ΝΕΙΛΟΥ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ

Τακτικοῦ Καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν καὶ τῆς Ἀνωτ. Σχολῆς
Ἐμπορικῶν καὶ Οἰκονομικῶν Ἐπιστημῶν

ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΕΥΤΕΡΑ

Κωνικαὶ τομαὶ ἐν γένει, ἐπιφάνειαι β΄ βαθμοῦ, κυλινδρικαί, κωνικαί, κωνοειδεῖς καὶ ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνειαι, σπουδὴ καμπύλων γραμμῶν καὶ ἐπιφανειῶν ἐν γένει, μετὰ 99 σχημάτων ἐντὸς τοῦ κειμένου καὶ 906 ἀσκήσεων.

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΣΙΔΕΡΗ
52 ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ — ΜΕΓΑΡΟΝ ΑΡΣΑΚΕΙΟΥ
ΑΘΗΝΑΙ
1935

ΤΥΠΟΙΣ: ΑΘΑΝ. Α. ΠΑΠΑΣΠΥΡΟΥ ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΤΗΣ Β΄ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΤΟΥ Β΄ ΤΟΜΟΥ

Εἰς τὸν ἀνὰ χεῖρας δεύτερον τόμον τῆς Β΄ ἐκδόσεως τοῦ βιβλίου τούτου ἐκτίθεται ὄχι μόνον ἡ ὕλη ἥτις περιείχετο εἰς τὸ πρῶτον καὶ δεύτερον μέρος τῆς Α΄ ἐκδόσεως ἀπὸ τῆς περιφερείας κύκλου καὶ ἑξῆς, ἀλλὰ καὶ προσετέθησαν νέα τινὰ θέματα, κυρίως δ' ἡ γενικὴ διερεύνησις τῶν ἐπιφανειῶν β΄ βαθμοῦ καὶ ἡ σπουδὴ τῶν καμπύλων γραμμῶν καὶ ἐπιφανειῶν ἐν γένει. Τὸ τελευταῖον τοῦτο κεφάλαιον ἀποτελεῖ σύντομον εἰσαγωγὴν εἰς τὴν διαφορικὴν Γεωμετρίαν, ἐξετάζονται δ' εἰς αὐτὸ ἡ συνέχεια συναρτήσεως καὶ καμπύλης γραμμῆς ὡς καὶ ἐπιφανείας, αἱ παράγωγοι συναρτήσεως καὶ ἡ σημασία αὐτῶν ὡς πρὸς καμπύλην καὶ ἐπιφάνειαν, τὰ περὶ ἐφαπτομένης, καθέτου κλπ. ἐπιπέδου καμπύλης εἰς εὐθυγράμμους καὶ πολικὰς συντεταγμένας, τὰ περὶ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου ἐπιφανείας κλπ., τὰ περὶ κυρτῶν καὶ κοίλων κλπ. ἐπιπέδου καμπύλης εἰς εὐθυγράμμους καὶ πολικὰς συντεταγμένας, καθὼς καὶ τὰ περὶ ἀνωμάλων σημείων καὶ ἀσυμπτώτων ἐπιπέδων γραμμῶν κλπ. Καὶ ἡ ὕλη ἡ περιεχομένη εἰς τὸν τόμον τοῦτον ἐκτίθεται ἐπεξειργασμένη λεπτομερέστερον καὶ μὲ ἀρκετὰς συμπληρώσεις τῆς εἰς τὴν πρώτην ἔκδοσιν. Οὕτω π.χ. εἰς τὰ περὶ περιφερείας κύκλου προσετέθησαν τὰ περὶ δεσμῶν περιφερειῶν, περὶ ἀπεικονίσεως ὡς πρὸς περιφέρειαν, περὶ πολικῆς ἐξισώσεως περιφερείας, εἰς τὰ περὶ τῶν κωνικῶν τομῶν τὰ περὶ ὁμοεστίων ἐλλείψεων, ὑπερβολῶν καὶ παραβολῶν κλτ. Τέλος τὸ βιβλίον ἐπλουτίσθη ὄχι μόνον μὲ τὴν σπουδὴν πλείστων ἐκ τῶν συνήθων καμπύλων γραμμῶν (κυκλοειδῶν, ἐπικυκλοειδῶν, φύλλου τοῦ Descartes, λιμνίσκου, κισσοειδοῦς κλπ.) ἀλλὰ καὶ μὲ μέγα πλῆθος ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων πρὸς λύσιν, ἀπαραιτήτων καὶ καταλλήλων διὰ τὴν ἄσκησιν τοῦ σπουδαστοῦ.

Ν. ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ

Ἐν Ἀθήναις τῇ 10 Αὐγούστου 1935

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ ΤΟΥ Β΄ ΤΟΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι.

Περὶ περιφερείας κύκλου καὶ σφαίρας

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ.

Περὶ ἐλλείψεως καὶ ὑπερβολῆς.

Περὶ παραβολῆς

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

Γενικὴ διερεύνησις τῶν καμπύλων β' βαθμοῦ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

Σπουδὴ τῶν καμπύλων γραμμῶν καὶ ἐπιφανειῶν ἐν γένει.

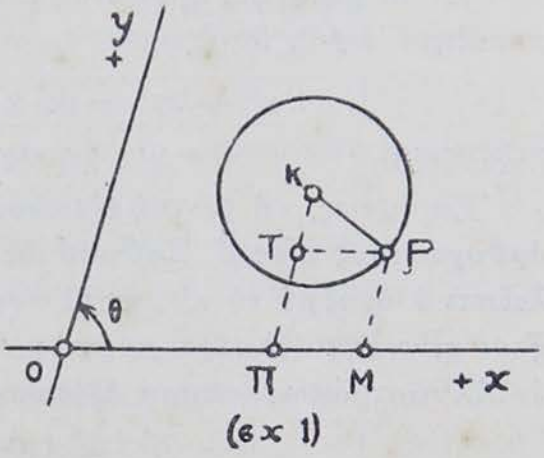
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

Περὶ περιφερείας κύκλου καὶ περὶ σφαίρας.

§ 1. Ἐξίσωσις περιφερείας κύκλου.

Ἔστωσαν ἄξονες πλαγιογώνιοι οxy ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, σχηματίζοντες γωνίαν ϑ καὶ περιφέρεια κύκλου ἐπ᾿ αὐτοῦ μὲ κέντρον Κ (α,β) καὶ ἀκτῖνα ϱ (σχ.1). Ζητεῖται ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείαν ταύτης.

Ἐπειδὴ ἡ ἐν λόγῳ περιφέρεια εἶνε ὁ τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ Κ ἰσοῦνται μὲ ϱ, πρὸς εὕρεσιν τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς ἀρκεῖ νὰ ἐκφράσωμεν, ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ τυχόντος σημείου Ρ (x,y) τῆς περιφερείας ἀπὸ τοῦ Κ (α,β) εἶνε ἴση μὲ ϱ.



(Σχ. 1).

Ἀλλ᾿ ἐπειδὴ αἱ συντεταγμέναι προβολαὶ τοῦ διανύσματος ΚΡ, αἱ (ΤΡ) καὶ (ΤΚ) εἶνε x—α καὶ y—β, ἕπεται ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας εἶνε

$$\boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)\,\text{συν}\,\vartheta=\varrho^2} \qquad (1)$$

Πράγματι, αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων Ρ τῆς περιφερείας, καὶ μόνον τοιούτων, ἐπαληθεύουν τὴν (1), ἐπειδὴ τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς παριστάνει τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου Ρ τοῦ ἐπιπέδου ἀπὸ τὸ Κ.

Ἂν οἱ ἄξονες εἶνε ὀρθογώνιοι, ὁπότε συνϑ=0, ἡ (1) λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\varrho^2} \qquad (2)$$

Ἂν τὸ κέντρον εἶνε ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων (α=β=0), θὰ ἔχωμεν εἰς πλαγιογωνίους μὲν ἄξονας

$$x^2+y^2+2xy\,\text{συν}\,\vartheta=\varrho^2 \qquad (3)$$

εἰς ὀρθογωνίους δὲ

$$\boxed{x^2+y^2=\varrho^2} \qquad (4)$$

Ἂν τὸ κέντρον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x, Κ(α,0), ἢ ἐπὶ τοῦ τῶν y, Κ(0,β), θὰ ἔχωμεν, δι᾿ ἄξονας ὀρθογωνίους

$$(x-\alpha)^2+y^2=\varrho^2$$

ἢ

$$x^2+(y-\beta)^2=\varrho^2 \qquad (5)$$

Ἂν ἡ περιφέρεια ἐφάπτεται τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων, ὅτε εἶνε Κ (ϱ, ϱ), θὰ ἔχωμεν $(x-\varrho)^2+(y-\varrho)^2=\varrho^2$ (6)

Ἀναπτύσσοντες τὴν (2) εὑρίσκομεν

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-\varrho^2=0,$$

ἡ ὁποία εἶνε τῆς μορφῆς

$$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0, \tag{7}$$

ὅπου ἐτέθη $\quad -2\alpha=A,\ -2\beta=B,\ \alpha^2+\beta^2-\varrho^2=\Gamma.$

Ἂν τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης πολλαπλασιαθοῦν ἐπὶ σταθερὰν ποσότητα $\lambda\neq 0$, θὰ ἔχωμεν

$$\boxed{\lambda x^2+\lambda y^2+A'x+B'y+\Gamma'=0} \tag{8}$$

ὅπου ἐτέθη $\quad A'=\lambda A,\ B'=\lambda B,\ \Gamma'=\lambda\Gamma.$

Ἑπομένως, «***ἡ γενικὴ ἐξίσωσις περιφερείας κύκλου εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους εἶνε β΄ βαθμοῦ ὡς πρὸς*** x ***καὶ*** y, ***εἰς τὴν ὁποίαν ἐλλείπει ὁ ὅρος μὲ τὸ*** xy, ***οἱ δὲ συντελεσταὶ τῶν*** x^2 ***καὶ*** y^2 ***εἶνε ἴσοι· ἤτοι εἶνε τῆς ἀνωτέρω μορφῆς***».

Ἀντιστρόφως· «***πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς (8) ἢ τῆς***

$$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$$

παριστάνει, ἐν γένει, περιφέρειαν κύκλου ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους».

Πράγματι, ἂν ἡ ἐξίσωσις αὕτη γραφῇ ὡς κατωτέρω

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2}{4}-\Gamma$$

$$A=-2\alpha,\ B=-2\beta,\ 4\varrho^2=A^2+B^2-4\Gamma$$

θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\varrho^2$, ἥτις παριστάνει περιφέρειαν κύκλου μὲ $K\left(\alpha=-\dfrac{A}{2},\ \beta=-\dfrac{A}{2}\right)$ καὶ ἀκτῖνα

$$\varrho=\sqrt{\frac{A^2+B^2}{4}-\Gamma}.$$

Ἡ περιφέρεια αὕτη εἶνε πραγματικὴ ἢ περιορίζεται εἰς τὸ κέντρον της ἢ εἶνε φανταστική, ἂν τὸ $A^2+B^2-4\Gamma$ εἶνε θετικὸν ἢ 0 ἢ ἀρνητικόν.

Ἂν οἱ ἄξονες σχηματίζουν γωνίαν ϑ, ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας κύκλου μετὰ τὴν ἀναγωγὴν εἶνε τῆς μορφῆς

$$x^2+y^2+2xy\,\text{συν}\,\vartheta+Ax+By+\Gamma=0,$$

ἥτις προκύπτει ἐκ τῆς (1), ἢ ἐκ τῆς (7) ἂν τεθῇ εἰς ταύτην τὸ $x+y\,\text{συν}\vartheta$ ἀντὶ x, τὸ $y\,\text{ημ}\vartheta$ ἀντὶ y καὶ ἀκολούθως B ἀντὶ $A\,\text{συν}\vartheta+B\,\text{ημ}\vartheta$.

Ἀντιστρόφως, πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς

$$x^2+y^2+2xy\,\text{συν}\,\vartheta+Ax+By+\Gamma=0,$$

ὅπου ϑ παριστάνει τὴν γωνίαν τῶν ἀξόνων, παριστάνει περιφέρειαν κύκλου. Διότι αὕτη δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2\,(x-\alpha)\,(y-\beta)\,\text{συν}\,\vartheta=\varrho^2,$$

ἂν τεθῇ $A=-2\,\alpha-2\,\beta\,\text{συν}\vartheta,\ B=-2\beta-2\,\alpha\,\text{συν}\vartheta,$

$$\Gamma=\alpha^2+\beta^2+2\,\alpha\,\beta\,\text{συν}\,\vartheta-\varrho^2.$$

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν τὸ κέντρον (α,β) καὶ τὴν ἀκτῖνα ϱ τῆς περιφερείας, εἶνε δὲ $\alpha=\dfrac{-A+B\,\text{συν}\,\vartheta}{2\,\text{ημ}^2\,\vartheta},\ \beta=\dfrac{-B+A\,\text{συν}\,\vartheta}{2\,\text{ημ}^2\,\vartheta},$

$$\varrho^2=\alpha^2+\beta^2+2\,\alpha\,\beta\,\text{συν}\,\vartheta-\Gamma.$$

Ἡ περιφέρεια αὕτη εἶνε πραγματικὴ ἢ φανταστικὴ ἢ περιορίζεται εἰς τὸ κέντρον αὐτῆς, καθόσον εἶνε

$$\alpha^2+\beta^2+2\,\alpha\,\beta\,\text{συν}\,\vartheta-\Gamma>0 \text{ ἢ } <0 \text{ ἢ } =0.$$

Παρατηρητέον ὅτι ἡ γενικωτέρα ἐξίσωσις τοῦ β΄ βαθμοῦ ὡς πρὸς x, y

$$A\,x^2+B\,x\,y+\Gamma\,y^2+\Delta\,x+E\,y+Z=0$$

παριστάνει περιφέρειαν κύκλου εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους μέν, ἂν εἶνε $A=\Gamma\neq 0, B=0$, εἰς πλαγιογωνίους δέ, ἂν εἶνε $A=\Gamma\neq 0$, καὶ $B=2A\text{συν}\vartheta$, ἐνῶ $\vartheta\neq 90^0$ παριστάνει τὴν γωνίαν τῶν ἀξόνων.

Ἂν $M_i\,(x_i, y_i)$, $i=1, 2, 3$ εἶνε τρία σημεῖα, μὴ κείμενα ἐπ᾽ εὐθείας, ἡ ἐξίσωσις τῆς δι᾽ αὐτῶν διερχομένης περιφερείας εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους εἶνε

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

προκύπτουσα ἐκ τῶν $\quad x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$

$$x_i^2+y_i^2+A\,x_i+B\,y_i+\Gamma=0$$

δι᾽ ἀπαλοιφῆς τῶν A, B, Γ. Παρατηρητέον ὅτι ὁ συντελεστὴς τοῦ x^2 καὶ y^2 εἶνε $\neq 0$, ἕνεκα τῆς γενομένης ὑποθέσεως ὡς πρὸς τὰ M_i.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. (Ὅπου δὲν γίνεται λόγος περὶ τοῦ εἴδους τῶν ἀξόνων θὰ ὑποτίθενται ὀρθογώνιοι). 1. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς περιφερείας κύκλου μὲ κέντρον $(-3, -5)$ καὶ ἀκτῖνα 4. Ποῦ κεῖται ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων ὡς πρὸς αὐτήν;

2. Μὲ κέντρον $(2,-3)$ καὶ διερχομένης καὶ διὰ τῆς ἀρχῆς.

3. Μὲ κέντρον $(5, 0)$ καὶ ἐφαπτομένης τῆς εὐθείας $x=y$.

4. Εὕρετε τὴν τομὴν τῆς περιφερείας $\alpha\,(x^2+y^2)+\beta x+\gamma y+\delta=0$ μὲ τοὺς ἄξονας καὶ δείξατε ὅτι τὸ γινόμενον τῶν μέτρων τῶν διανυσμάτων τοῦ ἄξονος τῶν x, τῶν ἐχόντων ἀρχὴν τὴν τῶν συντεταγμένων καὶ πέρας τὰς τομὰς τοῦ ἄξονος μὲ τὴν περιφέρειαν ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἀντιστοίχων διανυσμάτων ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y.

5. Ἔστωσαν $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ τέσσαρες ἀριθμοί, πληροῦντες τὴν σχέσιν $\lambda_1\lambda_2=\mu_1\mu_2$. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν περιφερείας, τεμνούσης τοὺς ἄξονας εἰς τὰ σημεῖα $(\lambda_1, 0)$, $(\lambda_2, 0)$, $(0, \mu_1)$, $(0, \mu_2)$.

6. Εὕρετε τὸ κέντρον καὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου

$$2(x^2+y^2)-2x+6y-3=0.$$

7. Εὕρετε τὰς ἐξισώσεις τῶν περιφερειῶν, αἵτινες ἐφάπτονται τοῦ ἄξονος τῶν x ἢ τῶν y εἰς τὸ σημεῖον $x=\alpha$ ἢ $y=\beta$.

8. Σημεῖον κινεῖται, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τῶν συντεταγμένων αὐτοῦ νὰ εἶνε ἰσοδύναμον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως αὐτοῦ ἀπὸ τῆς εὐθείας $x+y=\alpha$. Τίνα γραμμὴν γράφει τὸ σημεῖον ;

9. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς περιφερείας, τῆς ἐχούσης κέντρον τὴν ἀρχὴν καὶ διερχομένης διὰ τοῦ σημείου $(-5, 3)$.

10. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς περιφερείας, τῆς ἐχούσης κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων καὶ ἐφαπτομένης τῆς εὐθείας $Ax+By+\Gamma=0$.

11. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει κέντρον $(3, -2)$ καὶ ἐφάπτεται τῆς εὐθείας $y=7x+11$.

12. Εὕρετε τὰς συντεταγμένας τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας

$$x^2+2xy\,\text{συν}\frac{\pi}{3}+y^2+26x-7y-14=0$$

13. Πόση εἶνε ἡ γωνία ϑ, ἂν ἡ $4(x^2+y^2+xy)+60x+42y\ \ 247=0$ παριστάνῃ περιφέρειαν ;

14. Τίς ἡ ἐξίσωσις περιφερείας μὲ ἀκτῖνα 50, ἥτις τέμνει τὸν ἄξονα τῶν θετικῶν x κατὰ χορδὴν μήκους 28 καὶ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου $(0,8)$;

15. Τίς ἡ ἐξίσωσις περιφερείας, ἐφαπτομένης τοῦ ἄξονος τῶν x εἰς τὸ $(5, 0)$ καὶ τέμνει τὸν ἄξονα τῶν y κατὰ χορδὴν μήκους 10 ;

16. Πότε περιφέρεια κύκλου ἐφάπτεται τῶν πλαγιογωνίων ἀξόνων ;

17. Τίς ἡ ἐξίσωσις περιφερείας διερχομένης διὰ τῶν σημείων $M_i\ (x_i, y_i)$, $i=1, 2, 3$ εἰς ἄξονας πλαγιογωνίους ; Μερικὴ περίπτωσις· $\vartheta=\frac{\pi}{2}$, $M_1(26,4)$, $M_2(9,21)$, $M_3(17,17)$.

18. Αἱ συντεταγμέναι τῶν κορυφῶν τριγώνου εἶνε (x_i, y_i), $i=1, 2, 3$ καὶ αἱ τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης εἰς αὐτὸ περιφερείας (x_0, y_0). Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ συντεταγμέναι ξ, η τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας, καλουμένης τῶν ἐννέα σημείων (διερχομένης διὰ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, τῶν ποδῶν τῶν ὑψῶν του καὶ τῶν μέσων τῶν ὑψῶν ἀπὸ τῶν κορυφῶν μέχρι τῆς τομῆς των) εἶνε $2\xi=x_1+x_2+x_3-x_0$, $2\eta=y_1+y_2+y_3-y_0$

19. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει ἀκτῖνα ϱ, διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων, ὁ ἄξων τῶν y ἐφάπτεται αὐτῆς, ὁ δὲ τῶν x διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου της (εἰς ἄξονας σχηματίζοντας γωνίαν 45^0).

20. Εὕρετε τὸ κέντρον καὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας

$$x^2+y^2+xy+4x-6y+1=0.$$

21. Κατασκευάσατε τὴν περιφέρειαν, ἥτις ἔχει ἐξίσωσιν $x^2+y^2+5x=3$, ἢ $x^2+y^2-8x-1=0$, ἢ $x^2+y^2=16$, ἢ $x^2+y^2+x+y=8$.

22. Φέρατε τὰς ἐξισώσεις

$$x^2+y^2-6x=8y-9,\quad x^2+y^2-8x=6y-9,\quad x^2+5y^2-7x=5y+3+4y^2$$

εἰς τὴν μορφὴν $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\varrho^2$, καὶ τίνα θέσιν ἔχει ἑκάστη τῶν περιφερειῶν τούτων ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας;

23. Εὕρετε τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας, ἥτις διέρχεται διὰ τῶν σημείων M_i (x_i, y_i), $i=1, 2, 3$, μὴ κειμένων ἐπ' εὐθείας καὶ δείξατε ὅτι αὕτη εἶνε πραγματική.

24. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν καὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας, ἥτις διέρχεται διὰ τῶν σημείων (0, 0), (1, 2), (−2, −4).

§ 2. Θέσις εὐθείας ὡς πρὸς περιφέρειαν.

Ἔστω περιφέρεια μὲ κέντρον Κ (α, β) καὶ ἀκτῖνα ϱ, τὸ ὁποῖον ἐκφράζομεν ἐνίοτε συμβολικῶς διὰ τοῦ (α, β, ϱ), εἰς ἄξονας σχηματίζοντας γωνίαν ϑ, καὶ εὐθεῖα μὲ ἐξίσωσιν τὴν

$$Ax+By+\Gamma=0,\ A^2+B^2\neq 0. \qquad (1)$$

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τῆς εὐθείας πρὸς τὴν περιφέρειαν ἐκ τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν. Ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τοῦ Κ ἀπὸ τῆς (1), εἶνε $\dfrac{(A\alpha+B\beta+\Gamma)^2\eta\mu^2\vartheta}{A^2+B^2-2AB\,\sigma\upsilon\nu\,\vartheta}$ ἕπεται ὅτι τοῦτο θὰ εἶνε μεγαλύτερον ἢ ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ ϱ^2, ἂν ἡ εὐθεῖα κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου ἢ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας ἢ τέμνῃ αὐτήν. Ἑπομένως, *«ἵνα ἡ (1) κεῖται ἐκτὸς τῆς περιφερείας (α,β,ϱ) ἢ ἐφάπτεται ἢ τέμνῃ αὐτήν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ*

$$(A\alpha+B\beta+\Gamma)^2\eta\mu^2\vartheta-\varrho^2(A^2+B^2-2AB\sigma\upsilon\nu\vartheta) \qquad (2)$$

νὰ εἶνε θετικὸν ἢ 0 ἢ ἀρνητικόν».

Ἂν ζητῆται νὰ εὕρωμεν τὰς ἐξισώσεις εὐθειῶν (1), παραλλήλων τῆς $Ax+By=0$ καὶ ἐφαπτομένων τῆς (α,β,ϱ), παρατηροῦμεν ὅτι ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν ἐκ τοῦ (2) τιθεμένου = 0, τὴν τιμὴν τοῦ Γ. Δι' ἀπαλοιφῆς αὐτοῦ μεταξὺ τῶν (1) καὶ (2) (ὅταν τοῦτο τεθῇ =0) εὑρίσκομεν

$$A(x-\alpha)+B(y-\beta)\pm\frac{\varrho}{\eta\mu\vartheta}\sqrt{A^2+B^2-2AB\ \sigma\upsilon\nu\vartheta}=0$$

ἥτις δι' ἕκαστον τῶν + ἢ − παριστάνει εὐθεῖαν ἐφαπτομένην τῆς (α, β, ϱ).

Ἂν δοθῇ ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως λ τῆς ἐφαπτομένης, αὕτη θὰ εἶνε παράλληλος τῆς $y=\lambda x$ καὶ ἀρκεῖ νὰ ληφθῇ $A=-\lambda, B=1$, ὅτε αἱ ἐφαπτόμεναι θὰ ἔχουν ἐξισώσεις τὰς

$$(y-\beta)-\lambda(x-\alpha)\pm\frac{\varrho}{\eta\mu\vartheta}\sqrt{1+\lambda^2-2\lambda\sigma\upsilon\nu\,\vartheta}=0.$$

Ἂν ζητοῦμεν τὰς συντεταγμένας τῶν κοινῶν σημείων τῆς (α,β,ϱ) καὶ τῆς (1), ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὰς κοινὰς λύσεις τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν.

Πρὸς τοῦτο, ἂν μὲν εἶνε $B \neq 0$, λαμβάνομεν τὴν τιμὴν τοῦ y ἐκ τῆς (1) καὶ εἰσάγομεν αὐτὴν εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῆς περιφερείας. Οὕτω εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν β′ βαθμοῦ ὡς πρὸς x. Ἂν αὕτη ἔχῃ ῥίζας ἀνίσους ἢ ἴσας ἢ φανταστικάς, ἡ εὐθεῖα (1) θὰ τέμνῃ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα διάφορα ἢ θὰ ἐφάπτεται αὐτῆς ἢ θὰ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου. Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι, τὸ ὑπόρριζον τὸ ὁποῖον παρουσιάζεται εἰς τοὺς τύπους τῶν ῥιζῶν τῆς ἐν λόγῳ ἐξισώσεως δὲν δύναται νὰ εἶνε διάφορον τοῦ

$$\rho^2(A^2+B^2-2AB\sigma\upsilon\nu\vartheta)-(A\alpha+B\beta+\Gamma)^2\eta\mu^2\vartheta$$

εἰμὴ κατὰ παράγοντα θετικόν.

Ἐὰν εἶνε $B=0$, ἡ (1) τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $x=k$ καὶ ἐργαζόμεθα ὁμοίως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 25. Εὕρετε τὴν θέσιν τῆς εὐθείας $2x-7y+1=0$ ὡς πρὸς τὴν περιφέρειαν $x^2+y^2=9$, καὶ τὰς συντεταγμένας τῶν κοινῶν σημείων, ἂν ὑπάρχουν.

26. Εὕρετε τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς εὐθείας $5y-x+2=0$ καὶ τῆς περιφερείας $(x-3)^2+(y+1)^2=9$.

27. Ὁμοίως τῆς περιφερείας $5x^2+5y^2+24x-12y+16=0$ καὶ τῆς εὐθείας $3x-4y+12=0$.

28. Δείξατε ὅτι, ἂν M_i (x_i, y_i), $i=1,2$ εἶνε σημεῖα περιφερείας, ἡ ἐκ τοῦ κέντρου αὐτῆς κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν M_1M_2 διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς M_1M_2. Ἐπομένως· *«τὰ μέσα παραλλήλων χορδῶν κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ κέντρου κάθετος ἐπὶ ταύτας»*.

29. Εὕρετε τὰς τομὰς τῆς περιφερείας $(x-\rho)^2+(y-2\rho)^2-25\rho^2=0$ καὶ τῆς εὐθείας $4x+3y-35\rho=0$.

30. Εὕρετε τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην, ἵνα ἡ εὐθεῖα $y=\lambda y+\beta$ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας $(0,0,\rho)$.

§ 3. Ἐξίσωσις εὐθείας ἐφαπτομένης περιφερείας.

Ἔστω περιφέρεια (α,β,ρ) μὲ κέντρον K εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2 \qquad (1)$$

καὶ $M_1(x_1,y_1)$ σημεῖον αὐτῆς. Ζητεῖται ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἥτις ἐφάπτεται τῆς (α,β,ρ) εἰς τὸ M_1.

Ἐὰν λ παριστάνῃ τὸν συντελεστὴν διευθύνσεως τῆς ἐν λόγῳ εὐθείας, ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς εἶνε $\quad y-y_1=\lambda(x-x_1) \qquad (2)$

Ἐπειδὴ τὸ διάνυσμα KM_1 $(x_1-\alpha, y_1-\beta)$ θὰ εἶνε κάθετον ἐπὶ τὴν (2) θὰ ἔχωμεν $\lambda.\dfrac{y_1-\beta}{x_1-\alpha}=-1$, καὶ $\lambda=-\dfrac{x_1-\alpha}{y_1-\beta}$.

Δι᾽ ἀπαλοιφῆς τοῦ λ μεταξὺ ταύτης καὶ τῆς (2), εὑρίσκομεν

$$(x-x_1)(x_1-\alpha)+(y-y_1)(y_1-\beta)=0,$$

ἥτις γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$[(x-\alpha)-(x_1-\alpha)]\,(x_1-\alpha)+[(y-\beta)-(y_1-\beta)](y_1-\beta)=0$$

ἢ $(x-\alpha)(x_1-\alpha)+(y-\beta)(y_1-\beta)=(x_1-\alpha)^2+(y_1-\beta)^2$.

Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ M_1 κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας θὰ εἶνε

$$(x_1-\alpha)^2+(y_1-\beta)^2=\varrho^2.$$

Ἑπομένως, ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης γίνεται

$$\boxed{(x-\alpha)\,(x_1-\alpha)+(y-\beta)(y_1-\beta)=\varrho^2} \qquad (3)$$

Ἂν εἶνε $\alpha=0$, $\beta=0$, ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ (x_1,y_1) θὰ εἶνε

$$xx_1+yy_1=\varrho^2. \qquad (4)$$

Τὴν ἐξίσωσιν ταύτην δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἂν εὐθεῖα τέμνῃ καμπύλην k εἰς δύο σημεῖα $P_1(x_1,y_1)$ καὶ $P_2(x_2,y_2)$, στρέφεται δὲ π.χ. περὶ τὸ P_1 οὕτως ὥστε τὸ P_2 κείμενον πάντοτε ἐπὶ τῆς k νὰ τείνῃ πρὸς τὸ P_1, λέγομεν ὅτι τὸ ὅριον τῆς τεμνούσης ταύτης εἶνε ἐφαπτομένη τῆς k εἰς τὸ P_1.

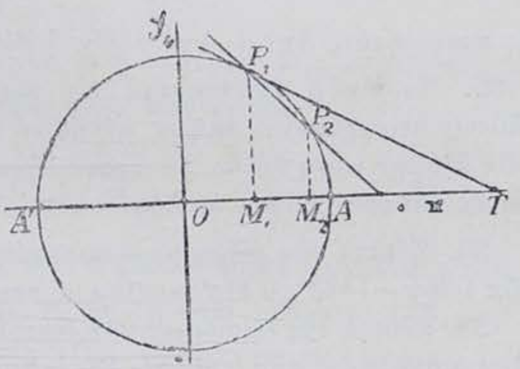
Κατὰ ταῦτα, προκειμένου περὶ περιφερείας, ἐχούσης ἐξίσωσιν $x^2+y^2=\varrho^2$, ἐπειδὴ τὰ P_1, P_2 κεῖνται ἐπ' αὐτῆς ἔχομεν (σχ. 2)

$$x_1^2+y_1^2=\varrho^2,\; x_2^2+y_2^2=\varrho^2.$$

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν

$$x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2=0$$

ἢ $$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}.$$



(Σχ. 2)

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῆς τεμνούσης $P_1\,P_2$

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \text{ λαμβάνομεν } y-y_1=-\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}(x-x_1).$$

Ἀλλ' ὅταν τὸ $P_2 \rightarrow P_1$, τὸ $x_2 \rightarrow x_1$ καὶ $y_2 \rightarrow y_1$, ἡ δὲ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης P_1T τῆς περιφερείας εἰς τὸ P_1, πρὸς τὴν ὁποίαν τείνει οὕτω ἡ P_1P_2, θὰ εἶνε $y-y_1=-\dfrac{2x_1}{2y_1}(x-x_1)$

ἢ $$x\,x_1+y\,y_1=x_1^2+y_1^2$$

ἢ $$\boxed{x\,x_1+y\,y_1=\varrho^2} \qquad (4)$$

Ἂν μὲν ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας εἶνε $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$, ἡ τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς εὐθείας εἰς τὸ $M_1(x_1,y_1)$ θὰ εἶνε

$$(A+2x_1)x+(B+2y_1)y+Ax_1+By_1+2\Gamma=0, \qquad (5)$$

ἂν δ' οἱ ἄξονες σχηματίζουν γωνίαν ϑ, θὰ εἶνε

$$(x-\alpha)(x_1-\alpha)+(y-\beta)(y_1-\beta)+[(y_1-\beta)(x-\alpha)+(x_1-\alpha)(y-\beta)]\sigma\upsilon\nu\vartheta=\varrho^2.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 31. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης εὐθείας εἰς τὸ σημεῖον (5, 4) τῆς περιφερείας $(x-2)^2+(y-3)^2=10$.

32. Δίδεται ἡ περιφέρεια $x^2+y^2=25$. Ἡ εὐθεῖα $x=4$ τέμνει αὐτὴν εἰς δύο σημεῖα. Εὕρετε τὰς ἐξισώσεις τῶν ἐφαπτομένων τῆς περιφερείας εἰς τὰ σημεῖα ταῦτα καὶ δείξατε ὅτι τέμνονται ἐπί τινος σημείου τοῦ ἄξονος τῶν x.

33. Ἔστω ὅτι ἡ περιφέρεια $(0, 0, \varrho)$ τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὰ σημεῖα A_1, A_2. Εὕρετε τὴν τετμημένην ἐπὶ τὴν ἀρχὴν $x=(OT)$ τῆς ἐφαπτομένης M_1T τῆς περιφερείας εἰς δοθὲν σημεῖον $M_1(x_1, y_1)$, ἐνῶ εἶνε $x_1=(O\Pi_1)$ καὶ δείξατε διὰ τῆς σχέσεως $x\,x_1=\varrho^2=(OA_1)^2$ ὅτι τὰ σημεῖα A_1, A_2, Π_1, T ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν σημειοσειράν. Πῶς κινεῖται τὸ T, ὅταν τὸ Π_1 διατρέχῃ τὸ τμῆμα A_1A_2;

34. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς περιφερείας, ἥτις εἶνε ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον τὸ ἔχον πλευρὰς $A_i\,x+B_i\,y+\Gamma_i=0$, $i=1,2,3$. Μερικὴ περίπτωσις $y=0$, $4y-3x-12=0$, $12y+5x=100$.

35. Τίς ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα ἡ εὐθεῖα $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας $Ax^2+Ay^2+Bx+\Gamma y+\Delta=0$;

36. Νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη εἰς περιφέρειαν $(0, 0, \varrho)$ ὥστε α') τὸ μεταξὺ τῶν ἀξόνων περιεχόμενον τμῆμα αὐτῆς νὰ ἔχῃ μῆκος μ. β') τὰ μεταξὺ τῆς ἁφῆς καὶ τῶν ἀξόνων μέρη αὐτῆς νὰ ἔχουν λόγον k. γ') τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τοῦ ὑπ' αὐτῆς καὶ τῶν ἀξόνων ὁριζομένου νὰ εἶνε k^2.

37. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν περιφερείας μὲ ἀκτῖνα 53, ἐφαπτομένης τῆς εὐθείας $45x+28y-1433=0$ εἰς σημεῖον μὲ τετμημένην 26.

38. Εὕρετε τὰς ἐξισώσεις τῶν ἐφαπτομένων τῆς περιφερείας (0, 0, 17), αἵτινες εἶνε κάθετοι ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν $15x-8y=10$.

§ 4. Πόλος καὶ πολικὴ εὐθεῖα ὡς πρὸς περιφέρειαν.

Ἔστω περιφέρεια κύκλου (α,β,ϱ) εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους καὶ σημεῖον $P(\xi,\eta)$, κείμενον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς.

Ἂν $M_1(x_1,y_1)$ εἶνε τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς ζητουμένης εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας θὰ ἔχωμεν

$$(x_1-\alpha)^2+(y_1-\beta)^2=\varrho^2 \qquad (1)$$

καὶ
$$(x-\alpha)(x_1-\alpha)+(y-\beta)(y_1-\beta)=\varrho^2,$$

ἐπειδὴ δ' ἡ εὐθεῖα αὕτη διέρχεται διὰ τοῦ P θὰ εἶνε

$$(\xi-\alpha)(x_1-\alpha)+(\eta-\beta)(y_1-\beta)=\varrho^2 \qquad (2)$$

Πρὸς εὕρεσιν τῶν x_1, y_1 ἀρκεῖ νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα τῶν (1) καὶ (2). Καὶ ἂν μὲν προκύψουν λύσεις πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, ἔχομεν δύο διακεκριμένα σημεῖα ἐπαφῆς, ἤτοι δύο ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας διερχομένας διὰ τοῦ P· ἂν δὲ προκύψουν λύσεις ἴσαι ἢ φανταστικαί, ἔχομεν δύο ἐφαπτομένας συμπιπτούσας ἢ δὲν ὑπάρχουν ἐφαπτόμεναι πραγματικαὶ τῆς περιφερείας, διερχόμεναι διὰ τοῦ P.

Ἡ πρώτη περίπτωσις παρουσιάζεται ὅταν ἡ ὑπόρριζος παράστασις ἐκ τῆς ὁποίας ἐξαρτᾶται τὸ εἶδος τῶν ῥιζῶν τοῦ συστήματος τῶν (1) καὶ (2) εἶνε θετική. Ἐπειδὴ δ' αὕτη εἶνε $(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2-\varrho^2$, καὶ $(KP)^2=(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2$, ἕπεται ὅτι, ***«ὅταν τὸ P κεῖται ἐκτὸς τοῦ δοθέντος κύκλου ἢ ἐπὶ τῆς περιφερείας ἢ ἐντὸς αὐτοῦ, ἔχομεν δύο ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας ἢ μίαν ἢ οὐδεμίαν, διερχομένας διὰ τοῦ P.»***

Καλοῦμεν ***πολικὴν εὐθεῖαν*** τοῦ σημείου P (ξ, η) ὡς πρὸς τὴν περιφέρειαν (α, β, ϱ) τὴν εὐθεῖαν

$$(x-\alpha)(\xi-\alpha)+(y-\beta)(\eta-\beta)=\varrho^2 \qquad (3)$$

διερχομένην διὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν διὰ τοῦ P διερχομένων ἐφαπτομένων τῆς περιφερείας (ἂν τὸ P κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου).

Τὸ σημεῖον P (ξ,η) καλοῦμεν ***πόλον*** τῆς (3).

Ἡ ἀπόλυτος ἀπόστασις, ἔστω (ΚΠ), τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας ἀπὸ τῆς πολικῆς (3) τοῦ P (ξ, η) δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$(K\Pi)=\frac{\varrho^2}{\sqrt{(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2}} \qquad (4)$$

Ἐπομένως ἔχομεν δύο πραγματικὰ καὶ διακεκριμένα σημεῖα τομῆς τῆς πολικῆς τοῦ P μὲ τὴν περιφέρειαν ἢ ἓν ἢ δύο φανταστικά, καθόσον τὸ $(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2$ ἢ τὸ $(KP)^2$ εἶνε μεγαλύτερον, ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ ϱ^2, ἤτοι· ***«ἂν τὸ P κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου ἢ ἐπὶ τῆς περιφερείας ἢ ἐντὸς αὐτοῦ, ἡ πολικὴ αὐτοῦ τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα διακεκριμένα ἢ ἐφάπτεται αὐτῆς εἰς τὸ P ἢ κεῖται ἐκτὸς αὐτῆς».***

Δοθείσης εὐθείας ὡς πολικῆς σημείου πρὸς δοθεῖσαν περιφέρειαν, π.χ. τὴν (0, 0, ϱ) εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν πόλον αὐτῆς. Πράγματι, ἂν $Ax+By+\Gamma=0$ εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας καὶ ξ, η αἱ συντεταγμέναι τοῦ ζητουμένου πόλου αὐτῆς, ἡ πολικὴ τούτου θὰ ἔχῃ ἐξίσωσιν $\xi x+\eta y=\varrho^2$, ἵνα δὲ συμπίπτῃ αὕτη μὲ τὴν δοθεῖσαν πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν

$$\frac{\xi}{A}=\frac{\eta}{B}=\frac{-\varrho^2}{\Gamma} \qquad (5)$$

ἐξ ὧν ὁρίζονται τὰ ξ, η. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι,

«εἰς δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἀντιστοιχεῖ εἷς πόλος»· «ἂν δ' ἡ δο-

θεῖσα πολικὴ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου, ἤτοι ἂν εἶνε $\Gamma=0$, ὁ πόλος αὐτῆς κεῖται εἰς τὸ ἄπειρον».

Τοὐναντίον, ἄν ἡ δοθεῖσα πολικὴ εἶνε ἡ κατ᾽ ἐκδοχὴν (ἐπ᾽ ἄπειρον) εὐθεῖα, ὅτε θὰ εἶνε $A=0$, $B=0$, $\Gamma\neq 0$ εἰς τὴν ἐξίσωσιν $Ax+By+\Gamma=0$, θὰ ἔχωμεν $\xi=0, \eta=0$ ἐκ τῶν (5)· ἤτοι, ***«ὁ πόλος τῆς κατ᾽ ἐκδοχὴν εὐθείας εἶνε τὸ κέντρον τῆς περιφερείας».***

Ἔστω $P(\xi, \eta)$ σημεῖόν τι καὶ πολικὴ τούτου ὡς πρὸς τὴν περιφέρειαν (α, β, ϱ), ἡ $(\xi-\alpha)(x-\alpha)+(\eta-\beta)(y-\beta)=\varrho^2$.

Τὸ διάνυσμα $KP(\xi-\alpha, \eta-\beta)$ εἶνε κάθετον ἐπὶ τὴν πολικὴν τοῦ P, ἐπειδὴ εἶνε $\left(\frac{\eta-\beta}{\xi-\alpha}\right)\left(-\frac{\xi-\alpha}{\eta-\beta}\right)=-1$.

Ἑπομένως, ***«ἡ πολικὴ τοῦ P εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον τοῦ P· ἐπὶ πλέον ἕνεκα τῆς (4) ἡ ἀπόλυτος ἀπόστασις αὐτῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου, ἔστω ἡ (ΚΠ) ἔχει τὴν ἰδιότητα ὅτι (ΚΠ) (ΚΡ)$=\varrho^2$».***

Παρατηρητέον ὅτι, ***«ὅταν σημεῖον γράφῃ εὐθεῖάν τινα, ἡ πολικὴ τούτου στρέφεται περὶ τὸν πόλον τῆς εὐθείας***· καὶ ἀντιστρόφως· ***«ἐὰν εὐθεῖα στρέφεται περὶ σημεῖον, ὁ πόλος αὐτῆς γράφει τὴν πολικὴν τοῦ σημείου τούτου».***

Τῷ ὄντι, ἡ πολικὴ σημείου $P(\xi, \eta)$ ὡς πρὸς τὴν (α, β, ϱ) ἔχει ἐξίσωσιν

$$(\xi-\alpha)(x-\alpha)+(\eta-\beta)(y-\beta)=\varrho^2 \qquad (7)$$

καὶ ἂν x', y' εἶνε αἱ συντεταγμέναι σημείου τινὸς τῆς εὐθείας ταύτης θὰ ἔχωμεν

$$(\xi-\alpha)(x'-\alpha)+(\eta-\beta)(y'-\beta)=\varrho^2 \qquad (8)$$

Ἡ πολικὴ τοῦ (x', y') ἔχει ἐξίσωσιν

$$(x'-\alpha)(x-\alpha)+(y'-\beta)(y-\beta)=\varrho^2$$

αὕτη δὲ διέρχεται διὰ τοῦ $P(\xi, \eta)$, ἕνεκα τῆς (8).

Ἀντιστρόφως, ἂν (x', y') εἶνε αἱ συντεταγμέναι τοῦ πόλου εὐθείας τινός, διερχομένης διὰ τοῦ $P(\xi, \eta)$, ἡ πολικὴ αὐτοῦ ἔχει ἐξίσωσιν

$$(x'-\alpha)(x-\alpha)+(y'-\beta)(y-\beta)=\varrho^2.$$

Ἐπειδὴ δ᾽ αὕτη διέρχεται διὰ τοῦ (ξ, η) θὰ εἶνε

$$(x'-\alpha)(\xi-\alpha)+(y'-\beta)(\eta-\beta)=\varrho^2$$

ἥτις ἐκφράζει ὅτι ὁ πόλος (x', y') κεῖται ἐπὶ τῆς πολικῆς τοῦ $P(\xi,\eta)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 39. Τίς ἡ ἐξίσωσις τῆς πολικῆς τοῦ (x_1, y_1) ὡς πρὸς περιφέρειαν α′) $(0, 0, 0)$· β′) ὡς πρὸς τὴν $(0, 0, \infty)$. Εἰς τὴν β′ περίπτωσιν ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας δίδεται ὑπὸ τῆς $Ax+By+\Gamma=0$.

40. Εὕρετε τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων, τῆς περιφερείας $x^2 + y^2 = 16$, αἵτινες ἄγονται διὰ τοῦ σημείου (5, — 3).

41. Εὕρετε τὸν πόλον τῆς εὐθείας $-3x+5{,}2y=7$ ὡς πρὸς τὴν περιφέρειαν $x^2+y^2=\varrho^2$.

42. Εὕρετε τὴν πολικὴν τοῦ σημείου (2, 3) καὶ τὸν πόλον τῆς εὐθείας $\frac{x}{\lambda}+\frac{y}{\mu}=1$ ὡς πρὸς τὴν περιφέρειαν $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\varrho^2$, ἢ ὡς πρὸς τὴν $A\,x^2+A\,y^2+B\,x+\Gamma\,y+\Delta=0$.

43. Εὕρετε τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας $x^2+y^2-2x-4y=8$, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τοῦ σημείου (3, 5).

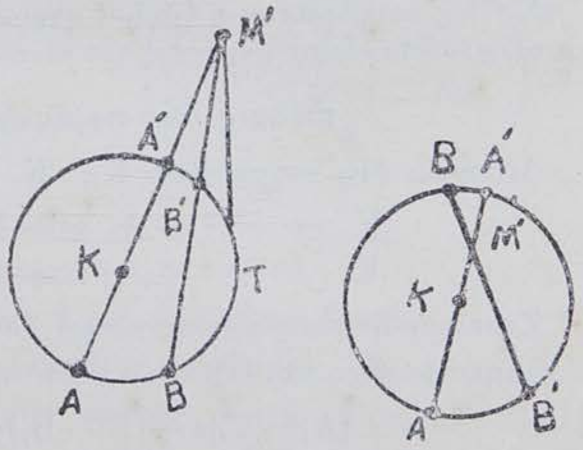
44. Εὕρετε τὸν πόλον τῆς $3x+4y=7$ ὡς πρὸς τὴν $x^2+y^2=14$, ἢ τῆς $2x+3y=6$ ὡς πρὸς τὴν $(x-1)^2+(y-2)^2=12$.

45. Εὕρετε τὰς πολικὰς τῶν σημείων (4, 4), (4, 5) ὡς πρὸς τὰς περιφερείας $(x-1)^2+(y-2)^2=13$, καὶ $x^2+y^2-3x-4y=8$.

46. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἂν ἐκ δύο σημείων P_1 καὶ P_2 φέρωμεν τὰς καθέτους ἐπὶ τὰς πολικὰς αὐτῶν ϱ_2 καὶ ϱ_1 πρὸς περιφέρειαν, αἱ ἀποστάσεις (ἑκάστου ἀπὸ τῆς πολικῆς τοῦ ἄλλου) ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν ἀποστάσεων τῶν σημείων ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας,

§ 5 Δύναμις σημείου ὡς πρὸς κύκλον.

Ἂν σημεῖον $M'(x',y')$ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς περιφερείας $(\alpha,\beta,\varrho,)$ εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους (σχ.3) ἔχομεν $(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2=(M'K)^2$ Ἐπειδὴ εἶνε $(M'K)<\varrho$ ἢ $>\varrho$ ἢ $=\varrho$ καθόσον τὸ M' κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου ἢ ἐπὶ τῆς περιφερείας ἢ ἐκτὸς αὐτοῦ, ἕπεται ὅτι,



(Σχ. 3).

«τὸ α΄ μέλος τῆς ἐξισώσεως τῆς περιφερείας κύκλου, τοῦ β΄ ὄντος 0, ***εἶνε*** < 0 ***μὲν διὰ τὰ σημεῖα τὰ κείμενα ἐντὸς αὐτοῦ***, =0 ***διὰ τὰ κείμενα ἐπὶ τῆς περιφερείας καὶ*** >0 ***διὰ τὰ κείμενα ἐκτὸς αὐτοῦ, ἂν ἀντὶ τῶν*** x ***καὶ*** y ***τεθοῦν αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων τούτων»***. Ἐκ τῆς

$$(M'K)^2-\varrho^2=[(M'K)+\varrho]\,[(M'K)-\varrho]=(M'A)\,(M'A')=(M'B)(M'B'),$$

ἐνῷ A,A΄ καὶ B,B΄ εἶνε τὰ σημεῖα καθ' ἃ ἡ διὰ τοῦ M΄ διάκεντρος ἢ τυχοῦσα τέμνουσα τῆς περιφερείας τέμνει αὐτήν, συνάγομεν ὅτι· ***«ἂν εἰς τὸ α΄ μέλος τῆς ἐξισώσεως περιφερείας κύκλου (τοῦ β΄ ὄντος*** 0***) ἀντικαταστήσωμεν τὰ*** x,y ***διὰ τῶν συντεταγμένων*** x΄,y΄

τυχόντος σημείου M′ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ, τὸ ἐξαγόμενον παριστάνει τὸ σταθερὸν γινόμενον τῶν μηκῶν δύο διανυσμάτων τυχούσης διατεμνούσης τοῦ κύκλου, διὰ τοῦ M′ ἀγομένης, ἐχόντων ἀρχὴν τὸ M′ καὶ πέρας τὰς τομὰς αὐτῆς μὲ τὴν περιφέρειαν».

Παρατηρητέον ὅτι, ὅταν τὸ M′ κεῖται ἐκτὸς ἢ ἐντὸς τοῦ κύκλου τὰ δύο διανύσματα εἶνε ὁμόρροπα ἢ ἀντίρροπα καὶ τὰ μήκη αὐτῶν ἔχουν γινόμενον θετικὸν ἢ ἀρνητικόν· ἂν δὲ τὸ M′ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, τὸ ἓν τούτων ἔχει μῆκος ἴσον μὲ 0.

Ἂν τὸ M′ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ὡς γνωστόν, τὸ γινόμενον τῶν μηκῶν τῶν δύο ἐν λόγῳ διανυσμάτων ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ μήκους ἑκάστου τῶν ἐφαπτομένων διανυσμάτων M′T, ἅτινα ἄγονται ἐκ τοῦ M′ εἰς τὴν περιφέρειαν. Ἤτοι εἶνε

$$(M'A)(M'A')=(M'B)(M'B')=(M'T)^2$$

Τὸ γινόμενον τῶν μέτρων τῶν δύο ἐν λόγῳ διανυσμάτων M′A, M′A′, ἢ M′B, M′B′, ὁπουδήποτε τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἂν κεῖται τὸ M′, καλεῖται ***δύναμις τοῦ M′ ὡς πρὸς τὸν κύκλον.***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 47. Τίς ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν δύναμιν ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν κύκλον;

48. Πῶς μεταβάλλεται ἡ δύναμις σημείου ὡς πρὸς κύκλον ὅταν τὸ σημεῖον διατρέχῃ εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου;

§ 6. Θέσεις δύο περιφερειῶν μεταξύ των.

Δίδονται δύο περιφέρειαι K_1, K_2 διὰ τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν

$$\begin{aligned} K_1 &: x^2+y^2+A_1x+B_1y+\Gamma_1=0 \\ K_2 &: x^2+y^2+A_2x+B_2y+\Gamma_2=0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Ζητεῖται ἡ θέσις τῶν περιφερειῶν μεταξύ των.

Ἀφαιροῦντες τὰς (1) κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(A_1-A_2)x+(B_1-B_2)y+\Gamma_1-\Gamma_2=0 \qquad (2)$$

ἡ ὁποία ἐπαλαθεύεται ὑπὸ τῶν κοινῶν λύσεων τῶν (1) καὶ δύναται νὰ ἀντικαταστήσῃ μίαν ἐξ αὐτῶν. Ἐὰν ἡ ὑπὸ τῆς (2) παριστωμένη εὐθεῖα τέμνῃ τὴν K_1 π.χ. τῶν περιφερειῶν, αἱ (1) τέμνονται, ὡς διερχόμεναι διὰ τῶν σημείων τομῆς τῆς K_1 καὶ (2)· ἐὰν δ' ἡ (2) ἐφάπτεται τῆς μιᾶς τῶν (1) ἢ δὲν ἔχῃ κοινὸν σημεῖον μὲ αὐτάς, αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται μεταξύ των κατὰ τὸ σημεῖον αὐτὸ ἢ δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον.

Ἡ εὐθεῖα (2) καλεῖται ***κοινὴ χορδὴ*** ἢ ***ῥιζικὸς ἄξων τῶν περιφερειῶν*** (1). Οὗτος ἔχει τὴν ἰδιότητα ὅτι, ἕκαστον σημεῖον αὐτοῦ ἔχει τὴν αὐτὴν δύναμιν ὡς πρὸς τοὺς δύο κύκλους. Διότι τὸ α′ μέλος ἑκάστης τῶν (1) διὰ τὰς συντεταγμένας x, y τοῦ τυχόντος σημείου τοῦ ἐπιπέδου παριστάνει τὴν δύναμιν αὐτοῦ ὡς πρὸς ἕκαστον τῶν κύκλων. Ἑπομένως ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ἐχόντων ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς τοὺς κύκλους (1), παρίσταται ὑπὸ τῆς

$$x^2+y^2+A_1x+B_1y+\Gamma_1=x^2+y^2+A_2x+B_2y+\Gamma_2$$

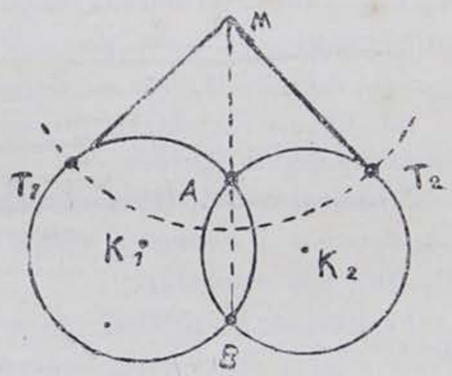
ἢ ὑπὸ τῆς (2), τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν (1).

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι, ὁ ριζικὸς ἄξων (2) τῶν περιφερειῶν (1) εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον αὐτῶν. Ἐπίσης ὅτι, ὅταν τὰ κέντρα τῶν περιφερειῶν τείνουν νὰ συμπέσουν ὁ ριζικὸς ἄξων αὐτῶν τείνει νὰ ἀπομακρυνθῇ εἰς τὸ ἄπειρον, ἐπειδὴ τότε $A_1 \to A_2$, $B_1 \to B_2$. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ριζικοῦ ἄξονος δύο περιφερειῶν, μὴ ἐχουσῶν κοινὸν σημεῖον, ἀρκεῖ νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο σημείων τῆς μιᾶς τῶν περιφερειῶν, ἔστω τῶν M_1, M_2, τέμνουσα τὴν ἄλλην, ἔστω εἰς τὰ P_1,P_2. Ἡ τομὴ Π_1 τῶν εὐθειῶν M_1M_2 καὶ P_1P_2 εἶνε σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν δύο περιφερειῶν. Ὁμοίως εὑρίσκομεν καὶ ἄλλο σημεῖον Π_2 τοῦ ριζικοῦ ἄξονος.

Ἐπειδὴ, ὅταν τὸ M κεῖται ἐκτὸς τῶν κύκλων ἔχομεν (σχ. 4).

$$(MT_1)^2=(MA)(MB)=(MT_2)^2,$$

ἕπεται ὅτι,



(Σχ. 4).

«ὁ τόπος τῶν σημείων ἀπὸ τῶν ὁποίων ἄγονται ἴσαι ἐφαπτόμεναι εἰς δύο περιφερείας κύκλων εἶνε ὁ ριζικὸς ἄξων αὐτῶν».

Λέγομεν ὅτι δύο περιφέρειαι ***τέμνονται καθέτως***, ἂν αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς κοινὸν σημεῖον αὐτῶν εἶνε κάθετοι. Κατὰ ταῦτα, ἂν αἱ (1) τέμνωνται καθέτως εἰς τὸ $M_1(x_1,y_1)$, ἐπειδὴ αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ἔχουν ἐξισώσεις γνωστὰς (§ 3, (5)) ἡ συνθήκη καθετότητος αὐτῶν θὰ εἶνε

$$(A_1+2x_1)(A_2+2x_1)+(B_1+2y_1)(B_2+2y_1)=0$$

ἢ

$$A_1A_2+B_1B_2-2(\Gamma_1+\Gamma_2)=0$$

ἐπειδὴ τὸ M_1 κεῖται καὶ ἐπὶ τῶν δύο περιφερειῶν.

Ἔστωσαν K_i ,$i=1,2,3$, τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἐξισώσεων τριῶν περιφερειῶν. Αὗται, ἀνὰ δύο λαμβανόμεναι, ὁρίζουν τρεῖς ριζικοὺς ἄξονας, τῶν ὁποίων αἱ ἐξισώσεις εἶνε

$$K_1-K_2=0,\ K_2-K_3=0,\ K_3-K_1=0.$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν δύο ἐκ τούτων προκύπτει ἡ τρίτη, ἕπεται ὅτι, «***οἱ τρεῖς ριζικοὶ ἄξονες τῶν τριῶν περιφερειῶν, λαμβανομένων ἀνὰ δύο, τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον***».

Ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ριζικῶν ἀξόνων τριῶν περιφερειῶν καλεῖται ***ριζικὸν κέντρον*** τῶν περιφερειῶν αὐτῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. *Ὁμὰς πρώτη*. 49. Ποῖος ὁ ριζικὸς ἄξων δύο περιφερειῶν, ἂν ἡ μία περιορισθῇ εἰς τὸ κέντρον αὐτῆς;

50. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς περιφερείας μὲ κέντρον (3, — 4) καὶ τεμνούσης τὴν $(x-5)^2+(y-6)^2=9$ ὀρθογωνίως.

51. Εὕρετε τὴν τομὴν τῶν δύο περιφερειῶν τοῦ προηγουμένου προβλήματος μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ ριζικοῦ ἄξονος.

52. Τίνα σχέσιν πρέπει νὰ πληροῦν τὰ $(\alpha_1, \beta_1, \varrho_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \varrho_2)$, ἵνα αἱ ἀντίστοιχοι περιφέρειαι ἐφάπτωνται;

53. Εὕρετε τὰς ἐξισώσεις, ἐκ τῶν ὁποίων προσδιορίζονται αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου καὶ ἡ ἀκτὶς περιφερείας, διερχομένης διὰ δύο σημείων $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ καὶ ἐφαπτομένης τῆς (α, β, ϱ).

54. Λύσατε τὸ προηγούμενον πρόβλημα διὰ κατασκευῆς περιφερείας, διερχομένης διὰ τῶν M_1, M_2 καὶ τεμνούσης τὴν δοθεῖσαν εἰς δύο σημεῖα.

55. Εὕρετε τὰς συντεταγμένας τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας $K_1-\lambda K_2=0$ καὶ διερευνήσατε τὸ ἐξαγόμενον.

Ὁμὰς δευτέρα. (Γεωμετρικῶν τόπων). 56. Εὕρετε τὸν τόπον τῶν σημείων διὰ τὰ ὁποῖα τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο ὡρισμένων σημείων εἶνε σταθερόν.

57. Δείξατε ὅτι ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα ἔχουν λόγον δοθέντα εἶνε περιφέρεια, ἥτις τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x εἰς δύο σημεῖα ἁρμονικὰ μετὰ τῶν δοθέντων.

58. Τριγώνου μεταβλητοῦ δίδεται ἡ σταθερὰ βάσις $(AB)=\gamma$ καὶ ἡ ἀπέναντι αὐτῆς γωνία Γ. Εὕρετε τὸν τόπον τῆς κορυφῆς Γ.

59. Τριγώνου μεταβλητοῦ γνωρίζομεν τὴν σταθερὰν βάσιν $(AB)=\gamma$ καὶ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς γωνίαν Γ. Εὕρετε τὸν τόπον τῶν τομῶν τῶν ὑψῶν αὐτοῦ.

60. Ἀπὸ σημείου $M_0\ (x_0, y_0)$ ἄγονται ἀκτῖνες M_0M, ὅπου M εἶνε σημεῖα τῆς περιφερείας $(0,0,\varrho)$. Ἐφ' ἑκάστης τούτων λαμβάνεται σημεῖον P, ὥστε νὰ εἶνε $(M_0P):(PM)=\lambda$. Εὕρετε τὸν τόπον τῶν P.

61. Τίνα σημεῖα τῶν ἀξόνων ἔχουν τὴν αὐτὴν δύναμιν πρὸς τοὺς κύκλους $x^2+y^2-6x+4y=25$, $x^2+y^2-15x-2y+2=0$;

62. Ἂν ἐκ σημείου M περιφερείας K_1 ἀχθῇ ἐφαπτόμενον τμῆμα εἰς ἄλλην K_2, τὸ τετράγωνον τοῦ μέτρου αὐτοῦ εἶνε ἀνάλογον τῆς ἀποστάσεως ϱ τοῦ σημείου ἀπὸ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν περιφερειῶν.

63. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ριζικὸν κέντρον τῶν περιφερειῶν $x^2+y^2-36=0$, $x^2+y^2-2x-5y-5=0$, $x^2+y^2+6x+11y-124=0$ καὶ τὸ μῆκος τῶν τμημάτων τῶν ἐφαπτομένων τούτων ἀπὸ τοῦ ριζικοῦ κέντρου.

64. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιφέρεια ἥτις τέμνει καθέτως τὴν $x^2+y^2-2x+5y-5=0$ καὶ διέχεται διὰ τοῦ σημείου (6,1) ἔχει δὲ κέντρον ἐπὶ τῆς $6x+4y=47$.

65. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ κέντρου περιφερείας τεμνούσης καθέτως δύο ἄλλας δοθείσας.

66. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ περιφέρειαι μὲ διαμέτρους τὰς διαγωνίους ἑνὸς πλήρους τετραπλεύρου ἔχουν τὸν αὐτὸν ριζικὸν ἄξονα. (Τὸ πλῆρες τετράπλευρον ἀποτελεῖται ἐκ τεσάρων εὐθειῶν (πλευρῶν) ἀνὰ τρεῖς τῶν ὁποίων δὲν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ἔχει δὲ ἓξ κορυφάς, ἀνὰ τρεῖς τῶν ὁποίων κεῖνται ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς· ἀπέναντι ἑκάστης κορυφῆς κεῖται μία ἄλλη, ὁριζομένη ἐκ δύο πλευρῶν μὴ διερχομένων διὰ τῆς πρώτης. Αἱ ἀπέναντι κορυφαὶ ὁρίζουν τρεῖς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται ***διαγώνιοι*** τοῦ πλήρους τετραπλεύρου).

67. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος σημείου Μ κινουμένου οὕτως ὥστε α') τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δι' αὐτοῦ ἐφαπτομένων τμημάτων MM_1, MM_2 τῶν περιφερειῶν K_1 καὶ K_2 νὰ ἰσοῦται μὲ α^2. β') ἡ διαφορὰ τῶν ἐν λόγῳ τετραγώνων νὰ εἶνε σταθερά· γ') $\lambda_1(MM_1)^2+\lambda_2(MM_2)^2=\alpha^2$.

§ 7. Δέσμαι περιφερειῶν.

Ἔστωσαν δύο περιφέρειαι μὴ ὁμόκεντροι $K_1=0$, $K_2=0$ (1) καὶ μ_1, μ_2 δύο παράμετροι, ὅπου εἶνε $\mu_1^2+\mu_2^2\neq 0$. Σχηματίζομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\mu_1 K_1+\mu_2 K_2=0 \qquad (2)$$

ἥτις παριστάνει ἐν γένει περιφέρειαν κύκλου διὰ πραγματικὴν τιμὴν τοῦ $\mu_1:\mu_2$. Διὰ $\mu_1+\mu_2=0$ ἢ $\mu_1:\mu_2=-1$ ἔχομεν τὸν ριζικὸν ἄξονα τῶν (1), ἐνῷ διὰ $\mu_1=0$ ἢ $\mu_2=0$ τὴν $K_2=0$ ἢ τὴν $K_1=0$.

Αἱ περιφέρειαι (2) διὰ πραγματικὰς τιμὰς τοῦ $\mu_1:\mu_2$ λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν ***δέσμην περιφερειῶν***, διερχομένων διὰ τῶν κοινῶν σημείων τῶν (1) τὰ ὁποῖα καλοῦμεν ***θεμελιώδη σημεῖα*** τῆς δέσμης.

Παρατηρητέον ὅτι ὁ ριζικὸς ἄξων δύο περιφερειῶν τῆς δέσμης (2) εἶνε ὁ αὐτὸς μὲ τὸν τῶν (1). Πράγματι, ὁ ριζικὸς ἄξων π.χ. τῶν $\mu'_1K_1+\mu'_2K_2=0, \mu''_1K_1+\mu''_2K_2=0$, $(\mu'_1:\mu'_2\neq\mu''_1:\mu''_2)$ εἶνε ἡ εὐθεῖα

$$(\mu'_1K_1+\mu'_2K_2)(\mu''_1+\mu''_2)-(\mu''_1K_1+\mu''_2K_2)(\mu'_1+\mu'_2)=0$$

ἢ $$(\mu'_1\mu''_2-\mu'_2\mu''_1)(K_1-K_2)=0,$$ ἤτοι ἡ εὐθεῖα $K_1-K_2=0$.

Ἂν λάβωμεν ὡς ἄξονα τῶν x τὴν διάκεντρον τῶν (1) καὶ τὸν ριζικὸν ἄξονα αὐτῶν ὡς ἄξονα τῶν y, αἱ (1) λαμβάνουν τὴν μορφὴν

$$K_1=(x-\alpha_1)^2+y^2-\varrho_1^2=0$$
$$K_2=(x-\alpha_2)^2+y^2-\varrho_2^2=0$$

ἂν α_1,α_2 εἶνε αἱ τετμημέναι τῶν κέντρων καὶ ϱ_1,ϱ_2 αἱ ἀκτῖνες τῶν περιφερειῶν, ὅπου $\alpha_1\neq\alpha_2$.

Ἐπειδὴ ὁ ριζικὸς ἄξων τούτων

$$2(\alpha_1-\alpha_2)x+\alpha_2^2-\alpha_1^2+\varrho_1^2-\varrho_2^2=0$$

εἶνε ὁ ἄξων τῶν y, ἔχομεν $\alpha_2^2-\alpha_1^2=\varrho_2^2-\varrho_1^2$.

Οὕτω ἡ ἐξίσωσις (2) τῆς δέσμης λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$x^2+y^2+2\mu x+\gamma=0 \quad \text{ἢ} \quad (x+\mu)^2+y^2=\mu^2-\gamma \qquad (3)$$

$$\mu=-\frac{\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2}{\mu_1+\mu_2},\ \gamma=\alpha^2_1-\varrho^2_1,\ \mu_1:\mu_2=-(\alpha_2+\mu):(\alpha_1+\mu),$$

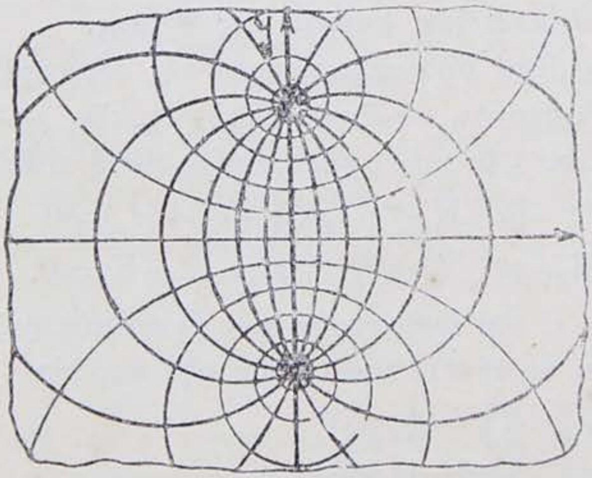
καλεῖται δὲ τὸ μ ***παράμετρος*** τῆς δέσμης (3).

Διὰ $\mu=-\alpha_1, -\alpha_2$ ἔχομεν τὰς $K_1=0$ καὶ $K_2=0$. Δι' ἑκάστην πραγματικὴν τιμὴν τοῦ $\mu_1:\mu_2\neq-1$ ἀντιστοιχεῖ μία ὡρισμένη πεπερασμένη τιμὴ τοῦ μ, καὶ ἀντιστρόφως. Διὰ τὰς τιμὰς ταύτας τοῦ μ ἔχομεν τὸ σύνολον τῶν περιφερειῶν (3) (περιλαμβανομένου καὶ τοῦ ἄξονος τῶν y, ῥιζικοῦ ἄξονος αὐτῶν).

Ἐὰν εἶνε $\gamma<0$, ἡ δέσμη (3) ἀποτελεῖται ἀπὸ περιφερείας, τεμνούσας τὸν ἄξονα τῶν y εἰς τὰ σημεῖα $(0,\pm\sqrt{-\gamma})$ (σχ.5). Ἑκάστη αὐτῶν ἔχει μὲ τὴν $K_1=0$ καὶ $K_2=0$ τὸν ἄξονα τῶν y ὡς ῥιζικὸν ἄξονα, ἑπομένως δι' ἑκάστου σημείου τούτου κειμένου ἐκτὸς τῶν κύκλων (3), ἤτοι διὰ σημείου $(0,\mu')$ ὅπου $|\mu'|>+\sqrt{-\gamma}$, ἄγονται ἐφαπτόμενα τμήματα ἴσου μήκους διὰ πάσας τὰς περιφερείας, εἶνε δὲ τὸ μῆκος τοῦτο ἴσον μὲ $\sqrt{\mu'^2+\gamma}$. Ἄρα τὰ σημεῖα $(0,\mu')$ εἶνε κέντρα περιφερειῶν μὲ ἐξίσωσιν

$$x^2+(y-\mu')^2=\mu'^2+\gamma \quad \text{ἢ} \quad x^2+y^2-2\mu' y-\gamma=0 \qquad (4)$$

καὶ τεμνουσῶν καθέτως τὰς (3) (σχ. 5).



(Σχ. 5)

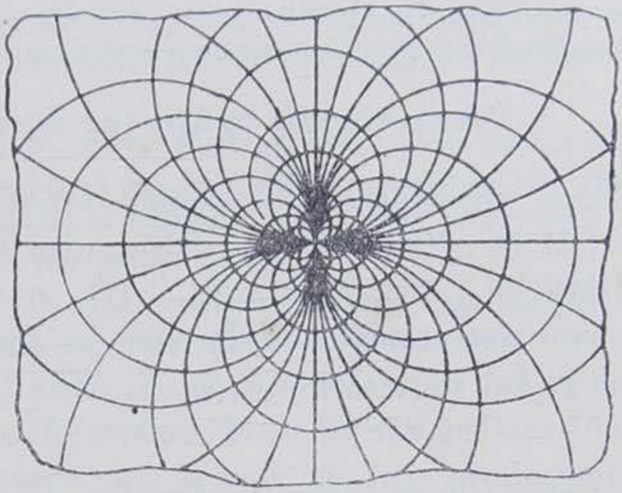
Ἐὰν στρέψωμεν τὸ σύστημα τῶν ἀξόνων περὶ τὸ O κατὰ 270° ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν, καλέσωμεν δὲ $x'Oy'$ τὸ νέον σύστημα, θὰ θέσωμεν ἀνωτέρω $x=y'$ καὶ $y=-x'$. Ἂν γράψωμεν καὶ γ' ἀντὶ $-\gamma$ ἡ (4) γίνεται

$$x'^2+y'^2+2\mu' x'+\gamma'=0, \qquad (\gamma'>0) \quad (5)$$

ἥτις εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς μορφῆς (3) διὰ τὴν περίπτωσιν $\gamma>0$. Ἑπομένως εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ δέσμη ἀποτελεῖται ἀπὸ πάσας τὰς περιφερείας τὰς τεμνούσας καθέτως τὰς τῆς προηγουμένης δέσμης (σχ. 5).

Δύο τοιαύτας δέσμας περιφερειῶν, τεμνομένας καθέτως, καλοῦμεν ***συζυγεῖς***.

Ἐὰν εἶνε $\gamma = 0$, ἡ δέσμη (3) ἀποτελεῖται ἀπὸ πάσας τὰς περιφερείας, αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται τοῦ ἄξονος τῶν y εἰς τὸ O, ἀπὸ τυχὸν δὲ σημεῖον τούτου, π.χ. ἀπὸ τὸ $(0, \mu')$ ἄγονται ἐφαπτόμενα τμήματα μήκους $|\mu'|$ διὰ πάσας ταύτας. Ἡ περιφέρεια μὲ κέντρον $(0, \mu')$ ἔχει ἐξίσωσιν $x^2+y^2-2\mu' y=0$, τὸ σύνολον δ' αὐτῶν ἀποτελεῖ τὴν συζυγῆ δέσμην τῶν περιφερειῶν, ἡ ὁποία συμπίπτει μὲ τὴν πρώτην δέσμην καὶ προκύπτει ἐξ ἐκείνης διὰ στροφῆς τοῦ ἐπιπέδου των κατὰ γωνίαν 90^0 (Σχ. 6).



(Σχ. 6).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 68. Δίδονται δύο περιφέρειαι K_i $(\alpha_i, \beta_i, \varrho_i)$, $i=1,2$. Νὰ εὑρεθοῦν τίνες συνθῆκαι θὰ πληροῦνται, ἂν ἐφάπτωνται α') ἐξωτερικῶς· β') ἐσωτερικῶς· γ') ὁ κύκλος K_2 κεῖται ἔξω τοῦ K_1· δ') ὁ K_2 κεῖται ἐντὸς τοῦ K_1 χωρὶς νὰ ἔχουν κοινὸν σημεῖον. Τίνας δέσμας ὁρίζουν εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτάς;

69. Πότε αἱ περιφέρειαι x^2+2xy συνϑ$+2A_i x+2B_i y+\Gamma_i=0$, $i=1,2$ εἶνε ὁμόκεντροι;

70. Τίνες περιφέρειαι τῆς ὑπὸ τῶν $K_1: x^2+y^2-6x+4y-12=0$, $K_2: x^2+y^2-10x-16y+40=0$ ὁριζομένης δέσμης $\dfrac{K_1+\lambda K_2}{1+\lambda}=0$ διέρχονται α') διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων· β') διὰ τοῦ σημείου $(5,-2)$.γ') ποία ἐκ τῶν περιφερειῶν τῆς δέσμης ἔχει τὸ κέντρον της ἐπὶ τῆς εὐθείας: $8x-3y-2=0$;

71. Τίνες περιφέρειαι τῆς δέσμης τῶν $K_1: x^2+y^2+24x-14=0$, $K_2: x^2+y^2-24=0$ ἔχουν ἀκτῖνα 5;

72. Νὰ εὑρεθῇ τὸ A ὥστε ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς αὐτὸ περιφέρεια τῆς δέσμης $x^2+y^2-2Ax+\Gamma=0$, νὰ τέμνῃ καθέτως τὴν $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\varrho^2$.

73. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ περιφέρειαι $x^2+y^2-400=0$, $x^2+y^2-10x-24y+120=0$ ἐφάπτονται καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις ἄλλης περιφερείας, ἐφαπτομένης τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ τῶν δύο δοθεισῶν εἰς τὴν ἀφήν των.

74. Δίδονται αἱ ἐξισώσεις $K_1=0$, $K_2=0$ περιφερειῶν ἐφαπτομένων εἰς τὸ M. Νὰ εὑρεθῇ α') ἡ ἐξίσωσις περιφερειῶν ἐφαπτομένων τῆς $K_1=0$ εἰς τὸ M. β') αἱ ἐξισώσεις τῶν περιφερειῶν τῶν ἐφαπτομένων τῶν δοθεισῶν. Περίπτωσις καθ' ἣν ἀντὶ τῶν περιφερειῶν ἔχομεν τὰ κέντρα των.

75. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων περιφερειῶν, αἵτινες ἀπὸ δύο στα-

θερῶν σημείων Λ, Ρ φαίνονται ὑπὸ γωνίας δοθείσας $2\varphi_1$ καὶ $2\varphi_2$. Μερικαὶ περιπτώσεις: $\varphi_1=\varphi_2=\frac{\pi}{2}$ · $\varphi_1=\frac{\pi}{3}$, $\varphi_2=\frac{\pi}{2}$.

76. Διὰ τῆς μιᾶς τῶν τομῶν δύο περιφερειῶν ἄγονται πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι αἱ τέμνουσαι αὐτάς. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν διχοτομούντων τὰ τμήματα τῶν εὐθειῶν, τὰ μεταξὺ τῶν περιφερειῶν περιεχόμενα.

§ 8. Ἀπεικόνισις σχήματος ὡς πρὸς περιφέρειαν.

Ἔστω περιφέρεια Κ μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα α. Δύο σημεῖα $M(x,y)$ καὶ $M'(x',y')$ κείμενα ἐπ' εὐθείας μετὰ τοῦ Ο καὶ τοιαῦτα ὥστε νὰ εἶνε $(OM)(OM')=\alpha^2$ ἢ $\varrho.\varrho'=\alpha^2$, (1), ὅπου $(OM)=\varrho$, $(OM')=\varrho'$, λέγονται ***ἀντίστροφα μεταξύ των*** ὡς πρὸς τὴν Κ ἢ ὅτι ἀπεικονίζεται τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου διὰ τῆς Κ. Ἐὰν τὸ Μ γράφῃ γραμμὴν (k) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς Κ, τὸ Μ′ γράφει ἄλλην (k′), ἥτις καλεῖται ἀντίστροφος τῆς (k) ὡς πρὸς Κ καὶ προκύπτει ἡ μία ἐκ τῆς ἄλλης δι' ***ἀντιστροφῆς*** ὡς πρὸς τὴν Κ. Τὸ Ο λέγεται ***κέντρον ἀντιστροφῆς***.

Ἔστω ὅτι τὸ Μ γράφει τὴν περιφέρειαν ἢ τὴν εὐθεῖαν

$$\lambda(x^2+y^2)+Ax+By+\Gamma=0, \text{ ἂν } \lambda\neq0 \text{ ἢ } \lambda=0.$$

Ἡ ἐξίσωσις ταύτης εἰς πολικὰς συντεταγμένας εἶνε

$$\lambda\varrho^2+\varrho(A\sigma\upsilon\nu\vartheta+B\eta\mu\vartheta)+\Gamma=0.$$

Ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη αὐτῆς ἐπὶ ϱ'^2, ἔχομεν, ἕνεκα τῆς (1)

$$\Gamma\varrho'^2+\alpha^2\varrho'(A\sigma\upsilon\nu\vartheta+B\eta\mu\vartheta)+\lambda\alpha^4=0$$

ἢ

$$\Gamma(x'^2+y'^2)+A\alpha^2x'+B\alpha^2y'+\lambda\alpha^4=0$$

ἥτις παριστάνει περιφέρειαν ἢ εὐθεῖαν, ἂν $\Gamma\neq0$ ἢ $\Gamma=0$. Ἐπομένως, ***«περιφέρεια μὴ διερχομένη διὰ τοῦ Ο (ὅτε $\Gamma\neq0$) ἀπεικονίζεται διὰ τῆς Κ εἰς περιφέρειαν μὴ διερχομένην δι' αὐτοῦ· περιφέρεια διερχομένη διὰ τοῦ Ο τρέπεται διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ (1) εἰς εὐθεῖαν μὴ διερχομένην διὰ τοῦ Ο, ἐνῷ εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Ο μετασχηματίζεται εἰς ἑαυτήν».***

Οὕτω π. χ. ἡ εὐθεῖα $x=\mu$, κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν x τρέπεται εἰς τὴν περιφέρειαν $\varrho'=\frac{\alpha^2}{\mu}\sigma\upsilon\nu\vartheta$, ἔχουσαν κέντρον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ διερχομένην διὰ τοῦ Ο, καθ' ὃ ἐφάπτεται τοῦ ἄξονος τῶν y.

Συνήθως καλοῦμεν τὴν Κ καὶ ***περιφέρειαν τῆς ἀντιστροφῆς***.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 77. Δύο περιφέρειαι τέμνονται (ἤτοι αἱ ἐφαπτόμεναί των) εἰς ἕκαστον κοινὸν σημεῖον των κατὰ τὴν αὐτὴν γωνίαν καθὼς καὶ αἱ ἀντίστροφοι αὐτῶν γραμμαὶ εἰς τὴν τομήν των.

78. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τόποι τῆς ἀντιστροφῆς δι' ὀρθογωνίους συντεταγμένας μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων.

79. Ἡ πολικὴ τυχόντος σημείου ὡς πρὸς τὴν περιφέρειαν ἀντιστροφῆς διέρχεται διὰ τῆς εἰκόνος αὐτοῦ ἐκ τῆς ἀντιστροφῆς.

80. Ἡ εὐθεῖα, ἥτις εἶνε εἰκὼν περιφερείας διερχομένης διὰ τοῦ κέντρου ἀντιστροφῆς, εἶνε ὁ ριζικὸς ἄξων τῆς περιφερείας ἀντιστροφῆς καὶ τῆς δοθείσης περιφερείας.

81. Ρόμβος ΑΒΓΔ μὲ πλευρὰν μήκους α καὶ μεταβλητὰς γωνίας δύναται νὰ κινηθῇ, ὥστε αἱ κορυφαὶ αὐτοῦ Β καὶ Δ νὰ ὀλισθαίνουν ἐπὶ περιφερείας μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα $\beta(>\alpha)$. Ἐὰν ἡ κορυφὴ Α διατρέχῃ περιφέρειαν μὲ ἀκτῖνα ρ καὶ κέντρον τὸ Μ, νὰ εὑρεθῇ ἡ τροχιὰ τῆς κορυφῆς Γ.

82. Περιφέρειαι διερχόμεναι διὰ δύο σταθερῶν σημείων ἀπεικονίζονται δι' ἀντιστροφῆς εἰς περιφερείας διερχομένας διὰ δύο σταθερῶν σημείων.

83. Δύο συζυγεῖς δέσμαι περιφερειῶν μετασχηματίζονται εἰς ἑαυτάς, ἐὰν ἡ ἀπεικόνισις γίνεται ὡς πρὸς μίαν περιφέρειαν μιᾶς τῶν δεσμῶν.

§ 9. Ἐξίσωσις περιφερείας εἰς πολικὰς συντεταγμένας.

Ἂν (ρ_0, ϑ_0) εἶνε αἱ πολικαὶ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου Κ περιφερείας ἀκτῖνος α καὶ (ρ, ϑ) τυχόντος σημείου Μ αὐτῆς, ἐκ τοῦ τριγώνου ΟΚΜ (Ο ὁ πόλος) ἔχομεν

$$\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho_0\rho\,\text{συν}(\vartheta - \vartheta_0) = \alpha^2 \qquad (1)$$

ἥτις ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων τυχόντος σημείου τῆς περιφερείας καὶ μόνον ὑπ' αὐτῶν, ἄρα εἶνε ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς.

Ἂν ὁ πόλος κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, θὰ εἶνε $\rho_0 = \alpha$ καὶ ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\rho = 2\alpha\,\text{συν}(\vartheta - \vartheta_0)$.

Ἂν κέντρον εἶνε ὁ πόλος, ἔχομεν $\rho_0 = 0$ καὶ $\rho = \alpha$, ἐνῷ ἂν ὁ πόλος κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας καὶ ὁ πολικὸς ἄξων διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου, ἔχομεν $\rho = 2\alpha\,\text{συν}\vartheta$.

Τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (1) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν διὰ μετασχηματισμοῦ τῆς $(x-\alpha_0)^2 + (y-\beta_0)^2 = \alpha^2$ εἰς πολικὰς συντεταγμένας, ἤτοι ἂν θέσωμεν $x = \rho\,\text{συν}\vartheta$, $y = \rho\,\text{ημ}\vartheta$, $\alpha_0 = \rho_0\,\text{συν}\vartheta_0$, $\beta_0 = \rho_0\,\text{ημ}\vartheta_0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 84. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης περιφερείας μὲ ἀκτῖνα α καὶ κέντρον (ρ_0, ϑ_0) εἰς τὸ σημεῖον (ρ_1, ϑ_1).

85. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πολικὴ εὐθεῖα τοῦ (ρ_1, ϑ_1) ὡς πρὸς περιφέρειαν μὲ ἀκτῖνα α καὶ κέντρον (ρ_0, ϑ_0).

86. Νὰ δειχθῇ ὅτι πᾶσα ἐξίσωσις $\rho^2 + 2(\text{Α}\,\text{συν}\vartheta + \text{Β}\,\text{ημ}\vartheta)\rho + \Gamma = 0$ εἰς πολικὰς συντεταγμένας παριστάνει περιφέρειαν κύκλου.

§ 10. Ἐξίσωσις σφαίρας.

Ἵνα εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας σφαίρας μὲ κέντρον K (α,β,γ) εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους καὶ ἀκτῖνα ϱ, παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν (x,y,z) εἶνε αἱ συντεταγμέναι τυχόντος σημείου M τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς, τὸ μῆκος τοῦ διανύσματος KM $(x-\alpha,\ y-\beta,\ z-\gamma)$ ἰσοῦται μὲ ϱ. Κατὰ ταῦτα ἡ ἐξίσωσις τῆς σφαίρας ταύτης, τὴν ὁποίαν συμβολικῶς θὰ παριστάνωμεν διὰ K $(\alpha, \beta, \gamma, \varrho)$, εἶνε

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\varrho^2 \qquad (1)$$

Γενικώτερον δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=k \qquad (2)$$

παριστάνει πάντοτε σφαῖραν, ἔχουσαν κέντρον τὸ σημεῖον (α, β, γ) καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ $\sqrt{k}$. Ἡ σφαῖρα αὕτη εἶνε πραγματικὴ ἢ ἀνάγεται εἰς τὸ κέντρον αὐτῆς ἢ εἶνε φανταστική, ἂν εἶνε

$$k>0, \text{ ἢ } k=0, \text{ ἢ } k<0.$$

Ἐὰν ἀναπτύξωμεν τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (2) λαμβάνομεν

$$x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-k=0 \qquad (3)$$

Ἑπομένως, «***ἡ ἐξίσωσις τῆς σφαίρας ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους εἶνε β΄ βαθμοῦ ὡς πρὸς*** x, y, z, ***περιέχουσα ἐκ τῶν δευτεροβαθμίων ὅρων μόνα τὰ τετράγωνα τῶν*** x, y ***καὶ*** z ***μὲ συντελεστὰς ἴσους***».

Ἐκλέγοντες καταλλήλως τὸ κέντρον τῆς σφαίρας λαμβάνομεν μερικὰς περιπτώσεις τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς. Οὕτω π.χ., ἂν κέντρον τῆς σφαίρας εἶνε ἡ ἀρχὴ (0,0,0) ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς θὰ εἶνε

$$\boxed{x^2+y^2+z^2=\varrho^2} \qquad (4)$$

«***Πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς***

$$\boxed{x^2+y^2+z^2+Ax+By+\Gamma z+\Delta=0} \qquad (5)$$

παριστάνει ἐν γένει σφαῖραν».

Τῷ ὄντι, ἡ ἐξίσωσις αὕτη τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{\Gamma}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2+\Gamma^2}{4}-\Delta \qquad (5')$$

καὶ παριστάνει σφαῖραν μὲ κέντρον $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{\Gamma}{2}\right)$ καὶ εἶνε πραγματικὴ ἢ ἓν σημεῖον ἢ φανταστική, ἂν τὸ $A^2+B^2+\Gamma^2-4\Delta$ εἶνε θετικὸν ἢ 0 ἢ ἀρνητικόν.

Ἡ γενικὴ ἐξίσωσις τοῦ β' βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰς τρεῖς συντεταγμένας x, y, z εἶνε

$$Ax^2+By^2+\Gamma z^2+\Delta xy+Exz+Zyz+Hx+\Theta y+Iz+K=0$$

καὶ ἔχει δέκα ὅρους, ἵνα δὲ παριστάνῃ ἐν γένει σφαῖραν (εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους) πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε $A=B=\Gamma$ καὶ $\Delta=E=Z=0$.

Ἡ ἐξίσωσις σφαίρας, διερχομένης διὰ τεσσάρων δοθέντων σημείων M_i $(x_i, y_i, z_i,)$ $i = 1, 2, 3, 4$, μὴ κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου εἶνε, ὡς εὐκόλως δεικνύεται,

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 87. Εὕρετε ἂν τὰ σημεῖα (1,2,—3), (0,0,0), (5,—1,7), (0,1,0) κεῖνται ἐντὸς ἢ ἐπὶ ἢ ἐκτὸς τῆς σφαίρας (5,—1,—3,10).

88. Ποῦ τέμνει ὁ ἄξων τῶν z τὴν σφαῖραν $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\varrho^2$ καὶ πόσον εἶνε τὸ γινόμενον τῶν μηκῶν δύο διανυσμάτων ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν z, μὲ ἄκρα εἰς τὸ O καὶ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας;

89. Εὕρετε τὰς τομὰς τῆς $x^2+y^2+z^2+Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$ μετὰ τῶν ἀξόνων καὶ δείξατε ὅτι τὸ γινόμενον τῶν δύο τιμῶν τῶν x,y,z εἶνε τὸ αὐτό.

90. Ἔστωσαν τὰ ζεύγη λ_1,λ_2· μ_1,μ_2· ν_1,ν_2 ἐξ ἀριθμῶν, οἵτινες πληροῦν τὰς σχέσεις $\lambda_1\lambda_2=\mu_1\mu_2=\nu_1\nu_2$. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς σφαίρας, ἥτις τέμνεται ὑπὸ τῶν ἀξόνων εἰς τὰ σημεῖα (λ_1, λ_2), (μ_1, μ_2), (ν_1, ν_2) καὶ τὴν γεωμετρικὴν σημασίαν τῶν συντελεστῶν τῆς ἐξισώσεως

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+\Gamma z+\Delta=0.$$

91. Εὕρετε τὸ κέντρον καὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας $3(x^2+y^2+z^2)-$ $-7x+2y+11z=1$.

92. Δείξατε ὅτι ἡ σφαῖρα (0,0,0,ϱ) εἶνε συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν καὶ τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων.

93. Λύσατε τὴν ἐξίσωσιν $x^2+y^2+z^2=\varrho^2$ ὡς πρὸς x ἢ y ἢ z καὶ διερευνήσατε τὰ ἀντίστοιχα ἐξαγόμενα, ὡς πρὸς τὴν πραγματικότητα τῶν συντεταγμένων πρὸς τὰς ὁποίας γίνεται ἡ λύσις.

94. Δείξατε ὅτι πᾶσαι αἱ ἐξισώσεις $A_0(x^2+y^2+z^2)+Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$, αἵτινες διαφέρουν κατὰ τὴν σταθερὰν Δ, παριστάνουν ὁμοκέντρους σφαίρας.

95. Ὑπὸ τῶν σημείων (0,0,0), (5,—1,3), (2,7,—4), (0,3,0) ὁρίζεται τετράεδρον. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς περιγεγραμμένης εἰς αὐτὸ σφαίρας, τὴν ἀκτῖνα καὶ τὸ κέντρον αὐτῆς.

96. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς σφαίρας (0,0,0,k) εἰς πολικὰς συντεταγμένας.

§ 11. Θέσεις ἐπιπέδου ὡς πρὸς σφαῖραν.

Ἂν δοθῇ ἡ σφαῖρα Κ(α,β,γ,ϱ) καὶ ἐπίπεδον

$$A\,x + B\,y + \Gamma\,z + \Delta = 0 \qquad (1)$$

ζητῆται δ᾽ ἡ θέσις τούτων μεταξύ των, παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου (α, β, γ) ἀπὸ τοῦ (1) εἶνε ἴση μὲ

$$\frac{A\,\alpha + B\,\beta + \Gamma\,\gamma + \Delta}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}$$

ἕπεται ὅτι, «***ἵνα τὸ ἐπίπεδον (1) κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας ἢ ἐφάπτεται ἢ τέμνῃ αὐτήν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ παράστασις***

$$(A\,\alpha + B\,\beta + \Gamma\,\gamma + \Delta)^2 - \varrho^2\,(A^2 + B^2 + \Gamma^2)$$

νὰ εἶνε θετικὴ ἢ 0 ἢ ἀρνητική».

Ἂν τὸ ἐπίπεδον (1) τέμνῃ τὴν σφαῖραν, ἡ τομὴ εἶνε περιφέρεια κύκλου καὶ ἔχει ἐξισώσεις

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-\varrho^2=0,\ Ax+By+\Gamma z+\Delta=0 \qquad (2)$$

ἂν δ᾽ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ (1) εἶνε ἴση μὲ 0, ἡ τομὴ θὰ εἶνε περιφέρεια μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας.

Ἂν ζητῆται νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς ἄλλο δοθὲν $Ax+By+\Gamma z=0$ καὶ ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας, τὸ ζητούμενον θὰ ἔχῃ ἐξίσωσιν $A\,x + B\,y + \Gamma\,z + \Delta = 0$. Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο θὰ ἐφάπτεται αὐτῆς θὰ εἶνε

$$A\,\alpha + B\,\beta + \Gamma\,\gamma + \Delta = \pm\varrho\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}$$

καὶ δι᾽ ἀπαλοιφῆς τοῦ Δ μεταξὺ ταύτης καὶ τῆς προηγουμένης εὑρίσκομεν, $A(x-\alpha) + B(y-\beta)+\Gamma(z-\gamma)=\pm\varrho\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}$ ἤτοι ἔχομεν ἐν γένει δύο τοιαῦτα ἐπίπεδα ἐφαπτόμενα τῆς σφαίρας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 97. Τίνα θέσιν ἔχει τὸ ἐπίπεδον $3x-7y+z=4$ ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν $2(x^2+y^2+z^2)-11x+5y+4z=3$;

98. Εὕρετε τὴν τομὴν τῆς σφαίρας (0,0,0,ϱ) μὲ τὸ $Ax+By+\Gamma=0$ καὶ τὰς προβολὰς τῆς τομῆς ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων xz καὶ yz.

99. Αἱ ἐξισώσεις τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας (α,β,γ,ϱ) ἀγομένης καθέτου εὐθείας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$ εἶνε $\frac{x-\alpha}{A}=\frac{y-\beta}{B}=\frac{z-\gamma}{\Gamma}$ ἢ $x=\alpha+\lambda A$, $x=\beta+\lambda B$, $z=\gamma+\lambda\Gamma$. Εὕρετε τὰς συντεταγμένας τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας τομῆς καὶ τὰς συντεταγμένας τῶν σημείων καθ᾽ ἃ ἡ κάθετος τέμνει τὴν σφαῖραν.

100. Ἂν Σ παριστάνῃ τὸ α᾽ μέλος τῆς ἐξισώσεως τῆς σφαίρας (α,β,γ,ϱ) καὶ Ε τοῦ $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$ (τοῦ β᾽ ὄντος 0), δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\Sigma+\lambda E=0$ παριστάνει σφαῖραν, διερχομένην διὰ τῆς περιφερείας $\Sigma=0, E=0$, τῆς ὁποίας τέ-

κέντρον κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ $E=0$, ἐὰν τὸ λ μεταβάλλεται ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $+\infty$.

101. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς δέσμης τῶν σφαιρῶν, αἵτινες διέρχονται διὰ τοῦ κύκλου $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\varrho^2, y=0$ καὶ διὰ τίνα τιμὴν τοῦ λ ἐφάπτονται τοῦ ἐπιπέδου yz ἢ τοῦ xz.

102. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς σφαίρας, ἥτις διέρχεται διὰ $(0,0,0)$ καὶ τοῦ κύκλου $4x-5y+z=1$, $3(x^2+y^2+z^2)-x+4y-7z=11$.

103. Εἰς τίνα θέσιν εὑρίσκεται τὸ ἐπίπεδον $Ax+By+\Gamma=0$ ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν $x^2+y^2+z^2+Ax+By+\Gamma z=0$; Ποῖα τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῶν ;

104. Δείξατε ὅτι δι' ἑκάστης εὐθείας τοῦ χώρου διέρχονται δύο ἐπίπεδα, ἐφαπτόμενα μιᾶς σφαίρας. Ἐκφράσατε ὅτι τὸ ἐπίπεδον $E_1+\lambda E_2=0$ τῆς ἀξονικῆς δέσμης $E_1=0$, $E_2=0$ ἐφάπτεται τῆς σφαίρας $(0,0,0,\varrho)$.

105. Εὕρετε τὰς ἐξισώσεις τῶν δύο ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα διέρχονται διὰ τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ ἐφάπτονται τῆς σφαίρας $(x-2)^2+(y-5)^2+(z-8)^2=1$.

106. Ἔστω ὅτι τὸ $M_1(x_1,y_1,z_1)$ κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας $(0,0,0,\varrho)$. Εὕρετε τὴν συνθήκην, ἵνα ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ M_1 ἐφάπτεται τῆς σφαίρας.

§ 12. Θέσεις εὐθείας ὡς πρὸς σφαῖραν.

Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις εὐθείας M_1M_2

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y_1-y_2}=\frac{z-z_1}{z_1-z_2} \tag{1}$$

καὶ ἡ σφαῖρα $(0,0,0,\varrho)$ $\qquad x^2+y^2+z^2=\varrho^2 \qquad (2)$

Ἂν $M(x, y, z)$ εἶνε τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας καὶ θέσωμεν $(M_1M):(MM_2)=\lambda$, θὰ εἶνε ὡς γνωστόν,

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \tag{3}$$

Ἂν τὸ M κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας, θὰ ἔχωμεν

$$\lambda^2(x_2^2+y_2^2+z_2^2-\varrho^2)+2\lambda(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2-\varrho^2)+$$
$$+(x_1^2+y_1^2+z_1^2-\varrho^2)=0 \tag{4}$$

Ἐκ τῆς λύσεως ταύτης ὡς πρὸς λ εὑρίσκομεν ἢ δύο τιμὰς πραγματικὰς λ_1, λ_2 (ἐνῶ $\lambda_1 \neq \lambda_2$) ἢ δύο ἴσας ἢ δύο φανταστικάς, εἰς ταύτας δ' ἀντιστοιχοῦν αἱ συντεταγμέναι τῶν δύο τὸ πολὺ κοινῶν σημείων τῆς (1) καὶ τῆς (2). Διὰ τοῦτο καλεῖται ἡ σφαῖρα καὶ ἐπιφάνεια ***β' βαθμοῦ***. Αἱ τρεῖς περιπτώσεις διὰ τὰς τιμὰς τοῦ λ ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς ποσότητος

$$D=(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2-\varrho^2)^2-$$
$$-(x_1^2+y_1^2+z_1^2-\varrho^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2-\varrho^2) \tag{5}$$

ἥτις γράφεται $\qquad D=\varrho^2(M_1M_2)^2-4\boldsymbol{E}^2 \qquad (6)$

ὅπου $$4E^2 = (y_1z_2 - y_2z_1)^2 + (z_1x_2 - z_2x_1)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \qquad (6')$$
ἤτοι τὸ E εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου OM_1M_2.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ r^2 τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων ἀπὸ τῆς εὐθείας (1), θὰ ἔχωμεν

$$4E^2 = (M_1M_2)^2\, r^2$$

Ἑπομένως τὸ D εἶνε θετικόν ἢ 0 ἢ ἀρνητικόν, ἂν $\varrho > r$ ἢ $\varrho = r$ ἢ $\varrho < r$. Ὅταν τὰ M_1, M_2 τείνουν νὰ συμπέσουν, θὰ ἔχωμεν $D \to 0$ καὶ $\lambda_2 \to \lambda_1$, λέγεται δ' ἡ εὐθεῖα ***ἐφαπτομένη τῆς σφαίρας.***

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι, «***ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα ἡ εὐθεῖα (1) ἐφάπτεται τῆς σφαίρας (2) εἶνε ἡ***

$$(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - \varrho^2)^2 =$$
$$= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \varrho^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - \varrho^2) \qquad (7)$$

Ἔστω M_1 σημεῖον ἐκτὸς τῆς σφαίρας (2), $M(x,y,z)$ τυχὸν σημεῖον εὐθείας διερχομένης δι' αὐτοῦ καὶ ἐφαπτομένης τῆς (2). Αἱ συντεταγμέναι τοῦ M ὑπόκεινται εἰς τὴν συνθήκην

$$\boxed{(x_1x + y_1y + z_1z - \varrho^2)^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \varrho^2)(x^2 + y^2 + z^2 - \varrho^2)} \qquad (8)$$

ἥτις ἐπαληθεύεται, ὅταν τὸ M κεῖται ἐπὶ εὐθείας ἐφαπτομένης τῆς (2), ἀγομένης διὰ τοῦ M_1.

Ἐπειδὴ πᾶσα ἐπιφάνεια παραγομένη ὑπὸ κινητῆς εὐθείας διερχομένης διὰ σταθεροῦ σημείου καλεῖται ***κωνικὴ ἐπιφάνεια ἢ κῶνος,*** καλοῦμεν τὴν ἐπιφάνειαν, τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦν πᾶσαι αἱ διὰ τοῦ M_1 ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι τῆς (2), ***κῶνον τῶν ἐφαπτομένων τῆς σφαίρας***, ἔχοντα κορυφὴν τὸ M_1. Οὕτω ***ἡ (8) εἶνε ἡ ἐξίσωσις τοῦ κώνου τούτου.***

Ἐκ τῆς (8) προκύπτει ὅτι, τὸ σύνολον τῶν σημείων τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, καθ' ἣν τὸ ἐπίπεδον

$$x_1x + y_1y + z_1z = \varrho^2 \qquad (9)$$

τέμνει τὴν σφαῖραν (2) εἶνε σημεῖα τοῦ κώνου τῶν ἐφαπτομένων τῆς σφαίρας διὰ τοῦ M_1, καθὼς καὶ ὅτι, πάντα τὰ κοινὰ σημεῖα τοῦ (9) καὶ τοῦ κώνου τῶν ἐφαπτομένων, ὀφείλουν νὰ κεῖνται καὶ ἐπὶ τῆς (2). Ἑπομένως, ὁ κῶνος τῶν ἐφαπτομένων ἐφάπτεται τῆς σφαίρας κατὰ τὰ σημεῖα περιφερείας κύκλου, ἐχούσης ἐξισώσεις (2) καὶ (9).

Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα, ἡ διερχομένη διὰ τοῦ (0,0,0) καὶ τοῦ M_1 εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς περιφερείας (2) καὶ (9), ἕπεται ὅτι, «***ὁ κῶ-***

νος τῶν ἐφαπτομένων σφαίρας, τῶν ἀγομένων ἀπὸ σημείου κειμένου ἐκτὸς αὐτῆς, εἶνε ὀρθὸς κυκλικός».

Παρατηρητέον ὅτι, ἂν τὸ M_1 κινῆται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ κώνου τῶν ἐφαπτομένων, πρὸς τὸ (0,0,0), τὸ (9) ἀπομακρύνεται αὐτοῦ, ὅταν δὲ τὸ M_1 γίνῃ σημεῖον τῆς σφαίρας, ἡ (8) γίνεται $x_1x+y_1y+z_1z-\varrho^2=0$, ἤτοι ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον αὐτῆς εἰς τὸ M_1, ὡς κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα OM_1.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ M_1 κεῖται ἐπ' εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ (0,0,0) καὶ ἐχούσης διευθύνοντα συνημίτονα a,b,c, θέσωμεν δὲ εἰς τὴν (8) $x_1=ka, y_1=kb, z_1=kc$, εὑρίσκομεν

$$\left(ax+by+cz-\frac{\varrho^2}{k}\right)^2=\left(x^2+y^2+z^2-\varrho^2\right)\left(1-\frac{\varrho^2}{k^2}\right)$$

Ἐὰν τὸ $M_1 \to \infty$ ἐπὶ τῆς ἐν λόγῳ εὐθείας, ὅτε τὸ $k \to \infty$, ὁ κῶνος τῶν ἐφαπτομένων καταντᾷ κύλινδρος ἐφαπτομένων, μὲ ἐξίσωσιν

$$(ax+by+cz)^2=x^2+y^2+z^2-\varrho^2$$

ἐφάπτεται δὲ τῆς σφαίρας κατὰ τὰ σημεῖα περιφερείας μεγίστου κύκλου, καθ' ὃν τέμνεται ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὴν διεύθυνσιν (a,b,c).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 107. Εὕρετε τὰς τομὰς τῆς εὐθείας ἥτις συνδέει τὰ (5,2,—1), (4,—2.7) καὶ τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2=25$.

108. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τοῦ κώνου τῶν ἐφαπτομένων, ὅστις ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ σημείου (α,0.0) καὶ τῆς σφαίρας (0,0,0,ρ).

109. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τοῦ κώνου τῶν ἐφαπτομένων τῆς σφαίρας (α,β,γ,ρ) διὰ τοῦ $M_1(x_1,y_1,z_1)$.

110. Πότε ἡ εὐθεῖα $x=y=z$ ἐφάπτεται τῆς σφαίρας (α,β,γ,ρ);

111. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τοῦ κώνου τῶν ἐφαπτομένων τῆς σφαίρας (α,β,γ,ρ) διὰ τοῦ (0,0,0).

112. Εὕρετε τὴν τομὴν τῆς σφαίρας (0,0,0,ρ) καὶ τῆς $x=x_1+\lambda a$, $y=y_1+\lambda b$, $z=z_1+\lambda c$ καὶ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἐπιπέδου, ἐφ' οὗ κεῖνται τὰ μέσα τῶν παραλλήλων χορδῶν τῆς θεωρηθείσης. (Τοῦτο καλεῖται ***διαμετρικὸν ἐπίπεδον τῆς σφαίρας*** κατὰ τὴν διεύθυνσι (a,b,c), εἶνε δὲ κάθετον πρὸς τὰς χορδὰς ταύτας).

113. Τίς εἶνε ἡ γεωμετρικὴ σημασία ἑκάστης τῶν ἐκφράσεων $ax+by+cz$ καὶ $x^2+y^2+z^2-\varrho^2$ καὶ εὕρετε δι' αὐτῶν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ κυλίνδρου τῶν ἐφαπτομένων.

114. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τοῦ κυλίνδρου τῶν ἐφαπτομένων, ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν διεύθυνσιν (a,b,c) τῆς σφαίρας (α,β,γ,ρ).

§ 13. Ἐξίσωσις ἐφαπτομένου ἐπιπέδου σφαίρας.

Ἔστω σφαῖρα (α,β,γ,ρ) καὶ $M_1(x_1,y_1,z_1)$ σημεῖον κείμενον ἐπ' αὐτῆς. Ἡ ἐξίσωσις τῶν ἐπιπέδων τῶν διερχομένων διὰ τοῦ M_1 εἶνε

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+\Gamma(z-z_1)=0$$

ὅπου ἄγνωστα εἶνε τὰ Α,Β,Γ. Τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς σφαίρας εἰς τὸ M_1 θὰ εἶνε κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα $KM_1(x_1-\alpha,\ y_1-\beta,\ z_1-\gamma)$ εἰς τὸ M_1, ἄρα θὰ ἔχωμεν $\dfrac{A}{x_1-\alpha}=\dfrac{B}{y_1-\beta}=\dfrac{\Gamma}{z_1-\gamma}$

Ἂν τοὺς ἴσους τούτους λόγους παραστήσωμεν διὰ λ καὶ θέσωμεν ἀνωτέρω $A=\lambda(x_1-\alpha),\ldots$ ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς σφαίρας θὰ εἶνε $(x-x_1)(x_1-\alpha)+(y-y_1)(y_1-\beta)+(z-z_1)(z_1-\gamma)=0$

ἢ
$$\boxed{(x-\alpha)(x_1-\alpha)+(y-\beta)(y_1-\beta)+(z-\gamma)(z_1-\gamma)=\varrho^2} \qquad (1)$$

Ἂν κέντρον τῆς σφαίρας εἶνε ἡ ἀρχὴ (0,0,0), ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου αὐτῆς εἰς τὸ M_1 θὰ εἶνε

$$\boxed{x x_1 + y y_1 + z z_1 = \varrho^2} \qquad (2)$$

Παρατηρητέον ὅτι ἐπὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς σημεῖον σφαίρας κεῖνται πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο. Πράγματι, ἂν τὸ M_1 κεῖται ἐπὶ τῆς σφαίρας $(0,0,0,\varrho)$ θὰ εἶνε

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \varrho^2 \qquad (3)$$

Θεωροῦντες τὰς τομὰς τῆς σφαίρας καὶ τῆς εὐθείας

$$(1+\lambda)x=x_1+\lambda x_2,\ (1+\lambda)y=y_1+\lambda y_2,\ (1+\lambda)x=z_1+\lambda z_2,$$

ἥτις διέρχεται διὰ τῶν M_1 καὶ M_2, θὰ ἔχωμεν

$$\lambda^2(x_2^2+y_2^2+z_2^2-\varrho^2)+2\lambda(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2-\varrho^2)=0$$

ἕνεκα τῆς (3). Ἡ μία τῶν τιμῶν τοῦ λ, ἔστω ἡ λ_1, εἶνε 0 καὶ ἀντιστοιχεῖ εἰς αὐτὴν τὸ M_1, ἡ δ' ἄλλη, ἔστω ἡ λ_2, εἶνε

$$\lambda_2=-2\,\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2-\varrho^2}{x_2^2+y_2^2+z_2^2-\varrho^2}.$$

Ἐὰν τὸ δεύτερον σημεῖον τομῆς τῆς εὐθείας καὶ τῆς σφαίρας τείνῃ νὰ συμπέσῃ μὲ τὸ M_1, ἤτοι ἂν ἡ εὐθεῖα M_1M_2 τείνῃ νὰ γίνῃ ἐφαπτομένη τῆς σφαίρας εἰς τὸ M_1, θὰ εἶνε $\lambda_2 \to 0$· καὶ ἀντιστρόφως θὰ ἔχωμεν $\quad x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=\varrho^2.$

Ἐπειδὴ δι' ἑκάστου σημείου M_1 τῆς σφαίρας ἄγονται ἄπειροι εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι αὐτῆς, γράφοντες ἀνωτέρω ἀντὶ τῶν x_2,y_2,z_2 τὰ x, y, z, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ

$$xx_1+yy_1+zz_1=\varrho^2 \qquad (4)$$

ἐπαληθεύεται τότε μόνον, ὅταν τὸ $M(x,y,z)$ κεῖται ἐπὶ ἐφαπτομένης τῆς σφαίρας εἰς τὸ M_1. Ἐπειδὴ δ' ἡ (4) παριστάνει ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας εἰς τὸ M_1 ἕπεται ὅτι,

«πᾶσαι αἱ ἐφαπτόμεναι σφαίρας, αἵτινες ἄγονται διά τινος σημείου αὐτῆς, κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου της εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 115. Εὕρετε τὰς τομὰς τῆς εὐθείας $x=\lambda a, y=\lambda b, z=\lambda c$ καὶ τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2+Ax+By+\Gamma z=0$.

