ΠΡΟΧΕΙΡΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΝΩΤΑΤΕΣ ΣΧΟΛΕΣ Π. Μ.,
Μ. Η. ΚΑΙ Α. Τ. ΤΟΥ Ε. Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

ΤΟΜΟΣ 2ος

ΑΠΟ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ν. ΚΡΙΤΙΚΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΟΥ Ε. Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

(ΑΝΑΤΥΠΩΣΗ)

ΑΘΗΝΑΙ
1962

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 21ο

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

§347. Οι εξισώσεις 2ου βαθμού $Ax^2+Bx+\Gamma=0\ (A\neq 0)$ δεν έχουν μέσα στο σύστημα των πραγματικών αριθμών λύση, όταν $B^2-4A\Gamma<0$.

Πράγματι, το πολυώνυμον $Ax^2+Bx+\Gamma=A\left[\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2+\frac{4A\Gamma-B^2}{4A^2}\right]$ δεν μηδενίζεται τότε για καμιά πραγματική τιμή του x. Ειδικώς η εξίσωση $x^2+1=0$ δεν έχει πραγματική λύση. Για να άρουμε αυτό το αδύνατο της επιλύσεως αλγεβρικών εξισώσεων που είναι εμπόδιο στη γενίκευση των αριθμητικών θεωριών, εισάγουμε νέα αριθμητικά σύμβολα, συμφωνούμε κατά ποιο τρόπο θα θεωρήσουμε τα παλιά, δηλαδή τους πραγματικούς αριθμούς, ως μια μερική περίπτωση των νέων συμβόλων και ορίζουμε πάνω στα νέα σημάδια τις τέσσερις (βασικές) πράξεις σύμφωνα με την αρχή της διατηρήσεως των βασικών νόμων τους. Κατόπιν αποδεικνύουμε ότι μέσα στο νέο σύστημα αριθμών κάθε αλγεβρική εξίσωση 2ου ή ανώτερου βαθμού είναι επιλύσιμη.
Εισάγουμε πρώτα το σημάδι i ως λύση της εξισώσεως $x^2+1=0$, δηλαδή ορίζουμε ότι το γινόμενο του i επί i (με τον παλιό συμβολισμό: το i^2) είναι το -1.
Το σημάδι αυτό i πρέπει να συμπλεχθή με τους πραγματικούς αριθμούς διά πράξεων που θα καλέσουμε πολλαπλασιασμό και πρόσθεση. Αν λοιπόν συμφωνήσουμε να παραστήσουμε τις πράξεις αυτές με τον ίδιο τρόπο όπως και στους πραγματικούς αριθμούς, θα έχουμε να εισαγάγουμε τα εξής νέα αριθμητικά σημάδια:
Πρώτον τα βi, όπου β τυχών πραγματικός αριθμός. Για $\beta=0$ θέτουμε φυσικά <u>εξ ορισμού</u> $0.i=0$

Δεύτερον, έχουμε να προσθέσουμε τα βi με ένα τυχόντα πραγματικό αριθμό, επομένως έχουμε να θεωρήσουμε τα σημάδια $\alpha+\beta i$, όπου α, β τυχόντες πραγματικοί αριθμοί. Πάλιν είναι φυσικό για $\alpha=0$ να ορίσουμε ότι $0+\beta i$, δηλαδή άθροισμα του 0 και του βi, είναι το σημάδι βi που εισαγάγαμε ήδη. Έτσι έχουμε τελικά να θεωρήσουμε τα σημάδια $\alpha+\beta i$, όπου α και β τυχόντες πραγματικοί αριθμοί, με τις συμφωνίες ότι $\alpha+0i=\alpha+0=\alpha$ (ειδικώς $0+0i=0$) και $0+\beta i=\beta i$. Τα σημάδια αυτά $\alpha+\beta i$ καλούνται <u>μιγαδικοί αριθμοί</u>.

Σύμφωνα με τις παραπάνω συμβάσεις, οι πραγματικοί αριθμοί α παρουσιάζονται ως μερική περίπτωση των μιγαδικών: $\alpha=\alpha+\beta i$, όταν $\beta=0$.

Επίσης τα σημάδια βi, που καλούνται <u>καθαρά φανταστικοί αριθμοί</u>, είναι μερική περίπτωση των μιγαδικών αριθμών: $\beta i=\alpha+\beta i$, όταν $\alpha=0$.

Γενικά ο μιγαδικός αριθμός $\alpha+\beta i$ παρουσιάζεται ως αποτελούμενος από δυο μέρη: το πραγματικό α, όπως λέμε, και το καθαρώς φανταστικό βi.

Ο πραγματικός αριθμός β μέσα στο $\alpha+\beta i$ λέγεται φυσικά <u>συντελεστής</u> του i. Ένα μιγαδικό αριθμό $\alpha+\beta i$ με $\beta\neq 0$ θα τον καλούμε φανταστικό μιγαδικό αριθμό.

§348. Οι αριθμοί $\alpha+\beta i$ και $\alpha-\beta i$ καλούνται συζυγείς <u>μιγαδικοί αριθμοί</u>. Π.χ. $2-3i$ και $2+3i$, $5+0i=5$ και $5-0i=5$. Είναι φανερό ότι, γενικά, συζυγής ενός πραγματικού αριθμού $\alpha=\alpha+0i$ είναι ο ίδιος ο αριθμός $\alpha-0i=\alpha$.

Δύο μιγαδικοί αριθμοί $\alpha_1+\beta_1 i$ και $\alpha_2+\beta_2 i$ λέγονται ίσοι, αν ισχύουν αμφότερες οι ισότητες $\alpha_1=\alpha_2$ και $\beta_1=\beta_2$. Άνισοι επομένως είναι οι δύο αριθμοί $\alpha_1+\beta_1 i$ και $\alpha_2+\beta_2 i$ όταν και μόνον όταν $|\alpha_1-\alpha_2|+|\beta_1-\beta_2|\neq 0$. Έτσι έχουμε $2+\frac{6}{4}i=\frac{-8}{-4}+\frac{3}{2}i$ και $5+3i\neq 5-3i$.

Ένας μιγαδικός αριθμός $\alpha+\beta i$ είναι ίσος με τον συζυγή του $\alpha-\beta i$, όταν και μόνον όταν $\beta=-\beta$, άρα όταν $\beta=0$, δηλαδή όταν και μόνον όταν ο αριθμός είναι πραγματικός.

§349. **Άθροισμα** δύο μιγαδικών αριθμών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ καλείται ο μιγαδικός αριθμός $(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$. Παριστάνεται το άθροισμα με τον ίδιο συμβολισμό όπως και στους πραγματικούς αριθμούς: $(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)$.
Έχουμε λοιπόν εξ ορισμού: $(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$.
Μ' αυτόν τον ορισμό ο νόμος της αντιμεταθέσεως και του προσεταιρισμού τηρείται. Δηλαδή, αν A, B, Γ μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύουν οι σχέσεις:

$$A+B=B+A$$
$$(A+B)+\Gamma=A+(B+\Gamma).$$

Επομένως, αν ορίσουμε ως άθροισμα $A_1+A_2+\ldots+A_\nu$ των ν μιγαδικών αριθμών $A_1,\ldots,A_\nu$ το αποτέλεσμα που βρίσκουμε προσθέτοντας πρώτα τον A_1 με τον A_2, έπειτα το άθροισμα (A_1+A_2) με τον A_3, έπειτα το νέο άθροισμα με τον A_4 και ούτω καθεξής μέχρι και του A_ν, τότε το άθροισμα που ορίσαμε έτσι δεν μεταβάλλεται αν πάρουμε τους προσθετέους κατ' άλλη σειρά ή συμπτύξουμε δύο η περισσότερους προσθετέους (δηλαδή τους αντικαταστήσουμε με το μερικό τους άθροισμα).
Εξ άλλου βλέπουμε αμέσως ότι το πραγματικό μέρος του αθροίσματος $A_1+A_2+\ldots+A_\nu$ ισούται με το άθροισμα των πραγματικών μερών των προσθετέων και το καθαρώς φανταστικό μέρος, με το άθροισμα των φανταστικών μερών των προσθετέων.

§350. **Γινόμενο** των μιγαδικών αριθμών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ ορίζεται ο μιγαδικός αριθμός $(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i$ παριστάνεται δε με τους γνωστούς από τη θεωρία των πραγματικών αριθμών τρόπους : $(\alpha+\beta i)\cdot(\gamma+\delta i)$ η $(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)$.

Ετσι έχουμε εξ ορισμού :

$$(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i.$$

Και εδώ τηρούνται οι νόμοι της αντιμεταθέσεως και του προσεταιρισμού: Αν A, B, Γ μιγαδικοί αριθμοί, τότε

$$AB=BA \text{ και } (AB)\cdot\Gamma=A\cdot(B\Gamma).$$

Επίσης τηρείται ο επιμεριστικός νόμος :

$$(A+B)\cdot\Gamma=A\Gamma+B\Gamma.$$

Είναι τώρα φανερό πώς γίνεται η επέκταση του ορισμού σε γινόμενο περισσότερων από δύο παράγοντες. Π.χ. το γινόμενο

$A_1A_2A_3A_4A_5$ ορίζεται ίσο με $\left[\{(A_1\cdot A_2)\cdot A_3\}\cdot A_4\right]\cdot A_5$.

Ισχύουν για τα γινόμενα αυτά οι γνωστές απ' τους πραγματικούς αριθμούς ιδιότητες : άδεια είτε να αλλάξουμε την τάξη των παραγόντων είτε να συμπτύξουμε δύο ή περισσότερους παράγοντες (δηλαδή να τους αντικαταστήσουμε με το μερικό τους γινόμενο) χωρίς αλλοίωση του τελικού αποτελέσματος. Επίσης ισχύει ότι ένα γινόμενο δύο (και επομένως περισσότερων) παραγόντων μηδενίζεται όταν και μόνον όταν ένας τουλάχιστο παράγοντας είναι μηδέν.

Απόδειξη. Εστω ότι $(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=0$. Τότε $\alpha\gamma-\beta\delta=0$ και $\alpha\delta+\beta\gamma=0$. Αρα υψώνοντας στο τετράγωνο και προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε $\alpha^2\gamma^2+\beta^2\delta^2+\alpha^2\delta^2+\beta^2\gamma^2=0$, δηλαδή $(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)=0$. Αλλά τώρα οι παράγοντες $\alpha^2+\beta^2$ και $\gamma^2+\delta^2$ είναι πραγματικοί αριθμοί, άρα ένας τουλάχιστον από αυτούς πρέπει να είναι μηδέν. Ωστε είτε $\alpha=\beta=0$ είτε $\gamma=\delta=0$, ο.ε.δ.

Παρατηρούμε ότι το γινόμενο $(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)$ δύο συζυγών αριθμών είναι ίσο με $\alpha^2+\beta^2$, δηλαδή πραγματικός αριθμός $\geqslant 0$.*

§ 351. Η **αφαίρεση** και η **διαίρεση** ορίζονται ως πράξεις αντι-

*(Βλέπε άσκηση 371)

στροφες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, σημειώνονται δε με τους ίδιους συμβολισμούς όπως και στους πραγματικούς αριθμούς.

Ας είναι $A=a_1+a_2i$ και $B=\beta_1+\beta_2 i$ δύο οποιοιδήποτε μιγαδικοί αριθμοί. Ζητείται πρώτα ένας μιγαδικός αριθμός $X=x_1+x_2 i$ τέτοιος ώστε $A+X=B$. Προφανώς είναι $X=(\beta_1-a_1)+(\beta_2-a_2)i$. Τη διαφορά X την σημειώνουμε με το σύμβολο $B-A$.

Αν καλέσουμε αντίθετο του $A=a_1+a_2i$ τον αριθμό $-A=-a+(-a_2)i$ που, όταν προστεθή στον A, δίνει άθροισμα $0=0+0i$, τότε έχουμε $B-A=B+(-A)$. Έστω, δεύτερον, ότι ζητείται ένας μιγαδικός αριθμός X τέτοιος ώστε $AX=B$. Αν $A=0$, τότε όποιος και να είναι ο X, θα έχουμε $A\cdot 0=0$. Άρα, αν μεν $A=0$ και $B\neq 0$ τότε δεν υπάρχει μιγαδικός αριθμός X που να ικανοποιή την εξίσωση, αν δε $A=0$ και $B=0$, τότε κάθε μιγαδικός αριθμός ικανοποιεί την εξίσωση. Ύστερα από αυτές τις διαπιστώσεις, διαίρεση δια $A=0$ δεν εισάγεται ούτε και στο σύστημα των μιγαδικών αριθμών.

Έστω τώρα ότι $A=a_1+a_2i\neq 0$.

Έχουμε να ικανοποιήσουμε την εξίσωση $(a_1+a_2i)(x_1+x_2i)=\beta_1+\beta_2 i$, δηλαδή την $(a_1x_1-a_2x_2)+(a_2x_1+a_1x_2)i=\beta_1+\beta_2 i$.

Επομένως πρέπει και αρκεί οι πραγματικοί αριθμοί x_1 και x_2 να επαληθεύουν το σύστημα:

$$a_1x_1-a_2x_2=\beta_1, \quad \text{και} \quad a_2x_1+a_1x_2=\beta_2 .$$

Επειδή εξ υποθέσεως $\begin{vmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix}=a_1^2+a_2^2\neq 0$, υπάρχει μια και μόνο μια λύση του συστήματος, η

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} \beta_1 & -a_2 \\ \beta_2 & a_1 \end{vmatrix}}{a_1^2+a_2^2}=\frac{a_1\beta_1+a_2\beta_2}{a_1^2+a_2^2}, \quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 \\ a_2 & \beta_2 \end{vmatrix}}{a_1^2+a_2^2}=\frac{a_1\beta_2-a_2\beta_1}{a_1^2+a_2^2} .$$

Ώστε το „πηλίκο" X του B δια A είναι ο αριθμός

$$X=\frac{B}{A}=\frac{a_1\beta_1+a_2\beta_2}{a_1^2+a_2^2}+\frac{a_1\beta_2-a_2\beta_1}{a_1^2+a_2^2}\,i .$$

Εννοείται ότι ισχύουν και εδώ όλες οι γνωστές ιδιότητες των κλασμάτων (=πηλίκων ενός μιγαδικού δι' ενός μιγαδικού $\neq 0$)

Π.χ. ισχύει η ισότης $\frac{B}{A}=\frac{B\Gamma}{A\Gamma}$ με οποιοδήποτε μιγαδικό αριθμό $\Gamma\neq 0$. Από εδώ έπεται και η εξής ευκολοθύμητη μέθοδος για την εύρεση του πηλίκου $\frac{B}{A}$:

$$\frac{\beta_1+\beta_2 i}{a_1+a_2 i}=\frac{(\beta_1+\beta_2 i)(a_1-a_2 i)}{(a_1+a_2 i)(a_1-a_2 i)}=\frac{(a_1\beta_1+a_2\beta_2)+(a_1\beta_2-a_2\beta_1)i}{a_1^2+a_2^2}.$$

§352. Από τα παραπάνω έπονται αμέσως τα εξής:
Μια γραμμική εξίσωση $AX+B=0$ με οποιουσδήποτε μιγαδικούς συντελεστές A και B έχει μια μόνη λύση όταν $A\neq 0$, είναι αδύνατη όταν $A=0$ και $B\neq 0$ και έχει για λύση κάθε μιγαδικό αριθμό όταν $A=B=0$.
Η θεωρία περί οριζουσών επεκτείνεται αμέσως στους μιγαδικούς αριθμούς, ομοίως και η θεωρία περι των γραμμικών συστημάτων (δηλαδή συστημάτων από πρωτοβάθμιες το πολύ εξισώσεις), χωρίς να μεταβληθή η διατύπωση των προτάσεων. Οι λύσεις θα αποτελούνται φυσικά από φανταστικούς εν γένει μιγαδικούς αριθμούς, όταν οι συντελεστές του συστήματος δεν είναι πραγματικοί μιγαδικοί αριθμοί.

§353. Επίσης έπονται αμέσως τα εξής:
Ας παραστήσουμε με $\bar{z}=x-yi$ τον συζυγή του $z=x+yi$.
Τότε

$$\bar{z}_1+\bar{z}_2=\text{συζυγής του }(z_1+z_2),\ \bar{z}_1-\bar{z}_2=\text{συζυγής του}(z_1-z_2),$$
$$\bar{z}_1\bar{z}_2=\text{συζυγής του }z_1z_2,\ \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}=\text{συζυγής του }\frac{z_1}{z_2},$$

Επομένως, αν μορφώσουμε μιαν παράσταση $R(z_1,z_2,\ldots,z_\nu)$ μόνο με τις τέσσερις βασικές πράξεις εκτελεσμένες πάνω στους μιγαδικούς αριθμούς $z_1,z_2,\ldots,z_\nu$ κατά κάποιο νόμο (σύμφωνα με αυτά, $R(z_1,\ldots,z_\nu)$ θα είναι μια ρητή συνάρτηση των γραμμάτων $z_1,\ldots,z_\nu$ με <u>πραγματικούς</u> (μάλιστα ακέραιους) συντελεστές), τότε η τιμή της $R(\bar{z}_1,\bar{z}_2,\ldots,\bar{z}_\nu)$=συζυγής τιμή της

$R(z_1, z_2, \ldots, z_\nu)$.

Μια χρήσιμη συνέπεια της παραπάνω σχέσεως είναι η εξής: Αν ο αριθμός $z = a+\beta i$ μηδενίζη την παράσταση

$A_0 + A_1 z + \ldots + A_\nu z^\nu$, όπου $A_0, A_1, \ldots, A_\nu$ δοσμένοι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ο $\bar{z} = a - \beta i$ μηδενίζει την παράσταση $\bar{A}_0 + \bar{A}_1 \bar{z} + \ldots + \bar{A}_\nu \bar{z}^\nu$. Ειδικά, αν $A_1, \ldots, A_\nu$ είναι πραγματικοί αριθμοί και αν ο $z = a+\beta i$ μηδενίζη το πολυώνυμο $A_0 + A_1 z + \ldots + A_\nu z^\nu$, τότε θα το μηδενίζη και ο $\bar{z} = a - \beta i$.

§ 354. **Απόλυτη τιμή** (ή μέτρο) ενός μιγαδικού αριθμού $A = a_1 + a_2 i$ καλούμε τον θετικό ή μηδενικό αριθμό $+\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Το σύμβολο της απόλυτης τιμής του $A = a_1 + a_2 i$ είναι το ίδιο όπως και στους πραγματικούς αριθμούς:

$$|A| = |a_1 + a_2 i| = {}_{+}\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\,.$$

Η απόλυτη τιμή ενός μιγαδικού αριθμού είναι 0, όταν και μόνον όταν ο μιγαδικός αριθμός ισούται με μηδέν $(0+0i)$. Εννοείται ότι για έναν πραγματικό μιγαδικό αριθμό $|a+0i|$ έχουμε $|a+0i| = +\sqrt{a^2} = |\bar{a}|$ = απόλυτη τιμή του πραγματικού αριθμού a.

Εξ άλλου επαληθεύει κανείς αμέσως ότι

$$(a+\beta i)(a-\beta i) = a^2 + \beta^2 = |a+\beta i|^2 = |a-\beta i|^2.$$

Για τις απόλυτες τιμές των μιγαδικών αριθμών ισχύει η σχέση

(354.1) $$|A+B| \leqq |A| + |B|,$$

όπου A, B δύο τυχαίοι μιγαδικοί αριθμοί.

Πράγματι, θέτοντας $A = a_1 + a_2 i$ και $B = \beta_1 + \beta_2 i$, έχουμε

$$|A+B| = |(a_1+\beta_1) + (a_2+\beta_2)i| = {}_{+}\sqrt{(a_1+\beta_1)^2 + (a_2+\beta_2)^2}\,.$$

Είναι όμως:

$${}_{+}\sqrt{(a_1+\beta_1)^2 + (a_2+\beta_2)^2} \leqq {}_{+}\sqrt{a_1^2 + a_2^2} + {}_{+}\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}\,,$$

διότι $(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)^2 \leqq (\alpha_1^2+\alpha_2^2)(\beta_1^2+\beta_2^2)$, άρα

$$2(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2) \leqq 2\,{}_{+}\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\cdot{}_{+}\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}$$

και επομένως

$$\alpha_1^2+\beta_1^2+2\alpha_1\beta_1+2\alpha_2\beta_2+\alpha_2^2+\beta_2^2 \leqq \left(\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\right)^2+2\,{}_{+}\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\cdot{}_{+}\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}+\left(\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}\right)^2$$

δηλαδή

$$(\alpha_1+\beta_1)^2+(\alpha_2+\beta_2)^2 \leqq \left({}_{+}\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}+{}_{+}\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}\right)^2.$$

Από την (354.1) έπεται επαγωγικά για οσουσδήποτε ν μιγαδικούς αριθμούς η ακόλουθη σχέση:

(354.2) $|A_1+A_2+\cdots+A_\nu| \leqq |A_1|+|A_2|+\cdots+|A_\nu|$.

Εξ άλλου από την (354.1) συμπεραίνουμε:

$$|A| = |(A-B)+B| \leqq |A-B|+|B|$$

επομένως:

$$|A-B| \geqq |A|-|B| \quad \text{και} \quad |A-B| = |B-A| \geqq |B|-|A|.$$

Οι δύο τελευταίες σχέσεις συνοψίζονται στην

(354.3) $|A-B| \geqq \big||A|-|B|\big|$.

<u>**Εφαρμογή**</u>. Μιαν χρησιμοποίηση της έννοιας της απόλυτης τιμής έχουμε στον ακόλουθο ορισμό.

<u>**Ορισμός**</u>. Λέμε ότι μια ακολουθία (ατέρμονα διαδοχή) μιγαδικών αριθμών $A_1, A_2, \cdots, A_\nu, \cdots$ έχει όριο το μιγαδικό αριθμό A (πράγμα που σημειώνομε με το συμβολισμό $\lim\limits_{\nu\to+\infty} A_\nu = A$), όταν $\lim\limits_{\nu\to+\infty} |A-A_\nu| = 0$. Από τα παραπάνω έπεται εύκολα ότι για να συμβαίνη αυτό πρέπει και αρκεί να έχουμε:

$\lim\limits_{\nu\to+\infty}$ (πραγματικού μέρους του A_ν) = πραγματικό μέρος του A

$\lim\limits_{\nu\to+\infty}$ (συντελεστού του i στον A_ν) = συντελεστής του i στον A.

§355. <u>Γεωμετρική παράσταση των μιγαδικών αριθμών.</u>

Τον τυχαίο μιγαδικό αριθμό $z = x+yi$ τον παριστάνουμε γεωμετρικά με το σημείο που έχει συντεταγμένες (x,y) σ' ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων του επιπέδου με βασικά διανύσματα ισόμηκα προς την μονάδα μήκους. Σύμφωνα με αυτήν την παράσταση, οι πραγματικοί μιγαδικοί αριθμοί $x+0i=x$ παριστάνονται από τα σημεία του άξονα των τετμημένων OX, ο οποίος γι αυτό, στην προκείμενη παράσταση, λέγεται πραγματικός άξονας. Οι καθαρά φανταστικοί αριθμοί $\beta i = 0+\beta i$ παριστάνονται από τα σημεία του άξονα των τεταγμένων OY ο οποίος γι αυτό λέγεται εδώ φανταστικός άξονας. Ενας μιγαδικός αριθμός με πραγματικό μέρος θετικό παριστάνεται από σημείο που κείται από την ίδια μεριά του άξονα OY όπως και ο θετικός ημιάξονας OX · ένας μιγαδικός αριθμός με θετικό συντελεστή του i παριστάνεται από σημείο που κείται από την ίδια μεριά του άξονα OX όπως και ο θετικός ημιάξονας OY. Τα σημεία που παριστάνουν τους μιγαδικούς αριθμούς με μέτρο 1 είναι σημεία της περιφέρειας με κέντρο το O(0,0) και ακτίνα 1. Δύο συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί παριστάνονται από σημεία που είναι συμμετρικά το ένα του άλλου ως πρός τον OX.

Εκτός από την παράσταση με το σημείο $M(x,y)$ εισάγουμε και παράσταση του μιγαδικού αριθμού $z=x+yi$ με το διάνυσμα $\overline{OM}$ και με τα ίσα του διανύσματα του επιπέδου, που έχουν όλα συντεταγμένες (x,y). Οι μιγαδικοί αριθμοί με μέτρο 1 παριστάνονται έτσι απο διανύσματα του επιπέδου, που είναι μοναδιαία, έχουν δηλαδή μήκος 1.

Δύο όχι μηδενικά, παράλληλα διανύσματα $\bar{\delta}(\delta_1,\delta_2)$ και $\bar{\varepsilon}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ παριστάνουν μιγαδικούς αριθμούς που προκύπτουν ο ένας από τον άλλο όταν τον πολλαπλασιάσουμε επί έναν κατάλληλο πραγματικό αριθμό $\neq 0$.

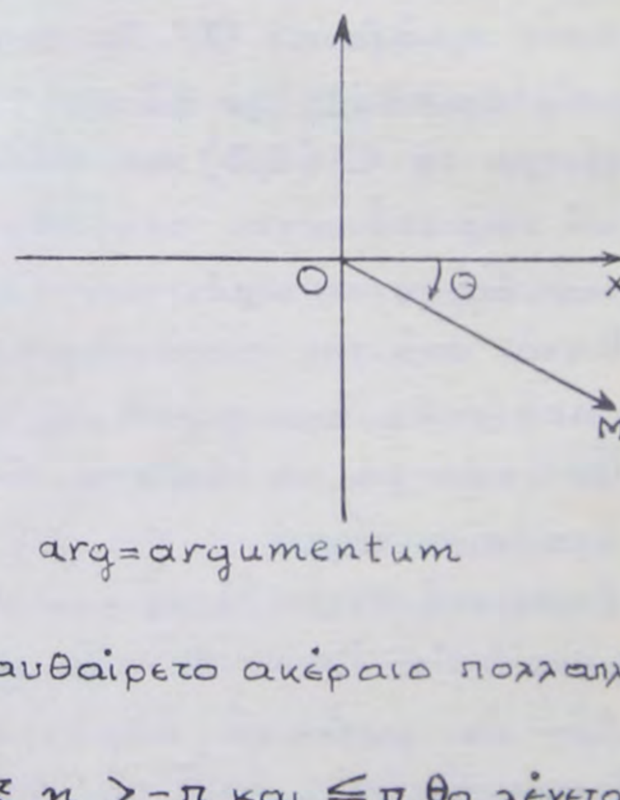
Με την παράσταση μιγαδικών αριθμών διά διανυσμάτων, η πρόσθεση και η αφαίρεση δύο μιγαδικών αριθμών αποκτούν αντίστοιχη γεωμετρική εικόνα την πρόσθεση και αφαίρεση δύο διανυσμάτων. Με άλλα λόγια το διάνυσμα που παριστάνει τό άθροισμα z_1+z_2 (ή την διαφορά z_1-z_2) είναι άθροισμα (ή διαφορά) των διανυσμάτων που παριστάνουν τους

τους αριθμούς Z_1 και Z_2.

§356. **Πολική μορφή μιγαδικού αριθμού.** Το μέτρο $|Z| = +\sqrt{x^2+\psi^2}$ ενός αριθμού $Z = x+\psi i$ ισούται, σύμφωνα με τα προηγούμενα, με το μήκος $OM = (OM)$ των διανυσμάτων που παριστάνουν τον αριθμό. Το μέτρο αυτό είναι και η πολική ακτίνα ρ του σημείου $M(x,\psi)$ ως προς πόλο το σημείο $O(0,0)$ και πολικό άξονα τον OX. Η πολική γωνία θ του σημείου M, στην περίπτωση φυσικά όπου $(OM) \neq 0$, (δηλαδή στην περίπτωση $Z \neq 0$), καλείται και ὁρισμα του μιγαδικού αριθμού Z.

Η γωνία θ είναι ίση με την προσημασμένη γωνία $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM})$ του ημιάξονα OX και ενός διανύσματος που παριστάνει τον αριθμό Z. Στα μαθήματα αυτά θα την σημειώνουμε με την γραφή

$$\theta = \arg Z = \arg(x+\psi i).$$



arg=argumentum

Όπως γνωρίζουμε, η πολική γωνία θ ενός σημείου M δεν είναι αριθμός μονότροπα ορισμένος, αλλά επιτρέπεται να του προσθέσουμε αυθαίρετο ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π.

Η τιμή της πολικής γωνίας του Z, η $>-\pi$ και $\leq \pi$, θα λέγεται, πρωτεύουσα τιμή του $\arg Z$ και θα παριστάνεται με $\mathrm{Arg}\,Z$ ή $\arg_0 Z$. Π.χ. πρωτεύουσα τιμή του $\arg i = \frac{\pi}{2}$, πρωτεύουσα τιμή του $\arg(-3) = \pi$, πρωτεύουσα τιμή του $\arg 5 = 0$. Η πρωτεύουσα τιμή $\arg_0 Z = \arg_0(x+\psi i)$ (υποθέτουμε $Z \neq 0$) υπολογίζεται με τους συνηθισμένους λογαριθμικούς πίνακες (κατά προσέγγιση φυσικά) ως εξής:

Προσδιορίζουμε πρώτα τη γωνία ω (σε μοίρες, ύστερα σε ακτίνια) για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{|\psi|}{|x|}$, $\quad 0 \leqq \omega \leqq \dfrac{\pi}{2}$. Για $x=0$ (οπότε $\psi \neq 0$) έχουμε, εννοείται, $\varepsilon\varphi\omega = \infty$ και $\omega = \dfrac{\pi}{2}$.

Έπειτα θέτουμε:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Arg}\,Z &= \arg_0 Z = \omega && \text{αν } x \geqq 0 \text{ και } \psi \geqq 0\\
\mathrm{Arg}\,Z &= \arg_0 Z = -\omega, && \text{»} \quad x \geqq 0 \quad \text{»} \quad \psi < 0\\
\mathrm{Arg}\,Z &= \arg_0 Z = \pi-\omega, && \text{»} \quad x < 0 \quad \text{»} \quad \psi \geqq 0\\
\mathrm{Arg}\,Z &= \arg_0 Z = -\pi+\omega, && \text{»} \quad x < 0 \quad \text{»} \quad \psi < 0.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την πολική γωνία $\arg Z = \theta$ και την πολική ακτίνα $|Z| = \rho$ μπορούμε να δώσουμε στο μιγαδικό αριθμό τη μορφή:

$$Z = x + \psi i = \rho\,\sigma\upsilon\nu\theta + \rho\,\eta\mu\theta\, i = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta),$$

που θα καλούμε χάρη συντομίας <u>πολική μορφή</u> του Z.

Π.χ. η πολική μορφή του $Z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ είναι $1\cdot\left(\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} + i\eta\mu\frac{2\pi}{3}\right)$.

Η πολική μορφή ενός αριθμού Z με $|Z|=1$ είναι γενικά $\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta$.

Αν $Z = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$, τότε ο συζυγής του:

$$\bar{Z} = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta) = \rho\left[\sigma\upsilon\nu(-\theta) + i\eta\mu(-\theta)\right].$$

§357. Με τη βοήθεια της πολικής μορφής μπορούμε να δώσουμε πολύ απλές γεωμετρικές ερμηνείες στον πολλαπλασιασμό και στη διαίρεση δύο μιγαδικών αριθμών.

Ας είναι $Z_1 = \rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$ και $Z_2 = \rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$. Έχουμε τότε:

$$\begin{aligned}
Z_1 Z_2 &= \rho_1\rho_2\left[(\sigma\upsilon\nu\theta_1\,\sigma\upsilon\nu\theta_2 - \eta\mu\theta_1\,\eta\mu\theta_2) + i(\sigma\upsilon\nu\theta_1\,\eta\mu\theta_2 + \eta\mu\theta_1\,\sigma\upsilon\nu\theta_2)\right]\\
&= \rho_1\rho_2\left[\sigma\upsilon\nu(\theta_1+\theta_2) + i\eta\mu(\theta_1+\theta_2)\right].
\end{aligned}$$

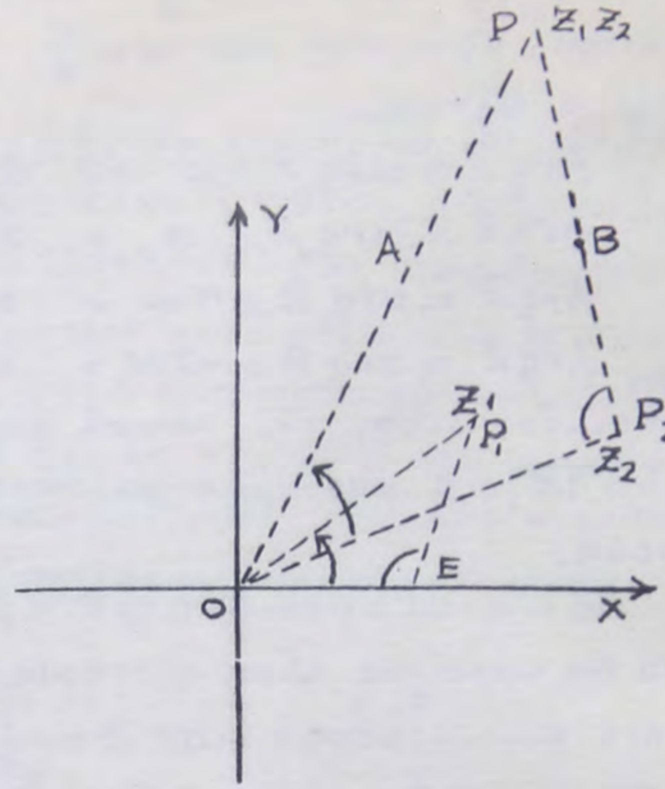
<u>Ώ</u>στε το γινόμενο $Z_1 Z_2$ έχει όρισμα το άθροισμα των ορισμάτων των παραγόντων.

Αν λοιπόν οι 3 αριθμοί Z_1, Z_2 και $Z_1\cdot Z_2$ παριστάνωνται από τα 3 σημεία P_1, P_2 και P του επιπέδου, θα είναι (βλ. §84) προσημ. γωνία $(\overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP}) = (\overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OX}) + (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OP}) =$

$$-\theta_2 + (\theta_1 + \theta_2) = \theta_1 = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OP_1}).$$

Εξ άλλου, αν E το σημείο του πραγματικού άξονος που παριστάνει τον αριθμό $1 + 0i = 1$, θα έχουμε:

$$\frac{OP}{OP_2}=\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_2}=\frac{\rho_1}{1}=\frac{OP_1}{OE}.$$

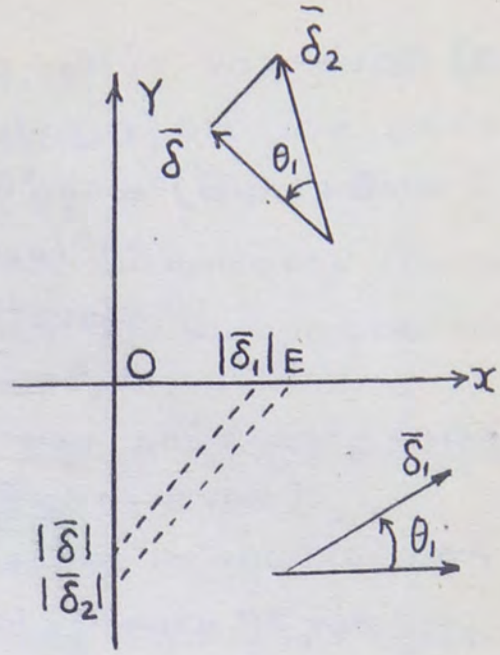


Άρα το τρίγωνο P_2OP είναι όμοιο με το EOP_1 και η φορά διαγραφής P_2OP του περιγράμματος του είναι η ίδια (ομόσημη) με τη φορά διαγραφής EOP_1 του περιγράμματος του τριγώνου EOP_1. Επομένως μπορούμε να κατασκευάσουμε το σημείο P που παριστάνει το γινόμενο Z_1Z_2 ως εξής:

Στα άκρα του διανύσματος $\overline{OP_2}$, δεξιά του ή αριστερά του καθόσο το διάνυσμα $\overline{OP_1}$ βρίσκεται δεξιά ή αριστερά του διανύσματος $\overline{OE}$, κατασκευάζουμε γωνίες $P_2\widehat{O}A$ και $O\widehat{P_2}B$ ίσες αντιστοίχως με τις γωνίες $E\widehat{O}P_1$, $O\widehat{E}P_1$ και φέρνουμε σε τομή τις ευθείες OA και P_2B. Το σημείο τομής P είναι το ζητούμενο. Αν παραστήσουμε τα Z_1 και Z_2 με διανύσματα $\bar{\delta}_1$ και $\bar{\delta}_2$ το Z_1Z_2 παριστάνεται με ένα διάνυσμα $\bar{\delta}$ που κατασκευάζεται ως εξής: στρέφουμε το $\bar{\delta}_2$ γύρω στην αρχή του κατά την προσημασμένη πολική γωνία θ_1 του $\bar{\delta}_1$ και το εστραμμένο διάνυσμα το πολλαπλασιάζουμε επί τον αριθμό $\rho_1=|\bar{\delta}_1|$. Η τελευταία πράξη εκτελείται γεωμετρικά με την κατασκευή μιας τετάρτης αναλόγου στα τρία τμήματα $|\overline{OE}|$, $|\bar{\delta}_1|$, $|\bar{\delta}_2|$ διότι, όπως είδαμε,

$$\frac{|\bar{\delta}|}{|\bar{\delta}_2|}=\frac{|\bar{\delta}_1|}{|\overline{OE}|}=\frac{|\bar{\delta}_1|}{1}.$$

Σύμφωνα με αυτά, πολλαπλασιασμός ενός αριθμού $Z_1=x+\psi i$



επί τον αριθμό i σημαίνει γεωμετρικά: στροφή του διανύσματος που παριστάνεται από τον $\dot{Z}_1$ κατά γωνία $= +\frac{\pi}{2}$.
Η διαίρεση ενός αριθμού Z_2 δι' ενός αριθμού $Z_1 \neq 0$ μπορεί να ερμηνευθή γεωμετρικά ως εξής: Στρέφουμε πρώτα το διάνυσμα $\bar{\delta}_2$, που παριστάνει τον αριθμό Z_2 κατά τη γωνία $-\theta_1 = -$ πολική γωνία του διανύσματος $\bar{\delta}_1$ που παριστάνει τον Z_1, και ύστερα πολλαπλασιάζουμε το εστραμμένο διάνυσμα επί τον αριθμό $\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{|\bar{\delta}_1|}$.

§ 358. Τύπος τού **Moivre**. Σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω για τον πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών που είναι γραμμένοι στην πολική μορφή, έχουμε όταν ν τυχαίος φυσικός αριθμός,

$$(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)^\nu = \sigma\upsilon\nu(\nu\theta) + i\eta\mu(\nu\theta).$$

Επί πλέον έχουμε

$$(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)^{-1} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta} = \sigma\upsilon\nu(-\theta) + i\eta\mu(-\theta),$$

όπως αμέσως πιστοποιούμε:

$$(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)\cdot(\sigma\upsilon\nu(-\theta) + i\eta\mu(-\theta)) = \sigma\upsilon\nu 0 + i\eta\mu 0.$$

Άρα, για ν ίσο με τυχαίο φυσικό αριθμό,

$$(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)^{-\nu} = \frac{1}{(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)^\nu} = \left[\sigma\upsilon\nu(-\theta) + i\eta\mu(-\theta)\right]^\nu$$

$$= \sigma\upsilon\nu(-\nu\theta) + i\eta\mu(-\nu\theta).$$

Επομένως, όταν το κ είναι ένας τυχαίος ακέραιος αριθμός (θετικός, μηδέν ή αρνητικός), θα έχουμε:

$$(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)^\kappa = \sigma\upsilon\nu(\kappa\theta) + i\eta\mu(\kappa\theta).$$

Ο τύπος αυτός λέγεται τύπος του **Moivre**. Νά δύο εφαρμογές του:

α) Κατά τον τύπο του διωνύμου (ο οποίος προφανώς ισχύει και για μιγαδικά διώνυμα) είναι π.χ

$$(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta)^5 = \text{συν}^5\theta + 5i\text{συν}^4\theta\,\text{ημ}\theta - 10\,\text{συν}^3\theta\,\text{ημ}^2\theta$$
$$- 10i\text{συν}^2\theta\,\text{ημ}^3\theta + 5\,\text{συν}\theta\,\text{ημ}^4\theta + i\text{ημ}^5\theta$$
$$= (\text{συν}^5\theta - 10\,\text{συν}^3\theta\,\text{ημ}^2\theta + 5\,\text{συν}\theta\,\text{ημ}^4\theta)$$
$$+ (5\,\text{συν}^4\theta\,\text{ημ}\theta - 10\,\text{συν}^2\theta\,\text{ημ}^3\theta + \text{ημ}^5\theta)i.$$

Κατά τον τύπο του Moivre έχουμε:

$$(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta)^5 = \text{συν}(5\theta) + i\text{ημ}(5\theta).$$

Αρα ισχύουν οι σχέσεις:

$$\text{συν}\,5\theta = \text{συν}^5\theta - 10\,\text{συν}^3\theta\,\text{ημ}^2\theta + 5\,\text{συν}\theta\,\text{ημ}^4\theta,$$
$$\text{ημ}\,5\theta = 5\,\text{συν}^4\theta\,\text{ημ}\theta - 10\,\text{συν}^2\theta\,\text{ημ}^3\theta + \text{ημ}^5\theta.$$

Με άλλα λόγια και γενικότερα: το ημίτονο και το συνημίτονο ενός ακεραίου πολλαπλασίου του θ είναι ακέραια πολυώνυμα του ημθ και συνθ με ακέραιους συντελεστές μάλιστα.

β) Θέτουμε:

$$\text{συν}\,\theta + i\text{ημ}\theta = \omega, \quad \text{συν}\theta - i\text{ημ}\theta = \bar{\omega},$$

Τότε έχουμε:

$$\text{συν}\theta = \frac{1}{2}(\omega + \bar{\omega}), \quad \text{ημ}\theta = \frac{1}{2i}(\omega - \bar{\omega}) = -\frac{1}{2}(\omega - \bar{\omega})i$$

Επομένως:

$$\text{συν}^5\theta = \frac{1}{2^5}(\omega + \bar{\omega})^5 = \frac{1}{2^5}\left[\omega^5 + 5\omega^4\bar{\omega} + 10\,\omega^3\bar{\omega}^2 + 10\,\omega^2\bar{\omega}^3 + 5\,\omega\bar{\omega}^4 + \bar{\omega}^5\right].$$

Αλλα $\omega\bar{\omega} = |\omega|^2 = 1^2 = 1$ και συνεπώς $\omega^4\bar{\omega} = \omega^3$, $\omega^3\bar{\omega}^2 = \omega$, $\omega^2\bar{\omega}^3 = \bar{\omega}$, $\omega\bar{\omega}^4 = \bar{\omega}^3$. Άρα:

$$\text{συν}^5\theta = \frac{1}{2^5}\left[\omega^5 + 5\omega^3 + 10\,\omega + 10\,\bar{\omega} + 5\,\bar{\omega}^3 + \bar{\omega}^5\right]$$
$$= \frac{1}{2^5}\left[\omega^5 + \bar{\omega}^5 + 5(\omega^3 + \bar{\omega}^3) + 10(\omega + \bar{\omega})\right]$$

Παρατηρούμε τώρα ότι $\omega^5 + \bar{\omega}^5 = (\text{συν}\,5\theta + i\text{ημ}\,5\theta) + (\text{συν}5\theta - i\text{ημ}5\theta) = 2\text{συν}5\theta$, $\omega^3 + \bar{\omega}^3 = 2\,\text{συν}\,3\theta$ και $\omega + \bar{\omega} = 2\,\text{συν}\theta$.

Επομένως έχουμε τελικά:

$$\text{συν}^5\theta = \frac{1}{24}\left[\text{συν}\,5\theta + 5\,\text{συν}\,3\theta + 10\,\text{συν}\theta\right].$$

Ομοίως βρίσκουμε

$$= \text{ημ}^5\theta = -\frac{i}{2^5}(\omega - \bar{\omega})^5 = -\frac{i}{2^5}(\omega^5 - 5\omega^4\bar{\omega} + 10\,\omega^3\bar{\omega}^2 - 10\,\omega^2\bar{\omega}^3 + 5\,\omega\bar{\omega}^4 - \bar{\omega}^5)$$
$$= -\frac{i}{2^5}(\omega^5 - 5\omega^3 + 10\,\omega - 10\,\bar{\omega} + 5\,\bar{\omega}^3 - \bar{\omega}^5)$$

$$= -\frac{i}{2^5}\left[\omega^5 - \bar{\omega}^5 - 5(\omega^3 - \bar{\omega}^3) + 10(\omega - \bar{\omega})\right]$$
$$= -\frac{i}{2^5}\left[2i\,\text{ημ}5\theta - 5.2i\,\text{ημ}3\theta + 10\cdot 2i\,\text{ημ}\theta\right]$$
$$= \frac{1}{2^4}(\text{ημ}5\theta - 5\,\text{ημ}3\theta + 10\,\text{ημ}\theta)$$

Με άλλα λόγια: η πέμπτη δύναμη είτε του συνημιτόνου είτε του ημιτόνου του θ είναι γραμμική συνάρτηση των συνημιτόνων και ημιτόνων των τόξων $\theta, 3\theta, 5\theta$.
Ανάλογα πράγματα ισχύουν προφανώς για τη νιοστή δύναμη (ν = φυσικός αριθμός) του συνθ και ημθ.

§359. Ας ζητήσουμε να επιλύσουμε την διωνυμική εξίσωση νιοστού βαθμού:

(359.1) $\quad Z^\nu - (a_1 + a_2 i) = 0$, όπου ν φυσικός $\geqq 2$.

Εγκαταλείπουμε τις καθαρά αλγεβρικές μεθόδους και προσφεύγουμε στην Τριγωνομετρία. Παραλείποντας την τετριμμένη περίπτωση $a_1 + a_2 i = 0 + 0i = 0$ στην οποία η διωνυμική εξίσωση $Z^\nu - 0 = 0$ έχει την μόνη λύση $Z = 0$, θέτουμε:

$$Z = \rho(\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta) \text{ και } a_1 + a_2 i = P(\text{συν}\Phi_0 + i\,\text{ημ}\Phi_0),$$

όπου Φ_0 η πρωτεύουσα τιμή του $\arg(a_1 + a_2 i)$ και γράφουμε την διωνυμική εξίσωση με την ακόλουθη μορφή:

$$\rho^\nu\big(\text{συν}(\nu\theta) + i\,\text{ημ}(\nu\theta)\big) = P\left(\text{συν}\Phi_0 + i\,\text{ημ}\Phi_0\right).$$

Από αυτήν έπεται:

$\rho^\nu = P$ και $\nu\theta = \Phi_0 + 2\kappa\pi$, όπου κ τυχαίος ακέραιος αριθμός. Άρα

$$\rho = +\sqrt[\nu]{P} = +\sqrt[\nu]{|a_1 + a_2 i|} = +\sqrt[2\nu]{a_1^2 + a_2^2}$$
$$\text{και } \theta = \frac{\Phi_0}{\nu} + \kappa\frac{2\pi}{\nu} = \frac{1}{\nu}\arg_0(a_1 + a_2 i) + \frac{2\kappa\pi}{\nu}$$

Δύο τιμές του κ που διαφέρουν κατά τον αριθμό ν ή, γενικότερα, κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του ν δίνουν τόξα θ που διαφέρουν κατά 2π ή ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π, άρα δίνουν το ίδιο $Z = \rho(\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta)$.
Σύμφωνα με αυτά οι διάφορες λύσεις της διωνυμικής εξίσωσης (359.1) με ν φυσικό $\geqq 1$ και $a_1 + a_2 i \neq 0$, είναι οι εξής ν κατά το πλήθος:

(359.2) $z = \sqrt[\nu]{P}\left\{\text{συν}\left(\frac{\Phi_0}{\nu}+\kappa\frac{2\pi}{\nu}\right)+i\,\text{ημ}\left(\frac{\Phi_0}{\nu}+\kappa\frac{2\pi}{\nu}\right)\right\}$
για $\kappa = 0, 1, \ldots, (\nu-1)$.

Οι ν αυτοί αριθμοί έχουν την ιδιότητα, όταν υψωθούν στη νιοστή δύναμη να δίνουν τον αριθμό $\alpha_1+\alpha_2 i$.

Γι αυτό λέγονται νιοστές ρίζες του $\alpha_1+\alpha_2 i$ και σημειώνονται με το ν-σήμαντο σύμβολο $\sqrt[\nu]{\alpha_1+\alpha_2 i}$

π.χ.

$$\sqrt[2]{1+i} = \sqrt[2]{\sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{4}+i\,\text{ημ}\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{\sqrt{2}}\left\{\text{συν}\left(\frac{\pi}{8}+\kappa\frac{2\pi}{2}\right)+i\,\text{ημ}\left(\frac{\pi}{8}+\kappa\frac{2\pi}{2}\right)\right\}$$

$$= \sqrt[4]{2}\left\{\text{συν}\left(\frac{\pi}{8}+\kappa\pi\right)+i\,\text{ημ}\left(\frac{\pi}{8}+\kappa\pi\right)\right\} \text{ για } \kappa=0,1.$$

Αν λάβουμε υπ' όψη ότι:

$$\text{συν}\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\text{συν}\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \quad \text{και} \quad \text{ημ}\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\text{συν}\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

βρίσκουμε ότι

$$\sqrt[2]{1+i} = \pm\frac{\sqrt[4]{2}}{2}\left\{\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right\} = \pm\left\{\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right\},$$

όπου, για ευκολία, παραλείψαμε το σημάδι + που προσγράψαμε στο ριζικό για να δηλώσουμε πως πρόκειται για αριθμητικές (θετικές) ρίζες. Ως δεύτερο παράδειγμα ας πάρουμε τις τρίτες ρίζες του i.

Έχουμε σύμφωνα με τον τύπο (359.2)

$$\sqrt[3]{i} = \sqrt{1}\left\{\text{συν}\left(\frac{\pi}{6}+\kappa\frac{2\pi}{3}\right)+i\,\text{ημ}\left(\frac{\pi}{6}+\kappa\frac{2\pi}{3}\right)\right\} \text{ για } \kappa=0,1,2.$$

Επομένως:

$$\sqrt[3]{i} = \frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2} \text{ ή } -\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2} \text{ ή } -i.$$

§360. Ας μελετήσουμε ειδικότερα τις νιοστές ρίζες της μονάδας 1.

Έχουμε:

$$\sqrt[\nu]{1} = \text{συν}\left(\frac{0}{\nu}+\kappa.\frac{2\pi}{\nu}\right)+i\,\text{ημ}\left(\frac{0}{\nu}+\kappa.\frac{2\pi}{\nu}\right)$$

$$=\text{συν}\frac{2\kappa\pi}{\nu}+i\,\text{ημ}\frac{2\kappa\pi}{\nu},\ \text{για}\ \kappa=0,1,\ldots,(\nu-1).$$

Για $\kappa=0$ λαμβάνουμε τη ρίζα 1, για $\kappa=1$ τη ρίζα $\text{συν}\frac{2\pi}{\nu}+i\,\text{ημ}\frac{2\pi}{\nu}$. Η δεύτερη αυτή έχει την ιδιότητα να αναπαράγη δια των (ακέραιων) δυνάμεων της όλες τις νιοστές ρίζες του 1. Πράγματι, κατά τον τύπο του Moivre έχουμε:

$$\left(\text{συν}\frac{2\pi}{\nu}+i\,\text{ημ}\frac{2\pi}{\nu}\right)^{\kappa}=\text{συν}\frac{2\kappa\pi}{\nu}+i\,\text{ημ}\frac{2\kappa\pi}{\nu}.$$

Μια τέτοια νιοστή ρίζα λέγεται **αρχική**. Εύκολα αποδείχνεται ότι αρχική νιοστή ρίζα της μονάδας είναι η $\text{συν}\frac{2\kappa_o\pi}{\nu}+i\,\text{ημ}\frac{2\kappa_o\pi}{\nu}$ όταν και μόνον όταν ο ακέραιος κ_o είναι πρώτος προς τον ν.

Π.χ. Οι τρίτες ρίζες της 1 είναι:

$$\text{συν}\theta+i\,\text{ημ}\theta=1,\quad \text{συν}\frac{2\pi}{3}+i\,\text{ημ}\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.i,$$

$$\text{συν}\frac{4\pi}{3}+i\,\text{ημ}\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}.i.$$

Αρχική είναι

$$\text{η}\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\ \text{και η}\ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

Οι τέταρτες ρίζες της μονάδας είναι:

$$\text{συν}0+i\,\text{ημ}0=1,\quad \text{συν}\frac{2\pi}{4}+i\,\text{ημ}\frac{2\pi}{4}=i,$$

$$\text{συν}\frac{4\pi}{4}+i\,\text{ημ}\frac{4\pi}{4}=-1,\quad \text{συν}\frac{6\pi}{4}+i\,\text{ημ}\frac{6\pi}{4}=-i.$$

Από αυτές αρχικές είναι οι δυο i και $-i$.

Αν καλέσουμε ω τη νιοστή αρχική ρίζα $\text{συν}\frac{2\pi}{\nu}+i\,\text{ημ}\frac{2\pi}{\nu}$ της μονάδας 1, τότε από τον τύπο (359.2) έπεται ότι:

$$\sqrt[\nu]{\alpha_1+\alpha_2 i}=\sqrt[\nu]{P}\left(\text{συν}\Phi_o+i\,\text{ημ}\Phi_o\right)$$

$$=\sqrt[\nu]{P}\left(\text{συν}\frac{\Phi_o}{\nu}+i\,\text{ημ}\frac{\Phi_o}{\nu}\right)\left(\text{συν}\,\kappa\frac{2\pi}{\nu}+i\,\text{ημ}\,\kappa\frac{2\pi}{\nu}\right)$$

$$=\sqrt[\nu]{P}\left(\text{συν}\frac{\Phi_o}{\nu}+i\,\text{ημ}\frac{\Phi_o}{\nu}\right).\omega^{\kappa}$$

$$\text{για}\ \kappa=0,1,\ldots,(\nu-1)$$

Αντί της πρωτεύουσας τιμής Φ_0 του $\arg(a_1+a_2 i)$ μπορούμε εννοείται να πάρουμε μιαν άλλη οποιαδήποτε τιμή του, επίσης αντί της αρχικής ρίζας ω μιαν άλλη αρχική νιοστή ρίζα του 1. Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα:

$\sqrt[\nu]{a_1+a_2 i}$ = μια οποιαδήποτε ορισμένη νιοστή ρίζα του $a_1+a_2 i$ επί ω^κ για $\kappa=0,1,\ldots,(\nu-1)$, όπου ω μια αρχική ρίζα της μονάδας 1.

π.χ. $\sqrt[4]{-1}=\left(\text{συν}\frac{\pi}{4}+i\,\text{ημ}\frac{\pi}{4}\right)\left(\text{συν}\frac{2\pi}{4}+i\,\text{ημ}\frac{2\pi}{4}\right)^\kappa$, για $\kappa=0,1,2,3$.

$$\sqrt[5]{-2}=\pm\sqrt[5]{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{5}+i\,\text{ημ}\frac{\pi}{5}\right)\left(\text{συν}\frac{2\pi}{5}+i\,\text{ημ}\frac{2\pi}{5}\right)^\kappa,$$

για $\kappa=0,1,2,3,4$.

Ασκήσεις στό 21º κεφάλαιο

365. Φέρτε στη μορφή $a+\beta i$ (όπου a,β πραγματικοί αριθμοί) τις ακόλουθες παραστάσεις: $\frac{1}{i}$, $\frac{1+i}{1-i}$, $\frac{5}{-3\pm 4i}$, $(1\pm 2i)^3$, $\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2$, $\frac{1}{i^\nu}$ και $(1+i)^\nu+(1-i)^\nu$ όπου ν φυσικός αριθμός.

366. Ερευνήστε πότε το άθροισμα και πότε η διαφορά ή το γινόμενο ή το πηλίκο δύο μιγαδικών αριθμών είναι πραγματικός.
Ερμηνεύστε γεωμετρικά τη συνθήκη που θα βρήτε με τη βοήθεια της αντιστοιχίας των μιγαδικών αριθμών προς τα σημεία (ή τά ελεύθερα διανύσματα) του επιπέδου.

367. Υπολογίστε πρώτα το πραγματικό και το (καθαρά) φανταστικό μέρος των παραστάσεων: z^4, $\frac{1}{z^2}$, $\frac{z-1}{z+1}$, $z^2+\frac{1}{z^2}$ όταν $z=x+\psi i$ (x και ψ πραγματικοί αριθμοί). Θέστε, δεύτερο, μέσα στις παραπάνω παραστάσεις $z=x-\psi i$ και επαληθεύστε ότι οι δεύτερες αυτές τιμές των πα-

ραστάσεων είναι συζυγείς αντιστοίχως των πρώτων.

368. Το διάνυσμα που παριστάνεται από το μιγαδικό αριθμό $z = 4-3i$ το στρέφουμε κατά $\frac{\pi}{2}$ και το πολλαπλασιάζουμε επί 3. Από ποιόν αριθμό παριστάνεται το διάνυσμα που προκύπτει; Το διάνυσμα που παριστάνεται από το μιγαδικό αριθμό $z = -2-3i$ το στρέφουμε κατά $-\frac{\pi}{3}$ και το πολλαπλασιάζουμε επί τον αριθμό $1/4$. Από ποιόν αριθμό παριστάνεται το διάνυσμα που προκύπτει;

369. Ποιά είναι η απόλυτη τιμή και το όρισμα (μέτρο και πολική γωνία) των εξής μιγαδικών αριθμών: $-i$, -7, $\frac{8}{i}$, $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-2-2i$, $\text{συν}\,x - i\,\text{ημ}\,x$, $\text{ημ}\,x + i\,\text{συν}\,x$, $\text{ημ}\,x - i\,\text{συν}\,x$, όπου x πραγματικός αριθμός.

370. Υπολογίστε την απόλυτη τιμή των εξής τριών αριθμών:
$$-2i(3+i)(2+4i)(1-i),\quad \frac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)},\quad (1+i)\frac{4+2i}{i}-(1+i).$$

371. Ποιά είναι η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι το γινόμενο δύο αριθμών μιγαδικών 1ον) αριθμός πραγματικός **θετικός** 2ον) αριθμός πραγματικός **αρνητικός**; Όμοιο ερώτημα για το πηλίκο δύο μιγαδικών αριθμών.

372. Ποιός είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων z για τα οποία $|z-z_1|+|z-z_2| = 2a$ (θετική σταθερά), $\big||z-z_1|-|z-z_2|\big| = 2a$ (θετική σταθερά);

373. Υπολογίστε τις τρεις κυβικές ρίζες του i, του $-i+\sqrt{3}$ του $-2-2i$, υπολογίστε τις τέσσερις τέταρτες ρίζες του $-1-\sqrt{3}i$ και του i.

374. Υπολογίστε τις πέντε μιγαδικές πέμπτες ρίζες $\sqrt[5]{32}$ και τις τρεις κυβικές ρίζες $\sqrt[3]{-1+i}$, $\sqrt[3]{1+i}$.

375. Με την βοήθεια των μιγαδικών αριθμών αναλύστε σε γινόμενα **πρωτοβάθμιων** παραγόντων ως προς z τα πολυώνυμα: z^4+1, z^6-1, και z^6+1 ύστερα, με κατάλληλη σύμπτυξη, αναλύστε τα πολυώνυμα σε γινόμενα πρωτοβάθμιων ή δευτεροβάθμιων ως προς z παραγόντων με **πραγματικούς** συντελεστές.

376. Ποιος είναι πάνω στο επίπεδο του Gauss ο τόπος των σημείων

z για τα οποία:

$$\left|\frac{z+1}{2z+i-1}\right| = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad |z| \geqq 2$$

377. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του (§358,β) εκφράστε το συν$^4\varphi$ και το ημ$^4\varphi$ δια του ημιτόνου και συνημιτόνου ακέραιων πολλαπλασίων του τόξου φ, επίσης τα συν$^6\varphi$ και ημ$^6\varphi$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 22ο

Ο ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ TAYLOR

§361. Στον παράγραφο 208 αποδείχτηκε ότι, αν η συνάρτηση $\sigma(x)$ έχη παράγωγο $\sigma'(x)$ συνεχή στο (κλειστό και περιορισμένο) διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$ και αν υπάρχη 2η παράγωγος στο διάστημα $\alpha < x < \beta$ θα έχουμε:

$$\sigma(\beta) = \sigma(\alpha) + (\beta-\alpha)\sigma'(\alpha) + \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^2\sigma''(\xi_2),$$

όπου ξ_2 κατάλληλος αριθμός μεταξύ α και β.

Θα δείξουμε τώρα γενικότερα το εξής:

Αν η $\sigma(x)$ έχη παραγώγους $\sigma'(x), \sigma''(x), \ldots, \sigma^{(\nu-1)}(x)$ συνεχείς στο διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$ και παράγωγο $\sigma^{\nu}(x)$ στο $\alpha < x < \beta$, τότε ισχύει ο τύπος του ***Taylor***:

$$\sigma(\beta) = \sigma(\alpha) + \frac{1}{1!}\sigma'(\alpha)(\beta-\alpha) + \frac{1}{2!}\sigma''(\alpha)(\beta-\alpha)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{1}{(\nu-1)!}\sigma^{(\nu-1)}(\alpha)(\beta-\alpha)^{\nu-1} + \frac{1}{\nu!}\sigma^{(\nu)}(\xi_\nu)(\beta-\alpha)^\nu,$$

όπου ξ_ν κατάλληλος αριθμός μεταξύ α και β.

Απόδειξη

θέτουμε: $A = \dfrac{\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)-\frac{1}{1!}\sigma'(\alpha)(\beta-\alpha)-\cdots-\frac{1}{(\nu-1)!}\sigma^{(\nu-1)}(\alpha)(\beta-\alpha)^{\nu-1}}{\frac{1}{\nu!}\cdot(\beta-\alpha)^\nu}$,

οπότε

(361.1) $\quad \sigma(\beta) = \sigma(\alpha) + \frac{1}{1!}\sigma'(\alpha)(\beta-\alpha) + \ldots + \frac{1}{(\nu-1)!}\sigma^{(\nu-1)}(\alpha)(\beta-\alpha)^{\nu-1} + A\frac{(\beta-\alpha)^\nu}{\nu!}$,

και έχουμε να δείξουμε ότι

$$A = \sigma^{(\nu)}(\xi_\nu),$$

όπου ξ_ν κατάλληλος αριθμός μεταξύ α και β. Προς τούτο θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\mathcal{F}(t) = \sigma(\beta) - \sigma(t) - \frac{1}{1!}(\beta - t)\sigma'(t) - \dots - \frac{(\beta-t)^{(\nu-1)}}{(\nu-1)!}\sigma^{(\nu-1)}(t) - \frac{(\beta-t)^\nu}{\nu!}A.$$

Είναι λόγω της (361.1), $\mathcal{F}(\alpha) = 0$ και προφανώς $\mathcal{F}(\beta) = 0$. Επί πλέον για $\alpha < t < \beta$ έχουμε:

$$\mathcal{F}'(t) = 0 - \sigma'(t) + \sigma'(t) - \frac{(\beta-t)}{1!}\sigma''(t) + \frac{(\beta-t)}{1!}\sigma''(t) - \frac{(\beta-t)^2}{2!}\sigma'''(t) + \dots$$

$$+ \frac{(\beta-t)^{\nu-2}}{(\nu-2)!}\sigma^{(\nu-1)}(t) - \frac{(\beta-t)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\sigma^{(\nu)}(t) + \frac{\nu(\beta-t)^{\nu-1}}{\nu!}A,$$

ή

$$\mathcal{F}'(t) = -\frac{(\beta-t)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\sigma^{(\nu)}(t) + \frac{(\beta-t)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\cdot A.$$

Άρα, κατά το θεώρημα του **Rolle**, υπάρχει μια τουλάχιστο κατάλληλη τιμή $t = \xi_\nu$ μεταξύ $t = \alpha$ και $t = \beta$ για την οποία η παράγωγος $\mathcal{F}'(t)$ μηδενίζεται:

$$0 = \mathcal{F}'(\xi_\nu) = \frac{(\beta - \xi_\nu)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\left[-\sigma^{(\nu)}(\xi_\nu) + A\right].$$

Άρα (αφού $\alpha < \xi_\nu < \beta$ και συνεπώς $\beta - \xi_\nu \neq 0$)

$$A = \sigma^{(\nu)}(\xi_\nu), \quad \text{ο.ε.δ.}$$

<u>**Σχόλιο.**</u> Ο όρος $\frac{1}{\nu!}\sigma^{(\nu)}(\xi_\nu)(\beta-\alpha)^\nu$ του τύπου Taylor λέγεται **υπόλοιπο του** με τη μορφή που του έδωσε ο **Lagrange**, συντόμως: υπόλοιπο κατά **Lagrange**. Παριστάνεται συνήθως με R_ν.

§362. Είναι φανερό ότι μπορούμε να ξανακάνουμε την ίδια απόδειξη εναλλάσσοντας τον ρόλο του α με τον ρόλο του β, επομένως ισχύει και ο εξής τύπος του Taylor (με τις υποθέσεις φυσικά που αναφέραμε):

$$\sigma(\alpha) = \sigma(\beta) + \frac{\sigma'(\beta)}{1!}(\alpha-\beta) + \frac{\sigma''(\beta)}{2!}(\alpha-\beta)^2 + \dots + \frac{\sigma^{(\nu-1)}(\beta)}{(\nu-1)!}(\alpha-\beta)^{\nu-1} + \frac{\sigma^{(\nu)}(\xi_\nu^*)}{\nu!}(\alpha-\beta)^\nu$$

όπου ξ^*_ν κατάλληλος αριθμός μεταξύ β και α.

§363. Έστω μ ένας ακέραιος και $0 \leqq \mu \leqq \nu - 1$.

Επίσης ας είναι x και $x+\Delta x$ δυο θέσεις από το διάστημα $\alpha \leqq t \leqq \beta$. Εφαρμόζοντας τον τύπο του Taylor έχουμε:

$$\sigma(x+\Delta x)=\sigma(x)+\frac{\sigma'(x)}{1!}\Delta x+\frac{\sigma''(x)}{2!}\Delta x^2+\ldots+\frac{\sigma^{(\mu)}(x)}{\mu!}\Delta x^\mu+\frac{\sigma^{(\mu+1)}(\xi_{\mu+1})}{(\mu+1)!}\Delta x^{\mu+1}$$

Αν λοιπόν υποθέσουμε επί πλέον ότι η παράγωγος $\sigma^{(\nu)}(t)$ είναι περιορισμένη στο πεδίο $\alpha < t < \beta$, επειδή και οι παράγωγοι $\sigma'(t),\ldots,\sigma^{(\nu-1)}(t)$, σαν συνεχείς στο κλειστό και περιορισμένο διάστημα $\alpha \leqq t \leqq \beta$, είναι περιορισμένες για $\alpha<t<\beta$, θα έχουμε γενικά ότι

$$\left|\sigma^{(\rho)}(t)\right| \leqq \Phi_\rho \text{ για } \rho=1,2,\ldots,\nu$$

όπου Φ_ρ ένα άνω φράγμα (π.χ. το άνω πέρας) της $\left|\sigma^{(\rho)}(t)\right|$ για $\alpha<t<\beta$.

Επομένως θα είναι:

$$(363.1)\quad \left|\sigma(x+\Delta x)-\left\{\sigma(x)+\frac{\sigma'(x)}{1!}\Delta x+\ldots+\frac{\sigma^{(\mu)}(x)}{\mu!}\Delta x^\mu\right\}\right| \leqq \frac{\Phi_{\mu+1}}{(\mu+1)!}|\Delta x|^{\mu+1}.$$

Με άλλα λόγια η ποσότητα $\sigma(x+\Delta x)$ προσεγγίζεται από την ποσότητα $\sigma(x)+\frac{\sigma'(x)}{1!}\Delta x+\ldots+\frac{\sigma^{(\mu)}(x)}{\mu!}\Delta x^\mu$ με σφάλμα που είναι για όλα τα x από το διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$ ποσότητα απειροστή μαζί με την Δx και μάλιστα τάξεως $\geqq \mu+1$. Εξ άλλου η παραπάνω σχέση **(363.1)** έχει δεξιό μέλος ανεξάρτητο από την τιμή x η οποία μπορεί να είναι οποιαδήποτε θέση του διαστήματος $\alpha \leqq x \leqq \beta$. Γι'αυτό λέμε ότι η ανισότητα (363.1) ισχύει ομοιόμορφα ως προς x στο διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$.

§364. Εφαρμογή στα τοπικά ακρότατα. Από τον τύπο του Taylor

$$\sigma(x_0+\Delta x)=\sigma(x_0)+\sigma'(x_0)\Delta x+\sigma''(x_0)\frac{\Delta x^2}{2!}+\ldots+\frac{\sigma^{(\nu-1)}(x_0)}{(\nu-1)!}\Delta x^{\nu-1}+\sigma^{(\nu)}(\xi)\frac{\Delta x^\nu}{\nu!}$$

και από την συμπληρωματική υπόθεση ότι η $\sigma^{(\nu)}(t)$ στη γειτονιά της θέσης $t=x_0$ (δηλ. για $|t-x_0|<$ καταλλήλου θετικού αριθμού ε) είναι συνάρτηση του t περιορισμένη μπορούμε να συναγάγουμε το εξής συμπέρασμα:

Η συνάρτηση $\sigma(t)$ έχει **στο σημείο x_0 τοπικό** ακρότατο αν από τις παραγώγους $\sigma'(x_0), \sigma''(x_0), \ldots, \sigma^{(\nu-1)}(x_0)$ **η πρώτη που δεν μηδενίζεται $\sigma^{(\kappa)}(x_0)$ είναι τάξεως κ αρτίας**. Το ακρότατο είναι **μέγιστο** εφόσον η $\sigma^{(\kappa)}(x_0) < 0$, είναι **ελάχιστο** εφόσον $\sigma^{(\kappa)}(x_0) > 0$. Η συνάρτηση δεν έχει **ακρότατο** (δηλαδή δεν γίνεται τοπικώς ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη) στη θέση x_0, αν από τις $\sigma'(x_0)$, $\sigma''(x_0), \ldots, \sigma^{(\nu-1)}(x_0)$ **η πρώτη $\sigma^{(\kappa)}(x_0)$ που δεν μηδενίζεται είναι τάξεως κ περιττής.**

Απόδειξη. Πράγματι θα έχουμε τότε:

$$\sigma(x_0+\Delta x)-\sigma(x_0)=\sigma^{(\kappa)}(x_0)\frac{\Delta x^\kappa}{\kappa!}+\ldots+\sigma^{(\nu)}(\xi)\cdot\frac{\Delta x^\nu}{\nu!}$$

Αλλά η διαφορά:

$$\sigma(x_0+\Delta x)-\sigma(x_0)=\sigma^{(\kappa)}(x_0)\Delta x^\kappa\left(\frac{1}{\kappa!}+\ldots+\frac{\sigma^{(\nu)}(\xi)}{\sigma^{(\kappa)}(x_0)}\cdot\frac{\Delta x^{\nu-\kappa}}{\nu!}\right),$$

για Δx απολύτως αρκετά μικρό έχει το πρόσημο του παράγοντα $\sigma^{(\kappa)}(x_0).\Delta x^\kappa$ (αφού η παρένθεση τείνει προς το $\frac{1}{\kappa!}$ για $\Delta x \to 0$). Άρα η διαφορά αυτή έχει σταθερό πρόσημο για όλα τα Δx τα απολύτως αρκετά μικρά στην περίπτωση που το κ είναι άρτιος αριθμός, θ' αλλάζη όμως πρόσημο μαζί με το Δx (όταν τούτο διαβαίνη διά του 0) στην περίπτωση που το κ είναι περιττός αριθμός. Στη δεύτερη αυτή περίπτωση δεν μπορεί επομένως να υπάρχη ακρότατο της συναρτήσεως $\sigma(x)$ στο σημείο x_0.

Στην πρώτη περίπτωση είναι:

$$\sigma(x_0+\Delta x)-\sigma(x_0)>0, \text{ αν } \sigma^{(\kappa)}(x_0)>0$$

$$\text{και } \sigma(x_0+\Delta x)-\sigma(x_0)<0, \text{ αν } \sigma^{(\kappa)}(x_0)<0$$

για όλα τα Δx τα διάφορα του 0 και απολύτως αρκετά μικρά. Η τιμή δηλαδή $\sigma(x_0)$ είναι μικρότερη από τις τιμές $\sigma(x_0+\Delta x)$ της συνάρτησης σε όλα τα αρκετά γειτονικά σημεία $x_0+\Delta x$ αν $\sigma^{\kappa}(x_0)>0$, μεγαλύτερη αν $\sigma^{(\kappa)}(x_0)<0$. Υπάρχει επομένως **τοπικό ελάχιστο** αν $\sigma^{(\kappa)}(x_0)>0$, **μέγιστο** αν $\sigma^{(\kappa)}(x_0)<0$.

Παρατήρηση. Αν όλες οι παράγωγοι $\sigma'(x_0), \ldots, \sigma^{(\nu-1)}(x_0)$

είναι μηδενικές στη θέση x_0, τότε κανένα συμπέρασμα από αυτό και μόνο δεν μπορεί να εξαχθή αναφορικώς με την ύπαρξη ή όχι **ακροτάτου** στη θέση x_0.

§365. <u>Επαφή δυο καμπύλων.</u> Όταν δυο καμπύλες $\psi=\sigma(x)$ και $\psi=\varphi(x)$ έχουν ένα κοινό σημείο M_0 με τετμημένη x_0 και κοινή εφαπτομένη, τότε λέμε ότι **εφάπτονται** ή ότι έχουν ένα **σημείο επαφής πρώτης τουλάχιστο τάξης**. Τα αναπτύγματα κατά **Taylor** των συναρτήσεων αυτών:

$$\sigma(x_0+\Delta x)=\sigma(x_0)+\sigma'(x_0)\Delta x+\frac{\sigma''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2+\dots+\frac{\sigma^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(\Delta x^{\nu})+\frac{\sigma^{(\nu+1)}(\xi)}{(\nu+1)!}(\Delta x)^{\nu+1}$$

$$\varphi(x_0+\Delta x)=\varphi(x_0)+\varphi'(x_0)\Delta x+\frac{\varphi''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2+\dots+\frac{\varphi^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(\Delta x)^{\nu}+\frac{\varphi^{(\nu+1)}(\xi^*)}{(\nu+1)!}(\Delta x)^{\nu+1},$$

με την υπόθεση φυσικά ότι υπάρχουν, θα έχουν τους δυο πρώτους όρους των αντιστοίχως ίσους: $\sigma(x_0)=\varphi(x_0)$, $\sigma'(x_0)=\varphi'(x_0)$.
Αν είναι και $\sigma''(x_0)=\varphi''(x_0)$, τότε λέμε ότι η επαφή είναι **δεύτερης τουλάχιστο τάξης**
Αν τώρα $\sigma^{(\kappa+1)}(x_0)$ είναι η πρώτη κατά σειρά παράγωγος η οποία δεν ισούται με την τιμή της αντίστοιχης παραγώγου $\varphi^{(\kappa+1)}(x_0)$ της $\varphi(x_0)$, στο σημείο x_0, τότε λέμε ότι η επαφή είναι **(ακριβώς) κ τάξεως**.
Η **διαφορά** των τεταγμένων των δυο καμπύλων στη γειτονιά του x_0 είναι τότε:

$$\sigma(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0+\Delta x)=(\Delta x)^{\kappa+1}\cdot\left\{\sigma^{(\kappa+1)}(x_0)-\varphi^{(\kappa+1)}(x_0)\right\}\cdot$$

$$\left\{\frac{1}{(\kappa+1)!}+\frac{\sigma^{(\kappa+2)}(x_0)-\varphi^{(\kappa+2)}(x_0)}{\sigma^{(\kappa+1)}(x_0)-\varphi^{(\kappa+1)}(x_0)}\cdot\frac{\Delta x}{(\kappa+2)!}+\dots+\frac{\sigma^{(\nu+1)}(\xi)-\varphi^{(\nu+1)}(\xi^*)}{\sigma^{(\kappa+1)}(x_0)-\varphi^{(\kappa+1)}(x_0)}\cdot\frac{(\Delta x)^{\nu-\kappa}}{(\nu+1)!}\right\}.$$

Από εδώ έπεται ότι όταν η επαφή είναι **τάξεως κ περιττής**, τότε η διαφορά $\sigma(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0+\Delta x)$ δεν αλλάζει πρόσημο στη γειτονιά του x_0 και επομένως οι δυο καμπύλες δεν δια-

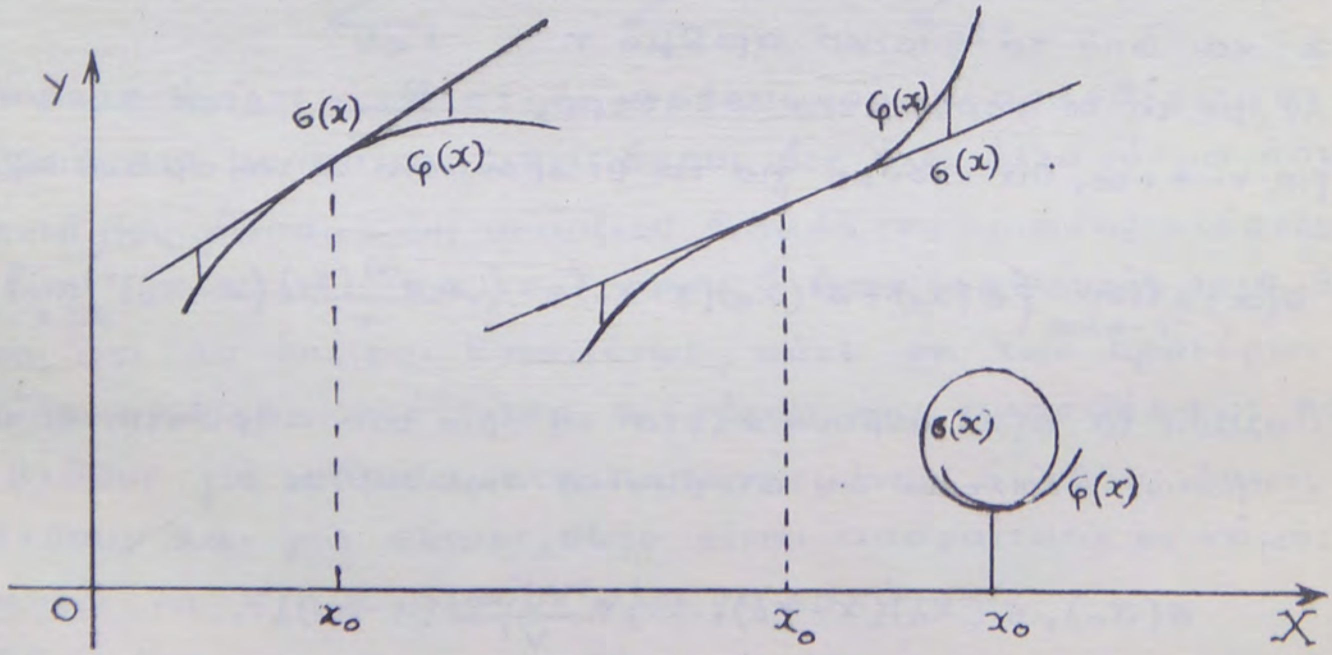
περνούν η μια την άλλη στη γειτονιά του x_0.
Αυτό συμβαίνει π.χ. στην συνηθισμένη περίπτωση επαφής μιας καμπύλης και μιας εφαπτομένης ευθείας.
Αν όμως το σημείο επαφής είναι **τάξεως κ αρτίας**, τότε η διαφορά $\sigma(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0+\Delta x)$ **αλλάζει πρόσημο μαζί με το Δx, επομένως η μια καμπύλη διαπερνά την άλλη στο κοινό τους σημείο $M_0\big(x_0,\ \sigma(x_0)=\varphi(x_0)\big)$.**
Αυτό συμβαίνει με την **εφαπτομένη** σε ένα σημείο καμπής μιας καμπύλης $\psi=\sigma(x)$. Στο σημείο αυτό η καμπύλη και η εφαπτομένη έχουν σημείο επαφής ακριβώς δεύτερης τάξης, εφόσον

$$\psi''(x_0)=0 \quad \text{και} \quad \psi'''(x_0)\neq 0$$

Επίσης ο κύκλος **καμπυλότητας** σε ένα σημείο καμπύλης διαπερνά **εν γένει** την καμπύλη στο σημείο αυτό, διότι οι δυο αυτές καμπύλες, ας πούμε $\psi=\sigma(x)$ καί $\psi=\varphi(x)$, έχουν την ίδια εφαπτομένη άρα είναι $\sigma'(x_0)=\varphi'(x_0)$, και την ίδια καμπυλότητα:

$$\kappa=\frac{\sigma''(x_0)}{\{1+\sigma'(x_0)^2\}^{3/2}}=\frac{\varphi''(x_0)}{\{1+\varphi'(x_0)^2\}^{3/2}},$$

άρα είναι και $\sigma''(x_0)=\varphi''(x_0)$



Εφόσον λοιπόν είναι $\sigma'''(x_0) \neq \varphi'''(x_0)$, πράγμα που αποτελεί τη γενική περίπτωση, ο κύκλος καμπυλότητας θα έχη επαφή (ακριβώς) δευτέρας τάξεως με την καμπύλη.

Ο κύκλος καμπυλότητας σε μιαν κορυφή μιας καμπύλης δεν διαπερνά την καμπύλη στο σημείο αυτό. (Σκεφθήτε το παράδειγμα των κωνικών τομών). Εκεί θα είναι και $\sigma'''(x_0) = \varphi'''(x_0)$ με την προϋπόθεση φυσικά ότι υπάρχουν και αυτές οι παράγωγοι. (*Βλέπε άσκηση 381.*)

§366. **Η σειρα του Taylor.** Εστω $x = x_0$ ένα σημείο από το διάστημα $\alpha < x < \beta$ όπου η $\sigma(x)$ είναι ορισμένη και ας υποθέσουμε ότι στη γειτονια του x_0, δηλαδή για τα x ενός αρκετά μικρού διαστήματος $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ γύρω από το x_0, η $\sigma(x)$ έχει παραγώγους **κάθε τάξεως**, θα ισχύη τότε για οποιοδήποτε φυσικό αριθμό ν και για τα x του διαστήματος τούτου ο τύπος του **Taylor**

$$\sigma(x) = \sigma(x_0) + \sigma'(x_0)(x - x_0) + \frac{\sigma''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{\sigma^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x - x_0)^\nu + R_{\nu+1}$$

όπου το υπόλοιπο $R_{\nu+1}$ θα εξαρτιέται φυσικά εκτός από το x και από το φυσικό αριθμό ν.

Αν, με το x τηρούμενο σταθερό, το $R_{\nu+1}$ τείνη στο μηδέν για $\nu \to +\infty$, θα έχουμε για το θεωρούμενο x την οριακή σχέση:

$$\sigma(x) = \lim_{\nu \to +\infty} \left(\sigma(x_0) + \sigma'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{\sigma^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x - x_0)^\nu \right).$$

Δηλαδή το $\sigma(x)$ παρουσιάζεται ως όριο του αθροίσματος των ν πρώτων στοιχείων της ατέρμονας ακολουθίας

$$\sigma(x_0),\ \sigma'(x_0)(x - x_0),\ \ldots,\ \frac{\sigma^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x - x_0)^\nu,\ \ldots$$

όταν ο αριθμός ν των προσθετόμενων στοιχείων τείνη στο άπειρο. Αυτό το πράγμα, το παριστάνουμε, με επέκταση του συμβολισμού για το άθροισμα πεπερασμένου πλήθους προσθετέων σε "άθροισμα απείρων κατά το πλήθος προσθετέων", γράφοντας:

$$\sigma(x)=\sigma(x_0)+\sigma'(x_0)(x-x_2)+\frac{\sigma''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{\sigma^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x-x_0)^\nu+\dots$$

Συναφώς, εισάγουμε τις εξής έννοιες:

Σειρά καλείται **μια ατέρμονα διαδοχή προσθετέων αριθμών** a_ν, $(\nu=1,2,3,\dots)$, (πραγματικών ή και μιγαδικών) γραμμένη ως εξής: $a_1+a_2+\dots+a_\nu+\dots$

Η σειρά λέγεται συγκλίνουσα, αν το άθροισμα των ν πρώτων όρων της

$$S_\nu=a_1+a_2+\dots+a_\nu$$

έχη όριο έναν καθαυτό αριθμό S για $\nu\longrightarrow+\infty$: $\lim\limits_{\nu\to+\infty}S_\nu=S$

Το S αυτό καλείται άθροισμα της συγκλίνουσας σειράς.

Η ύπαρξη του ορίου S παριστάνεται συμβολικά με τη γραφή:

$$a_1+a_2+\dots+a_\nu+\dots=S \text{ ή την } a_1+a_2+a_3+\dots=S.$$

Επίσης χρησιμοποιείται και η γραφή:

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty}a_\nu=\sum_{\kappa=1}^{+\infty}a_\kappa=\sum_{\rho=1}^{+\infty}a_\rho=S.$$

Η παραπάνω επέκταση του συμβολισμού της προσθέσεως σε αθροίσματα με απειροπληθείς όρους δεν έχει άλλο νόημα παρά αυτό που δώσαμε, της υπάρξεως δηλαδή της οριακής σχέσεως: $\lim\limits_{\nu\to+\infty}(a_1+a_2+\dots+a_\nu)=S$, όπου S ένας (καθαυτό) αριθμός και όχι το άπειρο. Επομένως, ούτε εκ των προτέρων είναι γνωστό κατά πόσο οι νόμοι της προσθέσεως που ισχύουν για αθροίσματα πεπερασμένου πλήθους όρων, ισχύουν και για σειρές, ούτε είναι απαραίτητο οι νόμοι αυτοί να εξακολουθούν όλοι να ισχύουν.

Σύμφωνα με τα παραπάνω η σειρά

$$\sigma(x_0)+\sigma'(x_0)(x-x_0)+\dots+\frac{\sigma^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x-x_0)^\nu+\dots$$

καλείται σειρά Taylor.

Αν συγκλίνη για μια ορισμένη τιμή του x, δεν έπεται ότι το άθροισμα της κατ' ανάγκην θα ισούται με $\sigma(x)$. Προς τούτο πρέπει και αρκεί το

$$R_{\nu+1}=\sigma(x_0)-\left\{\sigma(x_0)+\sigma'(x_0)\frac{x-x_0}{1!}+\dots+\frac{\sigma^{(\nu)}(x_0)(x-x_0)^\nu}{\nu!}\right\}$$

να τείνη στο 0 όταν το $\nu\longrightarrow+\infty$. Λέμε τότε ότι η $\sigma(x)$ αναπτύχθηκε κατά τις δυνάμεις του $x-x_0$ σε σειρά του Taylor:

$$\sigma(x)=\sigma(x_0)+\frac{\sigma'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{\sigma''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots$$

Όταν είναι $x_0=0$ η σειρά που προκύπτει λέγεται συχνά και σειρά του Maclaurin:

$$\sigma(x)=\sigma(0)+\frac{\sigma'(0)}{1!}x+\frac{\sigma''(0)}{2!}x^2+\frac{\sigma'''(0)}{3!}x^3+\dots\ .$$

§367. Παραδείγματα

1) Έχουμε για την e^x την ακόλουθη σειρά Taylor:

$$e^{x_0}+e^{x_0}(x-x_0)+\dots+\frac{e^{x_0}(x-x_0)^\nu}{\nu!}+\dots\ .$$

Επειδή

$$R_{\nu+1}=e^x-\left\{e^{x_0}+e^{x_0}(x-x_0)+\dots+\frac{e^{x_0}(x-x_0)^\nu}{\nu!}\right\}=\frac{(x-x_0)^{\nu+1}e^{\xi_{\nu+1}}}{(\nu+1)!},$$

όπου $\xi_{\nu+1}$ ένας αριθμός μεταξύ x_0 και x, έπεται ότι: $\lim\limits_{\nu\to+\infty}R_{\nu+1}=0$. Πράγματι, οποιοιδήποτε και αν είναι οι ορισμένοι αριθμοί x και x_0, το $e^{\xi_{\nu+1}}$ θα περιέχεται μεταξύ e^{x_0} και e^x, δηλαδή θα είναι.

$|e^{\xi_{\nu+1}}|=e^{\xi_{\nu+1}}<$ καταλλήλου αριθμού A, π.χ. του $A=e^{|x_0|+|x|}$.

Αφ ετέρου θα υπάρχη ένας ορισμένος φυσικός αριθμός $\mu > 2|x-x_0|$. Επομένως για $\nu=\mu+\kappa$, όπου κ τυχαίος φυσικός αριθμός, θα ισχύη:

$$|R_{\nu+1}| < \frac{|x-x_0|^{\nu+1}}{(\nu+1)!}A = A\frac{|x-x_0|^{\mu}}{\mu!}\cdot\frac{|x-x_0|}{\mu+1}\cdots\frac{|x-x_0|}{\mu+\kappa+1} < A\frac{|x-x_0|^{\mu}}{\mu!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\kappa+1},$$

από όπου έπεται ότι για ν και, επομένως, $\kappa \longrightarrow +\infty$ το $R_{\nu+1}$ τείνει στο 0.

Άρα η παραπάνω σειρά του **Taylor** για την συνάρτηση e^x συγκλίνει, οποιεσδήποτε τιμές και αν έχουν τα x και x_0, και έχει άθροισμα το e^x:

$$e^x = e^{x_0} + e^{x_0}\frac{(x-x_0)}{1!} + \cdots + e^{x_0}\frac{(x-x_0)^\nu}{\nu!} + \cdots$$

Για $x_0=0$ λαβαίνουμε:

(367.1) $\quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^\nu}{\nu!} + \cdots,$

και για $x=1$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{\nu!} + \cdots,$$

πράγμα άλλωστε ήδη γνωστό, αφού ξέρουμε ότι:

$$\lim_{\nu\longrightarrow+\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{\nu!}\right) = e$$

2) $\sigma(x) = \eta\mu\, x$

Έστω $x_0=0$. Έχουμε τότε την σειρά **Maclaurin**:

(367.2) $\quad \eta\mu\, x = \eta\mu\, 0 + \sigma\upsilon\nu\, 0 \cdot \frac{x}{1!} - \eta\mu\, 0\,\frac{x^2}{2!} - \sigma\upsilon\nu\, 0\,\frac{x^3}{3!} + \cdots$

$$= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{\nu-1}\frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!} + \cdots$$

Η σειρά συγκλίνει και έχει άθροισμα το $\eta\mu x$ (οποιοδήποτε κι αν είναι το x). Πράγματι, επειδή $\eta\mu^{(\nu+1)} x = \eta\mu\left(x + (\nu+1)\frac{\pi}{2}\right)$,

$$R_{\nu+1} = \frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\, \eta\mu\left(\xi_{\nu+1} + (\nu+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

όπου $\xi_{\nu+1}$ ένας κατάλληλος αριθμός μεταξύ 0 και x.
Επομένως:

$$\left|R_{\nu+1}\right| \leqq \frac{|x|^{\nu+1}}{(\nu+1)!}$$

Αλλά το $\frac{|x|^{\nu+1}}{(\nu+1)!}$ τείνει στο μηδέν για $\nu \longrightarrow +\infty$, σύμφωνα με αυτά που αποδείξαμε αμέσως παραπάνω, άρα και το $R_{\nu+1}$ τείνει στο μηδέν, ο.ε.δ.

3) Με όμοιο τρόπο αποδείχνεται ότι:

(367.3) $$\sigma\upsilon\nu\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{\nu-1}\frac{x^{2\nu-2}}{(2\nu-2)!} + \cdots$$

4) $\sigma(x) = \mathrm{sh}x$, $x_0 = 0$

Ο τύπος του Maclaurin δίνει

$$\mathrm{sh}x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu+1)!} + \frac{x^{2\nu+3}}{(2\nu+3)!}\, \mathrm{sh}(\xi_{2\nu+3}),$$

όπου $\xi_{2\nu+3}$ ένας κατάλληλος αριθμός μεταξύ 0 και x. Επειδή το υπόλοιπο $\frac{x^{2\nu+3}}{(2\nu+3)!}\,\mathrm{sh}(\xi_{2\nu+3})$ (για οποιοδήποτε αλλά σταθερό x) τείνει στο μηδέν όταν $\nu \longrightarrow +\infty$ (σύμφωνα με όσα είδαμε προκειμένου για την συνάρτηση e^x), η αντίστοιχη σειρά Maclaurin συγκλίνει και έχει άθροισμα το $\mathrm{sh}x$:

(367.4) $$\mathrm{sh}x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!} + \cdots .$$

5) Ομοίως:

(367.5) $$\mathrm{ch}\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2\nu-2}}{(2\nu-2)!} + \cdots .$$

6) Έστω $\sigma(x) = \ln(1+x)$, για $-1 < x < +\infty$.

Επειδή $\frac{d^\nu}{dx^\nu}\Big(\ln(1+x)\Big) = (-1)^{\nu-1}(\nu-1)!\,(1+x)^{-\nu}$ για $\nu = 1, 2, 3 \ldots$

η εφαρμογή του τύπου Maclaurin δίνει:

$$(367.6)\quad \ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{\nu-1}\frac{x^\nu}{\nu}+R_{\nu+1},$$

όπου $R_{\nu+1}=\dfrac{(-1)^\nu\cdot x^{\nu+1}}{(\nu+1)\cdot(1+\xi_{\nu+1})^{\nu+1}}$.

Από τη παραπάνω έκφραση του $R_{\nu+1}$ έπεται ότι το υπόλοιπο τούτο τείνει στο 0 όταν, με x σταθερό και $-\frac{1}{2}\leqq x<1$, το ν τείνη στο $+\infty$. Για τις τιμές αυτές, $-\frac{1}{2}\leqq x<1$, του x έχουμε λοιπόν:

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{\nu-1}x^\nu$$

7) Έστω $\sigma(x)=(1+x)^a$, όπου a ένας οποιοσδήποτε σταθερός πραγματικός αριθμός και πεδίο μεταβολής της x το διάστημα $-1<x<+\infty$. Εφαρμόζοντας τον τύπο του Maclaurin, όπως και στο προηγούμενο εδάφιο, λαβαίνουμε:

$$(1+x)^a=1+\frac{a}{1!}x+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-\nu+1)}{\nu!}x^\nu+R_{\nu+1}\ .$$

Και εδώ αποδείχνεται οτι για $|x|<1$ είναι $\lim\limits_{\nu\to+\infty}R_{\nu+1}=0$. Άρα

$$(367.7)\quad (1+x)^a=1+\frac{a}{1!}x+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-\nu+1)}{\nu!}x^\nu+\cdots$$

Για $|x|<1$ ισχύει λοιπόν ένας γενικευμένος τύπος του διωνύμου που οφείλεται στόν Newton.

Από εδώ έπονται αμέσως οι εξής μερικότεροι χρήσιμοι τύποι για $|x|<1$:

α) $\dfrac{1}{(1+x)^2}=(1+x)^{-2}=1-2x+3x^2-4x^3+\cdots=\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu(\nu+1)x^\nu,$

β) $\sqrt{1+x}=(1+x)^{1/2}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2.4}x^2+\frac{1.3}{2.4.6}x^3-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^4+\cdots,$

γ) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=(1+x)^{-1/2}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2-\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4-\cdots.$

§368. Περί Σειρών

Στον παράγραφο 366 είδαμε πότε μια σειρά

$$a_1+a_2+a_3+\cdots$$

λέγεται **συγκλίνουσα**.

Μία σειρά λέγεται αποκλίνουσα, αν δεν είναι συγκλίνουσα, δηλαδή αν δεν υπάρχει το $\lim\limits_{v\to+\infty} S_v$ ή αν υπάρχει μεν, αλλά είναι το ∞ (με πρόσημο ή όχι).

Παραδείγματα

Η σειρά που προκύπτει από μια γεωμετρική πρόοδο $\alpha+\alpha\lambda+\alpha\lambda^2+\dots$ είναι συγκλίνουσα όταν ο αριθμός $|\lambda|$ είναι <1.

Πράγματι έχουμε

$$S_v=\alpha+\alpha\lambda+\dots+\alpha\lambda^{v-1}=\alpha\frac{1-\lambda^v}{1-\lambda}=\frac{\alpha}{1-\lambda}-\frac{\alpha}{1-\lambda}\cdot\lambda^v .$$

Επειδή όμως $|\lambda|<1$, θα έχουμε $\lambda^v\to 0$, άρα και $\frac{\alpha}{1-\lambda}\cdot\lambda^v\to 0$, επομένως $S_v\to\frac{\alpha}{1-\lambda}$.

Άρα η γεωμετρική σειρά είναι συγκλίνουσα και έχει άθροισμα τον αριθμό $\frac{\alpha}{1-\lambda}$, όταν $|\lambda|<1$:

$$\sum_{v=1}^{\infty}\alpha\lambda^{v-1}=\frac{\alpha}{1-\lambda} \quad \text{για } |\lambda|<1 .$$

2) Η σειρά που προκύπτει από μια γεωμετρική πρόοδο, που ο πρώτος της όρος α είναι **διάφορος** από το μηδέν και ο λόγος λ απολύτως $\geqq 1$ είναι αποκλίνουσα. Πράγματι, αν μεν $|\lambda|>1$, θα έχουμε πάλι

$$S_v=\frac{\alpha}{1-\lambda}-\frac{\alpha}{1-\lambda}\cdot\lambda^v ,$$

αλλά τώρα $|\lambda|^v\to+\infty$, άρα και $\left|\frac{\alpha}{1-\lambda}\cdot\lambda^v\right|\to+\infty$, επομένως $S_v\to\infty$ όταν $v\to+\infty$.

Αν δε $\lambda=1$, τότε η σειρά είναι η εξής:

$$\alpha+\alpha+\alpha+\dots$$

και το άθροισμα των v πρώτων όρων της

$$S_v=v\alpha\to\infty \quad \text{όταν το } v\to+\infty .$$

Τέλος αν $\lambda=-1$, τότε η σειρά είναι η εξής:

$$\alpha+(-\alpha)+\alpha+(-\alpha)+\alpha+(-\alpha)+\dots .$$

Το άθροισμα των v πρώτων όρων της είναι:

$$S_v=\alpha \quad \text{όταν } v=\text{περιττός φυσικός αριθμός},$$

$$S_\nu = 0 \quad \text{όταν } \nu = \text{άρτιος φυσικός αριθμός}.$$

Επειδή εξ υποθέσεως $a \neq 0$, έπεται ότι η ακολουθία

$$S_1, S_2, S_3, \ldots$$

δεν έχει όριο. Άρα η αντίστοιχη σειρά είναι αποκλίνουσα, ο.ε.δ.

§369. **Θεώρημα 1.** Αν μια σειρά

(369.1) $$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_\nu + \cdots$$

συγκλίνη, τότε ο νιοστός της όρος θα τείνη στο 0 όταν το $\nu \to +\infty$

Απόδειξη. Έχουμε

$$a_\nu = S_\nu - S_{\nu-1} \quad (\text{για } \nu \geqq 2),$$

αλλά εξ υποθέσεως:

$$\lim_{\nu\to+\infty} S_\nu = S \quad (\text{αριθμός καθαυτό})$$

$$\lim_{\nu\to+\infty} S_{\nu-1} = S,$$

άρα $\lim\limits_{\nu\to+\infty} a_\nu = \lim\limits_{\nu\to+\infty} S_\nu - \lim\limits_{\nu\to+\infty} S_{\nu-1} = S - S = 0$.

Σχόλιο.

Σύμφωνα με αυτά η σχέση

(369.2) $$\lim_{\nu\to+\infty} a_\nu = 0$$

είναι αναγκαία για τη σύγκλιση της σειράς (369.1). Δεν είναι όμως επαρκής, δηλαδή από την (369.2) δεν έπεται λογικώς η σύγκλιση της (369.1).

Για την απόδειξη τούτου θεωρούμε το παράδειγμα της ακόλουθης σειράς που λέγεται **αρμονική**:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\nu} + \cdots$$

Η σειρά αυτή αποκλίνει διότι

$$S_\nu = 1 + \cdots + \frac{1}{\nu} \to +\infty,$$

αν και ο νιοστός της όρος $\frac{1}{\nu} \to 0$ για $\nu \to +\infty$.

Πράγματι:

$$S_{2^\mu} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots$$

$$+\left(\frac{1}{2^{\mu-1}+1}+\frac{1}{2^{\mu-1}+2}+\frac{1}{2^{\mu-1}+3}+\cdots+\frac{1}{2^{\mu-1}+2^{\mu-1}}\right)$$

$$>1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+\cdots+2^{\mu-1}\cdot\frac{1}{2^{\mu}}$$

$$=1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{\mu \text{ φορες}}=1+\frac{\mu}{2}\to+\infty \text{ οταν } \mu\to+\infty.$$

__Θεώρημα 2.__ Αν η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ συγκλίνη, τότε συγκλίνει και η $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_{\rho+\nu}$, όπου ρ ένας οποιοσδήποτε ορισμένος φυσικός αριθμός. Ομοίως, αν η δεύτερη σειρά συγκλίνη, θα συγκλίνη και η πρώτη.

__Θεώρημα 3.__ Μια σειρά $\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots+\theta_\nu+\cdots$, με όρους $\geqq 0$ από τινος και έπειτα, συγκλίνει, όταν το άθροισμα των ν πρώτων όρων της έχη άνω φράγμα, δηλαδή όταν για $\nu=1,2,3,$ έχουμε $\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_\nu=S_\nu\leqq$ κάποιου αριθμού A ο οποίος δεν εξαρτιέται από το ν. Το άθροισμα της σειράς είναι $\leqq A$.

__Παράδειγμα.__ Η σειρά

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{\nu(\nu+1)}+\cdots$$

είναι συγκλίνουσα, διότι οι όροι της είναι θετικοί και

$$S_\nu=1-\frac{1}{\nu+1}<1 \quad \text{για } \nu=1,2,3,\ldots$$

Μάλιστα από τη σχέση $S_\nu=1-\frac{1}{(\nu+1)}$ βρίσκει κανείς αμέσως και το άθροισμα της:

$$\lim_{\nu\to+\infty}S_\nu=1,$$

άρα

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu(\nu+1)}=1$$

§ 370. __Θεώρημα 4.__ Αν οι όροι της σειράς $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ είναι από τινος και έπειτα $\geqq 0$ και $\leqq$ των αντιστοίχων όρων (δηλαδή των όρων της αυτής τάξεως) μιας συγκλίνουσας σειράς $\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu$, τότε η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ είναι επίσης συγκλίνουσα.

Απόδειξη

Εξ υποθέσεως ισχύει

$$0 \leqq a_\nu \leqq \beta_\nu, \text{ για } \nu=\mu, \mu+1, \mu+2, \ldots$$

όπου μ κατάλληλος φυσικός αριθμός.

Θεωρούμε τις σειρές $\sum\limits_{\lambda=0}^{\infty} a_{\mu+\lambda}$, $\sum\limits_{\lambda=0}^{\infty} \beta_{\mu+\lambda}$. Η δεύτερη συγκλίνει εξ υποθέσεως· έστω Β το άθροισμα της. Θα έχουμε

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu} a_{\mu+\lambda} \leqq \sum_{\lambda=0}^{\nu} \beta_{\mu+\lambda} \leqq B,$$

άρα η $\sum\limits_{\lambda=0}^{\infty} a_{\mu+\lambda}$ συγκλίνει, επομένως και η $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ ο.ε.δ.

Παράδειγμα. Λέγω ότι η σειρά με θετικούς όρους

$$1+\frac{1}{2^\rho}+\frac{1}{3^\rho}+\cdots+\frac{1}{\nu^\rho}+\cdots$$

όπου ρ ορισμένος φυσικός αριθμός $\geqq 2$, συγκλίνει:

Αρκεί να δείξω ότι η σειρά, με όρους αντιστοίχως όχι μικρότερους,

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{\nu^2}+\cdots \quad \text{συγκλίνει.}$$

Αυτό όμως φαίνεται αμέσως όταν τη συγκρίνουμε με την συγκλίνουσα σειρά

$$1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{(\nu-1)\nu}+\cdots$$

Θεώρημα 5. Αν οι όροι μιας σειράς $\sum\limits_{\nu+1}^{\infty} a_\nu$ είναι από τινος ν και έπειτα $\geqq$ των αντίστοιχων όρων μιας αποκλίνουσας σειράς $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$, όπου $\beta_\nu \geqq 0$, τότε και η σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ είναι αποκλίνουσα.

Παράδειγμα. Η σειρά

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{\nu}}+\cdots$$

είναι αποκλίνουσα, διότι

$$\frac{1}{+\sqrt{\nu}} > \frac{1}{\nu}, \text{ για } \nu=2,3,4\ldots$$

Θεώρημα 6. Αν η σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ είναι συγκλίνουσα, τότε και η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \rho a_\nu$, όπου ρ ένας πολλαπλασιαστής ανεξάρτητος από το ν, είναι συγκλίνουσα, ισχύει δε δια τα αθροίσματα η σχέση

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \rho a_\nu = \rho\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu\right).$$

__Θεώρημα 7.__ Αν οι σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ είναι συγκλίνουσες, τότε και οι σειρές

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu+\beta_\nu) \quad , \quad \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu-\beta_\nu),$$

είναι επίσης συγκλίνουσες, ισχύουν δε για τα αθροίσματα των οι σχέσεις:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu+\beta_\nu)=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu+\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu-\beta_\nu)=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu-\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu.$$

__Θεώρημα 8.__ Αν οι όροι μιας σειράς $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ είναι πραγματικοί αριθμοί και αν η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|$ συγκλίνει, τότε θα συγκλίνη και η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$.

__Απόδειξη.__

Αφού η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|$ συγκλίνει, θα συγκλίνη και η σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu+|a_\nu|}{2}$$

διότι έχουμε:

$$0 \leqq \frac{a+|a_\nu|}{2} \leqq |a_\nu|, \quad (\nu=1,2,3,\ldots).$$

Ομοίως συγκλίνει και η

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|a_\nu|-a_\nu}{2},$$

διότι

$$0 \leqq \frac{|a_\nu|-a_\nu}{2} \leqq |a_\nu|, (\nu=1,2,3,\ldots),$$

άρα συγκλίνει και η $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu-|a_\nu|}{2}$, επομένως συγκλίνει και η

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{a_\nu+|a_\nu|}{2}+\frac{a_\nu-|a_\nu|}{2}\right),$$

δηλαδή η $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$, ο.ε.δ.

Το θεώρημα ισχύει και για σειρές με μιγαδικούς όρους όπως εύκολα αποδείχνεται.

Παρατήρηση. Σύμφωνα με το τελευταίο θεώρημα, για να αποδείξουμε ότι μια σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει αρκεί να αποδείξουμε ότι η

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu| \text{ είναι συγκλίνουσα.}$$

Π.χ. η σειρά

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} - \frac{1}{9^2} + \cdots$$

συγκλίνει, επειδή, όπως γνωρίζουμε, η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}$ είναι συγκλίνουσα. Με άλλα λόγια η σύγκλιση της

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu|$$

είναι ικανή συνθήκη για τη σύγκλιση της $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$. Δεν είναι όμως και αναγκαία, δηλαδή είναι δυνατό μια σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ να συγκλίνη, χωρίς η $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu|$ να είναι συγκλίνουσα.

