ καί $\bar{\beta}$ εἶναι κάθετα $(\widehat{\bar{\alpha},\bar{\beta}} =$ ὀρθή) ὅταν καί μόνο ὅταν

(96.1) $$\bar{\alpha}\bar{\beta} = 0 \quad .$$

Ἄν συμφωνήσουμε ὅτι τό μηδενικό διάνυσμα εἶναι ὄχι μόνο παράλληλο ἀλλά καί κάθετο πρός κάθε διάνυσμα, τότε ἡ παραπάνω σχέση εἶναι ἡ ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά τήν καθετότητα δυο τυχόντων διανυσμάτων τοῦ χώρου.

Ἄς εἶναι τώρα τά διανύσματα $\bar{\alpha}$ καί $\bar{\beta} \| XOY$ καί ἄς ἔχουν (ὀρθογ.) συντεταγμένες (α_1,α_2) καί (β_1,β_2) ἀντιστοίχως. Ἡ συνθήκη (96.1) γράφεται μέ τήν βοήθεια τῶν συντεταγμένων ἔτσι:

(96.2) $$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 0$$

Ὡς μιάν ἐφαρμογή αὐτῆς τῆς συνθήκης καθετότητας ἀναφέρουμε τό ἑξῆς: Οἱ συντεταγμένες τῶν διανυσμάτων πού εἶναι κάθετα πρός δοσμένο μή μηδενικό $\bar{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2)$ ἔχουν γενική ἔκφραση

$$(-\lambda\alpha_2,\ \lambda\alpha_1)$$

ὅπου λ ἕνας αὐθαίρετος ἀριθμός. Αὐτό ἕπεται κάι ἀπό τό πόρισμα τοῦ προηγουμένου παραγράφου.

§ 97. Γιά νά εἶναι ἕνα διάνυσμα $\bar{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2)$ κάθετο πρός μιάν εὐθεία $Ax+By+\Gamma = 0$ πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἔχουμε (σέ ὀρθογ. σύστημα)

(97.1) $$B\alpha_1 - A\alpha_2 = 0 \quad .$$

Διότι ὅπως ξέρουμε, τό διάνυσμα $(B,-A)$ εἶναι || πρός τήν εὐθεία. Ἐπομένως, ἕνα διάνυσμα κάθετο πρός τήν εὐθεία $Ax+By+\Gamma = 0$ εἶναι ἐκεῖνο πού ἔχει συντεταγμένες (A,B). Ἄρα τά διάφορα διανύσματα πού εἶναι κάθετα πρός τήν εὐθεία αὐτή ἔχουν συντεταγμένες $(\lambda A,\lambda B)$, ὅπου λ ἕνας αὐθαίρετος ἀριθμός.

Γιά νά εἶναι δυό εὐθεῖες $A_1x+B_1y+\Gamma_1 = 0$, $A_2x+B_2y+\Gamma_2 y = 0$ κάθετες πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἔχουμε

(97.2) $$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \quad .$$

Διότι πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι κάθετα μεταξύ τους τά διανύσματα $(B_1,-A_1)$ καί $(B_2,-A_2)$ πού εἶναι παράλληλα ἀντιστοίχως πρός τίς δυό εὐθεῖες.

Ἔτσι, ἡ εὐθεία $Bx-Ay = 0$ εἶναι κάθετη πρός τήν $Ax+By+\Gamma = 0$, ἡ δέ εὐθεία πού περνᾶ ἀπό τό σημεῖο $M_0(x_0,y_0)$ καί εἶναι κάθετη πρός τήν $Ax+By+\Gamma = 0$ ἔχει ἐξίσωση

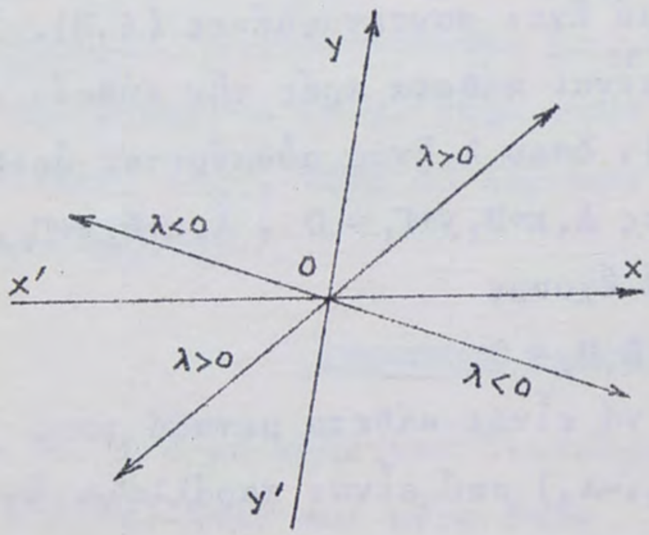
$$B(x-x_0) - A(y-y_0) = 0 \quad .$$

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΩΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΕΥΘΕΙΑΣ

§ 98. Οἱ παραπάνω συνθῆκες καθετότητας μποροῦν νά διατυπωθοῦν καί μέ τή βοήθεια τῆς ἀκόλουθης ἔννοιας πού εἶναι χρήσιμη καί γιά ἄλλους σκοπούς. Συντελεστής διευθύνσεως ἑνός μή μηδενικοῦ διανύσματος $\bar{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2)$ σέ πλαγιογώνιο ἤ ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων λέγεται τό πηλίκο $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ τῆς τεταγμένης του α_2 διά τῆς τετμημένης του α_1 ὅταν $\alpha_1 \neq 0$, τό σύμβολο ∞ ὅταν $\alpha_1 = 0$ (ὁπότε $\alpha_2 \neq 0$). Συντελεστής διευθύνσεως μηδενικοῦ διανύσματος δέν εἰσάγεται.

Σύμφωνα μέ τόν § 60, γιά νά εἶναι δυό μή μηδενικά διανύσματα τοῦ ἐπιπέδου παράλληλα, πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἔχουν τούς ἴδιους συντελεστές διευθύνσεως.

Ἔστω $\bar{\alpha} = \overline{OA}(\alpha_1,\alpha_2)$ ἕνα διάνυσμα μέ συντελεστή διευθύνσεως λ. Ἄν $\lambda > 0$, τότε τό $\overline{OA}$ κεῖται μέσα στήν πρώτη γωνία XOY ἤ μέσα στήν τρίτη γωνία X΄OY΄ τῶν ἀξόνων· ἄν $\lambda < 0$ τότε τό $\overline{OA}$ βρίσκεται μέσα στή δεύτερη γωνία YOX΄ ἤ μέσα στήν τέταρτη Y΄OX. Ἄν $\lambda = 0$ τότε τό $\overline{OA}$ κεῖται πάνω στόν ἄξονα τετμημένων, ἄν $\lambda = \infty$, τότε τό $\overline{OA}$ κεῖται πάνω στόν ἄξονα τεταγμένων.



Γιά νά σχεδιάσουμε διάνυσμα μέ συντελεστή διευθύνσεως δοσμένο ἀριθμό λ, ἀρκεῖ νά σχεδιάσουμε ἕνα διάνυσμα μέ συντεταγμένες ἀνάλογες πρός τούς ἀριθμούς (1,λ). Π.χ. ἄν $\lambda = -\frac{4}{3}$, σχεδιάζουμε τό διάνυσμα (3,−4).

§ 99. Συντελεστής διευθύνσεως εὐθείας λέγεται ὁ κοινός συντελεστής διευθύνσεως τῶν διανυσμάτων πού εἶναι παράλληλα πρός τήν εὐθεία. Ἑπομένως συντ. διευθύνσεως τῆς εὐθείας P_1P_2 ὅπου $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ εἶναι ὁ λόγος $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (μέ τή σύμβαση ὅτι ὁ λόγος αὐτός σημαίνει τό ∞, ἄν $x_2-x_1 = 0$, ὁπότε ἐξ ὑποθέσεως $y_2-y_1 \neq 0$).

Συντελεστής διευθύνσεως τῆς εὐθείας μέ ἐξίσωση $y = \lambda x+\beta$ εἶναι ὁ ἀριθμός λ. Συντελ. διευθύνσεως τῆς εὐθείας $Ax+By+\Gamma=0$

εἶναι τό $-\frac{A}{B}$, μέ τή σύμβαση ὅτι αὐτό σημαίνει τό ∞ ἄν $B=0$ (ὁπότε ἐξ ὑποθέσεως $A \neq 0$). Συντελ. διευθύνσ. τῆς εὐθείας

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$$

εἶναι τό $\frac{\beta}{\alpha}$, μέ τή σύμβαση: $\frac{\beta}{\alpha} = \infty$ ἄν $\alpha = 0$ (ὁπότε ἐξ ὑποθέσεως $\beta \neq 0$). Ἡ εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τό σημεῖο $P_0(x_0, y_0)$ καί ἔχει συντελ. διευθύνσ. ἕναν δοσμένο ἀριθμ. λ, παριστάνεται ἀπό τήν ἐξίσωση $y-y_0 = \lambda(x-x_0)$.

Ἄν ὁ δοσμένος συντ. διευθ. εἶναι τό ∞, τότε ἡ ἐξίσωση τῆς εὐθείας εἶναι $x-x_0 = 0$. Ἰσχύει προφανῶς ἡ πρόταση:

Δυό εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου εἶναι παράλληλες ὅταν καί μόνον ὅταν ἔχουν ἴσους συντελεστές διευθύνσεως.

Παρατήρηση. Στήν ἐπ'ἄπειρο εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου δέν ἀποδίνουμε ὁρισμένο συντ. διευθύνσεως

§100. Ὅσα ἐκθέσαμε στούς §§ 98,99 ἰσχύουν καί σέ πλαγιογώνια καί σέ ὀρθογώνια συστήματα συντεταγμένων. Τά παρακάτω ἐξυπακούουν ὀρθογώνια συστήματα συντεταγμένων μέ ἰσόμηκα βασικά διανύσματα $|\bar{i}| = |\bar{j}|$.

Τό συντελεστή διευθύνσεως διανύσματος ἤ εὐθείας θά τόν καλοῦμε τότε καί κλίση τοῦ διανύσματος ἤ τῆς εὐθείας. Ἡ κλίση $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ ἑνός διανύσματος $\bar{\alpha}(\alpha_1, \alpha_2) \neq 0$ ἰσοῦται τώρα μέ τήν ἐφαπτομένη τῆς πολικῆς του γωνίας $(\bar{i}, \bar{\alpha})$.

Ἡ κλίση μιᾶς εὐθείας ε τοῦ ἐπιπέδου ἰσοῦται μέ τήν ἐφαπτομένη τῆς γωνίας $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OA})$ πού ἔχει πρώτη πλευρά τήν ἡμιευθεία $\overrightarrow{OX}$ καί δεύτερη πλευρά μιάν ἡμιευθεία $\overrightarrow{OA} \parallel \varepsilon$. Ἑπομένως γιά ἕνα διάνυσμα $\bar{\delta}$ μέ κλίση -1 π.χ. ἔχουμε ἤ $(\bar{i}, \bar{\delta}) = \frac{3\pi}{4} = 135^0$ ἤ $(\bar{i}, \bar{\delta}) = \frac{3\pi}{4} + \pi = 315^0$· γιά τήν εὐθεία $y = +\sqrt{3}\,x+4$, παριστάνοντας μέ $\vec{\varepsilon}$ ἐκείνη τή φορά της πού ἀπό μικρότερες τετμημένες προχωρεῖ σέ ἀλγεβρικῶς μεγαλύτερες, θά ἔχουμε $\varepsilon\varphi(\overrightarrow{OX}, \vec{\varepsilon}) = +\sqrt{3}$, ἄρα

$$(\underset{\frown}{\overrightarrow{OX}\ ,\ \vec{\varepsilon}_o}) = \frac{\pi}{3} = 60^\circ \quad .$$

§ 101. Ἡ συνθήκη καθετότητας (96.2) δυό μή μηδενικῶν διανυσμάτων $\bar{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2)$ καί $\bar{\beta}(\beta_1,\beta_2)$ μέ κλίσεις $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ καί $\mu = \frac{\beta_2}{\beta_1}$ (ὅπου $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \infty$ ἄν $\alpha_1 = 0$ καί $\mu = \frac{\beta_2}{\beta_1} = \infty$ ἄν $\beta_1 = 0$) διατυπώνεται τώρα ὡς ἑξῆς:

$$\lambda = \frac{-1}{\mu}$$

ὅπου πάλι, δυνάμει συμφωνίας, τό $-\frac{1}{\mu}$ σημαίνει τό ∞ γιά $\mu=0$ καί τό 0 γιά $\mu=\infty$. Μέ τήν παραπάνω σχέση ἐκφράζεται φυσικά καί ἡ καθετότητα δυό εὐθειῶν πού ἔχουν κλίσεις λ καί μ ἀντιστοίχως. Ἰδού μιά ἐφαρμογή: Ἡ εὐθεία πού διέρχεται διά τοῦ $P_o(x_o,y_o)$ καί εἶναι κάθετη στή $y = \lambda x+\beta$ ἔχει ἐξίσωση $y-y_o = -\frac{1}{\lambda}(x-x_o)$ ἤ $-\lambda(y-y_o) = x-x_o$, ὅπου στήν περίπτωση τοῦ $\lambda = 0$, ἡ ἐξίσωση $y-y_o = -\frac{1}{\lambda}(x-x_o)$ ἔχει κατά σύμβαση τό νόημα $x-x_o = 0$.

ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ

§ 102. Ἄς εἶναι ε_1: $A_1x+B_1y+\Gamma_1 = 0$, ε_2: $A_2x+B_2y+\Gamma_2 = 0$ δυό εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου (σέ ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων).

Παριστάνουμε μέ $(\widehat{\varepsilon_1,\varepsilon_2}) = (\widehat{\varepsilon_2,\varepsilon_1})$ τό (ἀπροσήμαστο) μέτρο τῆς ὀξείας ἤ ὀρθῆς γωνίας των: $0 \leqq (\widehat{\varepsilon_1,\varepsilon_2}) \leqq \frac{\pi}{2}$. Ἡ εφ$(\widehat{\varepsilon_1,\varepsilon_2})$ ἰσοῦται προφανῶς μέ τήν ἀπόλυτη τιμή τῆς εφ$(\underset{\frown}{\overrightarrow{O\Lambda}_1,\overrightarrow{O\Lambda}_2})$ ὅπου $\overrightarrow{O\Lambda}_1 \parallel \varepsilon_1$ καί $\overrightarrow{O\Lambda}_2 \parallel \varepsilon_2$. Ἄς εἶναι ϑ_1 καί ϑ_2 οἱ πολικές γωνίες τῶν $\overrightarrow{O\Lambda}_1$ καί $\overrightarrow{O\Lambda}_2$. Θά ἔχουμε, σύμφωνα μέ τόν τύπο (91.1) $(\underset{\frown}{\overrightarrow{O\Lambda}_1,\ \overrightarrow{O\Lambda}_2}) = \vartheta_2 - \vartheta_1$.

Ἐξ ἄλλου εφϑ_2 = κλίση τῆς $\varepsilon_2 = -\frac{A_2}{B_2} = \lambda_2$, εφ$\vartheta_1$ = κλίση τῆς $\varepsilon_1 = -\frac{A_1}{B_1} = \lambda_1$, ἄρα

$$\text{εφ}(\underset{\frown}{\overrightarrow{O\Lambda}_1,\ \overrightarrow{O\Lambda}_2}) = \text{εφ}(\vartheta_2-\vartheta_1) = \frac{\lambda_2-\lambda_1}{1+\lambda_1\lambda_2} \quad ,$$

ὅπου τό κλάσμα δεξιά ἔχει ἀπό σύμβαση τό ἑξῆς νόημα ὅταν ἕνα τουλάχιστο ἀπό τά δυό λ δέν εἶναι ἀριθμός ἀλλά τό σύμβολο ∞ ἤ ὅταν $1+\lambda_1\lambda_2=0$:

$$\frac{\lambda_2-\lambda_1}{1+\lambda_1\lambda_2}=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda_1} & \text{ὅταν } \lambda_2=\infty\,,\ \lambda_1=\text{ἀριθμός}\neq 0\\ \infty & \text{ὅταν } \lambda_2=\infty\,,\ \lambda_1=0\\ -\dfrac{1}{\lambda_2} & \text{ὅταν } \lambda_1=\infty\,,\ \lambda_2=\text{ἀριθμός}\neq 0\\ \infty & \text{ὅταν } \lambda_1=\infty,\ \lambda_2=0\\ 0 & \text{ὅταν } \lambda_1=\infty,\ \lambda_2=\infty\\ \infty & \text{ὅταν } \lambda_1=\text{ἀριθμός}\,,\ \lambda_2=\text{ἀριθμός},\ 1+\lambda_1\lambda_2=0\,.\end{cases}$$

Ἑπομένως ἔχουμε

$$\varepsilon\varphi(\widehat{\varepsilon_1,\varepsilon_2})=\left|\frac{\lambda_2-\lambda_1}{1+\lambda_1\lambda_2}\right|\,.$$

Π.χ. ἄν ε_1: $2x-3y+5=0$ καί ε_2: $-4x-2y+3=0$, τότε

$$\varepsilon\varphi(\widehat{\varepsilon_1,\varepsilon_2})=\left|\frac{-2-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}(-2)}\right|=8\,.$$

ἄρα $(\widehat{\varepsilon_1,\varepsilon_2})\approx 82^0\ 52'\approx 1{,}446$ ἀκτίνια

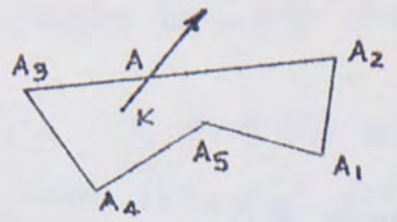
(Βλ. πίνακες Dupuis σελ.149-151 καί 130-131).

ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΑ ΕΜΒΑΔΑ

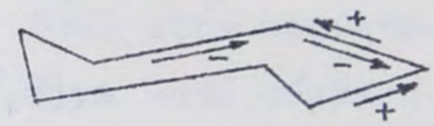
§ 103. Μέσα σ'ἕνα προσανατολισμένο ἐπίπεδο εἶναι σκόπιμο νά διακρίνουμε θετικά καί ἀρνητικά ἐμβαδά.

Αὐτό γίνεται ὡς ἑξῆς:

Ἔστω $A_1A_2\ldots A_\nu$ ἕνα πολύγωνο μέ ν πλευρές. (Ἐξυπακούεται ὅτι οἱ κορυφές διαδέχονται ἡ μιά τήν ἄλλη μέ τήν σειρά κατά τήν ὁποία διαγράφονται). Τό περίγραμμά του, δηλ. ἡ κλειστή τεθλασμένη γραμμή $A_1A_2\ldots A_\nu A_1$, μπορεῖ νά διατρεχθῆ ἀπό ἕνα σημεῖο Α κατά δυό διαφορετικές φορές: ἡ μιά φορά διαδρομῆς συμφωνεῖ μέ τή μετάθεση $A_1A_2\ldots A_\nu$ τῶν κορυφῶν (καθώς καί μέ τίς μεταθέσεις $A_2A_3\ldots A_\nu A_1$, $A_3A_4\ldots A_\nu A_1A_2$ κτλ. οἱ ὁποῖες προκύπτουν ἀπό αὐτήν διά κυκλικῶν ἐναλλαγῶν, ἡ ἄλ-



λη φορά συμφωνεῖ μέ τή μετάθεση $A_\nu A_{\nu-1} \ldots A_2 A_1$ (καθώς καί μέ κεῖνες πού προκύπτουν ἀπ'αὐτήν μέ κυκλικές ἐναλλαγές). Ἐάν ἀπό ἕνα σημεῖο Κ τοῦ ἐσωτερικοῦ τοῦ πολυγώνου φέρουμε τήν ἡμιευθεία $\overrightarrow{KA}$ πρός τό σημεῖο Α πού περιοδεύει τό περίγραμμα, ἡ μέν μιά περιόδευση θά ἰσοδυναμῆ τελικά μέ ἕναν ὁλακερο γύρο τῆς $\overrightarrow{KA}$ περί τό Κ κατά τή θετική φορά, ἡ δέ ἄλλη, μέ ἕναν ὁλάκερο γύρο τῆς $\overrightarrow{KA}$ περί τό Κ κατά τήν ἀρνητική φορά περιστροφῆς μέσα στό προσανατολισμένο ἐπίπεδο˙ τήν πρώτη θά τή λέμε θετική περιόδευση τοῦ πολυγώνου, τή δεύτερη, ἀρνητική περιόδευση. Ἐάν θετική φορά περιστροφῆς εἶναι, ὅπως συνήθως, ἡ ἀπό τά δεξιά πρός τά ἀριστερά γιά ἕναν παρατηρητή πού στέκεται πάνω στή θεωρούμενη ὄψη τοῦ ἐπιπέδου, τότε



μποροῦμε νά δώσουμε στίς προσημασμένες αὐτές περιοδεύσεις τοῦ πολυγώνου τόν ἀκόλουθο ἐποπτικό χαρακτηρισμό: ἕνας περιπατητής πού κινεῖται πάνω στή θεωρούμενη ὄψη τοῦ ἐπιπέδου ἐκτελώντας τή θετική περιόδευση ἔχει στήν ἀριστερή του μεριά τά γειτονικά ἐσωτερικά σημεῖα τοῦ πολυγώνου, ἐνῶ ἕνας πού ἐκτελεῖ τήν ἀρνητική περιόδευση τά ἔχει στή δεξιά του μεριά.

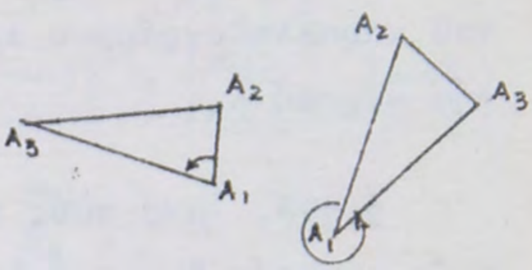
§ 104. Συμφωνοῦμε τώρα, στό ἐμβαδό ἑνός πολυγώνου περιοδευμένου θετικά νά δώσουμε τό πρόσημο +, στό ἐμβαδό ἑνός περιοδευμένου ἀρνητικά τό πρόσημο −. Μᾶς μένει νά ἐκφράσουμε τό προσημασμένο αὐτό ἐμβαδό μέ τίς συντεταγμένες τῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου. Μονάδα ἐμβαδῶν παίρνουμε τό ἐμβαδό τοῦ τετραγώνου μέ πλευρά μήκους $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$.

Ὡς σύμβολο γιά τό προσημασμένο ἐμβαδό τοῦ πολυγώνου $A_1 A_2 \ldots A$

περιοδευμένου σύμφωνα μέ τή μετάθεση $A_1A_2\ldots A_\nu$ τῶν κορυφῶν του θά χρησιμοποιήσουμε τό $[A_1A_2\ldots A_\nu]$.

Τέλος ἄς εἶναι $A_\rho(x_\rho,y_\rho)$ γιά $\rho = 1,2,\ldots,\nu$.

Θεωροῦμε πρῶτα ἕνα τρίγωνο $A_1A_2A_3$. Ἡ περιόδευση $A_1A_2A_3A_1$ εἶναι θετική ἤ ἀρνητική καθόσο ἡ γωνία $(\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3})$ εἶναι $<\pi$ ἤ $>\pi$. Ἄρα ἀπό τό γνωστό τύπο τῆς τριγωνομετρίας: ἀπροσήμαστο ἐμβαδό τοῦ τριγ.$A_1A_2A_3 = \frac{1}{2} A_1A_2\cdot A_1A_3\cdot \eta\mu A_2A_1A_3$, ἕπεται ὁ:



$$[A_1A_2A_3] = \frac{1}{2} A_1A_2\cdot A_1A_3\cdot \eta\mu(\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3})$$

καί συνεπῶς μέ χρήση τοῦ (86.1) ὁ:

$$(104.1)\qquad [A_1A_2A_3] = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} .$$

Ἄν ἀναπτύξουμε τήν τελευταία ὁρίζουσα κατά τά στοιχεῖα τῆς 3ης στήλης βρίσκουμε

$$(104.2)\qquad [A_1A_2A_3] = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} .$$

Θεωροῦμε δεύτερον ἕνα παραλληλόγραμμο $A_1A_2A_3A_4$. Ἐπειδή γι'αὐτό ἰσχύουν αἱ σχέσεις

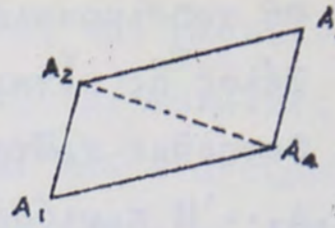
$$[A_1A_2A_3A_4] = 2[A_1A_2A_4] = [A_1A_2A_3] + [A_1A_3A_4]$$

θά ἔχουμε

$$(104.3)\qquad [A_1A_2A_3A_4] = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 \end{vmatrix} ,$$

$$(104.4)\qquad [A_1A_2A_3A_4] = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$
$$+ \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} .$$

Ὁ τύπος (104.3) ἐκφράζει τό προσημασμένο ἐμβαδό τοῦ παραλληλογράμμου $A_1A_2A_3A_4$ μέ τή βοήθεια τῶν συντεταγμένων τῶν διανυσμάτων $\overline{A_1A_2}$ καί $\overline{A_1A_4}$ τά όποῖα ἀποτελοῦν τίς πλευρές τοῦ παραλληλογράμμου πού ἀναχωροῦν ἀπό τήν κορυφή A_1.



§ 105. Ἀπό τούς τύπους (104.2) καί (104.4) φθάνουμε στήν εἰκασία ὅτι γιά ἕνα πολύγωνο $A_1A_2 \dots A_\nu$ μέ ὁσεσδήποτε ν πλευρές ἰσχύει ὁ τύπος

$$(105.1) \quad [A_1A_2\dots A_\nu] = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_{\nu-1} & y_{\nu-1} \\ x_\nu & y_\nu \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_\nu & y_\nu \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right).$$

Ἡ ἀπόδειξη μπορεῖ νά γίνῃ μέ μαθηματική ἐπαγωγή:

Παρατηροῦμε πρῶτα ὅτι τό ἀποδεικτέο ἰσχύει γιά $\nu = 3$ (βλ. τύπο (104.2)).

Ὑποθέτουμε δεύτερον ὅτι ἀληθεύει γιά $\nu \leqq \varrho$, ὅπου ϱ ἕνας φυσικός ἀριθμός $\geqq 3$ καί ἀποδείχνουμε ὅτι τότε θά ἰσχύῃ καί γιά $\nu = \varrho+1$.

Πράγματι, ὅπως σχετικῶς εὔκολα μπορεῖ νά δείξῃ κανείς, τυχόν πολύγωνο $A_1A_2\dots A_\varrho A_{\varrho+1}$ ἔχει τουλάχιστο μιάν "ἐσωτερικιά" διαγώνιο, δηλ. μιά διαγώνιο $A_\kappa A_{\kappa+\lambda}$ τῆς ὁποίας ὅλα τά σημεῖα ἐκτός ἀπό τά ἄκρα A_κ καί $A_{\kappa+\lambda}$, βρίσκονται στό ἐσωτερικό τοῦ πολυγώνου.

Ἡ διαγώνιος αὐτή $A_\kappa A_{\kappa+\lambda}$ χωρίζει τό πολύγωνο σέ δυό πολύγωνα, τό $A_1\dots A_{\kappa-1}A_\kappa A_{\kappa+\lambda}A_{\kappa+\lambda+1}\dots A_{\varrho+1}$ καί τό $A_\kappa A_{\kappa+1}\dots A_{\kappa+\lambda}$, μέ ἀριθμό πλευρῶν $\leqq \varrho$, γιά τά ὁποῖα ἰσχύει ἡ σχέση

$$[A_1A_2\dots A_{\varrho+1}] = [A_1\dots A_\kappa A_{\kappa+\lambda}\dots A_{\varrho+1}] + [A_\kappa A_{\kappa+1}\dots A_{\kappa+\lambda}].$$

Ἄρα, σύμφωνα μέ τήν ὑπόθεσή μας,

$$[A_1A_2\ldots A_{\rho+1}] = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} x_{\kappa-1} & y_{\kappa-1} \\ x_\kappa & y_\kappa \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_\kappa & y_\kappa \\ x_{\kappa+\lambda} & y_{\kappa+\lambda} \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} x_{\kappa+\lambda} & y_{\kappa+\lambda} \\ x_{\kappa+\lambda+1} & y_{\kappa+\lambda+1} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} x_{\rho+1} & y_{\rho+1} \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_\kappa & y_\kappa \\ x_{\kappa+1} & y_{\kappa+1} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} x_{\kappa+\lambda-1} & y_{\kappa+\lambda-1} \\ x_{\kappa+\lambda} & y_{\kappa+\lambda} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{\kappa+\lambda} & y_{\kappa+\lambda} \\ x_\kappa & y_\kappa \end{vmatrix} \right),$$

καί ἐπειδή $\begin{vmatrix} x_\kappa & y_\kappa \\ x_{\kappa+\lambda} & y_{\kappa+\lambda} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{\kappa+\lambda} & y_{\kappa+\lambda} \\ x_\kappa & y_\kappa \end{vmatrix} = 0$,

ἕπεται ὅτι $[A_1A_2\ldots A_{\rho+1}] = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} x_{\kappa-1} & y_{\kappa-1} \\ x_\kappa & y_\kappa \end{vmatrix} + \right.$

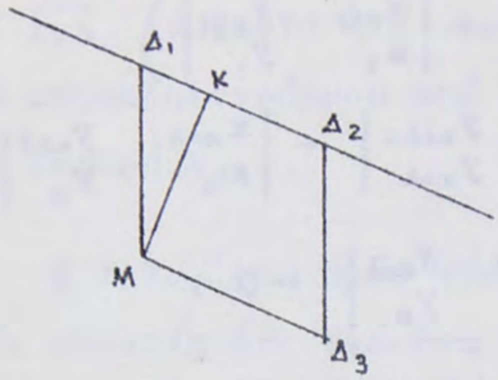
$$\left. + \begin{vmatrix} x_\kappa & y_\kappa \\ x_{\kappa+1} & y_{\kappa+1} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} x_{\rho+1} & y_{\rho+1} \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right)$$ ὅ.ἔ.δ.

ΡΟΠΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΑΞΟΝΑ

§ 106. Ἔστω ΧΟΥ ἕνα προσανατολισμένο ἐπίπεδο καί Μ ἕνα σημεῖο του. Πάνω στήν κάθετη πρός τό ἐπίπεδο ἡ ὁποία περνᾶ ἀπό τό Μ, παίρνουμε θετική φορά $\overrightarrow{MZ}$ ἐκείνη γιά τήν ὁποία ἰσχύει τό ἑξῆς: Ἡ θετική στροφή γύρω στό Μ μέσα στό ΧΟΥ γίνεται ἀπό τά δεξιά πρός τά ἀριστερά ἑνός παρατηρητοῦ τοποθετημένου μέ τά πόδια στό Μ καί μέ τό κεφάλι πρός τό Ζ. Τήν κάθετη μέ τήν τοιουτοτρόπως καθορισμένη θετική φορά $\overrightarrow{MZ}$ θά τήν καλοῦμε ἄξονα κάθετο στό προσανατολισμένο ἐπίπεδο ΧΟΥ.

Ἄς εἶναι τώρα $\overrightarrow{\Delta_1\Delta_2} = \overline{\delta}$ ἕνα ἐ φ α ρ μ ο σ μ έ ν ο διάνυσμα $\neq 0$ τοῦ ΧΟΥ. Λέγεταϊ ροπή τοῦ $\overline{\delta}$ ὡς πρός τόν κάθετο ἄξονα $\overrightarrow{MZ}$ τό προσημασμένο ἐμβαδό τοῦ παραλληλογράμμου πού ἔχει διαδοχικές πλευρές τά τμήματα $M\Delta_1$ καί $\Delta_1\Delta_2$ καί πού περιοδεύεται σύμφωνα μέ τή φορά $\overrightarrow{\Delta_1\Delta_2}$ τοῦ διανύσματος $\overline{\delta}$. Ἐάν ἡ εὐθεία $\Delta_1\Delta_2$ περνᾶ ἀπό τό σημεῖο Μ, τό παραλληλόγραμμο ἐκφυλίζεται σέ ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα καί ἡ ροπή εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ τό μηδέν. Ἐπίσης θέτουμε τή ροπή ἴση μέ 0, ἄν εἶναι $\overline{\delta} = 0$.

Ἡ παραπάνω ἔννοια τῆς ροπῆς προέρχεται ἀπό τή Μηχανική,



ἡ ὁποία ὁρίζει τή ῥοπή τῆς δυνάμεως $\overline{\Delta_1\Delta_2} = \bar{\delta}$ ὡς πρός τόν κάθετο στό ἐπίπεδο $M\Delta_1\Delta_2$ ἄξονα $\overrightarrow{MZ}$ ἴση μέ τό γινόμενο τοῦ μέτρου $\Delta_1\Delta_2$ τῆς δυνάμεως ἐπί τήν ἀπόσταση MK τοῦ M ἀπό τήν εὐθεία $\Delta_1\Delta_2$ παρμένο μέ τό πρόσημο + ὅταν ἡ δύναμη $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ τείνει νά στρέψῃ τή $M\Delta_1$ γύρω στό M κατά τή θετική φορά, μέ τό πρόσημο −, ὅταν τείνῃ νά τή στρέψῃ κατά τήν ἀρνητική φορά περιστροφῆς μέσα στό προσανατολισμένο ἐπίπεδο $M\Delta_1\Delta_2$.

Ἄς εἶναι τώρα (x_0,y_0) , (x_1,y_1) , (x_2,y_2) οἱ (ὀρθογ.) συντεταγμένες τῶν σημείων M_0, Δ_1, Δ_2 ἀντιστοίχως, καί ($\delta_1 = x_2-x_1$, $\delta_2 = y_2-y_1$) οἱ συντεταγμένες τοῦ διανύσματος $\overline{\Delta_1\Delta_2} = \bar{\delta}$ · ἐφαρμόζοντας τόν τύπο (104.3) βρίσκουμε γιά τή ῥοπή

(106.1) $$\mathfrak{M}(\bar{\delta},M) = [M\Delta_1\Delta_2\Delta_3] = \begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ \delta_1 & \delta_2 \end{vmatrix}.$$

Ἄν τό διάνυσμα $\bar{\delta}$ "ὀλισθήσῃ" (= μεταφερθῆ πάνω στόν εὐθειακό φορέα του), ἡ ῥοπή του ὡς πρός τόν ἄξονα $\overrightarrow{MZ}$ δέν μεταβάλλεται. Προκύπτει ἔτσι τό ἑξῆς πρόβλημα:

Δίνεται ἡ ἐξίσωση $Ax+By+\Gamma = 0$ τῆς εὐθείας πού εἶναι φορέας τοῦ ὀλισθαίνοντος διανύσματος $\bar{\delta}$ μέ μέτρο $|\bar{\delta}| = \delta$. Νά ἐκφραστῆ ἡ ῥοπή $\mathfrak{M}(\bar{\delta},M)$ συναρτήσει τῶν συντεταγμένων (x_0,y_0) τοῦ M, τῶν συντελεστῶν A,B,Γ καί τοῦ μέτρου δ.

Καλοῦμε $\bar{\varepsilon}$ τό διάνυσμα (B,−A) πού εἶναι παράλληλο πρός τήν εὐθεία $Ax+By+\Gamma = 0$ καί διακρίνουμε τίς ἑξῆς δυό περιπτώσεις: $\bar{\delta} \uparrow\uparrow \bar{\varepsilon}$ καί $\bar{\delta} \uparrow\downarrow \bar{\varepsilon}$. Στήν πρώτη περίπτωση τό $\bar{\delta}$ ἰσοῦται μέ τό ὁμόρροπο μοναδιαῖο διάνυσμα $\frac{\bar{\varepsilon}}{|\bar{\varepsilon}|}$ πολλαπλασιασμένο ἐπί τό μέτρο δ, δηλαδή $\bar{\delta} = \delta\cdot\frac{\bar{\varepsilon}}{|\bar{\varepsilon}|}$ στή δεύτερη περίπτωση ἔχουμε $\overline{\delta} = -\delta \dfrac{\overline{\varepsilon}}{|\overline{\varepsilon}|}$. Οἱ συντεταγμένες τοῦ $\overline{\delta}$ εἶναι λοιπόν

$\left(\dfrac{\delta B}{+\sqrt{A^2+B^2}}\ ,\ \dfrac{-\delta A}{+\sqrt{A^2+B^2}}\right)$ στήν πρώτη περίπτωση καί

$\left(\dfrac{\delta B}{-\sqrt{A^2+B^2}}\ ,\ \dfrac{-\ \delta A}{-\sqrt{A^2+B^2}}\right)$ στή δεύτερη.

Ἄρα, ἄν καλέσουμε $\Delta_1(x_1,y_1)$ τήν ἀρχή τοῦ $\overline{\delta}$ σέ κάποια θέση του πάνω στήν εὐθεία $Ax+By+\Gamma = 0$, θά ἔχουμε ἐφαρμόζοντας τόν τύπο (106.1).

$$\mathfrak{M}(\overline{\delta},M) = \begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ \dfrac{\delta B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} & \dfrac{-\delta A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \end{vmatrix} = \delta\,\frac{Ax_0+By_0-Ax_1-By_1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} .$$

Εἶναι ὅμως τό Δ_1 σημεῖο τῆς $Ax+By+\Gamma = 0$, ἄρα $Ax_1+By_1+\Gamma=0$ ἀπ'ὅπου $\Gamma = -Ax_1-By_1$. Ἑπομένως

$$(106.2)\qquad \mathfrak{M}(\overline{\delta},M) = \begin{cases} \delta\,\dfrac{Ax_0+By_0+\Gamma}{+\sqrt{A^2+B^2}} & \text{ὅταν}\ \ \overline{\delta}\upuparrows\overline{\varepsilon}(B,-A) \\ -\delta\,\dfrac{Ax_0+By_0+\Gamma}{+\sqrt{A^2+B^2}} & \text{ὅταν}\ \ \overline{\delta}\uparrow\downarrow\overline{\varepsilon}(B,-A). \end{cases}$$

ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΗ ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ

§ 107. Ἐπειδή ἡ ἀπόλυτη τιμή τῆς ροπῆς $\mathfrak{M}(\overline{\Delta_1\Delta_2},M) = \mathfrak{M}(\overline{\delta},M)$ ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τοῦ μήκους $\delta = \Delta_1\Delta_2$ ἐπί τήν ἀπόσταση KM τοῦ M ἀπό τήν εὐθεία $\Delta_1\Delta_2$, ὁ τελευταῖος τύπος (106.2) μᾶς δίνει τόν

$$(107.1)\qquad KM = \left|\frac{Ax_0+ By_0+ \Gamma}{+\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

ὅπου $Ax+By+\Gamma = 0$ ἡ ἐξίσωση τῆς εὐθείας $\Delta_1\Delta_2$ καί (x_0,y_0) οἱ συντεταγμένες τοῦ M. Εἶναι σκόπιμο νά δώσουμε τώρα πρόσημο στίς ἀποστάσεις τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου XOY ἀπό μιάν εὐθεία του ε. Πρόσημο (+) θά πάρουν οἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων τοῦ ἑνός ἀπό τά δύο ἡμιεπίπεδα στά ὁποῖα ἡ ε χωρίζει τό XOY, πρόσημο (−) θά πάρουν οἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων τοῦ ἄλλου ἡμιεπιπέδου. Ποιοῦ ἡμιεπιπέδου τά σημεῖα θά ἔχουνε θετικές αποστάσεις ἀπό τήν ε εἶναι ζήτημα συμβάσεως· γιά συντομία τό ἡμιεπίπεδο αὐτό θά λέγεται θετικό.

§ 108. Ἡ σύμβαση πού θά χρησιμοποιήσουμε στά μαθήματα αὐτά εἶναι ἡ ἑξῆς: ἐκλέγουμε γιά θετική φορά πάνω στήν εὐθεία ε τή φορά ἑνός διανύσματος $\overline{\Delta_1\Delta_2} \neq 0$ τῆς εὐθείας καί συμφωνοῦμε νά ἔχουν θετική ἀπόσταση ἀπό τήν ε ἐκεῖνα τά σημεῖα Μ τοῦ ἐπιπέδου γιά τά ὁποῖα τό ἐμβαδό $[M\Delta_1\Delta_2]$ εἶναι θετικό, δηλαδή ἐκεῖνα τά Μ γιά τά ὁποῖα ἡ περιόδευση $M\Delta_1\Delta_2 M$ τοῦ τριγώνου $M\Delta_1\Delta_2$ εἶναι θετική. Μέ τή συνηθισμένη ἐκλογή τῆς θετικῆς φορᾶς περιστροφῆς μέσα στό ἐπίπεδο, ἕνας παρατηρητής πού στέκεται πάνω στή χρησιμοποιούμενη ὄψη τοῦ ἐπιπέδου, σ' ἕνα σημεῖο τῆς εὐθείας ε καί εἶναι γυρισμένος κατά τή θετική φορά $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ πάνω στήν ε θά ἔχη στήν ἀριστερή του μεριά τά σημεῖα Μ μέ θετική ἀπόσταση ἀπό τήν ε καί στή δεξιά του μεριά τά σημεῖα Μ μέ ἀρνητική ἀπόσταση.

Γιά νά βροῦμε τήν ἀναλυτική ἔκφραση τῆς ἔτσι προσημασμένης ἀπόστασης τοῦ σημείου $M(x_o,y_o)$ ἀπό τήν ε, παίρνουμε μιάν ἐξίσωση $Ax+By+\Gamma = 0$ τῆς εὐθείας ε τέτοιαν πού τό διάνυσμα $(B,-A)$ νά εἶναι ὁμόρροπο μέ τήν ἐκλεγμένη θετική φορά $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ πάνω στήν ε. Εἶναι τότε σύμφωνα μέ τόν τύπο (106.2), ἡ ροπή $\mathfrak{M}(\overline{\Delta_1\Delta_2},M)$ ὁμόσημη μέ τόν ἀριθμό $Ax_o+By_o+\Gamma$ ἀφ' ἑνός καί μέ τό ἐμβαδό $[M\Delta_1\Delta_2]$ ἀφ' ἑτέρου, ἄρα ἡ προσημασμένη ἀπόσταση τοῦ Μ ἀπό τήν ε εἶναι ὁμόσημη μέ τόν ἀριθμό $Ax_o+By_o+\Gamma$, ἐπομένως ἀπό τόν τύπο (107.1) προκύπτει ὅτι

(108.1) Προσημασμένη ἀπόσταση $KM = \dfrac{Ax_o+By_o+\Gamma}{+\sqrt{A^2+B^2}}$.

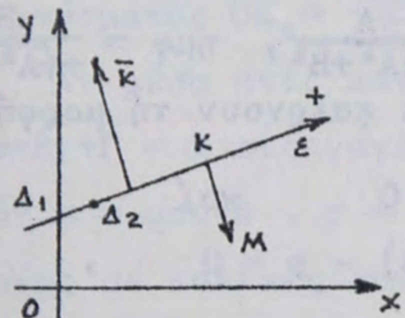
Ἐάν στρέφουμε τό διάνυσμα $\bar{\varepsilon}(B,-A)$, πού εἶναι ἐξ ὑποθέσεως ↑↑ μέ τή θετική φορά $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ τῆς ε, κατά τή γωνία $+\frac{\pi}{2}$ θά λάβουμε ἕνα διάνυσμα $\bar{k}(A,B)$ πού εἶναι κάθετο στήν εὐθεία ε καί ἐπομένως ἤ $\bar{k} \uparrow\uparrow \overline{KM}$ ἤ $\bar{k} \uparrow\downarrow \overline{KM}$. Ἔστω $\bar{k}^0$ τό μοναδιαῖο ὁμόρροπο μέ τό $\overline{k}$· οἱ συντεταγμένες του εἶναι

$$\overline{k}^{o}\left(\frac{A}{+\sqrt{A^2+B^2}}\,,\ \frac{B}{+\sqrt{A^2+B^2}}\right) .$$

Προφανῶς ἔχουμε

(108.2) προσημασμένη ἀπόσταση $KM = \dfrac{\overline{KM}}{\overline{k}^{o}}$.

Ἄς πάρουμε τώρα πάνω στίς εὐθεῖες πού εἶναι κάθετες πρός τήν ε γιά θετική φορά ἐκείνην πού προκύπτει ἀπό τή φορά $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ μέ στροφή τῆς τελευταίας κατά γωνία $+\frac{\pi}{2}$· τότε βασικό διάνυσμα πάνω στίς κάθετες αὐτές θά εἶναι τό



$$\overline{k}^{0}\left(\frac{A}{+\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{+\sqrt{A^2+B^2}}\right)$$

καί ἡ προσημασμένη ἀπόσταση KM θά ἰσοῦται μέ τήν τετμημένη $(\overline{KM})$ τῶν διανυσμάτων $\overline{KM}$ πού εἶναι παράλληλα πρός τό $\overline{k}^{0}$. Ἔτσι ἀπό τούς (108.1) καί (108.2) φθάνουμε στόν τύπο

(108.3) $$(\overline{KM}) = \frac{Ax_o+By_o+\Gamma}{+\sqrt{A^2+B^2}} .$$

<u>Παράδειγμα</u>. Ἔστω ἡ εὐθεία $\Delta_1\Delta_2$ ὅπου $\Delta_1(3,-4)$, $\Delta_2(4,5)$. Θετική φορά πάνω σ'αὐτήν ἄς πάρουμε τήν ἀπό τό Δ_1 πρός τό Δ_2. Ἡ ἐξίσωση τῆς $\Delta_1\Delta_2$:

$$\frac{x-3}{4-3}=\frac{y-(-4)}{5-(-4)} \qquad ἤ \qquad 9x-y-31 = 0$$

δέν ἔχει τήν ἰδιότητα, τό διάνυσμα $(B,-A) = (-1,-9)$ νά εἶναι ↑↑ μέ τό $\overline{\Delta_1\Delta_2}(1,9)$. Γι'αὐτό παίρνουμε ἀντί τῆς $9x-y-31=0$ τήν $-9x+y+31 = 0$. Ἔχουμε τώρα

$$(\overline{KM}) = \frac{-9x_o+y_o+31}{+\sqrt{9^2+1^2}} = \frac{-9x_o+y_o+31}{+\sqrt{82}} .$$

Εἰδικῶς γιά τήν προσημασμένη ἀπόσταση K_oO τῆς ἀρχῆς O ἀπό τήν εὐθεία ἔχουμε: $(\overline{K_oO}) = \dfrac{31}{\sqrt{82}}$.

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

§ 109. Ἔστω ε: $Ax+By+\Gamma = 0$ μιά εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου XOY (σέ ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμ.). Ἡ ἴδια εὐθεία παριστάνεται ἀπό τίς ἐξισώσεις $\lambda Ax+\lambda By+\lambda\Gamma = 0$, ὅπου λ αὐθαίρετος πολλαπλασιαστής $\neq 0$. Ἀνάμεσα σ'αὐτές τίς ἄπειρες μορφές τίς ἐξισώσεως τῆς ε λέγονται κανονικές οἱ ἑξῆς δυό:

(109.1) $\dfrac{Ax+By+\Gamma}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0 \quad , \quad \dfrac{Ax+By+\Gamma}{-\sqrt{A^2+B^2}} = 0$.

Ἐάν καλέσουμε φ τήν πολική γωνία τοῦ καθέτου στήν εὐθεία διανύσματος $\overline{k}(A,B)$, θά ἔχουμε $\sigma\upsilon\nu\varphi = \dfrac{A}{+\sqrt{A^2+B^2}}$, $\eta\mu\varphi = \dfrac{B}{+\sqrt{A^2+B^2}}$ καί οἱ κανονικές ἐξισώσεις τῆς εὐθείας ε παίρνουν τή μορφή

(109.2)
$$x\sigma\upsilon\nu\varphi + y\eta\mu\varphi + p = 0 \quad \text{καί}$$
$$x\sigma\upsilon\nu(\varphi+\pi) + y\eta\mu(\varphi+\pi) - p = 0 \quad ,$$

ὅπου $p = \dfrac{\Gamma}{+\sqrt{A^2+B^2}}$ ἡ προσημασμένη ἀπόσταση τῆς ἀρχῆς $O(0,0)$ ἀπό τήν ε: $Ax+By+\Gamma = 0$ προσανατολισμένην θετικά σύμφωνα μέ τό διάνυσμα $(B,-A)$ πού εἶναι ὁμόρροπο μέ τό $(\eta\mu\varphi,-\sigma\upsilon\nu\varphi)$, ἑπομένως μέ βασικό διάνυσμα πάνω στούς ἄξονες τούς κάθετους πρός τήν ε τό $\overline{k}^0(\sigma\upsilon\nu\varphi,\eta\mu\varphi)$.

Ὅταν ἡ ἐξίσωση μιᾶς εὐθείας ε ληφθῆ μέ τήν κανονική της μορφή $x\sigma\upsilon\nu\varphi + y\eta\mu\varphi + p = 0$, τότε ἡ προσημασμένη ἀπόσταση $(\overline{KM})$ ἑνός σημείου $M(x_0,y_0)$ ἀπό τήν ε, προσανατολισμένην θετικά σύμφωνα μέ τό διάνυσμα $(\eta\mu\varphi,-\sigma\upsilon\nu\varphi)$, ἰσοῦται μέ

$$(\overline{KM}) = x_0\sigma\upsilon\nu\varphi + y_0\eta\mu\varphi + p \quad .$$

(Εἰδικῶς $(\overline{K_0O}) = p$, $(\overline{OK_0}) = -p$).

Θετικό ἡμιεπίπεδο εἶναι ἐκεῖνο μέσα στό ὁποῖο εἰσχωρεῖ τό κάθετο διάνυσμα $\overline{k}_0(\sigma\upsilon\nu\varphi,\eta\mu\varphi)$ ὅταν ἔχη ἀρχή ἕνα σημεῖο τῆς εὐθείας.

Οἱ δυό κανονικές ἐξισώσεις τῆς εὐθείας ε: $Ax+By+\Gamma = 0$ γράφονται διανυσματικά ὡς ἑξῆς, ἄν εἰσαγάγουμε τή "διανυσματική ἀκτίνα" $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j}$

(109.3) $$\overline{k}^{\circ}\overline{r} = -\overline{p} \quad \text{καί} \quad -\overline{k}^{\circ}\overline{r} = p \ .$$

Ἀντιστρόφως, καί κάπως γενικότερα μάλιστα, ἡ διανυσματική ἐξίσωση

(109.4) $$\overline{k}\cdot\overline{r} = c \ ,$$

ὅπου $\overline{k}$ ἕνα δοσμένο διάνυσμα $\neq 0$ καί c ἕνας δοσμένος πραγματικός ἀριθμός παριστάνει τήν εὐθεία πού εἶναι κάθετη στή διεύθυνση τοῦ διανύσματος $\overline{k}$ καί πού περνᾶ ἀπό τό πέρας K_0 τοῦ διανύσματος $\overline{OK_0} = \dfrac{c\overline{k}}{|\overline{k}|^2}$.

Ἄν μέσα στίς κανονικές ἐξισώσεις (109.2) τῆς εὐθείας ε: $Ax+By+\Gamma = 0$ εἰσαγάγουμε τίς πολικές συντεταγμένες (ϱ,ϑ) διά τῶν $x = \varrho\sigma\upsilon\nu\vartheta$, $y = \varrho\eta\mu\vartheta$, θά λάβουμε τίς ἐξισώσεις τῆς εὐθείας σέ πολικές συντεταγμένες:

(109.5) $$\varrho\sigma\upsilon\nu(\vartheta-\varphi) + p = 0 \quad \text{καί} \quad \varrho\sigma\upsilon\nu(\vartheta-\varphi-\pi) - p = 0 \ .$$

ΔΙΧΟΤΟΜΟΙ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ

§ 110. Ἄς εἶναι $A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$, $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$ δυό εὐθεῖες πού κόβονται

$$\left(\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \right) \ .$$

Οἱ τέσσερεις γωνίες πού σχηματίζουν διχοτομοῦνται ἀπό τίς δυό εὐθεῖες μέ τίς ἑξῆς ἐξισώσεις:

(110.1) $$\frac{A_1x + B_1y + \Gamma_1}{+\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{A_2x + B_2y + \Gamma_2}{+\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad \text{καί}$$
$$\frac{A_1x + B_1y + \Gamma_1}{+\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{A_2x + B_2y + \Gamma_2}{-\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \ .$$

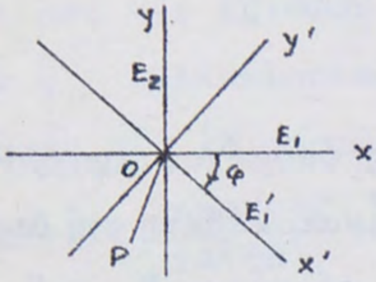
ΑΛΛΑΓΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

§ 111. Ἡ ἀλλαγή ἄς συνίσταται στή στροφή τοῦ συστήματος τῶν ἀξόνων γύρω στήν ἀρχή κατά τήν προσημασμένη γωνία φ.

Τά νέα βασικά διανύσματα $\bar{i}'$ καί $\bar{j}'$ θά έχουν τότε σύμφωνα μέ τούς τύπους (95.1) παλιές συντεταγμένες

$$\bar{i}'(\text{συν}\varphi,\text{ημ}\varphi) \quad , \quad \bar{j}(-\text{ημ}\varphi,\text{συν}\varphi) \quad ,$$

άρα $\quad \bar{i}' = \bar{i}\text{συν}\varphi+\bar{j}\text{ημ}\varphi \quad , \quad \bar{j}' = -\bar{i}\text{ημ}\varphi+\bar{j}\text{συν}\varphi \quad .$



Ώστε άν καλέσουμε (x,y) τίς παλιές, (x',y') τίς νέες (ορθογ.) συντεταγμένες ενός καί τοῦ ἴδιου σημείου P τοῦ επιπέδου, θά έχουμε

$$\overline{OP} = x'\bar{i}' + y'\bar{j}' = x'(\bar{i}\text{συν}\varphi+\bar{j}\text{ημ}\varphi) + y'(-\bar{i}\text{ημ}\varphi+\bar{j}\text{συν}\varphi)$$

$$= (x'\text{συν}\varphi-y'\text{ημ}\varphi)\bar{i} + (x'\text{ημ}\varphi+y'\text{συν}\varphi)\bar{j} = x\bar{i}+y\bar{j} \quad .$$

Άρα

$$(111.1) \quad \begin{matrix} x = x'\text{συν}\varphi-y'\text{ημ}\varphi \\ y = x'\text{ημ}\varphi+y'\text{συν}\varphi \end{matrix} \quad \text{καί αντιστρόφως} \quad \begin{matrix} x' = x\text{συν}\varphi+y\text{ημ}\varphi \\ y' = -x\text{ημ}\varphi+y\text{συν}\varphi . \end{matrix}$$

§ 112. Ἡ ἀλλαγή ἄς συνίσταται στή μετατόπιση τῆς ἀρχῆς ἀπό τή θέση O στή θέση O'($x = x_0$, $y = y_0$) καί στή στροφή τῶν βασικῶν (ορθογώνιων) διανυσμάτων κατά τήν προσημασμένη γωνία φ. Τότε οἱ σχέσεις πού συνδέουν τίς παλιές συντεταγμένες (x,y) ενός σημείου P τοῦ επιπέδου μέ τίς νέες του συντεταγμένες (x',y') εἶναι:

$$(112.1) \quad \begin{matrix} x = x_0+x'\text{συν}\varphi - y'\text{ημ}\varphi \\ y = y_0+x'\text{ημ}\varphi + y'\text{συν}\varphi \end{matrix}$$

$$\text{καί αντιστρόφως} \quad \begin{matrix} x' = (x-x_0)\text{συν}\varphi + (y-y_0)\text{ημ}\varphi \\ y' = -(x-x_0)\text{ημ}\varphi + (y-y_0)\text{συν}\varphi \end{matrix} \quad .$$

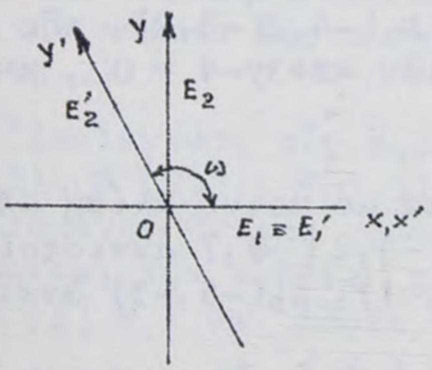
Π.χ. άν $\varphi = +\frac{\pi}{4}$ καί O'($x_0 = 2$, $y_0 = -1$), θά έχουμε:

$$\begin{matrix} x = 2 + \dfrac{x'-y'}{+\sqrt{2}} \\ y = -1 + \dfrac{x'+y'}{+\sqrt{2}} \end{matrix} \quad \text{καί αντιστρόφως} \quad \begin{matrix} x' = \dfrac{x-2+y+1}{+\sqrt{2}} \\ y' = \dfrac{-(x-2)+y+1}{+\sqrt{2}} \end{matrix}$$

ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΑΠΟ ΠΛΑΓΙΟΓΩΝΙΟ ΣΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

§ 113. Ἔστω X΄OY΄ ἕνα πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων μέ βασικά διανύσματα ἰσόμηκα: $|\overline{OE}_1'| = |\overline{OE}_2'|$. Ἄς εἶναι XOY τό ὀρθογώνιο σύστημα πού ἔχει τόν ἴδιο ἄξονα τετμημένων μέ τό X΄OY΄, καί ἰσόμηκα βασικά διανύσματα $|\overline{OE}_1| = |\overline{OE}_2| = |\overline{OE}_1'|$. Οἱ θετικοί ἡμιάξονες OY΄ καί OY ἄς βρίσκωνται ἀπό τήν ἴδια μεριά τῆς εὐθείας OX = OX΄. Τά βασικά διανύσματα $\overline{OE}_1'$ καί $\overline{OE}_2'$ ἔχουν συντεταγμένες ὡς πρός τό XOY: $\overline{OE}_1'(1,0)$ $\overline{OE}_2'(\text{συνω},\text{ημω})$ ὅπου ω ἡ στοιχειώδης γωνία $X\widehat{O}Y'$.

Ἄρα $\overline{OE}_1' = \bar{i}$, $\overline{OE}_2' = \bar{i}\,\text{συνω} + \bar{j}\,\text{ημω}$. Ἑπομένως, ἄν κληθοῦν (x',y') καί (x,y) οἱ συντεταγμένες τοῦ τυχόντος σημείου P ὡς πρός τό X΄OY΄ καί τό XOY ἀντιστοίχως, θά ἔχουμε



$$\overline{OP} = x'\overline{OE}_1' + y'\overline{OE}_2' =$$
$$= x'\bar{i} + y'(\bar{i}\,\text{συνω}+\bar{j}\,\text{ημω})$$
$$= (x'+y'\text{συνω})\bar{i} + y'\text{ημω}\,\bar{j} = x\bar{i}+y\bar{j}$$

Ἄρα

$$x = x' + y'\text{συνω}$$
$$y = y'\text{ημω}$$

καί ἀντίστρόφως

$$x' = x - y\,\text{σφω}$$
$$y' = \frac{y}{\text{ημω}} \quad .$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

121α. Βρῆτε τίς συντεταγμένες τῶν διανυσμάτων πού προκύπτουν ἀπό τά $\bar{\alpha}(-5,2/3,3)$, $\bar{\beta}(4,5/-1,2)$, $\bar{\gamma}(-1,4/2,5)$ διά στροφῆς αὐτῶν κατά τίς γωνίες $\varphi = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{4}, \frac{8\pi}{3}, -\frac{11\pi}{4}$.

122. Ἄν στρέφουμε τό σημεῖο $P(x,y)$ γύρω στό σημεῖο $K(x_0,y_0)$ κατά τήν (προσημασμένη) γωνία φ δεῖξτε ὅτι θά λάβουμε τό σημεῖο P_1 μέ συντεταγμένες

$$x_1 = x_0 + (x-x_0)\text{συνφ} - (y-y_0)\text{ημφ} \qquad y_1 = y_0 + (x-x_0)\text{ημφ} + (y-y_0)\text{συνφ}$$

Κάμετε εφαρμογή μέ P(-5,3), K(1,2) καί $\varphi = \frac{\pi}{3}$ καθώς καί μέ P(4,6) , K(2,-3) καί $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Σχεδιάστε τά σχήματα πού αντιστοιχοῦν στά ειδικά αυτά δεδομένα παίρνοντας τό μῆκος τῶν βασικῶν διανυσμάτων $\bar{i}$ καί $\bar{j}$ ἴσο μέ 1 cm.

123. Δῶστε τή γενική ἔκφραση τῶν ἐλεύθερων διανυσμάτων πού εἶναι κάθετα στήν ευθεία $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$, ἐπίσης ἐκείνων πού εἶναι κάθετα στήν $\begin{cases} x = 3-4t \\ y = 2+3t \end{cases}$.

Δῶστε τήν ἐξίσωση τῆς ευθείας διά τοῦ σημείου M(-1,5) ἡ οποία εἶναι κάθετη στήν $y = -2x-5$, ἐπίσης ἐκείνης πού εἶναι κάθετη στήν $x = 3y+4$. Δῶστε τήν ἐξίσωση ἐκείνης τῆς ευθείας πού εἶναι κάθετη στήν $x/-3 + y/5 = 1$ καί πού ανήκει στή δέσμη τήν οποίαν ορίζουν οἱ δυό ευθεῖες

$$\begin{cases} 2x-3y+4 = 0 \\ y = 4x-5 \end{cases}.$$

124. Ὑπολογίστε τίς κλίσεις τῶν ἑξῆς διανυσμάτων καί ευθειῶν $\bar{\alpha}(-5,4)$, $\bar{\beta}(4,5/-1,5)$, $\bar{\gamma}(-6,3/3,6)$, τοῦ M_1M_2 ὅπου $M_1(-3,2)$, $M_2(7,4)$, τῆς A_1A_2 ὅπου $A_1(-2,5/1,4)$, $A_2(-4,2/-3,2)$, τῆς B_1B_2 ὅπου $B_1(-10,-3)$, $B_2(4,-5)$, τῶν ευθειῶν $4x+3y-4 = 0$, $x=3y-2$, $y = -2x+4$, $-2x = 5y+1$ $\begin{cases} x = -1+3t \\ y = 2-4t \end{cases}$.

Σχεδιάστε δυό αντίρροπα διανύσματα μέ κοινή κλίση -4. Σχεδιάστε τρεῖς ευθεῖες μέ κλίσεις 2,1 | -3,2 | -0,7 αντιστοίχως, διά τῶν τριῶν σημείων $A_1(-4,7)$, $A_2(3,-1)$, $A_3(-5,-3)$ αντιστοίχως. Ποιές εἶναι οἱ ἐξισώσεις των;

125. Ποιά εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τῆς (απροσήμαστης) ὀξείας γωνίας τῶν ευθειῶν OX καί ε: $2x-3y+5 = 0$, ποιά τῆς ὀξείας γωνίας τῶν ευθειῶν OY καί ε΄: $4x+5y-6 = 0$. Μέ τή βοήθεια τῶν πινάκων Dupuis σελ. 149-151 ἤ παρομοίων πινάκων, ὑπολογίστε τίς παραπάνω γωνίες σέ μοῖρες καί πρῶτα λεπτά. Ποιά εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τῆς προσημασμένης γωνίας πού ἔχει πρώτη πλευρά τήν ἡμιευθεία $\overrightarrow{OX}$ καί δεύτερη πλευρά μιάν ἡμιευθεία || πρός τήν $y = -2x-4$; Κατόπιν αυτοῦ ποιά εἶναι κατά προσέγγιση ἡ τιμή αυτῆς τῆς γωνίας σέ μοῖρες καί λεπτά; Ὅμοιο ἐρώτημα ὅταν ἡ δεύτερη πλευρά εἶναι ἡμιευθεία || πρός τήν $4x-y+2 = 0$ ἤ τήν $x = 3y$.

126. Δῶστε μέ τή μορφή $y = \lambda x+\beta$ τίς ἐξισώσεις τῶν δυό ευθειῶν πού διέρχονται από τά σημεῖα (-5,4) καί (-1,2) αντιστοίχως καί εἶναι κάθετες στίς ευθεῖες $2x-3y = 4$ καί $x+3y-1 = 0$ αντιστοίχως. Ποιά εἶναι ἡ κλίση τῶν ευθειῶν πού εἶναι κάθετες στή $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$; Ποιά ἡ γενική τους ἐξίσωση;

127. 'Υπολογίστε σέ μοῖρες, πρῶτα καί δεύτερα λεπτά κατά προσέγγιση τήν όξεία γωνία τῶν εὐθειῶν $4x-3y-5 = 0$ καί $-2x-4y-7 = 0$ καθώς καί τῶν $x = 2y+1$ καί $y = 3x-4$. 'Υπολογίστε ὅμοια τίς προσημασμένες γωνίες πού ἔχουν πρώτη πλευρά μιάν ὁποιαδήποτε ἡμιευθεία πάνω στήν $4x+3y-5 = 0$ καί δεύτερη πλευρά μιάν ὁποιαδήποτε ἡμιευθεία πάνω στήν $-2x-y+3 = 0$.

128. 'Υπολογίστε τά προσημασμένα ἐμβαδά $[A_1A_2A_3]$, $[A_1A_2A_3A_4A_5]$ ὅπου $A_1(5,-3)$, $A_2(3,4)$, $A_3(-2,-6)$, $A_4(8,-2)$, $A_5(6,0)$. 'Υπολογίστε τό ἐμβαδό $[AB\Gamma\Delta]$ τοῦ παραλληλογράμμου πού ἔχει πλευρές ἀπό τήν κορυφή A τά διανύσματα $\overline{AB}(-3,4)$ καί $\overline{A\Delta}(4,3)$ καί πού περιοδεύεται κατά τή φορά τοῦ πρώτου διανύσματος (δηλ. ἀπό τό A πρός τό B). Σχεδιάστε τά παραπάνω πολύγωνα καί ἐλεγξτε μέ τό σχέδιο τά πρόσημα πού πρόκυψαν μέ τόν ὑπολογισμό.

129. 'Υπολογίστε τίς ροπές τῶν διανυσμάτων $\overline{A_1A_2}$ καί $\overline{B_1B_2}$ ὡς πρός τόν κάθετο πρός τό XOY ἄξονα διά τοῦ $M(2,3)$, ὅταν $A_1(-3,4)$, $A_2(2,-5)$, $B_1(-5,-7)$, $B_2(3,-2)$. 'Υπολογίστε τή ροπή μιᾶς δυνάμεως $\overline{\delta}$ πού ἔχει φορέα τήν εὐθεία $-2x-3y+2 = 0$ ὡς πρός τόν κάθετο ἄξονα διά τοῦ $M(-3,-5)$ ὅταν $|\overline{\delta}| = 4$ καί $\overline{\delta}\uparrow\downarrow(-3,2)$.

130. 'Υπολογίστε τίς προσημασμένες ἀποστάσεις τῶν σημείων $\Lambda(-4,2)$, $M(2,3)$, $N(5,3)$ ἀπό τήν εὐθεία $-2x-3y+2 = 0$ προσανατολισμένην θετικά σύμφωνα μέ τό διάνυσμα $(3,-2)$. Σχεδιάστε τά σημεῖα, τήν εὐθεία καί τίς κάθετες ἀποστάσεις παίρνοντας $|\overline{i}| = |\overline{j}| = 1$ cm. Δῶστε τίς κανονικές ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν $4x-3y-1 = 0$ καί $\begin{cases} x = -5+2t \\ y = 1-3t \end{cases}$, ἐπίσης τίς ἐξισώσεις τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τους. Ποιά εἶναι ἡ κανονική ἐξίσωση τῆς εὐθείας P_1P_2 ὅπου $P_1(-5,4)$, $P_2(6,-1)$; Ποιές εἶναι οἱ προσημασμένες ἀποστάσεις τῶν $M(-8,-3)$ καί $N(3,6)$ ἀπό τήν P_1P_2, ὅταν ὡς θετική φορά πάνω σ' αὐτήν ἐκλεχθῆ ἡ $\overrightarrow{P_1P_2}$;

131. Κατασκευάστε τίς εὐθεῖες πού ἔχουν διανυσματικές ἐξισώσεις $(2\overline{i}+5\overline{j})\cdot\overline{r} = 3$, $(-4\overline{i}-3\overline{j})\overline{r} = 4$, $(3\overline{i}-2\overline{j})\overline{r} = -1$ παίρνοντας $|\overline{i}| = |\overline{j}| = 1$ cm. Ποιές εἶναι οἱ ἐξισώσεις των σέ ὀρθογώνιες συντεταγμένες. Κατασκευάστε τίς εὐθεῖες πού ἔχουν σέ πολικές συντεταγμ. τίς ἐξισώσεις $\rho\sigma\upsilon\nu(\vartheta + \frac{\pi}{3}) = -4$, $\rho\sigma\upsilon\nu(\vartheta - \frac{3\pi}{4}) = 2$, $\rho\sigma\upsilon\nu(\vartheta - \frac{2\pi}{3}) = 0$.

Ποιές εἶναι οἱ κανονικές τους ἐξισώσεις στό συζευγμένο σύστημα ὀρθογ. συντεταγμένων;

132. 'Αλλάξτε τό σύστημα ὀρθογ. συντεταγμ. XOY στρέφοντάς

τό πρῶτα γύρω στό 0 κατά τή γωνία $-60^0 = -\frac{\pi}{3}$ καί μεταφέροντας κατόπιν τό σύστημα πού προέκυψε κατά τό διάνυσμα $-2\bar{i}+4\bar{j}$. Ποιοί εἶναι οἱ ἀντίστοιχοι τύποι ἀλλαγῆς συντεταγμένων; Ποιά εἶναι ἡ ἐξίσωση στό νέο σύστημα συντεταγμένων τῆς εὐθείας ε πού στό παλιό σύστημα παριστάνεται ἀπό τή $2x+3y-4 = 0$; Ποιά εἶναι ἡ "παλιά" ἐξίσωση τῆς εὐθείας ζ πού ἔχει "νέα" ἐξίσωση $-3x'+4y'-5 = 0$;

133. Δίνονται οἱ εὐθεῖες $3x'-4y'-5 = 0$, $-2x'+5y'+6 = 0$ σ' ἕνα σύστημα $X'OY'$ πλαγιογώνιο μέ $\omega = X'\hat{O}Y' = 75^0 = 45^0 + 30^0$. Ζητοῦνται οἱ ἐξισώσεις τῶν παραπάνω εὐθειῶν στό ὀρθογώνιο σύστημα XOY, πού ἔχει τόν ἴδιο ἄξονα τετμημένων $OX \equiv OX'$ καί ἡμιάξονα $\overrightarrow{OY}$ ἀπό τήν ἴδια μεριά τοῦ OX' μέ τόν $\overrightarrow{OY'}$.

134.* Δίνεται (σέ ὀρθογ,σύστημα) ἡ εὐθεία $\varepsilon_1 : y = -2x+3$. Ζητεῖται ἡ ἐξίσωση τῆς εὐθείας ε_2 πού διέρχεται ἀπό τό σημεῖο P μέ συντεταγμένες (4,5) καί πού σχηματίζει γωνία $(\overrightarrow{\varepsilon_1},\overrightarrow{\varepsilon_2}) = \frac{2\pi}{3}$, ὅπου $\overrightarrow{\varepsilon_1}$ καί $\overrightarrow{\varepsilon_2}$ δυό ἡμιευθεῖες παράλληλες πρός τίς ε_1 καί ε_2 ἀντιστοίχως. Γενικεῦστε, παίρνοντας γιά ε_1 τήν $y = \lambda x+\beta$, γιά P τό (x_0,y_0) καί τήν $(\overrightarrow{\varepsilon_1},\overrightarrow{\varepsilon_2}) = \alpha$.

135.* Δίνεται ἡ ἐξίσωση $4x = 3y+2$ τῆς εὐθείας ε. Ζητεῖται ἡ ἐξίσωση τῆς εὐθείας ζ πού εἶναι $\parallel$ ε , σέ ἀπόσταση 5 μονάδων μήκους $|\bar{i}| = |\bar{j}|$ καί ἀπό τή μεριά τῆς ε ὅπου βρίσκεται καί τό σημεῖο (-1,2). Ποιά εἶναι ἡ ἐξίσωση τῆς εὐθείας πού εἶναι $\parallel$ πρός τήν εὐθεία η: $Ax+By+\Gamma = 0$ καί πού ἔχει ἀπό αὐτήν προσημασμένη ἀπόσταση d; (Θετική φορά πάνω στήν η ἄς ληφθῆ ἡ φορά τοῦ διανύσματος (B,-A)).

136.* Ἀπό τίς δυό ἐξισώσεις (110.1) ποιά παριστάνει τή διχοτόμο τῶν ὀξειῶν γωνιῶν τῶν δυό εὐθειῶν καί ποιά τή διχοτόμο τῶν ἀμβλειῶν γωνιῶν (ἐξυπακούεται ὅτι οἱ δυό εὐθεῖες δέν εἶναι κάθετες). Κάμετε ἐφαρμογή τοῦ ἀποτελέσματος πού βρήκατε στίς εὐθεῖες $3x-4y+1 = 0$, $6x+2y-3 = 0$. Νά βρεθῆ ἡ διχοτόμος ἐκείνης τῆς γωνίας τῶν δυό εὐθειῶν $3x-2y-1 = 0$ καί $6x+9y+2 = 0$, ἡ ὁποία περιέχει στό ἐσωτερικό της τό σημεῖο (5,3).

137.* Δεῖξτε ὅτι τό ἀπροσήμαστο ἐμβαδό E τοῦ παραλληλογράμμου πού ἔχει πλευρές τά διανύσματα $\bar{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2)$, $\bar{\beta}(\beta_1,\beta_2)$ ἀγμένα ἀπό μιά κοινή ἀρχή, δίνεται ἀπό τόν τύπο

$$E^2 = \begin{vmatrix} \bar{\alpha}\bar{\alpha} & \bar{\alpha}\bar{\beta} \\ \bar{\beta}\bar{\alpha} & \bar{\beta}\bar{\beta} \end{vmatrix} \quad .$$

(Θά χρησιμοποιῆστε τήν ἔκφραση τῶν ἐσωτερ.γινομένων μέ ὀρθογ.

συντεταγμένες καί ἰδιότητες τῶν ὁριζουσῶν). Ἄρα ποιά εἶναι ἡ ἔκφραση τοῦ ἐμβαδοῦ Ε διά τῶν (ἀνταλλοιώτων) συντεταγμένων τῶν $\bar{\alpha},\bar{\beta}$ σ'ἕνα ἐνδεχομένως πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων μέ βασικά διανύσματα $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ ὁποιαδήποτε;

Ποιά εἶναι ἡ ἔκφραση τοῦ ἴδιου ἐμβαδοῦ διά τῶν ἀνταλλοιώτων καί συναλλοιώτων συντεταγμένων τῶν $\bar{\alpha}$ καί $\bar{\beta}$ ὡς πρός βάση τό ζεῦγος $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$;

Κάμετε ἐφαρμογή τῶν δυό τελευταίων ἐκφράσεων τοῦ ἐμβαδοῦ, μέ $|\bar{e}_1| = 2$, $|\bar{e}_2| = 3$, $(\widehat{\bar{e}_1,\bar{e}_2}) = \pi/3$ ἤ $(\widehat{\bar{e}_1,\bar{e}_2}) = 3\pi/4$ καί $\bar{\alpha} = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2$, $\bar{\beta} = -3\bar{e}_1 + 4\bar{e}_2$. Σχεδιάστε τό παράδειγμα παίρνοντας μονάδα μήκους 1 cm.

138.* Διερευνῆστε τήν ἐπιλυσιμότητα τοῦ συστήματος

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + \Gamma_1 > 0 \\ A_2x + B_2y + \Gamma_2 > 0 \end{cases}$$

δυό πρωτοβαθμίων ἀνισοτήτων, μέ δυό ἀγνώστους x,y ὁδηγούμενοι ἀπό γεωμετρική ἑρμηνεία· συνοψίσατε τό ἀποτέλεσμα σ' ἕναν πίνακα ὅπως ὁ τοῦ § 76 σελ.

Θεωρῆστε τά ἑξῆς εἰδικά παραδείγματα:

1) $2x-3y+5 > 0$ καί $x+2y-4 > 0$

2) $5x+3y-4 > 0$ καί $10x+7y+10 > 0$

3) $-2x+3y+1 > 0$ καί $x - \frac{3}{2}y - 4 > 0$

4) $4x-2y-1 > 0$ καί $-x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4} > 0$.

139.* Ἀποδεῖξτε τό ἑξῆς: Ἄς εἶναι $\bar{\delta}_1(\delta_{11},\delta_{12})$, $\bar{\delta}_2(\delta_{21},\delta_{22})$, ..., $\bar{\delta}_\nu(\delta_{\nu1},\delta_{\nu2})$ ν ἐφαρμοσμένα (ἤ καί ὀλισθαίνοντα) διανύσματα μέσα στό ἐπίπεδο ΧΟΥ τῶν ὁποίων οἱ φορεῖς συντρέχουν σ'ἕνα σημεῖο $K(\xi,\eta)$. Καλοῦμε συνισταμένη τους τό διάνυσμα $\bar{\delta}$ πού ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα $\bar{\delta}_1 + \bar{\delta}_2 + \ldots + \bar{\delta}_\nu$. Ἔστω $\overline{AZ}$ ὁ κάθετος πρός ΧΟΥ ἄξονας διά τοῦ σημείου $A(x_0,y_0)$ τοῦ ΧΟΥ.

Ἄν θέσουμε $\overline{K\Delta} = \bar{\delta}$, ἰσχύει ἡ ἑξῆς σχέση γιά τίς ῥοπές, (θεώρημα τοῦ **Varignon**):

$$\mathfrak{M}(\overline{K\Delta},A) = \mathfrak{M}(\bar{\delta}_1,A) + \mathfrak{M}(\bar{\delta}_2,A) + \ldots + \mathfrak{M}(\bar{\delta}_\nu,A).$$

140.* Δεῖξτε ὅτι ἡ παραπάνω σχέση ἰσχύει καί στήν περίπτωση ὅπου τά $\bar{\delta}_1,\bar{\delta}_2,\ldots,\bar{\delta}_\nu$ εἶναι παράλληλα ἐφαρμοσμένα διανύσματα μέ ἄθροισμα $\bar{\delta} \neq 0$, ἀρκεῖ ὡς σημεῖο Κ νά ληφθῆ τό κέντρο τους, πού κατά τόν § 62, ἔχει συντεταγμένες

$$\xi = \frac{\delta_1x_1 + \delta_2x_2 + \ldots + \delta_\nu x_\nu}{\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_\nu}, \quad \eta = \frac{\delta_1y_1 + \delta_2y_2 + \ldots + \delta_\nu y_\nu}{\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_\nu}$$

ὅπου $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_\nu$ τά προσημασμένα μέτρα τῶν $\bar{\delta}_1,\bar{\delta}_2,\ldots,\bar{\delta}_\nu$ καί (x_1,y_1), (x_2,y_2), ..., (x_ν,y_ν) οἱ συντεταγμένες τῶν ἀρχῶν τους.

141.* Ἔστω $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ ἕνα ἐφαρμοσμένο διάνυσμα τοῦ ΧΟΥ καί $\overleftrightarrow{AZ}$, $\overleftrightarrow{A'Z'}$ δυό κάθετοι πρός ΧΟΥ ἄξονες διά τῶν σημείων Α καί Α΄ τοῦ ΧΟΥ.

Δεῖξτε ὅτι ἡ διαφορά ροπῶν $\mathfrak{m}(\overline{\Delta_1\Delta_2}, A') - \mathfrak{m}(\overline{\Delta_1\Delta_2}, A)$ ἰσοῦται μέ τό προσημασμένο ἐμβαδό ἑνός παραλληλογράμμου ΑΒΓΑ΄ ὅπου $\overline{AB} = \overline{\Delta_1\Delta_2}$, $\overline{B\Gamma} = \overline{AA'}$, περιοδευμένου κατά τή φορά ἀπό τό Α πρός τό Β.

Σχεδιάστε τό ἀντίστοιχο σχῆμα.

142.* Ἀπό τήν προηγούμενη πρόταση πορισθῆτε τήν ἑξῆς:

Ἐάν $\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, .., \bar{\delta}_\nu$ εἶναι ν ἐφαρμοσμένα διανύσματα τοῦ ΧΟΥ μέ ἄθροισμα $\bar{\delta} = \bar{\delta}_1 + \bar{\delta}_2 + ... + \bar{\delta}_\nu = 0$ τότε τό ἄθροισμα ροπῶν

$$\mathfrak{m}(\bar{\delta}_1, A) + \mathfrak{m}(\bar{\delta}_2, A) + ... + \mathfrak{m}(\bar{\delta}_\nu, A)$$

δέν μεταβάλλεται ὅταν τό Α μετακινηθῆ μέσα στό ἐπίπεδο.

Ἐφαρμόστε τό παραπάνω πόρισμα στήν περίπτωση ἑνός ζεύγους ἀντίθετων διανυσμάτων $\bar{\delta}_1$ καί $\bar{\delta}_2$ δείχνοντας ἐπί πλέον ὅτι τότε τό παραπάνω ἄθροισμα ἰσοῦται μέ τό προσημασμένο ἐμβαδό $[A_1B_1A_2B_2]$, ὅπου $\overline{A_1B_1} = \bar{\delta}_1$, $\overline{A_2B_2} = \bar{\delta}_2$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Χ

ΓΡΑΜΜΕΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ. ΚΥΚΛΟΣ

§ 114. Λέγουμε κύκλο ἐκεῖνο πού ἡ στοιχειώδης γεωμετρία καλεῖ συνήθως περιφέρεια κύκλου.

Σέ ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων μέ $|\bar{i}| = |\bar{j}| = 1$ ὁ κύκλος πού ἔχει κέντρο $K(x_0, y_0)$ καί ἀκτῖνα ϱ ἔχει ἐξίσωση

$$(114.1) \qquad (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \varrho^2 \quad ,$$

διότι ἡ σχέση αὐτή δέν ἐκφράζει τίποτε ἄλλο παρά ὅτι τό τετράγωνο τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου $P(x,y)$ ἀπό τό $K(x_0, y_0)$ ἰσοῦται μέ τό τετράγωνο τῆς ἀκτίνας ϱ.

Ἡ ἐξίσωση αὐτή μετασχηματίζεται εὔκολα στήν

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - \varrho^2 = 0$$

πού εἶναι τῆς μορφῆς:

(114.2) $\quad A(x^2+y^2) + 2\Delta x + 2Ey + Z = 0 \qquad$ μέ $A \neq 0$.

Ἀντιστρόφως, κάθε ἐξίσωση τῆς τελευταίας μορφῆς μετασχηματίζεται στήν

(114.3) $\quad \left(x - \left(-\frac{\Delta}{A}\right)\right)^2 + \left(y - \left(-\frac{E}{A}\right)\right)^2 = \frac{\Delta^2 + E^2 - AZ}{A^2}$.

Ἄν $\frac{\Delta^2 + E^2 - AZ}{A^2} > 0$ ἤ, πρᾶγμα πού καταλήγει στό ἴδιο, ἄν $\Delta^2 + E^2 - AZ > 0$, ἡ τελευταία ἐξίσωση ἔχει ἄπειρες λύσεις (x,y) ἀπό πραγματικούς ἀριθμούς x καί y καί ἡ σύγκρισή της μέ τήν (114.1) μᾶς ὁδηγεῖ στό συμπέρασμα ὅτι ἡ (114.2) παριστάνει κύκλο μέ κέντρο τό σημεῖο $\left(-\frac{\Delta}{A}, -\frac{E}{A}\right)$ καί ἀκτίνα $\varrho = \frac{+\sqrt{\Delta^2+E^2-AZ}}{|A|}$. Ἄν $\Delta^2+E^2-AZ = 0$, ἡ ἐξίσωση (114.3), ἄρα καί ἡ ἰσοδύναμή της (114.2), ἔχει μόνο μιά λύση ἀπό πραγματικούς ἀριθμούς, τήν $\left(x = -\frac{\Delta}{A}, \ y = -\frac{E}{A}\right)$, ἄρα ἡ ἐξίσωση παριστάνει ἕνα "κύκλο μέ κέντρο τό σημεῖον $\left(-\frac{\Delta}{A}, -\frac{E}{A}\right)$ καί ἀκτίνα μηδενική". Ἄν $\Delta^2+E^2-AZ < 0$ ἡ ἐξίσωση (114.3), ἄρα καί ἡ (114.2), δέν ἔχει λύση (x,y) πού νά ἀποτελεῖται ἀπό δυό πραγματικούς ἀριθμούς, γι'αὐτό λέμε ὅτι δέν παριστάνει γεωμετρικό τόπο.

§ 115. Τά κοινά σημεῖα κύκλου $x^2+y^2+2\Delta x+2Ey+Z = 0$ καί εὐθείας $Ax+By+\Gamma = 0$ βρίσκονται ἀναλυτικῶς δι'ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος

$$\begin{cases} x^2+ y^2+ 2\Delta x + 2Ey + Z = 0 \\ Ax + By + \Gamma \ = 0 \end{cases}$$

μιᾶς δευτεροβάθμιας καί μιᾶς πρωτοβάθμιας ἐξισώσεως ὡς πρός τούς ἀγνώστους x, y.

Τά κοινά σημεῖα δυό κύκλων $x^2+y^2+2\Delta_1 x+2E_1 y+Z_1 = 0$ καί $x^2+y^2+2\Delta_2 x+2E_2 y+Z_2 = 0$ βρίσκονται ἀναλυτικῶς δι'ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος:

$$\begin{cases} x^2+ y^2+ 2\Delta_1 x + 2E_1 y + Z_1 = 0 \\ x^2+ y^2+ 2\Delta_2 x + 2E_2 y + Z_2 = 0 \end{cases}$$

ἤ τοῦ ἰσοδύναμου

$$(115.1)\quad \begin{cases} x^2+y^2+2\Delta_1 x+2E_1 y+Z_1=0 \\ 2(\Delta_2-\Delta_1)x+2(E_2-E_1)y+Z_2-Z_1=0\ . \end{cases}$$

Ἄν $|\Delta_2-\Delta_1|+|E_2-E_1|\neq 0$ ἡ 2η ἐξίσωση τοῦ (115.1) παριστάνει εὐθεία· τά κοινά σημεῖα, ἄν ὑπάρχουν, αὐτῆς καί τοῦ κύκλου ὁ ὁποῖος παριστάνεται ἀπό τήν 1η ἐξίσωση τοῦ (115.1) εἶναι τά ζητούμενα κοινά σημεῖα τῶν δυό κύκλων. Ἡ εὐθεία λέγεται ρ ι ζ ι κ ό ς ἄ ξ ο ν α ς τῶν δυό κύκλων.

Ἄν $|\Delta_2-\Delta_1|+|E_2-E_1|=0$ καί $Z_2-Z_1\neq 0$, τό (115.1) δέν ἔχει λύση (x,y). Οἱ δυό κύκλοι εἶναι ὁμόκεντροι μέ ἄνισες ἀκτῖνες. (Ριζικός ἄξονάς των ὁρίζεται ἡ ἐπ'ἄπειρο εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου).

Ἄν $|\Delta_2-\Delta_1|+|E_2-E_1|+|Z_2-Z_1|=0$ ἡ 2η ἐξίσωση τοῦ (115.1) εἶναι μιά ταυτότητα ὡς πρός x,y. Οἱ δυό κύκλοι συμπίπτουν, ὁ ριζικός ἄξονας δέν εἶναι καθορισμένος.

§ 116. Ὁ κύκλος $x^2+y^2=\alpha^2$ μέ κέντρο τό $O(0,0)$ καί ἀκτίνα α μπορεῖ νά παρασταθῆ παραμετρικῶς μέ τίς δυό ἐξισώσεις

$$\begin{cases} x=\alpha\,\text{συν}\,t \\ y=\alpha\,\text{ημ}\,t \end{cases}$$

ὅπου ἡ παράμετρος t λαβαίνει τίς τιμές τίς $\geqq 0$ καί $< 2\pi$. Σέ κάθε τέτοια τιμή τοῦ t ἀντιστοιχεῖ ἕνα σημεῖο τοῦ κύκλου· ἀντιστρόφως, κάθε σημεῖο τοῦ κύκλου εἶναι ἀντίστοιχο μιᾶς τέτοιας τιμῆς τοῦ t.

Γεωμετρική σημασία τῆς παραμέτρου: προφανῶς $t=(\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OM})$ σέ ἀκτίνια, ὅπου $M(x,y)$ τό σημεῖο τοῦ κύκλου τό ἀντίστοιχο στήν τιμή t τῆς παραμέτρου. Ἡ ἀπαλοιφή τοῦ t μεταξύ τῶν δυό ἐξισώσεων ὁδηγεῖ στήν $x^2+y^2=\alpha^2$.

Γενικά, ὁ κύκλος $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\alpha^2$, μέ κέντρο τό $K(x_0,y_0)$ καί ἀκτίνα α, ἔχει ἀναλυτική παραμετρική παράσταση

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha\sigma\upsilon\nu t \\ y = y_0 + \alpha\eta\mu t \end{cases}$$

γιά $0 \leqq t < 2\pi$. Γεωμ.σημασία τῆς παραμέτρου: προφανῶς $t = (\overrightarrow{OX},\overrightarrow{KM})$, ὅπου $M(x,y)$ τό σημεῖο τοῦ κύκλου τό ἀντίστοιχο στήν τιμή t τῆς παραμέτρου.

Ἄν καταργήσουμε τόν περιορισμό $0 \leqq t < 2\pi$, τότε σέ δυό τιμές t_1 καί $t_1+2k\pi$ (k ἀκέραιος) τῆς παραμέτρου t οἱ ὁποῖες διαφέρουν κατά ἀκέραιο πολλαπλάσιο τοῦ 2π, ἀντιστοιχεῖ ἕνα καί τό ἴδιο σημεῖο τοῦ κύκλου. Ἀντιστρόφως σέ ἕνα σημεῖο τοῦ κύκλου ἀντιστοιχοῦν ἄπειρες τιμές t οἱ ὁποῖες διαφέρουν δυό - δυό κατά ἀκέραιο πολλαπλάσιο τοῦ 2π.

ΕΛΛΕΙΨΗ

§ 117. Ἔλλειψη (μέ στενή σημασία) λέγεται ὁ γεωμ.τόπος τῶν σημείων Μ ἑνός ἐπιπέδου τά ὁποῖα ἔχουν σταθερό ἄθροισμα ἀποστάσεων ἀπό δυό δοσμένα σημεῖα Ε΄ καί Ε τοῦ ἐπιπέδου: $(E'M) + (EM) = 2\alpha > (E'E) > 0$. Τά σημεῖα Ε΄, Ε λέγονται ἑστίες, (Ἄν δεχτοῦμε τή σύμπτωση τῶν Ε΄ καί Ε, τότε προφανῶς ὁ παραπάνω γεωμ. τόπος γίνεται κύκλος μέ κέντρο τό $E' \equiv E$ καί ἀκτίνα α· γι'αὐτό ὁ κύκλος θεωρεῖται ἔλλειψη μέ εὐρεία σημασία).

Προφανῶς οἱ εὐθεῖες Ε΄Ε καί ἡ κάθετη σ'αὐτήν διά τοῦ μέσου Ο τοῦ τμήματος Ε΄Ε εἶναι ἄξονες ὀρθῆς συμμετρίας τοῦ τόπου· ἄρα τό σημεῖο Ο εἶναι κέντρο συμμετρίας, καί εἶναι φυσικό νά ζητήσουμε τήν ἐξίσωση τῆς ἐλλείψεως ὡς πρός τούς ἄξονες: $X'OX \equiv E'OE$, μέ θετική φορά π.χ. τήν ἀπό τό Ε΄ πρός τό Ε, καί $Y'OY \equiv$ τήν κάθετη στήν Ε΄Ε διά τοῦ Ο μέ θετική φορά $\overrightarrow{OY}$, τέτοιαν πού $(\overrightarrow{E'E},\overrightarrow{OY}) = +\frac{\pi}{2}$. Ἄς εἶναι $(E'E) = 2\gamma$ (ὁπότε $E'(-\gamma,0)$, $E(\gamma,0)$ καί $0 < 2\gamma < 2\alpha$. Γεωμετρικῶς φαίνεται ἀμέσως ὅτι ἡ ἔλλειψη ἔχει δυό σημεῖα $A'(-\alpha,0)$, $A(\alpha,0)$ πάνω στήν Ε΄Ε καί ἄπειρα ἄλλα σημεῖα πού δέν βρίσκονται πάνω στήν Ε΄Ε. Λέγω ὅτι ἡ ἐξίσωσή της εἶναι ἡ $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\alpha^2-\gamma^2}=1$. Πράγματι, γιά νά κεῖται ἕνα σημεῖο Μ(x,y) πάνω στήν ἔλλειψη, πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἔχουμε:

$$(E'M)+(EM)=+\sqrt{(x+\gamma)^2+y^2}+\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}=2\alpha\ .$$

Εἶναι ὅμως πάντοτε:

$$(E'M)^2-(EM)^2=(x+\gamma)^2+y^2-(x-\gamma)^2-y^2=4\gamma x\ .$$

Ἀπό τίς δυό αὐτές ἐξισώσεις γραμμένες ἔτσι:

$$\begin{cases}(E'M)+(EM)=2\alpha\\ \{(E'M)+(EM)\}\cdot\{(E'M)-(EM)\}=4\gamma x\,,\end{cases}$$

ἕπεται ἰσοδυνάμως ὅτι

$$\begin{cases}(E'M)+(EM)=2\alpha\\ (E'M)-(EM)=\dfrac{2\gamma x}{\alpha}\ .\end{cases}$$

Ἄρα γιά νά ἀνήκη τό σημεῖο Μ(x,y) στήν ἔλλειψη πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἔχουμε

(117.1) $\qquad (E'M)=\alpha+\frac{\gamma x}{\alpha}\quad,\quad (EM)=\alpha-\frac{\gamma x}{\alpha}$

(πρᾶγμα πού ἐξυπακούει ὅτι $\alpha+\frac{\gamma x}{\alpha}\geqq 0$, $\alpha-\frac{\gamma x}{\alpha}\geqq 0$, φιατί $(E'M)\geqq 0$, $(EM)\geqq 0$). Εἰσάγουμε τώρα αὐτές τίς τιμές τῶν (Ε΄Μ) καί (ΕΜ) μέσα στίς $(E'M)=\sqrt{(x+\gamma)^2+y^2}$ καί $(EM)=\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}$ ἀντιστοίχως καί βρίσκουμε ὕστερα ἀπό ὕψωση στό τετράγωνο

(117.2) $\qquad \left(\alpha+\frac{\gamma x}{\alpha}\right)^2=(x+\gamma)^2+y^2\ ,\ \left(\alpha-\frac{\gamma x}{\alpha}\right)^2=(x-\gamma)^2+y^2$

ἤ

(117.3) $\qquad \frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha^2}x^2+y^2=\alpha^2-\gamma^2\ .$

Ὥστε κάθε σημεῖο Μ(x,y) τῆς ἐλλείψεως ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση

(117.4) $\qquad \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\alpha^2-\gamma^2}=1\qquad .$

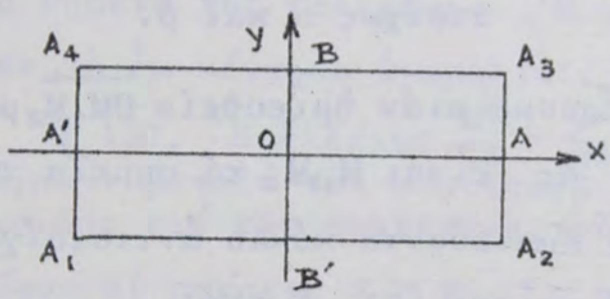
Ἀντίστροφα, ἄν ἕνα σημεῖο Μ(x,y) ἱκανοποιεῖ αὐτήν τήν ἐξίσωση, θά ἀνήκῃ στήν ἔλλειψη. Διότι 1ο θά ἔχουμε $|x| \leqq \alpha$, ἄρα $\frac{\gamma}{\alpha}|x| < \alpha$ καί συνεπῶς $\alpha + \frac{\gamma x}{\alpha} > 0$, $\alpha - \frac{\gamma x}{\alpha} > 0$, 2ο θά ἰσχύῃ ἡ (117.3) ἄρα καί οἱ (117.2), ἀπό τίς ὁποῖες μέ ἐξαγωγή τῆς τετραγων. ρίζας θά λάβουμε:

$$\alpha + \frac{\gamma x}{\alpha} = +\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} \qquad \alpha - \frac{\gamma x}{\alpha} = +\sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2}$$

καί μέ πρόσθεση τῶν δυό τελευταίων σχέσεων κατά μέλη:

$$2\alpha = +\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} + \sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2} \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

§ 118. Ἐπειδή στήν καθαυτό ἔλλειψη $\alpha > \gamma > 0$, μποροῦμε νά θέσουμε $\alpha^2 - \gamma^2 = \beta^2$ μέ $\beta > 0$ ὁπότε ἡ ἐξίσωσή της γίνεται:



$$(118.1) \qquad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 .$$

Πάνω στόν ἄξονα ΟΥ ἡ ἔλλειψη ἔχει τά δυό σημεῖα Β΄(0,−β), Β(0,β). Τό τμῆμα Β΄Β, πού εἶναι < τοῦ Α΄Α λέγεται μικρός ἄξονας καί τό Α΄Α μεγάλος ἄξονας τῆς ἐλλείψεως. Ἀπό τήν (118.1) ἕπεται ὅτι γιά κάθε σημεῖο $M(x,y)$ τῆς ἐλλείψεως ἰσχύουν οἱ σχέσεις $|x| \leqq \alpha$, $|y| \leqq \beta$. Ἄρα κανένα σημεῖο τῆς ἐλλείψεως δέν κεῖται ἔξω ἀπό τό λεγόμενο "ὀρθογώνιο τῶν ἀξόνων" $A_1A_2A_3A_4$.

Ἔστω $M(x,y)$ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς ἐλλείψεως· θά ἔχουμε:

$$1 = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} \geqq \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\alpha^2}$$

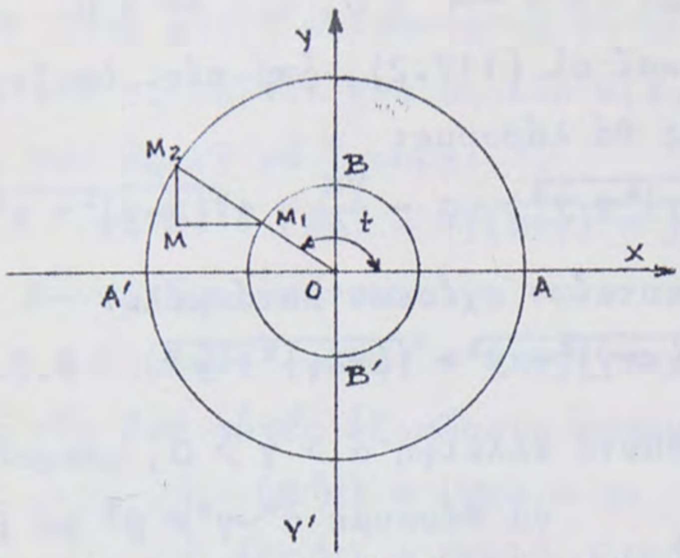
ὥστε $x^2 + y^2 \leqq \alpha^2$.

Αὐτό σημαίνει ὅτι κανένα σημεῖο τῆς ἐλλείψεως δέν κεῖται ἔξω ἀπό τόν "μεγάλο πρωτεύοντα κύκλο της", τόν κύκλο μέ διάμετρο τό Α΄Α.

Ὅμοια γιά κάθε σημεῖο $M(x,y)$ τῆς ἐλλείψεως ἔχουμε

$$1 = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} \leqq \frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\beta^2} \qquad \text{ἄρα} \quad x^2 + y^2 \geqq \beta^2 ,$$

συνεπῶς κανένα σημεῖο τῆς ἐλλείψεως δέν κεῖται στό ἐσωτερι-



κό τοῦ "μικροῦ πρωτεύοντος κύκλου της, τοῦ κύκλου μέ διάμετρο τό Β΄Β. Κατά ταῦτα ἡ ἔλλειψη κεῖται μέσα στό δαχτύλιο πού περιορίζεται ἀπό τούς δυό ὁμόκεντρους κύκλους μέ κέντρο τό Ο καί ἀχτίνες ἀντιστοίχως α καί β.

§ 119. Ἀπό τό Ο ἄς φέρουμε μιάν ἡμιευθεία $\overrightarrow{OM_1M_2}$ μέ $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM_2}) = t$ καί ἄς εἶναι M_1, M_2 τά σημεῖα τομῆς της μέ τό μικρό καί τό μεγάλο πρωτεύοντα κύκλο ἀντιστοίχως. Οἱ συντεταγμένες τῶν M_1 καί M_2 εἶναι (βλ. § 116)

$$M_1(\beta\sigma\upsilon\nu t, \beta\eta\mu t) \quad , \quad M_2(\alpha\sigma\upsilon\nu t, \alpha\eta\mu t) .$$

Ἀπό τό M_1 ἄγουμε $\| OX$, ἀπό τό M_2 $\| OY$. Ἔστω Μ τό σημεῖο τομῆς τῶν δυό αὐτῶν παράλληλων. Προφανῶς τετμημ. τοῦ Μ = τετμημ. τοῦ M_2, τεταγμ. τοῦ Μ = τεταγμ. τοῦ M_1 ἄρα ἐάν καλέσουμε (x,y) τίς συντεταγμ. τοῦ Μ θά εἶναι

$$(119.1) \qquad x = \alpha\sigma\upsilon\nu t \quad , \quad y = \beta\eta\mu t \ ,$$

ἀπό ὅπου $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = \sigma\upsilon\nu^2 t + \eta\mu^2 t = 1$. Ἑπομένως τό $M(x,y)$ εἶναι σημεῖο τῆς ἐλλείψεως. Ἀντίστροφα ἄς εἶναι $M(x,y)$ τυχόν σημεῖον τῆς ἐλλείψεως $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ καί $M_2(x_2, y_2)$ τό "ὁμόλογό του" πάνω στό μεγάλο πρωτεύοντα κύκλο, δηλαδή $MM_2 \| OY$ καί M, M_2 ἀπό τήν ἴδια μεριά τῆς εὐθείας Α΄Α, ἄρα $y \cdot y_2 \geqq 0$. Ἐάν καλέσουμε t τή γωνία $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM_2})$ σέ ἀκτίνια θά ἔχουμε $x = x_2 = \alpha\sigma\upsilon\nu t$ καί συνεπῶς $\frac{y^2}{\beta^2} = 1 - \frac{x^2}{\alpha^2} = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 t$, ἀπό ὅπου εὔκολα προκύπτει $y = \beta\eta\mu t$. Ἄρα γιά τίς συντεταγμένες τοῦ $M(x,y)$ τῆς ἐλλείψεως ἀληθεύουν οἱ ἐξισώσεις (119.1) ὅπου $0 \leqq t < 2\pi$. Οἱ ἐξισώσεις αὐτές δίνουν λοιπόν μιάν αναλυτική παραμετρική παράσταση τῆς ἐλλείψεως. Γεωμετρική σημασία τῆς παραμέτρου t: $t = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_2})$, ὅπου M_2 τό ὁμόλογο πάνω στόν μεγάλο πρωτεύοντα κύκλο τοῦ σημείου M τῆς ἐλλείψεως.

Ἄν καταργήσουμε τόν περιορισμό $0 \leqq t < 2\pi$, τότε ἡ ἀντιστοιχία μεταξύ τῶν τιμῶν τῆς t καί σημείων τῆς ἐλλείψεως παύει ἀπό τό νά εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη: σέ δυό τιμές τῆς t πού ἔχουν διαφορά $2k\pi$ (k ἀκέραιος) ἀντιστοιχεῖ ἕνα καί τό ἴδιο σημεῖο τῆς ἐλλείψεως. Ἡ γωνία t ὀνομάσθηκε ἀπό τόν Kepler "ἡ ἐκ κέντρου ἀνωμαλία".

§ 120. Ἡ ἔλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ εἶναι ὀρθή προβολή κύκλου. Πράγματι μεταξύ τῶν συντεταγμ. τοῦ τυχαίου σημείου $M(x,y)$ τῆς ἔλλειψης καί τῶν συντεταγμ. τοῦ ὁμολόγου του $M_2(x_2,y_2)$ ἰσχύουν αἱ σχέσεις $x = x_2$, $y = \frac{\beta}{\alpha} y_2$ (ἐπειδή $x = \alpha\sigma\upsilon\nu t = x_2$, $y = \beta\eta\mu t$, $y_2 = \alpha\eta\mu t$). Ἄρα, ἄν "ἀνακλίνουμε" τό ἐπίπεδο τοῦ μεγάλου πρωτεύοντος κύκλου στρέφοντάς το περί τήν A΄A κατά γωνία ω $(0 < \omega < \frac{\pi}{2})$ μέ $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\beta}{\alpha}$, ἡ ὀρθή προβολή ἐπάνω στό ἐπίπεδο XOY τοῦ κύκλου πού προέκυψε ἀπό τόν πρωτεύοντα διά τῆς ἀνακλίσεως, θά συμπέση μέ τήν ἔλλειψη.

Ἀπό τά παραπάνω ἕπεται ὅτι ἕνας "ὀρθός κύλινδρος μέ βάση μιάν ἔλλειψη" ἔχει "κυκλικές τομές", δηλαδή ὑπάρχουν ἐπίπεδα πού κόβουν τόν κύλινδρο σέ κύκλους.

§ 121. Κάθε κύκλος μπορεῖ νά θεωρηθῆ ὡς ὀρθή προβολή ἐλλείψεως. Πράγματι ἄς ἔχη δοθῆ μέσα στό ἐπίπεδο XOY ἕνας κύκλος μέ κέντρο τό O καί ἀχτίνα τυχούσα β. Θεωροῦμε ἕνα $\alpha > \beta$ καί τήν ἔλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Μεταξύ τῶν σημείων της $M(x,y)$ καί τῶν ὁμολόγων τους $M_1(x_1, y_1 = y)$ πάνω στό μικρό πρωτεύοντα κύκλο ἰσχύουν οἱ σχέσεις $x_1 = \frac{\beta}{\alpha} x$, $y_1 = y$ (διότι $x_1 = \beta\sigma\upsilon\nu t$, $x = \alpha\sigma\upsilon\nu t$, $y_1 = \beta\eta\mu t = y$). Ἄρα ἄν "ἀνακλίνουμε" τό ἐπίπεδο τῆς ἐλλείψεως στρέφοντάς το περί τή B΄B κατά τή γωνία ω μέ συνω $=\frac{\beta}{\alpha}$, ἡ ὀρθή προβολή πάνω στό XOY τῆς ανακεκλιμένης ἐλλείψεως θά συμπέση μέ τόν κύκλο ὁ ὁποῖος ἔχει κέντρο τό O καί ἀχτίνα β.

Ἀπό τά παραπάνω ἕπεται εὔκολα ὅτι οἱ ἐπίπεδες τομές ἑνός "ὀρθοῦ κυλίνδρου μέ κυκλική βάση" εἶναι ἐλλείψεις,ἐκτός ἐάν τό τέμνον ἐπίπεδο εἶναι κάθετο στόν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου, ὁπότε ἡ τομή εἶναι κύκλος.

§ 122. <u>Πρόταση</u>. Τά μέσα παράλληλων χορδῶν τῆς ἐλλείψεως $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ οἱ ὁποῖες ἔχουν κλίση λ, κεῖνται ὅλα πάνω σέ μιά διάμετρο, δηλαδή μιάν εὐθεία διά τοῦ κέντρου O , ἡ ὁποία ἔχει κλίση $-\frac{\beta^2}{\alpha^2\lambda}$.

<u>Ἀπόδειξη</u>. Ἄς εἶναι M_1M_2 μιά χορδή κλίσεως λ, ὅπου $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, καί M τό μέσο της. Οἱ συντεταγμένες τοῦ M θά εἶναι τότε $\xi=\frac{x_1+x_2}{2}$, $\eta=\frac{y_1+y_2}{2}$. Ἡ πρόταση εἶναι προφανῶς σωστή ὅταν $\lambda=0$ ἤ $\lambda=\infty$. Ἄς εἶναι λοιπόν $\lambda\neq 0$ καί ∞ . Ἡ ἐξίσωση τῆς εὐθείας M_1M_2 θά εἶναι τῆς μορφῆς $y=\lambda x+t$. Οἱ τετμημ. x_1, x_2 τῶν κοινῶν σημείων M_1, M_2 τῆς εὐθείας $y=\lambda x+t$ καί τῆς ἐλλείψεως $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ θά εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{(\lambda x+t)^2}{\beta^2}=1$, 2ου βαθμοῦ ὡς πρός x, ἡ ὁποία προκύπτει ὅταν ἀπαλείφουμε τό y ἀπό τό σύστημα

$$\begin{cases} y=\lambda x+t \\ \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1 \end{cases} .$$

Ἄρα γιά τό ἡμιάθροισμα ξ τῶν ριζῶν αὐτῶν θά ἰσχύη ἡ σχέση

$$\xi=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2\lambda t}{\beta^2} : \left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{\lambda^2}{\beta^2}\right)=-\frac{\lambda\alpha^2 t}{\beta^2+\alpha^2\lambda^2} .$$

Ἐπειδή ὅμως τό M(ξ,η) εἶναι σημεῖο τῆς εὐθείας $y=\lambda x+t$, θά ἔχουμε

$$\eta=\lambda\xi+t=-\frac{\lambda^2\alpha^2 t}{\beta^2+\alpha^2\lambda^2}+t=\frac{\beta^2 t}{\beta^2+\alpha^2\lambda^2} .$$

Ἀπό τίς ἐκφράσεις αὐτές τῶν ξ καί η ἕπεται ὅμως:

$$\frac{\eta}{\xi} = -\frac{\beta^2}{\alpha^2\lambda} \quad , \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Οἱ δυό διάμετροι τῆς ἐλλείψεως πού ἔχουν κλίσεις λ καί $-\frac{\beta^2}{\alpha^2\lambda}$ ἀντιστοίχως, ἔχουν τήν ἰδιότητα νά διχοτομῆ ἡ καθεμιά τους τίς χορδές τίς παράλληλες πρός τήν ἄλλη. Πράγματι τά μέσα τῶν χορδῶν μέ κλίση λ κεῖνται ὅπως εἴδαμε πάνω στή διάμετρο μέ κλίση $-\frac{\beta^2}{\alpha^2\lambda}$ καί οἱ χορδές μέ κλίση $-\frac{\beta^2}{\alpha^2\lambda}$ ἔχουν πάλιν τά μέσα τους πάνω στή διάμετρο μέ κλίση

$$-\frac{\beta^2}{\alpha^2\left(-\frac{\beta^2}{\alpha^2\lambda}\right)} = \lambda \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Δυό διάμετροι μέ τήν παραπάνω ἰδιότητα λέγονται συζυγεῖς. Ἕνα εἰδικό ζεῦγος συζυγῶν διαμέτρων εἶναι τό Α΄Α καί Β΄Β. Εἶναι τό μόνο ὀρθογώνιο ζεῦγος συζυγῶν διαμέτρων τῆς ἔλλειψης.

§ 123. <u>Θεώρημα τοῦ Ἀπολλωνίου.</u> Τό ἄθροισμα $\alpha'^2 + \beta'^2$ τῶν τετραγώνων τῶν μηκῶν δυό συζυγῶν ἡμιδιαμέτρων ΟΓ καί ΟΔ ἰσοῦται μέ $\alpha^2+\beta^2$. Ἐξ ἄλλου, ἐάν $\omega = (\widehat{ΟΓ,ΟΔ})$, τότε

$$\alpha'\beta'\etaμ\omega = \alpha\beta \ .$$

<u>Ἀπόδειξη.</u> Τά ἄκρα Γ καί Δ τῶν δυό συζυγῶν ἡμιδιαμέτρων ἄς ἀντιστοιχοῦν σέ τιμές t_1 καί t_2 τῆς ἐκκέντρου ἀνωμαλίας t: οἱ συντεταγμένες τῶν Γ καί Δ θά εἶναι τότε ($x' = \alpha συν t_1$, $y' = \beta ημ t_1$) καί ($x'' = \alpha συν t_2$, $y'' = \beta ημ t_2$) ἀντιστοίχως. Οἱ κλίσεις τῶν εὐθειῶν ΟΓ καί ΟΔ εἶναι ἑπομένως $\lambda_1 = \frac{\beta}{\alpha} εφ t_1$, $\lambda_2 = \frac{\beta}{\alpha} εφ t_2$. Ἀλλά κατά τόν § 122, γιά τίς κλίσεις δυό συζυγῶν διαμέτρων ἰσχύει ἡ σχέση $\lambda_1\lambda_2 = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}$. Ἄρα

$$\frac{\beta}{\alpha}\cdot εφ t_1 \frac{\beta}{\alpha} εφ t_2 = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}$$

ἀπό ὅπου $εφ t_1 \cdot εφ t_2 = -1$ ἤ $εφ t_2 = σφ(-t_1)$. Ἑπομένως

$$t_2 = \frac{\pi}{2} - (-t_1) + k\pi = \frac{\pi}{2} + t_1 + k\pi$$

ὅπου k ἀκέραιος καί συνεπῶς $συν t_2 = (-1)^{k+1} \cdot ημ t_1$,

$\eta\mu t_2 = (-1)^{\kappa}\ \sigma\upsilon\nu t_1$. Ἄρα ἔχουμε

$$\alpha'^2+\beta'^2 = (\mathrm{O}\Gamma)^2 + (\mathrm{O}\Delta)^2 = x'^2 + y'^2 + x''^2 + y''^2 =$$

$$= \alpha^2\sigma\upsilon\nu^2 t_1 + \beta^2\eta\mu t_1 + \alpha^2\sigma\upsilon\nu^2 t_2 + \beta^2\eta\mu^2 t_2 =$$

$$= \alpha^2(\sigma\upsilon\nu^2 t_1+\eta\mu^2 t_1) + \beta^2(\eta\mu^2 t_1+\sigma\upsilon\nu^2 t_1) = \alpha^2+\beta^2 \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Ὁμοίως ἔχουμε $\alpha'\beta'\eta\mu\omega$ = ἀπροσήμαστο ἐμβαδό τοῦ παραλληλόγραμμου πού ἔχει τίς ΟΓ καί ΟΔ γιά πλευρές = ἀπόλυτη τιμή τῆς ὁρίζουσας

$$\begin{vmatrix} \alpha\sigma\upsilon\nu t_1 & \beta\eta\mu t_1 \\ \alpha\sigma\upsilon\nu t_2 & \beta\eta\mu t_2 \end{vmatrix} = \left|\alpha\beta\sigma\upsilon\nu^2 t_1(-1)^{\kappa} - \alpha\beta\eta\mu^2 t_1(-1)^{\kappa+1}\right| = \alpha\beta \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

§ 124. <u>Πρόταση</u>. Ἡ ἐξίσωση τῆς ἔλλειψης μέ ἄξονες συντεταγμένων ΟΧ΄, ΟΥ΄ τίς εὐθεῖες ΟΓ, ΟΔ δυό συζυγῶν διαμέτρων (καί βασικά διανύσματα ἰσόμηκα πρός τή μονάδα μήκους) εἶναι $\frac{x'^2}{\alpha'^2} + \frac{y'^2}{\beta'^2} = 1$, ὅπου α΄ καί β΄ τά μήκη τῶν ἡμιδιαμέτρων πού κεῖνται πάνω στόν ΟΧ΄ καί ΟΥ΄.

<u>Ἀπόδειξη</u>. Οἱ σχέσεις μεταξύ παλιῶν συντεταγμένων (x,y) καί νέων (x',y') τοῦ ἴδιου σημείου Μ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι τῆς μορφῆς $x = \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y'$, $y = \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y'$. Αὐτό ἔπεται ἀπό μιά διπλῆ ἐφαρμογή τοῦ § 113, ἤ ἀπό μιά ἐφαρμογή τῆς ἀσκήσεως 79. Ἄν τό σημεῖο $\mathrm{M}(x,y)$ ἀνήκη στήν ἔλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ θά ἰσχύη μεταξύ x,y αὐτή ἡ σχέση καί ἀντίστροφα.

Ἄρα μεταξύ τῶν νέων συντεταγμένων (x',y') τοῦ τυχόντος σημείου Μ τῆς παραπάνω ἔλλειψης θά ἰσχύη ἡ σχέση

$$\frac{(\alpha_{11}x' + \alpha_{21}y')^2}{\alpha^2} + \frac{(\alpha_{12}x' + \alpha_{22}y')^2}{\beta^2} = 1$$

καί ἀντίστροφα. Ἡ τελευταία ἐξίσωση εἶναι τῆς μορφῆς

$$\mathrm{A}'x'^2 + 2\mathrm{B}'x'y' + \Gamma'y'^2 = 1,$$

ὅπου Α΄, Β΄, Γ΄ ὁρισμένοι συντελεστές. Ἡ ἐξίσωση αὐτή πρέπει νά ἐπαληθεύεται ἀπό τίς νέες συντεταγμένες $(\alpha',0)$ καί $(0,\beta')$ τῶν ἄκρων Γ καί Δ τῶν συζυγῶν ἡμιδιαμέτρων ΟΓ καί ΟΔ. Ἄρα $\mathrm{A}'\alpha'^2 = 1$ καί $\Gamma'\beta'^2 = 1$, ἀπό ὅπου ἔπεται $\mathrm{A}' = \frac{1}{\alpha'^2}$,

$\Gamma' = \frac{1}{\beta'^2}$. Ἐξ ἄλλου ἄν τό σημεῖο Μ μέ νέες συντεταγμένες (x',y') ὄχι μηδενικές ἀνήκη στήν ἔλλειψη θά ἀνήκη σ'αὐτήν καί τό $N(x',-y')$· πράγματι ἡ χορδή MN_1 τῆς ἔλλειψης ἡ παράλληλη πρός $O\Delta \equiv OY'$ ἔχει τό μέσο της πάνω στή συζυγῆ διάμετρο ΟΓ, δηλαδή πάνω στόν ΟΧ΄, ἄρα ἡ νέα τεταγμένη τοῦ N_1 εἶναι $= -y'$ καί συνεπῶς $N_1 \equiv N$. Ἄν λοιπόν ἰσχύη ἡ σχέση $A'x'^2 + 2B'x'y' + \Gamma'y'^2 = 1$, θά ἰσχύη καί ἡ $A'x'^2 - 2B'x'y' + \Gamma'y'^2 = 1$, ἀπ'ὅπου ἕπεται $4B'x'y' = 0$ καί ἄρα $B' = 0$ ὅ.ἔ.δ.

§ 125. <u>Πρόταση</u>. Ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ὁποιουδήποτε σημείου $M(x,y)$ τῆς ἔλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2} = 1$ ἀπό τήν ἑστία $E(\gamma,0)$ καί ἀπό τήν εὐθεία $x = \frac{\alpha^2}{\gamma}$ εἶναι σταθερός καί ἴσος μέ $\frac{\gamma}{\alpha}$ (< 1).

Πράγματι σύμφωνα μέ τούς τύπους (117.1) ἔχουμε $(EM) = \alpha - \frac{\gamma}{\alpha}x$. Ὅσο γιά τήν (ἀπροσήμαστη) ἀπόσταση (ΜΚ) τοῦ Μ ἀπό τήν εὐθεία $x = \frac{\alpha^2}{\gamma}$, ἔχουμε $(MK) = \frac{\alpha^2}{\gamma} - x$ (διότι $|x| \leqq \alpha < \frac{\alpha}{\gamma}\alpha$).

Ἄρα:

$$(EM):(MK) = \left(\alpha - \frac{\gamma}{\alpha}x\right) : \left(\frac{\alpha}{\gamma}\left(\alpha - \frac{\gamma}{\alpha}x\right)\right) = \frac{\gamma}{\alpha} .$$

Ἀντίστροφα, ἄν γιά ἕνα σημεῖο $M(x,y)$ τοῦ ἐπιπέδου ἰσχύη ἡ σχέση $(EM) = \frac{\gamma}{\alpha}$ ἀπόσταση (ΜΚ) , δηλαδή ἄν

$$\sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2} = \frac{\gamma}{\alpha}\left|\frac{\alpha^2}{\gamma} - x\right| ,$$

τότε καί $\quad (x-\gamma)^2 + y^2 = \left(\alpha - \frac{\gamma}{\alpha}x\right)^2 \quad$ ἤ $\quad \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2} = 1$,

ἄρα τό $M(x,y)$ ἀνήκει στήν ἔλλειψη. Ὅμοια ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ὁποιουδήποτε σημείου τῆς ελλειψεως $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2} = 1$ ἀπό τήν ἑστία $E'(-\gamma,0)$ καί ἀπό τήν εὐθεία $x = -\frac{\alpha^2}{\gamma}$ εἶναι σταθερά ἴσος μέ $\frac{\gamma}{\alpha}$. Οἱ εὐθεῖες $x = \pm\frac{\alpha^2}{\gamma}$ λέγονται διευθετοῦσες, ὁ λόγος $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha}$, ἀριθμητική ἐκκεντρότητα τῆς ἐλλείψεως. Ἡ ἐκκεντρότητα αὐτή παριστάνεται συνήθως μέ ε.

§ 126. Ἡ ἐξίσωση τῆς ἔλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2} = 1$ σέ πολικές συντεταγμένες μέ πόλο μιάν ἑστία, π.χ. τήν Ε, καί πολικόν ἄξονα τήν εὐθεία τῶν ἐστιῶν μέ θετική φορά τήν $\overrightarrow{E'E}$, βρίσκεται ὡς ἑξῆς: Ἔστω Π ἡ ὀρθή προβολή τοῦ σημείου M(x,y) τῆς ἔλλειψης πάνω στήν Ε΄Ε ≡ ΟΧ. Ἔχουμε: $(\overline{EM}) = \varrho$ = πολική ἀκτίνα τοῦ Μ, $(\overline{E\Pi}) = \varrho\sigma\upsilon\nu\varphi$, ὅπου $\varphi = (\overrightarrow{E'E},\overrightarrow{EM})$ = πολ. γωνία τοῦ Μ, $x = (\overline{O\Pi}) = (\overline{OE}) + (\overline{E\Pi}) = \gamma + \varrho\sigma\upsilon\nu\varphi$.

Ἀλλά κατά τούς (117.1) εἶναι

$$(EM) = \alpha - \frac{\gamma}{\alpha}x\,,\quad \text{ἄρα}\quad \varrho = \alpha - \frac{\gamma}{\alpha}(\gamma+\varrho\sigma\upsilon\nu\varphi) = \alpha - \frac{\gamma^2}{\alpha} - \frac{\gamma}{\alpha}\varrho\sigma\upsilon\nu\varphi\,,$$

καί συνεπῶς
$$\varrho\left(1 + \frac{\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\varphi\right) = \frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha} = \frac{\beta^2}{\alpha}\,.$$

Ἑπομένως, μέ $\frac{\beta^2}{\alpha} = p$

$$(126.1)\qquad \varrho = \frac{p}{1 + \varepsilon\sigma\upsilon\nu\varphi}$$

Τό p, πού ἰσοῦται μέ τό μισό κοινό μῆκος τῶν δυό χορδῶν τῆς ἔλλειψης οἱ ὁποῖες διέρχονται διά μιᾶς ἑστίας καί εἶναι κάθετες στήν εὐθεία τῶν ἑστιῶν Ε΄Ε, λέγεται παράμετρος τῆς ἔλλειψης. Ὅταν δοθοῦν τά $p = \frac{\beta^2}{\alpha}$ καί $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$ ἡ ἔλλειψη εἶναι καθορισμένη ἀπό ἄποψη σχήματος, διότι ὁρίζονται τά α, γ, ἄρα καί τό β. Τέλος παρατηροῦμεν ὅτι, ἐάν μεταφέρουμε τό σύστημα ΧΟΥ τῶν ἀξόνων κατά τό διάνυσμα (−α,0) ἔτσι πού τό νέο σύστημα νά ἔχη ἀρχή τό Ο΄ ≡ Α΄, ἡ ἔλλειψη ὡς πρός τό νέο σύστημα ἔχει ἐξίσωση

$$\frac{(x'+(-\alpha))^2}{\alpha^2} + \frac{(y'+0)^2}{\beta^2} = 1 \quad \text{ἤ} \quad y'^2 = 2px' - \frac{\beta^2}{\alpha^2}x'^2\,.$$

Ὥστε τό τετράγωνο τῆς τεταγμένης y΄ ἑνός σημείου M(x΄,y΄) τῆς ἔλλειψης ὑ π ο λ ε ί π ε τ α ι τοῦ ὀρθογωνίου 2px΄ = = 2p(ΑΠ) κατά $\frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot x'^2$. Ἀπ᾽ἐδῶ προέρχεται τό ὄνομα ἔλλειψη.

ΥΠΕΡΒΟΛΗ

§ 127. Ὑπερβολή λέγεται ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ ἐπιπέδου πού ἔχουν σταθερή, κατ᾽ἀπόλυτη τιμή, διαφορά αποστάσεων ἀπό δυό σημεῖα Ε΄ καί Ε τοῦ ἐπιπέδου:

$$0 < |(E'M) - (EM)| = 2\alpha < (E'E) = 2\gamma .$$

Τά Ε΄, Ε λέγονται ἑστίες. Προφανῶς ἡ εὐθεία Ε΄Ε καί ἡ κάθετη σ'αὐτήν διά τοῦ μέσου Ο τοῦ τμήματος Ε΄Ε εἶναι ἄξονες ὀρθῆς συμμετρίας τοῦ τόπου· τό Ο εἶναι λοιπόν κέντρο συμμετρίας.

Γι'αὐτό ζητοῦμε τήν ἐξίσωση τῆς ὑπερβολῆς στό σύστημα συντεταγμένων μέ ΟΧ ≡ ΟΕ καί θετική φορά τήν Ε΄Ε καί ΟΥ ⊥ ΟΧ ὅπου $(\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}) = +\frac{\pi}{2}$. Πάνω στόν ΟΧ ὁ τόπος ἔχει προφανῶς δυό σημεῖα $A'(-\alpha,0)$ καί $A(\alpha,0)$ πού λέγονται κορυφές τῆς ὑπερβολῆς. Ἔξω ἀπό τόν ΟΧ ὁ τόπος ἔχει ἄπειρα σημεῖα, κανένα ὅμως ἀπ'αὐτά δέν βρίσκεται πάνω στόν ΟΥ, ἐπειδή γιά τά σημεῖα Ρ τοῦ ΟΥ ἰσχύει ἡ σχέση $|(E'P) - (EP)| = 0$. Ἄρα ἡ ὑπερβολή ἀποτελεῖται ἀπό δυό κομμάτια πού δέν "συνέχονται στό πεπερασμένο". Γιά συντομία θά λέμε δεξιό κομμάτι ἐκεῖνο πού τά σημεῖα του ἔχουν θετικές τετμημένες, ἀριστερό δέ τό ἄλλο κομμάτι (μέ ἀρνητικές τετμημένες τῶν σημείων του). Γιά τό δεξιό κομμάτι εἶναι $(E'M) - (EM) = 2\alpha$, γιά τό ἀριστερό $(E'M) - (EM) = -2\alpha$. Γιά ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο $M(x,y)$ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ὅμως $(E'M)^2 - (EM)^2 = (x+\gamma)^2 + y^2 - (x-\gamma)^2 - y^2 = 4\gamma x$. Ἄρα ἀνάλογα μέ ὅτι βρήκαμε στόν § 117, ἔχουμε:

$$\begin{cases} (E'M) = \frac{\gamma x}{\alpha} + \alpha \\ (EM) = \frac{\gamma x}{\alpha} - \alpha \end{cases}$$ Ὅταν τό Μ ἀνήκη στό δεξιό κομμάτι τῆς ὑπερβολῆς ὁπότε ἡ τετμημένη $x > 0$,

(127.1)

$$\begin{cases} (E'M) = -\frac{\gamma x}{\alpha} - \alpha \\ (EM) = -\frac{\gamma x}{\alpha} + \alpha \end{cases}$$ Ὅταν τό Μ ἀνήκη στό ἀριστερό κομμάτι τῆς ὑπερβολῆς, ὁπότε ἡ τετμημένη $x < 0$.

Ἄν εἰσαγάγουμε αὐτές τίς τιμές μέσα στίς

$$(E'M)^2 = (x+\gamma)^2 + y^2 \quad , \quad (EM)^2 = (x-\gamma)^2 + y^2 \quad ,$$

βρίσκουμε ὅτι κάθε σημεῖο M(x,y) τῆς ὑπερβολῆς ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση

(127.2) $$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\gamma^2-\alpha^2} = 1 \ .$$

'Αντίστροφα ἄν ἕνα σημεῖο M(x,y) τοῦ ἐπιπέδου ἱκανοποιεῖ τήν (127.2) θά ἔχουμε:

1ο $|x| \geqq \alpha$, ἄρα $\frac{\gamma}{\alpha}|x| > \alpha$ καί συνεπῶς

$$\frac{\gamma x}{\alpha} + \alpha > 0 \quad , \quad \frac{\gamma x}{\alpha} - \alpha > 0 \quad \text{ὅταν } x > 0$$

$$-\frac{\gamma x}{\alpha} - \alpha > 0 \quad , -\frac{\gamma x}{\alpha} + \alpha > 0 \quad \text{ὅταν } x < 0$$

2ο $$\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\alpha^2}x^2 - y^2 = \gamma^2-\alpha^2 \quad \text{ἤ} \quad \frac{\gamma^2}{\alpha^2}x^2 + \alpha^2 = x^2+\gamma^2+y^2 \ ,$$

ἀπό ὅπου: $\left(\frac{\gamma x}{\alpha}+\alpha\right)^2 = (x+\gamma)^2+y^2$ καί $\left(\frac{\gamma x}{\alpha}-\alpha\right)^2 = (x-\gamma)^2+y^2$.

'Επομένως $+\sqrt{(x+\gamma)^2+y^2} = \frac{\gamma x}{\alpha} + \alpha$, $+\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2} = \frac{\gamma x}{\alpha} - \alpha$ ὅταν $x > 0$,

$+\sqrt{(x+\gamma)^2+y^2} = -\frac{\gamma x}{\alpha} - \alpha$, $+\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2} = -\frac{\gamma x}{\alpha} + \alpha$ ὅταν $x<0$.

"Αρα $E'M - EM = 2\alpha$ ὅταν $x > 0$, $E'M - EM = -2\alpha$ ὅταν $x < 0$. Κατά συνέπεια τό M(x,y) πού ἱκανοποιεῖ τήν (127.2) ἀνήκει στήν ὑπερβολή. 'Η ὑπερβολή ἔχει λοιπόν ἐξίσωση τήν (127.2).

§ 128. 'Επειδή $\gamma > \alpha > 0$, μποροῦμε νά θέσουμε $\gamma^2-\alpha^2 = \beta^2$ μέ $\beta > 0$, ὁπότε ἡ (127.2) γίνεται:

(128.1) $$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \ .$$

Τό τμῆμα A'A τοῦ OX λέγεται διατέμνων (ἤ πρωτεύων) ἄξονας τῆς ὑπερβολῆς. Τό τμῆμα B'B τοῦ OY, ὅπου B'(0,−β), B(0,β) λέγεται μή διατέμνων (ἤ δευτερεύων) ἄξονας. Τό ὀρθογώνιο πού ἔχει κέντρο τό O, πλευρές δέ παράλληλες καί ἴσες μέ B'B καί A'A, λέγεται ὀρθογώνιο τῶν ἀξόνων· ἡ διαγώνιος του ἰσοῦται μέ Ε΄Ε, ἀφοῦ ἔχει μῆκος $2\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = 2\gamma$.

Ἡ ὑπερβολή πού ἔχει διατέμνοντα ἄξονα τόν Β΄Β καί μή διατέμνοντα τόν Α΄Α λέγεται συζυγής τῆς ὑπερβολῆς $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Οἱ ἑστίες της βρίσκονται πάνω στόν ΟΥ σέ ἀπόσταση $\gamma = +\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ ἀπό τό Ο· ἡ ἐξίσωσή της εἶναι κατ᾽ἀναλογία πρός ὅ,τι βρήκαμε παραπάνω

$$\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{x^2}{\alpha^2}=1 \quad ἤ \quad \frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=-1 .$$

Ὅταν $\alpha=\beta$, ἡ ὑπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ λέγεται ἰσόπλευρή (ἤ ἰσοσκελής)· ἡ ἐξίσωσή της εἶναι $x^2-y^2=\alpha^2$. Ἄν στό ὁποιοδήποτε σημεῖο $M_2(x_2,y_2)$ τῆς ἰσόπλευρης ὑπερβολῆς $x^2-y^2=\alpha^2$ ἀντιστοιχίσουμε τό σημεῖο $M(x=x_2,y)$ τῆς ὑπερβολῆς $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ τό ὁποῖο ἔχει τήν ἴδια τετμημένη καί ὁμόσημη τεταγμένη μέ τό M_2, θά ἰσχύουν οἱ σχέσεις

$$x_2^2-y_2^2=\alpha^2 \quad καί \quad x_2^2-\frac{\alpha^2}{\beta^2}y^2=\alpha^2 ,$$

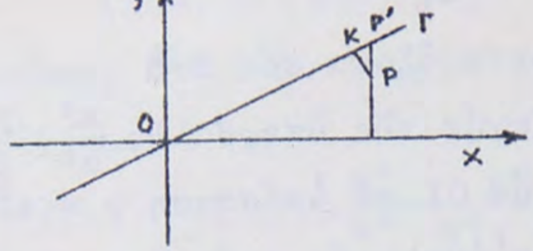
ἀπ᾽ὅπου ἕπεται $\quad y_2^2=\frac{\alpha^2}{\beta^2}y^2 \quad$ καί $\quad y=\frac{\beta}{\alpha}y_2$.

Ἄρα ἡ τεταγμένη τοῦ $M(x_2,y)$ ἔχει πρός τήν τεταγμένη τοῦ ἀντίστοιχου σημείου $M_2(x_2,y_2)$ λόγο σταθερό $\frac{\beta}{\alpha}$. Ἡ ὑπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ μπορεῖ λοιπόν νά ληφθῆ ἀπό τήν ἰσόπλευρη ὑπερβ. $x^2-y^2=\alpha^2$ μέ μιάν "ὁμολογία" ἡ ὁποία ἔχει ἄξονα τήν κοινή εὐθεία τῶν ἑστιῶν, διεύθυνση κάθετη πρός αὐτήν τήν εὐθεία καί λόγο $\frac{\beta}{\alpha}$.

§ 129. <u>Ἀσύμπτωτες τῆς ὑπερβολῆς</u>. Ἡ ὑπερβολή (128.1) ἔχει σημεῖα ὅσο θέλουμε ἀπομακρυσμένα ἀπό τό Ο, ἀφοῦ ἔχει σημεῖα $M(x,y)$ μέ x αὐθαίρετα δοσμένο, ἀρκεῖ νά εἶναι $|x| \geqq \alpha$. Λεπτομερέστερα λέμε ὅτι ἡ ὑπερβολή ἔχει τέσσερεις "ἀπεριόριστους βραχίονες":

τόν $y=+\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2-\alpha^2}$ γιά $\alpha \leqq x$, τόν $y=-\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2-\alpha^2}$ γιά $x \leqq -\alpha$,

τόν $y=+\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2-\alpha^2}$ γιά $x \leqq -\alpha$, τόν $y=-\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2-\alpha^2}$ γιά $\alpha \leqq x$.



Ἕνα σημεῖο $P(x,y)$ τοῦ πρώτου βραχίονα ἔχει ἀπόσταση PK ἀπό τήν εὐθεία ΟΓ : $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ ὅσο θέλουμε μικρή, ἀρκεῖ τό P νά βρίσκεται ἀρκετά μακρια ἀπό τό Ο. Πράγματι, ἄν P' εἶναι τό σημεῖο τῆς εὐθείας τό ὁποῖο ἔχει τό ἴδιο x μέ τό $P(x,y)$, θά ἰσχύη τό ἑξῆς:

$$(PK) = (PP')\,\text{συν}\widehat{XO\Gamma} = \left(\frac{\beta}{\alpha}x - \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2-\alpha^2}\right)\text{συν}\widehat{XO\Gamma} =$$

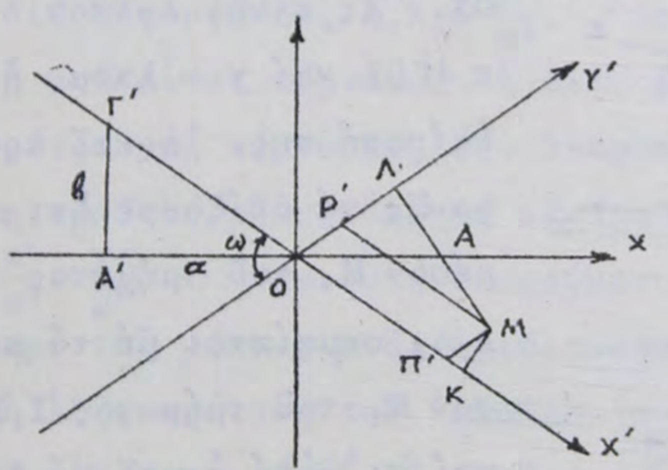
$$= \frac{\beta}{\alpha}\,\frac{x^2-(x^2-\alpha^2)}{x+\sqrt{x^2-\alpha^2}}\cdot\text{συν}\widehat{XO\Gamma} = \frac{\alpha^2}{x+\sqrt{x^2-\alpha^2}}\,\text{εφ}\widehat{XO\Gamma}\,\text{συν}\widehat{XO\Gamma}$$

$$= \frac{\alpha^2}{x+\sqrt{x^2-\alpha^2}}\,\text{ημ}\widehat{XO\Gamma}\,.$$

Ἄρα ἀρκεῖ νά εἶναι $\frac{\alpha^2}{x}\,\text{ημ}\widehat{XO\Gamma} < \eta$, δηλαδή $x > \frac{\alpha^2\,\text{ημ}\widehat{XO\Gamma}}{\eta}$ γιά νά εἶναι ἡ ἀπόσταση (PK) μικρότερη ἀπό τήν ὅσο θέλουμε μικρή ποσότητα η.(Μάλιστα, ἀπό τήν παραπάνω σχέση ἕπεται ὅτι ἡ (PK) ἐλαττώνεται ὅταν τό x αὐξάνη, δηλαδή ὅταν τό P ἀπομακρύνεται ἀπό τό Ο κινούμενο πάνω στό θεωρούμενο βραχίονα τῆς ὑπερβολῆς).

Ἡ εὐθεία $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ λέγεται ἀσύμπτωτη τοῦ βραχίονα $y = +\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2-\alpha^2}$ γιά $\alpha \leqq x$. Γιά λόγους συμμετρίας ὡς πρός τό Ο, ἡ ἴδια εὐθεία εἶναι ἀσύμπτωτη καί τοῦ βραχίονα $y = -\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2-\alpha^2}$ γιά $x \leqq -\alpha$. Γιά λόγους τώρα συμμετρίας ὡς πρός τόν ΟΧ, ἡ εὐθεία $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$ εἶναι ἀσύμπτωτη τῶν δυό ἄλλων ἀπεριόριστων βραχιόνων τῆς ὑπερβολῆς. Τό ζ ε ῦ γ ο ς τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ὑπερβολῆς $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ παριστάνεται ἀπό μιά ἐξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 0$. Τίς ἴδιες ἀσύμπτωτες ἔχει καί ἡ συζυγής ὑπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = -1$. Οἱ ἄξονες ὀρθῆς συμμετρίας τῶν δύο ὑπερβολῶν (δηλαδή ὁ ΟΧ καί ΟΥ) εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τῶν ἀσυμπτώτων. Οἱ ἀσύμπτωτες εἶναι οἱ εὐθεῖες τῶν διαγωνίων τοῦ "ὀρθογωνίου τῶν ἀξόνων". Στήν ἰσόπλευρη ὑπερβολή τό ὀρθογώνιο αὐτό εἶναι τετράγωνο καί οἱ ἀσύμπτωτες τέμνονται ὀρθογώνια. Ἀντιστρόφως, ἄν σέ μιάν ὑπερβολή οἱ ἀσύμπτωτες εἶναι ὀρθογώνιες ἡ ὑπερβολή εἶναι ἰσόπλευρη.

§ 130. Ἐξίσωση τῆς ὑπερβολῆς ὡς πρός τίς ἀσύμπτωτές της γιά ἄξονες. Ἄς πάρουμε τήν ἀσύμπτωτη $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$ (ἤ $\beta x+\alpha y=0$)* γιά νέο ἄξονα τεταγμένων ΟΥ΄. Οἱ θετικές φορές των ἄς ἐκλεχθοῦν ἔτσι πού ἡ ὑπερβολή νά βρίσκεται στό ἐσωτερικό τῆς στοιχειώδους γωνίας τῶν θετικῶν ἡμιαξόνων καθώς καί στό ἐσωτερικό τῆς κατά κορυφή γωνίας. Τό κοινό μῆκος τῶν νέων βασικῶν διανυσμάτων ἄς εἶναι καί τώρα 1 (ὅπως στό ΧΟΥ). Λέγω ὅτι ἡ ὑπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ στό νέο σύστημα Χ΄ΟΥ΄ ἔχει ἐξίσωση:



$$(130.1)\quad x'y' = \frac{\gamma^2}{4}$$

Ἀπόδειξη. Ἔστω Μ ἕνα σημεῖο τῆς ὑπερβολῆς μέ παλιές συντεταγμένες (x,y) καί μέ νέες (x',y'). Οἱ ἀριθμοί x', y' θά εἶναι ὁμόσημοι (θετικοί γιά τό ἕνα κομμάτι τῆς ὑπερβολῆς, ἀρνητικοί γιά τό ἄλλο). Ἄς εἶναι ΜΠ΄ ∥ ΟΥ΄ ΜΡ΄ ∥ ΟΧ΄, ΜΚ ⊥ ΟΧ΄, ΜΛ ⊥ ΟΥ΄. Ἔχουμε $|y'| = (\text{ΜΠ}')$, $|x'| = (\text{ΜΡ}')$, $(\text{ΜΠ}') = (\text{ΜΚ})\frac{1}{\eta\mu\omega}$, $(\text{ΜΡ}') = (\text{ΜΛ})\frac{1}{\eta\mu\omega}$, ὅπου $\omega = \widehat{X'OY'}$. Ἄρα $x'y' = |x'|\,|y'| = (\text{ΜΠ}')(\text{ΜΡ}') = (\text{ΜΚ})(\text{ΜΛ})\frac{1}{\eta\mu^2\omega}$.

Ἀλλά $(\text{ΜΚ}) = \frac{|\beta x+\alpha y|}{+\sqrt{\beta^2+\alpha^2}}$, $(\text{ΜΛ}) = \frac{|\beta x-\alpha y|}{+\sqrt{\beta^2+\alpha^2}}$.

Ἄρα $x'y' = \frac{|\beta^2x^2-\alpha^2y^2|}{\beta^2+\alpha^2}\frac{1}{\eta\mu^2\omega} = \frac{\beta^2x^2-\alpha^2y^2}{\gamma^2\eta\mu^2\omega}$.

Εἶναι ὅμως $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, ἐπομένως $\beta^2x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$, καί

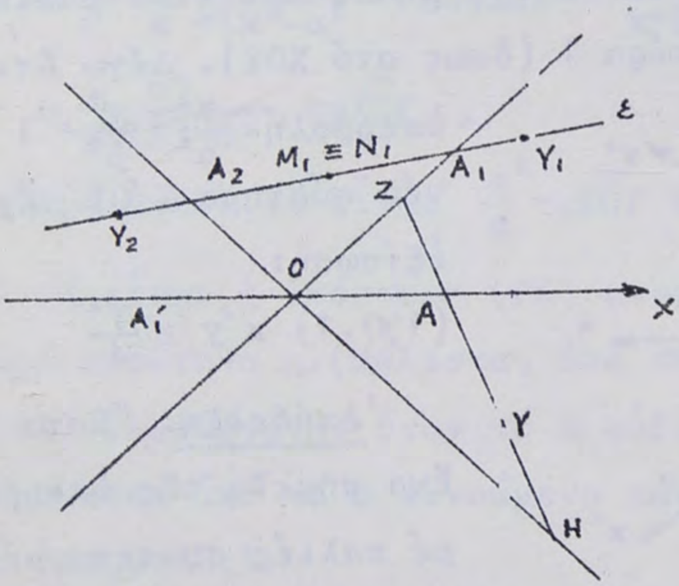
* γιά νέο ἄξονα τετμημένων ΟΧ΄ καί τήν $y = \frac{\beta}{\alpha}x$

$$\alpha = \gamma\sigma\upsilon\nu\,\frac{\omega}{2} \quad , \qquad \beta = \gamma\eta\mu\,\frac{\omega}{2} \quad ,$$

ἄρα $\quad x'y' = \dfrac{\alpha^2\beta^2}{4\gamma^2\eta\mu^2\frac{\omega}{2}\,\sigma\upsilon\nu^2\frac{\omega}{2}} = \dfrac{\gamma^2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\omega}{2}\,\gamma^2\eta\mu^2\frac{\omega}{2}}{4\gamma^2\eta\mu^2\frac{\omega}{2}\,\sigma\upsilon\nu^2\,\frac{\omega}{2}} = \dfrac{\gamma^2}{4}$ ὅ.ἔ.δ.

§ 131. Ἐάν μιά εὐθεία ε κόβη τήν ὑπερβολή $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ στά σημεῖα Y_1, Y_2 καί τίς ἀσύμπτωτές της $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 0$ στά σημεῖα A_1, A_2 τότε θά ἰσχύη ἡ δ ι α ν υ σ μ α τ ι κ ή σχέση $\overline{Y_1A_1} = -\overline{Y_2A_2}$.

Ἀπόδειξη. Ὁ ἰσχυρισμός εἶναι φανερά σωστός ἐάν ε ∥ ΟΥ, λόγω τῆς συμμετρίας καί τῆς ὑπερβολῆς καί τοῦ ζεύγους τῶν ἀσυμπτώτων της ὡς πρός ΟΧ. Ἄς εἶναι λοιπόν ε ∦ ΟΥ καί $y = \lambda x + \mu$ ἡ ἐξίσωσή της. Ἀρκεῖ προφανῶς νά δείξουμε ὅτι τό μέσον M_1 τοῦ τμήματος A_1A_2 συμπίπτει μέ τό μέσον N_1 τοῦ τμήματος Y_1Y_2 καί γι'αὐτό ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι ἡ τετμημένη τοῦ M_1 εἶναι ἴση μέ τήν τετμημένη τοῦ N_1. Ἡ τετμημένη τοῦ M_1 ὅμως ἰσοῦται μέ τό ἡμιάθροισμα τῶν τετμημένων τῶν A_1 καί A_2, ἑπομένως μέ τό ἡμιάθροισμα τῶν ριζῶν τῆς 2βάθμιας ἐξισώσεως $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{(\lambda x+\mu)^2}{\beta^2} = 0$, πού εἶναι ἀποτέλεσμα ἀπαλοιφῆς τοῦ y ἀπό τίς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος



$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 0 \\ y = \lambda x + \mu \end{cases}$$

Ὅμοια, ἡ τετμημένη τοῦ N_1 ἰσοῦται μέ τό ἡμιάθροισμα τῶν ριζῶν τῆς 2βάθμιας ἐξισώσεως $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{(\lambda x+\mu)^2}{\beta^2} = 1$.

Τά δυό αὐτά ἡμιαθροίσματα ἔχουν κοινή τιμή

$$\frac{\lambda\mu}{\beta^2} : \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{\lambda^2}{\beta^2}\right) \qquad \text{δ.έ.δ.}$$

<u>Σχόλιο</u>. Ἡ ἰδιότητα πού ἀποδείξαμε μπορεῖ νά χρησιμεύση γιά νά σχεδιάσουμε ὅσα θέλουμε σημεῖα μιᾶς ὑπερβολῆς τῆς ὁποίας δίδονται οἱ ἀσύμπτωτες καί ἕνα σημεῖο. Π.χ. στό προηγούμενο σχῆμα σχεδιάστηκε τό σημεῖο Υ τῆς ὑπερβολῆς ἀπό τό γνωστό της σημεῖο Α μέ τό νά ληφθῆ τό $\overline{\text{ΗΥ}} = \overline{\text{ΑΖ}}$ πάνω σέ μιάν εὐθεῖα διά τοῦ Α.

§ 132. Τά περί συζυγῶν διαμέτρων στήν ὑπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ εἶναι ἀντίστοιχα ἐκείνων πού ἀναπτύξαμε στόν § 122 γιά τήν ἔλλειψη. Οἱ κλίσεις δυό συζυγῶν διαμέτρων συνδέονται τώρα διά τῆς σχέσεως $\lambda_1\lambda_2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$. Ἀπό τίς δυό συζυγεῖς διαμέτρους ἡ μιά εἶναι τέμνουσα, ἡ ἄλλη μή τέμνουσα. Μῆκος μιᾶς ἡμιδιαμέτρου μή τέμνουσας τήν ὑπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ τό μῆκος ἀπό τό κέντρο Ο μέχρι τῆς συζυγοῦς ὑπερβολῆς $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = -1$ πάνω στή θεωρούμενη διάμετρο. Μέ αὐτόν τόν ὁρισμό τοῦ μήκους μιᾶς ἡμιδιαμέτρου μή τέμνουσας, ἰσχύει τώρα ἡ ἑξῆς πρόταση τοῦ Ἀπολλωνίου:

Ἡ διαφορά $\alpha'^2 - \beta'^2$ τοῦ τετραγώνου τοῦ μήκους α' μιᾶς τέμνουσας ἡμιδιαμέτρου καί τοῦ τετραγώνου τοῦ μήκους β' τῆς μή τέμνουσας συζυγοῦς ἡμιδιαμέτρου εἶναι πάντοτε ἴση μέ $\alpha^2 - \beta^2$. Τό $\alpha'\beta'\eta\mu\omega$, ὅπου ω ἡ στοιχειώδης γωνία τῶν δυό συζυγῶν διαμέτρων, εἶναι πάντοτε ἴσο μέ αβ.

Ἐπίσης ἰσχύει ἡ ἑξῆς πρόταση, ἀντίστοιχη πρός τήν πρόταση τοῦ § 124 μέ ἀπόδειξη ἐντελῶς ὅμοια πρός τήν τοῦ § 124:

Ὡς πρός ἄξονα τετμημένων ΟΧ΄ μιά τέμνουσα διάμετρό της καί ἄξονα τεταγμένων ΟΥ΄ τή μή τέμνουσα συζυγῆ διάμετρο ἡ ὑπερβολή ἔχει ἐξίσωση $\frac{x'^2}{\alpha'^2} - \frac{y'^2}{\beta'^2} = 1$, ὅπου α' καί β' τά μήκη τῶν θεωρούμενων δυό συζυγῶν ἡμιδιαμέτρων.

Διευθετοῦσες.

§ 133. Ἰσχύει καί γιά τήν ὑπερβολή ἡ ἰδιότητα: ὁ λόγος τῆς ἀποστάσεως ὁποιουδήποτε σημείου M τῆς ὑπερβολῆς $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ ἀπό τήν ἑστία $E(\gamma,0)$ πρός τήν ἀπόσταση τοῦ M ἀπό τήν εὐθεία $x=\frac{\alpha^2}{\gamma}$ εἶναι ἴσος μέ $\frac{\gamma}{\alpha}\ (>1)$.

Ἀντιστρόφως, ἕνα σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου μέ λόγο τῶν παραπάνω ἀποστάσεων ἴσο πρός $\frac{\gamma}{\alpha}$ ἀνήκει στήν ὑπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

Ἡ ἀπόδειξη ἀντιστοιχεῖ τελείως στήν τοῦ § 125. Γιά λόγους συμμετρίας ὡς πρός OY ἔχουμε: Ἡ ὑπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ εἶναι ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου πού ὁ λόγος τῆς ἀπόστασής των ἀπό τό $E'(-\gamma,0)$ πρός τήν ἀπόστασή τους ἀπό τήν εὐθεία $x=-\frac{\alpha^2}{\gamma}$ εἶναι ἴσος μέ $\frac{\gamma}{\alpha}$. Οἱ δυό εὐθεῖες $x=\frac{\alpha^2}{\gamma}$ καί $x=-\frac{\alpha^2}{\gamma}$ λέγονται διευθετοῦσες τῆς ὑπερβολῆς συζευγμένες μέ τίς ἑστίες $E(\gamma,0)$ καί $E'(-\gamma,0)$ ἀντιστοίχως.

§ 134. Ἐάν μεταφέρουμε τό σύστημα XOY τῶν ἀξόνων κατά τό διάνυσμα $(\alpha,0)$ ἔτσι πού νέα ἀρχή νά εἶναι ἡ κορυφή A τῆς ὑπερβολῆς, τότε ἡ ἐξίσωση τῆς ὑπερβολῆς στό νέο σύστημα συντεταγμένων θά εἶναι

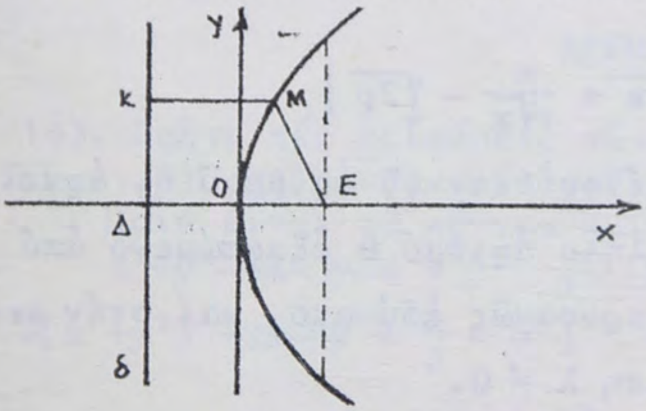
$$y'^2 = 2px' + \frac{\beta^2}{\alpha^2}x'^2 \quad ,$$

ὅπου $p=\frac{\beta^2}{\alpha}$ εἶναι τό μισό μῆκος τῆς χορδῆς διά τῆς ἑστίας $E(\gamma,0)$ κάθετα πρός τήν εὐθεία τῶν ἑστιῶν. Μέ ἄλλα λόγια τό τετράγωνο τῆς τεταγμένης ἑνός ὁποιουδήποτε σημείου τῆς ὑπερβολῆς ὑπερβάλλει τό ὀρθογώνιο $2px'$ κατά τό τετράγωνο $\frac{\beta^2x'^2}{\alpha^2}$. Ἀπ' ἐδῶ προέρχεται ἡ ὀνομασία ὑπερβολή.

ΠΑΡΑΒΟΛΗ

§ 135. Παραβολή λέγεται ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων ἑνός ἐπιπέδου πού ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπό δοσμένο σημεῖο E καί ἀπό δοσμένη εὐθεία δ τοῦ ἐπιπέδου· τό E ὑποτίθεται ὅτι δέν κεῖται πάνω στήν δ καί λέγεται ἑστία, ἡ δέ δ λέγεται διευθετοῦσα τῆς παραβολῆς. Ἡ εὐθεία διά τοῦ Ε καί ⊥ δ εἶναι προφανῶς ἄξονας ὀρθῆς συμμετρίας τοῦ τόπου. Ἔστω Δ τό σημεῖο τομῆς του μέ τή διευθετούσα. Τό μέσο Ο τοῦ τμήματος ΔΕ εἶναι προφανῶς σημεῖο τοῦ τόπου. Τό παίρνουμε γιά ἀρχή συντεταγμένων· τόν ἄξονα τετμημένων ΟΧ τόν παίρνουμε πάνω στόν ἄξονα ὀρθῆς συμμετρίας τοῦ τόπου μέ θετική φορά τήν $\overrightarrow{OE}$ καί τόν ἄξονα τεταγμένων $OY \perp OX$ (ἐννοεῖται μέ θετική φορά $\overrightarrow{OY}$ τέτοιαν πού $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}) = \frac{\pi}{2}$).