116. Εὕρετε τὰς συντεταγμένας ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς σφαίρας $(\alpha,\beta,\gamma,\varrho)$ εἰς τὸ σημεῖον (x_1,y_1,z_1).

117. Δείξατε ὅτι, τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα εἰς σημεῖα τῆς σφαίρας $(0, 0, 0, \varrho)$ ἔχοντα τετμημένην x_1, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τοῦ ἄξονος τῶν x, τὸ ὁποῖον μὲ τὰ σημεῖα $x=-\varrho$, $x=x_1$, $x=\varrho$ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν τετράδα.

118. Ἂν τὸ $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$ εἶνε ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας $(0,0,0,\varrho)$ τίνες αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς ;

119. Εὕρετε τὸ σημεῖον ἐπαφῆς ἐπιπέδου, διερχομένου διὰ (x',y',z'), κειμένου ἐκτὸς σφαίρας καὶ ἐφαπτομένου αὐτῆς.

120. Δείξατε ὅτι τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα εἰς τὰ ἄκρα διαμέτρου τῆς σφαίρας $(0,0,0,\varrho)$ εἶνε παράλληλα.

§ 14. Πόλος καὶ πολικὸν ἐπίπεδον πρὸς σφαῖραν.

Ἔστω ἡ σφαῖρα $(\alpha,\beta,\gamma,\varrho)$ καὶ σημεῖον $P(\xi,\eta,\zeta)$ ἐκτὸς αὐτῆς.

Ἂν $M_1(x_1,y_1,z_1)$ εἶνε τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς σφαίρας καὶ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ P θὰ εἶνε

$$(x-\alpha)(x_1-\alpha)+(y-\beta)(y_1-\beta)+(z-\gamma)(y_1-\gamma)=\varrho^2$$

$$(\xi-\alpha)(x_1-\alpha)+(\eta-\beta)(y_1-\beta)+(\zeta-\gamma)(z_1-\gamma)=\varrho^2 \qquad (1)$$

$$(x_1-\alpha)^2+(y_1-\beta)^2+(z_1-\gamma)^2=\varrho^2 \qquad (2)$$

Ἂν τὰ x_1,y_1,z_1 θεωρηθοῦν μεταβλητά, ἡ μὲν (1) παριστάνει ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς, ἡ (2) εἶνε αὐτὴ ἡ ἐξίσωσις τῆς σφαίρας, τὸ δὲ σύστημα τῶν (1) καὶ (2) παριστάνει περιφέρειαν κύκλου, καθ' ἣν τέμνεται ἡ (2) ὑπὸ τοῦ (1). Αὕτη εἶνε πραγματικὴ ἢ ἓν σημεῖον ἢ φανταστική, ἂν τὸ P κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἢ ἐντὸς τῆς σφαίρας.

Τὸ $(x-\alpha)(\xi-\alpha)+(y-\beta)(\eta-\beta)+(z-\gamma)(\zeta-\gamma)=\varrho^2$ καλεῖται ***πολικὸν ἐπίπεδον τοῦ*** P ὡς πρὸς τὴν $(\alpha,\beta,\gamma,\varrho)$, τὸ δὲ P ***πόλος τοῦ ἐπιπέδου τούτου*** ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν.

Δοθέντος ἐπιπέδου $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$ ὁ πόλος αὐτοῦ πρὸς τὴν σφαῖραν $(0,0,0,\varrho)$ π.χ. εἶνε τὸ σημεῖον $\left(-\frac{A\varrho^2}{\Delta}, -\frac{B\varrho^2}{\Delta}, -\frac{\Gamma\varrho^2}{\Delta}\right)$, ὡς προκύπτει ἐκ τῆς συγκρίσεως τῆς ἐξισώσεως τοῦ ἐπιπέδου πρὸς τὴν $\xi x+\eta y+\zeta z-\varrho^2=0$.

Εὐκόλως ἀποδεικνύονται αἱ ἑξῆς ἰδιότητες.

«Ἐὰν ὁ πόλος κεῖται ἐντὸς ἢ ἐκτὸς ἢ ἐπὶ τῆς σφαίρας, τὸ πολικὸν ἐπίπεδον αὐτοῦ κεῖται ἐκτὸς αὐτῆς ἢ τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ περιφέρειαν κύκλου κατὰ τὰ σημεῖα τῆς ὁποίας ἐφάπτονται τῆς σφαίρας ἐπίπεδα διερχόμενα διὰ τοῦ πόλου ἢ εἶνε αὐτὸ τὸ ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο».

«Τὸ πολικὸν ἐπίπεδον κατ' ἐκδοχὴν σημείου (κειμένου εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν) διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας» (διαμετρικὸν ἐπίπεδον). «Ὁ πόλος τοῦ κατ' ἐκδοχὴν ἐπιπέδου εἶνε τὸ κέντρον τῆς σφαίρας». «Τὸ πολικὸν ἐπίπεδον σημείου P ὡς πρὸς σφαῖραν μὲ κέντρον K εἶνε κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν KP»,

«Ἂν Π εἶνε ἡ τομὴ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου K τῆς σφαίρας καθέτου εὐθείας ἐπὶ τὸ πολικὸν ἐπίπεδον τοῦ P, θὰ εἶνε $(KP)\,(K\Pi)=\varrho^2$».

«Ἐὰν σημεῖον κινῆται ἐπὶ ἐπιπέδου, τὸ πολικὸν ἐπίπεδον αὐτοῦ στρέφεται περὶ τὸν πόλον τοῦ ἐπιπέδου»· καὶ ἀντιστρόφως.

«Ἂν ἐκ τοῦ P φέρωμεν δύο εὐθείας PAA' καὶ PBB', τεμνούσας σας τὴν σφαῖραν εἰς τὰ A,A' καὶ B,B', αἱ εὐθεῖαι AB' καὶ A'B τέμνονται ἐπὶ τοῦ πολικοῦ ἐπιπέδου τοῦ P».

Ἔστωσαν $P_i\ (x_i, y_i, z_i,)$, $i=1,2$ τυχόντα σημεῖα καὶ τὰ πολικὰ ἐπίπεδα αὐτῶν ὡς πρὸς σφαῖραν $(0,0,0,\varrho)$ μὲ ἐξισώσεις

$$\boldsymbol{E}_1=0, \qquad \boldsymbol{E}_2=0 \tag{1}$$

Ἔστω P σημεῖον τῆς εὐθείας P_1P_2 καὶ $(P_1P):(PP_2)=\lambda$.

Τὸ πολικὸν ἐπίπεδον τοῦ P ἔχει ἐξίσωσιν

$$x\,\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}+y\,\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}+z\,\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}-\varrho^2=0,$$

ἢ

$$\boldsymbol{E}_1+\lambda\,\boldsymbol{E}_2=0.$$

Ἤτοι, «ἐὰν τὸ P διατρέχῃ εὐθεῖαν P_1P_2, τὸ πολικὸν ἐπίπεδον αὐτοῦ στρέφεται περὶ εὐθεῖαν, ἥτις εἶνε τομὴ τῶν πολικῶν ἐπιπέδων τῶν P_1 καὶ P_2». Ἀντιστρόφως, ἂν σημεῖον διατρέχῃ τὴν εὐθεῖαν $\boldsymbol{E}_1=0$, $\boldsymbol{E}_2=0$, τὸ πολικὸν ἐπίπεδον αὐτοῦ στρέφεται περὶ τὴν εὐθεῖαν P_1P_2. Ἑπομένως ἡ σχέσις τῶν εὐθειῶν P_1P_2 καὶ $\boldsymbol{E}=0$, $\boldsymbol{E}_1=0$ εἶνε ἀμοιβαία.

Τὰς εὐθείας P_1P_2 καὶ $\boldsymbol{E}_1=0$, $\boldsymbol{E}_2=0$ καλοῦμεν ***ἀντιστρόφους ἢ συζυγεῖς πολικὰς*** ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν $(0,0,0,\varrho)$.

Κατὰ ταῦτα, ἑκάστη εὐθεῖα ἔχει μίαν ἀντίστροφον πολικὴν αὐτῆς ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν.

Ἐπειδὴ τὰ διευθύνοντα συνημίτονα τῆς P_1P_2 εἶνε ἀνάλογα τῶν x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2, τῆς δὲ εὐθείας $\boldsymbol{E}_1=0$, $\boldsymbol{E}_2=0$ ἀνάλογα τῶν $y_1z_2-y_2z_1, z_1x_2-z_2x_1, x_1y_2-x_2y_1$, ἕπεται ὅτι, «***αἱ ἀντίστροφοι πολικαὶ πρὸς σφαῖραν εἶνε κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας***».

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ἡ ἑξῆς κατασκευὴ τῆς ἀντιστρόφου πολικῆς δοθείσης εὐθείας. Ἐὰν τὸ διαμετρικὸν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τέμνῃ αὐτὴν εἰς τὸ P, τὴν δὲ σφαῖραν κατὰ περιφέρειαν μεγίστου κύκλου Π, ἡ ἀντίστροφος πολικὴ τῆς εὐθείας εἶνε ἡ πολικὴ τοῦ P ὡς πρὸς τὴν Π ἐπὶ τοῦ διαμετρικοῦ ἐπιπέδου. Ἄρα, αἱ ἀντίστροφοι πολικαὶ κεῖνται, ἐν γένει, ἐπὶ διαφόρων ἐπιπέδων, καὶ ἡ μὲν μία τέμνει τὴν σφαῖραν, ἡ δ' ἄλλη κεῖται ἐκτὸς αὐτῆς. Ἐὰν ἡ μία εἶνε ἐφαπτομένη τῆς σφαίρας καὶ ἡ ἄλλη ἐφάπτεται αὐτῆς, κεῖνται δ' ἐπὶ τοῦ **ἐ**φαπτομένου ἐπιπέδου ταύτης καὶ μόνον εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ ἀντίστροφοι πολικαὶ τέμνονται.

Ἐπειδὴ ὁ πόλος ἐφαπτομένου ἐπιπέδου σφαίρας εἶνε τὸ σημεῖον ἐπαφῆς αὐτοῦ καὶ ἀντιστρόφως, ἔπεται ὅτι, «***ἡ μία τῶν ἀντιστρόφων πολικῶν πρὸς σφαῖραν εἶνε ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὰ σημεῖα ἐπαφῆς δύο ἐφαπτομένων ἐπιπέδων αὐτῆς ἀγομένων διὰ τῆς ἄλλης***».

Ἐπειδὴ εὐθεῖα τέμνει σφαῖραν εἰς δύο σημεῖα πραγματικὰ ἢ φανταστικὰ ἢ ἐφάπτεται αὐτῆς, ἔπεται ὅτι, «***δι' εὐθείας δύνανται νὰ ἀχθοῦν ἢ οὐδὲν ἢ δύο (πραγματικὰ) ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τῆς σφαίρας ἢ ἕν***».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ) 121. Εὕρετε τὸ πολικὸν ἐπίπεδον τοῦ (x_1, y_1, z_1) ὡς πρὸς την σφαῖραν $A_0(x^2+y^2+z^2)+Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$.

122. Εὕρετε τὸν πόλον τοῦ $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$ ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν $(\alpha,\beta,\gamma,\varrho)$

123. Δείξατε ὅτι αἱ ἰδιότητες μεταξὺ πόλων καὶ πολικῶν εἶνε ἀνεξάρτητοι τοῦ συστήματος τῶν συντεταγμένων πρὸς τὸ ὁποῖον ἀναφέρονται.

124. Ἐξετάσατε τὴν θεωρίαν τοῦ κώνου καὶ τοῦ κυλίνδρου τῶν ἐφαπτομένων ἀπὸ τῆς ἀπόψεως τῆς θεωρίας τῶν πολικῶν. Εὕρετε τὰς διαφόρους θέσεις τοῦ πολικοῦ ἐπιπέδου καὶ τοῦ ἀντιστοίχου κώνου τῶν ἐφαπτομένων, ὅταν ὁ πόλος διατρέχῃ μίαν διάμετρον τῆς σφαίρας καὶ ἰδιαιτέρως, ὅταν οὗτος ἀπομακρύνεται εἰς ἄπειρον ἐπ' αὐτῆς.

125. Τρία τυχόντα ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τῆς σφαίρας τέμνονται πάντοτε ἐπί τινος σημείου τῆς διαμέτρου, ἥτις εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν σημείων ἐπαφῆς.

126. Ἐὰν διά τινος σημείου P φέρωμεν εὐθεῖαν, τέμνουσαν τὴν σφαῖραν εἰς δύο σημεῖα M_1 καὶ M_2, ἡ τομὴ τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων εἰς τὰ M_1, M_2 κεῖνται ἐπὶ τοῦ πολικοῦ ἐπιπέδου τοῦ P.

127. Ἡ ἀντίστροφος πολικὴ τῆς εὐθείας $x=x_1+\lambda a$, $y=y_1+\lambda b$, $z=z_1+\lambda c$ ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν $(0,0,0,\varrho)$ δύναται νὰ παρασταθῇ ὑπὸ τῶν $xx_1+yy_1+zz_1=\varrho^2$, $ax+by+cz=0$ ἐκ τῶν ὁποίων ἡ β′ παριστάνει τὸ πολικὸν ἐπιπεδον τοῦ ἐπ' ἀπείρου σημείου τῆς δοθείσης εὐθείας.

128. Τίνες αἱ ἐξισώσεις τῆς ἀντιστρόφου πολικῆς τῆς εὐθείας $x=x_1+\lambda a$, $y=y_1+\lambda b$, $z=z_1+\lambda c$ ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν $(\alpha,\beta,\gamma,\varrho)$;

129. Εὕρετε τὰς ἀντιστρόφους πολικὰς ἑκάστου τῶν ἀξόνων ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν $(\alpha,\beta,\gamma,\varrho)$.

130. Δείξατε ὅτι ἡ ἀντίστροφος πολικὴ μιᾶς διαμέτρου σφαίρας εἶνε ἡ κατ' ἐκδοχὴν εὐθεῖα τοῦ ἐπὶ τὴν διάμετρον καθέτου διαμετρικοῦ ἐπιπέδου.

131. Δείξατε ὅτι τὰ πολικὰ ἐπίπεδα πάντων τῶν σημείων τοῦ ἄξονος τῶν x ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν $x^2+y^2+z^2=2\rho z$ διέρχονται διὰ τοῦ ἄξονος τῶν y, καὶ ἀντιστρόφως. Ἑπομένως ὁ ἄξων τῶν x καὶ y εἶνε ἀντίστροφοι πολικαὶ ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν αὐτήν.

132. Πᾶσαι αἱ διά τινος σημείου τῆς σφαίρας διερχόμεναι ἐφαπτόμεναι αὐτῆς δύνανται νὰ θεωρηθοῦν κατὰ ζεύγη ὡς ἀντίστροφοι πολικαί.

133. Ἐξετάσατε τὴν ἀξονικὴν δέσμην τῶν πολικῶν ἐπιπέδων πάντων τῶν σημείων μιᾶς εὐθείας ἐφαπτομένης σφαίρας. Θεωρήσατε ἰδιαιτέρως τὴν περίπτωσιν διὰ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς καὶ τὸ κατ' ἐξοχὴν σημεῖον τῆς ἐφαπτομένης.

134. Αἱ ἀντίστροφοι πολικαὶ πασῶν τῶν δι' ἑνὸς σημείου τοῦ χώρου διερχομένων εὐθειῶν (κεντρικῆς ἢ στερεᾶς δέσμης καλουμένης) εἶνε τὸ πολικὸν ἐπίπεδον τοῦ σημείου (κέντρου τῆς δέσμης καλουμένου). Ἡ πρότασις αὕτη ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς. «***Ἂν εὐθεῖα κεῖται ἐπί τινος ὡρισμένου ἐπιπέδου (ἢ διέρχεται διά τινος ὡρισμένου σημείου), ἡ ἀντίστροφος πολικὴ αὐτῆς διέρχεται διὰ τοῦ πόλου τοῦ ἐπιπέδου (ἢ κεῖται ἐπὶ τοῦ πολικοῦ ἐπιπέδου τοῦ σημείου).***

135. Ἂν εὐθεῖα στρέφεται περὶ σημεῖον P ἐπί τινος ἐπιπέδου E (γράφουσα ἐπίπεδον δέσμην), ἡ ἀντίστροφος πολικὴ αὐτῆς στρέφεται περὶ τὸν πόλον τοῦ E ἐπὶ τοῦ πολικοῦ ἐπιπέδου τοῦ P (γράφουσα ὁμοίως ἐπίπεδον δέσμην).

136. Εὕρετε τὴν συζυγῆ ἐπίπεδον δέσμην πρὸς ἐκείνην, τῆς ὁποίας τὸ ἐπίπεδον εἶνε διαμετρικὸν τῆς σφαίρας, κέντρον δὲ τὸ τῆς σφαίρας.

137. Διὰ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν πρὸς ὡρισμένην θέσιν ἑνὸς διαμετρικοῦ ἐπιπέδου σφαίρας ὁρίζεται μία δέσμη ἐπίπεδος. Τίς ἡ συζυγὴς αὐτῆς;

§ 15. Δύναμις σημείου ὡς πρὸς σφαῖραν.

Ἔστω ἡ σφαῖρα $(\alpha,\beta,\gamma,\rho)$ καὶ τυχὸν σημεῖον τοῦ χώρου $M'(x', y', z')$. Τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως $(M'K)$ εἶνε

$$(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2+(z'-\gamma)^2=(M'K)^2.$$

Ἡ ἀπόστασις διὰ τὰ σημεῖα M', τὰ κείμενα ἐντὸς τῆς σφαίρας ἢ ἐπ' αὐτῆς ἢ ἐκτὸς αὐτῆς, εἶνε μικροτέρα ἢ ἴση ἢ μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος ρ. Ἐπειδὴ δ' ἔχομεν

$$(M'K)^2-\rho^2=[(M'K)+\rho][(M'K)-\rho]=(M'A)(M'A')=(M'B)(M'B')$$

ἐνῷ A, A', B, B' εἶνε τὰ σημεῖα καθ' ἃ ἡ ἐκ τοῦ M' διάκεντρος τῆς σφαίρας ἢ τυχοῦσα τέμνουσα αὐτῆς τέμνουν τὴν σφαῖραν, ἕπεται ὅτι· ἂν εἰς τὸ α' μέλος τῆς ἐξισώσεως τῆς σφαίρας (ὅταν τὸ β' εἶνε 0) ἀντικαταστήσωμεν τὰ x,y,z διὰ τῶν x',y',z', τὸ ἐξαγόμενον παριστάνει τὸ σταθερὸν γινόμενον τῶν μηκῶν τῶν δύο διανυσμάτων, τῶν ὁριζομένων ἐπὶ πάσης διατεμνούσης τῆς σφαίρας, ἐχόντων ἀρχὴν τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ πέρας τὰ σημεῖα τομῆς αὐτῆς μὲ τὴν σφαῖραν.

Τὸ σταθερὸν τοῦτο γινόμενον καλεῖται ***δύναμις τοῦ σημείου M' ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν***.

Ἂν τὸ Μ′ κεῖται ἐντὸς ἢ ἐπὶ ἢ ἐκτὸς τῆς σφαίρας, τὰ δύο διανύσματα εἶνε ἀντίρροπα ἢ ἓν τούτων ἔχει μῆκος 0 ἢ εἶνε ὁμόρροπα.

Ἂν τὸ Μ′ κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας, ἔχομεν

$$(M'A)\,(M'A') = (M'B)(M'B') = (M'T)^2,$$

ἂν Τ εἶνε τὸ σημεῖον ἐπαφῆς μιᾶς τῶν ἐφαπτομένων τῆς σφαίρας διὰ τοῦ Μ′.

§ 16. Θέσεις σφαιρῶν μεταξύ των.

Ἔστωσαν δύο σφαῖραι

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2+A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1=0 \\ x^2+y^2+z^2+A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2=0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Δι᾽ ἀφαιρέσεως τούτων κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$(A_1-A_2)x+(B_1-B_2)y+(\Gamma_1-\Gamma_2)z+\Delta_1-\Delta_2=0 \qquad (2)$$

ἐπαληθεύεται δ᾽ αὕτη ὑπὸ τῶν κοινῶν λύσεων τῶν (1) καὶ δύναται νὰ ἀντικαταστήσῃ μίαν ἐξ αὐτῶν εἰς τὸ σύστημα (1).

Ἐὰν τὸ (2) τέμνῃ τὴν μίαν τῶν (1), αἱ (1) τέμνονται κατὰ τὴν περιφέρειαν ταύτην. Ἐὰν τὸ (2) ἐφάπτεται τῆς μιᾶς τῶν (1), αὗται ἐφάπτονται κατὰ τὸ σημεῖον τοῦτο (ἐκτὸς ἢ ἐντὸς καθόσον ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων αὐτῶν εἶνε ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων). Ἐὰν τὸ (2) κεῖται ἐκτὸς τῆς μιᾶς τῶν (1), αἱ σφαῖραι δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον (ἡ μία κεῖται ἐκτὸς ἢ ἐντὸς τῆς ἄλλης καθόσον ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων αὐτῶν εἶνε μεγαλυτέρα τοῦ ἀθροίσματος ἢ μικροτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκτίνων).

Τὸ (2) καλεῖται ***ῥιζικὸν ἐπίπεδον*** τῶν σφαιρῶν (1) καὶ ἔχει τὴν ἰδιότητα ὅτι, «***ἕκαστον σημεῖον αὐτοῦ ἔχει τὴν αὐτὴν δύναμιν ὡς πρὸς ἑκάστην τῶν (1)***, εἶνε δὲ τοῦτο ὁ τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου ἀπὸ τῶν ὁποίων ἄγονται ἴσαι ἐφαπτόμεναι εἰς τὰς δύο σφαίρας.

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι, «***τὸ ῥιζικὸν ἐπίπεδον δύο σφαιρῶν εἶνε κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τῶν κέντρων τῶν δύο σφαιρῶν***».

Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις τριῶν σφαιρῶν

$$K_1 = 0,\ K_2 = 0,\ K_3 = 0 \qquad (3)$$

Συνδυάζοντες αὐτὰς ἀνὰ δύο εὑρίσκομεν τὰς ἐξισώσεις τριῶν ῥιζικῶν ἐπιπέδων $K_1-K_2=0,\ K_2-K_3=0,\ K_3-K_1=0$ (4)

Ἐπειδὴ ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν ἐξισώσεων τούτων κατὰ μέλη προκύπτει ταυτότης, ἕπεται ὅτι τὰ τρία ῥιζικὰ ἐπίπεδα, ἅτινα ὁρίζονται ὑπὸ τριῶν σφαιρῶν, τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν. Ἡ εὐθεῖα αὕτη καλεῖται ***ῥιζικὸς ἄξων τῶν τριῶν σφαιρῶν***», εἶνε δ' αὕτη ὁ τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, ἀπὸ τῶν ὁποίων ἄγονται ἴσα τμήματα ἐφαπτόμενα εἰς τὰς τρεῖς σφαίρας.

Ἀποδεικνύεται ὅτι, «τὰ διευθύνοντα συνημίτονα τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν (3), εἶνε ἀνάλογα τῶν E_x, E_y, E_z, παριστάνοντα τὰ ἐμβαδὰ τῶν ὀρθῶν προβολῶν τοῦ τριγώνου τῶν κέντρων τῶν (3) ἐπὶ τὰ συντεταγμένα ἐπίπεδα».

Ἐπίσης ἀποδεικνύεται ὅτι, «ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν (3) εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν, τέμνων αὐτὸ κατὰ τὸ ριζικὸν κέντρον τῶν περιφερειῶν, καθ' ἃς αἱ (3) τέμνονται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τούτου».

Ἔστωσαν $K_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, αἱ ἐξισώσεις τεσσάρων σφαιρῶν. Ἀνὰ δύο λαμβανόμεναι ὁρίζουν ἓξ ριζικὰ ἐπίπεδα, ἀνὰ τρεῖς δὲ τέσσαρας ριζικοὺς ἄξονας, οἵτινες εἶνε ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπὶ τὰς ἕδρας τοῦ ὑπὸ τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν ὁριζομένου τετραέδρου. Αἱ ἐξισώσεις τῶν ριζικῶν ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα εἶνε κάθετα ἐπὶ τὰς ἀκμὰς τοῦ ἐν λόγῳ τετραέδρου, εἶνε

$$K_1-K_2=0,\ K_2-K_3=0,\ K_3-K_4=0,$$
$$K_1-K_3=0,\ K_1-K_4=0,\ K_2-K_4=0.$$

Ἐπειδὴ ἑκάστη τῶν τριῶν τελευταίων ἐξισώσεων προκύπτει διὰ προσθέσεως τῶν τριῶν πρώτων, ἀφοῦ προηγουμένως πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ καταλλήλους ἀριθμούς, ἕπεται ὅτι, «***τὰ ἓξ ριζικὰ ἐπίπεδα, ἑπομένως καὶ οἱ τέσσαρες ριζικοὶ ἄξονες, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον***». Τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται ***ριζικὸν κέντρον*** τῶν τεσσάρων σφαιρῶν. Αἱ ἐφαπτόμεναι, αἵτινες δύνανται νὰ ἀχθοῦν ἐκ τοῦ ριζικοῦ κέντρου τῶν σφαιρῶν εἰς αὐτάς, ἔχουν ἴσα μήκη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 138. Τίς εἶνε ὁ τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ὡς πρὸς δοθεῖσαν σφαῖραν ἔχουν τὴν αὐτὴν δύναμιν;

139. Ποῖον εἶνε τὸ ριζικὸν ἐπίπεδον δύο ὁμοκέντρων σφαιρῶν;

140. Δείξατε ὅτι ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα δύο σφαῖραι $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \varrho_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \varrho_2)$ τέμνωνται καθέτως εἶνε $(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\beta_1-\beta_2)^2+(\gamma_1-\gamma_2)^2=\varrho_1^2+\varrho_2^2$.

141. Τίς ἡ ἐξίσωσις τοῦ ριζικοῦ ἐπιπέδου τῶν σφαιρῶν

$$x^2+y^2+z^2+A_1x+B_1y+\Gamma_1z=0,\quad x^2+y^2+z^2+A_2x+B_2y+\Gamma_2z=0\,;$$

142. Δείξατε ὅτι ἀναγκαία συνθήκη ἵνα αἱ σφαῖραι

$$x^2+y^2+z^2+A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1=0,\quad x^2+y^2+z^2+A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2=0$$

τέμνωνται καθέτως εἶνε $A_1A_2+B_1B_2+\Gamma_1\Gamma_2=2(\Delta_1+\Delta_2)$.

Ἐπειδὴ ἡ συνθήκη αὕτη εἶνε γραμμικὴ ὡς πρὸς τοὺς συντελεστὰς ἑκάστης τῶν ἐξισώσεων τῶν σφαιρῶν, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν σφαῖραν, τέμνουσαν τέσσαρας δοθείσας καθέτους. Τὸ κέντρον ταύτης εἶνε τὸ ριζικὸν κέντρον τῶν τεσσάρων σφαιρῶν.

143. Ἡ ἐξίσωσις $K_1 - \lambda K_2 = 0$ παριστάνει σφαῖραν, ἥτις δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων αἱ δυνάμεις ὡς πρὸς τὰς σφαίρας $K_1 = 0, K_2 = 0$ ἔχουν λόγον λ.

144. Ἐὰν θεωρηθῇ τὸ λ ὡς (μεταβλητὴ) παράμετρος, ἡ ἐξίσωσις $K_1 - \lambda K_2 = 0$ παριστάνει δέσμην σφαιρῶν, διερχομένων διὰ τῆς αὐτῆς περιφερείας κύκλου, τομῆς τῶν σφαιρῶν $K_1 = 0$, $K_2 = 0$. Πάντα τὰ ζεύγη τῆς δέσμης τῶν σφαιρῶν ἔχουν τὸ αὐτὸ ριζικὸν ἐπίπεδον $K_1 - K_2 = 0$. Ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τούτου ἔχει τὴν αὐτὴν δύναμιν ὡς πρὸς πάσας τὰς σφαίρας τῆς δέσμης.

145. Ἐὰν κατασκευασθῇ σφαῖρα, τέμνουσα καθέτως τὰς σφαίρας $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, τὸ κέντρον αὐτῆς κεῖται ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἐπιπέδου $K_1 - K_2 = 0$. Ἀντιστρόφως, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν σφαῖραν περὶ ἕκαστον σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἐπιπέδου, κείμενον ἐντὸς τῶν σφαιρῶν $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, ἥτις νὰ τέμνῃ τὰς δοθείσας καθέτως. Αὕτη τέμνει ὁμοίως πάσας τὰς σφαίρας τῆς δέσμης $K_1 - \lambda K_2 = 0$.

146. Ἐξετάσατε εἰς τὴν δέσμην τῶν σφαιρῶν $K_1 - \lambda K_2 = 0$ τὰς περιπτώσεις καθ' ἃς $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, $\lambda \to -\infty$, $\lambda \to +\infty$.

147. Ὁρίσατε τὸ ριζικὸν ἐπίπεδον δύο σφαιρῶν $K_1 = 0, K_2 = 0$, μὴ τεμνομένων μὲ τὴν βοήθειαν μιᾶς σφαίρας $K_3 = 0$, τεμνούσης τὰς $K_1 = 0$ καὶ $K_2 = 0$.

148. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς σφαίρας, ἥτις διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων καὶ ἀνήκει εἰς τὴν δέσμην, ἡ ὁποία ὁρίζεται ὑπὸ τῶν

$$2(x^2+y^2+z^2)-3x+y-8z=1. \quad 7(x^2+y^2+z^2)-x+2y+6z=11.$$

149. Ἐξετάσατε τί παριστάνει ἡ ἐξίσωσις $K_1 - \lambda K_2 - \mu K_3 = 0$, ἐὰν τὰ λ καὶ μ εἶνε (μεταβληταὶ) παράμετροι καὶ εὕρετε τὸν ριζικὸν ἄξονα τῶν σφαιρῶν $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$ καὶ πάσας τὰς σφαίρας, αἵτινες τέμνουν αὐτὰς καθέτως.

150. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο σταθερῶν σημείων, ἑκάστης ἀποστάσεως πολλαπλασιασμένης ἐπὶ ἀριθμὸν ὡρισμένον, εἶνε σταθερόν.

151. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο ὡρισμένων σημείων εἶνε σταθερός.

152. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος σημείων τοιούτων ὥστε, οἱ πόδες τῶν καθέτων εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐξ ἑκάστου ἐξ αὐτῶν ἐπὶ τὰς ἕδρας δοθέντος τετραέδρου νὰ σχηματίζουν τετράεδρον σταθεροῦ ὄγκου.

153. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις σφαίρας περιγεγραμμένης εἰς τρίγωνον μὲ κέντρον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου, ὅταν γνωρίζωμεν τὰς συντεταγμένας τῶν κορυφῶν τούτου. Μερικὴ περίπτωσις: ὅταν αἱ κορυφαὶ τοῦ τριγώνου κεῖνται ἐπὶ τῶν ἀξόνων.

154. Νὰ εὑρεθῇ σφαῖρα ἐφαπτομένη τεσσάρων δοθέντων ἐπιπέδων καὶ νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκτῖνες τῶν τοιούτων σφαιρῶν.

155. Νὰ εὑρεθῇ σφαῖρα ἐφαπτομένη τεσσάρων δοθεισῶν σφαιρῶν.

156. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν σφαιρῶν τῶν ἐφαπτομένων τριῶν ἄλλων.

157. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων σφαιρῶν, αἵτινες τέμνουν δύο δοθείσας κατὰ περιφερείας μεγίστων κύκλων.

158. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος κέντρων τῶν σφαιρῶν, τεμνουσῶν καθέτως τρεῖς ἄλλας.

159. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων σφαιρῶν, τεμνουσῶν καθέτως δύο ἄλλας.

160. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις σφαίρας, τεμνούσης καθέτως τέσσαρας ἄλλας.

161. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς σφαίρας, τεμνούσης δύο εὐθείας μὴ κειμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου εἰς τὰ σημεῖα Α, Α′ καὶ Β, Β′ ὥστε τὸ τετράεδρον ΑΑ′ΒΒ′ νὰ ἔχῃ ὄγκον α^3.

162. Δοθεισῶν τριῶν σφαιρῶν, δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ὀκτὼ (κοινὰ) ἐπίπεδα ἐφαπτόμενα αὐτῶν, δύο ἐξωτερικὰ καὶ ἓξ ἐσωτερικά. Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου ἀπὸ τῶν δύο ἐξωτερικῶν ἐπιπέδων ἰσοῦται μὲ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ἀπὸ τῶν ἓξ ἐσωτερικῶν.

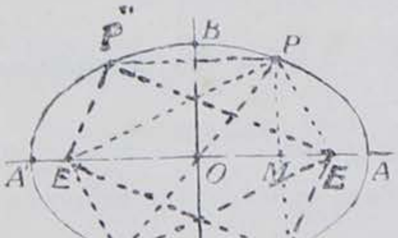
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ.

Περὶ ἐλλείψεως καὶ ὑπερβολῆς.

§ 17. Ὁρισμοὶ καὶ ἰδιότητες τῆς ἐλλείψεως καὶ ὑπερβολῆς.

Ἔλλειψις μὲν καλεῖται ὁ τόπος τῶν σημείων ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων αἱ ἀπόλυτοι ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων αὐτοῦ ἔχουν ***ἄθροισμα σταθερόν***, ***ὑπερβολὴ*** δέ, ἂν ἔχουν ἀπόλυτον ***διαφορὰν σταθεράν***.

Κατωτέρω θὰ παριστάνωμεν ἐνίοτε τὴν μὲν ἔλλειψιν διὰ τοῦ E_λ τὴν δ᾽ ὑπερβολὴν διὰ τοῦ Y_π.



(Σχ. 7).

Τὰ δοθέντα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου λέγονται ***ἑστίαι*** τῆς E_λ ἢ Y_π, σημειώνομεν αὐτὰ συνήθως διὰ τῶν Ε καὶ Ε′ (σχ. 7 καὶ 8), ἡ δ᾽ ἀπόλυτος ἀπόστασις αὐτῶν (Ε′Ε) $= 2\gamma$ καλεῖται ***ἑστιακὴ ἀπόστασις***. Διανύσματα ἔχοντα ἀρχὴν τὴν μίαν τῶν ἑστιῶν τῆς E_λ ἢ Y_π καὶ πέρας ἐπ᾽ αὐτῆς καλοῦνται συνήθως ***ἑστιακαὶ ἀκτῖνες*** τῆς μιᾶς ἢ τῆς ἄλλης.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ 2α τὸ σταθερὸν ἄθροισμα τῶν απολύτων ἀποστάσεων σημείου τινὸς Ρ τῆς E_λ, ἀπὸ τῶν ἑστιῶν αὐτῆς ἢ τὴν ἀπόλυτον διαφορὰν αὐτῶν τῆς Y_π θὰ ἔχωμεν διὰ μὲν τὴν πρώτην $(E'P)+(EP)=2\alpha$, διὰ δὲ τὴν δευτέραν $(E'P)-(EP)=2\alpha$.

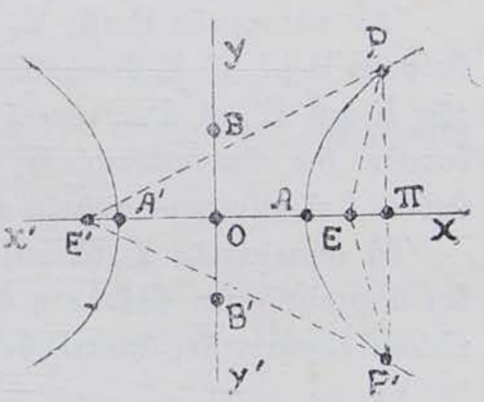
Τὰ σημεῖα Α καὶ Α′ τῆς εὐθείας ΕΕ′, ἀπέχοντα ἀπὸ τὸ μέσον Ο τοῦ τμήματος ΕΕ′ ἀποστάσεις ἴσας μὲ $\pm\alpha$ κεῖνται ἐπὶ τῆς E_λ ἢ Y_π. Ἐπὶ τῆς E_λ κεῖνται καὶ τὰ σημεῖα Β καὶ Β′, τῆς καθέτου εὐθείας εἰς τὸ μέσον Ο τοῦ ΕΕ′ ἀπέχοντα ἀπὸ μὲν τὰ Ε καὶ Ε′ ἀποστάσεις ἀπολύτως ἴσας μὲ α, ἀπὸ δὲ τοῦ Ο ἀπολύτως ἴσας μὲ β, ἐνῶ εἶνε δι᾽ αὐτὴν $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$.

Ἡ E_λ καὶ Y_π εἶνε συμμετρικαὶ πρὸς ἑκάστην τῶν εὐθειῶν ΑΑ′ καὶ Β′Β. Ἡ α′ συμμετρία π.χ. ἀποδεικνύεται, ἂν λάβωμεν δύο σημεῖα Ρ,Ρ′ συμμετρικὰ πρὸς τὴν εὐθεῖαν Α′Α, (σχ. 7 καὶ 8), ὅτε ἔχομεν ἀπολύτως $(EP)=(EP')$, $(E'P)=(E'P')$.

Ἑπομένως, ἂν εἶνε $(E'P)\pm(EP)=2\alpha$, θὰ ἔχωμεν καὶ

$$(E'P')\pm(EP')=2\alpha.$$

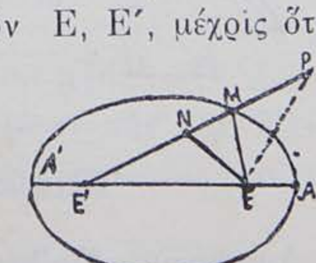
Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα Α′Α καὶ Β′Β καλοῦνται ***ἄξονες*** συμμετρίας τῆς E_λ ἢ Y_π καὶ εἶνε $(A'A)=2\alpha$, $(B'B)=2\beta$, καὶ $\alpha>\beta$ διὰ τὴν E_λ, λέγονται δὲ τὰ α,β μήκη τοῦ ***μεγάλου*** καὶ τοῦ ***μικροῦ*** ἡμιάξονος αὐτῆς. Τὸ Ο λέγεται ***κέντρον*** τῆς E_λ ἢ τῆς Y_π. Ὁ λόγος $\frac{\gamma}{\alpha}=\varepsilon$ λέγεται ***ἐκκεντρότης*** τῆς E_λ ἢ Y_π καὶ εἶνε <1 διὰ τὴν α′ καὶ >1 διὰ τὴν β′, ἐπειδὴ $2\alpha>2\gamma$ εἰς τὴν α′ περίπτωσιν καὶ $2\alpha<2\gamma$ εἰς τὴν β′.



(Σχ. 8).

Παρατηρητέον ὅτι ἡ περιφέρεια κύκλου δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς E_λ, τῆς ὁποίας συνέπεσαν αἱ ἑστίαι, ἤτοι δι᾽ αὐτὴν εἶνε $\varepsilon=0$.

Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν E_λ διὰ συνεχοῦς κινήσεως ὡς ἑξῆς. Στερεώνομεν εἰς τὰ διδόμενα σημεῖα ὡς ἑστίας Ε καὶ Ε′ δύο καρφίδας· εἰς αὐτὰς προσδένομεν τὰ ἄκρα νήματος μήκους 2α· τείνομεν συνεχῶς τὸ νῆμα διὰ τῆς αἰχμῆς γραφίδος, τὴν ὁποίαν κινοῦμεν ἐπὶ τοῦ χάρτου ἢ ἐπὶ ἐπιπέδου, διερχομένου διὰ τῶν Ε, Ε′, μέχρις ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀναχωρήσεως.



(Σχ. 9).

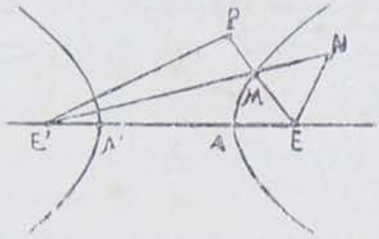
Ἐὰν σημεῖόν τι κεῖται ἐντὸς ἢ ἐκτὸς E_λ, αἱ ἀπόλυτοι ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τῶν ἑστιῶν αὐτοῦ ἔχουν ἄθροισμα $<2\alpha$ ἢ $>2\alpha$. Διότι, ἔστω π. χ. τὸ Ν ἐντὸς τῆς E_λ (σχ. 9). Προεκτείνομεν τὴν Ε′Ν μέχρις ὅτου τμήσει τὴν E_λ, ἔστω εἰς τὸ Μ, καὶ ἔχομεν $(EN) < (EM) + (NM)$.

Ἑπομένως $(E'N) + (EN) < (E'N) + (NM) + (EM)$.

Ἐπειδὴ δ' εἶνε $(E'N) + (NM) + (E'M) = (E'M) + (EM) = 2\alpha$,

ἕπεται ὅτι $(E'N) + (EN) < 2\alpha$.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι, ἂν τὸ P κεῖται ἐκτὸς τῆς E_λ θὰ εἶνε $(E'P) + (EP) > 2\alpha$.



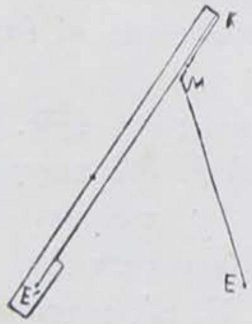
(Σχ. 10).

Διὰ τὴν Y_π ἂν σημεῖον P (σχ. 10) κεῖται ἐκτὸς αὐτῆς καὶ εἰς τὸν χῶρον εἰς τὸν ὁποῖον κεῖται ὁ ἄξων B'B, θὰ εἶνε ἀπολύτως $(E'P) - (MP) < (E'M)$ καὶ $(E'P) - (MP) - (EM) < (E'M) - (EM)$ ἢ $(E'P) - (EP) < 2\alpha$, ἐνῶ διὰ σημεῖον N κείμενον ἐντὸς τῆς Y_π εἶνε $(E'N) - (EN) > 2\alpha$.

Ἂν τὰ σημεῖα P τῆς Y_π τὰ κείμενα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας B'B μὲ τὸ E θεωρηθοῦν ὅτι ἔχουν ἀποστάσεις θετικὰς ἀπὸ τῶν E καὶ E', αἱ ἀποστάσεις τῶν ἄλλων σημείων αὐτῆς ἀπὸ τῶν ἑστιῶν θὰ θεωροῦνται ὡς ἀρνητικαί, ὅτε $(E'P) - (EP) = 2\alpha$ ἀληθεύει διὰ πάντα τὰ σημεῖα τῆς Y_π.

Τὰ σημεῖα τῆς Y_π τὰ κείμενα δεξιὰ ἢ ἀριστερὰ τῆς B'B λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν τὸν ***δεξιὸν*** ἢ ***ἀριστερὸν*** κλάδον αὐτῆς, οἱ δύο δ' οὗτοι κλάδοι λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν ἕνα τόπον, τὴν Y_π.

Διὰ νὰ γράψωμεν τόξον ὑπερβολῆς διὰ συνεχοῦς κινήσεως, λαμβάνομεν κανόνα k (σχ. 11) καὶ στηρίζομεν τὸ ἓν ἄκρον τούτου εἰς τὴν μίαν ἑστίαν, ἔστω τὴν E', ὥστε νὰ δύναται νὰ στρέφεται περὶ τοῦτο. Τὸ ἄκρον νήματος, μήκους μικροτέρου τοῦ μήκους τοῦ κανόνος κατὰ 2α, στερεώνομεν εἰς τὸ ἄκρον τοῦ k καὶ τὸ ἄλλο ἄκρον εἰς τὸ E. Διὰ γραφίδος M τείνομεν διηνεκῶς τὸ νῆμα κατὰ μῆκος τοῦ κανόνος καὶ στρεφομένου τούτου περὶ τὸ E γράφεται ὑπὸ τῆς γραφίδος τόξον τῆς Y_π.



(Σχ. 11).

§ 18 Ἐξισώσεις ἐλλείψεως καὶ ὑπερβολῆς.

Λαμβάνομεν (ὀρθογωνίους) ἄξονας συντεταγμένων xOy τοὺς A'A καὶ B'B τῆς E_λ ἢ Y_π καθέτους εἰς τὸ μέσον αὐτῶν O (σχ. 12), ὅτε εἶνε $E(\gamma, 0)$ καὶ $E'(-\gamma, 0)$. Διὰ τυχὸν σημεῖον $M(x, y)$ τοῦ ἐπιπέδου θὰ ἔχωμεν ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων Ε΄ΜΠ καὶ ΕΜΠ, ἂν τεθῇ (Ε΄Μ)=ϱ΄,(ΕΜ)=ϱ, $\varrho'^2=(x+\gamma)^2+y^2$ καὶ $\varrho^2=(x-\gamma)^2+y^2$.

Ἑπομένως διὰ τὴν $Ε_λ$ ἔχομεν

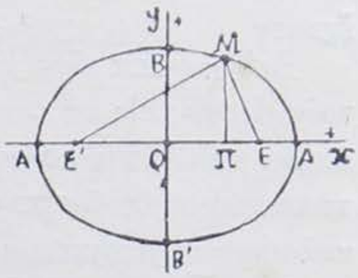
$$\sqrt{(x+\gamma)^2+y^2}+\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}=\varrho'+\varrho=2\alpha$$

ἢ $2(x^2+y^2+\gamma^2)+2\sqrt{(x^2+y^2+\gamma)^2-4\gamma^2x^2}=4\alpha^2$

Μετὰ τὴν ἀπομόνωσιν τοῦ ϱιζικοῦ, ὑψοῦντες τὰ ἴσα εἰς τὸ τετράγωνον εὑρίσκομεν

$$(x^2+y^2+\gamma^2)^2-4\gamma^2x^2=[(x^2+y^2+\gamma^2)-2\alpha^2]^2$$

ἢ $(\alpha^2-\gamma^2)x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2(\alpha^2-\gamma^2)$



(Σχ. 12).

Ἐπειδὴ εἶνε $\alpha>\gamma$ καὶ $\alpha^2-\gamma^2=\beta^2$ λαμβάνομεν,

$$\boxed{\beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1} \qquad (1)$$

Διὰ τὴν $Υ_π$ ἔχομεν

$$\sqrt{(\gamma+x)^2+y^2}-\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}=\varrho'-\varrho=2\alpha$$

καὶ $(\alpha^2-\gamma^2)x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2(\alpha^2-\gamma^2)$, θέτοντες δὲ $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2$ εὑρίσκομεν

$$\boxed{\beta^2x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1} \qquad (2)$$

Τὴν ἐξίσωσιν (1) ἐπαληθεύουν αἱ συντεταγμέναι πάντων τῶν σημείων, διὰ τὰ ὁποῖα εἶνε $\varrho'+\varrho=2\alpha$ καὶ μόνον αὐτῶν. Πράγματι, ἂν $P_0(x_0,y_0)$ εἶνε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τῆς $Ε_λ$, ἡ εὐθεῖα OP_0 τέμνει αὐτήν, ἔστω εἰς τὸ $M(x,y)$ καὶ θὰ εἶνε

$$|x_0|\leqq|x| \text{ καὶ } |y_0|<|y| \quad \text{ἢ} \quad |x_0|<|x| \text{ καὶ } |y_0|\leqq|y|$$

ἐὰν τὸ P_0 κεῖται πλησιέστερον πρὸς τὸ O ἢ τὸ M, ἐνῶ ἂν τὸ P_0 κεῖται ἀπώτερον τοῦ O ἢ τὸ M, θὰ ἔχωμεν

$|x_0|\geqq|x|$ καὶ $|y_0|>|y|$ ἢ $|x_0|>|x|$ καὶ $|y_0|\geqq|y|$. Ἑπομένως θὰ εἶνε $\beta^2x_0^2+\alpha^2y_0^2<\alpha^2\beta^2$ εἰς τὴν α΄ περίπτωσιν καὶ $\beta^2x_0^2+\alpha^2y_0^2>\alpha^2\beta^2$ εἰς τὴν β΄. Ἀνάλογα παρατηροῦμεν καὶ διὰ τὴν $Υ_π$.

Καὶ ἐκ τῶν (1) καὶ (2) παρατηροῦμεν ὅτι ἡ $Ε_λ$ καὶ ἡ $Υ_π$ εἶνε συμμετρικαὶ πρὸς τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων καὶ πρὸς τὸ O. Διότι, ἂν π. χ. αἱ συντεταγμέναι σημείου x_1,y_1 ἐπαληθεύουν τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην ἐξίσωσιν καὶ τὰ $-x_1,-y_1$ ἐπαληθεύουν αὐτήν, καθὼς καὶ τὰ $x_1,-y_1$ καὶ $-x_1,y_1$.

Λύοντες τὴν (1) ὡς πρὸς y εὑρίσκομεν $y=\pm\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}$ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι, εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ x ἀντιστοιχοῦν δύο ἀντίθετοι τιμαὶ τοῦ y, πραγματικαὶ ἴσαι ἢ φανταστικαί, ἂν τὸ

$\alpha^2-x^2>0$ ἢ $=0$ ἢ <0. Αἱ πραγματικαὶ τιμαὶ τοῦ x εἰς τὰς ὁποίας ἀντιστοιχοῦν πραγματικαὶ τιμαὶ τοῦ y εἶνε ἐκεῖναι, διὰ τὰς ὁποίας ἔχομεν $\alpha^2-x^2\geqq 0$ ἢ $\alpha^2\geqq x^2$, ἢ $|x|\leqq\alpha$.

Διὰ $x=\pm\alpha$ εἶνε $y=0$ καὶ διὰ $x=0$ $y=\pm\beta$. Ὅθεν ἡ E_λ τέμνει τοὺς ἄξονας εἰς τὰ σημεῖα $A(\alpha,0)$, $A'(-\alpha,0)$ καὶ $B(0,\beta)$, $B'(0,-\beta)$, τὰ ὁποῖα καλοῦνται ***κορυφαὶ*** τῆς E_λ περιέχεται δ' αὕτη μεταξὺ τῶν τεσσάρων εὐθειῶν $x=\pm\alpha$, $y=\pm\beta$, αἵτινες σχηματίζουν ὀρθογώνιον, καλούμενον περιγεγραμμένον εἰς αὐτὴν μὲ ἐμβαδὸν $4\alpha\beta$.

Ἐὰν εἶνε $\alpha=\beta$, ὅτε $\gamma=0$, ἡ E_λ καταντᾷ περιφέρεια κύκλου.

Ὅταν τὸ $|x|$ αὐξάνεται ἀπὸ 0 μέχρις α, ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ y ἐλαττοῦται ἀπὸ β μέχρι τοῦ 0, ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι ἡ E_λ εἶνε καμπύλη κλειστή, κειμένη εἰς πεπερασμένην ἀπόστασιν.

Διὰ τὴν Y_π εὑρίσκομεν ἐκ τῆς (2) $\quad y=\pm\dfrac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2-\alpha^2} \quad (3)$

καὶ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ y ἔχει πραγματικὰς τιμὰς μόνον ἐὰν εἶνε $|x|\geqq\alpha$. Διὰ $x=\pm\alpha$, $y=0$· ἤτοι ἡ Y_π τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὰ $A(\alpha,0)$, $A'(-\alpha,0)$, ἀπέχοντα μεταξύ των ἀπολύτως κατὰ 2α καὶ κείμενα μεταξὺ τῶν ἑστιῶν αὐτῆς. Τὰ A, A' καλοῦνται ***κορυφαὶ τῆς Y_π***, αἱ δὲ εὐθεῖαι $x=\pm\alpha$ ἔχουν ἀνὰ ἓν μόνον σημεῖον κοινὸν μὲ αὐτήν, τὰ A καὶ A'. Αὐξανομένου συνεχῶς τοῦ $|x|$ ἀπὸ τῆς τιμῆς α, αὐξάνεται συνεχῶς καὶ ἡ ἀντίστοιχος ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ y.

Ἐπειδὴ δὲ αὐξανομένου τοῦ x ἀπὸ τοῦ α συνεχῶς καὶ τείνοντος εἰς τὸ ∞, αὐξάνεται καὶ τὸ y ἀπολύτως ἀπὸ τοῦ 0 συνεχῶς καὶ τείνει εἰς ∞, ἕπεται ὅτι, ἡ ὑπερβολὴ ἔχει σημεῖα εἰς τὸ ∞. Εἰς τιμὰς τοῦ x ἀρνητικὰς ἀλλ' ἀπολύτως > τοῦ α ἀντιστοιχοῦν σημεῖα τῆς Y_π, ἀποτελοῦντα ἄλλον κλάδον, συμμετρικὸν τοῦ προηγουμένου πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y.

Διὰ $x=\pm\gamma$, εὑρίσκομεν διὰ τὴν E_λ ἢ τὴν Y_π $\; y=\pm\dfrac{\beta^2}{\alpha}=$ $=$ ἔστω $\pm p$, καλοῦμεν δὲ τὴν p ***ἡμιπαράμετρον*** τῆς E_λ ἢ Y_π.

§ 19. Ἀσύμπτωτοι καὶ διάμετροι τῆς ὑπερβολῆς.

Ἐὰν τὴν ἐξίσωσιν $\beta^2x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$ τῆς Y_π γράψωμεν ὑπὸ τὴν μορφὴν

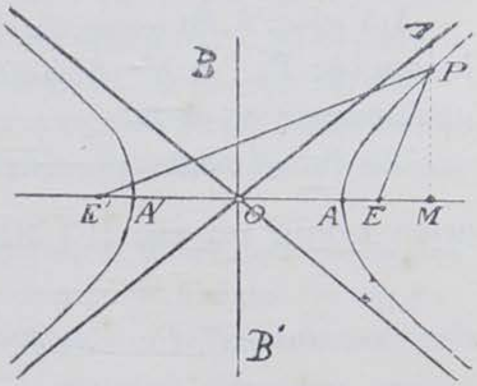
$$y=\pm\frac{\beta}{\alpha}x\sqrt{1-\left(\frac{\alpha}{x}\right)^2} \quad (1)$$

παρατηροῦμεν ὅτι, αὐξανομένου τοῦ x ἀπολύτως καὶ συνεχῶς, αὐξάνεται ὁμοίως καὶ τὸ $|y|$, καὶ ὅταν $x\to\infty$ καὶ $y\to\pm\infty$. Ἐπειδὴ ὅμως αὐξανομένου τοῦ x ἀπολύτως, ὁ λόγος $\dfrac{\alpha}{x}$ ἐλαττοῦται ἀπολύτως καὶ τείνει εἰς τὸ 0, αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ y τείνουν πρὸς τὸ $\pm\frac{\beta}{\alpha}x$.

Θεωροῦντες ἄρα τὴν εὐθεῖαν $y=\frac{\beta}{\alpha}x$, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ Y_π πλησιάζει ταύτην διηνεκῶς, ὅταν αὐξάνωνται ἀπολύτως καὶ συνεχῶς αἱ τιμαὶ τοῦ x. Ἤτοι ἡ ἀπόστασις σημείου (x,y) τῆς Y_π ἀπὸ τῆς εὐθείας

$$y=\frac{\beta}{\alpha}x \qquad (2)$$ τείνει εἰς τὸ 0,

ὅταν τὸ $|x| \rightarrow \infty$.



(Σχ. 13).

Τοῦτο φαίνεται καὶ ὡς ἑξῆς. Ἔχομεν (σχ. 13)

$(MP)=y=\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2-\alpha^2}$ καὶ ἡ ἀντίστοιχος τεταγμένη (ΜΛ) τῆς εὐθείας (2), ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ αὐτὸ x, εἶνε $(M\Lambda)=\frac{\beta}{\alpha}x$. Ἡ διαφορὰ τῶν (ΜΛ) καὶ (ΜΡ) εἶνε

$$(M\Lambda)-(MP)=(P\Lambda)=\frac{\beta}{\alpha}x-\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2-\alpha^2}$$

$$\text{ἢ}\quad (P\Lambda)=\frac{\beta}{\alpha}\left(x-\sqrt{x^2-\alpha^2}\right)=\frac{\beta}{\alpha}\,\frac{\alpha^2}{(x+\sqrt{x^2-\alpha^2})}=\frac{\alpha\beta}{x+\sqrt{x^2-\alpha^2}}$$

Ὅταν τὸ $x \rightarrow \infty$, τὸ $(P\Lambda) \rightarrow 0$, ἄρα καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ Ρ ἀπὸ τῆς (2), κατὰ μείζονα λόγον, τείνει εἰς τὸ 0. Ἡ ἰδιότης αὕτη ἰσχύει καὶ διὰ τὴν εὐθεῖαν $y=-\frac{\beta}{\alpha}x$ καὶ ἀποδεικνύεται ὁμοίως.

Αἱ εὐθεῖαι $y=\pm\frac{\beta}{\alpha}x$ καλοῦνται ***ἀσύμπτωτοι*** τῆς Y_π.

Ἐν γένει, εὐθεῖά τις καλεῖται ἀσύμπτωτος ἀπεράντου τινὸς κλάδου καμπύλης, ὅταν ἡ ἀπόστασις σημείου κειμένου ἐπὶ τοῦ κλάδου τούτου ἀπὸ τῆς εὐθείας ἔχῃ ὅριον τὸ 0, ὅταν τὸ σημεῖον τοῦτο ἀπομακρύνεται ἐπ᾽ ἄπειρον ἐπὶ τοῦ κλάδου.

Αἱ ἐξισώσεις τῶν ἀσυμπτώτων

$$\boxed{y=\pm\frac{\beta}{\alpha}x} \qquad \text{τῆς } Y_\pi \quad \frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1 \qquad (1')$$

προκύπτουν ἐκ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς, ἂν γράψωμεν

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=0, \text{ ἢ } \left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}\right)\left(\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta}\right)=0$$

ὅτε $\quad \frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta}=0 \quad$ καὶ $\quad \frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=0.$

Διὰ $\alpha=\beta$ ἡ ἐξίσωσις τῆς Y_π εἶνε $x^2-y^2=\alpha^2$ καὶ καλεῖται αὕτη ***ἰσοσκελὴς*** $\boldsymbol{Y_\pi}$, αἱ δ' ἀσύμπτωτοι ταύτης εἶνε κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας μὲ ἐξισώσεις $y=\pm x$.

Ἂν θεωρήσωμεν τὴν εὐθεῖαν $y=\lambda x$ αἱ τετμημέναι τῶν κοινῶν σημείων ταύτης καὶ τῆς (1΄) δίδονται ὑπὸ τῶν $x=\frac{\alpha\beta}{\pm\sqrt{\beta^2-\alpha^2\lambda^2}}$, αἵτινες εἶνε πραγματικαί, ἐὰν εἶνε $\beta^2-\alpha^2\lambda^2\geqq 0$, ἢ ἐὰν $|\lambda|\leqq\frac{\beta}{\alpha}$. Ἑπομένως, πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Ο, περιεχομένη μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων $y=\pm\frac{\beta}{\alpha}x$ μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται καὶ ὁ ἄξων τῶν x, τέμνει τὴν Y_π εἰς δύο πραγματικὰ σημεῖα, ἐνῶ αἱ κείμεναι μεταξὺ τῶν $y=\pm\frac{\beta}{\alpha}x$, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ ἄξων τῶν y, δὲν ἔχουν κοινὸν πραγματικὸν σημεῖον μὲ τὴν Y_π.

Πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου Y_π καλεῖται ***διάμετρος αὐτῆς***· καὶ ***πρωτεύουσα*** μέν, ἂν τέμνῃ ταύτην εἰς πραγματικὰ σημεῖα, ***δευτερεύουσα*** δέ, ἂν δὲν τέμνῃ πράγματι αὐτήν. Διὸ τοῦτο καὶ ὁ ἄξων τῶν x λέγεται συνήθως ***κύριος*** ἢ ***πρωτεύων***, ἐνῶ ὁ τῶν y ***δευτερεύων ἄξων*** τῆς Y_π.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 163. Συνδέσατε τὰς κορυφὰς Β΄, Β τῆς Ελ μὲ τὰς ἑστίας αὐτῆς Ε΄,Ε δι' εὐθυγράμμων τμημάτων καὶ δείξατε ὅτι σχηματίζεται ρόμβος μὲ πλευρὰν **α**.

164. Εὕρετε τὰς ἑστίας Ελ μὲ ἡμιάξονας 5 καὶ 3.

165. Εὕρετε τὰ γ καὶ ε τῆς Ελ μὲ ἐξίσωσιν $19x^2+26y^2=494$.

166. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν Ελ μὲ $\beta=3$ καὶ $p=1$.

167. Εὕρετε τὰς τομὰς τῆς $16x^2+36y^2=576$ μὲ τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τῶν ἀξόνων.

168. Εὕρετε τὰ σημεῖα καθ' ἃ αἱ $y=\pm\lambda x$ τέμνουν τὴν $\beta^2x^2+\alpha^2y^2-\alpha^2\beta^2=0$.

169. Εὕρετε ἂν τὰ σημεῖα (1,—3), (—4,1), (3,2·4) κεῖνται ἐντὸς ἢ ἐκτὸς ἢ ἐπὶ τῆς Ελ μὲ $\alpha=5$, $\beta=3$.

170. Εὕρετε τὰ α, β τῆς Ελ ἐκ τῶν Ε, Ε΄ καὶ p αὐτῆς.

171. Κατασκευάσατε ἀπὸ δύο ἐκ τῶν α,β,γ, p τὰ δύο ἄλλα δι' Ελ. Πῶς μεταβάλλεται τὸ β, ὅταν αὐξάνεται τὸ α, τὸ δὲ p μένῃ σταθερόν.

172. Εἰς Ελ μὲ ἄξονας ἐπὶ τῶν ἀξόνων τῶν συντεταγμένων καὶ κέντρον τὴν ἀρχὴν δίδονται τὰ σημεῖα (10,5), (6,13). Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς.

173. Εἰς Ελ οἱ ἄξονες μὲ μήκη 2α,2β εἶνε παράλληλοι πρὸς τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων, τὸ δὲ κέντρον (x_0,y_0). Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς· α') ἂν ἐφάπτεται τῶν ἀξόνων· β') ἂν ἐφάπτεται τοῦ ἄξονος τῶν y εἰς τὸ Ο· γ') ἂν ἐφάπτεται τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ ἔχῃ τὸ κέντρον αὐτῆς ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y· δ') ἂν ἐφάπτεται τοῦ ἄξονος τῶν y καὶ τέμνῃ τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὰ σημεῖα (3,0) καὶ (7,0).

174. Νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον εἰς τὴν Ελ $\beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$, τοῦ ὁποίου τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ἔχουν λόγον λ ($\alpha>\beta$, $\lambda>1$) καὶ αἱ πλευραὶ εἶνε παράλληλοι πρὸς τοὺς ἄξονας.

175. Εἰς τὴν Ελ τοῦ προηγουμένου προβλήματος νὰ γραφῇ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι κορυφαὶ νὰ κεῖνται ἐπὶ τῶν ἑστιῶν, αἱ δ' ἄλλαι ἐπὶ τῆς Ελ. Τίνες αἱ συντεταγμέναι τῆς κορυφῆς τῆς κειμένης εἰς τὸ α' τεταρτημόριον;

176. Περὶ τὸ σημεῖον $M_1(x_1,0)$, ὅπου $0<x_1<\alpha$, νὰ γραφῇ περιφέρεια κύκλου ἐφαπτομένη ἐσωτερικῶς τῆς $\beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$. Τίς ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας καὶ πότε τὸ πρόβλημα εἶνε ἀδύνατον;

177. Τί παριστάνουν αἱ ἐξισώσεις α') $x=x_0+\alpha\,\sigma\upsilon\nu\,\omega$, $y=y_0+\beta\eta\mu\omega$· β') $x=\dfrac{\alpha(1-\omega^2)}{1+\omega^2}$, $y=\dfrac{2\beta\omega}{1+\omega^2}$, ὅπου x_0,y_0 σταθερὰ καὶ ω μεταβλητή.

178. Υπ μὲ κέντρον Ο δίδονται $\beta=8$, $\gamma=17$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς, ἂν ὁ πρωτεύων ἄξων της α') κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x· β') ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y.

179. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἄξονες Υπ, τῆς ὁποίας ὁ πρωτεύων ἄξων κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x, τὸ κέντρον εἰς τὸ Ο, δίδονται δὲ καὶ τὰ σημεῖα (4,5·—1)καὶ (6,8).

180. Αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου Υπ εἶνε x_0,y_0. Τίς ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς, ἂν ὁ πρωτεύων ἄξων μήκους 2α εἶνε παράλληλος α') πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x· β') πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y, ὁ δὲ δευτερεύων ἔχῃ μῆκος 2β.

181. Τίς ἡ ἐξίσωσις Υπ μὲ κέντρον τὸ σημεῖον (—15,0), δευτερεύοντα ἄξονα παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y, ἂν τὸ Ο εἶνε ἑστία αὐτῆς καὶ τέμνῃ τὸν ἄξονα τῶν y εἰς τὰ σημεῖα $(0,\pm16)$;

182. Ἐὰν συνδέσωμεν δι' εὐθειῶν τρία σημεῖα P_i (x_i, y_i), $i=1,2,3$, ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς, ἡ τομὴ τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου κεῖται ἐπ' αὐτῆς.

183. Δίδεται ἡ περιφέρεια (0,0,α) καὶ ἡ ἰσοσκελὴς Υπ $x^2-y^2=\alpha^2$. Φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην εἰς σημεῖον Μ τῆς περιφερείας, τέμνουσαν εἰς τὸ Ρ τὸν ἄξονα τῶν x. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ (ΜΡ) ἰσοῦται μὲ τὴν τεταγμένην τῆς Υπ, ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὸ Ρ.

181. Αἱ ἐπὶ τὴν διάκεντρον δέσμης περιφερειῶν κάθετοι διάμετροι ἔχουν τὰ ἄκρα των ἐπὶ ἰσοσκελοῦς Υπ, τῆς ὁποίας ὁ πρωτεύων ἄξων κεῖται ἐπὶ τῆς διακέντρου τῆς δέσμης ἢ εἶνε κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἢ ἡ Υπ εἶνε ἐκφυλισμένη εἰς δύο εὐθείας, διχοτόμους τῶν γωνιῶν τῶν ἀξόνων.

185. Κατασκευάσατε Υπ μὲ $\gamma=3$ καὶ $\alpha=2$.

186. Δείξατε ὅτι πᾶσα εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸν πρωτεύοντα ἄξονα $Υ_π$ τέμνει αὐτὴν εἰς δύο σημεῖα πραγματικά.

187. Εὕρετε τὰς ἑστίας καὶ τὰς ἀσυμπτώτους τῆς $16x^2-9y^2=144$.

188. Ποία εἶνε ἡ ἐξίσωσις $Υ_π$ μὲ κύριον ἄξονα $4α$, $p=3$ καὶ κέντρον τὸ Ο;

189. Τίνες αἱ ἐξισώσεις τῶν ἀσυμπτώτων τῆς $Υ_π$ $\frac{(x-α_1)^2}{α^2}-\frac{(y-β_1)^2}{β^2}=1$ καὶ τίνες τῆς $\frac{(y-β_1)^2}{α^2}-\frac{(x-α_1)^2}{β^2}=1$;

190. Ἐκ δύο ἐκ τῶν $α$, $β$, $γ$, p ὑπολογίσατε τὰ ἄλλα δι' $Υ_π$.

191. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ ἑστίαι $Υ_π$ ἐκ τῶν ἀσυμπτώτων καὶ τῶν κορυφῶν αὐτῆς.

192. Τί παριστάνει ἡ $α^2y^2-β^2x^2=α^2β^2$;

§ 20. Πολικαὶ ἐξισώσεις ἐλλείψεως καὶ ὑπερβολῆς.

Ἔστω ἡ $Ε_λ$ ἢ $Υ_π$ $\quad β^2x^2 \pm α^2y^2=α^2β^2 \quad (1)$ καὶ $M(x,y)$ σημεῖον αὐτῆς μὲ πολικὰς συντεταγμένας $ϱ, ϑ$ ὡς πρὸς πόλον τὸ κέντρον αὐτῆς Ο.

Θέτοντες $x=ϱ συνϑ$, $y=ϱ ημϑ$ εἰς τὴν πρώτην τῶν (1) εὑρίσκομεν

$$\frac{συν^2ϑ}{α^2} \pm \frac{ημ^2ϑ}{β^2}=\frac{1}{ϱ^2} \qquad (2)$$

ἥτις εἶνε ἡ ***πολικὴ ἐξίσωσις*** τῆς $Ε_λ$ ἢ $Υ_π$ ὡς πρὸς πόλον τὸ κέντρον αὐτῆς. Ταύτην δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ ὡς ἑξῆς,

$$ϱ^2=\frac{α^2β^2}{β^2συν^2ϑ \pm α^2ημ^2ϑ} \qquad (3)$$

Θέτοντες δὲ $ημ^2ϑ=1-συν^2ϑ$ καὶ $α^2 \mp β^2=γ^2$ εὑρίσκομεν διὰ τὴν α΄ περίπτωσιν ἢ τὴν β΄, ὅτε πρόκειται διὰ τὴν $Ε_λ$ ἢ $Υ_π$,

$$ϱ^2=\frac{α^2β^2}{α^2-γ^2συν^2ϑ}, \quad ϱ^2=\frac{α^2β^2}{γ^2συν^2ϑ-α^2} \qquad (4)$$

ἢ $$ϱ^2=\frac{β^2}{1-ε^2συν^2ϑ} \quad \text{καὶ} \quad ϱ^2=\frac{β^2}{ε^2συν^2ϑ-1} \qquad (5)$$

Ἐκ τῆς α΄ τῶν (4) παρατηροῦμεν ὅτι, διὰ $ϑ=0$ τὸ $ϱ$ λαμβάνει τὴν μεγίστην τιμὴν αὐτοῦ $α$, ὅταν δὲ μεταβάλλεται τὸ $ϑ$ ἀπὸ 0 μέχρις 90°, τὸ $ϱ$ ἐλαττοῦται ἀπὸ $α$ μέχρι τοῦ $β$. Ἄρα αἱ ὁμόκεντροι περιφέρειαι μὲ κέντρον τὸ τῆς $Ε_λ$ καὶ ἀκτῖνα μήκους $α$ ἢ $β$ ἔχουν κοινὰ σημεῖα μὲ τὴν $Ε_λ$ τὰ ἄκρα τοῦ μεγάλου ἢ τοῦ μικροῦ ἄξονος αὐτῆς καὶ λέγονται ***περιγεγραμμένη*** καὶ ***ἐγγεγραμμένη*** εἰς αὐτήν.

Ἂν εἰς δοθεῖσαν ἀκτῖνα $ϱ$ τοῦ σημείου $M(ϱ, ϑ)$ τῆς $Ε_λ$ κατασκευάσωμεν τὴν κάθετον αὐτῆς $ϱ'=(OM')$, θὰ εἶνε $M'(ϱ', ϑ'=ϑ+90^\circ)$, καὶ θὰ ἔχωμεν $$\frac{συν^2θ'}{α^2} + \frac{ημ^2θ'}{β^2} = \frac{1}{ϱ'^2} \qquad (6)$$

Ἐπειδὴ δ' εἶνε $συνθ' = -ημθ, ημθ' = συνθ$, λαμβάνομεν διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (2) καὶ (6)

$$\frac{1}{ϱ^2} + \frac{1}{ϱ'^2} = \frac{1}{α^2} + \frac{1}{β^2} \qquad (7)$$

Ἤτοι, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀντιστρόφων δύο καθέτων πολικῶν ἀκτίνων $E_λ$ (ὡς πρὸς πόλον τὸ O) εἶνε σταθερόν.

Ἐκ τῆς β' τῶν (4) ἔχομεν ὅτι, διὰ $θ=0$, τὸ ϱ (ἀποκλειομένων ἀρνητικῶν τιμῶν αὐτοῦ) λαμβάνει τὴν ἐλαχίστην τιμήν του α, αὐξάνεται δὲ μετὰ τοῦ θ καὶ τείνει εἰς ∞, ὅταν τὸ θ τείνῃ εἰς τιμὴν ὥστε $(γ^2συν^2θ - α^2) \rightarrow 0$,

ἢ $$(β^2 συν^2 θ - α^2 ημ^2 θ) \rightarrow 0 \text{ ἢ } εφθ \rightarrow \pm \frac{β}{α} \qquad (8)$$

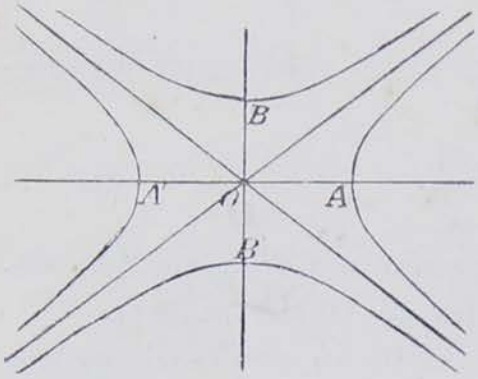
Ὅταν τὸ θ αὐξάνεται ἀπὸ τῆς α' τῶν τιμῶν τούτων, θὰ εἶνε $ϱ^2 < 0$ καὶ τὸ ϱ φανταστικόν, μέχρις ὅτου $εφθ \rightarrow -\frac{β}{α}$ (9), ὅτε τὸ $ϱ \rightarrow ∞$, ἀκολούθως δ' αὐξανομένου τοῦ θ ἀπὸ τῆς τιμῆς ταύτης, ἐλαττοῦται τὸ ϱ μέχρις ὅτου διὰ $θ = π$ λάβῃ πάλιν τὴν ἐλαχίστην τιμὴν αὐτοῦ α.

Ἐπειδὴ διὰ τῶν ἐξισώσεων $εφθ = \pm \frac{β}{α}$ ὁρίζονται αἱ ἀσύμπτωτοι τῆς $Υ_π$, ἕπεται ὅτι αὗται εἶνε διάμετροι αὐτῆς καὶ τὴν τέμνουν εἰς τὸ ∞, χωρίζουν δὲ τὰς πρωτευούσας διαμέτρους αὐτῆς ἀπὸ τῶν δευτερευουσῶν καὶ δι' ἑκάστην τῶν τελευταίων εἶνε τὸ $ϱ^2 < 0$.

Ἂν λάβωμεν ἑκατέρωθεν τοῦ O ἐπὶ δευτερευούσης διαμέτρου, ἀντιστοιχούσης εἰς ὡρισμένην τιμὴν τοῦ θ, τὸ μῆκος $r = \pm\sqrt{-ϱ^2}$, εὑρίσκομεν δύο σημεῖα, ἔστω τὰ P_1, P'_1, συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ O καὶ δι' ἕκαστον τούτων εἶνε $r^2 = -ϱ^2$, ἑπομένως $\frac{1}{r^2} = \frac{ημ^2θ}{β^2} - \frac{συν^2θ}{α^2}$.

Εἰσάγοντες εἰς ταύτην ἀντὶ τῶν $rσυνθ$ καὶ $rημθ$ τὰ x καὶ y τοῦ P_1, εὑρίσκομεν $$\frac{y^2}{β^2} - \frac{x^2}{α^2} = 1 \qquad (10)$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι, ὁ τόπος τῶν σημείων P_1 καὶ P_1' εἶνε ἐπίσης $Υ_π$ μὲ πρωτεύοντα ἄξονα τὸν τῶν y, ἐνῷ αἱ κορυφαὶ αὐτῆς ἀπέχουν ἀπόστασιν $\pm\beta$ ἀπὸ τὸ O καὶ ἔχει τὸ $\gamma=\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. Αἱ Y_π μὲ ἐξισώσεις $\beta^2x^2-\alpha^2y^2=\pm\alpha^2\beta^2$ καλοῦνται ***συζυγεῖς*** ἡ μία τῆς ἄλλης καὶ ὁ πρωτεύων ἄξων τῆς μὲν εἶνε δευτερεύων τῆς δὲ (σχ. 14).



(Σχ. 14).

Ὅθεν, αἱ συζυγεῖς ὑπερβολαὶ ἔχουν ἐξισώσεις

$$\boxed{\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=\pm 1}$$

καὶ τὰς αὐτὰς ἀσυμπτώτους, τοιαύτην δὲ θέσιν μεταξύ των, ὥστε ὁ δευτερεύων ἄξων τῆς μιᾶς εἶνε πρωτεύων τῆς ἄλλης.

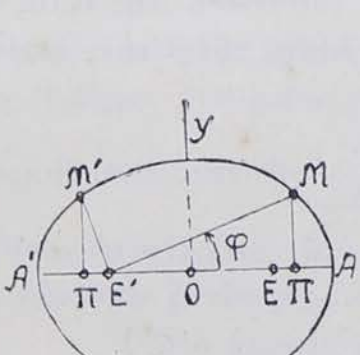
Ἔστω πόλος ἡ ἑστία E΄ τῆς E_λ καὶ πολικὸς ἄξων ὁ A΄A. Ἂν ϱ,φ εἶνε αἱ πολικαὶ συντεταγμέναι τυχόντος σημείου M αὐτῆς, ἔχομεν (σχ. 15)

$$(E'M)^2-(EM)^2=4\gamma x, \quad \text{ἢ} \quad [(E'M)+(EM)]\,[(E'M)-(EM)]=4\gamma x.$$

Ἐπειδὴ δ' εἶνε $(E'M)+(EM)=2\alpha$, ἔχομεν

$$(E'M)-(EM)=\frac{2\gamma x}{\alpha},\quad (E'M)+(EM)=2\alpha,$$

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν



(Σχ. 15).

$$(E'M)=\alpha+\frac{\gamma x}{\alpha},\quad (EM)=\alpha-\frac{\gamma x}{\alpha}$$

Ἀφ' ἑτέρου ἐπειδὴ εἶνε $(E'M)=\varrho$, $x=(O\Pi)=(OE')+(E'\Pi)=-\gamma+\varrho\,\text{συν}\varphi$, ἕπεται ὅτι $\varrho=\alpha+\frac{\gamma}{\alpha}(-\gamma+\varrho\ \text{συν}\ \varphi)$

ἢ $\varrho=\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha}+\varrho\frac{\gamma}{\alpha}\text{συν}\varphi=\frac{\beta^2}{\alpha}+\varepsilon\ \varrho\ \text{συν}\ \varphi$

καὶ ἂν τεθῇ $\gamma=\alpha\varepsilon$, $\beta^2=\alpha p$, εὑρίσκομεν

ἢ $\quad \varrho=p+\varepsilon\ \varrho\ \text{συν}\ \varphi \quad$ καὶ $\quad \boxed{\varrho=\frac{p}{1-\varepsilon\ \text{συν}\varphi}}$

ἥτις εἶνε ἡ πολικὴ ἐξίσωσις τῆς E_λ ὡς πρὸς πόλον τὴν ἑστίαν αὐτῆς E΄ ($\varepsilon<1$).

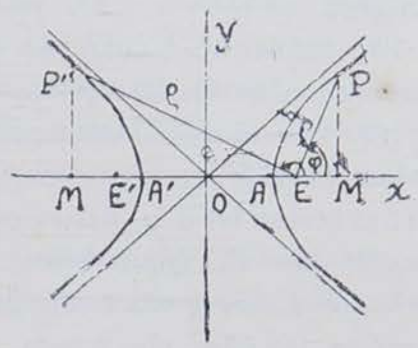
Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν διὰ $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $\varrho=p$ καὶ διὰ $\varrho=\alpha$, $\text{συν}\varphi=\varepsilon$.

Ἂν ὡς πόλον λάβωμεν τὴν ἑστίαν E τῆς $Y\pi$, πολικὸν ἄξονα τὸν τῶν x καὶ

ρ, φ εἶνε αἱ πολικαὶ συντεταγμέναι σημείου $P(x,y)$ τῆς Y_π, ἐπειδὴ (σχ. 16) εἶνε $(E'P)-(EP)=2\alpha$, εὑρίσκομεν $(E'P)+(EP)=\frac{2\gamma x}{\alpha}$, ἐκ τούτων δὲ

$$(E'P)=\frac{\gamma x}{\alpha}+\alpha,\ (EP)=\frac{\gamma x}{\alpha}-\alpha.$$

Ἀφ' ἑτέρου ἔχομεν $x=(OM)=$ $=(OE)+(EM)=\gamma+\rho\,\sigma\upsilon\nu\varphi$, ὅπου τὰ $\rho>0$ καὶ συνφ εἶνε ὁμόσημα μὲν διὰ τὰ σημεῖα τοῦ δεξιοῦ κλάδου, ἑτερόσημα δὲ διὰ τὰ τοῦ ἀριστεροῦ, Εἰσάγομεν τὴν τιμὴν τοῦ x εἰς τὴν ἀνωτέρω παράστασιν τοῦ (EP) καὶ ἔχομεν διὰ τοὺς δύο κλάδους



(Σχ. 16).

$$(EP)=\rho=\frac{\gamma}{\alpha}(\gamma+\rho\ \sigma\upsilon\nu\varphi)-\alpha,$$

ἐξ οὗ ἕπεται $\rho=\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\alpha}+\rho\frac{\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\varphi$ καὶ ἂν τεθῇ $\gamma=\alpha\varepsilon$,

$\beta^2=\alpha p$, εὑρίσκομεν

$$\boxed{\rho=\frac{p}{1-\varepsilon\,\sigma\upsilon\nu\varphi}}$$

ἥτις εἶνε ἡ πολικὴ ἐξίσωσις τῆς Y_π ὡς πρὸς πόλον τὴν ἑστίαν αὐτῆς $E(\varepsilon>1)$.

Ἵνα τὸ σημεῖον P γράψῃ ὁλόκληρον μὲν τὸν δεξιὸν κλάδον τῆς Y_π, ἀρκεῖ τὸ φ νὰ μεταβάλλεται ἀπὸ $\varphi_1=$ τοξσυν$\frac{\alpha}{\gamma}$ μέχρι τοῦ $2\pi-\varphi_1$. Ἤτοι διὰ μὲν τὰ σημεῖα τοῦ κλάδου τούτου ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν $\varphi_1<\varphi<2\pi-\varphi_1$ διότι διὰ τὰς τιμὰς ταύτας τοῦ φ τὸ ρ λαμβάνει τιμὰς θετικάς, διὰ δὲ τὰ τοῦ ἀριστεροῦ κλάδου $\pi-\varphi_1<\varphi<\pi+\varphi_1$, ἤτοι τὸ φ μεταβάλλεται ἀπὸ $\varphi_2=\pi-\varphi_1$ μέχρι $2\pi-\varphi_2=\pi+\varphi_1$. Οὕτω ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις δίδει τοὺς δύο κλάδους τῆς Y_π, ὅταν τὸ φ λαμβάνῃ πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς μεταξὺ τῶν φ_1 καὶ $2\pi+\varphi_1$, ὅπου φ_1 εἶνε ἡ γωνία τῆς ἀσυμπτώτου $\alpha y=\beta x$ μὲ τὸν ἄξονα τῶν x, ἀρκεῖ διὰ τὰς τιμὰς ἀπὸ $2\pi-\varphi_1$ μέχρι $2\pi+\varphi_1$, νὰ λαμβάνωμεν τὴν ἀντίστοιχον ἐπιβατικὴν ἀκτῖνα κατὰ τὴν ἀντίθετον φορὰν ἐκείνης, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν διὰ τὰς ἄλλα τιμὰς τοῦ φ.

Διὰ $\varphi=90^\circ$ ἔχομεν $\rho=p$, ἤτοι, ἡ ἐπιβατικὴ ἀκτὶς τῆς ἑστίας E, ἡ κάθετος ἐπὶ τὸν πρωτεύοντα ἄξονα τῆς Y_π ἰσοῦται μὲ τὴν ἡμιπαράμετρον αὐτῆς p.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 193. Εὕρετε τὰς ἐπιβατικὰς ἀκτῖνας αἵτινες διχοτομοῦν τὰς γωνίας τῶν ἀξόνων τῆς $4x^2+9y^2=36$.

194. Εὕρετε τῆς προηγουμένης ἐλλείψεως τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀντιστρόφων τῶν ἐπιβατικῶν ἀκτίνων (πόλου O), αἵτινες εἶνε παράλληλοι πρὸς τὰς εὐθείας $7x+4y-1=0$ καὶ $4x-7y+30=0$.

195. Εὕρετε τὴν ἐκκεντρότητα τῆς προηγουμένης Ελ καὶ τὰς πολικὰς αὐτῆς ἐξισώσεις.

196. Δείξατε ὅτι ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων διχοτομεῖ πᾶσαν δι' αὐτοῦ διερχομένην χορδὴν τῆς ἐλλείψεως.

197. Δίδονται δύο ἐλλείψεις $\beta^2x^2+\alpha^2y^2=1$, $\beta^2_1x^2+\alpha^2_1y^2=\alpha^2_1\beta^2_1$ μὲ τὸ αὐτὸ ε. Δείξατε ὅτι εἶνε ὄχι μόνον $\alpha:\alpha_1=\beta:\beta_1$, ἀλλὰ καὶ ὅτι δύο τυχοῦσαι ἐπιβατικαὶ ἀκτῖνες (πόλου O) ϱ, ϱ_1 ἀντιστιχοῦσαι εἰς πολικὴν γωνίαν ω ἔχουν λόγον $\varrho:\varrho_1 = \alpha:\alpha_1$. Αἱ δύο Ελ ἔχουν θέσεις ὁμοίως κειμένας καὶ λέγονται *ὅμοιαι*. Ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι ἡ ἰσότης τῶν ἐκκεντροτήτων δύο ἐλλείψεων εἶνε ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα αὗται εἶνε ὅμοιαι.

198. Δείξατε ὅτι δι' Ελ μὲ ἡμιάξονας μήκους α,β καὶ ἐκκεντρότητα ε εἶνε $\alpha=p:(1-\varepsilon^2)$, $\beta=p:\sqrt{1-\varepsilon^2}$, $\gamma=\varepsilon p:(1-\varepsilon^2)$.

199. Ἐκφράσατε εἰς Ελ τὰ β, γ, p διὰ τῶν α καὶ ε.

200. Ελ τις (τῆς τροχιᾶς τοῦ πλανήτου Ἑρμοῦ) ἔχει $\varepsilon=0{,}2$. Κατασκευάσατε ὁμοίαν αὐτῆς Ελ.

201. Ἡ ἀπόστασις της Γῆς ἀπὸ τοῦ Ἡλίου εἰς τὸ περιήλιον εἶνε πρὸς τὴν εἰς τὸ ἀφήλιον ὡς 29:30. Εὕρετε τὸ ε τῆς γηΐνης τροχιᾶς.

202. Τίνα τιμὴν ἔχει τὸ ε ἐλλείψεως, ἐὰν εἶνε δι' αὐτὴν $\gamma=\beta$;

203. Εἰς Ελ νὰ εὑρεθῇ ἡ πολικὴ ἀκτὶς (μὲ πόλον O) διὰ τὴν ὁποίαν

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\pm\beta^2}{\alpha\sqrt{\gamma^2-\beta^2}},\ \gamma>\beta.$$

204. Ἂν $\varrho_1\varrho_2$ εἶνε αἱ ἐπιβατικαὶ ἀκτῖνες Ελ ἢ Υπ (μὲ πόλον τὴν μίαν τῶν ἑστιῶν) κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, θὰ εἶνε $2\varrho_1\varrho_2=p(\varrho_1+\varrho_2)$.

205. Τί παριστάνει ἡ ἐξίσωσις $\varrho = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\,\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}$;

206. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ καμπύλη $\varrho=\dfrac{\alpha}{\eta\mu\theta}+\dfrac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\theta}$ καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι παριστάνει ἰσοσκελῆ Υπ μὲ ἀσυμπτώτους $\varrho\eta\mu\theta=\alpha$ καὶ $\varrho\sigma\upsilon\nu\theta=\alpha$.

207. Εὕρετε ἂν ἡ διάμετρος τῆς $16x^2$ $25y^2=400$, ἡ παράλληλος πρὸς τὴν $2x-7y+1=0$ εἶνε πρωτεύουσα ἢ δευτερεύουσα.

208. Εὕρετε τὴν ἐκεντρότητα τῆς $9x^2-16y^2=144$.

209 Δείξατε ὅτι εἰς Υπ εἶνε $\alpha=p:(\varepsilon^2-1)$, $\beta=p:\sqrt{\varepsilon^2-1}$, $\gamma=\varepsilon p:(\varepsilon-1)$, ὅπου p=ἡμιπαράμετρος.

210. Ἐκφράσατε εἰς Υπ τὰ β, γ, p διὰ τῶν α καὶ ε.

211. Τίνα τιμὴν ἔχει τὸ ε διὰ τὴν ἰσοσκελῆ Υπ καὶ τίς ἡ συζυγὴς ταύτης ;

212. Εὕρετε τὴν γωνίαν θ τῶν ἀσυμπτώτων ἐκ τῆς ἐκκεντρότητος ε καὶ δεί-

ξατε ὅτι δύο Y_π μὲ τὴν αὐτὴν ἐκκεντρότητα ἔχουν ἴσας γωνίας τῶν ἀσυμπτώτων των, καὶ ἀντιστρόφως.

213. Δείξατε ὅτι δύο Y_π ἔχουσαι τὴν αὐτὴν ἐκκεντρότητα εἶνε ὅμοιαι, καὶ ἀντιστρόφως, κατ' ἀναλογίαν πρὸς E_λ (Ἄσκ. 197).

214. Δείξατε ὅτι ὑπάρχουν ἄπειροι Y_π μὲ τὰς αὐτὰς ἀσυμπτώτους καὶ ὅτι πᾶσαι αὗται εἶνε ὅμοιαι, πρὸς δὲ ὅτι ἡ ἰσότης τῆς γωνίας τῶν ἀσυμπτώτων εἶνε ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα αὗται εἶνε ὅμοιαι (κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὰς ὁμοίας E_λ).

215. Ἡ ἐξίσωσις $\beta^2x^2 - \alpha^2y^2 = \alpha\beta^2\lambda$, ὅπου λ παριστάνει παράμετρον, παριστάνει ἀπείρους Y_π. Τίνα σχέσιν ἔχουν αὗται μεταξύ των; Μερικαὶ περιπτώσεις $\lambda=0, \pm\alpha, \pm k, \lambda \to \infty$; Δείξατε ὅτι τὸ ζεῦγος τῶν ἀσυμπτώτων συζυγῶν Y_π παρουσιάζεται ὡς ὁριακὴ περίπτωσις αὐτῶν.

216. Ἔστω ϱ (πόλος ἡ ἀρχὴ) πρωτεύουσά τις ἡμιδιάμετρος Y_π μὲ μήκη ἡμιαξόνων $2\alpha, 2\beta$ καὶ ϱ' ἡ πρωτεύουσα κάθετος ἡμιδιάμετρος τῆς συζυγοῦς αὐτῆς Y_π. Δείξατε ὅτι εἶνε $\dfrac{1}{\varrho^2} - \dfrac{1}{\varrho'^2} = \dfrac{1}{\alpha^2} - \dfrac{1}{\beta^2}$.

§ 21. Κατασκευὴ ἐλλείψεως.

Ἔστω ἡ E_λ $\beta^2x^2 + \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2$ (σχ. 17), ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν

$$y = \pm \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2} \qquad (1)$$

Ἡ περιγγεγραμμένη περιφέρεια εἰς τὴν (1) ἔχει ἐξίσωσιν

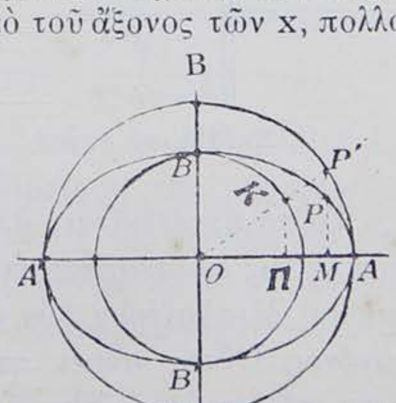
$$x^2 + y^2 = \alpha, \quad \text{ἢ} \quad y = \pm\sqrt{\alpha^2 - x^2} \qquad (2)$$

Ἐὰν ἡ εἰς τὴν τετμημένην (ΟΜ)=x ἀντιστοιχοῦσα τεταγμένη τῆς μὲν E_λ εἶνε ἡ (ΜΡ), τῆς δὲ περιγεγραμμένης περιφερείας ἡ (ΜΡ′) καὶ παρασταθοῦν αὗται διὰ τῶν y καὶ y′, θὰ εἶνε ἕνεκα τῶν (1) καὶ (2)

$$y = y'\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{ἢ} \quad (MP) = (MP')\frac{\beta}{\alpha}.$$

Ἑπομένως, ἂν τὰ διανύσματα τῶν τεταγμένων σημείων περιφερείας μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα α ἀρχόμενα ἀπὸ τοῦ ἄξονος τῶν x, πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ β:α, τὰ πέρατα τούτων κεῖνται ἐπὶ E_λ μὲ μήκη ἡμιαξόνων α καὶ β.

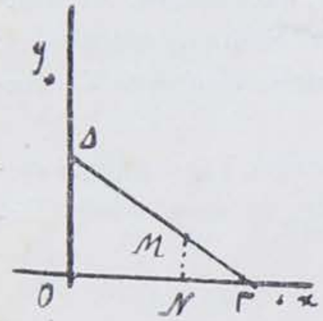
Ἐὰν τὴν ἐξίσωσιν τῆς E_λ λύσωμεν ὡς πρὸς x, εὑρίσκομεν κατ' ἀνάλογον τρόπον ὅτι, ἂν τὰ διανύσματα τῶν τετμημένων τῶν σημείων περιφερείας μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα β, ἀρχόμενα ἀπὸ τοῦ ἄξονος τῶν y, πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ α : β, τὰ πέρατα τούτων κεῖνται ἐπὶ E_λ μὲ μήκη ἡμιαξόνων α καὶ β.



(Σχ. 17)

Ἄρα, «*ἂν ἐκ τοῦ κέντρου δύο ὁμοκέντρων περιφερειῶν μὲ μήκη ἀκτίνων α καὶ β(<α) φέρωμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΟΚΡ′, καὶ ἐκ μὲν τοῦ Κ (τομῆς ταύτης μὲ τὴν ἐσωτερικὴν περιφέρειαν) τὴν παράλληλον τοῦ ἄξονος τῶν x, ἐκ δὲ τοῦ Ρ′ (τομῆς μὲ τὴν ἄλλην περιφέρειαν) παράλληλον τοῦ ἄξονος τῶν y, ἡ τομὴ τούτων εἶνε σημεῖον τῆς E_λ μὲ μήκη ἡμιαξόνων α καὶ β*».

Διότι εἶνε (ΜΡ):(ΜΡ′)=(ΠΚ):(ΜΡ′)=(ΟΚ):(ΟΡ′)=β:α, ἢ y:y′=β:α.



(Σχ. 18)

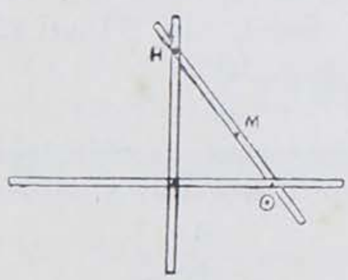
Ἂν εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΔ σταθεροῦ μήκους κινῆται, ὥστε τὰ ἄκρα αὐτοῦ νὰ κεῖνται ἐπὶ τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων xOy, ὁ τόπος τυχόντος σημείου Μ τοῦ ΓΔ εἶνε E_λ (σχ. 18).

Διότι, ἂν x, y εἶνε αἱ συντεταγμέναι τοῦ Μ ὡς πρὸς τοὺς xOy, φέρωμεν δὲ καὶ τὴν ΜΝ παράλληλον τῆς Oy, καὶ τεθῇ ἀπολύτως (ΔΜ)=α, (ΜΓ)=β, ἔχομεν

$$(ON)=x, (NM)=y, \frac{(N\Gamma)}{(M\Gamma)}=\frac{(ON)}{(\Delta M)}, \text{ ἢ } (N\Gamma)=\frac{\beta x}{\alpha},$$

ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΜΝΓ $\beta^2=y^2+\frac{\beta^2x^2}{\alpha^2}$ ἤτοι $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1.$

Ὅταν ἡ ΓΔ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Ox, τὸ Μ θὰ λάβῃ θέσιν ἔστω τὴν Α, καὶ θὰ εἶνε (ΟΑ)=(ΔΜ)=α. Ἀκολούθως, ὅταν τὸ ἄκρον Δ κινῆται ἐπὶ τοῦ Oy ἀπομακρυνόμενον τοῦ Ο, τὸ Γ προσεγγίζει πρὸς τὸ Ο, καὶ τὸ Μ γράφει τόξον ἐλλείψεως ΑΜ. Ὅταν ἡ ΓΔ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἄξονος Oy, τὸ Μ λαμβάνει τὴν θέσιν ἔστω Β, καὶ εἶνε (ΟΒ) = (ΜΓ)=β.



(Σχ. 19).

Ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος στηρίζεται ἡ κατασκευὴ ὀργάνου, χρησιμεύοντος πρὸς γραφὴν ἐλλείψεως, τὸ ὁποῖον καλεῖται ***ἐλλειψογράφος κανών***.

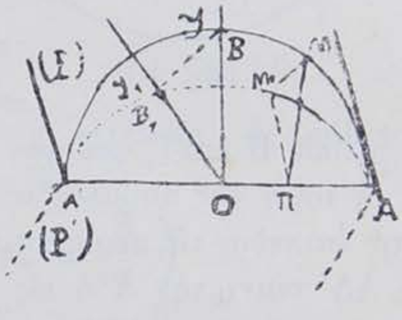
Τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ σταυροειδῆ γνώμονα (σχ. 19), φέροντα δύο εὐθεῖς αὔλακας καθέτους μεταξύ των, ἐντὸς τῶν ὁποίων εἰσάγονται καὶ ὀλισθαίνουν δύο ἀκίδες Η καὶ Θ, στηριγμέναι εἰς τὰ ἄκρα κανόνος. Οὗτος φέρει γραφίδα στερεωμένην (διὰ κοχλίου) ὁπουδήποτε τοῦ κανόνος. Ὅταν τὰ ἄκρα τοῦ κανόνος ὀλισθαίνουν ἐντὸς τῶν αὐλάκων, ἡ αἰχμὴ Μ τῆς γραφίδος γράφει τόξον ἐλλείψεως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 217. Κατασκευάσατε τυχοῦσαν περιφέρειαν. Φέρατε τυχὸν σύστημα παραλλήλων χορδῶν αὐτῆς καὶ βραχύνατε ἑκάστην ἐξ αὐτῶν ἑκατέρωθεν τοῦ μέσου αὐτῆς κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Τί εἶνε ὁ τόπος τῶν ἄκρων αὐτῶν;

218. Κατασκευάσατε Ελ μὲ ἡμιάξονας $\alpha=5$, $\beta=3$.

§ 22. Ἡ ἔλλειψις ὡς ὀρθὴ προβολὴ περιφερείας κύκλου.

Ἔστω (Ε) τὸ ἐπίπεδον περιφερείας κύκλου μὲ κέντρον Ο, (Ρ′) ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁποίου προβάλλεται αὕτη ὀρθῶς, Α′Α ἡ διάμετρος αὐτῆς καθ᾽ ἣν τέμνονται τὰ (Ε) καὶ (Ρ′) καὶ ΟΒ, μήκους α, ἡ κάθετος αὐτῆς ἀκτὶς (σχ. 20).



(Σχ. 20)

Ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας ὡς πρὸς ἄξονας τὰς εὐθείας Α′Α καὶ ΟΒ εἶνε

$$x^2 + y^2 = \alpha^2 \qquad (1)$$

Ἂν ἡ ὀρθὴ προβολὴ τοῦ μὲν Β εἶνε τὸ B_1, τυχόντος δὲ σημείου $M(x,y)$ τῆς περιφερείας τὸ M_1, θὰ ἔχωμεν, ἂν ω ($\neq 0^\circ$ ἢ 90°) εἶνε ἡ γωνία τῶν (Ε) καὶ (Ρ′),

$$(OB_1) = (OB)\text{συν}\,\omega, \quad (\Pi M_1) = (\Pi M)\ \text{συν}\,\omega.$$

Ἂν τεθῇ $(OB_1)=\beta$, λάβωμεν δ᾽ ὡς ἄξονας ἐπὶ τοῦ (Ρ′) τὰς καθέτους εὐθείας Α′Α καὶ OB_1, θὰ ἔχωμεν

$$\beta=\alpha\,\text{συν}\,\omega,\quad (\Pi M_1)=y_1,\quad (O\Pi)=x=x_1, y_1=y\,\text{συν}\,\omega \qquad \text{καὶ}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \text{συν}\,\omega, \qquad y_1 = y\,\frac{\beta}{\alpha}, \qquad x=x_1, \qquad y=y_1\,\frac{\alpha}{\beta} \qquad (2)$$

Εἰσάγοντες εἰς τὴν (1) τὰς τιμὰς τῶν x, y ἐκ τῶν (2) εὑρίσκομεν

$$x_1^2 + y_1^2\,\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^2,$$

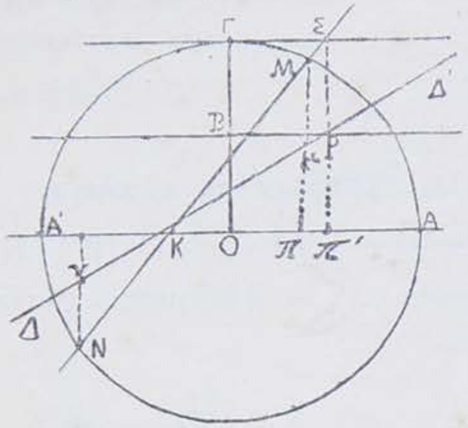
ἢ

$$\frac{x_1^2}{\alpha^2} + \frac{y_1^2}{\beta^2} = 1 \quad \text{ἢ καὶ} \quad \frac{x_1^2}{\alpha^2} + \frac{y_1^2}{\alpha^2\,\text{συν}^2\omega} = 1.$$

Ἄρα, ἡ ὀρθὴ προβολὴ περιφερείας ἐπὶ ἄλλου ἐπιπέδου εἶνε Ελ μὲ μεγάλον μὲν ἄξονα ἴσον μὲ τὴν διάμετρον τῆς περιφερείας, μικρὸν δὲ τὸ γινόμενον αὐτῆς ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας τῶν ἐπιπέδων. Ἑπομένως Ελ μὲ μήκη ἀξόνων 2α, 2β δυνάμεθα νὰ τὴν θεωρήσωμεν ὡς ὀρθὴν προβολὴν περιφερείας τῆς ὁποίας τὸ ἐπίπεδον μὲ τὸ τῆς Ελ σχηματίζει γωνίαν ω, ἥτις ὁρίζεται ἐκ τῆς $\text{συν}\,\omega = \dfrac{\beta}{\alpha}$.

Ἂν $\omega=0^\circ$ ἢ 90°, ἡ προβολὴ εἶνε περιφέρεια ἴση μὲ τὴν προβαλλομένην ἢ ἡ Α′Α.

Ἔστω ὅτι δίδονται οἱ ἡμιάξονες ΟΑ καὶ ΟΒ Ελ καὶ ζητοῦνται αἱ τομαὶ αὐτῆς ὑπὸ εὐθείας ΔΔ′ (σχ. 21). Φανταζόμεθα τὸ ἐπίπεδον τῆς περιφερείας, τῆς ὁποίας ὀρθὴ προβολὴ εἶνε ἡ E_λ, ἐφαρμόζον μὲ τὸ ἐπίπεδον ταύτης (ἀφοῦ στραφῇ περὶ τὴν Α′Α), ὅτε ἕκαστον σημεῖον μετὰ τῆς προβολῆς αὐτοῦ θὰ κεῖται ἐπ᾽ εὐθείας καθέτου τῆς Α′Α, αἱ δὲ ἀποστάσεις των ἀπὸ ταύτης θὰ ἔχουν λόγον $\alpha : \beta$, ἂν 2α, 2β εἶνε τὰ μήκη τῶν ἀξόνων τῆς E_λ. Γράφομεν περιφέρειαν ΑΓΑ′ μὲ διάμετρον τὴν Α′Α καὶ ἐκ τῶν



(Σχ. 21).

σημείων Β καὶ Γ φέρομεν εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὴν Α′Α. Ἔστω Ρ ἡ τομὴ τῆς παραλλήλου ἐκ τοῦ Β μὲ τὴν ΔΔ′ καὶ Σ τὸ σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς περιφερείας, τοῦ ὁποίου ἡ ὀρθὴ προβολὴ εἶνε τὸ Ρ. Ἂν ἡ ΔΔ′ τέμνη τὴν Α′Α εἰς τὸ Κ, ἡ εὐθεῖα ΚΣ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς περιφερείας προβάλλεται κατὰ τὴν ΔΔ′. Ἂν ἡ ΚΣ τέμνη τὴν περιφέρειαν ἔστω εἰς τὰ Μ καὶ Ν, αἱ ὀρθαὶ προβολαὶ αὐτῶν ἔστωσαν τὰ μ καὶ ν, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς E_λ κεῖνται ἐπὶ τῆς ΔΔ′ καὶ ἐπ᾽ αὐτῆς.

§ 23. Συζυγεῖς διάμετροι ἐλλείψεως ἢ ὑπερβολῆς.

Ὡς γνωστόν, ὁ τόπος τῶν μέσων παραλλήλων χορδῶν περιφερείας κύκλου εἶνε διάμετρος κάθετος ἐπ᾽ αὐτάς. Ὀνομάζομεν ***συζυγεῖς*** διαμέτρους περιφερείας δύο διαμέτρους αὐτῆς καθέτους μεταξύ των.

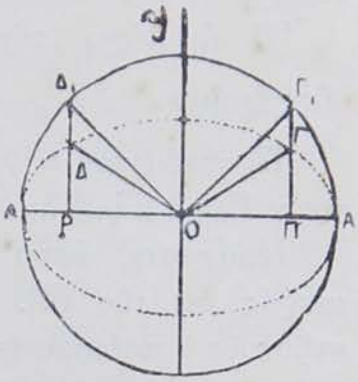
Καλοῦμεν χορδὴν μὲν E_λ τμῆμα εὐθείας τεμνούσης αὐτὴν εἰς δύο διάφορα πραγματικὰ σημεῖα περιεχόμενον μεταξὺ αὐτῶν, ***διάμετρον*** δὲ χορδὴν διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς.

Ἔστω σύστημα χορδῶν παραλλήλων τῆς περιφερείας

$$x^2 + y^2 = \alpha^2 \qquad (1)$$

τῆς ὁποίας ὀρθὴ προβολὴ εἶνε ἡ E_λ $\quad \beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2 \qquad (2)$
καὶ P_1P_2 μία τῶν ἐν λόγῳ χορδῶν τῆς (1), P'_1, P'_2 δὲ ὀρθαὶ προβολαὶ τῶν P_1, P_2 ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς E_λ. Τὸ τμῆμα $P'_1P'_2$ εἶνε χορδὴ τῆς E_λ. Ἐπειδὴ τμήματα εὐθύγραμμα παράλληλα καὶ ἴσα ἔχουν προβολὰς τμήματα ἐπίσης τοιαῦτα, ἕπεται ὅτι, τὰ μέσα τῶν παραλλήλων χορδῶν περιφερείας προβάλλονται εἰς τὰ μέσα χορδῶν παραλλήλων τῆς E_λ, ἥτις εἶνε προβολὴ τῆς περιφερείας, διάμετρος δὲ ταύτης προβάλλεται κατὰ διάμετρον τῆς E_λ.

Καλοῦμεν ***συζυγεῖς*** διαμέτρους E_λ τὰς προβολὰς δύο συζυγῶν διαμέτρων τῆς περιφερείας, τῆς ὁποίας προβολὴ εἶνε ἡ E_λ, εἶνε δ' ἑκάστη ὁ τόπος τῶν μέσων παραλλήλων χορδῶν τῆς ἄλλης.



(Σχ. 22).

Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν μηκῶν δύο συζυγῶν διαμέτρων E_λ ἰσοῦται μὲ τὸ (σταθερὸν) ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν μηκῶν τῶν ἀξόνων αὐτῆς.

Ἔστωσαν ΟΓ καὶ ΟΔ συζυγεῖς ἡμιδιάμετροι τῆς E_λ (2) καὶ $O\Gamma_1, O\Delta_1$ αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπὶ τῆς περιφερείας, τῶν ὁποίων εἶνε ὀρθαὶ προβολαὶ (σχ. 22). Ἐὰν x_1, y_1 εἶνε αἱ συντεταγμέναι τοῦ Γ_1, θὰ εἶνε $\Delta_1(-y_1, x_1)$ ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων $O\Pi\Gamma_1$ καὶ $OP\Delta_1$, θὰ ἔχωμεν δὲ

$$\Gamma\left(x_1,\, y_1\frac{\beta}{\alpha}\right),\qquad \Delta\left(-y_1,\, x_1\frac{\beta}{\alpha}\right) \tag{3}$$

$$(O\Gamma)^2 = x_1^2 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}y_1^2,\qquad (O\Delta)^2 = y_1^2 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}x_1^2$$

$$\text{Ἄρα } (O\Gamma)^2 + (O\Delta)^2 = \left(x_1^2 + y_1^2\right) + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\left(x_1^2 + y_1^2\right) = \alpha^2 + \beta^2,$$

ἐπειδὴ εἶνε $\qquad x_1^2 + y_1^2 = \alpha^2$

Ἤτοι $\qquad 4(O\Gamma)^2 + 4(O\Delta)^2 = (2\alpha)^2 + (2\beta)^2.$

Ὑπολογίζοντες τὸ διπλάσιον ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΟΓΔ καὶ διὰ τῶν συντεταγμένων τῶν Γ καὶ Δ εὑρίσκομεν

$$(x_1^2 + y_1^2)\frac{\beta}{\alpha} = \alpha\beta = \alpha'\beta'\eta\mu\omega',$$

ὅπου ω′ ἡ γωνία τῶν ΟΓ καὶ ΟΔ καὶ $(O\Gamma) = \alpha'$, $(O\Delta) = \beta'$.