Π.χ. Η σειρά του Leibniz

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2\nu-1} - \frac{1}{2\nu} + \cdots$$

είναι συγκλίνουσα. Πράγματι για τη σειρά αυτή έχουμε

$$S_1 > S_3 > S_5 > \cdots,$$
$$S_2 < S_4 < S_6 < \cdots.$$

Είναι όμως όλα τα $S_{2\nu-1}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ μεγαλύτερα του μηδενός, άρα η ακολουθία

$$S_1, S_3, S_5, \ldots$$

έχει όριο έναν αριθμό S. Εξ άλλου

$$S_{2\mu-1} - S_{2\mu} = \frac{1}{2\mu}.$$

371. Άρα $\lim_{\mu\to+\infty} S_{2\mu} = \lim_{\mu\to+\infty} S_{2\mu-1} = S$, ο.ε.δ.

Αν μιας σειράς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ η αντίστοιχη $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu|$ συγκλίνη, τότε η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ λέγεται απολύτως συγκλίνουσα.

Θεώρημα 9. Αν οι σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ συγκλίνουν αμφότερες απολύτως και καλέσουμε A και B τα αθροίσματα των αντιστοίχως, τότε και η σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} (\alpha_1\beta_\nu + \alpha_2\beta_{\nu-1} + \cdots + \alpha_\nu\beta_1)$$

είναι **απολύτως** συγκλίνουσα, έχει δε άθροισμα τον αριθμό A.B.

Παράδειγμα. Για $|x|<1$ έχουμε τις απολύτως συγκλίνουσες σειρές
$$\sum_{\nu=1}^{\infty} x^{\nu-1}=\frac{1}{1-x}$$
$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}x^{\nu-1}=\frac{1}{1+x},$$
άρα η σειρά
$$(371.1)\qquad 1+0+x^2+0+x^4+0+x^6+\cdots,$$
που σχηματίζεται βάσει του πολλαπλασιαστικού κανόνα του Θεωρήματος 9, είναι απολύτως συγκλίνουσα και έχει άθροισμα τον αριθμό $\frac{1}{1-x^2}$. Τούτο επαληθεύεται απ' ευθείας, διότι αν παραλείψουμε τους μηδενικούς όρους από τη σειρά (371.1), πράγμα που, όπως εύκολα αποδείχνεται, δεν επηρεάζει ούτε τη σύγκλιση ούτε το άθροισμα της σειράς, η σειρά γίνεται
$$1+x^2+x^4+x^6+\cdots$$
(γεωμετρική με λόγο x^2) και έχει επομένως άθροισμα $\frac{1}{1-x^2}$.

§372. Θεώρημα 10 (Ικανό κριτήριο συγκλίσεως του d'Alembert).

Αν σε μια σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$, από κάποια τιμή του δείκτου ν και έπειτα, είναι
$$\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right|\leqq\theta<1,$$
όπου θ ορισμένος (δηλαδή ανεξάρτητος από το ν) αριθμός, τότε η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$ είναι απολύτως συγκλίνουσα.

Εξυπακούεται ότι το a_ν είναι από κάποια τιμή του ν και έπειτα $\neq 0$.

Απόδειξη. Από κάποια τιμή κ του δείκτου ν και έπειτα ισχύει, εξ υποθέσεως, ότι
$$|a_{\kappa+1}|\leqq|a_\kappa|\,\theta,\ |a_{\kappa+2}|\leqq|a_\kappa|\,\theta^2,\ldots,|a_{\kappa+\mu}|\leqq|a_\kappa|\,\theta^\mu,\ldots,$$
άρα οι όροι της σειράς
$$\sum_{\mu=0}^{\infty}|a_{\kappa+\mu}|$$
είναι $\leqq$ των αντιστοίχων όρων της φθίνουσας γεωμετρικής

σειράς
$$\sum_{\mu=0}^{\infty}|a_{\kappa}|\theta^{\mu} \quad ,$$
άρα η $\sum\limits_{\mu=0}^{\infty}|a_{\kappa+\mu}|$ συγκλίνει, επομένως και η $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}|a_\nu|$, ο.ε.δ.

__Παράδειγμα__. Η σειρά
$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots+\frac{\nu}{2^\nu}+\cdots$$
είναι συγκλίνουσα, διότι
$$\frac{\nu+1}{2^{\nu+1}}:\frac{\nu}{2^\nu}=\frac{\nu+1}{\nu}\cdot\frac{1}{2}\leqq\frac{2}{3}, \text{ για } \nu=3,4,5,\ldots$$

__Θεώρημα 11.__ (Ικανό κριτήριο αποκλίσεως του d'Alembert)

Αν σε μια σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$ έχουμε
$$\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right|\geqq 1$$
από κάποια τιμή του δείκτου ν και έπειτα, τότε η σειρά είναι αποκλίνουσα.

__Παρατήρηση__: Εφόσο διαιρούμε δια a_ν προυποθέτουμε φυσικά $a_\nu\neq 0$, από κάποια τιμή του δείκτου ν και έπειτα.

__Απόδειξη__. Πράγματι οι απόλυτες τιμές $|a_\nu|$ των όρων της $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$ αποτελούν από τινος και έπειτα μιαν ακολουθία αύξουσα (με ευρεία σημασία), επομένως ο a_ν δεν τείνει στο μηδέν, όταν το ν τείνη στο ∞.

__Παρατήρηση__. Τα δυο παραπάνω κριτήρια είναι μόνο ικανά και όχι α ν α γ κ α ί α. Παράδειγμα: η σειρά
$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{\nu^2}+\cdots$$
συγκλίνει, αν και δεν υπάρχει αριθμός $\theta<1$, που να μην εξαρτάται από το ν, τέτοιος αριθμός ώστε να ισχύη η σχέση
$$\frac{1}{(\nu+1)^2}:\frac{1}{\nu^2}=\frac{\nu^2}{(\nu+1)^2}=\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^2\leqq\theta$$
για όλα τα ν από τινος και έπειτα. Επίσης η αρμονική σειρά
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\nu}+\cdots$$
αποκλίνει, αν και ο λόγος $\frac{1}{\nu+1}:\frac{1}{\nu}$ είναι <1 για όλα τα ν.

__§373. Θεώρημα 12.__

Αν οι όροι μιας σειράς $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$ είναι 1) εναλλάξ θετικοί και αρνητικοί, 2) φθίνουν κατ' απόλυτη τιμή:

$$|a_\nu| \geqq |a_{\nu+1}| \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

και 3) τείνουν στο 0 για $\nu \to +\infty$:

$$\lim_{\nu \to +\infty} a_\nu = 0$$

τότε η σειρά είναι συγκλίνουσα.

<u>Απόδειξη.</u> Έχουμε εξ υποθέσεως, αν ο a_1 είναι θετικός αριθμός,

$$S_1 \geqq S_3 \geqq S_5 \geqq \cdots \geqq 0,$$
$$S_2 \leqq S_4 \leqq S_6 \leqq \cdots \leqq a_1.$$

Άρα το $S_{2\mu}$ έχει όριο έναν αριθμό S, όταν το ν τείνη στο $+\infty$. Αφ ετέρου $S_{2\mu-1} - S_{2\mu} = -a_{2\mu}$· άρα το $S_{2\mu}$ έχει επίσης όριο τον S, επομένως η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ είναι συγκλίνουσα και έχει όριο τον S.

<u>Παρατήρηση.</u> Αν τεθή $r_\nu = S - S_\nu$, τότε θα είναι $|r_\nu| \leqq |a_{\nu+1}|$ διότι $S_{2\nu+1} \geqq S \geqq S_{2\nu+2}$.

Π.χ. η σειρά

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \cdots$$

(οι τετραγωνικές ρίζες λαμβάνονται με το +) είναι συγκλίνουσα. Αν το άθροισμα της κληθή S, θα έχουμε

$$\left| S - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + (-1)^{\nu-1}\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right)\right| \leqq \frac{1}{\sqrt{\nu+1}},$$

(μάλιστα και $< \frac{1}{\sqrt{\nu+1}}$).

§374. <u>Σειρές Δυνάμεων</u>

Οι όροι a_ν μιας σειράς μπορούν να είναι αριθμοί εξαρτώμενοι μόνο από το ν όπως στα τελευταία παραδείγματα, μπορούν όμως να είναι και συναρτήσεις, π.χ. μιας μεταβλητής x, όπως στις σειρές Taylor. Στην περίπτωση αυτή μπορεί η σειρά να συγκλίνη για μερικές τιμές του x και για άλλες να αποκλίνη. Π.χ. η σειρά

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{\nu-1}\frac{x^\nu}{\nu} + \cdots$$

συγκλίνει για $|x|<1$, όπως είπαμε στον § 367,6, αλλά αποκλίνει για $x=-1$, διότι τότε ταυτίζεται με τη σειρά

$$-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\dots$$

Μια σειρά της μορφής

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\dots=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^\nu \text{ ή γενικότερα της } \sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu(x-x_0)^\nu$$

λέγεται <u>σειρά δυνάμεων</u>.

Στην κατηγορία αυτή υπάγονται οι σειρές Maclaurin ή γενικότερα Taylor.

Μια οποιαδήποτε σειρά δυνάμεων $\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^\nu$ συγκλίνει προφανώς για $x=0$. Υπάρχουν σειρές δυνάμεων $\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^\nu$ που <u>συγκλίνουν</u> μόνο για $x=0$ και <u>αποκλίνουν</u> για καθε $x\neq 0$, π.χ. η σειρά

$$x+2^2x^2+3^3x^3+\dots+\nu^\nu x^\nu+\dots$$

Πράγματι έστω x ένας ελεύθερα ορισμένος αριθμός $\neq 0$. Θεωρούμε έναν ορισμένο φυσικό αριθμό N μεγαλύτερο του $\frac{1}{|x|}$ (τέτοιοι φυσικοί αριθμοί υπάρχουν, εννοείται). Θα είναι

$$N|x|>1$$

και για $\nu>N$

$$|\nu^\nu x^\nu|>|Nx|^\nu>1$$

Άρα κατά το θεώρημα 1 του § 369 η σειρά θα αποκλίνη. Αφ ετέρου υπάρχουν σειρές που <u>συγκλίνουν</u> για οποιαδήποτε τιμή του x, όπως δείξαμε στον § 367 για τη σειρά

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^\nu}{\nu!}+\dots\ .$$

Τέλος όπως θα δείξουμε αργότερα, η σειρά του Taylor για τη συνάρτηση $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots+(-1)^{\nu-1}\frac{x^\nu}{\nu}+\dots$$

<u>συγκλίνει</u> για $-1<x\leqq 1$ και <u>αποκλίνει</u> για όλα τα άλλα x.

§ 375. Για τις σειρές δυνάμεων ισχύουν οι εξής δυο πολύ χρήσιμες προτάσεις.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 1.</u> *Αν μια σειρά δυνάμεων του x συγκλίνη για μια τιμή $x=\xi\neq 0$, θα συγκλίνη και για*

κάθε x με $|x|<|\xi|$.

Απο την πρόταση αυτή έπεται ότι αν η σειρά αποκλίνη για μια τιμή $x=\eta$, θα αποκλίνη και για κάθε x με $|x|>|\eta|$. Διότι, αν συνέκλινε για ενα τέτοιο x, θα έπρεπε να συγκλίνη και για $x=\eta$ σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση.

Έτσι η σειρά που για $|x|<1$ δίνει το ανάπτυγμα της $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$$

αποκλίνει για κάθε x με $|x|>1$, αφού αποκλίνει για $x=-1$. Για $x=1$ η σειρά συγκλίνει (Βλέπε άσκηση 396).

Αν μια σειρά δυνάμεων δεν **συγκλίνη** για όλα τα x, το **άνω πέρας** ρ των απόλυτων τιμών του x για τις οποίες συγκλίνει, λέγεται **ακτίνα συγκλίσεως της σειράς**. Όπως είδαμε, η ακτίνα συγκλίσεως μπορεί να είναι και 0. Ας είναι τώρα η ακτίνα ρ συγκλίσεως της $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^\nu$ διάφορη και από το μηδέν και από το $+\infty$. Για $|x|<\rho$ έχουμε σύγκλιση. Για $|x|>\rho$ έχουμε απόκλιση. Για $x=\rho$ ή $x=-\rho$ ή, γενικότερα, για $x=\rho e^{\theta i}$ με μιγαδικό x, δεν μπορούμε να ισχυριστούμε τίποτα που να ισχύη γενικώς: πότε έχουμε **σύγκλιση**, πότε έχουμε **απόκλιση**, όπως δείχνει το παράδειγμα της σειράς του αναπτύγματος κατά Maclaurin της συναρτήσεως $\ln(1+x)$ και το παράδειγμα της $\sum\limits_{\nu=1}^{+\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{x^\nu}{\nu^2}$.

__ΠΡΟΤΑΣΗ 2.__ *Μια σειρά δυνάμεων $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^\nu$ συγκλίνουσα σ'ένα περιορισμένο και κλειστό διάστημα μεταβολής της x παριστάνει σ'αυτό μια συνάρτηση $f(x)$ συνεχή που μπορεί να ολοκληρωθή κατά όρους, όπως ένα ακέραιο πολυώνυμο του x.*

Δηλαδη

$$\int_{x_0}^{x}f(t)\,dt=\int_{x_0}^{x}\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu t^\nu\Big)dt=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\cdot\int_{x_0}^{x}t^\nu dt$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu+1}\left(x^{\nu+1}-x_0^{\nu+1}\right)=\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{a_\nu x^{\nu+1}}{\nu+1}-\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{a_\nu x_0^{\nu+1}}{\nu+1}\,.$$

Επομένως, αν η σειρά $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu t^\nu$ είναι ανάπτυγμα σε σειρά Maclaurin μιας συναρτήσεως $\sigma(t)$, τότε

$$\int_{x_0}^{x} \sigma(t)\,dt = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu+1} x^{\nu+1} - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu+1} x_0^{\nu+1},$$

όπου x_0, x δυο θέσεις από το διάστημα μεταβολής της x για το οποίο ισχύει το ανάπτυγμα Maclaurin.

§ 376. Εφαρμογές.

α) Ανάπτυγμα της συναρτήσεως τοξ$_0$ημx σε σειρά δυνάμεων. Από τον γενικευμένο τύπο του διωνύμου (§ 367.7) έπεται ότι

για $|t|<1$ είναι

$$(1-t^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1.3}{2.4}t^4 + \dots$$

Αφού η σειρά αυτή συγκλίνει για $-1<t<1$, μπορούμε σύμφωνα με την πρόταση 2 να ολοκληρώσουμε κατά όρους από 0 έως x, με $|x|<1$.

Άρα

$$\text{τοξ}_0\text{ημ}x = \int_0^x \frac{dt}{+\sqrt{1-t^2}} = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \dots .$$

β) Υπολογισμός ολοκληρώματος δι αναπτύξεως σε σειρά. Έστω το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{+\sqrt{1-\varepsilon^2\text{ημ}^2\varphi}} \quad , \text{ όπου } \varepsilon \text{ μια σταθερά } >0 \text{ και } <1.$$

Αυτό είναι ένα ελλειπτικό ολοκλήρωμα, όπως και εκείνο του § 288.

Μπορούμε όμως να το υπολογίσουμε, αν αναπτύξουμε την ολοκληρωτέα συνάρτηση σε σειρά δυνάμεων του (εημφ). Επειδή είναι $\varepsilon^2\text{ημ}^2\varphi \leqq \varepsilon^2 < 1$ για οποιοδήποτε φ, έχουμε

$$\frac{1}{+\sqrt{1-\varepsilon^2\text{ημ}^2\varphi}} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\text{ημ}^2\varphi + \frac{1.3}{2.4}\varepsilon^4\text{ημ}^4\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6}\varepsilon^6\text{ημ}^6\varphi + \dots$$

Η σειρά αυτή είναι ολοκληρώσιμη κατά όρους από 0 έως $\frac{\pi}{2}$.

Άρα

$$J=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{+\sqrt{1-\varepsilon^2\eta\mu^2\varphi}}=\int_0^{\pi/2}d\varphi+\frac{1}{2}\varepsilon^2\int_0^{\pi/2}\eta\mu^2\varphi d\varphi+$$

$$+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\varepsilon^4\int_0^{\pi/2}\eta\mu^4\varphi\, d\varphi+\frac{1.3.5}{2.4.6}\varepsilon^6\int_0^{\pi/2}\eta\mu^6\varphi\, d\varphi+\cdots .$$

Αντικαθιστώντας τώρα τα ολοκληρώματα $J_{2\nu}=\int_0^{\pi/2}\eta\mu^{2\nu}\varphi d\varphi$, $(\nu=1,2,3\ldots)$,

που έχουν υπολογισθή στην άσκηση **260** βρίσκουμε την εξής σειρά δυνάμεων του ε για την τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος J:

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{+\sqrt{1-\varepsilon^2\eta\mu^2\varphi}}=\frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\varepsilon^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\varepsilon^6+\ldots\right\}.$$

§377. <u>ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ EULER</u>. Αν στη σειρά $\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^\nu}{\nu!}$ θέσουμε $z=i\varphi$ όπου φ μια πραγματική μεταβλητή, η προκύπτουσα σειρά συγκλίνει. Το άθροισμα της συμφωνούμε να το παραστήσουμε με $e^{i\varphi}$. Αν τώρα, χωρίζοντας πραγματικό απο φανταστικό μερος, γράψουμε:

$$e^{i\varphi}=\left(1-\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^4}{4!}-\frac{\varphi^6}{6!}+\ldots\right)+i\left(\varphi-\frac{\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^5}{5!}-\frac{\varphi^7}{7!}+\ldots\right)$$

και θυμηθούμε τα αναπτύγματα (367.2) και (367.3) των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, θα λάβουμε τον λεγόμενο **τύπο του Euler**:

(377.1) $$e^{i\varphi}=\sigma\upsilon\nu\varphi+i\eta\mu\varphi .$$

Ειδικώς για $\varphi=\pi$ και $\varphi=2\pi i$ έχουμε: $e^{\pi i}=-1$ και $e^{2\pi i}=1$.

Με την εισαγωγή της παραπάνω γραφής $e^{i\varphi}$ η γνωστή σχέση

$$(\sigma\upsilon\nu\varphi+i\eta\mu\varphi)(\sigma\upsilon\nu\omega+i\eta\mu\omega)=\sigma\upsilon\nu(\varphi+\omega)+i\eta\mu(\varphi+\omega)$$

γίνεται

$$e^{i\varphi}\cdot e^{i\omega}=e^{i(\varphi+\omega)}.$$

Από την (377.1) και την αντίστοιχη $e^{-i\varphi}=\sigma\upsilon\nu\varphi-i\eta\mu\varphi$ έπεται περαιτέρω ότι

$$συνφ=\frac{e^{iφ}+e^{-iφ}}{2}, \quad ημφ=\frac{e^{iφ}-e^{-iφ}}{2i}.$$

Ένας οποιοσδήποτε μιγαδικός αριθμός $z\neq 0$ μπορεί τώρα να γραφή έτσι:

$$z=x+ψi=ρ(συνφ+iημφ)=e^{\ln ρ}\cdot e^{iφ}=e^{\ln ρ+iφ}.$$

Αυτό μας οδηγεί στον εξής ορισμό του λογάριθμου ενός μιγαδικού αριθμού $z=ρ[συν(Φ_0+2κπ)+iημ(Φ_0+2κπ)]\neq 0$:

$$\ln z=\ln ρ+(Φ_0+2κπ)i=\ln|z|+\arg z\cdot i.$$

§378. Αν στα αναπτύγματα κατά Maclaurin των

$$συνφ=\sum_{μ=0}^{+\infty}(-1)^μ\cdot\frac{φ^{2μ}}{(2μ)!}, \quad ημφ=\sum_{μ=0}^{+\infty}(-1)^μ\frac{φ^{2μ+1}}{(2φ+1)!}$$

θέσουμε $φ=ix$ όπου x πραγματική μεταβλητή, οι σειρές που λαβαίνουμε συγκλίνουν για καθε x. Τα αθροίσματα τους συμφωνούμε να τα παραστήσουμε με $συν(ix)$, $ημ(ix)$ αντιστοίχως. Η σύγκριση των σειρών αυτών με τα αναπτύγματα **Maclaurin** των υπερβολικών συναρτήσεων $\cosh x$, $\sinh x$ μας δίνει τώρα τις σχέσεις

$$\cosh x=συνix, \quad \sinh x=\frac{1}{i}ημix.$$

Ασκήσεις στό 22º κεφάλαιο

378. *Προσδιορίστε την τάξη επαφής των καμπύλων:*

$y=ημ^4x$ *και* $y=εφ^4x$ *στο σημείο* $x=0$.

379. *Η* $y=σ(x)$ *ας εχη* $1^η$ *και* $2^η$ *πεπερασμένη παράγωγο στο διάστημα* $α\leqq x\leqq β$ *και ας είναι* $y''(x)>0$. *Δείξτε ότι, αν* $ξ$ *είναι ένα σημείο του διαστήματος, η καμπύλη κείται πάντοτε άνωθεν της εφαπτομένης στο σημείο της με συντεταγμένες* $(ξ,σ(ξ))$. *Θα χρησιμοποιήσετε τη δεύτερη βαθμίδα του τύπου του Taylor.*

380. Η καμπύλη $y=s(x)$ διέρχεται από την αρχή O, όπου εφάπτεται του άξονος των x. Δείξτε ότι η ακτίνα καμπυλότητας της καμπύλης στο σημείο O ισούται με $R=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2y}$.

381. Δείξτε ότι η επαφή μιας καμπύλης και του κύκλου καμπυλότητάς της είναι τουλάχιστον τάξεως τρίτης στις κορυφές της καμπύλης.

382. Να υπολογισθή η ρίζα $\sqrt[3]{7}=2\sqrt[3]{1-\frac{1}{8}}$ ακριβώς μέχρι του τετάρτου δεκαδικού ψηφίου της (δηλ. του ψηφίου των δεκάκις χιλιοστών) με τη βοήθεια του τύπου του Taylor και του υπολοίπου του. (Απ. $\sqrt[3]{7}=1,9129$).

383. Εφαρμόστε τον τύπο του Taylor με τρεις όρους και υπόλοιπο κατά Lagrange στις εξής συναρτήσεις στη θέση $x=0$:
α) $\eta\mu^2 x$, β) e^{-x}, γ) $\ln(6+x)^2$, δ) $\varepsilon\varphi x$, ε) $\sqrt{x^2+3x+12}$, στ) $\dfrac{x+1}{x^2-4x+5}$.

384. Δείξτε ότι:

$$\sum_{\nu=p}^{\infty}\frac{1}{\nu(\nu+1)}=\frac{1}{p(p+1)}+\frac{1}{(p+1)(p+2)}+\frac{1}{(p+2)(p+3)}+\dots=\frac{1}{p},$$

$$\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{1}{(3\nu+1)(3\nu+4)}=\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+\dots=\frac{1}{3}.$$

385. Δείξτε ότι η σειρά

$$1+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{4^a}+\frac{1}{4^a}+\frac{1}{4^a}+\frac{1}{4^a}+\frac{1}{8^a}+\dots$$

που απαρτίζεται διαδοχικά από δύο όρους $\frac{1}{2^a}$, τέσσερις όρους $\frac{1}{4^a}$, οκτώ όρους $\frac{1}{8^a}$ και γενικά 2^k όρους $\frac{1}{(2^k)^a}$, συγκλίνει όταν $a>1$ και αποκλίνει όταν $a\leqq 1$.

387. Για ποιές πραγματικές τιμές του a η σειρά

$$1-\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}-\frac{1}{4^a}+\dots$$

συγκλίνει;

388. Συγκλίνει ή αποκλίνει η σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu-1)2\nu}=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\dots;$$

389. Αποδείξτε ότι οι σειρές

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+2)}, \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+3)}, \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+4)}$$

συγκλίνουν και βρήτε τα αθροίσματα τους.

390*. Μελετήστε τη συμπεριφορά από άποψη συγκλίσεως ή όχι των εξής σειρών:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu-1}{\nu^2+1}, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{1+p^\nu}, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{p^\nu}{1+p^\nu}$$

όπου p θετικός αριθμός.

391. Αποδείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \theta_\nu$ με θετικούς και φθίνοντες όρους $(\theta_\nu \geqq \theta_{\nu+1})$ συγκλίνη, τότε ισχύει όχι μόνο $\lim_{\nu\to\infty} \theta_\nu = 0$, αλλά και $\lim_{\nu\to\infty} \nu\theta_\nu = 0$.

392. Αν οι όροι των σειρών

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \quad \text{και} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$$

είναι θετικοί και αν $\lim_{\nu\to\infty} \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} =$ αριθμός $\neq 0$, τότε οι δυο σειρές είναι συγχρόνως συγκλίνουσες ή αποκλίνουσες.

393*. Δείξτε ότι αν στην ακολουθία των θετικών αριθμών $\theta_1, \dots, \theta_\nu, \dots$ το $\frac{\theta_\nu}{\theta_{\nu-1}}$ έχει όριο, τότε και το $+\sqrt[\nu]{\theta_\nu}$ έχει το ίδιο όριο. Το αντίστροφο δεν αληθεύει γενικά.

394. Αναπτύξτε σε σειρά Maclaurin τις συναρτήσεις:

α) $(1-x)$, β) $\sqrt[4]{5+x}$, γ) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, δ) $(1+x)^{1/3}$.

395. Με τι ισούνται οι δυνάμεις

$$e^{\frac{\pi}{4}i}, \; e^{-\frac{\pi}{4}i}, \; e^{-\frac{\pi}{3}i}, \; e^{-\frac{3\pi}{4}i}, \; e^{\frac{7\pi}{12}i} .$$

396. Δείξτε ότι η σειρά

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

συγκλίνει για $|x| < 1$ και επίσης για $x=1$.

397. Βρήτε το ανάπτυγμα κατά τη σειρά Maclaurin της συναρτήσεως τοξεφx, έχοντας υπ' όψη ότι:

$$\text{τοξεφ}\, x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} .$$

Ποιά είναι η ακτίνα συγκλίσεως της σειράς δυνάμεων που βρίσκετε;

398. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα από την άσκηση 397 δείξτε ότι:

$$\frac{\pi}{6} = \text{τοξεφ}\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \ldots\right).$$

399. Μια συνάρτηση $\sigma(x)$ ορισμένη στο διάστημα $|x| < \theta$ και που επαληθεύει σ' αυτό τη συναρτησιακή σχέση $\sigma(x) = \sigma(-x)$ καλείται **άρτια**.

Δείξτε ότι αν η άρτια $\sigma(x)$ παριστάνεται από μια σειρά δυνάμεων

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu x^\nu,$$

τότε πρέπει

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = \cdots = \alpha_{2\lambda+1} = \cdots = 0.$$

400. Αν πληρούται η σχέση:

$$-\sigma(x) = \sigma(-x)$$

(για κάθε x του πεδίου ορισμού $|x| < \theta$ της $\sigma(x)$), τότε η συνάρτηση $\sigma(x)$ καλείται **περιττή**.

Δείξτε ότι, αν αυτή παριστάνεται από μια σειρά δυνάμεων

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu x^\mu,$$

τότε πρέπει

$$a_0 = a_2 = \cdots = a_{2\lambda} = \cdots = 0.$$

401. Δείξτε ότι για $-1 < x < +1$ ισχύει το ανάπτυγμα σε σειρά δυνάμεων

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2\nu-1}}{2\nu-1} + \cdots\right)$$

Κατόπιν με την αντικατάσταση $x = \dfrac{\theta}{2n+\theta}$, όπου n και θ θετικοί αριθμοί, βρήτε μια σειρά κατάλληλη για τον υπολογισμό του $\ln(n+\theta)$, όταν είναι γνωστός ο $\ln n$.

402. Αναπτύξτε τη συνάρτηση $\operatorname{arsh} x$ σε σειρά δυνάμεων. Ποια είναι η ακτίνα συγκλίσεως της σειράς που βρίσκετε;

(λάβετε υπόψη ότι $(\mathrm{arsh}\,x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$).

403. Αναπτύξτε τη συνάρτηση του x

$$\int_0^x \frac{\eta\mu\, t}{t}\, dt$$

σε σειρά δυνάμεων του x, $(|x|<\infty)$. (Θα δείξετε ότι η ζητούμενη σειρά είναι:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1}\frac{1}{2\nu-1}\cdot\frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}\ ).$$

404. Αναπτύξτε ομοίως τη συνάρτηση του x

$$2\pi\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

Ποιό είναι το πεδίο μεταβολής του x;

405. Το μήκος της ελλείψεως $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{\psi^2}{\beta^2}=1$, ή με παραμετρική μορφή

$$x=a\,\sigma\upsilon\nu t,\ y=\beta\,\eta\mu t,\ 0\leqq t\leqq 2\pi,$$

παρέχεται από το <u>ορισμένο ολοκλήρωμα</u>

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\eta\mu^2 t+\beta^2\sigma\upsilon\nu^2 t}\,dt$$

Θέτοντας $\beta=\sqrt{1-\varepsilon^2}\cdot a$ μετασχηματίστε τούτο στο

$$4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\sigma\upsilon\nu^2 t}\cdot dt$$

και υπολογίστε το τελευταίο αναπτύσσοντας το σε σειρά δυνάμεων του ε.

406* Δείξτε ότι η σειρά

$$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}=x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^9}{9}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^{13}}{13}+\cdots$$

συγκλίνει, και μάλιστα ομοιόμορφα, στο διάστημα $-1\leqq x\leqq 1$.

406*α. Δείξτε ότι η σειρά

$$1-x+x(1-x)+x^2(1-x)+\cdots+x^\nu(1-x)+\cdots$$

συγκλίνει στο διάστημα $0 \leqq x \leqq 1$, αλλ'όχι ομοιόμορφα. Καλέστε $\sigma(x)$ τη συνάρτηση που ορίζεται από την σειρά στο διάστημα αυτό και δείξτε ότι:

$$\int_0^1 \sigma(x)dx = \int_0^1 (1-x)\,dx + \cdots + \int_0^1 x^{\nu-1}(1-x)\,dx + \cdots$$

(Άρα η ομοιόμορφη σύγκλιση που είναι ικανή συνθήκη για την κατά όρους ολοκλήρωση μιας σειράς δεν είναι και αναγκαία συνθήκη).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 23ο

Στοιχειώδεις Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως

§ 379. Αν μια συνάρτηση $y=\sigma(x)$ έχη σ'ένα διάστημα $\alpha<x<\beta$ παραγώγους

$$y'=\sigma'(x)\ ,\quad y''=\sigma''(x)\ ,\ \cdots\ ,\ y^{(\nu)}=\sigma^{(\nu)}(x)$$

και αν για κάθε x του διαστήματος ισχύη η σχέση:

(379.1) $\quad F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(\nu)}\right)=0,$

δηλαδή η

(379.2) $\quad F\left(x, \sigma(x), \sigma'(x), \sigma''(x), \dots, \sigma^{(\nu)}(x)\right)=0, \ (\alpha<x<\beta),$

τότε λέμε ότι η συνάρτηση $y=\sigma(x)$ ικανοποιεί στο διάστημα $\alpha<x<\beta$ τη συνήθη διαφορική εξίσωση τάξεως ν (379.1), ή με άλλα λόγια, ότι είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης.

Στον παράγραφο 205 μελετήσαμε κιόλας δυο πολύ απλές διαφορικές εξισώσεις, την:

$$y^{(\nu)}(x)=0 \quad \text{και την} \quad y'(x)=y(x).$$

Μια συνάρτηση $y=\sigma(x)$ η οποία είναι λύση μιας διαφορικής εξισώσεως λέγεται και **ολοκλήρωμα** της διαφορικής εξισώσεως, η δε γραφική της παράσταση λέγεται **ολοκληρωτική γραμμή** της εξισώσεως.

Στον § 205 είδαμε ότι οι μόνες λύσεις της $y^{(\nu)}(x)=0$ είναι οι συναρτήσεις

(379.3) $$y(x)=C_{\nu-1}x^{\nu-1}+C_{\nu-2}x^{\nu-2}+\dots+C_1x+C_0,$$

όπου $C_{\nu-1}, C_{\nu-2}, \dots, C_1, C_0$ ν αυθαίρετες (άρα και ανεξάρτητες η μια από την άλλη) σταθερές.

Η λύση (379.3) που για αυθαίρετες ειδικές τιμές των $C_{\nu-1}, \dots, C_0$ δίνει "ειδικές" λύσεις της διαφορικής εξισώσεως $y^{(\nu)}(x)=0$, λέγεται **γενική λύση ή γενικό ολοκλήρωμα** της διαφορικής εξισώσεως $y^{(\nu)}(x)=0$.

Αποδεικνύεται γενικά βάσει ορισμένων προϋποθέσεων, οι οποίες πληρούνται στις συνηθισμένες περιπτώσεις, ότι η γενική λύση μιας διαφορικής εξισώσεως νιοστής τάξεως (379.1) περιέχει πάντοτε ν αυθαίρετες ανεξάρτητες σταθερές $C_1, C_2, \dots, C_\nu$, είναι δηλαδή της μορφής

(379.4) $$y=f(x, C_1, \dots, C_\nu).$$

Οι αυθαίρετες ποσότητες $C_1, \dots, C_\nu$ λέγονται σταθερές ολοκληρώσεως.

Ώστε κάθε διαφορική εξίσωση **τάξεως** ν έχει ένα άπειρο **ν-παραμετρικό** πλήθος ειδικών λύσεων, επομένως και μια **ν-παραμετρική** οικογένεια ολοκληρωτικών γραμμών, με παραμέτρους τις σταθερές ολοκληρώσεως.

Η εύρεση των λύσεων διαφορικής εξισώσεως λέγεται και **ολοκλήρωση** αυτής.

§ 380. Διαφορική εξίσωση μονοπαραμετρικού συνόλου (οικογένειας) συναρτήσεων μιας μεταβλητής.

Έστω τώρα

(380.1) $$y=\varphi(x,C)$$

ένα παραμετρικό πλήθος συναρτήσεων της x με παράμετρο το C.

Μεταξύ της εξισώσεως (380.1) και της

(380.2) $$y' = \varphi'_x(x,C)$$

μπορούμε να απαλείψουμε την παράμετρο C όταν θεωρήσουμε το C ως εμπλεγμένη συνάρτηση των x, y από την $y=\varphi(x,C)$ ή από την $y'=\varphi'(x,C)$. Προς τούτο αρκεί σύμφωνα με τον § 398 να έχουμε $\varphi'_C(x,C)\neq 0$ ή $\varphi''_{xC}(x,C)\neq 0$. Θα λάβουμε τότε μια διαφορική εξίσωση

(380.3) $$\mathcal{F}(x,y,y')=0$$

1ης τάξεως που θα έχη λύσεις τις συναρτήσεις $\varphi(x,C)$. Γι'αυτό η (380.3) λέγεται διαφορική εξίσωση του μονοπαραμετρικού πλήθους συναρτήσεων (380.1).

π.χ. έστω

(380.4) $$y=\frac{C\cdot A(x)+B(x)}{C\cdot \Gamma(x)+\Delta(x)},$$

όπου $A(x)$, $B(x)$, $\Gamma(x)$, $\Delta(x)$ δοσμένες συναρτήσεις της x. Αντί να απαλείψουμε το C μεταξύ της εξισώσεως (380.4) και εκείνης που λαβαίνουμε παραγωγίζοντας την (380.4) ως προς x, είναι σκοπιμότερο να επιλύσουμε πρώτα την (380.4) ως προς C και κατόπιν να παραγωγίσουμε ως προς x, διότι μ' αυτόν τον τρόπο η απαλοιφή της C γίνεται αυτομάτως με την παραγώγιση.

Έτσι έχουμε:

$$C=\frac{\Delta(x)y-B(x)}{-\Gamma(x)y+A(x)}$$

και με παραγώγιση ως προς x:

$$0=\frac{(A\Delta-B\Gamma)y'+(\Gamma'\Delta-\Gamma\Delta')y^2+(B'\Gamma-B\Gamma'+A\Delta'-A'\Delta)y+A'B-AB'}{(-\Gamma y+A)^2}$$

ή $(A\Delta-B\Gamma)y'+(\Gamma'\Delta-\Gamma\Delta')y^2+(B'\Gamma-B\Gamma'+A\Delta'-A'\Delta)y+A'B-AB'=0.$

Άρα η διαφορική εξίσωση που προκύπτει είναι της μορφής

$$\alpha(x)y'+\beta(x)y^2+\gamma(x)y+\delta(x)=0,$$

όπου $\alpha(x), \ldots, \delta(x)$ δοσμένες συναρτήσεις της x.

§ 381. Αν δοθή ένα <u>ν-παραμετρικό</u> σύνολο (οικογένεια) συναρτήσεων της ανεξάρτητης μεταβλητής x, όπως το (379.4), μπορούμε να απαλείψουμε τις σταθερές $C_1, C_2, \ldots, C_\nu$ μεταξύ της εξισώσεως

$$y = f(x, C_1, \ldots, C_\nu)$$

και των ν εξισώσεων που βρίσκουμε απ' αυτήν αν την παραγωγίσουμε ν φορές κατά μέλη ως προς x:

$$y' = f'_x(x, C_1, \ldots, C_\nu)$$

$$y'' = f''_{x^2}(x, C_1, \ldots, C_\nu)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(\nu)} = f^{(\nu)}_{x^\nu}(x, C_1, \ldots, C_\nu)$$

θα λάβουμε τότε μια διαφορική εξίσωση τάξεως ν:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(\nu)}).$$

Έστω π.χ. η διπαραμετρική οικογένεια των περιφερειών που εφάπτονται του άξονος των x:

(381.1) $$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \beta^2.$$

Παραγωγίζοντας ως προς x δυο φορές βρίσκουμε:

$$2(x-\alpha) + 2(y-\beta)y' = 0 \quad \text{ή} \quad (x-\alpha) + (y-\beta)y' = 0,$$

$$1 + y'^2 + (y-\beta)y'' = 0$$

Και από αυτές:

$$y - \beta = -\frac{1+y'^2}{y''}, \quad \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''},$$

$$x - \alpha = \frac{1+y'^2}{y''} \cdot y'$$

Αντικαθιστώντας στην (381.1) τα $x-\alpha$, $y-\beta$, β δια των παραπάνω εκφράσεων πορίζομαστε την εξίσωση

$$\frac{(1+y'^2)^2}{y''^2} \cdot y'^2 + \frac{(1+y'^2)^2}{y''^2} = \left(y + \frac{1+y'^2}{y''}\right)^2,$$

δηλαδή, ύστερα από μερικές απλοποιήσεις, τη 2τάξια διαφορική εξίσωση

$$(1+y'^2)^2 y'^2 = y^2 y''^2 + 2yy''(1+y'^2).$$

§382. Στο κεφάλαιο αυτό θ'ασχοληθούμε με το πρόβλημα της ολοκληρώσεως ορισμένων στοιχειακών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως, δηλαδή με την εύρεση της γενικής λύσεως των εξισώσεων αυτών.

α) <u>Διαφορικές εξισώσεις της μορφής</u>: $y'=f(x)$.

Η γενική λύση της εξισώσεως αυτής είναι προφανώς το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$y=\int f(x)\,dx=\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt+c.$$

β) <u>Διαφορικές εξισώσεις της μορφής</u>: $y'=f(y)$.

Μια τέτοια εξίσωση μπορεί να γραφή και έτσι:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(y)},$$

οπότε ανάγεται αμέσως στην προηγούμενη μορφή με ανεξάρτητη μεταβλητή το y και άγνωστη συνάρτηση την $x(y)$, αντίστροφη της $y(x)$ που εζητείτο αρχικώς.

Είναι λοιπόν

$$x=\int\frac{dy}{f(y)}=\int_{y_0}^{y}\frac{dt}{f(t)}+C$$

Λύνοντας την παραπάνω συναρτησιακή σχέση μεταξύ x και y ως προς y βρίσκουμε την αρχικά ζητουμένη συνάρτηση

$$y=\sigma(x,C)\quad.$$

γ) Οι εξισώσεις της μορφής α) και β) είναι ειδικές περιπτώσεις της ακόλουθης κατηγορίας εξισώσεων, οι οποίες λέγονται διαφορικές εξισώσεις με <u>χωριζόμενες μεταβλητές</u>:

$$y'=f(x).g(y).$$

Οι εξισώσεις αυτές γράφονται και ως εξής:

$$\frac{1}{g(y)} \cdot dy = f(x)dx.$$

Η γενική λύση τους βρίσκεται με τον ακόλουθο τρόπο.
Έστω $F(x)$ μια παράγουσα της $f(x)$ και $G(y)$ μια παράγουσα της $\frac{1}{g(y)}$, δηλαδή έστω

(382.1) $$F(x) = \int f(x)dx, \quad G(y) = \int \frac{dy}{g(y)}.$$

ή

(382.2) $$F'(x) = f(x), \quad G'_y(y) = \frac{1}{g(y)}.$$

Τότε η γενική λύση της $y' = f(x) \cdot g(y)$ παρέχεται απο την εξίσωση

(382.3) $$F(x) = G(y) + C,$$

με παράμετρο ολοκληρώσεως την αυθαίρετη σταθερά C.
Πράγματι η (382.3) ορίζει την y ως εμπλεγμένη συνάρτηση της x έτσι που να ισχύη η σχέση

$$F'(x) = G'_y(y) \cdot y',$$

δηλαδή, σύμφωνα με τις (382.2),

$$f(x) = \frac{1}{g(y)} \cdot y' \quad \text{ή} \quad y' = f(x)g(y).$$

Αντιστρόφως μια λύση $y(x)$ της διαφορικής εξισώσεως $y' = f(x) \cdot g(y)$ θα ικανοποιή τη σχέση

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y(x)) \quad \text{ή} \quad f(x) = \frac{1}{g(y(x))} \cdot y'(x)$$

ή, λόγω των (382.2), την

$$\frac{d}{dx} F(x) = F'(x) = G'(y(x)) \cdot y'(x) = \frac{d}{dx}\Big[G(y(x))\Big]$$

σ' ένα ολόκληρο διάστημα μεταβολής του x.
Άρα

$$F(x) - G(y(x)) = \text{σταθερά}.$$

Με άλλα λόγια η $y(x)$ ικανοποιεί την (382.3) ταυτοτικά ως προς x σ' ένα διάστημα, ο.ε.δ.

§383. δ') <u>Ομογενής διαφορική εξίσωση</u> $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Αυτή ανάγεται με την αντικατάσταση $y=x\cdot z(x)$ στη διαφορική εξίσωση

$$xz'+z=f(z) \text{ ή } z'=\left(f(z)-z\right)\cdot\frac{1}{x}$$

που ανήκει στην κατηγορία διαφορικών εξισώσεων με χωριζόμενες μεταβλητές.

Έτσι λαβαίνουμε:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{f(z)-z} \quad \text{και} \quad \ln|x|=\mathcal{F}(z)+C_1,$$

όπου $\mathcal{F}(z)$ μια παράγουσα $\displaystyle\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{f(z)-z}$ της $\dfrac{1}{f(z)-z}$.

Άρα $|x|=e^{C_1}\cdot e^{\mathcal{F}(z)}$ και $x=\pm e^{C_1}\cdot e^{\mathcal{F}(z)}$, επομένως $x=ce^{\mathcal{F}(z)}$.

Από εδώ, αν είναι εύκολο, υπολογίζουμε το z συναρτήσει του x και εισάγουμε την έκφραση μέσα στην $y=x.z$.

Αν ο υπολογισμός του z συναρτήσει του x δεν είναι εύκολος, εκφράζουμε και τις δυο μεταβλητές x και y της διαφορικής εξισώσεως συναρτήσει του z που παίζει τότε ρόλο βοηθητικής μεταβλητής για τον καθορισμό της συναρτησιακής σχέσεως μεταξύ x και y:

$$x=Ce^{\mathcal{F}(z)}, \quad y=Cze^{\mathcal{F}(z)}.$$

Από τις εξισώσεις

$$\frac{x}{C}=e^{\mathcal{F}(z)}, \quad \frac{y}{C}=ze^{\mathcal{F}(z)}$$

του γένους των ολοκληρωτικών γραμμών της ομογενούς εξισώσεως έπεται ότι το γένος αυτό αποτελείται από γραμμές ανά δυο ο μ ό θ ε τ ε ς ως προς την αρχή $O(0,0)$.

ε')

$$y'=f\left(\frac{A_1x+B_1y+\Gamma_1}{A_2x+B_2y+\Gamma_2}\right)$$

όπου $A_1, B_1, \ldots, \Gamma_2$ σταθερές με $|A_2|+|B_2|+|\Gamma_2|\neq 0$.

Έστω πρώτα $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\neq 0$.

Αφού προσδιορίσουμε τη λύση (x_0, y_0) του συστήματος των γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 = 0 \end{cases}$$

προβαίνουμε στην αντικατάσταση

$$x = \xi + x_0 \quad , \quad y = \eta + y_0$$

των μεταβλητών (x, y) απο τις (ξ, η).

Η δοσμένη διαφορική εξίσωση μετασχηματίζεται τότε στην

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{A_1\xi + B_1\eta}{A_2\xi + B_2\eta}\right) = f\left(\frac{A_1 + B_1\frac{\eta}{\xi}}{A_2 + B_2\frac{\eta}{\xi}}\right)$$

που ανήκει στην κατηγορία των ομογενών εξισώσεων.

Έστω δεύτερον $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$.

Αν $B_1 = B_2 = 0$, τότε η διαφορική εξίσωση ανήκει στην κατηγορία α).

Έστω λοιπόν $|B_1| + |B_2| \neq 0$ και π.χ. $B_1 \neq 0$. Τότε από την

υπόθεση $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$ έπεται:

$$A_2 = \lambda A_1 \quad , \quad B_2 = \lambda B_1 ,$$

όπου λ κατάλληλος πολλαπλασιαστής.

Αντικαθιστούμε την y με την

$$z = A_1 x + B_1 y ,$$

οπότε η αρχική διαφορική εξίσωση μετασχηματίζεται στην

$$z' = A_1 + B_1 y' = B_1 f\left(\frac{z + \Gamma_1}{\lambda z + \Gamma_2}\right) + A_1 ,$$

που ανήκει στην κατηγορία β')

§ 384. στ') <u>Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως.</u> Έτσι καλούνται οι διαφορικές εξισώσεις

$$\sigma(x, y, y') = 0$$

που είναι αλγεβρικές και πρωτοβάθμιες ως προς τα γράμματα

y και y', δηλαδή που το αριστερό τους μέλος $\sigma(x,y,y')$ είναι ακέραιο πρωτοβάθμιο πολυώνυμο των γραμμάτων y και y'.

Άρα οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις $1^{ης}$ τάξεως είναι της μορφής

$$A(x)y' + B(x)y + \Gamma(x) = 0,$$

όπου $A(x)$, $B(x)$, $\Gamma(x)$ δοσμένες συναρτήσεις του x. Η $A(x)$ δεν είναι φυσικά εκ <u>ταυτότητος</u> μηδέν και επομένως θα μπορούμε να διαιρέσουμε δια $A(x)$ και να φέρουμε την γραμμική εξίσωση στη μορφή

(384.1) $$y' + p(x)y = q(x).$$

Αν $q(x) = 0$, τότε η εξίσωση έχει τη μορφή

(384.2) $$y' + p(x)\cdot y = 0$$

και λέγεται <u>γραμμική ομογενής.</u>

Αν $q(x) \neq 0$, τότε η εξίσωση (384.1) λέγεται <u>γραμμική μη ομογενής</u>· η (384.2) με το ίδιο $p(x)$ είναι η ομογενής αντίστοιχή της.

Η γραμμική ομογενής εξίσωση ανήκει στη κατηγορία των εξισώσεων με χωριζόμενες μεταβλητές:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx \quad \text{άρα} \quad \ln|y| = P(x) + C_1,$$

όπου $P(x) = -\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx$ μια τυχαία παράγουσα της $-p(x)$.

Συνεπώς η γενική λύση της (384.2) είναι

$$y = \pm\, e^{C_1}\cdot e^{P(x)} = Ce^{P(x)},$$

όπου $C \neq 0$

Παρατηρούμε όμως ότι και η τιμή $C = 0$ της σταθεράς ολοκληρώσεως παρέχει μια λύση της (384.2), την

$$y(x) = 0$$

Διαπιστώνουμε τώρα τις εξής προφανείς ιδιότητες της γραμμικής ομογενούς διαφορικής εξισώσεως $1^{ης}$ τάξεως:

1). Αν η $y(x)$ είναι μια λύση της, τότε και η $Cy(x)$ (όπου C αυθαίρετη σταθερά) είναι λύση της.

2) Αν $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι λύσεις της, τότε και η $y_1(x)+y_2(x)$ είναι λύση της.

3) Η γ ε ν ι κ ή λύση της γραμμικής ομογενούς διαφορικής εξισώσεως $1^{ης}$ τάξεως ισούται με το γινόμενο μιας τυχαίας ε ι δ ι κ ή ς λύσης της $\varphi(x) \not\equiv 0$ επί μιαν αυθαίρετη σταθερά C.

(Για τιμή της σταθεράς C μπορούμε να εκλέξουμε όχι μόνο κάθε πραγματικό αριθμό αλλά και κάθε μιγαδικό προφανώς).

Η επίλυση της γ ρ α μ μ ι κ ή ς μ η ο μ ο γ ε ν ο ύ ς εξισώσεως (384.1) μπορεί να γίνη με την εξής μέθοδο (Μέθοδος του Lagrange, της μεταβολής των σταθερών):

Παίρνουμε μια λύση $y=\varphi(x)\not\equiv 0$ της αντίστοιχης ομογενούς (384.2), οπότε ισχύει η ταυτότητα

(384.3) $$\varphi'(x)+p(x)\varphi(x)=0,$$

και «μ ε τ α β ά λ λ ο υ μ ε» μέσα στη γενική λύση $C\cdot\varphi(x)$ της ομογενούς τη σταθερά C σε μια προσδιοριστέα συνάρτηση $z=z(x)$ έτσι που η $z(x)\cdot\varphi(x)$ να είναι λύση της μη ομογενούς (384.1).

Θα έχουμε για τη z τη διαφορική εξίσωση

(384.4) $$z'\cdot\varphi(x)+z\,\varphi'(x)+p(x)\,z\,\varphi(x)=q(x)$$

ή, λόγω της (384.3), την

$$z'\cdot\varphi(x)=q(x)$$

Άρα
$$z=\int_{x_0}^{x} q(x)\cdot\frac{1}{\varphi(x)}\,dx+c,$$

και συνεπώς η γενική λύση της (384.1) είναι

$$y=\varphi(x)\left(\int_{x_0}^{x} q(x)\cdot\frac{1}{\varphi(x)}\,dx+C\right).$$

Αν θυμηθούμε ότι μια λύση, όχι μηδενική από ταυτότητα, της ομογενούς είναι η

$$\varphi(x)=e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx}$$

μπορούμε να δώσουμε τον εξής τύπο για τη γενική λύση της (384.1):

$$y(x)=C e^{-\int p(x)\,dx}+e^{-\int p(x)\,dx}\cdot\int e^{\int p(x)dx}\cdot q(x)\,dx,$$

όπου χάρη συντομίας με το σύμβολο $-\int p(x)dx$ εννοούμε μια οποιαδήποτε αλλ' ορισμένη παράγουσα $P(x)$ της $-p(x)$ και με το $\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx$ μια οποιαδήποτε αλλά ορισμένη παράγουσα της $e^{-P(x)}\cdot q(x)$.

Μια προφανής ιδιότητα της γραμμικής μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως (384.1) είναι ότι η διαφορά $y_1(x)-y_2(x)$ δυο οποιωνδήποτε λύσεων της αποτελεί λύση της αντίστοιχης ομογενούς (384.2).

Αντιστρόφως: Το άθροισμα μιας λύσης της μη ομογενούς με μια λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξισώσεως αποτελεί λύση της μη ομογενούς. Άρα η γενική λύση της μη ομογενούς βρίσκεται αν σε μια ειδική λύση της μη ομογενούς προστεθή η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς.

§385. ζ') Εξίσωση του Bernoulli. Η εξίσωση του Bernoulli είναι της μορφής

$$y'+f(x)\cdot y+g(x)y^a=0$$

όπου a πραγματική σταθερά $\neq 0$ και 1.

Κάνουμε την αντικατάσταση

$$z(x)=y^{1-a} \quad \text{ή} \quad y=z^{\frac{1}{1-a}}$$

οπότε γιά το z προκύπτει η γραμμική εξίσωση

$$z'+(1-a)f(x)\cdot z+(1-a)g(x)=0.$$

η') <u>Εξίσωση του Riccati.</u> Η εξίσωση του Riccati είναι της μορφής

$$y' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x).$$

Από τον Liouville αποδείχτηκε ότι η εξίσωση αυτή δεν μπορεί εν γένει να επιλυθή, όπως οι προηγούμενες επτά κατηγορίες εξισώσεων, με τύπο που να περιέχη πεπερασμένο πλήθος τετραγωνισμών (= αορίστων ολοκληρώσεων). Σε ειδικές περιπτώσεις είναι όμως δυνατό να βρούμε, με δοκιμές ή αλλοιώτικα, μιαν ειδική λύση της διαφορικής εξισώσεως και τότε η γενική λύση της εξισώσεως μπορεί να δοθή με έναν τέτοιο τύπο (που περιέχει δηλαδή πεπερασμένο πλήθος τετραγωνισμών).

Και αλήθεια, έστω $y_1(x)$ μια λύση της

(385.1)
$$y' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x),$$

δηλαδή, ας ισχύη η ταυτότητα (σε ένα διάστημα $a<x<b$):

$$y_1'(x) = f(x)y_1^2 + g(x)y_1 + h(x).$$

Αντί για την αρχική εξίσωση μπορούμε να θεωρήσουμε την ισοδύναμη

$$(y-y_1)' = f(x)(y^2 - y_1^2) + g(x)(y-y_1).$$

Η εξίσωση αυτή αν κάνουμε την αλλαγή $z = y - y_1$ γίνεται εξίσωση Bernoulli:

(385.1)
$$z' = f(x)z(z+2y_1) + g(x)z$$

ή

$$z' - (2fy_1 + g)z - f\cdot z^2 = 0.$$

Αν λοιπόν γνωρίζουμε μιαν ειδική λύση $y_1(x)$ της εξίσωσης Riccati (385.1), μπορούμε να προχωρήσουμε κάνοντας την αντικατάσταση

$$u(x) = z^{1-2} = z^{-1} = \frac{1}{y-y_1} ,$$

και λαβαίνουμε τότε για τη νέα άγνωστη συνάρτηση $u(x)$ τη γραμμική εξίσωση

$$u' + (2fy_1 + g)u + f = 0 .$$

Η γενική λύση της τελευταίας είναι, όπως ξέρουμε, της μορφής

$$u(x) = C.\Gamma(x) + \Delta(x),$$

όπου $\Gamma(x)$ και $\Delta(x)$ γνωστές συναρτήσεις της x, C η σταθερά ολοκληρώσεως.

Άρα η γενική λύση της εξισώσεως Riccati είναι της μορφής

$$y = y_1 + \frac{1}{C\Gamma + \Delta} = \frac{C\Gamma y_1 + (\Delta y_1 + 1)}{C\Gamma + \Delta} ,$$

δηλαδή

$$y = \frac{A(x).C + B(x)}{\Gamma(x).C + \Delta(x)} .$$

Έτσι αποδείχτηκε το αντίστροφο εκείνου που δείξαμε στο παράδειγμα του (§ 380).

Από εδώ έπεται ότι ο διπλός λόγος

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) = \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} : \frac{y_4 - y_1}{y_4 - y_2}$$

τεσσάρων ειδικών λύσεων $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ και $y_4(x)$ μιας εξισώσεως Riccati, αντιστοίχων στις τιμές C_1, C_2, C_3, C_4 της σταθεράς ολοκληρώσεως C, είναι ίσος με τον διπλό λόγο

$$(C_1, C_2, C_3 C_4) = \frac{C_3 - C_1}{C_3 - C_2} : \frac{C_4 - C_1}{C_4 - C_2} ,$$

δηλαδή αριθμός ανεξάρτητος από το x:

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) = \text{σταθερά ως προς } x.$$

Άρα, αν ξέρουμε τρεις ειδικές λύσεις y_1, y_2, y_3 της εξισώσεως Riccati, μπορούμε αμέσως να γράψουμε τη γενική της λύση y ως εξής:

$$(y_1, y_2, y_3, y) = C^*$$

και επιλύνοντας ως προς y:

$$y = \frac{-C^*_{y_1} \dfrac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} + y_2}{-C^* \dfrac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} + 1} = \frac{-C^* y_1 (y_3 - y_2) + y_2 (y_3 - y_1)}{-C^* (y_3 - y_2) + (y_3 - y_1)} .$$

Ασκήσεις στο 23ο κεφάλαιο

407. Να βρεθή η διαφορική εξίσωση $1^{ης}$ τάξεως την οποία ικανοποιούν οι ∞^1 κύκλοι (δηλαδή το μονοπαραμετρικό σύνολο κύκλων) που διέρχονται από τα δυο σταθερά σημεία $M_1(a,0)$ και $M_2(0,a)$.

408. Να βρεθή η διαφορική εξίσωση $2^{ης}$ τάξεως που έχει για ολοκληρωτικές γραμμές τους ∞^2 κύκλους των οποίων το κέντρο κειται πάνω στην ευθεία $x=y$.

409. Το αυτό για τις ∞^2 υπερβολές:

$$y = \frac{x - x_0}{x - x_1}$$

(x_0, x_1 είναι οι δυο παράμετροι του πλήθους των υπερβολών).

410. Ένα σημείο Μ διαγράφη τη λογαριθμική έλικα.

$$\rho = a e^{\mu\theta}$$

με δοσμένη σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω (δηλαδή είναι $\theta = \omega t + \theta_0$). Η προσημασμένη απόσταση $(\overline{O\Pi})$ από την αρχή O της ορθής προβολής Π του σημείου Μ πάνω σε έναν άξονα $\vec{\varepsilon}$ δια της αρχής O

με $(\widehat{\vec{OX}\,\vec{\varepsilon}}) = \theta_1$ θα είναι κατά τη χρονική στιγμή t, ένας αριθμός $f(t)$. Να δειχθή ότι η συνάρτηση $f(t)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2 f}{dt^2} - 2\mu\omega\frac{df}{dt} + \omega^2(1+\mu^2)f = 0.$$

(Η συνάρτηση $f(t)$ εξαρτιέται από δυο παραμέτρους θ_0, θ_1 που πρόκειται να απαλειφθούν).

411. Επιλύστε τις διαφορικές εξισώσεις:

α) $y = xy' - ay' + \beta$

β) $a(xdy + 2ydx) = xydy$

γ) $y' = (a\eta\mu(\ln|x|) + \sigma\upsilon\nu(\ln|x|) + a)y$

δ) $y' = +\sqrt{|y|}$.

Σχεδιάστε ολοκληρωτικές γραμμές της τελευταίας.

412. Να βρεθή το ολοκλήρωμα (ή η λύση) της διαφορικής εξισώσεως $y' = 9y - 4$, που για $x = 0$ έχει την τιμή $y = 1$.

413. Επιλύστε τις διαφορικές εξισώσεις:

α) $x^2dy - (xy + y^2)dx = 0.$

β) $(x-y)dx + (x+y)dy = 0.$

γ) $xy' = y \pm \sqrt{x^2+y^2}$.

δ) $(x-y)y' = x + y + 1$.

ε) $3y^2y'^2 - 2xyy' + 4y^2 = x^2$.

414. Επιλύστε τις διαφορικές εξισώσεις:

α) $xy' = xe^{y/x} + y + x$.

β) $xy' = x\eta\mu\frac{y}{x} + y$.

Χαράξτε μιαν ολοκληρωτική γραμμή της τελευταίας.

415. Επιλύστε τις διαφορικές εξισώσεις:

α) $y' + ay = \beta\eta\mu\gamma x$ (a, β, γ σταθερές).

β) $y' + y\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}\eta\mu 2x$.

γ) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

Πώς προκύπτουν οι ολοκληρωτικές γραμμές της τελευταίας εξισώσεως από μια τους;

417. Επιλύστε τις διαφορικές εξισώσεις:

α) $x=(2x-1)y'+y^2-(4x+1)y+4x=0,$

όπου $y=1$ είναι μια λύση.

β) $2x^2y'-2y^2-xy+2a^2x=0,$

όπου $y=a\sqrt{x}$ είναι μια λύση.

γ) $(x^2-1)y'+y^2-2xy+1=0.$

(Πάρτε στην τελευταία εξίσωση νέα άγνωστη συνάρτηση την $y-x=u$)

418. Οι συναρτήσεις $y=x$ και $y=2x^2-x$ είναι δυο (ειδικές λύσεις) μιας γραμμικής διαφορικής εξισώσεως πρώτης τάξεως. Μορφώσατε την εξίσωση αυτή. Ποιό είναι το γενικό της ολοκλήρωμα; Πώς θα ήτο δυνατον να βρεθή αυτό και χωρίς προηγούμενη μόρφωση της διαφορικής εξισώσεως; Μελετήστε το γένος (= μονοπαραμετρικό πλήθος) των ολοκληρωτικών γραμμών.

419. Επιλύστε τη διαφορική εξίσωση:

$$xy'=\ln|y|$$

Πώς είναι δυνατό από μια ολοκληρωτική καμπύλη της να κατασκευασθούν όλες οι άλλες;

419α. Επιλύστε τη διαφορική εξίσωση:

$$xy^2dy+y^3dx=\frac{a\,dx}{x}\ .$$

420. Έστω σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy μια καμπύλη $y=\sigma(x)$. Θεωρούμε σε ένα σημείο της $M(x,\sigma(x))$ την εφαπτομένη (υποθέτουμε ότι στη θεωρουμένη θέση υπάρχει πεπερασμένη $\sigma(x)$) και την κάθετη. Εκλέγουμε τη θετική φορά πάνω στην εφαπτομένη έτσι που όταν ένα σημείο κινείται σύμφωνα με τη φορά αυτή, η τετμημένη του να αυξάνη αλγεβρικά. Πάνω στην κάθετη βρίσκουμε τη θετική φορά στρέφοντας τη θετική φορά της εφαπτομένης γύρω στο θεωρούμενο σημείο M κατά $+90°$. Θεωρούμε τα σημεία τομής E και K της εφαπτομένης και της κάθετης με τον άξονα των x και το πόδι Π της κάθετης που άγεται από το M πάνω στον άξονα τούτο (των x).

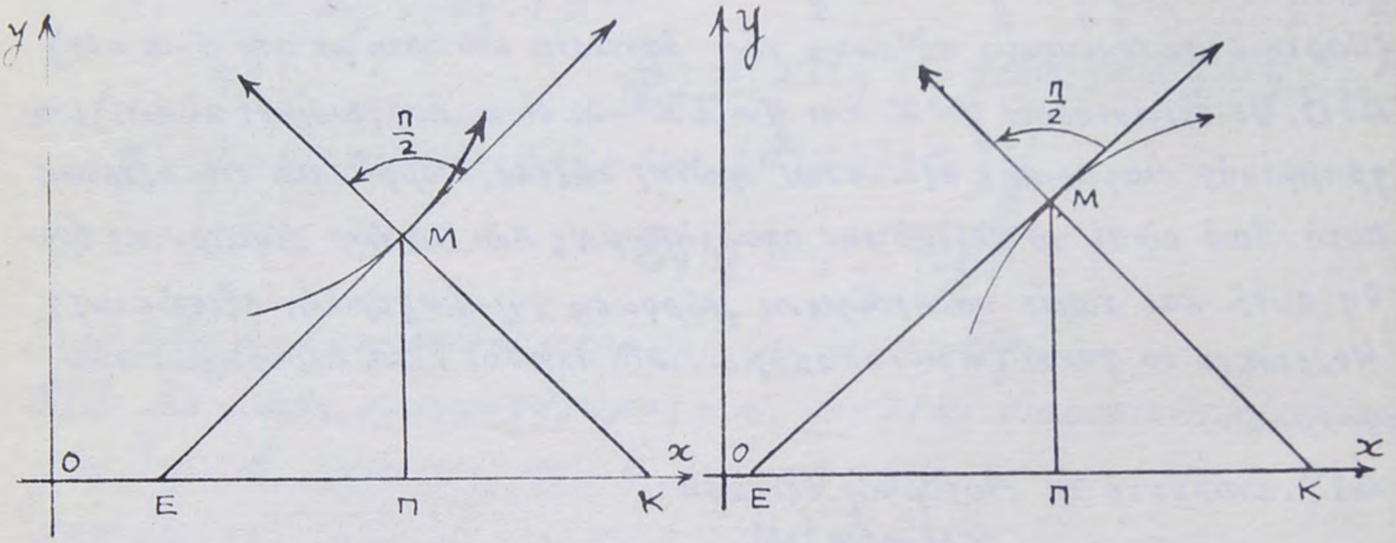
Τον αριθμό $(\overline{\Pi E})$ (με το πρόσημο του) τον καλούμε τότε υφαπτο-

<u>μένη</u> της καμπύλης $y=\sigma(x)$ στο σημείο της M, τον αριθμό $(\overline{\Pi K})$ <u>υποκάθετη</u>, τον αριθμό $(\overline{ME})$ <u>επεφαπτομένη</u> και τέλος τον αριθμό $(\overline{MK})$ <u>επικάθετη</u>.

Σύμφωνα με τους ορισμούς αυτούς δείξτε ότι:

$$(\overline{\Pi E})=-\frac{\sigma(x)}{\sigma'(x)}=-\frac{y}{y'},\quad (\overline{\Pi K})=\sigma(x)\sigma'(x)=yy'.$$

$$(\overline{ME})=-\frac{y}{y'}\underset{+}{}\sqrt{1+y'^2}\quad ,\ (\overline{MK})=\underset{+}{-}y\sqrt{1+y'^2}\ .$$



421. Να βρεθούν οι καμπύλες για τις οποίες το άθροισμα υφαπτομένης και υποκάθετης είναι σταθερό $(=\alpha)$.

422. Να βρεθούν οι καμπύλες των οποίων η εφαπτομένη στο σημείο τους $M(x,y)$ έχει αρχική τετμημένη α και αρχική τεταγμένη β τέτοιες ώστε $\alpha+\beta=2x+2y$.

423. Ποιές επίπεδες καμπύλες έχουν μήκος τόξου $\widehat{AM}$ κατ' ευθείαν ανάλογο προς την τετραγωνική ρίζα της (από υπόθεση θετικής) τετμημένης x του σημείου M; A ας είναι το σημείο της γραμμής με τετμημένη 0.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 24ο

Συναρτήσεις περισσοτέρων της μιας ανεξαρτήτων πραγματικών μεταβλητών.

§386. Εσωτερικό, συνοριακό, εξωτερικό σημείο ενός σημειοσυνόλου.

Έστω $\sigma(x,y)$ μια συνάρτηση δυο ανεξάρτητων πραγματικών μεταβλητών. Κάθε ζεύγος τιμών (x,y) των ανεξάρτητων μεταβλητών μπορεί να αντιστοιχισθή αμφιμονοσήμαντα προς ένα σημείο του επιπέδου που έχει ευθύγραμμες παράλληλες συντεταγμένες το ζεύγος (x,y).

Γι' αυτό αντί να λέμε «ζεύγος τιμών (x,ψ) των ανεξάρτητων μεταβλητών» θα χρησιμοποιούμε τη συντομώτερη έκφραση «σημείο (x,y)» ή «θέση (x,y)» και συχνά θα παριστάνουμε το ζεύγος με ένα γράμμα, π.χ. το σημείο $M(x,y)$.

Ένα σημείο $M_0(x_0 y_0)$ λέγεται εσωτερικό σημείο ή εσωτερική θέση του πεδίου ορισμού της συναρτήσεως $\sigma(x,y)$, αν η συνάρτηση είναι ορισμένη για όλα τα σημεία $M(x,y)$ που ικανοποιούν μιαν ανισότητα της μορφής

(386.1) $$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\rho^2$$

όπου ρ κάποιος θετικός αριθμός.

Το σύνολο αυτό των σημείων $M(x,y)$ λέγεται γειτονιά του σημείου $M(x_0,y_0)$ και μάλιστα, με μια προφανή γεωμετρική ερμηνεία, κυκλική γειτονιά του $M_0(x_0,y_0)$ με κέντρο το M_0 και ακτίνα ρ.

Αντί να απαιτήσουμε, για τον ορισμό του M_0 ως εσωτερικού σημείου του πεδίου ορισμού, ν' ανήκουν στο πεδίο όλα τα σημεία $M(x,y)$ π ικανοποιούν μιαν ανισότητα (386.1), μπορούμε ν' απαιτήσουμε ανήκουν στο πεδίο ορισμού της συναρτήσεως όλα τα σημεία $M($

που πληρούν μιαν ανισότητα της μορφής

(386.2) $$|x-x_0|+|y-y_0|<\alpha,$$

όπου α κάποιος θετικός αριθμός. Αυτό παρέχει έναν ισοδύναμο ορισμό του εσωτερικού σημείου.

Γεωμετρικώς ερμηνευομένη σε ορθογώνιο σύστημα ευθυγράμμων συντεταγμένων, η γειτονιά (386.2) είναι το εσωτερικό ενός τετραγώνου με κέντρο το $M_0(x_0,y_0)$ και με διαγώνιες που είναι παράλληλες αντιστοίχως προς τους OX, OY και έχουν μήκος $2a$.

Τρίτος ισοδύναμος ορισμός του εσωτερικού σημείου είναι ο εξής: Το $M_0(x_0,y_0)$ είναι <u>εσωτερικό σημείο</u> του πεδίου ορισμού της $\sigma(x,y)$ αν ανήκουν στο πεδίο όλα τα σημεία $M(x,y)$ που πληρούν το σύστημα των ανισοτήτων

(386.3) $$|x-x_0|<\alpha_1 \qquad |y-y_0|<\alpha_2$$

όπου α_1 και α_2 κάποιοι θετικοί αριθμοί.

Η γειτονιά γεωμετρικώς ερμηνευομένη είναι τώρα το εσωτερικό ενός ορθογώνιου που έχει κέντρο το $M_0(x_0,y_0)$ και πλευρές παράλληλες προς τους άξονες OX, OY, μήκους $2a_1$ αντιστοίχως $2a_2$. Γι' αυτό και η γειτονιά (386.3) λέγεται <u>ορθογωνική ή δισδιάστατο διάστημα</u> με κέντρο το $M_0(x_0,y_0)$.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω μπορούμε να πούμε:

<u>Ένα σημείο $M_0(x_0 y_0)$ λέγεται εσωτερικό σημείο ενός πεδίου, αν στο πεδίο ανήκη κάποια ολόκληρη γειτονιά (οποιουδήποτε είδους) του σημείου $M_0(x_0 y_0)$</u>. Τότε φυσικά θα ανήκουν στο πεδίο και άπειρες γειτονιές του σημείου $M_0(x_0 y_0)$.

<u>Ένα σημείο $M_1(x_1,y_1)$</u> λέγεται <u>συνοριακό σημείο</u> ενός πεδίου ορισμού συναρτήσεως, αν κάθε γειτονιά του $M_1(x_1,y_1)$ <u>περιέχη και σημεία που ανήκουν στο πεδίο και σημεία που δεν ανήκουν σ' αυτό</u>. Το $M_1(x_1,y_1)$ ενδέχεται ν' ανήκη στο πεδίο, μπορεί όμως και <u>να μην ανήκη</u> το ίδιο στο πεδίο.

Προσθέτουμε εδώ και τον ορισμό του εξωτερικού σημείου ενός πεδίου. Ένα σημείο $M_2(x_2,y_2)$ λέγεται εξωτερικό σημείο ενός πεδίου, αν υπάρχη μια γειτονιά του $M_2(x_2,y_2)$ της οποίας κανένα σημείο δεν ανήκει στο πεδίο. (θα υπάρχουν τότε φυσικά και άπειρες τέτοιες γειτονιές).

Ανάλογα πράγματα ισχύουν για πεδία συναρτήσεων 3 ανεξάρτητων πραγματικών μεταβλητών ή και περισσότερων.

Για 3 ανεξάρτητες μεταβλητές x,y,z διαθέτουμε ακόμη γεωμετρική εποπτική ερμηνεία· αρκεί να θεωρήσουμε κάθε τριάδα τιμών (x,y,z) των τριών μεταβλητών ως ευθύγραμμες παράλληλες συντεταγμένες ενός σημείου του χώρου.

Απ' εδώ προέρχεται και η σύντομη έκφραση «σημείο $M(x,y,z)$» αντί για την «τριάδα τιμών (x,y,z) των μεταβλητών x,y,z.».

Για 4 ή περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές δεν διαθέτουμε πλέον εποπτική γεωμετρική εικόνα, εξακολουθούμε όμως να χρησιμοποιούμε τις σύντομες εκφράσεις «σημείο $M(x,y,z,t)$» του τετραδιάστατου αριθμητικού χώρου ή «θέση $M(x,y,z,t)$» αντί για «τετράδα τιμών των ανεξάρτητων μεταβλητών (x,y,z,t)» κ.λ.π.

Τα περί εσωτερικών, συνοριακών και εξωτερικών σημείων ενός σημειοσυνόλου (= πεδίου) σ'έναν πολυδιάστατο χώρο ορίζονται κατά τρόπο ανάλογο προς όσα είπαμε για πεδία (= σημειοσύνολα) ενός διδιάστατου χώρου.

§387. Είδαμε στον § 327 ότι οι συναρτήσεις

$$z=\sigma(x,y)$$

δυο ανεξάρτητων μεταβλητών παριστάνονται γεωμετρικά από επιφάνειες του τριδιάστατου χώρου, αν ερμηνεύσουμε τις τριάδες (x,y,z) ως ευθύγραμμες παράλληλες συντεταγμένες. Μια ανάλογη (εποπτική) παράσταση μιας συναρτήσεως

$$\sigma(x,y,z)$$

3 ανεξάρτητων μεταβλητών δεν είναι δυνατή, επειδή η γεω-

μετρική μας εποπτεία είναι τριδιάστατη. Μπορούμε όμως να ερμηνεύσουμε την τιμή $\sigma(x,y,z)$ που αντιστοιχεί στην τριάδα (x,y,z) ως τιμή ενός μεγέθους της Φυσικής αντίστοιχη στο σημείο M με ευθύγραμμες συντεταγμένες (x,y,z) του τριδιάστατου εποπτικού χώρου.

Λόγου χάρη μπορούμε να θεωρήσουμε την τιμή $\sigma(x,y,z)$ ως παριστάνουσα τη θερμοκρασία στο σημείο $M(x,y,z)$· η συνάρτηση $\sigma(x,y,z)$ ερμηνεύεται τότε ως ένα πεδίο θερμοκρασιών, ορισμένο σ' ένα μέρος του τριδιάστατου χώρου (στο πεδίο ορισμού της συναρτήσεως $\sigma(x,y,z)$).

Αν θεωρήσουμε μιαν επιφάνεια $z=f(x,y)$ μέσα στο μέρος αυτό του χώρου, τότε η συνάρτηση $\sigma(x,y,f(x,y))$ μας δίνει το πεδίο θερμοκρασιών που παρατηρούνται στα σημεία της επιφάνειας.

Αν θεωρήσουμε μια γραμμή

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$$

μέσα στο ίδιο μέρος του χώρου η συνάρτηση $\sigma(f(t),g(t),h(t))$ θα μας δίνη το πεδίο θερμοκρασιών που υφίσταται στα σημεία της γραμμής.

§388. Συνέχεια συναρτήσεως. Υπενθυμίζουμε πρώτα μερικούς ορισμούς.

Λέμε ότι μια ακολουθία σημείων

(388.1) $\quad M_\nu(x_\nu, y_\nu), \quad \nu = 1,2,3,4,5,\ldots$

έχει όριο το $M_0(x_0, y_0)$, αν

$$\lim_{\nu\to+\infty}\left(|x_0-x_\nu|+|y_0-y_\nu|\right)=0.$$

Προς τούτο πρέπει και αρκεί να ισχύουν αμφότερες οι σχέσεις

$$\lim_{\nu\to+\infty}(x_0-x_\nu)=0, \quad \lim_{\nu\to+\infty}(y_0-y_\nu)=0.$$

Λέμε ότι η ακολουθία (388.1) τείνει στο άπειρο αν

$$\lim_{\nu \to +\infty} (|x_\nu| + |y_\nu|) = +\infty$$

Προς τούτο αρκεί (όχι πρέπει) μια τουλάχιστο από τις ακολουθίες $\{x_\nu\}$ και $\{y_\nu\}$ $(\nu = 1,2,3,4,\ldots)$, να έχη όριο το άπειρο, οπότε μια τουλάχιστο από τις ακολουθίες $\left\{\frac{1}{x_\nu}\right\}$ και $\left\{\frac{1}{y_\nu}\right\}$ έχει όριο το μηδέν.

Ανάλογοι ορισμοί δίνονται για ακολουθίες τριάδων αριθμών

$$(x_\nu, y_\nu, z_\nu), \quad \nu = 1,2,3,\ldots,$$

τετράδων

$$(x_\nu, y_\nu, z_\nu, t_\nu), \quad \nu = 1,2,3,\ldots, \text{κ.τ.λ.}$$

Έστω τώρα $\sigma(x,y)$ μια <u>μονοσήμαντη</u> συνάρτηση δυο ανεξάρτητων μεταβλητών, με πεδίο ορισμού ένα σημειοσύνολο Ω.

Ας θεωρήσουμε πρώτα ένα σημείο $M_0(x_0,y_0)$ του πεδίου ορισμού Ω. Η $\sigma(x,y)$ λέγεται <u>συνεχής</u> στη θέση M_0 (ή στο σημείο M_0) αν για <u>κάθε</u> ακολουθία σημείων $M_\nu(x_\nu y_\nu)$ $(\nu=1,2,3,\ldots)$ από το Ω, η οποία ικανοποιεί την οριακή σχέση

$$\lim_{\nu \to +\infty} M = M_0,$$

ισχύη η οριακή σχέση

$$\lim_{\nu \to +\infty} \sigma(x_\nu, y_\nu) = \sigma(x_0, y_0) = \sigma\left(\lim_{\nu \to +\infty} x_\nu, \lim_{\nu \to +\infty} y_\nu\right).$$

Επομένως η $\sigma(x,y)$ θα λέγεται <u>ασυνεχής</u> στη θέση (ή στο σημείο) $M_0(x_0,y_0)$, αν υπάρχη μια τουλάχιστο ακολουθία $\{M^*_\nu(x^*_\nu, y^*_\nu)\}$, $(\nu=1,2,3,\ldots)$ από το Ω με $\lim_{\nu \to +\infty} M^*_\nu = M_0$ για την οποία η ακολουθία $\{\sigma(x^*_\nu, y^*_\nu)\}$ δεν έχει όριο τον αριθμό $\sigma(x_0,y_0)$ (με άλλα λόγια: η ακολουθία $\{\sigma(x^*_\nu, y^*_\nu)\}$ δεν έχει όριο ή έχει μεν όριο, αλλά τούτο είναι διάφορο από τον αριθμό $\{\sigma(x_0,y_0)\}$.

Ας θεωρήσουμε δεύτερον ένα σημείο $M_0(x_0,y_0)$ που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού Ω της $\sigma(x,y)$ αλλά είναι συνοριακό σημείο του Ω. Η $\sigma(x,y)$ θα λέγεται <u>συνεχής</u> στο σημείο

$M_0(x_0,y_0)$, αν για κάθε ακολουθία σημείων $M_\nu(x_\nu,y_\nu)(\nu=1,2,3,\ldots)$ από το σημειοσύνολο Ω η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$(388.2) \qquad \lim_{\nu\to+\infty} M_\nu = M_0 ,$$

η ακολουθία $\{\sigma(x_\nu,y_\nu)\}$ έχει όριο έναν αριθμό, δηλαδή αν το $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\sigma(x_\nu y_\nu)$ υπάρχη και είναι αριθμός (όχι το ∞). Τότε αναγκαστικά ο αριθμός που είναι το όριο, θα είναι ο ίδιος για όλες τις δυνατές ακολουθίες $\{M_\nu\}$ $(\nu=1,2,3,\ldots)$ από το Ω, οι οποίες πληρούν τη συνθήκη (388.2). Κατά τούτα η $\sigma(x,y)$ θα κληθή <u>ασυνεχής</u> στη συνοριακή θέση $M_0(x_0,y_0)$ του πεδίου ορισμού Ω η οποία δεν ανήκει στο Ω, αν υπάρχη μια τουλάχιστο ακολουθία σημείων

$$\{M_\nu(x_\nu,y_\nu)\}, \quad \nu=1,2,3,\ldots$$

από το Ω με $\lim\limits_{\nu\to+\infty} M_\nu = M_0$ για την οποία ισχύει η σχέση

$$\lim_{\nu\to+\infty} \sigma(x_\nu,y_\nu)=\infty$$

ή για την οποία η ακολουθία $\{\sigma(x_\nu,y_\nu)\}$ $(\nu=1,2,3,\ldots)$ δεν έχει όριο.

Οι παραπάνω ορισμοί επεκτείνονται κατά τρόπο φανερό σε συναρτήσεις περισσότερων από δυο ανεξάρτητων μεταβλητών.

Μια συνάρτηση λέγεται <u>συνεχής</u> (χωρίς τον προσδιορισμό "σε ορισμένη θέση") όταν είναι <u>συνεχής</u> σε κάθε θέση (= σημείο) του πεδίου ορισμού της.

Αν η $\sigma(x,y)$ είναι <u>συνεχής</u> συνάρτηση στη θέση (x_0,y_0), τότε η $\sigma(x,y_0)$ είναι <u>συνεχής</u> στη θέση $x=x_0$ και η $\sigma(x_0,y)$ <u>συνεχής</u> στη θέση $y=y_0$. Το αντίστροφο δεν αληθεύει γενικά. Το άθροισμα, το γινόμενο, το πηλίκο συνεχών συναρτήσεων (στην περίπτωση του πηλίκου υποτίθεται φυσικά ότι ο διαιρέτης είναι $\neq 0$ στις θεωρούμενες θέσεις) είναι επίσης συνεχείς συναρτήσεις.

<u>Γενικότερα:</u>

Η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων παρέχει συνεχείς συναρτήσεις. Π.χ. αν $\sigma(x,y,z)$, $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, τότε και η συνάρτηση $\sigma(f(t),g(t),h(t))$ είναι συνεχής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Η συνάρτηση $\sigma(x,y,\ldots) \equiv C \equiv$ σταθερά είναι συνεχής συνάρτηση. Η συνάρτηση $\sigma(x,y,\ldots) \equiv x$ είναι συνεχής συνάρτηση, όμοια η $\sigma(x,y,\ldots) \equiv y$ κ.τ.λ.

Απ' αυτά έπεται ότι το ακέραιο μονώνυμο $Cx^{\mu}y^{\nu}\ldots$, όπου οι εκθέτες $\mu, \nu, \ldots$ είναι ακέραιοι αριθμοί $\geqq 0$, είναι συνεχής συνάρτηση. Άρα συνεχής συνάρτηση είναι και το ακέραιο πολυώνυμο

$$\sum C x^{\mu} y^{\nu} \ldots$$

(Οι τρεις τελείες αντιπροσωπεύουν τις μη γραμμένες, φυσικά πεπερασμένου πλήθους, ανεξάρτητες μεταβλητές).

Από το τελευταίο αποτέλεσμα έπεται ότι κάθε ρητή συνάρτηση είναι συνεχής. Το πεδίο ορισμού μιας ρητής συναρτήσεως

$$\frac{A(x,y,\ldots)}{\Pi(x,y,\ldots)}$$

όπου A και Π ακέραια πολυώνυμα, περιλαμβάνει, όπως ξέρουμε, όλα τα συστήματα τιμών των ανεξάρτητων μεταβλητών, τα οποία δεν μηδενίζουν τον παρονομαστή $\Pi(x,y,\ldots)$. Σ' ένα συνοριακό σημείο του πεδίου ορισμού της (σημείο που κατ' ανάγκη δεν θα ανήκη στο πεδίο ορισμού, διότι στα σημεία του πεδίου ορισμού έχουμε $\Pi(x,y,\ldots) \neq 0$ και επομένως αυτά τα σημεία είναι εσωτερικά), άλλες ρητές συναρτήσεις είναι συνεχείς, άλλες είναι ασυνεχείς. Π.χ. η συνάρτηση

$$\sigma(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

είναι ασυνεχής στη συνοριακή θέση $M_0\,(x=0\,,\,y=0)$. Διότι π.χ. για την ακολουθία σημείων

$$M'_\nu\left(0,\frac{1}{\nu}\right)$$

έχουμε $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \sigma\left(0,\frac{1}{\nu}\right)=0$ ενώ για την ακολουθία

$$M''_\nu\left(\frac{1}{\nu},\frac{1}{\nu}\right)$$

έχουμε $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \left(\frac{1}{\nu},\frac{1}{\nu}\right)=1$, άρα για την ακολουθία

$$M'_1,\ M''_1, M'_2, M''_2, M'_3, M''_3, M'_4, M''_4, \ldots$$

οι αντίστοιχες τιμές της συναρτήσεως δεν έχουν όριο.

Αφ'ετέρου η συνάρτηση

$$\varphi(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

είναι συνεχής στη συνοριακή θέση $M_0(0,0)$, διότι $\varphi(x_\nu,y_\nu)\to 0$ όταν $M_\nu\to M_0$ για $\nu\to+\infty$.

Πράγματι, αφού

$$\lim_{\nu\to+\infty}\left\{|x_\nu|+|y_\nu|\right\}=0,$$

θα είναι για $\nu >$ καταλλήλου N_ε

$|x_\nu|+|y_\nu| < \sqrt{\varepsilon}$, όπου ε ελεύθερα δοσμένος θετικός αριθμός, άρα και $|x_\nu|<\sqrt{\varepsilon}$, $|y_\nu|<\sqrt{\varepsilon}$ και επομένως

$$\frac{x_\nu^2\, y_\nu^2}{x_\nu^2+y_\nu^2}=x_\nu^2\cdot\frac{y_\nu^2}{x_\nu^2+y_\nu^2}\leqq x_\nu^2\cdot 1<\varepsilon.$$

Αν λοιπόν ορίσουμε

$$\Phi(x,y)=\begin{cases}\varphi(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{για } |x|+|y|\neq 0\\ 0 & \text{για } x=y=0,\end{cases}$$

η $\Phi(x,y)$ θα είναι και στη θέση $O(0,0)$ <u>συνεχής</u>.

§389. <u>Μερικές παράγωγοι</u>. Ας είναι το σημείο $M_0(x_1^{(0)},\ldots x_\nu^{(0)})$ εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού Ω της <u>μονοσήμαντης</u> συναρτήσεως $y=\sigma(x_1,\ldots,x_\nu)$.

Μπορούμε δίνοντας στις μεταβλητές $x_2,\ldots,x_\nu$ τις ορισμένες τιμές $x_2^{(0)},\ldots,x_\nu^{(0)}$, να θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$\sigma(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_\nu^{(0)})$ της μιας μεταβλητής x_1 η οποία είναι ορισμένη σε μια γειτονιά της τιμής $x_1^{(0)}$ (δηλαδή για όλα τα x_1 με $|x_1 - x_1^{(0)}|$ αρκετά μικρό) και να ερευνήσουμε, αν έχει παράγωγο για $x_1 = x_1^{(0)}$, αν δηλαδή το πηλίκο

$$\frac{\sigma(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_\nu^{(0)}) - \sigma(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_\nu^{(0)})}{\Delta x_1}$$

έχει ένα όριο (πεπερασμένο) όταν το Δx_1 τείνη στο 0.

Η παράγωγος αυτή, εφόσον υπάρχει, λέγεται μερική παράγωγος ως προς x_1 της συναρτήσεως $y = \sigma(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ στο σημείο $(x_1^{(0)}, \ldots, x_\nu^{(0)})$, σημειώνεται δε ως εξής:

$$y'_{x_1}\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_\nu^{(0)}\right) = \sigma'_{x_1}\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_\nu^{(0)}\right)$$

ή $$\frac{\partial \sigma(x_1^{(0)}, \ldots, x_\nu^{(0)})}{\partial x_1} = \frac{\partial \sigma(x_1, \ldots, x_\nu)}{\partial x_1} \text{ για } x_1 = x_1^0, \ldots, x_\nu = x_\nu^0.$$

Όμοια ορίζονται οι μερικές παράγωγοι ως προς τις λοιπές ανεξάρτητες μεταβλητές στο σημείο $(x_1^{(0)}, \ldots, x_\nu^{(0)})$.

Παράδειγμα. Έστω $y = Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + \Gamma x_2^2$. Τότε

$$y'_{x_1} = \frac{\partial y(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 2Ax_1 + 2Bx_2$$

$$y'_{x_2} = \frac{\partial y(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 2Bx_1 + 2\Gamma x_2.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η συνάρτηση $y = \sigma(x_1, \ldots, x_\nu)$ είναι μονοσήμαντα ορισμένη στο ν-διάστατο διάστημα $a_1 < x_1 < \beta_1, \ldots, a_\nu < x_\nu < \beta_\nu$.

Αν σε κάθε σημείο του διαστήματος υπάρχη μερική παράγωγος ως προς x_1, τότε η τιμή της στα διάφορα σημεία του διαστήματος θα είναι μια συνάρτηση των ν μεταβλητών $x_1, \ldots, x_\nu$ ορισμένη επίσης στο παραπάνω διάστημα:

$$y'_{x_1} = \sigma'_{x_1}(x_1, \ldots, x_\nu) \text{ για } a_1 < x_1 < \beta_1, \ldots, a_\nu < x_\nu < \beta_\nu.$$

Οι μερικές παράγωγοι της συναρτήσεως αυτής, εφόσον υπάρχουν, καλούνται μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξεως της αρχικής συναρτήσεως $\sigma(x_1, \ldots, x_\nu)$, γράφονται δε ως εξής:

$$y''_{x_1x_1} = y''_{x_1^2} = \sigma''_{x_1^2}(x_1, \ldots, x_\nu) = \frac{\partial^2 \sigma(x_1, \ldots, x_\nu)}{\partial x_1^2}$$

$$y''_{x_1x_2} = \sigma''_{x_1x_2}(x_1, \ldots, x_\nu) = \frac{\partial^2 \sigma(x_1, \ldots, x_\nu)}{\partial x_1 \, \partial x_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y''_{x_1x_\nu} = \sigma''_{x_1x_\nu}(x_1, \ldots, x_\nu) = \frac{\partial^2 \sigma(x_1, \ldots, x_\nu)}{\partial x_1 \, \partial x_\nu}.$$

Ομοίως έχουμε να θεωρήσουμε τις μερικές παραγώγους των συναρτήσεων:

$$\sigma'_{x_2}(x_1, \ldots, x_\nu), \ldots, \sigma'_{x_\nu}(x_1, \ldots, x_\nu)$$

εφόσον εννοείται υπάρχουν, στα διάφορα σημεία του

πεδίου ορισμού. Όλες αυτές καλούνται μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξεως της αρχικής συναρτήσεως $\sigma(x_1, \ldots, x_\nu)$ σημειώνονται δε γενικά με το σύμβολο

$$y''_{x_\kappa x_\lambda} = \sigma_{x_\kappa x_\lambda}(x_1, \ldots, x_\nu) = \frac{\partial^2 \sigma(x_1, \ldots, x_\nu)}{\partial x_\kappa \, \partial x_\lambda}$$

όπου κ και λ είναι δύο φυσικοί αριθμοί $\geqq 1$ και $\leqq \nu$.

Οι μερικές παράγωγοι, εφόσον υπάρχουν, των παραγώγων δεύτερης τάξεως καλούνται μερικές παράγωγοι 3ης τάξεως, κ.ο.κ.

<u>Παράδειγμα</u>. Έστω $\sigma(x,y) = 5x^2 - 2xy + 3y^2$.

Έχουμε: $\dfrac{\partial \sigma(x,y)}{\partial x} = 10x - 2y,$

$$\left(\frac{\partial(5x^2-2xy+3y^2)}{\partial x}\right)_{\substack{x=3\\y=-1}} = \left(\frac{d}{dx}\left(5x^2-2x(-1)+3(-1)^2\right)\right)_{x=3}$$

$$= (10x+2)_{x=3} = 32,$$

$$\left(\frac{\partial(5x^2-2xy+3y^2)}{\partial y}\right)_{\substack{x=3\\y=-1}}=\left(\frac{d}{dx}(5\cdot3^2-2\cdot3\cdot y+3y^2)\right)_{y=-1}$$

$$=(-2\cdot3+6y)_{y=-1}=-12$$

$$\frac{\partial\sigma(x,y)}{\partial y}=-2x+6y\ ,\quad \frac{\partial^2\sigma(x,y)}{\partial x^2}=10\ ,$$

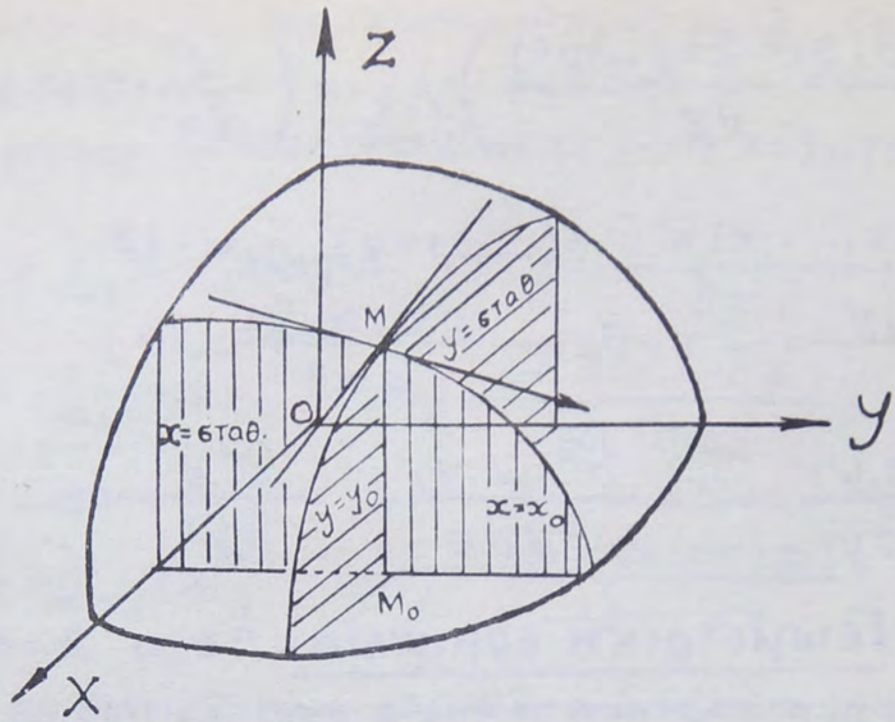
$$\frac{\partial^2\sigma(x,y)}{\partial x\partial y}=-2=\frac{\partial^2\sigma(x,y)}{\partial y\partial x}\ ,\quad \frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2}=6\ ,\quad \frac{\partial^3\sigma}{\partial x^3}=0,\text{κ.τ.λ.}$$

§390. Γεωμετρική ερμηνεία. Έστω $z=\sigma(x,y)$ μια μονοσήμαντη συνάρτηση η οποία στην εσωτερική θέση $M_0(x_0,y_0)$ έχει μερικές παραγώγους $\sigma'_x(x_0,y_0)$, $\sigma'_y(x_0y_0)$.

Μπορούμε να δώσουμε σ' αυτές μια γεωμετρική ερμηνεία:
Θεωρούμε την τομή της επιφάνειας

$$z=\sigma(x,y)$$

με το επίπεδο $y=y_0$ το παράλληλο προς το XOZ.
Η προβολή της τομής αυτής πάνω στο XOZ (παραλλήλως φυσικά προς OY) έχει εξίσωση (μέσα στο XOZ) $z=\sigma(x,y_0)$.
Άρα $z'_x(x_0,y_0)=\sigma'_x(x_0,y_0)=$ συντελεστής διευθύνσεως της ευθείας που είναι εφαπτομένη της προβολής αυτής στο σημείο της $x=x_0$.
Αν το σύστημα των συντεταγμένων είναι ορθογώνιο και τα βασικά διανύσματα ισόμηκα, τότε αυτός ο συντελεστής διευθύνσεως ισούται και με την τριγωνομετρική εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζουν ο θετικός ημιάξονας OX και μια ημιευθεία ...ράλληλη προς την εφαπτομένη της τομής στο σημείο της με $x=x_0$, άρα, και ... που καλούμε κλίση αυτής της εφαπτομένης προς το επίπεδο XOY.
Όμοια: σε τυχαίο πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων είναι $z'_y(x_0,y_0)=\sigma'_y(x_0,y_0)=$ συντελεστής διευθύνσεως μέσα



στο YOZ της ευθείας που εφάπτεται της προβολής πάνω στο επίπεδο YOZ της τομής $\begin{cases} z=\sigma(x_0,y) \\ x=x_0 \end{cases}$ της επιφανείας $z=\sigma(xy)$ με το επίπεδο $x=x_0$.

Σε ορθόγωνιο σύστημα συντεταγμένων είναι $z'_y(x_0,y_0)=\sigma'_y(x_0,y_0)=$ τριγωνομετρική εφαπτομένη της γωνίας του OY με την ευθεία που εφάπτεται της τομής

$$\begin{cases} z=\sigma(x_0,y) \\ x=x_0 \end{cases}$$

στο σημείο με $y=y_0$ ή $=$ κλίση προς το επίπεδο XOY της εφαπτομένης της τομής $\begin{cases} z=\sigma(x_0,y) \\ x=x_0 \end{cases}$ στο σημείο με $y=y_0$.

Για την παράγωγο $\Phi'_x(x_0,y_0,z_0)$ μιας συναρτήσεως $\Phi(xyz)$ τριών ανεξάρτητων μεταβλητών σε μια εσωτερική θέση (x_0,y_0,z_0) του πεδίου ορισμού της μπορούμε να δώσουμε την εξής ερμηνεία, αν θεωρήσουμε τη $\Phi(x,y,z)$ ως πεδίο θερμοκρασιών. Π.χ. Η $\Phi'_x(x_0,y_0,z_0)$ είναι το όριο για $\Delta x \longrightarrow 0$ του λόγου της μεταβολής

$\Delta\Phi=\Phi(x_0+\Delta x,y_0,z_0)-\Phi(x_0,y_0,z_0)$ της θερμοκρασίας προς τη μεταβολή Δx της τετμημένης πάνω στην ευθεία

$\begin{cases} y=y_0 \\ z=z_0 \end{cases}$ στη θέση (x_0, y_0, z_0), με άλλα λόγια είναι ο τοπικός συντελεστής στη θέση (x_0, y_0, z_0) της μεταβολής της θερμοκρασίας ως προς τη μεταβολή της τετμημένης πάνω στην ευθεία $\begin{cases} y=y_0 \\ z=z_0 \end{cases}$, την παράλληλη προς τον **OX**.

§ 391. <u>Ολικό διαφορικό</u>. Έστω $\sigma(x,y)$ μια συνάρτηση που έχει παραγώγους $\sigma'_x(x,y)$ και $\sigma'_y(x,y)$ σ'όλες τις θέσεις (x,y) μιας γειτονιάς V του σημείου $M_0(x_0,y_0)$. Επί πλέον υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $\sigma'_x(x,y)$ και $\sigma'_y(x,y)$ είναι συνεχείς στο V (δηλαδή σε κάθε σημείο του σημειοσυνόλου V)

Για Δx και Δy απολύτως αρκετά μικρά το σημείο $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ θα ανήκη στο V, ομοίως το $M_1(x_0+\Delta x, y_0)$ καθώς και ολόκληρα τα ευθύγραμμα τμήματα M_0M_1 και M_1M.

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε (χρησιμοποιώντας το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού)

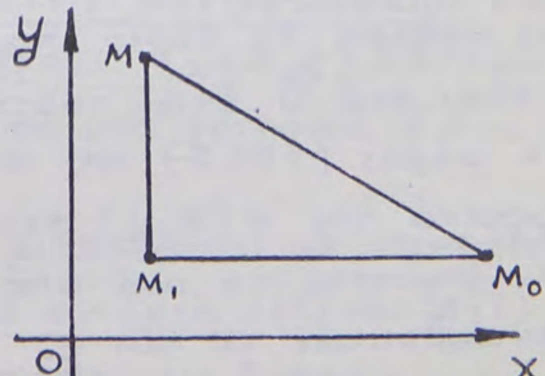
$$\begin{aligned} \Delta\sigma &= \sigma(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - \sigma(x_0,y_0) = \\ &= [\sigma(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - \sigma(x_0+\Delta x, y_0)] + \\ &\quad [\sigma(x_0+\Delta x, y_0) - \sigma(x_0,y_0)] \\ &= \sigma_y(x_0+\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)\cdot\Delta y + \sigma'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)\Delta x \end{aligned}$$

όπου θ_1 και θ_2 κατάλληλοι αριθμοί μεταξύ 0 και 1.

Κάνουμε τώρα χρήση της υποθέσεως ότι οι συναρτήσεις $\sigma'_x(x,y)$ και $\sigma'_y(x,y)$ είναι συνεχείς στη θέση (x_0,y_0) για να συμπεράνουμε ότι

$$\sigma'_y(x+\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y) = \sigma'_y(x_0,y_0)+\zeta.$$

$$\sigma'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0) = \sigma'_x(x_0,y_0)+\eta,$$



Φ-6

όπου $\zeta \to 0$ και $\eta \to 0$ όταν $|\Delta x| + |\Delta y| \to 0$.

Άρα

(391.1) $\Delta\sigma = \sigma'_x(x_0, y_0).\Delta x + \sigma'_y(x_0, y_0).\Delta y + \eta.\Delta x + \zeta\Delta y.$

Αυτό σημαίνει ότι η αύξηση $\Delta\sigma$ της $\sigma(x, y)$, που αντιστοιχεί στη μεταβολή των ανεξάρτητων μεταβλητών από x_0 σε $x_0 + \Delta x$ και από y_0 σε $y_0 + \Delta y$, αναλύεται σε άθροισμα δυο μερών από τα οποία το μεν ένα

(391.2) $\sigma'_x(x_0, y_0)\Delta x + \sigma'_y(x_0, y_0)\Delta y$

είναι γραμμικό και ομογενές ως προς Δx και Δy, το δε άλλο

$$\eta \cdot \Delta x + \zeta \cdot \Delta y$$

(που κατά κανόνα θα εξαρτιέται από τα Δx και Δy κατά τρόπο μάλλον πολύπλοκο) είναι **απειροστό** συγχρόνως με το $|\Delta x| + |\Delta y|$ (ή με το $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$) και μάλιστα **απειροστό** ανώτερης τάξεως από το $|\Delta x| + |\Delta y|$ (ή το $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$).

Πράγματι έχουμε:

$$\frac{|\eta \cdot \Delta x + \zeta \cdot \Delta y|}{|\Delta x| + |\Delta y|} = \left| \eta \frac{\Delta x}{|\Delta x| + |\Delta y|} + \zeta \cdot \frac{\Delta y}{|\Delta x| + |\Delta y|} \right| \leqq |\eta| \cdot 1 + |\zeta| \cdot 1$$

άρα το πηλίκο $\dfrac{\eta.\Delta x + \zeta.\Delta y}{|\Delta x| + |\Delta y|}$ τείνει στο 0 όταν

$|\Delta x| + |\Delta y| \to 0$.

Επομένως το μέρος (391.2) προσεγγίζει την αύξηση $\Delta\sigma$ με σφάλμα το οποίο και <u>αναλογικά</u> ως προς το $|\Delta x| + |\Delta y|$ τείνει στο 0, όταν τούτο το $|\Delta x| + |\Delta y| \to 0$.

Το μέρος (391.2) της αυξήσεως $\Delta\sigma$ καλείται <u>ολικό διαφορικό</u> της $\sigma(x, y)$ στη θέση (x_0, y_0) για τις αυθαίρετες, ανεξάρτητες τη μια από την άλλη, αυξήσεις Δx και Δy των μεταβλητών x και y.

Η συμβολική του παράσταση είναι

$$d\sigma(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$$

και συντομώτερα

$$d\sigma(x,y) \text{ ή } d\sigma$$

Λοιπόν:

(391.3) $$d\sigma(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \sigma'_x(x_0,y_0)\Delta x+\sigma'_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

Αν $\sigma(x,y)\equiv x$, τοτε $d\sigma(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = 1.\Delta x+0.\Delta y=\Delta x$

και αν $\sigma(x,y)\equiv y$, τότε

$$d\sigma(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = 0.\Delta x+1.\Delta y=\Delta y.$$

Γι' αυτό συμφωνούμε να λέμε συντόμως παραβλέποντας κάποιαν ανακριβολογία, ότι το <u>ολικό διαφορικό των ανεξάρτητων μεταβλητών</u> x και y ισούται με τις αυξήσεις των Δx και Δy αντιστοίχως, να γράφουμε δε:

$$dx=\Delta x\ ,\ dy=\Delta y.$$

Ύστερα απ' αυτή τη σύμβαση η (391.3) γράφεται και έτσι:

(391.4) $$d\sigma(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \sigma'_x(x_0,y_0)\,dx+\sigma'_y(x_0,y_0)\,dy.$$

§392. <u>Ολικό διαφορικό σύνθετης συναρτήσεως.</u> Έστω $\sigma(x,y)$ μια συνάρτηση με παραγώγους $\sigma'_x(x,y)$ και $\sigma'_y(x,y)$ που <u>υπάρχουν</u> και είναι <u>συνεχείς</u> σε μια γειτονιά V του σημείου $M_0(x_0,y_0)$.

Ας είναι $x=f(t)$ και $y=g(t)$ δυο συναρτήσεις με $x_0=f(t_0)$ και $y_0=g(t_0)$ που έχουν παραγώγους <u>συνεχείς</u> $f'(t)$ και $g'(t)$ σε μια γειτονιά W του t_0 (δηλαδή σε όλες τις θέσεις t με $|t=t_0|<$ κάποιου θετικού αριθμού ρ).

Το σημείο $(x=f(t), y=g(t))$ θα ανήκη στη γειτονιά V του M_0 για κάθε t μιας γειτονιάς W_1 του t_0 περιεχόμενης μέσα στη W και αρκετά μικρής. Επομένως έχει νόημα η σύνθεση

$$S(t)=\sigma(f(t),g(t))$$

για κάθε t από το W_1.

Προκύπτει το ερώτημα:

Έχει διαφορικό η σύνθετη συνάρτηση $S(t)$ στη θέση t που ανήκει στο W_1 και ποιο;

Η απάντηση είναι καταφατική και εκφράζεται με τον τύπο

(392.1)

$$\begin{aligned} d\sigma(f(t),g(t)) &= \sigma'_x(f(t),g(t))f'(t)\,dt+\sigma'_y(f(t),g(t))g'(t)\,dt \\ &= \sigma'_x(x,y)\,dx+\sigma'_y(x,y)\,dy. \end{aligned}$$

<u>**Απόδειξη**</u>. Αν θέσουμε

$$f(t+\Delta t)=f(t)+\Delta f=x+\Delta x, \qquad g(t+\Delta t)=g(t)+\Delta g=y+\Delta y$$

έχουμε

$$\Delta S=\sigma(f(t+\Delta t),g(t+\Delta t))-\sigma(f(t),g(t))=\sigma(x+\Delta x,y+\Delta y)-\sigma(x,y),$$

άρα κατά τον τύπο (391.1),

$$\Delta S=\sigma'_x(x,y)\Delta x+\sigma'_y(x,y)\Delta y+\eta\Delta x+\zeta\cdot\Delta y.$$

Άλλα από υπόθεση έχουμε

$$\Delta x=f(t+\Delta t)-f(t)=f'(t)\Delta t+\eta_1\Delta t,$$
$$\Delta y=g(t+\Delta t)-g(t)=g'(t)\Delta t+\zeta_1\Delta t,$$

με $\eta_1 \to 0$ και $\zeta_1 \to 0$ όταν $\Delta t \to 0$.