Γιά νά βροῦμε τήν ἐξίσωση τῆς παραβολῆς ἀναφορικῶς πρός τό παραπάνω σύστημα, παρατηροῦμε ὅτι ὁ τόπος ἔχει δυό σημεῖα πάνω στήν εὐθεία τήν $\perp OX$ διά τῆς ἑστίας Ε, σέ ἀπόσταση ἀπό τό Ε ἴση μέ ΔΕ. Γι' αὐτό παριστάνουμε τήν ἀπόσταση (ΔΕ) μέ τό γράμμα p (πρβλ. §§ 126 καί 134), ὁπότε ἡ ἑστία θά



ἔχη συντεταγμένες $(\frac{p}{2}, 0)$ ἡ δέ διευθετούσα, ἐξίσωση $x = -\frac{p}{2}$. Γιά νά ἀνήκη ἕνα σημεῖο $M(x,y)$ στήν παραβολή πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἔχουμε

$$(EM)^2 = (x - \frac{p}{2})^2 + (y-0)^2 = (MK)^2 = (x + \frac{p}{2})^2$$

δηλαδή

(135.1) $$y^2 = 2px \quad .$$

Ἄρα αὐτή εἶναι ἡ ἐξίσωση τῆς παραβολῆς στό παραπάνω σύστημα συντεταγμένων.

§ 136. Ἐπειδή τό p, πού καλεῖται παράμετρος τῆς παραβολῆς, λήφθηκε θετικό, πρέπει νά εἶναι $x \geq 0$, γιά νά μπορῆ τό y νά ἔχη ἀντίστοιχη πραγματική τιμή. Ἔτσι ἡ παραβολή ἔχει δυό "ἀπεριόριστους" βραχίονες:

τόν $y = +\sqrt{2px}$ γιά $x \geqq 0$

καί τόν $y = -\sqrt{2px}$ γιά $x \geqq 0$.

Οἱ δυό βραχίονες εἶναι φυσικά συμμετρικοί ὁ ἕνας τοῦ ἄλλου ὡς πρός τόν ἄξονα ΟΧ. Κανένας ἀπό τούς δυό βραχίονες δέν ἔχει ἀσύμπτωτη εὐθεία. Μέ ἄλλα λόγια, δέν ὑπάρχει εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου μέ τήν ἰδιότητα, ἡ ἀπόσταση ἑνός σημείου, πού μετακινεῖται πάνω σ'ἕνα βραχίονα, ἀπό τήν εὐθεία νά γίνεται μικρότερη ἀπό κάθε δοσμένη (θετική) ποσότητα, ὅταν τό σημεῖο ἀπομακρυνθῆ ἀρκετά ἀπό τό 0 πάνω στόν βραχίονα.

Πράγματι μιά εὐθεία $\perp$ ΟΧ δέν μπορεῖ προφανῶς νά ἔχη αὐτήν τήν ἰδιότητα. Μιά εὐθεία πάλι μή κάθετη στόν ΟΧ, ἔχει ἐξίσωση $y = \lambda x+\mu$, ὅπου λ καί μ ὁρισμένοι ἀριθμοί. Ἄν αὐτή ἡ εὐθεία ἦταν ἀσύμπτωτη τοῦ ἑνός κλάδου, π.χ. τοῦ $y=+\sqrt{2px}$, θά ἔπρεπε ἡ ποσότητα

$$\left|\lambda x+\mu - \sqrt{2px}\right| = \sqrt{x}\cdot\left|\lambda\sqrt{x} + \frac{\mu}{+\sqrt{x}} - \sqrt{2p}\right|$$

νά γίνεται μικρότερη κάθε δοσμένου θετικοῦ ἀριθμοῦ η, ἀρκεῖ τό x νά εἶναι > ἀπό ἕναν κατάλληλο ἀριθμό Θ ἐξαρτώμενο ἀπό τό δοσμένο η. Αὐτό ὅμως εἶναι προφανῶς ἀδύνατο, καί στήν περίπτωση $\lambda = 0$ καί στήν περίπτωση $\lambda \neq 0$.

§ 137. <u>Πρόταση</u>. Τά μέσα παράλληλων χορδῶν τῆς παραβολῆς κεῖνται πάνω σέ μιάν εὐθεία παράλληλη πρός τόν ἄξονα ὀρθῆς συμμετρίας ΟΧ.

<u>Ἀπόδειξη</u>. Ἄν οἱ χορδές εἶναι ∥ ΟΥ, τά μέσα τους βρίσκονται πάνω στόν ἴδιο τόν ΟΧ, ἄρα ἡ πρόταση ἀληθεύει. Ἄν οἱ χορδές δέν εἶναι ∥ ΟΥ, ἔστω λ ἡ κλίση τους καί $y = \lambda x+t$ ἡ ἐξίσωσή μιᾶς ὁποιασδήποτε M_1M_2 ἀπό αὐτές. Τό μέσο της θά ἔχη τεταγμένη τό ἡμιάθροισμα τῶν ριζῶν τῆς ἐξίσωσης

$$y = \lambda\,\frac{y^2}{2p} + t \qquad ,$$

δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρός y, ἡ ὁποία προκύπτει μέ ἀπαλοιφή τοῦ x ἀπό τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ y = \lambda x + t \end{cases} .$$

Τό ἡμιάθροισμα αὐτό ἰσοῦται μέ $\frac{p}{\lambda}$. Ἡ τεταγμένη τοῦ μέσου μιᾶς χορδῆς κλίσεως λ εἶναι λοιπόν πάντοτε ἴση μέ $\frac{p}{\lambda}$. Ἄρα τά μέσα ὅλων τῶν παράλληλων χορδῶν κλίσεως λ κεῖνται πάνω στήν εὐθεία $y = \frac{p}{\lambda}$, πού εἶναι $\parallel OX$, ὅ.ἔ.δ.

Ἡ εὐθεία $y = \frac{p}{\lambda}$ (γιά $\lambda \neq \infty$, 0) λέγεται διάμετρος τῆς παραβολῆς ἀντίστοιχη τῶν χορδῶν κλίσεως λ. Ὅταν $\lambda = \infty$, ἡ ἀντίστοιχη διάμετρος εἶναι ἡ εὐθεία $y = 0$, δηλαδή ὁ ἄξονας ὀρθῆς συμμετρίας τῆς παραβολῆς· ὅταν $\lambda = 0$, ἀντίστοιχη διάμετρος πρέπει νά θεωρηθῆ ἡ ἐπ' ἄπειρο εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

143. Βρῆτε τίς ἐξισώσεις τῶν κύκλων μέ κέντρα τά σημεῖα $K_1(-3,-5)$, $K_2(4,-3)$ καί ἀκτῖνες ἀντιστοίχως $4/3$, $+\sqrt{2}$.

Ποιά εἶναι τά κέντρα καί οἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων

$$x^2+y^2-4x-3y-4 = 0 \quad , \quad x^2+y^2+6x+8y+2 = 0 \quad ,$$

$$2(x^2+y^2) + 2x - 5y + \frac{1}{2} = 0 \quad , \quad 4x^2+4y^2-7x+6y-8 = 0 \quad .$$

$$x^2+y^2-4x+5y = 0 \; .$$

Γράψτε τήν ἐξίσωση τοῦ κύκλου πού ἔχει κέντρο τό $K(-2,3)$ καί πού περνᾶ ἀπό τό σημεῖο $M(-5,-2)$, ἐπίσης τήν ἐξίσωση τοῦ κύκλου πού ἔχει κέντρο τό $\Lambda(4,-3)$ καί πού περνᾶ ἀπό τό $O(0,0)$.

144. Δεῖξτε ὅτι ἡ ἐξίσωση τοῦ κύκλου πού περνᾶ ἀπό τρία ὄχι πάνω σέ εὐθεία σημεῖα $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, $M_3(x_3,y_3)$ μπορεῖ νά γραφῆ μέ τήν ἑξῆς μορφή:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \; .$$

145. Ποιά εἶναι ἡ γενική ἐξίσωση τῶν κύκλων πού ἔχουν τά κέντρα τους πάνω στόν ἄξονα OX ἤ πάνω στόν OY;

Ποιά εἶναι ἡ γενική ἐξίσωση τῶν κύκλων πού περνοῦν ἀπό τήν ἀρχή $O(0,0)$;

146. Προσδιορίστε τά κοινά σημεῖα τοῦ κύκλου $(x-2)^2+(y+4)^2=25$ καί τῆς εὐθείας $x-2y-4=0$. Προσδιορίστε τίς συντεταγμένες τοῦ μέσου τῆς χορδῆς τοῦ κύκλου $x^2+y^2-10x+8y-14=0$ ἡ ὁποία κεῖται πάνω στήν εὐθεία $x+5y-1=0$.

Προσδιορίστε τά κοινά σημεῖα τῶν δύο κύκλων

$$(x-2)^2+(y+3)^2=16 \quad \text{καί} \quad x^2+y^2=5 .$$

Προσδιορίστε τίς συντεταγμένες τοῦ μέσου τῆς κοινῆς χορδῆς τῶν δύο κύκλων

$$(x+1)^2+(y-2)^2=45 \quad , \quad (x-3)^2+(y+1)^2=9 .$$

147. Δεῖξτε ὅτι τρεῖς κύκλοι ἔχουν, λαμβανόμενοι δυό δυό, τρεῖς ριζικούς ἄξονες πού ἀνήκουν σέ μιά καί τήν ἴδια δέσμη εὐθειῶν.

148. Ἐκφράστε συναρτήσει τοῦ χρόνου t, μετρούμενου σέ δευτερόλεπτα, τίς συντεταγμένες τοῦ σημείου $M(x,y)$ πού κινεῖται ὁμοιόμορφα πάνω στήν περιφέρεια μέ κέντρο τό $O(0,0)$ καί ἀκτῖνα ϱ cm ἔτσι πού νά διαγράφη ἑκάστοτε στό χρονικό διάστημα ἑνός δευτερολέπτου τόξο ἴσο μέ ω ἀκτίνια κατά τή θετική φορά στροφῆς καί πού στή χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται στή θέση $A(\varrho,0)$. Ὑποτίθεται ὅτι $|\vec{i}|=|\vec{j}|=1$ cm.

Τί τόπο παριστάνουν οἱ παραμετρικές ἐξισώσεις

$$\begin{cases} x = x_0+\alpha\sigma\upsilon\nu(\omega u+\varphi_0) \\ y = y_0+\alpha\eta\mu(\omega u+\varphi_0) \end{cases}$$

ὅπου x_0, y_0, α, $\omega \neq 0$, φ_0 δοσμένοι ἀριθμοί καί u ἡ παράμετρος μέ πεδίο μεταβολῆς τό $0 \leqq u \leqq \frac{2\pi}{\omega}$.

149*. Βρῆτε τίς συνθῆκες τίς ἀναγκαῖες καί ἱκανές γιά νά εἶναι ἡ εὐθεία $Ax+By+\Gamma=0$ τέμνουσα ἤ ἐφαπτομένη ἤ ἐξωτερική εὐθεία τοῦ κύκλου $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\varrho^2$ ἤ τοῦ κύκλου

$$x^2+y^2+2\Delta x+2Ey+Z=0 .$$

150* Βασιζόμενοι στό ὅτι ἐφαπτομένη κύκλου εἶναι μιά εὐθεία κάθετη στό ἄκρο ἀκτίνας του βρῆτε τίς ἐξισώσεις τῶν ἐφαπτομένων τῶν κύκλων $x^2+y^2=\alpha^2$, $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\varrho^2$, $x^2+y^2+2\Delta x+2Ey+Z=0$ στό σημεῖο τους $M(x_1,y_1)$. Ἐφαρμόστε τούς τύπους πού θά βρῆτε παίρνοντας $\alpha=4$, $x_0=3$, $y_0=-5$, $\varrho=6$, $\Delta=-5$, $E=3/2$, $Z=-4$.

151* Δεῖξτε ὅτι ἡ ἐξίσωση

$$\lambda_1(x^2+y^2+2\Delta_1x+2E_1y+Z_1) + \lambda_2(x^2+y^2+2\Delta_2x+2E_2y+Z_2) = 0$$

ὅπου $\Delta_1,\dots, Z_2$ δοσμένοι ἀριθμοί καί λ_1, λ_2 α ὐ θ α ί ρ ε τ ο ι πολλαπλασιαστές μέ $|\lambda_1|+|\lambda_2|\neq 0$, παριστάνει μιά μονοπαραμετρική ἀπειρία κύκλων (ἡ ὁποία λέγεται δέσμη κύκλων). Οἱ κύκλοι διέρχονται ὅλοι ἀπό τά κοινά σημεῖα τῶν δυό κύκλων

$$x^2+y^2+2\Delta_1x+2E_1y+Z_1=0 \quad , \quad x^2+y^2+2\Delta_2x+2E_2y+Z_2=0 \ .$$

Διακρίνονται τρεῖς περιπτώσεις καθ'ὅσο οἱ δυό αὐτοί κύκλοι (πού ἐξυπακούονται ὄχι συμπίπτοντες) τέμνονται σέ δυό πραγματικά σημεῖα, ἐφάπτονται ὁ ἕνας τοῦ ἄλλου ἤ δέν ἔχουν κοινά πραγματικά σημεῖα. Τά παραπάνω ἰσχύουν καί ὅταν ὁ ἕνας κύκλος ἀντικατασταθῆ μέ μιάν εὐθεία, ὁπότε ἡ θεωρούμενη ἐξίσωση εἶναι τῆς μορφῆς

$$\lambda_1(x^2+y^2+2\Delta_1x+2E_1y+Z_1) + \lambda_2(Ax+By+\Gamma) = 0 \ .$$

152.* Βρῆτε τή γενική ἐξίσωση τῶν κύκων πού περνοῦν ἀπό τά δυό δοσμένα σημεῖα $M_1(-3,5)$, $M_2(6,7)$. Γενικεῦστε παίρνοντας $M_1(x_1,y_1)$ καί $M_2(x_2,y_2)$.

153.* Ἀπό τό σημεῖο $P(\xi,\eta)$, ἐξωτερικό ὡς πρός τόν κύκλο $x^2+y^2=\alpha^2$ ἄγουμε τίς δυό ἐφαπτόμενες στόν κύκλο. Δεῖξτε ὅτι ἡ εὐθεία τῶν δυό σημείων ἐπαφῆς ἔχει ἐξίσωση $\xi x+\eta y=\alpha^2$. (Ὑπόδ. Θά θεωρήσετε τίς συντεταγμένες τυχόντος ἀπό τά σημεῖα ἐπαφῆς ὡς ἀγνώστους x_1, y_1 καί θά γράφετε ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου (βλ.ἄσκ. 150*) σ'αὐτό τό σημεῖο περνᾶ ἀπό τό $P(\xi,\eta)$).

Χρησιμοποιώντας τό παραπάνω μπορεῖτε 1ο νά προσδιορίσετε τίς συντεταγμένες τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν δυό ἐφαπτομένων καί 2ο νά γράφετε τίς ἐξισώσεις τῶν ἐφαπτομένων.

Ἐφαρμόστε τή μέθοδο στήν ἀναλυτική εὕρεση τῶν ἐφαπτομένων διά τοῦ $P(-5,9)$ στόν κύκλο $x^2+y^2 = 16$, καθώς καί τῶν ἐφαπτομένων διά τοῦ $P(-3,4)$ στόν

$$(x-6)^2+(y+2)^2=40 \ .$$

Ἡ εὐθεία πού ἔχει ἐξίσωση $\xi x+\eta y = \alpha^2$, ὅπου (ξ,η) δοσμένοι πραγματικοί ἀριθμοί, λέγεται "πολική" τοῦ σημείου $M(\xi,\eta)$ ὡς πρός τόν κύκλο $x^2+y^2 = \alpha^2$. Ἀποδεῖξτε τήν ἑξῆς ἰδιότητά της: Ἐάν κόψουμε τόν κύκλο καί τήν πολική μέ μιάν ὁποιαδήποτε εὐθεία ε διά τοῦ $M(\xi,\eta)$, τό ζεῦγος τῶν σημείων τομῆς T_1, T_2 τῆς ε μέ τόν κύκλο χωρίζεται ἁρμονικά ἀπό τό ζεῦγος τῶν σημείων M, Π, ὅπου Π τό σημεῖο τομῆς τῆς ε μέ τήν πολική. Ἐφαρμογή, μέ σχέδιο, στά $M(-5, -3)$ καί $x^2+y^2= 49$.

154. Δίδονται δυό εὐθεῖες ε_1, ε_2 πού κόβονται. Θεωροῦμε τό

τμῆμα P_1P_2 μεταβλητῆς θέσης ἀλλά δοσμένου σταθεροῦ μήκους c πού συνδέει ἕνα σημεῖο P_1 τῆς ε, μέ ἕνα σημεῖο P_2 τῆς ε_2. Στό ἄκρο P_1 τοῦ P_1P_2 ἄγουμε τήν κάθετη στήν ε_1, στό ἄκρο P_2, τήν κάθετη στήν ε_2. Νά προσδιοριστῆ ἀναλυτικά ὁ γεωμετρικός τόπος τοῦ σημείου τομῆς τῶν δυό καθέτων.

155. Γράψτε τίς τρεῖς σχέσεις πού συνδέουν τά μεγέθη α,β,γ, ε,p πού χρησιμοποιήθηκαν στή μελέτη τῆς ἔλλειψης καί ἐκφράστε τρία ὁποιαδήποτε ἀπό αὐτά διά τῶν ἄλλων δυό (λαμβάνοντας ὑπ'ὄψη καί τούς περιορισμούς πού ἰσχύουν γι'αὐτά).

Κατασκευάστε μέ κανόνα καί διαβήτη δυό ὁποιαδήποτε ἀπό τά τμήματα α,β,γ,p ὑποθέτοντας τά δυό ἄλλα δοσμένα, καί τοποθετῆστε αὐτά ἑκάστοτε στήν πρέπουσα θέση.

Πραγματευθῆτε τό ἀντίστοιχο ζήτημα γιά τήν ὑπερβολή.

156. Δεῖξτε ὅτι ἡ ἐξίσωση $A(x-x_0)^2 + \Gamma(y-y_0)^2 + Z = 0$ ὅπου $A\Gamma > 0$ καί $AZ < 0$, παριστάνει (σέ ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων) ἔλλειψη καί προσδιορίστε τό κέντρο καθώς καί τά μήκη τῶν ἡμιαξόνων. Ὅμοια δεῖξτε ὅτι ἡ ἴδια ἐξίσωση, ὅταν $A\Gamma < 0$ καί $Z \neq 0$, παριστάνει ὑπερβολή, προσδιορίστε δέ πάλι τό κέντρο καί τά μήκη τῶν ἡμιαξόνων.

Τί συμβαίνει ὅταν $A\Gamma \neq 0$ καί $Z = 0$;

Δῶστε ἀντίστοιχα ἀριθμητικά παραδείγματα.

156α. Προσδιορίστε ἀναλυτικά 1ο ἀκριβῶς μέ τριγωνομετρικές ἐξισώσεις 2ο κατά προσέγγιση μέ χρήση πινάκων τήν ἐκ κέντρου ἀνωμαλία τῶν σημείων τῆς ἔλλειψης $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, πού κεῖνται πάνω στίς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τῶν ἀξόνων.

Σχεδιάστε τά ἀντίστοιχα σχήματα παίρνοντας $|\bar{i}| = |\bar{j}| = 1$cm.

158. Προσδιορίστε τή διάμετρο τῆς ἔλλειψης $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{8} = 1$ τήν συζυγῆ πρός τήν $y = 2x$. Ποιά εἶναι ἡ (ὀξεία) γωνία τῶν δυό διαμέτρων καί ποιά τά μήκη τους; Ὅμοιο ζήτημα γιά τήν ὑπερβολή $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{49} = 1$. Ἐπαληθεῦστε καί στίς δυό περιπτώσεις τά θεωρήματα τοῦ Ἀπολλωνίου.

159. Ποιά εἶναι ἡ ἐξίσωση τῆς ἔλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ ὡς πρός τό σύστημα πού ἔχει ἀρχή O' τό $A'(-\alpha,0)$, $\overrightarrow{O'X'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{A'E'}$, ὅπου $E'(-\gamma,0)$, καί $O'Y' \perp O'X'$; Ποιά εἶναι ἡ γενική ἐξίσωση τῶν ἀπειροπληθῶν ἐλλείψεων πού ἔχουν κοινά τά ἑξῆς τρία δοσμένα στοιχεῖα: τήν ἑστία E', τήν εὐθεία τῶν ἑστιῶν καί τήν παράμετρο p, ὡς πρός τό ὀρθογών. σύστημα συντεταγμένων μέ ἀρχή O' τήν κορυφή A' τῆς ἔλλειψης τήν προσκείμενη στήν ἑστία E' καί ἄξονα $\overrightarrow{O'X'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{A'E'}$; Τί γίνεται αὐτή ἡ ἐξίσωση ὅταν, δια-

ρώντας τήν Ε΄, τήν εὐθεῖα τῶν ἑστιῶν καί τό p ἀμετάβλητα, κάμουμε τήν ἄλλη ἑστία Ε ν᾽ἀπομακρυνθῆ ἀπεριόριστα; Τί γεωμετρικό συμπέρασμα βγάζετε;

160. Δεῖξτε ὅτι ἄν εὐθύγραμμο τμῆμα ΚΛ σταθεροῦ μήκους κινῆται μέσα στό ἐπίπεδο ἔτσι πού τά ἄκρα του νά ὀλισθαίνουν πάνω σέ δυό κάθετες ἀμοιβαίως εὐθεῖες, κάθε σημεῖο τῆς εὐθείας ΚΛ θά γράφη ἔλλειψη.

161. Βρῆτε τίς ἐξισώσεις τῶν διευθετουσῶν τῆς ἔλλειψης $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{6}=1$.

Σχεδιάστε τίς διευθετοῦσες μέ κανόνα καί διαβήτη. Βρῆτε τήν ἐξίσωση τῆς παραπάνω ἔλλειψης σέ πολικές συντεταγμένες ὅταν πάρετε γιά πόλο μιάν ἑστία Ε΄ καί γιά πολικόν ἄξονα τήν εὐθεία τῶν ἑστιῶν μέ θετική φορά ἀπό τήν Ε΄ πρός τήν μή προσκείμενη κορυφή Α τῆς ἔλλειψης.

162. Προσδιορίστε ἀναλυτικά τίς ἀσύμπτωτες τῶν ὑπερβολῶν

$$4(x-4)^2-5(y-1)^2-60=0 \quad \text{καί} \quad 9(x+1)^2-8(y-2)^2-10=0.$$

Δῶστε τίς ἐξισώσεις τῶν ὑπερβολῶν αὐτῶν ὡς πρός ἄξονες συντεταγμένων ἑκάστοτε τίς ἀσύμπτωτές των.

163. Δεῖξτε ὅτι ἡ ἐξίσωση $xy=-\theta$, ὅπου θ θετικός ἀριθμός παριστάνει μιάν ὑπερβολή μέ ἀσύμπτωτες τούς ἄξονες συντεταγμένων (ἡ γωνία $\widehat{XOY}=\omega$ τῶν ἀξόνων δέν ὑποτίθεται ὀρθή ἀλλά ἐλεύθερα ἐκλέξιμη).

Ποιά εἶναι ἡ ἐξίσωση τῆς ὑπερβολῆς αὐτῆς ἀναφερμένης στούς ἄξονες ὀρθῆς συμμετρίας της; Σχεδιάστε μιά κορυφή τῆς ὑπερβολῆς $xy=-\frac{9}{4}$ παίρνοντας τήν γωνία τῶν ἀξόνων $XOY \cong 60^0$ καί τό μῆκος $|\bar{i}|=|\bar{j}|=1$ cm. Ἀναχωρώντας ἀπό τή σχεδιασμένη κορυφή, σχεδιάστε μιά σειρά ἄλλων σημείων καί τῶν δυό κομματιῶν τῆς ὑπερβολῆς μέ τή μέθοδο τοῦ § 131, Σχόλιο.

164. Βρῆτε τήν ἐξίσωση τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἔλλειψης $\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}=1$, τῆς ὑπερβολῆς $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, τῆς παραβολῆς $y^2=2px$ σ᾽ἕνα σημεῖο τους $M_1(x_1,y_1)$ ἑκάστοτε, χρησιμοποιώντας τήν ἰδιότητα ὅτι ἡ ἐφαπτομένη στό M_1 εἶναι εὐθεία διά τοῦ $M_1(x_1,y_1)$ ἡ ὁποία ἔχει ἕ ν α μ ό ν ο κοινό σημεῖο μέ τή γραμμή, τό $M_1(x_1,y_1)$. (Ἡ ζητούμενη ἐξίσωση μπορεῖ νά λάβη τήν μορφή $\frac{x_1x}{\alpha^2}+\frac{y_1y}{\beta^2}=1$, $\frac{x_1x}{\alpha^2}-\frac{y_1y}{\beta^2}=1$, $y_1y=p(x+x_1)$ ἀντιστοίχως). Ἐφαρμόστε τούς τύπους, πού θά βρῆτε στά εἰδικά παραδείγματα $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1$, $y^2=6x$, παίρνοντας

γιά $M_1(x_1,y_1)$ τό ἕνα ἤ τό ἄλλο ἄκρο τῆς χορδῆς διά μιᾶς ἑστίας καθέτως πρός τόν ἄξονα OX.

165. Δεῖξτε (μέ μιά μεταφορά τοῦ συστήματος ἀξόνων XOY) ὅτι ἡ ἐξίσωση $\Gamma y^2+2\Delta x+2Ey+Z = 0$, ὅπου Γ, Δ, Ε, Ζ δοσμένοι συντελεστές, οἱ Γ καί $\Delta \neq 0$, παριστάνει παραβολή καί προσδιορίστε ἀναλυτικῶς τήν ἑστία, τόν ἄξονα ὀρθῆς συμμετρίας, τήν παράμετρο p καί τή διευθετοῦσα,

Δεῖξτε ὅτι ἡ ἐξίσωση

$$y = \frac{x^2}{l} + \frac{m_1}{m_2}x + n$$

ὅπου l, m_1, m_2, n δοσμένα προσημασμένα μήκη, παριστάνει παραβολή καί προσδιορίστε τήν ἑστία της, τόν ἄξονα ὀρθῆς συμμετρίας, τή διευθετοῦσα καί τήν παράμετρο.

166. Γράψτε τήν ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά ἐφάπτωνται (ἀδιάφορα ἄν ἐσωτερικῶς ἤ ἐξωτερικῶς) δυό κύκλοι $(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2 = \varrho_1^2$ καί $(x-\alpha_2)^2+(y-\beta_2)^2 = \varrho_2^2$. Χρησιμοποιῆστε τή συνθήκη γιά νά προσδιορίσετε ἀναλυτικά τό γεωμετρ. τόπο τῶν κέντρων τῶν κύκλων οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται ἑνός δοσμένου κύκλου καί μιᾶς δοσμένης εὐθείας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IX

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΣΤΑΘΕΡΑ ΚΑΙ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ

§ 138. **Σ'ἕνα μαθηματικό ζήτημα καλοῦμε σταθερά ἕνα σημάδι (ἕνα σύμβολο) πού παριστάνει ἕναν ὁρισμένο ἀριθμό· ὁ ἀριθμός λέγεται τιμή τῆς σταθερᾶς. Ἀντίθετα καλοῦμε μεταβλητή ἕνα σημάδι (ἕνα σύμβολο) πού παριστάνει ἕναν ὁποιοδήποτε ἀριθμό ἀπό ἕνα ὁρισμένο σύνολο, περισσότερων τοῦ ἑνός (συνήθως ἄπειρων κατά τό πλῆθος) ἀριθμῶν. Κάθε ἀριθμός τοῦ συνόλου λέγεται τιμή τῆς μεταβλητῆς, τό δέ σύνολο πεδίο μεταβολῆς τῆς μεταβλητῆς.**

Π.χ. στή μελέτη μιᾶς ὁρισμένης ἔλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2} = 1$, τά σημάδια 1,2,α,β εἶναι σταθερές μέ τιμή θετική, τά x καί

y μεταβλητές μέ πεδία μεταβολῆς τά λεγόμενα "διαστήματα ἀριθμῶν" $-\alpha \leqq x \leqq \alpha$ καί $-\beta \leqq y \leqq \beta$ ἀντιστοίχως. Στή μελέτη τοῦ ἀθροίσματος

$$S_\nu = \alpha + \alpha\lambda + \alpha\lambda^2 + \ldots + \alpha\lambda^{\nu-1}$$

τῶν ν πρώτων ὅρων μιᾶς ὁρισμένης γεωμετρικῆς προόδου, ὅπου ν ἕνας ὁποιοσδήποτε φυσικόςἀριθμός, τά μέν σημάδια α καί λ εἶναι σταθερές, τό δέ ν μεταβλητή μέ πεδίο μεταβολῆς τό σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ($\nu = 1,2,3,\ldots$).

Ὅσο γιά τό σημάδι S_ν, ἄν $\alpha\lambda = 0$, τότε τό S_ν εἶναι μιά σταθερά (παριστάνει τόν ἀριθμό α), ἄν ὅμως εἶναι $\alpha\lambda \neq 0$, τότε τό S_ν εἶναι μιά μεταβλητή ἡ ὁποία παριστάνει ἕναν ὁποιοδήποτε ἀπό τούς ἄπειρους ἀριθμούς

$$S_\nu = \frac{\alpha}{1-\lambda} - \frac{\alpha\lambda^\nu}{1-\lambda} \quad \text{ὅταν } \lambda \neq 1 \text{, γιά } \nu = 1,2,3,\ldots,$$
$$S_\nu = \nu\alpha \quad \text{ὅταν } \lambda = 1 \text{, γιά } \nu = 1,2,3,\ldots$$

ΠΕΔΙΑ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

§ 139. Τά πιό συχνά παρουσιαζόμενα πεδιά μεταβολῆς εἶναι τά ἀκόλουθα:

1. Τό σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν: $\nu = 1,2,3,4,\ldots$
2. Τό σύνολο τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν πού εἶναι $\geqq 0$:
$$\mu = 0,1,2,3,4,\ldots$$
3. Τό σύνολο τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν:
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$
4. Τό σύνολο τῶν σύμμετρων ἀριθμῶν:

$$T = \frac{0}{1} \left| \pm\frac{1}{1} \right| \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{2}{1} \left| \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{3}{1} \right| \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{1} \Big|$$
$$\pm\frac{1}{5}, \pm\frac{5}{1} \left| \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{2}{5}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{5}{2} \quad \pm\frac{6}{1} \right| \ldots$$

Ὁ νόμος πού ἀκολουθοῦμε στήν παραπάνω κατάταξη τῶν σύμμετρων ἀριθμῶν εἶναι ὁ ἑξῆς: γράφουμε κατά σειρά τίς ὁμάδες τῶν ἀνάγωγων κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}$ τά ὁποῖα ἔχουν ἄθροισμα ἀριθμητοῦ καί παρανομαστοῦ ἴσο μέ 1,2,3,4,5,6,7, κ.ο.κ.· μέσα πάλι σέ κάθε ὁμάδα γράφουμε τά κλάσματα ἀνά δυό στή σειρά κατά αὐξάνον ἀπόλυτο μέγεθος.

5. Τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Τό σύνολο αὐτό λέγεται διάστημα ἀπεριόριστο καί πρός τά πάνω καί πρός τά κάτω. Σημειώνεται συνήθως μέ τό σύμβολο $(-\infty, +\infty)$, πού διαβάζεται "διάστημα ἀπό μεῖον ἄπειρο ἕως σύν ἄπειρο". Γιά μιά μεταβλητή x πού τό ἔχει ὡς πεδίο μεταβολῆς γράφουμε:

$$-\infty < x < +\infty \quad .$$

6. Τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν πού εἶναι $\geqq$ δοσμένου πραγματικοῦ ἀριθμοῦ α. Αὐτό λέγεται κλειστό διάστημα ἀπεριόριστο πρός τά πάνω μέ κάτω ἄκρο τόν ἀριθμό α, σημειώνεται ἀπό μέρικούς μέ τό σύμβολο $[\alpha, +\infty)$. Γιά μιά μεταβλητή x πού τό ἔχει ὡς πεδίο μεταβολῆς γράφουμε:

$$\alpha \leqq x < +\infty \quad .$$

7. Τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν οἱ ὁποῖοι εἶναι $>$ δοσμένου πραγματικοῦ ἀριθμοῦ α. Αὐτό λέγεται ἀνοιχτό διάστημα ἀπεριόριστο πρός τά πάνω, μέ κάτω ἄκρο τόν ἀριθμό α· σημειώνεται μέ τό σύμβολο $(\alpha, +\infty)$

Ὅταν μιά μεταβλητή x τό ἔχη πεδίο μεταβολῆς, γράφουμε:

$$\alpha < x < +\infty \quad .$$

Ἀντίστοιχα πρός τό 6ο καί 7ο ἔχουμε τά διαστήματα τά ἀπεριόριστα πρός τά κάτω:

8ο $\quad (-\infty, \alpha] \quad$ ἤ $\quad -\infty < x \leqq \alpha \quad$ καί

9ο $\quad (-\infty, \alpha) \quad$ ἤ $\quad -\infty < x < \alpha \quad$.

10. Τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν οἱ ὁποῖοι εἶναι $\geqq \alpha$ καί συγχρόνως $\leqq \beta$, ὅπου β δοσμένος ἀριθμός $>$ α. Αὐτό λέγεται περιορισμένο κλειστό διάστημα μέ ἄκρα τούς ἀριθμούς α καί β· ἡ διαφορά β-α λέγεται πλάτος τοῦ διαστήματος. Σημειώ-

νεται ἀπό μερικούς μέ τό σύμβολο $[\alpha,\beta]$. Γιά μιά μεταβλητή x πού τό ἔχη ὡς πεδίο μεταβολῆς γράφουμε

$$\alpha \leqq x \leqq \beta .$$

11. Τό σύνολο τῶν ἀριθμῶν πού εἶναι $> \alpha$ καί συγχρόνως $< \beta$ (ὅπου $\beta-\alpha > 0$). Αὐτό λέγεται περιορισμένο ἀνοιχτό διάστημα, μέ ἄκρα τούς ἀριθμούς α καί β καί μέ πλάτος $\beta-\alpha$. Σημειώνεται συνήθως μέ (α,β) καί γιά μιά μεταβλητή x πού τό ἔχει ὡς πεδίο μεταβολῆς γράφουμε

$$\alpha < x < \beta \quad .$$

Θά μπορούσαμε τέλος ν'ἀναφέρουμε τά πεδία μεταβολῆς:

12. $\alpha < x \leqq \beta$ (ἀπό μερικούς σημειώνεται μέ $(\alpha,\beta]$).

13. $\alpha \leqq x < \beta$ (ἀπό μερικούς σημειώνεται μέ $[\alpha,\beta)$).

Ἄς τονίσουμε ὅτι συχνά, ὁμιλώντας γενικά γιά μ ι ά τ ι μ ή μιᾶς μεταβλητῆς x, τή δηλώνουμε μέ τό ἴδιο σημαδι x καί ὄχι μέ κανένα ἄλλο σημαδι, εἴτε μέ τό x ἐφοδιασμένο μέ ἕνα δείχτη ἤ ἕνα τόνο. Ἔτσι λέμε: ἔστω x μιά τιμή τῆς μεταβλητῆς x, κτλ.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

§ 140. Συνάρτηση ὀνομάστηκε στά Μαθηματικά ἀρχικῶς μιά ἀλγεβρική παράσταση πού περιέχει μιάν ἤ περισσότερες μεταβλητές.

Π.χ. οἱ παραστάσεις

$$\alpha x + \beta \quad , \quad \alpha x^2+\beta x+\gamma \quad , \quad \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \quad ,$$

$$x^2+ y^2 \quad , \quad \pm\sqrt{x^2+ 1} \quad , \quad \frac{1}{\pm\sqrt{x^2+y^2+1}} \quad ,$$

ὅπου x καί y μεταβλητές μέ πεδίο μεταβολῆς τῆς καθεμιᾶς τό διάστημα $(-\infty , +\infty)$.

Ἄν καλέσουμε, γιά συντομία z μιά ὁποιαδήποτε ἀπό αὐτές τίς παραστάσεις, τότε σέ κάθε τιμή τῆς μεταβλητῆς x ἤ σέ κάθε σύστημα τιμῶν τῶν μεταβλητῶν x καί y, ἀντιστοιχεῖ μιά ὁρισμένη ή γιά τά δυό τελευταία παραδείγματα δυό ορισμένες τιμές τοῦ συμβόλου z. Ἡ ἀντιστοιχία αὐτή τῶν τιμῶν τοῦ z στίς διάφορες τιμές τῆς μεταβλητῆς x ἤ στά διάφορα συστήματα τιμῶν τῶν μεταβλητῶν x , y ἀποτελεῖ κατά τίς σημερινές ἀντιλήψεις τήν οὐσία τῆς συναρτήσεως, ἀδιάφορα ἄν ἡ ἀντιστοιχία αὐτή ἐκφράζεται ἤ μπορεῖ νά ἐκφραστῆ μέ μιάν ἀλγεβρική παράσταση. Ἔτσι ἔχουμε τόν ἑξῆς γενικό ὁρισμό:

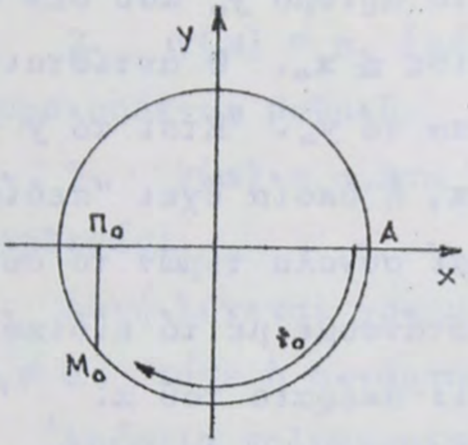
Συνάρτηση μιᾶς μεταβλητῆς x λέμε στά Μαθηματικά ἕνα σημάδι (ἕνα σύμβολο) z ὅταν σέ κάθε τιμή τῆς x, ἀπό τό πεδίο μεταβολῆς της, ἀντιστοιχοῦν, κατά ἕναν ὁποιοδήποτε νόμο, μιά ἤ περισσότερες ὁρισμένες τιμές τοῦ z. Ἄν σέ κάθε τιμή τῆς x ἀντιστοιχῆ μιά μόνο τιμή τοῦ z, τότε ἡ συνάρτηση z λέγεται μονοσήμαντη (ἀπό ἄλλους μονότιμη).

Ἄν σέ μιά τουλάχιστο τιμή τῆς x ἀντιστοιχοῦν περισσότερες ἀπό μιά τιμές τοῦ z, τότε τό z λέγεται πολυσήμαντη συνάρτηση τοῦ x. Γιά νά δηλώσουμε γενικά τήν ἐξάρτηση τῆς τιμῆς τοῦ z ἀπό τίς τιμές τῆς μεταβλητῆς x, γράφουμε $z = z(x)$ ἤ $z = \varphi(x)$ ἤ $z = f(x)$ κτλ.

Συνάρτηση ν μεταβλητῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ λέμε στά Μαθηματικά ἕνα σημάδι (ἕνα σύμβολο) z, ὅταν σέ κάθε σύστημα τιμῶν τῶν μεταβλητῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ ἀπό τά πεδία μεταβολῆς των, ἀντιστοιχοῦν, κατά ἕναν ὁποιοδήποτε νόμο, μιά ἤ περισσότερες ὁρισμένες τιμές τοῦ σημαδιοῦ z . Αὐτές οἱ τιμές σημειώνονται γενικά μέ τό συμβολισμό $z = z(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ ἤ $z = \sigma(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ κτλ. γιά νά δηλωθῆ ἡ ἐξάρτησή τους ἀπό τίς τιμές τῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$. Ἀνάλογα μέ ὅτι εἴπαμε παραπάνω, διακρίνουμε μονοσήμαντες καί πολυσήμαντες συναρτήσεις τῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$. Π.χ. ἡ συναρτηση $\sigma(x,y) = x^2+y^2$ εἶναι μονοσήμαντη, ἡ $f(x,y) = \dfrac{1}{\pm\sqrt{x^2+y^2+1}}$, πολυσήμαντη καί μάλιστα δισήμαντη. Παρακάτω θά ἀσχοληθοῦμε πρῶτα μέ συναρτήσεις μιᾶς μόνο μεταβλητῆς

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

§ 142. 1. Ἔστω t μιά μεταβλητή μέ πεδίο μεταβολῆς τό διάστημα $(-\infty,+\infty)$ καί t_o μιά ὁ π ο ι α δ ή π ο τ ε τιμή της. Πάνω στή μοναδιαία περιφέρεια $x^2+y^2=1$ παίρνουμε μέ ἀρχή τό σημεῖο A(1,0) ἕνα τόξο AM_o πού ἔχει προσημασμένο μέτρο t_o ἀκτίνια.



Στήν τιμή t_o τῆς μεταβλητῆς ἀντιστοιχίζουμε γιά τιμή ἑνός σημαδιοῦ x τήν τετμημένη $x_o=(\overline{OΠ_o})$ τοῦ M_o· ἔτσι ὁρίσαμε μιά μονοσήμαντη συνάρτηση $x=x(t)$ στό διάστημα $-\infty < t < +\infty$. Τό συνηθισμένο σύμβολο γιά τή συνάρτηση αὐτή εἶναι τό συνt.- Ὅμοια: ἄν στήν ὁποιαδήποτε τιμή t_o τῆς μεταβλητῆς t ἀντιστοιχίσουμε ὡς τιμή τοῦ σημαδιοῦ y τήν τεταγμένη $y_o=(\overline{Π_oM_o})$ τοῦ πέρατος M_o τοῦ τόξου AM_o πού ἔχει προσημασμένο μέτρο t_o ἀκτίνια, αὐτός ὁ νόμος τῆς ἀντιστοιχίας δίνει γένεση σέ μιάν μονοσήμαντη συνάρτηση, τήν ἀπό τήν Τριγωνομετρία γνωστή y = ημt.

2. Ἔστω u μιά μεταβλητή μέ πεδίο μεταβολῆς τό διάστημα $-1 \leqq u \leqq 1$, καί u μιά ὁποιαδήποτε τιμή της. Ἡ ἐξίσωση συνυ = u , μέ ἄγνωστο τό τόξο υ σέ ἀκτίνια, ἔχει ἄπειρες λύσεις: ἄν καλέσουμε $υ_o$ μιά λύση, τότε ὅλες οἱ λύσεις μαζί ἀποτελοῦν τό ἄπειρο σύνολο ἀριθμῶν $\pm υ_o + 2kπ$, ὅπου k ἐλεύθερα ἐκλέξιμος ἀκέραιος ἀριθμός. Αὐτούς τούς ἄπειρους ἀλλ' ὁρισμένους ἀριθμούς ἀντιστοιχίζουμε τώρα στήν τιμή u_o τῆς μεταβλητῆς u, παριστάνοντάς τους μέ τό σύμβολο τοξσυνu_o (πού διαβάζεται: τόξο συνημιτόνου u_o).

Ἔτσι ὁρίστηκε στό διάστημα $-1 \leqq u \leqq 1$ μιά ἀ π ε ι ρ οσ ή μ α ν τ η συνάρτηση $υ$ = τοξσυνu. Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό ἔχουμε συν(τοξσυνu) = u γιά κάθε τιμή u ἀπό τό πεδίο $-1 \leqq u \leqq 1$. Ὅμοια ὁρίζεται ἡ τοξημu γιά $-1 \leqq u \leqq 1$.

3. Ἔστω **x** μιά μεταβλητή μέ πεδίο μεταβολῆς τό διάστημα $-\infty < x < +\infty$.

Σέ κάθε τιμή της x_0 ἀντιστοιχίζουμε ὡς τιμή τοῦ γράμματος y τόν (ἀλγεβρικῶς) μέγιστο ἀκέραιο ἀριθμό y_0 πού δέν ὑπερβαίνει τό x_0: y_0 = μέγιστος ἀκέραιος $\leqq x_0$. Ὁ ἀντιστοιχιστικός αὐτός νόμος καθορίζει μονότροπα τό y_0. Ἔτσι τό y γίνεται μιά μονοσήμαντη συνάτηση τοῦ **x**, ἡ ὁποία ἔχει "πεδίο ὁρισμοῦ" τό διάστημα $-\infty < x < +\infty$ καί σύνολο τιμῶν τό σύνολο τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν. Θά τήν παριστάνουμε μέ τό είδικό σύμβολο Ακ(x), πού θά διαβάζουμε ἔτσι: ἀκέραιο τοῦ **x**.

Ἰδού ἕνας πίνακας ἀντίστοιχων τιμῶν τῆς μεταβλητῆς **x** καί τῆς συναρτήσεως:

x	-4	$-\pi$	$-2,5$	$-1,75$	$-\sqrt{2}$	0	1	$+\sqrt{3}$	$+\sqrt{10}$	π^2
Ακ(x)	-4	-4	-3	-2	-2	0	1	1	3	9

4. Ἔστω μ μιά μεταβλητή μέ πεδίο μεταβολῆς τό σύνολο τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν $\geqq 0$. Τό σύμβολο $\mu!$ εἶναι μιά μονοσήμαντη συνάρτηση τῆς μ.

5. Ἔστω ν μιά μεταβλητή μέ πεδίο μεταβολῆς τό σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Ἐάν θέσουμε

$$\varphi(\nu) = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu} ,$$

τό $\varphi(\nu)$ εἶναι μιά μονοσήμαντη συνάρτηση τῆς ν· οἱ τιμές της εἶναι σύμμετροι ἀριθμοί γιά τούς ὁποίους ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$\varphi(\nu) < \varphi(\nu+1) \quad , \quad 2 \leqq \varphi(\nu) < 3 \ .$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

§ 143. Ἀκέραια πολυωνυμική συνάρτηση τῆς μεταβλητῆς **x** λέγεται κάθε συνάρτηση y(x) γιά τήν όποία ό άντιστοιχιστικός νόμος έκφράζεται ώς έξης:

$$y(x) = \alpha_\mu x^\mu + \alpha_{\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

όπου μ μιά άκέραια σταθερά $\geqq 0$ καί $\alpha_\mu, \ldots, \alpha_0$, μ+1 σταθερές. Είδικά :

1. $y(x) = 0$ (μέ $\mu = 0$, $\alpha_0 = 0$). Αύτή είναι τό ταυτοτικά μηδενικό πολυώνυμο.

2. $y(x) = \alpha_0$ (μέ $\mu = 0$, $\alpha_0 \neq 0$). Αύτή λέγεται πολυώνυμο μηδενός βαθμοῦ.

3. $y(x) = \alpha_1 x + \alpha$ (μέ $\mu = 1$, α_1 , α_0 όποιεσδήποτε σταθερές).

Αύτή λέγεται γραμμική συνάρτηση τοῦ x. Όταν ή σταθερά $\alpha_1 \neq 0$, τότε ή συνάρτηση λέγεται καί πρωτοβάθμια.

Ἀκέραια πολυωνυμική συνάρτηση δυό μεταβλητῶν x , y λέγεται κάθε συνάρτηση z(x,y) γιά τήν όποία ίσχύει μιά σχέση τῆς μορφῆς

$$z(x,y) = \sum \alpha_{\kappa\lambda} x^\kappa y^\lambda ,$$

όπου τό σύμβολο Σ σημαίνει ένα άθροισμα πεπερασμένου πλήθους όρων όπως ό $\alpha_{\kappa\lambda} x^\kappa y^\lambda$, μέσα στόν όποῖο k, λ είναι ά κ έ ρ α ι ε ς σταθερές $\geqq 0$ καί $\alpha_{\kappa\lambda}$ μιά σταθερά.

Ἄν μετά τή σύμπτυξη τῶν όμοιων όρων ώς πρός y, διατάξουμε τό έξαγόμενο κατά τίς φθίνουσες δυνάμεις τοῦ y θά λάβουμε

$$z(x,y) = \pi_\mu(x)y^\mu + \pi_{\mu-1}(x)y^{\mu-1} + \ldots + \pi_1(x)y + \pi_0(x) \quad ,$$

όπου $\pi_\mu(x), \ldots, \pi_1(x), \pi_0(x)$ όρισμένα άκέραια πολυώνυμα τοῦ x.

Ἀλγεβρική έξίσωση μέ έναν άγνωστο x λέγεται κάθε έξίσωση τῆς μορφῆς $\pi(x) = 0$, όπου $\pi(x)$ μιά άκέραια πολυωνυμική συνάρτηση τοῦ x, όχι ή ταυτοτικά μηδενική. Ἀλγεβρική έξίσωση μέ δυό άγνώστους x, y λέγεται κάθε έξίσωση τῆς μορφῆς

$\pi(x,y) = 0$, ὅπου $\pi(x,y)$ μιά ἀκέραια πολυωνιμική συνάρτηση τῶν x καί y, ὄχι ἡ ταυτοτικά μηδενική.

Ρητή συνάρτηση τῆς μεταβλητῆς x λέγεται τό πηλίκο

$$\frac{\alpha_\mu x^\mu + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\nu x^\nu + \ldots + \beta_1 x + \beta_0}$$

δυό ἀκέραιων πολυωνυμικῶν συναρτήσεων τῆς x· ἡ συνάρτηση διά τῆς ὁποίας διαιροῦμε ἐξυπακούεται διάφορη ἀπό τό ταυτοτικά μηδενικό πολυώνυμο.

Πεδίο ὁρισμοῦ τῆς ρητῆς συναρτήσεως εἶναι τό σύνολο τῶν τιμῶν τῆς x οἱ ὁποῖες δέν μηδενίζουν τό διαιρέτη, ἑπομένως ὅλοι οἱ πραγματικοί ἀριθμοί ἐκτός ἀπό ν τό πολύ, ἄν ν εἶναι ὁ βαθμός τοῦ διαιρέτου. Ὅταν ὁ διαιρετέος καί ὁ διαιρέτης εἶναι γραμμικές συναρτήσεις, τότε καλοῦμε τή ρητή συνάρτηση ρητογραμμική π.χ. ἡ $y = \frac{1}{x}$, ἡ $z = \frac{2x+3}{5x-4}$ εἶναι ρητογραμμικές.

Ἀλγεβρική λέγεται μιά συνάρτηση y(x) ὅταν ὅλα τά ζεύγη ἀντίστοιχων τιμῶν τοῦ x καί τοῦ y(x) ἱκανοποιοῦν μιά καί τήν ἴδια ἀλγεβρική ἐξίσωση: $\pi(x,y) = 0$. Π.χ. ἡ $y = \pm\sqrt{x}$ (γιά $0 \leqq x < +\infty$) εἶναι ἀλγεβρική, ἐπειδή τά ζεύγη ἀντίστοιχων τιμῶν $(x, y(x))$ ταυτοποιοῦν τήν $y^2 - x = 0$.

Οἱ ρητές συναρτήσεις τῆς x ἀποτελοῦν ἕνα μέρος τῆς κατηγορίας τῶν ἀλγεβρικῶν συναρτήσεων τῆς x· πράγματι ἀπό τή σχέση

$$y(x) = \frac{\alpha_\mu x^\mu + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\nu x^\nu + \ldots + \beta_1 x + \beta_0}$$

ἕπεται ὅτι ὅλα τά ζεύγη ἀντίστοιχων τιμῶν τῆς x καί τῆς y(x) ἱκανοποιοῦν τήν ἀλγεβρική ἐξίσωση

$$(\beta_\nu x^\nu + \ldots + \beta_1 x + \beta_0)\, y - \alpha_\mu x^\mu - \ldots - \alpha_1 x - \alpha_0 = 0 .$$

Ἀπό τό γενικό ὁρισμό πού δώσαμε παραπάνω γιά μιάν ἀλγεβρική συνάρτηση y(x) ἕπεται ὅτι οἱ τιμές τῆς x στίς ὁποῖες ἀντιστοιχεῖ μιά καί ἡ ἴδια τιμή y_0 τῆς συναρτήσεως πρέπει νά εἶναι λύσεις τῆς ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως $\pi(x,y_o) = 0$ μέ ἄγνωστον τό x. Αὐτή ἡ ἐξίσωση $\pi(x,y_o) = 0$ ἤ θά εἶναι ταυτότης ὡς πρός x ἤ δέν θά εἶναι ταυτότης ὡς πρός x, ὁπότε θά ἔχη ἕναν ὁρισμένο βαθμό $\leqq$ τοῦ βαθμοῦ ν τοῦ $\pi(x,y)$ ὡς πρός τά δυό γράμματα x,y καί οἱ πραγματικές τιμές τοῦ x οἱ ὁποῖες τήν ἱκανοποιοῦν δέν θά μποροῦν νά εἶναι περισσότερες ἀπό ν. Ἑπομένως, ὅταν γιά μιά συνάρτηση $z(x)$ διαπιστώσουμε πώς παίρνει μιά καί τήν ἴδια τιμή, ἔστω z_o, γιά ἄπειρες τιμές τῆς x πού νά μήν ἐξαντλοῦν ὅμως τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε αὐτή ἡ συνάρτηση $z(x)$ δέν μπορεῖ νά εἶναι ἀλγεβρική. Π.χ. ἡ συνάρτηση $z(x) = \eta\mu x$ παίρνει μιά καί τήν ἴδια τιμή $\frac{1}{2}$ γιά τίς ἄπειρες τιμές $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ καί $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ τῆς μεταβλητῆς x $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, οἱ ὁποῖες φυσικά δέν ἐξαντλοῦν τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἄρα ἡ $\eta\mu x$ δέν μπορεῖ νά εἶναι ἀλγεβρική συνάρτηση.

Ὑπερβατική συνάρτηση λέγεται κάθε συνάρτηση πού δέν εἶναι ἀλγεβρική. Ἔτσι ἡ $\eta\mu x$ εἶναι ὑπερβατική συνάρτηση. Ἀντίστοιχα λέγεται ὑπερβατική ἐξίσωση μέ ἕναν ἄγνωστο x κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς $\sigma(x) = 0$, ὅπου $\sigma(x)$ μιά ὑπερβατική συνάρτηση. Π.χ. ἡ $\eta\mu x - \frac{1}{3} = 0$ εἶναι ὑπερβατική ἐξίσωση.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

§ 144. Ἔστω $y = \sigma(x)$ μιά συνάρτηση τῆς x. Κάθε ζεῦγος $(x,\sigma(x))$ ἀντίστοιχων τιμῶν μεταβλητῆς καί συναρτήσεως τό παίρνουμε γιά συντεταγμένες ἑνός σημείου τοῦ ἐπιπέδου, φυσικά ὡς πρός ἕνα καί τό ἴδιο σύστημα συντεταγμένων. Τά διάφορα ζεύγη ἀντίστοιχων τιμῶν μᾶς ὁρίζουν ἔτσι διάφορα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου. Τό σύνολο αὐτῶν τῶν σημείων, ὅταν ἡ x πάρη ὅλες τίς τιμές ἀπό τό πεδίο μεταβολῆς της, ἀποτελεῖ αὐτό πού λέμε γραφική ἤ γεωμετρική παράσταση τῆς συναρτήσεως $y = \sigma(x)$ στό ὑπ' ὄψη σύστημα συντεταγμένων.

Ὅταν ἡ x ἔχῃ πεδίο μεταβολῆς ἕνα διάστημα καί ἡ σ(x) ἱκανοποιῆ μερικές ἀρκετά γενικές προϋποθέσεις, ἡ γραφική παράσταση εἶναι μιά γραμμή εὔκολα ἐποπτευόμενη ἤ ἕνα σύστημα τέτοιων γραμμῶν, καί μᾶς βοηθεῖ νά ἀποκτήσουμε μιάν εὐσύνοπτη εἰκόνα τῆς ἀντιστοιχίας τῶν τιμῶν τῆς $y = σ(x)$ πρός τίς τιμές τῆς μεταβλητῆς x.

Ἰδού τώρα μερικά παραδείγματα, ὅπου ὑποθέτουμε ὅτι τό σύστημα τῶν συντεταγμένων εἶναι σύστημα εὐθύγραμμων παράλληλων συντεταγμένων, ὅτι οἱ τιμές τῆς μεταβλητῆς x λαμβάνονται ὡς τετμημένες καί οἱ ἀντίστοιχες τιμές τῆς συναρτήσεως y ὡς τεταγμένες σημείων τοῦ ἐπιπέδου.

1. $y(x) = C$ = σταθερά, γιά $-\infty < x < +\infty$. Ἡ γραφική παράσταση εἶναι εὐθεία παράλληλη πρός τόν OX ἡ ὁποία κόβει τόν OY στό σημεῖο $(0,C)$.

2. $y(x) = \lambda x$, ὅπου λ = σταθερά $\neq 0$, γιά $-\infty < x < +\infty$. Ἡ γραφική παράσταση εἶναι εὐθεία διά τῆς ἀρχῆς μέ συντελεστή διευθύνσεως λ. Σ'αὐτό τό παράδειγμα ἡ συνάρτηση y εἶναι ποσότητα μεταβλητή κατ'εὐθεῖαν ἀνάλογη πρός τήν μεταβλητή ποσότητα x. Ἀντίστροφα, ἄν οἱ τιμές μιᾶς μεταβλητῆς y ἀντιστοιχοῦν ἀμφιμονότροπα πρός τίς τιμές μιᾶς μεταβλητῆς x καί ἔτσι πού νά ὑφίσταται εὐθεία ἀναλογία μεταξύ y καί x

(δηλ. $$\frac{y(x_2)}{y(x_1)} = \frac{x_2}{x_1}$$

γιά ὁποιεσδήποτε τιμές x_1 καί x_2 τῆς x), τότε θά εἶναι $y=\lambda x$, ὅπου λ κατάλληλη σταθερά $\neq 0$, καί ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτησιακῆς σχέσεως μεταξύ y καί x θά εἶναι εὐθεία διά τῆς ἀρχῆς $O(0,0)$ μέ συντελ. διευθύνσεως τή σταθερά λ.

3. $y(x) = \alpha x+\beta$, ὅπου α καί β σταθερές $\neq 0$, γιά $-\infty<x<+\infty$. Ἡ γραφική παράσταση εἶναι εὐθεία διά τοῦ σημείου $B(0,\beta)$ μέ συντελεστή διευθύνσεως τό α. Καί ἐδῶ ἡ συνάρτηση y εἶναι μιά μεταβλητή (μέ πεδίο μεταβολῆς τό διάστημα $(-\infty, +\infty)$).

Σχέση εὐθείας ἀναλογίας ὑφίσταται ὄχι μεταξύ y καί x ἀλλά μεταξύ $y(x) - y(x_1)$ καί $x-x_1$ ὅπου $(x_1, y(x_1))$, ἕνα αὐθαίρετα ὁρισμένο ζεῦγος ἀντίστοιχων τιμῶν μεταβλητῆς καί συναρτήσεως:

$$y(x) - y(x_1) = \alpha x + \beta - \alpha x_1 - \beta = \alpha(x-x_1).$$

Ἀντίστροφα, ἄν οἱ τιμές μιᾶς μεταβλητῆς y ἀντιστοιχοῦν ἀμφιμονότροπα πρός τίς τιμές τῆς μεταβλητῆς x καί ἔτσι πού νά ὑφίσταται εὐθεία ἀναλογία ὄχι μεταξύ x καί y ἀλλά μεταξύ $x-x_1$ καί $y(x) - y(x_1)$, ὅπου x_1 κάποια ὁρισμένη τιμή τῆς x, τότε θά εἶναι $y(x) - y(x_1) = \alpha(x-x_1)$, ὅπου α κατάλληλη σταθερά $\neq 0$, καί ἄρα

$$y(x) = \alpha x + y(x_1) - \alpha x_1 = \alpha x + \beta \quad ,$$

ὅπου β μιά σταθερά ἐπίσης $\neq 0$.

§ 145. Στά ἑπόμενα δυό παραδείγματα ὑποθέτουμε τό σύστημα ΧΟΥ ὀρθογώνιο.

4. $\quad y(x) = \pm\sqrt{x} \quad$ γιά $\quad 0 \leqq x < +\infty$.

Ἡ γραφική παράσταση εἶναι παραβολή: $\quad y^2 = x = 2\cdot\frac{1}{2}\, x$.
Ἄξονας συμμετρίας εἶναι ὁ ΟΧ, κορυφή τό $O(0,0)$, ἡ παράμετρος $p = \frac{1}{2}$, ἄρα ἑστία τό $E(\frac{1}{4}, 0)$ καί διευθετοῦσα ἡ $x = -\frac{1}{4}$. Ἄν εἴχαμε τή συνάρτηση $y(x) = \pm\sqrt{-x}$ γιά $-\infty < x \leqq 0$, τότε ἡ γραφική παράσταση εἶναι παραβολή $(y^2 = -x)$, συμμετρική τῆς προηγούμενης ὡς πρός τόν ΟΥ, ἄρα μέ ἑστία τό $E'(-\frac{1}{4}, 0)$ καί διευθετούσα τή $x = \frac{1}{4}$.

5. $\quad y(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \quad$ γιά $\quad -\infty < x < +\infty$,

ὅπου α, β, γ σταθερές, ἡ $\alpha \neq 0$. Ἡ γραφική παράσταση εἶναι παραβολή μέ ἄξονα συμμετρίας $\parallel$ πρός τόν ΟΥ.

Πράγματι, ἡ σχέση μεταξύ x καί y γράφεται καί ἔτσι:

$$y = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$$

ή $$y - \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 .$$

Ἄρα, ἄν μεταφέρουμε τούς ἄξονες συντεταγμένων σύμφωνα μέ τίς σχέσεις

$$x = x' - \frac{\beta}{2\alpha} \quad , \quad y = y' + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} ,$$

λαβαίνουμε $x'^2 = \frac{1}{\alpha} y' = 2\,\frac{1}{2\alpha}\, y'$.

Ὥστε ἡ γραφική παράσταση εἶναι παραβολή μέ ἄξονα συμμετρίας τήν εὐθεία $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$, παράμετρο $p = \frac{1}{2|\alpha|}$, κορυφή τό σημεῖο $\left(x = -\frac{\beta}{2\alpha}, y = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}\right)$, ἑστία τό $\left(x = -\frac{\beta}{2\alpha},\right.$ $\left. y = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} + \frac{1}{4\alpha}\right)$ καί διευθετούσα τήν εὐθεία $y = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} - \frac{1}{4\alpha}$. Ἡ παραβολή στρέφει τά κοῖλα κατά τή θετική φορά τοῦ ἄξονα ΟΥ ὅταν $\alpha > 0$, κατά τήν ἀρνητική φορά ὅταν $\alpha < 0$.

6. $y(x) = \frac{c}{x}$, ὅπου c σταθερά $\neq 0$, γιά $x \neq 0$, ἄρα μέ πεδίο μεταβολῆς τά δυό διαστήματα $-\infty < x < 0$ καί $0 < x < +\infty$.

Κατά τόν § 130, ὅταν $c > 0$, ἡ γραφική παράσταση εἶναι μιά ὑπερβολή μέ ἀσύμπτωτες τούς ἄξονες συντεταγμένων ΟΧ καί ΟΥ, κέντρο συμμετρίας τό Ο(0,0), μέ ἄξονα διατέμνοντα πάνω στή διχοτόμο τῆς 1ης καί τῆς 3ης γωνίας τῶν ἀξόνων συντεταγμένων καί ἑστιακή ἡμιαπόσταση $\gamma = 2\sqrt[+]{c}$. Αὐτά τά στοιχεῖα καθορίζουν τήν ὑπερβολή· ἡ σχεδίασή της μπορεῖ νά γίνη καί κατά τή μέθοδο τοῦ § 131 (Βλ. Σχόλιο), μέ χρήση τῶν ἀσύμπτωτων ΟΧ, ΟΥ καί ἑνός σημείου της, π.χ. τοῦ σημείου $A(\sqrt[+]{c}, \sqrt[+]{c})$. Ἡ ὑπερβολή κεῖται μέσα στήν πρώτη καί τήν τρίτη γωνία τῶν ΟΧ καί ΟΥ.

Ὅταν $c < 0$, τότε ἡ γραφική παράσταση τῆς $y(x) = \frac{c}{x}$ εἶναι ὑπερβολή μέ ἀσύμπτωτες πάλι τούς ἄξονες συντεταγμένων ΟΧ, ΟΥ καί μέ ἑστιακή ἡμιαπόσταση $\gamma = 2\sqrt[+]{|c|}$ ἀλλά μέ διατέμνοντα ἄξονα πάνω στή διχοτόμο τῆς 2ης καί τῆς 4ης γωνίας τῶν ΟΧ καί ΟΥ. Ἡ ὑπερβολή κεῖται, σύμφωνα μ'αὐτά, μέσα στή

2η καί 4η γωνία τῶν ΟΧ καί ΟΥ. Ἕνα σημεῖο της εἶναι τό $A(+\sqrt{|c|}\ , -\sqrt{|c|}\ )$.

7. $$y(x) = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\ ,$$

ὅπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ σταθερές μέ $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix} \neq 0$ καί $\gamma \neq 0$, γιά x μεταβλητό μέσα στά διαστήματα $-\infty < x < -\frac{\delta}{\gamma}$ καί $-\frac{\delta}{\gamma} < x < +\infty$. Ἡ περίπτωση αὐτή ἀνάγεται στήν προηγούμενη μέ μιά μεταφορά τοῦ συστήματος ΧΟΥ.

Πράγματι μέ διαίρεση βρίσκουμε

$$y = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma} \cdot \frac{1}{\gamma x+\delta}\ .$$

Ἄρα $$y - \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2} : (x + \frac{\delta}{\gamma})\ .$$

Ἑπομένως ἄν θέσουμε $y' = y - \frac{\alpha}{\gamma}$, $x' = x + \frac{\delta}{\gamma} = x - (-\frac{\delta}{\gamma})$ καί $c = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2}$, θά λάβουμε δι'ἀντικαταστάσεως $y' = \frac{c}{x}$, ἄρα ἡ ζητούμενη γραφική παράσταση εἶναι ὑπερβολή μέ ἀσύμπτωτες τούς νέους ἄξονες συντεταγμένων Ο΄Χ΄, Ο΄Υ΄. Οἱ ἀσύμπτωτες αὐτές εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλες πρός τούς παλιούς ἄξονες ΟΧ, ΟΥ καί ἔχουν ἐξισώσεις ὡς πρός ΧΟΥ ἀντίστοιχα τίς ἑξῆς: $x = -\frac{\delta}{\gamma}$, $y = \frac{\alpha}{\gamma}$.

Κέντρο συμμετρίας τῆς ὑπερβολῆς εἶναι τό $O'(x = \frac{-\delta}{\gamma}$, $y = \frac{\alpha}{\gamma}$). Οἱ ἑστίες βρίσκονται πάνω στή διχοτόμο τῆς 1ης καί τῆς 3ης γωνίας τῶν Ο΄Χ΄ καί Ο΄Υ΄ ἤ πάνω στή διχοτόμο τῆς 2ης καί τῆς 4ης γωνίας καθόσο $c > 0$ ἤ $c < 0$, δηλαδή καθόσο $\beta\gamma-\alpha\delta > 0$ ἤ $\beta\gamma-\alpha\delta < 0$. Ἡ ἑστιακή ἡμιαπόσταση εἶναι

$$\gamma = 2\underset{+}{\sqrt{|c|}} = 2\underset{+}{\sqrt{\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma}}}\ .$$

<u>Ἐφαρμογή.</u> Ὅπως εἶναι γνωστό, δυό μεταβλητές x καί y λέγονται ἀντιστρόφως ἀνάλογες ὅταν 1ο οἱ τιμές τῆς μιᾶς ἀντι-

στοιχοῦν ἀμφιμονότροπα στίς τιμές τῆς ἄλλης καί 2ο ὁ λόγος $\frac{x_2}{x_1}$ δυό ὁποιωνδήποτε τιμῶν τῆς μιᾶς ἰσοῦται μέ τό λόγο $\frac{y_1}{y_2}$ πού εἶναι ἀντίστροφος τοῦ λόγου $\frac{y_2}{y_1}$ τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν τῆς ἄλλης. Ἀπ'ἐδῶ ἕπεται ὅτι

$$x \cdot y(x) = c = \text{σταθερά} \neq 0$$

καί ἀντιστρόφως.

Ἄρα ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτησιακῆς σχέσεως δυό ἀντίστροφα ἀνάλογων μεταβλητῶν σ'ἕνα σύστημα ΧΟΥ εὐθύγραμμων παράλληλων συντεταγμένων, εἶναι μιά ὑπερβολή μέ ἀσύμπτωτες τούς ἄξονες συντεταγμένων ΟΧ, ΟΥ.

ΑΥΞΗΣΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΗ ΑΥΞΗΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

§ 146. Ἔστω $y = \sigma(x)$ μιά μονοσήμαντη συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό διάστημα $\alpha < x < \beta$, ὅπου α ἤ ἀριθμός ἤ τό $-\infty$, β ἤ ἀριθμός ἤ τό $+\infty$. Ὅταν ἀπό μιά τιμή x_0 τῆς x μεταβοῦμε σέ μιάν ἄλλη x_1 λέμε ὅτι "αὐξήσαμε" τή x κατά τήν αὔξηση" x_1-x_0, διότι $x_1 = x_0 + (x_1-x_0)$. Ἡ "αὔξηση" x_1-x_0 σημειώνεται συντόμως μέ τό σύμβολο Δx, πού διαβάζεται "δέλτα χί" καί πού ἑπομένως σημαίνει ἕναν ἀριθμό θετικό ἤ ἀρνητικό. Ἡ διαφορά $y_1-y_0 = \sigma(x_1) - \sigma(x_0)$ τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν τῆς συναρτήσεως λέγεται αὔξηση τῆς συναρτήσεως ἀντίστοιχη στήν αὔξηση Δx τῆς x καί σημειώνεται μέ Δy ("δέλτα ψί"). Ἡ Δy εἶναι ἐπίσης ἕνας ἀριθμός, ἐνδεχομένως τό 0.

Π.χ. ἄν $y(x) = +\sqrt{x}$, $x_0 = 3$ καί $\Delta x = -0,5$, τότε $x_1 = x_0 + \Delta x = 2,5$ καί $\Delta y = y_1 - y_0 = \underset{+}{\sqrt{2,5}} - \underset{+}{\sqrt{3}} \approx -0,1509$.

Ἄν $y(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -5$, $\Delta x = 0,1$, τότε

$$\Delta y = \frac{1}{x_0+\Delta x} - \frac{1}{x_0} = \frac{1}{-5+0,1} - \frac{1}{-5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{4,9} = \frac{-0,1}{24,5} \approx -0,00408.$$

Γιά μιά μονοσήμαντη συνάρτηση $y = \sigma(x)$ μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό διάστημα $\alpha < x < \beta$ καί γιά μιάν ὁρισμένη τιμή x_0 τῆς μεταβλητῆς x ἀπό τό διάστημα, ἡ αὔξηση Δx εἶναι μιά μεταβλητή στήν ὁποία μποροῦμε νά δώσουμε κάθε τιμή h μέ $|h| <$ ἀπό τά πλάτη καί τῶν δυό διαστημάτων (α, x_0) καί (x_0, β). Σέ κάθε τέτοια τιμή τοῦ Δx ἀντιστοιχεῖ μιά ὁρισμένη τιμή τῆς

$$\Delta y = \sigma(x_0 + \Delta x) - \sigma(x_0) \quad ,$$

ἄρα ἡ Δy εἶναι μονοσήμαντη συνάρτηση τῆς Δx μέ πεδίο ὁρισμοῦ πού περιέχει ὅλα τά Δx πού εἶναι κατ' ἀπόλυτη τιμή καταλλήλως μικρά. Π.χ. στό πρῶτο παραπάνω παράδειγμα ἡ Δx μπορεῖ νά πάρη τουλάχιστο κάθε τιμή h μέ $|h| < 3$ καί ἡ

$$\Delta y = \underset{+}{\sqrt{3 + \Delta x}} - \underset{+}{\sqrt{3}}$$

εἶναι συνάρτηση τῆς Δx μονοσήμαντα ὁρισμένη στό διάστημα $-3 < \Delta x < 3$.

Στό 2ο παράδειγμα ἡ Δx μπορεῖ νά πάρη κάθε τιμή h μέ $|h| < 5$ καί ἡ $\Delta y = \dfrac{1}{-5+\Delta x} - \dfrac{1}{-5}$ εἶναι συνάρτηση τῆς Δx μονοσήμαντα ὁρισμένη γιά ὅλα τά Δx τά ἀπολύτως < 5.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΕ ΜΙΑ ΘΕΣΗ

§ 147. Ἔστω $y = \sigma(x)$ μιά μονοσήμαντη συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό διάστημα $\alpha < x < \beta$ καί x_0 "μιά θέση ἀπό τό διάστημα" δηλαδή μιά τιμή γιά τήν ὁποία ἰσχύει ἡ σχέση $\alpha < x_0 < \beta$.

Λέμε ὅτι ἡ $\sigma(x)$ εἶναι συνεχής στή θέση x_0 (ἤ γιά $x = x_0$) ἄν μποροῦμε ν' ἀποδείξουμε ὅτι γιά κάθε θετικό ἀριθμό ε (ἑπομένως καί γιά ὁσοδήποτε μικρό $\varepsilon > 0$) ὑπάρχει κάποιος ἀντίστοιχος θετικός ἀριθμός η_ε τέτοιος ὥστε νά εἶναι

$$|\Delta y| = |\sigma(x_0 + \Delta x) - \sigma(x_0)| < \varepsilon \quad \text{γιά} \quad |\Delta x| < \eta_\varepsilon \; .$$

Τίς σχέσεις αὐτές τίς ἐκφράζουμε μέ λόγια ὡς ἑξῆς: ἡ αὔξηση Δy εἶναι ἀπολύτως ὅσο θέλουμε μικρή γιά αὐξήσεις Δx ἀπολύτως ἀρκετά (ἤ κατάλληλα) μικρές.

Π.χ. ἡ $y = \sqrt{x}$ εἶναι συνεχής στή θέση $x_0 = 3$, διότι ὅταν $|\Delta x| < 1$ εἶναι:

$$|\Delta y| = \left|\underset{+}{\sqrt{3+\Delta x}} - \underset{+}{\sqrt{3}}\right| = \frac{|3+\Delta x-3|}{\underset{+}{\sqrt{3+\Delta x}} + \underset{+}{\sqrt{3}}} < \frac{|\Delta x|}{\underset{+}{\sqrt{3}}} ,$$

ἄρα $|\Delta y| < \varepsilon$ ὅταν $|\Delta x| <$ καί τοῦ $\varepsilon\sqrt{3}$ καί τοῦ 1.

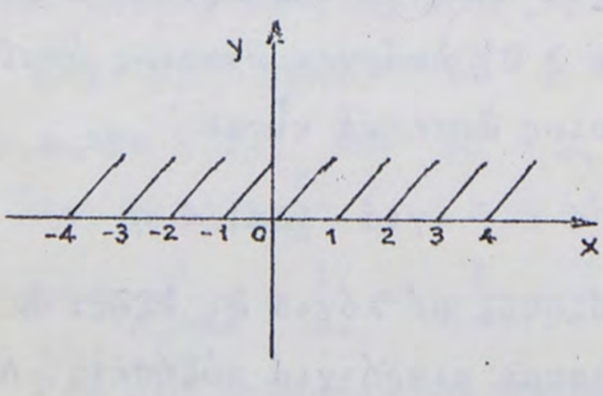
Ἀπ' ἐδῶ βλέπουμε ὅτι γιά η_ε μποροῦμε νά πάρουμε τόν ἀριθμό $\text{Min}(\varepsilon\sqrt{3}, 1)$, ὅπου $\text{Min}(\varepsilon\sqrt{3},1)$ σημαίνει τόν ἐλάχιστο ἀπό τούς 2 ἐγκλεισμένους ἀριθμούς. Ἡ συνάρτηση $y = \frac{1}{x}$ εἶναι συνεχής στή θέση $x = -5$, διότι

$$|\Delta y| = \left|\frac{1}{-5+\Delta x} - \frac{1}{-5}\right| = \frac{|\Delta x|}{|-5(-5+\Delta x)|} \leqq \frac{|\Delta x|}{5|5-|\Delta x||}$$

ἄρα $|\Delta y| < \frac{|\Delta x|}{5.4}$ γιά $|\Delta x| < 1$ καί συνεπῶς $|\Delta y| < \varepsilon$, ὅταν $|\Delta x| < 20\varepsilon$ καί συγχρόνως $|\Delta x| < 1$· ἐδῶ λοιπόν μποροῦμε νά πάρουμε γιά η_ε τόν ἀριθμό πού εἶναι ὁ ἐλάχιστος (Minimum) ἀπό τούς δυό: 1 καί 20ε, δηλαδή

$$\eta_\varepsilon = \text{Min}(1, 20\varepsilon) .$$

Ἡ ὀνομασία "συνεχής συνάρτηση" εἶναι παρμένη ἀπό τή γεωμετρική ἐποπτεία. Ἄν ἡ $y = \sigma(x)$ εἶναι συνεχής στή θέση $x = x_0$ τότε ἡ γραφική παράσταση τῆς $y = \sigma(x)$ ἔχει τήν ἑξῆς ἰδιότητα καί ἀντιστρόφως (δηλαδή ἀπό τήν ἀκόλουθη ἰδιότητα τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς $y = \sigma(x)$ ἕπεται ἡ συνέχεια τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$ στή θέση $x = x_0$). Θεωροῦμε ἕναν κύκλο μέ κέντρο τό σημεῖο $M_0(x_0, y_0 = \sigma(x_0))$ τῆς γραφικῆς παραστάσεως καί μέ ἀκτίνα ϱ αὐθαίρετα μικρή· τά σημεῖα $M(x, y = \sigma(x))$ τῆς γραφικῆς παραστάσεως τά ὁποῖα ἔχουν τετμημένες x πού δια-



φέρουν αρκετά ολίγο από τό x_o, δηλαδή μέ $|x-x_o| = |\Delta x| <$ κατάλληλου θετικοῦ ἀριθμοῦ ζ_ρ, βρίσκονται ὅλα στό ἐσωτερικό τοῦ κύκλου.

Μιά συνάρτηση $\sigma(x)$ μή συνεχής σέ μιά θέση λέγεται ἀσυνεχής στή θέση x_o. Στό σχῆμα δίνουμε τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως $y = x - Ak(x)$ ἡ ὁποία εἶναι ἀσυνεχής, ὅπως τοῦτο φαίνεται γεωμετρικά ἀμέσως, στίς θέσεις $x_o =$ ἀκέραιος ἀριθμός.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΥΝΕΧΗΣ ΠΡΟΣ ΤΑ ΔΕΞΙΑ Η ΠΡΟΣ ΤΑ ΑΡΙΣΤΕΡΑ ΣΕ ΜΙΑ ΘΕΣΗ.

§148. Ἄν ἡ αὔξηση $\Delta y = \sigma(x_o+\Delta x) - \sigma(x_o)$ εἶναι ἀπολύτως ὅσο θέλουμε μικρή γιά θ ε τ ι κ έ ς αὐξήσεις Δx ἀρκετά μικρές, δηλαδή $|\Delta y| <$ τοῦ αὐθαίρετου θετικοῦ ε γιά $0 < \Delta x <$ κατάλληλου θετικοῦ ἀριθμοῦ η'_ε, τότε ἡ $y = \sigma(x)$ λέγεται συνεχής πρός τά δεξιά στή θέση x_o (ἤ γιά $x = x_o$). Π.χ. ἡ $\sigma(x) = x - Ak(x)$ εἶναι συνεχής πρός τά δεξιά στίς θέσεις $x_o =$ ἀκέραιος ἀριθμός, στίς ὁποῖες ἔχουμε $\sigma(x_o) = x_o - Ak(x_o) = x_o - x_o = 0$· αὐτό φαίνεται εὔκολα ἀπό τήν παραπάνω γραφική παράσταση. Ἄν ἡ αὔξηση $\Delta y = \sigma(x_o+\Delta x) - \sigma(x_o)$ εἶναι ἀπολύτως ὅσο θέλουμε μικρή γιά ἀ ρ ν η τ ι κ έ ς αὐξήσεις Δx ἀπολύτως ἀρκετά μικρές, δηλαδή ἄν $|\Delta y| <$ κάθε δοσμένου θετικοῦ ε γιά $-\eta''_\varepsilon < \Delta x < 0$, τότε ἡ συνάρτηση $y = \sigma(x)$ λέγεται συνεχής πρός τ'ἀριστερά στή θέση x_o (ἤ γιά $x = x_o$). Π.χ. ἡ $y = \sigma(x) = Ak(-x)$ εἶναι συνεχής πρός τ'ἀριστερά στίς θέσεις $x =$ ἀκέραιος ἀριθμός· πράγματι ἔχουμε γιά $-1 < \Delta x < 0$ (ἄρα γιά $0 < -\Delta x < 1$)

$$\Delta y = \sigma(x_o+\Delta x) - \sigma(x_o) = Ak(-x_o-\Delta x) - Ak(-x_o) = -x_o-(-x_o).$$

Ἐπομένως $|\Delta y| = 0 < \varepsilon$ γιά $-1 < \Delta x < 0$ (ἄρα γιά η''_ε μποροῦμε νά πάρουμε τό 1).

Ἡ ἴδια συνάρτηση εἶναι ἀσυνεχής πρός τά δεξιά στίς θέσεις x_0 = ἀκέραιος ἀριθμός.

Προφανῶς γιά νά εἶναι ἡ $\sigma(x)$ συνεχής στή θέση x_0 πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι συνεχής καί πρός τά δεξιά καί πρός τ'ἀριστερά σ'αὐτήν τή θέση.

ΤΡΕΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΕ ΜΙΑ ΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

§ 149. Μέ βάση τόν ὁρισμό πού δώσαμε γιά τή συνέχεια στόν § 147 ἀποδείχνονται εὔκολα τά ἑξῆς:

1. Τό ἄθροισμα $\sigma(x) + \varphi(x)$ καί τό γινόμενο $\sigma(x)\,\varphi(x)$ δυό συναρτήσεων συνεχῶν στή θέση x_0 εἶναι συνάρτηση συνεχής γιά $x = x_0$.

2. Τό πηλίκο $\dfrac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$ δυό συναρτήσεων συνεχῶν στή θέση x_0 μέ $\varphi(x_0) \neq 0$, μπορεῖ νά μορφωθῆ τουλάχιστο γιά ὅλες τίς τιμές x πού ἀνήκουν σ'ἕνα διάστημα $x_0 - \vartheta < x < x_0 + \vartheta$ περί τό x_0 ἀρκετά μικροῦ πλάτους 2ϑ, καί εἶναι συνάρτηση τοῦ x συνεχής στή θέση x_0.

3. Ἄν ἡ $x = f(t)$ εἶναι συνεχής στή θέση t_0 καί ἡ $y = \sigma(x)$ συνεχής στή θέση $x_0 = f(t_0)$, τότε τό σύμβολο $\sigma(f(t))$ ἔχει νόημα τουλάχιστο γιά ὅλες τίς τιμές t πού ἀνήκουν σ'ἕνα διάστημα $t_0 - p < t < t_0 + p$ περί τό t_0 ἀρκετά μικροῦ πλάτους $2p$. Ἡ ἔτσι προκύπτουσα συνάρτηση $y(t) = \sigma(f(t))$ εἶναι συνεχής στή θέση t_0. Ἡ $y(t) = \sigma(f(t))$ λέγεται σύνθετη συ συνάρτηση (ἤ συνάρτηση συναρτήσεως).

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΥΝΕΧΗΣ Σ'ΕΝΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

§ 150. Μιά μονοσήμαντη συνάρτηση $\sigma(x)$ λέγεται συνεχής σ' ἕνα ἀνοιχτό διάστημα (περιορισμένο ἤ ἀπεριόριστο) $\alpha < x < \beta$ ὅταν εἶναι συνεχής σέ κάθε θέση x_0 ἡ ὁποία ἀνήκει στό διάστημα $\alpha < x_0 < \beta$. Π.χ. ἡ συνάρτηση $y(x) = c$ γιά $-\infty < x < +\infty$, ὅπου c μιά ὁποιαδήποτε σταθερά, εἶναι συνεχής στό διάστημα $-\infty < x < +\infty$, ἐπειδή προφανῶς εἶναι συνεχής σέ κάθε θέση x_0 ἀπ'αὐτό. Ὅμοια ἡ $y = x$ γιά $-\infty < x < +\infty$ εἶναι συνεχής στό διάστημα αὐτό γιατί εἶναι συνεχής σέ κάθε θέση ἀπ'αὐτό.

Μιά μονοσήμαντη συνάρτηση $\sigma(x)$ λέγεται συνεχής σ'ἕνα κλειστό διάστημα $\alpha_1 \leqq x < +\infty$ ὅταν εἶναι συνεχής πρός τά δεξιά στό κάτω ἄκρο α_1 τοῦ διαστήματος καί συνεχής σέ κάθε ἄλλη θέση x_0 ἀπό τό διάστημα.

Ὅμοια, ἡ $\sigma(x)$ λέγεται συνεχής στό κλειστό διάστημα $\alpha_1 \leqq x \leqq \beta_1$ ἄν εἶναι συνεχής πρός τά δεξιά στή θέση α_1, συνεχής πρός τά ἀριστερά στή θέση β_1 καί συνεχής σέ κάθε ἄλλη θέση x_0 ἀπό τό διάστημα.

ΜΕΡΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΠΑΝΩ

§ 151. 1. Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς συνέχειας καί ἀπό τίς σχέσεις τοῦ §3 ἕπεται εὔκολα τό ἑξῆς: ἄν ἡ $\sigma(x)$ εἶναι συνεχής στή θέση x_0, θά εἶναι συνεχής σ'αὐτήν τή θέση ἡ συνάρτηση

$$\varphi(x) = |\sigma(x)| .$$

2. Ἀναχωρώντας ἀπό τήν παρατήρηση πού κάμαμε στόν § 150 ὅτι οἱ δυό συναρτήσεις $y(x) = c =$ σταθερά καί $y(x) = x$ γιά $-\infty < x < +\infty$ εἶναι συνεχεῖς σ'αὐτό τό διάστημα καί χρησιμοποιώντας τίς προτάσεις 1) καί 2) τοῦ § 149, συμπεραίνουμε ὅτι I) οἱ συναρτήσεις $y(x) = x^\nu$, ὅπου ν αὐθαίρετη ἀκέραια σταθερά $\geqq 0$, εἶναι συνεχεῖς στό διάστημα $-\infty < x < +\infty$, II) οἱ ἀκέραιες πολυωνυμικές συναρτήσεις

$$y(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

εἶναι συνεχεῖς στό διάστημα $-\infty < x < +\infty$ καί III) ὅτι, γενικότερα, οἱ ρητές συναρτήσεις $\dfrac{\alpha_\nu x^\nu + \ldots + \alpha_0}{\beta_\mu x^\mu + \ldots + \beta_0}$, ὅπου μ ἀκέραιος $\geqq 0$ καί $\beta_\mu \neq 0$, εἶναι συνεχεῖς σέ κάθε θέση ἀπό τό πεδίο ὁρισμοῦ των, δηλαδή σέ κάθε θέση πού δέν μηδενίζει τόν παρονομαστή $\beta_\mu x^\mu + \ldots + \beta_0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

162. Τῆς μεταβλητῆς t καί τῶν συναρτήσεών της $x = \text{συν}t$, $y = \text{ημ}t$ κατάρτίστε ἕναν πίνακα ἀντίστοιχων τιμῶν ὅπου ἡ t νά προχωρῆ ἀπό τήν τιμή -2π ὡς τήν τιμή 2π κατ' ἀριθμητική πρόοδο μέ διαφορά (λόγο, ὅπως λέγουν ἄλλοι) τό $\pi/6$.

Σέ δυό συστήματα ὀρθογώνιων συντεταγμ. (t,x) καί (t,y) μέ μῆκος βασικῶν διανυσμάτων 1 cm, σχεδιάστε κάθε φορά τά 25 σημεῖα πού ἔχουν συντεταγμένες τά παραπάνω ζεύγη ἀντίστοιχων τιμῶν καί χαράξτε δυό "ὁμαλές" γραμμές πού νά περνοῦν ἀπό τά αὐτά σημεῖα.

Οἱ γραμμές αὐτές θά εἶναι κατά προσέγγιση, οἱ γραφ.παραστάσεις τῶν συναρτήσεων συνt καί ημt στό διάστημα $-2\pi \leqq t \leqq 2\pi$. ('Αφοῦ σχεδιαστῆ, φυσικά κατά προσέγγιση, ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα μήκους 2π cm, ἡ σχεδίαση τῶν 25 σημείων γίνεται μέ κανόνα καί διαβήτη, γιατί ἀνάγεται, βάσει τῶν ὁρισμῶν πού ὑπενθυμίσαμε στόν § 142, Παραδ. 1, στή διαίρεση τοῦ παραπάνω εὐθύγραμμου τμήματος καθώς καί τοῦ μοναδιαίου κύκλου μέ κέντρο τήν ἀρχή Ο σέ 12 ἴσα μέρη).

163. Γράψτε (φυσικά μέ ἕναν τύπο ἑκάστοτε) ὅλους τούς ἄπειρους ἀριθμούς πού παριστάνει τό καθένα ἀπό τά ἀκόλουθα σύμβολα: τοξσυνθ , τοξσυν(−1) , $\text{τοξσυν}(-\sqrt{3}/2)$, $\text{τοξημ}(1/+\sqrt{2})$, τοξημ(−1/2) , τοξημ1 , τοξημ0 , $\text{τοξσυν}(1/+\sqrt{2})$, τοξσυν1. Μέ ποιούς ἀριθμούς ἰσοῦνται τά σύμβολα συν(τοξημ1/4) ,

$\text{συν}(\text{τοξημ}\,\frac{-1}{4})$, $\text{συν}(\text{τοξημ}\,\frac{-1}{2})$, $\text{ημ}(\text{τοξσυν}\,\frac{-1}{3})$,

$\text{συν}(\text{τοξημ}\,\frac{2}{5} + \text{τοξσυν}\,\frac{-1}{5})$, $\text{συν}(2\text{τοξημ}\,\frac{2}{3})$, $\text{ημ}(2\text{τοξσυν}\,\frac{-3}{4})$,

$\text{εφ}(\text{τοξσυν}\,\frac{1}{4})$, $\text{εφ}(\text{τοξημ}\,\frac{-3}{5})$, $\text{σφ}(\text{τοξσυν}\,\frac{1}{3})$, σφ(τοξημx) ,

$$\text{εφ}(\text{τοξημ}\,\frac{1}{x^2+1})\ ;$$

164. Μέ τί ἰσοῦνται τά σύμβολα $Ak(\frac{50}{+\sqrt{2}})$, $Ak(\frac{100}{\sqrt[3]{4}})$, $Ak(-3\pi^2)$

$Ak(-\frac{20}{5})$, $Ak(\frac{4\pi}{\sqrt{3}})$, $Ak(\pi^2-5\pi)$; Ποιοί ἀριθμοί x ἱκανοποιοῦν τήν καθεμιά χωριστά ἀπό τίς ἐξισώσεις: $Ak(x) = -2$,

$Ak(x)+5 = 0$, $x-Ak(x) = \frac{1}{2}$, $x - Ak(x) = \frac{1}{3}$;

165. Δεῖξτε ὅτι οἱ συναρτήσεις $y = 2+\sqrt{x} + \sqrt{5x+6}$, $y = 2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}$ εἶναι ἀλγεβρικές. Δεῖξτε ὅτι ἡ συνάρτηση y = εφx εἶναι ὑπερβατική.

166. Μιά μονοσήμαντη συνάρτηση $\sigma(x)$, μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό διάστημα $-\infty < x < +\infty$, λέγεται περιοδική, ἄν ὑπάρχη μιά σταθερά $p \neq 0$ τέτοια πού γιά ὅλα τά x (ἤ μέ ἄλλα λόγια, ἀπό ταυτότητα ὡς πρός x) νά ἰσχύη ἡ σχέση $\sigma(x+p) = \sigma(x)$. Ὁ ἀριθμός p λέγεται περίοδος τῆς συναρτήσεως. Τετριμμένο παράδειγμα: $\sigma(x) = c$ = σταθερά γιά $-\infty < x < +\infty$ · περίοδος p εἶναι κάθε σταθερά $\neq 0$.

Παραδείγματα ὄχι τετριμμένα: ημx καί συνx μέ περίοδο 2π, ημ$3x$ καί συν$(3x-5)$ μέ περίοδο τό $2\pi/3$, ημ$(-\pi x)$ καί συν$(\pi x+4)$ μέ περίοδο τό 2.

Κατασκευάστε μέ τή βοήθεια τῶν ημω, συνω περιοδικές συναρτήσεις πού ἔχουν περίοδο ἀντιστοίχως τό 1 , τό 1/2 , τό $-2/3$, γενικά τόν ὁποιοδήποτε ὁρισμένο ἀριθμό $p \neq 0$. Ποιά εἶναι ἡ χαρακτηριστική ἰδιότητα τῆς γραφ. παραστάσεως μιᾶς περιοδικῆς συναρτήσεως; – Δεῖξτε ὅτι μιά περιοδική, μή σταθερή συνάρτηση εἶναι ὑπερβατική.

167. Μιά μονοσήμαντη συνάρτηση $\sigma(x)$ λέγεται ἄ ρ τ ι α ἄν 1ο τό πεδίο ὁρισμοῦ της περιέχη μαζί μέ ἕναν ἀριθμό x καί τόν ἀντίθετό του $-x$ καί ἄν 2ο ἰσχύη πάντοτε ἡ ἰσότητα $\sigma(-x) = \sigma(x)$. Π.χ. οἱ συναρτήσεις $\sigma(x) = x^{2k}$, ὅπου k = ἀκέραια σταθερά εἶναι ἄρτιες.

Μιά μονοσήμαντη συνάρτηση $\varphi(x)$ λέγεται π ε ρ ι τ τ ή ἄν 1ο τό πεδίο ὁρισμοῦ της περιέχη μαζί μέ ἕναν ἀριθμό x καί τόν ἀντίθετό του $-x$ καί ἄν 2ο ἰσχύη πάντοτε ἡ σχέση $\varphi(-x) = -\varphi(x)$. Παράδειγμα οἱ συναρτήσεις $\sigma(x) = x^{2k+1}$, ὅπου k ἀκέραια σταθερά.

Ποιάν χαρακτηριστική ἰδιότητα ἔχει ἡ γραφική παράσταση μιᾶς ἄρτιας καί ποιάν ἡ γραφική παράσταση μιᾶς περιττῆς συνάρτησης;

Δῶστε παραδείγματα ἄρτιων καί περιττῶν συναρτήσεων διαφορετικά ἀπό τά ἀναφερθέντα παραπάνω.

168. Βρῆτε τίς συναρτησιακές σχέσεις πού συνδέουν ἀνά δυό τούς ἀριθμούς ϑ_C, ϑ_R καί ϑ_F οἱ ὁποῖοι ἐκφράζουν μιάν καί τήν ἴδια θερμοκρασία σέ βαθμούς Celsius, Réaumur καί Fahrenheit ἀντιστοίχως. Παραστῆστε τις γραφικῶς.

169. Παραστῆστε γραφικῶς σέ ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων μέ $|\bar{i}| = |\bar{j}| = 1$ cm, τίς συναρτήσεις $y = \frac{1}{2}x^2+x+1$, $y = \frac{1}{8}x^2+x+2$, $y = -\frac{1}{4}x^2-x+5$, $y = \frac{2}{3}x^2-4x-7$.

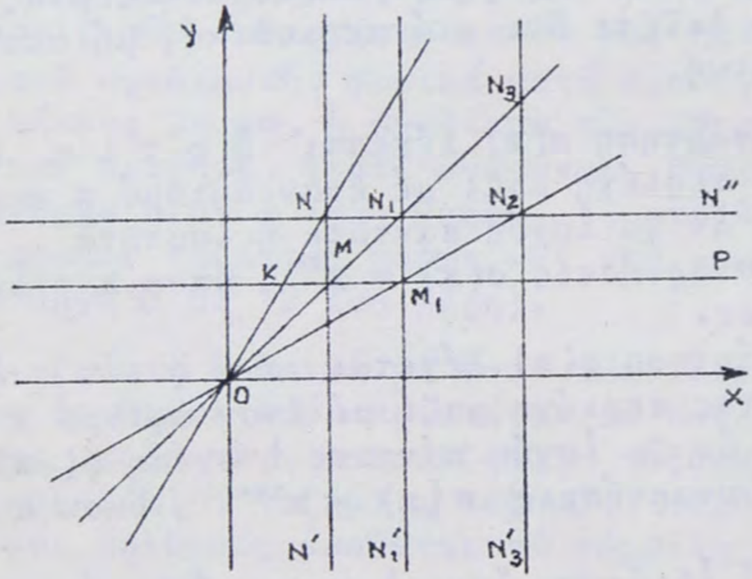
Χρησιμοποιῆστε τίς γραφικές παραστάσεις γιά νά "ἐπιλύσετε γραφικῶς" τίς 2βάθμιες ὡς πρός x ἐξισώσεις πού λαβαίνουμε ἐξισώνοντας μέ μηδέν τίς παραπάνω συναρτήσεις.

170. Παραστῆστε γραφικῶς τίς συναρτήσεις $y = \frac{-4}{x}$, $y = \frac{-2x+5}{3x+1}$, $y = \frac{5x-3}{x+2}$, $y = x + \frac{1}{x}$, $y = x - \frac{1}{x}$, $y = x^2 + \frac{1}{x}$, $y = -x^2 + \frac{1}{x}$, $y = 2x+3+\sqrt{2x}$, $y = -x-5 \pm \sqrt{4x-3}$.

('Υποδ. Οἱ ἕξ τελευταῖες γραφ. παραστάσεις νά κατασκευαστοῦν μέ συνδυασμό κατάλληλων εὐθειῶν, ὑπερβολῶν καί παραβολῶν).

171.* Τό σημεῖο Κ ἄς ἔχη ὀρθογ. μή μηδενικές συντεταγμένες (α,β) καί ἄς εἶναι ἡ εὐθεία ΚΡ // ΟΧ. Ἄγουμε τήν ΝΝ΄// ΟΥ καί τήν ΝΝ΄΄//ΟΧ· ἄς εἶναι Μ τό σημεῖο τομῆς τῆς ΝΝ΄ μέ τήν ΚΡ. Φέρουμε τήν ΟΜ καί τήν κόβουμε μέ τήν ΝΝ΄΄· δεῖξτε ὅτι τό σημεῖο τομῆς N_1 γράφει τήν παραβολή

$$y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha} x.$$



Ἀπό τό N_1 ἄγουμε τήν N_1N_1' //ΟΥ· ἄς εἶναι M_1 τό σημεῖο τομῆς τηςμέ τή ΚΡ.

Φέρνουμε τήν OM_1 καί τήν κόβουμε μέ τή ΝΝ΄΄. Δεῖξτε ὅτι τό σημεῖο τομῆς N_2 γράφει τή λεγόμενη κυβική παραβολή $y^3 = \frac{\beta^3}{\alpha} x$.

Φέρνουμε τή N_2N_3'//ΟΥ. Ἔστω N_3 τό σημείο τομῆς αὐτῆς τῆς παράλληλης καί τῆς εὐθείας ΟΜ. Δεῖξτε ὅτι τό N_3 γράφει τή λεγόμενη ἡμικυβική παραβολή $y^3 = \frac{\beta^3}{\alpha^2} x^2$.

172.* Δεῖξτε ὅτι ἡ ἐξίσωση $x^3+px+q = 0$ μπορεῖ νά ἐπιλυθῆ γραφικῶς μέ τή βοήθεια τῆς παραβολῆς $y = x^2$ καί τοῦ κύκλου $(x + \frac{q}{2})^2 + (y + \frac{p-1}{2})^2 = \frac{q^2}{4} + \frac{(p-1)^2}{4}$ πού ἔχει κέντρο τό $(-\frac{q}{2}, -\frac{p-1}{2})$ καί περνᾶ ἀπό τήν ἀρχή Ο(0,0). Ὁμοίως δεῖξτε ὅτι ἡ ἐξίσωση $x^4+px^2+qx+r = 0$ μπορεῖ νά ἐπιλυθῆ γραφικῶς μέ τή βοήθεια τῆς παραβολῆς $y = x^2$ καί τοῦ κύκλου

$$(x + \frac{q}{2})^2 + (y + \frac{p-1}{2})^2 = \frac{q^2 + (p-1)^2 - 4r}{4}.$$

Ἐφαρμόστε τή μέθοδο στίς ἐξισώσεις $x^3+5x-6 = 0$, $x^3-4x-7 = 0$, $x^4-3x^2+8x-2 = 0$.

173. Ὑπολογίστε τίς αὐξήσεις Δy τῆς συναρτήσεως $y = x^3-5x+3$ στή θέση $x = -2$ γιά $\Delta x = -\frac{1}{10}, -\frac{1}{20}, -\frac{1}{100}$. Ὑπολογίστε τίς αὐξήσεις Δz τῆς $z = -\frac{10}{x} + 3$ στή θέση $x = 2$ γιά $\Delta x = \frac{1}{100}, -\frac{2}{1000}, \frac{2}{1000}$. Ὑπολογίστε τίς αὐξήσεις Δf τῆς $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$ στή θέση $x = \frac{1}{2}$ γιά $\Delta x = -0{,}05$ καί $\Delta x = -0{,}005$.

Πόσο μικρή ἀπολύτως ἀ ρ κ ε ῖ (ὄχι π ρ έ π ε ι) νά εἶναι ἡ Δx γιά νά εἶναι ἡ ἀντίστοιχη Δy τῆς συναρτήσεως $y = \frac{2x-3}{x+1}$ στή θέση $x = 9$ μικρότερη ἀπολύτως τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ ε;

Ὅμοια ἐρώτηση γιά τή συνάρτηση $z = \sqrt[3]{x}$ στή θέση $x = 27$.

174.* Δεῖξτε μέ τή βοήθεια τοῦ ὁρισμοῦ καί μόνο (§ 147) ὅτι ἡ $y = x^3$ εἶναι συνεχής στή θέση $x = 0$, στή $x = 64$, γενικά στήν ὁποιαδήποτε θέση x. Δεῖξτε ὅμοια ὅτι ἡ $z = \sqrt[4]{(x+1)(4-x)}$ εἶναι συνεχής πρός τά δεξιά στή θέση $x=-1$ καί συνεχής πρός τ' ἀριστερά στή θέση $x = 4$.– Ἔστω $\sigma(x)$ μιά συνάρτηση μονοσήμαντα ὁρισμένη στό διάστημα $-\vartheta < x < \vartheta$, ὅπου ϑ δοσμένος θετικός ἀριθμός, καί πού παίρνει τιμές οἱ ὁποῖες δέν ὑπερβαίνουν ἀπολύτως κάποιο θετικό ἀριθμό Φ: $|\sigma(x)| \leqq \Phi$ γιά ὅλα τά x ἀπό τό διάστημα $(-\vartheta,\vartheta)$. Δεῖξτε ὅτι ἡ συνάρτηση $\varphi(x) = x\,\sigma(x)$ εἶναι συνεχής στή θέση $x = 0$ (εἴτε ἡ $\sigma(x)$ εἶναι συνεχής εἴτε ἀσυνεχής σ' αὐτή τή θέση).

175.* Ἀποδεῖξτε ὅτι οἱ συναρτήσεις ημx καί συνx εἶναι συνεχεῖς σέ κάθε θέση x_0 ἀπό τό διάστημα $-\infty < x < +\infty$. (Τό τόξο x νά τό θεωρῆστε δηλῶνον ἀκτίνια). Τί συμπεραίνετε ἀπό αὐτό γιά τίς συναρτήσεις εφx, σφx, τεμνx, συντεμνx, στηριζόμενοι στόν § 149; Βασιζόμενοι στόν ἴδιο παράγραφο μελετῆστε τό ζήτημα τῆς συνέχειας τῶν συναρτήσεων ημ$(2x-3)$, συν$(5x+4)$, γενικότερα τῶν ημ$(\alpha x+\beta)$, συν$(\alpha x+\beta)$, ὅπου α,β σταθερές. Θεωρῆστε τώρα τίς ἴδιες συναρτήσεις μέ x σημαῖνον μοῖρες καί ἀπαντῆστε στό ἐρώτημα ἄν εἶναι συνεχεῖς στό διάστημα $-\infty < x < +\infty$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XII

ΟΡΙΑ.ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ $\lim_{\omega\to 0}\sigma(\omega) = 0$.

§ 152. Ἔστω σ(ω) μιά συνάρτηση μονοσήμαντα ὁρισμένη σέ κάποιο διάστημα γύρω στή θέση ω = 0 μέ ἐξαίρεση ἴσως αὐτῆς τῆς θέσεως μέ ἄλλα λόγια, τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς σ(ω) ἄς περιλαβαίνη ὅλους τούς ἀριθμούς μέ $0 < |\omega| <$ κάποιας θετικῆς σταθερᾶς θ.

Λέμε ὅτι "ἡ σ(ω) ἔχει ὅριο τό μηδέν γιά ω τεῖνον στό μηδέν",

ἄν εἶναι $|\sigma(\omega)| <$ κάθε δοσμένου θετικοῦ ἀριθμοῦ ε γιά ὅλες τίς τιμές τοῦ ω μέ $0 < |\omega| <$ κατάλληλου θετ. ἀριθ. δ_ε . (Ὁ ἀριθμός δ_ε θά ἐξαρτιέται (στή γενική περίπτωση) ἀπό τόν αὐθαίρετο θετικό ε, γι᾽αὐτό γράφουμε τό δείχτη ε). Τήν ἰδιότητα αὐτή τῆς σ(ω) τή σημειώνουμε συμβολικά μέ τή γραφή

$$\lim_{\omega\to 0}\sigma(\omega) = 0 \quad , \quad (\lim = \text{limes} = \text{ὅριο}) \; ,$$

ἐνίοτε καί μέ τή γραφή

$$\sigma(\omega) \longrightarrow 0 \qquad \text{γιά} \quad \omega \longrightarrow 0 \; .$$

Π.χ. ἔχουμε ὅπως εὔκολα ἀποδείχνεται,

$$\lim_{\omega\to 0}\omega = 0 \quad , \quad \lim_{\omega\to 0}\omega^2 = 0 \quad , \quad \lim_{\omega\to 0}\omega^\nu = 0 \, , \text{ ὅπου } \nu \text{ φυσικός} ,$$

$$\lim_{\omega\to 0}\sqrt[3]{\omega} = 0 \quad , \quad \lim_{\omega\to 0}\left(\omega \,\eta\mu \frac{1}{\omega}\right) = 0 \; .$$

Στό τελευταῖο παράδειγμα ἡ θέση ω = 0 δέν ἀνήκει στό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως ἀφοῦ ἡ παράσταση $\omega\eta\mu\frac{1}{\omega}$ δέν ἔχει νόημα γιά ω = 0. Στά 4 προηγούμενα παραδείγματα ἡ θέση ω =0 ἀνήκει στό πεδίο ὁρισμοῦ τῶν συναρτήσεων ω, ω^2, ω^ν, $\sqrt[3]{\omega}$, καί οἱ συναρτήσεις ἔχουν τήν τιμή 0 γιά ω = 0. Ἰδού ἕνα διαφορετικό παράδειγμα:

$$\sigma(\omega) = Ak\left(\frac{1}{1+\omega^2}\right) \quad , \quad \text{ὁπότε} \quad \lim_{\omega \to 0} Ak\left(\frac{1}{1+\omega^2}\right) = 0$$

ἀφοῦ γιά κάθε $\omega \neq 0$ εἶναι $Ak\left(\frac{1}{1+\omega^2}\right) = 0$ · ἐδῶ ἡ θέση $\omega = 0$ ἀνήκει στό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς $\sigma(\omega)$, ἀλλά εἶναι $\sigma(0) = 1 \neq 0$.

Ἰδού τέλος ἕνα παράδειγμα συναρτήσεως $\sigma(\omega)$ γιά τήν ὁποία δ έ ν ἰσχύει ἡ σχέση $\lim_{\omega \to 0} \sigma(\omega) = 0$: $\sigma(\omega) = \eta\mu \frac{1}{\omega}$.

Πράγματι τό $\left|\eta\mu \frac{1}{\omega}\right|$ δέν εἶναι π.χ. $< \varepsilon = \frac{1}{2}$ γιά $0 < |\omega|$ κατάλληλου θετικοῦ δ, ἀφοῦ $|\eta\mu\frac{1}{\omega}| = 1$ γιά $\omega = \frac{1}{(2k+1)\pi/2}$ μέ k = τυχαῖο ἀκέραιο ἀριθμό, ἑπομένως μέ ὁσοδήποτε μεγάλο ἀπολύτως k.

Ἀπό τόν ὁρισμό ἕπονται εὔκολα οἱ ἑξῆς προτάσεις:

<u>Πρόταση 1</u>. "Αν εἶναι $\sigma(\omega) = \varphi(\omega)$ γιά ὅλα τά ω μέ $0 < |\omega| <$ κάποιας θετικῆς σταθερᾶς ϑ_1, ὁσοδήποτε μικρῆς ἄλλως τε, τότε τό $\lim_{\omega \to 0} \sigma(\omega) = 0$ ἔχει γιά συνέπεια

$$\lim_{\omega \to 0} \varphi(\omega) = 0 \; .$$

<u>Πρόταση 2</u>. "Αν εἶναι $|\varphi(\omega)| \leqq |\sigma(\omega)|$, γιά ὅλα τά ω μέ $0 < |\omega| <$ κάποιας σταθερᾶς ϑ_1, καί $\lim_{\omega \to 0} \sigma(\omega) = 0$, τότε καί

$$\lim_{\omega \to 0} \varphi(\omega) = 0 \quad .$$

<u>Πρόταση 3</u>. "Αν εἶναι $\lim_{\omega \to 0} \sigma_1(\omega) = 0$ καί $\lim_{\omega \to 0} \sigma_2(\omega) = 0$, θά εἶναι καί

$$\lim_{\omega \to 0} \left\{ \sigma_1(\omega) + \sigma_2(\omega) \right\} = 0 \quad ,$$

$$\lim_{\omega \to 0} \left\{ \sigma_1(\omega) \cdot \sigma_2(\omega) \right\} = 0 \; .$$

<u>Πρόταση 4</u>. "Αν $\lim_{\omega \to 0} \sigma(\omega) = 0$ καί ἄν $|f(\omega)| \leqq$ κάποιας θετικῆς σταθερᾶς Φ γιά ὅλα τά ω μέ $0 < |\omega| <$ κάποιας θετικῆς σταθερᾶς ϑ_1, τότε $\lim_{\omega \to 0} \left\{ f(\omega) \cdot \sigma(\omega) \right\} = 0$. Εἰδικῶς $\lim_{\omega \to 0} \left\{ C\sigma(\omega) \right\} = 0$, ὅταν C σταθερά καί $\lim_{\omega \to 0} \sigma(\omega) = 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ $\lim_{\omega \to 0} \sigma(\omega) = \alpha$.

§ 153. Λέμε ὅτι "ἡ μονοσήμαντη συνάρτηση $\sigma(\omega)$, ἡ ὁρισμένη τουλάχιστο γιά $0 < |\omega| <$ κάποιας θετικῆς σταθερᾶς ϑ, ἔχει ὅριο ἕναν ἀριθμό α (μιά σταθερά α) γιά ω τεῖνον στό μηδέν", ἄν ἡ διαφορά $\sigma(\omega) - \alpha$, πού εἶναι συνάρτηση τοῦ ω, ἔχει ὅριο τό μηδέν γιά ω τεῖνον στό μηδέν, ἐπομένως (βλ.§152) ἄν $|\sigma(\omega)-\alpha| <$ κάθε δοσμένου θετικοῦ ε γιά ὅλα τά ω μέ $0 < |\omega| <$ κατάλληλου θετικοῦ δ_ε.

Ὅταν ἡ $\sigma(\omega)$ ἔχει τήν παραπάνω ἰδιότητα, γράφουμε συμβολικά

(153.1) $$\lim_{\omega\to 0}\sigma(\omega) = \alpha$$

(ἤ, ἐνίοτε, $\sigma(\omega) \to \alpha$ γιά $\omega \to 0$).

Π.χ. $\lim\limits_{\omega\to 0}(\alpha+\omega)^2 = \alpha^2$, διότι $\lim\limits_{\omega\to 0}\left\{(\alpha+\omega)^2-\alpha^2\right\} = \lim\limits_{\omega\to 0}\left\{2\alpha\omega+\omega^2\right\} = 0$, σύμφωνα μέ τίς προτάσεις τοῦ §152. Ὅμοια βρίσκουμε:

$$\lim_{\omega\to 0}\left\{\alpha + \omega^2\,\eta\mu\,\frac{1}{\omega}\right\} = \alpha\,.$$

Ἡ θέση $\omega = 0$ δέν εἶναι ἀνάγκη νά ἀνήκη στό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς $\sigma(\omega)$, ἀφοῦ δέν ἐπεμβαίνει στόν παραπάνω ὁρισμό· ἄν ὅμως ἀνήκη, τότε, σύμφωνα μέ τήν ὑπόθεση ὅτι ἡ $\sigma(\omega)$ εἶναι μονοσήμαντη συνάρτηση, τό $\sigma(0)$ θά εἶναι ἕ ν α ς ὁρισμένος ἀριθμός γιά τόν ὁποῖο, κατά τίς περιπτώσεις, θά ἔχουμε ἤ

$$\sigma(0) = \alpha = \lim_{\omega\to 0}\sigma(\omega) \qquad \text{ἤ} \qquad \sigma(0) \neq \alpha = \lim_{\omega\to 0}\sigma(\omega)\,.$$

Ἰδού τώρα μερικές εὐκολοαπόδειχτες προτάσεις.

<u>Πρόταση 5</u>. Γιά μιά μονοσήμαντη συνάρτηση $\sigma(\omega)$ δέν εἶναι δυνατό νά ἔχουμε συγχρόνως $\lim\limits_{\omega\to 0}\sigma(\omega) = \alpha$ καί $\lim\limits_{\omega\to 0}\sigma(\omega) = \beta$ μέ $\alpha \neq \beta$. Ἐξ ἄλλου ἄν εἶναι $\sigma(\omega) = \varphi(\omega)$ γιά ὅλα τά ω μέ $0 < |\omega| <$ κάποιας θετικῆς σταθερᾶς ϑ_1, ὁσοδήποτε μικρῆς ἄλλως τε, τότε τό $\lim\limits_{\omega\to 0}\sigma(\omega) = \alpha$ συνεπάγεται τό $\lim\limits_{\omega\to 0}\varphi(\omega) = \alpha$.

<u>Πρόταση 6</u>. Ἄν $\lim\sigma(\omega) = \alpha$, τότε $|\sigma(\omega)| < |\alpha| + 1$ γιά ὅλα τά ω μέ $0 < |\omega| <$ κατάλληλου θετικοῦ ἀριθμοῦ δ_1.

<u>Πρόταση 7</u>. Ἄν $\lim\limits_{\omega\to 0}\sigma(\omega) = \alpha \neq 0$, τότε θά εἶναι

$$\alpha - \frac{|\alpha|}{2} < \sigma(\omega) < \alpha + \frac{|\alpha|}{2}$$

γιά ὅλα τά ω μέ $0 < |\omega| <$ κατάλληλου θετικοῦ ἀριθμοῦ δ_2· ἄρα γι'αὐτά τά ω θά εἶναι τό $\sigma(\omega)$ ὄχι μόνον $\neq 0$, ἀλλά καί ὁμόσημο μέ τό α, καθώς καί

$$|\sigma(\omega)| > \frac{|\alpha|}{2} \quad , \quad \frac{1}{|\sigma(\omega)|} < \frac{2}{|\alpha|} \quad .$$

<u>Πρόταση 8.</u> Ἄν $\lim\limits_{\omega\to 0} \sigma_1(\omega) = \alpha_1$ καί $\lim\limits_{\omega\to 0} \sigma_2(\omega) = \alpha_2$, τότε καί

$$\lim_{\omega\to 0} \{\sigma_1(\omega) + \sigma_2(\omega)\} = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\lim_{\omega\to 0} \{\sigma_1(\omega) \cdot \sigma_2(\omega)\} = \alpha_1 \alpha_2 \quad .$$

<u>Πρόταση 9.</u> Ἄν $\lim\limits_{\omega\to 0} \sigma(\omega) = \alpha$ καί $\lim\limits_{\omega\to 0} \varphi(\omega) = \beta \neq 0$, τότε τό πηλίκο $\dfrac{\sigma(\omega)}{\varphi(\omega)}$ θά μπορῆ νά μορφωθῆ γιά ὅλα τά ω μέ $0 < |\omega| <$ κατάλληλου θετικοῦ ἀριθμοῦ ϑ_1 καί θά εἶναι

$$\lim_{\omega\to 0} \frac{\sigma(\omega)}{\varphi(\omega)} = \frac{\alpha}{\beta} \quad .$$

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ $\lim\limits_{\omega\to 0} \sigma(\omega) = \infty$.

§ 154. Λέμε ὅτι "ἡ μονοσήμαντη συνάρτηση $\sigma(\omega)$ (τῆς ὁποίας τό πεδίο ὁρισμοῦ περιλαβαίνει ὅλους τούς ἀριθμούς ω μέ $0 < |\omega| <$ κάποιας θετικῆς σταθερᾶς θ) ἔχει ὅριο τό ἄπειρο γιά ω τεῖνον στό 0",

ἄν εἶναι $|\sigma(\omega)| >$ κάθε δοσμένου θετικοῦ ἀριθμοῦ p γιά ὅλα τά ω μέ $0 < |\omega| <$ κατάλληλου θετικοῦ ἀριθμοῦ δ_p. –

Ἡ ἰδιότητα σημειώνεται μέ τή γραφή

$$\lim_{\omega\to 0} \sigma(\omega) = \infty$$

(ἤ, ἐνίοτε μέ τή $\sigma(\omega) \longrightarrow \infty$ γιά $\omega \longrightarrow \infty$).

Π.χ. $\qquad \lim\limits_{\omega\to 0}\left(\dfrac{1}{\omega}\right) = \infty \quad , \quad \lim\limits_{\omega\to 0}\left(\dfrac{1}{\omega^\nu}\right) = \infty$,

ὅπου ν φυσικός ἀριθμός.

Ἀπό τόν παραπάνω ὁρισμό ἕπεται ὅτι, ἄν $\lim\limits_{\omega\to 0} \sigma(\omega) = \infty$, ἡ $\sigma(\omega)$ εἶναι $\neq 0$ γιά ὅλα τά ω μέ $0 < |\omega| <$ κατάλληλου ἀριθμοῦ ϑ_1 καί ὅτι ἡ συνάρτηση $\dfrac{1}{\sigma(\omega)}$, τῆς ὁποίας τό πεδίο ὁρισμοῦ περιλαβαίνει ὅλα τά ω μέ $0 < |\omega| < \vartheta_1$, ἔχει ὅριο τό 0 γιά ω τεῖνον στό 0:

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{1}{\sigma(\omega)} = 0 \quad .$$

'Αντιστρόφως, ἄν εἶναι $\varphi(\omega) \neq 0$ γιά ὅλα τά ω μέ $0 < |\omega| <$ κατάλληλου ἀριθμοῦ θετικοῦ ϑ_2 καί ἄν $\lim_{\omega \to 0} \varphi(\omega) = 0$, τότε τό πηλίκο $\frac{1}{\varphi(\omega)}$ ἔχει νόημα γιά $0 < |\omega| < \vartheta_2$ καί ἰσχύει ἡ "ὁριακή σχέση":

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{1}{\varphi(\omega)} = \infty \quad .$$

'Ιδού τώρα μερικές ἄλλες εὐκολοαπόδειχτες προτάσεις.

Πρόταση 10. "Αν $|\varphi(\omega)| \geqq |\sigma(\omega)|$ γιά ὅλα τά ω μέ $0 < |\omega| <$ κάποιας θετικῆς σταθερᾶς ϑ_1, ὁσοδήποτε μικρῆς ἄλλως τε, καί ἄν $\lim_{\omega \to 0} \sigma(\omega) = \infty$ τότε θά εἶναι καί $\lim_{\omega \to 0} \varphi(\omega) = \infty$.

Πρόταση 11. "Αν $\lim_{\omega \to 0} \sigma(\omega) = \infty$ καί ἄν $|\varphi(\omega)| \leqq$ κάποιας θετικῆς σταθερᾶς Φ γιά ὅλα τά ω μέ $0 < |\omega| <$ κάποιας θετικῆς σταθερᾶς ϑ_1, τότε θά εἶναι

$$\lim_{\omega \to 0} \{\sigma(\omega) + \varphi(\omega)\} = \infty \quad .$$

Πρόταση 12. "Αν $\lim_{\omega \to 0} \sigma(\omega) = \infty$ καί ἄν $|\varphi(\omega)| \geqq$ κάποιας θετικῆς σταθερᾶς C, γιά ὅλα τά ω μέ $0 < |\omega| <$ κάποιας θετικῆς σταθερᾶς ϑ_1, τότε θά εἶναι

$$\lim_{\omega \to 0} \{\varphi(\omega)\ \sigma(\omega)\} = \infty \quad .$$

Εἰδικῶς $\lim_{\omega \to 0} (C \cdot \sigma(\omega)) = \infty$, ὅταν C σταθερά $\neq 0$ καί

$$\lim_{\omega \to 0} \sigma(\omega) = \infty \quad .$$

§ 155. Παρατήρηση. Μιά συνάρτηση $\sigma(\omega)$ μονοσήμαντα ὁρισμένη σ'ἕνα πεδίο τό ὁποῖο περιέχει ὅλα τά ω μέ $0 < |\omega| <$ κάποιας θετικῆς σταθερᾶς ϑ, δέν εἶναι ἀνάγκη νά ἔχη ὅριο γιά ω τεῖνον στό 0. Παράδειγμα ἡ $\sigma(\omega) = \text{ημ}\frac{1}{\omega}$. Πράγματι, ἄν ἡ συνάρτηση αὐτή εἶχε ὅριο γιά ω τεῖνον στό 0, τό ὅριο αὐτό δέν θά μποροῦσε νά εἶναι τό ∞, ἀφοῦ $|\sigma(\omega)| = |\text{ημ}\frac{1}{\omega}| \leqq 1$ γιά ὅλα τά $\omega \neq 0$. "Αν ὅμως δεχθοῦμε ὅτι εἶναι $\lim_{\omega \to 0} \text{ημ}\frac{1}{\omega} = \alpha$

(= ἀριθμός), τότε θά ἔπρεπε νά ἔχουμε $\left|\eta\mu\frac{1}{\omega}-\alpha\right| < \frac{1}{2}$ γιά ὅλα τά ω μέ $0 < |\omega| <$ κατάλληλου θετικοῦ ἀριθμοῦ δ, ἄρα καί γιά $\omega = 1 : \left(\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ ὅπου k ἀκέραιος μέ

$$|k| > \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2\pi} \quad .$$

Ἀλλά εἶναι $$\eta\mu\left(1 : \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$$

καί $$\eta\mu\left(1 : \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}\right) = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = -1 \; .$$

Ἑπομένως θά ἔπρεπε νά εἶναι $|1-\alpha| < \frac{1}{2}$ καί $|-1-\alpha| < \frac{1}{2}$ ἄρα καί $|1-\alpha|+|-1-\alpha| < 1$. Αὐτό ὅμως εἶναι φανερά ἄτοπο, διότι $|1-\alpha|+|-1-\alpha| = |1-\alpha|+|1+\alpha| \geqq |1-\alpha+1+\alpha| = 2$.

Ὥστε ἡ $\eta\mu\frac{1}{\omega}$ δέν ἔχει ὅριο γιά ω τεῖνον στό μηδέν, ὅ.ε.δ.

§ 156. Ἀπόδειξη τῆς ὁριακῆς σχέσεως $\lim\limits_{\omega\to 0}\frac{\eta\mu\omega}{\omega} = 1$.

(Τό τόξο ω ἐξυπακούεται μετρημένο σέ ἀκτίνια). Ἐπειδή $\lim\limits_{\omega\to 0}\omega = 0$ καί $\lim\limits_{\omega\to 0}\eta\mu\omega = 0$, καμμιά ἀπό τίς παραπάνω προτάσεις τῶν παραγράφων 152-154 δέν δίνει ἀμέσως τήν ἀπόδειξη. Γι' αὐτό προεργαζόμαστε ὡς ἑξῆς: Παρατηροῦμε πρῶτα ὅτι $\frac{\eta\mu(-\omega)}{-\omega} = \frac{\eta\mu\omega}{\omega}$. Ἄρα μποροῦμε νά περιοριστοῦμε σέ θετικές τιμές τοῦ ω καί μάλιστα στό διάστημα $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$. Ἰσχύει τότε, ὅπως φαίνεται ἀμέσως γεωμετρικά, $\eta\mu\omega < \omega < \varepsilon\varphi\omega$ καί ἑπομένως $1 < \frac{\omega}{\eta\mu\omega} < \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\omega}$, ἄρα καί $\sigma\upsilon\nu\omega < \frac{\eta\mu\omega}{\omega} < 1$ · συνεπῶς γιά $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$ ἰσχύει ἡ σχέση

(156.1) $$0 < 1 - \frac{\eta\mu\omega}{\omega} < 1-\sigma\upsilon\nu\omega \quad .$$

Ἐπειδή μάλιστα ἡ σχέση αὐτή δέν ἀλλάζει ὅταν ἀντικαταστήσουμε τό ω μέ τό −ω, ἕπεται ὅτι θά ἰσχύη καί γιά $-\frac{\pi}{2} < \omega < 0$.

Παρατηροῦμε δεύτερο ὅτι $\lim\limits_{\omega\to 0}\sigma\upsilon\nu\omega = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$, λόγῳ συνέ-

χειας τῆς συναρτήσεως συνω στή θέση $\omega = 0$ (βλ. "Ασκ. 175*).
Μπορούμε τώρα νά ἐφαρμόσουμε τούς ὁρισμούς καί τίς προτάσεις ὡς ἑξῆς: Ἀπό τό $\lim_{\omega \to 0}$ συνω $= 1$ ἕπεται (ὁρισμός § 153) $\lim_{\omega \to 0}(1-\text{συνω}) = 0$, συνεπῶς (πρόταση 2)

$$\lim_{\omega \to 0}\left(1 - \frac{\text{ημω}}{\omega}\right) = 0 \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

<u>Σχόλιο</u>. Μετά τή σχέση (156.1) θά μποροῦσε κανείς νά προχωρήση καί ὡς ἑξῆς (χωρίς νά κάμη χρήση τοῦ $\lim_{\omega \to 0}$ συνω $= 1$). Ἡ σχέση (156.1) δίνει τή

$$0 < 1 - \frac{\text{ημω}}{\omega} < 1-\text{συνω} = 2\text{ημ}^2\frac{\omega}{2} < 2\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 = \frac{\omega^2}{2}$$

"Αρα γιά νά εἶναι $0 < 1 - \frac{\text{ημω}}{\omega} <$ τοῦ ὁποιουδήποτε θετικοῦ ε, ἀρκεῖ νά ἔχουμε $0 < \frac{\omega^2}{2} < \varepsilon$ ἤ $0 < |\omega| < +\sqrt{2\varepsilon}$. Αὐτό ὅμως κατά τόν ὁριμσό § 153, σημαίνει ὅτι

$$\lim_{\omega \to 0}\frac{\text{ημω}}{\omega} = 1 \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΑ ΟΡΙΑ

§ 157. <u>Μονόπλευρα ὅρια</u>. Τά ὅρια πού ὁρίσαμε στούς παραγράφους 152–154 μποροῦν νά ὀνομαστοῦν ἀμφίπλευρα, ἐπειδή θεωροῦμε τιμές καί θετικές καί ἀρνητικές τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς ω. "Αν περιορίσουμε τό ω σέ θετικές τιμές, τότε ἔχουμε ὅρια "γιά ω τεῖνον στό 0 μέσω θετικῶν τιμῶν" ἤ "γιά ω τεῖνον στό 0 ἀπό δεξιά" ἤ "ἀπό πάνω")·τά ὅρια αὐτά θά τά σημειώνουμε μέ τίς γραφές

$$\lim_{\omega \to 0^+}\sigma(\omega) = \alpha \quad , \quad \lim_{\omega \to 0^+}\sigma(\omega) = \infty \; .$$

Π.χ. $\lim_{\omega \to 0^+}\sqrt[4]{\omega} = 0$, διότι $|\sqrt[4]{\omega}| <$ τοῦ αὐθαίρετου θετικοῦ ε γιά ὅλα τά ω μέ $0 < \omega <$ κατάλληλου θετικοῦ $\delta_\varepsilon (\delta_\varepsilon = \varepsilon^4)$.

"Ομοια $\lim_{\omega \to 0^+}\frac{1}{-\sqrt{\omega}} = \infty$, διότι $\left|\frac{1}{-\sqrt{\omega}}\right| >$ τοῦ αὐθαίρ. θετικοῦ p γιά ὅλα τά ω μέ $0 < \omega <$ κατάλληλου θετικοῦ $\delta_p (\delta_p = \frac{1}{p^2})$.

Ἄν περιορίσουμε τό ω σέ ἀρνητικές τιμές, τότε ἔχουμε ὅρια "γιά ω τεῖνον στό μηδέν μέσῳ ἀρνητικῶν τιμῶν"· θά τά σημειώνουμε ὡς ἑξῆς:

$$\lim_{\omega\to 0^-} \sigma(\omega) = \alpha \quad , \quad \lim_{\omega\to 0^-}\sigma(\omega) = \infty \ .$$

Π.χ. $$\lim_{\omega\to 0^-} \sqrt[+]{-\omega} = 0 \qquad \lim_{\omega\to 0^-} \frac{1}{\sqrt[+]{-\omega}} = \infty \ .$$

Προφανῶς γιά νά ἰσχύῃ ἡ "ἀμφίπλευρη ὁριακή σχέση" $\lim\limits_{\omega\to 0} \sigma(\omega) = \alpha$, πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἰσχύουν οἱ δυό "μονόπλευρες" ὁριακές σχέσεις

$$\lim_{\omega\to 0^+}\sigma(\omega) = \alpha \quad \text{καί} \quad \lim_{\omega\to 0^-}\sigma(\omega) = \alpha \ .$$

Ἀντιθέτως μπορεῖ νά ὑπάρχουν καί τά δυό μονόπλευρα ὅρια

$$\lim_{\omega\to 0^+}\sigma(\omega) = \alpha \quad , \quad \lim_{\omega\to 0^-}\sigma(\omega) = \beta$$

καί νά μήν εἶναι τά ἴδια: $\alpha \neq \beta$.

Π.χ. $$\lim_{\omega\to 0^+} \big(\omega - \mathrm{Ak}(\omega)\big) = 0 \quad , \quad \lim_{\omega\to 0^-} \big(\omega - \mathrm{Ak}(\omega)\big) = 1 \ .$$

§ 158. <u>Δυό εἰδικεύσεις</u>. Ἄν $\lim\limits_{\omega\to 0}\sigma(\omega) = \infty$ καί ἄν $\sigma(\omega)>0$ γιά ὅλα τά ω μέ $0 <|\omega| <$ κατάλληλης θετικῆς σταθερᾶς ϑ_1 ,τότε λέμε εἰδικότερα ὅτι ἡ σ(ω) ἔχει "ὅριο τό σύν ἄπειρο γιά ω τεῖνον στό 0" καί γράφουμε

$$\lim_{\omega\to 0}\sigma(\omega) = +\infty \qquad (\text{ἤ } \sigma(\omega) \to +\infty \text{ γιά } \omega \to 0).$$

Π.χ. $$\lim_{\omega\to 0} \frac{1}{\omega^2} = +\infty \quad , \quad \lim_{\omega\to 0} \frac{1}{1-\text{συν}\omega} = +\infty \ .$$

Ἄν $\lim\limits_{\omega\to 0}\sigma(\omega) = \infty$ καί ἄν $\sigma(\omega) < 0$ γιά ὅλα τά ω μέ $0 <|\omega| <$ κατάλληλης θετικῆς σταθερᾶς ϑ_1, τότε λέμε εἰδικότερα ὅτι ἡ σ(ω) ἔχει "ὅριο τό μεῖον ἄπειρο γιά ω τεῖνον στό 0" καί γράφουμε

$$\lim_{\omega\to 0}\sigma(\omega) = -\infty \qquad (\text{ἤ } \sigma(\omega) \to -\infty \text{ γιά } \omega \to 0).$$

Π.χ. $$\lim_{\omega\to 0} \frac{1}{\text{συν}\omega-1} = -\infty \quad , \quad \lim_{\omega\to 0} \frac{1}{-\sqrt{\omega^2}} = -\infty \ .$$

Ἄν συνδυάσουμε τίς δυό αὐτές εἰδικεύσεις μέ τά μονόπλευρα ὅρια βρίσκουμε ἀμέσως τί σημαίνουν γραφές ὅπως ἡ ἑξῆς:

$$\lim_{\omega\to 0^+}\sigma(\omega) = +\infty \ .$$

Αὐτή π.χ. σημαίνει ὅτι εἶναι σ(ω) > κάθε θετικοῦ ἀριθμοῦ p γιά ὅλα τά ω μέ 0 < ω < κατάλληλου θετικοῦ ἀριθμοῦ δ_p. Ἔτσι ἔχουμε

$$\lim_{\omega\to 0^+} \frac{1}{\omega} = +\infty \quad , \text{ ἐνῶ εἶναι } \quad \lim_{\omega\to 0^-} \frac{1}{\omega} = -\infty \quad .$$

ΠΗΛΙΚΟ ΑΥΞΗΣΕΩΝ

§ 159. Ἔστω $y = \varphi(x)$ μιά συνάρτηση μονοσήμαντα ὁρισμένη στό διάστημα $\alpha < x < \beta$ καί x_0 ἕνας ἀριθμός ἀπό αὐτό. Τό πηλίκο ἀντίστοιχων αὐξήσεων ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς καί συναρτήσεως:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\varphi(x_0+\Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x}$$

εἶναι μιά συνάρτηση τοῦ Δx μονοσήμαντα ὁρισμένη γιά ὅλα τά Δx μέ $\alpha < |\Delta x| <$ κάποιας θετικῆς σταθερᾶς θ (γιά θ μποροῦμε νά πάρουμε κάθε θετική σταθερά μικρότερη ἀπό τό πλάτος καί τοῦ διαστήματος (α, x_0) καί τοῦ (x_0, β)). Ἄν λοιπόν καλέσουμε τό Δx ω, τό "πηλίκο αὐξήσεων" $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ θά εἶναι μιά συνάρτηση σ(ω) τοῦ ω, ὅπως αὐτές πού θεωρήσαμε στούς §§ 152-158, γιά τήν ὁποία ἐπομένως μπορεῖ νά τεθῆ τό ἐρώτημα, ἄν ἔχει ἤ ὄχι ὅριο γιά $\omega = \Delta x$ τεῖνον στό μηδέν. Π.χ. ἄν $y = x^2$ καί $x_0 = -5$, τότε

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-10\,\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = -10+\Delta x \ .$$

Ἐδῶ προφανῶς τό $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(-10+\Delta x)$ ὑπάρχει καί εἶναι ἴσο μέ −10. Ἄν $y = \sqrt[3]{x^2}$ καί $x_0 = 0$, τότε

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{(0+\Delta x)^2} - \sqrt[3]{0^2}}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}} \ ,$$

ἄρα ἐδῶ $$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty \quad .$$

Ἔστω ἡ συνάρτηση $y = \varphi(x)$ μέ τόν ἀκόλουθο ὁρισμό:

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{καί, γιά} \quad x \neq 0, \qquad \varphi(x) = x\etaμ\frac{1}{x}.$$

Ἄς πάρουμε τό πηλίκο αὐξήσεων στή θέση $x = 0$· θά ἔχουμε

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\varphi(0+\Delta x) - \varphi(0)}{\Delta x} = \frac{(0+\Delta x)\,\etaμ\dfrac{1}{0+\Delta x} - 0}{\Delta x} = \etaμ\frac{1}{\Delta x}.$$

Ἐδῶ τό πηλίκο $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ δέν ἔχει ὅριο γιά Δx τεῖνον στό 0 (βλ. § 155).

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

§ 160. Ἔστω $y = \varphi(x)$ μιά συνάρτηση μονοσήμαντα ὁρισμένη σ'ἕνα διάστημα $\alpha < x < \beta$ καί x_0 ἕνας ἀριθμός ἀπό αὐτό.

Θά λέμε τή $\varphi(x)$ παραγωγίσιμη στή θέση x_0 (ἤ γιά $x = x_0$) ἄν τό πηλίκο αὐξήσεων

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\varphi(x_0+\Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x}$$

ἔχη ὅριο ἤ ἕναν ἀριθμό ἤ τό $+\infty$ ἤ τό $-\infty$ γιά Δx τεῖνον στό 0. Τό ὅριο αὐτό λέγεται παράγωγος τῆς $\varphi(x)$ στή θέση x_0 καί σημειώνεται γενικά μέ

$$y'(x_0) \quad ἤ \quad (\varphi(x))'_{x=x_0} \quad ἤ \quad [D(\varphi(x))]_{x=x_0}.$$

(Μιάν ἄλλη γραφή τῆς παραγώγου θά γνωρίσουμε παρακάτω).

Ἔτσι λοιπόν ἐξ ὁρισμοῦ

$$\varphi'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\right)_{x=x_0}$$

μέ τήν προϋπόθεση ὅτι τό ὅριο ὑπάρχει καί εἶναι ἤ ἕνας ἀριθμός ἤ π ρ ο σ η μ α σ μ έ ν ο ἄπειρο. Π.χ. ἀπό ὅσα εἴδαμε στό τέλος τοῦ προηγουμένου παραγράφου ἕπεται ὅτι ἡ $y = x^2$ εἶναι παραγωγίσιμη στή θέση -5 καί ὅτι ἡ παράγωγός της γιά $x = -5$ εἶναι ὁ ἀριθμός -10, συμβολικά: $(x^2)'_{x=-5} = -10$. Ἡ συνάρτηση $y = \sqrt[3]{x^2}$ δέν εἶναι παραγωγίσιμη γιά $x = 0$, διότι τό πηλίκο αὐξήσεων σ'αὐτήν τή θέση ἔχει ὅριο γιά $\Delta x \to 0$ τό ἀ π ρ ο σ ή μ α σ τ ο ἄπειρο., ἀφοῦ εἶναι $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ γιά $\Delta x > 0$ καί $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ γιά $\Delta x < 0$. Ἡ συνάρτηση

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 \text{ γιά } x = 0 \\ x\eta\mu \frac{1}{x} \text{ γιά } x \neq 0 \end{cases}$$

δέν εἶναι παραγωγίσιμη στή θέση $x = 0$, διότι τό ἀντίστοιχο πηλίκο $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ δέν ἔχει ὅριο γιά Δx τεῖνον στό 0. Ἡ συνάρτηση $y = \sqrt[3]{x}$ εἶναι παραγωγίσιμη στή θέση $x = 0$, διότι τό ἀντίστοιχο $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ἰσοῦται μέ $\frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{(\sqrt[3]{\Delta x})^2}$ ἄρα $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ καί ἑπομένως $(\sqrt[3]{x})'_{x=0} = +\infty$. Ἡ συνάρτηση $y = -\sqrt[3]{x}$ εἶναι ἐπίσης παραγωγίσιμη στή θέση $x = 0$ καί προφανῶς $(-\sqrt[3]{x})'_{x=0} = -\infty$.

Ἡ ἔκφραση: "ἡ παράγωγος $\varphi'(x_0)$ ὑπάρχει" εἶναι ταυτόσημη μέ τίς ἐκφράσεις: "ἡ $\varphi(x)$ εἶναι παραγωγίσιμη στή θέση x_0", "ἡ $\varphi(x)$ ἔχει παράγωγο γιά $x = x_0$".

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

§ 161. Ἄν ἡ παράγωγος $\varphi'(x_0)$ εἶναι ἀριθμός (καί ὄχι τό $+\infty$ ἤ τό $-\infty$), θά τή λέμε πεπερασμένη. Στήν περίπτωση αὐτή ἔχουμε

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\varphi(x_0+\Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} = \varphi'(x_0) + \eta(\Delta x),$$

ὅπου τό $\eta(\Delta x)$ εἶναι μιά συνάρτηση τοῦ Δx, μονοσήμαντα ὁρισμένη γιά $0 < |\Delta x| <$ κατάλληλου ἀριθμοῦ ϑ, γιά τήν ὁποία ἰσχύει ἡ ὁριακή σχέση $\lim_{\Delta x \to 0} \eta = 0$.

Ἄρα $|\eta| <$ κάθε θετικοῦ ἀριθμοῦ ε γιά $0 < |\Delta x| <$ κατάλληλου θετικοῦ δ_ε. Ἄν λοιπόν κάνουμε ὑπολογισμούς κατά προσέγγιση καί ἐπιτρέπωνται σφάλματα προσεγγίσεων μικρότερα τοῦ ε κατ' ἀπόλυτη τιμή, τότε γιά ὅλα τά Δx μέ $0 < |\Delta x| < \delta_\varepsilon$ μποροῦμε νά γράφουμε τήν κατά προσέγγιση ἰσότητα: $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \varphi'(x_0)$ καί ἄρα $\Delta y \approx \varphi'(x_o)\,\Delta x$, $\varphi(x_o+\Delta x) \approx \varphi(x_o) + \varphi'(x_o)\cdot\Delta x$.

Π.χ. ἄν $y = x^2$ καί $x_o = -5$, ὁπότε, ὅπως εἴδαμε,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -10 + \Delta x \qquad \text{καί} \qquad y'(-5) = -10$$

τότε τό $\eta(\Delta x) = \Delta x$ καί ἐπομένως $|\eta| < \varepsilon$ γιά ὅλα τά Δx μέ $0 < |\Delta x| < \varepsilon$ $(= \delta_\varepsilon)$. Ἄρα, ἄν π.χ. ἐπιτρέπωνται σφάλματα προσεγγίσεων μικρότερα τοῦ $\frac{1}{1000}$ κατ'ἀπόλυτη τιμή, τότε μποροῦμε νά γράφουμε γιά ὅλα τά Δx μέ $0 < \Delta x < \frac{1}{1000}$ τίς κατά προσέγγιση σχέσεις:

$$(-5+\Delta x)^2 \approx (-5)^2 + (-10)\Delta x = 25 - 10\Delta x$$

(Εἰδικῶς π.χ. $\left(-5 + \frac{3}{10^4}\right)^2 \approx 25 - \frac{3\cdot 10}{10^4}$, δηλαδή $(-4,9997)^2 \approx 24,997$. Τό σφάλμα μ'αὐτήν τήν προσεγγιστική τιμή εἶναι

$$\left(-5 + \frac{3}{10^4}\right)^2 - 24,997 = \frac{9}{10^8} \quad).$$

Τό παράδειγμα δείχνει φανερά μιά χρησιμότητα τῶν παραγώγων καί ἕναν τρόπο χρησιμοποιήσεώς των στούς κατά προσέγγιση ὑπολογισμούς πού παρουσιάζονται στήν πράξη.

Ἰδού τώρα ἕνα εὐκολοαπόδειχτο θεώρημα:

Πρόταση 1. Ἄν ἡ συνάρτηση ἔχη πεπερασμένη παράγωγο στή θέση x_o τότε θά εἶναι συνεχής σ'αὐτήν τή θέση.

Σχόλιο. Ἡ ἀντίστροφη πρόταση δέν ἀληθεύει. Παράδειγμα ἡ συνάρτηση

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 \text{ γιά } & x = 0 \\ x\eta\mu\,\frac{1}{x} & \text{γιά } x \neq 0 \end{cases}$$

ἡ ὁποία εἶναι συνεχής στή θέση $x = 0$ (διότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu\,\frac{1}{x}\right) = 0$) , ἀλλά δέν ἔχει παράγωγο σ'αὐτήν τή θέση (βλ. § 160).

Η ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΩΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΗΣ ΘΕΣΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΕΩΣ

§ 162. Ἄν ἡ συνάρτηση, ἡ μονοσήμαντα ὁρισμένη στό διάστημα $\alpha < x < \beta$, ἔχη πεπερασμένη παράγωγο $\varphi'(x_0)$ σέ κάθε θέση x_0 τοῦ διαστήματος, τότε ἡ παράγωγος αὐτή εἶναι μιά συνάρτηση τοῦ x_0, μονοσήμαντα ὁρισμένη στό ἴδιο διάστημα ἀριθμῶν $\alpha < x_0 < \beta$. Τό x_0 εἶναι λοιπόν τώρα μιά μεταβλητή μέ τό ἴδιο πεδίο μεταβολῆς ὅπως καί ἡ μεταβλητή x. Γι'αὐτό εἶναι περιττό νά τή δηλώνουμε μέ ἕνα ἄλλο σύμβολο. Ἔτσι θά γράφουμε $\varphi'(x)$ ἀντί $\varphi'(x_0)$. Σύμφωνα μ'αὐτά εἶναι:

$$\varphi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} .$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Ἔστω $y = c =$ σταθερά γιά $-\infty < x < +\infty$. Σέ ὁποιαδήποτε θέση x ἀπό τό διάστημα $-\infty < x < +\infty$, ἔχουμε

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0 ,$$

ἄρα $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, καί $y'(x) = 0$ γιά $-\infty < x < +\infty$.

Μέ λόγια: Ἡ παράγωγος σταθερῆς συναρτήσεως εἶναι μηδέν σ'ὅλο τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως.

2. Ἔστω $y = \lambda x + \mu$, ὅπου λ καί μ σταθερές, γιά $-\infty < x < +\infty$. Σέ ὁποιαδήποτε θέση x τοῦ διαστήματος $-\infty < x < +\infty$ ἔχουμε

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{\lambda\cdot(x+\Delta x) + \mu - (\lambda x+\mu)}{\Delta x} = \frac{\lambda\cdot\Delta x}{\Delta x} = \lambda .$$

Ἄρα $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lambda$. Συνεπῶς $y'(x) = (\lambda x+\mu)' = \lambda$. Μέ λόγια: ἡ παράγωγος γραμμικῆς συναρτήσεως τοῦ x ἔχει σταθερή τιμή σ'ὅλο τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως καί ἰσοῦται μέ τό συντελεστή τοῦ x.

3. Ἔστω $y = x^2$. Σέ ὁποιαδήποτε θέση x τοῦ διαστήματος

$-\infty < x < +\infty$ ἔχουμε

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x+\Delta x \quad ,$$

ἄρα $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$ καί συνεπῶς $(x^2)' = 2x$.

4. $y = \eta\mu x$ (τό x σέ ἀκτίνια). Σέ ὁποιαδήποτε θέση τοῦ διαστήματος $-\infty < x < +\infty$, ἔχουμε

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\eta\mu(x+\Delta x)-\eta\mu x}{\Delta x} = \frac{2\sigma\upsilon\nu(x+\frac{\Delta x}{2})\eta\mu\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \sigma\upsilon\nu(x+\frac{\Delta x}{2})\,\frac{\eta\mu\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} .$$

Ἔχουμε ὅμως (βλ. § 156) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\eta\mu\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$· ἐξ ἄλλου εἶναι $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sigma\upsilon\nu(x+\Delta x) = \sigma\upsilon\nu x$ λόγῳ συνέχειας τῆς συναρτήσεως $\sigma\upsilon\nu x$ στή θέση x (βλ. ἄσκ. 175*). Ἄρα (πρόταση 8 τοῦ § 153)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \sigma\upsilon\nu x \cdot 1 = \sigma\upsilon\nu x \quad .$$

Συνεπῶς $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$ γιά $-\infty < x < +\infty$.

5. Ἔστω $y = \sigma\upsilon\nu x$ (τό x σέ ἀκτίνια). Ἔχουμε, σέ ὁποιαδήποτε θέση x ἀπό τό διάστημα $-\infty < x < +\infty$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sigma\upsilon\nu(x+\Delta x) - \sigma\upsilon\nu x}{\Delta x} =$$

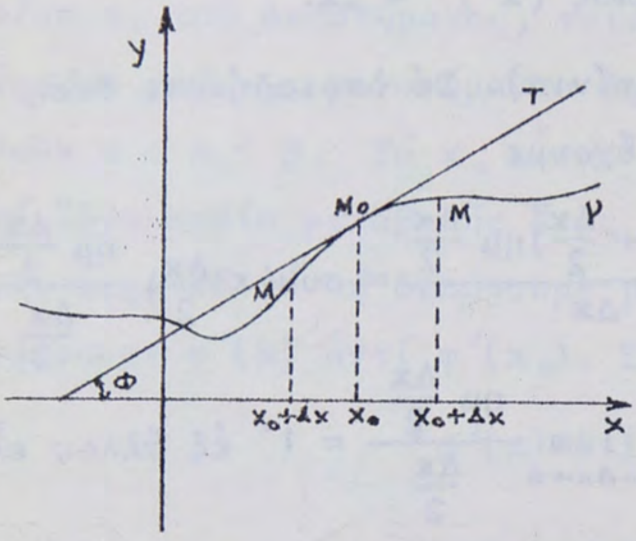
$$= \frac{-2\eta\mu(x+\frac{\Delta x}{2})\,\eta\mu\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = -\eta\mu(x+\frac{\Delta x}{2})\,\frac{\eta\mu\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Ἄρα $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\eta\mu x$. Συνεπῶς $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$ γιά $-\infty < x < +\infty$.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

§ 163. Ἔστω $y = \sigma(x)$ μιά μονοσήμαντη συνάρτηση στό διάστημα $\alpha < x < \beta$ μέ πεπερασμένη παράγωγο $\sigma'(x_0)$ στή θέση x_0 ἀπό τό διάστημα. Θεωροῦμε τή γραφική παράσταση τῆς $y=\sigma(x)$

σ'ἕνα σύστημα ὀρθογώνιων συντεταγμένων (x,y) μέ $|\bar{i}| = |\bar{j}|$. Ἄς εἶναι M_o τό σημεῖο τῆς y μέ συντεταγμένες $(x_o,\ \sigma(x_o) = y_o)$ καί M τό σημεῖο μέ συντεταγμένες $(x_o+\Delta x\ ,\ \sigma(x_o+\Delta x))$.



Ὁ συντελεστής διευθ. τοῦ διανύσματος $\overline{M_oM}$ (ἤ τῆς εὐθείας τῆς χορδῆς M_oM) εἶναι

$$\frac{\sigma(x_o+\Delta x) - \sigma(x_o)}{x_o+\Delta x-x_o} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\ .$$

ἄρα ἡ εὐθεία M_oM ἔχει ἐξίσωση

$$y-y_o = \frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot(x - x_o)\ .$$

Ἐπειδή $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \approx \sigma'(x_o)$ γιά ἀρκετά μικρά $|\Delta x|$, εἶναι φυσικό νά συσχετίσουμε τήν εὐθεία M_oM μέ τήν εὐθεία M_oT:

$$y - \sigma(x_o) = y-y_o = \sigma'(x_o)\ (x-x_o)$$

πού περνᾶ ἀπό τό M_o καί ἔχει συντελεστή διευθύνσεως $\sigma'(x_o)$.

Ἡ ὀξεία γωνία ω τῶν δύο εὐθειῶν M_oM καί M_oT ἔχει ἐφαπτομένη:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\left|\dfrac{\Delta y}{\Delta x} - \sigma'(x_o)\right|}{\left|1 + \dfrac{\Delta y}{\Delta x}\ \sigma'(x_o)\right|}\ .$$

Εἶναι ὅμως $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left|\dfrac{\Delta y}{\Delta x} - \sigma'(x_o)\right| = 0$

καί
$$\lim_{\Delta x\to 0}\left|1 + \frac{\Delta y}{\Delta x}\ \sigma'(x_o)\right| = \left|1 + \sigma'(x_o)\ \sigma'(x_o)\right| = 1 + \left(\sigma'(x_o)\right)^2 \neq 0\ .$$

Ἄρα $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \varepsilon\varphi\omega = 0$ καί ἐπομένως $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \omega = 0$ (διότι ἡ ὀξεία γωνία ω σέ ἀκτίνια εἶναι $\leqq$εφω, ὅπου τό ἴσο τέθηκε στή σχέση ἐπειδή ἐνδεχομένως $\omega = 0$).

Γι'αὐτό λέμε ὅτι ἡ εὐθεία M_oT εἶναι ὅ ρ ι ο (ἤ ὁ - ρ ι α κ ή θ έ σ η) τῆς εὐθείας M_oM γιά Δx τεῖνον στό 0 (ἤ, πρᾶγμα ἰσοδύναμο, γιά M τεῖνον στό M_o ἐπάνω στή γραφ. παράσταση γ).

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι, ἄν ὁ γεωμ. τόπος γ εἶναι τόξο κύκλου, μιά εὐθεία M_oT πού ἔχει τήν παραπάνω γεωμ. ἰδιότητα θά συμπίπτη ἀναγκαστικά μέ τήν ἐφαπτομένη τοῦ κυκλικοῦ τόξου στό σημεῖο του M_o.

Γενικεύοντας λοιπόν ὁρίζουμε τήν ἐφαπτομένη ἑνός γεωμετρικοῦ τόπου, ὅπως ὁ θεωρούμενος γ, σ'ἕνα σημεῖο του M_o, ὡς ἑξῆς: εἶναι ἡ εὐθεία M_oT πού ἡ ὀξεία γωνία της μέ μιά "χορδή" M_oM τοῦ τόπου ἔχει μέτρο < τοῦ αὐθαίρετου θετικοῦ ε γιά ὅλα τά σημεῖα M τοῦ τόπου τῶν ὁποίων ἡ ἀπόσταση (M_oM) εἶναι < κατάλληλου θετικοῦ ζ_ε. Μέ βάση αὐτόν τόν ὁρισμό ἔχουμε λοιπόν τό συμπέρασμα: ἕνας γεωμ. τόπος γ, πού παριστάνεται ἀπό τή σχέση $y = \sigma(x)$, ἔχει ἐφαπτομένη στό σημεῖο τοῦ $M_o(x_o, \sigma(x_o) = y_o)$, ὅταν ἡ $\sigma(x)$ ἔχει πεπερασμένη παράγωγο στή θέση x_o, καί ὅτι ἡ ἐξίσωση τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς εἶναι:

$$y - \sigma(x_o) = \sigma'(x_o)(x-x_o) .$$

Ἡ κλίση $\sigma'(x)$ τῆς ἐφαπτομένης (σέ ὀρθογ. σύστημα συντεταγμένων μέ $|\bar{i}| = |\bar{j}|$) ἰσοῦται μέ τήν εφ$(\widehat{\overrightarrow{OX}\ \overrightarrow{M_oT}})$ τῆς γωνίας πού ἔχει πρώτη πλευρά τόν θετ. ἡμιάξονα OX καί δεύτερη πλευρά μιάν ἡμιευθεία παράλληλη πρός τήν ἐφαπτομένη ἤ κείμενη πάνω σ'αὐτήν. Τό διάνυσμα $(1, \sigma'(x_o))$ εἶναι λοιπόν παράλληλο πρός τήν ἐφαπτομένη.

Π.χ. ἡ παραβολή $y = x^2$ ἔχει ἐφαπτομένη στό σημεῖο της $M_o(-3,9)$ τήν εὐθεία $y-9 = 2(-3)\ (x-(-3)) = -6(x+3)$. Εὔκολα διαπιστώνει κανείς ἀναλυτικά ὅτι ἡ εὐθεία αὐτή ἔχει ἕνα μόνο κοινό σημεῖο μέ τήν παραβολή $y = x^2$, τό $M_o(-3,9)$, πού λογαριάζουμε διπλό γιατί ἡ 2βάθμια ἐξίσωση, ἡ ὁποία προκύπτει ἀπό τό σύστημα

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y-9 = -6(x+3) \end{cases}$$

μέ ἀπαλοιφή τοῦ y, ἔχει τή ρίζα $x = -3$ διπλῆ.

Ἄν πάρουμε πάνω στήν ἐφαπτομένη τή φορά $\overrightarrow{M_0T}$ ↑↑ πρός τό διάνυσμα $(1,-6)$, ἡ γωνία $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{M_0T})$ (πού μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε ἀπό τήν ἐφαπτομένη της -6) βρίσκεται $\approx -80^\circ{,}5 + k360^\circ$ ὅπου k αὐθαίρετος ἀκέραιος ἀριθμός.

<u>Σχόλια</u>. Ἄν ἡ $\sigma(x)$ εἶναι συνεχής στή θέση x_0 καί ἔχει ἄπειρη παράγωγο σ'αὐτήν ($\sigma'(x_0) = +\infty$ ἤ $-\infty$), τότε καί πάλι ἀποδείχνεται ὅτι ἡ γραφική παράσταση τῆς $y = \sigma(x)$ ἔχει ἐφαπτομένη στό σημεῖο της $M_0(x_0,\sigma(x_0))$, τήν εὐθεία $x = x_0$ μέ συντελ. διευθύνσεως ∞. Παράδειγμα ἡ $y = \sqrt[3]{x}$ στή θέση $x_0 = 0$.