Ἐὰν $\boldsymbol{E'}$ παριστάνῃ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῆς E_λ $\beta^2x^2 + \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2$ καὶ E τὸ τοῦ κύκλου τῆς περιφερείας, τῆς ὁποίας ὀρθὴ προβολὴ εἶνε ἡ E_λ, θὰ ἔχωμεν $\boldsymbol{E'} = \boldsymbol{E}\sigma\upsilon\nu\omega$, ὅπου ω παριστάνει τὴν γωνίαν τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν. Ἐπειδὴ δ' εἶνε

$$\sigma\upsilon\nu\,\omega = \frac{\beta}{\alpha},\ \text{ἕπεται ὅτι } \boldsymbol{E'} = \boldsymbol{E}\frac{\beta}{\alpha} = \pi\alpha^2\frac{\beta}{\alpha} = \pi\alpha\beta \ \text{ἢ}\ \boxed{\boldsymbol{E'} = \pi\alpha\beta}$$

Ἀνάλογα παρατηροῦμεν καὶ διὰ τυχὸν τμῆμα ἐπιφανείας, περιεχόμενον ὑπὸ τῆς E_λ ὡς πρὸς τὸ ἀντίστοιχον αὐτοῦ εἰς τὸν κύκλον. Οὕτω ἂν π.χ. δύο κυκλικοὶ τομεῖς ἔχουν ἴσα ἐμβαδὰ καὶ οἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐλλειπτικοὶ τομεῖς ἔχουν ἐμβαδὰ ἴσα. Ἐπειδὴ δ' ὁ κύκλος χωρίζεται εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη διὰ δύο καθέτων διαμέτρων αὐτοῦ, ἡ ἐπιφάνεια ἡ περιεχομένη ὑπὸ ἐλλείψεως χωρίζεται εἰς τέσσαρα ἰσοδύναμα μέρη διὰ δύο συζυγῶν διαμέτρων αὐτῆς.

Ὁ ἀνωτέρω τύπος γενικεύεται, ἂν θέσωμεν $\alpha\beta = \alpha'\beta'$ημω' ὅτε ἔχομεν

$$\boxed{E' = \pi\alpha'\beta'\text{ημ}\omega'}$$

Τὸ γινόμενον τῶν συντελεστῶν διευθύνσεως δύο συζυγῶν διαμέτρων E_λ μὲ μήκη ἡμιαξόνων α, β ἰσοῦται μὲ $-\beta^2 : \alpha^2$.

Πράγματι, ἔστω $y = \lambda x$ ἡ εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται διάμετρός τις τῆς (2). Πρὸς εὕρεσιν τῆς ἐξισώσεως τῆς εὐθείας τῆς συζυγοῦς διαμέτρου ταύτης, παρατηροῦμεν ὅτι, εἰς τὴν $y = \lambda x$ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς E_λ ἀντιστοιχεῖ ἡ $y\dfrac{\beta}{\alpha} = \lambda x$ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς (1). Ἤτοι ἡ εὐθεῖα $y = \lambda x$ τῆς διαμέτρου τῆς (2) εἶνε ὀρθὴ προβολὴ τῆς $y = \dfrac{\alpha}{\beta}\lambda x$ τῆς διαμέτρου τῆς (1). Ἡ εὐθεῖα τῆς συζυγοῦς διαμέτρου ταύτης, ὡς καθέτου ἐπ᾽ αὐτήν, ἔχει ἐξίσωσιν $y = -\dfrac{\beta}{\alpha\lambda}x$.

Ἡ ὀρθὴ προβολὴ ταύτης εἶνε ἡ εὐθεῖα τῆς συζυγοῦς διαμέτρου τῆς E_λ. κειμένης ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $y = \lambda x$, καὶ ἔχει ἐξίσωσιν

$$y\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\beta}{\alpha\lambda}x \quad \text{ἢ} \quad y = -\frac{\beta^2}{\alpha^2\lambda}x.$$

Ὅθεν, αἱ θεωρηθεῖσαι συζυγεῖς διάμετροι τῆς E_λ ἔχουν συντελεστὰς διευθύνσεως λ καὶ $-\dfrac{\beta^2}{\alpha^2\lambda}$ μὲ γινόμενον $-\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$.

Τοῦτο προκύπτει ἀμέσως καὶ ἐκ τῶν ἀνωτέρω (3) συντεταγμένων προβολῶν τῶν ΟΓ καὶ ΟΔ.

Ἐὰν φ, ψ παριστάνουν τὰς γωνίας ἑκάστης τῶν συζυγῶν διαμέτρων τῆς (2) μὲ τὸν ἄξονα τῶν x, θὰ ἔχωμεν

$$\text{εφ}\varphi . \text{εφ}\,\psi = -\frac{\beta^2}{\alpha^2} \tag{4}$$

Ἐπειδὴ δ᾽ εἶνε $\text{εφ}\varphi.\text{εφ}\psi < 0$, ἡ μία τῶν φ, ψ εἶνε ὀξεῖα ἔστω ἡ φ, ἡ δ᾽ ἄλλη ἀμβλεῖα. Αὐξανομένης τῆς φ ἀπὸ τιμῆς $< 90°$ αὐξάνεται καὶ ἡ εφ φ, ἑπομένως ἡ εφ ψ, ἀπολύτως θεωρουμένη, ἐλαττοῦται, ἤτοι ἡ τιμὴ τῆς ψ αὐξάνεται. Ἐπειδὴ ἀφ᾽ ἑτέρου (ὅταν φ ὀξεῖα) εἶνε $\text{εφ}\,(\psi - \varphi) = \dfrac{\text{εφ}\,\psi - \text{εφ}\,\varphi}{1 + \text{εφ}\,\varphi\,\text{εφ}\,\psi} < 0$ ἕνεκα τῆς (3), ἡ γωνία $\psi - \varphi$ εἶνε ἀμβλεῖα, ἐκτὸς ἂν $\varphi = 0°$, ὅτε $\psi = 90°$. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι, δύο συζυγεῖς διάμετροι E_λ χωρίζονται ὑπὸ τῶν ἀξόνων αὐτῆς· ἂν ἡ α΄ αὐτῶν στρεφομένη διαγράφῃ τὸ πρῶτον τεταρτημόριον τῆς E_λ, ἡ β΄ στρεφομένη ὁμοίως διαγράφει τὸ δεύτερον. Ἄρα οἱ ἄξονες τῆς E_λ εἶνε συζυγεῖς διάμετροι αὐτῆς καὶ αἱ μόναι κάθετοι μεταξύ των.

Μὲ τὴν βοήθειαν τῆς τελευταίας ταύτης ἰδιότητος δυνάμεθα ὡς ἑξῆς νὰ κατασκευάσωμεν τοὺς ἄξονας E_λ δεδομένης αὐτῆς καὶ τοῦ κέντρου της. Μὲ διάμετρον τυχοῦσαν διάμετρον αὐτῆς γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν κύκλου καὶ συνδέομεν διὰ χορδῶν ἀνὰ δύο διαδοχικῶς τὰς τομὰς ταύτης καὶ τῆς E_λ. Αἱ διὰ τοῦ κέντρου ἀγόμεναι παράλληλοι χορδαὶ πρὸς τὰς χορδὰς αὐτὰς εἶνε οἱ ἄξονες, κάθετοι μεταξύ των καὶ ἕκαστος διχοτομεῖ τὰς χορδάς, τὰς παραλλήλους πρὸς τὸν ἄλλον.

Προκειμένου περὶ Y_π μὲ ἐξίσωσιν $\beta^2x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2 \qquad (1')$

ἂν ἡ εὐθεῖα $y=\lambda x+\mu \qquad (2')$

τέμνῃ αὐτὴν εἰς δύο διακεκριμένα πραγματικὰ σημεῖα μὲ τετμημένας π. χ. x_1 καὶ x_2, αὗται θὰ εἶνε ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$(\beta^2-\alpha^2\lambda^2)x^2-2\alpha^2\lambda\mu x-\alpha^2(\beta^2+\mu^2)=0 \qquad (3')$$

Ἐπειδὴ ἡ τετμημένη x τοῦ μέσου τοῦ διανύσματος M_1M_2 εἶνε

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\alpha^2\lambda\,\mu}{\beta^2-\alpha^2\lambda^2} \qquad (4')$$

ἐὰν τὴν τιμὴν ταύτην εἰσαγάγωμεν εἰς τὴν $(2')$, εὑρίσκομεν ὡς τεταγμένην y τοῦ μέσου τοῦ M_1M_2, $\quad y=\dfrac{\mu\,\beta^2}{\beta^2-\alpha^2\lambda^2} \qquad (5')$

Ἐκ τῶν $(4')$ καὶ $(5')$ εὑρίσκομεν δι' ἀπαλοιφῆς τῆς παραμέτρου μ, $y=\dfrac{\beta^2}{\lambda\alpha^2}x \quad (6')$, ἥτις ἀληθεύει διὰ τὰς συντεταγμένας τῶν μέσων χορδῶν παραλλήλων πρὸς τὴν $(2')$. Ἐπειδὴ δ' ἡ $(6')$ ὡς διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου τῆς Y_π παριστάνει διάμετρον αὐτῆς, ἕπεται ὅτι τὰ μέσα παραλλήλων χορδῶν Y_π κεῖνται ἐπὶ διαμέτρου αὐτῆς. Ἐὰν τεθῇ $\lambda=\varepsilon\varphi\varphi$, καὶ $\dfrac{\beta^2}{\lambda\alpha^2}=\varepsilon\varphi\psi$, μεταξὺ τῶν συντελεστῶν διευθύνσεως $\varepsilon\varphi\varphi$ καὶ $\varepsilon\varphi\psi$ τῶν παραλλήλων χορδῶν πρὸς τὴν $(2')$ καὶ τοῦ τόπου τῶν μέσων αὐτῶν θὰ ἔχωμεν

$$\varepsilon\varphi\psi.\varepsilon\varphi\varphi=\frac{\beta^2}{\alpha^2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\sigma\upsilon\nu\,\varphi\,\sigma\upsilon\nu\,\psi}{\alpha^2}-\frac{\eta\mu\,\varphi\,\eta\mu\,\psi}{\beta^2}=0 \qquad (7')$$

Ἑπομένως, ὅταν αἱ παράλληλοι χορδαὶ Y_π σχηματίζουν γωνίαν φ μὲ τὸν ἄξονα τῶν x, ἡ διχοτομοῦσα ταύτας διάμετρος σχηματίζει μὲ αὐτὸν γωνίαν ψ.

Δύο διάμετροι Y_π τῶν ὁποίων οἱ συντελεσταὶ διευθύνσεως πληροῦν τὴν σχέσιν $(7')$ καλοῦνται ***συζυγεῖς*** διάμετροι αὐτῆς. Ἐπειδὴ δ' εἰς ἑκάστην διάμετρον Y_π ἀντιστοιχεῖ μία συζυγὴς αὐτῆς, ὁριζομένη ἐκ τῆς $(7')$, ἕπεται ὅτι, ὑπάρχουν ἄπειρα ζεύγη συζυγῶν διαμέτρων πρὸς τὰς ὁποίας εἶνε συμμετρικὴ ἡ Y_π, ἑκάστη δὲ τῶν διαμέτρων ἑνὸς ζεύγους διχοτομεῖ τὰς παραλλήλους χορδὰς πρὸς τὴν ἄλλην.

Ἐκ τῆς (7΄) ἕπεται, ὅτι καὶ αἱ δύο γωνίαι φ, ψ εἶνε ἢ ὀξεῖαι ἢ ἀμβλεῖαι, καὶ διὰ $\varphi = 0$ εἶνε $\psi = 90^0$, ἐνῶ ὅταν τὸ φ αὐξάνεται, τὸ ψ ἐλαττοῦται. Ἐφ᾽ ὅσον εἶνε $\varepsilon\varphi\,\varphi < \frac{\beta}{\alpha}$, πρέπει καὶ $\varepsilon\varphi\,\psi > \frac{\beta}{\alpha}$, ἐὰν δ᾽ εἶνε $\varepsilon\varphi\,\varphi = \frac{\beta}{\alpha}$, θὰ εἶνε καὶ $\varepsilon\varphi\,\psi = \frac{\beta}{\alpha}$. Ἑπομένως, δύο συζυγεῖς διάμετροι Y_π κεῖνται εἰς τὴν αὐτὴν γωνίαν τῶν ἀξόνων, ἐὰν δ᾽ ἡ μία εἶνε πρωτεύουσα, ἡ ἄλλη εἶνε δευτερεύουσα, καὶ ἂν ἡ μία στρέφεται κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, ἡ ἄλλη στρέφεται ἀντιθέτως, ἔχουσαι ὡς ὁριακὴν θέσιν συμπτώσεως αὐτῶν μίαν ἀσύμπτωτον τῆς καμπύλης. Οἱ ἄξονες τῆς Y_π εἶνε αἱ μόναι κάθετοι μεταξύ των συζυγεῖς διάμετροι αὐτῆς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 219. Εἰς περιφέρειαν κύκλου περιγεγραμμένην εἰς Ελ ἐγγράψατε κανονικὸν ὀκτάγωνον συμμετρικὸν πρὸς τοὺς ἄξονας, καθὼς καὶ τὸ ἀντίστοιχον σχῆμα εἰς τὴν Ελ.

220. Ποῖον ζεῦγος συζυγῶν διαμέτρων κεῖται συμμετρικῶς πρὸς τοὺς ἄξονας τῆς Ελ; καὶ δείξατε ὅτι αὗται εἶνε αἱ διερχόμεναι διὰ τῶν κορυφῶν τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὴν Ελ ὀρθογωνίου.

221. Νὰ εὑρεθῇ ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως τῆς διαμέτρου, τῆς ἐχούσης συζυγῆ τὴν σχηματίζουσαν γωνίαν 45^0 μὲ τὸν ἄξονα τῶν x καὶ κατασκευάσατε αὐτὴν μὲ τὴν βοήθειαν τῆς περιφερείας κύκλου.

222. Εὕρετε τὰς τομὰς τῆς εὐθείας $y = 3x - 5$ καὶ Ελ, τῆς ὁποίας δίδονται μόνον οἱ ἄξονες χωρὶς νὰ κατασκευασθῇ αὕτη.

223. Ἔστω $M_1(x_1, y_1)$ σημεῖον Ελ μὲ μήκη ἀξόνων 2α, 2β, ὅτε $y_1x - x_1y = 0$ εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς ἀντιστοίχου πρὸς αὐτὸ διαμέτρου αὐτῆς. Δείξατε ὅτι ἡ συζυγὴς αὐτῆς διάμετρος εἶνε $\beta^2x_1x + \alpha^2y_1y = 0$ καὶ εὕρετε τὰς συντεταγμένας τῶν ἄκρων ταύτης.

224. Δείξατε μὲ τὴν βοήθειαν τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὴν Ελ περιφερείας, ὅτι ἑκάστη εὐθεῖα τέμνει αὐτὴν εἰς δύο ἐν γένει σημεῖα.

225. Κατασκευάσατε τοὺς ἄξονας δοθέντος τοῦ σχήματος Y_π.

226. Μερικὴ περίπτωσις δι᾽ Ελ εἶνε ἡ περιφέρεια κύκλου, διὰ τὴν ὁποίαν ἀνὰ δύο συζυγεῖς διάμετροι εἶνε κάθετοι μεταξύ των. Ὑπάρχει τοιαύτη περίπτωσις διὰ τὴν ὑπερβολήν;

227. Ἔστω $M_1(x_1, y_1)$ σημεῖον τι τῆς Y_π $\beta^2x^2 - \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2$ καὶ $x_1y - y_1x = 0$ ἡ ἐξίσωσις τῆς εἰς αὐτὸ ἀντιστοιχούσης διαμέτρου αὐτῆς. Δείξατε ὅτι ἡ συζυγὴς ταύτης διάμετρος ἔχει ἐξίσωσιν $\beta^2x_1x - \alpha^2y_1y = 0$. Εὕρετε τὰς συντεταγμένας τῆς τομῆς ταύτης μὲ τὴν συζυγῆ τῆς Y_π.

228. Ἂν δύο συζυγεῖς ἡμιδιάμετροι Υπ μὲ μήκη α΄, β΄ κεῖνται εἰς τὴν γωνίαν xOy τῶν ἀξόνων καὶ x_1, y_1 αἱ συντεταγμέναι τοῦ πέρατος τῆς πρώτης, αἱ τοῦ τῆς δευτέρας θὰ εἶνε $\frac{\alpha}{\beta} y_1$, $\frac{\beta}{\alpha} x_1$, ὑπάρχει δ' ἡ σχέσις $\alpha'^2 - \beta'^2 = \alpha^2 - \beta^2$,

229. Δείξατε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ὁρίζουν αἱ συζυγεῖς ἡμιδιάμετροι Υπ μὲ μήκη α΄ καὶ β΄ ἰσοῦται μὲ $^1/_2\alpha\beta$, ὅπου α, β τὰ μήκη τῶν ἡμιαξόνων αὐτῆς.

230. Ἂν ω΄ εἶνε ἡ γωνία τῶν συζυγῶν ἡμιδιαμέτρων Υπ, μὲ μήκη α΄,β΄ θὰ εἶνε $\alpha'\beta'\eta\mu\omega' = \alpha\beta$. Δείξατε ὅτι, ἂν τὸ α΄ αὐξάνεται, πρέπει νὰ αὐξάνεται καὶ τὸ β΄, ἐνῷ ἡ γωνία τούτων ω΄ ἐλαττοῦται. Διὰ τὰς ἀσυμπτώτους τὰ α΄ καὶ β΄ συμπίπτουν, τὸ ω γίνεται 0^0 τὰ δὲ α΄ καὶ β΄ ἀπείρως μεγάλα.

231. Ὑπάρχουν καὶ εἰς τὴν Υπ ἴσαι συζυγεῖς διάμετροι καθὼς εἰς τὴν Ελ ;

232. Δείξατε ὅτι αἱ ἀσύμπτωτοι τῆς Υπ $\beta^2x^2 - \alpha^2y^2 = \sigma^2\beta^2$ συμπίπτουν μὲ τὰς δύο ἴσας συζυγεῖς διαμέτρους τῆς Ελ $\beta^2x^2 + \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2$.

233. Δείξατε ὅτι αἱ κοιναὶ ἀσύμπτωτοι δύο συζυγῶν Υπ μὲ ἄξονας (Α΄Α)=2α, (Β΄Β)=2β εἶνε αἱ διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου μὲ κορυφὰς Α, Α΄, Β, Β΄.

234. Δείξατε ὅτι αἱ τέσσαρες ἑστίαι δύο συζυγῶν Υπ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας κύκλου μὲ κέντρον τὸ Ο, ἥτις καλεῖται συνήθως περιφέρεια τῶν ἑστιῶν.

235. Δείξατε ὅτι ἡ Υπ χωρίζει πάντα τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου διὰ τὰ ὁποῖα εἶνε τὸ $\beta^2x^2 - y^2\alpha^2 - \alpha^2\beta^2 > 0$ ἀπὸ ἐκεῖνα διὰ τὰ ὁποῖα εἶνε < 0. Εἰς τίνα τῶν περιοχῶν τούτων κεῖται τὸ κέντρον καὶ ἑστίαι αὐτῆς ;

236. Δίδεται ἡ Ελ $5x^2 + 9y^2 = 45$ καὶ διὰ τοῦ σημείου (10,21) ἄγεται διάμετρος αὐτῆς. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς συζυγοῦς ταύτης διαμέτρου.

237. Τίνα σχέσιν πληροῦν τὰ x_i, y_i τῶν σημείων M_i, i=1, 2, ἵνα ἀντιστοιχοῦν εἰς αὐτὰ συζυγεῖς διάμετροι τῆς $\beta^2x^2 \pm \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2$.

238. Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν Ελ διὰ τῶν p καὶ ε αὐτῆς.

239. Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν Ελ διὰ τῶν α καὶ ε αὐτῆς.

240. Χωρίσατε τὴν ἐπιφάνειαν μιᾶς Ελ ἀναχωροῦντες ἀπὸ τὸν μεγάλον ἡμιάξονα αὐτῆς εἰς 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10 μέρη ἰσοδύναμα.

241. Λύσατε ἀνάλογον πρόβλημα πρὸς τὸ προηγούμενον, ἀναχωροῦντες ἀπὸ τυχοῦσαν ἡμιδιάμετρον τῆς Ελ.

342 Εὕρετε τὰ μήκη τῶν ἀξόνων καὶ τὸ ἐμβαδὸν Ελ, τῆς ὁποίας αἱ ἴσαι συζυγεῖς διάμετροι μὲ μῆκος 2α΄ σχηματίζουν γωνίαν 45°.

243. Εὕρετε τὰ α, β, γ, p, ε καὶ τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστης τῶν Ελ
α΄) $3x^2 + y^2 = 5$· β΄) $2x^2 + y^2 = 1$· γ΄) $9x^2 + y^2 - 16 = 0$· δ΄) $9x^2 + 4y^2 = 36$·
ε΄) $y^2 + 5x^2 - 29 = 0$· ϛ΄) $5x^2 + 4y^2 = 12$.

§ 24. Ἐξίσωσις Ελ ἢ Υπ ὡς πρὸς συζυγεῖς διαμέτρους αὐτῆς.

Ἂν δύο συζυγεῖς διάμετροι τῆς Ελ ἢ Υπ $\frac{x^2}{\alpha^2} \pm \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ (1)
σχηματίζουν γωνίας φ καὶ ψ μὲ τὸν ἄξονα τῶν x, θὰ εἶνε

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\,\varphi\;\sigma\upsilon\nu\,\psi}{\alpha^2} \pm \frac{\eta\mu\,\varphi\;\eta\mu\,\psi}{\beta^2} = 0 \qquad (2)$$

Ἐὰν $2\alpha'$, $2\beta'$ εἶνε τὰ μήκη τῶν εἰς τὰς γωνίας φ καὶ ψ ἀντιστοιχουσῶν συζυγῶν διαμέτρων, θὰ ἔχωμεν διὰ τὴν E_λ ἢ Y_π

$$\frac{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}{\alpha^2} \pm \frac{\eta\mu^2\varphi}{\beta^2} = \frac{1}{\alpha'^2}, \quad \pm\frac{\sigma\upsilon\nu^2\psi}{\alpha^2} + \frac{\eta\mu^2\psi}{\beta^2} = \frac{1}{\beta'^2} \qquad (3)$$

Λαμβάνομεν τὴν εἰς τὴν γωνίαν φ ἀντιστοιχοῦσαν εὐθεῖαν τῆς διαμέτρου ὡς ἄξονα τῶν x΄, τὴν δὲ εἰς τὴν ψ ὡς ἄξονα τῶν y΄ νέου (πλαγιογωνίου) συστήματος ἀξόνων. Ἐκ τῶν τύπων μετασχηματισμοῦ

$$x = x'\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi + y'\,\sigma\upsilon\nu\,\psi$$
$$y = x'\,\eta\mu\,\varphi + y'\,\eta\mu\,\psi$$

εἰσάγομεν τὰς τιμὰς τῶν x,y εἰς τὴν (1) καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψει τὰς (2), (3) εὑρίσκομεν $\boxed{\frac{x'^2}{\alpha'^2} \pm \frac{y'^2}{\beta'^2} = 1}$ ἥτις εἶνε ἐξίσωσις τῆς E_λ ἢ Y_π ὡς πρὸς ἄξονας τὰς συζυγεῖς διαμέτρους αὐτῆς μὲ μήκη $2\alpha'$, $2\beta'$.

Ἐκ ταύτης συνάγομεν ὅτι ἡ E_λ ἢ Y_π εἶνε συμμετρικὴ καὶ ὡς πρὸς ἑκάστην τῶν συζυγῶν διαμέτρων αὐτῆς παραλλήλως πρὸς τὴν ἄλλην.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 244. Τίς ἡ ἐξίσωσις τῆς E_λ μὲ ἡμιάξονας $\alpha=7, \beta=5$ ὡς πρὸς σύστημα συζυγῶν διαμέτρων αὐτῆς, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ ὡς ἄξων τῶν x θεωρουμένη εἶνε παράλληλος τῆς $2x+7y-4=0$;

245. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν E_λ μὲ μήκη ἀξόνων 2α, 2β ὡς πρὸς τὰς συζυγεῖς διαμέτρους αὐτῆς, συμμετρικὰς ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας αὐτῆς.

246. Δείξατε ὅτι εἰς ἰσοσκελῆ Y_π, ἐπειδὴ εἶνε $\alpha=\beta$, $\varphi+\psi=90^0$, $\alpha'=\beta'$, θὰ εἶνε $x'^2 - y'^2 = \alpha'^2$ ὡς πρὸς τὰς συζυγεῖς διαμέτρους αὐτῆς.

247. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἴσαι συζυγεῖς διάμετροι τῆς $\beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$ καὶ τίς ἡ ἐξίσωσις ταύτης ὡς πρὸς ἄξονας τὰς ἴσας ταύτας συζυγεῖς διαμέτρους;

248. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν τὰ σημεῖα M_1, M_2 εἶνε ἄκρα συζυγῶν διαμέτρων μὲ μήκη $2\alpha'$, $2\beta'$ τῆς $\beta^2x^2 \pm \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2$, θὰ ἔχωμεν 1) $x_1^2 \pm x_2^2 = \alpha^2$ 2) $y_1^2 \pm y_2^2 = \pm\beta^2$ 3) $\alpha'^2 \pm \beta'^2 = \alpha^2 \pm \beta^2$.

§ 25. Θέσεις εὐθείας ὡς πρὸς ἔλλειψιν ἢ ὑπερβολήν.

Ἔστω ἡ E_λ ὡς πρὸς ἄξονας τὰς εὐθείας τῶν συζυγῶν διαμέτρων αὐτῆς μὲ μήκη $2\alpha'$, $2\beta'$, $\qquad \beta'^2x^2+\alpha'^2y^2=\alpha'^2\beta'^2 \qquad (1)$

καὶ ἡ εὐθεῖα $\qquad Ax + By + \Gamma = 0 \qquad (2)$

Λαμβάνοντες τὴν τιμὴν τοῦ y ἐκ τῆς (2) καὶ εἰσάγοντες αὐτὴν εἰς τὴν (1) εὑρίσκομεν,

$$(A^2\alpha'^2 + B^2\beta'^2)\,x^2 + 2A\Gamma\alpha'^2x + (\Gamma^2 - B^2\beta'^2)\,\alpha'^2 = 0 \qquad (3)$$

Τὸ εἶδος τῶν ῥιζῶν ταύτης ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ σημείου τοῦ $A^2\alpha'^2+B^2\beta'^2-\Gamma^2$. Ἑπομένως, ἡ εὐθεῖα (2) τέμνει τὴν E_λ (1) εἰς δύο πραγματικὰ διακεκριμένα σημεῖα ἢ συμπίπτοντα ἢ φανταστικά, ἐὰν τὸ $A^2\alpha'^2+B^2\beta'^2-\Gamma^2$ εἶνε >0, ἢ $=0$, ἢ <0.

Ἂν ζητοῦμεν τὴν θέσιν τῆς εὐθείας $y=\lambda x+\mu$ ὡς πρὸς τὴν Y_π $\beta^2x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$, παρατηροῦμεν ὁμοίως, ὅτι θὰ ἔχουν αὗται δύο κοινὰ σημεῖα ἢ συμπίπτοντα ἢ φανταστικά, καθόσον ἡ ἐξίσωσις

$$(\beta^2-\alpha^2\lambda^2)x^2-2\alpha^2\lambda\mu x-\alpha^2(\beta^2+\mu^2)=0 \qquad (4)$$

ἔχει ῥίζας πραγματικὰς ἢ ἴσας ἢ φανταστικάς, ἤτοι ἂν τὸ $\mu^2+\beta^2-\alpha^2\lambda^2$ εἶνε >0 ἢ 0 ἢ <0. Ἐὰν $\beta^2-\alpha^2\lambda^2>0$ ἢ $\lambda^2<\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$, ἡ εὐθεῖα εἶνε παράλληλος πρὸς μίαν πρωτεύουσαν διάμετρον τῆς Y_π καὶ ἔχει δύο κοινὰ πραγματικὰ σημεῖα μὲ αὐτήν. Εὐκόλως δεικνύεται ὅτι, ἂν x_1, x_2 εἶνε αἱ τετμημέναι τῶν κοινῶν σημείων, θὰ εἶνε $x_1x_2<0$· ἄρα τὰ σημεῖα τομῆς κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ ἄξονος τῶν y ἐπὶ τῶν δύο κλάδων τῆς Y_π. Ἐὰν εἶνε $\lambda^2 > \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$, ἡ εὐθεῖα εἶνε παράλληλος πρὸς δευτερεύουσαν διάμετρον τῆς Y_π καὶ τὰ σημεῖα τομῆς θὰ εἶνε πραγματικὰ καὶ διακεκριμένα ἢ συμπίπτοντα ἢ φανταστικά, ἂν εἶνε $\mu^2+\beta^2-\alpha^2\lambda^2>0$ ἢ $=0$ ἢ <0. Εἰς τὴν α´ περίπτωσιν τὰ κοινὰ σημεῖα κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἄξονος τῶν y, ἐπειδὴ $x_1x_2>0$, ἤτοι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κλάδου τῆς Y_π · εἰς τὴν β´ περίπτωσιν ἡ εὐθεῖα εἶνε παράλληλος πρὸς ἀσύμπτωτον τῆς Y_π, τὸ δὲ κοινὸν σημεῖον ἔχον τετμημένην $-\dfrac{\beta^2+\mu^2}{2\lambda\mu}$, τείνει εἰς τὸ ∞, ὅταν $\mu \to 0$, ὅτε ἡ εὐθεῖα τείνει νὰ συμπέσῃ μὲ μίαν τῶν ἀσυμπτώτων.

Παρατηρητέον ὅτι, ἐπειδὴ ὅταν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $Ax^2+Bx+\Gamma=0$ τὸ $A\to 0$ εἶνε δὲ τὸ $B\neq 0$, ἡ μία τῶν ῥιζῶν αὐτῆς τείνει εἰς τὸ ∞, ἐνῷ ὅταν A, $B\to 0$ καὶ αἱ δύο ῥίζαι τείνουν εἰς τὸ ∞, ἕπεται ὅτι, ὅταν διὰ τὴν (4) ἔχωμεν $\beta^2-\alpha^2\lambda^2=0$, $\mu\neq 0$, ἡ εὐθεῖα τέμνει τὴν Y_π εἰς ἓν σημεῖον κείμενον εἰς πεπερασμένην ἀπόστασιν καὶ εἰς ἄλλο κείμενον τὸ ∞, ἐνῷ αἱ ἀσύμπτωτοι τέμνουν αὐτὴν εἰς δύο σημεῖα κείμενα εἰς ∞ καὶ συμπίπτοντα. Διὰ τοῦτο θεωροῦμεν συμπίπτοντα εἰς ἓν τὰ εἰς ∞ σημεῖα τῶν δύο κλάδων τῆς Y_π, τὰ κείμενα ἐντὸς τῶν γωνιῶν xOy καὶ $x'Oy'$, καθὼς καὶ τὰ εἰς τὰς yOx' καὶ xOy'. Κατὰ ταῦτα ἡ Y_π ἔχει δύο σημεῖα ***κατ᾽ ἐκδοχὴν***, αἱ δὲ ἀσύμπτωτοι θεωροῦνται ὡς ἐφαπτόμεναι αὐτῆς μὲ σημεῖα ἁφῆς τὰ κατ᾽ ἐκδοχὴν σημεῖα ταύτης.

Ἐπειδὴ ἡ E_λ καὶ Y_π παρίστανται ὑπὸ ἐξισώσεων β΄ βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y τέμνονται δὲ ὑπὸ εὐθείας εἰς δύο σημεῖα, ἐν γένει, λέγονται ***καμπύλαι β΄ βαθμοῦ***, ὡς καὶ ἡ περιφέρεια κύκλου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 249. Εὕρετε τὰ σημεῖα τομῆς τῆς εὐθείας $7x-3y+2=0$ καὶ τῆς Y_π $81x^2-4y^2=324$.

250. Τίνα σχέσιν πρέπει νὰ πληροῦν τὰ Α,Β,Γ, ἵνα ἡ εὐθεῖα $Ax+By+\Gamma=0$ ἐφάπτεται τῆς $\beta^2x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$;

251. Τίς ὁ τόπος τῶν τομῶν καθέτων ἐπ' ἀλλήλας εὐθειῶν ἐφαπτομένων τῆς $\beta^2x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$;

252. Ὑπάρχουν ἐφαπτόμεναι παράλληλοι πρὸς διάμετρον Y_π;

253. Μεταξὺ τίνων ὁρίων μεταβάλλονται οἱ συντελεσταὶ διευθύνσεως τῶν ἐφαπτομένων Y_π;

254. Ἐὰν εἶνε $\beta^2-\alpha^2\lambda^2<0$, εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ λ ἀντιστοιχοῦν δύο παράλληλοι ἐφαπτόμεναι τῆς Y_π μὲ μήκη ἡμιαξόνων α, β, ἔχουσαι ἐξισώσεις $y=\lambda x\pm\sqrt{\alpha^2\lambda^2-\beta^2}$. Τίνα τὰ σημεῖα ἐπαφῆς αὐτῶν;

§ 26. Ἐξίσωσις ἐφαπτομένης ἐλλείψεως ἢ ὑπερβολῆς.

Ἔστω
$$\frac{x^2}{\alpha'^2}\pm\frac{y^2}{\beta'^2}=1 \tag{1}$$
ἡ ἐξίσωσις E_λ ἢ Y_π ὡς πρὸς συζυγεῖς διαμέτρους αὐτῆς μὲ μήκη $2\alpha'$, $2\beta'$ καὶ τέμνουσα αὐτὴν εὐθεῖα εἰς τὰ $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$. Αὕτη ἔχει ἐξίσωσιν
$$y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1) \tag{2}$$
καὶ εἶνε
$$\frac{x_1^2}{\alpha'^2}\pm\frac{y_1^2}{\beta'^2}=1,\qquad \frac{x_2^2}{\alpha'^2}\pm\frac{y_2^2}{\beta'^2}=1$$
ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν
$$\frac{x_1^2-x_2^2}{\alpha'^2}\pm\frac{y_1^2-y_2^2}{\beta'^2}=0 \quad \text{ἢ} \quad \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\mp\frac{\beta'^2(x_1+x_2)}{\alpha'^2(y_1+y_2)} \tag{3}$$

Οὕτω ἡ ἐξίσωσις τῆς M_1M_2 τεμνούσης τὴν E_λ ἢ Y_π δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν
$$y-y_1=\mp\frac{\beta'^2(x_1+x_2)}{\alpha'^2(y_1+y_2)}(x-x_1).$$

Ὑποθέτομεν τώρα ὅτι τὸ $M_2 \to M_1$ ὅτε $x_2 \to x_1$, $y_2 \to y_1$ καὶ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης εὐθείας τῆς E_λ ἢ Y_π εἰς τὸ M_1 γίνεται
$$y-y_1=\mp\frac{\beta'^2}{\alpha'^2}\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$$
ἢ
$$\frac{x_1x}{\alpha'^2}\pm\frac{y_1y}{\beta'^2}=\frac{x_1^2}{\alpha'^2}\pm\frac{y_1^2}{\beta'^2} \quad \text{ἢ καὶ} \quad \boxed{\frac{x_1x}{\alpha'^2}\pm\frac{y_1y}{\beta'^2}=1}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 255. Ποία εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης τῆς Ελ ἢ Υπ εἰς τὸ $M_1(x_1, y_1)$ ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας αὐτῆς μὲ μήκη 2α, 2β;

256. Κατασκευάσατε τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ (x_1, y_1) Ελ ἐκ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον ἀφῆς (x'_1, y'_1) τῆς περιφερείας, τῆς ὁποίας ὀρθὴ προβολὴ εἶνε ἡ Ελ.

257. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης τῆς Ελ $\beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$ εἰς τὸ $M_1(x_1, y_1)$ αὐτῆς, θεωροῦντες αὐτὴν ὡς ὀρθὴν προβολὴν τῆς περιφερείας (0, 0, α).

258. Εὕρετε τὸ σημεῖον ἀφῆς καὶ τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης Ελ παραλλήλου α') πρὸς εὐθεῖαν ὁριζομένην διὰ τῶν συντεταγμένων αὐτῆς ἐπὶ τὴν ἀρχήν. β') πρὸς τὴν εὐθεῖαν $x\sigma\upsilon\nu\varphi+y\eta\mu\varphi-R_0=0$. γ') πρὸς χορδὴν συνδέουσαν τὰς κορυφὰς A καὶ B τῆς Ελ.

259. Ἡ εὐθεῖα $\nu x+\mu y=\mu\nu$ ἐφάπτεται τῆς Ελ $\beta'^2x^2+\alpha'^2y^2=\alpha'^2\beta'^2$, ἐὰν εἶνε $\nu^2\alpha'^2+\mu^2\beta'^2=\mu^2\nu^2$. Εἰς τίνα σχέσιν ὑπόκεινται τὰ α', β', ἐὰν εἶνε δεδομένα τὰ μ καὶ ν;

260. Εὕρετε τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου καὶ ἑκάστης τῶν ἑστιῶν Υπ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον $M_1(x_1, y_1)$ αὐτῆς.

261. Εὕρετε τὰς συντεταγμένας ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τῆς ἐφαπτομένης Υπ $\beta^2x_1x-\alpha^2y_1y=\alpha^2\beta^2$.

262. Ἐξετάσατε τὴν θέσιν τῆς εὐθείας $y=\lambda x+\mu$ πρὸς τὴν Υπ $\beta'x^2-\alpha'^2y^2=$ $=\alpha'^2\beta'^2$, ἀναφερομένων πρὸς τὰς συζυγεῖς διαμέτρους αὐτῆς μὲ μήκη 2α', 2β'. Τίνες αἱ ἐξισώσεις τῶν ἀσυμπτώτων ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας αὐτῆς;

263. Μετασχηματίσατε τὰς ἐξισώσεις ὡς πρὸς ὀρθογωνίους ἄξονας τῶν ἀσυμπτώτων Υπ, μὲ μήκη ἀξόνων 2α,2β λαμβάνοντες ὡς νέους ἄξονας τὰς συζυγεῖς διαμέτρους αὐτῆς μὲ μήκη 2α', 2β'.

264. Δείξατε ὅτι αἱ ἀσύμπτωτοι Υπ εἶνε αἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον προκύπτει, ἂν ἐκ τῶν ἄκρων δύο συζυγῶν διαμέτρων φέρωμεν παραλλήλους πρὸς αὐτάς.

265. Εἰς Υπ γνωρίζομεν τὰ μήκη 2α', 2β' καὶ τὴν θέσιν τῶν δύο τούτων συζυγῶν διαμέτρων. Κατασκευάσατε τὰς ἀσυμπτώτους καὶ τοὺς ἄξονας αὐτῆς.

266. Γράψατε τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης Υπ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$y=\frac{\beta'}{\alpha'}x\sqrt{1+\frac{\beta'^2}{y_1^2}}-\frac{\beta'^2}{y_1}$$ καὶ εὕρετε ἐκ ταύτης τὰς ἀσυμπτώτους αὐτῆς.

267. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις ἐφαπτομένης Υπ $\beta^2x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$ ἀπέχουσα ἀπὸ τὸ κέντρον αὐτῆς ἀπόστασιν k.

268. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις Υπ διερχομένης διὰ τοῦ (x_1, y_1) μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων, πρωτεύοντα ἄξονα τὸν τῶν x καὶ ἀσύμπτωτον τὴν $y=\lambda x$.

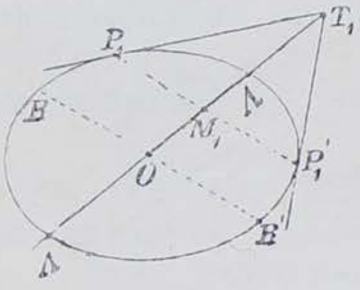
269. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις Υπ μὲ κέντρον O, πρωτεύοντα ἄξονα τὸν τῶν x καὶ ἐφαπτομένης τῶν εὐθειῶν $y=\lambda_i x+\beta_i$, $i=1, 2$.

270. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν ἐφαπτομένων εὐθειῶν τῆς $8x^2\pm3y^2=24$, τῶν ἀγομένων διὰ τοῦ σημείου (2, —1).

§ 27. Ἰδιότητες ἐφαπτομένων καὶ διαμέτρων E_λ καὶ Y_π.

Ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\frac{x_1 x}{\alpha'^2} \pm \frac{y_1 y}{\beta'^2} = 1$ τῆς ἐφαπτομένης E_λ ἢ Y_π εἰς τὸ $M_1(x_1, y_1)$ αὐτῆς, ἀναφερομένης ὡς πρὸς ἄξονας τὰς συζυγεῖς διαμέτρους της μὲ μήκη $2\alpha'$, $2\beta'$ θέσωμεν π. χ. $y_1=0, x_1=\alpha'$ καὶ ἀκολούθως $y_1=0$, $x_1=-\alpha'$, εὑρίσκομεν $x=\alpha'$ καὶ $x=-\alpha'$, ἤτοι αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἄκρα διαμέτρου τῆς E_λ ἢ Y_π εἶνε παράλληλοι πρὸς τὴν συζυγῆ αὐτῆς διάμετρον.

Τὴν ἰδιότητα ταύτην δυνάμεθα νὰ δείξωμεν καὶ ὡς ἑξῆς. Φανταζόμεθα ὅτι μία χορδὴ τῆς E_λ ἢ Y_π κινεῖται παραλλήλως πρὸς ἑαυτήν, ὥστε αἱ τομαὶ νὰ τείνουν πρὸς ἓν σημεῖον αὐτῆς, ὅτε ἡ χορδὴ τείνει νὰ γίνῃ ἐφαπτομένη τῆς E_λ ἢ Y_π εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο.



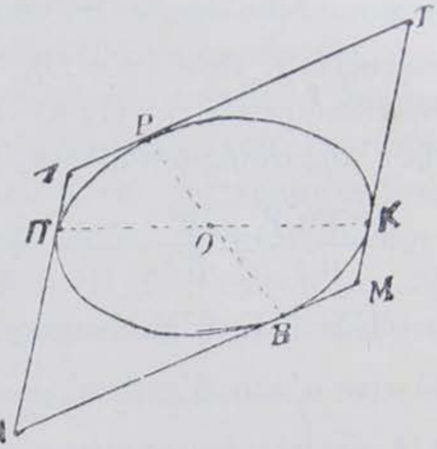
(Σχ. 23).

Ἡ διάμετρος ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς, ὡς τόπος τῶν μέσων παραλλήλων χορδῶν, εἶνε συζυγὴς τῆς διαμέτρου τῆς παραλλήλου πρὸς τὴν ἐφαπτομένην.

Ἐὰν θεωρήσωμεν ἐφαπτομένας E_λ ἢ Y_π εἰς δύο σημεῖα αὐτῆς $P_1(x_1, y_1)$, $P'_1(x_1, -y_1)$, συμμετρικὰ πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x (σχ. 23), ἤτοι ὡς πρὸς τὴν διάμετρον μήκους $2\alpha'$, ὑπολογίσωμεν δὲ τὰς τετμημένας τούτων ἐπὶ τὴν ἀρχήν, εὑρίσκομεν δι' ἑκάστην $(OT_1) = \frac{\alpha'^2}{x_1}$. Ἤτοι, δύο τυχοῦσαι ἐφαπτόμεναι E_λ, π. χ. αἱ P_1T_1, P'_1T_1 τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον T_1 τῆς διαμέτρου αὐτῆς, τῆς διχοτομούσης τὴν χορδὴν $P_1P'_1$, ἥτις συνδέει τὰ σημεῖα ἐπαφῆς.

Δύο χορδαὶ E_λ καλοῦνται ***συμπληρωματικαὶ*** μεταξύ των, ἂν συνδέουν τυχὸν σημεῖον τῆς καμπύλης μὲ τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου αὐτῆς.

Ἐὰν φέρωμεν διαμέτρους E_λ παραλλήλους πρὸς δύο συμπληρωματικὰς χορδὰς αὐτῆς, ἑκάστη τούτων διχοτομεῖ τὴν χορδήν, τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ἄλλην. Ἑπομένως, αἱ διάμετροι E_λ αἱ παράλληλοι πρὸς ζεῦγος συμπληρωματικῶν χορδῶν εἶνε συζυγεῖς διάμετροι αὐτῆς. Αἱ ἐφαπτόμεναι E_λ εἰς τὰ ἄκρα Ρ,Β καὶ Π,Κ δύο διαμέτρων αὐτῆς, τῶν ΡΒ καὶ ΠΚ, σχηματίζουν παραλληλόγραμμον, περιγεγραμμένον εἰς αὐτὴν (σχ. 24), τὰ δὲ σημεῖα ἐπαφῆς Ρ,Β καὶ Π, Κ ὁρίζουν παραλληλόγραμμον ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτήν. Αἱ διάμετροι, αἱ παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ παραλληλογράμμου τούτου, εἶνε συζυγεῖς καὶ διχοτομοῦν τὰς ἀπέναντι πλευρὰς αὐτοῦ, ἑπομένως, διέρχονται διὰ τῶν κορυφῶν τοῦ περιγεγραμμένου ΝΜΤΛ.



(Σχ. 24).

Κατ' ἀναλογίαν, καλοῦμεν περιγεγραμμένον παραλληλόγραμμον εἰς Y_π, ἂν αἱ πλευραί του εἶνε ἐφαπτόμεναι αὐτῆς. Ἔχομεν δ' ὅτι, αἱ διαγώνιοι ἑκάστου παραλληλογράμμου περιγεγραμμένου εἰς E_λ ἢ Y_π εἶνε συζυγεῖς διάμετροι αὐτῆς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 271. Τίνα γωνίαν σχηματίζει διάμετρος ἐπὶ τῆς $y=\lambda x$ τῆς $\beta^2x^2\pm\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$ μὲ τὴν συζυγῆ αὐτῆς;

272. Διὰ σημείου M_0 νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ὥστε ὑπὸ τῆς $\beta^2x^2\pm\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$ νὰ τέμνεται κατὰ χορδὴν διχοτομουμένην ὑπὸ τοῦ M_0.

273. Διὰ σημείου M_1 νὰ ἀχθῇ χορδὴ τῆς $\beta^2x^2\pm\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$, διχοτομουμένη ὑπὸ τῆς $Ax+By=0$.

274. Νὰ εὑρεθοῦν δύο συζυγεῖς διάμετροι ΟΔ καὶ ΟΔ′ Y_π, ὥστε ἡ ΟΔ νὰ διχοτομῇ τὴν γωνίαν τῆς ΟΔ′ μὲ τὸν ἄξονα τῶν x.

275. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις δύο συζυγῶν διαμέτρων E_λ, σχηματιζουσῶν γωνίαν 45^0, Μερικὴ περίπτωσις : $\alpha^2=3$, $\beta^2=2$.

276. Ἐὰν συνδέσωμεν μὲ εὐθείας τὰ σημεῖα M_i (x_i, y_i) $i=1,2$, Y_π μὲ τρίτον μεταβλητὸν σημεῖον αὐτῆς Μ, τὰ εὐθύγραμμα τμήματα τὰ ὁριζόμενα ἐπὶ τῶν ἀσυμπτώτων ὑπὸ τῶν M_1M καὶ M_2M ἔχουν σταθερὸν μῆκος.

277. Τὸ μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχόμενον μέρος τῆς ἐφαπτομένης Y_π ἰσοῦται μὲ τὴν διάμετρον αὐτῆς τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ἐφαπτομένην.

278. Τὰ μήκη τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων τῆς τυχούσης τεμνούσης Y_π, μετρούμενα ἀπὸ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων αὐτῆς μέχρι τῆς καμπύλης, ἔχουν γινόμενον τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς παραλλήλου πρὸς τὴν τέμνουσαν.

279. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ E_λ ἐφάπτεται εἰς τὰς κορυφὰς αὐτῆς ἑνὸς ὀρθογωνίου μὲ διαγωνίους τὰς ἀσυμπτώτους Y_π, ταύτης δ' ὁ πρωτεύων ἄξων συμπίπτει μὲ ἕνα τῶν τῆς E_λ.

§ 28. Ἐξίσωσις E_λ ἢ Y_π ὡς πρὸς διάμετρον καὶ ἐφαπτομένην αὐτῆς.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις E_λ ἢ Y_π ὡς πρὸς ἄξονας τὰς συζυγεῖς διαμέτρους αὐτῆς μὲ μήκη $2\alpha'$, $2\beta'$ $\dfrac{x^2}{\alpha'^2}\pm\dfrac{y^2}{\beta'^2}=1$ (1)

Ἂν ζητοῦμεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτῆς ὡς πρὸς νέους ἄξονας τὴν διάμετρον αὐτῆς μήκους $2\alpha'$ καὶ τὴν ἐφαπτομένην αὐτῆς εἰς τὸ ἄκρον ταύτης, π.χ. εἰς τὸ $(-\alpha',0)$, διὰ τὴν E_λ, ἢ εἰς τὸ $(\alpha',0)$ διὰ τὴν Y_π, θὰ θέσωμεν εἰς τὴν (1) $x=x'\mp\alpha'$ $y=y'$. Διατηροῦντες διὰ τὴν ἁπλότητα τὰς αὐτὰς μεταβλητὰς x καὶ y ἀντὶ τῶν x', y' εὑρίσκομεν

$$\frac{(x\mp\alpha')^2}{\alpha'^2}\pm\frac{y^2}{\beta'^2}=1 \quad \text{ἢ} \quad \boxed{y^2=2\,\frac{\beta'^2}{\alpha'}\,x\mp\frac{\beta'^2}{\alpha'^2}\,x^2} \qquad (2)$$

Ἐὰν ἡ E_λ ἢ Y_π ἀναφέρεται εἰς τοὺς ἄξονας συμμετρίας αὐτῆς, θὰ εἶνε $\alpha'=\alpha$, $\beta'=\beta$ καὶ $\dfrac{\beta^2}{\alpha}=p$, ἡ δὲ ἐξίσωσις αὐτῆς πρὸς τὴν Α΄Α καὶ τὴν ἐφαπτομένην αὐτῆς εἰς τὸ Α΄ $(-\alpha,0)$ διὰ τὴν E_λ ἢ τὸ $A(\alpha,0)$ διὰ τὴν Y_π (τὸ ὁποῖον Α΄ ἢ Α θὰ παριστάνωμεν κατωτέρω διὰ τοῦ Ο) εἶνε

$$\boxed{y^2=2\,p\,x\mp\frac{p}{\alpha}\,x^2} \qquad (3)$$

Ἐὰν θέσωμεν $\mp\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}=q$, θὰ εἶνε $\alpha=\dfrac{p}{\mp q}$ ἢ $\alpha=\dfrac{p}{|q|}$ καὶ $\beta=\dfrac{p}{\sqrt{|q|}}$

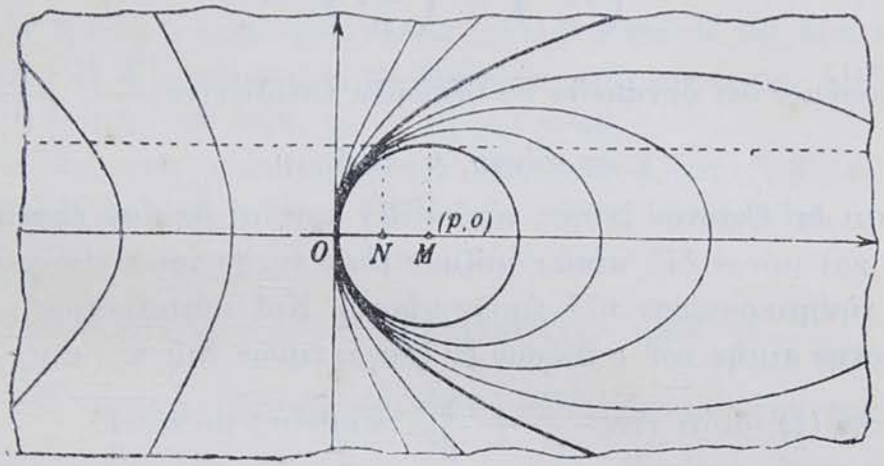
$$\boxed{y^2=2\,p\,x+qx^2} \qquad (4)$$

ὅπου τὰ p, q παριστάνουν ἀριθμοὺς πεπερασμένους τοιούτους, ὥστε νὰ εἶνε $p>0$, $q\geqq-1$, (5), ἀλλὰ $q\neq0$. Διὰ $q<0$ ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν E_λ, ἐνῷ διὰ $q=-1$ περιφέρειαν κύκλου καὶ διὰ $q>0$ Y_π. Ἐὰν ὑποτεθῇ $\beta>\alpha$ διὰ τὴν E_λ, ὅτε ὁ μεγάλος ἄξων αὐτῆς κεῖται ἐπὶ τοῦ ἀρχικοῦ ἄξονος τῶν y θὰ ἔχωμεν τὴν (4) καὶ διὰ πάσας τὰς πεπερασμένας τιμὰς τοῦ $q<-1$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν θέσιν τῶν ἀπείρων τὸ πλῆθος E_λ καὶ Y_π τῶν παριστανομένων ἀπὸ τῆς (4), ὅταν p εἶνε σταθερὸν διὰ τιμὰς τοῦ $q\geqq-1$ (ἐνῷ ὑποτίθεται καὶ $\alpha\geqq\beta$ διὰ τὰς E_λ καὶ τὴν περιφέρειαν), παριστάνομεν διὰ τοῦ Κ τὴν περιφέρειαν μὲ ἀκτῖνα p καὶ κέντρον $M(p,0)$. Ἐκ τῶν (4) καὶ (5) ἔχομεν

$$1+q=\frac{(x-p)^2+y^2-p^2}{x^2}\geqq0. \qquad (6)$$

Ἐπειδὴ τὸ $(x-p)^2+y^2$ παριστάνει τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου (x,y) ἀπὸ τοῦ $M(p,0)$, ἕπεται ὅτι δι᾽ οὐδενὸς σημείου κειμένου ἐντὸς τοῦ κύκλου Κ διέρχεται καμπύλη τις τοῦ πλήθους, ἐνῷ δι᾽ ἑκάστου σημείου (x,y) διαφόρου τοῦ κοινοῦ σημείου Ο πασῶν τῶν γραμμῶν τοῦ πλήθους καὶ κειμένου ἐκτὸς τοῦ Κ, διέρχεται μία καὶ μόνη τοιαύτη. Ἤτοι δι᾽ ἕκαστον τοιοῦτον ζεῦγος x, y εὑρίσκεται ἐκ τῆς (6) μία ὡρισμένη τιμὴ τοῦ q, ἐπαληθεύουσα τὴν (5), ἥτις τιθεμένη εἰς τὴν (4) δίδει τὴν διὰ τοῦ σημείου (x,y) διερχομένην καμπύλην. Ἐὰν ὑποτεθῇ καὶ $\alpha < \beta$, $q < -1$, θὰ ἔχωμεν καὶ πλῆθος γραμμῶν (4), τοιούτων ὥστε, δι' ἑκάστου σημείου κειμένου ἐντὸς τοῦ Κ θὰ διέρχεται μία καὶ μόνη. Αἱ E_λ ἐκ τῶν (4) πληροῦν τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῆς περιφερείας τοῦ Κ καὶ τῆς γραμμῆς ἥτις παριστάνεται ὑπὸ τῆς (4) διὰ $q=0$, ἐνῶ αἱ Y_π τὸ ἐκτὸς καὶ ἀριστερὰ τῆς γραμμῆς ταύτης μέρος τοῦ ἐπιπέδου. Ἡ εὐθεῖα $y=p$ (σχ.25) τέμνει ἑκάστην τῶν γραμμῶν τοῦ πλήθους εἰς τὰ σημεῖα, τῶν ὁποίων



(Σχ. 25).

αἱ (ὀρθαὶ) προβολαὶ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x εἶνε αἱ ἑστίαι. Ἑπομένως, διὰ τὰς E_λ τοῦ πλήθους τῆς μὲν μιᾶς ἑστίας ὁ τόπος εἶνε τὸ τμῆμα ΜΝ τοῦ ἄξονος τῶν x, ὅπου Ν εἶνε ἡ ὀρθὴ προβολὴ τῆς τομῆς τῆς $y=p$ καὶ τῆς καμπύλης (4) διὰ $q=0$ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x, τῆς δ' ἄλλης ἑστίας ὁ τόπος εἶνε τὸ ἄλλο μέρος τοῦ ἄξονος τῶν x, τὸ δεξιὰ τοῦ σημείου Μ. Διὰ τὰς Y_π ὁ τόπος τῆς μὲν μιᾶς ἑστίας εἶνε τὸ τμῆμα ΝΟ τοῦ ἄξονος τῶν x, τῆς δ' ἄλλης τὸ ἀρνητικὸν μέρος τοῦ ἄξονος τούτου. Οὕτω ἡ καμπύλη, ἥτις ἔχει ἐξίσωσιν $y=2px$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὁριακὴ θέσις τῶν E_λ καὶ Y_π τοῦ πλήθους (4), ὅταν $q \rightarrow 0$, ὅτε ἡ μία τῶν ἑστιῶν τῶν E_λ καὶ Y_π τείνει πρὸς τὸ σημεῖον $N\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, ἡ δ' ἄλλη καὶ τὸ κέντρον τῶν E_λ καὶ Y_π τείνει νὰ ἀπομακρυνθῇ εἰς τὸ ∞ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 280. Κατασκευάσατε παραλληλόγραμμον ἢ ὀρθογώνιον περιγεγραμμένον εἰς E_λ. Τίνα θέσιν πρέπει νὰ ἔχουν περιγεγραμμένοι εἰς αὐτὴν ῥόμβοι;

281. Ἐὰν R παριστάνῃ τὴν ἀπόλυτον ἀπόστασιν τοῦ κέντρου Ο Y_π ἀπὸ ἐφαπτομένης

αὐτῆς εἰς τὸ P, καὶ εἶνε (OP)=α', διὰ δὲ τὴν συζυγῆ αὐτῆς ἡμιδιάμετρον (OK)=β', εὑρίσκομεν β'R=αβ. Δείξατε ὅτι ὁ τόπος τῶν τομῶν καθέτων ἐφαπτομένων Y_π εἶνε περιφέρεια μὲ ἀκτῖνα $\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$ καὶ κέντρον τὸ O.

282. Κατασκευάσατε τὰς ἐφαπτομένας Y_π εἰς τὰ ἄκρα διαμέτρου καὶ τῆς συζυγοῦς αὐτῆς ἐφαπτομένης τῆς συζυγοῦς Y_π, δείξατε δ' ὅτι προκύπτει παραλληλόγραμμον μὲ ἐμβαδὸν σταθερόν.

§ 29. Ἔκεντρος γωνία σημείων ἐλλείψεως.

Ἂν τὴν ἐξίσωσιν E_λ $\beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$ γράψωμεν ὡς κατωτέρω

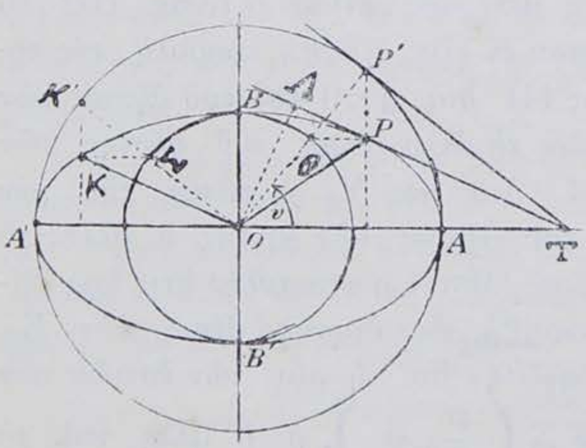
$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{y}{\beta}\right)^2=1 \tag{1}$$

παρατηροῦμεν ὅτι δυνάμεθα νὰ θέσωμεν, ἐπειδὴ εἶνε $\left|\frac{x}{\alpha}\right|$, $\left|\frac{y}{\beta}\right|<1$,

$$x=\alpha\sigma\upsilon\nu\upsilon,\ y=\beta\eta\mu\upsilon \tag{2}$$

Αὗται δι' ἕκαστον ζεῦγος τιμῶν τῶν x,y, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὴν (1) καὶ μόνον δι' αὐτὰς ὁρίζουν μίαν τιμὴν τοῦ υ (περιοριζόμενοι εἰς τὴν μικροτέραν τῶν τιμῶν αὐτοῦ). Καὶ ἀντιστρόφως, αἱ (2) δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ υ δίδουν ἓν ζεῦγος τιμῶν διὰ τὰ x,y, ἐπαληθεῦον τὴν (1), διότι εἶνε $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=\sigma\upsilon\nu^2\upsilon+\eta\mu^2\upsilon=1$.

Ἐπειδὴ ἡ (1) καὶ αἱ (2) ὁρίζουν τὰ αὐτὰ ζεύγη τιμῶν x,y, λέγομεν ὅτι αἱ (2) εἶνε ἰσοδύναμοι πρὸς τὴν (1). Τὴν (μεταβλητὴν) παράμετρον υ, μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ὁποίας δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν πάντα τὰ σημεῖα τῆς E_λ, καλοῦμεν ***ἔκκεντρον γωνίαν*** τοῦ σημείου x, y αὐτῆς, εἰς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ τοῦτο καὶ παριστάνομεν αὐτὸ συμβολικῶς μὲ (υ).



(Σχ. 26).

Ἂν τυχοῦσα ἡμιδιάμετρος τῆς E_λ τέμνῃ τὴν μὲν ἐγγεγραμμένην εἰς αὐτὴν περιφέρειαν (σχ. 26) εἰς τὸ Θ, τὴν δὲ περιγεγραμμένην εἰς τὸ P', τὸ ἀντίστοιχον πρὸς αὐτὰ σημεῖον P τῆς E_λ θὰ ἔχῃ τετμημένην τὴν τοῦ P' καὶ τεταγμένην τὴν τοῦ Θ. Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ P ἔχει συντεταγμένας ασυνυ, βημυ, τὸ υ παριστάνει τὴν γωνίαν AOP'. Ἤτοι, ἡ ἔκκεντρος γωνία σημείου E_λ εἶνε ἡ πολικὴ γωνία τοῦ ἀντιστοίχου πρὸς αὐτὸ σημείου τῆς περὶγεγραμμένης εἰς αὐτὴν περιφερείας, ἂν ὡς πολικὸς ἄξων ληφθῇ ὁ μεγάλος ἄξων αὐτῆς.

Μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ἐκκέντρου γωνίας δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν διαφόρους ἰδιότητας τῆς E_λ καθὼς π.χ. τὰς κατωτέρω.

Τὸ διπλάσιον ἐμβαδὸν τριγώνου δύο συζυγῶν ἡμιδιαμέτρων E_λ μὲ μήκη ἀξόνων 2α, 2β εἶνε σταθερόν καὶ ἴσον μὲ $\alpha\beta$ (§ 23, σελ. 51).

Πράγματι, ἔστωσαν ΟΡ καὶ ΟΚ δύο συζυγεῖς ἡμιδιάμετροι τῆς E_λ $\beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$ καὶ Ρ (x_1,y_1), Κ (x_2, y_2). Θὰ εἶνε (σχ. 26),

$$x_1=\alpha\sigma\upsilon\nu\upsilon,\quad y_1=\beta\eta\mu\upsilon,\quad x_2=-\alpha\eta\mu\upsilon,\quad y_2=\beta\,\sigma\upsilon\nu\,\upsilon,$$

ἐπειδὴ ἂν υ εἶνε ἡ ἔκκεντρος γωνία τοῦ Ρ, ἡ τοῦ Κ θὰ εἶνε $\upsilon+90^\circ$. Ἑπομένως ἂν E' παριστάνῃ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΟΡΚ, θὰ ἔχωμεν

$$2E'=(x_1\,y_2 - y_1\,x_2)=\alpha\beta.$$

Ἂν αἱ συζυγεῖς ἡμιδιάμετροι ΟΡ, ΟΚ ἔχουν μήκη α', β', τὸ διπλάσιον ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΟΡΚ εἶνε ἴσον μὲ $\alpha'\beta'\eta\mu\omega'$, ἐὰν ω' παριστάνῃ τὴν γωνίαν αὐτῶν. Οὕτω θὰ ἔχωμεν τότε

$$\alpha\beta=\alpha'\beta'\eta\mu\omega',\quad \text{ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι}\quad \eta\mu\omega'=\frac{\alpha\beta}{\alpha'\beta'}$$

καὶ διὰ τοῦ τύπου τούτου δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν γωνίαν ω'.

Παρατηρητέον ὅτι, ἡ γωνία ω' γίνεται ἐλαχίστη, ὅταν τὸ $\alpha'\beta'$ γίνῃ μέγιστον. Ἀλλ εἶνε

$$2\alpha'\beta'=\alpha'^2+\beta'^2-(\alpha'-\beta')^2=\alpha^2+\beta^2-(\alpha'-\beta')^2$$

ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι, ὅταν εἶνε $\alpha'=\beta'$, τὸ $\alpha'\beta'$ γίνεται μέγιστον. Τοῦτο συμβαίνει ὅταν αἱ συζυγεῖς ἡμιδιάμετροι εἶνε συμμετρικαὶ πρὸς τοὺς ἄξονας τῆς E_λ καὶ ἡ ἔκκεντρος γωνία ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν πρώτην γίνῃ 45°. Ἂν x_1, y_1 εἶνε αἱ συντεταγμέναι τυχόντος σημείου Ρ τῆς E_λ καὶ $(OP)=\alpha'$, θὰ ἔχωμεν

$$x_1=\alpha\,\sigma\upsilon\nu\upsilon,\quad y_1=\beta\eta\mu\,\upsilon,\quad x^2_1+y^2_1=\alpha'^2=\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\,\upsilon+\beta^2\eta\mu^2\,\upsilon,$$

καὶ ὅταν $\upsilon=45^\circ$ καὶ $\alpha'=\beta'$, θὰ εἶνε $\alpha'^2=\beta'^2=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}$, ἂν δὲ φ παριστάνῃ τὴν γωνίαν τῆς μιᾶς τῶν διαμέτρων μὲ τὸν ἄξονα τῶν x,

$\varepsilon\varphi\,\dfrac{\omega}{2}=\varepsilon\varphi\;\varphi=\dfrac{\beta}{\alpha}$. Ἤτοι, ἐκ πάντων τῶν ζευγῶν συζυγῶν ἡμιδιαμέτρων E_λ τὸ τῶν ἴσων καὶ συμμετρικῶς κείμενον πρὸς τοὺς ἄξονας αὐτῆς σχηματίζει τὴν ἐλαχίστην γωνίαν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 283. Εὕρετε τὴν ἔκκεντρον γωνίαν τοῦ σημείου (1,—1,6) τῆς Ελ $4x^2+25y^2=100$.

284. Ὑπὸ τίνων ἐξισώσεων ὁρίζεται ἡ ἔκκεντρος γωνία σημείου ἐλλείψεως $\beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$, κειμένου ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὸν μεγάλον ἄξονα αὐτῆς εἰς μίαν τῶν ἑστιῶν ;

285. Εὕρετε τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου ($v=45^0$) τῆς $\beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$.

286. Τίνα σχέσιν ἔχουν μεταξύ των αἱ ἔκκεντροι γωνίαι τῶν ἄκρων διαμέτρου Ελ ;

287. Δείξατε ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα τὰ προκύπτοντα ἂν συνδέσωμεν δι' εὐθυγράμμων τμημάτων τὰ ἄκρα δύο συζυγῶν διαμέτρων Ελ ἔχουν ἐμβαδὰ ἴσα. Τοῦτο ἰσχύει καὶ διὰ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ προκύπτοντα, ἂν φέρωμεν τὰς ἐφαπτομένας τῆς Ελ εἰς τὰ ἄκρα συζυγῶν διαμέτρων αὐτῆς.

288. Δείξατε ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου Ελ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς P ($x_1=\alpha\sigma\upsilon\nu\, \upsilon$, $y_1=\beta\eta\mu\, \upsilon$) εἶνε $\alpha\beta:\beta'$, ἂν (OK)$=\beta'$, καὶ ἡ OK συζυγὴς τῆς OP.

289. Δείξατε ὅτι $\varepsilon\varphi\omega'=-\varepsilon\varphi(\psi-\varphi)=-\dfrac{2\alpha\beta}{\gamma^2\eta\mu 2v}$ ὅπου ω' παριστάνει τὴν ὀξεῖαν γωνίαν συζυγῶν διαμέτρων Ελ καὶ v τὴν ἔκεντρον γωνίαν ἀντίστοιχον τῆς φ.

290. Δείξατε ὅτι διὰ τὴν ἐλαχίστην τιμὴν τῆς γωνίας ω' τῶν συζυγῶν διαμέτρων εἶνε $\alpha\varepsilon\varphi\omega'/2=\beta$, $(\alpha^2+\beta^2)\,\eta\mu\omega'=2\alpha\beta$, $(\alpha^2+\beta^2)\sigma\upsilon\nu\,\omega'=\alpha^2-\beta^2$.

291. Ὑπολογίσατε διὰ τοῦ μήκους α' ἡμιδιαμέτρου Ελ τὴν ἀντίστοιχον αὐτῆς ἔκκεντρον γωνίαν v καὶ τὴν γωνίαν φ τῆς α' μὲ τὸν ἄξονα τῶν x καὶ δείξατε ὅτι εἶνε

$$\sqrt{\alpha'^2-\beta'^2}\,\varepsilon\varphi v=\sqrt{\alpha^2-\alpha'^2},\quad \alpha\sqrt{\alpha'^2-\beta^2}\,\varepsilon\varphi\,\varphi=\beta\sqrt{\alpha^2-\alpha'^2}.$$

292. Εἰς παραλληλόγραμμον μὲ μήκη διαγωνίων 2α',2β' καὶ ὀξεῖαν γωνίαν ω δύναται πάντοτε νὰ περιγραφῇ μία μόνη Ελ μὲ μήκη συζυγῶν διαμέτρων 2α', 2β'. Μερικὴ περίπτωσις : $\alpha'=13$, $\beta'=6$, $13\,\eta\mu\omega'=7$.

293. Διὰ τὰς ἀπολύτους ἀποστάσεις R, R' τοῦ κέντρου Ελ ἀπὸ δύο ἐφαπτομένων αὐτῆς καθέτων εἶνε $R^2+R'^2=\alpha^2+\beta^2$.

294. Δείξατε ὅτι ὁ τόπος τῶν τομῶν καθέτων μεταξύ των ἐφαπτομένων Ελ εἶνε περιφέρεια κύκλου (***διευθετοῦσα*** περιφέρεια ἢ τοῦ Monge καλουμένη), μὲ κέντρον τὸ τῆς Ελ καὶ ἀκτῖνα $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

295. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον τὸ τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης Ελ ἢ Υπ, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν διὰ τῶν κορυφῶν ἐφαπτομένων αὐτῆς, διέρχεται διὰ τῶν ἑστιῶν της. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι, τὸ μεταξὺ τῶν ἐφαπτομένων τῶν κορυφῶν περιεχόμενον τμῆμα κινητῆς ἐφαπτομένης τῆς Ελ ἢ Υπ φαίνεται ἀπὸ ἑκάστην τῶν ἑστιῶν ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν ἢ ἡ γωνία ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ἀπὸ μιᾶς ἑστίας τὸ μεταξὺ δύο σταθερῶν ἐφαπτομένων περιεχόμενον τμῆμα κινητῆς ἐφαπτομένης Ελ ἢ Υπ εἶνε σταθερὰ καὶ ἴση μὲ ὀρθήν.

296. Εἰς Ελ ἢ Υπ $\beta^2x^2\pm\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$ νὰ ἀχθῇ χορδὴ M_1M_2 παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x, ὥστε νὰ εἶνε ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας τὴν ἑστίαν E(γ,0).

397. Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον, ὥστε αἱ δύο ἀπέναντι κορυφαί του νὰ εἶνε αἱ ἑστίαι Ελ ἢ Υπ καὶ αἱ δύο ἄλλαι ἐπὶ τῆς καμπύλης.

§ 30. Πόλος καὶ πολικὴ ὡς πρὸς ἔλλειψιν ἢ ὑπερβολήν.

Ἔστω ἡ Ελ ἢ Υπ ὡς πρὸς ἄξονας τὰς συζυγεῖς διαμέτρους αὐτῆς μὲ μήκη $2\alpha'$, $2\beta'$ $\quad \beta'^2x^2 \pm \alpha'^2y^2 = \alpha'^2\beta'^2 \quad (1)$ καὶ σημεῖον P (ξ,η) τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς. Ἂν x_1, y_1 εἶνε αἱ συντεταγμέναι τῆς ἀφῆς τῆς διὰ τοῦ P ἀγομένης ἐφαπτομένης τῆς (1), θὰ ἔχωμεν $\beta'^2\xi x_1 \pm \alpha'^2\eta y_1 = \alpha'^2\beta'^2$ καὶ $\beta'^2x_1^2 \pm \alpha'^2y_1^2 = \alpha'^2\beta'^2 \quad (2,3)$

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος τῶν (2,3) εὑρίσκομεν ὅτι ἄγονται δύο ἢ οὐδεμία ἢ μία ἐφαπτόμεναι διὰ τοῦ P εἰς τὴν (1), ἂν τὸ P κεῖται ἐκτὸς ἢ ἐντὸς ἢ ἐπὶ τῆς Ελ ἢ Υπ. Ἂν εἰς τὴν (2) θέσωμεν ἀντὶ τῶν x_1, y_1 τὰ x, y, ἡ ἐξίσωσις $\quad \beta'^2\xi x \pm \alpha'^2\eta y = \alpha'^2\beta'^2 \quad (4)$ παριστάνει τὴν εὐθεῖαν, ἥτις διέρχεται διὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν διὰ τοῦ P ἀγομένων ἐφαπτομένων τῆς Ελ ἢ Υπ καὶ λέγεται ***πολικὴ*** τοῦ σημείου P ὡς πρὸς τὴν (1), τὸ δὲ P καλεῖται ***πόλος*** τῆς εὐθείας (4).

Παρατηρητέον ὅτι, ἂν ὁ πόλος κεῖται ἐκτὸς ἢ ἐντὸς τῆς Ελ ἢ Υπ, ἡ πολικὴ αὐτοῦ τέμνει αὐτὴν ἢ κεῖται ἐκτός· ἂν δ' οὗτος κεῖται ἐπ' αὐτῆς ἡ πολικὴ αὐτοῦ ἐφάπτεται τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο.

Δοθείσης εὐθείας $Ax + By + \Gamma = 0$ ὡς πολικῆς Ελ ἢ Υπ, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν πόλον αὐτῆς. Πράγματι, ἂν x_1, y_1 εἶνε αἱ συντεταγμέναι τοῦ πόλου τῆς εὐθείας ὡς πρὸς τὴν (1), ἡ $\beta'^2x_1x \pm \alpha'^2y_1y = \alpha'^2\beta'^2$ πρέπει νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν δοθεῖσαν, ἑπομένως ὁ πόλος θὰ εἶνε $\left(-\frac{A}{\Gamma}\alpha'^2, \mp\frac{B}{\Gamma}\beta'^2\right)$ καὶ διὰ $\Gamma \to 0$ τείνει οὗτος εἰς τὸ ∞.

Ἂν δύο σημεῖα $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ εὑρίσκωνται οὕτως ὡς πρὸς τὴν Ελ ἢ Υπ (1), ὥστε τὸ P_2 νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς πολικῆς τοῦ P_1, θὰ εἶνε $\beta'^2x_1x_2 \pm \alpha'^2y_1y_2 = \alpha'^2\beta'^2$. Ἀλλ' αὕτη ἐκφράζει ὅτι καὶ τὸ P_1 κεῖται ἐπὶ τῆς πολικῆς $\beta'^2x_2x \pm \alpha'^2y_2y = \alpha'^2\beta'^2$ τοῦ P_2. Ἑπομένως, ἐὰν σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς πολικῆς ἄλλου, ὡς πρὸς Ελ ἢ Υπ, τοῦτο κεῖται ἐπὶ τῆς πολικῆς τοῦ πρώτου, ἢ ἐὰν σημεῖον κινῆται ἐπ' εὐθείας, ἡ πολικὴ αὐτοῦ ὡς πρὸς Ελ ἢ Υπ στρέφεται περὶ τὸν πόλον τῆς εὐθείας, καὶ ἀντιστρόφως, εἰς τὰ σημεῖα δ' εὐθείας ἀντιστοιχοῦν ὡς πολικαὶ αἱ ἀκτῖνες ἐπιπέδου δέσμης, καὶ ἀντιστρόφως.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι, αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἄκρα χορδῆς Ελ ἢ Υπ διέρχονται διὰ τοῦ πόλου τῆς χορδῆς, ἢ αἱ ἐφαπτόμεναι σημείου κειμένου ἐκτὸς Ελ ἢ Υπ ἐφάπτονται εἰς τὰ σημεῖα τῆς τομῆς αὐτῆς καὶ τῆς πολικῆς τοῦ σημείου.

Αἱ πολικαὶ σημείων διαμέτρου E_λ ἢ Y_π εἶνε παράλληλοι πρὸς τὴν συζυγῆ αὐτῆς διάμετρον. Διότι, ἐὰν ὁ πόλος διαγράφῃ διάμετρον τῆς E_λ ἢ Y_π καὶ λάβωμεν αὐτὴν καὶ τὴν συζυγῆ της ὡς ἄξονας, θὰ ἔχωμεν ὡς πολικὴν αὐτοῦ τὴν $\frac{x_1 x}{\alpha'^2}=1$, ἢ $x=\frac{\alpha'^2}{x_1}$, δηλαδὴ παράλληλον τῆς συζυγοῦς αὐτῆς. Ἀντιστρόφως, ὁ πόλος τῆς εὐθείας $Ax+\Gamma=0$ εἶνε $\left(x_1=-\frac{A}{\Gamma}\alpha'^2,\ y_1=0\right)$, ὑποθέτοντες δ' ὅτι $\Gamma \to 0$, λαμβάνομεν $x \to \infty$. Ἤτοι ὁ πόλος διαμέτρου E_λ ἢ Y_π εἶνε τὸ κατ' ἐκδοχὴν σημεῖον τῆς συζυγοῦς αὐτῆς διαμέτρου, ἐκ δύο δὲ συζυγῶν διαμέτρων E_λ ἢ Y_π ἑκάστη εἶνε πολικὴ τοῦ κατ' ἐκδοχὴν σημείου τῆς ἄλλης.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι, ἡ πολικὴ σημείου ἀσυμπτώτου Y_π εἶνε παράλληλος πρὸς αὐτὴν ἢ εἶνε αὐτὴ ἡ ἰδία, ἂν τὸ θεωρούμενον σημεῖον εἶνε τὸ κατ' ἐκδοχὴν αὐτῆς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 298. Δείξατε ὅτι αἱ ἰδιότητες πόλου καὶ πολικῆς ὡς πρὸς E_λ ἢ Y_π εἶνε ἀνεξάρτητοι τοῦ συστήματος τῶν ἀξόνων ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον ἀναφέρονται.

299. Δείξατε ὅτι, εἰς τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας $(1+\lambda)x=x_1+\lambda x_2$, $(1+\lambda)y=y_1+\lambda y_2$ ἀντιστοιχοῦν ὡς πολικαὶ αἱ ἀκτῖνες τῆς δέσμης $E_1+\lambda E_2=0$, ἂν $E_1=0$, $E_2=0$ εἶνε αἱ πολικαὶ τῶν σημείων (x_1,y_1) καὶ (x_2,y_2). Μερικαὶ περιπτώσεις: διὰ τὰς τιμὰς $\lambda=0, +1, -1$ τοῦ $\lambda \to \infty$.

300. Δείξατε ὅτι, ἐὰν διὰ σημείου ἀχθῇ τυχοῦσα ἀκτὶς τέμνουσα τὴν ἔλλειψιν εἰς τὰ M_1, M_2, αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῆς εἰς ταῦτα τέμνονται εἰς σημεῖον τῆς πολικῆς τοῦ σημείου.

301. Δοθέντος σημείου ἐκτὸς E_λ ἢ Y_π φέρατε δι' αὐτοῦ δύο ἐφαπτομένας αὐτῆς μὲ τὴν βοήθειαν τῶν πολικῶν.

302. Εὕρετε γεωμετρικῶς τὸν πόλον εὐθείας μὴ τεμνούσης τὴν E_λ ἢ Y_π.

303. Εὕρετε τὸν τόπον τῶν πόλων πασῶν τῶν ἐφαπτομένων τῆς περιφερείας $(0,0,\varrho)$ ὡς πρὸς τὴν $\beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$.

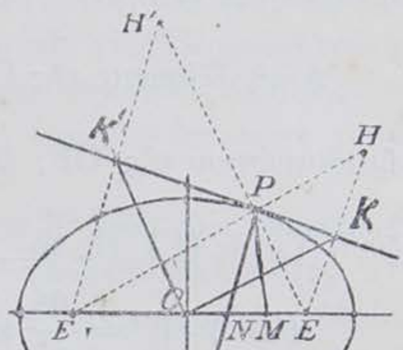
304. Εὕρετε τὰς συντεταγμένας τοῦ πόλου τῆς $3x+5y+2=0$ ὡς πρὸς τὴν $4x^2-9y^2=36$.

§ 31. Ἰδιότητες τῶν ἑστιῶν ἐλλείψεως καὶ ὑπερβολῆς.

Ἔστω ἡ E_λ ἢ Y_π
$$\frac{x^2}{\alpha^2}\pm\frac{y^2}{\beta^2}=1 \qquad (1,1')$$
τυχὸν σημεῖον τῆς E_λ $P(x_1,y_1)$ καὶ $(EP)=\varrho$, $(E'P)=\varrho'$. Ἔχομεν (§ 20,

σελ. 44) $\varrho'=\alpha+\varepsilon x_1,\quad \varrho=\alpha-\varepsilon x_1,\quad (\varepsilon\alpha=\gamma)$.

Θέτοντες $x_1=\alpha\sigma\upsilon\nu\upsilon$, ὅπου υ παριστάνει τὴν ἔκκεντρον γωνίαν τοῦ P, καὶ πολλαπλασιάζοντες τὰς (2) κατὰ μέλη εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι εἶνε $\varrho\varrho'=\alpha^2\eta\mu^2\upsilon+\beta^2\sigma\upsilon\nu^2\upsilon=\beta'^2$ ὅπου β' εἶνε τὸ μῆκος τῆς συζυγοῦς ἡμιδιαμέτρου τῆς OP καὶ $(\upsilon+90^\circ)$ τὸ ἄκρον ταύτης. Ἑπομένως τὸ γινόμενον τῶν μηκῶν δύο ἑστιακῶν ἀκτίνων σημείου E_λ ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ μήκους τῆς εἰς τὸ σημεῖον ἀντιστοιχούσης συζυγοῦς ἡμιδιαμέτρου αὐτῆς.



(Σχ. 27).

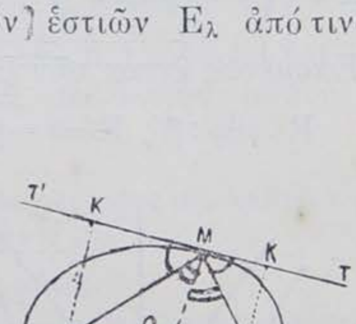
Ἂν ζητοῦμεν τὰς ἀποστάσεις $R=(EK), R'=(E'K')$ τῶν ἑστιῶν E, E' τῆς E_λ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης εἰς δοθὲν σημεῖον αὐτῆς $P(\upsilon)$, ἔχομεν (σχ. 27) λαμβάνοντες ὡς ἐξίσωσιν ταύτης τὴν

$$\beta\, x\, \sigma\upsilon\nu\, \upsilon + \alpha\, y\, \eta\mu\, \upsilon = \alpha\beta,$$

$$R,\, R'=\frac{-\beta}{\beta'}\left(\alpha\mp\gamma\sigma\upsilon\nu\,\upsilon\right),\quad \text{ἢ}\quad R, R'=\frac{-\beta}{\beta'}\left(\alpha\mp\varepsilon x_1\right)$$

$$\text{ἢ καὶ}\quad R=\frac{-\beta}{\beta'}\varrho,\ R'=\frac{-\beta}{\beta'}\varrho',\ \text{ἑπομένως καὶ}\ RR'=\beta^2.$$

Ἤτοι, τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τῶν ἑστιῶν E_λ ἀπό τινος ἐφαπτομένης αὐτῆς ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ μήκους τοῦ μικροῦ ἡμιάξονος αὐτῆς. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω τιμῶν τῶν R, R' εὑρίσκομεν $R:\varrho=R':\varrho'$ καὶ ἐπειδὴ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα PEK, PE'K' (σχ. 27) εἶνε ὅμοια, αἱ γωνίαι E'PK' καὶ EPK εἶνε ἴσαι. Ἤτοι, ἡ ἐφαπτομένη εἰς ἓν σημεῖον τῆς E_λ σχηματίζει ἴσας γωνίας μὲ τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς αὐτὸ ἑστιακὰς ἀκτῖνας.



(Σχ. 28).

Τὴν ἰδιότητα ταύτην ἀποδεικνύομεν καὶ ἀμέσως, παρατηροῦντες ὅτι, ἂν M εἶνε τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς τῆς ἐφαπτομένης TT' τῆς E_λ (σχ. 28), ἐπειδὴ ἡ τεθλασμένη γραμμὴ EME' μὲ ἄκρα τὰ E, E' ἔχει τὸ ἐλάχιστον ἀπόλυτον μῆκος ἐκ πασῶν τῶν τοιούτων γραμμῶν, ἐχουσῶν τὸ M κοινὸν μετὰ τῆς TT', αἱ γωνίαι EMT καὶ E'MT' εἶνε ἴσαι.

Ἂν τὸ $P(x_1,y_1)$ κεῖται ἐπὶ τῆς Y_π (1′) καὶ τεθῇ $(EP)=\varrho$, $(E'P)=\varrho'$, ἔχομεν (§ 20, σελ. 45) $\qquad \varrho = \varepsilon x_1 - \alpha,\ \varrho' = \varepsilon x_1 + \alpha \qquad (2)$

$$\text{καὶ}\qquad \varrho\varrho' = \varepsilon^2 x_1^2 - \alpha^2 = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2} x_1^2 - \alpha^2 = \frac{\beta^2 x_1^2}{\alpha^2} + x_1^2 - \alpha^2$$

$$\text{ἢ ἕνεκα τῆς (1′)}\qquad \varrho\varrho' = \frac{\beta^2 x_1^2}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2 y_1^2}{\beta^2}. \qquad (3)$$

Ἂν ἡ ἐξίσωσις τῆς OP εἶνε $y = \frac{y_1}{x_1}x$, ἡ τῆς OP′, συζυγοῦς ἡμιδιαμέτρου τῆς OP, θὰ εἶνε $y = \frac{x_1\beta^2}{y_1\alpha^2}x$ καὶ θὰ τέμνῃ τὴν συζυγῆ Y_π τῆς (1′) εἰς τὸ $P'\left(\pm\frac{\alpha}{\beta}y_1, \pm\frac{\beta}{\alpha}x_1\right)$, θὰ εἶνε δὲ

$$(OP') = \beta'^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}x_1^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}y_1^2 \qquad \text{ἄρα}\quad \varrho\varrho' = \beta'^2 \qquad (4)$$

Ἤτοι, τὸ γινόμενον τῶν ἑστιακῶν ἀκτίνων σημείου Y_π ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ μήκους τῆς εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ἀντιστοίχου συζυγοῦς ἡμιδιαμέτρου αὐτῆς.

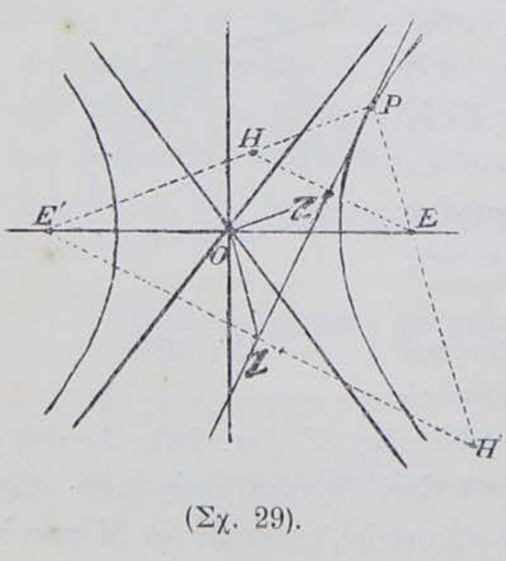
Αἱ ἀποστάσεις $(EZ)=R$, $(E'Z')=R'$ τῶν ἑστιῶν τῆς Y_π ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς εἰς τὸ $P(x_1, y_1)$ (σχ. 29), ἐχούσης ἐξίσωσιν $\beta^2 x_1 x - \alpha^2 y_1 y = \alpha^2\beta^2$ εἶνε

$$R = \left(\frac{\gamma x_1}{\alpha^2} - 1\right) : \sqrt{\frac{x_1^2}{\alpha^4} + \frac{y_1^2}{\beta^4}} = \beta(\varepsilon x_1 - \alpha) : \sqrt{\frac{\beta^2 x_1^2}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2 y_1^2}{\beta^2}}$$

$$R' = \left(-\frac{\gamma x_1}{\alpha^2} - 1\right) : \sqrt{\frac{x_1^2}{\alpha^4} + \frac{y_1^2}{\beta^4}} = -\beta(\varepsilon x_1 + \alpha) : \sqrt{\frac{\beta^2 x_1^2}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2 y_1^2}{\beta^2}}$$

Ἑπομένως ἕνεκα τῶν (2) καὶ (3) ἔχομεν

$$R = \beta\varrho : \beta',\ R' = -\beta\varrho' : \beta' \quad (5) \quad \text{καὶ}\ RR' = -\frac{\beta^2\varrho\varrho'}{\beta'^2} \qquad (5')$$



(Σχ. 29).

ἢ ἕνεκα τῆς (4) $RR' = -\beta^2$ (6)

Ἤτοι, τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τῶν ἑστιῶν Y_π ἀπό τινος ἐφαπτομένης αὐτῆς ἰσοῦται μὲ τὸ ἀντίθετον τοῦ τετραγώνου τοῦ μήκους τοῦ δευτερεύοντος ἡμιάξονος αὐτῆς. Τὸ σημεῖον — τοῦ γινομένου τούτου φανερώνει ὅτι αἱ ἑστίαι κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ἐφαπτομένης, ἐνῷ εἰς τὴν E_λ κεῖνται πάντοτε πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς.

Ἐκ τῶν (5) ἔχομεν ἀπολύτως

$$R : \varrho = R' : \varrho', \qquad (7)$$

ἐπειδὴ δὲ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΡΕΖ καὶ ΡΕ΄Ζ΄ εἶνε ὅμοια, ἕπεται ὅτι αἱ γωνίαι ΕΡΖ καὶ Ε΄ΡΖ΄ εἶνε ἴσαι. Ἤτοι, ἡ ἐφαπτομένη εἰς σημεῖον Y_π διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῶν ἑστιακῶν αὐτῆς ἀκτίνων τοῦ σημείου τῆς ἁφῆς.

Ἐὰν φέρωμεν τὴν κάθετον ΜΡ ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς E_λ (σχ.28) ἢ Y_π εἰς τὸ Ρ, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν ***κάθετον*** αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο, ἕπεται ὅτι, ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ κάθετος εἰς σημεῖον E_λ ἢ Y_π εἶνε διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ τῶν ἑστιακῶν ἀκτίνων τοῦ σημείου τούτου.

Ἐὰν τὸ σημεῖον Η εἶνε συμμετρικὸν τοῦ Ε πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον Ρ τῆς E_λ ἢ Y_π, θὰ ἔχωμεν διὰ τὴν ἔλλειψιν (σχ. 27) γωνΗΡΚ=γωνΕΡΚ=γωνΕ΄ΡΚ΄, τὰ δὲ Ε΄, Ρ, Η κεῖνται ἐπ εὐθείας καὶ (Ε΄Η)=(Ε΄Ρ)+(ΡΗ)=(Ε΄Ρ)+(ΕΡ)=2α καὶ ὁμοίως διὰ τὴν ὑπερβολήν. Ἤτοι, ὁ τόπος τῶν συμμετρικῶν σημείων ἑκάστης τῶν ἑστιῶν τῆς E_λ ἢ Y_π (1,1΄) ὡς πρὸς ἐφαπτομένην αὐτῆς εἶνε περιφέρεια κύκλου, μὲ ἀκτῖνα μήκους 2α καὶ κέντρον τὴν ἄλλην ἑστίαν αὐτῆς.

Ἐπειδὴ διὰ τὴν E_λ τὰ Ο,Κ,Κ΄ (σχ.27) εἶνε τὰ μέσα τῶν τμημάτων ΕΕ΄, ΕΗ καὶ Ε΄Η΄ (Η΄ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Ε΄ ὡς πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Ρ), αἱ ΟΚ καὶ ΟΚ΄ εἶνε παράλληλοι τῶν Ε΄Η καὶ ΕΗ΄, ἑπομένως ἔχομεν 2(ΟΚ) = (Ε΄Η), 2(ΟΚ΄) = (Ε΄Η). Ἄρα (ΟΚ)=(ΟΚ΄)=α, ἐπειδὴ εἶνε (Ε΄Η)=(ΕΗ΄)= 2α. Ἀνάλογα παρατηροῦμεν καὶ διὰ τὴν Y_π. Ἤτοι, ὁ τόπος τῶν ποδῶν τῶν καθέτων εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τῶν ἑστιῶν E_λ ἢ Y_π (1,1΄) ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας αὐτῆς εἶνε περιφέρεια κύκλου μὲ ἀκτῖνα μήκους α καὶ κέντρον τὸ τῆς E_λ ἢ Y_π.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 305. Δείξατε διὰ τῶν συντελεστῶν διευθύνσεως τῆς καθέτου ΡΝ καὶ τῶν ἀκτίνων E_λ ΕΡ,Ε΄Ρ, ὅτι αἱ γωνίαι ΕΡΝ, Ε΄ΡΝ εἶνε ἴσαι.

306. Κατασκευάσατε τὴν κάθετον E_λ εἰς σημεῖον αὐτῆς.

307. Ἀπὸ ἑστίας E_λ ἀναχωροῦν φωτειναὶ ἢ θερμαντικαὶ ἀκτῖνες, διευθυνόμεναι πρὸς τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς. Πόθεν διέρχονται αἱ ἀκτῖνες ἀνακλάσεως ἐκ τῶν διαφόρων σημείων τῆς E_λ ;

308. Ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ κάθετος E_λ εἰς τὸ σημεῖον Ρ τέμνουν τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὰ Τ καὶ Ν. Δείξατε ὅτι εἶνε (ΟΤ)(ΟΝ) = γ^2.

309. Εὕρετε τὸ μῆκος τοῦ ΜΝ (σχ. 29), τὸ ὁποῖον καλεῖται ***ὑποκάθετος*** τῆς E_λ εἰς τὸ Ρ καὶ τοῦ ΡΝ, τὸ ὁποῖον καλεῖται ***μῆκος τῆς καθέτου*** τῆς E_λ εἰς τὸ Ρ, μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ἐκκέντρου γωνίας τοῦ Ρ καὶ δείξατε ὅτι εἶνε (ΡΝ)=ββ΄:α, ὅπου β΄ εἶνε τὸ μῆκος τῆς συζυγοῦς ἡμιδιαμέτρου τῆς ΟΡ.

310. Δείξατε ὅτι εὐθεῖά τις τέμνει E_λ ἢ ἐφάπτεται αὐτῆς ἢ κεῖται ἐκτὸς αὐτῆς,

ἂν ἡ τομὴ τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἔκ τινος ἑστίας αὐτῆς ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν κεῖται ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὴν Ελ περιφερείας.

311. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς καθέτου εἰς σημεῖον Υπ καὶ δείξατε ἀναλυτικῶς ἰδιότητας αὐτῆς ἀναλόγους πρὸς τὰς τῆς Ελ.

312. Κατασκευάσατε εἰς σημεῖον Υπ τὴν ἐφαπτομένην καὶ τὴν κάθετον αὐτῆς.

313. Κατασκευάσατε τὰς ἐφαπτομένας Υπ διερχομένας διὰ σημείου κειμένου ἐκτὸς αὐτῆς.

314. Δείξατε ὅτι ἡ ἀπόλυτος ἀπόστασις ἑστίας Υπ ἀπὸ ἀσυμπτώτου αὐτῆς ἰσοῦται μὲ β.

315. Δείξατε ὅτι Ελ καὶ Υπ ἔχουσαι τὰς αὐτὰς ἑστίας τέμνονται καθέτως, ἤτοι εἰς ἓν σημεῖον τομῆς αὐτῶν ἡ ἐφαπτομένη τῆς μιᾶς εἶνε κάθετος τῆς ἄλλης.

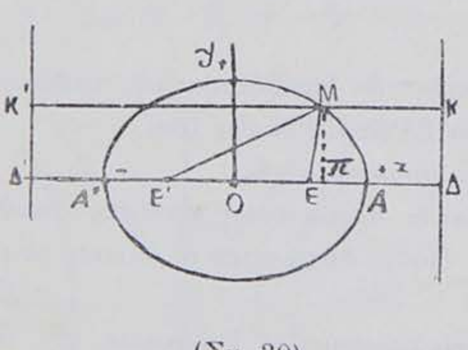
§ 32. Διευθετοῦσαι ἐλλείψεως ἢ ὑπερβολῆς.

Καλοῦμεν ***διευθετούσας*** Ελ ἢ Υπ τὰς πολικὰς εὐθείας τῶν ἑστιῶν ἑκάστης.

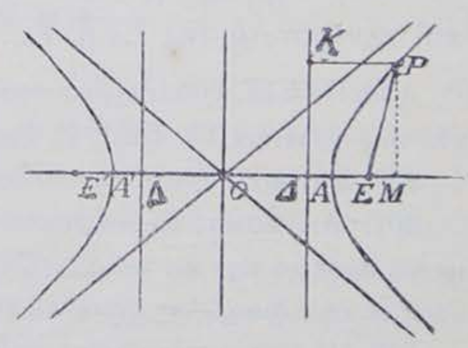
Τὰς ἐξισώσεις τῶν διευθετουσῶν Ελ ἢ Υπ μὲ μήκη ἀξόνων 2α, 2β εὑρίσκομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῆς πολικῆς σημείου $M_1(x_1, y_1)$ ὡς πρὸς Ελ ἢ Υπ $\beta^2 x_1 x \pm \alpha^2 y_1 y = \alpha^2\beta^2$, ἂν θέσωμεν $x_1 = \pm\gamma$, $y_1 = 0$, ὅτε εὑρίσκομεν

$$\boxed{x = \pm \frac{\alpha^2}{\gamma}} \qquad (1)$$

Αὗται ἀπέχουσαι κατὰ $\pm \frac{\alpha^2}{\gamma} = \pm \frac{\alpha}{\varepsilon}$ ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς Ελ ἢ Υπ κεῖνται ἐκτὸς αὐτῶν, διότι διὰ μὲν τὴν Ελ εἶνε $\alpha > \gamma$, $\frac{\alpha}{\gamma} > 1$ καὶ $\frac{\alpha^2}{\gamma} > \alpha$ διὰ δὲ τὴν Υπ $\gamma > \alpha$, $1 > \frac{\alpha}{\gamma}$ καὶ $\alpha > \frac{\alpha^2}{\gamma}$.



(Σχ. 30).



(Σχ. 31).

Ἂν M(x,y) εἶνε σημεῖον τῆς Ελ καὶ MK κάθετος εὐθεῖα ἐπὶ τὴν διευθετοῦσαν ΔK, ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν ἑστίαν E (σχ. 30), ἔχομεν (§ 20, σελ. 44) $(EM) = \varrho = \alpha - \varepsilon x$, $(MK) = (\Pi\Delta) = (O\Delta) - (O\Pi)$,

ἢ $$(MK) = \frac{\alpha^2}{\gamma} - x = \frac{\alpha}{\varepsilon} - x = \frac{1}{\varepsilon}(\alpha - \varepsilon x),$$

ἑπομένως $$(EM) : (MK) = \varepsilon \; (<1).$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε $(E'M):(MK')=\varepsilon$. (2)

Ἂν $P(x, y)$ εἶνε σημεῖον Y_π καὶ KP κάθετος εὐθεῖα ἐπὶ τὴν διευθετοῦσαν ΔK ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν ἑστίαν E (σχ. 31), ἔχομεν (§ 20, σελ. 45)
$$(EP)=\varrho=\varepsilon x-\alpha, (KP)=(\Delta M)=(OM)-(O\Delta)=x-\frac{\alpha}{\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}(\varepsilon x-\alpha)$$
καὶ $(EP):(KP)=\varepsilon(>1$. Ἤτοι, ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων σημείου E_λ ἢ Y_π ἀπό τινος τῶν ἑστιῶν καὶ τῆς ἀντισοιχούσης εἰς ταύτην διευθετούσης ἰσοῦται μὲ τὴν ἐκκεντρότητα αὐτῆς ε (<1 διὰ τὴν E_λ καὶ >1 διὰ τὴν Y_π).

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι, ἂν σημεῖον τι ἔχῃ τὴν ἰδιότητα ταύτην καὶ εἶνε $\varepsilon<1$ ἢ >1, τὸ σημεῖον τοῦτο κεῖται ἐπὶ E_λ ἢ Y_π μὲ ἐκκεντρότητα ε.

Ἡ πολικὴ τυχόντος σημείου $M_1\left(\frac{\alpha^2}{\gamma}, y_1\right)$ διευθετούσης E_λ ἢ Y_π ἀντιστοιχούσης εἰς τὴν ἑστίαν E, ἔχει ἐξίσωσιν $\frac{x}{\gamma}\pm\frac{y_1 y}{\beta^2}=1$ καὶ διέρχεται διὰ τῆς ἑστίας E. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως τῆς πολικῆς ταύτης εἶνε $\mp\frac{\beta^2}{\gamma y_1}$, τῆς δ' εὐθείας τῆς διερχομένης διὰ τῶν M_1 καὶ E εἶνε $\pm\frac{\gamma y_1}{\beta^2}$, ἕπεται ὅτι, πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ μιᾶς τῶν ἑστιῶν, E π. χ., E_λ ἢ Y_π εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τὴν συνδέουσαν τὸν πόλον τῆς πρώτης μὲ τὸ E. Ἄρα, τὸ τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης E_λ ἢ Y_π, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τοῦ σημείου ἐπαφῆς καὶ μιᾶς διευθετούσης αὐτῆς, φαίνεται ἐκ τῆς πλησιεστέρας εἰς ταύτην ἑστίας ὑπὸ γωνίαν ὀρθήν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 316. Τί εἶνε ἡ διευθετοῦσα περιφερείας κύκλου;

317. Φέρατε ἐκ τυχόντος σημείου τῆς διευθετούσης τὰς δύο ἐφαπτομένας εἰς E_λ ἢ Y_π.

318. Δείξατε ὅτι E_λ ἢ Y_π εἶνε ὡρισμένη, ἂν δοθῇ μία ἑστία, ἡ ἀντίστοιχος ταύτης διευθετοῦσα καὶ ἡ ἐκκεντρότης ε.

319. Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὰς τομὰς E_λ ὑπὸ εὐθείας MK παραλλήλου πρὸς τὸν μεγάλον ἄξονα αὐτῆς, γράφομεν μὲ κέντρον E περιφέρειαν κύκλου καὶ ἀκτῖνα p, φέρομεν διὰ τοῦ $\Delta(\alpha^2/\gamma, 0)$ παράλληλον πρὸς τὴν KE' τὰς τομὰς ταύτης μὲ τὴν περιφέρειαν συνδέομεν δι' εὐθειῶν μὲ τὸ E καὶ αὗται τέμνουν τὴν MK εἰς τὰ ζητούμενα σημεῖα, εἶνε δὲ $(E\Delta)=p/\varepsilon$.

320. Εὕρετε τὰς διευθετούσας τῶν $E\lambda$ $3x^2+4y^2=12$, $9x^2+y^2-16=0$, $3x^2+y^2=5$, $2x^2+y^2=1$, $9x^2+4y^2=36$. Τίνα θέσιν ἔχει ἡ εὐθεῖα $x+y=12$ πρὸς ἑκάστην αὐτῶν;

321. Εὕρετε τὰς διευθετούσας ἰσοσκελοῦς Y_π.

322. Δείξατε ὅτι, ἂν σημεῖόν τι δὲν κεῖται ἐπὶ E_λ ἢ Y_π, ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ἀπὸ τῆς μιᾶς ἑστίας καὶ τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς ταύτην διευθετούσης εἶνε διάφορος τοῦ ε.

§ 33. Ἐξίσωσις ὑπερβολῆς ὡς πρὸς τὰς ἀσυμπτώτους αὐτῆς.

Ἔστω ἡ Y_π $\quad \beta^2 x^2 - \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2 \quad (1)$

Ἂν ἡ ἀσύμπτωτος αὐτῆς ἡ διερχομένη διὰ τῆς γωνίας xOy σχηματίζῃ γωνίαν φ μὲ τὸν ἄξονα τῶν x, ἡ ἄλλη σχηματίζει μὲ τὸν αὐτὸν ἄξονα τὴν γωνίαν $2\pi - \varphi$. Λαμβάνοντες ὡς νέον ἄξονα τῶν $+x'$ τὴν β′ ἀσύμπτωτον καὶ ὡς ἄξονα τῶν $+y'$ τὴν α′, ἔχομεν τοὺς ἑξῆς τύπους μετασχηματισμοῦ τῶν συντεταγμένων

$$x = (x' + y')\,\text{συν}\,\varphi, \quad y = (-x' + y')\,\text{ημ}\,\varphi,$$

ὅπου εἶνε $\quad \text{εφ}\,\varphi = \dfrac{\beta}{\alpha}, \quad \text{συν}\,\varphi = \dfrac{\alpha}{\gamma}, \quad \text{ημ}\,\varphi = \dfrac{\beta}{\gamma}.$

Εἰσάγοντες τὰς τιμὰς τῶν x, y εἰς τὴν (1) εὑρίσκομεν $\boxed{x'y' = \dfrac{\gamma^2}{4}}$

Ἐὰν ζητοῦμεν τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς Y_π $\quad 4xy = \gamma^2 \quad (1')$

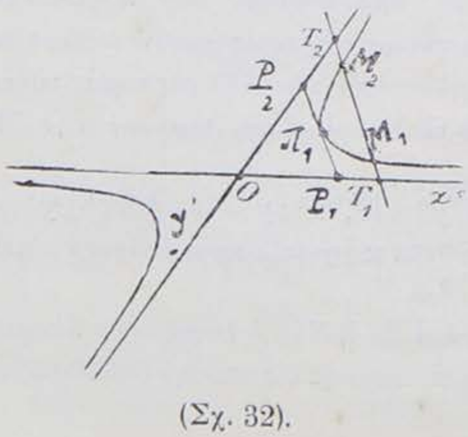
καὶ τῆς εὐθείας $\quad \dfrac{x}{\mu} + \dfrac{y}{\nu} = 1 \quad (2)$ ὡς πρὸς ἄξονας τὰς ἀσυμπτώτους αὐτῆς, θὰ λύσωμεν τὸ σύστημα τῶν (1′) καὶ (2) καὶ εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν ἐξίσωσιν $\quad 4\nu x^2 - 4\mu\nu x + \gamma^2\mu = 0, \quad (3)$

τὸ εἶδος τῶν ῥιζῶν τῆς ὁποίας ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ σημείου τοῦ

$$\mu\nu\,(\mu\nu - \gamma^2).$$

Ἐὰν εἶνε $\mu\nu < 0$ ἢ $\mu\nu > \gamma^2$, τὰ σημεῖα τομῆς τῆς (1′) καὶ τῆς (2) εἶνε πραγματικὰ καὶ διακεκριμένα, ἂν δὲ ταῦτα εἶνε τὰ $M_i\,(x_i, y_i), i = 1, 2$, αἱ συντεταγμέναι τοῦ μέσου $M(x, y)$ τῆς χορδῆς M_1M_2 εὑρίσκονται ἐκ τῶν $2x = x_1 + x_2$, $2y = y_1 + y_2$ καὶ εἶνε $\quad 2x = \mu, \; 2y = \nu \quad (4)$

Ἤτοι, ἐὰν ἡ εὐθεῖα τέμνῃ τὴν Y_π (1′) εἰς τὰ M_i τὰς δ᾽ ἀσυμπτώτους αὐτῆς εἰς τὰ T_i, τὸ μέσον τῆς χορδῆς M_1M_2 συμπίπτει μὲ τὸ μέσον τοῦ τμήματος T_1T_2, εἶνε δὲ ἀπολύτως $(M_1T_1) = (M_2T_2)$ καὶ $(M_1T_2) = (M_2T_1)$. Διὰ τῆς ἰδιότητος ταύτης δυνάμεθα ὡς ἑξῆς νὰ εὕρωμεν σημεῖα Y_π, ἂν γνωρίζωμεν τὰς ἀσυμπτώτους καὶ ἓν σημεῖον αὐτῆς, ἔστω τὸ M_1 (σχ. 32). Φέρομεν διὰ τοῦ M_1 τυχοῦσαν εὐθεῖαν, τέμνουσαν τὰς ἀσυμπτώτους, ἔστω εἰς τὰ T_1 καὶ T_2. Λαμβάνομεν τὸ διάνυσμα $T_2M_2 = M_1T_1$ καὶ τὸ M_2 εἶνε σημεῖον τῆς Y_π.