Επομένως

$$\begin{aligned} \Delta S &= [\sigma'_x(x,y)f'(t)+\sigma'_y(x,y)g'(t)]\Delta t+ \\ &+[\sigma'_x(x,y)\eta_1+\eta f'(t)+\eta\eta_1+\sigma'_y(x,y)\zeta_1+\zeta g'(t)+\zeta\zeta_1]\cdot\Delta t. \end{aligned}$$

Η δεύτερη αγκύλη του δεξιού μέλους τείνει όμως στο 0, όταν $\Delta t\to 0$, οπότε και $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Άρα το διαφορικό της $S(t)$ στη θέση t υπάρχει και ισούται με

$$dS=[\sigma'_x(x,y)f'(t)+\sigma'_y(x,y)g'(t)]\cdot\Delta t$$

πράγμα που δεν διαφέρει από το αποδεικτέο, επειδή για την ανεξάρτητη μεταβλητή t έχουμε, όπως είναι γνωστό, $\Delta t=dt$.

Η ιδιότητα που αποδείξαμε παραπάνω για τα διαφορικά <u>ισχύει</u>

και όταν οι συναρτήσεις που συνθέτουμε περιέχουν <u>όλες</u> περισσότερες από μιαν ανεξάρτητες μεταβλητές, αποδείχνεται δε με τον ίδιο τρόπο.

Π.χ. αν θεωρήσουμε τη σύνθετη συνάρτηση

$$\sigma(f(u,v),g(u,v))=S(u,v),$$

όπου $x=f(u,v)$ και $y=g(u,v)$ συναρτήσεις με <u>συνεχείς</u> μερικές παραγώγους $f'_u(u,v),\dots,g'_u(u,v)$ σε μια γειτονιά του σημείου $P_0(u_0,v_0)$ και $\sigma(x,y)$ συνάρτηση με <u>συνεχείς</u> μερικές παραγώγους σε μια γειτονιά του σημείου $M_0(x_0=f(u_0,v_0),y_0=g(u_0,v_0))$, τότε <u>υπάρχει το ολικό διαφορικό</u> της $S(u,v)$ σε κάθε θέση (u,v) κάποιας κατάλληλα μικρής γειτονιάς του $P_0(u_0,v_0)$ και δίνεται από τον τύπο:

(392.2)
$$\begin{aligned} dS(u,v) &= \sigma'_x(x,y)\,dx+\sigma'_y(x,y)\,dy \\ &= \sigma'_x(x,y)\cdot[f'_u(u,v)\,du+f'_v(u,v)\,du] \\ &\quad+\sigma'_y(x,y)\cdot[g'_u(u,v)\,du+g'_v(u,v)\,dv] \\ &= [\sigma'_x(x,y)f'_u(u,v)+\sigma'_y(x,y)\cdot g'_u(u,v)]\,du \\ &\quad+[\sigma'_x(x,y)f'_v(u,v)+\sigma'_y(x,y)\cdot g'_v(u,v)]\,dv \\ &= [\sigma'_x(x,y)\cdot x'_u+\sigma'_y(x,y)\cdot y'_u]\cdot du \\ &\quad+[\sigma'_x(x,y)\cdot x'_v+\sigma'_y(x,y)\cdot y'_v]\cdot dv. \end{aligned}$$

<u>**Παρατήρηση**</u>. Η μορφή του ολικού διαφορικού μιας συναρτήσεως δεν αλλάζει, όταν αλλάξουμε τις ανεξάρτητες μεταβλητές, ελαττώνοντας συγχρόνως ή αυξάνοντας ισώς το πλήθος των ανεξάρτητων μεταβλητών.

Αυτό προκύπτει όταν παραβάλουμε τον τύπο (391.4), όπου ανεξάρτητες μεταβλητές είναι τα x,y και dx,dy, με τον τύπο (392.1) όπου ανεξάρτητες μεταβλητές είναι το t και dt, τα δε x,y και dx,dy συναρτήσεις αυτών των νέων ανεξάρτητων μεταβλητών.

§393. <u>Παραγώγιση σύνθετης συναρτήσεως</u>. Από τον τύπο (392.1) έπεται ότι η παράγωγος της σύνθετης συναρτήσεως

$$\sigma(f(t),g(t))=S(t)$$

δίνεται από τον τύπο

(393.1)

$$\frac{dS(t)}{dt} = \sigma'_x(f(t),g(t))f'(t) + \sigma'_y(f(t),g(t))g'(t) =$$

$$= \sigma'_x(x,y)\frac{dx}{dt} + \sigma'_y(x,y)\frac{dy}{dt}\ .$$

Από τον τύπο (392.2) έπεται ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της σύνθετης συναρτήσεως $S(u,v)$ σε κάθε θέση (u,v) μιας κατάλληλης γειτονιάς του $P_0(u_0,v_0)$ και ότι οι μερικές αυτές παράγωγοι δίνονται από τους τύπους

$$\frac{\partial S(u,v)}{\partial u} = \frac{\partial \sigma(f(u,v),g(u,v))}{\partial u} = \sigma'_x\, x'_u + \sigma'_y\, y'_u\ ,$$

(393.2) $$\frac{\partial S(u,v)}{\partial v} = \frac{\partial \sigma(f(u,v),g(u,v))}{\partial v} = \sigma'_x\, x'_v + \sigma'_y\, y'_v\ .$$

Οι τύποι αυτοί επεκτείνονται κατά τρόπο φανερό σε συναρτήσεις περισσότερων από δυο μεταβλητών.

§394. <u>**Θεώρημα της μέσης τιμής για συναρτήσεις περισσότερων από μια μεταβλητών**</u>. Έστω $\sigma(x,y)$ μια συνάρτηση δυο μεταβλητών με μερικές παραγώγους $\sigma'_x(x,y)$ και $\sigma'_y(x,y)$ <u>συνεχείς</u> σε μια γειτονιά V του σημείου $M_0(x_0,y_0)$. Αν τα h και k ληφθούν αρκετά μικρά κατ' απόλυτη τιμή, το σημείο $M(x_0+h,y_0+k)$ καθώς και ολόκληρο το διάνυσμα $\overrightarrow{M_0M}$ θα κείνται μέσα στη γειτονιά V του M_0. Τα διάφορα σημεία του διανύσματος $\overrightarrow{M_0M}$ έχουν παραμετρική παράσταση

$$x = x_0 + ht,\ y = y_0 + kt,\ \text{με}\ 0 \leqq t \leqq 1.$$

Θεωρούμε τη σύνθετη συνάρτηση

$$S(t) = \sigma(x_0+ht,\, y_0+kt)$$

που έχει ανεξάρτητη μεταβλητή το t με πεδίο μεταβολής το διάστημα $0 \leqq t \leqq 1$.

Κατά τον προηγούμενο παράγραφο η συνάρτηση αυτή $S(t)$ έχει παράγωγο στις εσωτερικές θέσεις αυτού του διαστήματος:

$$(394.1)\quad S'(t)=\sigma'_x(x_0+ht,y_0+kt)\cdot\frac{d(x_0+ht)}{dt}+\sigma'_y(x_0+ht,y_0+kt)\cdot\frac{d(y_0+kt)}{dt}$$

$$=\sigma'_x(x_0+ht,y_0+kt)\,h+\sigma'_y(x_0+ht,y_0+kt)\cdot k,$$

για κάθε t από το διάστημα $0<t<1$.

Επί πλέον η $S(t)$ είναι συνεχής στις θέσεις $t=0$ και $t=1$, έχουμε δε σύμφωνα με τον ορισμό της $S(t)$

$$(394.2)\qquad S(0)=\sigma(x_0,y_0),\quad S(1)=\sigma(x_0+h,y_0+k).$$

Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού στη διαφορά $S(1)-S(0)$:

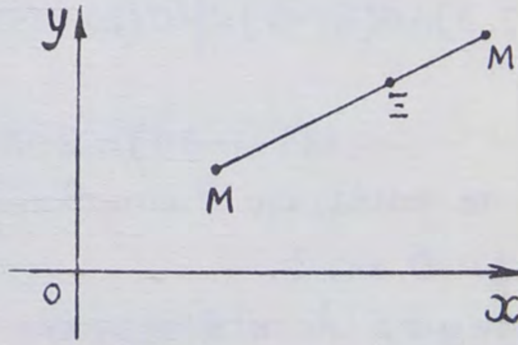
$$S(1)-S(0)=S'(\theta)\cdot(1-0),$$

όπου θ κατάλληλος αριθμός μεταξύ 0 και 1. Χρησιμοποιώντας τα υπολογισμένα (394.1) και (394.2), βρίσκουμε έτσι την σχέση

$$(394.3)\qquad \sigma(x_0+h,y_0+k)-\sigma(x_0,y_0)=\sigma'_x(x_0+\theta h,y_0+\theta k)h+$$

$$\sigma'_y(x_0+\theta h,y_0+\theta k)k.$$

Η σχέση αυτή είναι η έκφραση του θεωρήματος της μέσης τιμής για συναρτήσεις δυο ανεξάρτητων μεταβλητών. Επεκτείνεται φυσικά κατά τρόπο φανερό σε συναρτήσεις τριών ή περισσότερων μεταβλητών



που έχουν μερικές παραγώγους 1ης τάξεως συνεχείς στη γειτονιά ενός σημείου.

Παρατηρήσεις

1. Το σημείο $(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$, όπου λαμβάνονται οι μερικές παράγωγοι του δεξιού μέλους της (394.3), είναι ένα κατάλληλο ενδιάμεσο σημείο Ξ του ευθύγραμμου τμήματος M_0M που έχει άκρα τα σημεία $M_0(x_0 y_0)$ και $M(x_0+h, y_0+k)$. Από εδώ προκύπτει και η ονομασία του θεωρήματος.

2. Άλλοι δυο τρόποι γραφής της σχέσεως (394.3) είναι οι εξής:

$$(394.4)\qquad \Delta\sigma=\sigma(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-\sigma(x_0,y_0)=$$

$$=\sigma'_x(x_0+\theta\cdot\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta x+\sigma'_y(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\cdot\Delta y)\Delta y$$

όπου θ κατάλληλος αριθμός μεταξύ 0 και 1, εξαρτώμενος, εννοείται, από τα δεδομένα $x_0, y_0, \Delta x, \Delta y$.

(394.5) $$\sigma(x_1,y_1)-\sigma(x_0,y_0)=$$
$$\sigma'_x\big(x_0+\theta(x_1-x_0), y_0+\theta(y_1-y_0)\big)(x_1-x_0)$$
$$+\sigma'_y\big(x_0+\theta(x_1-x_0), y_0+\theta(y_1-y_0)\big)(y_1-y_0).$$

Οι γραφές αυτές επεκτείνονται κατά τρόπο φανερό σε συναρτήσεις περισσότερων από δυο μεταβλητών.

<u>**Παράδειγμα για επαλήθευση.**</u> Έστω $\sigma(x,y)=5x^2+2xy-4y^2+3x-5$, Είναι

$$\sigma'_x(x,y)=10x+2y+3$$
$$\sigma'_y(x,y)=2x-8y$$

Άρα, με εφαρμογή του (394.5),

$$\sigma(-7,3)-\sigma(2,-4)=\big[10\big(2+\theta(-9)\big)+2(-4+\theta\cdot 7)\big]\cdot(-9)+\big[2\big(2+\theta(-9)\big)-8(-4+\theta\cdot 7)\big]7$$

ή

$$141-(-59)=200=117+166\theta$$

Άρα το κατάλληλο θ είναι $\theta=\frac{83}{166}$, δηλαδή πράγματι ένας αριθμός μεταξύ 0 και 1.

<u>**Πόρισμα**</u>: Αν η $\sigma(x,y)$ έχη <u>παραγώγους $\sigma'_x(x,y)$ και $\sigma'_y(x,y)$ μηδενικές σ' όλες τις θέσεις (x,y) ενός χωρίου D</u> [1], τότε η $\sigma(x,y)$ έχει <u>σταθερή τιμή</u> στο χωρίο D

---

[1] Χωρίο καλούμε ένα σημειοσύνολο D όταν 1ον όλα τα σημεία του είναι εσωτερικά σημεία του D και 2ον έχη την ακόλουθη ιδιότητα: Δυο οποιαδήποτε σημεία του D μπορούν να ενωθούν με μια τεθλασμένη γραμμή που αποτελείται αποκλειστικώς από σημεία του D. Π.χ. χωρίο είναι το εσωτερικό ενός κύκλου, το εσωτερικό ενός παραλληλογράμμου, γενικότερα το εσωτερικό ενός κυρτού πολυγώνου, οι γειτονιές που ορίσαμε στον § 385, κ.τ.λ.

Έστω $M_0(x_0,y_0)$ ένα ορισμένο σημείο του D και $M'(x',y')$ ένα δεύτερο τυχαίο σημείο του D. Υπάρχει τότε μέσα στο D μια τεθλασμένη γραμμή $M_0M_1M_2 \dots M_\nu M'$ που ενώνει το M_0 με το M'. Πάνω σε κάθε πλευρά αυτής της γραμμής η $\sigma(x,y)$ έχει σταθερή τιμή, σύμφωνα με τη σχέση (394.3).
Άρα τελικώς $\sigma(x_0,y_0)=\sigma(x',y')$, ο.ε.δ.

§395. Παράγωγος κατά δοσμένη φορά (ή κατεύθυνση).

Έστω πάλι $\sigma(x,y)$ μια συνάρτηση που έχει παραγώγους $\sigma'_x(x,y)$ και $\sigma'_y(x,y)$ <u>συνεχείς</u> σε μια γειτονιά του σημείου $M_0(x_0,y_0)$. Πάνω στην ημιευθεία $\overrightarrow{M_0T}$ που σχηματίζει με τον $\overrightarrow{OX}$ δοσμένη γωνία

$$\theta=\left(\overrightarrow{OX}\ \overrightarrow{M_0T}\right)$$

προχωρούμε από το σημείο M_0 κατά το μήκος $S=M_0M$. Φθάνουμε έτσι στο σημείο $M(x_0+S\,\sigma\upsilon\nu\theta,\ y_0+S\,\eta\mu\theta)$.
Ο λόγος

$$\frac{\sigma(M)-\sigma(M_0)}{M_0M}=\frac{\sigma(x_0+S\,\sigma\upsilon\nu\theta,y_0+S\,\eta\mu\theta)-\sigma(x_0,y_0)}{S}$$

έχει όριο για $S\longrightarrow 0^+$ την <u>παράγωγο</u> της σύνθετης συναρτήσεως $\sigma(x_0+S\,\sigma\upsilon\nu\theta,\ y_0+S\,\eta\mu\theta)$ του S στη θέση $S=0$, δηλαδή, σύμφωνα με τον τύπο (393.1),

$$\left.\frac{d\sigma(x_0+S\,\sigma\upsilon\nu\theta,\ y_0+S\,\eta\mu\theta)}{ds}\right|_{S=0}$$

$$=\sigma'_x(x_0,y_0)\cdot\left.\frac{d(x_0+S\,\sigma\upsilon\nu\theta)}{ds}\right|_{S=0}+\sigma'_y(x_0,y_0)\left.\frac{d(y_0+S\,\eta\mu\theta)}{ds}\right|_{S=0}$$

$$=\sigma'_x(x_0,y_0)\cdot\sigma\upsilon\nu\theta+\sigma'_y(x_0,y_0)\cdot\eta\mu\theta.$$

Η παράγωγος αυτή λέγεται <u>παράγωγος</u> της $\sigma(x,y)$ στη θέση $M_0(x_0,y_0)$ κατά την κατεύθυνση ή φορά $\overrightarrow{M_0T}$ η οποία ορίζεται από το μοναδιαίο (ομόρροπο) διάνυσμα $(\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta)$. Σύμφωνα μ'αυτόν τον ορισμό παράγωγος της $\sigma(x,y)$ στη θέση $M_0(x_0,y_0)$ κατά τη φορά ενός όχι μηδενικού διανύσματος $\bar{\delta}(\delta_1, \delta_2)$ είναι η ποσότητα

(395.1)

$$\sigma'_x(x_0,y_0)\cdot\frac{\delta_1}{+\sqrt{\delta_1^2+\delta_2^2}} + \sigma'_y(x_0,y_0)\cdot\frac{\delta_2}{+\sqrt{\delta_1^2+\delta_2^2}} .$$

Η επέκταση της έννοιας αυτής σε συναρτήσεις περισσότερων ανεξάρτητων μεταβλητών γίνεται κατά τρόπο φανερό.

Π.χ. παράγωγος της συναρτήσεως $\sigma(x,y,z)$ στη θέση $M_0(x_0,y_0,z_0)$ κατά την κατεύθυνση (ή φορά) του διανύσματος $\bar{\delta}(\delta_1,\delta_2,\delta_3) \neq 0$ είναι εξ ορισμού η ποσότητα

(395.2)

$$\sigma'_x(x_0,y_0,z_0)\frac{\delta_1}{+\sqrt{\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2}} + \sigma'_y(x_0,y_0,z_0)\frac{\delta_2}{+\sqrt{\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2}} + \sigma'_z(x_0,y_0z_0)\frac{\delta_3}{\sqrt{\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2}}$$

§396. <u>Θεώρημα για την ισότητα των μερικών παραγώγων σ''_{xy} και σ''_{yx}</u>. Αν οι μερικές παράγωγοι $\sigma''_{xy}(x,y)$ και $\sigma''_{yx}(x,y)$ <u>υπάρχουν</u> σε μια γειτονιά της θέσης (x_0,y_0) και είναι συναρτήσεις <u>συνεχείς</u> στη θέση αυτή, αυτό αρκεί για να υφίσταται η ισότητα

$$\sigma''_{xy}(x_0,y_0) = \sigma''_{yx}(x_0,y_0).$$

<u>Σχόλια</u>

1. Με άλλα λόγια το Θεώρημα σημαίνει συντόμως ότι <u>η μεταβολή στην τάξη</u> των ανεξάρτητων μεταβλητών ως προς τις οποίες <u>διαδοχικά παραγωγίζουμε μερικά</u> δεν έχει <u>επίδραση στο τελικό αποτέλεσμα</u>, τουλάχιστον όσο οι θεωρούμενες παράγωγοι είναι <u>συνεχείς συναρτήσεις</u>.

2. Το παραπάνω θεώρημα που διατυπώσαμε για συναρτήσεις δυο μεταβλητών επεκτείνεται κατά τρόπο φανερό σε συναρτή-

σεις τριών ή περισσότερων ανεξάρτητων μεταβλητών· επίσης κατά τρόπο ευνόητο σε παραγώγους ανώτερης τάξεως από τη δεύτερη.

Παράδειγμα. Έστω $\sigma(x,y,z)=z\cdot 10^{x^2y}$.

Έχουμε σε γενική θέση (x,y,z):

$$\sigma'_x(x,y,z)=z\cdot 10^{x^2y}\cdot\ln 10\cdot 2xy=2xyz10^{x^2y}\cdot\ln 10$$

$$\sigma'_y(x,y,z)=x^2z\cdot 10^{x^2y}\ln 10$$

$$\sigma'_z(x,y,z)=10^{x^2z}$$

$$\sigma''_{xy}=(2xz+2x^3yz\ln 10)\cdot 10^{x^2y}\ln 10=\sigma''_{yx}$$

$$\sigma''_{xz}=2xy\cdot 10^{x^2y}\ln 10=\sigma''_{zx}$$

$$\sigma''_{yz}=x^2\cdot 10^{x^2y}\ln 10=\sigma''_{zy}$$

$$\sigma''_{xx}=\sigma''_{x^2}=(2yz+4x^2y^2z\ln 10)\cdot 10^{x^2y}\ln 10$$

$$\sigma''_{y^2}=x^4z\cdot 10^{x^2y}\ln 10$$

$$\sigma''_{z^2}=0$$

$$\sigma'''_{xyx}=(2z+10x^2yz\ln 10+4x^4y^2z\ln^2 10)10^{x^2y}\ln 10=\sigma'''_{xxy}=\sigma'''_{yxx}$$

$$\sigma'''_{xyz}=(2x+2x^3y\ln 10)\cdot 10^{x^2y}\ln 10=$$

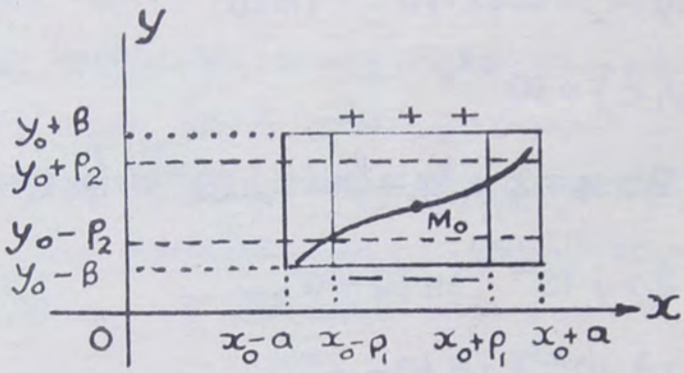
$$=\sigma'''_{yzx}=\sigma'''_{zxy}=\sigma'''_{xzy}=\sigma'''_{zyx}=\sigma'''_{yxz},\ \text{κ.ο.κ.}$$

§397. **Εμπλεγμένη συνάρτηση**. Έστω $\sigma(x,y)$ μια συνάρτηση που είναι μονοσήμαντα ορισμένη σε μια γειτονιά του σημείου $M_0(x_0,y_0)$ και έχει παραγώγους $\sigma'_x(x,y)$, $\sigma'_y(x,y)$ συνεχείς σ' αυτή τη γειτονιά.

Αν είναι $\sigma(x_0,y_0)=0$ και $\sigma'_y(x_0,y_0)\neq 0$, τότε σε κατάλληλα μικρή γειτονιά του M_0 υπάρχουν εκτός του $(x_0 y_0)$ και άλλα άπειρα σημεία που μηδενίζουν τη $\sigma(x,y)$ και που όλα μαζί αποτελούν ένα τόξο γραμμής με εξίσωση της μορφής

(397.1) $y=\varphi(x)$, για $|x-x_0|<$ κατάλληλου θετικού αριθμού ρ_1, όπου $\varphi(x)$ μονοσήμαντη συνάρτηση που για τα παραπάνω x, έχει παράγωγο:

$$(397.2)\qquad \frac{dy}{dx} = \varphi'(x) = \frac{-\sigma'_x(x,\varphi(x))}{\sigma'_y(x,\varphi(x))} = -\frac{\sigma'_x(x,y)}{\sigma'_y(x,y)}, \text{ για } |x-x_0| < \rho_1.$$



Αν $\sigma(x_0,y_0)=0$ και $\sigma'_x(x_0,y_0)\neq 0$, τότε υπάρχουν πάλι, μέσα σε μια κατάλληλα μικρή γειτονιά του M_0, εκτός της (x_0,y_0) και άλλες άπειρες θέσεις που μηδενίζουν τη $\sigma(x,y)$, αποτελούν δε αυτές ένα τόξο γραμμής με εξίσωση της μορφής

(397.3) $x=\omega(y)$ για $|y-y_0|<$ κατάλληλου θετικού αριθμού ρ_2, όπου $\omega(y)$ μονοσήμαντη συνάρτηση που έχει παράγωγο

$$(397.4)\qquad \frac{dx}{dy} = \omega'(y) = \frac{-\sigma'_y(\omega(y),y)}{\sigma'_x(\omega(y),y)} = -\frac{\sigma'_y(x,y)}{\sigma'_x(x,y)} \text{ για } |y-y_0| < \rho_2$$

Σχόλια.

Η συνάρτηση $y=\varphi(x)$ και η $x=\omega(y)$ λέγονται εμπλεγμένες συναρτήσεις που ορίζονται από την εξίσωση $\sigma(x,y)=0$ στη γειτονιά του σημείου $M_0(x_0,y_0)$ για το οποίο $\sigma(x_0,y_0)=0$.

Με άλλα λόγια το θεώρημα μπορεί να διατυπωθή ως εξής: Μια εξίσωση $\sigma(x,y)=0$ επιλύνεται μονοσήμαντα ως προς y στη γειτονιά μιας λύσεως της (x_0,y_0), αρκεί να είναι

$$\sigma'_y(x_0,y_0)\neq 0,$$

και μονοσήμαντα ως προς x, αρκεί να είναι

$$\sigma'_x(x_0,y_0)\neq 0.$$

Το αποτέλεσμα της επιλύσεως είναι, στην πρώτη περίπτωση $\sigma'_y(x_0,y_0)\neq 0$, μια συνάρτηση $y=y(x)$ ορισμένη στη γειτονιά του $x=x_0$, με διαφορικό $dy=y'(x)dx$ που ικανοποιεί την σχέση :

$$\sigma'_x(x,y)\,dx+\sigma'_y(x,y)\,dy=0.$$

Ανάλογα πράγματα ισχύουν στην 2η περίπτωση $\sigma'_x(x_0,y_0)\neq 0$· η μορφή της τελευταίας σχέσεως δεν μεταβάλλεται, μόνο ότι τώρα είναι $x=x(y)$ και $dx=x'(y)dy$.

Όταν λέμε «η εξίσωση επιλύνεται» και «το αποτέλεσμα της επιλύσεως» δεν εννοούμε ότι μπορούμε να βρούμε πάντα ένα τύπο για το y συναρτήσει του x (ή για το x συναρτήσει του y) κατασκευασμένον με στοιχειακά συναρτησιακά σύμβολα σε πεπερασμένο πλήθος. Αυτό το πράγμα είναι εν γένει αδύνατο. Το θεώρημα μας εξασφαλίζει μόνο την ύπαρξη της επιλύνουσας συναρτήσεως, δηλαδή μας δίνει τον αριθμητικό καθορισμό της, για κάθε θεωρούμενη τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής, συνήθως με μια μετάβαση σε όριο. Στην πράξη η επιλύνουσα συνάρτηση θα υπολογισθή κατά προσέγγιση για κάθε τιμή που χρειαζόμαστε της ανεξάρτητης μεταβλητής.

Για τον παραπάνω λόγο το θεώρημα ονομάζεται «θεώρημα υπάρξεως εμπλεγμένης συναρτήσεως».

2) Οι υποθέσεις του ανωτέρου θεωρήματος είναι μόνον ικανές συνθήκες για την ύπαρξη της εμπλεγμένης μονοσήμαντης συναρτήσεως, δεν είναι και αναγκαίες.

Αν οι συνθήκες αυτές δεν είναι πραγματοποιημένες, τότε η μονοσήμαντη επίλυση (εξυπακούουμε: στο πραγματικό πεδίο) δεν είναι εξασφαλισμένη· δηλαδή μπορεί να μην υπάρχη άλλη εκτός από την $(x_0\,y_0)$ πραγματική λύση (x,y) της $\sigma(x,y)=0$ στη γειτονιά της μιάς λύσεως (x_0,y_0), επίσης μπορεί να υπάρχη πολυσήμαντη επιλύνουσα πραγματική συνάρτηση στη γειτονιά της λύσεως (x_0,y_0).

Π.χ. η εξίσωση $\sigma(x,y)\equiv x^3+y^3=0$ έχει τη λύση $(0,0)$.

Σ'αυτή τη θέση είναι $\sigma'_x(0,0)=3x^2\big|_{x=0}=0$ και $\sigma'_y(0,0)=3y^2\big|_{y=0}=0$

Παρά τούτο υπάρχει μονοσήμαντη πραγματική επιλύουσα συνάρτηση της $x^3+y^3=0$, η $y=-x$.
Η εξίσωση $x^2+y^2=0$ έχει τη λύση $(0,0)$, είναι δε

$$\sigma'_x(0,0)=2x\Big|_{x=0}=0 \text{ και } \sigma'_y(0,0)=2y\Big|_{y=0}=0 .$$

Στη γειτονιά της $(0,0)$ δεν υπάρχει άλλη πραγματική λύση της εξισώσεως εκτός από τη $(0,0)$. Η εξίσωση $x^2-y^2=0$ έχει τη λύση $(0,0)$ και σ' αυτή τη θέση μηδενίζονται αμφότερες οι μερικές παράγωγοι $\sigma'_x=2x$ και $\sigma'_y=-2y$. Η εξίσωση έχει τη <u>δισήμαντη</u> επιλύουσα συνάρτηση $y=\pm x$ στη γειτονιά της θέσης $(0,0)$.
Ολιγώτερο τετριμμένα παραδείγματα για την τελευταία περίπτωση της πολυσήμαντης επιλύουσας παρέχουν οι εξισώσεις

$$x^3+y^3-3axy=0 \text{ και } (x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0$$

(όπου a θετική σταθερά) στη γειτονιά της λύσεως των $(0,0)$. –

<u>§398. Επεκτάσεις του θεωρήματος του § 397.</u>

Το θεώρημα επεκτείνεται αμέσως σε μιαν εξίσωση μεταξύ τριών ή περισσότερων μεταβλητών. Π.χ. αν η εξίσωση $\sigma(x,y,z)=0$ έχει την πραγματική λύση (x_0,y_0,z_0) και αν στη γειτονιά αυτής της θέσεως (x_0,y_0,z_0) η $\sigma(x,y,z)$ έχει <u>μερικές παραγώγους πρώτης τάξεως συνεχείς,</u> από τις οποίες μια τουλάχιστον, π.χ. η $\sigma'_z(x,y,z)$, δεν μηδενίζεται στη θέση (x_0,y_0,z_0):

$$\sigma'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0,$$

τότε στη γειτονιά της λύσεως (x_0,y_0,z_0) οι πραγματικές θέσεις που μηδενίζουν τη $\sigma(x,y,z)$ είναι <u>άπειρες</u> και αποτελούν, στην υπόψη περίπτωση, ένα τμήμα επιφάνειας με αναλυτική παράσταση

$$z=\varphi(x,y) \text{ για } |x-x_0| \text{ και } |y-y_0| < \text{κατάλληλου αριθμού } \rho,$$

όπου η $\varphi(x,y)$ είναι <u>μονοσήμαντα</u> ορισμένη στο παραπάνω διάστημα και έχει μερικές παραγώγους

$$z'_x(x,y)=\varphi'_x(x,y)=-\frac{\sigma'_x(x,y,z)}{\sigma'_z(x,y,z)}=-\frac{\sigma'_x(x,y,\varphi(x,y))}{\sigma'_z(x,y,\varphi(x,y))},$$

$$z'_y(x,y)=\varphi'_y(x,y)=-\frac{\sigma'_y(x,y,z)}{\sigma'_z(x,y,z)}=-\frac{\sigma'_y(x,y,\varphi(x,y))}{\sigma'_z(x,y,\varphi(x,y))}.$$

Οι τελευταίες αυτές εκφράσεις των z'_x και z'_y προκύπτουν με μερική παραγώγιση ως προς x, αντιστοίχως y, της ταυτότητας:

$$\sigma(x,y,\varphi(x,y))\equiv 0 \quad \text{για } |x-x_0| \text{ και } |y-y_0|<\rho.$$

2/. Μια δεύτερη επέκταση του θεωρήματος του §397 οδηγεί στις εμπλεγμένες συναρτήσεις που ορίζονται από <u>συστήματα εξισώσεων</u>.

Π.χ. έστω το σύστημα $\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0, \end{cases}$

και (x_0,y_0,z_0) μια πραγματική λύση του:

$$f(x_0,y_0,z_0)=g(x_0,y_0,z_0)=0.$$

Αν οι f και g έχουν στη γειτονιά της θέσης (x_0,y_0,z_0) μερικές παραγώγους $1^{ης}$ τάξεως <u>συνεχείς</u> και αν ο πίνακας

$$\begin{Vmatrix} f'_x(x_0,y_0,z_0) & f'_y(x_0,y_0,z_0) & f'_z(x_0,y_0,z_0) \\ g'_x(x_0,y_0,z_0) & g'_y(x_0,y_0,z_0) & g'_z(x_0,y_0,z_0) \end{Vmatrix}$$

έχει διάσταση 2, τότε το σύστημα ορίζει, στη γειτονιά της θέσης (x_0,y_0,z_0), δυο (κατάλληλα εκλεγμένες) από τις τρεις μεταβλητές x,y,z ως <u>μονοσήμαντες παραγωγίσιμες</u> συναρτήσεις της υπόλοιπης μεταβλητής.

Π.χ. αν

$$\begin{vmatrix} f'_y(x_0,y_0,z_0) & f'_z(x_0,y_0,z_0) \\ g'_y(x_0,y_0,z_0) & g'_z(x_0,y_0,z_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

τότε μπορούμε κατά ένα και μόνο τρόπο να ορίσουμε σε μια γειτονιά $|x-x_0|<\rho$ της θέσης x_0 δυο μονοσήμαντες συναρτήσεις $y=\varphi(x)$ και $z=\omega(x)$, τέτοιες ώστε να είναι $y_0=\varphi(x_0)$ και $z_0=\omega(x_0)$, να ισχύουν δε και οι δυο ταυτότητες:

$$\begin{cases} f(x,\varphi(x),\omega(x)) \equiv 0 \\ g(x,\varphi(x),\omega(x)) \equiv 0 \end{cases} \quad \text{για} \quad x_0-\rho<x<x_0+\rho.$$

Οι συναρτήσεις $\varphi(x)$ και $\omega(x)$ έχουν παραγώγους $\varphi'(x)$ και $\omega'(x)$ τις οποίες βρίσκουμε από τις τελευταίες ταυτότητες όταν τις παραγωγίσουμε ως προς x:

$$f'_x+f'_y\,\varphi'(x)+f'_z\,\omega'(x)=0$$
$$g'_x+g'_y\,\varphi'(x)+g'_z\,\omega'(x)=0,$$

από όπου κατά Cramer

$$(398.1)\qquad \frac{dy}{dx}=\varphi'(x)=\frac{\begin{vmatrix} -f'_x & f'_z \\ -g'_x & g'_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f'_y & f'_z \\ g'_y & g'_z \end{vmatrix}}, \quad \frac{dz}{dx}=\omega'(x)=\frac{\begin{vmatrix} f'_y & -f'_x \\ g'_y & -g'_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f'_y & f'_z \\ g'_y & g'_z \end{vmatrix}}$$

3) Γενικώς: Αν 1ον) το σύστημα

$$(398.2)\qquad \begin{aligned} &\sigma_1(x_1,x_2,\ldots,x_\mu,y_1,\ldots,y_\nu)=0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\sigma_\nu(x_1,x_2,\ldots,x_\mu,y_1,\ldots,y_\nu)=0 \end{aligned}$$

ν εξισώσεων μεταξύ $\nu+\mu$ μεταβλητών έχη μια πραγματική λύση $(x_1^0,\ldots,x_\mu^0,y_1^0,\ldots,y_\nu^0)$, (τα μηδενικά στα γράμματα $x_1,\ldots,y_\nu$ είναι άνω δείκτες και όχι εκθέτες δυνάμεως), αν $2^{ον}$) στην γειτονιά της λύσης αυτής οι συναρτήσεις $\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu$ έχουν μερικές παραγώγους $1^{ης}$ τάξεως

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_\mu}, \frac{\partial \sigma_1}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial \sigma_1}{\partial y_\nu}, \ldots, \frac{\partial \sigma_\nu}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \sigma_\nu}{\partial y_\nu}$$

συνεχείς και αν $3^{ον}$) η ορίζουσα νιοστής τάξεως

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \sigma_1(x_1^\circ, \ldots, y_\nu^\circ)}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial \sigma_1(x_1^\circ, \ldots, y_\nu^\circ)}{\partial y_\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial \sigma_\nu(x_1^\circ, \ldots, y_\nu^\circ)}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial \sigma_\nu(x_1^\circ, \ldots, y_\nu^\circ)}{\partial y_\nu} \end{vmatrix} \neq 0$$

τότε το σύστημα (398.2) επιδέχεται στη γειτονιά του σημείου $(x_1^\circ, \ldots, x_\mu^\circ, y_1^\circ, \ldots, y_\nu^\circ)$ επίλυση ως προς $y_1, \ldots, y_\nu$ κατά ένα και μόνο τρόπο: δηλαδή υπάρχουν ν συναρτήσεις μονότροπα ορισμένες

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_\mu) \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ y_\nu = \varphi_\nu(x_1, \ldots, x_\mu) \end{cases} \quad \text{με} \quad \begin{cases} y_1^\circ = \varphi_1(x_1^\circ, \ldots, x_\mu^\circ) \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ y_\nu^\circ = \varphi_\nu(x_1^\circ, \ldots, x_\mu^\circ) \end{cases}$$

για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις

$$(398.3) \qquad \begin{cases} \sigma_1(x_1, \ldots, x_\mu, \varphi_1, \ldots, \varphi_\nu) = 0 \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ \sigma_\nu(x_1, \ldots, x_\mu, \varphi_1, \ldots, \varphi_\nu) = 0 \end{cases}$$

ως <u>ταυτότητες</u> ως προς τις μεταβλητές $x_1, \ldots, x_\mu$ σε μια κατάλληλα μικρή γειτονιά της θέσης $(x_1^\circ, \ldots, x_\mu^\circ)$.

Οι συναρτήσεις $\varphi_1, \ldots, \varphi_\nu$ έχουν μερικές παραγώγους $1^{ης}$ τάξεως ως προς $x_1, \ldots, x_\mu$ τις οποίες βρίσκουμε παραγωγίζοντας τις (398.3) μερικώς ως προς $x_1, \ldots, x_\mu$.

Π.χ έχουμε παραγωγίζοντας μερικώς ως πρός x_1, το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\sigma_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\sigma_1}{\partial y_1}\cdot\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+\dots+\dfrac{\partial\sigma_1}{\partial y_\nu}\cdot\dfrac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_1}=0 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{\partial\sigma_\nu}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\sigma_\nu}{\partial y_1}\cdot\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+\dots+\dfrac{\partial\sigma_\nu}{\partial y_\nu}\cdot\dfrac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_1}=0 \end{array}\right.$$

που είναι σύστημα γραμμικό Cramer ως προς τις ζητούμενες παραγώγους $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1},\dots,\dfrac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_1}$.

Η απόδειξη της παραπάνω προτάσεως γίνεται με μαθηματική επαγωγή ως προς τον δείκτη ν.

§ 399. **Αντιστροφή ενός συστήματος συναρτήσεων με ισάριθμες ανεξάρτητες μεταβλητές.** Ανάλογο προς το πρόβλημα της αντιστροφής μιας συναρτήσεως μιας μεταβλητής

(399.1) $$y=\sigma(x)$$

είναι το εξής: Δίνεται ένα σύστημα

(399.2) $$\begin{array}{l} y_1=\sigma_1(x_1,\dots,x_\nu) \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ y_\nu=\sigma_\nu(x_1,\dots,x_\nu) \end{array}$$

ν μονοσήμαντων συναρτήσεων ν ανεξάρτητων μεταβλητών.

Θέτουμε το ερώτημα: Υπό ποιές ικανές συνθήκες μπορούμε να βεβαιώσουμε την ύπαρξη ενός συστήματος μονοσήμαντων συναρτήσεων $\varphi_1(y_1,\dots,y_\nu),\dots,\varphi_\nu(y_1,\dots,y_\nu)$ των ν ανεξάρτητων μεταβλητών $y_1,\dots,y_\nu$ με την ιδιότητα, αυτές οι συναρτήσεις τοποθετούμενες στις θέσεις $x_1,\dots,x_\nu$ αντιστοίχως μέσα στις εξισώσεις (399.2) να τις ταυτοποιούν τουλάχιστον σε μια ολόκληρη γειτονιά ενός σημείου του ν-διάστατου αναλυτικού χώρου των $y_1,\dots,y_\nu$;

Η απάντηση στο πρόβλημα της αντιστροφής της (399.1) ήταν: ικανή συνθήκη για την ύπαρξη της αντίστροφης συναρτήσεως $x=\varphi(y)$ στη γειτονιά μιας θέσεως $(x^o, y^o = \sigma(x^o))$ είναι 1ον η συνάρτηση $\sigma(x)$ να έχη <u>συνεχή</u> παράγωγο σε μια γειτονιά της x^o και 2ον αυτή η παράγωγος να μη <u>μηδενίζεται</u> για $x = x^o$

$$\sigma'(x^o) \neq 0.$$

(Χάρη συντομίας θα γράφουμε x^o, y^o κ.τ.λ. αντίς για $x^{(o)}, y^{(o)}$. Με άλλα λόγια τα προσγραμμένα μηδενικά πρέπει να θεωρούνται ως άνω δείκτες και όχι ως εκθέτες).

Η απάντηση στο τωρινό ερώτημα είναι η εξής:

<u>Ικανή</u> συνθήκη για την <u>ύπαρξη</u> ν μονοσήμαντων συναρτήσεων.

$$(399.3)\qquad \begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(y_1, \ldots, y_\nu) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_\nu &= \varphi_\nu(y_1, \ldots, y_\nu) \end{aligned}$$

που να <u>ταυτοποιούν</u> τις εξισώσεις (399.2) στη ν-διάστατη γειτονιά ενός σημείου

$$y_1^o = \sigma_1(x_1^o, \ldots, x_\nu^o), \ldots, y_\nu^o = \sigma_\nu(x_1^o, \ldots, x_\nu^o)$$

είναι:

1ον <u>Οι συναρτήσεις</u>

$$\begin{gathered} \sigma_1(x_1, \ldots, x_\nu) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sigma_\nu(x_1, \ldots, x_\nu) \end{gathered}$$

να έχουν μερικές παραγώγους 1ης τάξεως συνεχείς στη θέση $(x_1^o, \ldots, x_\nu^o)$ και

2ον <u>η ορίζουσα</u>

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \sigma_1(x_1^o, \ldots, x_\nu^o)}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial \sigma_1(x_1^o, \ldots, x_\nu^o)}{\partial x_\nu} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial \sigma_\nu(x_1^o, \ldots, x_\nu^o)}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial \sigma_\nu(x_1^o, \ldots, x_\nu^o)}{\partial x_\nu} \end{vmatrix}$$

να μην είναι μηδέν.

Για την απόδειξη αρκεί να γράψουμε το σύστημα (399.2) με τη μορφή

$$\sigma_1(x_1, \dots, x_\nu) - y_1 = 0$$
$$\dots\dots \quad \dots\dots\dots$$
$$\sigma_\nu(x_1, \dots, x_\nu) - y_\nu = 0,$$

να θεωρήσουμε τα τωρινά αριστερά μέλη σαν συναρτήσεις

$$S_1(x_1, \dots, x_\nu, y_1, \dots, y_\nu)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$S_\nu(x_1, \dots, x_\nu, y_1, \dots, y_\nu)$$

των $\nu+\nu$ ανεξάρτητων μεταβλητών $x_1, \dots, x_\nu, y_1, \dots, y_\nu$, και να παρατηρήσουμε ότι πραγματοποιούνται οι υποθέσεις της τελευταίας πρότασης του προηγουμένου παράγραφου (εννοείται παίρνοντας $\mu=\nu$, αντικαθιστώντας τις $\sigma_1, \dots, \sigma_\nu$ με τις $S_1, \dots, S_\nu$ και εναλλάσσοντας τον ρόλο των $x_1, \dots, x_\nu$ με τον ρόλο των $y_1, \dots, y_\nu$).

Πράγματι έχουμε απο κατασκευή:

$$S_1(x_1^\circ, \dots, x_\nu^\circ, y_1^\circ, \dots, y_\nu^\circ) = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$S_\nu(x_1^\circ, \dots, x_\nu^\circ, y_1^\circ, \dots, y_\nu^\circ) = 0$$

και
$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial S_1(x_1^\circ, \dots, y_\nu^\circ)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial S_1(x_1^\circ, \dots, y_\nu^\circ)}{\partial x_\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial S_\nu(x_1^\circ, \dots, y_\nu^\circ)}{\partial x_1} & & \dfrac{\partial S_\nu(x_1^\circ, \dots, y_\nu^\circ)}{\partial x_\nu} \end{vmatrix} = J \neq 0.$$

Άρα, σύμφωνα με την πρόταση, υπάρχει μονοσήμαντη επίλυση

$$\begin{aligned} & x_1 = \varphi_1(y_1, \dots, y_\nu) \\ (399.3) \qquad & \dots\dots\dots\dots \\ & x_\nu = \varphi_\nu(y_1, \dots, y_\nu) \end{aligned}$$

του συστήματος των εξισώσεων

$$S_1 = 0, \ldots, S_\nu = 0$$

ως προς $x_1, \ldots, x_\nu$ στη γειτονιά της θέσης $(y_1^\circ, \ldots, y_\nu^\circ)$, με $x_1^\circ = \varphi_1(y_1^\circ, \ldots, y_\nu^\circ), \ldots, x_\nu^\circ = \varphi_\nu(y_1, \ldots, y_\nu^\circ)$, ο.ε.δ.

Η ορίζουσα

$$(399.4) \quad J(x_1, \ldots, x_\nu) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \sigma_1(x_1, \ldots, x_\nu)}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial \sigma_1(x_1, \ldots, x_\nu)}{\partial x_\nu} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial \sigma_\nu(x_1, \ldots, x_\nu)}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial \sigma_\nu(x_1, \ldots, x_\nu)}{\partial x_\nu} \end{vmatrix}$$

λέγεται Ιακωβιανή του συστήματος συναρτήσεων (399.2) και παριστάνεται με το σύμβολο $\dfrac{\partial(y_1, \ldots, y_\nu)}{\partial(x_1, \ldots, x_\nu)}$.

Το σύστημα των συναρτήσεων (399.3) λέγεται αντίστροφο του συστήματος (399.2).

Παράδειγμα: Έστω το σύστημα

$$(399.5) \quad \begin{aligned} u &= x + \frac{1}{2}\,\text{συν}\,y \\ v &= y + \frac{1}{2}\,\text{συν}\,x. \end{aligned}$$

Η Ιακωβιανή του

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\,\text{ημ}\,y \\ -\frac{1}{2}\,\text{ημ}\,x & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{1}{4}\,\text{ημ}x\,\text{ημ}y$$

δεν μηδενίζεται σε καμμιά πραγματική θέση (x, y).

Άρα μπορούμε να αντιστρέψουμε μονοσήμαντα το σύστημα (399.5) στη γειτονιά κάθε θέσεως

$$\left(u_0 = x_0 + \frac{1}{2}\,\text{συν}\,y_0\,,\ v_0 = y_0 + \frac{1}{2}\,\text{συν}\,x_0 \right).$$

Δηλαδή υπάρχουν στη γειτονιά της παραπάνω θέσεως (u_0, v_0)

δυο μονοσήμαντες συναρτήσεις

$$\begin{cases} x=f(u,v) \\ y=g(u,v) \end{cases} \quad \text{με} \quad \begin{cases} x_0=f(u_0,v_0) \\ y_0=g(u_0,v_0) \end{cases}$$

και τέτοιες ώστε να ισχύουν οι ταυτότητες

$$\text{(399.6)} \qquad \begin{aligned} u &\equiv f(u,v)+\frac{1}{2}\,\text{συν}\,g(u,v) \\ v &\equiv g(u,v)+\frac{1}{2}\,\text{συν}\,f(u,v) \end{aligned}$$

που προκύπτουν από τις εξισώσεις (399.5) όταν αντικαταστήσουμε τα x,y δια των $f(u,v)$, $g(u,v)$ αντιστοίχως. Οι συναρτήσεις f και g έχουν μερικές παραγώγους που βρίσκουμε παραγωγίζοντας μερικώς ως προς u και v αντιστοίχως τις τελευταίες ταυτότητες.

(399.6) Π.χ. με παραγώγιση ως προς u:

$$1=f_u-\frac{1}{2}\,\text{ημ}\,g(u,v)\cdot g_u'=f_u'-\frac{1}{2}\,\text{ημ}\,y\cdot g_u'$$

$$0=g_u'-\frac{1}{2}\,\text{ημ}\,f(u,v)\cdot f_u'=-\frac{1}{2}\,\text{ημ}\,x\cdot f_u'+g_u',$$

από όπου κατά Cramer

$$f_u'(u,v)=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\text{ημ}y \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\text{ημ}y \\ -\frac{1}{2}\text{ημ}x & 1 \end{vmatrix}}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}\text{ημ}x\,\text{ημ}y},$$

$$g_u'=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2}\text{ημ}x & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\text{ημ}y \\ -\frac{1}{2}\text{ημ}x & 1 \end{vmatrix}}=\frac{\frac{1}{2}\text{ημ}x}{1-\frac{1}{4}\text{ημ}x\,\text{ημ}y}.$$

Σχόλιο. Το σύστημα (399.5) αντιστοιχίζει σε κάθε σημείο (x,y) του επιπέδου των (x,y) ένα ορισμένο σημείο του επιπέδου των (u,v). Η αντιστοιχία αυτή λέγεται και μονοσήμαντη απεικόνιση του επιπέδου (x,y) μέσα στο επίπεδο (u,v).

Το σημείο (u,v) λέγεται εικόνα του (x,y), το (x,y) αρχέτυπο του (u,v).

Όσα βρήκαμε παραπάνω έχουν για συνέπεια ότι σε μια κατάλληλη γειτονιά κάθε σημείου (x_0,y_0) η απεικόνιση είναι αμφιμονοσήμαντη, δηλαδή όχι μόνον σε κάθε αρχέτυπο (x,y) από τη γειτονιά αυτή αντιστοιχεί μια ορισμένη εικόνα (u,v) αλλά και, αντιστρόφως, κάθε εικόνα (u,v) είναι εικόνα ενός και μόνον ενός, αρχέτυπου (x,y) κειμένου στη θεωρούμενη γειτονιά του σημείου (x_0,y_0).

Το ερώτημα αν και κάθε σημείο του επιπέδου των (u,v) είναι εικόνα κάποιου σημείου του επιπέδου των (x,y) και το αν η απεικόνιση (399.5) είναι αμφιμονοσήμαντη συνολικά (δηλαδή αν σε δυό οποιαδήποτε διάφορα (x,y) του επιπέδου XOY αντιστοιχούν πάντοτε δυο διάφορα (u,v) του επιπέδου UOV) είναι ερωτήματα που δεν μπορούν να λάβουν απάντηση βάσει μόνο της γενικής θεωρίας των εμπλεγμένων συναρτήσεων που εκθέσαμε.

Για το προκείμενο παράδειγμα η απάντηση στα ερωτήματα είναι καταφατική.

Πράγματι η απαλοιφή του y μεταξύ των δυο εξισώσεων (399.5) δίνει την εξίσωση

$$u = x + \frac{1}{2}\,\text{συν}\left(v - \frac{1}{2}\,\text{συν}\,x\right) = \alpha(x,v),$$

όπου η $\alpha(x,v)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του x για δοσμένο σταθερό v επειδή έχει παράγωγο

$$\alpha'_x(x,v) = 1 - \frac{1}{2}\,\text{ημ}\left(v - \frac{1}{2}\,\text{συν}\,x\right)\cdot\frac{1}{2}\,\text{ημ}\,x \geqq 1 - \frac{1}{4}$$

θετική για όλες τις τιμές του x από $-\infty$ έως $+\infty$.

Επί πλέον έχουμε προφανώς, όποιο κιαν είναι το v,

$\lim_{x\to-\infty} \alpha(x,v) = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} \alpha(x,v) = +\infty$.

Άρα, αφού δοθούν αυθαιρέτως τα u, v, υπάρχει μία και μόνο μία τιμή του x για την οποία ισχύει η εξίσωση $\alpha(x,v)=u$ που λάβαμε απαλείφοντας το y.

Ύστερα από αυτόν τον προσδιορισμό του x η 2^{η} εξίσωση (399.5) προσδιορίζει μονότροπα το y:

$$y = v - \frac{1}{2}\,\text{συν}\,x.$$

Άρα κάθε (u,v) είναι εικόνα (αντίστοιχο) ενός (x,y) και μόνον ενός, ο.ε.δ.

§ 400. Τύπος του Taylor για συναρτήσεις περισσότερων της μιας μεταβλητών.

Ιδού το σχετικό θεώρημα για συναρτήσεις δυο μεταβλητών (ανάλογη είναι η διατύπωση για συναρτήσεις περισσότερων μεταβλητών):

Έστω $\sigma(x,y)$ μια συνάρτηση ορισμένη μονοσήμαντα και με συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι και της τάξεως $\nu+1$ τουλάχιστο (ν φυσικός) σε μια γειτονιά $|x-\alpha|<\rho$, $|y-\beta|<\rho$ ενός σημείου (α,β).

Αν $(\alpha+\Delta x, \beta+\Delta y)$ είναι ένα τυχαίο σημείο απ' αυτήν τη γειτονιά, θα ισχύη το ανάπτυγμα:

(400.1)

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha+\Delta x,\beta+\Delta y) = \sigma(\alpha,\beta) &+ \left(\sigma'_x(\alpha,\beta)\Delta x + \sigma'_y(\alpha,\beta)\Delta y\right)\\ &+ \frac{1}{2!}\left(\sigma''_{xx}(\alpha,\beta)\Delta x^2 + 2\sigma''_{xy}(\alpha,\beta)\Delta x\Delta y + \sigma''_{yy}(\alpha,\beta)\Delta y^2\right)\\ &+ \cdots\cdots\\ &+ \frac{1}{\nu!}\left(\sigma^{(\nu)}_{x^\nu}(\alpha,\beta)\Delta x^\nu + \frac{\nu}{1}\sigma^{(\nu)}_{x^{\nu-1}y}(\alpha,\beta)\Delta x^{\nu-1}\Delta y + \cdots\right.\\ &\left.+ \frac{\nu}{1}\sigma^{(\nu)}_{xy^{\nu-1}}(\alpha,\beta)\Delta x\Delta y^{\nu-1} + \sigma^{(\nu)}_{y^\nu}(\alpha,\beta)\Delta y^\nu\right) + R_{\nu+1},\end{aligned}$$

όπου το υπόλοιπο $R_{\nu+1}$ κατά Lagrange είναι της μορφής

$$R_{\nu+1} = \frac{1}{(\nu+1)!}\left(\sigma^{(\nu+1)}_{x^{\nu+1}}(\xi,\eta)\Delta x^{\nu+1} + \frac{\nu+1}{1}\sigma^{(\nu+1)}_{x^\nu y}(\xi,\eta)\Delta x^\nu\Delta y + \cdots\right.$$

$$\cdots + \frac{\nu+1}{1}\, \sigma^{(\nu+1)}_{xy^\nu}(\xi,\eta)\,\Delta x\,\Delta y^\nu + \sigma^{(\nu+1)}_{y^{\nu+1}}(\xi,\eta)\,\Delta y^{\nu+1}\Big).$$

Το σημείο (ξ,η) είναι εδώ κάποιο κατάλληλο <u>εσωτερικό</u> σημείο του ευθύγραμμου τμήματος που έχει άκρα τα σημεία (α,β) και $(\alpha+\Delta x,\ \beta+\Delta y)$.

Το σημείο (ξ,η) μπορεί να γραφή και με τη μορφή $(\alpha+\theta\cdot\Delta x,\ \beta+\theta\cdot\Delta y)$, όπου θ κατάλληλος αριθμός μεταξύ 0 και 1: $0<\theta<1$.

Η απόδειξη του παραπάνω <u>«τύπου του Taylor»</u> βρίσκεται, αν εφαρμόσουμε τον τύπο του Taylor, που ξέρουμε για συναρτήσεις μιας μεταβλητής, στη συνάρτηση

$$S(t)=\sigma(\alpha+t\cdot\Delta x,\ \beta+t\cdot\Delta y)$$

για $0 \leqq t \leqq 1$.

Έχουμε

$$S(0)=\sigma(\alpha,\beta),\quad S(1)=\sigma(\alpha+\Delta x,\ \beta+\Delta y),$$

$$S'(t)=\sigma'_x(\alpha+t.\Delta x,\ \beta+t.\Delta y).\Delta x+\sigma'_y(\alpha+t.\Delta x,\ \beta+t.\Delta y).\Delta y,$$

$$S''(t)=(\sigma''_{x^2}\,\Delta x+\sigma''_{xy}\,\Delta y)\Delta x+(\sigma''_{yx}\,\Delta x+\sigma''_{y^2}\,\Delta y).\Delta y=$$

$$=\sigma''_{x^2}\,\Delta x^2+2\,\sigma''_{xy}\,\Delta x\,\Delta y+\sigma''_{y^2}\,\Delta y^2,$$

και γενικώς, με μαθηματική επαγωγή,

$$S^{(\kappa)}(t)=\sigma^{(\kappa)}_{x^\kappa}\,\Delta x^\kappa+\binom{\kappa}{1}\sigma^{(\kappa)}_{x^{\kappa-1}y}\,\Delta x^{\kappa-1}\Delta y+\binom{\kappa}{2}\sigma^{(\kappa)}_{x^{\kappa-2}y}\,\Delta x^{\kappa-2}\Delta y^2+\cdots$$

$$\cdots+\binom{\kappa}{\kappa}\sigma^{(\kappa)}_{y^\kappa}\,\Delta y^\kappa,$$

όπου οι παράγωγοι λαμβάνονται στη θέση $(\alpha+t\Delta x,\ \beta+t\Delta y)$.

Εξ άλλου είναι κατά τον τύπο του Taylor που ξέρουμε

$$S(1)=S(0)+S'(0)(1-0)+\frac{1}{2}\,S''(0)(1-0)^2+\cdots+\frac{1}{\nu!}\,S^{(\nu)}(0)(1-0)^\nu+R_{\nu+1},$$

όπου κατά Lagrange

$$R_{\nu+1}=\frac{1}{(\nu+1)!}\,S^{(\nu+1)}(\theta)\cdot(1-0)^{\nu+1}$$

με θ κατάλληλο από το διάστημα $0<\theta<1$.
Από τις σχέσεις αυτές έπεται αμέσως τώρα το αποδεικτέο (400.1).

Σχόλια 1) Ο τύπος της μέσης τιμής

$$\sigma(\alpha+\Delta x,\beta+\Delta y)=\sigma(\alpha,\beta)+\sigma'_x(\alpha+\theta\Delta x,\beta+\theta\Delta y)\Delta x+\sigma'_y(\alpha+\theta\Delta x,\beta+\Delta y)\Delta y$$

μπορεί να θεωρηθή μερική περίπτωση του παραπάνω τύπου (400.1) για $\nu=0$.

2) Όταν $(\alpha,\beta)=(0,0)$ ο τύπος του Taylor (400.1) λέγεται και τύπος Maclaurin.

Ασκήσεις στο 24ο κεφάλαιο

424. *Βρήτε την τιμή της μερικής παραγώγου $\sigma'_x(-3,2)$ για τις ακόλουθες συναρτήσεις:*

α) $\sigma(x,y)=x^3-3x^2y+2y^2-5x+6y-4$,

β) $\sigma(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$,

γ) $\sigma(x,y)=\ln(x^2+y^2)$, δ) $\sigma(x,y)=e^{x^2-y^2}$.

425. *Βρήτε την τιμή της μερικής παραγώγου $\sigma'_y(-2,-1)$ των εξής συναρτήσεων*

α) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, β) $\sqrt{x^2-\frac{5}{2}xy+5y^2}$ γ) $\text{τοξεφ}\,\dfrac{y}{x}$ δ) $\text{τοξημ}\,\dfrac{y}{x}$.

426. *Χωρίς να επιλύσετε τις παρακάτω εξισώσεις ως προς y εκφράστε, συναρτήσει των ζευγών από αντίστοιχες τιμές των x και y, την παράγωγο της εμπλεγμένης συνάρτησης $y=y(x)$ την οποία ορίζει η κάθε μια τους:*

$$x^2-2xy-y^2=0,$$
$$x^2+3xy-8y^2+2x-4y+5=0$$
$$x^3+y^3-1=0$$

427. Αποδείξτε ότι, αν το y ορίζεται ως εμπλεγμένη συνάρτηση του x από τη σχέση $F(x,y)=0$, θα είναι:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{(F'_y)^3}\begin{vmatrix} 0 & F'_x & F'_y \\ F'_x & F''_{x^2} & F''_{xy} \\ F'_y & F''_{yx} & F''_{y^2} \end{vmatrix}$$

428. Έστω $y=y(x)$ η εμπλεγμένη συνάρτηση που ορίζει η εξίσωση

$$x^y=y^x \quad (\text{για } x \text{ και } y \text{ θετικά})$$

Βρήτε την παράγωγο $\dfrac{dy}{dx}$ και την $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

429. Βρήτε τα πρώτα ολικά διαφορικά των συναρτήσεων:

$$\text{ημ}(x^2+y^2), \quad \ln\sqrt{x^2+y^2}, \quad \frac{1}{+\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

όταν x,y,z ανεξάρτητες μεταβλητές.

430. Βρήτε το πρώτο ολικό διαφορικό της συναρτήσεως $u=xy^{1/2}\ln z$ πρώτον όταν τα x,y,z είναι ανεξάρτητες μεταβλητές και δεύτερον όταν τα x,y,z τεθούν αντιστοίχως ίσα με τις εξής συναρτήσεις των ξ και η:

$$x=\frac{1}{\xi}, \quad y=1-\xi^2-\eta^2, \quad z=\text{ημ}(\xi-\eta).$$

431. Επαληθεύστε τη σχέση $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(xy)$ για τις εξής συναρτήσεις $f(x,y)$:

α) $\text{συν}(2x+y)-\text{ημ}(xy^2)$, β) x^2+y-e^{5xy}.

432. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial^3\sigma}{\partial x\partial y\partial z} \quad \text{και} \quad \frac{\partial^3\sigma}{\partial x^2\partial y}$$

της $\sigma(x,y,z)=(x^2+y^2)^z$.

433. Να εκφραστή η 2η παράγωγος $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ της συναρτήσεως $y=y(x)$ με τη βοήθεια των πολικών συντεταγμένων (ρ,θ) καθώς και των παραγώγων $\dfrac{d\rho}{d\theta}$ και $\dfrac{d^2\rho}{d\theta^2}$ της ρ ως προς θ.

434. Να υπολογισθή η Ιακωβιανή $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ των

$$u=x^2-y^2 \quad \text{και} \quad v=2xy$$

ως προς x,y. Ν'αντιστραφή το σύστημα και να υπολογισθή η Ιακωβιανή $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ των x και y ως προς u και v.
Επαληθεύετε ότι

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1$$

435. Η μερική διαφορική εξίσωση

$$a^2\frac{\partial^2y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2y}{\partial t^2}=0$$

μιας παλλόμενης χορδής να μετασχηματισθή δια της εισαγωγής των εξής νέων ανεξάρτητων μεταβλητών: $u=x+at$, $v=x-at$ στη θέση των αρχικών x και t.

436. Η παράσταση:

$$\left(\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}\right)^2$$

να μετασχηματισθή σε πολικές συντεταγμένες του χώρου, δηλαδή δια του μετασχηματισμού

$$x=\rho\,\text{συν}\theta\,\text{ημ}\varphi\ ,\quad y=\rho\,\text{ημ}\theta\,\text{ημ}\varphi\ ,\quad z=\rho\,\text{συν}\varphi .$$

437. Η συνάρτηση:

$$z=4x^3+y^3-2x^2y-y^2-x^2+3x$$

να αναπτυχθή κατά Taylor στη θέση $x=1$, $y=-2$.

(Να προχωρήσετε ως τους όρους $3^{ου}$ βαθμού ως προς τις αυξήσεις $\Delta x, \Delta y$ των ανεξάρτητων μεταβλητών).

438. Εφαρμόστε τον τύπο του Taylor στις συναρτήσεις:

α) $\eta\mu(x^2-y^2)$, β) $\ln_+\sqrt{x^2+y^2}$, γ) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

στις εξής αντιστοίχως θέσεις:

$$\left(x=+\sqrt{\frac{\pi}{2}},\, y=0\right), \left(x=0,\, y=1\right), \left(x=1,\, y=1,\, z=-1\right).$$

θα δώσετε τους όρους του αναπτύγματος μέχρι και των δευτεροβαθμίων ως προς τις αυξήσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών και κατόπιν το υπόλοιπον.

439. Ποιές είναι οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται από τις σταθερές α και β μέσα στη συνάρτηση

$$y = e^{\alpha x+\beta t+\gamma}$$

για να ισχύη από ταυτότητα ως προς x και t η σχέση

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = A\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + B\,\frac{\partial y}{\partial t}$$

όπου A και B δοσμένες σταθερές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 25º

§401. Ακρότατα συναρτήσεως περισσότερων από μια ανεξάρτητων μεταβλητών. Έστω $\sigma(x,y)$ μια μονοσήμαντη συνάρτηση και (x_0, y_0) ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της. Λέμε ότι η $\sigma(x,y)$ έχει τοπικό (ή σχετικό) μέγιστο στη θέση (x_0, y_0), (ή ότι η (x_0, y_0) είναι θέση τοπικού μέγιστου για τη $\sigma(x,y)$), αν :

(401.1) $$\Delta\sigma = \sigma(x_0+h, y_0+k) - \sigma(x_0,y_0) < 0$$

για όλα τα h και k που είναι απολύτως αρκετά μικρά (και που, εννοείται, δεν είναι αμφότερα μηδέν), δηλαδή για

$$0 < h^2 + k^2 < \text{κατάλληλου θετικού αριθμού } \eta.$$

Λέμε ότι η $\sigma(x,y)$ έχει <u>τοπικό</u> (ή σχετικό) <u>ελάχιστο</u> στη θέση (x_0,y_0) αν

(401.2) $$\Delta\sigma = \sigma(x_0+h, y+k) - \sigma(x_0,y_0) > 0$$

για όλα τα h και k που είναι απολύτως αρκετά μικρά (και όχι αμφότερα μηδέν), δηλαδή για

$$0 < h^2 + k^2 < \text{κατάλληλου θετικού αριθμού } \eta.$$

Κοινό όνομα για το μέγιστο και το ελάχιστο είναι το <u>«ακρότατο»</u>.
Για να βρούμε τις τοπικά ακρότατες τιμές μιας συναρτήσεως $\sigma(x,y)$ προσδιορίζουμε πρώτα τις θέσεις του πεδίου ορισμού της που είναι θέσεις ακροτάτων και κατόπιν τις τιμές της συναρτήσεως σ' αυτές τις θέσεις.
Με την προϋπόθεση ότι <u>υπάρχουν</u> μερικές παράγωγοι $\sigma'_x(x_0,y_0)$ και $\sigma'_y(x_0,y_0)$ στη θέση (x_0,y_0), έχουμε την εξής <u>αναγκαία</u> συνθήκη για να είναι το <u>εσωτερικό</u> σημείο (x_0,y_0) θέση ακρότατου για την $\sigma(x,y)$:

(401.3) $$\sigma'_x(x_0,y_0)=0 \quad \text{και} \quad \sigma'_y(x_0,y_0)=0.$$

Πράγματι, αν η $\sigma(x,y)$ έχη ακρότατο στο (x_0,y_0), θα έχη η $\sigma(x,y_0)$ ακρότατο για $x=x_0$ και επομένως θα είναι, σύμφωνα με όσα ξέρουμε, $\sigma'_x(x_0,y_0)=0$, επίσης θα έχη η $\sigma(x_0,y)$ ακρότατο για $y=y_0$ και επομένως θα είναι $\sigma'_y(x_0,y_0)=0$.
Η συνθήκη δεν είναι <u>ικανή</u> για την <u>ύπαρξη</u> ακροτάτου.
Πράγματι η $\sigma(x,y)=x^2-y^2$ ικανοποιεί τη συνθήκη στη θέση $(0,0)$:

$$\sigma'_x(0,0) = 2x\Big|_{x=0} = 0$$

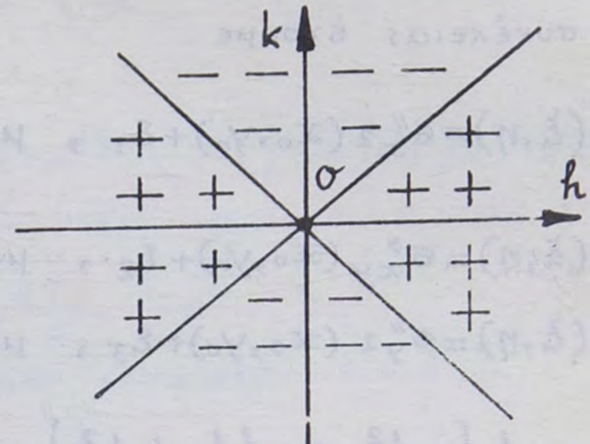
και

$$\sigma'_y(0,0) = -2y\Big|_{y=0} = 0,$$

δεν έχει όμως ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο στη θέση αυτή διότι

$$\sigma(0+h,0+k)-\sigma(0,0)=$$

$$=h^2-k^2\begin{cases}>0 & \text{για } |h|>|k| \\ <0 & \text{» } |h|<|k|\end{cases}.$$



Με την προϋπόθεση ότι υπάρχουν μερικές παράγωγοι $2^{ας}$ τάξεως

(401.4)

$$\sigma''_{x^2}(x,y)=r(x,y),\quad \sigma''_{xy}(x,y)=s(x,y),\quad \sigma''_{y^2}(x,y)=t(x,y)$$

σε μια ολόκληρη γειτονιά του (x_0,y_0) και ότι είναι συνεχείς συναρτήσεις των (x,y) σ' αυτή τη γειτονιά, ισχύουν οι εξής ικανές συνθήκες: Αν

(401.5)
$$\begin{cases}\sigma'_x(x_0,y_0)=\sigma'_y(x_0,y_0)=0, \\ [\sigma''_{xy}(x_0,y_0)]^2-\sigma''_{x^2}(x_0,y_0)\,\sigma''_{y^2}(x_0,y_0)=s_0^2-r_0t_0<0,\end{cases}$$

τότε το (x_0,y_0) είναι θέση τοπικού ακροτάτου για την $\sigma(x,y)$, και δη

θέση μέγιστου όταν $r_0=\sigma''_{x^2}(x_0,y_0)<0$,

θέση ελάχιστου όταν $r_0=\sigma''_{x^2}(x_0,y_0)>0$.

(Η $2^η$ υπόθεση (401.5) αποκλείει τον μηδενισμό του $r_0=\sigma''_{x^2}(x_0,y_0)$ και τον t_0, έχει δε για συνέπεια να είναι το t_0 ομόσημο με το r_0).

Αν

(401.6)
$$\begin{cases}\sigma'_x(x_0,y_0)=\sigma'_y(x_0,y_0)=0, \\ s_0^2-r_0t_0>0\end{cases}$$

τότε η $\sigma(x,y)$ δεν έχει ακρότατο στη θέση (x_0,y_0).

Απόδειξη

Κατά τον τύπο του Taylor είναι

$$\Delta\sigma=\sigma(x_0+h,y_0+k)-\sigma(x_0,y_0)=$$

$$=0.h+0.k+\frac{1}{2!}\left[\sigma''_{x^2}(\xi,\eta)h^2+2\sigma''_{xy}(\xi,\eta)hk+\sigma''_{y^2}(\xi,\eta)k^2\right].$$

Λόγω συνέχειας έχουμε

$$\sigma''_{x^2}(\xi,\eta)=\sigma''_{x^2}(x_0,y_0)+\varepsilon_1\ ,\quad \text{με } \varepsilon_1\to 0 \text{ όταν } \rho=\sqrt{h^2+k^2}\to 0,$$

$$\sigma''_{xy}(\xi,\eta)=\sigma''_{xy}(x_0,y_0)+\varepsilon_2\ ,\quad \text{με } \varepsilon_2\to 0 \text{ όταν } \rho=\sqrt{h^2+k^2}\to 0,$$

$$\sigma''_{y^2}(\xi,\eta)=\sigma''_{y^2}(x_0,y_0)+\varepsilon_3\ ,\quad \text{με } \varepsilon_3\to 0 \text{ όταν } \rho=\sqrt{h^2+k^2}\to 0.$$

Άρα

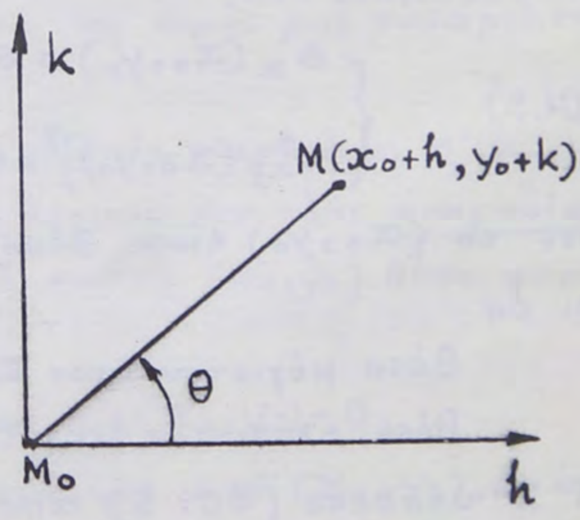
$$\Delta\sigma=\frac{1}{2}\left[r_0h^2+2S_0hk+t_0k^2\right]+\frac{1}{2}\left[\varepsilon_1h^2+2\varepsilon_2hk+\varepsilon_3k^2\right].$$

Μεταβαίνοντας σε πολικές συντεταγμένες με πόλο το $M_0(x_0,y_0)$ και πολικό άξονα M_0h θέτουμε

$$h=\rho\,\text{συν}\theta\ ,\quad k=\rho\,\text{ημ}\theta.$$

Θα έχουμε τότε:

$$\Delta\sigma=\frac{1}{2}\rho^2\left(r_0\,\text{συν}^2\theta+2S_0\,\text{συν}\theta\,\text{ημ}\theta+t_0\,\text{ημ}^2\theta\right)+\frac{1}{2}\rho^2\left(\varepsilon_1\,\text{συν}^2\theta+2\varepsilon_2\,\text{συν}\theta\,\text{ημ}\theta+\varepsilon_3\,\text{ημ}^2\theta\right)$$



Ας υποθέσουμε ότι είναι

$$S_0^2-r_0t_0<0 \text{ και } r_0>0.$$

Τότε η <u>συνεχής</u> συνάρτηση

$$f(\theta)=r_0\,\text{συν}^2\theta+2S_0\,\text{ημ}\theta\,\text{συν}\theta+t_0\,\text{ημ}^2\theta,\ (0\leqq\theta\leqq 2\pi),$$

δεν μηδενίζεται για κανένα θ και η τιμή της είναι ομόσημη με το r_0, δηλαδή θετική συνεπώς η $f(\theta)$ παίρνει μιαν ελάχιστη τιμή $F>0$, όταν το θ διατρέχει το περιορισμένο και κλειστό διάστημα $0\leqq\theta\leqq 2\pi$.

Για $\rho=\sqrt{h^2+k^2}$ αρκετά μικρό (επειδή $\varepsilon_1\longrightarrow 0$,

$\varepsilon_2 \longrightarrow 0$, $\varepsilon_3 \longrightarrow 0$).

(401.7)
$$|\varepsilon_1| < \frac{F}{8} \quad , \quad |\varepsilon_2| < \frac{F}{8} \quad , \quad |\varepsilon_3| < \frac{F}{8} \quad ,$$

και με οποιοδήποτε θ

$$|\varepsilon_1 \sigma\upsilon\nu^2\theta + 2\varepsilon_2 \sigma\upsilon\nu\theta\, \eta\mu\theta + \varepsilon_3 \eta\mu^2\theta| < |\varepsilon_1| + 2|\varepsilon_2| + |\varepsilon_3| < \frac{F}{2} .$$

Άρα για ρ θετικό και αρκετά μικρό (όποιο κιαν είναι το θ)

$$\Delta\sigma > \frac{1}{2}\rho^2 F - \frac{1}{2}\rho^2 \frac{F}{2} = \frac{1}{4}\rho^2 F > 0 ,$$

συνεπώς το (x_0, y_0) είναι θέση ελαχίστου ο.ε.δ.

Έστω δεύτερον

$$S_0^2 - r_0 t_0 < 0 \text{ και } r_0 < 0 .$$

Εφαρμόζοντας αυτό, που αποδείξαμε, στη συνάρτηση $-\sigma(x,y)$ βρίσκουμε ότι η $-\sigma(x,y)$ έχει ελάχιστο στη θέση (x_0, y_0), άρα η $\sigma(x_0,y_0)$ έχει μέγιστο στη $\sigma(x_0, y_0)$, ο.ε.δ.

Ας υποθέσουμε τέλος ότι $S_0^2 - r_0 t_0 > 0$.

Τότε η συνάρτηση $f(\theta) = r_0 \sigma\upsilon\nu^2\theta + 2S_0 \sigma\upsilon\nu\theta\, \eta\mu\theta + t_0 \eta\mu^2\theta =$

$$= \sigma\upsilon\nu^2\theta \left(t_0 (\varepsilon\varphi\theta)^2 + 2S_0 (\varepsilon\varphi\theta) + r_0 \right)$$

μηδενίζεται, αλλάζοντας κάθε φορά πρόσημο, για τέσσερις τιμές του θ από το διάστημα $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$.

Επομένως για κάποιο θ_1 θα είναι $f(\theta_1) = F_1 < 0$ και για κάποιο θ_2, $f(\theta_2) = F_2 > 0$.

Παίρνοντας $h = \rho\, \sigma\upsilon\nu\theta_1$, $k = \rho\, \eta\mu\theta_1$ έχουμε

$$\Delta\sigma = \frac{1}{2}\rho^2 F_1 + \frac{1}{2}\rho^2 \left(\varepsilon_1^2 \sigma\upsilon\nu^2\theta + 2\varepsilon_2 \sigma\upsilon\nu\theta_1 \eta\mu\theta_1 + \varepsilon_3 \eta\mu^2\theta_1 \right) ,$$

άρα

$$\Delta\sigma \leqq \frac{1}{2}\rho^2 \left(F_1 + |\varepsilon_1| + 2|\varepsilon_2| + |\varepsilon_3| \right) .$$

Επομένως για αρκετά μικρό θετικό ρ και για $\theta = \theta_1$ (επειδή $|F_1| = -F_1$ και, λόγω των (401.7), $|\varepsilon_1| + 2|\varepsilon_2| + |\varepsilon_3| < \frac{|F_1|}{2}$)

θα έχουμε

$$\Delta\sigma < \frac{1}{2}\rho^2\left(F_1 - \frac{F_1}{2}\right) = \frac{1}{2}\rho^2\frac{F_1}{2} < 0 .$$

Παίρνοντας $h = \rho\,\sigma\upsilon\nu\theta_2$, $k = \rho\,\eta\mu\theta_2$ έχουμε

$$\Delta\sigma = \frac{1}{2}\rho^2 F_2 + \frac{1}{2}\rho^2\left(\varepsilon_1^2\,\sigma\upsilon\nu^2\theta_2 + 2\varepsilon_2\,\sigma\upsilon\nu\theta_2\,\eta\mu\theta_2 + \varepsilon_3\,\eta\mu^2\theta_2\right),$$

άρα

$$\Delta\sigma \geqq \frac{1}{2}\rho^2\left(F^2 - |\varepsilon_1| - 2|\varepsilon_2| - |\varepsilon_3|\right)$$

και επομένως για αρκετά μικρό θετικό ρ και για $\theta = \theta_2$ θα είναι

$$\Delta\sigma \geqq \frac{1}{2}\rho^2\left(F_2 - \frac{F_2}{2}\right) = \frac{1}{2}\rho^2\frac{F_2}{2} > 0 .$$

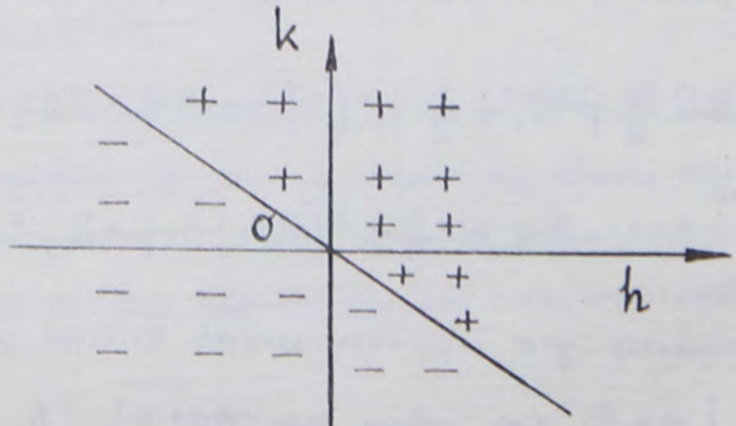
Άρα δεν πραγματοποιείται ούτε η συνθήκη (401.2) του ελαχίστου ούτε η (401.1) του μεγίστου.
Επομένως η $\sigma(x,y)$ στην περίπτωση $S_0^2 - r_0 t_0 > 0$ δεν έχει ακρότατο, ο.ε.δ.

Σχόλια. Για συμπλήρωση θα μπορούσε να τεθή το ερώτημα: τι συμβαίνει όταν $S_0^2 - r_0 t_0 = 0$; Σ'αυτήν την περίπτωση τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά όπως στις δυό παραπάνω περιπτώσεις $S_0^2 - r_0 t_0 < 0$ και $S_0^2 - r_0 t_0 > 0$ · όχι μόνο έχει να διακρίνη κανείς πολλές διαφορετικές υποπεριπτώσεις, πράγμα που φαίνεται κιόλας από τα ακόλουθα τετριμμένα παραδείγματα, αλλά και για κάποια από αυτές τις υποπεριπτώσεις δεν υπάρχη γενική απάντηση.

α) $\sigma(x,y) = x^4 + y^4$. Στη θέση $(0,0)$ είναι $S_0^2 - r_0 t_0 = 0$. Η $\sigma(x,y)$ έχει προφανώς ελάχιστο στη θέση $(0,0)$ το μηδέν.

β) $\sigma(x,y) = x^3 + y^3$.

Στη θέση $(0,0)$ είναι $S_0^2 - r_0 t_0 = 0$. Η $\sigma(x,y)$ δεν έχει ακρότατο στη θέση $(0,0)$. Πράγματι (Βλέπε και το παραπλεύρως σχήμα).



$$\Delta\sigma=\sigma(0+h,0+k)-\sigma(0,0)=h^3+k^3 \begin{cases} >0 & \text{για } h+k>0 \\ <0 & \text{για } h+k<0 \\ =0 & \text{για } h+k=0 \end{cases}$$

γ) $\sigma(x,y)=(x-y)^2=x^2+y^2-2xy$. Στη θέση $(0,0)$ είναι $S_0^2-r_0t_0=(-2)^2-2.2=0$. Η $\sigma(x,y)$ είναι >0 για $x\neq y$ και $=0$ για $x=y$, άρα έχει ένα ελάχιστο με "ευρεία σημασία" στη θέση $(0,0)$, ενώ το ελάχιστο που ορίσαμε με τη συνθήκη (401.2) είναι ένα ελάχιστο με «στενή σημασία», επειδή το σημείο της ισότητας στην (401.2) αποκλείεται για όλα τα αρκετά γειτονικά με το (x_0,y_0) σημεία (πλην του M_0 φυσικά).

2). Η θεωρία που δώσαμε για συναρτήσεις δυο ανεξάρτητων μεταβλητών επεκτείνεται κατά ευνόητο τρόπο σε συναρτήσεις 3 ή περισσότερων μεταβλητών. Π.χ. για συναρτήσεις $\sigma(x,y,z)$ έχουμε: Αναγκαία συνθήκη για να είναι η εσωτερική θέση (x_0,y_0,z_0) θέση ακροτάτου είναι η εξής:

(401.8) $$\sigma'_x(x_0,y_0,z_0)=\sigma'_y(x_0,y_0,z_0)=\sigma'_z(x_0,y_0,z_0)=0$$

(με την προϋπόθεση φυσικά ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι αυτές).

Ικανή συνθήκη για την ύπαρξη ενός ακροτάτου στην εσωτερική θέση (x_0,y_0,z_0) είναι τα εξής:

(401.9)

$$\begin{cases} \sigma'_x(x_0,y_0,z_0)=\sigma'_y(x_0,y_0,z_0)=\sigma'_z(x_0,y_0,z_0)=0 \\ \sigma''_{x^2}(x_0,y_0,z_0)h^2+\sigma''_{y^2}k^2+\sigma''_{z^2}l^2+2\sigma''_{xy}hk+2\sigma''_{xz}hl+2\sigma''_{yz}kl\neq 0 \\ \qquad\qquad \text{για}(h,k,l)\neq(0,0,0). \end{cases}$$

Το ακρότατο είναι μέγιστο όταν το παραπάνω δευτεροβάθμιο και ομογενές ως προς h,k,l πολυώνυμο είναι πάντοτε <0 για $(h,k,l)\neq(0,0,0)$ και ελάχιστο όταν το πολυώνυμο είναι πάντοτε >0 για $(h,k,l)\neq(0,0,0)$.

Παρατηρούμε ότι λόγω της δεύτερης σχέσεως (401.9) το πολυώνυμο δεν μπορεί να αλλάζη πρόσημο, όταν το (h,k,l) διατρέχη το σύνολο των διατεταγμένων τριάδων πραγματικών αριθμών.

Ικανή συνθήκη για να μην έχη η $\sigma(x,y,z)$ ακρότατο στη θέση (x_0,y_0,z_0) είναι η εξής:

(401.10)

$$\begin{cases} \sigma'_x(x_0,y_0,z_0)=\sigma'_y(x_0,y_0,z_0)=\sigma'_z(x_0,y_0,z_0)=0 \\ \sigma''_{x^2}(x_0,y_0,z_0)h^2+\sigma''_{y^2}k^2+\sigma''_{z^2}l^2+2\sigma''_{xy}hk+2\sigma''_{xz}hl+2\sigma''_{yz}kl>0 \\ \text{για μερικές τριάδες } (h,k,l) \text{ και } <0 \text{ για μερικές άλλες } (h,k,l). \end{cases}$$

§ 402. Δεσμευμένα ακρότατα.

Τα ακρότατα που πραγματευθήκαμε ως τώρα λέγονται ελεύθερα για διάκριση από τα ακρότατα του παρακάτω είδους που λέγονται δεσμευμένα.

Πρόβλημα. Από τις θέσεις (x,y,z) που ικανοποιούν τη σχέση $\varphi(x,y,z)=0$ ποιες μπορούν να δώσουν στη συνάρτηση $\sigma(x,y,z)$ τοπικό ακρότατο;

Πραγμάτευση του προβλήματος. Η σχέση $\varphi(x,y,z)=0$ υποτίθεται ότι ορίζει μιαν από τις μεταβλητές, π.χ. τη z, ως εμπλεγμένη μονοσήμαντη συνάρτηση των δυο άλλων: $z=f(x,y)$, σε μια γειτονιά V της θέσεως (x_0,y_0,z_0)· αυτό όπως ξέρουμε, είναι εξασφαλισμένο αν υπάρχουν συνεχείς παράγωγοι $\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z$ στη γειτονιά V και αν είναι $\varphi'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$. Εισαγάγουμε την $z=f(x,y)$ μέσα στη $\sigma(x,y,z)$ και λαμβάνουμε τη συνάρτηση

$$S(x,y)=\sigma\big(x,y,f(x,y)\big)$$

δυο ανεξάρτητων μεταβλητών x,y στη γειτονιά (x_0,y_0).

Για να μπορή να είναι η θέση αυτή (x_0,y_0) θέση ακροτάτου για την $S(x,y)$ πρέπει κατά τον προηγούμενο παράγραφο να έχουμε

$$S'_x(x_0,y_0)=S'_y(x_0,y_0)=0,$$

δηλαδή (αν λάβουμε υπ' όψη ότι $z_0=f(x_0,y_0)$)

$$\sigma'_x(x_0,y_0,z_0)+\sigma'_z\cdot z'_x(x_0,y_0)=\sigma'_x(x_0,y_0,z_0)-\sigma'_z(x_0,y_0,z_0)\cdot\frac{\varphi'_x(x_0,y_0,z_0)}{\varphi'_z(x_0,y_0,z_0)}=0$$

και

$$\sigma'_y(x_0,y_0,z_0)+\sigma'_z\cdot z'_y(x_0,y_0)=\sigma'_y(x_0,y_0,z_0)-\sigma'_z(x_0,y_0,z_0)\frac{\varphi'_y(x_0,y_0,z_0)}{\varphi'_z(x_0,y_0,z_0)}=0.$$

Οι σχέσεις αυτές μπορούν να γραφούν και ως εξής:

$$\begin{vmatrix}\sigma'_x(x_0,y_0,z_0) & \sigma'_z(x_0,y_0,z_0)\\ \varphi'_x(x_0,y_0,z_0) & \varphi'_z(x_0,y_0,z_0)\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}\sigma'_y(x_0,y_0,z_0) & \sigma'_z(x_0,y_0,z_0)\\ \varphi'_y(x_0,y_0,z_0) & \varphi'_z(x_0,y_0,z_0)\end{vmatrix}=0.$$

Έτσι βλέπουμε ότι οι παραπάνω σχέσεις (που αποτελούν την <u>αναγκαία</u> μόνο συνθήκη για να είναι η θέση (x_0,y_0) θέση <u>ακροτάτου</u> για την $S(x,y)$, και, επομένως, η θέση (x_0,y_0,z_0) θέση <u>ακροτάτου</u> για την $\sigma(x,y,z)$ με την δέσμευση $\varphi(x,y,z)=0$), συμπίπτουν με τη συνθήκη για την επιλυσιμότητα του γραμμικού συστήματος ως προς τον άγνωστο λ

$$\begin{cases}\sigma'_x(x_0,y_0,z_0)+\lambda\varphi'_x(x_0,y_0,z_0)=0\\ \sigma'_y(x_0,y_0,z_0)+\lambda\varphi'_y(x_0,y_0,z_0)=0\\ \sigma'_z(x_0,y_0,z_0)+\lambda\varphi'_z(x_0,y_0,z_0)=0.\end{cases}$$

Συμπεραίνουμε τώρα από τα παραπάνω ότι, για να βρούμε τις θέσεις (x_0,y_0,z_0) που <u>ενδέχεται</u> να δίνουν <u>τοπικά</u> ακρότατες τιμές στη συνάρτηση $\sigma(x,y,z)$ όταν μεταξύ των x,y,z υφίσταται η δέσμευση $\varphi(x,y,z)=0$, αρκεί να πραγματευθούμε το πρόβλημα του ελεύθερου ακροτάτου για τη συνάρτηση

$$\sigma(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)$$

όπου το λ θεωρείται ως τέταρτη ανεξάρτητη μεταβλητή.
Πράγματι αναγκαία συνθήκη για να είναι μια θέση (x,y,z,λ) θέση ελευθέρου ακροτάτου για τη συνάρτηση

$$\sigma(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)\equiv\omega(x,y,z,\lambda)$$

είναι η ισχύς των τεσσάρων σχέσεων:

$$\omega'_x(x,y,z,\lambda)=0,\ \omega'_y(x,y,z,\lambda)=0,\ \omega'_z(x,y,z,\lambda)=0,\ \omega'_\lambda(x,y,z,\lambda)=0,$$

δηλαδή των

$$\begin{cases} \sigma'_x(x,y,z) + \lambda\varphi'_x(x,y,z) = 0 \\ \sigma'_y(x,y,z) + \lambda\varphi'_y(x,y,z) = 0 \\ \sigma'_z(x,y,z) + \lambda\varphi'_z(x,y,z) = 0 \\ \qquad\qquad \varphi(x,y,z) = 0 . \end{cases}$$

Αυτές οι τέσσερις εξισώσεις θα προσδιορίζουν εν γένει τα συστήματα (x,y,z,λ) τιμών των τεσσάρων αγνώστων x,y,z,λ· οι τρεις πρώτοι αριθμοί (x,y,z) των τετράδων αυτών μας δίνουν τις θέσεις που ζητούμε, δηλαδή εκείνες για τις οποίες ισχύει η $\varphi(x,y,z)=0$ και οι οποίες μπορούν να καθιστούν τοπικώς ακροτάτη την τιμή της $\sigma(x,y,z)$.

Παράδειγμα. Να γίνη η $\sigma(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ ελάχιστο με την δέσμευση $x+y+z=C$, όπου C δοσμένη σταθερά.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $\omega(x,y,z,\lambda) = x^2+y^2+z^2+\lambda\cdot(x+y+z-C)$ και γράφουμε τις αναγκαίες συνθήκες για να είναι η (x,y,z,λ) θέση ελεύθερου ακροτάτου της $\omega(x,y,z,\lambda)$:

$$2x+\lambda=0 \;,\; 2y+\lambda=0 \;,\; 2z+\lambda=0 \;,\; x+y+z-C=0,$$

άρα

$$x=y=z=-\frac{\lambda}{2} \;, \qquad -\frac{3\lambda}{2}-C=0$$

και επομένως

$$\begin{cases} \lambda = -\dfrac{2C}{3} \\ x=y=z=\dfrac{C}{3} \end{cases} .$$

Ώστε μόνο μια θέση, η $\left(\frac{C}{3},\frac{C}{3},\frac{C}{3}\right)$, υπάρχει που <u>ενδέχεται</u> να είναι θέση ελαχίστου για την $x^2+y^2+z^2$ όταν τα x,y,z είναι δεσμευμένα από την $x+y+z=C$. Ότι η θέση αυτή είναι πράγματι θέση ελαχίστου, εξελέγχεται απ' ευθείας ως εξής:
Θέτουμε

$$x=\frac{C}{3}+h \;,\; y=\frac{C}{3}+k \;,\; z=\frac{C}{3}+l,$$

οπότε λόγω της δεσμεύσεως $x+y+z=C$ θα είναι $h+k+l=0$.

Θεωρούμε τώρα την

$$\sigma\left(\frac{c}{3}+h,\frac{c}{3}+k,\frac{c}{3}+l\right)=\left(\frac{c}{3}+h\right)^2+\left(\frac{c}{3}+k\right)^2+\left(\frac{c}{3}+l\right)^2=$$

$$3\frac{c^2}{3^2}+2\cdot\frac{c}{3}(h+k+l)+h^2+k^2+l^2=\frac{c^2}{3}+0+h^2+k^2+l^2.$$

Άρα

$$\sigma\left(\frac{c}{3}+h,\frac{c}{3}+k+\frac{c}{3}+l\right)-\sigma\left(\frac{c}{3},\frac{c}{3},\frac{c}{3}\right)=h^2+k^2+l^2>0$$

για όλες τις τριάδες $(h,k,l)\neq(0,0,0)$ με $h+k+l=0$, άρα η θέση $\left(x=\frac{c}{3},y=\frac{c}{3},z=\frac{c}{3}\right)$ είναι θέση ελαχίστου και η $\sigma\left(\frac{c}{3},\frac{c}{3},\frac{c}{3}\right)=\frac{c^2}{3}$ είναι η ελαχίστη τιμή της συναρτήσεως $\sigma(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, όταν τα x,y,z υποβάλλωνται στη δέσμευση $x+y+z=c$.

Σχόλιο. Ο πρώτος τρόπος να πραγματευθούμε το παράδειγμα θα ήταν να γίνη απαλοιφή του z μέσα στη $x^2+y^2+z^2$ δυνάμει της σχέσεως $x+y+z=c$, δηλαδή της $z=c-x-y$, και να ζητηθούν τα ελεύθερα ελάχιστα της συναρτήσεως

$$S(x,y)=\sigma(x,y,c-x-y)=x^2+y^2+(c-x-y)^2.$$

Έχουμε, εφαρμόζοντας την αναγκαία συνθήκη,

$$S'_x=2x+2(c-x-y)\cdot(-1)=0$$
$$S'_y=2y+2(c-x-y)\cdot(-1)=0.$$

Άρα $x=\frac{c}{3}$, $y=\frac{c}{3}$ (απ' όπου $z=c-\frac{c}{3}-\frac{c}{3}=\frac{c}{3}$).

Εφαρμόζουμε τώρα τις ικανές συνθήκες για την ύπαρξη ελεύθερου ελαχίστου της $S(x,y)$ στη θέση $\left(\frac{c}{3},\frac{c}{3}\right)$. Έχουμε σ' αυτή τη θέση

$$S''^2_{xy}-S''_{x^2}\cdot S''_{y^2}=4-16=-12<0.$$

Άρα υπάρχει ακρότατο της $S(x,y)$ στη θέση $x=\frac{c}{3}$, $y=\frac{c}{3}$, και το ακρότατο αυτό είναι ένα ελάχιστο, επειδή $S''_{x^2}=4>0$.

§ 403. Εφαπτόμενο επίπεδο επιφάνειας $z=\sigma(x,y)$.

Έστω $\Pi_0(x_0,y_0)$ μια θέση που στη γειτονιά της η $\sigma(x,y)$ έχει μερικές παραγώγους $\sigma'_x(x,y)$, $\sigma'_y(x,y)$ συνεχείς. Εφαρμόζοντας τον τύπο (391.1) λαβαίνουμε:

(403.1)
$$\Delta z=\sigma(x,y)-\sigma(x_0,y_0)=\sigma'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+\sigma'_y(x_0,y_0)(y-y_0)+\varepsilon_1(x-x_0)+\varepsilon_2(y-y_0)$$

με $\varepsilon_1\to 0$ και $\varepsilon_2\to 0$ όταν

$$\Pi\Pi_0=+\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0.$$

Τη σχέση αυτή μπορούμε να τη γράψουμε και ως εξής:

(403.2)
$$\Delta z=dz+\eta\cdot+\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

όπου $\eta\to 0$ όταν $\Pi_0\Pi=+\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0$.

θεωρούμε το επίπεδο

(403.3)
$$z-z_0=p_0(x-x_0)+q_0(y-y_0),$$

όπου $p_0=\sigma'_x(x_0,y_0)$, $q_0=\sigma'_y(x_0,y_0)$.

Το διάνυσμα $\overrightarrow{M_0M}$, που ορίζεται από τα δυο σημεία

$$M_0(x_0,y_0,z_0=\sigma(x_0,y_0)) \text{ και } M(x,y,z=\sigma(x,y))$$

της επιφάνειας, σχηματίζει με το διάνυσμα $\bar{n}(p_0,q_0,-1)=(\sigma'_x(x_0,y_0),\sigma'_y(x_0,y_0),-1)$ που είναι κάθετο στο επίπεδο (403.3), μιαν οξεία γωνία ω που το συνημίτονο της είναι:

$$\text{συν}\,\omega=\left|\frac{(x-x_0)p_0+(y-y_0)q_0+(\sigma(x,y)-\sigma(x_0,y_0))(-1)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\cdot\sqrt{p_0^2+q_0^2+1}}\right|,$$

άρα, σύμφωνα με τη σχέση (403.2) επειδή $dz=p_0(x-x_0)+q_0(y-y_0)$,

$$\text{συν}\,\omega=\left|\frac{dz-dz-\eta\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\sqrt{p_0^2+q_0^2+1}}\right|\leq\frac{|\eta|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\sqrt{p_0^2+q_0^2+1}}=\frac{|\eta|}{\sqrt{p_0^2+q_0^2+1}}.$$

Το συνημίτονο αυτό τείνει λοιπόν στο 0, όταν $\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2} = \Pi\Pi_o \longrightarrow 0$, και η γωνία ω επομένως τείνει στην ορθή.

Άρα η γωνία της ευθείας M_oM με το επίπεδο (403.3) τείνει στο 0 όταν $\Pi\Pi_o \longrightarrow 0$. Γιαυτό το επίπεδο (403.3) λέγεται <u>εφαπτόμενο επίπεδο</u> της επιφάνειας στο σημείο της $M_o\big(x_o, y_o, z_o = \sigma(x_o, y_o)\big)$.

Η ευθεία δια του M_o που είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\bar{n}(p_o, q_o, -1)$, άρα κάθετη στο εφαπτόμενο επίπεδο, λέγεται <u>κάθετη</u> στην επιφάνεια στο σημείο της M_o και έχει επομένως εξισώσεις

$$\frac{x-x_o}{\sigma'_x(x_o,y_o)} = \frac{y-y_o}{\sigma'_y(x_o,y_o)} = \frac{z-z_o}{-1}$$

ή

$$\frac{x-x_o}{p_o} = \frac{y-y_o}{q_o} = \frac{z-z_o}{-1}.$$

§404. Μερικές ιδιότητες του εφαπτόμενου επιπέδου.

1) Το εφαπτόμενο επίπεδο

(404.1) $$z - z_o = p_o(x-x_o) + q_o(y-y_o),$$

όπου $p_o = \sigma'_x(x_o, y_o)$, $q_o = \sigma'_y(x_o, y_o)$, περιέχει την εφαπτομένη κάθε γραμμής της επιφάνειας $z = \sigma(x,y)$ δια του M_o (με την προϋπόθεση φυσικά ότι η γραμμή που θεωρούμε πάνω στην επιφάνεια έχει εφαπτομένη στο M_o).

Έστω

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$ μια γραμμή της επιφάνειας δια του $M_o(x_o, y_o, z_o)$. Θα έχουμε τότε για κάποια τιμή t_o της παραμέτρου t $$\begin{cases} x_o = x(t_o) \\ y_o = y(t_o) \\ z_o = z(t_o) \end{cases}$$ και στη γειτονιά αυτής της τιμής t_o την ταυτότητα $z(t) \equiv \sigma\big(x(t), y(t)\big)$ ως προς t. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ έχουν <u>συνεχείς</u> παραγώγους στη γειτονιά του t_o και ότι

$$\left|x'(t_0)\right| + \left|y'(t_0)\right| + \left|z'(t_0)\right| \neq 0,$$

οπότε η θεωρούμενη γραμμή έχει εφαπτομένη στο σημείο M_0 την ευθεία με εξισώσεις (Βλ. § 329):

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)} \; .$$

Έχουμε να δείξουμε ότι η ευθεία αυτή κείται μέσα στο επίπεδο (404.1). Γι' αυτό πρέπει και αρκεί να δείξουμε ότι το διάνυσμα $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ είναι παράλληλο προς το επίπεδο (404.1) επομένως ότι

(404.2) $$z'(t_0) = p_0\, x'(t_0) + q_0\, y'(t_0).$$

Αυτή η σχέση όμως αληθεύει, γιατί, αν παραγωγίσουμε ως προς t κατά μέλη την ταυτότητα

$$z(t) = \sigma\big(x(t), y(t)\big),$$

λαβαίνουμε τη

$$z'(t) = \sigma'_x\big(x(t), y(t)\big)\cdot x'(t) + \sigma'_y\big(x(t), y(t)\big)\cdot y'(t),$$

και αν θέσουμε εδώ μέσα $t = t_0$, προκύπτει η παραπάνω σχέση (404.2).

Από την παραπάνω ιδιότητα του εφαπτόμενου επιπέδου έπεται ότι το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο σημείο της M_0 είναι προσδιορισμένο από τις εφαπτόμενες δυο μόνο γραμμών της επιφάνειας που περνούν από το M_0 και έχουν σ' αυτό το σημείο εφαπτόμενες, αρκεί αυτές οι εφαπτόμενες να μη συμπέφτουν. Τέτοιες γραμμές είναι οι

$$\begin{cases} z = \sigma(x, y_0) \\ y = y_0 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} z = \sigma(x_0, y) \\ x = x_0 \end{cases},$$

που είναι τομές της επιφάνειας με τα επίπεδα δια του M_0 τα παράλληλα προς το XOZ το πρώτο, προς το YOZ το δεύτερο.

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (404.1) παριστάνει το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας και όταν το χρησιμοποιούμενο σύστημα συντεταγμένων είναι πλαγιογώνιο.

2) Ένα επίπεδο T δια του $M_0(x_0, y_0, z_0)$ διάφορο από το εφα-

πτόμενο (404.1) έχει με την επιφάνεια στην γειτονιά του M_0 άπειρα κοινά σημεία που αποτελούν ένα τόξο γραμμής με εφαπτομένη στο M_0 την τομή του εφαπτόμενου επιπέδου (404.1) με το επίπεδο T.

Απόδειξη. Έστω $A(x-x_0)+B(y-y_0)+\Gamma(z-z_0)=0$ η εξίσωση του επιπέδου t. Αφού είναι διάφορο από το (404.1), ο πίνακας $\begin{pmatrix} p_0 & q_0 & -1 \\ A & B & \Gamma \end{pmatrix}$ θα έχη διάσταση **2**. Ας είναι π.χ.

$\begin{vmatrix} q_0 & -1 \\ B & \Gamma \end{vmatrix} \neq 0$. Θέτουμε:

$$f(x,y,z) \equiv \sigma(x,y)-z \quad \text{και}$$

$$g(x,y,z) \equiv A(x-x_0)+B(y-y_0)+\Gamma(z-z_0).$$

Τα κοινά σημεία της επιφάνειας και του επιπέδου u δίνονται από τις λύσεις του συστήματος

(404.2)
$$\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \,. \end{cases}$$

Μια λύση υπάρχει από υπόθεση, η (x_0,y_0,z_0).

Στη θέση όμως (x_0,y_0,z_0) είναι

$$\begin{vmatrix} f'_y(x_0,y_0,z_0) & f'_z(x_0,y_0,z_0) \\ g'_y(x_0,y_0,z_0) & g'_z(x_0,y_0,z_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_0 & -1 \\ B & \Gamma \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Άρα το σύστημα (404.2) έχει στη γειτονιά του (x_0,y_0,z_0) και άλλες, άπειρες, πραγματικές λύσεις που δίνονται από δυο μονοσήμαντες και παραγωγίσιμες συναρτήσεις του x:

$$y = y(x) \quad \text{και} \quad z = z(x)$$
$$\text{με } y_0 = y(x_0) \quad \text{»} \quad z_0 = z(x_0).$$

Συνεπώς η επιφάνεια και το επίπεδο έχουν στη γειτονιά του M_0

κοινά σημεία τα σημεία ενός τόξου γραμμής με εφαπτομένη στα διάφορα σημεία του. Ειδικώς η εφαπτομένη στό σημείο M_0 κείται και μέσα στο εφαπτόμενο επίπεδο (404.1) της επιφάνειας, σύμφωνα με όσα δείξαμε παραπάνω, και μέσα στο επίπεδο t, άρα συμπέφτει με την τομή των δυο επιπέδων, ο.ε.δ.

<u>Εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας $\varphi(x,y,z)=0$.</u> Όταν η εξίσωση της επιφάνειας δεν είναι λυμένη ως προς καμιάν από τις συντεταγμένες και είναι, π.χ. η $\varphi(x,y,z)=0$, τότε, για να εφαρμόσουμε τη θεωρία μας περί εμπλεγμένων συναρτήσεων, υποθέτουμε οτι υπάρχει μια πραγματική λύση, η (x_0,y_0,z_0), (δηλαδή είναι $\varphi(x_0,y_0,z_0)=0$) και ότι στη γειτονιά της υπάρχουν και είναι <u>συνεχείς</u> οι παράγωγοι:

$$\varphi'_x(x,y,z),\quad \varphi'_y(x,y,z),\quad \varphi'_z(x,y,z),$$

$$\text{με}\ \left|\varphi'_x(x,y,z)\right| + \left|\varphi'_y\right| + \left|\varphi'_z\right| \neq 0.$$

Τότε η εξίσωση $\varphi(x,y,z)=0$ ορίζει μια τουλάχιστο από τις συντεταγμένες ως μονοσήμαντη παραγωγίσιμη συνάρτηση των υπολοίπων δυο.