Γενικότερα ἀκόμη, ἄν ἡ $\sigma(x)$ εἶναι συνεχής στή θέση x_0 καί ἄν

$$\lim \frac{\sigma(x_0+\Delta x) - \sigma(x_0)}{\Delta x} = \infty \ ,$$

πάλι ἀποδείχνεται ὅτι ἡ γραφική παράσταση τῆς $y = \sigma(x)$ ἔχει ἐφαπτομένη στό σημεῖο της $M_0(x_0,\sigma(x_0))$, τήν εὐθεία $x = x_0$.

Παράδειγμα ἡ $y = \sqrt[3]{x^2}$ στή θέση $x_0 = 0$.

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

§ 164. Θεωροῦμε τήν κίνηση ἑνός σημείου P πάνω στόν ἄξονα OX. Ἡ θέση τοῦ P εἶναι ὁρισμένη σέ κάθε χρονική στιγμή t ἀπό τό χρονικό διάστημα $\alpha < t < \beta$ κατά τό ὁποῖο πραγματοποιεῖται ἡ κίνηση. Ἄρα ἡ τετμημένη x τοῦ P εἶναι μιά μονοσήμαντη συνάρτηση τῆς μεταβλητῆς t:

$$x = \sigma(t) \qquad \text{γιά} \qquad \alpha < t < \beta \ .$$

Ἄν $\sigma(t) = \lambda t+\mu$, τότε σέ ἴσα χρονικά διαστήματα τό κινητό διατρέχει ἴσα διανύσματα:

$$\sigma(t_2) - \sigma(t_1) = \lambda(t_2 - t_1) = \sigma(t_2') - \sigma(t_1')$$

ὅταν $t_2 - t_1 = t_2' - t_1'$.

Ἀντιστρόφως, ἄν σέ ἴσα χρονικά δι στήματα τό P διατρέχη ἴσα διανύσματα, τότε μεταξύ $t-t_1$ καί $\sigma(t) - \sigma(t_1)$ θά ὑφίσταται εὐθεία ἀναλογία καί (σύμφωνα μέ τόν § 144, 3)) ἡ $\sigma(t)$ θά εἶναι πρωτοβάθμια συνάρτηση τοῦ t: $\sigma(t) = \lambda t + \mu$.

Σ'αὐτήν τήν περίπτωση τό πηλίκο

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\sigma(t_0 + \Delta t) - \sigma(t_0)}{\Delta t}$$

ἔχει τήν ἴδια τιμή λ γιά ὅλα τά Δt καί λέγεται, ὅπως εἶναι γνωστό, ταχύτητα τοῦ ἰσοταχῶς κινούμενου σημείου P. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ ταχύτητα αὐτή ἰσοῦται καί μέ τήν παράγωγο τῆς τετμημένης **x** τοῦ P θεωρούμενης ὡς συναρτήσεως τοῦ χρόνου t:

$$(\lambda t + \mu)_t' = \lambda \quad .$$

Ἄς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι ἡ $x = \sigma(t)$ δέν εἶναι πρωτοβάθμια συνάρτηση τοῦ t καί ὅτι ἔχει πεπερασμένη παράγωγο $\sigma'(t_0)$ στή θέση t_0. Τό πηλίκο

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\sigma(t_0 + \Delta t) - \sigma(t_0)}{\Delta t}$$

δέν θά ἔχη πλέον σταθερή τιμή γιά ὅλα τά Δt. Μέ ἄλλα λόγια: ἡ λεγόμενη μέση ταχύτητα τοῦ P στό χρονικό διάστημα μεταξύ τῆς χρονικῆς στιγμῆς t_0 καί τῆς χρον. στιγμῆς $t_0 + \Delta t$ δέν θά εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τό Δt. Ἄν ὅμως πάρουμε τό $|\Delta t|$ μικρότερο ἀπό ἕναν κατάλληλο θετικό ἀριθμό δ_ε, τό $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ θά διαφέρη ἀπό τό $\sigma'(t_0)$ κατά μιάν ποσότητα $\eta(\Delta t)$ μικρότερη ἀπολύτως ἀπό τόν αὐθαίρετα δοσμένο θετικό ἀριθμό ε (βλ. § 161). Ἀπ'ἐδῶ γίνεται φανερό 1ο ὅτι ἡ μέση ταχύτητα $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ στό χρονικό διάστημα $(t_0, t_0+\Delta t)$ θά ληφθῆ στήν πράξη ἴση μέ $\sigma'(t_0)$

γιά ὅλα τά $|\Delta t|$ τά καταλλήλως μικρά καί 2ο ὅτι τό ὅριο $\sigma'(t_o)$ τῆς μέσης ταχύτητας $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, γιά Δt τεῖνον στό 0, θά ἔχη μεγάλη θεωρητική χρησιμότητα στή μελέτη τῆς κινήσεως τοῦ P. Ἔτσι ὁδηγούμαστε στόν ὁρισμό: ἡ παράγωγος $\sigma'(t_o)$ τῆς τετμημένης $x = \sigma(t)$ τοῦ P γιά $t = t_o$ καλεῖται "ταχύτητα τοῦ P στή χρονική στιγμή t_o".

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΕΩΣ.

§ 165. Πρόταση 2. "Αν οἱ συναρτήσεις $\sigma(x)$ καί $\varphi(x)$ ἔχουν πεπερασμένες παραγώγους στή θέση x, τό ἄθροισμά τους θά ἔχη παράγωγο στή θέση x_o τό ἄθροισμα τῶν παραγώγων $\sigma'(x_o)$ καί $\varphi'(x_o)$:

$$\{\sigma(x) + \varphi(x)\}'_{x=x_o} = \sigma'(x_o) + \varphi'(x_o) .$$

Ἡ πρόταση ἐπεκτείνεται μέ ἐπαγωγή στό ἄθροισμα ν συναρτήσεων πού ἔχουν πεπερασμένη παράγωγο στή θέση x_o(τό ν εἶναι ἕνας αὐθαίρετα ὁ ρ ι σ μ έ ν ο ς φυσικός ἀριθμός $\geqq 2$).

Π.χ. $(x^2+x+4)'_{x=-4} = (x^2)'_{x=-4} + (x)'_{x=-4} + (4)' =$

$$= 2\cdot(-4) + 1 + 0 = -7.$$

(βλ. § 162,Παραδείγματα).

"Ομοια ἔχουμε $(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)'_{x=\frac{\pi}{3}} = (\eta\mu x)'_{x=\frac{\pi}{3}} + (\sigma\upsilon\nu x)'_{x=\frac{\pi}{3}} =$

$$= \sigma\upsilon\nu\,\frac{\pi}{3} - \eta\mu\,\frac{\pi}{3} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} .$$

Πρόταση 3. "Αν οἱ συναρτήσεις $\sigma(x)$ καί $\varphi(x)$ ἔχουν πεπεσμένες παραγωγούς στή θέση x_o τό γινόμενό τους θά ἔχη παράγωγο $\sigma'(x_o)\,\varphi(x_o) + \sigma(x_o)\cdot\varphi'(x_o)$ σ'αὐτήν τή θέση:

$$\{\sigma(x)\cdot\varphi(x)\}'_{x=x_o} = \sigma'(x_o)\cdot\varphi(x_o) + \sigma(x_o)\cdot\varphi'(x_o) .$$

Ἡ πρόταση ἐπεκτείνεται σέ γινόμενο ν παραγόντων (ν = αὐθαίρετα ὁ ρ ι σ μ έ ν ο ς φυσικός ἀριθμος $\geqq 2$) μέ μαθηματική ἐπαγωγή:

$$\{\sigma_1(x)\cdot\sigma_2(x)\ldots\sigma_\nu(x)\}'_{x=x_0} = \sigma_1'(x_0)\cdot\sigma_2(x_0)\ldots\sigma_\nu(x_0) +$$
$$+\ \sigma_1(x_0)\cdot\sigma_2'(x_0)\sigma_3(x_0)\ldots\sigma_\nu(x_0) + \ldots + \sigma_1(x_0)\sigma_2(x_0)\ldots$$
$$\ldots\ \sigma_{\nu-1}(x_0)\ \sigma_\nu'(x_0).$$

<u>Πόρισμα</u>. Ἄν ἡ συνάρτηση $\sigma(x)$ ἔχη πεπερασμένη παράγωγο στή θέση x_0 τότε ἡ $C\sigma(x)$, ὅπου C σταθερά, ἔχει παράγωγο $C\cdot\sigma'(x_0)$ σέ αὐτήν τή θέση.

Π.χ. $(x^2)'_{x=x_0} = (x\cdot x)'_{x=x_0} = 1\cdot x_0 + x_0\cdot 1 = 2x_0$, ὅπως βρήκαμε καί ἀπ'εὐθείας (§ 162, 3).

$$(-5x^2)'_{x=x_0} = -5(x^2)'_{x=x_0} = -5\cdot 2x_0 = -10x_0 \quad .$$

<u>Ἐφαρμογές</u>. Ἔστω ν ἕνας ὁρισμένος φυσικός ἀριθμός $\geqq 2$. Θά ἔχουμε $(x^\nu)'_{x=x_0} = (x\cdot x\cdot\ldots\cdot x)'_{x=x_0} = 1\cdot x_0\ldots x_0 +$
$+\ x_0\cdot 1\cdot x_0\ldots\ x_0 + \ldots + x_0\ldots x_0\cdot 1 = \nu x_0^{\nu-1}$.

Ἄρα ἔχουμε τόν κανόνα:

Ἡ συνάρτηση $y = x^\nu$, ὅπου ν ἕνα ὁρισμένος φυσικός ἀριθμός, ἔχει παράγωγο, σέ τυχοῦσα θέση x ἀπό τό διάστημα $-\infty < x < +\infty$, τόν ἀριθμό $\nu x^{\nu-1}$.

Κατά συνέπεια: ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο $\pi(x) = \alpha_\mu x^\mu + \alpha_{\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ ἔχει παράγωγο σέ τυχοῦσα θέση x ἀπό τό διάστημα $-\infty < x < +\infty$, τόν ἀριθμό

$$\mu\alpha_\mu x^{\mu-1} + (\mu-1)\alpha_{\mu-1}x^{\mu-2} + \ldots + 2\alpha_2 x + \alpha_1 \quad .$$

Π.χ. $(5x^4-2x^3+4x-6)'_{x=2} = (5\cdot 4x^3-2\cdot 3x^2+4)_{x=2} =$
$= 160 - 24 + 4 = 140$.

§ 166. <u>Πρόταση 4</u>. Ἄν οἱ συναρτήσεις $\sigma(x)$ καί $\varphi(x)$ ἔχουν πεπερασμένη παράγωγο στή θέση x_0 καί ἄν $\varphi(x_0) \neq 0$, τότε

$$\left\{\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}\right\}'_{x=x_0} = \frac{\sigma'(x_0)\varphi(x_0) - \sigma(x_0)\varphi'(x_0)}{(\varphi(x_0))^2} \quad .$$

Εἰδικά ἄν $\sigma(x) = 1$ (= σταθερά), τότε

$$\left\{\frac{1}{\varphi(x)}\right\}'_{x=x_0} = \frac{-\varphi'(x_0)}{(\varphi(x_0))^2} \quad .$$

Π.χ. $\left[\dfrac{4x+3}{2x-5}\right]'_{x=2} = \dfrac{4\cdot(2.2-5) - (4\cdot 2+3)\cdot 2}{(2\cdot 2 - 5)^2} = \dfrac{4(-5) - 2\cdot 3}{1} = -26.$

'Εφαρμογές. 1. Σέ κάθε θέση $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, ὅπου k τυχών ἀκέραιος ἀριθμός, ἔχουμε:

$$(\varepsilon\varphi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(-\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\ .$$

"Ομοια βρίσκουμε σέ κάθε θέση $x \neq k\pi$, ὅπου k τυχών ἀκέραιος,

$$(\sigma\varphi x)'_x = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\right)'_x = \frac{-\eta\mu x\cdot\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}\ .$$

2. "Εστω $y = x^{-\nu} = \frac{1}{x^\nu}$, ὅπου ν σταθερά ἴση μέ φ υ σ ι κ ό ἀριθμό.

Σέ κάθε θέση $x \neq 0$ ἔχουμε

$$y'(x) = \left(\frac{1}{x^\nu}\right)' = \frac{0\cdot x^\nu - 1\cdot\nu x^{\nu-1}}{(x^\nu)^2} = -\nu\,\frac{1}{x^{\nu+1}} = -\nu x^{-\nu-1}\ .$$

"Ωστε ἡ δύναμη $x^{-\nu}$ μέ ἀρνητικό ἀκέραιο ἐκθέτη ἔχει σέ κάθε θέση $x \neq 0$, παράγωγο πού βρίσκεται μέ τόν ἴδιο κανόνα ὅπως καί ἡ παράγωγος τῆς δυνάμεως x^ν μέ θετικό ἀκέραιο ἐκθέτη. "Αν σκεφθοῦμε ὅτι ἀπό ὁρισμό, εἶναι $x^0 = 1$ γιά κάθε $x\neq 0$ καί ὅτι ἑπομένως $(x^0)' = 0$ στή θέση $x \neq 0$, βλέπουμε πώς ἰσχύει γενικά γιά k = ἀκέραια σταθερά ὁ κανόνας παραγωγίσεως

$$(x^k)' = kx^{k-1} \qquad \text{σέ κάθε θέση } x \neq 0\ .$$

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.

§ 167. Πρόταση 5. "Αν ἡ $x = f(t)$ ἔχει πεπερασμένη παράγωγο $f'(t_0)$ στή θέση t_0 καί ἄν ἡ $y = \sigma(x)$ ἔχη πεπερασμένη παράγωγο $\sigma'(x_0)$ στή θέση $x_0 = f(t_0)$, τότε ἡ συνάρτηση $y(t) = \sigma(f(t))$ ἔχει παράγωγο στή θέση t_0 τό γινόμενο $\sigma'(x_0)f'(t_0)$. Ὁ σχετικός κανόνας παραγωγίσεως γράφεται ἐμφαντικά ὡς ἑξῆς:

$$(167.1) \qquad y'_t(t_0) = y'_x(x_0)\cdot x'_t(t_0)$$

ὅπου $x_0 = x(t_0)$.

<u>'Απόδειξη</u>. 'Από τόν ὁρισμό τῶν παραγώγων $\sigma'(x_0)$ καί $f'(t_0)$ ἕπονται οἱ δυό σχέσεις.

$$\Delta y = \sigma(x_0+\Delta x) - \sigma(x_0) = \sigma'(x_0)\Delta x + \eta(\Delta x)\cdot\Delta x$$

$$\Delta x = f(t_0+\Delta t) - f(t_0) = f'(t_0)\Delta t + \zeta\cdot\Delta t$$

ὅπου $\eta(\Delta x)$ σημαίνει μιά συνάρτηση τοῦ Δx μέ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\eta(\Delta x)=0$ καί ζ μιά συνάρτηση τοῦ Δt μέ $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\zeta = 0$. 'Από τή δεύτερη σχέση ἕπεται ὅτι τό Δx εἶναι συνάρτηση τοῦ Δt μέ $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta x = 0$.

"Αν τή συνάρτηση αὐτή τήν εἰσαγάγουμε μέσα στό τελευταῖο μέλος τῆς πρώτης σχέσης, θά λάβουμε τό Δy ὡς συνάρτηση τοῦ Δt:

(167.2) $$\Delta y = \sigma'(x_0)f'(t_0)\,\Delta t + \sigma'(x_0)\zeta\Delta t + \eta^* f'(t_0)\Delta t + \eta^*\zeta\Delta t$$

ὅπου, γιά συντομία, καλέσαμε η^* τή συνάρτηση τοῦ Δt ἡ ὁποία προκύπτει ἀπό τήν $\eta(\Delta x)$ ὅταν ἀντικαταστήσουμε τό Δx μέ τό $f'(t_0)\Delta t + \zeta\Delta t$. 'Από τίς σχέσεις $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\eta(\Delta x) = 0$ καί $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta x = 0$ ἕπεται ὅτι $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\eta^* = 0$. Διαιροῦμε τώρα κατά μέλη τήν (167.2) διά τῆς αὐξήσεως Δt (πού λαμβάνεται φυσικά $\neq 0$):

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \sigma'(x_0)f'(t_0) + \sigma'(x_0)\zeta + \eta^* f'(t_0) + \eta^*\zeta .$$

'Επειδή $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\zeta = 0$ καί $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\eta^* = 0$, συμπεραίνουμε ὅτι

$$\lim\frac{\Delta y}{\Delta t} = \sigma'(x_0)f'(t_0) \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

§ 168. 1. 'Η $y = \eta\mu(\alpha t+\beta)$, ὅπου α καί β σταθερές, (ἡ $\alpha\neq 0$) μπορεῖ νά θεωρηθῆ σύνθετη συνάρτηση τοῦ t, προκύπτουσα μέ σύνθεση τῆς $y = \eta\mu x$ καί τῆς $x = \alpha t+\beta$.

"Αρα στή θέση t_0 ἀπό τό διάστημα $-\infty < t < +\infty$ καί μέ $x_0 = \alpha t_0 + \beta$ ἔχουμε

$$y_t'(t_0) = y_x'(x_0)\,x_t'(t_0) = \sigma\upsilon\nu x_0\cdot\alpha = \alpha\sigma\upsilon\nu(\alpha t_0+\beta)\,.$$

Μποροῦμε λοιπόν νά γράφουμε γιά κάθε t ἀπό τό διάστημα $-\infty < t < +\infty$

$$\{\eta\mu(\alpha t+\beta)\}' = \alpha\sigma\upsilon\nu(\alpha t+\beta) \ .$$

Όμοια βρίσκουμε γιά τή $y = \sigma\upsilon\nu(\alpha t+\beta)$, θέτοντας $x = \alpha t+\beta$,

$$\{\sigma\upsilon\nu(\alpha t+\beta)\}' = -\alpha\eta\mu(\alpha t+\beta) \ .$$

2. Γ ε ν ι κ ά : ἄν $y = \varphi(x)$ εἶναι δοσμένη συνάρτηση μέ πεπερασμένη παράγωγο $\varphi'(x_0)$ στή θέση x_0 καί ἄν θέσουμε $x = \alpha t+\beta$, ὅπου α καί β σταθερές, ἥ $\alpha \neq 0$, τότε ἡ $\varphi(\alpha t+\beta)$ γίνεται συνάρτηση $\Phi(t)$ τοῦ t παραγωγίσιμη στή θέση $t_0 = \dfrac{x_0-\beta}{\alpha}$ καί ἔχουμε

$$\Phi'(t_0) = \varphi'(x_0)\cdot\alpha = \alpha\varphi'_x(\alpha t_0+\beta) \ .$$

3. Ἔστω $y = \eta\mu^k x$, ὅπου k μιά ἀκέραια σταθερά. Θέτουμε $\eta\mu x = \omega$, ὁπότε $y = \omega^k$ μέ $\omega = \eta\mu x$. Ἐφαρμόζοντας τόν κανόνα παραγωγίσεως σύνθετης συναρτήσεως λαμβάνουμε

$$y'_x = y'_\omega\,\omega'_x = k\omega^{k-1}\cdot\sigma\upsilon\nu x = k\eta\mu^{k-1}x\cdot\sigma\upsilon\nu x \ .$$

(Ἡ θέση παραγωγίσεως x εἶναι μιά ὁποιαδήποτε ἀπό τό διάστημα $-\infty < x < +\infty$, ἀρκεῖ γι'αὐτήν νά ἔχη νόημα ἡ δύναμη $\eta\mu^k x$).

4. Γενικότερα ἄς εἶναι k μιά ἀ κ έ ρ α ι α σταθερά καί ἄς ἔχη ἡ συνάρτηση $\omega = \varphi(x)$ πεπερασμένη παράγωγο $\varphi'(x_0)$ στή θέση x_0. Θέτουμε $y(x) = [\varphi(x)]^k$, ὅπου στήν περίπτωση $k \leqq 0$ ἐξυπακούεται ὅτι εἶναι $\omega_0 = \varphi(x_0) \neq 0$ γιά νά ἔχη νόημα ἡ δύναμη ω_0^k.

Ἐφαρμόζοντας τόν κανόνα παραγωγίσεως τοῦ § 167 βρίσκουμε:

$$y'_x(x_0) = y'_\omega(\omega_0)\cdot\omega'_x(x_0) = k\omega_0^{k-1}\cdot\varphi'(x_0) = k[\varphi(x_0)]^{k-1}\cdot\varphi'(x_0).$$

ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

§ 169. Ἡ παράγωγος πού ὁρίσαμε παραπάνω μπορεῖ νά ὀνομαστῆ ἀμφίπλευρη, ἐπειδή γιά τόν προσδιορισμό της θεωροῦμε καί θετικές καί ἀρνητικές τιμές τῆς αὐξήσεως

$$\Delta x = (x_0 + \Delta x) - x_0 \ .$$

Ἄν περιορίζοντας τή Δx σέ θετικές τιμές ἐξακριβώσουμε ὅτι γιά Δx τεῖνον στό 0 μέσῳ θετικῶν τιμῶν τό πηλίκο

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sigma(x_0+\Delta x) - \sigma(x_0)}{\Delta x}$$

ἔχει ὅριο ἕναν ἀριθμό ἤ τό $+\infty$ ἤ τό $-\infty$:

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\sigma(x_0+\Delta x) - \sigma(x_0)}{\Delta x} = 1 \ ,$$

τότε καλοῦμε τό ὅριο αὐτό 1 παράγωγο τῆς $y = \sigma(x)$ πρός τά δεξιά στή θέση x_0 καί γράφουμε $(D^+\sigma(x))_{x=x_0} = 1$. Ὅμοια λέγεται παράγωγος τῆς $y = \sigma(x)$ πρός τά ἀριστερά τό μονόπλευρο ὅριο

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\sigma(x_0+\Delta x) - \sigma(x_0)}{\Delta x} \ ,$$

μέ τήν προϋπόθεση ὅτι ὑπάρχει καί ὅτι εἶναι ἤ ἕνας ἀριθμός ἤ τό $+\infty$ ἤ τό $-\infty$.

Προφανῶς γιά νά ὑπάρχη (ἀμφίπλευρη) παράγωγος τῆς $\sigma(x)$ στή θέση x_0 πρέπει καί ἀρκεῖ νά ὑπάρχουν οἱ δυό μονόπλευρες παράγωγοι στή θέση αὐτή καί νά ἔχουν τήν ἴδια τιμή.

Γεωμετρική ἑρμηνεία τῆς μονόπλευρης παραγώγου $\left(D^+\sigma(x)\right)_{x=x_0}$ ἤ τῆς $(D^-\sigma(x))_{x=x_0}$ εἶναι ἡ καλούμενη ἡμιεφαπτομένη τῆς γραμμῆς $y = \sigma(x)$ πρός τά δεξιά ἤ πρός τά ἀριστερά στό σημεῖο της $M_0(x_0, y = \sigma(x_0))$. Ὅταν μιά συνάρτηση $\sigma(x)$ δέν εἶναι ὁρισμένη γιά τά x τά μικρότερα ἑνός ἀριθμοῦ α, ἐνῶ εἶναι μονοσήμαντα) ὁρισμένη γιά τά x τά $\geqq \alpha$, τότε βέβαια στή θέση α μόνο μονόπλευρη παράγωγος πρός τά δεξιά $\left(D^+\sigma(x)\right)_{x=\alpha}$ μπορεῖ νά ὑπάρξῃ. Ὅμοια ὅταν ἡ $\sigma(x)$ δέν εἶναι ὁρισμένη γιά τά x τά $> \beta$, μόνο μονόπλευρη παράγωγος πρός τ' ἀριστερά $(D^-\sigma(x)_{x=\beta}$ μπορεῖ νά ὑπάρξῃ στή θέση $x = \beta$.

Παραδείγματα

1. $(D^+\sqrt[4]{x})_{x=0} = +\infty$, διότι

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{+\sqrt[4]{\Delta x}-\sqrt[4]{0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{1}{(+\sqrt[4]{\Delta x})^3} = +\infty .$$

2. $(D^+|x|)_{x=0} = 1$, διότι $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{|\Delta x|-|0|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1$,

ἐνῶ $(D^-|x|)_{x=0} = -1$, διότι $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{|\Delta x|-|0|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$

3. $(D^+\sqrt[3]{x^2})_{x=0} = +\infty$, διότι $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}-\sqrt[3]{0}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}} = +\infty$,

ἐνῶ $(D^-\sqrt[3]{x^2})_{x=0} = -\infty$, διότι $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}-\sqrt[3]{0}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}} = -\infty$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

175α. Βασιζόμενοι τούς ὁρισμούς δεῖξτε ὅτι ἀπό τήν ὁριακή σχέση $\lim\limits_{\omega\to 0}\sigma(\omega) = 0$ ἕπεται ἡ $\lim\limits_{\omega\to 0}\sigma(c\omega)$, ὅπου c σταθερά $\neq 0$.

176. Βασιζόμενοι στίς ὁριακές σχέσεις $\lim\limits_{\omega\to 0}\eta\mu\omega = 0$, $\lim\limits_{\omega\to 0}\omega = 0$, $\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{\eta\mu\omega}{\omega} = 1$ καί στήν πρότ. 4(§ 152) δεῖξτε ὅτι $\lim\limits_{\omega\to 0}\varepsilon\varphi\omega = 0$,

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{2\omega\eta\mu\omega}{\varepsilon\varphi\omega} = 0 \quad , \quad \lim_{\omega\to 0}\frac{-3\eta\mu\omega\cdot\eta\mu\omega}{\omega} = 0$$

177. Βασιζόμενοι στήν ὁριακή σχέση τοῦ 156 καί στίς προτάσεις τοῦ § 153 ὑπολογίστε τά ἀκόλουθα ὅρια

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{\eta\mu c\omega}{\omega}\text{ , ὅπου c σταθερά , } \lim_{\omega\to 0}\frac{\varepsilon\varphi\omega}{\omega}\ , \quad \lim_{\omega\to 0}\frac{\varepsilon\varphi\omega}{\omega+\omega^2}\ ,$$

$$\lim_{\omega\to 0}\omega\ \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)\ , \quad \lim_{\omega\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\omega^2}\ , \quad \lim_{\omega\to 0}\frac{\varepsilon\varphi(\omega^2)}{\eta\mu^2\omega}\ .$$

178.* Ὁρισμοί. Ἄν $\lim\limits_{\omega\to 0}\sigma(\omega) = 0$, τότε ἡ σ(ω) λέγεται ἀπειροστή συνάρτηση τοῦ ἀπειροστοῦ ω. Ἄν

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{\sigma(\omega)}{\omega^\nu} = A = \text{ἀριθμός} \neq 0 \ .$$

ὅπου ν σταθερά ἴση μέ φυσικό ἀριθμό, τότε ἡ σ(ω) λέγεται ἀπειροστή συνάρτηση (ἤ συντομώτερα ἀπειροστό) τάξεως ν ὡς πρός τό ἀπειροστό ω καί τό μονώνυμο $A\omega^\nu$ λέγεται πρωτεῦον μέρος τοῦ σ(ω). Π.χ. ἡ $\sigma(\omega) = -3\eta\mu^2\omega$ εἶναι ἀπειροστή 2ας τάξεως ὡς πρός τό ω καί ἔχει πρωτεῦον μέρος τό μονώνυμο $-3\omega^2$, διότι

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{-3\eta\mu^2\omega}{\omega^2} = \lim_{\omega\to 0} -3\left(\frac{\eta\mu\omega}{\omega}\right)^2 = -3 = \text{ἀριθμός} \neq 0 .$$

Ὑπολογίστε τώρα τά πρωτεύοντα μέρη τῶν ἀπειροστῶν συναρτήσεων

$$4\omega^2+\omega^3 \;,\quad \omega^5-2\omega^3+\sqrt{3}\omega \;,\quad 1-\sigma\upsilon\nu^4\omega \;,\quad \frac{1}{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)} ,$$

ὡς πρός τό ἀπειροστό ω.

Δεῖξτε **γενικά** ὅτι ἄν ἡ σ(ω) εἶναι ἀπειροστή συνάρτηση τάξεως ν ὡς πρός τό ἀπειροστό ω, τότε 1ο θά εἶναι $\sigma(\omega)\neq 0$, γιά ὅλα τά ω μέ $0<|\omega|<$ κάποιου κατάλληλου θετικοῦ ἀριθμοῦ ϑ_0, καί 2ο τό πρωτεῦον μέρος $A\omega^\nu$ τῆς σ(ω) προσεγγίζει τή σ(ω) μέ "ἀναλογικό" (ἤ "σχετικό") σφάλμα $\dfrac{\sigma(\omega)-A\omega^\nu}{\sigma(\omega)}$ πού ἔχει ὅριο τό 0 γιά ω τεῖνον στό 0 (καί πού ἑπομένως εἶναι κατ'ἀπόλυτη τιμή μικρότερο τοῦ αὐθαίρετου θετικοῦ ε γιά τά ω μέ $0<|\omega|<$ κατάλληλου δ_ε). Ὑπολογίστε ἕνα τέτοιο δ_ε γιά τήν $4\omega^2+\omega^3$ καί τήν εφω.

179.* "Αν οἱ σ(ω) καί φ(ω) εἶναι ἀπειροστές συναρτήσεις τάξεως μ καί ν, μέ πρωτεύοντα μέρη $A\omega^\mu$ καί $B\omega^\nu$ ἀντιστοίχως, ποιᾶς τάξεως ἀπειροστές συναρτήσεις εἶναι οἱ σ(ω) + φ(ω) καί σ(ω) φ(ω), καί ποιά εἶναι τά πρωτεύοντα μέρη τους; (Γιά τό ἄθροισμα θά ἔχετε νά διακρίνετε τίς περιπτώσεις:

1) $\nu>\mu$ 2) $\nu<\mu$,
3) $\nu=\mu$ μέ $A+B\neq 0$ καί 4) $\nu=\mu$ μέ $A+B=0$.

Στήν τελευταία περίπτωση δέν μπορεῖ νά δοθῆ στό ἐρώτημα ἀπάντηση γενικῆς ἰσχύος). Ἐφαρμογή στά ζεύγησυναρτήσεων

$$\sigma(\omega)=4\omega^2-2\omega^5+3\omega^7 \quad \text{καί} \quad \varphi(\omega)=-\omega^3+7\omega$$
$$\sigma(\omega)=\omega^2 \quad \text{καί} \quad \varphi(\omega)=\eta\mu 3\omega$$
$$\sigma(\omega)=\eta\mu(\omega^2) \quad \text{καί} \quad \varphi(\omega)=1-\sigma\upsilon\nu\omega$$

180.* Δεῖξτε ὅτι ὁ λόγος $\dfrac{\sigma(\omega)}{\varphi(\omega)}$ δυό ἀπειροστῶν συναρτήσεων τῆς ἴδιας τάξεως ν ὡς πρός τό ἀπειροστό ω καί μέ πρωτεύοντα μέρη $A\omega^\nu$ ἡ σ(ω) , $B\omega^\nu$ ἡ φ(ω) , ἔχει ὅριο τόν ἀριθμό A/B γιά ω τεῖνον στό 0. Ἐφαρμόστε τήν πρόταση στίς ἀπειροστές συναρτήσεις

$$\sigma(\omega)=\omega^2\eta\mu\omega+2\omega^2\eta\mu^3\omega \;,\quad \varphi(\omega)=\varepsilon\varphi^3(2\omega)+\sigma\upsilon\nu^3\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)\varepsilon\varphi^2\omega$$

ἀφοῦ πρῶτα ὑπολογίσετε τά πρωτεύοντα μέρη τους.

181.* Ἀποδεῖξτε τήν πρόταση: "Αν οἱ σ(ω) καί φ(ω) εἶναι ἀπειροστές συναρτήσεις τάξης μ καί ν ἀντιστοίχως καί ἄν $\mu<\nu$,τότε

$\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{\sigma(\omega)}{\varphi(\omega)}=\infty$. Ἐπαληθεῦστε τήν πρόταση στό παράδειγμα $\sigma(\omega) = \omega^3$, $\varphi(\omega) = (1-\text{συν}\omega)^2$ καθώς καί στό $\sigma(\omega) = \text{εφ}(\omega^3)$, $\varphi(\omega) = 2\omega^4 - \omega^5$.

182. Ὑπολογίστε τά μονόπλευρα ὅρια $\lim\limits_{\omega\to 0^+}\left(2+\dfrac{\omega}{|\omega|}\right)$,

$$\lim_{\omega\to 0^-}\left(2+\frac{\omega}{|\omega|}\right) \quad , \quad \lim_{\omega\to 0^+}\frac{+\sqrt[4]{\omega^6}}{\omega} \quad , \quad \lim_{\omega\to 0^-}\frac{+\sqrt[4]{\omega^6}}{\omega} \; .$$

Ὕστερα ἀπό τά ἀποτελέσματα τοῦ ὑπολογισμοῦ αὐτοῦ ποιά εἶναι ἡ ἀπάντησή σας στά ἐρωτήματα:

Ὑπάρχει τό (ἀμφίπλευρο) ὅριο $\lim\limits_{\omega\to 0}\left(2+\dfrac{\omega}{|\omega|}\right)$; Ὑπάρχει τό (ἀμφίπλευρο) ὅριο $\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{+\sqrt[4]{\omega^6}}{\omega}$;

183, Δεῖξτε ὅτι $\lim\limits_{\omega\to 0}\left(\dfrac{1}{\omega}+5\text{ημ}\,\dfrac{1}{\omega}\right)=\infty$, $\lim\limits_{\omega\to 0}\left\{\left(2+\text{ημ}\,\dfrac{1}{\omega}\right)\text{σφ}\omega\right\}=\infty$

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{1}{\omega^2-\text{εφ}^2\omega}=-\infty \quad , \quad \lim_{\omega\to 0}\frac{1}{\omega^2-\text{ημ}^2\omega}=+\infty \; .$$

183α. Ὑπολογίστε τά πηλίκα $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ἀντίστοιχων αὐξήσεων στή θέση x_0 μέ τά ἀκόλουθα δεδομένα:

$$y = x^3 + 5x^2 - x + 2 \qquad x_0 = -3$$

$$y = \frac{4x+3}{x-2} \qquad x_0 = 3 \; .$$

Προσδιορίστε τά ὅρια τῶν πηλίκων αὐτῶν γιά Δx τεῖνον στό 0.

184. Μέ βάση τόν ὁρισμό τῆς παραγώγου προσδιορίστε τήν παράγωγο τῆς συναρτήσεως $y(x) = x^\nu$ στή θέση x_0 (ν = ὁρισμένος φυσικός ἀριθμός). Ὅμοια προσδιορίστε τήν παράγωγο τῆς $y = +\sqrt{x}$ στή θέση $x_0 \neq 0$ καθώς καί τήν παράγωγο πρός τά δεξιά $(D^+\sqrt{x})_{x=0}$.

185. Προσδιορίστε γιά τή συνάρτηση $\sigma(x) = x^3$ ἕναν τέτοιο θετικό ἀριθμό δ ὥστε τό πηλίκο

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta x} = \frac{\sigma(2+\Delta x) - \sigma(2)}{\Delta x}$$

νά διαφέρῃ ἀπό τήν παράγωγο $\sigma'(2)$ λιγότερο τοῦ $1/10^3$ ἀπολύτως, γιά $0 < |\Delta x| < \delta$.

186. Βρῆτε μέ τή βοήθεια τῶν παραγώγων τίς ἐξισώσεις τῶν ἐφαπτομένων τῶν καμπύλων πού ἔχουν σέ ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων (μέ $|\bar{i}| = |\bar{j}| = 1$ cm) τίς ἀκόλουθες ἐξισώσεις

$$y = \frac{1}{6}x^5 \quad , \quad y = -2x^4 \quad , \quad y = \frac{4}{5}\cdot\sqrt{x} \; .$$

στό σημεῖο τους μέ τετμημένη $x = \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, 4$ ἀντιστοίχως. Σχεδιάστε τά παραπάνω σημεῖα ἐπαφῆς καί τίς ἐφαπτόμενες σ' αὐτά χρησιμοποιώντας τίς κλίσεις των.

187. Νά ἐπαναλάβετε τό γενικό συλλογισμό τῆς ἀρχῆς τοῦ §163 στό εἰδικό παράδειγμα $y = x^2$, $M_0(x_0 = 2, y_0 = 4)$, καί νά προσδιορίσετε ἕναν τέτοιο θετικό ἀριθμό δ ὥστε ἡ ὀξεία γωνία μεταξύ τῆς ἐφαπτομένης τῆς γραμμῆς $y = x^2$ στό σημεῖο της M_0 καί τῆς χορδῆς M_0M, ὅπου $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y = (x_0+\Delta x)^2)$, νά εἶναι μικρότερη τοῦ $1' = \frac{\pi}{180 \cdot 60}$ ἀκτίνια γιά $0 < |\Delta x| < \delta$.

188. Ὑπολογίστε τήν παράγωγο τῶν ἀκόλουθων συναρτήσεων σέ γενική θέση x ἀπό τό πεδίο ὁρισμοῦ τους:

$$y = 4x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \sqrt[+]{2}\,x^2 \quad , \quad y = 3\alpha x^3 - 2\beta x^2 + \gamma x - 4\delta \quad ,$$

ὅπου α,β,γ,δ σταθερές ,

$$y = (x+2)(x-4) \quad , \quad y = (x+\frac{1}{2})(x+\frac{1}{4})(x+\frac{1}{8}) \quad ,$$

$$y = (x^2+1)(x^4-2) \quad , \quad y = 2x\cdot\eta\mu x \quad , \quad y = (x^2-3x+1)\sigma\upsilon\nu x \quad ,$$

$$y = x\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x \quad , \quad y = \eta\mu^2 x \quad , \quad y = 3x\sqrt[+]{x} \quad ,$$

$$y = \frac{4x+1}{x^2+1} \quad , \quad y = \frac{3x^2-8}{x^2-x+1} \quad , \quad y = \frac{1}{\eta\mu x} \quad ,$$

$$y = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \quad , \quad y = x\sigma\varphi x \quad , \quad y = \frac{\varepsilon\varphi x}{x} \quad ,$$

$$y = \frac{x+1}{+\sqrt{x}} \quad , \quad y = \frac{-\sqrt{x}+3}{+\sqrt{x}-5} \quad , \quad y = (x+3)\sqrt[+]{x} \quad .$$

189. Ὑπολογίστε τήν παράγωγο τῶν ἀκόλουθων συναρτήσεων στήν ἑκάστοτε σημειούμενη θέση:

$$y = \frac{4}{x} = 4x^{-1} \quad \gamma\iota\acute{\alpha} \quad x = -5 \quad , \quad y = -\frac{6}{x^2} = -6x^{-2} \quad \gamma\iota\acute{\alpha} \quad x = \frac{3}{2} \quad ,$$

$$y = \frac{5x-3}{x^3} = 5x^{-2} - 3x^{-3} \quad \gamma\iota\acute{\alpha} \quad x = -1 \quad ,$$

$$y = \frac{x^2+x+2}{x^5} = x^{-3} + x^{-4} + 2x^{-5} \quad \gamma\iota\acute{\alpha} \quad x = 2 \quad .$$

190. Ὑπολογίστε μέ τόν κανόνα παραγωγίσεως σύνθετης συναρτήσεως τίς ἀκόλουθες παραγώγους:

$$(\eta\mu(2x-3))'_{x=\pi+\frac{3}{2}} \quad , \quad (\sigma\upsilon\nu(4\pi x + \frac{\pi}{3}))'_{x=2} \quad , \quad (\sqrt[+]{x^2+x+1})'_{x=0} \quad .$$

$$(\sqrt{x^2-5})'_{x=0} \quad , \quad ((x^2+1)^{-3})'_{x=1} \quad , \quad (\varepsilon\varphi^4 x)'_{x=\frac{\pi}{3}} \quad ,$$

$$(\varepsilon\varphi(8x+\frac{\pi}{6}))'_{x=0} , (\sigma\varphi(\pi x-\frac{\pi}{4}))'_{x=-1} , (\eta\mu\sqrt[+]{x})'_{x=\frac{\pi^2}{9}} \quad .$$

191. Παραγωγίστε σέ γενική θέση x ἀπό τό πεδίο ὁρισμοῦ τους τίς ἑξῆς συναρτήσεις:

$$\frac{\eta\mu x}{x} \quad , \quad \frac{4x^3-3x+1}{x+2} \quad , \quad (x^2+4)^{-2}(x^3-x+2) \quad , \quad \sqrt{\frac{x+4}{x-5}} \quad ,$$

$$\frac{1}{+\sqrt{x^2+3x+5}} \quad , \quad \sqrt[+]{\varepsilon\varphi x} \quad , \quad x^2\eta\mu^{-3}x \quad , \quad \eta\mu^5(4x-3) \quad ,$$

$$\eta\mu(3x^2-x+1) \quad , \quad \eta\mu^3 x\cdot\sigma\upsilon\nu^4 x \quad , \quad \sigma\upsilon\nu^{-2}x\cdot\eta\mu^{-1}x \quad ,$$

192. Σχεδιάστε τίς γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων

$y = |2x|$, $y = |x-3|$, $y = |-3x+2|$, $y = |x^2-x-2|$,
$y = x^2-2|x|$

(σέ ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων μέ $|\bar{i}| = |\bar{j}| = 1$ cm) καί ἀπ' αὐτές (χρησιμοποιώντας τή γεωμετρική ἑρμηνεία τῆς παραγώγου) βρῆτε γιά ποία x οἱ συναρτήσεις ἔχουν ἀμφίπλευρη παράγωγο καί γιά ποιά μονόπλευρες παραγώγους. Ὑπολογίστε καί τίς τιμές τῶν παραγώγων.

193. Ἕνα σημεῖο P(x,y) διατρέχει ὁμοιόμορφα, κατά τή θετική φορά, τήν περιφέρεια κύκλου πού ἔχει, σέ ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων μέ $|\bar{i}| = |\bar{j}| = 1$ cm, ἐξίσωση $x^2+y^2 = \alpha^2$, ἐκτελώντας n γύρους στό δευτερόλεπτο καί βρισκόμενο στή θέση B(x = 0 , y = α) κατά τή χρονική στιγμή t = 0. Ἐκφράστε τίς συντεταγμένες τοῦ P συναρτήσει τοῦ χρόνου t μετρημένου σέ δευτερόλεπτα. Κατόπιν μελετῆστε τήν εὐθύγραμμη κίνηση τῶν προβολῶν P_x καί P_y τοῦ P πάνω στούς ἄξονας OX καί OY ἀντιστοίχως, ὑπολογίζοντας τήν ταχύτητα στή χρονική στιγμή t τῶν σημείων P_x καί P_y σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό πού δόθηκε στόν § 164. Πότε μηδενίζεται ἡ ταχύτητα τοῦ P_x καί πότε (δηλαδή γιά ποιές τιμές τοῦ t) ἡ ταχύτητα τοῦ P_y; Ποιές εἶναι οἱ ἀντίστοιχες θέσεις τοῦ κινητοῦ P;

194. Τό προηγούμενο κινητό σημεῖο P τό προβάλλουμε ἀπό τό κέντρο προβολῆς K = (−2α,0) πάνω στήν εὐθεία Ay πού ἐφάπτεται τοῦ κύκλου $x^2+y^2= \alpha^2$ στό σημεῖο A(α,0). Ἔστω Π ἡ προβολή. Ὑπολογίστε τήν ταχύτητα τοῦ εὐθύγραμμα κινούμενου σημείου Π καί πότε αὐτή μηδενίζεται.

195.* Ἔστω π(x) ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο τοῦ x καί ρ μιά ρίζα του. Ἄν $\pi(x) \equiv (x-\rho)^n\cdot\pi_1(x)$, ὅπου $\pi_1(x)$ ἀκέραιο πολυώνυμο τοῦ x καί n φυσικός ἀριθμός τέτοιος πού νά ἔχουμε $\pi_1(\varrho)_\gamma \neq 0$, τότε ἡ ρίζα ρ λέμε ὅτι ἔχει πολλαπλότητα n (ἤ ὅτι εἶναι πολλαπλή τάξεως n). Στήν περίπτωση ὅπου $n = 1$ ἡ ρίζα ρ λέγεται συνηθέστερα ἁπλῆ.

Δεῖξτε (διά παραγωγίσεως τοῦ παραπάνω γινομένου) ὅτι μιά ἁπλῆ ρίζα τοῦ $\pi(x)$ δέν εἶναι συγχρόνως ρίζα τῆς παραγώγου $\pi'(x)$, ἐνῶ μιά πολλαπλή ρίζα τάξεως $n \geqq 2$ τοῦ $\pi(x)$ εἶναι ρίζα τάξεως $n-1$ τῆς παραγώγου. Βγάλτε ἀπ' ἐδῶ τό συμπέρασμα ὅτι κάθε (πραγματική) ρίζα τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου $\Delta(x)$ τῶν $\pi(x)$ καί $\pi'(x)$ εἶναι πολλαπλή ρίζα τοῦ $\pi(x)$ τάξεως κατά μονάδα μεγαλύτερης ἀπό τήν πολλαπλότητα της ὡς ρίζας τοῦ $\Delta(x)$.

Γιά ἐφαρμογή ὑπολογίστε (μέ διαδοχικές διαιρέσεις) τό μέγιστο κοινό διαιρέτη τοῦ $\pi(x) = x^7+x^6-4x^5+3x^3-5x^2+8x-4$ καί τοῦ $\pi'(x)$, προσδιορίστε τίς ρίζες τοῦ μεγίστου αὐτοῦ κ.δ. καί μέ τή βοήθεια αὐτῶν τίς ρίζες τοῦ $\pi(x)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XIII

ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΕΙΣ ΣΤΟ 11ο ΚΑΙ 12ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΑΥΞΟΥΣΕΣ ΚΑΙ ΦΘΙΝΟΥΣΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

§ 170. Ἔστω $\sigma(x)$ μιά μονοσήμαντη συνάρτηση μέ πεδίο μεταβολῆς τῆς x τό ἀριθμοσύνολο A. x_1 καί x_2 ἄς παριστάνουν τιμές τῆς μεταβλητῆς x ἀπό τό πεδίο A.

Ἄν κάθε φορά πού εἶναι $x_1 < x_2$, εἶναι καί $\sigma(x_1) < \sigma(x_2)$, τότε ἡ $\sigma(x)$ λέγεται αὔξουσα συνάρτηση τοῦ x στό πεδίο A.

Ἄν κάθε φορά πού εἶναι $x_1 < x_2$, εἶναι $\sigma(x_1) \leqq \sigma(x_2)$, τότε ἡ $\sigma(x)$ λέγεται αὔξουσα μέ εὐρεία σημασία στό πεδίο A.

Ἄν κάθε φορά πού εἶναι $x_1 < x_2$, ἔχουμε ἀντιθέτως $\sigma(x_1) > \sigma(x_2)$, τότε ἡ $\sigma(x)$ λέγεται φθίνουσα συνάρτηση τοῦ x στό πεδίο A.

Ἄν κάθε φορά πού εἶναι $x_1 < x_2$ ἔχουμε $\sigma(x_1) \geqq \sigma(x_2)$, τότε ἡ $\sigma(x)$ λέγεται φθίνουσα μέ εὐρεία σημασία στό πεδίο A.

Π.χ. ἡ $y = x^2$ εἶναι αὔξουσα (μέ στενή σημασία) στό διάστημα $0 \leqq x < +\infty$, διότι ὅταν $0 \leqq x_1 < x_2$, εἶναι καί $y_1 = x_1^2 < x_2^2 = y_2$. Ἡ $y = x^2$ εἶναι ἀντίθετα φθίνουσα στό διάστημα $-\infty < x \leqq 0$, ἐπειδή ὅταν $x_1 < x_2 \leqq 0$, ἔχουμε $y_1 = x_1^2 > x_2^2 = y_2$.

Ἡ $\sigma(x) = \mathrm{Ak}(x)$ εἶναι αὔξουσα μέ εὐρεία σημασία στό διάστημα $-\infty < x < +\infty$, ἐπειδή ἡ ἀνισότητα $x_1 < x_2$ συνεπάγεται ἤ τήν ἀνισότητα $\mathrm{Ak}(x_1) < \mathrm{Ak}(x_2)$ ἤ τήν ἰσότητα $\mathrm{Ak}(x_1) = \mathrm{Ak}(x_2)$. (Ἐρευνῆστε πότε συμβαίνει τό πρῶτο καί πότε τό δεύτερο).

Ἡ συνάρτηση $\varphi(\nu) = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu$ μέ πεδίο μεταβολῆς τῆς ν τό σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν $\{1,2,3,4,\dots\}$ εἶναι αὔξουσα (μέ στενή σημασία), διότι $\varphi(\nu) < \varphi(\nu+1)$ γιά κάθε ν καί ἐπομένως $\varphi(\nu_1) < \varphi(\nu_2)$ ὅταν $\nu_1 < \nu_2$ (βλ. ἄσκηση 17).

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ $\lim\limits_{x \to x_0} \sigma(x) = l$.

§ 171. Ἡ μονοσήμαντη $\sigma(x)$ ἄς εἶναι ὁρισμένη σ' ἕνα διάστημα $x_0 - \vartheta < x < x_0 + \vartheta$ γύρω στό x_0 μέ ἐξαίρεση ἴσως τῆς θέσεως x_0. Λέμε ὅτι ἡ $\sigma(x)$ ἔχει ὅριο τό l (= ἀριθμός ἤ ∞ ἤ $+\infty$ ἤ $-\infty$) γιά x τεῖνον στό x_0 ἄν ἡ συνάρτηση $\sigma(x_0+\omega)$ τοῦ ω ἔχει ὅριο τό l γιά ω τεῖνον στό 0 (§§ 153,154,158).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Εἶναι $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3+1}{x+1} = 3$, ἐπειδή

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{(-1+\omega)^3+1}{(-1+\omega)+1} = \lim_{\omega \to 0} \frac{3\omega - 3\omega^2 + \omega^3}{\omega} = \lim_{\omega \to 0} (3 - 3\omega + \omega^2) = 3.$$

Εἶναι $\lim\limits_{x \to -\frac{3}{2}} \dfrac{3x-5}{2x+3} = \infty$, ἐπειδή

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{3\left(-\frac{3}{2}+\omega\right) - 5}{2\left(-\frac{3}{2}+\omega\right) + 3} = \lim_{\omega \to 0} \frac{-\frac{9}{2} + 3\omega - 5}{2\omega} = \infty$$

Εἶναι $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{1}{(x+2)^2} = +\infty$ διότι

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{1}{(-2+\omega+2)^2}=\lim_{\omega\to 0}\frac{1}{\omega^2}=+\infty .$$

Εἶναι $\lim\limits_{x\to 5}\left(-\dfrac{2}{(x-5)^2}+\dfrac{1}{x-5}\right)=-\infty$, διότι

$$\lim_{\omega\to 0}\left(-\frac{2}{\omega^2}+\frac{1}{\omega}\right)=\lim_{\omega\to 0}\frac{-2+\omega}{\omega^2}=-\infty .$$

Τονίζουμε ὅτι ἡ θέση $x = x_0$ δέν ἐπεμβαίνει ἡ ἴδια στόν παραπάνω ὁρισμό γι'αὐτό καί μπορεῖ νά μήν ἀνήκη στό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$. Ἄν ὅμως τυχόν ἀνήκη, τότε $\sigma(x_0)$ εἶναι ἕνας ὁρισμένος ἀριθμός καί θά ἔχουμε $\lim\limits_{x\to x_0}\sigma(x) = \sigma(x_0)$ ὅταν καί μόνον ὅταν ἡ συνάρτηση $\sigma(x)$ εἶναι συνεχής στή θέση x_0. (Ἡ ἀπόδειξη εἶναι εὔκολη βάσει τῶν ὁρισμῶν τῆς συνεχείας (§ 147) καί τῶν ὁρίων).

ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΑ ΟΡΙΑ

§ 172. Ἀνάλογος μέ τόν παραπάνω ὁρισμό τοῦ ἀμφίπλευρου ὁρίου εἶναι ὁ ὁρισμός γιά τό μονόπλευρο ὅριο. Λέμε ὅτι ἡ μονοσήμαντη συνάρτηση $\sigma(x)$ ἔχει ὅριο τό l γιά x τεῖνον στό x_0 μέσῳ μεγαλυτέρων τιμῶν (ἤ ἀπό πάνω, ἤ ἀπό δεξιά) καί γράφουμε συμβολικά $\lim\limits_{x\to x_0^+}\sigma(x) = l$, ἄν $\lim\limits_{\omega\to 0^+}\sigma(x_0+\omega) = l$. Ὅμοια ὁρίζουμε $\lim\limits_{x\to x_0^-}\sigma(x) = l$, ἄν $\lim\limits_{\omega\to 0^-}\sigma(x_0+\omega) = l$ (βλ. § 157). Γιά τά μονόπλευρα αὐτά ὅρια ἰσχύει τό ἑξῆς "θεώρημα ὑπάρξεως":

Θεώρημα. Ἄν ἡ $\sigma(x)$ εἶναι αὔξουσα μέ εὐρεία σημασία στό περιορισμένο διάστημα $\alpha < x < \beta$, τότε ὑπάρχουν τά μονόπλευρα ὅρια:

$$\lim_{x\to\alpha^+}\sigma(x) = \text{ἀριθμός ἤ } -\infty \text{ καί } \lim_{x\to\beta^-}\sigma(x) = \text{ἀριθμός ἤ } +\infty .$$

Ἄν ἡ $\sigma(x)$ εἶναι φθίνουσα μέ εὐρεία σημασία στό περιορισμένο διάστημα $\alpha < x < \beta$, τότε ὑπάρχουν τά μονόπλευρα ὅρια:

$\lim\limits_{x\to\alpha^+} \sigma(x)$ = ἀριθμός ἤ $+\infty$ καί $\lim\limits_{x\to\beta^-} \sigma(x)$ = ἀριθμός ἤ $-\infty$.

Π.χ. ἡ $\sigma(x) = \dfrac{x-2}{8-x}$ εἶναι προφανῶς αὔξουσα στό διάστημα $2 < x < 8$, ἔχουμε δέ

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{8-x} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 8^-} \frac{x-2}{8-x} = +\infty \; .$$

Ἡ $\sigma(x) = \sigma\varphi x$ εἶναι φθίνουσα στό διάστημα $0 < x < \pi$, ἔχουμε δέ $\lim\limits_{x\to 0^+} \sigma\varphi x = +\infty$ καί $\lim\limits_{x\to \pi^-} \sigma\varphi\, x = -\infty$.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sigma(x)$ καί $\lim\limits_{x\to-\infty} \sigma(x)$

§ 174. Τό πεδίο ὁρισμοῦ αὐτῆς τῆς μονοσήμαντης συναρτήσεως $\sigma(x)$ ἄς περιέχη ἀριθμούς μεγαλύτερους ἀπό κάθε αὐθαίρετο δοσμένο θετικό καί ἐπομένως ὁσοδήποτε μεγάλο θετικό ἀριθμό. Λέμε ὅτι ἡ $\sigma(x)$ ἔχει ὅριο τόν ἀριθμό c γιά x τεῖνον στό $+\infty$, ἄν $|\sigma(x)-c| <$ τοῦ αὐθαίρετου θετικοῦ ε γιά ὅλες τίς τιμές τῆς x ἀπό τό πεδίο A τίς μεγαλύτερες κατάλληλου θετικοῦ ἀριθμοῦ Θ_ε. Ἄν τό A περιέχῃ ὅλους τούς θετικούς τούς $>$ κάποιου δοσμένου α, τότε τήν παραπάνω ἔννοια μποροῦμε θέτοντας $\omega = \dfrac{1}{x}$, νά τήν ἀναγάγουμε στή γνωστή $\lim\limits_{\omega\to 0^+} \sigma\left(\dfrac{1}{\omega}\right) = c$ (βλ. § 157). Τήν διατυπώσαμεν ὅμως τώρα γενικότερα γιά νά συμπεριλάβουμε τήν περίπτωση μιᾶς $\sigma(x)$ ὁρισμένης π.χ. μόνο γιά φυσικές τιμές τῆς x: $x = 1,2,3,\ldots$. Π.χ. ἄν $\sigma(\nu) = \dfrac{\nu-1}{\nu}$ γιά $\nu = 1,2,3,\ldots$ τότε προφανῶς

$$\lim_{\nu\to+\infty} \frac{\nu-1}{\nu} = 1$$

διότι ἔχουμε $\left|\dfrac{\nu-1}{\nu} - 1\right| = \left|-\dfrac{1}{\nu}\right| = \dfrac{1}{\nu} < \varepsilon$

γιά ὅλα τά ν τά $> \dfrac{1}{\varepsilon}\ (= \vartheta_\varepsilon)$.

Ἄν $\quad \sigma(x) = \dfrac{2x-5}{3x+1} \quad$, τότε

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-5}{3x+1} = \lim_{\omega\to 0^+} \frac{2\,\frac{1}{\omega} - 5}{3\,\frac{1}{\omega} + 1} = \lim_{\omega\to 0^+} \frac{2-5\omega}{3+\omega} = \frac{2}{3} \; .$$

Ἄν $\quad \sigma(x) = \dfrac{\eta\mu x}{x}$

τότε $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\eta\mu x}{x} = \lim\limits_{\omega\to 0^+}\left(\eta\mu\, \dfrac{1}{\omega}\cdot\omega\right) = \lim\limits_{\omega\to 0^+} \omega\ \eta\mu\,\dfrac{1}{\omega} = 0$

Λέμε ὅτι ἡ $\sigma(x)$ ἔχει ὅριο τό $+\infty$ γιά x τεῖνον στό $+\infty$, ἄν $\sigma(x) >$ τοῦ αὐθαίρετου θετικοῦ ἀριθμοῦ p γιά ὅλες τίς τιμές τῆς x ἀπό τό πεδίο A τίς μεγαλύτερες κατάλληλου θετ. θ_p. Ὅταν τό A περιέχῃ ὅλους τούς θετικούς ἀριθμούς τούς $\geqq$ κάποιου α, μποροῦμε νά εἴποῦμε ὅτι εἶναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\sigma(x) = +\infty$, ἄν $\lim\limits_{\omega\to 0^+}\sigma\left(\dfrac{1}{\omega}\right) = +\infty$.

Π.χ. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, διότι $x^2 >$ τοῦ αὐθαίρετου p γιά ὅλα τά x τά $> \sqrt[+]{p}\ (=\Theta_p)$.

Λέμε ὅτι ἡ $\sigma(x)$ ἔχει ὅριο τό $-\infty$ γιά x τεῖνον στό $+\infty$, ἄν $\sigma(x) <$ τοῦ αὐθαίρετου ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ $-p$ γιά ὅλες τίς τιμές τῆς x ἀπό τό πεδίο A τίς μεγαλύτερες κατάλληλου θετικοῦ Θ_p.

Π.χ. $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\sqrt{x}) = -\infty$, ἐπειδή $-\sqrt{x} < -p$ γιά ὅλα τά x τά $> p^2\ (=\Theta_p)$.

Ἀνάλογα πρός τά παραπάνω ὁρίζουμε τό $\lim\limits_{x\to-\infty}\sigma(x) = l$ (l ἀριθμός ἤ $+\infty$ ἤ $-\infty$). Ἄλλως τε θά μποροῦσε νά γίνῃ καί ἀναγωγή στά προηγούμενα, μέ μετάβαση στή συνάρτηση $\varphi(x) = \sigma(-x)$ πού ἔχει γιά πεδίο ὁρισμοῦ τό ἀριθμοσύνολο A* τό ἀποτελούμενο ἀπό τούς ἀριθμούς τούς ἀντίθετους πρός τούς ἀριθμούς τοῦ ἀριθμοσυνόλου A, πεδίου ὁρισμοῦ τῆς $\sigma(x)$.

Π.χ. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-5}{3x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2(-x)-5}{3(-x)+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x-5}{-3x+1} = \lim\limits_{\omega\to 0^+}\dfrac{-2-5\omega}{-3+\omega} = \dfrac{2}{3}$.

Ἀπ' εὐθείας θά εἴχαμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-5}{3x-1} = \lim_{\omega\to 0^-}\frac{2\left(\dfrac{1}{\omega}-5\right)}{3\left(\dfrac{1}{\omega}+1\right)} = \lim_{\omega\to 0^-}\frac{2-5\omega}{3+\omega} = \frac{2}{3}\ .$$

Γιά τά παραπάνω ὅρια ἰσχύει τό ἀκόλουθο θεώρημα ὑπάρξεως:

Θεώρημα: "Αν ἡ $\sigma(x)$ εἶναι αὔξουσα μέ εὐρεία σημασία στό πεδίο Α πού περιέχη ἀριθμούς > ἀπό κάθε δοσμένο θετικό ἀριθμό, τότε ὑπάρχει τό ὅριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\sigma(x) = \text{ἀριθμός ἤ } +\infty.$$

"Αν ἀντίθετα ἡ $\sigma(x)$ εἶναι φθίνουσα μέ εὐρεία σημασία στό παραπάνω πεδίο Α, τότε ὑπάρχει τό ὅριο

$$\lim_{x\to+\infty}\sigma(x) = \text{ἀριθμός ἤ } -\infty.$$

"Αν ἡ $\sigma(x)$ εἶναι αὔξουσα μέ εὐρεία σημασία στό πεδίο Β πού περιέχει ἀριθμούς < ἀπό κάθε δοσμένο ἀρνητικό ἀριθμό, τότε ὑπάρχει τό ὅριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\sigma(x) = \text{ἀριθμός ἤ } -\infty$.

"Αν ἡ $\sigma(x)$ εἶναι φθίνουσα μέ εὐρεία σημασία στό παραπάνω πεδίο Β τότε ὑπάρχει τό ὅριο

$$\lim_{x\to+\infty}\sigma(x) = \text{ἀριθμός ἤ } -\infty.$$

Π.χ. ἡ $\sigma(x) = x^3$ εἶναι αὔξουσα στό πεδίο $-\infty < x < +\infty$, ἔχουμε δέ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

Ἡ $\sigma(x) = \dfrac{1}{x}$ εἶναι φθίνουσα στό πεδίο $-\infty < x < 0$, ἔχουμε δέ

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = \lim_{\omega\to0^-}\frac{1}{\frac{1}{\omega}} = \lim_{\omega\to0^-}\omega = 0.$$

Ἡ $\varphi(\nu) = (1+\frac{1}{\nu})^\nu$ εἶναι αὔξουσα στό πεδίο $\{\nu = 1,2,3,4\ldots\}$.

"Αρα ὑπάρχει τό ὅριο $\lim\limits_{\nu\to+\infty}(1+\frac{1}{\nu})^\nu$ καί εἶναι ἕνας ἀριθμός, ἐπειδή γιά κάθε ν ἰσχύει, ὅπως εὔκολα ἀποδείχνεται, ἡ σχέση $(1+\frac{1}{\nu})^\nu < 3$ καί ἐπομένως τό ὅριο $\lim\limits_{\nu\to+\infty}(1+\frac{1}{\nu})^\nu$ δέν μπορεῖ νά εἶναι > 3.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ BOLZANO ΚΑΙ WEIERSTRASS.

§ 174. "Αν ἡ μονοσήμαντη συνάρτηση $\sigma(x)$ εἶναι συνεχής σέ κάθε θέση τοῦ (περιορισμένου καί κλειστοῦ) διαστήματος

$\alpha \leqq x \leqq \beta$ καί ἄν $\sigma(\alpha)\sigma(\beta) < 0$, τότε ὑπάρχει μιά τουλάχιστο θέση γ μεταξύ α καί β ὅπου ἡ $\sigma(x)$ μηδενίζεται: $\sigma(\gamma) = 0$.

Π.χ. ἡ $\sigma(x) = \frac{1}{2} - ημx$ εἶναι συνεχής στό διάστημα $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}$ (βλ § 150), καί $\sigma(0)\,\sigma\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) < 0$.

Ἄρα, κατά τό θεώρημα πρέπει νά ὑπάρχη μιά τουλάχιστο τιμή τοῦ x μεταξύ 0 καί $\frac{\pi}{3}$ πού μηδενίζει τό $\frac{1}{2} - ημx$. Πράγματι καθώς ξέρουμε μιά τέτοια θέση εἶναι τό $x = \frac{\pi}{6}$.

<u>Ἐφαρμογή</u>. Μιά ἀλγεβρική ἐξίσωση

$$C_{2\mu-1}x^{2\mu-1} + C_{2\mu-2}x^{2\mu-2} + \ldots + C_0 = 0$$

βαθμοῦ 2μ−1, περιττοῦ, ἔχει τουλάχιστο μιά πραγματική ρίζα.

Πράγματι, ἄς παραστήσουμε τό πολυώνυμο τοῦ ἀριστεροῦ μέλους μέ $\pi(x)$. Μποροῦμε χωρίς βλάβη τῆς γενικότητας, νά ὑποθέσουμε ὅτι $C_{2\mu-1} > 0$. Ἐπειδή

$$\pi(x) = x^{2\mu-1}\left(C_{2\mu-1} + C_{2\mu-2}\frac{1}{x} + \ldots + C_0\frac{1}{x^{2\mu-1}}\right)$$

γιά $x \neq 0$ καί

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(C_{2\mu-1} + C_{2\mu-2}\frac{1}{x} + \ldots + C_0\frac{1}{x^{2\mu-1}}\right) = C_{2\mu-1} > 0 ,$$

ἕπεται ὅτι, γιά $x = \alpha$ = ἀρνητικός ἀριθμός ἀπολύτως ἀρκετά μεγάλος, τό $\pi(\alpha)$ εἶναι ὁμόσημο τοῦ $\alpha^{2\mu-1}$, δηλαδή ἀρνητικό, καί, γιά $x = \beta$ = θετικός ἀριθμός ἀρκετά μεγάλος, τό $\pi(\beta)$ εἶναι ὁμόσημο τοῦ $\beta^{2\mu-1}$, δηλαδή θετικό.

Στό διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$ εἶναι ὅμως τό $\pi(x)$, σάν ἀκέραιο πολυώνυμο, συνεχής συνάρτηση τοῦ x. Ἄρα μεταξύ $x = \alpha$ καί $x = \beta$ ὑπάρχει μιά τουλάχιστο τιμή τοῦ x ἡ ὁποία μηδενίζει τό $\pi(x)$ ὅ.ἔ.δ.

<u>Πόρισμα</u>. Ἄν $y = \sigma(x)$ εἶναι συνεχής συνάρτηση στό διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$ καί ἄν y_0 εἶναι ἕνας ἀριθμός κείμενος μεταξύ τῶν ἐξ ὑποθέσεως ἄνισων ἀριθμῶν $\sigma(\alpha)$ καί $\sigma(\beta)$, ἄν δηλ.

$[\sigma(\alpha)-y_o]\cdot[\sigma(\beta)-y_o] < 0$, τότε ὑπάρχει μιά τουλάχιστο θέση x_o μεταξύ $x = \alpha$ καί $x = \beta$ γιά τήν ὁποία $\sigma(x_o) = y_o$.

Πράγματι ἡ συνάρτηση $\sigma(x)-y_o = \varphi(x)$ εἶναι συνεχής στό διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$ καί $\varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta) < 0$, ἄρα γιά ἕνα τουλάχιστο x_o μεταξύ $x = \alpha$ καί $x = \beta$ θά εἶναι $\varphi(x_o) = 0$, δηλ. $\sigma(x_o)-y_o = 0$ ὅ.ἔ.δ.

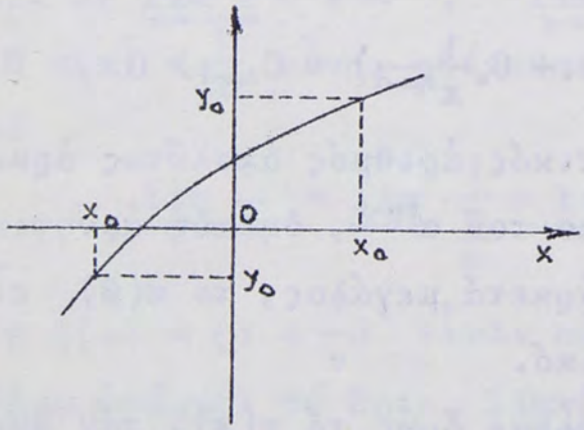
ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΑΥΞΟΥΣΩΝ Ή ΦΘΙΝΟΥΣΩΝ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

§ 175. Ἔστω $y = \sigma(x)$ μιά συνάρτηση συνεχής καί αὔξουσα (μέ στενή σημασία) σ'ἕνα διάστημα, λόγου χάρη στό διάστημα $\alpha < x < \beta$.

Σύμφωνα μέ τά θεωρήματα τῶν §§ 172, 173 ὑπάρχουν τά ὅρια

$$\lim_{x\to\alpha^+}\sigma(x) = A \quad , \quad \lim_{x\to\beta^-}\sigma(x) = B \quad ,$$

ὅπου τό A εἶναι ἤ ἕνας ἀριθμός ἤ τό $-\infty$ καί τό B ἤ ἕνας ἀριθμός (ἀναγκαστικά μεγαλύτερος τοῦ A) ἤ τό $+\infty$.



Θεωροῦμε τό διάστημα $A < y < B$. Γιά κάθε y_o ἀπό τό διάστημα αὐτό ὑπάρχει, κατά τό πόρισμα, ἕνα τουλάχιστο x_o ἀπό τό διάστημα $\alpha < x < \beta$ τέτοιο ὥστε νά εἶναι $\sigma(x_o)=y_o$. Ἐπειδή ὅμως ἡ $\sigma(x)$ ὑποτέθηκε αὔξουσα στό διάστημα $\alpha < x < \beta$, δέν εἶναι δυνατό γιά δυό διάφορες τιμές x_o καί x_o^* ἀπό τό διάστημα (α,β) νά ἔχουμε $\sigma(x_o) = \sigma(x_o^*) = y_o$.

Ἄρα σέ κάθε y_o ἀπό τό διάστημα $A < y < B$ ἀντιστοιχεῖ ἕνα καί μόνο ἕνα x_o ἀπό τό διάστημα $\alpha < x < \beta$ τέτοιο πού νά εἶναι $\sigma(x_o) = y_o$. Μέ ἄλλα λόγια ἡ ἐξίσωση $\sigma(x) = y$, μέ ἄγνωστο τό x καί μέ y δοσμένο αὐθαίρετα ἀπό τό διάστημα $A < y < B$, ἔχει μιάν καί μόνο μιά λύση πού νά ἀνήκη στό διάστημα $\alpha < \mathbf{x} < \beta$. Ἡ λύση αὐτή εἶναι λοιπόν μιά μονοσήμαντη συνάρτηση τῆς $\mathbf{y}$ μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό διάστημα $A < \mathbf{y} < B$. Ἄν τήν παραστήσουμε μέ $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{y})$ θά ἔχουμε

$$\sigma(\varphi(\mathbf{y})) \equiv \mathbf{y} \quad \text{γιά} \quad A < \mathbf{y} < B$$

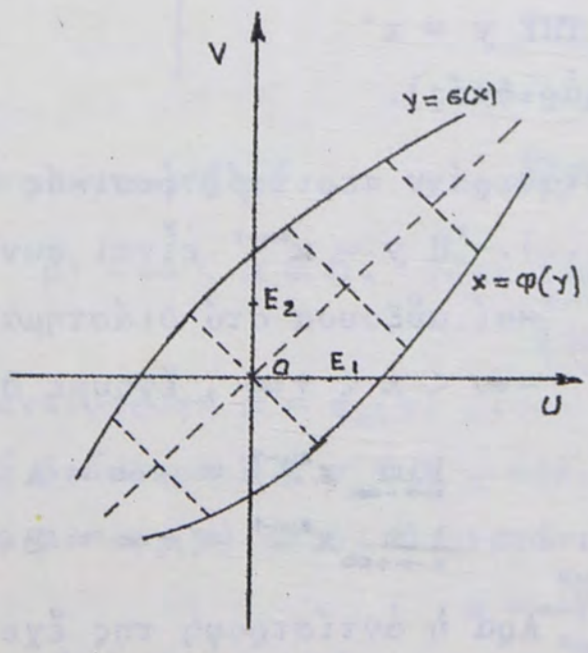
καί

$$\varphi(\sigma(\mathbf{x})) \equiv \mathbf{x} \quad \text{γιά} \quad \alpha < \mathbf{x} < \beta .$$

Εἶναι φανερό ὅτι ἡ $\varphi(\mathbf{y})$ εἶναι αὔξουσα στό διάστημα $A < \mathbf{y} < B$, δέν εἶναι δέ εὔκολο νά ἀποδειχθῆ ὅτι εἶναι καί συνεχής σ'αὐτό τό διάστημα.

Ἡ συνάρτηση φ, μέ ὁποιοδήποτε φυσικά σημάδι $\mathbf{y}$ ἤ $\mathbf{u}$ ἤ καί $\mathbf{x}$ γιά τήν ἀνεξάρτητη μεταβλητή της, (τό "ὅρισμά της", ὅπως καί ἀλλοιώτικα λέμε) καλεῖται ἀντίστροφη τῆς $\sigma(\mathbf{x})$ στό διάστημα $\alpha < \mathbf{x} < \beta$.

Ὅπως εἶναι φανερό, ἡ $\sigma(\mathbf{x})$ εἶναι τότε ἀντίστροφη τῆς $\varphi(\mathbf{y})$ στό διάστημα $A < \mathbf{y} < B$.



Γιά νά παραστήσουμε γραφικῶς τή $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{y})$ μέ τό συνειθισμένο τρόπο (ἑρμηνεύοντας δηλαδή τίς τιμές τοῦ ὁρίσματος $\mathbf{y}$ ὡς τετμημένες καί τίς ἀντίστοιχες τιμές $\varphi(\mathbf{y})$ τῆς συναρτήσεως ~~ως~~ ὡς τεταγμένες σημείων τοῦ ἐπιπέδου), παίρνουμε ἕνα σύστημα παράλληλων εὐθυγράμμων συντεταγμένων μέ ἄξονα τετμημένων τόν OU καί ἄξονα τεταγμένων τόν OV καί μέ βασικά διανύσματα ἰσόμηκα: $|\overline{OE}_1| = |\overline{OE}_2|$.

Ἡ γραφική παράσταση τῆς $\mathbf{y} = \sigma(\mathbf{x})$ σ'αὐτό τό σύστημα ἀποτελεῖται ἀπό τά σημεῖα (u,υ) μέ $u = \mathbf{x}$, $\upsilon = \sigma(\mathbf{x})$ γιά $\alpha<\mathbf{x}<\beta$.

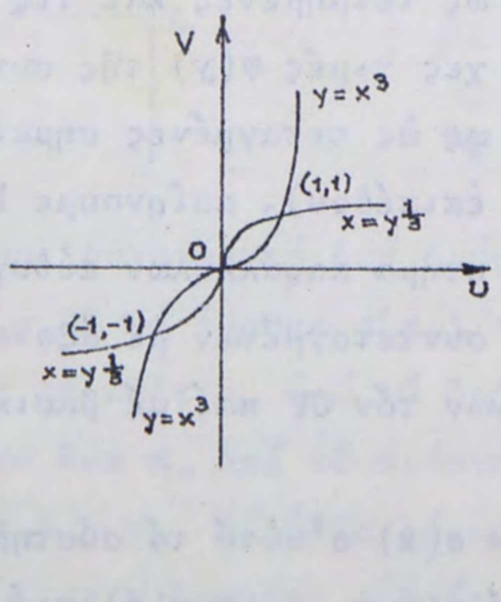
Ἡ γραφική παράσταση τῆς $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{y})$ στό ἴδιο σύστημα ἀποτελεῖται ἀπό τά σημεῖα (u,υ) μέ $\mathbf{u} = \mathbf{y} = \sigma(\mathbf{x})$ καί $\upsilon = \varphi(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$.

Ἐπειδή ὅμως δυό σημεῖα M $(u = \gamma\ ,\ \upsilon = \delta)$ καί M^* $(u = \delta,\ \upsilon = \gamma)$ μέ ἐναλλαγμένες τίς συντεταγμένες τους εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τή διχοτόμο τῆς 1ης καί τῆς 3ης γωνίας τῶν ἀξόνων OU καί OV, συμπεραίνουμε ὅτι ἡ γραφική παράσταση τῆς $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{y})$ εἶναι συμμετρική τῆς γραφ. παραστάσεως τῆς $\mathbf{y} = \sigma(\mathbf{x})$ ὡς πρός τήν παραπάνω διχοτόμο.

<u>Παρατήρηση</u>. Τά παραπάνω ἐπεκτείνονται ἀμέσως σέ συναρτήσεις $\mathbf{y} = \sigma(\mathbf{x})$ συνεχεῖς καί φθίνουσες στό διάστημα $\alpha < \mathbf{x} < \beta$. Ἀρκεῖ νά παρατηρήσουμε ὅτι τότε $\lim\limits_{x \to \beta^-} \sigma(\mathbf{x}) = B < A = \lim\limits_{x \to \alpha^+} \sigma(\mathbf{x})$, καί ὅτι ἡ προηγούμενη θεωρία τῆς ἀντιστροφῆς ἀλλάζει μόνο κατά τοῦτο ὅτι τό διάστημα ὁρισμοῦ τῆς ἀντίστροφης συναρτήσεως $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{y})$ εἶναι τώρα τό $B < \mathbf{y} < A$ καί ὅτι ἡ $\varphi(\mathbf{y})$ εἶναι φθίνουσα σ'αὐτό.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΤΗΣ $\mathbf{y} = \mathbf{x}^\nu$
(ν φυσικός ἀριθμός).

§ 176. Ἄς εἶναι πρῶτα ἡ σταθερά ν περιττός φυσικός ἀριθμός: $\nu = 2\mu-1$, $(\mu = 1,2,3,4,\ldots)$. Ἡ $\mathbf{y} = \mathbf{x}^{2\mu-1}$ εἶναι συνεχής καί αὔξουσα στό διάστημα $-\infty < \mathbf{x} < +\infty$, ἔχουμε δέ



$$\lim_{x \to -\infty} \mathbf{x}^{2\mu-1} = -\infty = A$$
$$\lim_{x \to +\infty} \mathbf{x}^{2\mu-1} = +\infty = B.$$

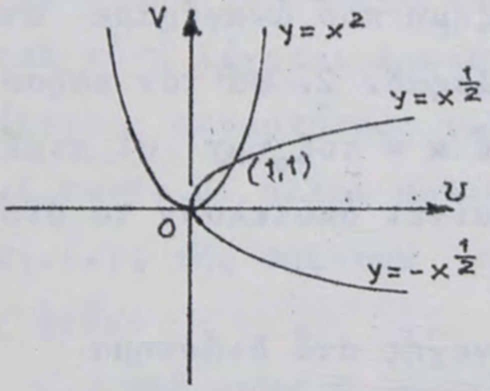
Ἄρα ἡ ἀντίστροφη της ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό διάστημα $-\infty < \mathbf{y} < +\infty$ καί εἶναι συνεχής καί αὔξουσα σ'αὐτό.

Ὅπως εἶναι γνωστό, παριστάνεται μέ τούς συμβολισμούς

$$x = \sqrt[2\mu-1]{y} = y^{\frac{1}{2\mu-1}}$$

2. Ἄς εἶναι δεύτερον ἡ σταθερά ν ἄρτιος φυσ.ἀριθμός: $\nu = 2\mu$ ($\mu = 1,2,3,\ldots$).

Ἡ συνάρτηση $y = \sigma(x) = x^{2\mu}$, μονοσήμαντη καί συνεχής στό διάστημα $-\infty < x < +\infty$, εἶναι φθίνουσα στό ὑποδιάστημα $-\infty < x \leqq 0$ καί αὔξουσα στό $0 \leqq x < +\infty$. Γιά νά ἐφαρμόσουμε τή θεωρία τοῦ § 175 ἔχουμε νά θεωρήσουμε χωριστά τά δυό αὐτά ὑποδιαστήματα.



α) $0 \leqq x < +\infty$. Εἶναι τότε

$$\lim_{x\to 0^+} \sigma(x) = \lim_{x\to 0^+} x^{2\mu} = 0 = \sigma(0) = A,$$

καί $\lim\limits_{x\to+\infty} \sigma(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{2\mu} = +\infty = B$.

Ἡ ἀντίστροφη $x = \varphi_1(y)$ εἶναι ὁρισμένη, αὔξουσα καί συνεχής στό διάστημα $A \leqq y < B$, δηλ. $0 \leqq y < +\infty$, καί παίρνει τιμές $x = \varphi_1(y) \geqq 0$. Παριστάνεται, ὅπως εἶναι γνωστό μέ $x = +\sqrt[2\mu]{y} = y^{\frac{1}{2\mu}}$.

β) $-\infty < x \leqq 0$. Τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} \sigma(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^{2\mu} = +\infty = A$,

$$\lim_{x\to 0^-} \sigma(x) = \lim_{x\to 0^-} x^{2\mu} = 0 = \sigma(0) = B.$$

Ἡ ἀντίστροφη $x = \varphi_2(y)$ εἶναι ὁρισμένη, φθίνουσα καί συνεχής στό διάστημα $B \leqq y < A$, δηλ. τό $0 \leqq y < +\infty$, καί παίρνει τιμές $x = \varphi_2(y) \leqq 0$. Παριστάνεται, ὅπως εἶναι γνωστό μέ

$$x = -\sqrt[2\mu]{y} = -y^{\frac{1}{2\mu}}$$

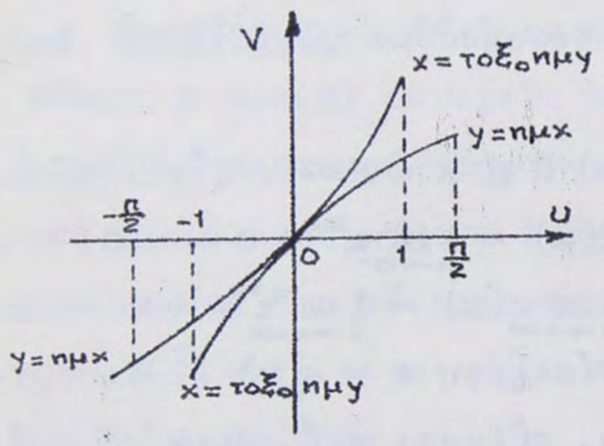
Οἱ δυό συναρτήσεις $x = \pm\sqrt[2\mu]{y} = \pm y^{\frac{1}{2\mu}}$, γιά $0 \leqq y < +\infty$, ἀποτελοῦν τούς δυό "μονοσήμαντους κλάδους" τῆς δισήμαντης συναρτήσεως $x = \sqrt[2\mu]{y}$, πού λέγεται "ἀντίστροφη" τῆς $y = x^{2\mu}$ σ'ὁλόκληρο τό διάστημα $-\infty < x < +\infty$.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

§ 177. 1. Ἡ $y = \eta\mu x$ εἶναι αὔξουσα καί συνεχής στό διάστημα $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$, ἔχουμε δέ

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \eta\mu x = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \quad , \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{2} = 1$$

Ἄρα ἡ $y = \eta\mu x$, $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ ἔχει μιά μονοσήμαντη ἀντίστροφη $x = \varphi(y)$ μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό διάστημα $-1 \leqq y \leqq 1$, ἡ ὁποία εἶναι αὔξουσα καί συνεχής σ'αὐτό· ἡ συνάρτηση αὐτή καλεῖται πρωτεύων (μονοσήμαντος) κλάδος τῆς ἀπειροσήμαντης συναρτήσεως τοξημυ πού ἀναφέραμε στόν § 142, Παραδ. 2. Θά τόν παραστήσουμε μέ $x = \text{τοξ}_0\eta\mu y$· οἱ τιμές πού λαβαίνει ἀποτελοῦν τό διάστημα $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$.



Ἡ $y = \eta\mu x$ εἶναι φθίνουσα καί συνεχής στό διάστημα $\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{3\pi}{2}$. Ἡ ἀντίστροφη της σ'αὐτό ἀποτελεῖ ἕνα δεύτερο μονοσήμαντο κλάδο τῆς τοξημυ, τόν ὁποῖο θά παραστήσουμε μέ $\text{τοξ}_1\eta\mu y$, καί ὁ ὁποῖος συνδέεται μέ τόν πρωτεύοντα διά τῆς σχέσεως:

$$\text{τοξ}_1\eta\mu y = \pi - \text{τοξ}_0\eta\mu y \qquad \text{γιά κάθε } y \text{ ἀπό τό } -1 \leqq y \leqq 1.$$

Ἡ $y = \eta\mu x$ εἶναι αὔξουσα καί συνεχής στό διάστημα $\frac{3\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{5\pi}{2}$ καί ἡ ἀντίστρεφη της σ'αὐτό τό διάστημα μᾶς παρέχει ἕναν τρίτο μονοσήμαντο κλάδο τῆς ἀπειροσήμαντης συναρτήσεως τοξημυ. Θά τόν παραστήσουμε μέ $\text{τοξ}_2\eta\mu y$. Ἰσχύει προφανῶς $\text{τοξ}_2\eta\mu y = 2\pi + \text{τοξ}_0\eta\mu y$· ὁ κλάδος διατρέχει διάστημα $\frac{3\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{5\pi}{2}$, ὅταν τό y διατρέχη τό $-1 \leqq y \leqq 1$. Εἶναι τώρα πλέον φανερό πῶς, ἐφαρμόζοντας τή θεωρία τοῦ § 175, λαβαίνουμε ὅλους τούς διάφορους μονοσήμαντους κλάδους τῆς ἀπειροσήμαντης συναρτήσεως τοξημυ:

$$x = \text{τοξ}_k \text{ημ}y \qquad \text{γιά} \quad -1 \leqq y \leqq 1$$

καί μέ x ἀνῆκον στό διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2} + k\pi \;,\; \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$, ὅπου k αὐθαίρετος ἀκέραιος ἀριθμός ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), καί πῶς αὐτοί οἱ κλάδοι συνδέονται μέ τόν πρωτεύοντα $\text{τοξ}_0\text{ημ}y$.

2. Ἡ $y = \text{συν}x$ εἶναι φθίνουσα καί συνεχής στό διάστημα $0 \leqq x \leqq \pi$, ὅταν δέ τό x διατρέχη αὐξάνοντας τό διάστημα αὐτό τό y διατρέχη φ θ ί ν ο ν τ α ς τό διάστημα $-1 \leqq y \leqq 1$. Ἄρα ἡ $y = \text{συν}x$ ἔχει μιάν ἀντίστροφη $x = \varphi(y)$, μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό διάστημα $-1 \leqq y \leqq 1$, ἡ ὁποία εἶναι φθίνουσα καί συνεχής σ'αὐτό καί τήν ὁποία θά παραστήσουμε μέ $\text{τοξ}_0\text{συν}y$. Ἡ συνάρτηση αὐτή λέγεται πρωτεύων (μονοσήμαντος) κλάδος τῆς ἀπειροσήμαντης συναρτήσεως τοξσυνυ τοῦ § 142 καί θά παρασταθῆ μέ $\text{τοξ}_0\text{συν}y$. Οἱ ἄλλοι μονοσήμαντοι κλάδοι $\text{τοξ}_k\text{συν}y$ (ὅπου $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$), τῆς τοξσυνυ συνδέονται μέ τόν πρωτεύοντα $\text{τοξ}_0\text{συν}y$ ὡς ἑξῆς:

$$\text{τοξ}_1\text{συν}y = 2\pi - \text{τοξ}_0\text{συν}y \quad , \quad \text{τοξ}_2\text{συν}y = 2\pi + \text{τοξ}_0\text{συν}y$$
$$\text{τοξ}_3\text{συν}y = 4\pi - \text{τοξ}_0\text{συν}y \quad , \quad \text{τοξ}_{-1}\text{συν}y = -\text{τοξ}_0\text{συν}y, \text{κ.ο.κ.}$$

Οἱ τιμές πού λαβαίνει τό $\text{τοξ}_k\text{συν}y$, ὅταν τό y μεταβάλλεται στό διάστημα $[-1, 1]$, ἀποτελοῦν τό διάστημα $[k\pi, (k+1)\pi]$ γιά $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

3. Ἡ $y = \text{εφ}x$ εἶναι αὔξουσα καί συνεχής σρό διάστημα $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, ἔχουμε δέ

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \text{εφ}x = -\infty = A \quad , \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \text{εφ}x = +\infty = B$$

Ἄρα ὑπάρχει μιά μονοσήμαντη ἀντίστροφη της μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό διάστημα $-\infty < y < +\infty$. Θά τήν παραστήσουμε μέ $\text{τοξ}_0\text{εφ}y$· εἶναι ὁ πρωτεύων κλάδος τῆς ἀπειροσήμαντης τοξεφy.

Ἡ $y = \text{εφ}x$ εἶναι αὔξουσα καί συνεχής στό διάστημα

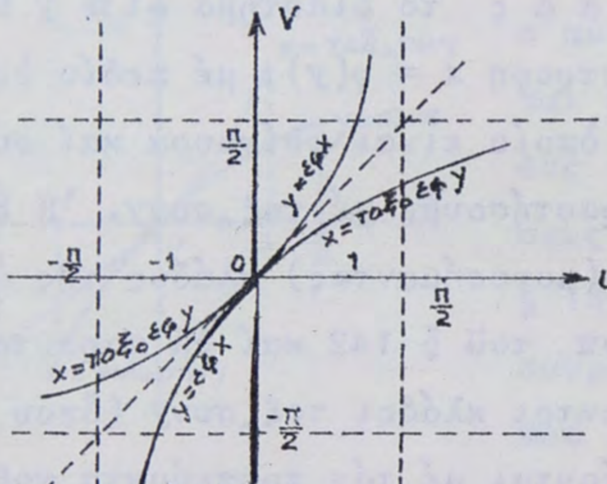
$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, ἔχουμε δέ

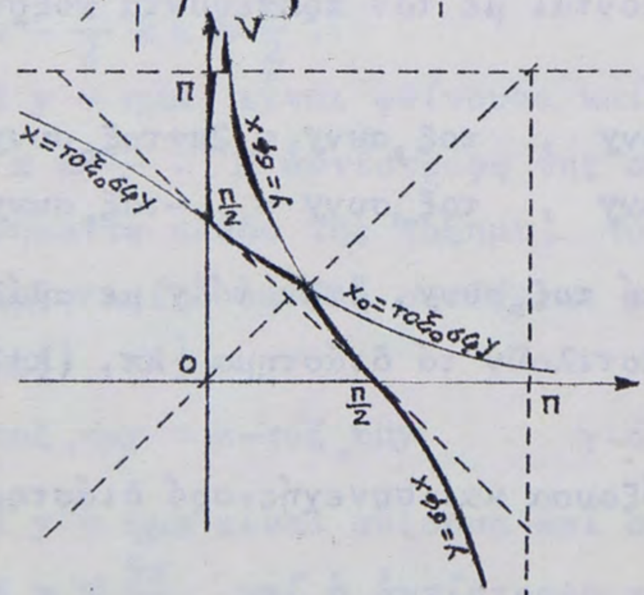
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \text{εφ}x = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-} \text{εφ}x = +\infty \ .$$

Ἄρα ὑπάρχει μιά μονοσήμαντη ἀντίστροφη της μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό διάστημα $-\infty < y < +\infty$, αὔξουσα καί συνεχής σ'αὐτό. Θά τήν παραστήσουμε μέ $\text{τοξ}_1\text{εφ}y$. Ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\text{τοξ}_1\text{εφ}y = \pi + \text{τοξ}_0\text{εφ}y \qquad \text{γιά} \quad -\infty < y < +\infty .$$

Ὅμοια βρίσκουμε τόν κλάδο $\text{τοξ}_2\text{εφ}y = 2\pi + \text{τοξ}_0\text{εφ}y$ καί γενικά τόν $\text{τοξ}_k\text{εφ}y = k\pi + \text{τοξ}_0\text{εφ}y$ γιά $k =$ ἀκέραιος $0, \pm 1, \pm 2, ..$





Ὅλοι μαζί αὐτοί οἱ κλάδοι ἀποτελοῦν τήν ἀπειροσήμαντη συνάρτηση $x = \text{τοξεφ}y$, πού λέγεται ἀντίστροφη τῆς

$$y = \text{εφ}x = \frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}$$

σ'ὁλόκληρο τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς τελευταίας, δηλαδή στό διάστημα $-\infty < x < +\infty$, μέ ἐξαίρεση τῶν τιμῶν $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ πού μηδενίζουν τόν παρανομαστή συνx.

4. Ἡ $y = \text{σφ}x = \frac{\text{συν}x}{\text{ημ}x}$ εἶναι φθίνουσα καί συνεχής στό διάστημα $0 < x < \pi$, ἔχουμε δέ

$$\lim_{x\to 0^+} \text{σφ}x = +\infty \quad \text{καί} \quad \lim_{x\to \pi^-} \text{σφ}x = -\infty$$

Ἄρα ὑπάρχει μιά μονόσημαντη ἀντίστροφή της μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό διάστημα $-\infty < y < +\infty$, φθίνουσα καί συνεχής, σ'αὐτό, τήν ὁποία παριστάνουμε μέ $x = \text{τοξ}_0\text{σφ}y$ (πρωτεύων κλάδος).

Ἡ $y = \sigma\varphi x$ εἶναι ὁμοίως φθίνουσα καί συνεχής σέ κάθε διάστημα $k\pi < x < (k+1)\pi$, ὅπου $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, καί ἔχουμε

$$\lim_{x \to k\pi^+} \sigma\varphi x = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to (k+1)\pi^-} \sigma\varphi x = -\infty \quad .$$

Ἄρα ὑπάρχει μιά μονοσήμαντη ἀντίστροφη της: $x = \tau o\xi_\kappa \sigma\varphi y$, μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό $-\infty < y < +\infty$, ἡ ὁποία διατρέχει φθίνοντας (δηλ. ἀπό τό δεξιό πρός τό ἀριστερό ἄκρο) τό διάστημα $k\pi < x < (k+1)\pi$, ὅταν τό y διατρέχει αὐξάνοντας τό διάστημα $-\infty < x < +\infty$. Ἰσχύει ἡ σχέση

$$\tau o\xi_\kappa \sigma\varphi y = k\pi + \tau o\xi_o \sigma\varphi y \quad .$$

Οἱ διάφοροι μονοσήμαντοι κλάδοι $\tau o\xi_\kappa \sigma\varphi y$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, ἀποτελοῦν μαζί τήν ἀπειροσήμαντη συνάρτηση $x = \tau o\xi\sigma\varphi y$ ἀντίστροφη τῆς $y = \sigma\varphi x$ πού ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ ὁλόκληρο τό διάστημα $-\infty < x < +\infty$ μέ ἐξαίρεση τῶν τιμῶν $x = k\pi$, πού μηδενίζουν τό ημx.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

§ 178. Ἔστω $y = \sigma(x)$ μιά συνάρτηση αὔξουσα καί συνεχής σ'ἕνα διάστημα $\alpha < x < \beta$ καί $x = \varphi(y)$ ἡ(μονοσήμαντη) ἀντίστροφη της μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό ἀντίστοιχο διάστημα $A < y < B$. Ἄς ἔχη ἡ $\sigma(x)$ παράγωγο $\sigma'(x_o)$ στή θέση x_o. Θά ἔχη τότε καί ἡ $x = \varphi(y)$ παράγωγο στήν ἀντίστοιχη θέση $y_o = \sigma(x_o)$, τήν ἑξῆς

$$(178.1) \qquad \varphi'(y_o) = \frac{1}{\sigma'(x_o)} = \frac{1}{\sigma'(\varphi(y_o))}$$

ὅπου στήν περίπτωση $\sigma'(x_o) = +\infty$ ἔχουμε $\varphi'(y_o) = 0$ καί στήν περίπτωση $\sigma'(x_o) = 0$ ἔχουμε $\varphi'(y_o) = +\infty$. Αὐτά ἕπονται εὔκολα ἀπό τίς σχέσεις:

$$\frac{\varphi(y_o+\Delta y) - \varphi(y_o)}{\Delta y} = \frac{x_o+\Delta x - x_o}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

$$\text{καί} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sigma(x_o+\Delta x) - \sigma(x_o)}{\Delta x} = \sigma'(x_o)$$

Ὁ παραπάνω κανόνας γιά τήν παραγώγιση ἀντίστροφης συναρτήσεως ἰσχύει καί στήν περίπτωση ὅπου ἡ $\sigma(x)$, ἑπομένως καί ἡ $\varphi(y)$, εἶναι φθίνουσες συναρτήσεις στά οἰκεῖα διαστήματα $\alpha < x < \beta$ καί $B < y < A$, μέ μόνη τή διαφορά ὅτι τώρα, ἄν $\sigma'(x_o) = 0$, ἡ $\varphi'(y_o) = -\infty$ καί ἄν $\sigma'(x_o) = -\infty$, ἡ $\varphi(y_o) = 0$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΔΥΝΑΜΕΩΣ ΜΕ ΣΥΜΜΕΤΡΟ ΕΚΘΕΤΗ

§ 179. 1. Ἔστω $x = \sqrt[2\mu-1]{y} = y^{\frac{1}{2\mu-1}}$ ἡ ἀντίστροφη τῆς $y = x^{2\mu-1}$ ὅπου $\mu = 2,3,4,\ldots$ Ἔχουμε γιά $y = y_o \neq 0$ καί $x = x_o = y_o^{\frac{1}{2\mu-1}}$,

$$\left(y^{\frac{1}{2\mu-1}}\right)'_{y=y_o} = \frac{1}{\left(x^{2\mu-1}\right)'_{x=x_o}} = \frac{1}{(2\mu-1)x_o^{2\mu-2}}$$

$$= \frac{1}{2\mu-1}\cdot\frac{1}{y_o^{\frac{2\mu-2}{2\mu-1}}} = \frac{1}{2\mu-1}\cdot\frac{1}{y_o^{1-\frac{1}{2\mu-1}}} =$$

$$= \frac{1}{2\mu-1}\cdot y_o^{\frac{1}{2\mu-1}-1}.$$

Στή θέση $y = 0$ ἔχουμε

$$\left(y^{\frac{1}{2\mu-1}}\right)'_{y=0} = +\infty \qquad \left(= \frac{1}{(2\mu-1)\cdot 0^{2\mu-2}}\right).$$

2. Ἔστω $x = \sqrt[2\mu]{y} = y^{\frac{1}{2\mu}}$ ἡ ἀντίστροφη τῆς $y = x^{2\mu}$ στό διάστημα $0 \leqq x < +\infty$· μ εἶναι μιά φυσική σταθερά, δηλ. $\mu = 1, 2, 3,\ldots$ Ἔχουμε γιά $y = y_o > 0$ καί $x_o = y_o^{\frac{1}{2\mu}}$

$$\left(y^{\frac{1}{2\mu}}\right)'_{y=y_o} = \frac{1}{\left(x^{2\mu}\right)'_{x=x_o}} = \frac{1}{2\mu\cdot x_o^{2\mu-1}} = \frac{1}{2\mu}\cdot\frac{1}{y_o^{\frac{2\mu-1}{2\mu}}}$$

$$= \frac{1}{2\mu}\cdot\frac{1}{y_o^{1-\frac{1}{2\mu}}} = \frac{1}{2\mu}\cdot y_o^{\frac{1}{2\mu}-1}.$$

Στή θέση $y = 0$ ἔχουμε $\left(D^+ y^{\frac{1}{2\mu}}\right)_{y=0} = +\infty \quad \left(= \frac{1}{2\mu\cdot 0^{2\mu-1}}\right)$.

3. Ἔστω $x = -\sqrt[2\mu]{y} = -y^{\frac{1}{2\mu}}$ ἡ ἀντίστροφη τῆς φθίνουσας συναρτήσεως $y = x^{2\mu}$ στό διάστημα $-\infty < x \leqq 0$.

Ἔχουμε χρησιμοποιώντας τό προηγούμενο

$$(-y^{\frac{1}{2\mu}})'_{y\neq 0} = -(y^{\frac{1}{2\mu}})'_{y\neq 0} = -\frac{1}{2\mu}\, y^{\frac{1}{2\mu}-1}$$

καί
$$\left(D^{+}(-y^{\frac{1}{2\mu}})\right)_{y=0} = -\infty .$$

Ἀπό τά παραπάνω βγαίνει τό συμπέρασμα: ὁ κανόνας πού διατυπώσαμε στό τέλος τοῦ § 166 γιά τήν παραγώγιση τῆς x^{ρ} μέ ἀκέραιο ἐκθέτη ρ ἰσχύει καί στήν περίπτωση ὅπου ρ = μέ τήν κλασματική μονάδα $\frac{1}{\nu}$, $(\nu = 2,3,4,\ldots)$.

Λέγω τώρα ὅτι ὁ ἴδιος κανόνας ἰσχύει καί στήν περίπτωση ὅπου ρ = μέ τυχόντα κλασματικό ἀριθμό: $\rho = \frac{k}{\nu}$, ὅπου k ἀκέραιος, ν φυσικός ἀριθμός. Πράγματι, σύμφωνα μέ τόν § 168, 4 καί μέ τά παραπάνω, εἶναι

$$\left\{x^{\frac{k}{\nu}}\right\}'_{x\neq 0} = \left\{(x^{\frac{1}{\nu}})^{k}\right\}'_{x\neq 0} = k(x^{\frac{1}{\nu}})^{k-1}\cdot(x^{\frac{1}{\nu}})'_{x\neq 0}$$
$$= kx^{\frac{k-1}{\nu}}\cdot\frac{1}{\nu}\,x^{\frac{1}{\nu}-1} = \frac{k}{\nu}\,x^{\frac{k}{\nu}-1}$$

Ἔχουμε λοιπόν γενικά γιά ρ = σύμμετρος ἀριθμός (σταθερά σύμμετρη)

(179.1) $$(x^{\rho})' = \rho x^{\rho-1}$$

σέ κάθε θέση $x \neq 0$, ὅπου ἡ δύναμη x^{ρ} ἔχει ὁριστῆ.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ τοξ$_\circ$ημx κτλ.

§ 180. 1. Ἔστω $y =$ τοξ$_\circ$ημx γιά $-1 \leqq x \leqq 1$, ὁπότε $x =$ ημy μέ $-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$. Ἐφαρμόζοντας τόν κανόνα τοῦ § 178 (ἀφοῦ ἐναλλάξουμε τό x μέ τό y μέσα στόν τύπο (178.1) ἔχουμε γιά $-1 < x < 1$:

$$(\text{τοξ}_\circ\text{ημ}x)'_{x=x_\circ} = \frac{1}{(\text{ημ}y)'_{y=y_\circ}} = \frac{1}{\text{συν}y_\circ} = \frac{1}{+\sqrt{1-\text{ημ}^2 y_\circ}} = \frac{1}{+\sqrt{1-x_\circ^2}} .$$

Στίς θέσεις $x = -1$ καί $x = 1$ ἔχουμε

$$(D^+ \text{τοξ}_0 \eta\mu x)_{x=-1} = +\infty \quad , \quad (D^- \text{τοξ}_0 \eta\mu x)_{x=1} = +\infty \ .$$

Ἡ παράγωγος ἑνός ἄλλου μονοσήμαντου κλάδου $y = \text{τοξ}_\kappa \eta\mu x$ βρίσκεται ἀμέσως μέ βάση τή σχέση του πρός τόν πρωτεύοντα.

Π.χ. γιά τόν $y = \text{τοξ}_1 \eta\mu x$ $\left(-1 \leqq x \leqq 1 \ , \ \frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{3\pi}{2}\right)$ ἔχουμε $\quad y = \text{τοξ}_1 \eta\mu x = \pi - \text{τοξ}_0 \eta\mu x$, ἄρα γιά $-1 < x < 1$

$$(\text{τοξ}_1 \eta\mu x)' = 0 - (\text{τοξ}_0 \eta\mu x)' = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}} \ ,$$

καί $\quad (D^+ \text{τοξ}_1 \eta\mu x)_{x=-1} = -\infty \quad , \quad (D^- \text{τοξ}_1 \eta\mu x)_{x=1} = -\infty \ .$

2. Ἔστω $y = \text{τοξ}_0 \sigma\upsilon\nu x$ γιά $-1 < x < 1$ ὁπότε $x = \sigma\upsilon\nu y$ μέ $0 \leqq y \leqq \pi$. Ἔχουμε γιά $-1 < x < 1$

$$(\text{τοξ}_0 \sigma\upsilon\nu x)' = \frac{1}{(\sigma\upsilon\nu y)'} = \frac{1}{-\eta\mu y} = \frac{1}{-\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2 y}} = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}} \ ,$$

καί στίς θέσεις $x = -1$, $x = 1$

$$(D^+ \text{τοξ}_0 \sigma\upsilon\nu x)_{x=-1} = -\infty \ , (D^- \text{τοξ}_0 \sigma\upsilon\nu x)_{x=1} = -\infty .$$

Τῶν ἄλλων μονοσήμαντων κλάδων $\text{τοξ}_\kappa \sigma\upsilon\nu x$ ἡ παράγωγος βρίσκεται ἀμέσως μέ βάση τή σχέση τους πρός τόν πρωτεύοντα.

Π.χ. γιά τόν $y = \text{τοξ}_{-1} \sigma\upsilon\nu x = -\text{τοξ}_0 \sigma\upsilon\nu x$ ἔχουμε

$$(\text{τοξ}_{-1} \sigma\upsilon\nu x)' = \frac{1}{+\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{γιά} \quad -1 < x < 1 \ .$$

3. Ἔστω $y = \text{τοξ}_0 \varepsilon\varphi x$, $(-\infty < x < +\infty)$, ὁπότε

$$x = \varepsilon\varphi y \quad , \quad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right) \ .$$

Ἑπομένως σέ τυχούσα θέση x εἶναι

$$(\text{τοξ}_0 \varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{(\varepsilon\varphi y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 y}} = \sigma\upsilon\nu^2 y = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 y}$$

καί συνεπῶς

$$(\text{τοξ}_0 \varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad , \quad \text{γιά} \ -\infty < x < +\infty \ .$$

Γιά τούς ὑπόλοιπους μονοσήμαντους κλάδους $y = \text{τοξ}_\kappa \varepsilon\varphi x = k\pi + \text{τοξ}_0 \varepsilon\varphi x$ ἰσχύει λοιπόν

$$(\tau o\xi_\kappa \varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{1+x^2} .$$

4. Έστω $y = \tau o\xi_o \sigma\varphi x$, $(-\infty < x < +\infty)$, ὁπότε $x = \sigma\varphi y$ μέ $0 < y < \pi$. Έχουμε σέ τυχοῦσα θέση x

$$(\tau o\xi_o \sigma\varphi x)' = \frac{1}{(\sigma\varphi y)'} = \frac{1}{-\frac{1}{\eta\mu^2 y}} = -\eta\mu^2 y = -\frac{1}{1+\sigma\varphi^2 y} ,$$

ἄρα
$$(\tau o\xi_o \sigma\varphi x)' = -\frac{1}{1+x^2} ,$$

καί γιά τούς ὑπόλοιπους κλάδους $\tau o\xi_\kappa \sigma\varphi x = k\pi + \tau o\xi_o \sigma\varphi x$

$$(\tau o\xi_\kappa \sigma\varphi x)' = -\frac{1}{1+x^2} .$$

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ α^β, ΟΤΑΝ $\alpha > 0$ καί β ΑΣΥΜΜΕΤΡΟΣ .

§ 181. Όταν $\alpha > 0$ καί ὁ ἐκθέτης β εἶναι σύμμετρος ἀριθμός: $\beta = \pm\frac{\nu_1}{\nu_2} \neq 0$ ἤ $\beta = 0$, τό σύμβολο α^β ἔχει κιόλας μονοσήμαντα ὁριστῆ:

$$\alpha^{\frac{\nu_1}{\nu_2}} = (\alpha^{\frac{1}{\nu_2}})^{\nu_1} = \left(+\sqrt[\nu_2]{\alpha}\right)^{\nu_1} = +\sqrt[\nu_2]{\alpha^{\nu_1}} ,$$

$$\alpha^{-\frac{\nu_1}{\nu_2}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{\nu_1}{\nu_2}}} , \quad \alpha^0 = 1 .$$

Ὑπολείπεται νά δώσουμε τόν ὁρισμό τοῦ α^β, ὅταν $\alpha > 0$ καί β ἀσύμμετρος ἀριθμός. Ἄς εἶναι πρῶτα $\alpha > 1$.

Έστω $\beta = B, y_1 y_2 \ldots y_\nu \ldots$ ἕνας θετικός ἀσύμμετρος ἀριθμός. Οἱ ἀριθμοί.

$$\varphi(1) = \alpha^{B+\frac{y_1}{10}} , \quad \varphi(2) = \alpha^{B+\frac{y_1}{10}+\frac{y_2}{10^2}}, \ldots , \varphi(\nu) = \alpha^{B+\frac{y_1}{10}+\cdots+\frac{y_\nu}{10^\nu}}, \ldots$$

ἀποτελοῦν μιά συνάρτηση τοῦ ν πού εἶναι αὔξουσα μέ εὐρεία σημασία στό πεδίο $\{\nu = 1,2,3,\ldots\}$.

Ἄρα, κατά τόν § 173., ὑπάρχει τό ὅριο $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \varphi(\nu) = 1$, καί τό ὅριο αὐτό εἶναι ἕνας ἀριθμός (γιατί $\varphi(\nu) < \alpha^{B+1}$ γιά $\nu = 1,2,3,\ldots$), ὁ ὁποῖος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 1 (γιατί ἤδη $\varphi(1) \geqq 1$).

'Ορίζουμε τώρα

$$\alpha^{\beta} = l = \lim_{\nu \to +\infty} \left(\alpha^{B + \frac{y_1}{10} + \cdots + \frac{y_\nu}{10^\nu}}\right).$$

"Εστω β ένας αρνητικός ασύμμετρος· ορίζουμε

$$\alpha^{\beta} = \frac{1}{\alpha^{-\beta}} .$$

"Ας είναι δεύτερον $0 < \alpha < 1$, οπότε $\alpha_1 = \frac{1}{\alpha} > 1$. 'Ορίζουμε

$$\alpha^{\beta} = \frac{1}{\alpha_1^{\beta}} .$$

"Ας είναι τέλος $\alpha = 1$. 'Ορίζουμε γιά β = ασύμμετρος αριθμός

$$1^{\beta} = 1 .$$

Τό σύμβολο α^{β} είναι τώρα μονοσήμαντα ορισμένο γιά κάθε $\alpha > 0$ καί γιά κάθε β = πραγματικός αριθμός, είναι δέ

$$0 < \alpha^{\beta} \begin{cases} > 1 \text{ γιά } \alpha > 1 \text{ καί } \beta > 0 \\ = 1 \text{ γιά } \alpha > 1 \text{ καί } \beta = 0 \\ < 1 \text{ γιά } \alpha > 1 \text{ καί } \beta < 0 \end{cases}$$

$$0 < \alpha^{\beta} \begin{cases} < 1 \text{ γιά } \alpha < 1 , \ \beta > 0 \\ = 1 \text{ γιά } \alpha < 1 , \ \beta = 0 \\ > 1 \text{ γιά } \alpha < 1 , \ \beta < 0 \end{cases} .$$

'Επί πλέον ισχύει ή έξῆς σχέση πού έπεται εύκολα από τούς ορισμούς:

$$\alpha^{\beta_1} < \alpha^{\beta_2} \text{ γιά } \alpha > 1 \quad \text{καί } \beta_1 < \beta_2 .$$

Η ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ α^x.

§ 182. "Ας είναι πρῶτα $\alpha = 1+\vartheta > 1$. 'Η συνάρτηση α^x είναι μονοσήμαντα ορισμένη καί αύξουσα στό διάστημα $-\infty < x < +\infty$. Συνεπῶς υπάρχει τό $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha^x$ καί είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha^x = +\infty$, γιατί όταν $x = \nu$ = φυσικός αριθμός $\alpha^\nu = (1+\vartheta)^\nu \geqq 1+\nu\vartheta$. 'Επίσης υπάρχει τό $\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha^x$ καί είναι $\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{\alpha^{-x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\alpha^x} = 0$.

Λέγω τώρα ότι ή α^x είναι συνεχής σέ κάθε θέση x_0 από τό $-\infty < x < +\infty$.

<u>'Απόδειξη</u>. Εἶναι πρῶτα $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \alpha^{\frac{1}{\nu}} = 1$. Πράγματι ἄς θέσουμε $\alpha^{\frac{1}{\nu}} = 1 + p_\nu$,τότε $p_\nu > 0$ καί $\alpha = (1+p_\nu)^\nu \geqq 1+\nu p_\nu$ ἀπό ὅπου $p_\nu \leqq \frac{\alpha-1}{\nu}$, ἄρα

$$\lim_{\nu\to+\infty} p_\nu = 0 \quad , \quad \text{καί} \quad \lim_{\nu\to+\infty} \alpha^{\frac{1}{\nu}} = \lim_{\nu\to+\infty}(1+p_\nu) = 1 .$$

Παίρνουμε τώρα δυό σύμμετρους ἀριθμούς σ_1 καί σ_2 τέτοιους πού νά εἶναι $\sigma_1 < x_0 < \sigma_2$ καί $\alpha^{\sigma_2-\sigma_1} < 1 + \frac{\varepsilon}{\alpha^{x_0}}$, ὅπου ε αὐθαίρετος θετικός ἀριθμός. Θά ἔχουμε

$$\alpha^{\sigma_1} < \alpha^{x_0} < \alpha^{\sigma_2} = \alpha^{\sigma_1}\cdot\alpha^{\sigma_2-\sigma_1} < \alpha^{\sigma_1}\left(1 + \frac{\varepsilon}{\alpha^{x_0}}\right) < \alpha^{\sigma_1} + \varepsilon .$$

'Επομένως, ἐπειδή ἡ α^x εἶναι αὔξουσα γιά $\sigma_1 < x < \sigma_2$ θά ἔχουμε $\alpha^{\sigma_1} < \alpha^x < \alpha^{\sigma_1} + \varepsilon$, καί συνεπῶς

$$|\alpha^{x_0} - \alpha^x| < \alpha^{\sigma_1} + \varepsilon - \alpha^{\sigma_1} = \varepsilon .$$

Μέ ἄλλα λόγια $|\alpha^{x_0} - \alpha^x| < \varepsilon$ ὅταν $|x_0 - x| < \sigma_2 - \sigma_1$.

Αὐτό ἀποδείχνει τή συνέχεια τῆς α^x στή θέση x_0.

"Ἄς εἶναι δεύτερον $0 < \alpha < 1$. Θέτουμε $\alpha_1 = \frac{1}{\alpha}$, ὁπότε $\alpha_1 > 1$ καί $\alpha^x = \frac{1}{\alpha_1^x} = \alpha_1^{-x}$. Ἄρα ἡ α^x εἶναι τώρα φθίνουσα μέ στενή σημασία στό διάστημα $-\infty < x < +\infty$ καί συνεχής σέ κάθε θέση ἀπ' αὐτό,ὅταν δέ τό x διατρέχη αὐξάνοντας τό διάστημα $-\infty < x < +\infty$, τό $y = \alpha^x$ διατρέχει φ θ ί ν ο ν τ α ς τό διάστημα $0 < y < +\infty$.

§ 183. Στηριζόμενοι στή συνέχεια τῆς συναρτήσεως α^x τῆς x (ὅπου α μιά σταθερά > 0) καί τῆς συναρτήσεως u^σ τῆς u (ὅπου σ μιά σύμμετρη σταθερά καί $0 < u < +\infty$) ἀποδείχνουμε εὔκολα τήν ἰσχύ τῶν ἑξῆς "νόμων" καί γιά ἀσύμμετρους ἐκθέτες:

$$\alpha^{\beta_1}\cdot\alpha^{\beta_2} = \alpha^{\beta_1+\beta_2}, \qquad (\alpha_1\alpha_2)^\beta = \alpha_1^\beta\cdot\alpha_2^\beta \ , \ (\alpha^\beta)^\nu = \alpha^{\beta\nu} .$$

§ 184. 'Ο ἀριθμός $e = \lim\limits_{\nu\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu$. Ὅπως ὑποδηλώσαμε στόν § 173, ἔχουμε γιά ν = φυσικός ἀριθμός $\geqq 2$,

$$\varphi(\nu) = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1 - \frac{1}{\nu}}{2!} + \frac{\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)\left(1 - \frac{2}{\nu}\right)}{3!} +$$

$$\ldots + \frac{\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\nu}\right)\ldots\left(1-\frac{\nu-1}{\nu}\right)}{\nu!},$$

ἄρα $\varphi(\nu) < \varphi(\nu+1)$ καί προσέτι

$$\varphi(\nu) < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{\nu!} \leqq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} +$$

$$\ldots + \frac{1}{2^{\nu-1}} = 1 + \frac{1-\frac{1}{2^\nu}}{1-\frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3 .$$

Συνεπῶς ὑπάρχει τό $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\varphi(\nu)$ καί εἶναι ἕνας ἀριθμός $\leqq 3$.

Ὁ ἀριθμός αὐτός σημειώνεται μέ τό γράμμα e. Γιά νά βροῦμε ἕναν ἄλλο τρόπο προσδιορισμοῦ του, θέτουμε

$$\sigma(\nu) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{\nu!}$$

ὁπότε ἀπό τά παραπάνω ἕπονται τά ἑξῆς: $\sigma(\nu) < \sigma(\nu+1)$, $\sigma(\nu) < 3$ καί $\varphi(\nu) < \sigma(\nu)$ γιά κάθε φυσικό $\nu \geqq 2$. Ἄρα ὑπάρχει καί τό $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\sigma(\nu)$ καί εἶναι ἕνας ἀριθμός $e^* \leqq 3$.

Λέγω ὅτι $e = e^*$. Πράγματι ἀπό τή σχέση $\varphi(\nu) < \sigma(\nu)$ γιά κάθε $\nu \geqq 2$, ἕπεται ὅτι $e \leqq e^*$. Ἐξ ἄλλου, ἔστω μ ἕνας αὐθαίρετα ὁ ρ ι σ μ έ ν ο ς φυσικός ἀριθμός $\geqq 2$· θά ἔχουμε γιά $\nu \geqq \mu$

$$\varphi(\nu) \geqq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1-\frac{1}{\nu}}{2!} + \ldots + \frac{\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\nu}\right)\ldots\left(1-\frac{\mu-1}{\nu}\right)}{\mu!},$$

ἄρα

$$\lim_{\nu\to+\infty}\varphi(\nu) \geqq \lim_{\nu\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1-\frac{1}{\nu}}{2!} + \ldots + \frac{\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\nu}\right)\ldots\left(1-\frac{\mu-1}{\nu}\right)}{\mu!}\right)$$

δηλαδή
$$e \geqq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{\mu!} = \sigma(\mu) .$$

Αὐτό ὅμως ἰσχύει γιά κάθε $\mu \geqq 2$, ἄρα $e \geqq \lim\limits_{\mu\to+\infty}\sigma(\mu) = e^*$. Ἀπό τίς δυό σχέσεις $e \leqq e^*$ καί $e \geqq e^*$ ἕπεται τέλος τό ἀποδεικτέο $e = e^*$.

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι γιά ϱ = φυσικός ἀριθμός ἔχουμε

$$\sigma(\nu+\varrho) = \sigma(\nu) + \frac{1}{\nu!(\nu+1)} + \frac{1}{\nu!(\nu+1)(\nu+2)} +$$

$$\ldots + \frac{1}{\nu!(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+\varrho)}$$

$$\leqq \sigma(\nu) + \frac{1}{\nu!(\nu+1)}\left(1 + \frac{1}{\nu+2} + \frac{1}{(\nu+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(\nu+2)^{\varrho-1}}\right)$$

$$= \sigma(\nu) + \frac{1}{\nu!(\nu+1)} \frac{1 - \frac{1}{(\nu+2)^{\varrho}}}{1 - \frac{1}{\nu+2}} < \sigma(\nu) + \frac{1}{\nu!(\nu+1)} \frac{1}{\frac{\nu+1}{\nu+2}} .$$

Ἄρα

$$e = \lim_{p\to+\infty} \sigma(\nu+p) \leqq \sigma(\nu) + \frac{1}{\nu!(\nu+1)\,\frac{\nu+1}{\nu+2}} < \sigma(\nu) + \frac{1}{\nu!\nu}$$

καί ἐπειδή $\quad \sigma(\nu) = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{\nu!} < e \quad ,$

ἕπεται ὅτι

(184.1) $$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{\nu!} + \frac{\Theta_\nu}{\nu!\nu}$$

ὅπου Θ_ν ἕνας ἀριθμός πού ἐξαρτιέται ἀπό τό ν καί πού εἶναι πάντοτε > 0 καί < 1. Ἔτσι ἔχουμε:

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{\nu!}$$

μέ σφάλμα θετικό $\quad e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{\nu!}\right) < \frac{1}{\nu!\nu} \quad .$

Παίρνοντα π.χ. ν = 7 βρίσκουμε 2,7180 < e < 2,7186, ἄρα e = 2,718... . Μέ βάση τήν (184.1) ἀποδείχνεται, δι'ἐπαγωγῆς στό ἄτοπο, ὅτι e = ἀσύμμετρος.

§ 185. <u>Ἀπόδειξη τῆς σχέσεως $\lim_{\omega\to 0} (1+\omega)^{\frac{1}{\omega}} = e$.</u> Ἡ συνάρτηση $(1 + \frac{1}{x})^x$ εἶναι μονοσήμαντα ὁρισμένη γιά $-\infty < x < -1$ καί γιά $0 < x < +\infty$. Λέγω ὅτι $\lim_{x\to+\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e$. Πράγματι ἔστω

$x \geqq 1$ καί $\upsilon_x = \mathrm{Ak}(x)$˙ θά εἶναι τότε $1 \leqq \upsilon_x \leqq x < \upsilon_x+1$. Ἄρα

$$\left(1+\frac{1}{\upsilon_x+1}\right)^{\upsilon_x} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\upsilon_x} \leqq \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\upsilon_x+1} \leqq \left(1+\frac{1}{\upsilon_x}\right)^{\upsilon_x+1}$$

καί

$$\left(1+\frac{1}{\upsilon_x+1}\right)^{\upsilon_x+1}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{\upsilon_x+1}} = \left(1+\frac{1}{\upsilon_x+1}\right)^{\upsilon_x} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1+\frac{1}{\upsilon_x}\right)^{\upsilon_x}\left(1+\frac{1}{\upsilon_x}\right).$$

Γιά $x \to +\infty$ ἔχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}(\upsilon_x+1) = \lim\limits_{x\to+\infty}\upsilon_x = +\infty$, ἐπομένως οἱ δυό ἀριθμοί μεταξύ τῶν ὁποίων κεῖται τό $(1+\frac{1}{x})^x$ ἔχουν, κατά τόν § 184, ἀμφότεροι ὅριο τό $e\cdot 1 = e$ γιά $x \to +\infty$, ἄρα εἶναι καί

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Λέγω τώρα ὅτι καί $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. Θέτουμε $x = -t-1$, ὁπότε

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1+\frac{1}{-t-1}\right)^{-t-1} =$$

$$= \left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1} = \left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} = \left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)$$

Εἶναι ὅμως $\lim\limits_{x\to-\infty} t = \lim\limits_{x\to-\infty}(-1-x) = +\infty$. Ἄρα

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\left(1+\frac{1}{t}\right)\right\} = e\cdot 1 \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Ἀπό τίς δυό ὁριακές σχέσεις πού ἀποδείξαμε ἕπεται τέλος, ἄν θέσουμε $\omega = \frac{1}{x}$ ὅτι

$$\lim_{\omega\to 0}(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}} = e \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

§ 186. <u>Ἀντιστροφή τῆς $y = \alpha^x$ μέ $\alpha > 0$ καί $\neq 1$.</u> Ἀπό τούς § 182 καί § 178 ἕπεται ὅτι ἡ $y = \alpha^x$ ἔχει στό διάστημα $-\infty < x < +\infty$ μονοσήμαντη ἀντίστροφη μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο τῶν θετικῶν ἀριθμῶν $0 < y < +\infty$.

Ἡ ἀντίστροφη αὐτή λέγεται λογαριθμική συνάρτηση τοῦ y μέ βάση τό (θετικό καί διάφορο ἀπό τή μονάδα 1) ἀριθμό α˙ θά σημειώνεται ὡς ἑξῆς: $x = \lambda o\gamma_\alpha y$ γιά $0 < y < +\infty$. Σύμφωνα μέ τή γενική θεωρία τοῦ § 175, ἡ $\lambda o\gamma_\alpha y$ εἶναι συνεχής στό διάστημα $0 < y < +\infty$, αὔξουσα καί μέ

$\lim\limits_{y\to 0^+} \lambda o\gamma_\alpha y = -\infty \qquad \lim\limits_{y\to+\infty} \lambda o\gamma\, y = +\infty$ ὅταν $\alpha > 1$,

φθίνουσα καί μέ

$\lim\limits_{y\to 0^+} \lambda o\gamma_\alpha y = +\infty \qquad \lim\limits_{y\to+\infty} \lambda o\gamma_\alpha y = -\infty$ ὅταν $0 < \alpha < 1$.

Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς $\lambda o\gamma_\alpha y$ ὡς ἀντίστροφης τῆς $y = \alpha^x$ ἕπεται ἀμέσως ὅτι $\lambda o\gamma_\alpha(\alpha^x) = x$ γιά κάθε πραγματικό x, $\alpha^{\lambda o\gamma_\alpha y} = y$ γιά κάθε θετικό y, $\lambda o\gamma_\alpha \alpha = 1$, $\lambda o\gamma_\alpha 1 = 0$.

Ἀποδείχνονται ἐπίσης γενικά οἱ σχέσεις (τά y_1, y_2, y ἐξυπακούονται θετικά).

$$\lambda o\gamma_\alpha(y_1 y_2) = \lambda o\gamma_\alpha y_1 + \lambda o\gamma_\alpha y_2 \quad ,$$

$$\lambda o\gamma_\alpha \frac{1}{y} = -\lambda o\gamma_\alpha y \quad , \quad \lambda o\gamma_\alpha(y^\beta) = \beta \cdot \lambda o\gamma_\alpha y \quad ,$$

ὅπου β τυχών πραγματικός ἀριθμός.

Λέγω ὅτι οἱ λογάριθμοι τοῦ ἴδιου θετικοῦ ἀριθμοῦ y ὡς πρός δυό διάφορες βάσεις α_1 καί α_2 ἔχουν λόγο σταθερό, δηλαδή ἀνεξάρτητο ἀπό τό y.

Πράγματι ἀπό τή σχέση $y = \alpha_1^{\lambda o\gamma_{\alpha_1} y}$ ἕπεται διά λογαριθμήσεως ὡς πρός βάση τό α_2 ἡ σχέση:

$$\lambda o\gamma_{\alpha_2} y = \lambda o\gamma_{\alpha_1} y \cdot \lambda o\gamma_{\alpha_2} \alpha_1$$

πού ἀποδείχνει τόν ἰσχυρισμό μας.

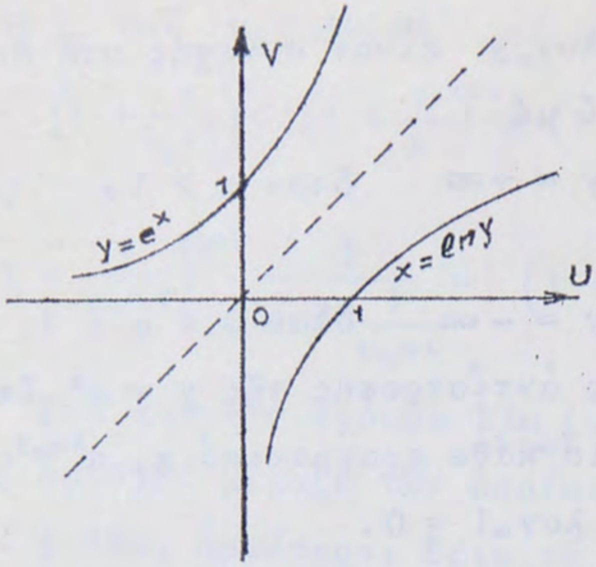
Ἀπό τήν τελευταία σχέση θέτοντας $y = \alpha_2$ λαμβάνουμε:

$$1 = \lambda o\gamma_{\alpha_1} \alpha_2 \cdot \lambda o\gamma_{\alpha_2} \alpha_1 \,.$$

§ 187. Δεκαδικός καί φυσικός λογάριθμος. Μᾶς ἐνδιαφέρουν είδικά οἱ περιπτώσεις $\alpha = 10$ καί $\alpha = e$.

Στήν πρώτη, ὁ λογάριθμος λέγεται δεκαδικός ἤ κοινός (ἤ τοῦ Briggs). Θά τόν σημειώνουμε μέ $\log y = \lambda o\gamma_{10} y$.

Στή δεύτερη, ὁ λογάριθμος λέγεται φυσικός (logarithmus naturalis). Θά τόν σημειώνουμε μέ $\ln y = \lambda o\gamma_e y$. Ὁ ἀριθμός



$\log e = 0,43429\ldots$ λέγεται μέτρο (modulus) καί παριστάνεται μέ M. Σύμφωνα μέ τίς τελευταῖες σχέσεις τοῦ § 186 ἔχουμε $\log y = M \ln y$.

Ἀντίστροφα ἔχουμε $\ln y = \frac{1}{M}\log y$, ὅπου $\frac{1}{M} = \ln 10 = 2,30258\ldots$.

§ 188. <u>Παράγωγος τῆς $y = \lambda o\gamma_\alpha x$.</u> Σέ τυχοῦσα θέση $x > 0$ ἔχουμε

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lambda o\gamma_\alpha(x+\Delta x) - \lambda o\gamma_\alpha x}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\,\lambda o\gamma_\alpha \frac{x+\Delta x}{x} =$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\,\lambda o\gamma_\alpha\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\,\lambda o\gamma_\alpha\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{x}\,\lambda o\gamma_\alpha\left\{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right\}$$

ἄρα ἄν θέσουμε $\omega = \frac{\Delta x}{x}$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\,\lambda o\gamma_\alpha(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}$

Χρησιμοποιοῦμε τώρα τή σχέση $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\omega = 0$ καί τή συνέχεια τῆς συναρτήσεως $\lambda o\gamma_\alpha u$ τοῦ u στή θέση $u = e = \lim\limits_{\omega\to 0}(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}$. Προκύπτει ἔτσι ἡ σχέση

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\lim_{\omega\to 0}\left\{\lambda o\gamma_\alpha(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}\right\} =$$

$$= \frac{1}{x}\,\lambda o\gamma_\alpha\left\{\lim_{\omega\to 0}(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}\right\} = \frac{1}{x}\,\lambda o\gamma_\alpha e.$$

Ἀποδείχτηκε λοιπόν ὅτι

$$(188.1)\qquad (\lambda o\gamma_\alpha x)'_{\theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ x} = \frac{1}{x}\cdot\lambda o\gamma_\alpha e = \frac{1}{x\ln\alpha}\ .$$

Στήν εἰδική περίπτωση $\alpha = e$ ἔχουμε

$$(188.2)\qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}\ .$$

Θεωροῦμε τέλος τή συνάρτηση $\ln|x|$ πού ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τά δυό διαστήματα $-\infty < x < 0$ καί $0 < x < +\infty$.

Γιά $0 < x < \infty$ εἶναι $\ln|x| = \ln x$, ἄρα $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

Γιά $-\infty < x < 0$ ἔχουμε $\ln|x| = \ln t$ ὅπου $t = -x > 0$,

ἄρα $\quad (\ln|x|)'_x = (\ln t)'_t \cdot t'_x = \frac{1}{t}(-1) = \frac{1}{-t} = \frac{1}{x}$.

Ὥστε

(188.3) $\qquad (\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

σέ τυχούσα θέση $x \neq 0$.

§ 189. Λογαριθμική παράγωγος συναρτήσεως. Ἡ συνάρτηση $y = \sigma(x)$ ἄς μή μηδενίζεται στή θέση x καί ἄς ἔχη πεπερασμένη παράγωγο $\sigma'(x)$ σ'αὐτή τή θέση. Τό πηλίκο $\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}$ λέγεται λογαριθμική παράγωγος στή θέση x τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$. Τό ὄνομα δικαιολογιέται ἀπό τή σχέση

$$(\ln|\sigma(x)|)'_{\theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ x} = (\ln|y|)'_y \cdot y'_x = \frac{1}{y}\sigma'(x) = \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}.$$

§ 190. Παράγωγος τῆς $y = \alpha^x$. Σύμφωνα μέ τούς §§ 178, 188 ἔχουμε

(190.1) $\quad (\alpha^x)'_x = \dfrac{1}{(\lambda o\gamma_\alpha y)'_y} = \dfrac{1}{\frac{1}{y}\lambda o\gamma_\alpha e} = \dfrac{y}{\lambda o\gamma_\alpha e} = \dfrac{\alpha^x}{\lambda o\gamma_\alpha e} = \alpha^x \ln\alpha$.

Στήν εἰδική περίπτωση $\alpha = e$ ἔχουμε ἁπλούστερα

(190.2) $\quad (e^x)'_{\theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ x} = e^x \qquad$ γιά $\quad -\infty < x < +\infty$.

§ 191. Μερική παράγωγος. Ἔστω $\sigma(x,y)$ μιά συνάρτηση δυό ἀνεξάρτητων μεταβλητῶν καί y_o μιά τιμή τῆς μεταβλητῆς y. Ἄν ἡ συνάρτηση $\sigma(x\ y_o)$ τῆς x ἔχει πατάγωγο στή θεση x_o, τότε ἡ παράγωγος αὐτή λέγεται μερική παράγωγος τῆς $\sigma(x,y)$ ὡς πρός x στή θέση (x_o,y_o) καί σημειώνεται μέ τό $\sigma'_x(x_o,y_o)$.

Ἔστω x_o μιά τιμή τῆς μεταβλητῆς x. Ἄν ἡ συνάρτηση $\sigma(x_o,y)$ τῆς y ἔχει παράγωγο στή θέση y_o, τότε ἡ παράγωγος αὐτή λέγεται μερική παράγωγος τῆς $\sigma(x,y)$ ὡς πρός y στή θέση (x_0,y_0) καί σημειώνεται μέ τό σύμβολο $\sigma'_y(x_0,y_0)$.

Π.χ. ἄν $\sigma(x,y) = 4x^2-3xy-2y^2+5x-1$, τότε

$$\sigma'_x(-1,3) = \{\sigma(x,3)\}'_{x=-1} = (4x^2-3\cdot 3x - 2\cdot 9+5x-1)'_{x=-1} = -12$$

$$\sigma'_y(-1,3) = \{\sigma(-1,y)\}'_{y=3} = (4+3y-2y^2-5-1)'_{y=3} = -9 .$$

§ 192. <u>Παραγώγιση συναρτήσεως πού ἱκανοποιεῖ ἀλγεβρική ἐξίσωση</u>. Ἔστω $y = f(x)$ μιά συνάρτηση, μονοσήμαντη καί συνεχής σ'ἕνα διάστημα $\alpha < x < \beta$, ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ γιά ὅλες αὐτές τίς τιμές τῆς x (ἀπό ταυτότητα ὡς πρός x, ὅπως λέμε) μιάν ἀλγεβρική ἐξίσωση $\sigma(x,y) = 0$.

Μέ ἄλλα λόγια, ἔχουμε ἐξ ὑποθέσεως $\sigma(x,f(x)) = 0$ γιά κάθε x ἀπό τό διάστημα $\alpha < x < \beta$. Ἄς εἶναι τώρα x_0 μιά τιμή τῆς x, $y_0 = f(x_0)$ καί $\sigma'_y(x_0,y_0) \neq 0$. Ἀποδείχνεται τότε εὔκολα ὅτι ἡ $y = f(x)$ ἔχει πεπερασμένη παράγωγο στή θέση x_0 καί ὅτι

$$f'(x_0) = \frac{-\sigma'_x(x_0,y_0)}{\sigma'_y(x_0,y_0)} .$$

<u>Γεωμετρική ἐφαρμογή</u>. Ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἀλγεβρικῆς καμπύλης $\sigma(x,y) = 0$ στό σημεῖο $M_0(x_0,y_0)$ τοῦ μονοσήμαντου κλάδου της $y = f(x)$, $\alpha < x < \beta$, ἔχει ἐξίσωση

$$\sigma'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + \sigma'_y(x_0,y_0)(y-y_0) = 0 .$$

Σέ ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων μέ $|\bar{i}| = |\bar{j}|$ ἡ κάθετη στήν ἐφαπτόμενη διά τοῦ σημείου ἐπαφῆς $M_0(x_0,y_0)$ εἶναι παράλληλη πρός τό διάνυσμα $(\sigma'_x(x_0,y_0)\ ,\ \sigma'_y(x_0,y_0))$ καί ἔχει ἐξίσωση

$$\frac{x-x_0}{\sigma'_x(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{\sigma'_y(x_0,y_0)} .$$

Ἐξ ὁρισμοῦ ἡ κάθετη αὐτή εἶναι ἡ κάθετη τῆς καμπύλης $\sigma(x,y) = 0$ στό σημεῖο της M_0.

§ 193. <u>Παραγώγιση συναρτησιακῆς σχέσεως πού δίνεται παραμετρικά</u>. Ἄς εἶναι $x = \sigma(t)$, $y = \varphi(t)$, ἡ δέ $x = \sigma(t)$ αὔξουσα (ἤ φθίνουσα) μέ στενή σημασία καί συνεχής σ'ἕνα διάστημα $\alpha < t < \beta$. Τότε ἡ $x = \sigma(t)$ εἶναι μονοσήμαντα ἀντιστρέψιμη· ἄς εἶναι $t = s(x)$ ἡ ἀντίστροφη, γιά $A < x < B$. Εἰσάγοντάς την μέσα στή $y = \varphi(t)$ καθιστοῦμε τήν y σύνθετη συνάρτηση τῆς x: $\quad y = \varphi(s(x)) \quad$ γιά $\quad A < x < B$.

Ἔτσι διά τῶν $x = \sigma(t)$, $y = \varphi(t)$ ὁρίζεται μέσω τῆς παραμέτρου t μιά συναρτησιακή σχέση μεταξύ y καί x.

Ἄς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι οἱ $\sigma(t)$ καί $\varphi(t)$ ἔχουν πεπερασμένες παραγώγους στή θέση t_0, ὅτι $\sigma'(t_0) \neq 0$ καί ἄς τεθῆ $x_0 = \sigma(t_0)$. Θά εἶναι τότε

$$(193.1) \qquad y'_x(x_0) = y'_t(t_0)\, t'_x(x_0) = \varphi'(t_0)\,\frac{1}{\sigma'(t_0)} = \frac{\varphi'(t_0)}{\sigma'(t_0)} \; .$$

<u>Γεωμετρική ἐφαρμογή</u>. Ἄς εἶναι $x = \sigma(t)$, $y = \varphi(t)$ γιά $\alpha < t < \beta$ οἱ παραμετρικές ἐξισώσεις μιᾶς γραμμῆς μέσα στό ἐπίπεδο. Ὑποθέτουμε ὅτι σέ κάθε θέση t ἀπό τό διάστημα $\alpha < t < \beta$ ὑπάρχουν πεπερασμένες παράγωγοι $\sigma'(t)$ καί $\varphi'(t)$ καί ὅτι $\qquad |\sigma'(t)| + |\varphi'(t)| \neq 0$.

Τότε σ'ἕνα σημεῖο $M_0(t_0)$ τῆς γραμμῆς, μέ συντεταγμένες $(x_0 = \sigma(t_0)\; , \; y_0 = \varphi(t_0))$, ἡ γραμμή ἔχει ἐφαπτομένη τήν εὐθεία

$$(193.2) \qquad \frac{X - \sigma(t_0)}{\sigma'(t_0)} = \frac{Y - \varphi(t_0)}{\varphi'(t_0)}$$

$\left(\text{μέ ἄλλη γραφή: } \dfrac{X - x_0}{x'(t_0)} = \dfrac{Y - y_0}{y'(t_0)}\right)$.

Τό διάνυσμα $(\sigma'(t_0), \varphi'(t_0))$ εἶναι παράλληλο πρός τήν ἐφαπτομένη στό σημεῖο $M_0(\sigma(t_0), \varphi(t_0))$. Ἡ κάθετη τῆς γραμμῆς στό σημεῖο αὐτό, μέ τήν προϋπόθεση ὀρθογωνίου συστήματος συντεταγμένων ὅπου $|\bar{i}| = |\bar{j}|$, ἔχει ἐξίσωση

$$(193.3) \qquad \sigma'(t_0)\,(X - x_0) + \varphi'(t_0)(Y - y_0) = 0 \; .$$

<u>Κινηματική ἐφαρμογή</u>. Ἄν ἑρμηνεύσουμε τήν παράμετρο t ὡς χρόνο, οἱ ἐξισώσεις $x = \sigma(t)$, $y = \varphi(t)$ παριστάνουν τήν

κίνηση ενός σημείου μέσα στό επίπεδο. Τό διάνυσμα ($x' = \sigma'(t)$, $y' = \varphi'(t)$) λέγεται διανυσματική ταχύτης (ή, απλῶς, ταχύτης) τοῦ κινητοῦ σημείου $M(t)$ στή χρονική στιγμή t. Τό διάνυσμα αὐτό

$$\bar{\upsilon}(t) = x'_t(t)\bar{i} + y'_t(t)\bar{j}$$

εἶναι ἐξ ὁ ρ ι σ μ ο ῦ ἡ παράγωγος τοῦ διανύσματος

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j}\ ,$$

συναρτήσεως τοῦ t, ὡς πρός τήν ανεξάρτητη μεταβλητή t στή θέση t.

§ 194. Παράγωγοι ἀνώτερης τάξεως. Ἄν ἡ συνάρτηση $y = \sigma(x)$ ἔχη πεπερασμένη παράγωγο $\sigma'(x)$ σέ κάθε θέση x ἀπό ἕνα διάστημα, τότε ἡ $\sigma'(x)$ εἶναι μονοσήμαντη συνάρτηση στό διάστημα $\alpha < x < \beta$ καί μπορεῖ νά τεθῆ τό ερώτημα ἄν ἔχη παράγωγο σέ μιά θέση x ἀπ' αὐτό, δηλαδή ἄν ὑπάρχη τό ὅριο

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sigma'(x_0+\Delta x) - \sigma'(x_0)}{\Delta x} = l = \text{ἀριθμός ἤ } +\infty \text{ ἤ } -\infty .$$

Σέ περίπτωση ὑπάρξεως, τό ὅριο αὐτό λέγεται δεύτερη παράγωγος τῆς $\sigma(x)$ στή θέση x_0 καί σημειώνεται μ' ἕνα ἀπό τά σύμβολα: $\sigma''(x_0)$, $y''(x_0)$, $(D^{(2)}\sigma(x))_{x=x_0}$ κτλ.

Μέ μαθηματική ἐπαγωγή ὁρίζεται ἡ παράγωγος τάξεως $\nu+1$ στή θέση x_0 ὡς ἑξῆς: Ὑποθέτουμε ὅτι ἔχει κιόλας ὁριστῆ ἡ νιοστή παράγωγος σέ μιά θέση.

Ἄν τώρα ἡ συνάρτηση $\sigma(x)$ ἔχη πεπερασμένη νιοστή παράγωγο $\sigma^{(\nu)}(x)$ σέ κάθε θέση x ἀπό ἕνα διάστημα $\alpha < x < \beta$ γύρω στό x_0, τότε μποροῦμε νά ερευνήσουμε μήπως ὑπάρχη τό

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sigma^{(\nu)}(x_0+\Delta x) - \sigma^{(\nu)}(x_0)}{\Delta x} = l = \text{ἀριθμός ἤ } +\infty \text{ ἤ } -\infty .$$

Σέ περίπτωση ὑπάρξεως, καλοῦμε τό l παράγωγο τάξεως $\nu+1$ τῆς $\sigma(x)$ στή θέση x_0 καί γράφουμε

$$\sigma^{(\nu+1)}(x_0) = l \qquad (D^{(\nu+1)}\sigma(x))_{x=x_0} = l \qquad \text{κτλ.}$$

<u>Παράδείγματα.</u> 1) Ένα άκέραιο πολυώνυμο $\pi(x) = \alpha_\mu x^\mu + \ldots + \alpha_0$ βαθμοῦ $\mu \geqq 1, (\alpha_\mu \neq 0)$, ἔχει πεπερασμένη παράγωγο $\pi^{(\nu)}(x)$ κάθε τάξεως ν σέ όποιαδήποτε θέση x ἀπό τό διάστημα $-\infty < x < +\infty$. Ἡ $\pi^{(\nu)}(x)$ εἶναι ἀκέραιο πολυώνυμο βαθμοῦ $\mu-\nu$, γιά $1 \leqq \nu \leqq \mu$. Εἰδικά εἶναι $\pi^{(\mu)}(x) = \mu!\ \alpha_\mu$ = σταθερά $\neq 0$. Ἄρα, γιά $\nu > \mu$, $\pi^{(\nu)}(x) \equiv 0$.

2. Μιά ρητή συνάρτηση

$$R(x) = \frac{\beta_\lambda x^\lambda + \ldots + \beta_0}{\alpha_\mu x^\mu + \ldots + \alpha_0}$$

ὅπου $\alpha_\mu \neq 0$ καί $\mu \geqq 1$, ἔχει πεπερασμένη παράγωγο $R^{(\nu)}(x)$ σέ κάθε θέση x τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της (δηλαδή σέ κάθε θέση x πού δέν μηδενίζει τόν παρονομαστή). Ἡ $R^{(\nu)}(x)$ εἶναι ἐπίσης ρητή συνάρτηση.

3. $D^{(\nu)} e^x = e^x$ γιά $-\infty < x < +\infty$. $D^{(\nu)} \alpha^x = \alpha^x (\ln\alpha)^\nu$.

4. Εἶναι $D^{(\nu)} \ln|x| = D^{(\nu-1)} \dfrac{1}{x} = D^{(\nu-1)} x^{-1}$.

Ἄρα $D^{(2)} \ln|x| = -x^{-2}$, $D^{(3)} \ln|x| = 2!\ x^{-3}$, $D^{(4)} \ln|x| = -3!\,x^{-4}$, γενικά $\quad D^{(\nu)} \ln|x| = (-1)^{\nu-1}(\nu-1)!\ x^{-\nu}$.

5. $\quad (\sigma\upsilon\nu x)'' = -\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu(x + \frac{2\pi}{2})$,

$(\sigma\upsilon\nu x)''' = \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$, $(\sigma\upsilon\nu x)^{IV} = \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\ (x + \frac{4\pi}{2})$

Γενικά $\quad D^{(\nu)} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu(x + \frac{\nu\pi}{2})$.

6. $(\eta\mu x)'' = -\eta\mu x = \eta\mu(x + \frac{2\pi}{2})$, $(\eta\mu x)''' = -\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu(x + \frac{3\pi}{2})$

$$(\eta\mu x)^{IV} = \eta\mu x = \eta\mu(x + \frac{4\pi}{2}).$$

Γενικά $\quad D^{(\nu)} \eta\mu x = \eta\mu(x + \frac{\nu\pi}{2})$.

7. $\{\sigma(x)\cdot\varphi(x)\}'' = \sigma''(x)\cdot\varphi(x) + 2\sigma'(x)\cdot\varphi'(x) + \sigma(x)\varphi''(x)$, φυσικά μέ τήν προϋπόθεση ὅτι οἱ δεύτερες παράγωγοι ὑπάρχουν.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

§ 195. Μιά συνάρτηση $y = \sigma(x)$ μονοσήμαντα ὁρισμένη σ' ἕνα διάστημα $\alpha < x < \beta$ λέγεται διαφορίσιμη στή θέση x_0 ἀπό αὐτό, ἄν $\sigma(x_0+\Delta x) - \sigma(x_0) = A\cdot\Delta x + \eta(\Delta x)\cdot\Delta x$, ὅπου A ἕνας ἀριθμός πού δέν ἐξαρτιέται ἀπό τό Δx καί $\eta(\Delta x)$ μιά συνάρτηση τοῦ Δx μέ $\lim_{\Delta x\to 0}\eta(\Delta x) = 0$.

Ἀπ' αὐτά ἕπεται ὅτι τότε $\sigma'(x_0) = A$, ἐπομένως ἡ διαφορίσιμη συνάρτηση $\sigma(x)$ ἔχει πεπερασμένη παράγωγο στή θέση x_0. Ἀληθεύει καί τό ἀντίστροφο.

Ἄν ἡ $\sigma(x)$ ἔχη πεπερασμένη παράγωγο στή θέση x_0, τότε, ὅπως ξέρουμε, $\sigma(x_0+\Delta x) - \sigma(x_0) = \sigma'(x_0)\Delta x + \eta(\Delta x)\cdot\Delta x$, ὅπου $\eta(\Delta x)$ ἔχει ὅριο τό 0 γιά $\Delta x \to 0$, συνεπῶς ἡ $\sigma(x)$ εἶναι διαφορίσιμη στή θέση x_0.

Τό γινόμενο $\sigma'(x_0)\,\Delta x$ λέγεται διαφορικό (1ης τάξεως) τῆς $\sigma(x)$ στή θέση x_0 καί σημειώνεται μέ $(d\,\sigma(x))_{x=x_0} = (dy)_{x=x_0}$.

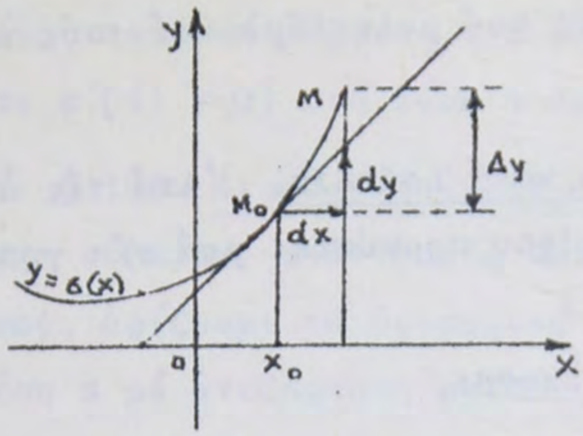
Ἄν εἰδικά λάβουμε $\sigma(x) = x$, τότε $(d\,\sigma(x))_{\theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ x} = 1\cdot\Delta x$, γι' αὐτό γράφουμε $dx = \Delta x$ καί λέμε ὅτι τό διαφορικό τῆς x ὡς πρός x ἰσοῦται μέ τήν αὔξησή της.

Ἄν $y = \sigma(x) = c_1 x + c_2$ = γραμμική συνάρτηση τοῦ x, τότε $(dy)_{\theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ x} = c_1\cdot\Delta x$. Ἐξ ἄλλου εἶναι $\Delta y = c_1\cdot\Delta x$. Ἄρα καί σ' αὐτήν τήν περίπτωση $dy = \Delta y$. Στίς ἄλλες περιπτώσεις θά εἶναι ἡ Δy ἐν γένει διάφορη ἀπό τό dy (γιά τό ἴδιο Δx ἐννοεῖται) , θά ἔχουμε ὅμως

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\eta(\Delta x) = 0 .$$

Ἐπομένως γιά ἀπολύτως ἀρκετά μικρές αὐξήσεις Δx μποροῦμε νά πάρουμε $\Delta y \approx dy = \sigma'(x_0)\,\Delta x$ μέ σφάλμα $|\Delta y - dy|$ ὅσο θέλουμε μικρό ὡς πρός $|\Delta x|$.

Ἡ γεωμετρική ἑρμηνεία τοῦ dy γίνεται φανερή ἀπό τό διπλανό σχῆμα: τό dy εἶναι ἡ "αὔξηση" τῆς τεταγμένης, ὅταν ἀπό



τό σημεῖο μέ τετμημένη x_o μεταβοῦμε στό σημεῖο μέ τετμημένη $x_o+\Delta x = x_o+dx$ κινούμενοι πάνω στήν ἐφαπτομένη τῆς γραμμῆς $y = \sigma(x)$ στό σημεῖο της $M_o(x_o,\sigma(x_o))$, ἐνῶ Δy εἶναι ἡ "αὔξηση" τῆς τεταγμένης ὅταν ἀπό τό σημεῖο $M(x_o,\sigma(x_o))$ μεταβοῦμε στό $M(x_o+\Delta x,\sigma(x_o+\Delta x))$ κινούμενοι πάνω στή γραμμή $y = \sigma(x)$. Μέ ἄλλα λόγια: "ἄν μεταφέρουμε" τούς ἄξονες συντεταγμένων κατά τό διάνυσμα $\overline{OM_o}$ (ὁπότε νέα ἀρχή γίνεται τό σημεῖο M_o τῆς γραμμῆς), τά μέν σημεῖα τῆς γραμμῆς $y = \sigma(x)$ θά ἔχουν νέες συντεταγμένες τίς $(\Delta x = dx\ ,\ \sigma(x_o+\Delta x) - \sigma(x_o) = \Delta y)$ τά δέ σημεῖα τῆς ἐφαπτομένης τῆς γραμμῆς στό σημεῖο τῆς M_o ἀποχτοῦν τίς νέες συντεταγμένες $(\Delta x = dx\ ,\ dy = \sigma'(x_o)dx)$· μέσα σ'αὐτές τίς ἐκφράσεις τό x_o ἐξυπακούεται φυσικά σταθερό καί τό $\Delta x = dx$ ἀνεξάρτητη μεταβλητή.

Τό διαφορικό $(dy)_{x=x_o} = \sigma'(x_o)dx$ ἐξαρτιέται ἀπό δυό ἀνεξάρτητες μεταβλητές: ἀπό τή θέση x_o μέσα στό διάστημα ὁρισμοῦ $\alpha < x < \beta$ τῆς $\sigma(x)$ καί ἀπό τήν αὔξηση $\Delta x = dx$ τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς x.

Μέσα στήν ἔκφραση τῆς Δy οἱ τιμές τῆς Δx δέν περιορίζονται παρά μόνο ἀπό τή συνθήκη, τό $x_o+\Delta x$ νά ἀνήκη στό διάστημα ὁρισμοῦ τῆς $\sigma(x)$, ἔτσι πού νά ἔχη νόημα τό $\sigma(x_o+\Delta x)$.

Μέσα στό $dy = \sigma'(x_o)\cdot\Delta x$ δέν χρειάζεται οὔτε αὐτός ὁ περιορισμός. Στίς πραχτικές ἐφαρμογές ὅμως τό Δx λαμβάνεται ἀπολύτως μικρότερο ἀπό ἕνα κατάλληλο ἄνω φράγμα: $|\Delta x| \leqq \delta$, ἔτσι πού νά εἶναι μέ ἐπαρκῆ προσέγγιση $\Delta y \approx dy$. ('Επαρκής προσέγγιση σημαίνει ἐδῶ συνήθως τοῦτο: τό ἀναλογικό σφάλμα

$\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}$ εἶναι ἀπολύτως < ἀπό μιάν ποσότητα πού καθορίζεται σύμφωνα μέ τή φύση τοῦ ζητήματος πού μελετοῦμε καί τούς σκοπού πού ἐπιδιώκουμε).

§ 196. Γραφή τῆς παραγώγου κατά Leibniz. Ἀπό τίς ἀναπτύξεις τοῦ προηγουμένου παραγράφου προκύπτει μιά νέα γραφή τῆς παραγώγου $\sigma'(x_0)$.

Ἐξυπακούοντας $\Delta x = dx \neq 0$ ἔχουμε

$$\sigma'(x_0) = \frac{\sigma'(x_0)dx}{dx} = \frac{(dy)_{x=x_0}}{dx} = \text{πηλίκο διαφορικῶν} \ .$$

Γι'αὐτό γράφουμε, σέ γενική θέση x ἀπό τό διάστημα ὁρισμοῦ, $\sigma'(x) = \frac{dy}{dx}$ καί σέ εἰδική θέση x_0, $\sigma'(x_0) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}$. Ἀπό τή γραφή αὐτή προέρχεται καί τό σύμβολο $\frac{d}{dx}$ γιά τήν πράξη τῆς παραγωγίσεως. Π.χ.

$$\frac{d}{dx}\,\text{ημ}x = D\text{ημ}x = \text{συν}x \qquad , \quad \frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x} \ .$$

§ 197. Ἀλλαγή ὁρίσματος. Ἀπό τόν κανόνα παραγωγίσεως σύνθετης συνάρτησης $y = \sigma(f(t))$ (βλ. § 167) ἕπεται ὅτι θεωρώντας τό t ἀνεξάρτητη μεταβλητή ἔχουμε (στή θέση t_0 καί μέ $x_0 = f(t_0)$) dy ὡς πρός $t = \sigma'(x_0)\, f'(t_0)dt$. Ἀλλά ἐξ ὁρισμοῦ $f'(t_0)dt = dx$, ἄρα (dy ὡς πρός t) = $\sigma'(x_0)$ (dx ὡς πρός t).