(Σχ. 32).

Ἐὰν εἶνε $\mu\nu = \gamma^2$, ἡ εὐθεῖα (2) θὰ εἶνε ἐφαπτομένη τῆς Y_π (1′), αἱ δὲ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τῆς ἁφῆς δίδονται ὑπὸ τῶν (4).

Ἄρα τὸ μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων Y_π περιεχόμενον τμῆμα εὐθείας ἐφαπτομένης αὐτῆς, διχοτομεῖται ὑπὸ τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς. Ἐκ τῶν (4) εὑρίσκομεν ἀμέσως ὅτι, ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης Y_π (1′) ὡς πρὸς ἄξονας τὰς ἀσυμπτώτους αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον $M_1(x_1, y_1)$ εἶνε

$$\boxed{\frac{x}{2x_1}+\frac{y}{2y_1}=1} \tag{5}$$

Ἐπειδὴ αἱ συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν μ καὶ ν εὐθείας ἐφαπτομένης Y_π (1′) πληροῦν τὴν σχέσιν $\mu\nu=\gamma^2=4x_1y_1$, ἕπεται ὅτι ἑκάστη ἐφαπτομένη τῆς Y_π(1′) ὁρίζει μετὰ τῶν ἀσυμπτώτων αὐτῆς τρίγωνον μὲ διπλάσιον ἐμβαδὸν 2αβ, ἐπειδὴ τὸ διπλάσιον ἐμβαδὸν τοιούτου τριγώνου ἰσοῦται μὲ $\mu\nu\,\eta\mu\,\omega=\gamma^2\frac{2\alpha\beta}{\gamma^2}=2\alpha\beta$, ὅπου ω παριστάνει τὴν γωνίαν τῶν ἀσυμπτώτων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 323. Διὰ γωνίαν τῶν ἀσυμπτώτων $\omega=2\varphi$ εἶνε $\gamma^2\eta\mu\omega=2\alpha\beta$. Δείξατε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου ὁριζομένου ὑπὸ τῶν δύο ἀσυμπτώτων καὶ τυχόντος σημείου τῆς Y_π εἶνε σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ αβ.

324. Δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις $y=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}=\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma^2}\cdot\frac{1}{x+\frac{\delta}{\gamma}}$ παριστάνει Y_π μὲ ἀσυμπτώτους παραλλήλους πρὸς τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων.

325. Κατασκευάσατε τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον (x_1, y_1) τῆς Y_π $xy=4$.

326. Εὐθεῖα κινεῖται ὥστε τὸ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον σχηματίζει μὲ τὰς πλευρὰς σταθερᾶς γωνίας, νὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν σταθερόν. Τίνα τόπον γράφει τὸ μέσον τῆς κινουμένης πλευρᾶς τοῦ τριγώνου;

327. Νὰ κατασκευασθῇ Y_π καὶ ἡ μία ἀσύμπτωτος αὐτῆς ἐκ τῆς ἄλλης ἀσυμπτώτου καὶ τριῶν σημείων αὐτῆς.

328. Δείξατε ὅτι τὸ μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων τμῆμα ἐφαπτομένης Y_π ἰσοῦται μὲ τὴν διάμετρον αὐτῆς, τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ἐφαπτομένην.

329. Τίνες αἱ συντεταγμέναι τοῦ μέσου χορδῆς Y_π παραλλήλου πρὸς τὴν $y=\lambda x$ καὶ τίς ἡ ἐξίσωσις τῆς συζυγοῦς διαμέτρου ταύτης καθὼς καὶ τίνες αἱ συντεταγμέναι τῆς τομῆς ταύτης καὶ τῆς συζυγοῦς Y_π.

330. Δείξατε ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι Y_π εἰς εἰς τὰ (x_i, y_i), $i=1,2$, τέμνονται ἐπὶ διαμέτρου διχοτομούσης τὴν χορδὴν τῶν ἐπαφῶν.

331. Εὐθεῖά τις $\nu x+\mu y=\mu\nu$ κινεῖται ὥστε νὰ ἐφάπτεται τῆς Y_π $4xy=\gamma^2$. Τίνα τόπον γράφει σημεῖον Ρ, τέμνον τὸ μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχόμενον τμῆμα T_1T_2 τῆς ἐφαπτομένης, οὕτως ὥστε νὰ εἶνε $(T_1 P) : (PT_2)=\lambda$;

332. Δύο ὑπερβολαὶ μὲ τὰς αὐτὰς ἀσυμπτώτους καὶ διαφόρους ἑστιακὰς ἀποστάσεις ἔχουν ἐξισώσεις $4xy=\gamma_1^2$, $4xy=\gamma_2^2$. Ἂν τυχοῦσα διάμετρος τέμνῃ αὐτὰς εἰς τὰ M_1, M_2, αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν εἰς ταῦτα θὰ εἶνε παράλληλοι.

333. Εὕρετε τὰς συντεταγμένας τῶν ἑστιῶν καὶ τῶν κορυφῶν τῆς Y_π $4xy=\gamma^2$, ἐὰν ἡ γωνία τῶν ἀσυμπτώτων εἶνε ω καὶ ἐκφράσατε τὰ α, β διὰ τῶν γ καὶ ω.

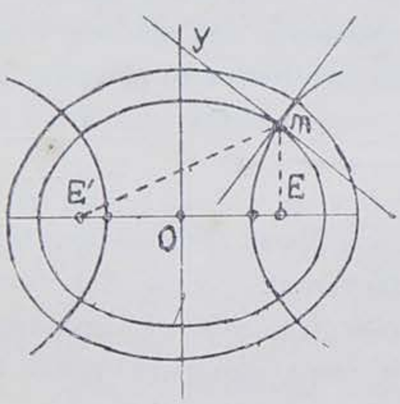
334. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις καὶ τὰ α,β Y_π, ἂν γνωρίζωμεν τὰς ἀσυμπτώτους καὶ τὰς συντεταγμένας ἑνὸς σημείου αὐτῆς.

335. Δείξατε ὅτι ἑκάστη περιφέρεια διερχομένη διὰ τῶν ἑστιῶν Y_π τέμνει τὰς ἀσυμπτώτους εἰς τὰς τομὰς δύο ἐφαπτομένων αὐτῆς.

336. Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης τῆς Y_π $xy=k^2$ εἰς τὸ $M_1(x_1,y_1)$ εἶνε $y_1x+x_1y=2k^2$.

§ 34. Ἐλλείψεις καὶ ὑπερβολαὶ μὲ κοινὰς ἑστίας.

Δοθέντων δύο σημείων Ε, Ε′ ὑπάρχουν ἄπειροι E_λ καὶ Y_π μὲ κοινὰς ἑστίας τὰ σημεῖα ταῦτα καὶ καλοῦνται αὗται ***ὁμοέστιοι***. Πράγματι, διὰ πᾶν σημεῖον Μ ὁρίζεται ἀνὰ εἷς ἀριθμὸς θετικὸς (Ε′Μ)+(ΕΜ) καὶ |(Ε′Μ)−(ΕΜ)| διὰ τοὺς ὁποίους ἔχομεν μίαν E_λ καὶ μίαν Y_π, αἱ ὁποῖαι τέμνονται καθέτως, ἤτοι αἱ ἐφαπτόμεναί των εἰς σημεῖον τῆς τομῆς αὐτῶν εἶνε κάθετοι. Διότι, ἡ ἐφαπτομένη τῆς E_λ εἰς τὸ Μ σχηματίζει ἴσας γωνίας μὲ τὰς ΕΜ καὶ Ε′Μ, ἡ δὲ τῆς Y_π διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΕΜΕ′, ἄρα αἱ ἐφαπτόμεναι αὗται εἶνε κάθετοι.



Σχ. 33.

Ἐὰν α, β εἶνε τὰ μήκη τῶν ἡμιαξόνων μιᾶς τῶν E_λ καὶ α_1, β_1 μιᾶς ἄλλης ὁμοεστίου τῆς πρώτης, θὰ ἔχωμεν $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2=\alpha_1^2-\beta_1^2$. Θέτοντες $\alpha_1^2-\alpha^2=\beta_1^2-\beta^2=\lambda$ καὶ θεωροῦντες τὰ α, β ὡς σταθερά, τὸ δὲ λ ὡς (μεταβλητὴν) παράμετρον, τὰ $\alpha_1^2=\alpha^2+\lambda$, $\beta_1^2=\beta^2+\lambda$ παριστάνουν τὰ τετράγωνα τῶν μηκῶν τῶν ἡμιαξόνων πασῶν τῶν ὁμοεστίων E_λ, τῶν ὁποίων αἱ ἐξισώσεις θὰ εἶνε

$$\frac{x^2}{\alpha^2+\lambda}+\frac{y^2}{\beta^2+\lambda}=1 \qquad (1)$$

Ἐὰν τεθῇ (Ε′Ε)=2γ καὶ λάβωμεν ὡς ἄξονας συντεταγμένων τοὺς ἄξονας τῶν ὁμοεστίων E_λ καὶ Y_π, ἡ ἐξίσωσις αὐτῶν θὰ εἶνε τῆς μορφῆς

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\alpha^2-\gamma^2}=1 \qquad (1')$$

ἥτις διὰ $\alpha>\gamma$ παριστάνει E_λ καὶ διὰ $\alpha<\gamma$ Y_π, ἐνῷ διὰ $\alpha=\gamma$ ἢ $\alpha=0$ τὸν ἄξονα τῶν x ἢ τὸν τῶν y.

Δι᾽ ἑκάστην πραγματικὴν τιμὴν τοῦ λ, διὰ τὴν ὁποίαν εἶνε $\beta^2+\lambda>0$, ἀντιστοιχεῖ μία Ελ, πᾶσαι δὲ αἱ τοιαῦται Ελ δίδονται διὰ τὰς τιμὰς $-\beta^2<\lambda<\infty$. Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις (1) παριστάνει καὶ πάσας τὰς ὁμοεστίους $Υ_π$ καὶ πρὸς τὰς ἐν λόγῳ $Ελ$ διὰ τὰς τιμὰς $-α^2<λ<-β^2$, διὰ τὰς ὁποίας ἔχομεν $α_1^2>0, β_1^2<0$. Διὰ τὰς τιμὰς $-α^2>λ>-\infty$ ἡ ἀνωτέρα ἐξίσωσις παριστάνει φανταστικὰς $Ελ$. Διὰ $λ=-α^2, -β^2$ ἡ ἐξίσωσις καταντᾷ $x^2=0$ καὶ $y^2=0$ καὶ παριστάνει δύο εὐθείας συμπιπτούσας μὲ τὸν ἄξονα τῶν y ἢ τῶν x, θεωροῦνται δὲ τότε αὗται ὁριακαὶ γραμμαὶ τῶν θεωρουμένων $Ε_λ$ ἢ $Υ_π$. Παρατηρητέον ὅτι διὰ πολὺ μεγάλην τιμὴν τοῦ $λ$ οἱ ἄξονες τῶν $Ε_λ$ εἶνε πολὺ μεγάλοι, ἐνῷ ὅταν τὸ $λ$ πλησιάζῃ τὴν τιμὴν $-β^2$, ἡ $Ε^λ$ τείνει πρὸς τὸ τμῆμα $Ε'Ε$ τοῦ ἄξονος τῶν x. Ἐὰν τὸ $λ$ μεταβάλλεται ἀπὸ $-β^2$ μέχρι τοῦ $-α^2$, ἀπομακρύνονται μεταξύ των οἱ κλάδοι τῶν $Υ_π$ ἀπὸ τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ τείνουν ἑκατέρωθεν πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y.

Ἐπειδὴ αἱ ὁμοέστιοι $Ε_λ$ καὶ $Υ_π$ εἶνε δύο δέσμαι καθέτως τεμνομένων καμπύλων γραμμῶν, δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν αὐτὰς πρὸς προσδιορισμὸν τῆς θέσεως τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου των. Πράγματι, εἰς ἕκαστον σημεῖον (x, y) ἀντιστοιχοῦν δύο πραγματικαὶ τιμαὶ $λ_1, λ_2$ τοῦ $λ$, αἵτινες θεωροῦνται ὡς συντεταγμέναι τοῦ σημείου καὶ εἶνε αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως (1). Τὰς συντεταγμένας ταύτας $(λ_1, λ_2)$ τοῦ σημείου (x,y) καλοῦμεν ***ἐλλειπτικὰς*** συντεταγμένας αὐτοῦ, δι' αὐτῶν δ' ὁρίζεται τὸ σημεῖον ὡς τομὴ δύο γραμμῶν παριστανομένων ὑπὸ τῆς (1), ἐνῷ διὰ μὲν τῶν καρτεσιανῶν συντεταγμένων ἕκαστον σημεῖον θεωρεῖται τομὴ δύο εὐθειῶν $x=x_1$ καὶ $y=y_1$, διὰ δὲ τῶν πολικῶν ὡς τομὴ δύο γραμμῶν $ρ=ρ_1$ (περιφερείας κύκλου) καὶ $θ=θ_1$ (εὐθείας).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 337. Ὁ τόπος τοῦ πόλου εὐθείας (ε) ὡς πρὸς τὰς ὁμοεστίους $Ελ$ καὶ $Υπ$ $\frac{x^2}{α^2}+\frac{y^2}{α^2-γ^2}=1$ εἶνε εὐθεῖα κάθετος ἐπ' αὐτάς.

338. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὡς πρὸς δύο ὁμοεστίους καμπύλας β' βαθμοῦ ἡ ἐφαπτομένη εἰς τυχὸν σημεῖον M_1 τῆς μιᾶς, θεωρουμένη ὡς πολικὴ τῆς ἄλλης, ἔχει πόλον, κείμενον ἐπὶ τῆς καθέτου τῆς πρώτης, τῆς διερχομένης διὰ τοῦ M_1.

339. Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ σημεῖα καθ' ἃ ἡ ἐφαπτομένη (τ) καμπύλης β' βαθμοῦ τέμνει πάσας τὰς ὁμοεστίους αὐτῆς, τέμνονται ἐπὶ τῆς καθέτου τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὴν (τ).

340. Ἐὰν ἀπὸ σημείου (ξ, ο) ἢ (ο, η) ἀχθοῦν αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν ὁμοεστίων $Ελ$ ἢ $Υπ$ $\frac{x^2}{α^2}+\frac{y^2}{α^2-γ^2}=1$, ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ἐπαφῶν εἶνε ἀνὰ μία περιφέρεια κύκλου.

Ἀσκήσεις διάφοροι.

Γεωμετρικῶν τόπων. 341. Ἐκ τοῦ σημείου M τῆς περιφερείας (ο, ο, k) φέρομεν κάθετον MK ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν y καὶ προεκτείνομεν τὸ τμῆμα MK πέραν τοῦ M κατὰ τὸ διπλάσιον αὐτοῦ μέχρι τοῦ σημείου M'. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ M', ὅταν τὸ M κινῆται ἐπὶ τῆς περιφερείας.

342. Ἀπὸ τῆς κορυφῆς B' (0,—β) τῆς Ελ $\beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$ ἄγεται χορδὴ αὐτῆς B'M καὶ προεκτείνεται αὕτη πέραν τοῦ M κατὰ τὸ μυπλάσιον αὐτῆς μέχρι τοῦ M'. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος α') τοῦ M', ὅταν ἡ χορδὴ στρέφεται περὶ τὸ B'. β') τοῦ P, ὅταν τοῦτο διχοτομῇ τὴν B'M.

343. Διὰ σημείου $M_1(x_1,y_1)$ ἄγονται τέμνουσαι Ελ καὶ διχοτομεῖται ἑκάστη τῶν προκυπτουσῶν χορδῶν. Τίς ὁ τόπος τῶν μέσων αὐτῶν τῶν χορδῶν; Τί γίνεται ἐὰν τὸ M_1 α') κεῖται ἐπὶ τῆς Ελ; β) ὅταν τείνῃ εἰς τὸ ∞ ἢ εἰς τὸ 0; γ') ὅταν οἱ ἄξονες τῆς Ελ εἶνε ἴσοι μὲ 3.

344. Σημεῖον M κινεῖται ἐπὶ Ελ καὶ προβάλλεται εἰς τὸ P ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x. Διὰ μὲν τοῦ M ἄγεται παράλληλος εὐθεῖα πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x, διὰ δὲ τοῦ P πρὸς τὴν OM. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν τομῶν τῶν παραλλήλων τούτων.

345. Δίδεται περιφέρεια K_1 (o, o, α) τέμνουσα εἰς τὸ A τὸν ἄξονα τῶν x. Μὲ διάμετρον OA γράφεται ἄλλη περιφέρεια K_2. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, τῶν ἐφαπτομένων τῶν K_1, K_2.

346. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων περιφερειῶν αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς τῆς περιφερείας (o, o, α) καὶ ἐξωτερικῶς τῆς (α/3, o, α/3).

347. Περὶ τὸ O στρέφεται ἡ ἀκτὶς $(OM_1)=k_1$ μὲ γωνιακὴν ταχύτητα ω, περὶ δὲ τὸ M_1 ἡ ἀκτὶς $(M_1M)=k_2$ μὲ γωνιακὴν ταχύτητα—ω. Νὰ εὑρεθῃ ὁ τόπος τῶν M, ἂν τὰ M_1 καὶ M κεῖνται ἐπὶ τοῦ θετικοῦ μέρους τοῦ ἄξονος τῶν x κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς κινήσεως, τὸ δὲ M_1 μεταξὺ τῶν O καὶ M.

348. Τὸ σημεῖον M τοῦ προηγουμένου προβλήματος συνδέεται δι' εὐθυγράμμου τμήματος μὲ τὸ $A_1(\alpha_1,0)$. Τίς ὁ τόπος τοῦ σημείου P, διχοτομοῦντος τὸ A_1M;

349. Ἐκ τῆς κορυφῆς A (α,o) Ελ ἄγεται ἐφαπτομένη αὐτῆς, ἀπὸ δὲ τῶν σημείων ταύτης ἄγονται κάθετοι ἐπὶ τὰς πολικὰς αὐτῶν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν ποδῶν τούτων.

350. Τίς ὁ τόπος τῶν τομῶν τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου AA'M, ἂν AA' εἶνε ὁ μεγάλος ἄξων Ελ καὶ M κινῆται ἐπ' αὐτῆς. Μερικὴ περίπτωσις β=α.

351. Εἰς Ελ κινεῖται ἡ ἐφαπτομένη αὐτῆς καὶ θεωρεῖται ὡς πολικὴ ὡς πρὸς τὴν περιφέρειαν (o, o, α). Τίς ὁ τόπος τοῦ πόλου αὐτῆς;

352. Ελ τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὰ A_1, A_2 καὶ ἔστω σημεῖον M κινούμενον ἐπ' αὐτῆς. Τίς ὁ τόπος τοῦ κέντρου βάρους α') τοῦ τριγώνου A_1A_2M. β') τοῦ τριγώνου OA_1M_1, ὅπου O τὸ κέντρον τῆς Ελ.

353. Μὲ διάμετρον τὴν (EE')=2γ Ελ γράφεται περιφέρεια κύκλου καὶ περὶ ταύτην στρέφεται εὐθεῖα, ἐφαπτομένη αὐτῆς. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ πόλου αὐτῆς ὡς πρὸς τὴν Ελ.

354. Ἀπὸ τὸ κέντρο Υπ ἄγονται χορδαὶ αὐτῆς εἰς τὰ σημεῖα $M, M_1, M_2, \ldots$ καὶ ἑκάστη ἐπεκτείνεται πέραν τῶν M, M_1, M_2, ... κατὰ τὸ k/ν αὐτῆς. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν ἄκρων αὐτῶν.

355. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ πόλου εὐθείας ὡς πρὸς τὴν $\beta_1^2x^2 \pm \alpha_1^2y^2 = \alpha_1^2\beta^2_1$ ἂν κινῆται ὥστε νὰ εἶνε ἐφαπτομένη Υπ ἢ Ελ.

356. Ἐπὶ τῆς ἰσοσκελοῦς Υπ $x^2 - y^2 = \alpha^2$ μὲ κορυφὰς Α, Α′ κινεῖται σημεῖον Μ. Τίς ὁ τόπος τῶν τομῶν τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου ΑΑ′Μ;

357. Δι' ἕκαστον σημεῖον τῆς ἰσοσκελοῦς Υπ $xy = \gamma^2$ ἄγονται τμήματα παράλληλα πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς α′ γωνίας τῶν ἀσυμπτώτων αὐτῆς μήκους 2λ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης τῶν ἄκρων τῶν τμημάτων.

Γεωμετρικῶν κατασκευῶν. Ἕκαστον τῶν κατωτέρω προβλημάτων δύναται νὰ θεωρῆται λυμένον, ἂν εὑρεθοῦν οἱ δύο ἄξονες ἢ ὁ εἷς ἄξων καὶ αἱ ἑστίαι τῆς Ελ ἢ Υπ, θὰ παριστάνωμεν δὲ τὰς ἑστίας διὰ τῶν Ε, Ε′, τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς αὐτὰς διευθετούσας διὰ τῶν δ, δ′, τὰς κορυφὰς διὰ τῶν k_1, k_2, τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης διὰ τῶν Μ, Μi, (i=1, 2,...), τὰς ἐφαπτομένας εἰς αὐτὰ διὰ τῶν τ, τi, διὰ Α′Α, Β′Β τοὺς ἄξονας διὰ τοῦ τk ἐφαπτομένην εἰς κορυφήν, μὲ Ο τὸ κέντρον, (Α′Α)=2α, (Β′Β)=2β, 2p τὴν παράμετρον, ε τὴν ἐκκεντρότητα αὐτῆς.

358. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ Ελ ἢ Υπ διὰ τὴν ὁποίαν δίδονται.

359. α′) Ε, M_1, M_2, α. β′) Ε, Ε′, Μ. γ′) Ε′, Ε, τ.

360. α′) Ε, τ_1, τ_2, α. β′) Ε, ἡ διεύθυνσις τοῦ Α′Α, τ, τὸ Μ ἐπὶ τῆς τ.

361. α′) Ε, ἡ διεύθυνσις τοῦ ΑΑ′, τ, 2α. β′) Ε, τ_1, τ_2, β.

362. α′) Α′Α, Μ. β′) Ο, ἡ διεύθυνσις τοῦ Β′Β, Β, Μ.

363. α′) Α′Α, τ. β′) Ε, τ, Μ ἐπὶ τῆς τ, α. γ′) Ε, δ, Μ.

364. α′) Ε, Μ, τ, α. β′) Ε, τ, α, ε. γ′) Ε, τ_1, τ_2, M_1 ἐπὶ τῆς τ_1.

365. α′) Ε, δ, τ. β′) Α′Α, Μ ἐπὶ τῆς τ_1. γ′) Ε, τ_1, τ_2, τ_3.

366. α′) Ε, τ, α, ε. β′) Ο, α, β, τ. γ′) Ε, δ, Μ. δ′) Ε, $\tau_1 \parallel \tau_2$, α.

Νὰ κατασκευασθῇ Υπ ἐκ τῶν κατωτέρω δεδομένων, ὅπου τ_∞, τ'_∞ παριστάνουν τὰς δύο ἀσυμπτώτους καὶ 2φ τὴν γωνίαν αὐτῶν.

367. α′) α, φ. β′) ε, φ. γ′) β, φ. δ′) Ε, α, τ_∞.

368. α′) α, τ_∞, τ'_∞. β′) Ο, τ_∞, M_1, M_2. γ′) Ε, τ_∞, τ'_∞. δ′) τ, τ_∞, τ'_∞.

369. α′) M_1, M_2, M_3, τ_∞. β′) τ_1, τ_2, τ_3, τ_∞.

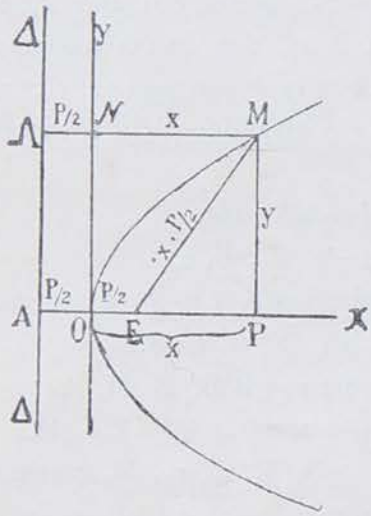
Περὶ παραβολῆς

§ 35. Ὁρισμὸς καὶ ἐξισώσεις παραβολῆς.

Παραβολὴ καλεῖται ὁ τόπος τῶν σημείων ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ δοθὲν σημεῖον καὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν αὐτοῦ, καλεῖται δὲ τὸ μὲν σημεῖον ***ἑστία,*** ἡ δ' εὐθεῖα ***διευθετοῦσα*** αὐτῆς. Παριστάνομεν κατωτέρω τὴν παραβολὴν συνήθως διὰ τοῦ Π_α, τὴν ἑστίαν μὲ Ε καὶ τὴν διευθετοῦσαν αὐτῆς διὰ Δ. Ἂν Μ εἶνε σημεῖον τῆς Π_α θὰ ἔχωμεν ἀπολύτως (ΕΜ) = (ΛΜ), ὅπου (ΛΜ) παριστάνει τὴν ἀπόστασιν τοῦ Μ ἀπὸ τῆς Δ (σχ. 34).

Ἡ Π_α εἶνε συμμετρικὴ πρὸς τὴν διὰ τοῦ Ε κάθετον εὐθεῖαν ἐπὶ τὴν Δ, τὴν ΑΕx, ἥτις καλεῖται ***ἄξων*** αὐτῆς.

Διὰ νὰ γράψωμεν τόξον Π_α διὰ συνεχοῦς κινήσεως, τῆς ὁποίας δίδεται ἡ Ε καὶ ἡ Δ, στηρίζομεν π. χ. ἐπὶ τοῦ χάρτου κανόνα, ὥστε ἡ ἀκμὴ αὐτοῦ νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν Δ· στερεώνομεν εἰς τὸ ἄκρον τῆς ὑποτεινούσης γνώμονος τὸ ἓν ἄκρον νήματος μὲ μῆκος ὅσον ἡ παρακειμένη κάθετος πλευρὰ αὐτοῦ, τὸ δ᾽ ἄλλο εἰς τὸ Ε. Ἐφαρμόζομεν τὴν ἄλλην πλευρὰν τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ γνώμονος ἐπὶ τοῦ κανόνος καὶ διὰ τῆς αἰχμῆς γραφίδος τείνομεν τὸ νῆμα, ὥστε αὕτη νὰ ἐγγίζῃ τὴν κάθετον πλευρὰν τοῦ γνώμονος. Μετακινοῦμεν ἐπὶ τοῦ κανόνος τὸν γνώμονα, ἔχοντες διηνεκῶς τὸ νῆμα τεταμένον διὰ τῆς γραφίδος κατὰ μῆκος τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ, καὶ οὕτω γράφεται τόξον Π_α.



Σχ. 34.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς Π_α, λαμβάνομεν ὡς ἀρχὴν ὀρθογωνίων ἀξόνων τὸ μέσον Ο τοῦ τμήματος ΕΑ (σχ. 34), ὡς ἄξονας δὲ τὰς ΟΕx καὶ Οy· τὴν ΟΕ ὡς ἄξονα τῶν x καὶ τὴν ἐπ᾽ αὐτῆς κάθετον Οy ὡς θετικὸν ἄξονα τῶν y.

Ἂν Μ (x, y) εἶνε τυχὸν σημεῖον τῆς Π_α καὶ (ΛΜ), (ΕΜ) αἱ ἀπόλυτοι ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τῆς Δ καὶ τοῦ Ε, θὰ εἶνε

$$(EP)=(OP)-(OE),\ (EM)=(\Lambda M).$$

$$(PM)=y,\ (OP)=x,\ (EM)^2=(PM)^2+(EP)^2,\ (\Lambda M)=(\Lambda N)+(NM).$$

Ἑπομένως ἔχομεν, ἂν τεθῇ $(AE)=2\,(OE)=p(>0)$

$$(EM)^2=y^2+\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 \qquad (\Lambda M)=\frac{p}{2}+x$$

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2+=\left(\frac{p}{2}+x\right)^2$$

$$\text{ἢ}\quad y^2-2px=0 \quad (1) \qquad \text{ἢ} \quad \boxed{y^2=2px} \qquad (1')$$

ἥτις εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς Π_α, καὶ προφανῶς διέρχεται τῆς ἀρχῆς Ο (0,0), εἶνε δὲ συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα αὐτῆς Οx.

Τὸ μὲν Ο καλεῖται ***κορυφὴ*** τῆς Π_α, τὸ δὲ p ***ἡμιπαράμετρος*** ὡς πρὸς τὸν ἄξονα αὐτῆς.

Αἱ συντεταγμέναι σημείου κειμένου ἐκτὸς μὲν τῆς Π_α, π. χ., τοῦ (—p,0), τιθέμεναι εἰς τὴν (1) δίδουν ἐξαγόμενον >0, κειμένου δ᾽ ἐντὸς γωνία τοῦ ἀντιστοίχου πρὸς αὐτὸ σημείου τῆς περιγεγραμμένης εἰς αὐτὴν περιφερείας, ἂν ὡς πολικὸς ἄξων ληφθῇ ὁ μεγάλος ἄξων αὐτῆς.

Μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ἐκκέντρου γωνίας δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν διαφόρους ἰδιότητας τῆς E_λ καθὼς π.χ. τὰς κατωτέρω.

Τὸ διπλάσιον ἐμβαδὸν τριγώνου δύο συζυγῶν ἡμιδιαμέτρων E_λ μὲ μήκη ἀξόνων 2α, 2β εἶνε σταθερόν καὶ ἴσον μὲ $\alpha\beta$ (§ 23, σελ. 51).

Πράγματι, ἔστωσαν ΟΡ καὶ ΟΚ δύο συζυγεῖς ἡμιδιάμετροι τῆς E_λ $\beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$ καὶ $P(x_1,y_1)$, $K(x_2, y_2)$. Θὰ εἶνε (σχ. 26),

$$x_1=\alpha\sigma\upsilon\nu\upsilon,\quad y_1=\beta\eta\mu\upsilon,\quad x_2=-\alpha\eta\mu\upsilon,\quad y_2=\beta\,\sigma\upsilon\nu\,\upsilon,$$

ἐπειδὴ ἂν υ εἶνε ἡ ἔκκεντρος γωνία τοῦ Ρ, ἡ τοῦ Κ θὰ εἶνε $\upsilon+90^\circ$. Ἑπομένως ἂν E' παριστάνῃ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΟΡΚ, θὰ ἔχωμεν $\quad 2E'=(x_1\,y_2-y_1\,x_2)=\alpha\beta.$

Ἂν αἱ συζυγεῖς ἡμιδιάμετροι ΟΡ,ΟΚ ἔχουν μήκη α', β', τὸ διπλάσιον ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΟΡΚ εἶνε ἴσον μὲ $\alpha'\beta'\eta\mu\omega'$, ἐὰν ω' παριστάνῃ τὴν γωνίαν αὐτῶν. Οὕτω θὰ ἔχωμεν τότε

$$\alpha\beta=\alpha'\beta'\eta\mu\omega',\qquad \text{ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι}\qquad \eta\mu\omega'=\frac{\alpha\beta}{\alpha'\beta}$$

καὶ διὰ τοῦ τύπου τούτου δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν γωνίαν ω'.

Παρατηρητέον ὅτι, ἡ γωνία ω' γίνεται ἐλαχίστη, ὅταν τὸ $\alpha'\beta'$ γίνῃ μέγιστον. Ἀλλ εἶνε

$$2\alpha'\beta'=\alpha'^2+\beta'^2-(\alpha'-\beta')^2=\alpha^2+\beta^2-(\alpha'-\beta')^2$$

ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι, ὅταν εἶνε $\alpha'=\beta'$, τὸ $\alpha'\beta'$ γίνεται μέγιστον. Τοῦτο συμβαίνει ὅταν αἱ συζυγεῖς ἡμιδιάμετροι εἶνε συμμετρικαὶ πρὸς τοὺς ἄξονας τῆς E_λ καὶ ἡ ἔκκεντρος γωνία ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν πρώτην γίνῃ 45°. Ἂν x_1,y_1 εἶνε αἱ συντεταγμέναι τυχόντος σημείου Ρ τῆς E_λ καὶ $(OP)=\alpha'$, θὰ ἔχωμεν

$$x_1=\alpha\ \sigma\upsilon\nu\upsilon,\quad y_1=\beta\eta\mu\,\upsilon,\quad x^2_1+y^2_1=\alpha'^2=\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\,\upsilon+\beta^2\eta\mu^2\,\upsilon,$$

καὶ ὅταν $\upsilon=45^\circ$ καὶ $\alpha'=\beta'$, θὰ εἶνε $\alpha'^2=\beta'^2=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}$, ἂν δὲ φ παριστάνῃ τὴν γωνίαν τῆς μιᾶς τῶν διαμέτρων μὲ τὸν ἄξονα τῶν x, $\varepsilon\varphi\,\dfrac{\omega}{2}=\varepsilon\varphi\,\varphi=\dfrac{\beta}{\alpha}$. Ἤτοι, ἐκ πάντων τῶν ζευγῶν συζυγῶν ἡμιδιαμέτρων E_λ τὸ τῶν ἴσων καὶ συμμετρικῶς κειμένων πρὸς τοὺς ἄξονας αὐτῆς σχηματίζει τὴν ἐλαχίστην γωνίαν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 283. Εὕρετε τὴν ἔκκεντρον γωνίαν τοῦ σημείου (1,—1,6) τῆς Ελ $4x^2+25y^2=100$.

284. Ὑπὸ τίνων ἐξισώσεων ὁρίζεται ἡ ἔκκεντρος γωνία σημείου ἐλλείψεως $\beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$, κειμένου ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὸν μεγάλον ἄξονα αὐτῆς εἰς μίαν τῶν ἑστιῶν ;

285. Εὕρετε τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου ($v = 45^0$) τῆς $\beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$.

286. Τίνα σχέσιν ἔχουν μεταξύ των αἱ ἔκκεντροι γωνίαι τῶν ἄκρων διαμέτρου Ελ ;

287. Δείξατε ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα τὰ προκύπτοντα ἂν συνδέσωμεν δι' εὐθυγράμμων τμημάτων τὰ ἄκρα δύο συζυγῶν διαμέτρων Ελ ἔχουν ἐμβαδὰ ἴσα. Τοῦτο ἰσχύει καὶ διὰ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ προκύπτοντα, ἂν φέρωμεν τὰς ἐφαπτομένας τῆς Ελ εἰς τὰ ἄκρα συζυγῶν διαμέτρων αὐτῆς.

288. Δείξατε ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου Ελ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς Ρ ($x_1=\alpha\sigma\upsilon\nu\, \upsilon$, $y_1=\beta\eta\mu\, \upsilon$) εἶνε $\alpha\beta:\beta'$, ἂν $(OK)=\beta'$, καὶ ἡ ΟΚ συζυγὴς τῆς ΟΡ.

289. Δείξατε ὅτι $\varepsilon\varphi\omega' = -\varepsilon\varphi(\psi-\varphi) = -\dfrac{2\alpha\beta}{\gamma^2\eta\mu 2v}$ ὅπου ω' παριστάνει τὴν ὀξεῖαν γωνίαν συζυγῶν διαμέτρων Ελ καὶ v τὴν ἔκεντρον γωνίαν ἀντίστοιχον τῆς φ.

290. Δείξατε ὅτι διὰ τὴν ἐλαχίστην τιμὴν τῆς γωνίας ω' τῶν συζυγῶν διαμέτρων εἶνε $\alpha\varepsilon\varphi\omega'/2=\beta$, $(\alpha^2+\beta^2)\,\eta\mu\omega'=2\alpha\beta$, $(\alpha^2+\beta^2)\sigma\upsilon\nu\,\omega'=\alpha^2-\beta^2$.

291. Ὑπολογίσατε διὰ τοῦ μήκους α' ἡμιδιαμέτρου Ελ τὴν ἀντίστοιχον αὐτῆς ἔκκεντρον γωνίαν v καὶ τὴν γωνίαν φ τῆς α' μὲ τὸν ἄξονα τῶν x καὶ δείξατε ὅτι εἶνε

$$\sqrt{\alpha'^2-\beta'^2}\,\varepsilon\varphi v=\sqrt{\alpha^2-\alpha'^2}\,,\quad \alpha\sqrt{\alpha'^2-\beta^2}\,\varepsilon\varphi\,\varphi=\beta\sqrt{\alpha^2-\alpha'^2}\,.$$

292. Εἰς παραλληλόγραμμον μὲ μήκη διαγωνίων 2α',2β' καὶ ὀξεῖαν γωνίαν ω δύναται πάντοτε νὰ περιγραφῇ μία μόνη Ελ μὲ μήκη συζυγῶν διαμέτρων 2α', 2β'. Μερικὴ περίπτωσις : $\alpha'=13$, $\beta'=6$, $13\,\eta\mu\omega'=7$.

293. Διὰ τὰς ἀπολύτους ἀποστάσεις R, R' τοῦ κέντρου Ελ ἀπὸ δύο ἐφαπτομένων αὐτῆς καθέτων εἶνε $R^2+R'^2=\alpha^2+\beta^2$.

294. Δείξατε ὅτι ὁ τόπος τῶν τομῶν καθέτων μεταξύ των ἐφαπτομένων Ελ εἶνε περιφέρεια κύκλου (**διευθετοῦσα** περιφέρεια ἢ τοῦ Monge καλουμένη), μὲ κέντρον τὸ τῆς Ελ καὶ ἀκτῖνα $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

295. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον τὸ τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης Ελ ἢ Υπ, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν διὰ τῶν κορυφῶν ἐφαπτομένων αὐτῆς, διέρχεται διὰ τῶν ἑστιῶν της. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι, τὸ μεταξὺ τῶν ἐφαπτομένων τῶν κορυφῶν περιεχόμενον τμῆμα κινητῆς ἐφαπτομένης τῆς Ελ ἢ Υπ φαίνεται ἀπὸ ἑκάστην τῶν ἑστιῶν ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν ἢ ἡ γωνία ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ἀπὸ μιᾶς ἑστίας τὸ μεταξὺ δύο σταθερῶν ἐφαπτομένων περιεχόμενον τμῆμα κινητῆς ἐφαπτομένης Ελ ἢ Υπ εἶνε σταθερὰ καὶ ἴση μὲ ὀρθήν.

296. Εἰς Ελ ἢ Υπ $\beta^2x^2\pm\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$ νὰ ἀχθῇ χορδὴ M_1M_2 παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x, ὥστε νὰ εἶνε ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας τὴν ἑστίαν Ε(γ,0).

397. Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον, ὥστε αἱ δύο ἀπέναντι κορυφαί του νὰ εἶνε αἱ ἑστίαι Ελ ἢ Υπ καὶ αἱ δύο ἄλλαι ἐπὶ τῆς καμπύλης.

§ 30. Πόλος καὶ πολικὴ ὡς πρὸς ἔλλειψιν ἢ ὑπερβολήν.

Ἔστω ἡ E_λ ἢ Y_π ὡς πρὸς ἄξονας τὰς συζυγεῖς διαμέτρους αὐτῆς μὲ μήκη $2\alpha'$, $2\beta'$ $\quad \beta'^2x^2 \pm \alpha'^2y^2 = \alpha'^2\beta'^2 \quad (1)$ καὶ σημεῖον P (ξ,η) τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς. Ἂν x_1, y_1 εἶνε αἱ συντεταγμέναι τῆς ἀφῆς τῆς διὰ τοῦ P ἀγομένης ἐφαπτομένης τῆς (1), θὰ ἔχωμεν $\beta'^2\xi x_1 \pm \alpha'^2\eta y_1 = \alpha'^2\beta'^2$ καὶ $\beta'^2x_1^2 \pm \alpha'^2y_1^2 = \alpha'^2\beta'^2 \quad (2,3)$
Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος τῶν (2,3) εὑρίσκομεν ὅτι ἄγονται δύο ἢ οὐδεμία ἢ μία ἐφαπτόμεναι διὰ τοῦ P εἰς τὴν (1), ἂν τὸ P κεῖται ἐκτὸς ἢ ἐντὸς ἢ ἐπὶ τῆς E_λ ἢ Y_π. Ἂν εἰς τὴν (2) θέσωμεν ἀντὶ τῶν x_1, y_1 τὰ x, y, ἡ ἐξίσωσις $\quad \beta'^2\xi x \pm \alpha'^2\eta y = \alpha'^2\beta'^2 \quad (4)$ παριστάνει τὴν εὐθεῖαν, ἥτις διέρχεται διὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν διὰ τοῦ P ἀγομένων ἐφαπτομένων τῆς E_λ ἢ Y_π καὶ λέγεται ***πολικὴ*** τοῦ σημείου P ὡς πρὸς τὴν (1), τὸ δὲ P καλεῖται ***πόλος*** τῆς εὐθείας (4).

Παρατηρητέον ὅτι, ἂν ὁ πόλος κεῖται ἐκτὸς ἢ ἐντὸς τῆς E_λ ἢ Y_π, ἡ πολικὴ αὐτοῦ τέμνει αὐτὴν ἢ κεῖται ἐκτός· ἂν δ᾽ οὗτος κεῖται ἐπ᾽ αὐτῆς ἡ πολικὴ αὐτοῦ ἐφάπτεται τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο.

Δοθείσης εὐθείας $Ax+By+\Gamma=0$ ὡς πολικῆς E_λ ἢ Y_π, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν πόλον αὐτῆς. Πράγματι, ἂν x_1, y_1 εἶνε αἱ συντεταγμέναι τοῦ πόλου τῆς εὐθείας ὡς πρὸς τὴν (1), ἡ $\beta'^2x_1x \pm \alpha'^2y_1y = \alpha'^2\beta'^2$ πρέπει νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν δοθεῖσαν, ἑπομένως ὁ πόλος θὰ εἶνε $\left(-\frac{A}{\Gamma}\alpha'^2, \mp\frac{B}{\Gamma}\beta'^2\right)$ καὶ διὰ $\Gamma \to 0$ τείνει οὗτος εἰς τὸ ∞.

Ἂν δύο σημεῖα $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ εὑρίσκωνται οὕτως ὡς πρὸς τὴν E_λ ἢ Y_π (1), ὥστε τὸ P_2 νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς πολικῆς τοῦ P_1, θὰ εἶνε $\beta'^2x_1x_2 \pm \alpha'^2y_1y_2 = \alpha'^2\beta'^2$. Ἀλλ᾽ αὕτη ἐκφράζει ὅτι καὶ τὸ P_1 κεῖται ἐπὶ τῆς πολικῆς $\beta'^2x_2x \pm \alpha'^2y_2y = \alpha'^2\beta'^2$ τοῦ P_2. Ἑπομένως, ἐὰν σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς πολικῆς ἄλλου, ὡς πρὸς E_λ ἢ Y_π, τοῦτο κεῖται ἐπὶ τῆς πολικῆς τοῦ πρώτου, ἢ ἐὰν σημεῖον κινῆται ἐπ᾽ εὐθείας, ἡ πολικὴ αὐτοῦ ὡς πρὸς E_λ ἢ Y_π στρέφεται περὶ τὸν πόλον τῆς εὐθείας, καὶ ἀντιστρόφως, εἰς τὰ σημεῖα δ᾽ εὐθείας ἀντιστοιχοῦν ὡς πολικαὶ αἱ ἀκτῖνες ἐπιπέδου δέσμης, καὶ ἀντιστρόφως.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι, αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἄκρα χορδῆς E_λ ἢ Y_π διέρχονται διὰ τοῦ πόλου τῆς χορδῆς, ἢ αἱ ἐφαπτόμεναι σημείου κειμένου ἐκτὸς E_λ ἢ Y_π ἐφάπτονται εἰς τὰ σημεῖα τῆς τομῆς αὐτῆς καὶ τῆς πολικῆς τοῦ σημείου.

Αἱ πολικαὶ σημείων διαμέτρου Ελ ἢ Υπ εἶνε παράλληλοι πρὸς τὴν συζυγῆ αὐτῆς διάμετρον. Διότι, ἐὰν ὁ πόλος διαγράφῃ διάμετρον τῆς Ελ ἢ Υπ καὶ λάβωμεν αὐτὴν καὶ τὴν συζυγῆ της ὡς ἄξονας, θὰ ἔχωμεν ὡς πολικὴν αὐτοῦ τὴν $\frac{x_1 x}{\alpha'^2}=1$, ἢ $x=\frac{\alpha'^2}{x_1}$, δηλαδὴ παράλληλον τῆς συζυγοῦς αὐτῆς. Ἀντιστρόφως, ὁ πόλος τῆς εὐθείας $Ax+\Gamma=0$ εἶνε $\left(x_1=-\frac{A}{\Gamma}\alpha'^2,\ y_1=0\right)$, ὑποθέτοντες δ' ὅτι $\Gamma \to 0$, λαμβάνομεν $x \to \infty$. Ἤτοι ὁ πόλος διαμέτρου Ελ ἢ Υπ εἶνε τὸ κατ' ἐκδοχὴν σημεῖον τῆς συζυγοῦς αὐτῆς διαμέτρου, ἐκ δύο δὲ συζυγῶν διαμέτρων Ελ ἢ Υπ ἑκάστη εἶνε πολικὴ τοῦ κατ' ἐκδοχὴν σημείου τῆς ἄλλης.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι, ἡ πολικὴ σημείου ἀσυμπτώτου Υπ εἶνε παράλληλος πρὸς αὐτὴν ἢ εἶνε αὐτὴ ἡ ἰδία, ἂν τὸ θεωρούμενον σημεῖον εἶνε τὸ κατ' ἐκδοχὴν αὐτῆς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 298. Δείξατε ὅτι αἱ ἰδιότητες πόλου καὶ πολικῆς ὡς πρὸς Ελ ἢ Υπ εἶνε ἀνεξάρτητοι τοῦ συστήματος τῶν ἀξόνων ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον ἀναφέρονται.

299. Δείξατε ὅτι, εἰς τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας $(1+\lambda)x=x_1+\lambda x_2$, $(1+\lambda)y=y_1+\lambda y_2$ ἀντιστοιχοῦν ὡς πολικαὶ αἱ ἀκτῖνες τῆς δέσμης $E_1+\lambda E_2=0$, ἂν $E_1=0$, $E_2=0$ εἶνε αἱ πολικαὶ τῶν σημείων (x_1,y_1) καὶ (x_2,y_2). Μερικαὶ περιπτώσεις: διὰ τὰς τιμὰς $\lambda=0, +1, -1$ τοῦ $\lambda \to \infty$.

300. Δείξατε ὅτι, ἐὰν διὰ σημείου ἀχθῇ τυχοῦσα ἀκτὶς τέμνουσα τὴν ἔλλειψιν εἰς τὰ M_1, M_2, αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῆς εἰς ταῦτα τέμνονται εἰς σημεῖον τῆς πολικῆς τοῦ σημείου.

301. Δοθέντος σημείου ἐκτὸς Ελ ἢ Υπ φέρατε δι' αὐτοῦ δύο ἐφαπτομένας αὐτῆς μὲ τὴν βοήθειαν τῶν πολικῶν.

302. Εὕρετε γεωμετρικῶς τὸν πόλον εὐθείας μὴ τεμνούσης τὴν Ελ ἢ Υπ.

303. Εὕρετε τὸν τόπον τῶν πόλων πασῶν τῶν ἐφαπτομένων τῆς περιφερείας $(0,0,\varrho)$ ὡς πρὸς τὴν $\beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$.

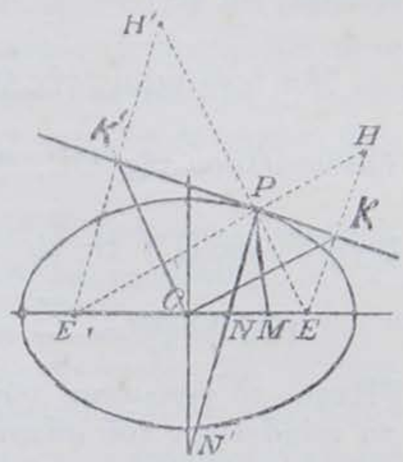
304. Εὕρετε τὰς συντεταγμένας τοῦ πόλου τῆς $3x+5y+2=0$ ὡς πρὸς τὴν $4x^2-9y^2=36$.

§ 31. Ἰδιότητες τῶν ἑστιῶν ἐλλείψεως καὶ ὑπερβολῆς.

Ἔστω ἡ Ελ ἢ Υπ $\qquad \frac{x^2}{\alpha^2}\pm\frac{y^2}{\beta^2}=1 \qquad (1,1)$

τυχὸν σημεῖον τῆς Ελ $P(x_1,y_1)$ καὶ $(EP)=\varrho$, $(E'P)=\varrho'$. Ἔχομεν (§ 20, σελ. 44) $\varrho' = \alpha + \varepsilon x_1, \quad \varrho = \alpha - \varepsilon x_1, \quad (\varepsilon\alpha = \gamma).$

Θέτοντες $x_1 = \alpha\sigma\upsilon\nu\upsilon$, ὅπου υ παριστάνει τὴν ἔκκεντρον γωνίαν τοῦ P, καὶ πολλαπλασιάζοντες τὰς (2) κατὰ μέλη εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι εἶνε $\varrho\varrho' = \alpha^2\eta\mu^2\upsilon + \beta^2\sigma\upsilon\nu^2\upsilon = \beta'^2$ ὅπου β′ εἶνε τὸ μῆκος τῆς συζυγοῦς ἡμιδιαμέτρου τῆς OP καὶ $(\upsilon + 90^0)$ τὸ ἄκρον ταύτης. Ἑπομένως τὸ γινόμενον τῶν μηκῶν δύο ἑστιακῶν ἀκτίνων σημείου E_λ ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ μήκους τῆς εἰς τὸ σημεῖον ἀντιστοιχούσης συζυγοῦς ἡμιδιαμέτρου αὐτῆς.



(Σχ. 27).

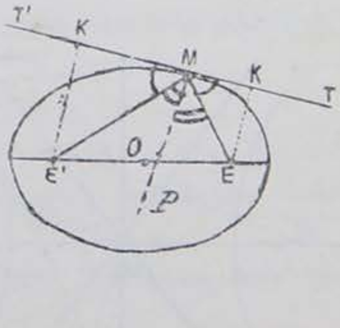
Ἂν ζητοῦμεν τὰς ἀποστάσεις R=(EK), R′=(E′K′) τῶν ἑστιῶν E, E′ τῆς E_λ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης εἰς δοθὲν σημεῖον αὐτῆς P(υ), ἔχομεν (σχ. 27) λαμβάνοντες ὡς ἐξίσωσιν ταύτης τὴν

$$\beta\, x\, \sigma\upsilon\nu\,\upsilon + \alpha\, y\, \eta\mu\,\upsilon = \alpha\beta,$$

$$R,\ R' = \frac{-\beta}{\beta'}\left(\alpha \mp \gamma\sigma\upsilon\nu\,\upsilon\right), \quad \text{ἢ} \quad R, R' = \frac{-\beta}{\beta'}\left(\alpha \mp \varepsilon x_1\right)$$

$$\text{ἢ καὶ} \quad R = \frac{-\beta}{\beta'}\varrho,\ R' = \frac{-\beta}{\beta'}\varrho', \text{ ἐπομένως καὶ } RR' = \beta^2.$$

Ἤτοι, τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τῶν ἑστιῶν E_λ ἀπό τινος ἐφαπτομένης αὐτῆς ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ μήκους τοῦ μικροῦ ἡμιάξονος αὐτῆς. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω τιμῶν τῶν R, R′ εὑρίσκομεν R:ϱ=R′:ϱ′ καὶ ἐπειδὴ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα PEK, PE′K′ (σχ. 27) εἶνε ὅμοια, αἱ γωνίαι E′PK′ καὶ EPK εἶνε ἴσαι. Ἤτοι, ἡ ἐφαπτομένη εἰς ἓν σημεῖον τῆς E_λ σχηματίζει ἴσας γωνίας μὲ τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς αὐτὸ ἑστιακὰς ἀκτῖνας.



(Σχ. 28).

Τὴν ἰδιότητα ταύτην ἀποδεικνύομεν καὶ ἀμέσως, παρατηροῦντες ὅτι, ἂν M εἶνε τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς τῆς ἐφαπτομένης TT′ τῆς E_λ (σχ. 28), ἐπειδὴ ἡ τεθλασμένη γραμμὴ EME′ μὲ ἄκρα τὰ E, E′ ἔχει τὸ ἐλάχιστον ἀπόλυτον μῆκος ἐκ πασῶν τῶν τοιούτων γραμμῶν, ἐχουσῶν τὸ M κοινὸν μετὰ τῆς TT′, αἱ γωνίαι EMT καὶ E′MT′ εἶνε ἴσαι.

Ἂν τὸ $P(x_1,y_1)$ κεῖται ἐπὶ τῆς Y_π (1′) καὶ τεθῇ $(EP)=\varrho$, $(E'P)=\varrho'$, ἔχομεν (§ 20, σελ. 45) $\quad \varrho=\varepsilon x_1-\alpha,\ \varrho'=\varepsilon x_1+\alpha \qquad (2)$

$$\text{καὶ}\quad \varrho\varrho'=\varepsilon^2x^2_1-\alpha^2=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}x^2_1-\alpha^2=\frac{\beta^2x^2_1}{\alpha^2}+x^2_1-\alpha^2$$

$$\text{ἢ ἕνεκα τῆς (1′)}\quad \varrho\varrho'=\frac{\beta^2x^2_1}{\alpha^2}+\frac{\alpha^2y^2_1}{\beta^2}. \qquad (3)$$

Ἂν ἡ ἐξίσωσις τῆς OP εἶνε $y=\dfrac{y_1}{x_1}x$, ἡ τῆς OP′, συζυγοῦς ἡμιδιαμέτρου τῆς OP, θὰ εἶνε $y=\dfrac{x_1\beta^2}{y_1\alpha^2}x$ καὶ θὰ τέμνῃ τὴν συζυγῆ Y_π τῆς (1′) εἰς τὸ $P'\left(\pm\dfrac{\alpha}{\beta}y_1,\pm\dfrac{\beta}{\alpha}x_1\right)$, θὰ εἶνε δὲ

$$(OP')=\beta'^2=\frac{\beta^2}{\alpha^2}x^2_1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}y^2_1 \qquad \text{ἄρα}\quad \varrho\varrho'=\beta'^2 \qquad (4)$$

Ἤτοι, τὸ γινόμενον τῶν ἑστιακῶν ἀκτίνων σημείου Y_π ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ μήκους τῆς εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ἀντιστοίχου συζυγοῦς ἡμιδιαμέτρου αὐτῆς.

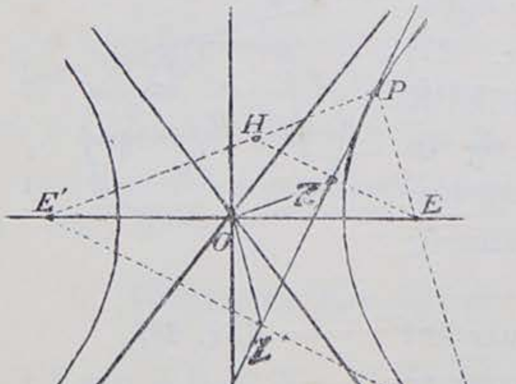
Αἱ ἀποστάσεις $(EZ)=R$, $(E'Z')=R'$ τῶν ἑστιῶν τῆς Y_π ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς εἰς τὸ $P(x_1, y_1)$ (σχ. 29), ἐχούσης ἐξίσωσιν $\beta^2 x_1x-\alpha^2 y_1y=\alpha^2\beta^2$ εἶνε

$$R=\left(\frac{\gamma x_1}{\alpha^2}-1\right):\sqrt{\frac{x_1^2}{\alpha^4}+\frac{y_1^2}{\beta^4}}=\beta(\varepsilon x_1-\alpha):\sqrt{\frac{\beta^2x_1^2}{\alpha^2}+\frac{\alpha^2y_1^2}{\beta^2}}$$

$$R'=\left(-\frac{\gamma x_1}{\alpha^2}-1\right):\sqrt{\frac{x_1^2}{\alpha^4}+\frac{y_1^2}{\beta^4}}=-\beta(\varepsilon x_1+\alpha):\sqrt{\frac{\beta^2x_1^2}{\alpha^2}+\frac{\alpha^2y_1^2}{\beta^2}}$$

Ἑπομένως ἕνεκα τῶν (2) καὶ (3) ἔχομεν

$$R=\beta\varrho:\beta',\ R'=-\beta\varrho':\beta' \quad (5) \quad \text{καὶ}\ RR'=-\frac{\beta^2\varrho\varrho'}{\beta'^2} \qquad (5')$$



(Σχ. 29).

ἢ ἕνεκα τῆς (4) $RR'=-\beta^2$ (6)

Ἤτοι, τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τῶν ἑστιῶν Y_π ἀπό τινος ἐφαπτομένης αὐτῆς ἰσοῦται μὲ τὸ ἀντίθετον τοῦ τετραγώνου τοῦ μήκους τοῦ δευτερεύοντος ἡμιάξονος αὐτῆς. Τὸ σημεῖον — τοῦ γινομένου τούτου φανερώνει ὅτι αἱ ἑστίαι κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ἐφαπτομένης, ἐνῷ εἰς τὴν E_λ κεῖνται πάντοτε πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς.

Ἐκ τῶν (5) ἔχομεν ἀπολύτως

$$R:\varrho=R':\varrho', \qquad (7)$$

ἐπειδὴ δὲ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΡΕΖ καὶ ΡΕ΄Ζ΄ εἶνε ὅμοια, ἕπεται ὅτι αἱ γωνίαι ΕΡΖ καὶ Ε΄ΡΖ΄ εἶνε ἴσαι. Ἤτοι, ἡ ἐφαπτομένη εἰς σημεῖον Y_π διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῶν ἑστιακῶν αὐτῆς ἀκτίνων τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς.

Ἐὰν φέρωμεν τὴν κάθετον ΜΡ ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς $E\lambda$ (σχ.28) ἢ Y_π εἰς τὸ Ρ, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν ***κάθετον*** αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο, ἕπεται ὅτι, ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ κάθετος εἰς σημεῖον $E\lambda$ ἢ Y_π εἶνε διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ τῶν ἑστιακῶν ἀκτίνων τοῦ σημείου τούτου.

Ἐὰν τὸ σημεῖον Η εἶνε συμμετρικὸν τοῦ Ε πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον Ρ τῆς $E\lambda$ ἢ Y_π, θὰ ἔχωμεν διὰ τὴν ἔλλειψιν (σχ. 27) γωνΗΡΚ=γωνΕΡΚ=γωνΕ΄ΡΚ΄, τὰ δὲ Ε΄, Ρ, Η κεῖνται ἐπ εὐθείας καὶ (Ε΄Η)=(Ε΄Ρ)+(ΡΗ)=(Ε΄Ρ)+(ΕΡ)=2α καὶ ὁμοίως διὰ τὴν ὑπερβολήν. Ἤτοι, ὁ τόπος τῶν συμμετρικῶν σημείων ἑκάστης τῶν ἑστιῶν τῆς $E\lambda$ ἢ Y_π (1,1΄) ὡς πρὸς ἐφαπτομένην αὐτῆς εἶνε περιφέρεια κύκλου, μὲ ἀκτῖνα μήκους 2α καὶ κέντρον τὴν ἄλλην ἑστίαν αὐτῆς.

Ἐπειδὴ διὰ τὴν $E\lambda$ τὰ Ο,Κ,Κ΄ (σχ.27) εἶνε τὰ μέσα τῶν τμημάτων ΕΕ΄, ΕΗ καὶ Ε΄Η΄ (Η΄ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Ε΄ ὡς πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Ρ), αἱ ΟΚ καὶ ΟΚ΄ εἶνε παράλληλοι τῶν Ε΄Η καὶ ΕΗ΄, ἑπομένως ἔχομεν 2(ΟΚ) = (Ε΄Η), 2(ΟΚ΄) = (Ε΄Η). Ἄρα (ΟΚ)=(ΟΚ΄)=α, ἐπειδὴ εἶνε (Ε΄Η)=(ΕΗ΄)= 2α. Ἀνάλογα παρατηροῦμεν καὶ διὰ τὴν Y_π. Ἤτοι, ὁ τόπος τῶν ποδῶν τῶν καθέτων εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τῶν ἑστιῶν $E\lambda$ ἢ Y_π (1,1΄) ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας αὐτῆς εἶνε περιφέρεια κύκλου μὲ ἀκτῖνα μήκους α καὶ κέντρον τὸ τῆς $E\lambda$ ἢ Y_π.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 305. Δείξατε διὰ τῶν συντελεστῶν διευθύνσεως τῆς καθέτου ΡΝ καὶ τῶν ἀκτίνων $E\lambda$ ΕΡ,Ε΄Ρ, ὅτι αἱ γωνίαι ΕΡΝ, Ε΄ΡΝ εἶνε ἴσαι.

306. Κατασκευάσατε τὴν κάθετον $E\lambda$ εἰς σημεῖον αὐτῆς.

307. Ἀπὸ ἑστίας $E\lambda$ ἀναχωροῦν φωτειναὶ ἢ θερμαντικαὶ ἀκτῖνες, διευθυνόμεναι πρὸς τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς. Πόθεν διέρχονται αἱ ἀκτῖνες ἀνακλάσεως ἐκ τῶν διαφόρων σημείων τῆς $E\lambda$;

308. Ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ κάθετος $E\lambda$ εἰς τὸ σημεῖον Ρ τέμνουν τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὰ Τ καὶ Ν. Δείξατε ὅτι εἶνε (ΟΤ)(ΟΝ) = γ^2.

309. Εὕρετε τὸ μῆκος τοῦ ΜΝ (σχ. 29), τὸ ὁποῖον καλεῖται ***ὑποκάθετος*** τῆς $E\lambda$ εἰς τὸ Ρ καὶ τοῦ ΡΝ, τὸ ὁποῖον καλεῖται ***μῆκος τῆς καθέτου*** τῆς $E\lambda$ εἰς τὸ Ρ, μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ἐκκέντρου γωνίας τοῦ Ρ καὶ δείξατε ὅτι εἶνε (ΡΝ)=ββ΄:α, ὅπου β΄ εἶνε τὸ μῆκος τῆς συζυγοῦς ἡμιδιαμέτρου τῆς ΟΡ.

310. Δείξατε ὅτι εὐθεῖά τις τέμνει $E\lambda$ ἢ ἐφάπτεται αὐτῆς ἢ κεῖται ἐκτὸς αὐτῆς,

ἂν ἡ τομὴ τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἔκ τινος ἑστίας αὐτῆς ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν κεῖται ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὴν Ελ περιφερείας.

311. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς καθέτου εἰς σημεῖον Υπ καὶ δείξατε ἀναλυτικῶς ἰδιότητας αὐτῆς ἀναλόγους πρὸς τὰς τῆς Ελ.

312. Κατασκευάσατε εἰς σημεῖον Υπ τὴν ἐφαπτομένην καὶ τὴν κάθετον αὐτῆς.

313. Κατασκευάσατε τὰς ἐφαπτομένας Υπ διερχομένας διὰ σημείου κειμένου ἐκτὸς αὐτῆς.

314. Δείξατε ὅτι ἡ ἀπόλυτος ἀπόστασις ἑστίας Υπ ἀπὸ ἀσυμπτώτου αὐτῆς ἰσοῦται μὲ β.

315. Δείξατε ὅτι Ελ καὶ Υπ ἔχουσαι τὰς αὐτὰς ἑστίας τέμνονται καθέτως, ἤτοι εἰς ἓν σημεῖον τομῆς αὐτῶν ἡ ἐφαπτομένη τῆς μιᾶς εἶνε κάθετος τῆς ἄλλης.

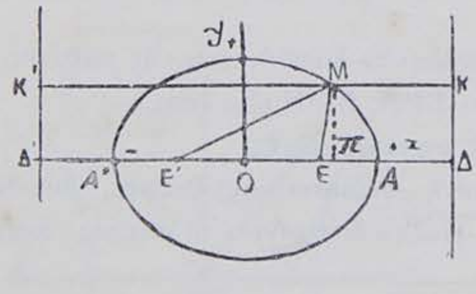
§ 32. Διευθετοῦσαι ἐλλείψεως ἢ ὑπερβολῆς.

Καλοῦμεν ***διευθετούσας*** E_λ ἢ Y_π τὰς πολικὰς εὐθείας τῶν ἑστιῶν ἑκάστης.

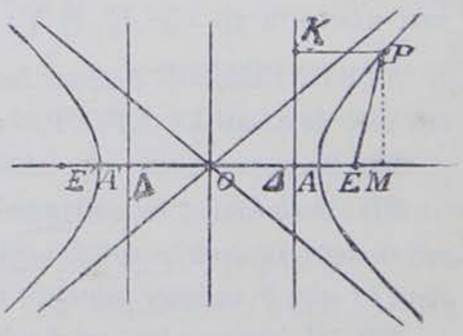
Τὰς ἐξισώσεις τῶν διευθετουσῶν E_λ ἢ Y_π μὲ μήκη ἀξόνων 2α, 2β εὑρίσκομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῆς πολικῆς σημείου $M_1(x_1, y_1)$ ὡς πρὸς E_λ ἢ Y_π $\beta^2 x_1 x \pm \alpha^2 y_1 y = \alpha^2\beta^2$, ἂν θέσωμεν $x_1 = \pm\gamma$, $y_1 = 0$, ὅτε εὑρίσκομεν

$$\boxed{x = \pm\frac{\alpha^2}{\gamma}} \tag{1}$$

Αὗται ἀπέχουσαι κατὰ $\pm\dfrac{\alpha^2}{\gamma} = \pm\dfrac{\alpha}{\varepsilon}$ ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς E_λ ἢ Y_π κεῖνται ἐκτὸς αὐτῶν, διότι διὰ μὲν τὴν E_λ εἶνε $\alpha > \gamma$, $\dfrac{\alpha}{\gamma} > 1$ καὶ $\dfrac{\alpha^2}{\gamma} > \alpha$ διὰ δὲ τὴν Y_π $\gamma > \alpha$, $1 > \dfrac{\alpha}{\gamma}$ καὶ $\alpha > \dfrac{\alpha^2}{\gamma}$.



(Σχ. 30).



(Σχ. 31).

Ἂν M(x,y) εἶνε σημεῖον τῆς E_λ καὶ MK κάθετος εὐθεῖα ἐπὶ τὴν διευθετοῦσαν ΔK, ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν ἑστίαν E (σχ.30), ἔχομεν (§ 20, σελ. 44) $(EM) = \varrho = \alpha - \varepsilon x$, $(MK) = (\Pi\Delta) = (O\Delta) - (O\Pi)$,

ἢ $$(MK) = \frac{\alpha^2}{\gamma} - x = \frac{\alpha}{\varepsilon} - x = \frac{1}{\varepsilon}(\alpha - \varepsilon x),$$

ἑπομένως $$(EM) : (MK) = \varepsilon\ (<1).$$

῾Ομοίως εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε $(E'M):(MK')=\varepsilon$. (2)

῎Αν $P(x,y)$ εἶνε σημεῖον Y_π καὶ KP κάθετος εὐθεῖα ἐπὶ τὴν διευθετοῦσαν ΔK ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν ἑστίαν E (σχ. 31), ἔχομεν (§ 20, σελ. 45) $(EP)=\varrho=\varepsilon x-\alpha, (KP)=(\Delta M)=(OM)-(O\Delta)=x-\dfrac{\alpha}{\varepsilon}=\dfrac{1}{\varepsilon}(\varepsilon x-\alpha)$ καὶ $(EP):(KP)=\varepsilon(>1$. Ἤτοι, ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων σημείου E_λ ἢ Y_π ἀπό τινος τῶν ἑστιῶν καὶ τῆς ἀντισοιχούσης εἰς ταύτην διευθετούσης ἰσοῦται μὲ τὴν ἐκκεντρότητα αὐτῆς ε (<1 διὰ τὴν E_λ καὶ >1 διὰ τὴν Y_π).

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι, ἂν σημεῖον τι ἔχῃ τὴν ἰδιότητα ταύτην καὶ εἶνε $\varepsilon<1$ ἢ >1, τὸ σημεῖον τοῦτο κεῖται ἐπὶ E_λ ἢ Y_π μὲ ἐκκεντρότητα ε.

Ἡ πολικὴ τυχόντος σημείου $M_1\left(\dfrac{\alpha^2}{\gamma}, y_1\right)$ διευθετούσης E_λ ἢ Y_π ἀντιστοιχούσης εἰς τὴν ἑστίαν E, ἔχει ἐξίσωσιν $\dfrac{x}{\gamma}\pm\dfrac{y_1 y}{\beta^2}=1$ καὶ διέρχεται διὰ τῆς ἑστίας E. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως τῆς πολικῆς ταύτης εἶνε $\mp\dfrac{\beta^2}{\gamma y_1}$, τῆς δ᾽εὐθείας τῆς διερχομένης διὰ τῶν M_1 καὶ E εἶνε $\pm\dfrac{\gamma y_1}{\beta^2}$, ἕπεται ὅτι, πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ μιᾶς τῶν ἑστιῶν, E π. χ., E_λ ἢ Y_π εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τὴν συνδέουσαν τὸν πόλον τῆς πρώτης μὲ τὸ E. Ἄρα, τὸ τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης E_λ ἢ Y_π, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τοῦ σημείου ἐπαφῆς καὶ μιᾶς διευθετούσης αὐτῆς, φαίνεται ἐκ τῆς πλησιεστέρας εἰς ταύτην ἑστίας ὑπὸ γωνίαν ὀρθήν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 316. Τί εἶνε ἡ διευθετοῦσα περιφερείας κύκλου;

317. Φέρατε ἐκ τυχόντος σημείου τῆς διευθετούσης τὰς δύο ἐφαπτομένας εἰς E_λ ἢ Y_π.

318. Δείξατε ὅτι E_λ ἢ Y_π εἶνε ὡρισμένη, ἂν δοθῇ μία ἑστία, ἡ ἀντίστοιχος ταύτης διευθετοῦσα καὶ ἡ ἐκκεντρότης ε.

319. Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὰς τομὰς E_λ ὑπὸ εὐθείας MK παραλλήλου πρὸς τὸν μεγάλον ἄξονα αὐτῆς, γράφομεν μὲ κέντρον E περιφέρειαν κύκλου καὶ ἀκτῖνα p, φέρομεν διὰ τοῦ $\Delta(\alpha^2/\gamma, 0)$ παράλληλον πρὸς τὴν KE· τὰς τομὰς ταύτης μὲ τὴν περιφέρειαν συνδέομεν δι᾽ εὐθειῶν μὲ τὸ E καὶ αὗται τέμνουν τὴν MK εἰς τὰ ζητούμενα σημεῖα, εἶνε δὲ $(E\Delta)=\mathrm{p}/\varepsilon$.

320. Εὕρετε τὰς διευθετούσας τῶν Ελ $3x^2+4y^2=12, 9x^2+y^2-16=0, 3x^2+y^2=5, 2x^2+y^2=1, 9x^2+4y^2=36$. Τίνα θέσιν ἔχει ἡ εὐθεῖα $x+y=12$ πρὸς ἑκάστην αὐτῶν;

321. Εὕρετε τὰς διευθετούσας ἰσοσκελοῦς Y_π.

322. Δείξατε ὅτι, ἂν σημεῖόν τι δὲν κεῖται ἐπὶ E_λ ἢ Y_π, ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ἀπὸ τῆς μιᾶς ἑστίας καὶ τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς ταύτην διευθετούσης εἶνε διάφορος τοῦ ε.

§ 33. Ἐξίσωσις ὑπερβολῆς ὡς πρὸς τὰς ἀσυμπτώτους αὐτῆς.

Ἔστω ἡ Y_π $\qquad \beta^2 x^2 - \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2 \qquad (1)$

Ἂν ἡ ἀσύμπτωτος αὐτῆς ἡ διερχομένη διὰ τῆς γωνίας xOy σχηματίζῃ γωνίαν φ μὲ τὸν ἄξονα τῶν x, ἡ ἄλλη σχηματίζει μὲ τὸν αὐτὸν ἄξονα τὴν γωνίαν $2\pi - \varphi$. Λαμβάνοντες ὡς νέον ἄξονα τῶν $+x'$ τὴν β' ἀσύμπτωτον καὶ ὡς ἄξονα τῶν $+y'$ τὴν α', ἔχομεν τοὺς ἑξῆς τύπους μετασχηματισμοῦ τῶν συντεταγμένων

$$x = (x' + y')\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi, \quad y = (-x' + y')\,\eta\mu\,\varphi,$$

ὅπου εἶνε $\qquad \varepsilon\varphi\,\varphi = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \sigma\upsilon\nu\,\varphi = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad \eta\mu\,\varphi = \frac{\beta}{\gamma}.$

Εἰσάγοντες τὰς τιμὰς τῶν x, y εἰς τὴν (1) εὑρίσκομεν $\boxed{x'y' = \frac{\gamma^2}{4}}$

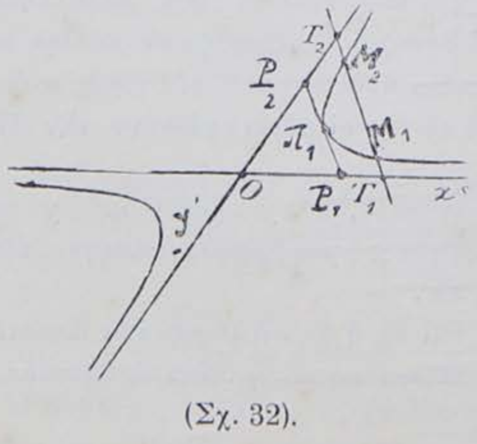
Ἐὰν ζητοῦμεν τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς Y_π $\quad 4xy = \gamma^2 \qquad (1')$

καὶ τῆς εὐθείας $\qquad \frac{x}{\mu} + \frac{y}{\nu} = 1 \quad (2)$ ὡς πρὸς ἄξονας τὰς ἀσυμπτώτους αὐτῆς, θὰ λύσωμεν τὸ σύστημα τῶν (1′) καὶ (2) καὶ εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν ἐξίσωσιν $\quad 4\nu x^2 - 4\mu\nu x + \gamma^2\mu = 0, \quad (3)$ τὸ εἶδος τῶν ῥιζῶν τῆς ὁποίας ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ σημείου τοῦ

$$\mu\nu\,(\mu\nu - \gamma^2).$$

Ἐὰν εἶνε $\mu\nu < 0$ ἢ $\mu\nu > \gamma^2$, τὰ σημεῖα τομῆς τῆς (1′) καὶ τῆς (2) εἶνε πραγματικὰ καὶ διακεκριμένα, ἂν δὲ ταῦτα εἶνε τὰ M_i (x_i, y_i), $i = 1, 2$, αἱ συντεταγμέναι τοῦ μέσου $M(x, y)$ τῆς χορδῆς M_1M_2 εὑρίσκονται ἐκ τῶν $2x = x_1 + x_2$, $2y = y_1 + y_2$ καὶ εἶνε $\quad 2x = \mu, \; 2y = \nu \quad (4)$

Ἤτοι, ἐὰν ἡ εὐθεῖα τέμνῃ τὴν Y_π (1′) εἰς τὰ M_i τὰς δ' ἀσυμπτώτους αὐτῆς εἰς τὰ T_i, τὸ μέσον τῆς χορδῆς M_1M_2 συμπίπτει μὲ τὸ μέσον τοῦ τμήματος T_1T_2, εἶνε δὲ ἀπολύτως $(M_1T_1) = (M_2T_2)$ καὶ $(M_1T_2) = (M_2T_1)$. Διὰ τῆς ἰδιότητος ταύτης δυνάμεθα ὡς ἑξῆς νὰ εὕρωμεν σημεῖα Y_π, ἂν γνωρίζωμεν τὰς ἀσυμπτώτους καὶ ἓν σημεῖον αὐτῆς, ἔστω τὸ M_1 (σχ. 32). Φέρομεν διὰ τοῦ M_1 τυχοῦσαν εὐθεῖαν, τέμνουσαν τὰς ἀσυμπτώτους, ἔστω εἰς τὰ T_1 καὶ T_2. Λαμβάνομεν τὸ διάνυσμα $T_2M_2 = M_1T_1$ καὶ τὸ M_2 εἶνε σημεῖον τῆς Y_π.



(Σχ. 32).

Ἐὰν εἶνε $\mu\nu = \gamma^2$, ἡ εὐθεῖα (2) θὰ εἶνε ἐφαπτομένη τῆς Y_π (1′), αἱ δὲ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τῆς ἁφῆς δίδονται ὑπὸ τῶν (4).

Ἄρα τὸ μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων Y_π περιεχόμενον τμῆμα εὐθείας ἐφαπτομένης αὐτῆς, διχοτομεῖται ὑπὸ τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς. Ἐκ τῶν (4) εὑρίσκομεν ἀμέσως ὅτι, ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης Y_π (1′) ὡς πρὸς ἄξονας τὰς ἀσυμπτώτους αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον $M_1(x_1, y_1)$ εἶνε

$$\boxed{\frac{x}{2x_1} + \frac{y}{2y_1} = 1} \qquad (5)$$

Ἐπειδὴ αἱ συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν μ καὶ ν εὐθείας ἐφαπτομένης Y_π (1′) πληροῦν τὴν σχέσιν $\mu\nu = \gamma^2 = 4x_1y_1$, ἕπεται ὅτι ἑκάστη ἐφαπτομένη τῆς Y_π(1′) ὁρίζει μετὰ τῶν ἀσυμπτώτων αὐτῆς τρίγωνον μὲ διπλάσιον ἐμβαδὸν $2\alpha\beta$, ἐπειδὴ τὸ διπλάσιον ἐμβαδὸν τοιούτου τριγώνου ἰσοῦται μὲ $\mu\nu\,\eta\mu\,\omega = \gamma^2 \frac{2\alpha\beta}{\gamma^2} = 2\alpha\beta$, ὅπου ω παριστάνει τὴν γωνίαν τῶν ἀσυμπτώτων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 323. Διὰ γωνίαν τῶν ἀσυμπτώτων $\omega = 2\varphi$ εἶνε $\gamma^2\eta\mu\omega = 2\alpha\beta$. Δείξατε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου ὁριζομένου ὑπὸ τῶν δύο ἀσυμπτώτων καὶ τυχόντος σημείου τῆς Y_π εἶνε σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ αβ.

324. Δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις $y = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma^2} \cdot \frac{1}{x+\frac{\delta}{\gamma}}$ παριστάνει Y_π μὲ ἀσυμπτώτους παραλλήλους πρὸς τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων.

325. Κατασκευάσατε τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον (x_1, y_1) τῆς Y_π $xy=4$.

326. Εὐθεῖα κινεῖται ὥστε τὸ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον σχηματίζει μὲ τὰς πλευρὰς σταθερᾶς γωνίας, νὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν σταθερόν. Τίνα τόπον γράφει τὸ μέσον τῆς κινουμένης πλευρᾶς τοῦ τριγώνου;

327. Νὰ κατασκευασθῇ Y_π καὶ ἡ μία ἀσύμπτωτος αὐτῆς ἐκ τῆς ἄλλης ἀσυμπτώτου καὶ τριῶν σημείων αὐτῆς.

328. Δείξατε ὅτι τὸ μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων τμῆμα ἐφαπτομένης Y_π ἰσοῦται μὲ τὴν διάμετρον αὐτῆς, τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ἐφαπτομένην.

329. Τίνες αἱ συντεταγμέναι τοῦ μέσου χορδῆς Y_π παραλλήλου πρὸς τὴν $y=\lambda x$ καὶ τίς ἡ ἐξίσωσις τῆς συζυγοῦς διαμέτρου ταύτης καθὼς καὶ τίνες αἱ συντεταγμέναι τῆς τομῆς ταύτης καὶ τῆς συζυγοῦς Y_π.

330. Δείξατε ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι Y_π εἰς εἰς τὰ (x_i, y_i), $i=1,2$, τέμνονται ἐπὶ διαμέτρου διχοτομούσης τὴν χορδὴν τῶν ἐπαφῶν.

331. Εὐθεῖά τις $\nu x + \mu y = \mu\nu$ κινεῖται ὥστε νὰ ἐφάπτεται τῆς Y_π $4xy=\gamma^2$. Τίνα τόπον γράφει σημεῖον Ρ, τέμνον τὸ μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχόμενον τμῆμα T_1T_2 τῆς ἐφαπτομένης, οὕτως ὥστε νὰ εἶνε $(T_1P) : (PT_2) = \lambda$;

332. Δύο ὑπερβολαὶ μὲ τὰς αὐτὰς ἀσυμπτώτους καὶ διαφόρους ἑστιακὰς ἀποστάσεις ἔχουν ἐξισώσεις $4xy=\gamma_1^2$, $4xy=\gamma_2^2$. Ἂν τυχοῦσα διάμετρος τέμνῃ αὐτὰς εἰς τὰ M_1, M_2, αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν εἰς ταῦτα θὰ εἶνε παράλληλοι.

333. Εὕρετε τὰς συντεταγμένας τῶν ἑστιῶν καὶ τῶν κορυφῶν τῆς Y_π $4xy=\gamma^2$, ἐὰν ἡ γωνία τῶν ἀσυμπτώτων εἶνε ω καὶ ἐκφράσατε τὰ α, β διὰ τῶν γ καὶ ω.

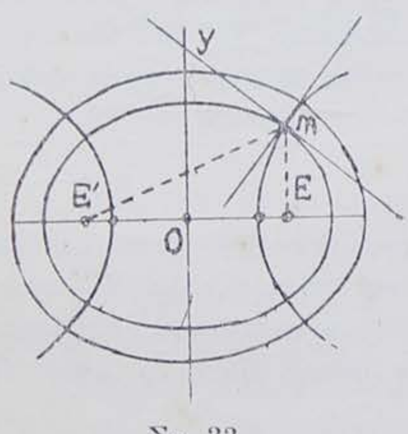
334. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις καὶ τὰ α,β Y_π, ἂν γνωρίζωμεν τὰς ἀσυμπτώτους καὶ τὰς συντεταγμένας ἑνὸς σημείου αὐτῆς.

335. Δείξατε ὅτι ἑκάστη περιφέρεια διερχομένη διὰ τῶν ἑστιῶν Y_π τέμνει τὰς ἀσυμπτώτους εἰς τὰς τομὰς δύο ἐφαπτομένων αὐτῆς.

336. Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης τῆς Y_π $xy=k^2$ εἰς τὸ $M_1(x_1,y_1)$ εἶνε $y_1x+x_1y=2k^2$.

§ 34. Ἐλλείψεις καὶ ὑπερβολαὶ μὲ κοινὰς ἑστίας.

Δοθέντων δύο σημείων Ε, Ε΄ ὑπάρχουν ἄπειροι E_λ καὶ Y_π μὲ κοινὰς ἑστίας τὰ σημεῖα ταῦτα καὶ καλοῦνται αὗται ***ὁμοέστιοι***. Πράγματι, διὰ πᾶν σημεῖον Μ ὁρίζεται ἀνὰ εἷς ἀριθμὸς θετικὸς $(E'M)+(EM)$ καὶ $|(E'M)-(EM)|$ διὰ τοὺς ὁποίους ἔχομεν μίαν E_λ καὶ μίαν Y_π, αἱ ὁποῖαι τέμνονται καθέτως, ἤτοι αἱ ἐφαπτόμεναί των εἰς σημεῖον τῆς τομῆς αὐτῶν εἶνε κάθετοι. Διότι, ἡ ἐφαπτομένη τῆς E_λ εἰς τὸ Μ σχηματίζει ἴσας γωνίας μὲ τὰς ΕΜ καὶ Ε΄Μ, ἡ δὲ τῆς Y_π διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΕΜΕ΄, ἄρα αἱ ἐφαπτόμεναι αὗται εἶνε κάθετοι.



Σχ. 33.

Ἐὰν α, β εἶνε τὰ μήκη τῶν ἡμιαξόνων μιᾶς τῶν E_λ καὶ α_1, β_1 μιᾶς ἄλλης ὁμοεστίου τῆς πρώτης, θὰ ἔχωμεν $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2=\alpha_1^2-\beta_1^2$. Θέτοντες $\alpha_1^2-\alpha^2=\beta_1^2-\beta^2=\lambda$ καὶ θεωροῦντες τὰ α, β ὡς σταθερά, τὸ δὲ λ ὡς (μεταβλητὴν) παράμετρον, τὰ $\alpha_1^2=\alpha^2+\lambda$, $\beta_1^2=\beta^2+\lambda$ παριστάνουν τὰ τετράγωνα τῶν μηκῶν τῶν ἡμιαξόνων πασῶν τῶν ὁμοεστίων E_λ, τῶν ὁποίων αἱ ἐξισώσεις θὰ εἶνε
$$\frac{x^2}{\alpha^2+\lambda}+\frac{y^2}{\beta^2+\lambda}=1 \qquad (1)$$

Ἐὰν τεθῇ $(E'E)=2\gamma$ καὶ λάβωμεν ὡς ἄξονας συντεταγμένων τοὺς ἄξονας τῶν ὁμοεστίων E_λ καὶ Y_π, ἡ ἐξίσωσις αὐτῶν θὰ εἶνε τῆς μορφῆς
$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\alpha^2-\gamma^2}=1 \qquad (1')$$
ἥτις διὰ $\alpha>\gamma$ παριστάνει E_λ καὶ διὰ $\alpha<\gamma$ Y_π, ἐνῷ διὰ $\alpha=\gamma$ ἢ $\alpha=0$ τὸν ἄξονα τῶν x ἢ τὸν τῶν y.

Δι᾿ ἑκάστην πραγματικὴν τιμὴν τοῦ λ, διὰ τὴν ὁποίαν εἶνε $\beta^2+\lambda>0$, ἀντιστοιχεῖ μία Ελ, πᾶσαι δὲ αἱ τοιαῦται Ελ δίδονται διὰ τὰς τιμὰς $-\beta^2<\lambda<\infty$. Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις (1) παριστάνει καὶ πάσας τὰς ὁμοεστίους Y_π καὶ πρὸς τὰς ἐν λόγῳ $E\lambda$ διὰ τὰς τιμὰς $-\alpha^2 < \lambda < -\beta^2$, διὰ τὰς ὁποίας ἔχομεν $\alpha_1^2 > 0, \beta_1^2 < 0$. Διὰ τὰς τιμὰς $-\alpha^2 > \lambda > -\infty$ ἡ ἀνωτέρα ἐξίσωσις παριστάνει φανταστικὰς $E\lambda$. Διὰ $\lambda = -\alpha^2, -\beta^2$ ἡ ἐξίσωσις καταντᾷ $x^2 = 0$ καὶ $y^2 = 0$ καὶ παριστάνει δύο εὐθείας συμπιπτούσας μὲ τὸν ἄξονα τῶν y ἢ τῶν x, θεωροῦνται δὲ τότε αὗται ὁριακαὶ γραμμαὶ τῶν θεωρουμένων E_λ ἢ Y_π. Παρατηρητέον ὅτι διὰ πολὺ μεγάλην τιμὴν τοῦ λ οἱ ἄξονες τῶν E_λ εἶνε πολὺ μεγάλοι, ἐνῷ ὅταν τὸ λ πλησιάζῃ τὴν τιμὴν $-\beta^2$, ἡ $E^\wedge$ τείνει πρὸς τὸ τμῆμα Ε΄Ε τοῦ ἄξονος τῶν x. Ἐὰν τὸ λ μεταβάλλεται ἀπὸ $-\beta^2$ μέχρι τοῦ $-\alpha^2$, ἀπομακρύνονται μεταξύ των οἱ κλάδοι τῶν Y_π ἀπὸ τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ τείνουν ἑκατέρωθεν πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y.

Ἐπειδὴ αἱ ὁμοέστιοι E_λ καὶ Y_π εἶνε δύο δέσμαι καθέτως τεμνομένων καμπύλων γραμμῶν, δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν αὐτὰς πρὸς προσδιορισμὸν τῆς θέσεως τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου των. Πράγματι, εἰς ἕκαστον σημεῖον (x, y) ἀντιστοιχοῦν δύο πραγματικαὶ τιμαὶ λ_1, λ_2 τοῦ λ, αἵτινες θεωροῦνται ὡς συντεταγμέναι τοῦ σημείου καὶ εἶνε αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (1). Τὰς συντεταγμένας ταύτας (λ_1, λ_2) τοῦ σημείου (x,y) καλοῦμεν ***ἐλλειπτικὰς*** συντεταγμένας αὐτοῦ, δι᾽ αὐτῶν δ᾽ ὁρίζεται τὸ σημεῖον ὡς τομὴ δύο γραμμῶν παριστανομένων ὑπὸ τῆς (1), ἐνῷ διὰ μὲν τῶν καρτεσιανῶν συντεταγμένων ἕκαστον σημεῖον θεωρεῖται τομὴ δύο εὐθειῶν $x = x_1$ καὶ $y = y_1$, διὰ δὲ τῶν πολικῶν ὡς τομὴ δύο γραμμῶν $\varrho = \varrho_1$ (περιφερείας κύκλου) καὶ $\vartheta = \vartheta_1$ (εὐθείας).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 337. Ὁ τόπος τοῦ πόλου εὐθείας (ε) ὡς πρὸς τὰς ὁμοεστίους $E\lambda$ καὶ $Y\pi$ $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\alpha^2 - \gamma^2} = 1$ εἶνε εὐθεῖα κάθετος ἐπ᾽ αὐτάς.

338. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὡς πρὸς δύο ὁμοεστίους καμπύλας β΄ βαθμοῦ ἡ ἐφαπτομένη εἰς τυχὸν σημεῖον M_1 τῆς μιᾶς, θεωρουμένη ὡς πολικὴ τῆς ἄλλης, ἔχει πόλον, κείμενον ἐπὶ τῆς καθέτου τῆς πρώτης, τῆς διερχομένης διὰ τοῦ M_1.

339. Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ σημεῖα καθ᾽ ἃ ἡ ἐφαπτομένη (τ) καμπύλης β΄ βαθμοῦ τέμνει πάσας τὰς ὁμοεστίους αὐτῆς, τέμνονται ἐπὶ τῆς καθέτου τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὴν (τ).

340. Ἐὰν ἀπὸ σημείου (ξ, ο) ἢ (ο, η) ἀχθοῦν αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν ὁμοεστίων $E\lambda$ ἢ $Y\pi$ $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\alpha^2 - \gamma^2} = 1$, ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ἐπαφῶν εἶνε ἀνὰ μία περιφέρεια κύκλου.

Ἀσκήσεις διάφοροι.

Γεωμετρικῶν τόπων. 341. Ἐκ τοῦ σημείου Μ τῆς περιφερείας (ο, ο, k) φέρομεν κάθετον ΜΚ ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν y καὶ προεκτείνομεν τὸ τμῆμα ΜΚ πέραν τοῦ Μ κατὰ τὸ διπλάσιον αὐτοῦ μέχρι τοῦ σημείου Μ'. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ Μ', ὅταν τὸ Μ κινῆται ἐπὶ τῆς περιφερείας.

342. Ἀπὸ τῆς κορυφῆς Β' $(0,-\beta)$ τῆς Ελ $\beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$ ἄγεται χορδὴ αὐτῆς Β'Μ καὶ προεκτείνεται αὕτη πέραν τοῦ Μ κατὰ τὸ μυπλάσιον αὐτῆς μέχρι τοῦ Μ'. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος α') τοῦ Μ', ὅταν ἡ χορδὴ στρέφεται περὶ τὸ Β'. β') τοῦ Ρ, ὅταν τοῦτο διχοτομῇ τὴν Β'Μ.

343. Διὰ σημείου $M_1(x_1,y_1)$ ἄγονται τέμνουσαι Ελ καὶ διχοτομεῖται ἑκάστη τῶν προκυπτουσῶν χορδῶν. Τίς ὁ τόπος τῶν μέσων αὐτῶν τῶν χορδῶν; Τί γίνεται ἐὰν τὸ M_1 α') κεῖται ἐπὶ τῆς Ελ; β) ὅταν τείνῃ εἰς τὸ ∞ ἢ εἰς τὸ 0; γ') ὅταν οἱ ἄξονες τῆς Ελ εἶνε ἴσοι μὲ 3.

344. Σημεῖον Μ κινεῖται ἐπὶ Ελ καὶ προβάλλεται εἰς τὸ Ρ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x. Διὰ μὲν τοῦ Μ ἄγεται παράλληλος εὐθεῖα πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x, διὰ δὲ τοῦ Ρ πρὸς τὴν ΟΜ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν τομῶν τῶν παραλλήλων τούτων.

345. Δίδεται περιφέρεια K_1 (ο, ο, α) τέμνουσα εἰς τὸ Α τὸν ἄξονα τῶν x. Μὲ διάμετρον ΟΑ γράφεται ἄλλη περιφέρεια K_2. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, τῶν ἐφαπτομένων τῶν K_1, K_2.

346. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων περιφερειῶν αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς τῆς περιφερείας (ο, ο, α) καὶ ἐξωτερικῶς τῆς (α/3, ο, α/3).

347. Περὶ τὸ Ο στρέφεται ἡ ἀκτὶς $(OM_1)=k_1$ μὲ γωνιακὴν ταχύτητα ω, περὶ δὲ τὸ M_1 ἡ ἀκτὶς $(M_1M)=k_2$ μὲ γωνιακὴν ταχύτητα—ω. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν Μ, ἂν τὰ M_1 καὶ Μ κεῖνται ἐπὶ τοῦ θετικοῦ μέρους τοῦ ἄξονος τῶν x κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς κινήσεως, τὸ δὲ M_1 μεταξὺ τῶν Ο καὶ Μ.

348. Τὸ σημεῖον Μ τοῦ προηγουμένου προβλήματος συνδέεται δι' εὐθυγράμμου τμήματος μὲ τὸ $A_1(\alpha_1,0)$. Τίς ὁ τόπος τοῦ σημείου Ρ, διχοτομοῦντος τὸ A_1M;

349. Ἐκ τῆς κορυφῆς Α (α,ο) Ελ ἄγεται ἐφαπτομένη αὐτῆς, ἀπὸ δὲ τῶν σημείων ταύτης ἄγονται κάθετοι ἐπὶ τὰς πολικὰς αὐτῶν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν ποδῶν τούτων.

350. Τίς ὁ τόπος τῶν τομῶν τῶν ὕψων τοῦ τριγώνου ΑΑ'Μ, ἂν ΑΑ' εἶνε ὁ μεγάλος ἄξων Ελ καὶ Μ κινῆται ἐπ' αὐτῆς. Μερικὴ περίπτωσις $\beta=\alpha$.

351. Εἰς Ελ κινεῖται ἡ ἐφαπτομένη αὐτῆς καὶ θεωρεῖται ὡς πολικὴ ὡς πρὸς τὴν περιφέρειαν (ο, ο, α). Τίς ὁ τόπος τοῦ πόλου αὐτῆς;

352. Ελ τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὰ A_1, A_2 καὶ ἔστω σημεῖον Μ κινούμενον ἐπ' αὐτῆς. Τίς ὁ τόπος τοῦ κέντρου βάρους α') τοῦ τριγώνου A_1A_2M. β') τοῦ τριγώνου OA_1M_1, ὅπου Ο τὸ κέντρον τῆς Ελ.

353. Μὲ διάμετρον τὴν (ΕΕ')=2γ Ελ γράφεται περιφέρεια κύκλου καὶ περὶ ταύτην στρέφεται εὐθεῖα, ἐφαπτομένη αὐτῆς. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ πόλου αὐτῆς ὡς πρὸς τὴν Ελ.

354. Ἀπὸ τὸ κέντρο Υπ ἄγονται χορδαὶ αὐτῆς εἰς τὰ σημεῖα $M, M_1, M_2, \ldots$ καὶ ἑκάστη ἐπεκτείνεται πέραν τῶν M, M_1, $M_2, \ldots$ κατὰ τὸ k/ν αὐτῆς. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν ἄκρων αὐτῶν.

355. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ πόλου εὐθείας ὡς πρὸς τὴν $\beta_1^2 x^2 \pm \alpha_1^2 y^2 = \alpha_1^2 \beta^2_1$ ἂν κινῆται ὥστε νὰ εἶνε ἐφαπτομένη Υπ ἢ Ελ

356. Ἐπὶ τῆς ἰσοσκελοῦς Υπ $x^2 - y^2 = \alpha^2$ μὲ κορυφὰς Α, Α′ κινεῖται σημεῖον Μ. Τίς ὁ τόπος τῶν τομῶν τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου ΑΑ′Μ;

357. Δι᾽ ἕκαστον σημεῖον τῆς ἰσοσκελοῦς Υπ $xy = \gamma^2$ ἄγονται τμήματα παράλληλα πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς α′ γωνίας τῶν ἀσυμπτώτων αὐτῆς μήκους 2λ, Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης τῶν ἄκρων τῶν τμημάτων.

Γεωμετρικῶν κατασκευῶν. Ἕκαστον τῶν κατωτέρω προβλημάτων δύναται νὰ θεωρῆται λυμένον, ἂν εὑρεθοῦν οἱ δύο ἄξονες ἢ ὁ εἷς ἄξων καὶ αἱ ἑστίαι τῆς Ελ ἢ Υπ, θὰ παριστάνωμεν δὲ τὰς ἑστίας διὰ τῶν Ε, Ε′, τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς αὐτὰς διευθετούσας διὰ τῶν δ, δ′, τὰς κορυφὰς διὰ τῶν k_1, k_2, τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης διὰ τῶν Μ, Mi, (i=1, 2,...), τὰς ἐφαπτομένας εἰς αὐτὰ διὰ τῶν τ, τi, διὰ Α′Α, Β′Β τοὺς ἄξονας διὰ τοῦ τk ἐφαπτομένην εἰς κορυφήν, μὲ Ο τὸ κέντρον, (Α′Α)=2α, (Β′Β)=2β, 2p τὴν παράμετρον, ε τὴν ἐκκεντρότητα αὐτῆς.

358. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ Ελ ἢ Υπ διὰ τὴν ὁποίαν δίδονται.

359. α′) Ε, M_1, M_2, α. β′) Ε, Ε′, Μ. γ′) Ε′, Ε, τ.

360. α′) Ε, τ_1, τ_2, α. β′) Ε, ἡ διεύθυνσις τοῦ Α′Α,τ, τὸ Μ ἐπὶ τῆς τ.

361. α′) Ε, ἡ διεύθυνσις τοῦ ΑΑ′, τ, 2α. β′) Ε, τ_1, τ_2, β.

362. α′) Α′Α, Μ. β′) Ο, ἡ διεύθυνσις τοῦ Β′Β, Β, Μ.

363. α′) Α′Α, τ. β′) Ε, τ, Μ ἐπὶ τῆς τ, α. γ′) Ε,δ, Μ.

364. α′) Ε, Μ, τ, α. β′) Ε, τ, α, ε. γ′) Ε, τ_1, τ_2, M_1 ἐπὶ τῆς τ_1.

365. α′) Ε, δ, τ. β′) Α′Α, Μ ἐπὶ τῆς τ_1. γ′) Ε, τ_1, τ_2, τ_3.

366. α′) Ε, τ, α, ε. β′) Ο, α, β, τ. γ′) Ε, δ, Μ. δ′) Ε,$\tau_1 \parallel \tau_2$,α.

Νὰ κατασκευασθῇ Υπ ἐκ τῶν κατωτέρω δεδομένων, ὅπου τ_∞, τ'_∞ παριστάνουν τὰς δύο ἀσυμπτώτους καὶ 2φ τὴν γωνίαν αὐτῶν.

367. α′) α, φ. β′) ε, φ. γ′) β, φ. δ′) Ε,α,τ_∞.

368. α′) α,τ_∞,τ'_∞. β′) Ο,τ_∞,M_1,M_2. γ′) Ε,τ_∞, τ'_∞. δ′) τ,τ_∞,τ'_∞.

369. α′) M_1, M_2,M_3,τ_∞. β′) τ_1, τ_2, τ_3, τ_∞.

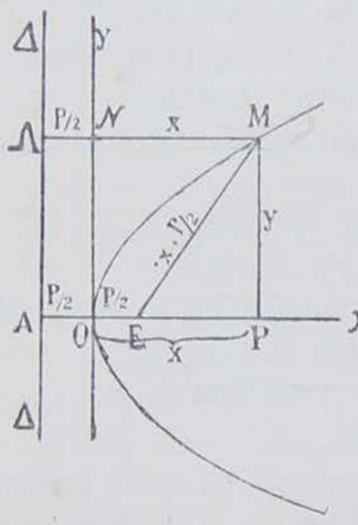
Περὶ παραβολῆς

§ 35. Ὁρισμὸς καὶ ἐξισώσεις παραβολῆς.

Παραβολὴ καλεῖται ὁ τόπος τῶν σημείων ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ δοθὲν σημεῖον καὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν αὐτοῦ, καλεῖται δὲ τὸ μὲν σημεῖον ***ἑστία,*** ἡ δ᾽ εὐθεῖα ***διευθετοῦσα*** αὐτῆς. Παριστάνομεν κατωτέρω τὴν παραβολὴν συνήθως διὰ τοῦ Π_α, τὴν ἑστίαν μὲ Ε καὶ τὴν διευθετοῦσαν αὐτῆς διὰ Δ. Ἂν Μ εἶνε σημεῖον τῆς Π_α θὰ ἔχωμεν ἀπολύτως (ΕΜ) = (ΔΜ), ὅπου (ΔΜ) παριστάνει τὴν ἀπόστασιν τοῦ Μ ἀπὸ τῆς Δ (σχ. 34).

Ἡ Π_α εἶνε συμμετρικὴ πρὸς τὴν διὰ τοῦ Ε κάθετον εὐθεῖαν ἐπὶ τὴν Δ, τὴν ΑΕx, ἥτις καλεῖται ***ἄξων*** αὐτῆς.

Διὰ νὰ γράψωμεν τόξον Π_α διὰ συνεχοῦς κινήσεως, τῆς ὁποίας δίδεται ἡ Ε καὶ ἡ Δ, στηρίζομεν π. χ. ἐπὶ τοῦ χάρτου κανόνα, ὥστε ἡ ἀκμὴ αὐτοῦ νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν Δ· στερεώνομεν εἰς τὸ ἄκρον τῆς ὑποτεινούσης γνώμονος τὸ ἓν ἄκρον νήματος μὲ μῆκος ὅσον ἡ παρακειμένη κάθετος πλευρὰ αὐτοῦ, τὸ δ' ἄλλο εἰς τὸ Ε. Ἐφαρμόζομεν τὴν ἄλλην πλευρὰν τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ γνώμονος ἐπὶ τοῦ κανόνος καὶ διὰ τῆς αἰχμῆς γραφίδος τείνομεν τὸ νῆμα, ὥστε αὕτη νὰ ἐγγίζῃ τὴν κάθετον πλευρὰν τοῦ γνώμονος. Μετακινοῦμεν ἐπὶ τοῦ κανόνος τὸν γνώμονα, ἔχοντες διηνεκῶς τὸ νῆμα τεταμένον διὰ τῆς γραφίδος κατὰ μῆκος τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ, καὶ οὕτω γράφεται τόξον Π_α.



Σχ. 34.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς Π_α, λαμβάνομεν ὡς ἀρχὴν ὀρθογωνίων ἀξόνων τὸ μέσον Ο τοῦ τμήματος ΕΛ (σχ. 34), ὡς ἄξονας δὲ τὰς ΟΕx καὶ Οy· τὴν ΟΕ ὡς ἄξονα τῶν x καὶ τὴν ἐπ' αὐτῆς κάθετον Οy ὡς θετικὸν ἄξονα τῶν y.

Ἂν Μ (x, y) εἶνε τυχὸν σημεῖον τῆς Π_α καὶ (ΛΜ), (ΕΜ) αἱ ἀπόλυτοι ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τῆς Δ καὶ τοῦ Ε, θὰ εἶνε

$$(EP)=(OP)-(OE),\ (EM)=(\Lambda M).$$

$$(PM)=y,\ (OP)=x,\ (EM)^2=(PM)^2+(EP)^2,\ (\Lambda M)=(\Lambda N)+(NM).$$

Ἑπομένως ἔχομεν, ἂν τεθῇ $(\Lambda E)=2\,(OE)=p(>0)$

$$(EM)^2=y^2+\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 \qquad (\Lambda M)=\frac{p}{2}+x$$

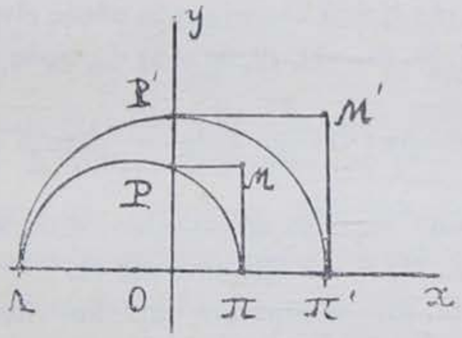
$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2+=\left(\frac{p}{2}+x\right)^2$$

$$\text{ἢ}\quad y^2-2px=0 \quad (1) \quad \text{ἢ} \quad \boxed{y^2=2px} \qquad (1')$$

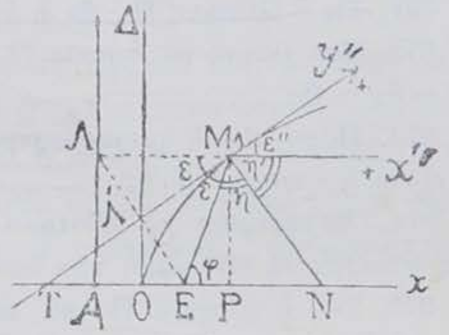
ἥτις εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς Π_α, καὶ προφανῶς διέρχεται τῆς ἀρχῆς Ο (0,0), εἶνε δὲ συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα αὐτῆς Οx.

Τὸ μὲν Ο καλεῖται ***κορυφὴ*** τῆς Π_α, τὸ δὲ p ***ἡμιπαράμετρος*** ὡς πρὸς τὸν ἄξονα αὐτῆς.

Αἱ συντεταγμέναι σημείου κειμένου ἐκτὸς μὲν τῆς Π_α, π. χ., τοῦ $(-p,0)$, τιθέμεναι εἰς τὴν (1) δίδουν ἐξαγόμενον >0, κειμένου δ' ἐντὸς αὐτῆς, π. χ. τοῦ (p, 0), δίδουν <0. Ἡ (1) ἐπαληθεύεται μόνον διὰ τιμὰς τοῦ $x>0$, καὶ εἰς ἑκάστην τοιαύτην τιμὴν αὐτοῦ ἀντιστοιχοῦν δύο ἀντίθετοι τιμαὶ τοῦ y, ἐνῷ διὰ $x \to \infty$ τὸ $y \to \pm\infty$ καὶ διὰ $x = \frac{p}{2}$, $y = p$. Ἑπομένως ἡ Π_α κεῖται δεξιὰ τοῦ ἄξονος τῶν y, ἂν δ᾽ ὑποτεθῇ $p<0$, ἡ (1΄) παριστάνει Π_α μὲ ἄξονα τὸ ἀρνητικὸν μέρος τοῦ ἄξονος τῶν x, δηλαδὴ κειμένην ἀριστερὰ τοῦ ἄξονος τῶν y. Δοθέντων τοῦ p, τοῦ O καὶ τοῦ ἄξονος Π_α δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν σημεῖα αὐτῆς ὡς ἑξῆς (σχ. 35). Λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τὸ τμῆμα ΛΟ ὥστε (ΛΟ)=2p καὶ γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν ΛΡΠ διερχομένην διὰ τοῦ Λ, μὲ κέντρον ἐπὶ τοῦ ἄξονος. Ἂν ἡ κάθετος εὐθεῖα ἐπὶ τὸν ἄξονα εἰς τὸ O τέμνῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ Ρ καὶ ἐκ τοῦ Π τῆς ΛΟΠ φέρωμεν παράλληλον τῆς ΟΡ, λάβωμεν δὲ (ΠΜ)=(ΟΡ), τὸ Μ εἶνε σημεῖον τῆς Π_α. Διότι εἶνε $(OP)^2=(\Pi M)^2=(\Lambda O)(O\Pi)$,



(Σχ. 35)



(Σχ. 36)

ἢ ἂν τεθῇ $(O\Pi)=x$, $(OP)=(\Pi M)=y$, θὰ ἔχωμεν $y^2=2px$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι τὸ Μ΄ μὲ τετμημένην $x=(O\Pi')$ καὶ τεταγμένην $y=(\Pi'M')$ κεῖται ἐπὶ τῆς αὐτῆς Π_α.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1΄) παρατηροῦμεν ὅτι τὸ y εἶνε μέσον ἀνάλογον τῶν 2x καὶ p. Ἑπομένως, ἐὰν λάβωμεν ἑκατέρωθεν τοῦ O τὰ σημεῖα Ρ καὶ Τ (σχ.36), ὥστε νὰ εἶνε $(OP)=x$, $(OT)=x$ (ἀπολύτως), $(PN)=p$, γράψωμεν δὲ περιφέρειαν μὲ διάμετρον τὴν ΤΝ, ἡ ἐκ τοῦ Ρ κάθετος ἐπὶ τὴν ΤΝ θὰ τμήσῃ αὐτήν, ἔστω εἰς τὰ M_1, M'_1, τὰ ὁποῖα εἶνε σημεῖα τῆς Π_α (1΄), διότι θὰ ἔχωμεν

$$y^2=(PM_1)^2=(PM'_1)^2=(TP)\,(PN)=2x.p.$$

Παρατηρητέον ὅτι τὸ κέντρον τῆς ἐν λόγῳ περιφερείας, ἔχον τετμημένην $\frac{1}{2}\,[(x+p)-x]=\frac{p}{2}$, εἶνε ἡ ἑστία τῆς Π_α (σχ. 36).

Ἂν ὡς πόλον λάβωμεν τὴν Ε, πολικὸν ἄξονα τὸν ἄξονα τῆς Π_α, (ρ, φ) δὲ εἶνε αἱ πολικαὶ συντεταγμέναι τυχόντος σημείου αὐτῆς $M_1(x,y)$, θὰ ἔχωμεν (σχ. 36) $(EM_1)=\rho=(\Lambda M_1)=\frac{p}{2}+x$.