Π.χ. αν $\varphi'_x(x_0,y_0,z_0)\neq 0$, θα υπάρχη μια μονοσήμαντη συνάρτηση $x=x(y,z)$, με $x_0=x(y_0,z_0)$ και με

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\varphi'_y(x,y,z)}{\varphi'_x(x,y,z)},\quad \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{\varphi'_z(x,y,z)}{\varphi'_x(x,y,z)}, \tag{404.3}$$

η οποία ταυτοποιεί την εξίσωση $\varphi(x,y,z)=0$ στη γειτονιά της θέσεως (y_0,z_0). Η συνάρτηση αυτή $x=x(y,z)$ παριστάνει λοιπόν ένα τμήμα επιφάνειας προβαλλόμενο αμφιμονοσήμαντα πάνω στο επίπεδο YOZ. Το τμήμα αυτό έχει, κατ' αναλογία με ότι είπαμε στον § 403, εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $M_0(x_0,y_0,z_0)$, το

$$x-x_0 = \frac{\partial x(y_0,z_0)}{\partial y}(y-y_0) + \frac{\partial x(y_0,z_0)}{\partial z}(z-z_0).$$

Επομένως, λόγω των σχέσεων (404.3), μπορούμε να γράφουμε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου και με την ακόλουθη, πιο συμμετρική ως προς τις συντεταγμένες x, y, z, μορφή:

(404.4)

$$\varphi'_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)+\varphi'_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)+\varphi'_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0)=0,$$

μορφή που επομένως δεν θ' αλλάξη αν την υπόθεση $\varphi'_x(x_0, y_0, z_0)=0$ την αντικαταστήσουμε με μιαν από τις εξής δυο άλλες:

$$\varphi'_y \neq 0 \quad \text{και} \quad \varphi'_z \neq 0.$$

Η παραπάνω εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου ισχύει σε οποιοδήποτε σύστημα ευθύγραμμων συντεταγμένων. Αν, ειδικώς, το σύστημα είναι ορθογώνιο και τα βασικά διανύσματα ισόμηκα μεταξύ τους, τότε το διάνυσμα

$\big(\varphi'_x(x_0, y_0, z_0), \varphi'_y(x_0, y_0, z_0), \varphi'_z(x_0, y_0, z_0)\big)$ είναι κάθετο πάνω στο εφαπτόμενο επίπεδο και, εξ' ορισμού, πάνω στην επιφάνεια στο σημείο της $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Ώστε σ' ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων οι εξισώσεις

$$\frac{x-x_0}{\varphi'_x(x_0, y_0, z_0)}=\frac{y-y_0}{\varphi'_y(x_0, y_0, z_0)}=\frac{z-z_0}{\varphi'_z(x_0, y_0, z_0)}$$

παριστάνουν την ευθεία που λέγεται **κάθετη** στην επιφάνεια στο σημείο της $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Παράδειγμα. Έστω η επιφάνεια $2^{ου}$ βαθμού

$$\varphi(x, y, z)=A_{11}x^2+2A_{12}xy+2A_{13}xz+A_{22}y^2$$
$$+2A_{23}yz+A_{33}z^2+2A_1x+2A_2y+2A_3z+A=0$$

και $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ένα σημείο της.

Το εφαπτόμενο επίπεδο στο M_0 υπάρχει και έχει εξίσωση

(404.6)
$$\begin{aligned}&(A_{11}x_0+A_{12}y_0+A_{13}z_0+A_1)(x-x_0)\\ &+(A_{12}x_0+A_{22}y_0+A_{23}z_0+A_2)(y-y_0)\\ &+(A_{13}x_0+A_{23}y_0+A_{33}z_0+A_3)(z-z_0)=0,\end{aligned}$$

ή, αφού χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα του $M_0(x_0,y_0,z_0)$ να ικανοποιή την εξίσωση της επιφάνειας,

$$A_{11}x_0x + A_{12}(x_0y+y_0x) + A_{13}(x_0z+z_0x)$$

$$+A_{22}y_0y + A_{23}(y_0z+z_0y) + A_{33}z_0z$$

$$+A_1(x_0+x) + A_2(y_0+y) + A_3(z_0+z) + A = 0.$$

§ 405. Εφαπτομένη γραμμής με εξισώσεις

$$\begin{cases} \sigma(x,y,z)=0 \\ \varphi(x,y,z)=0 \end{cases}$$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα η εφαπτομένη στο σημείο $M_0(x_0,y_0,z_0)$ έχει εξισώσεις

$$\begin{cases} \sigma'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\sigma'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\sigma'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0 \\ \varphi'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\varphi'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\varphi'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0 \end{cases}$$

με την προϋπόθεση φυσικά ότι ο πίνακας των συντελεστών

$$\begin{pmatrix} \sigma'_x & \sigma'_y & \sigma'_z \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \end{pmatrix}$$

έχει διάσταση 2.

Ένα διάνυσμα <u>παράλληλο</u> προς την εφαπτομένη είναι εκείνο που έχει συντεταγμένες

$$\left(\begin{vmatrix} \sigma'_y & \sigma'_z \\ \varphi'_y & \varphi'_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \sigma'_z & \sigma'_x \\ \varphi'_z & \varphi'_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \sigma'_x & \sigma'_y \\ \varphi'_x & \varphi'_y \end{vmatrix} \right)$$

Οι παράγωγοι νοούνται υπολογισμένες στη θέση (x_0,y_0,z_0).

§ 406. Ανώμαλα σημεία γραμμής $\sigma(x,y)=0$.

Έστω $M_0(x_0,y_0)$ ένα σημείο της γραμμής. Ας έχουμε στη γειτονιά του

$$\sigma(x_0+h,y_0+k)=\sigma(x_0,y_0)+p_0h+q_0k+\frac{1}{2!}(r_0h^2+2s_0hk+t_0k^2)+R_3,$$

όπου για συντομία θέσαμε : $p_0=\sigma'_x(x_0,y_0)$, $q_0=\sigma'_y(x_0,y_0)$, $\sigma''_{x^2}(x_0,y_0)=r_0$ κ.τ.λ. Φυσικά είναι $\sigma(x_0,y_0)=0$.

Αν έχουμε $|p_0|+|q_0|\neq 0$, τότε το $M_0(x_0,y_0)$ λέγεται ομαλό (ή συνηθισμένο) σημείο της γραμμής με εξίσωση $\sigma(x,y)=0$.

Αν $p_0=q_0=0$ τότε το M_0 λέγεται ανώμαλο (ή ιδιάζον) σημείο της γραμμής. Στη γειτονιά ενός ανώμαλου σημείου M_0 ισχύει το ανάπτυγμα

$$\sigma(x_0+h,y_0+k)=\frac{1}{2}(r_0h^2+2s_0hk+t_0k^2)+R_3.$$

Υποθέτουμε ότι $|r_0|+|s_0|+|t_0|\neq 0$ και διακρίνουμε τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις :

1) $s^2-r_0t_0>0$.

Αποδεικνύεται ότι η γραμμή έχει δυό κλάδους δια του M_0, με εφαπτόμενες σ' αυτό το σημείο τις δυο ευθείες, που το ζευγάρι τους έχει εξίσωση

$$r_0(x-x_0)^2+2s_0(x-x_0)(y-y_0)+t_0(y-y_0)^2=0$$

Παράδειγμα : Ο λημνίσκος $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ στο σημείο του $M_0(0,0)$ (ορθογ. συστ. συντεταγμένων). Έχουμε, θέτοντας

$$\sigma(x,y)=a^2(x^2-y^2)-(x^2+y^2)^2$$

$$\sigma(0+h,0+k)=\frac{1}{2!}(2a^2h^2-2a^2k^2)+R, \text{ όπου } R=-(h^2+k^2)^2.$$

Η εξίσωση του ζεύγους των εφαπτομένων στο σημείο $M_0(0,0)$ είναι

$$2a^2(x-0)^2-2a^2(y-0)^2=0 \quad \text{ή} \quad x^2-y^2=0.$$

Άρα οι εφαπτόμενες είναι οι διχοτόμοι των γωνιών των αξόνων των συντεταγμένων. Το M_0 λέγεται διπλό σημείο της γραμμής.

2) $S_0^2 - r_0 t_0 < 0$.

Η γραμμή $\sigma(x,y)=0$ δεν έχει άλλα πραγματικά σημεία στη γειτονιά του $M_0(x_0,y_0)$. Το M_0 λέγεται απομονωμένο σημείο της γραμμής.

Παράδειγμα: Η κογχοειδής $(x^2+y^2)(x-\beta)^2 = a^2x^2$ με $(0<a<\beta)$ στο σημείο της $M_0(0,0)$. Εδώ έχουμε, θέτοντας

$$\sigma(x,y) \equiv a^2x^2 - (x^2+y^2)(x-\beta)^2,$$

$$\sigma(0+h,0+k) = \frac{1}{2!}\left(2(a^2-\beta^2)h^2 - 2\beta^2 k^2\right) + R,$$

όπου $R = 2\beta h(h^2+k^2) - h^2(h^2+k^2)$,

και επομένως

$$S_0^2 - r_0 t_0 = 0^2 + 2(a^2-\beta^2) \cdot 2\beta^2 < 0.$$

3) $S_0^2 - r_0 t_0 = 0$.

Η γραμμή $\sigma(x,y)=0$ έχει τώρα μια (διπλή) πραγματική εφαπτομένη στο M_0 με εξίσωση την

$$r_0(x-x_0)^2 + 2S_0(x-x_0)(y-y_0) + t_0(y-y_0)^2 = 0,$$

που μπορεί να γραφή και με την μορφή

$$\pm\left[a(x-x_0) + \beta(y-y_0)\right] = 0,$$

όπου $a = \sqrt{|r_0|}$, $\beta = \sqrt{|t_0|}$

Εν γένει η γραμμή θα έχη δυο πραγματικούς κλάδους που θα καταλήγουν στο M_0 ή θα περνούν από το σημείο αυτό εφαπτόμενοι της παραπάνω ευθείας. Ενδέχεται όμως ειδικά η γραμμή να μην έχη στη γειτονιά του M_0 άλλα πραγματικά σημεία εκτός από το M_0. Ιδού μερικά παραδείγματα για τις παραπάνω υποπεριπτώσεις που είναι δυνατές.

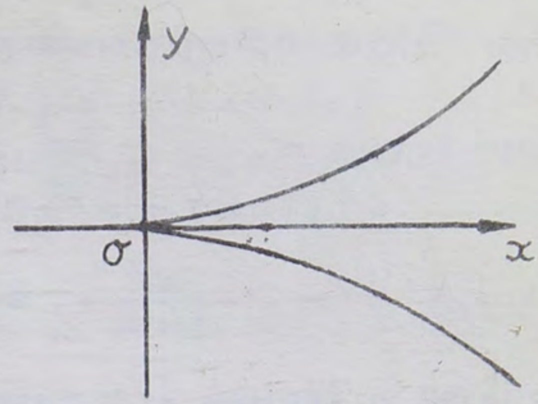
Ια) Σημείο ανακάμψεως $1^{ου}$ είδους.

Παράδειγμα η ημικυβική παραβολή (ή παραβολή του Neil)

$$ay^2 - x^3 = 0 \quad (a \text{ έστω} > 0).$$

Ανώμαλο σημείο το $O(0,0)$.

Η παραβολή έχει δυο πραγματικούς κλάδους $y = \pm\sqrt{\dfrac{x^3}{a}}$ για $x \geqq 0$, οι οποίοι καταλήγουν στο O, εφάπτονται του OX σ'αυτό το σημείο και κείνται εκατέρωθεν της εφαπτομένης στη γειτονιά του σημείου επαφής.



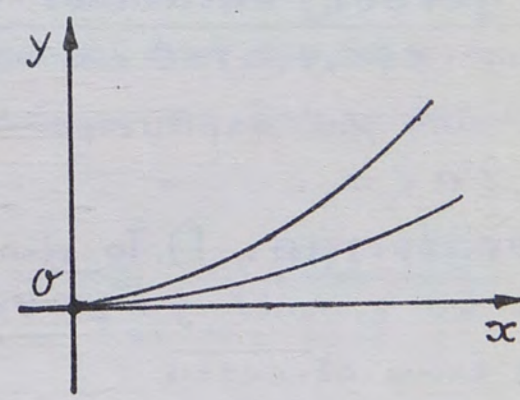
β) Σημείο <u>ανακάμψεως</u> $2^{ου}$ είδους.

Παράδειγμα η καμπύλη

$$(y - x^2)^2 - x^5 = 0$$

με ανώμαλο σημείο το $O(0,0)$. Η γραμμή έχει δυο πραγματικούς κλάδους: $y = x^2 \pm \sqrt{x^5}$ για $x \geqq 0$, καταλήγοντας στο O και εφαπτόμενους του OX σ' αυτό το σημείο.

Οι δυο κλάδοι κείνται από την ίδια μεριά της εφαπτομένης στη γειτονιά του σημείου επαφής O.

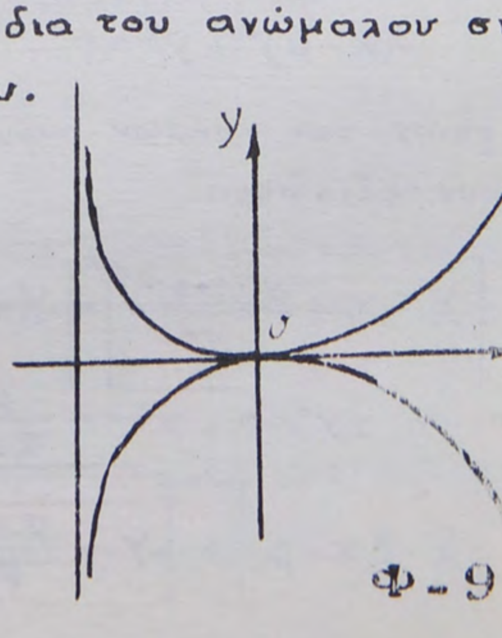


II) Δυο πραγματικοί κλάδοι δια του ανώμαλου σημείου, <u>εφαπτόμενοι</u> ο ένας του άλλου.

Παράδειγμα η γραμμή

$$y^2(1+x) - x^4 = 0$$

με ανώμαλο σημείο το $O(0,0)$ και με εφαπτομένη σ'αυτό τον OX.



Φ - 9

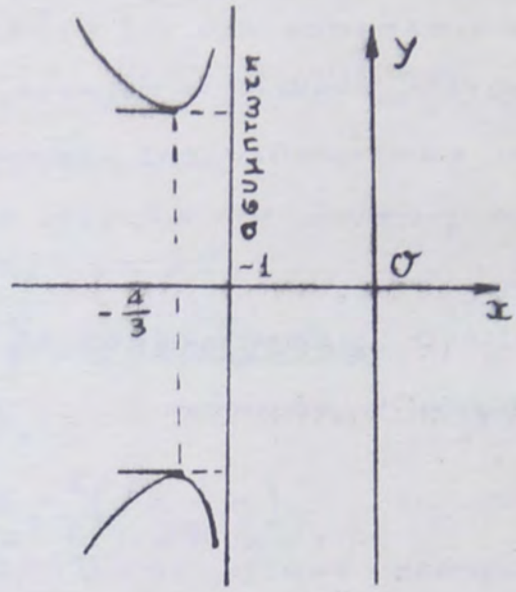
III) Στη γειτονιά του ανώμαλου σημείου η γραμμή δεν έχει άλλα πραγματικά σημεία.

Παράδειγμα η

$$y^2(1+x)+x^4=0.$$

Έχουμε $y^2=-\frac{x^4}{1+x}$, επομένως η γραμμή έχει εκτός από το $\sigma(0,0)$ πραγματικά σημεία μόνο για $x<-1$.

Το $\sigma(0,0)$ είναι λοιπόν απομονωμένο σημείο της γραμμής.



§ 407. Περιβάλλουσα μονοπαραμετρικού συστήματος (ή γένους) επιπέδων γραμμών.

Έστω $\sigma(x,y,\alpha)=0$ ένα σύστημα επιπέδων γραμμών εξαρτημένων από μια παράμετρο α με πεδίο μεταβολής ενα διάστημα $\alpha_1<\alpha<\alpha_2$.

Παράδειγμα. I). Το γένος των κύκλων που εφάπτονται και των δυο ευθειών $y=p=$ θετική σταθερά, $y=-p$ και που επομένως έχουν εξισώσεις

$$(x-\alpha)^2+y^2=p^2 \quad \text{για} -\infty<\alpha<+\infty.$$

II) Το γένος των κύκλων καμπυλότητας της παραβολής $y^2=2px$ που έχουν εξισώσεις

$$\left[X-x+\frac{y'(1+y'^2)}{y''}\right]^2+\left[Y-y-\frac{1+y'^2}{y''}\right]=\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2},$$

η (επειδή $yy'=p$, $y''=-\frac{p}{2xy}$)

$$\left[X-3x-p\right]^2+\left[Y+\frac{2xy}{p}\right]^2=\frac{(2x+p)^3}{p}.$$

Εδώ θα λάβουμε παράμετρο τη μια από τις δυο συντεταγμένες (x,y) των σημείων της παραβολής, η άλλη συντεταγμένη θα είναι συνάρτησή της. Π.χ αν πάρουμε το y για παράμετρο και θέσουμε $y=\alpha$, οπότε $\alpha^2=2px$ και $x=\frac{\alpha^2}{2p}$, η τελευταία εξίσωση γίνεται

$$\left[x-3\frac{\alpha^2}{2p}-p\right]^2+\left[y+\frac{\alpha^3}{p^2}\right]^3=\frac{(\alpha^2+p^2)^3}{p^4} \quad \text{με } -\infty<\alpha<+\infty.$$

Μια γραμμή γ λέγεται <u>περιβάλλουσα</u> του γένους γραμμών $\sigma(x,y,\alpha)=0$ αν κάθε σημείο της είναι σημείο επαφής της γ με κάποια γραμμή του συστήματος.

Έστω $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ μια παραμετρική παράσταση της περιβάλλουσας γ, με την προϋπόθεση ότι μια τέτοια γραμμή υπάρχει. Το τυχαίο σημείο της $M\big(x(t),y(t)\big)$ θα είναι σημείο επαφής της γ με μια καμπύλη του συστήματος η οποία ας αντιστοιχή στην τιμή α της παραμέτρου α των γραμμών του συστήματος, τιμή που θα είναι κάποια συνάρτηση $\alpha(t)$ του t. θα έχουμε λοιπόν από τη μια μεριά

$$(407.1) \qquad \sigma\big(x(t),y(t),\alpha(t)\big)\equiv 0$$

από ταυτότητα ως προς t (διότι το $M\big(x(t),y(t)\big)$ κείται πάνω στη γραμμή $\sigma\big(x,y,\alpha(t)\big)=0$ του γένους) και από την άλλη

$$(407.2) \qquad \sigma'_x(x,y,\alpha)x'(t)+\sigma'_y(x,y,\alpha)y'(t)=0$$

(διότι η γ και η $\sigma\big(x,y,\alpha(t)\big)=0$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο M).

Αν παραγωγίσουμε την ταυτότητα (407.1), υποθέτοντας φυσικά ύπαρξη και συνέχεια των παραγώγων, λαβαίνουμε την ταυτότητα ως προς t:

$$\sigma'_x(x,y,\alpha)x'(t)+\sigma'_y(x,y,\alpha)y'(t)+\sigma'_\alpha(x,y,\alpha)\alpha'(t)=0.$$

Επομένως λόγω της (407.2), θα ισχύη η σχέση

$$\sigma'_a(x,y,a).a'(t)=0$$

και (επειδή εν γένει θα είναι $a'(t)\neq 0$) η

$$\sigma'_a(x,y,a)=0.$$

Άρα τα σημεία της περιβάλλουσας γ ικανοποιούν το σύστημα

$$(407.3)\qquad \begin{cases} \sigma(x,y,a)=0 \\ \sigma'_a(x,y,a)=0. \end{cases}$$

Από αυτό όμως το σύστημα εξισώσεων ορίζονται οι συντεταγμένες x,y των σημείων της περιβάλλουσας ως συναρτήσεις της παραμέτρου a (εφόσον τουλάχιστο υποτεθή ότι η Ιακωβιανή $\begin{vmatrix} \sigma'_x & \sigma'_y \\ \sigma''_{ax} & \sigma''_{ay} \end{vmatrix}$ είναι διάφορος από το μηδέν).

Αντιστρόφως, αν το σύστημα (407.3) προσδιορίζει τις x,y ως εμπλεγμένες συναρτήσεις της $a:\begin{cases} x=x(a) \\ y=y(a) \end{cases}$, τότε η γραμμή $\begin{cases} x=x(a) \\ y=y(a) \end{cases}$ θα έχη τις εξής ιδιότητες:

Θα είναι από ταυτότητα ως προς a:

$$(407.4)\qquad \sigma\big(x(a),y(a),a\big)=0\ ,\ \sigma'_a\big(x(a),y(a),a\big)=0,$$

άρα και

$$\sigma'_x\cdot x'(a)+\sigma'_y\cdot y'(a)+\sigma'_a\cdot 1=0.$$

Επομένως, λόγω της δεύτερης σχέσης (407.4), θα έχουμε

$$\sigma'_x\cdot x'(a)+\sigma'_y\cdot y(a)=0\ .$$

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι είναι $|\sigma'_x|+|\sigma'_y|\neq 0$ και $|x'(a)|+|y'(a)|\neq 0$, θα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι στο σημείο $(x(a),y(a))$ (που είναι λόγω της πρώτης σχέσης (407.4) και σημείο της γραμμής $\sigma(x,y,a)=0$ του γένους) οι εφαπτόμενες των γραμμών $\begin{cases} x=x(a) \\ y=y(a) \end{cases}$ και $\sigma(x,y,a)=0$ συμπίπτουν. Άρα η γραμμή

$$\begin{cases} x=x(a) \\ y=y(a) \end{cases}$$

είναι <u>περιβάλλουσα</u> του συστήματος. Ώστε το συμπέρασμα από τα παραπάνω είναι το εξής: η <u>περιβάλλουσα</u> της μονοπαραμετρικής οικογένειας γραμμών $\sigma(x,y,a)=0$ δίνεται από το σύστημα εξισώσεων (407.3), τουλάχιστον όσο τα λαμβανόμενα δι' επιλύσεως του συστήματος σημεία $(x=x(a), y=y(a))$ δεν είναι ανώμαλα σημεία ούτε των αντίστοιχων γραμμών $\sigma(x,y,a)=0$ του γένους ούτε της ίδιας της γραμμής $\begin{cases} x=x(a) \\ y=y(a). \end{cases}$

<u>Παραδείγματα</u>. Η εφαρμογή του παραπάνω κανόνα στα δυο γένη κύκλων που αναφέραμε στην αρχή του παραγράφου παρέχει τα εξής:

I)
$$\begin{cases} (x-a)^2+y^2=p^2 \\ 2(x-a)(-1)=0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x=a \\ y^2=p^2 \end{cases}$$

Άρα περιβάλλουσα είναι η γραμμή $y=\pm p$, δηλαδή το ζεύγος των ευθειών $y=p$, $y=-p$.
Επειδή ούτε οι κύκλοι ούτε το ζεύγος των ευθειών έχουν <u>ανώμαλα</u> σημεία, δεν υπάρχει καμμιά ανάγκη ελέγχου του αποτελέσματος,

II)
$$\begin{cases} \left[x-\dfrac{3a^2}{2p}-p\right]^2+\left[y+\dfrac{a^3}{p^2}\right]^2=\dfrac{(a^2+p^2)^3}{p^4} \\ 2\left[x-\dfrac{3a^2}{2p}-p\right]\left(-\dfrac{6a}{2p}\right)+2\left[y+\dfrac{a^3}{p^2}\right]\dfrac{3a^2}{p^2}=\dfrac{3(a^2+p^2)^2\cdot 2a}{p^4} \end{cases}$$

ή
$$\begin{cases} \left[X-\dfrac{3a^2}{2p}-p\right]^2+\left[Y+\dfrac{a^3}{p^2}\right]^2=\dfrac{(a^2+p^2)^3}{p^4} \\ \\ -\left[X-\dfrac{3a^2}{2p}-p\right]+\left[Y+\dfrac{a^3}{p^2}\right]\dfrac{a}{p}=\dfrac{(a^2+p^2)^2}{p^3}. \end{cases}$$

Παίρνουμε από τη δεύτερη εξίσωση την τιμή της αγκύλης $\left[X-\dfrac{3a^2}{2p}-p\right]$ και την εισάγουμε στην πρώτη εξίσωση. Έτσι, ύστερα από μερικές πράξεις, λαβαίνουμε

$$\left[Y+\frac{a^3}{p^2}\right]^2\cdot\frac{a^2+p^2}{p^2}-2\,\frac{(a^2+p^2)^2a}{p^4}\cdot\left[Y+\frac{a^3}{p^2}\right]+\frac{(a^2+p^2)^3a^2}{p^6}=0$$

ή

$$\frac{a^2+p^2}{p^2}\left\{Y+\frac{a^3}{p^2}-\frac{a(a^2+p^2)}{p^2}\right\}^2=0 \text{ ή } \{Y-a\}^2=0.$$

Άρα $Y=a$.

Εισάγοντας αυτήν την τιμή του Y στη δεύτερη εξίσωση λαβαίνουμε $X=\dfrac{a^2}{2p}$. Άρα

$$\begin{cases} X=\dfrac{a^2}{2p} \\ Y=a \end{cases} \quad \text{και} \quad Y^2=2pX.$$

Επομένως η περιβάλλουσα των κύκλων καμπυλότητας της παραβολής $y^2=2px$ είναι αυτή η ίδια παραβολή, πράγμα που έπρεπε να αναμένουμε.

Σχόλια. Το σημείο ή τα σημεία της γραμμής $\sigma(x,y,a)=0$ του γένους που ικανοποιούν και την εξίσωση $\sigma'_a(x,y,a)=0$ (με την ίδια τιμή της παραμέτρου a) λέγονται χαρακτηριστικά σημεία της γραμμής $\sigma(x,y,a)=0$. Αν η $\sigma(x,y,a)=0$ έχη με τη γειτονική γραμμή $\sigma(x,y,a+\Delta a)=0$ ένα κοινό σημείο το οποίο για $\Delta a\longrightarrow 0$ τείνει προς ενα σημείο M_a, τότε αυτό το M_a είναι αναγκαστικά χαρακτηριστικό σημείο της $\sigma(x,y,\alpha)=0$.

Πράγματι από την υπόθεση ότι υπάρχει ένα σημείο $M_{\alpha+\Delta\alpha}$ κοινό των δυο γραμμών $\sigma(x,y,\alpha)=0$ και $\sigma(x,y,\alpha+\Delta\alpha)=0$ (που τείνει στο M_α όταν $\Delta\alpha \to 0$) έπεται ότι οι συντεταγμένες του $M_{\alpha+\Delta\alpha}$ ικανοποιούν το σύστημα

$$\begin{cases} \sigma(x,y,\alpha)=0 \\ \sigma(x,y,\alpha+\Delta\alpha)=0, \end{cases}$$

άρα και το

$$\begin{cases} \sigma(x,y,\alpha)=0 \\ \dfrac{\sigma(x,y,\alpha+\Delta\alpha)-\sigma(x,y,\alpha)}{\Delta\alpha}=\sigma'_\alpha(x,y,\alpha+\theta\cdot\Delta\alpha)=0, \end{cases}$$

όπου θ κατάλληλος αριθμός που εξαρτιέται από το $\Delta\alpha$ και κείται μεταξύ 0 και 1

Συνεπώς, από την υπόθεση $M_{\alpha+\Delta\alpha} \longrightarrow M_\alpha$ για $\Delta\alpha \longrightarrow 0$ και με την προϋπόθεση ότι η $\sigma'_\alpha(x,y,\alpha)$ είναι συνεχής συνάρτηση των 3 ανεξάρτητων μεταβλητών της συμπεραίνουμε πως οι συντεταγμένες του M_α ικανοποιούν το σύστημα $\sigma(x,y,\alpha)=0$, $\sigma'_\alpha(x,y,\alpha)=0$, ο.ε.δ.

Το σύστημα $\begin{cases} \sigma(x,y,\alpha)=0 \\ \sigma'_\alpha(x,y,\alpha)=0 \end{cases}$

με παράμετρο το α παριστάνει το σύνολο των χαρακτηριστικών σημείων των γραμμών του γένους $\sigma(x,y,\alpha)=0$.

Αυτό το σύνολο περιέχει βέβαια τα σημεία της περιβάλλουσας του γένους, στην περίπτωση όπου υπάρχει περιβάλλουσα, μπορεί όμως να περιέχη και σημεία μη ανήκοντα στην περιβάλλουσα, π.χ. ανώμαλα σημεία των γραμμών $\sigma(x,y,\alpha)=0$.

Παράδειγμα.

Έστω το γένος $(y-\alpha)^2=x^2(1-x^2)$ με α μεταβλητό στο διάστημα $-\infty<\alpha<+\infty$.

Τις διάφορες γραμμές του γένους τις λαβαίνουμε από τη γραμμή

$y^2=x^2(1-x^2)$ αν τη "μεταφέρουμε" κατά τα διάφορα διανύσματα $(0,\alpha)$ (δηλαδή τα παράλληλα προς τον ΟΥ). Η γραμμή $y^2=x^2(1-x^2)$ έχει ένα διπλό σημείο, το $(0,0)$, με εφαπτόμενες σ'αυτό τις ευθείες $y=x$ και $y=-x$, κείται ολόκληρη μέσα στο τετράγωνο $|x|\leqq 1$, $|y|\leqq 1$ και εφάπτεται της ευθείας $x=1$ στο σημείο $(1,0)$ και της $x=-1$ στο σημείο $(-1,0)$. Άρα, όπως είναι γεωμετρικώς φανερό, η οικογένεια $(y-\alpha)^2=x^2(1-x^2)$ θα έχη περιβάλλουσα το ζεύγος των ευθειών $x=-1$ και $x=1$. Η αναλυτική πραγμάτευση μας δίνει:

$$\begin{cases}(y-\alpha)^2-x^2(1-x^2)=0\\ -2(y-\alpha)=0\end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases}y=\alpha\\ x^2(1-x^2)=0\,.\end{cases}$$

Επομένως το σύνολο των χαρακτηριστικών σημείων αποτελείται από τα σημεία των 3 ευθειών $x=0$, $x=-1$, $x=1$. Το ζεύγος των δυό τελευταίων είναι η περιβάλλουσα· η ευθεία $x=0$ είναι ο γεωμετρικός τόπος των ανωμάλων σημείων των γραμμών της οικογένειας.

Αν οι γραμμές του γένους $\sigma(x,y,\alpha)$ είναι ευθείες, γραμμές δηλαδή που δεν έχουν ανώμαλα σημεία, τότε το σύστημα

$$\begin{cases}\sigma(x,y,\alpha)=0\\ \sigma'_\alpha(x,y,\alpha)=0\end{cases}$$

ή δεν θα παριστάνη γραμμή που να έχη και ομαλά σημεία ή, αν παριστάνη τέτοια γραμμή, αυτή θα είναι περιβάλλουσα του γένους· με άλλα λόγια, οι ευθείες της οικογένειας θα είναι εφαπτόμενες της γραμμής.

Παράδειγμα: η περιβάλλουσα των καθέτων μιας καμπύλης είναι η ενειλιγμένη της καμπύλης (δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων τω κύκλων καμπυλότητος της καμπύλης).

Ασκήσεις στο 25ο κεφάλαιο

440. Σ'ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε την επιφάνεια

$$z = a\,\text{ημ}\,\frac{x}{a} + a\,\text{συν}\,\frac{y}{a},$$

όπου a θετική σταθερά. Ποια είναι η εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου της στο τυχαίο της σημείο; Σε ποιες θέσεις είναι το επίπεδο αυτό παράλληλο προς το ΧΟΥ;
Ποιες απ'αυτές είναι θέσεις ακροτάτων και ποιες όχι, και πώς κείται η επιφάνεια ως προς το εφαπτόμενο της επίπεδο σ'αυτές τις θέσεις, στην γειτονιά του σημείου επαφής κάθε φορά;

441. Προσδιορίστε τα τοπικά ακρότατα της συναρτήσεως:

$$z(x,y) = x^4 + y^4 - 4a^2xy + 8a^4,$$

όπου a θετική σταθερά.

442. Μας δίνουν ένα τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Μ ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου του. Να αποδειχθή ότι η ποσότης $MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2$ γίνεται ελάχιστη όταν το Μ συμπέση με το κέντρο βάρους του τριγώνου.

443. Σε τρία σημεία M_i $(i = 1,2,3)$ ενός επιπέδου τμήματος της επιφάνειας της γης, που έχουν ορθογώνιες συντεταγμένες (x_i, y_i) για $i = 1,2,3$, κατασκευάζονται τρία είδη προϊόντων τα οποία, για την περαιτέρω χρησιμοποίηση τους, πρέπει να μεταφερθούν σ'ένα κεντρικό σημείο $M(x,y)$.
Οι δαπάνες μεταφοράς για τα τρία είδη προϊόντων ας είναι αντιστοίχως a_1, a_2, a_3 δραχμές κατά χιλιόμετρο. Ποια είναι η θέση $M(x,y)$ για την οποία το άθροισμα των μεταφορικών δαπανών είναι ελάχιστο;

Σημείωση. Η απάντηση να βρεθή όχι μόνο με αλγεβρική επίλυση του συστήματος των εξισώσεων που εκφράζουν τις αναγκαίες συνθήκες του ακροτάτου αλλά και με τη βοήθεια μιας γεωμετρικής ή μηχανικής ερμηνείας αυτών.

444. Δίνονται ν σημεία P_i δια των συντεταγμένων τους (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, \nu$ σ'ορθογώνιο σύστημα. Υπάρχει άραγε σημείο $P(x,y)$ του επιπέδου με την ιδιότητα να είναι ελάχιστη η ποσότητα

$$\sum_{i=1}^{\nu} m_i \cdot PP_i^2$$

όπου m_i $(i = 1, \ldots, \nu)$ δοσμένες θετικές σταθερές και ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου τούτου P;

445. Δυο άγνωστες ποσότητες x και y συνδέονται με τρεις ποσότητες α, β, γ δια της σχέσεως

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

Οι ποσότητες όμως α, β, γ δεν μπορούν να καθορισθούν ακριβώς, είναι δε γνωστές, από μια πρώτη σειρά μετρήσεων, ως ίσες κατά προσέγγιση με $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, από μια δεύτερη σειρά μετρήσεων ως ίσες με $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ και από μια νιοστή σειρά μετρήσεων $(\nu > 2)$ ως ίσες με $\alpha_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu$. Εννοείται ότι δεν είναι εν γένει δυνατό να ικανοποιήσουμε και τις $\nu > 2$ εξισώσεις.

$$\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i = 0 , \quad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

με τις ίδιες τιμές των δυο αγνώστων x και y. Θέτουμε ένεκα τούτου

$$\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i = \lambda_i , \quad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

και ζητούμε να ορίσουμε τα x και y έτσι που η ποσότητα $\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_\nu^2$ να είναι ελάχιστη. Ποιες είναι οι τιμές x και y που καθιστούν ελάχιστη τη συνάρτηση $\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_\nu^2$;

446. Μελετήστε την εξίσωση:

$$y^2(\alpha - x) - x^3 = 0$$

με τη βοήθεια του θεωρήματος υπάρξεως εμπλεγμένης συναρτήσεως. Επίσης ερευνήστε τη γραφική παράσταση της εξισώσεως (είναι η λεγόμενη <u>κισσοειδής</u> καμπύλη) και υπολογίστε την κλίση της εφαπτομένης σ'ένα οποιοδήποτε σημείο της συναρτήσει των συντεταγμένων του σημείου.

447. Ομοίως για την εξίσωση

$$(\alpha+x)y^2=(\alpha-x)x^2.$$

448. Προσδιορίστε την περιβάλλουσα του μονοπαραμετρικού συνόλου (οικογένειας) των παραβολών :

$$y^2-2(\alpha+1)x+\alpha^2=0.$$

449. Ποια είναι η περιβάλλουσα των ελλείψεων

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-1=0,$$

όταν $\alpha+\beta=c=$ σταθερά;

450. Θεωρούμε το μονοπαραμετρικό σύνολο των κύκλων που έχουν κέντρα τα διάφορα σημεία της περιφέρειας

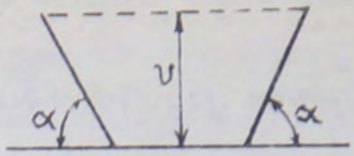
$$x^2-2px+y^2=0$$

και διέρχονται δια της αρχής $O(0,0)$. Να βρεθή η περιβάλλουσα του (p θετική σταθερά).

451. Έστω $y=\sigma(x)$ μια επίπεδη γραμμή και πάνω σ'αυτήν το σημείο Μ που έχει προβολές πάνω στους άξονες τα σημεία Π του ΟΧ και Ρ του ΟΥ. Ποια είναι η περιβάλλουσα της ευθείας ΠΡ; (Παράμετρος θα ληφθή το x του σημείου Μ).

452. Ανάμεσα στα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα των οποίων οι τρεις ακμές οι εξερχόμενες από μια κορυφή έχουν άθροισμα δοσμένο να βρεθή εκείνο που έχει μέγιστο όγκο.

453. Δίνεται το εμβαδό Ε της διατομής, που έχει σχήμα ισοσκελούς τραπεζίου, μιας ανοικτής προς τα πάνω διώρυγας. Ποιες πρέπει να είναι οι γωνίες κλίσεως α των παρειών και το ύψος υ της διώρυγας για να είναι ελάχιστη η βρεχόμενη εσωτερική περίμετρος της διατομής;



454. Έστω η απεικόνιση

$$u = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v = \frac{y}{x^2+y^2}$$

η οποία είναι μονοσήμαντα ορισμένη για όλα τα σημεία (x,y) εκτός από την αρχή O. Δείξτε ότι είναι αμφιμονοσήμαντη και βρήτε την αντίστροφη της.
Υπολογίστε τις Ιακωβιανές των δυο τούτων απεικονίσεων. Ποια γεωμετρική ερμηνεία μπ-ρεί να δοθή στην απεικόνιση; Επεκτείνατε το ζήτημα στο χώρο των 3 διαστάσεων.

455. Βρήτε την περιβάλλουσα της μεταβλητής ευθείας πάνω στην οποία δυο ορθόγωνιοι άξονες αποκόπτουν ένα ευθύγραμμο τμήμα σταθερού μήκους.

456. Βρήτε τις εξισώσεις της εφαπτομένης στο σημείο $\left(\sqrt{\frac{5}{8}}, \sqrt{\frac{3}{8}}, \frac{3}{2}\right)$ της τομής του κυλίνδρου $x^2+y^2=1$ με το ελλειψοειδές $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}=1$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 26ο

Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως

§ 408. Διαφορικές εξισώσεις $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ με αριστερό μέλος τέλειο διαφορικό. Η διαφορική εξίσωση $P(x,y)+Q(x,y)y'=0$ μπορεί να γραφή και με τη μορφή

$$P(x,y)dx+Q(x,y)y'dx=0 \quad ή \quad P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0.$$

Η επίλυση της θα ήταν προφανώς άμεση αν, θεωρώντας τις δυο μεταβλητές x,y ανεξάρτητες τη μια από την άλλη, είχαμε μια ταυτότητα της μορφής $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=dF(xy)$, όπου $F(x,y)$ κατάλληλη συνάρτηση των x,y· με άλλα λόγια: αν η έκφραση $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ ήταν ολικό διαφορικό κάποιας συνάρτησης $F(xy)$, πράγμα που είναι ισοδύναμο με το σύστημα των 2 ταυτοτήτων

(408.1) $$F'_x(x,y)=P(x,y)\,,\quad F'_y(x,y)=Q(x,y).$$

Διότι τότε, για οποιαδήποτε συνάρτηση $y(x)$,

το $P(x,y(x))dx+Q(x,y(x))dy$

θα ήταν διαφορικό της σύνθετης συνάρτησης $F(x,y(x))$. Επομένως η δοσμένη διαφορική εξίσωση

$$P(x,y(x))dx+Q(x,y(x))dy=0$$

θα ήταν ισοδύναμη με την $dF(x,y(x))=0$, άρα με την εξίσωση

$$F(x,y(x))=C=\text{σταθερά}$$

η οποία, επιλυνομένη ως προς y, θα έδινε τη γενική λύση της θεωρούμενης διαφορικής εξισώσεως.

Η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να αποτελή η έκφραση $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ το ολικό διαφορικό κάποιας συναρτήσεως είναι η εξής (με την προϋπόθεση ότι οι παράγωγοι $P'_y(x,y)$ και $Q'_x(x,y)$ υπάρχουν και είναι συνεχείς συναρτήσεις των x,y σ'ένα χωρίο):

$$P'_y(x,y) = Q'_x(x,y) \tag{408.2}$$

ταυτοτικά ως προς x και y στο υπόψη χωρίο.

Ότι η συνθήκη είναι αναγκαία προκύπτει αμέσως αν παραγωγίσουμε την πρώτη από τις σχέσεις (408.1) ως προς y μερικώς, τη δεύτερη ως προς x μερικώς και παραβάλλουμε τα αποτελέσματα:

$$P'_y(x,y) = F''_{xy}(x,y) = F''_{yx}(x,y) = Q'_x(x,y).$$

Ότι η συνθήκη είναι ικανή προκύπτει εύκολα ως εξής:

Αν θέλουμε να ισχύη η πρώτη από τις σχέσεις (408.1) πρέπει και αρκεί να είναι

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + C(y),$$

όπου η σταθερά ολοκληρώσεως μπορεί να εξαρτιέται από το y.

Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση μερικώς ως προς y λαβαίνουμε

$$F'_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + C'_y(y).$$

Αποδεικνύεται όμως γενικώς ότι

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dx.$$

Άρα λόγω της υποθέσεως (408.2)

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx = \int_{x_0}^{x} Q'_x(x,y)\,dx = Q(x,y) - Q(x_0,y).$$

Συνεπώς, αν θέλουμε να ισχύη και η δεύτερη από τις σχέσεις (408.1) θα πρέπη και θα αρκή να έχουμε

$$Q(x,y) = Q(x,y) - Q(x_0,y) + C'(y)$$

ή

$$C'(y) = Q(x_0,y),$$

και επομένως

$$C(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy + C_1,$$

όπου C_1 μια σταθερά ανεξάρτητη από τα x και y.

Όταν λοιπόν $P'_y = Q'_x$ από ταυτότητα ως προς (x,y) σ' ένα χωρίο, τότε είναι

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy + C_1,$$

η συνάρτηση που έχει ολικό διαφορικό το $Pdx + Qdy$ στο υπόψη χωρίο.

§ 409. Ολοκληρωτικός παράγοντας.

Αν $P'_y(x,y) \not\equiv Q'_x(x,y)$, τότε η παράσταση $Pdx + Qdy$ δεν είναι ολικό διαφορικό καμμιάς συναρτήσεως $F(x,y)$. Άραγε μήπως γίνεται ολικό διαφορικό αφού πολλαπλασιαστή με μια κατάλληλη συνάρτηση $\mu(x,y)$; Γι' αυτό πρέπει και αρκεί να είναι

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

από ταυτότητα σ'ένα χωρίο.
Δηλαδή

$$(409.1) \qquad \mu'_y P + \mu P'_y = \mu'_x Q + \mu Q'_x ,$$

πράγμα που σημαίνει ότι ο πολλαπλασιαστής $\mu(x,y)$ πρέπει και αρκεί να είναι λύση μιας διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους (συντόμως: μιας μερικής διαφορικής εξισώσεως), της (409.1).

Μια τέτοια εξίσωση αποδείχνεται γενικά ότι έχει λύσεις. Άρα υπάρχουν πολλαπλασιαστές με τη ζητούμενη ιδιότητα, μόνο που η ανεύρεση τέτοιων "ολοκληρωτικών παραγόντων" είναι πρόβλημα ανώτερης βαθμίδας εν γένει από το προκείμενο της επιλύσεως της συνήθους διαφορικής εξισώσεως

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 .$$

Όμως θα έχουμε πρόβλημα της ίδιας βαθμίδας, αν ο πολλαπλασιαστής $\mu(x,y)$ μπορούσε να ήταν συνάρτηση μόνο του x ή μόνο του y ή, γενικότερα, συνάρτηση $\mu(\omega)$ μιάς γνωστής συναρτήσεως $\omega(x,y)$, π.χ. της $\omega = xy$ ή της $\omega = x+y$ κ.τ.λ.
Πράγματι τότε η (409.1) γίνεται

$$\mu'_\omega(\omega)\omega'_y P + \mu(\omega)P'_y = \mu'_\omega(\omega)\omega'_x Q + \mu(\omega)Q'_x ,$$

ή

$$\mu'_\omega (P\omega'_y - Q\omega'_x) = \mu(Q'_x - P'_y)$$

και συνεπώς

$$(409.2) \qquad \frac{\mu'_\omega(\omega)}{\mu(\omega)} = \frac{Q'_x - P'_y}{P\omega'_y - Q\omega'_x} .$$

Άρα, αν εξακριβωθή ότι η συνάρτηση

$$\frac{Q'_x(x,y) - P'_y(x,y)}{P(x,y)\omega'_y(x,y) - Q(x,y)\omega'_x(x,y)}$$

είναι συνάρτηση μόνο της δοσμένης εκ των προτέρων συναρτήσεως $\omega(x,y)$, τότε η ανεύρεση ενός ολοκληρωτικού παράγοντα $\mu(x,y)$ είναι άμεση. Δεν έχουμε παρά να ολοκληρώσουμε ως προς ω την εξίσωση (409.2) με δεύτερο μέλος μια διαπιστωμένη συνάρτηση $\sigma(\omega)$ του ω· έτσι βρίσκουμε:

$$\ln|\mu| = \int \sigma(\omega)d\omega \quad \text{και} \quad \mu = \pm e^{\int \sigma(\omega)d\omega}.$$

Αφού προσδιορίσουμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu(x,y)$, η αρχική διαφορική εξίσωση

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

αντικαθίσταται από την ουσιωδώς ισοδύναμη διαφορική εξίσωση

(409.3) $$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0,$$

και αυτή ολοκληρώνεται με τη μέθοδο του § 408 (λέγω "ουσιωδώς„ ισοδύναμη, διότι ενδέχεται να εισαχθή μια ξένη λύση, η λύση $\mu(x,y)=0$, ή να χαθή μια λύση, εκείνη που "απειρίζει„ τη συνάρτηση $\mu(x,y)$).

§ 410. Διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξεως μη επιλυμένες ως προς y'.

1) $\varphi(y')=0$,

όπου $\varphi(p)$ ακέραιο πολυώνυμο του p. Αν $p=a_1, p=a_2, \ldots, p=a_\nu$ είναι οι ρίζες του πολυώνυμου αυτού, τότε η διαφορική εξίσωση $\varphi(y')=0$ έχει ολοκληρωτικές γραμμές τις ν δέσμες παραλλήλων ευθειών.

$$\begin{aligned} y &= a_1 x + c_1 \\ y &= a_2 x + c_2 \\ &\cdots\cdots \\ y &= a_\nu x + c_\nu \end{aligned}$$

2) $x = f(y')$.

θέτουμε $y'=p$ και εκφράζουμε τις μεταβλητές x και y της διαφορικής εξισώσεως συναρτήσει της p ως παραμέτρου. Έτσι έχουμε

$$x=f(p),$$

και, επειδή

$$\frac{dy}{dp}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dp}=pf'(p),$$

$$y=\int pf'(p)dp+c$$

3) $y=f(y')$

θέτουμε πάλι $y'=p$ και εκφράζουμε τις μεταβλητές x και y συναρτήσει της p ως παραμέτρου:

$$y=f(p)$$

και, επειδή

$$\frac{dx}{dp}=\frac{dx}{dy}\cdot\frac{dy}{dp}=\frac{1}{p}f'(p),$$

$$x=\int\frac{f'(p)}{p}\,dp+c.$$

4) <u>Εξίσωση Clairaut:</u> $y=xy'+f(y')$.

Επιλύνεται με τη λεγόμενη μέθοδο παραγωγίσεως (ή διαφορίσεως). Να που βασίζεται αυτή: Αν ισχύη η ταυτότητα ως προς x

$$y=xy'+f(y')$$

σ' ένα διάστημα μεταβολής του x, θα ισχύη και η ακόλουθη που προκύπτει απ' αυτήν δια παραγωγίσεως ως προς x:

$$y'=y'+xy''+f'(y')y'' \text{ ή } \left(x+f'(y')\right)y''=0.$$

Ώστε οι ζητούμενες λύσεις της εξισώσεως Clairaut θα βρίσκωνται ανάμεσα στις λύσεις είτε της διαφορικής εξισώσεως $y''=0$ είτε της $x+f'(y')=0$.

Η $y''=0$ έχει για λύσεις τις γραμμικές συναρτήσεις $y=C_1x+C_2$

(C_1, C_2 αυθαίρετες σταθερές).

Για να είναι αυτές λύσεις και της εξισώσεως Clairaut πρέπει και αρκεί να έχουμε

$$C_1 x + C_2 = y = x \cdot C_1 + f(C_1)$$

άρα
$$C_2 = f(C_1).$$

Ώστε προς το παρόν βρήκαμε το εξής μονοπαραμετρικό πλήθος λύσεων της εξισώσεως Clairaut:

(410.1) $\qquad y = C_1 x + f(C_1) \qquad$ (C_1 η παράμετρος).

Ας εξετάσουμε τώρα μήπως υπάρχουν λύσεις της εξισώσεως Clairaut περιλαμβανόμενες στις λύσεις της διαφορικής εξισώσεως $x + f'(y') = 0$.

Σύμφωνα με όσα είπαμε για την περίπτωση 2) του παρόντος παραγράφου, οι λύσεις της $x + f'(y') = 0$ ορίζονται από το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{cases} x = -f'(p) \\ y = -\int p f''(p)\,dp + c = -pf'(p) + \int f'(p)\,dp + c = -pf'(p) + f(p) + c, \end{cases}$$

όπου p βοηθητική μεταβλητή (παράμετρος της ολοκληρωτικής γραμμής) και c αυθαίρετη σταθερά ολοκληρώσεως.

Για να είναι μια οποιαδήποτε από αυτές τις λύσεις λύση και της εξισώσεως Clairaut πρέπει και αρκεί να έχουμε, από ταυτότητα ως προς p,

$$y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right) = x\frac{dy}{dp}\cdot\frac{dp}{dx} + f\left(\frac{dy}{dp}\cdot\frac{dp}{dx}\right)$$

δηλαδή

$$c - f'(p)\cdot p + f(p) = -f'(p)\frac{d}{dp}\left(-pf'(p) + f(p) + c\right)\cdot\frac{dp}{dx} + f\left(\frac{d}{dp}(-pf' + f + c)\cdot\frac{dp}{dx}\right)$$

αλλά

$$\frac{d}{dp}\left(-pf' + f + c\right) = -f' - pf'' + f' = -pf'' \text{ και } \frac{dp}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dp}} = -\frac{1}{f''(p)}$$

επομένως

$$-pf'(p)+f(p)+C=-f'(p)\left(-pf''(p)\right)\left(-\frac{1}{f''(p)}\right)+f\left(pf''\cdot\frac{1}{f''}\right)=-pf'(p)+f(p),$$

και $C=0$.

Ώστε η εξίσωση Clairaut έχει εκτός από τη γενική λύση (410.1) (δηλαδή τη λύση που περιέχει μιαν αυθαίρετη σταθερά) και την εξής λύση:

$$(410.2)\qquad \begin{cases} y=-pf'(p)+f(p) \\ x=-f'(p), \end{cases}$$

όπου το p παίζει ρόλο βοηθητικής μεταβλητής για τον καθορισμό της συναρτησιακής σχέσης μεταξύ x και y. Παρατηρώ ότι η γραφική παράσταση της (410.2) είναι η περιβάλλουσα του γένους των ευθειών (410.1) οι οποίες είναι ολοκληρωτικές γραμμές της εξισώσεως Clairaut.

Πράγματι η περιβάλλουσα αυτή ορίζεται από το σύστημα

$$(410.3)\qquad \begin{cases} y=C_1x+f(C_1) \\ 0=x+f'(C_1), \end{cases}$$

όπου το C_1 παίζει ρόλο βοηθητικής μεταβλητής· τα δυο όμως συστήματα (410.2) και (410.3), που προκύπτουν το ένα από το άλλο αν εναλλάξουμε τα γράμματα p και C_1, παριστάνουν προφανώς την ίδια γραμμή του επιπέδου. Κατα ταύτα μπορούμε να συνοψίσουμε ως εξής ό,τι βρήκαμε:

Οι ολοκληρωτικές γραμμές της εξισώσεως Clairaut $y=xy'+f(y')$ αποτελούνται από την καμπύλη

$$\begin{aligned} y &= xp+f(p) \\ x &= -f'(p) \qquad\qquad (p \text{ παράμετρος}), \end{aligned}$$

και από το μονοπαραμετρικό πλήθος των ευθειών

$$y=xC+f(C)$$

που είναι εφαπτόμενες αυτής της καμπύλης.

§ 411. Ιδιάζουσα λύση. Σχετική με την παραπάνω θεωρία είναι η εξής γενική πρόδηλη παρατήρηση: Η περιβάλλουσα ενός γένους ολοκληρωτικών γραμμών μιας διαφορικής εξισώσεως $\sigma(x,y,y')=0$ είναι επίσης ολοκληρωτική γραμμή της διαφορικής εξισώσεως.

Λέγω τώρα ότι τα "γραμμικά στοιχεία" (x,y,y') της περιβάλλουσας ικανοποιούν όχι μόνο την εξίσωση $\sigma(x,y,y')=0$ αλλά και την $\sigma'_{y'}(x,y,y')=0$. Πράγματι, αν για κάποιο γραμμικό στοιχείο (x_0,y_0,y'_0) της περιβάλλουσας είχαμε $\sigma'_{y'}(x_0,y_0,y'_0)\neq 0$ αντίς για $\sigma'_{y'}(x_0,y_0,y'_0)=0$, τότε, κατά το θεώρημα περί εμπλεγμένης συναρτήσεως, η εξίσωση $\sigma(x,y,y')=0$ θα όριζε το y' ως μονοσήμαντη συνάρτηση των x,y σε μιαν ολόκληρη γειτονιά του σημείου (x_0,y_0), με τιμή της y' στη θέση αυτή το y'_0.

Επομένως, σύμφωνα με ένα γενικό θεώρημα υπάρξεως λύσεως μιας διαφορικής εξισώσεως, δια του σημείου (x_0,y_0) θα υπήρχε μόνο μια ολοκληρωτική γραμμή έχουσα κλίση y'_0 σ' αυτό το σημείο, ενώ εξ υποθέσεως έχουμε τουλάχιστο δυο τέτοιες διάφορες γραμμές: Την περιβάλλουσα και τη περιβαλλόμενη που εφάπτεται της περιβάλλουσας στο σημείο (x_0,y_0). Ώστε αποκλείεται να είναι $\sigma'_{y'}(x,y,y')\neq 0$.

Μια λύση της διαφορικής εξισώσεως $\sigma(x,y,y')=0$ που ικανοποιεί ταυτοτικά ως προς x και τη διαφορική εξίσωση $\sigma'_{y'}(x,y,y')=0$, λέγεται ιδιάζουσα λύση της $\sigma(x,y,y')=0$.

Π.χ. η λύση

$$\begin{cases} x = f'(p) \\ y = xp+f(p) \end{cases} \qquad (p \text{ παράμετρος})$$

είναι ιδιάζουσα λύση της διαφορικής εξισώσεως Clairaut

$$y = xy'+f(y').$$

Πράγματι, όπως είδαμε, ικανοποιεί ταυτοτικά και την εξίσωση

$$0 = x+f'(y').$$

Σύμφωνα με τον ορισμό, για να προσδιορίσουμε τις ιδιάζουσες λύσεις μιας διαφορικής εξισώσεως

$$\sigma(x,y,y')=0$$

αρκεί να θεωρήσουμε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων (x,y) τα οποία ικανοποιούν το σύστημα

$$\begin{cases}\sigma(x,y,p)=0\\ \sigma'_p(x,y,p)=0,\end{cases}$$

όπου p παράμετρος, και να εξετάσουμε αν ο τόπος αυτός είναι, εν όλω ή εν μέρει, ολοκληρωτική γραμμή της διαφορικής εξισώσεως.

Ο τόπος μπορεί να κληθεί <u>διακρίνουσα</u> γραμμή της διαφορικής εξισώσεως, επειδή, αν η εξίσωση $\sigma(x,y,y')=0$ είναι <u>αλγεβρική</u> ως προς το γράμμα y', ο τόπος αποτελείται από τα σημεία (x,y) του επιπέδου για τα οποία η αλγεβρική εξίσωση $\sigma(x,y,y')=0$, με άγνωστο το y' και με συντελεστές δοσμένες συναρτήσεις των x,y, έχει <u>τουλάχιστο</u> μια πολλαπλή ρίζα. Ο τόπος είναι επομένως η « <u>γραμμή μηδενισμού</u> » της « <u>διακρίνουσας</u> » της αλγεβρικής εξισώσεως $\sigma(x,y,y')=0$ με άγνωστο το y'.

<u>**Παράδειγμα**</u>. Έστω η διαφορική εξίσωση

$$y'^4=4y(xy'-2y)^2.$$

Η διακρίνουσα γραμμή δίνεται από το σύστημα

$$\begin{aligned}p^4&=4y(xp-2y)^2\\ 4p^3&=4y\cdot 2(xp-2y)x,\end{aligned}$$

όπου p παράμετρος.

Άρα η διακρίνουσα γραμμή αποτελείται από την ευθεία $y=0$ (με x αυθαίρετο και $p=0$) και από την καμπύλη $y=\frac{1}{16}x^4$ που βρίσκουμε απαλείφοντας το p μεταξύ των δυο εξισώσεων του συστήματος. Και τα δυο αυτά μέρη του τόπου είναι ολοκληρωτικές γραμμές της διαφορικής εξισώσεως, όπως επαληθεύουμε αμέσως.

Άρα $y=0$ και $y=\frac{1}{16}x^4$ είναι οι ιδιάζουσες λύσεις της διαφορικής εξισώσεως.

§ 412. Μια γεωμετρική εφαρμογή: οι ισογώνιες τροχιές.

Δίνεται μέσα στο επίπεδο ένα γένος (= μονοπαραμετρικό σύνολο) γραμμών.

(412.1) $$\sigma(x,y,c)=0 \quad (c \text{ η παράμετρος}).$$

Ζητούνται οι γραμμές του επιπέδου που κόβουν κάθε γραμμή του γένους κατά δοσμένη γωνία.

Οι ζητούμενες γραμμές λέγονται ισογώνιες τροχιές των γραμμών (412.1)

Το πρόβλημα οδηγεί προφανώς σε μια διαφορική εξίσωση. Ας είναι ω ακτίνια η δοσμένη γωνία που έχει πρώτη πλευρά την εφαπτομένη της γραμμής του γένους και δεύτερη πλευρά την εφαπτομένη της ζητούμενης γραμμής σ' ένα κοινό τους σημείο. Το ω είναι ένας προσημασμένος αριθμός του οποίου την απόλυτη τιμή μπορούμε να υποβάλουμε στον περιορισμό: $0<|\omega|\leqq\frac{\pi}{2}$. Θέτουμε εφ $\omega=\lambda$. Αν καλέσουμε (X,Y) τις συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου μιας ισογώνιας τροχιάς, θα έχουμε σ' ένα κοινό σημείο $(x,y)=(X,Y)$ μιας γραμμής του γένους (412.1) και μιας ισογώνιας τροχιάς τη σχέση

(412.2) $$\text{εφ}\,\omega=\lambda=\frac{Y'-y'}{1+Y'y'}, \text{ άρα } y'=\frac{Y'-\lambda}{\lambda Y'+1},$$

όπου

$$Y'=\frac{dY}{dX} \quad \text{και} \quad y'=\frac{dy}{dx}.$$

Αν η γωνία ω είναι ορθή (οπότε $\lambda=\infty$) τα (412.2) σημαίνουν

(κατά γνωστές συμβάσεις)

$$1+Y'y'=0 \quad \text{και} \quad y'=-\frac{1}{Y'} .$$

Απαλείφοντας την παράμετρο C μεταξύ της εξισώσεως (412.1) και της $\sigma'_x(x,y,c)+\sigma'_y(x,y,c)\,y'=0$, βρίσκουμε τώρα πρώτα, κατά γνωστό τρόπο, τη διαφορική εξίσωση

$$F(x,y,y')=0$$

του γένους (412.1). Μέσα σ' αυτήν τη διαφορική εξίσωση αντικαθιστούμε το x με το X, το y με το Y (διότι το σημείο (x,y) συμπίπτει εξ υποθέσεως με το (X,Y)), και το y' με το $\dfrac{Y'-\lambda}{\lambda Y'+1}$.
έτσι λαβαίνουμε τη διαφορική εξίσωση

$$F\left(X,Y,\frac{Y'-\lambda}{\lambda Y'+1}\right)=0$$

των ζητούμενων γραμμών.

Ειδικώς για τις ορθογώνιες τροχιές έχουμε τη διαφορική εξίσωση:

$$F\left(X,Y,-\frac{1}{Y'}\right)=0.$$

§413. Συστήματα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως.

Έστω:

$$(413.1) \qquad \begin{cases} y' = f(x,y,z) \\ z' = g(x,y,z) \end{cases}$$

ένα σύστημα δυο διαφορικών εξισώσεων $1^{ης}$ τάξεως, με δυο αγνώστους συναρτήσεις $y=y(x)$, $z=z(x)$. Για την ύπαρξη λύσεων $(y(x),z(x))$ του συστήματος και για τον τρόπο με τον οποίο καθορίζονται μια μια οι λύσεις αυτές ισχύει το ακόλουθο θεώρημα με διατύπωση και απόδειξη εντελώς όμοιες προς εκείνες που δίνονται για μια διαφορική εξίσωση με μιαν άγνωστη συνάρτηση.

Θεώρημα.

Αν οι συναρτήσεις $f(x,y,z)$ και $g(x,y,z)$ είναι συνεχείς σε ένα τριδιάστατο χωρίο και έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους f'_y, f'_z, g'_y, g'_z, τότε για κάθε εσωτερικό σημείο (x_0,y_0,z_0) του χωρίου υπάρχει μια και μόνο λύση $(y(x),z(x))$ του συστήματος ικανοποιούσα τις λεγόμενες αρχικές συνθήκες

$$y(x_0)=y_0 \quad , \quad z(x_0)=z_0 \, .$$

Η γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος είναι η εξής:

Μια λύση $(y(x),z(x))$ του συστήματος σημαίνει γεωμετρικώς μια γραμμή στο χώρο των (x,y,z) (η οποία μάλιστα προβάλλεται αμφιμονοσήμαντα πάνω στον άξονα OX). Ώστε το θεώρημα λέγει ότι από κάθε (εσωτερικό) σημείο (x_0,y_0,z_0) του χωρίου όπου πραγματοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος διέρχεται μια και μόνο μια ολοκληρωτική γραμμή του συστήματος.

Σύμφωνα με αυτά, οι ολοκληρωτικές γραμμές είναι άπειρες και αποτελούν ένα διπαραμετρικό σύνολο.

Οι δυο παράμετροι λέγονται σταθερές ολοκληρώσεως του συστήματος.

Μια λύση του συστήματος που περιέχει δυο τέτοιες παραμέτρους λέγεται γενική λύση του συστήματος.

Συστήματα διαφορικών εξισώσεων, όπως το παραπάνω, παρουσιάζονται κάθε φορά που δίνεται ένα «πεδίο διανυσμάτων» στο χώρο, δηλαδή μια διανυσματική συνάρτηση $\vec{\delta}(M)$ ενός σημείου M μεταβλητού σ'ένα τριδιάστατο χωρίο, και ζητούνται οι «γραμμές διευθύνσεως» του πεδίου δηλαδή οι γραμμές του χωρίου που οι εφαπτόμενες των στα διάφορα τους σημεία διευθύνονται πάντοτε κατά τα αντίστοιχα διανύσματα του πεδίου.

Πράγματι, αν σε ένα σύστημα ευθύγραμμων ορθογωνίων συντεταγμένων OXYZ το διάνυσμα $\vec{\delta}(M)$, που αντιστοιχεί στο σημείο $M(x,y,z)$, έχει έκφραση

$$\vec{\delta}(M)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k},$$

τότε οι γραμμές διευθύνσεως του πεδίου θα ορίζωνται από το σύστημα

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)} \tag{413.2}$$

ή

$$\begin{cases} y'(x)=\dfrac{Q(x,y,z)}{P(x,y,z)} \\[2ex] z'(x)=\dfrac{R(x,y,z)}{P(x,y,z)} \end{cases} \quad , \quad \text{εφόσον } P(x,y,z)\neq 0 \,, \tag{413.3}$$

δυο διαφορικών εξισώσεων με δυο άγνωστες συναρτήσεις: τις δυο συντεταγμένες y, z λαμβανόμενες ως συναρτήσεις της τρίτης x.

Η επίλυση ενός συστήματος (413.1) σε απλές περιπτώσεις των εφαρμογών πετυχαίνεται με αναγωγή του σε μια διαφορική εξίσωση $2^{ης}$ τάξεως δι' απαλοιφής της μιας άγνωστης συναρτήσεως.

Π.χ. αν απο την πρώτη εξίσωση (413.3) του συστήματος βγάλουμε την έκφραση του z συναρτήσει των λοιπών γραμμάτων x, y, y':

(413.4) $$z = F(x, y, y'),$$

και την εισάγουμε μέσα στην δεύτερη εξίσωση του συστήματος, θα λάβουμε τη διαφορική εξίσωση 2ης τάξεως

$$F'_x(x,y,y') + F'_y(x,y,y')y' + F'_{y'}(x,y,y')y'' = \frac{R(x,y,F(x,y,y'))}{P(x,y,F(x,y,y'))}.$$

Αν ξέρουμε να την επιλύσουμε, η εισαγωγή της λύσης $y(x)$ που θα βρούμε μέσα στην (413.4) θα μας δώση την συνδεδεμένη με την $y(x)$ άλλην άγνωστη συνάρτηση $z(x)$ του συστήματος.

Ασκήσεις στο 26° κεφάλαιο

457. *Επιλύστε τις διαφορικές εξισώσεις.*

$$(10x^2y^3 - 3y^2 - 2)y' + 5xy^4 + x = 0$$

$$(y^2 + x^2 + a)yy' + (y^2 + x^2 - a)x = 0$$

458. *Για τη*

$$x(xy-3)y' + xy^2 - y = 0$$

βρήτε ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu(x,y)$ της μορφής

$$\mu(x,y) = \sigma(xy) = \text{συνάρτηση του γινομένου } xy.$$

Για τη διαφορική εξίσωση

$$(7xy^3 + y - 5)y' + y^4 - 5y = 0$$

βρήτε ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής

$$\mu(x,y) = \sigma(y).$$

Ολοκληρώστε κατόπιν και τις δυο διαφορικές εξισώσεις.

459. Έστω η διαφορική εξίσωση:

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0.$$

Δείξτε ότι αν η παράσταση:

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

είναι συνάρτηση μόνο του x, τότε η διαφορική εξίσωση επιδέχεται έναν ολοκληρωτικό πολλαπλασιαστή (παράγοντα) $\mu(x)$ που εξαρτιέται μόνον από το x και μπορεί να βρεθή με έναν τετραγωνισμό (= αόριστη ολοκλήρωση).

Εφαρμογή στη διαφορική εξίσωση

$$y\,dx + (2x^2y - x)\,dy = 0$$

460. Να ολοκληρωθούν οι διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{y^2+2}{x^2}\,dx - \frac{2y}{x}\,dy = 0,$$

$$(1+y^2)\,dx + (1+x^2)\,dy = 0.$$

461. Επιλύστε τις διαφορικές εξισώσεις:

$$y' + \frac{2}{x}\,y = (x+1)\,y^2,$$

$$(x+y)^2 y' = a^2,$$

$$(3x+2y+5)\,dx + (4x+3y+6)\,dy = 0,$$

$$(4x+2y+3)\,dx + (6x+3y+4)\,dy = 0,$$

$$[\sigma\upsilon\nu(x+y^2) + 3y]\,dx + [2y\,\sigma\upsilon\nu(x+y^2) + 3x]\,dy = 0,$$

$$(3x^2y^2 - y)\,dx + x\,dy = 0.$$

462. Επιλύστε τις διαφορικές εξισώσεις

$$xy'^2 - yy' + a = 0,$$
$$y'^2 + (x+a)y' - y = 0,$$
$$y'^2 + (x-2)y' - y + 1 = 0.$$

463. Επιλύστε τις διαφορικές εξισώσεις:

$$x = \eta\mu y' + y',$$
$$y = y'^2 \eta\mu y'.$$

464. Προσδιορίστε τις ισογώνιες τροχιές (δοσμένη γωνία η ω) του γένους των καμπύλων

$$y^2(C-x) = x^3, \quad (C \text{ παραμετρος}).$$

465. Βρήτε τις ορθογώνιες τροχιές των καμπύλων

$$x^\nu + y^\nu = C$$

όπου C η παράμετρος του μονοπαραμετρικού συστήματος των καμπύλων και ν μια σταθερά $\neq 0$.

466. Να προσδιορισθούν γενικώς με μια κατάλληλη διαφορική εξίσωση οι γραμμές μιας επιφάνειας

$$Z = \sigma(x,y)$$

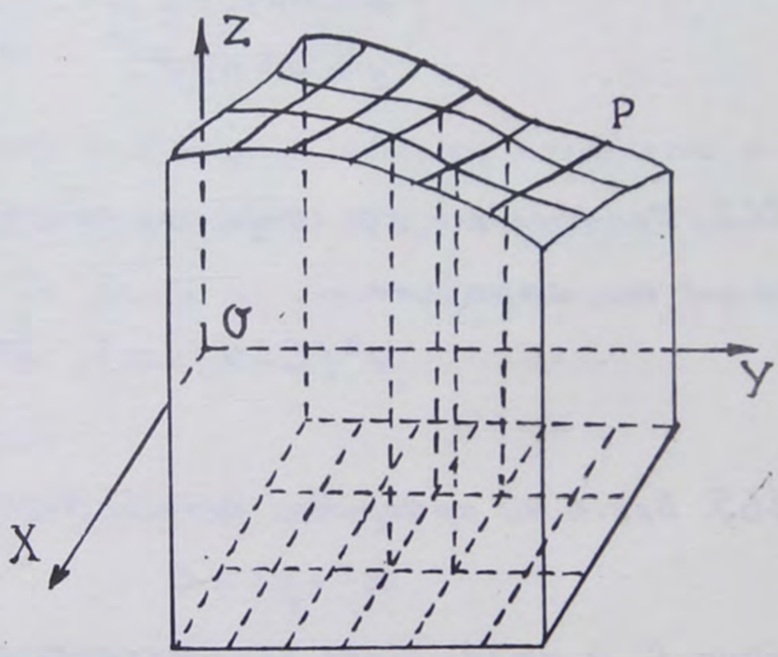
που συναντούν ορθογώνια τις τομές της επιφάνειας με τα (οριζόντια) επίπεδα $Z = C$ (είναι οι γραμμές μεγίστης κλίσεως της επιφάνειας ως προς το οριζόντιο επίπεδο XOY). Να γίνη εφαρμογή στην περίπτωση της κυλινδρικής επιφάνειας

$$(x-z)^2 + y^2 = a^2.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 27ο

Διπλά και τριπλά ολοκληρώματα

§ 414. **Ο όγκος πρισματικού στερεού.** Έστω Ε ένα ορθογώνιο πάνω στο επίπεδο ΟΧΥ ενός ορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων με βασικά διανύσματα ισόμηκα προς τη μονάδα μήκους. Αν φέρουμε από τις πλευρές του επίπεδα παράλληλα προς τον άξονα ΟΖ, αυτά θα κόψουν από μιαν υπερκείμενη επιφάνεια



$$Z = \sigma(x,y) \text{ με } Z \geqq 0$$

ένα κομμάτι P που μαζί με ορισμένα μέρη των επιπέδων που αγάγαμε και με το ορθογώνιο Ε θα περιορίζουν ένα πρισματικό στερεό. Θα ζητήσουμε να ορίσουμε τον όγκο V του στερεού αυτού Τ.

Παρατηρούμε ότι αν χωρίσουμε το ορθογώνιο Ε σε n ορθογώνια $E_1, \ldots, E_n$ με ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του (τα εμβαδά των ορθογωνίων αυτών θα τα παραστήσουμε αντιστοίχως με $(E_1), \ldots, (E_n)$) και αν $V_1, \ldots, V_n$ είναι οι όγκοι των ανάλογων με το Τ πρισματικών στερεών με βάσεις τα $E_1, \ldots, E_n$, θα πρέπει να είναι προφανώς:

$$V = V_1 + \cdots + V_n .$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι πάνω στο ορθογώνιο E_i η συνάρτηση $\sigma(x,y)$ έχει άνω πέρας Π_i και κάτω πέρας π_i. Τότε το πρισματικό στερεό με βάση το E_i θα περιέχεται μεν μέσα στο ορθό παραλληλεπίπεδο με βάση E_i και ύψος Π_i, θα περιέχη δε το ορθό παραλληλεπίπεδο με βάση E_i και ύψος π_i. Επομένως ο όγκος V_i θα πρέπει να περιλαμβάνεται μεταξύ των όγκων των δυο αυτών παραλληλεπιπέδων, δηλαδή θα πρέπει να είναι:

$$(E_i)\pi_i \leqq V_i \leqq (E_i)\Pi_i, \quad (i=1,\ldots,n).$$

Από εδώ έπεται ότι

$$\sum_{i=1}^{n}(E_i)\pi_i \leqq V \leqq \sum_{i=1}^{n}(E_i)\Pi_i. \tag{414.1}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα μιαν ακολουθία διαμερισμών $\mathcal{D}m$ του E σε ορθογώνια $E_1^{(m)},\ldots,E_{n_m}^{(m)}$ για $m=1,2,3,\ldots$, τέτοια ώστε η πιο μεγάλη από τις διαγώνιες των ορθογωνίων αυτών $E_i^{(m)}$ $(i=1,2,\ldots,n_m)$ να τείνη στο 0, όταν $m\to\infty$, και ας συμβαίνη τα δυο αντίστοιχα αθροίσματα της (414.1), που θα είναι τώρα συναρτήσεις του m, να έχουν το ίδιο όριο όταν $m\to+\infty$· τότε το όριο αυτό θα πρέπει να οριστή ως ο ζητούμενος όγκος V.

Στα επόμενα θα εξετάσουμε γενικά τα όρια τέτοιων αθροισμάτων θεωρώντας και διαμερισμούς του E σε χωρία ΔE_i μη ορθογωνιακά αλλά τέτοια που να έχουν ένα ορισμένο εμβαδό.

Γι' αυτό προηγουμένως θα εξετάσουμε πότε μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα εμβαδό σε ένα σημειοσύνολο του επιπέδου.

§ 415. <u>Τετραγωνίσιμα σημειοσύνολα</u>. Έστω F ένα σημειοσύνολο του επιπέδου. Όπως ορίσαμε στον § 386, ένα σημείο M

του επιπέδου λέγεται συνοριακό σημείο του F, αν σε κάθε κύκλο με κέντρο το M υπάρχη ένα τουλάχιστο σημείο ανήκον στο F και ένα τουλάχιστο μη ανήκον στο F. Το σύνολο των συνοριακών σημείων του F θα καλείται σύνορο του F.

Το συνοριακό σημείο M του F μπορεί να ανήκη ή να μην ανήκη στο F. Αν όλα τα συνοριακά σημεία του F ανήκουν σ'αυτό, τότε το F λέγεται σύνολο κλειστό. Ένα σημειοσύνολο F λέγεται περιορισμένο (από άλλους: περατωμένο), αν οι αποστάσεις των σημείων του από την αρχή $O(0,0)$ δεν υπερβαίνουν κάποιον αριθμό.

Ένα περιορισμένο σημειοσύνολο περιέχεται προφανώς σε ένα (ορθογωνιακό) σημειοσύνολο

$$\{\alpha_1 \leqq x \leqq \alpha_2, \quad \beta_1 \leqq y \leqq \beta_2\}$$

και αντιστρόφως.

Μια συνάρτηση $\sigma(x,y)$ ορισμένη μονοσήμαντα στα διάφορα σημεία ενός σημειοσυνόλου F περιορισμένου και κλειστού και συνεχής σε όλα αυτά τα σημεία του F είναι ομοιομόρφως συνεχής στο F, δηλαδή αν δοθή εκ των προτέρων ένας θετικός αριθμός ε, αυθαιρέτως μικρός, υπάρχει αντίστοιχος θετικός αριθμός δ_ε[1] τέτοιος ώστε για δυο οποιαδήποτε σημεία $M_1(x_1,y_1)$ και $M_2(x_2,y_2)$ του F με απόσταση $M_1M_2 < \delta_\varepsilon$ να είναι

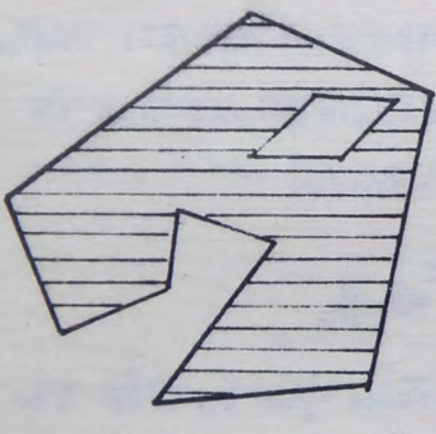
[1] εξαρτώμενος μόνο από το ε,

$$|\sigma(x_1,y_1) - \sigma(x_2,y_2)| < \varepsilon.$$

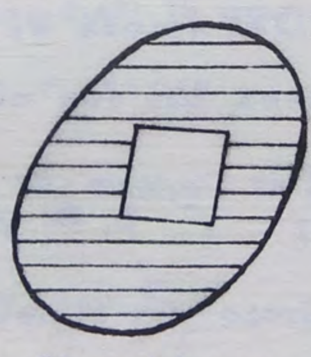
Ένα περιορισμένο σημειοσύνολο F λέγεται τετραγωνίσιμο αν τα συνοριακά του σημεία μπορούν να εγκλεισθούν σε πεπερασμένο πλήθος ορθογωνίων που έχουν άθροισμα εμβαδών μικρότερο από τον εκ των προτέρων αυθαίρετα δοσμένο θετικό αριθμό ε.

Ο πεπερασμένος αυτός αριθμός ορθογωνίων που μπορούν να εγκλείσυν το σύνορο του F δεν υπόκειται σε κανέναν περιορισμό προς τα άνω και φυσικά ενδέχεται, όταν το ε λαμβάνεται ολοένα πιο μικρό και τείνει προς το μηδέν, ο αριθμός των ορθογωνίων που καλύπτουν το σύνορο να πρέπη να ληφθή ολοένα πιο μεγάλος και να τείνη προς το $+\infty$.

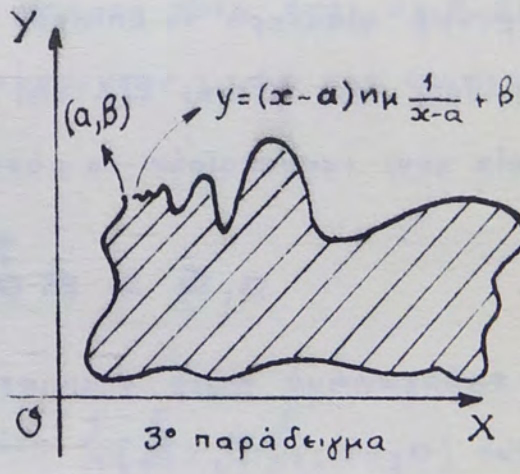
Παραδείγματα <u>τετραγωνίσιμων</u> σημειοσυνόλων είναι τα περιορισμένα σημειοσύνολα που έχουν για σύνορο πεπερασμένο πλήθος ευθύγραμμων τμημάτων ή πεπερασμένο πλήθος συνεχών γραμμών πεπερασμένου μήκους ή πεπερασμένο πλήθος συνεχών γραμμών που η κάθε μια τους τέμνεται το πολύ σ' ένα σημείο από ευθείες παράλληλες προς μια και την ίδια διεύθυνση.



1ο παράδειγμα



2ο παράδειγμα



3ο παράδειγμα

Αν F_1 και F_2 είναι δυο τετραγωνίσιμα σύνολα, τότε και το συνένωμα τους F_1+F_2, (δηλαδή το σημειοσύνολο που αποτελείται από τα σημεία του επιπέδου τα οποία ανήκουν είτε στο F_1 είτε στο F_2,) είναι <u>τετραγωνίσιμο</u> σύνολο. Επίσης τετραγωνίσιμη είναι και η <u>αλληλοτομή τους</u> $F_1 \cdot F_2$, δηλαδή το σημειοσύνολο που αποτελείται από τα σημεία του επιπέδου τα οποία ανήκουν συγχρόνως και στο F_1 και στο F_2.

Για τα επόμενα είναι χρήσιμη η εξής έννοια:

<u>Διαμέτρημα</u> ενός σημειοσυνόλου F καλείται το άνω πέρας των αποστά-

σεων δυο οποιωνδήποτε σημείων του.

Π.χ. για το σημειοσύνολο

$$\begin{cases} \alpha_1 < x < \alpha_2 \\ \beta_1 < y < \beta_2 \end{cases} \quad \text{ή το} \quad \begin{cases} \alpha_1 \leqq x \leqq \alpha_2 \\ \beta_1 \leqq y \leqq \beta_2 \end{cases}$$

διαμέτρημα είναι ο αριθμός

$$\sqrt{(\alpha_2-\alpha_1)^2+(\beta_2-\beta_1)^2}$$

Στα τετραγωνίσιμα σημειοσύνολα F μπορούμε να αποδώσουμε "εμβαδό" ως εξής:

Διαιρούμε ολόκληρο το επίπεδο σε ορθογωνιακά μέρη, με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες OX και OY, δηλαδή σε σημειοσύνολα που τα σημεία τους ικανοποιούν το σύστημα των δυο ανισοτήτων

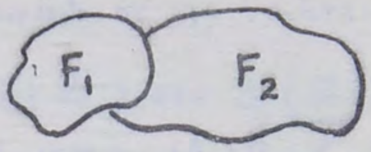
$$\alpha_1 \leqq x \leqq \alpha_2 \quad , \quad \beta_1 \leqq y \leqq \beta_2 \, .$$

Στο ορθογωνιακό αυτό σημειοσύνολο αντιστοιχίζουμε για εμβαδό τον αριθμό $(\alpha_2-\alpha_1)\cdot(\beta_2-\beta_1)$.

Από τα παραπάνω αυτά μέρη του επιπέδου θεωρούμε εκείνα μόνο που περιέχουν ένα τουλάχιστο σημείο του F· ας τα καλέσουμε $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. Ας είναι $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ τα εμβαδά τους αντιστοίχως. Αποδεικνύεται εύκολα ότι το άθροισμα $\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j$ τείνει προς ένα αριθμό, όταν το μέγιστο διαμέτρημα των ορθογωνιακών μερών στα οποία διαιρέθηκε το επίπεδο τείνει στο μηδέν. Ο οριακός αυτός αριθμός στην περίπτωση όπου το F είναι σχήμα με εμβαδό που ορίστηκε ήδη από τα Στοιχεία των μαθηματικών, ισούται με το εμβαδό τούτο.

Άρα δικαιούμεθα να καλέσουμε τον ανωτέρω οριακό αριθμό εμβαδό του τυχαίου τετραγωνίσιμου σημειοσυνόλου.

Αν τα τετραγωνίσιμα σημειοσύνολα F_1 και F_2 δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, τότε το συνένωμα τους $F_1 + F_2$ έχει εμβαδό το άθροισμα των εμβαδών των F_1 και F_2.



Η ιδιότητα αυτή επεκτείνεται με επαγωγή σε οσαδήποτε πεπερασμένου πλήθους σημειοσύνολα τα οποία ανά δυό δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία.

§416. Διπλό ολοκλήρωμα.

Έστω τώρα F ένα τετραγωνίσιμο σημειοσύνολο του επιπέδου και $\sigma(x,y)$ μια περιορισμένη μονοσήμαντη συνάρτηση ορισμένη στο σημειοσύνολο F. Θα υπάρχη τότε ένας αριθμός π κάτω πέρας και ένας αριθμός Π άνω πέρας των τιμών της συναρτήσεως επί του F και θα ισχύη η σχέση

$$\pi \leqq \sigma(x,y) \leqq \Pi$$

για κάθε σημείο (x,y) του F.

Διαμερίζουμε το F σε τετραγωνίσιμα μέρη $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$.

Αυτό σημαίνει ότι 1° τα σημειοσύνολα $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ είναι υποσύνολα του F, 2° κάθε σημείο του F ανήκει σε ένα τουλάχιστο από τα $f_j \ (j=1,2,\ldots,\nu)$ και 3° δυο οποιαδήποτε μέρη f_j και $f_\kappa \ (j \neq \kappa)$ ή δεν έχουν κοινά σημεία η, αν έχουν, κανένα από αυτά τα σημεία δεν είναι εσωτερικό σημείο είτε του f_j είτε του f_κ.

Καλούμε π_j το κάτω πέρας της συναρτήσεως $\sigma(x,y)$ στο σημειοσύνολο $f_j \ (j=1,2,\ldots,\nu)$ και Π_j το άνω πέρας της, σχηματίζουμε δε τα εξής δυο αθροίσματα:

$$\sum_{j=1}^{\nu} \pi_j \cdot A_j \quad \text{και} \quad \sum_{j=1}^{\nu} \Pi_j \cdot A_j \ ,$$

όπου A_j είναι το εμβαδό του τετραγωνίσιμου μέρους f_j $(j=1,2,\dots,\nu)$.
Οι δυό παραπάνω αριθμοί εξαρτιούνται εκτός από τη συνάρτηση $\sigma(x,y)$ και από τα χρησιμοποιούμενο διαμερισμό του F σε μέρη.
Γι'αυτό παριστάνοντας το διαμερισμό μ'ένα σύμβολο $\mathcal{D}$ θα θέσουμε

$$s(\mathcal{D}) = \sum_{j=1}^{\nu} \pi_j \cdot A_j \quad \text{και} \quad S(\mathcal{D}) = \sum_{j=1}^{\nu} \Pi_j \cdot A_j .$$

Είναι φανερό (λόγω της σχέσης $\pi_j \leqq \Pi_j$) ότι

$$s(\mathcal{D}) \leqq S(\mathcal{D}),$$

γι' αυτό θα καλέσουμε το μεν $s(\mathcal{D})$ <u>κατώτερο</u> άθροισμα της $\sigma(x,y)$ για το διαμερισμό $\mathcal{D}$ του πεδίου F, το δε $S(\mathcal{D})$ <u>ανώτερο</u> άθροισμα. Οι αριθμοί $s(\mathcal{D})$ και $S(\mathcal{D})$ για όλους τους <u>διαφόρους δυνατούς διαμερισμούς $\mathcal{D}$ του F</u> κείνται μεταξύ δυο φραγμάτων, διότι, αν κληθή A το <u>εμβαδό</u> του F, θα έχουμε

$$\pi \cdot A \leqq s(\mathcal{D}) \leqq S(\mathcal{D}) \leqq \Pi \cdot A .$$

Ας μεταβούμε τώρα από το διαμερισμό $\mathcal{D}(f_1,\dots,f_\nu)$ σε έναν άλλο διαμερισμό $\mathcal{D}'$ που προκύπτει από τον $\mathcal{D}$ με περαιτέρω διαίρεση των μερών f_j του $\mathcal{D}$.

Το μέρος f_j ας υποδιαιρήται, για να προκύψη ο διαμερισμός $\mathcal{D}'$, στα τετραγωνίσιμα μέρη $f_{j_1}, f_{j_2}, \dots, f_{j\nu_j}$ με εμβαδά αντιστοίχως $A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j\nu_j}$ (ν_j είναι επομένως ένας φυσικός αριθμός).
Θα ισχύη:

$$A_j = \text{εμβ. του } f_j = A_{j_1} + A_{j_2} + \dots + A_{j\nu_j} .$$

Αφ' ετέρου τα κάτω πέρατα $\pi_{j_1}, \pi_{j_2}, \dots, \pi_{j\nu_j}$ της $\sigma(x,y)$ στα σημειοσύνολα $f_{j1}, f_{j2}, \ldots, f_{j\nu_j}$ αντιστοίχως είναι $\geq \pi_j =$ [illegible] $\sigma(x,y)$ στο f_j που περιέχει τα $f_{j1}, f_{j2}, \ldots, f_{j\nu_j}$.

Άρα

$$\pi_{j1} \cdot A_{j1} + \pi_{j2} A_{j2} + \cdots + \pi_{j\nu} A_{j\nu} \geq \pi_j (A_{j1} + \cdots + A_{j\nu_j}) = \pi_j A_j .$$

Επομένως κατά τη μετάβαση από το $S(\mathcal{D})$ στο $S(\mathcal{D}')$ ο όρος $\pi_j A_j$ του $S(\mathcal{D})$ αντικαθιστάται με ένα άθροισμα όρων του οποίου η τιμή είναι μεγαλύτερη ή ίση του $\pi_j A_j$.

Άρα

$$s(\mathcal{D}) \leq s(\mathcal{D}'),$$

δηλαδή η μετάβαση σε μιαν υποδιαίρεση $\mathcal{D}'$ του διαμερισμού $\mathcal{D}$ <u>αυξάνει</u> το κατώτερο άθροισμα ή το αφίνει <u>στάσιμο</u>.

Ομοίως αποδείχνεται ότι

$$S(\mathcal{D}) \geq S(\mathcal{D}').$$

Από τις τελευταίες σχέσεις έπεται τώρα ότι αν $\mathcal{D}_1$ και $\mathcal{D}_2$ είναι δυο οποιαδήποτε διαμερισμοί του F σε τετραγωνίσιμα μέρη, θα έχουμε

$$s(\mathcal{D}_1) \leq S(\mathcal{D}_2) \text{ και όμοια } s(\mathcal{D}_2) \leq S(\mathcal{D}_1).$$

Πράγματι έστω $\mathcal{D}'$ ο διαμερισμός του F ο οποίος προκύπτει αν υποβάλουμε το πεδίο F και στους δυο διαμερισμούς $\mathcal{D}_1$ και $\mathcal{D}_2$ συγχρόνως.

Ο $\mathcal{D}'$ θα είναι υποδιαίρεση και του $\mathcal{D}_1$ και του $\mathcal{D}_2$,

άρα θα είναι

$$s(\mathcal{D}_1) \leq s(\mathcal{D}'), \quad S(\mathcal{D}') \leq S(\mathcal{D}_2).$$

Αλλά, όπως είδαμε, είναι $s(\mathcal{D}') \leq S(\mathcal{D}')$, άρα $s(\mathcal{D}_1) \leq S(\mathcal{D}_2)$, ο.ε.δ.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι ένα οποιοδήποτε κατώτερο άθροισμα $s(\mathcal{D}_1)$ είναι $\leqq$ ενός οποιουδήποτε ανωτέρου αθροίσματος $S(\mathcal{D}_2)$.

Καλούμε τώρα s το άνω πέρας των κατωτέρων αθροισμάτων $s(\mathcal{D})$ για όλους τους διαφόρους δυνατούς διαμερισμούς $\mathcal{D}$ του F και S το κάτω πέρας των ανωτέρων αθροισμάτων $S(\mathcal{D})$ για όλους τους δυνατούς διαμερισμούς $\mathcal{D}$ του F.

Θα ισχύη η σχέση

$$s \leqq S .$$

Αν οι αριθμοί s και S είναι ίσοι, τότε η $\sigma(x,y)$ λέγεται <u>ολοκληρώσιμη στο σύνολο F</u> και <u>η κοινή τιμή των s και S, διπλό ολοκλήρωμα</u> της $\sigma(x,y)$ στο σημειοσύνολο F.

Το ολοκλήρωμα παριστάνεται με το σύμβολο

$$\iint_F \sigma(x,y)\,dx\,dy \quad \text{ή} \quad \iint_F \sigma(x,y)\,dF .$$

<u>Ικανή</u> και <u>αναγκαία</u> συνθήκη ολοκληρωσιμότητας είναι η εξής:

Όσο μικρός και αν είναι ο <u>αυθαίρετος θετικός αριθμός ε</u>, υπάρχει κάποιος διαμερισμός $\mathcal{D}$ του F σε τετραγωνίσιμα μέρη $f_1, \dots, f_\nu$ εμβαδών αντιστοίχως $A_1, \dots, A_\nu$, τέτοιος ώστε

$$S(\mathcal{D}) - s(\mathcal{D}) \leqq \varepsilon .$$

Αυτό σημαίνει ότι, αν καλέσουμε πάλι π_j και Π_j το κάτω αντιστοίχως το άνω πέρας της $\sigma(x,y)$ στο μέρος f_j, θα ισχύη για τον παραπάνω διαμερισμό η σχέση

$$\sum_{j=1}^{\nu} (\Pi_j - \pi_j)\, A_j \leqq \varepsilon .$$

§417. Ολοκληρωσιμότητα συνεχούς συναρτήσεως.

Θεώρημα. Αν η $\sigma(x,y)$ είναι συνεχής στο τετραγωνίσιμο και κλειστό σημειοσύνολο F τότε είναι και ολοκληρώσιμη σ' αυτό.

Απόδειξη. Ας καλέσουμε A το εμβαδόν του F. Η $\sigma(x,y)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο περιορισμένο και κλειστό σημειοσύνολο F. Επομένως, όσο μικρός κι αν είναι ο εκ των προτέρων αυθαίρετα δοσμένος θετικός αριθμός ε, υπάρχει ένας αντίστοιχος θετικός αριθμός δ_ε τέτοιος ώστε να είναι

$$\left|\sigma(x_1,y_1)-\sigma(x_2,y_2)\right| < \frac{\varepsilon}{A},$$

για δυο οποιαδήποτε σημεία $M_1(x_1,y_1)$ και $M_2(x_2,y_2)$ του F που έχουν απόσταση $M_1M_2 < \delta_\varepsilon$. Διαμερίζουμε τώρα το F σε μέρη με εμβαδά $A_1,\ldots,A_\nu$ αντιστοίχως και με διαμετρήματα $<\delta_\varepsilon$. Στο καθένα από αυτά τα μέρη θα είναι τότε

άνω πέρας − κάτω πέρας της $\sigma(x,y) = \Pi_j - \pi_j \leqq \frac{\varepsilon}{A}$.

Άρα για την παραπάνω διαίρεση θα ισχύει η σχέση

$$S(\mathcal{D})-s(\mathcal{D})=\sum_{j=1}^{\nu}(\Pi_j-\pi_j)A_j \leqq \frac{\varepsilon}{A}\sum A_j=\frac{\varepsilon}{A}\cdot A=\varepsilon,$$

δηλαδή η <u>ικανή</u> και <u>αναγκαία</u> συνθήκη ολοκληρωσιμότητας είναι ικανοποιημένη, ο.ε.δ.

Παρατήρηση 1. Αν μεταβάλουμε τον ορισμό της παραπάνω συνεχούς στο σημειοσύνολο F συναρτήσεως $\sigma(x,y)$ έτσι που να παρουσιασθούν μεν σημεία <u>ασυνέχειας</u> στην προκύπτουσα νέα συνάρτηση $\sigma_1(x,y)$, τέτοια όμως ώστε να μπορούν να εγκλεισθούν σε πεπερασμένο πλήθος ορθογωνίων με άθροισμα εμβαδών όσο θέλουμε μικρό, και η $\sigma_1(x,y)$ να είναι περιορισμένη, τότε είναι φανερό ότι και η νέα συνάρτηση είναι <u>ολοκληρώσιμη</u> στο πεδίο F

και ότι το ολοκλήρωμα δεν παθαίνει καμιάν αλλοίωση στην τιμή του.

$$\iint_F \sigma(x,y)\,dx\,dy = \iint_F \sigma_1(x,y)\,dx\,dy$$

<u>Παρατήρηση 2.</u> Ας είναι η $\sigma(x,y)$ συνεχής στο τετραγωνίσιμο και κλειστό σημειοσύνολο F και $\mathcal{D}$ ένας τυχαίος διαμερισμός του σε τετραγωνίσιμα μέρη $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ με εμβαδά $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$.

Λαμβάνουμε ένα σημείο $M_j\,(x_j, y_j)$ μέσα στο σημειοσύνολο f_j (για $j=1,2,\ldots,\nu$).

Έχουμε:

κάτω πέρας της $\sigma(x,y)$ στο $f_j = \pi_j \leqq \sigma(x_j, y_j) \leqq \Pi_j$ = άνω πέρας της $\sigma(x,y)$ στο f_j.

Άρα

$$S(\mathcal{D}) \leqq \sum_{j=1}^{\nu} \sigma(x_j, y_j) A_j \leqq \mathcal{S}(\mathcal{D}).$$

Εξ άλλου ισχύει από ορισμό του διπλού ολοκληρώματος η σχέση

$$S(\mathcal{D}) \leqq \iint \sigma(x,y)\,dx\,dy \leqq \mathcal{S}(\mathcal{D}).$$

Όταν όμως τα διαμετρήματα των μερών της διαιρέσεως $\mathcal{D}$ είναι όλα αρκετά μικρά, η διαφορά $\mathcal{S}(\mathcal{D}) - S(\mathcal{D})$ είναι όσο θέλουμε μικρή:

$0 \leqq \mathcal{S}(\mathcal{D}) - S(\mathcal{D}) <$ του αυθαίρετα δοσμένου θετικού ε.

Άρα, με ε = θετικός αριθμός αυθαίρετα μικρός, θα έχουμε

$$\left| \iint \sigma(x,y)\,dx\,dy - \sum_{j=1}^{\nu} \sigma(x_j, y_j) A_j \right| \leqq \mathcal{S}(\mathcal{D}) - S(\mathcal{D}) < \varepsilon,$$

αρκεί τα μέρη του διαμερισμού $\mathcal{D}$ να έχουν διαμετρήματα καταλλήλως μικρά.

<u>Παρατήρηση 3.</u> Επειδή το F είναι από υπόθεση τετραγωνίσιμο σημειοσύνολο, αν θεωρήσουμε έναν διαμερισμό $\mathcal{D}$ του F σε μέρη με μέγιστο διαμέτρημα αρκετά μικρό, τότε τα μέρη του F που περιέχουν συνοριακά σημεία του F θα έχουν συνολικό εμβαδό όσο θέλουμε μικρό. Άρα οι αντίστοιχοι όροι του αθροίσματος

$$\sum_{j=1}^{\nu} \sigma(x_j, y_j) A_j .$$

δίνουν άθροισμα απολύτως μικρότερο του αριθμού $|\Pi| + |\pi|$ πολλαπλασιασμένου επί το συνολικό τούτο αυθαίρετα μικρό εμβαδό (Π και π παριστάνουν, όπως και στην αρχή του § 416, το άνω, αντιστοίχως κάτω πέρας της συναρτήσεως $\sigma(x,y)$ στο σημειοσύνολο F).

Επομένως οι όροι του αθροίσματος

$$\sum_{j=1}^{\nu} \sigma(x_j, y_j) A_j$$

που αντιστοιχούν σε μέρη του διαμερισμού του F περιέχοντα ένα τουλάχιστο συνοριακό σημείο του F μπορούν να παραμεληθούν προκειμένου το ολοκλήρωμα να προσεγγισθή από το άθροισμα

$$\sum_{j=1}^{\nu} \sigma(x_j, y_j) A_j \quad .$$

Από τα παραπάνω προκύπτει η εξής μέθοδος κατά προσέγγιση υπολογισμού του $\displaystyle\iint_F \sigma(x,y)\,dx\,dy.$

Διαιρούμε το επίπεδο σε ορθογωνιακά μέρη, διαμετρήματος αρκετά μικρού. Από τα μέρη αυτά θεωρούμε μόνο εκείνα που αποτελούνται από εσωτερικά μόνο σημεία του F, ας είναι $A_1, \ldots, A_\mu$ τα εμβαδά τους. Μέσα στο μέρος με εμβαδό A_j $(j=1,2,\ldots,\mu)$ παίρνουμε αυθαίρετα ένα σημείο $M_j(x_j, y_j)$ του F και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$\sum_{j=1}^{\nu} \sigma(x_j, y_j) A_j \quad .$$

Το άθροισμα αυτό προσεγγίζει το ολοκλήρωμα· η προσέγγιση είναι τόσο καλύτερη όσο πιο μικρό είναι το μέγιστο διαμέτρημα των ορθογωνιακών μερών της χρησιμοποιουμένης διαιρέσεως του επιπέδου.

Παρατήρηση 4. Από τους παραγράφους 414-417 έπεται ότι ο όγκος ενός πρισματικού στερεού που περιορίζεται 1º από ένα κομμάτι P επιφάνειας συνεχούς $Z=f(x,y) \geqq 0$, 2º από την κυλινδρική επιφάνεια που προβάλλει πάνω στο XOY το περίγραμμα του P και 3º από την προβολή E του P πάνω στο επίπεδο XOY, πρέπει να τεθή ίσος με το ολοκλήρωμα

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy,$$

με την προϋπόθεση φυσικά ότι το σημειοσύνολο E είναι τετραγωνίσιμο.

Αντιστρόφως: Αν E είναι ένα τετραγωνίσιμο σημειοσύνολο του XOY και $f(x,y)$ μια συνάρτηση συνεχής και $\geqq 0$ πάνω στο E, τότε το

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy$$

μπορεί να ερμηνευθή γεωμετρικά ως ο όγκος του αντίστοιχου πρισματικού στερεού.

§ 418. Ιδιότητες του ολοκληρώματος.

1. Θεώρημα της μέσης τιμής.

Ας είναι η $\sigma(x,y)$ ολοκληρώσιμη στο F· τότε θα έχουμε:

$$\pi A \leqq \iint_F \sigma(x,y)\,dx\,dy \leqq \Pi A,$$

όπου A το εμβαδό του F, π και Π τα πέρατα της $\sigma(x,y)$ στο F.

2. Ας είναι το F περιορισμένο, κλειστό και συνεκτικό, σημειοσύνολο, η δε $\sigma(x,y)$ συνεχής στο F. (Ένα κλειστό σημειοσύνολο λέγεται συνεκτικό, όταν δεν μπορή να θεωρηθή ως συνένωμα δυο κλειστών σημειοσυνόλων F_1 και F_2 που δεν έχουν κοινά σημεία).

Τότε η $\sigma(x,y)$ λαμβάνει μέσα στο F κάθε τιμή τ που κείται μεταξύ δυο τιμών της $\tau_1 = \sigma(x_1, y_1)$ και $\tau_2 = \sigma(x_2, y_2)$.

Εξ άλλου το κάτω πέρας π και το άνω πέρας Π, με τις τωρινές υποθέσεις, είναι τιμές που παίρνει η συνεχής συνάρτηση $\sigma(x,y)$ σε κάποια σημεία του F. Άρα θα υπάρχη ένα τουλάχιστο σημείο F στο οποίο η συνάρτηση θα λαμβάνη την τιμή

$$\frac{1}{A}\iint_F \sigma(x,y)\,dx\,dy$$

η οποία κείται, κατά το προηγούμενο θεώρημα, μεταξύ π και Π. Αν καλέσουμε (ξ,η) τις συντεταγμένες του σημείου τούτου θα έχουμε επομένως

$$\iint_F \sigma(x,y)\,dx\,dy = \sigma(\xi,\eta).A. \tag{418.1}$$

3. Αν το F είναι συνένωμα των τετραγωνίσιμων σημειοσυνόλων F_1 και F_2 και αν αυτά δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, τότε

$$\iint_F \sigma(x,y)\,dx\,dy = \iint_{F_1} \sigma(x,y)\,dx\,dy + \iint_{F_2} \sigma(x,y)\,dx\,dy \,. \tag{418.2}$$

4. Είναι:

$$\iint_F c\,\sigma(x,y)\,dx\,dy = c\iint_F \sigma(x,y)\,dx\,dy \quad \text{για } c=\text{σταθερά}. \tag{418.3}$$

5. Αν οι $\sigma(x,y)$ και $\varphi(x,y)$ είναι ολοκληρώσιμες στο F, τότε και η $\sigma(x,y)+\varphi(x,y)$ είναι ολοκληρώσιμη στο F, ισχύει δε η σχέση

$$\iint_F \{\sigma(x,y)+\varphi(x,y)\}\,dx\,dy = \iint_F \sigma(x,y)\,dx\,dy + \iint_F \varphi(x,y)\,dx\,dy. \tag{418.4}$$

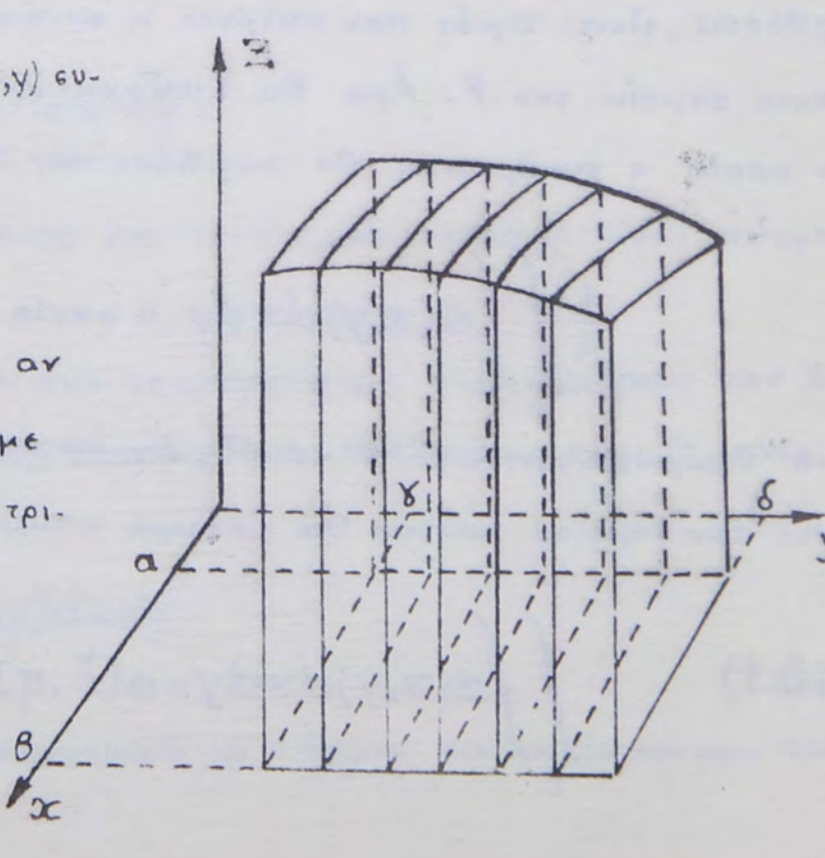
§ 419. Διπλά ολοκληρώματα με ορθογωνιακό πεδίο ολοκληρώσεως.

Έστω μια συνάρτηση $f(x,y)$ συνεχής πάνω στο ορθογώνιο

$$E\begin{cases} \alpha \leqq x \leqq \beta \\ \gamma \leqq y \leqq \delta. \end{cases}$$

Όπως είδαμε στον § 417, αν $f(x,y) \geqq 0$, τότε μπορούμε να ερμηνεύσουμε γεωμετρικά το

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy$$



ως όγκο ενός αντιστοίχου πρισματικού στερεού. Για να υπολογίσουμε τον όγκο αυτό χωρίζουμε το πρισματικό στερεό σε N στρώματα (φέτες) φέρνοντας τα παράλληλα προς το XOZ επίπεδα

$$y=\gamma+\nu\lambda \quad , \text{με } \lambda=\frac{\delta-\gamma}{N} \quad \text{και} \quad \nu=1,2,\ldots,N.$$

Ο όγκος του νιοστού στρώματος ισούται τότε κατά προσέγγιση με το εμβαδό της βάσης του μέσα στο επίπεδο $y=\gamma+\nu\lambda$ πολλαπλασιασμένο επί το πάχος του λ, δηλαδή με:

$$\lambda\int_{\alpha}^{\beta} f(x,\gamma+\nu\lambda)\,dx.$$

Αν λοιπόν θέσουμε:

$$\Phi(y)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\,dx$$

ο ζητούμενος όγκος θα είναι κατά προσέγγιση:

$$\sum_{\nu=1}^{N}\lambda\Phi(\gamma+\nu\lambda).$$

Όταν το $N\to+\infty$, το όριο του αθροίσματος αυτού (που εξαρτιέται από το N) είναι, όπως ξέρουμε, το:

$$\int_{\gamma}^{\delta}\Phi(y)\,dy.$$

Εικάζουμε λοιπόν ότι ο ζητούμενος όγκος θα ισούται με το τελευταίο ολοκλήρωμα.