Μέ ἄλλα λόγια τό διαφορικό 1ης τάξεως μιᾶς συναρτήσεως $y = \sigma(x)$ διατηρεῖ τή μορφή του $dy = \sigma'(x_0)dx$, ὅταν ἀλλάξουμε ὅρισμα, θεωρώντας τό x ὡς συνάρτηση μιᾶς νέας ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς t, καί πάρουμε τό διαφορικό dy ὡς πρός t, ἀρκεῖ νά θεωρήσουμε καί τό dx ὡς διαφορικό τῆς x ὡς πρός t. Ἑπομένως εἶναι $y'_x(x) = \frac{dy}{dx}$ εἴτε πάρουμε τά διαφορικά στό δεξιό μέλος ὡς πρός ἀνεξάρτητη μεταβλητή τή x εἴτε τά πάρουμε ὡς πρός μιάν ἄλλη ἀνεξάρτητη μεταβλητή t τῆς ὁποίας συνάρτηση θεωροῦμε τώρα τή x καί κατά συνέπεια τήν $y = \sigma(x)$· ἐξυπακούεται μόνο, κατά τή μόρφωση τοῦ πηλίκου $\frac{dy}{dx}$, ὅτι $dx \neq 0$ (δηλαδή ὅτι $x'(t) \neq 0$) στή θέση t πού θεωροῦμε. (Πρβλ. § 193).

§ 198. Διαφορικά ἀνώτερης τάξεως. Ἀνάλογα μέ τόν ὁρισμό $dy = \sigma'(x)dx$ στόν ὁποῖο καταλήξαμε γιά τό διαφορικό 1ης τάξεως, ὁρίζουμε τό διαφορικό 2ης τάξεως d^2y τῆς $y = \sigma(x)$ στή θέση x μέ ἀνεξάρτητη μεταβλητή τή x, ὡς ἑξῆς:

$$d^2y = d^2\sigma(x) = \sigma''(x)\cdot(\Delta x)^2 = \sigma''(x)\cdot(dx)^2 .$$

Τό σύμβολο d^2y διαβάζεται: ντέ δύο ψί.

Τά $(\Delta x)^2$ καί $(dx)^2$, πού εἶναι τά τετράγωνα τῆς μεταβλητῆς $\Delta x = dx$, γράφονται συνήθως χωρίς τίς παρενθέσεις: Δx^2 καί dx^2. Ἔτσι ἔχουμε

$$d^2y = d^2\sigma(x) = \sigma''(x)\Delta x^2 = \sigma''(x)\cdot dx^2 .$$

Ἀπ' ἐδῶ προκύπτει ἕνας νέος τρόπος γραφῆς τῆς 2ης παραγώγου $\sigma''(x)$:

$$y''(x) = \sigma''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} .$$

Π.χ. 1. $d^2(\alpha x+\beta) = 0\cdot dx^2 = 0$, (α,β σταθερές).

2. $d^2 \eta\mu x = -\eta\mu x dx^2$ σέ γενική θέση x καί εἰδικά

γιά $\quad x = \frac{\pi}{4}$, $dx = \frac{1}{100}$, $d\ \eta\mu x = \frac{-1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{10^4}$.

Ἡ μορφή τοῦ διαφορικοῦ 2ης τάξεως δ έ ν παραμένει ἀναλλοίωτη ὅταν ἀλλάξουμε ἀνεξάρτητη μεταβλητή. Πράγματι ἄν μέσα στή $y = \sigma(x)$ θεωρήσουμε τό x ὡς συνάρτηση $x = f(t)$ τοῦ t, θά ἔχουμε

$$\{\sigma(f(t))\}''_t = \{\sigma'(x)\cdot f'(t)\}'_t = \sigma''(x)f'^2(t) + \sigma'(x)f''(t)$$

ἄρα

$$d^2\sigma(f(t)) = \{\sigma(f(t))\}''_t\cdot dt^2 = \sigma''(x)\cdot f'^2(t)dt^2 + \sigma'(x)f''(t)dt^2,$$

δηλαδή

$$d^2y = \sigma''(x)dx^2 + \sigma'(x)\cdot d^2x$$

ὅπου $x = f(t)$ καί ὅλα τά διαφορικά νοοῦνται ὡς πρός ἀνεξάρτητη μεταβλητή τήν t.

Ἀνάλογα πρός τά παραπάνω ὁρίζονται καί σημειώνονται τά διαφορικά τρίτης ἤ ἀνώτερης τάξεως. Π.χ.

$$(d^3x^5)_{\theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ x} = 5\cdot 4\cdot 3\cdot x^2\cdot(dx)^3 .$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

196. Δεῖξτε ὅτι ἡ $y(x) = x^5+2x^3+4x-3$ εἶναι αὔξουσα(μέ στενή σημασία) στό διάστημα $-\infty < x < +\infty$ καί ὅτι ἡ $z(x) = 3x^4-x^3+2x^2-5x+7$ εἶναι φθίνουσα (μέ στενή σημασία) στό διάστημα $-\infty < x \leqq 0$ - Δεῖξτε ὅτι ἄν ἡ $\sigma(x)$ εἶναι αὔξουσα στό διάστημα $\alpha < x < \beta$, ἡ $\varphi(x) = \sigma(-x)$ εἶναι φθίνουσα στό διάστημα $-\beta < x < -\alpha$. Δῶστε ἕνα παράδειγμα.

197. Ὑπολογίστε τά ὅρια

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^4+6x^3+9x^2+2x}{x^3+2x^2+4x+8} , \quad \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\eta\mu(x-3)} ,$$

$$\lim_{x\to 2\pi}\frac{5\eta\mu^2x}{(2\pi-x)^2} , \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2x} , \quad \lim_{x\to 2}\sqrt[3]{4-\frac{1}{(x-2)^2}} .$$

198. Μέ βάση τό θεώρημα τοῦ § 172 δεῖξτε ὅτι ὑπάρχουν τά ὅριά

$$\lim_{x\to 0^+}Ak\left(1-\sqrt{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}}\right) , \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}Ak\left(1-\sqrt{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}}\right) .$$

Ὑπολογίστε τα κατόπιν.

199.* Μέ βάση τό θεώρημα τοῦ § 173 δεῖξτε ὅτι ὑπάρχει καί εἶναι ἀριθμός τό $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\varphi(\nu)$, ὅπου

$$\varphi(\nu) = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}$$

μέ ν ἐπάλληλα ριζικά. Ὑπολογίστε τό ὅριο χρησιμοποιώντας τή σχέση πού συνδέει τό $\varphi(\nu+1)$ μέ τό $\varphi(\nu)$ καί τήν ἀπ'αὐτήν συναγόμενην ἐξίσωση γιά τό ὅριο. Καθ'ὅμοιο τρόπο δεῖξτε ὅτι ὑπάρχει καί εἶναι ἀριθμός τό $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\sigma(\nu)$, ὅταν

$$\sigma(\nu) = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ \ldots\ \left(1-\frac{1}{\nu^2}\right)$$

γιά $\nu = 2, 3, 4,\ldots$

Ὑπολογίστε τό ὅριο μετασχηματίζοντας τήν παράσταση σ(ν).

200. Ὑπολογίστε τό $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\left(\frac{1}{\nu^2}+\frac{2}{\nu^2}+\ldots+\frac{\nu}{\nu^2}\right)$. Παρατηροῦμε ὅτι ἐνῶ κάθε προσθετέος τοῦ ἀθροίσματος ἔχει ὅριο τό 0 γιά ν τεῖνον στό $+\infty$ (εἶναι δηλ. ἀπειροστή συνάρτηση τοῦ ἀπειροστοῦ $\frac{1}{\nu}$), τό ἄθροισμα ἔχει ὅριο $\neq 0$. Πῶς μπορεῖ νά συμβαίνη αὐτό;

201. Δεῖξτε ὅτι ἡ $y(x) = x^5+x^3+2x+1$ εἶναι μονοσήμαντα ἀντιστρέψιμη στό διάστημα $-\infty < x < +\infty$. Ποιό εἶναι τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς ἀντίστροφης συναρτήσεως; – Δεῖξτε ὅτι ἡ $z(x) = x^4-2x^3+x^2+5$ εἶναι μονοσήμαντα ἀντιστρέψιμη στό διάστημα $-\infty < x \leqq 0$. Ποιό εἶναι τό πεδίο ὁρισμοῦ αὐτῆς τῆς ἀντίστροφης συναρτήσεως;

202. Παραγωγίστε σέ γενική θέση x ἀπό τό πεδίο ὁρισμοῦ των τίς συναρτήσεις:

$$5x^{-\frac{2}{3}} + 2^{\frac{4}{3}} \quad , \quad \frac{6x^{\frac{1}{3}}}{4x^{\frac{2}{3}}+1} \quad , \quad \sqrt[5]{x^4-x^2+2}$$

$$\sqrt[7]{\eta\mu(x^2)} \quad , \quad \sqrt[4]{\frac{2x-5}{3x+4}} \quad , \quad x\,\tau o\xi_o\sigma\upsilon\nu x \quad ,$$

$$+\sqrt{1-x^2}\cdot\tau o\xi_o\eta\mu x \quad , \quad \tau o\xi_o\varepsilon\varphi\,\frac{x+2}{5-x} \quad , \quad \tau o\xi_o\sigma\varphi(\sqrt[3]{x+2}) \quad ,$$

$$\frac{1}{2}\,\tau o\xi_o\varepsilon\varphi\,\frac{2x}{1-x^2} \quad , \quad \sqrt[3]{\tau o\xi_o\varepsilon\varphi(x+1)} \quad , \quad \sigma\upsilon\nu(x+1)^{\frac{2}{3}} \quad .$$

203. Ὑπολογίστε τίς ἀκόλουθες παραγώγους:

$$\left(\tau o\xi_o\eta\mu\,\frac{1}{x}\right)'_{x=2} \quad , \quad (x\,\tau o\xi_o\varepsilon\varphi x)'_{x=\sqrt{3}} \quad \left(\sqrt[3]{x}\cdot\eta\mu\,\frac{1}{x}\right)'_{x=\frac{\pi}{2}} \, ,$$

$$(\tau o\xi_o\sigma\upsilon\nu x)'_{x=0} \quad .$$

204.* Δεῖξτε ὅτι ἄν $\alpha = 1+\theta > 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\alpha^x}{x^2} = +\infty$. (Θά βασιστῆτε στήν ἐπίσης ἀποδεικτέα σχέση

$$\alpha^x \geqq (1+\theta)^{\nu_x} > \binom{\nu_x}{3}\cdot\theta^3 \quad ,$$

ὅπου $\nu_x = Ak(x)$ γιά $x \geqq 3$).

.. Γενικεῦστε παίρνοντας x^μ στόν παρανομαστή ἀντί x^2, ὅπου μ αὐθαίρετα ὁρισμένος φυσικός ἀριθμός.

Ἀπό τή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\alpha^x}{x^\mu} = +\infty$ συμπεράνατε ὅτι $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x|x|^\mu = 0$.

205. Ἀπό τά ἀποδειγμένα στή 204* συμπεράνατε τ'ἀκόλουθα:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-\frac{1}{\mu}}\cdot \ln x = 0 \qquad (\text{ἐνῶ } \lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty)$$
$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\mu}}\cdot \ln x = 0 \qquad (\text{ἐνῶ } \lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty)\ .$$

206. Ὑπολογίστε κατά προσέγγιση τούς φυσικούς λογάριθμους τῶν ἀριθμῶν $\frac{1}{28}$, $\frac{1}{7}$, 8, 15, 57 χρησιμοποιώντας τούς ἀντίστοιχους δεκαδικούς καί τόν πίνκα ἀκέραιων πολλαπλασίων τοῦ $\frac{1}{M} = \ln 10$ (βλ. π.χ. πίνακες Dupuis, σελ. 32).

207. Καλοῦνται ὑπερβολικές συναρτήσεις οἱ ἑξῆς: ὑπερβολικό ἡμίτονο τοῦ $x = \mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, ὑπερβολικό συνημίτονο τοῦ $x = \mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, ὑπερβολική ἐφαπτομένη τοῦ $x = \mathrm{th}x = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$ ὑπερβολική συνεφαπτομένη τοῦ $x = \mathrm{cth}x = \frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}$.

Τό πεδίο ὁρισμοῦ τῶν sh$x$, ch$x$, th$x$ εἶναι τό διάστημα $-\infty < x < +\infty$, γιά τήν cth$x$ εἶναι τό $-\infty < x < +\infty$ μέ ἐξαίρεση τοῦ ἀριθμοῦ $x = 0$ πού μηδενίζει τόν παρονομαστή sh$x$. Δεῖξτε ὅτι ἡ sh$x$ εἶναι αὔξουσα (μέ στενή σημασία) (γιατί εἶναι ἀλγεβρικό ἄθροισμα δυό αὐξουσῶν συναρτήσεων), ὅτι ch$x \geqq 1$ γιά κάθε x. Ἐπίσης ἀποδεῖξτε τίς ἑξῆς σχέσεις:

$$\mathrm{ch}^2x - \mathrm{sh}^2x = 1 \ , \quad \mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}x\cdot\mathrm{ch}y + \mathrm{sh}x\cdot\mathrm{sh}y$$
$$\mathrm{ch}2x = \mathrm{ch}^2x + \mathrm{sh}^2x \ , \quad \mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}x\cdot\mathrm{ch}y + \mathrm{ch}x\cdot\mathrm{sh}y$$
$$\mathrm{sh}2x = 2\mathrm{sh}x\cdot\mathrm{ch}x\ .$$

Τέλος δεῖξτε ὅτι ἡ ch$x$ εἶναι ἄρτια, οἱ sh$x$, th$x$, cth$x$ περιττές συναρτήσεις.

208. Ὑπολογίστε τίς ἀκόλουθες παραγώγους:

$$(\lambda o\gamma_{10}x)'_{x=3}\ ,\quad (\lambda o\gamma_5 x)'_{x=\frac{1}{6}}\ ,\quad (\lambda o\gamma_{0,5}x)'_{x=\frac{1}{3}}$$
$$(\ln x)'_{x=10}\ ,\quad (2^x)'_{x=10}\ ,\quad (10^x)'_{x=1}\ .$$

209. Παραγωγίστε σέ γενική θέση x ἀπό τό πεδίο ὁρισμοῦ των τίς ἀκόλουθες συναρτήσεις:

$$e^{-x},\ e^{-x^2},\ xe^x\ ,\ x^2\cdot e^{-x}\ ,\ e^{-x}\sigma\upsilon\nu(2x+3)\ ,\ e^{-\alpha x}\eta\mu(\alpha_1 x+\beta_1)$$

ὅπου α, α_1 , β_1 σταθερές

$$x^\alpha\ ,\quad \ln\left|\frac{\alpha+x}{\alpha-x}\right|$$

ὅπου α σταθερά,

$$\ln|\eta\mu x| \quad , \quad \ln|\varepsilon\varphi x| \quad , \quad \ln\sqrt{x^2+1} \quad , \quad \ln(x+\sqrt{x^2+1}) \quad ,$$

$$\ln|x-\sqrt{x^2-1}| \quad \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad , \quad e^{\eta\mu x} \quad , \quad \alpha^{\sigma\upsilon\nu x} \quad ,$$

ὅπου α σταθερά > 0.

210. Βρῆτε μέ λογαριθμική παραγώγιση τίς παραγώγους τῶν ἑξῆς συναρτήσεων σέ γενική θέση x ἀπό τό πεδίο ὁρισμοῦ των:

$$y(x) = (x^2+x+1)^{\eta\mu x} \quad , \quad z(x) = (e^x+1)^x \quad , \quad u(x) = x^{\frac{1}{x}} .$$

Ὑπολογίστε εἰδικά τίς $y'(0)$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $z'(0)$, $z'(1)$, $u'(1)$.

211. Ὑπολογίστε σέ γενική θέση x τίς παραγώγους κάθε τάξεως τῶν shx , chx. Ὑπολογίστε τίς παραγώγους 1ης καί 2ης τάξεως τῶν thx , cthx Ὑπολογίστε τίς δεύτερες παραγώγους τῶν εφx, σφx

212. Ὑπολογίστε σέ γενική θέση x τίς παραγώγους 1ης καί 2ης τάξεως τῶν

$$\ln\left|\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| \quad , \quad \tau o\xi_{\circ}\varepsilon\varphi(\mathrm{sh}x) \quad , \quad \tau o\xi_{\circ}\varepsilon\varphi\,\frac{\alpha-x}{1+\alpha x}$$

ὅπου α σταθερά.

213. Βρῆτε τίς ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης καί τῆς κάθετης τῶν ἑξῆς ἀλγεβρικῶν γραμμῶν, ὅπου α θετική σταθερά:

τῆς $x^5+x^3+x+y^3+y+7=0$ στό σημεῖο της $M_0(1,-2)$,

τῆς $\left(\frac{2x-3}{-x+5}\right)^3+2y^3+20y-11=0$ στό σημεῖο της $M_1(4,-3)$,

τῆς $x^3+y^3-3\alpha xy=0$ (φύλλου τοῦ Descartes) στό σημεῖο της $\left(\frac{3\alpha}{2},\frac{3\alpha}{2}\right)$,

τῆς $(x^2+y^2)^2=\alpha^2(x^2-y^2)$ (λημνίσκου) στό σημεῖο της $(\alpha,0)$,

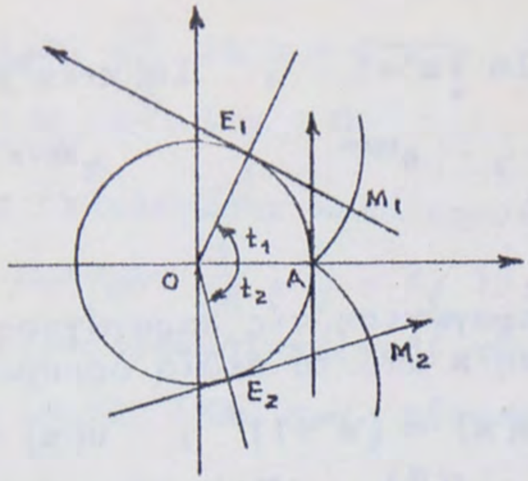
τῆς $y^2(\alpha-x)=x^3$ (κισσοειδοῦς) στό σημεῖο της $\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}\right)$.

214. Βρῆτε τίς ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης καί τῆς κάθετης

τῆς ἔλλειψης $\begin{cases} x = \alpha\sigma\upsilon\nu t \\ y = \beta\eta\mu t \end{cases}$

καί τῆς ὑπερβολῆς $\begin{cases} x = \pm\,\alpha\,\mathrm{ch}t \\ y = \beta\,\mathrm{sh}t \end{cases}$ (t παράμετρος).

215. Μέ βάση τίς ὑποδείξεις τοῦ κατωτέρω σχήματος βρῆτε



$(\widehat{M_1E_1}) = (AE_1) = \alpha t_1$
$(\widehat{M_2E_2}) = (\overrightarrow{AE_2}) = \alpha t_2$
α= ἀκτίνα τοῦ κύκλου

τίς παραμετρικές ἐξισώσεις μέ παράμετρο τή γωνία t, τῆς "ἐξελιγμένης τοῦ κύκλου", δηλαδή τῆς γραμμῆς τήν ὁποία γράφει ὁρισμένο σημεῖο εὐθείας κυλιόμενης (χωρίς ὀλίσθηση) πάνω σ'ἕναν κύκλο. Κατόπιν γράφτε τίς ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης καί τῆς κάθετης τῆς γραμμῆς σέ τυχόν σημεῖο της καί ειδικῶς γιά

$$t = \frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ -\frac{3\pi}{4}\ .$$

Ἐπαληθεῦστε ὅτι ἡ κάθετη διέρχεται ἑκάστοτε ἀπό τό σημεῖο ἐπαφῆς κύκλου καί κυλιόμενης εὐθείας.

216. Ὑπολογίστε τά ἀκόλουθα διαφορικά γιά $\Delta x = \dfrac{1}{100}\ ,\ -\dfrac{2}{10^3}$

$$\left(d(x^3-2x^2+5)\right)_{x=-1}\ ,\quad (dx^{-1})_{x=2}\ ,\quad (d\,\text{τοξ}_\circ\text{εφ}x)_{x=\sqrt{3}}\ ,$$
$$(d\ \log x)_{x=3}$$

Παραβάλατέ τα πρός τίς ἀντίστοιχες αὐξήσεις Δy μέ μόρφωση τῆς διαφορᾶς Δy−dy.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XIV

ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

§ 199. Ἄνω καί κάτω πέρας συναρτήσεως. Μιά συνάρτηση σ(x) λέγεται περιορισμένη πρός τά πάνω σ'ἕνα πεδίο Α μεταβολῆς τῆς **x**, ἄν $\sigma(x) \leqq$ κάποιου ἀριθμοῦ Φ_2 γιά ὅλα τά **x** ἀπό τό Α. Ὁ ἀριθμός Φ_2 λέγεται ἄνω φράγμα τῆς σ(x) στό πεδίο Α.

Π.χ. ἡ ημx εἶναι περιορισμένη πρός τά πάνω στό πεδίο $-\infty < x < +\infty$ · ἄνω φράγμα της εἶναι κάθε ἀριθμός $\Phi_2 \geqq 1$. Ἀντίθετα ἡ lnx δέν εἶναι περιορισμένη πρός τά πάνω στό πεδίο $0 < x < +\infty$ · (πρβλ. § 186).

Μιά συνάρτηση σ(x) λέγεται περιορισμένη πρός τά κάτω σ' ἕνα πεδίο μεταβολῆς τῆς x, ἄν $\sigma(x) \geqq$ κάποιου ἀριθμοῦ Φ_1 γιά ὅλα τά x ἀπό τό Α. Ὁ ἀριθμός Φ_1 λέγεται κάτω φράγμα τῆς $\sigma(x)$ στό πεδίο Α.

Π.χ. ἡ $\sigma(x) = \frac{1}{x}$ εἶναι περιορισμένη πρός τά κάτω στό πεδίο $0 < x < +\infty$· κάτω φράγμα της εἶναι κάθε ἀριθμός $\Phi_1 \leqq 0$. Ἡ $\ln x$ δέν εἶναι περιορισμένη πρός τά κάτω στό πεδίο $0 < x < +\infty$ (Πρβλ. § 186).

Ὅταν ἡ $\sigma(x)$ εἶναι περιορισμένη πρός τά πάνω στό πεδίο Α, τότε ὑπάρχει ἕνα ἐ λ ά χ ι σ τ ο ἄνω φράγμα φ_2, δηλ. ἕνας ἀριθμός φ_2 τέτοιος πού

1. $\sigma(x) \leqq \varphi_2$ γιά ὅλα τά x ἀπό τό πεδίο Α,

καί 2. ὅσο μικρός καί ἄν εἶναι ὁ θετικός ἀριθμός ε, ὑπάρχει ἕνα τουλάχιστο x_0 ἀπό τό Α τέτοιο ὥστε $\sigma(x_0) > \varphi_2 - \varepsilon$.

Ὁ ἀριθμός φ_2 λέγεται "ἄνω πέρας τῆς $\sigma(x)$ στό πεδίο Α". Π.χ. ἡ ημx ἔχει ἄνω πέρας τό 1 στό πεδίο $-\infty < x < +\infty$. Ὁμοίως ἡ συνάρτηση x–Ak(x) ἔχει ἄνω πέρας τό 1 στό πεδίο $-\infty < x < +\infty$.

Ὅταν ἡ $\sigma(x)$ εἶναι περιορισμένη πρός τά κάτω στό πεδίο Α, τότε ὑπάρχει ἕνα μ έ γ ι σ τ ο κάτω φράγμα φ_1· αὐτό λέγεται "κάτω πέρας τῆς $\sigma(x)$ στό πεδίο Α".

Προφανῶς ἄν φ_2 τό ἄνω πέρας τῆς $\sigma(x)$ στό πεδίο Α, τότε ἡ $\omega(x) = -\sigma(x)$ ἔχει στό πεδίο Α κάτω πέρας τό $-\varphi_2$, κτλ.

Οἱ παραπάνω ὁρισμοί τοῦ ἄνω καί κάτω πέρατος συμπληρώνονται ὡς ἑξῆς:

Ἄν ἡ $\sigma(x)$ δέν εἶναι περιορισμένη πρός τά πάνω στό πεδίο Α, τότε καλοῦμε τό $+\infty$ ἄνω πέρας τῆς $\sigma(x)$ στό πεδίο Α. Ἄν ἡ $\sigma(x)$ δέν εἶναι περιορισμένη πρός τά κάτω στό πεδίο Α, τότε καλοῦμε τό $-\infty$ κάτω πέρας τῆς $\sigma(x)$ στό πεδίο Α. Πάλιν ἰσχύει ἡ ἰδιότητα: ἄν ἡ $\sigma(x)$ ἔχῃ ἄνω πέρας τό $\varphi_2 = +\infty$, ἡ $\omega(x) = -\sigma(x)$ ἔχει κάτω πέρας τό $-\varphi_2 = -\infty$ κτλ.

Π.χ. ἡ $\ln x$ στό πεδίο $0 < x + \infty$ ἔχει κάτω πέρας τό $-\infty$ καί ἄνω πέρας τό $+\infty$.

§ 200. <u>Μέγιστο καί ἐλάχιστο συναρτήσεως</u>. Ἄς ἔχη ἡ $\sigma(x)$ ἄνω πέρας στό πεδίο A τό φ_2. Ἄν $\varphi_2 = +\infty$, τότε δέν ὑπάρχει καμμιά τιμή τοῦ x ἀπό τό πεδίο A τέτοια πού νά ἔχουμε $\sigma(x)= \varphi_2$, γιατί ἐξυπακούεται ὅτι τό $\sigma(x)$ εἶναι ἕνας (καθαυτό) ἀριθμός γιά κάθε x ἀπό τό A.

Ἄν φ_2 = ἀριθμός, τότε πάλι μπορεῖ νά μήν ὑπάρχει καμμιά θέση x ἀπό τό A τέτοια πού σ'αὐτήν νά εἶναι $\sigma(x) = \varphi_2$. Παράδειγμα ἡ $\sigma(x) = x - Ak(x)$, ἡ ὁποία δέν γίνεται γιά κανένα x ἀπό τό πεδίο $-\infty < x < +\infty$ ἴση μέ τό ἄνω πέρας της 1 σ'αὐτό τό πεδίο. Σ'αὐτές τίς δυό περιπτώσεις ἡ $\sigma(x)$ δέν ἔχει μεγίστη τιμή στό πεδίο A˙ λέμε ὅτι "δέν ὑπάρχει μέγιστο τῆς $\sigma(x)$ στό πεδίο A". Μπορεῖ ὅμως, ὅταν φ_2 = ἀριθμός, νά ὑπάρχη κάποια θέση x_M ἀπό τό A τέτοια πού σ'αὐτήν νά εἶναι $\sigma(x_M) = \varphi_2$. Τότε τό φ_2 λέγεται καί μεγίστη τιμή ἤ μ έ γ ι σ τ ο τῆς $\sigma(x)$ στό πεδίο A, γιατί προφανῶς $\sigma(x_M) \geqq \sigma(x)$ γιά ὅλα τά x ἀπό τό A.

Π.χ. ἡ ημx γίνεται ἴση μέ τό ἄνω πέρας της 1 στό πεδίο $-\infty < x < +\infty$, γιά $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (k τυχών ἀκέραιος). Ἄρα ἡ ημx ἔχει μέγιστο τό 1 στό πεδίο $-\infty < x < +\infty$.

Ἀνάλογος εἶναι ὁ ὁρισμός τοῦ ἐ λ α χ ί σ τ ο υ τῆς $\sigma(x)$ στό πεδίο A˙ ἄν $\sigma(x_E)$ = κάτω πέρας φ_1 τῆς $\sigma(x)$ στό πεδίο A γιά κάποιαν τιμή x_E τῆς x ἀπό τό A, τότε τό φ_1 λέγεται ἐλάχιστο τῆς $\sigma(x)$ στό πεδίο A. Π.χ. ἡ $\sigma(x) = x - Ak(x)$ ἔχει ἐλάχιστο τό 0 στό πεδίο $-\infty < x < +\infty$, γιατί ὅταν x_E = ἀκέραιος ἀριθμός , $\sigma(x_E) = 0$ = κάτω πέρας τῆς $\sigma(x) = x - Ak(x)$ στό πεδίο $-\infty < x < +\infty$. Ἡ $\sigma(x) = \frac{1}{x}$ δέν ἔχει ἐλάχιστο στό πεδίο $0 < x < +\infty$, γιατί δέν ὑπάρχει τιμή τῆς x ἀπό τό πεδίο $0 < x < +\infty$ τέροια πού νά ἔχουμε $\sigma(x) =$

= κάτω πέρας = 0.

Πρόταση τοῦ Weierstrass. Ἂν ἡ (μονοσήμαντη) συνάρτηση σ(x) εἶναι συνεχής στό κλειστό καί περιορισμένο διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$, τότε ὑπάρχει σ'αὐτό κάι μέγιστο $\sigma(x_\mu)$ καί ἐλάχιστο $\sigma(x_\varepsilon)$ τῆς συναρτήσεως.

Προφανῶς ἐλάχιστο $\sigma(x_\varepsilon) \leqq$ μεγίστου $\sigma(x_\mu)$· τό σημεῖο τῆς ἰσότητας ἰσχύει ὅταν καί μόνο ὅταν ἡ σ(x) = σταθερά στό διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$.

§ 201. Θεώρημα τοῦ Rolle. Ἂν ἡ σ(x) εἶναι συνεχής στό κλειστό καί περιορισμένοδιάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$, 2) λαβαίνη ἴσες τιμές στά ἄκρα του: σ(α) = σ(β) καί 3) ἔχη παράγωγο σέ κάθε ἐσωτερική θέση $\alpha < x < \beta$, τότε αὐτή ἡ παράγωγος θά μηδενίζεται τουλάχιστο μιά φορά στό ἐσωτερικό τοῦ διαστήματος, δηλ. θά ὑπάρχη μιά τουλάχιστο θέση ξ μεταξύ α καί β ($\alpha < \xi < \beta$) τέτοια πού νά εἶναι $\sigma'(\xi) = 0$.

Παράδειγμα. Ἡ σ(x) = ημx ἐκπληρώνει τίς ὑποθέσεις τοῦ θεωρήματος, ὅταν πάρουμε α = 0, β = 2π. Ἄρα ἡ παράγωγος συνx πρέπει νά μηδενίζεται τουλάχιστο μιά φορά μεταξύ x = 0 καί x = 2π· πράγματι μηδενίζεται δυό φορές: γιά $x = \frac{\pi}{2}$ καί $x = \frac{3\pi}{2}$.

Πόρισμα. Ἂν τό ἀκέραιο πολυώνυμο π(x) μέ πραγματικούς συντελεστές ἔχη μ διάφορες πραγματικές ρίζες, τότε τό πολυώνυμο π΄(x) ἔχει τ ο υ λ ά χ ι σ τ ο μ-1 πραγματικές ρίζες.

Σχόλιο στό πόρισμα. Τό π(x) μπορεῖ νά μήν ἔχη καμμιάν πραγματική ρίζα, ἀλλά τό π΄(x) νά ἔχη. Π.χ. $x^4-x^2+1 = \pi(x)$ δέν ἔχει καμμιά πραγματική ρίζα, ἐνῶ τό $\pi'(x) = 4x^3-2x = 2x(2x^2-1)$ ἔχει τρεῖς.

§ 202. Θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς τοῦ Διαφορικοῦ Λογισμοῦ. Ἂν ἡ συνάρτηση f(x) εἶναι συνεχής στό κλειστό καί περιορισμένο διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$ καί ἔχει παράγωγο $f'(x)$ σέ κάθε ἐσωτερική θέση $\alpha < x < \beta$, τότε θά ὑπάρχη μιά τουλάχιστο θέση ξ ἐνδιάμεση τῶν α καί β, στήν ὁποία

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta-\alpha} .$$

<u>Ἀπόδειξη</u>. Ἡ συνάρτηση $\sigma(x) = f(x) + \lambda x$ μέ

$$\lambda = -\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

ἐκπληρώνει ὑποθέσεις τοῦ θεωρήματος τοῦ Rolle, ἐπομένως ὑπάρχει ἕνα τουλάχιστο ξ γιά τό ὁποῖο $\sigma'(\xi) = f'(\xi) + \lambda = 0$, ὅ.ἔ.δ.

<u>Παράδειγμα καί ἐφαρμογή</u>. Ἄς εἶναι

$$y(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$$

ὅπου $\alpha_2 \neq 0$, α_1, α_0 σταθερές. Ἡ $y(x)$ ἔχει πεπερασμένη παράγωγο σέ κάθε θέση τοῦ διαστήματος $\alpha \leqq x \leqq \beta$, ἄρα εἶναι συνεχής σ'αὐτό. Μποροῦμε λοιπόν νά τῆς ἐφαρμόσουμε τό θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς: ὑπάρχει ἕνα τουλάχιστο ξ μέ τίς ἰδιότητες:

$$\alpha < \xi < \beta$$

καί $$y'(\xi) = 2\alpha_2\xi + \alpha_1 = \frac{y(\beta) - y(\alpha)}{\beta-\alpha} = \alpha_2(\beta+\alpha) + \alpha_1$$

Ἀπ'ἐδῶ ἕπεται ὅτι $\xi = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Ἡ γεωμετρική ἑρμηνεία τοῦ ἀποτελέσματος αὐτοῦ μᾶς παρέχει τήν ἀκόλουθη ἰδιότητα τῆς παραβολῆς:

<u>Πρόταση</u>. Ἡ ἐφαπτομένη σ'ἕνα τόξο M_1M_2 παραβολῆς ἡ παράλληλη μέ τή χορδή ἔχει σημεῖο ἐπαφῆς E πού κεῖται πάνω στήν εὐθεία τήν παράλληλη πρός τόν ἄξονα ὀρθῆς συμμετρίας τῆς παραβολῆς διά τοῦ μέσου M τῆς χορδῆς.

§ 203. <u>Συνέπειες ἀπό τό θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς</u>. Ἄν ἔχη ἡ $y = \sigma(x)$ πεπερασμένη παράγωγο σ'ἕνα διάστημα $\gamma < x < \delta$ θά εἶναι τότε συνεχής σ'αὐτό τό διάστημα. Θεωροῦμε δυό διάφορες θέσεις x_1, x_2 ἀπό τό διάστημα· εἴτε εἶναι $x_1 < x_2$ εἴτε $x_2 < x_1$. Θά ἔχουμε κατά τό θεώρημα

(203.1) $$\sigma(x_2) - \sigma(x_1) = (x_2 - x_1)\sigma'(\xi)$$

ὅπου ξ κ α τ ά λ λ η λ ο ς ἀριθμός μεταξύ x_1 καί x_2. Ἔτσι λαβαίνουμε

(203.2) $$\sigma(x_2) - \sigma(x_1) = (x_2 - x_1)\sigma'\big(x_1 + \vartheta(x_2 - x_1)\big) ,$$

ὅπου θ κατάλληλος ἀριθμός μεταξύ 0 καί 1, $(0 < \vartheta < 1)$.

Ἡ σχέση αὐτή γράφεται καί ὡς ἑξῆς (ἄν θέσουμε $x = x_1$, $x + \Delta x = x_2$):

(203.3) $$\sigma(x + \Delta x) = \sigma(x) + \sigma'(x + \vartheta\Delta x)\cdot\Delta x$$

ὅπου $0 < \vartheta < 1$.

Τό θ δέν εἶναι αὐθαίρετο δηλ. ἐλεύθερα ἐκλέξιμο, ἀλλά κατάλληλος ἀριθμός πού ἐξαρτιέται ἀπό τά x_1 καί x_2 στή (203.2) ἤ ἀπό τά x καί $x+\Delta x$ στή (203.3).

§ 204. <u>Πόρισμα 1ο</u>. Ἄν μιά συνάρτηση $y = \sigma(x)$ ἔχη παράγωγο ἴση μέ μηδέν σ'ὅλες τίς θέσεις x ἑνός διαστήματος $\gamma < x < \delta$, τότε θά εἶναι

$$y = \sigma(x) = \text{σταθερά} \quad \text{γιά} \quad \gamma < x < \delta.$$

<u>Ἀπόδειξη</u>. Ἔχουμε πράγματι γιά 2 ὁποιεσδήποτε τιμές x_1 καί x_2 τῆς x:

$$\sigma(x_2) - \sigma(x_1) = (x_2 - x_1)\cdot\sigma'(\xi) = 0 .$$

Προφανῶς καί τό ἀντίστροφο τῆς προτάσεως ἀληθεύει.

<u>Πόρισμα 2ο</u>. Ἄν δυό συναρτήσεις $\sigma(x)$ καί $\varphi(x)$ ἔχουν ἴσες πεπερασμένες παραγώγους $\sigma'(x) = \varphi'(x)$ σέ κάθε θέση x ἑνός διαστήματος $\gamma < x < \delta$, τότε θά ἔχουν διαφορά σταθερή:

$$\sigma(x) - \varphi(x) = C \qquad \text{γιά} \quad \gamma < x < \delta.$$

<u>Ἀπόδειξη</u>. Γιατί ἡ συνάρτηση $\sigma(x) - \varphi(x)$ ἔχει παράγωγο

$\sigma'(x) - \varphi'(x) \equiv 0$ στό διάστημα $\gamma < x < \delta$.

Παράδειγμα. Ἔστω α μιά θετική σταθερά. Ἡ συνάρτηση $y(x) = \text{τοξ}_0 \text{εφ}\,\dfrac{\alpha - x}{1+\alpha x}$ εἶναι μονοσήμαντα ὁρισμένη στό διάστημα $0 < x < +\infty$ καί ἔχει σ'αὐτό πεπερασμένη παράγωγο

$$y'(x) = -\frac{1}{x^2+1} \quad .$$

Ἴση παράγωγο στό ἴδιο διάστημα ἔχει ἡ $z = \text{τοξ}_0\text{σφ}x$. Ἄρα πρέπει $z(x) - y(x) = C$ γιά $0 < x < +\infty$. Γιά νά ἐπαληθευθῆ αὐτό, ἀρκεῖ νά δειχθῆ ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τῆς διαφορᾶς z-y εἶναι σταθερός ἀριθμός (ὡς πρός x γιά $0 < x < +\infty$):

$$\text{εφ}(z-x) = \frac{\text{εφ}z - \text{εφ}y}{1+\text{εφ}z\,\text{εφ}y} = \frac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{\alpha-x}{1+\alpha x}}{1 + \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\alpha-x}{1+\alpha x}} = \frac{1+x^2}{\alpha x^2+\alpha} = \frac{1}{\alpha} \quad .$$

§ 205. Τά τελευταῖα πορίσματα διατυπώνονται καί κατά ἄλλον ἀξιοσημείωτο τρόπο ὕστερα ἀπό εἰσαγωγή τῆς ἀκόλουθης ἔννοιας.

Μιά συνάρτηση $\Phi(x)$ λέγεται παράγουσα τῆς (μονοσήμαντης) $\varphi(x)$ σ'ἕνα διάστημα $\gamma < x < \delta$, ἄν $\Phi'(x) = \varphi(x)$ γιά

$$\gamma < x < \delta \quad .$$

Ταυτόσημοι πρός τόν ὅρο παράγουσα εἶναι οἱ ἑξῆς: "ἀρχική συνάρτηση" καί "ἀόριστο ὁλοκλήρωμα". Π.χ. ἡ x^2 εἶναι παράγουσα τῆς $2x$ στό διάστημα $-\infty < x < +\infty$, ἡ $\ln x$ εἶναι παράγουσα τῆς $\dfrac{1}{x}$ στό $0 < x < +\infty$.

Διατυπώνουμε τώρα τά πορίσματα τοῦ § 204 μέ χρήση τῆς νέας ἔννοιας.

Πρόταση 1η. Ἡ συνάρτηση: $\varphi(x) = 0$ γιά ὅλα τά x ἑνός διαστήματος $\gamma < x < \delta$, ἔχει γιά παράγουσες τίς συναρτήσεις $\Phi(x) = C$ = αὐθαίρετη σταθερά γιά $\gamma < x < \delta$ καί μόνον αὐτές.

Πρόταση 2η. Ἄν ἡ $\varphi(x)$ ἔχη στό διάστημα $\gamma < x < \delta$ παράγουσα τή $\Phi(x)$, τότε θά ἔχη γιά παράγουσες σ'αὐτό τό διάστημα καί τίς συναρτήσεις $\Phi(x) + C$, ὅπου C αὐθαίρετη σταθερά καί μόνον αὐτές.

Ἐφαρμογές. Ἡ ἀκέραια πολυωνυμική συνάρτηση $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\nu}\alpha_k x^k$, ὅπου k ἀκέραιος ≥ 0, ἔχει παράγουσες στό διάστημα $-\infty < x < +\infty$ τίς συναρτήσεις

$$\Phi(x) = C + \sum_{k=0}^{\nu}\alpha_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

ὅπου C αὐθαίρετη σταθερά.

Εἰδικά: Ἄν $\varphi(x) = \alpha =$ σταθερά γιά $\gamma < x < \delta$, τότε οἱ πάραγουσες τῆς $\varphi(x)$ στό διάστημα $\gamma < x < \delta$ εἶναι γραμμικές συναρτήσεις: $\Phi(x) = \alpha x + C$, ὅπου C αὐθαίρετη σταθερά.

2. Ἡ "διαφορική ἐξίσωση νυοστῆς τάξεως" $y^{(\nu)}(x) = 0$, ὅπου ν ἕνας ὁρισμένος φυσικός ἀριθμός, ἔχει γιά μόνες "λύσεις" τίς συναρτήσεις

$$y(x) = C_{\nu-1}x^{\nu-1} + C_{\nu-2}x^{\nu-2} + \ldots + C_1 x + C_0 ,$$

ὅπου $C_{\nu-1}, C_{\nu-2}, \ldots, C_1, C_0$ αὐθαίρετες σταθερές (ἀνεξάρτητες ἡ καθεμιά τους ἀπό τίς ὑπόλοιπες).

3. Ἡ "διαφορική ἐξίσωση 1ης τάξεως" $y'(x) = y(x)$ ἔχει γιά μόνες "λύσεις" τίς συναρτήσεις $y(x) = Ce^x$, ὅπου C αὐθαίρετη σταθερά. Πράγματι μιά συνάρτηση πού ἱκανοποιεῖ τή διαφορική ἐξίσωση $y'(x) = y(x)$ σ'ἕνα διάστημα ἤ θά εἶναι ἀπό ταυτότητα μηδενική σ'αὐτό τό διάστημα ἤ δέν θά εἶναι ἀπό ταυτότητα μηδενική.

Στή 2η περίπτωση ἔστω $y(x_0) \neq 0$· τότε, ἐπειδή ἡ $y(x)$ εἶναι συνεχής (ἀφοῦ ἔχει πεπερασμένη παράγωγο) θά εἶναι $y(x) \neq 0$ γιά ὅλα τά x ἑνός ἀρκετά μικροῦ διαστήματος περιλαμβάνοντος τό x_0· σ'αὐτό τό διάστημα μποροῦμε νά γράφουμε τή διαφορική ἐξίσωση ἔτσι:

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = 1 \qquad \text{ἤ} \qquad (\ln|y|)' = 1 .$$

Ἄρα $\ln|y| = x + C_1$ ὅπου C_1 αὐθαίρετη σταθερά. Συνεπῶς $|y| = e^{x+C_1} = e^{C_1}\cdot e^{x}$ καί $y = \pm e^{C_1}\cdot e^{x}$. Ἄρα τελικά $y(x) = Ce^{x}$ ὅ.ἔ.δ.

§ 206. Πόρισμα 3ο. Ἄν ἡ συνάρτηση $y = \sigma(x)$ ἔχη θετική παράγωγο $\sigma'(x)$ σ'ὅλες τίς θέσεις x ἑνός διαστήματος $\gamma < x < \delta$ τότε ἡ $\sigma(x)$ θά εἶναι αὔξουσα (μέ στενή σημασία) στό διάστημα $\gamma < x < \delta$.

Ἄν ἡ $y = \sigma(x)$ ἔχη ἀρνητική παράγωγο $\sigma'(x)$ σ'ὅλες τίς θέσεις x ἑνός διαστήματος $\gamma < x < \delta$, τότε ἡ $\sigma(x)$ θά εἶναι φθίνουσα στό διάστημα $\gamma < x < \delta$.

Ἀπόδειξη. Ἄς εἶναι $\sigma'(x) > 0$ γιά $\gamma < x < \delta$ καί $x_1 < x_2$ δυό τυχοῦσες θέσεις ἀπό τό διάστημα. Σύμφωνα μέ τή σχέση (203.1) ἔχουμε

$$\sigma(x_2) - \sigma(x_1) = (x_2 - x_1)\sigma'(\xi) > 0 \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Ἄν $\sigma'(x) < 0$ γιά $\gamma < x < \delta$, τότε

$$\sigma(x_2) - \sigma(x_1) = (x_2 - x_1)\sigma'(\xi) < 0$$

κάθε φορά πού $x_1 < x_2$, ἄρα ἡ $\sigma(x)$ εἶναι φθίνουσα (μέ στενή σημασία).

§ 207. Γενικευμένο θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς. Ἄς εἶναι οἱ συναρτήσεις $y = f(t)$ καί $x = g(t)$ συνεχεῖς στό κλειστό καί περιορισμένο διάστημα $\alpha \leqq t \leqq \beta$ καί ἄς ἔχουν πεπερασμένες παραγώγους στό διάστημα $\alpha < t < \beta$. Τότε ὑπάρχει μιά τουλάχιστο θέση ξ μεταξύ α καί β γιά τήν ὁποία ἰσχύει ἡ σχέση

$$(207.1) \qquad f'(\xi)\{g(\beta) - g(\alpha)\} - g'(\xi)\{f(\beta) - f(\alpha)\} = 0 .$$

Ἀποδ. Ἡ συνάρτηση

$$\sigma(t) = f(t)\{g(\beta) - g(\alpha)\} - g(t)\{f(\beta) - f(\alpha)\}$$

γιά $\alpha \leqq t \leqq \beta$ ἱκανοποιεῖ τίς ὑποθέσεις τοῦ θεωρήματος τοῦ Rolle, ἄρα $\sigma'(\xi) = 0$ γιά κάποιο ξ μεταξύ α καί β.

<u>Παρατήρηση</u>. Ἄν πάρουμε $x = g(t) = t$, ἡ (207.1) μᾶς δίνει νει τό θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς (§ 202).

<u>Σχόλιο</u>. Ἡ σχέση (207.1) ἀποκτᾶ σπουδαιότητα καί χρησιμότητα, ἄν προϋποθέσουμε, πρᾶγμα πού δικαιούμαστε, ὅτι

$$|g(\beta) - g(\alpha)| + |f(\beta) - f(\alpha)| \neq 0$$

καί $$|f'(t)| + |g'(t)| \neq 0 \qquad \text{γιά } \alpha < t < \beta$$

Τότε ἡ (207.1) γράφεται καί ὡς ἑξῆς:

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \tag{207.2}$$

(ξ κατάλληλος ἀριθμός μεταξύ α καί β), ὅπου, ἄν $g(\beta) - g(\alpha) = 0$, συμφωνοῦμε ἡ τελευταία σχέση νά σημαίνη ἁπλῶς $g'(\xi) = 0$.

<u>Γεωμετρική ἑρμηνεία τῆς σχέσεως (207.2)</u>. Σ'ἕνα σύστημα εὐθύγραμμων συντεταγμένων τό ζεῦγος τῶν συναρτήσεων

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases} \qquad \text{γιά } \alpha \leqq t \leqq \beta$$

παριστάνει μιά γραμμή μέ ἄκρα $A\,(g(\alpha), f(\alpha))$ καί $B(g(\beta), f(\beta))$ διάφορα, ἀφοῦ ἐξ ὑποθέσεως $|f(\beta) - f(\alpha)| + |g(\beta) - g(\alpha)| \neq 0$. Ἡ γραμμή εἶναι συνεχής (ἐπειδή οἱ $g(t)$ καί $f(t)$ ὑποθέτονται συνεχεῖς συναρτήσεις στό διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$) καί ἔχει ἐφαπτομένη σέ κάθε σημεῖο της διάφορο ἀπό τά ἄκρα (ἐπειδή ὑποθέτουμε ὅτι ὑπάρχουν οἱ πεπερασμένες παράγωγοι $g'(t)$ καί $f'(t)$ γιά $\alpha < t < \beta$ καί ὅτι $|g'(t)| + |f'(t)| \neq 0$). (Προβλ. §193).

Τό ἀριστερό μέλος τῆς (207.2) εἶναι ὁ συντελεστής διευθύνσεως τῆς χορδῆς AB, τό δεξιό μέλος ὁ συντελεστής διευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης τῆς γραμμῆς στό σημεῖο της Ξ πού ἀντιστοιχεῖ σέ τιμή παραμέτρου $t = \xi$. Ἡ σχέση (207.2) σημαίνει λοιπόν ὅτι ὑπάρχει ἕνα τουλάχιστο ἐσωτερικό σημεῖο τῆς γραμμῆς στό ὁποῖο ἡ ἐφαπτομένη της εἶναι παράλληλη μέ τή χορδή τῶν δύο ἄκρων A καί B τῆς γραμμῆς.

§ 208. Τύπος τοῦ Taylor. Ὁ τύπος

$$\sigma(\beta) = \sigma(\alpha) + (\beta-\alpha)\sigma'(\xi),$$

ὅπου ξ κατάλληλος ἀριθμός μεταξύ α καί β, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τό θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς (βλ. § 202), μπορεῖ νά θεωρηθῆ ὡς ἡ πρώτη βαθμίδα ἑνός γενικότερου καί σημαντικότατου τύπου τῆς Ἀναλύσεως, τοῦ τύπου τοῦ Taylor. Σ'αὐτό τό κεφάλαιο θά χρησιμοποιήσουμε μόνο τή 2η βαθμίδα αὐτοῦ τοῦ τύπου, ἡ ὁποία ἔχει τήν ἑξῆς διατύπωση.

Θεώρημα. "Ἄν ἡ $\sigma(x)$ ἔχη παράγωγο $\sigma'(x)$ συνεχῆ στό (κλειστό καί περιορισμένο) διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$ καί ἄν ὑπάρχη 2η παράγωγος γιά κάθε x μεταξύ α καί β ($\alpha < x < \beta$), τότε θά ἔχουμε

$$\sigma(\beta) = \sigma(\alpha) + (\beta-\alpha)\sigma'(\alpha) + \frac{(\beta-\alpha)^2}{2!}\sigma''(\xi) \tag{208.1}$$

ὅπου ξ κατάλληλος ἀριθμός μεταξύ α καί β.

Ἀπόδειξη. Ἐφαρμόζοντας τό θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς λαβαίνουμε

$$\sigma(\beta) = \sigma(\alpha) + (\beta-\alpha)\sigma'(\xi_1) \quad ,$$

ὅπου ξ_1 κατάλλ. ἀριθμός μεταξύ α καί β καί

$$\sigma'(\xi_1) = \sigma'(\alpha) + (\xi_1-\alpha)\sigma''(\xi_2) \quad ,$$

ὅπου ξ_2 κατάλληλος ἀριθμός μεταξύ α καί ξ.

Ἄρα

$$\sigma(\beta) = \sigma(\alpha) + (\beta-\alpha)\sigma'(\alpha) + (\beta-\alpha)(\xi_1-\alpha)\sigma''(\xi_2) \ .$$

Μᾶς μένει λοιπόν νά δείξουμε ὅτι ὑπάρχει μιά τουλάχιστο κατάλληλη θέση ξ μεταξύ α καί β, τέτοια πού

$$(\beta-\alpha)(\xi_1-\alpha)\sigma''(\xi_2) = \frac{(\beta-\alpha)^2}{2!}\sigma''(\xi) \ .$$

Θέτουμε
$$A = \frac{2(\xi_1-\alpha)}{\beta-\alpha}\sigma''(\xi_2) \quad ,$$

τότε $\qquad \dfrac{(\beta-\alpha)^2}{2!} A = (\beta-\alpha)(\xi_1-\alpha)\sigma''(\xi_2)$

καί ἄρα

(208.2) $\qquad \sigma(\beta) = \sigma(\alpha) + (\beta-\alpha)\sigma'(\alpha) + \dfrac{(\beta-\alpha)^2}{2!} A$.

Ἔχουμε νά δείξουμε ὅτι $A = \sigma''(\xi)$, ὅπου ξ κατάλληλος ἀριθμός μεταξύ α καί β.

Θεωροῦμε τή συνάρτηση

$$\varphi(x) = \sigma(\beta) - \sigma(x) - (\beta-x)\sigma'(x) - \frac{(\beta-x)^2}{2!} A .$$

Ἡ $\varphi(x)$ εἶναι συνεχής στό διάστημα $\alpha \leqq x < \beta$, μηδενίζεται προφανῶς γιά $x = \beta$, μηδενίζεται γιά $x = \alpha$ λόγῳ τῆς (208.2) καί ἔχει παράγωγο

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= -\sigma'(x) + \sigma'(x) - (\beta-x)\sigma''(x) + (\beta-x)A = \\ &= (\beta-x)(A-\sigma''(x))\end{aligned}$$

γιά $\alpha < x < \beta$. Κατά τό θεώρημα τοῦ Rolle πρέπει λοιπόν νά ἔχουμε $\varphi'(\xi) = 0$ γιά κάποιο ξ μεταξύ α καί β, $(\alpha < \xi < \beta)$, δηλαδή

$$(\beta-\xi)(A-\sigma''(\xi)) = 0 \quad , \quad \text{ἄρα} \quad A = \sigma''(\xi) \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

<u>Παράδειγμα καί ἐπαλήθευση.</u> Ἔστω

$$\sigma(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2 .$$

Εἶναι τότε $\qquad \sigma'(x) = 2\alpha_2 x + \alpha_1$, $\sigma''(x) = 2\alpha_2$.

Ἄρα ὁ τύπος (208.1) γίνεται

$$\alpha_2\beta^2+\alpha_1\beta+\alpha_2 = \alpha_2\alpha^2+\alpha_1\alpha+\alpha_2+(\beta-\alpha)(2\alpha_2\alpha+\alpha_1) + \frac{(\beta-\alpha)^2}{2}\cdot 2\alpha_2 .$$

Αὐτή ἡ σχέση μπορεῖ νά γραφῆ καί ὡς ἑξῆς:

$$\alpha_2(\beta^2-\alpha^2) + \alpha_1(\beta-\alpha) = (\beta-\alpha)(2\alpha_2\alpha+\alpha_1) + (\beta-\alpha)^2\alpha_2 ,$$

ἐπαληθεύεται δέ τώρα ἀμέσως.

§ 209. <u>Μελέτη τῆς μεταβολῆς συναρτήσεως.</u> Ἔστω $y = \sigma(x)$ μιά συνάρτηση μονοσήμαντα ὁρισμένη σ'ἕνα διάστημα $\alpha < x < \beta$.

Τό πρόβλημα μας εἶναι ἡ μελέτη τῆς μεταβολῆς τῆς y ὅταν τό **x** διατρέχη τό πεδίο του μεταβολῆς $\alpha < \mathbf{x} < \beta$. Στίς συνήθεις περιπτώσεις ἡ $y = \sigma(\mathbf{x})$ ἔχει παράγωγο $\sigma'(\mathbf{x})$ συνεχῆ στό διάστημα $\alpha < \mathbf{x} < \beta$, μποροῦμε δέ νά χωρίσουμε τό διάστημα (α,β) διά τῶν θέσεων πού μηδενίζουν τή $\sigma'(\mathbf{x})$, σέ ὑποδιαστήματα τέτοια πού στό ἐσωτερικό ἑνός ἑκάστου ἀπό αὐτά ἡ $\sigma'(\mathbf{x})$ νά εἶναι $\neq 0$ καί ἑπομένως νά διατηρῆ τό ἴδιο πρόσημο· ἄρα στό ἐσωτερικό τοῦ καθενός ἀπό τά ὑποδιαστήματα αὐτά ἡ $\sigma(\mathbf{x})$ εἶναι ἤ αὔξουσα ἤ φθίνουσα συνάρτηση (μέ στ. σημ.).

Ἄς εἶναι τώρα

$$\varrho_1 < \mathbf{x} < \varrho_2 \quad \text{καί} \quad \varrho_2 < \mathbf{x} < \varrho_3$$

δυό ἐπακόλουθα ὑποδιαστήματα. Ἄν

$$\text{πρόσημο τῆς } \sigma(\mathbf{x}) \text{ στό } \varrho_1 < \mathbf{x} < \varrho_2 =$$
$$= \text{πρόσημο τῆς } \sigma'(\mathbf{x}) \text{ στό } \varrho_2 < \mathbf{x} < \varrho_3$$

(ὁπότε λεμέ ὅτι ἡ $\sigma'(\mathbf{x})$ δέν ἀλλάζει πρόσημο στή θέση $\mathbf{x} = \varrho_2$), τότε ἡ $\sigma(\mathbf{x})$ εἶναι αὔξουσα ἤ φθίνουσα(μέ στ.σημ.) καί σ'ὁλόκληρο τό διάστημα $\varrho_1 < \mathbf{x} < \varrho_3$. Ἄν

$$\text{πρόσημο τῆς } \sigma'(\mathbf{x}) \text{ στό } \varrho_1 < \mathbf{x} < \varrho_2 \neq$$
$$\neq \text{πρόσημο τῆς } \sigma'(\mathbf{x}) \text{ στό } \varrho_2 < \mathbf{x} < \varrho_3$$

(ὁπότε λέμε ὅτι ἡ $\sigma'(\mathbf{x})$ ἀλλάζει πρόσημο στή θέση $\mathbf{x} = \varrho_2$),τότε ἔχουμε νά διακρίνουμε τίς ἑξῆς δυό περιπτώσεις:

1ο $\sigma'(\mathbf{x})$ θετικό στό $\varrho_1 < \mathbf{x} < \varrho_2$, $\sigma'(\mathbf{x})$ ἀρνητικό στό $\varrho_2 < \mathbf{x} < \varrho_3$.

Ἡ $\sigma(\mathbf{x})$ θά εἶναι τότε αὔξουσα στό πρῶτο, φθίνουσα στό δεύτερο ὑποδιάστημα. Ἄρα ἡ τιμή $\sigma(\varrho_2)$ θά εἶναι μέγιστο τῆς $\sigma(\mathbf{x})$ στό διάστημα $\varrho_1 < \mathbf{x} < \varrho_3$. Τό μέγιστο αὐτό λέγεται τοπικό (ἀπό ἄλλους, σχετικό) μέγιστο τῆς $\sigma(\mathbf{x})$, διότι ἐνδέχεται νά μήν ἰσοῦται μέ τό ἄνω πέρας τῆς $\sigma(\mathbf{x})$ στό ὅλο διάστημα (α,β) καί ἑπομένως νά μήν εἶναι ἡ μέγιστη τιμή τῆς $\sigma(\mathbf{x})$ στό διάστημα (α,β). Ἡ θέση $x = \varrho_2$ "μεγιστοποιεῖ τοπικῶς" τή συνάρτηση $\sigma(x)$.

2ο $\sigma'(x)$ ἀρνητ. στό $\varrho_1 < x < \varrho_2$, $\sigma'(x)$ θετική στό $\varrho_2 < x < \varrho_3$. Τότε ἡ $\sigma(x)$ εἶναι φθίνουσα στό $\varrho_1 < x < \varrho_2$, αὔξουσα στό $\varrho_2 < x < \varrho_3$. Ἄρα ἡ τιμή $\sigma(\varrho_2)$ εἶναι τώρα ἐλάχιστο τῆς $\sigma(x)$ στό διάστημα $\varrho_1 < x < \varrho_3$. Τό ἐλάχιστο αὐτό λέγεται τοπικό (ἀπό ἄλλους, σχετικό). Ἡ θέση $x = \varrho_2$ λέγεται θέση ἐλαχιστοποιοῦσα τοπικῶς τή συνάρτησή $\sigma(x)$.

Ἡ μέ τόν παραπάνω τρόπο μελέτη τῆς μεταβολῆς τῆς $\sigma(x)$ συμπληρώνεται μέ τόν καθορισμό τῶν ἐνδεχόμενα ὑπαρχόντων ὁρίων $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\sigma(x)$, $\lim\limits_{x\to\beta^-}\sigma(x)$ καί καταγράφεται σ'ἕναν πίνακα, μέ τόν τρόπο πού φαίνεται ἀπό τό ἑξῆς παράδειγμα.

§ 210. Ἄς θεωρήσουμε τή $\sigma(x) = (x^2-8)e^x$ στό διάστημα $(-\infty, +\infty)$.

Ἔχουμε $\sigma'(x) = e^x(x^2+2x-8)$. Ἡ $\sigma'(x)$ μηδενίζεται στίς δυό θέσεις $x = -4$ καί $x = 2$. Αὐτές χωρίζουν τό διάστημα $-\infty < x < +\infty$ σέ τρία ὑποδιαστήματα: $-\infty < x < -4$, $-4 < x < 2$, $2 < x < +\infty$ στό ἐσωτερικό τῶν ὁποίων ἡ $\sigma'(x)$ εἶναι ἀντιστοίχως θετική, ἀρνητική, θετική.

Καταρτίζουμε τόν ἀκόλουθο πίνακα μεταβολῆς τῆς $\sigma(x)$:

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$\sigma'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\sigma(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\sigma(x)=0^+$	$\nearrow$	τ. μέγ. $8e^{-4}$	$\searrow$	τ. ἐλ. $-4e^2$	$\nearrow$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\sigma(x)=+\infty$

§ 211. <u>Συνθῆκες γιά τοπικά ἀκρότατα (μέγιστα ἤ ἐλάχιστα)</u>. Ἀπό ὅσα προηγήθηκαν ἕπονται τά ἑξῆς: Ἄς ἔχη ἡ $\sigma(x)$ παράγωγο στό $\alpha < x < \beta$.

<u>Ἀναγκαία</u> συνθήκη γιά νά ἔχη ἡ $\sigma(x)$ τοπικό μέγιστο ἤ ἐλάχιστο στή θέση x_0 ἀπό τό διάστημα $\alpha < x < \beta$ εἶναι ὁ μηδενισμός τῆς $\sigma'(x_0)$.

<u>Ἱκανή</u> συνθήκη γιά νά ἔχη ἡ $\sigma(x)$ τοπικό μέγιστο ἤ ἐλάχιστο στή θέση x_0 εἶναι νά ἀλλάζη ἡ παράγωγος $\sigma'(x)$ πρόσημο στή θέση x_0. Τοπικό μέγιστο ἔχουμε ὅταν τό πρόσημο τῆς παραγώγου ἀπό θετικό (πού εἶναι "ἀμέσως πρίν" ἀπό τή θέση x_0) γίνεται ἀρνητικό ("ἀμέσως μετά" τή θέση x_0). Τοπικό ἐλάχιστο ἔχουμε ὅταν ἡ παράγωγος ἀπό ἀρνητική γίνεται θετική.

§ 212. <u>Ἄλλη συνθήκη γιά τοπικό ἀκρότατο.</u> Ἄν ἡ $\sigma(x)$ ἔχη καί 2η παράγωγο $\sigma''(x)$, συνεχῆ στό διάστημα $\alpha < x < \beta$, τότε ἱκανή συνθήκη γιά τοπικό ἀκρότατο τῆς $\sigma(x)$ στή θέση x_0 εἶναι ἡ ἑξῆς:

$$\sigma'(x_0) = 0 \quad \text{καί} \quad \sigma''(x_0) \neq 0 .$$

Ἔχουμε τοπικό μέγιστο ἄν $\sigma''(x_0) < 0$, τοπικό ἐλάχιστο, ἄν $\sigma''(x_0) > 0$.

Αὐτό ἀποδείχνεται εὔκολα μέ τή βοήθεια τοῦ τύπου τοῦ Taylor 2ης βαθμίδας:

$$\sigma(x_0+\Delta x) = \sigma(x_0) + \sigma'(x_0)\Delta x + \frac{\sigma''(\xi)}{2!}\Delta x^2 = \sigma(x_0) + \frac{\sigma''(\xi)}{2!}\Delta x^2 .$$

<u>Παραδείγματα.</u> 1. Ἔστω $\sigma(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$, μέ $\alpha \neq 0$, ὁπότε

$$\sigma'(x) = 2\alpha x+\beta \quad , \quad \sigma''(x) = 2\alpha \neq 0 .$$

Ἡ θέση $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ μηδενίζει τή $\sigma'(x)$ ὄχι ὅμως τή $\sigma''(x)$, ἄρα εἶναι θέση τοπικοῦ ἀκροτάτου τῆς $\sigma(x)$, ἐλαχίστου ὅταν $\alpha > 0$, μεγίστου ὅταν $\alpha < 0$. Αὐτά συμφωνοῦν μέ ὅσα συμπεραίνουμε ἀπό τή γνωστή γραφική παράσταση τῆς $y = \alpha x^2+\beta x+\gamma$ σέ ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων: Παραβολή μέ ἄξονα συμμετρίας τήν εὐθεία $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$. Τό τοπ. μέγιστο ἤ ἐλάχιστο εἶναι καί μέγιστο ή ελάχιστο τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ στό διάστημα $-\infty < x < +\infty$. (Μορφῶστε τόν πίνακα μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως γιά νά συμπληρώσετε τήν άναλυτική έρευνα).

2. Έστω $\sigma(x) = x\ln x$ γιά $0 < x < +\infty$. Έχουμε $\sigma'(x) = \ln x + 1$, άρα $\sigma'(x) = 0$, γιά $\ln x = -1$ δηλ. $x = e^{-1} \approx \frac{1}{2,7}$. Ἡ τιμή αὐτή $x = \frac{1}{e}$ καθιστᾶ τήν $\sigma''(x) = \frac{1}{x}$ θετική: $\sigma''\left(\frac{1}{e}\right) = e$, ἄρα ἡ τιμή $\sigma\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ εἶναι τοπικό ἐλάχιστο τῆς $\sigma(x)$· τό τοπικό αὐτό ἐλάχιστο εἶναι καί ἐλάχιστο τῆς $\sigma(x)$ στό διάστημα $0 < x < +\infty$, ὅπως δείχνει ὁ συμπληρωμένος πίνακας μεταβολῆς τῆς $\sigma(x)$.

§ 213. <u>Κοῖλα καί κυρτά ἑνός τόξου καμπύλης</u>. Ἄν θεωρήσουμε τόν ἄξονα τεταγμένων ΟΥ κατακόρυφο καί ἐκλέξουμε γιά θετική φορά του τή φορά ἀπό τά κάτω πρός τά πάνω, τότε ἀποχτοῦν εὐνόητη σημασία οἱ ἑξῆς ἐκφράσεις:

1ο "ὅταν τό x διατρέχη αὐξάνοντας τό διάστημα J, ἡ γραμμή $y = \sigma(x)$ ἀνέρχεται (ἤ κατέρχεται)",

2ο "πάνω μεριά μιᾶς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου ΧΟΥ μή παράλληλης πρός τόν ἄξονα ΟΥ",

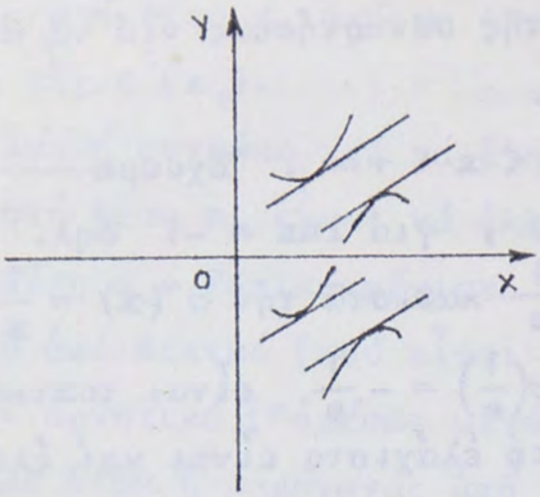
3ο "κάτω μεριά μιᾶς εὐθείας $\nparallel$ ΟΥ" κτλ.

Δίνουμε τώρα μερικούς ὁρισμούς.

Ἔστω γ ἕνα τόξο καμπύλης: $y = \sigma(x)$ γιά $\alpha \leqq x \leqq \beta$ (ἤ $\alpha < x < \beta$). Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ $\sigma(x)$ ἔχει πεπερασμένη παράγωγο στό διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$ (ἤ $\alpha < x < \beta$). Αὐτό σημαίνει γεωμετρικά ὅτι τό γ ἔχει σ'ὅλα του τά σημεῖα ἐφαπτομένη $\nparallel$ ΟΥ:

$$Y - \sigma(x) = \sigma'(x)\,(X-x) \; .$$

Λέμε ὅτι τό τόξο γ εἶναι κοῖλο πρός τά πάνω (ἤ ὅτι στρέφει τά κοῖλα πρός τά πάνω, εἶναι κυρτό πρός τά κάτω, κτλ.), ἄν τά σημεῖα του βρίσκωνται ὅλα στήν πάνω μεριά κάθε ἐφαπτο-



μένης του. Λέμε ὅτι τό τόξο γ εἶναι κοῖλο πρός τά κάτω (ἤ κυρτό πρός τά ἄνω κτλ.) ἄν ὅλα τά σημεῖα του βρίσκωνται στήν κάτω μεριά κάθε ἐφαπτομένης του.

Εὔκολα ἀποδείχνεται ἡ

<u>Πρόταση 1.</u> Γιά νά στρέφη τό τόξο γ τά κοῖλα πρός τἀπάνω, πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι ἡ σ΄(x) αὔξουσα στό θεωρούμενο διάστημα.

Γιά νά στρέφη τό τόξο γ τά κοῖλα πρός τά κάτω πρέπει καί ἀρκεῖ ἡ σ΄(x) νά εἶναι φθίνουσα στό θεωρούμενο διάστημα.

Ἀπό τήν πρόταση αὐτή βγαίνουν εὔκολα τά ἀκόλουθα συμπεράσματα:

Ἄν τό τόξο γ εἶναι κοῖλο πρός τά πάνω (ἤ πρός τά κάτω), τυχοῦσα εὐθεία θά τό συναντᾶ σέ δυό τό πολύ σημεῖα. Ἄν τό τόξο γ εἶναι κοῖλο πρός τά πάνω (ἤ πρός τά κάτω) καί P_1, P_2 εἶναι δυό τυχόντα σημεῖα του, τότε τό μέρος τοῦ γ πού περιλαμβάνεται μεταξύ P_1 καί P_2 κεῖται κάτω ἀπό τή χορδή P_1P_2 (ἤ πάνω ἀπό τή χορδή P_1P_2).

Συνδυάζοντας τέλος τήν παραπάνω πρόταση 1 μέ τό πόρισμα 3ο τοῦ § 206 βρίσκουμε:

<u>Πρόταση 2.</u> Ἄν ἡ $y = σ(x)$ ἔχη $σ''(x)$ θετική σ'ἕνα διάστημα, τότε τό ἀντίστοιχο τόξο γ στρέφει τά κοῖλα πρός τά πάνω· ἄν ἡ $y = σ(x)$ ἔχη $σ''(x)$ ἀρνητική σ'ἕνα διάστημα, τότε τό ἀντίστοιχο γ εἶναι κοῖλο πρός τά κάτω.

§ 214. <u>Σημεῖο καμπῆς.</u> Ἔστω γ ἕνα τόξο γραμμῆς μέ ἀναλυτική παράσταση $y = σ(x)$ σ'ἕνα διάστημα.

Ἕνα σημεῖο του M_0 λέγεται σημεῖο καμπῆς τοῦ γ, ἄν εἶναι κοινό ἄκρο δυό κομματιῶν M_1M_0 καί M_0M_2 τοῦ γ ἀπό τά ὁποῖα τό ἕνα εἶναι κοῖλο πρός τά πάνω, τό ἄλλο κοῖλο πρός τά κάτω. Ἀπ' ἐδῶ ἕπεται ὅτι τό ἕνα ἀπό τά δυό κομμάτια βρίσκεται στή μιά μεριά τῆς ἐφαπτομένης τοῦ γ στό M_0, τό ἄλλο στήν ἄλλη μεριά. Μέ ἄλλα λόγια: ἡ ἐφαπτομένη ἑνός τόξου γραμμῆς γ σ' ἕνα σημεῖο καμπῆς του M_0 διαπερνᾶ τό γ στό σημεῖο M .

Μέ τήν προϋπόθεση ὅτι ἡ $\sigma(x)$ ἔχει $\sigma''(x)$ συνεχῆ στό θεωρούμενο διάστημα ἔχουμε:

<u>Ἀναγκαία</u> συνθήκη γιά νά εἶναι ἡ θέση x_0 ἀπό τό θεωρούμενο διάστημα τετμημένη σημείου καμπῆς τοῦ γ εἶναι ὁ μηδενισμός τῆς $\sigma''(x_0)$.

<u>Ἱκανή</u> συνθήκη γιά νά εἶναι τό x_0 τετμημένη σημείου καμπῆς τοῦ γ εἶναι νά ἀλλάζη ἡ $\sigma''(x)$ πρόσημο στή θέση $x = x_0$ Π.χ.

	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$\sigma''(x)=4x+4$	$-\infty$	$-$	(-8)	$-$	0	$+$	8	$+$	$+\infty$
$\sigma'(x)=2x^2+4x-6$	$+\infty$	$+$	0	$-$	(-8)	$-$	0	$+$	$+\infty$
$\sigma(x)=\frac{2}{3}x^3+2x^2-6x-7$	$-\infty$	$\nearrow$	$\begin{Bmatrix}\text{τ. μεγ}\\ 11\end{Bmatrix}$	$\searrow$	σ. καμπῆς τῆς $y=\sigma(x)$	$\searrow$	$\begin{Bmatrix}\text{τ. ἐλάχ}\\ -31/3\end{Bmatrix}$	$\nearrow$	
	ἡ $y=\sigma(x)$ κοίλη πρός τά κάτω					ἡ $y=\sigma(x)$ κοίλη πρός τά πάνω			

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

217. Προσδιορίστε τά κάτω καί τά ἄνω πέρατα τῶν ἑξῆς συναρτήσεων:

$$\varphi(\nu) = \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} \quad \text{καί} \quad f(\nu) = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{\nu!}$$

στό πεδίο $\nu = 1,2,3,4,\ldots$, τῶν τοξ$_0$ημx, τοξ$_0$συνx, $\sqrt{1+x}$, $\sqrt[3]{1-x}$, e^{x-1} , x^3-1 στό πεδίο $-1 \leqq x \leqq 1$, τῶν τοξ$_0$εφx , τοξ$_0$σφx , e^x ; e^{-x} , $\text{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ στό πεδίο $-\infty < x < +\infty$.

Παρατηρῆστε ὅτι ὅλες οἱ παραπάνω συναρτήσεις εἶναι μονότονες, δηλ. ἤ αὔξουσες ἤ φθίνουσες, στά ἀντίστοιχα πεδία καί βγάλτε ἀπ' ἐδῶ ἕνα γενικό κανόνα γιά τόν προσδιορισμό τοῦ κάτω καί ἄνω πέρατος μιᾶς συναρτήσεως σ' ἕνα πεδίο ὅπου εἶναι μονότονη (μέ στενή ἤ εὐρ.σημασία).

Ἐξετάστε γιά ποιές ἀπό τίς παραπάνω συναρτήσεις εἶναι τό κάτω πέρας καί ἐλάχιστο, τό ἄνω πέρας καί μέγιστο τῆς συναρτήσεως στό ἀντίστοιχο πεδίο.

218.* Δεῖξτε ὅτι ἄν ἡ $\sigma(x)$ εἶναι μονοσήμαντα ὁρισμένη καί συνεχής στό (περιορισμένο ἤ ἀπεριόριστο) διάστημα $\alpha < x < \beta$ καί ἄν $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\sigma(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\beta^-}\sigma(x) = +\infty$, τότε ἡ $\sigma(x)$ ἔχει ἐλάχιστο στό διάστημα $\alpha < x < \beta$.

('Υποδ. θά προσπαθήσετε νά ἀναχθῆτε στό θεώρημα τοῦ Weierstrass, § 200).

Πραγματευθῆτε τά παραδείγματα $\sigma(x) = x^4-2$, $\sigma(x) = \mathrm{ch}x = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ μέ $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$ καί τά παραδείγματα

$$\sigma(x) = \frac{1+x^4}{x^2} \quad , \quad \sigma(x) = (\ln x)^2 \quad ,$$

μέ $\alpha = 0$, $\beta = +\infty$.

219. Δεῖξτε ὅτι ἄν ἡ $\sigma'(x)$ μηδενίζεται σέ $\mu(\geqq 0)$ διάφορες θέσεις ἀπό τό διάστημα $\alpha < x < \beta$, ἡ $\sigma(x)$ θά μηδενίζεται τό πολύ σέ $\mu+1$ διάφορες θέσεις ἀπό τό ἴδιο διάστημα. ('Η $\sigma'(x)$ ἐξυπακούεται ὑπάρχουσα καί πεπερασμένη στό διάστημα $\alpha < x < \beta$).

Δῶστε ἕνα παράδειγμα μέ α,β ὁρισμένους ἀριθμούς.

220. Ἐφαρμόστε τό θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς στή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x}$ παίρνοντας $\alpha = 1$, $\beta = 3$ καί προσδιορίστε τό κατάλληλο ἐνδιάμεσο ξ.

221.* <u>'Ορισμός</u>: Μιά συνάρτηση $\sigma(x)$ μονοσήμαντα ὁρισμένη στό διάστημα J λέγεται ὁ μ ο ι ό μ ο ρ φ α συνεχής σ' αὐτό, ἄν σέ κάθε θετικό ἀριθμό ε μποροῦμε ν' ἀντιστοιχίσουμε ἕναν κατάλληλο θετικό δ_ε τέτοιον πού νά εἶναι $|\sigma(x_1) - \sigma(x_2)| < \varepsilon$ γιά κάθε ζεῦγος ἀριθμῶν x_1, x_2 ἀπό τό J μέ $|x_1-x_2| <$ τοῦ κατάλληλου δ_ε.

Δεῖξτε ὅτι ἡ $\sigma(x)$ εἶναι ὁμοιόμορφα συνεχής στό J, ἄν $|\sigma'(x)| \leqq$ κάποιου φράγματος Φ: (ἐξυπακούεται φυσικά ἡ ὕπαρξη τῆς παραγώγου $\sigma'(x)$ στό διάστημα J). Γιά παράδειγμα μελετῆστε τίς συναρτήσεις $\sigma(x) = \eta\mu x$, $\sigma(x) = \tau o\xi.\varepsilon\varphi x$ στό διάστημα $-\infty < x < +\infty$ καί τίς $\sigma(x) = \sqrt{x}$, $\sigma(x) = \ln x$ στό διάστημα $1 \leqq x \leqq 10$, προσδιορίζοντας ἑκάστοτε ἕνα κατάλληλο δ_ε γιά τό αὐθαίρετο θετικό ε.

222. Βρῆτε τίς παράγουσες τῶν ἑξῆς συναρτήσεων:
x^4+2x^3-2x+5 , $x^2-\frac{2}{3}x+\frac{3}{4}$, $+\sqrt{2}\cdot x^3-\frac{x^2}{4}+e$ στό διάστημα $-\infty<x<+\infty$· $x^{-1}-x^{-2}$, , $-5x^{-4}+2x^{-3}$ στό διάστημα $-\infty<x<0$ ἤ $0<x<+\infty$· x^{α} ὅπου α σταθερά $\neq -1$ στό $0<x<+\infty$ $\frac{2}{+\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{2}{-\sqrt{1-x^2}}$ στό διάστημα $-1<x<1$. Προσδιορίστε ἐκείνη τήν παράγουσα τῆς $\frac{1}{1+x^2}$ ἡ ὁποία γιά $x=0$ γίνεται $=\pi$.

Ὁμοίως ἐκείνη τήν παράγουσα τῆς x^3-2x^2+x-1 πού γιά $x=-1$ γίνεται $=0$.

223. Βρῆτε ὅλες τίς συναρτήσεις $y(x)$ πού ἱκανοποιοῦν τήν καθεμιά χωριστά ἀπό τίς διαφορικές ἐξισώσεις: $y'''(x)=0$, $y''(x)=5$, $y''(x)=x+2$, $y'(x)=x^2-3x+4$ γιά $-\infty<x<+\infty$.

Προσδιορίστε εἰδικῶς ἐκεῖνες τίς συναρτήσεις $y(x)$ πού γιά $x=6$ παίρνουν τήν τιμή $y=1$.

224. Μέ τή βοήθεια τῶν πρώτων καί τῶν δεύτερων παραγώγων τους μελετῆστε τή μεταβολή τῶν ὑπερβολικῶν συναρτήσεων **shx** , **chx** **thx** στό διάστημα $-\infty<x<+\infty$ καί τῆς **cthx** στά διαστήματα $-\infty<x<0$, $0<x<+\infty$. Σχεδιάστε καί τίς γραφικές παραστάσεις των σ'ἕνα ὀρθογώνιο σύστημα.

225. Μελετῆστε τή μεταβολή καί τή γραφική παράσταση (σ' ἕνα ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων μέ $|\vec{i}|=|\vec{j}|$) τῶν συναρτήσεων

$$y=x^3+x^2 \quad , \quad y=x^3-2x^2+x+1 \quad , \quad y=\frac{x^3}{3}-x+\frac{1}{2}$$

γιά $-\infty<x<+\infty$.

226. Μελετῆστε τή μεταβολή καί τή γραφική παράσταση τῶν συναρτήσεων $y=\frac{1}{x^2+1}$, $y=\frac{2x^2}{x^2+1}$ γιά $-\infty<x<+\infty$, τῆς $y=x\ln x$ γιά $0<x<+\infty$.

227. Προσδιορίστε τά τοπικά ἀκρότατα τῶν συναρτήσεων:

$$y=(x-1)^2\cdot(x-2)^3 \quad , \quad y=x^5-5x^4-5x^3+7 \quad , \quad y=\text{συν}x+\text{ch}x$$

στό διάστημα $-\infty<x<+\infty$ καί τῆς $y=x^x$ στό διάστημα $0<x<+\infty$.

228. Ἀπό ὅλα τά ὀρθογώνια τρίγωνα μέ ἄθροισμα καθέτων πλευρῶν ἴσο πρός δοσμένο μῆκος **s** ποιό εἶναι ἐκεῖνο πού ἔχει ἐλάχιστη ὑποτείνουσα, ποιό εἶναι ἐκεῖνο πού ἔχει μέγιστο ἐμβαδό;

229. Μεταξύ τῶν κυλίνδρων πού εἶναι ἐγγραμμένοι σέ δοσμένο ὀρθό κυκλικό κῶνο ποιός ἔχει μέγιστο ὄγκο; – Μεταξύ τῶν ὀρθῶν κυκλικῶν κώνων πού εἶναι περιγραμμένοι σέ δοσμένη σφαίρα

ποιός ἔχει ἐλάχιστη πλευρική (παράπλευρη) ἐπιφάνεια;

§ 215. Ἰδού τώρα μερικές προτάσεις χρήσιμες στόν ὑπολογισμό ὁρίων.

Πρόταση 1. Ἄν οἱ συναρτήσεις $f(x)$ καί $g(x)$ ἔχουν πεπερασμένες παραγώγους σ'ἕνα περιορισμένο διάστημα $\alpha < x < \alpha+\vartheta$, ἄν 2ο $g'(x) \neq 0$ γιά $\alpha < x < \alpha+\vartheta$, ἄν 3ο $\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = \lim_{x\to\alpha^+} g(x) = 0$ καί ἄν 4ο $\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = 1$, τότε καί $\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Ἀπόδειξη. Θέτουμε (ἐπεκτείνοντας τό πεδίο ὁρισμοῦ τῶν $f(x)$ καί $g(x)$) $f(\alpha) = 0$, $g(\alpha) = 0$.

Λέγω ὅτι ἡ $g(x)$ εἶναι $\neq 0$ στό διάστημα $\alpha < x < \alpha+\vartheta$. Πράγματι, ἄν ἦταν, γιά κάποιο x, $g(x) = 0$, ἡ ἐφαρμογή τοῦ θεωρήματος τοῦ Rolle θ'ἀπαιτοῦσε, ἡ $g'(t)$ νά μηδενίζεται τουλάχιστο γιά μιά τιμή τοῦ t ἐνδιάμεση τῶν τιμῶν $t = \alpha$ καί $t = x$, ἀλλ'αὐτό ἀποκλείεται ἀπό τή 2η ὑπόθεσή μας.

Μποροῦμε λοιπόν νά μορφώσουμε τό πηλίκο $\frac{f(x)}{g(x)}$ γιά $\alpha < x < \alpha+\vartheta$.

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι οἱ συναρτήσεις $f(t)$, $g(t)$ ἱκανοποιοῦν τίς ὑποθέσεις τοῦ θεωρήματος τοῦ § 207 στό διάστημα $\alpha \leqq t \leqq x$, ὅπου $\alpha < x < \alpha+\vartheta$.

Ἄρα

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(\alpha)}{g(x) - g(\alpha)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \text{ὅπου } \alpha < \xi < x .$$

Ἐπομένως

$$\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha^+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{\xi\to\alpha^+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = 1 \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Σχόλιο. Ἡ πρόταση πού διατυπώσαμε καί ἀποδείξαμε γιά μονόπλευρα ὅρια ἀπό δεξιά ἐπεκτείνεται μέ εὐνόητο τρόπο γιά μονόπλευρα ὅρια ἀπό ἀριστερά καθώς καί γιά ἀμφίπλευρα ὅρια.

§ 216. Πρόταση 2. Ἄν οἱ συναρτήσεις $f(x)$ καί $g(x)$ ἔχουν πεπερασμένες παραγώγους σ'ένα διάστημα $\theta < x < +\infty$, ὅπου θ θετικός ἀριθμός, ἄν 2ο $g'(x) \neq 0$ γιά $\theta < x < +\infty$, ἄν 3ο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, καί ἄν 4ο $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1$, τότε ὑπάρχει καί τό ὅριο $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ καί εἶναι ἴσο μέ 1.

<u>'Απόδειξη</u>. Θέτουμε $x = \frac{1}{\omega}$, ὁπότε οἱ συναρτήσεις

$$F(\omega) = f\left(\frac{1}{\omega}\right) \quad \text{καί} \quad G(\omega) = g\left(\frac{1}{\omega}\right)$$

ἐκπληρώνουν τίς ὑποθέσεις τῆς προτάσεως 1 τοῦ § 215 στό διάστημα $0 < \omega < \frac{1}{\theta}$. Πράγματι

$$F'_\omega(\omega) = f'_x\left(\frac{1}{\omega}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\omega^2}\right) \quad , \quad G'_\omega(\omega) = g'_x\left(\frac{1}{\omega}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\omega^2}\right) \neq 0 \ ,$$

$$\lim_{\omega\to 0^+} F(\omega) = \lim_{\omega\to 0^+} G(\omega) = 0$$

καί τέλος (ἔχοντας ὑπ'ὄψη ὅτι $x = \frac{1}{\omega}$)

$$\lim_{\omega\to 0^+} \frac{F'(\omega)}{G'(\omega)} = \lim_{\omega\to 0^+} \frac{f'(x)\cdot\left(-\frac{1}{\omega^2}\right)}{g'(x)\cdot\left(-\frac{1}{\omega^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1 \ .$$

Ἄρα $\quad \lim\limits_{\omega\to 0^+} \frac{F(\omega)}{G(\omega)} = 1$,

δηλαδή $\quad \lim\limits_{\omega\to 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{\omega}\right)}{g\left(\frac{1}{\omega}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

<u>Σχόλιο</u>. Ἡ πρόταση 2 πού διατυπώσαμε καί ἀποδείξαμε γιά $x \to +\infty$ ἐπεκτείνεται μέ εὐνόητο τρόπο γιά $x \to -\infty$.

§ 217. <u>Πρόταση 3</u>. Ἄν οἱ συναρτήσεις $f(x)$ καί $g(x)$ ἔχουν πεπερασμένες παραγώγους σ'ἕνα περιορισμένο διάστημα $\alpha < x < \alpha+\theta$, ἄν 2ο $g'(x) \neq 0$ γιά $\alpha < x < \alpha+\theta$, ἄν 3ο $\lim\limits_{x\to\alpha^+} g(x) = \infty$ καί ἄν 4ο $\lim\limits_{x\to\alpha^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1$, τότε καί $\lim\limits_{x\to\alpha^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

<u>'Απόδειξη</u>. 'Επειδή $\lim\limits_{x\to\alpha^+} g(x) = \infty$, ἕπεται ὅτι $g(x) \neq 0$

γιά $\alpha < x \leqq \alpha+\vartheta_1$, ὅπου ϑ_1 κατάλληλος θετ. ἀριθμός $\leqq \vartheta$. Ἔστω πρῶτα ℓ = ἀριθμός (καί ὄχι τό ἄπειρο)· θά ἔχουμε τότε ἐξ ὑποθέσεως

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell + \eta(x) \tag{217.1}$$

ὅπου $|\eta(x)| <$ τῆς κλασμ. μονάδος $\frac{1}{\nu}$ γιά $\alpha < x \leqq$ κατάλληλου ἀριθμοῦ $\beta_\nu \leqq \alpha+\vartheta_1$.

Ἐπειδή $\lim\limits_{x\to\alpha^+} \frac{f(\beta_\nu)}{g(x)} = 0$ καί $\lim\limits_{x\to\alpha^+} \frac{g(\beta_\nu)}{g(x)} = 0$,

θά ἔχουμε $\frac{f(\beta_\nu)}{g(x)} = \eta_1(x)$ καί $1 - \frac{g(\beta_\nu)}{g(x)} = 1 - \eta_2(x)$

μέ $|\eta_1(x)| < \frac{1}{\nu}$ καί $|\eta_2(x)| < \frac{1}{\nu}$ γιά $\alpha < x <$ κατάλληλου ἀριθμοῦ $\beta_\nu^* < \beta_\nu$.

Ἐφαρμόζοντας τό θεώρημα τοῦ § 207 στίς συναρτήσεις $f(t)$, $g(t)$ στό διάστημα $x \leqq t \leqq \beta_\nu$, ὅπου x ἀριθμός ἀπό τό διάστημα $\alpha < x < \beta_\nu^*$ λαβαίνουμε

$$f(x) - f(\beta_\nu) = \{g(x) - g(\beta_\nu)\}\cdot\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

ἤ

$$f(x) = f(\beta_\nu) + \{g(x) - g(\beta_\nu)\}\cdot\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

ὅπου ξ κατάλληλος ἀριθμός μεταξύ x καί β_ν.

Ἄρα

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(\beta_\nu)}{g(x)} + \left\{1 - \frac{g(\beta_\nu)}{g(x)}\right\}\cdot\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \tag{217.2}$$

συνεπῶς

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \eta_1(x) + (1-\eta_2(x))(\ell+\eta(x)) \\ &= \eta_1 + \ell - \ell\eta_2 + \eta - \eta_2\eta \\ &= \ell + (\eta_1 + \eta - \ell\eta_2 - \eta_2\eta)\end{aligned}$$

ὅπου $|\eta_1+\eta-\ell\eta_2-\eta_2\eta| < \frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu}+|\ell|\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu^2} < \frac{1}{\nu}(|\ell|+3)$

συνεπῶς $<$ τοῦ αὐθαίρετου θετικοῦ ε γιά $\nu > \frac{|\ell|+3}{\varepsilon}$ ὅ.ἔ.δ.

Ἔστω δεύτερον $\ell = \infty$ (ἤ, εἰδικότερα, $\ell = +\infty$ ἤ $\ell = -\infty$). Θά ἔχουμε στήν παραπάνω ἀπόδειξη ν'ἀντικαταστήσουμε τή σχέση (217.1) μέ τήν ἑξῆς:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{\eta(x)}$$

ὅπου $|\eta(x)| < \frac{1}{\nu}$ γιά $\alpha < x \leqq \beta_\nu$ καί ἐπομένως, τή σχέση (217.2) μέ τήν ἀκόλουθη:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \eta_1(x) + \left\{1 - \eta_2(x)\right\} \cdot \frac{1}{\eta(x)} =$$

$$= \frac{1 - \eta_2(x)}{\eta(x)} + \eta_1(x) \quad .$$

Ἄρα

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \geqq \left|\frac{1-\eta_2(x)}{\eta(x)}\right| - |\eta_1(x)| > \frac{1 - \frac{1}{\nu}}{\frac{1}{\nu}} - \frac{1}{\nu} = \nu - 1 - \frac{1}{\nu} > \nu - 2$$

γιά $\alpha < x < \beta^*_\nu$ καί συνεπῶς $\lim\limits_{x \to \alpha^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ ὅ.ἔ.δ.

Σχόλιο. Ἡ ἄνω πρόταση 3 ἐπεκτείνεται μέ εὐνόητο τρόπο σέ μονόπλευρα ὅρια ἀπό ἀριστερά καθώς καί σέ ἀμφίπλευρα ὅρια.

§ 218. Πρόταση 4. Ἄν οἱ συναρτήσεις $f(x)$ καί $g(x)$ ἔχουν πεπερασμένες παραγώγους σ'ἕνα διάστημα $\vartheta < x < +\infty$, ἄν 2ο $g'(x) \neq 0$ γιά $\vartheta < x < +\infty$, ἄν 3ο $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \infty$ καί ἄν 4ο $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1$, τότε ὑπάρχει καί τό

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{καί εἶναι} = 1 \ .$$

Ἀπόδειξη. Ὅπως στόν § 216, θέτουμε $x = \frac{1}{\omega}$ καί ἀναγόμαστε στήν πρόταση 3.

Σχόλιο. Ἡ παραπάνω πρόταση 4 γιά $x \to +\infty$ ἐπεκτείνεται εὐνόητα γιά $x \to -\infty$.

§ 219. Κανόνας τοῦ L'Hospital. Ἀπό τίς παραπάνω προτάσεις ἕπεται ὁ ἀκόλουθος κανόνας γιά τόν ὑπολογισμό ὁρίων πηλίκων $\frac{\varphi(x)}{\sigma(x)}$, ὅταν $\lim \sigma(x) = \lim \varphi(x) = 0$ ἤ ὅταν

$\lim \sigma(x) = \lim \varphi(x) = \infty$.

Παίρνουμε τό πηλίκο τῶν παραγώγων: $\frac{\varphi'(x)}{\sigma'(x)}$. Ἄν αὐτό ἔχη ὅριο, τό ἴδιο ὅριο ἔχει καί τό πηλίκο $\frac{\varphi(x)}{\sigma(x)}$. Ἄν τυχαίνη νά εἶναι πάλι

$$\lim \sigma'(x) = \lim \varphi'(x) = 0 \quad \text{ἤ} \quad \lim \sigma'(x) = \lim \varphi'(x) = \infty$$

τότε θεωροῦμε τό πηλίκο τῶν 2ων παραγώγων: $\frac{\sigma''(x)}{\varphi''(x)}$. Ἄν αὐτό ἔχη ὅριο, τό ἴδιο ὅριο θά ἔχη τό $\frac{\varphi'(x)}{\sigma'(x)}$, ἄρα καί τό $\frac{\varphi(x)}{\sigma(x)}$ κ.ο.κ.

Παραδείγματα:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\eta\mu x}{x^3}$. Ἔχουμε

$$\frac{\varphi'(x)}{\sigma'(x)} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{3x^2}, \quad \frac{\varphi''(x)}{\sigma''(x)} = \frac{\eta\mu x}{3\cdot 2x} \quad \text{καί}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi''(x)}{\sigma''(x)} = \frac{1}{6} \lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = \frac{1}{6}.$$

Ἄρα $$\lim_{x\to 0} \frac{x-\eta\mu x}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

2) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{e^x}{\frac{1}{x^\mu}} = \lim\limits_{x\to -\infty} x^\mu \cdot e^x$, ὅπου μ αὐθαίρετα ὁρισμένος φυσικός ἀριθμός. Ἔχουμε $\frac{\varphi(x)}{\sigma(x)} = \frac{x^\mu}{e^{-x}} = \frac{\varphi_1(x)}{\sigma_1(x)}$. Γιά τίς παραγώγους νιοστῆς τάξεως $(\nu = 1,2,\dots,\mu-1)$ τῶν συναρτήσεων $\varphi_1(x) = x^\mu$ καί $\sigma_1(x) = e^{-x}$ ἔχουμε

$$\lim_{x\to -\infty} \varphi_1^{(\nu)}(x) = \lim_{x\to -\infty} \sigma_1^{(\nu)}(x) = \infty, \qquad \nu = 1,2,\dots,\mu-1.$$

Γι'αὐτό μορφωνουμε τό πηλίκο τῶν μιοστῶν παραγώγων:

$$\frac{\varphi_1^{(\mu)}(x)}{\sigma_1^{(\mu)}(x)} = \frac{\mu!}{(-1)^\mu e^{-x}}.$$

Ἔχουμε $$\lim_{x\to -\infty} \frac{\mu!}{(-1)^\mu e^{-x}} = 0.$$

Ἄρα $$\lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{\frac{1}{x^\mu}} = \lim_{x\to -\infty} x^\mu e^x = 0.$$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\alpha^x}{x^\mu}$, ὅπου α σταθερά > 1 καί μ αὐθαίρετα ὁρισμένος φυσικός ἀριθμός. Ἔχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} D^{(\nu)}\alpha^x = \lim_{x\to+\infty} D^{(\nu)}x^\mu = +\infty \quad \gamma\iota\acute{\alpha}\ \nu = 1,2,\ldots,\mu-1 .$$

Γι' αὐτό παίρνουμε τό πηλίκο τῶν μιοστῶν παραγώγων:

$$\frac{D^{(\mu)}\alpha^x}{D^{(\mu)}x^\mu} = \frac{\alpha^x(\ln\alpha)^\mu}{\mu!} .$$

Εἶναι $$\lim \frac{D^{(\mu)}\alpha^x}{D^{(\mu)}x^\mu} = +\infty .$$

Ἄρα $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha^x}{x^\mu} = +\infty \quad \gamma\iota\acute{\alpha}\ \alpha > 1.$$

§ 220. <u>Ὅριο τοῦ γινομένου $\sigma(x)\cdot\varphi(x)$ μέ $\lim\sigma(x) = 0$, $\lim\varphi(x) = \infty$</u>. Θέτουμε $\varphi(x) = \frac{1}{\varphi_1(x)}$, ὁπότε

$$\lim\varphi_1(x) = 0 \qquad \kappa\alpha\acute{\iota} \qquad \sigma(x)\varphi(x) = \frac{\sigma(x)}{\varphi_1(x)} .$$

Ἔτσι ἀναγόμαστε στά προηγούμενα.

Ἄν $\sigma(x) \neq 0$ γιά ὅλα τά θεωρούμενα x, τότε μποροῦμε νά θέσουμε $\sigma_1(x) = \frac{1}{\sigma(x)}$, ὁπότε

$$\lim\sigma_1(x) = \infty \quad \kappa\alpha\acute{\iota} \quad \sigma(x)\varphi(x) = \frac{\varphi(x)}{\sigma_1(x)} .$$

Ἔτσι ἀναγόμαστε πάλι στά προηγούμενα.

<u>Παράδειγμα</u>. $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\frac{1}{\mu}}\ln x$, ὅπου μ φυσικός ἀριθμός σταθερός.

Γράφουμε $x^{1/\mu}\cdot\ln x = \frac{\ln x}{x^{-1/\mu}}$. Παίρνουμε τό πηλίκο τῶν 1ων παραγώγων:

$$\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\mu}x^{-\frac{1}{\mu}-1}} = -\mu\frac{1}{x^{-1/\mu-1+1}} = \frac{-\mu}{x^{-1/\mu}} = -\mu x^{\frac{1}{\mu}} .$$

Ἄρα $$\lim_{x\to0^+}\frac{D\ln x}{Dx^{-1/\mu}} = 0 .$$

Συνεπῶς $$\lim_{x\to0^+} x^{\frac{1}{\mu}}\cdot\ln x = 0 .$$

§ 221. Όριο τῆς διαφορᾶς $\sigma(x) - \varphi(x)$, ὅταν $\lim \sigma(x) = \infty$, $\lim \varphi(x) = \infty$. Θέτουμε $\sigma_1(x) = \frac{1}{\sigma(x)}$, $\varphi_1(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$, ὁπότε $\lim \sigma_1(x) = 0$, $\lim \varphi_1(x) = 0$ καί

$$\sigma(x) - \varphi(x) = \frac{1}{\sigma_1(x)} - \frac{1}{\varphi_1(x)} \quad \frac{\varphi_1(x) - \sigma_1(x)}{\sigma_1(x)\cdot\varphi_1(x)}$$

μέ $\lim\left\{\varphi_1(x) - \sigma_1(x)\right\} = \lim\left\{\sigma_1(x)\cdot\varphi_1(x)\right\} = 0$.

Έτσι ἀναγόμαστε στά προηγούμενα.

<u>Παράδειγμα</u> $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sigma\varphi x - \frac{1}{x}\right)$. Γράφουμε

$$\sigma\varphi x - \frac{1}{x} = \frac{1}{\varepsilon\varphi x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \varepsilon\varphi x}{\varepsilon\varphi x\cdot x}$$

καί θεωροῦμε τό πηλίκο τῶν παραγώγων τοῦ διαιρετέου καί τοῦ διαιρέτου:

$$\frac{1-\sigma\upsilon\nu^{-2}x}{x\sigma\upsilon\nu^{-2}x + \varepsilon\varphi x}\,.$$

Ἐπειδή $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sigma\upsilon\nu^{-2}x) = 0$ καί $\lim\limits_{x\to 0}(x\sigma\upsilon\nu^{-2}x + \varepsilon\varphi x) = 0$ μεταβαίνουμε στό πηλίκο τῶν 2ων παραγώγων:

$$\frac{-2\sigma\upsilon\nu^{-3}x(-\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu^{-2}x - 2x\sigma\upsilon\nu^{-3}x\,(-\eta\mu x) + \sigma\upsilon\nu^{-2}x}\,.$$

Τό πηλίκο αὐτό ἔχει ὅριο τό 0 γιά $x \to 0$.

Ἄρα $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sigma\varphi x - \frac{1}{x}\right) = 0$.

§ 222. Όριο τῆς παραστάσεως $\left\{\sigma(x)\right\}^{\varphi(x)}$, ὅταν $\lim \sigma(x) = \lim \varphi(x) = 0$.

Παίρνουμε τό λογάριθμο τῆς παραστάσεως $y = \left\{\sigma(x)\right\}^{\varphi(x)}$ καί ἔχουμε $\ln y = \varphi(x)\cdot\ln\sigma(x) = \varphi(x)\cdot\sigma_1(x)$, ὅπου $\lim \sigma_1(x) = -\infty$ · ἔτσι ἀναγόμαστε στήν περίπτωση τοῦ § 220. Ἄν ὑπάρχη τό $\lim(\ln y)$ καί εἶναι ἤ ἕνας ἀριθμός α ἤ τό $+\infty$ ἤ τό $-\infty$, θά ὑπάρχη καί τό ὅριο $\lim y = \lim(e^{\ln y})$ καί θά εἶναι $\lim y =$ ἤ e^{α} ἤ $+\infty$ ἤ 0.

<u>Παράδειγμα</u> $\lim_{x\to 0^+} x^x$. Ἔχουμε

$$\ln y = \ln(x^x) = x \ln x .$$

Γράφουμε $x \ln x = \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ καί θεωροῦμε τό πηλίκο τῶν παραγώγων: $\dfrac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = -x$. Τό πηλίκο αὐτό ἔχει ὅριο τό 0· ἄρα

$$\lim_{x\to 0^+}(\ln y) = 0 \quad \text{καί συνεπῶς} \quad \lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1 .$$

§ 223. Ὅριο τῆς παραστάσεως $\{\sigma(x)\}^{\varphi(x)}$, ὅταν εἴτε $\lim \sigma(x) = \mp\infty$ καί $\lim \varphi(x) = 0$ εἴτε $\lim \sigma(x) = 1$ καί $\lim \varphi(x) = \infty$. Παίρνουμε καί τώρα τό λογάριθμο τῆς παραστάσεως $y = \{\sigma(x)\}^{\varphi(x)}$ καί βρίσκουμε

$$\ln y = \varphi(x)\cdot \ln\{\sigma(x)\} = \varphi(x)\cdot\sigma_1(x).$$

Ἔτσι ἀναγόμαστε πάλι στήν περίπτωση τοῦ § 220. Τό συμπέρασμα διατυπώνεται ὅπως στόν § 222.

<u>Παράδειγμα</u> $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$. Ἔχουμε

$$\ln y = \frac{1}{x-1}\ln x = \frac{\ln x}{x-1} .$$

Παίρνουμε τό πηλίκο τῶν 1ων παραγώγων: $\dfrac{\frac{1}{x}}{1}$. Εἶναι

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 1. \quad \text{Ἄρα} \quad \lim_{x\to 1}(\ln y) = 1 \quad \text{καί συνεπῶς} \quad \lim_{x\to 1} y = e^1 = e.$$

§ 224. <u>Παρατηρήσεις.</u> Γιά νά ἐφαρμόσῃ κανείς ὀρθά τόν κανόνα τοῦ l' Hospital εἶναι ἀπαραίτητο νά ἐξακριβώσῃ προηγουμένως στήν κάθε περίπτωση ἄν ἰσχύουν οἱ προϋποθέσεις ὑπό τίς ὁποῖες ὁ κανόνας αὐτός βρέθηκε, δηλαδή οἱ ὑποθέσεις τῶν προτάσεων 1–4 ἤ τῶν ἐπεκτάσεων τους. Π.χ. ὁ κανόνας δέν ἐφαρμόζεται στήν περίπτωση τοῦ πηλίκου $\dfrac{x-\eta\mu x}{x}$ γιά $x \to +\infty$, ἐπειδή τό $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{1}$ δέν ὑπάρχει. Τό ἀνεφάρμοστο τοῦ κανόνα δέν σημαίνει ἐξ ἄλλου πώς τό ἐκεταζόμενο πηλίκο δέν ἔχει ὅριο. Π.χ. στό τελευταῖο παράδειγμα εἶναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\eta\mu x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\dfrac{\eta\mu x}{x}}{1}=1 .$$

Όμοια $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}}{x}=0$, ἐνῶ τό

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\eta\mu\dfrac{1}{x}+x^2\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{-1}{x^2}}{1}=\lim_{x\to 0}\left(2x\eta\mu\frac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)$$

δέν ὑπάρχει.

<u>Ἄσκηση 230.</u> Ἐρευνῆστε ἄν ὑπάρχουν καί ὑπολογίστε τότε τά ὅρια:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3} \quad , \quad \lim_{x\to -2}\frac{x^3+5x^2+8x+4}{x^2+x-2} \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{\alpha^x-\alpha^{-x}}{1-x-\lambda o\gamma_\alpha(\alpha-x)}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi/2-\tau o\xi_o\varepsilon\varphi x}{\eta\mu\dfrac{1}{x}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+\alpha)}{\ln(x+\beta)}$ ὅπου α καί β σταθερές, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\eta\mu(\vartheta_1 x)}{\ln\eta\mu(\vartheta_2 x)}$ ὅπου ϑ_1 καί ϑ_2 σταθερές θετικές, $\lim\limits_{x\to 0^+}\eta\mu x\ln x$,

$$\lim_{x\to 0^+}\big(\ln x+\ln(\eta\mu x)\big)\frac{1}{\eta\mu^2 x} \quad , \quad \lim_{x\to 0^+}(x^{\eta\mu x}) \quad , \quad \lim_{\mu\to+\infty}\mu\left(x^{1/\mu}-1\right),$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\alpha^x+\beta^x}{2}\right)^{1/x} .$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XV

ΑΟΡΙΣΤΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

§ 225. <u>Ἀόριστο ὁλοκλήρωμα.</u> Ὅπως εἴπαμε στόν § 205, μιά συνάρτηση $\Phi(x)$ λέγεται παράγουσα ἤ ἀόριστο ὁλοκλήρωμα τῆς $\varphi(x)$ σ'ἕνα διάστημα $\gamma < x < \delta$, ἄν $\Phi'(x) = \varphi(x)$ γιά κάθε x ἀπό τό διάστημα.

Τό σύμβολο γιά τό ἀόριστο ὁλοκλήρωμα εἶναι τό ἑξῆς:

$$\Phi(x) = \int \varphi(x)dx \quad .$$

πού διαβάζεται ἔτσι: ὁλοκλήρωμα φί (μικρό) τοῦ **x** ντέ **x**. Τό σημάδι $\int$ προέρχεται, μέ ἐπιμήκυνση, ἀπό τό λατινικό γράμμα S (ἔς), ἀρχικό τῆς λέξεως **summa** = ἄθροισμα. Ἡ σκοπιμότητα τοῦ παραπάνω συμβολισμοῦ καί ἡ ἱστορική του δικαιολόγηση θά προκύψουν ἀπό τά παρακάτω.

Ὅπως ἡ μετάβαση ἀπό τή $\Phi(x)$ στή $\Phi'(x)$ λέγεται παραγώγιση τῆς $\Phi(x)$, ἔτσι καί ἡ μετάβαση ἀπό τή $\varphi(x)$ στή $\Phi(x)=\int\varphi(x)dx$ λέγεται ἀόριστη ὁλοκλήρωση τῆς $\varphi(x)$. Σύμφωνα μ' αὐτά ἡ πράξη τῆς **ἀόριστης ὁλοκληρώσεως** καί ἡ πράξη τῆς παραγωγίσεως παρουσιάζονται ἀντίστροφες ἡ μιά τῆς ἄλλης:

$$\left(\int\varphi(x)dx\right)'_x=\varphi(x) \quad , \quad \int\Phi'(x)dx=\Phi(x) \quad \text{γιά } \gamma<x<\delta ,$$

ἐπίσης

$$d\left(\int\varphi(x)dx\right)=\varphi(x)\ dx \ , \ \int d\Phi(x)=\Phi(x) \qquad \text{γιά } \gamma<x<\delta .$$

§ 226. Ὅπως διατυπώσαμε στήν Προτ. 2 τοῦ § 205: Ἄν ἡ $\Phi(x)$ εἶναι παράγουσα ἤ ἀόριστο ὁλοκλήρωμα τῆς $\varphi(x)$ στό διάστημα $\gamma<x<\delta$, τότε καί κάθε συνάρτηση $\Phi(x)+C$, ὅπου C σταθερά, εἶναι ἀόριστο ὁλοκλήρωμα ἤ παράγουσα τῆς $\varphi(x)$ στό διάστημα $\gamma<x<\delta$. Ἀντιστρόφως, ἄν $\Phi_1(x)$ εἶναι μιά παράγουσα τῆς $\varphi(x)$ στό διάστημα $\gamma<x<\delta$, τότε θά ἔχουμε

$$\Phi_1(x)-\Phi(x)=C_1=\text{σταθερά στό διάστημα } \gamma<x<\delta .$$

Μέ ἄλλα λόγια: ἐνῶ ἡ παράγωγος μιᾶς συναρτήσεως εἶναι μονότροπα ὁρισμένη, ὅταν ὑπάρχη, ἡ παράγουσα μιᾶς συναρτήσεως, ὅταν ὑπάρχη, εἶναι ἀπειρότροπα ὁρισμένη: παραμένει ἀπό τόν ὁρισμό πού τῆς δώσαμε "ἀόριστη κατά μιά προσθετική αὐθαίρετη σταθερά".

Αὐτό δικαιολογεῖ καί τό ἐπίθετο "ἀόριστο" στόν ὅρο "ἀόριστο ὁλοκλήρωμα".

Τονίζουμε ὅτι τό σύμβολο $\int\varphi(x)dx$ παριστάνει μιάν ὁποιαδήποτε παράγουσα τῆς $\varphi(x)$ σ'ἕνα διάστημα, μέ ἄλλα λόγια: μιάν ὁποιαδήποτε συνάρτηση $y(x)$ πού ἱκανοποιεῖ τή "διαφορική ἐξίσωση 1ης τάξεως" $y'(x) = \varphi(x)$ γιά ὅλα τά x ἀπό κάποιο διάστημα. Ἐπομένως τό σύμβολο $\int \varphi(x)dx$ εἶναι ἀπειροσήμαντο· ἄν γνωρίζουμε μιάν ἀπό τίς συναρτήσεις τίς ὁποῖες "σημαίνει",δηλ. παριστάνει, π.χ. τή $\Phi(x)$, τότε γνωρίζουμε καί ὅλες τίς ἄλλες στό ὑπ'ὄψη διάστημα μεταβολῆς τῆς x:

$$\int \varphi(x)dx = \Phi(x) + C \quad , \quad (C \text{ αὐθαίρετη σταθερά}).$$

Θά δείξουμε στό ἑπόμενο κεφάλαιο ὅτι κάθε συνάρτηση $\varphi(x)$ πού εἶναι συνεχής σ'ἕνα διάστημα $\gamma < x < \delta$ ἔχει παράγουσες σ'αὐτό. Σύμφωνα μ'αὐτά, ἐνῶ ὅπως ξεύρουμε, ἡ πράξη τῆς παραγωγίσεως δέν εἶναι ἐφαρμόσιμη σέ κάθε συνάρτηση συνεχῆ σ'ἕνα διάστημα (ὑπάρχουν συναρτήσεις συνεχεῖς σ'ἕνα διάστημα πού δέν ἔχουν παράγωγο σέ καμμιά θέση ἀπό τό διάστημα αὐτό), ἡ πράξη τῆς ἀόριστης ὁλοκληρώσεως εἶναι ἐφαρμόσιμη σέ κάθε συνάρτηση συνεχῆ σ'ἕνα διάστημα.

§ 227. <u>Μερικές βασικές ἀόριστες ὁλοκληρώσεις</u>. Ἀπό κάθε τύπο $\Phi'(x) = \varphi(x)$ γιά $\gamma < x < \delta$, πού δίνει τήν παράγωγο μιᾶς συναρτήσεως σ'ἕνα διάστημα, ἕπεται ἕνας ἀντίστοιχος τύπος ἀόριστης ὁλοκληρώσεως:

$$\int \varphi(x)dx = \Phi(x) + C \ ,$$

γιά $\gamma < x < \delta$. Ἐξ ἄλλου ἕνας δοσμένος τύπος ἀόριστης ὁλοκληρώσεως: $\int \omega(x)dx = \Omega(x) + C$ γιά $\gamma < x < \delta$, μπορεῖ ν'ἀποδειχθῆ μέ τήν ἁπλῆ ἐξακρίβωση ὅτι $\Omega'(x) = \omega(x)$ γιά κάθε x ἀπό τό διάστημα $\gamma < x < \delta$.

Ἰδού τώρα ἕνας πίνακας βασικῶν ἀορίστων ὁλοκληρωμάτων:

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad \text{γιά } 0 < x < +\infty$$

ὅπου α πραγματική σταθερά $\neq -1$.

(Εἰδικότερα ἔχουμε: $\int x^{\mu}dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$

γιά $-\infty < x < +\infty$, ὅταν μ ἀκέραιος $\geqq 0$.

$$\int x^{-\nu}dx = \int \frac{dx}{x^{\nu}} = \frac{x^{-\nu+1}}{-\nu+1} + C = \frac{1}{(1-\nu)x^{\nu-1}} + C$$

γιά $-\infty < x < 0$ ἤ $0 < x < +\infty$, ὅταν ν φυσικός $\geqq 2$. Π.χ.

$$\int \frac{dx}{+\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\underset{+}{\sqrt{x}} + C \qquad \text{γιά } 0 < x < +\infty.$$

$$\int \underset{+}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{1/2}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x\underset{+}{\sqrt{x}} + C \quad \text{γιά } 0 < x < +\infty).$$

$$\int x^{-1}dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad \text{γιά } -\infty < x < 0 \text{ ἤ } 0 < x < +\infty.$$

Γενικότερα ἔχουμε

$$\int \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}\,dx = \int \frac{d\sigma(x)}{\sigma(x)} = \ln|\sigma(x)| + C$$

σέ κάθε διάστημα ὅπου ἡ $\sigma(x)$ δέν μηδενίζεται καί ἔχει πεπερασμένη παράγωγο $\sigma'(x)$.

$$\int e^{x}dx = e^{x} + C \qquad \text{γιά } -\infty < x < +\infty$$

$$\int \alpha^{x}dx = \frac{\alpha^{x}}{\ln\alpha} + C = x^{x}\lambda o\gamma_{\alpha}e + C \quad \text{γιά } -\infty < x < +\infty$$

ὅπου α θετική σταθερά $\neq 1$.

$$\int \sigma\upsilon\nu x\,dx = \eta\mu x + C, \quad \int \eta\mu x\,dx = -\sigma\upsilon\nu x + C$$

γιά $-\infty < x < +\infty$.

$$\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \varepsilon\varphi x + C \quad \text{σέ κάθε διάστημα } -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

ὅπου k ἀκέραια αὐθαίρετη σταθερά.

$$\int \frac{dx}{\eta\mu^2 x} = -\sigma\varphi x + C \quad \text{σέ κάθε διάστημα } k\pi < x < (k+1)\pi,$$

ὅπου k ἀκέραιος αὐθαίρετος.

$$\int \frac{dx}{+\sqrt{1-x^2}} = \tau o\xi_{o}\eta\mu x + C_1 = -\tau o\xi_{o}\sigma\upsilon\nu x + C_2 \quad \text{γιά } -1 < x < 1.$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{τοξεφ}x + C_1 = -\text{τοξ}_0\text{σφ}x + C_2 \quad \text{γιά } -\infty < x < +\infty .$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C \quad \text{γιά } -\infty < x < -1 \text{ ἤ } -1 < x < 1 \text{ ἤ } 1 < x < +\infty .$$

$$\int \frac{dx}{+\sqrt{1+x^2}} = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C \quad \text{γιά } -\infty < x < +\infty .$$

$$\int \frac{dx}{+\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C \quad \text{γιά τό } -\infty < x < -1 \text{ ἤ } 1 < x < +\infty .$$

$$\int \text{sh}x dx = \text{ch}x + C \quad , \int \text{ch}x \cdot dx = \text{sh}x + C \quad \text{γιά } -\infty < x < +\infty .$$

$$\int \frac{dx}{\text{ch}^2 x} = \text{th}x + C \quad , \text{ γιά } -\infty < x < +\infty \quad , \int \frac{dx}{\text{sh}^2 x} = \text{cth}x + C$$

γιά $-\infty < x < 0$ ἤ $0 < x < +\infty$.

Στά παραπάνω ἀόριστα ὁλοκληρώματα ἀνάγονται ἕνα πλῆθος ἀπό ἄλλα ὁλοκληρώματα πού παρουσιάζονται στίς στοιχειωδέστερες ἐφαρμογές τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως.

Θά ἐκθέσουμε παρακάτω τίς κυριότερες μεθόδους αὐτῆς τῆς ἀναγωγῆς.

§ 228. Παρατηροῦμε πρῶτα ὅτι, γιά α = σταθερά, ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\int \alpha\varphi(x)\, dx = \alpha \int \varphi(x) dx .$$

Ἔτσι βρίσκουμε π.χ.

$$\int 5x^3 dx = 5\int x^3 dx = 5\left(\frac{x^4}{4} + C_1\right) = \frac{5x^4}{4} + C_2 \; ,$$

ὅπου C_2 ἡ αὐθαίρετη σταθερά ὁλοκληρώσεως, ὅπως λέμε.

§ 229. Παρατηροῦμε δεύτερον ὅτι:

$$\int \left\{\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_\nu(x)\right\} dx = \int \varphi_1(x)dx + \ldots + \int \varphi_\nu(x)dx$$

μέ τήν προϋπόθεση φυσικά ὅτι οἱ προσθετόμενες συναρτήσεις $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_\nu(x)$ ἔχουν ἡ καθεμιά τους παράγουσα σ'ἕνα κοινό γιά ὅλες διάστημα μεταβολῆς τῆς x.

Ἔτσι βρίσκουμε π.χ. τό ἀόριστο ὁλοκλήρωμα κάθε ἀκέραιας πολυωνυμικῆς συναρτήσεως τοῦ $\mathbf{x}$ στό διάστημα $-\infty < \mathbf{x} < +\infty$:

$$\int (\alpha_\nu \mathbf{x}^\nu + \alpha_{\nu-1}\mathbf{x}^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 \mathbf{x} + \alpha_0)\, d\mathbf{x} =$$
$$= \alpha_\nu \frac{\mathbf{x}^{\nu+1}}{\nu+1} + \alpha_{\nu-1}\frac{\mathbf{x}^\nu}{\nu} + \ldots + \alpha_1 \frac{\mathbf{x}^2}{2} + \alpha_0 \mathbf{x} + C$$

ὅπου C αὐθαίρετη σταθερά.

§ 230. Ὁλοκλήρωση μέ ἀντικατασταση. Ἡ σχέση $\Phi(\mathbf{x}) = \int \varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ δέν σημαίνει, κατά τούς ὁρισμούς τοῦ § 225, τίποτε ἄλλο παρά ὅτι σέ κάποιο διάστημα $\gamma < \mathbf{x} < \delta$

$$d\Phi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad \text{ἤ} \quad \Phi'(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) \; .$$

Ἄς εἶναι τώρα $\mathbf{x} = \sigma(t)$ μιά συνάρτηση τοῦ t μονοσήμαντα ὁρισμένη καί ἀντιστρέψιμη στό διάστημα $\Gamma < t < \Delta$, μέ πεπερασμένη παράγωγο $\sigma'(t)$ στό διάστημα αὐτό καί τέτοια ὥστε

$$\gamma < \sigma(t) < \delta \quad \text{ὅταν} \quad \Gamma < t < \Delta \; .$$

Ἡ σύνθετη συνάρτηση $\varphi(\sigma(t))$ ἔχει τότε στό διάστημα $\Gamma < t < \Delta$ παράγωγο:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \Phi'_x(\sigma(t))\,\sigma'(t) = \varphi(\sigma(t))\,\sigma'(t) \quad ,$$

ἀντιστοίχως διαφορικό:

$$d\Phi = \Phi'_x(\sigma(t))\sigma'(t)dt = \varphi(\sigma(t))\sigma'(t)dt \, .$$

Ἄρα ἡ $\Phi(\sigma(t))$ εἶναι παράγουσα τῆς $\varphi(\sigma(t))\,\sigma'(t)$, συνεπῶς

$$C + \Phi(\sigma(t)) = \int \varphi(\sigma(t))\,\sigma'(t)dt \; .$$

Μέ ἄλλα λόγια: ἄν γνωρίζουμε ἕνα ἀόριστο ὁλοκλήρωμα $\Phi(\mathbf{x})$ τῆς $\varphi(x)$ θά ξέρουμε καί τό ἀόριστο ὁλοκλήρωμα $\int \varphi(\sigma(t))\sigma'(t)dt$ τῆς $\varphi(\sigma(t))\sigma'(t)$: αὐτό ἰσοῦται μέ τή σύνθετη συνάρτηση $\Phi(\sigma(t)) + C$.

Ἀντιστρόφως, ἄν γνωρίζουμε ἕνα ἀόριστο ὁλοκλήρωμα $\Omega(t)$

τῆς $\varphi(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)$, δηλ. ἄν

$$\Omega(t) = \int \varphi(\sigma(t))\sigma'(t)\cdot dt$$

τότε θά μποροῦμε νά βροῦμε τό ἀόριστο ὁλοκλήρωμα $\int\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ παίρνοντας τήν ἀντίστροφη πρός τή $\mathbf{x} = \sigma(t)$ συνάρτηση $t = s(x)$ καί ὑποκαθιστώντας την μέσα στήν $\Omega(t)$· πράγματι ἔχουμε

$$\frac{d}{d\mathbf{x}}\Omega(s(\mathbf{x})) = \Omega'_t\ t'_x = \varphi(\sigma(t))\ \sigma'(t)\ \frac{1}{\mathbf{x}'(t)} =$$

$$= \varphi(\mathbf{x})\sigma'(t)\ \frac{1}{\sigma'(t)} = \varphi(\mathbf{x}) .$$

Ἡ ἐφαρμογή τῆς παραπάνω μεθόδου στόν ὑπολογισμό ἑνός ἀορίστου ὁλοκληρώματος $\int\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ γίνεται μέ τήν εὕρεση μιᾶς κατάλληλης συναρτήσεως $\mathbf{x} = \sigma(t)$ τέτοιας ὥστε τό ἀόρ. ὁλοκλήρωμα μα $\int\varphi(\sigma(t))\sigma'(t)dt$ (πού προκύπτει μέ ὑποκατάσταση τοῦ $\mathbf{x} = \sigma(t)$ στό $\int\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x}$) νά μᾶς εἶναι γνωστό.

§ 231. <u>Ἐφαρμογές</u>. I. Ἄς εἶναι γνωστό τό $\int f(t)dt = F(t)+C$. Ζητιέται τό $\int f(\alpha\mathbf{x}+\beta)d\mathbf{x}$, ὅπου α,β σταθερές, ἡ $\alpha \neq 0$. Θέτουμε $\alpha\mathbf{x}+\beta = t$ ὁπότε $\mathbf{x} = \frac{t-\beta}{\alpha}$ καί $d\mathbf{x} = \frac{1}{\alpha}dt$.

Μ'αὐτήν τήν ἀλλαγή μεταβλητῆς τό $\int f(\alpha\mathbf{x}+\beta)d\mathbf{x}$ μετασχηματίζεται στό $\int f(t)\ \frac{1}{\alpha}\ dt$· ἀλλά

$$\int f(t)\ \frac{1}{\alpha}\ dt = \frac{1}{\alpha}\int f(t)dt = \frac{1}{\alpha}F(t) + C ,$$

ἄρα $$\int f(\alpha\mathbf{x}+\beta)d\mathbf{x} = \frac{1}{\alpha}F(\alpha\mathbf{x}+\beta) + C .$$

<u>Παραδείγματα:</u> $$\int \text{συν}(\alpha\mathbf{x}+\beta)d\mathbf{x} = \frac{1}{\alpha}\,\text{ημ}(\alpha\mathbf{x}+\beta) + C ,$$

$$\int \text{ημ}(\alpha\mathbf{x}+\beta)d\mathbf{x} = -\frac{1}{\alpha}\,\text{συν}(\alpha\mathbf{x}+\beta) + C ,$$

$$\int\sqrt{\alpha\mathbf{x}+\beta}\ d\mathbf{x} = \frac{1}{\alpha}\ \frac{(\alpha\mathbf{x}+\beta)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3\alpha}(\alpha\mathbf{x}+\beta)\sqrt{\alpha\mathbf{x}+\beta} + C ,$$

$$\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2(2x-3)} = \frac{1}{2}\,\varepsilon\varphi(2x-3) + C\ .$$

§ 232. II) $\int \eta\mu^2 x\, dx = \int \frac{1}{2}(1-\sigma\upsilon\nu 2x)\, dx =$

$$\int \frac{1}{2}\, dx - \int \frac{1}{2}\,\sigma\upsilon\nu 2x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{\eta\mu 2x}{2} + C = \frac{x}{2} - \frac{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}{2} + C\ .$$

Όμοια βρίσκουμε τό $\int \sigma\upsilon\nu^2 x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{2} + C$,

$$\int \eta\mu^3 x\, dx = \int \eta\mu x\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\sigma\upsilon\nu 2x\right)dx =$$

$$\int \frac{1}{2}\,\eta\mu x\, dx - \frac{1}{2}\int \eta\mu x\sigma\upsilon\nu 2x\, dx =$$

$$\int \frac{1}{2}\,\eta\mu x dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}\big(\eta\mu 3x + \eta\mu(-x)\big)dx =$$

$$-\frac{1}{4}\int \eta\mu 3x dx + \frac{3}{4}\int \eta\mu x dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{3} - \frac{3}{4}\,\sigma\upsilon\nu x + C\ ,$$

$$\int \sigma\upsilon\nu^3 x\, dx = \int \frac{1}{4}(\sigma\upsilon\nu 3x + 3\sigma\upsilon\nu x)dx = \frac{1}{4}\,\frac{\eta\mu 3x}{3} + \frac{3}{4}\,\eta\mu x + C\ .$$

Μέ ὅμοιο τρόπο ὑπολογίζονται τά $\int \eta\mu^\nu x\, dx$, $\int \sigma\upsilon\nu^\nu x\, dx$ ὅπου ν φυσικός ἀριθμός: ἐκφράζουμε πρῶτα τή νιοστή δύναμη τοῦ ημx ἤ συνx μέ τά ἡμίτονα καί συνημίτονα τῶν φυσικῶν πολλαπλασίων νx, $(\nu-2)x$, $(\nu-4)x$,... τοῦ x καί κατόπιν ὁλοκληρώνουμε τό ἄθροισμα πού προκύπτει χρησιμοποιώντας τή μέθοδο τοῦ § 231.

233. III) $\int \frac{dx}{+\sqrt{\alpha^2-x^2}}$, ὅπου α θετική σταθερά. Θέτουμε $x = \alpha t$, ὁπότε

$$\int \frac{dx}{+\sqrt{\alpha^2-x^2}} = \int \frac{\alpha dt}{+\sqrt{\alpha^2-\alpha^2 t^2}} = \int \frac{dt}{+\sqrt{1-t^2}}$$

$$\tau o\xi_o \eta\mu t + C = \tau o\xi_o \eta\mu\,\frac{x}{\alpha} + C\ .$$

Όμοια $\int \frac{dx}{+\sqrt{\alpha^2+x^2}} = \int \frac{\alpha dt}{+\sqrt{\alpha^2+\alpha^2 t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln(t+\sqrt{1+t^2}) + C =$

$$\ln\left(\frac{x}{\alpha} + \sqrt{1+\frac{x^2}{\alpha^2}}\right) + C\ .$$

$$\int \frac{dx}{\alpha^2+x^2} = \int \frac{\alpha dt}{\alpha^2+\alpha^2 t^2} = \frac{1}{\alpha}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\alpha}\,\text{τοξ}_\text{o}\text{εφ}\,t + C =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\,\text{τοξ}_\text{o}\text{εφ}\,\frac{x}{\alpha} + C\,.$$

$\int\sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx$. Τό x ἔχει πεδίο μεταβολῆς τό διάστημα $-\alpha \leqq x \leqq \alpha$. Ἄρα μποροῦμε νά θέσουμε $x = \alpha\,\text{ημ}\,t$ μέ $-\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$, ὁπότε $t = \text{τοξ}_\text{o}\text{ημ}\,\frac{x}{\alpha}$. Μέ τήν ἀντικατάσταση αὐτή λαβαίνουμε

$$\int \overset{+}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}\cdot dx = \int\sqrt{\alpha^2-\alpha^2\text{ημ}^2 t}\cdot \alpha\,\text{συν}\,t\,dt = \alpha^2\int \text{συν}^2 t\,dt =$$

$$\alpha^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\text{ημ}\,t\,\text{συν}\,t}{2}\right) + C = \frac{\alpha^2}{2}\,\text{τοξ}_\text{o}\text{ημ}\,\frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha^2}{2}\cdot\frac{x}{\alpha}\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}} + C$$

$$= \frac{\alpha^2}{2}\,\text{τοξ}_\text{o}\text{ημ}\,\frac{x}{\alpha} + \frac{1}{2}\,x\overset{+}{\sqrt{\alpha^2-x^2}} + C\,.$$

§ 234. <u>Παραγοντική (ἤ μερική) ὁλοκλήρωση.</u> Αὐτή ἡ μέθοδος ὁλοκληρώσεως πηγάζει ἀπό τόν κανόνα παραγωγίσεως γινομένου:

$$\left\{\sigma(x)\varphi(x)\right\}' = \sigma'(x)\varphi(x) + \sigma(x)\varphi'(x)\,.$$

Ἀπό αὐτήν τή σχέση, πού ὑποθέτουμε ἰσχύουσα γιά ὅλα τά x κάποιου διαστήματος $\alpha < x < \beta$, ἕπεται ὅτι

$$\sigma(x)\varphi(x) + C = \int(\sigma'(x)\varphi(x) + \sigma(x)\varphi'(x))\,dx$$
$$= \int\sigma'(x)\varphi(x)dx + \int\sigma(x)\varphi'(x)dx$$

καί ἑπομένως

$$\int\sigma(x)\varphi'(x)dx = \sigma(x)\varphi(x) - \int\varphi(x)\sigma'(x)dx + C\,,$$

ἤ ἐπειδή τή σταθερά C μποροῦμε νά τή συγχωνεύσουμε μέ τήν προσθετική σταθερά πού ἐμπεριέχεται στό $\int\varphi(x)\sigma'(x)dx$,

$$\int\sigma(x)\varphi'(x)dx = \varphi(x)\sigma(x) - \int\varphi(x)\sigma'(x)dx\,.$$

Τόν τύπο αὐτό μποροῦμε νά τόν γράφουμε καί ὡς ἑξῆς:

Ἔστω $f(x)$ μιά συνάρτηση πού ἔχει παράγουσα τήν $F(x)$· θά ἔχουμε τότε

$$\int \sigma(x)f(x)dx = F(x)\sigma(x) - \int F(x)\sigma'(x)\,dx\,.$$

Έτσι ὁ ὑπολογισμός τοῦ $\int \sigma(x)f(x)dx$ ἀνάγεται στόν ὑπογισμό τοῦ $\int F(x)\sigma'(x)dx$ (ὁ ὁποῖος ἐνδεχομένως μᾶς εἶναι γνωστός ἤ εὔκολος).

Ἡ ἐφαρμογή τῆς μεθόδου στόν ὑπολογισμό ἑνός $\int g(x)dx$ γίνεται μέ ἀνάλυση τῆς $g(x)$ σέ γινόμενο δυό παραγόντων $g_1(x)g_2(x)$ τέτοιων πού νά ξέρουμε νά ὑπολογίζουμε τά ὁλοκληρώματα

$$\int g_2(x)dx = G_2(x) + C \qquad \text{καί} \quad \int G_2(x)g_1'(x)dx \quad .$$

<u>Παραδείγματα.</u> 1) $\int xe^x dx$. Ὁλοκληρώνουμε τό διαφορικό $e^x dx$, πρᾶγμα πού μᾶς δίνει e^x.

Κατόπιν θά ἔχουμε νά παραγωγίσουμε τόν ἄλλο παράγοντα x, πρᾶγμα πού θά μᾶς δώση μιά σταθερά καί ἔτσι ἀναγόμαστε στό $\int e^x dx$:

$$\int xe^x dx = \int x\, de^x = e^x \cdot x - \int e^x \cdot 1 \cdot dx = xe^x - e^x + C\,.$$

Μέ ἐπανειλημμένη ἐφαρμογή τῆς παραγοντικῆς ὁλοκληρώσεως μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε τά ὁλοκληρώματα τῆς μορφῆς $\int \pi(x)e^{\alpha x}dx$, ὅπου α μιά σταθερά $\neq 0$ καί $\pi(x)$ ἀκέραιο πολυώνυμο τοῦ x. Π.χ.

$$\int (x^2-2x+3)e^{-x}\,dx = -e^{-x}(x^2-2x+3) - \int (-e^{-x})(2x-2)\,dx\,,$$

ἀλλά $\int e^{-x}(2x-2)dx = \int (2x-2)e^{-x}dx = -e^{-x}(2x-2) - \int (-e^{-x})2dx$

$$= -e^{-x}(2x-2) + 2\int e^{-x}dx = -(2x-2)e^{-x} - 2e^{-x} + C\,.$$

Ἄρα $\int (x^2-2x+3)e^{-x}\,dx = e^{-x}(-x^2+2x-3-2x+2-2)+C = e^{-x}(-x^2-3)+C$.

2) Μέ ὅμοια μέθοδο ὑπολογίζονται τά ὁλοκληρώματα $\int \pi(x)\cdot\eta\mu\alpha x\cdot dx$ καί $\int \pi(x)\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha x\cdot dx$, ὅπου α σταθερά $\neq 0$ καί $\pi(x)$ ἀκέραιο πολυώνυμο. Π.χ.

$$\int (x^2+8)\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{x}{2}\,dx = 2\eta\mu\,\frac{x}{2}\,(x^2+8) - \int 2\eta\mu\,\frac{x}{2}\cdot 2x dx \;.$$

'Αλλά $-4\int \eta\mu\,\frac{x}{2}\,x dx = -4\int x\,\eta\mu\,\frac{x}{2}\,dx = -4(-2\sigma\upsilon\nu\,\frac{x}{2})x +$
$+4\int (-2\sigma\upsilon\nu\,\frac{x}{2})\,dx = 8x\sigma\upsilon\nu\,\frac{x}{2} - 8\int \sigma\upsilon\nu\,\frac{x}{2}dx = 8x\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2} - 8\cdot 2\eta\mu\,\frac{x}{2} + C.$

Ἄρα $\int (x^2+8)\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{x}{2}\,dx = 2(x^2+8)\,\eta\mu\,\frac{x}{2} + 8x\sigma\upsilon\nu\,\frac{x}{2} - 16\eta\mu\,\frac{x}{2} + C.$

$$= 2x^2\,\eta\mu\,\frac{x}{2} + 8x\cdot\sigma\upsilon\nu\,\frac{x}{2} + C$$

3. $\int x^{\alpha}\ln x\,dx$, ὅπου α σταθερά $\neq 1$.

Ἔχουμε $\int x^{\alpha}\ln x\,dx = \int \ln x\cdot x^{\alpha}dx =$

$$= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x - \int \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\cdot\frac{1}{x}\cdot dx =$$

$$\frac{1}{\alpha+1}\,x^{\alpha+1}\ln x - \frac{1}{\alpha+1}\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}\,x^{\alpha+1}\ln x - \frac{1}{\alpha+1}\cdot\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C =$$

$$= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\ln x - \frac{1}{\alpha+1}\right) + C \;.$$

4. $\int \tau o\xi_o\varepsilon\varphi x dx = \int \tau o\xi_o\varepsilon\varphi x\cdot 1dx =$

$$= x\tau o\xi_o\varepsilon\varphi x - \int x\,\frac{dx}{1+x^2}$$

'Αλλά $\int \frac{x dx}{1+x^2} = \dfrac{\frac{1}{2}\,d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$.

ἄρα $\int \tau o\xi_o\varepsilon\varphi x\,dx = x\cdot\tau o\xi_o\varepsilon\varphi x - \ln\sqrt{x^2+1} + C$.

Ὅμοια βρίσκουμε

$$\int \tau o\xi_o\eta\mu x\,dx = \int \tau o\xi_o\eta\mu x\cdot 1\cdot dx = x\,\tau o\xi_o\eta\mu x - \int x\,\frac{dx}{+\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x\tau o\xi_o\eta\mu x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot d(1-x^2) = x\tau o\xi_o\eta\mu x + \frac{1}{2}\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2 + C$$

$$= x\tau o\xi_o\eta\mu x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

§ 235. Ἄς ἔχουμε νά ὑπολογίσουμε τά

$$J_1 = \int e^{\alpha x}\sigma\upsilon\nu\beta x\,dx \quad \text{καί} \quad J_2 = \int e^{\alpha x}\eta\mu\beta x dx \;,$$

ὅπου α καί β σταθερές $\neq 0$. 'Εφαρμόζοντας τήν παραγοντική ὁλοκλήρωση ἀνάγουμε τό ἕνα ὁλοκλήρωμα στό ἄλλο:

$$J_1 = \int e^{\alpha x}\sigma\upsilon\nu\beta x\cdot dx = e^{\alpha x}\frac{\eta\mu\beta x}{\beta} - \int \frac{\eta\mu\beta x}{\beta}\,\alpha e^{\alpha x}\,dx =$$

$$= \frac{e^{\alpha x}\eta\mu\beta x}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}(J_2 + C_1') \;,$$

$$J_2 = \int e^{\alpha x}\eta\mu\beta x dx = e^{\alpha x}\frac{-\sigma\upsilon\nu\beta x}{\beta} - \int \frac{-\sigma\upsilon\nu\beta x}{\beta}\,\alpha e^{\alpha x}\,dx =$$

$$= \frac{-e^{\alpha x}\sigma\upsilon\nu\beta x}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta}(J_1 + C_2') \,,$$

ὅπου C_1' καί C_2' σταθερές.

Ἔτσι ἔχουμε δυό γραμμικές ἐξισώσεις γιά τά ἄγνωστα J_1, J_2:

$$J_1 + \frac{\alpha}{\beta}J_2 = \frac{e^{\alpha x}\eta\mu\beta x}{\beta} + C_1 \quad , \quad -\frac{\alpha}{\beta}J_1 + J_2 = -\frac{e^{\alpha x}\sigma\upsilon\nu\beta x}{\beta} + C_2$$

ὅπου C_1 καί C_2 σταθερές.

Ἐπιλύοντας τό σύστημα λαβαίνουμε:

$$J_1 = e^{\alpha x}\frac{(\alpha\sigma\upsilon\nu\beta x + \beta\eta\mu\beta x)}{\alpha^2 + \beta^2} + C_3$$

$$J_2 = e^{\alpha x}\frac{(\alpha\eta\mu\beta x - \beta\sigma\upsilon\nu\beta x)}{\alpha^2 + \beta^2} + C_4$$

ὅπου C_3 καί C_4 αὐθαίρετες σταθερές ὁλοκληρώσεως.

§ 236. Κάποτε ὁδηγεῖ σέ μιάν ἐξίσωση γιά τό ἄγνωστο ὁλοκλήρωμα ἡ συνδυασμένη χρήση τῆς παραγοντικῆς ὁλοκληρώσεως καί τεχνασμάτων (= εἰδικῶν γιά τό ζήτημα μεθόδων ἐργασίας).

Π.χ. $$\int \sqrt{\alpha^2+x^2}\,dx = \int \sqrt{\alpha^2+x^2}\cdot 1\cdot dx = x\sqrt{\alpha^2+x^2} - \int x\frac{xdx}{\sqrt{\alpha^2+x^2}}$$

$$= x\sqrt{\alpha^2+x^2} - \int \frac{\alpha^2+x^2-\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+x^2}}\,dx = x\sqrt{\alpha^2+x^2} - \int \sqrt{\alpha^2+x^2}\,dx +$$

$$+ \int \frac{\alpha^2\,dx}{\sqrt{\alpha^2+x^2}} \,.$$

τέχνασμα εἶναι ἐδῶ ἡ ἀνάλυση τοῦ x^2 σέ $(\alpha^2+x^2)-\alpha^2$ καί ἀντιστοίχως τοῦ $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{\alpha^2+x^2}}$ σέ

$$\int \frac{\alpha^2+x^2}{\sqrt{\alpha^2+x^2}}\,dx - \int \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+x^2}}\,dx = \int \sqrt{\alpha^2+x^2}\,dx - \alpha^2\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2+x^2}}$$

ὅπου τό $\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2+x^2}}$ εἶναι ἤδη γνωστό (§ 233). Ἀπό τήν παραπάνω ἐξίσωση γιά τό $\int \sqrt{\alpha^2+x^2}\,dx$ ἕπεται:

$$2\int \sqrt{\alpha^2+x^2}\,dx = x\sqrt{\alpha^2+x^2}+\alpha^2\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2+x^2}}$$

$$= x\sqrt{\alpha^2+x^2}+\alpha^2 \ln\left(\frac{x}{\alpha}+\sqrt{1+\frac{x^2}{\alpha^2}}\right)+C_1$$

καί τελικά $\int \sqrt{\alpha^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{\alpha^2+x^2}+\frac{\alpha^2}{2}\ln\left(\frac{x}{\alpha}+\sqrt{1+\frac{x^2}{\alpha^2}}\right)+C$

§ 237. Ἀναγωγικοί τύποι. Ἔτσι καλοῦνται τύποι πού ἀνάγουν ἕνα ἀόριστο ὁλοκλήρωμα σ'ἕνα ἄλλο ἁπλούστερο τῆς ἴδιας μορφῆς.

Π.χ. ἔστω τό $J_\alpha = \int (t^2+1)^\alpha dt$, ὅπου α σταθερά $\neq -1$.

Ἔχουμε

$$J_\alpha = \int (t^2+1)^\alpha dt = \int (t^2+1)^\alpha (t^2+1-t^2)dt =$$

$$= J_{\alpha+1} - \int (t^2+1)^\alpha t^2 dt \quad .$$

Ἀλλά $\int (t^2+1)^\alpha t^2 dt = \int t\cdot(t^2+1)^\alpha\cdot t\cdot dt = t\cdot\frac{1}{2}\frac{(t^2+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} -$

$$-\int \frac{(t^2+1)^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)}dt = \frac{(t^2+1)^{\alpha+1}t}{2(\alpha+1)} - \frac{1}{2(\alpha+1)}J_{\alpha+1} \; .$$

Ἄρα $J_\alpha = J_{\alpha+1} - \frac{(t^2+1)^{\alpha+1}t}{2(\alpha+1)} + \frac{1}{2(\alpha+1)}J_{\alpha+1} = \frac{2\alpha+3}{2\alpha+2}J_{\alpha+1} - \frac{(t^2+1)^{\alpha+1}t}{2\alpha+2}$

Ἡ σχέση αὐτή ἀνάγει τό $J_\alpha = \int (t^2+1)^\alpha dt$ στό $J_{\alpha+1} = \int (t^2+1)^{\alpha+1}dt$ ἤ ἀντιστρόφως τό $J_{\alpha+1}$ στό J_α καί ἀποτελεῖ ἕναν ἀναγωγικό τύπο.

Ἄν εἰδικῶς $\alpha = -\mu =$ ἀρνητικός ἀκέραιος ($\leqq -2$), θά ἔχουμε

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^\mu} = \frac{2\mu-3}{2\mu-2}\int \frac{dt}{(t^2+1)^{\mu-1}} + \frac{t}{(2\mu-2)(t^2+1)^{\mu-1}} \quad .$$

Μέ ἐπανειλημμένη ἐφαρμογή τοῦ τελευταίου τύπου ἀνάγουμε τόν ὑπολογισμό τοῦ $\int \frac{dt}{(t^2+1)^\mu}$, ὅπου μ φυσικός $\geqq 2$, στό

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^1} = \text{τοξ.εφ}\,t + C \quad .$$

Π.χ. $\int \frac{dt}{(t^2+1)^3} = \frac{3}{4}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} + \frac{t}{4(t^2+1)^2}$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} + \frac{t}{2(t^2+1)}\right) + \frac{t}{4(t^2+1)^2}$$

$$= \frac{3}{8}\,\text{τοξ}_{\circ}\text{εφ}t + \frac{3}{8}\cdot\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{4}\,\frac{t}{(t^2+1)^2} + C\,.$$

238. <u>Ὁλοκλήρωση ρητῶν συναρτήσεων</u>. Ἔστω $R(x) = \frac{A(x)}{\Pi(x)}$ μιά ρητή συνάρτηση, δηλαδή πηλίκο δυό ἀκεραίων πολυωνύμων τοῦ x, τά ὁποῖα χωρίς βλάβη τῆς γενικότητας μποροῦμε νά ὑποθέσουμενπρῶτα πρός ἄλληλα. (Διότι, ἄν ὁ μέγιστος κοινός διαιρέτης τῶν $A(x)$ καί $\Pi(x)$ εἶναι πολυώνυμο βαθμοῦ $\geqq 1$, διαιροῦμε τά $A(x)$ καί $\Pi(x)$ διά τοῦ μεγίστου αὐτοῦ κ.δ.,ὁπότε τά πηλίκα θά εἶναι πολυώνυμα πρῶτα πρός ἄλληλα).

Ἄν βαθμός τοῦ $A(x) \geqq$ βαθμός τοῦ $\Pi(x)$, τότε ὅπως λέμε, "ἐξάγουμε (μέ διαίρεση) τό ἀκέραιο μέρος τοῦ κλάσματος $\frac{A(x)}{\Pi(x)}$":

$$\frac{A(x)}{\Pi(x)} = B(x) + \frac{Y(x)}{\Pi(x)}$$

ὅπου $B(x)$ ἀκέραιο πολυώνυμο βαθμοῦ $\geqq 0$ καί $Y(x)$ ἀκέραιο πολυώνυμο μέ βαθμό < τοῦ βαθμοῦ τοῦ $\Pi(x)$.

Ἔχουμε

$$\int R(x)\,dx = \int B(x)\,dx + \int \frac{Y(x)}{\Pi(x)}\,dx \quad ,$$

ἄρα μένει νά ὑπολογίσουμε τό τελευταῖο ὁλοκλήρωμα.

Θά θεωρήσωμεν τήν περίπτωση 2βαθμίου πολυωνύμου $\Pi(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$.

Ἡ μέθοδος γιά τήν περίπτωση ὁποιουδήποτε $\Pi(x)$ εἶναι ἐντελῶς ἀνάλογη, ἀρκεῖ νά γνωρίζουμε τίς ρίζες τοῦ $\Pi(x)$.

1η <u>ὑποπερίπτωση</u>: Τό $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ἔχει δυό ἁπλές πραγματικές ρίζες $\varrho_1 \neq \varrho_2$.

$$\Pi(x) \equiv \alpha x^2+\beta x + \gamma \equiv \alpha(x-\varrho_1)(x-\varrho_2)$$

Τό κλάσμα $\frac{Y(x)}{\Pi(x)}$ ἀναλύεται σέ ἄθροισμα δύο "ἁπλῶν" κλασμάτων:

$$\frac{Y(x)}{\Pi(x)} \equiv \frac{A_1}{x-\varrho_1} + \frac{A_2}{x-\varrho_2}$$

ὅπου A_1 καί A_2 σταθερές πού προσδιορίζονται εἴτε ἀπό τήν ταυτότητα ὡς πρός x : $Y(x) \equiv A_1\alpha(x-\varrho_2) + A_2\alpha(x-\varrho_2)$, ὅταν θέσουμε μέσα σ'αὐτήν διαδοχικά $x = \varrho_1$ καί $x = \varrho_2$, εἴτε μέ τήν εὕρεση τοῦ συντελεστοῦ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ πηλίκου τοῦ (κατα τίς ἀ ν ι ο ῦ σ ε ς δυνάμεις τοῦ $(x-\varrho_j)$ σύμφωνα μέ τόν τύπο Taylor διατεταγμένου πολυνύμου)

$$Y(x) \equiv Y(\varrho_j) + Y'(\varrho_j)(x-\varrho_j)$$

διά τοῦ (ὅμοια διατεταγμένου πολυωνύμου)

$$\Pi(x) \equiv \Pi'(\varrho_j)(x-\varrho_j) + \frac{\Pi''(\varrho_j)}{2!}(x-\varrho_j)^2 \quad .$$

(Τό ϱ_j σημαίνει εἴτε ϱ_1 εἴτε ϱ_2). Προκύπτουν ἔτσι οἱ ἐκφράσεις:

$$A_1 = \frac{Y(\varrho_1)}{\alpha(\varrho_1-\varrho_2)} = \frac{Y(\varrho_1)}{\Pi'(\varrho_1)} \quad , \quad A_2 = \frac{Y(\varrho_2)}{\alpha(\varrho_2-\varrho_1)} = \frac{Y(\varrho_2)}{\Pi'(\varrho_2)} \quad .$$

Ἄρα

$$\int \frac{Y(x)}{\Pi(x)}\,dx = A_1\int\frac{dx}{x-\varrho_1} + A_2\int\frac{dx}{x-\varrho_2} = A_1\ln|x-\varrho_1| + A_2\ln|x-\varrho_2| + C$$

2η <u>Ὑποπερίπτωση</u>: Τό $\Pi(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$ ἔχει μιά διπλή ρίζα ϱ: $\Pi(x) = \alpha(x-\varrho)^2$.

Τό κλάσμα $\frac{T(x)}{\Pi(x)}$ ἀναλύεται σέ ἄθροισμα δύο "ἁπλῶν" κλασμάτων

$$\frac{Y(x)}{\Pi(x)} \equiv \frac{A}{(x-\varrho)^2} + \frac{B}{x-\varrho} \quad ,$$

ὅπου A καί B σταθερές πού προσδιορίζονται εἴτε ἀπό τήν ταυτότητα ὡς πρός x : $Y(x) = A\alpha + B\alpha(x-\varrho)$, ὅταν θέσουμε μέσα σ' αὐτήν διαδοχικά $x = \varrho$ καί $x = \varrho+1$, εἴτε μέ τήν εὕρεση τῶν συντελεστῶν τῶν δυό πρώτων ὅρων τοῦ πηλίκου τοῦ (κατά τίς ά ν ι ο ῦ σ ε ς δυνάμεις τοῦ $(x-\varrho)$ διατεταγμένου πολυωνύμου)

$$Y(x) = Y(\varrho) + Y'(\varrho)(x-\varrho)$$

διά τοῦ (ὅμοια διατεταγμένου) $\Pi(x) = \alpha(x-\varrho)^2$. Ἔτσι προκύπτουν οἱ ἐκφράσεις

$$A = \frac{Y(\varrho)}{\alpha} \quad , \quad B = \frac{Y(\varrho+1) - Y(\varrho)}{\alpha} = \frac{Y'(\varrho)}{\alpha} .$$

$$\int \frac{Y(x)}{\Pi(x)}\,dx = A\int \frac{dx}{(x-\varrho)^2} + B\int \frac{dx}{x-\varrho} = A\,\frac{(x-\varrho)^{-1}}{-1} + B\ln|x-\varrho| + C$$

3η Ὑποπερίπτωση. Το $\Pi(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$ ἔχει φανταστικές ρίζες, δηλ. $\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma < 0$. Γιά νά μή εἰσαγάγουμε φανταστικούς ἀριθμούς χρησιμοποιοῦμε τούς ἀκόλουθους μετασχηματισμούς. Ἔχουμε

$$\frac{Y(x)}{\Pi(x)} \equiv \frac{mx+n}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} \equiv \frac{mx+n}{\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4\alpha}} = \frac{\frac{m}{\alpha}x + \frac{n}{\alpha}}{\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4\alpha^2}} .$$

Τό θετικό ἀριθμό $\frac{-\Delta^2}{4\alpha^2}$ τόν καλοῦμε ϑ^2, ὅπου $\vartheta > 0$, καί θέτουμε $x + \frac{\beta}{2\alpha} = \vartheta t$. Μ'αὐτήν τήν ἀντικατάσταση λαβαίνουμε

$$\int \frac{Y(x)}{\Pi(x)}\,dx = \int \frac{\frac{m}{\alpha}\left(\vartheta t - \frac{\beta}{2\alpha}\right) + \frac{n}{\alpha}}{\vartheta^2t^2+\vartheta^2}\cdot\vartheta . dt =$$

$$= \frac{m}{\alpha}\int \frac{t dt}{t^2+1} + \left(\frac{n}{\alpha} - \frac{\beta m}{2\alpha^2}\right)\frac{1}{\vartheta}\int\frac{dt}{t^2+1}$$

$$= \frac{m}{2\alpha}\ln(t^2+1) + \left(\frac{n}{\alpha} - \frac{\beta m}{2\alpha^2}\right)\frac{1}{\vartheta}\,\text{τοξ.εφ}\,t + C .$$

Δέν ἔχουμε τώρα παρά νά θέσουμε, μέσα στήν τελευταία συνάρτηση τοῦ t, ἀντίστροφα $t = \frac{1}{\vartheta}\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)$ γιά νά λάβουμε τή ζητούμενη παράγουσα $\int \frac{Y(x)}{\Pi(x)}\cdot dx$ ἐκφρασμένη διά τοῦ x.

§ 239. Σέ ὁλοκλήρωση ρητῶν συναρτήσεων ἀνάγεται (συνήθως μέ ἀντικατάσταση) ἡ ὁλοκλήρωση ἐκτεταμένων κατηγοριῶν συναρτήσεων. Θά ἀναφέρουμε παρακάτω τίς κυριότετες.

I. Ρητές συναρτήσεις τῆς $e^{\alpha x}$(α σταθερά $\neq 0$). Αὐτές προκύπτουν ὅταν μέσα σέ μιάν τυχοῦσα ρητή συνάρτηση R(u) μιᾶς μεταβλητῆς u ἀντικαταστήσουμε τό u μέ $e^{\alpha x}$. Ὁ ὑπολογισμός $\int R(e^{\alpha x})dx$ ἀνάγεται σέ ὁλοκλήρωση μιᾶς ρητῆς συναρτήσεως (§ 238) μέ τήν ἀλλαγή μεταβλητῆς: $e^{\alpha x} = t$, $x = \frac{1}{\alpha}\ln t$, $dx = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{dt}{t}$. Ἡ ἀντικατάσταση αὐτή μετατρέπει τό

$$\int R(e^{\alpha x})\,dx \quad \text{στό} \quad \int R(t)\,\frac{1}{\alpha t}\,dt$$

ὅπου ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτηση $R(t)\,\frac{1}{\alpha t}$, εἶναι τώρα ρητή συνάρτηση τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς t.