Ἀλλ᾽ εἶνε $x=(OP)=(OE)+(EP)=\frac{p}{2}+\rho$ συνφ.

Ἑπομένως $\rho=\frac{p}{2}+\rho$ συνφ $+\frac{p}{2}$

καὶ $\rho=\frac{p}{1-\text{συνφ}}$ ἢ $\boxed{\rho=\frac{p}{1-\varepsilon\,\text{συνφ}}}$ $(\varepsilon=1)$

ἥτις εἶνε ἡ πολικὴ ἐξίσωσις τῆς Π_α ὡς πρὸς πόλον τὴν E αὐτῆς, εἶνε δὲ διὰ $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $\rho=p$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 370. Δείξατε ὅτι ἡ Π_α εἶνε ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, τῶν διερχομένων διὰ δοθέντος σημείου καὶ ἐφαπτομένων δοθείσης εὐθείας.

371. Τίς ἡ ἐξίσωσις Π_α, ἂν ἡ ἀπόστασις τῆς E ἀπὸ τῆς κορυφῆς αὐτῆς εἶνε 3;

372. Ποῦ κεῖται τὰ σημεῖα (2, 3), (—1, 2), (3,—1), (9, 5· —3) ὡς πρὸς τὴν $y^2-5x=0$;

373. Πόση εἶνε ἡ ἡμιπαράμετρος τῆς $y^2=5x$; Πόσον ἀπέχουν μεταξύ των ἡ E καὶ ἡ κορυφὴ αὐτῆς;

374. Μεταφέρατε τὸ σύστημα τῶν ἀξόνων εἰς ἄλλο παράλληλον, ὥστε ἡ E τῆς $y^2=2px$ νὰ εἶνε ἀρχὴ τῶν νέων ἀξόνων. Τίς ἡ νέα ἐξίσωσις τῆς Π_α;

375. Τίς ἡ ἐξίσωσις Π_α μὲ κορυφὴν (α, β), παράμετρον 2p καὶ ἄξονα παράλληλον πρὸς α΄) τὸν +x, β΄) τὸν —x, γ΄) τὸν +y, δ΄) τὸν —y;

376. Τίς ἡ ἐξίσωσις Π_α μὲ κορυφὴν O, ἄξονα τὸν +x καὶ ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται τὸ $M_1(x_1, y_1)$;

377. Νὰ ὁρισθῇ ἡ Π_α, ἥτις διέρχεται διὰ τῶν $M_i(x_i, y_i)$, $i=1, 2, 3$, καὶ ἔχει ἄξονα παράλληλον πρὸς ἕνα τῶν ἀξόνων τῶν συντεταγμένων.

378. Μεταφέρατε τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων εἰς τὸ σημεῖον (x_0, y_0) Π_α $y^2=4x$ καὶ δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς ὡς πρὸς νέους ἄξονας, παραλλήλους πρὸς τοὺς ἀρχικούς, εἶνε $y^2+2y_0y-4x=0$.

379. Δίδονται δύο σημεῖα $M_1(-10, 42)$ καὶ $M_2(5,-3)$, τὸ δὲ τμῆμα M_1M_2 χωρίζεται ὑπὸ τοῦ σημείου P εἰς μέρη ἔχοντα λόγον λ. Νὰ ὁρισθῇ τὸ λ, ὥστε τὸ P νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς $y^2-18x=0$.

380. Εἰς Π_α δίδεται ὁ ἄξων, ἡ κορυφὴ καὶ ἓν σημεῖον M. Προσδιορίσατε τὴν E καὶ τὴν διευθετοῦσαν αὐτῆς.

381. Τίς ἡ ἐξίσωσις Π_α, ἂν ἔχῃ ἄξονα τὸν —y καὶ γνωρίζωμεν τὴν κορυφὴν καὶ ἓν σημεῖον $M_1(x_1, y_1)$ αὐτῆς;

382. Κατασκευάσατε τὰς Π_α $y^2=3x$, $y^2=5x$, $y^2=6x$.

383. Τί παριστάνει ἡ ἐξίσωσις $x^2=-2py$;

384. Κατασκευάσατε τὰς Π_a $x^2 = \pm 32y$;

385. Κατασκευάσατε τὴν $y = x^2$ καὶ εὕρετε τὴν διευθετοῦσαν καὶ τὴν Ε αὐτῆς.

386. Δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ παριστάνει Π_a μὲ ἄξονα παράλληλον πρὸς τὸν Oy καὶ κορυφὴν $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}\right)$. Ποῦ κεῖται ἡ Ε αὐτῆς;

§ 36. Διάμετροι παραβολῆς καὶ θέσεις εὐθείας πρὸς αὐτήν.

Ἔστω ἡ Π_a $\qquad y^2 = 2px.$ $\qquad$ (1)

Πᾶσα εὐθεῖα $y = \beta$ τέμνει αὐτὴν εἰς τὸ σημεῖον $\left(\frac{\beta^2}{2p}, \beta\right)$, καλεῖται δ' αὕτη διάμετρος αὐτῆς. Πᾶσα εὐθεῖα $x = \alpha$ (>0) τέμνει τὴν Π_a εἰς δύο σημεῖα, $(\alpha, \pm\sqrt{2\alpha p})$, συμμετρικὰ πρὸς τὸν ἄξονα αὐτῆς, ἐνῶ διὰ $x = 0$ συμπίπτουν ταῦτα μὲ τὴν κορυφήν της. Ἑπομένως ὁ ἄξων τῶν y ἔχει ἓν σημεῖον κοινὸν μὲ τὴν Π_a εἰς τὸ O καὶ καλεῖται οὗτος ἐφαπτομένη εὐθεῖα εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῆς.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν θέσιν τῆς εὐθείας $y = \lambda x + \beta$ (2) ὡς πρὸς τὴν Π_a (1), εὑρίσκομεν δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ x μεταξὺ τῶν (1) καὶ (2) τὴν $\lambda y^2 - 2py + 2p\beta = 0$ (3), ἐκ τῆς ὁποίας συνάγομεν ὅτι, ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἔχει μὲ τὴν Π_a δύο πραγματικὰ διακεκριμένα κοινὰ σημεῖα ἢ ἓν ἢ οὐδέν, ἐὰν εἶνε τὸ $p^2 - 2\lambda\beta p > 0$ ἢ $= 0$ ἢ < 0. Ἐπειδὴ ἡ Π_a ἔχει μὲ τυχοῦσαν εὐθεῖαν τὸ πολὺ δύο κοινὰ διακεκριμένα πραγματικὰ σημεῖα καλεῖται καὶ καμπύλη ***β΄ βαθμοῦ.*** Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι τὸ

$$p^2 - 2\lambda\beta p = 2p\left(\frac{p}{2} - \lambda\beta\right) \quad \text{θὰ εἶνε } >0, \text{ ἢ } 0, \text{ ἢ } <0, \text{ ἂν τὸ}$$

$\frac{p}{2} > \lambda\beta$ ἢ $= \lambda\beta$ ἢ $< \lambda\beta$. Ἀλλ' ἂν ἐκ τοῦ B $(0,\beta)$ φέρωμεν κάθετον BK ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν, ὅπου K εἶνε ἡ τομὴ ταύτης μὲ τὸν ἄξονα τῆς Π_a, θὰ ἔχωμεν ἂν φ εἶνε ἡ γωνία τῆς δοθείσης εὐθείας μὲ τὸν ἄξονα τῶν x,

$$\lambda = \varepsilon\varphi\varphi = \frac{(OK)}{(OB)} = \frac{(OK)}{\beta}$$

ἤτοι $(OK) = \lambda\beta$. Ἐξ ἄλλου ἔχομεν $\frac{p}{2} = (OE)$ καὶ ἑπομένως τυχοῦσα εὐθεῖα (2) μὲ $\lambda \neq 0$ ἔχει μὲ τὴν Π_a δύο κοινὰ διακεκριμένα σημεῖα ἢ ἓν ἢ κεῖται ἐκτὸς αὐτῆς, ἐὰν ἡ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν κάθετος εἰς τὴν τομὴν αὐτῆς μὲ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὴν κορυφὴν τῆς Π_a τέμνῃ τὸν ἄξονα ταύτης πρὸ τῆς ἑστίας ἢ εἰς αὐτὴν ἢ πέραν ταύτης. Οὕτω, ἐπειδὴ ἡ Λ΄Ε κάθετος ἐπὶ τὴν M_1T εἰς τὸ Λ΄ (καθ' ὃ αὕτη, μὴ παράλληλος τοῦ ἄξονος τῶν x, τέμνει τὸν ἄξονα τῶν y) διέρχεται διὰ τῆς ἑστίας E (σχ. 36), ἡ M_1T ἔχει ἓν κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν Π_a.

Ἂν ἡ εὐθεῖα $y=\lambda x+\beta$ τέμνῃ τὴν Π_α εἰς τὰ $M_i\ (x_i, y_i)$, $i=1, 2$, τὰ y_1, y_2 εἶνε αἱ ῥίζαι τῆς (3), τὸ δὲ y τοῦ μέσου τοῦ M_1M_2, τὸ ὁποῖον καλεῖται **χορδὴ** τῆς Π_α, θὰ εἶνε $y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{p}{\lambda}$. Ἐπειδὴ τοῦτο εἶνε ἀνεξάρτητον τοῦ β, ἂν κατασκευάσωμεν πάσας τὰς παραλλήλους εὐθείας πρὸς τὴν $y=\lambda x+\beta$, ὅπου τὸ λ εἶνε σταθερὸν καὶ τὸ β (μεταβλητὴ) παράμετρος, λαμβάνομεν ὡς τεταγμένην τοῦ μέσου ἑκάστης ἀντιστοίχου χορδῆς τῆς Π_α τὸ $\frac{p}{\lambda}$.

Ἄρα εἰς Π_α τὰ μέσα παραλλήλων χορδῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα αὐτῆς, δηλαδὴ ἐπὶ μιᾶς διαμέτρου αὐτῆς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 387. Τίνα θέσιν ἔχουν αἱ $4x-2y+7=0$, $5x-y-1=0$, $18x-y+1=0$, $x+2y+6=0$, $x+y-1=0$ ὡς πρὸς τὴν $y^2-6x=0$;

388. Εὕρετε διὰ τὴν $y^2-3x=0$ τὸν τόπον τῶν μέσων τῶν πρὸς τὴν εὐθεῖαν $3x-7y+2=0$ παραλλήλων χορδῶν. Εἰς ποῖον σημεῖον τέμνει ὁ τόπος αὐτὸς τὴν Π_α;

389. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς Π_α, τῆς ἐχούσης ἓν κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν $y=\lambda x+\beta$, μὲ κορυφὴν τὸ O καὶ ἄξονα τὸν $+x$.

390. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα $2\lambda y=2\lambda^2 x+p$ ἔχει κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν $y^2=2px$ τὸ $(p/2p^2, p/\lambda)$. Ποία εὐθεῖα ἔχουσα ἓν κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν Π_α σχηματίζει γωνίαν φ μὲ τὸν ἄξονα τῶν x; Ποία τοιαύτη εὐθεῖα ἔχει τεταγμένην ἐπὶ τὴν ἀρχὴν ν;

391. Δίδεται ἡ $2y^2=7x$ καὶ ἡ $5y-2=0$. Τίς εἶνε ἡ ἐξίσωσις τοῦ συστήματος παραλλήλων χορδῶν, διχοτομουμένων ὑπὸ τῆς διαμέτρου ταύτης;

392. Δίδεται ἡ $y^2=8x$ καὶ ἡ $y+3=0$. Τίς εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς χορδῆς, τῆς διερχομένης διὰ τοῦ (5, 2) καὶ διχοτομουμένης ὑπὸ τῆς δοθείσης διαμέτρου;

393. Δίδεται ἡ $y^2=2px$. Κατασκευάσατε τὴν διάμετρον ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖνται τὰ μέσα τῶν χορδῶν μὲ δοθέντα συντελεστὴν διευθύνσεως καὶ ἐκείνην εἰς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ γωνία 45^0 μὲ τὸν ἄξονα τῶν x.

394. Δείξατε ὅτι εὐθεῖά τις τέμνει ἢ ἔχει ἓν κοινὸν σημεῖον ἢ οὐδὲν μὲ Π_α, ἂν ἡ ἐκ τῆς E κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τέμνῃ αὐτὴν πρὸ ἢ ἐπὶ ἢ πέραν τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν κορυφὴν τῆς Π_λ.

§ 37. Ἐξίσωσις ἐφαπτομένης παραβολῆς.

Ἔστω ὅτι ἡ εὐθεῖα $y=\lambda x+\beta$ τέμνει τὴν Π_π $y^2=2px$ εἰς δύο διάφορα πραγματικὰ σημεῖα P_1 καὶ P_2, ὅτε θὰ εἶνε $2\lambda\beta<p$. Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα κινεῖται παραλλήλως πρὸς ἑαυτήν, ὥστε τὸ $2\lambda\beta$ αὐξανόμενον νὰ τείνῃ πρὸς τὸ p, τότε τὰ M_1, M_2 πλησιάζοντα μεταξύ των τείνουν νὰ συμπέσουν, ἐνῷ τὸ μέσον τῆς χορδῆς P_1P_2, διατηροῦν σταθερὰν τεταγμένην $\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{p}{\lambda}$, διαγράφει μέρος τῆς διαμέτρου $y=\frac{p}{\lambda}$.

Ὥστε διὰ $2\lambda\beta \to p$ τὰ P_1, P_2 τείνουν πρὸς ἓν σημεῖον, ἔστω τὸ M_1, κείμενον ἐπὶ τῆς Π_α καὶ τῆς διαμέτρου $y=\frac{p}{\lambda}$· ἄρα ἔχει τοῦτο τεταγμένην $y_1=\frac{p}{\lambda}$ καὶ τετμημένην $x_1=\frac{p}{2\lambda^2}$, τὸ δὲ ὅριον τῆς εὐθείας P_1P_2 καλεῖται ***ἐφαπτομένη*** τῆς Π_α εἰς τὸ M_1. Ἑπομένως ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ ἄκρον διαμέτρου Π_α εἶνε παράλληλος πρὸς τὰς χορδάς, τὰς διχοτομουμένας ὑπὸ τῆς διαμέτρου ταύτης.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι, εἰς δοθεῖσαν εὐθεῖαν μὲ συντελεστὴν διευθύνσεως λ, ἀντιστοιχεῖ μία μόνη ἐφαπτομένη Π_α, αἱ δὲ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς αὐτῆς εἶνε $\left(\frac{p}{2\lambda^2}, \frac{p}{\lambda}\right)$. Ἀντιστρόφως, εἰς δοθὲν σημεῖον (x_1, y_1) Π_α ἀντιστοιχεῖ μία ὡρισμένη ἐφαπτομένη αὐτῆς μὲ συντελεστὴν διευθύνσεως $\lambda=\frac{p}{y_1}$. Οὕτω ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον $M_1(x_1, y_1)$ τῆς Π_α $y^2=2px$ εἶνε $y-y_1=\frac{p}{y_1}(x-x_1)$ ἢ $y_1y-y_1^2=p(x-x_1)$ καὶ ἐπειδὴ εἶνε $y_1^2=2px_1$, ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\boxed{y_1y=p\,(x+x_1)} \tag{1}$$

Ἐπειδὴ αἱ συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τῆς (1) εἶνε $-x_1$ καὶ $\frac{px_1}{y_1}=\frac{y_1}{2}$, ἕπεται ὅτι, διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν ἐφαπτομένην Π_α εἰς σημεῖον αὐτῆς $M_1(x_1, y_1)$, ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ἥτις συνδέει τὸ M_1 μὲ τὸ σημεῖον $(0, y_1/2)$ ἢ μὲ τὸ $(-x_1, 0)$.

Ἐὰν ἐκ τοῦ M_1 φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν $M_1\Lambda$ κάθετον ἐπὶ τὴν Δ τῆς Π_α, θὰ ἔχωμεν ἀπολύτως $(\Lambda M_1)=(EM_1)$. Ἐπειδὴ δ' εἶνε (σχ. 36) $(O\Lambda')=\frac{y_1}{2}$, $(A\Lambda)=y_1=2(O\Lambda')$, ἕπεται ὅτι τὰ E, Λ', Λ κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ $(E\Lambda')=(\Lambda'\Lambda)$. Οὕτω τὰ τρίγωνα $E\Lambda'M_1$ καὶ $\Lambda'\Lambda M_1$ εἶνε ἴσα καὶ αἱ γωνίαι $EM_1\Lambda'$, $\Lambda M_1\Lambda'$ εἶνε ἴσαι, ἤτοι ἡ $\varepsilon=\varepsilon'$ (σχ. 36), ἡ δὲ $E\Lambda'$ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην M_1T τῆς Π_α εἰς τὸ M_1.

Ἄρα ἡ ἐφαπτομένη Π_α διχοτομεῖ τὴν γωνίαν, τὴν σχηματιζομένην ὑπὸ τῆς ἑστιακῆς ἀκτῖνος καὶ τῆς διαμέτρου αὐτῆς, αἵτινες διέρχονται διὰ τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς, ἡ δὲ κάθετος ἐκ τῆς E τῆς Π_α ἐπὶ τυχοῦσαν ἐφαπτομένην αὐτῆς διέρχεται διὰ τῆς τομῆς ταύτης καὶ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν κορυφὴν τῆς Π_α.

Ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην Π_α εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς αὐτῆς, ἔστω τὸ M_1, καλεῖται ***κάθετος*** τῆς Π_α εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ἡ δ᾽ ἐξίσωσις αὐτῆς εἶνε $y-y_1=-\frac{y_1}{p}(x-x_1)$ (2)

καὶ διὰ $y=0$ ἔχομεν (σχ.36) $x=(ON)=x_1+p$, ἑπομένως $(PN)=p$ (3).

Τὸ διάνυσμα τοῦ ἄξονος τῆς Π_α τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῆς τεταγμένης τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς M_1 καὶ τῆς καθέτου αὐτῆς εἰς τοῦτο καλεῖται ***ὑποκάθετος*** τῆς Π_α εἰς τὸ M_1· ἄρα ἡ ὑποκάθετος διὰ πάντα τὰ σημεῖα Π_α $y^2=2px$ εἶνε σταθερὰ καὶ ἔχει μῆκος p.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 395. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῶν διὰ τοῦ σημείου $M_1(x_1,y_1)$ ἐφαπτομένων τῆς $\Pi\alpha$ $(y-\beta)^2=2p(x-\alpha)$. Πότε εἶνε πραγματικαὶ καὶ διάφοροι, συμπίπτουσαι, φανταστικαί;

396. Τίς ἡ ἐξίσωσις $\Pi\alpha$ μὲ παράμετρον 2p, καὶ ἄξονα τὸν τῶν x, ἂν ἐφάπτεται τῆς Ελ $\beta^2x+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$.

397. Δίδεται ἡ $\Pi\alpha$ $y^2=11x$. Δείξατε ὅτι ἡ εὐθεῖα $11x-6y+9=0$ ἐφάπτεται αὐτῆς καὶ εὕρετε τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς.

398. Τίς ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης τῆς $\Pi\alpha$ $y^2=11x$ παραλλήλου πρὸς τὴν $2x-7y+3=0$;

399. Αἱ τομαὶ τριῶν οἱωνδήποτε ἐφαπτομένων $\Pi\alpha$ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας διερχομένης διὰ τῆς ἑστίας αὐτῆς.

400. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης τῆς $\Pi\alpha$ $y=x^2$ εἰς τὸ σημεῖον $M_1(x_1, y_1)$.

401. Γνωρίζομεν τὴν κορυφήν, τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὴν κορυφὴν καὶ ἓν σημεῖον M_0 μιᾶς $\Pi\alpha$. Νὰ προσδιορισθῇ διὰ τῆς ἐφαπτομένης, καθέτου καὶ ὑποκαθέτου ἡ Ε αὐτῆς.

402. Δοθείσης $\Pi\alpha$ νὰ εὑρεθῇ ἡ Ε, ὁ ἄξων καὶ ἡ Δ αὐτῆς.

403. Δίδεται ἡ $Y\pi$ $\beta^2x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$ καὶ ζητεῖται παραβολὴ μὲ ἄξονα τὸν τῶν y, ἐφαπτομένη τῆς $Y\pi$ εἰς τὴν τομὴν αὐτῆς μὲ τὴν εὐθεῖαν $y=\beta_1$.

404. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν καθέτων τῆς $y^2=2px$ τῶν ἀγομένων διὰ τοῦ $M_1(x_1,y_1)$. Μερικαὶ περιπτώσεις: α′) $2x_1=3p$, $y_1=0$, β′) $2x_1=p$, $y_1=0$.

§ 38. Ἐξίσωσις παραβολῆς πρὸς διάμετρον καὶ ἐφαπτομένην αὐτῆς.

Ἔστω ἡ Π_α $$y^2=2px \qquad (1)$$
καὶ σημεῖον αὐτῆς $M_1(x_1,y_1)$ ὡς πρὸς τοὺς ὀρθογωνίους ἄξονας (σχ.36). Ἐὰν μεταφέρωμεν τὸ σύστημα τῶν ἀξόνων παραλλήλως πρὸς ἑαυτὸ εἰς τὸ M_1 διὰ τῶν $x=x_1+x'$, $y=y_1+y'$, ἡ (1) γίνεται
$$y'^2+2y_1y'-2px'=0 \qquad (2)$$
Λαμβάνομεν τώρα ὡς ἄξονα τῶν x″ τὴν διάμετρον τῆς Π_α τὴν

διερχομένην διὰ τοῦ M_1 καὶ τὴν ἐφαπτομένην αὐτῆς εἰς τὸ M_1 ὡς ἄξονα τῶν y'' νέου (πλαγιογωνίου) συστήματος ἀξόνων $x''M_1y''$ (σχ. 36).

Ἂν ε'' εἶνε γωνία τῆς ἐφαπτομένης τῆς Π_α εἰς τὸ M_1 μὲ τὸν ἄξονα τῶν x (ἑπομένως καὶ μὲ τὸν x''), θὰ ἔχωμεν $\varepsilon\varphi\, \varepsilon'' = \dfrac{p}{y_1}$ καὶ οἱ τύποι ἀλλαγῆς τῶν συντεταγμένων γίνονται

$$x' = x'' + y''\sigma\upsilon\nu\, \varepsilon'', \quad y' = y''\eta\mu\, \varepsilon''.$$

Εἰσάγοντες τὰς τιμὰς τῶν x', y' εἰς τὴν (2) εὑρίσκομεν τὴν

$$y''^2\eta\mu^2\varepsilon'' + 2y_1y''\eta\mu\varepsilon'' - 2px'' - 2py''\sigma\upsilon\nu\varepsilon'' = 0$$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε $y_1\eta\mu\varepsilon'' = p\sigma\upsilon\nu\varepsilon''$, ἔχομεν $y''^2 = \dfrac{2p}{\eta\mu^2\varepsilon''}x''$ (3)

Ἐκ τῆς $\varepsilon\varphi\varepsilon'' = \dfrac{p}{y_1}$ ἕπεται $\eta\mu^2\varepsilon'' = \dfrac{p^2}{p^2 + y_1^2}$, ἑπομένως

$$\frac{p}{\eta\mu^2\varepsilon''} = \frac{p^2 + y_1^2}{p} = p + \frac{y_1^2}{p} = p + 2x_1 = 2\left(x_1 + \frac{p}{2}\right)$$

τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸ διπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ M_1 ἀπὸ τῆς Δ. Ἐὰν τοῦτο παραστήσωμεν διὰ $2p_1$ καὶ γράψωμεν x καὶ y ἀντὶ τῶν x'', y'', θὰ ἔχωμεν $\boxed{y^2 = 2p_1x}$ (4)

ἥτις εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς Π_α ὡς πρὸς ἄξονας τὴν διάμετρον καὶ τὴν ἐφαπτομένην αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἁφῆς, καλεῖται δὲ τὸ p_1 ἡμιπαράμετρος αὐτῆς ὡς πρὸς τὴν θεωρουμένην διάμετρον τῆς Π_α.

Ἂν ζητοῦμεν τὴν θέσιν τῆς εὐθείας $y = \lambda x + \beta$ ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας τούτους πρὸς τὴν Π_α (4), εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι, τὰ κοινὰ σημεῖα εἶνε δύο πραγματικὰ καὶ διάφορα ἢ συμπίπτοντα ἢ φανταστικά, ἂν εἶνε τὸ $\lambda\beta < p_1$ ἢ $= p_1$ ἢ $> p_1$. Εἰς τὴν β΄ περίπτωσιν ἡ εὐθεῖα ἐφάπτεται τῆς Π_α καὶ ἂν x_1, y_1 εἶνε αἱ συντεταγμέναι τῆς ἁφῆς, ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο θὰ εἶνε $y_1y = p_1(x + x_1)$ (5)

Διὰ $y = 0$ εὑρίσκομεν $x = -x_1$, ταύτην δ᾽ εὑρίσκομεν ὁμοίως καὶ διὰ τὴν ἐφαπτομένην τῆς Π_α εἰς τὸ σημεῖον $(x_1, -y_1)$. Ἑπομένως αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἄκρα χορδῆς μιᾶς Π_α τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς διαμέτρου τῆς διχοτομούσης τὴν χορδὴν ταύτην. Τὸ μέσον τῆς χορδῆς καὶ ἡ τομὴ τῶν δύο ἐφαπτομένων ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ τοῦ ἄκρου τῆς ἀντιστοίχου εἰς τὴν χορδὴν διαμέτρου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 405. Μιᾶς Π_α γνωρίζομεν μίαν διάμετρον, τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς καὶ ἓν σημεῖον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο·

406. Δίδεται Π_α καὶ ἓν σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς. Ζητεῖται νὰ κατασκευασθοῦν αἱ

δύο ἐφαπτόμεναι αὐτῆς αἱ διερχόμεναι διὰ τοῦ σημείου, μὲ τὴν βοήθειαν διαμέτρου αὐτῆς, ἥτις διέρχεται δι' αὐτοῦ.

407. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις Π_α ὡς πρὸς τὸν ἄξονα καὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὴν κορυφήν της $y^2=5x$. Τίς εἶνε ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς ὡς πρὸς τὴν ἐφαπτομένην καὶ τὴν διάμετρον τοῦ σημείου αὐτῆς ($^9/_5$, 3);

408. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις Π_α, ἥτις ἐφάπτεται τῆς Ελ $\beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$ εἰς τὴν κορυφὴν ταύτης ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν $+y$ καὶ διέρχεται διὰ τῶν ἑστιῶν αὐτῆς.

409. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ μῆκος μιᾶς χορδῆς Π_α διερχομένης διὰ τῆς ἑστίας αὐτῆς εἶνε τετραπλάσιον τῆς ἑστιακῆς ἀκτῖνος εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἁφῆς τῆς παραλλήλου πρὸς αὐτὴν ἐφαπτομένης.

§ 39. Πόλος καὶ πολικὴ ὡς πρὸς παραβολήν.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις ὡς πρὸς διάμετρον καὶ ἐφαπτομένην εἰς τὸ ἄκρον Π_α
$$y^2=2p_1x \tag{1}$$
καὶ σημεῖον P (ξ,η) τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς. Ἂν $M_1(x_1,y_1)$ εἶνε τὸ σημεῖον ἁφῆς διὰ τοῦ P διερχομένης εὐθείας, ἐφαπτομένης τῆς (1), θὰ ἔχωμεν $y_1y=p_1(x+x_1)$, $\eta y_1=p_1(\xi+x_1)$, $y^2_1=2p_1x_1$

Ἐκ τῶν δύο τελευταίων ἐξισώσεων εὑρίσκομεν ἢ δύο σημεῖα ἁφῆς πραγματικὰ καὶ διάφορα ἢ συμπίπτοντα ἢ δύο φανταστικά, καθόσον εἶνε $\eta^2-2p_1\xi>0$ ἢ $=0$ ἢ <0.

Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας $\eta y=p_1(\xi+x)$, ἥτις ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῶν x_1, y_1 τοῦ M_1 καλεῖται ***πολικὴ*** τοῦ $P(\xi,\eta)$, τὸ δὲ P ***πόλος*** τῆς εὐθείας ταύτης ὡς πρὸς τὴν Π_α.

Ἑπομένως, ἂν τὸ P κεῖται ἐκτὸς ἢ ἐπὶ ἢ ἐντὸς τῆς Π_α ἄγονται δι' αὐτοῦ δύο ἐφαπτόμεναι εἰς αὐτὴν ἢ μία ἢ οὐδεμία καὶ ἡ πολικὴ αὐτοῦ τέμνει τὴν Π_α εἰς δύο σημεῖα κατὰ τὴν α΄ περίπτωσιν, ἐφάπτεται αὐτῆς κατὰ τὴν β΄ καὶ κεῖται ἐκτὸς αὐτῆς εἰς τὴν γ΄.

Παρατηρητέον ὅτι, ἡ ἐφαπτομένη Π_α εἶνε ἡ πολικὴ τοῦ σημείου τῆς ἁφῆς, τοῦτο δὲ ὁ πόλος τῆς ἐφαπτομένης· τὰ σημεῖα εὐθείας ἔχουν πολικὰς ὡς πρὸς Π_α τὰς ἀκτῖνας μιᾶς ἐπιπέδου δέσμης, καὶ ἀντιστρόφως· αἱ πολικαὶ τῶν σημείων διαμέτρου Π_α εἶνε παράλληλοι μεταξύ των καὶ ἑπομένως τέμνονται εἰς κατ' ἐκδοχὴν σημεῖον, τὸν πόλον τῆς διαμέτρου ταύτης.

Ἐὰν ἡ Π_α $y^2=2px$ ἀναφέρεται ὡς πρὸς τὸν ἄξονα καὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῆς, ἡ ἐξίσωσις τῆς πολικῆς τοῦ $P(\xi,\eta)$ εἶνε $\eta y=p(\xi+x)$, ἐπειδὴ δὲ διὰ $\xi=\frac{p}{2}$, $\eta=0$ εἶνε $x=\frac{-p}{2}$, ἕπεται ὅτι ἡ πολικὴ τῆς ἑστίας παραβολῆς εἶνε ἡ διευθετοῦσα αὐτῆς.

Ἡ πολικὴ σημείου $P_1\left(x_1=-\frac{p}{2}, y_1\right)$ τῆς διευθετούσης εἶνε $y_1y=px-\frac{p^2}{2}$, καὶ διέρχεται διὰ τῆς Ε, ἔχει δὲ συντελεστὴν διευθύνσεως $\frac{p}{y_1}$. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα P_1E ἔχει συντελεστὴν διευθύνσεως $-\frac{y_1}{p}$, ἕπεται ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὴν Ε μιᾶς Π_α μὲ τὸν πόλον τυχούσης χορδῆς αὐτῆς διερχομένης διὰ τῆς Ε, εἶνε κάθετος ἐπ' αὐτήν.

Δεικνύεται εὐκόλως ὅτι, ἂν αἱ διά τινος σημείου $P(\xi,\eta)$ ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι Π_α εἶνε κάθετοι, θὰ εἶνε $\xi=-p/2$ καὶ ἀντιστρόφως. Ἄρα, ***«ὁ τόπος τῶν σημείων, διὰ τῶν ὁποίων ἄγονται ἐφαπτόμεναι παραβολῆς κάθετοι μεταξύ των, εἶνε ἡ διευθετοῦσα αὐτῆς».***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 410. Δείξατε ὅτι αἱ ἰδιότητες πόλου καὶ πολικῆς εἶνε ἀνεξάρτητοι τοῦ συστήματος τῶν ἀξόνων ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται ἡ Πα.

411. Εὕρετε τὸν πόλον τῆς $Ax+By+\Gamma=0$ ὡς πρὸς τὴν $y^2=2px$.

412. Εὕρετε τὸν πόλον τῆς $5x-7y+2=0$ ὡς πρὸς τὴν $y^2-3x=0$.

413. Εὕρετε τὰς συντεταγμένας τῶν σημείων ἀφῆς τῶν δύο ἐφαπτομένων τῶν ἀγομένων διὰ τοῦ $(-5,3)$ πρὸς τὴν $y^2-8x=0$.

414. Εὕρετε τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην ἵνα ἡ $Ax+By+\Gamma=0$ ἐφάπτεται τῆς $y^2=2px$.

415. Μετασχηματίσατε τὴν ἐξίσωσιν $y^2=?px$, ἐὰν ληφθῇ ὡς ἀρχὴ νέων παραλλήλων ἀξόνων ἡ Ε τῆς Π_α, ἢ ἡ τομὴ τῆς διευθετούσης μὲ τὸν ἄξονα τῶν x.

416. Τί παριστάνει ἡ ἐξίσωσις $x^2=2py\pm\alpha$ καὶ τίς εἶνε ὁ ἄξων συμμετρίας αὐτῆς;

417. Ποῦ τείνει ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως ἐφαπτομένης τῆς $y^2=2px$ εἰς τὸ M_1 (x_1, y_1) αὐτῆς, ὅταν τοῦτο τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον;

418. Εὕρετε τὴν τομὴν δύο ἐφαπτομένων τῆς $y^2=2px$ εἰς τὰ M_1 (x_1, y_1) καὶ $M_2(x_2, y_2)$.

419. Εὕρετε τὴν γωνίαν τῶν ἐφαπτομένων, τῶν ἀγομένων διὰ τοῦ M_1 (x_1, y_1) εἰς τὴν $y^2=2px$.

420. Εὕρετε διὰ τὴν $y^2=6x-3$ τὸ μῆκος τοῦ τμήματος τοῦ ἄξονος τῶν x, τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῆς τεταγμένης τυχόντος σημείου τῆς Πα καὶ τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο.

421. Τί παριστάνει ἡ ἐξίσωσις $y^2=-4x+3$ καὶ κατασκευάσατε τὸν τόπον.

422. Διὰ νὰ φέρωμεν δύο ἐφαπτομένας Πα μὲ ἑστίαν Ε διὰ σημείου Μ, πότε ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν περιφέρειαν κύκλου μὲ διάμετρον ΜΕ καὶ νὰ φέρωμεν εὐθείας συνδεούσας τὸ Μ μὲ τὰς τομὰς τῆς περιφερείας καὶ τῆς Πα;

423. Διὰ σημείου $M(x_1, y_1)$ κειμένου ἐντὸς Πα νὰ ἀχθῇ χορδὴ αὐτῆς, ἔχουσα τὸ μέσον αὐτῆς εἰς τὸ M_1.

424. Διὰ σημείου (x_1, y_1) νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα, ὥστε ἡ ἐπ' αὐτῆς χορδὴ Π_α νὰ διχοτομῆται ὑπὸ διαμέτρου ταύτης $y=\beta$.

425. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι τῆς $x^2=4y$ διὰ τοῦ σημείου $M(\alpha,\beta)$ ὁρίζουν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x τμήματα, ἔχοντα μήκη ἴσα μὲ τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $x^2-\alpha x+\beta=0$ (1). Πρὸς δὲ ὅτι, ἂν μὲ κέντρον M καὶ ἀκτῖνα ME (E ἡ ἑστία) γραφῇ τόξον κύκλου, τέμνον εἰς τὰ M_1, M_2 τὴν διευθετοῦσαν, αἱ τετμημέναι τούτων εἶνε διπλάσιαι τῶν ριζῶν τῆς (1), ἔχει δ' αὕτη δύο διαφόρους πραγματικὰς ρίζας ἢ μίαν ἢ φανταστικάς, ἂν τὸ M κεῖται ἐκτὸς ἢ ἐπὶ ἢ ἐντὸς τῆς Π_α.

426. Αἱ τομαὶ τριῶν οἱωνδήποτε ἐφαπτομένων Π_α κεῖνται ἐπὶ περιφερείας μὲ κέντρον τὴν ἑστίαν αὐτῆς.

§ 40. Ὁμοέστιοι παραβολαί.

Καλοῦμεν ***ὁμοεστίους*** παραβολὰς τὰς ἐχούσας τὴν αὐτὴν ἑστίαν καὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα. Ἂν λάβωμεν ὡς ἄξονα τῶν x τὸν κοινὸν ἄξονα τοιούτων παραβολῶν, τὴν δὲ κοινὴν ἑστίαν αὐτῶν ὡς ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων, ἡ ἐξίσωσις αὐτῶν μὲ (μεταβλητὴν) παράμετρον p προκύπτει ἐκ τῆς ἐξισώσεως $y^2=2px$, ἂν τεθῇ $x=x'+\frac{p}{2}$, $y=y'$. Οὕτω ἡ ἐν λόγῳ ἐξίσωσις εἶνε $y^2-2px-p^2=0$ (1) (ἂν γράψωμεν x,y ἀντὶ τῶν x',y', ἥτις διὰ $p>0$ ἢ <0 δίδει παραβολὰς μὲ ἄξονα τὸ θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν μέρος τοῦ ἄξονος τῶν x.

Δύο ὁμοέστιοι παραβολαὶ μὲ ἀντιθέτους ἄξονας τέμνονται καθέτως. Πράγματι, δύο τοιαῦται παραβολαὶ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰς ἡμιπαραμέτρους p_1 $(\neq)$ p_2 ἔχουν ἐξισώσεις $y^2=2p_i\,x+p_i^2$, $(i=1,2)$, τέμνονται δὲ εἰς τὰ σημεῖα $\left(-\frac{p_1+p_2}{2}, \pm\sqrt{-p_1\,p_2}\right)$, τὰ ὁποῖα εἶνε πραγματικὰ μόνον ἂν $p_1\,p_2<0$. Οἱ συντελεσταὶ διευθύνσεως τῶν ἐφαπτομένων τῶν παραβολῶν αὐτῶν, π. χ. εἰς τὴν μίαν τῶν τομῶν των, εἶνε $\frac{p_1}{\sqrt{-p_1\,p_2}}$, $\frac{p_2}{\sqrt{-p_1\,p_2}}$· ἄρα πληροῦται ἡ συνθήκη καθετότητος $\frac{p_1\,p_2}{-p_1\,p_2}=-1$.

Παρατηρητέον ὅτι ἡ (1) εἶνε β' βαθμοῦ ὡς πρὸς p καὶ παριστάνει δύο Π_α, διερχομένας διὰ τοῦ σημείου (x,y) ἀντιστοιχούσας δὲ εἰς τὰς ρίζας τῆς (1) ὡς πρὸς p, ἔστω τὰς p_1, p_2. Αὗται ἔχουν ἄξονας ἀντιθέτους ἐπειδὴ εἶνε $p_1\,p_2=-y^2<0$, τέμνονται δὲ καθέτως, ὡς φαίνεται καὶ ἐκ τοῦ γινομένου τῶν συντελεστῶν διευθύνσεως τῶν ἐφαπτομένων αὐτῶν εἰς τὸ (x,y) $\frac{p_1}{y}\cdot\frac{p_2}{y}=-1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 427. Ἐπὶ Ελ μὲ κέντρον Ο κινεῖται σημεῖον Μ καὶ προβάλλεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y εἰς τὸ Μ', τοῦτο δὲ συνδέεται μὲ τὴν κορυφὴν Α τῆς Ελ δι' εὐθείας. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῆς τομῆς τῆς ΑΜ' καὶ ΟΜ.

428. Δίδεται Ελ. Μὲ κέντρον Ο καὶ μὲ διάμετρον ΟΑ γράφεται περιφέρεια, εὐθεῖα δὲ κινεῖται ἐφαπτομένη αὐτῆς. Τίς ὁ τόπος τοῦ πόλου ταύτης ὡς πρὸς τὴν Ελ;

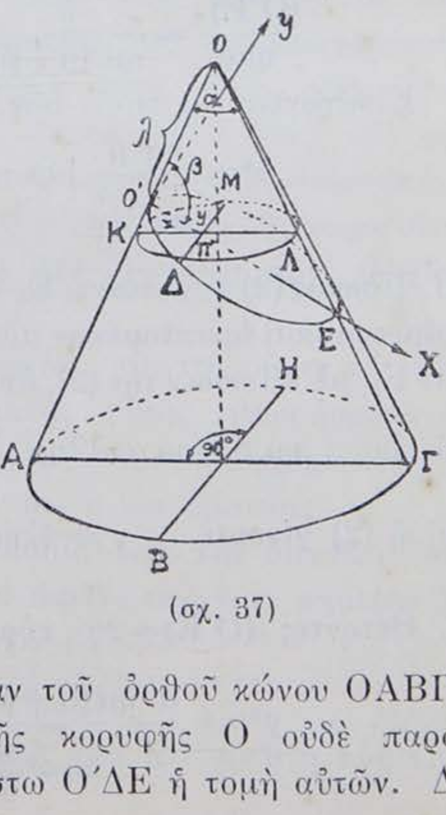
429. Δίδεται ἡ Υπ $x^2-y^2=\alpha^2$ μὲ κορυφὰς Α, Α'. Σημεῖον Μ κινούμενον ἐπὶ τῆς Υπ προβάλλεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y εἰς τὸ Μ'. Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα Μ' Μ προεκτείνεται πέραν τοῦ Μ κατὰ μῆκος ἀπόλυτον (Μ'Μ) μέχρι σημείου Ρ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῆς τομῆς τῶν ΑΡ καὶ Α'Μ'.

§ 41. Ἡ παραβολὴ ὡς ὅριον ἐλλείψεως ἢ ὑπερβολῆς.

Ὡς εἴδομεν (§ 32) ἡ Ελ ἢ Υπ $y^2=2px+qx^2$ διὰ $q\to 0$, ἤτοι ὅταν $\alpha\to\infty$, τὸ δὲ p διατηρεῖται σταθερόν, ἔχει ὅριον τὴν παραβολὴν $y^2=2px$, ὅτε καὶ ἡ ἐκκεντρότης τῆς Ελ ἢ Υπ τείνει πρὸς τὴν 1. Πράγματι, εἶνε διὰ τὴν Ελ ἢ Υπ $\gamma^2=\alpha^2\mp\beta^2$, ἄρα ἔχομεν $\varepsilon^2=\frac{\gamma^2}{\alpha^2}=1\mp\frac{\beta^2}{\alpha^2}=1\pm\frac{p}{\alpha}$ καὶ ὅταν $\alpha\to\infty$, ἔχομεν $\varepsilon\to 1$ (τοῦ p διαρουμένου σταθεροῦ).

§ 42. Αἱ καμπύλαι β' βαθμοῦ ὡς τομαὶ κυκλικοῦ κώνου.

Ἐὰν εὐθεῖα κινῆται καὶ συναντᾷ ἄλλην σταθερὰν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο (σχ. 37), ὥστε νὰ σχηματίζῃ μὲ αὐτὴν σταθερὰν γωνίαν ($\neq 90^\circ$ ἢ 180° ἢ 0°), παράγει ἐπιφάνειαν ἀποτελουμένην ἀπὸ δύο ἀπεράτους κώνας, κειμένας ἑκατέρωθεν τοῦ Ο. Τὴν ἐπιφάνειαν ταύτην καλοῦμεν ***κωνικὴν*** κυκλικὴν (ὀρθὴν) ἢ ἐπιφάνειαν κυκλικοῦ ***κώνου***. Ἡ μὲν ἀκίνητος εὐθεῖα λέγεται ***ἄξων*** τοῦ κώνου τούτου, ἡ δὲ κινητὴ ***γενέτειρα*** αὐτοῦ καὶ τὸ Ο ***κορυφὴ*** τοῦ κώνου.



(σχ. 37)

Ἐὰν τμήσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν ταύτην δι' ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα, μὴ διερχομένου διὰ τοῦ Ο, ἡ τομὴ αὐτῆς προφανῶς θὰ εἶνε περιφέρεια κύκλου καὶ καλεῖται συνήθως ***βάσις*** τῆς ἐπιφανείας ταύτης.

Ἔστω ὅτι τέμνομεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὀρθοῦ κώνου ΟΑΒΓΗ δι' ἐπιπέδου μὴ διερχομένου διὰ τῆς κορυφῆς Ο οὐδὲ παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν αὐτῆς καὶ ἔστω Ο'ΔΕ ἡ τομὴ αὐτῶν. Διὰ τοῦ ἄξονος φέρομεν ἐπίπεδον ΟΑΓ κάθετον ἐπὶ τὸ τέμνον καὶ διά τινος σημείου Π τῆς τομῆς Ο΄Ε τῶν Ο΄ΔΕ καὶ ΟΑΓ φέρομεν ἐπίπεδον ΚΔΛ παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν τῆς ἐπιφανείας, τέμνον αὐτὴν κατὰ τὴν περιφέρειαν ΚΔΛΜ. Ἐὰν Μ εἶνε σημεῖον τῆς τομῆς τῶν γραμμῶν Ο΄ΔΕ καὶ ΚΔΛΜ, ἡ εὐθεῖα ΔΠΜ θὰ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὰς Ο΄Ε καὶ ΚΛ, ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον ΟΑΓ εἶνε κάθετον ἐπὶ τὰ Ο΄ΔΕ καὶ ΚΔΛΜ, ἄρα καὶ ἐπὶ τὴν τομὴν αὐτῶν ΔΠΜ.

Ἐὰν λάβωμεν ἄξονας συντεταγμένων Ο΄xy τὴν Ο΄Ε καὶ τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν Ο΄Ε (ἐπὶ τῆς τομῆς Ο΄ΔΕ) εἰς τὸ Ο΄, αἱ συντεταγμέναι τοῦ Μ θὰ εἶνε $(O'\Pi)=x$ καὶ $(\Pi M)=y$, ἂν δὲ τεθῇ ἀπολύτως

$$(OO')=\lambda, \quad \text{γων} AO\Gamma=\alpha, \quad \text{γων} OO'E=\beta$$

θὰ ἔχωμεν
$$y^2=(K\Pi)(\Pi\Lambda) \tag{1}$$
ἐπειδὴ τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας ΚΔΛΜ. Ἐκ μὲν τοῦ τριγώνου Ο΄ΚΠ ἔχομεν $\dfrac{(K\Pi)}{\eta\mu\beta}=\dfrac{x}{\eta\mu\left(90^0-\dfrac{\alpha}{2}\right)}$ καὶ $(K\Pi)=\dfrac{x\,\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\dfrac{\alpha}{2}}$, ἐκ δὲ τοῦ ΕΛΠ $\dfrac{(\Pi\Lambda)}{\eta\mu\,(\alpha+\beta)}=\dfrac{(O'E)-x}{\eta\mu\left(90^0-\dfrac{\alpha}{2}\right)}$ καὶ $(\Pi\Lambda)=((O'E)-x)\dfrac{\eta\mu\,(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu\,\dfrac{\alpha}{2}}$.

Ἐκ τοῦ τριγώνου Ο΄ΕΟ εὑρίσκομεν ὁμοίως

$$\frac{(O'E)}{\eta\mu\alpha}=\frac{\lambda}{\eta\mu\,(\alpha+\beta)} \quad \text{καὶ}\ (O'E)=\frac{\lambda\,\eta\mu\alpha}{\eta\mu(\alpha+\beta)}.$$

Εἰσάγοντες τὰς τιμὰς τῶν (ΚΠ), (ΠΛ) εἰς τὴν (1) εὑρίσκομεν

$$y^2=\frac{\eta\mu\ \beta}{\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\alpha}{2}}\left[\lambda x\,\eta\mu\alpha-\eta\mu\,(\alpha+\beta).x^2\right] \tag{2}$$

Ἡ ἐξίσωσις (2) παριστάνει E_λ ἢ Y_π ἢ Π_α, ὅταν ἀναφέρεται πρὸς ἄξονας διάμετρον καὶ ἐφαπτομένην αὐτῆς, καὶ ἂν μὲν εἶνε $\alpha+\beta<180^0$, ἡ τομὴ εἶνε E_λ, μὲ ἐξίσωσιν τὴν (2), ἂν $\alpha+\beta>180^0$ εἶνε Y_π καὶ ἂν $\alpha+\beta=180^0$ θὰ εἶνε $\eta\mu\ \beta=\eta\mu\,\alpha=2\eta\mu\ \dfrac{\alpha}{2}\ \sigma\upsilon\nu\dfrac{\alpha}{2}$, $\eta\mu\ (\alpha+\beta)=0$

καὶ ἡ (2) γίνεται $y^2=4\lambda\eta\mu^2\dfrac{\alpha}{2}\ x$, ἥτις παριστάνει Π_α.

Θέτοντες $(O'E)=2\alpha'$, εὑρίσκομεν $\lambda=2\alpha'\,\dfrac{\eta\mu\ (\alpha+\beta)}{\eta\mu\alpha}$

$$y^2=\frac{\alpha'\,\eta\mu\,(\alpha+\beta)\,\eta\mu\,\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\alpha}{2}}\left[2x-\frac{x^2}{\alpha'}\right]$$

καὶ ἂν τεθῇ $p = \frac{\alpha' \, \eta\mu(\alpha+\beta)\, \eta\mu\,\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha/2}$, $\quad y^2 = 2px - \frac{p}{\alpha'}x^2 \qquad (2')$

Ἐπειδή, ἂν εἶνε $\alpha+\beta<180$ ἢ $>180^0$ ἢ $=180^0$, ***τὸ ἐπίπεδον Ο΄ΔΕ, μὴ διερχόμενον διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου καὶ μὴ παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ, τέμνει πάσας τὰς γενετείρας του ἢ εἶνε παράλληλον πρὸς δύο ἐξ αὐτῶν ἢ πρὸς μίαν, ἕπεται ὅτι ἡ τομὴ εἶνε E_λ ἢ Y_π, μὲ ἀνὰ ἕνα κλάδον ἐπὶ ἑκάστης χώνης, ἢ Π_α.***

Διὰ τοῦτο ἡ E_λ ἡ Y_π καὶ Π_α καλοῦνται ἐν γένει ***κωνικαὶ τομαί.***

Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον τὸ τέμνον τὸν κῶνον, κινηθῇ παραλλήλως πρὸς ἑαυτό, μέχρις ὅτου διέλθῃ διὰ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ, ἂν μὲν εἶνε παράλληλον πρὸς δύο γενετείρας του, ἡ τομὴ θὰ εἶνε αἱ δύο γενέτειραι, πρὸς τὰς ὁποίας εἶνε παράλληλον τὸ ἀρχικόν, ἤτοι δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι εἰς τὸ Ο· ἂν δ᾽ εἶνε παράλληλον πρὸς μίαν γενέτειραν, ἡ τομὴ ἐφάπτεται τοῦ κώνου κατὰ μῆκος τῆς γεννετείρας πρὸς τὴν ὁποίαν τὸ ἀρχικὸν ἐπίπεδον εἶνε παράλληλον, ἤτοι ἡ τομὴ εἶνε δύο εὐθεῖαι συμπίπτουσαι, διερχόμεναι διὰ τοῦ Ο.

§ 43. Γενικὴ ἐξίσωσις τῶν κωνικῶν τομῶν.

Ἐπειδὴ, ἂν σημεῖον κεῖται ἐπὶ E_λ ἢ Y_π ἢ Π_α ὁ λόγος τῶν (ἀπολύτων) ἀποστάσεων τούτου ἀπὸ μιᾶς τῶν ἑστιῶν καὶ τῆς ἀντιστοίχου εἰς αὐτὴν διευθετούσης ἰσοῦται μὲ τὴν ἐκκέντρότητα $\varepsilon>1$ ἢ <1 ἢ$=1$ τῆς καμπύλης, ἡ ἰδιότης δ᾽ αὕτη ἰσχύει μόνον διὰ τὰ σημεῖα ἑκάστης τῶν γραμμῶν τούτων, ἕπεται ὅτι, ὁ τόπος τῶν σημείων ἐπιπέδου, διὰ τὰ ὁποῖα ὁ λόγος τῶν (ἀπολύτων) ἀποστάσεων αὐτῶν ἀπὸ ὡρισμένων σημείου καὶ εὐθείας εἶνε σταθερός, παριστάνει κωνικὴν τομὴν μὲ ἑστίαν τὸ σημεῖον, διευθετοῦσαν τὴν εὐθεῖαν καὶ ἐκκεντρότητα τὸν λόγον.

Ἐπὶ τῆς ἰδιότητος ταύτης στηριζόμενοι παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς. Ἂν ε παριστάνῃ τὴν ἐκκεντρότητα κωνικῆς τομῆς, θεωρήσωμεν δ᾽ αὐτὴν ἀναφερομένην ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους διερχομένους διὰ μιᾶς τῶν ἑστιῶν αὐτῆς καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ μὲν ἐξίσωσις

$A_1x+B_1y+\Gamma_1=0$ (ὅπου $A_1^2+B_1^2\neq0$) παριστάνει τὴν διευθετοῦσαν αὐτῆς, τὸ δὲ ρ τὴν ἑστιακὴν (ἐπιβατικὴν) ἀκτῖνα τυχόντος σημείου Μ τῆς κωνικῆς, θὰ ἔχωμεν $\quad \rho=\varepsilon\,\frac{A_1x+B_1y+\Gamma_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}$

ἢ $\quad \lambda x+\mu y+\nu\rho+k=0$, ὅπου λ, μ, ν, k εἶνε ἀνεξάρτητα τῶν x,y.

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη παριστάνει προφανῶς τὴν θεωρουμένην κωνικὴν τομήν, ἄρα εἶνε ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς εἰς μεικτὰς (εὐθυγράμμους καὶ πολικὰς) συντεταγμένας ὡς πρὸς ἀρχὴν τὴν θεωρουμένην ἑστίαν αὐτῆς. Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν γενικὴν μορφὴν

$\nu^2\rho^2=(\lambda x+\mu y+k)^2$ ἢ $Ax^2+2Bxy+\Gamma y^2+2\Delta x+2Ey+Z=0$ (1)

ὅπου τὰ $A, B, \Gamma, \ldots$ ὑποτίθενται ἀνεξάρτητα τῶν x, y. Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον καταντῶμεν καὶ ἂν αἱ συντεταγμέναι σταθεροῦ σημείου εἶνε x_1, y_1 καὶ $x\sigma\upsilon\nu\varphi+y\eta\mu\varphi-R_0=0$ (2) εἶνε ἡ ἐξίσωσις δοθείσης εὐθείας, ὅτε αἱ ἀποστάσεις σημείου $M(x,y)$ ἀπὸ τοῦ (x_1, y_1) καὶ τῆς εὐθείας (2) συνδέονται διὰ τῆς ἐξισώσεως

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=\varepsilon^2(x\ \sigma\upsilon\nu\ \varphi+y\ \eta\mu\ \varphi-R_0)^2, \quad (3)$$

ὅπου $\varepsilon\neq0$ καὶ R_0 ἡ ἀπόστασις τῆς εὐθείας ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων, φ δὲ ἡ γωνία τῆς καθέτου εὐθείας ἐπ' αὐτὴν διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων μὲ τὸν ἄξονα τῶν x. Ἑπομένως, ἡ ἐξίσωσις αὕτη παριστάνει κωνικὴν τομὴν ὡς τόπον τοῦ σημείου M, ἔχουσαν ἐκκεντρότητα ε καὶ διευθετοῦσαν τὴν εὐθεῖαν (2), τίθεται δ' ἡ (3) ὑπὸ τὴν ἀνωτέρω μορφὴν (1).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 430. Ἡ ἀπόστασις τῆς μιᾶς ἑστίας κωνικῆς τομῆς ἀπὸ μιᾶς διευθετούσης αὐτῆς εἶνε ἴση μὲ $p : \varepsilon$.

431 Ἡ ἀπόστασις τῆς μιᾶς ἑστίας κωνικῆς τομῆς ἀπὸ μιᾶς κορυφῆς αὐτῆς ἰσοῦται $p : (1+\varepsilon)$.

432. Δείξατε ὅτι ἓν ζεῦγος εὐθειῶν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἐκφυλισμὸς ὑπερβολῆς, καὶ ἐξετάσατε αὐτὰς ἀπὸ τῆς ἀπόψεως ταύτης ὡς πρὸς τὴν ὑπερβολήν.

433. Ἐὰν ὀρθὴ γωνία κινῆται ὥστε ἡ κορυφὴ αὐτῆς νὰ διαγράφῃ δοθεῖσαν περιφέρειαν ἢ εὐθεῖαν καὶ ἡ μία τῶν πλευρῶν αὐτῆς διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου, ἡ ἄλλη εἶνε ἐφαπτομένη κωνικῆς τομῆς.

434. Ἀπὸ σημείου M Ελ ἄγεται κάθετον τμῆμα MK ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν y καὶ προεκτείνεται μέχρι τοῦ M_1 πέραν τοῦ M κατὰ τμῆμα ἴσον πρὸς ἑαυτό. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν τομῶν τῶν εὐθειῶν OM καὶ AM_1, ὅπου A ἡ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x κορυφὴ τῆς Ελ.

435. Ἐπὶ Ελ κινεῖται χορδὴ M_1M_2 παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y, τέμνει δ' αὕτη τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὸ Γ. Τίς ὁ τόπος τῆς τομῆς P τῶν BΓ καὶ OM_2, ἂν B εἶνε κορυφὴ τῆς Ελ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y ἡ κειμένη πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἄξονος τῶν x μὲ τὸ M_1;

436. Τίνες αἱ ἐξισώσεις τῶν ἐφαπτομένων κωνικῆς τομῆς διὰ σημείου (x_1, y_1) καὶ δείξατε ὅτι ὁ τόπος τοῦ σημείου τούτου, ἂν αἱ ἐφαπτόμεναι εἶνε κάθετοι, εἶνε ἐν γένει περιφέρεια κύκλου ***(διευθετοῦσα περιφέρεια καλουμένη)***.

437. Τίς εἶνε ὁ τόπος τῆς τομῆς τῶν AM_2 καὶ BΓ τῆς ἀσκήσεως 435, ἂν ἡ κορυφὴ A τῆς Ελ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x;

438. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ριζικὸς ἄξων τῆς διευθετούσης περιφερείας (βλ. ἄσκησιν 436) μιᾶς Ελ καὶ τῆς ἐχούσης κέντρον τὴν ἑστίαν ταύτης Ε μὲ ἀκτῖνα 2α εἶνε διευθετοῦσα αὐτῆς.

439. Δίδονται δύο ὁμοέστιοι Ελ ἢ Υπ $\beta^2x^2 \pm \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2$, $\beta_1^2x^2 \pm \alpha_1^2y_1^2 = \alpha_1^2\beta_1^2$. Ὀρθὴ γωνία κινεῖται ὥστε ἀνὰ μία τῶν πλευρῶν αὐτῆς νὰ ἐφάπτεται τῆς μιᾶς αὐτῶν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας.

440. Σημεῖον Μ κινεῖται ἐπὶ Υπ καὶ προβάλλεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y εἰς τὸ Μ', τοῦτο δὲ συνδέεται δι' εὐθείας μὲ τὴν κορυφὴν Α τῆς Υπ ἐπὶ τοῦ ἄξονος x, τίς ὁ τόπος τῆς τομῆς μὲ τὴν εὐθεῖαν ΟΜ;

441. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ πόλου τῶν ἐφαπτομένων τῆς $x^2 = 2py$ ὡς πρὸς τὴν $y^2 = 2px$.

442. Διὰ τῆς κορυφῆς τῆς $y^2 = 2px$ ἄγονται χορδαὶ αὐτῆς. Ἑκάστη πολλαπλασιάζεται ἐπὶ λ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν ἄκρων αὐτῶν.

443. Διὰ τῆς κορυφῆς Πα ἄγονται χορδαὶ αὐτῆς καὶ ἑκάστη χωρίζεται εἰς μέρη ἔχοντα λόγον λ. Τίς ὁ τόπος τῶν σημείων τοῦ χωρισμοῦ;

444. Ἕκαστον σημεῖον Πα μεταφέρεται κατὰ μῆκος γ παραλλήλως πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν, σχηματίζουσαν γωνίαν φ μὲ τὸν ἄξονα τῶν x. Τίς ὁ τόπος τῶν νέων θέσεων τῶν σημείων;

445. Αἱ τεταγμέναι τῶν σημείων Πα α') χωρίζονται ἀπὸ τοῦ ἄξονος εἰς μέρη ἔχοντα λόγον λ. β') ἐπεκτείνονται κατὰ τὸ μυπλάσιον αὐτῶν. Τίς ὁ τόπος τῶν σημείων τοῦ χωρισμοῦ καὶ ὁ τῶν νέων ἄκρων;

446. Διὰ σημείου M_1 (x_1, y_1) ἄγονται τέμνουσαι Πα. Τίς ὁ τόπος τῶν μέσων τῶν ἐπ' αὐτῶν χορδῶν αὐτῆς;

447. Διὰ τυχόντος σημείου Μ Πα ἄγεται κάθετος εὐθεῖα ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν x μέχρι νέας τομῆς αὐτῆς M_1 μὲ τὴν καμπύλην. Διὰ τοῦ Μ ἄγεται παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα καὶ διὰ τοῦ M_1 εὐθεῖα σχηματίζουσα γωνίαν φ μὲ τὸν ἄξονα. Τίς ὁ τόπος τῶν τομῶν τῶν εὐθειῶν τούτων;

448. Ἀπὸ τῆς ἑστίας Πα ἄγονται ἀκτῖνες αὐτῆς καὶ ἑκάστη προεκτείνεται κατὰ τὸ μυπλάσιον αὐτῆς. Τίς ὁ τόπος τῶν ἄκρων αὐτῶν;

449. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, τῶν ἐφαπτομένων δοθείσης εὐθείας καὶ δοθείσης περιφερείας ἐξωτερικῶς.

450. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων περιφερείας, ἐφαπτομένης δοθείσης εὐθείας καὶ τεμνούσης καθέτως περιφέρειαν μὲ ἀκτῖνα ρ.

451. Δίδεται περιφέρεια (0, 0, ρ) τέμνουσα τὸν ἄξονα Οx εἰς τὸ Α. Μὲ διάμετρον ΟΑ γράφεται ἄλλη περιφέρεια, ἐπὶ ταύτης δ' ὀλισθαίνει ἐφαπτομένη εὐθεῖα. Τίνα τόπον γράφει ὁ πόλος ταύτης ὡς πρὸς τὴν πρώτην περιφέρειαν;

452. Τίς ὁ τόπος τοῦ πόλου εὐθείας ἐφαπτομένης τῆς $x^2 = 8y$ ὡς πρὸς ἄλλην δοθεῖσαν Πα;

Γεωμετρικῶν κατασκευῶν. Παριστάνομεν κατωτέρω διὰ τῶν α, Δ, Ε, Ο, τὸν ἄξονα, τὴν διευθετοῦσαν, τὴν ἑστίαν καὶ τὴν κορυφὴν Πα· διὰ τῶν M_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ σημεῖα αὐτῆς, διὰ τ, τi ἐφαπτομένας αὐτῆς εἰς τὰ σημεῖα ταῦτα, διὰ 2p τὴν παράμετρον καὶ διὰ τ_0 τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῆς.

Νὰ κατασκευασθῇ Π_α τῆς ὁποίας δίδονται τά:

453.	α΄) Ε, α, Μ.	β΄) Ε, α, τ.	γ΄) Ε, M_1, M_2.
454.	α΄) Ε, τ_1, τ_2.	β΄) Ε, p, Μ.	γ΄) Ε, τ, Μ.
455.	α΄) Ε, τ, Μ ἐπὶ τῆς τ.	β΄) Δ, τ_1, τ_2.	γ΄) Δ, τ, Μ ἐπὶ τῆς τ.
456.	α΄) Δ, α, Μ.	β΄) Δ, τ_0, τ.	γ΄) α, Μ, τ_0.
457.	α΄) α, Μ, Ο.	β΄) α, τ, Μ ἐπὶ τῆς τ.	γ΄) α, Ο, τ.
458.	α΄) α, M_1, M_2.	β΄) α, p, Μ.	γ΄) τ_0, τ, Μ ἐπὶ τῆς τ.

459. α΄) τ_1, τ_2, M_1 ἐπὶ τῆς τλ καὶ M_2 ἐπὶ τῆς τ_2. β΄) τ_1, τ_2, τ_0. γ΄) τ_1, τ_2, p.

460. α΄) τ_1, τ_2, τ_3, τ_4.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III.

Γενικὴ διερεύνησις τῶν καμπύλων β΄ βαθμοῦ.

§ 44. Διάκρισις τῶν καμπύλων β΄ βαθμοῦ εἰς γένη.

Καλοῦμεν καμπύλην β΄ βαθμοῦ ἐν γένει τὸν τόπον ὅστις παριστάνεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$Ax^2+2Bxy+\Gamma y^2+2\Delta x+2Ey+Z=0 \qquad (1)$$

ὅπου τὰ μὲν x,y εἶνε συντεταγμέναι τυχόντος σημείου αὐτῆς ὡς πρὸς ἄξονας Oxy, τὰ δὲ A, B, Γ,... εἶνε ἀνεξάρτητα τῶν x,y καὶ $A^2+B^2+\Gamma^2\neq 0$. Ἂν οἱ ἄξονες εἶνε πλαγιογώνιοι μὲ γωνίαν θ τῶν ἀξόνων, στρέφομεν τὸν ἕνα αὐτῶν π.χ. τὸν τῶν y, ὥστε τὸ νέον σύστημα x΄Oy΄ νὰ εἶνε ὀρθογώνιον καὶ θὰ θέσωμεν εἰς τὴν (1) τὰς τιμὰς τῶν x,y ἐκ τῶν $x=x'-y'\sigma\varphi\theta$, $y=\dfrac{y'}{\eta\mu\theta}$. Οὕτω ἡ (1) μετασχηματίζεται εἰς ἄλλην τῆς αὐτῆς μορφῆς ἐν γένει καὶ διὰ τοῦτο κατωτέρω ὑποθέτομεν αὐτὴν ἀναφερομένην εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους.

Ἵνα διακρίνωμεν εἰς γένη τὰς ὑπὸ τῆς (1) παριστανομένας γραμμάς, εὑρίσκομεν τὰς τομὰς τοῦ τόπου ὑπὸ τῆς εὐθείας $y=\lambda x$ (2) καὶ ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὰς πραγματικὰς τιμὰς τῆς παραμέτρου λ διὰ τὰς ὁποίας ὑπάρχουν κατ᾽ ἐκδοχὴν τοιαῦται τομαί. Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν

$$(\Gamma\lambda^2+2B\lambda+A)x^2+2(E\lambda+\Delta)x+Z=0, \qquad (3)$$

ἂν δὲ $(\Gamma\lambda^2+2B\lambda+A)\to 0$ καὶ $(E\lambda+\Delta)\neq 0$, ἡ μία τῶν ριζῶν τῆς (3) ὡς πρὸς x τείνει εἰς τὸ ∞, ἄρα διὰ τὰς τιμὰς τοῦ λ διὰ τὰς ὁποίας ἔχομεν $\Gamma\lambda^2+2B\lambda+A=0$ (4)

ἡ μία τῶν ῥιζῶν τῆς (3) εἶνε ∞, ἐπειδὴ δ' εἶνε $\lambda = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - A\Gamma}}{\Gamma}$, ἕπεται ὅτι, ἐὰν εἶνε $B^2 - A\Gamma > 0$ ἢ $= 0$ ἢ < 0, ὑπάρχουν δύο πραγματικαὶ τιμαὶ τοῦ λ, διὰ τὰς ὁποίας ἡ εὐθεῖα (2) τέμνει τὴν καμπύλην (1) εἰς τὸ ∞, ἢ μία ἢ οὐδεμία. Ἤτοι, ὁ ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως (1) παριστώμενος τόπος ἔχει δύο σημεῖα εἰς τὸ ∞ ἢ ἓν ἢ οὐδέν, καθόσον εἶνε $B^2 - A\Gamma >$ ἢ $= 0$ ἢ < 0· καὶ λέγομεν ὅτι ἡ (1) παριστάνει καμπύλην γένους ***ὑπερβολῆς*** εἰς τὴν α' περίπτωσιν, ***παραβολῆς*** εἰς τὴν β' καὶ ***ἐλλείψεως*** εἰς τὴν γ'.

§ 45 Διάμετροι τῶν καμπύλων β' βαθμοῦ.

Καλοῦμεν ***διάμετρον*** καμπύλης β' βαθμοῦ τὸν τόπον τῶν μέσων παραλλήλων χορδῶν αὐτῆς.

Ἂν ἡ ἐξίσωσις καμπύλης β' βαθμοῦ εἶνε

$$Ax^2 + 2Bxy + \Gamma y^2 + 2\Delta x + 2Ey + Z = 0 \qquad (1)$$

$(A^2 + B^2 + \Gamma^2 \neq 0)$ καὶ $M_i\ (x_i\,,\ y_i\,),\ i = 1, 2,$ δύο σημεῖα αὐτῆς, θὰ ἔχωμεν $\quad Ax_i^2 + 2Bx_i\,y_i + \Gamma y_i^2 + 2\Delta x_i + 2Ey_i + Z = 0$

καὶ δι' ἀφαιρέσεως τούτων κατὰ μέλη

$$A(x_2 - x_1)(x_1 + x_2) + B[(y_2 - y_1)(x_1 + x_2) + (x_2 - x_1)(y_1 + y_2)] +$$
$$+ \Gamma(y_2 - y_1)(y_1 + y_2) + 2\Delta(x_2 - x_1) + 2E(y_2 - y_1) = 0.$$

Ἂν x,y παριστάνουν τὰς συντεταγμένας τοῦ μέσου τοῦ διανύσματος M_1M_2 καὶ τὰ $\alpha = x_2 - x_1$, $\beta = y_2 - y_1$ (ὅπου $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$) τὰς συντεταγμένας προβολὰς αὐτοῦ, ἡ ἀνωτέρω ἰσότης λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\alpha(Ax + By + \Delta) + \beta(Bx + \Gamma y + E) = 0 \qquad (2)$$

Ἄρα, ἂν $\lambda = \beta : \alpha$, ἡ εὐθεῖα $\quad Ax + By + \Delta + \lambda(Bx + \Gamma y + E) = 0 \quad (3)$

εἶνε ἡ διάμετρος τῆς καμπύλης (1) ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὰς χορδὰς M_1M_2 μὲ συντελεστὴν διευθύνσεως λ. Αὕτη διὰ $\beta = 0$ ἢ $\alpha = 0$ δίδει τὰς

$$Ax + By + \Delta = 0,\quad Bx + \Gamma y + E = 0 \qquad (4)$$

ἀντιστοιχούσας εἰς χορδὰς παραλλήλους πρὸς ἀνὰ ἕνα ἄξονα τῶν συντεταγμένων· ἐπειδὴ δ' ἡ εὐθεῖα (3) διέρχεται διὰ τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν (4), ἕπεται ὅτι, πᾶσα διάμετρος τῆς καμπύλης (1) διέρχεται διὰ τῆς τομῆς τῶν (4), αἵτινες τέμνονται ἢ εἶνε παράλληλοι ἢ συμπίπτουν, ἂν εἶνε $B^2 - A\Gamma \neq 0$ ἢ $\frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma} \neq \frac{\Delta}{E}$ ἢ $\frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma} = \frac{\Delta}{E}$

Ἑπομένως, ἂν ἡ (1) παριστάνῃ E_λ ἢ Y_π ἐν γένει, πᾶσαι αἱ διάμετροι αὐτῆς διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ἂν δὲ παριστάνῃ Π_α ἐν γένει εἶνε παράλληλοι ἢ συμπίπτουν. Εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν συμπίπτουν αἱ (4), θὰ συμπίπτουν καὶ πᾶσαι αἱ (3), ἐπειδὴ δ' ἔχομεν

$$A = \frac{B^2}{\Gamma},\ \Delta = \frac{EB}{\Gamma},$$ ἡ (1) τιθεμένη ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$(Bx+\Gamma y)^2+2E(Bx+\Gamma y)+\Gamma Z=0$$

παριστάνει δύο εὐθείας παραλλήλους μὲ ἐξισώσεις

$$Bx+\Gamma y=-E\pm\sqrt{E^2-\Gamma Z}$$

αἱ ὁποῖαι εἶνε πραγματικαὶ παράλληλοι καὶ διακεκριμέναι ἢ συμπίπτουσαι ἢ φανταστικαί, ἂν $E^2-\Gamma Z>0$ ἢ $=0$ ἢ <0.

Ἂν τὸν συντελεστὴν διευθύνσεως τῆς (3) παραστήσωμεν διὰ τοῦ μ, θὰ ἔχωμεν

$$\mu = -\frac{A+B\lambda}{B+\Gamma\lambda} \tag{5}$$

καὶ διὰ $\mu=\lambda$, ἤτοι ἂν ἡ διάμετρος τῆς καμπύλης (1) εἶνε παράλληλος πρὸς τὸ σύστημα τῶν παραλλήλων χορδῶν τῶν διχοτομουμένων ὑπ' αὐτῆς, ἔχομεν

$$\Gamma\lambda^2 + 2B\lambda + A = 0 \tag{6}$$

Ἐὰν εἶνε $B^2-A\Gamma>0$ ἢ <0 ἢ $=0$, ὅτε ἡ (1) παριστάνει Y_π ἢ E_λ ἢ Π_α ἐν γένει, ὑπάρχουν δύο πραγματικαὶ καὶ διάφοροι τιμαὶ τοῦ λ, διὰ τὰς ὁποίας ἀληθεύει ἡ ἐν λόγῳ ἰδιότης, ἢ δύο φανταστικαὶ συζυγεῖς ἢ μία μόνον.

Παρατηρητέον ὅτι ἡ διεύθυνσις τῶν εὐθειῶν, αἵτινες τέμνουν τὴν καμπύλην (1) εἰς τὸ ∞ εἶνε ἡ τῶν χορδῶν μὲ διαμέτρους παραλλήλους πρὸς ἑαυτάς.

Δύο διάμετροι καμπύλης β' βαθμοῦ λέγονται ***συζυγεῖς***, ἂν ἑκάστη εἶνε διάμετρος χορδῶν παραλλήλων τῆς ἄλλης, οἱ δὲ συντελεσταὶ διευθύνσεως αὐτῶν λ καὶ μ συνδέονται διὰ τῆς (5), ἥτις τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$B(\lambda+\mu)+\Gamma\lambda\mu+A=0 \tag{5'}$$

ἡ ὁποία εἶνε συμμετρικὴ ὡς πρὸς λ καὶ μ (δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἐναλλάξωμεν ταῦτα).

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν ἡ (1) παριστάνῃ E_λ ἢ Y_π ἐν γένει ($B^2-A\Gamma\neq 0$), εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ ἑνὸς τῶν λ, μ ἀντιστοιχεῖ ἀνὰ μία τοῦ ἄλλου, ἐνῷ ὅταν παριστάνῃ Π_α ἐν γένει ($B^2-A\Gamma=0$), ὅτε εἶνε $B:A=\Gamma:B$, εἰς πᾶσαν τιμὴν τοῦ ἑνὸς ἀντιστοιχεῖ μία τιμὴ τοῦ ἄλλου, ὡς προκύπτει ἐκ τῆς (5) ἢ (5'). Ἐπὶ πλέον ὅταν ἡ (1) παριστάνῃ E_λ ἢ Y_π, τὸ μ δύναται νὰ λάβῃ πᾶσαν τιμήν, ὁριζομένου καταλλήλως τοῦ λ.

Ἐπειδὴ διάμετρός τις καμπύλης β' βαθμοῦ, ἀντιστοιχοῦσα εἰς χορδὰς παραλλήλους πρός τινα ἐφαπτομένην αὐτῆς, διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς ταύτης, ἕπεται ὅτι, ἡ ἐφαπτομένη καμπύλης β' βαθμοῦ εἰς τὸ ἄκρον διαμέτρου της εἶνε παράλληλος πρὸς τὰς χορδὰς, τὰς ὁποίας διχοτομεῖ αὕτη.

Ἂν ζητοῦμεν συζυγεῖς διαμέτρους (E_λ ἢ Y_μ) καθέτους μεταξύ των, ὅτε θὰ ἔχωμεν καὶ $\lambda\mu+1=0$, τὰ λ,μ θὰ εἶνε ῥίζαι τῆς

$$B\omega^2 + (A-\Gamma)\,\omega - B = 0, \tag{7}$$

αἵτινες προφανῶς εἶνε πραγματικαί.

Ἂν ἡ (1) παριστάνῃ περιφέρειαν κύκλου, ὅτε εἶνε $B=0$ καὶ $A=\Gamma\neq 0$, ἡ (5') γίνεται $1+\lambda\mu=0$, καὶ ἐκφράζει ὅτι, ἀνὰ δύο συζυγεῖς διάμετροι περιφερείας κύκλου εἶνε κάθετοι μεταξύ των.

§ 46. Περὶ τοῦ κέντρου τῶν καμπύλων β' βαθμοῦ.

Λέγομεν ὅτι σημεῖόν τι Κ εἶνε κέντρον καμπύλης τινός, ἂν ἑνὸς σημείου κειμένου ἐπ' αὐτῆς καὶ τὸ συμμετρικὸν τούτου ὡς πρὸς τὸ Κ κεῖται ἐπὶ τῆς καμπύλης.

Ἵνα ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων εἶνε κέντρον τῆς καμπύλης β' βαθμοῦ μὲ ἐξίσωσιν

$$Ax^2+2Bxy+\Gamma y^2+2\Delta x+2Ey+Z=0, \tag{1}$$

πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε $\Delta=0$, $E=0$.

Διότι, αἱ τετμημέναι τῶν τομῶν τῆς καμπύλης (1) ὑπὸ τῆς εὐθείας $y=\lambda x$, θὰ εἶνε ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$(\Gamma\lambda^2 + 2B\lambda + A)\,x^2 + 2\,(\Delta + E\lambda)\,x + Z = 0,$$

ἵνα δ' αὗται εἶνε ἀντίθετοι, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ λ, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν $\Delta+E\lambda=0$, ἤτοι $\Delta=0$, $E=0$.

Κατὰ ταῦτα, ἂν Κ (α, β) εἶνε αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου τῆς καμπύλης (1) καὶ λάβωμεν ὡς νέους ἄξονας ἄλλους παραλλήλους πρὸς τοὺς ἀρχικοὺς μὲ ἀρχὴν τὸ Κ, ἡ (1) μετασχηματίζεται διὰ τῶν

$$x=x'+\alpha, \quad y=y'+\beta,$$

εἰς τὴν $\quad Ax'^2+2Bx'y'+2\Gamma y'^2+2\Delta' x+2E'y+Z'=0, \qquad (2)$

ὅπου ἐτέθη $\quad A\alpha+B\beta+\Delta=\Delta', \quad B\alpha+\Gamma\beta+E=E'$

καὶ $\quad A\,\alpha^2+2\,B\,\alpha\,\beta+\Gamma\,\beta^2+2\Delta\alpha+2E\beta+Z=Z'$

Ἐπομένως, τὸ κέντρον (α,β) τῆς καμπύλης β' βαθμοῦ (1) εἶνε τομὴ τῶν δύο διαμέτρων $\begin{array}{l} Ax + By + \Delta = 0 \\ Bx + \Gamma y + E = 0 \end{array}$ (3)

τῆς καμπύλης, ἄρα καὶ πασῶν τῶν διαμέτρων αὐτῆς.

Ἐὰν αἱ (3) τέμνωνται, ὅτε εἶνε $B^2 - A\Gamma \neq 0$, ἡ καμπύλη εἶνε E_λ ἢ Y_π καὶ ἔχομεν ἓν κέντρον αὐτῆς, συμπῖπτον μὲ τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέτρων της, ἔχει δὲ τοῦτο συντεταγμένας.

$$\alpha = \frac{\Gamma\Delta - BE}{B^2 - A\Gamma}, \quad \beta = \frac{AE - B\Delta}{B^2 - A\Gamma}.$$

Ἂν ἡ (1) παριστάνῃ Π_α, τὸ κέντρον αὐτῆς κεῖται εἰς τὸ ∞, ἂν εἶνε $\frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma} \neq \frac{\Delta}{E}$. ἂν δ' εἶνε $\frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma} = \frac{\Delta}{E}$, ὅτε ἡ (1) παριστάνει δύο εὐθείας παραλλήλους (§ 45, σελ. 98) καὶ πάντα τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας $Bx + \Gamma y + E = 0$, μὲ τὴν ὁποίαν συμπίπτουν πᾶσαι αἱ διάμετροι, εἶνε κέντρα αὐτῆς.

§ 47. Ἁπλοποίησις τῆς ἐξισώσεως β' βαθμοῦ.

α'. Περίπτωσις ἐλλείψεως καὶ ὑπερβολῆς.

Ἂν ἡ ἐξίσωσις $Ax^2 + 2Bxy + \Gamma y^2 + 2\Delta x + 2Ey + Z = 0$ (1) παριστάνῃ E_λ ἢ Y_π ἐν γένει (ὅτε $B^2 - A\Gamma \neq 0$), μετασχηματίζομεν αὐτὴν διὰ τῶν τύπων $x = x' + \alpha$, $y = y' + \beta$, ὅπου α, β παριστάνουν τὰς συντεταγμένας τοῦ κέντρου τῆς καμπύλης, καὶ εὑρίσκομεν τὴν

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + \Gamma y'^2 + Z' = 0, \qquad (2)$$

ἐπειδὴ $\quad A\alpha + B\beta + \Delta = 0, \quad B\alpha + \Gamma\beta + E = 0 \qquad (3)$

εἶνε δὲ $\quad Z' = A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + \Gamma\beta^2 + 2\Delta\alpha + 2E\beta + Z$

$$= (A\alpha + B\beta + \Delta)\alpha + (B\alpha + \Gamma\beta + E)\beta + \Delta\alpha + E\beta + Z,$$

ἢ ἕνεκα τῶν (3) $\quad Z' = \Delta\alpha + E\beta + Z. \qquad (4)$

Δι' ἀπαλοιφῆς τῶν α, β μεταξὺ τῶν (3) καὶ (4) εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν

$$\begin{vmatrix} A & B & \Delta \\ B & \Gamma & E \\ \Delta & E & Z - Z' \end{vmatrix} = 0, \text{ ἢ } \begin{vmatrix} A & B & \Delta \\ B & \Gamma & E \\ \Delta & E & Z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & B & 0 \\ B & \Gamma & 0 \\ \Delta & E & -Z' \end{vmatrix} = 0$$

καὶ $$Z' = \frac{1}{A\Gamma - B^2} \begin{vmatrix} A & B & \Delta \\ B & \Gamma & E \\ \Delta & E & Z \end{vmatrix} = \frac{D}{A\Gamma - B^2}. \qquad (5)$$

Ἡ ὁρίζουσα D καλεῖται συνήθως ***διακρίνουσα*** ὁρίζουσα τῆς (1).

καὶ ὅταν $D=0$, ἔχομεν $Z'=0$, ἡ δὲ (2) παριστάνει δύο εὐθείας, ἐπειδὴ εἶνε $Ax'^2+2Bx'y'+\Gamma y'^2=\Gamma(y'-\lambda_1 x')(y'-\lambda_2 x')$ (ἂν $\Gamma\neq 0$) ὅπου λ_1, λ_2 εἶνε αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\Gamma\lambda^2+2B\lambda+A=0$ ($\lambda=y':x'$). αἱ ὁποῖαι εἶνε πραγματικαὶ ἢ φανταστικαί, ἂν $A\Gamma-B^2<0$, ἢ >0.

Ἂν εἶνε $D\neq 0$ ὅτε $Z'\neq 0$, μετασχηματίζομεν τὴν (1) διὰ τῶν τύπων

$$x'=x_1\sigma\upsilon\nu\varphi-y_1\eta\mu\varphi,\quad y'=x_1\eta\mu\varphi+y_1\sigma\upsilon\nu\varphi \tag{6}$$

καὶ προσδιορίζομεν τὴν γωνίαν φ, καθ' ἣν στρέφομεν τὸ σύστημα τῶν ἀξόνων $x'Oy'$ περὶ τὴν ἀρχὴν αὐτοῦ, ὥστε ὁ συντελεστὴς τοῦ x_1y_1 εἰς τὴν προκύπτουσαν ἐξίσωσιν νὰ εἶνε ἴσος μὲ 0. Οὕτω ἡ (2) μετασχηματίζεται εἰς τὴν

$$A_1x_1^2+\Gamma_1y_1^2+Z'=0 \tag{7}$$

ἐνῷ ἐτέθη

$$\left.\begin{aligned} A_1&=A\,\sigma\upsilon\nu^2\varphi+\Gamma\,\eta\mu^2\varphi+2B\,\eta\mu\,\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi\\ \Gamma_1&=A\,\eta\mu^2\varphi+\Gamma\,\sigma\upsilon\nu^2\varphi-2B\,\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$(\Gamma-A)\eta\mu\varphi\,\sigma\upsilon\nu\varphi+B\,(\sigma\upsilon\nu^2\varphi-\eta\mu^2\varphi)=0, \tag{9}$$

ἢ

$$(\Gamma-A)\eta\mu2\varphi+2B\sigma\upsilon\nu2\varphi=0, \tag{10}$$

ἐξ ἧς ἔχομεν

$$\varepsilon\varphi2\varphi=\frac{2B}{A-\Gamma}. \tag{11}$$

Ἐκ ταύτης ὁρίζεται ἡ φ, ἐκτὸς ἐὰν εἶνε $B=0$ καὶ $A=\Gamma$, ὅτε ἡ (1) παριστάνει περιφέρειαν κύκλου, ἂν δ' εἶνε $A=\Gamma$ καὶ $B\neq 0$, ἔχομεν ἐκ τῆς (10) $\sigma\upsilon\nu2\varphi=0$.

Ἐκ τῆς (11) εὑρίσκομεν ($A\neq\Gamma$) ἐν γένει ἔστω $2\varphi=\omega+k\pi$, (12) ὅπου $0<\omega<\pi$, (k ἀκέραιος), θὰ λαμβάνωμεν δ' ὡς τιμὴν τοῦ φ τὴν $\frac{\omega}{2}$ ἐνῷ εἶνε $0<\frac{\omega}{2}<\frac{\pi}{2}$.

Παρατηρητέον ὅτι ἡ (9) τιθεμένη ὑπὸ τὴν μορφὴν $B\varepsilon\varphi^2\varphi+(A-\Gamma)\varepsilon\varphi\varphi-B=0$ εἶνε ἡ ἐξίσωσις (7) σελ. 99, διὰ τῆς ὁποίας προσδιορίζονται οἱ συντελεσταὶ διευθύνσεως τῶν συζυγῶν καθέτων διαμέτρων τῆς καμπύλης, ἤτοι οἱ ἄξονες αὐτῆς, πρὸς τοὺς ὁποίους ἀναφέρεται αὕτη μετὰ τὸν τελευταῖον μετασχηματισμόν. Διὰ προσθέσεως μὲν τῶν (8) κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $A_1+\Gamma_1=A+\Gamma$, (13) δι' ἀφαιρέσεως δὲ $A_1-\Gamma_1=(A-\Gamma)\sigma\upsilon\nu2\varphi+2B\eta\mu2\varphi$. Ἐπειδὴ ἐκ τῆς (11) εὑρίσκομεν

$$\eta\mu2\varphi=\frac{2B}{\pm\sqrt{4B^2+(A-\Gamma)^2}},\quad \sigma\upsilon\nu2\varphi=\frac{A-\Gamma}{\pm\sqrt{4B^2+(A-\Gamma)^2}},$$

ἕπεται

$$A_1-\Gamma_1=\pm\sqrt{4B^2+(A-\Gamma)^2}=\Lambda, \tag{14}$$

λαμβάνομεν δ' ἐκ τῶν δύο σημείων τῶν πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ τὸ σημεῖον τοῦ B, ἐπειδὴ εἶνε $2\varphi<\pi$, ἄρα $\eta\mu2\varphi>0$.

Οὕτω εὑρίσκομεν $A_1 = \frac{1}{2}(A + \Gamma + \Delta)$, $\Gamma_1 = \frac{1}{2}(A + \Gamma - \Delta)$.

Ἐπειδή, ἂν τὰς (13) καὶ (14) ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν $A_1\Gamma_1 = A\Gamma - B^2$, (15) ἕπεται ὅτι τὰ A_1, Γ_1 εἶνε ρίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$z^2 - (A + \Gamma)z + A\Gamma - B^2 = 0.$$

Θεωροῦμεν τώρα τὴν ἐξίσωσιν (7) καὶ ἔστω πρῶτον $A\Gamma - B^2 > 0$ ἢ $A_1\Gamma_1 > 0$. Ἕνεκα τῆς (15) θὰ εἶνε καὶ $A\Gamma > 0$, διότι ἄλλως θὰ ἦτο $A\Gamma - B^2 < 0$. Ὑποθέτομεν τὰ $A, \Gamma > 0$ (ἀλλάσσοντες ἐν ἀνάγκῃ τὰ σημεῖα τῶν ὅρων τῆς (1)), ὅτε εἶνε καὶ τὰ $A_1, \Gamma_1 > 0$, ἕνεκα τῆς (13). Οὕτω, ἐπειδὴ οἱ δύο πρῶτοι ὅροι τῆς (7) εἶνε θετικοί, ἵνα ἐπιδέχεται αὕτη λύσεις πραγματικάς, πρέπει νὰ εἶνε $Z' < 0$ ἢ $D < 0$.

Ἐὰν συμβαίνῃ τοῦτο, ἡ (7) τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\beta_1^2 x_1^2 + \alpha_1^2 y_1^2 = \alpha_1^2 \beta_1^2, \tag{16}$$

ὅπου $\alpha_1^2 = -\frac{Z'}{A_1} = \frac{-D}{A_1(A\Gamma - B^2)}$, $\beta_1^2 = -\frac{Z'}{\Gamma_1} = \frac{-D}{\Gamma_1(A\Gamma - B^2)}$

παριστάνει δ' ἔλλειψιν μὲ μήκη ἀξόνων αὐτῆς $2\alpha_1$ καὶ $2\beta_1$ καὶ κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων.

Ἐὰν εἶνε $D = 0$, ὅτε $Z' = 0$ (σελ. 101), ἡ (16) παριστάνει τὸ σημεῖον $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, ἢ E_λ περιορισθεῖσαν εἰς τὸ κέντρον αὐτῆς ἢ δύο φανταστικὰς εὐθείας, διερχομένας διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν νέων ἀξόνων, διότι ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις δίδει τὰς ἑξῆς $\sqrt{A_1}\,x_1 \pm i\sqrt{\Gamma_1}\,y_1 = 0$.

Ἂν εἶνε $D > 0$, ὅτε καὶ $Z' > 0$, ἡ (16) ἐπιδέχεται λύσεις μόνον φανταστικὰς καὶ λέγομεν ὅτι παριστάνει E_λ φανταστικήν.

Ἔστω τώρα ὅτι εἶνε $A\Gamma - B^2 < 0$. Ἂν μὲν εἶνε $D = 0$, ἡ (16) γίνεται $A_1 x_1^2 + \Gamma_1 y_1^2 = 0$, καὶ ἐπειδὴ εἶνε $A_1\Gamma_1 < 0$ ἕνεκα τῆς (15) ἂν ὑποτεθῇ $A_1 > 0$, γράφεται $(\sqrt{A_1}\,x_1 - \sqrt{-\Gamma_1}\,y_1)(\sqrt{A_1}\,x_1 + \sqrt{-\Gamma_1}\,y_1) = 0$ παριστάνει δὲ δύο εὐθείας μὲ ἐξισώσεις $\sqrt{A_1}\,x_1 \pm \sqrt{-\Gamma_1}\,y_1 = 0$

Ἂν δ' εἶνε $Z' \neq 0$, ὅτε καὶ $D \neq 0$, ἡ (7) τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\beta_1^2 x_1^2 - \alpha_1^2 y_1^2 = \pm \alpha_1^2 \beta_1^2 \tag{17}$$

ὅπου $\alpha_1^2 = \mp \frac{D}{A_1(A\Gamma - B^2)}$, $\beta_1^2 = \pm \frac{D}{\Gamma_1(A\Gamma - B^2)}$

καὶ παριστάνει συζυγεῖς Y_π μὲ μήκη ἀξόνων $2\alpha_1$, $2\beta_1$, κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων καὶ ἀσυμπτώτους κοινάς.

β'. Περίπτωσις παραβολῆς.

Ἔστω ὅτι ἡ ἐξίσωσις (1) παριστάνει Π_α ἐν γένει (ὅτε $\mathrm{A\Gamma - B^2 = 0}$ (1')) Ἀντικαθιστῶμεν εἰς αὐτὴν τὸ Α διὰ τοῦ $\frac{\mathrm{B^2}}{\Gamma}$ (ἕνεκα τῆς (1')), ἂν $\Gamma \neq 0$, καὶ θέτομεν τὸ ἐξαγόμενον ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\Gamma\left(y + \frac{\mathrm{B}}{\Gamma}x\right)^2 + 2\,\Delta x + 2\,\mathrm{E}\,y + \mathrm{Z} = 0.$$

Ταύτην μετασχηματίζομεν διὰ τῶν τύπων (6) καὶ προσδιορίζομεν τὴν γωνίαν καθ' ἣν στρέφονται οἱ ἄξονες, ὥστε εἰς τὴν προκύπτουσαν ἐξίσωσιν

$$\Gamma\left[\left(\sigma\upsilon\nu\,\varphi - \frac{\mathrm{B}}{\Gamma}\,\eta\mu\,\varphi\right)y_1 + \left(\eta\mu\,\varphi + \frac{\mathrm{B}}{\Gamma}\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi\right)x_1\right]^2$$
$$+ 2\,(\Delta\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi + \mathrm{E}\,\eta\mu\,\varphi)\,x_1 + 2\,(\mathrm{E}\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi - \Delta\,\eta\mu\,\varphi)y_1 + \mathrm{Z} = 0 \qquad (2')$$

ὁ εἷς τῶν συντελεστῶν τοῦ x_1 ἢ y_1 τῶν ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν νὰ ἰσοῦται μὲ 0. Οὕτω ἂν θέσωμεν

$$\eta\mu\,\varphi + \frac{\mathrm{B}}{\Gamma}\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi = 0, \qquad (3')$$

ἔχομεν

$$\varepsilon\varphi\,\varphi = -\frac{\mathrm{B}}{\Gamma},\quad \eta\mu\varphi = \frac{-\mathrm{B}}{\pm\sqrt{\mathrm{B^2+\Gamma^2}}},\quad \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\Gamma}{\pm\sqrt{\mathrm{B^2+\Gamma^2}}} \qquad (4')$$

καὶ ἡ (4) λαμβάνει τὴν μορφὴν $\Gamma_1 y_1^2 + 2\,\Delta_1 x_1 + 2\,\mathrm{E}_1 y_1 + \mathrm{Z} = 0$, (5') ὅπου ἕνεκα τῆς (3') εἶνε

$$\Gamma_1 = \Gamma\left(\sigma\upsilon\nu\,\varphi - \frac{\mathrm{B}}{\Gamma}\,\eta\mu\,\varphi\right)^2 = \Gamma\left(\sigma\upsilon\nu\,\varphi + \varepsilon\varphi\,\varphi\,\eta\mu\,\varphi\right)^2 = \frac{\Gamma}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}$$

ἢ $$\Gamma_1 = \frac{\mathrm{B^2}+\Gamma^2}{\Gamma} = \mathrm{A} + \Gamma, \qquad (\text{ἐπειδὴ } \mathrm{B^2 = A\Gamma}).$$

Τὰς τιμὰς τῶν Δ_1 καὶ E_1 ἐκφράζομεν διὰ τῶν συντελεστῶν τῆς (1), ἀντικαθιστῶντες τὰ ημφ καὶ συνφ διὰ τῶν ἴσων αὐτῶν, ὅτε ἔχομεν

$$\Delta_1 = \frac{\Gamma\,\Delta - \mathrm{B\,E}}{\pm\sqrt{\Gamma\,(\mathrm{A}+\Gamma)}}, \qquad \mathrm{E}_1 = \frac{\Gamma\,\mathrm{E} + \mathrm{B}\,\Delta}{\pm\sqrt{\Gamma\,(\mathrm{A}+\Gamma)}}.$$

Ἐκ τῶν τιμῶν τοῦ φ, αἵτινες εὑρίσκονται ἐκ τῆς (3'), θεωροῦμεν τὴν θετικὴν ἔστω $\varphi_1 < \pi$, ὅτε θὰ εἶνε $\eta\mu\varphi > 0$ καὶ διὰ τοῦτο ἐκ τῶν δύο σημείων τῶν πρὸ τῶν ἀνωτέρω ριζικῶν λαμβάνομεν τὸ ἀντίθετον τοῦ Β. Ἐὰν μὲν εἶνε $\Delta_1 = 0$, ἡ (5') παριστάνει ἐν γένει δύο εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x, ἂν δὲ $\Delta_1 \neq 0$, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς καμπύλης ὡς πρὸς ἄξονας παραλλήλους πρὸς τοὺς προηγουμένους, θέτοντες $x_1 = x' + \alpha$, $y_1 = y' + \beta$. Οὕτω ἡ (5') γίνεται

$$\Gamma_1 y'^2 + 2\,\Delta_1 x' + 2\,(\Gamma_1\beta + \mathrm{E}_1)\,y' + (\Gamma_1\beta^2 + 2\,\Delta_1\alpha + 2\,\mathrm{E}_1\beta + \mathrm{Z}) = 0.$$

Προσδιορίζομεν τώρα τὰ α, β (συντεταγμένας τῆς νέας ἀρχῆς), ὥστε νὰ μηδενίζεται ὁ συντελεστὴς τοῦ y' καὶ ὁ σταθερὸς ὅρος τῆς τελευταίας ἐξισώσεως, ὅτε θὰ ἔχωμεν $\Gamma_1\beta + \mathrm{E}_1 = 0$, $2\Delta_1\alpha + \mathrm{E}_1\beta + \mathrm{Z} = 0$, καὶ ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης γίνεται $\Gamma_1 y'^2 + 2\Delta_1 x' = 0$ ἢ $y'^2 = 2px'$, (6′)

ὅπου ἐτέθη $p = -\frac{\Delta_1}{\Gamma_1} = \pm \frac{B\,E - \Gamma\,\Delta}{(A+\Gamma)\sqrt{\Gamma(A+\Gamma)}}$.

Ἂν εἰς τὴν (1) ἔχωμεν $\Gamma=0$, ὅτε καὶ $B=0$ μετασχηματίζομεν τὴν $Ax^2+2\Delta x+2Ey+B=0$ διὰ τῶν $x=x'+\alpha$, $y'+\beta$, ὥστε νὰ μηδενίζωνται ὁ συντελεστὴς τοῦ x' καὶ ὁ σταθερὸς ὅρος τῆς προκυπτούσης ἐξισώσεως, ὅτε εὑρίσκομεν ἐν γένει $x^2=2py$.

Ἐφαρμογαί. 1. Ἔστω ὅτι ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ ἡ καμπύλη, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις $x^2-xy+2y^2+5x-8y=0$.

Ἔχομεν $A=1$, $B=-\frac{1}{2}$, $\Gamma=2$, $\Delta=\frac{5}{2}$, $E=-4$, $Z=0$.

Ἑπομένως εἶνε $A\Gamma - B^2 = 7/4$

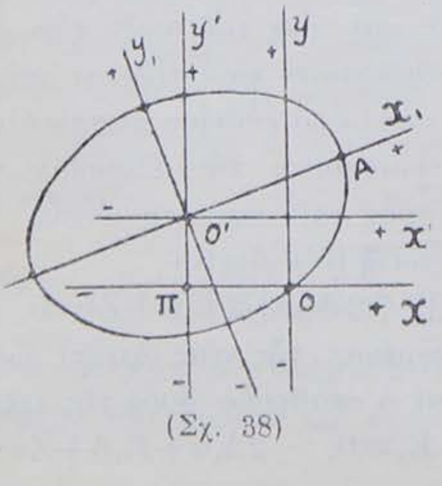
$$D = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & -4 \\ \frac{5}{2} & -4 & 0 \end{vmatrix} = -18{,}5$$

καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις παριστάνει ἔλλειψιν. Ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως $z^2-3z+\frac{7}{4}=0$, ἔχομεν $A_1=\frac{3-\sqrt{2}}{2}$, $\Gamma_1=\frac{3+\sqrt{2}}{2}$, καὶ ἡ ἐξίσωσις τῆς E_λ ἀναφερομένης εἰς τοὺς ἄξονας αὐτῆς εἶνε

$$(3-\sqrt{2})x_1^2+(3+\sqrt{2})y_1^2=\frac{148}{8.7}.\,8=\frac{148}{7}$$

μὲ μήκη τῶν ἡμιαξόνων αὐτῆς $\alpha=\sqrt{\frac{148}{7(3-\sqrt{2})}}=\frac{2}{7}\sqrt{37(3+\sqrt{2})}$

$$\beta=\sqrt{\frac{148}{7(3+\sqrt{2})}}=\frac{2}{7}\sqrt{37(3-\sqrt{2})}.$$



(Σχ. 38)

Τὸ μὲν κέντρον τῆς καμπύλης, ὡς τομὴ τῶν εὐθειῶν

$$2x-y+5=0,\quad -x+4y-8=0$$

ἔχει συντεταγμένας $\left(-\frac{12}{7}, \frac{11}{7}\right)$, ὁ δ' ἄξων αὐτῆς σχηματίζει μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν x' γωνίαν φ, διὰ τὴν ὁποίαν εἶνε $\varepsilon\varphi 2\varphi=\frac{-1}{-1}=1$, ἄρα $\varphi=22^\circ 30'$.

2. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^2+xy-3y^2-2x-y-1=0$.

Ἔχομεν $A=1,\ B=\frac{1}{2},\ \Gamma=-3,\ \Delta=-1,\ E=-\frac{1}{2},\ Z=-1$.

$A\Gamma-B^2=-3-\frac{1}{4}=-3{,}25,\ D=\frac{13}{2},\ Z'=-2$ καὶ ἡ ἐξίσωσις παριστάνει Y_π.

Ἐπειδὴ εἶνε $A_1=\frac{-2+\sqrt{17}}{2},\ \Gamma_1=\frac{-2-\sqrt{17}}{2}$,

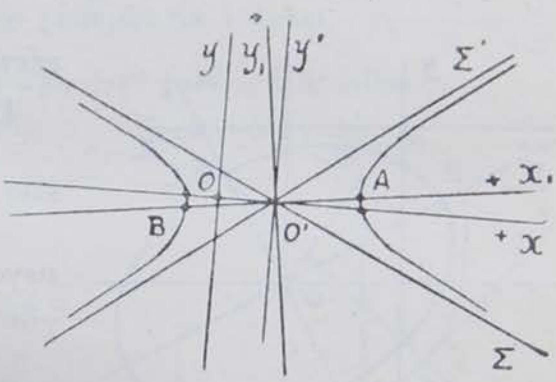
ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας αὐτῆς εἶνε

$(\sqrt{17}-2)\,x_1^2-(\sqrt{17}+2)\,y_1^2=4$,

τὰ δὲ μήκη τῶν ἡμιαξόνων αὐτῆς

εἶνε $\alpha=2:\sqrt{\sqrt{17}-2}$,

$\beta=2:\sqrt{\sqrt{17}+2}$.



Σχ. 39.

Τὸ μὲν κέντρον τῆς Y_π, ὡς τομὴ τῶν εὐθειῶν

$2x+y-2=0,\quad x-6y-1=0$, εἶνε τὸ (1, 0),

ἡ δὲ γωνία τοῦ πρωτεύοντος ἄξονος αὐτῆς μὲ τὸν ἄξονα τοῦ x εὑρίσκεται ἐκ τῆς $\varepsilon\varphi 2\varphi=\frac{1}{4}$ καὶ εἶνε $\varphi=7^\circ\ 1'\ 5''$.

3. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^2+2xy-y^2-4x+8y-3=0$.

Ἔχομεν $A\Gamma-B^2=-2,\quad D=-22,\quad Z'=11$.

Ἄρα ἡ ἐξίσωσις παριστάνει Y_π, ἥτις εἶνε ἰσοσκελής, ἐπειδὴ εἶνε $A_1+\Gamma_1=0$, $A_1=-\Gamma_1$ καὶ ἔχομεν $A_1=\sqrt{2}$, $\Gamma_1=-\sqrt{2}$ καὶ ἡ ἐξίσωσις τῆς Y_π ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας αὐτῆς εἶνε $x_1^2-y_1^2=-\frac{11}{\sqrt{2}}$.

Τὰ μὲν μήκη τῶν ἡμιαξόνων αὐτῆς εἶνε $\alpha=\beta=\frac{1}{2}\sqrt{22.\sqrt{2}}$,

ἡ δὲ γωνία τοῦ πρωτεύοντος ἄξονος μὲ τὸν τῶν x εὑρίσκεται ἐκ τῆς $\varepsilon\varphi 2\varphi=\frac{2B}{A-\Gamma}=1$, ἐξ ἧς ἔχομεν $\varphi=\frac{\pi}{8}=22^\circ\ 30'$.

4. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $2x^2+4xy+5y^2+x+10y+1=0$.

Εἶνε $A=2$, $B=2$, $\Gamma=5$, $\Delta=\frac{1}{2}$, $E=5$, $Z=1$,

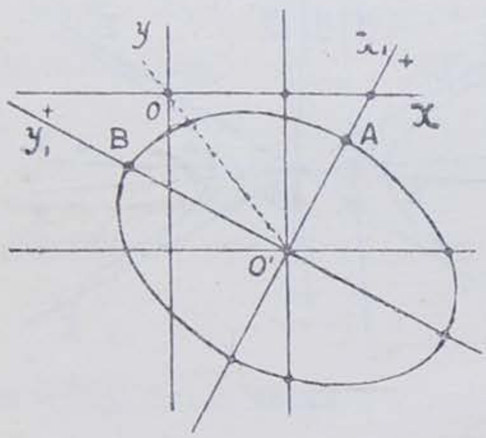
$A\Gamma-B^2=10-4=6$, $D=-\frac{141}{4}$ καὶ ἡ ἐξίσωσις παριστάνει E_λ. Ἐκ τῆς λύσεως τῆς $z^2-7z+6=0$ ἔχομεν $A_1=6$, $\Gamma_1=1$, ἡ δ' ἐξίσωσις τῆς καμπύλης ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας αὐτῆς εἶνε $6x_1^2+y_1^2=\frac{47}{8}$. Τὰ μὲν μήκη τῶν ἡμιαξόνων αὐτῆς εἶνε $\alpha=\sqrt{\frac{47}{48}}$, $\beta=\sqrt{\frac{47}{8}}$, τὸ δὲ κέντρον ὡς τομὴ τῶν εὐθειῶν

$$4x+4y+1=0,\quad 2x+5y+5=0,$$

εἶνε τὸ $\left(\frac{5}{4}, -\frac{3}{2}\right)$. Ἡ γωνία τοῦ μεγάλου ἄξονος τῆς E_λ μὲ τὸν ἀρχικὸν ἄξονα τῶν x ὁρίζεται ἐκ τῆς

$$\varepsilon\varphi 2\varphi=-\frac{4}{3},\ \text{ἢ ἐκ τῆς}\ \varepsilon\varphi(\pi-2\varphi)=\frac{4}{3}$$

καὶ ἔχομεν $\varphi=63^0\,26'\,6''$.



Σχ. 40.

5. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$5x^2-2xy+y^2+4x+1=0,$$

Ἔχομεν $A=5$, $B=-1$, $\Gamma=1$, $\Delta=2$, $E=0$, $Z=1$.
$A\Gamma-B^2=5-1=4$, $D=0$, ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις παριστάνει τὴν τομὴν τῶν εὐθειῶν $5x-y+2=0$, $-x+y=0$,

ἤτοι τὸ σημεῖον $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

6. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $2x^2-5xy+5y-1=0$.

Εἶνε $A=2$, $B=-\frac{5}{2}$, $\Gamma=0$, $\Delta=0$, $E=\frac{5}{2}$, $Z=-1$,

$A\Gamma-B^2=-\frac{25}{4}$, $D=-\frac{25}{4}$, $Z'=1$. Ἄρα ἡ ἐξίσωσις παριστάνει Y_π μὲ κέντρον τὴν τομὴν τῶν εὐθειῶν $4x-5y=0$, $-x+1=0$, ἤτοι τὸ $\left(1, \frac{4}{5}\right)$. Ἐπειδὴ εἶνε $A_1+\Gamma_1=2$, $A_1-\Gamma_1=-\sqrt{29}$.

ἔχομεν
$$A_1=\frac{2-\sqrt{29}}{2},\qquad \Gamma_1=\frac{2+\sqrt{29}}{2},$$

ἡ δὲ γωνία τοῦ πρωτεύοντος ἄξονος τῆς Y_π μὲ τὸν ἄξονα τῶν x εὑρίσκεται ἐκ τῆς $\varepsilon\varphi\, 2\varphi = -\frac{5}{2}$. Ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας αὐτῆς εἶνε $(2-\sqrt{29})x_1^2 + (2+\sqrt{29})y_1^2 + 2 = 0$.

7. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $3x^2 - 6xy + 5x - 4y + 2 = 0$.

Ἔχομεν $\mathrm{A\Gamma} - \mathrm{B}^2 = -9$, $D = 0$, ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις παριστάνει δύο εὐθείας. Πράγματι, ἂν γράψωμεν αὐτὴν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\left(6x+4\right)\left(y - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0,$$

ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις τῶν ἐν λόγῳ εὐθειῶν $6x + 4 = 0$, $y - \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$.

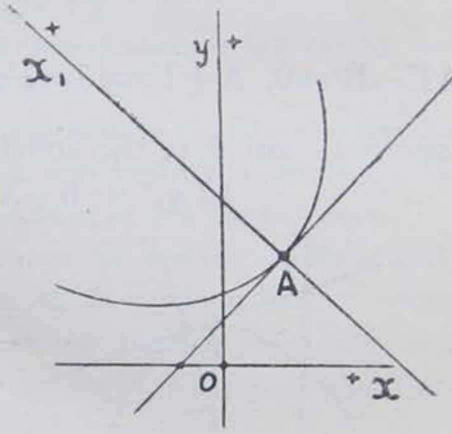
8. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^2 + 2xy + y^2 + 4x - 10y + 5 = 0$.