Πράγματι είναι δυνατό να δειχθή εντελώς αυστηρά ότι

$$(419.1)\qquad \iint_E f(x,y)\,dx\,dy=\int_{\gamma}^{\delta}\Phi(y)\,dy=\int_{\gamma}^{\delta}\left\{\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\,dx\right\}dy$$

με μόνη προϋπόθεση την εξής: Ή η $f(x,y)$ δεν έχει σημεία <u>ασυνέχειας</u> στο πεδίο E ή τα υπάρχοντα σημεία ασυνέχειας μπορούν να εγκλεισθούν μέσα σε ένα πεπερασμένο πλήθος από ορθογώνια <u>συνολικού εμβαδού όσο θέλουμε μικρού</u>.

Από τον τύπο αυτό έπεται ότι μπορούμε να υπολογίσουμε το θεωρούμενο διπλό ολοκλήρωμα με δυο διαδοχικές απλές ολοκληρώσεις.

Εντελώς αντίστοιχα αποδείχνεται ότι και

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy=\int_\alpha^\beta\left\{\int_\gamma^\delta f(x,y)\,dy\right\}dx. \tag{419.2}$$

§420. <u>Παραδείγματα</u>.

Έστω πεδίο ολοκληρώσεως E το ορθογώνιο $\begin{cases}0\leqq x\leqq 1\\ 0\leqq y\leqq 2\end{cases}$ και $f(x,y)=x^3y$.

$$\iint_E x^3y\,dx\,dy=\int_0^1\left\{\int_0^2 x^3y\,dy\right\}dx=$$

$$=\int_0^1\left\{\left[\frac{1}{2}x^3y^2\right]_{y=0}^{y=2}\right\}dx=\int_0^1 2x^3dx=\left[\frac{1}{2}x^4\right]_0^1=\frac{1}{2}.$$

Ή

$$\iint_E x^3y\,dx\,dy=\int_0^2\left\{\int_0^1 x^3y\,dx\right\}dy=\int_0^2\left\{\left[\frac{1}{4}x^4y\right]_{x=0}^{x=1}\right\}dy$$

$$=\int_0^2\frac{y}{4}dy=\left[\frac{1}{8}y^2\right]_0^2=\frac{1}{2}.$$

<u>Παρατηρήσεις</u>: 1) Αν $f(x,y)=\varphi(x).\omega(y)$ (δηλαδή γινόμενο μιας

συναρτήσεως μόνο του x επί μια συνάρτηση μόνο του y), θα έχουμε, όπως εύκολα βλέπει κανείς,

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta \left\{ \int_\gamma^\delta \varphi(x)\cdot\omega(y)\,dy \right\} dx$$

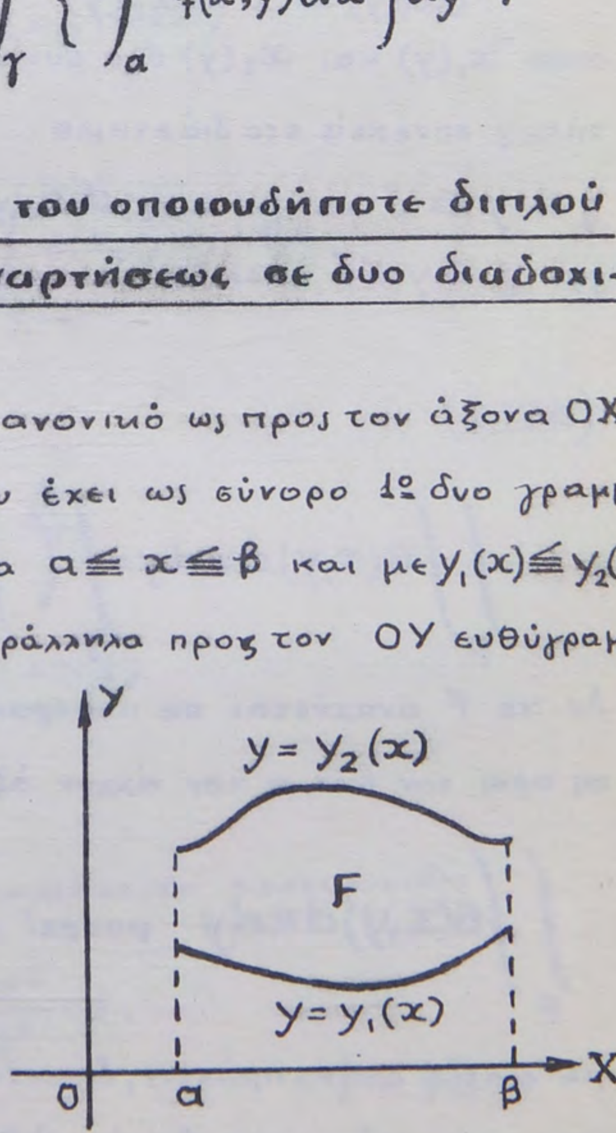
$$= \int_\alpha^\beta \left\{ \varphi(x) \int_\gamma^\delta \omega(y)\,dy \right\} dx = \left\{ \int_\gamma^\delta \omega(y)\,dy \right\} \cdot \left\{ \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx \right\}.$$

2) Από τους τύπους (419.1) και (419.2) έπεται για μια συνάρτηση $f(x,y)$ συνεχή στο ορθογώνιο E

$$\int_\alpha^\beta \left\{ \int_\gamma^\delta f(x,y)\,dy \right\} dx = \int_\gamma^\delta \left\{ \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx \right\} dy .$$

§421. Αναγωγή του υπολογισμού του οποιουδήποτε διπλού ολοκληρώματος συνεχούς συναρτήσεως σε δυο διαδοχικές απλές ολοκληρώσεις.

Έστω F ένα πεδίο ολοκληρώσεως κανονικό ως προς τον άξονα OX. Καλούμε έτσι ένα σημειοσύνολο που έχει ως σύνορο 1º δυο γραμμές $y=y_1(x)$ και $y=y_2(x)$ συνεχείς για $\alpha \leqq x \leqq \beta$ και με $y_1(x) \leqq y_2(x)$ για $\alpha \leqq x \leqq \beta$ και 2º τα δυο παράλληλα προς τον OY ευθύγραμμα τμήματα που έχουν άκρα τα σημεία $(\alpha, y_1(\alpha))$ και $(\alpha, y_2(\alpha))$ το ένα, $(\beta, y_1(\beta))$ και $(\beta, y_2(\beta))$ το άλλο.



Με άλλα λόγια το F ας αποτελήται από τα σημεία (x,y) που ικανοποιούν τις δυο σχέσεις

$$\begin{cases} \alpha \leqq x \leqq \beta \\ y_1(x) \leqq y \leqq y_2(x). \end{cases}$$

Άν η $\sigma(x,y)$ είναι συνεχής στο F τότε:

$$(421.1)\qquad \iint_F \sigma(x,y)\,dx\,dy = \int_a^\beta \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \sigma(x,y)\,dy \right) dx .$$

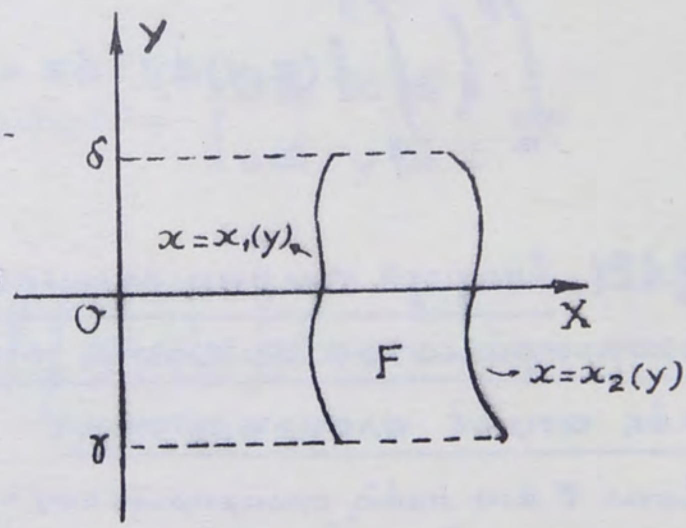
Το 2ο μέλος γράφεται συνήθως συντομώτερα ως εξής:

$$\int_a^\beta dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \sigma(x,y)\,dy .$$

Αν το F είναι κανονικό ως προς τον άξονα OY, αν δηλαδή αποτελήται από τα σημεία (x,y) του επιπέδου που ικανοποιούν τις δυο σχέσεις

$$\begin{cases} \gamma \leqq y \leqq \delta \\ x_1(y) \leqq x \leqq x_2(y) \end{cases}$$

όπου $x_1(y)$ και $x_2(y)$ δυο συναρτήσεις συνεχείς στο διάστημα $\gamma \leqq y \leqq \delta$ και με $x_1(y) \leqq x_2(y)$ για $\gamma \leqq y \leqq \delta$, τότε θα έχουμε:



(421.2)

$$\iint_F \sigma(x,y)\,dx\,dy = \int_\gamma^\delta \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \sigma(x,y)\,dx \right) dy = \int_\gamma^\delta dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \sigma(x,y)\,dx .$$

Αν το F αναλύεται σε πεπερασμένο πλήθος σημειοσυνόλων κανονικών ως προς τον ένα η τον άλλον άξονα, τότε ο υπολογισμός

$\iint_F \sigma(x,y)\,dx\,dy$ μπορεί να γίνη κατά τον παραπάνω τρόπο

με απλές ολοκληρώσεις, δηλαδή με ολοκλήρωση συναρτήσεων ως προς μια μόνο μεταβλητή κάθε φορά.

Ο τύπος (421.1) έπεται αμέσως από τον (419.1), αν θεωρήσουμε ένα ορθογωνιακό πεδίο ολοκληρώσεως E, το οποίο να περιέχη εντελώς το F και θεωρήσουμε τη συνάρτηση $\sigma^*(x,y)$ που ορίζεται ως εξής:

$$\sigma^*(x,y)=\begin{cases}\sigma(x,y), \text{ όταν το } (x,y) \text{ ανήκη στο } F\\ 0, \text{ όταν το } (x,y) \text{ ανήκη στο } E\\ \text{αλλ' όχι στο } F.\end{cases}$$

Η συνάρτηση $\sigma^*(x.y)$ ενδέχεται να έχη σημεία ασυνέχειας αλλά μόνο πάνω στις γραμμές που αποτελούν το σύνορο του πεδίου F. Τα σημεία όμως των 4 γραμμών αυτών μπορούν να εγκλεισθούν, όπως παρατηρήσαμε στον §415, σε πεπερασμένο πλήθος από ορθογώνια συνολικού εμβαδού όσο θέλουμε μικρού· επομένως, σύμφωνα με τα προηγούμενα, θα έχουμε:

$$\iint_F \sigma(x,y)\,dx\,dy=\iint_E \sigma^*(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\int_a^\beta\left\{\int_\gamma^\delta \sigma^*(x,y)\,dy\right\}dx=\int_a^\beta\left\{\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \sigma(x,y)\,dy\right\}dx,$$

επειδή, όπως είναι φανερό

$$\int_\gamma^\delta \sigma^*(x,y)\,dy=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\sigma(x,y)\,dy.$$

Εντελώς όμοια αποδείχνεται ο τύπος (421.2).

§422. Παραδείγματα.

Υπολογισμός του όγκου V τον οποίο περικλείνει το ελλειψοειδές

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1.$$

Παρατηρούμε ότι το $\frac{1}{2}V$ ισούται με τον όγκο που περιορίζεται από το ΧΟΥ και την επιφάνεια

$$Z=\gamma\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}}$$

η οποία προβάλλεται πάνω στο κανονικό χωρίο F (σχήματος ελλειπτικού) $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}\leqq 1$ του επιπέδου ΧΟΥ, δηλαδή πάνω στο σύνολο των σημείων (x,y) με

$$-\alpha\leqq x\leqq+\alpha \quad \text{και} \quad -\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}\leqq y\leqq+\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}\ .$$

Άρα

$$\frac{1}{2}V=\iint_F\gamma\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}}\,dxdy=\int_{-\alpha}^{+\alpha}dx\int_{-\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}}^{+\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}}\gamma\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}}\,dy\,.$$

Υπολογίζουμε πρώτα, σύμφωνα με τον τύπο του § 233, το

$$\int_{-\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}}^{+\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}}\gamma\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}}=\int_{-\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}}^{+\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}}\gamma\cdot\frac{1}{\beta}\sqrt{\left(\beta^2-\frac{\beta^2x^2}{\alpha^2}\right)-y^2}\,dy$$

$$=\left[\frac{1}{2}\,\frac{\gamma}{\beta}\left(\beta^2-\frac{\beta^2x^2}{\alpha^2}\right)\text{τοξ}_{\circ}\eta\mu\,\frac{y}{\sqrt{\beta^2-\frac{\beta^2x^2}{\alpha^2}}}+\frac{1}{2}\,\frac{\gamma}{\beta}\,y\sqrt{\left(\beta^2-\frac{\beta^2x^2}{\alpha^2}\right)-y^2}\right]_{y=-\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}}^{y=+\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\gamma}{\beta}\left(\beta^2-\frac{\beta^2x^2}{\alpha^2}\right)\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)+0=\frac{\gamma\pi}{2}\,\beta\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)\,.$$

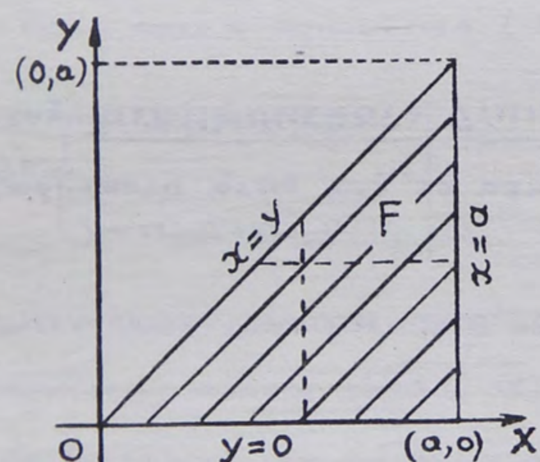
Άρα

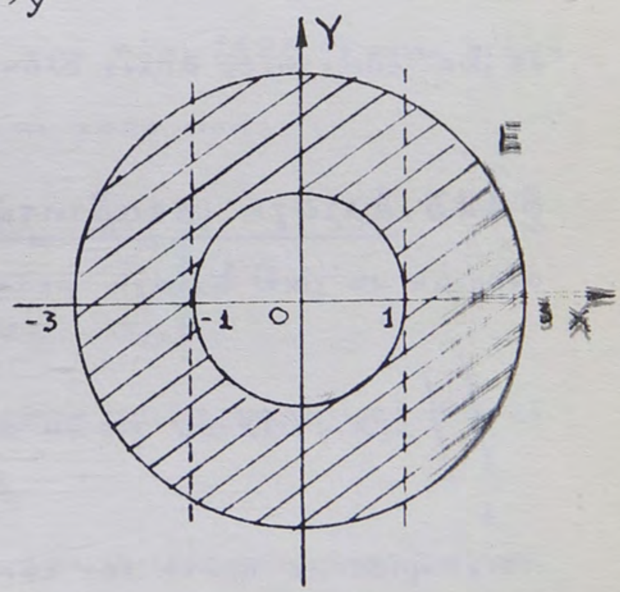
$$\frac{1}{2}V=\int_{-a}^{+a}\frac{\pi}{2}\beta\gamma\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\left[\frac{\pi\beta\gamma}{2}\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\right]_{x=-a}^{x=+a}$$

$$=\frac{\pi}{2}\beta\gamma\cdot\left(\frac{4}{3}a\right)=\frac{2\pi}{3}a\beta\gamma.$$

2. Ολοκλήρωμα της $f(x,y)$ στο τριγωνικό χωρίο F, που περιορίζεται από τις ευθείες $x=y$, $y=0$ και $x=a$ $(a>0)$,

$$\iint_F f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^a dx\int_0^x f(x,y)\,dy=\int_0^a dy\int_y^a f(x,y)\,dx$$





3. Ολοκλήρωμα της $f(x,y)$ στον δακτύλιο E που περιορίζεται από τις δυο περιφέρειες

$x^2+y^2=1$ και $x^2+y^2=9$.

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-3}^{-1}dx\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{+\sqrt{9-x^2}}f(x,y)\,dy+\int_1^3 dx\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{+\sqrt{9-x^2}}f(x,y)\,dy\ +$$

$$+\int_{-1}^{+1} dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy + \int_{-1}^{+1} dx \int_{+\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

Κατά την ιδιότητα 3 του § 418 ισχύει και η εξής σχέση:

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-3}^{+3} dx \int_{\sqrt{9-x^2}}^{+\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\,dy - \int_{-1}^{+1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1+x^2}} f(x,y)\,dy$$

με την προυπόθεση φυσικά ότι η $f(x,y)$ είναι <u>ορισμένη</u> και πάνω στον κύκλο $x^2+y^2 \leqq 1$ και ότι πραγματοποιούνται οι συνθήκες για την ύπαρξη του διπλού ολοκληρώματος

$$\iint_{x^2+y^2\leqq 1} f(x,y)\,dx\,dy$$

και την αναγωγή του σε δυο επάλληλες απλές ολοκληρώσεις.

§ 423. <u>Αλλαγή μεταβλητών στα διπλά ολοκληρώματα</u>. Συχνά είναι σκόπιμο να γίνη αλλαγή μεταβλητών μέσα σε ένα διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_F f(x,y)\,dx\,dy$$ για να απλουστευθή ο υπολογισμός του.

Υπενθυμίζουμε πρώτα τον τύπο για την αλλαγή μεταβλητής μέσα σ'ένα απλό ολοκλήρωμα:

$$\int_a^\beta f(x)\,dx = \int_{a^*}^{\beta^*} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du, \text{ όπου } \varphi(a^*) = a, \varphi(\beta^*) = \beta .$$

Ο τύπος αυτός γράφεται και κάπως αλλοιώτικα, ως εξής:

$$\int_{\mathrm{Min}(a,\beta)}^{\mathrm{Max}(a,\beta)} f(x)\,dx = \int_{\mathrm{Min}(a^*,\beta^*)}^{\mathrm{Max}(a^*,\beta^*)} f(\varphi(u))\,|\varphi'(u)|\,du .$$

Εντελώς ανάλογα έχουμε για τα διπλά ολοκληρώματα τον τύπο (423.1)

$$\iint_F f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{F^*} f\big(\varphi(u,v),\omega(u,v)\big)\left\|\begin{matrix}\varphi'_u(u,v) & \varphi'_v(u,v)\\ \omega'_u(u,v) & \omega'_v(u,v)\end{matrix}\right\| du\,dv,$$

όπου F^* είναι το σημειοσύνολο των (u,v) το οποίο δια της αλλαγής μεταβλητών

$$(423.2)\qquad \begin{cases} x = \varphi(u,v)\\ y = \omega(u,v)\end{cases}$$

απεικονίζεται στο σημειοσύνολο F των (x,y).

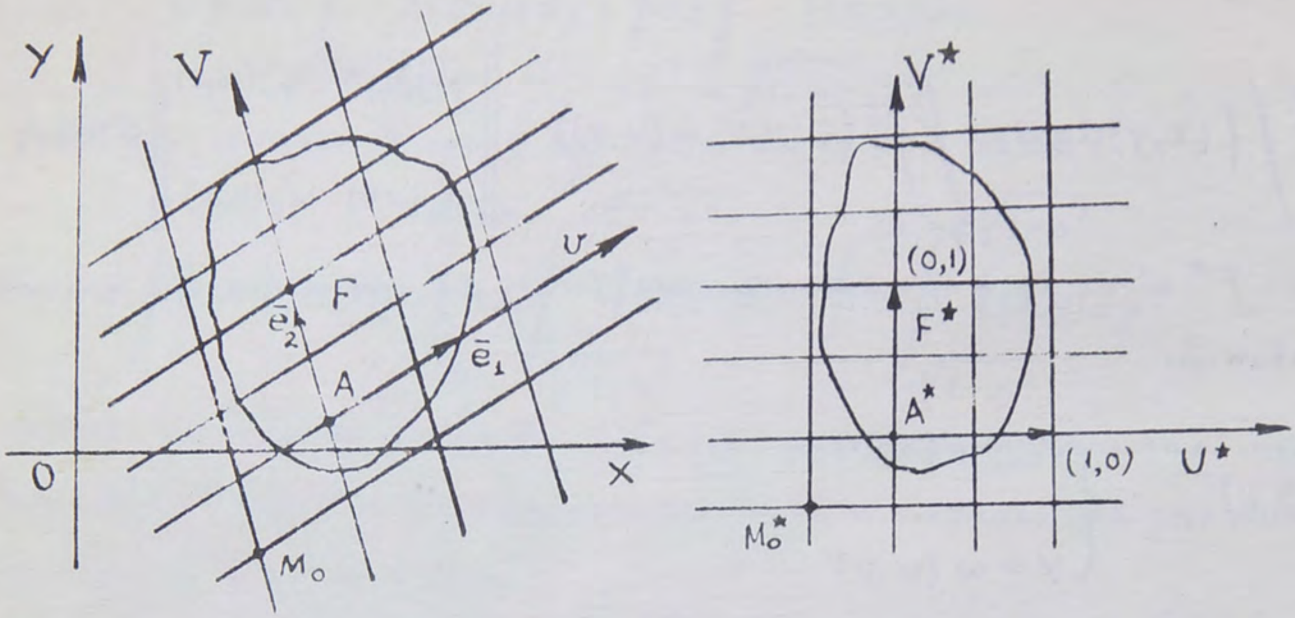
(Με άλλα λόγια: F^* είναι το αρχέτυπο του F και F η εικόνα του F^* στην απεικόνιση (423.2)). Θα αποδείξουμε τον τύπο (423.1) στην ειδική περίπτωση όπου η απεικόνιση (423.2) είναι γραμμική:

$$(423.3)\qquad \begin{cases} x = a_{11}u + a_{12}v + a_1\\ y = a_{21}u + a_{22}v + a_2\end{cases} \text{ με } \begin{vmatrix}\varphi'_u & \varphi'_v\\ \omega'_u & \omega'_v\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} \neq 0.$$

θα αναφέρουμε έπειτα χωρίς απόδειξη υπό ποιές ικανές συνθήκες (προϋποθέσεις) ο τύπος (423.1) ισχύει γενικά.

<u>Απόδειξη.</u> Για να εφαρμόσουμε τη θεωρία του διπλού ολοκληρώματος στο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της σχέσεως (423.1), ερμηνεύουμε τα ζεύγη τιμών u και v ως ορθογώνιες συντεταγμένες σημείων ενός επιπέδου ως προς δυο καθέτους άξονες, τους A^*U^* και A^*V^* (αρχή συντεταγμένων το σημείο A^*).

Με ευθείες αντιστοίχως παράλληλες προς A^*U^* και A^*V^* διαιρούμε το επίπεδο αυτό των (u,v) σε ορθογώνια. Οι ευθείες αυτές απεικονίζονται δια του μετασχηματισμού (423.3) πάνω σε ευθείες του επιπέδου των



(x,y) παράλληλες προς τα διανύσματα $\bar{e}_1(a_{11},a_{21})$ και $\bar{e}_2(a_{12},a_{22})$, που είναι εικόνες των βασικών διανυσμάτων $\bar{e}_1^*(1,0)$ και $\bar{e}_2^*(0,1)$ του συστήματος συντεταγμένων $A^*U^*V^*$. Έτσι τα ορθογώνια στα οποία διαιρέσαμε το επίπεδο των (u,v) απεικονίζονται πάνω σε παραλληλόγραμμα του επιπέδου των (x,y). Π.χ. το ορθογώνιο με κορυφή κάτω αριστερά το σημείο $M_0^*(u_0,v_0)$ και με πλευρές εξερχόμενες από το M_0^* τα διανύσματα $(\Delta u,0)$ και $(0,\Delta v)$ (όπου επομένως $\Delta u>0$, $\Delta v>0$) απεικονίζεται πάνω στο παραλληλόγραμμο του επιπέδου των (x,y) με κορυφή το $M_0(x_0=\varphi(u_0,v_0),\ y_0=\omega(u_0,v_0))$ και με πλευρές εξερχόμενες από το M_0 τα διανύσματα

$$\left(\Delta_1 x = a_{11}\,\Delta u,\ \Delta_1 y = a_{21}\,\Delta u\right) \text{ και } \left(\Delta_2 x = a_{12}\,\Delta v,\ \Delta_2 y = a_{22}\,\Delta v\right)$$

αντιστοίχως. Το (απροσήμαστο) εμβαδό του παραλληλογράμμου αυτού ισούται με

$$\left\| \begin{matrix} a_{11}\,\Delta u & a_{21}\,\Delta u \\ a_{12}\,\Delta v & a_{22}\,\Delta v \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{matrix} \right\| \Delta u\, \Delta v .$$

Αλλά $\Delta u \Delta v$ είναι το εμβαδό του ορθογωνίου που είναι το αρχέτυπο μέσα στο επίπεδο των (u,v) του θεωρουμένου παραλληλογράμμου. Άρα στη γραμμική απεικόνιση (423.3) τα εμβαδά των εικόνων ισούνται με τα εμβαδά των αρχέτυπων πολλαπλασιασμένα με την σταθερά $\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}$.

Θεωρούμε τώρα τα ορθογώνια $F_1^*, F_2^*, \ldots, F_\nu^*$ της διαιρέσεως του επιπέδου των (u,v) τα οποία κείνται στο εσωτερικό του σημειοσυνόλου F^* καθώς και τα αντίστοιχα τους παραλληλόγραμμα F_1, $F_2, \ldots, F_\nu$ του επιπέδου των (x,y) (που θα κείνται στο εσωτερικό του F).

Μέσα στο κάθε ορθογώνιο F_i^* παίρνουμε ένα σημείο (u_i, v_i), ας είναι δε

$$\left(x_i = a_{11}u_i + a_{12}v_i + a_1\,,\; y_i = a_{21}u_i + a_{22}v_i + a_2\right)$$

το αντίστοιχο σημείο του παραλληλογράμμου F_i.

Τα δυο αθροίσματα

$$\sum_{i=1}^{\nu} f(x_i, y_i)\,\text{εμβ.}F_i \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^{\nu} f\big(\varphi(u_i,v_i), \omega(u_i,v_i)\big)\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}\text{εμβ.}F_i^*$$

είναι ίσα. Άρα ίσα θα είναι και τα όρια τους για μιαν ακολουθία διαιρέσεων $\mathcal{D}_\rho$ $(\rho = 1,2,3,\ldots)$ του επιπέδου των (u,v) σε ορθογώνια με μέγιστο διαμέτρημα που τείνει στο 0 όταν $\rho \longrightarrow +\infty$, οπότε και το μέγιστο διαμέτρημα των αντιστοίχων παραλληλογράμμων του επιπέδου των (x,y) θα τείνη επίσης στο 0. Αλλά τα δυο αυτά όρια είναι, σύμφωνα με την θεωρία, τα ολοκληρώματα που απαρτίζουν τα δυο μέλη της (423.1).

Επομένως τα δυο αυτά μέλη είναι ίσα, ο.ε.δ.

§ 424.

Με ανάλογους συλλογισμούς γίνεται η απόδειξη του τυπου (423.1) στη γενική περίπτωση μιας αλλαγής μεταβλητών (423.2) η οποία εκπληρώνει τις ακόλουθες προϋποθέσεις:

1) Όταν το σημείο $M^*(u,v)$ διαγράφη το εσωτερικό ενός περιορισμένου και τετραγωνίσιμου (συνεκτικου) χωρίου F^*, το αντίστοιχο σημείο $M(x=\varphi(u,v), y=\omega(u,v))$ διαγράφει το εσωτερικό του σημειοσυνόλου F και η αντιστοιχία αυτή των σημείων (x,y) προς τα σημεία (u,v) είναι αμφιμονοσήμαντη, με άλλα λόγια: σ' ένα σημείο (u,v) αντιστοιχεί ένα μόνο σημείο $(x=\varphi(u,v), y=\omega(u,v))$ και σε δυο διάφορα σημεία (u,v) αντιστοιχούν δυο επίσης διάφορα σημεία (x,y).

2) Στο εσωτερικό του F^* οι συναρτήσεις $\varphi(u,v)$ και $\omega(u,v)$ έχουν μερικές παραγώγους 1ης τάξεως συνεχείς, η δε Ιακωβιανή ορίζουσα

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \omega'_u & \omega'_v \end{vmatrix}$$

δεν μηδενίζεται και είναι περιορισμένη συνάρτηση, δηλαδή

$$0 < \left\| \begin{matrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \omega'_u & \omega'_v \end{matrix} \right\| \leqq \Phi = \text{θετική σταθερά}$$

για όλα τα σημεία (u, v) του εσωτερικού του F^*.

Παρατηρήσεις.

I. Σύμφωνα με τις υποθέσεις 2) η Jακωβιανή $\begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \omega'_u & \omega'_v \end{vmatrix}$ όχι μόνο δεν μηδενίζεται αλλά και δεν αλλάζει πρόσημο στο εσωτερικό του χωρίου F^*.

Πράγματι αν ήταν θετική σ' ένα σημείο A και αρνητική σ' ένα άλλο B του εσωτερικού του F θα έπρεπε, σαν συνεχής συνάρτηση, να μηδενίζεται τουλάχιστο μια φορά πάνω στην τεθλασμένη γραμμή με την οποία μπορούμε εξ υποθέσεως να ενώσουμε το σημείο A με το B εντός του εσωτερικού του F (πρβ. υποσημείωση § 395).

Άρα ή

$$\left\| \begin{matrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \omega'_u & \omega'_v \end{matrix} \right\| = \begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \omega'_u & \omega'_v \end{vmatrix}$$

για όλα τα σημεία του εσωτερικού του F^* ή

$$\left\| \begin{matrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \omega'_u & \omega'_v \end{matrix} \right\| = - \begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \omega'_u & \omega'_v \end{vmatrix}.$$

II. Η αλλαγή μεταβλητών (423.2) μπορεί να ερμηνευθή γεωμετρικά όχι μόνον ως απεικόνιση των σημείων με ορθογώνιες συντεταγμένες (u, v) ενός επιπέδου πάνω στα σημεία με ορθογώνιες συντεταγμένες (x, y) ενός δευτέρου επιπέδου (συμπίπτοντος ή όχι με το πρώτο), αλλά και ως αλλαγή των συντεταγμένων (x, y) των σημείων του θεωρούμενου σημειοσυνόλου F.

Πράγματι σε κάθε σημείο $M(x, y)$ του F αντιστοιχεί σύμφωνα με τις υποθέσεις μας, ένα, και μόνο ένα, ζεύγος αριθμών (u, v)

δυνάμει του συστήματος εξισώσεων (423.2). Άρα το M χαρακτηρίζεται όχι μόνο από το ζεύγος (x,y) αλλά και από το ζεύγος (u,v) που, γι' αυτόν το λόγο, μπορεί να ονομαστή ζεύγος <u>νέων συντεταγμένων</u> του σημείου M.

<u>Συντεταγμένες γραμμές</u> του νέου συστήματος συντεταγμένων λέγονται φυσικά οι γραμμές του επιπέδου των (x,y) πάνω στις οποίες η μια από τις νέες συντεταγμένες διατηρεί σταθερή τιμή· άρα οι γραμμές αυτές έχουν αναλυτική παραμετρική παράσταση στο σύστημα XOY οι μεν με v σταθερό την εξής:

$$\begin{cases} x = \varphi(u, C_1) \\ y = \omega(u, C_1) \end{cases} \quad \text{οπου } u \text{ η παράμετρος,}$$

οι δε με u σταθερό την ακόλουθη:

$$\begin{cases} x = \varphi(C_2, v) \\ y = \omega(C_2, v) \end{cases}$$

όπου v η παράμετρος.

Οι γραμμές αυτές θα είναι όλες ευθείες στην περίπτωση, και μόνο στην περίπτωση, όπου η αλλαγή (423.2) είναι γραμμική.

Θεωρώντας τις συντεταγμένες γραμμές που διασχίζουν το χωρίο F, καθορίζουμε το πεδίο μεταβολής της μιας από τις νέες συντεταγμένες το οποίο αντιστοιχεί σε κάθε μια από τις νέες τιμές που παίρνει η άλλη νέα συντεταγμένη, όταν το σημείο $M(x,y)$ διαγράφη το χωρίο F. Ο καθορισμός αυτός χρειάζεται ειδικώς όταν ζητηθή να αναγάγουμε τον υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος του δεξιού μέλους της (423.1) σε δυο επάλληλες απλές ολοκληρώσεις.

<u>Παραδείγματα</u>.

1) Μετασχηματισμός σε πολικές συντεταγμένες

$$x = \rho\,\text{συν}\,\theta, \quad y = \rho\,\text{ημ}\,\theta.$$

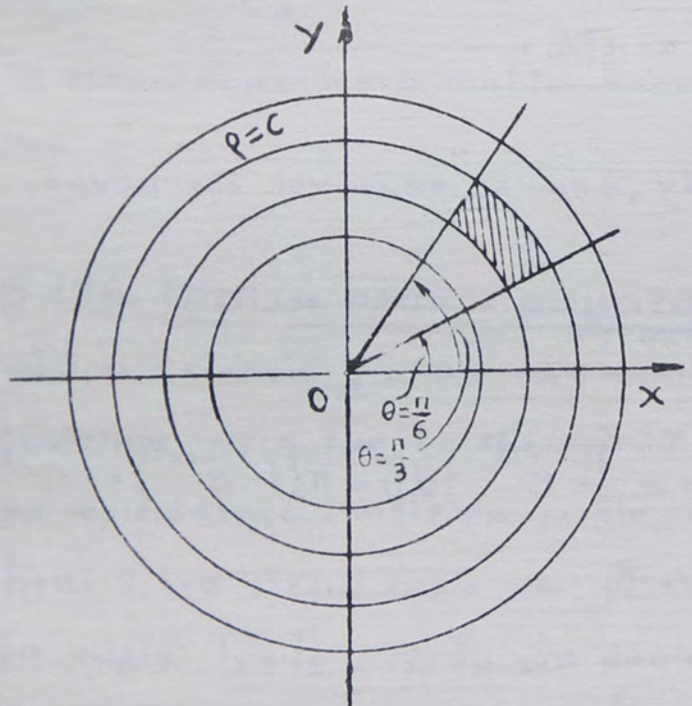
Είναι

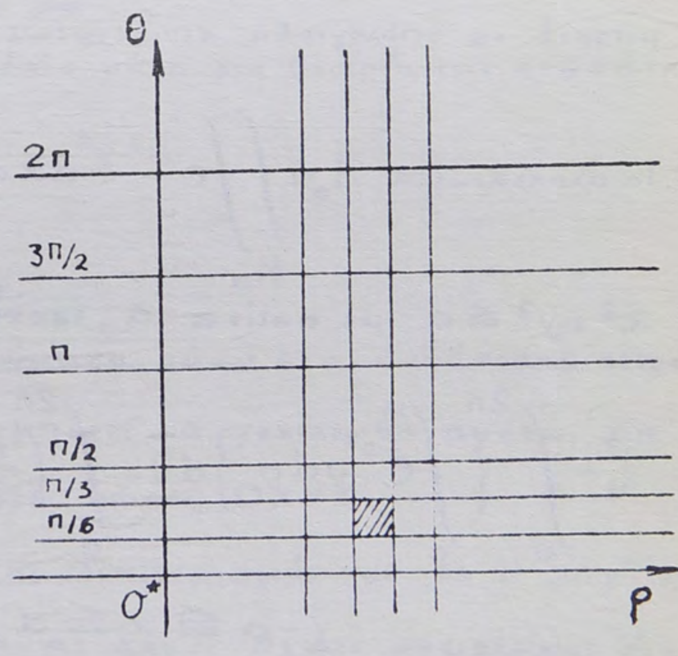
$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right| = \left\|\begin{matrix} συνθ & ημθ \\ -ρημθ & ρσυνθ \end{matrix}\right\| = \rho .$$

Άρα

$$\iint_F f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{F^*} f(ρσυνθ, ρημθ)\,\rho\,d\rho\,d\theta .$$

2. Υπολογισμός του όγκου σφαίρας με ακτίνα a.





Αν το κυκλικό χωρίο $x^2+y^2 \leqq a^2$ του επιπέδου XOY το καλέσουμε K_a, θα έχουμε

$$\frac{1}{2}V = \iint_{K_a} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy = \iint_{K_a^*} \sqrt{a^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \left\{ \int_0^{a} \sqrt{a^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho \right\} =$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \left\{ \left[-\frac{1}{3}(a^2-\rho^2)^{3/2} \right]_0^a \right\} = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} a^3 d\theta = \frac{2\pi a^3}{3} .$$

Παρατήρηση. Στο παράδειγμα αυτό η Ιακωβιανή ρ μηδενίζεται στην αρχή. Τούτο όμως δεν εμποδίζει τη χρησιμοποίηση των πολικών συντεταγμένων, όπως εύκολα μπορούμε να δούμε.

§425. Εφαρμογή στον υπολογισμό του $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

Το ολοκλήρωμα αυτό έχει νόημα, όπως εύκολα αποδεικνεται.

Το αόριστο ολοκλήρωμα της συναρτήσεως e^{-x^2} δεν μπορεί να εκφρασθή στοιχειωδώς, το αναγραφόμενο όμως γενικευμένο ορισμένο ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογισθή στοιχειωδώς ως εξής:

Το ολοκλήρωμα $I_a = \iint_{K_a} e^{-x^2-y^2} dx\,dy$, όπου K_a σημαίνει τον κύκλο $x^2+y^2 \leqq a$ με ακτίνα a, ισούται με

$$I_a = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^a e^{-\rho^2}\rho\, d\rho \right\} d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-a^2} \right) d\theta = \pi(1-e^{-a^2}).$$

Το τετράγωνο $\begin{cases} -a \leqq x \leqq a \\ -a \leqq y \leqq a \end{cases}$

περιέχει τον κύκλο $0 \leqq \rho \leqq a$ και περιέχεται στον κύκλο $0 \leqq \rho \leqq 2a$.
Εξ άλλου η ολοκληρωτέα συνάρτηση $e^{-x^2-y^2}$ είναι > 0,
άρα θα έχουμε

$$\pi(1-e^{-a^2}) = I_a \leqq \int_{-a}^{a} \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2-y^2} dy \right) dx \leqq I_{2a} = \pi\left(1-e^{-4a^2}\right).$$

Αλλά

$$\int_{-a}^{+a}\left(\int_{-a}^{+a} e^{-x^2-y^2}dy\right)dx=\int_{-a}^{+a} e^{-x^2}\left(\int_{-a}^{+a} e^{-y^2}dy\right)dx=\left(\int_{-a}^{+a} e^{-x^2}dx\right)^2.$$

Άρα

$$\pi\left(1-e^{-a^2}\right)\leqq\left(\int_{-a}^{+a} e^{-x^2}dx\right)^2\leqq\pi\left(1-e^{-4a^2}\right).$$

Από δω έπεται ότι

$$\lim_{a\to+\infty}\left(\int_{-a}^{+a} e^{-x^2}dx\right)^2=\pi\text{ , άρα }\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}\ .$$

Το ολοκλήρωμα αυτό παίζει σπουδαίο ρόλο στη θεωρία των πιθανοτήτων.

§426. Τριπλά ολοκληρώματα.

α) Ό,τι είπαμε για τα ολοκληρώματα πάνω στα διδιάστατα τετραγωνίσιμα χωρία του επιπέδου XOY μπορεί να γενικευθή αμέσως για τα τριδιάστατα κυβίσιμα χωρία του χώρου OXYZ.

Έστω T ένα τέτοιο χωρίο και $\mathcal{D}$ ένας διαμερισμός του σε N μικρότερα χωρία $T_1, T_2, \dots, T_N$, τα οποία ας έχουν όγκον αντιστοίχως $V_1, V_2, \dots, V_N$. Ας είναι ακόμη $f(x,y,z)$ μια περιορισμένη συνάρτηση, συνεχής πάνω στο T εκτός ίσως σε ένα πλήθος σημείων που μπορούν να εγκλειστούν σε πεπερασμένο αριθμό κύβων συνολικού όγκου όσο θέλουμε μικρού. Παριστάνοντας με $(\xi_\rho, \eta_\rho, \zeta_\rho)$ ένα σημείο του χωρίου T_ρ σχηματίζουμε το άθροισμα

$$\sum_{\rho=1}^{N} f(\xi_\rho,\eta_\rho,\zeta_\rho).V_\rho\ .$$

Αν τώρα, αυξάνοντας τον αριθμό N των μερών του διαμερισμού $\mathcal{D}$, κάμουμε το μέγιστο διαμέτρημα τους να τείνη στο μηδέν, αποδείχνεται πάλι ότι το παραπάνω άθροισμα έχει όριο έναν αριθμό, τον ίδιο πάντοτε όποιους διαμερισμούς και όποια σημεία $(\xi_\rho, \eta_\rho, \zeta_\rho)$ κι' αν χρησιμοποιήσουμε.

Το όριο αυτό το ονομάζουμε τριπλό ολοκλήρωμα της $f(x,y,z)$ πάνω στο χωρίο (ή τόπο) T και το παριστάνουμε με

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dV \quad \text{ή} \quad \iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,.$$

β) Ο υπολογισμός ενός τριπλού ολοκληρώματος πάνω σε ένα "κανονικό" χωρίο T γίνεται επίσης με αναγωγή του σε τρία επάλληλα απλά ολοκληρώματα, όπου τα άκρα των διαστημάτων ολοκληρώσεως εξαρτιούνται εννοείται από το χωρίο T πάνω στο οποίο ζητείται η ολοκλήρωση της $f(x,y,z)$.

Π.χ. αν T_1 είναι το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο

$$x_1 \leqq x \leqq x_2\,, \quad y_1 \leqq y \leqq y_2\,, \quad z_1 \leqq z \leqq z_2\,,$$

τότε έχουμε:

$$(426.1) \qquad \iiint_{T_1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)\,dz$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x,y,z)\,dy = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)\,dz = \text{κ.τ.λ.}$$

Αν T_2 είναι το σφαιρικό χωρίο $x^2+y^2+z^2 \leqq a^2$, τότε

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{-a}^{+a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{+\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{+\sqrt{a^2-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz .$$

γ) Εντελώς αντίστοιχος προς τον τύπο (423.1) είναι και ο τύπος για την αλλαγή μεταβλητών μέσα σ'ένα τριπλό ολοκλήρωμα:

(426.2) $$\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_{T^*} f\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big) \left\| \begin{matrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{matrix} \right\| du\,dv\,dw.$$

Π.χ. για τη μετάβαση από ορθογώνιες συντεταγμένες (x,y,z) στις αντίστοιχες σφαιρικές:

$$x = r\,\text{ημ}\varphi^*\text{συν}\,\theta, \quad y = r\,\text{ημ}\varphi^*\text{ημ}\theta, \quad z = r\,\text{συν}\,\varphi^*,$$
$$(0 \leqq \varphi^* \leqq \pi \ , \ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi),$$

έχουμε

$$\left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)} \right| = \left\| \begin{matrix} \text{συν}\theta\,\text{ημ}\varphi^* & r\,\text{συν}\theta\,\text{συν}\varphi^* & -r\,\text{ημ}\theta\,\text{ημ}\varphi^* \\ \text{ημ}\theta\,\text{ημ}\varphi^* & r\,\text{ημ}\theta\,\text{συν}\varphi^* & r\,\text{συν}\theta\,\text{ημ}\varphi^* \\ \text{συν}\,\varphi^* & -r\,\text{ημ}\varphi^* & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$= r^2\text{ημ}\,\varphi^*.$$

Άρα

$$\iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{T^*} f(r\eta\mu\varphi^* \sigma\upsilon\nu\theta, r\eta\mu\varphi^*\eta\mu\theta, r\sigma\upsilon\nu\varphi^*)\,r^2\eta\mu\varphi^*\,dr\,d\varphi\,d\theta.$$

δ) Και για τη μετάβαση σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$x = \rho\,\sigma\upsilon\nu\theta \;*\; y = \rho\,\eta\mu\theta,\quad z = z,\quad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)} = \rho,$$

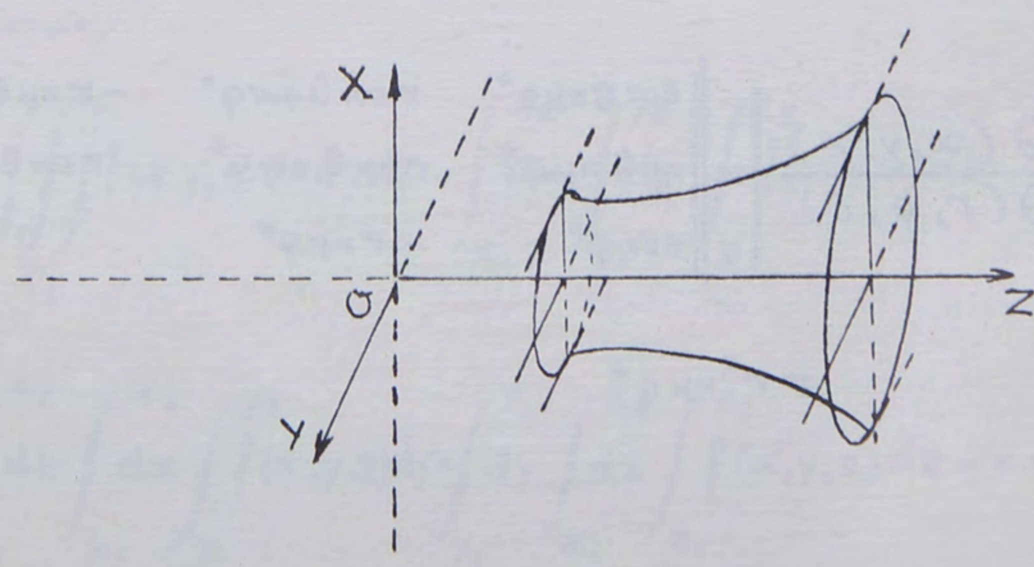
θα έχουμε:

(426.3) $$\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{T^*} f(\rho\,\sigma\upsilon\nu\theta, \rho\,\eta\mu\theta, z)\,\rho\,d\rho\,d\theta\,dz.$$

Ο όγκος ενός χωρίου T είναι επομένως σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$V = \iiint_T dx\,dy\,dz = \iiint_{T^*} \rho\,d\rho\,d\theta\,dz.$$

Για ένα στερεό εκ περιστροφής (άξονας περιστροφής ο OZ), που επομένως ένας ημιμεσημβρινός του θα έχη εξισώσεις $\theta = \sigma\tau\alpha\theta$, $\rho = \sigma(z)$, θα έχουμε λοιπόν:



$$V=\int_{z_1}^{z_2} dz \int_0^{\sigma(z)} d\rho \int_0^{2\pi} \rho d\theta = 2\pi \int_{z_1}^{z_2} dz \int_0^{\sigma(z)} \rho d\rho =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_{z_1}^{z_2} \left[\rho^2\right]_{\rho=0}^{\rho=\sigma(z)} dz = \pi \int_{z_1}^{z_2} \sigma^2(z)\, dz .$$

Δηλαδή βρίσκουμε πάλι τον τύπο του παραγράφου 291.

§427. Εμβαδό καμπύλης επιφάνειας.

Πρόκειται να ορίσουμε το εμβαδό S του τμήματος P της επιφάνειας $z=\sigma(x,y)$ το οποίο έχει προβολή πάνω στο επίπεδο ΧΟΥ ένα χωρίο Ε. Διαμερίζουμε το χωρίο Ε σε μικρότερα χωρία ΔE_1, ΔE_2, $\ldots$, ΔE_N και εκλέγουμε μέσα σ'αυτά τα σημεία (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), $\ldots$, (ξ_N, η_N) αντιστοίχως.

Σε κάθε αντίστοιχο σημείο $(\xi_p, \eta_p, \zeta_p = f(\xi_p, \eta_p))$ της επιφάνειας P, δηλαδή σ'εκείνο που έχει προβολή το σημείο (ξ_p, η_p) του ΧΟΥ, φέρνουμε το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας και προσδιορίζουμε το εμβαδό ΔS_p εκείνου του τμήματος του επιπέδου τούτου που έχει προβολή το χωρίο ΔE_p, για $p=1,2,3,\ldots,N$.

Από τον (§ 404) έπεται ότι η εξίσωση αυτού του επιπέδου είναι:

$$z-\zeta_p = \sigma'_x(\xi_p,\eta_p)(x-\xi_p)+\sigma'_y(\xi_p,\eta_p)(y-\eta_p).$$

Η οξεία γωνία a_p του επιπέδου αυτού προς το επίπεδο ΟΧΥ ισούται με τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα ΟΖ το κάθετο προς το επίπεδο διάνυσμα

$$\left(-\sigma'_x(\xi_p,\eta_p), -\sigma'_y(\xi_p,\eta_p), +1\right).$$

Άρα

$$συν α_ρ = \frac{1}{\sqrt{1+σ'^2_x(ξ_ρ,η_ρ)+σ'^2_y(ξ_ρ,η_ρ)}} .$$

Αλλά $ΔE_ρ = ΔS_ρ \, συν α_ρ$, άρα:

$$ΔS_ρ = \sqrt{1+σ'^2_x(ξ_ρ,η_ρ)+σ'^2_y(ξ_ρ,η_ρ)} \cdot ΔE_ρ .$$

Αν τώρα σχηματίσουμε το άθροισμα

$$(427.1) \qquad \sum_{ρ=1}^{N} ΔS_ρ$$

και θεωρήσουμε μιαν ακολουθίαν διαμερισμών $\mathcal{D}_ν$ του E τέτοιαν ώστε το μέγιστο διαμέτρημα των χωρίων του διαμερισμού $\mathcal{D}_ν$ να τείνη στο μηδέν όταν $ν \longrightarrow +\infty$, τότε το άθροισμα (427.1) τείνει στον αριθμό

$$(427.2) \qquad S = \iint_E + \sqrt{1+σ'^2_x(x,y)+σ'^2_y(x,y)} \, dx dy .$$

Τον αριθμό αυτόν τον καλούμε εμβαδό του τμήματος P της επιφάνειας $z=f(x,y)$ το οποίο έχει προβολή πάνω στο επίπεδο OXY το χωρίο E.

§ 428. Σημειοσυναρτήσεις και συνολοσυναρτήσεις.

Τις συναρτήσεις που εξετάσαμε ως τώρα μπορούμε να τις ονομάσουμε και σημειοσυναρτήσεις, επειδή η τιμή τους εξαρτιέται από ένα σημείο του μονοδιάστατου (για τη $σ(x)$) ή του διδιάστατου (για τη $σ(x,y)$) ή του τριδιάστατου (για τη $σ(x,y,z)$) κτλ. χώρου.

Μπορούμε όμως να αντιστοιχίσουμε αριθμούς και σε σύνολα σημείων, οπότε η τιμή του συμβόλου που παριστάνει τους αριθμούς αυτούς θα εξαρτιέται από το αντίστοιχο σύνολο και η αντιστοιχία θα λέγεται <u>συνάρτηση συνόλου ή συνολοσυνάρτηση</u>.

<u>Παραδείγματα</u>:

1) Σε κάθε σύνολο σημείων που αποτελούν ένα διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$ ενός άξονα ΟΧ αντιστοιχίζουμε τον αριθμό $(\beta-\alpha)$ που ονομάζεται <u>πλάτος</u> του διαστήματος. Ορίζουμε έτσι μια συνολοσυνάρτηση· πεδίο ορισμού της είναι τα σημειοσύνολα $\alpha \leqq x \leqq \beta$ με οποιαδήποτε $\alpha \leqq \beta$.

2) Μέσα στο επίπεδο ΟΧΥ σε κάθε σύνολο σημείων

$$\begin{cases} x = \alpha + \lambda(\beta-\alpha) \\ y = \gamma + \lambda(\delta-\gamma) \end{cases} \quad \text{για } 0 \leqq \lambda \leqq 1,$$

που αποτελούν το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία (α,γ) και (β,δ) αντιστοιχίζουμε τον αριθμό $\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\delta-\gamma)^2}$ που ονομάζεται <u>μήκος</u> ή <u>μέτρο</u> του αντίστοιχου ευθύγραμμου τμήματος.

3) Μέσα στο επίπεδο ΟΧΥ σε κάθε σύνολο σημείων

$$\begin{cases} \alpha \leqq x \leqq \beta \\ \gamma \leqq y \leqq \delta, \end{cases}$$

που αποτελούν ένα ορθογώνιο περιοριζόμενο από τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$, $y=\gamma$, $y=\delta$, αντιστοιχίζουμε τον αριθμό $(\beta-\alpha)(\delta-\gamma)$ που ονομάζεται εμβαδό ή μέτρο του παραπάνω διδιάστατου διαστήματος.

Στον §415 εξηγήσαμε πως επεκτείνεται ο ορισμός της συναρτήσεως αυτής και σε κάθε τετραγωνίσιμο σημειοσύνολο F του επιπέδου.

4) Μέσα στον χώρο OXYZ αντιστοιχίζουμε σε κάθε τριδιάστατο διάστημα

$$\begin{cases} \alpha_1 \leqq x \leqq \alpha_2 \\ \beta_1 \leqq y \leqq \beta_2 \\ \gamma_1 \leqq z \leqq \gamma_2 \end{cases}$$

τον αριθμό $(\alpha_2-\alpha_1)(\beta_2-\beta_1)(\gamma_2-\gamma_1)$ τον οποίο ονομάζουμε <u>όγκο</u> ή <u>μέτρο</u> του τριδιάστατου αυτού διαστήματος.

5) Για μιαν ορισμένη συνεχή συνάρτηση $\sigma(x,y)$ το

$\iint_F \sigma(x,y)dxdy$ είναι ένας αριθμός ορισμένος γιά ~~κάθε~~ τετραγωνίσιμο σημειοσύνολο F του επιπέδου που ανήκει στο πεδίο ορισμού της $\sigma(x,y)$, επομένως το $\iint_F \sigma(x,y)dxdy$ είναι μια συνολοσυνάρτηση ορισμένη γι'αυτά τα σημειοσύνολα F.

6) Για μιαν <u>ορισμένη συνεχή</u> συνάρτηση $\sigma(x)$ το $\int_a^t \sigma(x)dx$ (όπου a μια σταθερά, t μια μεταβλητή) είναι μια συνολοσυνάρτηση ορισμένη για τα μονοδιάστατα διαστήματα: $a \leqq x \leqq t$ που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της $\sigma(x)$. Επειδή όμως κάθε τέτοιο διάστημα ορίζεται μονοσήμαντα από το σημείο με τετμημένη t που είναι το άνω άκρο του διαστήματος, το

$\int_a^t \sigma(x)dx$ είναι όχι μόνο μια συνολοσυνάρτηση αλλά και μια σημειοσυνάρτηση, όπως ξέρουμε άλλως τε και από τον § 273.

§ 429. Παραγώγιση συνολοσυναρτήσεων.

Όταν έχουμε ένα υλικό σώμα, σε κάθε μέρος του χώρου τον οποίον καταλαμβάνει το σώμα αντιστοιχεί ένας αριθμός, η μάζα του αντίστοιχου στο μέρος κομματιού του σώματος. Ο αριθμός αυτός είναι επομένως μια συνολοσυνάρτηση.

Ειδικότερα, σε κάθε τριδιάστατο διάστημα J

$$\alpha_1 \leqq x \leqq \alpha_2 \ , \ \beta_1 \leqq y \leqq \beta_2 \ , \ \gamma_1 \leqq z \leqq \gamma_2$$

που κείται ολόκληρο μέσα στο σώμα, αντιστοιχεί ένας αριθμός $M(J)$, η μάζα εκείνου του μέρους του σώματος που γεμίζει αυτό το διάστημα. Στο ίδιο τριδιάστατο διάστημα αντιστοιχεί, όπως είδαμε στον § 428.4, και ένας άλλος αριθμός $V(J)=(\alpha_2-\alpha_1)(\beta_2-\beta_1)(\gamma_2-\gamma_1)$, το μέτρο (ο όγκος) του διαστήματος.

Το πηλίκον $\dfrac{M(J)}{V(J)}=\rho(J)$ είναι μια νέα συνολοσυνάρτηση, ορισμένη για τα τριδιάστατα διαστήματα J και η οποία λέγεται στη Μηχανική μέση πυκνότητα του σώματος στο διάστημα J.

Θεωρούμε τώρα μιάν οποιαδήποτε ακολουθία από διαστήματα J_ν $(\nu=1,2,3,\dots)$ τα οποία περιέχουν όλα ένα και το ίδιο σημείο $P(\alpha,\beta,\gamma)$ του σώματος και έχουν διαμέτρημα $D(J_\nu)$ τέτοιο ώστε $\lim\limits_{\nu\to+\infty} D(J_\nu)=0$ $\left(\text{οπότε και } \lim\limits_{\nu\to+\infty} V(J_\nu)=0\right)$.

Αν το

$$\lim_{\nu\to+\infty}\frac{M(J_\nu)}{V(J_\nu)}$$

υπάρχη και είναι ένας αριθμός ανεξάρτητος από την ακολουθία J_ν, τότε ο αριθμός αυτός λέγεται πυκνότητα του σώματος στο σημείο $P(\alpha,\beta,\gamma)$.

Ο αριθμός αυτός είναι επομένως μια σημειοσυνάρτηση:

$$\rho(\alpha,\beta,\gamma)=\lim_{D(J_\nu)\to 0}\frac{M(J_\nu)}{V(J_\nu)}$$

την οποία ονομάζουμε <u>παράγωγο της συνολοσυναρτήσεως</u> $M(J)$ στο σημείο $P(\alpha,\beta,\gamma)$.

Εντελώς αντίστοιχα ορίζεται η παράγωγος συνολοσυναρτήσεων $F(J)$ ορισμένων πάνω σε δισδιάστατα ή μονοδιάστατα διαστήματα:

$$f(x_0,y_0)=\lim_{D(J_\nu)\to 0}\frac{F(J_\nu)}{E(J_\nu)}\,,\quad f(x_0)=\lim_{D(J_\nu)\to 0}\frac{F(J_\nu)}{L(J_\nu)}\,,$$

όπου $J_\nu(\nu=1,2,3,\ldots)$ είναι διαστήματα περιέχοντα το σημείο (x_0,y_0) ή αντιστοίχως το (x_0) με διαμέτρημα $D(J_\nu)\to 0$ όταν $\nu\to+\infty$, και όπου $E(J_\nu)$ και $L(J_\nu)$ είναι το μέτρο του J_ν (εμβαδό ή αντιστοίχως μήκος). Οι σημειοσυναρτήσεις $f(x_0,y_0)$ και $f(x_0)$ είναι ορισμένες εφ'όσον φυσικά υπάρχουν τα παραπάνω όρια, εφ'όσον, όπως λέμε, οι αντίστοιχες συνολοσυναρτήσεις είναι <u>παραγωγίσιμες</u>.
Π.χ. αν η $\sigma(x,y)$ είναι συνεχής η συνολοσυνάρτηση

$\iint_F \sigma(x,y)\,dx\,dy$ είναι παραγωγίσιμη, διότι από τον τύπο (418,1)

έπεται ότι

$$\frac{1}{E(J_\nu)}\iint_F \sigma(x,y)\,dx\,dy=\sigma(\xi_\nu,\eta_\nu)$$

όπου (ξ_ν,η_ν) είναι ένα κατάλληλο σημείο του διαστήματος J_ν. Αν τώρα τα διαστήματα J_ν περιέχουν όλα το σημείο (x_0,y_0) και έχουν διαμέτρημα $D(J_\nu)\to 0$ όταν $\nu\to+\infty$, τότε λόγω της συνέχειας της $\sigma(x,y)$ θα είναι $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\sigma(\xi_\nu,\eta_\nu)=\sigma(x_0,y_0)$, και επομένως

$$\lim_{D(J_\nu)\to 0}\frac{1}{E(J_\nu)}\iint \sigma(x,y)\,dx\,dy=\sigma(x_0,y_0).$$

Εντελώς αντίστοιχα βλέπουμε ότι για συνεχείς συναρτήσεις $\sigma(x)$ και $\sigma(x,y,z)$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\lim_{D(J_\nu)\to 0}\frac{1}{V(J_\nu)}\iiint_{J_\nu}\sigma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\sigma(x_0,y_0,z_0),$$

$$\lim_{D(J_\nu)\to 0}\frac{1}{L(J_\nu)}\int_{J_\nu}\sigma(x)\,dx=\sigma(x_0),$$

όπου όλα τα διαστήματα J_ν περιέχουν το σημείο (x_0,y_0,z_0), αντιστοίχως το x_0, και έχουν διαμέτρημα $D(J_\nu)\to 0$, όταν $\nu\to+\infty$.

Έτσι ξαναβρίσκουμε τη θεμελιώδη σχέση μεταξύ παραγωγίσεως και ολοκληρώσεως που είχαμε συναντήσει στα απλά ολοκληρώματα (§274).

§ 430. Εφαρμογές. Μάζα, κέντρο βάρους, ροπές.

α) Η μάζα M ενός σώματος το οποίο πιάνει έναν τόπο T και έχει στο σημείο (x,y,z) αυτού του τόπου πυκνότητα $\rho(x,y,z)$, συνεχή συνάρτηση του (x,y,z), ισούται, σύμφωνα με τα παραπάνω με

$$M=\iiint_T \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Για μιαν επίπεδη πλάκα F με "επιφανειακή" πυκνότητα $\sigma(x,y)$ η μάζα είναι

$$M=\iint_F \sigma(x,y)\,dx\,dy.$$

β) Σε αναλογία με τους τύπους του § 62, ονομάζουμε <u>κέντρο βάρους</u> μιας πλάκας F το σημείο με συντεταγμένες

$$x_0=\frac{1}{M}\iint_F x\,\sigma(x,y)\,dx\,dy=\frac{\displaystyle\iint_F x\,\sigma(x,y)\,dx\,dy}{\displaystyle\iint_F \sigma(x,y)\,dx\,dy},$$

$$y_0=\frac{1}{M}\iint_F y\,\sigma(x,y)\,dx\,dy=\frac{\displaystyle\iint_F y\,\sigma(x,y)\,dx\,dy}{\displaystyle\iint_F \sigma(x,y)\,dx\,dy}.$$

Σε αναλογία με τους τύπους του § 308 ονομάζουμε <u>κέντρο βάρους</u> ενός σώματος T, με πυκνότητα $\rho(x,y,z)$ στη θέση (x,y,z), το σημείο $K(\xi,\eta,\zeta)$ με συντεταγμένες

$$\xi=\frac{1}{M}\iiint_T x\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$\eta=\frac{1}{M}\iiint_T y\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$\zeta = \frac{1}{M}\iiint\limits_T z\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

γ) Αν παραστήσουμε με $a(x,y,z)$ την απόσταση του σημείου $P(x,y,z)$ από έναν άξονα $A'A$, ονομάζουμε ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα αυτόν ενός σώματος, που πιάνει τον τόπο T, τον αριθμό

$$M_2 = \iiint\limits_T a^2(x,y,z)\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

όπου $\rho(x,y,z)$ η πυκνότητα του σώματος στο σημείο (x,y,z) του T.

Για μια πλάκα F η ροπή M_ν βαθμού ν ως προς άξονα κείμενο μέσα στο επίπεδο της πλάκας και από τον οποίο το σημείο (x,y) έχει προσημασμένη απόσταση $\beta(x,y)$, με πρόσημο $+$ όταν το (x,y) κείται στα δεξιά του άξονα, είναι:

$$M_\nu = \iint\limits_F \beta^\nu(x,y)\,\sigma(x,y)\,dx\,dy,$$

όπου $\sigma(x,y)$ η επιφανειακή πυκνότητα της πλάκας στο σημείο (x,y).

Αν $\sigma(x,y)\equiv 1$, τότε η ροπή λέγεται και γεωμετρική ροπή βαθμού ν του σημειοσυνόλου F:

$$P_\nu = \text{γεωμ. ροπή του } F = \iint\limits_F \beta^\nu(x,y)\,dx\,dy.$$

Αν πάρουμε για άξονα ροπής τον άξονα OY θα είναι $\beta(x,y)=x$, άρα με εφαρμογή του τύπου (421.2) βρίσκουμε

$$P_\nu = \iint_F x^\nu dx\,dy = \int_\alpha^\beta \left\{ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \right\} x^\nu dx$$

$$= \int_\alpha^\beta \left\{ y_2(x) - y_1(x) \right\} x^\nu dx.$$

Ξαναβρίσκουμε λοιπόν τον τύπο του § 293.

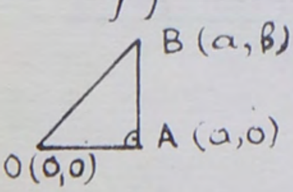
Ασκήσεις στο 27° Κεφάλαιο.

467. Υπολογίστε τα επάλληλα απλά ολοκληρώματα:

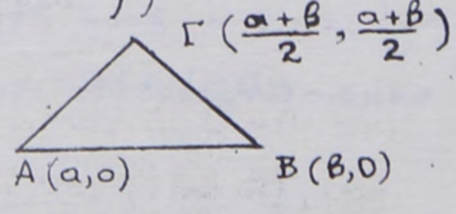
$$\int_0^\alpha \left(\int_0^\beta xy(x^2-y^2)\,dy \right) dx, \quad \int_0^\alpha \left(\int_0^\beta x e^{xy}\,dy \right) dx, \quad \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2\,dy \right) dx.$$

468. Υπολογίστε κατά δυο τρόπους με επάλληλες απλές ολοκληρώσεις τα ολοκληρώματα:

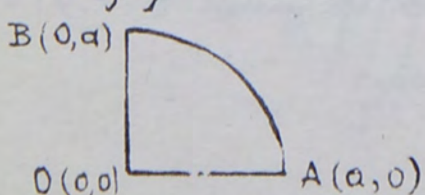
1) $$\iint (x^2+y^2)\,dx\,dy,$$



2) $$\iint (x^2+y^2)\,dx\,dy$$



3) $$\iint (x^2y+y^2x)\,dx\,dy$$



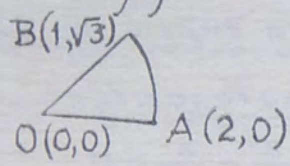
469. Υπολογίστε τον όγκο του στερεού που περιορίζεται από το ελλειπτικό παραβολοειδές $z = 16 - 2x^2 - 5y^2$ και από το XOY.

470. Υπολογίστε τον όγκο του στερεού που αποτελείται από τα σημεία τα οποία βρίσκονται στο εσωτερικό και των δυο κυλίνδρων

$$x^2+y^2 \leqq a^2 \quad \text{και} \quad x^2+z^2 \leqq a^2.$$

471. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iint \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}$$



με χρήση πολικών συντεταγμένων. (Απ. $\frac{2\pi}{15}$).

472. Υπολογίστε το:

$$\iiint\limits_{\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2} \leqq 1} xyz\,dx\,dy\,dz$$

χρησιμοποιώντας πρώτα την αλλαγή μεταβλητών $x=\alpha u$, $y=\beta v$, $z=\gamma w$, μεταβαίνοντας δεύτερο από τις ορθογώνιες συντεταγμένες (u,v,w) στις αντίστοιχες σφαιρικές (πολικές).

473. Υπολογίστε την επιφάνεια της σφαίρας

$x^2+y^2+z^2=R^2$ με τον τύπο (427.2).

474. Υπολογίστε το κέντρο βάρους και τις ροπές αδράνειας ως προς τους

άξονες Ox και Oy 1) του ομοιογενούς ελλειπτικού δίσκου: $|y|\leqq \beta\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, και 2) της ομοιογενούς τριγωνικής πλάκας με κορυφές τα σημεία $(0,0),(a,0)$, $(0,\beta)$.

475. Υπολογίστε τα κέντρα βάρους και τις ροπές αδράνειας ως προς τους άξονες OX, OY, OZ των ακόλουθων σωμάτων με πυκνότητα $\rho(x,y,z)\equiv 1$.

1) του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου $0\leqq x\leqq a$, $0\leqq y\leqq\beta$, $0\leqq z\leqq\gamma$.

2) του ημισφαιρίου $0\leqq z\leqq\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ για $x^2+y^2\leqq a^2$

3) του τετραέδρου με κορυφές

$$(0,0,0),(a,0,0),(0,\beta,0),(0,0,\gamma).$$

476*. Υπολογίστε τον όγκο στερεού που αποτελείται από τα σημεία του χώρου που κείνται στο εσωτερικό και των δυο ελλειπτικών παραβολοειδών:

$$y^2+2z^2+x-16=0 \quad \text{και} \quad y^2+\frac{z^2}{2}-\frac{x}{2}=0.$$

477*. Υπολογίστε τον όγκο του στερεού που περιορίζεται από το $z=-1$ και από τις κυλινδρικές επιφάνειες:

$$y-z=x^2-2,\ y+z=-x^2+6.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 28ο

Γενικά περί διαφορικών εξισώσεων 2ας τάξεως

§ 431. Η γενική τους μορφή είναι

$$\sigma(x,y,y',y'')=0.$$

θεωρούμε την ειδικότερη μορφή

(431.1) $$y'' = g(x, y, y')$$

όπου υποθέτουμε ότι η $g(x,y,z)$ είναι συνάρτηση συνεχής των τριών μεταβλητών (x,y,z) σ'ένα τριδιάστατο χωρίο του αναλυτικού χώρου των (x,y,z) και έχει μερικές παραγώγους $1^{ης}$ τάξεως ως προς τα γράμματα y και z, συνεχείς στο υπ'όψη χωρίο. Η επίλυση της εξισώσεως (431.1) είναι πρόβλημα ισοδύναμο με το της επιλύσεως του συστήματος

431.2 $$\begin{cases} y' = z \\ z' = g(x,y,z). \end{cases}$$

Το σύστημα αυτό ικανοποιεί όμως τις υποθέσεις περί υπάρξεως λύσεων το οποίο διατυπώσαμε στον προηγούμενο παράγραφο. Άρα το σύστημα έχει ένα διπαραμετρικό σύνολο λύσεων

$$y = \varphi(x, C_1, C_2)$$
$$z = \omega(x, C_1, C_2)$$

όπου φυσικά, λόγω της ικανοποιημένης πρώτης εξισώσεως του συστήματος, θα είναι

$$\varphi'_x(x, C_1, C_2) = z = \omega(x, C_1, C_2).$$

Επομένως και η εξίσωση (431.1) έχει ένα διπαραμετρικό σύστημα λύσεων

$$y = \varphi(x, C_1, C_2).$$

Μια λύση $y(x)$ καθορίζεται αν δοθούν οι τιμές y_0 και y'_0 που παίρνουν αυτή και η πρώτη της παράγωγος για δοσμένη τιμή x_0 της ανεξάρτητης μεταβλητής. Οι τιμές y_0 και y'_0 μπορούν να δοθούν αυθαίρετα με την προϋπόθεση μόνο ότι το σημείο $(x = x_0, y = y_0, z = y'_0)$ ανήκει στο χωρίο όπου η $f(x,y,z)$ υποτέθηκε συνεχής και με συνεχείς παραγώγους $1^{ης}$ τάξεως ως προς y και z.

Οι συνθήκες

$$y(x_0)=y_0 \ , \ y'(x_0)=y'_0$$

λέγονται <u>αρχικές συνθήκες</u>.

Ένας άλλος τρόπος να καθορίσουμε τη λύση της (431.1) είναι να δώσουμε τις τιμές y_1 και y_2 που θέλουμε να έχη η λύση για δυο δοσμένες τιμές x_1 και x_2 της ανεξάρτητης μεταβλητής x. Θα έχουμε τότε να επιλύσουμε και να διερευνήσουμε το σύστημα των δυο εξισώσεων

$$y_1=\varphi(x_1, C_1, C_2) \ , \ y_2=\varphi(x_2, C_1, C_2)$$

με αγνώστους τα γράμματα C_1 και C_2.

§ 432. Απλές ειδικές κατηγορίες διαφορικών εξισώσεων $2^{ης}$ τάξεως.

α) $y''=f(x)$.

Γενική λύση (γενικό ολοκλήρωμα)

$$y=\int\left(\int f(x)dx\right)dx+C_1x+C_2 .$$

β) $y''=f(y)$. Έχουμε

$$y''=\frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dy'}{dy}\cdot y'=\frac{1}{2}\,\frac{d(y'^2)}{dy} .$$

Άρα $y'^2=2\int f(y)dy+C_1$, όπου $\int f(y)dy$ μια παράγουσα της $f(y)$, και επομένως:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\sqrt{2\int f(y)dy+C_1}} .$$

Συνεπώς η γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως ορίζεται από την εξίσωση

$$x=\int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)dy+C_1}}+C_2 ,$$

όπου $\int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)dy+C_1}}$ μια παράγουσα της $\frac{1}{2\sqrt{\int f(y)dy+C_1}}$.

γ) $y''=f(y')$. Θέτουμε $y'=p$ και ζητούμε να εκφράσουμε τις μεταβλητές x και y της δοσμένης διαφορικής εξισώσεως συναρτήσει του p ως παραμέτρου. Έχουμε:

$$p=\frac{dy}{dx} , \quad \frac{dp}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}=f(p) \text{ και } \frac{dx}{dp}=\frac{1}{f(p)} \text{ άρα } x=\int\frac{dp}{f(p)}+C_1 .$$

Εξ άλλου $dy=p\,dx=p\frac{dp}{f(p)}$, άρα $y=\int p\frac{dp}{f(p)}+C_2$.

Ώστε η γενική λύση προκύπτει από τη συναρτησιακή σχέση μεταξύ x και y την οποία ορίζουν οι δυο εξισώσεις

$$x=\int\frac{dp}{f(p)}+C_1 , \quad y=\int p\cdot\frac{dp}{f(p)}+C_2 ,$$

όταν θεωρήσουμε τα C_1 και C_2 ως αυθαίρετες σταθερές και το p ως βοηθητική μεταβλητή (παράμετρο).

δ) $y''=f(x,y')$.

Η τάξη της εξισώσεως υποβιβάζεται αν πάρουμε για άγνωστη συνάρτηση την $p(x)=y'$, οπότε

$$p'=f(x,p).$$

Αν μπορούμε να επιλύσουμε την πρωτοτάξια αυτή διαφορική εξίσωση για την $p(x)$ και αν παραστήσουμε με

$$p=\varphi(x,c_1)$$

τη γενική της λύση, τότε το γενικό ολοκλήρωμα της αρχικής διαφορικής εξίσωσης βρίσκεται από τη σχέση $\frac{dy}{dx}=p(x)$ με έναν τετραγωνισμό:

$$y=\int\varphi(x,c_1)dx+c_2.$$

ε) $y''=f(y,y')$.

Και εδώ η τάξη της εξισώσεως μπορεί να υποβιβαστή. Αρκεί να πάρουμε το y για ανεξάρτητη μεταβλητή και να θέσουμε $y'=p$, οπότε $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\,\frac{dp}{dy}$. Άρα αντί της αρχικής έχουμε την πρωτοτάξια εξίσωση

$$p\cdot\frac{dp}{dy}=f(y,p).$$

Αν ξέρουμε να την επιλύσουμε και αν η γενική της λύση παρασταθή με

$$p=\omega(y,c_1),$$

τότε το γενικό ολοκλήρωμα της αρχικής εξίσωσης βρίσκεται από τη σχέση

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}=\frac{1}{p}^{(*)}=\frac{1}{\omega(y,c_1)}$$

με έναν τετραγωνισμό:

$$x=\int\frac{dy}{\omega(y,c_1)}+c_2.$$

§ 433. Γραμμικές εξισώσεις 2ης τάξεως.

Έτσι καλούνται οι διαφορικές εξισώσεις $\sigma(x,y,y',y'')=0$ που είναι αλγεβρικές και πρωτοβάθμιες ως προς τα γράμματα y, y', y''. Είναι επομένως της μορφής

$$A(x)y''+B(x)y'+\Gamma(x)y=\mathcal{D}(x)$$

όπου $A(x)$, $B(x)$, $\Gamma(x)$, $\mathcal{D}(x)$ δοσμένες συναρτήσεις του x. Η $A(x)$ δεν θα είναι φυσικά από ταυτότητα μηδέν και επομένως θα μπορούμε δια διαιρέσεως να φέρουμε τη γραμμική εξίσωση στη μορφή

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x).$$

Αν $r(x) \equiv 0$, τότε η εξίσωση λέγεται γραμμική ομογενής, σε εναντία περίπτωση γραμμική μη ομογενής.

Ιδού τώρα οι βασικές ιδιότητες της γραμμικής ομογενούς διαφορικής εξισώσεως $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $p(x)$ και $q(x)$ είναι συνεχείς στο διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$. Τότε στο τριδιάστατο χωρίο

$$\alpha \leqq x \leqq \beta, \quad -\infty < y < +\infty, \quad -\infty < y' < +\infty$$

η διαφορική εξίσωση, που μπορεί να γραφή και με την μορφή

$$y'' = -p(x)y' - q(x)y = g(x, y, y'),$$

ικανοποιεί τις προϋποθέσεις της γενικής θεωρίας του § 431:

η $g(x,y,y')$ είναι συνεχής συνάρτηση των τριών γραμμάτων x, y, y' και έχει συνεχείς μερικές παραγώγους $1^{ης}$ τάξεως, ως προς τα γράμματα y και y'.

Άρα η γραμμική ομογενής διαφορική εξίσωση έχει μια διπαραμετρική απειρία λύσεων που καθορίζονται με δυο αρχικές συνθήκες: τις δυο αυθαίρετες τιμές που μπορούμε να δώσουμε στην $y(x)$ και στην $y'(x)$ για μιαν ορισμένη τιμή x_0 του x απο τό διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$.

Μια τετριμμένη ειδική λύση της γραμμικής ομογενούς εξισώσεως είναι η $y = 0$ από ταυτότητα στο διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$.

Αν για μια λύση $y(x)$ γνωρίζουμε ότι μηδενίζεται αυτή και η παράγωγος της σε κάποια θέση $x = x_0$, δηλαδή αν $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$, τότε η θεωρούμενη λύση δεν μπορεί να είναι άλλη από την $y(x) = 0$ από ταυτότητα στο διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$.

Διότι η $y(x) \equiv 0$ ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $y(x_0) = 0$ και $y'(x_0) = 0$.

Αν η $y_1(x)$ είναι μια λύση, τότε και η $C_1 y_1(x)$ είναι επίσης λύση. (C_1 αυθαίρετη σταθερά) και μάλιστα μια διαφορετική λύση, εφόσο $y_1(x) \neq 0$, όταν $C_1 \neq 1$.

Εκτός από την μονοπαραμετρική απειρία λύσεων $C_1 \cdot y_1(x)$ όπου $y_1(x) \neq 0$, θα υπάρχουν και άλλες λύσεις. Αλλοιώτικα το σύνολο των λύσεων θα ήταν μονοπαραμετρικό και δεν θα μπορούσαμε να ικανοποιήσουμε τις αρχικές συνθήκες $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$,

όπου y_0 και y'_0 δυο αυθαίρετοι αριθμοί.

Έστω λοιπόν $y_2(x)$ μια λύση που δεν περιέχεται μέσα στην απειρία $C_1 y_1(x)$. Τότε και η $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ θα είναι λύση της διαφορικής εξισώσεως. Λέγω τώρα ότι δεν υπάρχει άλλη λύση έξω από τις συναρτήσεις της διπαραμετρικής απειρίας

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \ (C_1 \text{ και } C_2 \text{ παράμετροι}).$$

Για να το αποδείξουμε, αρκεί να δείξουμε ότι μπορούμε να προσδιορίσουμε τις σταθερές C_1 και C_2 έτσι που να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες

$$C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0$$

(433.1)

$$C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) = y'_0 ,$$

όπου y_0 και y'_0 δυο αυθαίρετοι αριθμοί και x_0 ένας αυθαίρετος ριθμός από το διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$. Λέγω ότι είναι

433.2)
$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Και αλήθεια, αν η ορίζουσα αυτή ήταν ίση με μηδέν, θα υπήρχαν δυο αριθμοί λ_1 και λ_2, όχι και οι δυο μηδενικοί, τέτοιοι ώστε να είναι

$$\lambda_1 y_1(x_0) + \lambda_2 y_2(x_0) = 0$$
$$\lambda_1 y_1'(x_0) + \lambda_2 y_2'(x_0) = 0.$$

Αλλά τότε η λύση $\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$ θα έπρεπε να είναι από ταυτότητα μηδέν στο διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$. Επομένως θα έπρεπε να είχαμε ή $\lambda_1 y_1 \equiv 0$ με $\lambda_1 \neq 0$ εφόσο $\lambda_2 = 0$ ή $y_2(x) \equiv \frac{\lambda_1}{\lambda_2} y_1(x)$ εφόσο $\lambda_2 \neq 0$. Αλλά αμφότερα αυτά αποκλείονται με την εκλογή που κάμαμε των $y_1(x)$ και $y_2(x)$.

Από τη σχέση (433.2) έπεται ότι το σύστημα (433.1) είναι το σύστημα Cramer ως προς τους άγνωστους C_1 και C_2 και συνεπώς επιλύσιμο με οποιεσδήποτε τιμές των δευτέρων μελών y_0 και y_0', ο.ε.δ.

Δυο λύσεις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ λέγονται γραμμικώς ανεξάρτητες, αν ο γραμμικός συνδυασμός των $\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$ μηδενίζεται από ταυτότητα στο διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$ μόνον όταν οι σταθεροί πολλαπλασιαστές λ_1 και λ_2 είναι και οι δυο μηδενικοί. Αναγκαία συνθήκη γι'αυτό είναι όπως δείχνουν τα παραπάνω, ο μη μηδενισμός της ορίζουσας (του Wronski)

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \quad \text{για } \alpha \leqq x \leqq \beta .$$

Αντίστροφα, αν για δυο λύσεις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ της ομογενούς διαφορικής εξισώσεως η παραπάνω ορίζουσα είναι $\neq 0$ έστω και σε μια θέση x_0 από το διαστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$, θα είναι $\neq 0$ και σε κάθε άλλη θέση από το διαστημα αυτο, οι δε λύσεις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ θα είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Η γνώση δυο γραμμικώς ανεξάρτητων λύσεων y_1 και y_2 της ομογενούς εξισώσεως μας επιτρέπει λοιπόν, σύμφωνα με τα παραπάνω, να γράψουμε την πλήρη λύση της εξισώσεως με την μορφή

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

όπου C_1 και C_2 αυθαίρετες σταθερές.

§ 434. Γραμμικές μη ομογενείς διαφορ. εξισώσεις.

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις p, q, r είναι συνεχείς στο διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$. Τότε κατά τη γενική θεωρία η μη ομογενής διαφορική εξίσωση έχει και αυτή ένα διπαραμετρικό σύνολο λύσεων.

Εξακολουθεί να ισχύη η πρόταση (του § 384) ότι η διαφορά δυο λύσεων της μη ομογενούς διαφορ. εξίσωσης είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξισώσεως.

Άρα, για να βρούμε την πλήρη λύση της μη ομογενούς, αρκεί να γνωρίζουμε μιαν ειδική λύση της καθώς και την πλήρη λύση της αντίστοιχης ομογενούς.

Η εύρεση μιας ειδικής λύσης της μη ομογενούς εξισώσεως σε ειδικές περιπτώσεις που θα αναφέρουμε παρακάτω βρίσκεται με ειδικές μεθόδους. Αν όμως γνωρίζουμε ήδη δυο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ της αντίστοιχης γραμμικής ομογενούς, τότε μπορούμε να βρούμε τη λύση της μη ομογενούς και με μια γενική μέθοδο, τη μέθοδο του Lagrange της "μεταβολής των σταθερών". Θέτουμε

$$y(x) = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x) \tag{434.1}$$

όπου $C_1(x)$ και $C_2(x)$ προσδιοριστέες συναρτήσεις του x για να είναι το $y(x)$ λύση της μη ομογενούς εξισώσεως

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x).$$

Για τον σκοπό αυτό πρέπει και αρκεί να έχουμε

$$C_1'' y_1 + C_2'' y_2 + 2C_1' y_1' + 2C_2' y_2' + C_1 y_1'' + C_2 y_2''$$
$$+ p(C_1' y_1 + C_2' y_2 + C_1 y_1' + C_2 y_2') + q(C_1 y_1 + C_2 y_2) = r(x)$$

ή

$$C_1'' y_1 + C_2'' y_2 + 2(C_1' y_1' + C_2' y_2') + p(C_1' y_1 + C_2' y_2)$$
$$+ C_1(y_1'' + p y_1' + q y_1) + C_2(y_2'' + p y_2' + q y_2) = \tau(x)$$

ή

(434.2) $$(C_1'' y_1 + C_2'' y_2 + C_1' y_1' + C_2' y_2') + (C_1' y_1' + C_2' y_2') + p(C_1' y_1 + C_2' y_2) = \tau(x).$$

Προσδιορίζουμε τώρα τις συναρτήσεις $C_1'(x)$ και $C_2'(x)$ έτσι που να ισχύουν οι ταυτότητες

(434.3) $$\begin{aligned} C_1' y_1 + C_2' y_2 &= 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' &= \tau(x) \end{aligned}$$

στο διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$. Αυτό είναι δυνατό, επειδή η $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ δεν μηδενίζεται σε καμιά θέση x από το διάστημα $\alpha \leqq x \leqq \beta$. Θα έχουμε τότε και

$$C_1'' y_1 + C_2'' y_2 + C_1' y_1' + C_2' y_2' = 0$$

(Αυτό έπεται από την πρώτη ταυτότητα (434.3) με παραγώγιση ως προς x)

Άρα η εξίσωση (434.2) που έχουμε να επαληθεύσουμε γίνεται $0 + 0 + \tau(x) + p\cdot 0 = \tau(x)$, δηλ. πραγματικά μια ταυτότητα.

Από τις εξισώσεις (434.3) που έχουμε να ικανοποιήσουμε ταυτοτικά ως προς x έπεται, αν καλέσουμε $W(x)$ την ορίζουσα $\begin{vmatrix} y_1, & y_2 \\ y_1', & y_2' \end{vmatrix}$,

$$C_1'(x) = \frac{-y_2(x)\tau(x)}{W(x)}, \quad C_2'(x) = \frac{y_1(x)\tau(x)}{W(x)}.$$

Άρα

(434.4) $$C_1(x) = \int \frac{-y_2(x)\tau(x)dx}{W(x)}, \quad C_2(x) = \int \frac{y_1(x)\tau(x)dx}{W(x)}.$$

Η εισαγωγή αυτών των εκφράσεων μέσα στη σχέση (434.1) μας δίνει τη ζητούμενη λύση της μη ομογενούς εξισώσεως. Μάλιστα, αν μέσα στα δυο αόριστα ολοκληρώματα (434.1) συμπεριλάβουμε και τις δυο αθροιστικές των σταθερές ολοκληρώσεως, θα έχουμε την πλήρη λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως με τη μορφή που ξέρουμε κιόλας ότι έχει:

λύση της μη ομογενούς = ειδική λύση της μη ομογενούς + γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς.

§435. Περίπτωση υποβιβασμού της τάξεως μιας γραμμικής εξισώσεως.

Αν γνωρίζουμε μια λύση $y_1(x)$ της γραμμικής ομογενούς διαφορικής εξισώσεως $2^{ης}$ τάξης

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

μπορούμε με την αλλαγή $y = y_1 \cdot z$, όπου z η νέα άγνωστη συνάρτηση του x, να υποβιβάσουμε την τάξη της διαφορικής εξισώσεως

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = \tau(x)$$

(φυσικά δεν αποκλείεται εδώ το $\tau(x)$ να είναι και $\equiv 0$).

Πράγματι έχουμε για τη z τη διαφορική εξίσωση

$$y_1''z + 2y_1'z' + y_1z'' + p(y_1'z + y_1z') + qy_1 \cdot z = \tau(x)$$

ή

$$(y_1'' + py_1' + qy_1)z + (2y_1' + py_1)z' + y_1z'' = \tau(x)$$

ή $$y_1z'' + (2y_1' + py_1)z' = \tau(x) \quad .$$

Η τελευταία εξίσωση είναι όμως ως προς $z' = u$ γραμμική $1^{ης}$ τάξεως:

$$y_1u' + (2y_1' + py_1)u = \tau(x)$$

Σύμφωνα με αυτά, η γνώση μιας ειδικής λύσης της 2τάξιας γραμμικής ομογενούς διαφορικής εξισώσεως μας επιτρέπει να βρούμε με τετραγωνισμούς τη γενική λύση της ομογενούς (άρα και της αντίστοιχης μη ομογενούς εξισώσεως). Η τελευταία αυτη ιδιότητα προκαλεί μια συσχέτιση της 2τάξιας γραμμικής ομογενούς εξισώσεως με την πρωτοτάξια εξίσωση Riccati που έχει την ίδια ιδιότητα.

Άραγε είναι δυνατό να αναγάγουμε την μια στην άλλη;

Πράγματι αυτό είναι δυνατό. Π.χ από την δευτεροτάξιο

$y''+p(x)y'+q(x)y=0$ μεταβαίνουμε στην $\frac{y''}{y}+p\frac{y'}{y}+q=0$ και με την αλλαγή $\frac{y'}{y}=\omega$ (οπότε $y'=y\omega$ και $y''=y'\omega+y\omega'$ ή $\frac{y''}{y}=\omega^2+\omega'$) καταλήγουμε στην εξίσωση Riccati

$$\omega^2+\omega'+p\omega+q=0.$$

Αντίστροφα, από την εξίσωση Riccati

$$y'+A(x)y^2+B(x)y+\Gamma(x)=0$$

με την αλλαγή $y=\frac{1}{A}\cdot\frac{\upsilon'}{\upsilon}$ μεταβαίνουμε στην εξίσωση

$$-\frac{A'}{A^2}\frac{\upsilon'}{\upsilon}+\frac{1}{A}\cdot\frac{\upsilon''}{\upsilon}-\frac{1}{A}\cdot\frac{\upsilon'^2}{\upsilon^2}+A\frac{1}{A^2}\frac{\upsilon'^2}{\upsilon^2}+\frac{B}{A}\frac{\upsilon'}{\upsilon}+\Gamma=0$$

ή

$$\frac{1}{A}\cdot\frac{\upsilon''}{\upsilon}+\left(\frac{B}{A}-\frac{A'}{A^2}\right)\frac{\upsilon'}{\upsilon}+\Gamma=0$$

ή

$$\upsilon''+\left(B-\frac{A'}{A}\right)\upsilon'+A\Gamma\upsilon=0$$

που είναι γραμμική ομογενής $2^{\underline{ας}}$ τάξεως

§436. Γραμμική ομογενής εξίσωση με σταθερούς συντελεστές.

Έστω η εξίσωση

(436.1) $$y''+a_1y'+a_0y=0,$$

όπου a_1 και a_0 σταθερές. Αν θέσουμε $y=e^{\lambda x}$ όπου λ προσδιοριστέα σταθερά, βρίσκουμε για το λ την εξίσωση

$$(436.2) \qquad \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Η τελευταία αλγεβρική εξίσωση λέγεται <u>χαρακτηριστική</u> εξίσωση της διαφορικής (436.1). Αν η διακρίνουσα της $a_1^2 - 4a_0$ είναι $\neq 0$, έχουμε δυο διάφορες ρίζες λ_1 και λ_2 που με τη βοήθεια τους κατασκευάζουμε δυο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ και $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ της διαφορικής εξισώσεως (436.1). Άρα στην περίπτωση $a_1^2 - 4a_0 \neq 0$ η εξίσωση (436.1) έχει γενική λύση την $C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$. Ανάμεσα στις λύσεις μας ενδιαφέρουν ιδιαιτέρως, προκειμένου για τις εφαρμογές, οι πραγματικές, με τήν προϋπόθεση ότι και οι συντελεστές a_1 και a_0 είναι πραγματικοί. Στην υποπερίπτωση $a_1^2 - 4a_0 < 0$, οι $e^{\lambda_1 x}$ και $e^{\lambda_2 x}$ είναι μιγαδικές και είναι σκόπιμο να τις αντικαταστήσουμε με δυο άλλες πραγματικές. Προς τούτο παρατηρούμε ότι, αν $a_1^2 - 4a_0 = \Delta < 0$, οι ρίζες λ_1 και λ_2 της χαρακτηριστικής εξισώσεως είναι:

$$\lambda = -\frac{a_1}{2} \pm \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2}$$

και επομένως οι δυο λύσεις της διαφορικής εξισώσεως:

$$e^{\left(-\frac{a_1}{2} \pm \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2}\right)x} = e^{-\frac{a_1}{2}x} \cdot e^{\pm\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2}x} = e^{-\frac{a_1}{2}x}\left[\text{συν}\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x\right) \pm i\,\text{ημ}\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x\right)\right].$$

Αντί γι' αυτές παίρνουμε το ημιάθροισμα τους

$$e^{-\frac{a_1}{2}x}\,\text{συν}\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x\right)$$

που είναι πραγματική συνάρτηση της πραγματικής μεταβλητής x καθώς και το πηλίκο της διαφοράς των δια της σταθεράς $2i$ που είναι επίσης πραγματική συνάρτηση:

$$e^{-\frac{a_1}{2}x} \cdot \text{ημ}\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x\right).$$

Οι δυο πραγματικές αυτές λύσεις είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, αφού το πηλίκο τους είναι

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x\right) \neq \text{σταθερά}$$

Άρα η γενική λύση της εξισώσεως (436.1) μπορεί να δοθή και με τη μορφή

$$e^{-\frac{a_1}{2}x}\left(C_1\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x\right)+C_2\,\eta\mu\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x\right)\right),$$

που παρέχει τώρα πραγματικές συναρτήσεις όταν τα x, C_1, C_2 είναι πραγματικοί αριθμοί.

Υπολείπεται η περίπτωση $a_1^2-4a_0=0$. Η (436.1) έχει τότε μια διπλή ρίζα $\lambda=-\frac{a_1}{2}$, πραγματική στην περίπτωση πραγματικών συντελεστών της (436.1). Έχουμε λοιπόν προς το παρόν, μόνο μιαν ειδική λύση της (436.1). Για να βρούμε μια δεύτερη, ανεξάρτητη γραμμικώς από την προηγούμενη, σκεπτόμαστε ως εξής:

Αν θεωρήσουμε ξανά την πρώτη περίπτωση $a_1^2-4a_0\neq 0$ και τις δυο αντίστοιχες λύσεις $e^{\lambda_1 x}$ και $e^{\lambda_2 x}$, θα είναι λύση της εξισώσεως (436.1) και η συνάρτηση

$$\frac{e^{\lambda_2 x}-e^{\lambda_1 x}}{\lambda_2-\lambda_1}\,. \tag{436.3}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι συντελεστές a_1 και a_0 μεταβάλλονται έτσι που η μια ρίζα λ_1 της χαρακτηριστικής να παραμένη σταθερή, η δε διακρίνουσα $a_1^2-4a_0$ να τείνη στο μηδέν, οπότε η άλλη ρίζα λ_2 θα έχη όριο τη λ_1. Η συνάρτηση (436.3) θα τείνη τότε προς το όριο

$$\left(\frac{\partial e^{\lambda x}}{\partial \lambda}\right)_{\theta\varepsilon\sigma\eta\ \lambda=\lambda_1}=x\,e^{\lambda_1 x}.$$

Ώστε είναι εύλογο να δοκιμάσουμε μήπως στην περίπτωση

$a_1^2 - 4a_0 = 0$, η συνάρτηση $x \cdot e^{\lambda_1 x}$ με $\lambda_1 = -\frac{a_1}{2}$ είναι λύση της (436.1). Πράγματι αυτό επαληθεύεται αμέσως. Άρα έχουμε τώρα δυό γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις: $e^{-\frac{a_1}{2}x}$ και $x \cdot e^{-\frac{a_1}{2}x}$, και με την βοήθεια τους κατασκευάζουμε το γενικό ολοκλήρωμα της (436.1).

$$y = e^{-\frac{a_1}{2}x}(C_1 + C_2 x).$$

§437. Μη ομογενείς εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές και δεύτερα μέλη ειδικής μορφής.

I) Έστω

(437.1) $$y'' + a_1 y' + a_0 y = P(x),$$

όπου a_1 και a_0 σταθερές, $P(x)$ ακέραιο πολυώνυμο του x.

Ας είναι κ ο βαθμός του $P(x)$, όπου κ ακέραιος $\geqq 0$.

Αν $a_0 \neq 0$, τότε υπάρχει μια ειδική λύση της μορφή.

$$y(x) = \beta_\kappa x^\kappa + \cdots + \beta_1 x + \beta_0.$$

Αν $a_0 = 0$ αλλά $a_1 \neq 0$, τότε υπάρχει μια ειδική λύση της μορφής

$$y(x) = \beta_{\kappa+1} x^{\kappa+1} + \cdots + \beta_1 x.$$

Αν $a_0 = a_1 = 0$, τότε υπάρχει μια ειδική λύση

$$y(x) = \beta_{\kappa+2} x^{\kappa+2} + \cdots + \beta_2 x^2.$$

Τους συντελεστές β τους προσδιορίζουμε κάθε φορά με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών εισάγοντας τις παραπάνω συναρτήσεις μέσα στη διαφορική εξίσωση. Π.χ. για την εξίσωση

$$y'' - 2y' = 4$$

δοκιμάζουμε τη λύση $y(x) = \beta_1 x$, έχουμε

$$0 - 2\beta_1 = 4 \quad \text{αρα} \quad \beta_1 = -2.$$

II). Το δεύτερο μέλος της μη ομογενούς εξισώσεως ας είναι της μορφής $Ae^{\omega x}$ όπου A και ω δοσμένες σταθερές.

Δοκιμάζουμε για ειδική λύση μιαν συνάρτηση της ίδιας μορφής $Be^{\omega x}$ με προσδιοριστέα τη σταθερά B. Έχουμε:

$$B\omega^2 e^{\omega x} + a_1 B\omega e^{\omega x} + a_0 B e^{\omega x} = A e^{\omega x},$$

άρα

$$B\,(\omega^2 + a_1\omega + a_0) = A.$$

Ώστε, αν το ω δεν συμπίπτη με καμιά από τις λύσεις λ_1 και λ_2 της χαρακτηριστικής εξισώσεως $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$, τότε το B μπορεί να προσδιοριστή από την τελευταία σχέση:

$$B = \frac{A}{\varphi(\omega)} \quad ,$$

όπου $\varphi(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ το "χαρακτηριστικό πολυώνυμο" της θεωρούμενης διαφορικής εξίσωσης.

Αν $\varphi(\omega) = 0$ και $\varphi'(\omega) \neq 0$, τότε δοκιμάζουμε ως ειδικήν λύση την $y(x) = Bxe^{\omega x}$, οπότε λαμβάνουμε

$$2B.1.\omega e^{\omega x} + Bx\omega^2 e^{\omega x} + a_1 B(e^{\omega x} + x\omega e^{\omega x}) + a_0 Bxe^{\omega x} = Ae^{\omega x}.$$

ή

$$(2\omega + a_1)B + Bx(\omega^2 + a_1\omega + a_0) = A, \text{ δηλ. } \varphi'(\omega)B + Bx.0 = A,$$

άρα

$$B = \frac{A}{\varphi'(\omega)}.$$

Αν τέλος $\varphi(\omega) = \varphi'(\omega) = 0$, τότε δοκιμάζουμε για ειδική λύση την $y(x) = Bx^2 e^{\omega x}$. Έχουμε

$$B(2e^{\omega x} + 2.2x.\omega e^{\omega x} + x^2\omega^2 e^{\omega x}) + a_1 B(2xe^{\omega x} + x^2\omega e^{\omega x}) + a_0 Bx^2 e^{\omega x} = Ae^{\omega x}$$

ή

$$2B + B(2\omega + a_1)2x + B(\omega^2 + a_1\omega + a_0)x^2 = A, \text{ δηλ. } 2B = A,$$

ἄρα

$$B = \frac{A}{2}\ .$$

III) Αν το δεύτερο μέλος είναι άθροισμα συναρτήσεων της μορφής $A_\mu e^{\omega_\mu x}$, τότε για κάθε όρο $A_\mu e^{\omega_\mu x}$ λαμβανόμενο ως 2° μέλος της διαφορικής εξίσωσης προσδιορίζουμε όπως παραπάνω μιαν αντίστοιχη ειδική λύση, ύστερα προσθέτουμε όλες αυτές τις ειδικές λύσεις που βρήκαμε· το άθροισμα τους είναι προφανώς μια ειδική λύση της δοσμένης διαφορικής εξίσωσης με 2° μέλος το άθροισμα των $A_\mu e^{\omega_\mu x}$.

Τα παραπάνω ισχύουν και όταν το ω μέσα στο 2ο μέλος $Ae^{\omega x}$ είναι καθαρά φανταστικός αριθμός: $\omega = i\theta$, μόνο που τότε η ειδική λύση που βρίσκουμε είναι μια μιγαδική συνάρτηση $y(x) = y_1(x) + iy_2(x)$ της πραγματικής μεταβλητής x. Γι'αυτό είναι σκόπιμο, χάρη των εφαρμογών, να ιδούμε τι αποτελέσματα προκύπτουν για το πραγματικό πεδίο από όσα εκθέσαμε.

Ας είναι λοιπόν οι συντελεστές a_1, a_0, A πραγματικοί αριθμοί και $\omega = i\theta$ καθαρά φανταστικός αριθμός (επομένως θ πραγματικός αριθμός $\neq 0$). Η διαφορική εξίσωση

$y'' + a_1 y' + a_0 y = Ae^{i\theta x} = A\,\text{συν}\,\theta x + i A\,\text{ημ}\,\theta x$, με μιγαδικό δεύτερο μέλος και με λύση έστω την $y(x) = y_1(x) + iy_2(x)$, αναλύεται σε δυο διαφορικές εξισώσεις με πραγματικά 2α μέλη, την

(437.1) $\qquad y'' + a_1 y' + a_0 y = A\,\text{συν}\,\theta x$ που έχει τη λύση $y_1(x)$

και την

(437.2) $\qquad y'' + a_1 y' + a_0 y = A\,\text{ημ}\,\theta x$ που έχει τη λύση $y_2(x)$.

Έχουμε να διακρίνουμε

1) τη γενικότερη περίπτωση: $\varphi(i\theta)=-\theta^2+a_1 i\theta+a_0\neq 0$ που παρουσιάζεται όταν $a_1\neq 0$ ή όταν $a_1=0$ αλλά $a_0\neq\theta^2$.

Η ειδική λύση $y=\dfrac{A}{\varphi(i\theta)}e^{i\theta x}=(B_1+iB_2)e^{i\theta x}$ που βρίσκουμε για τη δ. εξίσωση με το 2ο μέλος $Ae^{i\theta x}$ αναλύεται ως εξής σε πραγματικό και σε καθαρά φανταστικό μέρος:

$$y=(B_1+iB_2)(\text{συν}\,\theta x+i\,\text{ημ}\,\theta x)=B_1\text{συν}\,\theta x-B_2\text{ημ}\,\theta x+i\left(B_2\text{συν}\,\theta x+B_1\text{ημ}\,\theta x\right).$$

Η δ. εξίσωση (437.1) έχει λοιπόν την ειδική λύση $y=B_1\,\text{συν}\,\theta x-B_2\text{ημ}\,\theta x$ και η (437.2), την $y=B_2\,\text{συν}\,\theta x+B_1\,\text{ημ}\,\theta x$. Αμφότερες οι λύσεις έχουν την μορφή $A_1\,\text{συν}\,\theta x+A_2\,\text{ημ}\,\theta x$, όπου A_1 και A_2 συντελεστές που μπορούν φυσικά να προσδιοριστούν και απευθείας με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών.

2) Τη μερική περίπτωση: $\varphi(i\theta)=-\theta^2+a_1 i\theta+a_0=0$ και $\varphi'(i\theta)=2i\theta+a_1\neq 0$ η οποία παρουσιάζεται όταν $a_1=0$ και $a_0=\theta^2$.

Οι ειδικές λύσεις των (437.1) και (437.2) είναι τώρα το πραγματικό και το καθαρά φανταστικό μέρος διαιρεμένο δια i της συνάρτησης

$$y=Bxe^{\omega x}=\frac{A}{\varphi'(i\theta)}xe^{i\theta x}=\frac{A}{2i\theta}x(\text{συν}\,\theta x+i\,\text{ημ}\,\theta x),$$

άρα

$$x\cdot\frac{A}{2\theta}\,\text{ημ}\,\theta x \quad \text{και} \quad x\left(-\frac{A}{2\theta}\right)\text{συν}\,\theta x \quad \text{αντιστοίχως.}$$

Αμφότερες είναι της μορφής $x(A_1\,\text{συν}\,\theta x+A_2\,\text{ημ}\,\theta x)$, όπου A_1 και A_2 συντελεστές προσδιορίσιμοι και απευθείας με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών.

<u>**Παρατήρηση**</u>. Περίπτωση $\varphi(i\theta)=0=\varphi'(i\theta)$ δεν είναι δυνατή, επειδή $\theta\neq 0$.

Ασκήσεις στό 28ο κεφάλαιο

478. Επιλύστε τις διαφορικές εξισώσεις

$$y'' = (1+y'^2)^{3/2}, \quad y'' = yy', \quad y'' - \frac{y'}{x} = x^2$$

479. Επιλύστε τις διαφορικές εξισώσεις

$$y'' - Ay' + Ay = 0, \qquad y'' - 4y' + 4y = e^{2x}(2+6x) + e^{3x}(1+x)$$

$$y'' - 3y' + 2y = x^2 + 1, \quad y'' - 2y' + 2y = 1 + 2e^x συν\, x, \quad y'' + y = συν\, x + ημ 2x.$$

480. Επιλύστε τη διαφορική εξίσωση

$$z'' - 2z' + 2z = e^x συν\, μx$$

όπου μ δοσμένη σταθερά. Προσδιορίστε τη λύση που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες:

$$για \quad x = 0, \quad z(0) = 0, \quad z'(0) = 0.$$

Ποιά είναι η ακτίνα καμπυλότητας της ολοκληρωτικής γραμμής, που παριστάνει την τελευταία λύση στο σημείο $O(0,0)$;

481. Βρήτε τις δυο λύσεις της διαφορικής εξισώσεως

$$z'' + 2z' + 4z = 7e^x - 4x - 6$$

που ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες:

(για $x=0$) $z=0$, $z'=+1$ η μια και $z=0$, $z'=-1$ η άλλη.

Αναπτύξτε σε ακέραια σειρά (= σειρά δυνάμεων = σειρά Maclaurin) τη διαφορά των δυο αυτών λύσεων.

482. Επιλύστε το σύστημα των δυο διαφ εξισώσεων

$$\frac{dx}{dt} = 2x - z, \qquad \frac{dz}{dt} = x + 4z - 5ημ\, t.$$

Προσδιορίστε μια λύση $(x(t), z(t))$ του συστήματος βάσει της συνθήκης ότι οι συναρτήσεις x και z του t μηδενίζονται για $t=0$ και υπολογίστε τον πρώτο (όχι μηδενικό) όρο των αναπτυγμάτων σε σειρά δυνάμεων του t αυτών των δυο συναρτήσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 29ο

Επικαμπύλια και επιφανειακά ολοκληρώματα

§438. Επικαμπύλια ολοκληρώματα.

Έστω γ μια γραμμή $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ για $\alpha \leqq t \leqq \beta$, η οποία συνδέει τα σημεία $A(x(\alpha), y(\alpha))$ και $B(x(\beta), y(\beta))$ (Δεν αποκλείουμε την περίπτωση της κλειστής γραμμής, δηλαδή το B να συμπίπτη με το A).

Τη γραμμή γ διατρεγμένη κατά τη μια φορά, από το A προς το B, θα την παριστάνουμε με γ^+ και $\overset{\frown}{AB}$, διατρεγμένη κατά την άλλη φορά, με γ^- και $\overset{\frown}{BA}$.

Για τις συναρτήσεις $x(t)$ και $y(t)$ υποθέτουμε πως έχουν παραγώγους $\dot{x}(t)$ και $\dot{y}(t)$ συνεχείς στο διάστημα $\alpha \leqq t \leqq \beta$.