Π.χ.
$$\int\frac{dx}{chx} = \int\frac{2dx}{e^{x}+e^{-x}} = \int\frac{2e^{x}dx}{e^{2x}+1} = \int\frac{2t}{t^2+1}\cdot\frac{dt}{t} = 2\int\frac{dt}{t^2+1}$$

$$= 2\text{τοξ}_{\text{ο}}\text{εφ}t + C = 2\text{τοξ}_{\text{ο}}\text{εφ}e^{x} + C \quad .$$

§ 240. II. Ρητές συναρτήσεις τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων. Αὐτές εἶναι τῆς μορφῆς R(ημx,συνx), ὅπου R(u,υ) ρητή συνάρτηση τῶν δυό μεταβλητῶν u καί υ. Ἐπειδή τά ημx καί συνx ἐκφράζονται ρητῶς διά τῆς εφ $\frac{x}{2}$, γι'αὐτό θέτουμε

$$\text{εφ}\,\frac{x}{2} = t \quad , \quad x = 2\text{τοξ}_{\text{ο}}\text{εφ}t \quad , \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \quad ,$$

ὁπότε
$$\text{ημ}x = \frac{2\text{εφ}\,\frac{x}{2}}{1+\text{εφ}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{καί} \quad \text{συν}x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \; ,$$

Ἡ ἀντικατάσταση αὐτή μετασχηματίζει τό ὁλοκλήρωμα

$$\int R(\text{ημ}x,\text{συν}x)\,dx \quad \text{στό} \quad \int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\,\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\cdot dt$$

ὅπου ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτηση $R\left(\frac{2t}{1+t^2},\,\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}$ εἶναι τώρα ρητή συνάρτηση τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς t.

Π.χ. $\int \frac{dx}{\eta\mu x} = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\varepsilon\varphi\, \frac{x}{2}\right| + C$.

241. III. Ρητές συναρτήσεις τῆς x καί τῆς $\sqrt[\nu]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$.

Αὐτές προκύπτουν, ὅταν μέσα σέ μιάν τυχούσα ρητή συνάρτηση R(u,υ) δυό μεταβλητῶν u καί υ ἀντικαταστήσουμε τό u μέ x καί τό υ μέ τή νιοστή ρίζα $\sqrt[\nu]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$. (Ὑποτίθεται ὅτι οἱ σταθερές α,β,γ,δ ἱκανοποιοῦν τή συνθήκη

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \quad .$$

Τό ὁλοκλήρωμα $\qquad R\left(x\ ,\ \sqrt[\nu]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) \cdot dx$

μετατρέπεται σέ ὁλοκλήρωμα ρητῆς συναρτήσεως μέ τήν ἀντικατάσταση

$$t = \sqrt[\nu]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\ , \quad x = \frac{\delta t^\nu - \beta}{-\gamma t^\nu + \alpha}\ , \qquad dx = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(-\gamma t^\nu + \alpha)^2}\,\nu t^{\nu-1} dt\ .$$

Πραγματικά ἔχουμε μ'αὐτήν τήν ἀντικατάσταση:

$$R\left(x\ ,\sqrt[\nu]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) dx = \int R\left(\frac{\delta t^\nu - \beta}{-\gamma t^\nu + \alpha}\ ,\ t\right) \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(-\gamma t^\nu + \alpha)^2}\,\nu t^{\nu-1} dt\ ,$$

ὅπου ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτηση

$$R\left(\frac{\delta t^\nu - \beta}{-\gamma t^\nu + \alpha}\ ,\ t\right) \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(-\gamma t^\nu + \alpha)^2}\,\nu t^{\nu-1}$$

εἶναι τώρα ρητή συνάρτηση τοῦ t.

242. IV). Ρητές συναρτήσεις τῆς x καί τῆς $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$.

Τά ὁλοκληρώματα $\int R(x, \sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma})dx$ μετασχηματίζονται σέ ὁλοκληρώματα ρητῶν συναρτήσεων μέ ἀλλαγή μεταβλητῆς. Ἀρκεῖ γι' αὐτό προφανῶς νά βρεθῆ μιά τέτοια συναρτησιακή σχέση μεταξύ τῆς x καί μιᾶς νέας μεταβλητῆς t ὥστε καί ἡ x καί ἡ $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ νά γίνωνται ρητές συναρτήσεις τῆς t (ἤ, ὅπως ἀλλοιώτικα λέμε καί ἡ x καί ἡ $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ νά ἐκφράζωνται "ρητῶς" διά τῆς t).

Διακρίνουμε δυό περιπτώσεις καθόσο $\alpha > 0$ ἤ $\alpha < 0$.

1ο. $\alpha > 0$. Θέτουμε τότε

$$\sqrt{\alpha}\cdot x + \sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = t$$

ὁπότε $$\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = t - \underset{+}{\sqrt{\alpha}}\cdot x$$

καί ἐπομένως $$\alpha x^2+\beta x+\gamma = t^2-2\underset{+}{\sqrt{\alpha}}\, tx + \alpha x^2$$

ἀπ'ὅπου ἕπεται $$x = \frac{t^2-\gamma}{2\sqrt{\alpha}t+\beta} \quad \text{καί} \quad \sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = t-\underset{+}{\sqrt{\alpha}}\,\frac{t^2-\gamma}{2\underset{+}{\sqrt{\alpha}}t+\beta}.$$

Ἔτσι ἔχουμε ἐκφράσει καί τήν $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ καί τή x ρητῶς διά τῆς νέας μεταβλητῆς t, ὁ δέ κανόνας τῆς ἀντικαταστάσεως (§ 320) μᾶς δίνει.

$$\int R(x,\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma})dx = \int R\left(\frac{t^2-\gamma}{2\sqrt{\alpha}t+\beta},\ t-\underset{+}{\sqrt{\alpha}}\,\frac{t^2-\gamma}{2\underset{+}{\sqrt{\alpha}}t+\beta}\right) 2\,\frac{\sqrt{\alpha}t^2+\beta t+\gamma\sqrt{\alpha}}{(2\underset{+}{\sqrt{\alpha}}t+\beta)^2}dt$$

$$= \int R^*(t)dt$$

ὅπου ἡ $$R^*(t) = R\left(\frac{t^2-\gamma}{2\underset{+}{\sqrt{\alpha}}t+\beta},\ t-\underset{+}{\sqrt{\alpha}}\,\frac{t^2-\gamma}{2\underset{+}{\sqrt{\alpha}}t+\beta}\right)\cdot 2\,\frac{\sqrt{\alpha}t^2+\beta t+\gamma\sqrt{\alpha}}{(2\underset{+}{\sqrt{\alpha}}t+\beta)^2}$$

εἶναι ρητή συνάρτηση τοῦ t.

2ο. $\alpha < 0$. Ἐπειδή θεωροῦμε μόνο πραγματικούς ἀριθμούς θά ὑποθέσουμε ὅτι ἱκανοποιοῦνται οἱ ἀναγκαῖες καί ἱκανές συνθῆκες γιά νά εἶναι ἡ $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ πραγματικός ἀριθμός γιά ὅλα τά x κάποιου διαστήματος· ἐπομένως κάνουμε μαζί μέ τήν ὑπόθεση $\alpha<0$ καί τήν ὑπόθεση $\beta^2-4\alpha\gamma>0$, παίρνουμε δέ γιά πεδίο μεταβολῆς τῆς x τό διάστημα $\varrho_1 \leqq x \leqq \varrho_2$ τῶν δυό ἄνισων πραγματικῶν ριζῶν τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

Ἡ ἀντικατάσταση πού χρησιμοποιήσαμε στήν 1η περίπτωση θά εἰσῆγε τώρα φανταστικούς ἀριθμούς ($\sqrt{\alpha}$), γι'αὐτό καταφεύγουμε στήν ἀκόλουθη διαφορετική μέθοδο: Ἔχουμε τήν ταυτότητα

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma = \alpha(x-\varrho_1)(x-\varrho_2) = -\alpha\,\frac{x-\varrho_1}{\varrho_2-x}(\varrho_2-x)^2$$

καί ἐπομένως $$\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \underset{+}{\sqrt{-\alpha}}\cdot(\varrho_2-x)\sqrt{\frac{x-\varrho_1}{\varrho_2-x}}\quad .$$

Ἄρα ἡ $R(x,\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma})$ μπορεῖ νά θεωρηθῆ ρητή συνάρτηση τοῦ x καί τῆς $\sqrt{\dfrac{x-\varrho_1}{\varrho_2-x}}$, ἔτσι ὅμως ἀναγόμαστε στήν κατηγορία συναρτήσεων III), § 241, καί μποροῦμε νά προσφύγουμε στήν ἀντικατάσταση

$$\sqrt{\frac{x-\varrho_1}{\varrho_2-x}} = t \;, \quad x = \frac{\varrho_2 t^2+\varrho_1}{t^2+1} \;, \quad \sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \pm\sqrt{-\alpha}\,\frac{\varrho_2-\varrho_1}{t^2+1}\,t \;,$$

$$dx = \frac{(\varrho_2-\varrho_1)\,2t\,dt}{(t^2+1)^2} \;,$$

ἡ ὁποία μετασχηματίζει τό $\int R(x, \sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma})dx$ σέ ὁλοκλήρωμα ρητῆς συναρτήσεως:

$$\int R(x,\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma})dx = \int R\left(\frac{\varrho_2 t^2+\varrho_1}{t^2+1}, \frac{\pm\sqrt{-\alpha}(\varrho_2-\varrho_1)t}{t^2+1}\right)\cdot\frac{2(\varrho_2-\varrho_1)t}{(t^2+1)^2}\,dt$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

230. Ὑπολογίστε τίς παράγουσες τῶν πολυωνύμων $4x^4-16x^2+2x-\frac{1}{2}$ καί $8x^3-\frac{5}{2}x^2+\frac{2}{3}x-1$ οἱ ὁποῖες γιά $x = 1$ παίρνουν τήν τιμή -1.

231. Ὑπολογίστε (§ 229) τό ἀόριστο ὁλοκλήρωμα $\int \frac{2x^{7/3}-4x^2+2x-5}{3x^{1/3}}\,dx$. Σέ ποιά διαστήματα μεταβολῆς τῆς x ἰσχύει τό ἐξαγόμενο;

232. Ὑπολογίστε μέ ἀντικατάσταση τά

$$\int\frac{x\,dx}{x^4+1} \;, \quad \int \eta\mu^3 x\ \sigma\upsilon\nu x\, dx \;, \quad \int \sigma\upsilon\nu^4 x\cdot\eta\mu x\cdot dx \;,$$

γενικότερα τά: $\int \eta\mu^\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot dx$, $\int \sigma\upsilon\nu^\nu x\cdot\eta\mu x\cdot dx$, ὅπου ν φυσικός ἀριθμός.

233. Μέ κατάλληλες ἀντικαταστάσεις καί ἐνδεχομένως μέ κάποιους ἁπλούς μετασχηματισμούς ὑπολογίστε τά

$$\int\frac{dx}{4-3x} \;, \quad \int\frac{3x\,dx}{x^2-1} \;, \quad \int\sqrt{1-3x^2}\,x\,dx \;,$$

$$\int\frac{x\,dx}{2x+5} \;, \quad \int\sqrt[3]{2x+1}\cdot x\,dx \quad \int\frac{\alpha x+\beta}{+\sqrt{1-x^2}}\cdot dx$$

ὅπου α καί β σταθερές $\neq 0$,

$\int e^{-k^2x^2}\cdot x dx$ όπου k σταθερά $\neq 0$,

$\int \frac{(\log x)^2}{x} dx$ όπου $\log x = \lambda o\gamma_{10} x$

$\int \frac{\alpha \eta\mu x}{\beta+\gamma \sigma\upsilon\nu x} dx$, $\int \frac{e^{2x} dx}{e^x+1}$,

$\int \eta\mu\alpha x \ \sigma\upsilon\nu\beta x \ dx$, $\int \eta\mu\alpha x \ \eta\mu\beta x \ dx$,

όπου α,β,γ σταθερές $\neq 0$,

$\int \frac{dx}{1+x+x^2}$, $\int \frac{3x+2}{1+x+x^2} dx$, $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$, $\int \frac{x dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$

Ἐρευνῆστε καθέ φορά καί σέ ποιά διαστήματα μεταβολῆς τῆς x ἰσχύουν τά ἐξαγόμενα πού βρήκατε.

234. Μέ παραγοντική ὁλοκλήρωση (ἔχοντας ὑπ'ὄψη καί τίς μεθόδους τῶν §§ 235 236) ὑπολογίστε τά

$\int \frac{\ln x}{x} dx$, $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$, $\int (\ln x)^2 dx$, $\int \eta\mu^2 x \ dx$,

$\int ch^2 x \ dx$, $\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}$, $\int \sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2} \ dx$

όπου α καί β θετικές σταθερές , $\int (\tau o\xi_o \eta\mu x)^2 dx$.

235. Ὑπολογίστε μέ ἀναγωγικό τύπο τό $\int (\ln x)^\nu dx$, ὅπου ν φυσικός ἀριθμός (χρησιμοποιοώντας παραγοντικες ὁλοκληρώσεις). Δεῖξτε ὅτι στό παραπάνω ὁλοκλήρωμα μπορεῖ ν'ἀναχθῆ, μέ ἀλλαγή μεταβλητῆς, τό $\int e^x x^\nu dx$ καί ἔτσι ὑπολογίστε καί τοῦτο.

236. Ἀποδεῖξτε τούς ἀκόλουθους ἀναγωγικούς τύπους

$$\int \eta\mu^\nu x \ dx = \frac{-1}{\nu} \sigma\upsilon\nu x\cdot \eta\mu^{\nu-1} x + \frac{\nu-1}{\nu}\int \eta\mu^{\nu-2} x\cdot dx$$

$$\int \sigma\upsilon\nu^\nu x \ dx = \frac{1}{\nu} \eta\mu x\cdot \sigma\upsilon\nu^{\nu-1} x + \frac{\nu-1}{\nu}\int \sigma\upsilon\nu^{\nu-2} x \ dx$$

(ν φυσικός $\geqq 2$).

237. Βρῆτε ἀναγωγικό τύπο γιά τό $\int \varepsilon\varphi^\nu x \ dx$, ὅπου ν φυσικός ἀριθμός $\geqq 2$. Μέ τή βοήθεια του ὑπολογίστε τό $\int \varepsilon\varphi^6 x \ dx$ καί τό $\int \varepsilon\varphi^7 x \ dx$.

238. Μέ παραγοντική ὁλοκλήρωση νά δειχθῆ ἡ σχέση

$$(m+n)\int \eta\mu^m x \ \sigma\upsilon\nu^n x \ dx = \eta\mu^{m+1} x \ \sigma\upsilon\nu^{n-1} x + (n-1)\int \eta\mu^m x \ \sigma\upsilon\nu^{n-2} x dx$$

ὅπου m καί n φυσικοί ἀριθμοί, νά χρησιμοποιηθῆ δέ γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ $\int \eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu^4 x\cdot dx$.

239. Ὑπολογίστε τό $\int \frac{x^4}{(x+3)^2}dx$ μέ ἀνάλυση τοῦ $\frac{x^4}{(x+3)^2}$ στό ἀκέραιο μέρος" καί σέ ἄθροισμα ἁπλῶν κλασμάτων

$$\frac{A}{(x+3)^2}+\frac{B}{x+3} \quad .$$

240. Ὑπολογίστε τό $\int \frac{x^2+3x+4}{(x-1)^2(x+1)^2}dx$ μέ ἀνάλυση τοῦ $\frac{x^2+3x+4}{(x-1)^2(x+1)^2}$ σέ ἄθροισμα ἁπλῶν κλασμάτων

$$\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{\Gamma}{(x+1)^2}+\frac{\Delta}{x+1} \quad .$$

Ὅμοια ὑπολογίστε τά $\int \frac{x^2dx}{(x^2-4)^2}$, $\int \frac{x^2+2}{(x-3)^2(x-5)}dx$

241. Ὑπολογίστε τό $\int \frac{x^3+2x^2+5x+3}{(x^2+1)^2}dx$ ὕστερα ἀπό ἀνάλυση τοῦ $\frac{x^3+2x^2+5x+3}{(x^2+1)^2}$ σέ ἄθροισμα ἁπλῶν κλασμάτων $\frac{A_2x+B_2}{(x^2+1)^2}+\frac{A_1x+B_1}{(x^2+1)}$.

242. Ὑπολογίστε τό $\int \frac{x^3+1}{(x^2+2)(x-4)^2}dx$ ὕστερα ἀπό ἀνάλυση τοῦ $\frac{x^3+1}{(x^2+2)(x-4)^2}$ σέ ἄθροισμα ἁπλῶν κλασμάτων

$$\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{\Gamma}{(x-4)^2}+\frac{\Delta}{x-4} \quad ,$$

243. Ὑπολογίστε τά $\int \frac{x^4}{x^2-5x+6}dx$, $\int \frac{x^5}{x^2-x+1}dx$

$\int \frac{x^6dx}{(x^2-6x+1)^2}$ $\int \frac{dx}{x^4+1}$, $\int \frac{dx}{x^6+1}$,

244. Ὑπολογίστε (§ 239) τά $\int \frac{2e^{2\alpha t}+e^{\alpha t}-1}{e^{\alpha t}+1}dt$,

ὅπου α σταθερά $\neq 0$, $\int \frac{shx+chx}{1+chx}dx$.

245. Ὑπολογίστε τά $\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu x}$, $\int \frac{dx}{5-3\sigma\upsilon\nu x}$, $\int \frac{dx}{4\sigma\upsilon\nu^2 x-\eta\mu^2 x}$

255. Ὑπολογίστε τά $\int \frac{dx}{(\alpha^2+x^2)^2}$, $\int \frac{dx}{+\sqrt{(\alpha^2+x^2)^3}}$, $\int \frac{+\sqrt{\alpha^2+x^2}}{x}dx$,

μέ χρήση τῆς ἀντικαταστάσεως $x = \alpha\varepsilon\varphi t$. Ὑπολογίστε τά $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}$, $\int \sqrt{(\alpha^2-x^2)^3}dx$, $\int x^3\sqrt{\alpha^2-x^2}dx$ μέ χρήση τῆς ἀλλαγῆς μεταβλητῆς $x = \alpha\eta\mu t$.

247. Ὑπολογίστε (§ 241) τά $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$, $\int \frac{1}{x}\cdot\sqrt{\frac{2x+3}{x}}\,dx$.

248. Μέ βάση τίς ἀναπτύξεις τοῦ § 242 δεῖξτε ὅτι

$$\int \frac{dx}{+\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}} = \frac{1}{+\sqrt{\alpha}}\ln\left|2\sqrt{\alpha}\,\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}+2\alpha x+\beta\right|+C$$

γιά $\alpha > 0$.

$$\int \frac{dx}{+\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}} = \frac{1}{+\sqrt{-\alpha}}\,\text{τοξ}_\text{o}\text{συν}\,\frac{2\alpha x+\beta}{+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}} + C$$

γιά $\alpha < 0$, $\beta^2-4\alpha\gamma > 0$. Κάμετε ἐφαρμογή καί ἐπαλήθευση στά $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+2x+1}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2-x+2}}$.

249. Ἀναγάγατε μέ ἀντικαταστάσεις τό $\int R(x, \sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma})\,dx$ σ'ἕνα ἀπό τά ὁλοκληρώματα τῆς μορφῆς

$$\int R^*(u,\sqrt{u^2+1})\,du \;,\; \int R^*(u,\sqrt{u^2-1})\,du \;,\; \int R^*(u,\sqrt{1-u^2})\,du ,$$

ὅπου R καί R* ρητές συναρτήσεις τῶν δυό ποσοτήτων πού ἀναγράφονται μέσα στήν παρένθεση χωρισμένες μ'ἕνα κόμμα. (Θά διακρίνετε ἀντιστοίχως τίς 3 περιπτώσεις: 1) $\alpha > 0$ καί $\beta^2-4\alpha\gamma < 0$, 2) $\alpha > 0$ καί $\beta^2-4\alpha\gamma > 0$ καί 3) $\alpha < 0$ καί $\beta^2-4\alpha\gamma > 0$. Ἡ περίπτωση $\beta^2-4\alpha\gamma = 0$ δέν παρουσιάζεται ἐπειδή προϋποθέτουμε ὅτι ἡ $R(x,\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma})$ δ έ ν εἶναι ρητή συνάρτηση τῆς x).

250. Δεῖξτε ὅτι τά τρία τελευταῖα ὁλοκληρώματα (τῆς Ἀσκ. 249) μετασχηματίζονται σέ ὁλοκληρώματα τῶν κατηγοριῶν I § 239, II § 240 μέ τίς ἀλλαγές μεταβλητῆς

$$u = \text{sh}t \;\;\text{ἤ}\;\; u = \text{εφ}\omega \;,\;\; u = \text{ch}t \;\;\text{ἤ}\;\; u = \frac{1}{\text{συν}\omega}$$

καί $u = \text{ημ}t$ ἀντιστοίχως.

Γιά ἐφαρμογή τῶν παραπάνω ὑπολογίστε τά

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-k^2}} \;,\;\; \int \frac{\sqrt{2x^2+x+1}}{x+3}\,dx \;.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XVI

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

§ 243. Ταλάντευση συναρτήσεως σ'ένα διάστημα. Ἀρχίζουμε μέ μερικές βοηθητικές ἔννοιες καί προτάσεις.

Ἔστω σ(x) μιά μονοσήμαντη συνάρτηση, περιορισμένη πρός τά πάνω καί πρός τά κάτω (§ 199), ὅταν τό x ἔχη πεδίο μεταβολῆς ἕνα διάστημα I, δηλ.

$$\varphi \leqq \sigma(x) \leqq \Phi \quad \text{γιά κάθε x ἀπό τό J} \quad ,$$

ὅπου φ καί Φ σταθερές. Τό ἄνω πέρας τῆς σ(x) στό διάστημα J εἶναι τότε ἕνας ὁρισμένος ἀριθμός $A_2 (\leqq \Phi)$ καί τό κάτω πέρας της στό διαστημα, ἐπίσης ἕνας ὁρισμένος ἀριθμός A_1 ($\geqq \varphi$ καί $\leqq A_2$). Ἡ διαφορά A_2-A_1 (πού εἶναι ἕνας ἀριθμός $\geqq 0$) λέγεται ταλάντευση τῆς σ(x) στό διάστημα J. Π.χ. ταλάντευση τῆς τοξ$_{\circ}$εφx στό διάστημα $-\infty < x < +\infty$ εἶναι ὁ ἀριθμός

$$\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi \quad ,$$

ταλάντευση τῆς τοξ$_{\circ}$ημx στό διάστημα $-1 \leqq x \leqq 1$ εἶναι ὁ ἀριθμός

$$\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi \quad ,$$

ταλάντευση τῆς $\sigma(x) = x-Ak(x)$ στό διάστημα $-\infty < x < +\infty$ εἶναι τό $1-0 = 1$.

Προτάσεις. 1. Ἄν τό διάστημα J* εἶναι ὑποδιάστημα (= μέρος) τοῦ διαστήματος J, τότε ἡ ταλάντευση τῆς σ(x) στό J* εἶναι ≦ τῆς ταλαντεύσεως τῆς σ(x) στό J.

Διότι κ. πέρας τῆς σ(x) γιά τό J ≦ κ. πέρατος γιά τό

J^* καί ἄ. πέρας γιά τό $J \geqq$ ἄ. πέρατος γιά τό J^*.

2. Ἄν γιά κάθε x ἀπό τό διάστημα J ἰσχύη ἡ σχέση $|\sigma(x)-C| < \delta$, ὅπου δ μιά θετική σταθερά καί C μιά ὁποιαδήποτε σταθερά, τότε ἡ ταλάντευση τῆς $\sigma(x)$ στό διάστημα J εἶναι $\leqq 2\delta$.

Διότι $-\delta+C < \sigma(x) < \delta+C$ γιά κάθε x ἀπό τό J.

§ 244. <u>Θεώρημα</u>. Ἄν ἡ $\sigma(x)$ εἶναι συνεχής στό περιορικαί κλειστό διάστημα $J(\alpha \leqq x \leqq \beta)$, τότε μποροῦμε νά χωρίσουμε τό J σέ πεπερασμένο πλῆθος ὑποδιαστήματα τέτοια πού ἡ ταλάντευση τῆς $\sigma(x)$ στό καθένα ἀπό αὐτά νά εἶναι μικρότερη τοῦ α ὐ θ α ί ρ ε τ α ὁρισμένου θετ. ἀριθμοῦ ε.

<u>Ἀπόδειξη</u>. Μέ ἐπανειλημμένες διχοτομήσεις διαμερίζουμε τό διάστημα J σέ 2, σέ $4 = 2^2$, σέ $8 = 2^3, \ldots$, γενικῶς σέ 2^ν, ἰσόπλατα ὑποδιαστήματα:

$$(244.1) \quad J_1^{(\nu)}(\alpha \leqq x \leqq \alpha+h_\nu),\ J_2^{(\nu)}(\alpha+h_\nu \leqq x \leqq \alpha+2h_\nu), \ldots,$$
$$J_{2^\nu}^{(\nu)}(\alpha+(2^\nu-1)h_\nu \leqq x \leqq \alpha+2^\nu h_\nu)$$

ὅπου $h_\nu = \dfrac{\beta-\alpha}{2^\nu}$ γιά $1, 2, 3, \ldots$. Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι γιά κατάλληλη τιμή τοῦ ν ἡ ταλάντευση τῆς $\sigma(x)$ στό καθένα ἀπό τά 2^ν ὑποδιαστήματα (244.1) εἶναι μικρότερη τοῦ ε. Ἄς παραδεχθοῦμε ὅτι αὐτό δέν ἀληθεύει· τότε ὅποια καί ἄν εἶναι ἡ τιμή τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν, σ'ἕνα τουλάχιστο ἀπό τά ὑποδιαστήματα (244.1) ἡ ταλάντευση τῆς $\sigma(x)$ θά εἶναι $\geqq \varepsilon$.

Ἄρα γιά κάθε τιμή τοῦ ν (δηλ. $\nu = 1, 2, 3, \ldots$), μεταξύ τῶν 2^ν ὑποδιαστημάτων (244.1) θά ὑπάρχη ἕνα πρῶτο ἀπό ἀριστερά, ἄς τό καλέσουμε $J_\nu(\alpha_\nu \leqq x \leqq \beta_\nu)$, ὅπου ἡ ταλάντευση τῆς $\sigma(x)$ εἶναι $\geqq \varepsilon$.

Στά ὑποδιαστήματα τῆς σειρᾶς (244.1) τά ὁποῖα ἐνδεχομένως προηγοῦνται τοῦ J_ν ἡ ταλάντευση τῆς $\sigma(x)$ θά εἶναι $< \varepsilon$· ἄρα ἡ διχοτόμησή τους θά δώση ὑποδιαστήματα στά ὁποῖα ἡ ταλάντευση τῆς $\sigma(x)$ θά εἶναι $< \varepsilon$. Ἑπομένως τό διάστημα $J_{\nu+1}(\alpha_{\nu+1} \leqq x \leqq \beta_{\nu+1})$, ὅπου ἡ ταλάντευση εἶναι ἐξ ὑποθέσεως $\geqq \varepsilon$, θά συμπίπτη μέ ἕνα ἀπό τά δύο μισά ἤ τοῦ J_ν ἤ ἑνός ἑπομένου του μέσα στή σειρά (244.1). Ἄρα θά ἔχουμε

$$\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots \leqq \alpha_\nu \leqq \alpha_{\nu+1} \leqq \ldots$$

Καί ἐπειδή κάθε $\alpha_\nu < \beta$, ἕπεται ὅτι θά ὑπάρχη τό ὅριο

(244.2) $$\lim_{\nu \to +\infty} \alpha_\nu = \xi$$

ὅπου ξ ὁρισμένος ἀριθμός ἀπό τό J.

Συνεπῶς θά εἶναι καί

(244.3) $$\lim_{\nu \to \infty} \beta_\nu = \xi$$

ἀφοῦ $\beta_\nu - \alpha_\nu = \dfrac{\beta - \alpha}{2^\nu} \to 0$ γιά $\nu \to +\infty$.

Ἡ $\sigma(x)$ εἶναι ὅμως ἀπό ὑπόθεση συνεχής στή θέση ξ, ἄρα

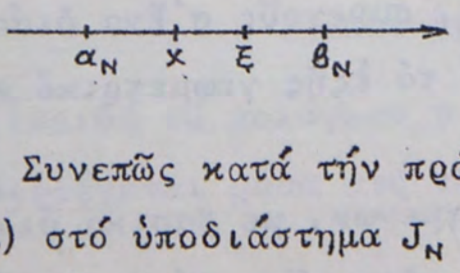
(244.4) $$|\sigma(x) - \sigma(\xi)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

γιά $|x-\xi| <$ κατάλληλου η_ε.

Τώρα ἀπό τίς σχέσεις (244.2) καί (244.3) ἕπεται ὅτι γιά κατάλληλα μεγάλη τιμή N τοῦ ν ἰσχύουν οἱ σχέσεις

$$|\xi - \alpha_N| < \eta_\varepsilon \quad \text{καί} \quad |\xi - \beta_N| < \eta_\varepsilon .$$

Ἄρα (βλέπε διπλανό σχῆμα) γιά ὅλα τά x τοῦ διαστήματος $J_N(\alpha_N \leqq x \leqq \beta_N)$ θά ἔχουμε



$$|x - \xi| < \eta_\varepsilon$$

καί ἑπομένως (λόγῳ τῆς 244.4)

$$|\sigma(x) - \sigma(\xi)| < \frac{\varepsilon}{3} .$$

Συνεπῶς κατά τήν πρόταση 2) τοῦ § 243, ἡ ταλάντευσή τῆς $\sigma(x)$ στό ὑποδιάστημα J_N θά εἶναι $\leqq \dfrac{2\varepsilon}{3}$, δηλαδή $< \varepsilon$· αὐτό ὅμως εἶναι ἀντίθετο πρός τήν ἰδιότητα πού ἔχουν ὅλα τά J_ν

καί είδικῶς λοιπόν τό J_N. Ἔτσι ἡ παραδοχή πού κάμαμε μᾶς ὁδηγεῖ σέ ἄτοπο καί πρέπει νά ἀπορριφτῆ.

§ 245. Ἀπό τό θεώρημα πού ἀποδείξαμε ἕπεται εὔκολα τό ἑξῆς:

Πόρισμα. Ἄν ἡ $\sigma(x)$ εἶναι συνεχής στό περιορισμένο καί κλειστό διάστημα J, τότε σέ κάθε θετικό ἀριθμό ε μποροῦμε ν' ἀντιστοιχίσουμε ἕναν κατάλληλο θετικό ἀριθμό δ_ε τέτοιον πού νά εἶναι $|\sigma(x_1) - \sigma(x_2)| < \varepsilon$ γιά ὅλα τά ζεύγη ἀριθμῶν x_1, x_2 ἀπό τό διάστημα J μέ $|x_1-x_2| < \delta_\varepsilon$.

Ἀπόδειξη. Ὅπως εἴδαμε, μποροῦμε νά πάρουμε τό φυσικό ἀριθμό ν τόσο μεγάλο ὥστε ἡ ταλάντευση τῆς $\sigma(x)$ στό καθένα ἀπό τά 2^ν ὑποδιαστήματα (244.1), πού ἔχουν πλάτος $h = \frac{\beta-\alpha}{2^\nu}$, νά εἶναι $< \frac{\varepsilon}{2}$. Ἕνας κατάλληλος ἀριθμός δ_ε εἶναι τότε ὁ $h_\nu = \frac{\beta-\alpha}{2^\nu}$. Πράγματι, δυό θέσεις $x_1 x_2$ ἀπό τό διάστημα J, μέ $|x_1-x_2| < \delta_\varepsilon = h_\nu$, ἤ θά ἀνήκουν στό ἴδιο ὑποδιάστημα (244.1), ὁπότε $|\sigma(x_1)-\sigma(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$, ἤ θά ἀνήκουν σέ δυό διαδοχικά ὑποδιαστήματα τῆς σειρᾶς (244.1), μέ κοινό ἄκρο ἔστω τό γ, ὁπότε $|\sigma(x_1)-\sigma(x_2)| \leqq |\sigma(x_1)-\sigma(\gamma)| + |\sigma(\gamma)-\sigma(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Παρατήρηση. Χρησιμοποιώντας τήν ὁρολογία τῆς ἀσκήσεως 221* μποροῦμε νά δώσουμε στό παραπάνω πόρισμα τήν ἑξῆς διατύπωση:

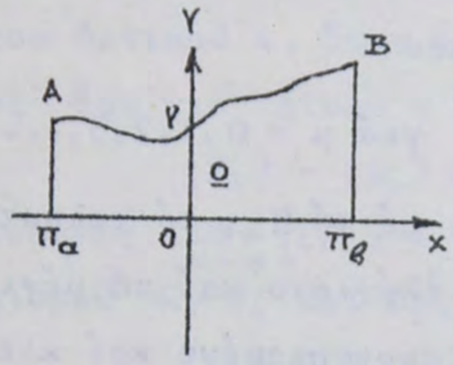
Μιά συνάρτηση $\sigma(x)$ συνεχής σ'ἕνα κλειστό καί περιορισμένο διάστημα εἶναι ἀναγκαστικά καί ὁμοιόμορφα συνεχής σ'αὐτό.

§ 246. Τό πρόβλημα τοῦ ἐμβαδοῦ. Ἡ ἔννοια τοῦ ὁρισμένου ὁλοκληρώματος μιᾶς συναρτήσεως $\sigma(x)$, συνεχοῦς σ'ἕνα διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$, προέκυψε ἱστορικά ἀπό τό ἑξῆς γεωμετρικό πρόβλημα.

Σ'ἕνα ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, μέ βασικά διανύσματα ἰσόμηκα πρός τή μονάδα μήκους, θεωροῦμε τή γραφική παράσταση τῆς $y = \sigma(x)$ γιά $\alpha \leqq x \leqq \beta$.

Ὑποθέτουμε γιά ἁπλότητα, ὅτι $\sigma(x) > 0$ γιά $\alpha < x < \beta$.

Λαμβάνοντας γιά μονάδα ἐπιφανείας τό τετράγωνο μέ πλευρά τή μονάδα μήκους, ζητοῦμε νά προσδιορίσουμε τό ἐμβαδό τοῦ χωρίου Ω πού περιορίζεται ἀπό τή γραμμή γ μέ ἐξίσωση $y = \sigma(x)$ γιά $\alpha \leqq x \leqq \beta$, ἀπό τό τμῆμα $\Pi_\alpha\Pi_\beta$ τοῦ OX, πάνω στό ὁποῖο ἡ γ προβάλλεται, καί ἀπό τά δυό τμήματα $\Pi_\alpha A$ καί $\Pi_\beta B$ τά // OY. Ἡ μέθοδος τοῦ προσδιορισμοῦ συγγενεύει μέ τή μέθοδο πού χρησιμοποίησε ὁ Ἀρχιμήδης στή μέτρηση τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου, τοῦ παραβολικοῦ τμήματος καί μερικῶν ἄλλων χωρίων. Ἰδού ποιά εἶναι:



§ 247. Μποροῦμε κατ' ἄπειρους τρόπους νά κατασκευάσουμε πολύγωνα p πού κεῖνται ὁλόκληρα μέσα στό χωρίο Ω καί πολύγωνα P πού περιέχουν ὁλόκληρο τό χωρίο Ω. Ἐπειδή κάθε p περιέχεται μέσα σέ κάθε P θά ἔχουμε γιά τά ἀπό τή στοιχειώδη Γεωμετρία ὁρισμένα ἐμβαδά (p) καί (P) τῶν p καί P τίς σχέσεις

$$\text{κάθε } (p) \leqq \text{κάθε } (P) \;.$$

Ἄρα τό ἄνω πέρας ὅλων τῶν ἀριθμῶν (p) θά εἶναι ἕνας ἀριθμός $F_1 \leqq$ κάθε (P) καί συνεπῶς τό κάτω πέρας ὅλων τῶν ἀριθμῶν (P) θά εἶναι ἕνας ἀριθμός $F_2 \geqq F_1$. Γιά τό ὁριστέο ἐμβαδό (Ω) τοῦ χωρίου Ω θά πρέπει νά ἰσχύη ἡ σχέση

$$\text{κάθε } (p) \leqq (\Omega) \leqq \text{κάθε } (P)$$

(ἐπειδή τό πολύγωνο p περιέχεται μέσα στό χωρίο Ω καί τοῦτο περιέχεται μέσα στό πολύγωνο P), ἄρα καί ἡ σχέση

$$F_1 \leqq (\Omega) \leqq F_2 .$$

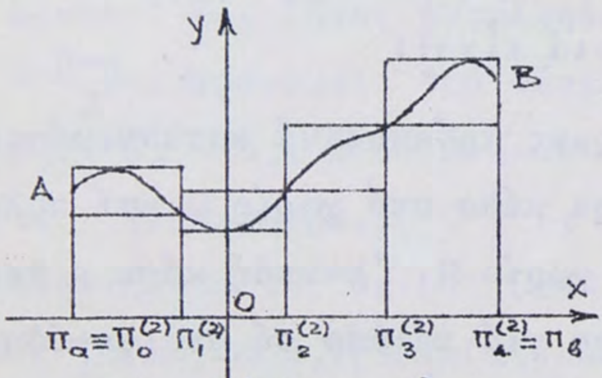
Θά δείξουμε ὅμως ὅτι $F_1 = F_2$, ἄρα πρέπει νά θέσουμε ἀναγκαστικά $(\Omega) = F_1 = F_2$.

§ 248. Γιά νά δείξουμε ὅτι $F_1 = F_2$, θεωροῦμε τά πολύγωνα p_ν καί P_ν (γιά $\nu = 1,2,3,\ldots$) πού κατασκευάζονται ὡς ἑξῆς:

Διαιροῦμε τό τμῆμα $\Pi_\alpha \Pi_\beta$ τοῦ ΟΧ σέ 2^ν ἴσα μέρη διά τῶν διαιρετικῶν σημείων $\Pi_\mu^{(\nu)}(x_\mu^{(\nu)}, 0)$, ὅπου

$$x_\mu^{(\nu)} = \alpha + \mu\,\frac{\beta-\alpha}{2^\nu} \qquad \text{γιά } \mu = 0,1,2,3,\ldots,2^\nu .$$

(Τό πρῶτο σημεῖο $\Pi_0^{(\nu)}$ συμπίπτει μέ τό Π_α, τό τελευταῖο $\Pi_{2^\nu}^{(\nu)}$ μέ τό Π_β). Καλοῦμε $E_\mu^{(\nu)}$ καί $M_\mu^{(\nu)}$ τό ἐλάχιστο καί τό μέγιστο τῆς συνεχοῦς συναρτήσεως $\sigma(x)$ στό περιορισμένο καί κλειστό) διάστημα $x_{\mu-1}^{(\nu)} \leqq x \leqq x_\mu^{(\nu)}$ γιά $\mu = 1,2,3,\ldots, 2^\nu$.



τό ν λήφθηκε $= 2^2 = 4$

Τό ὀρθογώνιο μέ βάση τό τμῆμα $\Pi_{\mu-1}^{(\nu)} \Pi_\mu^{(\nu)}$ καί ὕψος μετρούμενο ἀπό τόν ἀριθμό $E_\mu^{(\nu)}$ κεῖται ὁλόκληρο μέσα στό χωρίο Ω· τό σύνολο τῶν ὀρθογωνίων αὐτῶν γιά $\mu = 1,2,3,\ldots, 2^\nu$ ἀποτελεῖ τό πολύγωνο p_ν πού προαγγείλαμε. Ὅμοια τό ὀρθογώνιο μέ βάση τό τμῆμα $\Pi_{\mu-1}^{(\nu)} \Pi_\mu^{(\nu)}$ καί ὕψος μετρούμενο ἀπό τόν ἀριθμό $M_\mu^{(\nu)}$ περιέχει ἐκεῖνο τό κομμάτι τοῦ χωρίου Ω τό ὁποῖο προβάλλεται πάνω στό τμῆμα $\Pi_{\mu-1}^{(\nu)} \Pi_\mu^{(\nu)}$.

Τό σύνολο τῶν ὀρθογωνίων αὐτῶν γιά $\mu = 1,2,3,\ldots, 2^\nu$ ἀποτελεῖ τό πολύγωνο P_ν.

Γιά τά ἐμβαδά τῶν πολυγώνων αὐτῶν p_ν καί P_ν ἔχουμε

$$(248.1) \qquad (p_\nu) = \frac{\beta-\alpha}{2^\nu}\left(E_1^{(\nu)} + E_2^{(\nu)} + \ldots + E_{2^\nu}^{(\nu)}\right),$$

$$(248.2) \qquad (P_\nu) = \frac{\beta-\alpha}{2^\nu}\left(M_1^{(\nu)} + M_2^{(\nu)} + \ldots + M_{2^\nu}^{(\nu)}\right).$$

$$"\text{Αρα } (P_\nu) - (p_\nu) = \frac{\beta-\alpha}{2^\nu}\left[(M_1^{(\nu)}-E_1^{(\nu)})+(M_2^{(\nu)}-E_2^{(\nu)}) +\ldots+ (M_{2^\nu}^{(\nu)} -E_{2^\nu}^{(\nu)})\right]$$
$$= \frac{\beta-\alpha}{2^\nu}\left[T_1^{(\nu)} + T_2^{(\nu)} +\ldots+ T_{2^\nu}^{(\nu)}\right],$$

ὅπου $T_\mu^{(\nu)} = M_\mu^{(\nu)} - E_\mu^{(\nu)}$ = ταλάντευση τῆς $\sigma(x)$ στό διάστημα $x_{\mu-1}^{(\nu)} \leqq x \leqq x_\mu^{(\nu)}$.

Σύμφωνα ὅμως μέ τό θεώρημα τοῦ § 244, ὅλες αὐτές οἱ ταλαντεύσεις $T_1^{(\nu)}, T_2^{(\nu)}, \ldots, T_{2^\nu}^{(\nu)}$ γίνονται μικρότερες τοῦ αὐθαίρετου θετικοῦ ε, ὅταν ὁ φυσικός ἀριθμός ν ληφθῆ κατάλληλα μεγάλος· ἄρα γιά τέτοια ν ἔχουμε

$$(P_\nu) - (p_\nu) \leqq \frac{\beta-\alpha}{2^\nu}\cdot 2^\nu\cdot\varepsilon = (\beta-\alpha)\varepsilon .$$

Ἑπομένως $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\{(P_\nu) - (p_\nu)\} = 0$. Ἐξ ἄλλου εἶναι, λόγῳ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν F_1 καί F_2, -

$$(p_\nu) \leqq F_1 \leqq F_2 \leqq (P_\nu) \quad \text{γιά } \nu = 1,2,3,\ldots$$

Ἄρα πρέπει νά ἔχουμε $F_2 - F_1 = 0$, ὅ.εἔ.δ.

§ 249. Ἀπό τά τελευταῖα ἕπεται ἐπί πλέον ὅτι

$$\lim_{\nu\to+\infty} (p_\nu) = F_1 = F_2 = \lim_{\nu\to+\infty} (P_\nu) ,$$

διότι

$$0 \leqq F_1 - (p_\nu) \leqq (P_\nu) - (p_\nu) \quad \text{καί} \quad 0 \leqq (P_\nu) - F_2 \leqq (P_\nu) - (p_\nu)$$

Λέγω μάλιστα ὅτι ἰσχύουν οἱ σχέσεις

$$(p_\nu) \leqq (p_{\nu+1}) \quad \text{καί} \quad (P_\nu) \geqq (P_{\nu+1}) \quad \text{γιά } \nu = 1,2,3,..$$

Πράγματι, ὅταν ἀπό τό πολύγωνο p_ν μεταβαίνουμε στό $p_{\nu+1}$ τό ὀρθογώνιο μέ βάση τό τμῆμα $\Pi_{\mu-1}^{(\nu)}\Pi_\mu^{(\nu)}$ (γιά $\mu = 1,2,3,\ldots,2^\nu$) καί ὕψος $E_\mu^{(\nu)}$ ἀντικαθισταται μέ δυό ὀρθογώνια πού ἔχουν βάσεις τό μισό τοῦ τμήματος $\Pi_{\mu-1}^{(\nu)}\Pi_\mu^{(\nu)}$ καί ὕψη $\geqq E_\mu^{(\nu)}$, ἐπειδή τό ἐλάχιστο τῆς $\sigma(x)$ σ'ἕνα διάστημα J^* εἶναι πάντα $\leqq$ τῶν δυό ἐλάχιστων τιμῶν τῆς $\sigma(x)$ ἀντιστοίχως στά δυό μισά ὑποδιαστήματα τοῦ J^*.

Ἄρα τό καθένα ἀπό τά 2^ν ὀρθογώνια πού ἀποτελοῦν τό p_ν

ἀντικαθιστᾶται, γιά νά ἀποτελεστῆ τό $p_{\nu+1}$, μέ δύο ὀρθογώνια ὁλικοῦ ἐμβαδοῦ ὄχι μικροτέρου, ἑπομένως $(p_\nu) \leqq (p_{\nu+1})$. Ὅμοια ἀποδείχνεται ὅτι $(P_\nu) \geqq (P_{\nu+1})$.

§ 250. Τό ἐμβαδό (Ω) τοῦ χωρίου Ω πρέπει νά ὁριστῆ, ὅπως εἴδαμε στόν § 247, διά τῆς σχέσεως

(Ω) = ἄνω πέρας τῶν (p) = κάτω πέρας τῶν (P).

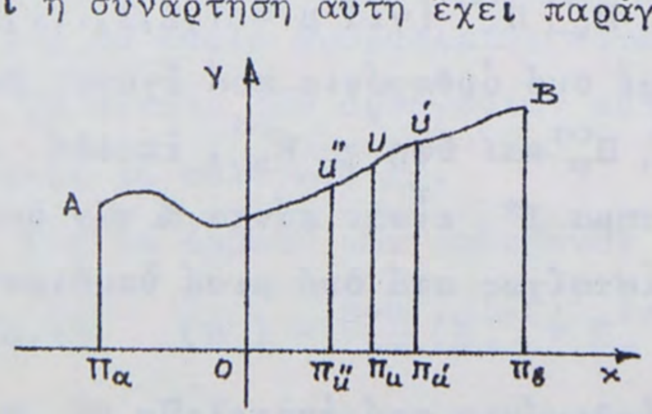
Μέ βάση αὐτόν τόν ὁρισμό ἀποδείχνεται εὔκολα ἡ ἀκόλουθη "ἀθροιστική" ἰδιότητα τοῦ (Ω).

Ἔστω x_1 ἕνας ἀριθμός μεταξύ α καί β. Ἡ εὐθεία $x = x_1$ χωρίζει τό χωρίο Ω σέ δύο χωρία Ω_1 καί Ω_2, ἰσχύει δέ ἡ σχέση

(250.1) $$(\Omega) = (\Omega_1) + (\Omega_2) \;.$$

Θά χρησιμοποιήσουμε τώρα τήν ἰδιότητα αὐτή γιά νά συσχετίσουμε τήν ἔννοια τοῦ ἐμβαδοῦ χωρίων ὅπως τό Ω μέ τήν ἔννοια τῆς παράγουσας.

Ἔστω u ἕνας τυχών ἀριθμός ἀπό τό διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$ ὅπου ἡ $\sigma(x)$ ὑποτέθηκε συνεχής καί θετική. Θεωροῦμε τό χωρίο Ω_u πού περιορίζεται ἀπό τή γραμμή $y = \sigma(x)$ γιά $\alpha \leqq x \leqq u$, ἀπό τό τμῆμα $\Pi_\alpha\Pi_u$ τοῦ ΟΧ πάνω στό ὁποῖο ἡ γραμμή αὐτή προβάλλεται καί ἀπό τά δύο τμήματα $\Pi_\alpha A$ καί $\Pi_u U$ τά // ΟΥ. Τό ἐμβαδό (Ω_u) τοῦ Ω_u εἶναι μιά συνάρτηση $\Omega(u)$ μονοσήμαντα ὁρισμένη στό διάστημα $\alpha \leqq u \leqq \beta$, σύμφωνα μέ τά προηγούμενα. Λέγω ὅτι ἡ συνάρτηση αὐτή ἔχει παράγωγο στή θέση u τό $\sigma(u)$.



Ἄς εἶναι τό u μιά ἐσωτερική θέση ἀπό τό διάστημα $\alpha \leqq u \leqq \beta$.

Δίνουμε πρῶτα μιάν αὔξηση $\Delta u > 0$ στό u καί ἔστω $u' = u + \Delta u$. Ἔχουμε σύμφωνα μέ τήν ἀθροιστική ἰδιότητα (250.1)

$$\Omega(u') - \Omega(u) = \text{ἐμβαδό χωρίου } \Pi_u \Pi_{u'} U' U.$$

Καλοῦμε E' τό ἐλάχιστο, M' τό μέγιστο τῆς (συνεχοῦς) συναρτήσεως $\sigma(x)$ στό διάστημα $u \leqq x \leqq u'$.

Θά εἶναι

$$E'\Delta u \leqq \text{ἐμβαδ. χωρίου } \Pi_u \Pi_{u'} U' U \leqq M'\Delta u$$

ἄρα
$$E' \leqq \frac{\Omega(u+\Delta u) - \Omega(u)}{\Delta u} \leqq M'$$

Ὅταν ὅμως τό $\Delta u = u' - u$ τείνη στό 0 διά θετικῶν τιμῶν τό E' καί τό M' τείνουν στό $\sigma(u)$, ἐπειδή E' καί M' εἶναι τιμές τῆς $\sigma(x)$ σέ κάποιες θέσεις ἀπό τό διάστημα $u \leqq x \leqq u+\Delta u = u'$, ὑποθέσαμε δέ τή $\sigma(x)$ συνεχῆ στή θέση u. Ἄρα

$$\lim_{\Delta u \to 0^+} \frac{\Omega(u+\Delta u) - \Omega(u)}{\Delta u} = \sigma(u) \quad .$$

Ἑπομένως ἔχουμε παράγωγο πρός τά δεξιά:

(250.2)
$$D^+\Omega(u) = \sigma(u)$$

Ἄς δώσουμε δεύτερο μιάν ἀρνητική αὔξηση Δu στό u καί ἔστω $u'' = u+\Delta u$. Ἔχουμε πάλιν (ἀθροιστική ἰδιότητα (250.1)):

$$\Omega(u'') - \Omega(u) = -\text{ἐμβαδ. χωρίου } \Pi_{u''} \Pi_u U U'' ,$$

καί ἄν καλέσουμε E'' καί M'' τό ἐλάχιστο καί τό μέγιστο ἀντιστοίχως τῆς $\sigma(x)$ στό διάστημα $u'' \leqq x \leqq u$,

$$E''(-\Delta u) \leqq \text{ἐμβαδ. χωρίου } \Pi_{u''} \Pi_u U U'' \leqq M''(-\Delta u)$$

ἄρα
$$E'' \leqq \frac{-\Omega(u'') + \Omega(u)}{-\Delta u} = \frac{\Omega(u+\Delta u) - \Omega(u)}{\Delta u} \leqq M'',$$

καί συνεπῶς
$$\lim_{\Delta u \to 0^-} \frac{\Omega(u+\Delta u) - \Omega(u)}{\Delta u} = \sigma(u) \quad ,$$

ἐπειδή $\lim_{\Delta u \to 0^-} E'' = \sigma(u) = \lim_{\Delta u \to 0^-} M''$ λόγῳ συνέχειας τῆς $\sigma(x)$ στή θέση u. Ἄρα ἔχουμε παράγωγο πρός τά ἀριστερά:

(250.3) $$D^{-}\Omega(u) = \sigma(u) .$$

'Από τίς σχέσεις (250.2) καί (250.3) ἕπεται τό ἀποδεικτέο

$$D\Omega(u) = \Omega'(u) = \sigma(u) .$$

Μέ ὅμοιο τρόπο ἀποδείχνεται γιά τίς ἀκραῖες θέσεις $u=\alpha$, $u = \beta$, ὅτι

$$\left(D^{+}\Omega(u)\right)_{u=\alpha} = \sigma(\alpha) \qquad \left(D^{-}\Omega(u)\right)_{u=\beta} = \sigma(\beta) \quad .$$

§ 251. Στόν προηγούμενο παράγραφο ἀποδείχτηκε ὅτι τό ἐμβαδό $\Omega(u)$ τοῦ χωρίου $\Pi_\alpha\Pi_u UA$ εἶναι μιά παράγουσα τῆς συναρτήσεως $\sigma(u)$ στό διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$. Ἡ παράγουσα αὐτή εἶναι καθορισμένη ἀπό τήν τιμή $\Omega(\alpha) = 0$ πού παίρνει γιά $u = \alpha$.

Ἄν λοιπόν ξέρουμε νά ἐκφράσουμε μέ στοιχειώδη (δηλαδή τά ἤδη γνωστά συναρτησιακά σύμβολα) μιάν παράγουσα $f(u)$ τῆς $\sigma(u)$ γιά τό διάστημα $\alpha \leqq u \leqq \beta$, θά μποροῦμε νά ἐκφράσουμε μέ ὅμοιο τρόπο καί τήν $\Omega(u)$, βάσει τῆς γνωστῆς (§ 205) σχέσεως $\Omega'u) = f(u) + c$ γιά $\alpha \leqq u \leqq \beta$, ἀπό ὅπου ἕπεται $\Omega(\alpha) = 0 = f(\alpha)+c$· ἄρα $c = -f(\alpha)$ καί συνεπῶς

(251.1) $$\Omega(u) = f(u) - f(\alpha) , \qquad \text{γιά} \quad \alpha \leqq u \leqq \beta .$$

Εἰδικῶς γιά τό ἐμβαδό (Ω) τοῦ χωρίου $\Pi_\alpha\Pi_\beta BA$ ἰσχύει ἡ σχέσση

(251.2) $$(\Omega) = \Omega(\beta) = f(\beta) - f(\alpha) \quad .$$

Ἔτσι, ἐκτός ἀπό τόν τρόπο ὑπολογισμοῦ τοῦ ἐμβαδοῦ (Ω) πού βρήκαμε στόν § 249 καί πού ἐκφράζει ἡ σχέση

$$(\Omega) = \lim_{\nu\to+\infty} (P_\nu) = \lim_{\nu\to+\infty} (p_\nu)$$

ἔχουμε τώρα, μέ τήν παραπάνω σχέση (251.2), ἕναν πολύ ἁπλούστερο τρόπο ἐργασίας, ὁσάκις ξέρουμε νά ὑπολογίσουμε μέ τίς μεθόδους τοῦ 15ου κεφαλαίου τίς παράγουσες $\int \sigma(x)dx$ τῆς $\sigma(x)$ γιά $\alpha \leqq x \leqq \beta$.

§ 252. <u>Παράδειγμα καί ἐφαρμογή.</u> 1)Γιά νά βροῦμε τό ἐμβαδό τοῦ κύκλου πού ἔχει ἀκτίνα α, παρατηροῦμε ὅτι τό ἐμβαδό αὐτό εἶναι τό 4πλάσιο τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ χωρίου Ω πού περιορίζεται ἀπό τή γραμμή $y = \underset{+}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}$ γιά $0 \leqq x \leqq \alpha$, ἀπό τό τμῆμα ΟΑ τοῦ ΟΧ καί ἀπό τό τμῆμα ΟΒ τοῦ ΟΥ. Σύμφωνα μέ τόν §233 ἔχουμε:

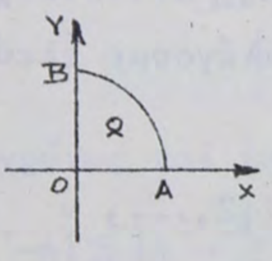
$$\int \underset{+}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}\,dx = \frac{\alpha^2}{2}\,\text{τοξ}_\circ\text{ημ}\,\frac{x}{\alpha} + \frac{x}{2}\underset{+}{\sqrt{\alpha^2-x^2}} + C$$

Ἄρα τό ζητούμενο ἐμβαδό εἶναι ἴσο μέ:

$$4\left[\frac{\alpha^2}{2}\,\text{τοξ}_\circ\text{ημ}\,\frac{\alpha}{\alpha} + \frac{\alpha}{2}\sqrt{\alpha^2-\alpha^2} - \frac{\alpha^2}{2}\,\text{τοξ}_\circ\text{ημ}\,\frac{0}{\alpha} - \frac{0}{2}\sqrt{\alpha^2-0^2}\right]$$

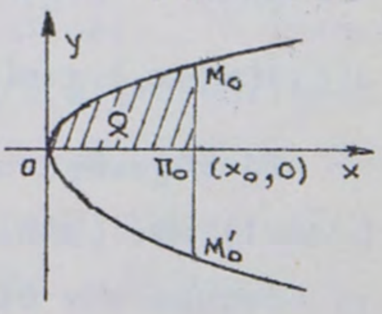
$$= 4\left[\frac{\alpha^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 0\right] = \pi\alpha^2 .$$

2. Τό ἐμβαδό τοῦ παραβολικοῦ τμήματος μέ χορδή $M_\circ'\Pi_\circ M_\circ \perp$ στόν ἄξονα ὀρθῆς συμμετρίας τῆς παραβολῆς $y^2 = 2px$ εἶναι τό διπλάσιο τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ χωρίου Ω πού περιορίζεται ἀπό τή γραμμή $y = +\sqrt{2px}$ γιά $0 \leqq x \leqq x_\circ$, ἀπό τό τμῆμα $O\Pi_\circ$ τοῦ ΘΧ καί ἀπό τό τμῆμα $\Pi_\circ M_\circ$ τό // ΟΥ.



Μιά παράγουσα τῆς $\underset{+}{\sqrt{2px}}$ εἶναι ἡ

$$\sqrt{2p}\;\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\,x\,\sqrt{2px}\,.$$



Ἄρα τό ζητούμενο ἐμβαδό εἶναι ἴσο μέ

$$2\left[\frac{2}{3}\,x_\circ\underset{+}{\sqrt{2px_\circ}} - \frac{2}{3}\cdot 0\sqrt{2p0}\right] = \frac{2}{3}\,x_\circ\cdot 2\sqrt{2px_\circ}$$

δηλαδή μέ τά δύο τρίτα τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου πού ἔχει πλευρές τή βάση $M_\circ'M_\circ$ καί τό ὕψος (ἤ βέλος) $O\Pi_\circ$ τοῦ παραβολικοῦ τμήματος. (Τό ἀποτέλεσμα αὐτό περιέχεται ἤδη στό σύγγραμμα τοῦ Ἀρχιμήδη "Τετραγωνισμός παραβολῆς").

§ 253. Ἡ λύση πού δώσαμε στό πρόβλημα τοῦ ἐμβαδοῦ (§§ 246–251) μέ τίς μεθόδους τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως ἀποτελεῖ τήν ἀφετηρία γιά τήν μόρφωση τῶν ἀκόλουθων καθαρῶς ἀναλυτικῶν (= ἀριθμητικῶν) θεωριῶν μέ εὐρύ πεδίο ἐφαρμογῶν.

Ἔστω $\sigma(x)$ συνάρτηση μονοσήμαντα ὁρισμένη στό διάστημα $J(\alpha \leqq x \leqq \beta)$ καί ν ἕνας αὐθαίρετος φυσικός ἀριθμός. Διά τῶν $\nu+1$ ἀριθμῶν

$$(253.1) \qquad \alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{\nu-1} < x_\nu = \beta \quad ,$$

ἀπό τούς ὁποίους οἱ $\nu-1$ ἐνδιάμεσοι εἶναι κατά τά ἄλλα ἐλεύθερα ἐκλέξιμοι, διαμερίζουμε τό διάστημα J σέ ν ὑποδιαστήματα.

$$(253.2) \qquad J_1(x_0 \leqq x \leqq x_1) \ , \ J_2(x_1 \leqq x \leqq x_2), \ldots , \ J_\nu(x_{\nu-1} \leqq x \leqq x_\nu)$$

πλάτους $\pi_1 = x_1 - x_0$, $\pi_2 = x_2 - x_1, \ldots, \pi_\nu = x_\nu - x_{\nu-1}$ ἀντίστοιχα. Μέσα σέ κάθε ὑποδιάστημα $J_\rho(\rho = 1,2,\ldots,\nu)$ ἐκλέγουμε ἐλεύθερα ἕναν ἀριθμό ξ_ρ:

$$(253.3) \qquad x_{\rho-1} \leqq \xi_\rho \leqq x_\rho \qquad \text{γιά} \quad \rho = 1,2,\ldots, \nu$$

καί κατόπιν μορφώνουμε τό ἄθροισμα

$$\sigma(\xi_1)(x_1-x_0) + \sigma(\xi_2)(x_2-x_1) + \ldots + \sigma(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) = \sum_{\rho=1}^{\nu} \sigma(\xi_\rho)\pi_\rho$$

Τό ἄθροισμα αὐτό (πού ἔχει τή μορφή τῶν ἀθροισμάτων (248.1) καί (248.2)) εἶναι ἕνας ἀριθμός πού ἐξαρτιέται ἀπό τό σύστημα τῶν διαμεριστικῶν ἀριθμῶν (253.1) καί ἀπό τό σύστημα τῶν ἀριθμῶν ξ_ρ (γιά $\rho = 1,2,\ldots,\nu$) οἱ ὁποῖοι ὑπόκεινται στούς περιορισμούς (253.3).

§ 254. <u>Δίνουμε τώρα τόν ἑξῆς ὁρισμό.</u> Ἡ συνάρτηση $\sigma(x)$ λέγεται ὁλοκληρώσιμη (κατά Riemann) στό διάστημα $J(\alpha \leqq x \leqq \beta)$ ἄν ὑπάρχη κάποιος ἀριθμός A μέ τήν ἀκόλουθη ἰδιότητα: σέ κάθε θετικό ἀριθμό ε μποροῦμε ν'ἀντιστοιχίσουμε ἕνα θετικό ἀριθμό η_ε τέτοιον ὥστε ὅταν ὁ διαμερισμός (253.2) ἔχει μέγιστο πλάτος ὑποδιαστημάτων μικρότερο τοῦ η_ε (Maximum τῶν $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\nu) < \eta_\varepsilon$) νά ἰσχύη ἡ σχέση

(254.1) $$\left|\sum_{\rho=1}^{\nu} \sigma(\xi_\rho)\pi_\rho - A\right| < \varepsilon \quad ,$$

ὁποιες τιμές καί ἄν ἔχουν τά ξ_ρ (σύμφωνες φυσικά μέ τίς σχέσεις (253.3)). Ὁ ἀριθμός A εἶναι μονότροπα ὁρισμένος ἀπό τήν παραπάνω ἰδιότητα.

Πράγματι, ἄν ὑπῆρχε καί δεύτερος ἀριθμός $A'(\neq A)$ μέ τήν ἴδια ἰδιότητα θά καταλήγαμε σέ ἄτοπο ὡς ἑξῆς: Παίρνουμε τόν ἀριθμό $\varepsilon = \frac{|A'-A|}{2}$. Ὅταν τό μέγιστο πλάτος τῶν ὑποδιαστημάτων τοῦ διαμερισμοῦ (253.2) ληφθῆ κατάλληλα μικρό, θά ἰσχύουν, ἐξ ὑποθέσεως, οἱ δυό σχέσεις

$$\left|\sum_{\rho=1}^{\nu} \sigma(\xi_\rho)\pi_\rho - A\right| < \varepsilon = \frac{|A'-A|}{2}$$

$$\left|\sum_{\rho=1}^{\nu} \sigma(\xi_\rho)\pi_\rho - A'\right| < \varepsilon = \frac{|A'-A|}{2}$$

συγχρόνως καί ἐπομένως ἡ

$$|A'-A| \leqq \left|A' - \sum_{\rho=1}^{\nu} \sigma(\xi_\rho)\pi_\rho\right| + \left|\sum_{\rho=1}^{\nu} \sigma(\xi_\rho)\pi_\rho - A\right| < 2\varepsilon = |A'-A| \quad ,$$

πού εἶναι ἄτοπη, διότι λέγει ὅτι $|A'-A| < |A'-A|$. Ὁ ἀριθμός A πού, ὅταν ὑπάρχη μιά δοσμένη συνάρτηση $\sigma(x)$, εἶναι λοιπόν ἐντελῶς καθορισμένος ἀπό τή συνάρτηση αὐτή, λέγεται ὁρισμένο ὁλοκλήρωμα τῆς $\sigma(x)$ στό διάστημα J_β $(\alpha \leqq x \leqq \beta)$ καί παριστάνεται μέ τό σύμβολο $\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx$, τό ὁποῖο διαβάζεται ὡς ἑξῆς: ὁλοκλήρωμα ἀπό α ἕως β σίγμα χί ντέ χί.

Πρόκειται τώρα νά βροῦμε ποιάν ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη ἔχει νά ἐκπληρώνη ἡ συνάρτηση $\sigma(x)$ γιά νά ὑπάρχη τό ὁρισμένο ὁλοκλήρωμα $A = \int_\alpha^\beta \sigma(x)\, dx$ καθώς καί τρόπον ὑπολογισμοῦ του.

§ 255. <u>Πρόταση 1.</u> Μιά συνάρτηση $\sigma(x)$ ἄν εἶναι ὁλοκληρώσιμη στό διάστημα $J(\alpha \leqq x \leqq \beta)$, θά εἶναι περιορισμένη πρός τά κάτω καί πρός τά πάνω γιά τό διάστημα αὐτό: $c_1 \leqq \sigma(x) \leqq c_2$ γιά $\alpha \leqq x \leqq \beta$.

'Απόδειξη. Πράγματι, ἄς πάρουμε ἕνα διαμερισμό (253.2), τοῦ $J(\alpha \leqq x \leqq \beta)$ μέ μέγιστο πλάτος ὑποδιαστημάτων κατάλληλα μικρό ($\text{maximum}(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\nu) < \eta$) ὥστε, σύμφωνα μέ τή (254.1), νά εἶναι

$$\left|\sum_{\rho=1}^{\nu} \sigma(\xi_\rho)\pi_\rho - A\right| < 1 = \varepsilon$$

γιά κάθε ἐκλογή τῶν ξ_ρ μέσα στά ἀντίστοιχα ὑποδιαστήματα J_ρ. 'Απ ἐδῶ ἕπεται ὅτι

$$A-1 < \sigma(\xi_1)\pi_1 + \sigma(\xi_2)\pi_2 + \ldots + \sigma(\xi_\nu)\pi_\nu < A+1$$

Κρατώντας τίς τιμές τῶν $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_\nu$ σταθερές βρίσκουμε ὅτι

$$\frac{A-1-\sigma(\xi_2)\pi_2 - \ldots - \sigma(\xi_\nu)\pi}{\pi_1} < \sigma(\xi_1) < \frac{A+1-\sigma(\xi_2)\pi_2 \ldots -\sigma(\xi_\nu)\pi_\nu}{\pi_1}$$

γιά κάθε τιμή τοῦ ξ_1 ἀπό τό διάστημα $J_1(x_0 \leqq \xi_1 \leqq x_1)$. Ἄρα ἡ $\sigma(x)$ εἶναι περιορισμένη πρός τά κάτω καί πρός τά πάνω γιά τό ὑποδιάστημα J_1.

Ὅμοια δείχνουμε ὅτι εἶναι περιορισμένη γιά τό ὑποδιάστημα J_2, τό $J_3, \ldots$, τό J_ν. Ἄρα ἡ $\sigma(x)$ θά εἶναι περιορισμένη πρός τά πάνω καί πρός τά κάτω καί γιά ὁλόκληρο τό διάστημα $J(\alpha \leqq x \leqq \beta)$, ὅ.ἔ.δ.

§ 256. 'Αφοῦ ἡ ὁλοκληρώσιμη συνάρτηση $\sigma(x)$ εἶναι περιορισμένη καί πρός τά πάνω καί πρός τά κάτω γιά τό διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$, τό κάτω πέρας της E_ρ καί τό ἄνω πέρας της M_ρ στό ὑποδιάστημα $J_\rho(x_{\rho-1} \leqq x \leqq x_\rho)$ τοῦ τυχόντος διαμερισμοῦ (253.2) τοῦ $J(\alpha \leqq x \leqq \beta)$ θά εἶναι δυό ὁρισμένοι ἀριθμοί.

'Η διαφορά $M_\rho - E_\rho = T_\rho$ εἶναι ἐκεῖνο πού καλέσαμε (βλ. §243) ταλάντευση τῆς $\sigma(x)$ στό ὑποδιάστημα $J_\rho(x_{\rho-1} \leqq x \leqq x_\rho)$ γιά $\varrho = 1,2,\ldots,\nu$. Λέγω τώρα ὅτι ἰσχύει ἡ

<u>Πρόταση 2</u>. "Αν ἡ $\sigma(x)$ εἶναι ὁλοκληρώσιμη στό διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$, τότε εἶναι δυνατό σέ κάθε θετικό ἀριθμό ε ν'ἀντιστοιχίσουμε ἕνα θετικό ἀριθμό δ_ε τέτοιον ὥστε νά εἶναι $\sum_{\rho=1}^{\nu} T_\rho \pi_\rho < \varepsilon$, ὅταν τό μέγιστο πλάτος τῶν ὑποδιαστημάτων τοῦ διαμερισμοῦ (253.2) εἶναι $< \delta_\varepsilon$.

<u>Παρατήρηση</u>. Τήν ἰδιότητα αὐτή τῆς $\sigma(x)$ συμφωνοῦμε νά τήν ἐκφράζουμε συντόμως λέγοντας ὅτι τό ἄθροισμα

$$\sum_{\rho=1}^{\nu} T_\rho \pi_\rho = \sum_{\rho=1}^{\nu} M_\varrho \pi_\rho - \sum_{\rho=1}^{\nu} E_\rho \pi_\rho$$

ἔχει ὅριο τό μηδέν, ὅταν τό μέγιστο πλάτος τῶν ὑποδιαστημάτων τοῦ διαμερισμοῦ τείνη στό μηδέν.

("Ας μή λησμονιέται ὅτι $T_\rho \geqq 0$, ἄρα καί $\sum_{\rho=1}^{\nu} T_\rho \pi_\rho \geqq 0$).

<u>'Απόδειξη</u>. Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τῆς ὁλοκληρωσιμότητας (§ 254), εἶναι δυνατό νά βροῦμε ἕνα θετικό ἀριθμό $\eta_{\varepsilon/3}$ τέτοιον ὥστε γιά κάθε διαμερισμό (253.2) μέ μέγιστο πλάτος ὑποδιαστημάτων μικρότερο τοῦ $\eta_{\varepsilon/3}$ νά ἰσχύη ἡ σχέση

$$\left| \sum_{\rho=1}^{\nu} \sigma(\xi_\rho) \pi_\rho - A \right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{256.1}$$

ὁποιες καί ἄν εἶναι οἱ τιμές τῶν ξ_ρ ἀπό τά ἀντίστοιχα ὑποδιαστήματα $J_\rho(x_{\rho-1} \leqq \xi_\rho \leqq x_\rho)$.

'Ισχυρίζομαι τώρα ὅτι γιά κάθε διαμερισμό τοῦ διαστήματος $J(\alpha \leqq x \leqq \beta)$ μέ μέγιστο πλάτος ὑποδιαστημάτων μικρότερο τοῦ $\eta_{\varepsilon/3}$ ἰσχύει ἡ σχέση $\sum_{\rho=1}^{\nu} T_\rho \pi_\rho < \varepsilon$. Πράγματι ἡ (256.1) εἶναι ἰσοδύναμη μέ τίς ἀκόλουθες δυό σχέσεις

$$-\frac{\varepsilon}{3} + A < \sum_{\rho=1}^{\nu} \sigma(\xi_\rho) \pi_\rho = \sigma(\xi_1)\pi_1 + \sum_{\rho=2}^{\nu} \sigma(\xi_\rho)\pi_\rho \quad ,$$

$$\sum_{\rho=1}^{\nu} \sigma(\xi_\rho)\pi_\rho = \sigma(\xi_1)\pi_1 + \sum_{\rho=2}^{\nu} \sigma(\xi_\rho)\pi_\rho < \frac{\varepsilon}{3} + A \, .$$

. Οἱ δύο αὐτές σχέσεις ἀληθεύουν γιά κάθε τιμή τοῦ ξ_1 ἀπό τό διάστημα $J_1(x_0 \leqq \xi_1 \leqq x_1)$ ἀφοῦ δώσουμε ὁρισμένες σταθερές τιμές στά $\xi_2,\dots,\xi_\nu$.

Ἄρα τό κάτω πέρας E_1 καί τό ἄνω πέρας M_1 τῆς $\sigma(\xi_1)$ στό διάστημα J_1 θά ἱκανοποιοῦν τίς δυό σχέσεις

$$-\frac{\varepsilon}{3}+A \leqq E_1\pi_1+\sum_{\rho=2}^{\nu}\sigma(\xi_\rho)\pi_\rho \quad , \quad M_1\pi_1+\sum_{\rho=2}^{\nu}\sigma(\xi_\rho)\pi_\rho \leqq \frac{\varepsilon}{3}+A \ .$$

Οἱ δυό τελευταῖες σχέσεις ἀληθεύουν γιά κάθε τιμή τοῦ ξ_2 ἀπό τό διάστημα $J_2(x_1 \leqq \xi_2 \leqq x_2)$, ἀφοῦ δώσουμε ὁρισμένες σταθερές τιμές στά $\xi_3,\dots,\xi_\nu$. Ἄρα τό κάτω μέρας E_2 καί τό ἄνω πέρας M_2 τῆς $\sigma(\xi_2)$ στό διάστημα J_2 θά ἱκανοποιοῦν τίς δυό σχέσεις:

$$-\frac{\varepsilon}{3}+A \leqq E_1\pi_1+E_2\pi_2+\sum_{\rho=3}^{\nu}\sigma(\xi_\rho)\,\pi_\rho \quad ,$$

$$M_1\pi_1+M_2\pi_2+\sum_{\rho=3}^{\nu}\sigma(\xi_\rho)\pi_\rho \leqq \frac{\varepsilon}{3}+A \ ,$$

καί οὕτω καθεξῆς ὡς τίς δυό σχέσεις

$$-\frac{\varepsilon}{3}+A \leqq E_1\pi_1+E_2\pi_2+\dots+E_\nu\pi_\nu \quad , \quad M_1\pi_1+M_2\pi_2+\dots+M_\nu\pi_\nu \leqq \frac{\varepsilon}{3}+A.$$

Ἀπ'αὐτές συμπεραίνουμε ὅτι

$$\sum_{\rho=1}^{\nu}M_\rho\pi_\rho-\sum_{\rho=1}^{\nu}E_\rho\pi_\rho=\sum_{\rho=1}^{\nu}(M_\rho-E_\rho)\pi_\rho=\sum_{\rho=1}^{\nu}T_\rho\pi_\rho \leqq \frac{2\varepsilon}{3}<\varepsilon \ .$$

Μ'ἄλλα λόγια: ὅταν τό μέγιστο πλάτος τῶν ὑποδιαστημάτων τοῦ διαμερισμοῦ εἶναι μικρότερο τοῦ $\delta_\varepsilon=\eta_{\varepsilon/3}$, τό ἄθροισμα $\sum_{\rho=1}^{\nu}T_\rho\pi_\rho$ εἶναι $<\varepsilon$, ὅ.ἔ.δ.

§ 257. Οἱ προτάσεις 1 καί 2 (§ 255 καί § 256) δείχνουν ὅτι ἀναγκαία συνθήκη γιά τήν ὁλοκληρωσιμότητα τῆς $\sigma(x)$ στό διάστημα $J(\alpha \leqq x \leqq \beta)$ εἶναι 1ο ἡ $\sigma(x)$ νά εἶναι περιορισμένη πρός τά πάνω καί πρός τά κάτω γιά $\alpha \leqq x \leqq \beta$ καί 2ο $\lim \sum_{\rho=1}^{\nu}T_\rho\pi_\rho=0$ ὅταν τό μέγιστο πλάτος τῶν ὑποδιαστημάτων τοῦ διαμερισμοῦ (253.2) τείνη στό μηδέν (βλ.παρατήρηση στήν πρόταση 2 § 256). Θά δείξουμε τώρα ὅτι ἡ συνθήκη αὐτή εἶναι καί ἱκανή. Ἔστω Δ ἕνας δοσμένος διαμερισμός (253.2) τοῦ $J(\alpha \leqq x \leqq \beta)$. Θεωροῦμε τά ἀθροίσματα

$$s(\Delta) = \sum_{\rho=1}^{\nu} E_\rho(x_\rho - x_{\rho-1}) = \sum_{\rho=1}^{\nu} E_\rho \pi_\rho$$

καί

$$S(\Delta) = \sum_{\rho=1}^{\nu} M_\rho \pi_\rho \quad .$$

Γιά κάθε ἐκλογή τῶν ἀριθμῶν ξ_ρ , σύμφωνα μέ τίς σχέσεις (253.3), ἔχουμε

$$(257.1) \qquad s(\Delta) \leqq \sum_{\rho=1}^{\nu} \sigma(\xi_\rho)\pi_\rho \leqq S(\Delta) \quad ,$$

γι'αὐτό, τό μέν $s(\Delta)$ λέγεται κατώτερο ἄθροισμα, τό δέ $S(\Delta)$ ἀνώτερο ἄθροισμα ἀντίστοιχο στό διαμερισμό Δ. Παρατηροῦμε ἐπί πλέον ὅτι

$$S(\Delta) - s(\Delta) = \sum_{\rho=1}^{\nu} (M_\rho - E_\rho)\pi_\rho = \sum_{\rho=1}^{\nu} T_\rho \pi_\rho \quad ,$$

ὅπου T_ρ ἡ ταλάντευση τῆς $\sigma(x)$ γιά τό διάστημα $x_{\rho-1} \leqq x \leqq x_\rho$.

§ 258. <u>Πρόταση 3</u>. Ἄν στό διαμερισμό Δ(253.2) προσληφθοῦν μ νέοι διαμεριστικοί ἀριθμοί, τότε τό μέν κατώτερο ἄθροισμα αὐξάνει (μέ εὐρεία σημασία), τό δέ ἀνώτερο ἄθροισμα ἐλαττώνεται (μέ εὐρεία σημασία).

<u>Ἀπόδειξη</u>. Θ'ἀποδείξουμε τόν ἰσχυρισμό γιά τήν προσθήκη ἑνός μόνο νέου διαμεριστικοῦ ἀριθμοῦ ($\mu = 1$)· μέ μαθηματική ἐπαγωγή ἕπεται κατόπιν προφανῶς ἡ ὀρθότητά του γιά προσθήκη ἑνός ὁσουδήποτε πλήθους μ νέων διαμεριστικῶν ἀριθμῶν.

Ἄς εἶναι λοιπόν x' ὁ προσλαμβανόμενος νέος διαμεριστικός ἀριθμός καί ἄς κεῖται μεταξύ τῶν διαμεριστικῶν ἀριθμῶν $x_{\kappa-1}$ καί x_κ τοῦ διαμερισμοῦ Δ. Καλοῦμε Δ΄ τό διαμερισμό πού προκύπτει μέ τήν πρόσληψη τοῦ x' στή σειρά (253.1), μεταξύ $x_{\kappa-1}$ καί x_κ. Ἔχουμε νά δείξουμε ὅτι

$$s(\Delta) \leqq s(\Delta') \quad , \quad S(\Delta') \leqq S(\Delta)$$

Γιά νά μεταβοῦμε ἀπό τό $s(\Delta)$ στό $s(\Delta')$ πρέπει ν'ἀφήσουμε ὅλους τούς ὅρους $E_\rho \pi_\rho$ $(\rho = 1,2,3,\ldots,\nu)$ τοῦ $s(\Delta)$ ἀμετάβλητους ἐκτός ἀπό τόν $E_\kappa \pi_\kappa = E_\kappa(x_\kappa - x_{\kappa-1})$, αὐτόν δέ νά τόν ἀντικαταστήσουμε μέ

$$E'_\kappa(x' - x_{\kappa-1}) + E''_\kappa(x_\kappa - x')$$

ὅπου E'_κ, E''_κ τά κάτω πέρατα τῆς $\sigma(x)$ γιά τά ὑποδιαστήματα $x_{\kappa-1} \leqq x \leqq x'$ καί $x' \leqq x \leqq x_\kappa$ ἀντιστοίχως. Εἶναι ὅμως φανερό ὅτι $E'_\kappa \geqq E_\kappa$ = κάτω πέρας τῆς $\sigma(x)$ γιά τό διάστημα $x_{\kappa-1} \leqq x \leqq x_\kappa$, πού περιέχει τό $x_{\kappa-1} \leqq x \leqq x'$ καί, γιά ὅμοιο λόγο, $E''_\kappa \geqq E_\kappa$. Ἄρα

$$\begin{aligned} E'_\kappa(x' - x_{\kappa-1}) + E''_\kappa(x_\kappa - x') &\geqq E_\kappa(x' - x_{\kappa-1}) + E_\kappa(x_\kappa - x') = \\ &= E_\kappa(x_\kappa - x_{\kappa-1}) \quad , \quad \text{ὅ.ἔ.δ.} \end{aligned}$$

Ὅμοια γιά νά μεταβοῦμε ἀπό τό $S(\Delta)$ στό $S(\Delta')$ ἀφήνουμε ὅλους τούς ὅρους $M_\rho \pi_\rho$ $(\rho = 1,2,\ldots,\nu)$ τοῦ $S(\Delta)$ ἀμετάβλητους ἐκτός ἀπό τόν $M_\kappa \pi_\kappa = M_\kappa(x_\kappa - x_{\kappa-1})$, αὐτόν δέ τόν ἀντικαθιστοῦμε μέ $M'_\kappa(x' - x_{\kappa-1}) + M''_\kappa(x_\kappa - x')$, ὅπου M'_κ καί M''_κ τά ἄνω πέρατα τῆς $\sigma(x)$ στά ὑποδιαστήματα $x_{\kappa-1} \leqq x \leqq x'$ καί $x' \leqq x \leqq x_\kappa$ τοῦ διαστήματος $x_{\kappa-1} \leqq x \leqq x_\kappa$. Ἑπομένως $M'_\kappa \leqq M_\kappa$, $M''_\kappa \leqq M_\kappa$ = ἄνω πέρας τῆς $\sigma(x)$ στό διάστημα $x_{\kappa-1} \leqq x \leqq x_\kappa$, ἄρα

$$M'_\kappa(x' - x_{\kappa-1}) + M''_\kappa(x_\kappa - x') \leqq M_\kappa(x' - x_{\kappa-1}) + M_\kappa(x_\kappa - x') = M_\kappa(x_\kappa - x_{\kappa-1}).$$

§ 259. <u>Πρόταση 4.</u> Κάθε κατώτερο ἄθροισμα $s(\Delta)$ εἶναι $\leqq$ κάθε ἀνώτερου ἀθροίσματος $S(\Delta^*)$.

<u>Ἀπόδειξη.</u> Ἔστω Δ' ὁ διαμερισμός τοῦ διαστηματος $J(\alpha \leqq x \leqq \beta)$ πού προκύπτει ὅταν χρησιμοποιήσουμε συγχρόνως τούς διαμεριστικούς ἀριθμούς καί τοῦ Δ καί τοῦ Δ^*. Κατά τήν προηγουμένη πρόταση ἔχουμε $s(\Delta) \leqq s(\Delta')$ καί $S(\Delta') \leqq S(\Delta^*)$. Ἐπειδή δέ $s(\Delta') \leqq S(\Delta')$, θά ἰσχύη ἡ σχέση

$$s(\Delta) \leqq S(\Delta^*) \quad , \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

§ 260. Πρόταση 5. "Αν ἡ $\sigma(x)$ εἶναι περιορισμένη πρός τά πάνω καί πρός τά κάτω γιά τό διάστημα $J(\alpha \leqq x \leqq \beta)$ καί ἄν $\sum_{\rho=1}^{\nu} T_\rho \pi_\rho <$ τοῦ αὐθαίρετα δοσμένου ἀριθμοῦ ε γιά κάθε διαμερισμό (253.2) τοῦ J μέ μέγιστο πλάτος ὑποδιαστημάτων μικρότερο κατάλληλου ἀριθμοῦ δ_ε, τότε ἡ $\sigma(x)$ εἶναι ὁλοκληρώσιμη στό διάστημα J.

Ἀπόδειξη. Θεωροῦμε τούς εἰδικούς διαμερισμούς Δ_μ τοῦ J σέ $\nu = 2^\mu$ ἰσόπλατα διαστήματα (ἄρα μέ πλάτος ὑποδιαστημάτων $h_\mu = \frac{\beta-\alpha}{2^\mu}$), γιά $\mu = 1,2,3,\ldots$. Ὁ $\Delta_{\mu+1}$ προκύπτει ἀπό τόν Δ_μ μέ προσθήκη 2^μ νέων διαμεριστικῶν ἀριθμῶν, τῶν μέσων τῶν ὑποδιαστημάτων τοῦ διαμερισμοῦ Δ_μ. Ἄρα

$$s(\Delta_1) \leqq s(\Delta_2) \leqq \ldots \leqq s(\Delta_\mu) \leqq s(\Delta_{\mu+1}) \leqq \ldots$$
$$S(\Delta_1) \geqq S(\Delta_2) \geqq \ldots \geqq S(\Delta_\mu) \geqq S(\Delta_{\mu+1}) \geqq \ldots$$

καί κάθε $s(\Delta_{\mu_1}) \leqq$ κάθε $S(\Delta_{\mu_2})$. Ἑπομένως ὑπάρχουν τά ὅρια

$$\lim_{\mu\to+\infty} s(\Delta_\mu) = s_0 = \text{ἀριθμός} \quad , \quad \lim_{\mu\to+\infty} S(\Delta_\mu) = S_0 = \text{ἀριθμός}$$

καί εἶναι $s_0 \leqq S_0$. Ἔχουμε ὅμως σύμφωνα μέ τήν ὑπόθεση τῆς προτάσεως:

$$\lim_{\mu\to+\infty} [S(\Delta_\mu) - s(\Delta_\mu)] = \lim_{\mu\to+\infty} \sum_{\rho=1}^{\nu} T_\rho^{(\mu)} \pi_\rho^{(\mu)} = 0 \ ,$$

ἐπειδή τό (μέγιστο) πλάτος $h_\mu = \frac{\beta-\alpha}{2^\mu}$ τῶν ὑποδιαστημάτων τοῦ διαμερισμοῦ Δ_μ τείνει στό 0 γιά $\mu\to+\infty$, ἄρα

$$\lim_{\mu\to+\infty} [S(\Delta_\mu) - s(\Delta_\mu)] = S_0 - s_0 = 0 \ .$$

Θά δείξουμε τώρα ὅτι γιά τή συνάρτηση $\sigma(x)$ ἰσχύει ὁ ὁρισμός τῆς ὁλοκληρωσιμότητας (βλ. § 254) μέ $A = s_0 = S_0$. Πράγματι ἀπό τίς σχέσεις

$$s(\Delta_\mu) \leqq \text{κάθε } S(\Delta) \qquad \text{καί κάθε } s(\Delta) \leqq S(\Delta_\mu)$$

γιά $\mu = 1,2,3,\ldots$ ἕπονται οἱ σχέσεις

$$\lim_{\mu\to\infty} s(\Delta_\mu) = s_0 = A \leqq \text{κάθε } S(\Delta)$$

καί κάθε $$s(\Delta) \leqq \lim_{\mu\to+\infty} S(\Delta_\mu) = S_0 = A \quad ,$$

δηλαδή οἱ σχέσεις $s(\Delta) \leqq A \leqq S(\Delta)$ γιά κάθε διαμερισμό Δ.

Ἐξ ἄλλου εἶναι γιά κάθε διαμερισμό Δ (βλ. σχέση (257.1)

$$s(\Delta) \leqq \sum_{\varrho=1}^{\nu} \sigma(\xi_\varrho)\pi_\varrho \leqq S(\Delta) \quad ,$$

ἄρα $$\left|\sum_{\varrho=1}^{\nu} \sigma(\xi_\varrho)\pi_\varrho - A\right| \leqq S(\Delta) - s(\Delta) = \sum_{\varrho=1}^{\nu} T_\varrho \pi_\varrho \ .$$

Ἑπομένως ἄν τό μέγιστο πλάτος τῶν ὑποδιαστημάτων τοῦ διαμερισμοῦ Δ εἶναι κατάλληλα μικρό ($< \delta_\varepsilon$) ὥστε νά ἔχουμε κατά τήν ὑπόθεση τῆς ἀποδεικτέας προτάσεως $\sum_{\varrho=1}^{\nu} T_\varrho \pi_\varrho < \varepsilon$, θά ἰσχύη κατά μείζονα λόγο ἡ σχέση

$$\left|\sum_{\varrho=1}^{\nu} \sigma(\xi_\varrho)\pi_\varrho - A\right| < \varepsilon \quad , \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

§ 261. Συγκεφαλαιώνοντας μποροῦμε λοιπόν νά διατυπώσουμε τήν

<u>Πρόταση</u>. Γιά νά εἶναι ἡ μονοσήμαντη συνάρτηση $\sigma(\mathbf{x})$ ὁλοκληρώσιμη (κατά Riemann) στό διάστημα $J(\alpha \leqq \mathbf{x} \leqq \beta)$ πρέπει καί ἀρκεῖ 1ο νά εἶναι περιορισμένη πρός τά πάνω καί πρός τά κάτω γι'αὐτό τό διάστημα καί 2ο τό ἄθροισμα $\sum_{\varrho=1}^{\nu} T_\varrho \pi_\varrho$ νά εἶναι $<$ κάθε δοσμένου θετικοῦ ἀριθμοῦ ε, ὅταν τό μέγιστο πλάτος τῶν ὑποδιαστηματων τοῦ διαμερισμοῦ (253.2) εἶναι $<$ κατάλληλου ἀριθμοῦ δ_ε. Στήν περίπτωση τῆς ὁλοκληρωσιμότητας τό ὁρισμένο ὁλοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta \sigma(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ εἶναι τό κοινό ὅριο ἀκολουθιῶν οἱ ὁποῖες κατασκευάζονται ὡς ἑξῆς: Θεωροῦμε μιάν ἀτέρμονα διαδοχή διαμερισμῶν $D_1, D_2, \ldots, D_\mu, \ldots$ τοῦ διαστήματος $J(\alpha \leqq \mathbf{x} \leqq \beta)$ ὅπου τό μέγιστο πλάτος d_μ τῶν ὑποδιαστημάτων

$$J_1^{(\mu)}[x_0^{(\mu)}, x_1^{(\mu)}] \ , \ J_2^{(\mu)}[x_1^{(\mu)}, x_2^{(\mu)}], \ldots , \ J_{\nu_\mu}^{(\mu)}[x_{\nu_\mu - 1}^{(\mu)}, x_{\nu_\mu}^{(\mu)}]$$

τοῦ διαμερισμοῦ D_μ ἔχει ὅριο τό 0 γιά $\mu\to+\infty$ (ὁπότε φυσικά ὁ ἀριθμός ν_μ τῶν ὑποδιαστημάτων τοῦ D_μ ἔχει ὅριο τό $+\infty$ γιά $\mu \to +\infty$).

Καλοῦμε $\xi_\varrho^{(\mu)}$ ἕνα τυχόντα ἀριθμό ἀπό τό ὑποδιάστημα $J_\varrho^{(\mu)}$ (δηλαδή $x_{\varrho-1}^{(\mu)} \leqq \xi_\varrho^{(\mu)} \leqq x_\varrho^{(\mu)}$) γιά $\varrho = 1,2,\ldots,\nu_\mu$, $E_\varrho^{(\mu)}$ τό κάτω πέρας τῆς $\sigma(x)$, $M_\varrho^{(\mu)}$ τό ἄνω πέρας τῆς $\sigma(x)$ στό ὑποδιάστημα $J_\varrho^{(\mu)}$ γιά $\varrho = 1,2,\ldots,\nu_\mu$. Μορφώνουμε τά ἀθροίσματα

$$s(D_\mu) = \sum_{\varrho=1}^{\nu_\mu} E_\varrho^{(\mu)}(x_\varrho^{(\mu)} - x_{\varrho-1}^{(\mu)}) \quad , \quad S(D_\mu) = \sum_{\varrho=1}^{\nu_\mu} M_\varrho^{(\mu)}(x_\varrho^{(\mu)} - x_{\varrho-1}^{(\mu)}),$$

$$A(D_\mu) = \sum_{\varrho=1}^{\nu_\mu} \sigma(\xi_\varrho^{(\mu)})(x_\varrho^{(\mu)} - x_{\varrho-1}^{(\mu)}) \quad .$$

Τό ὁλοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta \sigma(x)\,dx$ εἶναι τό κοινό ὅριο τῶν ἀκολουθιῶν

$$s(D_1),\ s(D_2),\ldots,\ s(D_\mu),\ldots$$
$$S(D_1),\ S(D_2),\ldots,\ S(D_\mu),\ldots$$
$$A(D_1),\ A(D_2),\ldots,\ A(D_\mu),\ldots$$

Π.χ. λαμβάνοντας εἰδικούς διαμερισμούς D_μ πού νά ἀποτελοῦνται ἀπό μ ἰσόπλατα ὑποδιαστήματα καί τούς ἀριθμούς $\xi_\varrho^{(\mu)}$ ἴσους μέ τά κάτω ἄκρα $x_{\varrho-1}^{(\mu)} = \alpha + (\varrho-1)\dfrac{\beta-\alpha}{\mu}$ τῶν ἀντίστοιχων ὑποδιαστημάτων $J_\varrho^{(\mu)}$ ἔχουμε

$$(261.1) \qquad \int_\alpha^\beta \sigma(x)dx = \lim_{\mu\to\infty} \sum_{\varrho=1}^{\mu} \sigma\Big(\alpha + (\varrho-1)\frac{\beta-\alpha}{\mu}\Big)\cdot\frac{\beta-\alpha}{\mu}$$

§ 262. Πρόταση 6. "Αν ἡ $\sigma(x)$ εἶναι συνεχής στό περιορισμένο καί κλειστό διάστημα $J(\alpha \leqq x \leqq \beta)$, τότε θά εἶναι καί ὁλοκληρώσιμη σ'αὐτό.

Ἀπόδειξη. Πράγματι 1ον ἡ $\sigma(x)$ εἶναι περιορισμένη πρός τά πάνω καί πρός τά κάτω γιά τό διάστημα $J(\alpha \leqq x \leqq \beta)$ σύμφωνα μέ τήν πρόταση τοῦ Weierstrass (§ 200)· 2ον σύμφωνα μέ τό πόρισμα τοῦ § 245, ἄν τό μέγιστο πλάτος τῶν ὑποδιαστημάτων τοῦ διαμερισμοῦ (253.2) εἶναι κατάλληλα μικρό, ἡ ταλάντευση T_ϱ τῆς $\sigma(x)$ στό ὑποδιάστημα J_ϱ (γιά $\varrho = 1,2,3,\ldots,\nu$) θά εἶναι μικρότερη τοῦ αὐθαίρετου θετικοῦ ἀριθμοῦ η. Ἄρα γιά ἕναν τέτοιο διαμερισμό θά ἔχουμε

$$\sum_{\rho=1}^{\nu} T_\rho \pi_\rho < \sum_{\rho=1}^{\nu} \eta \cdot \pi_\rho = \eta \sum_{\rho=1}^{\nu} \pi_\rho = \eta(\beta-\alpha) \quad .$$

Ἐπομένως θά εἶναι $\sum_{\rho=1}^{\nu} T_\rho \pi_\rho <$ τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ $\eta(\beta-\alpha)$ (ὁ ὁποῖος γίνεται ἴσος μέ τόν αὐθαίρετο θετικό ε γιά $\eta = \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}$), ὅταν τό μέγιστο πλάτος τῶν ὑποδιαστημάτων τοῦ διαμερισμοῦ τόν ὁποῖον θεωροῦμε εἶναι μικρότερο κατάλληλου θετικοῦ ἀριθμοῦ. Ἄρα, κατά τήν πρόταση 5 τοῦ § 260, ἡ $\sigma(\mathbf{x})$ εἶναι ὁλοκληρώσιμη στό διάστημα $\alpha \leqq \mathbf{x} \leqq \beta$.

§ 263. <u>Πρόταση 7</u>. Ἄν ἡ $\sigma(\mathbf{x})$ εἶναι αὔξουσα (ἤ φθίνουσα) μέ εὐρεία σημασία στό διάστημα $J(\alpha \leqq \mathbf{x} \leqq \beta)$ θά εἶναι καί ὁλοκληρώσιμη σ'αὐτό.

<u>Ἀπόδειξη</u>. Ἄς εἶναι ἡ $\sigma(\mathbf{x})$ αὔξουσα χωρίς νά εἶναι σταθερή: $\sigma(\alpha) < \sigma(\beta)$ (ἡ περίπτωση τῆς σταθερότητας μπορεῖ νά ὑπαχθῆ στήν περίπτωση τῆς σ υ ν ε χ ο ῦ ς συναρτήσεως $\sigma(\mathbf{x})$ πού θεωρήσαμε στήν παραπάνω πρόταση 6). Ἔχουμε γιά κάθε $\mathbf{x}$ ἀπό τό διάστημα $\alpha \leqq \mathbf{x} \leqq \beta$, $\sigma(\alpha) \leqq \sigma(\mathbf{x}) \leqq \sigma(\beta)$, ἄρα ἡ $\sigma(\mathbf{x})$ εἶναι περιορισμένη πρός τά κάτω καί πρός τά πάνω γιά τό διάστημα $\alpha \leqq \mathbf{x} \leqq \beta$.

Ἐξ ἄλλου ἄν καλέσουμε π τό μέγιστο ἀπό τά πλάτη $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\nu$ τῶν ὑποδιαστημάτων τοῦ διαμερισμοῦ (253.2) θά ἔχουμε

$$\sum_{\rho=1}^{\nu} T_\rho \pi_\rho \leqq \pi \sum_{\rho=1}^{\nu} T_\rho = \pi \sum_{\rho=1}^{\nu} \left[\sigma(\mathbf{x}_\rho) - \sigma(\mathbf{x}_{\rho-1})\right] =$$

$$= \pi \left\{\sigma(\mathbf{x}_\nu) - \sigma(\mathbf{x}_0)\right\} = \pi\left\{\sigma(\beta) - \sigma(\alpha)\right\} \quad .$$

Ὥστε θά εἶναι $\sum_{\rho=1}^{\nu} T_\rho \pi_\rho <$ τοῦ κάθε δοσμένου θετικοῦ ἀριθμοῦ ε, ὅταν τό μέγιστο πλάτος π εἶναι < τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{\varepsilon}{\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)}$. Ἄρα, πάλιν κατά τήν πρόταση 5 (§ 260), ἡ $\sigma(\mathbf{x})$ εἶναι ὁλοκληρώσιμη στό διάστημα $J(\alpha \leqq \mathbf{x} \leqq \beta)$.

§ 264. Παραδείγματα ὑπολογισμοῦ τοῦ $\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx$.

1. Ἡ $\sigma(x) = c =$ σταθερά γιά $\alpha \leqq x \leqq \beta$ εἶναι ὁλοκληρώσιμη. Γιά κάθε διαμερισμό Δ καί μέ κάθε ἐκλογή τῶν ἀριθμῶν ξ ἔχουμε

$$A(\Delta) = \Sigma\sigma(\xi_\rho)\pi_\rho = c\sum \pi_\rho = c(\beta-\alpha) .$$

Ἄρα καί $\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx = \int_\alpha^\beta cdx = c(\beta-\alpha)$, (βλ. § 261).

2. Ἡ $\sigma(x) = e^x$ εἶναι συνεχής (καί αὔξουσα) στό τυχόν διάστημα $J(\alpha \leqq x \leqq \beta)$. Ὑπάρχει λοιπόν τό $\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx$. Ἰδού ὁ ὑπολογισμός του βάσει τῆς ὁριακῆς σχέσεως (261.1) ὅπου χρησιμοποιοῦνται διαμερισμοί τοῦ J σέ μ ἰσόπλατα ὑποδιαστήματα μέ πλάτος ἑπομένως $h_\mu = \dfrac{\beta-\alpha}{\mu}$. Ἔχουμε

$$\sum_{\rho=1}^{\mu} \sigma(\alpha+(\rho-1)h_\mu)h_\mu = h_\mu(e^\alpha + e^{\alpha+h_\mu} + e^{\alpha+2h_\mu} + \ldots + e^{\alpha+(\mu-1)h_\mu}) =$$

$$= h_\mu \frac{e^{\alpha+\mu h_\mu} - e^\alpha}{e^{h_\mu}-1} = \frac{e^\beta - e^\alpha}{\dfrac{(e^{h_\mu}-1)}{h_\mu}} .$$

Ὅταν τό μ τείνη στό $+\infty$, τό $h_\mu = \dfrac{\beta-\alpha}{\mu}$ ἔχει ὅριο τό 0, ἄρα τό πηλίκο

$$\frac{e^{h_\mu}-1}{h_\mu} = \frac{e^{h_\mu}-e^0}{h_\mu - 0} = \frac{e^{0+\Delta x}-e^0}{\Delta x}$$

ἔχει ὅριο τήν παράγωγο τῆς e^x στή θέση $x = 0$, δηλαδή τό $(e^x)'_{x=0} = 1$. Ἄρα

$$\lim_{\mu\to+\infty} \sum_{\rho=1}^{\mu} \sigma(\alpha+(\rho-1)h_\mu)\cdot h_\mu = \frac{e^\beta - e^\alpha}{1} .$$

καί συνεπῶς $\displaystyle\int_\alpha^\beta e^x dx = e^\beta - e^\alpha$.

3. Ἡ $\sigma(x) = \eta\mu x$ εἶναι συνεχής στό τυχόν διάστημα $J(\alpha \leqq x \leqq \beta)$. Ἄρα τό $\int_\alpha^\beta \eta\mu x dx$ ὑπάρχει· ὑπολογίζεται εὔκολα, ὅπως τό προηγούμενο, μέ τήν ἴδια μετάβαση στό ὅριο. Ἔχουμε (γράφοντας γιά εὐκολία h ἀντί h_μ):

$$\sum_{\rho=1}^{\mu} \sigma(\alpha+(\rho-1)h)h = h\big(\eta\mu\alpha + \eta\mu(\alpha+h) + \eta\mu(\alpha+2h) + \ldots$$
$$+ \eta\mu(\alpha+(\mu-1)h)\big)$$

$$=\frac{h}{2\eta\mu\frac{h}{2}}\left(2\eta\mu\frac{h}{2}\,\eta\mu\alpha+2\eta\mu\frac{h}{2}\,\eta\mu(\alpha+h)+\ldots+2\eta\mu\frac{h}{2}\,\eta\mu(\alpha+(\mu-1)h)\right)$$

$$=\frac{\frac{h}{2}}{\eta\mu\frac{h}{2}}\left(\sigma\upsilon\nu(\alpha-\frac{h}{2})-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\frac{h}{2})+\ldots+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\frac{2\mu-2}{2}h-\frac{h}{2})\right.$$

$$\left.-\sigma\upsilon\nu\left(\alpha+\frac{2\mu-2}{2}h+\frac{h}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{\frac{h}{2}}{\eta\mu\frac{h}{2}}\left(\sigma\upsilon\nu(\alpha-\frac{h}{2})-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\frac{2\mu-1}{2}h)\right)$$

Τώρα, ὅταν τό $\mu\to+\infty$, τό $h\to 0$ καί $\dfrac{\frac{h}{2}}{\eta\mu\frac{h}{2}}\longrightarrow 1$,

$\sigma\upsilon\nu\left(\alpha-\frac{h}{2}\right)\to\sigma\upsilon\nu\alpha$ (λόγω συνεχείας τῆς συν$\mathbf{x}$ στή θέση α)

καί $\sigma\upsilon\nu\left(\alpha+\frac{2\mu-1}{2}h\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\alpha+\mu h-\frac{h}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\beta-\frac{h}{2}\right)\to\sigma\upsilon\nu\beta$

(λόγῳ συνέχειας τῆς συν$\mathbf{x}$ στή θέση β). Ἄρα

$$\lim_{\mu\to+\infty}\sum_{\varrho=1}^{\mu}\sigma(\alpha+(\varrho-1)h)\cdot h=\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\beta$$

καί $\quad\int_\alpha^\beta\eta\mu\mathbf{x}\,d\mathbf{x}=(-\sigma\upsilon\nu\beta)-(-\sigma\upsilon\nu\alpha).$

4. Ἡ $\sigma(\mathbf{x})=\mathbf{x}^\gamma$ ὅπου γ τυχούσα πραγματική σταθερά, εἶναι ὁρισμένη καί συνεχής στό διάστημα $0<\mathbf{x}<+\infty$. Ὥστε, ἄν α καί β εἶναι δυό τυχόντες θετικοί ἀριθμοί μέ $\alpha<\beta$, τό $\int_\alpha^\beta\mathbf{x}^\gamma d\mathbf{x}$ ὑπάρχει. Γιά τόν ὑπολογισμό του εἶναι σκόπιμο νά διαμερίσουμε τό διάστημα $\alpha\leqq\mathbf{x}\leqq\beta$ ὄχι σέ ἰσόπλατα ὑποδιαστήματα ἀλλά σέ ν ὑποδιαστήματα μέ πλάτη ἀποτελοῦντα γεωμετρική πρόοδο, διά τῶν διαμεριστικῶν ἀριθμῶν $\alpha=\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1=\alpha\lambda$, $\mathbf{x}_2=\alpha\lambda^2$, $\ldots$, $\mathbf{x}_{\nu-1}=\alpha\lambda^{\nu-1}$, $\mathbf{x}_\nu=\alpha\lambda^\nu=\beta$, ὅπου ἐπομένως $\lambda=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/\nu}=+\sqrt[\nu]{\frac{\beta}{\alpha}}$. Τά πλάτη τῶν ὑποδιαστημάτων εἶναι $\pi_\varrho=\mathbf{x}_\varrho-\mathbf{x}_{\varrho-1}=\alpha\lambda^\varrho-\alpha\lambda^{\varrho-1}=$ $=\alpha\lambda^{\varrho-1}(\lambda-1)$ γιά $\varrho=1,2,\ldots,\nu$. Τό μέγιστο ἀπό αὐτά εἶναι τό τελευταῖο $\alpha\lambda^{\nu-1}(\lambda-1)=\pi_\nu$ γιά τό ὁποῖο ἔχουμε: $\pi_\nu<\pi_\nu\lambda=\alpha\lambda^\nu(\lambda-1)=\beta(\lambda-1)$. Ὅταν τό $\nu\to+\infty$ τό $\lambda=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\nu}}\to\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^0=1$

(λόγω συνεχείας τῆς συναρτήσεως $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x$ στή θέση $x = 0$),

ἄρα $\lambda-1 \to 0$ καί $\pi_\nu \to 0$. Ἐκλέγουμε τούς ἀριθμούς ξ_ρ ἴσους μέ τά κάτω ἄκρα $x_{\rho-1} = \alpha\lambda^{\rho-1}$ τῶν ἀντίστοιχων ὑποδιαστημάτων τοῦ διαμερισμοῦ καί μορφώνουμε τό ἄθροισμα

$$\sum_{\rho=1}^{\nu}\sigma(\xi_\rho)\pi_\rho = \sum_{\rho=1}^{\nu}x_{\rho-1}^{\gamma}\pi_\rho = \sum_{\rho=1}^{\nu}(\alpha\lambda^{\rho-1})^{\gamma}\alpha\lambda^{\rho-1}(\lambda-1) =$$

$$\sum_{\rho=1}^{\nu}\alpha^{\gamma+1}\lambda^{(\gamma+1)(\rho-1)}(\lambda-1) = \alpha^{\gamma+1}(\lambda-1)\left(\lambda^0+\lambda^{\gamma+1}+\lambda^{(\gamma+1)2}+\ldots+\lambda^{(\gamma+1)(\nu-1)}\right).$$

Διακρίνουμε τώρα δυό περιπτώσεις, καθόσο $\gamma+1 \neq 0$ ἤ $\gamma+1 = 0$.

<u>1η περίπτωση:</u> $\gamma+1 \neq 0$, ὁπότε $\lambda^{\gamma+1} \neq 1$, ἄρα

$$\lambda^0+\lambda^{\gamma+1}+\ldots+\lambda^{(\gamma+1)(\nu-1)} = \frac{\lambda^{(\gamma+1)\nu}-\lambda^0}{\lambda^{\gamma+1}-1} = \frac{\lambda^{\nu(\gamma+1)}-1}{\lambda^{\gamma+1}-1}$$

καί ἑπομένως $\displaystyle\sum_{\rho=1}^{\nu}\sigma(\xi_\rho)\pi_\rho = \alpha^{\gamma+1}(\lambda-1)\frac{\lambda^{\nu(\gamma+1)}-1}{\lambda^{\gamma+1}-1} =$

$$= \frac{(\alpha\lambda^\nu)^{\gamma+1}-\alpha^{\gamma+1}}{\dfrac{(\lambda^{\gamma+1}-1)}{\lambda-1}} = \frac{\beta^{\gamma+1}-\alpha^{\gamma+1}}{\dfrac{(\lambda^{\gamma+1}-1)}{\lambda-1}}.$$

Ὅπως παρατηρήσαμε, ὅταν τό $\nu \to +\infty$, τό $\lambda = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/\nu} \to 1$, ἄρα τό

$$\frac{\lambda^{\gamma+1}-1}{\lambda-1} = \frac{\lambda^{\gamma+1}-1^{\gamma+1}}{\lambda-1} \to (x^{\gamma+1})'_{x=1} = (\gamma+1)\cdot 1^{\gamma} = \gamma+1.$$

Συνεπῶς

$$\lim_{\nu\to+\infty}\sum_{\rho=1}^{\nu}\sigma(\xi_\rho)\pi_\rho = \frac{\beta^{\gamma+1}-\alpha^{\gamma+1}}{\gamma+1} \text{ καί } \int_\alpha^\beta x^\gamma dx = \frac{\beta^{\gamma+1}}{\gamma+1}-\frac{\alpha^{\gamma+1}}{\gamma+1}.$$

<u>2η περίπτωση:</u> $\gamma+1 = 0$, ὁπότε $\lambda^{\gamma+1} = 1$· ἄρα

$$\lambda^0+\lambda^{\gamma+1}+\lambda^{(\gamma+1)2}+\ldots+\lambda^{(\gamma+1)(\nu-1)} = \nu,$$

καί ἑπομένως:

$$\sum_{\rho=1}^{\nu}\sigma(\xi_\rho)\pi_\rho = \alpha^0(\lambda-1)\nu = (\lambda-1)\nu = \left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/\nu}-1\right]\cdot\nu$$

$$= \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/\nu}-1}{\frac{1}{\nu}} = \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/\nu}-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^0}{\frac{1}{\nu}-0}.$$

Εἶναι ὅμως

$$\lim_{\nu\to+\infty}\frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\nu}}-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{0}}{\frac{1}{\nu}-0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{0+\Delta x}-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{0}}{\Delta x}=\left(\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{x}\right)'_{x=0}=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{0}\cdot\ln\frac{\beta}{\alpha}\ ,$$

ἄρα
$$\lim_{\nu\to+\infty}\sum_{\varrho=1}^{\nu}\sigma(\xi_\varrho)\pi_\varrho=\ln\frac{\beta}{\alpha}$$

καί συνεπῶς
$$\int_\alpha^\beta x^{-1}\,dx=\ln\beta-\ln\alpha\ .$$

5. Ἔστω $\sigma(x) = Ak(x)$. Ἡ $Ak(x)$ εἶναι αὔξουσα μέ εὐρεία σημασία σέ κάθε διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$.

Ἄρα τό $\int_\alpha^\beta Ak(x)dx$ ὑπάρχει. Ἄς ὑπολογίσουμε π.χ. τό $\int_{-e}^{1/2} Ak(x)dx$. Τό διάστημα $J(-e \leqq x \leqq \frac{1}{2})$ περιέχει τούς ἀκέραιους $-2,-1,0$.

Θεωροῦμε διαμερισμούς Δ τοῦ J πού συμπεριλαμβάνουν αὐτούς τούς ἀκεραίους στούς διαμεριστικούς των ἀριθμούς, παίρνουμε δέ τά ξ_ϱ ἴσα ἀντιστοίχως μέ τά κάτω ἄκρα τῶν οἰκείων ὑποδιαστημάτων τοῦ διαμερισμοῦ.

Ἡ $Ak(x)$ ἔχει σταθερή τιμή -3 στό διάστημα $-e \leqq x < -2$, σταθερή τιμή -2 στό διάστημα $-2 \leqq x < -1$, κ.ο.κ. Ἄρα γιά τά ἀθροίσματα $A(\Delta) = \sum\sigma(\xi_\varrho)\pi_\varrho$ πού ἀντιστοιχοῦν στούς θεωρούμενους διαμερισμούς Δ τοῦ $J(-e \leqq x \leqq \frac{1}{2})$

$$A(\Delta) = (-3)(-2-(-e)) + (-2)(-1-(-2)) + (-1)(0-(-1) + \\ + 0\left(\frac{1}{2}-0\right) = (-3)(e-2)-2-1 = -3(e-2)-3 = 3-3e.$$

Ἀφοῦ λοιπόν ἡ τιμή τῶν $A(\Delta)$ εἶναι ἡ ἴδια $3-3e$ γιά ὅλους τούς θεωρούμενους διαμερισμούς Δ, γιά μιάν ἀκολουθία τέτοιων διαμερισμῶν $\Delta_\mu(\mu = 1,2,3,\dots)$, μέ μέγιστο πλάτος τῶν ὑποδιαστημάτων τοῦ Δ_μ τεῖνον στό 0 ὅταν $\mu \to +\infty$, θά ἔχουμε

$$\lim_{\mu\to+\infty} A(\Delta_\mu) = 3-3e$$

καί ἐπομένως θά εἶναι
$$\int_{-e}^{1/2} Ak(x)dx = 3-3e \approx -5{,}15\ .$$

§ 265. Ἂς προχωρήσουμε τώρα στήν ἀναλυτική μελέτη τῶν ἰδιοτήτων τοῦ ὁρισμένου ὁλοκληρώματος. Μιά χρήσιμη προκαταβολική παρατήρηση εἶναι ὅτι ἡ τιμή τοῦ συμβόλου $\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx$ (φυσικά γιά μιά συνάρτηση $\sigma(x)$ ὁλοκληρώσιμη κατά τόν ὁρισμό τοῦ § 254 στό διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$), δέν ἀλλάζει, ἄν ἀντικαταστήσουμε μέσα στό σύμβολο τό γράμμα x μέ ἕνα ἄλλο γράμμα:

$$\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx = \int_\alpha^\beta \sigma(t)dt = \int_\alpha^\beta \sigma(\omega)d\omega \quad \text{κλπ.}$$

Ὁρίζουμε δεύτερον, κατ'ἐπέκταση τῆς ἀρχικῆς σημασίας τοῦ συμβόλου $\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx$ ἡ ὁποία προϋποθέτει $\alpha < \beta$, τά ἑξῆς, ὅταν εἶναι εἴτε $\alpha > \beta$ εἴτε $\alpha = \beta$:

γιά μιά $\sigma(x)$ ὁλοκληρώσιμη στό διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$

$$\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx = -\int_\beta^\alpha \sigma(x)dx \quad , \tag{265.1}$$

$$\int_\gamma^\gamma \sigma(x)dx = 0 \tag{265.2}$$

γιά μιά συνάρτηση $\sigma(x)$ ὁρισμένη στή θέση $x = \gamma$.

Π.χ.

$$\int_{2,5}^{0,5} e^x dx = -\int_{0,5}^{2,5} e^x dx = -(e^{2,5} - e^{0,5}) = e^{0,5} - e^{2,5}$$

$$= +\sqrt{e} - e^2\sqrt{e} = \sqrt{e}(1-e^2) \approx -10,53.$$

Σ'ἕνα ὁλοκλήρωμα $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sigma(x)dx$ ὁ ἀριθμός α_1 θά λέγεται κάτω ἄκρο, ὁ α_2 ἄνω ἄκρο τοῦ ὁρισμένου ὁλοκληρώματος, εἴτε εἶναι $\alpha_1 \leqq \alpha_2$ εἴτε εἶναι $\alpha_1 > \alpha_2$ (μερικοί συγγραφεῖς χρησιμοποιοῦν τούς ὅρους κάτω καί πάνω ὅριο τοῦ ὁλοκληρώματος).

§ 266. <u>1η ἰδιότητα.</u> Ἂν ὑπάρχη τό $\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx$ (δηλαδή ἄν ἡ $\sigma(x)$ εἶναι ὁλοκληρώσιμη στό διάστημα μέ ἄκρα τούς ἀριθμούς α καί β στήν περίπτωση $\alpha \neq \beta$ καί ἄν ἡ $\sigma(x)$ εἶναι ὁρισμένη στή θέση $x = \alpha = \beta$ στήν περίπτωση $\alpha = \beta$) θά ὑπάρχη καί τό $\int_\alpha^\beta c\sigma(x)dx$, ὅπου c = σταθερά, καί θά εἶναι

$$\int_\alpha^\beta c\sigma(x)dx = c\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx \quad .$$

Π.χ. $\int_3^4 5\sqrt{x}\,dx = 5\int_3^4 x^{1/2}\,dx = 5\,\dfrac{4^{3/2}-3^{3/2}}{\frac{3}{2}} =$

$$= \frac{10}{3}\,(8-3\sqrt{3}) \approx 9{,}346 \quad .$$

§ 267. <u>2η ἰδιότητα.</u> Ἄν ὑπάρχουν τά $\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx$ καί $\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx$, θά ὑπάρχῃ καί τό $\int_\alpha^\beta [\sigma(x)+\varphi(x)]dx$, θά ἰσχύῃ δέ ἡ σχέση

$$\int_\alpha^\beta [\sigma(x)+\varphi(x)]\,dx = \int_\alpha^\beta \sigma(x)dx + \int_\alpha^\beta \varphi(x)dx \; .$$

Π.χ. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\eta\mu x + e^x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \eta\mu x\,dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^x dx =$

$$= \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu\pi + e^{\pi} - e^{-\frac{\pi}{2}} = 1 + e^{\pi} - e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 23{,}9.$$

Οἱ ἀποδείξεις τῶν ἰδιοτήτων 1), 2) δέν παρουσιάζουν καμμιά δυσκολία· βασίζονται στούς ὁρισμούς τῶν § 254 καί §265 καθώς καί στήν πρόταση τοῦ § 261.

§ 268. <u>3η ἰδιότητα.</u> Ἄν ἡ σ(x) εἶναι ὁλοκληρώσιμη στό διάστημα J(α ≦ x ≦ β), θά εἶναι ὁλοκληρώσιμη καί σέ κάθε ὑποδιάστημά του, καί ἄν α_1, α_2, α_3 εἶναι ἀριθμοί ἀπό τό διάστημα J, θά ἰσχύῃ ἡ σχέση

(268.1) $$\int_{\alpha_1}^{\alpha_3} \sigma(x)dx = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sigma(x)dx + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \sigma(x)dx \quad ,$$

<u>Ἀπόδειξη.</u> Ἔστω J* ἕνα ὑποδιάστημα τοῦ J. Ἡ σ(x) εἶναι περιορισμένη γιά τό ὑποδιάστημα J*. Ἐξ ἄλλου ἔστω Δ* ἕνας διαμερισμός τοῦ J* μέ μέγιστο πλάτος ὑποδιαστημάτων μικρότερο ἑνός θετικοῦ ἀριθμοῦ δ_ε. Μποροῦμε νά θεωρήσουμε τόν διαμερισμό αὐτό Δ* μέρος ἑνός διαμερισμοῦ Δ τοῦ ὅλου διαστήματος J μέ μέγιστο πλάτος ὑποδιαστημάτων μικρότερο τοῦ δ_ε. Τά ἄθροισμα $\sum T_\rho^* \pi_\rho^*$, πού ἀντιστοιχεῖ στό διαμερισμό Δ*, εἶναι

$\leq$ τοῦ ἀθροίσματος $\sum T_\rho \pi_\rho$ πού ἀντιστοιχεῖ στόν διαμερισμό Δ, ἐπειδή τό 2ο ἄθροισμα περιέχει τούς ὅρους τοῦ 1ου ἀθροίσματος καί μερικούς ἀκόμη πού εἶναι ὅμως ὅλοι τους ≥ 0. Ἐξ ὑποθέσεως ἔχουμε $\sum T_\rho \pi_\rho < \varepsilon$ γιά κάθε Δ μέ μέγιστο πλάτος ὑποδιαστήματος μικρότερο κατάλληλου δ_ε. Ἄρα καί $\sum T^*_\rho \pi^*_\rho < \varepsilon$.

Συνεπῶς, κατά τήν πρόταση 5, ἡ $\sigma(\mathbf{x})$ εἶναι ὁλοκληρώσιμη στό ὑποδιάστημα J.*

Ἄς εἶναι τώρα πρῶτον $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$.

Ἄν ἰσχύῃ ἔστω καί ἕνα σημεῖο ἰσότητας σ'αὐτήν τή σχέση, τό ἀποδεικτέο (268.1) ἕπεται ἀμέσως ἀπό τούς ὁρισμούς (265.1) καί (265.2). Ἔστω λοιπόν $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$. Τό διάστημα $\alpha_1 \leq \mathbf{x} \leq \alpha_2$ μαζύ μέ τό $\alpha_2 \leq \mathbf{x} \leq \alpha_3$ ἀποτελεῖ τό ὅλο διάστημα $\alpha_1 \leq \mathbf{x} \leq \alpha_3$· γι'αὐτό, ἕνας διαμερισμός $\Delta_1^{(\mu)}$ τοῦ $\alpha_1 \leq \mathbf{x} \leq \alpha_2$ μαζύ μέ ἕνα διαμερισμό $\Delta_2^{(\mu)}$ τοῦ $\alpha_2 \leq \mathbf{x} \leq \alpha_3$ θά μᾶς δώσουν ἕνα διαμερισμό $\Delta^{(\mu)}$ τοῦ $\alpha_1 \leq \mathbf{x} \leq \alpha_3$. Ἄν ὡς ἀριθμούς $\xi_\rho^{(\mu)}$ γιά τόν $\Delta^{(\mu)}$ πάρουμε τούς ἀριθμούς $\xi_\rho^{(\mu)}$ πού χρησιμοποιοῦνται γιά τούς διαμερισμούς $\Delta_1^{(\mu)}$ καί $\Delta_2^{(\mu)}$, τά ἀντίστοιχα ἀθροίσματα

$$A(\Delta^{(\mu)}) = \sum_\rho \sigma(\xi_\rho^{(\mu)})\pi_\rho \quad , \quad A_1(\Delta_1^{(\mu)}) \quad \text{καί} \quad A_2(\Delta_2^{(\mu)})$$

θά ἱκανοποιοῦν τή σχέση

$$(268.2) \qquad A(\Delta^{(\mu)}) = A_1(\Delta_1^{(\mu)}) + A_2(\Delta_2^{(\mu)}).$$

Θεωροῦμε τώρα δυό ἀκολουθίες διαμερισμῶν:

$$(268.3) \qquad \begin{array}{l} \Delta_1^{(1)}, \Delta_1^{(2)}, \Delta_1^{(3)}, \ldots, \Delta_1^{(\mu)}, \ldots \quad \text{τοῦ } \alpha_1 \leq \mathbf{x} \leq \alpha_2, \\ \Delta_2^{(1)}, \Delta_2^{(2)}, \Delta_2^{(3)}, \ldots, \Delta_2^{(\mu)}, \ldots \quad \text{τοῦ } \alpha_2 \leq \mathbf{x} \leq \alpha_3, \end{array}$$

μέ μέγιστο πλάτος ὑποδιαστημάτων τεῖνον στό 0, ὅταν $\mu \to +\infty$. Τήν ἴδια ἰδιότητα θά ἔχη καί ἡ ἀκολουθία τῶν διαμερισμῶν

$$\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \Delta^{(3)}, \ldots, \Delta^{(\mu)}, \ldots \quad \text{τοῦ } \alpha_1 \leq \mathbf{x} \leq \alpha_3$$

πού συνθέτουμε, ὅπως εἴπαμε, ἀπό τούς ἀντιστοίχους (268.3).

Ἄρα κατά τήν πρόταση τοῦ § 261 θά ἔχουμε

$$\lim_{\mu\to+\infty} A(\Delta^{(\mu)}) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_3}\sigma(x)dx \quad , \quad \lim_{\mu\to+\infty} A_1(\Delta_1^{(\mu)}) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sigma(x)dx$$

$$\lim_{\mu\to+\infty} A_2(\Delta_2^{(\mu)}) = \int_{\alpha_2}^{\alpha_3}\sigma(x)dx \quad .$$

Οἱ σχέσεις αὐτές, ἄν συνδυαστοῦν μέ τή (268.2) μᾶς δίνουν τό ἀποδειχτέο (268.1).

Ἄς μήν εἶναι 2ο $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ ἀλλ'ἄς ἰσχύη μιά ἄλλη μεγεθική σχέση, π.χ. ἡ $\alpha_3 < \alpha_1 < \alpha_2$. Τότε σύμφωνα μέ κεῖνο πού ἀποδείξαμε παραπάνω, ἔχουμε

$$\int_{\alpha_3}^{\alpha_2}\sigma(x)dx = \int_{\alpha_3}^{\alpha_1}\sigma(x)dx + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sigma(x)dx \quad ,$$

ἑπομένως $\displaystyle\int_{\alpha_3}^{\alpha_1}\sigma(x)dx = -\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sigma(x)dx + \int_{\alpha_3}^{\alpha_2}\sigma(x)dx$,

καί συνεπῶς $\displaystyle -\int_{\alpha_3}^{\alpha_1}\sigma(x)dx = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sigma(x)dx - \int_{\alpha_3}^{\alpha_2}\sigma(x)dx$,

ἄρα σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό (265.1),

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_3}\sigma(x)dx = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sigma(x)dx + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3}\sigma(x)dx \qquad \text{δ.ἔ.δ.}$$

§ 269. <u>4η ἰδιότητα.</u> Ἄν ἡ σ(x) εἶναι ὁλοκληρώσιμη στό διάστημα $J(\alpha \leqq x \leqq \beta)$ καί ἄν $\sigma(x) \geqq 0$ γιά κάθε x ἀπό τό διάστημα J, τότε $\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx \geqq 0$. Ἄν ἐπί πλέον ἡ σ(x) εἶναι συνεχής στό διάστημα J καί ὄχι ἀπό ταυτότητα $=0$ σ'αὐτό, τότε $\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx > 0$.

<u>Ἀπόδειξη.</u> Τό 1ο μέρος τῆς προτάσεως εἶναι ἄμεση συνέπεια τῆς παρατηρήσεως ὅτι γιά τυχόντα διαμερισμό Δ τοῦ J ἔχουμε

$$A(\Delta) = \sum \sigma(\xi_\rho)\pi_\rho \geqq 0 \quad .$$

Τό 2ο μέρος ἀποδείχνεται ὡς ἑξῆς:

Ἔστω x_1 μιά θέση ἀπό τό J, ὅπου $\sigma(x_1) \neq 0$ καί ἑπομένως $\sigma(x_1) > 0$. Λόγω συνέχειας τῆς σ(x) στή θέση x_1, ὑπάρχει ἕνα κατάλληλο ὑποδιάστημα $\alpha_1 \leqq x \leqq \beta_1$ πού περιέχει τή θέση x_1 καί ὅπου ἡ $\sigma(x)$ εἶναι $\geqq \dfrac{\sigma(x_1)}{2}$, δηλαδή $\geqq$ ἀπό ἕναν ὁρισμένο θετικό ἀριθμό Θ.

Γιά κάθε διαμερισμό Δ_1 τοῦ ὑποδιαστήματος $\alpha_1 \leqq x \leqq \beta_1$ ἔχουμε $A(\Delta_1) = \sum \sigma(\xi_\rho)\pi_\rho \geqq \sum \Theta \pi_\rho = \Theta \Sigma \pi_\rho = \Theta(\beta_1 - \alpha_1)$. Ἄρα

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \sigma(x)dx \geqq \Theta(\beta_1 - \alpha_1) .$$

καί ἑπομένως

$$\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx = \int_\alpha^{\alpha_1} + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} + \int_{\beta_1}^{\beta} \geqq 0 + \Theta(\beta_1 - \alpha_1) + 0 > 0 \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

<u>Παρατηρήσεις</u>. Ἄν $\sigma(x) \geqq 0$ στό διάστημα ὁλοκληρώσεως καί ἄν τό κάτω ἄκρο α τοῦ ὁλοκληρώματος $\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx$ εἶναι $>$ τοῦ ἄνω ἄκρου β, τότε $\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx \leqq 0$.

Π.χ. $\quad \int_\pi^0 \eta\mu x dx = -\int_0^\pi \eta\mu x dx = -2$.

Ἄν $\sigma(x) \leqq 0$ στό διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$ καί ὑπάρχει τό $\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx$, τότε $\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx \leqq 0$.

Π.χ. $\quad \int_2^4 (-x^2)dx = -\int_2^4 x^2 dx = -\left(\dfrac{4^3}{3} - \dfrac{2^3}{3}\right) = -\dfrac{56}{3}$.

§ 270. <u>5η ἰδιότητα.</u> Ἄν $\sigma(x) \leqq \varphi(x)$ γιά $\alpha \leqq x \leqq \beta$ καί ἄν $\sigma(x)$ καί $\varphi(x)$ ὁλοκληρώσιμες στό διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$, τότε

$$\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx \leqq \int_\alpha^\beta \varphi(x)dx .$$

Ἄν ἐπί πλέον οἱ συναρτήσεις $\sigma(x)$ καί $\varphi(x)$ εἶναι συνεχεῖς στό διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$ καί $\sigma(x) \neq \varphi(x)$ στό ἴδιο διάστημα, τότε

$$\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx < \int_\alpha^\beta \varphi(x)dx .$$

Ἡ ἀπόδειξη εἶναι ἄμεση, ἀρκεῖ νά ἐφαρμοστῆ ἡ τέταρτη ἰδιότητα στή $\varphi(x) - \sigma(x)$, πού εἶναι $\geqq 0$, καί νά χρησιμοποιηθοῦν ἡ δεύτερη καί ἡ πρώτη ἰδιότητα.

§ 271. <u>6η ἰδιότητα.</u> Ἄν ἡ $\sigma(x)$ εἶναι ὁλοκληρώσιμη στό διάστημα $J(\alpha \leqq x \leqq \beta)$ καί καλέσουμε E τό κάτω πέρας, M τό ἄνω πέρας τῆς $\sigma(x)$ στό διάστημα ὁλοκληρώσεως, θά ἰσχύη ἡ σχέση

(271.1) $$E(\beta-\alpha) \leqq \int_\alpha^\beta \sigma(x)dx \leqq M(\beta-\alpha) \,.$$

<u>'Απόδειξη</u>. Γιά κάθε x ἀπό τό $J(\alpha \leqq x \leqq \beta)$ ἔχουμε

$$E \leqq \sigma(x) \leqq M$$

ἄρα κατά τήν πέμπτη ἰδιότητα (§ 270) ἰσχύει ἡ σχέση

$$\int_\alpha^\beta E dx \leqq \int_\alpha^\beta \sigma(x)dx \leqq \int_\alpha^\beta M dx$$

'αλλά (§ 264,3) $\int_\alpha^\beta E dx = E(\beta-\alpha)$, $\int_\alpha^\beta M dx = M(\beta-\alpha)$, καί ἔτσι φθάνουμε στό ἀποδεικτέο.

<u>Σχόλιο 1.</u> 'Η παραπάνω σχέση (271.1) προϋποθέτει ὅτι $\alpha \leqq \beta$. Ἄν ὅμως σ'ἕνα ὁλοκλήρωμα εἶναι $\alpha > \beta$, τότε θά ἔχουμε

$$E(\alpha-\beta) \leqq \int_\beta^\alpha \sigma(x)dx \leqq M(\alpha-\beta) \quad ,$$

ὅπου πάλι E καί M τό κάτω καί τό ἄνω πέρας τῆς $\sigma(x)$ στό διάστημα ὁλοκληρώσεως $(\beta \leqq x \leqq \alpha)$, καί συνεπῶς

(271.2) $$M(\beta-\alpha) \leqq \int_\alpha^\beta \sigma(x)dx \leqq E(\beta-\alpha) \,.$$

<u>Σχόλιο 2.</u> Ἄν ἡ $\sigma(x)$ εἶναι συνεχής στό διάστημα ὁλοκληρώσεως καί ὄχι σταθερή ($\sigma(x) \not\equiv C$), τότε στίς σχέσεις (271.1) καί (271.2) τά σημεῖα τῆς ἰσότητας εἶναι περιττά. Π.χ. γιά τό $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}} \eta\mu x dx$ ἔχουμε

$$E = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad , \quad M = \eta\mu\,\frac{\pi}{2} = 1 \quad ,$$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}} \eta\mu x dx = \sigma\upsilon\nu\,\frac{\pi}{3} - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \eta\mu\,\frac{\pi}{3} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \quad ,$$

ἰσχύει δέ πραγματικά ἡ σχέση

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} < \frac{1+\sqrt{3}}{2} < 1\cdot\frac{\pi}{2}$$

Σχόλιο 3. Ἡ ἕκτη ἰδιότητα μπορεῖ νά διατυπωθῆ καί ὡς ἑξῆς: Τό $\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx$ (εἴτε εἶναι $\alpha \leqq \beta$ εἴτε $\alpha > \beta$) ἰσοῦται μέ $m(\beta-\alpha)$, ὅπου m ἕνας κατάλληλος ἀριθμός μεταξύ Ε καί Μ (μέ εὐρεία σημασία τοῦ ὅρου μεταξύ).

§ 272. 7η ἰδιότητα. Ἄν ἡ $\sigma(x)$ εἶναι συνεχής στό κλειστό διάστημα J πού ἔχει ἄκρα τούς ἀριθμούς α καί β, τότε

$$(272.1) \qquad \int_\alpha^\beta \sigma(x)dx = \sigma(\xi)(\beta-\alpha)$$

ὅπου ξ κατάλληλη θέση ἀπό τό διάστημα ὁλοκληρώσεως. (Αὐτή ἡ πρόταση ὀνομάζεται θ ε ώ ρ η μ α τ ῆ ς μ έ σ η ς τ ι μ ῆ ς τ ο ῦ ὁ λ ο κ λ η ρ ω τ ι κ ο ῦ Λ ο γ ι σ μ ο ῦ).

Ἀπόδειξη. Πράγματι κατά τό Σχόλιο 3, ἔχουμε $\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx = m(\beta-\alpha)$. Ἀλλά τώρα εἶναι E = ἐλάχιστο τῆς $\sigma(x)$ στό διάστημα μέ ἄκρα α καί β, ἄρα $E = \sigma(x_\varepsilon)$,
ὅπου x_ε μιά ἐλαχιστοποιοῦσα θέση ἀπό τό διάστημα J. Ὅμοια εἶναι M = μέγιστο τῆς $\sigma(x)$ στό διάστημα ὁλοκληρώσεως $= \sigma(x_M)$, ὅπου x_M μιά μεγιστοποιοῦσα θέση ἀπό τό διάστημα J. Ἄρα, κατά τό πόρισμα τοῦ θεωρήματος τῶν Bolzano - Weierstrass (§174) ὑπάρχει μιά τουλάχιστο θέση ξ ἀπό τό διάστημα μέ ἄκρα τούς ἀριθμούς x_E καί x_M, ἄρα κατά μείζονα λόγο ἀπό τό διάστημα μέ ἄκρα τούς ἀριθμούς α καί β, τέτοια ὥστε $\sigma(\xi) = m$, ὅ.ἔ.δ.

Π.χ. $\int_4^1 (x^2+x-3)dx = (\xi^2+\xi-3)(1-4)$

ὅπου ξ κατάλληλος ἀριθμός ἀπό τό διάστημα $1 \leqq x \leqq 4$.

Ἐπαλήθευση. Εἶναι

$$\int_4^1 (x^2+x-3)dx = -\int_1^4 (x^2+x-3)dx = -\left[\frac{4^3-1^3}{3} + \frac{4^2-1^2}{2} - 3(4-1)\right] = -\frac{39}{2}.$$

Ἄρα θά πρέπη καί θά ἀρκῆ νά ἔχουμε

$$-3(\xi^2+\xi-3) = -\frac{39}{2} \qquad \text{ἤ} \qquad \xi = \frac{-1 \pm \sqrt{1+39}}{2}$$

καί μιά τουλάχιστο ἀπό αὐτές τίς τιμές τοῦ ξ νά κεῖται στό διάστ. $[1,4]$· ἀλλά ἡ $\frac{-1+\sqrt{39}}{2}$, ἀνήκει στό διάστημα ὁλοκληρώσεως $1 \leqq x \leqq 4$, ἄρα τό ἐπαληθευτέο ἀληθεύει.

§ 273. 8η ἰδιότητα. Ἄν ἡ $\sigma(x)$ εἶναι ὁλοκληρώσιμη στό διάστημα $J(\alpha \leqq x \leqq \beta)$, ἄν t_1 εἶναι ἕνας ὁρισμένος ἀριθμός ἀπ' αὐτό τό διάστημα καί t μιά μεταβλητή μέ πεδίο μεταβολῆς τό διάστημα $\alpha \leqq t \leqq \beta$, τότε τό $\int_{t_1}^{t}\sigma(x)dx$ εἶναι μονοσήμαντη καί συνεχής συνάρτηση τοῦ t.

Ἀπόδειξη. Γιά κάθε τιμή τῆς t ἀπό τό διάστημα $\alpha \leqq t \leqq \beta$, τό ὁλοκλήρωμα εἶναι, ὅπως εἴδαμε, ἕνας ἐντελῶς ὁρισμένος ἀριθμός, ἄρα ἀποτελεῖ μιά μονοσήμαντη συνάρτηση $f(t)$ τῆς t μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό διάστημα $\alpha \leqq t \leqq \beta$. Γιά ν' ἀποδείξουμε ὅτι ἡ $f(t)$ εἶναι συνεχής σέ κάθε θέση t τοῦ διαστήματος $\alpha \leqq t \leqq \beta$ ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta t \to 0}\big(f(t+\Delta t) - f(t)\big) = 0 \quad .$$

Πράγματι ἔχουμε

$$\Delta f = \int_{t_1}^{t+\Delta t}\sigma(x)dx - \int_{t_1}^{t}\sigma(x)dx = \int_{t_1}^{t} + \int_{t}^{t+\Delta t} - \int_{t_1}^{t} = \int_{t}^{t+\Delta t}\sigma(x)dx.$$

Κατά τό σχόλιο 3 (§ 271) εἶναι ὅμως

$$\int_{t}^{t+\Delta t}\sigma(x)dx = m(t+\Delta t-t) = m\cdot\Delta t \ ,$$

ὅπου m ἕνας ἀριθμός πού ἐξαρτιέται ἀπό τούς ἀριθμούς t καί $t+\Delta t$ ἀλλά πού ἱκανοποιεῖ πάντα τή σχέση $E \leqq m \leqq M$ (E = κάτω πέρας, M = ἄνω πέρας τῆς $\sigma(x)$ στό διάστημα $J(\alpha \leqq x \leqq \beta)$ καί συνεπῶς τή σχέση $|m| \leqq \Phi$, ὅπου Φ ὁ μέγιστος ἀπό τούς $|E|$ καί $|M|$.

Ἄρα

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta t \to 0} (m\cdot\Delta t) = 0 \quad , \quad ὅ.ἔ.δ.$$

Παρατήρηση. Ἡ παραπάνω ἰδιότητα καί ἀπόδειξη δέν προϋποθέτει συνέχεια άλλά μόνο όλοκληρωσιμότητα τῆς $\sigma(x)$ στό διάστημα J.

Π.χ. τό $\int_0^t Ak(x)dx = f(t)$ εἶναι συνεχής συνάρτηση τοῦ t στό διάστημα λόγου χάρη $-2 \leqq t \leqq 2$, μολονότι ή $Ak(x)$ εἶναι άσυνεχής στίς θέσεις $x = -1, 0, 1, 2$, άπό τό διάστημα $-2 \leqq x \leqq 2$.

Ἰδού ὁ προσδιορισμός τῆς $f(t)$ στό διάστημα $-2 \leqq t \leqq 2$:

Γιά $0 \leqq t < 1$, $f(t) = \int_0^t Ak(x)dx = \int_0^t 0 \cdot dx = 0$.

Γιά $t = 1$, $f(1) = \int_0^1 Ak(x)dx = 0$.

Γιά $1 < t < 2$, $f(t) = \int_0^1 Ak(x)dx + \int_1^t Ak(x)dx = 0+1(t-1)$.

Γιά $t = 2$, $f(2) = 1$.

Γιά $-1 \leqq t < 0$, $f(t) = \int_0^t Ak(x)dx = \int_0^t -1\, dx = (-1)(t-0) = -t$.

Γιά $-2 \leqq t < -1$, $f(t) = \int_0^t Ak(x)dx = \int_0^{-1} Ak(x)dx +$

$$+ \int_{-1}^t Ak(x) = 1 + \int_{-1}^t (-2)dx = 1-2(t+1) .$$

Ἡ γραφική παράσταση τῆς $y = f(t)$ γιά $-2 \leqq t \leqq 2$ εἶναι (σύμφωνα μέ τίς παραπάνω, ὅλες γραμμικές ὡς πρός t παραστάσεις) μιά τετράπλευρη τεθλασμένη γραμμή ΑΒΓΔΕ μέ κορυφές διαδοχικές τά σημεῖα πού ἔχουν συντεταγμένες

$$A(t = -2 , y = f(-2) = 3) \quad , \quad B(t = -1 , y = 1) \quad ,$$
$$\Gamma(t = 0 , y = 0) \quad , \quad \Delta(t = 1, y = 0) \quad , \quad E(2,1) .$$

§ 274. <u>9η ἰδιότητα.</u> "Αν ή $\sigma(x)$ εἶναι συνεχής στό διάστημα $J(\alpha \leqq x \leqq \beta)$, τότε ή $f(t) = \int_{t_1}^t \sigma(x)dx$ εἶναι ὄχι μόνο συνεχής συνάρτηση τοῦ t στό διάστημα $\alpha \leqq t \leqq \beta$, άλλά καί παραγωγίσιμη, ἰσχύει δέ ή σχέση:

$$f'(t) = D\left(\int_{t_1}^t \sigma(x)dx\right) = \sigma(t) \qquad \text{φιά} \quad \alpha \leqq t \leqq \beta .$$

<u>Ἀπόδειξη.</u> Σύμφωνα μέ τό θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς τοῦ όλοκληρωτικοῦ Λογισμοῦ (§ 272) ἔχουμε

$$\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{\int_t^{t+\Delta t} \sigma(x)dx}{\Delta t} = \frac{\sigma(\xi)\Delta t}{\Delta t} = \sigma(\xi) \quad ,$$

ὅπου ξ κατάλληλος ἀριθμός ἀπό τό διάστημα μέ ἄκρα τούς ἀριθμούς t καί t+Δt. Τό ξ ἐξαρτᾶται λοιπόν ἀπό τό Δt κατά τέτοιο τρόπο ὥστε (μέ t ἐννοεῖται σταθερό) $\lim_{\Delta t\to 0} \xi = t$. Ἄρα, λόγω συνέχειας τῆς φ(x) στή θέση x = t , $\lim_{\Delta t\to 0} \sigma(\xi) = \sigma(t)$, καί συνεπῶς,

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \sigma(\xi) = \sigma(t) \quad , \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

<u>Σχόλιο</u>. Ἡ τελευταία ἰδιότητα μπορεῖ νά διατυπωθῆ καί ὡς ἑξῆς: Ἡ συνάρτηση $f(t) = \int_{t_1}^{t} \sigma(x)dx$ εἶναι παράγουσα τῆς σ(t) στό διάστημα $\alpha \leqq t \leqq \beta$, ἤ μέ ἀλλαγή τοῦ συμβόλου t πού παριστάνει τήν ἀνεξάρτητη μεταβλητή, ἡ συνάρτηση f(x) = $= \int_{t_1}^{x} \sigma(\omega)d\omega$, εἶναι παράγουσα τῆς σ(x) στό διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_{t_1}^{x} \sigma(\omega)d\omega\right) = \sigma(x) \qquad \text{γιά } \alpha \leqq x \leqq \beta .$$

Τό ἀποτέλεσμα πού βρήκαμε ἐμπεριέχει τήν

<u>Πρόταση</u>: Μιά συνάρτηση σ(x) συνεχής σ'ἕνα διάστημα $\gamma < x < \delta$ ἔχει παράγουσες σ'αὐτό τό διάστημα.

<u>Ἀπόδειξη</u>. Πράγματι, σύμφωνα μέ τά προηγούμενα, ἡ συνάρτηση $\int_{x_1}^{x} \sigma(\omega)d\omega$, ὅπου x_1 αὐθαίρετα ὁρισμένος ἀριθμός ἀπό τό διάστημα $\gamma < x < \delta$ καί x μεταβλητή μέ πεδίο μεταβολῆς τό ἴδιο διάστημα $\gamma < x < \delta$, εἶναι παράγουσα τῆς σ(x) γιά $\gamma < x < \delta$: $\frac{d}{dx}\int_{x_1}^{x} \sigma(\omega)d\omega = \sigma(x)$. Χρησιμοποιώντας τώρα ὅσα ξέρουμε περί παραγουσῶν καθώς καί τήν ἔννοια τοῦ ἀορίστου ὁλοκληρώματος μποροῦμε νά συμπληρώσουμε τήν παραπάνω πρόταση μέ τήν ἀκόλουθη:

<u>Πρόταση</u>. Μιά συνάρτηση σ(x) συνεχής σ'ἕνα διάστημα $\gamma < x < \delta$ ἔχει ἀόριστο ὁλοκλήρωμα σ'αὐτό τό διάστημα, καί αὐτό τό ἀόριστο ὁλοκλήρωμα ἐκφράζεται ὡς ἑξῆς μέ τή βοήθεια τοῦ ὁρισμένου ὁλοκληρώματος

$$\int \sigma(x)dx = \int_{x_1}^{x} \sigma(\omega)d\omega + c \quad \left(= \int_{x_1}^{x} \sigma(t)dt + c \quad \text{κτλ.}\right),$$

ὅπου x_1 τυχών ὁρισμένος ἀριθμός ἀπό τό διάστημα $\gamma < x < \delta$ καί c αὐθαίρετη (δηλ. ἐλεύθερα ἐκλέξιμη) σταθερά. Καταχρηστικῶς ἐπιτρέπεται καί ἡ ἀκόλουθη γραφή τῆς τελευταίας σχέσεως

$$\int \sigma(x)dx = \int_{x_1}^{x} \sigma(x)dx + c \quad .$$

§ 275. <u>10η ἰδιότητα.</u> "Αν ἡ $\sigma(x)$ εἶναι συνεχής στό διάστημα $J(\alpha \leqq x \leqq \beta)$ καί $F(x)$ εἶναι μιά παράγουσα τῇ $\sigma(x)$ στό διάστημα J, τότε

$$(275.1) \qquad \int_{\alpha}^{\beta} \sigma(x)dx = F(\beta) - F(\alpha) \ .$$

<u>'Απόδειξη</u>. Οἱ συναρτήσεις $\int_{\alpha}^{x} \sigma(\omega)d\omega = f(x)$ καί $F(x)$ εἶναι ἀμφότερες παράγουσες τῆς $\sigma(x)$ στό διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$, ἄρα $f(x) - F(x) \equiv$ σταθερά c_1 γιά $\alpha \leqq x \leqq \beta$. "Αν τώρα μέσα στήν ταυτότητα $f(x) \equiv F(x)+c_1$ βάλουμε $x = \alpha$ θά λάβουμε:

$$f(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha} \sigma(x)dx = 0 = F(\alpha) + c_1 \ .$$

"Αρα $\quad c_1 = -F(\alpha) \quad$ καί συνεπῶς

$$f(x) = \int_{\alpha}^{x} \sigma(\omega)d\omega = F(x) - F(\alpha) \quad ,$$

ἀπό ὅπου γιά $x = \beta$ λαβαίνουμε·

$$f(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \sigma(\omega)d\omega = \int_{\alpha}^{\beta} \sigma(x)dx = F(\beta) - F(\alpha) \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Π.χ. ἡ x^3 εἶναι συνεχής στό διάστημα $-4 \leqq x \leqq \pi$ καί ἔχει, ὅπως ξέρουμε, παράγουσα σ' αὐτό τή $\frac{x^4}{4}$. "Αρα

$$\int_{-4}^{\pi} x^3 dx = \left(\frac{x^4}{4}\right)_{x=\pi} - \left(\frac{x^4}{4}\right)_{x=-4} = \frac{\pi^4}{4} - 4^3 \approx -39{,}647 \ .$$

<u>Παρατήρηση</u>. Τό δεύτερο μέλος τῆς σχέσεως (275.1) γράφεται συχνά συντομώτερα ὡς ἑξῆς:

$$F(\beta) - F(\alpha) = \left[F(x)\right]_{\alpha}^{\beta} = F(x)\Big|_{\alpha}^{\beta} \quad .$$

Π.χ. $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln x\right]_{1}^{e} = \ln e - \ln 1 = 1-0 = 1 \ .$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

251. Ἀφοῦ καταρτίσετε τόν πίνακα μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως $\sigma(x) = \sqrt{3}\eta\mu x$ στό διάστημα $J(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ προσδιορίστε τίς ταλαντεύσεις τῆς $\sigma(x)$ στά τέσσερα ὑποδιαστήματα πού λαμβάνουμε ὅταν διαμερίσουμε τό J σέ τέσσερα ἰσόπλατα μέρη.

252. Γιά τά κατακάτω ζητούμενα ἐμβαδά τό σύστημα συντεταγμένων ἐξυπακούεται ὀρθογώνιο μέ βασικά διανύσματα μήκους 1 cm.

Προσδιορίστε μέ τή μέθοδο τοῦ § 251 τό ἐμβαδό τοῦ χωρίου κάτω ἀπό τήν καμπύλη $y = x^2+x+2$ γιά $1 \leqq x \leqq 6$. (Μέ τή σύντομη αὐτή ἔκφραση ἐννοοῦμε τό χωρίο πού κεῖται κάτω ἀπό τήν καμπύλη μέ ἐξίσωση $y = x^2+x+2$, πάνω ἀπό τον ἄξονα OX καί μεταξύ τῶν δυό εὐθειῶν $x = 1$, $x = 6$)).

Ὁμοίως προσδιορίστε τά ἐμβαδά τῶν χωρίων κάτω ἀπό τίς γραμμές:

1ο $y = \dfrac{1}{x}$, γιά $1 \leqq x \leqq 10$.

2ο $y = \dfrac{1}{x^2+1}$, γιά $-1 \leqq x \leqq \sqrt{3}$.

3ο $y = \alpha \cdot \mathrm{ch}\dfrac{x}{\alpha}$, γιά $0 \leqq x \leqq 2\alpha$, ὅπου α θετική σταθ.

253. Ὑπολογίστε τό ἐμβαδό τοῦ χωρίου πού περιορίζεται ἀπό τήν παραβολή $y^2 = x$ κάτωθεν καί ἀπό τήν παραβολή $y=x^2$ "ἄνωθεν. Ὁμοίως ὑπολογίστε τό ἐμβαδό τοῦ χωρίου πού περιορίζεται ἀπό τόν κύκλο $x^2+y^2=16$ κάτωθεν καί τήν παραβολή $y = x^2/6$ ἄνωθεν.

(Ὑπόδειξη: τά ζητούμενα ἐμβαδά εἶναι δοαφορές τῶν ἐμβαδῶν δύο χωρίων σάν τά τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως).

254. Ὑπολογίστε μέ τή μέθοδο τοῦ(§ 264, 3), τό ὁλοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta \sigma\upsilon\nu x dx$, ὅπου $\alpha < \beta$. Ὑπολογίστε μέ τή μέθοδο τοῦ(§ 264, 5), χρησιμοποιώντας καί τίς ἰδιότητς 1), 2), τό

$$\int_{1,5}^{5,6}\big(x-Ak(x)\big)dx.$$

255. Ὑπολογίστε μέ τή μέθοδο τοῦ § 275 τά ὁλοκληρώματα

$$\int_{-5}^{2}(x^2+3x-2)dx \quad , \quad \int_{-1}^{2}\frac{x}{x^2+1}\,dx \quad , \quad \int_{0}^{5}x^{4/3}dx \quad , \quad \int_{0}^{2}\overset{+}{\sqrt{1+x^2}}\cdot dx \ ,$$

$$\int_{-1}^{2}xe^x dx \quad , \quad \int_{0}^{\pi}x\eta\mu x dx \quad , \quad \int_{2}^{4}\frac{1}{x+1}\,dx \quad , \quad \int_{3}^{-2}(-x^2-x+4)dx \ ,$$

$$\int_{-5}^{-7}\frac{1}{x}\cdot dx \ , \int_{1/2}^{0}\overset{+}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx \ , \quad \int_{-2}^{1}\frac{1}{\sqrt{3-2x}}\,dx \quad , \quad \int_{\alpha}^{\alpha+\pi}\eta\mu^2 x dx \ .$$

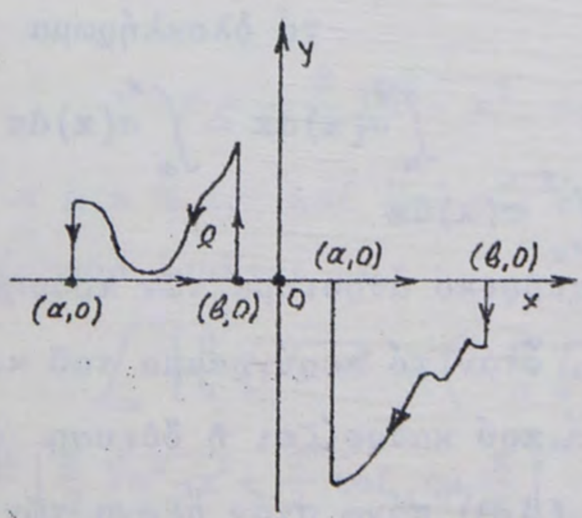
ΚΕΦΑΛΑΙΟ XVII

ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

276. Μιά ἀπό τίς κυριότετες ἐφαρμογές τοῦ ὁλοκληρώματος εἶναι ὁ ὁρισμός καί ὁ ὑπολογισμός ἐμβαδῶν ἐπιπέδων χωρίων.

Ἔστω $\sigma(x)$ μιά συνάρτηση συνεχής καί πουδέν ἀλλάζει πρόσημο στό διάστημα $J(\alpha \leqq x \leqq \beta)$ (δηλ. εἶναι ἤ $\sigma(x) \geqq 0$ σ'ὅλο τό διάστημα J, ἤ $\sigma(x) \leqq 0$ σ'αὐτό). Σ'ἕνα ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων μέ βασικά διανύσματα ἰσόμηκα πρός τή μονάδα μήκους θεωροῦμε τή γραμμή $y = \sigma(x)$ γιά $\alpha \leqq x \leqq \beta$ καί τό χωρίο Ω πού περιορίζεται ἀπό τόν ἄξονα τῶν x, τή γραμμή $y=\sigma(x)$ τήν εὐθεία $x = \alpha$ καί τή $x = \beta$.

Ὅπως εἴδαμε στούς §§ 248-251, ἄν ὡς μονάδα ἐμβαδῶν λάβουμε τό τετράγωνο πού ἔχει πλευρά ἴση μέ τή μονάδα μήκους καί ἄν $\sigma(x) \geqq 0$, τότε:

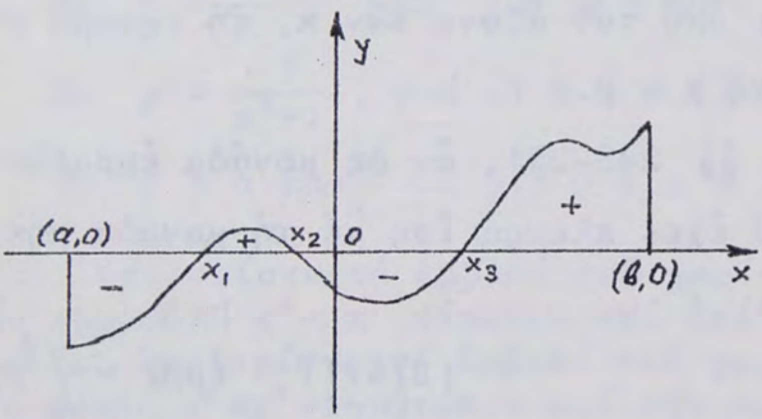


$$(276.1) \qquad \text{ἐμβ}\Omega = \int_\alpha^\beta \sigma(x)\,dx.$$

Ἄν $\sigma(x) \leqq 0$, τότε τό $\int_\alpha^\beta \sigma(x)\,dx$ εἶναι ἀρνητικός ἀριθμός. Τό ἐμβαδόν τοῦ χωρίου Ω θεωρούμενο ὡς ἀπόλυτο μέγεθος θά εἶναι προφανῶς ἴσο μέ $\left|\int_\alpha^\beta \sigma(x)\,dx\right|$.