Ἔχομεν $\mathrm{A}=1$, $\mathrm{B}=1$, $\Gamma=1$,
$\Delta=2$, $\mathrm{E}=-5$, $\mathrm{Z}=5$,
$\mathrm{A\Gamma} - \mathrm{B}^2 = 1 - 1 = 0$,
ἄρα ἡ ἐξίσωσις παραστάνει Π_α.
Γράφομεν αὐτὴν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$(x+y)^2 + 4x - 10y + 5 = 0$$

καὶ στρέφομεν τὸ σύστημα τῶν ἀξόνων κατὰ γωνίαν φ, ὥστε νὰ εἶνε

$$\varepsilon\varphi\, \varphi = -\frac{\mathrm{B}}{\Gamma} = -1, \text{ ἐξ ἧς } \varphi = \frac{3\pi}{4},$$



Σχ. 41.

ὅτε θὰ ἔχωμεν ($\mathrm{B} > 0$)

$$\Gamma_1 = \mathrm{A} + \Gamma = 2,\quad \Delta_1 = \frac{\Gamma\Delta - \mathrm{BE}}{\sqrt{\Gamma(\mathrm{A}+\Gamma)}} = \frac{7\sqrt{2}}{-2},$$

$$\mathrm{E}_1 = \frac{\Gamma\mathrm{E} + \mathrm{B}\Delta}{\sqrt{\Gamma(\mathrm{A}+\Gamma)}} = \frac{-3}{-\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Οὕτω ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης ὡς πρὸς τοὺς νέους ἄξονας εἶνε

$2y_1^2 - 2\frac{7\sqrt{2}}{2}x_1 + 2\frac{3\sqrt{2}}{2}y_1 + 5 = 0$, καὶ ἡ κορυφὴ αὐτῆς A (σχ.41) ὡς τομὴ τῆς καμπύλης μετὰ τῆς εὐθείας, ἥτις ἔχει ἐξίσωσιν $2y_1 + \frac{3\sqrt{2}}{2} = 0$, ἔχει συντεταγμένας $\left(11\frac{\sqrt{2}}{4.7.2}, -\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$

Ἡ δ' ἐξίσωσις τῆς Π_α ὡς πρὸς τὸν ἄξονα της καὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῆς εἶνε $y'^2 = \frac{7\sqrt{2}}{2}x'$.

9. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^2 - 6xy + 9y^2 + 3x - 9y + 2{,}25 = 0$.

Εἶνε $A=1$, $B=-3$, $\Gamma=9$, $\Delta=\frac{3}{2}$, $E=-\frac{9}{2}$, $Z=2{,}25$,

$A\Gamma-B^2=9-9=0$, $\Gamma_1=A+\Gamma=10$, $\Delta_1=0$, $E_1=-\frac{3\sqrt{10}}{2}$,

$\varepsilon\varphi\varphi=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ καὶ ἀντὶ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἔχομεν τὴν

$10y_1{}^2-3\sqrt{10}\,y_1+2{,}25=0$ ἢ τὴν $\left(\sqrt{10}\,y_1-\frac{3}{2}\right)^2=0$,

ἡ ὁποία παριστάνει δύο εὐθείας συμπιπτούσας.

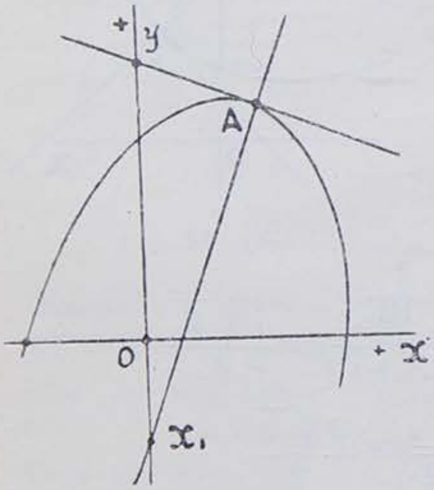
10. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $16x^2-8xy+y^2+2x+25y-15=0$.

Ἔχομεν $A=16$, $B=-4$, $\Gamma=1$, $\Delta=1$, $E=\frac{25}{2}$, $Z=-15$,

$A\Gamma-B^2=0$, $A+\Gamma=17=\Gamma_1$, $\Delta_1=3\sqrt{17}$, $E_1=\frac{\sqrt{17}}{2}$,

$\varepsilon\varphi\varphi=4$ καὶ ἀντὶ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἔχομεν τὴν

$$17\,y_1{}^2+6\sqrt{17}\,x_1+\sqrt{17}\,y_1-15=0.$$



Σχ. 42.

Αἱ συντεταγμέναι τῆς κορυφῆς τῆς Π_4 εὑρίσκονται ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης καὶ τῆς

$$17\,y_1+\frac{\sqrt{17}}{2}=0.$$

καὶ εἶνε $\left(\frac{61.\sqrt{17}}{408},-\frac{\sqrt{17}}{2.17}\right)$

ἡ δ' ἐξίσωσις αὐτῆς ὡς πρὸς τὸν ἄξονα της καὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῆς εἶνε

$$17\,y'^2=-6.\sqrt{17}\,x.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Εὕρετε τί παριστάνει ἑκάστη τῶν κάτωθι ἐξισώσεων, ἀναφερομένων ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους. Φέρατε ἑκάστην αὐτῶν εἰς τὴν ἁπλουστέραν αὐτῆς μορφήν. Εὕρετε τὸ κέντρον, τὴν ἐξίσωσιν τῶν συζυγῶν διαμέτρων, τὰ μήκη τῶν ἀξόνων κλπ. ἑκάστης τῶν καμπύλων, τὰς ὁποίας παριστάνουν αἱ ἐξισώσεις.

461. α') $x^2+xy-3y^2-2x-y=1$. β') $2x^2-2xy+y^2+2x+1=0$.

462. α') $2x^2+4xy-5y^2+x+10y=-1$. β') $y^2-x^2+xy-2x+y-1=0$.

463. α') $x^2-2xy+y^2+x-y+1=0$. β') $x^2-xy+3y^2+5x-8y=0$.

464. α') $x^2+3xy-y^2-4x+8y=3$. β') $4x^2+4xy+y^2-5x-2y=10$.

465. α') $9x^2+24xy+16y^2+22x+46y+9=0$. β') $x^2+y^2-xy+y=0$.

466. α') $x^2+2xy-2y^2+8x+4y=8$. β') $3x^2-0{,}75y^2+2x^2-x-y=0$.

467. α') $\beta^2x^2-2\alpha\beta xy+\alpha^2y^2-2\alpha\beta^2x-2\alpha^2\beta y+\alpha^2\beta^2=0$.

468. α') $4x^2+4xy+y^2-5x-2y=10$. β') $3x^2-5y^2+2x+y=0$.

469. α') $16x^2+40xy+25y^2+20x+25y+220=0$.

570. α') $x^2+2xy+y^2-4x-16y+5=0$. β') $-x^2+y^2-xy+x-y=0$.

471. α') $16x^2-8xy+y^2+2x+25y=15$. β') $3x^2-7xy+5x-4y+2=0$.

472. Δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης εὐθείας εἰς τὸ σημεῖον $M_1(x_1,y_1)$ τῆς καμπύλης $Ax^2+2Bxy+\Gamma y^2+2\Delta x+2Ey+Z=0$ εἶνε $(x-x_1)(Ax_1+By_1+\Delta)+(y-y_1)(Bx_1+\Gamma y_1+E)=0$.

473. Εὕρετε τὰς ἐξισώσεις τῶν ἐφαπτομένων τῶν γραμμῶν, τὰς ὁποίας παριστάνουν αἱ ἐξισώσεις τῶν ἀνωτέρω ἀσκήσεων μὲ ἀριθμητικοὺς συντελεστάς.

474. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις Π_α, ἥτις ἐφάπτεται περιφερείας κύκλου $(0,0,\alpha)$ κατὰ τὰς τομὰς ταύτης μὲ τὸν ἄξονα τῶν $+x$ καὶ $+y$.

475. Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς περικλειομένης ὑπὸ τῆς Ελ.

$$A\,x^2+2\,B\,x\,y+\Gamma\,y^2=1.$$

476. Δείξατε ὅτι, ἂν ὀρθογώνιον εἶνε περιγεγραμμένον εἰς Ελ, τὸ παραλληλόγραμμον τὸ ἔχον κορυφὰς τὰ σημεῖα τῆς ἁφῆς ἔχει περίμετρον σταθεράν, δύο δὲ διαδοχικαὶ πλευραὶ αὐτοῦ σχηματίζουν ἴσας γωνίας μὲ τὴν ἐφαπτομένην.

477. Ἀναχωροῦντες ἀπὸ σημείου Ελ λαμβάνομεν ἐπὶ ἑκάστης καθέτου αὐτῆς μῆκος ἴσον μὲ $k^2:\mu$, ὅπου τὸ k εἶνε σταθερόν, τὸ δὲ μ παριστάνει τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος, τὸ ὁποῖον ἄγεται ἐκ τοῦ κέντρου μέχρι τῆς ἀντιστοίχου ἐφαπτομένης τῆς ἐλλείψεως κάθετον ἐπ' αὐτήν. Εὕρετε τὸν τόπον τῶν ἄκρων τῶν τμημάτων τούτων.

478. Ἐὰν τρίγωνον εἶνε ἐγγεγραμμένον εἰς Ελ μὲ μήκη ἡμιαξόνων α, β, ρ δὲ παριστάνῃ τὴν ἀκτῖνα τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας καὶ δ_1, δ_2, δ_3 τὰ μήκη τῶν ἡμιχορδῶν τῶν παραλλήλων πρὸς τὰς πλευρὰς αὐτοῦ, δείξατε ὅτι εἶνε

$$\rho=\delta_1\,\delta_2\,\delta_3:\alpha\,\beta.$$

479. Δοθείσης Ελ καὶ τῆς περιγεγραμμένης εἰς αὐτὴν περιφερείας κύκλου, φέρομεν τὰς καθέτους ἐπὶ τὴν Ελ καὶ τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα τὰ κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, καθέτου ἐπὶ τὸν μεγάλον ἄξονα τῆς Ελ. Εὕρετε τὸν τόπον τῆς τομῆς τῶν καθέτων τούτων.

480. Εὕρετε τὸν τόπον τῶν κορυφῶν παραλληλογράμμων, ἅτινα κατασκευάζονται ἐπὶ συζυγῶν διαμέτρων Ελ, περιγεγραμμένων εἰς αὐτήν.

481. Εὕρετε τὸν τόπον τῶν μέσων χορδῶν Ελ διερχομένων διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

482. Δείξατε ὅτι ἐκ πάντων τῶν παραλληλογράμμων τῶν περιγεγραμμένων εἰς Ελ, τὰ κατασκευαζόμενα ἐπὶ δύο συζυγῶν διαμέτρων αὐτῆς ἔχουν ἐλάχιστον ἐμβαδόν.

483. Ἐκ πάντων τῶν παραλληλογράμμων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς Ελ τὰ ἔχοντα διαγωνίους συζυγεῖς διαμέτρους αὐτῆς ἔχουν μέγιστον ἐμβαδόν.

484. Δείξατε ὅτι ἐκ πάντων τῶν συστημάτων τῶν συζυγῶν διαμέτρων Ελ οἱ

ἄξονες αὐτῆς ἔχουν ἄθροισμα ἐλάχιστον, αἱ δὲ ἴσαι συζυγεῖς διάμετροι αὐτῆς μέγιστον ἄθροισμα.

485. Δείξατε ὅτι α') ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο συζυγῶν διαμέτρων Υπ εἶνε σταθερὰ καὶ ἴση μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν ἀξόνων αὐτῆς· β')τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον κατασκευάζεται ἐπὶ δύο συζυγῶν διαμέτρων Υπ, εἶνε σταθερὸν καὶ ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖον κατασκευάζεται ἐπὶ τῶν ἀξόνων αὐτῆς.

486. Δείξατε ὅτι τὸ γινόμενον τῶν τμημάτων τεμνούσης Υπ, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ ἑνὸς σημείου τῆς καμπύλης καὶ τῶν ἀσυμπτώτων αὐτῆς, ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἡμιδιαμέτρου αὐτῆς, τῆς παραλλήλου πρὸς τὴν τέμνουσαν.

487. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῆς κορυφῆς τριγώνου, ἔχοντος βάσιν μὲν σταθεράν, διαφορὰν δὲ τῶν παρὰ τὴν βάσιν αὐτοῦ γωνιῶν ἴσην μὲ 90^0.

488. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν κύκλων, αἵτινες ἀποκόπτουν ἀπὸ τῶν πλευρῶν δοθείσης γωνίας μήκη δοθέντα.

489. Δείξατε ὅτι πᾶσα χορδὴ Υπ χωρίζει εἰς δύο ἴσα μέρη τὸ μέρος τῆς μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς.

490. Τρίγωνον ΑΒΓ εἶνε ἐγγεγραμμένον εἰς Υπ. Δύο τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἔχουν φορὰς ὡρισμένας· νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν μέσων τῆς τρίτης πλευρᾶς αὐτοῦ.

491. Δείξατε ὅτι πᾶσα ἰσοσκελὴς Υπ περιγεγραμμένη εἰς τρίγωνον διέρχεται διὰ τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν αὐτοῦ.

492. Ἐπὶ μιᾶς τῶν διαγωνίων ὀρθογωνίου (λαμβανομένης ὡς χορδῆς) κατασκευάζομεν περιφέρειαν κύκλου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν ἄκρων τῶν διαμέτρων, αἵτινες εἶνε παράλληλοι πρὸς τὴν ἄλλην διαγώνιον.

493. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων ἀπὸ τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ φέρωμεν δύο εὐθείας καθέτους πρὸς παραβολὴν καὶ σχηματιζούσας ὀρθὴν γωνίαν.

494. Μία τέμνουσα Υπ στρέφεται περὶ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς αὐτῆς μὲ τὸν ἄξονα τῆς Υπ. Ἐκ τῶν σημείων, καθ' ἃ αὕτη τέμνει τὴν Υπ, φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὴν καμπύλην. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῆς τομῆς τῶν καθέτων τούτων.

495. Δίδεται Ελ καὶ διὰ σημείου δοθέντος φέρομεν δύο τυχούσας εὐθείας καθέτους ἐπ' ἀλλήλας. Εἰς τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν τούτων μετὰ τῆς Ελ φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας τῆς καμπύλης. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῆς τομῆς τῶν ἐφαπτομένων τούτων.

496. Νὰ λυθῇ ἀνάλογον πρόβλημα πρὸς τὸ προηγούμενον, ἂν αἱ ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου ἀγόμεναι εὐθεῖαι εἶνε ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς συζυγεῖς διαμέτρους ἄλλης δοθείσης Ελ.

497. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῆς τομῆς τῶν διαμέσων ἰσοπλεύρου τριγώνου, σχηματιζομένου ἐκ τριῶν εὐθειῶν ἐφαπτομένων ἢ καθέτων Πα.

498. Δείξατε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὰ σημεῖα τῆς ἐπαφῆς τριῶν ἐφαπτομένων Πα εἶνε διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων τούτων καὶ ὅτι τοῦτο ἰσοῦται μὲ

$\pm(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1):4p$, ἂν y_1, y_2, y_3 παριστάνουν τὰς ἀποστάσεις τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ἀπὸ τοῦ ἄξονος τῆς Π_λ μὲ ἡμιπαράμετρον p.

499. Ἂν M,M′ εἶνε σημεῖα Π_α, E ἡ ἑστία αὐτῆς καὶ P τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ἐφαπτομένων τῆς καμπύλης εἰς τὰ M καὶ M′, νὰ δειχθῇ ὅτι εἶνε $(PM)^2 : (ME)=(PM')^2 : (M'E)$.

500. Δείξατε ὅτι εἰς καμπύλην β′ βαθμοῦ ἡ εὐθεῖα, ἥτις ἄγεται ἐκ τῆς ἑστίας κάθετος ἐπί τινα χορδὴν αὐτῆς καὶ ἡ συζυγὴς διάμετρος τῆς χορδῆς τέμνονται ἐπὶ διευθετούσης τῆς καμπύλης.

501. Δείξατε ὅτι εἰς ἰσοσκελῆ Y_π ἡ ἀπόστασις τυχόντος σημείου τῆς καμπύλης ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτῆς, εἶνε μέση ἀνάλογος τῶν ἑστιακῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου.

502. Δείξατε ὅτι ἡ γωνία ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ἀπὸ ἑστίαν τὸ μέρος κινητῆς ἐφαπτομένης εἰς καμπύλην β′ βαθμοῦ, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ δύο σταθερῶν ἐφαπτομένων αὐτῆς, εἶνε σταθερά.

503. Ἐὰν τρίγωνον εἶνε περιγεγραμμένον εἰς Π_α (αἱ πλευραὶ αὐτοῦ ἐφάπτονται τῆς καμπύλης), νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ ὕψη αὐτοῦ τέμνονται ἐπὶ τῆς διευθετούσης, ἡ δὲ περιφέρεια ἡ περιγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον διέρχεται διὰ τῆς ἑστίας τῆς Π_α.

504. Ἐὰν εἰς σημεῖόν τι M E_λ φέρωμεν τὴν κάθετον αὐτῆς, τὸ τμῆμα τῆς καθέτου ταύτης τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τοῦ M καὶ τοῦ μικροῦ ἄξονος τῆς καμπύλης, ἔχει ὡς ὀρθὴν προβολὴν ἐπὶ τῶν ἑστιακῶν ἀκτίνων τοῦ M ἴσην μὲ τὸ μῆκος τοῦ μεγάλου ἡμιάξονος.

505. Τὸ μέρος τῆς καθέτου εἰς τὸ M καὶ τοῦ μεγάλου ἄξονος τῆς E_λ, ἔχει ὀρθὴν προβολὴν ἐπὶ τῶν ἑστιακῶν ἀκτίνων τοῦ M ἴσην μὲ τὴν ἡμιπαράμετρον τῆς E_λ.

506. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων τῆς καμπύλης
$(3y-4x)(3-y)+\lambda(3-x)(3x-2y)=0$, ὅταν μεταβάλλεται τὸ λ.

507. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν καμπύλων
$x^2-\lambda^2(1-\lambda)xy+\lambda^2y^2-\alpha\lambda^2y=0$, ὅταν μεταβάλλεται τὸ λ.

508. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐκ τυχόντος σημείου M κειμένου ἐπὶ τῆς πλευρᾶς AB, φέρομεν εὐθεῖαν κάθετον MK ἐπὶ τὴν ΑΓ. Φέρομεν τὰς εὐθείας BK καὶ ΓM, τεμνομένας εἰς τὸ Σ. Ζητεῖται σ′) ὁ τόπος τοῦ Σ, ὅταν τὸ M διατρέχῃ τὴν εὐθεῖαν AB. β′) Ὅταν αἱ εὐθεῖαι AB, ΑΓ διατηροῦνται σταθεραὶ καὶ ἡ ΒΓ στρέφεται περὶ σταθερὸν σημεῖον H, (κείμενον ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης), νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ κέντρου τοῦ προηγουμένου τόπου.

509. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\gamma^2](1+\lambda^2)-(y-\lambda x)^2=0$ τὰ μὲν α,β,γ εἶνε σταθερὰ τὸ δὲ λ μεταβλητόν. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ἄξων τῆς παραβολῆς τῆς παριστωμένης ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως ταύτης διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

510. Νὰ γίνῃ ἡ σπουδὴ τῆς ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\lambda x+\mu y$ παριστανομένης γραμμῆς.

511. Νὰ γίνῃ ἡ σπουδὴ τῆς καμπύλης τῆς παριστανομένης ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)\,\text{συν}\vartheta=(\lambda x+\mu y+\nu)^2$ ὡς πρὸς ἄξονας σχηματίζοντας γωνίαν θ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV.

Περὶ γεωμετρικῶν τόπων εἰς τὸν χῶρον τῶν τριῶν διαστάσεων.

§ 48. Λέγομεν ὅτι ἐπιφάνειά τις ἐν γένει εἶνε ***ὁ γεωμετρικὸς τόπος*** ἢ ἁπλῶς ***ὁ τόπος*** σημείων ἐχόντων κοινήν τινα ἰδιότητα (ἢ περισσοτέρας), ἂν πᾶν τοιοῦτον σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας καὶ ἐπὶ πλέον ἂν πᾶν σημεῖον αὐτῆς ἔχει τὴν ἐν λόγῳ ἰδιότητα.

Ἐπιφάνειά τις ὁρίζεται γεωμετρικῶς ὡς τόπος σημείων ἐχόντων κοινήν τινα γεωμετρικὴν ἰδιότητα, ἢ ὡς τόπος γραμμῆς κινουμένης, τῆς ὁποίας τὸ σχῆμα δύναται νὰ εἶνε μεταβλητὸν κατὰ τὴν κίνησιν.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν ἐπιφανείας, ὁριζομένης γεωμετρικῶς ὡς τόπου σημείων, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν σχέσιν μεταξὺ τῶν συντεταγμένων x,y,z τοῦ σημείου εἰς πᾶσαν θέσιν αὐτοῦ καὶ ἐκφράζουσαν τὴν ἰδιότητα τῶν σημείων. Οὕτω π. χ. διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ τόπου τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α καὶ ἀπὸ δοθεῖσαν εὐθεῖαν (ε), λαμβάνομεν ὡς ἄξονα τῶν x τὴν εὐθεῖαν ΑΚ κάθετον ἐπὶ τὴν (ε), τὴν ἐκ τοῦ μέσου Ο τοῦ τμήματος ΑΚ παράλληλον πρὸς τὴν δοθεῖσαν ὡς ἄξονα τῶν y καὶ τὴν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν xy εἰς τὸ Ο ὡς ἄξονα τῶν z. Οὕτω διὰ τὴν ἀπόστασιν τοῦ $M(x,y,z)$ κειμένου ἐπὶ τοῦ τόπου ἀπὸ τοῦ $A(p,0,0)$ ἔχομεν, $(AK)=2p$, $(MA)^2=(x-p)^2+y^2+z^2$ διὰ δὲ τὴν ἀπόστασιν (ΜΡ) τοῦ Μ ἀπὸ τῆς εὐθείας $x=-p$, $z=0$ ἔχομεν $(MP)^2=(x+p)^2+z^2$.

Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐν λόγῳ τόπου εἶνε

$$(x-p)^2+y^2+z^2=(x+p)^2+z^2, \quad \text{ἢ} \quad y^2=4px,$$

ἥτις (ὡς στερουμένη τοῦ z) παριστάνει κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν μὲ γενετείρας παραλλήλους πρὸς τὸν ἄξονα τῶν z, ὁδηγὸν δὲ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν xy τὴν Π_4 $y^2=4px$, $z=0$.

Ἂν ἐπιφάνειά τις ὁρίζεται ὡς τόπος κινουμένης γραμμῆς, αἱ ἐξισώσεις ταύτης θὰ ἔχουν τοὐλάχιστον μίαν παράμετρον, εἰς ἑκάστην τιμὴν τῆς ὁποίας ἀντιστοιχεῖ μία θέσις τῆς γραμμῆς καὶ ὡρισμένον σχῆμα ταύτης. Ἔστωσαν $\varphi_1(x,y,z,\alpha_1)=0$, $\varphi_2(x,y,z,\alpha_1)=0$ (1) αἱ ἐξισώσεις τῆς γραμμῆς. Ἐὰν ἀπαλείψωμεν τὸ α_1 μεταξὺ τῶν (1), προκύπτει ἐξίσωσις περιέχουσα τὰς μεταβλητὰς x, y, z, ἔστω ἡ $f(x,y,z)=0$ (2), ἥτις ἐπαληθεύεται, ὅταν ἐπαληθεύωνται αἱ (1), ὡς προκύψασα ἐξ αὐτῶν. Ἀλλ' ἀφοῦ αἱ (1) ἐπαληθεύονται δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ α_1 εἰς πάντα τὰ σημεῖα τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς αὐτὰ γραμμῆς καὶ ἡ (2) ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων πάντων τῶν σημείων τῆς γραμμῆς. Ἐπειδὴ ἡ (2) δὲν περιέχει τὸ α_1, ἐκ τῆς μεταβολῆς τοῦ ὁποίου προέρχεται ἡ κίνησις τῆς γραμμῆς, ἕπεται ὅτι ἀληθεύει αὕτη εἰς πάντα τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς καὶ εἰς πᾶσαν θέσιν αὐτῆς· ἤτοι εἰς πάντα τὰ σημεῖα τῆς γραφομένης ἐπιφανείας. Ἄρα ἡ (2) εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει ἡ γραμμὴ (1).

Ἂν αἱ ἐξισώσεις τῆς κινουμένης γραμμῆς περιέχουν δύο παραμέτρους, ἔστω τὰς α_1 καὶ α_2, πρέπει μεταξὺ τούτων νὰ ὑπάρχῃ σχέσις τις, ἐκ τῆς ὁποίας, ὅταν ὁρισθῇ αὐθαιρέτως ἡ μία, νὰ εὑρίσκεται ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τῆς ἄλλης. Διότι, ἂν ἦτο δυνατὸν καὶ αἱ δύο παράμετροι νὰ ἐλάμβανον οἱασδήποτε πραγματικὰς τιμάς, ἡ κινουμένη γραμμὴ θὰ διέγραφεν ἐν γένει ὁλόκληρον τὸν χῶρον. Πράγματι, ἂν δοθῇ σημεῖον $M_1(x_1,y_1,z_1)$ τοῦ χώρου καὶ θέσωμεν τὰ x_1,y_1,z_1 ἀντὶ τῶν x, y, z εἰς τὰς ἐξισώσεις τῆς γραμμῆς, αἱ παράμετροι α_1 καὶ α_2 δύνανται νὰ ὁρισθοῦν, ὥστε νὰ ἐπαληθεύωνται αἱ δύο ἐξισώσεις ὡς πρὸς αὐτάς, οὕτω δ' ἡ γραμμή, ἡ παριστωμένη ὑπ' αὐτῶν, θὰ διέρχεται διὰ τοῦ M_1.

Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις τῆς κινουμένης γραμμῆς

$$\varphi_i\,(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2) = 0, \quad i=1,2 \tag{3}$$

καὶ ἡ συνδέουσα τὰ α_1 καὶ α_2 ἐξίσωσις $\quad \varphi\,(\alpha_1,\alpha_2)=0. \quad (4)$

Ἐὰν μεταξὺ τῶν (3) καὶ (4) ἀπαλείψωμεν τὰ α_1 καὶ α_2, προκύπτει ἔστω ἡ

$$f\,(x, y, z) = 0, \tag{5}$$

ἥτις, ὡς ἀκολουθία τῶν (3) καὶ (4), ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων παντὸς σημείου τῆς γραμμῆς καὶ εἰς πᾶσαν θέσιν αὐτῆς. Ἄρα ἡ (5) εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει ἡ γραμμὴ (3).

Ἑπομένως, ἂν αἱ δύο δοθεῖσαι ἐξισώσεις κινουμένης γραμμῆς, ἥτις γράφει ἐπιφάνειαν, περιέχουν δύο παραμέτρους συνδεομένας δι' ἐξισώσεως, ἥτις δίδεται, ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας εὑρίσκεται, ἂν μεταξὺ τῶν τριῶν ἐξισώσεων ἀπαλειφθοῦν αἱ δύο παράμετροι.

Ἐν γένει, ἂν αἱ δύο ἐξισώσεις τῆς κινουμένης γραμμῆς περιέχουν $\nu+1$ παραμέτρους, π.χ. τὰς $\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_{\nu+1}$, ἵνα ἡ κινουμένη γραμμὴ γράφῃ ἐπιφάνειαν, πρέπει αὗται νὰ συνδέωνται μεταξύ των μὲ ν ἐξισώσεις, τοιαύτας ὥστε, ἂν δοθῇ τιμή τις αὐθαίρετος εἰς μίαν ἐξ αὐτῶν, αἱ τιμαὶ τῶν ἄλλων νὰ ὁρίζωνται ἐκ τῶν ν ἐξισώσεων. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἐξίσωσις τῆς παραγομένης ἐπιφανείας ὑπὸ τῆς γραμμῆς εὑρίσκεται, ἂν μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τῆς γραμμῆς καὶ τῶν ν ἐξισώσεων μεταξὺ τῶν παραμέτρων ἀπαλειφθοῦν αἱ $\nu+1$ αὗται παράμετροι. Ἔστω π. χ. ὅτι ἔχομεν τὰ ἐπίπεδα $x=\alpha$, $y=\beta$, (6) τὰ ὁποῖα κινοῦνται οὕτως ὥστε αἱ παράμετροι α καὶ β νὰ συνδέωνται διὰ τῆς $\varphi(\alpha, \beta)=0$. (7)

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς παραγομένης ἐπιφανείας, πρέπει νὰ ἀπαλείψωμεν τὰ α, β μεταξὺ τῶν (6) καὶ (7), ὅτε λαμβάνομεν τὴν $\varphi(x, y)=0$, παριστάνει δ' αὕτη κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν μὲ γενετείρας παραλλήλους πρὸς τὸν ἄξονα τῶν z.

Ἐνίοτε ἡ κίνησις γραμμῆς τινος μὲ ἐξισώσεις

$$\varphi_i(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2)=0, \quad i=1,2, \qquad (8)$$

ἐξαρτωμένης ἐκ δύο παραμέτρων, ὁρίζεται ἐκ τῆς συνθήκης, νὰ συναντᾷ αὕτη ἄλλην δοθεῖσαν γραμμήν, ἥτις καλεῖται συνήθως ὁδηγὸς τῆς κινουμένης. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἵνα εὕρωμεν τὴν σχέσιν, ἥτις συνδέει τὰ α_1, α_2, πρέπει νὰ ἀπαλείψωμεν τὰ x, y, z μεταξὺ τῶν (8) καὶ τῶν δύο ἐξισώσεων τῆς ὁδηγοῦ, αἵτινες ὑποτίθενται γνωσταί.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 512. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας, ἥτις γίνεται, ἂν τὸ κέντρον περιφερείας κύκλου ἐχούσης ἀκτῖνα σταθεράν, κινῆται ἐπὶ παραβολῆς τὸ δὲ ἐπίπεδόν της μένει παράλληλον πρὸς ἑαυτό.

513. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας, ἥτις γράφεται ὑπὸ εὐθείας κινουμένης οὕτως, ὥστε νὰ τέμνῃ δύο δεδομένας εὐθείας, μὴ κειμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ δοθεῖσαν περιφέρειαν.

514. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας, ἥτις γίνεται ὑπὸ δοθείσης περιφερείας, ὅταν τὸ κέντρον της διατρέχῃ δοθεῖσαν γραμμήν, τὸ δὲ ἐπίπεδόν της μένῃ παράλληλον πρὸς ἑαυτό.

515. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας, ἥτις γράφεται ὑπὸ εὐθείας τεμνούσης καθέτως τὴν εὐθεῖαν $z+y=0$, $z=0$ καὶ ἐχούσης ὁδηγὸν τὴν παραβολὴν $x^2=2pz$, $y=0$.

516. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ δοθείσης εὐθείας καὶ δοθέντος ἐπιπέδου.

517. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν εἶνε σταθερά.

518. Δίδεται σφαῖρα καὶ σημεῖον Α ἐπ' αὐτῆς. Τέμνουσα τῆς σφαίρας, διερχομένη διὰ τοῦ Α, τέμνει αὐτὴν καὶ εἰς τὸ Ρ. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΑΡ τὸ (ΡΜ)=α (σταθερόν). Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ Μ.

519. Ἀπὸ τῶν σημείων Ελ ἄγονται εὐθύγραμμα τμήματα κάθετα ἐπὶ τὸν μεγάλον ἄξονά της καὶ γράφονται περιφέρειαι μὲ κέντρα τὰ σημεῖα τῆς Ελ, ἀκτῖνας δὲ τὰ κάθετα τμήματα, τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα εἶνε κάθετα ἐπὶ τὸ τῆς Ελ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν περιφερειῶν τούτων.

520. Τρεῖς εὐθεῖαι, μὴ κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τέμνονται ὑπὸ σειρᾶς παραλλήλων ἐπιπέδων. Διὰ τῶν τριῶν τομῶν ἑκάστου ἐπιπέδου γράφεται περιφέρεια κύκλου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν περιφερειῶν τούτων.

521. Εἰς E_λ ἄγονται παράλληλοι χορδαὶ καὶ μὲ αὐτὰς ὡς διαμέτρους γράφονται περιφέρειαι μὲ ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὸ τῆς E_λ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν περιφερειῶν τούτων.

522. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας, ἥτις παράγεται ὑπὸ παραβολῆς, ὅταν αὕτη στρέφεται περὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῆς.

523. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας, ἥτις παράγεται ὑπὸ ἰσοσκελοῦς Y_π, ὅταν αὕτη στρέφεται περὶ μίαν ἀσύμπτωτόν της.

524. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας, ἥτις παράγεται, ὅταν περιφέρεια κύκλου κινῆται ὥστε νὰ τέμνῃ τρεῖς εὐθείας δοθείσας.

525. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει εὐθεῖα, ἥτις κινεῖται ὥστε νὰ τέμνῃ τρεῖς ἄλλας δοθείσας, ἀνὰ δύο μὴ κειμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΙ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Περὶ ἐλλειψοειδοῦς.

§ 49. Ἐξίσωσις καὶ τομαὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς.

Καλοῦμεν ***ἐλλειψοειδὲς*** τὴν ἐπιφάνειαν, ἥτις γίνεται ὑπὸ ἐλλείψεως

$$\mu^2 x^2 + \lambda^2 y^2 = \lambda^2 \mu^2, \quad z = \nu \qquad (1)$$

κινουμένης, ὥστε νὰ συναντᾷ δύο E_λ σταθεράς, κειμένας ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων xz καὶ yz μὲ ἐξισώσεις

$$\gamma^2 x^2 + \alpha^2 z^2 = \alpha^2\gamma^2, \quad y=0 \quad (2) \quad \text{καὶ} \quad \gamma^2 y^2 + \beta^2 z^2 = \beta^2\gamma^2, \quad x=0 \quad (3)$$

ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας ἀπαλείφομεν πρῶτον τὰ x, y, z μεταξὺ τῶν (1) καὶ (2) καθὼς καὶ μεταξὺ τῶν (1) καὶ (3), ἐκφράζοντες οὕτω ὅτι ἡ γενέτειρα E_λ (1) κινουμένη συναντᾷ ἑκάστην τῶν ὁδηγῶν (2) καὶ (3), ὅτε προκύπτουν αἱ

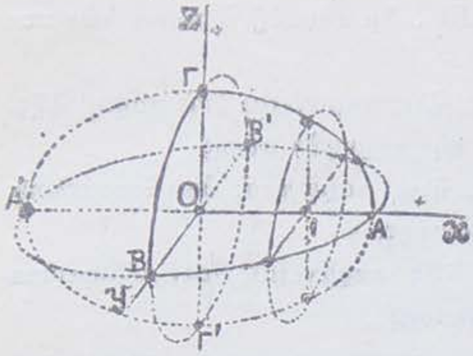
$$\gamma^2\lambda^2 + \alpha^2\nu^2 = \alpha^2\gamma^2, \quad \gamma^2\mu^2 + \beta^2\nu^2 = \beta^2\gamma^2 \qquad (4)$$

καὶ ἀκολούθως ἀπαλείφοντες μεταξὺ τῶν (1) καὶ (4) τὰ λ, μ, ν εὑρίσκομεν τὴν

$$\boxed{\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1} \qquad (5)$$

ἥτις εἶνε ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐλλειψοειδοῦς.

Ἐκ τῆς (5) διακρίνομεν ὅτι τὸ ἐλλειψοειδὲς εἶνε συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν O, ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας καὶ ὡς πρὸς ἕκαστον τῶν ἐπιπέδων τῶν συντεταγμένων, καλεῖται δὲ τὸ μὲν O ***κέντρον***, τὰ δ᾽ ἐπίπεδα καὶ οἱ ἐν λόγῳ ἄξονες ***ἐπίπεδα*** καὶ ***ἄξονες συμμετρίας*** τοῦ ἐλλειψοειδοῦς.

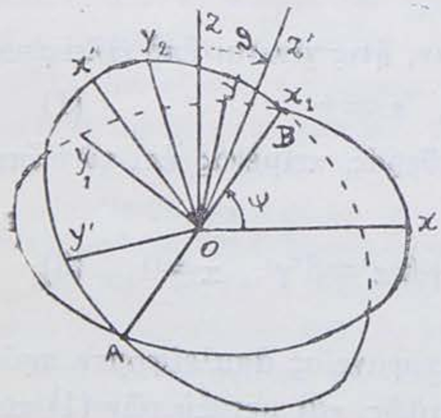


Σχ. 43.

Ἐκ τῆς (5) εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι διὰ τὰ σημεῖα τοῦ ἐλλειψοειδοῦς πρέπει νὰ εἶνε $|x|\leqq\alpha$, $|y|\leqq\beta$, $|z|\leqq\gamma$. Ἄρα τὸ ἐλλειψοειδὲς περιέχεται ὑπὸ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου $x=\pm\alpha$, $y=\pm\beta$, $z=\pm\gamma$, τὸ ὁποῖον καλεῖται περιγεγραμμένον εἰς αὐτό, τὰ δὲ σημεῖα A, A′ $(\pm\alpha,0,0)$, B, B′ $(0,\pm\beta,0)$, Γ, Γ′$(0,0,\pm\gamma)$ καλοῦνται ***κορυφαὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς***, ἐνῶ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα A′A, B′B, Γ′Γ (Σχ. 43) μὲ μήκη 2α, 2β, 2γ λέγονται ***ἄξονες*** αὐτοῦ, ὑποτίθεται δὲ κατωτέρω ὅτι εἶνε $\alpha>\beta>\gamma$.

Ἂν $\alpha=\beta=\gamma$ ἔχομεν τὴν ἐπιφάνειαν σφαίρας μὲ ἀκτῖνα α.

Ἡ τομὴ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς (5) ὑπὸ τυχόντος ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ εἶνε ἐν γένει E_λ. Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου εὑρίσκομεν πρῶτον τύπους μεταβάσεως ἐκ τῶν ὀρθογωνίων συντεταγμένων σημείου τινὸς $M(x,y,z)$ πρὸς τὸ σύστημα $Oxyz$ ὡς πρὸς ἄλλο ἐπίσης ὀρθογώνιον $Ox'y'z'$. Ἔστω AOB ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων xy καὶ $x'y'$, γων$xOB=\psi$(μεταβαλλομένη ὥστε $0\leqq\psi<180^\circ$), γων $zOz'=\vartheta$ καὶ γων $x'OB=\varphi$. Ἂν τὸ ἀρχικὸν σύστημα στραφῇ περὶ τὴν Oz, ὥστε ἡ Ox νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς OB, ἥτις ἔστω Ox_1, ἡ Oy θὰ λάβῃ τὴν θέσιν ἔστω Oy_1 καὶ ἂν x_1,y_1,z_1 εἶνε αἱ συντεταγμέναι τοῦ M ὡς πρὸς τὸ $Ox_1y_1z_1$, θὰ ἔχωμεν (Σχ. 44)



Σχ. 44.

$$x=x_1\sigma\upsilon\nu\psi-y_1\eta\mu\psi,\qquad y=x_1\eta\mu\psi+y_1\sigma\upsilon\nu\psi,\qquad z=z_1.$$

Στρέφομεν τὸ β′ τοῦτο σύστημα περὶ τὴν Ox_1 κατὰ γωνίαν ϑ, ὥστε ὁ Oz νὰ ἐφαρμόσῃ μὲ τὸν Oz', ὅτε τὸ ἐπίπεδον x_1y_1 θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ $x'y'$, ἡ δὲ Oy_1 θὰ λάβῃ τὴν θέσιν ἔστω Oy_2 καὶ τὸ

Ox_1y_1z τὴν Ox_1y_2z'. Ἂν x_2, y_2, z_2 εἶνε αἱ συντεταγμέναι τοῦ Μ ὡς πρὸς τὸ σύστημα τοῦτο, θὰ ἔχωμεν

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2 συνϑ - z_2 ημϑ, \quad z_1 = y_2 ημϑ + z_2 συνϑ.$$

Στρέφομεν τὸ σύστημα Ox_1y_2z' περὶ τὴν Oz' κατὰ γωνίαν φ, ὥστε ἡ Ox_1 νὰ ἐφαρμόσῃ μὲ τὴν Ox', ὅτε ἡ Oy_2 θὰ λάβῃ τὴν θέσιν Oy' καὶ τὸ Ox_1y_2z' τὴν $Ox'y'z'$, θὰ ἔχωμεν δὲ

$$x_2 = x' συνφ - y' ημφ, \quad y_2 = x' ημφ + y' συνφ, \quad z_2 = z'.$$

Δι' ἀπαλοιφῆς τῶν x_i, y_i, z_i, $i = 1, 2$ μεταξὺ τῶν ἀνωτέρω εὑρίσκομεν τοὺς ἑξῆς τύπους (τοῦ Euler).

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x'(συνφ.συνψ - ημφ.ημψ.συνϑ) - \\ &\quad - y'(ημφσυνψ + συνφημψσυνϑ) + z' ημψ.ημϑ \\ y &= x'(συνφημψ + ημφσυνψ\, συνϑ) + \\ &\quad + y'(-ημφημψ + συνφσυνψσυνϑ) - z' συνψ.ημϑ. \\ z &= x' ημφημϑ + y' συνφ.ημϑ + z' συνϑ. \end{aligned}} \qquad (6)$$

Λαμβάνομεν τώρα τὸ ἐπίπεδον τῆς τομῆς τῆς ἐπιφανείας ὡς ἐπίπεδον τῶν $x'y'$ (ἤτοι $z' = 0$) καὶ θέτομεν $φ = 0$ (ἐπειδὴ ἡ θέσις τῶν ἀξόνων $Ox'y'$ ἐπὶ τοῦ $z' = 0$ δύναται νὰ εἶνε οἱαδήποτε) καὶ θὰ ἔχωμεν $\quad x = x' συνψ - y' ημψ.συνϑ,$

$$y = x' ημψ + y' συνψ.συνϑ, \quad z = y' ημϑ.$$

Εἰσάγοντες τὰς τιμὰς τῶν x, y, z εἰς τὴν (5) εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $Ax'^2 + 2Bx'y' + Γy'^2 - 1 = 0$, ὅπου εἶνε

$$A = \frac{συν^2ψ}{α^2} + \frac{ημ^2ψ}{β^2}, \qquad B = \left(\frac{1}{β^2} - \frac{1}{α^2}\right) ημψ.συνψ.συνϑ$$

$$Γ = \frac{ημ^2ψ.συν^2ϑ}{α^2} + \frac{συν^2ψ.συν^2ϑ}{β^2} + \frac{ημ^2ϑ}{γ^2}$$

παριστάνει δ' αὕτη μετὰ τῆς $z' = 0$ ἐν γένει $E_λ$ ἐπὶ τοῦ τέμνοντος τὸ ἐλλειψοειδὲς ἐπιπέδου $z' = 0$, ἐπειδὴ εἶνε $B^2 - AΓ < 0$.

Ἂν ζητοῦμεν τὰ ἐπίπεδα τὰ τέμνοντα τὴν ἐπιφάνειαν κατὰ περιφερείας κύκλων, παρατηροῦμεν ὅτι, ἵνα τὸ $z' = 0$ εἶνε τοιοῦτον ἐπίπεδον, πρέπει νὰ ἔχωμεν $B = 0$ καὶ $A = Γ$. Διὰ $ψ = 90°$ καὶ $A = Γ$ ἔχομεν

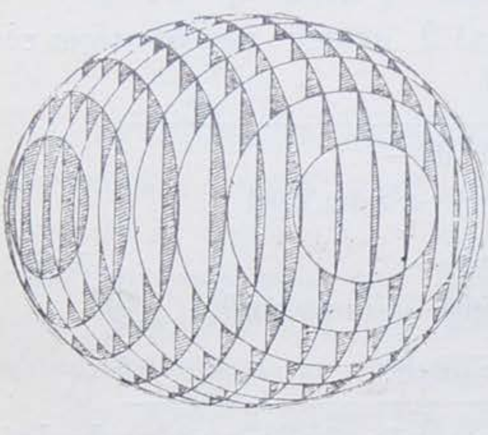
$$\frac{1}{β^2} = \frac{συν^2ϑ}{α^2} + \frac{ημ^2ϑ}{γ^2},$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν

$ημϑ = \pm \frac{γ}{β}\sqrt{\frac{α^2 - β^2}{α^2 - γ^2}}$, $συνϑ = \pm \frac{α}{β}\sqrt{\frac{β^2 - γ^2}{α^2 - γ^2}}$, ἐπειδὴ δέ, ἂν ἐκ τῶν (6) εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ z' καὶ ἀκολούθως θέσωμεν $ψ = 90°$, $φ = 0°$ εὑρίσκομεν $z' = xημϑ + zσυνϑ$, ἕπεται ὅτι τὰ τέμνοντα ἐπίπεδα τὸ ἐλλειψοειδὲς κατὰ περιφερείας διέρχονται διὰ τοῦ ἄξονος τῶν y (σχ. 45) καὶ ἔχουν ἐξισώσεις

$$\boxed{\gamma\sqrt{\alpha^2-\beta^2}.\ x \pm \alpha\sqrt{\beta^2-\gamma^2}.\ z=0.}$$

Εὐκόλως δεικνύεται ὅτι καὶ τὰ παράλληλα τούτων ἐπίπεδα ἔχουν τὴν αὐτὴν ἰδιότητα.



Σχ. 45.

Διὰ $\psi=0$ καὶ $A=\Gamma$, εὑρίσκομεν

$$\eta\mu^2\vartheta\left(\frac{1}{\gamma^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)=\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2},$$ ἥτις δὲν ἐπαληθεύεται καθὼς καὶ ἡ

$$\sigma\upsilon\nu^2\psi\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)=\frac{1}{\gamma^2}-\frac{1}{\beta^2},$$ ἥτις προκύπτει διὰ $\vartheta=90^\circ$ καὶ $A=\Gamma$, ἐπειδὴ ὑπετέθη $\alpha>\beta>\gamma$.

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ αἱ τομαὶ τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ τυχόντος ἐπιπέδου εἶνε ἐν γένει E_λ πραγματικὴ ἢ φανταστική.

Αἱ τομαὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς ὑπὸ ἑκάστου τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων yz ἢ xz ἢ xy εἶνε E_λ μὲ ἐξισώσεις

$$\gamma^2y^2+\beta^2z^2=\beta^2\gamma^2,\quad \gamma^2x^2+\alpha^2z^2=\alpha^2\gamma^2,\quad \beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$$
$$x=0\qquad\qquad y=0\qquad\qquad z=0.$$

Ἡ τομὴ τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ ἐπιπέδου $x=x'$ εἶνε E_λ πραγματικὴ διὰ τιμὰς τοῦ $|x'|\leqq\alpha$, τῆς ὁποίας αἱ ἐξισώσεις εἶνε

$$\frac{y^2}{\beta^2\left(1-\dfrac{x'^2}{\alpha^2}\right)}+\frac{z^2}{\gamma^2\left(1-\dfrac{x'^2}{\alpha^2}\right)}=1,\quad x=x'.$$

Ἀνάλογα παρατηροῦμεν καὶ διὰ τὰς τομὰς αὐτῆς ὑπὸ ἑκάστου τῶν ἐπιπέδων $y=y'$ καὶ $z=z'$.

§ 50. Διαμετρικὰ ἐπίπεδα καὶ διάμετροι ἐλλειψοειδοῦς.

Καλοῦμεν ***χορδὴν*** ἐλλειψοειδοῦς τμῆμα εὐθείας μὲ πέρατα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

Ἔστω τὸ ἐλλειψοειδὲς $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}+\dfrac{z^2}{\gamma^2}=1.$ (1)

a, b, c τὰ διευθύνοντα συνημίτονα παραλλήλων χορδῶν τούτου καὶ x′, y′, z′ αἱ συντεταγμέναι τοῦ μέσου μιᾶς ἐξ αὐτῶν. Ἐὰν M(x, y, z) εἶνε αἱ συντεταγμέναι τυχόντος σημείου ταύτης, αἱ ἐξισώσεις αὐτῆς δύνανται νὰ τεθοῦν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$x = x' + a\varrho, \quad y = y' + b\varrho, \quad z = z' + c\varrho. \qquad (2)$$

Ἐὰν τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας θὰ εἶνε

$$\frac{(x'+a\varrho)^2}{\alpha^2} + \frac{(y'+b\varrho)^2}{\beta^2} + \frac{(z'+c\varrho)^2}{\gamma^2} = 1,$$

ἢ

$$\left(\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2}\right)\varrho^2 + 2\left(\frac{ax'}{\alpha^2} + \frac{by'}{\beta^2} + \frac{cz'}{\gamma^2}\right)\varrho = 1 - \frac{x'^2}{\alpha^2} - \frac{y'^2}{\beta^2} - \frac{z'^2}{\gamma^2}$$

Ἐκ ταύτης ὁρίζονται αἱ τιμαὶ τοῦ ϱ, παριστῶντος τὰς ἀποστάσεις τοῦ μέσου τῆς θεωρουμένης χορδῆς ἀπὸ τῶν ἄκρων αὐτῆς, καὶ ἐπειδὴ αὗται εἶνε ἀντίθετοι, θὰ ἔχωμεν $\frac{ax'}{\alpha^2} + \frac{by'}{\beta^2} + \frac{cz'}{\gamma^2} = 0$, ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον (x′, y′, z′) κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου

$$\boxed{\frac{ax}{\alpha^2} + \frac{by}{\beta^2} + \frac{cz}{\gamma^2} = 0} \qquad (3)$$

Ἑπομένως, «***ὁ τόπος τῶν μέσων τῶν παραλλήλων χορδῶν τοῦ ἐλλειψοειδοῦς (1), μὲ διευθύνοντα συνημίτονα*** a, b, c, ***εἶνε τὸ ἐπίπεδον (2)***, καὶ καλεῖται τοῦτο ***διαμετρικὸν*** ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας, πάντα δὲ τὰ διαμετρικὰ ἐπίπεδα αὐτῆς διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἐπιφανείας. Εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι, πᾶν ἐπίπεδον μὲ ἐξίσωσιν

$$A\,x + B\,y + \Gamma\,z = 0,$$

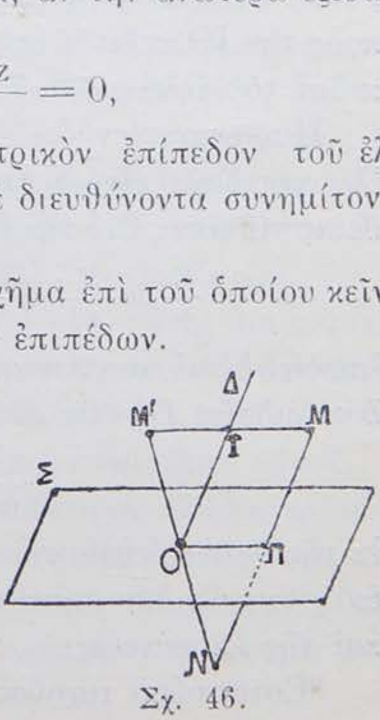
εἶνε διαμετρικὸν ἐπίπεδον τοῦ (1). Πράγματι, ἂν τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν γράψωμεν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{A\,\alpha^2 x}{\alpha^2} + \frac{B\,\beta^2 y}{\beta^2} + \frac{\Gamma\,\gamma^2 z}{\gamma^2} = 0,$$

παρατηροῦμεν ὅτι αὕτη παριστάνει διαμετρικὸν ἐπίπεδον τοῦ ἐλλειψοειδοῦς (1), ἀντιστοιχοῦν εἰς χορδὰς μὲ διευθύνοντα συνημίτονα ἀνάλογα τῶν $A\alpha^2$, $B\beta^2$, $\Gamma\gamma^2$.

Καλοῦμεν ***διάμετρον*** ἐλλειψοειδοῦς τὸ σχῆμα ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖνται τὰ κέντρα τομῶν αὐτοῦ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων.

Ἔστω τομή τις (Τ) τοῦ ἐλλειψοειδοῦς ὑπό τινος ἐπιπέδου καὶ σημεῖόν τι Μ ταύτης (σχ. 46), Σ δὲ τὸ διαμετρικὸν ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας τὸ παράλληλον πρὸς τὴν (Τ). Ἂν ΜΠΝ εἶνε χορδὴ τῆς ἐπιφανείας μὲ μέσον τὸ Π ἐπὶ τοῦ Σ καὶ Μ′ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Ν ὡς πρὸς τὸ κέντρον αὐτῆς Ο, φέρωμεν δὲ τὰ τμήματα ΟΠ καὶ Μ′Μ, τὰ



Σχ. 46.

Μ, Μ′ κεῖνται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, τὸ τμῆμα ΜΜ′ εἶνε χορδὴ αὐτῆς, παράλληλος πρὸς τὸ ΟΠ καὶ διπλάσιον αὐτοῦ, εἶνε δὲ τὸ ΜΜ′ καὶ χορδὴ τῆς (Τ), διότι ὡς παράλληλον τοῦ ΟΠ κεῖται ἐπὶ τοῦ παραλλήλου ἐπιπέδου πρὸς τὸ Σ, τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ Μ. Ἐὰν διὰ τοῦ Ο ἀχθῇ εὐθεῖα ΟΔ παράλληλος τῆς ΜΝ, αὕτη θὰ τέμνῃ τὴν (Τ) κατά τι σημεῖον, κείμενον ἐπὶ τῆς χορδῆς αὐτῆς ΜΜ′, ἔστω τὸ Ι καὶ θὰ εἶνε ἀπολύτως (ΜΙ)=(Μ′Ι). Ἑπομένως εἰς τυχὸν σημεῖον Μ τῆς (Τ) ὑπάρχει σημεῖον Μ′ αὐτῆς συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ι (ἐπειδὴ ἡ διεύθυνσις τῆς ΜΝ εἶνε σταθερά), καθ᾽ ὃ ἡ ΟΔ τέμνει τὴν (Τ), Ἄρα τὸ Ι εἶνε κέντρον τῆς (Τ), τὰ δὲ κέντρα τῶν παραλλήλων τομῶν τῆς (Τ) κεῖνται ἐπὶ τῆς ΟΔ. Ἤτοι, ***«πᾶσα τομὴ ἐλλειψοειδοῦς παράλληλος πρὸς διαμετρικὸν ἐπίπεδον αὐτοῦ ἔχει κέντρον· καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἐπιφανείας ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς ἐπίπεδον τομὴν αὐτοῦ ἔχουσαν κέντρον, εἶνε τοῦτο διαμετρικὸν ἐπίπεδον αὐτῆς»***. Διότι, ἂν Μ, Μ′ εἶνε σημεῖα τῆς τομῆς τῆς ἐπιφανείας ἐχούσης κέντρον τὸ Ι καὶ συμμετρικὰ ὡς πρὸς τοῦτο (σχ. 44) καὶ Ν εἶνε τὸ συμμετρικὸν τοῦ Μ′ ὡς πρὸς τὸ κέντρον τοῦ ἐλλειψοειδοῦς καὶ ἀχθῇ τὸ τμῆμα ΟΙ καὶ ἡ χορδὴ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς ΜΝ, θὰ εἶνε αὕτη παράλληλος τοῦ ΟΙ καὶ διπλασία αὐτοῦ, ἐπειδὴ εἶνε ἀπολύτως (Μ′Ι)=(ΙΜ), (Μ′Ο)=(ΟΝ). Ἐὰν τὸ διὰ τοῦ Ο παραλλήλως πρὸς τὴν τομὴν (Τ) ἐπίπεδον Σ τέμνῃ τὴν ΜΝ εἰς τὸ σημεῖον Π, θὰ εἶνε ἀπολύτως (ΜΠ)=(ΙΟ), ἑπομένως καὶ (ΜΠ)=(ΠΝ). Ἤτοι τὰ μέσα τῶν παραλλήλων χορδῶν πρὸς τὴν ΙΟ κεῖνται ἐπὶ τοῦ Σ, δηλαδὴ τὸ Σ εἶνε διαμετρικὸν ἐπίπεδον τοῦ ἐλλειψοειδοῦς.

Παρατηρητέον ὅτι, πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλλειψοειδοῦς εἶνε διάμετρος αὐτοῦ. Διότι αἱ ἐξισώσεις τοιαύτης εὐθείας τίθενται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}, \quad \text{ἢ} \quad x=x'\varrho, \quad y=y'\varrho, \quad z=z'\varrho,$$

ἐπειδὴ δ᾽ αἱ συντεταγμέναι τῶν κοινῶν σημείων ταύτης καὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς (1) θὰ ἐπαληθεύουν τὰς ἐξισώσεις αὐτῶν, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{x'^2}{\alpha^2}+\frac{y'^2}{\beta^2}+\frac{z'^2}{\gamma^2}=\frac{1}{\varrho^2}$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν δύο ἀντιθέτους τιμὰς τοῦ ϱ εἰς τὰς ὁποίας ἀντιστοιχοῦν δύο σημεῖα συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ Ο, κοινὰ τῆς εὐθείας καὶ τῆς ἐπιφανείας.

Ἔστω τώρα τυχοῦσα εὐθεῖα, διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλλειψοειδοῦς καὶ M_1, M_2 αἱ τομαί ταύτης μὲ αὐτό. Ἂν διὰ τοῦ κέντρου ἀχθῇ τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς αὐτὴν διαμετρικὸν ἐπίπεδον, τὰ παράλληλα πρὸς αὐτὸ δίδουν τομὰς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, τῶν ὁποίων τὰ κέντρα κεῖνται ἐπὶ τῆς θεωρουμένης εὐθείας, ἤτοι ἡ ἐν λόγῳ εὐθεῖα εἶνε διάμετρος τοῦ ἐλλειψοειδοῦς.

Ἐπειδή, ὡς εὐκόλως δεικνύεται, τὸ ἐλλειψοειδὲς ἔχει τὸ πολὺ δύο πραγματικὰ καὶ διακεκριμένα κοινὰ σημεῖα μὲ εὐθεῖαν καλεῖται καὶ ἐπιφάνεια ***β' βαθμοῦ***.

Ἔστω ΟΔ τυχοῦσα ἡμιδιάμετρος τοῦ ἐλλειψοειδοῦς (1) καὶ ΟΕΘ τὸ εἰς αὐτὴν ἀντιστοιχοῦν διαμετρικὸν ἐπίπεδον, αἱ δὲ ΟΕ, ΟΘ συζυγεῖς ἡμιδιάμετροι τῆς τομῆς τῆς (1) ὑπὸ τοῦ ΟΕΘ. Ἐὰν λάβωμεν ὡς ἄξονας τῶν συντεταγμένων τὰς ΟΕ, ΟΘ, ΟΔ, ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας (1) θὰ εἶνε β' βαθμοῦ καὶ τῆς μορφῆς $\Gamma z^2+\varphi(x,y)=0$, ὅπου εἶνε $\Gamma\neq 0$ (σταθερὸν) καὶ $\varphi(x,y)$ παριστάνει πολυώνυμον β' βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ x,y, ἐπειδὴ εἰς ἕκαστον σύστημα τιμῶν τῶν x, y ἀντιστοιχοῦν δύο ἀντίθετοι τιμαὶ τοῦ z. Ἡ τομὴ τῆς (1) ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου xy ἔχει ἐξισώσεις $z=0$, $\varphi(x, y)=0$.
ἐπειδὴ δ' αἱ ΟΕ, ΟΘ εἶνε συζυγεῖς ἡμιδιάμετροι αὐτῆς, ἡ δευτέρα τῶν ἐξισώσεων τούτων εἶνε τῆς μορφῆς $Ax^2+By^2+\Delta=0$, $(A,B,\Delta$ σταθερά), ἄρα ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐλλειψοειδοῦς ὡς πρὸς τοὺς νέους ἄξονας θὰ εἶνε τῆς μορφῆς
$$Ax^2+By^2+\Gamma z^2+\Delta=0 \qquad (4)$$

Ἐκ ταύτης παρατηροῦμεν ὅτι, ἀνὰ μία τῶν ΟΕ, ΟΘ, ΟΔ ἔχει ἀντίστοιχον αὐτῆς διαμετρικὸν ἐπίπεδον, τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν δύο ἄλλων καὶ ὅτι ἑκάστη εἶνε διάμετρος τῶν τομῶν τῆς ἐπιφανείας, τῶν προκυπτουσῶν ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν δύο ἄλλων. Διότι ἡ ἐξίσωσις (1) δίδει δύο ἀντιθέτους τιμὰς δι' ἑκάστην τῶν μεταβλητῶν, ὅταν ὁρισθοῦν αἱ δύο ἐξ αὐτῶν καὶ ἑπομένως αἱ παράλληλοι χορδαὶ πρὸς ἕνα τῶν ἀξόνων διχοτομοῦνται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῶν δύο ἄλλων μεταβλητῶν.
Αἱ διάμετροι ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει ἀντίστοιχον αὐτῆς διαμετρικὸν ἐπίπεδον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν δύο ἄλλων λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν ***συζυγικὴν τριάδα*** διαμέτρων τοῦ (1), τὰ δὲ ἐπίπεδα τὰ ὁριζόμενα ὑπ' αὐτῶν ἀποτελοῦν τριάδα συζυγικῶν διαμετρικῶν ἐπιπέδων αὐτοῦ.

Παρατηρητέον ὅτι, τὸ ἐλλειψοειδὲς ἔχει ἄπειρον πλῆθος τριάδων συζυγικῶν διαμέτρων, ἂν δ' ἡ ἐξίσωσις αὐτοῦ εἰς ἄξονάς τινας εἶνε τῆς μορφῆς (4), οὗτοι ἀποτελοῦν τριάδα συζυγικῶν διαμέτρων αὐτῆς, πάντα δὲ τὰ ζεύγη συζυγῶν διαμέτρων ὡς πρὸς μίαν διάμετρον κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς διαμετρικοῦ ἐπιπέδου, ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν διάμετρον ταύτην.

Ἐὰν $2\alpha'$, $2\beta'$, $2\gamma'$ εἶνε τὰ μήκη τῶν χορδῶν τῶν συζυγικῶν διαμέτρων τοῦ (1) καὶ a_i, b_i, c_i, $i=1, 2, 3$ τὰ διευθύνοντα συνημίτονα αὐτῶν, αἱ συντεταγμέναι τῶν ἄκρων τῶν τριῶν ἡμιχορδῶν θὰ εἶνε ἀνάλογοι τῶν ἀντιστοίχων αὐτῶν συνημιτόνων καὶ θὰ ἔχωμεν, ἐπειδὴ ταῦτα κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς

$$\frac{a_i^2}{\alpha^2}+\frac{b_i^2}{\beta^2}+\frac{c_i^2}{\gamma^2}=\frac{1}{\alpha'^2},\ \frac{1}{\beta'^2},\ \frac{1}{\gamma'^2}.$$

ἐπειδὴ δὲ ἐπὶ τοῦ διαμετρικοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς ἑκάστην τῶν διαμέτρων κεῖνται αἱ δύο ἄλλαι συζυγεῖς αὐτῆς διάμετροι, θὰ εἶνε $\dfrac{a_i\, a_k}{\alpha^2}+\dfrac{b_i\, b_k}{\beta^2}+\dfrac{c_i\, c_k}{\gamma^2}=0$, $(k=1,2,3,\ i\neq k)$.

Μετασχηματίζοντες τὴν (1) διὰ τῶν γνωστῶν τύπων ἀλλαγῆς τῶν ἀξόνων, θεωρουμένων ὡς νέων τοιούτων τῶν συζυγικῶν διαμέτρων καὶ λαμβάνοντες ὑπ᾽ ὄψει τὰς ἀνωτέρω σχέσεις εὑρίσκομεν ὡς ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας τὴν $\beta'^2\gamma'^2x^2+\alpha'^2\gamma'^2y^2+\alpha'^2\beta'^2z^2=\alpha'^2\beta'^2\gamma'^2$, ἂν τεθοῦν x, y, z ἀντὶ τῶν x', y', z', ἐκ ταύτης δὲ συνάγομεν τὴν συμμετρίαν τοῦ ἐλλειψοειδοῦς π. χ. ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα $x'y'$, $x'z'$, $y'z'$ παραλλήλως πρὸς τὴν ἀντίστοιχον ἑκάστου τούτων διάμετρον.

§ 51. Ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον ἐλλειψοειδοῦς.

Εὐθεῖά τις λέγεται ***ἐφαπτομένη*** μιᾶς ἐπιφανείας εἰς ἓν σημεῖον αὐτῆς M', ἂν εἶνε ἐφαπτομένη μιᾶς τῶν γραμμῶν της, τῶν διερχομένων διὰ τοῦ M'.

Ἔστω τὸ ἐλλειψοειδὲς $\beta^2\gamma^2x^2+\alpha^2\gamma^2y^2+\alpha^2\beta^2z^2=\alpha^2\beta^2\gamma^2$ (1) καὶ σημεῖον αὐτοῦ M' (x',y',z'). Αἱ ἐξισώσεις εὐθείας, τεμνούσης τὴν ἐπιφάνειαν (1) εἰς τὰ $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i=1$, 2 δύνανται τὰ τεθοῦν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$y_1-y_2=\frac{x_1-x_2}{x-x_1}(y-y_1),\quad z_1-z_2=\frac{x_1-x_2}{x-x_1}(z-z_1). \tag{2}$$

Ἐπειδὴ τὰ M_i κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς (1) θὰ εἶνε

$$\beta^2\gamma^2x_i^2+\alpha^2\gamma^2y_i^2+\alpha^2\beta^2z_i^2=\alpha^2\beta^2\gamma^2,$$

ἐκ τούτων δ᾽ εὑρίσκομεν εὐκόλως

$$\frac{(x_1-x_2)\,(x_1+x_2)}{\alpha^2}+\frac{(y_1-y_2)\,(y_1+y_2)}{\beta^2}+\frac{(z_1-z_2)\,(z_1+z_2)}{\gamma^2}=0 \tag{3}$$

Εἰσάγοντες εἰς ταύτην τὰς τιμὰς τῶν y_1-y_2 καὶ z_1-z_2 ἐκ τῶν (2) καὶ ὑποθέτοντες ὅτι τὰ M_1, M_2 τείνουν εἰς τὸ M', ὅτε καὶ

$$x_1, x_2 \twoheadrightarrow x', \quad y_1, y_2 \twoheadrightarrow y', \quad z_1, z_2 \twoheadrightarrow z'$$

εὑρίσκομεν $$\frac{(x-x')x'}{\alpha^2}+\frac{(y-y')y'}{\beta^2}+\frac{(z-z')z'}{\gamma^2}=0$$

ἢ ἐπειδὴ τὸ M' κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, ἔχομεν

$$\boxed{\frac{x'x}{\alpha^2}+\frac{y'y}{\beta^2}+\frac{z'z}{\gamma^2}=1} \tag{4}$$

ἥτις παριστάνει ἐπίπεδον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖνται πᾶσαι αἱ ἐφαπτόμεναι τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ M' καὶ καλεῖται ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς τὸ σημεῖον M' τοῦ ἐλλειψοειδοῦς (1), εἶνε δὲ τοῦτο παράλληλον πρὸς τὸ διαμετρικὸν ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς χορδὰς τούτου τὰς παραλλήλους πρὸς τὴν OM', ἐπειδὴ τὰ διευθύνοντα συνημίτονα ταύτης εἶνε ἀνάλογα τῶν x', y', z'.

Ἂν δοθῇ ἐπίπεδον $Ax+By+\Gamma z=0$ καὶ ζητεῖται ἡ ἐξίσωσις ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τοῦ ἐλλειψοειδοῦς (1) καὶ παραλλήλου αὐτοῦ, ἐπειδὴ αὔτη θὰ εἶνε τῆς μορφῆς $A\,x+B\,y+\Gamma\,z+\Delta=0$, (5) ἂν (x', y', z') εἶνε τὸ σημεῖον τῆς ἁφῆς μὲ τὸ (1), ἵνα συμπίπτῃ τὸ (5) μὲ τὸ (4) πρέπει νὰ εἶνε

$$\frac{x'}{\alpha^2}=-\frac{A}{\Delta}, \quad \frac{y'}{\beta^2}=-\frac{B}{\Delta}, \quad \frac{z'}{\gamma^2}=-\frac{\Gamma}{\Delta} \tag{6}$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ (x', y', z') κεῖται ἐπὶ τοῦ (1) θὰ ἔχωμεν

$$\frac{x'^2}{\alpha^2}+\frac{y'^2}{\beta^2}+\frac{z'^2}{\gamma^2}=\frac{A^2\alpha^2}{\Delta^2}+\frac{B^2\beta^2}{\Delta^2}+\frac{\Gamma^2\gamma^2}{\Delta^2}=1,$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\Delta=\pm\sqrt{A^2\alpha^2+B^2\beta^2+\Gamma^2\gamma^2}$.

Ἤτοι ὑπάρχουν δύο ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τοῦ (1) παράλληλα πρὸς τὸ δοθέν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 526. Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τῆς Ελ καθ' ἣν τέμνεται τὸ ἐλλειψοειδὲς $\beta^2\gamma^2x^2+\alpha^2\gamma^2y^2+\alpha^2\beta^2z^2=\alpha^2\beta^2\gamma^2$ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$.

527. Εὕρετε τὴν ἀναγκαίαν καὶ ἱκανὴν συνθήκην, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ πληροῦν οἱ συντελεσταὶ τῶν ἐξισώσεων εὐθείας, ἵνα αὔτη ἐφάπτεται δοθέντος ἐλλειψοειδοῦς.

528. Εὕρετε τὰς τομὰς τοῦ ἐλλειψοειδοῦς $\beta^2\gamma^2x^2+\alpha^2\gamma^2y^2+\alpha^2\beta^2z^2=\alpha^2\beta^2\gamma^2$ ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων $y=y'$, $z=z'$ διὰ τὰς πραγματικὰς τιμὰς τῶν y' καὶ z'.

529. Εὕρετε τὸν τόπον τῶν ἑστιῶν τῶν τομῶν τοῦ ἀνωτέρω ἐλλειψοειδοῦς ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων $z=z'$.

530. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τοῦ κώνου, τοῦ ἔχοντος κορυφὴν τὸ κέντρον

τοῦ ἀνωτέρω ἐλλειψοειδοῦς καὶ βάσιν τὴν τομὴν αὐτοῦ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$.

531. Εὕρετε τὰς ἐξισώσεις ἐφαπτομένων ἐπιπέδων ἐλλειψοειδοῦς, τὰ ὁποῖα ἄγονται διὰ δοθείσης εὐθείας, ἢ εἶνε κάθετα ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

532. Δείξατε ὅτι, ἂν διά τινος σημείου τοῦ χώρου ἀχθοῦν ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα εἰς ἐλλειψοειδές, ὁ τόπος τῶν ἐπαφῶν αὐτῶν εἶνε ἔλλειψις.

533. Ἡ κάθετος εὐθεῖα ἐπὶ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον ἐλλειψοειδοῦς εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς αὐτοῦ λέγεται *κάθετος* τοῦ ἐλλειψοειδοῦς εἰς τὸ σημεῖον αὐτό. Εὕρετε τὰς ἐξισώσεις τῆς καθέτου τοῦ ἐλλειψοειδοῦς εἰς τὸ σημεῖον αὐτοῦ $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

§ 52. Τὸ ἐλλειψοειδὲς ὡς ἀπεικόνισις σφαίρας.

Τὸ ἐλλειψοειδὲς μὲ μήκη ἀξόνων 2α, 2β, 2γ θεωρεῖται καὶ ὡς ἀπεικόνισις τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2=\alpha^2$ (1) ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι εἰς τὸ σημεῖον $M(x,y,z)$ ἀντιστοιχῇ ὡς εἰκὼν αὐτοῦ τὸ $M'(x',y',z')$, προκῦπτον διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ

$$x'=x, \quad y'=\frac{\beta}{\alpha}y, \quad z'=\frac{\gamma}{\alpha}z \qquad (2)$$

Πράγματι ἡ ἐξίσωσις ἐπιφανείας τοῦ ἐλλειψοειδοῦς προκύπτει ἐκ τῆς (1), ἂν ἀντικατασταθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν x, y, z διὰ τῶν ἴσων αὐτῶν ἐκ τῶν (2).

Ὡς ἐξισώσεις τοῦ ἐλλειψοειδοῦς θεωροῦμεν ἐνίοτε καὶ τὰς

$$x=\alpha\,\sigma\upsilon\nu\,u\,\sigma\upsilon\nu\,v, \quad y=\beta\,\sigma\upsilon\nu\,u\,\eta\mu\,v, \quad z=\gamma\,\eta\mu\,u \qquad (3)$$

διὰ τῶν ὁποίων ἐκφράζονται τὰ x, y, z ὡς συναρτήσεων τῶν ἀνεξαρτήτων μεταξύ των μεταβλητῶν u, v.

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν τῆς ἀντιστοιχίας τῶν σημείων M καὶ M′ ἀποδεικνύονται εὐκόλως καὶ αἱ ἑξῆς ἰδιότητες.

Ἐὰν τὰ σημεῖα M κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδου καὶ τὰ M′ κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον καλεῖται ἀντίστοιχον τοῦ πρώτου, τέμνονται δὲ ταῦτα εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τοῦ ἄξονος τῶν x, ἐπειδὴ εἶνε $x=x'$.

Ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν x ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἑαυτά, ἕκαστον δὲ τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων ἀντιστοιχεῖ πρὸς ἑαυτὸ καὶ τὰ ἀντίστοιχα ἐπίπεδα δύο παραλλήλων ἐπιπέδων εἶνε ἐπίπεδα παράλληλα.

Ἐὰν τὰ σημεῖα M κεῖται ἐπ' εὐθείας καὶ τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν M′ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ἕκαστος τῶν ἀξόνων συντεταγμένων ἀντιστοιχεῖ πρὸς ἑαυτόν.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι εἶνε παράλληλοι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν εἶνε παράλληλοι.

Εἰς τὸ μέσον τμήματος εὐθείας M_1M_2 ἀντιστοιχεῖ τὸ μέσον τοῦ ἀντιστοίχου αὐτοῦ τμήματος $M'_1M'_2$. Καὶ γενικῶς, ἀντίστοιχα σημεῖα ἐπὶ ἀντιστοίχων τμημάτων αὐτῶν κείμενα χωρίζουν αὐτὰ εἰς μέρη ἔχοντα ἴσους λόγους.

Τὰ μέσα παραλλήλων χορδῶν τῆς σφαίρας κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδου, διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς, τοῦ ἐλλειψοειδοῦς δὲ ἐπὶ διαμετρικοῦ αὐτοῦ.

Ἐὰν ἡ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἀγομένη εὐθεῖα παράλληλος πρὸς παραλλήλους χορδὰς αὐτῆς ἔχῃ ἐξισώσεις $\alpha x : a = \beta y : b = \gamma z : c$, τὸ διαμετρικὸν ἐπίπεδον αὐτῆς κάθετον ἐπ' αὐτὰς ἔχει ἐξίσωσιν

$$\frac{ax}{\alpha} + \frac{by}{\beta} + \frac{cz}{\gamma} = 0.$$

Ἐὰν ἡ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλλειψοειδοῦς ἀγομένη εὐθεῖα παράλληλος πρὸς παραλλήλους χορδὰς αὐτοῦ ἔχῃ ἐξισώσεις $x:a = y: b = z: c$, τὸ διαμετρικὸν ἐπίπεδον αὐτοῦ τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς αὐτὰς ἔχει ἐξίσωσιν

$$\frac{ax}{\alpha^2} + \frac{by}{\beta^2} + \frac{cz}{\gamma^2} = 0.$$

Ἐπειδὴ τὰ διευθύνοντα συνημίτονα εὐθείας ΟΜ διερχομένης διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας εἶνε, ἂν τὸ Μ (x, y, z) κεῖται ἐπ' αὐτῆς,

$$x : \alpha, \quad y : \alpha, \quad z : \alpha$$

τὰ διευθύνοντα συνημίτονα τῆς ἀντιστοίχου αὐτῆς εὐθείας ΟΜ' τοῦ Μ' κειμένου ἐπὶ τῆς ἐλλειψοειδοῦς εἶνε

$$\frac{x'}{\alpha}, \frac{y'}{\alpha}\frac{\alpha}{\beta}, \frac{z'}{\alpha}\frac{\alpha}{\gamma}, \quad \text{ἢ} \quad \frac{x'}{\alpha}, \frac{y'}{\beta}, \frac{z'}{\gamma}.$$

Ἄρα, ἂν a_i, b_i, c_i, $i = 1, 2, 3$, εἶνε τὰ διευθύνοντα συνημίτονα τριῶν συζυγικῶν διαμέτρων τῆς σφαίρας (ἀνὰ δύο καθέτων ἐπ' ἀλλήλας) καὶ a'_i, b'_i, c'_i τὰ τῶν ἀντιστοίχων αὐτῶν διαμέτρων τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, θὰ ἔχωμεν ἕνεκα τῶν (2)

$$a'_i : b'_i : c'_i = \alpha\, a_i : \beta\, b_i : \gamma\, c_i .$$

Ἕνεκα τῆς καθετότητος τῶν διαμέτρων τῆς σφαίρας θὰ εἶνε $a_i a_j + b_i b_j + c_i c_j = 0$, $(j=1,2,3,\ i \neq j)$ αἵτινες τρέπονται εἰς τὰς ἑπομένας,

$$\frac{a'_i a'_j}{\alpha^2} + \frac{b'_i b'_j}{\beta^2} + \frac{c'_i c'_j}{\gamma^2} = 0.$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι, ἐκ δύο διαμέτρων μιᾶς τριάδος συζυγικῶν διαμέτρων ἐλλειψοειδοῦς εὑρίσκεται ἡ τρίτη, ὡς ἐξάγεται τοῦτο καὶ ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς τριάδος.

Τὰ περὶ πόλου καὶ πολικοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς σφαῖραν ἰσχύουν κατ᾽ ἀναλογίαν καὶ δι᾽ ἐλλειψοειδές, τὸ ὁποῖον θεωρεῖται ὡς ἀπεικόνισις τῆς σφαίρας ἢ ἀντίστοιχον αὐτῆς σχῆμα. Διότι, ἐπειδὴ εἰς ἀκτῖνας διερχομένας διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ἀντιστοιχοῦν ἀκτῖνες διερχόμεναι δι᾽ ἑνὸς σημείου, καὶ εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν ἀκτίνων τῆς πρώτης δέσμης μετὰ τῆς σφαίρας, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδου, ἀντιστοιχοῦν σημεῖα κείμενα ἐπὶ ἐπιπέδου, ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὸ πρῶτον. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο, ἐφ᾽ οὗ κεῖνται τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν ἀκτίνων τῆς δευτέρας δέσμης μετὰ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς καλεῖται ***πολικὸν ἐπίπεδον*** τοῦ κέντρου τῆς δέσμης, τὸ ὁποῖον καλεῖται ***πόλος*** τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὸ ἐλλειψοειδές.

Τὴν ἐξίσωσιν πολικοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς ἐλλειψοειδὲς δοθέντος πόλου εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς. Θεωροῦμεν τὸ ἀντιστοιχοῦν σημεῖον τοῦ πόλου εἰς τὴν σφαῖραν ἔστω τὸ (ξ,η,ζ). Τὸ πολικὸν ἐπίπεδον τούτου ὡς πρὸς τὴν $x^2+y^2+z^2=\alpha^2$ ἔχει ἐξίσωσιν $\xi\bar{x}+\eta y+\zeta z=\alpha^2$. Θέτοντες ἀντὶ τῶν

x,y,z καὶ ξ,η,ζ τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν x', $y'\frac{\alpha}{\beta}$, $z'\frac{\alpha}{\gamma}$ καὶ

ξ', $\eta'\frac{\alpha}{\beta}$, $\zeta'\frac{\alpha}{\gamma}$ δια τὸ ἐλλειψοειδές, ἔχομεν

$\xi'x'+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\eta'y'+\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\zeta'z'=\alpha^2$, ἥτις εἶνε ἐξίσωσις τοῦ πολικοῦ ἐπιπέδου τοῦ πόλου (ξ', η', ζ') ὡς πρὸς τὸ ἐλλειψοειδὲς

$$\beta^2\gamma^2x^2+\alpha^2\gamma^2y^2+\alpha^2\beta^2z^2=\alpha^2\beta^2\gamma^2.$$

Θέτοντες x,y,z ἀντὶ τῶν x',y',z' καὶ ξ,η,ζ ἀντὶ τῶν ξ', η', ζ' ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ πολικοῦ ἐπιπέδου τοῦ πόλου (ξ,η,ζ) ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\boxed{\frac{\xi x}{\alpha^2}+\frac{\eta y}{\beta^2}+\frac{\zeta z}{\gamma^2}=1} \qquad (4)$$

Ἐὰν ὁ πόλος (ξ,η,ζ) κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, ἡ ἐξίσωσις (4) εἶνε ἡ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο. Ἤτοι, ὅταν ὁ πόλος κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, τὸ πολικὸν ἐπίπεδον εἶνε ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον αὐτοῦ εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο.

Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν εὐκόλως τὰς ἑξῆς ἰδιότητας.

Τὰ μὲν πολικὰ ἐπίπεδα σημείων κειμένων ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου διέρχονται διὰ τοῦ πόλου τοῦ ἐπιπέδου τούτου, τὰ δὲ τῶν σημείων εὐθείας διέρχονται δι᾽ ἄλλης εὐθείας, ἥτις καλεῖται ἀντίστροφος πολικὴ τῆς πρώτης.

Ἂν τετράεδρόν τι μὲ κορυφὰς τὰ (x_i, y_i, z_i), $i=1, 2, 3, 4$, εἶνε ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν (1), ὁ ὄγκος αὐτοῦ V ἀπολύτως θεωρούμενος δίδεται ὑπὸ τοῦ ἑνὸς ἕκτου τῆς ὁριζούσης τῶν x_i, y_i, z_i, 1. εἰς τοῦτο δ' ἀντιστοιχεῖ ἄλλο εἰς τὸ ἐλλειψοειδές, μὲ κορυφὰς τὰ (x'_i, y'_i, z'_i), ὅπου εἶνε $x_i = x'_i$, $y_i = y'_i \dfrac{\alpha}{\beta}$, $z_i = z'_i \dfrac{\alpha}{\gamma}$.

Ὁ ὄγκος τούτου $V' = \dfrac{\beta\gamma}{\alpha^2}.V$, καὶ οἱ ὄγκοι τῶν ἀντιστοίχων τούτων τετραέδρων ἔχουν σταθερὸν λόγον ἴσον μὲ $\dfrac{\beta\gamma}{\alpha^2}$. Ἐὰν κατ' ἀναλογίαν θεωρήσωμεν δύο ἀντίστοιχα πολυεδρικὰ σώματα, οἱ ὄγκοι αὐτῶν ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον. Διότι, ἀναλύονται εἰς ἰσάριθμα τετράεδρα καὶ ἀνὰ δύο ἀντίστοιχα πρὸς ἄλληλα. Κατὰ ταῦτα, τὸ παραλληλεπίπεδον τὸ ἔχον ἀκμὰς τρεῖς συζυγικὰς ἡμιδιαμέτρους τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, ἔχει ὄγκον σταθερόν. Διότι, εἶνε εἰκὼν τοῦ κύβου, τοῦ ὁποίου ἀκμαὶ εἶνε αἱ τρεῖς ἀντίστοιχοι συζυγικαὶ ἡμιδιάμετροι τῆς σφαίρας.

Ἂν φαντασθῶμεν τυχὸν πολύεδρον ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν, θὰ ἀντιστοιχῇ εἰς τὸ ἐλλειψοειδὲς ἄλλο τοιοῦτον ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτό. Ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν πολυέδρων τούτων εἶνε ἴσος μὲ $\dfrac{\beta\gamma}{\alpha^2}$, ἡ ἰδιότης δ' αὕτη ἰσχύει ὅσον μικραὶ καὶ ἂν εἶνε αἱ ἕδραι τῶν θεωρουμένων πολυέδρων. Ἀλλ' ἂν πᾶσαι αἱ ἕδραι τοῦ α' πολυέδρου τείνουν εἰς τὸ 0, καὶ αἱ τοῦ ἄλλου θὰ τείνουν εἰς τὸ 0 καὶ ὅταν ὅριον τῆς ἐπιφανείας τοῦ α' εἶνε ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, τὸ ὅριον τῆς ἐπιφανείας τοῦ β' θὰ εἶνε τὸ ἐλλειψοειδές. Ἂν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ V_1, V_1' τοὺς ὄγκους τῶν ἀντιστοίχων πολυέδρων, διὰ V, V' τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς, θὰ εἶνε $\dfrac{V_1'}{V_1} = \dfrac{\beta\gamma}{\alpha^2}$.

Ἑπομένως καὶ $V' = \dfrac{\beta\gamma}{\alpha^2} V$, ἄρα $\boxed{V' = \dfrac{4}{3}\pi\alpha\beta\gamma.}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 534. Εὕρετε τὴν συνθήκην ἵνα ἡ εὐθεῖα, ἥτις διέρχεται διὰ τῶν σημείων M_i (x_i, y_i, z_i), $i=1, 2, 3$, ἐφάπτεται τοῦ ἐλλειψοειδοῦς

$$\beta^2\gamma^2x^2+\alpha^2\gamma^2y^2+\alpha^2\beta^2z^2=\alpha^2\beta^2\gamma^2.$$

535. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τοῦ κυλίνδρου τῶν ἐφαπτομένων ἐλλειψοειδοῦς, τῶν ἐχουσῶν διευθύνοντα συνημίτονα (a, b, c).

536. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τοῦ κώνου τῶν ἐφαπτομένων, τὸν ὁποῖον ὁρίζει τὸ σημεῖον (α_1, o, o) μὲ ἐλλειψοειδές.

537. Τίς εἶνε ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς τὸ σημεῖον τοῦ ἐλλει-

ψοειδοῦς, τὸ ὁποῖον χαρακτηρίζεται ὑπὸ τοῦ ζεύγους τῶν παραμέτρων (u, v);

538. Ἄν $(\alpha a, \alpha b, \alpha c)$ παριστάνῃ σημεῖον σφαίρας, τὸ ἀντίστοιχόν του ἐπὶ τοῦ ἀντιστοίχου αὐτῆς ἐλλειψοειδοῦς εἶνε $(\alpha a, \beta b, \gamma c)$ καὶ $\alpha^2 a^2+\beta^2 b^2+\gamma^2 c^2$ τὸ τετράγωνον τῆς ἀντιστοίχου πρὸς αὐτὸ ἡμιδιαμέτρου. Ἐὰν ἔχωμεν τρεῖς συζυγικὰς ἡμιδιαμέτρους καὶ λάβωμεν ὑπ' ὄψει ὅτι αἱ ἀντίστοιχοί των ἡμιδιάμετροι τῆς σφαίρας εἶνε ἐπ' ἀλλήλας κάθετοι, εὑρίσκομεν ὅτι «τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τριῶν συζυγικῶν ἡμιδιαμέτρων ἐλλειψοειδοῦς εἶνε σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$».

539. Εἰς διάμετρον ἐλλειψοειδοῦς ἔχουσαν διευθύνοντα συνημίτονα (a'_1, b'_1, c'_1) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν κάθετον ἐπ' αὐτὴν καὶ συζυγῆ αὐτῆς. Διότι, ἀρκεῖ νὰ προσδιορίσωμεν τὰ (a'_2, b'_2, c'_2) ἐκ τῶν ἐξισώσεων

$$\frac{a'_1 a'_2}{\alpha^2}+\frac{b'_1 b'_2}{\beta^2}+\frac{c'_1 c'_2}{\gamma^2}=1, \quad a'_1 a'_2+b'_1 b'_2+c'_1 c'_2=0.$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι δι' ἑκάστης διαμέτρου ἐλλειψοειδοῦς δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἓν ἐπίπεδον ὥστε ἡ ἔλλειψις καθ' ἣν τέμνει τὸ ἐλλειψοειδὲς νὰ ἔχῃ τὴν δοθεῖσαν διάμετρον ὡς μεγάλον ἄξονα αὐτῆς.

540. Ἐξετάσατε τὴν κίνησιν τοῦ πολικοῦ ἐπιπέδου σημείου ὡς πρὸς ἐλλειψοειδές, ὅταν τὸ σημεῖον διαγράφῃ μίαν διάμετρον αὐτοῦ.

541. Τίνες εἶνε αἱ ἐξισώσεις τῆς ἀντιστρόφου πολικῆς τῆς εὐθείας

$$x=x_1+\rho a, \quad y=y_1+\rho b, \quad z=z_1+\rho c$$

ὡς πρὸς τὸ ἐλλειψοειδὲς $\beta^2\gamma^2 x^2+\alpha^2\gamma^2 y^2+\alpha^2\beta^2 z^2=\alpha^2\beta^2\gamma^2$.

542. Δείξατε μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἀντιστρόφων πολικῶν, ὅτι δι' ἑκάστης εὐθείας δυνάμεθα νὰ φέρωμεν δύο (πραγματικὰ ἢ φανταστικὰ) ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τοῦ ἐλλειψοειδοῦς.

543. Δείξατε ὅτι τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα ἐλλειψοειδοῦς εἰς σημεῖα αὐτοῦ ἔχοντα τὴν αὐτὴν τετμημένην, τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον τοῦ ἄξονος τῶν x.

544. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τοῦ πολικοῦ ἐπιπέδου τοῦ σημείου (x_1, y_1, z_1) ὡς πρὸς ἐλλειψοειδὲς ἀναφερόμενον εἰς ἄξονας τὰς συζυγικὰς διαμέτρους αὐτοῦ μὲ μήκη $2\alpha'$, $2\beta'$, $2\gamma'$.

545. Εὕρετε διὰ μετασχηματισμοῦ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου ἐλλειψοειδοῦς εἰς τὸ (x_1, y_1, z_1) καὶ ὡς πρὸς ἄξονας τὰς διαμέτρους αὐτοῦ μὲ μήκη $2\alpha', 2\beta', 2\gamma'$.

Περὶ ὑπερβολοειδῶν.

§ 53. Ἐξισώσεις ὑπερβολοειδῶν.

Καλοῦμεν ***ὑπερβολοειδῆ*** τὰς ἐπιφανείας, αἵτινες γίνονται ὑπὸ ἐλλείψεως

$$\mu^2 x^2+\lambda^2 y^2=\lambda^2\mu^2, \quad z=\nu, \tag{1}$$

κινουμένης ὥστε νὰ συναντᾷ τὰς σταθερὰς ὑπερβολὰς

$$\gamma^2 x^2-\alpha^2 z^2=\pm\alpha^2\gamma^2, \quad y=0 \tag{2}$$

καὶ

$$\gamma^2 y^2-\beta^2 z^2=\pm\beta^2\gamma^2, \quad x=0 \tag{3}$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς ἐξισώσεις τῶν ὑπερβολοειδῶν, εὑρίσκομεν πρῶτον σχέσεις μεταξὺ τῶν παραμέτρων λ, μ, ν, ἐκφράζοντες ὅτι ἡ E_λ (1) συναντᾷ ἑκάστην τῶν Y_π (2) καὶ (3)· ἤτοι ἀπαλείφομεν τὰ x, y, z μεταξὺ τῶν (1) καὶ (2) καθὼς καὶ τῶν (1) καὶ (3) καὶ εὑρίσκομεν

$$\gamma^2\lambda^2-\alpha^2\nu^2=\pm\alpha^2\gamma^2,\quad \gamma^2\mu^2-\beta^2\nu^2=\pm\beta^2\gamma^2 \tag{4}$$

Ἀπαλείφομεν τώρα μεταξὺ τούτων καὶ τῶν (1) τὰ λ, μ, ν καὶ εὑρίσκομεν

$$\boxed{\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=\pm 1} \tag{4'}$$

αἵτινες εἶνε αἱ ἐξισώσεις τῶν ἐπιφανειῶν· καὶ ἂν μὲν τὸ β΄ μέλος τῆς (4΄) εἶνε $+1$, τὸ ὑπερβολοειδὲς λέγεται ***μονόχωνον***, ἂν δὲ -1, ***δίχωνον***.

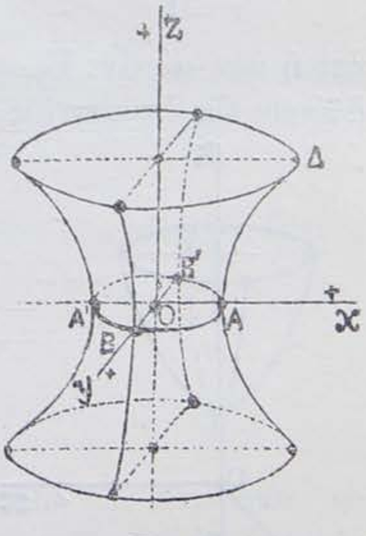
Ἐκ τῶν (4΄) φαίνεται ἡ συμμετρία ἑκάστης τῶν ἐπιφανειῶν ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν Ο τῶν συντεταγμένων, ὡς πρὸς ἕκαστον τῶν ἀξόνων καὶ τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων, καὶ καλεῖται τὸ μὲν Ο ***κέντρον*** τῶν ἐπιφανειῶν, τὰ συντεταγμένα ἐπίπεδα ***πρωτεύοντα*** ἐπίπεδα αὐτῶν, τμήματα δὲ τῶν ἀξόνων μὲ μήκη 2α, 2β, 2γ καὶ μὲ μέσα αὐτῶν εἰς τὸ Ο λέγονται ***ἄξονες*** τῶν ἐπιφανειῶν.

Αἱ τομαὶ τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς εἶνε ὑπὸ μὲν τοῦ $z=0$ ἔλλειψις μὲ μήκη ἀξόνων 2α, 2β, ὑπὸ δὲ τῶν $x=0$ καὶ $y=0$ ὑπερβολαὶ μὲ μήκη ἀξόνων 2β, 2γ καὶ 2α, 2γ (σχ. 47). Ἡ τομὴ τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ τοῦ $z=z'$ εἶνε ἡ E_λ

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1+\frac{z'^2}{\gamma^2},\quad z=z',$$

μὲ μήκη ἀξόνων ἀνάλογα τῶν α, β.

Ἡ E_λ ΑΒ΄Α΄Β, καθ' ἣν τέμνεται ἡ ἐπιφάνεια ὑπὸ τοῦ $z=0$ εἶνε ἡ ἐλαχίστη τῶν τομῶν αὐτῆς ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων $z=z'$, λέγεται δὲ καὶ ***λαιμὸς*** αὐτῆς.



Σχ. 47.

Ἡ τομὴ ὑπὸ τοῦ $y=y'$ ἔχει ἐξισώσεις

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1-\frac{y'^2}{\beta^2},\quad y=y'$$

καὶ ἂν εἶνε $|y'|<\beta$, τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τέμνει τὸν λαιμόν, διότι οὗτος ἔχει ἄξονας μὲ μήκη 2α, 2β, ἐνῷ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τέμνει τὸν μικρὸν ἄξονα ΒΒ΄ μεταξὺ τοῦ Ο καὶ τοῦ Β ἢ Β΄, ὅπου εἶνε $(B'B)=2\beta$. Αἱ τομαὶ αὗται ὑπὸ τῶν $y=y'$ εἶνε Y_π

μὲ μήκη τῶν ἀξόνων ἀνάλογα τῶν $2\alpha, 2\gamma$ καὶ ἀσυμπτώτους παραλλήλους.

Διὰ $y=\pm\beta$, αἱ τομαὶ εἶνε ζεῦγος εὐθειῶν, διερχομένων διὰ τῶν σημείων B καὶ B′, μὲ ἐξισώσεις

$$\gamma x \pm \alpha z = 0, \quad y = \pm\beta. \qquad (5)$$

Ἀνάλογα παρατηροῦμεν διὰ τὰς τομὰς τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ τῶν $x=x'$.

Ἐκ τῶν τομῶν τῆς ἐπιφανείας παρατηροῦμεν ὅτι, αὕτη ἀποτελεῖται ἐκ μιᾶς χώνης, ἐκτεινομένης ἑκατέρωθεν τοῦ xy ἐπ᾽ ἄπειρον, ἥτις εὐρύνεται καθόσον ἀφίσταται τοῦ $z=0$, παρουσιάζει δὲ τὸ μεγαλύτερον στένωμα κατὰ τὴν τομὴν αὐτῆς ὑπ᾽ αὐτοῦ. Ἡ χώνη αὕτη εἶνε κυρτὴ πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος τῶν z, διότι, ἂν φαντασθῶμεν ἐπίπεδα $y=\lambda x$, ὑπὸ τούτων αἱ τομαὶ αὐτῆς θὰ εἶνε Y_π μὲ ἐξισώσεις $\dfrac{\beta^2+\alpha^2\lambda^2}{\alpha^2\beta^2}x^2 - \dfrac{z^2}{\gamma^2} = 1, \quad y=\lambda x,$

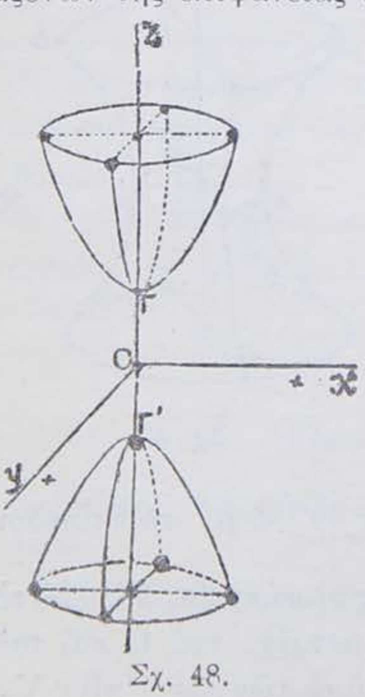
ἔχουσαι κλάδους συμμετρικοὺς ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν z καὶ τῶν ὁποίων τὰ κυρτὰ εἶνε ἐστραμμένα πρὸς αὐτόν.

Ἐκ τῶν τριῶν ἀξόνων τῆς ἐπιφανείας οἱ δύο πρῶτοι λέγονται ***πρωτεύοντες***, ὁ δ᾽ ἄλλος ***δευτερεύων***, ὡς μὴ ἔχων κοινὰ σημεῖα μετ᾽ αὐτῆς, διότι διὰ $x=0$, $y=0$ ἔχομεν $z^2=-\gamma^2$.

Αἱ τομαὶ τοῦ διχώνου ὑπερβολοειδοῦς ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων $z=0$, $y=0$, $x=0$, ἔχουν ἐξισώσεις κατὰ σειράν

$$\beta^2x^2+\alpha^2y^2=-\alpha^2\beta^2, \quad \gamma^2x^2-\alpha^2z^2=-\alpha^2\gamma^2, \quad \gamma^2y^2-\beta^2z^2=-\beta^2\gamma^2$$
$$z=0, \qquad\qquad y=0, \qquad\qquad x=0$$

καὶ ἡ μὲν α′ εἶνε E_λ φανταστική, αἱ δὲ ἄλλαι Y_π. Ἐκ τῶν τριῶν ἀξόνων τῆς ἐπιφανείας οἱ μὲν δύο πρῶτοι θεωροῦνται ὡς τοιοῦτοι μόνον ἕνεκα τῆς συμμετρίας τὴν ὁποίαν ἔχει ὡς πρὸς αὐτούς, χωρὶς νὰ ἔχουν κοινόν τι σημεῖον μετ᾽ αὐτῆς, λέγονται δὲ ***δευτερεύοντες*** ἄξονες τῆς ἐπιφανείας, ἐνῶ ὁ γ′ ὡς τέμνων ταύτην, λέγεται ***πρωτεύων*** ἄξων αὐτῆς (σχ. 48).



Σχ. 48.

Αἱ ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων $z=z'$ τομαὶ τῆς ἐπιφανείας ἔχουν ἐξισώσεις

$$\frac{x^2}{\alpha^2\left(\dfrac{z'^2}{\gamma^2}-1\right)} + \frac{y^2}{\beta^2\left(\dfrac{z'^2}{\gamma^2}-1\right)} = 1, \quad z=z'$$

καὶ εἶνε E_λ πραγματικαί, ἂν εἶνε $|z'|>\gamma$, εὐρύνονται δὲ καθόσον τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἀπομακρύνεται τοῦ κέντρου O. Αἱ τομαὶ τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ μὲν τῶν $z=\pm\gamma$ εἶνε τὰ σημεῖα $(0,\ 0,\ \pm\gamma)$, ὑπὸ δὲ τῶν $z=z'$, ὅταν $|z'|<\gamma$, εἶνε E_λ φανταστικαί. Ἤτοι, τὰ τοιαῦτα ἐπίπεδα δὲν ἔχουν σημεῖα κοινὰ μὲ τὴν ἐπιφάνειαν.

Τὸ δίχωνον ὑπερβολοειδὲς ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη διακεκριμένα μεταξύ των, ἀρχίζοντα ἀπὸ τὰ σημεῖα $\Gamma(0,0,\gamma)$ καὶ $\Gamma'(0,0,-\gamma)$, ἀπομακρύνονται δὲ ταῦτα εἰς ἄπειρον καὶ ἕκαστον ἀποτελεῖ μίαν χώνην, ἥτις εἶνε κοίλη μὲν πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος τῶν z, κυρτὴ δὲ πρὸς τὸ ἔξω μέρος αὐτῆς. Διότι, αἱ τομαὶ αὐτῶν ὑπὸ ἐπιπέδων $y=\lambda x$ εἶνε Y_π, μὲ πρωτεύοντα ἄξονα τὸν ἄξονα τῶν z καὶ δευτερεύοντα τὸν τῶν x, ἔχουν δὲ αὗται τὰ κυρτὰ αὐτῶν ἐστραμμένα πρὸς τὰ ἔξω τῆς ἐπιφανείας καὶ κορυφὰς τὰ Γ καὶ Γ′ (σχ. 48). Ἐπίσης αἱ ὑπὸ τῶν $z=z'$ ἐλλειπτικαὶ τομαὶ τῆς ἐπιφανείας ἔχουν τὰ κυρτὰ αὐτῶν ἐστραμμένα πρὸς τὰ ἔξω αὐτῆς.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκομεν τὰς τομὰς τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων $x=x'$ καὶ $y=y'$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς τομὰς τῶν ὑπερβολοειδῶν ὑπὸ ἐπιπέδων διερχομένων διὰ τοῦ κέντρου αὐτῶν, ἐργαζόμεθα καθὼς καὶ διὰ τὸ ἐλλειψοειδὲς (σελ. 116—8), καθὼς καὶ ἂν ζητοῦμεν ἐκ τούτων τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα τέμνουν αὐτὰ κατὰ περιφερείας κύκλων. Οὕτω διὰ τὸ μονόχωνον, ἂν ὑποτεθῇ $\alpha>\beta$, εὑρίσκομεν ὡς ἐξισώσεις τοιούτων ἐπιπέδων τὰς $\gamma\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\,y\pm\beta\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}\,z=0$.

Διὰ τὸ δίχωνον εὑρίσκομεν ὅτι, ἐπίπεδα διερχόμενα διὰ τῆς ἀρχῆς καὶ τέμνοντα αὐτὸ κατὰ περιφερείας ἐν γένει, ἂν ὑποτεθῇ $\alpha>\beta$, ἔχουν ἐξισώσεις $\gamma\sqrt{\alpha^2-\beta^2}.\,y\pm\beta\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}.\,z=0$.

Ἀλλ' ἡ τομὴ τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ τούτων εἶνε φανταστική, ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς γίνεται (διὰ $\psi=0^\circ$, βλ. σελ. 117).

$$Ax'^2+2Bx'y'+\Gamma y'^2+1=0,$$

ὅπου εἶνε $A=\Gamma=\dfrac{1}{\alpha^2}$, $B=0$, ὅτε ἔχομεν $x'^2+y'^2=-\alpha^2$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν εὐκολώτερον παράλληλα ἐπίπεδα τῶν ἀνωτέρω, τέμνοντα τὴν ἐπιφάνειαν κατὰ περιφερείας, γράφομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτῆς

οὕτω $$\frac{x^2+y^2+z^2}{\alpha^2}=-1+\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\gamma^2}\right)z^2-\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)y^2$$

ἢ $$\beta^2\gamma^2(x^2+y^2+z^2)+\gamma^2(\alpha^2-\beta^2)y^2-\beta^2(\alpha^2+\gamma^2)z^2+\alpha^2\beta^2\gamma^2=0.$$

Ἂν θέσωμεν $\gamma\sqrt{\alpha^2-\beta^2}.y \pm\beta\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}.z=c$ (σταθερόν), θὰ ἔχωμεν τομὴν μὲ ἐξισώσεις τὴν β′ π. χ. τῶν προηγουμένων καὶ τὴν

$$\beta^2\gamma^2(x^2+y^2+z^2)+(\gamma\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\,y+\beta\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}z)\,.\,c+\alpha^2\beta^2\gamma^2=0.$$

Ἐπειδὴ δ' αὕτη παριστάνει σφαῖραν πραγματικὴν μόνον, ἂν $c^2 > \frac{4\beta^4\gamma^4}{\beta^2+\gamma^2}$, ἕπεται ὅτι πρέπει πρὸς τοῦτο νὰ ἔχωμεν $|c| > \frac{2\beta^2\gamma^2}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}$

Παρατήρησις. Ὡς ἐξισώσεις τοῦ διχώνου ὑπερβολοειδοῦς δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν καὶ τὰς $x=\alpha$ εφυσυνν, $y=\beta$ εφυημν, $z=\frac{\gamma}{\text{συνu}}$, ὅπου τὰ u, v θεωροῦνται μεταβληταὶ ἀνεξάρτητοι μεταξύ των.

Πράγματι, ἂν εἰς τὴν β′ τῶν (4′) ἀντικαταστήσωμεν τὰ x,y,z διὰ τῶν ἀνωτέρω ἴσων αὐτῶν, εὑρίσκομεν ὅτι ἐπαληθεύεται.

Ἐὰν θέσωμεν $\text{εφ}\frac{u}{2}=u_1,\quad \text{εφ}\frac{v}{2}=v_1,$

εὑρίσκομεν εὐκόλως

$$x=\frac{2\alpha u_1(1-v_1^2)}{(1-u_1^2)(1+v_1^2)},\ y=\frac{4\beta u_1v_1}{(1-u_1^2)(1+v_1^2)},\ z=\frac{\gamma(1+u_1^2)}{1-u_1^2},$$

αἵτινες θεωροῦνται ἐπίσης ὡς ἐξισώσεις τοῦ διχώνου ὑπερβολοειδοῦς, ὅταν αἱ u_1, v_1 εἶνε ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων.

§ 54. Ἀσύμπτωτος κῶνος ὑπερβολοειδῶν.

Καλοῦμεν ***ἀσύμπτωτον κῶνον*** τῶν ὑπερβολοειδῶν

$$\beta^2\gamma^2x^2+\alpha^2\gamma^2y^2-\alpha^2\beta^2z^2=\pm\,\alpha^2\beta^2\gamma^2 \qquad (1)$$

τὴν ἐπιφάνειαν, ἥτις γίνεται ὑπὸ τῆς E_λ

$$\mu^2x^2+\lambda^2y^2=\lambda^2\mu^2,\ z=\nu, \qquad (1')$$

κινουμένης ὥστε νὰ συναντᾷ τὰς ἀσυμπτώτους τῶν Y_π

$$\gamma^2x^2-\alpha^2z^2=\pm\alpha^2\gamma^2,\ y=0 \quad \text{καὶ} \quad \gamma^2y^2-\beta^2z^2=\pm\beta^2\gamma^2,\ x=0.$$

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ κώνου τούτου εὑρίσκεται ὅπως καὶ τῶν ὑπερβολοειδῶν, εἶνε δὲ

$$\boxed{\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=0} \qquad (2).$$

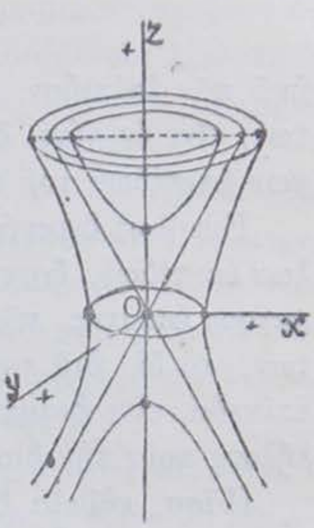
Αἱ τομαὶ τῶν ὑπερβολοειδῶν καὶ τοῦ κώνου τούτου ὑπὸ τῶν $z=z'$ εἶνε E_λ, τῶν ὁποίων τὰ μήκη τῶν ἀξόνων εἶνε ἀνάλογα τῶν α, β καὶ μεγίστη ἐξ αὐτῶν εἶνε ἡ τοῦ μονοχώνου μὲ μήκη ἀξόνων

$$2\alpha\sqrt{\frac{z'^2}{\gamma^2}+1},\quad 2\beta\sqrt{\frac{z'^2}{\gamma^2}+1}\ (\sigma\chi.\ 49),$$

ἐλαχίστη ἡ τοῦ διχώνου μὲ μήκη ἀξόνων

$$2\alpha\sqrt{\frac{z'^2}{\gamma^2}-1},\quad 2\beta\sqrt{\frac{z'^2}{\gamma^2}-1},$$

τοῦ δὲ ἀσυμπτώτου κώνου μὲ μήκη ἀξόνων $2\alpha\frac{z'}{\gamma}$, $2\beta\frac{z'}{\gamma}$. Αἱ διαφοραὶ τῶν μηκῶν τῶν ὁμωνύμων ἀξόνων τῶν ἀνωτέρω τομῶν ἑκάστου τῶν ὑπερβολοειδῶν καὶ τοῦ ἀσυμπτώ-



(Σχ. 49).

του κώνου εἶνε $2\alpha\left(\sqrt{\frac{z'^2}{\gamma^2}\pm 1}-\frac{z'}{\gamma}\right)$ καὶ $2\beta\left(\sqrt{\frac{z'^2}{\gamma^2}\pm 1}-\frac{z'}{\gamma}\right)$,

ὡς δ' εὐκόλως δεικνύεται, τείνουν αὗται εἰς τὸ 0, ὅταν τὸ $z'\to\infty$.