Έστω, δεύτερον, $\sigma(x,y)$ μια συνάρτηση των δυο μεταβλητών x,y ορισμένη τουλάχιστο στο σημειοσύνολο που αποτελούν τα σημεία της γ και συνεχής σ' αυτό το σημειοσύνολο (δηλαδή σε κάθε σημείο του).

Αφού διαμερίσουμε το διάστημα $\alpha \leqq t \leqq \beta$ σε υποδιαστήματα με τους διαμεριστικούς αριθμούς

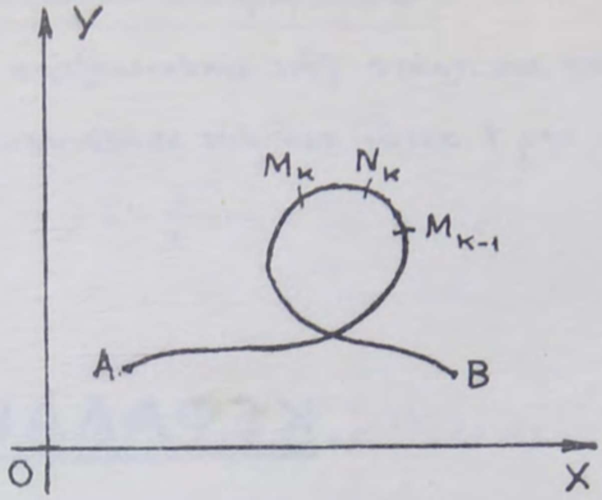
$a=t_0<t_1<t_2\cdots<t_{\nu-1}<t_\nu=\beta$,

θεωρούμε τα αντίστοιχα σημεία:

$M_\kappa\left(x_\kappa=x(t_\kappa),y_\kappa=y(t_\kappa)\right)$ της γ,

για $\kappa=0,1,\ldots,\nu-1,\nu$ και από ένα τυχαίο σημείο

$N_\kappa\left(x'_\kappa=x(t'_\kappa),y'_\kappa=y(t'_\kappa)\right)$ πάνω σε κάθε τόξο $M_{\kappa-1}M_\kappa$.



Μορφώνουμε κατόπιν το άθροισμα

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu}\sigma(x'_\kappa,y'_\kappa)(x_\kappa-x_{\kappa-1})=\sum_{\kappa=1}^{\nu}\sigma(x'_\kappa,y'_\kappa)\dot{x}(t''_\kappa)(t_\kappa-t_{\kappa-1})$$

όπου t''_κ κατάλληλος αριθμός μεταξύ $t_{\kappa-1}$ και t_κ.

Αποδείχνεται εύκολα (με βάση τις θεωρίες του 16ου κεφαλαίου) ότι το άθροισμα αυτό έχει όριο τον ορισμένο αριθμό

$$\int_a^\beta \sigma\left(x(t),y(t)\right)\dot{x}(t)\,dt,$$

όταν το μέγιστο πλάτος των υποδιαστημάτων στα οποία διαμερίσαμε το διάστημα $a\leqq t\leqq\beta$ τείνη στο μηδέν, οπότε φυσικά το πλήθος των ν θα τείνη στο άπειρο.

Ο ορισμένος αυτός αριθμός που εξαρτιέται μόνο από τη γραμμή γ και τη φορά διαγραφής της και όχι από την παράμετρο t που εκλέξαμε για να παραστήσουμε τη γ λέγεται επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $\sigma(x,y)$ ως προς x πάνω στη γραμμή γ^+ (ή κατά μήκος της γ^+) και σημειώνεται ως εξής:

$$\int_{\gamma^+}\sigma(x,y)\,dx \quad \text{ή} \quad \int_{\overset{\frown}{AB}}\sigma(x,y)\,dx.$$

Έχουμε λοιπόν:

$$\int_{\gamma^+} \sigma(x,y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \sigma\big(x(t),y(t)\big)\dot{x}(t)dt.$$

Όμοια ορίζεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $\sigma(x,y)$ ως προς y πάνω στη γ^+. Έχουμε:

$$\int_{\gamma^+} \sigma(x,y)dy = \int_{\overset{\frown}{AB}} \sigma(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} \sigma\big(x(t),y(t)\big)\dot{y}(t)dt.$$

<u>Ιδιότητες</u>: θα τις διατυπώσουμε μόνο για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ως προς x. Αντίστοιχα πράγματα ισχύουν για το επικαμπύλιο ως προς y.

1)
$$\int_{\gamma^+} C\sigma(x,y)dx = C\int_{\gamma^+} \sigma(x,y)dx, \quad C \text{ μια σταθερά.}$$

2)
$$\int_{\gamma^+} \{\sigma(x,y)+\varphi(x,y)\}dx = \int_{\gamma^+} \sigma(x,y)dx + \int_{\gamma^+} \varphi(x,y)dx.$$

3) Η τιμή του $\int_{\gamma^+} \sigma(x,y)dx$ δεν εξαρτιέται από τη χρησιμοποιούμενη αναλυτική παραμετρική παράσταση της γραμμής γ^+.

4)
$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \sigma(x,y)dx = -\int_{\overset{\frown}{BA}} \sigma(x,y)dx.$$

5)
$$\int_{\overset{\frown}{A\Gamma}} \sigma(x,y)dx + \int_{\overset{\frown}{\Gamma B}} \sigma(x,y)dx = \int_{\overset{\frown}{AB}} \sigma(x,y)dx$$

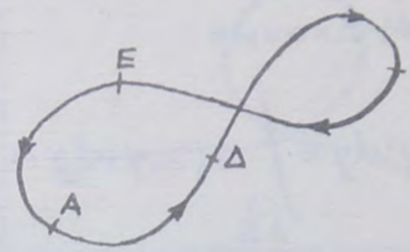
για ένα τυχαίο σημείο Γ της γραμμής γ^+.

6) Αν η γ είναι μια <u>κλειστή γραμμή</u> που προχωρεί, με τη φορά γ^+, από το σημείο Α στο σημείο Γ δια του σημείου Δ και

από το Γ πίσω στο $A \equiv B$ δια του σημείου Ε, τότε

$$\int_{\gamma+} \sigma(x,y)\,dx = \int_{\overrightarrow{A\Delta\Gamma EA}} \sigma(x,y)\,dx = \int_{\overrightarrow{\Gamma EA\Delta\Gamma}} \sigma(x,y)\,dx.$$

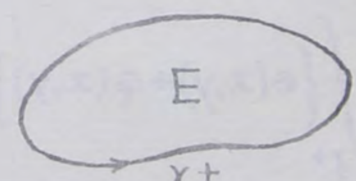
Με άλλα λόγια: Η τιμή του $\int_{\gamma+} \sigma(x,y)dx$ πάνω σε κλειστή γραμμή δεν εξαρτιέται από την αφετηρία Α για τη



διαγραφή της γραμμής, αλλά παραμένει η ίδια όταν αλλάξουμε την αφετηρία διατηρώντας μόνο τη φορά διαγραφής.

Όταν ειδικώς η κλειστή γραμμή δεν έχει πολλαπλό σημείο, οπότε περικλείνει ένα «εσωτερικό» χωρίο Ε, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ως προς x πάνω στη γ, διατρεχμένη κατά τη θετική φορά περιοδεύσεως του περιγράμματος γ του Ε, παριστάνεται και με το συμβολισμό

$$\oint_{\gamma} \sigma(x,y)\,dx,$$



λέγεται δε και περιγραμμικό ολοκλήρωμα της $\sigma(x,y)$ ως προς x για το χωρίο Ε.

§439. Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα διανυσματικής συναρτήσεως. Αν σε κάθε σημείο $M(x,y)$ ενός πεδίου Ω μέσα στο επίπεδο ΧΟΥ αντιστοιχίσουμε με έναν ορισμένο νόμο ένα διάνυσμα $\bar{a}(M)$ το πεδίο Ω ονομάζεται διανυσματικό πεδίο και λέμε ότι πάνω σ' αυτό είναι ορισμένη η διανυσματική συνάρτηση $\bar{a}(x,y)$. Οι συντεταγμένες του διανύσματος $\bar{a}(x,y)$ θα είναι προφανώς δυο συναρτήσεις $P(x,y)$ και $Q(x,y)$ του σημείου $M(x,y)$ ορισμένες στο σημειοσύνολο Ω.

Εντελώς αντίστοιχα ορίζονται τα διανυσματικά πεδία και οι διανυσματικές συναρτήσεις $\bar{a}(x,y,z)$ στο χώρο οπότε οι συντεταγμένες του $\bar{a}(x,y,z)$ θα είναι τρεις συναρτήσεις $P(x,y,z), Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$.

Αν θεωρήσουμε μια γραμμή γ μέσα σ'ένα διανυσματικό πεδίο του επιπέδου OXY, μπορούμε να σχηματίσουμε το

$$\int_{\gamma+} P(x,y)dx + \int_{\gamma+} Q(x,y)dy,$$

το οποίο συμβολίζουμε συντομώτερα με

$$\int_{\gamma+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

και ονομάζουμε <u>επικαμπύλιο</u> ολοκλήρωμα της διανυσματικής συνάρτησης $\bar{a}(x,y)$, πάνω στη γραμμή γ.

Παρατηρούμε ότι τα διαφορικά $dx = x(t)dt$ και $dy = \dot{y}(t)dt$ είναι συντεταγμένες του διανύσματος $\dot{\bar{r}}(t)dt$ (όπου $\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j}$) το οποίο παριστάνουμε με $d\bar{r}(dx,dy)$.

Έτσι το $Pdx + Qdy$ μπορεί να γραφή συντομώτερα ως ένα εσωτερικό γινόμενο: $\bar{a}(x,y)d\bar{r}$.

Γι'αυτό, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $\bar{a}(x,y)$ πάνω στη γ^+ συμβολίζεται συντομώτερα και ως εξής:

$$\int_{\gamma+} \bar{a}d\bar{r} = \int_{\gamma+} Pdx + Qdy = \int_{\gamma+} P(x,y)dx + \int_{\gamma+} Q(x,y)dy.$$

<u>Εφαρμογή</u>. Αν μέσα στο επίπεδο XOY έχουμε μια δύναμη $\bar{F} = P\bar{i} + Q\bar{j}$ που εξαρτιέται από τη θέση (x,y) του σημείου εφαρμογής της, τότε $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ είναι το «στοιχειακό έργο» της δυνάμεως. Το συνολικό έργο της $\bar{F}$, κατά την μετακίνηση του σημείου εφαρμογής της $\bar{F}$ πάνω στη γ από το A προς το B, είναι επομένως:

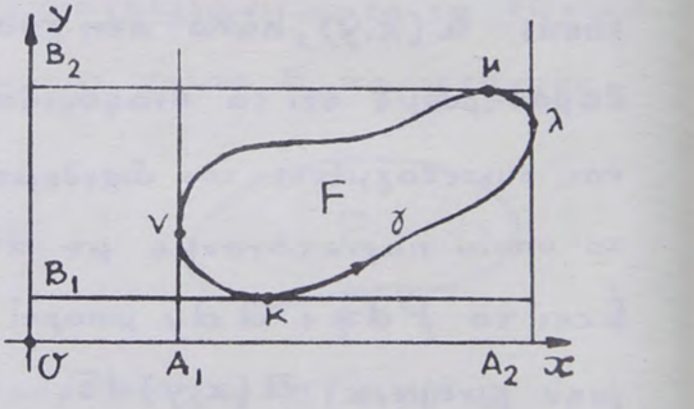
$$\int_{\gamma(\overrightarrow{AB})}\bar{F}d\bar{\tau}=\int_{\gamma(\overrightarrow{AB})}P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy.$$

§ 440. Σχέση των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων προς τα διπλά ολοκληρώματα. Θεώρημα του Gauss στο επίπεδο. Πρόταση:

Έστω γ μια γραμμή κλειστή και απλή (δηλαδή χωρίς πολλαπλό σημείο) και F το χωρίο του επιπέδου που περικλείνεται από την γ. Τότε:

$$\iint_F (Q'_x-P'_y)\,dx\,dy=\oint_\gamma P\,dx+Q\,dy, \tag{440.1}$$

όπου το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα λαμβάνεται κατά τη θετική φορά διαγραφής της γ.



Απόδειξη. Υποθέτουμε για τη γραμμή γ ότι οι παράλληλες, προς τους άξονες των συντεταγμένων την τέμνουν σε δυο σημεία το πολύ, ας είναι δε $y=a_1(x)$, $y=a_2(x)$, $x=\beta_1(y)$, $x=B_2(y)$ οι αναλυτικές παραστάσεις των τόξων νκλ, λμν, μνκ και κλμ αντιστοίχως (Βλ. το σχήμα).

Τότε:

$$\iint_F (Q'_x-P'_y)\,dx\,dy=\int_{B_1}^{B_2}dy\int_{\beta_1(y)}^{\beta_2(y)}Q'_x\,dx-\int_{A_1}^{A_2}dx\int_{a_1(x)}^{a_2(x)}P'_y\,dy=$$

$$=\int_{B_1}^{B_2}\left\{Q(\beta_2(y),y)-Q(\beta_1(y),y)\right\}dy-\int_{A_1}^{A_2}\left\{P(x,a_2(x))-P(x,a_1(x))\right\}dx$$

$$= \int_{B_1}^{B_2} Q\left(\beta_2(y),y\right)dy + \int_{B_2}^{B_1} Q\left(\beta_1(y),y\right)dy + \int_{A_1}^{A_2} P\left(x,a_1(x)\right)dx + \int_{A_2}^{A_1} P\left(x,a_2(x)\right)dx$$

$$= \int_{\overset{\frown}{\kappa\lambda\mu}} Q(x,y)dy + \int_{\overset{\frown}{\mu\nu\kappa}} Q(x,y)dy + \int_{\overset{\frown}{\nu\kappa\lambda}} P(x,y)dx + \int_{\overset{\frown}{\lambda\mu\nu}} P(x,y)dx$$

$$= \oint_{\gamma+} Pdx + Qdy. \quad \text{ο.ε.δ.}$$

<u>Εφαρμογη</u>. Αν θέσουμε $Q(x,y)=x$ και $P(x,y)=-y$ ο τύπος (440.1) δίνει :

$$\iint_F 2dxdy = \oint_{\gamma+} xdy - ydx.$$

Επομένως το εμβαδό E του χωρίου F είναι

$$E = \iint dxdy = \frac{1}{2}\oint_{\gamma+} xdy - ydx.$$

§441. <u>Δυναμικό</u>. Αν μέσα σ'ένα χωρίο $\mathcal{O}$ είναι:

$$P(xy) = \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x} \quad \text{και} \quad Q(x,y) = \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y}, \quad \text{τότε}$$

$$\int_{\gamma(\overset{\frown}{AB})} Pdx + Qdy = \int_{t_A}^{t_B} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\dot{y} \right\} dt = \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt}\Phi\left(x(t),y(t)\right)dt$$

$$= \Phi(x_B, y_B) - \Phi(x_A, y_A),$$

δηλαδή το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα έχει την ίδια τιμή για όλους τους δρόμους ολοκλήρωσης που κείνται μέσα στο χωρίο $\mathcal{O}$ και έχουν την ίδια αρχή Α και το ίδιο τέλος Β.

Αντιστρόφως: Αν μέσα σ'ένα συνεκτικό χωρίο $\mathcal{A}$ το $\int_{\overrightarrow{AB}} Pdx+Qdy$ έχει τιμή ανεξάρτητη από το δρόμο όταν διατηρούνται αναλλοίωτα η αρχή Α και το τέλος Β του δρόμου, τότε υπάρχει κάποια συνάρτηση $\Phi(x,y)$, τέτοια ώστε:

$$P(x,y)=\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x}, \quad Q(x,y)=\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial y}.$$

Πράγματι, αν το σταθερό σημείο $M_0(x_0,y_0)$ και το μεταβλητό $M(x,y)$ κείνται μέσα στο $\mathcal{A}$ το $\int_{\overrightarrow{M_0M}} Pdx+Qdy$ θα εξαρτιέται μόνο από το σημείο $M(x,y)$ και όχι από τον δρόμο που συνδέει το M_0 με το M. Το ολοκλήρωμα είναι επομένως μια συνάρτηση $\Phi(x,y)$:

$$\Phi(x,y)=\int_{\overrightarrow{M_0M}} Pdx+Qdy.$$

Αλλά αν θεωρήσουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{MM'}$ που συνδέει τα σημεία $M(x,y)$ και $M'(x+h,y)$ καθώς και το διάνυσμα $\overrightarrow{MM''}$ από $M(x,y)$ ως $M''(x,y+k)$, θα έχουμε:

$$\frac{\Phi(x+h,y)-\Phi(x,y)}{h}=\frac{1}{h}\int_{\overrightarrow{MM'}} Pdx+Qdy=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} P(x,y)dx$$

$$=P(x+\theta_1 h,y), \quad (\text{με } 0<\theta_1<1),$$

$$\frac{\Phi(x,y+k)-\Phi(x,y)}{k}=\frac{1}{k}\int_{\overrightarrow{MM''}} Pdx+Qdy=\frac{1}{k}\int_y^{y+k} Q(x,y)dy$$

$$=Q(x,y+\theta_2 k), \quad (\text{με } 0<\theta_2<1).$$

Άρα αφού οι συναρτήσεις P και Q υποτέθηκαν συνεχείς,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\lim_{h\to 0} P(x+\theta_1 h,y)=P(x,y)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \lim_{k \to 0} Q(x, y+\theta_2 k) = Q(x,y).$$

Αν οι συναρτήσεις $P(x,y)$ και $Q(x,y)$ θεωρηθούν συντεταγμένες μιας διανυσματικής συναρτήσεως $\bar{a}(x,y)$, η συνάρτηση $\Phi(x,y)$ λέγεται <u>δυναμικό</u> της διανυσματικής συναρτήσεως $\bar{a}(x,y)$.

Αναγκαία συνθήκη για να μην εξαρτιέται το $\int_{\gamma+} Pdx + Qdy$ από το δρόμο ολοκληρώσεως $\gamma+$ άλλα μόνο από την αρχή και από το τέλος του, είναι η εξής:

(441.1) $\qquad P'_y(x,y) \equiv Q'_x(x,y)$, για τα σημεία του συνεκτικού χωρίου $\mathcal{A}$,

με την προϋπόθεση φυσικά ότι υπάρχουν οι παράγωγοι P'_y, Q_x και είναι συνεχείς συναρτήσεις μέσα στο $\mathcal{A}$.

Πράγματι, σύμφωνα με όσα είπαμε, υπάρχει ένα δυναμικό $\Phi(x,y)$ και έχουμε μέσα στο $\mathcal{A}$

$$P(x,y) = \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x}, \quad Q(x,y) = \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y}.$$

Άρα

$$P'_y(x,y) = \frac{\partial^2 \Phi(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Phi(x,y)}{\partial y \partial x} = Q'_x(x,y), \text{ ο. ε. δ.}$$

Η συνθήκη (441.1) είναι και ικανή εφόσον το χωρίο $\mathcal{A}$ υποτεθή "απλής συνοχής" (Το τελευταίο σημαίνει πως ανήκει στο $\mathcal{A}$ το <u>εσωτερικό κάθε</u> απλής κλειστής γραμμής που τα σημεία της είναι σημεία του $\mathcal{A}$).

Πράγματι το θεώρημα του Gauss μας λέει ότι

$$\oint_{\gamma+} Pdx + Qdy = \iint_F (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy = 0$$

για <u>κάθε</u> απλή κλειστή γραμμή γ μέσα στο χωρίο $\mathcal{A}$. Από εδώ έπεται εύκολα ότι η τιμή του $\int_{\overrightarrow{M_1M_2}} Pdx + Qdy$ εξαρτιέται μόνον από το πρώτο και από το δεύτερο άκρο του δρόμου $\overrightarrow{M_1M_2}$ ολοκληρώσεως.

<u>Σταθμικές γραμμές.</u> Όταν υπάρχη δυναμικό $\Phi(x,y) = \int_{\overrightarrow{M_0M}} Pdx + Qdy$, ονομάζονται σταθμικές γραμμές οι γραμμές με εξίσωση $\Phi(x,y) = C$, όπου C αυθαίρετη σταθερά. Το διάνυσμα

$$\big(P(x,y)\ Q(x,y)\big) = \left(\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y} \right)$$ είναι κάθετο πάνω στη σταθμική γραμμή που περνά από το σημείο (x,y).

§ 442. Όπως ορίσαμε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα στο επίπεδο, ορίζονται και τα επικαμπύλια ολοκληρώματα στο χώρο.

Αν $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ είναι μια συνεχής γραμμή γ με εφαπτομένη που η διεύθυνση της μεταβάλλεται χωρίς ασυνέχειες, και αν $\sigma(x,y,z)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη πάνω στη γ, μπορούμε να ορίσουμε τα 3 επικαμπύλια ολοκληρώματα

$$\int_{\gamma^+} \sigma(x,y,z)\,dx, \quad \int_{\gamma^+} \sigma(x,y,z)\,dy, \quad \int_{\gamma^+} \sigma(x,y,z)\,dz.$$

Έτσι π.χ. ορίζουμε:

$$\int_{\gamma^+} \sigma(x,y,z)\,dz = \int_{\overrightarrow{AB}} \sigma(x,y,z)\,dz = \int_{t_A}^{t_B} \sigma\big(x(t), y(t), z(t)\big)\,\dot{z}(t)\,dt.$$

Αντίστοιχα ορίζεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της διανυσματικής συναρτήσεως $\bar{a}(x,y,z) = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$:

$$\int_{\gamma^+} \bar{a}\,d\bar{r} = \int_{\gamma^+} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\gamma^+} P(x,y,z)\,dx + \int_{\gamma^+} Q(x,y,z)\,dy + \int_{\gamma^+} R(x,y,z)\,dz.$$

Το ολοκλήρωμα αυτό ονομάζεται και <u>κυκλοφορία</u> του διανύσματος $\vec{a}(x,y,z)$ κατά μήκος της καμπύλης $\gamma^+ = \widehat{AB}$.

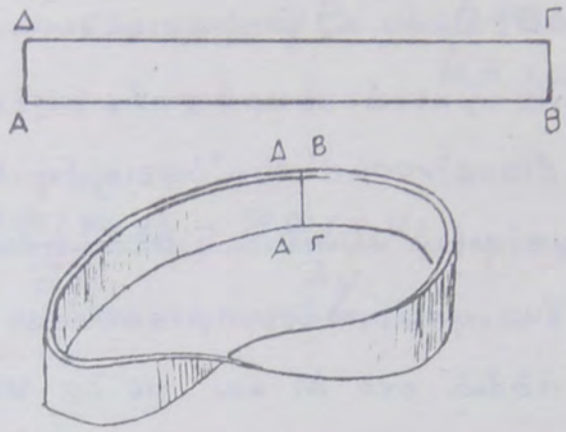
§443. Έστω S μια επιφάνεια στο χώρο και M ένα σημείο της. Σ' ένα αρκετά μικρό κομμάτι της S γύρω στο M μπορούμε πάντα να διακρίνουμε δυο "όψεις" (ή πλευρές). Αρκεί γι' αυτό να θεωρήσουμε μιαν ευθεία EME' που διαπερνά το κομμάτι στο M και τις δυο αντίρροπες ημιευθείες $\overrightarrow{ME}$ και $\overrightarrow{ME'}$. Ένας παρατηρητής με τα πόδια στο M και με το κεφάλι προς το E βλέπει τότε την μιαν όψη του κομματιού, ένας παρατηρητής με τα πόδια στο M και με το κεφάλι προς το E' βλέπει την άλλη όψη του κομματιού.

Σε μια συνηθισμένη επιφάνεια (π.χ. σε μια σφαιρική ζώνη) δεν είναι δυνατό να μεταβούμε από τη μια όψη ενός κομματιού της στην άλλη κινούμενοι πάνω στην επιφάνεια με συνέχεια χωρίς μήτε να συναντήσουμε το πέρας της επιφάνειας μήτε να την διατρυπήσουμε. Έτσι μπορούμε να διακρίνουμε δυο όψεις (ή πλευρές) και για <u>ολόκληρη</u> την θεωρούμενη επιφάνεια. Από τις δυο όψεις κάθε κομματιού της η μια αποτελεί μέρος της μιας όψης της όλης επιφάνειας, (υπάγεται στη μιαν όψη της όλης επιφάνειας), η άλλη υπάγεται στην άλλη όψη της όλης επιφάνειας.

Μια επιφάνεια για την οποία αληθεύουν τα παραπάνω λέγεται δίπλευρη (ή <u>προσανατολίσιμη</u>). Με τέτοιες μόνο επιφάνειες θα ασχοληθούμε παρακάτω. Πρέπει όμως να τονίσουμε εδώ ότι υπάρχουν και επιφάνειες "μονόπλευρες" π.χ. η λεγόμενη ταινία του Möbius, που μπορούμε να πραγματοποιήσουμε υλικά ως εξής:

Παίρνουμε μια στενόμακρη ορθογωνιακή λωρίδα ΑΒΓΔ από χαρτί και με κατάλληλη συστροφή και κάμψη της φέρνουμε σε σύμπτωση το σημείο Β με το Δ και το τμήμα ΒΓ με το τμήμα ΔΑ.

Στην προκύπτουσα επιφάνεια μια αρκετά μικρή γειτονιά ενός τυχαίου σημείου της έχει εννοείται δυο όψεις, είναι όμως δυνατό από την μια όψη της γειτονιάς αυτής να μεταβούμε στην άλλη κινούμενοι πάνω στην επιφάνεια με συνέχεια και χωρίς μήτε να διατρυπήσουμε την επιφάνεια μήτε να συναντήσουμε το πέρας της.



Σε μια δίπλευρη επιφάνεια S, που έχει επιπλέον και εφαπτόμενο επίπεδο σ' όλα τα σημεία της, μπορούμε να πραγματοποιήσουμε τα εξής: να εκλέξουμε μιαν από τις δυο όψεις της και να ορίσουμε τη θετική φορά της καθέτου της επιφάνειας στο κάθε σημείο της M έτσι που ένας παρατηρητής ο οποίος έχει τα πόδια στο M και το κεφάλι κατά τη θετική φορά της καθέτου να βλέπη πάντοτε εκείνη την όψη της γειτονιάς του M που υπάγεται στην εκλεγμένη όψη της S.

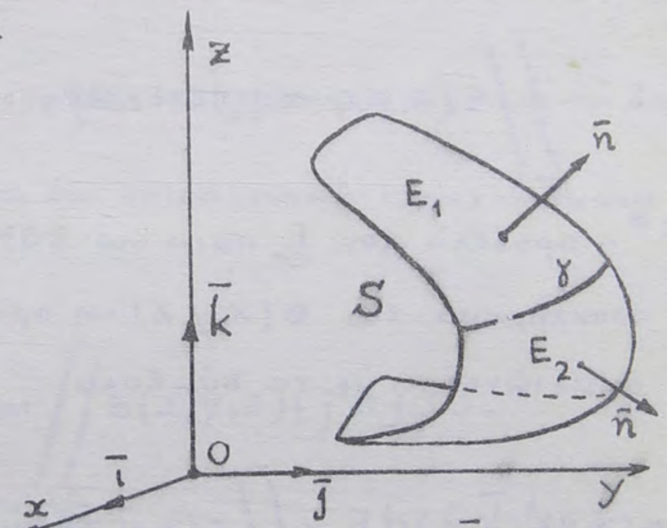
Τη θετική αυτή φορά της καθέτου στο M θα την παριστάνουμε με ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\bar{n}(M)$ (normale = κάθετος). Μπορούμε τώρα να ορίσουμε πάνω στην επιφάνεια και μια θετική φορά περιστροφής γύρω στο τυχαίο σημείο της M: είναι η φορά περιστροφής από τα δεξιά προς τ' αριστερά ενός παρατηρητού ο οποίος έχει τα πόδια στο M και το κεφάλι κατά τη θετική φορά της καθέτου. Επιφάνειες S όπου έχουν οριστή τα παραπάνω θα τις λέμε <u>προσανατολισμένες</u> και θα τις παριστάνουμε με $\underset{\sim}{S}$.

§444. <u>Επιφανειακά ολοκληρώματα.</u> Έστω $\underset{\sim}{S}$ μια επιφάνεια προσανατολισμένη με το κάθετο διάνυσμα $\bar{n}(M)=\bar{n}(x,y,z)$

στο κάθε σημείο της $M(x,y,z)$. Υποθέτουμε ότι το $\bar{n}(x,y,z)$ είναι συνεχής συνάρτηση του σημείου M, δηλαδή των x,y,z. Επί πλέον υποθέτουμε ότι η S μπορεί να διαιρεθή σ'ένα πεπερασμένο πλήθος συνεχτικών (= μονοκόμματων) τμημάτων έτσι που το συνημίτονο $\text{συν}(\widehat{\bar{k}\,\bar{n}}) = \bar{k}\,\bar{n}$ της γωνίας της θετικής φοράς της καθέτου με τη θετική φορά του άξονα OZ να μην αλλάζη πρόσημο πάνω στο καθένα χωριστά από τα τμήματα αυτά.

Επομένως τα τμήματα αυτά, αν είναι περισσότερα από ένα, θα χωρίζωνται το ένα από το άλλο με γραμμές γ της επιφάνειας S πάνω στις οποίες $\bar{k}\cdot\bar{n} = 0$.

Από την παραπάνω ιδιότητα έπεται ότι το κάθε τμήμα προβάλλεται αμφιμονοσήμαντα πάνω στο επίπεδο XOY και ότι επομένως έχει



E_1 τμήμα με $\bar{k}\bar{n} \geqq 0$

E_2 τμήμα με $\bar{k}\bar{n} \leqq 0$.

αναλυτική παράσταση της μορφής $z = \varphi(x,y)$, όπου $\varphi(x,y)$ μονοσήμαντη συνάρτηση των x,y.

Έστω τώρα $\sigma(x,y,z) = \sigma(M)$ μια συνάρτηση μονοσήμαντα ορισμένη τουλάχιστο στο σημειοσύνολο που αποτελούν τα σημεία της επιφάνειας S και συνεχής σ'αυτό και E ένα από τα τμήματα στα οποία διαιρέσαμε παραπάνω την S. Ας είναι $z = \varphi(x,y)$ η αναλυτική παράσταση του E. Διαμερίζουμε το E σε ν μέρη $F_1, F_2, \ldots, F_\nu$ των οποίων οι προβολές $F_1^z, \ldots, F_\nu^z$ πάνω στο επίπεδο XOY ας έχουν αντιστοίχως εμβαδά $f_1^z, f_2^z, \ldots, f_\nu^z$. Ο αριθμός

$\varepsilon = \dfrac{\bar{k}\,\bar{n}}{|\bar{k}\,\bar{n}|} = \text{sign}(\bar{k}\bar{n})$ θα έχη ή την τιμή $+1$ σε κάθε μη ακραίο σημείο του $\underset{\curvearrowright}{E}$ ή την τιμή -1.

Μορφώνουμε το άθροισμα

$$\sum_{\rho=1}^{\nu} \sigma(M_\rho)\,\varepsilon f_\rho^z = \sum_{\rho=1}^{\nu} \sigma(x_\rho, y_\rho, z_\rho)\,\varepsilon f_\rho^z ,$$

όπου M_ρ ένα τυχαίο σημείο του μέρους F_ρ του θεωρουμένου διαμερισμού του $\underset{\curvearrowright}{E}$.

Όταν το μέγιστο διαμέτρημα των μερών του διαμερισμού αυτού τείνη στο μηδέν, τότε το άθροισμα αυτό έχει όριο τον ορισμένο αριθμό

$$\iint_{F^z} \sigma(x,y,\varphi(x,y))\,\varepsilon\, dx\,dy ,$$

όπου F^z η προβολή του $\underset{\curvearrowright}{E}$ πάνω στο XOY. Το όριο αυτό λέγεται επιφανειακό ολοκλήρωμα της $\sigma(x,y,z)$ ως προς x,y πάνω στην επιφάνεια $\underset{\curvearrowright}{E}$ και σημειώνεται με το σύμβολο

$$\iint_{\underset{\curvearrowright}{E}} \sigma(x,y,z)\,(\widehat{\bar{k}\bar{n}})\,dE = \iint_{\underset{\curvearrowright}{E}} \sigma(x,y,z)\ \text{συν}\,(\widehat{\bar{k}\bar{n}})\,dE ,$$

επειδή το προσημασμένο εμβαδό εf_ρ^z της προβολής F_ρ^z του μέρους F_ρ ισούται με το εμβαδό του F_ρ πολλαπλασιασμένο με το συνημίτονο $(\widehat{\bar{k}\bar{n}})$ της γωνίας που σχηματίζει το κάθετο διάνυσμα $\bar{n}$ του F_ρ (σ' ένα κατάλληλο σημείο του) με τον θετικό ημιάξονα $\overrightarrow{OZ}$.

Το επιφανειακό ολοκλήρωμα της $\sigma(x,y,z)$ ως προς x,y πάνω σ' ολόκληρη την (προσανατολισμένη) επιφάνεια $\underset{\curvearrowright}{S}$ ορίζεται ίσο με το (αλγεβρικό) άθροισμα των επιφανειακών ολοκληρωμάτων

$\iint_{\underset{\curvearrowright}{E}} \sigma(x,y,z)(\widehat{\bar{k}\bar{n}})\,dE$ πάνω στα διάφορα τμήματα του $\underset{\curvearrowright}{E}$ στα οποία διαιρέσαμε την $\underset{\curvearrowright}{S}$ και παριστάνεται με το σύμβολο $\iint_{\underset{\curvearrowright}{S}} \sigma(x,y,z)(\widehat{\bar{k}\bar{n}})\,dS$.

Άρα

$$\iint\limits_{\underset{\curvearrowright}{S}} \sigma(x,y,z)(\bar{k}\bar{n})dS = \sum \iint\limits_{\underset{\curvearrowright}{E}} \sigma(x,y,z)(\bar{k}\bar{n})dE,$$

όπου η άθροιση $\sum$ αναφέρεται στα πεπερασμένου πλήθους τμήματα E, με σταθερό εκάστοτε το πρόσημο του $\bar{k}\bar{n}$, στα οποία διαιρέθηκε η επιφάνεια S. Είναι ευνόητο ότι η τιμή του επιφανειακού αυτού ολοκληρώματος $\iint\limits_{\underset{\curvearrowright}{S}}$ δεν εξαρτιέται από τη χρησιμοποιούμενη διαίρεση της $\underset{\curvearrowright}{S}$ σε τμήματα (δηλαδή δεν μεταβάλλεται όταν αλλάξουμε τη διαίρεση).

Καθ' όμοιο τρόπο ορίζονται και τα επιφανειακά ολοκληρώματα ως προς y,z και z,x:

$$\iint\limits_{\underset{\curvearrowright}{S}} \sigma(x,y,z)(\bar{\imath}\bar{n})dS \quad \text{και} \quad \iint\limits_{\underset{\curvearrowright}{S}} \sigma(x,y,z)(\bar{\jmath}\bar{n})dS.$$

Όπως φαίνεται από τα παραπάνω, ο υπολογισμός των επιφανειακών ολοκληρωμάτων μπορεί να αναχθεί σε υπολογισμό συνήθων διπλών ολοκληρωμάτων.

§ 445. Επιφανειακό ολοκλήρωμα διανυσματικής συναρτήσεως.

Αν θεωρήσουμε μιαν προσανατολισμένη επιφάνεια $\underset{\curvearrowright}{S}$ μέσα σ' ένα διανυσματικό πεδίο $\bar{a}(P,Q,R)$ του χώρου, μπορούμε να σχηματίσουμε το:

$$\iint\limits_{\underset{\curvearrowright}{S}} P(x,y,z)(\bar{\imath}\bar{n})dS + \iint\limits_{\underset{\curvearrowright}{S}} Q(x,y,z)(\bar{\jmath}\bar{n})dS + \iint\limits_{\underset{\curvearrowright}{S}} R(x,y,z)(\bar{k}\bar{n})dS$$

το οποίο συμβολίζουμε συντομώτερα με

$$\iint\limits_{\underset{\frown}{S}} \left\{ P(x,y,z)(\bar{i}\bar{n}) + Q(x,y,z)(\bar{j}\bar{n}) + R(x,y,z)(\bar{k}\bar{n}) \right\} dS$$

$$= \iint\limits_{\underset{\frown}{S}} \bar{a}(x,y,z) \cdot \bar{n}(x,y,z)\, dS,$$

και το οποίο ονομάζουμε επιφανειακό ολοκλήρωμα της διανυσματικής συναρτήσεως $\bar{a}(x,y,z)$ πάνω στην επιφάνεια $\underset{\frown}{S}$.
Μερικοί συγγραφείς γράφουν, αντί $\bar{n}(x,y,z)\,dS$, $d\bar{S}$ θεωρούντες αυτό σαν ένα απειροστό διάνυσμα ομόρροπο προς $\bar{n}(x,y,z)$ με μέτρο dS. Τότε το τελευταίο σύμβολο για το επιφανειακό ολοκλήρωμα γράφεται ακόμη συντομώτερα ως εξής: $\iint\limits_{\underset{\frown}{S}} \bar{a}\, d\bar{S}$.

§ 446. Σχέση των επιφανειακών ολοκληρωμάτων προς τα τριπλά ολοκληρώματα. Θεώρημα του Gauss.

Μια απλή κλειστή επιφάνεια τη θεωρούμε συνήθως προσανατολισμένη έτσι που το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\bar{n}$ να δείχνη προς το εξωτερικό της επιφάνειας· θα την παριστάνουμε τότε με $\underset{\frown}{S}$ εξ.
Θα δείξουμε την πρόταση:

Πρόταση: « Αν το τριδιάστατο χωρίο T περιορίζεται από την επιφάνεια S, τότε:

$$(446.1) \qquad \iiint\limits_{T} \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\, dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\underset{\frown}{S}\,\text{εξ.}} P(x,y,z)(\bar{k}\bar{n})\, dS.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε (ανάγοντας ύστερα τη γενικότερη περίπτωση στην ειδικότερη που θα θεωρήσουμε) ότι η επιφάνεια S τέμνεται από τις ευθείες τις παράλληλες προς τον άξονα OZ σε δυο το πολύ.

σημεία και ας είναι $z=\varphi_1(x,y)$ και $z=\varphi_2(x,y)$ οι εξισώσεις του κάτω τμήματος της S_1 και του άνω τμήματος της S_2 αντιστοίχως. Τότε, αν καλέσουμε S^z το χωρίο στο οποίο προβάλλεται η επιφάνεια S πάνω στο επίπεδο XOY, θα είναι:

$$\iiint_T \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\,dx\,dy\,dz=\iint_{S^z}dx\,dy\int_{z=\varphi_1(x,y)}^{z=\varphi_2(x,y)}\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\,dz$$

$$=\iint_{S^z}dx\,dy\left\{P(x,y,\varphi_2(x,y))-P(x,y,\varphi_1(x,y))\right\}$$

$$=\iint_{\underset{\curvearrowright}{S_2}\,\varepsilon\xi.}P(x,y,z)(\bar{k}\bar{n})\,dS+\iint_{\underset{\curvearrowright}{S_1}\,\varepsilon\xi}P(x,y,z)(\bar{k}\bar{n})\,dS$$

$$=\iint_{\underset{\curvearrowright}{S}\,\varepsilon\xi}P(x,y,z)(\bar{k}\bar{n})\,dS.$$

Από την παραπάνω πρόταση έπεται εύκολα ότι, αν το χωρίο T κείται μέσα σ' ένα διανυσματικό πεδίο $\bar{a}(P,Q,R)$, τότε

$$(446.2)\qquad \iiint_T\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=\iint_{\underset{\curvearrowright}{S}\,\varepsilon\xi}\bar{a}(x,y,z)\bar{n}(x,y,z)\,dS.$$

Η συνάρτηση $\dfrac{\partial P(x,y,z)}{\partial x}+\dfrac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y}+\dfrac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}$ λέγεται <u>απόκλιση</u> του διανυσματικού πεδίου $\bar{a}(x,y,z)$ στο σημείο $M(x,y,z)$ και παριστάνεται με $\operatorname{div}\bar{a}$, (divergence = απόκλιση). Η σχέση (446.2) μπορεί επομένως να γραφή:

$$\iiint_T \operatorname{div}\bar{a}\,dx\,dy\,dz=\iint_{\underset{\curvearrowright}{S}\,\varepsilon\xi.}\bar{a}\,d\bar{S}.$$

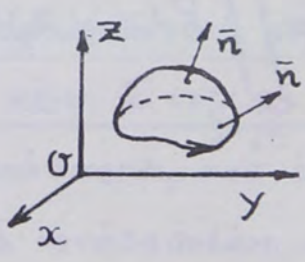
§ 447. Σχέσεις επιφανειακών και επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων. Τύπος του Stokes.

Πρόταση. Αν $P(x,y,z)$ είναι μια συνάρτηση με συνεχείς πρώτες παραγώγους ως προς y και z, ορισμένη πάνω σε μια προσανατολισμένη επιφάνεια $\underset{\frown}{S}$ που περιορίζεται από μια καμπύλη γ με συνεχή εφαπτομένη, τότε:

$$(447.1)\qquad \iint\limits_{\underset{\frown}{S}} \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}(\bar{j}\,\bar{n})dS - \iint\limits_{\underset{\frown}{S}} \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}(\bar{k}\bar{n})dS$$

$$= \oint_{\gamma} P(x,y,z)dx,$$

όπου το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω στη γ λαμβάνεται κατά τη θετική φορά που ορίζει ο προσανατολισμός της $\underset{\frown}{S}$ (δηλαδή κατά τη φορά η οποία μαζί με τη κάθετο $\bar{n}$ σ'ένα γειτονικό σημείο της $\underset{\frown}{S}$ αποτελεί ένα δεξιόστροφο σύστημα).



Απόδειξη. Υποθέτουμε (ανάγοντας ύστερα τη γενικότερη περίπτωση στην ειδικότερη που θα θεωρήσουμε) ότι πάνω στην επιφάνεια $\underset{\frown}{S}$ το $\varepsilon = \frac{\bar{k}\bar{n}}{|\bar{k}\bar{n}|}$ δεν αλλάζει πρόσημο, οπότε, αν $z=\varphi(x,y)$ η εξίσωση της S, η συνάρτηση $\varphi(x,y)$ θα είναι μονοσήμαντη. Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $(-\varphi'_x, -\varphi'_y, 1)$ είναι παράλληλο προς το $\bar{n}$, άρα,

$$(447.2)\qquad -\frac{\varphi'_x}{\bar{i}\bar{n}} = -\frac{\varphi'_y}{\bar{j}\bar{n}} = \frac{1}{\bar{k}\bar{n}} \quad \text{και} \quad (\bar{j}\bar{n}) = -\varphi'_y\cdot(\bar{k}.\bar{n}).$$

Από την έννοια του επιφανειακού ολοκληρώματος έπεται ότι αν διαιρέσουμε την επιφάνεια S σε ν κομμάτια με εμβαδά $S_1, S_2, \ldots, S_\rho, \ldots, S_\nu$, που να έχουν μέγιστο διαμέτρημα δ, και αν πάρουμε ένα σημείο M_ρ πάνω σε κάθε κομμάτι, τότε:

$$I=\iint\limits_{S}\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}(\bar{j}\bar{n})\,dS-\iint\limits_{S}\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}(\bar{k}\bar{n})\,dS$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\sum_{\rho=1}^{\nu}\left\{\frac{\partial P(M_\rho)}{\partial z}(\bar{j}\cdot\bar{n}(M_\rho))-\frac{\partial P(M_\rho)}{\partial y}(\bar{k}\cdot\bar{n}(M_\rho))\right\}S_\rho$$

Άρα, λόγω της (447.2), είναι:

$$I=-\lim_{\delta\to 0}\sum_{\rho=1}^{\nu}\left\{\frac{\partial P(M_\rho)}{\partial z}\varphi'_y(M_\rho)+\frac{\partial P(M_\rho)}{\partial y}\right\}(\bar{k}\cdot\bar{n}(M_\rho))S_\rho$$

$$=-\iint\limits_{S}\frac{\partial P(x,y,\varphi(x,y))}{\partial y}(\bar{k}\bar{n})\,dS=-\varepsilon\iint\limits_{S^z}\frac{\partial P(x,y,\varphi(x,y))}{\partial y}\,dx\,dy,$$

όπου S^z είναι το χωρίο στο οποίο προβάλλεται η S πάνω στο επίπεδο ΧΟΥ και $\varepsilon=\dfrac{\bar{k}\bar{n}}{|\bar{k}\bar{n}|}$.

Από το θεώρημα όμως του Gauss στο επίπεδο (βλέπε §440 όπου ο αντίστοιχος τύπος πρέπει να χρησιμοποιηθή με $Q(x,y)\equiv 0$) έπεται ότι:

$$\iint\limits_{S^z}-\frac{\partial P(x,y,\varphi(x,y))}{\partial y}\,dx\,dy=\oint_{\gamma^z}P(x,y,\varphi(x,y))\,dx,$$

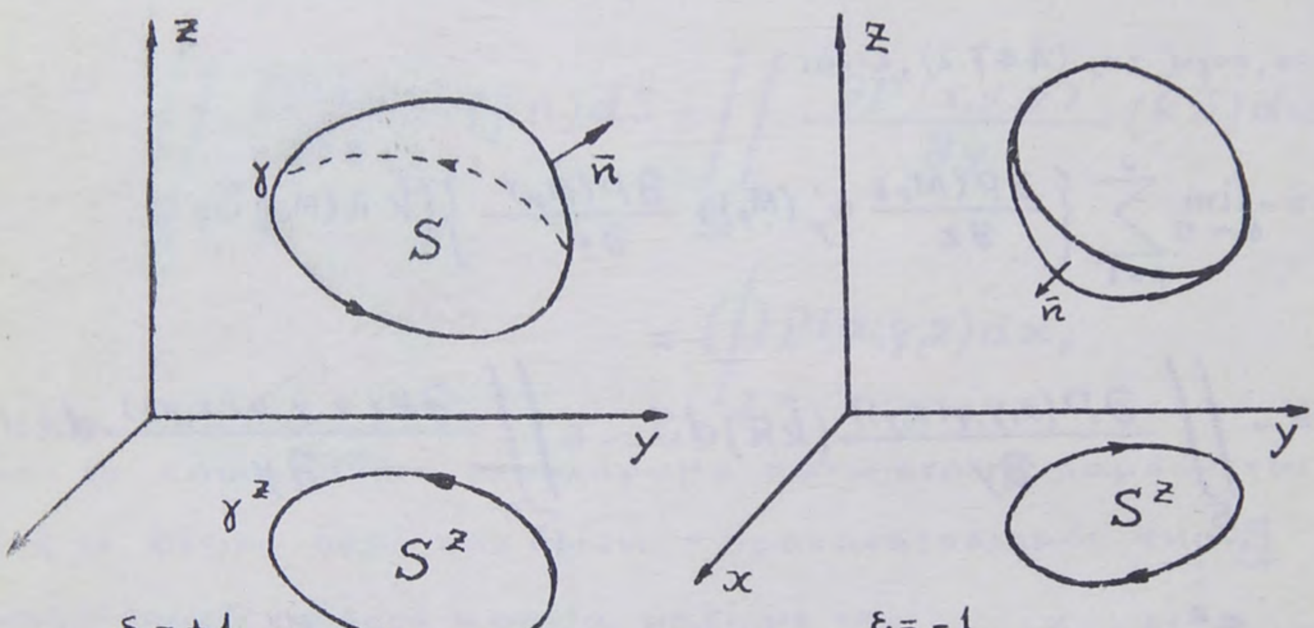
όπου γ^z είναι το περίγραμμα του χωρίου S^z.

Άρα:

$$I=\varepsilon\oint_{\gamma^z}P(x,y,\varphi(x,y))\,dx=\oint_{\gamma}P(x,y,z)\,dx.$$

Η τελευταία σχέση προκύπτει από το ότι 1ο γ^z είναι η προβολή της γ πάνω στο ΧΟΥ και 2ο όταν η γ διαγράφεται κατά τη θετική φορά, που αναφέρει η πρόταση, η γ^z διαγράφεται κατά τη θετική φορά περιστροφής μέσα στο επίπεδο XOY στην περίπτωση όπου $\varepsilon = 1$ και κατά την αρνητική φορά όταν $\varepsilon = -1$.

Από την παραπάνω πρόταση έπεται εύκολα ότι, αν η επιφάνεια S κείται μέσα σε ένα διανυσματικό πεδίο $\bar{a}(P,Q,R)$, τότε:



447.3) $$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)(\bar{i}\bar{n})dS + \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)(\bar{j}\bar{n})dS +$$

$$+ \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(\bar{k}\bar{n})dS = \oint_\gamma P dx + Q dy + R dz.$$

Η διανυσματική συνάρτηση του σημείου $M(x,y,z)$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{k},$$

η οποία συμβολίζεται με $\mathrm{rot}\,\bar{a}$, (rotationnel = περιστροφή), λέγεται περιστροφή της διανυσματικής συναρτήσεως $\bar{a}(x,y,z)$ στο σημείο $M(x,y,z)$.

Ο τύπος (447.3) μπορεί λοιπόν να γραφή έτσι:

$$\iint_S (\mathrm{rot}\,\bar{a})\cdot d\bar{S} = \oint_\gamma \bar{a}\,d\bar{r}$$

και λέγεται τύπος του STOKES.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 30

Διανυσματική Ανάλυση

§448. Το βαθμωτό πεδίο και η κλίση του (gradient).

Όταν σε κάθε σημείο $M(x,y,z)$ ενός πεδίου Π του χώρου αντιστοιχίσουμε κατά ένα ορισμένο νόμο την τιμή $\Phi(M)$ ενός βαθμωτού μεγέθους, το πεδίο Π ονομάζεται βαθμωτό πεδίο και η συνάρτηση $\Phi(M)=\Phi(x,y,z)$ βαθμωτή συνάρτηση, ορισμένη στο Π.

Οι επιφάνειες $\Phi(x,y,z)=C=$ σταθερά λέγονται σταθμικές επιφάνειες της βαθμωτής συναρτήσεως $\Phi(x,y,z)$.

Ας είναι $M(x,y,z)$ και $M'(x',y',z')$ δυο γειτονικά σημεία μέσα στο πεδίο Π και το διάνυσμα $\overline{MM'}$ ας έχη μήκος l και κατεύθυνση $\bar{S}$ η οποία σχηματίζει τις (στοιχειακές) γωνίες α,β,γ με τους θετικούς ημιάξονες $\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY},\overrightarrow{OZ}$.

Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής §394,

$$\Phi(M')-\Phi(M)=\Phi(x',y',z')-\Phi(x,y,z)=$$
$$=\Phi(x+l\,\text{συν}\alpha,\ y+l\,\text{συν}\beta,\ z+l\,\text{συν}\gamma)-\Phi(x,y,z)$$
$$=l\,\text{συν}\alpha\,\frac{\partial\Phi(M_\theta)}{\partial x}+l\,\text{συν}\beta\,\frac{\partial\Phi(M_\theta)}{\partial y}+l\,\text{συν}\gamma\,\frac{\partial\Phi(M_\theta)}{\partial z},$$

όπου $M_\theta(x+\theta l\,\text{συν}\alpha,\ y+\theta l\,\text{συν}\beta,\ z+\theta l\,\text{συν}\gamma)$ και θ κατάλληλος αριθμός μεταξύ 0 και 1.

Άρα, αν υπάρχουν οι παράγωγοι $\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}$ και είναι συνεχείς συναρτήσεις:

$$\lim_{l \to +0} \frac{\Phi(M')-\Phi(M)}{l} = \text{συν}\,\alpha \cdot \frac{\partial \Phi(M)}{\partial x} + \text{συν}\,\beta \frac{\partial \Phi(M)}{\partial y} + \text{συν}\,\gamma \frac{\partial \Phi(M)}{\partial z}.$$

Ανάλογα προς ότι κάμαμε στο § 395, ονομάζουμε το όριο αυτό, εφόσον υπάρχει, <u>παράγωγο της $\Phi(x,y,z)$ κατά τη φορά (ή κατεύθυνση) $\bar{S}$.</u>

Προφανώς η παράγωγος κατά την φορά $\bar{S}$ που σχηματίζει γωνίες α, β, γ με τους $\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ}$ διαφέρει μόνο κατά το πρόσημο από την παράγωγο κατά την φορά $-\bar{S}$ που σχηματίζει με τους $\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz}$ τις (στοιχειακές) γωνίες $\pi-\alpha, \pi-\beta, \pi-\gamma$.

Την παράσταση: $\text{συν}\,\alpha \frac{\partial \Phi(M)}{\partial x} + \text{συν}\,\beta \frac{\partial \Phi(M)}{\partial y} + \text{συν}\,\gamma \frac{\partial \Phi(M)}{\partial z}$ μπορούμε να τη θεωρήσουμε και ως εσωτερικό γινόμενο του μοναδιαίου διανύσματος

$$\bar{S}(\text{συν}\,\alpha, \text{συν}\,\beta, \text{συν}\,\gamma)$$

και του διανύσματος με συντεταγμένες

$$\left(\frac{\partial \Phi(M)}{\partial x}, \frac{\partial \Phi(M)}{\partial y}, \frac{\partial \Phi(M)}{\partial z}\right)$$

το οποίο ονομάζουμε κλίση της βαθμωτής συναρτήσεως $\Phi(x,y,z)$ στο σημείο $M(x,y,z)$ και συμβολίζουμε με $\text{grad}\,\Phi(x,y,z)$.

Την παράγωγο της $\Phi(x,y,z)$ κατά τη διεύθυνση $\bar{S}$ τη γράφουμε συχνά συντομώτερα $\frac{\partial \Phi}{\partial s}$.

Άρα:

$$(448.1) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial s} = \bar{S} \cdot \text{grad}\,\Phi = \text{συν}\,\alpha \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \text{συν}\,\beta \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \text{συν}\,\gamma \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Από τον § 404 σελ. 129 έπεται ότι το διάνυσμα $\text{grad}\,\Phi(x,y,z)$ $\left(\frac{\partial \Phi(M)}{\partial x}, \frac{\partial \Phi(M)}{\partial y}, \frac{\partial \Phi(M)}{\partial z}\right)$ είναι κάθετο στην επιφάνεια $\Phi(X,Y,Z)=C$, όπου η σταθερά C ισούται με $\Phi(x,y,z)$ και (X,Y,Z) είναι οι συντεταγμένες του τυχαίου σημείου της επιφάνειας. Με άλλα λόγια, το διάνυσμα είναι κάθετο στη σταθμική επιφάνεια που περνάει από το θεωρούμενο σημείο $M(x,y,z)$. Αν καλέσουμε $\bar{n}$ το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στη σταθμική επιφάνεια δια του σημείου M και ομόρροπο προς το $\operatorname{grad}\Phi$, θα έχουμε

(448.2) $\dfrac{\partial \Phi}{\partial n} = \bar{n}\cdot \operatorname{grad}\Phi = |\operatorname{grad}\Phi|$.

Ώστε το διάνυσμα $\operatorname{grad}\Phi = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\bar{i} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\bar{j} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\bar{k}$ σ'ένα σημείο $M(x,y,z)$, διάνυσμα που δυνάμει αυτής της εκφράσεως είναι ορισμένο μέσα στο πεδίο Π, έχει διεύθυνση κάθετη στη σταθμική επιφάνεια δια του M, φορά, από την επιφάνεια αυτή, στάθμης C, προς τις επιφάνειες μεγαλύτερης (αλγεβρικώς) στάθμης και μέτρο την απόλυτη τιμή της μεταβολής της $\Phi(x,y,z)$ πάνω στην κάθετη προς τη σταθμική επιφάνεια δια του M, αναγμένης στη μονάδα του μήκους.

Επομένως το διάνυσμα $\operatorname{grad}\Phi$ μπορεί να χαρακτηριστή με στοιχεία ανεξάρτητα από το σύστημα OXYZ των συντεταγμένων.

Από τους τύπους (448.1) και (448.2) έπονται τα εξής:

1ο η παράγωγος $\dfrac{\partial \Phi}{\partial s}$ κατά τη φορά $\bar{s}$ παίρνει τις (αλγεβρικώς) ακρότατες τιμές της, όταν το $\bar{s}$ είναι κάθετο στη σταθμική επιφάνεια δια του M και δη τη μέγιστη τιμή όταν $\bar{s}\uparrow\uparrow \operatorname{grad}\Phi$, την ελάχιστη όταν $\bar{s}\uparrow\downarrow \operatorname{grad}\Phi$.

2ο είναι $\dfrac{\partial \Phi}{\partial s} = 0$, όταν το $\bar{s}$ κείται μέσα στο εφαπτόμενο επίπεδο της σταθμικής επιφάνειας.

Προφανώς ισχύουν οι σχέσεις:

(448.3) $\operatorname{grad}(\Phi+\psi) = \operatorname{grad}\Phi + \operatorname{grad}\psi$,

(448.4) $\operatorname{grad}(c\Phi) = c\operatorname{grad}\Phi$, (όπου C σταθερά).

(448.5 $\operatorname{grad}(\Phi\psi) = \Phi\operatorname{grad}\psi + \psi\operatorname{grad}\Phi$.

§ 449. Παραδείγματα διανυσματικών πεδίων.

Μπορούμε να μελετήσουμε την κίνηση ενός ρευστού όταν, για κάθε χρονική στιγμή t, ξέρουμε την ταχύτητα $\bar{v}(x,y,z,t)$ των μορίων τού ρευστού που βρίσκεται στη θέση (x, y, z) κατά τη χρονική στιγμή

t, με άλλα λόγια όταν σε κάθε χρονική στιγμή t ξέρουμε το πεδίο των ταχυτήτων των υλικών σημείων από τα οποία αποτελείται το ρευστό. Όταν το πεδίο των ταχυτήτων δεν μεταβάλλεται με το χρόνο t, η κίνηση του ρευστού λέγεται μόνιμη. Το πεδίο της ηλεκτρικής εντάσεως $\bar{\mathcal{E}}(x,y,z,t)$ και το πεδίο της μαγνητικής εντάσεως $\bar{\mathcal{H}}(x,y,z,t)$ είναι επίσης διανυσματικά πεδία. Όταν δεν μεταβάλλωνται με το χρόνο t, λέγονται το μεν πρώτο ηλεκτροστατικό, το δε δεύτερο μαγνητοστατικό πεδίο.

§450. Γραμμές διευθύνσεως ενός διανυσματικού πεδίου. (Ρευματικές γραμμές, δυναμικές γραμμές)

Γραμμές διευθύνσεως ενός διανυσματικού πεδίου $\bar{a}(x,y,z)$ ονομάσαμε στο §413 εκείνες τις γραμμές που σε κάθε σημείο τους $M(x,y,z)$ έχουν το αντίστοιχο διάνυσμα $\bar{a}=(x,y,z)=P\bar{i}+Q\bar{j}+R\bar{k}$ εφαπτόμενο σ' αυτές. Αν $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ είναι οι εξισώσεις μιας τέτοιας γραμμής θα έχουμε επομένως:

$$\frac{\dot{x}}{P(x(t),y(t),z(t))}=\frac{\dot{y}}{Q(x(t),y(t),z(t))}=\frac{\dot{z}}{R(x(t),y(t),z(t))},$$

και αν πολλαπλασιάσουμε επί dt:

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}. \tag{450.1}$$

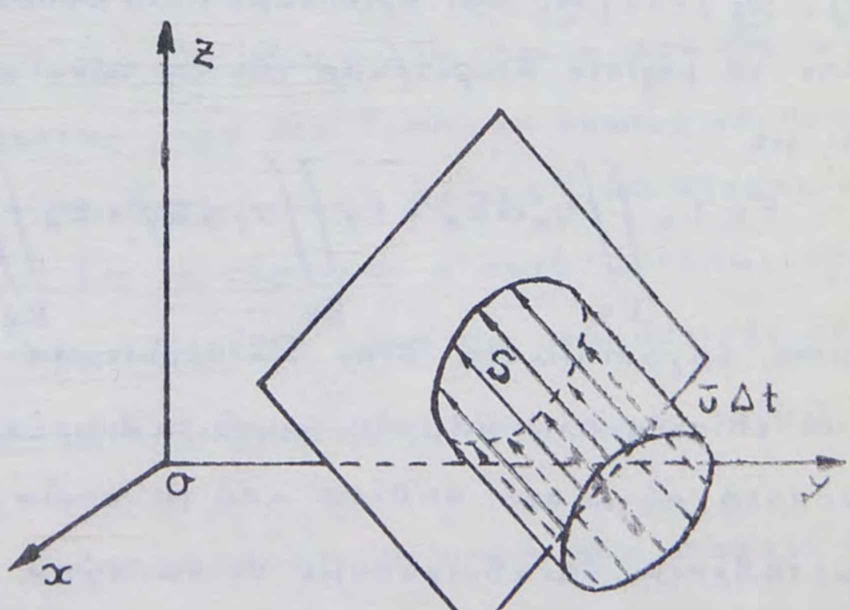
Οι γραμμές διευθύνσεως είναι επομένως οι ολοκληρωτικές γραμμές αυτού του συστήματος δυο διαφορικών εξισώσεων, άρα, με τις γενικές προϋποθέσεις, που αναφέραμε στον §413, από κάθε σημείο του διανυσματικού πεδίου θα περνάει μια και μόνο γραμμή διευθύνσεως του πεδίου.

Όταν το διανυσματικό πεδίο είναι το πεδίο ταχυτήτων μιας μόνιμης κινήσεως ρευστού, οι γραμμές διευθύνσεως ονομάζονται ρευματικές γραμμές, επειδή συμπίπτουν με τις τροχιές που διαγράφουν τα υλικά σημεία του ρευστού.

Στο ηλεκτροστατικό και στο μαγνητοστατικό πεδίο οι γραμμές διευθύνσεως ονομάζονται <u>δυναμικές γραμμές</u>, επειδή π.χ. στο μαγνητοστατικό πεδίο συμπίπτουν με τις γνωστές δυναμικές γραμμές που υλοποιούνται στη Φυσική με ρινίσματα σιδήρου. Αν η $\Phi(x,y,z)$ παριστάνη μιαν βαθμωτή συνάρτηση, είναι φανερό ότι οι γραμμές διευθύνσεως του διανυσματικού πεδίου $\bar{a}=\mathrm{grad}\,\Phi$ θα είναι κάθετες στις σταθμικές επιφάνειες $\Phi(x,y,z)=C$.

§451. Ροή (FLUX) μιας διανυσματικής συναρτήσεως δια μιας επιφάνειας.

Θεωρούμε πρώτα ένα κομμάτι S ενός προσανατολισμένου επιπέδου, με το κάθετο διάνυσμα $\bar{n}$, μέσα στο διανυσματικό πεδίο $\bar{v}(x,y,z)$ των ταχυτήτων ενός μόνιμου ρεύματος και ζητούμε το ποσό του ρευστού που διέρχεται δια του S στη μονάδα του χρόνου.



Ας εξετάσουμε στην αρχή την περίπτωση όπου το διάνυσμα $\bar{v}(M)$ παραμένει ίσο προς τον εαυτό του όταν το M μεταβάλλεται. Σε ένα χρονικό διάστημα Δt θα διαπεράσουν την επιφάνεια S όσα μόρια του ρευστού κείνται μέσα στον κύλινδρο τον οποίο γεμίζουν τα διανύσματα $\bar{v}\Delta t$ που έχουν τα πέρατα τους πάνω στην S. Αν E είναι το εμβαδό της S, ο όγκος του ρευστού μέσα σ'αυτόν τον κύλινδρο είναι $E|\bar{v}.\bar{n}|.\Delta t$, επομένως στη μονάδα του χρόνου διέρχεται δια της S ένας όγκος $E|\bar{v}.\bar{n}|$ ρευστού.

Θα ονομάζουμε ροή F (Flux) δια της προσανατολισμένης επιφάνειας $\underset{\frown}{S}$, τον όγκο αυτόν πολλαπλασιασμένο με +1 ή −1 καθόσο τα μόρια του ρευστού διαπερνούν την $\underset{\frown}{S}$ κατά τη φορά του $\bar{n}$ ή κατά την αντίθετη φορά.

Προφανώς η ροή είναι και στις δυο περιπτώσεις:

$$F=(\bar{v}.\bar{n})\,E=(v_x n_x+v_y n_y+v_z n_z)\,E.$$

Αν καλέσουμε E_z, E_x, E_y τα εμβαδά των προβολών της S πάνω στα επίπεδα XOY, YOZ, ZOX και ε_x, ε_y, ε_z είναι τα πρόσημα των συντεταγμένων του $\bar{n}(n_x, n_y, n_z)$, (π.χ. $\varepsilon_z = \mathrm{sign}\, n_z = \mathrm{sign}(\bar{n}\bar{k}) = \dfrac{\bar{n}.\bar{k}}{|\bar{n}.\bar{k}|}$), τότε:

$$n_x\cdot E=\varepsilon_x E_x\,,\quad n_y\cdot E=\varepsilon_y E_y\,,\quad n_z\cdot E=\varepsilon_z\cdot E_z\,,$$

και επομένως η ροή είναι ίση με

$$F=\varepsilon_x v_x E_x+\varepsilon_y v_y E_y+\varepsilon_z v_z E_z\,.$$

Αν το διάνυσμα $\bar{v}(x,y,z)$ δεν παραμένη ίσο με τον εαυτό του από σημείο σε σημείο, τότε διαμερίζουμε την $\underset{\frown}{S}$ σε μικρά κομμάτια $\underset{\frown}{S_1}$, $\underset{\frown}{S_2}$, ..., $\underset{\frown}{S_\nu}$ και βρίσκουμε πολύ εύκολα, με μετάβαση στο όριο, όταν το μέγιστο διαμέτρημα των $\underset{\frown}{S_\rho}$ τείνη στο μηδέν, ότι η ροή ισούται με

$$F=\varepsilon_x\iint\limits_{E_x} v_x\,dE_x+\varepsilon_y\iint\limits_{E_y} v_y\,dE_y+\varepsilon_z\iint\limits_{E_z} v_z\,dE_z=\iint\limits_{\underset{\frown}{S}}\bar{v}.\bar{n}\,dS.$$

Όμοια εργαζόμαστε στην 2η περίπτωση όπου η επιφάνεια $\underset{\frown}{S}$ δεν είναι επίπεδη αλλά καμπύλη, αφού τη διαιρέσουμε προηγουμένως σε τμήματα πάνω στο καθένα από τα οποία τα ε_x, ε_y και ε_z μένουν αμετάβλητα ξαναβρίσκουμε δε και τώρα τον τελευταίο τύπο, δηλαδή ότι η ροή δια μέσου προσανατολισμένης επιφάνειας ισούται με το επιφανειακό ολοκλήρωμα πάνω σ' αυτήν την επιφάνεια της διανυσματικής ταχύτητας του ρεύματος.

§452 <u>Διανυσματικά πεδία με μηδενική απόκλιση</u>. Θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο των ταχυτήτων $\bar{v}\,(P,Q,R)$ ενός μόνιμου ρεύματος.

Η συνολική ροή δια μέσου μιας απλής κλειστής επιφάνειας, από το εσωτερικό της προς το εξωτερικό της, είναι (Θεώρημα του Gauss στο χώρο):

$$(452.1) \qquad F = \iint\limits_{S\varepsilon\xi} \bar{v}.\bar{n}\,dS = \iiint\limits_{T} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz.$$

Αν σε κάθε σημείο του πεδίου η απόκλιση $\operatorname{div}\bar{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$, τότε η συνολική ροή δια μέσου μιας οποιασδήποτε κλειστής επιφάνειας θα είναι 0, επομένως τόσος όγκος ρευστού θα ρέη από το εσωτερικό προς το εξωτερικό της όσος και από το εξωτερικό προς το εσωτερικό της.

Επομένως πουθενά μέσα στο πεδίο δεν θα υπάρχη «πηγή» από την οποία να βγαίνη ρευστό, ούτε όμως και καμιά «καταβόθρα» (ή αρνητική πηγή) από την οποία να χάνεται ρευστό. Αν σ'όλα τα σημεία ενός χωρίου Τ έχουμε $\operatorname{div}\bar{v} > 0$, τότε η ροή δια μέσου μιας κλειστής επιφάνειας μέσα στο Τ, από το εσωτερικό προς το εξωτερικό της, θα είναι θετική, άρα από το Τ θα εξέρχεται περισσότερο ρευστό παρ' ότι εισέρχεται σ'αυτό· Συνεπώς στα σημεία του Τ θα υπάρχουν «πηγές» τόσο πιο αποδοτικές όσο το

$$\iiint\limits_{T} \operatorname{div}\bar{v}\,dx\,dy\,dz$$

είναι μεγαλύτερο. Επομένως το $\operatorname{div}\bar{v}\,(M)$ είναι ένα μέτρο για την «παροχή» της πηγής που υπάρχει στο σημείο Μ.

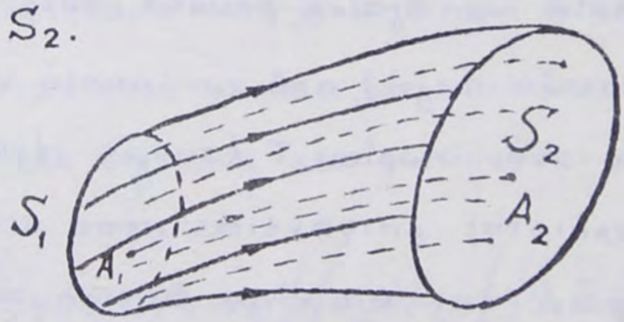
Αν $\operatorname{div}\bar{v} < 0$ για τα σημεία του Τ, τότε θα πρόκειται φυσικά για καταβόθρες, γιατί τότε θα εισέρχεται στο Τ περισσότερο ρευστό απ'ότι εξέρχεται απ'αυτό.

Από τα παραπάνω, με την προϋπόθεση φυσικά ότι η συνάρτηση

$\mathrm{div}\bar{v}$ είναι συνεχής, έπεται ότι η συνθήκη $\mathrm{div}\bar{v} \equiv 0$ δεν είναι μόνον επαρκής αλλά και αναγκαία για να μην υπάρχουν μέσα στο πεδίο θετικές ή αρνητικές πηγές.

Πράγματι, αν σε ένα σημείο M_0 είναι π.χ. $\mathrm{div}\bar{v} > 0$, τούτο θα ισχύη και σε ένα κατάλληλα μικρό χωρίο γύρω στο σημείο, αλλά τότε (σύμφωνα με τα προηγούμενα) θα υπάρχουν πηγές μέσα σ'αυτό το χωρίο.

Σ'ένα σημείο A_1 ενός πεδίου $\bar{v}$ με $\mathrm{div}\bar{v} \equiv 0$ θεωρούμε μια μικρή επίπεδη επιφάνεια S_1, με εμβαδό E_1, κάθετη στη ρευματική γραμμή δια του A_1. Οι ρευματικές γραμμές που περνούν από το περίγραμμα της S_1 σχηματίζουν έναν «ρευματικό σωλήνα». Έστω A_2 ένα σημείο πάνω στη ρευματική γραμμή που διέρχεται δια του A_1 και S_2 το τμήμα του καθέτου προς τη γραμμή αυτή επιπέδου το αποκοβόμενο από τον ρευματικό σωλήνα, που αναφέραμε, ας είναι δε E_2 το εμβαδό του τμήματος τούτου S_2.



Η ροή δια μέσου της πλευρικής επιφάνειας του ρευματικού σωλήνα είναι προφανώς μηδέν, επειδή πάνω σ'αυτήν έχουμε $\bar{v} \perp \bar{n}$. Αφού όμως εξ υποθέσεως $\mathrm{div}\bar{v} \equiv 0$, η εφαρμογή του τύπου (452.1) μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η ροή δια μέσου της επιφάνειας S_1 από τα έξω προς τα μέσα του μεταξύ S_1 και S_2 μέρους του ρευματικού σωλήνα είναι ίση με την ροή δια της επιφάνειας S_2 από τα μέσα προς τα έξω του ιδίου μέρους. Θεωρούμε τώρα τις επιφάνειες αυτές αρκετά μικρές ώστε πάνω στην S_1 το διάνυσμα $\bar{v}$ να είναι περίπου ίσο με το $\bar{v}_1 = \bar{v}(A_1)$, πάνω δε στην S_2 να είναι $\bar{v} \approx \bar{v}_2 = \bar{v}(A_2)$. Επειδή τα $\bar{v}_1$ και $\bar{v}_2$ είναι κάθετα πάνω στις S_1 και S_2 αντιστοίχως, η ισότητα των ροών δια των επιφανειών αυτών θα εκφράζεται με τη σχέση

$$v_1 E_1 \approx v_2 E_2\,,\quad \acute{\eta}\ \frac{v_1}{v_2} \approx \frac{E_2}{E_1}\,.$$

Επομένως το μέτρο του διανύσματος $\bar{v}$ σ'ένα σημείο μιας ρευματικής γραμμής είναι (κατά προσέγγιση) αντιστρόφως ανάλογο προς το εμβαδό της διατομής στο υπόψη σημείο ενός αρκετά λεπτού ρευματικού σωλήνα με μέση ίνα τη θεωρούμενη ρευματική γραμμή. Γι'αυτό λέμε ότι, όταν $\operatorname{div}\bar{v} \equiv 0$, οι ρευματικές γραμμές γίνονται πυκνότερες εκεί όπου το μέτρο της ταχύτητας αυξάνει, αραιότερες, εκεί όπου τούτο ελαττώνεται. Ειδικώς, αν υποθέσουμε το μέτρο v του $\bar{v}$ σταθερό μέσα στο πεδίο, τότε, πάντα με την προϋπόθεση $\operatorname{div}\bar{v} \equiv 0$, θα έχουμε για τις διατομές του ρευματικού σωλήνα, που θεωρήσαμε παραπάνω, τη σχέση:

$$E_1 = E_2\,.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι στο εσωτερικό ενός ρευματικού σωλήνα, ο οποίος ορίζεται από την επιφάνεια S_1, είναι $\operatorname{div}\bar{v} > 0$. Τότε το ποσό $E_2 v$ του ρευστού που εξέρχεται από τον σωλήνα δια της S_2 θα είναι μεγαλύτερο από το ποσό $E_1 v$ του ρευστού που εισέρχεται στο σωλήνα δια της S_1. Επομένως θα έχουμε

$$E_2 > E_1$$

δηλαδή παρουσιάζεται μια αμοιβαία απόκλιση (μια αμοιβαία απομάκρυνση) των ρευματικών γραμμών· σ'αυτήν οφείλει και τόνομα του το μέγεθος $\operatorname{div}\bar{v}$.

§ 453. Δυναμικό. Αστρόβιλα πεδία. Μια διανυσματική συνάρτηση $\bar{a}(x,y,z) = P\bar{\imath} + Q\bar{\jmath} + R\bar{k}$, προκύπτει από δυναμικό (ανάλογα με ότι είδαμε στο επίπεδο) όταν υπάρχει μια βαθμωτή συνάρτηση $\Phi(x,y,z)$ τέτοια ώστε

$$(453.1)\qquad P \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial x},\quad Q \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial y},\quad R \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial z}\,,$$

δηλαδή τέτοια ώστε

$$\bar{a} = \operatorname{grad} \phi .$$

Η συνάρτηση ϕ λέγεται δυναμικό του διανυσματικού πεδίου $\bar{a}(M)$.

Από τις σχέσεις αυτές έπεται ότι:

$$(453.1) \qquad \oint_{\gamma+} \bar{a}\, d\bar{r} = \oint_{\gamma+} P dx + Q dy + R dz = 0.$$

Επομένως το $\int_{\overrightarrow{AB}} \bar{a}\, d\bar{r}$ έχει τότε τιμή ανεξάρτητη από το δρόμο που συνδέει το σημείο A με το B.

Από την ιδιότητα αυτή έπεται αντιστρόφως, όπως και στον § 441, ότι το διανυσματικό πεδίο προέρχεται από το δυναμικό.

Όταν το διανυσματικό πεδίο προέρχεται από δυναμικό, θα έχουμε

$$(453.3) \qquad \frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} \equiv \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z},$$

$$\text{δηλ. } \operatorname{rot} \bar{a} \equiv 0,$$

με την προϋπόθεση φυσικά ότι υπάρχουν αυτές οι μερικές παράγωγοι και ότι είναι συνεχείς συναρτήσεις. Το διανυσματικό πεδίο $\bar{a}(x, y, z)$ λέγεται τότε αστρόβιλο.

Αντιστρόφως κάθε αστρόβιλο πεδίο απλής γραμμικής συνοχής προκύπτει από δυναμικό. (Ένα πεδίο στο χώρο λέγεται απλής συνοχής, όταν κάθε κλειστή γραμμή του, υποβαλλόμενη σε μια χωρίς ασυνέχειες μεταβολή του σχήματος και της θέσης της εντός του χωρίου μπορεί, δια μιας μεταβάσεως στο όριο, να περιοριστή σε ένα σημείο).

Πράγματι, για κάθε κλειστή γραμμή γ μέσα στο πεδίο θα υπάρχη τότε μια επιφάνεια S_γ που να κείται ολόκληρη μέσα στο πεδίο και που να περατώνεται από τη γραμμή γ · εφαρμόζοντας τώρα τον τύπο του Stokes

$$\oint_{\gamma} \bar{a}\,d\bar{r} = \iint_{\overset{\curvearrowright}{S_\gamma}} \mathrm{rot}\,\bar{a}\cdot\bar{n}\,dS = 0$$

συμπεραίνουμε πως η κυκλοφορία του διανυσματικού πεδίου κατά μήκος μιας οποιασδήποτε κλειστής γραμμής του πεδίου είναι μηδενική. Απ' αυτό έπεται ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\overrightarrow{AM}} \bar{a}\,d\bar{r}$ εξαρτιέται μόνο απ' την αρχή A και το τέλος M του δρόμου ολοκληρώσεως. Συνεπώς, αν διατηρήσουμε το A σταθερό και μεταβάλουμε το $M(x,y,z)$ μέσα στο πεδίο θα προκύψη μια συνάρτηση $\Phi(x,y,z)=\int_{\overrightarrow{AM}} \bar{a}\,d\bar{r}$ που είναι ένα δυναμικό του θεωρούμενου διανυσματικού πεδίου $\bar{a}(x,y,z)$, δηλαδή

$$P(x,y,z)=\frac{\partial\Phi}{\partial x},\quad Q=\frac{\partial\Phi}{\partial y},\quad R=\frac{\partial\Phi}{\partial z}.$$

§ 454. Το ανάδελτα.

Οι συναρτήσεις $\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}$ προκύπτουν από τη συνάρτηση $\Phi(x,y,z)$ όταν εκτελέσουμε πάνω στη Φ παραγωγίσεις ως προς x,y,z αντιστοίχως. Τις πράξεις αυτές μπορούμε να τις παραστήσουμε συμβολικά με ένα συμβατικό γινόμενο των συμβόλων $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ επί Φ:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\cdot\Phi,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\cdot\Phi,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\cdot\Phi.$$

Οι συμβολικοί πολλαπλασιαστές (παράγοντες) $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ ονομάζονται τότε διαφορικοί εκτελεστές (opérateurs differentiels). Ας είναι τώρα $\Phi(x,y,z)$ μια βαθμωτή συνάρτηση και $\bar{a}(x,y,z)=P(x,y,z)\bar{i}+Q(x,y,z)\bar{j}+R(x,y,z)\bar{k}$ ένα διανυσματικό πεδίο στο χώρο. Θεωρούμε τα μορφώματα

$$\mathrm{grad}\,\Phi=\bar{i}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\bar{j}\,\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\bar{k}\,\frac{\partial\Phi}{\partial z},$$

$$\operatorname{div}\bar{a}=\frac{\partial}{\partial x}P+\frac{\partial}{\partial y}Q+\frac{\partial}{\partial z}R,$$

$$\operatorname{rot}\bar{a}=\bar{\imath}\left(\frac{\partial}{\partial y}R-\frac{\partial}{\partial z}Q\right)+\bar{\jmath}\left(\frac{\partial}{\partial z}P-\frac{\partial}{\partial x}R\right)+\bar{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}Q-\frac{\partial}{\partial y}P\right).$$

Το πρώτο μπορούμε να το θεωρήσουμε σαν ένα συμβατικό γινόμενο του "συμβολικού διανυσματικού πολλαπλασιαστού" $\bar{\imath}\frac{\partial}{\partial x}+\bar{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}+\bar{k}\frac{\partial}{\partial z}$ επί τη βαθμωτή συνάρτηση Φ, το δεύτερο σαν ένα συμβατικό <u>εσωτερικό</u> γινόμενο του $(\bar{\imath}\frac{\partial}{\partial x}+\bar{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}+\bar{k}\frac{\partial}{\partial z})$ επί το διάνυσμα $\bar{a}=\bar{\imath}P+\bar{\jmath}Q+\bar{k}R$, το τρίτο τέλος σαν ένα συμβατικό <u>εξωτερικό</u> γινόμενο του $(\bar{\imath}\frac{\partial}{\partial x}+\bar{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}+\bar{k}\frac{\partial}{\partial z})$ επί το διάνυσμα $\bar{a}$. Αν λοιπόν παραστήσουμε το «διανυσματικό διαφορικό εκτελεστή» $(\bar{\imath}\frac{\partial}{\partial x}+\bar{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}+\bar{k}\frac{\partial}{\partial z})$ με το σύμβολο ∇ (που διαβάζεται ανάδελτα, από τους ξένους nabla), θα έχουμε:

$$\operatorname{grad}\Phi=\nabla\Phi,\quad \operatorname{div}\bar{a}=\nabla\bar{a},\quad \operatorname{rot}\bar{a}=[\nabla\bar{a}].$$

Με το ανάδελτα ∇ μπορούμε να βρίσκουμε γρήγορα και ευκολοθύμητα τα grad, div και rot περίπλοκων παραστάσεων. Ιδού μερικά παραδείγματα.

Με μετάβαση σε καρτεσιανές συντεταγμένες αποδείχνουμε πρώτα εύκολα τις ακόλουθες σχέσεις (όπου $u(x,y,z)$ v, w, ϕ είναι βαθμωτές συναρτήσεις και $\bar{a}$, $\bar{b}$ διανυσματικά πεδία στο χώρο):

1) $\operatorname{grad}(uvw)=vw\operatorname{grad}u+uw\operatorname{grad}v+uv\operatorname{grad}w$,

2) $\operatorname{div}(u\bar{a})=\bar{a}\operatorname{grad}u+u\operatorname{div}\bar{a}$,

3) $\operatorname{rot}(u\bar{a})=[\operatorname{grad}u\ \ \bar{a}]+u\operatorname{rot}\bar{a}$,

4) $\operatorname{div}[\bar{a}\,\bar{b}]=\bar{b}\operatorname{rot}\bar{a}-\bar{a}\operatorname{rot}\bar{b}$,

5) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\phi)=0$, 6) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\bar{a})=0$.

Χρησιμοποιώντας το ανάδελτα ∇ μπορούμε να γράψουμε τις παραπάνω σχέσεις πιο ευκολοθύμητα (επειδή παρουσιάζουν ομοιότητες προς γνωστούς κανόνες παραγωγίσεως και διανυσματικού λογισμού) ως εξής:

$$1)\ \nabla(uvw) = vw\cdot\nabla u + uw\cdot\nabla v + uv\cdot\nabla w,$$

$$2)\ \nabla(u\bar{a}) = \nabla u\cdot\bar{a} + u\cdot\nabla\bar{a},$$

$$3)\ \left[\nabla \quad u\bar{a}\right] = \left[\nabla u \quad \bar{a}\right] + u\left[\nabla \quad \bar{a}\right],$$

$$4)\ \nabla\left[\bar{a} \quad \bar{b}\right] = \left[\nabla\bar{a}\right]\cdot\bar{b} - \bar{a}\cdot\left[\nabla\bar{b}\right],$$

$$5)\ \left[\nabla \quad \nabla\phi\right] = 0 = \left[\nabla \quad \nabla\right]\phi, \qquad 6)\ \nabla\left[\nabla \quad \bar{a}\right] = 0 = (\nabla\,\nabla\bar{a}).$$

Εκτός από τον διαφορικό εκτελεστή ∇, παρουσιάζεται συχνά και ο

$$\nabla\,\nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

που λέγεται διαφορικός εκτελεστής του Laplace, συμβολίζεται δε και με Δ. Έχουμε:

$$\Delta\phi = \nabla^2\phi = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \phi''_{x^2} + \phi''_{y^2} + \phi''_{z^2}.$$

Π.χ. με υπολογισμό βρίσκουμε ότι $\Delta \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0$.

§455. <u>Παράγωγος διανυσματικής συναρτήσεως κατά ορισμένη κατεύθυνση</u>.

Όπως για μιαν αριθμητική συνάρτηση $\phi(x,y,z)$ μορφώνουμε τις παραγώγους $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}, \dfrac{\partial\phi}{\partial y}, \dfrac{\partial\phi}{\partial z}$, έτσι μπορούμε και για μια διανυσματική συνάρτηση

$\bar{a}(x,y,z) = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$ να μορφώσουμε τις νέες διανυσματικές συναρτήσεις

$$\frac{\partial\bar{a}}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial Q}{\partial x}\bar{j} + \frac{\partial R}{\partial x}\bar{k},$$

$$\frac{\partial\bar{a}}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}\bar{i} + \frac{\partial Q}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial R}{\partial y}\bar{k},$$

$$\frac{\partial\bar{a}}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z}\bar{i} + \frac{\partial Q}{\partial z}\bar{j} + \frac{\partial R}{\partial z}\bar{k},$$

τις οποίες ονομάζουμε μερικές παραγώγους ως προς x, y, z αντιστοίχως της διανυσματικής συναρτήσεως $\bar{a}(x,y,z)$. Προφανώς έχουμε

$$\frac{\partial\bar{a}}{\partial x} = \lim_{h\to 0}\frac{\bar{a}(x+h,y,z) - \bar{a}(x,y,z)}{h} \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Γενικότερα, όπως για μιαν αριθμητική συνάρτηση $\Phi(x,y,z)$ είναι $\frac{\partial \phi}{\partial s} = \bar{s}\,\mathrm{grad}\,\phi = \text{συν}\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \text{συν}\beta \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \text{συν}\gamma \frac{\partial \phi}{\partial z}$, όπου $(\text{συν}\alpha, \text{συν}\beta, \text{συν}\gamma)$ είναι οι συντεταγμένες του μοναδιαίου διανύσματος $\bar{S}$, έτσι και για μια διανυσματική συνάρτηση μπορούμε να ορίσουμε την παράγωγό της κατά την κατεύθυνση $\bar{S}$ ως εξής:

$$\frac{\partial \bar{a}(x,y,z)}{\partial s} = \lim_{l\to 0^+} \frac{\bar{a}(x+l\,\text{συν}\alpha, y+l\,\text{συν}\beta, z+l\,\text{συν}\gamma)-\bar{a}(x,y,z)}{l}$$

$$= \left(\text{συν}\alpha \frac{\partial P}{\partial x} + \text{συν}\beta \frac{\partial P}{\partial y} + \text{συν}\gamma \frac{\partial P}{\partial z}\right)\bar{i}$$

$$+ \left(\text{συν}\alpha \frac{\partial Q}{\partial x} + \text{συν}\beta \frac{\partial Q}{\partial y} + \text{συν}\gamma \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{j}$$

$$+ \left(\text{συν}\alpha \frac{\partial R}{\partial x} + \text{συν}\beta \frac{\partial R}{\partial y} + \text{συν}\gamma \frac{\partial R}{\partial z}\right)\bar{k}.$$

Αν χρησιμοποιήσουμε το ανάδελτα

$$\nabla = \bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

ο αριθμητικός διαφορικός εκτελεστής

$$\frac{\partial}{\partial s} = \text{συν}\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \text{συν}\beta \frac{\partial}{\partial y} + \text{συν}\gamma \frac{\partial}{\partial z}$$

μπορεί να γραφή σαν εσωτερικό γινόμενο

$$\frac{\partial}{\partial s} = \bar{s}\,\nabla.$$

Γράφοντας τον αριθμητικό αυτό διαφορικό εκτελεστή $\bar{s}\nabla$ στα αριστερά μιας συναρτήσεως (βαθμωτής ή διανυσματικής) μπορούμε λοιπόν να συμβολίσουμε την παραγώγιση της συναρτήσεως κατά την κατεύθυνση $\bar{S}$ ως εξής:

$$(\bar{s}\nabla)\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial s} = \text{συν}\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \text{συν}\beta \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \text{συν}\gamma \frac{\partial \phi}{\partial z},$$

$$(\bar{s}\nabla)\bar{a} = \frac{\partial \bar{a}}{\partial s} = \left(\text{συν}\alpha \frac{\partial P}{\partial x} + \text{συν}\beta \frac{\partial P}{\partial y} + \text{συν}\gamma \frac{\partial P}{\partial z}\right)\bar{i} +$$

$$+\left(\text{συν}\,\alpha\,\frac{\partial Q}{\partial x}+\text{συν}\,\beta\,\frac{\partial Q}{\partial y}+\text{συν}\,\gamma\,\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{j}$$

$$+\left(\text{συν}\,\alpha\,\frac{\partial R}{\partial x}+\text{συν}\,\beta\,\frac{\partial R}{\partial y}+\text{συν}\,\gamma\,\frac{\partial R}{\partial z}\right)\bar{k}\;.$$

Ασκήσεις στο 29º και 30º κεφάλαιο

483. Υπολογίστε το $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(y-x)dy+ydx$ κατά μήκος των εξής γραμμών: α) της ευθείας $x=t$, $y=t$, β) της παραβολής $x=t^2, y=t$, γ) της παραβολής $x=t$, $y=t^2$, δ) του άξονα των y και της ευθείας $y=1$.

484. Υπολογίστε το $\int_{(0,2)}^{(-1,-3)}(1+y^2)dx+(1+x^2)dy$ κατά μήκος των γραμμών:
α) $y=5x+2$, β) $y=-5x^2+2$.

485. Υπολογίστε με τον τύπο του 440 το εμβαδό του χωρίου μεταξύ μιας καμάρας επικυκλοειδούς και του σταθερού κύκλου πάνω στον οποίο γίνεται η κύλιση.

486. Δείξτε ότι η παράσταση

$$\int_{x_0}^{x}P(t,y,z)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,t,z)dt+\int_{z_0}^{z}R(x_0,y_0,t)dt$$

μπορεί να θεωρηθεί επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $Pdx+Qdy+Rdz$ κατά μήκος μιας θλασμένης γραμμής που οδηγεί από το σημείο $M_0(x_0,y_0,z_0)$ στο σημείο $M(x,y,z)$.

487. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int y^2dx+z^2dy+x^2dz$ κατά μήκος ενός τόξου στερεάς κυκλικής έλικας με άξονα τον OZ, τον οποίον οδηγεί από το σημείο $(0,\alpha,0)$ στο σημείο $(0,\alpha,\beta)$, όπου β το βήμα της έλικας.

488. Υπολογίστε το περιγραμμικό ολοκλήρωμα της $ydx+zdy+xdz$ κατά μήκος του κύκλου $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+z=a \end{cases}$ και κατά τη φορά από δεξιά προς τα αριστερά για έναν παρατηρητή ο οποίος στέκεται πάνω στη σφαίρα στο σημείο της $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, 0, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$. Απ. $-\frac{\pi a^2}{\sqrt{2}}$

489. Υπολογίστε την κυκλοφορία της διανυσματικής συναρτήσεως $(x-y)\bar{i}+(y-z)\bar{j}+(z-x)\bar{k}$ κατά μήκος της γραμμής ΟΑΒΓΔΟ, όπου ΟΑ, ΓΔ, ΔΟ ευθύγραμμα τμήματα συνδέοντα τα σημεία $O(0,0,0)$, $A(a,0,0)$, $\Gamma\left(0,\alpha,\frac{b}{4}\right)$ και $\Delta\left(0,0,\frac{b}{4}\right)$ και ΑΒΓ ένα τόξο στερεάς κυκλικής έλικας, με άξονα τον ΟΖ, το οποίο αντιστοιχεί σ' ένα τέταρτο βήματος έλικας παρόμοιας προς την της άσκησης 487. Απ. $\frac{\pi a^2}{4}$

490. Επαληθεύστε το θεώρημα του Gauss λαμβάνοντας ως διανυσματική συνάρτηση την $\bar{a}(M)=yx\bar{i}+y^2\bar{j}-\frac{z^2}{2}\bar{k}$ και ως τριδιάστατο χωρίο Τ το σφαιρικό $x^2+y^2+z^2\leqq a^2$.

491* Με τη βοήθεια του τύπου του Gauss δείξτε ότι

$$\left(\operatorname{div}\bar{a}(x,y,z)\right)_{\substack{\theta\acute{\varepsilon}\sigma\iota\varsigma \\ (x_0,y_0,z_0)}}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{1}{\frac{4}{3}\pi\rho^3}\iint\limits_{T}(\bar{a}\bar{n})\,dS,$$

όπου T η σφαιρική επιφάνεια $(x-x_0{}^2)+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\rho^2$

492. Επαληθεύστε το θεώρημα του Stokes με τη διανυσματική συνάρτηση:

$$y^2\bar{i}+2x^2\bar{j}-z^2\bar{k}$$

πάνω στην επιφάνεια

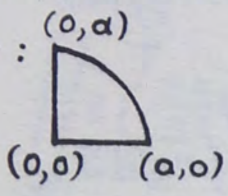
$$\begin{cases} x=\rho\,\sigma\upsilon\nu\,\theta \\ y=\rho\,\eta\mu\,\theta \\ z=b\theta \end{cases} \quad \text{όπου} \quad \begin{array}{l} b \text{ μια σταθερά} \\ 0\leqq\rho\leqq 1 \\ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2} \end{array}$$

λαμβάνοντας το $\bar{n}$ ούτως ώστε να σχηματίζη αμβλεία γωνία με τον OZ.

493. Μετατρέψτε σε περιγραμμικό ολοκλήρωμα το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_T x^p y^q \, dx\, dy$$

όπου p και q ακέραιοι αριθμοί $\geqq 0$ και T επίπεδο χωρίο περιοριζόμενο από μια κλειστή απλή γραμμή γ. Ειδικώς λάβετε ως T τον κυκλικό τομέα :



και $p=1, q=0$ ή $p=0, q=2$ ή $p=1, q=1$.

494. Υπολογίστε τη ροή της διανυσματικής συναρτήσεως $\bar{v}(M) = 2x\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$ δια μέσου της σφαιρικής επιφάνειας $x^2+y^2+z^2=4$ από τα έξω προς τα έσω. Με τι ισούται η ροή αυτή κατά το θεώρημα Gauss ; Επαληθεύστε το αποτέλεσμα αυτό.

495. Εξετάστε αν $\operatorname{rot}\bar{a}(M) \equiv 0$, όπου

$$\bar{a}(M) = \left(\frac{2x}{y} - z^2\right)\bar{i} + \left(5 - \frac{x^2+1}{y^2}\right)\bar{j} + (1-2xz)\bar{k},$$

και σε καταφατική περίπτωση προσδιορίστε τη συνάρτηση $\phi(x,y,z)$ έτσι που

$$\operatorname{grad}\phi(x,y,z) = \bar{a}(x,y,z).$$

496. Επαληθεύστε ότι $\operatorname{rot}\bar{a}(M) \equiv 0$ για τη διανυσματική συνάρτηση

$$\bar{a} \equiv \frac{y(1-x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}\bar{i} + \frac{x(1+x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}\bar{j} + 0\cdot\bar{k}$$

και προσδιορίστε το δυναμικό ϕ από το οποίο προέρχεται. Ερευνήστε τις σταθμικές επιφάνειες $\phi(x,y,z) = C$ δια τα διάφορα C.

497. Ομοίως για τη διανυσματική συνάρτηση

$\bar{a} = (-z\,\eta\mu(x+2y) + 2x)\bar{i} + (-2z\,\eta\mu(x+2y) - 5)\bar{j} + (\sigma\upsilon\nu(x+2y) + \sigma\upsilon\nu\, z)\bar{k}.$

498.* Εφαρμόστε το θεώρημα του Gauss στη διανυσματική συνάρτηση $\bar{a}=f(x,y,z)\cdot\bar{c}$, όπου $f(x,y,z)$ δοσμένη βαθμωτή συνάρτηση και $\bar{c}$ σταθερό διάνυσμα.

Από τον τύπο που λαμβάνετε και που ισχύει για κάθε $\bar{c}$ να συμπεράνετε τα εξής

$$\iiint\limits_T \operatorname{grad} f\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_T \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy\,dz\,\bar{i} + \iiint\limits_T \frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy\,dz\,\bar{j} + \iiint\limits_T \frac{\partial f}{\partial z}\,dx\,dy\,dz\,\bar{k}$$

$$= \iint\limits_S f\bar{n}_{\varepsilon\xi}\,dS = \bar{i}\iint\limits_S f n_x\,dS + \bar{j}\iint\limits_S f n_y\,dS + \bar{k}\iint\limits_S f n_z\,dS,$$

όπου S η επιφάνεια η περικλείνουσα τον τριδιάστατο τόπο T. Λαμβάνοντας για το T σφαιρικό χωρίο ακτίνας ρ με κέντρο το $M_0(x_0,y_0,z_0)$ και εφαρμόζοντας τον προηγούμενο τύπο δείξτε ότι:

$$(\operatorname{grad} f)_{\substack{\theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta\\(x_0,y_0,z_0)}} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\rho^3}\iint\limits_S (f\bar{n})\,dS.$$

499.* Εφαρμόστε το θεώρημα του Gauss στη διανυσματική συνάρτηση $[\bar{c},\bar{a}]$, όπου $\bar{c}$ σταθερό διάνυσμα και $\bar{a}$ διανυσματική συνάρτηση $\bar{a}(x,y,z)$ του σημείου $M(x,y,z)$.

Από το λαμβανόμενο τύπο που ισχύει για κάθε $\bar{c}$, να συμπεράνετε ότι

$$\iiint\limits_T \operatorname{rot}\bar{a}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_S [\bar{n}_{\varepsilon\xi}\ \ a]\,dS,$$

οπου S η επιφάνεια η οποία περικλείνει το χωρίο T. Λαμβάνοντας για T το σφαιρικό χωρίο $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\leqq\rho^2$ και εφαρμόζοντας τον προηγούμενο τύπο δείξτε ότι

$$\operatorname{rot}\bar{a}\,(x_0,y_0,z_0) = \lim_{\rho\to 0^+}\frac{1}{\frac{4}{3}\pi\rho^3}\iint\limits_S [\bar{n}_{\varepsilon\xi}\ \ a]\,dS.$$

500. Αν $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ και $r = |\bar{r}| = +\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, αποδείξτε ότι

$$\operatorname{grad} f(r) = f'(r)\frac{\bar{r}}{|\bar{r}|}, \quad \operatorname{div}\frac{\bar{r}}{|\bar{r}|} = \frac{2}{r}, \quad \operatorname{div}\frac{\bar{r}}{|\bar{r}|^3} = 0,$$

$$\operatorname{div}\left(f(r)\cdot\frac{\bar{r}}{r}\right) = \frac{2f(r)}{r} + f'(r),$$

$$\operatorname{rot}\left(f(r)\bar{r}\right) \equiv 0, \quad \Delta\frac{1}{r} = \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) \equiv 0.$$

501. Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα:

$$\iint\limits_{S} z\left(\frac{xn_x}{a^2} + \frac{yn_y}{\beta^2} + \frac{zn_z}{\gamma^2}\right)dS$$

πάνω στο μισό ελλειψοειδές $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$ για το οποίο $z \geqq 0$· (n_x, n_y, n_z) είναι συντεταγμένες του προς τα έξω κατευθυνόμενου μοναδιαίου κάθετου διανύσματος $\bar{n}$. (Θα χρησιμοποιήσετε κατάλληλα τον τύπο του Gauss).

502*. Δείξτε ότι η επιφάνεια S ενός κλειστού στερεού δοχείου, το οποίο περιέχει αέριο σταθεράς πιέσεως p βρίσκεται σε ισορροπία υπό την ενέργεια των πιέσεων. (Δείξτε δηλαδή ότι

$$\text{και} \iint\limits_{S} \bar{n}_{\varepsilon\xi}\, dS = 0 \quad \text{και} \iint\limits_{S} [\bar{r} \quad \bar{n}_{\varepsilon\xi}]\, dS = 0,$$

όπου $\bar{r}$ η διανυσματική ακτίνα $\overline{OM}$ που καταλήγει στο στοιχείο επιφάνειας dS).

503*. Έστω $\bar{a}(x,y,z) = \sigma'(x)\bar{i} - 3y\sigma'(x)\bar{j} + 2z\sigma(x)\bar{k}$, όπου $\sigma(x)$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο για $-\infty < x < +\infty$.

α) Να προσδιορισθή η $\sigma(x)$ έτσι που να είναι $\operatorname{div}\bar{a} \equiv 0$.

Τι συνέπειες έχει ο προσδιορισμός αυτός για το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint\limits_{S} \bar{a}(x,y,z)\bar{n}\,dS$, όπου $\bar{n}$ το μοναδιαίο διάνυσμα το κάθετο πάνω στην επιφάνεια S η οποία περατώνεται στην κλειστή γραμμή γ.

β) Να ορισθή η $\sigma(x)$ ειδικότερα έτσι που να είναι $\bar{a}\,(0,0,\frac{1}{2})=3\bar{i}+2\bar{k}$. Η έτσι προσδιορισμένη συνάρτηση $\bar{a}(x,y,z)$ ας παρασταθή με $\bar{\delta}(x,y,z)$.

γ) Να υπολογισθή με αυτό το $\bar{\delta}$ το ολοκλήρωμα $\iint\limits_{S_0}(\bar{\delta}\,\bar{n})\,dS$, όπου S_0 το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές $A(3,2,5)$, $B(-1,-1,1)$, $\Gamma(1,-1,1)$ και $\bar{n}$ το κάθετο στο S_0 διάνυσμα για το οποίο η διάταξη $\overline{AB}, \overline{A\Gamma}, \bar{n}$ είναι δεξιόστροφη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 31ο

Αρμονική ανάλυση περιοδικών συναρτήσεων

§ 456. Ας είναι η $\sigma(x)$ περιοδική συνάρτηση με περίοδο τον αριθμό p (σταθερά >0), δηλαδή ας είναι $\sigma(x+p)=\sigma(x)$ για κάθε x από το διάστημα $-\infty<x<+\infty$.

Αν η περίοδος p διαφέρει από το 2π, $p\neq 2\pi$, τότε θεωρούμε αντί της $\sigma(x)$ την συνάρτηση

$$\varphi(x) = \sigma\left(\frac{px}{2\pi}\right)$$

που έχει περίοδο 2π. (Πράγματι $\varphi(x+2\pi)=\sigma\left(\frac{p(x+2\pi)}{2\pi}\right)$ $=\sigma\left(\frac{px}{2\pi}+p\right)=\sigma\left(\frac{px}{2\pi}\right)=\varphi(x)$).

Την ίδια περίοδο 2π με την $\varphi(x)$ έχει και η συνάρτηση (που λέγεται <u>τριγωνομετρικό πολυώνυμο</u> με $\nu+1$ όρους):

(456.1) $S_\nu(x)=\frac{A_0}{2}+(A_1\,\text{συν}\,x+B_1\,\text{ημ}\,x)+(A_2\,\text{συν}\,2x+B_2\,\text{ημ}\,2x)+\dots+(A_\nu\,\text{συν}\,\nu x+B_\nu\,\text{ημ}\,\nu x)$, όπου ν ένας αυθαίρετα ορισμένος φυσικός αριθμός και $A_0, A_1, B_1, \ldots, A_\nu, B_\nu$, πραγματικές σταθερές. Είναι πολύ φυσικό να θέσουμε το ακόλουθο πρόβλημα:

Ζητείται οι συντελεστές $A_0, A_1, B_1, \ldots, A_\nu, B_\nu$ του αθροίσματος $S_\nu(x)$ να προσδιοριστούν έτσι που το $S_\nu(x)$ να προσεγγίζη τη συνάρτηση $\varphi(x)$ κατά τον καλύτερο τρόπο, όπου «κατά τον καλύτερο τρόπο» έχει την εξής σημασία:

Το ολοκλήρωμα πάνω σε μια περίοδο 2π

$$(456.2)\quad J_\nu = \int_0^{2\pi} \left(\varphi(x) - S_\nu(x)\right)^2 dx$$

του τετραγώνου του «σφάλματος» $\varphi(x) - S_\nu(x)$ της προσεγγίζουσας συναρτήσεως $S_\nu(x)$ να έχη την ελάχιστη δυνατή τιμή. (Εδώ κάμνουμε εννοείται την υπόθεση ότι η συνάρτηση $\varphi(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα μιας περιόδου της).

Το J_ν είναι μια ακέραια πολυωνυμική συνάρτηση των $A_0, A_1, B_1, \ldots, A_\nu, B_\nu$ βαθμού δευτέρου:

$$(456.3)\quad \begin{aligned} J_\nu &= \int_0^{2\pi} \varphi^2(x)\,dx - 2\int_0^{2\pi} \varphi(x) S_\nu(x)\,dx + \int_0^{2\pi} S_\nu^2(x)\,dx \\ &= \int_0^{2\pi} \varphi^2(x)\,dx - 2\frac{A_0}{2}\int_0^{2\pi} \varphi(x)\,dx - 2A_1\int_0^{2\pi} \varphi(x)\,\text{συν}\,x\,dx \\ &\quad - 2B_1\int_0^{2\pi} \varphi(x)\,\text{ημ}\,x\,dx - \cdots + \frac{A_0^2}{4}\int_0^{2\pi} dx \\ &\quad + 2\frac{A_0}{2}A_1\int_0^{2\pi} \text{συν}\,x\,dx + \cdots + A_1^2\int_0^{2\pi} \text{συν}^2 x\,dx \\ &\quad + 2A_1B_1\int_0^{2\pi} \text{συν}\,x\,\text{ημ}\,x\,dx + \cdots + B_1^2\int_0^{2\pi} \text{ημ}^2 x\,dx + 2B_1A_2\int_0^{2\pi} \text{ημ}\,x\,\text{συν}\,2x\,dx \\ &\quad + \cdots + B_\nu^2\int_0^{2\pi} \text{ημ}^2 \nu x\,dx. \end{aligned}$$

Επομένως για να έχη το J_ν ελάχιστη τιμή σε μια θέση $(a_0, a_1, b_1, \ldots, a_\nu, b_\nu)$, δηλαδή για ένα σύστημα τιμών $A_0 = a_0$, $A_1 = a_1, \ldots, B_\nu = b_\nu$, πρέπει (αποδείχνεται δε εύκολα με τη μέθοδο του §401,2, σελις 110, ότι αυτό είναι και αρκετό) να ισχύουν οι εξής $2\nu+1$ σχέσεις (για ευκολία της γραφής παραλείπουμε από το J_ν τον δείκτη ν):

(456.4)
$$\frac{\partial J(a_0, a_1, b_1, \ldots, a_\nu, b_\nu)}{\partial A_0} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial A_1} = 0,$$

$$\frac{\partial J}{\partial B_1} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial J}{\partial A_\nu} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial B_\nu} = 0.$$

(Όλες αυτές οι μερικές παράγωγοι είναι παρμένες στη θέση $(a_0, a_1, \ldots, b_\nu)$, όπως υποδηλώνουμε στην πρώτη παραγώγιση).

Οι παραπάνω σχέσεις είναι γραμμικές (πρωτοβάθμιες) ως προς τους αγνώστους $a_0, a_1, \ldots b_\nu$ και τους προσδιορίζουν μονότροπα.