Ἄν ὅμως δώσουμε καί ἐδῶ (ὅπως στούς §§ 103-105) πρόσημα στά ἐμβαδά τῶν χωρίων ἀναλόγως τῆς φορᾶς διαγραφῆς τοῦ περιγράμματός των, τότε τό προσημασμένο ἐμβαδό τοῦ χωρίου Ω μέ περίγραμμα πού διαγράφουμε κατά τή φορά ἀπό τό σημεῖο $(\alpha,0)$ πρός τό σημεῖο $(\beta,0)$ πάνω στόν ἄξονα τῶν x, θά δίνεται καί στήν περίπτωση $\sigma(x) \geqq 0$ καί στήν $\sigma(x) \leqq 0$ ἀπό τόν τύπο (276.1). Ἐπομένως τό ὁλοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx$ δίνει σ'ἀμφότερες τίς περιπτώσεις τό προσημασμένο ἐμβαδό τοῦ χωρίου Ω μέ περίγραμμα πού διαγράφουμε κατά τή φορά ἀπό τό σημεῖο $(\alpha,0)$ πρός τό σημεῖο$(\beta,0$ πάνω στόν ἄξονα τῶν x, τό δέ ὁλοκλήρωμα $\int_\beta^\alpha \sigma(x)dx$ δίνει τό προσημασμένο ἐμβ. τοῦ Ω ὅταν περίγραμμά του διαγράφεται κατά τή φορά ἀπό τό σημεῖο $(\beta,0)$ πρός τό σημεῖο $(\alpha,0)$ πάνω στόν ἄξονα OX.

277. Ἄν ἡ $\sigma(x)$ ἀλλάζη πρόσημο σέ πεπερασμένο πλῆθος θέσεων $x_1 < x_2 < \ldots < x_\kappa$ τοῦ διαστήματος $J(\alpha \leqq x \leqq \beta)$, τότε τό χωρίο Ω χωρίζεται σέ μέρη πού κεῖνται ἄλλα ἀπό τή μιά μεριά τοῦ ἄξονα τῶν x, ἄλλα ἀπό τήν ἄλλη.



Τό ὁλοκλήρωμα

$$\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx = \int_\alpha^{x_1} \sigma(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} \sigma(x)dx + \ldots + \int_{x_\kappa}^{\beta} \sigma(x)dx$$

ἰσοῦται τότε προφανῶς μέ τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν προσημασμένων ἐμβαδῶν τῶν μερῶν αὐτῶν, ὅταν τό περίγραμμα τοῦ καθενός ἀπ'αὐτά διαγραφῆ μέ τή φορά πού καθορίζει ἡ ὅδευση ἀπό τό σημεῖο $(\alpha,0)$ πρός τό σημεῖο $(\beta,0)$ πάνω στόν ἄξονα τῶν x. Τό ἄθροισμα αὐτό ἐξακολουθοῦμε νά τό λέμε προσημασμένο ἐμβαδό τοῦ χωρίου Ω ὅταν τό περίγραμμα του διαγράφεται κατά τήν φορά ἀπό τό σημεῖο $(\alpha,0)$ πρός τό σημεῖο $(\beta,0)$ πάνω στόν ἄξονά OX. Μέ αὐτή σύμβαση ἐξακολουθεῖ λοιπόν νά ἰσχύη ὁ τύπος (276.1).

Ἄν ὅμως ζητηθῆ τό ἐμβαδό τοῦ χωρίου Ω μέ τό νόημα πού θά εἶχε χωρίς τή σύμβαση περί προσημασμένων ἐμβαδῶν, τότε ἐννοεῖται ἡ ἀπάντηση δίδεται ἀπό τόν ἀριθμό

$$\left|\int_{\alpha}^{x_1}\sigma(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2}\sigma(x)\,dx\right| + \ldots + \left|\int_{x_\kappa}^{\beta}\sigma(x)\,dx\right| .$$

278. Ἔστω τώρα Ω^* ἕνα χωρίο πού περιορίζεται ἀπό τίς δυό γραμμές $y = \sigma_1(x)$ καί $y = \sigma_2(x)$ γιά $\alpha \leqq x \leqq \beta$ καί ἀπό τίς δυό εὐθεῖες $x = \alpha$ καί $x = \beta$. Ὑποθέτουμε ὅτι

$$\sigma_1(x) \leqq \sigma_2(x) \qquad \text{γιά} \quad \alpha \leqq x \leqq \beta .$$

Τότε προφανῶς:

$$\text{(278.1)} \qquad \text{εμβ.}\Omega^* = \int_{\alpha}^{\beta}\left[\sigma_2(x) - \sigma_1(x)\right] dx$$

ὅπου τό περίγραμμα τοῦ Ω^* διαγράφεται κατά τή φορά ἀπό τό σημεῖο $(\alpha, \sigma_1(\alpha))$ πρός τό σημεῖο $(\beta, \sigma_1(\beta))$ πάνω στή γραμμή $y = \sigma_1(x)$. Π.χ. τό χωρίο πού περικλείεται ἀπό τήν ἔλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ μπορεῖ νά θεωρηθῆ ὡς περιοριζόμενο ἀπό τίς γραμμές

$$y = -\frac{\beta}{\alpha}\underset{+}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} \quad \text{καί} \quad y = \frac{\beta}{\alpha}\underset{+}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}$$

γιά $-\alpha \leqq x \leqq \alpha$, καί ἀπό τίς εὐθεῖες $x = -\alpha$ καί $x = \alpha$. Ἄρα τό ἐμβαδό ἰσοῦται μέ

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\frac{\beta}{\alpha}\underset{+}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} - \left(-\frac{\beta}{\alpha}\underset{+}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}\right)\right] dx = \frac{2\beta}{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\underset{+}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}\,dx =$$

$$= \frac{2\beta}{\alpha}\left[\frac{x}{2}\underset{+}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} + \frac{\alpha^2}{2}\,\text{τοξ}_0\text{ημ}\,\frac{x}{\alpha}\right]_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{2\beta}{\alpha}\left(\frac{\alpha^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha^2}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \pi\alpha\beta$$

Τό ἐμβαδό αὐτό συμφωνεῖ φυσικά μέ κεῖνο πού βρίσκουμε, ἄν θεωρήσουμε τήν ἔλλειψη ὡς ὀρθή πρόβολή κύκλου.

279. Ἄν εἴτε τό σύστημα τῶν συντεταγμένων δέν εἶναι ὀρθογώνιο εἴτε τά βασικά διανύσματα δέν εἶναι ἰσόμηκα πρός τήν

μονάδα μήκους, τότε τό $\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx$ μετρᾶ τό (προσημασμένο) ἐμβαδό τοῦ χωρίου Ω μέ μονάδα ἐμβαδῶν τό παραλληλόγραμμο πού ἔχει πλευρές ἐξερχόμενες ἀπό μιάν κορυφή τά δυό βασικά διανύσματα.

Ἐπομένως, ἄν π.χ. τό σύστημα εἶναι πλαγιογώνιο, τά βασικά ὅμως διανύσματα ἰσόμηκα μέ τή μονάδα μήκους, τότε γιά τό ἐμβαδό τοῦ Ω, μετρημένο μέ μονάδα ἐπιφάνειας τό τετράγωνο πού ἔχει πλευρά τή μονάδα μήκους, θά ἰσχύη ἡ σχέση

$$\text{εμβ.}\Omega = \text{ημ}XOY \cdot \int_\alpha^\beta \sigma(x)dx$$

230. Ἔστω τέλος $\sigma(x)$ μιά συνάρτηση μονότονη μέ εὐρεία σημασία στό διάστημα $J(\alpha \leqq x \leqq \beta)$ καί ἀσυνεχής.

Γιά νά πάρουμε μιάν ἁπλή περίπτωση ὡς παράδειγμα, ἄς εἶναι ἡ $\sigma(x) > 0$ στό J καί ἀσυνεχής στήν ἐσωτερική θέση γ τοῦ διαστήματος αὐτοῦ καί μόνο σ'αὐτήν. Ποιά εἶναι ἡ γεωμετρική ἑρμηνεία, σ'ἕνα σύστημα ὀρθογώνιων συντεταγμένων, τοῦ ὁλοκληρώματος $\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx$ πού ἔχει ὁρισθῆ ἀναλυτικά ;

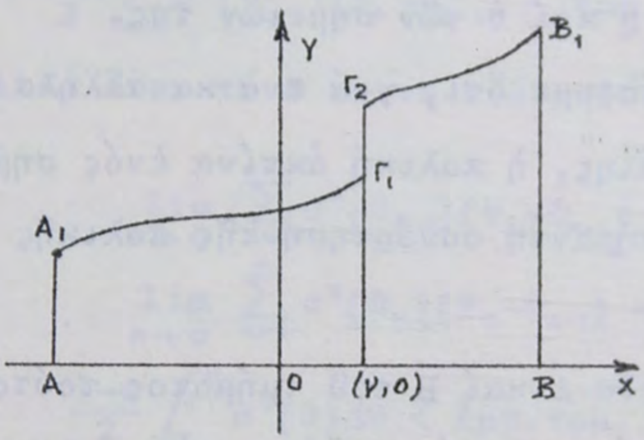
Ἀπό τήν ὑπόθεση ὅτι ἡ $\sigma(x)$ εἶναι μονότονη ἕπεται ὅτι ὑπάρχουν τά ὅρια $\lim\limits_{x\to\gamma^-}\sigma(x) = \gamma_1$ καί $\lim\limits_{x\to\gamma^+}\sigma(x) = \gamma_2$, μέ $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Ὅσον ἀφορᾶ τήν τιμήν $\sigma(\gamma)$, γι'αὐτήν, λόγῳ τῆς μονοτονίας, θά ἰσχύη ἡ σχέση $\gamma_1 \leqq \sigma(\gamma) \leqq \gamma_2$ στήν περίπτωση αὔξουσας $\sigma(x)$ καί $\gamma_1 \geqq \sigma(\gamma) \geqq \gamma_2$ στήν περίπτωση φθίνουσας $\sigma(x)$.

Καλοῦμε A, B, A_1, Γ_1, Γ_2, B_1 τά σημεῖα μέ συντεταγμένες ἀντιστοίχως $(\alpha,0)$, $(\beta,0)$, $(\alpha,\sigma(\alpha))$, (γ,γ_1), (γ,γ_2), $(\beta,\sigma(\beta))$. Ἀπό ὅσα ξέρουμε ἕπεται εὔκολα ὅτι τό ὁλοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx = \int_\alpha^\gamma + \int_\gamma^\beta$ δίδει καί πάλι τό ἐμβαδό τοῦ χωρίου Ω τοῦ ὁποίου τό ἐσωτερικό ἀποτελεῖται ἀπό τά σημεῖα (x,y) πού ἱκανοποιοῦν ἤ τίς ἀνισότητες

$$\begin{cases} \alpha < x < \gamma \\ 0 < y < \sigma(x) \end{cases}$$

ἤ τίς $\begin{cases} \gamma < x < \beta \\ 0 < y < \sigma(x) \, . \end{cases}$

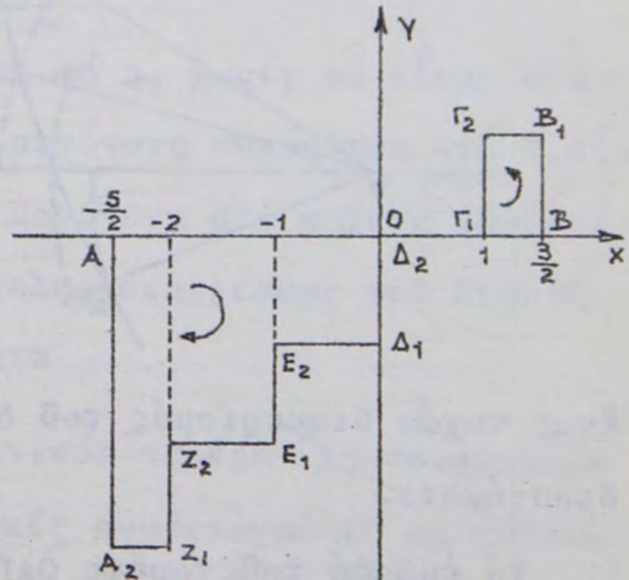
Ὅσον ἀφορᾶ τό περίγραμμα (τό σύνορο) τοῦ χωρίου, αὐτό ἀποτελεῖται ἀπό τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ, τό τμῆμα BB_1, τή γραμμή $B_1\Gamma_2$ πού ἔχει ἐξίσωση $y = \sigma(x)$ γιά $\beta \geqq x > \gamma$, τό εὐθύγραμμο τμῆμα $\Gamma_2\Gamma_1$, τή γραμμή $\Gamma_1 A_1$, πού ἔχει ἐξίσωση $y = \sigma(x)$ γιά $\gamma > x \geqq \alpha$, καί τό εὐθύγραμμο τμῆμα A_1A.



281. Εἰδική περίπτωση χρήσιμη γιά διάφορες ἐφαρμογές εἶναι ἐκείνη κατά τήν ὁποία ἡ $\sigma(x)$ ἔχει σταθερή τιμή κατά διαστήματα, ὅπως π.χ. ἡ $\sigma(x) = Ak(x)$.

Ἡ $\sigma(x)$ λέγεται τότε καί κλιμακωτή συνάρτηση. Τό ὁλοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx$ μπορεῖ καί σ'αὐτή τήν περίπτωση νά ἑρμηνευθῆ γεωμετρικά ὡς ἐμβαδό μέ μέθοδο ὅμοια πρός αὐτήν πού χρησιμοποιήθηκε παραπάνω.

Π.χ. τό $\int_{-2,5}^{1,5} Ak(x)dx = -4$ ἰσοῦται μέ τό προσημασμένο ἐμβαδό τοῦ χωρίου Ω πού ἀποτελεῖται ἀπό τά δύο πολύγωνα $A\Delta_2\Delta_1E_2E_1Z_2Z_1A_2A$ καί $\Gamma_1BB_1\Gamma_2\Gamma_1$ μέ περιγράμματα πού διαγράφουμε κατά τη σημειωμένη διαδοχή τῶν κορυφῶν τους.

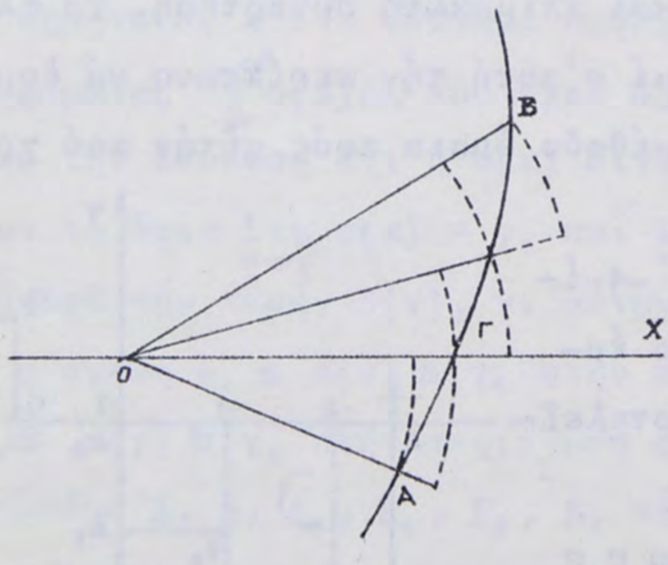


282. <u>'Εμβαδό τομέως</u>. Όταν ζητῆται τό ἐμβαδό ἑνός τομέως καμπύλης, δηλαδή ἑνός χωρίου περιεχόμενου μεταξύ μιᾶς καμπύλης καί δύο ἡμιευθειῶν πού ἀναχωροῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο εἶναι συχνά σκόπιμο νά χρησιμοποιήση κανείς πολικές συντεταγμένες, μέ πόλο τό σημεῖο τοῦτο. Ὁ τύπος γιά τό ἐμβαδό εἶναι τότε ὁ ἑξῆς:

Ἡ καμπύλη θά παριστάνεται ἀπό μιάν ἐξίσωση πού συνδέει τίς πολικές συντεταγμένες ϱ καί ϑ τῶν σημείων της.

Μποροῦμε π.χ. νά ὑποθέσουμε ὅτι, γιά ἕνα κατάλληλα περιορισμένο τμῆμα τῆς καμπύλης, ἡ πολική ἀκτίνα ἑνός σημείου Μ τῆς καμπύλης εἶναι μονοσήμαντη συνάρτηση τῆς πολικῆς γωνίας ϑ : $\varrho = \sigma(\vartheta)$.

Ἄς θεωρήσουμε δυό σημεῖα Α καί Β τοῦ τμήματος τούτου τῆς καμπύλης ἀντιστοιχοῦντα στίς πολικές γωνίες ϑ_α καί ϑ_β καί



ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἡ $\sigma(\vartheta)$ εἶναι μονότονη, π.χ. αὔξουσα μέ εὐρεία σημασία, συνάρτηση τοῦ ϑ στό διάστημα $\vartheta_\alpha < \vartheta < \vartheta_\beta$.

Ἔστω $\vartheta_\alpha = \vartheta_0 < \vartheta_1 < \vartheta_2 < \ldots < \vartheta_\nu = \vartheta_\beta$ ἕνας τυχών διαμερισμός τοῦ διαστήματος ἀπό ϑ_α ὡς ϑ_β σέ ν ὑποδιαστήματα.

Τό ἐμβαδό τοῦ τομέως ΟΑΓΒΟ περιέχεται προφανῶς μεταξύ τοῦ ἀθροίσματος

$$\frac{1}{2}\sum_{\kappa=1}^{\nu}\sigma^2(\vartheta_{\kappa-1})\,\eta\mu(\vartheta_\kappa-\vartheta_{\kappa-1}) \quad \text{καί τοῦ} \quad \frac{1}{2}\sum_{\kappa=1}^{\nu}\sigma^2(\vartheta_\kappa)\,\varepsilon\varphi(\vartheta_\kappa-\vartheta_{\kappa-1}),$$

ἐπειδή ἡ $\sigma(\vartheta)$ εἶναι αὔξουσα.

Ἔστω ε ἕνας θετικός ἀριθμός αὐθαίρετα μικρός· ἄν λάβουμε τό μέγιστο πλάτος π τῶν ὑποδιαστημάτων τοῦ διαμερισμοῦ κατάλληλα μικρό θά ἔχουμε:

$$0 < 1-\varepsilon \leq \frac{\eta\mu(\vartheta_k-\vartheta_{k-1})}{\vartheta_k-\vartheta_{k-1}} < 1+\varepsilon \quad \text{καί} \quad 0<1+\varepsilon<\frac{\varepsilon\varphi(\vartheta_k-\vartheta_{k-1})}{\vartheta_k-\vartheta_{k-1}} < 1+\varepsilon$$

(γιά $k = 1,2,\ldots,\nu$), καί ἐπομένως

$$\frac{1-\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{\nu}\sigma^2(\vartheta_{k-1})(\vartheta_k-\vartheta_{k-1}) < \text{ἐμβ.τομ.} < \frac{1+\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{\nu}\sigma^2(\vartheta_k)(\vartheta_k-\vartheta_{k-1}).$$

Ἀλλά ὅταν τό π τείνη στό μηδέν, τότε σύμφωνα μέ ὅσα ξέρουμε

$$\lim_{\pi\to 0}\sum_{k=1}^{\nu}\sigma^2(\vartheta_{k-1})(\vartheta_k-\vartheta_{k-1}) = \int_{\vartheta_\alpha}^{\vartheta_\beta}\sigma^2(\vartheta)\cdot d\vartheta$$

καί
$$\lim_{\pi\to 0}\sum_{k=1}^{\nu}\sigma^2(\vartheta_k)(\vartheta_k-\vartheta_{k-1}) = \int_{\vartheta_\alpha}^{\vartheta_\beta}\sigma^2(\vartheta)d\vartheta .$$

Ἄρα
$$\frac{1-\varepsilon}{2}\int_{\vartheta_\alpha}^{\vartheta_\beta}\sigma^2(\vartheta)d\vartheta < \text{ἐμβ.τομ.} < \frac{1+\varepsilon}{2}\int_{\vartheta_\alpha}^{\vartheta_\beta}\sigma^2(\vartheta)d\vartheta .$$

Συνεπῶς, ἀφοῦ τό ε εἶναι αὐθαίρετα μικρός θετικός ἀριθμός, θά ἔχουμε:

$$\text{εμβ.τομ.}OAB = \frac{1}{2}\int_{\vartheta_\alpha}^{\vartheta_\beta}\varrho^2 d\vartheta .$$

Ὁ τύπος αὐτός ἰσχύει καί ὅταν τό ϱ, χωρίς νά εἶναι σ'ὁλόκληρο τό διάστημα $\vartheta_\alpha \leqq \vartheta \leqq \vartheta_\beta$ μονότονη συνάρτηση τοῦ ϑ, εἶναι κατά τμήματα μονότονη, δηλ. μονότονη στό καθένα χωριστά ἀπό τά ὑποδιαστήματα μιᾶς κατάλληλης διαιρέσεως τοῦ διαστήματος $\vartheta_\alpha \leqq \vartheta \leqq \vartheta_\beta$ σέ ὑποδιαστήματα

283. <u>Παράδειγμα.</u> Ἐλλειπτικός τομέας Ἄς θεωρήσουμε τήν ἔλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2} = 1$ σέ πολικές συντεταγμένες μέ πόλο τό κέντρο τῆς Ο καί πολικό ἄξονα τόν ΟΧ. Εἶναι τότε $x = \varrho\sigma\upsilon\nu\vartheta$ καί $y = \varrho\eta\mu\vartheta$. Ἐπομένως ἡ ἐξίσωση τῆς ἐλλείψεως σέ πολικές συντεταγμένες:
$$\varrho^2 = \frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2\eta\mu^2\vartheta + \beta^2\sigma\upsilon\nu^2\vartheta}$$

"Αρα τό ἐμβαδό τοῦ ἐλλειπτικοῦ τομέβς ΟΑΜ (ὅπου τό Α ἔχει πολική γωνία $\vartheta = 0$, τό Μ πολική γωνία ϑ) εἶναι

$$\frac{\alpha^2\beta^2}{2}\int_0^\vartheta \frac{d\vartheta}{\alpha^2\eta\mu^2\vartheta + \beta^2\sigma\upsilon\nu^2\vartheta} = \frac{\alpha^2\beta^2}{2}\int_0^\vartheta \frac{d\vartheta/\sigma\upsilon\nu^2\vartheta}{\alpha^2\varepsilon\varphi^2\vartheta+\beta^2} = \frac{\alpha^2\beta^2}{2}\int_0^\vartheta \frac{d\varepsilon\varphi\vartheta}{\alpha^2\varepsilon\varphi^2\vartheta+\beta^2}.$$

Τό ὁλοκλήρωμα $\int \frac{d\varepsilon\varphi\vartheta}{\alpha^2\varepsilon\varphi^2\vartheta+\beta^2}$ ὑπολογίζεται ἀμέσως μέ τήν ἀντικατάσταση $\varepsilon\varphi\vartheta = t$:

$$\int \frac{d\varepsilon\varphi\vartheta}{\alpha^2\varepsilon\varphi^2\vartheta+\beta^2} = \int\frac{dt}{\alpha^2t^2+\beta^2} = \int\frac{d\frac{\beta}{\alpha}\omega}{\alpha^2\frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot\omega^2+\beta^2} = \frac{1}{\alpha\beta}\int\frac{d\omega}{\omega^2+1}$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta}\,\tau o\xi_0\varepsilon\varphi\omega + C = \frac{1}{\alpha\beta}\,\tau o\xi_0\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{\beta}t + C = \frac{1}{\alpha\beta}\,\tau o\xi_0\varepsilon\varphi\left(\frac{\alpha\varepsilon\varphi\vartheta}{\beta}\right)+C\,.$$

Ἐπομένως

$$\varepsilon\mu\beta.\tau o\mu.\mathrm{OAM} = \frac{\alpha\beta}{2}\,\tau o\xi_0\varepsilon\varphi\left(\frac{\alpha\varepsilon\varphi\vartheta}{\beta}\right) \quad \left(\gamma\iota\acute{\alpha}\ -\frac{\pi}{2} \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2}\right).$$

Γιά $\frac{\pi}{2} \leqq \vartheta \leqq \frac{3\pi}{2}$ εἶναι, ὅπως εὔκολα βλέπει ξανείς,

$$\varepsilon\mu\beta.\tau o\mu.\ \mathrm{OAM} = \frac{\alpha\beta}{2}\,\tau o\xi_1\varepsilon\varphi\left(\frac{\alpha\varepsilon\varphi\vartheta}{\beta}\right) \quad \kappa.o.\kappa.$$

Τό ἐμβαδό κυκλικοῦ τομέως εὑρίσκεται ἄν θέσουμε $\alpha = \beta$:

$$\varepsilon\mu\beta.\ \kappa\upsilon\kappa\lambda.\ \tau o\mu.\ \mathrm{OAM} = \frac{\alpha^2}{2}\vartheta\ ,$$

ὅπως ἔπρεπε νά βροῦμε.

284. Μιά δεύτερη ἐφαρμογή τοῦ ὁλοκληρώματος εἶναι ὁ ὁρισμός καί ὁ ὑπολογισμός τοῦ μήκους τόξου καμπύλων.

"Εστω $y = \sigma(x)$ γιά $\alpha \leqq x \leqq \beta$ ἕνα τόξο ἐπίπεδης καμπύλης σέ ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων (μέ βασικά διανύσματα ἰσόμηκα πρός τήν μονάδα μήκους). Γιά τή συνάρτηση $\sigma(x)$ ὑποθέτουμε ὅτι ἔχει πεπερασμένη παράγωγο $\sigma'(x)$ συνεχῆ στό διάστημα $J(\alpha \leqq x \leqq \beta)$. Ἡ γεωμετρική σημασία τῆς ὑποθέσεως εἶναι ὅτι τό θεωρούμενο τόξο καμπύλης ἔχει ἐφαπτομένη μή παράλληλη πρός τόν ΟΥ σέ κάθε σημεῖο του καί ὅτι ἡ κλίση της (= συντελεστής διευθύνσεως) καί ἐπομένως ἡ γωνία τῆς ἐφαπτομένης μέ τόν ΟΧ εἶναι συνεχής συνάρτηση τῆς τετμημένης x τοῦ σημείου ἐπαφῆς.

Γιά νά ὁρίσουμε τό μῆκος τοῦ τόξου ἐργαζόμαστε κατά τρόπο πού συγγενεύει μέ τή μέθοδο πού χρησιμοποίησε ὁ Ἀρχιμήδης στή μέτρηση τοῦ μήκους περιφέρειας κύκλου.

Παίρνουμε πάνω στό τόξο μιά διαδοχή σημείων A_ρ γιά $\rho = 1,2,3,\ldots,\nu$ μέ αὔξουσες ἀντιστοίχως τετμημένες

(284.1) $$\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta \quad .$$

Ἡ τεθλασμένη γραμμή $A_0A_1A_2\ldots A_\nu$ καλεῖται πολυγωνική γραμμή ἐγγεγραμμένη στό τόξο. Κατά ταῦτα, σέ μιά ἐγγεγραμμένη πολυγωνική γραμμή ἀντιστοιχεῖ ἕνας διαμερισμός (284.1) τοῦ διαστήματος $J(\alpha \leqq x \leqq \beta)$ σέ ὑποδιαστήματα καί ἀντιστρόφως, ὅπως εἶναι προφανές.

285. Ἔστω τώρα $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_\mu, \ldots$ μιά τυχούσα ἀκολουθία ἀπεριόριστα λεπτυνόμενων διαμερισμῶν τοῦ διαστήματος J (δηλ. τό μέγιστο πλάτος τῶν ὑποδιαστημάτων τοῦ Δ_μ τείνει στό 0, ὅταν τό μ τείνη στό ἄπειρο).

Στήν ἀκολουθία αὐτή ἀντιστοιχεῖ μία ἀκολουθία ἐγγεγραμμένων πολυγωνικῶν γραμμῶν $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_\mu, \ldots$ μέ μέγιστο μῆκος πλευρῶν τῆς Π_μ τό ὁποῖο τείνει στό 0, ὅταν τό μ τείνει στό ἄπειρο. Αὐτό εἶναι συνέπεια τῆς ἰδιότητας τῆς σ(x) νά εἶναι συνεχής στό περιορισμένο καί κλειστό διάστημα $J(\alpha \leqq x \leqq \beta)$, ἰδιότητας πού ἕπεται πάλι ἀπό τήν ὑπόθεσή μας ὅτι ἡ σ(x) ἔχει πεπερασμένη παράγωγο σ'αὐτό τό διάστημα.

Γιά νά ἐκφράσουμε τό μῆκος τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς Π_μ καλοῦμε

$$\alpha = x_0^{(\mu)} < x_1^{(\mu)} < x_2^{(\mu)} < \ldots < x_{\nu_\mu}^{(\mu)} = \beta$$

τά διαιρετικά σημεῖα τοῦ διαμερισμοῦ Δ_μ καί $y_\rho^{(\mu)} = \sigma(x_\rho^{(\mu)})$, γιά $\rho = 0,1,2,\ldots,\nu_\mu$, τίς ἀντίστοιχες τιμές τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$· ἔχουμε:

$$\text{μῆκος } \Pi_\mu = L(\Pi_\mu) = \sum_{\rho=1}^{\nu_\mu} +\sqrt{(x_\rho^{(\mu)} - x_{\rho-1}^{(\mu)})^2 + (y_\rho^{(\mu)} - y_{\rho-1}^{(\mu)})^2} \; .$$

Ἀλλά κατά τό θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ ἔχουμε:

$$y_\rho^{(\mu)} - y_{\rho-1}^{(\mu)} = \sigma(x_\rho^{(\mu)}) - \sigma(x_{\rho-1}^{(\mu)}) = (x_\rho^{(\mu)} - x_{\rho-1}^{(\mu)})\sigma'(\xi_\rho^{(\mu)})$$

ὅπου $\xi_\rho^{(\mu)}$ κατάλληλος ἀριθμός μεταξύ $x_{\rho-1}^{(\mu)}$ καί $x_\rho^{(\mu)}$ ἄρα

$$L(\Pi_\mu) = \sum_{\rho=1}^{\nu_\mu} (x_\rho^{(\mu)} - x_{\rho-1}^{(\mu)})\sqrt{1+\sigma'^2(\xi_\rho^{(\mu)})}$$

Η συνάρτηση $\sqrt{1+\sigma'^2(x)}$ εἶναι ὅμως συνεχής στό διάστημα $J(\alpha \leqq x \leqq \beta)$. Ἄρα κατά τή θεωρία τοῦ ὁρισμένου ὁλοκληρώματος συνεχοῦς συναρτήσεως

$$\lim_{\mu\to\infty} L(\pi_\mu) = \int_\alpha^\beta \sqrt{1+\sigma'^2(x)}\, dx \; .$$

Τό ὅριο αὐτό εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ τό μῆκος L τοῦ τόξου τῆς καμπύλης $y = \sigma(x)$ γιά $\alpha \leqq x \leqq \beta$:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{1+\sigma'^2(x)}\; dx \; . \tag{285.1}$$

286. Ὁ παραπάνω ὁρισμός ἐπιτρέπει τόν ἀκριβῆ ὑπολογισμό τοῦ μήκους, ὅταν γνωρίζουμε μιά στοιχειωδῶς ἐκφράσιμη παράγουσα τῆς συναρτήσεως $\sqrt{1+\sigma'^2(x)}$.

Ἄν δέν γνωρίζουμε καμμιάν τέτοια παράγουσα, τότε ὑπολογίζουμε κατά προσέγγιση τό ὁρισμένο ὁλοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta \sqrt{1+\sigma'^2(x)}\,dx$, καί τήν τιμή πού βρίσκουμε τήν παίρνουμε γιά κατά προσέγγιση τιμή τοῦ μήκους τοῦ τόξου.

Μιά κατά προσέγγισι τιμή τοῦ $\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+\sigma'^2(x)}\,dx$ εἶναι π.χ. τό ἄθροισμα

$$A(\Delta) = \sum_{\rho=1}^{\nu}\sqrt{1+\sigma'^2(x_\rho)}\cdot(x_\rho - x_{\rho-1})$$

πού ἀντιστοιχεῖ σέ ἕναν ἀρκετά λεπτό διαμερισμό Δ

$$\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{\nu-1} < x_\nu = \beta$$

τοῦ διαστήματος $J(\alpha \leqq x \leqq \beta)$.

Ἕναν ἄλλο τρόπο κατά προσέγγιση ὑπολογισμοῦ ὁρισμένου ὁλοκληρώματος θά δείξουμε.

287. Ὅταν ἡ γραμμή γ δίνεται μέ τίς παραμετρικές ἐξισώσεις $x = \varphi(t)$ καί $y = \omega(t)$ ὅπου οἱ συναρτήσεις $\varphi(t)$ καί $\omega(t)$ ἔχουν πεπερασμένεςκαί συνεχεῖς παραγώγους καί εἶναι π.χ. $\varphi'(t) \neq 0$ γιά $t_1 \leqq t \leqq t_2$, θά ἔχουμε

$$y_x = \sigma'(x) = \frac{\omega'(t)}{\varphi'(t)}$$

Ἄρα ἄν κάμουμε μέσα στή (285.1) τήν ἀντικατάσταση $x=\varphi(t)$ θά βροῦμε

$$(287.1) \qquad L = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1+\left(\frac{\omega'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\,d\varphi(t) = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\varphi'^2(t)+\omega'^2(t)}\;dt\,.$$

Παίρνουμε ἐπάνω στή γ ἕνα σημεῖο $P_0(t_0)$. Ἕνα δεύτεροτυχόν σημεῖο $P(t)$ τῆς γ προσδιορίζεται καί μέ τό νά γνωρίζουμε πρῶτον τό μῆκος τοῦ τόξου P_0P καί δεύτερο ἄν τό P προηγεῖται ἤ ἕπεται τοῦ P_0 κατά τή διαγραφή τῆς καμπύλης μέ μιάν ὁρισμένη φορά, π.χ. κατά τή διαγραφή μέ τή φορά πού ἀντιστοιχεῖστή μεταβολή τοῦ t ἀπό τό t_1 στό t_2. Ἡ παρατήρηση αὐτή δείχνει ὅτι εἶναι σκόπιμο νά δώσουμε πρόσημο στό μῆκος τοῦ τόξου P_0P, π.χ. τό + ἄν τό P ἕπεται τοῦ P_0, τό − ἄν τό P προηγῆται τοῦ P_0.

Συμφωνοῦμε λοιπόν νά ἐκλέξουμε γιά θετική φορά διαγραφῆς τῆς γ ἐκείνη πού ἀντιστοιχεῖ στή μετάβαση τοῦ t ἀπό τήν μικρότερη τιμή t_1 στή μεγαλύτερη τιμή t_2 καί νά θεωρήσουμε τό μῆκος τοῦ τόξου P_0P θετικό ἤ ἀρνητικό καθόσο γιά τίς ἀντίστοιχες στά ἄκρα P_0 καί P τιμές τῆς παραμέτρου ἰσχύει ἡ σχέση $t_0 < t$ ἤ ἡ $t < t_0$.

Ὕστερα ἀπό τή σύμβαση αὐτή ἰσχύει ὁ τύπος:

(287.2) προσημασμένο μῆκος τόξου $P_0P = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\varphi'^2(u) + \omega'^2(u)}\, du$

γιά $t_1 \leqq t \leqq t_2$.

Τό μῆκος αὐτό εἶναι μιά αὔξουσα (μέ στενή σημασία) συνάρτηση τοῦ t, ἡ ὁποία παριστάνεται συνήθως μέ τό σύμβολο s(t). Ἡ s(t) ἔχει παράγωγο σέ κάθε θέση τοῦ διαστήματος ὁρισμοῦ της τήν

(287.3) $$s'(t) = +\sqrt{\varphi'^2(t) + \omega'^2(t)}\ .$$

Ἑπομένως τό διαφορικό της στή θέση t ἰσοῦται μέ

(287.4) $$ds = s'(t)dt = \sqrt{\varphi'^2(t)+\omega'^2(t)}\, dt = \begin{cases} +\sqrt{dx^2+dy^2}, & \text{ὅταν } dt>0 \\ -\sqrt{dx^2+dy^2}, & \text{ὅταν } dt<0 \end{cases}$$

ὅπου τά διαφορικά $dx = \varphi'(t)dt$, $dy = \omega'(t)dt$ λαμβάνονται στήν ὑπ' ὄψη θέση t.

Τό s(t) λέγεται *καμπυλόγραμμη τετμημένη* τοῦ σημείου P(t) πάνω στήν καμπύλη γ. Τό διαφορικό $ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$ τοῦ μήκους τόξου λέγεται καί στοιχεῖο τόξου ἤ <u>γραμμικό στοιχεῖο</u> ἐπειδή μέ ὁλοκλήρωση αὐτοῦ ἔχουμε τό μῆκος τόξου s. Γιά δοσμένη θέση t καί δοσμένη τιμή τῆς αὐξήσεως $dt = \Delta t$ τό $ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$ ἰσοῦται μέ τό μῆκος (πολλαπλασιασμένο ἐπί +1 ἤ −1 καθόσο $dt > 0$ ἤ $dt < 0$) ἑνός διανύσματος πού ἔχει συντεταγμένες ($dx = \varphi'(t)dt$, $dy=\omega'(t)dt$).

Τό διάνυσμα αὐτό, ἄν ἀχθῆ ἀπό τό σημεῖο P(t) τῆς καμπύλης θά κεῖται (σύμφωνα μέ ὅσα εἴδαμε στό ἐδάφιο 195) πάνω στήν ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης στό σημεῖο της P(t).

Ἄν καλέσουμε $\Delta s = s(t+dt) - s(t)$ τήν αὔξηση τοῦ s πού ἀντιστοιχεῖ στήν μετάβαση ἀπό τήν τιμή t τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς στήν τιμή t+dt, τότε, ὅπως ξέρουμε, τό ds προσεγγίζει τή Δs, γιά $|dt|$ ἀρκετά μικρό, μέ ἀναλογικό (ἤ σχετικό) σφάλμα

$$\frac{\Delta s - ds}{\Delta t} = 1 - \frac{ds}{\Delta s}$$

πού ἔχει ὅριο τό μηδέν, ὅταν τό $dt = \Delta t$ τείνη στό 0.

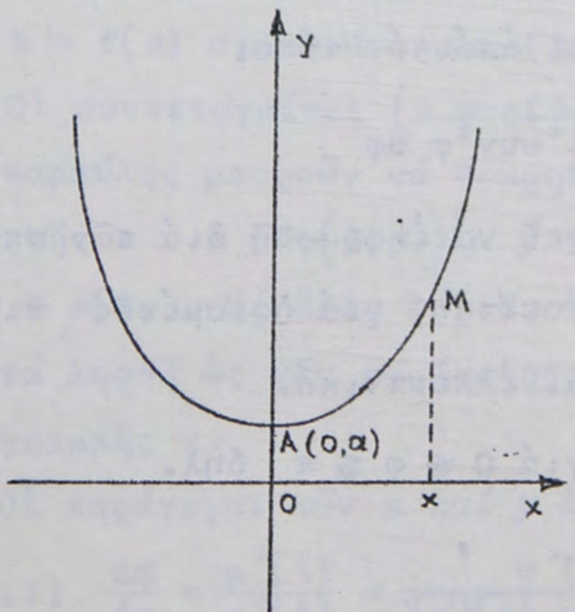
288. <u>Παραδείγματα.</u>

1) <u>Ἀλυσσοειδής</u> καλεῖται ἡ καμπύλη ἡ ὁποία σ'ἕνα κατάλληλο ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων παριστάνεται ἀπό τήν ἐξίσωση

$$y = \alpha\, \mathrm{ch} \frac{x}{\alpha} = \frac{\alpha}{2} \left(e^{\frac{x}{\alpha}} + e^{-\frac{x}{\alpha}} \right)$$

ὅπου α μιά σταθερά > 0.

Ἐδῶ παράμετρος εἶναι τό x καί τό διαφορικό τοῦ τόξου ἰσοῦται μέ



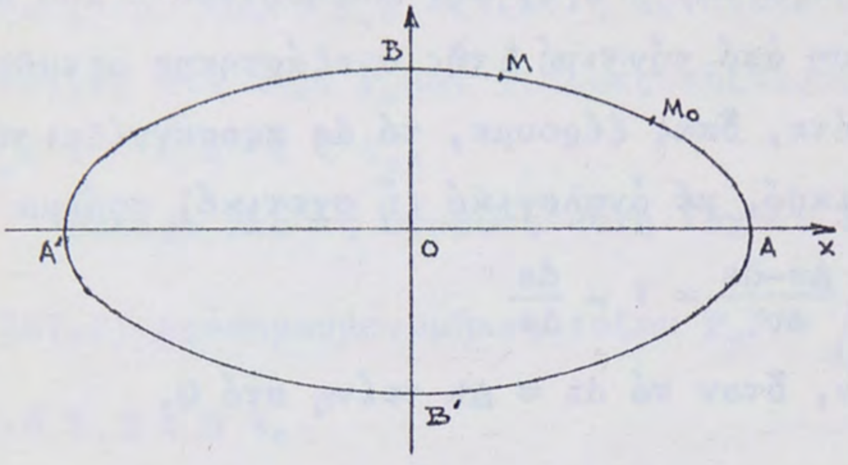
$$ds = \sqrt{1+y_x'^2}\, dx = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2 \frac{x}{\alpha}}\, dx = \mathrm{ch} \frac{x}{\alpha}\, dx \, .$$

Ἄρα τό μῆκος τῆς ἀλυσσοειδοῦς ἀπό τό σημεῖο π.χ. A μέ τετμημένη 0 ὡς τό σημεῖο M μέ τετμημένη x ἰσοῦται μέ

$$s = \int_0^x \mathrm{ch} \frac{x}{\alpha}\, dx = \alpha\, \mathrm{sh} \frac{x}{\alpha} \, .$$

Μῆκος τόξου ἐλλείψεως.

Εἶναι σκόπιμο νά κάμουμε χρήση τῆς παραμετρικῆς παραστάσεως μέ παράμετρο τήν ἐκ κέντρου ἀνωμαλία φ:



$$x = \alpha\sigma\upsilon\nu\varphi$$

$$y = \beta\eta\mu\varphi\ .$$

Ἔχουμε:

$$x'_\varphi = -\alpha\eta\mu\varphi$$

$$y'_\varphi = \beta\sigma\upsilon\nu\varphi$$

καί

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt[+]{x'^2_\varphi + y'^2_\varphi} = \sqrt[+]{\alpha^2\eta\mu^2\varphi + \beta^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi} =$$

$$= \sqrt[+]{\alpha^2 + (\beta^2-\alpha^2)\sigma\upsilon\nu^2\varphi} = \sqrt[+]{\alpha^2 - \gamma^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi} = \alpha\sqrt[+]{1-\varepsilon^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi}\quad ,$$

ὅπου $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$ εἶναι ἡ ἀριθμητική ἐκκεντρότητα τῆς ἐλλείψεως.

Ἄρα τό μῆκος τοῦ τόξου ἀπό τό σημεῖο M τῆς ἐλλείψεως πού ἀντιστοιχεῖ σέ ἐκ κέντρου ἀνωμαλία φ_0 μέχρι τοῦ σημείου M μέ ἐκ κέντρου ἀνωμαλία φ, δίδεται ἀπό τόν τύπο:

$$s = \alpha\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sqrt{1-\varepsilon^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi}\ d\varphi$$

Τό ὁλοκλήρωμα αὐτό δέν μπορεῖ νά ἐκφρασθῆ διά τῶν στοιχειωδῶν συναρτήσεων (ἐκτός, ἐννοεῖται, γιά ὁρισμένες τιμές τοῦ ε ὅπως ἡ ε = 0) καί καλεῖται ἐλλειπτικό.

Ἡ ἀντικατάσταση $x = \alpha\sigma\upsilon\nu\varphi$ γιά $0 \leqq \varphi \leqq \pi$ δηλ.

$$\varphi = \tau o\xi_0\sigma\upsilon\nu\,\frac{x}{\alpha}\qquad ,$$

δίνει σ'αὐτό τή μορφή:

$$s = \alpha\int_{x_0}^{x}\sqrt{1-\varepsilon^2\frac{x^2}{\alpha^2}}\cdot\frac{dx}{-\alpha\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}} = -\int_{x_0}^{x}\sqrt{\frac{\alpha^2-\varepsilon^2x^2}{\alpha^2-x^2}}\cdot dx$$

$$= -\int_{x_0}^{x} \frac{\sqrt{(\alpha^2-\varepsilon^2x^2)(\alpha^2-x^2)}}{\alpha^2-x^2}\,dx \ .$$

Παρατηροῦμε ὅτι στό ὁλοκλήρωμα αὐτό ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτηση εἶναι ρητή συνάρτηση τοῦ x καί τῆς τετραγωνικῆς ρίζας $\sqrt{(\alpha^2-\varepsilon^2x^2)(\alpha^2-x^2)}$ ἑνός ἀκέραιου πολυωνύμου τοῦ x βαθμοῦ τετάρτου.

289. Ὅπως εἴδαμε στόν § 287, ἄν ἐκλέξουμε πάνω στήν καμπύλη γ μιάν ἀρχή τόξων $P_0(t_0)$ καί γιά θετική φορά τή φορά μέ τήν ὁποία διαγράφεται ἡ καμπύλη ὅταν ἡ παράμετρος t διατρέχη αὐξάνουσα τό διάστημα της $t_1 \leqq t \leqq t_2$, τότε σέ κάθε σημεῖο P(t) τῆς καμπύλης ἀντιστοιχεῖ μιάν καμπυλόγραμμη τετμημένη s(t):

$$s(t) = \text{προσημασμένο μῆκος τοῦ τόξου } P_0P = \int_{t_0}^{t} \overset{+}{\sqrt{\varphi'^2(u)+\omega'^2(u)}}\, du .$$

Ἡ s(t) εἶναι αὔξουσα (μέ στενή σημασία) καί συνεχής συνάρτηση τοῦ t στό διάστημα $t_1 \leqq t \leqq t_2$. ἄρα, ἀντίστροφα, ἡ t εἶναι μονοσήμαντη, αὔξουσα καί συνεχής συνάρτηση τοῦ s : t = f(s) στό διάστημα $s(t_1) \leqq s \leqq s(t_2)$.

Οἱ συντεταγμένες $\big(x = \varphi(t),\ y = \omega(t)\big)$ τοῦ σημείου P(t) τῆς καμπύλης μποροῦν νά θεωρηθοῦν καί ὡς συναρτήσεις τῆς μεταβλητῆς s : $x = \varphi\big(f(s)\big)$, $y = \omega\big(f(s)\big)$, στό διάστημα $s(t_1) \leqq s \leqq s(t_2)$. Μέ ἄλλα λόγια, ἡ καμπυλόγραμμη τετμημένη s μπορεῖ νά ληφθῆ ὡς νέα παράμετρος γιά τήν ἀναλυτική παράσταση τῆς γραμμῆς γ.

Οἱ παράγωγοι τῶν x καί y ὡς πρός τή νέα παράμετρο s εἶναι:

$$(289.1)\qquad \frac{dx}{ds} = \frac{\varphi'(t)}{s'(t)} = \frac{\varphi'(t)}{\overset{+}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\omega'^2(t)}}} \ ,$$

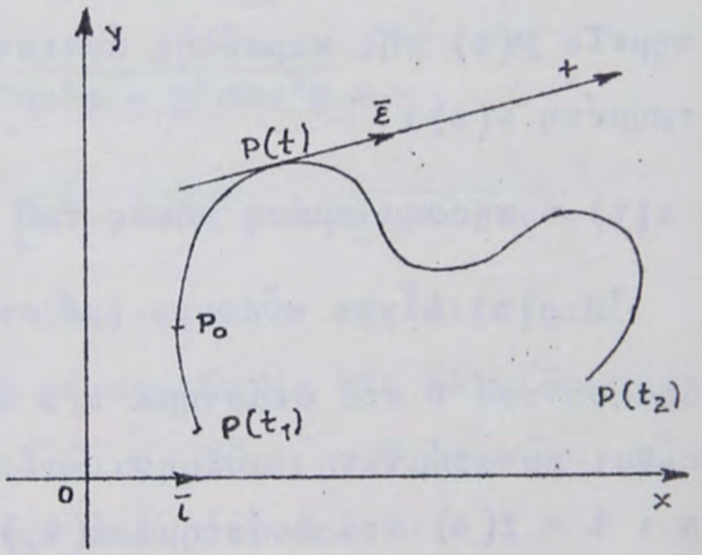
$$\frac{dy}{ds} = \frac{\omega'(t)}{s'(t)} = \frac{\omega'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\omega'^2(t)}} \ .$$

Γιά νά ἑρμηνεύσουμε γεωμετρικά τούς τύπους αὐτούς θεωροῦμε τό διάνυσμα μέ συντεταγμένες $\left(\varphi'(t)\ ,\ \omega'(t)\right)$ τό όποῖο, ὅπως ξέρουμε, εἶναι παράλληλο πρός τήν ἐφαπτομένη τῆς γραμμῆς γ στό σημεῖο P(t).

Τό ὁμόρροπο μοναδιαῖο διάνυσμα $\bar{\varepsilon}$ ἔχει τότε σύμφωνα μέ τούς τύπους (289.1) συντεταγμένες $\left(\frac{dx}{ds}\ ,\ \frac{dy}{ds}\right)$. Ἄν καλέσουμε θ τή γωνία $(\bar{i}\ \bar{\varepsilon})$, τότε ἀπό τούς παραπάνω τύπους ἕπονται καί τά ἑξῆς:

(289.2) $$\text{συν}\vartheta = \frac{dx}{ds}\quad ,\quad \text{ημ}\vartheta = \frac{dy}{ds}\ .$$

Ἡ φορά τοῦ διανύσματος $\bar{\varepsilon}$ ἤ τοῦ ὁμόρροπου $\left(\varphi'(t),\omega'(t)\right)$ λαμβάνεται ὡς θετική φορά τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης γ στό σημεῖο της P(t). Γωνία τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονα OX καί τῆς θετικῆς ἡμιεφαπτομένης στό σημεῖο P εἶναι τότε ἡ $\vartheta = (\bar{i}\ \bar{\varepsilon})$.



Ἄν ἀπό τό σημεῖο P μέ καμπυλόγραμμη τετμημένη s μεταβοῦμε στό γειτονικό σημεῖο P΄ τῆς καμπύλης τό ὁποῖο ἔχει καμπυλόγραμμη τετμημένη s+Δs μέ Δs > 0, ἡ φορά $\overline{PP'}$ πάνω στήν εὐθεία τῆς χορδῆς PP΄ σχηματίζει, ὅπως ἐκθέσαμε στόν § 207, μέ τή φορά $\bar{\varepsilon}$ τῆς ἐφαπτομένης στό P ὀξεία γωνία ὅσο θέλουμε μικρή, ἀρκεῖ τό Δs νά εἶναι κατάλληλα μικρό.

Ἀπό τούς τύπους (289.1) ἕπεται ἀκόμη ἡ ἑξῆς σημαντική σχέση

(289.3) $$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$$

γιά κάθε τιμή τοῦ s ἀπό τό διάστημα μεταβολῆς του, ἤ, μέ ἄλλα λόγια, γιά κάθε σημεῖο τῆς καμπύλης γ.

§ 290. <u>Μῆκος τόξου σέ πολικές συντεταγμένες.</u> Ἔστω ἡ καμπύλη γ: $\varrho = \varrho(t)$, $\vartheta = \vartheta(t)$ γιά $t_1 \leqq t \leqq t_2$.

Ἀπό τίς σχέσεις (§ 89):

$$x(t) = \varrho(t)\text{συν}\vartheta(t) \quad , \quad y(t) = \varrho(t)\text{ημ}\vartheta(t) ,$$

συμπεραίνουμε

$$x'(t) = \text{συν}\vartheta(t)\cdot\varrho'(t) - \varrho(t)\text{ημ}\vartheta(t)\cdot\vartheta'(t) \quad ,$$
$$y'(t) = \text{ημ}\vartheta(t)\cdot\varrho'(t) + \varrho(t)\text{συν}\vartheta(t)\cdot\vartheta'(t) .$$

Ἑπομένως:

$$x'^2(t) + y'^2(t) = \varrho'^2(t) + \varrho^2(t)\vartheta'^2(t) .$$

Ἄρα:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\varrho'^2(t) + \varrho^2(t)\vartheta'^2(t)}\cdot dt$$

καί ἄν ὡς παράμετρο λάβουμε 1ον) $t = \vartheta$,

2ον) $t = \varrho$:

1ον) $L = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{\varrho'^2(\vartheta) + \varrho^2(\vartheta)}\cdot d\vartheta$,

2ον) $L = \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \sqrt{1+\varrho^2\vartheta'^2(\varrho)}\cdot d\varrho$.

§ 291. <u>Ὄγκος στερεοῦ ἐκ περιστροφῆς.</u> Ἔστω γ μιά ἐπίπεδη καμπύλη μέ ἐξίσωση (σέ ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων): $y = \sigma(x)$, ὅπου $\sigma(x)$ συνεχής καί $\geqq 0$ συνάρτηση τοῦ x στό διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$.

Θεωροῦμε τό χωρίο Q πού περιορίζεται ἀπό τόν ἄξονα τῶν x, τήν καμπύλη γ καί τίς δυό εὐθεῖες $x = \alpha$, $x = \beta$. Ἡ περιστροφή του περί τόν ἄξονα τῶν x παράγει ἕνα στερεό.

Ζητεῖται νά ὁρίσουμε καί νά ὑπολογίσουμε τόν ὄγκο του.

Ἔστω Δ ἕνας διαμερισμός τοῦ διαστήματος $\alpha \leqq x \leqq \beta$ μέ τούς διαμεριστικούς ἀριθμούς

(291.1) $$\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{\nu-1} < x_\nu = \beta .$$

Καλοῦμε E_ϱ καί M_ϱ ἀντιστοίχως τήν ἐλάχιστη καί τή μέγιστη τιμή τῆς $\sigma(x)$ στό ὑποδιάστημα

$$x_{\rho-1} \leqq x \leqq x_\rho \qquad \gamma\iota\acute{\alpha}\ \varrho = 1, 2, \dots, \nu.$$

Ὁ ὁριστέος ὄγκος πρέπει προφανῶς νά εἶναι μεγαλύτερος ἤ ἴσος τοῦ ἀθροίσματος

$$\pi E_1^2(x_1-x_0) + \pi E_2^2(x_2-x_1) + \dots + \pi E_\nu^2(x_\nu - x_{\nu-1})$$

καί μικρότερος ἤ ἴσος τοῦ ἀθροίσματος

$$\pi M_1^2(x_1-x_0) + \pi M_2^2(x_2-x_1) + \dots + \pi M_\nu^2(x_\nu - x_{\nu-1}).$$

Τά δυό ἀθροίσματα τείνουν ὅμως στό ἴδιο ὅριο $\pi\int_\alpha^\beta [\sigma(x)]^2 dx$, ὅταν διατρέξουμε μιάν ἀκολουθία ἀπεριόριστα λεπτυνόμενων διαμερισμῶν $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_\mu, \dots$

Ἄρα ὁ ὁριστέος ὄγκος πρέπει νά τεθῇ ἴσος μέ τό ὁλοκλήρωμα

$$\pi \int_\alpha^\beta [\sigma(x)]^2 dx = \pi \int_\alpha^\beta y^2 dx \ .$$

Ὁ ὑπολογισμός του θά γίνῃ μέ τίς μεθόδους πού ἐκθέσαμε.

§ 292. Ἐμβαδό καμπύλης ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς. Ἡ περιστροφή τῆς καμπύλης τοῦ προηγουμένου ἐδαφίου περί τόν OX παράγει μιά καμπύλη ἐπιφάνεια S_γ πού εἶναι καί ἡ πλευρική καμπύλη ἐπιφάνεια τοῦ στερεοῦ ἐκ περιστροφῆς πού θεωρήσαμε παραπάνω.

Ζητεῖται νά ὁρίσουμε τό ἐμβαδό της.

Γιά τό σκοπό αὐτό ὑποθέτουμε ὅτι ἡ $\sigma(x)$ ἔχει παράγωγο $\sigma'(x)$ συνεχῆ στό διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$.

Στό διαμερισμό (291.1) τοῦ διαστήματος τούτου ἀντιστοιχεῖ μιά ἐγγεγραμμένη πολυγωνική γραμμή $A_0A_1A_2\dots A_{\nu-1}A_\nu$ πού καλοῦμε χάρη συντομίας π. Ἡ περιστροφή τῆς π περί τόν ἄξονα OX παράγει μιάν ἐπιφάνεια S_π, τῆς ὁποίας ξέρουμε νά ὑπολογίσουμε τό ἐμβαδό σάν ἄθροισμα ἐμβαδῶν τῶν πλευρικῶν ἐπιφανειῶν κολούρων κώνων:

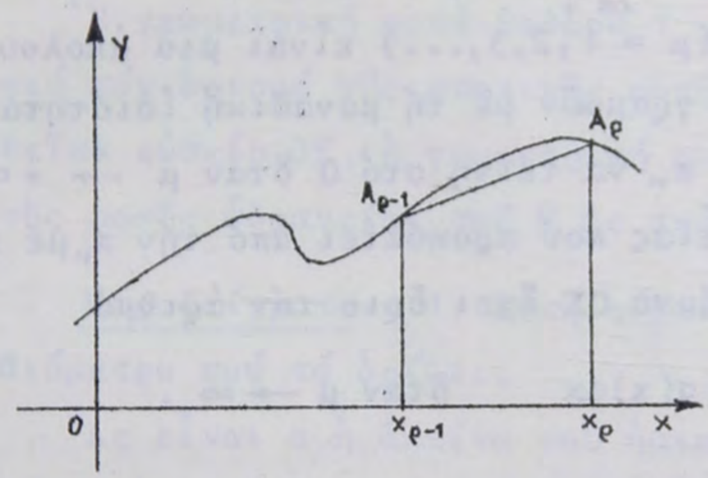
$$\text{ἐμβ. } S_\pi = \sum_{\rho=1}^{\nu} 2\pi(A_{\rho-1}A_\rho)\,\frac{\sigma(x_{\rho-1}) + \sigma(x_\rho)}{2}$$

$$= \sum_{\rho=1}^{\nu} 2\pi\sqrt{(x_\rho - x_{\rho-1})^2 + [\sigma(x_\rho) - \sigma(x_{\rho-1})]^2}\cdot \frac{\sigma(x_{\rho-1})+\sigma(x_\rho)}{2}$$

$$= 2\pi \sum_{\rho=1}^{\nu} \sqrt{1+\sigma'^2(\xi_\rho)}\cdot(x_\rho - x_{\rho-1})\ \frac{\sigma(x_{\rho-1}) + \sigma(x_\rho)}{2}$$

ὅπου, κατά τό θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς τοῦ Διαφορικοῦ Λογισμοῦ, ξ_ρ εἶναι ἕνας κατάλληλος ἀριθμός μεταξύ $x_{\rho-1}$ καί x_ρ γιά $\rho = 1, 2, \ldots, \nu$.

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι ἡ $\sqrt{1+\sigma'^2(x)}$ εἶναι συνεχής στό κλειστό καί περιορισμένο διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$ καί ὅτι ἑπομένως



παίρνει μιά μέγιστη τιμή M σ'αὐτό. Ἐπίσης ἡ σ(x) εἶναι συνεχής στό διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$, ἄρα ἡ ταλάντευση τῆς σ(x) στό καθένα ἀπό τά ὑποδιαστήματα τοῦ διαμερισμοῦ (291.1) εἶναι μικρότερη τοῦ αὐθαίρετα δοσμένου θετικοῦ ἀριθμοῦ ε, ἀρκεῖ τό μέγιστο πλάτος τῶν ὑποδιαστημάτων τοῦ διαμερισμοῦ Δ νά εἶναι μικρότερο ἀπό ἕνα κατάλληλο θετικό ἀριθμό $\delta = \delta(\varepsilon)$ (Βλέπε θεώρημα § 244).

Ἄρα γιά τέτοιους διαμερισμούς Δ ἔχουμε:

$$\left| \text{εμβ}S_\pi - 2\pi \sum_{\rho=1}^{\nu} \sqrt{1+\sigma'^2(\xi_\rho)}\cdot(x_\rho - x_{\rho-1})\sigma(\xi_\rho) \right|$$

$$\leqq 2\pi \sum_{\rho=1}^{\nu} \sqrt{1+\sigma'^2(\xi_\rho)}\cdot(x_\rho - x_{\rho-1}) \left| \frac{\sigma(x_{\rho-1}) + \sigma(x_\rho)}{2} - \sigma(\xi_\rho) \right|$$

$$< 2\pi \sum_{\rho=1}^{\nu} \sqrt{1+\sigma'^2(\xi_\rho)}\cdot(x_\rho - x_{\rho-1})\cdot\varepsilon$$

$$\leqq 2\pi \sum_{\rho=1}^{\nu} M\cdot\varepsilon(x_\rho - x_{\rho-1}) = 2\pi\cdot M\cdot\varepsilon\cdot(\beta-\alpha).$$

Ἐξ ἄλλου, ὅπως ξέρουμε ἀπό τή θεωρία τοῦ ὁρισμένου ὁλοκληρώματος συνεχοῦς συναρτήσεως, τό ἄθροισμα

$$2\pi \sum_{\rho=1}^{\nu} \sqrt{1+\sigma'^2(\xi_\rho)}\cdot\sigma(\xi_\rho)(x_\rho - x_{\rho-1})$$

ἔχει ὅριο τόν ἀριθμό $2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+\sigma'^2(x)}\cdot\sigma(x)dx$, ὅταν ὁ διαμερισμός Δ μεταβάλλεται συμπίπτων διαδοχικά μέ τούς διαμερισμούς $\Delta_\mu(\mu = 1,2,3,4,\ldots)$ μιᾶς τυχούσας ἀκολουθίας ἀπεριόριστα λεπτυνόμενων διαμερισμῶν τοῦ διαστήματος $\alpha \leqq x \leqq \beta$.

Ἄρα, ἄν καλέσουμε π_μ τήν ἐγγεγραμμένη πολυγωνική γραμμή πού ἀντιστοιχεῖ στόν Δ_μ, ἔχουμε:

$$\lim_{\mu\to+\infty} \text{εμβ } S_{\pi_\mu} = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+\sigma'^2(x)}\cdot\sigma(x)\cdot dx .$$

Μέ ἄλλα λόγια, ἄν π_μ $(\mu = 1,2,3,\ldots)$ εἶναι μιά ἀκολουθία ἐγγεγραμμένων πολυγωνικῶν γραμμῶν μέ τή μοναδική ἰδιότητα, τό μέγιστο μῆκος πλευρῶν τῆς π_μ νά τείνη στό 0 ὅταν $\mu \to +\infty$, τότε τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφανείας πού προκύπτει ἀπό τήν π_μ μέ περιστροφή αὐτῆς περί τόν ἄξονα OX ἔχει ὅριο τόν ἀριθμό

$$2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+\sigma'^2(x)}\cdot\sigma(x)dx \qquad \text{ὅταν } \mu\to\infty .$$

Ὁρίζουμε λοιπόν:

$$\text{ἐμβ. τῆς ἐπιφ. } S_\gamma = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+\sigma'^2(x)}\cdot\sigma(x)dx = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta}y\cdot ds$$

ὅπου τό $y = \sigma(x)$ καί τό $ds = \sqrt{1+\sigma'^2(x)}\cdot dx$ νοοῦνται ὡς συναρτήσεις τοῦ x γιά $\alpha \leqq x \leqq \beta$.

§ 293. Γεωμετρικές ροπές τμημάτων ἐπιπέδου. Θεωροῦμε ἕνα κομμάτι F ἑνός ἐπιπέδου καί μιάν εὐθεία μέσα στό ἐπίπεδο. Τήν εὐθεία τήν κάνουμε ἄξονα τῶν y ἑνός ὀρθογώνιου συστήματος συντεταγμένων. Οἱ τετμημένες τῶν σημείων τοῦ κομματιοῦ θά ἀποτελοῦν τότε ἕνα διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$. Ἄν x_0 τυχών ἀριθμός ἀπ' αὐτό τό διάστημα, τά σημεῖα τῆς εὐθείας $x = x_0$ τά ἀνήκοντα στό θεωρούμενο κομμάτι F θά ἀποτελοῦν ὅπως ὑποθέτουμε γιά ἁπλότητα, ἕνα ἤ καί περισσότερα τμήματα εὐθείας, τῶν ὁποίων τό συνολικό μῆκος ἔστω y_0. Τό y_0 προφανῶς εἶναι μιά συνάρτηση τοῦ x_0 ἐπί τοῦ πεδίου $\alpha \leqq x \leqq \beta$. Ἄς τήν παραστήσουμε ὡς ἑξῆς: $y = \sigma(x)$ γιά $\alpha \leqq x \leqq \beta$.

Καλεῖται τώρα **γεωμετρική ροπή βαθμοῦ ν** τοῦ θεωρούμενου τμήματος τοῦ ἐπιπέδου F ὡς πρός ἄξονατή δοθεῖσα εὐθεία τό ὁλοκλήρωμα:

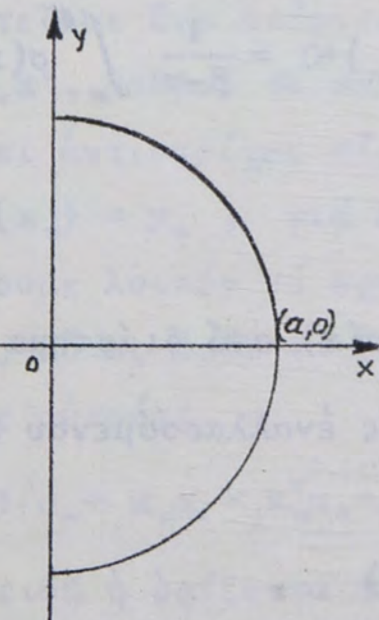
$$\int_{\alpha}^{\beta} x^{\nu} y dx = \int_{\alpha}^{\beta} x^{\nu} \sigma(x) dx \; .$$

Ἡ γεωμετρική ροπή βαθμοῦ μηδενός συμπίπτει προφανῶς μέ τό ἐμβαδό τοῦ κομματιοῦ F.

Ἡ γεωμετρική ροπή βαθμοῦ 1 χρησιμοποιεῖται στή Μηχανική γιά τόν ὁρισμό τῆς στατικῆς ροπῆς τοῦ F ὡς πρός ἄξονα τή δοθεῖσα εὐθεία ΟΥ, ἡ γεωμετρική ροπή βαθμοῦ 2, γιά τόν ὁρισμό τῆς ροπῆς ἀδρανείας τοῦ F ὡς πρός ἄξονα τήν εὐθεία ΟΥ.

<u>Παραδείγματα.</u> 1) Ροπή α΄βαθμοῦ ἡμικυκλίου ὡς πρός τή διάμετρο πού τό ὁρίζει.

Ἄς εἶναι α ἡ ἀκτίνα τοῦ ἡμικυκλίου. Τότε κατά τόν δοθέντα ὁρισμό ἡ ροπή α΄βαθμοῦ εἶναι:



$$P_1 = \int_0^{\alpha} x \cdot 2\sqrt[+]{\alpha^2 - x^2}\, dx =$$

$$= 2\int_0^{\alpha} x\sqrt[+]{\alpha^2 - x^2}\, dx =$$

$$-\int_0^{\alpha} (\alpha^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\, d(\alpha^2 - x^2) =$$

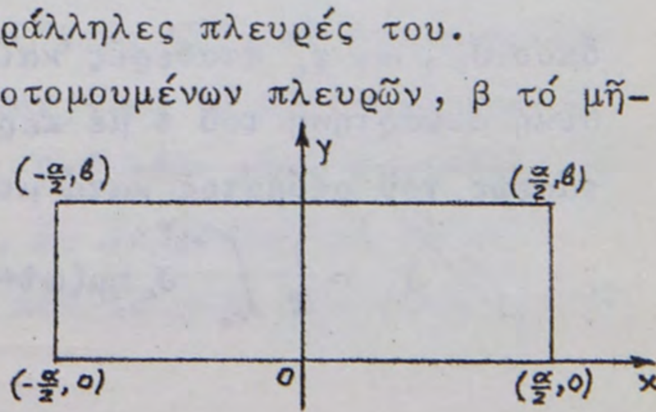
$$= -\left[\frac{2}{3}(\alpha^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\alpha} = \frac{2}{3}\alpha^3 \; .$$

2) Ροπή δευτέρου βαθμοῦ ὀρθογωνίου ὡς πρός ἄξονα τήν εὐθεία ἡ ὁποία διχοτομεῖ δυό παράλληλες πλευρές του.

Ἄς εἶναι α τό μῆκος τῶν διχοτομουμένων πλευρῶν, β τό μῆκος τῶν ἄλλων. Ἔχουμε τότε:

ροπή β΄ βαθμοῦ

$$P_2 = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}} x^2 \beta dx \; =$$



$$\left[\beta\,\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}} = \frac{\beta\alpha^3}{12}\ .$$

§ 294. Μέση τιμή συναρτήσεως. Ἔστω $y = \sigma(x)$ μιά συνάρτηση ὁλοκληρώσιμη στό διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$. Ἄν θεωρήσουμε ἕνα διαμερισμό αὐτοῦ σέ ν ἴσα ὑποδιαστήματα διά τῶν διαιρετικῶν σημείων $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta$ καί καλέσουμε y_κ τήν τιμή $\sigma(x_\kappa)$, ὁ ἀριθμητικός μέσος ὅρος τῶν $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ θά ἰσοῦται μέ

$$\frac{y_0 + y_1 + \ldots + y_\nu}{\nu+1} = \frac{\nu}{(\nu+1)}\left(y_0\frac{1}{\nu} + y_1\frac{1}{\nu} + \ldots + y_\nu\frac{1}{\nu}\right)$$

$$= \frac{\nu}{\nu+1}\left(y_0\,\frac{x_1 - x_0}{\beta-\alpha} + y_1\,\frac{x_2 - x_1}{\beta-\alpha} + \ldots + y_{\nu-1}\frac{x_\nu - x_{\nu-1}}{\beta-\alpha}\right) + \frac{y_\nu}{\nu+1}$$

$$= \frac{\nu}{\nu+1}\sum_{\kappa=1}^{\nu}\sigma(x_{\kappa-1})\,\frac{x_\kappa - x_{\kappa-1}}{\beta-\alpha} + \frac{\sigma(\beta)}{\nu+1}$$

Ἄρα, ὅταν τό ν τείνη στό $+\infty$, ὁ μέσος ὅρος αὐτός θά τείνη στό ὅριο:

$$\lim_{\nu\to+\infty}\frac{\nu}{\nu+1}\cdot\lim_{\nu\to+\infty}\frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{\kappa=1}^{\nu}\sigma(x_{\kappa-1})(x_\kappa - x_{\kappa-1}) + 0 = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta \sigma(x)\,dx\ .$$

Γι' αὐτό ἡ ποσότης

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta \sigma(x)\,dx$$

καλεῖται μέση τιμή τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$ στό διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$.

Παράδειγμα. Ἡ ἔνταση $J(t)$ ἑνός ἐναλλασσόμενου ρεύματος μεταβάλλεται κατά τόν νόμο:

$$J(t) = J_0\,\eta\mu(\omega t + \varphi_0)\quad ,$$

ὅπου J_0, ω, φ_0 σταθερές καί t ὁ χρόνος. Ἡ $J(t)$ εἶναι περιοδική συνάρτηση τοῦ t μέ περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Ἡ μέση τιμή τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος κατά μιά περίοδο T εἶναι

$$J = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} J_0\,\eta\mu(\omega t + \varphi_0)\,dt = \frac{J_0}{\omega T}\,\left[-\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)\right]_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{\omega}} = 0.$$

Τά ἀμπερόμετρα μετροῦν τήν " ἐ ν δ ε ι κ ν υ μ έ ν η τ ι μ ή " J_ε τῆς ἐντάσεως τῆς ὁποίας τό τετράγωνο εἶναι ἡ μέση τιμή τοῦ τετραγώνου τῆς ἐντάσεως κατά μιά περίοδο. Ὥστε:

$$J_\varepsilon^2 = \frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T} J_o^2 \eta\mu^2(\omega t+\varphi_o)dt = \frac{J_o^2}{\omega T}\left[\frac{\omega t+\varphi_o}{2} - \frac{\eta\mu(2\omega t+2\varphi_o)}{4}\right]_{t_o}^{t_o+T} = \frac{J_o^2}{2} .$$

Ἄρα $$J_\varepsilon = \frac{J_o}{\sqrt{2}} .$$

§ 295. Τύπος παρεμβολῆς τοῦ Lagrange. Πρόβλημα παρεμβολῆς καλεῖται τό ἑξῆς:

Δίνονται ν+1 ζεύγη ἀριθμῶν

$$(x_1,y_1) , (x_2,y_2),\dots, (x_{\nu+1},y_{\nu+1})$$

πού ἀντιπροσωπεύουν ν+1 διάφορες τιμές μιᾶς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς **x** καί τίς ἀντίστοιχες τιμές μιᾶς συναρτήσεως $y=\sigma(x)$.

$$y_k = \sigma(x_k) \quad \text{γιά} \quad k = 1,2,3,\dots,\nu+1 .$$

Ζητεῖται ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο $\pi(x)$: $\pi(x) = \alpha_o+\alpha_1 x+ \dots+ \alpha_\nu x^\nu$, βαθμοῦ τό πολύ ν, τό ὁποῖο γιά $x = x_1,x_2,\dots,x_{\nu+1}$ λαμβάνει ἀντιστοίχως τίς παραπάνω τιμές $y_1,y_2,\dots,y_{\nu+1}$, δηλαδή $\pi(x_k) = y_k$, γιά $k = 1,2,3,\dots, \nu+1$.

Ἔχουμε λοιπόν νά προσδιορίσουμε ν+1 συντελεστές α_o, α_1, ..., α_ν οὕτως ὥστε νά ἱκανοποιοῦνται ν+1 ἐξισώσεις γραμμικές ὡς πρός αὐτούς:

$$1\cdot\alpha_o+ x_k\alpha_1+ x_k^2\alpha_2+\dots+ x_k^\nu\alpha_\nu = y_k \quad \text{γιά } k = 1,2,\dots,\nu+1$$

Ἐπειδή ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων $\alpha_o,\alpha_1,\dots,\alpha_\nu$ εἶναι ὁρίζουσα Vandermonde $\neq 0$ ("Ασκ. 43), οἱ ν+1 παραπάνω ἐξισώσεις ἀποτελοῦν σύστημα Cramer, ἄρα τό πρόβλημα πού τέθηκε ἔχει μιά καί μόνο μιά λύση. Στή λύση αὐτή μποροῦμε νά δώσουμε μιάν εὐμνημόνευτη μορφή, ἄν σκεφθοῦμε τά ἑξῆς:

Τό πολυώνυμο νιοστοῦ βαθμοῦ πού παίρνει τήν τιμή y_1 γιά

$x = x_1$ καί τήν τιμή 0 στίς ὑπόλοιπες θέσεις $x_2, x_3, \ldots, x_{\nu+1}$ εἶναι προφανῶς τό:

$$y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_{\nu+1})}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_{\nu+1})} .$$

Ὁμοίως τό πολυώνυμο

$$y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_{\nu+1})}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_{\nu+1})}$$

παίρνει τήν τιμή y_2 γιά $x = x_2$ καί τήν τιμή 0 στίς ὑπόλοιπες θέσεις $x_1, x_3, \ldots, x_{\nu+1}$.

Τό ἄθροισμα τῶν δυό αὐτῶν πολυωνύμων παίρνει ἑπομένως τίς τιμές y_1 καί y_2 στίς θέσεις x_1 καί x_2 ἀντιστοίχως καί τήν 0 στίς ὑπόλοιπες θέσεις $x_3, x_4, \ldots, x_{\nu+1}$. Ἐπεχτείνοντας μέ ἐπαγωγή τήν παραπάνω παρατήρηση φθάνουμε στό συμπέρασμα ὅτι τό πολυώνυμο βαθμοῦ τό πολύ ν:

$$(295.1)\quad \pi(x) = \sum_{\kappa=1}^{\nu} y_\kappa \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{\kappa-1})(x-x_{\kappa+1})(x-x_{\kappa+2})\ldots(x-x_{\nu+1})}{(x_\kappa-x_1)\ldots(x_\kappa-x_{\kappa-1})(x_\kappa-x_{\kappa+1})(x_\kappa-x_{\kappa+2})\ldots(x_\kappa-x_{\nu+1})}$$

παίρνει τίς τιμές $y_1, y_2, \ldots, y_{\nu+1}$ στίς θέσεις $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu+1}$ ἀντιστοίχως.

Ὁ παραπάνω τύπος λέγεται **τύπος παρεμβολῆς** τοῦ Lagrange.

Ἡ ὀνομασία τῆς παρεμβολῆς δικαιολογεῖται ὡς ἑξῆς: Οἱ τιμές τοῦ πολυωνύμου λαμβάνονται ὡς κατά προσέγγιση τιμές τῆς συναρτήσεως $y = \sigma(x)$ σέ θέσεις x διάφορες ἀπό τίς $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu+1}$, ἀλλά ἐνδιάμεσες, εἴτε διότι ἡ συνάρτηση $y = \sigma(x)$ δέν εἶναι γνωστή σέ ἄλλες θέσεις πλήν τῶν $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu+1}$, εἴτε διότι εἶναι πολύπλοκη καί ἔχουμε λόγους νά τήν ἀντικαταστήσουμε μέ μιάν ἁπλούστερη, μιάν ἀκέραια πολυωνυμική βαθμοῦ ν τό πολύ. Γιά νά εὕρουμε λοιπόν τίς κατά προσέγγιση τιμές τῆς $y = \sigma(x)$ παρεμβάλλουμε μεταξύ τῶν $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu+1}$ νέες θέσεις x καί ὑπολογίζουμε γι'αὐτές τίς ἀντίστοιχες τιμές $\pi(x)$. Αὐτές εἶναι οἱ κατά προσέγγιση τιμές τῆς $\sigma(x)$:

$$\sigma(x) \approx \pi(x) \quad \text{γιά τά ὑπ'ὄψη } x \,.$$

Γεωμετρική ἑρμηνεία. Ἄν θυμηθοῦμε ὅτι ἡ γραφική παράσταση μιᾶς ἀκέραιας πολυωνιμικῆς συναρτήσεως $\pi(x)$ νιοστοῦ βαθμοῦ σ'ἕνα σύστημα εὐθύγραμμων συντεταγμένων ὀνομάστηκε π α ρ α β ο λ ή   ν ι ο σ τ ο ῦ   β α θ μ ο ῦ, μποροῦμε νά διατυπώσουμε ὅσα βρήκαμε παραπάνω ὡς ἑξῆς:

Ἀπό $\nu+1$ δοσμένα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου μέ διάφορες τετμημένες διέρχεται μιά καί μόνο μιά παραβολή βαθμοῦ ν τό πολύ. Εἰδικῶς, ἀπό τρία δοσμένα σημεῖα (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) πού δέν κεῖνται ἐπ'εὐθείας διέρχεται μιά καί μόνο μιά παραβολή 2ου βαθμοῦ μέ ἄξονα συμμετρίας παράλληλο πρός τόν ΟΥ.

§ 296. Λῆμμα. Ἔστω $\pi(x)$ ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο τοῦ x βαθμοῦ τό πολύ 3. Λέγω ὅτι:

$$(296.1) \qquad \int_\alpha^\beta \pi(x)\,dx = \frac{\beta-\alpha}{6}\left[\pi(\alpha)+\pi(\beta)+4\pi\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]$$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε γιά $\nu \geqq 0$:

$$\int_\alpha^\beta x^\nu dx = \frac{\beta^{\nu+1}-\alpha^{\nu+1}}{\nu+1} = \frac{\beta-\alpha}{6}\cdot\frac{6}{\nu+1}\,(\alpha^\nu+\alpha^{\nu-1}\beta+\ldots+\alpha\beta^{\nu-1}+\beta^\nu).$$

Γιά $\nu = 0$ εἶναι:

$$\int_\alpha^\beta x^0 dx = \frac{\beta-\alpha}{6}\,\frac{6}{1} = \frac{\beta-\alpha}{6}\left[\alpha^0+\beta^0+4\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^0\right].$$

Γιά $\nu = 1$ εἶναι:

$$\int_\alpha^\beta x\,dx = \frac{\beta-\alpha}{6}\cdot\frac{6}{2}\,(\alpha+\beta) = \frac{\beta-\alpha}{6}\cdot\left(\alpha+\beta+4\,\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

Γιά $\nu = 2$ εἶναι:

$$\int_\alpha^\beta x^2 dx = \frac{\beta-\alpha}{6}\cdot\frac{6}{3}\,(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) = \frac{\beta-\alpha}{6}\,(\alpha^2+\beta^2+\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta)$$

$$= \frac{\beta-\alpha}{6}\left[\alpha^2+\beta^2+4\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right].$$

Γιά $\nu = 3$ εἶναι:

$$\int_\alpha^\beta x^3 dx = \frac{\beta-\alpha}{6}\,\frac{6}{4}(\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3) =$$

$$= \frac{\beta-\alpha}{6}\left(\alpha^3+\beta^3+\frac{1}{2}\alpha^3+\frac{1}{2}\beta^3+\frac{3}{2}\alpha^2\beta+\frac{3}{2}\alpha\beta^2\right) =$$

$$= \frac{\beta-\alpha}{6}\left[\alpha^3+\beta^3+4\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^3\right].$$

Ὥστε τό ἀποδεικτέο (296.1) ἰσχύει ὅταν $\pi(x)$ εἶναι ἴσο ἤ μέ τήν σταθερά 1 ἤ μέ x ἤ μέ x^2 ἤ μέ x^3. Ἄρα θά ἰσχύη καί ὅταν $\pi(x) = Cx^\nu$ μέ $\nu = 0, 1, 2, 3$, ἐπομένως καί ὅταν

$$\pi(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

§ 297. Τύπος τοῦ Simpson γιά τόν κατά προσέγγιση ὑπολογισμό τοῦ $\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx$. Διαιροῦμε τό διάστημα ὁλοκληρώσεως σέ ἄρτιο ἀριθμό ὑποδιαστημάτων ἴσου πλάτους διά τῶν διαιρετικῶν ἀριθμῶν

$$\alpha = x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots,\ x_{2\nu-1},\ x_{2\nu} = \beta$$

πού βαίνουν κατά ἀριθμητική πρόοδο. Ὥστε $x_\kappa - x_{\kappa-1} = \dfrac{\beta-\alpha}{2\nu}$.

Ἔχουμε:

$$(297.1) \qquad \int_\alpha^\beta \sigma(x)dx = \int_{x_0}^{x_2}\sigma(x)dx + \int_{x_2}^{x_4}\sigma(x)dx + \ldots + \int_{x_{2\nu-2}}^{x_{2\nu}}\sigma(x)dx.$$

Χάρη εὐκολίας στή γραφή τῶν παρακάτω θέτουμε $\sigma(x_\kappa) = y_\kappa$ γιά $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, 2\nu$.

Στό διάστημα $x_0 \leqq x \leqq x_2$ ἀντικαθιστοῦμε τή συνάρτηση $\sigma(x)$ μέ τό ἀκέραιο πολυώνυμο $\pi_1(x)$, βαθμοῦ 2 τό πολύ, τό ὁποῖο λαβαίνει τίς ἴδιες τιμές μέ τή $\sigma(x)$ στίς τρεῖς θέσεις x_0, x_1, x_2.

Σύμφωνα μέ τό λῆμμα εἶναι

$$\int_{x_0}^{x_2}\pi_1(x)\,dx = \frac{x_2-x_0}{6}\left[\pi_1(x_0) + \pi_1(x_2) + 4\pi_1(x_1)\right] =$$

$$= \frac{\beta-\alpha}{6\nu}\left[\sigma(x_0) + \sigma(x_2) + 4\sigma(x_1)\right].$$

Γράφουμε λοιπόν κατά προσέγγιση:

$$(297.2)\qquad \int_{x_0}^{x_2}\sigma(x)dx \approx \frac{\beta-\alpha}{6\nu}\left[y_0+y_2+4y_1\right].$$

Στό διάστημα $x_2 \leqq x \leqq x_4$ άντικαθιστοῦμε τή $\sigma(x)$ μέ τό-ἀκέραιο πολυώνυμο $\pi_2(x)$, βαθμοῦ 2 τό πολύ, τό ὁποῖο λαβαίνει τίς ἴδιες τιμές μέ τή $\sigma(x)$ στίς τρεῖς θέσεις x_2, x_3, x_4. Στό $\int_{x_2}^{x_4}\pi_2(x)dx$ ἐφαρμόζουμε τό λῆμμα καί παίρνουμε τήν τιμή τοῦ ὁλοκληρώματος αὐτοῦ ὡς κατά προσέγγιση τιμή τοῦ $\int_{x_2}^{x_4}\sigma(x)dx$:

$$(297.3)\qquad \int_{x_2}^{x_4}\sigma(x)dx \approx \frac{\beta-\alpha}{6\nu}\left[y_2+y_4+4y_3\right].$$

Προχωρώντας μέ ὅμοιο τρόπο ὡς τό τελευταῖο ὁλοκλήρωμα $\int_{x_{2\nu-2}}^{x_{2\nu}}\sigma(x)dx$ τοῦ δεξιοῦ μέλους τῆς (297.1) καί ἀθροίζοντας κατά μέλη τίς προσεγγιστικές ἰσότητες (297.2), (297.3) κτλ. πού πρόκυψαν, φθάνουμε στόν τύπο:

$$\int_\alpha^\beta\sigma(x)dx \approx \frac{\beta-\alpha}{6\nu}\left[y_0+y_{2\nu}+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2\nu-2})+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2\nu-1})\right]$$

Ὁ τύπος αὐτός, πού ἀποδίνεται στόν Simpson, δίνει μιά κατά προσέγγιση τιμή τοῦ $\int_\alpha^\beta\sigma(x)dx$ μέ σφάλμα φυσικά τόσο μικρότερο (κατ'ἀπόλυτη τιμή) ὅσο μεγαλύτερος εἶναι ὁ ἀριθμός 2ν τῶν ἰσόπλατων ὑποδιαστημάτων στό ὁποῖο διαιροῦμε τό διάστημα ὁλοκληρώσεως.

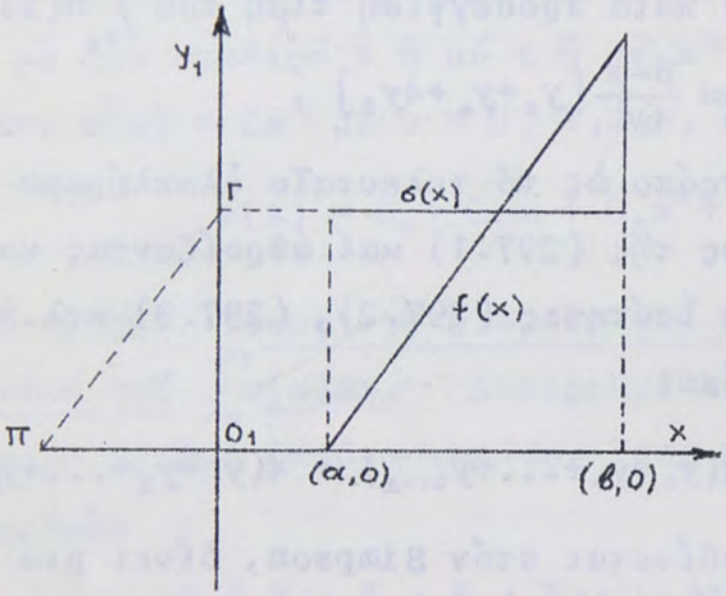
Ἡ γεωμετρική ἑρμηνεία τοῦ τύπου καί ἡ χρησιμοποίησή του γιά τόν κατά προσέγγιση ὑπολογισμό τοῦ ἐμβαδοῦ ἐπίπεδων χωρίων εἶναι προφανεῖς.

§ 298. <u>Γραφική ὁλοκλήρωση.</u> Μιά συνάρτηση $y=\sigma(x)$ ὁλοκληρώσιμη στό διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$ δίνεται γραφικῶς σ'ἕνα ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων. Ζητεῖται ἡ γραφική παράσταση τῆς ὁλοκληρωτικῆς συναρτήσεως $\int_{x_0}^{x}\sigma(t)dt$ στό διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$ (x_0 εἶναι μιά τυχοῦσα θέση ἀπό τό διάστημα).

Ἀρκεῖ νά κατασκευάσουμε τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως $f(x)=\int_\alpha^x\sigma(t)dt$. Διότι ἀπ'αὐτήν, ἄν τήν μεταφέρουμε παραλλήλως πρός τόν ΟΥ ἔτσι πού νά διέλθη ἀπό τό σημεῖο $(x_0,0)$ τοῦ ΟΧ, προκύπτει προφανῶς ἡ γραφική παράσταση τῆς

$$\int_{x_0}^{x}\sigma(t)dx = \int_{\alpha}^{x}\sigma(t)dt - \int_{\alpha}^{x_0}\sigma(t)dt = f(x) - f(x_0)\ .$$

1η περίπτωση. Ἄς εἶναι $\sigma(x) = \gamma =$ σταθερά γιά $\alpha \leqq x \leqq \beta$. Ἡ ὁλοκληρωτική συνάρτηση $f(x) = \int_{\alpha}^{x}\sigma(t)dt = \gamma(x-\alpha)$ εἶναι γραμμική συνάρτηση τοῦ x, ἄρα ἡ γραφική παράσταση γιά $\alpha \leqq x \leqq \beta$ εἶναι ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα πού ἀναχωρεῖ ἀπό τό σημεῖο $(\alpha,0)$, ἔχει κλίση (συντ. διευθύνσεως) γ καί προχωρεῖ μέχρι τῆς εὐθείας $x = \beta$.



Γιά τή σχεδίαση ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Παίρνουμε τήν εὐθεία O_1Y_1, παράλληλη πρός τόν ΟΥ μέ τό O_1 ἐπί τοῦ ΟΧ καί ἀριστερά τοῦ διαστήματος $\alpha \leqq x \leqq \beta$. Ἄς εἶναι Π τό σημεῖο τοῦ ΟΧ γιά τό ὁποῖο ἰσχύει ἡ σχέση $(\overline{\Pi O_1}) = 1$.

Τήν εὐθεία $y = \gamma$ τήν φέρνουμε σέ τομή μέ τήν O_1Y_1. Ἄς εἶναι Γ τό σημεῖο τομῆς. Ἡ εὐθεία ΠΓ ἔχει κλίση γ. Ἀπό τό σημεῖο $(\alpha,0)$ ἄγουμε ἕνα εὐθύγραμο τμῆμα παράλληλο πρός τήν εὐθεία ΠΓ μέχρι τῆς εὐθείας $x = \beta$. Τό τμῆμα αὐτό εἶναι ἡ γραφική παράσταση τοῦ $\int_{\alpha}^{x}\sigma(x)dx = \int_{\alpha}^{x}\gamma dx$ γιά $\alpha \leqq x \leqq \beta$.

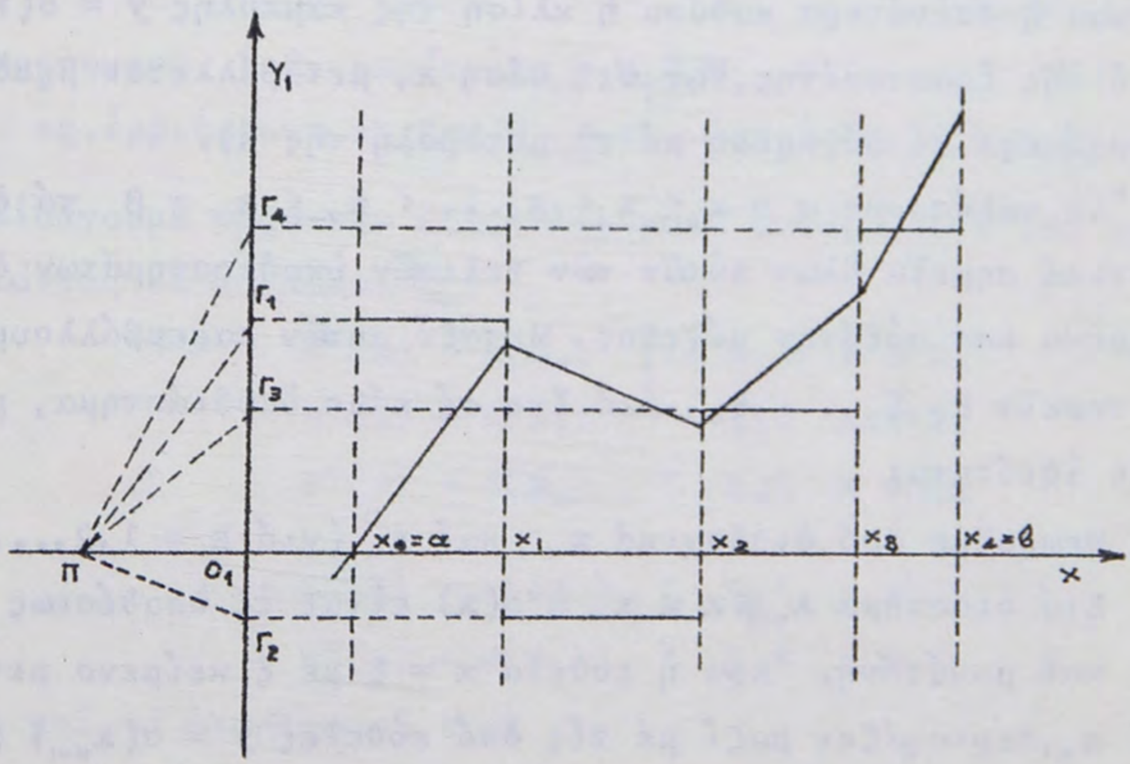
2η περίπτωση. Ἄς εἶναι ἡ $\sigma(x)$ κατά διαστήματα σταθερά:

$$\begin{array}{lll} \sigma(x) = \gamma_1 & \text{γιά} & \alpha = x_0 \leqq x \leqq x_1 \\ \sigma(x) = \gamma_2 & \text{γιά} & x_1 < x \leqq x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma(x) = \gamma_\mu & \text{γιά} & x_{\mu-1} < x \leqq x_\mu = \beta\ , \end{array}$$

ὅπου $\gamma_1, \dots, \gamma_\mu$ μ ἀριθμοί μέ $\gamma_k \neq \gamma_{k+1}$ γιά $k = 1,2,\dots,\mu-1$.

Στίς θέσεις $x_1, x_2, \ldots, x_{\mu-1}$ ή $\sigma(x)$ εἶναι κατά ταῦτα ἀσυνεχής. Ἡ γραφική παράσταση τῆς $\sigma(x)$ ἀποτελεῖται ἀπό μ εὐθύγραμμα τμήματα παράλληλα πρός τό ΟΧ καί παρέχει τήν ἐντύπωση μιᾶς κλίμακας πού ἀνεβοκατεβαίνει, γι'αὐτό καί ἡ παραπάνω συνάρτηση λέγεται κ λ ι μ α κ ω τ ή. Ἡ ὁλοκληρωτική συνάρτηση $f(x) = \int_{\alpha}^{x}\sigma(t)dt$ εἶναι συνεχής σ'ὅλο τό διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$ καί ἔχει παράγωγο $f'(x) = \gamma_\kappa$ σ'ὅλες τίς θέσεις x τοῦ ἀνοικτοῦ διαστήματος $x_{\kappa-1} < x < x_\kappa$, γιά $k = 1,2,\ldots,\mu$.

Ἡ γραφική της παράσταση εἶναι ἑπομένως μιά τεθλασμένη γραμμή μέ μ πλευρές, πού ἀντιστοιχοῦν στά μ διαστήματα $x_{\kappa-1} < x < x_\kappa$, γιά $k = 1,2,\ldots,\mu$, καί ἀπό τίς ὁποῖες ἡ πρώτη ἀρχίζει στό σημεῖο $(\alpha,0)$ καί ἔχει κλίση γ_1, ἡ δεύτερη ἔχει κλίση γ_2 κ.ο.κ. Ἡ κατασκευή τῆς τεθλασμένης αὐτῆς γραμμῆς γίνεται ὡς ἑξῆς: Φέρνουμε τίς εὐθεῖες $y = \gamma_1$, $y = \gamma_2$,..



..., $y = \gamma_\mu$ σέ τομή μέ τήν O_1Y_1· ἄς εἶναι $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\mu$ τά ἀντίστοιχα σημεῖα τομῆς. Τά ἑνώνουμε δι'εὐθειῶν μέ τό σημεῖο Π, ὅπου $(\overline{\Pi O_1}) = 1$.

'Από τό σημεῖο $(\alpha,0)$ ὡς ἀρχή ἄγουμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα παράλληλο πρός τήν εὐθεία $\Pi\Gamma_1$ μέχρι τῆς εὐθείας $x = x_1$· ἀπό τό σημεῖο ὅπου φθάσαμε ἕνα τμῆμα παράλληλο πρός τήν εὐθεία $\Pi\Gamma_2$ μέχρι τῆς εὐθείας $x = x_2$· ἀπό τό πέρας τοῦ δεύτερου αὐτοῦ τμήματος, ἕνα τρίτο τμῆμα παράλληλο πρός τήν εὐθεία $\Pi\Gamma_3$ μέχρι τῆς εὐθείας $x = x_3$, κ.ο.κ.

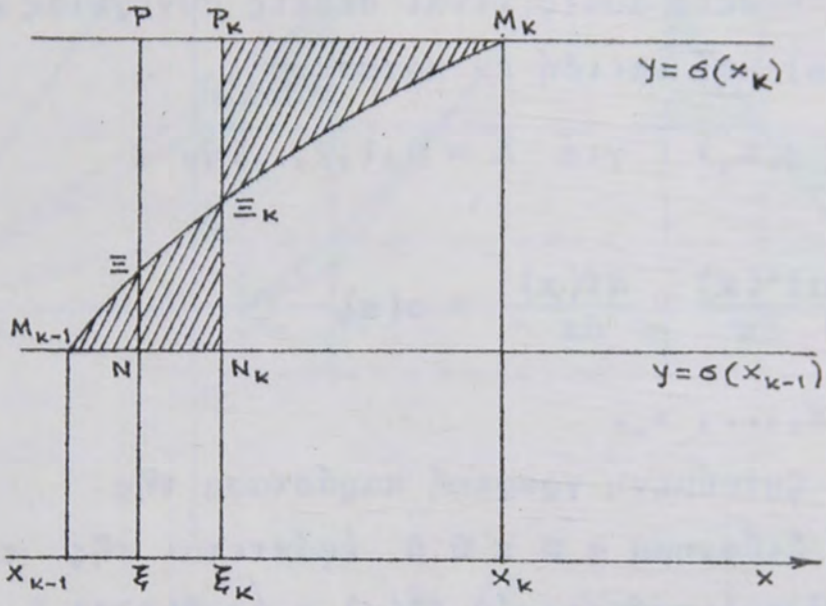
3η Περίπτωση. Ἄς εἶναι τέλος ἡ $\sigma(x)$ μιά μονοσήμαντη συνεχής συνάρτηση δοσμένη γραφικῶς στό διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$. Ὑποθέτουμε, πρᾶγμα πού συμβαίνει πάντοτε στήν πράξη, ὅτι ἡ $\sigma(x)$ εἶναι μονότονη κατά διαστήματα, δηλαδή ὅτι τό διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$ μπορεῖ νά διαιρεθῆ σέ πεπερασμένο πλῆθος ὑποδιαστήματα στό καθένα ἀπό τά ὁποῖα ἡ $\sigma(x)$ εἶναι ἤ φθίνουσα ἤ αὔξουσα. Κάθε τέτοιο διάστημα μονοτονίας τό ὑποδιαιροῦμε ἐνδεχομένως σέ ὑποδιαστήματα (ἄνισου ἐν γένει πλάτους, πλατύτερα ἤ στενώτερα καθόσο ἡ κλίση τῆς καμπύλης $y = \sigma(x)$, δηλαδή τῆς ἐφαπτομένης της στή θέση x, μεταβάλλεται βραδύτερα ἤ ταχύτερα σέ σύγκριση μέ τή μεταβολή τῆς x).

Ἄς καλέσουμε $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{\nu-1} < x_\nu = \beta$ τά διαχωριριστικά σημεῖα ὅλων αὐτῶν τῶν τελικῶν ὑποδιαστημάτων διατεταγμένα κατ'αὐξάνον μέγεθος, Μεταξύ αὐτῶν παρεμβάλλουμε ἄλλα σημεῖα $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$, ἀπό ἕνα σέ κάθε ὑποδιάστημα, μέ τήν ἑξῆς ἰδιότητα:

Θεωροῦμε δυό διαδοχικά $x_{\kappa-1}$ καί x_κ (γιά $k = 1,2,\ldots,\nu$).

Στό διάστημα $x_{\kappa-1} \leqq x \leqq x_\kappa$ ἡ $\sigma(x)$ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως συνεχής καί μονότονη. Ἄρα ἡ εὐθεία $x = \xi$ μέ ξ κείμενο μεταξύ $x_{\kappa-1}$ καί x_κ, περιορίζει μαζί μέ τίς δυό εὐθεῖες $y = \sigma(x_{\kappa-1})$ καί $y = \sigma(x_\kappa)$ καί τό τόξο $y = \sigma(x)$ γιά $x_{\kappa-1} \leqq x \leqq x_\kappa$ δυό χωρία $M_{\kappa-1}N\Xi$ καί $P\Xi M_\kappa$, τό ἕνα κάτωθεν τό ἄλλο ἄνωθεν τῆς γραμμῆς $y = \sigma(x)$. Ὅταν ἡ εὐθεία $x = \xi$ μετατοπίζεται ἀπό τή θέση $x = x_{\kappa-1}$ πρός τή $x = x_\kappa$ τό ἐμβαδό, κατ'ἀπόλυτη τιμή, τοῦ πρώτου χωρίου $M_{\kappa-1}N\Xi$ αὐξάνει ἀαπό τήν τιμή 0, ἐνῶ τοῦ δευτέρου $P\Xi M_{\kappa}$ ἐλαττώνεται πρός τήν τιμή 0.

Ἄρα ὑπάρχει μιά ἐνδιάμεση θέση $x = \xi_{\kappa}$ (τό μάτι μπορεῖ εὔκολα καί μέ καλή προσέγγιση νά τήν ἐκτιμήση) γιά τήν ὁποία τά δυό ἀπόλυτα ἐμβαδά εἶναι ἴσα:



$$|\varepsilon\mu\beta.\, M_{\kappa-1}N_{\kappa}\Xi_{\kappa}| = $$
$$= |\varepsilon\mu\beta P_{\kappa}\Xi_{\kappa}M_{\kappa}| .$$

Ὅσον ἀφορᾶ τά προσημασμένα ἐμβαδά ἰσχύει προφανῶς ἡ σχέση

$$(M_{\kappa-1}N_{\kappa}\Xi_{\kappa}) + $$
$$+ (P_{\kappa}M_{\kappa}\Xi_{\kappa}) = 0 .$$

Ἑπομένως:

προσημασμ. ἐμβ. χωρίου $x_{\kappa-1}x_{\kappa}M_{\kappa}\Xi_{\kappa}M_{\kappa-1}$ =

πρ.ἐμβ.ὀρθογ, $x_{\kappa-1}\xi_{\kappa}N_{\kappa}M_{\kappa-1}$+ πρ. ἐμβ.ὀρθογ.$\xi_{\kappa}x_{\kappa}M_{\kappa}P_{\kappa}$.

Εἰσάγουμε τώρα τήν ἑξῆς κλιμακωτή συνάρτηση $\sigma^*(x)$ χρησιμοποιώντας τά παραπάνω ξ_{κ}:

$$\begin{array}{lll}
\sigma^*(x) = \sigma(x_0) & \text{γιά} & x_0 \leqq x \leqq \xi_1 \\
\sigma^*(x) = \sigma(x_1) & '' & \xi_1 < x \leqq \xi_2 \\
\sigma^*(x) = \sigma(x_2) & '' & \xi_2 < x \leqq \xi_3 \\
\cdots\cdots\cdots & & \\
\sigma^*(x) = \sigma(x_{\nu-1}) & '' & \xi_{\nu-1} < x \leqq \xi_{\nu} \\
\sigma^*(x) = \sigma(x_{\nu}) & '' & \xi_{\nu} < x \leqq x_{\nu} = \beta ,
\end{array}$$

καθώς καί τό ὁλοκλήρωμά της:

$$f^*(x) = \int_{\alpha}^{x} \sigma^*(t)dt \quad .$$

Ἐκ κατασκευῆς ἔχουμε:

$$\int_{x_{\kappa-1}}^{x_{\kappa}} \sigma^*(t)dt = \int_{x_{\kappa-1}}^{x_{\kappa}} \sigma(t)dt \qquad \text{γιά } k = 1,2,\ldots, \nu ,$$

ἄρα καί

$$\int_{\alpha}^{x_\kappa} \sigma^*(t)dt = \int_{\alpha}^{x_\kappa} \sigma(t)dt \qquad \text{γιά } k = 1,2,\ldots, \nu.$$

δηλαδή ἡ συνάρτηση $f^*(x) = \int_{\alpha}^{x} \sigma^*(t)dt$ ἔχει τίς ἴδιες τιμές μέ τήν $f(x) = \int_{\alpha}^{x} \sigma(t)dt$ στίς θέσεις $\alpha = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}, x_\nu = \beta$. Ἐπί πλέον, ἐπειδή οἱ θέσεις αὐτές εἶναι θέσεις συνέχειας καί τῆς $\sigma^*(x)$ καί τῆς $\sigma(x)$ καί ἐπειδή ἐκ κατασκευῆς

$$\sigma^*(x_\kappa) = \sigma(x_\kappa) \qquad \text{γιά } k = 0,1,2,\ldots,\nu\ ,$$

θά ἔχουμε

$$\sigma^*(x) = \frac{df^*(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \sigma(x)$$

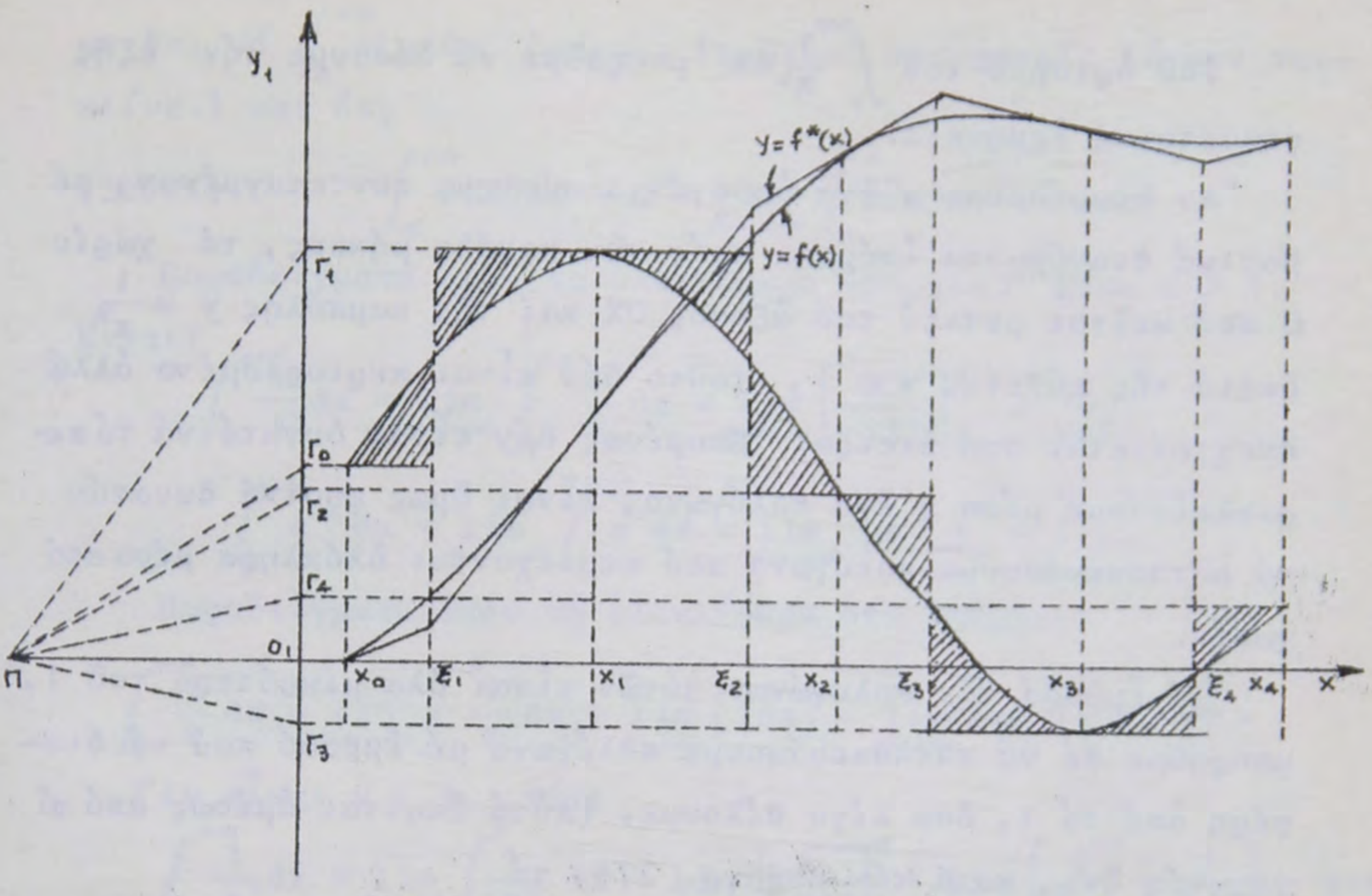
στίς θέσεις $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\nu$.

Μέ ἄλλα λόγια, ἡ ζητούμενη γραφική παράσταση τῆς $f(x) = \int_{\alpha}^{x} \sigma(t)dt$ στό διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$ ἐφάπτεται τῆς τεθλασμένης γραμμῆς πού παριστάνει τήν $f^*(x) = \int_{\alpha}^{x} \sigma^*(t)dt$ (καί πού ξέρουμε νά τήν κατασκευάσουμε σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη περίπτωση), στά σημεῖα τῆς τεθλασμένης γραμμῆς τά ὁποῖα ἔχουν τετμημένες $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\nu$.

Βάσει αὐτῆς τῆς παρατηρήσεως εἶναι δυνατό νά σχεδιαστῆ ἡ $f(x) = \int_{\alpha}^{x} \sigma(t)dt$ μέ πολύ καλή προσέγγιση.

Τά τμήματα $\Pi\Gamma_\kappa$ καλοῦνται π ο λ ι κ έ ς ἀ κ τ ῖ ν ε ς, τό δέ σημεῖο Π π ό λ ο ς ὁλοκληρώσεως.

Παρατήρηση. Ἄν ἀντί τοῦ Π λάβουμε ὡς πόλο τό σημεῖο Π^* τοῦ ΟΧ γιά τό ὁποῖο εἶναι $(\overline{\Pi^*O_1}) = \vartheta$ = θετικός ἀριθμός $\neq 1$, τότε οἱ πολικές ἀκτῖνες $\Pi^*\Gamma_\kappa$ θά εἶναι παράλληλες πρός ἐκεῖνες πού θά λάβουμε ἐφαρμόζοντας τήν προηγούμενη κατασκευή μέ $(\overline{\Pi O_1}) = 1$ στή συνάρτηση $y = \frac{\sigma(x)}{\vartheta}$. Ἄρα ἡ μέ πόλο τό Π^* κατασκευαζόμενη τελικά γραμμή θά εἶναι γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως



$$y = \frac{1}{\theta}\int_{\alpha}^{x}\sigma(t)dt = \frac{1}{\theta}\, f(x) \quad \text{γιά} \quad \alpha \leqq x \leqq \beta \, .$$

§ 299. <u>Γενικευμένα ὁλοκληρώματα.</u> Ἡ ἔννοια τοῦ ὁρισμένου ὁλοκληρώματος πού ἐκθέσαμε ὡς τώρα προϋποθέτει τό διάστημα ὁλοκληρώσεως περιορισμένο καί ἀπαιτεῖ γιά τήν ὕπαρξη τοῦ $\int_{\alpha}^{\beta}\sigma(x)dx$ νά εἶναι ἡ $\sigma(x)$ περιορισμένη γιά τό διάστημα πού ἔχει ἄκρα τούς ἀριθμούς α καί β. Διάφορα ζητήματα ὁδηγοῦν σέ δυό εἰδῶν ἐπεκτάσεις αὐτῆς τῆς ἀρχικῆς ἔννοιας τοῦ ὁλοκληρώματος καί εἶναι σκόπιμο νά κάμουμε ἀπό τώρα λόγο γι'αὐτές.

Ἄς ἀρχίσουμε μέ ἕνα συγκεκριμένο παράδειγμα.

Τό σύμβολο $\int_{1}^{\theta}\frac{1}{x^2}dx$, ὅπου θ ἀριθμός θετικός, ἔχει τήν τιμή $\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\theta} = 1 - \frac{1}{\theta}$. Ἄρα, ὅταν τό θ τείνη στό $+\infty$, τό $\int_{1}^{\theta}\frac{1}{x^2}dx$ τείνει στό 1 (ἀπό μικρότερες τιμές). Εἶναι λοιπόν ἑπόμενο νά θέσουμε $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = 1$, ἐπεκτείνοντας τόν ἀρχικό ὁρισμό τοῦ $\int_{\alpha}^{\beta}\sigma(x)dx$.

Τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ μποροῦμε νά δώσουμε τήν ἑξῆς γεωμετρική ἑρμηνεία.

Ἄν θεωρήσουμε σ'ἕνα ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, μέ βασικά διανύσματα ἰσόμηκα πρός τήν μονάδα μήκους, τό χωρίο Ω πού κεῖται μεταξύ τοῦ ἄξονος ΟΧ καί τῆς καμπύλης $y = \frac{1}{x^2}$ δεξιά τῆς εὐθείας $x = 1$, τοῦτο δέν εἶναι περιορισμένο ἀλλά ἐπεκτείνεται στό ἄπειρο. Ἐπομένως δέν εἶναι δυνατό νά τό περικλείσουμε μέσα σ'ἕνα πολύγωνο, εἶναι ὅμως φυσικά δυνατόν νά κατασκευάσουμε πολύγωνα πού περιέχονται ὁλόκληρα μέσα στό χωρίο.

Τά ἐμβαδά τῶν πολυγώνων αὐτῶν εἶναι ὅλα μικρότερα τοῦ 1, μποροῦμε δέ νά κατασκευάσουμε πολύγωνα μέ ἐμβαδό πού νά διαφέρη ἀπό τό 1, ὅσο λίγο θέλουμε. (Αὐτά ἕπονται ἀμέσως ἀπό τό γεγονός ὅτι, κατά τόν παραγρ. 276, τό

$$\int_1^{\vartheta}\frac{1}{x^2}dx = 1 - \frac{1}{\vartheta} \qquad \text{γιά} \quad \vartheta > 1 \quad ,$$

παριστάνει τό ἐμβαδό ἐκείνου τοῦ μέρους τοῦ χωρίου Ω, πού κεῖται ἀριστερά τῆς εὐθείας $x = \vartheta$).

Εἶναι ἐπομένως φυσικό νά εἰποῦμε ὅτι τό ἐμβαδό τοῦ ἀπεριορίστου χωρίου Ω εἶναι πεπερασμένο καί ἴσο μέ 1, ὁπότε τό ἐμβαδό τοῦτο θά ἐξακολουθῆ νά δίνεται ἀπό τό ὁλοκλήρωμα $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ (μέ ἀπεριόριστο διάστημα ὁλοκληρώσεως), ὅπως τό ὁρίσαμε παραπάνω.

§ 300. Ἔτσι φθάνουμε στόν ἑξῆς γενικό ὁρισμό.

Ἄς εἶναι ἡ $\sigma(x)$ συνάρτηση συνεχής ἤ μονότονη ἤ ἄθροισμα τέτοιων συναρτήσεων σ'ἕνα διάστημα $\alpha \leqq x < +\infty$ (ὅπου α ἐπομένως ἕνας ἀριθμός).

Τό $\int_{\alpha}^{\vartheta}\sigma(x)dx$ ἔχει νόημα γιά κάθε $\vartheta \geqq \alpha$ καί ἐπομένως εἶναι μιά συνάρτηση $F(\vartheta)$.

Ἄν ὑπάρχη τό $\lim\limits_{\vartheta\to+\infty} F(\vartheta)$ καί εἶναι ἕνας ἀριθμός ω, τότε λέμε ὅτι τό $\int_{\alpha}^{+\infty}\sigma(x)dx$ ὑπάρχει (μερικοί συγγραφεῖς λέγουν συγκλίνει) καί ὅτι

(300.1) $$\int_{\alpha}^{+\infty}\sigma(x)dx = \omega = \lim_{\theta\to+\infty}\int_{\alpha}^{\theta}\sigma(x)dx .$$

Παραδείγματα ὅπου τό ὁλοκλήρωμα ὑπάρχει: Ἔστω $\nu > 1$. Εἶναι:

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^{\nu}}dx = \lim_{\theta\to+\infty}\int_{1}^{\theta}\frac{1}{x^{\nu}}dx = \lim_{\theta\to+\infty}\left[\frac{x^{-\nu+1}}{-\nu+1}\right]_{1}^{\theta} = \frac{1}{\nu-1} .$$

$$\int_{0}^{+\infty}e^{-x}dx = \lim_{\theta\to+\infty}\int_{0}^{\theta}e^{-x}dx = \lim_{\theta\to+\infty}\left[-e^{-x}\right]_{0}^{\theta} = 1 .$$

Παραδείγματα ὅπου τό ὁλοκλήρωμα δέν ὑπάρχει:

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x}dx = \lim_{\theta\to+\infty}\int_{1}^{\theta}\frac{1}{x}dx = \lim_{\theta\to+\infty}\left[\ln x\right]_{1}^{\theta} = \lim_{\theta\to+\infty}(\ln\theta-0) = +\infty .$$

Ἄν εἶναι $\nu < 1$, τότε

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^{\nu}}dx = \lim_{\theta\to+\infty}\int_{1}^{\theta}\frac{1}{x^{\nu}}\cdot dx = \lim_{\theta\to+\infty}\left[\frac{x^{-\nu+1}}{-\nu+1}\right]_{1}^{\theta} = \lim_{\theta\to+\infty}\left[\frac{\theta^{1-\nu}}{1-\nu} - \frac{1}{1-\nu}\right] = +\infty.$$

Εἶναι $\int_{0}^{\theta}\eta\mu x dx = -\sigma\upsilon\nu\theta - (-\sigma\upsilon\nu 0) = 1-\sigma\upsilon\nu\theta$. Ὅταν τό θ τείνη στό $+\infty$, τό $1-\sigma\upsilon\nu\theta$ δέν ἔχει ὅριο.

Ἄρα τό $\int_{0}^{+\infty}\eta\mu x dx$ δέν ὑπάρχει.

§ 301. Ἀνάλογα ὁρίζουμε:

Ἄν ἡ $\sigma(x)$ εἶναι εἴτε συνεχής εἴτε μονότονη εἴτε ἄθροισμα τέτοιων συναρτήσεων στό ἀπεριόριστο διάστημα $-\infty < x \leqq \beta$ καί ἄν τό $\lim\limits_{\theta\to+\infty}\int_{-\theta}^{\beta}\sigma(x)dx$ ὑπάρχη καί εἶναι ἕνας ἀριθμός, τότε λέμε ὅτι τό $\int_{-\infty}^{\beta}\sigma(x)dx$ ὑπάρχει (ἤ συγκλίνει) καί θέτουμε

(301.1) $$\int_{-\infty}^{\beta}\sigma(x)dx = \lim_{\theta\to+\infty}\int_{-\theta}^{\beta}\sigma(x)dx .$$

Π.χ. $$\int_{-\infty}^{\beta}e^{x}dx = \lim_{\theta\to+\infty}\int_{-\theta}^{\beta}e^{x}dx = \lim_{\theta\to+\infty}\left[e^{x}\right]_{-\theta}^{\beta} = \lim(e^{\beta}-e^{-\theta}) = e^{\beta}.$$

Ἄν τό $\int_{\alpha}^{+\infty}\sigma(x)dx$ καί τό $\int_{-\infty}^{\alpha}\sigma(x)dx$ ὑπάρχουν, τότε λέμε ὅτι τό $\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma(x)dx$ ὑπάρχει καί θέτουμε

(301.2) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma(x)dx = \int_{-\infty}^{\alpha}\sigma(x)dx + \int_{\alpha}^{+\infty}\sigma(x)dx .$$

Θά μπορούσαμε νά θέσουμε καί

(301.3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma(x)dx = \lim \int_{-\theta_1}^{\theta_2}\sigma(x)dx$ γιά $\theta_1, \theta_2 \to +\infty$.

Π.χ. $\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\cdot dx = \lim_{\substack{\theta_1\to+\infty\\ \theta_2\to+\infty}} \int_{-\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{1+x^2}dx =$

$$= \lim_{\substack{\theta_1\to+\infty\\ \theta_2\to+\infty}} (\text{τοξ}_0\text{εφ}\theta_2 - \text{τοξ}_0\text{εφ}(-\theta_1)) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi .$$

§ 302. Ἄς πραγματευθοῦμε τώρα τό δεύτερο εἶδος τῆς ἐπεκτάσεως τοῦ ἀρχικοῦ νοήματος τοῦ $\int_\alpha^\beta\sigma(x)dx$.

Πρόκειται γιά τήν περίπτωση ὅπου τό διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$ εἶναι περιορισμένο, ὅπου ὅμως ἡ $\sigma(x)$ δέν εἶναι ὁλοκληρώσιμη σ'αὐτό μέ τό νόημα τοῦ § 254, ἐπειδή ὑπάρχει στό διάστημα μιά ἤ καί περισσότερες θέσεις γ μέ τήν ἰδιότητα $\lim_{x\to\gamma}\sigma(x) = \infty$.

Οἱ θέσεις αὐτές γ εἶναι τότε θέσεις ἀσυνεχείας τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$.

Ἄς εἶναι π.χ. ἡ συνάρτηση $\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt[+]{x}}$ στό διάστημα $J(0 < x \leqq 1)$. Ἔχουμε $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[+]{x}} = +\infty$.

Ἀφοῦ δώση κανείς αὐθαίρετα μιά τιμή στή $\sigma(x)$ γιά $x = 0$, μπορεῖ νά ἐξετάση μήπως τώρα ἡ $\sigma(x)$ εἶναι ὁλοκληρώσιμη στό διάστημά $0 \leqq x \leqq 1$ μέ τό νόημα τοῦ § 254. Θά ἰδῆ ἀμέσως ὅτι δέν εἶναι, ἀφοῦ ἡ $\sigma(x)$ δέν εἶναι περιορισμένη γιά τό διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$. Ἀφ'ἑτέρου ὅμως τό $\int_\theta^1\frac{1}{\sqrt[+]{x}}dx$, ὅπου θ τυχών θετικός ἀριθμός ἔχει νόημα κατά τή θεωρία μας καί ἰσοῦται μέ $\left[\frac{x^{1/2}}{1/2}\right] = 2-2\sqrt{\theta}$.

Ἄρα τό $\lim_{\theta\to 0^+}\int_\theta^1\frac{1}{\sqrt[+]{x}}dx$ ὑπάρχει καί ἰσοῦται μέ τόν ἀριθμό 2.

Ἀνάλογα μέ ὅ,τι κάμαμε στόν § 299, εἶναι φυσικό νά ὁρίσουμε κατ'ἐπέκταση ὅτι:

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2 = \lim_{\theta\to 0^+}\int_\theta^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx .$$

Ἡ γεωμετρική ἑρμηνεία αὐτοῦ τοῦ ὁρισμοῦ εἶναι ὅμοια μ' ἐκείνη πού δώσαμε στό παράδειγμα § 299.

§ 303. Ἔτσι φθάνουμε στόν ἑξῆς γενικό ὁρισμό:

Ἄς εἶναι $\sigma(x)$ μιά συνάρτηση εἴτε συνεχής εἴτε μονότονη εἴτε ἄθροισμα τέτοιων συναρτήσεων στό διάστημα $\alpha < x \leqq \beta$, ὅπου α καί β ἀριθμοί, ἅς εἶναι δέ $\lim\limits_{x\to\alpha^+} \sigma(x) = \infty$. Γιά κάθε θετικό ἀριθμό ϑ τέτοιον ὥστε $\alpha+\vartheta \leqq \beta$ ὑφίσταται τό $\int_{\alpha+\vartheta}^{\beta}\sigma(x)dx$, καί εἶναι ἑπομένως μιά συνάρτηση $f(\vartheta)$. Ἄν ὅταν τό ϑ τείνη ὁπωσδήποτε στό 0 διά θετικῶν τιμῶν, τό $\lim\limits_{\vartheta\to 0^+} f(\vartheta)$ ὑπάρχει καί εἶναι ἕνας ἀριθμός ω, τότε θά λέμε ὅτι τό ὁλοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta}\sigma(x)dx$ ὑ π ά ρ χ ε ι (σ υ γ κ λ ί ν ε ι) καί ὅτι

(303.1) $$\int_{\alpha}^{\beta}\sigma(x)dx = \omega = \lim_{\vartheta\to 0^+}\int_{\alpha+\vartheta}^{\beta}\sigma(x)dx .$$

Παράδειγμα ὅπου τό ὁλοκλήρωμα ὑπάρχει:

Ἄς εἶναι $0 < \gamma < 1$, $\alpha < \beta$. Ἔχουμε

$$\int_{\alpha+\vartheta}^{\beta}\frac{dx}{(x-\alpha)^{\gamma}} = \left[\frac{(x-\alpha)^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}\right]_{\alpha+\vartheta}^{\beta} = \frac{(\beta-\alpha)^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{\vartheta^{1-\gamma}}{1-\gamma} \to \frac{(\beta-\alpha)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \text{ ὅταν } \vartheta\to 0^+ .$$

Παράδειγμα ὅπου τό ὁλοκλήρωμα δέν ὑπάρχει:

Ἄς εἶναι $\gamma > 1$ καί $\alpha < \beta$. Ἔχουμε τότε

$$\int_{\alpha+\vartheta}^{\beta}\frac{dx}{(x-\alpha)^{\gamma}} = \left[\frac{(x-\alpha)^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}\right]_{\alpha+\vartheta}^{\beta} = \frac{(\beta-\alpha)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{1}{(\gamma-1)\vartheta^{\gamma-1}} .$$

Ἄρα $$\lim_{\vartheta\to 0^+}\int_{\alpha+\vartheta}^{\beta}\frac{1}{(x-\alpha)^{\gamma}}\cdot dx = +\infty$$ καί ὄχι ἀριθμός.

Ὅμοια εἶναι:

$$\int_{\alpha+\vartheta}^{\beta}\frac{1}{(x-\alpha)}\,dx = [\ln(x-\alpha)]_{\alpha+\vartheta}^{\beta} = \ln(\beta-\alpha) - \ln\vartheta \to -\infty ,$$

ὅταν $\vartheta \to 0^+$.

Κατά ταῦτα τά ὁλοκληρώματα $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{(x-\alpha)^{\gamma}}dx$ μέ $\gamma \geqq 1$ δέν ὑπάρχουν.

Ἐντελῶς ἀνάλογος εἶναι ὁ ὁρισμός τοῦ γενικευμένου ὁλοκληρώματος $\int_{\alpha}^{\beta}\sigma(x)dx$, ὅταν ἡ $\sigma(x)$ εἶναι συνεχής ἤ μονότονη εἴτε ἄθροισμα τέτοιων συναρτήσεων στό διάστημα $\alpha \leqq x < \beta$, ἰσχύει δέ ἡ ὁριακή σχέση $\lim\limits_{x\to\beta^-}\sigma(x) = \infty$.

§ 304. Μιά ἄλλη περίπτωση εἶναι ἐκείνη κατά τήν ὁποία ἡ συνάρτηση $\sigma(\mathbf{x})$ τείνει στό ∞, ὅταν τό $\mathbf{x}$ τείνη σέ μιάν ἐσωρερική θέση τοῦ περιορισμένου διαστήματος ὁλοκληρώσεως.

Ἄς εἶναι π.χ. ἡ $\sigma(\mathbf{x})$ εἴτε συνεχής εἴτε μονότονη εἴτε ἄθροισμα τέτοιων συναρτήσεων στό καθένα ἀπό τά δυό διαστήματα $\alpha \leqq \mathbf{x} < \mathbf{x}_0$ καί $\mathbf{x}_0 < \mathbf{x} \leqq \beta$ καί ἄς εἶναι $\lim\limits_{x \to x_0} \sigma(\mathbf{x}) = \infty$.

Τά ὁλοκληρώματα $\int_{\alpha}^{x_0-\theta} \sigma(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ καί $\int_{x_0+\theta}^{\beta} \sigma(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ ὑπάρχουν κατά τή θεωρία μας γιά κάθε θετική τιμή τοῦ θ ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ τίς σχέσεις $\alpha \leqq \mathbf{x}_0 - \theta$ καί $\mathbf{x}_0 + \theta \leqq \beta$. Ἄν ὑπάρχουν τώρα τά ὅρια

$$\lim_{\theta \to 0^+} \int_{\alpha}^{x_0-\theta} \sigma(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \omega_1 \quad \text{καί} \quad \lim_{\theta \to 0^+} \int_{x_0+\theta}^{\beta} \sigma(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \omega_2$$

καί εἶναι ἀμφότερα ἀριθμοί, τότε λέμε ὅτι ὑπάρχει καί τό $\int_{\alpha}^{\beta} \sigma(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ καί ὅτι

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sigma(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \omega_1 + \omega_2 = \int_{\alpha}^{x_0} \sigma(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_{x_0}^{\beta} \sigma(\mathbf{x})d\mathbf{x}\,.$$

Π.χ. $$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{x}|}}\,d\mathbf{x} = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\underset{+}{\sqrt{-\mathbf{x}}}}\,d\mathbf{x} + \int_{0}^{1} \frac{1}{\underset{+}{\sqrt{\mathbf{x}}}}\,d\mathbf{x} = 2+2 = 4\,.$$

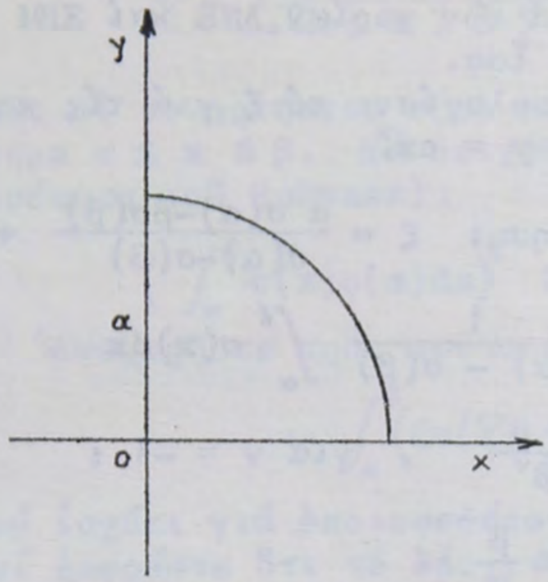
Ἀντιθέτως τό ὁλοκλήρωμα $\int_{0}^{\pi} \frac{d\mathbf{x}}{\sigma\upsilon\nu^2\mathbf{x}}$ δέν ὑπάρχει σύμφωνα μέ τόν παραπάνω ὁρισμό. Πράγματι τό $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\mathbf{x}}\,d\mathbf{x}$ δέν ὑπάρχει ἀφοῦ τό

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}-\theta} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\mathbf{x}}\,d\mathbf{x} = \left[\varepsilon\varphi\mathbf{x}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}-\theta} = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \longrightarrow +\infty$$

ὅταν $\theta \longrightarrow 0^+$.

Ἐφιστοῦμε τήν προσοχή σέ τοῦτο, ὅτι τό θεώρημα τοῦ § 275 δέν μπορεῖ νά ἐφαρμοστῆ στά δυό τελευταῖα ὁλοκληρώματα καί γενικότερα στά γενικευμένα ὁλοκληρώματα τῶν §§ 303 καί 304, ἐπειδή ἡ συνάρτηση πού βρίσκεται μέσα σ'αὐτά δέν εἶναι συνεχής σ'ὅλες ἀνεξαιρέτως τίς θέσεις τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως.

§ 305. <u>Ἐφαρμογή</u>. Ὑπολογισμός τοῦ μήκους τεταρτοκυκλίου ἀκτίνας α.



Γιά $0 \leqq x \leqq \alpha$ εἶναι $y = \underset{+}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}$ καί γιά $0 \leqq x < \alpha$ ἔχουμε

$$y'(x) = -\frac{x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} \quad .$$

Τό μῆκος ἑνός τόξου βρίσκεται μέ ἐφαρμογή τοῦ τύπου (285.1):

$$(305.1) \qquad L = \int_0^{x_0} \sqrt{1 + \frac{x^2}{\alpha^2 - x^2}}\, dx =$$

$$= \int_0^{x_0} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}\, dx$$

Γιά τό τεταρτοκύκλιο θά εἴχαμε λοιπόν

$$(305.2) \qquad L = \int_0^{\alpha} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}\, dx$$

ὅπου ὅμως, ἐπειδή $\lim\limits_{x \to \alpha^-} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} = +\infty$, θά πρόκειται γιά γενικευμένο ὁλοκλήρωμα.

Γιά νά τό ὑπολογίσουμε θέτουμε (τροποποιώντας λίγο τή μέθοδο τοῦ § 304) $x_0 = \alpha\theta$ (ὅπου $0 < \theta < 1$) ὁπότε

$$L = \int_0^{\alpha\theta} \frac{\alpha\, dx}{\underset{+}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}} = \alpha \cdot \Big[\, \text{τοξ}_{o}\text{ημ}\, \frac{x}{\alpha} \Big]_0^{\alpha\theta} = \alpha \cdot \text{τοξ}_{o}\text{ημ}\theta \ .$$

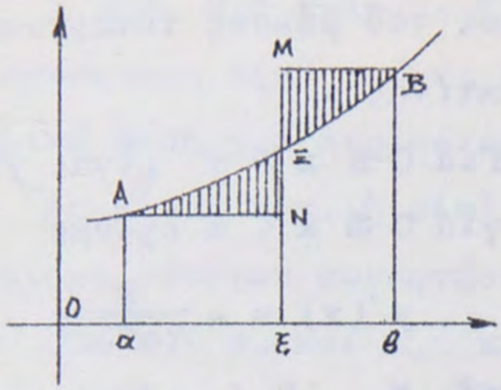
Ἐπειδή

$$\lim_{\theta \to 1^-} \int_0^{\alpha\theta} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}\, dx = \lim_{\theta \to 1^-} \alpha\,\text{τοξ}_{o}\text{ημ}\theta = \frac{\pi\alpha}{2}$$

τό γενικευμένο ὁλοκλήρωμα (305.2) ὑπάρχει καί ἰσοῦται μέ $\frac{\pi}{2}\alpha$ τό μῆκος τοῦ τεταρτοκυκλίου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

256. Ὑπολογίστε τά ὁλοκληρώματα $A_1 = \int_{\alpha}^{\beta} |x|\, dx$, $A_2 = \int_{\alpha}^{\beta} x|x|\, dx$.
(Ἀπάντηση: $A_1 = \frac{1}{2}(\beta|\beta| - \alpha|\alpha|)$, $A_2 = \frac{1}{3}(|\beta|^3 - |\alpha|^3)$).



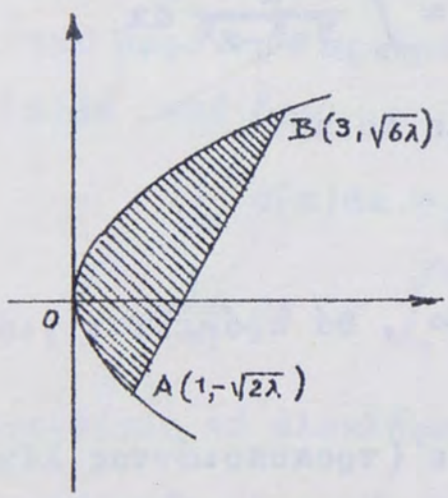
257. Δίνεται ἡ καμπύλη $y = \sigma(x)$ Νά προσδιορισθῇ ἡ τετμημένη ξ μεταξύ τῶν α καί β οὕτως ὥστε τά ἐμβαδά τῶν χωρίων ΑΝΞ καί ΞΒΜ νά εἶναι ἴσα.

Ὑπολογίστε τό ξ γιά τίς καμπύλες $y = cx^{\nu}$.

('Απάντηση: $\xi = \dfrac{\alpha\,\sigma(\alpha)-\beta\sigma(\beta)}{\sigma(\alpha)-\sigma(\beta)} + \dfrac{1}{\sigma(\alpha)-\sigma(\beta)}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}\sigma(x)dx$.

Γιά $\nu \neq -1$: $\xi = \dfrac{\nu}{\nu+1}\cdot\dfrac{\alpha^{\nu+1}-\beta^{\nu+1}}{\alpha^{\nu}-\beta^{\nu}}$, γιά $\nu = -1$:

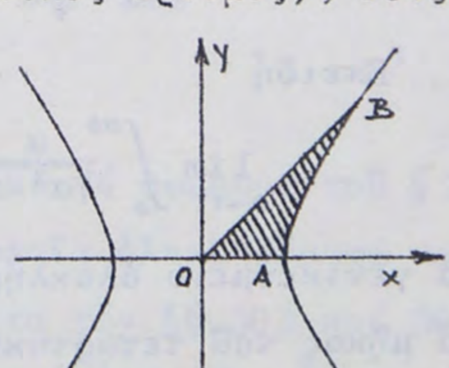
$$\xi = \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\ln\frac{\beta}{\alpha}\ ).$$



258. Δίνεται ἡ παραβολή $y^2=2\lambda x$. Ζητεῖται νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδό τῆς ἐπίπεδης ἐπιφάνειας πού περικλείνεται ἀπό τό τόξο τῆς παραβολῆς μεταξύ τῶν σημείων $A(1,-\sqrt{2\lambda})$ καί $B(3,\sqrt{6\lambda})$ καί ἀπό τήν ἀντίστοιχη χορδή.

259. Ποιό εἶναι τό ἐμβαδό τοῦ ὑπερβολικοῦ τομέως ΟΑΒ γιά τήν ὑπερβολή $x^2-y^2 = 1$, ὅταν ἡ τετμημένη τοῦ σημείου Β εἶναι x;

260. Χρησιμοποιώντας τούς ἀναδρομικούς τύπους γιά τό $\int \eta\mu^{\nu}x\,dx$ καί τό $\int \sigma\upsilon\nu^{\nu}x\,dx$, (ν φυσικός ἀριθμός), δεῖξτε ὅτι:



$$I_{2\nu} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^{2\nu}x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^{2\nu}x\,dx = \frac{2\nu-1}{2\nu}\,\frac{2\nu-3}{2\nu-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \quad \text{καί}$$

$$I_{2\nu+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^{2\nu+1}x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^{2\nu+1}x dx = \frac{2\nu}{2\nu+1}\cdot\frac{2\nu-2}{2\nu-1}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\ .$$

261. 'Αφοῦ δεῖξτε γιά τά I_μ τῆς τελευταίας ἀσκήσεως ὅτι

$\lim\limits_{\nu\to+\infty} \frac{I_{2\nu}}{I_{2\nu+1}} = 1$, συμπεράνατε τή σχέση τοῦ Wallis :

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{\nu\to+\infty} \frac{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\ldots(2\nu)^2}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\ldots(2\nu-1)(2\nu+1)} .$$

262. Οἱ συναρτήσεις $\sigma(x)$ καί $\varphi(x)$ ἄς εἶναι συνεχεῖς στό διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$. Νά δειχθῆ ὅτι ἀληθεύει πάντοτε ἡ σχέση (ἀνισότητα τοῦ Schwarz):

$$\left(\int_\alpha^\beta \sigma(x)\varphi(x)dx\right)^2 \leqq \int_\alpha^\beta (\sigma(x))^2\, dx \int_\alpha^\beta (\varphi(x))^2\cdot dx .$$

Ἀναχωρῆστε πρός τοῦτο ἀπό τή σχέση

$$\int_\alpha^\beta \left(\xi\sigma(x) + \zeta\varphi(x)\right)^2 dx \geqq 0 ,$$

πού ἰσχύει γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς ξ καί ζ, καί ἐκφράστε ὅτι τό ὁμογενές τριώνυμο δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρός ξ καί ζ πού προκύπτει μετά τήν ἐκτέλεση τῶν πράξεων λαβαίνει πάντοτε τιμές $\geqq 0$.

263. Νά βρεθῆ τό ἐμβαδό πού σαρώνει ἡ πολική ἀντίνα $\varrho = \frac{\alpha}{\eta\mu\vartheta}$ ὅταν τό ϑ μεταβάλλεται ἀπό $\vartheta = \frac{\pi}{6}$ ὡς $\vartheta = \frac{\pi}{3}$.

(Ἀπ. $\frac{\alpha^2}{\sqrt{3}}$)

264. Νά βρεθῆ τό ἐμβαδό ἑνός τομέως τῆς καμπύλης $\varrho\cdot\vartheta = \alpha$ (ὑπερβολικῆς ἕλικας).

265. Νά βρεθῆ τό ἐμβαδό τοῦ χωρίου πού περιορίζεται ἀπό τίς καμπύλες $\varrho = \alpha\sigma\upsilon\nu 3\vartheta$ καί $\varrho = \alpha$.

(Ἀπ. $\frac{3}{4}\pi\alpha^2$).

266. Ὑπολογίστε τό μῆκος τῆς καμπύλης:

α) $y = \ln\frac{e^x-1}{e^x+1}$ ἀπό $x = 1$ μέχρι $x = 2$,

β) $y = \frac{\alpha}{2}\ln \frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-x^2}}{\alpha-\sqrt{\alpha^2-x^2}} - \sqrt{\alpha^2-x^2}$ ἀπό $x = x_0 > 0$ ὡς $x = \alpha$.

γ) $\varrho = \alpha(1+\sigma\upsilon\nu\vartheta)$, (συνολικό μῆκος, δηλ. γιά $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$).

δ) $\varrho = \alpha\eta\mu^3\frac{\vartheta}{3}$, (συνολικό μῆκος, δηλ. γιά $0 \leqq \vartheta \leqq 3\pi$).

(Ἀπάντηση: α) $\ln(e+e^{-1})$, β) $\alpha\ln\frac{\alpha}{x_0}$, γ) 8α δ) $\frac{3}{2}\pi\alpha$).

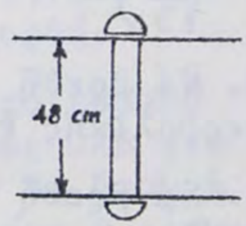
267. Τό καλώδιο κρεμαστῆς γέφυρας ἔχει τήν μορφή παραβολικοῦ τόξου. Τό χαμηλότερο σημεῖο τοῦ καλωδίου εἶναι 5 m πάνω ἀπό

τήν ἐπιφάνεια τοῦ νεροῦ καί τά 2 σημεῖα ἀναρτήσεως 10 m πάνω ἀπό αὐτήν. Ἄν τά δυό τελευταῖα σημεῖα ἀπέχουν ὁριζοντίως 100 m, ποιό εἶναι τό μῆκος τοῦ καλωδίου;
('Απ. $\simeq$ 100,7 m).

268. Ὑπολογίστε τόν ὄγκο τοῦ στερεοῦ πού προκύπτει ἄν περιστραφῆ
α) ἔλλειψη περί τόν μεγάλο ἄξονά της,
β) περί τήν εὐθεία $x = \alpha$ ἡ ἐπιφάνεια πού περιλαμβάνεται μεταξύ τῆς παραβολῆς $y^2 = 4px$ καί τῆς εὐθείας $x = x_0 > 0$ $(x_0 < \alpha)$,
γ) περί τήν εὐθεία $y = -\alpha$, ὅπου α θετική σταθερά, ἡ ἐπιφάνεια πού περιλαμβάνεται μεταξύ τῆς καμπύλης $y = \eta\mu x$ καί τῶν εὐθειῶν $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ καί $y = -\alpha$.

('Απ. α) $\frac{4}{3}\pi\alpha\beta^2$ β) $\frac{16}{15}\pi p^{1/2}\cdot x_0^{3/2}\cdot(5\alpha-3x_0)$ γ) $\frac{1}{4}\pi^2(2\alpha^2+1)+2\pi\alpha$).

269. Χαλύβδινη στεφάνη τοποθετήθηκε γύρω ἀπό σωλήνα κυκλικῆς διατομῆς καί διαμέτρου 48 ἐκ. Ἡ διατομή τῆς στεφάνης εἶναι ἡμιελλειπτική μέ ἄξονες 6 ἐκ καί $\sqrt{6}$ ἐκ. ὁ δέ μεγάλος ἄξονας εἶναι παράλληλος πρός τόν ἄξονα τοῦ σωλῆνος. Ζητεῖται ὁ ὄγκος τῆς στεφάνης.
('Απ. $6\pi(1+6\sqrt{6}\,\pi)$).



270. Ζητοῦνται τά ἐμβαδά τῶν ἐπιφανειῶν πού παράγονται ὅταν ἔλλειψη περιστραφῆ περί τόν μεγάλο ἤ τόν μικρό ἄξονά της.
'Απ. α) $2\pi\alpha^2 + \frac{2\pi\alpha\beta^2}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\ln\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\beta}$,
β) $2\pi\beta^2 + \frac{2\pi\alpha\beta}{\varepsilon}\,\tau o\xi_0\eta\mu\varepsilon$,
ὅπου ε = ἐκκεντρότητα τῆς θεωρούμενης ἐλλείψεως.

271. Ζητοῦνται τά ἐμβαδά τῶν ἐπιφανειῶν ἐκ περιστροφῆς πού παράγονται ἀπό τίς καμπύλες:
α) $y = \frac{\alpha}{2}\left(e^{\frac{x}{\alpha}} + e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)$, ἀπό $x = -p$ μέχρι $x = p$, μέ περιστροφή γύρω στόν ΟΧ.
β) $\rho = \alpha(1+\sigma\upsilon\nu\vartheta)$, μέ περιστροφή γύρω στόν πολικό ἄξονα.
('Απ. α) $\frac{1}{2}\pi\alpha^2\left(e^{\frac{2p}{\alpha}} - e^{-\frac{2p}{\alpha}}\right) + 2\pi\alpha p$, β) $\frac{32}{5}\pi\alpha^2$).

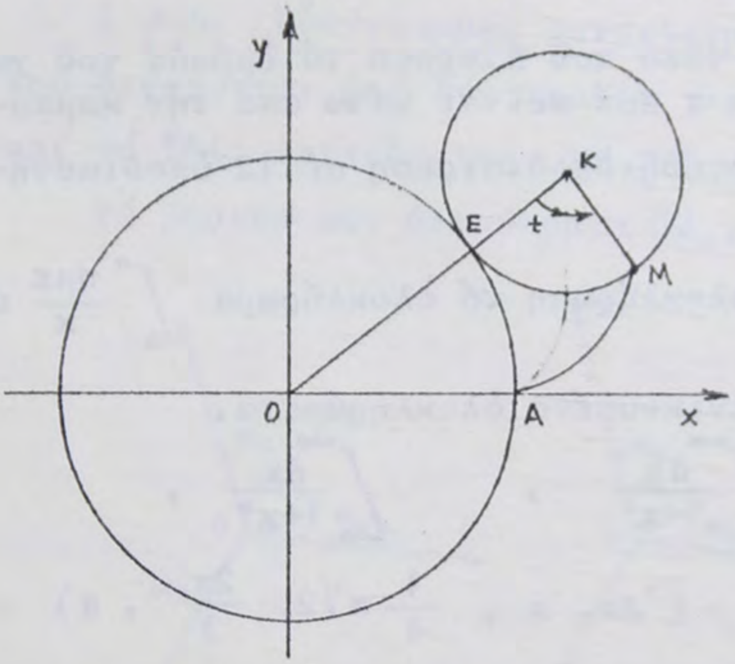
272. Ὑπολογίστε τό μῆκος τῆς καμπύλης
$y = 2\sqrt{2}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$ (ἐννοεῖται γιά $-1 \leqq x \leqq 1$)

273. Τῆς καμπύλης

$$\begin{cases} x = t - \alpha^2 t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$$

ὅπου α σταθερά > 0, θεωροῦμε τό τόξο μέ $x \geq 0$ καί τό περιστρέφουμε περί τόν ἄξονα ΟΧ. Νά ὑπολογιστῆ τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας πού προκύπτει διά τῆς περιστροφῆς.

274. Καλεῖται ἐπικυκλοειδής ἡ γραμμή τήν ὁποία γράφει ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Μ μιᾶς περιφέρειας κύκλου πού κυλίεται ἐξωτερικῶς ἐπί ἑνός σταθεροῦ κύκλου. Νά βρεθοῦν οἱ παραμετρικές ἐξισώσεις τῆς ἐπικυκλοειδοῦς, ὅταν ἡ ἀκτίνα τοῦ σταθεροῦ κύκλου εἶναι β καί ἡ ἀκτίνα τοῦ κυλιόμενου α, ὡς παράμετρος δέ ληφθῆ ἡ γωνία $(\overrightarrow{KE}, \overrightarrow{KM}) = t$, πού λέγεται γωνία κυλίσεως.

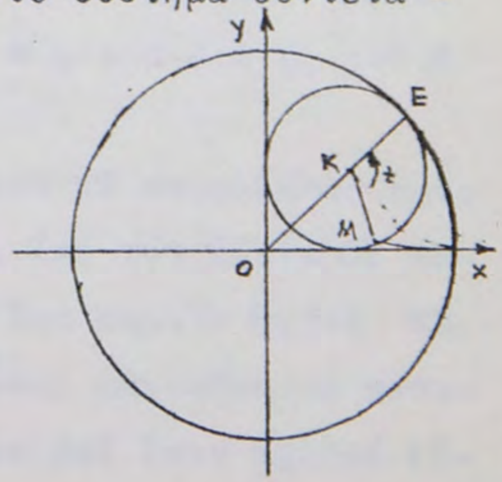


Ὑπολογίστε τό μῆκος τόξου τῆς ἐπικυκλοειδοῦς μεταξύ $t = 0$ καί $t = t$.

Ὑπολογίστε τό ἐμβαδό τοῦ πολικοῦ τομέως πού περιορίζεται ἀπό τήν πολική ἀκτίνα ΟΑ διά $t = 0$, ἀπό τήν πολική ἀξτίνα ΟΜ διά $t = t$ καί ἀπό τό τόξο $\overparen{AM}$ τῆς ἐπικυκλοειδοῦς.

275. Μελετῆστε ἰδιαιτέρως τήν ειδική περίπτωση τῆς ἐπικυκλοειδοῦς, ὅταν $\alpha = \beta$. Ἡ ἀντίστοιχη καμπύλη καλεῖται καρδιοειδής. Βρῆτε τήν ἐξίσωση τῆς καρδιοειδοῦς σέ ὀρθογώνιες συντεταγμένες, ὅταν ὡς ἀρχή τῶν συντεταγμένων ληφθῆ τό σημεῖο Α καί ὡς θετ. ἡμιάξονας τῶν τετμημένων ὁ $\overrightarrow{AO}$. Ἐπίσης βρῆτε τήν ἐξίσωση τῆς καρδιοειδοῦς στό σύστημα πολικῶν συντεταγμένων τό ἀντίστοιχο πρός τό τελευταῖο ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων.

276. Καλεῖται ὑποκυκλοειδής ἡ γραμμή τήν ὁποία γράφει ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Μ περιφερείας κύκλου πού κυλίεται ἐσωτερικῶς ἐπί σταθεροῦ κύκλου.
Νά βρεθοῦν οἱ παραμετρικές ἐξισώσεις τῆς ὑποκυκλοειδοῦς ὅταν ἡ ἀκτίνα τοῦ σταθεροῦ κύκλου εἶναι β, ἡ ἀκτίνα τοῦ κυλιόμενου α καί ὡς παράμετρος ληφθῆ



ἡ γωνία κυλίσεως $t = (\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KE})$.

Ὑπολογίστε τό μῆκος τόξου τῆς ὑποκυκλοειδοῦς μεταξύ $t=0$ καί $t = t$.

277. Μελετῆστε εἰδικῶς τήν περίπτωση τῆς ὑποκυκλοειδοῦς ὅταν $\alpha = \frac{\beta}{4}$. Ἡ ἀντίστοιχη καμπύλη καλεῖται ἀστεροειδής. Βρῆτε τήν ἐξίσωσή της στό ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων ΟΧ, ΟΥ πού χρησιμοποιήθηκε παραπάνω. Βάσει τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς ($x^{2/3}+y^{2/3} = \beta^{2/3}$) μελετῆστε τή μορφή τῆς καμπύλης καί ὑπολογίστε τό ὅλο μῆκος της.

278. Νά ὑπολογιστῆ μέ τόν τύπο τοῦ Simpson τό ἐμβαδό τοῦ χωρίου μεταξύ $x = -\pi$ καί $x = \pi$ πού κεῖται κάτω ἀπό τήν καμπύλη $y = \frac{\eta\mu x}{x}$. (Νά χρησιμοποιηθῆ ὑποδιαίρεση σέ 12 ὑποδιαστήματα). (Ἀπ. $E \approx 3{,}70401$).

279. Νά βρεθῆ μέ γραφική ὁλοκλήρωση τό ὁλοκλήρωμα $\int_0^\pi \frac{\eta\mu x}{x}\,dx$. (Ἀπ. ≈ 1.852).

280. Νά ὑπολογιστοῦν τά γενικευμένα ὁλοκληρώματα.

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + x\sqrt{x}}. \qquad (\text{Ἀπ. } \pi, \ \frac{1}{4}\pi\sqrt{2}, \ \frac{2\pi}{3}, \ \pi).$$

281. Τό $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx$ ἔχει νόημα; (Ἀπ. : Ὄχι).

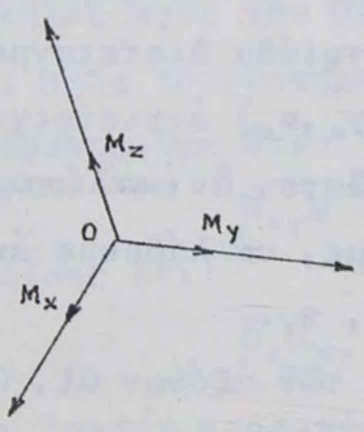
282. Τό χωρίο μεταξύ τῆς κισσοειδοῦς $x^2y = (2\alpha-y)^3$ καί τῆς ἀσυμπτώτου της $y = 0$, τό περιστρέφουμε περί τήν ἀσύμπτωτο. Νά ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος τοῦ προκύπτοντος στερεοῦ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XVIII

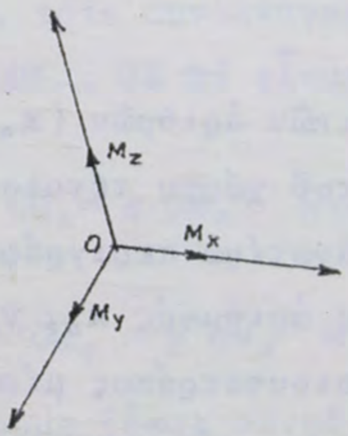
ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ 3-ΔΙΑΣΤΑΤΟΥ ΧΩΡΟΥ.

§ 306. Εὐθύγραμμες συντεταγμένες. Θεωροῦμε τρεῖς ἄξονες πού διέρχονται ἀπό ἕνα σημεῖο Ο, ἀλλά πού δέν κεῖνται σ'ἕνα καί τό ἴδιο ἐπίπεδο, τούς ΟΧ, ΟΥ καί ΟΖ.

Τά βασικά των διανύσματα $\overline{OM}_x$, $\overline{OM}_y$, $\overline{OM}_z$, εἰλημμένα κατά τήν τάξη αὐτή, μποροῦν νά παρουσιάζουν διττή διάταξη: τή δ ε ξ ι ό χ ε ρ η ὅπως στό σχῆμα 1 ἤ τήν ἀ ρ ι σ τ ε ρ ό χ ε ρ η ὅπως στό σχῆμα 2. Συνήθως θά κάμουμε χρήση τῆς δεξιόχειρης.