Ἄρα, «***αἱ τομαὶ ὑπὸ τοῦ*** $z=z'$ ***ἑκάστου τῶν ὑπερβολοειδῶν τείνουν νὰ ἐφαρμόσουν καθὼς καὶ μὲ τὴν τομὴν τοῦ ἀσυμπτώτου κώνου (2), ὅταν τὸ τέμνον ἐπίπεδον τείνει νὰ ἀπομακρυνθῇ εἰς τὸ ἄπειρον***».

Εὐκόλως δεικνύεται ὅτι, ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν ὁμωνύμων ἀξόνων τῶν ἀνωτέρω τομῶν τοῦ μονοχώνου καὶ διχώνου ὑπερβολοειδοῦς ἰσοῦται μὲ $8\alpha^2$ καὶ $8\beta^2$.

§ 55. Διαμετρικὰ ἐπίπεδα καὶ διάμετροι ὑπερβολοειδῶν.

Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις τῶν ὑπερβολοειδῶν καὶ τοῦ ἀσυμπτώτου κώνου αὐτῶν $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=\varepsilon$, ὅπου $\varepsilon=\pm 1$ ἢ 0 (1).

Εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι, τὰ μέσα χορδῶν μιᾶς τῶν ἐπιφανειῶν (τμημάτων εὐθειῶν περατουμένων εἰς αὐτὴν) παραλλήλων, μὲ διευθύνοντα συνημίτονα a, b, c, κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς, τὸ ὁποῖον καλεῖται ***διαμετρικὸν*** ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας, ἔχει δ' ἐξίσωσιν

$$\boxed{\frac{ax}{\alpha^2}+\frac{by}{\beta^2}-\frac{cz}{\gamma^2}=0} \qquad (2)$$

ἐνῷ πᾶν ἐπίπεδον, διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου τῶν ἐπιφανειῶν τούτων, εἶνε ἐν γένει διαμετρικὸν ἐπίπεδον αὐτῶν, ἐκτὸς τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων τοῦ ἀσυμπτώτου κώνου.

Εὐκόλως δεικνύεται ὅτι, αἱ τομαὶ τῶν ἐπιφανειῶν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, ἔχουν τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπὶ εὐθείας, ἥτις καλεῖται ***διάμετρος*** ἑκάστης τῶν ἐπιφανειῶν καὶ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τούτων, τὸ δὲ διὰ τοῦ κέντρου παράλληλον ἐπίπεδον πρὸς τὰ ἐν λόγῳ ἐπίπεδα, εἶνε διαμετρικὸν ἐπίπεδον, ἀντιστοιχοῦν εἰς χορδὰς παραλλήλους πρὸς τὴν διάμετρον ταύτην.

Πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου, μὴ κειμένη ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἀσυμπτώτου κώνου, εἶνε διάμετρος τῶν ἐν λόγῳ ἐπιφανειῶν. Διότι, αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι πρὸς αὐτήν, ἔχουν ἀντίστοιχον διαμετρικὸν ἐπίπεδον, τὰ δὲ παράλληλα ἐπίπεδα πρὸς αὐτὸ τέμνουν τὰς ἐπιφανείας κατὰ καμπύλας ἐχούσας κέντρον.

Ἂν ΟΜ εἶνε ἡμιδιάμετρος ὑπερβολοειδοῦς μὲ διευθύνοντα συνημίτονα a, b, c καὶ (ΟΜ)$=\varrho$ καὶ $M(x,y,z)$, ἔχομεν

$$x=a\varrho,\ y=b\varrho,\ z=c\varrho\cdot \quad \text{ἄρα} \quad \frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{b^2}{\beta^2}-\frac{c^2}{\gamma^2}=\pm\frac{1}{\varrho^2}. \qquad (3)$$

Ἂν τὸ α′ μέλος τῆς ἰσότητος ταύτης ὑποτεθῇ θετικὸν καὶ τὸ β′ εἶνε θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, θὰ ἔχωμεν πραγματικὴν ἡμιδιάμετρον διὰ τὸ μονόχωνον ἢ φανταστικὴν διὰ τὸ δίχωνον ὑπερβολοειδές, καὶ ἀντιστρόφως. Παρατηρητέον ὅτι εἰς τὴν α′ περίπτωσιν εἶνε $\beta^2\gamma^2a^2+\alpha^2\gamma^2b^2-\alpha^2\beta^2c^2>0$ καὶ ἐκφράζει αὕτη ὅτι. τὸ Μ θὰ κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἀσυμπτώτου κώνου. Ἐὰν ὑποτεθῇ $\alpha<\beta$, θὰ εἶνε $\alpha\leqq\varrho$, ὡς προκύπτει ἐκ τῆς $a^2\left(\frac{1}{\varrho^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)+b^2\left(\frac{1}{\varrho^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)+c^2\left(\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{\gamma^2}\right)=0$, ἥτις εὑρίσκεται δι᾽ ἀφαιρέσεως τῆς α′ ἐκ τῶν (3) ἀπὸ τῆς $\frac{a^2}{\varrho^2}+\frac{b^2}{\varrho^2}+\frac{c^2}{\varrho^2}=\frac{1}{\varrho^2}$. Ἑπομένως, ἔχομεν σημεῖα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, ἀπέχοντα ἀπὸ τὸ κέντρον αὐτῆς ἀπόστασιν $\varrho\geqq\alpha$, κεῖνται δὲ ταῦτα ἐπὶ σφαιρῶν μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων καὶ ἀκτῖνας τὰς τιμὰς τοῦ ϱ. Εἰς τὴν β′ περίπτωσιν αἱ πραγματικαὶ ἡμιδιάμετροι τῆς ἐπιφανείας κεῖνται ἐντὸς τοῦ ἀσυμπτώτου κώνου, διότι ἔχομεν

$$\alpha^2\beta^2c^2-\beta^2\gamma^2a^2-\alpha^2\gamma^2b^2>0 \quad \text{καὶ εἶνε} \quad \varrho\geqq\gamma.$$

Ἐὰν φαντασθῶμεν τυχοῦσαν διάμετρον μιᾶς τῶν ἀνωτέρω ἐπιφανειῶν ἐπὶ δὲ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς αὐτὴν διαμετρικοῦ ἐπιπέδου δύο συζυγεῖς διαμέτρους τῆς τομῆς, αἱ τρεῖς αὗται διάμετροι λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν ***συζυγικὴν τριάδα*** διαμέτρων καὶ τὰ ἐπίπεδα τὰ ὁριζόμενα ὑπ' αὐτῶν ***συζυγικὴν τριάδα*** διαμετρικῶν ἐπιπέδων.

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν ἡ ἀρχικὴ διάμετρος τοῦ μονοχώνου π.χ. τέμνῃ ἢ μὴ τὴν ἐπιφάνειαν, ὅτε καλεῖται ***πρωτεύουσα*** ἢ ***δευτερεύουσα*** διάμετρος, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς αὐτὴν διαμετρικὸν ἐπίπεδον τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν κατὰ Y_π ἢ E_λ μὲ μόνον μίαν πραγματικὴν (πρωτεύουσαν) διάμετρον καὶ τὴν ἄλλην φανταστικὴν (δευτερεύουσαν) εἰς τὴν α′ περίπτωσιν καὶ τὰς δύο δὲ πραγματικὰς εἰς τὴν β′.

Αἱ ἐξισώσεις τῶν τριῶν ἐπιφανειῶν ὡς πρὸς ἄξονας τὰς τρεῖς συζυγικὰς διαμέτρους αὐτῶν μὲ μήκη τῶν ἐπ' αὐτῶν χορδῶν $2\alpha', 2\beta', 2\gamma'$,

εἶνε $$\boxed{\frac{x^2}{\alpha'^2}+\frac{y^2}{\beta'^2}-\frac{z^2}{\gamma'^2}=\varepsilon} \qquad \varepsilon=\pm 1 \text{ ἢ } 0. \quad (4)$$

Πράγματι, ἂν τὰ διευθύνοντα συνημίτονα τῶν συζυγικῶν διαμέτρων τῶν ὑπερβολοειδῶν εἶνε a_i, b_i, c_i, $i=1,2,3$, αἱ δὲ συντεταγμέναι τῶν ἄκρων αὐτῶν x_i, y_i, z_i, θὰ ἔχωμεν, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ τρίτη αὐτῶν τοῦ μονοχώνου εἶνε δευτερεύουσα διάμετρος, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ὡς νέον ἄξονα τῶν z,
$$\gamma^2\beta^2x_j^2+\alpha^2\gamma^2y_j^2-\alpha^2\beta^2z_j^2=\alpha^2\beta^2\gamma^2, \quad (j=1,2)$$
$$\beta^2\gamma^2(x_3 i)^2+\alpha^2\gamma^2(y_3 i)^2-\alpha^2\beta^2(z_3 i)^2=\alpha^2\beta^2\gamma^2.$$

Διὰ τὸ δίχωνον μὲ τὰς δύο πρώτας ὡς δευτερευούσας καὶ τὴν τρίτην ὡς πρωτεύουσαν συζυγεῖς διαμέτρους θὰ εἶνε
$$\beta^2\gamma^2(x_j i)^2+\alpha^2\gamma^2(y_j i)^2-\alpha^2\beta^2(z_j i)^2=-\alpha^2\beta^2\gamma^2,$$
$$\beta^2\gamma^2x_3^2+\alpha^2\gamma^2y_3^2-\alpha^2\beta^2z_3^2=-\alpha^2\beta^2\gamma^2.$$

Ἀλλ' εἶνε $x_1=a_1\alpha'$, $y_1=b_1\alpha'$, $z_1=c_1\alpha'$, $x_2=a_2\beta'$ κλπ., καὶ ἑπομένως διὰ τὴν περίπτωσιν τοῦ μονοχώνου π. χ. ἔχομεν
$$\frac{a_i^2}{\alpha^2}+\frac{b_i^2}{\beta^2}-\frac{c_i^2}{\gamma^2}=\frac{1}{\alpha'^2},\ \frac{1}{\beta'^2},-\frac{1}{\gamma'^2}, (\text{διὰ } i=1,2,3).$$

Ἐπειδὴ δ' ἀνὰ δύο ἐκ τῶν διαμέτρων κεῖνται ἐπὶ τοῦ διαμετρικοῦ ἐπιπέδου, τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν ἄλλην, θὰ ἔχωμεν
$$\frac{a_1a_2}{\alpha^2}+\frac{b_1b_2}{\beta^2}-\frac{c_1c_2}{\gamma^2}=0, \text{ κ.λ.π.}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῶν ὑπερβολοειδῶν τὰ x, y, z διὰ τῶν x′, y′, z′ ἐκ τῶν τύπων τῆς ἀλλαγῆς τῶν ἀξόνων

$x = a_1 x' + a_2 y' + a_3 z'$ κλπ. εὑρίσκομεν τὰς (4), ἂν γραφοῦν x, y, z ἀντὶ τῶν x′, y′, z′.

Αἱ ἰδιότητες περὶ τῶν συζυγικῶν διαμέτρων ἐλλειψοειδοῦς ἀποδεικνύονται εὐκόλως καὶ διὰ τὰς ἐπιφανείας ταύτας, ἀρκεῖ νὰ τεθῇ ἐκεῖ ὅπου εἶνε γ τὸ γi διὰ τὸ μονόχωνον καὶ ὅπου α καὶ β τὰ αi καὶ βi διὰ τὸ δίχωνον.

§ 56 Ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον ὑπερβολοειδῶν.

Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις τῶν ὑπερβολοειδῶν καὶ τοῦ ἀσυμπτώτου κώνου αὐτῶν ὡς πρὸς ἄξονας μίαν συζυγικὴν τριάδα αὐτῶν μὲ μήκη τῶν χορδῶν ἐπ' αὐτῶν $2\alpha', 2\beta', 2\gamma'$, αἱ $\frac{x^2}{\alpha'^2} + \frac{y^2}{\beta'^2} - \frac{z^2}{\gamma'^2} = \varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$ ἢ 0 καὶ $M'(x', y', z')$ τυχὸν σημεῖον μιᾶς ἐξ αὐτῶν.

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως ὡς καὶ διὰ τὸ ἐλλειψοειδές, εὑρίσκομεν ὅτι, αἱ ἐφαπτόμεναι ἑκάστης τῶν ἐπιφανειῶν, αἱ διερχόμεναι διὰ τοῦ M′, κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἔχοντος ἀντίστοιχον ἐξίσωσιν

$$\boxed{\frac{x'x}{\alpha'^2} + \frac{y'y}{\beta'^2} - \frac{z'z}{\gamma'^2} = \varepsilon}$$

καλεῖται δὲ τοῦτο ***ἐφαπτόμενον*** ἐπίπεδον τῆς ἀντιστοίχου ἐπιφανείας εἰς τὸ M′. Ἐὰν τὸ σημεῖον τοῦτο κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας π.χ. $\frac{x}{\alpha'} = \frac{z}{\gamma'}, y = 0$, κειμένης ἐπὶ τοῦ ἀσυμπτώτου κώνου, ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου αὐτοῦ εἰς τὸ M′ εἶνε $\frac{x}{\alpha'} - \frac{z}{\gamma'} = 0$.

Παρατηρητέον ὅτι τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς τὸ M′ μιᾶς τῶν ἐν λόγῳ ἐπιφανειῶν εἶνε παράλληλον πρὸς τὸ διαμετρικὸν ἐπίπεδον αὐτῆς τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς χορδὰς αὐτῆς παραλλήλους πρὸς τὴν διάμετρον αὐτῆς, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ M′. Διότι, αἱ μὲν ἐξισώσεις τῆς διαμέτρου ταύτης εἶνε $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}$, ἡ δ' ἐξίσωσις τοῦ ἐν λόγῳ διαμετρικοῦ ἐπιπέδου, $\frac{x'x}{\alpha'^2} + \frac{y'y}{\beta'^2} - \frac{z'z}{\gamma'^2} = 0$.

«Τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον μονοχώνου εἴς τι σημεῖον αὐτοῦ ἔχει κοινὰς μὲ αὐτὸ δύο εὐθείας, διερχομένας διὰ τοῦ σημείου».

Διότι, ἂν λάβωμεν ὡς ἄξονας συντεταγμένων συζυγικὴν τριάδα διαμέτρων μὲ μήκη $2\alpha'$, $2\beta'$, $2\gamma'$, τῆς ὁποίας ἡ πρώτη διέρχεται διὰ τῆς ἀφῆς, ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς τὸ $(\alpha', 0, 0)$ εἶνε $x=\alpha'$, καὶ ἡ τομὴ τούτου μὲ τὴν ἐπιφάνειαν εἶνε αἱ εὐθεῖαι

$$x=\alpha',\ \gamma'^2 y^2-\beta'^2 z^2=0 \quad \text{ἢ} \quad x=\alpha',\ \gamma' y=\pm\beta' z,$$

αἵτινες εἶνε ἀσύμπτωτοι τῆς τομῆς τοῦ ἀσυμπτώτου κώνου ὑπὸ τοῦ θεωρουμένου ἐπιπέδου.

«*Τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς σημεῖον τοῦ διχώνου ἔχει μετ' αὐτοῦ κοινὸν μόνον τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς*».

Διότι, ἂν λάβωμεν ὡς ἄξονας συζυγικὴν τριάδα διαμέτρων τῆς ἐπιφανείας μὲ μήκη $2\alpha', 2\beta', 2\gamma'$, τῶν ὁποίων μία εἶνε ἡ διερχομένη διὰ τῆς ἀφῆς, ἡ μόνη πραγματικὴ διάμετρος αὐτῆς εἶνε ἡ ἀντιστοιχοῦσα μῆκος π.χ. $2\gamma'$. Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς τὸ $(0,0,\gamma')$ εἶνε $z=\gamma'$ καὶ ἡ τομὴ αὐτοῦ μετὰ τῆς ἐπιφανείας ἔχει ἐξισώσεις

$$z=\gamma', \quad \frac{x^2}{\alpha'^2}+\frac{y^2}{\beta'^2}=0,$$ μὲ μόνην πραγματικὴν λύσιν $x=0$, $y=0$, $z=\gamma'$, ἤτοι ἡ τομὴ εἶνε τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς $(0, 0, \gamma')$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπὶ τοῦ διχώνου οὐδεμία εὐθεῖα κεῖται. Διότι, ἂν συνέβαινε τοῦτο, τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον αὐτοῦ εἰς οἱονδήποτε σημεῖον αὐτῆς θὰ περιεῖχε τὴν εὐθεῖαν ταύτην, τὸ ὁποῖον, ὡς εἴδομεν, εἶνε ἀδύνατον.

Εὐκόλως δεικνύεται ὅτι, δοθέντος ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου τῶν ὑπερβολοειδῶν, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν δύο ἐπίπεδα παράλληλα αὐτοῦ, ἐφαπτόμενα ἐν γένει τῆς μιᾶς ἢ τῆς ἄλλης ἐπιφανείας.

§ 57. Εὐθεῖαι τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς.

Ἐπειδὴ ἡ γνωστὴ ἐξίσωσις τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$\left(\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}\right)\left(\frac{y}{\beta}-\frac{z}{\gamma}\right)=\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\left(1+\frac{x}{\alpha}\right), \quad (1)$$

προκύπτει δ' αὔτη καὶ δι' ἀπαλοιφῆς τῆς παραμέτρου λ μεταξὺ τῶν

$$\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=\lambda\left(1+\frac{x}{\alpha}\right) \quad \text{καὶ} \quad \frac{y}{\beta}-\frac{z}{\gamma}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{x}{\alpha}\right), \quad (2)$$

ἕπεται ὅτι ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας κεῖνται πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι, τὰς ὁποίας παριστάνουν αἱ (2) διὰ πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ λ.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἐπὶ τῆς (1) κεῖνται καὶ πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι

$$\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=\mu\left(1-\frac{x}{\alpha}\right) \quad \text{καὶ} \quad \frac{y}{\beta}-\frac{z}{\gamma}=\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{x}{\alpha}\right). \quad (3)$$

«Δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι ἐκ τῶν (2) ἢ ἐκ τῶν (3) κεῖνται εἰς διάφορα ἐπίπεδα (δὲν τέμνονται)».

Διότι, εὐκόλως παρατηροῦμεν ὅτι, αἱ ἐξισώσεις δύο εὐθειῶν ἐκ τῶν (2) ἢ ἐκ τῶν (3), ἀντιστοιχοῦσαι εἰς δύο τιμὰς λ_1 καὶ λ_2 τοῦ λ π. χ. δὲν δύνανται νὰ ἔχουν κοινὴν λύσιν (ἂν $\lambda_1 \neq \lambda_2$).

«Τυχοῦσα εὐθεῖα ἐκ τῶν (2) καὶ τυχοῦσα ἐκ τῶν (3) τέμνονται».

Πράγματι, ἔστωσαν δύο τοιαῦται εὐθεῖαι μὲ ἐξισώσεις

$$(2')\left\{\begin{aligned} \frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}&=\lambda\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)\\ \frac{y}{\beta}-\frac{z}{\gamma}&=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\end{aligned}\right. \qquad (3')\left\{\begin{aligned} \frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}&=\mu\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\\ \frac{y}{\beta}-\frac{z}{\gamma}&=\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)\end{aligned}\right.$$

Πολλαπλασιάζοντες τὴν β′ τῶν (2′) ἐπὶ λμ, εὑρίσκομεν, διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῆς οὕτω προσκυπτούσης καὶ τῆς α′ τῶν (2′)

$$\left(\mu-\lambda\right)\frac{x}{\alpha}+\left(1+\lambda\mu\right)\frac{y}{\beta}+\left(1-\lambda\mu\right)\frac{z}{\gamma}-\left(\lambda+\mu\right)=0, \qquad (4)$$

Ἀλλ' αὕτη παριστάνει ἐπίπεδον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖται ἡ πρώτη εὐθεῖα. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ἐκ τῶν (3′) τῆς β′ εὐθείας τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν. Ἄρα αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι, κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τέμνονται, κατὰ τὰς εὐθείας δὲ ταύτας τέμνεται ἡ ἐπιφάνεια ὑπὸ τοῦ ἐφαπτομένου αὐτῆς ἐπιπέδου (4) εἰς τὴν τομὴν τῶν εὐθειῶν.

Καθ' ἣν περίπτωσιν εἶνε $\lambda=-\mu$, ἔχομεν

$$\left(1-\lambda^2\right)\frac{y}{\beta}+\left(1+\lambda^2\right)\frac{z}{\gamma}-2\lambda\frac{x}{\alpha}=0. \qquad (4')$$

ἥτις παριστάνει ἐπίπεδον καλούμενον ***ἀσύμπτωτον*** τῆς ἐπιφανείας, ἐπειδὴ παράγει τὸν ἀσύμπτωτον κῶνον τῶν θεωρουμένων ὑπερβολοειδῶν, ὅταν μεταβάλλεται τὸ λ.

Πράγματι, ἔστω καὶ ἄλλο τοιοῦτον ἐπίπεδον, ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν τιμὴν λ′ (τοῦ λ), ἔχον ἐξίσωσιν

$$(1-\lambda'^2)\frac{y}{\beta}+(1+\lambda'^2)\frac{z}{\gamma}-2\lambda'\frac{x}{\alpha}=0. \qquad (4'')$$

Αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων τῆς τομῆς τῶν (4′) καὶ (4″) ἐπαληθεύουν τὰς ἐξισώσεις ταύτας, ἄρα καὶ τὴν

$$(\lambda+\lambda')\left(\frac{y}{\beta}-\frac{z}{\gamma}\right)+\frac{2x}{\alpha}=0,$$

ἥτις προκύπτει δι' ἀφαιρέσεως αὐτῶν κατὰ μέλη καὶ μετὰ διαίρεσιν τῆς οὕτω προκυπτούσης διὰ $\lambda'-\lambda(\neq 0)$. Ἐὰν ὑποθέσωμεν $\lambda' \to \lambda$, ἡ τελευταία γίνεται $\lambda\left(\frac{y}{\beta}-\frac{z}{\gamma}\right)+\frac{x}{\alpha}=0$, ἀπαλείφοντες δὲ τὸ λ μεταξὺ ταύτης καὶ τῆς (4') εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἀσυμπτώτου κώνου.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων τῶν δύο εὐθειῶν εὑρίσκομεν ὅτι, αἱ συντεταγμέναι τῆς τομῆς αὐτῶν τίθενται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$x=\frac{\mu-\lambda}{\lambda+\mu}\alpha,\ y=\frac{\lambda\mu+1}{\lambda+\mu}\beta,\ z=\frac{\lambda\mu-1}{\lambda+\mu}\gamma.$$

Εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι, ἵνα εὐθεῖά τις ἐκ τῶν (2), ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ λ, εἶνε παράλληλος πρός τινα ἄλλην ἐκ τῶν (3), ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὸ μ, πρέπει νὰ εἶνε $\lambda=-\mu$, ἢ $\lambda+\mu=0$.

«Πᾶσα εὐθεῖα κειμένη ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας (1) τέμνει τὸν λαιμὸν αὐτῆς».

Πράγματι, αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τῆς ἐπιφανείας, τομῆς ταύτης καὶ τῶν εὐθειῶν τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς τὰς παραμέτρους λ ἐκ τῶν (2) καὶ $\frac{1}{\lambda}$ ἐκ τῶν (3), δίδονται ὑπὸ τῶν

$$x=\frac{\alpha(1-\lambda^2)}{1+\lambda^2},\ y=\frac{2\beta\lambda}{1+\lambda^2},\ z=0.$$

Ἀλλὰ τὸ σημεῖον τοῦτο κεῖται ἐπὶ τοῦ λαιμοῦ τῆς ἐπιφανείας, καὶ συνάγομεν ὅτι, δι' ἑκάστου σημείου τοῦ λαιμοῦ διέρχεται μία εὐθεῖα τῆς (1) ἐκ τῶν (2), ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν τιμὴν λ, καὶ μία ἐκ τῶν (3), ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν τιμὴν $\mu=1:\lambda$.

Αἱ διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων ἀγόμεναι εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὰς (2) καὶ (3) κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἀσυμπτώτου κώνου τῆς ἐπιφανείας (1). Πράγματι, ἂν μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων μιᾶς ἐκ τῶν εὐθειῶν τούτων (αἵτινες προκύπτουν ἐκ τῶν (2) ἢ (3), ἂν παραλειφθῇ τὸ 1 ἐκ τῆς παρενθέσεως τοῦ β' μέλους αὐτῶν), ἀπαλείψωμεν τὸ λ ἢ μ, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἀσυμπτώτου κώνου.

Τρεῖς εὐθεῖαι ἐκ τῶν (2) ἢ ἐκ τῶν (3) δὲν εἶνε παράλληλοι πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Διότι, ἂν συνέβαινε τοῦτο, αἱ εὐθεῖαι αἵτινες ἄγονται ἐκ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων ἀνὰ μία παράλληλοι πρὸς τὰς τρεῖς ἐν λόγῳ εὐθείας, θὰ ἔκειντο ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον εἶνε ἀδύνατον. Διότι τότε τὸ ἐπίπεδον τοῦτο θὰ ἔτεμνε τὸν ἀσύμπτωτον κῶνον κατὰ τρεῖς εὐθείας.

Ἐὰν εὐθεῖά τις κινουμένη συναντᾷ τὰς ἀντιστοιχούσας εὐθείας εἰς τὰ λ_i, $i=1, 2, 3$ ἐκ τῶν (2), θὰ συμπίπτῃ αὕτη διαδοχικῶς μὲ πάσας τὰς εὐθείας (3).

Διότι, ἔστω Μ σημεῖόν τι τῆς λ_1. Δι' αὐτοῦ διέρχεται μία καὶ μόνη εὐθεῖα συναντῶσα τὰς λ_2 καὶ λ_3, συμπίπτει δ' αὕτη μὲ τὴν εὐθεῖαν ἐκ τῶν

(3), τὴν διερχομένην διὰ τοῦ Μ. Ἂν δ' ὑποθέσωμεν ὅτι τοῦτο διαγράφῃ τὴν εὐθεῖαν λ_1, ἡ κινητὴ εὐθεῖα συμπίπτει διαδοχικῶς μὲ πάσας τὰς εὐθείας (3). Ἄρα,

«μονόχωνον ὑπερβολοειδὲς γράφεται ὑπὸ εὐθείας κινουμένης, ὥστε νὰ τέμνῃ τρεῖς εὐθείας σταθεράς, ἀνὰ δύο μὴ κειμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, οὐδὲ παραλλήλους πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον».

Διὰ τοῦτο τὸ μονόχωνον καλεῖται καὶ ***εὐθειογενὴς*** ἐπιφάνεια.

Παρατήρησις. Ἐπειδή, ὡς εὐκόλως δεικνύεται, τυχοῦσα εὐθεῖα καὶ ἡ ἐπιφάνεια ὑπερβολοειδοῦς ἢ ἀσυμπτώτου αὐτῶν κώνου ἔχουν τὸ πολὺ δύο κοινὰ πραγματικὰ σημεῖα, καλοῦνται αἱ ἐπιφάνειαι αὗται καὶ ***β' βαθμοῦ.***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 546. Ἂν εὐθεῖα κινῆται οὕτως, ὥστε νὰ συναντᾷ τρεῖς δοθείσας εὐθείας λ_1, λ_2, λ_3, μὴ παραλλήλους πρὸς τὸ αὐτὸν ἐπίπεδον καὶ μὴ κειμένας ἀνὰ δύο ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, παράγει ὑπερβολοειδὲς μονόχωνον.

547. Ἐὰν εἰς σημεῖον τομῆς μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς ὑπό τινος τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων ἀχθῇ ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον τῆς ἐπιφανείας, τοῦτο τέμνει τὸ ἐπίπεδον τῆς τομῆς, ἐπὶ τὸ ὁποῖον εἶνε κάθετον, κατὰ τὴν ἐφαπτομένην αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο.

548. Αἱ εὐθεῖαι τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς, προβαλλόμεναι ἐπὶ ἑνὸς τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων, γίνονται ἐφαπτόμεναι τῆς ὑπὸ τούτου γινομένης τομῆς τῆς ἐπιφανείας καὶ ἡ ἀφὴ ἑκάστης ἐφαπτομένης εἶνε σημεῖον δύο εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι προβάλλονται ἐπ' αὐτήν.

549. Ἂν 2α, 2β, 2γ εἶνε τὰ μήκη τῶν ἀξόνων καὶ 2α',2β',2γ' τὰ μήκη συζυγικῆς τριάδος διαμέτρων ὑπερβολοειδῶν, δείξατε ὅτι $\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ *(θεώρημα τοῦ Ἀπολλωνίου).*

550. Ἂν $x_1=a_1\alpha'$, $y_1=b_1\alpha'$, $z_1=c_1\alpha'$, $x_2=a_2\beta'$, $y_2=b_2\beta'$, $z_2=c_2\beta'$, $x_3=a_3\gamma'$ $y_3=b_3\gamma'$, $z_3=c_3\gamma'$ εἶνε αἱ συντεταγμέναι τῶν ἄκρων τριῶν συζυγικῶν ἡμιδιαμέτρων ἐλλειψοειδοῦς μὲ μήκη ἀξόνων 2α,2β,2γ καὶ a_i, b_i, c_i τὰ διευθύνοντα αὐτῶν συνημίτονα, νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἑδρῶν τῶν ἐν λόγῳ διαμέτρων ἰσοῦται μὲ $\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2$ *(θεώρ. τοῦ Ἀπολλωνίου).*

551. Ὁ ὄγκος τοῦ παραλληλεπιπέδου, τοῦ κατασκευαζομένου ἐπὶ τριῶν συζυγικῶν διαμέτρων ἐλλειψοειδοῦς μὲ μήκη ἀξόνων 2α, 2β,2γ εἶνε σταθερὸς *(θεώρ. τοῦ Ἀπολλωνίου).*

552. Νὰ διατυπωθοῦν καὶ ἀποδειχθοῦν τὰ ἀνάλογα πρὸς τὰ προηγούμενα θεωρήματα τοῦ Ἀπολλωνίου διὰ ὑπερβολοειδῆ.

553. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν διαμέτρων ἐλλειψοειδοῦς μὲ μήκη ἀξόνων 2α, 2β, 2γ, ἐχουσῶν τὰς δύο ἄλλας συζυγικὰς των διαμέτρους ἐπὶ τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων τοῦ κώνου $b^2c^2x^2+a^2c^2y^2-a^2b^2z^2=0$.

554. Ἐὰν προσδιορίσωμεν τετράεδρα μὲ ἕδρας ἐπὶ τριῶν διαμετρικῶν συζυγικῶν ἐπιπέδων ἐλλειψοειδοῦς καὶ ἓν ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τούτου, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν τριῶν τμημάτων, ἅτινα ὁρίζονται ὑπ' αὐτων ἐπὶ τῶν ἀντιστοίχων συζυγικῶν διαμέτρων νὰ εἶνε ἐλάχιστον, οἱ ὄγκοι πάντων τῶν τετραέδρων τούτων εἶνε ἴσοι.

555. Νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς ἐλλειψοειδὲς τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν τριῶν συζυγικῶν διαμέτρων εἶνε μέγιστον, ὅταν αἱ διάμετροι αὗται εἶνε ἴσαι.

536. Καλοῦμεν ***κάθετον εὐθεῖαν*** ἐπιφανείας τινὸς εἰς ἓν σημεῖον αὐτῆς τὴν κάθετον εὐθεῖαν ἐπὶ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο. Εὐ-

ρετε τὰς ἐξισώσεις τῆς καθέτου εἰς τὸ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ἐλλειψοειδοῦς μὲ μήκη ἀξόνων 2α, 2β, 2γ.

557. Δείξατε ὅτι αἱ συντεταγμέναι x,y,z τῶν ποδῶν τῶν καθέτων, αἵτινες ἄγονται ἀπὸ σημεῖον $N(\xi,\eta,\zeta)$ ἐπὶ ἐλλειψοειδὲς μὲ μήκη ἀξόνων 2α, 2β, 2γ τίθενται ὑπὸ τὴν μορφὴν $x=\dfrac{\alpha^2\xi}{\alpha^2+\lambda}$, $y=\dfrac{\beta^2\eta}{\beta^2+\lambda}$, $z=\dfrac{\gamma^2\zeta}{\gamma^2+\lambda}$. Αὗται ὁρίζουν ἐπιφάνειαν β' βαθμοῦ, αἱ δὲ τιμαὶ τοῦ λ εὑρίσκονται ἐκ τῆς $\dfrac{\alpha^2\xi^2}{(\alpha^2+\lambda)^2}+\dfrac{\beta^2\eta^2}{(\beta^2+\lambda)^2}+\dfrac{\gamma^2\zeta^2}{(\gamma^2+\lambda)^2}-1=0$ Ἄρα ὑπάρχουν ἐν γένει ἓξ κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐλλειψοειδές, ἀγόμεναι ἐκ τοῦ N.

558. Εὕρετε τὴν ἐξίσωσιν τῆς καθέτου ἐπὶ ὑπερβολοειδὲς εἰς ἓν σημεῖον αὐτοῦ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ καὶ τὸ πλῆθος τῶν καθέτων ἐπ' αὐτό, αἵτινες ἄγονται ἐκ σημείου $N(\xi,\eta,\zeta)$ κειμένου ἐντὸς αὐτοῦ.

559. Δίδεται ἐλλειψοειδὲς, ἔχον κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων O καὶ ἡμιάξονας α, β καὶ γ. Ἐὰν θ_i, $i=1,2,3$ εἶνε αἱ γωνίαι τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς M μὲ τοὺς ἄξονας, νὰ εὑρεθῇ διὰ τῶν θ_i, α΄) ἡ ἀπόστασις τοῦ O ἀπὸ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς τὸ σημεῖον M, β΄) ἡ ἀπόστασις (Oμ) τοῦ O ἀπὸ τῆς καθέτου ἐπὶ τὸ ἐλλειψοειδὲς εἰς τὸ M, γ΄) τὸ μῆκος τοῦ OM, δ΄) αἱ γωνίαι τῆς εὐθείας Oμ μὲ τοὺς ἄξονας, ε΄) τὸ μῆκος τοῦ τμήματος τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν εἰς τὸ M, τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τοῦ M καὶ ἑνὸς τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων.

560. Τίς εἶνε ἡ περισσότερον ἀπέχουσα τοῦ κέντρου ἐλλειψοειδοῦς μὲ μήκη 2α, 2β, 2γ, ἐκ τῶν καθέτων ἐπ' αὐτό;

561. Εἰς δύο σημεῖα M_1 καὶ M_2 ἐλλειψοειδοῦς φέρομεν τὰς καθέτους εὐθείας ἐπ' αὐτό. Δείξατε ὅτι, τὸ διὰ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς M_1M_2 διερχόμενον ἐπίπεδον καὶ κάθετον ἐπὶ τὴν χορδὴν ταύτην διέρχεται διὰ τῶν μέσων τῶν τμημάτων τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῶν καθέτων μὲ ἕκαστον τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων.

562. Δείξατε ὅτι, ἵνα ἡ εὐθεῖα $\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}=\dfrac{z-z_1}{c}$
κεῖται ἐπὶ τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς, μὲ ἄξονας 2α, 2β, 2γ, πρέπει νὰ εἶνε

$$\beta^2\gamma^2x_1^2+\alpha^2\gamma^2y_1^2-\alpha^2\beta^2z_1^2=\alpha^2\beta^2\gamma^2,\qquad \beta^2\gamma^2a^2+\alpha^2\gamma^2b^2-\alpha^2\beta^2c^2=0,$$

$$\beta^2\gamma^2ax_1+\alpha^2\gamma^2by_1-\alpha^2\beta^2cz_1=0.$$

563. Εὕρετε τὴν συνθήκην ἵνα τὸ ἐπίπεδον $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$ τέμνῃ ὑπερβολοειδὲς μὲ ἄξονας 2α, 2β, 2γ κατὰ δύο εὐθείας.

Περὶ παραβολοειδῶν.

§ 58. Ἐξισώσεις καὶ τομαὶ παραβολοειδῶν.

Καλοῦμεν ***παραβολοειδῆ*** τὰς ἐπιφανείας, αἵτινες γίνονται ὑπὸ E_λ ἢ Y_π, αἵτινες ἔχουν ἐξισώσεις

$$\nu^2y^2\pm\mu^2z^2=\mu^2\nu^2,\quad x=\lambda \tag{1}$$

καὶ ἑκάστη κινεῖται οὕτως, ὥστε νὰ συναντᾷ δύο σταθερὰς Π_α μὲ ἐξισώσεις

(2) $y^2=2px,\ z=0,$ (2) καὶ $z^2=\pm 2qx,\ y=0.$ (3)

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς ἐξισώσεις τῶν ἐπιφανειῶν τούτων, ἀπαλείφομεν τὰ x, y, z μεταξὺ τῶν (1) καὶ (2), καθὼς καὶ μεταξὺ τῶν (1) καὶ (3), ὅτε εὑρίσκομεν $\mu^2=2p\lambda$ καὶ $\nu^2=2q\lambda.$ (4)

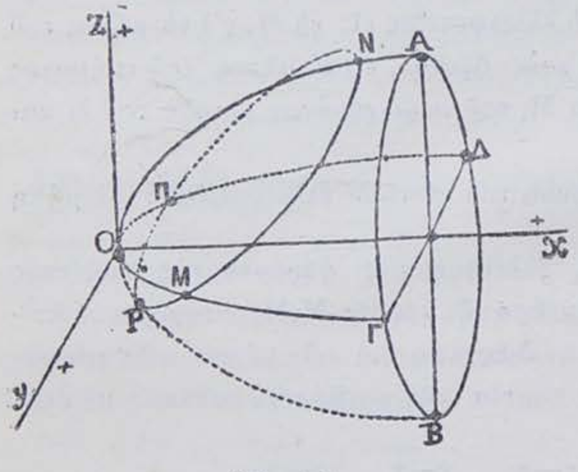
Ἀκολούθως ἀπαλείφομεν τὰ λ, μ, ν μεταξὺ τῶν (1) καὶ (4), ὅτε εὑρίσκομεν

$$\boxed{\frac{y^2}{p}\pm\frac{z^2}{q}=2x} \qquad (5)$$

Ἡ ἐπιφάνεια τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ πρώτη τῶν (5) ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ σημεῖον +, καλεῖται ***ἐλλειπτικὸν*** παραβολοειδές, ἡ δὲ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ — λέγεται ***ὑπερβολικὸν*** παραβολοειδές.

Τὰ ἐπίπεδα $z=0$ καὶ $y=0$ καλοῦνται ***πρωτεύοντα*** ἐπίπεδα τῶν ἐπιφανειῶν, ὁ δὲ ἄξων τῶν x λέγεται ***ἄξων*** αὐτῶν.

Ἡ πρώτη ἐπιφάνεια προφανῶς διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς O τῶν συντεταγμένων καὶ ἔχει μὲ τὸ ἐπίπεδον $x=0$ μόνον τὸ σημεῖον τοῦτο κοινόν, καλεῖται δὲ τὸ O ***κορυφὴ*** αὐτῆς, καὶ κεῖται αὕτη δεξιὰ τοῦ ἐν λόγῳ ἐπιπέδου, διότι ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς δὲν ἐπαληθεύεται διὰ τιμὰς τοῦ x ἀρνητικάς.



(Σχ. 50)

Τὰ ἐπίπεδα $z=0$ καὶ $y=0$ τέμνουν τὴν ἐπιφάνειαν ταύτην κατὰ Π_α, ὡς ἡ ΔΟΓ (σχ.50), μὲ ἐξισώσεις $y^2=2px,\ z=0$ (6) καὶ $z^2=2qx,\ y=0,$ (6′) αἵτινες εἶνε ἐστραμμέναι πρὸς τὸ θετικὸν μέρος τοῦ Ox, ἂν εἶνε $p>0$ καὶ $q>0$. Ἡ τομὴ αὐτῆς ὑπὸ τοῦ $z=\gamma$ εἶνε Π_α μὲ ἐξισώσεις $\frac{y^2}{p}+\frac{\gamma^2}{q}=2x,\quad z=\gamma$ (7)

Τὸ ἴχνος τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, ἥτις παριστάνεται ὑπὸ τῆς α′ τῶν ἐξισώσεων τούτων, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν xy εἶνε Π_α, ἴση μὲ τὴν (6). Διότι, ἂν μεταφέρωμεν τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων παραλλήλως πρὸς ἑαυτούς, καὶ λάβωμεν νέαν ἀρχὴν τὸ σημεῖον $\left(\frac{\gamma^2}{2q},\ 0,\ \gamma\right)$, αἱ ἀνωτέρω ἐξισώσεις λαμβάνουν τὴν μορφὴν $y'^2=2px'$, $z'=0$, ὅπου ἐτέθη $x=x'+\frac{\gamma^2}{2q}$, $y=y'$, $z=z'+\gamma$. Ἐκ τούτων ἔπεται ὅτι,

«τὸ ἐλλειπτικὸν παραβολοειδὲς δύναται νὰ παραχθῇ ὑπὸ Π_α ἴσης

μὲ τὴν (6), κινουμένην ὥστε τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς νὰ εἶνε παράλληλον τοῦ $z=0$, ὁ ἄξων αὐτῆς παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x, ἡ δὲ κορυφὴ αὐτῆς νὰ γράφῃ τὴν Π_α (6)».

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι, αἱ τομαὶ τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ ἐπιπέδων $y=\beta$ εἶνε Π_α ἴσαι μὲ τὴν (6′) καὶ κεῖνται παραλλήλως πρὸς αὐτήν. Ἄρα, ἡ ἐπιφάνεια παράγεται ὑπὸ Π_α ἴσης μὲ τὴν (6′), κινουμένην παραλλήλως πρὸς ἑαυτήν, ὥστε ἡ κορυφὴ αὐτῆς νὰ γράφῃ τὴν Π_α (6)».

Αἱ τομαὶ τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ μὲν τῶν ἐπιπέδων $y=\lambda z$ εἶνε Π_α μὲ ἐξισώσεις $\left(\frac{\lambda^2}{p}+\frac{1}{q}\right)z^2=2x, y=\lambda z$, ὑπὸ δὲ τῶν $x=\alpha$ εἶνε E_λ ὅμοιαι μὲ ἐξισώσεις

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2\alpha,\ x=\alpha, \tag{8}$$

ἐκ τῶν ὁποίων ἡ α′ παριστάνει κύλινδρον ἐλλειπτικὸν μὲ ἴχνος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $x=0$ ἴσον μὲ τὴν τομήν, ἥτις εἶνε E_λ μὲ ἄξονας ΓΔ καὶ ΑΒ παραλλήλους τῶν Oy καὶ Oz καὶ ἴσους μὲ $2\sqrt{2\alpha p}$, $2\sqrt{2\alpha q}$, κέντρον δὲ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x τὸ σημεῖον $(\alpha, 0, 0)$ (σχ. 50).

Ὅταν τὸ α αὐξάνεται ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ $+\infty$, οἱ ἄξονες τῆς E_λ αὐτῆς αὐξάνονται ὁμοίως καὶ ἔχουν λόγον $\sqrt{p/q}$, καὶ διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι αἱ τομαὶ τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων τοῦ yz εἶνε E_λ ὅμοιαι.

Διὰ νὰ εὕρωμεν ἐπίπεδα τέμνοντα τὴν ἐπιφάνειαν κατὰ περιφερείας, ἐργαζόμεθα καθὼς καὶ διὰ τὸ ἐλλειψοειδὲς ἢ καὶ ὡς ἑξῆς.

Γράφομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$x^2+y^2+z^2=2px+\left(x+\sqrt{\frac{p-q}{q}}\,z\right)\left(x-\sqrt{\frac{p-q}{q}}\,z\right).$$

καὶ ὑποθέτοντες $p>q$, παρατηροῦμεν ὅτι τὰ ἐπίπεδα $\sqrt{q}\,.x\pm\sqrt{p-q}, z=0$ ἢ καὶ παράλληλα τούτων τέμνουν τὴν ἐπιφάνειαν κατὰ περιφερείας κύκλων. Αἱ δύο αὗται σειραὶ συμπίπτουν εἰς μίαν, ὅταν εἶνε $p=q$, καλεῖται δὲ τότε ἡ ἐπιφάνεια (ἐλλειπτικὸν) παραβολοειδὲς ἐκ ***περιστροφῆς*** καὶ ἔχει ἐξίσωσιν $y^2+z^2=2px$.

Παρατηρητέον ὅτι αἱ ἐξισώσεις

$y=\sqrt{p}$ συνu συν v, $z=\sqrt{q}$ συνuημ v, $2x=$συν²u δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς τοιαῦται τοῦ ἐλλειπτικοῦ παραβολοειδοῦς, διότι ἡ α′ τῶν (5) ἐπαληθεύεται, ἂν ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτὴν τὰ x, y, z διὰ τῶν ἀνωτέρω τιμῶν αὐτῶν, ἐνῷ αἱ μεταβληταὶ u καὶ v ὑποτίθενται ἀνεξάρτητοι μεταξύ των. Ἐὰν τεθῇ $\quad \varepsilon\varphi \frac{u}{2} = u_1, \ \varepsilon\varphi \frac{v}{2} = v_1,$

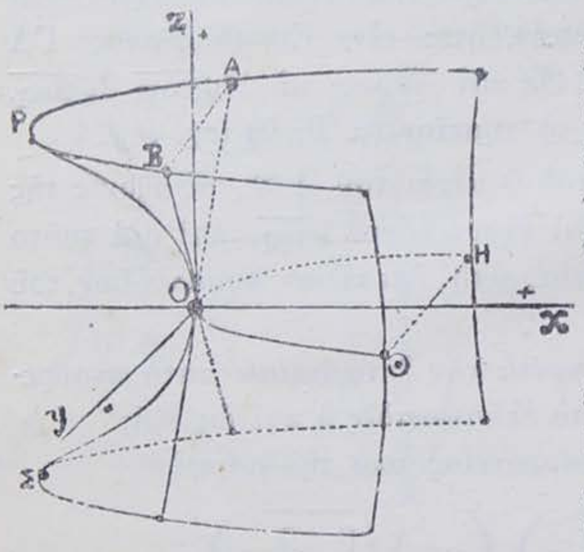
ἔχομεν

$$x = \frac{(1-u_1^2)^2}{2(1+u_1^2)^2}, \quad y = \sqrt{p}\frac{(1-u_1^2)(1-v_1^2)}{(1+u_1^2)(1+v_1^2)}, \quad z = \sqrt{q}\frac{2(1-u_1^2)v_1}{(1+u_1^2)(1+v_1^2)},$$

αἵτινες ὁρίζουν τὰ x, y, z ὡς ρητὰς συναρτήσεις τῶν u_1 καὶ v_1 καὶ θεωροῦνται ἐπίσης ὡς ἐξισώσεις τοῦ ἐλλειπτικοῦ παραβολοειδοῦς.

Τὸ ὑπερβολικὸν παραβολοειδὲς διέρχεται ἐπίσης διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων, ἐνῷ τὰ πρωτεύοντα ἐπίπεδα $z=0$ καὶ $y=0$ τέμνουν αὐτὸ κατὰ τὰς Π_α (σχ. 51) μὲ ἐξισώσεις

$$y^2 = 2px, \ z=0 \quad (9) \quad \text{καὶ} \quad z^2 = -2qx, \ y=0 \quad (10).$$



(Σχ. 51).

Πάντα τὰ ἐπίπεδα, τὰ παράλληλα πρὸς τὸ πρωτεῦον ἐπίπεδον π. χ. $z=\gamma$, τέμνουν τὴν ἐπιφάνειαν κατὰ Π_α ἴσην μὲ τὴν γινομένην ὑπὸ τοῦ $z=0$. Τῷ ὄντι, ἡ προβολὴ τῆς τομῆς

$$y^2 = 2p\left(x + \frac{\gamma^2}{2q}\right), \quad z=\gamma$$

ἐπὶ τοῦ xy εἶνε ἴση μὲ τὴν Π_α (9), ἔχει δὲ ἄξονα παράλληλον καὶ ὁμόρροπον πρὸς τὸν τῆς (9). Ἡ κορυφὴ τῆς Π_α ταύτης A P B (σχ. 51) εἶνε τὸ $\left(-\frac{\gamma^2}{2q}, 0, \gamma\right)$, καθ' ὃ τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς τέμνει τὴν τομὴν (10). Ἄρα,

«ἡ ἐπιφάνεια αὕτη γράφεται ὑπὸ Π_α κινουμένης, ὥστε ὁ ἄξων καὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς νὰ μένουν παράλληλα, ἡ δὲ κορυφὴ αὐτῆς νὰ γράφῃ ἄλλην Π_α, τῆς ὁποίας τὸ ἐπίπεδον εἶνε κάθετον ἐπὶ τὸ τῆς κινουμένης, ὁ δὲ ἄξων ἀντίρροπος».

Ἐκ τοῦ τρόπου καθ' ὃν παράγεται τὸ ὑπερβολικὸν παραβολοειδὲς λαμβάνομεν ἰδέαν τοῦ σχήματος τῆς ἐπιφανείας. Τὸ σχῆμα αὐτὸ λαμβάνει καὶ κύλινδρος μὲ ὁδηγὸν παραβολήν, ὅταν αἱ γενέτειραι αὐτοῦ κυρτωθοῦν πρὸς τὰ ἔξω καὶ γίνουν Π_α. Ἐπειδὴ δὲ τῆς γενετείρας Π_α ἑκαστον σημεῖον γράφει Π_α, συνάγομεν ὅτι δι᾽ ἑκάστου σημείου τῆς ἐπιφανείας διέρχονται δύο τομαὶ αὐτῆς ἐπίπεδοι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀντεστραμμένα τὰ κυρτὰ αὐτῶν πρὸς ἄλληλα. Διὰ τοῦτο ἡ ἐπιφάνεια αὕτη εἶνε κοιλόκυρτος.

Ἡ τομὴ τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου $x=0$ ἀποτελεῖται ἐκ δύο εὐθειῶν ΟΑ καὶ ΟΒ (σχ. 51), τῶν ὁποίων αἱ ἐξισώσεις εἶνε

$$\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}=0,\ x=0, \quad \text{καὶ} \quad \frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}=0,\ x=0.$$

Τὰ ἐπίπεδα τὰ παράλληλα πρὸς τὸν ἄξονα τῆς ἐπιφανείας τέμνουν αὐτὴν κατὰ Π_α (ἢ κατὰ εὐθεῖαν), πάντα δὲ τὰ ἄλλα κατὰ Y_π (ἢ κατὰ δύο εὐθείας τεμνομένας). Τῷ ὄντι, ἡ τομὴ αὐτῆς ὑπὸ τοῦ $z=\lambda y+\beta$, ἔχει ἐξισώσεις $z=\lambda y+\beta$, $\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2x$ καὶ δεικνύεται ὅτι εἶναι Π_α (βλ. σελ. 116—117), ἡ δὲ προβολὴ ταύτης ἐπὶ τοῦ xy ἔχει ἐξισώσεις

$$\frac{y^2}{p}-\frac{(\lambda y+\beta)^2}{q}=2x,\ z=0,$$

παριστάνουν δ᾽ αὗται Π_α μέν, ἐὰν εἶνε $q-\lambda^2 p\neq 0$, μίαν δ᾽ εὐθεῖαν, ἂν $q=\lambda^2 p$, ἤτοι ἐὰν τὸ τέμνον ἐπίπεδον εἶνε παράλληλον πρὸς ἓν τῶν ἐπιπέδων, τῶν ἐχόντων ἐξισώσεις $\frac{y}{\sqrt{p}}\mp\frac{z}{\sqrt{q}}=0$, διερχομένων διὰ τῶν εὐθειῶν ΟΑ καὶ ΟΒ καὶ τοῦ ἄξονος τῶν x.

Ἡ τομὴ τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ ἐπιπέδου $x=\lambda y+\mu z+\nu$ ἔχει ὀρθὴν προβολὴν ἐπὶ τοῦ $x=0$ μὲ ἐξισώσεις

$$\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2\lambda y+2\mu z+2\nu,\quad x=0$$

παριστάνουν δ᾽ αὗται Y_π, ἢ δύο εὐθείας τεμνομένας· ἄρα καὶ ἡ τομὴ τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ τοῦ θεωρουμένου ἐπιπέδου εἶνε Y_π, ἕνεκα τῆς σχέσεως τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου πρὸς τὸ τῆς ὀρθῆς προβολῆς αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ $x=0$ (§ 33, σελὶς 75), ἢ δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι. Εἰς τὴν β′ περίπτωσιν λέγομεν ὅτι τὸ ἐπίπεδον ἐφάπτεται τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν.

Αἱ τομαὶ τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ τῶν $x=\alpha$ εἶνε Y_π ὅμοιαι. Πράγματι, μία τοιαύτη τομὴ ἔχει ἐξισώσεις $\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2\alpha,\ x=\alpha,$ ἡ α′ τῶν ὁποίων μετὰ τῆς $x=0$ παριστάνει Y_π.

Ἂν εἶνε $\alpha>0$, οἱ ἄξονες ταύτης ἔχουν μήκη $2\sqrt{2\alpha p}$, $2\sqrt{2\alpha q}$ καὶ τοὺς κλάδους αὐτῆς εἰς τὴν ἔμπροσθεν καὶ τὴν ὄπισθεν γωνίαν τῶν ἀσυμπτώτων, τὸ δὲ κέντρον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x. Ὅταν τὸ α αὐξάνεται ἀπὸ τὸ 0 μέχρι τοῦ $+\infty$, οἱ ἄξονες αὐτῆς αὐξάνονται ὁμοίως καὶ ἔχουν σταθερὸν λόγον, διὰ τοῦτο δὲ λέγομεν ἡ Y_π μένει ὁμοία πρὸς ἑαυτὴν (μεταβαλλομένου τοῦ α). Ἂν εἶνε $\alpha < 0$, αἱ ἐξισώσεις παριστάνουν Y_π μὲ κλάδους ἕνα εἰς τὴν ἄνω καὶ ἕνα εἰς τὴν κάτω γωνίαν τῶν ἀσυμπτώτων, μένει δὲ καὶ αὕτη ὁμοία πρὸς ἑαυτήν (μεταβαλλομένου τοῦ α).

Ἂν διά τινος σημείου $M'(x', y', z')$ τῆς ἐπιφανείας ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς ἀχθῇ εὐθεῖα μὲ ἐξισώσεις

$$x = x' + a\varrho, \quad y = y' + b\varrho, \quad z = z' + c\varrho, \tag{11}$$

μὴ παράλληλος πρὸς τὰ ἐπίπεδα $$\frac{y}{\sqrt{p}} \mp \frac{z}{\sqrt{q}} = 0, \tag{12}$$

τέμνει αὕτη τὴν ἐπιφάνειαν εἰς ἓν ἀκόμη σημεῖον. Διότι, ἂν θέσωμεν τὰς ἀνωτέρω τιμὰς τῶν x, y, z εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας, εὑρίσκομεν

$$\left(\frac{b^2}{p} - \frac{c^2}{q}\right)\varrho^2 + 2\left(\frac{by'}{p} - \frac{cz'}{q} - a\right)\varrho = 0, \tag{13}$$

καταντᾷ δ' αὕτη α΄ βαθμοῦ ὡς πρὸς ϱ, ἂν εἶνε $\dfrac{b}{\sqrt{p}} \mp \dfrac{c}{\sqrt{q}} = 0$ (14).

Ἀλλ' αὗται ἐκφράζουν ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἥτις ἄγεται ἐκ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων παράλληλος τῆς (11), κεῖται ἐπὶ τοῦ ἑνὸς τῶν ἐπιπέδων (12). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἂν ὁ συντελεστὴς τοῦ 2ϱ διαφέρῃ τοῦ 0, ἡ εὐθεῖα δὲν ἔχει ἄλλο σημεῖον ἐκτὸς τοῦ M' κοινὸν μετὰ τῆς ἐπιφανείας, ἐκτὸς ἂν κεῖται ὅλη ἐπ' αὐτῆς. Ἂν ἡ εὐθεῖα ἔχῃ οἱανδήποτε ἄλλην θέσιν, ἐκ τῆς (13) ἔχομεν δύο τιμὰς πραγματικὰς τοῦ ϱ, ἤτοι ἡ εὐθεῖα (11) τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν εἰς δύο σημεῖα. Διὰ τοῦτο καλεῖται καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὕτη *β΄ βαθμοῦ*.

§ 59. Διαμετρικὸν καὶ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον παραβολοειδῶν.

Πᾶσα εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ ἐλλειπτικοῦ παραβολοειδοῦς τέμνει αὐτὸ εἰς ἓν μόνον σημεῖον. Διότι τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τοῦ ἄξονος καὶ τῆς ἐν λόγῳ εὐθείας, θὰ τέμνῃ τὴν ἐπιφάνειαν κατὰ Π_α μὲ ἄξονα τὸν τῆς ἐπιφανείας. Ἄρα ἡ εὐθεῖα αὕτη τέμνει τὴν Π_α ταύτην, ἑπομένως καὶ τὴν ἐπιφάνειαν, εἰς ἓν σημεῖον.

Εὐθεῖα, ἀγομένη διὰ σημείου τῆς ἐπιφανείας καὶ μὴ παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα αὐτῆς, ἔχει μὲ αὐτὴν ἓν ἀκόμη κοινὸν σημεῖον. Διότι, πᾶν ἐπίπεδον ἀγόμενον δι' αὐτῆς καὶ μὴ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν κατὰ E_λ, ἥτις τέμνεται ὑπὸ εὐθείας εἰς δύο ἐν γένει σημεῖα. Διὰ τοῦτο καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὕτη καλεῖται καὶ ***β' βαθμοῦ.***

Καλοῦμεν ***χορδὴν*** μὲν παραβολοειδοῦς τμῆμα εὐθείας περατούμενον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, ***διαμετρικὸν*** δὲ ***ἐπίπεδον*** αὐτοῦ, ἀντιστοιχοῦν εἰς χορδὰς αὐτοῦ παραλλήλους, τὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖνται τὰ μέσα αὐτῶν. Ἐὰν αἱ παράλληλοι χορδαὶ ἔχουν διευθύνοντα συνημίτονα a, b, c, ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς αὐτὰς διαμετρικοῦ ἐπιπέδου εἶνε $\boxed{\dfrac{by}{p} \pm \dfrac{cz}{q} = a}$ (1)

ἡ δὲ ἀπόδειξις γίνεται καθὼς καὶ διὰ τὸ ἐλλειψοειδὲς καὶ τὰ ὑπερβολοειδῆ. Καθὼς φαίνεται ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως τὰ διαμετρικὰ ἐπίπεδα εἶνε παράλληλα πρὸς τὸν ἄξονα τῆς ἐπιφανείας· ἑπομένως αἱ θεωρούμεναι χορδαὶ τοῦ ἐλλειπτικοῦ παραβολοειδοῦς δὲν δύνανται νὰ εἶνε παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα αὐτοῦ.

Εὐκόλως δεικνύεται ὅτι πᾶν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῆς ἐπιφανείας εἶνε διαμετρικὸν ἐπίπεδον αὐτῆς.

Καλοῦμεν ***διάμετρον*** παραβολοειδοῦς τὸν τόπον τῶν κέντρων τῶν τομῶν αὐτοῦ, αἵτινες γίνονται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, ἀποδεικνύεται δ' εὐκόλως, ὅτι αὕτη εἶνε εὐθεῖα γραμμή.

Ἐὰν διὰ τοῦ κέντρου τυχούσης E_λ ἢ Y_π, τομῆς παραβολοειδοῦς, φέρωμεν δύο συζυγεῖς διαμέτρους αὐτῆς καὶ τὴν παράλληλον εὐθεῖαν πρὸς τὸν ἄξονα τῆς ἐπιφανείας, τὰ δύο ἐπίπεδα, τὰ διερχόμενα διὰ μιᾶς τῶν συζυγῶν διαμέτρων καὶ τῆς παραλλήλου αὐτῆς, λέγονται ***συζυγικὰ διαμετρικὰ*** ἐπίπεδα τῆς ἐπιφανείας, ἕκαστον δ' αὐτῶν διχοτομεῖ τὰς χορδάς, αἵτινες εἶνε παράλληλοι πρὸς τὸ ἄλλο ἐπίπεδον καὶ τὴν θεωρουμένην τομὴν τῆς ἐπιφανείας.

Εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι, ἡ ἐξίσωσις ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς δοθὲν σημεῖον M'(x', y', z') παραβολοειδοῦς εἶνε

$$\boxed{\frac{y'y}{p} \pm \frac{z'z}{q} = x' + x}$$

καὶ ἡ μὲν α' τῶν ἐξισώσεων τούτων ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ἐλλειπτικόν, ἡ δὲ β' εἰς τὸ ὑπερβολικὸν παραβολοειδές.

Παρατηρητέον ὅτι τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς α΄ ἐπιφανείας εἰς ἓν σημεῖον αὐτῆς, π.χ. εἰς τὴν κορυφήν της, ἔχει κοινὸν μὲ αὐτὴν μόνον τὸ σημεῖον τοῦτο· ἄρα οὐδεμία εὐθεῖα κεῖται ὁλόκληρος ἐπὶ τοῦ ἐλλειπτικοῦ παραβολοειδοῦς, ἐνῶ δεικνύεται εὐκόλως ὅτι, τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς ἔχει κοινὰς μὲ αὐτὸ δύο εὐθείας, διερχομένας διὰ τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς.

Ἂν δοθῇ ἐπίπεδον $Ax+By+\Gamma z=0$ καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ ἄλλο παράλληλον τούτου (τὸ $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$), ἐφαπτόμενον εἰς ἐλλειπτικὸν παραβολοειδές, παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς εἶνε x_1, y_1, z_1, θὰ ἔχωμεν

$$-\frac{1}{A}=\frac{y_1}{Bp}=\frac{z_1}{\Gamma q}=-\frac{x_1}{\Delta},$$ ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν

$$x_1=\frac{\Delta}{A},\quad y_1=-\frac{Bp}{A},\quad z_1=-\frac{\Gamma q}{A}.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ x_1, y_1, z_1 κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, εὑρίσκομεν $\Delta=\dfrac{B^2p+\Gamma^2q}{2A}$, ἤτοι ἡ συνθήκη ἵνα τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἐφάπτεται τοῦ παραβολοειδοῦς εἶνε ἡ $B^2p+\Gamma^2q-2A\Delta=0$.

Παρατηρητέον ὅτι, καθ᾿ ἣν περίπτωσιν τὸ δοθὲν ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ παραβολοειδοῦς (ὅτε εἶνε $A=0$), τὸ ζητούμενον ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον ἀφανίζεται εἰς τὸ ∞, ἤτοι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην δὲν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας, κείμενον εἰς πεπερασμένην ἀπόστασιν.

§ 60. Εὐθεῖαι ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς.

Ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς

$$\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2x \tag{1}$$

προκύπτει δι᾿ ἀπολοιφῆς τῆς παραμέτρου λ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων

$$\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}=2\lambda x,\quad \frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}=\frac{1}{\lambda} \tag{2}$$

ἢ τῆς μ μεταξὺ τῶν $$\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}=2\mu x,\quad \frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}=\frac{1}{\mu}, \tag{3}$$

ἕπεται ὅτι ἡ ἐπιφάνεια (1) δύναται νὰ θεωρηθῇ παραγομένη ἐκ τῆς κινήσεως ἑκάστης τῶν εὐθειῶν (2) ἢ (3). Ἤτοι, ὑπάρχουν δύο συστήματα εὐθειῶν, κειμένων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας (1), ἀντιστοιχοῦν δὲ ταῦτα εἰς τὰς τιμὰς τῶν παραμέτρων λ καὶ μ.

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται (καθὼς καὶ διὰ τὸ μονόχωνον ὑπερβολοειδὲς) ὅτι, δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι, ἀνήκουσαι εἰς τὸ αὐτὸ σύστημα, δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (δὲν τέμνονται), ἐνῷ πᾶσα εὐθεῖα τοῦ ἑνὸς συστήματος τέμνει πάσας τὰς τοῦ ἄλλου εἰς πεπερασμένην ἢ ἄπειρον ἀπόστασιν.

Αἱ ἀνωτέρω εὐθεῖαι (2) καί (3) τοῦ ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς καλοῦνται καὶ ***γενέτειραι εὐθεῖαι*** τῆς ἐπιφανείας, ὡς παράγουσαι αὐτήν. Καθὼς δεικνύεται εὐκόλως αἱ εὐθεῖαι (2) καὶ (3) εἶνε παράλληλοι ἀντιστοίχως πρὸς τὰ ἐπίπεδα $\frac{y}{\sqrt{p}} \mp \frac{z}{\sqrt{q}} = 0$, τὰ ὁποῖα διέρχονται διὰ τοῦ ἄξονος τῆς ἐπιφανείας καὶ διὰ τῶν εὐθειῶν, καθ' ἃς αὕτη τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου $x=0$, καλοῦνται δὲ ***ὁδηγοῦντα ἐπίπεδα*** διὰ τὴν γένεσιν τῆς ἐπιφανείας.

Ἐπειδὴ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας εἰς τυχὸν σημεῖον μιᾶς πρωτευούσης τομῆς αὐτῆς εἶνε κάθετον ἐπὶ τὸ πρωτεῦον, καθὼς εὐκόλως δεικνύεται, τέμνει δὲ τὴν μὲν ἐπιφάνειαν κατὰ τὰς εὐθείας αὐτοῦ, τὰς διερχομένας διὰ τοῦ σημείου τούτου, τὸ δὲ ἐπίπεδον κατὰ τὴν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἕπεται ὅτι, «***αἱ γενέτειραι τοῦ ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς, προβαλλόμεναι ὀρθῶς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς μιᾶς τῶν πρωτευουσῶν τομῶν αὐτοῦ, γίνονται ἐφαπτόμεναι τῆς τομῆς ταύτης***».

Τοῦτο ἀποδεικνύεται καὶ ὡς ἑξῆς. Ἡ μὲν ὀρθὴ προβολὴ εὐθείας τινὸς ἐκ τῶν (2) ἐπὶ τοῦ xy ἔχει ἐξισώσεις

$$2\lambda^2 x - 2\lambda \frac{y}{\sqrt{p}} + 1 = 0, \quad z = 0, \tag{4}$$

ἡ δὲ τῆς πρωτευούσης τομῆς τῆς ἐπιφανείας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου τὰς

$$y^2 = 2px, \qquad z = 0. \tag{5}$$

Λύοντες τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων τούτων, παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο ἔχει μίαν λύσιν διπλῆν, ἤτοι ἡ εὐθεῖα (4) καὶ ἡ παραβολὴ (5) ἔχουν κατὰ δύο σημεῖα συμπέσαντα καὶ συνεπῶς ἐφάπτονται οἱουδήποτε ὄντος τοῦ λ.

Ἐπὶ τῆς ἰδιότητος ταύτης στηριζόμενοι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς γενετείρας τῆς ἐπιφανείας, τὰς διερχομένας διὰ δοθέντος σημείου αὐτῆς, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν πρωτεύουσαν τομὴν αὐτῆς, ἐπὶ τῆς ὁποίας δὲν κεῖται τὸ σημεῖον, καθὼς εἴδομεν τὸ ἀνάλογον ζήτημα καὶ διὰ τὸ μονόχωνον ὑπερβολοειδές.

Ἂν ζητῆται νὰ εὕρωμεν γενέτειράν τινα τῶν (2) τῆς ἐπιφανείας, παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν μὲ διευθύνοντα συνημίτονα a, b, c, παρατηροῦμεν ὅτι μία τοιαύτη ἐκ τῶν (2) εἶνε παράλληλος πρὸς τὸ διάνυσμα $\left(\frac{1}{\lambda\sqrt{q}}, \sqrt{\frac{p}{q}}, 1\right)$· ἄρα ἀρκεῖ νὰ προσδιορίσωμεν τὸ λ, ὥστε νὰ εἶνε $\lambda a = \frac{b}{\sqrt{p}} = \frac{c}{\sqrt{q}}$, τὸ δὲ πρόβλημα εἶνε ἐν γένει ἀδύνατον. Πράγματι, πρέπει νὰ εἶνε $\frac{b}{\sqrt{p}} = \frac{c}{\sqrt{q}}$, ἤτοι ἡ δοθεῖσα διεύθυνσις πρέπει νὰ εἶνε παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τὸ παράλληλον πρὸς τὰς γενετείρας τοῦ συστήματος (2). Ἐὰν πληροῦται ἡ ἀναγκαία αὕτη συνθήκη, τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται μίαν μόνον λύσιν, διότι, ἂν θέσωμεν $b = k\sqrt{p}$, $c = k\sqrt{q}$, λαμβάνομεν $\lambda = \frac{k}{a}$. Ὁμοίως, (διὰ τὸ ἄλλο σύστημα) ἂν τεθῇ $b = k_1\sqrt{p}$, $c = -k_1\sqrt{q}$, πρέπει νὰ λάβωμεν $\mu = \frac{k_1}{a}$.

Ἐὰν λ_1, λ_2 εἶνε δύο εὐθεῖαι τοῦ συστήματος (2) τῆς ἐπιφανείας, αἱ γενέτειραι τοῦ ἄλλου συστήματος τέμνουν τὰς λ_1, λ_2 καὶ εἶνε παράλληλοι πρὸς τὸ (ὁδηγοῦν) ἐπίπεδον $\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = 0$, μὴ παράλληλον πρὸς τὰς λ_1, λ_2. Ἑπομένως,

«*ἡ θεωρουμένη ἐπιφάνεια δύναται νὰ παραχθῇ ὑπὸ εὐθείας κινουμένης, ὥστε νὰ συναντᾷ δύο εὐθείας λ_1, λ_2 στρεβλῶς κειμένας καὶ μενούσης παραλλήλου πρὸς ἐπίπεδον σταθερόν, μὴ παράλληλον πρὸς τὰς εὐθείας*». Διὰ τοῦτο τὸ ὑπερβολικὸν παραβολοειδὲς καλεῖται καὶ ***κωνοειδὴς*** ἐπιφάνεια.

Ἐπειδὴ (τρεῖς γενέτειραι λ_i, $i = 1, 2, 3$, τοῦ αὐτοῦ συστήματος) δὲν τέμνονται ἀνὰ δύο, ἀλλ' εἶνε παράλληλοι πρὸς τὸ αὐτὸ (ὁδηγοῦν) ἐπίπεδον, αἱ δὲ γενέτειραι τοῦ ἄλλου συστήματος τέμνουν τὰς λ_i, **«*δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν παραγομένην ὑπὸ εὐθείας κινουμένης, ὥστε νὰ τέμνῃ τρεῖς ἄλλας, ἀνὰ δύο μὴ κειμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἀλλὰ παραλλήλους πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον*»**.

Ἔστω ὅτι ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων, διὰ τῶν ὁποίων ἄγονται γενέτειραι τῆς ἐπιφανείας (1) κάθετοι μεταξύ των. Ἂν αἱ ἐξισώσεις δύο γενετειρῶν εἶνε

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = 2\lambda x, \qquad \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\lambda} \tag{2}$$

καὶ $\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = 2\mu x, \quad \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\mu}$, (3)

ἡ συνθήκη τῆς καθετότητος αὐτῶν εἶνε $p - q + \frac{1}{\lambda\mu} = 0$.

Ἀρκεῖ τώρα νὰ ἀπαλείψωμεν τὰ λ,μ μεταξὺ τριῶν ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων καὶ θὰ εὕρωμεν δύο ἐξισώσεις, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία θὰ εἶνε ἡ τῆς ἐπιφανείας. Πρὸς εὕρεσιν τῆς ἄλλης ἐξισώσεως παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη τὰς δευτέρας ἐκ τῶν (2) καὶ (3), εὑρίσκομεν

$$\frac{1}{\lambda\mu} = \frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q}.$$

Ἑπομένως ὁ ζητούμενος τόπος ἔχει ἐξισώσεις τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας καὶ τὴν $2x + p - q = 0$, (4)

ἥτις παριστάνει ἐπίπεδον, εἶνε δ᾽ ὁ τόπος οὗτος ὑπερβολή, κειμένη ἐπὶ τοῦ (4), τὸ ὁποῖον καλεῖται ἐπίπεδον τοῦ Monge.

Ἐὰν εἶνε $p = q$, λέγομεν ὅτι τὸ παραβολοειδὲς (1) εἶνε ***ἰσοσκελές***, τὸ δὲ ἐπίπεδον τοῦ Monge εἶνε ἐφαπτόμενον αὐτῆς εἰς τὴν κορυφὴν αὐτοῦ, καὶ ὁ ζητούμενος τόπος εἶνε εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δύο γενέτειραι, διερχόμεναι διὰ τῆς κορυφῆς ταύτης. Αἱ γενέτειραι αὗται εἶνε κάθετοι ἐπ᾽ ἀλλήλας, διότι τὰ δύο ὁδηγοῦντα ἐπίπεδα ἰσοσκελοῦς ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς εἶνε κάθετα ἐπ᾽ ἄλληλα, καὶ ἀντιστρόφως.

§ 61. Ἀσύμπτωτοι εὐθεῖαι καὶ ἀσύμπτωτα ἐπίπεδα ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς.

Εὐθεῖά τις λέγεται ***ἀσύμπτωτος*** ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς, ἂν ἔχῃ μετ᾽ αὐτοῦ κοινὰ σημεῖα μόνον κατ᾽ ἐκδοχήν. Ἂν ἡ μὲν ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας εἶνε $\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x$, (1) αἱ δὲ τῆς εὐθείας

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c},$$

παριστῶντες τοὺς ἴσους τούτους λόγους διὰ τοῦ ρ, ἔχομεν, ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὰ x, y, z διὰ τῶν ἴσων αὐτῶν εἰς τὴν (1),

$$\frac{(y_1 + b\rho)^2}{p} - \frac{(z_1 + c\rho)^2}{p} - 2(x_1 + a\rho) = 0.$$

Ἵνα ἡ εὐθεῖα εἶνε ἀσύμπτωτος τῆς ἐπιφανείας, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν $\frac{b^2}{p} - \frac{c^2}{q} = 0, \quad \frac{by_1}{p} - \frac{cz_1}{q} - a = 0.$

Ἐπειδὴ δ' ἡ πρώτη τούτων χωρίζεται εἰς δύο ἄλλας καὶ δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $b=k\sqrt{p}$, $c=k\sqrt{q}$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $a=\frac{ky_1}{\sqrt{p}}-\frac{kz_1}{\sqrt{q}}$, ἢ $b=k'\sqrt{p}$, $c=-k'\sqrt{q}$, ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν $a=\frac{k'y_1}{\sqrt{p}}+\frac{k'z_1}{\sqrt{q}}$, ἕπεται ὅτι, αἱ γενικαὶ ἐξισώσεις τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ἐπιφανείας (1) εἶνε $\sqrt{pq}\cdot\frac{x-x_1}{\sqrt{q}y_1-\varepsilon\sqrt{p}z_1}=\frac{y-y_1}{\sqrt{p}}=\frac{z-z_1}{\varepsilon\sqrt{q}}$, ὅπου εἶνε $\varepsilon=\pm 1$.

Παρατηροῦμεν ὅτι δι' ἑκάστου σημείου τοῦ χώρου διέρχονται δύο ἀσύμπτωτοι τῆς ἐπιφανείας, ἐὰν δὲ τὸ σημεῖον κεῖται ἐπ' αὐτῆς, θὰ ἔχωμεν τὰς ἐπ' αὐτῆς κειμένας εὐθείας.

Ἐπίπεδόν τι λέγεται ***ἀσύμπτωτον*** τῆς ἐπιφανείας (1), ἂν ἐφάπτεται αὐτῆς εἰς σημεῖον κατ' ἐκδοχήν.

Ἔστωσαν δύο γενέτειραι τῆς ἐπιφανείας ἀνήκουσαι εἰς διάφορα συστήματα μὲ ἐξισώσεις $\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}=2\lambda x$, $\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}=\frac{1}{\lambda}$

καὶ $\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}=2\mu x$, $\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}=\frac{1}{\mu}$

Αἱ συντεταγμέναι τοῦ κοινοῦ αὐτῶν σημείου εἶνε

$$x=\frac{1}{2\lambda\mu},\quad y=\frac{\lambda+\mu}{2\lambda\mu}\sqrt{p},\quad z=\frac{\lambda-\mu}{2\lambda\mu}\sqrt{q}. \qquad (2)$$

Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶνε κατ' ἐκδοχήν, ἐὰν εἶνε $\lambda=0$ ἢ $\mu=0$. Τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας (1) εἰς τὸ σημεῖον (2) ἔχει ἐξίσωσιν $\frac{(\lambda+\mu)}{\sqrt{p}}y-\frac{(\lambda-\mu)}{\sqrt{q}}z=2\lambda\mu x+1$ καὶ εἰς κατ' ἐκδοχὴν σημεῖον (ἂν τεθῇ $\lambda=0$ ἢ $\mu=0$) ἔχομεν

$$\frac{y}{\sqrt{p}}\pm\frac{z}{\sqrt{q}}=\frac{1}{\mu} \text{ ἢ } \frac{1}{\lambda}.$$

Ἑπομένως, ***«τὰ ἀσύμπτωτα ἐπίπεδα τῆς ἐπιφανείας (1) εἶνε τὰ ἀγόμενα δι' ἑκάστης τῶν γενετειρῶν αὐτῆς παράλληλα πρὸς νὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς αὐτὰς ὁδηγοῦντα ἐπίπεδα».***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 564. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῆς καθέτου εὐθείας εἰς τὸ σημεῖον M_1 (x_1, y_1, z_1) ἐλλειπτικοῦ παραβολοειδοῦς.

565. Δείξατε ὅτι ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ Monge (παραβολοειδοῦς) εἶνε κορυφὴ ἀπείρων τρισορθογωνίων τριέδρων γωνιῶν περιγεγραμμένων εἰς τὸ παραβολοειδές.

566. Νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ πόδες τῶν καθέτων εἰς ἐλλειπτικόν παραβολοειδές, τῶν ἀγομένων ἐκ σημείου N (ξ, η, ζ) εἶνε κοινὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας καὶ τῆς $(p-q)(y-\eta)(z-\zeta)+\eta(z-\zeta)(x-\xi)-\zeta(x-\xi)(y-\eta)=0$. ἄγονται δ' ἐν γένει πέντε κάθετοι διά τοῦ N.

567. Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\beta^2\gamma^2x^2+\alpha^2\gamma^2y^2+\alpha^2\beta^2z^2=\alpha^2\beta^2\gamma^2$ θέσωμεν $x=X-\alpha$, $\beta^2=\alpha p$, $\gamma^2=\alpha q$, καὶ ἀκολούθως ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ $\alpha \to \infty$, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἐλλειπτικὸν παραβολοειδὲς εἶνε ὅριον ἐλλειψοειδοῦς. Εὕρετε ὁμοίως ὅτι τὸ ὑπερβολικὸν παραβολοειδὲς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὅριον τοῦ ὑπερβολοειδοῦς καὶ εὕρετε ἰδιότητας τῶν ἐπιφανειῶν τούτων, ἀναλόγους πρὸς τὰς τοῦ ἐλλειψοειδοῦς καὶ ὑπερβολοειδοῦς.

568. Δείξατε ὅτι τὰ ὕψη τετραέδρου εἶνε γενέτειραι μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς

569. Δοθεισῶν τεσσάρων γενετειρῶν ὑπερβολοειδοῦς νὰ κατασκευασθῇ τετράεδρον, ἔχον ταύτας ὡς ὕψη.

570. Ἐκφράσατε ὅτι τρεῖς εὐθεῖαι εἶνε τρεῖς γενέτειραι τοῦ αὐτοῦ συστήματος ἑνὸς ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς.

571. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν, τῶν ἐφαπτομένων δύο εὐθειῶν καθέτων ἐπ' ἀλλήλας καὶ μὴ κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

572. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κορυφῶν ἰσοσκελῶν ὑπερβολικῶν παραβολοειδῶν, διερχομένων διὰ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν.

573. Ἐκφράσατε ὅτι τὸ ἐπίπεδον $\lambda x+\mu y+\nu z+\rho=0$ τέμνει τὸ μονόχωνον ὑπερβολοειδές, μὲ μήκη τῶν ἀξόνων 2α, 2β, 2γ, κατὰ δύο εὐθείας.

574. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων διὰ τῶν ὁποίων διέρχονται δύο γενέτειραι ὑπερβολοειδοῦς ἢ παραβολοειδοῦς, σχηματίζουσαι μεταξύ των δοθεῖσαν γωνίαν.

575. Δείξατε ὅτι τετράεδρον ΑΒΓΔ χωρίζεται εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα ὑπὸ ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς, διερχομένου διὰ δύο ζευγῶν ἀπέναντι ἀκμῶν αὐτοῦ.

576. Ἐὰν θεωρήσωμεν ὑπερβολοειδὲς μὲ γενετείρας τὰ ὕψη δοθέντος τετραέδρου, τὸ κέντρον τοῦ ὑπερβολοειδοῦς, τὸ κέντρον τῆς σφαίρας τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ τετράεδρον, καὶ τὸ κέντρον βάρους τοῦ τετραέδρου κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

577. Εὕρετε τὸν τόπον τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἔχουν λόγον σταθερόν· εὕρετε τὰς εὐθείας ὑπὸ τῶν ὁποίων δύναται νὰ παραχθῇ ὁ τόπος οὗτος.

578. Εὕρετε ἐπιφάνειαν, τῆς ὁποίας ἕκαστον σημεῖον ἀπέχει ἀπὸ δοθέντος σημείου ἀπόστασιν, ἥτις εἶνε μέση ἀνάλογος τῶν ἀποστάσεων τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀπὸ δύο δοθέντων ἐπιπέδων.

579. Ἐκ σημείου κειμένου ἐπὶ ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὰς γενετείρας ἑνὸς συστήματος αὐτοῦ. Ὁ τόπος τῶν καθέτων τούτων εἶνε κῶνος β' βαθμοῦ. Εὕρετε τὰς κυκλικὰς τομὰς τοῦ κώνου καὶ τὸν τόπον τῶν ποδῶν τῶν ἀχθεισῶν καθέτων εὐθειῶν.

§ 62. Γενικὴ διερεύνησις τῶν ἐπιφανειῶν β' βαθμοῦ.

Καλοῦμεν ἐπιφάνειαν β' βαθμοῦ ἐν γένει τὴν παριστανομένην ὑπὸ τῆς γενικῆς ἐξισώσεως β' βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰς μεταβλητὰς x, y, z

$$A_{11}x^2+A_{22}y^2+A_{33}z^2+2A_{12}xy+2A_{13}xz+2A_{23}yz+$$
$$+2A_{10}x+2A_{02}y+2A_{03}z+A_{00}=0, \qquad (1)$$

ἥτις ὑποτίθεται ὅτι ἀναφέρεται εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους Oxyz, τὰ δὲ A_{11}, A_{22}, . . παριστάνουν ποσότητας σταθεράς.

Ἵνα διακρίνωμεν τὰς ὑπὸ τῆς (1) παριστανομένας ἐπιφανείας, μετασχηματίζομεν αὐτὴν διὰ τῶν τύπων $x=a_1x'+a_2y'+a_3z'$, κλπ. ὅπου (a_i, b_i, c_i), i=1, 2, 3, παριστάνουν τὰ διευθύνοντα συνημίτονα τῶν γωνιῶν ἑκάστου τῶν νέων ὀρθογωνίων ἀξόνων Ox'y'z' μὲ τὴν αὐτὴν ἀρχὴν πρὸς τοὺς ἀρχικούς, καὶ εὑρίσκομεν ἀντ' αὐτῆς τὴν

$$A'_{11}x'^2+A'_{22}y_1^2+A'_{33}z'^2+2A'_{12}x'y'+$$
$$+2A'_{13}x'z'+A'_{23}y'z'+\ldots,+A_{00}=0 \qquad (2)$$

ὅπου διὰ τοὺς συντελεστὰς τῶν δευτεροβαθμίων ὅρων ὡς πρὸς x',y',z' ἐτέθη

$$A'_{ij}=(A_{11}a_i+A_{12}b_i+A_{13}c_i)a_j+(A_{12}a_i+A_{22}b_i+A_{23}c_i)b_j+$$
$$+(A_{13}a_i+A_{23}b_i+A_{33}c_i)c_j,\ i,j=1,2,3.$$

Ζητοῦμεν τώρα νὰ προσδιορίσωμεν καταλλήλως τὰ a_i, b_i, c_i, ὥστε τὰ A'_{12} A'_{13} καὶ A'_{23} νὰ εἶνε ἴσα μὲ 0. Διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν a_1, b_1, c_1 θὰ ἔχωμεν

$$\left.\begin{aligned}&(A_{11}a_1+A_{12}b_1+A_{13}c_1)a_1+(A_{12}a_1+A_{22}b_1+A_{23}c_1)b_1+\\&\quad+(A_{13}a_1+A_{23}b_1+A_{33}c_1)c_1=A'_{11}\\&(A_{11}a_1+A_{12}b_1+A_{13}c_1)a_2+(A_{12}a_1+A_{22}b_1+A_{23}c_1)b_2+\\&\quad+(A_{13}a_1+A_{23}b_1+A_{33}c_1)c_2=0\\&(A_{11}a_1+A_{12}b_1+A_{13}c_1)a_3+(A_{12}a_1+A_{22}b_1+A_{23}c_1)b_3+\\&\quad+(A_{13}a_1+A_{23}b_1+A_{33}c_1)c_3=0,\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Ἐὰν τὰς ἰσότητας ταύτας πολλαπλασιάσωμεν κατὰ σειρὰν ἐπὶ a_1, a_2, a_3, ἔπειτα ἐπὶ b_1, b_2, b_3, καὶ ἐπὶ c_1, c_2, c_3, καὶ προσθέτωμεν ἑκάστοτε κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$\left.\begin{aligned}A_{11}\,a_1+A_{12}\,b_1+A_{13}\,c_1&=A'_{11}\,a_1\\A_{12}\,a_1+A_{22}\,b_1+A_{23}\,c_1&=A'_{11}\,b_1\\A_{13}\,a_1+A_{23}\,b_1+A_{33}\,c_1&=A'_{11}\,c_1\end{aligned}\right| \qquad (4)$$

ἢ

$$\left.\begin{aligned}(A_{11}-A'_{11})\,a_1+A_{12}\,b_1+A_{13}\,c_1&=0\\A_{12}\,a_1+(A_{22}-A'_{11})\,b_1+A_{23}\,c_1&=0\\A_{13}\,a_1+A_{23}\,b_1+(A_{33}-A'_{11})\,c_1&=0.\end{aligned}\right| \qquad (4')$$

Ἐπειδὴ δ' εἶνε $a_1^2+b_1^2+c_1^2=1$, ἔχομεν

$$\begin{vmatrix} A_{11}-A'_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22}-A'_{11} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33}-A'_{11} \end{vmatrix}=0 \tag{5}$$

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶνε γ' βαθμοῦ ὡς πρὸς A'_{11}, ἢ ὅτι τὸ A'_{11} εἶνε ρίζα τῆς ἐξισώσεως ὡς πρὸς ω

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\omega & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22}-\omega & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33}-\omega \end{vmatrix}=0. \tag{5,1}$$

Ὁμοίως ἐκ τῶν κάτωθι συστημάτων εὑρίσκομεν ὅτι τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως ρίζαι θὰ εἶνε τὰ A'_{22}, A'_{33}

$$\left.\begin{array}{l} (A_{11}-A'_{22})a_2+A_{12}b_2+A_{13}c_2=0 \\ A_{12}\,a_2+(A_{22}-A'_{22})b_2+A_{23}c_2=0 \\ A_{13}\,a_2+A_{23}b_2+(A_{33}-A'_{22})c_2=0 \end{array}\right\} \tag{5'}$$

$$\left.\begin{array}{l} (A_{11}-A'_{33})a_3+A_{12}b_3+A_{13}c_3=0 \\ A_{12}\,a_3+(A_{22}-A'_{33})b_3+A_{23}c_3=0 \\ A_{13}\,a_3+A_{23}b_3+(A_{33}-A'_{33})c_3=0 \end{array}\right| \tag{5''}$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη (ὡς γ' βαθμοῦ) ἔχει τουλάχιστον μίαν ρίζαν πραγματικήν. Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι ἔχει καὶ τὰς δύο ἄλλας ρίζας αὐτῆς πραγματικάς. Διότι, ἂν εἶχε ὡς ρίζας τὰς $k\pm\lambda i$, ἡ ἐξίσωσις

$$\begin{vmatrix} \overline{A}_{11}-\psi & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & \overline{A}_{22}-\psi & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & \overline{A}_{33}-\psi \end{vmatrix}=0 \tag{5,2}$$

(ὅπου ἐτέθη $\overline{A}_{11}=A_{11}-k$, $\overline{A}_{22}=A_{22}-k$, $\overline{A}_{33}=A_{33}-k$)
θὰ εἶχε ὡς ρίζαν τὴν λi, τὸ ὁποῖον εἶνε ἀδύνατον. Πράγματι, τὸ γινόμενον (κατὰ μέλη) τῆς (5,2) ἐπὶ τὴν

$$\begin{vmatrix} \overline{A}_{11}+\psi & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & \overline{A}_{22}+\psi & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & \overline{A}_{33}+\psi \end{vmatrix}=0$$

εἶνε τῆς μορφῆς $-\psi^6+\beta\psi^4-\gamma\psi^2+\delta=0$ (5,3)
ὅπου ἐτέθη

$$\beta=\overline{A}_{11}^2+\overline{A}_{22}^2+\overline{A}_{33}^2+2A_{12}^2+2A_{13}^2+2A_{23}^2$$

$$\gamma=(\overline{A}_{11}\overline{A}_{22}-A_{12}^2)^2+(\overline{A}_{11}\overline{A}_{33}-A_{13}^2)^2+(\overline{A}_{22}.\overline{A}_{33}-A_{23}^2)^2+$$

$$+2(A_{12}A_{23}-\overline{A}_{22}A_{13})^2+2(\overline{A}_{11}A_{23}-A_{12}A_{13})^2+2(A_{12}\overline{A}_{33}-A_{32}A_{13})^2$$

καὶ $$\delta=\begin{vmatrix} \overline{A}_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & \overline{A}_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & \overline{A}_{33} \end{vmatrix}^2,$$

ἄρα εἶνε $\beta,\gamma,\delta>0$.

Ἀλλ' ἡ (5,3) δὲν δύναται νὰ ἔχῃ τὴν ῥίζαν λi, ἐπειδὴ διὰ $\psi=\lambda i$ τὸ α' μέλος αὐτῆς δίδει ἐξαγόμενον $\neq 0$ (θετικόν).

Ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται ὅτι αἱ τρεῖς ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως (5,1) εἶνε αἱ τιμαὶ $A'_{11}, A'_{22}, A'_{33}$.

Εὑρεθείσης οὕτω τῆς τιμῆς τοῦ A'_{11}, λαμβάνομεν τρεῖς ἀριθμοὺς a_1, b_1, c_1, ὥστε νὰ ἐπαληθεύωνται ὑπ' αὐτῶν αἱ (4') καὶ νὰ εἶνε $a_1^2+b_1^2+c_1^2=1$. Τοῦτο εἶνε πάντοτε δυνατόν, διότι ἕνεκα τῆς (5) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τρεῖς ἀριθμοὺς ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 τοιούτους ὥστε νὰ εἶνε $\varrho_1^2+\varrho_2^2+\varrho_3^2\neq 0$ καὶ

$$\begin{aligned}(A_{11}-A'_{11})\varrho_1+ A_{12}\varrho_2+A_{13}\varrho_3&=0\\ A_{12}\varrho_1+(A_{22}-A'_{11})\varrho_2+A_{23}\varrho_3&=0\\ A_{13}\varrho_1+A_{23}\varrho_2+(A_{33}-A'_{11})\varrho_3&=0\end{aligned}$$

ἀρκεῖ δὲ νὰ θέσωμεν

$$a_1=\frac{\varrho_1}{\sqrt{\varrho_1^2+\varrho_2^2+\varrho_3^2}},\quad b_1=\frac{\varrho_2}{\sqrt{\varrho_1^2+\varrho_2^2+\varrho_3^2}},\quad c_1=\frac{\varrho_3}{\sqrt{\varrho_1^2+\varrho_2^2+\varrho_3^2}}.$$

Ὁμοίως ἐκ τῶν (5') καὶ (5'') εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν a_2, b_2, c_2 καὶ a_3, b_3, c_3.

Οὕτω διὰ καταλλήλου ἀλλαγῆς, στρεφομένου τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος τῶν ἀξόνων, ἔχομεν ἀντὶ τῆς ἐξισώσεως (1) τὴν

$$A'_{11}x'^2+A'_{22}y'^2+A'_{33}z'^2+2A'_{10}x'+2A'_{02}y'+2A'_{03}z'+A_{00}=0 \qquad (6)$$

Κατὰ τὴν σπουδὴν ταύτης διακρίνομεν τὰς ἑξῆς διαφόρους περιπτώσεις.

Περίπτωσις I. Ὅταν αἱ σταθεραὶ A'_{11}, A'_{22}, A'_{33} εἶνε πᾶσαι $\neq 0$. Θέτομεν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν

$$x'=x_1-\frac{A'_{10}}{A'_{11}},\quad y'=y_1-\frac{A'_{02}}{A'_{22}},\quad z'=z_1-\frac{A'_{03}}{A'_{33}}$$

καὶ εὑρίσκομεν τὴν $$A'_{11}x_1^2+A'_{22}y_1^2+A'_{33}z_1^2+\Gamma_1=0, \qquad (7)$$

ὅπου ἐτέθη $$-\frac{A'^2_{10}}{A'_{11}}-\frac{A'^2_{02}}{A'_{22}}-\frac{A'^2_{03}}{A'_{33}}+A_{00}=\Gamma_1.$$

Διακρίνομεν τώρα δύο περιπτώσεις, καθόσον εἶνε $\Gamma_1 \neq 0$ ἢ $\Gamma_1 = 0$.

Α΄) Ἐὰν εἶνε $\Gamma_1 \neq 0$, ἡ (7) τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$Ax_1^2 + By_1^2 + \Gamma z_1^2 = 1 \qquad (8)$$

ὅπου εἶνε $\quad A = -\frac{A'_{11}}{\Gamma_1}, \quad B = -\frac{A'_{22}}{\Gamma_1}, \quad \Gamma = -\frac{A'_{33}}{\Gamma_1}$

α΄) Ἂν τὰ Α, Β, Γ εἶνε ὅλα ἀρνητικά, οὐδὲν σύστημα πραγματικῶν τιμῶν τῶν x_1, y_1, z_1, ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν.

β΄) Ἂν δύο τῶν Α, Β, Γ εἶνε ἀρνητικά, καὶ τὸ ἄλλο θετικόν, δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν τὸ $\Gamma > 0$, καὶ ἂν θέσωμεν

$$A = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B = -\frac{1}{\beta^2}, \quad \Gamma = \frac{1}{\gamma^2},$$

ἡ (8) γίνεται $\qquad \frac{x_1^2}{\alpha^2} + \frac{y_1^2}{\beta^2} - \frac{z_1^2}{\gamma^2} = -1, \qquad (9)$

ἥτις παριστάνει δίχωνον ὑπερβολοειδές.

γ΄) Ἐὰν δ' εἶνε καὶ $\alpha = \beta$, ὅτε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{x_1^2 + y_1^2}{\alpha^2} - \frac{z_1^2}{\gamma^2} = -1$ (9΄)

ἡ ἐπιφάνεια, τὴν ὁποίαν παριστάνει αὕτη, καλεῖται δίχωνον ὑπερβολοειδὲς ***ἐκ περιστροφῆς***, προκύπτει δ' ἐκ περιστροφῆς τῆς Y_π $\frac{z_1^2}{\gamma^2} - \frac{x_1^2}{\alpha^2} = 1$, $y_1 = 0$ περὶ τὸν ἄξονα τῶν z_1, ὥστε ἕκαστον σημεῖον αὐτῆς νὰ γράφῃ περιφέρειαν, τῆς ὁποίας τὸ ἐπίπεδον νὰ εἶνε κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα περιστροφῆς.

δ΄) Ἂν δύο μὲν ἐκ τῶν Α, Β, Γ εἶνε θετικά, τὸ δ' ἄλλο ἀρνητικόν, δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν τὸ $\Gamma < 0$, καὶ ἡ (8) λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\frac{x_1^2}{\alpha^2} + \frac{y_1^2}{\beta^2} - \frac{z_1^2}{\gamma^2} = 1, \qquad (10),$$

ὅπου ἐτέθη $\qquad A = \frac{1}{\alpha^2}, \quad B = \frac{1}{\beta^2}, \quad \Gamma = -\frac{1}{\gamma^2}$

καὶ ἡ (10) παριστάνει μονόχωνον ὑπερβολοειδές. Ἂν δ' εἶνε καὶ $\alpha = \beta$,

ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\qquad \frac{x_1^2 + y_1^2}{\alpha^2} - \frac{z_1^2}{\gamma^2} = 1 \qquad (10΄)$

καὶ ἡ ὑπ' αὐτῆς παριστανομένη ἐπιφάνεια καλεῖται μονόχωνον ὑπερβολοειδὲς ***ἐκ περιστροφῆς***, ὡς προκύπτουσα ἐκ περιστροφῆς τῆς Y_π $\frac{x_1^2}{\alpha^2} - \frac{z_1^2}{\gamma^2} = 1$, $y_1 = 0$ περὶ τὸν ἄξονα τῶν z_1.

ε') Ἂν τὰ Α, Β, Γ εἶνε ὅλα θετικά, θέτομεν

$$A=\frac{1}{\alpha^2},\quad B=\frac{1}{\beta^2},\quad \Gamma=\frac{1}{\gamma^2}$$

καὶ ἡ (8) γίνεται $\qquad \dfrac{x_1^2}{\alpha^2}+\dfrac{y_1^2}{\beta^2}+\dfrac{z_1^2}{\gamma^2}=1 \qquad$ (11)

παριστάνει δ' αὕτη ἐλλειψοειδές, ἂν δ' εἶνε καὶ $\alpha=\beta$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται

$$\frac{x_1^2+y_1^2}{\alpha^2}+\frac{z_1^2}{\gamma^2}=1 \qquad (11')$$

καὶ ἡ παριστωμένη ἐπιφάνεια καλεῖται ἐλλειψοειδὲς ***ἐκ περιστροφῆς πλατυσμένον*** μέν, ἂν $\alpha>\gamma$, ***ἐπιμηκυσμένον*** δέ, ἂν εἶνε $\alpha<\gamma$. Τοῦτο γίνεται ἐκ περιστροφῆς τῆς E_λ $\dfrac{x_1^2}{\alpha^2}+\dfrac{z_1^2}{\gamma^2}=1, y_1=0$ περὶ τὸν ἄξονα τῶν z_1.

Β') Ἐὰν εἶνε $\Gamma_1=0$, ἡ (7) ἔχει τὴν μορφὴν

$$A'_{11}x_1^2+A'_{22}y_1^2+A'_{33}z_1^2=0 \qquad (12)$$

καὶ ἂν μὲν τὰ A'_{11}, A'_{22}, A'_{33} ἔχουν τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἡ (12) παριστάνει τὸ σημεῖον (0, 0, 0), ἂν δὲ δὲν εἶνε ὅλα ὁμόσημα, δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν π. χ. τὰ A'_{11}, A'_{22} θετικὰ καὶ τὸ A'_{33} ἀρνητικόν, ὅτε ἡ (12) τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{x_1^2}{\alpha^2}+\frac{y_1^2}{\beta^2}-\frac{z_1^2}{\gamma^2}=0,\text{ ὅπου ἐτέθη } A'_{11}=\frac{1}{\alpha^2},\ A'_{22}=\frac{1}{\beta^2},\ A'_{33}=-\frac{1}{\gamma^2}$$

καὶ ἡ ἐξίσωσις παριστάνει κῶνον ἀσύμπτωτον μονοχώνου καὶ διχώνου ὑπερβολοειδοῦς.

Περίπτωσις II. Ἔστω ὅτι δύο μόνον ἐκ τῶν A'_{11}, A'_{22}, A'_{33}, π. χ. τὰ αἱ A'_{22}, A'_{33} εἶνε $\neq 0$.

Ἂν τεθῇ $\quad y'=y_1-\dfrac{A'_{02}}{A'_{22}},\ z'=z_1-\dfrac{A'_{03}}{A'_{33}},\ -\dfrac{A'^2_{02}}{A'_{22}}-\dfrac{A'^2_{03}}{A'_{33}}+A_{00}=\Gamma_2$

ἡ (6) λαμβάνει τὴν μορφὴν $A'_{22}y_1^2+A'_{33}z_1^2+2A'_{10}x'+\Gamma_2=0 \qquad$ (13)

καὶ διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

Α') Ἂν εἶνε $A'_{10}\neq 0$ καὶ τεθῇ $x'=x_1-\dfrac{\Gamma_2}{2A'_{10}}$

ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\qquad A'_{22}y_1^2+A'_{33}z_1^2+2A'_{10}x_1=0$

ἢ $$-\frac{A'_{22}}{A'_{10}}y_1^2-\frac{A'_{33}}{A'_{10}}z_1^2-2x_1=0. \qquad (13')$$

καὶ ἂν μὲν οἱ συντελεσταὶ τῶν y_1^2, z_1^2 ταύτης εἶνε ὁμόσημοι, ὑποθέτοντες αὐτοὺς θετικούς, ἀλλάσσοντες ἐν ἀνάγκῃ τὴν θετικὴν καὶ ἀρνητικὴν φορὰν τοῦ ἄξονος τῶν x_1, ἔχομεν ἀντὶ τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως τὴν

$$\frac{y_1^2}{p}+\frac{z_1^2}{q}=2x_1 \quad \text{όπου είνε τὰ } p,q>0,$$

παριστάνει δ'αὕτη ἐλλειπτικὸν παραβολοειδές. Ἂν εἶνε καὶ $p=q$, ἔχομεν τὴν $y_1^2+z_1^2=2px_1$ καὶ ἡ ἐπιφάνεια καλεῖται ***παραβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς***, γίνεται δ' ἐκ τῆς περιστροφῆς τῆς παραβολῆς $z_1^2=2px_1$, $y_1=0$ περὶ τὸν ἄξονα τῶν x_1.

Ἂν ὅμως οἱ συντελεσταὶ τῶν y_1^2, z_1^2, τῆς (13′) εἶνε ἑτερόσημοι, ὑποθέτοντες π. χ. τὸν πρῶτον θετικόν, ἔχομεν ἀντ' αὐτῆς τὴν

$$\frac{y_1^2}{p}-\frac{z_1^2}{q}=2x_1, \text{ ἐὰν εἶνε } -\frac{A'_{22}}{A'_{10}}=\frac{1}{p},\ \frac{A'_{33}}{A'_{10}}=\frac{1}{q},\ p,q>0$$

παριστάνει δ' ἡ τελευταία αὕτη ἐξίσωσις ὑπερβολικὸν παραβολοειδές.

Β′) Ἂν εἶνε $A'_{10}=0$, ἡ ἐξίσωσις (13) γίνεται

$$A'_{22}y_1^2+A'_{33}z_1^2+\Gamma_2=0 \tag{14}$$

καὶ διακρίνομεν δύο περιπτώσεις καθόσον εἶνε $\Gamma_2=0$ ἢ $\Gamma_2\neq 0$.

Εἰς τὴν α′ περίπτωσιν ἡ (14) γίνεται $A'_{22}y_1^2+A'_{33}z_1^2=0$ καὶ ἂν μὲν εἶνε $A'_{22}.A'_{33}>0$, ἐπαληθεύεται αὕτη ὑπὸ μόνον τῶν συντεταγμένων παντὸς σημείου τοῦ ἄξονος τῶν x_1· ἂν δ' εἶνε $A'_{22}.A'_{33}<0$, καὶ ὑποτεθῇ $A'_{22}>0$, ἡ ἐξίσωσις λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\lambda^2y_1^2-\mu^2z_1^2=0, \text{ ὅπου ἐτέθη } A'_{22}=\lambda^2,\ A'_{33}=-\mu^2$$

καὶ παριστάνει δύο διάφορα ἐπίπεδα $\lambda y_1 \pm \mu z_1=0$, τεμνόμενα ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x_1.

Εἰς τὴν β′ περίπτωσιν ($\Gamma_2\neq 0$) ἡ (14) δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$-\frac{A'_{22}}{\Gamma_2}y_1^2-\frac{A'_{33}}{\Gamma_2}z_1^2-1=0 \tag{14′}$$

καὶ ἂν μὲν οἱ συντελεσταὶ τῶν y_1^2, z_1^2 ταύτης εἶνε ἀρνητικοί, δι' οὐδὲν (πραγματικὸν) σύστημα τιμῶν τῶν y_1, z_1 ἐπαληθεύεται αὕτη, ἄρα καὶ ἡ ἀρχικὴ δοθεῖσα ἐξίσωσις δι' οὐδὲν (πραγματικὸν) σύστημα τῶν x, y, z. Ἂν οἱ συντελεσταὶ τῶν y_1^2, z_1^2, τῆς (14′) εἶνε θετικοί, τίθεται αὕτη ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{y_1^2}{\beta^2}+\frac{z_1^2}{\gamma^2}=1, \text{ ὅπου ἐτέθη } -\frac{A'_{22}}{\Gamma_2}=\frac{1}{\beta^2},\ -\frac{A'_{33}}{\Gamma_2}=\frac{1}{\gamma^2}$$

καὶ παριστάνει κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν μὲ γενετείρας παραλλήλους πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x_1 καὶ ὁδηγὸν ἐπὶ τοῦ y_1z_1 Ελ μὲ ἡμιάξονας 2β, 2γ. Ἂν τέλος οἱ συντελεσταὶ τῶν y_1^2, z_1^2 τῆς (14′) εἶνε ἑτερόσημοι, ὑποτεθῇ δ' ὁ α′ θετικὸς καὶ τεθῇ

$-\frac{A'_{22}}{\Gamma_2}=\frac{1}{\beta^2}, -\frac{A'_{33}}{\Gamma_2}=-\frac{1}{\gamma^2}$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\frac{y_1^2}{\beta^2}-\frac{z_1^2}{\gamma^2}=1$ καί παριστάνει κύλινδρον μὲ γενετείρας παραλλήλους πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x_1 καὶ ὁδηγὸν ὑπερβολὴν ἐπὶ τοῦ y_1z_1 μὲ μήκη ἀξόνων 2β, 2γ.

Περίπτωσις III. Ὅταν εἰς τὴν (6) ἓν μόνον ἐκ τῶν $A'_{11}, A'_{22}, A'_{33}$ εἶνε διάφορον τοῦ μηδενός, ἔστω τὸ A'_{11}, καὶ τεθῇ

$$x'=x_1-\frac{A'_{10}}{A'_{11}}, \quad y'=y''+\frac{A'^2_{10}-A'_{11}A_{00}}{2A'_{02}A'_{11}},$$

λαμβάνει αὕτη τὴν μορφὴν

$$x_1^2+2\frac{A'_{02}}{A'_{12}}y''+2\frac{A'_{03}}{A'_{11}}z'=0, \tag{15}$$

Α') Ἂν τώρα τουλάχιστον ἓν τῶν A'_{02}, A'_{03} εἶνε διάφορον τοῦ μηδενός, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν γωνίαν φ διὰ τῶν ἐξισώσεων

$$\eta\mu\varphi=\frac{A'_{03}}{\sqrt{A'^2_{02}+A'^2_{03}}}, \quad \sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{A'_{02}}{\sqrt{A'^2_{02}+A'^2_{03}}}$$

καὶ νὰ μεταβῶμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $y''z'$ εἰς ἄλλους ἄξονας y_1 z_1 ἐκ τῶν $y''z'$ διὰ τῶν τύπων

$$y''=y_1\,\sigma\upsilon\nu\varphi-z_1\,\eta\mu\varphi, \quad z'=y_1\,\eta\mu\varphi+z_1\,\sigma\upsilon\nu\varphi.$$

Οὕτω ἡ ἐξίσωσις (15) μετασχηματίζεται εἰς τὴν

$$x_1^2+2\frac{\sqrt{A'^2_{02}+A'^2_{03}}}{A'_{11}}y_1=0$$

$$\text{ἢ} \quad x_1^2=2py_1, \text{ ὅπου εἶνε } p=-\frac{\sqrt{A'^2_{02}+A'^2_{03}}}{A'_{11}}.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη παριστάνει κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν μὲ γενετείρας καθέτους ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον x_1 y_1 καὶ ὁδηγὸν παραβολὴν ἐπὶ τοῦ x_1 y_1 μὲ ἡμιπαράμετρον p (>0 ἢ <0).

Β') Ἂν $A'_{02}=0$, $A'_{03}=0$, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $x_1^2=0$, ἑπομένως καὶ ἡ ἀρχικῶς δοθεῖσα ἐξίσωσις παριστάνει ἓν ἐπίπεδον διπλοῦν.

Ἐφαρμογή. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις:

$$-x^2+y^2+2z^2+4xy-2xz+2yz+2x-4y+2z-3=0.$$

Ἔχομεν: $A_{11}=-1$, $A_{22}=1$, $A_{33}=2$, $A_{12}=2$, $A_{13}=-1$, $A_{23}=1$
$A_{10}=1$, $A_{02}=-2$, $A_{03}=1$, $A_{00}=-3$.