Ιδού γιατί:

Παραπάνω βρήκαμε ότι

$$\int_0^{2\pi} S_\nu^2(x)\,dx = \frac{A_0^2}{4}\int_0^{2\pi} dx + 2\frac{A_0}{2}A_1\int_0^{2\pi} συν x\,dx + 2\frac{A_0}{2}B_1\int_0^{2\pi} ημ x\,dx$$

$$+ 2\frac{A_0}{2}A_2\int_0^{2\pi} συν 2x\,dx + \cdots + A_1^2\int_0^{2\pi} συν^2 x\,dx + 2A_1B_1\int_0^{2\pi} συν x\, ημ x\,dx +$$

$$+ 2A_1A_2\int_0^{2\pi} συν x\, συν 2x\,dx + \cdots + B_1^2\int_0^{2\pi} ημ^2 x\,dx + 2B_1A_2\int_0^{2\pi} ημ x\, συν 2x\,dx$$

$$+ 2B_1B_2\int_0^{2\pi} ημ x\, ημ 2x\,dx + \cdots + A_2^2\int_0^{2\pi} συν^2 2x\,dx + 2A_2B_2\int_0^{2\pi} συν 2x\, ημ 2x\,dx + \cdots$$

$$+ B_\nu^2\int_0^{2\pi} ημ^2 \nu x\,dx.$$

Αλλά έχουμε

$$\int_0^{2\pi} \text{συν}\, x\, dx = \int_0^{2\pi} \text{ημ}\, x\, dx = \int_0^{2\pi} \text{συν}\, 2x\, dx = \int_0^{2\pi} \text{ημ}\, 2x\, dx = \cdots = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \text{συν}^2 x\, dx = \int_0^{2\pi} \text{ημ}^2 x\, dx = \int_0^{2\pi} \text{συν}^2 2x\, dx = \int_0^{2\pi} \text{ημ}^2 2x\, dx = \cdots = \pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \text{συν}\, x\, \text{ημ}\, x\, dx = \int_0^{2\pi} \text{συν}\, x\, \text{συν}\, 2x\, dx = \int_0^{2\pi} \text{ημ}\, x\, \text{συν}\, 2x\, dx = \int_0^{2\pi} \text{ημ}\, x\, \text{ημ}\, 2x\, dx = \cdots = 0,$$

διότι γενικώς, για οποιαδήποτε ακέραια κ και λ, ισχύουν οι τύποι

$$\int_0^{2\pi} \text{συν}\, \kappa x\, \text{συν}\, \lambda x\, dx = \begin{cases} \pi & \text{όταν } \kappa = \lambda \neq 0 \\ 0 & \text{όταν } \kappa \neq \lambda, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \text{συν}\, \kappa x\, \text{ημ}\, \lambda x\, dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \text{ημ}\, \kappa x\, \text{ημ}\, \lambda x\, dx = \begin{cases} \pi & \text{όταν } \kappa = \lambda \neq 0 \\ 0 & \text{όταν } \kappa \neq \lambda . \end{cases}$$

Άρα, αν παραλείψουμε μέσα στην παραπάνω έκφραση του $\int_0^{2\pi} S_\nu^2(x)dx$ τους όρους που μηδενίζονται, θα έχουμε:

$$\int_0^{2\pi} S_\nu^2(x)\, dx = \frac{A_0^2}{4} 2\pi + (A_1^2 + B_1^2 + A_2^2 + \cdots + B_\nu^2)\pi = \frac{\pi A_0^2}{2} + \pi \sum_{\kappa=1}^{\nu} (A_\kappa^2 + B_\kappa^2).$$

Επομένως η σχέση (456.3) μπορεί να γραφή απλούστερα ως εξής:

$$(456.5) \quad J_\nu = \int_0^{2\pi} \varphi^2(x)\, dx - A_0 \int_0^{2\pi} \varphi(x)\, dx - 2A_1 \int_0^{2\pi} \varphi(x)\, \text{συν}\, x\, dx$$

$$-2B_1 \int_0^{2\pi} \varphi(x)\, \text{ημ}\, x\, dx - \cdots + \frac{\pi A_0^2}{2} + \pi (A_1^2 + B_1^2 + \cdots + A_\nu^2 + B_\nu^2).$$

Μπορούμε τώρα να εκτελέσουμε τις μερικές παραγωγίσεις που αναγράφονται στις σχέσεις (456.4)· έτσι λαβαίνουμε

$$\frac{\partial J(a_0, a_1, \ldots, b_\nu)}{\partial A_0} = -\int_0^{2\pi} \varphi(x)\,dx + \pi a_0 = 0,\ \text{άρα}\ a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x)\,dx\,,$$

$$\frac{\partial J(a_0, a_1, \ldots, b_\nu)}{\partial A_1} = -2\int_0^{2\pi} \varphi(x)\,\text{συν}\,x\,dx + 2\pi a_1 = 0,\ \text{άρα}\ a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x)\,\text{συν}\,x\,dx,$$

$$\frac{\partial J(a_0, \ldots, b_\nu)}{\partial B_1} = -2\int_0^{2\pi} \varphi(x)\,\text{ημ}\,x\,dx + 2\pi b_1 = 0,\ \text{άρα}\ b_1 = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi} \varphi(x)\,\text{ημ}\,x\,dx$$

κ.ο.κ. Γενικώς έχουμε για $\kappa = 0, 1, 2, \ldots, \nu$.

$$\frac{\partial J}{\partial A_\kappa} = -2\int_0^{2\pi} \varphi(x)\,\text{συν}\,\kappa x\,dx + 2\pi a_\kappa = 0,\ \text{άρα}\ a_\kappa = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x)\,\text{συν}\,\kappa x\,dx\,,$$

$$\frac{\partial J}{\partial B_\kappa} = -2\int_0^{2\pi} \varphi(x)\,\text{ημ}\,\kappa x\,dx + 2\pi b_\kappa = 0\,,\ \text{άρα}\ b_\kappa = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x)\,\text{ημ}\,\kappa x\,dx.$$

Οι τύποι

$$(456.6)\qquad \begin{aligned} a_\kappa &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x)\,\text{συν}\,\kappa x\,dx \quad \text{για}\ \kappa = 0, 1, 2, 3, \ldots, \nu \\ b_\kappa &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x)\,\text{ημ}\,\kappa x\,dx \quad \text{για}\ \kappa = 1, 2, 3, \ldots, \nu\,, \end{aligned}$$

λέγονται τύποι Euler - Fourier και λύνουν το πρόβλημα που θέσαμε, παρέχουν δηλαδή τις τιμές των συντελεστών του τριγωνομετρικού πολυωνύμου $S_\nu(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{\kappa=1}^{\nu} (A_\kappa\,\text{συν}\,\kappa x + B_\kappa\,\text{ημ}\,\kappa x)$ για το οποίο το ολοκλήρωμα

$$J_\nu = \int_0^{2\pi} \left[\varphi(x) - S_\nu(x)\right]^2 dx$$

έχει ελάχιστη δυνατή τιμή. Η τιμή αυτή προκύπτει από την έκφραση (456.3), όταν μέσα σ' αυτήν αντικαταστήσουμε τα $A_0, A_1, B_1, \ldots, A_\nu, B_\nu$ με τα a_0, $a_1, b_1, \ldots, a_\nu, b_\nu$ αντιστοίχως:

$$\text{Ελάχιστο}\ J_\nu = \int_0^{2\pi} \varphi^2(x)\,dx - a_0\int_0^{2\pi} \varphi(x)\,dx - 2a_1\int_0^{2\pi} \varphi(x)\,\text{συν}\,x\,dx -$$

$$-2b_1\int_0^{2\pi}\varphi(x)\eta\mu x\,dx-\dots-2a_\nu\int_0^{2\pi}\varphi(x)\sigma\upsilon\nu\,\nu x\,dx-2b_\nu\int_0^{2\pi}\varphi(x)\eta\mu\,\nu x\,dx$$

$$+\frac{\pi a_0^2}{2}+\pi\left(a^2+b_1^2+\dots+a_\nu^2+b_\nu^2\right)$$

$$=\int_0^{2\pi}\varphi^2(x)dx-a_0\pi a_0-2a_1\pi a_1-2b_1\pi b_1-\dots-2a_\nu\pi a_\nu-2b_\nu\pi b_\nu$$

$$+\frac{\pi a_0^2}{2}+\pi\left(a_1^2+b_1^2+\dots+a_\nu^2+b_\nu^2\right).$$

Άρα

$$\text{(456.7)}\quad \text{Ελάχιστο } J_\nu=\int_0^{2\pi}\varphi^2(x)dx-\pi\left(\frac{a_0^2}{2}+a_1^2+b_1^2+\dots+a_\nu^2+b_\nu^2\right).$$

§457. <u>Σχόλια</u>. 1) Οι τιμές (456.6) των συντελεστών a_κ και b_κ δεν εξαρτιούνται από τον αρχικά εκλεγμένο φυσικό αριθμό ν. Άρα οι όροι του τριγωνομετρικού πολυωνύμου

$$S_\nu(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{\kappa=1}^{\nu}(a_\kappa\,\sigma\upsilon\nu\,\kappa x+b_\kappa\,\eta\mu\,\kappa x)$$

που δίνει για δοσμένο δείκτη ν την <u>καλύτερη</u>, όπως την ορίσαμε, προσέγγιση της περιοδικής συναρτήσεως $\varphi(x)$, συμπίπτουν με τους $\nu+1$ πρώτους όρους του πολυωνύμου $S_{\nu+\mu}(x)$ που δίνει, για μεγαλύτερο δείχτη $\nu+\mu$, την καλύτερη προσέγγιση της $\varphi(x)$. Όσον αφορά την εξάρτηση της ελάχιστης τιμής

$$J_\nu=\int_0^{2\pi}\left(\varphi(x)-S_\nu(x)\right)^2dx$$

από τον δείκτη, παρατηρούμε ότι η τιμή αυτή ελαττώνεται όταν ο ν αυξάνη. Αυτό βγαίνει αμέσως από τη σχέση (456.7), επειδή στο δεύτερο μέλος της με την αύξηση του ν προσθέτονται νέοι όροι οι οποίοι είναι όλοι $\leqq 0$.

2). Η σειρά

$$\frac{a_0}{2}+(a_1\,\sigma\upsilon\nu\,x+b_1\,\eta\mu\,x)+(a_2\,\sigma\upsilon\nu\,2x+b_2\,\eta\mu\,2x)+\dots$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{\kappa=1}^{+\infty}(a_\kappa\,\sigma\upsilon\nu\,\kappa x+b_\kappa\,\eta\mu\,\kappa x),$$

όπου οι συντελεστές a_κ, b_κ έχουν τις τιμές

$$a_\kappa = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\omega)\,\text{συν}\kappa\omega\, d\omega\,,\ \text{για } \kappa = 0,1,2,\ldots,$$

$$b_\kappa = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\omega)\,\text{ημ}\kappa\omega\, d\omega\,,\ \text{για } \kappa = 1,2,3,\ldots$$

από τους τύπους Euler-Fourier, λέγεται <u>τριγωνομετρική σειρά</u> ή <u>σειρά Fourier αντίστοιχη στην περιοδική συνάρτηση $\varphi(x)$</u>.

Ο Lejeune-Dirichlet απόδειξε ότι <u>επαρκής</u> συνθήκη για τη σύγκλιση της σειράς αυτής είναι το εξής:

Το διάστημα της περιόδου της $\varphi(x)$ να μπορή να διαιρεθή σε πεπερασμένο πλήθος υποδιαστημάτων μέσα στο καθένα από τα οποία η $\varphi(x)$ είναι <u>περιορισμένη και μονότονη</u> συνάρτηση, δηλαδή μέσα στο καθένα από τα υποδιαστήματα ισχύει η σχέση

$$|\varphi(x)| \leqq \text{κάποιας σταθεράς}$$

και η $\varphi(x)$ είναι ή αύξουσα ή φθίνουσα με ευρεία σημασία συνάρτηση.

Όσον αφορά το άθροισμα της συγκλίνουσας αυτής σειράς σε μια τυχαία θέση x_0, ο Dirichlet απόδειξε ότι ισούται με το ημιάθροισμα

$$\frac{1}{2}\Big(\lim_{h\to 0^+} \varphi(x_0+h) + \lim_{h\to 0^-} \varphi(x_0+h)\Big)$$

των ορίων της $\varphi(x)$ από δεξιά και από αριστερά στη θέση x_0. Επομένως το άθροισμα αυτό ισούται με την τιμή $\varphi(x_0)$, όταν η θέση x_0 είναι θέση συνέχειας της συναρτήσεως $\varphi(x)$.

§458. Πριν δώσουμε μερικά παραδείγματα είναι σκόπιμο να κάμουμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις.

1) Από τη σειρά Fourier

$$(458.1)\qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{+\infty} a_\nu\,\text{συν}\nu x + b_\nu\,\text{ημ}\nu x$$

$$\text{με}\ \begin{cases} a_\nu = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(\omega)\,\text{συν}\nu\omega\, d\omega\,,\ (\nu = 0,1,2,\ldots) \\[2ex] b_\nu = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(\omega)\,\text{ημ}\nu\omega\, d\omega\,,\ (\nu = 1,2,3\ldots) \end{cases}$$

που αντιστοιχεί σε μια περιοδική συνάρτηση $\varphi(x)$ με περίοδο το 2π, βρίσκουμε ως εξής τη σειρά Fourier που αντιστοιχεί σε μια περιοδική συνάρτηση $\sigma(x)$ με περίοδο το p: Όπως ήδη είπαμε (§ 456), θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(t) = \sigma\left(\frac{pt}{2\pi}\right)$ που έχει περίοδο το 2π και επομένως αντίστοιχη σειρά Fourier την εξής:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{+\infty} (a_\nu \operatorname{συν} \nu t + b_\nu \operatorname{ημ} \nu t)$$

$$\text{με} \quad a_\nu = \int_0^{2\pi} \varphi(\omega) \operatorname{συν} \nu\omega \, d\omega \qquad b_\nu = \int_0^{2\pi} \varphi(\omega) \operatorname{ημ} \nu\omega \, d\omega.$$

Θέτοντας τώρα $\frac{pt}{2\pi} = x$ (απ' όπου $t = \frac{2\pi x}{p}$) λαμβάνουμε για σειρά Fourier αντίστοιχη στη συνάρτηση $\sigma(x)$ τη σειρά

$$(458.2) \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{+\infty} \left(a_\nu \operatorname{συν}\left(\nu \frac{2\pi x}{p}\right) + b_\nu \operatorname{ημ}\left(\nu \frac{2\pi x}{p}\right)\right).$$

Για τους συντελεστές a_ν, b_ν της σειράς αυτής έχουμε, αν αντικαταστήσουμε τη $\varphi(\omega)$ με την τιμή της $\sigma\left(\frac{p\omega}{2\pi}\right)$, τους τύπους

$$a_\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sigma\left(\frac{p\omega}{2\pi}\right) \operatorname{συν} \nu\omega \, d\omega, \quad b_\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sigma\left(\frac{p\omega}{2\pi}\right) \operatorname{ημ} \nu\omega \, d\omega.$$

Τα ολοκληρώματα αυτά μετασχηματίζονται στα ακόλουθα με την αλλαγή $\frac{p\omega}{2\pi} = x$ της μεταβλητής ολοκληρώσεως, $\left(\omega = \frac{2\pi x}{p}, \; d\omega = \frac{2\pi}{p} dx\right)$,

(458.3)

$$a_\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^p \sigma(x) \operatorname{συν}\left(\nu \frac{2\pi x}{p}\right) \cdot \frac{2\pi}{p} \, dx = \frac{1}{p/2} \int_0^p \sigma(x) \operatorname{συν}\left(\nu \frac{2\pi x}{p}\right) dx, \quad (\nu = 0, 1, 2 \ldots)$$

$$b_\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^p \sigma(x) \operatorname{ημ}\left(\nu \frac{2\pi x}{p}\right) \cdot \frac{2\pi}{p} \, dx = \frac{1}{p/2} \int_0^p \sigma(x) \operatorname{ημ}\left(\nu \frac{2\pi x}{p}\right) dx,$$

$(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$.

Έτσι βρήκαμε ότι στην περιοδική συνάρτηση $\sigma(x)$ με περίοδο το p αντιστοιχεί η σειρά Fourier (458.2) με συντελεστές a_ν, b_ν που παρέχονται από τους τύπους (458.3).

2) Για μιαν (ολοκληρώσιμη) περιοδική συνάρτηση $\sigma(x)$ περιόδου p ισχύει η σχέση

$$\int_0^p \sigma(x)dx = \int_{x_0}^{x_0+p} \sigma(x)dx = \int_{x_0}^{x_0+p} \sigma(\omega)d\omega,$$

όπου x_0 ένας τυχαίος ορισμένος αριθμός.

Πραγματικά, έχουμε

$$\int_{x_0}^{x_0+p} \sigma(\omega)\,d\omega = \int_{x_0}^{0} + \int_0^p + \int_p^{x_0+p} = \int_p^{x_0+p} - \int_0^{x_0} + \int_0^p .$$

Αλλά με την αλλαγή $x=\omega-p$ το $\int_p^{x_0+p} \sigma(\omega)d\omega$ μετασχηματίζεται στο $\int_0^{x_0} \sigma(x+p)\,dx$· είναι όμως $\sigma(x+p)\equiv\sigma(x)$, άρα $\int_0^{x_0} \sigma(x+p)dx = \int_0^{x_0} \sigma(x)dx$ και συνεπώς $\int_p^{x_0+p} - \int_0^{x_0} = 0$.

Έχουμε λοιπόν τελικά

$$\int_{x_0}^{x_0+p} \sigma(\omega)d\omega = 0 + \int_0^p \sigma(\omega)d\omega = \int_0^p \sigma(x)dx\,, \text{ o.ε.δ.}$$

3) Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη παρατήρηση βρίσκουμε για τους συντελεστές Fourier μιας συναρτήσεως $\varphi(x)$ περιόδου 2π και τους εξής τύπους:

$$a_\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\omega)\,\text{συν}\,\nu\omega\,d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\omega)\,\text{συν}\,\nu\omega\,d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \varphi(\omega)\,\text{συν}\,\nu\omega\,d\omega + \int_0^{\pi} \varphi(\omega)\,\text{συν}\,\nu\omega\,d\omega\right).$$

Αλλά με την αλλαγή μεταβλητής $\omega=-t,\,(d\omega=-dt)$, πορίζομαστε

$$\int_{-\pi}^{0}\varphi(\omega)\,\text{συν}\,\nu\omega\,d\omega=\int_{\pi}^{0}\varphi(-t)\,\text{συν}\,\nu t\cdot(-dt)=\int_{0}^{\pi}\varphi(-t)\,\text{συν}\,\nu t\,dt=\int_{0}^{\pi}\varphi(-\omega)\,\text{συν}\,\nu\omega\,d\omega.$$

Ἄρα $$a_\nu=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\varphi(-\omega)\,\text{συν}\,\nu\omega\,d\omega+\int_0^{\pi}\varphi(\omega)\,\text{συν}\,\nu\omega\,d\omega\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\varphi(-\omega)+\varphi(\omega)\right]\text{συν}\,\nu\omega\,d\omega\,,\ \text{για}\ \nu=0,1,2,3,\ldots$$

Ὅμοια βρίσκουμε

$$b_\nu=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\omega)\,\text{ημ}\,\nu\omega\,d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[-\varphi(-\omega)+\varphi(\omega)\right]\text{ημ}\,\nu\omega\,d\omega.$$

Ἀνάλογα ἔχουμε για μια περιοδική συνάρτηση $\sigma(x)$ περιόδου p:

$$a_\nu=\frac{1}{p/2}\int_0^{p/2}\left(\sigma(-\omega)+\sigma(\omega)\right)\text{συν}\left(\nu\frac{2\pi\omega}{p}\right)d\omega,$$

(458.4)

$$b_\nu=\frac{1}{p/2}\int_0^{p/2}\left(\sigma(\omega)-\sigma(-\omega)\right)\text{ημ}\left(\nu\frac{2\pi\omega}{p}\right)d\omega.$$

4) Ἀπὸ τους τελευταίους τύπους ἔπονται τα ἑξῆς:

Ὅταν η περιοδική συνάρτηση $\sigma(x)$ περιόδου p εἶναι ἄρτια, δηλαδὴ ὅταν $\sigma(-x)\equiv\sigma(x)$, οι μεν συντελεστὲς b_ν εἶναι ὅλοι μηδέν, οι δε a_ν δίνονται και ἀπὸ τους τύπους

$$a_\nu=\frac{2}{p/2}\int_0^{p/2}\sigma(\omega)\,\text{συν}\left(\nu\frac{2\pi\omega}{p}\right)d\omega\ ,\quad \nu=0,1,2,3,\ldots$$

Ὅταν η περιοδική συνάρτηση $\sigma(x)$ περιόδου p εἶναι περιττή, δηλαδὴ ὅταν $\sigma(-x)\equiv-\sigma(x)$, οι μεν συντελεστὲς a_ν εἶναι ὅλοι μηδέν, οι δε συντελεστὲς b_ν δίνονται και ἀπὸ τους τύπους

$$b_\nu=\frac{2}{p/2}\int_0^{p/2}\sigma(\omega)\,\text{ημ}\left(\nu\frac{2\pi\omega}{p}\right)d\omega\ ,\quad \nu=1,2,3\ldots$$

Ειδικώς, ὅταν $p=2\pi$, ἔχουμε για μιαν ἄρτια συνάρτηση $\varphi(x)$:

(458.5) $$a_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(\omega)\,\text{συν}\,\nu\omega\, d\omega \text{ για } \nu = 0,1,2,\ldots\ , \quad b_\nu = 0 \text{ για } \nu = 1,2,3,\ldots$$

και για μια περιττή $\varphi(x)$:

(458.6) $$a_\nu = 0\ (\nu = 0,1,2,\ldots)\ , \quad b_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(\omega)\,\text{ημ}\,\nu\omega\, d\omega \text{ για } \nu = 1,2,3,\ldots$$

5) Μια συνάρτηση $\sigma(x)$ είναι ορισμένη σ'όλο το διάστημα $-\infty < x < +\infty$, όταν ξέρουμε 1ο ότι είναι περιοδική περιόδου p και 2ο ποιες τιμές παίρνει σ'ένα διάστημα $x_0 \leqq x < x_0 + p$ πλάτους ίσου προς την περίοδο p. Διότι, ας είναι x_1 ένας τυχαίος πραγματικός αριθμός και ας καλέσουμε k_1 το $A\upsilon\left(\frac{x_1 - x_0}{p}\right)$, δηλαδή τον μέγιστο ακέραιο που δεν υπερβαίνει τον αριθμό $\frac{x_1 - x_0}{p}$. Θα έχουμε τότε

$$\frac{x_1 - x_0}{p} = k_1 + \theta\ , \quad \text{όπου} \quad 0 \leqq \theta < 1,$$

και επομένως

$$x_1 = (x_0 + \theta p) + k_1 p \quad \text{όπου } k_1 \text{ ακέραιος.}$$

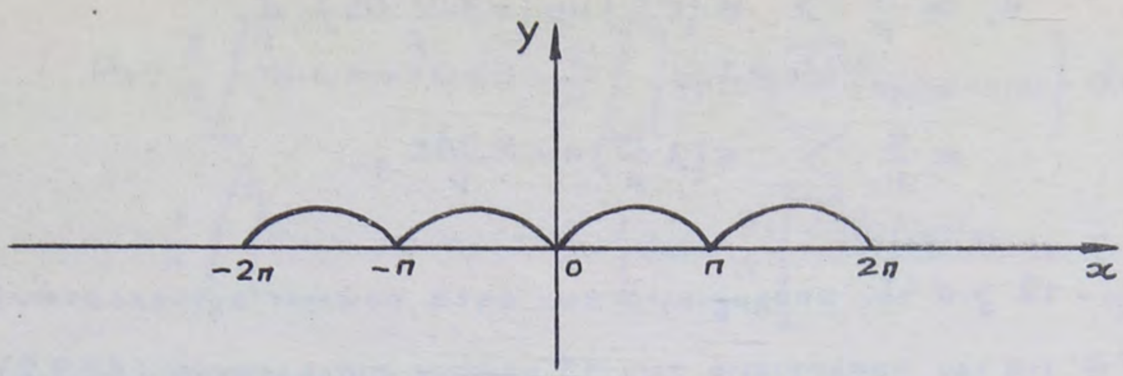
Άρα, λόγω της περιοδικότητας, θα είναι $\sigma(x_1) = \sigma(x_0 + \theta p)$, όπου όμως $x_0 \leqq x_0 + \theta p < x_0 + p$ και επομένως $\sigma(x_0 + \theta p) =$ ήδη ορισμένη τιμή.

Για τον παραπάνω λόγο, αν π.χ. επιβάλουμε στη συνάρτηση $\varphi(x)$ να είναι 1ο περιοδική με περίοδο το 2π και 2ον να παίρνη στο διάστημα $-\pi \leqq x < \pi$ τις ακόλουθες τιμές

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\text{ημ}\,x & \text{για } -\pi \leqq x < 0 \\ \text{ημ}\,x & \text{για } 0 \leqq x < \pi, \end{cases}$$

τότε η $\varphi(x)$ θα είναι τελείως ορισμένη στο διάστημα $-\infty < x < +\infty$. Η γραφική της παράσταση για $-\infty < x < +\infty$ θα προκύπτη από το τόξο: $y = \varphi(x)$ για $-\pi \leqq x < \pi$, με μεταφορά (= παράλληλη μετατόπιση) τούτου κατά τα παράλληλα προς τον OX διανύσματα που έχουν συντεταγμένες $(2k\pi, 0)$ όπου k αυθαίρετος ακέραιος (δηλ. $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$).

Ιδού ένα μέρος αυτής της γραφικής παράστασης.



§459. <u>Παραδείγματα αρμονικής ανάλυσης</u>. Αρμονική ανάλυση μιας περιοδικής συναρτήσεως $\sigma(x)$ λέγεται ο προσδιορισμός της αντίστοιχης σειράς Fourier (458.2), προσδιορισμός που φυσικά πετυχαίνεται με τον υπολογισμό των συντελεστών $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_\nu, \beta_\nu, \dots$ της σειράς αυτής.

Στις εφαρμογές υπολογίζονται εννοείται μόνο μερικοί από τους πρώτους κατά σειρά συντελεστές, π.χ. οι 7 πρώτοι

(459.1) $$\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3$$

ή οι 13 πρώτοι

(459.2) $$\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_6, \beta_6 .$$

Ο υπολογισμός γίνεται συνήθως με προσεγγιστικές μεθόδους, είτε διότι η περιοδική συνάρτηση $\sigma(x)$ είναι εμπειρικώς γνωστή δια των τιμών που παίρνει για ορισμένες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής x είτε διότι ο ακριβής υπολογισμός των ολοκληρωμάτων των τύπων (458.3) είναι ανέφικτος με στοιχειακές συναρτήσεις ή και απλώς πολύπλοκος.

Στις προσεγγιστικές αυτές μεθόδους αντικαθιστούμε τα ολοκληρώματα των τύπων (458.3) με αθροίσματα όπως αυτά εμφανίζονται στο δεξιό μέλος της σχέσεως (261.1). Έτσι π.χ. έχουμε

(459.3) $$\begin{aligned} \alpha_\nu &\approx \frac{2}{P} \sum_{\lambda=1,2,\dots,\mu} \sigma\left(\frac{\lambda P}{\mu}\right) \text{συν}\left(\nu \frac{2\pi\lambda P/\mu}{P}\right) \cdot \frac{P}{\mu} \\ &= \frac{2}{\mu} \sum_{\lambda=1,2,\dots,\mu} \sigma\left(\frac{\lambda P}{\mu}\right) \text{συν}\, \frac{2\pi\lambda\nu}{\mu} \end{aligned}$$

$$b_\nu \approx \frac{2}{P}\sum_{\lambda=1,2,\dots,\mu} \sigma\left(\frac{\lambda P}{\mu}\right) \eta\mu\left(\nu\frac{2\pi\lambda P/\mu}{P}\right)\cdot\frac{P}{\mu}$$

$$= \frac{2}{\mu}\sum_{\lambda=1,2,\dots,\mu} \sigma\left(\lambda\frac{P}{\mu}\right)\eta\mu\frac{2\pi\lambda\nu}{\mu},$$

όπου $\mu = 12$ για τον υπολογισμό των εφτά πρώτων συντελεστών (459.1), ή $\mu = 24$ για τον υπολογισμό των 13 πρώτων συντελεστών (459.2).

Μέσα στα αθροίσματα αυτά οι τιμές $\sigma\left(\frac{\lambda P}{\mu}\right)$ της συναρτήσεως παρέχονται από τα εμπειρικά δεδομένα (π.χ. από το εμπειρικό διάγραμμα (= εμπειρική γραφική παράσταση) της συναρτησιακής σχέσεως $y=\sigma(x)$)· οι πολλαπλασιαστές $\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi\lambda\nu}{\mu}$ και $\eta\mu\frac{2\pi\lambda\nu}{\mu}$ είναι οι γνωστοί τριγωνομετρικοί αριθμοί των ακέραιων πολλαπλασίων του τόξου των 30° όταν $\mu=12$ ή του τόξου 15° όταν $\mu=24$. Από έλλειψη χώρου δεν θ' ασχοληθούμε περισσότερο με την πρακτική διάταξη και διεξαγωγή του υπολογισμού των αθροισμάτων (459.3), αλλά θα κάμουμε την πλήρη και ακριβή αρμονική ανάλυση μερικών απλών περιοδικών συναρτήσεων.

I) Ας είναι η $\varphi_1(x)$ 1ο) περιοδική με περίοδο το 2π και 2ο)

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}-\eta\mu x & \text{για } -\pi \leqq x < 0\\ \eta\mu x & \text{για } 0 \leqq x < \pi.\end{cases}$$ (Βλέπε σχήμα, σελ. 273).

Από τον παραπάνω ορισμό της έπεται ότι η $\varphi_1(x)$ είναι άρτια συνεχής συνάρτηση. Άρα για τον υπολογισμό των συντελεστών της αντίστοιχης σειράς Fourier θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους (458.5).

Έτσι έχουμε $b_\nu = 0$ $(\nu = 1,2,3,\dots)$ και

$$a_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \eta\mu\omega\,\sigma\upsilon\nu\nu\omega\,d\omega, \text{ για } \nu=0,1,2,3,\dots$$

Άρα

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \eta\mu\omega\,d\omega=\frac{4}{\pi},\quad a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \eta\mu\omega\,\sigma\upsilon\nu\omega\,d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \eta\mu 2\omega\,d\omega=0$$

και για $\nu \geqq 2$

$$a_\nu=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \eta\mu\,\omega\,\sigma\upsilon\nu\,\nu\omega\,d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left\{\eta\mu(\omega+\nu\omega)+\eta\mu(\omega-\nu\omega)\right\}d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left\{\eta\mu(\nu+1)\omega-\eta\mu(\nu-1)\omega\right\}d\omega=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-\sigma\upsilon\nu(\nu+1)\omega}{\nu+1}+\frac{\sigma\upsilon\nu(\nu-1)\omega}{\nu-1}\right]_0^\pi .$$

Επομένως για ν περιττό (οπότε τα $\nu+1$ και $\nu-1$ θα είναι άρτιοι ακέραιοι) $a_\nu=0$ και για $\nu=2\lambda$ άρτιο θα έχουμε

$$a_{2\lambda}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{2\lambda+1}+\frac{-2}{2\lambda-1}\right)=-\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2\lambda-1}-\frac{1}{2\lambda+1}\right)$$

$$=-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{(2\lambda-1)(2\lambda+1)},\ \text{για}\ \lambda=1,2,3,\ldots$$

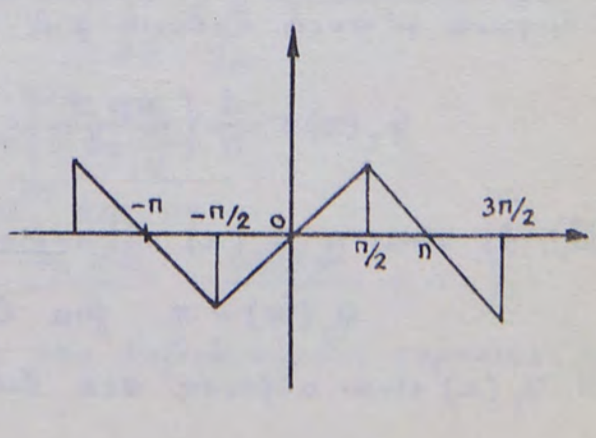
Εξ άλλου η $\varphi_1(x)$ είναι όχι μόνο συνεχής αλλά και τμηματικά μονότονη στο διάστημα $-\pi\leqq x<\pi$ μιας περιόδου· πράγματι είναι η $\varphi_1(x)$ αύξουσα στα υποδιαστήματα $(-\pi,-\frac{\pi}{2})$ και $(0,\frac{\pi}{2})$, φθίνουσα στα υποδιαστήματα $(-\frac{\pi}{2},0)$ και $(\frac{\pi}{2},\pi)$. Άρα κατά την πρόταση του Dirichlet η αντίστοιχη σειρά Fourier συγκλίνει για κάθε x και το άθροισμα της ισούται με την τιμή $\varphi_1(x)$ της συναρτήσεως (αυτό εκφράζεται με τα λόγια: η συνάρτηση $\varphi_1(x)$ παριστάνεται από τη σειρά της Fourier).

Έτσι χρησιμοποιώντας τις τιμές των συντελεστών που βρήκαμε παραπάνω, έχουμε για $-\infty<x<+\infty$:

$$\varphi_1(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{1\cdot 3}+\frac{\sigma\upsilon\nu 4x}{3\cdot 5}+\frac{\sigma\upsilon\nu 6x}{5\cdot 7}+\cdots\right).$$

II). Ας είναι η $\varphi_2(x)$ 1ο) περιοδική με περίοδο το 2π και 2ο)

$$\varphi_2(x)=\begin{cases}x & \text{για}\ -\frac{\pi}{2}\leqq x<\frac{\pi}{2}\\ \pi-x & \text{για}\ \frac{\pi}{2}\leqq x<\frac{3\pi}{2}.\end{cases}$$



Κατά τον ορισμό αυτό η $\varphi_2(x)$ είναι συνεχής και τμηματικά μονότονη, άρα (κατά την πρόταση του Dirichlet) ισούται, για κάθε x, με το άθροισμα της συγκλίνουσας σειράς Fourier που της αντιστοιχεί. Επειδή εξ άλλου η $\varphi_2(x)$ είναι (όπως φαίνεται αμέσως και από την παραπάνω γραφική της παράσταση) περιττή συνάρτηση, θα εφαρμόσουμε για τον υπολογισμό των συντελεστών της αντίστοιχης σειράς Fourier τους τύπους (458.6). Έτσι βρίσκουμε

$$a_\nu = 0 \ , \text{ για } \nu = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

και

$$b_\nu = \frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\pi/2} \omega\,\eta\mu\nu\omega\, d\omega + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi-\omega)\,\eta\mu\nu\omega\, d\omega\right\}, \text{ για } \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

Αλλά

$$\int \omega\,\eta\mu\nu\omega\, d\omega = \omega\,\frac{-\sigma\upsilon\nu\,\nu\omega}{\nu} - \int \frac{-\sigma\upsilon\nu\,\nu\omega}{\nu}\, d\omega = -\omega\,\frac{\sigma\upsilon\nu\,\nu\omega}{\nu} + \frac{\eta\mu\,\nu\omega}{\nu^2} + C_1$$

$$\int (\pi-\omega)\,\eta\mu\nu\omega\, d\omega = (\pi-\omega)\,\frac{-\sigma\upsilon\nu\,\nu\omega}{\nu} - \int \frac{-\sigma\upsilon\nu\,\nu\omega}{\nu}\,(-d\omega)$$

$$= -(\pi-\omega)\,\frac{\sigma\upsilon\nu\,\nu\omega}{\nu} - \frac{\eta\mu\,\nu\omega}{\nu^2} + C_2$$

Άρα

$$b_\nu = \frac{2}{\pi}\left\{-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\,\frac{\nu\pi}{2}}{\nu} + \frac{\eta\mu\,\frac{\nu\pi}{2}}{\nu^2} + \left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\sigma\upsilon\nu\,\frac{\nu\pi}{2}}{\nu} + \frac{\eta\mu\,\frac{\nu\pi}{2}}{\nu^2}\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{+\frac{2}{\nu^2}\,\eta\mu\,\frac{\nu\pi}{2}\right\} = \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi\nu^2}\cdot(-1)^{\frac{\nu+1}{2}} & \text{όταν } \nu = \text{περιττός} \\ 0 & \text{όταν } \nu = \text{άρτιος}. \end{cases}$$

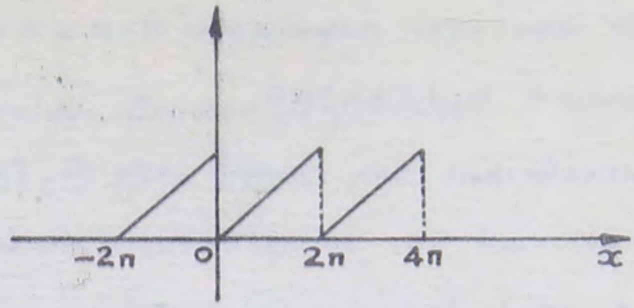
Σύμφωνα μ' αυτά έχουμε για $-\infty < x < +\infty$

$$\varphi_2(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\eta\mu\, x}{1^2} - \frac{\eta\mu\, 3x}{3^2} + \frac{\eta\mu\, 5x}{5^2} - \frac{\eta\mu\, 7x}{7^2} + \cdots\right).$$

III). Ας είναι η $\varphi_3(x)$ 1ο) περιοδική με περίοδο το 2π και 2ο)

$$\varphi_3(x) = x \quad \text{για } 0 \leqq x < 2\pi.$$

Η $\varphi_3(x)$ είναι αύξουσα στο διάστημα $0 \leqq x < 2\pi$ πλάτους ίσου προς την περίοδο 2π, είναι συνεχής για κάθε x εκτός για $x=2\kappa\pi$, όπου $\kappa=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$ Κατά την πρόταση του Dirichlet η αντίστοιχη σειρά Fourier θα συγκλίνη για κάθε x και το άθροισμα της θα ισούται με $\varphi_3(x)$ για κάθε x εκτός για $x=x_\kappa=2\kappa\pi$· για τα τελευταία αυτά x το άθροισμα της σειράς ισούται, κατά την πρόταση, με



$$\frac{1}{2}\left\{\lim_{h\to 0^+}\varphi(x_\kappa+h)+\lim_{h\to 0}\varphi(x_\kappa-h)\right\}=\frac{1}{2}\left\{0+2\pi\right\}=\pi.$$

Για τον υπολογισμό των συντελεστών της σειράς μπορούμε να αντικαταστήσουμε την τιμή 0 της $\varphi_3(x)$ στο άνω άκρο $x=2\pi$ των υπολογιστέων ολοκληρωμάτων με τον αριθμό 2π, διότι αυτό δεν μεταβάλλει την τιμή των ολοκληρωμάτων, μας επιτρέπει δε να εφαρμόσουμε στον υπολογισμό τη θεωρία της ολοκληρώσεως συναρτήσεων συνεχών σ'όλο το (κλειστό) διάστημα ολοκληρώσεως. Έτσι έχουμε

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_3(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\,dx=2\pi,$$

και για $\nu=1,2,3,\ldots$

$$a_\nu=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\,\text{συν}\,\nu x\,dx=\frac{1}{\pi}\left[x\,\frac{\eta\mu\,\nu x}{\nu}\right]_0^{2\pi}-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\eta\mu\,\nu x}{\nu}\,dx=0-0=0,$$

τέλος για $\nu=1,2,3,\ldots$

$$b_\nu=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\,\eta\mu\,\nu x\,dx=\frac{1}{\pi}\left[x\,\frac{-\text{συν}\,\nu x}{\nu}\right]_0^{2\pi}+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\text{συν}\,\nu x}{\nu}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{-2\pi}{\nu}+\frac{1}{\pi}\left[\frac{\eta\mu\,\nu x}{\nu^2}\right]_0^{2\pi}=-\frac{2}{\nu}\;.$$

Άρα για $x\neq 2\kappa\pi$, όπου $\kappa=$ ακέραιος, έχουμε

$$\varphi_3(x)=\pi-2\left(\frac{\eta\mu\,x}{1}+\frac{\eta\mu\,2x}{2}+\frac{\eta\mu\,3x}{3}+\cdots\right). \tag{459.4}$$

Για $x=2\kappa\pi$, με κ ακέραιο, η σειρά του δεξιού μέλους συγκλίνει προςανώς και έχει άθροισμα $\pi - 0 = \pi = \frac{1}{2}(0+2\pi)$, όπως προείπαμε, ενώ εξ ορισμού $\varphi_3(2\kappa\pi)=0$.

Αν μεταβάλαμε τον ορισμό της $\varphi_3(x)$ στις θέσεις $x=2\kappa\pi$ και θέταμε την τιμή της συναρτήσεως σ'αυτές τις θέσεις ίση με π, αυτό δεν θα άλλαζε τις τιμές των ολοκληρωμάτων που δίνουν τους συντελεστές Fourier ούτε επομένως τη σειρά Fourier και τότε η σχέση (459.4), με την τροποποιημένη συνάρτηση $\varphi_3(x)$, θα ίσχυε και για $x=2\kappa\pi$.

Ασκήσεις στο 31º κεφάλαιο

504. Να βρεθούν οι σειρές Fourier που αντιστοιχούν στις εξής συναρτήσεις και να μελετηθή το ζήτημα της συγκλίσεως και του αθροίσματος των βάσει της προτάσεως του Dirichlet:

1) $\varphi_4(x)$ περιοδική συνάρτηση περιόδου 2π και με έκφραση

$$\varphi_4(x)=(x-\pi)^2 \quad \text{για} \quad 0 \leqq x < 2\pi.$$

2) $\varphi_5(x)$ περιοδική συνάρτηση περιόδου 2π και με ορισμό σ'ένα διάστημα περιόδου τον εξής:

$$\varphi_5(x) \begin{cases} b\dfrac{x}{a} & \text{για } 0 \leqq x < a \\ b & \text{για } a \leqq x < \pi - a \\ b\dfrac{\pi - x}{a} & \text{για } \pi - a \leqq x < \pi \end{cases}$$

$$\varphi_5(x) = -\varphi_5(-x) \quad \text{για} \ -\pi \leqq x < 0,$$

όπου a και b θετικές σταθερές, η $a \leqq \frac{\pi}{2}$.

3) $\varphi_6(x)$ περιοδική συνάρτηση περιόδου 2π και με έκφραση

$$\varphi_6(x)=\begin{cases} x & \text{για } 0 \leqq x < \pi \\ 2\pi - x & \text{για } \pi \leqq x < 2\pi. \end{cases}$$

4) $\varphi_7(x)$ περιοδική συνάρτηση περιόδου 2π και με ορισμό

$$\varphi_7(x)=\begin{cases} b & \text{για } 0 \leqq x < \pi \\ -b & \text{για } \pi \leqq x < 2\pi. \end{cases}$$

όπου b θετική σταθερά.

5) $\varphi_8(x)$ περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π και με ορισμό

$$\varphi_8(x) = e^x \quad \text{για} \quad 0 \leqq x < 2\pi.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 32ο

§ 460. Αναλυτική παραμετρική παράσταση μιας επιφάνειας S (δηλ. ενός διπαραμετρικού συνόλου σημείων $M(x,y,z)$ του χώρου):

$$x = x(u,v)\,,\quad y = y(u,v)\,,\quad z = z(u,v)\,, \text{ συντόμως } \overline{OM} = \bar{r} = \bar{r}(u,v),$$

όπου $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ δοσμένες συναρτήσεις 2 ανεξάρτητων μεταβλητών u,v (άρα και $\bar{r}(u,v)$ δοσμένη διανυσματική συνάρτηση των (u,v)) με μερικές παραγώγους συνεχείς των τάξεων που απαιτεί η αναπτυσσόμενη θεωρία.

Μια γραμμή γ πάνω στη S (δηλαδή ένα μονοπαραμετρικό σύνολο σημείων της S): $\bar{r} = \bar{r}(u(t), v(t))$, όπου $u(t)$, $v(t)$ δοσμένες, παραγωγίσιμες όσες φορές χρειάζεται, συναρτήσεις μιας παραμέτρου t.

Ειδικά: όταν $u(t) \equiv t$, $v(t) \equiv C_1$ έχουμε τη γραμμή $\bar{r} = \bar{r}(u, C_1)$, ($u$ η παράμετρος)

» $u(t) \equiv C_2$, $v(t) \equiv t$ » » » $\bar{r} = \bar{r}(C_2, v)$, ($v$ η παράμετρος)

Για τα διάφορα ζευγάρια (C_1, C_2) έχουμε το δίκτυο ή το πλέγμα των παραμετρικών ή συντεταγμένων (εν γένει καμπύλων) γραμμών πάνω στην S.

Το ζευγάρι (u,v) καλείται ζευγάρι καμπυλόγραμμων συντεταγμένων πάνω στην S.

Διαφορικό του μήκους τόξου μιας γραμμής $\gamma: \bar{r} = \bar{r}(u(t), v(t))$ πάνω στην S:

$$ds^2 = |d\bar{r}|^2 = d\bar{r}\cdot d\bar{r} = (\bar{r}_u du + \bar{r}_u dv)^2 = \bar{r}_u^2\, du^2 + 2\bar{r}_u r_v\, du\, dv + \bar{r}_v^2\, dv^2.$$

Θέτουμε: $E(u,v) = \bar{r}_u^2 = \left(\dfrac{\partial x(u,v)}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y(u,v)}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z(u,v)}{\partial u}\right)^2 = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2,$

$$F(u,v)=\bar{r}_u\bar{r}_v\,,\qquad G(u,v)=\bar{r}_v^{\,2}\,,$$

οπότε λαβαίνουμε

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2.$$

Υποθέτουμε ότι $\bar{r}_u \not\parallel \bar{r}_v$ δηλ. $[\bar{r}_u\bar{r}_v]\neq$ μηδεν. διάνυσμα,

οπότε $F^2-EG=(\bar{r}_u\bar{r}_v)^2-\bar{r}_u^{\,2}\cdot\bar{r}_v^{\,2}=-\left|[\bar{r}_u\,\bar{r}_v]\right|^2<0.$

Άρα το 2βάθμιο ομογενές ως προς du, dv, τριώνυμο $Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$ έχει για όλα τα ζευγάρια αριθμών (du,dv) θετική τιμή εκτός για το ζευγάρι $(du,dv)=(0,0)$ για το οποίο μηδενίζεται. Το τριώνυμο αυτό λέγεται <u>1η βασική μορφή</u> της θεωρούμενης παραμετρικής παράστασης της S.

Οι εφαπτόμενες των διάφορων γραμμών γ της S, στο σημείο $M(u,v)$ της S, έχουν ως παράλληλα διανύσματα τα $\dfrac{d\bar{r}(u(t),u(t))}{dt}=\bar{r}_u\dot{u}+\bar{r}_v\dot{v}$, άρα κείνται μέσα στο επίπεδο:

$$\begin{vmatrix} X-x(u,v) & Y-y(u,v) & Z-z(u,v)\\ x'_u & y'_u & z'_u\\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}=0,$$

$\left((\bar{R}-\bar{r}(u,v),\bar{r}_u,\bar{r}_v)=0\right.$ με διανυσματική $\left.\text{γραφή}\right)$ που, γι' αυτό το λόγο, λέγεται <u>εφαπτόμενο επίπεδο</u> της S στο M.

Ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο σ' αυτό το επίπεδο (και εξ ορισμού κάθετο στην επιφάνεια S στο σημείο της M) είναι το

$$\bar{N}=\frac{[\bar{r}_u\ \bar{r}_v]}{|[\bar{r}_u\ \bar{r}_v]|}\,.$$ (Υπάρχει και ένα 2ο μοναδιαίο κάθετο, το $-\bar{N}$).

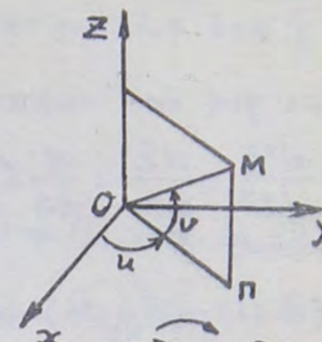
Δυο γραμμές γ_1 και γ_2 της S διά του σημείου $M(u,v)$ σχηματίζουν σ' αυτό το σημείο γωνία ω με

$$\text{συν}\,\omega=\frac{(\bar{r}_u du_1+\bar{r}_v dv_1)\cdot(\bar{r}_u du_2+\bar{r}_v dv_2)}{|(\bar{r}_u du_1+\bar{r}_v dv_1)|\cdot|\bar{r}_u du_2+\bar{r}_v dv_2|}=\frac{Edu_1du_2+F\cdot(du_1dv_2+du_2dv_1)+Gdv_1dv_2}{\sqrt{Edu_1^2+2Fdu_1dv_1+Gdv_1^2}\sqrt{Edu_2^2+Fdu_2dv_2+Gdv_2^2}}\,.$$

Το δίκτυο των παραμετρικών γραμμών $(v_1=c_1\ ,\ u_2=c_2)$ της S έχει γωνία φ στο σημείο $M(u,v)$ με

$$\text{συν}\,\varphi=\frac{E\cdot 0+F(1+0)+G\cdot 0}{\sqrt{G}\cdot\sqrt{E}}=\frac{F}{\sqrt{EG}}\,.$$

Άρα είναι ορθογώνιο δίκτυο, όταν και μόνον όταν $F\equiv 0$ (δηλαδή $F=0$ σ'όλα τα $M(u,v)$ της S).



$(\overset{\frown}{\overrightarrow{O\Pi},\overrightarrow{OM}})=v$

(αρκεί $-\frac{\pi}{2}\leq v\leq\frac{\pi}{2}$)

<u>Παραδείγματα</u>. 1) Σφαίρα $x^2+y^2+z^2=a^2$

$$\bar{r}=a\,\text{συν}v\,\text{συν}u\,\bar{i}+a\,\text{συν}v\,\text{ημ}u\,\bar{j}+a\,\text{ημ}v\,\bar{k}.$$

Άρα $G=\bar{r}_v^2=(-a\,\text{ημ}v\,\text{συν}u\,\bar{i}-a\,\text{ημ}v\,\text{ημ}u\,\bar{j}+a\,\text{συν}v\,\bar{k})^2=a^2$,

$F=0$, $E=(-a\,\text{συν}v\,\text{ημ}u\,\bar{i}+a\,\text{συν}v\,\text{συν}u\,\bar{j})^2=a^2\text{συν}^2v$

και επομένως $ds^2=a^2\text{συν}^2v\,du^2+a^2dv^2$.

Το δίχτυο των παραμετρικών γραμμών είναι ορθογώνιο (ελέγξτε το εποπτικά!).

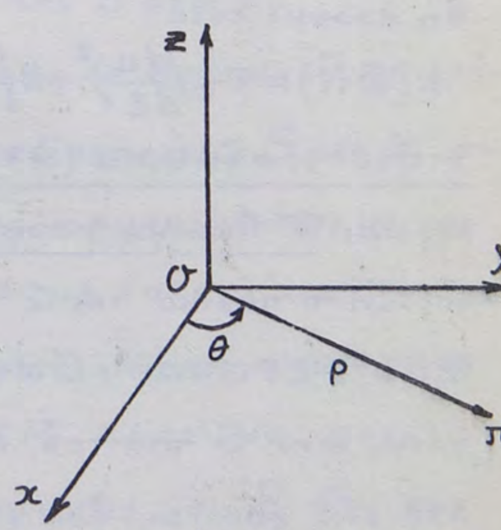
2) Γενική επιφάνεια εκ περιστροφής περί τον ΟΖ (με $u=\theta$, $v=\rho=O\Pi$):

$$\bar{r}=\rho\,\text{συν}\theta\,\bar{i}+\rho\,\text{ημ}\theta\,\bar{j}+f(\rho)\bar{k},$$

όπου $f(\rho)$ δοσμένη παραγωγίσιμη συνάρτηση του $\rho=+\sqrt{x^2+y^2}$.

Άρα $ds^2=\rho^2d\theta^2+\left(1+f'^2(\rho)\right)d\rho^2$

(δηλ. $E=\rho^2$, $F=0$, $G=1+f'^2(\rho)$).



Το δίχτυο των παραμετρικών γραμμών είναι ορθογώνιο (ελέγξε το εποπτικώς!).

3) <u>Το ορθό κωνοειδές</u> (με οδηγούν επίπεδο το ΧΟΥ και άξονα τον ΟΖ:

$$\bar{r}=\rho\,\text{συν}\theta\,\bar{i}+\rho\,\text{ημ}\theta\,\bar{j}+f(\theta)\bar{k},$$

όπου $f(\theta)$ δοσμένη παραγωγίσιμη συνάρτηση του $\theta=(\overset{\frown}{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{O\Pi}})$ και $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. Άρα $ds^2=\left(\rho^2+f'^2(\theta)\right)d\theta^2+d\rho^2$ και το δίχτυο των παραμ. γραμμών είναι πάλι ορθογώνιο.

Ειδικώς, όταν $f(\theta)=a\theta+b$, (a,b σταθερές), έχουμε το <u>ορθό ελικοειδές</u> με $ds^2=(\rho^2+a^2)d\theta^2+d\rho^2$.

Το ορθό κωνοειδές είναι ευθειογενής επιφάνεια.

§461. <u>Καμπυλότητα μιας γραμμής γ πάνω στην επιφάνεια S δια του σημείου M(u,v)</u>. Ας είναι $\bar{r}(u(s),u(s))$ η διανυσματική παράσταση της γ, με s σημαίνον προσημασμένο μήκος τόξου πάνω στη γ από κάποιο σημείο της A_0 για αρχικό ως το σημείο της $M(u,v)$.

Έχουμε για την καμπυλότητα κ στο σημείο M:

$$\kappa\bar{\omega} = \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \frac{d\bar{\varepsilon}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\bar{r}_u u'(s) + \bar{r}_u v'(s)\right) = \bar{r}_{uu}u'^2 + 2\bar{r}_{uv}u'v' + \bar{r}_{vv}v'^2 + \bar{r}_u u'' + \bar{r}_v v''.$$

Επομένως

$$\kappa\cdot(\bar{\omega}\,\bar{N}) = (\bar{r}_{uu}\bar{N})\cdot u'^2 + 2(\bar{r}_{uv}N)u'v' + (\bar{r}_{vv}\bar{N})\cdot v'^2 + 0.u'' + 0.v''.$$

Καλούμε τους συντελεστές των $u'^2, 2u'v', v'^2$ αντιστοίχως e, f, g, θέτουμε δηλαδή

$$\begin{aligned} e &= \bar{r}_{uu}\bar{N} = -\bar{r}_u\bar{N}_u \\ f &= \bar{r}_{uv}\bar{N} = -\tfrac{1}{2}(\bar{r}_u\bar{N}_v + \bar{r}_v\bar{N}_u). \\ g &= \bar{r}_{vv}\bar{N} = -\bar{r}_v\bar{N}_v. \end{aligned}$$

(διότι $\bar{r}_u\bar{N} \equiv 0$ ως προς u και v
και $\bar{r}_v\bar{N} \equiv 0$ " " " " ",
άρα $\bar{r}_{uu}\bar{N} + \bar{r}_u\bar{N}_u \equiv 0$, $\bar{r}_{vv}\bar{N} + \bar{r}\bar{N}_v \equiv 0$,
$\bar{r}_{uv}\bar{N} + \bar{r}_u\bar{N}_v \equiv 0$, $\bar{r}_{vu}\bar{N} + \bar{r}_v\bar{N}_u \equiv 0$.)

Θα έχουμε τότε

$$\kappa(\bar{\omega}\bar{N}) = e\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2f\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + g\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = \frac{edu^2 + 2fdudv + gdv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}.$$

<u>Η δευτεροβάθμια (ή τετραγωνική) μορφή</u> $edu^2 + 2fdudv + gdv^2$ λέγεται <u>$2^η$ βασική μορφή</u> της θεωρουμένης αναλυτικής παράστασης της S. Το πηλίκο της $2^{ης}$ βασικής μορφής δια της $1^{ης}$ $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ έχει την ίδια τιμή για όλες τις γραμμές πάνω στην S δια του $M(u,v)$ οι οποίες έχουν τον ίδιο λόγο $dv:du$.

Από εδώ έπονται δυο σπουδαία συμπεράσματα.

$1^{ον}$ Δυο γραμμές γ_1 και γ_2 δια του M, που τα εγγύτατα επίπεδα τους στο M συμπίπτουν, έχουν, όταν το κοινό αυτό εγγύτατο επίπεδο διαφέρη από το εφαπτόμενο επίπεδο της S στο M, την ίδια εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο M (γιατί αυτή η εφαπομένη κείται και μέσα στο εγγύτατο επίπεδο και μέσα στο εφαπτόμενο επίπεδο της S). Άρα οι γ_1 και γ_2 θα έχουν στο M τον ίδιο λόγο $\frac{dv_1}{du_1} = \frac{dv_2}{du_2}$. (Διότι αν ήταν $\frac{dv_1}{du_1} \neq \frac{dv_2}{du_2}$ θα φθάναμε σ'ένα άτοπο συμπέρασμα: θα είχαμε $\bar{r}_u + \bar{r}_v\frac{dv_1}{du_1} \parallel \bar{r}_u + \bar{r}_v\frac{dv_2}{du_2}$, άρα διάνυσμα $0=\left[\bar{\tau}_u+\bar{\tau}_v\frac{dv_1}{du_1},\bar{\tau}_u+\tau_v\frac{dv_2}{du_2}\right]$, δηλ. $\left[\bar{\tau}_u\,\bar{\tau}_v\right]\cdot\left(\frac{dv_2}{du_2}-\frac{dv_1}{du_1}\right)=0$, ενώ υποθέσαμε ότι $\left[\bar{\tau}_u\bar{\tau}_v\right]\neq$ μηδενικό διάνυσμα).

Επομένως για τις γραμμές γ_1 και γ_2 έπεται ότι

$$\kappa_1\,(\bar{\omega}_1\bar{N})=\kappa_2\,(\bar{\omega}_2\bar{N}),$$

όπου $|\bar{\omega}_1\bar{N}|=|\bar{\omega}_2\bar{N}|$, επειδή $\bar{\omega}_1=\pm\bar{\omega}_2$ και $\bar{\omega}_1\bar{N}\neq 0$, επειδή το κοινό εγγύτατο επίπεδο των γ_1 και γ_2 υποτέθηκε διάφορο από το εφαπτόμενο επίπεδο της S στο M. Επομένως $\kappa_1=\kappa_2$, επειδή εξ ορισμού $\kappa_1\geqq 0$, $\kappa_2\geqq 0$. Ειδικά, όταν $\kappa_1=\kappa_2>0$, μπορούμε επιπλέον να συμπεράνουμε ότι $\bar{\omega}_2\bar{N}=\bar{\omega}_1\bar{N}$, άρα και $\bar{\omega}_2=\bar{\omega}_1$, αφού $\bar{\omega}_2=\pm\bar{\omega}_1$. Φτάνουμε λοιπόν στην εξής διατύπωση με λόγια: δυο γραμμές γ_1,γ_2 της S δια του M με το ίδιο εγγύτατο επίπεδο στο M έχουν την ίδια καμπυλότητα και το ίδιο $\bar{\omega}$ στο M, τουλάχιστο όταν το κοινό εγγύτατο επίπεδο δεν συμπίπτει με το εφαπτόμενο επίπεδο της S στο M.

Ειδικώς μια γραμμή γ της S δια του M, που το εγγύτατο της επίπεδο στο M διαφέρει από το εφαπτόμενο επίπεδο της S στο M, έχει την ίδια καμπυλότητα και το ίδιο κέντρο καμπυλότητας με την επίπεδη γραμμή της S που είναι τομή της S με το εγγύτατο επίπεδο της γ στο M. Ώστε αντί να μελετήσουμε τις καμπυλότητες των <u>οποιωνδήποτε</u> γραμμών της S δια του M, αρκεί να μελετήσουμε τις καμπυλότητες των <u>επιπέδων</u> γραμμών της S δια του σημείου M.

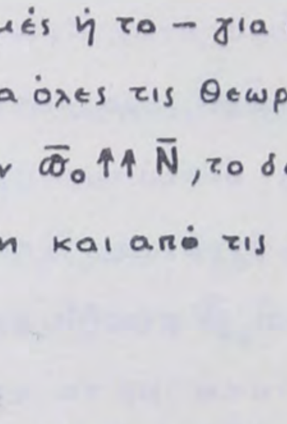
2ον. Θα μελετήσουμε πρώτα τις επίπεδες γραμμές της S δια του M οι οποίες έχουν κοινήν εφαπτομένη στο M, με άλλα λόγια τις τομές της S με τα επίπεδα τα οποία περιέχουν μιαν ορισμένη ευθεία τ εφαπτόμενη της S στο M, και τα οποία διαφέρουν από το εφαπτόμενο επίπεδο της S στο M. Όλες αυτές οι επίπεδες τομές έχουν τον ίδιο λόγο $\frac{dv}{du}$, άρα το ίδιο $\kappa(\bar{\omega}\bar{N})$. Ανάμεσα σ' αυτές τις τομές διακρίνουμε την κάθετη τομή γ_0, δηλ. εκείνην που κείται μέσα στο επίπεδο το οριζόμενο από την κοινήν εφαπτομένη τ και την κάθετη στην S στο σημείο M. Ας καλέσουμε K_o την καμπυλότητα της στο M και $\bar{\varpi}_o$ το αντίστοιχο πρωτεύον μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα (το $\bar{\varpi}_o$ είναι ή $=\bar{N}$ ή $=-\bar{N}$)· Θα έχουμε για κάθε άλλην επίπεδη τομή δια της τ:

$$K(\bar{\varpi}\bar{N}) = K_o(\bar{\varpi}_o\bar{N}).$$

Το $\bar{\varpi}_o\bar{N} = 1\cdot 1\cdot συν(\widehat{\bar{\varpi}_o\bar{N}})$ ισούται με 1 ή με -1. Άρα το πρόσημο του $(\bar{\varpi}\bar{N})$ είναι ή το $+$ για όλες τις πλάγιες τομές ή το $-$ για όλες· με άλλα λόγια: η γωνία $\widehat{\bar{\varpi}\bar{N}}$ είναι ή οξεία για όλες τις θεωρούμενες πλάγιες τομές ή αμβλεία για όλες (το πρώτο όταν $\bar{\varpi}_o \uparrow\uparrow \bar{N}$, το δεύτερο όταν $\bar{\varpi}_o \uparrow\downarrow \bar{N}$). Εξ' άλλου από την τελευταία σχέση και από τις $K \geqq 0$, $K_o \geqq 0$, $(\bar{\varpi}_o\bar{N}) = \pm 1$, έπεται

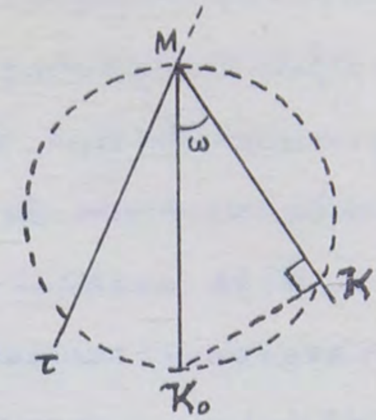
(461.1) $$K\cdot|\bar{\varpi}\bar{N}| = K_o .$$

Αλλά $|\bar{\varpi}\bar{N}|$ = συνημίτονο της οξείας γωνίας ω του κάθετου προς την S δια της ευθείας τ επιπέδου και του επιπέδου της θεωρούμενης πλάγιας τομής γ. Επομένως στην περίπτωση όπου $K_o \neq 0$ θα είναι και $K \neq 0$, και συνεπώς θα έχουμε για τις ακτίνες καμπυλότητας R της πλάγιας τομής γ και R_o της κάθετης τομής γ_o τη σχέση



(461.2) $$R_o\, συν\, \omega = R .$$

Οι σχέσεις (461.1) και (462.2) εκφράζουν το θεώρημα του Meusnier, βάσει του οποίου μπορούμε να υπολογίσουμε την καμπυλότητα μιας πλάγιας τομής γ της S δια του $M(u,v)$, όταν ξέρουμε αφ' ενός την καμπυλότητα εκείνης της κάθετης τομής γ_o δια του M η οποία έχει την ίδια εφαπτομένη τ στο M με την γ, και αφ' ετέρου τη γωνία ω των δυο επιπέδων των 2 θεωρουμένων τομών γ_o και γ. Από την (461.2) έπεται ότι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων καμπυλότητας K των διάφορων επιπέδων τομών της S οι οποίες έχουν κοινή εφαπτομένη την τ, είναι μια περιφέρεια κύκλου κείμενη μέσα στο επίπεδο το κάθετο στην τ δια του M και με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το M με το κέντρο καμπυλότητας K_0 της κάθετης τομής.



§ 462. Ύστερα από αυτά μας απομένει τώρα να μελετήσουμε την καμπυλότητα των διάφορων καθέτων τομών της S στο σημείο της $M(u,v)$. Για τις κάθετες αυτές τομές έχουμε τη σχέση

$$K_0(\overline{\omega}_0 \overline{N}) = \frac{e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,du^2}\quad, \text{ με } \frac{dv}{du} \text{ μεταβλητό}$$

από το $-\infty$ ως $+\infty$, όπου το $\overline{\omega}_0 \overline{N}$ είναι ή $+1$ ή -1, καθόσον $\operatorname{sign}(e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2)$ είναι $+1$ ή -1 (δηλ. καθόσον $e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2 > 0$ ή < 0). Έχουμε λοιπόν να διακρίνουμε 3 περιπτώσεις προϋποθέτοντας ότι $|e| + |f| + |g| \neq 0$.

1η) $f^2 - eg < 0$. Τότε η καμπυλότητα K_0 δεν μηδενίζεται για καμιά κάθετη τομή και το $\overline{\omega}_0 \overline{N}$ έχει την ίδια τιμή (1 ή -1) για όλες τις κάθετες τομές, επομένως οι κάθετες τομές στη γειτονιά του κοινού σημείου τους M στρέφουν τα κοίλα τους προς την ίδια μεριά του εφαπτόμενου επιπέδου της S στο M (τη μεριά του $\overline{N}$ όταν $\overline{\omega}_0 \overline{N} = 1$, τη μεριά του $-\overline{N}$ όταν $\overline{\omega}_0 \overline{N} = -1$).

Συνεπώς η επιφάνεια S κείται, στη γειτονιά του σημείου της M, στην ίδια μεριά του εφαπτόμενου της επιπέδου στο M.

Το M λέγεται <u>ελλειπτικό σημείο.</u>

2η) $f^2 - eg > 0$. Τότε η καμπυλότητα μηδενίζεται για δυο κάθετες τομές, τις αντίστοιχες στις 2 πραγματικές τιμές του λόγου $\lambda = dv : du$

οι οποίες μηδενίζουν τη 2^{η} βασική μορφή $edu^2+2fdudv+gdv^2$. Αν καλέσουμε λ_1 και λ_2 τις δυο αυτές τιμές του $\frac{dv}{du}=\lambda$, η $edu^2+2fdudv+gdv^2=(e+2f\lambda+g\lambda^2)du^2$ θα έχη διαφορετικό πρόσημο, καθόσον η τιμή του λ για τη θεωρούμενη κάθετη τομή κείται μεταξύ των ριζών λ_1 και λ_2 ή έξω του διαστήματος των. Επομένως το $\overline{\omega}_0\overline{N}$ θα αλλάζη τώρα πρόσημο· με άλλα λόγια οι κάθετες τομές στρέφουν τα κοίλα τους οι μεν προς τη μια μεριά, οι δε προς την άλλη μεριά του εφαπτόμενου επιπέδου, καθόσον το $\lambda=\frac{dv}{du}$ κείται μεταξύ λ_1 και λ_2 ή έξω από το διάστημα αυτό. Το σημείο Μ λέγεται <u>υπερβολικό</u> σημείο της S. Οι διευθύνσεις των εφαπτομένων οι αντίστοιχες στις τιμές λ_1 και λ_2 (τις ρίζες της $e+2f\lambda+g\lambda^2=0$) λέγονται <u>ασυμπτωτικές</u>. Σ' ένα υπερβολικό σημείο Μ έχουμε λοιπόν 2 πραγματικές ασυμπτωτικές διευθύνσεις πάνω στην επιφάνεια· οι δυο κάθετες τομές δια του Μ οι οποίες περιέχουν τις διευθύνσεις αυτές έχουν καμπυλότητα μηδέν, επομένως, κατά το Θεώρημα του Meusnier, έχουν καμπυλότητα μηδέν και όλες οι πλάγιες τομές που περιέχουν τις 2 ασυμπτωτικές διευθύνσεις. Το εφαπτόμενο επίπεδο στο Μ διαπερνά την επιφάνεια S και η γραμμή διαπεράσεως έχει δυο πραγματικούς κλάδους δια του Μ (το Μ είναι διπλό σημείο), με διευθύνσεις εφαπτομένων σ' αυτό, τις δυο ασυμπτωτικές διευθύνσεις. Αντιθέτως, σ' ένα ελλειπτικό σημείο Μ της S το εφαπτόμενο επίπεδο δεν διαπερνά, όπως είδαμε, την επιφάνεια στη γειτονιά του Μ, και η γραμμή των κοινών σημείων της S και του εφαπτόμενου επιπέδου της στο Μ, έχει το Μ για απομονωμένο πραγματικό σημείο.

3ο). $f^2-eg=0$. Η καμπυλότητα μιας κάθετης τομής είναι τώρα $\neq 0$ εκτός για μια μόνο τομή, εκείνη που αντιστοιχεί στη διπλή ρίζα λ_0 του τριωνύμου $e+2f\lambda+g\lambda^2$. Εξ άλλου επειδή η 2^{η} βασική μορφή

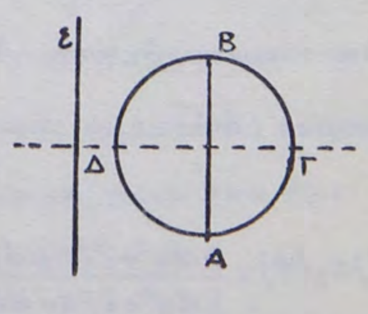
$edu^2+2fdudv+gdv^2$ δεν αλλάζει πρόσημο όταν ο λόγος dv/du μεταβάλλεται, όλες οι κάθετες τομές για $\lambda \neq \lambda_0$ στρέφουν τα κοίλα τους προς την ίδια μεριά του εφαπτόμενου επιπέδου της S στο Μ. Το Μ λέγεται <u>παραβολικό σημείο</u> της S, η διεύθυνση η αντίστοιχη στο $\lambda=\lambda_0$, <u>ασυμπτωτική</u>. Η γραμμή των κοινών σημείων της S και του εφαπτόμενου επιπέδου της στο Μ έχει βέβαια το Μ για ανώμαλο σημείο, το είδος όμως της ανωμαλίας δεν μπορεί να καθοριστή, όπως στις δυο προηγούμενες περιπτώσεις, χωρίς εξέταση των παραγώγων $3^{ης}$ τάξεως $\bar{\tau}_{u^3}, \bar{\tau}_{u^2v}, \bar{\tau}_{uv^2}, \bar{\tau}_{v^3}$. (Παράβ. όσα ειπώθηκαν στον § 406, σελ 126 – 130 του $2^{ου}$ τόμου).

Παραδείγματα ελλειπτικών σημείων: όλα τα σημεία ενός ελλειψοειδούς (ειδικώς μιας σφαίρας) ή ενός ελλειπτικού παραβολοειδούς.

Παραδείγματα υπερβολικών σημείων: όλα τα σημεία ενός μονόχωνου υπερβολοειδούς, ή ενός υπερβολικού παραβολοειδούς.

Παραδείγματα παραβολικών σημείων: Όλα τα σημεία μιας κυλινδρικής ή μιας κωνικής επιφάνειας (με εξαίρεση φυσικά της κορυφής της).

Παράδειγμα μιας επιφανείας που έχει σημεία και των 3 ειδών: ο κρίκος (ή σπείρα), που προκύπτει όταν περιστρέψουμε έναν κύκλο γύρω σε μιάν ευθεία ε που δεν τον συναντά και που είναι παράλληλη προς μιαν διάμετρο του ΑΒ. Όπως εύκολα βλέπει κανείς, αν καλέσουμε d την απόσταση της διαμέτρου ΑΒ από την παράλληλη της ευθεία ε, τότε τα σημεία του κρίκου είναι υπερβολικά, παραβολικά ή ελλειπτικά καθόσον η απόσταση τους από τον άξονα ε είναι $<, =$ ή $>d$.

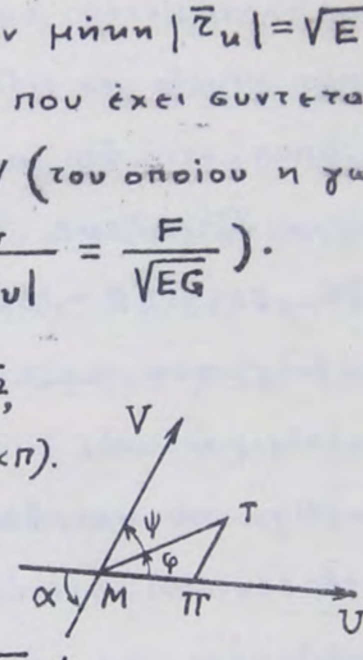


§463. Ας μελετήσουμε τώρα τη μεταβολή της καμπυλότητας K_0 μιας κάθετης τομής, όταν το επίπεδο της στρέφεται γύρω στην κάθετη της S στο σημείο $M(u,v)$. Η τομή μπορεί να χαρακτηριστή από το ίχνος της μέσα στο εφαπτόμενο επίπεδο της S στο M, ίχνος που συμπίπτει με τον φορέα του εφαπτομενικού, (όχι μηδενικού) διανύσματος $\overline{MT} = \bar{\tau}_u du + \bar{\tau}_v dv$. Παίρνουμε λοιπόν μέσα στο εφαπτόμενο επίπεδο δυο άξονες συντεταγμένων MU, MV με βασικά διανύσματα $\bar{\tau}_u(u,v)$, $\bar{\tau}_v(u,v)$, (αντιστοίχως ταύτα έχουν μήκη $|\bar{\tau}_u| = \sqrt{E}$, $|\bar{\tau}_v| = \sqrt{G}$) και θεωρούμε το διάνυσμα $\overline{MT}$ που έχει συντεταγμένες (du, dv) ως προς αυτό το σύστημα UMV (του οποίου η γωνία αξόνων α έχει συνημίτονο: $\text{συν}\,\alpha = \dfrac{\bar{\tau}_u \bar{\tau}_v}{|\bar{\tau}_u|\cdot|\bar{\tau}_v|} = \dfrac{F}{\sqrt{EG}}$).

Εισάγουμε τα εξής μεγέθη:

$$\tau = |\overline{MT}| = |\bar{\tau}_u du + \bar{\tau}_v dv| = \sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2},$$

$$\phi = (\widehat{\overrightarrow{MU}, \overrightarrow{MT}}),\ \psi = (\widehat{\overrightarrow{MT}, \overrightarrow{MV}}),\ (\text{είναι } \phi + \psi = \alpha + 2\kappa\pi).$$



Ισχύουν τότε οι σχέσεις (κατ' απόλυτη τιμή και κατά πρόσημο):

$$(\overline{M\Pi}) = |\bar{\tau}_u| du = \sqrt{E}\, du, \quad (\overline{\Pi T}) = |\bar{\tau}_v| dv = \sqrt{G}\, dv,$$

$$\frac{\sqrt{E}\, du}{\tau} = \frac{(\overline{M\Pi})}{|\overline{MT}|} = \frac{\text{ημ}\,\psi}{\text{ημ}\,\alpha}, \quad \frac{\sqrt{G}\, dv}{\tau} = \frac{(\overline{\Pi T})}{|MT|} = \frac{\text{ημ}\,\phi}{\text{ημ}\,\alpha},$$

άρα

$$du = \frac{\tau\, \text{ημ}\,\psi}{\sqrt{E}\, \text{ημ}\,\alpha}, \quad dv = \frac{\tau\, \text{ημ}\,\phi}{\sqrt{G}\, \text{ημ}\,\alpha}.$$

Για την καμπυλότητα $K_0(\Phi) = \dfrac{1}{R_0(\phi)}$ της κάθετης τομής που έχει εφαπτομενικό διάνυσμα το $\overline{MT}$ θα έχουμε λοιπόν

$$(\bar{\omega}_0 \bar{N}) K_0(\phi) = \frac{e du^2 + 2f du dv + g dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} = \frac{e\left(\frac{\tau\,\text{ημ}\,\psi}{\sqrt{E}\,\text{ημ}\,\alpha}\right)^2 + 2f \frac{\tau\,\text{ημ}\,\psi}{\sqrt{E}\,\text{ημ}\,\alpha} \frac{\tau\,\text{ημ}\,\phi}{\sqrt{G}\,\text{ημ}\,\alpha} + \left(\frac{\tau\,\text{ημ}\,\phi}{\sqrt{G}\,\text{ημ}\,\alpha}\right)^2}{\tau^2},$$

δηλαδή

$$(\bar{\omega}_0 \cdot \bar{N}) K_0(\phi) = \frac{\bar{\omega}_0 \bar{N}}{R_0(\phi)} = \frac{e}{E} \frac{\text{ημ}^2\psi}{\text{ημ}^2\alpha} + 2\frac{f}{\sqrt{EG}} \frac{\text{ημ}\,\psi\, \text{ημ}\,\phi}{\text{ημ}^2\alpha} + \frac{g}{G} \frac{\text{ημ}^2\phi}{\text{ημ}^2\alpha}.$$

Η σχέση αυτή μας παρέχει την καμπυλότητα $K_0(\Phi)$ μιας κάθετης τομής συναρτήσει της γωνίας ϕ την οποία σχηματίζει με το διάνυσμα

$\bar{\tau}_u$ το ίχνος του επιπέδου της τομής μέσα στο εφαπτόμενο επίπεδο. Φυσικά αρκεί να πάρουμε $0 \leqq \Phi < \pi$ για να έχουμε τις καμπυλότητες όλων των κάθετων τομών δια του Μ. Π.χ. όταν $\phi = 0$ (οπότε $\psi = \alpha$) και $\phi = \alpha$ (οπότε $\psi = 0$) θα λάβουμε τις καμπυλότητες $K_o(0) = \left|\frac{e}{E}\right|$ και $K_o(\alpha) = \left|\frac{g}{G}\right|$ των δυο κάθετων τομών με εφαπτομενικά διανύσματα τα $\bar{\tau}_u$ και $\bar{\tau}_v$ αντιστοίχως.

§464. Ένας γεωμετρικός τρόπος να βρούμε την ακτίνα καμπυλότητας, επομένως και την καμπυλότητα, μιας κάθετης τομής είναι ο ακόλουθος: Σχεδιάζουμε μέσα στο επίπεδο UMV τον γεωμετρικό τόπο των σημείων P των οποίων οι συντεταγμένες (u,v), ως προς το σύστημα UMV με βασικά διανύσματα τα $\bar{\tau}_u$ και $\bar{\tau}_v$, ικανοποιούν την εξίσωση

$$|eu^2 + 2fuv + gv^2| = 1 \quad (\text{δηλ. τη σχέση } eu^2 + 2fuv + gv^2 = \pm 1).$$

Ο Γεωμετρικός αυτός τόπος λέγεται δείκτρια του Dupin στο σημείο M της S και αποτελείται από δυο κωνικές τομές, με κέντρο το M και με τις ίδιες (πραγματικές ή φανταστικές) ασύμπτωτες (δυο τέτοιες κωνικές τομές λέγονται συζυγείς)

Στην περίπτωση $f^2 - eg < 0$ η μια μόνο κωνική τομή είναι πραγματική, και μάλιστα έλλειψη με την ακόλουθη εξίσωση:

$$eu^2 + 2fuv + gv^2 = \operatorname{sign} e \quad (\text{είναι } \operatorname{sign} e = \operatorname{sign} g \text{ διότι } eg > 0).$$

Στην περίπτωση $f^2 - eg = 0$ (οπότε, όπως είναι γνωστό, η μορφή $eu^2 + 2fuv + gv^2$ ταυτίζεται με το τετράγωνο μιας γραμμικής μορφής $Au + Bv$), πάλι μόνο η μια κωνική είναι πραγματική, αυτή που έχει εξίσωση

$$eu^2 + 2fuv + gv^2 = \operatorname{sign}(e+g) \quad (\text{είναι } eg \geqq 0, |e| + |g| \neq 0)\cdot$$

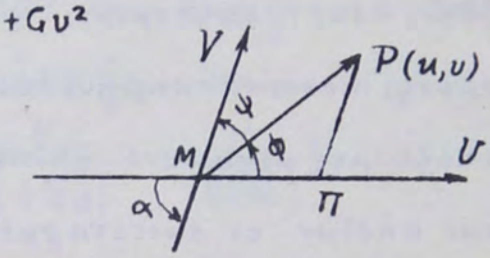
η κωνική αυτή είναι παραβολή εκφυλισμένη σε δυο παράλληλες ευθείες. Στην περίπτωση $f^2 - eg > 0$ η δείκτρια του Dupin απαρτίζεται από τις 2 (συζυγείς) υπερβολές

$$eu^2+2fuv+gv^2=1 \quad \text{και} \quad eu^2+2fuv+gv^2=-1.$$

§465. Να τώρα πώς η δείχτρια Dupin σχετίζεται με τις κάθετες τομές. Έστω $P(u,v)$ ένα πραγματικό σημείο της δείχτριας, δηλαδή έστω

$$(465.1) \qquad \left|eu^2+2fuv+gv^2\right|=1, \qquad \text{άρα } |u|+|v|\neq 0.$$

Εισάγουμε το μήκος ρ της διανυσματικής ακτίνας $\overline{MP}$: $\rho=|\bar{r}_u u+\bar{r}_v v|=\sqrt{Eu^2+2Fuv+Gv^2}$ καθώς και τις γωνίες



$$\varphi=(\widehat{\overrightarrow{MU}\,\overrightarrow{MP}}),\ \psi=(\widehat{\overrightarrow{MP}\,\overrightarrow{MV}}),$$

(είναι $\phi+\psi=\alpha+2\kappa\pi$).

Όμοια με ό,τι βρήκαμε πάρα πάνω, θα έχουμε (κατ' απόλυτη τιμή και πρόσημο):

$$u=\frac{\rho(\phi)\,\eta\mu\,\psi}{\sqrt{E}\ \eta\mu\ \alpha}\quad,\quad v=\frac{\rho(\phi)\,\eta\mu\,\phi}{\sqrt{G}\ \eta\mu\ \alpha}.$$

Εισάγοντας τις εκφράσεις αυτές μέσα στην εξίσωση (465.1) της δείχτριας θα λάβουμε

$$\left|e\,\frac{\eta\mu^2\psi}{E\,\eta\mu^2\alpha}+2f\,\frac{\eta\mu\ \psi}{\sqrt{E}\ \eta\mu\,\alpha}\cdot\frac{\eta\mu\,\phi}{\sqrt{G}\ \eta\mu\,\alpha}+g\,\frac{\eta\mu^2\phi}{G\,\eta\mu^2\alpha}\right|=\frac{1}{\rho^2(\phi)}.$$

Παραβάλλοντας τη σχέση αυτή με τη σχέση

$$\left|e\,\frac{\eta\mu^2\psi}{E\,\eta\mu^2\alpha}+2f\,\frac{\eta\mu\ \psi}{\sqrt{E}\ \eta\mu\,\alpha}\cdot\frac{\eta\mu\,\phi}{\sqrt{G}\ \eta\mu\alpha}+g\,\frac{\eta\mu^2\varphi}{G\,\eta\mu^2\alpha}\right|=\frac{1}{R_o(\phi)},$$

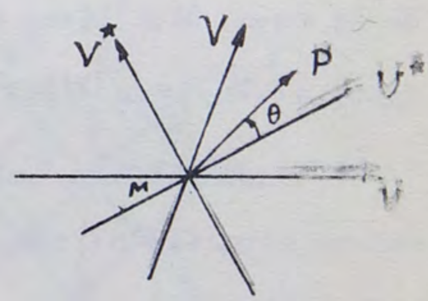
που προκύπτει από κείνην που βρήκαμε στον παράγραφο 463, συμπεραίνουμε ότι

$$R_o(\phi)=\rho^2(\phi)\ ,\ \text{άρα και}\ \ k_o(\phi)=\frac{1}{\rho^2(\phi)}.$$

Ώστε: το τετράγωνο του μέτρου της επιβατικής ακτίνας $\overline{MP}$ ενός πραγματικού σημείου P της δείχτριας ισούται με το μήκος της ακτίνας καμπυλότητας R_o εκείνης της κάθετης τομής που έχει αυτήν την επιβατική ακτίνα $\overline{MP}$ για εφαπτομένη (ή: που το επίπεδό της έχει ίχνος, μέσα στο εφαπτόμενο επίπεδο της S στο M, την ευθεία MP).

§466. Το τελευταίο αποτέλεσμα μας επιτρέπει να διερευνήσουμε εύκολα τη μεταβολή της καμπυλότητας μιας κάθετης τομής, όταν το επίπεδό της στρέφεται γύρω στη κάθετη της S στο M.

$1^η$ περίπτωση $e^2-fg<0$. Η καμπυλότητα της κάθετης τομής αυξάνει από μιαν ελάχιστη τιμή $\kappa_1>0$ προς μια μέγιστη κ_2, όταν η εφαπτομένη της στρέφεται μέσα στο επίπεδο UMV από τη θέση του μεγάλου άξονα MU^* της ελλειπτικής δείχτριας προς τη θέση του μικρού άξονα MV^*. Οι διευθύνσεις MU^* και MV^* (που είναι φυσικά ορθογώνιες η μια προς την άλλη) λέγονται πρωτεύουσες διευθύνσεις της S στο M. Οι καμπυλότητες και ακτίνες καμπυλότητας των αντίστοιχων κάθετων τομών λέγονται επίσης πρωτεύουσες.



Ας αναφέρουμε τώρα την ελλειπτική δείχτρια αντίς στο σύστημα συντεταγμένων UMV, στο σύστημα των ορθογώνιων αξόνων της MU^* και MV^*, παίρνοντας τα μήκη των βασικών διανυσμάτων ίσα με 1· η εξίσωσή της θα λάβει τη μορφή (περιοριζόμαστε στο πραγματικό μέρος της δείχτριας)

$$\frac{u^{*2}}{\alpha^2}+\frac{v^{*2}}{\beta^2}=1 \quad ή \quad \frac{u^{*2}}{R_1}+\frac{v^{*2}}{R_2}=1,$$

όπου $R_1=\frac{1}{\kappa_1}$ η μέγιστη, $R_2=\frac{1}{\kappa_2}$ η ελάχιστη πρωτεύουσα ακτίνα καμπυλότητας της S στο M: Η εισαγωγή, μέσα στη εξίσωση αυτή, της πολικής ακτίνας $\rho=MP$ και της πολικής γωνίας $\theta=(\widehat{MU^*,MP})$ ενός σημείου P της δείχτριας, οδηγεί στη σχέση

$$\frac{συν^2\theta}{R_1}+\frac{ημ^2\theta}{R_2}=\frac{1}{\rho^2(\theta)}=\frac{1}{R_0(\theta)} \quad ή \quad \kappa_1 συν^2\theta+\kappa_2 ημ^2\theta=\kappa_0(\theta)$$

που παρέχει την καμπυλότητα μιας κάθετης τομής της S στο M συναρτήσει των πρωτευουσών καμπυλοτήτων στο M και της γωνίας θ που σχηματίζει η εφαπτομένη της θεωρουμένης κάθετης τομής με μια πρωτεύουσα διεύθυνση στο M (εκείνη στην οποία αντιστοιχεί η καμπυλότητα κ_1). Η σχέση αυτή βρέθηκε από τον Euler.

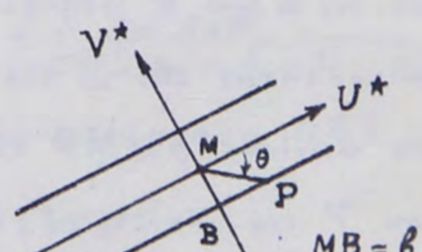
Στην ειδική περίπτωση ενός σημείου M της S, όπου η ελλειπτ. δείχτρια καταντά κύκλος, θα έχουμε φυσικά $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0(\theta)$, δηλ. κάθετες τομές με την ίδια καμπυλότητα όλες. Ένα τέτοιο σημείο της S λέγεται <u>σφαιρικό</u> (ή ομφαλικό), επειδή η σφαίρα απαρτίζεται ολόκληρη από τέτοια σημεία. Όπως προκύπτει από τον τύπο για το κ_2 στην αρχή του § 462, για να είναι το σημείο $M(u,v)$ σφαιρικό, πρέπει και αρκεί στη θέση (u,v) να έχουμε

$$\frac{e(u,v)}{E(u,v)} = \frac{f(u,v)}{F(u,v)} = \frac{g(u,v)}{G(u,v)} .$$

2η περίπτωση $f^2 - eg = 0$. Τη δείχτρια απαρτίζουν δυο παράλληλες ευθείες του επιπέδου UMV, συμμετρική η μια της άλλης ως προς το σημείο M. Ας είναι MU^* ένας άξονας ∥ προς αυτές τις ευθείες και MV^* ένας δεύτερος άξονας του UMV κάθετος προς MU^*· τα βασικά τους διανύσματα ας έχουν μήκος 1. Η εξίσωση της δείχτριας ως προς αυτούς τους άξονες ορθής συμμετρίας της θα είναι (περιοριζόμαστε πάλι στο πραγματικό μέρος της δείχτριας)

466.1) $$\frac{v^{*2}}{b^2} = 1 \quad ή \quad \frac{v^{*2}}{R_2} = 1,$$

όπου $R_2 = b^2$ η ακτίνα καμπυλότητας της κάθετης τομής με εφαπτομένη τη MV^*. Η καμπυλότητα μιας κάθετης τομής μεταβάλλεται τώρα από μιαν ελάχιστη τιμή $\kappa_1 = 0$ ως μια μεγίστη $\kappa_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{b^2}$, όταν το ίχνος της μέσα στο UMV στρέφεται από τη θέση MU^* ως τη θέση MV^*.



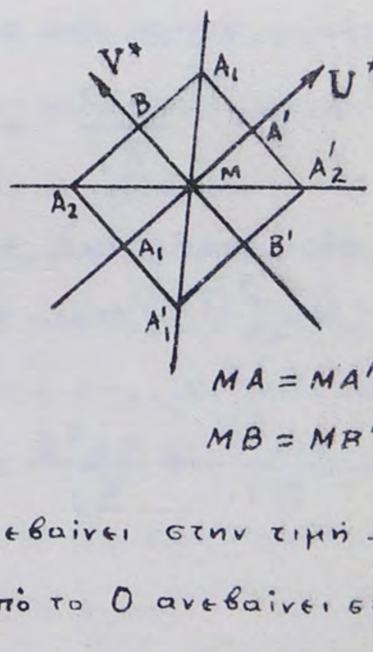
Εξ άλλου, αν εισαγάγουμε μέσα στην εξίσωση (466.1) την πολική ακτίνα $\rho = MP$ και την πολική γωνία $(\overrightarrow{MU}, \overrightarrow{MP}) = \theta$ ενός σημείου P της δείχτριας, θα λάβουμε τη σχέση του Euler

$$\frac{\eta\mu^2\theta}{R_2} = \frac{1}{\rho^2(\theta)} = \frac{1}{R_0(\theta)} \quad ή \quad \kappa_1 \sigma\upsilon\nu^2\theta + \kappa_2 \eta\mu^2\theta = \kappa_0(\theta) = \kappa_2 \eta\mu^2\theta,$$

η οποία παρέχει την καμπυλότητα $\kappa_0(\theta)$ μιας κάθετης τομής συναρτήσει των πρωτευουσών καμπυλοτήτων $\kappa_1 = 0$ και $\kappa_2 = \frac{1}{b^2}$ και της γωνίας θ που σχηματίζει με την ασυμπτωτική διεύθυνση MU^* το ίχνος μέσα στο εφαπτόμενο επίπεδο της θεωρούμενης κάθετης τομής. Η ασυμπτωτική διεύθυνση MU^* είναι η μια πρωτεύουσα διεύθυνση, η άλλη (που παρέχει το μέγιστο της καμπυλότητας) είναι η $MV^* \perp MU^*$.

3η Περίπτωση $f^2 - eg > 0$. Ας είναι MU^* και MV^* οι άξονες ορθής συμμετρίας των δυο συζυγών υπερβολών που απαρτίζουν τη δείκτρια, άξονες που, εννοείται, διχοτομούν τις γωνίες των ασυμπτωτικών διευθύνσεων MA_1 και MA_2 της S στο M. Ας πάρουμε πάνω σ' αυτούς βασικά διανύσματα μήκους 1, τότε η εξίσωση της δείκτριας θα λάβη τη μορφή

$$\frac{u^{*2}}{a^2} - \frac{v^{*2}}{b^2} = \pm 1. \tag{466.2}$$



$MA = MA' = a$

$MB = MB' = b$

Η καμπυλότητα μιας κάθετης τομής της οποίας το ίχνος μέσα στο εφαπτόμενο επίπεδο UMV εκτελή μισό γύρο από την αρχική θέση MU^*, περνώντας διαδοχικά από τις θέσεις MA_1, MV^*, MA_2 μεταβάλλεται ως εξής: από την τιμή $\frac{1}{a^2}$ κατεβαίνει στην τιμή 0, από το 0 ανεβαίνει στην τιμή $\frac{1}{b^2}$, από την τιμή $\frac{1}{b^2}$ κατεβαίνει στο 0 και τέλος από το 0 ανεβαίνει στην τιμή $\frac{1}{a^2}$. Εξ άλλου, όπως είδαμε, τα κοίλα της κάθετης τομής, στη γειτονιά του M, αλλάζουν φορά, όταν το ίχνος της περνά από τις ασυμπτωτικές διευθύνσεις MA_1 και MA_2· μπορούμε δε να ονομάσουμε εξ υπαρχής τους άξονες MU^* και MV^* έτσι που, όταν το ίχνος διαγράφη την γωνία των ασυμπτώτων της δείκτριας την περιέχουσα τον MU^*, τα κοίλα αυτά να στρέφωνται προς το πέρας του κάθετου στην S διανύσματος $-\bar{N}$ (να είναι δηλ. $\bar{\omega}_0 \bar{N} = -1$), οπότε, όταν το ίχνος της τομής πέφτη μέσα στη γωνία των ασυμπτώτων της δείχτριας την περιέχουσα τον τον $\dot{M}V^*$ τα κοίλα θα στρέφωνται προς το πέρας του $\bar{N}$, $(\bar{\omega}_o \bar{N} = 1)$. Κατόπιν αυτών βλέπουμε πως είναι σκόπιμο εδώ να δώσουμε στην καμπυλότητα K_o μιας κάθετης τομής ένα πρόσημο, το πρόσημο εκάστοτε του $\bar{\omega}_o \bar{N}$. Αν την έτσι προσημασμένη καμπυλότητα την παραστήσουμε με $\underline{K}_o$ και την όμοια προσημασμένη ακτίνα καμπυλότητας με $\underline{R}_o$ θα έχουμε αφ'ενός μεν

$$\underline{K}_o = \frac{1}{\underline{R}_o} = \frac{e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2},$$

αφ' ετέρου δε ότι η προσημ. καμπυλότητα παίρνει την αλγεβρικά ελάχιστη τιμή της $\underline{K}_1 = -\frac{1}{a^2} = \frac{1}{\underline{R}_1}$, όταν το ίχνος της κάθετης τομής μέσα στο UMV συμπίπτη με το MU^*, και την αλγεβρικά μέγιστη τιμή της $\underline{K}_2 = \frac{1}{b^2} = \frac{1}{\underline{R}_2}$, όταν το ίχνος της κάθετης τομής συμπίπτη με τον MV^*. Η εξίσωση της δείχτριας (4662) λαβαίνει ύστερα από αυτές τις συμβάσεις, τη μορφή

$$\frac{u^{*2}}{\underline{R}_1} + \frac{v^{*2}}{\underline{R}_2} = \mp 1 .$$

Και αν πάλι εισάγουμε την πολική ακτίνα $\rho = MP$ και την πολική γωνία $\theta = (\overrightarrow{MU^*}, \overrightarrow{MP})$ ενός σημείου P της δείχτριας, θα λάβουμε τη σχέση του Euler

$$\frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\underline{R}_1} + \frac{\eta\mu^2\theta}{\underline{R}_2} = \frac{1}{\underline{R}_o(\theta)} \quad \text{ή} \quad \underline{K}_1 \sigma\upsilon\nu^2\theta + \underline{K}_2\, \eta\mu^2\theta = \underline{K}_o(\theta).$$

§467. Στις δυο προηγούμενες περιπτώσεις $f^2 - eg \geqq 0$ (του ελλειπτικού και του παραβολικού σημείου M) δεν θα ήταν απαραίτητο να προσημάνουμε τις καμπυλότητες και ακτίνες καμπυλότητας των κάθετων τομών · διότι θα μπορούσαμε αλλάζοντας στην ανάγκη την φορά του κάθετου στην S μοναδιαίου διανύσματος $\bar{N}$ (παίρνοντας στην ανάγκη για $\bar{N}$ το $\frac{-[\bar{r}_u \ \bar{r}_v]}{|[\bar{r}_u \ \bar{r}_v]|} = \frac{[\bar{r}_v \ \bar{r}_u]}{|[\bar{r}_u \ \bar{r}_v]|}$) να πετύχουμε ώστε το

$$\bar{\omega}_0 \bar{N} = sign(edu^2 + 2fdudv + gdv^2) = sign(e+g) = sign(\bar{\tau}_{uu}\bar{N} + \bar{\tau}_{vv}\bar{N})$$

να ισούται με $+1$ σ'όλες τις κάθετες τομές δια του M. Αντίς γι'αυτό είναι όμως προτιμότερο, για να έχουμε ομοιόμορφη πραγμάτευση και των τριών περιπτώσεων, ν'αφήσουμε το $\bar{N}$ ίσο με $\dfrac{[\bar{\tau}_u \; \bar{\tau}_v]}{\|[\bar{\tau}_u \; \bar{\tau}_v]\|}$ καινα προσημάνουμε, σ'όλες τις περιπτώσεις, την καμπυλότητα $K_0 = \dfrac{1}{R_0}$ μιας κάθετης τομής με το πρόσημο του $\bar{\omega}_0 \cdot \bar{N}$ = πρόσημο της $2^{ης}$ βασικής μορφής $edu^2 + 2fuv + gv^2$. Θα έχουμε τότε γι'αυτήν την προσημασμένη καμπυλότητα $\underline{K}_0$ και την προσημασμένη ακτίνα καμπυλότητας $\underline{R}_0$ τη σχέση

$$(467.1) \qquad \underline{K}_0 = \frac{1}{\underline{R}_0} = \frac{edu^2 + 2fdudv + g\,dv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + G\,dv^2}\,.$$

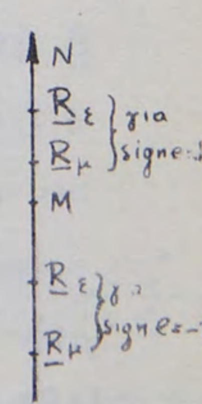
Οι πρωτεύουσες διευθύνσεις της S στο M είναι εκείνες που καθιστούν αυτό το K_0 αλγεβρικά ελάχιστο ή αλγεβρικά μέγιστο, όταν ο λόγος $\lambda = dv : du$ μεταβάλλεται από το $-\infty$ ως $+\infty$. Όπως είδαμε με την βοήθεια της δείκτριας, αυτές οι διευθύνσεις είναι δυο, κάθετες η μια προς την άλλη. Ας καλέσουμε $\underline{K}_\varepsilon = \dfrac{1}{\underline{R}_\varepsilon}$ την αλγεβρικά ελάχιστη και $\underline{K}_\mu = \dfrac{1}{\underline{R}_\mu}$ την αλγεβρικά μέγιστη καμπυλότητα των κάθετων τομών της S στο M. Τα κέντρα καμπυλότητας των τομών αυτών κείνται πάνω στην κάθετη προς την επιφάνεια S στο σημείο M· οι τετμημένες τους πάνω στον άξονα MN, με αρχή το M και βασικό διάνυσμα το μοναδιαίο $\bar{N} = \dfrac{[\bar{\tau}_u \bar{\tau}_v]}{\|[\bar{\tau}_u \bar{\tau}_v]\|}$, θα ισούνται με το $\underline{R}_0$ που παρέχεται από τον παραπάνω τύπο (467.1) για $-\infty \leqq \dfrac{dv}{du} \leqq +\infty$.

Επομένως θα έχουμε να διακρίνουμε τις ακόλουθες 3 περιπτώσεις:

1) $f^2 - eg < 0$. Θα είναι (με την προϋπόθεση: $M \neq$ σφαιρικό σημ.)

$$ή \;\; 0 < \underline{K}_\varepsilon < \underline{K}_\mu \quad (\text{όταν } sign\,e = sign\,g = 1)$$

$$ή \;\; \underline{K}_\varepsilon < \underline{K}_\mu < 0 \quad (\text{όταν } sign\,e = sign\,g = -1).$$



Επομένως για τις προσημ. ακτ. καμπ. $\underline{R}_0$ των διάφορων κάθετων τομών θα ισχύη ή $0 < \underline{R}_\mu \leqq \underline{R}_o \leqq \underline{R}_\varepsilon$ (signe=1)

ή $\underline{R}_\mu \leqq \underline{R}_o \leqq \underline{R}_\varepsilon < 0$ (signe=-1).

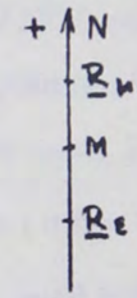
Κατά ταύτα ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων καμπυλότητας των διάφορων κάθ. τομών θα είναι ένα τμήμα του θετικού ημιάξονα $\overrightarrow{MN}$ στην 1η υποπερίπτωση, του αρνητικού ημιάξονα $-\overrightarrow{MN}$ στη 2η υποπερίπτωση· τα άκρα του τμήματος τούτου θα έχουν τετμημένες $\underline{R}_\mu$ και $\underline{R}_\varepsilon$.

2) $f^2 - eg = 0$ θα είναι

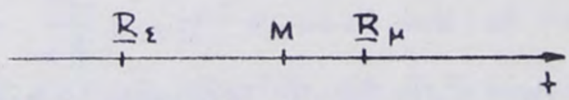
ή $0 = \underline{k}_\varepsilon < \underline{k}_\mu$ άρα $0 < \underline{R}_\mu \leqq \underline{R}_o \leqq +\infty$ (όταν $\mathrm{sign}(e+g)=1$)

ή $\underline{k}_\varepsilon < \underline{k}_\mu = 0$ άρα $-\infty \leqq \underline{R}_o \leqq \underline{R}_\varepsilon < 0$ (όταν $\mathrm{sign}(e+g)=-1$

Ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων καμπυλότητας των κάθετων τομών θα είναι λοιπόν τώρα μια ολόκληρη ημιευθεία, μέρος του θετικού ημιάξονα $\overrightarrow{MN}$ όταν $\mathrm{sign}(e+g)=1$, του αρνητικού ημιάξονα $-\overrightarrow{MN}$ όταν $\mathrm{sign}(e+g)=-1$.



3) $f^2 - eg > 0$. θα είναι



$\underline{k}_\varepsilon < 0 < \underline{k}_\mu$ άρα $-\infty \leqq \underline{R}_o \leqq \underline{R}_\varepsilon$ για τις τομές με αρνητική $\underline{k}_o$

και $\underline{R}_\mu \leqq \underline{R}_o \leqq +\infty$ για τις τομές με θετική $\underline{k}_o$.

Ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων καμπυλότητας των κάθετων τομών θα απαρτίζεται από 2 ημιευθείες, μια που θα είναι μέρος του θετικού ημιάξονα $\overrightarrow{MN}$ και θα έχη αρχήν το σημείο με τετμημένη $\underline{R}_\mu$ και μια με αρχή το σημείο με τετμημένη $\underline{R}_\varepsilon$ και με φορά την του $-N$.

§ 468. Ας δούμε τώρα πώς προσδιορίζονται από τα βασικά ποσά E, F, G, e, f, g οι δυο τιμές λ_1 και λ_2 του $\lambda = dv : du$ που παρέχουν τις πρωτεύουσες διευθύνσεις της S στο $M(u,v)$ καθώς και οι αντίστοιχες καμπυλότητες k_1 και k_2. Για τα λ_1 και λ_2 ξέρουμε ότι καθιστούν αλγεβρικά ελάχιστην και αλγεβρικά μέγιστην τη συνάρτηση του λ

(468 1) $$\underline{k}_o(\lambda) = \frac{e + 2f\lambda + g\lambda^2}{E + 2F\lambda + G\lambda^2},$$

ἄρα δεν είναι ἄλλα παρά οι τιμές του λ που μηδενίζουν την παράγωγο

$$\frac{d}{d\lambda}\underline{k}_0(\lambda)=\frac{(2f+2g\lambda)(E+2F\lambda+G\lambda^2)-(e+2f\lambda+g\lambda^2)(2F+2G\lambda)}{(E+2F\lambda+G\lambda^2)^2}$$

συνεπώς είναι οι ρίζες της 2βάθμιας εξίσωσης

$$(468.2)\qquad \begin{vmatrix} f+g\lambda & e+2f\lambda+g\lambda^2 \\ F+G\lambda & E+2F\lambda+G\lambda^2 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} f+g\lambda & e+f\lambda \\ F+G\lambda & E+F\lambda \end{vmatrix} = 0$$

που γράφεται και έτσι:

$$\begin{vmatrix} f & e \\ F & E \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g\lambda & e \\ G\lambda & E \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & f\lambda \\ F & F\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g\lambda & f\lambda \\ G\lambda & F\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ή} \quad \begin{vmatrix} f & g \\ F & G \end{vmatrix}\lambda^2 + \begin{vmatrix} e & g \\ E & G \end{vmatrix}\lambda + \begin{vmatrix} e & f \\ E & F \end{vmatrix} = 0.$$

Από τα προηγούμενα ξέρουμε πως οι ρίζες αυτές είναι πραγματικές και άνισες· ενδέχεται μόνο η μια απ' αυτές να χαθή στο άπειρο (αυτό συμβαίνει όταν $\begin{vmatrix} f & g \\ F & G \end{vmatrix} = 0$, οπότε αναγκαστικά $\begin{vmatrix} e & g \\ E & G \end{vmatrix} \neq 0$, επειδή ο πίνακας $\begin{pmatrix} e & f & g \\ E & F & G \end{pmatrix}$ είναι βαθμού 2 ύστερα από την προϋπόθεση μας ότι το M είναι όχι σφαιρικό).

Για επαλήθευση υπολογίζουμε τη διακρίνουσα της παραπάνω εξίσωσης και δείχνουμε πως είναι ομόσημη με $EG-F^2$, δηλαδή >0.