Σχ. 1



Σχ. 2

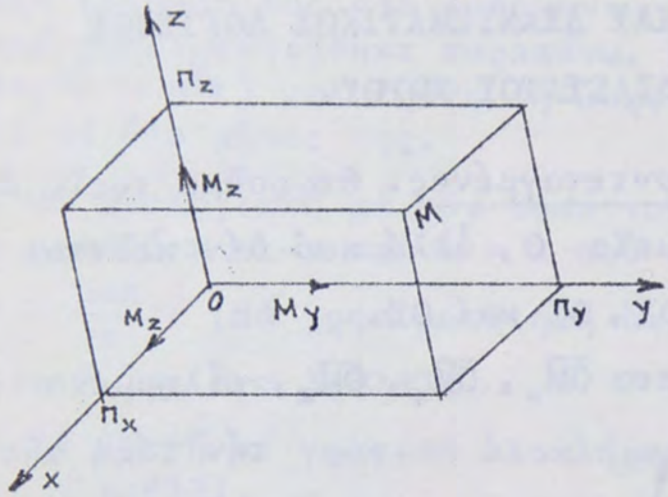
Σέ τυχόν σημεῖο Μ τοῦ χώρου ἀντιστοιχίζουμε μιά διατεταγμένη τριάδα ἀριθμῶν ὡς ἑξῆς: Φέρνουμε διά τοῦ Μ ἐπίπεδο παράλληλο πρός τό ΥΟΖ καί θεωροῦμε τό σημεῖο Π_x ὅπου τέμνει τόν ἄξονα ΟΧ. Ἡ πράξη αὐτή καλεῖται: π ρ ο β ο λ ή τοῦ Μ ἐπί τόν ΟΧ παραλλήλως πρός τό ΥΟΖ.

Ὁμοίως προβάλλουμε τό Μ ἐπί τόν ἄξονα ΟΥ παραλλήλως πρός τό ΖΟΧ λαμβάνοντας τό σημεῖο Π_y, ὁμοίως ἐπί τόν ἄξονα ΟΖ παραλλήλως πρός τό ΧΟΥ, ὁπότε λαμβάνουμε ἕνα σημεῖο Π_z τοῦ ΟΖ.

Τά τρία διανύσματα $\overline{O\Pi}_x$, $\overline{O\Pi}_y$, $\overline{O\Pi}_z$ εἶναι μονοσήμαντα καθορισμένα. Τό καθένα ἀπό αὐτά παριστάνεται ἀπό ἕναν ἀριθμό (ὅταν συγκριθῆ μέ τό βασικό διάνυσμα τοῦ οἰκείου ἄξονα):

$$\frac{\overline{O\Pi}_x}{\overline{OM}_x} = x \quad , \quad \frac{\overline{O\Pi}_y}{\overline{OM}_y} = y \quad , \quad \frac{\overline{O\Pi}_z}{\overline{OM}_z} = z$$

ἤ καί $\overline{O\Pi}_x = x\cdot\overline{OM}_x$, $\overline{O\Pi}_y = y\cdot\overline{OM}_y$, $\overline{O\Pi}_z = z\cdot\overline{OM}_z$.



Οἱ τρεῖς αὐτοί ἀριθμοί x, y, z, εἰλημμένοι κατά τή σειρά αὐτή, εἶναι λοιπόν μονοσήμαντα καθορισμένοι, ὅταν δοθῆ τό σημεῖο M.

Ἀντιστρόφως: σέ μιά τριάδα διατεταγμένη 3 ὁποιωνδήποτε πραγματικῶν ἀριθμῶν (x_o, y_o, z_o) ἀντιστοιχεῖ ἕνα ὁρισμένο σημεῖο M_o τοῦ χώρου τέτοιο ὥστε, ἄν ἐκτελέσουμε γιά τό M_o τίς πράξεις πού ἀνωτέρω περιγράψαμε, νά λάβουμε ἀκριβῶς τούς τρεῖς δοσμένους ἀριθμούς x_o, y_o, z_o.

Δημιουργήσαμε τοιουτοτρόπως μέσῳ τῶν ἀξόνων OX, OY, OZ, μιά ἀντιστοιχία ἀμφιμονοσήμαντη μεταξύ τῶν σημείων τοῦ χώρου καί τῶν διατεταγμένων τριάδων (x,y,z) πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Λέγουμε ὅτι τά σημεῖα τοῦ χώρου παριστάνονται ἀπό τριάδες ἀριθμῶν καί ἀντιστρόφως.

Οἱ ἀριθμοί x, y, z καλοῦνται εὐθύγραμμες συντεταγμένες τοῦ M, κατά σειρά: τετμημένη, τεταγμένη καί κατηγμένη.

Οἱ τρεῖς ἄξονες OX, OY, OZ (ὁ καθένας μέ τό βασικό του διάνυσμα) ἀποτελοῦν τό σύστημα τῶν συντεταγμένων. Τό σύστημα λέγεται δεξιόχερο (καί δεξιόστροφο) ἤ ἀριστερόχερο (καί ἀριστερόστροφο), καθόσον τά τρία διανύσματα $\overline{OM}_x$, $\overline{OM}_y$, $\overline{OM}_z$ κατά τή σειρά αὐτή παρουσιάζουν διάταξη δεξιόχερη ἤ ἀριστερόχερη.

Τέλος καλεῖται ὀρθογώνιο τό σύστημα ἄν οἱ ἄξονες εἶναι ἀνά δύο κάθετοι (ὀρθογώνιοι) ὁ ἕνας πρός τόν ἄλλο, σέ ἐνάντια περίπτωση τό σύστημα λέγεται π λ α γ ι ο γ ώ ν ι ο.

Τό σημεῖο O λέγεται ἀρχή τῶν συντεταγμένων,οἱ ἄξονες OX, OY, OZ λέγονται ἄ ξ ο ν ε ς τῶν συντεταγμένων.

Ἄν ἀπό τό σημεῖο M μέ συντεταγμένες (x,y,z) φέρουμε εὐθεία παράλληλη πρός τόν OZ καί καλέσουμε Π_{xy} τό σημεῖο ὅπου τέμνει τό ἐπίπεδο XOY, τό σημεῖο Π_{xy} θά ἔχη μέσα στό ἐπίπεδο αὐτό συντεταγμένες (x,y) ὡς πρός τό σύστημα εὐθύγραμμων συντεταγμένων τοῦ ἐπιπέδου μέ ἄξονες τούς OX , OY.

Ὅμοια ἄν Π_{yz} εἶναι ἡ προβολή τοῦ M ἐπί τό ἐπίπεδο YOZ παραλλήλως πρός τόν OX, τότε συντεταγμένες τοῦ Π_{yz} μέσα στό YOZ ὡς πρός τό σύστημα OY , OZ θά εἶναι οἱ ἀριθμοί (y,z)κτλ.

Παρατηροῦμε ὅτι:

$$\overline{\Pi_{xy}M} = \overline{O\Pi_z} = z\cdot\overline{OM_z} \quad \text{κτλ.}$$

Ἐπίσης ὅτι:

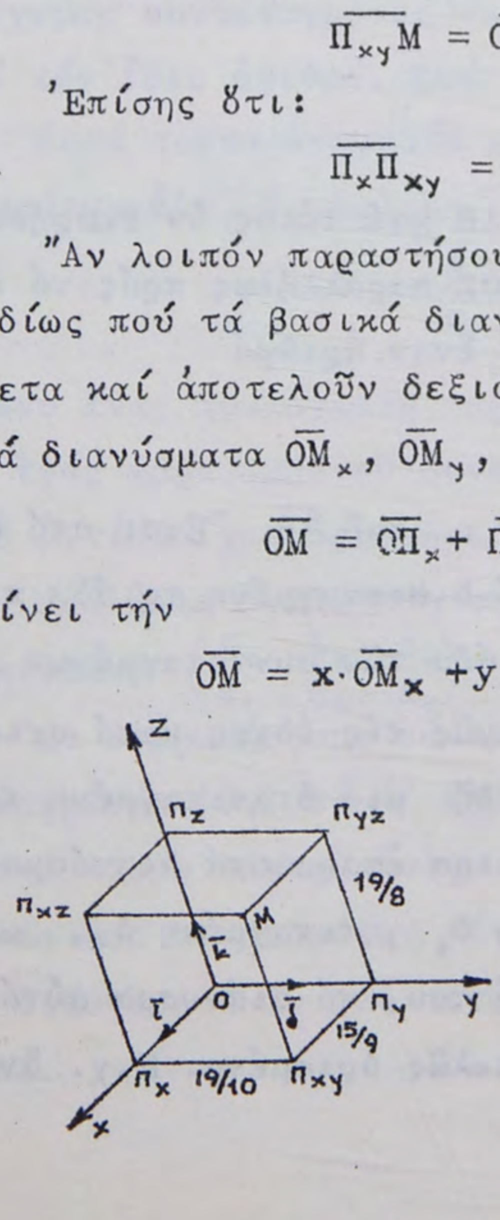
$$\overline{\Pi_x\Pi_{xy}} = \overline{O\Pi_y} = y\,\overline{OM_y} \quad \text{κτλ.}$$

Ἄν λοιπόν παραστήσουμε (ὅπως συνηθίζεται στήν περίπτωση ἰδίως πού τά βασικά διανύσματα εἶναι μοναδιαῖα, ἀνά δυό κάθετα καί ἀποτελοῦν δεξιόχερο σύστημα) μέ $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ τά βασικά διανύσματα $\overline{OM_x}$, $\overline{OM_y}$, $\overline{OM_z}$, ἡ προφανής διανυσματική σχέση

$$\overline{OM} = \overline{O\Pi_x} + \overline{\Pi_x\Pi_{xy}} + \overline{\Pi_{xy}M}$$

δίνει τήν

$$\overline{OM} = x\cdot\overline{OM_x} + y\,\overline{OM_y} + z\cdot\overline{OM_z} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}\ .$$



Στό διπλανό σχῆμα ὑποδεικνύεται ἡ "ἀ ξ ο ν ο μ ε τ ρ ι κ ή" κατασκευή ἑνός σημείου τοῦ ὁποίου δίνονται οἱ συντεταγμένες: τοῦ σημείου Μ μέ συντεταγμένες $\left(\frac{15}{9}, \frac{19}{10}, \frac{19}{8}\right)$.

§ 307. Παράσταση διανυσμάτων. Ἀνάλογα πρός τά σημεῖα καί τά ἐλεύθερα διανύσματα τοῦ χώρου παριστάνονται ἀπό διατεταγμένες τριάδες πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἄς εἶναι $\overline{AB}$ ἕνα διάνυσμα. Προβάλλουμε τά ἄκρα του ἐπί τόν ἄξονα ΟΧ παραλλήλως πρός τό ἐπίπεδο ΥΟΖ, ὁπότε ἔστω ὅτι λαμβάνουμε τά σημεῖα A_x καί B_x. Τό διάνυσμα $\overline{A_xB_x}$ τοῦ ἄξονα ΟΧ παριστάνεται ἀπό ἕναν ἀριθμό

$$\delta_1 = \frac{\overline{A_xB_x}}{\overline{OM_x}}$$

ὁ ὁποῖος λέγεται τ ε τ μ η μ έ ν η τοῦ $\overline{AB}$ στό θεωρούμενο σύστημα συντεταγμένων.

Ὅμοια, ἄν προβάλουμε τό $\overline{AB}$ ἐπί τόν ΟΥ παραλλήλως πρός τό ΖΟΧ, θά λάβουμε ἕνα διάνυσμα $\overline{A_yB_y}$ τοῦ ἄξονα ΟΥ, τό ὁποῖο θά παριστάνεται ἀπό ἕναν ἀριθμό

$$\delta_2 = \frac{\overline{A_yB_y}}{\overline{OM_y}}$$

καλούμενο τ ε τ α γ μ έ ν η τοῦ AB καί τέλος ἄν θεωρήσουμε τήν προβολή $\overline{A_zB_z}$ ἐπί τόν ἄξονα ΟΖ παραλλήλως πρός τό ἐπίπεδο ΧΟΥ, αὐτή θά παριστάνεται ἀπό ἕναν ἀριθμό

$$\delta_3 = \frac{\overline{A_zB_z}}{\overline{OM_z}}$$

ὁ ὁποῖος θά κληθῆ κ α τ η γ μ έ ν η τοῦ $\overline{AB}$. Ἔτσι στό διάνυσμα $\overline{AB}$ ἀντιστοιχεῖ μονότροπα μιά διατεταγμένη τριάδα πραγματικῶν ἀριθμῶν $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, ἡ τριάδα τῶν συντεταγμένων του.

Δυό ἴσα διανύσματα ἔχουν προφανῶς τίς ἴδιες κατά σειρά συντεταγμένες. Ἀντιστρόφως, ἄν δοθῆ μιά διατεταγμένη τριάδα ἀριθμῶν $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ ὑπάρχουν ἄπειρα ἐφαρμοστά διανύσματα, μεταξύ των ἴσα, πού ἔχουν τετμημένη δ_1, τεταγμένη δ_2, καί κατηγμένη δ_3. Ὅταν δίνεται ἡ ἀρχή του, τό διάνυσμα αὐτό μέ συντεταγμένες $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ εἶναι ἐντελῶς ὁρισμένο. Π.χ. ἄν ὡς ἀρχή ληφθῆ τό 0 (δηλαδή ἡ ἀρχή τῶν συντεταγμένων τοῦ συστήματος), πέρας τοῦ διανύσματος θά εἶναι τό σημεῖο τοῦ χώρου μέ συντεταγμένες $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$.

Σύμφωνα μέ τά παραπάνω, ἄν κληθοῦν καί πάλιν $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ τά τρία βασικά διανύσματα, τό διάνυσμα $\overline{\delta}$ μέ συντεταγμένες $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ θά ἱκανοποιῆ τή διανυσματική σχέση

$$\overline{\delta} = \delta_1 \overline{i} + \delta_2 \overline{j} + \delta_3 \overline{k} \ .$$

Μέ ἄλλα λόγια, τυχόν διάνυσμα τοῦ χώρου ἐκφράζεται γραμμικῶς διά τῶν τριῶν βασικῶν διανυσμάτων (τά ὁποῖα ἄλλως τε εἶναι τρία αὐθαίρετα διανύσματα μή παράλληλα πρός ἕνα καί τό ἴδιο ἐπίπεδο).

Ὅταν τά ὄχι μηδενικά διανύσματα $\overline{\delta}(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ καί $\overline{\varepsilon}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ εἶναι παράλληλα, οἱ συντεταγμένες τοῦ ἑνός προκύπτουν ἀπό τίς ὁμώνυμες συντεταγμένες τοῦ ἄλλου μέ πολλαπλασιασμό ἐπί ἕναν καί τόν ἴδιο ἀριθμό. Καί τό ἀντίστροφο ἀληθεύει.

Κατά ταῦτα ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη παραλληλίας δυό διανυσμάτων $\overline{\delta}(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ καί $\overline{\varepsilon}(\overline{\varepsilon}_1, \overline{\varepsilon}_2, \overline{\varepsilon}_3)$ ὄχι μηδενικῶν εἶναι ἡ

$$\frac{\delta_1}{\varepsilon_1} = \frac{\delta_2}{\varepsilon_2} = \frac{\delta_3}{\varepsilon_3}$$

(ὅπου ἕνας τουλάχιστο παρανομαστής εἶναι $\neq 0$, ὁ μηδενισμός δέ ἑνός παρανομαστοῦ συνεπάγεται, κατά σύμβαση, τό μηδενισμό τοῦ ἀντίστοιχου ἀριθμητοῦ).

Μιά ἄλλη διατύπωση τῆς συνθήκης παραλληλίας εἶναι ἡ ἑξῆς: ὁ πίνακας $\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$ νά ἔχη διάσταση 1.

Ἄν συμφωνήσουμε νά θεωροῦμε τό μηδενικό διάνυσμα μέ συντεταγμένες (0,0,0) // πρός ὁποιοδήποτε διάνυσμα (καί πρός τόν ἑαυτό του), τότε ἡ ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά τήν παραλληλία δυό διανυσμάτων γίνεται: ὁ πίνακας $\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$ νά ἔχη διάσταση < 2. Δυό τέτοια διανύσματα λέγονται καί συγγραμμικά.

§ 308. Πρόσθεση καί ἀφαίρεση διανυσμάτων· πολλαπλασιασμός ἑνός διανύσματος ἐπί ἕναν πραγματικό ἀριθμό. 1) Τό ἄθροισμα $\bar{\delta}+\bar{\varepsilon}$ τῶν δυό διανυσμάτων $\bar{\delta}$ μέ συντεταγμένες $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ καί $\bar{\varepsilon}$ μέ συντεταγμένες $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, ἔχει συντεταγμένες τό ἄθροισμα τῶν ἀντίστοιχων συντεταγμένων τῶν προσθετέων διανυσμάτων $(\delta_1+\varepsilon_1 , \delta_2+\varepsilon_2 , \delta_3+ \varepsilon_3)$.

2) Ἡ διαφορά $\bar{\delta}-\bar{\varepsilon}$ ἔχει συντεταγμένες $(\delta_1-\varepsilon_1 , \delta_2-\varepsilon_2 , \delta_3-\varepsilon_3)$.

3) Τό γινόμενο $\lambda\bar{\delta}$ τοῦ $\bar{\delta}$ ἐπί τόν πραγματικό ἀριθμό λ ἔχει συντεταγμένες $(\lambda\delta_1 , \lambda\delta_2 , \lambda\delta_3)$.

Συντεταγμένες διανύσματος τοῦ ὁποίου δίνονται οἱ συντεταγμένες τῶν ἄκρων. Ἄν τό Α ἔχη συντεταγμένες (x_1,y_1,z_1), τό $B(x_2,y_2,z_2)$, τότε τό διάνυσμα $\overline{AB}$ ἔχει συντεταγμένες $(x_2-x_1 , y_2-y_1 , z_2-z_1)$.

Συντεταγμένες ἑνός σημείου πού διαιρεῖ τό διάνυσμα $\overline{AB}$ κατά δοσμένο μερικό λόγο.

Πρόκειται γιά ἕνα σημεῖο Μ τῆς εὐθείας ΑΒ τέτοιο ὥστε ὁ λόγος τοῦ διανύσματος $\overline{AM}$ πρός τό συγγραμμικό $\overline{MB}$ νά εἶναι ἴσος μέ ἕνα δοσμένο ἀριθμό λ ἤ τό ∞. Ἀπό τή σχέση $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \lambda$ ἕπεται σύμφωνα μέ τά παραπάνω γιά τίς συντεταγμένες (x,y,z) τοῦ Μ:

$$x-x_1 = \lambda(x_2-x) \quad , \quad y-y_1= \lambda(y_2-y) \quad , \quad z-z_1= \lambda(z_2-z)$$

ἤ (308.1) $$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \quad , \quad y = \frac{y_1 +\lambda y_2}{1+\lambda} \quad , \quad z = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

ὅταν $\lambda \neq -1$ καί ∞.

Τό μέσον Κ τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ λαμβάνεται, ἄν θέσουμε $\lambda = 1$:

$$K : \quad x = \frac{x_1+x_2}{2} \quad , \quad y = \frac{y_1+ y_2}{2} \quad , \quad z = \frac{z_1+ z_2}{2} \quad .$$

Μιάν ἐφαρμογή τῶν παραπάνω τύπων (308.1) ἔχουμε στήν εὕρεση τῶν συντεταγμένων τοῦ βαρυκέντρου $B(\xi,\eta,\zeta)$ ν ὑλικῶν σημείων, πού βρίσκονται τοποθετημένα στίς θέσεις $A_1(x_1,y_1,z_1)$,

..., $A_\nu(x_\nu, y_\nu, z_\nu)$ καί έχουν μάζα $m_1, \ldots, m_\nu$ άντιστοίχως:

$$\xi = \frac{m_1x_1+\ldots+m_\nu x_\nu}{m_1+\ldots+m_\nu}, \quad \eta = \frac{m_1y_1+\ldots+m_\nu y_\nu}{m_1+\ldots+m_\nu}, \quad \zeta = \frac{m_1z_1+\ldots+m_\nu z_\nu}{m_1+\ldots+m_\nu}.$$

Θεώρημα περί τῆς προβολῆς ἀθροίσματος διανυσμάτων. Ἄς εἶναι $\overline{\gamma} = \overline{\alpha}+\overline{\beta}$ καί ἄς παραστήσουμε μέ $\overline{\gamma}'$, $\overline{\alpha}'$, $\overline{\beta}'$ ἀντιστοίχως τίς ὀρθές διανυσματικές προβολές τῶν $\overline{\gamma}, \overline{\alpha}, \overline{\beta}$ ἐπί τόν ἄξονα ε πού ἔχει βασικό διάνυσμα τό $\overline{\varepsilon}$, μέ γ, α, β τά ἀπόλυτα μήκη τῶν τριῶν διανυσμάτων ὡς πρός μονάδα τό βασικό διάνυσμα $\overline{\varepsilon}$, καί μέ $(\overline{\gamma}')$, $(\overline{\alpha}')$, $(\overline{\beta}')$ τά προσημασμένα μήκη (ἤ μέτρα) τῶν $\overline{\gamma}', \overline{\alpha}', \overline{\beta}'$.

Θά ἰσχύῃ τότε (θεώρημα τοῦ Chasles) ἡ σχέση

$$(\overline{\gamma}') = (\overline{\alpha}') + (\overline{\beta}') \quad ,$$

ἑπομένως

$$\gamma\sigma\upsilon\nu(\widehat{\overline{\varepsilon},\overline{\gamma}}) = \alpha\sigma\upsilon\nu(\widehat{\overline{\varepsilon},\overline{\alpha}}) + \beta\sigma\upsilon\nu(\widehat{\overline{\varepsilon},\overline{\beta}}) \quad .$$

Τό θεώρημα αὐτό ἐπεκτείνεται προφανῶς καί σέ ἄθροισμα περισσότερων ἀπό δυό διανυσμάτων.

§ 309. α) Μῆκος διανύσματος, ἀπόσταση 2 σημείων. Ἀπό τώρα καί στό ἑξῆς θά ὑποθέσουμε, γιά νά εἶναι ἁπλούστερες οἱ ἀναλυτικές σχέσεις τίς ὁποῖες θά λάβουμε, ὅτι τό σύστημα τῶν συντεταγμένων x, y, z εἶναι δεξιόχερο ὀρθογώνιο καί τά βασικά διανύσματα ἰσόμηκα πρός τή μονάδα μήκους.

Ἄς εἶναι $\overline{\delta}(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ ἕνα διάνυσμα· τό μῆκος του δ ἐκφράζεται συναρτήσει τῶν συντεταγμένων του, ὅπως πολύ εὔκολα βλέπει κανείς, μέ τόν τύπο

(309.1) $$\delta = |\overline{\delta}| = \sqrt{\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2} \; .$$

Ἡ ἀπόσταση δυό σημείων $M_1(x_1, y_1, z_1)$ καί $M_2(x_2, y_2, z_2)$, ἴση μέ τό μῆκος τοῦ διανύσματος $\overline{M_1M_2}$, δίνεται ἀπό τόν τύπο

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \; .$$

β) <u>Γωνίες διανύσματος πρός τούς ἄξονες συντεταγμένων καί συνημίτονα κατευθύνσεως</u>. Ἕνα ὄχι μηδενικό διάνυσμα $\overline{\delta}(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$ καθώς καί ἡ ὁμόρροπη μ'αὐτό ἡμιευθεία $\overline{O\Delta}$ σχηματίζει μέ τούς τρεῖς ἄξονες συντεταγμένων τρεῖς στοιχειώδεις γωνίες τῶν ὁποίων τά συνημίτονα ἰσοῦνται προφανῶς μέ τούς ἑξῆς ἀριθμούς:

$$\text{(309.2)}\quad \begin{aligned} \sigma\upsilon\nu(\widehat{\overrightarrow{OX}\,\overline{\delta}}) &= \sigma\upsilon\nu(\widehat{\overrightarrow{OX},\,\overrightarrow{O\Delta}}) = \frac{\delta_1}{+\sqrt{\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2}}\,, \\ \sigma\upsilon\nu(\widehat{\overrightarrow{OY},\overline{\delta}}) &= \sigma\upsilon\nu(\widehat{\overrightarrow{OY},\overrightarrow{O\Delta}}) = \frac{\delta_2}{+\sqrt{\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2}}\,, \\ \sigma\upsilon\nu(\widehat{\overrightarrow{OZ}\,\overline{\delta}}) &= \sigma\upsilon\nu(\widehat{\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{O\Delta}}) = \frac{\delta_3}{\sqrt{\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2}}\,. \end{aligned}$$

Οἱ ἀριθμοί αὐτοί, τούς ὁποίους θά παραστήσουμε μέ ξ,η,ζ καλοῦνται συνημίτονα κατευθύνσεως τοῦ διανύσματος $\overline{\delta}$ ἤ τῆς ὁμόρροπης ἡμιευθείας $\overline{O\Delta}$, παρουσιάζουν δέ τήν ἰδιότητα, τά τετράγωνά τους νά ἔχουν ἄθροισμα 1:

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=\frac{\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2}{\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2}=1\,.$$

Ἄν λοιπόν θεωρήσουμε μιά διανυσματική μονάδα $\overline{\delta}_0$, ὁμόρροπη μέ τό $\overline{\delta}$, αὐτή θά ἔχη συντεταγμένες ἀκριβῶς τά συνημίτονα κατευθύνσεως (ξ,η,ζ) τοῦ $\overline{\delta}$.

Ὅλα τά διανύσματα $\lambda\overline{\delta}$ ὅπου $\lambda > 0$ (δηλαδή ὅλα τά ὁμόρροπα πρός τό $\overline{\delta}$ διανύσματα) ἔχουν τά ἴδια συνημίτονα κατευθύνσεως.

Ὅλα τά διανύσματα $\lambda\overline{\delta}$ ὅπου $\lambda < 0$ (δηλαδή ὅλα τά διανύσματα τά ἀντίρροπα πρός τό $\overline{\delta}$) ἔχουν συνημίτονα κατευθύνσεως ἀντίθετα $(-\xi,-\eta,-\zeta)$.

Μιά διεύθυνση (μέ τίς δυό ἀμοιβαία ἀντίθετες φορές της) χαρακτηρίζεται κατά ταῦτα ἀπό 3 συνημίτονα κατευθύνσεως (ξ,η,ζ) καθώς καί ἀπό τά ἀντίθετα πρός αὐτά $(-\xi,-\eta,-\zeta)$. Ἄν (ξ,η,ζ) εἶναι τρεῖς ἀριθμοί πραγματικοί τῶν ὁποίων τό ἄθροισμα $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$, τότε μποροῦμε νά τούς θεωρήσουμε ὡς συνημίτονα κατευθύνσεως ὁμορρόπων διανυσμάτων: τῶν διανυσμάτων τῶν ὁμορρόπων μέ τό μοναδιαῖο διάνυσμα τοῦ ὁποίου συντεταγμένες εἶναι οἱ (ξ,η,ζ).

γ) <u>Γωνία δύο διανυσμάτων</u>. Ἄς εἶναι $\bar{\delta}$ καί $\bar{\varepsilon}$ δυό ὄχι μηδενικά διανύσματα μέ συντεταγμένες $(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$ καί $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$. Ἡ στοιχειώδης των γωνία $(\widehat{\bar{\delta},\bar{\varepsilon}})$ (καθώς καί ἡ ἴση της γωνία τῶν ὁμορρόπων ἡμιευθειῶν $\overrightarrow{O\Delta}$ καί $\overrightarrow{OE}$) ἔχει μέτρο $\geqq 0$ καί $\leqq \pi$ σέ ἀκτίνια. Τό συνημίτονό της εἶναι ἕνας μονοσήμαντα ὁρισμένος ἀριθμός τόν ὁποῖον μποροῦμε νά ἐκφράσουμε ὡς ἑξῆς μέ τίς συντεταγμένες τῶν $\bar{\delta}$ καί $\bar{\varepsilon}$.

Ἄς καλέσουμε $\bar{\mathrm{i}},\bar{\mathrm{j}},\bar{\mathrm{k}}$ τά βασικά (ἰσόμηκα πρός τή μονάδα μήκους) διανύσματα τῶν ἀξόνων OX, OY, OZ.

Ἔχουμε $$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_1\bar{\mathrm{i}} + \varepsilon_2\bar{\mathrm{j}} + \varepsilon_3\bar{\mathrm{k}} .$$

Ἄρα κατά τό θεώρημα τῆς προβολῆς ἀθροίσματος διανυσμάτων: ὀρθή προβολή τοῦ $\bar{\varepsilon}$ ἐπί τήν προσανατολισμένη εὐθεία $\overrightarrow{O\Delta}$ = = ἄθροισμα τῶν ὀρθῶν προβολῶν τῶν $\varepsilon_1\bar{\mathrm{i}}$, $\varepsilon_2\bar{\mathrm{j}}$, $\varepsilon_3\bar{\mathrm{k}}$ ἐπί τόν ἄξονα $\overrightarrow{O\Delta}$.

Εἶναι ὅμως κατά τό θεώρημα τῆς ὀρθῆς προβολῆς: προσημασμένο μέτρο προβ. τοῦ $\bar{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2}\,\text{συν}(\widehat{\bar{\delta},\bar{\varepsilon}})$,

$$\text{προσημ.μέτρο προβ. τοῦ } (\varepsilon_1\bar{\mathrm{i}}) = \varepsilon_1\text{συν}(\widehat{\bar{\delta},\bar{\mathrm{i}}}) =$$
$$= \varepsilon_1\text{συν}(\widehat{\bar{\delta},\overrightarrow{Ox}}) = \varepsilon_1 \frac{\delta_1}{+\sqrt{\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2}} \quad \text{κτλ.}$$

Ἄρα $$\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2}\;\text{συν}(\widehat{\bar{\delta},\bar{\varepsilon}}) = \varepsilon_1\frac{\delta_1}{\sqrt{\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2}} +$$
$$+ \varepsilon_2\frac{\delta_2}{\sqrt{\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2}} + \varepsilon_3\frac{\delta_3}{\sqrt{\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2}} ,$$

καί ἑπομένως

(309.3) $$\text{συν}(\widehat{\bar{\delta},\bar{\varepsilon}}) = \frac{\delta_1\varepsilon_1+\delta_2\varepsilon_2+\delta_3\varepsilon_3}{+\sqrt{\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2}\;+\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2}} ,$$

ὅπου οἱ τετραγωνικές ρίζες λαμβάνονται θετικές.

Τό ἡμίτονο τῆς στοιχειώδους γωνίας τῶν δυό διανυσμάτων εἶναι ἕνας μονοσήμαντα ὁρισμένος θετικός ἀριθμός καί ἐκφράζεται διά τῶν συντεταγμένων ὡς ἑξῆς:

Ἔχουμε $\quad \eta\mu^2(\widehat{\bar\delta,\bar\varepsilon}) = 1-\sigma\upsilon\nu^2(\widehat{\bar\delta,\bar\varepsilon})$, ἄρα

$$\eta\mu^2(\widehat{\bar\delta,\bar\varepsilon}) = 1 - \frac{(\delta_1\varepsilon_1+\delta_2\varepsilon_2+\delta_3\varepsilon_3)^2}{(\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2)(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2)} =$$

$$= \frac{(\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2)(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2) - (\delta_1\varepsilon_1+\delta_2\varepsilon_2+\delta_3\varepsilon_3)^2}{(\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2)(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2)}$$

(σύμφωνα μέ τήν ταυτότητα τοῦ **Lagrange**) =

$$= \frac{\begin{vmatrix}\delta_2 & \delta_3\\ \varepsilon_2 & \varepsilon_3\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}\delta_3 & \delta_1\\ \varepsilon_3 & \varepsilon_1\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}\delta_1 & \delta_2\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{vmatrix}^2}{(\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2)(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2)}$$

καί ἐπομένως

$$(309.4) \qquad \eta\mu(\widehat{\bar\delta,\bar\varepsilon}) = \frac{+\sqrt{\begin{vmatrix}\delta_2 & \delta_3\\ \varepsilon_2 & \varepsilon_3\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}\delta_3 & \delta_1\\ \varepsilon_3 & \varepsilon_1\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}\delta_1 & \delta_2\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{vmatrix}^2}}{+\sqrt{\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2}\ +\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2}}$$

Ἄν καλέσουμε (ξ,η,ζ) τά συνημίτονα κατευθύνσεως τοῦ $\bar\delta$ καί (λ,μ,ν) τά συνημίτονα κατευθύνσεως τοῦ $\bar\varepsilon$, θά ἔχουμε τούς τύπους

$$\sigma\upsilon\nu(\widehat{\bar\delta,\bar\varepsilon}) = \xi\lambda+\eta\mu+\zeta\nu \quad , \quad \eta\mu(\widehat{\bar\delta,\bar\varepsilon}) = +\sqrt{\begin{vmatrix}\eta & \zeta\\ \mu & \nu\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}\zeta & \xi\\ \nu & \lambda\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}\xi & \eta\\ \lambda & \mu\end{vmatrix}^2}$$

§ 310. Ἐσωτερικό γινόμενο δυό διανυσμάτων. Στόν § 92 ὀνομάσαμε ἐσωτερικό γινόμενο δυό, ὄχι μηδενικῶν, διανυσμάτων $\bar\alpha$, $\bar\beta$ τόν ἀριθμό

$$(310.1) \qquad |\bar\alpha|\cdot|\bar\beta|\,\sigma\upsilon\nu(\widehat{\bar\alpha,\bar\beta}) = \bar\alpha\cdot\bar\beta = \bar\alpha\bar\beta \ .$$

Ἀπό τούς τύπους (309.1) καί (309.2) ἕπεται:

$$\bar\alpha\bar\beta = \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}\ \sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2}\ \frac{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}\ \sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2}}$$

$$(310.2) \qquad = \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3 \ .$$

Ἡ σχέση αὐτή ἰσχύει στήν περίπτωση ὅπου τό ἕνα ἤ καί τά δύο διανύσματα $\bar{\alpha},\bar{\beta}$ εἶναι μηδενικά, ὁπότε τό ἐσωτερικό γινόμενο $\bar{\alpha}\bar{\beta}$ εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ μηδέν.

<u>Ἰδιότητες τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου</u>

1) Τό $\bar{\alpha}\bar{\beta}$ εἶναι ἴσο μέ 0 ὅταν καί μόνον ὅταν εἴτε ὁ ἕνας τουλάχιστον παράγοντας εἶναι διάνυσμα μηδενικό εἴτε τά διανύσματα $\bar{\alpha}$ καί $\bar{\beta}$ εἶναι κάθετα πρός ἄλληλα (μποροῦμε τήν πρώτη περίπτωση νά τή συμπεριλάβουμε στή δεύτερη τῆς καθετότητας, ἄν συμφωνήσουμε νά θεωρήσουμε τό μηδενικό διάνυσμα κάθετο πρός κάθε διάνυσμα).

2) Τό $\bar{\alpha}\bar{\beta}$ εἶναι θετικό ἤ ἀρνητικό καθόδον ἡ στοιχειώδης γωνία τῶν $\bar{\alpha}$ καί $\bar{\beta}$ εἶναι ὀξεία ἤ ἀμβλεία.

3) Τό $\bar{\alpha}\,\bar{\beta} = |\bar{\alpha}|$ ἐπί τό προσημασμένο μέτρο τῆς ὀρθῆς προβολῆς τοῦ $\bar{\beta}$ πάνω σέ ἄξονα παράλληλο καί ὁμόροπο πρός τό $\bar{\alpha}$, ἐπίσης $\bar{\alpha}\bar{\beta} = |\bar{\beta}|$ ἐπί τό προσημασμένο μέτρο τῆς ὀρθῆς προβολῆς τοῦ $\bar{\alpha}$ πάνω σέ ἄξονα παράλληλο καί ὁμόρροπο πρός τό $\bar{\beta}$.

310.3) 4) Ἰδιότητα ἀντιμεταθέσεως: $\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta} = \bar{\beta}\cdot\bar{\alpha}$

(310.4) 5) " ἐπιμεριστική $(\bar{\alpha}+\bar{\beta})\bar{\gamma} = \bar{\alpha}\bar{\gamma}+\bar{\beta}\bar{\gamma}$.

Αὐτή ἀποδείχνεται εὔκολα μέ χρήση τοῦ τύπου (310.2).

(310.5) 6) $(\lambda\bar{\alpha})\bar{\beta} = \bar{\alpha}(\lambda\bar{\beta}) = \lambda(\bar{\alpha}\bar{\beta})$,

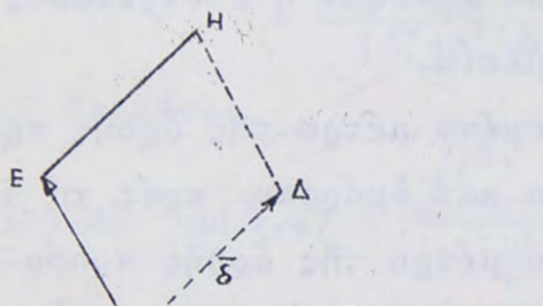
ὅπου λ πραγματικός ἀριθμός.

§ 311. <u>Ἐξωτερικό γινόμενο δυό διανυσμάτων</u>. Ἄς εἶναι $\bar{\delta}(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$ καί $\bar{\varepsilon}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ δυό (ἐλεύθερα) διανύσματα ὄχι συγγραμμικά ($\bar{\delta} \nparallel \bar{\varepsilon}$) καί ἑπομένως ὄχι μηδενικά ($\bar{\delta} \neq 0$, $\bar{\varepsilon} \neq 0$) ἀντιπροσωπευόμενα ἀπό τά ἐφαρμοστά διανύσματα $\overline{O\Delta} = \bar{\delta}$ καί $\overline{OE} = \bar{\varepsilon}$. Ἐξωτερικό ἤ διανυσματικό γινόμενο $[\bar{\delta}\ \bar{\varepsilon}]$, ὅπου π ρ ῶ τ ο ς παράγοντας τό $\bar{\delta}$ καί δ ε ύ τ ε ρ ο ς τό $\bar{\varepsilon}$, λέγεται τό ἐλεύθερο διάνυσμα $\bar{k} = \overline{OK}$ μέ τά ἀκόλουθα στοιχεῖα

$$\begin{cases} \text{μῆκος τόν ἀριθμό } |\bar{\delta}|\cdot|\bar{\varepsilon}|\,\text{ημ}(\widehat{\bar{\delta},\bar{\varepsilon}}) \,, \\ \text{διεύθυνση κάθετη στό ἐπίπεδο ΟΔΕ } (\perp \text{ καί στό } \bar{\delta} \text{ καί στό } \bar{\varepsilon}) \\ \text{φορά πού κάνει τήν τριάδα } (\overline{ΟΔ}, \overline{ΟΕ}, \overline{ΟΚ}) \text{ δεξιόχερη.} \end{cases}$$

Ἄν εἴτε $\bar{\delta}$ καί $\bar{\varepsilon}$ εἶναι συγγραμμικά ($\bar{\delta} \parallel \bar{\varepsilon}$) εἴτε, εἰδικότερα, ὁ ἕνας τουλάχιστο ἀπό τούς παράγοντας $\bar{\delta}, \bar{\varepsilon}$ εἶναι τό μηδενικό διάνυσμα, τότε ὁρίζουμε τό ἐξωτερικό τους γινόμενο $[\bar{\delta}\;\bar{\varepsilon}]$ ἴσο μέ τό μηδενικό διάνυσμα.

Παρατηροῦμε ὅτι ὁ ἀριθμός $|\bar{\delta}|\cdot|\bar{\varepsilon}|\,\text{ημ}(\widehat{\bar{\delta},\bar{\varepsilon}})$ πού δίνει τό μῆκος $\big|[\bar{\delta}\cdot\bar{\varepsilon}]\big|$ τοῦ ἐξωτερικοῦ γινομένου δίνει καί τό ἐμβαδό τοῦ παραλληλογράμοου ΟΔΗΕ πού ἔχει προσκείμενες πλευρές τίς $\overline{ΟΔ} = \bar{\delta}$ καί $\overline{ΟΕ} = \bar{\varepsilon}$.



Ἀπό τόν ὁρισμό ἕπονται ἀμέσως τά ἑξῆς:

1) Τό ἐξωτερικό γινόμενο μηδενίζεται εἴτε ὅταν ἕνα τουλάχιστο ἀπό τάδιανύσματα $\bar{\delta}$ καί $\bar{\varepsilon}$ εἶναι μηδενικό εἴτε ὅταν τά δυό διανύσματα εἶναι συγγραμμικά.

2) Ἄν στό ἐξωτερικό γινόμενο $[\bar{\delta}\;\bar{\varepsilon}]$ ἐνάλλαξουμε τήν τάξη τῶν παραγόντων, τό ἐξωτερικό γινόμενο πολλαπλασιάζεται ἐπί -1: $[\bar{\varepsilon}\bar{\delta}] = -[\bar{\delta}\;\bar{\varepsilon}]$.

3) Ἄν ἕνας ἀπό τούς παράγοντες πολλαπλασιασθῆ ἐπί ἕναν ἀριθμό λ, καί τό γινόμενο πολλαπλασιάζεται ἐπί λ:

$$[\lambda\bar{\delta}\;\;\bar{\varepsilon}] = \lambda[\bar{\delta}\bar{\varepsilon}].$$

4) Θά δείξουμε ἀργότερα ὅτι ἰσχύει καί ἡ ἐπιμεριστική ἰδιότητα:

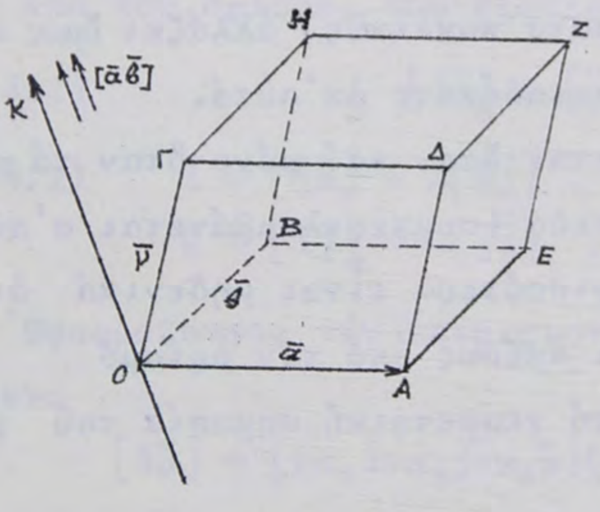
$$[(\bar{\delta}+\bar{\zeta})\bar{\varepsilon}] = [\bar{\delta}\bar{\varepsilon}] + [\bar{\zeta}\bar{\varepsilon}] \;.$$

§ 312. <u>Μικτό γινόμενο τριῶν διανυσμάτων.</u> Τό ἐσωτερικό γινόμενο τοῦ ἐξωτερικοῦ γινομένου $[\bar{\alpha}\bar{\beta}]$ ἐπί τό διάνυσμα $\bar{\gamma}$ καλεῖται μ ι κ τ ό γ ι ν ό μ ε ν ο τῆς διατεταγμένης τριάδας τῶν διανυσμάτων $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ καί $\bar{\gamma}$.

Ἄς λάβουμε τό O κοινήν ἀρχή τῶν $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ καί ἄς ὑποθέσουμε ὅτι τά τρία αὐτά διανύσματα δέν εἶναι συνεπίπεδα (δηλ. παράλληλα πρός ἕνα καί τό ἴδιο ἐπίπεδο).

Τό ἐσωτερικό γινόμενο τῶν $[\bar{\alpha}\ \bar{\beta}]$ καί $\bar{\gamma}$ ἰσοῦται, ὅπως εἶναι γνωστό, μέ τό μέτρο τοῦ ἑνός διανύσματος, π.χ. μέ τό $\left|[\bar{\alpha}, \bar{\beta}]\right|$ ἐπί τό προσημασμένο μέτρο τῆς ὀρθῆς προβολῆς τοῦ ἄλλου διανύσματος $\bar{\gamma}$ πάνω σ' ἕναν ἄξονα ὁμόρροπο μέ τό $[\bar{\alpha}\ \bar{\beta}]$.

Ἀλλά $\left|[\bar{\alpha}\bar{\beta}]\right|$ ἰσοῦται μέ τό ἐμβαδό τοῦ παραλληλογράμμου ΟΑΕΒ, τό δέ μέτρο τῆς ὀρθῆς προβολῆς τοῦ $\bar{\gamma}$ πάνω στήν κάθετη ΟΚ πρός τό ἐπίπεδο ΟΑΕΒ εἶναι τό ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου πού ὁρίζεται ἀπό τά τρία μή συνεπίπεδα διανύσματα $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ ὅταν ληφθῆ κοινή ἡ ἀρχή τους.



Ἐξ ἄλλου βλέπουμε ἀμέσως ὅτι τό προσημασμένο μέτρο τῆς ἴδιας προβολῆς εἶναι > 0 ἄν τό διάνυσμα $\overline{\text{ΟΓ}}$ βρίσκεται σέ κείνη τή μεριά τοῦ χώρου, ὡς πρός τό ἐπίπεδο ΟΑΕΒ, στήν ὁποία βρίσκεται καί τό $[\bar{\alpha}\bar{\beta}]$ ὅταν ἀχθῆ ἀπό τό O, δηλαδή ἄν τό σύστημα $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ εἶναι δεξιόχερο, καί < 0 ἄν τό $\overline{\text{ΟΓ}}$ βρίσκεται στήν ἄλλη μεριά τοῦ ἐπιπέδου ΟΑΕΒ, δηλαδή ἄν τό σύστημα $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ εἶναι ἀριστερόχερο.

Ἄς ὁρίσουμε τώρα ὡς π ρ ο σ η μ α σ μ έ ν ο ὄγκο τοῦ παραλληλεπίπεδου τῶν τριῶν διανυσμάτων $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$. είλημμένων κατά τή σειρά $\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}$, τόν ἀπό τή στοιχειώδη Γεωμετρία γνωστό ὄγκο μέ τό πρόσημο + ἤ − καθόσον τό σύστημα $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ εἶναι δεξιόχερο ἤ ἀριστερόχερο. Τότε σύμφωνα μέ τά παραπάνω τό μικτό γιβόμενο $[\bar{\alpha}\bar{\beta}]\,\bar{\gamma}$ ἰσοῦται μέ τόν προσημασμένο ὄγκο παραλληλεπίπεδου πού ὁρίζεται ἀπό τά $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ παρμένα μέ αὐτή τή σειρά, ὅταν ληφθῆ κοινή ἡ ἀρχή τῶν τριῶν διανυσμάτων.

Τό μικτό γινόμενο τῶν $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ συμβολίζεται ὡς ἑξῆς:

$$(\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}) \quad \text{δηλ.} \quad (\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}) = [\bar{\alpha}\bar{\beta}]\,\bar{\gamma}\,.$$

Ἀπό τά παραπάνω ἕπεται ὅτι

$$(312.1) \qquad [\bar{\alpha}\bar{\beta}]\bar{\gamma} = [\bar{\beta}\bar{\gamma}]\,\bar{\alpha} = [\bar{\gamma}\bar{\alpha}]\bar{\beta} = \bar{\gamma}[\bar{\alpha}\bar{\beta}] = \bar{\alpha}[\bar{\beta}\bar{\gamma}] = \bar{\beta}[\bar{\gamma}\bar{\alpha}] =$$
$$= -[\bar{\beta}\bar{\alpha}]\bar{\gamma} = -\bar{\alpha}[\bar{\gamma}\bar{\beta}] = -\bar{\beta}[\bar{\alpha}\bar{\gamma}] = -\bar{\gamma}[\bar{\beta}\bar{\alpha}] = -\bar{\alpha}[\bar{\gamma}\bar{\beta}] = -\bar{\beta}[\bar{\alpha}\bar{\gamma}]\,.$$

Δηλαδή

$$(312.2) \qquad (\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}) = (\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\alpha}) = (\bar{\gamma}\bar{\alpha}\bar{\beta}) = -(\bar{\beta}\bar{\alpha}\bar{\gamma}) = -(\bar{\alpha}\bar{\gamma}\bar{\beta}) = -(\bar{\gamma}\bar{\beta}\bar{\alpha})$$

Ὥστε τό μικτό γινόμενο $(\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma})$ τῶν διανυσμάτων δέν ἀλλάζει ἄν ἐναλλάξουμε τά τρία διανύσματα κυκλικῶς, ἀλλάζει ὅμως πρόσημο ἄν ἀντιμεταθέσουμε δυό ὁποιαδήποτε ἀπ'αὐτά.

Τό μικτό γινόμενο μηδενίζεται ὅταν καί μόνο ὅταν τά τρία διανύσματα $\bar{\alpha}$,$\bar{\beta}$,$\bar{\gamma}$ εἶναι συνεπίπεδα (συμπεριλαμβάνεται σ'αὐτό καί ἡ περίπτωση ὅπου ἕνα ἤ περισσότερα εἶναι μηδενικά διανύσματα), ὅπως τοῦτο συνάγεται ἀμέσως ἀπό τόν ὁρισμό $(\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}) = [\bar{\alpha}\bar{\beta}]\bar{\gamma}$ καθώς καί ἀπό τή γεωμετρική σημασία τοῦ μικτοῦ γινομένου.

Ὥστε $(\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}) = 0$ εἶναι ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη γιά νά εἶναι τά τρία διανύσματα $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ συνεπίπεδα.

§ 313. Ἀπόδειξη τῆς ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητας γιά τό ἐξωτερικό γινόμενο.

$$(313.1) \qquad [(\bar{\alpha}+\bar{\beta})\bar{\delta}] = [\bar{\alpha}\bar{\delta}] + [\bar{\beta}\bar{\delta}]\,.$$

Θά δείξουμε πρῶτα ὅτι οἱ τετμημένες τῶν δυό διανυσμάτων

$$[(\bar{\alpha}+\bar{\beta})\bar{\delta}] \quad \text{καί} \quad [\bar{\alpha}\bar{\delta}] + [\bar{\beta}\bar{\delta}]$$

εἶναι ἴσες.

Ἔχουμε:

$$[(\bar{\alpha}+\bar{\beta})\bar{\delta}]\bar{i} = ((\bar{\alpha}+\bar{\beta})\bar{\delta}\bar{i}) = (\bar{\alpha}+\bar{\beta})[\bar{\delta}\bar{i}] .$$

Στό ἐσωτερικό ὅμως γινόμενο τοῦ τελευταίου μέλους μποροῦμε νά ἐφαρμόσουμε τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα (310.4) τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου, ὁπότε:

$$(\bar{\alpha}+\bar{\beta})[\bar{\delta}\bar{i}] = \bar{\alpha}[\bar{\delta}\bar{i}] + \bar{\beta}[\bar{\delta}\bar{i}] = (\bar{\alpha}\bar{\delta}\bar{i}) + (\bar{\beta}\bar{\delta}\bar{i}) = [\bar{\alpha}\bar{\delta}]\bar{i} + [\bar{\beta}\bar{\delta}]\bar{i} .$$

Ὅμοια ἀποδείχνεται ἡ ἰσότητα καί τῶν δύο ἄλλων συντεταγμένων τοῦ ἀριστεροῦ καί τοῦ δεξιοῦ μέλους τῆς (313.1).

§ 314. <u>Συντεταγμένες τοῦ ἐξωτερικοῦ γινομένου.</u> Σ' ἕνα δεξιόχερο ὀρθογ. σύστημα συντεταγμένων $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ ἄς εἶναι

$$\bar{\alpha} = \alpha_1\bar{i} + \alpha_2\bar{j} + \alpha_3\bar{k} \ , \ \bar{\beta} = \beta_1\bar{i} + \beta_2\bar{j} + \beta_3\bar{k} .$$

Ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ ἐξωτερικοῦ γινομένου ἕπεται

(314.1) $$[\bar{i}\bar{i}] = [\bar{j}\bar{j}] = [\bar{k}\bar{k}] = 0 .$$

(314.2) $$\bar{i} = [\bar{j}\bar{k}] = -[\bar{k}\bar{j}] \ , \ \bar{j} = [\bar{k}\bar{i}] = -[\bar{i}\bar{k}] \ ,$$
$$\bar{k} = [\bar{i}\bar{j}] = -[\bar{j}\bar{i}] .$$

Ἐφαρμόζοντας τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα στό ἐξωτερικό γινόμενο

$$[\bar{\alpha}\bar{\beta}] = [(\alpha_1\bar{i}+\alpha_2\bar{j}+\alpha_3\bar{k})(\beta_1\bar{i}+\beta_2\bar{j}+\beta_3\bar{k})] .$$

καί λαμβάνοντας ὑπ'ὄψη τίς σχέσεις (314.1) καί (314.2) βρίσκουμε

$$[\bar{\alpha}\bar{\beta}] = \alpha_1\beta_2\bar{k} - \alpha_2\beta_1\bar{k} + \alpha_3\beta_1\bar{j} - \alpha_1\beta_3\bar{j} + \alpha_2\beta_3\bar{i} - \alpha_3\beta_2\bar{i}$$

Ἄρα

(314.3) $$[\bar{\alpha}\bar{\beta}] = \bar{i}(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2) + \bar{j}(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3) + \bar{k}(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1).$$

Επομένως οἱ συντεταγμένες τοῦ ἐξωτερικοῦ γινομένου $\bar{\zeta} = [\bar{\alpha}\bar{\beta}]$ εἶναι

(314.4) $$\zeta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \ , \ \zeta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 \\ \beta_3 & \beta_1 \end{vmatrix} \ , \ \zeta_3 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

Τό δεξιό μέλος τῆς (314.3) μποροῦμε νά τό γράφουμε πιό εὐκολοθύμητα σάν ὁρίζουσα πού θά ἔχουμε ν'ἀναπτύξουμε κατά τά στοιχεῖα τῆς πρώτης γραμμῆς, ὡς ἑξῆς:

(314.5) $$[\bar{\alpha}\ \bar{\beta}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

§ 315. Ἔκφραση τοῦ μικτοῦ γινομένου μέ συντεταγμένες.

Ἄς εἶναι

$$\bar{\alpha} = \alpha_1\bar{i} + \alpha_2\bar{j} + \alpha_3\bar{k} \quad , \quad \bar{\beta} = \beta_1\bar{i} + \beta_2\bar{j} + \bar{\beta}_3\bar{k} ,$$

$$\bar{\gamma} = \gamma_1\bar{i} + \gamma_2\bar{j} + \gamma_3\bar{k} .$$

Τότε:

$$(\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}) = [\bar{\alpha}\bar{\beta}]\,\bar{\gamma} = (\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\gamma_1 + (\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)\gamma_2 + (\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\gamma_3 .$$

Δηλαδή

(315.1) $$(\bar{\alpha}\ \bar{\beta}\bar{\gamma}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

Ἐφαρμογές.

1) Ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη γιά νά εἶναι 3 διανύσματα $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ συνεπίπεδα εἶναι ἡ

(315.2) $$(\alpha\beta\gamma) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Ἀπό τή συνθήκη αὐτή ἔπεται, σύμφωνα μέ τόν § 54, ὅτι θά ὑπάρχουν τότε 3 ἀριθμοί λ, μ, ν ὄχι ὅλοι μηδενικοί, τέτοιοι ὥστε:

(315.3) $$\lambda\bar{\alpha} + \mu\bar{\beta} + \nu\bar{\gamma} = 0$$

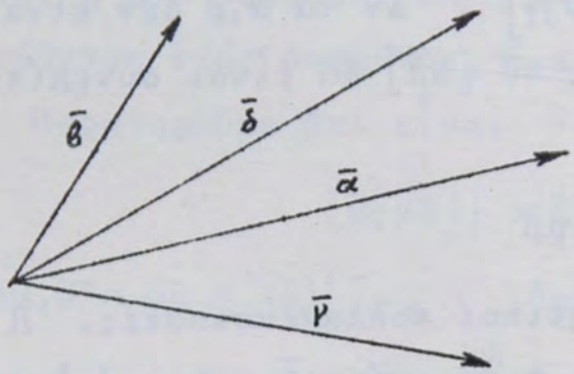
Δηλαδή

$\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 + \nu\gamma_1 = 0 \quad , \quad \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2 + \nu\gamma_2 = 0 \quad , \quad \lambda\alpha_3 + \mu\beta_3 + \nu\gamma_3 = 0 .$

2) Νά βρεθοῦν οἱ συνιστῶσες ἑνός διανύσματος $\bar{\delta}$ κατά τίς διευθύνσεις 3 δοσμένων, ὄχι συνεπίπεδων διανυσμάτων $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$.

Ἔχουμε

$$\bar{\delta} = \lambda\bar{\alpha} + \mu\bar{\beta} + \nu\bar{\gamma} \tag{315.4}$$



ὅπου λ, μ, ν προσδιοριστέοι ἀριθμητικοί συντελεστές. Ἄν πολλαπλασιάσουμε καί τά δυό μέλη τῆς (315.4) ἐσωτερικῶς ἐπί τό διάνυσμα $[\bar{\beta}\bar{\gamma}]$ βρίσκουμε:

$$(\bar{\delta}\bar{\beta}\bar{\gamma}) = \lambda(\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}) + \mu(\bar{\beta}\bar{\beta}\bar{\gamma}) + \nu(\bar{\gamma}\bar{\beta}\bar{\gamma}) .$$

Εἶναι ὅμως $(\bar{\beta}\bar{\beta}\bar{\gamma}) = (\bar{\gamma}\bar{\beta}\bar{\gamma}) = 0$ καί $(\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}) \neq 0$, ἄρα

$$\lambda = \frac{(\bar{\delta}\bar{\beta}\bar{\gamma})}{(\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma})} . \tag{315.5}$$

Πολλαπλασιάζοντας τήν (315.4) ἐσωτερικῶς πρῶτα ἐπί $[\bar{\gamma}\bar{\alpha}]$ δεύτερον ἐπί $[\bar{\alpha}\bar{\beta}]$ βρίσκουμε ἀντιστοίχως

$$\mu = \frac{(\bar{\delta}\bar{\gamma}\bar{\alpha})}{(\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma})} = \frac{(\bar{\alpha}\bar{\delta}\bar{\gamma})}{(\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma})} , \quad \nu = \frac{(\bar{\delta}\bar{\alpha}\bar{\beta})}{(\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma})} = \frac{(\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\delta})}{(\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma})} . \tag{315.6}$$

Εὔκολα βλέπουμε ὅτι τίς ἴδιες τιμές τῶν λ, μ, ν θά βρίσκαμε ἄν ἐπιλύναμε ὡς πρός λ, μ, ν τό σύστημα

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_1 &= \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 + \nu\gamma_1 \\ \delta_2 &= \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2 + \nu\gamma_2 \\ \delta_3 &= \lambda\alpha_3 + \mu\beta_3 + \nu\gamma_3 \end{aligned} \right. \tag{315.7}$$

τό ὁποῖον ἰσοδυναμεῖ μέ τή διανυσματική ἐξίσωση (315.4). Ἀπό τίς (315.7) βρίσκουμε πράγματι κατά Cramer

$$\lambda = \frac{\begin{vmatrix} \delta_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \delta_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \delta_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}} = \frac{(\bar\delta\ \bar\beta\ \bar\gamma)}{(\bar\alpha\ \bar\beta\ \bar\gamma)} \quad , \qquad \text{κτλ.}$$

§ 316. Δίς ἐξωτερικό γινόμενο. Ἄς εἶναι $\bar\alpha$, $\bar\beta$, $\bar\gamma$ τρία διανύσματα. Θεωροῦμε τό $\bar\delta = \big[[\bar\alpha\bar\beta]\bar\gamma\big]$. Ἄν τά $\bar\alpha, \bar\beta$ δέν εἶναι συγγραμμικά, τό $\bar\delta$ σάν κάθετο πρός τό $[\bar\alpha\bar\beta]$ θά εἶναι συνεπίπεδο μέ τά $\bar\alpha, \bar\beta$. Ἄρα

(316.1) $$\bar\delta = \lambda\bar\alpha + \mu\bar\beta$$

ὅπου λ καί μ κατάλληλοι ἀριθμητικοί πολλαπλασιαστές. Ἡ σχέση αὐτή ἰσχύει καί γιά $\bar\alpha // \bar\beta$, διότι τότε $\bar\delta = 0$ καί ἑπομένως $\bar\delta = 0\cdot\bar\alpha + 0\cdot\bar\beta$ δηλαδή $\lambda = 0$, $\mu = 0$. Γιά τόν καθορισμό τῶν λ καί μ συλλογιζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Ἄς εἶναι $\bar{i}$ ἕνα μοναδιαῖο διάνυσμα συγγραμμικό μέ τό διάνυσμα $\bar\alpha$, καί $\bar{j}$ ἕνα μοναδιαῖο διάνυσμα κάθετο πρός τό $\bar{i}$ καί συνεπίπεδο μέ τά $\bar\alpha$ καί $\bar\beta$· θά ἔχουμε τότε:

$$\bar\alpha = \alpha_1\bar{i} \quad , \quad \bar\beta = \beta_1\bar{i} + \beta_2\bar{j}$$

θά εἶναι δέ, ἄν θέσουμε $\bar{k} = [\bar{i}\ \bar{j}]$,

$$\bar\gamma = \gamma_1\bar{i} + \gamma_2\bar{j} + \gamma_3\bar{k} \ .$$

Σύμφωνα μέ τόν ἐπιμεριστικό νόμο θά θά ἔχουμε λοιπόν:

$$[\bar\alpha\bar\beta] = [\alpha_1\bar{i}(\beta_1\bar{i}+\beta_2\bar{j})] = \text{μηδεν.διάν.} + \alpha_1\beta_2[\bar{i}\bar{j}] = \alpha_1\beta_2\bar{k},$$

$$\big[[\bar\alpha\bar\beta]\ \bar\gamma\big] = [\alpha_1\beta_2\bar{k},(\gamma_1\bar{i}+\gamma_2\bar{j}+\gamma_3\bar{k})] = \alpha_1\beta_2\gamma_1[\bar{k}\bar{i}] + \alpha_1\beta_2\gamma_2[\bar{k}\bar{j}]+0$$

$$= \alpha_1\beta_2\gamma_1\bar{j} - \alpha_1\beta_2\gamma_2\bar{i} = \alpha_1\gamma_1(\beta_2\bar{j}) - \beta_2\gamma_2(\alpha_1\bar{i}) =$$

$$= \alpha_1\gamma_1(\bar\beta-\beta_1\bar{i}) - \beta_2\gamma_2\alpha_1\bar{i}$$

$$= \alpha_1\gamma_1\bar\beta - (\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2)\alpha_1\bar{i} = (\bar\alpha\bar\gamma)\bar\beta - (\bar\beta\bar\gamma)\bar\alpha \ .$$

Δηλαδή

(316.2) $$\left[[\bar{\alpha}\bar{\beta}]\bar{\gamma}\right] = (\bar{\alpha}\bar{\gamma})\bar{\beta} - (\bar{\beta}\bar{\gamma})\bar{\alpha} \quad .$$

Τό δεξιό μέλος λέγεται ἀνάπτυγμα τοῦ δίς ἐξωτερικοῦ γινομένου $\left[[\bar{\alpha}\bar{\beta}]\bar{\gamma}\right]$.

<u>Ἐφαρμογή</u>.

Ζητεῖται ν'ἀναλύσουμε ἕνα διάνυσμα $\bar{\beta}$ σέ 2 συνιστῶσες κάθετες ἡ μιά πρός τήν ἄλλη ἀπό τίς ὁποῖες ἡ μιά νά ἔχη τήν διεύθυνση ἑνός δοσμένου, ὄχι μηδενικοῦ διανύσματος $\bar{\alpha}$.

Παρατηροῦμε ὅτι εἶναι

$$[\bar{\alpha}[\bar{\beta}\bar{\alpha}]] = \bar{\alpha}^2\bar{\beta} - (\bar{\alpha}\bar{\beta})\bar{\alpha}$$

ὅπου $\bar{\alpha}^2 = \bar{\alpha}\bar{\alpha} = |\bar{\alpha}|^2$, ἄρα

$$\bar{\beta} = \frac{\bar{\alpha}\bar{\beta}}{\bar{\alpha}^2}\bar{\alpha} + \frac{1}{\bar{\alpha}^2}[\bar{\alpha}\,[\bar{\beta}\bar{\alpha}]]$$

ὅπου ὁ μέν πρῶτος προσθετέος $\frac{\bar{\alpha}\bar{\beta}}{\bar{\alpha}^2}\bar{\alpha}$ εἶναι $/\!/\bar{\alpha}$, ὁ δέ δεύτερος $\frac{1}{\bar{\alpha}^2}[\bar{\alpha}\,[\bar{\beta}\bar{\alpha}]]\perp$ πρός $\bar{\alpha}$.

Αὐτές λοιπόν εἶναι οἱ ζητούμενες συνιστῶσες.

§ 317. <u>Ἐξίσωση ἐπιπέδου.</u> Ἔστω p ἕνα ἐπίπεδο, $M_o(x_o,y_o,z_o)$ ἕνα σημεῖο του, $\overline{M_o\Delta}\,(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$ καί $\overline{M_oE}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ δυό ὄχι συγγραμμικά διανύσματα κείμενα μέσα στό p.

Γιά νά ἀνήκη ἕνα σημεῖο P(x,y,z) τοῦ χώρου στό p, πρέπει καί ἀρκεῖ τό $\overline{M_oP}$ νά εἶναι συνεπίπεδο τῶν $\overline{M_o\Delta}$ καί $\overline{M_oE}$, ἐπομένως

$$\overline{M_oP} = \lambda\overline{M_o\Delta} + \mu\overline{M_oE} \quad ,$$

ὅπου λ καί μ πραγματικοί πολλαπλασιαστές.

Ἄρα πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι

$$x-x_o = \lambda\delta_1 + \mu\varepsilon_1 \ , \quad y-y_o = \lambda\delta_2 + \mu\varepsilon_2 \ , \quad z-z_o = \lambda\delta_3 + \mu\varepsilon_3$$

καί ἐπομένως (πρβ.κεφάλαιο 4ο καί 5ο) :

(317.1) $$\begin{vmatrix} x-x_o & y-y_o & z-z_o \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} = 0$$

Ἡ σχέση αὐτή εἶναι μιά ἐξίσωση

$$(317.2)\quad \begin{vmatrix} \delta_2 & \delta_3 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} \cdot x - \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_3 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} \cdot y + \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \end{vmatrix} \cdot z - \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} = 0$$

1ου βαθμοῦ ὡς πρός x, y, z δηλ. τῆς μορφῆς

$$(317.3)\qquad Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$$

μέ $|A| + |B| + |\Gamma| \neq 0$.

(Τό ὅτι ἕνας τουλάχιστο ἀπό τούς συντελεστές A, B, Γ εἶναι $\neq 0$ ἕπεται ἀπό τήν ὑπόθεση ὅτι τά $\overline{M_0\Delta}$, $\overline{M_0E}$ δέν εἶναι συγγραμμικά, ἄρα ὁ πίνακας $\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$ ἔχει διάσταση 2).

Λέμε ὅτι τό ἐπίπεδο p παριστάνεται ἀπό τήν ἐξίσωση (317.1) ἤ (317.2) ἤ ὅτι τό p ἔχει ἐξίσωση τήν (317.1) ἤ (317.2) κτλ. Ἀντιστρόφως μιά πρωτοβάθμια ἐξίσωση

$$(317.4)\qquad A_1x + B_1y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0 \quad , \left(|A_1| + |B_1| + |\Gamma_1| \neq 0\right),$$

εἶναι ἐξίσωση ἑνός ἐπιπέδου p_1, δηλαδή οἱ λύσεις της (x,y,z) εἶναι οἱ συντεταγμένες τῶν σημείων ἑνός ἐπιπέδου p_1.

Πράγματι ἡ (317.4) ἔχει κατά τό 5ο κεφάλαιο μιά διπαραμετρική ἀπειρία λύσεων. Ἔστω (x_1, y_1, z_1) μιά ὁρισμένη λύση, ὁπότε

$$A_1x_1 + B_1y_1 + \Gamma_1 x_1 + \Delta_1 = 0 \quad ,$$

ἀπ' ὅπου

$$\Delta_1 = -(A_1x_1 + B_1y_1 + \Gamma_1 z_1).$$

Ἄρα ἡ (317.4) γράφεται καί ὡς ἑξῆς (ὕστερα ἀπό τήν ἀντικατάσταση τοῦ Δ_1)

$$(317.5)\qquad A_1(x-x_1) + B_1(y-y_1) + \Gamma_1(z-z_1) = 0$$

Ἀπό τούς τρεῖς συντελεστές A_1, B_1, Γ_1 ἕνας τουλάχιστον εἶναι $\neq 0$. Ἄς εἶναι π.χ. $A_1 \neq 0$. Τότε ἡ (317.5) γράφεται καί ὡς ἑξῆς:

$$\frac{1}{A_1}\cdot\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ -B_1 & A_1 & 0 \\ -\Gamma_1 & 0 & A_1 \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Ἄρα, σύμφωνα μέ τά προηγούμενα, ἡ θεωρούμενη ἐξίσωση ἔχει γιά λύσεις της τίς τριάδες, καί μόνο, τῶν συντεταγμένων τῶν σημείων $M(x,y,z)$ τοῦ ἐπιπέδου p_1 τό ὁποῖο περιέχει τό σημεῖο $M_1(x_1,y_1,z_1)$ καί τά δυό μή συγγραμμικά διανύσματα $\overline{M_1\Delta_1}$ καί $\overline{M_1E_1}$ μέ συντεταγμένες $(-B_1, A_1, 0)$ καί $(-\Gamma_1, 0, A_1)$ ἀντιστοίχως. Ἔτσι ὁ ἰσχυρισμός μας ἀποδείχτηκε.

§ 318. <u>Παρατηρήσεις</u>. Τά παραπάνω ἰσχύουν σέ ὁποιαδήποτε συστήματα (παράλληλων εὐθύγραμμων) συντεταγμένων. Ἄν εἰδικῶς τό σύστημα τῶν συντεταγμένων εἶναι ὀρθογώνιο (μέ βασικά διανύσματα ἴσόμηκα πρός τήν μονάδα μήκους), τότε τό ἀριστερό μέλος τῆς (317.1) μπορεῖ νά ἑρμηνευθῆ σάν μικτό γινόμενο τῶν $\overline{M_0P}$, $\overline{\delta}, \overline{\varepsilon}$· ἔτσι, θέτοντας $\overline{M_0P} = \overline{OP} - \overline{OM_0} = \overline{r}-\overline{r}_0$, λαβαίνουμε τήν ἑξῆς διανυσματική ἔκφραση τῆς ἐξισώσεως τοῦ ἐπιπέδου p (ἤ δ ι α ν υ σ μ α τ ι κ ή ἐ ξ ί σ ω σ η τοῦ p)

$$(318.1) \qquad \left((\overline{r}-\overline{r}_0)\overline{\delta}\ \overline{\varepsilon}\right) = 0 \quad .$$

Μέ τήν ἴδια προϋπόθεση τῆς ὀρθογωνιότητος τοῦ συστήματος συντεταγμένων ἡ ἐξίσωση (317.3) μπορεῖ νά ἑρμηνευθῆ διανυσματικά ὡς ἑξῆς: εἰσάγουμε τό διάνυσμα $\overline{k}(A,B,\Gamma)$ πού εἶναι κάθετο πρός τά δύο διανύσματα $\overline{\delta}(-B,A,0)$, $\overline{\varepsilon}(-\Gamma,0,A)$ τά παράλληλα πρός τό p· ἄρα $\overline{k}\perp p$.

Ἑπομένως ἄν θέσουμε πάλι $\overline{r} = \overline{OP} = x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$, θά μποροῦμε νά γράφουμε τήν (317.3) ὡς ἑξῆς

$$(318.1) \qquad \overline{k}\overline{r} = -\Delta(=\text{σταθερά}) \quad .$$

Ἔτσι ἔχουμε μιάν ἄλλη διανυσματική μορφή τῆς ἐξισώσεως τοῦ P.

Παρατηροῦμε ὅτι γιά νά εἶναι τό διάνυσμα $\overline{\delta}$ μέ συντεταγμένες $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ παράλληλο πρός τό ἐπίπεδο $Ax+By+\Gamma z+\Delta = 0$ πρέπει ναί ἀρκεῖ νά εἶναι

$$A\delta_1 + B\delta_2 + \Gamma\delta_3 = 0 \ .$$

Σύμφωνα μέ τά παραπάνω ἕνα ἐπίπεδο χαρακτηρίζεται ἀναλυτικῶς ὄχι ἀπό τίς τέσσερις τιμές τῶν συντελεστῶν A, B, Γ, Δ καθεαυτές, ἀλλά ἀπό τίς τιμές τῶν λόγων τῶν τριῶν ἀπό αὐτούς πρός τόν τέταρτο, π.χ., γιά $\Delta \neq 0$, τῶν λόγων $A:\Delta$, $B:\Delta$, $\Gamma:\Delta$, ("χαρακτηρίζεται" σημαίνει: σέ κάθε ἐπίπεδο ἀντιστοιχεῖ ἕνα μόνο σύστημα τιμῶν τῶν τριῶν λόγων καί σέ δυό διάφορα ἐπίπεδα ἀντιστοιχοῦν δυό διάφορα συστήματα τιμῶν τῶν τριῶν λόγων).

Σύμφωνα μέ αὐτά τό σύνολο τῶν ἐπιπέδων τοῦ χώρου εἶναι τριπαραμετρικό.

Οἱ ἐξισώσεις $x = c$, ὅπου c αὐθαίρετη σταθερά, παριστάνουν τά ἐπίπεδα τά // YOZ.

Οἱ ἐξισώσεις $y = c$, ὅπου c αὐθαίρετη σταθερά, παριστάνουν τά ἐπίπεδα τά // ZOX.

Οἱ ἐξισώσεις $z = c$, ὅπου c αὐθαίρετη σταθερά, παριστάνουν τά ἐπίπεδα τά // XOY.

Οἱ ἐξισώσεις $By+\Gamma z+\Delta = 0$, στίς ὁποῖες ὁ συντελεστής τοῦ x εἶναι μηδενικός, παριστάνουν τά ἐπίπεδα τά παράλληλα πρός τόν ἄξονα OX κ.ο.κ.

Οἱ ἐξισώσεις $Ax+By+\Gamma z = 0$ παριστάνουν τά ἐπίπεδα πού διέρχονται ἀπό τήν ἀρχή $O(0,0,0)$.

Ὅταν $A \neq 0$, $B \neq 0$, $\Gamma \neq 0$, τό ἐπίπεδο μέ ἐξίσωση $Ax+By+\Gamma z+\Delta = 0$ τέμνει τούς ἄξονες OX, OY, OZ στά σημεῖα πού ἔχουν συντεταγμένες $\left(-\frac{\Delta}{A}, 0, 0\right)$ $\left(0, -\frac{\Delta}{B}, 0\right)$ καί $\left(0, 0, -\frac{\Delta}{\Gamma}\right)$.

Τό ἐπίπεδο μέ ἐξίσωση $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1$ τέμνει τούς ἄξονες Ox, Oy, Oz στά σημεῖα $(\alpha,0,0)$, $(0,\beta,0)$, $(0,0,\gamma)$ ἀντιστοίχως.

Τό ἐπίπεδο πού εἶναι παράλληλο πρός ἕνα δοσμένο $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$ καί πού διέρχεται διά τῆς ἀρχῆς O παριστάνεται, σύμφωνα μέ τά προηγούμενα, ἀπό τήν ἐξίσωση: $Ax+By+\Gamma z=0$. Ἄν λοιπόν θεωρήσουμε τό Δ ὡς μεταβλητή μέ πεδίο μεταβολῆς ὅλους τούς πραγματικούς ἀριθμούς, τηρήσουμε δέ σταθερές τίς τιμές τῶν A, B, Γ θά λάβουμε τίς ἐξισώσεις τῶν ἐπιπέδων πού εἶναι παράλληλα πρός ἕνα καί τό ἴδιο ἐπίπεδο (ἄρα καί μεταξύ τους ἀνά δύο). Τό σύνολο τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν εἶναι σύμφωνα μέ αὐτά <u>μονοπαραμετρικό</u>, ἀφοῦ τό κάθε ἕνα ἀπό αὐτά μπορεῖ νά χαρακτηριστῆ μέ τήν τιμή μιᾶς μεταβλητῆς, τῆς Δ.

Ἀπό τά ἀνωτέρω προκύπτουν ἀμέσως οἱ ἑξῆς ἀναγκαῖες καί ἱκανές συνθῆκες.

α) Γιά νά συμπίπτουν τά δυό ἐπίπεδα

$$A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1=0$$

$$A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2=0$$

πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}=\frac{\Delta_1}{\Delta_2}$, ἤ, ἀλλοιώτικα, ὁ πίνακας $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 & \Delta_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 & \Delta_2 \end{pmatrix}$ νά ἔχῃ διάσταση 1.

β) Γιά νά εἶναι τά δυό ἐπίπεδα

$$A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1=0$$

$$A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2=0$$

παράλληλα χωρίς νά συμπίπτουν πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}\neq\frac{\Delta_1}{\Delta_2}$ ἤ, ἀλλοιώτικα, οἱ πίνακες

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \end{pmatrix} \quad \text{καί} \quad \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 & \Delta_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 & \Delta_2 \end{pmatrix}$$

νά ἔχουν διάσταση 1 ὁ πρῶτος καί 2 ὁ δεύτερος.

§ 319. <u>Ἐξισώσεις ἐπιπέδων πού ἱκανοποιοῦν δοσμένες συνθῆκες</u>. α) Ἐξίσωση ἑνός ὁποιουδήποτε ἐπιπέδου πού διέρχεται ἀπό ἕνα δοσμένο σημεῖο $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + \Gamma(z-z_0) = 0 \quad ,$$

ὅπου Α, Β, Γ αὐθαίρετες σταθερές, ὄχι καί οἱ τρεῖς μηδενικές. Τά ἐπίπεδα χαρακτηρίζονται ἀναλυτικῶς ἀπό τίς τιμές δυό μεταβλητῶν, τῶν λόγων δυό ἀπό τίς σταθερές Α, Β, Γ πρός τήν τρίτη. Γι'αὐτό τό σύνολο τῶν παραπάνω ἐπιπέδων εἶναι διπαραμετρικό.

β) Ἐξίσωση τοῦ ἐπιπέδου πού διέρχεται ἀπό τρία σημεῖα $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ μή κείμενα ἐπ' εὐθείας.

Ἔστω $M(x, y, z)$ ἕνα τυχαῖο σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου. Τότε τά τρία διανύσματα $\overline{M_3M}$, $\overline{M_3M_1}$ καί $\overline{M_3M_2}$ θά εἶναι συνεπίπεδα. Ἐπομένως:

$$\left(\overline{M_3M} \quad \overline{M_3M_1} \quad \overline{M_3M_2}\right) = \left((\overline{r} - \overline{r}_3)(\overline{r}_1 - \overline{r}_3)(\overline{r}_2 - \overline{r}_3)\right) = \begin{vmatrix} x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 & z_1-z_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix} = 0$$

ὅπου $\overline{r} = \overline{OM}$, $\overline{r}_1 = \overline{OM}_1$ κτλ. Ἀλλά

$$\begin{vmatrix} x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 & z_1-z_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 & 0 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 & z_1-z_3 & 0 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & z_2-z_3 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} .$$

Ἄρα ἡ ἐξίσωση τοῦ ἐπιπέδου γράφεται καί ἔτσι

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Πόρισμα. Ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη γιά νά κεῖνται 4 σημεῖα $M_\nu(x_\nu, y_\nu, z_\nu)$, $(\nu = 1,2,3,4)$, πάνω σέ ἐπίπεδο εἶναι ἡ:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

γ) Ἐξίσωση τοῦ ἐπιπέδου πού διέρχεται ἀπό δυό σημεῖα $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ καί εἶναι παράλληλο πρός ἕνα διάνυσμα $\bar{\delta}(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ μή συγγραμμικό πρός τό $\overline{M_1M_2}$:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

δ) Ἐξίσωση τοῦ ἐπιπέδου πού διέρχεται ἀπό ἕνα σημεῖο $M_1(x_1, y_1, z_1)$ καί εἶναι παράλληλο πρός δύο διανύσματα $\bar{\delta}(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ καί $\bar{\varepsilon}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ μή συγγραμμικά τό ἕνα πρός τό ἄλλο:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & 0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

§ 320. Ἀναλυτική πραγμάτευση μερικῶν ζητημάτων.

α) Σχετική θέση δυό ἐπιπέδων.

$$A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1 = 0 \quad \text{καί} \quad A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2 = 0.$$

Τά κοινά σημεῖα τῶν δύο ἐπιπέδων ἔχουν συντεταγμένες τίς λύσεις τοῦ συστήματος τῶν δύο ἐξισώσεων. Ἄρα ἔχουμε σύμφωνα μέ τή θεωρία τῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων τήν ἑξῆς διερεύνηση:

1) Ὁ πίνακας $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \end{pmatrix}$ εἶναι διαστάσεως 2. Τότε τό σύστημα ἔχει ἄπειρες λύσεις πού ἐξαρτῶνται ἀπό μιά παράμετρο: τήν αὐθαίρετη τιμή μιᾶς κατάλληλης ἀπό τίς τρεῖς μεταβλητές x, y, z. Τά ἐπίπεδα τέμνονται κατά μιά εὐθεία πού παριστάνεται ἀναλυτικά ἀπό τό σύστημα τῶν δυό παραπάνω πρωτ/θμίων ἐξισώσεων:

2) Ὁ πίνακας $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \end{pmatrix}$ εἶναι διαστάσεως 1

1η ὑποπερίπτωση

ὁ $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 & \Delta_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 & \Delta_2 \end{pmatrix}$ ἔχει διάστα-ση 2.

Τό σύστημα δέν ἔχει λύσεις

Τά δυό ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα χωρίς νά συμπίπτουν.

2η ὑποπερίπτωση

ὁ $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 & \Delta_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 & \Delta_2 \end{pmatrix}$ ἔχει διάστα-ση 1.

Τό σύστημα ἔχει ἄπειρες λύσεις πού ἐξαρτῶνται ἀπό δυό αὐθαίρερες μεταβλητές. Κάθε λύση τῆς μιᾶς ἐξισώσεως ὡς εἶναι λύση καί τῆς ἄλλης.

Τά δυό ἐπίπεδα συμπίπτουν.

β) <u>Σχετική θέση τριῶν ἐπιπέδων</u>

$$A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1=0 \quad , \quad A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2=0 \quad , \quad A_3x+B_3y+\Gamma_3z+\Delta_3=0 \quad .$$

Γιά νά περιγράψουμε πληρέστερα τή σχέση αὐτή εἰσάγουμε τίς ἑξῆς ἔννοιες καί ἐκφράσεις. Παράλληλες εὐθεῖες καί πρός αὐτές παράλληλα διανύσματα λέμε ὅτι ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση. Σύμφωνα μέ αὐτά συγγραμμικά διανύσματα $\overline{\delta}$ καί $\lambda\overline{\delta}$ (λ αὐθαίρετος πραγματικός ἀριθμός) ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση. Μή παράλληλες εὐθεῖες ἤ μή συγγραμμικά διανύσματα λέμε ὅτι ἔχουν διαφορετική διεύθυνση.

Μιά διεύθυνση ἀντιπροσωπεύεται ἀπό μιάν εὐθεία ε τοῦ χώρου καί ἀπό κάθε παράλληλή της, ἐπίσης ἀπό ἕνα ὁποιοδήποτε ὄχι μηδενικό διάνυσμα $\overline{\delta}$ παράλληλο πρός τήν ε.

Ἕνα ἐπίπεδο p λέγουμε ὅτι περιέχει τή διεύθυνση πού ἀντιπροσωπεύεται ἀπό τό ὄχι μηδενικό διάνυσμα $\overline{\delta}$, ἄν εἶναι παράλληλο πρός τίς εὐθεῖες τίς παράλληλες πρός τό $\bar{\delta}$. Ἄν τό p ἔχει ἐξίσωση $Ax+By+\Gamma z+\Delta = 0$ καί τό $\bar{\delta}$ συντεταγμένες $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη πρός τοῦτο εἶναι ἡ

$$A\delta_1 + B\delta_2 + \Gamma\delta_3 = 0 .$$

Συνοψίζουμε τώρα τή διερεύνηση τῆς σχετικῆς θέσεως τριῶν ἐπιπέδων, βάσει τῆς θεωρίας τῆς ἐπιλύσεως ἑνός συστήματος τριῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων μέ τρεῖς ἀγνώστους, στόν ἑξῆς πίνακα:

<table>
<tr><td colspan="2">

$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{pmatrix}$ διαστάσεως 3, δηλ. $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0 .$

Τά τρία ἐπίπεδα δέν περιέχουν κοινή διεύθυνση. Τό σύστημα τῶν τριῶν ἐξισώσεων ἔχει μιά μοναδική λύση.

Τά τρία ἐπίπεδα ἔχουν ἕνα κοινό σημεῖο, τοῦ ὁποίου οἱ συντεταγμένες βρίσκονται εὔκολα μέ τούς τύπους τοῦ Cramer. Ἀνά δύο τά ἐπίπεδα τέμνονται σέ τρεῖς εὐθεῖες πού συναντιοῦνται σ' ἕνα σημεῖο.

</td></tr>
<tr><td>

$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{pmatrix}$ διαστάσεως 2 ὁπότε

$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} = 0 .$

Τά τρία ἐπίπεδα περιέχουν μιά καί μόνο μιά κοινή διεύθυνση.

</td><td>

1η ὑποπερίπτωση

$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 & \Delta_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 & \Delta_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 & \Delta_3 \end{pmatrix}$

διαστάσεως 3.

Τό σύστημα τῶν τριῶν ἐξισώσεων δέν ἔχει λύση. Δυό τουλάχιστον ἀπό τά τρία ἐπίπεδα τέμνονται σέ μιάν εὐθεία καί ἡ εὐθεία αὐτή εἶναι παράλληλη πρός τό τρίτο ἐπίπ. χωρίς νά κεῖται μέσα σ'αὐτό.

</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>2η ὑποπερίπτωση
$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 & \Delta_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 & \Delta_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 & \Delta_3 \end{pmatrix}$$
διαστάσεως 2.
Τό σύστημα ἔχει μιά μονοπαραμετρική ἀπειρία λύσεων. Τά τρία ἐπίπεδα διέρχονται διά μιᾶς καί τῆς ἴδιας εὐθείας.</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{pmatrix}$$
διαστάσεως 1.
Τά τρία ἐπίπεδα περιέχουν ἄπειρες κοινές διευθύνσεις, μέ ἄλλα λόγια εἶναι μεταξύ των παράλληλα ἤ συμπίπτουν.</td>
<td>1η ὑποπερίπτωση
$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 & \Delta_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 & \Delta_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 & \Delta_3 \end{pmatrix}$$
διαστάσεως 2.
Τό σύστημα τῶν 3 ἐξισώσεων δέν ἔχει λύση. Δυό τουλάχιστον ἀπό τά 3 ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα χωρίς νά συμπίπτουν· τό τρίτο εἶναι παράλληλο πρός αὐτά ἤ συμπίπτει μέ τό ἕνα ἀπό αὐτά.</td>
</tr>
<tr>
<td>2η ὑποπερίπτωση
$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 & \Delta_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 & \Delta_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 & \Delta_3 \end{pmatrix}$$
διαστασταστάσεως 1.
Τό σύστημα ἔχει μιά διπαραμετρική ἀπειρία λύσεων. Τά τρία ἐπίπεδα συμπίπτουν.</td>
</tr>
</table>

γ) <u>Δέσμη ἐπιπέδων</u>.

Ἔτσι καλεῖται εἴτε τό σύνολο τῶν ἐπιπέδων πού διέρχονται διά μιᾶς εὐθείας ε, εἴτε τό σύνολο τῶν ἐπιπέδων πού εἶναι παράλληλα πρός ἕνα ἐπίπεδο p συμπεριλαμβανομένου καί τοῦ p.

Τρία ἐπίπεδα $A_\kappa x+B_\kappa y+\Gamma_\kappa z+\Delta_\kappa = 0$, $k = 1,2,3$, ἀνήκουν στήν ἴδια δέσμη, ὅταν καί μόνον ὅταν ὁ πίνακας

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 & \Delta_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 & \Delta_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 & \Delta_3 \end{pmatrix}$$

εἶναι διαστάσεως 2, δηλδή ὅταν καί μόνον ὅταν ὑπάρχουν τρεῖς ἀριθμοί λ, μ, ν, ὄχι ὅλοι μηδενικοί, τέτοιοι ὥστε

$$\begin{aligned} \lambda A_1 + \mu A_2 + \nu A_3 &= 0 \\ \lambda B_1 + \mu B_2 + \nu B_3 &= 0 \\ \lambda \Gamma_1 + \mu \Gamma_2 + \nu \Gamma_3 &= 0 \\ \lambda \Delta_1 + \mu \Delta_2 + \nu \Delta_3 &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Αὐτό ἰσοδυναμεῖ μέ τήν ἰσχύ τῆς σχέσεως

$$\lambda(A_1x+B_1y+\Gamma_1 z+\Delta_1) + \mu(A_2x+B_2y+\Gamma_2 z+\Delta_2) + \nu(A_3x+B_3y+\Gamma_3 z+\Delta_3) \equiv 0$$

ὥς ταυτότητας ὡς πρός x, y, z, δηλαδή τό ἀριστερό μέλος εἶναι μηδέν γιά ὅλα τά συστήματα τιμῶν τῶν (x, y, z).

Σύμφωνα μ'αὐτά, ἄν

$$A_1x+B_1y+\Gamma_1 z+\Delta_1 = 0 \quad \text{καί} \quad A_2x+B_2y+\Gamma_2 z+\Delta_2 = 0$$

εἶναι οἱ ἐξισώσεις δυό διαφόρων ἐπιπέδων μιᾶς δέσμης, τυχόν ἐπίπεδο τῆς δέσμης αὐτῆς ἔχει ἐξίσωση τῆς μορφῆς

$$(320.1) \qquad \lambda_1(A_1x+B_1y+\Gamma_1 z+\Delta_1) + \lambda_2(A_2x+B_2y+\Gamma_2 z+\Delta_2) = 0$$

ὅπου λ_1 καί λ_2 δυό αὐθαίρετοι πολλαπλασιαστές, ὄχι καί οἱ δυό μηδενικοί· ἀντιστρόφως μιά ἐξίσωση τῆς παραπάνω μορφῆς παριστάνει ἐπίπεδο τῆς δέσμης. Τό κάθε ἐπίπεδο τῆς δέσμης χαρακτηρίζεται ἀπό τήν τιμή τοῦ λόγου $\lambda_1 : \lambda_2$, δηλαδή ἀπό τήν τιμή μιᾶς αὐθαίρετης μεταβλητῆς, γι'αὐτό ἡ δέσμη ἐπιπέδων εἶναι μιά μονοπαραμετρική ἀπειρία ἐπιπέδων.

δ) <u>Συνθήκη γιά νά ἔχουν τέσσερα ἐπίπεδα $A_k x+B_k y+\Gamma_k z+\Delta_k=0$, $k = 1,2,3,4$, ἕνα τουλάχιστο κοινό καθ'ὑπόσταση σημεῖο.</u>

Σύμφωνα μέ τήν θεωρία τῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη πρός τοῦτο εἶναι τό ἰσοδιάστατο τῶν πινάκων

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 & \Delta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_4 & B_4 & \Gamma_4 & \Delta_4 \end{pmatrix} \quad \text{καί} \quad \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_4 & B_4 & \Gamma_4 \end{pmatrix}.$$

Ἐπομένως ἀναγκαία (ὄχι ὅμως καί ἱκανή) συνθήκη εἶναι ὁ μηδενισμός τῆς ὁρίζουσας

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 & \Delta_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 & \Delta_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 & \Delta_3 \\ A_4 & B_4 & \Gamma_4 & \Delta_4 \end{vmatrix}.$$

§ 321. <u>Ἀναλυτική παράσταση εὐθείας.</u> α) Μιά εὐθεία στό χῶρο μπορεῖ νά θεωρηθῆ ὡς ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων πού εἶναι κοινά σέ δυό ἐπίπεδα τά ὁποῖα διέρχονται δι'αὐτῆς. Ἄρα οἱ συντεταγμένες τῶν σημείων της, καί μόνο τῶν σημείων της, ἱκανοποιοῦν ἕνα σύστημα δύο γραμμικῶν ὡς πρός x, y, z ἐξισώσεων:

$$A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0\ ,\quad A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0\ ,$$

μέ πίνακα συντελεστῶν $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \end{pmatrix}$ διαστάσεως 2. Ἀντιστρόφως, σύμφωνα μέ τά ἐκτεθέντα στόν § 320(α), ἕνα παρόμοιο σύστημα δυό γραμμικῶν ἐξισώσεων ἱκανοποιεῖται ἀπό τίς συντεταγμένες τῶν σημείων μιᾶς ὁρισμένης εὐθείας τοῦ χώρου καί μόνον ἀπό τίς συντεταγμένες αὐτῶν τῶν σημείων τοῦ χώρου. Λέγουμε ὅτι ἡ εὐθεία στό χῶρο παριστάνεται ἀπό ἕνα σύστημα δυό γραμμικῶν ἐξισώσεων.

'Από τίς τρεῖς μεταβλητές x, y, z πού εἰσέρχονται στίς δυό ἐξισώσεις μιᾶς εὐθείας ε μιά κατάλληλα ἐκλεγόμενη εἶναι αὐθαίρετη, οἱ δυό ἄλλες ὁρίζονται ἀπό τήν τιμή πού δίνεται στήν πρώτη (βλέπε καί θεωρία γραμμικῶν ἐξισώσεων).

β) Μιά εὐθεία ε πού παριστάνεται ἀπό τό σύστημα

$$A_1x + B_1y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0 \ ,$$
$$A_2x + B_2y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0 \ ,$$

παριστάνεται φυσικά καί ἀπό ἄπειρα ἄλλα συστήματα δυό γραμμικῶν ἐξισώσεων. 'Αρκεῖ πρός τοῦτο νά πάρουμε ὡς ἐξισώσεις τίς ἐξισώσεις δυό ὁποιωνδήποτε ἐπιπέδων τῆς δέσμης ἡ ὁποία ἔχει ἄξονα τήν εὐθεία ε. Σύμφωνα μέ τά προηγούμενα λοιπόν (§ 320 γ) τά συστήματα αὐτά εἶναι τῆς μορφῆς:

$$\begin{cases} \lambda_1(A_1x+B_1y+\Gamma_1 z+\Delta_1) + \lambda_2(A_2x+B_2y+\Gamma_2 z+\Delta_2) = 0 \\ \mu_1(A_1x+B_1y+\Gamma_1 z+\Delta_1) + \mu_2(A_2x+B_2y+\Gamma_2 z+\Delta_2) = 0 \end{cases} ,$$

ὅπου (λ_1,λ_2) καί (μ_1,μ_2) εἶναι δυό αὐθαιρέτως ὁρισμένα ζεύγη ἀριθμῶν μέ $\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Παρακάτω σημειώνουμε ἰδιαιτέρως ἐκεῖνες τίς ἐξισώσεις ἐπιπέδων τῆς δέσμης οἱ ὁποῖες προκύπτουν ὅταν δώσουμε στούς πολλαπλασιαστές λ_1 καί λ_2 τιμές τέτοιες ὥστε μέσα στήν ἐξίσωση (320.1) νά μηδενισθῆ ὁ συντελεστής μιᾶς ἀπό τίς συντεταγμένες x, y, z:

$$\begin{vmatrix} B_1 & A_1 \\ B_2 & A_2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} \Gamma_1 & A_1 \\ \Gamma_2 & A_2 \end{vmatrix} z + \begin{vmatrix} \Delta_1 & A_1 \\ \Delta_2 & A_2 \end{vmatrix} = 0 ,$$ ἐπίπεδο διά τῆς ε παράλληλο πρός OX.

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} \Gamma_1 & B_1 \\ \Gamma_2 & B_2 \end{vmatrix} z + \begin{vmatrix} \Delta_1 & B_1 \\ \Delta_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 ,$$ ἐπίπεδο διά τῆς ε παράλληλο πρός OY.

$$\begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} \Delta_1 & \Gamma_1 \\ \Delta_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = 0 ,$$ ἐπίπεδο διά τῆς ε παράλληλο πρός OZ.

Τά τρία αὐτά ἐπίπεδα (πού εἶναι μονότροπα ὁρισμένα ἐφόσον ἡ ε δέν εἶναι παράλληλη πρός κανένα ἀπό τούς ἄξονες συντεταγμένων) καλοῦνται προβάλλοντα ἐπίπεδα τῆς ε (ἐπειδή εἶναι ἐκεῖνα πού τήν προβάλλουν παράλλήλως πρός τούς τρεῖς ἄξονες συντεταγμένων).

γ)Ἕνα διάνυσμα παράλληλο πρός τήν εὐθεία

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0 \end{cases}$$

ἔχει συντεταγμένες $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ πού ἱκανοποιοῦν τίς σχέσεις:

$$A_1\delta_1 + B_1\delta_2 + \Gamma_1\delta_3 = 0 \; ,$$

$$A_2\delta_1 + B_2\delta_2 + \Gamma_2\delta_3 = 0 \; .$$

Ἄρα (βλέπε § 54):

$$\delta_1 = \varrho \begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} , \quad \delta_2 = -\varrho \begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = \varrho \begin{vmatrix} \Gamma_1 & A_1 \\ \Gamma_2 & A_2 \end{vmatrix} , \quad \delta_3 = \varrho \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} ,$$

ὅπου ϱ κατάλληλος πολλαπλασιαστής. Μποροῦμε λοιπόν νά ποῦμε ὅτι ἡ διεύθυνση τῆς παραπάνω εὐθείας ἀντιπροσωπεύεται ἀπό τό διάνυσμα μέ συντεταγμένες:

$$\left(\begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} \Gamma_1 & A_1 \\ \Gamma_2 & A_2 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right) .$$

δ)Ἐξισώσεις εὐθείας πού διέρχεται διά δοσμένου σημείου $M_0(x_0, y_0, z_0)$ καί πού εἶναι παράλληλη πρός ἕνα δοσμένο, ὄχι μηδενικό διάνυσμα $\bar{\delta}(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$.

Δέν ἔχουμε παρά νά γράψουμε τίς ἀναλυτικές σχέσεις οἱ ὁποῖες ἐκφράζουν ὅτι τό διάνυσμα $\overline{M_0M}$ ἀπό τό δοσμένο σημεῖο M_0 πρός τό τυχόν μεταβλητό σημεῖο $M(x,y,z)$ τῆς εὐθείας εἶναι συγγραμμικό πρός τό $\bar{\delta}$:

$$x - x_0 = t\delta_1 \quad , \quad y - y_0 = t\delta_2 \quad , z - z_0 = t\delta_3 \quad \text{ἤ} \quad \bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{\delta} \; ,$$

ὅπου t μεταβλητός πολλαπλασιαστής: $-\infty < t < +\infty$.

Ἐφ'ὅσο $\delta_1 \neq 0$, $\delta_2 \neq 0$, $\delta_3 \neq 0$, οἱ παραπάνω σχέσεις μποροῦν νά γραφοῦν καί ὡς ἑξῆς:

$$\frac{x - x_0}{\delta_1} = \frac{y - y_0}{\delta_2} = \frac{z - z_0}{\delta_3} \; .$$

3)Ἐξισώσεις εὐθείας πού διέρχεται διά δυό δοσμένων σημείων $M_1(x_1,y_1,z_1)$ καί $M_2(x_2,y_2,z_2)$:

$$x-x_1 = t(x_2-x_1) \quad , \quad y-y_1 = t(y_2-y_1) \quad , \quad z-z_1 = t(z_2-z_1),$$

ἤ
$$\bar{r} = \bar{r}_1 + t(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \quad ,$$

ὅπου t αὐθαίρετος πολλαπλασιαστής: $-\infty < t < +\infty$.

Ἐφόσον εἶναι $x_2-x_1 \neq 0$, $y_2-y_1 \neq 0$, $z_2-z_1 \neq 0$, οἱ παραπάνω σχέσεις μποροῦν νά γραφοῦν ὡς ἑξῆς:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad .$$

ζ) Στήν ἀναλυτική παράσταση

$$x-x_0 = t\delta_1 \quad , \quad y-y_0 = t\delta_2 \quad z-z_0 = t\delta_3$$

ἤ στήν $\quad x-x_1 = t(x_2-x_1) \quad , y-y_1 = t(y_2-y_1) \quad , z-z_1 = t(z_2-z_1)$,

τῆς εὐθείας ἔχουμε τρεῖς ἐξισώσεις οἱ ὁποῖες ὅμως περιέχουν ἐκτός ἀπό τίς μεταβλητές x,y,z καί τή μεταβλητή t. Οἱ τιμές αὐτῆς τῆς μεταβλητῆς χαρακτηρίζουν τά διάφορα σημεῖα τῆς εὐθείας. Γι'αὐτό ἡ t καλεῖται <u>παράμετρος</u> τοῦ συνόλου τῶν σημείων τῆς εὐθείας, οἱ δέ ἀνωτέρω τριάδες ἐξισώσεων <u>παραμετρικές</u> ἐξισώσεις τῆς εὐθείας.

Ἡ γεωμετρική σημασία τῆς παραμέτρου t εἶναι προφανής: εἶναι $t = \dfrac{\overline{M_0M}}{\delta}$ γιά τό πρῶτο σύστημα , $t = \dfrac{\overline{M_1M}}{\overline{M_1M_2}}$ γιά τό δεύτερο σύστημα. Ἀντί τῶν ἀνωτέρω παραμέτρων μποροῦμε νά ἐκλέξουμε ἄλλες γιά τόν χαρακτηρισμό τῶν σημείων τῆς εὐθείας, π.χ. τόν μερικό λόγο μ τοῦ τυχόντος σημείου $M(x,y,z)$ τῆς εὐθείας ὡς πρός τό <u>διάνυσμα</u> $\overline{M_1M_2}$ πού κεῖται ἐπί τῆς εὐθείας, δηλ. τόν ἀριθμό $\mu = \dfrac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}}$. Οἱ παραμετρικές ἐξισώσεις τῆς εὐθείας εἶναι τότε

$$x = \frac{x_1 + \mu x_2}{1+\mu} \quad , \quad y = \frac{y_1 + \mu y_2}{1+\mu} \quad , \quad x = \frac{z_1 + \mu z_2}{1+\mu} \quad .$$

§ 322. <u>Ἀναλυτική πραγμάτευση μερικῶν γεωμετρικῶν ζητημάτων.</u> α) Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά εἶναι ἡ εὐθεία $A_1x + B_1y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0$, $A_2x + B_2y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0$ παράλληλη πρός τό ἐπίπεδο $Ax+By+\Gamma z+\Delta = 0$.

Πρέπει καί άρκεῖ τό διάνυσμα τό παράλληλο πρός τήν εὐθεία

$$\left(\begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \Gamma_1 & A_1 \\ \Gamma_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right)$$

νά εἶναι παράλληλο πρός τό ἐπίπεδο, ἄρα

$$A\begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} + B\begin{vmatrix} \Gamma_1 & A_1 \\ \Gamma_2 & A_2 \end{vmatrix} + \Gamma\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & \Gamma \\ A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = 0 .$$

β) Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά κεῖται ἡ εὐθεία $A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1 = 0$, $A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2 = 0$ μέσα στό ἐπίπεδο $Ax+By+\Gamma z+\Delta = 0$.

Πρέπει καί ἀρκεῖ τό ἐπίπεδο $Ax+By+\Gamma z+\Delta = 0$ νά διέρχεται διά τῆς εὐθείας, δηλ. (§ 320,γ) πρέπει καί ἀρκεῖ ὁ πίνακας

$$\begin{pmatrix} A & B & \Gamma & \Delta \\ A_1 & B_1 & \Gamma_1 & \Delta_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 & \Delta_2 \end{pmatrix}$$

νά εἶναι διαστάσεως 2.

γ) Σχετική θέση δυό εὐθειῶν τοῦ χώρου.

Δυό διάφορες εὐθεῖες τοῦ χώρου λέγονται συνεπίπεδες ἤ συμβατές ἄν κεῖνται μέσα σ'ἕνα καί τό ἴδιο ἐπίπεδο, ἄν δηλαδή τέμνωνται σέ ἕνα σημεῖο ἤ ἄν εἶναι παράλληλες.

(Κατ'ἐπέκταση θά λέμε συμβατές καί δυό εὐθεῖες συμπίπτουσες).

Δυό εὐθεῖες μή συμβατές, δηλαδή μή κείμενες μέσα σέ ἕνα καί τό ἴδιο ἐπίπεδο, λέγονται ἀσύμβατες. Δίνουμε τώρα τά ἀποτελέσματα τῆς ἀναλυτικῆς διερευνήσεως βάσει τῆς θεωρίας τῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων στόν ἑπόμενο πίνακα.

Ἄς εἶναι $A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1 = 0$, $A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2 = 0$, οἱ ἐξισώσεις τῆς μιᾶς εὐθείας ε, $A_3x + B_3y + \Gamma_3z + \Delta_3 = 0$,

$A_4x+B_4y+\Gamma_4z+\Delta_4=0$, οἱ ἐξισώσεις τῆς ἄλλης εὐθείας ζ. Παρατηροῦμε ὅτι καί οἱ δυό πίνακες

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \end{pmatrix} \quad \text{καί} \quad \begin{pmatrix} A_3 & B_3 & \Gamma_3 \\ A_4 & B_4 & \Gamma_4 \end{pmatrix}$$

εἶναι διαστάσεως 2.

<table>
<tr><td colspan="3">$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 & \Delta_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 & \Delta_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 & \Delta_3 \\ A_4 & B_4 & \Gamma_4 & \Delta_4 \end{vmatrix} \neq 0$ Οἱ εὐθεῖες εἶναι ἀσύμβατες. Διότι οὔτε οἱ τέσσερις ἐξισώσεις $A_1x+\dots+\Delta_1=0,\dots\ A_4x+\dots+\Delta_4=0$ ἔχουν κοινή λύση οὔτε οἱ τέσσερις ἀντίστοιχες ὁμογενεῖς $A_1x+\dots\Gamma_1z=0$,..., $A_4x+\dots+\Gamma_4z=0$ ἔχουν ἄλλη κοινή λύση πλήν τῆς μηδενικῆς.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\begin{vmatrix} A_1B_1\Gamma_1\Delta_1 \\ A_2B_2\Gamma_2\Delta_2 \\ A_3B_3\Gamma_3\Delta_3 \\ A_4B_4\Gamma_4\Delta_4 \end{vmatrix} = 0$
Οἱ εὐθεῖες ε καί ζ εἶναι συμβατές.</td><td colspan="2">1η ὑποπερίπτωση
$\begin{pmatrix} A_1B_1\Gamma_1 \\ A_2B_2\Gamma_2 \\ A_3B_3\Gamma_3 \\ A_4B_4\Gamma_4 \end{pmatrix}$ διαστάσεως 3. Τότε οἱ ε καί ζ τέμνονται σέ ἕνα σημεῖο. (καθ'ὑπόσταση).</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2η ὑποπερίπτωση
$\begin{pmatrix} A_1B_1\Gamma_1 \\ A_2B_2\Gamma_2 \\ A_3B_3\Gamma_3 \\ A_4B_4\Gamma_4 \end{pmatrix}$ διαστάσεως 2</td><td>1η μερική ὑποπερίπτωση
$\begin{pmatrix} A_1B_1\Gamma_1\Delta_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_4B_4\Gamma_4\Delta_4 \end{pmatrix}$ διαστάσεως 3. Οἱ ε,ζ παράλληλες.</td></tr>
<tr><td>2η μερική ὑποπερίπτωση
$\begin{pmatrix} A_1B_1\Gamma_1\Delta_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_4B_4\Gamma_4\Delta_4 \end{pmatrix}$ διαστάσεως 2. Οἱ ε, ζ συμπίπτουν .</td></tr>
</table>

§ 323. Διάνυσμα κάθετο πρός ἐπίπεδο. Τονίζουμε ὅτι τά παρακάτω ἰσχύουν μέ τήν προϋπόθεση ὅτι τό σύστημα συντεταγμένων εἶναι ὀρθογώνιο καί τά βασικά διανύσματα ἰσόμηκα.

Ἄς εἶναι $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$ ἡ ἐξίσωση τοῦ ἐπιπέδου p.

Ἕνα ὁποιοδήποτε διάνυσμα $\bar{\delta}(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$ παράλληλο πρός τό p ἱκανοποιεῖ τή σχέση: $A\delta_1+B\delta_2+\Gamma\delta_3=0$. Ἡ σχέση ὅμως αὐτή μπορεῖ τώρα νά ἑρμηνευθῆ ὡς ἑξῆς: τό διάνυσμα μέ συντεταγμένες (A,B,Γ) εἶναι κάθετο πρός τό $\bar{\delta}$. Ἐπειδή δέ τό $\bar{\delta}$ ἦταν τυχόν διάνυσμα παράλληλο πρός τό p, ἕπεται ὅτι τό διάνυσμα (A,B,Γ) εἶναι κάθετο πρός τό p.

Κάθε ἄλλο κάθετο διάνυσμα, ἐπειδή θά ἔχη τήν ἴδια διεύθυνση, θά ἔχη συντεταγμένες $(\lambda A,\lambda B,\lambda\Gamma)$, ὅπου λ αὐθαίρετος πολλαπλασιαστής.

Πόρισμα. Μιά εὐθεία $\dfrac{x-x_1}{\delta_1}=\dfrac{y-y_1}{\delta_2}=\dfrac{z-z_1}{\delta_3}$ εἶναι κάθετη πρός τό ἐπίπεδο p: $Ax+By+\Gamma x+\Delta=0$, ὅταν καί μόνον ὅταν:

$$\frac{A}{\delta_1}=\frac{B}{\delta_2}=\frac{\Gamma}{\delta_3}\,.$$

Ἡ εὐθεία $A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1=0$, $A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2=0$ εἶναι κάθετη πρός τό p ὅταν καί μόνον ὅταν:

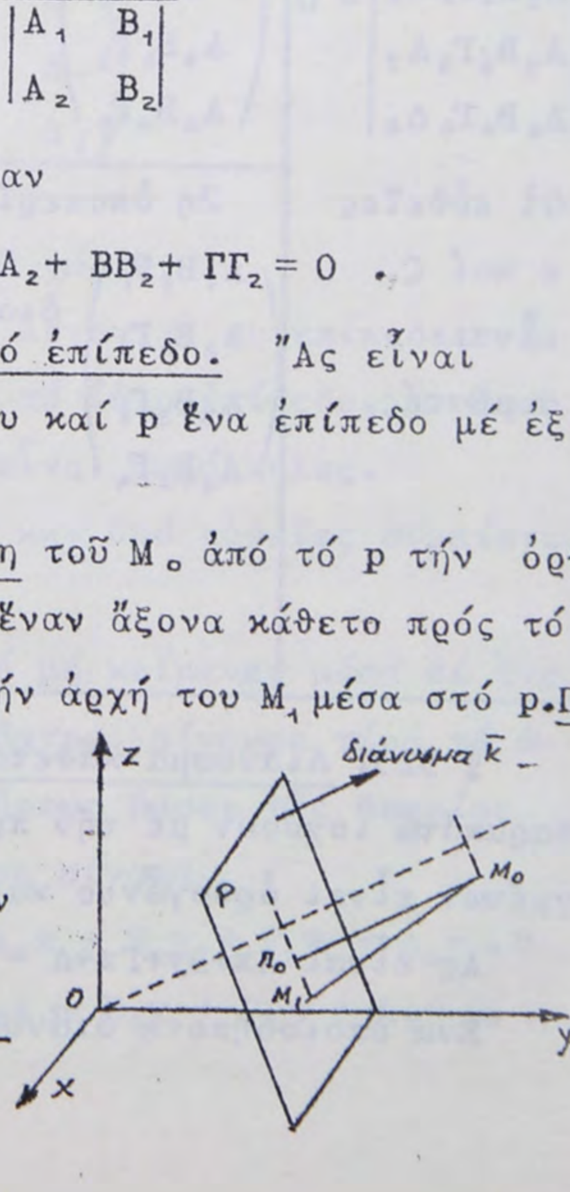
$$\frac{A}{\begin{vmatrix}B_1 & \Gamma_1\\ B_2 & \Gamma_2\end{vmatrix}}=\frac{B}{\begin{vmatrix}\Gamma_1 & A_1\\ \Gamma_2 & A_2\end{vmatrix}}=\frac{\Gamma}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}$$

ἤ, πρᾶγμα πού εἶναι ἰσοδύναμο, ὅταν

$$AA_1+BB_1+\Gamma\Gamma_1=AA_2+BB_2+\Gamma\Gamma_2=0\,.$$

§ 324. Ἀπόσταση σημείου ἀπό ἐπίπεδο. Ἄς εἶναι $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ἕνα σημεῖο τοῦ χώρου καί p ἕνα ἐπίπεδο μέ ἐξίσωση $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$.

Καλοῦμε διανυσματική ἀπόσταση τοῦ M_0 ἀπό τό p τήν ὀρθή διανυσματική προβολή $\overline{\Pi_0M_0}$ πάνω σ'ἕναν ἄξονα κάθετο πρός τό p ἑνός διανύσματος $\overline{M_1M_0}$ πού ἔχει τήν ἀρχή του M_1 μέσα στό p. Προσημασμένη δέ ἀπόσταση τοῦ M_0 ἀπό τό p θά καλέσουμε τό προσημασμένο μέτρο τοῦ διανύσματος $\overline{\Pi_0M_0}$ ὅταν πάνω στόν ἄξονα προβολῆς γιά θετική φορά ληφθῆ ἡ φορά τοῦ διανύσματος $\bar{k}(A,B,\Gamma)\perp p$.



Θά εἶναι λοιπόν, ἄν καλέσουμε (x_1, y_1, z_1) τίς συντεταγμένες τοῦ M_1:

προσημασμένη ἀπόσταση τοῦ M_0 ἀπό τό p

$$= (x_0 - x_1)\frac{A}{+\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}} + (y_0 - y_1)\frac{B}{+\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}} + (z_0 - z_1)\frac{\Gamma}{+\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}.$$

Εἶναι ὅμως $Ax_1+By_1+\Gamma z_1+\Delta = 0$, ἐπειδή τό M_1 κεῖται πάνω στό p. Ἄρα $-Ax_1-By_1-\Gamma z_1 = \Delta$.

Ἑπομένως

$$\text{προσημασμένη ἀπόσταση τοῦ M ἀπό τό p} = \frac{Ax_0+By_0+\Gamma z_0+\Delta}{+\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}.$$

Στόν παραπάνω τύπο ἡ τετραγωνική ρίζα λαμβάνεται θετική καί ἡ ἀπόσταση τοῦ M_0 εἶναι θετική γιά τά σημεῖα M_0 πού κεῖνται σ'ἐκείνη τή μεριά τοῦ ἐπιπέδου p στήν ὁποία κεῖται τό κάθετο διάνυσμα $\overline{k}(A,B,\Gamma)$ ὅταν ἀχθῆ ἀπό ἕνα σημεῖο τοῦ p, ἀρνητική γιά τά σημεῖα M_0 τοῦ χώρου πού κεῖνται ἀπό τήν ἄλλη μεριά τοῦ p. Π.χ. ἄν $M_1(x_1,y_1,z_1)$ εἶναι ἕνα τυχόν σημεῖο τοῦ p, τό σημεῖο μέ συντεταγμένες $(x_1+A\ ,\ y_1+B\ ,\ z_1+\Gamma)$ θά ἔχη ἀπόσταση θετική.

§ 325α. <u>Ἐλάχιστη ἀπόσταση σημείου $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ἀπό εὐθεία</u> ε $\begin{cases} A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1 = 0 \\ A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2 = 0 \end{cases}$.

Ἔστω $P(\xi,\eta,\zeta)$ τυχόν σημεῖο τῆς εὐθείας ε καί

$$\overline{\varepsilon} = \begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix}\overline{i} + \begin{vmatrix} \Gamma_1 & A_1 \\ \Gamma_2 & A_2 \end{vmatrix}\overline{j} + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\overline{k}$$

ἕνα διάνυσμα παράλληλο πρός τήν ε.

Ἄν ἀναλύσουμε τό $\overline{PM}_0$ σέ δυό συνιστῶσες, μιάν $\overline{PK}$ παράλληλη πρός τήν ε καί μιά κάθετη πρός τήν ε: $\overline{PM}_0 = \overline{PK} + \overline{KM}_0$, τότε ἡ ζητούμενη ἀπόσταση ἰσοῦται μέ τό μῆκος $|\overline{KM}_0| = (KM_0)$ τῆς κάθετης συνιστώσας. Ἀλλά $(KM_0)^2 = |\overline{PM}_0|^2 - |\overline{PK}|^2$ καί κατά τόν § 93, τύπος (93.1):

$$\overline{PK} = \frac{(\overline{PM_o}\,\overline{\varepsilon})}{|\overline{\varepsilon}|^2}\,\overline{\varepsilon}\,.$$

Ἄρα $\quad (PK)^2 = \dfrac{(\overline{PM_o}\,\overline{\varepsilon})^2}{|\overline{\varepsilon}|^4}\,|\overline{\varepsilon}|^2 = \dfrac{(\overline{PM_o}\,\overline{\varepsilon})^2}{|\overline{\varepsilon}|^2}$

καί συνεπῶς $\quad (KM_o)^2 = |\overline{PM_o}|^2 - \dfrac{(\overline{PM_o}\,\overline{\varepsilon})^2}{|\overline{\varepsilon}|^2}\,.$

Ἑπομένως μέ συντεταγμένες ἔχουμε τόν τύπο

$$(KM_o)^2 = (x_o-\xi)^2 + (y_o-\eta)^2 + (z_o-\zeta)^2 - \frac{\begin{vmatrix} x_o-\xi & y_o-\eta & z_o-\zeta \\ A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \Gamma_1 & A_1 \\ \Gamma_2 & A_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}^2}\,. \tag{325α.1}$$

Ὅσο γιά τίς συντεταγμένες τοῦ K πού εἶναι τό πόδι τῆς κάθετης ἀπό τό M_o στήν ε, αὐτές τίς βρίσκουμε προσθέτοντας στίς συντεταγμένες (ξ,η,ζ) τοῦ P, τίς ὁμώνυμες συντεταγμένες τοῦ διανύσματος

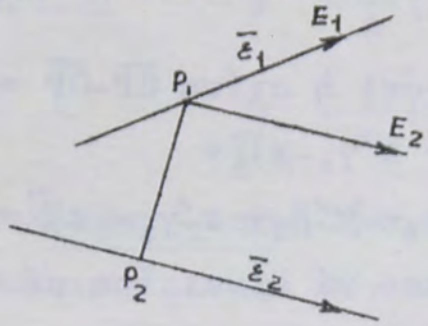
$$\overline{PK} = \frac{(\overline{PM_o}\,\overline{\varepsilon})}{|\overline{\varepsilon}|^2}\,\overline{\varepsilon}\,.$$

Ἕνας ἄλλος τρόπος νά τίς βροῦμε εἶναι ἡ ἐπίλυση τοῦ συστήματος πού ἀποτελεῖται ἀπό τίς ἐξισώσεις τῆς εὐθείας ε καί ἀπό τήν ἐξίσωση

$$\begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix}(x-x_o) + \begin{vmatrix} \Gamma_1 & A_1 \\ \Gamma_2 & A_2 \end{vmatrix}(y-y_o) + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}(z-z_o) = 0$$

τοῦ ἐπιπέδου πού διέρχεται διά τοῦ M_o καί εἶναι κάθετο πρός τήν εὐθεία.

§ 325. <u>Ἐλάχιστη ἀπόσταση δυό εὐθειῶν</u>. Οἱ δυό εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 ἄς μήν εἶναι παράλληλες καί ἄς δίνωνται ἡ καθεμιά τους μέ ἕνα σημεῖο της καί ἕνα διάνυσμα παράλληλο: ἡ ε_1 μέ τό σημεῖο P_1 καί τό διάνυσμα $\bar{\varepsilon}_1$, ἡ ε_2 μέ τό P_2 καί τό διάνυσμα $\bar{\varepsilon}_2$. Ἀπό τό P_1 ἄγουμε τά δυό διανύσματα $\overline{P_1E_1} = \bar{\varepsilon}_1$ καί $\overline{P_1E_2} = \bar{\varepsilon}_2$. Τό παραλληλεπίδο πού ὁρίζεται ἀπό τίς τρεῖς ἀκμές $\overline{P_1E_1}$, $\overline{P_1E_2}$ $\overline{P_1P_2}$ ἔχει μιάν ἕδρα, τήν $P_1E_1E_2$, ἡ ὁποία ἀφ' ἑνός περιέχει τήν εὐθεία ε_1 καί ἀφ' ἑτέρου εἶναι παράλληλη πρός τήν ε_2. Ἄρα τό ὕψος τοῦ παραλληλεπίπεδου τό κάθετο πρός τήν ἕδρα $P_1E_1E_2$ εἶναι ἡ ζητούμενη ἀπόσταση.



Ἑπομένως

$$\text{(325.2)} \qquad \text{ἐλάχιστη ἀπόσταση} = \frac{|(\overline{P_1P_2}, \bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2)|}{|[\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2]|} .$$

§ 326. <u>Ἀλλαγή τοῦ συστήματος συντεταγμένων.</u> Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἀντί τοῦ συστήματος OX (βασ.διάν. $\overline{OM}_x = \bar{i}$), OY(βασ.διάν. $\overline{OM}_y = \bar{j}$), OZ (βασ.διαν.$\overline{OM}_z = \bar{k}$), λαβαίνουμε τό σύστημα O΄X΄(βασ.διαν.$\overline{O'M'_x} = \bar{i}'$), O΄Y΄(βασ.διάν. $\overline{O'M'_y} = \bar{j}'$) καί O΄Z΄(βασ.διάν.$\overline{O'M'_z} = \bar{k}'$). Τά διανύσματα $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ σ'αὐτό τόν παράγραφο ὑπόκεινται στόν μ ό ν ο περιορισμό νά μήν εἶναι συνεπίπεδα, ὁμοίως καί τά $\bar{i}'$, $\bar{j}'$, $\bar{k}'$ (μέ ἄλλα λόγια, δέν τά ὑποθέτουμε ὀρθογώνια ἀνά δύο). Ἕνα σημεῖο P τοῦ χώρου θά ἔχη συντεταγμένες (x,y,z) ὡς πρός τό OXYZ καί συντεταγμένες (x',y',z') ὡς πρός τό O΄X΄Y΄Z΄. Ποιές εἶναι οἱ μεταξύ των σχέσεις;

Ἡ νέα ἀρχή O΄ καί τά νέα βασικά διανύσματα $\bar{i}'$, $\bar{j}'$, $\bar{k}'$ θά δίνωνται ἀναλυτικῶς μέ τίς συντεταγμένες τους ὡς πρός τό παλαιό σύστημα OXYZ:

$$O'(x_o, y_o, z_o) \quad , \quad \bar{i}'(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad , \quad \bar{j}'(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \quad , \quad \bar{k}'(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3),$$

θά ἰσχύουν δέ οἱ ἑξῆς διανυσματικές σχέσεις (βλέπε § 307):

$$\bar{i}' = \alpha_1\bar{i} + \alpha_2\bar{j} + \alpha_3\bar{k} \quad , \quad \bar{j}' = \beta_1\bar{i} + \beta_2\bar{j} + \beta_3\bar{k} \ ,$$
$$\bar{k}' = \gamma_1\bar{i} + \gamma_2\bar{j} + \gamma_3\bar{k} \ ,$$

$OP = \overline{OO'} + \overline{O'P}$, $\overline{OO'} = x_o\bar{i} + y_o\bar{j} + z_o\bar{k}$, $\overline{O'P} = x'\bar{i}' + y'\bar{j}' + z'\bar{k}'$.

Ἄρα θά εἶναι:

$$\overline{OP} = x_o\bar{i} + y_o\bar{j} + z_o\bar{k} + x'(\alpha_1\bar{i} + \alpha_2\bar{j} + \alpha_3\bar{k}) +$$
$$+ y'(\beta_1\bar{i} + \beta_2\bar{j} + \beta_3\bar{k}) + z'(\gamma_1\bar{i} + \gamma_2\bar{j} + \gamma_3\bar{k})$$
$$= (x_o + x'\alpha_1 + y'\beta_1 + z'\gamma_1)\bar{i} + (y_o + x'\alpha_2 + y'\beta_2 + z'\gamma_2)\bar{j} +$$
$$+ (z_o + x'\alpha_3 + y'\beta_3 + z'\gamma_3)\bar{k} .$$

Εἶναι ὅμως $\overline{OP} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$. Ἄρα ἰσχύει ἡ σχέση $\overline{OP} - \overline{OP} =$ $=$ μηδενικό διάνυσμα $= (x_o' + x'\alpha_1 + y'\beta_1 + z'\gamma_1 - x)\bar{i} +$ $+ (y_o + x'\alpha_2 + y'\beta_2 + z'\gamma_2 - y)\bar{j} + (z_o + x'\alpha_3 + y'\beta_3 + z'\gamma_3 - z)\bar{k} = 0$.

Στή σχέση αὐτή κάθε παρένθεση πρέπει νά εἶναι ἴση μέ 0, διότι τά $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ εἶναι τρία διανύσματα μή συνεπίπεδα.

Ἔχουμε ἐπομένως τούς ἑξῆς τύπους ἀλλαγῆς συντεταγμένων:

$$\begin{aligned} x &= x_o + \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z' , \\ y &= y_o + \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z' , \\ z &= z_o + \alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z' , \end{aligned} \tag{326.1}$$

οἱ ὁποῖοι μᾶς δίνουν τίς παλιές συντεταγμένες ἑνός σημείου P ὡς συναρτήσεις τῶν νέων συντεταγμένων τοῦ P. Παρατηροῦμε ὅτι πρόκειται περί πρωτοβαθμίων (γραμμικῶν) συναρτήσεων.

Ἄν θέλουμε νά ἐκφράσουμε ἀντιστρόφως τίς νέες συντεταγμένες τοῦ P μέ τίς παλιές δέν ἔχουμε παρά νά ἐπιλύσουμε τό παραπάνω σύστημα τῶν τριῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων ὡς πρός τούς τρεῖς ἀγνώστους x', y', z' σύμφωνα μέ τόν κανόνα του Cramer. Πρός τοῦτο καλοῦμε Δ τήν τιμή τῆς ὁρίζουσας

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

(ἡ ὁποία εἶναι $\neq 0$, ἐπειδή τά διανύσματα $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ δέν εἶναι συνεπίπεδα) καί σημειώνουμε τίς προσημασμένες ἐλάσσονες τῶν στοιχείων τῆς ὁρίζουσας μέ τά ἀντίστοιχα κεφαλαῖα γράμματα,

π.χ.
$$A_1 = \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \quad , \quad B_1 = -\begin{vmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \quad , \text{κτλ.}$$

Θά ἔχουμε τότε (κατά τούς τύπους (48.2)):

$$(326.2) \qquad \begin{aligned} x' &= \frac{A_1}{\Delta}(x-x_0) + \frac{A_2}{\Delta}(y-y_0) + \frac{A_3}{\Delta}(z-z_0) \quad , \\ y' &= \frac{B_1}{\Delta}(x-x_0) + \frac{B_2}{\Delta}(y-y_0) + \frac{B_3}{\Delta}(z-z_0) \quad , \\ z' &= \frac{\Gamma_1}{\Delta}(x-x_0) + \frac{\Gamma_2}{\Delta}(y-y_0) + \frac{\Gamma_3}{\Delta}(z-z_0) \quad . \end{aligned}$$

<u>Παρατήρησεις.</u>1)Ἄν μᾶς δοθῇ ἕνα σύστημα τριῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων μεταξύ τῶν δυό τριάδων πραγματικῶν μεταβλητῶν (x,y,z) καί (x',y',z'):

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_{13}z' \quad , \\ y &= y_0 + \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{23}z' \quad , \\ z &= z_0 + \alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33}z' \quad , \end{aligned}$$

ὅπου ἡ ὁρίζουσα $\begin{vmatrix} \alpha_{11} \cdots \\ \cdots \alpha_{33} \end{vmatrix}$ τῶν συντελεστῶν τῶν x', y', z' εἶναι $\neq 0$, τότε τό σύστημα αὐτό μπορεῖ νά ἑρμηνευθῇ ὅτι παριστάνει μιάν ἀλλαγή συντεταγμένων, ὅτι δίνει δηλαδή τίς σχέσεις μεταξύ τῶν συντεταγμένων (x,y,z) ἑνός σημείου P τοῦ χώρου ὡς πρός ἕνα αὐθαίρετο σύστημα OXYZ καί τῶν συντεταγμένων (x',y',z') τοῦ ἴδιου σημείου P ὡς πρός ἕνα δεύτερο κατάλληλο σύστημα O΄X΄Y΄Z΄ πού ὁρίζεται ὡς ἑξῆς ἀναφορικῶς πρός τό πρῶτο: ἡ νέα ἀρχή ἔχει παληές συντεταγμένες (x_0,y_0,z_0), τό βασικό διάνυσμα τοῦ ἄξονα O΄X΄ ἔχει συντεταγμένες ὡς πρός OXYZ τίς $(\alpha_{11},\alpha_{21},\alpha_{31})$, τό βασικό διάνυσμα τοῦ ἄξονα O΄Y΄ τίς συντεταγμένες $(\alpha_{12},\alpha_{22},\alpha_{32})$, τό βασικό διάνυσμα τοῦ ἄξονα O΄Z΄ τίς συντεταγμένες $(\alpha_{13},\alpha_{23},\alpha_{33})$.

2)"Αν θέσουμε: $\overline{OP} = \overline{r}$ καί $\overline{OO'} = \overline{r}_0$, οἱ τρεῖς σχέσεις (326.1) ἰσοδυναμοῦν μέ τή διανυσματική σχέση:

$$\overline{r} = \overline{r}_0 + x'\overline{i}' + y'\overline{j}' + z'\overline{k}'.$$

Μέ ἄλλα λόγια τό διάνυσμα ($\bar{r}-\bar{r}_o$) ἀναλύεται σέ τρεῖς συνιστῶσες κατά τίς διευθύνσεις τῶν $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$ ὅπως στήν (315.4) Μέ τήν προϋπόθεση ὅτι τά $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ καθώς καί τά $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$ ἀποτελοῦν 2 δεξιόχερα τρισορθογώνια συστήματα μοναδιαίων διανυσμάτων μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε τούς (315.5) καί (315.6) ὁπότε βρίσκουμε

$$x' = \frac{((\bar{r}-\bar{r}_o)\bar{j}'\bar{k}')}{(\bar{i}'\bar{j}'\bar{k}')} \ , \ y' = \frac{((\bar{r}-\bar{r}_o)\bar{k}'\bar{i}')}{(\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}')} \ , \ z = \frac{((\bar{r}-\bar{r}_o)\bar{i}'\bar{j}')}{(\bar{i}' \ \bar{j}' \ \bar{k}')} \ ,$$

δηλαδή τίς σχέσεις (326.2) ἄν ἐκφράσουμε τά μικτά γινόμενα διά τῶν συντεταγμένων ὡς πρός OXYZ.

§ 327. <u>Ἐπιφάνειες καί καμπύλες στό χῶρο.</u> Ἔστω $\sigma(x,y)$ μιά μονοσήμαντη συνάρτηση δυό ἀνεξάρτητων μεταβλητῶν.Θέτουμε:

$$z = \sigma(x,y)$$

καί ἑρμηνεύουμε τήν τριάδα (x,y,z) ὡς ὀρθογώνιες συντεταγμένες ἑνός σημείου τοῦ χώρου. Τό σύνολο τῶν σημείων πού λαβαίνουμε δίνοντας στίς μεταβλητές x, y ὅλα τά ζεύγη τιμῶν τά ὁποῖα ἀνήκουν στό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως $\sigma(x,y)$, ἀποτελεῖ τή γεωμετρική παράσταση τῆς συναρτήσεως. Αὐτή θά εἶναι ἐν γένει μιά ἐπιφάνεια τῆς ὁποίας τά σημεῖα προβάλλονται ὀρθῶς κατά τρόπο ἀμφιμονοσήμαντο πάνω στά διάφορα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου XOY πού ἀποτελοῦν τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως.

Ἄν θέσουμε $x = c$ τά ἀντίστοιχα σημεῖα τῆς ἐπιφάνειας $z = \sigma(x,y)$ ἀποτελοῦν τήν τομή της μέ τό ἐπίπεδο $x = c$. Τά ἀντίστοιχα αὐτά σημεῖα ἱκανοποιοῦν τό σύστημα

$$\begin{cases} z = \sigma(x,y) \\ x = c \end{cases}$$

ἤ τό ἰσοδύναμο

$$\begin{cases} z = \sigma(c,y) \\ x = c \end{cases} .$$

Ἄν δεσμεύσουμε τίς μεταβλητές x καί y μέ μιά σχέση $\varphi(x,y) = 0$, τότε ἀπό τά σημεῖα τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ μέσα στό

ΧΟΥ θεωροῦμε μόνο τά κείμενα πάνω σέ μιά γραμμή, τήν

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = 0 \\ z = 0 \end{cases} .$$

Τά ἀντίστοιχα σημεῖα τῆς ἐπιφάνειας $z = \sigma(x,y)$ ἀποτελοῦν τότε ἐν γένει μιά γραμμή, τήν τομή τῆς ἐπιφάνείας $z = \sigma(x,y)$ μέ τήν κυλινδρική ἐπιφάνεια $\varphi(x,y) = 0$ τῆς ὁποίας οἱ γενέτειρες εἶναι παράλληλες πρός τόν ΟΖ καί ἡ ὁποία ἔχει ὁδηγό μέσα στό ΧΟΥ τή γραμμή

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = 0 \\ z = 0 \end{cases} .$$

Π.χ. τό σύστημα $\begin{cases} z = \sigma(x,y) \\ x^2+y^2-\alpha^2 = 0 \end{cases}$

παριστάνει τήν τομή τῆς ἐπιφάνειας $z = \sigma(x,y)$ μέ τήν κυλινδρική ἐπιφάνεια $x^2+y^2 = \alpha^2$. Ἀντιστρόφως τυχούσα γραμμή γ πάνω στήν ἐπιφάνεια $z = \sigma(x,y)$ μπορεῖ νά παρασταθῆ ἀπό ἕνα σύστημα

$$\begin{cases} z = \sigma(x,y) \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$$

ὅπου $\varphi(x,y) = 0$ κατάλληλη ἐξίσωση μεταξύ x, y πού παριστάνει τήν ὀρθή προβολή πάνω στό ΧΟΥ τῆς θεωρούμενης γραμμῆς γ. Μιά γραμμή πάνω στήν ἐπιφάνεια $z = \sigma(x,y)$ μπορεῖ νά παρασταθῆ καί μέ τή βοήθεια μιᾶς παραμέτρου, ἀρκεῖ ἀντί τῆς $\varphi(x,y)=0$ νά πάρουμε γιά παράσταση τῆς ὀρθῆς προβολῆς τῆς γραμμῆς πάνω στό ἐπίπεδο ΧΟΥ μιάν παραμετρική παράσταση

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} .$$

Τότε ἡ γραμμή πάνω στήν ἐπιφάνεια θά παριστάνεται ἀπό τό σύστημα

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = \sigma(f(t),g(t)) \end{cases} .$$

Π.χ. τό σύστημα $x = \alpha\sigma\upsilon\nu t$

$y = \alpha\eta\mu t$

$z = \sigma(\alpha\sigma\upsilon\nu t, \alpha\eta\mu t)$

παριστάνει τήν τομή τῆς ἐπιφάνειας $z = \sigma(x,y)$ μέ τήν κυλινδρική ἐπιφάνεια $x^2+y^2 = \alpha^2$, μέ τήν προϋπόθεση φυσικά ὅτι τά σημεῖα (x,y) πού ἱκανοποιοῦν τή σχέση $x^2+y^2 = \alpha^2$ ἀνήκουν, τουλάχιστον ἐν μέρει, στό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως $\sigma(x,y)$, δηλαδή τῆς ἐπιφάνειας $z = \sigma(x,y)$.

§ 328. Μιά καμπύλη στό χῶρο εἶναι ἕνα ἄπειρο μονοπαραμετρικό σύνολο σημείων. Ἄρα μιά δυνατή ἀναλυτική της παράσταση εἶναι ἕνα σύστημα ἐξισώσεων

$$(328.1) \qquad \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases},$$

ὅπου $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ δοσμένες μονοσήμαντες συναρτήσεις μιᾶς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς t πού καλεῖται παράμετρος τῶν σημείων τῆς γραμμῆς, διότι κάθε τιμή της καθορίζει καί ἀπό ἕνα σημεῖο τοῦ μονοπαραμετρικοῦ συνόλου πού ἀποτελεῖ τή γραμμή. Διανυσματικά ἡ (328.1) γράφεται

$$\bar{r}(t) = f(t)\bar{i} + g(t)\bar{j} + h(t)\bar{k} \quad .$$

Μιά γραμμή μπορεῖ νά θεωρηθῆ καί ὡς τό σύνολο τῶν κοινῶν σημείων δυό ἐπιφανειῶν. Ἡ ἀντίστοιχη ἀναλυτική παράστασή της εἶναι ἕνα σύστημα

$$(328.2) \qquad \begin{cases} \sigma(x,y,z) = 0 \\ \varphi(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

δυό ἐξισώσεων μεταξύ τῶν συντεταγμένων x, y, z.

Ἀπό τήν παράσταση (328.1) μεταβαίνουμε στήν (328.2) ἄν μεταξύ τῶν ἐξισώσεων (328.1) ἀπαλείψουμε τήν παράμετρο (τήν μεταβλητή) t.

'Αντιστρόφως ἀπό τήν (328.2) μποροῦμε νά μεταβοῦμε στήν (328.1) ἐπιλύοντας π.χ. τό σύστημα (328.2) ὡς πρός y καί z:

$$\begin{cases} y = \omega_1(x) \\ z = \omega_2(x) \end{cases}$$

καί θεωρώντας τό x ὡς παράμετρο: x = t.

<u>Παράδειγμα.</u> Στερεά κυκλική ἕλικα.

Ἕνα σημεῖο Μ(x,y,z) (τό σύστημα τῶν συντεταγμένων ὑποτίθεται ὀρθογώνιο) κινεῖται οὕτως ὥστε ἡ προβολή του Π(x,y,0) νά κινῆται πάνω στήν περιφέρεια μέ κέντρο τό Ο καί ἀκτῖνα α τοῦ ἐπιπέδου ΧΟΥ, οἱ δέ μεταβολές τῆς κατηγμένης του νά εἶναι ἀνάλογες πρός τά ἀντίστοιχα προσημασμένα τόξα πού διαγράφει ἡ προβολή Π.

Οἱ ἐξισώσεις τῆς γραμμῆς πού εἶναι τροχιά τοῦ Μ εἶναι προφανῶς οἱ ἑξῆς:

$$\begin{cases} x = \alpha\sigma\upsilon\nu\vartheta \\ y = \alpha\eta\mu\vartheta \\ z = \lambda\vartheta+\mu \end{cases}$$

ὅπου λ καί μ σταθερές, θ τό ἀπό τήν προβολή Π διαγραφόμενο προσημασμένο τόξο (σέ ἀκτίνια ἤ μοῖρες ἑξηκονταδικές, κτλ.) μέ ἀρχικό σημεῖο τό Α(α,0 0). Κατά ταῦτα, θ εἶναι καί ἡ πολική γωνία τοῦ Π μέσα στό ΧΟΥ μέ πολικό ἄξονα τόν ΟΧ). Μιά μεταφορά τοῦ συστήματος τῶν ἀξόνων κατά τό διάνυσμα (0,0,μ) παρέχει τήν ἀναλυτική παράσταση

$$\begin{aligned} x &= \alpha\sigma\upsilon\nu\vartheta \\ y &= \alpha\eta\mu\vartheta \\ z &= \lambda\vartheta \quad , \end{aligned}$$

ὅπου οἱ νέες συντεταγμένες σημειώθηκαν πάλι, γιά εὐκολία τῆς γραφῆς, μέ (x,y,z). 'Απαλοιφή τῆς παραμέτρου θ παρέχει τήν ἀναλυτική παράσταση

$$\begin{cases} x^2+y^2=\alpha^2 \\ z=\lambda\,\text{τοξεφ}\,\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

τῆς γραμμῆς μέ δυό ἐξισώσεις μεταξύ τῶν x, y, z. Ἡ πρώτη ἀπό αὐτές παριστάνει μόνη της κυλινδρική ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς, ἡ δεύτερη μιάν ἐπιφάνεια πού λέγεται κοινό ἑλικοειδές. Ἡ παραπάνω γραμμή πού εἶναι καί ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν κοινῶν σημείων τῶν δυό αὐτῶν ἐπιφανειῶν, λέγεται στερεά (δηλ. μή ἐπίπεδη) κυκλική ἕλικα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

283. Λάβετε μέσα στό ἐπίπεδο σχεδιάσεως τίς εἰκόνες, δηλαδή τίς προβολές παραλλήλως πρός μιά διεύθυνση, τριῶν βασικῶν διανυσμάτων $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ ἀπό ἕνα σημεῖο O. Κατόπιν αὐτοῦ σχεδιάστε πρῶτον τά σημεῖα πού εἶναι εἰκόνες (δηλ. ἀξονομετρικές προβολές) τῶν σημείων τοῦ χώρου μέ τίς ἑξῆς συντεταγμένες, (-2,3,4), (-2,5|-1|3,5), (1,5|-2|2,5), (2,-3,-2), (2,-4,1). Λάβετε δεύτερον μέσα στό ἐπίπεδο σχεδιάσεως τρία σημεῖα A, B, Γ κατά ἐλεύθερη ἐκλογή καί προσδιορίστε μέ μετρήσεις πάνω στό σχέδιό σας τίς συντεταγμένες τῶν σημείων τοῦ χώρου πού ἔχουν τά A, B, Γ ὡς προβολές, ἄν ἐπί πλέον δοθῆ ὡς τετμημένη τοῦ A τό -2, ὡς τεταγμένη τοῦ B τό +3 καί ὡς κατηγμένη τοῦ Γ τό -4.

284. Βρῆτε τό βαρύκεντρο τοῦ συστήματος τῶν ἑξῆς ὑλικῶν σημείων $M_1(-5,2,3)$ μάζα 1 kg, $M_2(-3,-1,-2)$ μάζα 2 kg, $M_3(-6,2,-3)$ μάζα 3 kg, $M_4(4,-4,1)$ μάζα 4 kg.

285. Ἄς εἶναι $M_1, M_2, \ldots, M_\nu$ ν σημεῖα τοῦ χώρου στά ὁποῖα ἔχουμε ἀντιστοιχίσει ἀπό ἕνα πραγματικό ἀριθμό $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$. Ἄς εἶναι O τυχόν σημεῖο τοῦ χώρου. Δεῖξτε ὅτι τό διάνυσμα $\lambda_1\overline{OM}_1+\ldots+\lambda_\nu\overline{OM}_\nu$ στήν περίπτωση ὅπου $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_\nu=0$ δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τό O, δηλαδή παραμένει ἴσο μέ τόν ἑαυτό του ὅταν τό σημεῖο O ἀλλάξη θέση. Στήν περίπτωση ὅπου $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_\nu\neq 0$, ἄν τεθῆ $\overline{OM}=\lambda_1\overline{OM}_1+\ldots+\lambda_\nu\overline{OM}_\nu$, δεῖξτε ὅτι ὁ φορέας τοῦ διανύσματος $\overline{OM}$ διέρχεται ἀπό ἕνα ὁρισμένο σημεῖο K τοῦ χώρου ἀνεξάρτητο ἀπό τήν ἐκλογή τοῦ O. Τό σημεῖο αὐτό K ἔχει τήν ἰδιότητα:

$$\lambda_1\overline{KM}_1+\lambda_2\overline{KM}_2+\ldots+\lambda_\nu\overline{KM}_\nu=0 \;.$$

286. Νά ὑπολογισθῆ τό συνημίτονο τῆς γωνίας τῶν διανυσμάτων: $\bar{\alpha}(6,-2,3)$ καί $\bar{\beta}(7,-4,5)$.

287. "Αν Α,Β,Γ,Δ εἶναι οἱ διαδοχικές κορυφές παραλληλογράμμου νά δειχθῆ ὅτι:

$$\overline{A\Gamma}\cdot\overline{\Delta B} = \overline{AB}^2 - \overline{B\Gamma}^2 .$$

288. Νά ὑπολογισθῆ τό μικτό γινόμενο τῶν διανυσμάτων: $\bar{\alpha}(3,4,-1)$, $\bar{\beta}(0,1,2)$, $\bar{\gamma}(1,1,1)$.

289. Νά βρεθοῦν οἱ συντεταγμένες τῶν δίς ἐξωτερικῶν γινομένων $\left[[\bar{\alpha}\ \bar{\beta}]\bar{\gamma}\right]$ καί $\left[\bar{\alpha}[\bar{\beta}\bar{\gamma}]\right]$, ὅταν

$$\bar{\alpha}(3,4,1) \quad , \quad \bar{\beta}(2,0,-7) \quad καί \quad \bar{\gamma}(8,6,-4) .$$

290. Νά ἀναλυθῆ τό διάνυσμα $\bar{\delta}(4,-5,3)$ σέ δυό κάθετες συνιστῶσες ἀπό τίς ὁποῖες ἡ μιά νά ἔχη τή διεύθυνση τοῦ διανύσματος $\bar{\beta}(3,4,-2)$.

Νά ἀναλυθῆ ἐπίσης τό διάνυσμα $\bar{\delta}$ σέ τρεῖς συνιστῶσες κατά τίς διευθύνσεις τῶν διανυσμάτων

$$\bar{\alpha}(1,1,-2) \quad , \quad \bar{\beta}(2,1,0) \quad , \quad \bar{\gamma}(1,4,2).$$

291. Δεῖξτε ὅτι

$$\left[[\bar{\alpha}\bar{\beta}][\bar{\gamma}\bar{\delta}]\right] = (\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\delta})\bar{\gamma} - (\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma})\bar{\delta} = (\bar{\alpha}\bar{\gamma}\bar{\delta})\bar{\beta} - (\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta})\bar{\alpha} .$$

Ἑπομένως τί μπορεῖτε νά πῆτε γιά τή διεύθυνση τοῦ $\left[[\bar{\alpha}\bar{\beta}][\bar{\gamma}\bar{\delta}]\right]$;

292. Τί συμπεραίνετε γιά τά διανύσματα $\bar{\alpha}$ καί $\bar{\beta}$:

α) ἀπό τή σχέση $[\bar{\alpha}\bar{\gamma}] = [\bar{\beta}\bar{\gamma}]$;

β) ἀπό τή σχέση $\bar{\alpha}\bar{\gamma} = \bar{\beta}\bar{\gamma}$;

293. Τί συμπεραίνετε γιά τό διάνυσμα $\bar{\mathbf{x}}$ ἀπό τίς ἐξ ὑποθέσεως ταυτόχρονα ἰσχύουσες σχέσεις:

$$\bar{\alpha}\bar{\mathbf{x}} = \lambda \quad , \quad [\bar{\beta}\bar{\mathbf{x}}] = \bar{\gamma} .$$

(Σχηματίσατε τό δίς ἐξωτερικό γινόμενο $\left[[\bar{\beta}\bar{\mathbf{x}}]\bar{\alpha}\right]$).

294. Τέσσερα διανύσματα $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, $\bar{\delta}$ ἄς ἔχουν τό ἴδιο σημεῖο ὡς ἀρχή. Δεῖξτε τά ἑξῆς:

Γιά νά κεῖνται τά πέρατα τῶν $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}$ ἐπί εὐθείας πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἰσχύη μιά σχέση $A\bar{\alpha}+B\bar{\beta}+\Gamma\bar{\gamma} = 0$, ὅπου Α, Β, Γ πραγματικοί ἀριθμοί, ὄχι ὅλοι μηδενικοί, μέ $A+B+\Gamma = 0$.

Γιά νά κεῖνται τά πέρατα τῶν $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma},\bar{\delta}$ πάνω σέ ἕνα ἐπίπεδο πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἰσχύη μιά σχέση $A\bar{\alpha}+B\bar{\beta}+\Gamma\bar{\gamma}+\Delta\bar{\delta} = 0$, ὅπου Α, Β. Γ, Δ πραγματικοί ἀριθμοί, ὄχι ὅλοι μηδενικοί, μέ $A+B+\Gamma+\Delta = 0$.

295. <u>Ὁρισμός</u>. Τρία διανύσματα $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ λέγονται γραμμικῶς ἀνεξάρτητα ὅταν ἡ σχέση $\lambda\bar{\alpha}+\mu\bar{\beta}+\nu\bar{\gamma} = 0$ ἰσχύη μόνο μέ $\lambda = \mu = \nu = 0$. Δεῖξτε τώρα τά ἑξῆς: Ι) "Αγουμε τά τρία γραμμικῶς ἀνεξάρτητα διανύσματα $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}$ ἀπό τό ἴδιο σημεῖο Ο ὡς ἀρχή. Ἡ διανυ-

σματική ἀκτῖνα $\bar{r} = \overline{OM}$ ἀπό τό σημεῖο O στό τυχόν σημεῖο M τοῦ ἐπιπέδου πού ὁρίζουν μονότροπα τά πέρατα τῶν $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}$, μπορεῖ νά γραφῆ μέ τή μορφή: $\bar{r} = x\bar{\alpha}+y\bar{\beta}+z\bar{\gamma}$, ὅπου x,y,z τρεῖς πραγματικοί ἀριθμοί μέ $x+y+z = 1$.

II) Ἡ διανυσματική ἀκτίνα $\bar{r}$ ἱκανοποιεῖ τή σχέση

$$(\bar{r}\bar{\beta}\bar{\gamma}) + (\bar{r}\bar{\gamma}\bar{\alpha}) + (\bar{r}\bar{\alpha}\bar{\beta}) = (\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}) .$$

296. Ἄς εἶναι $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}$ τρία γραμμικῶς ἀνεξάρτητα διανύσματα. Θέτουμε

$$\bar{\alpha}^{-1} = \frac{[\bar{\beta}\bar{\gamma}]}{(\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma})} \quad , \quad \bar{\beta}^{-1} = \frac{[\bar{\gamma}\bar{\alpha}]}{(\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma})} \quad , \quad \bar{\gamma}^{-1} = \frac{[\bar{\alpha}\bar{\beta}]}{(\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma})} .$$

Ἡ τριάδα τῶν διανυσμάτων $\bar{\alpha}^{-1}$, $\bar{\beta}^{-1}$, $\bar{\gamma}^{-1}$ λέγεται ἀντίστροφη τῆς τριάδας $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}$. Ἀποδεῖξτε τίς ἑξῆς ἰδιότητες:

α) $\bar{\alpha}\bar{\alpha}^{-1} = \bar{\beta}\bar{\beta}^{-1} = \bar{\gamma}\bar{\gamma}^{-1} = 1$,
$\bar{\alpha}\bar{\beta}^{-1} = \bar{\alpha}^{-1}\cdot\bar{\beta} = \bar{\gamma}\bar{\alpha}^{-1} = \bar{\gamma}^{-1}\cdot\bar{\alpha} = \bar{\beta}\bar{\gamma}^{-1} = \bar{\beta}^{-1}\cdot\bar{\gamma} = 0$,

β) $(\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma})(\bar{\alpha}^{-1}\bar{\beta}^{-1}\bar{\gamma}^{-1}) = 1$.

γ) Τά διανύσματα τῆς ἀντίστροφης τριάδας ἀγμένα ἀπό ἕνα σημεῖο O παρέχουν τήν παραπληρωματική στερεά τρίεδρη γωνία πρός τήν τρίεδρη γωνία πού ὁρίζεται ἀπό τά $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ ἀγμένα ἐπίσης ἀπό τό O.

δ) Ἡ ἀντίστροφη τριάδα τῆς ἀντίστροφης τριάδας $\bar{\alpha}^{-1}$, $\bar{\beta}^{-1}$, $\bar{\gamma}^{-1}$ συμπίπτει μέ τήν ἀρχική $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$.

ε) Γιά νά ταυτίζεται μιά τριάδα $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ μέ τήν ἀντίστροφή της πρέπει καί ἀρκεῖ τά $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}$ νά εἶναι ἀνά δύο κάθετα (τρισορθογώνιο σύστημα) καί ἰσόμηκα πρός τήν μονάδα μήκους.

ζ) Γιά τυχόν διάνυσμα $\bar{\upsilon}$ ἰσχύει ἡ σχέση

$$\bar{\upsilon} = (\bar{\upsilon}\bar{\alpha})\bar{\alpha}^{-1} + (\bar{\upsilon}\bar{\beta})\bar{\beta}^{-1} + (\bar{\upsilon}\bar{\gamma})\bar{\gamma}^{-1} .$$

η) Ἄς εἶναι $\begin{cases} \bar{\upsilon} = A\bar{\alpha} + B\bar{\beta} + \Gamma\bar{\gamma} \\ \bar{\upsilon}_1 = A_1\bar{\alpha}^{-1} + B_1\bar{\beta}^{-1} + \Gamma_1\bar{\gamma}^{-1} \end{cases}$

ὅπου A, B, Γ, A_1, B_1, Γ_1 πραγματικοί ἀριθμοί. Ἰσχύει τότε:

$$\bar{\upsilon}\bar{\upsilon}_1 = AA_1 + BB_1 + \Gamma\Gamma_1 .$$

297. Νά βρεθῆ ὁ προσημασμένος ὄγκος τοῦ τετραέδρου $M_1M_2M_3M_4$ μέ διάταξη ἀκμῶν ἀπό τό M_1 τήν ἑξῆς: M_1M_2 , M_1M_3 , M_1M_4 ὅταν συντεταγμένες τῶν κορυφῶν εἶναι οἱ ἑξῆς: $M_1(-4,-2,5)$, $M_2(5,0,-2)$ $M_3(3,4,0)$, $M_4(0,6,2)$.

Σχεδιάστε ἀξονομετρικά τό ἀντίστοιχο σχέδιο.

298. Νά βρεθῆ ἡ ἐξίσωση τοῦ ἐπιπέδου πού διέρχεται ἀπό τά τρία σημεῖα $M_1(-3,4,5)$, $M_2(2,3,4)$, $M_3(4,-2,1)$. Προσδιορίστε τά κοινά σημεῖα πού ἔχει μέ τούς ἄξονες συντεταγμένων καί, ἐφ' ὅσον αὐτά εἶναι καί τά τρία διάφορα ἀπό τήν ἀρχή O, δῶστε

τήν ἐξίσωση τοῦ ἐπιπέδου μέ τήν μορφή $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1$.

299. Νά βρεθῆ ἡ ἐξίσωση τοῦ ἐπιπέδου πού διέρχεται ἀπό τά δυό σημεῖα $M_1(-5,-2,3)$, $M_2(3,4,1)$ καί εἶναι παράλληλο πρός τό διάνυσμα $\bar{\delta}(5,-3,2)$. Φέρτε τήν ἐξίσωση στή μορφή

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1 ,$$

ἐφόσο τοῦτο εἶναι δυνατό.

300. Νά βρεθῆ ἡ ἐξίσωση τοῦ ἐπιπέδου πού διέρχεται ἀπό τό σημεῖο $M(-3,-2,1)$, καί εἶναι παράλληλο πρός τά δυό διανύσματα $\bar{\delta}_1(-4,5,2)$, $\bar{\delta}_2(4,-5,-3)$. Φέρτε τήν ἐξίσωση στή μορφή

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1 ,$$

ἐφ'ὅσο τοῦτο εἶναι δυνατό.

301. Προσδιορίστε μέ τή βοήθεια λογαριθμικῶν πινάκων τό μέγεθος τῆς ὀξείας διέδρου γωνίας πού σχηματίζουν τά δυό ἐπίπεδα $p_1:\ 4x-5y+2z-4=0$ καί $p_2:\ -7x+5y+3z+2=0$.

302. Προσδιορίστε πάνω στόν ἄξονα τῶν x τά σημεῖα τῶν ὁποίων οἱ ἀπόλυτες ἀποστάσεις ἀπό τά δυό ἐπίπεδα p_1 καί p_2 τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως ἔχουν λόγο 4.

303. Νά βρεθῆ ἡ ἐξίσωση τοῦ ἐπιπέδου πού διχοτομεῖ τίς ἀμβλεῖες δίεδρες γωνίες τῶν ἐπιπέδων τῆς ἀσκήσεως 301.

304. Νά βρεθῆ ἡ ἐξίσωση τοῦ ἐπιπέδου πού κεῖται στό θετικό ἡμίχωρο τοῦ ἐπιπέδου $5x-2y+3z-3=0$ σέ ἀπόσταση 3 ἀπό αὐτό.

305. Ἄν δυό εὐθεῖες δίνωνται μέ τήν ἀναλυτική παράσταση

$$\frac{x-x_1}{\alpha_1}=\frac{y-y_1}{\beta_1}=\frac{z-z_1}{\gamma_1} \qquad \text{καί} \qquad \frac{x-x_2}{\alpha_2}=\frac{y-y_2}{\beta_2}=\frac{z-z_2}{\gamma_2}$$

ποιά εἶναι ἡ ἀναλυτική συνθήκη, ἡ ἀναγκαία καί ἱκανή, γιά νά εἶναι συμβατές (δηλαδή συνεπίπεδες);

306. Ἀπό μιά δοσμένη εὐθεία

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1=0 \\ A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2=0 \end{cases}$$

ἄγεται ἕνα ἐπίπεδο κάθετο πρός ἕνα δοσμένο ἐπίπεδο $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$. Ποιά εἶναι ἡ ἐξίσωσή του; Κάμετε μιάν ἀριθμητική ἐφαρμογή.

307. Ἀπό μιά δοσμένη εὐθεία

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1=0 \\ A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2=0 \end{cases}$$

ἄγεται ἕνα ἐπίπεδο παράλληλο πρός μιά δοσμένη εὐθεία

$$\begin{cases} A_3x + B_3y + \Gamma_3 z + \Delta_3 = 0 \\ A_4x + B_4y + \Gamma_4 z + \Delta_4 = 0 \ . \end{cases}$$

Ποιά εἶναι ἡ ἐξίσωσή του; Κάμετε μιάν ἀριθμητική ἐφαρμογή.

308. Ἀπό ἕνα δοσμένο σημεῖο $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ἄγεται ἡ εὐθεία πού συναντᾶ καθέτως μιά δοσμένη εὐθεία

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0 \ . \end{cases}$$

Ποιές εἶναι οἱ ἐξισώσεις τῆς εὐθείας; Κάμετε μιάν ἀριθμητική ἐφαρμογή.

309. Νά βρεθῆ ἡ ἀπόλυτη τιμή τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου $M_1M_2M_3$ ὅπου $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$ (σέ ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων). Δῶστε μιά γεωμετρική ἑρμηνεία τοῦ τύπου πού λαμβάνετε.

310. Νά βρεθῆ ὁ τύπος ἀλλαγῆς συντεταγμένων ὅταν τά OXYZ καί $O'X'Y'Z'$ εἶναι δεξιόχειρα τρισορθογώνια, εἶναι δέ $\overline{O'X'} \,/\!/\, \bar{\alpha}(5,-2,3)$ καί $\overline{O'Y'} \,/\!/\, (1,10,5)$. Τά 6 βασικά διανύσματα καί τῶν δυό συστημάτων ὑποτίθενται μεταξύ των ἰσόμηκα.

311. Ποιά εἶναι ἡ ἐλάχιστη ἀπόσταση μεταξύ τῶν εὐθειῶν

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2} \quad \text{καί} \quad \begin{cases} 6x-3y+z = 5 \\ -6x-y-z = 2 \ . \end{cases}$$

312. Νά βρεθῆ ἡ ἐξίσωση τῆς εὐθείας ἡ ὁποία συναντᾶ καθέτως δυό διάφορες δοσμένες εὐθεῖες στό χῶρο.

Νά διερευνηθοῦν οἱ εἰδικές περιπτώσεις πού μποροῦν νά παρουσιασθοῦν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XIX

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

§ 329. Μῆκος γραμμῆς στό χῶρο. Ἀνάλογα μέ ὅσα ἐκθέσαμε στούς §§ 285-289 γιά τό μῆκος τόξου ἐπίπεδης γραμμῆς, τό μῆκος τόξου μιᾶς γραμμῆς $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ στό χῶρο, μέ τήν προϋπόθεση ὅτι ὑπάρχουν καί εἶναι συνεχεῖς οἱ παράγωγοι $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$, δίνεται (σέ ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων) ἀπό τόν τύπο

$$\text{μῆκος τόξου AB} = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} \cdot dt \quad ,$$

ὅπου t_A καί t_B εἶναι οἱ τιμές τῆς παραμέτρου στίς ὁποῖες ἀντιστοιχοῦν τά ἄκρα A καί B τοῦ τόξου. Ἄν πάρουμε τό σημεῖο $M_o(t_o)$ γιά ἀρχή μετρήσεως τῶν τόξων καί ἐκλέξουμε μιά θετική φορά τόξων πάνω στή γραμμή, τότε τό προσημασμένο μῆκος $s(t)$ τοῦ τόξου πού ἀρχίζει στό $M_o(t_o)$ καί τελειώνει στό $M(t)$ δίνεται ἀπό τό ὁλοκλήρωμα

$$(329.1) \qquad s(t) = \int_{t_o}^{t} \pm\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} \cdot dt \quad ,$$

ὅπου ἡ τετραγωνική ρίζα θά ληφθῆ μέ τό + ἤ μέ τό − καθόσον ἡ θετική φορά τόξων πού ἐκλέξαμε συμπίπτει μέ τή φορά πού ἀντιστοιχεῖ σέ θετική αὔξηση τῆς παραμέτρου t ἤ μέ τήν ἀντίθετη. Ἄν, ὅπως συνηθίζεται, πάρουμε γιά θετική φορά τόξων τή φορά διαγραφῆς τῆς γραμμῆς πού ἀντιστοιχεῖ σέ μεταβολή τοῦ t ἀπό (ἀλγεβρικῶς) μικρότερες σέ μεγαλύτερες τιμές, τότε:

$$s(t) = \int_{t_o}^{t} +\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \cdot dt$$

καί $\quad ds = s'(t)dt = +\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} \cdot dt \quad =$

$$= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad ,$$

(ἡ τελευταία τετραγωνική ρίζα θά ληφθῆ μέ τό + ἤ μέ τό − καθόσο $dt > 0$ ἤ $dt < 0$).

Ἡ ἐφαπτομένη τῆς γραμμῆς στό σημεῖο $M(t)$, προσανατολισμένη θετικῶς σύμφωνα μέ τή φορά ἀπό μικρότερα σέ μεγαλύτερα t, (πού ὅπως, εἴπαμε, θά ἐκλέξουμε καί γιά θετική φορά τόξων πάνω στή γραμμή), εἶναι παράλληλη καί ὁμόρροπη πρός τό διάνυσμα $\big(x'(t)\ ,\ y'(t)\ ,\ z'(t)\big)$ ἤ τό (dx, dy, dz) μέ dt θετικόν ἀριθμό.

Τό ὁμόρροπο μοναδιαῖο διάνυσμα ἔχει συντεταγμένες

$$\left(\frac{x'(t)}{+\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} \quad , \quad \frac{y'(t)}{+\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} \quad , \quad \frac{z'(t)}{+\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} \right)$$

(φυσικά έφόσο $|x'| + |y'| + |z'| \neq 0$, πράγμα πού θά ὑποθέσουμε κατά κανόνα παρακάτω) ἤ

$$(392.2) \quad \left(\frac{x'(t)}{s'(t)}, \frac{y'(t)}{s'(t)}, \frac{z'(t)}{s'(t)}\right) = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right).$$

Τό διάνυσμα αὐτό θά τό καλοῦμε <u>ἐφαπτομενικό μοναδιαῖο διάνυσμα</u> καί θά τό παριστάνουμε μέ $\bar{\varepsilon}$. Οἱ συντεταγμένες του εἶναι τά συνημίτονα κατευθύνσεως τῆς θετικῆς φορᾶς τῆς ἐφαπτομένης στό σημεῖο M(t). Ἔχουμε

$$|\bar{\varepsilon}|^2 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

σ'ὅλες τίς θέσεις t.

§ 330. <u>Παράγωγος διανυσματικῆς συναρτήσεως ἀριθμητικῆς μεταβλητῆς</u>. Ἄν καλέσουμε $\bar{r} = \overline{OM} = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$ τή διανυσματική ἀκτίνα ἀπό τήν ἀρχή O στό σημεῖο M(t) τῆς γραμμῆς, τό διάνυσμα $\bar{r}(t)$ παρουσιάζεται ὡς μιά συνάρτηση τῆς ἀριθμητικῆς μεταβλητῆς t.

Παράγωγο τῆς διανυσματικῆς αὐτῆς συναρτήσεως στή θέση t εἶναι φυσικό νά ὁρίσουμε ἕνα διάνυσμα $\bar{v} = \bar{v}(t)$ μέ τήν ἰδιότητα νά εἶναι

$$\left|\bar{v}(t) - \frac{\Delta\bar{r}(t)}{\Delta t}\right| = \left|\bar{v}(t) - \frac{\bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t}\right| < \varepsilon$$

γιά $|\Delta t| <$ κατάλληλου $\eta = \eta(\varepsilon)$.

Ἕνα τέτοιο διάνυσμα $\bar{v}$ ὑπάρχει, ὅταν ὑποθέσουμε ὅτι ὑπάρχουν οἱ παράγωγοι $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$, ἔχει δέ συντεταγμένες $(x'(t), y'(t), z'(t))$· ἔτσι εἶναι

$$\bar{v}(t) = x'(t)\bar{i} + y'(t)\bar{j} + z'(t)\bar{k} .$$

Στήν κινηματική, ὅπου τό t παριστάνει χρόνο καί τό M(t) εἶναι ἡ θέση κατά τή χρονική στιγμή t ἑνός κινούμενου σημείου, τό διάνυσμα $\bar{v}(t)$ εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ τό διάνυσμα τῆς <u>ταχύτητας</u>, συντομώτερα ἡ "<u>ταχύτητα</u>" τού κινούμενου σημείου, στή χρονική στιγμή t. Τό μῆκος του $|\bar{v}(t)| = \left|\frac{ds}{dt}\right| = +\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$ εἶναι ἡ <u>ἐπιτρόχια ταχύτητα</u> στή χρονική στιγμή t.

Γενικῶς ἄν τό διάνυσμα $\bar{\delta}$ εἶναι μονοσήμαντα ὁρισμένο γιά κάθε τιμή τῆς ἀριθμητικῆς μεταβλητῆς t ἀπό ἕνα διάστημα $\alpha < t < \beta$ καί ἄν ὑπάρχη τό ὅριο

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\bar{\delta}(t+\Delta t)-\bar{\delta}(t)}{\Delta t} = \text{διάνυσμα } \bar{\zeta} = \bar{\zeta}(t) \;,$$

τότε τό $\bar{\zeta}(t)$ θά κληθῆ παράγωγος τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\bar{\delta}(t)$ στή θέση t καί θά παριστάνεται μέ $\frac{d\bar{\delta}(t)}{dt}$ ἤ $\bar{\delta}'(t)$.

Ἔστω σ'ἕνα ὀρθογώνιο σύστημα $\bar{\delta}(t) = \delta_1(t)\bar{i} + \delta_2(t)\bar{j} + \delta_3(t)\bar{k}$. Γιά νά ὑπάρχη τό $\frac{d\bar{\delta}(t)}{dt}$ πρέπει καί ἀρκεῖ νά ὑπάρχουν οἱ παράγωγοι

$$\frac{d\delta_1(t)}{dt} \;,\quad \frac{d\delta_2(t)}{dt} \;,\quad \frac{d\delta_3(t)}{dt} \;,$$

θά ἰσχύη δέ

$$\frac{d\bar{\delta}(t)}{dt} = \delta_1'(t)\bar{i} + \delta_2'(t)\bar{j} + \delta_3'(t)\bar{k} \;.$$

Γιά τήν παραγώγιση διανυσματικῶν συναρτήσεων ἰσχύουν οἱ ἑξῆς κανόνες:

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{\gamma}(t) + \bar{\delta}(t)\right) = \frac{d\bar{\gamma}}{dt} + \frac{d\bar{\delta}}{dt} \;,$$

$$\frac{d}{dt}\left(c\bar{\delta}(t)\right) = c\,\frac{d\bar{\delta}}{dt} \;, \quad (c = \text{σταθερά}) \;,$$

$$\frac{d}{dt}\left(f(t)\cdot\bar{\delta}(t)\right) = f'(t)\bar{\delta}(t) + f(t)\,\frac{d\bar{\delta}}{dt} \;,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{\gamma}(t)\cdot\bar{\delta}(t)\right) = \bar{\gamma}'\bar{\delta} + \bar{\gamma}\bar{\delta}' \text{ (παράγωγος ἐσωτ. γινομένου)} \;,$$

$$\frac{d}{dt}\left[\bar{\gamma}(t)\bar{\delta}(t)\right] = \left[\bar{\gamma}'\bar{\delta}\right] + \left[\bar{\gamma}\bar{\delta}'\right] \text{ (παράγωγος εξωτ. γινομένου)}.$$

Ἡ ἀπόδειξή τους εἶναι πολύ εὔκολη μέ τήν βοήθεια τῶν ὀρθογώνιων συντεταγμένων, θά μποροῦσε φυσικά νά γίνη καί καθαρῶς διανυσματικά βάσει τῶν ὁρισμῶν τῶν ἐννοιῶν πού παρουσιάζονται καί τῶν ἰδιοτήτων τους.

"Αν ἡ $\frac{d\bar{\delta}(t)}{dt}$ ὑπάρχη σ'ὅλες τίς θέσεις t ἀπό τό διάστημα $\alpha < t < \beta$, τότε θά εἶναι μιά μονοσήμαντη συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό διάστημα αὐτό καί μπορεῖ νά τεθῆ τό ἐρώτημα, ἄν αὐτή ἡ συνάρτηση ἔχει παράγωγο. "Αν ἡ παράγωγος αὐτή ὑπάρχη θά ὀνομασθῆ δεύτερη παράγωγος τοῦ $\bar{\delta}(t)$ καί θά παρασταθῆ μέ $\frac{d^2\bar{\delta}(t)}{dt^2}$ ἤ $\bar{\delta}''(t)$ ἤ $\ddot{\bar{\delta}}(t)$. Καθ'ὅμοιο τρόπο προχωροῦμε σέ παραγώγους ἀνώτερης τάξης.

Εἶναι:

$$\frac{d^2\bar{\delta}(t)}{dt^2} = \delta_1''(t)\bar{i} + \delta_2''(t)\bar{j} + \delta_3''(t)\bar{k} \quad , \text{ κτλ.}$$

§ 330α. 'Ιδού τώρα ἐφαρμογές τῶν παραπάνω.

I. "Εστω $\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$. Εἴδαμε ὅτι

$$\frac{d\bar{r}(t)}{dt} = \bar{v}(t) = x'(t)\bar{i} + y'(t)\bar{j} + z'(t)\bar{k}\,.$$

Θά ἔχουμε τώρα προχωρώντας σέ μιάν ἀκόμα παραγώγιση

$$\frac{d^2\bar{r}(t)}{dt^2} = \frac{d\bar{v}(t)}{dt} = x''(t)\bar{i} + y''(t)\bar{j} + z''(t)\bar{k} \quad .$$

Τό διάνυσμα αὐτό, πού παριστάνουμε μέ $\bar{\gamma}(t)$, ἑρμηνεύεται στήν κινηματική ὡς διανυσματική ἐπιτάχυνση τοῦ κινούμενου σημείου M(t) στή χρονική στιγμή t .

II. "Εστω $|\bar{\delta}(t)| = c =$ σταθερά. Π.χ. $\bar{\delta}(t) = c_1\bar{\delta}_0(t)$, ὅπου c_1 μιά σταθερά $\neq 0$ καί $\bar{\delta}_0(t)$ ἕνα μοναδιαῖο διάνυσμα πού εἶναι συνάρτηση τοῦ t. Εἶναι $\bar{\delta}(t)\cdot\bar{\delta}(t) = c_1^2 =$ σταθερά. "Αρα $2\bar{\delta}(t)\cdot\bar{\delta}'(t) = 0$ ἤ $\bar{\delta}\bar{\delta}' = 0$. 'Επομένως τό διάνυσμα $\bar{\delta}'(t)$ εἶναι κάθετο πτός τό $\bar{\delta}(t)$, πρᾶγμα πού καί γεωμετρικῶς συνάγεται εὔκολα. "Ετσι γιά τό ἐφαπτομενικό μοναδιαῖο διάνυσμα $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(t)$ ἰσχύει ἡ σχέση

$$\bar{\varepsilon}(t)\,\frac{d\bar{\varepsilon}}{dt} = \bar{\varepsilon}(t)\cdot\bar{\varepsilon}'(t) = 0 \quad , \quad \text{ἄρα} \quad \bar{\varepsilon}'(t) \perp \bar{\varepsilon}(t) \quad .$$

III. Ἂν πάρουμε γιά θετική φορά τόξων πάνω στή γραμμή $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ τή φορά κατά τά (ἀλγεβρικῶς) αὐξάνοντα t θά εἶναι

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \;, \quad \text{δηλαδή} \quad \frac{ds}{dt} = |\bar{\upsilon}(t)| \,.$$

Εἶναι ὅμως $\bar{\upsilon}(t) = |\bar{\upsilon}(t)|\,\bar{\varepsilon}(t)$ ἤτοι $\bar{\upsilon}(t) = \frac{ds}{dt}\,\bar{\varepsilon}(t)$.

Ἑπομένως

$$(330\alpha.1) \qquad \bar{\gamma}(t) = \frac{d\bar{\upsilon}(t)}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}\cdot\bar{\varepsilon} + \frac{ds}{dt}\cdot\frac{d\bar{\varepsilon}}{dt} \,.$$

Τό $\bar{\gamma}(t)$ ἀναλύθηκε ἔτσι σέ δυό συνιστῶσες: ἡ μιά $\frac{d^2 s}{dt^2}\cdot\bar{\varepsilon} = \bar{\gamma}_\varepsilon$ εἶναι παράλληλη πρός τό ἐφαπτομενικό διάνυσμα $\bar{\varepsilon}$ (ἑπομένως καί πρός τήν ταχύτητα $\bar{\upsilon}(t)$), ἡ ἄλλη $\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d\bar{\varepsilon}}{dt} = \bar{\gamma}_\kappa$ εἶναι παράλληλη πρός τό $\frac{d\bar{\varepsilon}}{dt}$ ἄρα $\perp \bar{\varepsilon}$.

Στήν κινηματική ἡ σχέση (330α.1) δίνει τήν ἀνάλυση τῆς ἐπιταχύνσεως στήν <u>ἐπιτρόχια</u> καί στήν <u>κεντρομόλα</u> συνιστῶσα της.

§ 331. <u>Ἐγγύτατο ἐπίπεδο γραμμῆς</u>. Ἐγγύτατο ἐπίπεδο τῆς γραμμῆς $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ στό σημεῖο της $M(t)$ καλεῖται τό ἐπίπεδο πού διέρχεται ἀπό τό $M(t)$ καί εἶναι παράλληλο πρός τά διανύσματα

$$\bar{\upsilon}(t) = \frac{d\bar{r}}{dt} \qquad \text{καί} \qquad \bar{\gamma}(t) = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \,.$$

Φυσικά προϋποθέτουμε ὅτι τά διανύσματα αὐτά ὑπάρχουν καί δέν εἶναι συγγραμμικά, μέ ἄλλα λόγια, ὑποθέτουμε πώς ὁ πίνακας

$$\begin{pmatrix} x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{pmatrix}$$

ἔχει διάσταση 2. Ἡ ἐξίσωση τοῦ ἐγγύτατου ἐπιπέδου εἶναι

$$\begin{vmatrix} X-x(t) & Y-y(t) & Z-z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} = 0 \,.$$

Τό ἐγγύτατο ἐπίπεδο περιέχει τήν ἐφαπτομένη τῆς γραμμῆς στό σημεῖο της $M(t)$. Εἶναι ἡ ὁριακή θέση τοῦ ἐπιπέδου τό ὁποῖο διερχεται διά τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς καί εἶναι παράλληλο πρός τήν ἐφαπτομένη στό γειτονικό σημεῖο $M_1(t+\Delta t)$, ὅταν τό $\Delta t \to 0$ καί ἑπομένως τό $M_1 \to M$.

Ἐπίσης εἶναι ἡ ὁριακή θέση ἑνός ἐπιπέδου διά τοῦ $M(t)$ καί δυό ἄλλων γειτονικῶν σημείων $M_1(t_1)$ καί $M_2(t_2)$ ὅταν $t_1 \to t$ καί $t_2 \to t$, ὁπότε τά M_1 καί M_2 τείνουν στό M.

Ἡ ὀνομασία ἐγγύτατο δικαιολογεῖται ὡς ἑξῆς:

Ἔστω $A(x-x_0) + B(y-y_0)+\Gamma(z-z_0)=0$ τυχόν ἐπίπεδο p διά τοῦ σημείου $M_0(t_0)$ τῆς γραμμῆς. Ἡ ἀπόσταση ἑνός σημείου $M(t_0+\Delta t)$ τῆς γραμμῆς ἀπό τό p ἰσοῦται μέ

$$\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}\Big\{A[x(t_0+\Delta t)-x(t_0)] + B[y(t_0+\Delta t)-y(t_0)] + \Gamma[z(t_0+\Delta t)-z(t_0)]\Big\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}\Big\{A\Big[x'(t_0)\Delta t + \frac{1}{2!}x''(t_0)\Delta t^2+\dots\Big] + B\Big[y'(t_0)\Delta t + \frac{1}{2!}y''(t_0)\Delta t^2+\dots\Big] + \Gamma\Big[z'(t_0)\Delta t + \frac{1}{2!}z''(t_0)\Delta t^2+\dots\Big]\Big\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}\Big\{[Ax'(t_0) + By'(t_0) + \Gamma z'(t_0)]\,\Delta t + [Ax''(t_0) + By''(t_0) + \Gamma z''(t_0)]\frac{\Delta t^2}{2!}+\dots\Big\}.$$

Ἄρα ἡ ἀπόσταση αὐτή θά εἶναι ἀπειροστό 1ης τάξεως ὡς πρός Δt, ἄν $Ax'+By'+\Gamma z'\neq 0$, ἄν δηλαδή τό ἐπίπεδο p δέν εἶναι παράλληλο πρός τό διάνυσμα $\bar{v} = x'\bar{i} + y'\bar{j} + z'\bar{k}$, θά εἶναι ἀπειροστό 2ης τάξεως ἄν τό p εἶναι μέν παράλληλο πρός τό $\bar{v}$, ὄχι ὅμως καί πρός τό $\bar{\gamma} = x''\bar{i} + y''\bar{j} + z''\bar{k}$, τέλος θά εἶναι ἀπειροστό τάξεως > 2 (ἐν γένει τρίτης τάξεως, διότι ὁ συντελεστής $[Ax'''(t_0) + By'''(t_0) + \Gamma z'''(t_0)]$ τοῦ $\frac{\Delta t^3}{3!}$ μέσα στήν τελευταία μεγάλη παρένθεση θά εἶναι ἐν γένει $\neq 0$), ἄν τό p εἶναι παράλληλο πρός τό $\bar{v}$ καί πρός τό $\bar{\gamma}$, δηλαδή ὅταν τό p συμπίπτη μέ τό ἐγγύτατο ἐπίπεδο τῆς γραμμῆς στό σημεῖο $M(t_0)$ τῆς γραμμῆς.

<u>Ἐφαρμογή στήν κινηματική</u>. Τό ἐγγύτατο ἐπίπεδο τῆς τροχιᾶς ἑνός κινούμενου σημείου M(t) περιέχει τά διανύσματα τῆς ταχύτητας $\bar{\upsilon}$ καί τῆς ἐπιταχύνσεως $\bar{\gamma}$ τοῦ M στήν χρονική στιγμή t ὅταν ἀχθοῦν ἀπό τό σημεῖο M(t) ὡς ἀρχή. Ἑπομένως μέσα στό ἐγγύτατο ἐπίπεδο κεῖται καί ἡ κεντρομόλα συνιστώσα τῆς ἐπιταχύνσεως, ὅταν ἀχθῆ ἀπό τό M(t) ὡς ἀρχή, διότι

$$\bar{\gamma}_\kappa = \bar{\gamma} - \frac{d^2 s}{dt^2}\,\bar{\varepsilon} \qquad (\text{βλέπε τήν } 330\alpha.1)\ .$$

<u>Παρατήρηση</u>. Ἐπειδή ἡ ἀπόσταση τοῦ σημείου $M(t_o+\Delta t)$ τῆς καμπύλης ἀπό τό ἐγγύτατο ἐπίπεδο στό σημεῖο $M_o(t_o)$ εἶναι ἴση μέ

$$\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}\left\{\frac{1}{3!}\left[Ax'''(t_o)+By'''(t_o)+\Gamma z'''(t_o)\right]\Delta t^3+\ldots\right\}$$

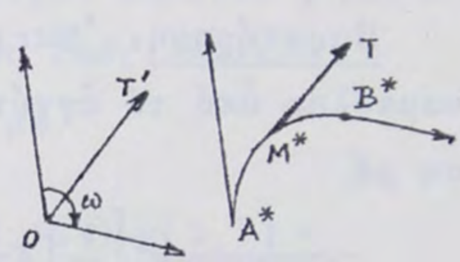
καί ἐπειδή ἐν γένει θά εἶναι $Ax'''(t_o)+By'''(t_o)+\Gamma z'''(t_o)\neq 0$, ἡ ἀπόσταση αὐτή θά ἀλλάζη πρόσημο, ὅταν τό Δt μεταβαίνη ἀπό ἀρνητικές σέ θετικές τιμές. Ἑπομένως τό ἐγγύτατο ἐπίπεδο θά χωρίζη ἕνα ἀρκετά μικρό τόξο $M_1M_oM_2$ τῆς καμπύλης σέ δυό μέρη M_1M_o καί M_oM_2 κείμενα τό ἕνα ἀπό τή μιά μεριά, τό ἄλλο ἀπό τήν ἄλλη μεριά τοῦ ἐπιπέδου· μέ ἄλλα λόγια ἡ καμπύλη καί τό ἐγγύτατό της ἐπίπεδο στό M_o διαπερνοῦν ἡ 1η τό 2ο καί τό 2ο τήν 1η στό σημεῖο M_o. (Παράβαλε τήν ἀνάλογη σχετική θέση δυό συνεπίπεδων γραμμῶν πού ἐφάπτονται σ'ἕνα κοινό τους σημεῖο μέ τάξη ἐπαφῆς 2).

§ 332. <u>Καμπυλότητα ἐπίπεδης γραμμῆς</u>. Ἕνας κύκλος καί τά διάφορα τόξα μᾶς φαίνονται τόσο πιό καμπυλωμένα ὅσο πιό μικρή εἶναι ἡ ἀκτίνα τους. Εἶναι λοιπόν φυσικό, θέλοντας νά ὁρίσουμε <u>ποσοτικά</u> τήν καμπυλότητα ἑνός κυκλικοῦ τόξου ἀκτίνας R, νά τή θέσουμε ἴση μέ $\frac{1}{R}$. Τήν καμπυλότητα μιᾶς εὐθείας θά τήν ὁρίσουμε ἴση μέ τό μηδέν, πρᾶγμα πού παρέχεται καί ἀπό τό παραπάνω σύμβολο $\frac{1}{R}$, ἄν χρησιμοποιήσουμε ἀπό τή μιά μεριά τήν παραδοχή ὅτι ἡ εὐθεία εἶναι ἕνας κύκλος μέ ἀκτίνα $R = +\infty$ καί ἀπό τήν ἄλλη μεριά τή σύμβαση: $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Μιά καμπύλη γ πού δέν εἶναι κυκλική δέν μᾶς φαίνεται ἐξ ἴσου καμπυλωμένη στά διάφορα μέρη της· γι'αὐτό θά ὁρίσουμε: μέση καμπυλότητα ἑνός τόξου τῆς γ καί καμπυλότητα τῆς γ σ' ἕνα σημεῖο της κατά τόν ἀκόλουθο τρόπο:

Παρατηροῦμε πρῶτα ὅτι, ἄν $\tau^* \equiv \widehat{A^*B^*}$ εἶναι ἕνα κυκλικό τόξο ἀκτίνας R, ἡ καμπυλότητά του $\frac{1}{R}$ ἰσοῦται καί μέ τό λόγο

$$\frac{|\omega^{\alpha\kappa\tau}|}{(\widehat{A^*B^*})} = \frac{|\omega|}{R|\omega|}$$

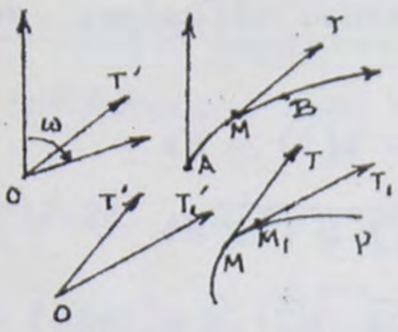


ὅπου $(\widehat{A^*B^*})$ τό μῆκος τοῦ τ^*καί ω τό προσημασμένο μέτρο σέ ἀκτίνια τῆς γωνίας πού σαρώνει μιά ἡμιευθεία $\overrightarrow{OT'}$ σταθερῆς ἀρχῆς O, παράλληλη καί ὁμόρροπη πρός τήν προσανατολισμένη ἐφαπτομένη $\overrightarrow{M^*T}$ τοῦ τόξου τ^* στό σημεῖο του M^*, ὅταν τό M^* γράφη τό τόξο $\widehat{A^*B^*}$.

Ἄς εἶναι τώρα γ μιά συνεχής γραμμή $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ γιά $\delta' < t < \delta''$, ἡ ὁποία ἔχει ἐφαπτομένη

$$MT : \frac{x-f(t)}{f'(t)} = \frac{Y-g(t)}{g'(t)}$$

σέ κάθε σημεῖο της $M\big(x=f(t), y=g(t)\big)$ καί αὐτή ἡ ἐφαπτομένη $\overrightarrow{MT}$ (προσανατολισμένη σύμφωνα μέ τή φορά τῆς κίνησης τοῦ M(t) πάνω στή γ ὅταν ἡ παράμετρος t αὐξαίνη ἀλγεβρικά), ἄς μεταβάλη διεύθυνση μέ συνέχεια ὅταν τό M(t) γράφη τή γ. Μέ ἄλλα λόγια ἡ γωνία $(\overrightarrow{OX}\,\overrightarrow{MT})$ ἄς εἶναι συνεχής συνάρτηση τῆς t στό διάστημα $\delta' < t < \delta''$, πρᾶγμα πού εἶναι ἐξασφαλισμένο ἄν οἱ παράγωγοι $x'(t) = f'(t)$ καί $y'(t) = g'(t)$ εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις τῆς t μή μηδενιζόμενες συγχρόνως (δηλ. γιά τήν ἴδια τιμή τῆς t) στό διάστημα $\delta' < t < \delta''$. Καλοῦμε μέση καμπυλότητα ἑνός τόξου $\tau \equiv \widehat{AB}$ τῆς γ τό λόγο $\frac{|\omega|}{(\widehat{AB})}$, ὅπου ω ἡ γωνία σέ ἀκτίνια πού σαρώνει μιά ἡμιευθεία $\overrightarrow{OT'}$ παράλληλη καί ὁμόρροπη πρός τήν



προσανατολισμένη ἐφαπτομένη $\overrightarrow{MT}$ τοῦ τόξου τ, ὅταν τό σημεῖο ἐπαφῆς Μ γράφει τό προσανατολισμάνο τόξο $\overset{\frown}{AB}$. Καλοῦμε καμπυλότητα τῆς γ σ'ἕνα σημεῖο της Μ τό ὅριο $\lim\limits_{(\widehat{MM_1})\to 0} \frac{|\omega_1|}{(\widehat{MM_1})}$, ἐφόσον ὑπάρχει, τῆς μέσης καμπυλότητας $\frac{|\omega_1|}{(\widehat{MM_1})}$ τοῦ τόξου $\widehat{MM_1}$ τῆς γ ὅταν τό μῆκος $(\widehat{MM_1})$ τοῦ τόξου τείνη στό 0, μ'ἄλλα λόγια: ὅταν τό (μεταβλητό) σημεῖο M_1 τείνη πάνω στή γ πρός τό (σταθερό) σημεῖο Μ (ἀπό τή μιά ἤ τήν ἄλλη μεριά του).

Εἶναι σκόπιμο στή μέση καμπυλότητα προσανατολισμένων τόξων μιᾶς προσανατολισμένης ἐπίπεδης γραμμῆς $\vec{\gamma}$ καί στήν καμπυλότητα τῆς $\vec{\gamma}$ σ'ἕνα σημεῖο της Μ νά δώσουμε καί ἀπό ἕνα πρόσημο, ἀντικαθιστώντας τούς δυό παραπάνω μή ἀρνητικούς ἀριθμούς $\frac{|\omega|}{(\widehat{AB})}$ καί $\lim\limits_{(\widehat{MM_1})\to 0} \frac{|\omega_1|}{(\widehat{MM_1})}$ μέ τούς προσημασμένους $\frac{\omega}{(\overset{\frown}{AB})}$ καί ἀντίστοιχα, $\lim\limits_{(\widehat{MM_1})\to 0} \frac{\omega_1}{(\widehat{MM_1})}$, πού ἔχουν τήν ἴδια μ'αὐτούς ἀπόλυτη τιμή.

Νά τώρα πώς ὑπολογίζεται, συναρτήσει τοῦ t, ἡ προσημασμένη καμπυλότητα μιᾶς προσανατολισμένης γραμμῆς $\vec{\gamma} : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ γιά $\delta' < t < \delta''$, σ'ἕνα σημεῖο της $M(t)$. Γιά θετική φορά πάνω στή γ ἐκλέγουμε τή φορά τῆς κίνησης τοῦ $M(t)$ ὅταν τό t αὐξαίνη ἀλγεβρικά· ἐπομένως ἕνα τόξο $\overset{\frown}{AM}$ τῆς $\vec{\gamma}$ μέ ἀρχή τό σημεῖο Α, ἀντίστοιχο στήν τιμή t_0 τῆς παραμέτρου t, καί πέρας τό $M(t)$, ἀντίστοιχο στήν τιμή t, ἔχει θετική ἤ ἀρνητική φορά καθόσο $t_0 < t$ ἤ $t_0 > t$. Ἄν λάβουμε τό $A(t_0)$ γιά ἀρχή μετρήσεως τόξων, τότε ὁ προσημασμένος ἀριθμός $\delta(t) = (\overset{\frown}{AM}) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{t_0}^{t} \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)} \cdot dt$ εἶναι ἡ καμπυλόγραμμη τετμημένη τοῦ $M(t)$ πάνω στή $\vec{\gamma}$ μέ ἀρχή τό Α. Θεωροῦμε ἀκόμη τή γωνία (σέ ἀκτίνια) $\varphi(t) = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{MT})$ πού ἔχει πρώτη πλευρά τόν ἡμιάξονα $\overrightarrow{OX}$ καί δεύτερη πλευρά τήν προσανατολισμένη ἐφαπτομένη $\overrightarrow{MT}$ τῆς $\overset{\frown}{\gamma}$ στό σημεῖοτης $M(t)$. Θά ἔχουμε τότε γιά δυό σημεῖα $M(t)$ καί $M_1(t_1 = t+\Delta t)$ τῆς γ μέ προσανατολισμένες ἐφαπτομενες $\overrightarrow{MT}$ καί $\overrightarrow{M_1T_1}$ σ'αὐτά:

1ο) $(\overset{\frown}{MM_1}) = (\overset{\frown}{AM_1}) - (\overset{\frown}{AM}) = s(t+\Delta t) - s(t) = \Delta s =$

$$= \int_t^{t+\Delta t} \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}\, dt \quad ,$$

2ο) $\omega_1 = (\overrightarrow{MT}\ \overrightarrow{M_1T_1}) = (\overrightarrow{OX}\ \overrightarrow{M_1T_1}) - (\overrightarrow{OX}\ \overrightarrow{MT}) = \varphi(t+\Delta t) -$

$$- \varphi(t) = \Delta\varphi \, .$$

'Από μιάν ἄλλη μεριά εἶναι εφφ(t) = συντελεστής διευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης $\overrightarrow{MT}$ τῆς $\overset{\frown}{\gamma}$ στό σημεῖο της $M(t)$

$$= \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \quad ,$$

ἄρα

$$\varphi(t) = \text{τοξεφ}\,\frac{y'(t)}{x'(t)} = \text{τοξεφ}\,\frac{g'(t)}{f'(t)} \, .$$

'Επομένως γιά τή μέση καμπυλότητα $\frac{\omega_1}{(\overset{\frown}{MM_1})}$ τοῦ τόξου $(\overset{\frown}{MM_1})$ θάχουμε:

$$\frac{\omega_1}{(\overset{\frown}{MM_1})} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta t}{\Delta s} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} : \frac{\Delta s}{\Delta t} \, .$$

Ἄρα

$$\lim_{(\overset{\frown}{MM_1})\to 0} \frac{\omega_1}{(\overset{\frown}{MM_1})} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} : \frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \frac{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}} = \frac{\varphi'(t)}{s'(t)} \, .$$

'Αλλά

$$\varphi'(t) = \left\{\text{τοξεφ}\,\frac{y'(t)}{x'(t)}\right\}' = \frac{1}{1+\frac{y'^2}{x'^2}}\left(\frac{y'}{x'}\right)' = \frac{1}{1+\frac{y'^2}{x'^2}}\cdot\frac{y''x'-y'x''}{x'^2}$$

$$= \frac{x'y''-y'x''}{x'^2+y'^2} = \frac{f'(t)g''(t)-g'(t)f''(t)}{f'^2(t)+g'^2(t)}$$

καί $\quad s'(t) = +\sqrt{x'^2+y'^2} = +\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}$. 'Επομένως

(332.1) $\quad \kappa(t)$ = καμπυλότητα τῆς $\overset{\frown}{\gamma}$ στό $M(t)$

$$= \frac{x'y''-x''y'}{x'^2+y'^2}\,\frac{1}{+\sqrt{x'^2+y'^2}} = \frac{x'y''-y'x''}{(x'^2+y'^2)^{3/2}} = \frac{f'(t)g''(t)-g'(t)f''(t)}{\left(f'^2(t)+g'^2(t)\right)^{3/2}} \, .$$

'Ακτίνα, κέντρο καί κύκλος καμπυλότητας.

'Ακτίνα καμπυλότητας τῆς $\vec{\gamma}$ σ'ἕνα σημεῖο της $M(t)$ λέγεται ὁ ἀντίστροφος πρός τήν καμπυλότητα $\varkappa(t)$ ἀριθμός

$$(332.2)\qquad R(t)=\frac{1}{\varkappa(t)}=\frac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{x'y''-y'x''}=\frac{\left(f'^2(t)+g'^2(t)\right)^{3/2}}{f'(t)g''(t)-g'(t)f''(t)}\ .$$

'Ο ἀριθμός αὐτός εἶναι θετικός ὅταν $\varkappa(t)>0$, ἀρνητικός ὅταν $\varkappa(t)<0$· ὅταν ἡ καμπυλότητα $\varkappa(t)$ εἶναι μηδέν, συμφωνοῦμε νά λέμε ὅτι ἡ ἀκτίνα καμπυλότητας εἶναι ἄπειρη (σέ ἁρμονία καί μέ τή σύμβαση: $\frac{1}{0}=\infty$).

Ἄν στρέφουμε τώρα γύρω στό σημεῖο $M(t)$ τήν προσανατολισμένη ἐφαπτομένη $\overrightarrow{MT}$ κατά $+\frac{\pi}{2}$, θά λάβουμε τήν προσανατολισμένη κάθετη $\overrightarrow{MP}$. Τό μοναδιαῖο καί ὁμόρροπο πρός τήν $\overline{MT}$ διάνυσμα ἔχει συντεταγμένες

$$\left(\frac{x'(t)}{+\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}}\ ,\ \frac{y'(t)}{+\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)\ ,$$

ἄρα τό μοναδιαῖο καί τό ὁμόρροπο πρός τήν κάθετη $\overrightarrow{MP}$ διάνυσμα ἔχει συντεταγμένες $\left(-\frac{y'(t)}{+\sqrt{x'^2+y'^2}}\ ,\ \frac{x'(t)}{+\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)$.

Πάνω στήν εὐθεία $\overrightarrow{MP}$, ὡς ἄξονα, παίρνουμε τό ἐφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{MK}$ μέ προσημασμένο μέτρο $R(t)$· τό πέρας του K θά ἔχη συντεταγμένες

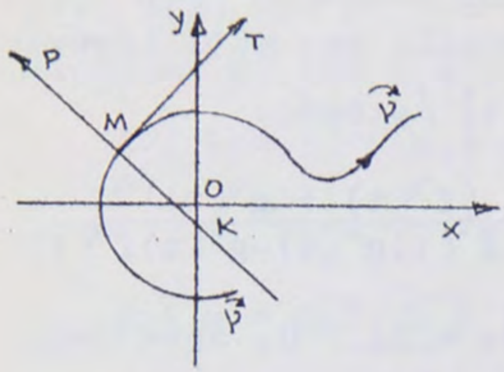
$$\xi=x(t)+\frac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{x'y''-y'x''}\cdot\frac{-y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}=$$

$$x(t)-\frac{x'^2(t)+y'^2(t)}{x'(t)y''(t)-y'(t)x''(t)}\,y'(t)\qquad ,$$

$$(332.3)\qquad \eta=y(t)+\frac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{x'y''-y'x''}\cdot\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

$$=y(t)+\frac{x'^2(t)+y'^2(t)}{x'(t)y''(t)-y'(t)x''(t)}\,x'(t)\ .$$

Τό K λέγεται κέντρο καμπυλότητας τῆς γ στό σημεῖο της $M(t)$· (εἴπαμε "τῆς γ" καί ὄχι "τῆς $\vec{\gamma}$", ἐπειδή τό K παραμένει



τό ἴδιο, ὅταν ἀλλάξουμε τή θετική φορά πάνω στή γ, ὅπως εὔκολα ἀποδείχνεται βάσει τῶν τύπων (332.3)).

Ὁ κύκλος πού ἔχει κέντρο τό K καί ἀκτῖνα $|R(t)|$, κύκλος πού περνᾶ ἀπό τό σημεῖο M(t) καί ἔχει σ'αὐτό ἐφαπτομένη τή MT, τήν ἴδια δηλαδή μέ τή γ, λέγεται <u>κύκλος καμπυλότητας τῆς γ στό σημεῖο της M(t)</u>. Ἰσχύει τό

<u>Θεώρημα</u>. Ὁ κύκλος καμπυλότητας τῆς γ στό σημεῖο της $M_o(t_o)$ εἶναι τό ὅριο ἑνός κύκλου $M_1M_2M_3$ πού περνᾶ ἀπό τρία σημεῖα $M_1(t_1)$, $M_2(t_2)$, $M_3(t_3)$ τῆς γ, ὅταν τά σημεῖα αὐτά τείνουν καί τά τρία στό σημεῖο $M_o(t_o)$.

<u>Πόρισμα</u>. Ὁ κύκλος $M_1M_2M_3$ ἔχοντας 3 κοινά σημεῖα μέ τή γ τήν διαπερνᾶ, ἄρα τό ἴδιο πράττει <u>ἐν γένει</u> καί τό ὅριο του, δηλ. ὁ (ἐφαπτόμενος τῆς γ) κύκλος καμπυλότητάς της στό σημεῖο $M_o(t_o)$.

<u>Παράδειγμα</u>. Ἔστω $x = \alpha\sigma\upsilon\nu t$, $y = \beta\eta\mu t$ γιά $\alpha \leqq t \leqq 2\pi$ μιά ἔλλειψη μέ ἡμιάξονες μήκους α καί β. Ἐφαρμόζοντας τούς τύπους (332.1), (332.2) καί (332.3) λαβαίνουμε στό σημεῖο της M(t):

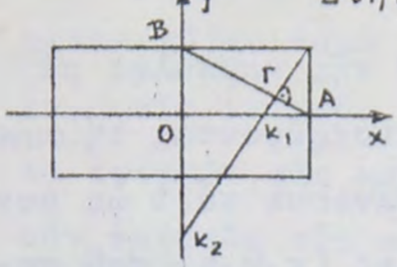
$$\varkappa(t) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha^2\eta\mu^2 t + \beta^2\sigma\upsilon\nu^2 t)^{3/2}},\quad R(t) = \frac{(\alpha^2\eta\mu^2 t + \beta^2\sigma\upsilon\nu^2 t)^{3/2}}{\alpha\beta},$$

$$\xi(t) = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha}\sigma\upsilon\nu^3 t \quad , \eta(t) = -\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha}\eta\mu^3 t .$$

Στίς κορυφές τῆς ἔλλειψης, δηλ. γιά $t = 0$, π καί $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, οἱ ἀκτῖνες καμπυλότητας εἶναι ἀντιστοίχως:

$$R(0) = R(\pi) = \frac{\beta^2}{\alpha} \quad , \quad R\left(\frac{\pi}{2}\right) = R\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\alpha^2}{\beta} .$$

Ἐπομένως τά ἀντίστοιχα κέντρα K_1, K_2 κτλ. κατασκευάζονται εὔκολα μέ τόν τρόπο πού ὑποδείχνεται στό παρακάτω σχῆμα.



Στήν ειδική περίπτωση $\begin{cases} x = t \\ y = \sigma(t) \end{cases}$, όπου ἡ ἀναλυτική παράσταση τῆς καμπύλης γ γράφεται, ἁπλούστερα, καί μέ τή μορφή $y = \sigma(x) = y(x)$, οἱ τύποι (332.1),(332.2) καί (332.3) γίνονται:

$$\varkappa(x) = \frac{y''(x)}{(1+y'^2(x))^{3/2}} \quad , \quad R(x) = \frac{(1+y'^2(x))^{3/2}}{y''(x)} \; ,$$

$$\xi(x) = x - \frac{(1+y'^2(x))\cdot y'(x)}{y''(x)} \; , \; \eta(x) = y(x) + \frac{1+y'^2(x)}{y''(x)} \; .$$

Σύμφωνα μ'αὐτούς ἡ καμπυλότητα $\varkappa(x)$ καί ἡ ἀκτίνα καμπυλότητας $R(x)$ εἶναι θετικές σέ κάθε σημεῖο ἑνός τόξου γ τό ὁποῖο στρέφει τά κοῖλα πρός τά θετικά y καί ἀρνητικές στά σημεῖα ἑνός τόξου πού στρέφει τά κοῖλα πρός τά ἀρνητικά y.

<u>Παράδειγμα.</u> Ἔστω $y = x^3 - x$ · ἔχουμε $y'(x) = 3x^2-1$, $y'' = 6x$. Ἄρα

$$\varkappa(x) = \frac{6x}{(1+9x^4-6x^2+1)^{3/2}} \; , \; R(x) = \frac{(2-6x^2+9x^4)^{3/2}}{6x} \; ,$$

$$\xi(x) = x - \frac{(2-6x^2+9x^4)(3x^2-1)}{6x} = \frac{-27x^6+27x^4-6x^2+2}{6x} \; ,$$

$$\eta(x) = \frac{15x^4-12x^2+2}{6x} \; .$$

Τό τόξο τῆς καμπύλης, πού ἀντιστοιχεῖ στό διάστημα $-\infty < x < 0$ στρέφει τά κοίλα πρός τ'ἀρνητικά y καί ἔχει καμπυλότητα ἀρνητική σέ κάθε σημεῖο του· τό τόξο, πού ἀντιστοιχεῖ στό διάστημα $0 \leq x < +\infty$, στρέφει τά κοῖλα πρός τά θετικά y καί ἔχει καμπυλότητα θετική σέ κάθε σημεῖο του. Χωρίζονται τά δύο τόξα μέ τό σημεῖο καμπῆς O(0,0), ὅπου ἡ ἐφαπτομένη τῆς γραμμῆς ταυτίζεται μέ τή διχοτόμο τῆς 2ης καί 4ης γωνίας τῶν ἀξόνων.

§ 333. <u>Τρίεδρο τοῦ Frenet (ἤ συνοδευτικό τρίσκελο).</u> Ἔστω καμπύλη $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha < t < \beta$. Ἀντί τῆς παραμέτρου t μποροῦμε νά πάρουμε γιά παράμετρο τό μῆκος τόξου

(333.1) $$s = s(t) = \int_{t_0}^{t} +\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\cdot dt$$

μετρημένο ἀπό κάποιο ἀρχικό σημεῖο $M_0(t_0)$ τῆς καμπύλης μέ θετική φορά τήν κατά τά αὐξάνοντα t. 'Αντιστρέφοντας τή συναρτησιακή σχέση (333.1) μεταξύ s καί t λαμβάνουμε τό t ὡς συνάρτηση τοῦ s καί ἐπομένως τίς συντεταγμένες (x,y,z) τοῦ σημείου $M(t)$ τῆς καμπύλης ὡς συναρτήσεις $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ τοῦ s. Τό διάνυσμα

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\,\bar{i} + \frac{dy}{ds}\,\bar{j} + \frac{dz}{ds}\,\bar{k}$$

εἶναι ἐκεῖνο πού καλέσαμε ἐφαπτομενικό μοναδιαῖο διάνυσμα $\bar{\varepsilon}$. Μιά εὐθεία διά τοῦ M κάθετη στό ἀντίστοιχο ἐφαπτομενικό μοναδιαῖο διάνυσμα $\bar{\varepsilon}$, δηλ. τήν ἐφαπτομένη στό M, λέγεται κάθετη τῆς καμπύλης στό σημεῖο της M. 'Από τίς κάθετες αὐτές ἐκείνη πού κεῖται μέσα στό ἐγγύτατο ἐπίπεδο στό M λέγεται <u>πρωτεύουσα κάθετη</u> καί ἐκείνη πού εἶναι κάθετη πρός τό ἐγγύτατο ἐπίπεδο στό M λέγεται <u>δικάθετη</u> τῆς καμπύλης στό σημεῖο M. Ὅπως παρατηρήσαμε στόν παράγραφο 331, τό διάνυσμα $\frac{d\bar{\varepsilon}}{dt}$ ἄρα καί τό συγγραμμικό του $\frac{d\bar{\varepsilon}}{ds} = \frac{d\bar{\varepsilon}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{\bar{\varepsilon}'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$ εἶναι παράλληλο πρός τό ἐγγύτατο ἐπίπεδο. 'Εξ ἄλλου τό $d\bar{\varepsilon}/ds$ ἄρα καί τό $\frac{d\bar{\varepsilon}}{dt}$ εἶναι κάθετα πρός τό $\bar{\varepsilon}$. 'Επομένως τό $\frac{d\bar{\varepsilon}}{dt}$ καθώς καί τό $d\bar{\varepsilon}/ds$ εἶναι παράλληλο πρός τήν πρωτεύουσα κάθετη.

Ἔστω $\bar{\pi}$ τό μοναδιαῖο διάνυσμα τῆς πρωτεύουσας κάθετης τό ὁμόρροπο μέ $\frac{d\bar{\varepsilon}}{ds}$ καί $\bar{\delta} = [\bar{\varepsilon}\bar{\pi}]$.

Τό $\bar{\delta}$ κάθετο ἐπάνω στό $\bar{\varepsilon}$ καί στό $\bar{\pi}$, θά εἶναι κάθετο πάνω στό ἐγγύτατο ἐπίπεδο, ἄρα παράλληλο πρός τή δικάθετη τῆς καμπύλης στό σημεῖο M.

Τά τρία μοναδιαῖα διανύσματα $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\pi}$, $\bar{\delta}$ <u>ἀγμένα ἀπό τό σημεῖο M ὡς ἀρχή</u>, ἀποτελοῦν τό λεγόμενο <u>τρίεδρο τοῦ Frenet (ἤ συνοδευτικό τρίσκελο)</u> στό σημεῖο M τῆς καμπύλης.

Τό τρίεδρο αὐτό, ὅπως ὁρίστηκε, εἶναι τρισορθογώνιο καί δεξιόχερο, μεταβάλλεται μέσα στό χῶρο ὅταν ἡ κορυφή του Μ μετακινῆται πάνω στήν καμπύλη. Ἡ ἕδρα του $(\bar{\varepsilon},\bar{\pi})$ εἶναι τό ἐγγύτατο ἐπίπεδο τῆς καμπύλης στό Μ, ἡ $(\bar{\pi},\bar{\delta})$ εἶναι τό κάθετο ἐπίπεδο τῆς καμπύλης στό Μ καί ἡ $(\bar{\delta},\bar{\varepsilon})$ λέγεται <u>εὐθειοποιοῦν ἐπίπεδο</u> τῆς καμπύλης στό Μ.

§ 334. <u>Τύποι τοῦ Frenet. Καμπυλότητα καί στρέψη</u>. Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τοῦ $\bar{\pi}$ τό $\dfrac{d\bar{\varepsilon}}{ds}$ εἶναι παράλληλο καί ὁμόρροπο μέ τό $\bar{\pi}$. Θέτουμε λοιπόν

$$(334.1)\qquad \frac{d\bar{\varepsilon}}{ds} = \varkappa\bar{\pi} \qquad \text{ὅπου} \qquad \varkappa = \left|\frac{d\bar{\varepsilon}}{ds}\right| \geqq 0\,.$$

Ἔχουμε

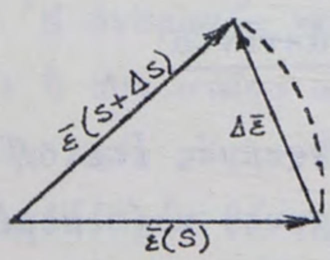
$$\left|\frac{d\bar{\varepsilon}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\bar{\varepsilon}(s+\Delta s)-\bar{\varepsilon}(s)}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\bar{\varepsilon}}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\Delta\bar{\varepsilon}|}{|\Delta s|}\,.$$

Ἐπειδή $\quad |\bar{\varepsilon}(s)| = |\bar{\varepsilon}(s+\Delta s)| = 1 \quad$ θά εἶναι

$$|\Delta\bar{\varepsilon}| = 2\eta\mu\,\frac{1}{2}\left(\widehat{\bar{\varepsilon}(s+\Delta s)\,,\,\bar{\varepsilon}(s)}\right)\,,$$

ἄρα

$$(334.2)\qquad \varkappa = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\Delta\bar{\varepsilon}|}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\text{γωνία }\left(\widehat{\bar{\varepsilon}(s+\Delta s),\bar{\varepsilon}(s)}\right)\text{ σέ ἀκτ.}}{|\Delta s|}\,.$$



Γι'αὐτό ὁ ἀριθμός $\varkappa = \varkappa(s)$ λέγεται <u>καμπυλότητα</u> τῆς γραμμῆς στό σημεῖο της Μ. Τό ἀντίστροφό του $\dfrac{1}{\varkappa} = R$ λέγεται <u>ἀκτίνα καμπυλότητας</u> τῆς γραμμῆς στό σημεῖο Μ. Ἀπό τήν (334.2) προκύπτει ὅτι, γιά ἐπίπεδες καμπύλες, ὁ νέος ὁρισμός τῆς καμπυλότητας συμπίπτει μέ ἐκεῖνον πού δώσαμε στόν παράγραφο 332, μέ μόνη τή διαφορά ὅτι στόν χῶρο ἡ καμπυλότητα ὁρίζεται θετική πάντοτε, ἐπειδή ἡ προσανατολισμένη πρωτεύουσα κάθετη $\bar{\pi}$ εἶναι ὁμόρροπη πρός τό $\dfrac{d\bar{\varepsilon}}{ds}$ καί κατευθύνεται ἑπομένως πάντοτε πρός τά κοῖλα τῆς καμπύλης, ἐνῶ στόν § 332 ἡ καμπυλότητα ὁρίστηκε > 0 ἤ < 0 καθόσον ἡ προσανατολισμένη κάθετη $\overrightarrow{MP}\big(-y'(t)\ ,\ x'(t)\big)$ εἶναι ὁμόρροπη ἤ ἀντίρροπη πρός τό διάνυσμα $\frac{d\bar{\varepsilon}}{ds}$.

Ἄς θεωρήσουμε τώρα τό διάνυσμα

$$\frac{d\bar{\delta}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\bar{\delta}(s+\Delta s) - \bar{\delta}(s)}{\Delta s} .$$

Εἶναι $|\bar{\delta}(s)| = 1$ ἀπό ταυτότητα ὡς πρός τή μεταβλητή s, ἄρα $\bar{\delta}(s)\cdot\bar{\delta}(s) \equiv 1$ καί συνεπῶς $\frac{d\bar{\delta}(s)}{ds}\cdot\bar{\delta}(s) = 0$, δηλαδή πάντοτε $\frac{d\bar{\delta}}{ds} \perp \bar{\delta}$. Ἀφ'ἑτέρου ἔχουμε $\bar{\delta} = [\bar{\varepsilon}\bar{\pi}]$, ἄρα

$$\frac{d\bar{\delta}}{ds} = \frac{d}{ds}[\bar{\varepsilon}\bar{\pi}] = \left[\frac{d\bar{\varepsilon}}{ds}\bar{\pi}\right] + \left[\bar{\varepsilon}\frac{d\bar{\pi}}{ds}\right] = [\varkappa\bar{\pi}\ \bar{\pi}] + \left[\bar{\varepsilon}\frac{d\bar{\pi}}{ds}\right] = \left[\bar{\varepsilon}\frac{d\bar{\pi}}{ds}\right]$$

Συνεπῶς εἶναι τό $\frac{d\bar{\delta}}{ds}$ κάθετο στό $\bar{\varepsilon}$. Ἀπό τίς σχέσεις $\frac{d\bar{\delta}}{ds} \perp \bar{\delta}$ καί $\frac{d\bar{\delta}}{ds} \perp \bar{\varepsilon}$ ἕπεται ὅμως ὅτι $\frac{d\bar{\delta}}{ds} \,//\, \bar{\pi}$. Θέτουμε λοιπόν

$$\frac{d\bar{\delta}}{ds} = -\tau\bar{\pi} \quad , \tag{334.3}$$

ὅπου τ ἕνας ὁρισμένος πραγματικός ἀριθμός (ἀρνητικός, μηδέν ἤ θετικός) πού ἐξαρτᾶται φυσικά ἀπό τό θεωρούμενο σημεῖο $M = M(s)$ τῆς γραμμῆς. Ὁ ἀριθμός αὐτός λέγεται <u>στρέψη</u> τῆς γραμμῆς στό σημεῖο M, ἐπειδή ἀνάλογα πρός τά παραπάνω ἔχομε

$$|\tau| = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\bar{\delta}(s+\Delta s) - \bar{\delta}(s)}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{|\Delta\bar{\delta}|}{|\Delta s|}$$

$$= \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\text{γωνία } \widehat{\left(\bar{\delta}(s+\Delta s)\ ,\ \bar{\delta}(s)\right)} \text{ σέ ἀκτίνια}}{|\Delta s|} .$$

Ἡ στρέψη εἶναι μηδενική στίς ἐπίπεδες γραμμές ἐπειδή ἔχουν σταθερό ἐγγύτατο ἐπίπεδο (τό ἐπιπεδό τους) καί ἐπομένως τό ἐλεύθερο διάνυσμα τῆς δικάθετης δέν μεταβάλλεται: $\bar{\delta}(s) =$ = σταθερό ὡς πρός s, ἄρα $\frac{d\bar{\delta}}{ds}$ = μηδενικό διάνυσμα στίς ἐπίπεδες γραμμές.

Τέλος ἔχουμε νά θεωρήσουμε τό διάνυσμα $\frac{d\bar{\pi}}{ds}$.

Εἶναι $$\bar{\pi} = [\bar{\delta}\ \bar{\varepsilon}] \quad ,$$

ἄρα

$$\frac{d\bar{\pi}}{ds} = \left[\frac{d\bar{\delta}}{ds}\ \bar{\varepsilon}\right] + \left[\bar{\delta}\ \frac{d\bar{\varepsilon}}{ds}\right] = \left[-\tau\bar{\pi}\ ,\ \bar{\varepsilon}\right] + \left[\bar{\delta}, \varkappa\bar{\pi}\right] = -\tau\left[\bar{\pi},\bar{\varepsilon}\right] + \varkappa\left[\bar{\delta}\bar{\pi}\right]$$

καί συνεπῶς

$$(334.4) \qquad \frac{d\bar{\pi}}{ds} = -\tau(-\bar{\delta}) + \varkappa(-\bar{\varepsilon}) = -\varkappa\bar{\varepsilon} + \tau\bar{\delta}\ .$$

Οἱ τύποι (334.1) (334.3) καί (334.4) λέγονται τύποι τοῦ Frenet καί εἶναι πολύ χρήσιμοι στή θεωρία καί στίς ἐφαρμογές. Π.χ. μέ τήν βοήθεια τοῦ τύπου (334.1) ἡ ἐπιτάχυνση $\bar{\gamma}(t)$ ἑνός κινούμενου σημείου $M = M(t)$ ἀναλύεται ὡς ἑξῆς σέ ἐπιτρόχια καί κεντρομόλα συνιστῶσα:

Ἔχουμε (βλέπε σχέση 330α.1)

$$\bar{\gamma}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}\bar{\varepsilon}(t) + \frac{ds}{dt}\cdot\frac{d\bar{\varepsilon}(t)}{dt} = \frac{d^2s}{dt}\cdot\bar{\varepsilon}(t) + \frac{ds}{dt}\ \frac{d\bar{\varepsilon}}{ds}\ \frac{ds}{dt}\ ,$$

ἄρα (ἐπειδή $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = |\bar{\upsilon}(t)|^2 \equiv$ μέτρο τῆς ταχύτητας στό τετράγωνο καί

$$\frac{d\bar{\varepsilon}}{ds} = \varkappa\bar{\pi} = \frac{1}{R}\,\bar{\pi}\ ,$$

ὅπου R ἡ ἀκτίνα καμπυλότητας):

$$(334.5) \qquad \bar{\gamma}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}\,\bar{\varepsilon}(t) + \frac{|\bar{\upsilon}(t)|^2}{R(t)}\,\bar{\pi}(t)\ .$$

Ἡ ὀνομασία κεντρομόλα συνιστῶσα ἐξηγεῖται ἀπό τό γεγονός ὅτι ἡ συνιστῶσα αὐτή κατευθύνεται ἀπό τό σημεῖο M(t) τῆς τροχιᾶς πρός τό λεγόμενο κέντρο καμπυλότητος K(t) τῆς τροχιᾶς, δηλαδή πρός τό σημεῖο K τῆς πρωτεύουσας κάθετης στό M γιά τό ὁποῖο ἰσχύει ἡ σχέση $\overline{MK} = R\bar{\pi}$. Ὁ κύκλος πού κεῖται μέσα στό ἐγγύτατο ἐπίπεδο τῆς καμπύλης στό σημεῖο M, πού ἔχει κέντρο τό σημεῖο αὐτό K(t) καί ἀκτίνα $R = \frac{1}{\varkappa}$ ἐφάπτεται τῆς καμπύλης στό σημεῖο M (ἔχει δηλαδή μέ αὐτήν κοινήν ἐφαπτομένη) καί λέγεται **κύκλος καμπυλότητας ἤ ἐγγύτατος κύκλος** τῆς καμπύλης στό M.

§ 335. Ὑπολογισμός τῆς καμπυλότητας καί τῆς στρέψης. Στόν παράγραφο αὐτόν θά παριστάνουμε μέ $\bar{\varepsilon}'$, $\bar{\varepsilon}''$,...,x', x'',...

κτλ. τίς παραγώγους $\frac{d\bar{\varepsilon}}{ds}$, $\frac{d^2\bar{\varepsilon}}{ds^2}$,..., $\frac{dx}{ds}$ $\frac{d^2x}{ds^2}$,... κτλ.

ὅπου s τό μῆκος τόξου τῆς καμπύλης καί μέ $\dot{\bar{\varepsilon}}$, $\ddot{\bar{\varepsilon}}$,..., $\dot{x}$,$\ddot{x}$,...
κτλ. τίς παραγώγους $\frac{d\bar{\varepsilon}}{dt}$, $\frac{d^2\bar{\varepsilon}}{dt^2}$,..., $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$,... κτλ.

Ἀπό τή σχέση (334.1) ἕπεται

$$(335.1) \quad \text{καμπυλότητα στό } M = \varkappa = \left|\frac{d\bar{\varepsilon}}{ds}\right| = \left|\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\right| = |\bar{r}''| =$$

$$= \left|\frac{d^2x}{ds^2}\,\bar{i} + \frac{d^2y}{ds^2}\,\bar{j} + \frac{d^2z}{ds^2}\,\bar{k}\right| = \left|x''\bar{i} + y''\bar{j} + z''\bar{k}\right| ,$$

δηλαδή

$$(335,2) \quad \varkappa = \frac{1}{R} = +\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2} = +\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2} ,$$

ὅπου οἱ παράγωγοι λαμβάνονται στή θέση s στήν ὁποία ἀντιστοιχεῖ τό θεωρούμενο σημεῖο M τῆς γραμμῆς.

Γιά τόν ὑπολογισμό τῆς στρέψης τ ἔχουμε τόν τύπο (334.3) ἀπό τόν ὁποῖο μέ ἐσωτερικό πολλαπλασιασμό τῶν δυό μελῶν ἐπί $\bar{\pi}$ λαβαίνουμε $-\tau(\bar{\pi}\bar{\pi}) = -\tau = \frac{d\bar{\delta}}{ds}\,\bar{\pi}$.

Εἶναι ἐξ ἄλλου

$$\frac{d\bar{\delta}}{ds} = \frac{d}{ds}\left[\bar{\varepsilon}\bar{\pi}\right] = \left[\frac{d\bar{\varepsilon}}{ds}\,\bar{\pi}\right] + \left[\bar{\varepsilon}\,\frac{d\bar{\pi}}{ds}\right] =$$

$$= \left[\varkappa\bar{\pi},\bar{\pi}\right] + \left[\bar{\varepsilon}\ \frac{d\bar{\pi}}{ds}\right] = \left[\bar{\varepsilon}\,\frac{d\bar{\pi}}{ds}\right] .$$

Ἄρα $\tau = -\left[\bar{\varepsilon}\ ,\ \frac{d\bar{\pi}}{ds}\right]\bar{\pi} = \text{μικτό γινόμενο } \left(\bar{\varepsilon}\bar{\pi}\,\frac{d\bar{\pi}}{ds}\right)$.

Ἔχουμε ὅμως:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{r}}{ds} \quad , \quad \bar{\pi} = \frac{1}{\varkappa}\cdot\frac{d\bar{\varepsilon}}{ds} = R\bar{r}'' \ , \ \text{ἄρα} \ \frac{d\bar{\pi}}{ds} = R'\bar{r}'' + R\bar{r}''' .$$

Ἑπομένως

$$\left(\bar{\varepsilon}\ \bar{\pi}\ \frac{d\bar{\pi}}{ds}\right) = \left(\bar{r}'\ ,\ R\bar{r}''\ ,\ R'\bar{r}'' + R\bar{r}'''\right) =$$

$$= (\bar{r}', R\bar{r}'', R'\bar{r}'') + (\bar{r}', R\bar{r}'', R\bar{r}''') = 0 + R^2(\bar{r}'\bar{r}''\bar{r}''')$$

καί συνεπῶς (μέ χρήση τοῦ (335.1))

$$(335.3) \qquad \tau = (\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''') : (\bar{r}'')^2$$

ἤ (μέ τήν βοήθεια τῶν συντεταγμένων, τύπος (335.2))

$$(335.4) \qquad \tau = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{x''^2 + y''^2 + z''^2}$$

ὅπου, ὅπως εἴπαμε, οἱ τόνοι δηλώνουν παραγωγίσεις ὡς πρός s στή θέση s στήν ὁποία ἀντιστοιχεῖ τό θεωρούμενο σημεῖο M τῆς γραμμῆς.

Ἄν ζητηθῆ νά ἐκφράσουμε τήν καμπυλότητα $\varkappa$ καί τή στρέψη τ μέ τίς παραγώγους τοῦ $\bar{r}$ ἤ τῶν x, y, z ὡς πρός τήν ἀρχική παράμετρο t τῆς καμπύλης, αὐτό μποροῦμε νά τό πετύχουμε ὡς ἑξῆς. Ἔχουμε:

$$\dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \bar{\varepsilon}\,\frac{ds}{dt},$$

$$(335.5) \qquad \ddot{\bar{r}} = \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\bar{r}}{ds}\,\frac{d^2s}{dt^2} = \varkappa\bar{\pi}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \bar{\varepsilon}\,\frac{d^2s}{dt^2}$$

$$\dddot{\bar{r}} = \frac{d^3\bar{r}}{ds^3}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 + 3\,\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\cdot\frac{d^2s}{dt^2}\cdot\frac{ds}{dt} + \frac{d\bar{r}}{ds}\,\frac{d^3s}{dt^3}.$$

Πολλαπλασιάζοντας ἐξωτερικά κατά μέλη τίς δυό πρῶτες σχέσεις λαβαίνουμε

$$[\dot{\bar{r}}\ddot{\bar{r}}] = \varkappa[\bar{\varepsilon}\bar{\pi}]\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 + 0 = \varkappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\bar{\delta}$$

καί $$\left|[\dot{\bar{r}}\ddot{\bar{r}}]\right| = \varkappa|\dot{s}|^3\,|\bar{\delta}|.$$

Ἄρα (ἐπειδή $|\dot{s}| = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2} = |\dot{\bar{r}}|$)

$$\varkappa = \left|[\dot{\bar{r}}\ddot{\bar{r}}]\right| : |\dot{s}|^3 = \left|[\dot{\bar{r}}\ddot{\bar{r}}]\right| : |\dot{\bar{r}}|^3 ,$$

(335.6)

$$\varkappa = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix}\dot{y} & \dot{z}\\ \ddot{y} & \ddot{z}\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}\dot{z} & \dot{x}\\ \ddot{z} & \ddot{x}\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}\dot{x} & \dot{y}\\ \ddot{x} & \ddot{y}\end{vmatrix}^2}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^{3/2}} ,$$

ὅπου οἱ τελεῖες σημαίνουν παραγωγίσεις ὡς πρός t.

Σχηματίζοντας τό μικτό γινόμενο κατά μέλη τῶν τριῶν σχέσεων (335.5) βρίσκουμε

$$(\dot{\bar{r}}\ \ddot{\bar{r}}\ \dddot{\bar{r}}) = (\bar{r}'\bar{r}''\ \bar{r}''')\ \dot{s}^6 \quad .$$

Ἐξ ἄλλου γνωρίζουμε ὅτι (βλέπε (335.1) καί (335.6))

$$\bar{r}''^2 = \varkappa^2 = \frac{[\dot{\bar{r}}\ddot{\bar{r}}]^2}{\dot{s}^6} \quad .$$

Ἄρα (μέ χρήση τοῦ (335.3))

(335.7) $$\tau = (\dot{\bar{r}}\ \ddot{\bar{r}}\ \dddot{\bar{r}}) : [\dot{\bar{r}}\ \ddot{\bar{r}}]^2$$

ἤ μέ συντεταγμένες ,

(335.8) $$\tau = \begin{vmatrix}\dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z}\\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z}\end{vmatrix} : \left(\begin{vmatrix}\dot{y} & \dot{z}\\ \ddot{y} & \ddot{z}\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}\dot{z} & \dot{x}\\ \ddot{z} & \ddot{x}\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}\dot{x} & \dot{y}\\ \ddot{x} & \ddot{y}\end{vmatrix}^2\right) .$$

<u>Ἐφαρμογή</u> Ἔστω ἡ στερεά κυκλική ἕλικα $x = \alpha\sigma\upsilon\nu t$, $y = \alpha\eta\mu t$, $z = \frac{\beta}{2\pi} t$, ὅπου $|\beta|$ τό βῆμα. Ἔχουμε ἐξίσωση ἐγγυτάτου ἐπιπέδου

$$\begin{vmatrix} X-\alpha\sigma\upsilon\nu t & Y-\alpha\eta\mu t & Z-\frac{\beta}{2\pi}t\\ -\alpha\eta\mu t & \alpha\sigma\upsilon\nu t & \frac{\beta}{2\pi}\\ -\alpha\sigma\upsilon\nu t & -\alpha\eta\mu t & 0 \end{vmatrix} = 0 ,$$

μῆκος τόξου s(t) (μέ ἀρχή τό σημεῖο τῆς ἕλικας τό ὁποῖο ἀντιστοιχεῖ σέ t = 0)

$$= \int_0^t +\sqrt{\alpha^2+\frac{\beta^2}{4\pi^2}}\,dt = +\sqrt{\alpha^2+\frac{\beta^2}{4\pi^2}}\cdot t$$

Θέτουμε γιά συντομία $+\sqrt{\alpha^2+\frac{\beta^2}{4\pi^2}} = c$· τότε $s = ct$,

$t = \frac{s}{c}$ καί $\bar{r}(s) = \alpha \text{συν}\frac{s}{c}\bar{i} + \alpha\text{ημ}\frac{s}{c}\bar{j} + \frac{\beta}{2\pi}\frac{s}{c}\bar{k}$.

'Εφαπτομενικό διάνυσμα:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{r}}{ds} = -\frac{\alpha}{c}\text{ημ}\frac{s}{c}\bar{i} + \frac{\alpha}{c}\text{συν}\frac{s}{c}\bar{j} + \frac{\beta}{2\pi c}\bar{k} ,$$

παράγωγός του ὡς πρός s :

$$\frac{d\bar{\varepsilon}}{ds} = -\frac{\alpha}{c^2}\text{συν}\frac{s}{c}\bar{i} - \frac{\alpha}{c^2}\text{ημ}\frac{s}{c}\bar{j}$$

καί $$\left|\frac{d\bar{\varepsilon}}{ds}\right| = \frac{\alpha}{c^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2+\frac{\beta^2}{4\pi^2}} ,$$

ἄρα $$\varkappa = \frac{1}{R} = \frac{\alpha}{c^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2+\frac{\beta^2}{4\pi^2}} = \text{σταθερά}$$

καί $$\bar{\pi} = -\text{συν}\frac{s}{c}\bar{i} - \text{ημ}\frac{s}{c}\bar{j} .$$

Τέλος $$\bar{\delta} = [\bar{\varepsilon}\bar{\pi}] = \frac{\beta}{2\pi c}\text{ημ}\frac{s}{c}\bar{i} - \frac{\beta}{2\pi c}\text{συν}\frac{s}{c}\bar{j} + \frac{\alpha}{c}\bar{k}$$

καί $$\frac{d\bar{\delta}}{ds} = \frac{\beta}{2\pi c^2}\text{συν}\frac{s}{c}\bar{i} + \frac{\beta}{2\pi c^2}\text{ημ}\frac{s}{c}\bar{j} = -\frac{\beta}{2\pi c^2}\bar{\pi}$$

ἄρα $$\tau = \frac{\beta}{2\pi c^2} = \frac{\frac{\beta}{2\pi}}{\alpha^2+\frac{\beta^2}{4\pi^2}} = \text{σταθερά} .$$

'Η στρέψη τ εἶναι θετική στή δεξιόστροφη ἕλικα ($\beta > 0$) καί ἀρνητική στήν ἀριστερόστροφη ($\beta < 0$).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

313. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ $\frac{d\bar{r}}{dt}$ καί $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ τῶν διανυσματικῶν συναρτήσεων:

$$\bar{r}(t) = 3t^2\,\bar{i} + e^{t^2}\,\bar{j} + \eta\mu t\,\bar{k}\ ,$$
$$\bar{r}(t) = \frac{5}{2+t^2}\,\bar{i} + \beta\bar{j} + \sigma\upsilon\nu 3t\,\bar{k}\ .$$

314. Νά βρεθῆ ὁ τύπος πού δίνει τήν καμπυλότητα $\varkappa$ ὅταν ἡ ἐπίπεδη καμπύλη δίνεται μέ τήν ἐξίσωση:

$$F(x,y) = 0\ .$$

315. Νά βρεθῆ ὁ τύπος πού δίνει τήν καμπυλότητα στά διάφορα σημεῖα τῆς παραβολῆς τρίτου βαθμοῦ $y = \alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ ἡ ὁποία διέρχεται ἀπό τά σημεῖα $(1,4)$, $(0,0)$, $(2,2)$, $(3,0)$. Νά ὑπολογισθῆ εἰδικῶς ἡ καμπυλότητα στό σημεῖο της μέ y τοπικῶς μέγιστο, στό σημεῖο μέ y τοπικῶς ἐλάχιστο καί στό σημεῖο καμπῆς.

('Αντίστοιχες ἀπάντήσεις $\quad \varkappa(x) = \dfrac{6(x-2)}{(1+9(x-1)^2(x-3)^2)^{3/2}}$, $-6,6,0$).

316. <u>Κορυφή</u> μιᾶς καμπύλης λέγεται ἕνα σημεῖο της ὅπου ἡ καμπυλότητα ἔχει τοπικό μέγιστο ἤ ἐλάχιστο. Νά βρεθοῦν οἱ κορυφές τῆς ἐπίπεδης καμπύλης $y = \ln x$, ὅπου $0 < x < +\infty$, καί τά ἀντίστοιχα κέντρα καμπυλότητας.

('Απαντ. Μόνο μια κορυφή, μέ συντεταγμένες $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $y = -\frac{1}{2}\ln 2$· συντεταγμένες τοῦ ἀντίστοιχου κέντρου καμπυλότητας: $\xi = 2\sqrt{2}$, $\eta = -\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}$).

317. Νά βρεθῆ ὁ τύπος πού δίνει τήν καμπυλότητα ὅταν ἡ καμπύλη δίνεται ἀναλυτικῶς σέ πολικές συντεταγμένες: $\varrho = \varrho(\vartheta)$.

('Απάντησις $\quad \varkappa = \dfrac{\varrho^2+2\varrho'^2-\varrho\varrho''}{(\varrho^2+\varrho'^2)^{3/2}}$).

318. Ὑπολογίστε τήν ἀκτίνα καμπυλότητας τῶν καμπύλων:

α) $\varrho = \alpha(\eta\mu\vartheta + \sigma\upsilon\nu\vartheta)$

β) $\varrho = \alpha\eta\mu^3\dfrac{\vartheta}{3}$

('Απ. α) σταθερά $= \dfrac{\alpha\sqrt{2}}{2}$, β) $\dfrac{3}{4}\varrho\mu^2\dfrac{\vartheta}{3}$).

319. Νά βρεθῆ ἡ ἀκτίνα καμπυλότητας τῆς καμπύλης

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\sigma\upsilon\nu t - \sigma\upsilon\nu 2t \\ y &= 2\eta\mu t - \eta\mu 2t \end{aligned}\right\}\ ,\quad 0 \leqq t \leqq 2\pi\ ,$$

συναρτήσει τῆς παραμέτρου t καί νά δειχθῆ ὅτι ἡ θέση $t = \pi$ εἶναι κορυφή.

('Απ. $\dfrac{8}{3}\eta\mu\dfrac{t}{2}$)

320. Νά βρεθῆ ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν κέντρων καμπυλότητας τῶν καμπύλων:

ἐλλειψης $\begin{cases} x = \alpha\sigma\upsilon\nu t \\ y = \beta\eta\mu t \end{cases}$ καί ὑπερβολῆς $\begin{cases} x = \alpha\cosh t \\ y = \beta\sinh t \end{cases}$.

Ποιά εἶναι τά κέντρα καί οἱ ἀκτῖνες καμπυλότητας στίς κορυφές τῶν δυό καμπύλων;

321. Ἀποδεῖξτε τό ἑξῆς: Τό κέντρο καμπυλότητας στό $M(t)$ τῆς καμπύλης $\begin{cases} x = \sigma(t) \\ y = \varphi(t) \end{cases}$ εἶναι ἡ ὁριακή θέση τοῦ σημείου τομῆς τῆς κάθετης τῆς καμπύλης στό σημεῖο $M(t)$ μέ τήν κάθετη στό γειτονικό σημεῖο $M(t+\Delta t)$, ὅταν $\Delta t \to 0$. Ἐπαληθεῦστε το στήν κυκλοειδῆ

$$\begin{cases} x = \alpha t - \alpha\eta\mu t \\ y = \alpha - \alpha\sigma\upsilon\nu t \end{cases}.$$

322. Ἀποδεῖξτε τό ἑξῆς: Ὁ κύκλος καμπυλότητας στό σημεῖο M_0 μιᾶς καμπύλης εἶναι ἡ ὁριακή θέση ἑνός κύκλου πού ἐφάπτεται τῆς καμπύλης στό σημεῖο M_0 καί διέρχεται δι'ἑνός γειτονικοῦ σημείου M τῆς καμπύλης, ὅταν τό M κινούμενο πάνω στήν καμπύλη ἔχει ὅριο τό M_0.

323. Δεῖξτε ὅτι ὅταν ἡ καμπυλότητα εἶναι $\equiv 0$, δηλαδή $= 0$ σ' ὅλα τά σημεῖα τῆς γραμμῆς, τότε ἡ γραμμή εἶναι εὐθεία.

324. Δεῖξτε ὅτι ὅταν ἡ στρέψη εἶναι $\equiv 0$, ἡ γραμμή εἶναι ἐπίπεδη.

325. Τῆς γραμμῆς $y = \dfrac{x^2}{2\alpha}$, $z = \dfrac{x^3}{6\alpha^2}$ προσδιορίστε τό τρίσκελο (= τρίεδρο) Frenet, τό ἐγγύτατο ἐπίπεδο, τήν καμπυλότητα καί τήν ἀκτίνα καμπυλότητος καθώς καί τίς συντεταγμένες τοῦ κέντρου καμπυλότητας, τέλος τή στρέψη τ.

326. Νά βρεθοῦν τά ἴδια πράγματα ὅπως στήν προηγουμένη ἄσκηση γιά τήν καμπυλη:

$$x = e^t\sigma\upsilon\nu t \quad , \quad y = e^t\eta\mu t \quad , \quad z = e^t \quad .$$

327. Νά βρεθοῦν τό ἐγγύτατο ἐπίπεδο καί ἡ ἀκτίνα καμπυλότητας σέ κάθε σημεῖο τῆς "σφαιρικῆς καμπύλης"

$$x^2+y^2+z^2 = \alpha^2 \quad , \quad x^2+y^2 = \alpha x \; .$$

328. Ἕνα σημεῖο διαγράφει τήν "κωνική ἕλικα"

$$\bar{r} = \alpha t\sigma\upsilon\nu t\bar{i} + \alpha t\eta\mu t\bar{j} + ct\cdot\bar{k}$$

ὅπου ὡς παράμετρος ἐλήφθη ὁ χρόνος t. Ζητεῖται νά βρεθῆ τό μῆκος τόξου πού θά ἔχη διανύσει τό σημεῖο στό χρονικό διάστημα ἀπό τή χρονική στιγμή $t = 0$ στή $t = t'$. Ἐπίσης νά βρεθοῦν ἡ ἐπιτρόχια καί ἡ κεντρόμολη συνιστώσα τῆς ἐπιταχύνσεως στή χρονική στιγμή t.

329.* Ὁ τόπος τῶν κέντρων καμπυλότητας μιᾶς γραμμῆς γ τοῦ χώρου εἶναι μιά γραμμή γ *. Ποιά εἶναι ἡ ἀναλυτική της παράσταση;

Δεῖξτε ὅτι ἡ ἐφαπτομένη σέ κάθε σημεῖο τῆς γ* κεῖται μέσα στό κάθετο ἐπίπεδο τῆς γραμμῆς γ στό ἀντίστοιχο σημεῖο.

330. Δεῖξτε ὅτι ἡ τομή τοῦ καθέτου ἐπιπέδου μιᾶς γραμμῆς γ τοῦ χώρου στό σημεῖο της M(t) μέ τό κάθετο ἐπίπεδο τῆς γ σ' ἕνα γειτονικό σημεῖο M(t+Δt) ἔχει ὁριακή θέση γιά $\Delta t \to 0$ μιάν εὐθεία πού εἶναι κάθετη στό ἐγγύτατο ἐπίπεδο τῆς γραμμῆς γ στό σημεῖο M(t) καί διέρχεται διά τοῦ ἀντίστοιχου κέντρου καμπυλότητας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XX

ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

§ 336. Ἐπιφάνειες ἐκ περιστροφῆς. Ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς καλεῖται ἐκείνη πού παράγεται ὅταν στρέφουμε μιάν ἀμετάβλητη γραμμή περί ἕναν ἄξονα. Κάθε σημεῖο τῆς γραμμῆς γράφει κατά τήν κίνηση ἕναν κύκλο πού λέγεται παράλληλος τῆς ἐπιφάνειας .

Μεσημβρινός τῆς ἐπιφάνειας καλεῖται ἡ τομή της μέ ἐπίπεδο πού διέρχεται διά τοῦ ἄξονα περιστροφῆς. Ἀποτελεῖται ἀπό δυο μέρη συμμετρικά τό ἕνα τοῦ ἄλλου ὡς πρός τόν ἄξονα.

Εὕρεση τῆς ἀναλυτικῆς παραστάσεως τῆς ἐπιφάνειας σέ σύστημα συντεταγμένων ὀρθογώνιο(μέ βασικά διανύσματα ἰσόμηκα) τοῦ ὁποίου ὁ ἄξονας κατηγμένων OZ ταυτίζεται μέ τόν ἄξονα περιστροφῆς:

Οἱ ἐξισώσεις τοῦ μεσημβρινοῦ πού κεῖται μέσα στό YOZ ἄς εἶναι (καλοῦμε (x_1, y_1, z_1) τίς συντεταγμένες τῶν σημείων του)

(336.1) $$\sigma(y_1, z_1) = 0 \quad , \quad x_1 = 0 \; .$$

Ἄν τόν περιστρέφουμε περί τόν OZ κατά τήν προσημασμένη γωνία θ οἱ ἐξισώσεις τοῦ ἐστραμμένου μεσημβρινοῦ θά εἶναι (καλοῦμε (x,y,z) τίς συντεταγμένες τῶν σημείων του):

$$(336.2) \qquad \sigma(-x\eta\mu\vartheta+y\sigma\upsilon\nu\vartheta, z) = 0\,, \quad x\sigma\upsilon\nu\vartheta+y\eta\mu\vartheta = 0\,,$$

ἐπειδή $x_1 = x\sigma\upsilon\nu\vartheta + y\eta\mu\vartheta\,,\ y_1 = -x\eta\mu\vartheta + y\sigma\upsilon\nu\vartheta\,,\ z_1 = z.$

Ἡ γωνία ϑ (παράμετρος) εἶναι ἕνας τυχών πραγματικός ἀριθμός· μπορεῖ νά περιορισθῆ στό διάστημα μεταβολῆς $0 \leqq \vartheta < \pi$ (στό διάστημα $0 \leqq \vartheta < 2\pi$ ὅταν οἱ ἐξισώσεις (336.1) παριστάνουν ὄχι ὁλόκληρο τόν μεσημβρινό, ἀλλά τό ἕνα ἀπό τά δυό συμμετρικά του μέρη, ἕναν ἡμιμεσημβρινό, ὅπως λέμε). Ἡ ἀπαλοιφή τῆς παραμέτρου ϑ ἀπό τίς ἐξισώσεις (336.2) παρέχει τήν ἐξίσωση τῆς ἐπιφάνειας. Πρός τοῦτο ἀπό τήν δεύτερη ἐξίσωση (336.2) λαβαίνουμε $\varepsilon\varphi\vartheta = -\dfrac{x}{y}$ καί ἐπομένως

$$\eta\mu\vartheta = -\frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}\,, \qquad \sigma\upsilon\nu\vartheta = \frac{y}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Εἰσάγοντας αὐτές τίς τιμές στήν πρώτη ἐξίσωση βρίσκουμε

$$\sigma(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0\,.$$

<u>Κανόνας</u>. Ἀπό τίς ἐξισώσεις $\left\{\begin{matrix}\sigma(y,z) = 0\\ x = 0\end{matrix}\right\}$ τοῦ μεσημβρινοῦ μέσα στό YOZ (ἤ καί μόνο τοῦ ἡμιμεσημβρινοῦ) λαβαίνουμε τήν ἐξίσωση τῆς ἐπιφάνειας ἀντικαθιστώντας μέσα στήν $\sigma(y,z) = 0$ τό y μέ τό $\pm\sqrt{x^2+y^2}$.

<u>Παρατήρηση</u>. Ἡ παραπάνω μέθοδος νά βρίσκουμε τήν ἀναλυτική παράσταση μιᾶς ἐπιφάνειας ἐκ περιστροφῆς μπορεῖ νά ἐφαρμοσθῆ καί στήν περίπτωση ὅπου ἡ γραμμή πού περιστρέφουμε γιά νά παραγάγουμε τήν ἐπιφάνεια δέν εἶναι μεσημβρινός τῆς ἐπιφάνειας.

Μιά ἄλλη μέθοδος εἶναι νά θεωρήσουμε τήν ἐπιφάνεια ὡς παραμετρικό σύνολο περιφερειῶν κύκλου πού ἔχουν "ἄξονα" τόν OZ καί πού συναντοῦν δοσμένη στό χῶρο γραμμή.

§ 337. <u>Παραδείγματα</u>. I. Ἐλλειψοειδῆ ἐκ περιστροφῆς:

$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$ μέ $\gamma>\alpha>0$. Ἐπιμηκυσμένο ἐλλειψοειδές.

$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$ μέ $0<\gamma<\alpha$. Ἀποπλατυσμένο ἐλλειψοειδές.

II. Ὑπερβολοειδῆ ἐκ περιστροφῆς.

$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=-1$ δίχωνο ὑπερβολοειδές.

$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1$ μονόχωνο ὑπερβολοειδές.

Τό μονόχωνο ὑπερβολοειδές μπορεῖ νά παραχθῆ καί με περιστροφή τῆς εὐθείας

$$\begin{cases}\frac{x}{\alpha}-\frac{z}{\gamma}=\left(1-\frac{y}{\alpha}\right)u\\ \frac{x}{\alpha}+\frac{z}{\gamma}=\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)\frac{1}{u}\end{cases} \quad \text{ἤ τῆς} \quad \begin{cases}\frac{x}{\alpha}-\frac{z}{\gamma}=\left(1+\frac{y}{\alpha}\right)\upsilon\\ \frac{x}{\alpha}+\frac{z}{\gamma}=\left(1-\frac{y}{\alpha}\right)\frac{1}{\upsilon}\end{cases}$$

ὅπου u καί υ αὐθαίρετες σταθερές (πού μποροῦν νά πάρουν καί τήν καταχρηστική τιμή ∞, ὁπότε οἱ μέν ἐξισώσεις τοῦ πρώτου συστήματος κατά σύμβαση δέν εἶναι ἄλλες παρά οἱ $1-\frac{y}{\alpha}=0$, $\frac{x}{\alpha}+\frac{z}{\gamma}=0$, οἱ δέ τοῦ δευτέρου γίνονται $1+\frac{y}{\alpha}=0$ καί $\frac{x}{\alpha}+\frac{z}{\gamma}=0$).

III. Παραβολοειδές ἐκ περιστροφῆς.

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{p}=2z \quad \text{(ὅπου φυσικά } p\neq 0\text{)}.$$

§ 338. Κωνικές ἐπιφάνειες.

Κωνική ἐπιφάνεια καλεῖται ἐκείνη πού παράγεται ὅταν μιά ἀπέρατη εὐθεία κινηθῆ κατά κάποιο νόμο διατηρῶντας ἕνα σημεῖο της σταθερό. Τό σταθερό σημεῖο λέγεται κορυφή τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας, εἶναι κέντρο συμμετρίας τῆς ἐπιφάνειας καί τήν χωρίζει σέ δυό μέρη, συμμετρικά τό ἕνα τοῦ ἄλλου ὡς πρός τό σημεῖο αὐτό, πού καλοῦνται χῶνες τῆς ἐπιφάνειας.

Εὕρεση τῆς ἀναλυτικῆς παραστάσεως σέ σύστημα εὐθύγραμμων συντεταγμένων μέ ἀρχήν 0 τήν κορυφή τῆς ἐπιφάνειας.

Οἱ εὐθεῖες διά τῆς ἀρχῆς 0 (ἐκτός ἐκείνων πού βρίσκονται μέσα στό YOZ) ἔχουν ἐξισώσεις

$$(338.1)\qquad \frac{x}{1} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\nu}$$

ὅπου μ καί ν παράμετροι. Ἀπό τό διπαραμετρικό αὐτό πλῆθος εὐθειῶν ξεχωρίζουμε τό μονοπαραμετρικό πλῆθος τῶν γενετειρῶν τῆς ἐπιφάνειας δίνοντας μιά σχέση

$$(338.2)\qquad \sigma(\mu,\nu) = 0$$

μεταξύ τῶν παραμέτρων μ καί ν. Ἡ ἀπαλοιφή τῶν παραμέτρων μ καί ν μεταξύ τῶν ἐξισώσεων (338.1) καί (338.2) παρέχει τήν ἐξίσωση

$$(338.3)\qquad \sigma\left(\frac{y}{x}\,,\,\frac{z}{x}\right) = 0$$

τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας. (Σ'αὐτήν τή γραφή τῆς ἐξισώσεως τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας δέν λαμβάνονται ὑπ'ὄψη τά σημεῖα τῆς ἐπιφάνειας πού κεῖνται μέσα στό YOZ καί γιά τά ὁποῖα $x = 0$).

Ἡ συνάρτηση

$$f(x,y,z) = \sigma\left(\frac{y}{x}\,,\,\frac{z}{x}\right)$$

ἔχει τήν ἰδιότητα: $f(kx,ky,kz) \equiv f(x,y,z) = k^0 f(x,y,z)$.

Τό σημάδι $\equiv$ σημαίνει ταυτότητα ὡς πρός x, y, z, k. Μιά τέτοια συνάρτηση $f(x,y,z)$ λέγεται ὁμογενής ὡς πρός x,y,z μέ διάσταση (ἤ βαθμό ὁμογένειας) τό μηδέν.

Γενικότερα. Ἔστω m ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός. Ἡ συνάρτηση $F(x,y,z)$ λέγεται ὁμογενής, διαστάσεως ἤ βαθμοῦ m, ἄν

$$F(kx,ky,kz) \equiv k^m F(x,y,z) \quad .$$

Μπορoῦμε τώρα νά διατυπώσουμε ὡς ἑξῆς τό ἀποτέλεσμα πού βρήκαμε.

Πρόταση. Μιά κωνική ἐπιφάνεια μέ κορυφή τήν ἀρχή $O(0,0,0)$ μπορεῖ νά παρασταθῆ μέ μιάν ἐξίσωση

$$f(x,y,z) = 0$$

ὅπου $f(x,y,z)$ συνάρτηση ὁμογενής διαστάσεως 0.

Ἀντιστρόφως, καί γενικότερα μάλιστα, ἰσχύει ἡ

Πρόταση. Μιά ἐξίσωση $F(x,y,z) = 0$, ὅπου $F(x,y,z)$ συνάρτηση ὁμογενής διαστάσεως m, παριστάνει κωνικήν ἐπιφάνεια μέ κορυφή τήν ἀρχή.

Παραδείγματα. I) Κωνική ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς (μέ ἄξονα τόν OZ ἑνός ὀρθογώνιου συστήματος):

$$x^2 + y^2 - \lambda^2 z^2 = 0 \ .$$

Τό λ ἰσοῦται μέ τήν εφω, ὅπου 2ω τό "γωνιακό ἄνοιγμα" τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας ἐκ περιστροφῆς (ἡ ὁποία μέ λιγότερη ἀκριβολογία λέγεται ὀρθός κυκλικός κῶνος).

II. Κωνική ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς μέ κορυφή τό O, ἄξονα παράλληλο πρός ἕνα μή μηδενικό διάνυσμα $\bar{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ καί γωνιακό ἄνοιγμα 2ω μέ εφω = λ, πάντοτε σέ ὀρθογώνιο σύστημα. Διανυσματική ἐξίσωσή της:

$$\bar{\alpha}\bar{r} = |\bar{\alpha}|\cdot|\bar{r}| \text{ συνω} \quad \text{ὅπου} \quad \bar{r} = \overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \ .$$

Ἄρα μέ συντεταγμένες:

$$(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 x)^2(1+\lambda^2) = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)(x^2 + y^2 + z^2) \ .$$

III. Κωνική ἐπιφάνεια μέ κορυφή ἕνα σημεῖο $K(x_0,y_0,z_0)$ σέ τυχόν σύστημα εὐθύγραμμων συντεταγμένων:

$$F(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0) = 0 \quad ,$$

ὅπου $F(\xi,\eta,\zeta)$ ὁμογενής συνάρτηση τῶν ξ,η,ζ ὁποιασδήποτε διαστάσεως.

§ 339. Κυλινδρικές ἐπιφάνειες.

Κυλινδρική ἐπιφάνεια καλεῖται ἐκείνη πού παράγεται ὅταν μιά ἀπέρατη εὐθεία κινηθῆ κατά κάποιον νόμο παραμένοντας παράλληλη πρός τόν ἑαυτό της.

Ἐξίσωση τῆς ἐπιφάνειας ὅταν οἱ γενέτειρες εἶναι παράλληλες πρός τόν OZ (σέ τυχόν σύστημα εὐθύγραμμων συντεταγμένων):

$$\sigma(x,y) = 0 \ .$$

Γενικότερα. Ἡ ἐξίσωση $\varphi(u,\upsilon) = 0$,

ὅπου $u = A_1x + B_1y + \Gamma_1 z + \Delta_1$ καί $\upsilon = A_2x + B_2y + \Gamma_2 z + \Delta_2$ μέ πίνακα

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \end{pmatrix}$$

διαστάσεως 2, παριστάνει κυλινδρικήν ἐπιφάνεια τῆς ὁποίας οἱ γενέτειρες εἶναι παράλληλες πρός τήν εὐθεία

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0 \end{cases} .$$

Παραδείγματα. I. Σέ ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων.

$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ ἐλλειπτική κυλινδρική ἐπιφάνεια

$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ ὑπερβολική " "

$y^2 = 2px$ παραβολική " "

(χάρη συντομίας ἀντί "κυλινδρική ἐπιφάνεια", χρησιμοποιεῖται συνήθως ὁ ὅρος "κύλινδρος").

II. Ἔστωσαν

$$\begin{cases} g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

οἱ ἐξισώσεις γραμμῆς (σέ τυχόν σύστημα εὐθύγραμμων συντεταγμένων) καί $\sigma(x,y) = 0$ τό ἀποτέλεσμα τῆς ἀπαλοιφῆς τοῦ z μεταξύ τῶν δυό ἐξισώσεων $g(x,y,z) = 0$ καί $h(x,y,z) = 0$.

Ἡ ἐξίσωση $\sigma(x,y) = 0$ παριστάνει τήν κυλινδρική ἐπιφάνεια ἡ ὁποία προβάλλει τή γραμμή παραλλήλως πρός τόν ἄξονα OZ. Ὁμοίως, ἄν $\omega(y,z) = 0$ εἶναι τό ἀποτέλεσμα τῆς ἀπαλοιφῆς τοῦ x μεταξύ τῶν ἐξισώσεων $g = 0$ καί $h = 0$, τότε ἡ ἐξίσωση $\omega(y,z) = 0$ παριστάνει τήν κυλινδρική ἐπιφάνεια πού προβάλλει τήν θεωρούμενη γραμμή παραλλήλως πρός τόν ἄξονα OX, κτλ.

§ 340. Κωνοειδεῖς ἐπιφάνειες. Κωνοειδής ἐπιφάνεια καλεῖται μιά ἐπιφάνεια πού παράγεται ὅταν μιά εὐθεία κινηθῆ συναντώντας δοσμένη σταθερή εὐθεία καί παραμένοντας παράλληλη πρός δοσμένο σταθερό ἐπίπεδο. (Ὑποθέτουμε, ἐννοεῖται, ὅτι ἡ σταθερή εὐθεία τέμνει τό σταθερό ἐπίπεδο, γιά νά μήν εἶναι ἡ παραγόμενη κωνοειδής ἐπιφάνεια ἐπίπεδη).

Ἐξίσωση τῆς κωνοειδοῦς ἐπιφάνειας ὡς πρός τό ειδικό (ἐν γένει πλαγιογώνιο) σύστημα OXYZ τοῦ ὁποίου ὁ μέν OZ συμπίπτει μέ τή δοσμένη σταθερή εὐθεία, τό δέ XOY εἶναι παράλληλο πρός τό δοσμένο σταθερό ἐπίπεδο.

Οἱ εὐθύγραμμες γενέτειρες τῆς κωνοειδοῦς ἐπιφάνειας ἀποτελοῦν ἕνα μονοπαραμετρικό σύστημα εὐθειῶν πού συναντοῦν τόν OZ καί εἶναι παράλληλες πρός τό XOY.

Εὐθεία ὅμως παράλληλη πρός τό XOY καί συναντῶσα τόν OZ ἔχει ἐξισώσεις

$$\begin{cases} y = \lambda x \\ z = \gamma \end{cases}$$

ὅπου λ καί γ ἀνεξάρτητες παράμετροι.

Ἄρα ἀναλυτική παραμετρική παράσταση τῆς κωνοειδοῦς ἐπιφάνειας θά εἶναι ἕνα σύστημα ἐξισώσεων

$$\begin{cases} y = \lambda x \\ z = \gamma \\ \sigma(\lambda,\gamma) = 0 \end{cases}$$

ὅπου $\sigma(\lambda,\gamma) = 0$ κατάλληλη ἐξίσωση μεταξύ τῶν παραμέτρων λ καί γ. 'Απαλοιφή τῶν παραμέτρων λ καί γ μεταξύ τῶν τριῶν παραπάνω ἐξισώσεων ἄγει στήν ἐξίσωση

$$\sigma\left(\frac{y}{x}\,,\ z\right) = 0$$

τῆς ἐπιφάνειας.

'Αντιστρόφως μιά ἐξίσωση αὐτῆς τῆς μορφῆς (δηλαδή μιά ἐξίσωση μεταξύ τῆς ποσότητος $\frac{y}{x}$ καί τῆς z) παριστάνει κωνοειδῆ ἐπιφάνεια μέ γενέτειρες πού συναντοῦν τόν OZ καί εἶναι παράλληλες πρός τό XOY.

Πράγματι, ἄν ἡ τριάδα (x_o, y_o, z_o) ἱκανοποιῆ τήν ἐξίσωση, δηλ. ἄν $\sigma\left(\frac{y_o}{x_o}\,,\ z_o\right) = 0$ τότε θά ἱκανοποιοῦν τήν ἐξίσωση καί οἱ σωντεταγμένες (x,y,z) κάθε σημείου τῆς εὐθείας $\frac{y}{x} = \frac{y_o}{x_o}$, $z = z_o$.

Γενικότερα, κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς $\varphi\left(\frac{u}{\upsilon}\,,\ w\right) = 0$, ὅπου $u = A_1x + B_1y + \Gamma_1 z + \Delta_1$, $\upsilon = A_2x + B_2y + \Gamma_2 z + \Delta_2$, $w = A_3x + B_3y + \Gamma_3 z + \Delta_3$, παριστάνει μιά κωνοειδῆ ἐπιφάνεια μέ γενέτειρες πού συναντοῦν τήν εὐθεία $\begin{cases} u = 0 \\ \upsilon = 0 \end{cases}$, δηλ. τήν

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0 \end{cases}$$

καί πού εἶναι παράλληλες πρός τό ἐπίπεδο $w = 0$, δηλαδή πρός τό $A_3x + B_3y + \Gamma_3 z + \Delta_3 = 0$.

Πράγματι, ἄν ἡ τριάδα (x_o, y_o, z_o) ἱκανοποιῆ τήν ἐξίσωση $\varphi\left(\frac{u}{\upsilon}\,,\ w\right) = 0$, δηλαδή ἄν ἀληθεύη ἡ σχέση

$$\varphi\left(\frac{A_1x_o + B_1y_o + \Gamma_1 z_o + \Delta_1}{A_2x_o + B_2y_o + \Gamma_2 z_o + \Delta_2}\,,\ A_3x_o + B_3y_o + \Gamma_3 z_o + \Delta_3\right) = 0 ,$$

τότε θά ἱκανοποιῆ τήν ἐξίσωση καί κάθε τριάδα (x,y,z) ἡ ὁποία ἐπαληθεύει τίς δυό σχέσεις

$$\begin{cases} \dfrac{A_1x + B_1y + \Gamma_1 z + \Delta_1}{A_2x + B_2y + \Gamma_2 z + \Delta_2} = \dfrac{u_o}{\upsilon_o} \\ A_3x + B_3y + \Gamma_3 z + \Delta_3 = w_o \end{cases} ,$$

ὅπου

$u_0 = A_1x_0 + B_1y_0 + \Gamma_1 z_0 + \Delta_1$, $\upsilon_0 = A_2x_0 + B_2y_0 + \Gamma_2 z_0 + \Delta_2$,
$w_0 = A_3x_0 + B_3y_0 + \Gamma_3 z_0 + \Delta_3$.

Κάθε τέτοια τριάδα (x,y,z) δέν εἶναι ὅμως παρά τριάδα συντεταγμένων ἑνός σημείου τῆς εὐθείας

$$\begin{cases} (A_2x + B_2y + \Gamma_2 z + \Delta_2)u_0 - (A_1x + B_1y + \Gamma_1 z + \Delta_1)\upsilon_0 = 0, \\ A_3x + B_3y + \Gamma_3 z + \Delta_3 - w_0 = 0 \end{cases}$$

ἡ ὁποία εἶναι τομή ἑνός ἐπιπέδου διερχομένου διά τῆς εὐθείας

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0 \end{cases}$$

καί ἑνός ἐπιπέδου παραλλήλου πρός τό $A_3x + B_3y + \Gamma_3 x + \Delta_3 = 0$.

Ἄρα ἡ τομή αὐτή εἶναι εὐθεία πού συναντᾶ τήν εὐθεία $\begin{cases} u = 0 \\ \upsilon = 0 \end{cases}$ καί εἶναι παράλληλη πρός τό $w = 0$, ὅ.ἔ.δ.

§ 341. Παραδείγματα. I. Κωνοειδής ἐπιφάνεια μέ γενέτειρες πού συναντοῦν τόν OZ, εἶναι παράλληλες πρός τό XOY καί συναντοῦν ἐπί πλέον τήν περιφέρεια κύκλου

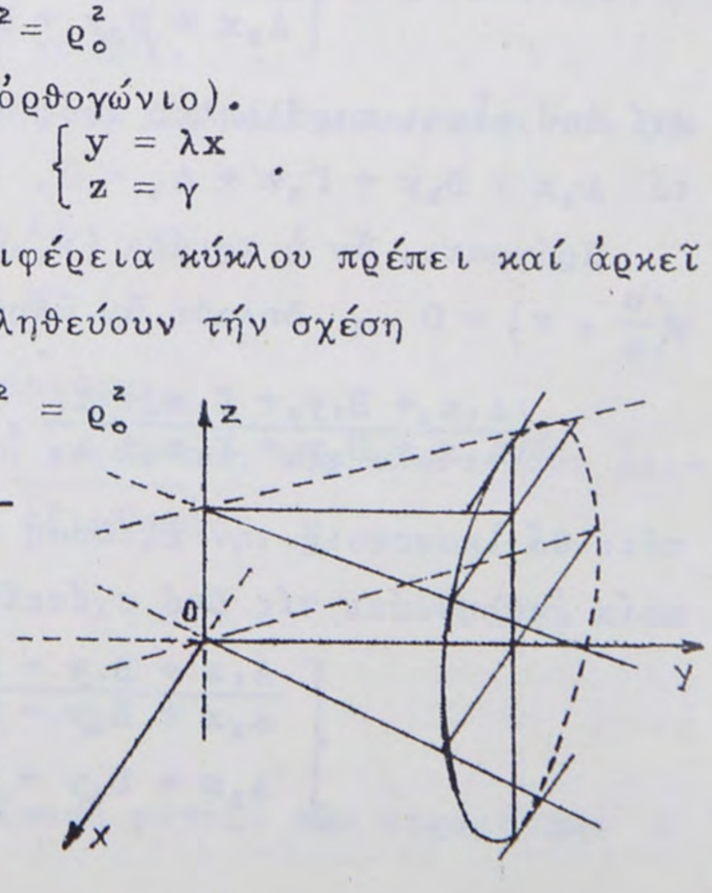
$$\begin{cases} y = \beta_0 \\ x^2 + z^2 = \varrho_0^2 \end{cases}$$

(Τό σύστημα OXYZ ὑποτίθεται ὀρθογώνιο).

Ἐξισώσεις τῶν γενετειρῶν $\begin{cases} y = \lambda x \\ z = \gamma \end{cases}$.

Γιά νά συναντοῦν τήν περιφέρεια κύκλου πρέπει καί ἀρκεῖ οἱ παράμετροι λ καί γ νά ἐπαληθεύουν τήν σχέση

$$\left(\frac{\beta_0}{\lambda}\right)^2 + \gamma^2 = \varrho_0^2$$



ἡ ὁποία προκύπτει, ὅταν μεταξύ τῶν 4 ἐξισώσεων $y = \beta_0$, $x^2 + z^2 = \varrho_0^2$, $y = \lambda x$, $z = \gamma$ ἀπαλείψουμε τά x, y, z.

Ἄρα ἀναλυτική παραμετρική παράσταση τῆς κωνοειδοῦς ἐπιφάνειας εἶναι τό σύστημα

$$\begin{cases} y = \lambda x \\ z = \gamma \\ \beta_o^2 + \lambda^2(\gamma^2 - \varrho_o^2) = 0 \ . \end{cases}$$

Μέ ἀπαλοιφή τώρα τῶν παραμέτρων λ καί γ μεταξύ τῶν τριῶν τελευταίων ἐξισώσεων προκύπτει ἡ ἐξίσωση τῆς ἐπιφάνειας

$$\beta_o^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 (z^2 - \varrho_o^2) = 0 \quad \text{ἤ} \quad \beta_o x^2 + y^2(z^2 - \varrho_o^2) = 0 \ .$$

II. Ἔστω $xy = pz$.

Ἡ ἐξίσωση μπορεῖ νά ἀχθῆ στήν μορφή $x - p\dfrac{z}{y} = 0$, δηλαδή στήν $\sigma\left(\dfrac{u}{\upsilon}, w\right) = 0$, μέ $u = z$, $\upsilon = y$, $w = x$.

Ἄρα παριστάνει κωνοειδῆ ἐπιφάνεια μέ γενέτειρες πού συναντοῦν τήν εὐθεία $\begin{cases} u = 0 \\ \upsilon = 0 \end{cases}$, δηλ. τόν ἄξονα OX, καί εἶναι παράλληλες πρός τό ἐπίπεδο $w = 0$, δηλ. τό YOZ. Ἡ ἴδια ἐξίσωση μπορεῖ νά ἀχθῆ καί στήν μορφή $y - p\dfrac{z}{x} = 0$, δηλ. στήν $\sigma\left(\dfrac{u}{\upsilon}, w\right) = 0$ μέ $u = z$, $\upsilon = x$ καί $w = y$. Ἄρα ἡ ὑπ᾽ὄψη κωνοειδής ἐπιφάνεια μπορεῖ νά θεωρηθῆ παραγόμενη καί ἀπό γενέτειρες πού συναντοῦν τήν εὐθεία $\begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$, δηλαδή τόν ἄξονα OY, καί πού εἶναι παράλληλες πρός τό ἐπίπεδο $y = 0$, δηλαδή τό XOZ.

Ἡ παραπάνω ἐπιφάνεια καλεῖται ὑπερβολικό παραβολοειδές. Ἄν τό σύστημα OXYZ τῶν συντεταγμένων ἦταν ὀρθογώνιο καί ἄν τό στρέφουμε περί τόν OZ κατά γωνία $\dfrac{\pi}{4}$, ἡ ἴδια ἐπιφάνεια θά ἔχη ἐξίσωση ὡς πρός τό νέο σύστημα O΄X΄Y΄Z΄.

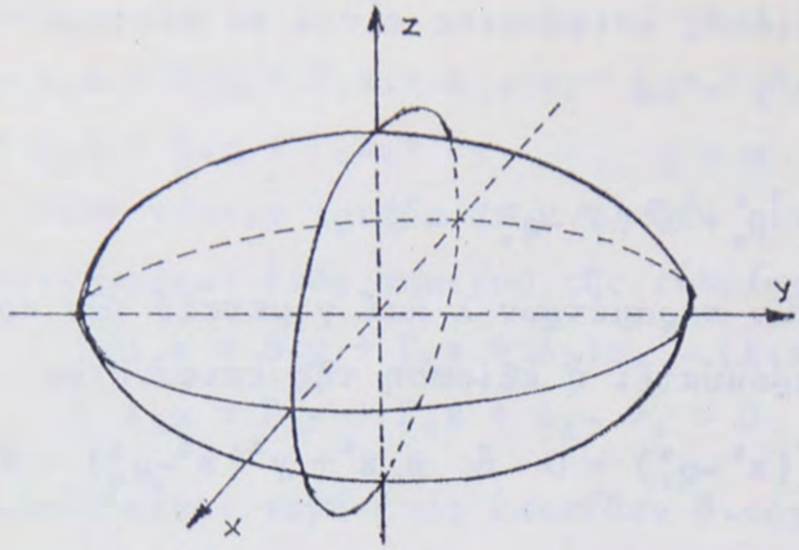
$$x'^2 - y'^2 = 2pz' \ .$$

ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

§ 342. Ἐλλειψοειδές.

Ἡ ἐξίσωσή του σέ κατάλληλο ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων εἶναι

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 \ , \text{ μέ } \alpha, \beta, \gamma > 0 .$$



Τά πραγματικά σημεῖα (x,y,z) τοῦ ἐλλειψοειδοῦς αὐτοῦ ἔχουν τήν ἰδιότητα: $|x| \leqq \alpha$, $|y| \leqq \beta$, $|z| \leqq \gamma$. Ἄρα ἡ ἐπιφάνεια ἤ, καλύτερα, τό πραγματικό μέρος τῆς ἐπιφάνειας εἶναι περιορισμένο (μερικοί συγγραφεῖς λένε περατωμένο).

Οἱ ἄξονες τῶν συντεταγμένων εἶναι ἄξονες ὀρθῆς συμμετρίας, ἡ ἀρχή κέντρο συμμετρίας καί τά συντεταγμένα ἐπίπεδα, ἐπίπεδα ὀρθῆς συμμετρίας τῆς ἐπιφάνειας. Οἱ ἀριθμοί 2α , 2β , 2γ λέγονται μήκη τῶν ἀξόνων· ἄν τά μήκη τῶν ἀξόνων εἶναι ἄνισα ἀνά δύο, τό ἐλλειψοειδές λέγεται ἀπό μερικούς συγγραφεῖς τριαξονικό. Ἄν δυό ἀπό τά μήκη εἶναι ἴσα, ἔχουμε ἐλλειψοειδές ἐκ περιστροφῆς. Ἄν καί τά τρία μήκη εἶναι ἴσα, ἔχουμε σφαίρα.

Ἄν γιά μιά δευτεροβάθμια ἐξίσωση $\sigma(x,y,z) = 0$ εἶναι γνωστό ὅτι ἔχει ἄπειρες πραγματικές λύσεις (x,y,z) καί ὅτι οἱ λύσεις αὐτές ἀποτελοῦνται ὅλες ἀπό ἀριθμούς ἀπολύτως $\leqq$ κάποιας ποσότητας, τότε ἡ ἐπιφάνεια πού παριστάνει ἡ ἐξίσωση εἶναι ἐλλειψοειδές.

Τά κοινά σημεῖα τοῦ ἐλλειψοειδοῦς μέ ἕνα ἐπίπεδο ἀποτελοῦν ἔλλειψη (ἐνδεχομένως χωρίς πραγματικά σημεῖα ἤ μέ ἕνα μόνο πραγματικό σημεῖο, ὁπότε τό ἐπίπεδο εἶναι ἐξωτερικό ἤ, ἀντιστοίχως, ἐφαπτόμενο τοῦ ἐλλειψοειδοῦς).

§ 343. Μονόχωνο ὑπερβολοειδές. Ἡ ἐξίσωσή του σέ κατάλληλο ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων εἶναι:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$ (Βλ. σχῆμα στή σελ. 489)

῾Η ἐπιφάνεια εἶναι ἀπεριόριστη. Π.χ. ἡ τομή της μέ ἕνα ἐπίπεδο $z = c$, ὅπου $|c|$ ὁσονδήποτε μεγάλος ἀριθμός, εἶναι πραγματική ἔλλειψη μέ ἐξισώσεις.

$$z = c \ , \quad \frac{x^2}{\alpha^2\left(1 + \frac{c^2}{\gamma^2}\right)} + \frac{y^2}{\beta^2\left(1 + \frac{c^2}{\gamma^2}\right)} = 1 \ .$$

῾Η ἐπιφάνεια εἶναι ὀρθῶς συμμετρική ὡς πρός τόν καθένα ἀπό τούς 3 ἄξονες συντεταγμένων καθώς καί ὡς πρός τό καθένα ἀπό τά τρία συντεταγμένα ἐπίπεδα. ῾Η ἀρχή τῶν συντεταγμένων εἶναι κέντρο συμμετρίας (κέντρο) τῆς ἐπιφάνειας. Οἱ ἄξονες ΟΧ καί ΟΥ τέμνουν ὁ καθένας των τήν ἐπιφάνεια σέ 2 πραγματικά σημεῖα (κορυφές τῆς ἐπιφάνειας), ὁ ΟΖ δέν τή συναντᾶ σέ πραγματικά σημεῖα· γι᾽αὐτό οἱ δυό πρῶτοι λέγονται διατέμνοντες ἄξονες, ὁ δέ ΟΖ μή διατέμνων ἄξονας.

῾Η ἔλλειψη

$$\begin{cases} z = 0 \\ \dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1 \end{cases}$$

πού εἶναι τομή τῆς ἐπιφάνειας μέ τό ΧΟΥ λέγεται λαιμός τῆς ἐπιφάνειας. ῾Η τομή τῆς ἐπιφάνειας μέ ἐπίπεδο $x = c$ εἶναι ὑπερβολή πού ἔχει τό κέντρο της ($x = c$, $y = 0$, $z = 0$) πάνω στόν ΟΧ καί ἄξονες ὀρθῆς συμμετρίας παράλληλους πρός τόν ΟΥ καί ΟΖ ἀντιστοίχως. ᾿Από τίς ἐξισώσεις:

$$x = c \ , \quad \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 - \frac{c^2}{\alpha^2}$$

τῆς ὑπερβολῆς αὐτῆς ἕπονται τά ἑξῆς: γιά $|c| < \alpha$ ὁ διατέμνων ἄξονας τῆς ὑπερβολῆς εἶναι παράλληλος πρός τόν ΟΥ, γιά $|c| = \alpha$ ἡ ὑπερβολή ἐκφυλίζεται σ᾽ἕνα ζεῦγος εὐθειῶν καί γιά $|c| > \alpha$

ὁ διατέμνων ἄξονας τῆς ὑπερβολῆς εἶναι παράλληλος πρός τόν OZ.

Ἀνάλογα πράγματα ἰσχύουν γιά τίς τομές τῆς ἐπιφάνειας μέ ἐπίπεδα $y = c$.

Ἡ κωνική ἐπιφάνεια: $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=0$ λέγεται <u>ἀσυμπτωτικός κῶνος</u> τοῦ ὑπερβολοειδοῦς.

Ἡ τομή ἑνός ἐπιπέδου μέ τό ὑπερβολοειδές εἶναι ἔλλειψη ἤ παραβολή ἤ ὑπερβολή (ἡ ὁποία δέν ἀποκλείεται νά εἶναι ὑπερβολή ἐκφυλισμένη σέ ζεῦγος εὐθειῶν) καθόσον τό ἐπίπεδο τέμνει ὅλες τίς γενέτειρες τοῦ ἀσυμπτωτικοῦ κώνου ἤ εἶναι παράλληλο πρό μιά μοναδική γενέτειρα ἤ εἶναι παράλληλο πρός δυό γενέτειρες τοῦ κώνου.

Τό μονόχωνο ὑπερβολοειδές εἶναι <u>εὐθειογενής</u> ἐπιφάνεια, μπορεῖ δηλαδή νά θεωρηθῆ, καί μάλιστα κατά δυό διαφόρους τρόπους, ὡς ἕνα μονοπαραμετρικό σύνολο εὐθειῶν. Τό ἕνα ἀπό τά δύό αὐτά μονοπαραμετρικά σύνολα εὐθειῶν ἔχει ἐξισώσεις

$$(343.1)\quad \begin{cases} \frac{x}{\alpha}+\frac{z}{\gamma}=u\left(1+\frac{y}{\beta}\right) & (u = \text{παράμετρος τοῦ συνόλου}) \\ \frac{x}{\alpha}-\frac{z}{\gamma}=\frac{1}{u}\left(1-\frac{y}{\beta}\right). \end{cases}$$

Τό ἄλλο μονοπαραμετρικό σύνολο εὐθειῶν ἔχει ἐξισώσεις:

$$(343.2)\quad \begin{cases} \frac{x}{\alpha}+\frac{z}{\gamma}=\upsilon\left(1-\frac{y}{\beta}\right) \\ \frac{x}{\alpha}-\frac{z}{\gamma}=\frac{1}{\upsilon}\left(1+\frac{y}{\beta}\right) \end{cases} \quad (\upsilon = \text{παράμετρος τοῦ συνόλου}).$$

Ἀπό κάθε σημεῖο τοῦ ὑπερβολοειδοῦς διέρχεται ἀπό μιά εὐθεία τοῦ συστήματος (343.1) καί τοῦ συστήματος (343.2). Δυό διαφορετικές εὐθεῖες τοῦ ἴδιου συστήματος (ἀντίστοιχες δηλαδή σέ δυό διαφορετικές τιμές τῆς παραμέτρου) εἶναι ἀσύμβατες (δέν κεῖνται δηλαδή μέσα σ'ἕνα καί τό ἴδιο ἐπίπεδο), ἐνῶ μιά ὁποιαδήποτε εὐθεία τοῦ ἑνός καί μιά ὁποιαδήποτε εὐθεία τοῦ ἄλλου συστήματος εἶναι συμβατές (συνεπίπεδες), ἐπομένως ἡ τέμνονται ή είναι παράλληλες.

§ 344. Δίχωνο υπερβολοειδές. Ἡ ἐξίσωση του σέ κατάλληλο ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων εἶναι:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = -1 \qquad \text{(Βλ.σχῆμα σελ. 489)}$$

Ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἀπεριόριστη. Π.χ. ἡ τομή της μέ ἕνα ἐπίπεδο $z = c$, ὅπου $|c| > \gamma$ καί ὁσοδήποτε μεγάλο, εἶναι (πραγματική) ἔλλειψη μέ ἐξισώσεις:

$$z = c \quad , \quad \frac{x^2}{\alpha^2\left(\frac{c^2}{\gamma^2} - 1\right)} + \frac{y}{\beta^2\left(\frac{c^2}{\gamma^2} - 1\right)} = 1 \; .$$

Ἄξονες ὀρθῆς συμμετρίας ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τρεῖς: τούς ΟΧ, ΟΥ, ΟΖ. Τά συντεταγμένα ἐπίπεδα ΧΟΥ, ΥΟΖ, ΖΟΧ εἶναι ἐπίπεδα ὀρθῆς συμμετρίας, τέλος ἡ ἀρχή εἶναι κέντρο συμμετρίας τῆς ἐπιφάνειας. Οἱ ἄξονες ΟΧ καί ΟΥ δέν συναντοῦν τήν ἐπιφάνεια σέ πραγματικά σημεῖα, ὁ ΟΖ τήν συναντᾶ σέ δυό πραγματικά. Οἱ ΟΧ καί ΟΥ λέγονται μή διατέμνοντες ἄξονες, ὁ ΟΖ διατέμνων ἄξονας.

Τό ἐπίπεδο ΧΟΥ δέν ἔχει πραγματικά κοινά σημεῖα μέ τήν ἐπιφάνεια, ἑπομένως τήν χωρίζει σέ δυό μή συνεχόμενα, ἀπεριόριστα κομμάτια, τίς δυό χῶνες. Ἀπό ἐδῶ πρόκυψε καί ἡ ὀνομασία δίχωνο ὑπερβολοειδές. Ἡ τομή τῆς ἐπιφάνειας μέ τό ἐπίπεδο $x = c$ εἶναι ὑπερβολή πού ἔχει τό κέντρο της ($x = c$, $y = 0$, $z = 0$), πάνω στόν ἄξονα ΟΧ καί ἄξονες ὀρθῆς συμμετρίας παράλληλους πρός τόν ΟΥ καί ΟΖ ἀντιστοίχως.

Ἀπό τίς ἐξισώσεις $x = c$, $\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = -1 - \frac{c^2}{\alpha^2}$ τῆς ὑπερβολῆς αὐτῆς ἕπεται ὅτι ὁ διατέμνων ἄξονας της εἶναι παράλληλος πρός τόν ΟΖ γιά ὅλες τίς τιμές τοῦ c, ἀπό $-\infty$ ἕως $+\infty$. Ἀνάλογα πράγματα ἰσχύουν γιά τίς τομές τῆς ἐπιφάνειας μέ ἐπίπεδα $y = c$.

Ἡ κωνική ἐπιφάνεια $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0$ (ἡ ἴδια μέ ἐκείνη πού θεωρήσαμε στόν προηγούμενο παράγραφο) λέγεται ἀσυμπτωτικός κῶνος τοῦ ὑπ'ὄψη ὑπερβολοειδοῦς.

Ἡ τομή ἑνός ἐπιπέδου μέ τό ὑπερβολοειδές εἶναι ἔλλειψη, παραβολή ἤ ὑπερβολή καθόσον τό ἐπίπεδο τέμνει ὅλες τίς γενέτειρες τοῦ ἀσυμπτωτικοῦ κώνου, εἶναι παράλληλο πρός μιά μοναδική γενέτειρα ἤ εἶναι παράλληλο πρός δυό γενέτειρες τοῦ κώνου.

Μιά εὐθεία πραγματική τέμνουσα τό XOY δέν μπορεῖ προφανῶς νά κεῖται ὁλόκληρη πάνω στό δίχωνο ὑπερβολοειδές, ἀφοῦ τό ἐπίπεδο XOY δέν ἔχει πραγματικά σημεῖα κοινά μέ τήν ἐπιφάνεια.

Ἐξ ἄλλου μιά εὐθεία παράλληλη πρός τό XOY ἔχει τό πολύ δυό πραγματικά σημεῖα κοινά μέ τήν ἐπιφάνεια. Ἄρα τό δίχωνο ὑπερβολοειδές δέν μπορεῖ νά θεωρηθῆ εὐθειογενής ἐπιφάνεια μέ πραγματικές εὐθειακές γενέτειρες.

§ 345. Ἐλλειπτικό παραβολοειδές. Ἡ ἐξίσωσή του σέ κατάλληλο ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων εἶναι:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad , \quad \text{ὅπου} \quad p,q > 0 .$$

Ἡ ἐπιφάνεια δέν ἔχει πραγματικά σημεῖα (x,y,z) μέ $z < 0$. Ἡ τομή της ὅμως μέ ἕνα ἐπίπεδο $z = c$, ὅπου c θετικός ἀριθμός ὁσονδήποτε μεγάλος, εἶναι πραγματική ἔλλειψη μέ ἐξισώσεις:

$$z = c \quad , \quad \frac{x^2}{2cp} + \frac{y^2}{2cq} = 1 \quad (\text{βλ.σχ.σελ. } 492).$$

Ἄρα ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἀπεριόριστη.

Ὁ ἄξονας OZ εἶναι ἄξονας ὀρθῆς συμμετρίας τῆς ἐπιφάνειας. Ἐπίπεδα ὀρθῆς συμμετρίας ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τό XOZ καί τό YOZ, κέντρο συμμετρίας καθ'ὑπόσταση δέν ἔχει.

Τό σημεῖο O(0,0,0) ὅπου ὁ ἄξονας συμμετρίας OZ συναντᾶ τήν ἐπιφάνεια λέγεται κορυφή τοῦ παραβολοειδοῦς. Ἡ τομή τῆς ἐπιφάνειας μέ ἐπίπεδο $x = c$ εἶναι παραβολή:

$$(345.1) \qquad x = c \quad , \quad \frac{y^2}{q} = 2\left(z - \frac{c^2}{2p}\right) \quad ,$$

τῆς ὁποίας ὁ ἡμιάξονας ὀρθῆς συμμετρίας εἶναι παράλληλος καί ὁμόρροπος πρός τόν θετικό ἡμιάξονα $\overrightarrow{OZ}$ καί ἡ κορυφή ($x = c$, $y = 0$, $z = \frac{c^2}{2p}$) κεῖται πάνω στήν παραβολή

$$(345.2) \qquad y = 0 \quad , \quad \frac{x^2}{p} = 2z \quad ,$$

πού εἶναι τομή τοῦ ἐλλειπτικοῦ παραβολοειδοῦς μέ τό συντεταγμένο ἐπίπεδο XOZ. Ὅλες αὐτές οἱ παραβολές (345.1) γιά τίς διάφορες τιμές τοῦ c εἶναι ἐφαρμόσιμες μεταξύ τους (ἴσες, ὅπως λέγουν ἄλλοι), ἐπειδή ἔχουν τήν ἴδια παράμετρο q. Ἄρα τό ἐλλειπτικό παραβολοειδές $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ μπορεῖ νά παραχθῆ μέ τήν κίνηση μιᾶς παραβολῆς, πού ἔχει ἡμιπαράμετρο q καί πού κινεῖται ἔτσι ὥστε τό ἐπίπεδό της νά μένη παράλληλο πρός τό YOZ, ὁ ἄξονας ὀρθῆς συμμετρίας της νά εἶναι παράλληλος πρός τόν OZ, τά κοῖλα της παραβολῆς νά στρέφωνται πάντοτε πρός τόν θετικό ἡμιάξονα OZ καί ἡ κορυφή της νά διαγράφη τήν παραβολή (345.2).

Ἀνάλογα πράγματα ἰσχύουν καί γιά τίς τομές τῆς ἐπιφάνειας μέ τά ἐπίπεδα $y = c$, $(-\infty < c < +\infty)$.

Ἡ κωνική ἐπιφάνεια $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 0$ πού ἀποτελεῖται ἀπό μιά μόνο πραγματική εὐθεία, τόν ἄξονα OZ, λέγεται <u>κῶνος τῶν ἀσυμπτωτικῶν διευθύνσεων</u> τοῦ παραβολοειδοῦς.

Ἕνα ἐπίπεδο τέμνει τό ἐλλειπτικό παραβολοειδές κατά ἔλλειψη ἤ παραβολή καθόσον τέμνει τόν κῶνο τῶν ἀσυμπτωτικῶν διευθύνσεων (δηλ. τόν OZ) ἤ εἶναι παράλληλο πρός τόν OZ. Στήν περίπτωση ὅπου τό θεωρούμενο ἐπίπεδο τέμνει τόν OZ ἡ τομή του μέ τό παραβολοειδές μπορεῖ νά εἶναι καί ἔλλειψη χωρίς πραγματικά σημεῖα ἤ ἔλλειψη μέ ἕνα μόνο πραγματικό σημεῖο (στήν τελευταία περίπτωση τό ἐπίπεδο λέγεται ἐφαπτόμενο).

§ 346. Ὑπερβολικό παραβολοειδές. Ἡ ἐξίσωσή του σέ κατάλληλο ὀρθογώνιο σύστημα εἶναι:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \qquad \text{(βλ. σχ.σελ. 492)}$$

μέ $p > 0$ καί $q > 0$. Ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἀπεριόριστη· π.χ. ἡ τομή της μέ ἕνα πραγματικό ἐπίπεδο $z = c$, ὅπου $|c|$ ὁσονδήποτε μεγάλο, εἶναι ἡ ὑπερβολή

$$(346.1) \qquad z = c \quad , \quad \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2c \ .$$

Ὁ ἄξονας OZ εἶναι ἄξονας ὀρθῆς συμμετρίας τῆς ἐπιφάνειας. Τά ἐπίπεδα ZOX καί ZOY εἶναι ἐπίπεδα ὀρθῆς συμμετρίας τῆς ἐπιφάνειας, ἐνῶ κέντρο συμμετρίας καθ'ὑπόσταση δέν ὑπάρχει.

Οἱ ὑπερβολές (346.1) πού εἶναι τομές τῆς ἐπιφάνειας μέ ἐπίπεδα $z = c$ ἔχουν διατέμνοντα ἄξονα παράλληλο πρός τόν OX ἐφόσον $c > 0$ καί παράλληλο πρός τόν OY ἐφόσον $c < 0$. Γιά $c=0$ ἡ τομή ἐκφυλίζεται στό ζεῦγος εὐθειῶν:

$$\left\{ z = 0 \ , \ \frac{x}{{}_{+}\sqrt{p}} + \frac{y}{{}_{+}\sqrt{q}} = 0 \right\} \quad \text{καί} \quad \left\{ z = 0 \ , \frac{x}{{}_{+}\sqrt{p}} - \frac{y}{{}_{+}\sqrt{q}} = 0 \right\}.$$

Οἱ τομές τῆς ἐπιφάνειας μέ ἐπίπεδα $y = \lambda x$, πού διέρχονται διά τοῦ OZ εἶναι παραβολές:

$$y = \lambda x \quad , \quad x^2\left(\frac{1}{p} - \frac{\lambda^2}{q}\right) = 2z \quad ,$$

ἐκτός γιά $\lambda^2 = \frac{q}{p}$, δηλαδή γιά $\lambda = +\sqrt{\frac{q}{p}}$ ἤ $\lambda = -\sqrt{\frac{q}{p}}$, ὁπότε τό καθ'ὑπόσταση μέρος τῆς τομῆς δέν εἶναι πλέον παραβολή ἀλλά μιά εὐθεία,

ἡ εὐθεία $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x}{{}_{+}\sqrt{p}} - \dfrac{y}{{}_{+}\sqrt{q}} = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\}$ στήν περίπτωση $\lambda = +\sqrt{\frac{q}{p}}$

καί ἡ ευθεία $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\}$ στήν περίπτωση $\lambda = -\sqrt{\dfrac{q}{p}}$.

Οἱ τομές τῆς ἐπιφάνειας μέ ἐπίπεδα $x = c$, $(-\infty < c < +\infty)$, εἶναι παραβολές $\left(x = c\ ,\ \dfrac{y^2}{q} = -2\left(z - \dfrac{c^2}{2p}\right)\right)$, τῶν ὁποίων οἱ ἡμιάξονες ὀρθῆς συμμετρίας εἶναι παράλληλοι καί ὁμόρροποι πρός τόν <u>ἀρνητικό</u> ἡμιάξονα κατηγμένων $\overrightarrow{OZ'}$ καί οἱ κορυφές $\left(x = c\ ,\ y = 0\ ,\ z = \dfrac{c^2}{2p}\right)$ κεῖνται πάνω στήν παραβολή

$$(346.2) \qquad y = \theta \quad , \quad \frac{x^2}{p} = 2z \quad ,$$

πού εἶναι τομή τῆς ἐπιφάνειας-μέ τό συντεταγμένο ἐπίπεδο XOZ. Ὅλες αὐτές οἱ παραβολές εἶναι ἐφαρμόσιμες (ἴσες) μεταξύ τους, ἀφοῦ ἔχουν τήν ἴδια παράμετρο q.

Ἄρα τό ὑπερβολικό παραβολοειδές $\dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z$ μπορεῖ νά παραχθῆ μέ τήν κίνηση μιᾶς παραβολῆς, μέ παράμετρο q, πού κινεῖται ἔτσι πού τό ἐπίπεδό της νά παραμένη παράλληλο πρός τό YOZ, ὁ ἡμιάξονάς της ὀρθῆς συμμετρίας νά εἶναι παράλληλος καί ἀντίρροπος πρός τόν θετικό ἡμιάξονα OZ, ἡ δέ κορυφή της νά διαγράφη τήν παραβολή (346.2)· ἡ τελευταία παραβολή στρέφει τά κοῖλα πρός τήν ἀντίθετη φορά, δηλαδή πρός τόν θετικό ἡμιάξονα OZ.

Ἀνάλογα πράγματα ἰσχύουν γιά τίς τομές τῆς ἐπιφάνειας μέ τά ἐπίπεδα $y = c$, $(-\infty < c < +\infty)$.

Τό ὑπερβολικό παραβολοειδές μπορεῖ νά θεωρηθῆ ὡς εὐθειογενής ἐπιφάνεια μέ πραγματικές γενέτειρες κατά δυό διάφορους τρόπους. Ἕνας πρῶτος τρόπος εἶναι νά τή θεωρήσουμε ταυτιζόμενη μέ τόμονοπαραμετρικό σύνολο πραγματικῶν εὐθειῶν

$$(346.3) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{+\sqrt{p}} + \dfrac{y}{+\sqrt{q}} = u \\[2ex] \dfrac{x}{+\sqrt{p}} - \dfrac{y}{+\sqrt{q}} = \dfrac{1}{u}\, 2z \end{array}\right. \qquad \text{(u παράμετρος τοῦ συνόλου).}$$

Ὁ ἄλλος τρόπος εἶναι νά τήν ταυτίσουμε μέ τό μονοπαραμετρικό σύνολο

$$(346.4)\qquad \begin{cases} \dfrac{x}{+\sqrt{p}} - \dfrac{y}{+\sqrt{q}} = \upsilon \\ \dfrac{x}{+\sqrt{p}} + \dfrac{y}{+\sqrt{q}} = \dfrac{1}{\upsilon}\, 2z \end{cases}$$

(υ = παράμετρος τοῦ συνόλου).

Οἱ εὐθεῖες τοῦ συστήματος (346.3) εἶναι ὅλες παράλληλες πρός τό ἐπίπεδο $\frac{x}{+\sqrt{p}} + \frac{y}{+\sqrt{q}} = 0$ καί ἀνά δυό μεταξύ τους ἀσύμβατες, συναντοῦν δέ ὅλες τους μιάν ὁποιαδήποτε ἀπό τίς εὐθεῖες τοῦ συστήματος (346.4).

Ἄρα ἡ ἐπιφάνεια μπορεῖ νά θεωρηθῆ ὡς κωνοειδής μέ ὁδηγοῦν ἐπίπεδο τό $\frac{x}{+\sqrt{p}} + \frac{y}{+\sqrt{q}} = 0$ καί μέ εὐθεία πού συναντοῦν ὅλες οἱ γενέτειρες, μιάνεὐθεία τοῦ συστήματος (346.4), π.χ. τήν εὐθεία

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ σέ τιμή παραμέτρου $\upsilon = 0$.

Τό συμπέρασμα αὐτό θά μποροῦσε νά ἐξαχθῆ καί ἀπό τήν γενική μας θεωρία περί κωνοειδῶν ἐπιφανειῶν, ἐπειδή ἡ ἐξίσωση τοῦ ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς μπορεῖ νά γραφῆ καί ὡς ἑξῆς:

$$\left(\frac{x}{+\sqrt{p}} + \frac{y}{+\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{+\sqrt{p}} - \frac{y}{+\sqrt{q}}\right) = 2z \qquad \text{ἤ} \qquad \frac{x}{+\sqrt{p}} + \frac{y}{+\sqrt{q}} - \frac{2z}{\dfrac{x}{+\sqrt{p}} - \dfrac{y}{+\sqrt{q}}} = 0 ,$$

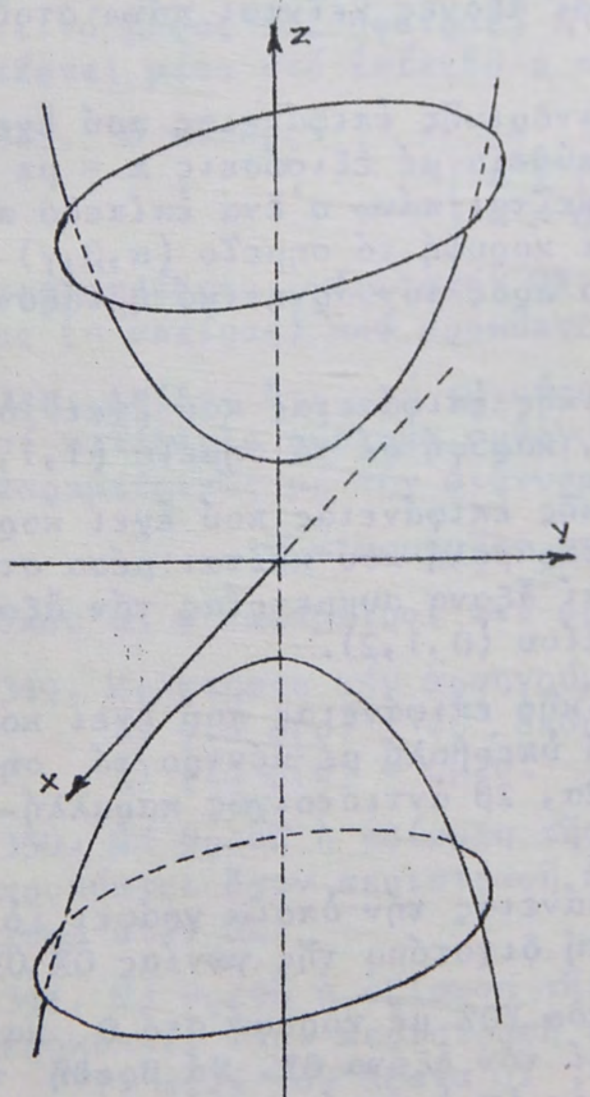
ἐμφανίζεται δηλαδή ὡς σχέση μεταξύ τοῦ πρωτοβαθμίου πολυωνύμου $\frac{x}{+\sqrt{p}} + \frac{y}{+\sqrt{q}}$ καί τοῦ λόγου τῶν δυό πρωτοβαθμίων πολυωνύμων z καί $\frac{x}{+\sqrt{p}} - \frac{y}{+\sqrt{q}}$. Ὅμοια μποροῦμε νά γράφουμε τήν ἐξίσωση τοῦ ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς μέ τή μορφή

$$\frac{x}{+\sqrt{p}} - \frac{y}{+\sqrt{q}} - 2\,\frac{z}{\dfrac{x}{+\sqrt{p}} + \dfrac{y}{+\sqrt{q}}} = 0$$

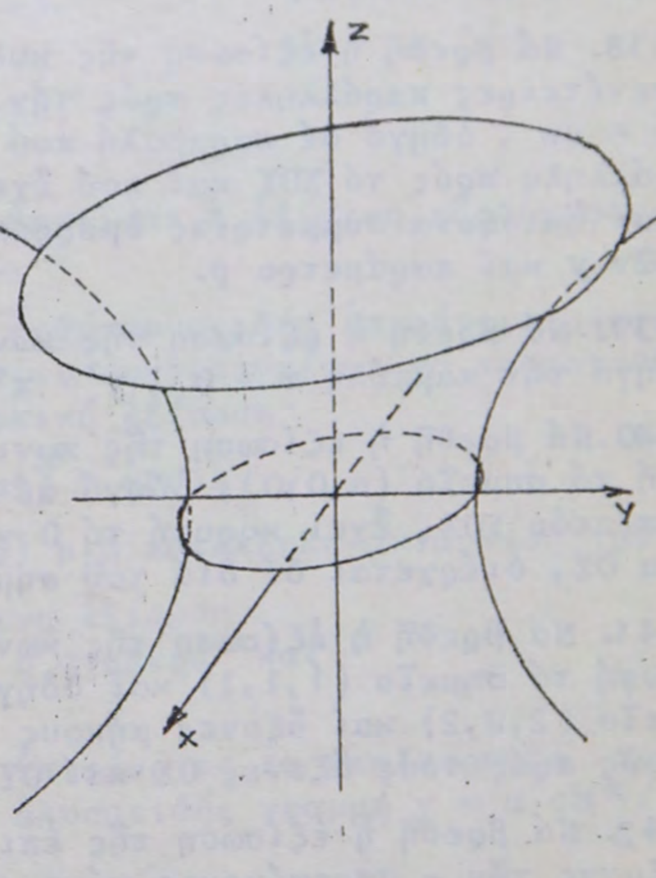
ὁπότε ἐμφανίζεται ὡς μιά σχέση μεταξύ τοῦ πρωτοβαθμίου πολυωνύμου $\frac{x}{+\sqrt{p}} - \frac{y}{+\sqrt{q}}$ καί τοῦ λόγου τῶν δυό πρωτοβαθμίων πολυωνύμων z καί $\frac{x}{+\sqrt{p}} + \frac{y}{+\sqrt{q}}$. Ἄρα τό ὑπερβολικό παραβολοειδές μπορεῖ νά θεωρηθῇ καί ὡς κωνοειδής ἐπιφάνεια μέ ὁδηγοῦν ἐπίπεδο τό $\frac{x}{+\sqrt{p}} - \frac{y}{+\sqrt{q}} = 0$ καί μέ εὐθεία πού συναντοῦν ὅλες οἱ γενέτειρές της τήν $\frac{x}{+\sqrt{p}} + \frac{y}{+\sqrt{q}} = 0$, $z = 0$, ἡ ὁποία ἀνήκει στό σύστημα (346.3).

Οἱ γενέτειρες ἀποτελοῦν τώρα τό σύνολο (346.4).

Δίχωνο ὑπερβολοειδές



Μονόχωνο ὑπερβολοειδές



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

335. Τά συνημίτονα κατευθύνσεως τῶν γενετειρῶν μιᾶς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας εἶναι $\xi = \frac{1}{2}$, $\eta = \frac{1}{2}$, $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ὁδηγός της δέ ὁ κύκλος $y = x$, $x^2+y^2+z^2-4 = 0$. Νά βρεθῆ ἡ ἐξίσωση τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας.

336. Νά βρεθῆ ἡ ἐξίσωση τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας πού ἔχει γενέτειρες παράλληλες πρός τήν εὐθεία $x = y = z$, ὁδηγό δέ τήν ἔλλειψη τοῦ ἐπιπέδου $x = k$,(k = δοσμένη σταθερά), ἡ ὁποία ἔχει τό κέντρο της πάνω στόν ἄξονα OX, τό μεγάλο ἄξονά της παράλληλο πρός τόν ἄξονα OZ καί μήκη ἀξόνων 2α, 2β.

337. Νά βρεθῆ ἡ ἐξίσωση τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας πού ἔχει γενέτειρες παράλληλες μέ τήν διεύθυνση ($\pm\xi, \pm\eta, \pm\zeta$) καί ὁδηγό τήν ἔλλειψη ($2\alpha, 2\beta$) τῆς ὁποίας οἱ ἄξονες κεῖνται πάνω στούς ἄξονες OX καί OY.

338. Νά βρεθῆ ἡ ἐξίσωση τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας πού ἔχει γενέτειρες παράλληλες πρός τήν εὐθεία μέ ἐξισώσεις $x = \mu z$, $y = \nu z$, ὁδηγό δέ παραβολή πού κεῖται πάνω σ'ἕνα ἐπίπεδο παράλληλο πρός τό XOY καί πού ἔχει κορυφή τό σημεῖο (α, β, γ) καί ἡμιάξονα συμμετρίας ὁμόρροπο πρός τόν ἀρνητικό ἡμιάξονα τῶν y καί παράμετρο p.

339. Νά βρεθῆ ἡ ἐξίσωση τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας πού ἔχει ὁδηγό τήν καμπύλη $z = 0$, $y^2 = x^3$, κορυφή δέ τό σημεῖο (1,1,1).

340. Νά βρεθῆ ἡ ἐξίσωση τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας πού ἔχει κορυφή τό σημεῖο (α,0,0), ὁδηγό δέ παραβολή πού κεῖται μέσα στό ἐπίπεδο YOZ, ἔχει κορυφή τό O καί ἄξονα συμμετρίας τόν ἄξονα OZ, διέρχεται δέ διά τοῦ σημείου (0,1,2).

341. Νά βρεθῆ ἡ ἐξίσωση τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας πού ἔχει κορυφή τό σημεῖο (1,1,1) καί ὁδηγό ὑπερβολή μέ κέντρο τό σημεῖο (2,2,2) καί ἄξονες μήκους 2α, 2β ἀντιστοίχως παραλλήλους πρός τούς ἄξονες OX καί OY.

342. Νά βρεθῆ ἡ ἐξίσωση τῆς ἐπιφάνειας τήν ὁποία γράφει ὁ ἄξονας τῶν x στρεφόμενος γύρω στή διχοτόμο τῆς γωνίας $\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}}$.

343. Μιά παραβολή μέσα στό ἐπίπεδο YOZ μέ κορυφή στό O καί ἄξονα τόν ἄξονα OZ στρέφεται περί τόν ἄξονα OY. Νά βρεθῆ ἡ ἐξίσωση τῆς παραγόμενης ἐπιφάνειας (p ἡ παράμετρος τῆς παραβολῆς).

344. Νά βρεθῆ ἡ ἐξίσωση τῆς ἐπιφάνειας πού γεννιέται μέ περιστροφή περί τόν ἄξονα OZ μιᾶς παραβολῆς πού κεῖται πάνω σ'

ἕνα ἐπίπεδο .ερχόμενο διά τοῦ ἄξονος OZ, ἔχει κορυφή τό σημεῖο O, ἄξονα κάθετο πάνω στόν ἄξονα OZ καί παράμετρο p.

345. Μιά εὐθεία πού διέρχεται διά τοῦ $M_o(3,4,0)$ καί κεῖται ἀρχικά μέσα στό ἐπίπεδο τό κάθετο πρός τήν εὐθεία

$$\begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} ,$$

σχηματίζουσα γωνία 60^0 μέ τό ἐπίπεδο XOY, στρέφεται περί τόν ἄξονα OZ. Νά βρεθῆ ἡ ἐξίσωση τῆς ἐπιφάνειας ἐκ περιστροφῆς πού προκύπτει.

346. Σφαίρα κέντρου $K(-2,3,4)$, ἀκτίνας 2, φωτίζεται ἀπό φωτεινές ἀκτῖνες παράλληλες πρός τήν διεύθυνση τῆς εὐθείας $x - \frac{y}{2} = 1$, $2y+3z = 2$. Ζητεῖται νά βρεθῆ ἡ ἀναλυτική παράσταση 1^0 τῆς γραμμῆς πού χωρίζει τό φωτισμένο ἀπό τό σκοτεινό μέρος τῆς σφαίρας, 2^0 τοῦ περιγράμματος τῆς σκιᾶς πού πέφτει μέσα στό ἐπίπεδο $z = -3$.

347. Ὁ κύκλος

$$\begin{cases} x^2 + (y-3)^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

περιστρέφεται γύρω στόν OX. Ζητεῖται ἡ ἐξίσωση τῆς ἐπιφάνειας (= σπείρας) πού προκύπτει.

348. Δεῖξτε ὅτι μιά τυχοῦσα ὀρθή κωνοειδής ἐπιφάνεια μπορεῖ σέ κατάλληλο σύστημα ὀρθογώνιων συντεταγμένων νά παρασταθῆ παραμετρικῶς μέ τήν διανυσματική ἐξίσωση

$$\bar{r} = u\sigma\upsilon\nu\upsilon\,\bar{i} + u\eta\mu\upsilon\,\bar{j} + \varphi(\upsilon)\bar{k} ,$$

ὅπου u, υ παράμετροι καί φ(υ) μιά κατάλληλη συνάρτηση τοῦ υ.

349. Μελετῆστε τήν προηγούμενη ἐξίσωση
1) γιά $\varphi(\upsilon) = c\upsilon$, ὅπου c σταθερά καί
2) γιά $\varphi(\upsilon) = \eta\mu 2\upsilon$.

350. Νά βρεθῆ ἡ ἐξίσωση τῆς ἐπιφάνειας ἐκ περιστροφῆς πού προκύπτει ὅταν περιστραφῆ ἡ ἁλυσοειδής γραμμή $y = \alpha\, ch(x/\alpha)$ γύρω στόν OX.

351. Νά βρεθῆ ἡ ἐξίσωση τῆς ἐπιφάνειας ἐκ περιστροφῆς πού προκύπτει ὅταν περιστραφῆ ἡ γραμμή $y = \eta\mu x$,
1) περί τόν ἄξονα OY , 2) περί τόν ἄξονα OX.

352. Νά βρεθῆ ἡ ἐξίσωση τῆς κωνοειδοῦς ἐπιφάνειας ἡ ὁποία γράφεται ἀπό μιάν εὐθεία πού μένει παράλληλη πρός τό ἐπίπεδο XOY (ὁδηγοῦν ἐπίπεδο), συναντᾶ τήν εὐθεία $x = 0$, $y = \beta$ (ἄξονα τῆς κωνοειδοῦς ἐπιφάνειας) καί ἐφάπτεται τῆς σφαίρας

$x^2+y^2+z^2 = \alpha^2$. Ποιές εἶναι οἱ ἐξισώσεις τῶν προβολῶν τῆς καμπύλης ἐπαφῆς τῆς κωνοειδοῦς μέ τή σφαίρα πάνω στά ἐπίπεδα XOY καί YOZ; (Ὑποθέτουμε $0 < \alpha < \beta$).

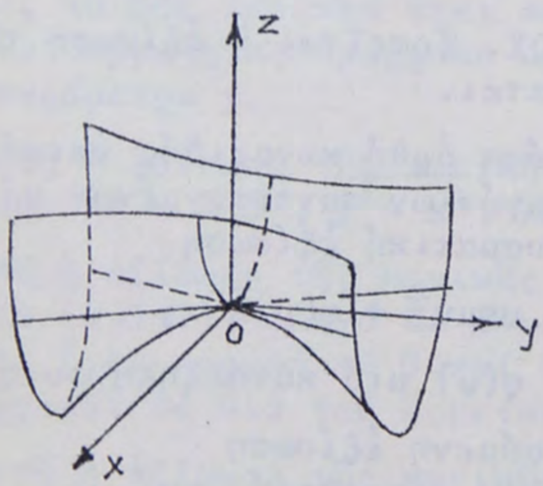
353. Πάνω στό ἐπίπεδο XOY δίνεται ἕνας κύκλος μέ κέντρο τήν ἀρχή. Δίνονται ἐπίσης δυό εὐθεῖες· ἡ μιά κεῖται μέσα στό XOZ καί εἶναι παράλληλη πρός τόν OX, ἡ ἄλλη μέσα στό YOZ καί εἶναι παράλληλη πρός τόν OY, ἡ πρώτη ἄνωθεν, ἡ δεύτερη κάτωθεν τοῦ ἐπιπέδου XOY καί σέ ἴσες ἀπολύτως ἀποστάσεις ἀπ'αὐτό. Νά βρεθῆ ἡ ἐξίσωση τῆς ἐπιφάνειας τήν ὁποία παράγει κινητή εὐθεία πού συναντᾶ καί τίς τρεῖς αὐτές γραμμές (δηλ. τόν κύκλο καί τίς δυό εὐθεῖες).

354. Δίνονται δυό κωνικές ἐπιφάνειες ἐκ περιστροφῆς μέ ἄξονες παράλληλους. Ζητεῖται

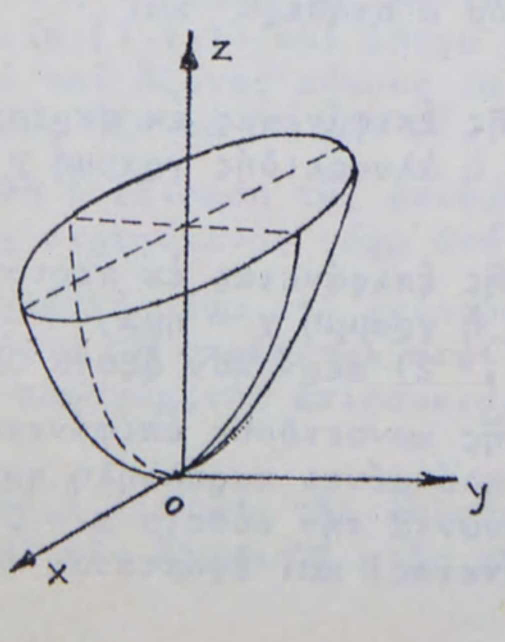
α) Ἡ ἐξίσωση τῆς προβολῆς τῆς τομῆς τῶν δυό κωνικῶν ἐπιφανειῶν πάνω σ'ἕνα ἐπίπεδο κάθετο πρός τούς ἄξονες.

β) Πότε ἡ προβολή αὐτή εἶναι 2ου βαθμοῦ;

γ) Πότε είδικότερα εἶναι κύκλος;



Ὑπερβολικό παραβολοειδές



Ἐλλειπτικό παραβολοειδές

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο Ι

Μεγέθη - Πραγματικοί ἀριθμοί

Κεφάλαιο VII

'Αναλυτική παράσταση καί μελέτη τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου.

Κεφάλαιο VIII

Μετρική 'Αναλυτική Γεωμετρία τοῦ ἐπιπέδου

Κεφάλαιο IX

'Εφαρμογές τῶν μετρικῶν ἀναλυτικῶν τύπων

Κεφάλαιο X

Γραμμές δευτέρου βαθμοῦ.

Κεφάλαιο XI

Συναρτήσεις

Κεφάλαιο XII

Ὅρια. Παράγωγοι.

Κεφάλαιο XIII

Συμπληρώσεις στό XI καί στό XII κεφάλαιο.

Κεφάλαιο XIV

'Αναλυτικές καί γεωμετρικές ἐφαρμογές τῶν παραγώγων.

Κεφάλαιο XV

Ἀόριστη ὁλοκλήρωση

Κεφάλαιο XVI

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Κεφάλαιο XVII

Συμπληρώσεις καί ἐφαρμογές τῆς θεωρίας τοῦ ὁλοκληρώματος

Κεφάλαιο XVIII

'Αναλυτική Γεωμετρία καί Διανυσματικός Λογισμός τοῦ 3-διάστατου χώρου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XIX.

Διαφορική Γεωμετρία τῶν καμπύλων

Κεφάλαιο XX.

Συμπληρώσεις στήν Ἀναλυτική Γεωμετρία τοῦ χώρου.