Όσον αφορά τις πρωτεύουσες καμπυλότητες $\underline{k}_1$ και $\underline{k}_2$, να πως μπορούμε να μορφώσουμε τη 2 βάθμια εξίσωση που τις προσδιορίζει. Έχουμε 1ον

$$(468.3)\qquad \lambda_1+\lambda_2=-\begin{vmatrix} e & g \\ E & G \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f & g \\ F & G \end{vmatrix} \quad \text{και} \quad \lambda_1\lambda_2=\begin{vmatrix} e & f \\ E & F \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f & g \\ F & G \end{vmatrix}.$$

2ον έχουμε, αφού τα λ_1 και λ_2 επαληθεύουν την εξίσωση (468.2),

$$\begin{vmatrix} e+f\lambda_\nu & f+g\lambda_\nu \\ E+F\lambda_\nu & F+G\lambda_\nu \end{vmatrix} = 0 \quad \text{για } \nu=1,2,$$

άρα, με ισοδύναμη γραφή,

$$\frac{e+f\lambda_\nu}{E+F\lambda_\nu}=\frac{f+g\lambda_\nu}{F+G\lambda_\nu} \quad \text{και συνεπώς} \quad \frac{e+f\lambda_\nu}{E+F\lambda_\nu}=\frac{f\lambda_\nu+g\lambda_\nu^2}{F\lambda_\nu+G\lambda_\nu^2}=\frac{e+2f\lambda_\nu+g\lambda_\nu^2}{E+2F\lambda_\nu+G\lambda_\nu^2}.$$

Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο (468.1), θα έχουμε για τα $\underline{k}_1$ και $\underline{k}_2$.

$$\underline{K}_\nu = \underline{K}_0(\lambda_\nu) = \frac{e+f\lambda_\nu}{E+F\lambda_\nu} = \frac{f+g\lambda_\nu}{F+G\lambda_\nu} = \frac{(e+f\lambda_\nu)G}{(E+F\lambda_\nu)G} = \frac{(f+g\lambda_\nu)F}{(F+G\lambda_\nu)F}, (\nu=1,2)$$

και εφαρμόζοντας γνωστά πράγματα από τις αναλογίες

(468.4) $$\kappa_\nu = \frac{(e+f\lambda_\nu)G-(f+g\lambda_\nu)F}{(E+F\lambda_\nu)G-(F+G\lambda_\nu)F} = \frac{eG-fF+(fG-gF)\lambda_\nu}{EG-F^2} \quad \text{για } \nu=1,2.$$

Άρα

$$\underline{K}_1+\underline{K}_2 = \frac{2(eG-fF)+(fG-gF)(\lambda_1+\lambda_2)}{EG-F^2}$$

και χρησιμοποιώντας την 1η σχέση (468.3),

(468.5) $$\underline{K}_1+\underline{K}_2 = \frac{2(eG-fF)-(eG-gE)}{EG-F^2} = \frac{eG-2fF+gE}{EG-F^2}.$$

Εξ άλλου από τις ίδιες 2 σχέσεις (468.4) προκύπτει (με πολλαπλασιασμό τους):

η $$\underline{K}_1\,\underline{K}_2 = \frac{(eG-fF^2)+(eG-fF)(fG-gF)(\lambda_1+\lambda_2)+(fG-gF)^2\lambda_1\lambda_2}{(EG-F^2)^2}$$

και, με χρήση των (468.3), η

$$\underline{K}_1\,\underline{K}_2 = \frac{(eG-fF)^2-(eG-fF)(eG-gE)+(fG-gF)(eF-fE)}{(EG-F^2)^2}$$

$$= \frac{(eG-fF)(gE-fF)+(fG-gF)(eF-fE)}{(EG-F^2)^2}.$$

Ύστερα από αναγωγές στον αριθμητή και απλοποίηση δια $EG-F^2$ λαβαίνουμε

(468.6) $$\underline{K}_1\,\underline{K}_2 = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}.$$

Από τις σχέσεις (468.5 και (468.6) συμπεραίνουμε πως οι πρωτ. καμπυλότητες $\underline{K}_1$ και $\underline{K}_2$ της S στο $M(u,v)$ είναι οι ρίζες της 2 βάθμιας ως προς κ εξίσωσης.

(468.7) $$(EG-F^2)\kappa^2-(eG-2fF+gE)\kappa+eg-f^2=0.$$

Το ημιάθροισμα $\frac{1}{2}(\underline{K}_1+\underline{K}_2)$ λέγεται <u>μέση καμπυλότητα της S στο M</u> και το γινόμενο $\underline{K}_1\underline{K}_2$, <u>ολική καμπυλότητα</u> (ή <u>καμπυλότητα του Gauss</u>) της S στο M. Έτσι π.χ μια επίπεδη επιφάνεια έχει και μέση και ολική καμπυλότητα μηδενική σ'όλα τα σημεία της· η σφαίρα έχει μέση καμπυλότητα σ'όλα τα σημεία της το $\frac{1}{a}$, αν a η ακτίνα της, και ολική καμπυλότητα $\frac{1}{a^2}$ σ'όλα τα σημεία της. Σ'ένα ελλειπτικό σημείο της S η ολική καμπυλότητα είναι >0, σ'ένα παραβολικό, $=0$ και σ'ένα υπερβολικό, <0. Έτσι οι κύλινδροι και οι κωνικές επιφάνειες έχουν ολική καμπυλότητα σ'όλα τους τα σημεία το μηδέν.

§469. Για την ολική καμπυλότητα ο Gauss βρήκε ότι είναι εκφράσιμη με τα βασικά ποσά $E(u,v)$, F, G και τις μερικές παραγώγους των $E_u, \ldots, G_{u^2}$ ως προς u και v, 1ης ως 2ης τάξης. Να μια λογιστική απόδειξη του σπουδαίου (όπως θα φανή παρακάτω) θεωρήματος τούτου. Αρκεί, σύμφωνα με τον τύπο (468.6) να δείξουμε ότι η παράσταση $eg-f^2$ είναι εκφράσιμη με τα E,F,G και τις μερικές παραγώγους των. Έχουμε, σύμφωνα με τις σχέσεις του §461

$$eg-f^2=(\bar{r}_{u^2}\bar{N})(\bar{r}_{v^2}\bar{N})-(\bar{r}_{uv}\bar{N})^2=\frac{\bar{r}_{u^2}\cdot[\bar{r}_u\bar{r}_v]}{\sqrt{EG-F^2}}\cdot\frac{\bar{r}_{v^2}\cdot[\bar{r}_u\bar{r}_v]}{\sqrt{EG-F^2}}-\frac{(\bar{r}_{uv}\cdot[\bar{r}_u\bar{r}_v])^2}{(\sqrt{EG-F^2})^2}$$

$$=\frac{1}{EG-F^2}\left\{\begin{vmatrix} x_{u^2} & y_{u^2} & z_{u^2}\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x_{v^2} & y_{v^2} & z_{v^2}\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv}\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix}^2\right\}.$$

Εφαρμόζουμε στα δυο αυτά γινόμενα 3τάξιων οριζουσών τους τύπους της άσκησης 54*, σελ. 52, Τομος I, και λαβαίνουμε, έχοντας υπόψη και τις σχέσεις που ορίζουν τα E,F,G:

$$(eg-f^2)(EG-F^2)=\begin{vmatrix}\bar{r}_{u^2}\cdot\bar{r}_{v^2} & \bar{r}_{u^2}\cdot\bar{r}_u & \bar{r}_{u^2}\cdot\bar{r}_v\\ \bar{r}_u\cdot\bar{r}_{v^2} & \bar{r}_u\cdot\bar{r}_u & \bar{r}_u\cdot\bar{r}_v\\ \bar{r}_v\cdot\bar{r}_{v^2} & \bar{r}_v\cdot\bar{r}_u & \bar{r}_v\cdot\bar{r}_v\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\bar{r}_{uv}\cdot\bar{r}_{uv} & \bar{r}_{uv}\cdot\bar{r}_u & \bar{r}_{uv}\cdot\bar{r}_v\\ \bar{r}_u\cdot\bar{r}_{uv} & \bar{r}_u\cdot\bar{r}_u & \bar{r}_u\cdot\bar{r}_v\\ \bar{r}_v\cdot\bar{r}_{uv} & \bar{r}_v\cdot\bar{r}_u & \bar{r}_v\cdot\bar{r}_v\end{vmatrix}=$$

$$(469.1)\qquad =\begin{vmatrix}\bar{r}_{u^2}\bar{r}_{v^2} & \bar{r}_{u^2}\bar{r}_u & \bar{r}_{u^2}\bar{r}_v\\ \bar{r}_{v^2}\bar{r}_u & E & F\\ \bar{r}_{v^2}\bar{r}_v & F & G\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\bar{r}_{uv}^2 & \bar{r}_{uv}\bar{r}_u & \bar{r}_{uv}\bar{r}_v\\ \bar{r}_{uv}\bar{r}_u & E & F\\ \bar{r}_{uv}\bar{r}_v & F & G\end{vmatrix}$$

Από τις σχέσεις όμως $E=\bar{r}_u^2$, $G=\bar{r}_v^2$, $F=\bar{r}_u\bar{r}_v$ δια μερικών παραγωγίσεων ως προς u και v προκύπτουν οι σχέσεις

(469.2) $\frac{1}{2}E_u=\bar{r}_{uu}\bar{r}_u=\bar{r}_{u^2}\bar{r}_u$, $\frac{1}{2}E_v=\bar{r}_{uv}\bar{r}_u$, $\frac{1}{2}G_u=\bar{r}_{uv}\bar{r}_v$, $\frac{1}{2}G_v=\bar{r}_{v^2}\bar{r}_v$,

(469.3) $\frac{1}{2}E_{v^2}=\bar{r}_{uv^2}\bar{r}_u+\bar{r}_{uv}^2$, $\frac{1}{2}G_{u^2}=\bar{r}_{u^2v}\bar{r}_v+\bar{r}_{uv}^2$,

(469.4) $F_u=\bar{r}_{u^2}\bar{r}_v+\bar{r}_{uv}\bar{r}_u=\bar{r}_{u^2}\bar{r}_v+\frac{1}{2}E_v$, $F_v=\bar{r}_{v^2}\bar{r}_u+\bar{r}_{uv}\bar{r}_v=\bar{r}_{v^2}\bar{r}_u+\frac{1}{2}G_u$

Άρα

(469.5) $\bar{r}_{u^2}\bar{r}_v=F_u-\frac{1}{2}E_v$, $\bar{r}_{v^2}\bar{r}_u=F_v-\frac{1}{2}G_u$.

Εξ άλλου από την (469.4) προκύπτει η

$$F_{uv}=\bar{r}_{u^2v}\bar{r}_v+\bar{r}_{u^2}\bar{r}_{v^2}+\bar{r}_{uv^2}\bar{r}_u+\bar{r}_{uv}\bar{r}_{uv},$$

άρα

(469.6) $$F_{uv}-\frac{1}{2}E_{v^2}-\frac{1}{2}G_{u^2}=\bar{r}_{u^2}\cdot\bar{r}_{v^2}-\bar{r}_{uv}\cdot\bar{r}_{uv}=\bar{r}_{u^2}\bar{r}_{v^2}-\bar{r}_{uv}^2.$$

Εισάγουμε τα παραπάνω (469.2), (469.5) στη σχέση (469.1):

$$(eg-f^2)(EG-F^2)=\begin{vmatrix}\bar{r}_{u^2}\bar{r}_{v^2} & \frac{1}{2}E_u & F_u-\frac{1}{2}E_v\\ F_v-\frac{1}{2}G_u & E & F\\ \frac{1}{2}G_v & F & G\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\bar{r}_{uv}^2 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u\\ \frac{1}{2}E_v & E & F\\ \frac{1}{2}G_u & F & G\end{vmatrix}.$$

Αναλύουμε την τελευταία ορίζουσα σε άθροισμα 2 οριζουσών ως εξής:

$$\begin{vmatrix}\bar{r}_{uv}^2 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u\\ \frac{1}{2}E_v & E & F\\ \frac{1}{2}G_u & F & G\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\bar{r}_{uv}^2 & 0 & 0\\ \frac{1}{2}E_v & E & F\\ \frac{1}{2}G_u & F & G\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u\\ \frac{1}{2}E_v & E & F\\ \frac{1}{2}G_u & F & G\end{vmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι στην πρώτη ορίζουσα του αθροίσματος αυτού η πρώτη στήλη μπορεί ν' αντικατασταθή με τη στήλη $\begin{vmatrix}\bar{r}_{uv}^2\\ F_v-\frac{1}{2}G_u\\ \frac{1}{2}G_v\end{vmatrix}$ χωρίς να μεταβληθή η τιμή της ορίζουσας. Έτσι βρίσκουμε τελικά:

$$(eg-f^2)(EG-F^2)=\begin{vmatrix}\bar{r}_{u^2}\bar{r}_{v^2} & \frac{1}{2}E_u & F_u-\frac{1}{2}E_v\\ F_v-\frac{1}{2}G_u & E & F\\ \frac{1}{2}G_v & F & G\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\bar{r}_{uv}^2 & 0 & 0\\ F_v-\frac{1}{2}G_u & E & F\\ \frac{1}{2}G_v & F & G\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u\\ \frac{1}{2}E_v & E & F\\ \frac{1}{2}G_u & F & G\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}\bar{r}_{u^2}\bar{r}_{v^2}-\bar{r}_{uv}^2 & \frac{1}{2}E_u & F_u-\frac{1}{2}E_v\\ F_v-\frac{1}{2}G_u & E & F\\ \frac{1}{2}G_v & F & G\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u\\ \frac{1}{2}E_v & E & F\\ \frac{1}{2}G_u & F & G\end{vmatrix}$$

και χρησιμοποιώντας την (469.6), καταλήγουμε σε κείνο που θέλαμε να δείξουμε:

$$(469.7)\quad \underline{K_1K_2} = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} = \frac{1}{(EG-F^2)^2}\left\{\begin{vmatrix} F_{uv}-\frac{1}{2}E_{v^2}-\frac{1}{2}G_{u^2} & \frac{1}{2}E_u & F_u-\frac{1}{2}E_v \\ F_v-\frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}\right\}.$$

§470. <u>Ισομετρική απεικόνιση</u>. Ας είναι S και S^* δυο επιφάνειες και ας έχουν αντιστοιχιστή τα σημεία M^* της S^* αμφιμονοσήμαντα στα σημεία M της S. Τότε μπορούμε να παραστήσουμε αναλυτικώς τις δυο επιφάνειες χρησιμοποιώντας για τα αντίστοιχα σημεία M και M^* τα ίδια ζεύγη τιμών δυο παραμέτρων (u,v):

(470.1) για την S: $x=f_1(u,v)$, $y=f_2(u,v)$, $z=f_3(u,v)$·

(470.2) για την S^*: $x=f_1^*(u,v)$, $y=f_2^*(u,v)$, $z=f_3^*(u,v)$.

Αυτό είναι φανερό αφ' εαυτού, μπορεί όμως να δειχτή και έτσι:

Ας είναι (470.1) η αναλυτική παραμετρική παράσταση της S και

(470.3) $\quad x=g_1^*(u^*,v^*)$, $y=g_2^*(u^*,v^*)$, $z=g_3^*(u^*,v^*)$

μια παράσταση της S^*. Μια απεικόνιση της S πάνω στην S^* (με τον όρο αυτόν θα εννοούμε μιαν αμφιμονοσήμαντη αντιστοίχιση των σημείων M^* της S^* στα σημεία M της S) θα δίνεται με ένα σύστημα εξισώσεων

$$u^* = \sigma_1(u,v) \quad , v^* = \sigma_2(u,v)$$

μονοσήμαντα επιλύσιμο ως προς (u,v). Αν τις εκφράσεις αυτές των u^* και v^* ως (μονοσήμαντες) συναρτήσεις των u,v τις εισαγάγουμε μέσα στην αναλυτική παραμετρική παράσταση (470.3) της S^* θα λάβουμε γι' αυτή τη νέα αναλυτική παράσταση

$$x=g_1^*(\sigma_1(u,v),\sigma_2(u,v)),\ y=g_2^*(\sigma_1(u,v),\sigma_2(u,v)),\ z=g_3^*(\sigma_1(u,v),\sigma_2(u,v))$$

η οποία χαρακτηρίζει το σημείο M^* που αντιστοιχεί στο $M(u,v)$ της S με το ίδιο ζευγάρι τιμών των παραμέτρων (u,v).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι μια τέτοια απεικόνιση της (470.1) πάνω στην

(470.2), όπου τα αντίστοιχα σημεία Μ και M^* χαρακτηρίζονται από το ίδιο ζευγάρι τιμών (u,v), έχει την ιδιότητα να διατηρή τα μήκη των γραμμών, ότι, με άλλα λόγια, το μήκος κάθε γραμμής γ της S ισούται με το μήκος της αντίστοιχης γραμμής γ^* (της "εικόνας„ της) πάνω στην S^*:

$$\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{E(u(t),v(t))\dot{u}^2(t)+2F\dot{u}\dot{v}+G\dot{v}^2}\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{E^*(u(t),v(t))\dot{u}^2(t)+2F^*\dot{u}\dot{v}+G^*\dot{v}^2}\,dt$$

Από εδώ με διαφόριση έπεται ότι για κάθε θεωρούμενο ζευγάρι (u,v) είναι

$$E(u,v)du^2+2F(u,v)du\,dv+G(u,v)dv^2=E^*(u,v)du^2+2F^*(u,v)du\,dv+G^*(u,v)dv^2$$

όποιος και να είναι ο λόγος $dv:du$. Άρα θα έχουμε τις ταυτότητες ως προς (u,v):

(470.4) $\quad E(u,v)\equiv E^*(u,v)\quad, F(u,v)\equiv F^*(u,v), \ G(u,v)\equiv G^*(u,v).$

Αντιστρόφως, αν για δυο επιφάνειες (470.1) και (470.2) αληθεύουν οι ταυτότητες αυτές και στο σημείο $M(u,v)$ της S αντιστοιχίσουμε το $M^*(u,v)$ της S^* με το ίδιο ζευγάρι τιμών των παραμέτρων u,v, τότε θα προκύψη μια απεικόνιση ισομετρική της μιας επιφάνειας πάνω στην άλλη.

Από τις σχέσεις (470.4) έπεται εξ άλλου ότι οι γωνίες δυο γραμμών γ_1 και γ_2 της S, που περνούν από ένα σημείο $M(u,v)$, ισούνται με τις γωνίες των εικόνων τους γ_1^* και γ_2^* πάνω στην S^* που θα έχουν κοινό το αντίστοιχο σημείο $M^*(u,v)$ (δυνάμει του τύπου που βρήκαμε στον § 460 για το συνημίτονο της γωνίας ω δυο γραμμών δια του $M(u,v)$).

Με άλλα λόγια: Μια ισομετρική απεικόνιση είναι αναγκαστικά και ισογώνια. Η αντίστροφη πρόταση δεν ισχύει · αυτό φαίνεται αμέσως, όταν απεικονίσουμε ένα επίπεδο είτε πάνω στον εαυτό του δια μιας ομοθεσίας με λόγο $\neq \pm 1$ είτε πάνω σ' ένα άλλο επίπεδο, παράλληλο όμως, με μια κεντρική προβολή. Οι δυο αυτές απεικονίσεις είναι ισογώνιες όχι όμως και ισομετρικές.

Όσον αφορά τις καμπυλότητες των γραμμών της S στα διάφορα σημεία της αυτές δεν παραμένουν αναλλοίωτες σε μιαν ισομετρική απεικόνιση. Ειδικώς οι πρωτεύουσες καμπυλότητες $\underline{k}_1$ και $\underline{k}_2$ της S στο σημείο της $M(u,v)$ δεν είναι εν γένει ίσες με τις πρωτεύουσες καμπυλότητες $\underline{k}_1^*$ και $\underline{k}_2^*$ της S^* στο αντίστοιχο σημείο $M^*(u,v)$. Παρά τούτο όμως η ολική καμπυλότητα $\underline{k}_1 \cdot \underline{k}_2$ της S στο $M(u,v)$ ισούται με την ολική καμπυλότητα $\underline{k}_1^* \ \underline{k}_2^*$ της S^* στο $M^*(u,v)$, σύμφωνα με τον τύπο (469.7) του Gauss και τις ταυτότητες (470.4). Μ'άλλα λόγια, η ολική καμπυλότητα μιας επιφάνειας S στα διάφορα σημεία της παραμένει αναλλοίωτη σε μιαν ισομετρική απεικόνιση. Άρα μια σφαίρα δεν είναι ισομετρικά απεικονίσιμη πάνω στο επίπεδο, επειδή η μεν ολική καμπυλότητα μιας σφαίρας με ακτίνα a στα διάφορα σημεία της ισούται με $\frac{1}{a^2}$, η δε ολική καμπυλότητα του επιπέδου στα διάφορα σημεία του είναι ίση με 0.

§ 471. Γεωδαισιακή καμπυλότητα μιάς γραμμής γ της S σ'ένα σημείο της.

Να πρώτα ποιος είναι ο ορισμός της: Ας είναι t το εφαπτόμενο επίπεδο της S στο σημείο $M(u,v)$ της γ, τ η εφαπτομένη της γ στο M, $\bar{\varepsilon}$ το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα της γ στο M και $\bar{v}=[\bar{N}\ \bar{\varepsilon}]$, όπου $\bar{N}$ το μοναδιαίο κάθετο στην S διάνυσμα $\frac{[\bar{r}_u\ \bar{r}_v]}{EG-F^2}$ που θεωρήσαμε προηγουμένως. Προβάλλουμε τη γ ορθά πάνω στό t· λαμβάνουμε μια γραμμή γ' δια του $M(u,v)$ με εφαπτομένη στο M την ευθεία τ και επομένως με κάθετο διάνυσμα στο M το $\bar{v}$. Η καμπυλότητα της γ' στο M, προσημασμένη με $+$ ή $-$ καθόσον τά κοίλα της γ' στο M στρέφονται κατά τη φορά του $\bar{v}$ ή κατά την αντίθετη, λέγεται γεωδαισιακή καμπυλότητα της γ στο σημείο της M. Θα δείξουμε ότι η γεωδαισιακή καμπυλότητα δεν αλλοιώνεται σε μιαν ισομετρική απεικόνιση της S. Ας βρούμε πρώτα με τι ισούται. Έστω p το εγγύτατο επίπεδο της γ στο M· το υποθέτουμε διάφορο από το εφαπτόμενο επίπεδο t της S στο M. Καλούμε ϕ τη μη αμβλεία γωνία του p με το t και ω την οξεία γωνία του p με το κάθετο προς την S επίπεδο το περιέχον την εφαπτομένη τ της γ. Ισχύει εννοείται η σχέση $\phi+\omega=\frac{\pi}{2}$. Έστω C η κυλινδρική επιφάνεια που προβάλλει ορθά τη γ πάνω στο εφαπτόμενο επίπεδο t και γ'' η τομή της C με το εγγύτατο επίπεδο p της γ στο M. Οι τρεις γραμμές $\gamma, \gamma'', \gamma'$ κείνται πάνω στην προβάλλουσα κυλινδρική επιφάνεια C. Οι γ και γ'' έχουν το ίδιο εγγύτατο επίπεδο p στο σημείο τους M, άρα και την ίδια καμπυλότητα, ας την ειπούμε κ στο σημείο M (βλέπε § 461, σελ 281-285). Εξ άλλου η μεν γ'' είναι μια πλάγια επίπεδη τομή της C, η δε γ' μια κάθετη τομή της C που έχουν την ίδια εφαπτομένη τ στο κοινό τους σημείο M· η μη αμβλεία γωνία των δυο επιπέδων τους p και t εκλήθη ϕ, άρα, κατά το θεώρημα του Meusnier,

$$\text{καμπυλότητα της } \gamma' \text{ στο } M = \text{καμπυλότητα της } \gamma'' \text{ στο } M \cdot \text{συν}\,\phi$$

$$= \kappa\,\text{συν}\phi = \kappa\,\text{ημ}\,\omega .$$

Κατά τούτα, η απόλυτη τιμή της γεωδαισιακής καμπυλότητας της γ στο M ισούται με $\kappa\,\text{συν}\,\phi = \frac{\text{συν}\,\phi}{R}$, όπου R η ακτίνα καμπυλότητας της γ στο M. Όσον αφορά τώρα το πρόσημο της, παρατηρούμε ότι είναι το $+$ ή το $-$, καθόσον $\bar{\omega}\cdot\bar{v} > 0$ ή $\bar{\omega}\cdot\bar{v} < 0$ ($\bar{\omega}$ είναι το μοναδιαίο πρωτεύον κάθετο διάνυσμα της γ στο M: $\bar{\omega} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\bar{\xi}}{ds}$). Και αλήθεια, τα κοίλα της γ στη γειτονιά του M στρέφονται κατά τη φορά του $\bar{\omega}$, τα κοίλα επομένως της γ', ορθής προβολής της γ πάνω στο επίπεδο t, στρέφονται κατά τη φορά της ορθής προβολής του $\bar{\omega}$ πάνω στο t, προβολής που είναι $\uparrow\uparrow$ προς το $\bar{v}$ όταν $\bar{\omega}\bar{v} > 0$ και $\uparrow\downarrow$ προς το $\bar{v}$ όταν $\bar{\omega}\bar{v} < 0$. Άρα η γεωδαισιακή καμπυλότητα της γ στο M ισούται κατ' απόλυτη τιμή και κατά πρόσημο με $\text{sign}(\bar{\omega}\bar{v})\cdot\kappa\,\text{συν}\phi$. Έχουμε όμως $\text{συν}\,\phi = |\bar{\omega}\bar{v}|$ διότι τα διανύσματα $\bar{\omega}$ και $\bar{v}$, κάθετα αμφότερα προς την κοινή ευθεία τ των επιπέδων p και t, κείνται αντιστοίχως μέσα στα επίπεδα p και t των οποίων η μη αμβλεία γωνία εκλήθη ϕ. Άρα $\text{sign}(\bar{\omega}\bar{v})\cdot\text{συν}\phi = \bar{\omega}\bar{v}$. Συνεπώς για τη γεωδαισιακή καμπυλότητα της γ στο σημείο της M λαμβάνουμε την έκφραση :

$$\kappa\cdot\bar{\omega}\bar{\nu}=\kappa\bar{\omega}\cdot\bar{\nu}=\frac{d\bar{\varepsilon}}{ds}[\bar{N}\,\bar{\varepsilon}]=\left(\bar{\varepsilon}\frac{d\bar{\varepsilon}}{ds}\bar{N}\right)=\left(\bar{\varepsilon}\frac{d\bar{\varepsilon}}{ds}\frac{[\bar{\tau}_u\bar{\tau}_v]}{\sqrt{EG-F^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\cdot\left(\bar{\varepsilon}\frac{d\bar{\varepsilon}}{ds}[\bar{\tau}_u\bar{\tau}_v]\right),$$

Έχουμε τώρα να δείξουμε ότι ο αριθμός αυτός παραμένει αναλλοίωτος σε μιαν ισομετρική απεικόνιση της S (βλέπε(470.1)) πάνω στην S^* (βλέπε (470.2)). Η γραμμή γ δια του $M(u,v)$ της S ας έχη διανυσματική παραμετρική παράσταση $\bar{\tau}(u(s),v(s))$ όπου s το προσημασμένο μήκος τόξου $(\overset{\frown}{AM})$ πάνω στη γ, με κάποιο σημείο της A για αρχή και με κάποια φορά διαγραφής της για θετική φορά. Πάνω στην ισομετρική της εικόνα γ^* λαμβάνουμε για αρχή τόξων την εικόνα A^* του A και για θετική φορά τη φορά διαγραφής της γ^* που αντιστοιχεί, δια της απεικονίσεως, στη θετική φορά που εκλέξαμε πάνω στη γ. Τότε $(\overset{\frown}{A^*M^*})=(\overset{\frown}{AM})=s$ (αφού η απεικόνιση είναι ισομετρική) και η διανυσματική παραμετρική παράσταση της γ^* θα είναι η $\bar{\tau}^*(u(s),v(s))$, όπου τα $u(s)$, $v(s)$ είναι αυτές οι ίδιες συναρτήσεις που εισέρχονται στην παραπάνω παράσταση $\bar{\tau}(u(s),v(s))$ της γ. Για να αποδείξουμε τώρα ότι η γεωδ. καμπυλότητα της γ στο $M(u,v)$

$$\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\bar{\varepsilon}\;\frac{d\bar{\varepsilon}}{ds}[\bar{\tau}_u\,\bar{\tau}_v]\right)=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\bar{\varepsilon}\;\frac{d\bar{\varepsilon}}{ds}\right]\cdot\left[\bar{\tau}_u\,\bar{\tau}_v\right]$$

ισούται με τη γεωδ. καμπυλότητα της γ^* στο $M^*(u,v)$, αρκεί να δείξουμε ότι ο αριθμός $\left[\bar{\varepsilon}\,\frac{d\bar{\varepsilon}}{ds}\right]\cdot\left[\bar{\tau}_u\,\bar{\tau}_v\right]$ είναι εκφράσιμος δια των βασικών ποσών $E(u,v)$, $F(u,v)$, $G(u,v)$ και των μερικών παραγώγων τους, καθώς η δια των $u'(s)$, $v'(s)$, $u''(s)$, $v''(s)$ γιατί, σύμφωνα με όσα είπαμε αμέσως παραπάνω και με τις ταυτότητες (470.4), όλα αυτά τα ποσά είναι αντιστοίχως τα ίδια είτε πρόκειται για τη γ είτε πρόκειται για τη γ^*. Προς τούτο εφαρμόζοντας τη γνωστή σχέση

$$[\bar{a}\,\bar{b}]\cdot[\bar{\gamma}\,\bar{\delta}]=(\bar{a}\,\bar{\gamma})(\bar{b}\,\bar{\delta})-(\bar{a}\,\bar{\delta})(\bar{b}\,\bar{\gamma}),$$

παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\left[\bar{\varepsilon}\;\frac{d\bar{\varepsilon}}{ds}\right]\cdot\left[\bar{\tau}_u\bar{\tau}_v\right]=(\bar{\varepsilon}\,\bar{\tau}_u)\left(\frac{d\bar{\varepsilon}}{ds}\,\bar{\tau}_v\right)-(\bar{\varepsilon}\,\bar{\tau}_v)\left(\frac{d\bar{\varepsilon}}{ds}\,\bar{\tau}_u\right).$$

Είναι όμως

$$\bar{\varepsilon}=\frac{d\bar{r}}{ds}=\bar{r}_u\cdot u'(s)+\bar{r}_v\cdot v'(s)\ ,\ \frac{d\bar{\varepsilon}}{ds}=\bar{r}_{u^2}u'^2+2\bar{r}_{uv}u'v'+r_{v^2}v'^2+\bar{r}_u u''+\bar{r}_v v'',$$

άρα, με χρήση των ορισμών των βασικών ποσών E, F, G και των σχέσεων (Δ69.2), (Δ69.5),

$$\bar{\varepsilon}\,\bar{r}_u=\bar{r}_u^2u'+\bar{r}_v\bar{r}_u v'=Eu'+Fv'\ ,\quad \bar{\varepsilon}\,\bar{r}_v=\bar{r}_u\bar{r}_v u'+\bar{r}_v^2v'=Fu'+Gv',$$

$$\frac{d\bar{\varepsilon}}{ds}\bar{r}_v=\bar{r}_{u^2}\bar{r}_v u'^2+2\bar{r}_{uv}\bar{r}_v u'v'+\bar{r}_{v^2}\bar{r}_v v'^2+\bar{r}_u\bar{r}_v u''+\bar{r}_v^2 v''$$
$$=(F_u-\tfrac{1}{2}E_v)u'^2+2\cdot\tfrac{1}{2}G_u u'v'+\tfrac{1}{2}G_v v'^2+Fu''+Gv'',$$

$$\frac{d\bar{\varepsilon}}{ds}\bar{r}_u=\bar{r}_{u^2}\bar{r}_u u'^2+2\bar{r}_{uv}\bar{r}_u u'v'+\bar{r}_{v^2}\bar{r}_u v'^2+\bar{r}_u^2u''+\bar{r}_u\bar{r}_u v''$$
$$=\tfrac{1}{2}E_u u'^2+2\cdot\tfrac{1}{2}E_v u'v'+(F_v-\tfrac{1}{2}G_u)v'^2+Eu''+Fv''.\qquad \text{ο.ε.δ.}$$

Αποδείχτηκε λοιπόν το αναλλοίωτο της γεωδ. καμπυλότητας κατά μία ισομετρική απεικόνιση και αυτό θα μας δώση παρακάτω το θεώρημα του Catalan.

§ Δ72. Σ'αυτόν τον παράγραφο θα δώσουμε την ειδική μορφή που παίρνουν μερικοί από τους τύπους, που βρήκαμε παραπάνω, όταν ως παραμέτρους για την S πάρουμε τις δυο συντεταγμένες x, y. Αυτό είναι πάντα δυνατό στη γειτονιά ενός σημείου $M(u,v)$, αρκεί να είναι σ'αυτό $\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}\neq 0$, διότι τότε το σύστημα $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v)\end{cases}$ είναι (μονοσήμαντα) επιλύσιμο ως προς u και v στη γειτονιά του M: $\begin{cases} u=\varphi_1(x,y) \\ v=\varphi_2(x,y)\end{cases}$ και η S μπορεί να λάβη την αναλυτική παράσταση:

$$x=x(\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y))\equiv x,\ \ y=y(\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y))\equiv y,\ \ z=z(\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y)=\sigma(x,y),$$

και διανυσματικά:

$$\bar{r}=\bar{r}(x,y)=x\bar{i}+y\bar{j}+\sigma(x,y)\bar{k}.$$

Έχουμε, αν εισάγουμε, όπως συνηθίζεται, τους συμβολισμούς:

$$p(x,y)=\sigma'_x(x,y)\ ,\ q'=\sigma'_y\ ,\ r=p'_x=\sigma''_{x^2}\ ,\ s=p'_y=q'_x=\sigma''_{xy}\ ,\ t=q'_y=\sigma''_{y^2},$$

τα ακόλουθα:

$$\bar{r}_x=\bar{i}+p\bar{k}\ ,\ \bar{r}_y=\bar{j}+q\bar{k}\ ,\ [\bar{r}_x\,\bar{r}_y]=-p\bar{i}-q\bar{j}+\bar{k},$$

άρα το κάθετο διάνυσμα

$$\bar{N}=\frac{-p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\bar{i}+\frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\bar{j}+\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\bar{k},$$

και η εξίσωση του εφαπτομένου επιπ. στο $M(x,y,z)$:

$$Z-\sigma(x,y)=p(X-x)+q(Y-y).$$

Οι συντελεστές της $1^{ης}$ βασικής μορφής: $E=\bar{r}_x^2=1+p^2$, $F=\bar{r}_x\bar{r}_y=pq$, $G=1+q^2$ και συνεπώς η $1^η$ βασική μορφή: $ds^2=(1+p^2)dx^2+2pq\,dx\,dy+(1+q^2)dy^2$.

Εξ' άλλου $\bar{r}_{x^2}=p'_x\bar{k}=r\bar{k}$, $\bar{r}_{xy}=p_y\bar{k}=s\bar{k}$, $\bar{r}_{y^2}=q'_y\bar{k}=t\bar{k}$,

άρα οι συντελεστές της $2^{ης}$ βασ. μορφής είναι τώρα: $e=\bar{r}_{x^2}\cdot\bar{N}=\frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$, $f=\bar{r}_{xy}\cdot\bar{N}=\frac{s}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$, $g=\bar{r}_{y^2}\cdot\bar{N}=\frac{t}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$. Η καμπυλότητα μιας κάθετης τομής της S στο σημείο της M είναι λοιπόν $=$

$$=\frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+2\frac{s}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}+\frac{t}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2.$$

Οι ασυμπτωτικές διευθύνσεις αντιστοιχούν στις τιμές του λόγου $\lambda=dy:dx$ οι οποίες μηδενίζουν τη $2^η$ βασική μορφή, άρα και το τριώνυμο $r+2s\lambda+t\lambda^2$. Κατά ταύτα το σημείο M της S είναι υπερβολικό (2 διάφορες πραγματικές ασυμπτωτικές διευθύνσεις), παραβολικό (μια (διπλή) πραγμ. ασυμπτωτική διεύθυνση) ή ελλειπτικό (καμιά πραγματική ασυμπτωτική διεύθυνση) καθόσον σ' αυτό s^2-rt είναι >0, $=0$ ή <0. Η δείκτρια του Dupin στο σημείο M έχει εξίσωση, ως προς το σύστημα συντεταγμένων του εφαπτόμενου επιπέδου της S στο M με αρχή το M και με βασικά διανύσματα τα $\bar{r}_x=\bar{i}+p\bar{k}$ και $\bar{r}_y=\bar{j}+q\bar{k}$, την εξής:

$$|rX^2+2sXY+tY^2|=\sqrt{1+p^2+q^2}$$

Αν το εφαπτόμενο επίπεδο είναι παράλληλο προς το επίπεδο $Z=0$, οπότε $p=0$ και $q=0$ στο θεωρούμενο σημείο M, τότε τα δυο παραπάνω βασικά διανύσματα δεν διαφέρουν από τα $\bar{i}$ και $\bar{j}$ αντιστοίχως. Οι πρωτεύουσες διευθύνσεις στο M αντιστοιχούν στις 2 πραγματικές τιμές του λόγου $\lambda=dy:dx$ οι οποίες μηδενίζουν το τριώνυμο

$$\begin{vmatrix} s & t \\ pq & 1+q^2 \end{vmatrix}\lambda^2 + \begin{vmatrix} r & t \\ 1+p^2 & 1+q^2 \end{vmatrix}\lambda + \begin{vmatrix} r & s \\ 1+p^2 & pq \end{vmatrix}.$$

οι αντίστοιχες (προσημασμένες) πρωτεύουσες καμπυλότητες είναι ρίζες της 2βαθμιας ως προς κ εξίσωσης (βλ. 468.7).

$$(1+p^2+q^2)^2\kappa^2 - (r(1+q^2) - 2spq + t(1+q^2))\sqrt{1+p^2+q^2}\,.\,\kappa + rt - s^2 = 0.$$

Επομενως η ολική καμπυλότητα της S στο M ισούται με $\dfrac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}$. (Αν το εφαπτόμενο επίπεδο της S στο M είναι $\parallel$ προς το επίπεδο $z=0$, οποτε $p=q$ 0, τότε η ολική καμπυλότητα ισούται με $rt-s^2$). Ας διατυπώσουμε τέλος και το ακόλουθο άμεσο πόρισμα των παραπάνω:

Για νά είναι η επιφάνεια $z=\sigma(x,y)$ ισομετρικά απεικονίσιμη πάνω σ'ένα επιπεδο πρέπει να έχουμε ταυτοτικά ως προς x και y:

$$rt - s^2 = \sigma''_{x^2}\sigma''_{y^2} - (\sigma''_{xy})^2 = z''_{x^2}z''_{y^2} - (z''_{xy})^2 = 0.$$

Αποδείχνεται ότι η αναγκαία αυτή συνθήκη είναι και ικανή για την ισομετρική απεικόνιση πάνω σε επίπεδο. Άρα η διαφορική εξίσωση $z''_{x^2}(x,y)\cdot z''_{y^2}(x,y) - (z''_{xy}(x,y))^2 = 0$ έχει για λύσεις τις συναρτήσεις $z = z(x,y)$ που παριστανονται γεωμετρικά από επιφάνειες ισομετρικά απεικονίσιμες πάνω σε επίπεδο και μόνον αυτές.

§ 173. Μια βοηθητική πρόταση. Ας είναι $\begin{cases}\varphi(x,y,z,a)=0\\ \omega(x,y,z,a)=0\end{cases}$ ένα σύστημα εξισώσεων με αριστερά μέλη δυο συναρτήσεις φ και ω μονοσήμαντα ορισμένες σ'ένα χωρίο $\mathcal{A}$ του 4διάστατου αριθμητικού χώρου των x, y, z, a και εφοδιασμένες με μερικές παραγώγους, τουλάχιστο 1ης τάξεως, συνεχείς στο χωρίο $\mathcal{A}$. Υποθέτουμε ακόμα πως υπάρχει μέσα στο $\mathcal{A}$ μια τουλάχιστο (εσωτερική) θέση (x_0, y_0, z_0, a_0) που ικανοποιεί το σύστημα (δηλ. $\varphi(x_0,y_0,z_0,a_0) = \omega(x_0,y_0,z_0,a_0) = 0$) και ότι αφ'ενός μεν $|\varphi'_a(x_0,y_0,z_0,a_0)| + |\omega'_a(x_0,y_0,z_0,a_0)| \neq 0$, αφ' ετέρου δε είναι βαθμού 2 ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} \varphi'_x\,(x_0,y_0,z_0,a_0) & \varphi'_y\,(x_0,y_0,z_0,a_0) & \varphi'_z\,(x_0,y_0,z_0,a_0) \\ \omega'_x\,(x_0,y_0,z_0,a_0) & \omega'_y\,(x_0,y_0,z_0,a_0) & \omega'_z\,(x_0,y_0,z_0,a_0) \end{pmatrix}.$$

Τότε το σύστημα έχει στη γειτονιά της θέσης (x_0,y_0,z_0,a_0) και άλλες άπειρες (πραγματικές) λύσεις (x,y,z,a) που παρέχουν ένα διπαραμετρικώς άπειρο πλήθος σημείων (x,y,z).

Π.χ. αν $\begin{vmatrix} \varphi'_y(x_0,\dots,a_0) & \varphi'_z\,(x_0,\dots,a_0) \\ \omega'_y(x_0,\dots,a_0) & \omega'_z\,(x_0,\dots,a_0) \end{vmatrix} \neq 0$ τότε οι δυο εξισώσεις

$\varphi=0$, $\omega=0$ ορίζουν μονότροπα στη γειτονιά της (x_0,y_0,z_0,a_0) δυο εμπλεγμένες συναρτήσεις $y=y(x,a)$, $z=z(x,a)$ που παίρνουν τις τιμές y_0, z_0 για $(x=x_0,\ a=a_0)$ και είναι εφοδιασμένες με συνεχείς μερικές παραγωγους ως προς x και a. Οι λύσεις αυτές $(x,\ y(x,\alpha),z(x,\alpha),\ \alpha)$ παρέχουν το διπαραμετρικώς άπειρο πλήθος σημείων $(x,\ y=y(x,a),\ z=z(x,a))$, όπως ισχυριστήκαμε.

Αν παραστήσουμε τώρα τις τριάδες αυτές (x,y,z), που συνδυασμένες εκάστοτε με μια τιμή του α, ικανοποιούν το σύστημα, δια σημείων $M(x,y,z)$ σ'ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $OXYZ$, θα λάβουμε μια επιφάνεια S που έχει για κάθετο διάνυσμα, στο σημείο της: (x,y,z), (α), το εξής:

$$\bar{K}: \left(\begin{vmatrix} \varphi'_x(x\,y\,z\,a) & \varphi'_\alpha(x\,y\,z\,\alpha) \\ \omega'_x(x\,y\,z\,a) & \omega'_\alpha(x\,y\,z\,\alpha) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \varphi'_y(x\dots\alpha) & \varphi'_\alpha(x\dots\alpha) \\ \omega'_y\,x\dots\alpha) & \omega'_\alpha(x\dots\alpha) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \varphi'_z(x\dots\alpha) & \varphi'_\alpha(x\dots\alpha) \\ \omega'_z(x\dots\alpha) & \omega'_\alpha(x\dots\alpha) \end{vmatrix} \right).$$

<u>Απόδειξη</u>. Έχουμε να δείξουμε πως το $\bar{K}$ είναι $\perp$ προς την εφαπτομένη της τυχαίας γραμμής γ: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ σε συνδυασμό με $\alpha=\alpha(t)$, η οποία κείται πάνω στην S. Ισχύουν λοιπόν οι ταυτότητες ως προς τη μεταβλητή t:

$$\varphi\big(x(t),y(t),z(t),\alpha(t)\big)=0\ ,\quad \omega\big(x(t),y(t),z(t),\alpha(t)\big)=0.$$

από τις οποίες έπονται δια παραγωγίσεως οι ακόλουθες:

$$\varphi'_x\cdot\dot{x}+\varphi'_y\,\dot{y}+\varphi'_z\,\dot{z}+\varphi'_\alpha\cdot\dot{\alpha}=0\ ,\quad \omega'_x\cdot\dot{x}+\omega'_y\,\dot{y}+\omega'_z\,\dot{z}+\omega'_\alpha\cdot\dot{\alpha}=0.$$

$$\text{ή}\quad \varphi'_x\cdot\dot{x}+\varphi'_y\,\dot{y}+\varphi'_z\,\dot{z}=-\varphi'_\alpha\cdot\dot{\alpha}\ ,\quad \omega'_x\,\dot{x}+\omega'_y\,\dot{y}+\omega'_z\,\dot{z}=-\omega'_\alpha\cdot\dot{\alpha}.$$

Το διάνυσμα $\bar{E}\,(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$ είναι εφαπτομενικό της γ και

$$\bar{K}\cdot\bar{E}=(\varphi'_x\,\omega'_\alpha-\varphi'_\alpha\,\omega'_x)\dot{x}+(\varphi'_y\,\omega'_\alpha-\varphi'_\alpha\,\omega'_y)\dot{y}+(\varphi'_z\,\omega'_\alpha-\varphi'_\alpha\,\omega'_z)\dot{z}$$

$$=(\varphi'_x\cdot\dot{x}+\varphi'_y\cdot\dot{y}+\varphi'_z\cdot\dot{z})\,\omega'_\alpha-(\omega'_x\cdot\dot{x}+\omega'_y\cdot\dot{y}+\omega'_z\,\dot{z})\,\varphi'_\alpha$$
$$=\ -\varphi'_\alpha\cdot\dot{\alpha}\cdot\omega'_\alpha-(-\omega'_\alpha\cdot\dot{\alpha})\cdot\varphi'_\alpha=0\ ,\ \text{ο.ε.δ.}$$

§474. <u>Περιβάλλουσα ενός γένους επιφανειών.</u> Έστω $\sigma(x,y,z,\alpha)=0$ ένα γένος (= μονοπαραμετρικό σύστημα) επιφανειών S_α. Υποθέτουμε πως το σύστημα των δυο εξισώσεων $\begin{cases}\sigma(x,y,z,\alpha)=0\\ \sigma'_\alpha(x,y,z,\alpha)=0\end{cases}$ ορίζει μιαν επιφάνεια $\mathcal{F}$ (επαρκείς συνθήκες γι' αυτό περιέχει ο προηγούμενος παράγραφος).

Παρατηρούμε ότι η $\mathcal{F}$ έχει με κάθε επιφάνεια S_{α_0} του γένους μιαν ολόκληρη γραμμή κοινή, την $\begin{cases}\sigma(x,y,z,\alpha_0)=0\\ \sigma'_\alpha(x,y,z,\alpha_0)=0\end{cases}$. Λέγω τώρα ότι οι δυο επιφάνειες $\mathcal{F}$ και S_{α_0} σ' αυτά τα κοινά τους σημεία, εφ' όσον τουλάχιστον είναι ομαλά σημεία και για τις δυο επιφάνειες, έχουν εφαπτόμενα επίπεδα συμπίπτοντα. Και αλήθεια, το εφαπτόμενο επίπεδο της S_{α_0}:

$\sigma(x,y,z,\alpha_0)=0$, στο σημείο της $M(x,y,z)$, έχει κάθετο διάνυσμα το

(474.1) $\quad \left(\sigma'_x(x,y,z,\alpha_0)\ ,\ \sigma'_y(x,y,z,\alpha_0),\ \sigma'_z(x,y,z,\alpha_0)\right),$

που θα είναι όχι μηδενικό, αν το $M(x,y,z)$ είναι ομαλό σημείο της S_{α_0}. Εξ άλλου η $\mathcal{F}:\begin{cases}\sigma(xyz\alpha)=0\\ \sigma'_\alpha(xyz\alpha)=0\end{cases}$, στο σημείο της $M(x,y,z),(a_0)$, έχει σύμφωνα με όσα είδαμε στον προηγούμενο §, κάθετο διάνυσμα το

(474.2) $$\left(\begin{vmatrix}\sigma'_x(xyz\alpha_0) & \sigma'_\alpha(xyz\alpha_0)\\ \sigma''_{\alpha x}(xyz\alpha_0) & \sigma''_{\alpha^2}(xyz\alpha_0)\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\sigma'_y(x\ldots\alpha_0) & \sigma'_\alpha(x\ldots\alpha_0)\\ \sigma''_{\alpha y}(x\ldots\alpha_0) & \sigma''_{\alpha^2}(x\ldots\alpha_0)\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\sigma'_z & \sigma'_\alpha\\ \sigma''_{\alpha z} & \sigma''_{\alpha^2}\end{vmatrix}\right),$$

που θα είναι όχι μηδενικό αν το θεωρούμενο σημείο $M(x,y,z),(\alpha_0)$ της $\mathcal{F}$ είναι ομαλό σημείο γι' αυτήν. Μέσα σ' αυτές τις ορίζουσες όμως το $\sigma'_\alpha(x,y,z,\alpha_0)$ είναι $=0$, γιατί το M είναι σημείο της $\mathcal{F}:\begin{cases}\sigma(xyz\alpha)=0\\ \sigma'_\alpha(xyz\alpha)=0\end{cases}$.

Άρα το παραπάνω κάθετο προς την $\mathcal{F}$ διάνυσμα γράφεται απλούστερα έτσι:

(474.3) $$\left(\sigma'_x(x,y,z,\alpha_0)\cdot\sigma''_{\alpha^2}(x,y,z,\alpha_0),\sigma'_y(x,y,z,\alpha_0)\cdot\sigma''_{\alpha^2}(x,y,z,\alpha_0),\ \sigma'_z(x,y,z,\alpha_0)\cdot\sigma''_{\alpha^2}(x,y,z,\alpha_0)\right).$$

και αυτό δείχνει ότι είναι 1ον όχι μηδενικό, αν $\sigma''_{\alpha^2}(x,y,z,\alpha_0)\neq 0$ και αν το διάνυσμα (474.1) είναι επίσης όχι μηδενικό και 2ον παράλο προς το (474.1), ο.ε.δ.

Η επιφάνεια $\mathcal{F}$ εφάπτεται λοιπόν κάθε επιφάνειας S_{α_0} του γένους κατά μήκος της γραμμής $\begin{cases} \sigma(x,y,z,\alpha_0)=0 \\ \sigma'_\alpha(x,y,z,\alpha_0)=0 \end{cases}$ με εξαίρεση ίσως των σημείων αυτής της γραμμής τα οποία είναι ανώμαλα είτε για την S_{α_0} είτε για την $\mathcal{F}$. Η γραμμή $\begin{cases} \sigma(x,y,z,\alpha_0)=0 \\ \sigma'_\alpha(x,y,z,\alpha_0)=0 \end{cases}$ λέγεται χαρακτηριστική γραμμή της S_{α_0}. Τα σημεία των χαρακτηριστικών γραμμών των διάφορων επιφανειών S_{α_0} του γένους τα οποία είναι σημεία επαφής της επιφάνειας $\mathcal{F}$: $\begin{cases} \sigma(xyz\alpha)=0 \\ \sigma'_\alpha(xyz\alpha)=0 \end{cases}$ με τις επιφάνειες του γένους, αποτελούν εκείνο που καλούμε περιβάλλουσα του γένους.

Ας θεωρήσουμε τώρα το σύστημα των 3 εξισώσεων $\sigma(x,y,z,\alpha)=0$, $\sigma'_\alpha(x,y,z,\alpha)=0$, $\sigma''_{\alpha^2}(x,y,z,\alpha)=0$. Υποθέτουμε ότι έχει μια μονοπαραμετρική απειρία λύσεων $(x=x(\alpha), y=y(\alpha), z=z(\alpha))$· αρκεί προς τούτο να έχη μια πραγματική λύση $(x_1, y_1, z_1, \alpha_1)$ και η Ιακωβιανή $\dfrac{\partial(\sigma,\sigma'_\alpha,\sigma''_{\alpha^2})}{\partial(x,y,z)}$ να είναι $\neq 0$ στη θέση $(x_1, y_1, z_1, \alpha_1)$. Η μονοπαραμετρική αυτή απειρία λύσεων παριστάνεται γεωμετρικά από μια γραμμή β της περιβάλλουσας $\mathcal{E}$ του γένους με τις εξής ιδιότητες: 1ον η β έχει με κάθε χαρακτηριστική γ_{α_0}: $\begin{cases} \sigma(x\,y\,z\,\alpha_0)=0 \\ \sigma'_\alpha(x\,y\,z\,\alpha_0)=0 \end{cases}$ ένα κοινό σημείο, το $(x_0=x(\alpha_0), y_0=y(\alpha_0), z_0=z(\alpha_0))$, 2ον αν το σημείο αυτό είναι ομαλό και για τη β και για τη γ_{α_0}, τότε οι δυο αυτές γραμμές έχουν την ίδια εφαπτομένη σ' αυτό. Και αλήθεια, η β έχει, σ' αυτό, εφαπτομενικό διάνυσμα το $(x'(\alpha_0), y'(\alpha_0), z'(\alpha_0))$ εξ υποθέσεως όχι μηδενικό· η γ έχει εφαπτομενικό διάνυσμα, στο ίδιο σημείο, το εξωτερικό γινόμενο των 2 διανυσμάτων

$$\left(\sigma'_x(x_0y_0z_0\alpha_0), \sigma'_y(x_0y_0z_0\alpha_0), \sigma'_z(x_0y_0z_0\alpha_0)\right)$$

$$\text{και } \left(\sigma''_{\alpha x}(x_0y_0z_0\alpha_0), \sigma''_{\alpha y}, \sigma''_{\alpha z}\right),$$

που εξ υποθέσεως δεν είναι παράλληλα. Έχω λοιπόν να δείξω ότι

$$\sigma'_x(x_0y_0z_0\alpha_0)\cdot x'(\alpha_0)+\sigma'_y\cdot y'+\sigma'_z\cdot z'=0 \text{ και } \sigma''_{\alpha x}(x_0y_0z_0\alpha_0)\cdot x'(\alpha_0)+\sigma''_{\alpha y}\cdot y'+\sigma''_{\alpha z}\cdot z'=0.$$

Αυτές όμως οι δυο σχέσεις αληθεύουν σαν συνέπειες (κατόπιν παραγωγίσεως ως προς α) των δυο ταυτοτήτων ως προς α:

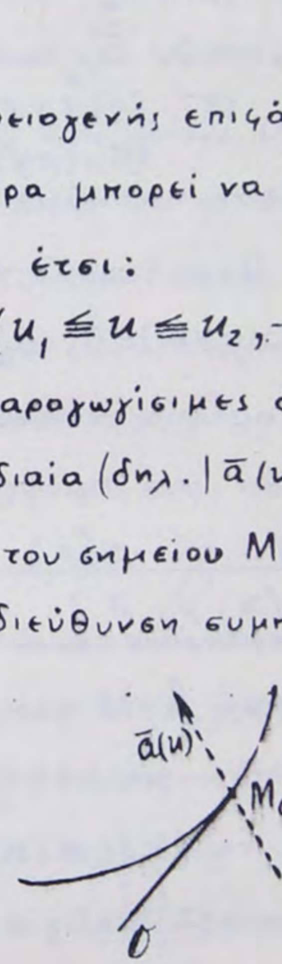
$$\sigma(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha), \alpha) \equiv 0, \quad \sigma'_\alpha(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha), \alpha) \equiv 0.$$

Το σημείο $(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$ λέγεται <u>χαρακτηριστικό σημείο</u> της χαρακτηριστικής γραμμής $\gamma_\alpha : \begin{cases} \sigma = 0 \\ \sigma'_\alpha = 0 \end{cases}$ καθώς και της επιφάνειας S_α · και η β λέγεται <u>ακμή ανακάμψεως</u> της περιβάλλουσας $\mathcal{E}$ του γένους επιφανειών $\sigma(x, y, z, \alpha) = 0$.

§ 175. <u>Ευθειογενείς επιφάνειες</u>. Μια ευθειογενής επιφάνεια S είναι ένα μονοπαραμετρικό σύστημα ευθειών, άρα μπορεί να παρασταθή με δυο παραμέτρους u, v διανυσματικά έτσι:

$$\overrightarrow{OM} = \bar{r} = \bar{r}(u,v) = \bar{\rho}(u) + \bar{a}(u)v, \quad (u_1 \leq u \leq u_2, -\infty < v < +\infty),$$

όπου $\bar{\rho}(u)$ και $\bar{a}(u)$ δοσμένες διανυσματικές (παραγωγίσιμες όσες φορές χρειάζεται) συναρτήσεις της u, η $\bar{\alpha}(u)$ μοναδιαία (δηλ. $|\bar{a}(u)| \equiv 1$). Για κάθε τιμή της u έχουμε μιαν ευθεία δια του σημείου M_0, πέρατος του διανύσματος $\overrightarrow{OM_0} = \bar{\rho}(u)$, της οποίας η διεύθυνση συμπίπτει με την του μοναδιαίου διανύσματος $\bar{a}(u)$.



Ένα διάνυσμα $\perp$ στο εφαπτόμενο επίπεδο της S στο $M(u,v)$ είναι το

$$[\bar{r}_u \bar{r}_v] = [\bar{\rho}' + \bar{a}'v, \bar{a}] = [\bar{\rho}'\bar{a}] + v[\bar{a}'\bar{a}].$$

Επομένως για να είναι αυτό το εφαπτόμενο επίπεδο το ίδιο σ' όλα τα σημεία μιας ευθύγραμμης γενέτειρας της S (σημεία που χαρακτηρίζονται από το ίδιο u και από τα διάφορα v του διαστήματος $-\infty < v < +\infty$) πρέπει και αρκεί το παραπάνω διάνυσμα να είναι $\parallel [\bar{\rho}'\bar{a}]$, οποία τιμή και αν έχη το v. Με άλλα λόγια πρέπει και αρκεί να είναι

$$0 = \big[[\bar{\rho}'\bar{a}], [\bar{\rho}'\bar{a}] + v[\bar{a}'\bar{a}]\big] = 0 + \big[[\bar{\rho}'\bar{a}], v[\bar{a}'\bar{a}]\big] = v\big[[\bar{\rho}'\bar{a}], [\bar{a}'\bar{a}]\big],$$

άρα πρέπει και αρκεί να έχουμε (τύπος δις εξωτερικού γινομένου!):

$$0=\left[[\bar{\rho}'\bar{a}],[\bar{a}'\bar{a}]\right]=\left([\bar{\rho}'\bar{a}]\cdot\bar{a}\right)\bar{a}'-\left([\bar{\rho}'\bar{a}]\bar{a}'\right)\bar{a}=0+\left(\bar{\rho}'\bar{a}'\bar{a}\right)\bar{a},$$

συνεπώς, επειδή $|\bar{a}|\equiv 1$, πρέπει και αρκεί να είναι $(\bar{\rho}'\bar{a}'\bar{a})=0$.

Η συνθήκη $(\bar{\rho}'(u)\,\bar{a}'(u)\,\bar{a}(u))=0$ δεν θα αληθεύη για όλα τα θεωρούμενα $u\ (u_1\leqq u\leqq u_2)$, όταν πάρουμε τυχαίως την ευθειογενή επιφάνεια S· η S λέγεται τότε στρεβλή ευθειογενής. Αν όμως πάρουμε τα $\bar{a}(u)$ και $\bar{\rho}(u)$ τέτοια που να ισχύη εκ ταυτότητος ως προς u η παραπάνω συνθήκη, τότε το εφαπτόμενο επίπεδο της S στα διάφορα σημεία μιας οποιασδήποτε ευθύγραμμης γενέτειρας της παραμένει το ίδιο (δεν στρέφεται περί την γενέτειρα όπως στις στρεβλές ευθειογενείς) και η S λέγεται <u>αναπτυχτή</u> (ευθειογενής) επιφάνεια. Στρεβλές ευθειογενείς είναι το μονόχωνο υπερβολοειδές, το υπερβολικό παραβολοειδές, το ορθό κωνοειδές (βλ. σελ. 281.)

§ 476. <u>Αναπτυχτές επιφάνειες</u>.

Η συνθήκη: $(\bar{\rho}(u)\,\bar{a}'(u)\,\bar{a}(u))\equiv 0$ ως προς u μπορεί να πραγματοποιηθή κατά διαφόρους τρόπους. Μπορεί $1^{ον}$ να είναι $\bar{a}'(u)\equiv 0$ οπότε $\bar{a}(u)\equiv$ σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα $\bar{c}^{o}$· η S είναι τότε κυλινδρική επιφάνεια με οδηγό γραμμή την $\bar{r}=\bar{r}(u)=\bar{\rho}(u)$ και με γενέτειρες $\parallel \bar{c}^{o}$. Αντίστροφα μια κυλινδρική επιφάνεια S μπορεί να παρασταθή διανυσματικά έτσι: $\bar{r}=\bar{r}(u,v)=\bar{\rho}(u)+\bar{c}^{o}v$, όπου $\bar{r}=\bar{\rho}(u)$ για $u_1\leqq u\leqq u_2$ παριστάνει διανυσματικά μιαν οδηγό γραμμή της S και $\bar{c}^{o}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\parallel$ προς τις γενέτειρες της S. Ας είναι τώρα $2^{ον}$ $\bar{a}'(u)\neq 0$· λόγω συνέχειας της $\bar{a}'(u)$ θα υπάρχουν τότε ολόκληρα διαστήματα μεταβολής της u στα οποία $\bar{a}'(u)\neq 0$· υποθέτουμε ότι το $u_1\leqq u\leqq u_2$ είναι ένα τέτοιο. Θα έχουμε τότε σ' αυτό $|\bar{a}(u)|\equiv 1$, άρα $\bar{a}\cdot\bar{a}\equiv 1$ και συνεπώς $\bar{a}\cdot\bar{a}'\equiv 0$ με $\bar{a}'(u)\neq 0$. Η συνθήκη $(\bar{\rho}'\bar{a}'\bar{a})\equiv 0$ μας λέγει ότι το $\bar{\rho}'(u)$ είναι συνεπίπεδο με τα δυο μη μηδενικά, κάθετα προς άλληλα διανύσματα $\bar{a}(u)$ και $\bar{a}'(u)$, άρα

$$\bar{\rho}'(u)=\lambda(u)\;\bar{a}(u)+\mu(u)\;\bar{a}'(u),$$

όπου για τους πολλαπλασιαστές λ και μ, βρίσκουμε αμέσως (βάσει

των σχέσεων : $\bar{a}^2=1$ και $\bar{a}\bar{a}'=0$) ότι είναι ίσοι με τους ακόλουθους αριθμούς:
$\lambda(u)=\bar{\rho}'(u)\cdot\bar{a}(u)$ και $\mu(u)=\frac{1}{\bar{a}'^2}\left(\bar{\rho}'(u)\,\bar{a}'(u)\right)$.
Οι πολλαπλασιαστές αυτοί είναι λοιπόν, σύμφωνα με τις υποθέσεις μας, παραγωγίσιμες συναρτήσεις της u. Θα δείξω τώρα ότι ή όλες οι γενέτειρες της S περνούν από ένα και το ίδιο σημείο ή όλες τους είναι εφαπτόμενες μιας και της ίδιας γραμμής. Και αλήθεια, ας θεωρήσουμε τη διανυσματική συνάρτηση

$$\bar{\tau}=\bar{\tau}(u)=\bar{\rho}(u)-\mu(u)\bar{a}(u) \quad \text{για } u_1\leqq u\leqq u_2.$$

Το σημείο M^* με $\overline{OM}^*=\bar{\rho}(u)-\mu(u)\bar{a}(u)$ είναι σημείο της γενέτειρας

$$\bar{\tau}=\bar{\tau}(v)=\bar{\rho}(u)+v\bar{a}(u),\ (-\infty<v<+\infty),$$

λαμβανόμενο όταν $v=-\mu(u)$. Δυο είναι οι δυνατές περιπτώσεις:
1η το $\overline{OM}^*=\bar{\rho}(u)-\mu(u)\bar{a}(u)$ είναι διανυσματική συνάρτηση του u σταθεράς τιμής στο $u_1\leqq u\leqq u_2$· τότε το M^* είναι ένα ορισμένο σταθερό σημείο του χώρου από το οποίο διέρχονται όλες οι γενέτειρες $(u_1\leqq u\leqq u_2)$ της S, και η S είναι μια κωνική επιφάνεια με κορυφή αυτό το σταθερό M^*.
2η : Το $\overline{OM}^*=\bar{\rho}(u)-\mu(u)\,\bar{a}(u)$ είναι διανυσματική συνάρτηση <u>όχι σταθερής</u> τιμής στο $u_1\leqq u\leqq u_2$, οπότε ο γεωμετρικός τόπος του M^* είναι μια γραμμή γ_α. Οι εφαπτόμενες της γ_α, στα ομαλά της τουλάχιστον σημεία, δεν είναι όμως τίποτε άλλο από τις γενέτειρες της S· και αλήθεια, ένα εφαπτομενικό διάνυσμα της γ_α είναι το $\bar{\rho}'(u)-\mu'(u)\bar{a}(u)-\mu(u)\bar{a}'(u)=\lambda(u)\bar{a}(u)+\mu(u)\bar{a}'(u)-\mu'(u)a(u)-\mu\bar{a}'(u)=(\lambda(u)-\mu'(u))a(u)\parallel\bar{a}(u)$ που είναι το σταθερό εφαπτομενικό διάνυσμα στα διάφορα σημεία της ευθύγραμμης γενέτειρας $\bar{\tau}(v)=\bar{\rho}(u)+\bar{a}(u)v$ για $-\infty<v<+\infty$ της S.
Αποδείχτηκε λοιπόν ότι κάθε ευθύγραμμη γενέτειρα της S: $\bar{\rho}(u)+\bar{a}(u)v$ έχει, στο σημείο της που αντιστοιχεί στην τιμή $v=-\mu(u)$, επαφή με τη γραμμή γ_α. Η S' δεν είναι λοιπόν τίποτε άλλο σ' αυτήν την 2η περίπτωση, παρά το σύνολο των εφαπτομένων της γ_α. Η γραμμή γ_α λέγεται <u>ακμή αναπάμψεως</u> της S.

Σύμφωνα με τα παραπάνω μπορούμε να είπουμε ότι μια αναπτυχτή επιφάνεια όπως την ορίσαμε (δηλ. μια ευθειογενής στην οποία το εφαπτόμενο επίπεδο είναι σταθερό κατά μήκος της κάθε μιας γενέτειρας) θα είναι ή κυλινδρική ή κωνική ή ο γεωμετρικός τόπος των εφαπτομένων μιας (στερεάς) γραμμής.

Αντίστροφα: μια επιφάνεια που υπάγεται σ' ένα από τα 3 αυτά είδη είναι αναπτυχτή. Αρκεί να το δείξουμε για το τρίτο είδος (για τις κυλινδρικές και κωνικές επιφάνειες το πράγμα είναι γνωστό, αποδείχνεται άλλωστε κατά τρόπο ανάλογο).

Έστω γ_α : $\overline{OM} = \bar{\tau} = \bar{\tau}_1(u) = x_1(u)\bar{i} + y_1(u)\bar{j} + z_1(u)\bar{k}$ η παραμετρική παράσταση μιας γραμμής στον χώρο, όπου για παράμετρο u έχουμε πάρει το προσημασμένο μήκος τόξου $\overset{\frown}{AM}$ πάνω στη γ_α. Ο γεωμετρικός τόπος των εφαπτομένων της γ_α αποτελεί μιαν επιφάνεια S με παραμετρική παράσταση $\overline{OM} = \bar{\tau} = \bar{\tau}_1(u) + \bar{\tau}_1'(u)v$ για $u_1 \leqq u \leqq u_2$ και $-\infty < v < +\infty$.

Το $\bar{\tau}_1'(u) = \dfrac{d\bar{\varepsilon}_1}{du}$ είναι το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα $\bar{\varepsilon}_1$ της γ_α στο σημείο της με αντίστοιχη τιμή παραμέτρου το μέσα στην παρένθεση u. Ένα κάθετο διάνυσμα της S στο σημείο της $M(u,v)$ είναι το

$$\left[\bar{\tau}_v \bar{\tau}_u\right] = \left[\bar{\tau}_1'(u), \bar{\tau}_1'(u) + \bar{\tau}_1''(u)v\right] = \left[\bar{\tau}_1' \, \bar{\tau}_1'\right] + v\left[\bar{\tau}_1' \, \bar{\tau}_1''\right] = v\left[\bar{\varepsilon}_1 \frac{d\bar{\varepsilon}_1}{du}\right] = v\left[\bar{\varepsilon}_1 \, \kappa_1 \bar{\omega}_1\right]$$
$$= v k_1 \left[\bar{\varepsilon}_1 \bar{\omega}_1\right] = v k_1 \bar{\delta}_1,$$

όπου $\bar{\omega}_1$, $\bar{\delta}_1$ τα μοναδιαία διανύσματα της πρωτεύουσας κάθετης και της δικάθετης της γ_α στο σημείο της $\bar{\tau}_1(u)$ και κ_1 η καμπυλότητα της σ' αυτό. Άρα το $\left[\bar{\tau}_v \bar{\tau}_u\right]$ για το θεωρούμενο (u,v) είναι $\parallel$ προς το διάνυσμα $\bar{\delta}_1$ της δικάθετης της γ_α στο σημείο της που αντιστοιχεί στο θεωρούμενο u· επομένως το εφαπτόμενο επίπεδο της S στο σημείο $M(u,v)$ συμπίπτει με το εγγύτατο επίπεδο της γ_α στο σημείο επαφής της γ_α με την ευθύγραμμη γενέτειρα της S την περιέχουσα το $M(u,v)$, διότι αμφότερα τα επίπεδα αυτά περιέχουν τη γενέτειρα αυτή και είναι κάθετα προς το ίδιο διάνυσμα $\bar{\delta}_1(u)$. Όλα λοιπόν τα εφαπτόμενα επίπεδα της S κατά μήκος μιας ευθύγραμμης γενέτειρας συμπίπτουν μεταξύ τους, καθότι ταυτίζονται με το εγγύτατο επίπεδο της γ_α στο σημείο επαφής της γ_α με την θεωρούμενη ευθύγραμμη γενέτειρα· ο.ε.δ.

§ 477. Περιβάλλουσα ενός γένους επιπέδων. Όπως είδαμε, τα εφαπτόμενα επίπεδα μιας αναπτυχτής επιφάνειας S αποτελούν ένα γένος (=μονοπαραμετρικό σύστημα) επιπέδων που έχει για περιβάλλουσα την S, αφού το καθένα τους, έστω το p_α, εφάπτεται της S κατά μήκος μιας ευθύγραμμης γενέτειρας της S, έστω της γ_α, χαρακτηριστικής γραμμής επομένως του p_α. Λέγω τώρα ότι και το αντίστροφο αληθεύει: η περιβάλλουσα ενός γένους επιπέδων $p_\alpha: A(\alpha)x+B(\alpha)y+\Gamma(\alpha)z+\Delta(\alpha)=0$, διανυσματικά: $\bar{n}(\alpha)\bar{r}+\Delta(\alpha)=0$ με $\bar{n}(\alpha)\neq 0$ σ'ένα διάστημα $\alpha_1<\alpha<\alpha_2$ είναι αναπτυχτή επιφάνεια με μόνη εξαίρεση την περίπτωση που τα p_α ανήκουν όλα σε μιαν (αξονική) δέσμη επιπέδων. Και αλήθεια, σύμφωνα με τον § 474, το γένος θα έχη περιβάλλουσα με αναλυτική παράσταση το σύστημα των 2 εξισώσεων $\begin{cases}\bar{n}(\alpha)\bar{r}+\Delta(\alpha)=0\\ n'(\alpha)\bar{r}+\Delta'(\alpha)=0\end{cases}$. Η γραμμή ανακάμψεως της περιβάλλουσας θα έχη αναλυτική παράσταση το σύστημα των 3 εξισώσεων $\begin{cases}\bar{n}(\alpha)\bar{r}+\Delta(\alpha)=0\\ \bar{n}'(\alpha)\bar{r}+\Delta'(\alpha)=0\end{cases}$ και $\bar{n}''(\alpha)\bar{r}+\Delta''(\alpha)$, συμβιβαστών στην περίπτωση $(\bar{n}\bar{n}'\bar{n}'')\neq 0$.

Η χαρακτηριστική γραμμή $\chi_\alpha:\begin{cases}\bar{n}(\alpha)\cdot\bar{r}+\Delta(\alpha)=0\\ \bar{n}'(\alpha)\cdot\bar{r}+\Delta'(\alpha)=0\end{cases}$ του επιπέδου p_α είναι ευθεία (σαντομή του επιπέδου $\bar{n}\bar{r}+\Delta(\alpha)=0$ με το επίπεδο $\bar{n}'(\alpha)\bar{r}+\Delta'(\alpha)=0$). Το σύνολο των χ_α για $\alpha_1<\alpha<\alpha_2$ αποτελεί μιαν ευθειογενή επιφάνεια $\mathcal{E}$ περιβάλλουσα του γένους των p_α. Όσο για το χαρακτηριστικό σημείο του κάθε χ_α, αυτό θα είναι μονότροπα καθορισμένο συναρτήσει της α από το σύστημα των 3 γραμμικών ως προς τις συντεταγμένες του (x,y,z) εξισώσεων

(477.1) $\quad \bar{n}(\alpha)\bar{r}+\Delta(\alpha)=0,\ \bar{n}'(\alpha)\bar{r}+\Delta'(\alpha)=0,\ \bar{n}''(\alpha)\bar{r}+\Delta''(\alpha)=0,$

όταν η ορίζουσα $(\bar{n}\bar{n}'\bar{n}'')$ των συντελεστών των x,y,z είναι $\neq 0$.

Ας είναι $P_\alpha(x(\alpha),y(\alpha),z(\alpha))$ το τοιουτοτρόπως μονότροπα καθορισμένο χαρακτηριστικό σημείο της χ_α για $\alpha_1<\alpha<\alpha_2$. Διακρίνουμε δυο υποπεριπτώσεις:

1^{η}. Τα P_α για $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ συμπίπτουν όλα σ'ένα σημείο K (αυτό συμβαίνει όταν οι συναρτήσεις $x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)$ τις οποίες ορίζουν οι (477.1), έχουν η κάθε μια τους σταθερή τιμή στο $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$). Η επιφάνεια $\mathcal{E}$ είναι τότε κωνική με κορυφή το K.

2^{η}. Τα P_α δεν συμπίπτουν σ'ένα σημείο αλλ' αποτελούν μια γραμμή γ_A. Τότε η ευθύγραμμη γενέτειρα χ_α της $\mathcal{E}$ είναι εφαπτομένη της γ_A στο σημείο της $P_\alpha(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$, τουλάχιστο όταν τούτο είναι ομαλό σημείο της γ_A (δηλ. όταν $|x'(\alpha)|+|y'(\alpha)|+|z'(\alpha)| \neq 0$ · (βλέπε τη γενική θεωρία § 474 σελ 310)

Η γ_A είναι λοιπόν εκείνο που καλέσαμε ακμήν αναχάμψεως της $\mathcal{E}$. Σ'αυτήν λοιπόν τήν 2^{η} υποπερίπτωση (που φυσικά) είναι και η γενικότερη), η $\mathcal{E}$ είναι **μια** <u>εφαπτομενική</u> αναπτυχτή · (έτσι θα καλούμε στο εξής τις αναπτυχτές επιφάνειες του $3^{ου}$ είδους του § 476).

Μένει να εξετάσουμε την ειδική περίπτωση: $(\bar{n}(\alpha)\bar{n}'(\alpha)\bar{n}''(\alpha)) \equiv 0$ από ταυτότητα σ'ένα ολόκληρο διάστημα $\alpha_3 < \alpha < \alpha_4$ · αυτή οδηγεί, όπως θα ιδούμε, ή σε μιαν κυλινδρική επιφάνεια $\mathcal{E}$, περιβάλλουσα των p_α για $\alpha_3 < \alpha < \alpha_4$, ή σε μιαν αξονική δέσμη επιπέδων p_α. Πράγματι θα δείξουμε ότι τώρα τα επίπεδα p_α ή είναι παράλληλα μεταξύ τους, για $\alpha_3 < \alpha < \alpha_4$, ή έχουν χαρακτηριστικές ευθείες γ_α παράλληλες μεταξύ τους (το "παράλληλες" με ευρεία σημασία!).

<u>**Αποδειξη**</u>. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το όχι μηδενικό, $\perp$ προς p_α διάνυσμα $\bar{n}(\alpha)$ είναι μοναδιαίο: $\bar{n}^2(\alpha) \equiv 1$, άρα και $\bar{n}(\alpha)\cdot\bar{n}'(\alpha) \equiv 0$ στο $\alpha_3 < \alpha < \alpha_4$. Επομένως ή θα είναι $\bar{n}'(\alpha) \equiv 0$ στο $\alpha_3 < \alpha < \alpha_4$ ή θα υπάρχουν (λόγω υποτιθεμένης συνέχειας της διανυσματικής συνάρτησης $\bar{n}'(\alpha)$) ολόκληρα διαστήματα μεταβολής της α όπου το $\bar{n}'(\alpha) \neq 0$. Στην 1^{η} περίπτωση: $\bar{n}'(\alpha) \equiv 0$, θα έχουμε $\bar{n}(\alpha) \equiv \bar{c}^{\circ} =$ σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα για $\alpha_3 < \alpha < \alpha_4$ · άρα τα p_α ανήκουν όλα σε μια δέσμη παράλληλων επιπέδων · η περιβάλλουσα τους έχει χαθή

στο άπειρο. Στη 2^{η} περίπτωση: $\bar{n}'(\alpha)\neq 0$ για κάθε α ενός διαστήματος $\alpha_5<\alpha<\alpha_6$, θα έχουμε $[\bar{n}(\alpha)\ \bar{n}'(\alpha)]\neq 0$, γιατί $\bar{n}\perp\bar{n}'$ με $\bar{n}\neq 0$ και $\bar{n}'\neq 0$. Θεωρούμε το ομόρροπο μοναδιαίο διάνυσμα

$$(477.2)\qquad \bar{\delta}(\alpha)=\frac{[\bar{n}(\alpha)\ \bar{n}'(\alpha)]}{|[\bar{n}(\alpha)\ \bar{n}'(\alpha)]|}\ ,\ \text{άρα}\ \bar{\delta}^2(\alpha)\equiv 1\ \text{και}\ \bar{\delta}(\alpha)\cdot\bar{\delta}'(\alpha)\equiv 0.$$

Γι' αυτό το $\bar{\delta}(\alpha)$ ισχύουν οι εξής τρεις ταυτότητες στο $\alpha_5<\alpha<\alpha_6$:

$$(477.3)\qquad \bar{n}(\alpha)\bar{\delta}(\alpha)\equiv 0,\ \bar{n}'(\alpha)\bar{\delta}(\alpha)\equiv 0,\ \bar{n}''(\alpha)\bar{\delta}(\alpha)\equiv 0\cdot$$

η τρίτη έπεται από τις δυο πρώτες και από την υπόθεση μας ότι έχουμε $(\bar{n}(\alpha)\bar{n}'(\alpha)\bar{n}''(\alpha))\equiv 0$ (αυτή συνεπάγεται ότι το $\bar{n}''(\alpha)$ είναι συνεπίπεδο των $\bar{n}(\alpha)$ και $\bar{n}'(\alpha)$: $\bar{n}''(\alpha)=\lambda(\alpha)\bar{n}(\alpha)+\mu(\alpha)\bar{n}'(\alpha)$). Από τις (477.3) με παραγώγιση ως προς α παιρνόμαστε τις ταυτότητες:

$$\bar{n}'(\alpha)\bar{\delta}(\alpha)+\bar{n}(\alpha)\bar{\delta}'(\alpha)\equiv 0+\bar{n}(\alpha)\bar{\delta}'(\alpha)\equiv 0\ ,\ \text{άρα}\ \bar{\delta}'(\alpha)\perp\bar{n}(\alpha),$$

$$\bar{n}''(\alpha)\delta(\alpha)+\bar{n}'(\alpha)\bar{\delta}'(\alpha)\equiv 0+\bar{n}'(\alpha)\bar{\delta}'(\alpha)\equiv 0\ ,\ \text{άρα}\ \bar{\delta}'(\alpha)\perp\bar{n}'(\alpha).$$

Βρίσκουμε λοιπόν πως το $\bar{\delta}'(\alpha)$, που σύμφωνα με την 3^{η} σχέση από τις (477.2) είναι $\perp\bar{\delta}(\alpha)$, είναι συγχρόνως κάθετο και προς τα $\bar{n}(\alpha),\bar{n}'(\alpha)$. Αλλά τα $\bar{n}(\alpha),\bar{n}'(\alpha),\bar{\delta}(\alpha)$ είναι 3 διανύσματα όχι μηδενικά και ανά δυο κάθετα. Άρα αναγκαστικά $\bar{\delta}'(\alpha)\equiv 0$ στο $\alpha_5<\alpha<\alpha_6$ και συνεπώς $\bar{\delta}(\alpha)\equiv\bar{C}$ = σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα. Οι χαρακτηριστικές ευθείες $\chi_\alpha:\begin{cases}\bar{n}(\alpha)\bar{r}+\Delta(\alpha)=0\\ \bar{n}'(\alpha)\bar{r}+\Delta'(\alpha)=0\end{cases}$ είναι όμως $\parallel$ προς $[\bar{n}(\alpha)\ \bar{n}'(\alpha)]$, άρα θα είναι $\parallel$ προς $\bar{\delta}(\alpha)=\bar{C}$, θα έχουν επομένως όλες την ίδια διεύθυνση, ο.ε.δ.

Διακρίνουμε τώρα δυο υποπεριπτώσεις.

1^{η}: Οι ευθείες χ_α συμπίπτουν σε μια· τότε τα επίπεδα p_α για $\alpha_5<\alpha<\alpha_6$ ανήκουν σε μιαν αξονική δέσμη.

2^{η}: Οι ευθείες χ_α για $\alpha_5<\alpha<\alpha_6$ δεν συμπίπτουν σε μια, και τότε αποτελούν μιαν κυλινδρική επιφάνεια με γενέτειρες $\parallel$ προς $\bar{C}$.

Αποδείχτηκε λοιπόν πως, όταν $(\bar{n}(\alpha)\bar{n}'(\alpha)\bar{n}''(\alpha))\equiv 0$ σ' ένα διάστημα, τότε τα αντίστοιχα p_α ή ανήκουν σε μιαν αξονική δέσμη με φορέα στο άπειρο ή στο πεπερασμένο ή „περιβάλλουν" μια κυλινδρική επιφάνεια.

§478. <u>Οι αναπτυχτές επιφάνειες είναι ισομετρικά απεικονίσιμες πάνω σ'επίπεδο.</u> Έστω $1^{ον}$ S μια κυλινδρική επιφάνεια· την κόβουμε μ'ένα επίπεδο OXY $\perp$ προς τις γενέτειρες της. Θα λάβουμε μια γραμμή γ που, ως προς το σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων $OXYZ$ με βασικά διανύσματα μήκους 1, θα έχη αναλυτική παραμετρική παράσταση έστω τη

$$x = x(u)\ ,\ y = y(u)\ ,\ z = 0$$

και διανυσματικά:

$$\bar{r} = \bar{\rho}(u)\cdot$$

παράμετρος u ας είναι το προσημασμένο μήκος τόξου $\overset{\frown}{A_0\Pi}$ πάνω στη γ από κάποιο αρχικό σημείο $A_0(x(u_0), y(u_0), 0)$ ως το σημείο της $\Pi(x(u), y(u), 0)$. Θα είναι τότε $\bar{\varepsilon}(u) = \bar{\rho}'(u) =$ μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα της γ στο Π. Η επιφάνεια S θα παριστάνεται με

$$x = x(u,v) = x(u), y = y(u,v) = y(u), z = z(u,v) = v$$

και διανυσματικά: $\quad \bar{r} = \bar{\rho}(u) + v\bar{k}.$

Η πρώτη μορφή της S θα είναι

$$\{d\bar{r}(u,v)\}^2 = \{\bar{r}_u du + \bar{r}_v dv\}^2 = \bar{r}_u^2 du^2 + 2\bar{r}_u\bar{r}_v du dv + \bar{r}_v^2 dv^2 = du^2 + dv^2,$$

επειδή $\bar{r}_u^2 = (\bar{\rho}'(u))^2 = \bar{\varepsilon}^2(u) = 1$ και $\bar{r}_u = \bar{\rho}'(u) \perp \bar{k} = \bar{r}_v$. Κατόπιν τούτου αντιστοιχίζουμε στο σημείο $M(u,v)$ της S το σημείο M^* ενός επιπέδου $p \equiv O^*U^*V^*$ το έχον συντεταγμένες, ως προς το ορθογ. σύστημα $O^*U^*V^*$, το ζευγάρι (u,v). Η απεικόνιση είναι ισομετρική, επειδή η πρώτη βασική μορφή του p είναι, όπως ξέρουμε, $ds^{*2} = du^2 + dv^2$, δηλ. η ίδια με τη βασική της S. Ας είναι $2^{ον}$ η S μια κωνική επιφάνεια. Την κόβουμε με μια μοναδιαία σφαίρα που έχει κέντρο την κορυφή O της S, που επομένως συναντιέται ορθογωνίως με όλες τις γενέτειρες της S. Η γραμμή τομής απαρτίζεται από 2 μέρη συμμετρικά το ένα του άλλου ως προς το O. Καλούμε το ένα απ' αυτά γ_0 και το χρησιμοποιούμε ως οδηγό για την παραγωγή της S. Η γ_0 θα έχη (ως προς ένα ορθογ. σύστημα $OXYZ$

με βασικά διανύσματα μήκους 1) αναλυτική παράσταση:

$$x = x_0(u) \quad , y = y_0(u), \ z = z_0(u)$$

και διανυσματικά : $\bar{r} = \bar{\rho}_0(u)$ για $u_1 \leqq u \leqq u_2$.

η παράμετρος u ας σημαίνη το προσημασμένο μήκος τόξου $\overset{\frown}{A_0\Pi}$ πάνω στη γ_0 από κάποιο σημείο της $A_0(x_0(u_0), y_0(u_0), z(u_0))$ ως το σημείο $\Pi(x_0(u), y_0(u), z_0(u))$.

Θα έχουμε τότε

$$\bar{\rho}_0'(u) = \bar{\varepsilon}(u) = \text{μοναδιαίο εφαπτομ. διάνυσμα της } \gamma_0 \text{ στο } \Pi,$$

$$\bar{\rho}_0''(u) = \bar{\varepsilon}'(u) = \kappa(u)\bar{\omega}(u),$$

όπου $\kappa(u)$ η καμπυλότητα της γ_0 στο Π και $\bar{\omega}(u)$ το μοναδιαίο πρωτεύον κάθετο διάνυσμα της γ_0 στο Π. Η επιφάνεια S θα έχη διανυσματική παράσταση

$$\bar{r} = \bar{r}(u,v) = v\bar{\rho}_0(u) \quad \text{για } u_1 \leqq u \leqq u_2 \text{ και } -\infty < v < +\infty.$$

Ειδικά η χώνη S_1 της S η περιέχουσα τη γραμμή γ_0 θα λαμβάνεται για $u_1 \leqq u \leqq u_2$ και $0 \leqq v < +\infty$, η άλλη χώνη S_2 θα λαμβάνεται για $u_1 \leqq u \leqq u_2$, $-\infty < v \leqq 0$.

Η πρώτη βασική μορφή της S είναι

$$ds^2 = (d\bar{r})^2 = (v\bar{\rho}_0'(u)du + \bar{\rho}_0(u)dv)^2 = (v\bar{\varepsilon}(u)du + \bar{\rho}_0(u)dv)^2 = v^2du^2 + dv^2;$$

επειδή, από κατασκευή, $\bar{\rho}_0^{\,2}(u) \equiv 1$ στο $u_1 \leqq u \leqq u_2$, άρα $\bar{\rho}_0(u)\bar{\rho}_0'(u) \equiv 0$.

Παίρνουμε τώρα ένα επίπεδο p και μέσα σ' αυτό ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $O^*X^*Y^*$ με βασικά διανύσματα μήκους 1, αντιστοιχίζουμε δε στο κάθε σημείο $M(u,v)$ της S το σημείο M^* του p με ορθογ. συντεταγμένες $x^* = v\,\text{συν}\,u$, $y^* = v\,\text{ημ}\,u$, άρα με αντίστοιχες στο $O^*X^*Y^*$ πολικές συντεταγμένες τις εξής: πολική ακτίνα $= v$, πολική γωνία $= u$. Η πρώτη βασική μορφή του επιπέδου p, όταν για παραμέτρους του πάρουμε τα u και v , είναι

$$ds^{*2} = dx^{*2} + dy^{*2} = (-v\,\text{ημ}\,u\,du + \text{συν}\,u\,dv)^2 + (v\,\text{συν}\,u\,du + \text{ημ}\,v\,dv)^2 = v^2du^2 + dv^2;$$

δηλ. η ίδια με την 1η βασική μορφή της κωνικής επιφάνειας S, άρα η προκείμενη απεικόνιση της S πάνω στο επίπεδο p είναι ισομετρική.

<u>Σχόλιο.</u> Η εικόνα της ζώνης S_1 είναι ένας «τομέας» του επιπέδου p περιοριζόμενος από δυο ημιευθείες $\overrightarrow{O^*X_1^*}$ και $\overrightarrow{O^*X_2^*}$ με $(\overrightarrow{O^*X_1^*}, \overrightarrow{O^*X_2^*}) = u_2 - u_1$, συνεπώς η απεικόνιση, που είναι μονοσήμαντη κατά την έννοια $M \to M^*$, δεν είναι συνολικά αμφιμονοσήμαντη όταν $u_2 - u_1 > 2\pi$: δυο σημεία $M_3(u_3, v)$ και $M_4(u_4, v)$ με το ίδιο v και $u_4 - u_3 =$ ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π, έχουν το ίδιο σημείο M^* του p για εικόνα. Για όμοιο λόγο η εικόνα S_1^* της ζώνης S_1 «σκεπάζει» (επικάθεται εις) την εικόνα S_2^* της άλλης ζώνης S_2, εν μέρει ή εν όλω, όταν $u_2 - u_1 > \pi$.

§479. Ας είναι $3^{ον}$ η S μια εφαπτομενική αναπτυχτή, δηλ. ας παράγεται η S από τις εφαπτόμενες μιας γραμμής γ_A. Η γ_A ας παριστάνεται, σ'ένα σύστημα ορθογ. συντεταγμένων $OXYZ$, με $\bar{\tau} = \overline{O\Pi} = x(u)\bar{i} + y(u)\bar{j} + z(u)\bar{k} = \bar{\rho}(u)$, όπου η παράμετρος u ας είναι πάλι το μήκος τόξου $\overset{\frown}{A_o\Pi}$ πάνω στη γ_A. Θα έχουμε τότε $\bar{\rho}'(u) = \bar{\varepsilon}(u) =$ μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα της γ_A στο Π και $\bar{\rho}''(u) = \bar{\varepsilon}'(u) = \kappa(u)\bar{\varpi}(u)$, όπου $\kappa(u)$ η καμπυλότητα και $\bar{\varpi}(u)$ το μοναδιαίο πρωτεύον κάθετο διάνυσμα της γ_A στο Π. Η S θα παριστάνεται με $\bar{\tau} = \overline{OM} = \bar{\tau}(u,v) = \bar{\rho}(u) + \bar{\varepsilon}(u)\cdot v$ για $u_1 \leqq u \leqq u_2$ και $-\infty < v < +\infty$. Η πρώτη βασική μορφή της S θα είναι λοιπόν

$$ds^2 = (d\bar{\tau}(u,v))^2 = \{(\bar{\rho}'(u) + \bar{\varepsilon}'(u)\cdot v)du + \bar{\varepsilon}(u)dv\}^2 =$$
$$= \{(\bar{\varepsilon}(u) + v\kappa(u)\bar{\varpi}(u))du + \bar{\varepsilon}\,dv\}^2,$$

άρα

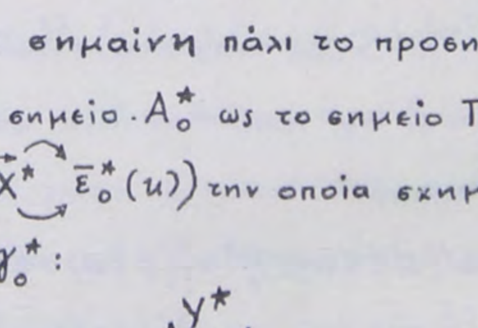
$$(479.1) \qquad ds^2 = (1 + v^2\kappa^2(u))du^2 + 2\,du\,dv + dv^2.$$

Απ'εδώ έπεται αμέσως το εξής: Ας είναι S^* μια $2^{η}$ εφαπτομενική αναπτυχτή: $\bar{\tau} = \bar{\rho}^*(u) + \bar{\varepsilon}^*(u)\cdot v$ με $u_1 \leqq u \leqq u_2$ και $-\infty < v < +\infty$. Η γραμμή (ή ακμή) ανακάμψεως της γ_A^*: $\bar{\tau} = \bar{\rho}^*(u)$ (όπου πάλι $u = \overset{\frown}{A_o^*\Pi^*} =$

=μήκος τόξου πάνω στη γ_A^* από το A_o^* ως το Π^* με $\overline{O\Pi}^* = \bar{\rho}^*(u)$)
ας έχη καμπυλότητα $\kappa^*(u) \equiv \kappa(u)$ για $u_1 \leqq u \leqq u_2$: Μ'άλλα λόγια, οι γραμμές ανακάμψεως γ_A^* της S^* και γ_A της S ας μπορούν να απεικονιστούν η μια πάνω στην άλλη αμφιμονοσήμαντα έτσι που 1ον αντίστοιχα τόξα να έχουν ίσα μήκη και 2ον οι καμπυλότητες σε αντίστοιχα σημεία να είναι ίσες. Τότε η βασική μορφή 1ης τάξεως της S^* δεν θα διαφέρη από την 1η βασική μορφή (479.1) της S. Αν λοιπόν στο σημείο $M(u,v)$ της S αντιστοιχίσουμε το σημείο $M^*(u,v)$ της S^* με το ίδιο ζευγάρι τιμών των παραμέτρων (u,v), η αντιστοιχία αυτή θα είναι ισομετρική. Συνεπώς για να δείξουμε ότι η S είναι ισομετρικά απεικονίσιμη πάνω σε επίπεδο, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν <u>επίπεδες</u> γραμμές γ_o^* των οποίων τα σημεία αντιστοιχούν αμφιμονοσήμαντα στα σημεία μιας στερεάς γραμμής γ_A έτσι που 1ον αντίστοιχα τόξα να έχουν ίσα μήκη και 2ον οι καμπυλότητες σε αντίστοιχα σημεία να είναι ίσες.

<u>Απόδειξη</u>. Έστω $\overline{O^*\Pi_o^*} = \bar{\tau}^* = x_o^*(u)\bar{i} + y_o^*(u)\bar{j}$ η προσδιοριστέα αναλυτική παράσταση της γ_o^* ως προς ένα σύστημα ορθογ. συντεταγμένων $O^*X^*Y^*$ ενός επιπέδου p· η παράμετρος u ας σημαίνη πάλι το προσημασμένο μήκος τόξου $\overset{\frown}{A_o^*\Pi_o^*}$ πάνω στη γ_o^* από το σημείο A_o^* ως το σημείο $\Pi_o^*(u)$. Καλούμε $\varphi(u)$ τη γωνία σε ακτίνια $(\overrightarrow{O^*X^*}, \bar{\varepsilon}_o^*(u))$ την οποία σχηματίζει το (μοναδιαίο) εφαπτομενικό διάνυσμα της γ_o^*:

$$\bar{\varepsilon}_o^*(u) = \frac{dx_o^*(u)}{du}\bar{i} + \frac{dy_o^*(u)}{du}\bar{j}$$
$$= \sigma\upsilon\nu\varphi\,\bar{i} + \eta\mu\varphi\,\bar{j}$$



με τον άξονα $\overline{O^*X^*}$. Όπως ξέρουμε, $\frac{d\varphi(u)}{du}$ είναι τότε η καμπυλότητα της γ_o^* στο σημείο της $\Pi_o^*(u)$.

Εμείς ζητούμε η καμπυλότητα αυτή να ισούται με την καμπυλότητα $\kappa(u)$ της γ_A στο σημείο της $\Pi(u)$· άρα πρέπει και αρκεί γι'αυτό, η $\varphi(u)$

να ισούται με μιαν παράγουσα της $\kappa(u)$ στο $u_1 \leq u \leq u_2$ (προϋποθέτουμε εννοείται την $\kappa(u)$ συνάρτηση συνεχή στο $u_1 \leq u \leq u_2$). Παίρνουμε λοιπόν $\varphi = \int_{u_0}^{u} \kappa(u)du = \Phi(u) =$ γνωστή συνάρτηση του u βάσει των δεδομένων (δηλαδή της γ_A που δόθηκε). Μας μένει τώρα να προσδιορίσουμε τις συναρτήσεις $x_0^*(u)$ και $y_0^*(u)$ από τις διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{dx_0^*(u)}{du} = \text{συν}\,\varphi(u) = \text{συν}\,\Phi(u), \quad \frac{dy_0^*(u)}{du} = \text{ημ}\,\varphi(u) = \text{ημ}\,\Phi(u).$$

Θα λάβουμε $x_0^*(u) = \int_{u_0}^{u} \text{συν}\,\Phi(u)\,du + C_1$, $\quad y_0^*(u) = \int_{u_0}^{u} \text{ημ}\,\Phi(u)\,du + C_2$.

Αν εκλέξουμε $C_1 = C_2 = 0$, θα έχουμε για την επίπεδη γραμμή γ_0^* που αναζητούσαμε την εντελώς ορισμένη από τα δεδομένα παράσταση

$$\bar{r}^* = x_0^*(u)\bar{i} + y_0^*(u)\bar{j} = \int_{u_0}^{u} \text{συν}\,\Phi(u)du\cdot\bar{i} + \int_{u_0}^{u} \text{ημ}\,\Phi(u)du\cdot\bar{j} = \bar{\rho}_0^*(u)$$

για $u_1 \leq u \leq u_2$. Θεωρούμε τώρα τα σημεία M^* του επιπέδου $p \equiv O^*X^*Y^*$ που είναι πέρατα των διανυσματικών ακτίνων

$$\overline{O^*M^*} = \bar{r}^*(u,v) = \bar{\rho}_0^*(u) + \bar{\varepsilon}_0^*(u)\cdot v \quad \text{για } u_1 \leq u \leq u_2 \text{ και } -\infty < v < +\infty,$$

όπου $\bar{\varepsilon}_0^*(u) = \dfrac{d\bar{\rho}_0^*(u)}{du} =$ μοναδιαίο εφαπτομ. διάνυσμα της γ_0^* στο Π_0 και επομένως $\dfrac{d\bar{\varepsilon}_0^*(u)}{du} = \kappa(u)\,\bar{\omega}_0^*(u)$.

Συνεπώς

$$(d\bar{r}^*(u,v))^2 = \left\{\left(\frac{d\bar{\rho}_0^*(u)}{du} + \frac{d\bar{\varepsilon}_0^*(u)}{du}v\right)du + \bar{\varepsilon}_0^*(u)\,dv\right\}^2$$

$$= (1 + v^2\kappa^2(u))du^2 + 2\,du\,dv + dv^2 \equiv 1^{\eta}\ \text{βασική μορφή (479.1) της}$$

S. Αν λοιπόν στο κάθε σημείο $M(u,v)$ της S αντιστοιχίσουμε το σημείο M^* του επιπέδου p το οποίο είναι πέρας της παραπάνω διανυσματικής ακτίνας $\overline{O^*M^*}$ με το ίδιο ζευγάρι τιμών (u,v), η αντιστοιχία αυτή θα είναι ισομετρική. Η S είναι λοιπόν ισομετρικά απεικονίσιμη πάνω σε επίπεδο, ο.ε.δ.

<u>Σχόλιο</u> Η παραπάνω απεικόνιση είναι μονοσήμαντη κατά την έννοια $M \to M^*$, όχι όμως και αμφιμονοσήμαντη. Συγκεκριμένα, η εικόνα S_1^* του κομματιού S_1 με $u_1 \leq u \leq u_2$ και $0 \leq v < +\infty$ της S «σκεπάζει» εν μέρει ή εν όλω την εικόνα S_2^* του κομματιού S_2 με $u_1 \leq u \leq u_2$ και $-\infty < v \leq 0$ της S.

§480. Θεώρημα του Catalan. Η ισομετρική απεικόνιση μιας αναπτυκτής επιφάνειας S πάνω σ'ένα επίπεδο p λέγεται και ανάπτυγμα (ή άπλωμα) της S πάνω στο p. Μια γραμμή γ της S "αναπτύσσεται" ή μετασχηματίζεται σε μιαν επίπεδη γραμμή γ^* ίσου μήκους. Ας είναι M ένα σημείο της γ και φ η μη αμβλεία γωνία του εγγυτ. επιπέδου της γ στο M με το εφαπτόμενο επίπεδο της S στο M. Στο M ας αντιστοιχή το M^* της μετασχηματισμένης γ^*. Όπως είδαμε στον §471, οι γεωδαισιακές κατ' απόλυτη τιμή καμπυλότητες: $\kappa|\text{συν}\,\varphi| = \frac{|\text{συν}\,\varphi|}{R}$ της γ στο M και $|\kappa^*\,\text{συν}\,\varphi^*| = \left|\frac{\text{συν}\,\varphi^*}{R^*}\right|$ της γ^* στο M^* είναι ίσες. Αλλά $\varphi^* = 0$, γιατί το εγγύτατο επίπεδο της επίπεδης γραμμής γ^* του p συμπίπτει με το p, εφαπτόμενο επίπεδο του εαυτού του σ'όλα τα σημεία M^*. Έχουμε λοιπόν τη σχέση

$$\kappa|\text{συν}\,\varphi| = |\kappa^*| \quad (\text{και } |R^*\,\text{συν}\,\varphi| = R)$$

που εκφράζει το θεώρημα του Catalan. Να μερικά πορίσματά του.

1ον Τα σημεία καμπής J^* της γ^* (στα σημεία αυτά $\kappa^* = 0$) αντιστοιχούν σε σημεία J της γ όπου είτε $\varphi = \frac{\pi}{2}$, δηλ. το εγγύτατο επίπεδο της γ στο J περιέχει την κάθετη της S στο J, είτε η καμπυλότητα κ της γ είναι $=0$.

2ον Ένα σημείο P της γ με γεωδαισ. καμπυλότητα $|\kappa\,\text{συν}\,\varphi| = 0$ έχει εικόνα P^* ένα σημείο της γ^* το οποίο, αν δεν είναι ανώμαλο σημείο της γ^*, θα είναι εν γένει μεν σημείο καμπής της γ^*, ειδικότερα δε „κορυφαίο" σημείο (ή „κορυφή") της γ^* (δηλαδή σημείο όπου η προσημασμένη καμπυλότητα κ^* της γ^* έχει τοπικώς ακρότατη τιμή, στο προκείμενο μηδενική τιμή).

3ον Οι γραμμές γ_ε της S που μετασχηματίζονται σε ευθείες ε του p έχουν σ'όλα τους τα σημεία γεωδαισ. καμπυλότητα μηδέν, άρα, αν δεν είναι ευθείες, θα έχουν την ακόλουθη χαρακτηριστική ιδιότητα: Το εγγύτατο επίπεδο μιας γ_ε σε κάθε σημείο της M περιέχει την κάθετη της επιφάνειας S στο M. Τέτοιες γραμμές πάνω σε μια οποιαδήποτε S λέγονται γεωδαισιακές γραμμές της S. Από τον 471 φτάνουμε εύκολα στη διαφορική εξίσωση τους.

§481. Μια επιφάνεια $S: \bar{r} = \bar{r}(u,v)$ με ολική καμπυλότητα μηδέν σε όλα της τα σημεία είναι αναπτυχτή.

Σύμφωνα με τον τύπο (468.6), για μια τέτοια επιφάνεια S ισχύει η ταυτότητα $eg - f^2 \equiv 0$ ως προς u και v. Άρα η μοναδική τιμή του λόγου $\frac{dv}{du}$ η οποία μηδενίζει τη 2^{η} βασική μορφή $edu^2 + 2fdudv + gdv^2$, είναι η $\frac{dv}{du} = -\frac{f}{g} = -\frac{e}{f}$ · (υποθέτουμε, εννοείται, ότι $|e|+|f|+|g| \neq 0$, οπότε ενός τουλάχιστο από τα κλάσματα $\frac{f}{g}$, $\frac{e}{f}$ δεν μηδενίζονται συγχρόνως οι δυο όροι). Σε κάθε σημείο M της S αντιστοιχεί λοιπόν μονότροπα μια ασυμπτωτική διεύθυνση (βλ. σελ. 287). Έτσι έχουμε πάνω στην S ένα μονοσήμαντο πεδίο διευθύνσεων, που με ολοκλήρωση παρέχει ένα γένος Γ γραμμών γ_α οι οποίες παράγουν την S. Αυτό αποδείχνεται αναλυτικά έτσι: Επιλύοντας την 1 τάξια διαφορική εξίσωση $gdv + fdu = 0$ (ή $fdv + edu = 0$) αποχτούμε μέσα στο χωρίο Ω των (u, v), όπου θεωρούμε την $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$, ένα γένος ολοκληρωτικών γραμμών στις οποίες αντιστοιχούν πάνω στην S οι γραμμές γ_α, που σε κάθε σημείο τους M έχουν για διεύθυνση την ασυμπτωτική διεύθυνση της S στο M και που γι'αυτό λέγονται ασυμπτωτικές γραμμές της S. Ισχυρίζομαι και θα δείξω παρακάτω ότι κατά μήκος κάθε γ_α το κάθετο διάνυσμα $\bar{N} = \bar{N}(u, v(u))$, με $\frac{dv}{du} = -\frac{f}{g} = -\frac{e}{f}$, έχει σταθερή τιμή $\bar{c}_\alpha$. Απ' αυτό έπεται ότι η γ_α κείται μέσα σ'ένα επίπεδο p_α, γιατί όλα τα εφαπτομενικά διανύσματα της γ_α είναι $\perp \bar{c}_\alpha$. Τα επίπεδα p_α των διαφόρων γ_α αποτελούν ένα γένος επιπέδων που έχουν για περιβάλλουσα την S, αφού η S εφάπτεται κάθε p_α κατά μήκος της γραμμής γ_α, παράγεται δε από τις γραμμές γ_α. Άρα κατά τον § 477 η S είναι αναπτυχτή και οι γ_α, χαρακτηριστικές των p_α, είναι ευθείες· ο.ε.δ.

<u>Απόδειξη του ισχυρισμού.</u> Έχουμε να δείξουμε ότι κατά μήκος μιας γ_α το $d\bar{N}(u,v(u))\equiv 0$, βασιζόμενοι στις σχέσεις $fdu+gdv=edu+fdu=0$, που ισχύουν, όπως παρατηρήσαμε, κατά μήκος μιας γ_α. Προς τούτο αρκεί να δείξουμε ότι το $d\bar{N}=\bar{N}_u du+\bar{N}_v dv$ κατά μήκος της γ_α είναι κάθετο και προς τα τρία (συγχρόνως), όχι συνεπίπεδα διανύσματα $\bar{N}$, $\bar{\tau}_u$, $\bar{\tau}_v$, δηλ. ότι

$$\bar{N}d\bar{N}\equiv 0\,,\quad \bar{\tau}_u(\bar{N}_u du+\bar{N}_v dv)\equiv 0\,,\quad \bar{\tau}_v(\bar{N}_u du+\bar{N}_v dv)\equiv 0 \text{ κατά μήκος της } \gamma_\alpha .$$

Η πρώτη από τις 3 αυτές σχέσεις προκύπτει με διαφόριση της ταυτότητας $\bar{N}^2\equiv 1$. Για τη 2^{η} παρατηρούμε ότι, σύμφωνα με τις σχέσεις και τύπους της σελ. 282, είναι $\bar{\tau}_u\bar{N}_u=-e$, $\bar{\tau}_u\bar{N}_v=-\bar{\tau}_{uv}\cdot\bar{N}=-f$· άρα η 2^{η} σχέση δεν είναι άλλη από την $-edu-fdv=0$, που αληθεύει κατά μήκος της γ_α. Τέλος η 3^{η}, αν λάβουμε υπόψη ότι $\bar{\tau}_v\bar{N}_u=-\bar{\tau}_{uv}\cdot\bar{N}=-f$ και $-\bar{\tau}_v\bar{N}_v=g$, γράφεται έτσι: $-fdu-gdv=0$ και έτσι αποδεικνύεται επίσης ισχύουσα κατά μήκος της γ_α.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ 2ου ΤΟΜΟΥ

Κεφαλαιο 21. Μιγαδικοί αριθμοί

Κεφαλαιο 22. Ο τύπος του Taylor. Σειρές

Κεφαλαιο 23. Στοιχειώδεις διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης

ξξ Σελίδα

Κεφάλαιο 26. Διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης

Κεφάλαιο 27. Διπλά και τριπλά ολοκληρώματα

22