Ἡ ἐξίσωσις (5, 1), τῆς ὁποίας ῥίζαι εἶνε τὰ A_{11}', A_{22}', A_{33}' γίνεται $\omega^3+2\omega^2+7\omega-14=0$, ἥτις ἔχει ῥίζας $2, \sqrt{7}, -\sqrt{7}$. Τὰ a_i, b_i, c_i, εὑρίσκονται ἐκ τῆς λύσεως τῶν κάτωθι συστημάτων:

$$\left.\begin{array}{r}-3a_1+2b_1-c_1=0\\ 2a_1-b_1+c_1=0\\ a^2_1+b^2_1+c^2_1=1\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r}(-1-\sqrt{7})a_2+2b_2-c_2=0\\ 2a_2+(1-\sqrt{7})b_2+c_2=0\\ a_2^2+b_2^2+c_2^2=1\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r}(-1+\sqrt{7})a_3+2b_3-c_3=0\\ 2a_3+(1+\sqrt{7})b_3+c_3=0\\ a_3^2+b_3^2+c_3^2=1\end{array}\right\}$$

εὑρίσκομεν δὲ $a_1=\sqrt{3}:3$, $b_1=\sqrt{3}:3$, $c_1=-\sqrt{3}:3$.

$$a_2=\frac{3-\sqrt{7}}{\sqrt{28-8\sqrt{7}}},\quad b_2=\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{28-8\sqrt{7}}},\quad c_2=\frac{2}{\sqrt{28-8\sqrt{7}}}$$

$$a_3=\frac{3+\sqrt{7}}{\sqrt{28+8\sqrt{7}}},\quad b_3=-\frac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{28+8\sqrt{7}}},\quad c_3=\frac{2}{\sqrt{28+8\sqrt{7}}}$$

Οὕτω μετὰ τὸν μετασχηματισμὸν ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις εἶνε

$$2x_1^2+\sqrt{7}y_1^2-\sqrt{7}z_1^2-\frac{4\sqrt{3}}{3}x_1+\frac{7-3\sqrt{7}}{\sqrt{7-2\sqrt{7}}}y_1+\frac{7+3\sqrt{7}}{\sqrt{7+2\sqrt{7}}}z_1-3=0$$

Ἂν τώρα θέσωμεν : $x_1=x'+\frac{\sqrt{3}}{3}$, $y_1=y'-\frac{7-3\sqrt{7}}{2\sqrt{7}\sqrt{7-2\sqrt{7}}}$,

$$z_1=z'+\frac{7+3\sqrt{7}}{2\sqrt{7}.\sqrt{7+2\sqrt{7}}},$$

εὑρίσκομεν: $$2x'^2+\sqrt{7}y'^2-\sqrt{7}z'^2-2=0$$

ἢ $$2x'^2+\sqrt{7}y'^2-\sqrt{7}z'^2=2.$$

Ἄρα ἡ ὑπὸ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως παριστανομένη ἐπιφάνεια εἶνε μονόχωνον ὑπερβολοειδές.

Ἔστω ἀκόμη π.χ. ἡ ἐξίσωσις :

$$x^2+3y^2+z^2-4yz+4xy+6x+4y-5z+3=0$$

θὰ εἶνε $A_{11}=1$, $A_{22}=3$, $A_{33}=1$, $A_{12}=2$, $A_{13}=0$,

$$A_{23}=-2,\ A_{10}=3,\ A_{02}=2,\ A_{03}=-\frac{5}{2},A_{00}=3.$$

Ἡ τριτοβάθμιος ἐξίσωσις, ἡ ὁποία δίδει τοὺς συντελεστὰς A'_{11}, A'_{22}, A'_{33}, μετὰ τὴν στροφὴν τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος εἶνε : $(1-\omega)(\omega^2-4\omega-5)=0$, ἄρα ἔχομεν $A'_{11}=1$, $A'_{22}=-1$, $A'_{33}=5$, Τὰ συνημίτονα τοῦ νέου συστήματος ὡς πρὸς τὸ παλαιὸν εἶνε :

$$Ox_1\left(a_1=\frac{\sqrt{2}}{2},\ b_1=0,\ c_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\right),Oy_1\left(a_2=\frac{\sqrt{3}}{3},b_2=-\frac{\sqrt{3}}{3},c_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}\right),$$

$$Oz_1\left(a_3=\frac{\sqrt{6}}{6},\ b_3=\frac{2\sqrt{6}}{6},\ c_3=-\frac{\sqrt{6}}{6}\right),$$

ἑπομένως : $A'_{10}=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $A'_{02}=\frac{7\sqrt{3}}{6}$, $A'_{03}=\frac{19\sqrt{6}}{16}$.

Οὕτω ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις μετασχηματίζεται εἰς τὴν

$$x^2_1-y^2_1+5z^2_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{7\sqrt{3}}{3}y_1+\frac{19\sqrt{6}}{6}z_1+3=0$$

Τέλος θέτομεν : $x_1=x'-\frac{\sqrt{2}}{4}$, $y_1=y'+\frac{7\sqrt{3}}{6}$, $z_1=z'-\frac{19\sqrt{6}}{5.12}$

καὶ εὑρίσκομεν : $x'^2-y'^2+5z'^2=-\frac{79}{20}$, ἥτις παριστάνει δίχωνον ὑπερβολοειδές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 580. Ἔστωσαν Oxyz σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων, περιφέρεια κύκλου μὲ ἐξισώσεις $x^2+y^2-\varrho^2=0$, $z=0$, καὶ τὰ σημεῖα A(α, ο,γ) καὶ B (x′,y′,z′). Λαμβάνομεν σημεῖον P ἐπὶ τοῦ xy καὶ θεωροῦμεν τὸ ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τοῦ A καὶ τῆς πολικῆς τοῦ P ὡς πρὸς τὴν περιφέρειαν: Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τομῆς τοῦ ἐπιπέδου τούτου καὶ τῆς εὐθείας BP, μεταβαλλομένου τοῦ P. Ὁ τόπος εἶνε ἐπιφάνεια β′ βαθμοῦ. Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις, ὅταν τὸ P κινῆται (εἰς τὸν χῶρον), τοῦ A διατηρουμένου ἀκινήτου.

581. Ἐπὶ τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων Oxyz λαμβάνομεν τὰ σημεῖα A(2α,ο,ο), B(ο,2β,ο), Γ(ο,ο,2γ), (α,β,γ>0). Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῶν ἐπιφανειῶν τοῦ β′ βαθμοῦ, τῶν διερχομένων διὰ τῶν O, A, B, Γ καὶ τεμνουσῶν τὸ μὲν xy κατὰ περιφέρειαν κύκλου, τὰ δὲ yz καὶ zx κατὰ ἰσοσκελεῖς $Y_{\pi\iota}$. Τίς ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν ἐπιφανειῶν τούτων;

582. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γενικὴ ἐξίσωσις τῶν ἐπιφανειῶν β′ βαθμοῦ τῶν διερχομένων διὰ δύο εὐθειῶν, μὴ κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

583. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν ἐπιφανειῶν β′ βαθμοῦ τῶν διερχομένων διὰ τῶν σημείων A, B καὶ τῶν εὐθειῶν (ε) καὶ (ε′) μὴ κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

584. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν ἐπιφανειῶν β′ βαθμοῦ, τῶν διερχομένων διὰ κωνικῆς τομῆς (Γ) καὶ εὐθείας, τεμνούσης τὴν κωνικὴν τομὴν εἰς σημεῖον O.

585. Δίδεται ἐλλειψοειδὲς καὶ σημεῖον P. Εἰς ἕκαστον σημεῖον M ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον M′ τομῆς τῆς εὐθείας PM καὶ τοῦ πολικοῦ ἐπιπέδου τοῦ M. Ὅταν τὸ M′ κινῆται ἐπὶ ἐπιπέδου, τὸ M γράφει ἐπιφάνειαν β′ βαθμοῦ (Λ). Ἂν τὸ ἐπίπεδον τοῦτο στρέφεται περὶ σταθερὸν σημεῖον K, τὸ κέντρον τῆς (Λ) γράφει ἐπιφάνειαν β′ βαθμοῦ (Λ′), ἡ ὁποία πάντοτε διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου καὶ διὰ μιᾶς σταθερᾶς E_λ, ὅταν τὸ K κινῆται (εἰς τὸν χῶρον). Νὰ ἐξετασθῇ ἡ (Λ′) διὰ τὰς διαφόρους θέσεις τοῦ σημείου K.

586. Ἔστωσαν $y^2-2px=0, z=0$ αἱ ἐξισώσεις Π_α εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους, καὶ τὰ σημεῖα A(α,β,−γ), B(α,β,γ), συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς. Ὑποθέτο.

μεν ὅτι ἡ ΑΒ δὲν τέμνει τὴν Π_α ($\beta^2-2p\alpha\neq0$). Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κορυφῶν τῶν παραβολοειδῶν, τῶν διερχομένων διὰ τῆς Π_α καὶ τῶν Α, Β. Νὰ γίνῃ διάκρισις τῶν κορυφῶν τῶν ἀνηκόντων εἰς ἐλλειπτικὰ καὶ ὑπερβολικὰ παραβολοειδῆ.

587. Καθὼς εἰς τὰ περὶ σφαίρας, ὁρίσατε τὸν πόλον καὶ τὸ πολικὸν ἐπίπεδον ὡς πρὸς ἑκάστην τῶν ἐπιφανειῶν δευτέρου βαθμοῦ. Εὕρετε ἰδιότητας μεταξὺ πόλων καὶ πολικῶν.

588. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνθήκη, ἵνα αἱ κάθετοι ἐλλειψοειδοῦς $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}+\dfrac{z^2}{\gamma^2}-1=0$ εἰς τὰ σημεῖα τομῆς αὐτοῦ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου $u\dfrac{x}{\alpha}+v\dfrac{y}{\beta}+w\dfrac{z}{\gamma}-1=0$ τέμνωνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν πληροῦται ἡ συνθήκη αὕτη, αἱ κάθετοι εἰς τὰ σημεῖα τομῆς τοῦ ἐλλειψοειδοῦς ὑπὸ τοῦ $\dfrac{x}{u\alpha}+\dfrac{y}{v\beta}+\dfrac{z}{w\gamma}=1$ τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

589. Ἡ ἐξίσωσις τῶν ὁμοεστίων ἐπιφανειῶν β′ βαθμοῦ (διὰ τὰς ὁποίας αἱ ὁδηγοὶ κατὰ τὴν γένεσίν των εἶνε ὁμοέστιοι καμπύλαι) εἶνε $\dfrac{x^2}{\alpha^2+\lambda}+\dfrac{y^2}{\beta^2+\lambda}+\dfrac{z^2}{\gamma^2+\lambda}-1=0$. Νὰ δειχθῇ α′) ὅτι δύο τοιαῦται τέμνονται ὀρθογωνίως εἰς πᾶν σημεῖον τῆς τομῆς των· β′) ὅτι δι' ἑκάστου σημείου διέρχονται τρεῖς ἐπιφάνειαι ὁμοέστιοι πρὸς ἓν ἐλλειψοειδὲς καὶ εἶνε αὗται ἐλλειψοειδές, ὑπερβολοειδὲς μονόχωνον καὶ δίχωνον.

590. Ἐὰν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ εἶνε αἱ τιμαὶ τοῦ λ, διὰ τὰς ὁποίας ἔχομεν τρεῖς ἐπιφανείας ὁμοεστίους πρὸς δοθὲν ἐλλειψοειδὲς διερχομένας διὰ τοῦ σημείου (x', y', z'), νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ x', y', z' συναρτήσει τῶν λ_1, λ_2, λ_3.

591. Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα αἱ κάθετοι εὐθεῖαι εἰς τρία σημεῖα Α, Β, Γ παραβολοειδοῦς $\dfrac{y^2}{p}+\dfrac{z^2}{q}=2x$ τέμνωνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, εἶνε ὁ πόλος τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας

$$x(qy^2+pz^2)+{}^1/_2(p-q)\,(qy^2-pz^2)+pq\,(p-q)^2=0.$$

592. Τί παριστάνει ἑκάστη τῶν κατωτέρω ἐξισώσεων, καὶ εὕρετε τὰς κυκλικὰς τομὰς καὶ τὰς εὐθείας τὰς κειμένας ἐπὶ τῶν παριστανομένων ὑπ' αὐτῶν ἐπιφανειῶν, ἐὰν ὑπάρχουν.

α′) $5x^2-8y^2+4z^2-160=0$· β′) $2z-8y^2+4x^2=0$· γ′) $2y^2-8z^2-9x^2+15=0$·
δ′) $8x^2+5y^2+80z=0$· ε′) $8x^2+20z^2-10y^2+40=0$· στ′) $3z^2-x^2-2y=0$·
ζ′) $2z-x^2=5y^2$· η′) $2x^2+y^2+3z^2-6=0$.

593. Νὰ εὑρεθῇ τί παριστάνει ἑκάστη τῶν κατωτέρω ἐξισώσεων ἀναφερομένων εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους καθὼς καὶ αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου των ὡς πρὸς τὸ σύστημα, εἰς τὸ ὁποῖον ἀναφέρονται.

α′) $3x^2+y^2+z^2+yz-3zx-2xy+y+2=0$

β′) $x^2+2y^2+z^2-3yz-2xy+3x-2z+1=0$

γ′) $x^2+y^2-9z^2-6yz+6zx-2xy-x+y-3z=0$

δ') $x^2+6yz+3zx+2xy+x+3z=0$

ε') $3x^2+2y^2+4yz-2xz-4x-8z-8=0$

στ') $x^2+2y^2+2z^2+2xy-2x-4y-4z=0$

594. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τριῶν διαμέτρων ἀνὰ δύο καθέτων ἐλλειψοειδοῦς εἶνε σταθερόν, καὶ τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τῶν ἄκρων τῶν διαμέτρων τούτων ἐφάπτεται σφαίρας σταθερᾶς.

595. Ἐὰν χορδὴ ἐλλειψοειδοῦς στρέφεται περὶ σταθερὸν σημεῖον, τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς τέμνονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

596. Ἐὰν P_1, P_2, P_3 εἶνε οἱ πόδες τῶν ἐκ τοῦ κέντρου O ἐλλειψοειδοῦς ἀγομένων καθέτων ἐπὶ τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα, παράλληλα πρὸς συζυγικὰ διαμετρικὰ ἐπίπεδα, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{1}{(OP_1)^2}+\frac{1}{(OP_2)^2}+\frac{1}{(OP_3)^2}=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2},$$

ἂν δὲ T_1, T_2, T_3 εἶνε αἱ τομαὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς ὑπὸ τῶν καθέτων, θὰ εἶνε

$$\frac{1}{(OP_1)^2(OT_1)^2}+\frac{1}{(OP_2)^2(OT_2)^2}+\frac{1}{(OP_3)^2(OT_3)^2}=\frac{1}{\alpha^4}+\frac{1}{\beta^4}+\frac{1}{\gamma^4}.$$

597. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν μέσων τῶν χορδῶν τῶν ἀγομένων διὰ σταθεροῦ σημείου κειμένου ἐντὸς ἐλλειψοειδοῦς.

598. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος ὁ παραγόμενος ὑπὸ εὐθείας ἐφαπτομένης τοῦ ἐλλειψοειδοῦς $\beta^2\gamma^2x^2+\alpha^2\gamma^2y^2+\alpha^2\beta^2z^2=\alpha^2\beta^2\gamma^2$, συναντώσης τὸν ἄξονα τῶν z καὶ τὴν καμπύλην $\beta^2x^2+\alpha^2y^2-\alpha^2\beta^2k^2=0$, $z=0$.

599. Ἐὰν ἐπὶ καθέτου εἰς σημεῖον A παραβολοειδοῦς λάβωμεν σημεῖον P, δυνάμεθα νὰ φέρωμεν τέσσαρας καθέτους ἀκόμη πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν πόδας τὰ B, Γ, Δ, E. Εὕρετε· α') τὴν ἐξίσωσιν τῆς σφαίρας τῆς διερχομένης διὰ τῶν B, Γ, Δ, E· β') τὸν τόπον τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν, ὅταν τὸ P κινῆται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ A.

600. Ἐὰν εἰς τὰ σημεῖα τομῆς ἐλλειψοειδοῦς ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς πρωτεῦον ἐπίπεδον φέρωμεν καθέτους ἐπ' αὐτό, θὰ τέμνωνται αὗται ἐπὶ δύο σταθερῶν εὐθειῶν, κειμένων εἰς τὰ δύο ἄλλα πρωτεύοντα ἐπίπεδα.

601. Δείξατε ὅτι, ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ἀπεχόντων ἀπὸ δύο σταθερῶν εὐθειῶν, μὴ κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἀποστάσεις ἴσας, εἶνε ὑπερβολικὸν παραβολοειδές.

602. Εὐθεῖά τις κινεῖται, ὥστε τρία σημεῖα αὐτῆς νὰ κεῖνται ἐπὶ τῶν τριῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος ὁ γραφόμενος ὑπὸ σταθεροῦ σημείου αὐτῆς.

603. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν ἐπιπέδων τομῶν ἐλλειψοειδοῦς μὲ ἐμβαδὸν σταθερὸν k^2.

604. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων βάρους μιᾶς ἕδρας τῶν τετραέδρων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς μονόχωνον ὑπερβολοειδές, ἂν αἱ ἄλλαι ἕδραι του μένουν παράλληλοι πρὸς τρία σταθερὰ ἐπίπεδα.

605. Ἐὰν σημεῖον Ν (ξ, η, ξ) κινῆται, ὥστε νὰ γράφῃ τὴν ἐπιφάνειαν $qy^2 - pz^2 = 2pqx$, τί γράφει ὁ πόλος τοῦ ἐπιπέδου $\frac{\xi x}{\alpha^2} + \frac{\eta y}{\beta^2} + \frac{\xi z}{\gamma^2} = 1$ ὡς πρὸς τὸ δοθὲν παραβολοειδές;

606. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κορυφῶν τῶν τριέδρων γωνιῶν, τῶν ὁποίων αἱ ἕδραι ἐφάπτονται ἐλλειπτικοῦ παραβολοειδοῦς, ὅταν ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου, μὲ ἕδρας τὰς τῆς τριέδρου καὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν σημείων ἐπαφῆς, εἶνε σταθερός.

607. Τίς εἶνε ὁ τόπος τῶν εὐθειῶν, διὰ τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ φέρωμεν δύο ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα ἐλλειπτικοῦ παραβολοειδοῦς κάθετα μεταξύ των;

608. Δίδεται ἡ ἐπιφάνεια $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} \pm \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$ καὶ δύο σημεῖα Α, Β. Διὰ τοῦ Β φέρομεν τέμνουσαν τὴν ἐπιφάνειαν εἰς τὰ Γ καὶ Γ', καὶ τὸ πολικὸν ἐπίπεδον τοῦ Α εἰς τὸ Δ. Ἔστωσαν Μ καὶ Μ' τὰ σημεῖα κατὰ τὸ ὁποῖα ἡ ΑΔ τέμνει τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα εἰς τὸ Γ καὶ Γ'. Νὰ εὑρεθῇ α') ποῖον τόπον γράφουν τὰ Μ καὶ Μ', ὅταν ἡ ΒΔ στρέφεται περὶ τὸ Β· β') ὅτι ὁ τόπος ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἐπιφανείας β' βαθμοῦ, τῶν ὁποίων ἡ μία εἶνε ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ Β καὶ ἡ ἄλλη ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θέσεως αὐτοῦ.

609. Δίδεται ὑπερβολικὸν παραβολοειδὲς καὶ εὐθεῖαι ἐπ' αὐτοῦ (τοῦ αὐτοῦ συστήματος) λ_1, λ_2, καθέτων διευθύνσεων. Διὰ τῶν σημείων Λ_1 καὶ Λ_2 καθ' ἃ τέμνονται ὑπὸ τῆς κοινῆς καθέτου των, διέρχονται δύο εὐθεῖαι μ_1 καὶ μ_2 τοῦ ἄλλου συστήματος. Ἔστωσαν ἀκόμη M_1 καὶ M_2 τὰ σημεῖα, καθ' ἃ τέμνονται αὗται ὑπὸ τῆς κοινῆς καθέτου αὐτῶν. α') Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων Λ_1 καὶ Λ_2, καὶ τῶν M_1 καὶ M_2, ὅταν τὸ Λ_1 γράφῃ τὸ παραβολοειδές· β') Ὁ τόπος τοῦ σημείου τομῆς τῶν λ_1 καὶ μ_2 ἢ μ_1 καὶ λ_2. γ') Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη $(\Lambda_1 \Lambda_2)$ καὶ $(M_1 M_2)$ τῶν κοινῶν καθέτων, καὶ νὰ ἐξετασθῇ πῶς μεταβάλλονται ταῦτα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V.

Περὶ κυλινδρικῶν, κωνικῶν καὶ κωνοειδῶν ἐπιφανειῶν

§ 63. Κυλινδρικαὶ ἐπιφάνειαι ἐν γένει.

Κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια καλεῖται ἡ παραγομένη ὑπὸ εὐθείας, κινουμένης παραλλήλως πρὸς ἑαυτὴν καὶ συναντώσης δοθεῖσαν γραμμήν. Ἡ μὲν κινουμένη εὐθεῖα καλεῖται ***γενέτειρα*** τῆς ἐπιφανείας, ἡ δὲ γραμμή, τὴν ὁποίαν αὕτη συναντᾷ, λέγεται **ὁδηγός**. Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις τῆς κινουμένης εὐθείας, $x=\lambda z+\alpha$, $y=\mu z+\beta$ (1). Ἂν αὕτη συναντᾷ τὴν γραμμὴν $\varphi_1(x,y,z)=0$, $\varphi_2(x,y,z)=0$ (2), εὑρίσκομεν σχέσιν συνδέουσαν τὰς παραμέτρους α,β, ἂν μεταξὺ τῶν (1) καὶ (2) ἀπαλείψωμεν τὰ x, y, z, ἔστω δ' αὕτη ἡ $f(\alpha,\beta)=0$ (3).

Ἀπαλείφοντες τώρα τὰ α καὶ β μεταξὺ τῶν (1) καὶ (3) εὑρίσκομεν τὴν

$$f\,(x-\lambda z,\; y-\mu z)=0, \tag{4}$$

ἥτις εἶνε ἐξίσωσις τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας. Αὕτη λυομένη ὡς πρὸς $y-\mu z$, λαμβάνει ἔστω τὴν μορφὴν $y-\mu z=f_1(x-\lambda z)$.

Ἐν γένει, πᾶσα εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν τομὴν δύο ἐπιπέδων, μὲ ἐξισώσεις $\alpha=0$, $\beta=0$, ὅπου τὰ α,β παριστάνουν ἀκέραια πολυώνυμα πρωτοβάθμια ὡς πρὸς x,y,z, ἔχει ἐξισώσεις $\alpha=\lambda$, $\beta=\mu$ (1′), ὅπου λ, μ εἶνε παράμετροι, ὁρίζουσαι τὴν θέσιν τῆς εὐθείας.

Ἂν ἡ (1′) κινουμένη συναντᾷ τὴν γραμμὴν (2), εὑρίσκομεν σχέσιν μεταξὺ τῶν λ, μ, δι' ἀπαλοιφῆς τῶν x, y, z μεταξὺ τῶν (1′) καὶ (2), ἔστω δ' αὕτη $f_2\,(\lambda,\mu)=0.$ (3′)

Δι' ἀπαλοιφῆς τῶν λ, μ μεταξὺ τῆς (3′) καὶ τῶν (1′) ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας $f_2\,(\alpha,\beta)=0$.

Ἀντιστρόφως· πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς ταύτης παριστάνει κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν. Διότι, ἂν αἱ συντεταγμέναι σημείου τινὸς $M(x,y,z)$ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην καὶ καλέσωμεν λ καὶ μ τὰς τιμὰς τῶν α καὶ β, ἀντὶ δὲ τῶν x,y,z, τὰ ὁποῖα περιέχονται εἰς αὐτά, θέσωμεν τὰς συντεταγμένας τοῦ M, θὰ ἔχωμεν

$$f_2\,(\lambda,\mu)=0,\quad \alpha=\lambda,\quad \beta=\mu.$$

Ἀλλὰ καὶ αἱ συντεταγμέναι παντὸς ἄλλου σημείου τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων $\alpha=\lambda$ καὶ $\beta=\mu$ καθιστοῦν τὰ α καὶ β ἴσα μὲ λ καὶ μ, ἤτοι αἱ συντεταγμέναι αὗται ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν $f_2(\alpha,\beta)=0$. Ἤτοι τὸ σημεῖον τοῦτο κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι, εἰς τὰς τιμὰς τῶν λ καὶ μ ἀντιστοιχοῦν εὐθεῖαι μὲ ἐξισώσεις $\alpha=\lambda$, $\beta=\mu$, παράλληλοι πρὸς τὴν $\alpha=0$, $\beta=0$.

Ἄρα ἡ ἐπιφάνεια μὲ γενετείρας τὰς εὐθείας ταύτας, εἶνε κυλινδρική. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

«***ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα ἐξίσωσίς τις*** $f(x,y,z)=0$ ***παριστάνῃ κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν, εἶνε τὸ α΄ μέλος ταύτης νὰ εἶνε συνάρτησις δύο ἀκεραίων πολυωνύμων πρωτοβαθμίων ὡς πρὸς*** x, y, z».

Διὰ νὰ εὕρωμεν, ἂν δοθεῖσα ἐπιφάνεια μὲ ἐξίσωσιν $f(x,y,z)=0$

εἶνε κυλινδρική, ἐπιδιώκομεν νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι τὸ $f(x, y, z)$, εἶνε συνάρτησις δύο ἀκεραίων πολυωνύμων ὡς πρὸς x, y, z.

Ἐφαρμογαί. 1. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, μὲ γενετείρας παραλλήλους τῆς $x=y=z$ καὶ ὁδηγὸν τὴν E_λ

$$z=0, \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1.$$

Αἱ ἐξισώσεις τῆς γενετείρας εἶνε $z-x=\lambda$, $z-y=\mu$, ἵνα δ' αὕτη συναντᾷ τὴν δοθεῖσαν E_λ πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ πληροῦται ἡ $\frac{\lambda^2}{\alpha^2}+\frac{\mu^2}{\beta^2}=1$, προκύπτουσα ἐκ τῆς ἀπαλοιφῆς τῶν x, y, z μεταξὺ τῶν ἀνωτέρω τεσσάρων ἐξισώσεων. Δι' ἀπαλοιφῆς τῶν λ, μ μεταξὺ τῆς τελευταίας ἐξισώσεως καὶ τῶν τῆς γενετείρας εὑρίσκομεν $\frac{(z-x)^2}{\alpha^2}+\frac{(z-y)^2}{\beta^2}=1$, ἥτις εἶνε ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας.

2. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, μὲ γενετείρας παραλλήλους πρὸς τὴν $x=z$, $y=2z$ καὶ ὁδηγὸν τὴν Π_α $z=0$, $y^2=2px$.

Αἱ ἐξισώσεις τῆς γενετείρας εἶνε $x=z+\lambda$, $y=2z+\mu$, Ἀπαλείφοντες τὰ x, y, z μεταξὺ τούτων καὶ τῶν ἐξισώσεων τοῦ ὁδηγοῦ ἔχομεν $\mu^2=2p\lambda$. Δι' ἀπαλοιφῆς δὲ τῶν λ, μ μεταξὺ ταύτης καὶ τῶν τῆς γενετείρας ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας

$$(y-2z)^2=2p(x-z).$$

3. Νὰ εὑρεθῇ τὶ παριστάνει ἡ ἐξίσωσις $xy+xz=1$.

Ἐπειδὴ αὕτη τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $x(y+z)-1=0$, παριστάνει κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν μὲ γενετείρας παραλλήλους πρὸς τὴν $x=0$, $y+z=0$ καὶ ὡς ὁδηγὸς δύναται νὰ ληφθῇ ἡ Y_π $z=0$, $xy=1$, καθ' ἣν τέμνεται ἡ ἐπιφάνεια ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου $z=0$.

§ 64. Κωνικαὶ ἐπιφάνειαι.

Καλοῦμεν ***κωνικὴν ἐπιφάνειαν*** τὴν παραγομένην ὑπὸ εὐθείας διερχομένης διὰ δοθέντος σημείου καὶ συναντώσης δοθεῖσαν γραμμήν. Τὸ δοθὲν σημεῖον λέγεται ***κορυφὴ*** τῆς ἐπιφανείας ταύτης, ἡ κινουμένη εὐθεῖα ***γενέτειρα*** αὐτῆς, ἡ δὲ γραμμὴ τὴν ὁποίαν αὕτη συναντᾷ λέγεται ***ὁδηγὸς*** τῆς κινουμένης εὐθείας.

Ἔστωσαν (ὡς πρὸς τυχόντας ἄξονας Oxyz) x', y', z' αἱ συντεταγμέναι τῆς κορυφῆς A κωνικῆς ἐπιφανείας, $\varphi_1(x,y,z)=0$, $\varphi_2(x,y,z)=0$ (1) αἱ ἐξισώσεις τῆς ὁδηγοῦ, ἥτις τὴν παράγει καὶ τῆς γενετείρας αἱ

$$\frac{x-x'}{\alpha}=\frac{y-y'}{\beta}=\frac{z-z'}{\gamma}$$

ἢ $x-x'=\lambda(z-z')$, $y-y'=\mu(z-z')$, (2), ὅπου $\frac{\alpha}{\gamma}=\lambda$, $\frac{\beta}{\gamma}=\mu$.

Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα (2) συναντᾷ τὴν ὁδηγὸν (1), εὑρίσκομεν τὴν μεταξὺ τῶν παραμέτρων λ καὶ μ ὑπάρχουσαν σχέσιν, ἂν ἀπαλείψωμεν τὰ x, y, z μεταξὺ τῶν (1) καὶ (2) καὶ ἔστω αὕτη ἡ $f(\lambda, \mu)=0$. Ἀπαλείφοντες μεταξὺ ταύτης καὶ τῶν (2) τὰ λ, μ, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ζητουμένης κωνικῆς ἐπιφανείας

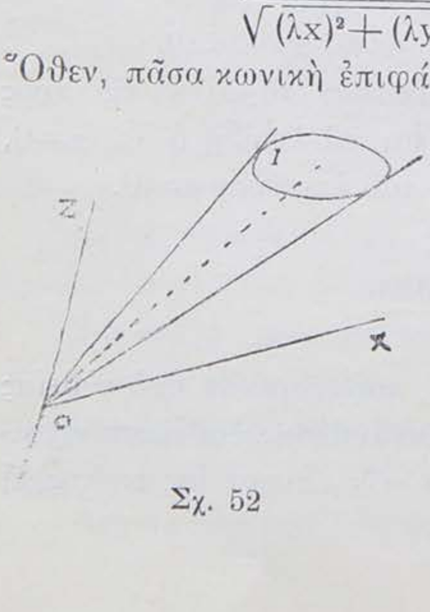
$$f\left(\frac{x-x'}{z-z'}, \frac{y-y'}{z-z'}\right)=0.$$

Ἂν κορυφὴ τῆς ἐν λόγῳ ἐπιφανείας εἶνε ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων O, ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς θὰ εἶνε $f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)=0$, (3) λέγομεν δ' ὅτι αὕτη εἶνε ὁμογενὴς ὡς πρὸς x, y, z.

Ἐν γένει καλεῖται συνάρτησίς τις $\varphi(x, y, z)$ ***ὁμογενὴς*** βαθμοῦ k ὡς πρὸς x, y, z, ἂν πολλαπλασιαζομένων τούτων ἐπὶ λ ἡ συνάρτησις πολλαπλασιάζεται ἐπὶ λ^k, ἤτοι ἂν εἶνε $\varphi(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda^k \varphi(x,y,z)$. Οὕτω π.χ. ἡ $\frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ εἶνε ὁμογενὴς β' βαθμοῦ ὡς πρὸς x, y, z, ἐπειδὴ ἔχομεν

$$\frac{\lambda x.\lambda y.\lambda z}{\sqrt{(\lambda x)^2+(\lambda y)^2+(\lambda z)^2}}=\frac{\lambda^2 x\,y\,z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Ὅθεν, πᾶσα κωνικὴ ἐπιφάνεια μὲ κορυφὴν τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων ἔχει ἐξίσωσιν ὁμογενῆ ὡς πρὸς x, y, z.



Σχ. 52

Ἀντιστρόφως, ἂν ἡ ἐξίσωσις

$$\varphi(x, y, z)=0 \qquad (4)$$

εἶνε ὁμογενής, ἔστω βαθμοῦ k, ὡς πρὸς x, y, z, παριστάνει κωνικὴν ἐπιφάνειαν, μὲ κορυφὴν τὸ O. Διότι, ἂν ἡ (3) ἐπαληθεύεται διὰ τὰς συντεταγμένας x_1, y_1, z_1 σημείου τινὸς I (Σχ. 52) θὰ ἐπαληθεύεται προφανῶς καὶ ὑπὸ τῶν συντεταγμένων τυχόντος σημείου $M(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$ τῆς εὐθείας ΟΙ· ἤτοι θὰ ἔχωμεν

$$\varphi(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) = \lambda^k \varphi(x_1, y_1, z_1) = 0,$$

δηλαδὴ ὁ ΟΙ κεῖται ἐπὶ τοῦ τόπου, τὸ ὁποῖον παριστάνει ἡ (3). Ἐπειδὴ ἡ τόπος παράγεται ἀπὸ εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ Ο, ἕπεται ὅτι οὗτος εἶνε κωνικὴ ἐπιφάνεια. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

«***ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα ἐξίσωσίς τις φ*** $(x, y, z) = 0$ ***παριστάνῃ κωνικὴν ἐπιφάνειαν μὲ κορυφὴν τὸ Ο εἶνε, τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς νὰ εἶνε ὁμογενὴς συνάρτησις ὡς πρὸς*** x, y, z».

Γενικώτερον, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν κωνικὴν ἐπιφάνειαν, μὲ κορυφὴν τυχὸν σημεῖον τοῦ διαστήματος, ὁριζόμενον ὡς τομὴν τριῶν ἐπιπέδων, μὲ ἐξισώσεις $\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \qquad (5)$

ὅπου α, β, γ παριστάνουν ἀκέραια πολυώνυμα α΄ βαθμοῦ ὡς πρὸς x, y, z. Διότι, ἀφοῦ ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια παράγεται ὑπὸ εὐθείας, διερχομένης διὰ τοῦ σημείου (5) καὶ κινουμένης καθ' ὡρισμένον νόμον, αἱ ἐξισώσεις αὐτῆς δύνανται νὰ γραφοῦν ὡς ἑξῆς

$$\alpha - \lambda\gamma = 0, \qquad \beta - \mu\gamma = 0, \qquad (6)$$

ἐνῶ ἡ μὲν α΄ τούτων παριστάνει ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς τομῆς τῶν $\alpha = 0$ καὶ $\gamma = 0$, ἡ δὲ β΄ ἄλλο διερχόμενον διὰ τῆς τομῆς τῶν $\beta = 0$ καὶ $\gamma = 0$. Οὕτω τὰ ἐπίπεδα (6) τέμνονται κατὰ εὐθεῖαν, διερχομένην διὰ τῆς τομῆς τῶν (5), ἤτοι διὰ τῆς κορυφῆς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. Ἐὰν τώρα γνωρίζωμεν τὴν κίνησιν τῆς εὐθείας ταύτης καὶ μὲ τὴν βοήθειαν αὐτῆς εὑρεθῇ ἡ σχέσις ἡ συνδέουσα τὰ λ καὶ μ, ἔστω ἡ

$$f(\lambda, \mu) = 0, \qquad (7)$$

εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας, ἀπαλείφοντες τὰ λ καὶ μ μεταξὺ τῶν (6) καὶ (7), ὅτε ἔχομεν τὴν

$$f\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}\right) = 0, \qquad (8).$$

Ἀντιστρόφως, πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς (8), ὅπου τὰ α, β, γ παριστάνουν πολυώνυμα πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, y, z, παριστάνει κωνικὴν ἐπιφάνειαν μὲ κορυφὴν τὸ σημεῖον (5). Πράγματι, ἂν σημεῖόν τι (x, y, z) ἀνήκῃ εἰς τὸν τόπον, τὸν ὁποῖον παριστάνει ἡ (8), θὰ ἐπαληθεύεται αὕτη, οἱ δὲ λόγοι α/γ, β/γ θὰ ἔχουν τιμὰς λ καὶ μ, διὰ τὰς ὁποίας θὰ ἔχωμεν $f(\lambda, \mu) = 0$. Ἀλλὰ τότε αἱ συντεταγμέναι παντὸς σημείου τῆς εὐθείας $\alpha - \lambda\gamma = 0$, $\beta - \mu\gamma = 0$, ὅταν τὰ λ καὶ μ ἔχουν τὰς ὁρισθείσας τιμάς, τὰ δὲ x, y, z μεταβάλλονται, θὰ ἐπαληθεύουν τὴν

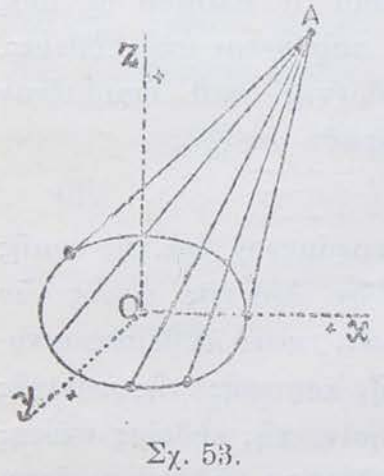
$$f\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}\right) = 0,$$

διότι οἱ λόγοι α/γ καὶ β/γ γίνονται ἴσοι μὲ λ καὶ μ, ἑπομένως ἡ εὐθεῖα κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, ἤτοι εἶνε αὕτη κωνικὴ μὲ κορυφὴν τὸ (5).

Ἐφαρμογαί. 1. Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας μὲ κορυφὴν τὴν ἀρχὴν O, ὁδηγὸν δ' Y_π ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου τοῦ xy μὲ ἀσυμπτώτους παραλλήλους πρὸς τοὺς ἄξονας τῶν x καὶ y. Αἱ ἐξισώσεις τῆς γενετείρας εἶνε $x=\lambda z$, $y=\mu z$, τῆς δὲ ὁδηγοῦ αὐτῆς αἱ $z=\gamma$, $xy=k$. Ἀπαλείφοντες τὰ x, y, z μεταξὺ τούτων, εὑρίσκομεν $\gamma^2\lambda\mu=k$, καὶ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας εἶνε $\gamma^2 xy = kz^2$.

2. Ἔστω ὅτι ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, μὲ κορυφὴν τὸ A (x', y', z'), ὁδηγὸν δὲ περιφέρειαν κύκλου, μὲ κέντρον τὸ O καὶ κειμένην ἐπὶ τοῦ xy. Αἱ ἐξισώσεις τῆς μὲν ὁδηγοῦ εἶνε (σχ. 53) $z=0$, $x^2+y^2=\varrho^2$ (9), τῆς δὲ γενετείρας

$$x-x'=\lambda(z-z'),\, y-y'=\mu(z-z'), \qquad (10).$$



Σχ. 53.

Ἡ ἐξίσωσις, ἥτις συνδέει τὰς παραμέτρους λ καὶ μ εἶνε $(x'-z'\lambda)^2+(y'-z'\mu)^2=\varrho^2$, τῆς δὲ κωνικῆς ἐπιφανείας, ἥτις καλεῖται ***πλάγιος κυκλικὸς κῶνος***, ἡ

$$(x'z-z'x)^2+(y'z-z'y)^2=\varrho^2(z-z')^2.$$

Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον xz ληφθῇ οὕτως, ὥστε νὰ διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου, ἡ ἐξίσωσις αὐτοῦ θὰ εἶνε $(x'z - z'x)^2 + (z'y)^2 = \varrho^2(z - z')^2$. Ἂν ὁ κῶνος εἶνε ὀρθός, ἡ κορυφὴ τούτου κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν z, καὶ ἡ ἐξίσωσις αὐτοῦ εἶνε

$$z'^2(x^2+y^2)=\varrho^2(z-z')^2.$$

3. Ἔστω ὅτι ζητεῖται ἡ ἐξίσωσις τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, μὲ κορυφὴν τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων καὶ ὁδηγὸν τὴν περιφέρειαν $z=\gamma, x^2+y^2=\varrho^2$. Αἱ ἐξισώσεις τῆς γενετείρας εἶνε $x=\lambda z$, $y=\mu z$, ἡ δὲ τὰ λ καὶ μ συνδέουσα σχέσις ἡ $(\lambda^2+\mu^2)\gamma^2=\varrho^2$. Ἑπομένως ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας εἶνε $\left(\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}\right)\gamma^2=\varrho^2$ ἢ $x^2+y^2=\frac{\varrho^2}{\gamma^2}z^2$.

4. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^2+y^2-\alpha^2z^2=0$. Αὕτη ὡς ὁμογενὴς ὡς πρὸς z, y, x παριστάνει κωνικὴν ἐπιφάνειαν μὲ κορυφὴν τὸ O. Γράφοντες αὐτὴν ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}=\alpha^2$,

παρατηροῦμεν ὅτι ὁδηγὸς κατὰ τὴν γένεσιν τῆς ἐπιφανείας δύναται νὰ ληφθῇ ἡ περιφέρεια κύκλου $z=1$, $x^2+y^2=\alpha^2$.

5. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $xy+yz+zx=0$.

Ἐπειδὴ αὕτη εἶνε ὁμογενὴς ὡς πρὸς x, y, z παριστάνει κωνικὴν ἐπιφάνειαν μὲ κορυφὴν τὸ O, θέτοντες δὲ εἰς αὐτὴν $z=\gamma$, ἔχομεν ὅτι ὁδηγὸς κατὰ τὴν γένεσιν τῆς ἐπιφανείας δύναται νὰ ληφθῇ Y_π ἡ ἔχουσα ἐξισώσεις $z=\gamma$, $xy+\gamma(x+y)=0$.

§ 65. Κωνοειδεῖς ἐπιφάνειαι.

Κωνοειδὴς λέγεται ἡ ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία γράφεται ὑπὸ εὐθείας, ἥτις κινεῖται, ὥστε νὰ συναντᾷ δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ ἄλλην γραμμήν, μένει δὲ παράλληλος πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον. Ἡ εὐθεῖα, ἥτις παράγει τὴν ἐπιφάνειαν λέγεται γενέτειρα αὐτῆς, τὸ ἐπίπεδον, πρὸς τὸ ὁποῖον μένει παράλληλος, ὁδηγοῦν ἐπίπεδον, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ ἡ γραμμή, τὰς ὁποίας συναντᾷ ἡ γενέτειρα, λέγονται ***πρώτη*** καὶ ***δευτέρα ὁδηγὸς*** αὐτῆς.

Ὅτι εἶνε δυνατὴ ἡ ἀνωτέρω κίνησις εὐθείας ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς: Φανταζόμεθα τυχὸν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ὁδηγοῦν καὶ τέμνον τὴν μὲν α΄ ὁδηγὸν ἔστω εἰς τὸ A, τὴν δὲ β΄ εἰς ἓν ἢ περισσότερα σημεῖα. Ἐὰν συνδέσωμεν το A μὲ ἓν τῶν σημείων τούτων τῆς β΄ ὁδηγοῦ δι᾽ εὐθείας, ἔχομεν τὴν γενέτειραν τῆς ἐπιφανείας. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον κινῆται μένον παράλληλον πρὸς τὸ δοθέν, καὶ ἡ εὐθεῖα, ἥτις συνδέει τὰς τομάς, κινεῖται καὶ γράφει τὴν ἐπιφάνειαν.

Πρὸς εὕρεσιν τῆς ἐξισώσεως κωνοειδοῦς ἐπιφανείας λαμβάνομεν, πρὸς εὐκολίαν, τὴν μὲν α΄ ὁδηγὸν ὡς ἄξονα τῶν z, τὸ δὲ ὁδηγοῦν ἐπίπεδον ὡς ἐπίπεδον τῶν xy (εἰς ἄξονος τυχόντας). Τότε αἱ ἐξισώσεις τῆς γενετείρας εἶνε $y=\lambda x$, $z=\gamma$. (1)

Ἂν αἱ ἐξισώσεις τῆς β΄ ὁδηγοῦ εἶνε

$$\varphi_1(x, y, z)=0, \quad \varphi_2(x, y, z)=0, \tag{2}$$

δι᾽ ἀπαλοιφῆς τῶν x, y, z μεταξὺ τῶν (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν ἔστω τὴν $f(\lambda,\gamma)=0$.

Ἀπαλείφοντες τὰ λ, γ μεταξὺ ταύτης καὶ τῶν (1) εὑρίσκομεν τὴν $f\left(\dfrac{y}{x}, z\right)=0$, ἥτις εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς κωνοειδοῦς ἐπιφανείας.

Ἐν γένει, πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $f\left(\dfrac{\beta}{\alpha}, \gamma\right)=0$,

ὅπου τὰ α, β, γ εἶνε ἀκέραια πολυώνυμα α΄ βαθμοῦ ὡς πρὸς x, y, z, τὰ δ᾽ ἐπίπεδα $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ τέμνονται, παριστάνει κωνοειδῆ ἐπιφάνειαν μὲ ὁδηγοῦν ἐπίπεδον τὸ $\gamma=0$ καὶ ὁδηγὸν εὐθεῖαν μὲ ἐξισώσεις

$$\alpha=0,\ \beta=0.$$

Διότι ἡ μὲν δοθεῖσα ἐξίσωσις προκύπτει ἐκ τῶν

$$\beta-\alpha\mu=0,\ \gamma=\lambda,\ f(\lambda,\mu)=0,$$

δι᾽ ἀπαλοιφῆς τῶν παραμέτρων μ, λ, αἱ δὲ δύο πρῶται τούτων παριστάνουν εὐθεῖαν κειμένην ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ $\gamma=0$, τέμνουσαν τὴν $\alpha=0$, $\beta=0$ εἰς τὸ σημεῖον, καθ᾽ ὃ εἶνε $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=\lambda$. Ἑπομένως, ἡ ἐπιφάνεια, ἡ παραγομένη ὑπὸ τῆς εὐθείας, ὥστε τὰ μ, λ νὰ συνδέωνται διὰ τῆς $f(\lambda,\mu)=0$, εἶνε κωνοειδής.

Ἐφαρμογαί. 1. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς κωνοειδοῦς ἐπιφανείας μὲ γενέτειραν παράλληλον τοῦ $z=0$ καὶ ὁδηγοὺς τὸν ἄξονα τῶν z καὶ τὴν περιφέρειαν μὲ ἐξισώσεις

$$x=\alpha,\ y^2+z^2=\varrho^2.$$

Ἡ γενέτειρα ἔχει ἐξισώσεις $z=\gamma$, $y=\lambda x$. Ἀπαλείφοντες τὰ x,y,z μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τούτων καὶ τῆς ὁδηγοῦ, εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν $\lambda^2\alpha^2+\gamma^2=\varrho^2$. Δι᾽ ἀπαλοιφῆς τῶν λ, γ μεταξὺ ταύτης καὶ τῶν ἐξισώσεων τῆς γενετείρας λαμβάνομεν τὴν ζητουμένην ἐξίσωσιν

$$\frac{y^2}{x^2}\alpha^2+z^2=\varrho^2.$$

2. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς κωνοειδοῦς ἐπιφανείας, μὲ ὁδηγοὺς δύο δοθείσας εὐθείας καὶ γενέτειραν παράλληλον πρὸς ἐπίπεδον μὴ παράλληλον πρὸς τὰς ὁδηγούς.

Λαμβάνομεν τὸ ὁδηγοῦν ἐπίπεδον ὡς ἐπίπεδον τῶν xy, ἄξονα τῶν z τὴν μίαν τῶν ὁδηγῶν εὐθειῶν, ὡς ἐπίπεδον τῶν yz τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τῶν z ἀγόμενον ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν ἄλλην ὁδηγόν, ὡς ἄξονα δὲ τῶν x τὴν εὐθεῖαν, ἥτις συνδέει τὰς τομὰς τοῦ ὁδηγοῦντος ἐπιπέδου καὶ τῶν ὁδηγῶν. Οὕτω αἱ μὲν ἐξισώσεις τῆς γενετείρας εἶνε $z=\gamma$, $y=\lambda x$, τῆς δὲ β′ ὁδηγοῦ αἱ $x=\alpha$, $y=\mu z$.

Δι᾽ ἀπαλοιφῆς μὲν τῶν x, y, z μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τούτων ἔχομεν τὴν $\mu\gamma=\lambda\alpha$, δι᾽ ἀπαλοιφῆς δὲ τῶν γ, λ μεταξὺ ταύτης καὶ τῶν ἐξισώσεων τῆς γενετείρας εὑρίσκομεν τὴν $\alpha y=\mu xz$, ἥτις εἶνε ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας.

Παρατηρητέον ὅτι ἡ τομὴ τῆς ἐπιφανείας ταύτης ὑπὸ ἐπιπέδου ἔστω $x=\alpha_1$ εἶνε ἡ εὐθεῖα μὲ ἐξισώσεις $x=\alpha_1$, $\alpha_1\mu z-\alpha y=0$. Αὕτη κινουμένη συναντᾷ τὴν γενέτειραν τῆς ἐπιφανείας (παράλληλον πρὸς τὸ xy) εἰς τὰς διαφόρους θέσεις αὐτῆς καὶ μένει παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον yz.

Ἂν x', y', z' εἶνε αἱ συντεταγμέναι σημείου τινὸς M' τῆς ἐπιφανείας, θὰ ἔχωμεν $\mu x'z'=\alpha y'$ καὶ δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν μίαν (γενέτειραν) εὐθεῖαν παράλληλον τοῦ xy διὰ τῶν ἐξισώσεων $z=\gamma$, $y=\frac{\gamma\mu}{\alpha}x$, νὰ ὁρίσωμεν δὲ τὸ γ, ὥστε ἡ εὐθεῖα αὕτη νὰ διέρχεται διὰ τοῦ Μ΄, διότι εἶνε $z'=\gamma$, $y'=\frac{\gamma\mu}{\alpha}x'$. Καθ' ὅμοιον τρόπον δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὸ α_1, ὥστε νὰ εἶνε

$$x'=\alpha_1,\qquad \alpha_1\mu z'-\alpha y'=0.$$

Ἑπομένως δι' ἑκάστου σημείου τῆς ἀνωτέρω ἐπιφανείας διέρχονται δύο εὐθεῖαι, μία παράλληλος πρὸς τὸ yz καὶ ἡ ἄλλη πρὸς τὸ xy,

3. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς κωνοειδοῦς ἐπιφανείας, μὲ ὁδηγοὺς τὸν ἄξονα τῶν z καὶ τὴν E_λ $\gamma^2y^2+\beta^2z^2=\beta^2\gamma^2$, $x=\alpha$, ὁδηγοῦν δὲ ἐπίπεδον τὸ $z=0$.

Καὶ ἐνταῦθα αἱ ἐξισώσεις τῆς γενετείρας εἶνε $y=\lambda x$, $z=\rho$, ἡ δὲ μεταξὺ τῶν λ, ρ σχέσις εἶνε $\gamma^2\lambda^2\alpha^2+\beta^2\rho^2=\beta^2\gamma^2$.

Ἄρα ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶνε $\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2x^2}{\gamma^2\alpha^2}=\frac{x^2}{\alpha^2}$.

4. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς κωνοειδοῦς ἐπιφανείας, μὲ ὁδηγοὺς τὴν ἕλικα $x=\rho\sigma\upsilon\nu\varphi$, $y=\rho\eta\mu\varphi$, $z=k\varphi$, καὶ τὸν ἄξονα τῶν z, ἐνῶ ἡ γενέτειρα εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖται ἡ ἕλιξ.

Ἐπειδὴ αἱ ἐξισώσεις τῆς γενετείρας εἶνε $z=\gamma$, $x=y\varepsilon\varphi\varphi$, ἐκφράζοντες ὅτι ἡ γενέτειρα αὕτη συναντᾷ τὴν ἕλικα, ἔχομεν $k\varphi=\gamma$. Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τῆς ζητουμένης ἐπιφανείας, ἥτις καλεῖται ***κοινὸν ἑλικοειδές***, εἶνε $x=y\varepsilon\varphi\frac{z}{k}$.

§ 66. Ἐπιφάνειαι ἐκ περιστροφῆς.

Καλοῦμεν ***ἐπιφάνειαν ἐκ περιστροφῆς*** τὴν παραγομένην ὑπὸ γραμμῆς, στρεφομένης περὶ εὐθεῖαν, ὥστε ἕκαστον σημεῖον αὐτῆς νὰ γράφῃ περιφέρειαν κύκλου μὲ κέντρον ἐπὶ τῆς εὐθείας καὶ τῆς ὁποίας τὸ ἐπίπεδον εἶνε κάθετον ἐπ' αὐτήν. Ἡ εὐθεῖα, περὶ τὴν ὁποίαν γίνεται ἡ στροφή, καλεῖται ***ἄξων*** περιστροφῆς ἢ ἄξων τῆς ἐπιφανείας, αἱ δὲ τομαὶ τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ ἐπιπέδων διερχομένων διὰ τοῦ ἄξονος λέγονται ***μεσημβρινοὶ*** τῆς ἐπιφανείας.

Ἐπειδὴ πᾶσα ἐπιφάνεια δύναται νὰ νοηθῇ γραφομένη ὑπὸ γραμμῆς κινουμένης ἐπ' αὐτῆς, δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν τὴν ἐπιφάνειαν ἐκ περιστροφῆς γραφομένην ὑπὸ περιφερείας κύκλου, τῆς ὁποίας τὸ μὲν κέντρον κινεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῆς ἐπιφανείας τὸ δὲ ἐπίπεδον μένει κάθετον ἐπ' αὐτόν, ἐνῷ ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας μεταβάλλεται οὕτως, ὥστε νὰ συναντᾷ δοθεῖσαν γραμμήν. Κατὰ τὴν γένεσιν ταύτην τῆς ἐπιφανείας γενέτειρα αὐτῆς εἶνε ἡ ἐν λόγῳ περιφέρεια, ὁδηγὸς δὲ ἡ δοθεῖσα γραμμή.

Πρὸς εὕρεσιν τῆς ἐξισώσεως ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς, μὲ ὁδηγὸν τὴν γραμμὴν $\varphi_1(x,y,z)=0$, $\varphi_2(x,y,z)=0$, λαμβάνομεν τὸν μὲν ἄξονα περιστροφῆς ὡς ἄξονα τῶν z, τοὺς δ' ἄξονας ὀρθογωνίους, ὅτε ἡ γενέτειρα θὰ ἔχῃ ἐξισώσεις $z=\gamma$, $x^2+y^2=\varrho^2$. Ἀπαλείφοντες τὰ x, y, z μεταξὺ τῶν προηγουμένων ἐξισώσεων, εὑρίσκομεν ἔστω τὴν $f(\gamma,\varrho^2)=0$, ἥτις συνδέει τὰς παραμέτρους γ καὶ ρ. Ἀπαλείφοντες μεταξὺ ταύτης καὶ τῶν ἐξισώσεων τῆς γενετείρας τὰ γ καὶ ρ, εὑρίσκομεν τὴν $f(z,x^2+y^2)=0$, ἥτις εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς θεωρουμένης ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς.

Ἐὰν ἡ ὁδηγὸς εἶνε ἐπίπεδος καμπύλη, κεῖται δ' αὕτη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν xz, θὰ ἔχῃ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $y=0$, $\varphi(x,z)=0$, καὶ αἱ παράμετροι γ καὶ ρ θὰ συνδέωνται διὰ τῆς ἐξισώσεως $\varphi(\varrho,\gamma)=0$. Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς εἶνε $\varphi(\sqrt{x^2+y^2},z)=0$, ἥτις εὑρίσκεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x,z)=0$ τοῦ μεσημβρινοῦ αὐτῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου xz, ἂν τεθῇ εἰς αὐτὴν ἀντὶ τοῦ x τὸ $\sqrt{x^2+y^2}$.

Ἐὰν αἱ ἐξισώσεις τοῦ μὲν ἄξονος περιστροφῆς ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους εἶνε
$$\frac{x-x_1}{\alpha}=\frac{y-y_1}{\beta}=\frac{z-z_1}{\gamma}, \tag{1}$$
τῆς δὲ ὁδηγοῦ αἱ
$$\varphi_1(x,y,z)=0, \quad \varphi_2(x,y,z)=0, \tag{2}$$
ἡ γενέτειρα περιφέρεια εἰς ἑκάστην θέσιν αὐτῆς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τομὴ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν (1) καὶ σφαίρας μὲ κέντρον τὸ σημεῖον (x_1, y_1, z_1) τῆς (1). Ἑπομένως αἱ ἐξισώσεις τῆς γενετείρας εἶνε
$$\alpha x+\beta y+\gamma z=\lambda, \quad (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=\varrho^2. \tag{3}$$
Εὑρίσκομεν τὴν μεταξὺ τῶν λ καὶ ϱ^2 ὑπάρχουσαν σχέσιν, ἀπαλείφοντες τὰ x, y, z μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3), ἔστω τὴν
$$f(\lambda,\varrho^2)=0 \tag{4}$$
Ἀπαλείφοντες τὰ λ, ϱ^2 μεταξὺ ταύτης καὶ τῶν (3) εὑρίσκομεν τὴν
$$f[\alpha x+\beta y+\gamma z, (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1{}^2)]=0, \tag{5}$$
ἥτις εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας.

Ἀντιστρόφως, πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς (5) παριστάνει ἐν γένει ἐπιφάνειαν ἐκ περιστροφῆς. Διότι αὕτη προκύπτει ἐκ τῶν ἐξισώσεων (3) καὶ (4) δι' ἀπαλοιφῆς τῶν λ καὶ ϱ^2, αἱ δὲ ἐξισώσεις (3) παριστάνουν περιφέρειαν κύκλου, μὲ κέντρον ἐπὶ τῆς εὐθείας (1), ἥτις εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς περιφερείας.

Ἐὰν ἄξων περιστροφῆς εἶνε ὁ ἄξων τῶν z, καὶ ἐξισώσεις τῆς μὲν ὁδηγοῦ αἱ $x=f(z), y=f_1(z)$, τῆς δὲ γενετείρας περιφερείας αἱ $x^2+y^2=\varrho^2$, $z=\gamma$, θὰ ἔχωμεν δι᾽ ἀπαλοιφῆς τῶν x, y, z μεταξὺ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων $f^2(\gamma)+f_1^2(\gamma)=\varrho^2$, ἡ δὲ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας θὰ εἶνε $x^2+y^2=f^2(z)+f_1^2(z)$.

Ἐφαρμογαί. 1. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει E_λ στρεφομένη περὶ τὸν μεγάλον ἢ τὸν μικρὸν ἄξονα αὐτῆς.

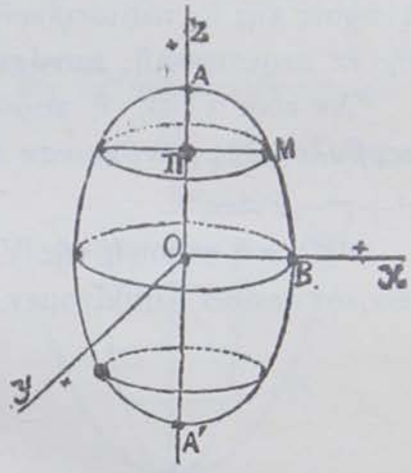
α΄) Ἂν λάβωμεν τὸ ἐπίπεδον τῆς E_λ ὡς ἐπίπεδον τῶν xz καὶ τὸν μέγαν αὐτῆς ἄξονα, περὶ τὸν ὁποῖον στρέφεται αὕτη, ὡς ἄξονα τῶν z (σχ. 54), αἱ μὲν ἐξισώσεις τῆς ὁδηγοῦ θὰ εἶνε

$$y=0,\ \frac{x^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\alpha^2}=1,\ (\alpha>\beta) \qquad (1)$$

τῆς δὲ γενετείρας αἱ

$$z=\gamma,\ x^2+y^2=\varrho^2. \qquad (2)$$

Ἀπαλείφοντες τὰ x, y, z μεταξὺ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν $\dfrac{\varrho^2}{\beta^2}+\dfrac{\gamma^2}{\alpha^2}=1$,



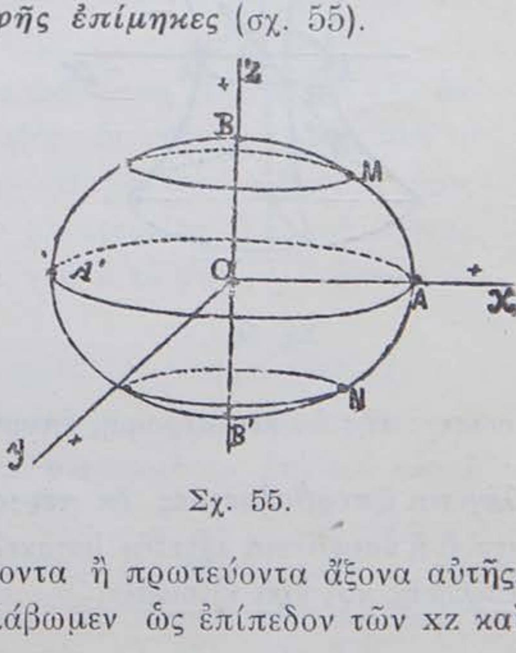
Σχ. 54.

καὶ τέλος ἀπαλείφοντες τὰ ϱ καὶ γ μεταξὺ ταύτης καὶ τῶν (2) εὑρίσκομεν

$$\frac{x^2+y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\alpha^2}=1, \qquad (3)$$

ἥτις εἶνε ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς, ἥτις καλεῖται ***ἐλλειψοειδὲς ἐκ περιστροφῆς ἐπίμηκες*** (σχ. 55).

β΄) Ἂν ἡ στροφὴ τῆς E_λ γίνεται περὶ τὸν μικρὸν ἄξονα αὐτοῦ, εὑρίσκομεν ὁμοίως ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας εἶνε $\dfrac{x^2+y^2}{\alpha^2}+\dfrac{z^2}{\beta^2}=1$, ὅπου εἶνε $\alpha>\beta$ καὶ καλεῖται αὕτη ***ἐλλειψοειδὲς ἐκ περιστροφῆς πλατυσμένον.***



Σχ. 55.

2. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει Y_π στρεφομένη περὶ τὸν δευτερεύοντα ἢ πρωτεύοντα ἄξονα αὐτῆς.

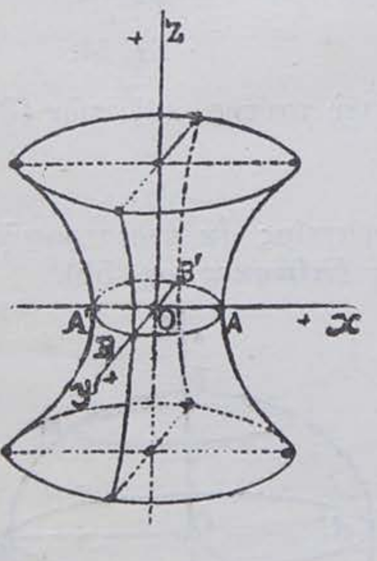
α΄) Ἂν τὸ ἐπίπεδον τῆς Y_π λάβωμεν ὡς ἐπίπεδον τῶν xz καὶ τὸν πρωτεύοντα ἄξονα αὐτῆς ὡς ἄξονα τῶν x, αἱ μὲν ἐξισώσεις τῆς ὁδηγοῦ εἶνε (σχ. 18) $y=0, \ \dfrac{x^2}{\alpha^2}-\dfrac{z^2}{\beta^2}=1.$ (1)

τῆς δὲ γενετείρας $z=\gamma, \ x^2+y^2=\varrho^2.$ (2)

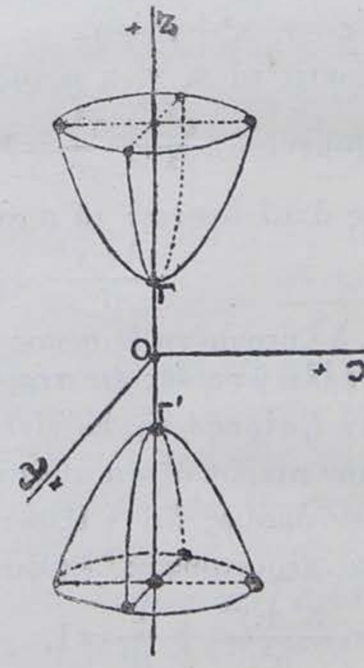
Ἑπομένως ἔχομεν δι' ἀπαλοιφῆς τῶν x, y, z μεταξὺ τῶν (1) καὶ (2) $\dfrac{\varrho^2}{\alpha^2}-\dfrac{\gamma^2}{\beta^2}=1$ καὶ τέλος δι' ἀπαλοιφῆς τῶν ϱ καὶ γ μεταξὺ ταύτης καὶ τῶν (2) εὑρίσκομεν $\dfrac{x^2+y^2}{\alpha^2}-\dfrac{z^2}{\beta^2}=1$, ἥτις εἶνε ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις τῆς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία λέγεται ὑπερβολοειδὴς ἐκ περιστροφῆς ***μονόχωνον*** (σχ. 56).

Ἂν εἶνε $\alpha=\beta$, ἡ παραγομένη ἐπιφάνεια καλεῖται ***ἰσοσκελὲς ὑπερβολοειδὲς μονόχωνον ἐκ περιστροφῆς,*** ἔχει δὲ ἐξίσωσιν $x^2+y^2-z^2=\alpha^2$.

β') Ἂν ἡ στροφὴ τῆς Y_π γίνεται περὶ τὸν πρωτεύοντα ἄξονα αὐτῶν, τὸν ὁποῖον λαμβάνομεν ὡς ἄξονα τῶν z, εὑρίσκομεν ὁμοίως ὡς ἐξί-



Σχ. 56.



Σχ. 57.

σωσιν τῆς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας τὴν $\dfrac{x^2+y^2}{\alpha^2}-\dfrac{z^2}{\gamma^2}=-1$, ἥτις λέγεται ***ὑπερβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς δίχωνον*** (Σχ. 57). Ἂν εἶνε $\alpha=\beta$ ἡ ἐπιφάνεια λέγεται ἰσοσκελὲς δίχωνον ὑπερβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς καὶ ἔχει ἐξίσωσιν $x^2+y^2-z^2+\alpha^2=0.$

Παρατηρητέον ὅτι κατὰ τὴν περιστροφὴν Y_π περὶ ἕνα τῶν ἀξόνων αὐτῆς αἱ ἀσύμπτωτοι ταύτης γράφουν κῶνον κυκλικόν, ὅστις λέγεται ***ἀσύμπτωτος κῶνος*** τῶν ἀντιστοίχων ὑπερβολοειδῶν ἐκ περιστροφῆς. Οἱ ἀσύμπτωτοι κῶνοι τοῦ μονοχώνου καὶ διχώνου ὑπερβολοειδοῦς ἀφ' ἑνὸς καὶ τῶν ἰσοσκελῶν τοιούτων ἐκ περιστροφῆς ἔχουν ἐξισώσεις ἀντιστοίχως $\frac{x^2+y^2}{\alpha^2}-\frac{z^2}{\beta^2}=0$, $x^2+y^2-z^2=0$.

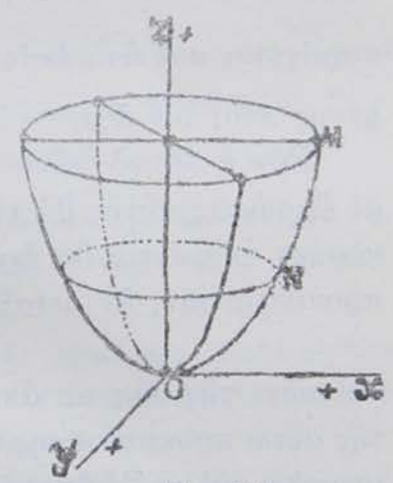
3. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει Π_α, στρεφομένη περὶ τὸν ἄξονα αὐτῆς.

Ἂν λάβωμεν τὸ ἐπίπεδον τῆς παραβολῆς ὡς ἐπίπεδον τῶν xz καὶ ὡς ἄξονα τῶν z τὸν ἄξονα αὐτῆς, αἱ ἐξισώσεις τῆς μὲν ὁδηγοῦ θὰ εἶνε (Σχ. 58)

$$y=0, \quad x^2=2pz \qquad (1)$$

τῆς δὲ γενετείρας $z=\gamma,\ x^2+y^2=\varrho^2$. (2)

Ἑπομένως ἔχομεν, ἀπαλείφοντες τὰ x, y, z μεταξὺ τῶν (1) καὶ (2), $\varrho^2=2p\gamma$, δι' ἀπαλοιφῆς δὲ τῶν ϱ, γ μεταξὺ ταύτης καὶ τῶν (2) εὑρίσκομεν τὴν $x^2+y^2=2pz$, ἥτις εἶνε ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις τῆς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία λέγεται ***παραβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς*** (Σχ. 58).



(Σχ. 58).

4. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ***σπείρας,*** ἐπιφανείας τὴν ὁποίαν γράφει περιφέρεια κύκλου, στρεφομένη περὶ εὐθεῖαν κειμένην ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς.

Λαμβάνομεν τὸν ἄξονα περιστροφῆς ὡς ἄξονα τῶν z καὶ τὴν ἐπ' αὐτὸν κάθετον διάμετρον τῆς περιφερείας ὡς ἄξονα τῶν x, ὅτε αἱ ἐξισώσεις τῆς ὁδηγοῦ εἶνε $y=0$, $(x-\alpha)^2+z^2=\varrho^2$, ὅπου α παριστάνει τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας ἀπὸ τοῦ ἄξονος. Θέτοντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἀντὶ τοῦ x τὸ $\sqrt{x^2+y^2}$ ἔχομεν ὡς ἐξίσωσιν τῆς σπείρας

$$(x^2+y^2+z^2)^2-2(\alpha^2+\varrho^2)(x^2+y^2)+2(\alpha^2-\varrho^2)z^2+(\alpha^2-\varrho^2)^2=0.$$

4. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας, ἥτις γενᾶται ὑπὸ εὐθείας, στρεφομένης περὶ ἄλλην εὐθεῖαν, μὴ κειμένην ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου μετὰ τῆς πρώτης.

Ἂν λάβωμεν τὸν ἄξονα περιστροφῆς ὡς ἄξονα τῶν z καὶ τὴν κοινὴν κάθετον τῶν δύο εὐθειῶν ὡς ἄξονα τῶν x, ἔχομεν ὡς ἐξισώσεις τῆς μὲν ὁδηγοῦ τὰς $x=\alpha$, $y=\lambda z$, ὅπου α παριστάνει τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν τῶν εὐθειῶν καὶ λ τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας αὐτῶν, τῆς δὲ γενετείρας $x^2+y^2=\varrho^2$, $z=\gamma$, καὶ ἡ $\frac{x^2+y^2}{\alpha^2}-\frac{\lambda^2}{\alpha^2}z^2=1$ εἶνε ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις τῆς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας. Αὕτη, ὡς γνωστόν, παριστάνει ὑπερβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς μονόχωνον, διότι παράγεται, ἐὰν Y_π μὲ δευτερεύοντα ἄξονα μήκους $\frac{2\alpha}{\lambda}$ καὶ πρωτεύοντα 2α, στραφῇ περὶ τὸν δευτερεύοντα ἄξονα αὐτῆς. Ὅθεν τὸ μονόχωνον ὑπερβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς μὲ ἐξίσωσιν $\frac{x^2+y^2}{\alpha^2}-\frac{z^2}{\beta^2}=1$ παράγεται καὶ ὑπὸ ἑκάστης τῶν εὐθειῶν $x=\alpha$, $y=\pm\frac{\alpha}{\beta}z$, στρεφομένης περὶ τὸν ἄξονα τῶν z.

Ἐὰν ἡ ὁδηγὸς εἶνε εὐθεῖα, συναντῶσα τὸν ἄξονα περιστροφῆς, αἱ ἐξισώσεις αὐτῆς θὰ εἶνε τῆς μορφῆς $y=0$, $z=x\,\varepsilon\varphi\varphi$, ἡ δὲ παραγομένη ἐπιφάνεια θὰ ἔχῃ τὴν ἐξίσωσιν $x^2+y^2-z^2\sigma\varphi^2\varphi=0$, (1) προκύπτουσαν, ἂν μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τῆς γενετείρας περιφερείας

$$z=\gamma,\quad x^2+y^2=\varrho^2 \tag{2}$$

καὶ τῶν τῆς ὁδηγοῦ ἀπαλείψωμεν τὰ x, y, z καὶ ἀκολούθως μεταξὺ τῆς οὕτω προκυπτούσης $\gamma^2=\varrho^2\varepsilon\varphi^2\varphi$ καὶ τῶν τῆς γενετείρας ἀπαλείψωμεν τὰ ρ καὶ γ. Ἡ ἐπιφάνεια (1) καλεῖται ***καὶ κῶνος ἐκ περιστροφῆς.***

Ἐὰν ἡ στρεφομένη εὐθεῖα ἔχῃ ἐξισώσεις $y=0$, $x=\alpha$, στρέφεται δ' αὕτη περὶ τὸν ἄξονα τῶν z, ἡ παραγομένη ἐπιφάνεια ἔχει ἐξίσωσιν $x^2+y^2=\alpha^2$ καὶ λέγεται ***κύλινδρος ἐκ περιστροφῆς*** ἢ ***ὀρθὸς κυκλικός.***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 610. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων (εἰς τὸν χῶρον τῶν τριῶν διαστάσεων), τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν πλευρῶν δοθείσης ὀρθῆς γωνίας εἶνε σταθερά.

611. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν ἀκμῶν δοθείσης τρισορθογωνίου τριέδρου γωνίας εἶνε σταθερόν.

612. Δίδεται σφαῖρα καὶ σημεῖον Α ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς. Εὐθεῖα ΑΡ τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας καὶ εἰς τὸ Ρ. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΑΡ μῆκος (ΡΜ) ἴσον μὲ α σταθερόν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ Μ.

613. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων Μ (εἰς τὸν χῶρον τῶν τριῶν διαστάσεων) τοιούτων, ὥστε νὰ εἶνε $(ME)\pm(ME')=2\alpha$ ἢ $(ME)(ME')=\alpha^2$, ὅπου τὰ Ε καὶ Ε' εἶνε σταθερά.

614. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια ἡ παραγομένη ὑπὸ εὐθείας, ἡ ὁποία συναντᾷ δύο περιφερείας κύκλων μὲ κοινὴν διάμετρον ΓΓ' καὶ ἐπίπεδα

κάθετα, καὶ τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία συνδέει τὰ ἄκρα τῶν ἀκτίνων ΟΑ καὶ ΟΒ καθέτων ἐπὶ τὴν ΓΓ′ καὶ κειμένων ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων τῶν περιφερειῶν.

615. Μία ἐπιφάνεια παράγεται ὑπὸ περιφερείας μεταβλητῆς, τῆς ὁποίας τὸ ἐπίπεδον εἶνε παράλληλον πρὸς τὸ $x+y=0$ καὶ συναντᾷ τοὺς ἄξονας Οx, Οy καὶ τὴν γραμμὴν $x=y, z=k$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ τοῦ περιλαμβανομένου μεταξὺ τῆς ἀρχῆς καὶ τοῦ ἐπιπέδου $x+y=k$.

616. Δύο παραβολαὶ ἴσαι, κείμεναι ἐπὶ τῶν Οxy καὶ Οxz ἔχουν τὴν κοινὴν κορυφήν των εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων καὶ οἱ ἄξονές των συμπίπτουν μὲ τὸν ἄξονα τῶν x, ἀλλ' εἶνε ἀντιθέτου φορᾶς. Μία εὐθεῖα μεταβλητὴ παράλληλος πρὸς τὸ $x=z$ συναντᾷ τὰς παραβολάς. Τίς ὁ τόπος τοῦ ἴχνους τῆς εὐθείας ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Οyz;

617. Τίς ὁ τόπος τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων, τῶν ἀγομένων ἀπὸ σημεῖον σταθερὸν πρὸς τὰς ἐπιφανείας

$$\frac{x^2}{\alpha^2+\lambda}+\frac{y^2}{\beta^2+\lambda}+\frac{z^2}{\gamma^2+\lambda}=1,$$ ὅπου τὸ λ θεωρεῖται ὡς παράμετρος.

618. Ἐὰν ὁ κῶνος $x^2+y^2=z(kx+z)$ τέμνῃ σφαῖραν, ἔχουσαν κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων, νὰ εὑρεθῇ ἡ προβολὴ τῆς τομῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Οxz.

618′. Δύο ἐλλείψεις ἐπὶ τῶν Οxy καὶ Οxz μὲ ἐξισώσεις $\beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$, $z=0$ καὶ $\gamma^2x^2+\alpha^2z^2=\alpha^2\gamma^2$, $y=0$ καὶ ἡ εὐθεῖα $x=y=z$ συναντῶνται ὑπὸ εὐθείας. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ ἴχνους τῆς εὐθείας ἐπὶ τοῦ Οyz.

619. Περιφέρεια κύκλου ἐφάπτεται τοῦ ἄξονος τῶν z εἰς τὴν ἀρχὴν καὶ τέμνει εὐθεῖαν γραμμὴν κειμένην ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Οxy. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς παραγομένης ἐπιφανείας ὑπὸ τῆς περιφερείας.

620. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ τοιούτου, ὥστε τὸ ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον δι' αὐτοῦ καὶ κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΟΜ νὰ ὁρίζῃ μετὰ τοῦ τριέδρου τῶν ἀξόνων ὄγκον σταθερόν.

621. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια ἡ παραγομένη ὑπὸ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὸ Οxy, ἥτις συναντᾷ τὸν Οz καὶ τὴν καμπύλην $xyz=\alpha^3$, $x^2+y^2=\beta^2$.

622. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις ἐπιφανείας παραγομένης ὑπὸ τμήματος εὐθείας δεδομένου μήκους, κινουμένου παραλλήλως πρὸς τὸ Οxy, καὶ τοῦ ὁποίου τὸ μὲν ἓν ἄκρον κεῖται ἐπὶ τοῦ Οyz, τὸ δ' ἄλλο ἐπὶ τῆς καμπύλης $z^2=2x$, $y=0$.

623. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας τῆς παραγομένης ὑπὸ εὐθείας συναντώσης κατὰ ὀρθὴν γωνίαν τὴν εὐθεῖαν $x+y=0$, $z=0$, καὶ τὴν παραβολὴν $x^2=2pz$, $y=0$.

6'4. Τμῆμα εὐθείας ΑΒ μήκους δεδομένου στηρίζεται διὰ τῶν ἄκρων του ἐπὶ δύο ὀρθογωνίων ἀξόνων Οx καὶ Οy. Φέρομεν τὴν κάθετον ΟΓ ἐπὶ τὸ ΑΒ καὶ μὲ Γ ὡς κέντρον καὶ ΟΓ ὡς ἀκτῖνα γράφομεν περιφέρειαν κύκλου ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸ xΟy. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας τῆς παραγομένης ὑπὸ τῆς περιφερείας.

625. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις $x^3+y^3+z^3-3xyz=\alpha^3$ εἶνε ἐκ περιστροφῆς καὶ νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄξων αὐτῆς.

626. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν μέσων τῶν χορδῶν τῆς ἐπιφανείας $x^2+2y^2-3z^2+3xy+5x+2=0$, τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία συνδέει τὰ σημεῖα (2,1,1) καὶ (0,0,0).

627. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν ἐπιφανειῶν τῶν παριστανομένων ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $x^2+y^2-z^2+2\lambda xy+2\mu xz-2\alpha x-2\beta y+2\gamma z=0$, ὅταν τὰ λ καὶ μ θεωροῦνται ὡς παράμετροι.

628. Ἐὰν δοθῇ ἐλλειψοειδὲς ἐπίμηκες ἐκ περιστροφῆς, ὁ κῶνος, ὁ ὁποῖος ἔχει κορυφὴν τὴν μίαν τῶν δύο ἑστιῶν τῶν μεσημβρινῶν αὐτοῦ καὶ βάσιν μίαν ἐπίπεδον τομὴν οἱανδήποτε εἶνε ἐκ περιστροφῆς.

629. Ἡ προβολὴ ἐπιπέδου τομῆς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα καὶ εἰς τὴν κορυφὴν αὐτοῦ ἔχει ὡς μίαν τῶν ἑστιῶν της τὴν κορυφήν τοῦ κώνου, καὶ ἀντίστοιχον ταύτης διευθετοῦσαν τὴν εὐθεῖαν τομῆς τῶν δύο ἐπιπέδων.

630. Ἐὰν κωνοειδὴς ἐπιφάνεια, μὲ ὁδηγὸν εὐθεῖαν κάθετον πρὸς τὸ ὁδηγοῦν ἐπίπεδον, ἐφάπτεται σφαίρας, νὰ εὑρεθοῦν αἱ προβολαὶ τῆς καμπύλης ἐπαφῆς ἐπὶ τοῦ ὁδηγοῦντος ἐπιπέδου καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἀγομένου διὰ τῆς ὁδηγοῦ εὐθείας καὶ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

631. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῆς προβολῆς ἐπὶ καθέτου ἐπιπέδου πρὸς τὸν ἄξονα κώνου, ὅστις παράγεται ἐκ περιστροφῆς καμπύλης, ἡ ὁποία μετασχηματίζεται εἰς εὐθεῖαν γραμμήν, ὅταν ἀναπτύξωμεν τὸν κῶνον ἐπὶ ἐπιπέδου.

632. Τὰ σημεῖα O καὶ O′ εἶνε κέντρα δύο ἴσων περιφερειῶν, τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα εἶνε παράλληλα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας τῆς γραφομένης ὑπὸ εὐθείας, ἡ ὁποία συναντᾷ τὰς δύο περιφερείας καὶ τὴν κάθετον πρὸς τὰ ἐπίπεδά των, τὴν ἀγομένην διὰ τοῦ μέσου τῆς OO′.

633. Σφαῖρα μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων τέμνεται ὑπὸ τοῦ Ox εἰς τὸ A. Ἐπὶ τοῦ xOy μὲ διάμετρον OA γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, ὁ ὁποῖος εἶνε βάσις κυλίνδρου μὲ γενέτειραν παράλληλον πρὸς τὸν Oz. Νὰ εὑρεθοῦν 1) αἱ προβολαὶ ἐπὶ τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων τῆς τομῆς τοῦ κυλίνδρου καὶ τῆς σφαίρας· 2) ἡ ἐξίσωσις τοῦ κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὁδηγὸν τὴν τομὴν ταύτην καὶ ὡς κορυφὴν τὸ A· 3) τὰ ἴχνη ἐπὶ τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων τῶν ἐφαπτομένων τῆς ἐν λόγῳ τομῆς.

634. Δίδεται σύστημα τριῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων καὶ ἐπὶ τοῦ Oxy περιφέρεια κύκλου μὲ κέντρον τὴν ἀρχήν, καὶ εἰς τὰ ἐπίπεδα Oxz καὶ Oyz δύο εὐθεῖαι παράλληλοι ἀντιστοίχως πρὸς τοὺς ἄξονας Ox καὶ Oy, εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Oxy καὶ ἑκατέρωθεν αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας τῆς παραγομένης ὑπὸ εὐθείας, ἡ ὁποία συναντᾷ τὰς δύο δεδομένας εὐθείας καὶ τὴν περιφέρειαν. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τομαί, αἱ ὁποῖαι γίνονται ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς τὰ συντεταγμένα ἐπίπεδα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI.

Σπουδὴ τῶν καμπύλων γραμμῶν καὶ ἐπιφανειῶν ἐν γένει.

§ 67. Περὶ συνεχείας συναρτήσεως καὶ καμπύλης γραμμῆς.

Ἐὰν α καὶ β παριστάνουν δύο πραγματικοὺς ἀριθμοὺς καὶ εἶνε $\alpha<\beta$, τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν x, ἂν μὲν πληροῦν τὴν $\alpha\leqq x\leqq\beta$ (1), καλεῖται ***διάστημα*** (ἀριθμῶν ἢ γραμμικὸν διάστημα) $\alpha \ldots \beta$ ἢ (α, β) ***κλειστὸν ἑκατέρωθεν***, ἂν δ' ἔχωμεν $\alpha<x<\beta$ (2), καλεῖται τοῦτο ***ἀνοικτὸν ἑκατέρωθεν***. Κατ' ἀνάλογον τρόπον ὁρίζομεν καὶ τὰ διαστήματα $\alpha<x\leqq\beta$ (3), $\alpha\leqq x<\beta$ (4), ὡς ***κλειστὸν δεξιὰ*** τὸ (3) καὶ ***κλειστὸν ἀριστερὰ*** τὸ (4), καθὼς καὶ τὰ $x\leqq\alpha$ (5), $x<\alpha$ (6), $x\geqq\alpha$ (7), $x>\alpha$ (8), $x=$ οἱοσδήποτε (πραγματικὸς) ἀριθμὸς (9), ἕκαστον δὲ τῶν τελευταίων παριστάνομεν καὶ ὡς ἑξῆς
$-\infty<x\leqq\alpha$ (5′), $-\infty<x<\alpha$ (6′), $\alpha\leqq x<+\infty$ (7′), $\alpha<x<+\infty$, (8′)
$-\infty<x<+\infty$ (9′), ὅπου τὰ σύμβολα $\pm\infty$ δὲν παριστάνουν ἀριθμούς.

Τὰ μὲν διαστήματα (1)—(4) λέγονται καὶ διαστήματα πεπερασμένου μήκους, τὰ δ' ἄλλα μὴ πεπερασμένου ἢ ἀπείρου μήκους.

Ἂν αἱ τιμαὶ τοῦ x ἑκάστου τῶν (1)—(4) παριστάνωνται ὑπὸ σημείων τοῦ ἄξονος τῶν x, ἕκαστον διάστημα παριστάνεται ὑπὸ τμήματος, ἔστω AB, τοῦ ἄξονος τούτου, μὲ ἄκρα ἀνήκοντα εἰς αὐτὸ ἢ μή, καθόσον τὸ (α, β) εἶνε κλειστὸν ἢ ἀνοικτόν. Κατὰ τὴν παράστασιν αὐτὴν τιμή τις τοῦ $x=x_0$, ἀνήκουσα εἰς τὸ διάστημα καὶ διάφορος τῶν α, β, παριστάνεται ὑπὸ σημείου, ἔστω M_0, τὸ ὁποῖον καλεῖται ***ἐσωτερικὸν σημεῖον*** τοῦ AB, ἡ δὲ τιμὴ x_0 ***ἐσωτερικὴ τιμὴ*** τοῦ x εἰς τὸ διάστημα (α, β).

Καλοῦμεν ***περιοχὴν*** σημείου $M_0(x_0)$ μὲ μῆκος 2ε τὸ διάστημα $x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$, ὅπου εἶνε $\varepsilon>0$. Ἐκ τῶν διαστημάτων

$$x_0\leqq x<x_0+\varepsilon \quad \text{καὶ} \quad x_0-\varepsilon<x\leqq x_0$$

τὸ μὲν πρῶτον καλεῖται ***περιοχὴ δεξιά***, τὸ δὲ δεύτερον ***ἀριστερὰ*** τοῦ M_0 καὶ ἑκάστη ἔχει μῆκος ε. Παρατηρητέον ὅτι, δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ ε ἔχομεν καὶ ἀνὰ μίαν περιοχὴν τοῦ M_0.

Ἀκολουθία ἀριθμῶν καλεῖται τὸ σύνολον ἀριθμῶν, ἔστω x_1, x_2, $x_3, \ldots, x_\nu, \ldots$, ἕκαστος τῶν ὁποίων προκύπτει ἐκ τοῦ προηγουμένου αὐτοῦ κατά τινα νόμον ὡρισμένον καὶ σημειώνεται συμβολικῶς μὲ (x_ν).

Ἀκολουθία τις ἀριθμῶν (x_ν) λέγομεν ὅτι εἶνε ***συγκλίνουσα*** καὶ ἔχει ὅριον ἢ τείνει πρὸς ὡρισμένον ἀριθμὸν x_0 π. χ., ἂν ἡ ἀκολουθία $(x_\nu - x_0)$ ἔχῃ τὴν ἰδιότητα ὅτι, δοθέντος ἀριθμοῦ τινος ὁσονδήποτε μικροῦ $\varepsilon > o$, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀκέραιον ν_0 τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἔχωμεν $|x_\nu - x_0| < \varepsilon$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ $\nu \geq \nu_0$. Τοῦτο σημειώνομεν διὰ τοῦ $x_\nu \to x_0$ διὰ $\nu \to \infty$ ἢ διὰ τοῦ $\underset{\nu \to \infty}{\text{ὅριον}}\ x_\nu = x_0$.

Λέγομεν ὅτι μεταβλητή τις y εἶνε ***συνάρτησις*** ἄλλης x, ἂν αἱ τιμαὶ τῆς y ἐξαρτῶνται ἐκ τῶν τῆς x. Ἂν ἡ x λαμβάνῃ τιμὰς αὐθαιρέτους, τότε καλεῖται αὕτη ***ἀνεξάρτητος μεταβλητή.***

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ὁρίζεται καὶ συνάρτησις περισσοτέρων τῆς μιᾶς ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν.

Λέγομεν ὅτι συνάρτησίς τις $y = \varphi(x)$ εἶνε ***ὡρισμένη*** εἰς τὴν περιοχὴν τῆς τιμῆς x_0 τοῦ x, ἐὰν δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ x, ἀνήκουσαν εἴς τινα περιοχὴν τούτου, τὸ y ἔχῃ τιμὴν ὡρισμένην.

Ἔστω ἡ συνάρτησις $y = \varphi(x)$ ὡρισμένη εἰς τὴν περιοχὴν τῆς τιμῆς x_0 τοῦ x (ἐξαιρουμένης ἴσως τῆς τιμῆς τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς $x = x_0$). Ἂν (x_ν) παριστάνῃ ἀκολουθίαν ἀριθμῶν τῆς περιοχῆς τοῦ x_0 διαφόρων αὐτοῦ, συγκλίνουσαν πρὸς τὴν τιμὴν x_0, αἱ δὲ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως $y = \varphi(x_\nu)$ τείνουν πρὸς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ὅριον, λ π.χ., οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶνε ἡ (x_ν), λέγομεν ὅτι $\varphi(x) \to \lambda$, ὅταν $x \to x_0$ καὶ σημειώνομεν τοῦτο διὰ τοῦ $\underset{x \to x_0}{\text{ὅριον}}\ \varphi(x) = \lambda$. Οὕτω π. χ. ἔχομεν

$$\underset{x \to 0}{\text{ὅριον}}\ (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \underset{x \to 0}{\text{ὅριον}}\ \frac{\alpha^x - 1}{x} = l\alpha.$$

Συνάρτησίς τις $y = \varphi(x)$ ὡρισμένη εἰς τὴν περιοχὴν x_0 τοῦ x λέγεται ***συνεχὴς*** διὰ $x = x_0$, ἐὰν δι' ἑκάστην ἀκολουθίαν (x_ν) τείνουσαν πρὸς τὴν τιμὴν x_0 διὰ $\nu \to \infty$, ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς ἀκολουθία $y = \varphi(x_\nu)$ τῆς συναρτήσεως τείνῃ πρὸς τὴν τιμὴν $\varphi(x_0)$.

Τοῦτο ἐκφράζομεν καὶ ὡς ἑξῆς. Λέγομεν ὅτι ἡ $y = \varphi(x)$ εἶνε συνεχὴς συνάρτησις διὰ $x = x_0$, ἂν δοθέντος ἀριθμοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ $\varepsilon > 0$, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἄλλον $\eta > 0$ τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἔχωμεν $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$ διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ x, διὰ τὰς ὁποίας εἶνε $|x - x_0| < \eta$.

Ἀσυνεχὴς λέγεται συνάρτησις τις $y = \varphi(x)$ διὰ $x = x_0$, ἂν δὲν εἶνε συνεχὴς διὰ τὴν τιμὴν ταύτην.

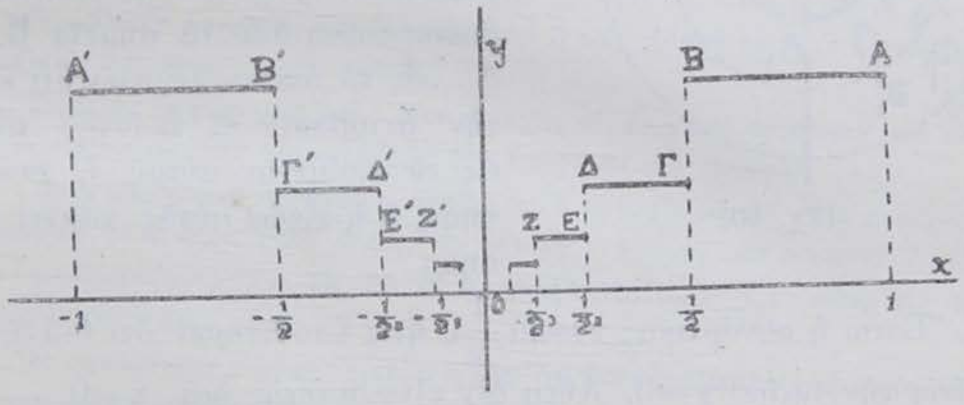
Παραδείγματα. 1. Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=\varphi(x)$, διὰ τὴν ὁποίαν ὑποθέτομεν

$$y=0, \text{ὅταν } x=0 \text{ καὶ } y=\frac{1}{2^\nu}, \text{ὅταν εἶνε } \frac{1}{2^{\nu+1}}<|x|\leq\frac{1}{2^\nu}, (\nu=1,2,3..).$$

Ἡ συνάρτησις αὕτη εἶνε συνεχὴς διὰ $x=0$. Πράγματι, ἐπειδὴ δι᾿ἑκάστην τιμὴν τοῦ x, ἀνήκουσαν εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ 0, εἶνε $|\varphi(x)|\leq|x|$, ἕπεται ὅτι ὑπάρχει διὰ $x\rightarrow 0$ ὅριον τοῦ $\varphi(x)$ καὶ τοῦτο εἶνε τὸ αὐτὸ μὲ τὴν τιμὴν $\varphi(0)=0$. Ἤτοι, ὅταν ἡ $x\rightarrow 0$, λαμβάνουσα τὰς τιμὰς οἱασδήποτε ἀκολουθίας, ἡ $y=\varphi(x)$ θὰ λαμβάνῃ τὰς

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^\nu}, \dots, \text{ ὅτε } y\rightarrow 0,$$

δηλαδὴ πρὸς τὴν $\varphi(0)$. Ἡ γεωμετρικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως ταύτης δίδει εὐθύγραμμα τμήματα παράλληλα τοῦ ἄξονος τῶν x, ὡς τὰ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ,... καὶ τὰ Α΄Β΄, Γ΄Δ΄, Ε΄Ζ΄,... (Σχ. 59) συμμετρικὰ τῶν πρώτων ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y, τὸ μῆκος δὲ αὐτῶν βαίνει ἐλαττούμενον μετὰ τῆς τεταγμένης τῶν σημείων αὐτῶν, καθ᾿ ὅσον εὑρίσκονται



(Σχ. 59).

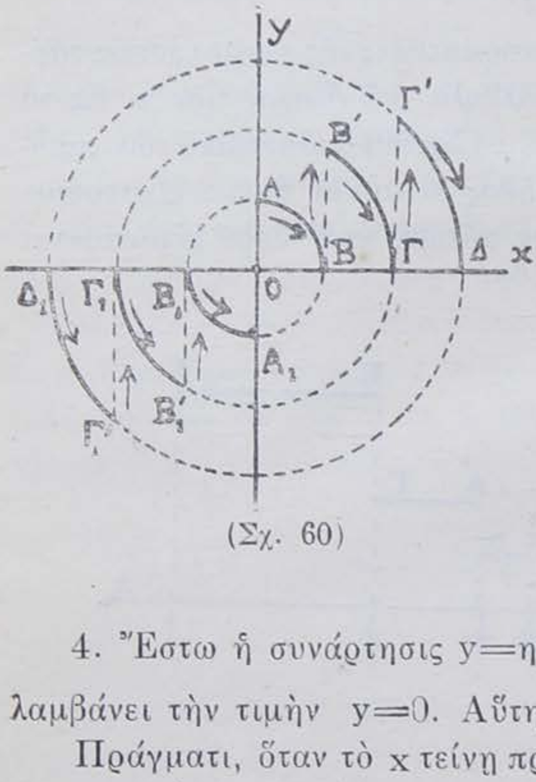
πλησιέστερον πρὸς τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων καὶ τείνει τὸ μῆκος τοῦτο πρὸς τὸ 0, ὅταν ἡ τεταγμένη τῶν σημείων τοῦ τμήματος τείνῃ πρὸς τὸ 9.

2. Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=\eta\mu x$. Αὕτη εἶνε συνεχὴς διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x. Π. χ. διὰ $x=x_0$ ἡ τιμὴ $\eta\mu x_0$ εἶνε τὸ $\lim\limits_{x\rightarrow x_0}$ ὅριον $\eta\mu x$. Πράγματι, ἂν λάβωμεν τὸ ε τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶνε $0<\varepsilon<\pi$ καὶ θέλωμεν νὰ ἔχωμεν $|\eta\mu x-\eta\mu x_0|<\varepsilon$, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τὸ x τοιοῦτον, ὥστε $|x-x_0|<\varepsilon$. Διότι, δι᾿ ἑκάστην τιμὴν τοῦ $x\neq x_0$ ἔχομεν : $|\eta\mu x-\eta\mu x_0|=\left|2\sigma\upsilon\nu\frac{x+x_0}{2}\,\eta\mu\frac{x-x_0}{2}\right|=$

$$=2\left|\sigma\upsilon\nu\frac{x+x_0}{2}\right|\cdot\left|\eta\mu\frac{x-x_0}{2}\right|\cdot\left|\frac{x-x_0}{2}\right|:\left|\frac{x-x_0}{2}\right| \quad \text{καὶ}$$

$|\eta\mu x-\eta\mu x_0|<2.1.1.\left|\frac{x-x_0}{2}\right|$ ἢ $<|x-x_0|$· ἤτοι εἶνε $|\eta\mu x-\eta\mu x_0|<\varepsilon$.

3. Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=\varphi(x)$, διὰ τὴν ὁποίαν τὸ x μεταβάλλεται εἰς τὸ διάστημα $-\infty<x<+\infty$ καὶ θεωροῦμεν ἑκάστοτε ὡς τιμὴν τοῦ y τὴν τιμήν, τὴν ὁποίαν ἔχει τὸ $+\sqrt{(k+1)^2-x^2}$ μέν, ἂν εἶνε $k\leqq x<k+1$, τὴν $-\sqrt{(k+1)^2-x^2}$ δέ, ἂν εἶνε $-(k+1)\leqq x<-k$, ὅπου $k=0, 1, 2, 3,\ldots$ Οὕτω διὰ $x=0$, $y=1$, διὰ $x=1$, $x=\sqrt{3},\ldots$, διὰ $x=-1$, $y=0$, διὰ $x=-2$, $y=0$ κλπ. Ἡ γεωμετρικὴ ἀπεικόνισις τῆς συναρτήσεως ταύτης εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους δίδει ἀπειρίαν τόξων ὁμοκέντρων περιφερειῶν μὲ μήκη ἀκτίνων 1,2,3,... ὡς τὰ ΑΒ,Β′Γ,Γ′Δ κλπ. (Σχ. 60), ὅπου τὰ σημεῖα Β′, Γ′,... ἀπεικονίζουν τιμὰς τῆς συναρτήσεως διὰ $x=0, 1, 2,\ldots$, ἐνῷ δὲν συμβαίνει τοῦτο διὰ τὰ σημεῖα Β, Γ, Δ,... εἰς τὰ ὁποῖα λέγομεν ὅτι κατὰ τὴν μετάβασιν ἐξ ἑκάστου τόξου εἰς τὸ ἑπόμενον αὐτοῦ ἡ συνάρτησις ἢ ἡ εἰκὼν αὐτῆς κάμνει πήδημα.



(Σχ. 60)

4. Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=\eta\mu\frac{1}{x}$, ἥτις ὑποθέτομεν ὅτι διὰ $x=0$ λαμβάνει τὴν τιμὴν $y=0$. Αὕτη δὲν εἶνε συνεχὴς διὰ $x=0$.

Πράγματι, ὅταν τὸ x τείνῃ πρὸς τὸ 0, λαμβάνον τὰς τιμὰς τῆς ἀκολουθίας $\left(\frac{1}{\pi/6+2k\pi}\right)$, $(k=0, 1, 2,\ldots)$, τὸ μὲν $1/x$ λαμβάνει τὰς τιμὰς τῆς ἀκολουθίας $(\pi/6+2k\pi)$, τὸ δὲ $\eta\mu\,1/x$ πάντοτε τὴν τιμὴν $1/2$ (διὰ τὰς τιμὰς ταύτας τοῦ x)· ἑπομένως τείνει πρὸς τὸ $1/2$ καὶ ὄχι πρὸς τὸ 0, τιμήν, τὴν ὁποίαν λαμβάνει ἡ συνάρτησις διὰ $x=0$.

Συνάρτησίς τις $\varphi(x)$ ὡρισμένη εἰς τὸ διάστημα $\alpha<x\leqq\beta$ λέγεται ***συνεχὴς ἐξ ἀριστερῶν****) τοῦ β, ἐὰν ὑπάρχῃ τουλάχιστον ὅριον $\underset{x\to\beta-0}{\varphi(x)}$

*) Λέγομεν ὅτι τὸ x τείνει πρὸς τὸ β ἐξ ἀριστερῶν ἢ ἐκ τιμῶν μικροτέρων αὐτοῦ καὶ σημειώνομεν τοῦτο μὲ $x\to\beta-0$, ὅταν αἱ τιμαὶ εἶνε μικρότεραι τοῦ β ἢ ἀριστερὰ αὐτοῦ. Κατ' ἀναλογίαν ὁρίζομεν καὶ τὴν σημασίαν τοῦ $x\to\beta+0$.

καὶ εἶνε ἴσον μὲ $\varphi(\beta)$. Ὁμοίως ὁρίζομεν τὴν συνέχειαν ἐκ δεξιῶν τοῦ α τῆς $\varphi(x)$, ὡρισμένης εἰς τὸ διάστημα $\alpha \leq x < \beta$, ἂν ὑπάρχῃ ὅριον $\varphi(x)$ καὶ ἰσοῦται μὲ $\varphi(\alpha)$.
$x \to \alpha+0$

Συνάρτησίς τις ὡρισμένη εἰς ἓν διάστημα (α, β) λέγεται ***συνεχὴς*** εἰς αὐτό, ἐὰν εἶνε συνεχὴς δι᾽ ἑκάστην ἐσωτερικὴν τιμὴν τοῦ x εἰς τὸ (α, β) καὶ προσέτι, ὅταν τὸ (α, β) εἶνε κλειστὸν ἐξ ἀριστερῶν ἢ ἐκ δεξιῶν, ἂν αὔτη εἶνε συνεχὴς ἐκ δεξιῶν ἢ ἐξ ἀριστερῶν.

Εἶνε φανερὸν ὅτι, ἂν συνάρτησις $\varphi(x)$ εἶνε σταθερὰ εἰς τὴν περιοχὴν τιμῆς x_0 τοῦ x, εἶνε συνεχὴς διὰ $x=x_0$.

Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν θεωρημάτων περὶ τῶν ὁρίων ἀποδεικνύονται αἱ ἑξῆς ἰδιότητες.

Ἐὰν δύο συναρτήσεις $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς x εἶνε συνεχεῖς διὰ $x=x_0$, θὰ εἶνε συνεχεῖς διὰ τὴν αὐτὴν τιμήν· α′) τὸ $\varphi_1(x) \pm \varphi_2(x)$· β′) τὸ $\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x)$· γ′) τὸ $\varphi_1(x) : \varphi_2(x)$, ἂν εἶνε τὸ $\varphi_2(x_0) \neq 0$, ἰσχύουν δὲ αὗται καὶ διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς συνεχείας ἐκ δεξιῶν ἢ ἐξ ἀριστερῶν.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι, ἡ συνάρτησις $y=\varphi(x)=x$, καθὼς καὶ αἱ συναρτήσεις $x^2, x^3, \ldots, x^\mu$ (μ ἀκέραιος καὶ θετικὸς) καὶ ἡ αx^μ (ὅπου τὸ α εἶνε σταθερὸν) εἶνε συνεχεῖς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x.

Ρητή τις συνάρτησις τοῦ x εἶνε συνεχὴς εἰς ἕκαστον διάστημα, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ παρονομαστὴς τῆς συναρτήσεως δὲν λαμβάνει τὴν τιμὴν 0.

Ἂν α παριστάνῃ σταθερὰν ποσότητα, ἡ συνάρτησις α^x εἶνε συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα $-\infty < x < +\infty$· διότι, ἂν $x \to x_0$, ἔχομεν $\alpha^x \to \alpha^{x_0}$, ἐπειδὴ εἶνε $\alpha^{x_\nu} - \alpha^{x_0} = \alpha^{x_0}(\alpha^{x_\nu - x_0} - 1)$, ἂν δ᾽ ἡ ἀκολουθία $(x_\nu - x_0)$ τείνῃ εἰς τὸ 0, θὰ ἔχωμεν $\alpha^{x_\nu} - \alpha^{x_0} \to 0$.

Ἡ συνάρτησις $y=\lambda o\gamma x$ εἶνε συνεχὴς δι᾽ ἑκάστην τιμὴν τοῦ $x=x_0>0$, οἱανδήποτε τιμὴν καὶ ἂν ἔχῃ ἡ βάσις $\alpha \neq 1$, διότι ἔχομεν $\lambda o\gamma x \to \lambda o\gamma x_0$, ὅταν $x \to x_0$.

Ἡ συνάρτησις $y=x^\lambda$ εἶνε συνεχὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ $x=x_0>0$, οἱανδήποτε σταθερὰν τιμὴν καὶ ἂν ἔχῃ ὁ ἐκθέτης λ, διότι ἔχομεν $x^\lambda \to x_0^\lambda$, ὅταν $x \to x_0$.

Ὡς εἴδομεν, ἡ συνάρτησις $y=\eta\mu x$ εἶνε συνεχὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x (βλ. σελ. 183) καθὼς καὶ ἡ $y=\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu(\pi/2-x)$, ἐνῷ ἡ $\varepsilon\varphi x$ εἶνε συνεχὴς εἰς πᾶν διάστημα μὴ περιέχον ὡς τιμήν τοῦ x περιττὸν πολλαπλάσιον τοῦ $\pi/2$, ἡ δὲ $\sigma\varphi x$ εἰς πᾶν διάστημα μὴ περιέχον ὡς τιμὴν τοῦ x ἀκέραιον πολλαπλάσιον τοῦ π.

Πᾶσα συνάρτησις $y=f(\omega)$, συνεχὴς ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν ω, ὅπου τὸ ω εἶνε συνεχὴς συνάρτησις ὡς πρὸς ἄλλην μεταβλητὴν x, εἶνε συνάρτησις συνεχὴς ὡς πρὸς x. Πράγματι· ἔστω ἡ (μὴ σταθερὰ) συνάρτησις $\omega=\varphi(x)$, συνεχὴς διὰ $x=x_0$ καὶ $\omega_0=\varphi(x_0)$, πρὸς δὲ $y=f(\omega)$ μία συνάρτησις συνεχὴς διὰ $\omega=\omega_0$. Λέγω ὅτι ἡ $y=f(\varphi(x))$ εἶνε συνεχὴς διὰ $x=x_0$. Διότι, ἐπειδὴ ἔχομεν ὅριον $f(\omega)=f(\omega_0)$, δοθέντος ἀριθμοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ $\varepsilon>0$, δυνάμεθα νὰ εὕρω-
$\omega \to \omega_0$

μεν ἀριθμὸν $\eta>0$ τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἔχωμεν $|f(\omega)-f(\omega_0)|<\varepsilon$, ἐν ὅσω εἶνε $|\omega-\omega_0|<\eta$. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ $\varphi(x)$ εἶνε συνεχὴς διὰ $x=x_0$, ἔχομεν ὅριον$_{x \to x_0}$ $\varphi(x)=\varphi(x_0)=\omega_0$ καὶ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἄλλον ἀριθμὸν $\eta_1>0$, μετὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ η, τοιοῦτον ὥστε νὰ ἔχωμεν $|\omega-\omega_0|=|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\eta$, ἐν ὅσω εἶνε $|x-x_0|<\eta_1$. Ὅθεν, δοθέντος ἀριθμοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ $\varepsilon>0$, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἄλλον $\eta_1>0$ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶνε $|f(\omega)-f(\omega_0)|=|f(\varphi(x))=f(\varphi(x_0))|<\varepsilon$, ἐν ὅσω εἶνε $|x-x_0|<\eta_1$. Ἄρα ἔχομεν ὅριον$_{x \to x_0}$ $f(\varphi(x))=f(\varphi(x_0))$.

Ἐὰν αἱ συναρτήσεις $x=\varphi(t)$, $y=\sigma(t)$, $z=f(t)$ (10) εἶνε ὡρισμέναι καὶ συνεχεῖς εἰς ἓν κλειστὸν καὶ πεπερασμένον διάστημα δ τῆς μεταβλητῆς t, τὸ σύνολον τῶν σημείων (x,y,z) (τοῦ χώρου τῶν τριῶν διαστάσεων εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους $Oxyz$), τὰ ὁποῖα εὑρίσκομεν, ὅταν τὸ t λαμβάνῃ πάσας τὰς τιμὰς τὰς ἀνηκούσας εἰς τὸ δ, καλεῖται ***συνεχὲς τόξον γραμμῆς*** ἢ ***συνεχὴς καμπύλη*** (εἰς τὸν χῶρον τῶν τριῶν διαστάσεων). Τὸ σημεῖον (x, y, z) τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ σημεῖον t τοῦ τμήματος τοῦ παριστάνοντος τὸ διάστημα δ, λέγεται ***εἰκὼν*** τούτου εἰς τὸν χῶρον $Oxyz$. Ἑπομένως, συνεχές τι τόξον καμπύλης δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς εἰκὼν εὐθυγράμμου τμήματος, παριστάνοντος διάστημα κλειστὸν ἑκατέρωθεν. Ἐὰν ἐπὶ πλέον εἰς τὰ πέρατα τοῦ διαστήματος τοῦ δ ἀντιστοιχῇ τὸ αὐτὸ σημεῖον (x, y, z), λέγομεν ὅτι αἱ ἐξισώσεις (10) παριστάνουν συνεχῆ ***κλειστὴν καμπύλην***. Ἐὰν τὸ διάστημα δ δὲν εἶνε κλειστὸν ἑκατέρωθεν ἢ δὲν εἶνε πεπερασμένον, ἀλλ' ἡ εἰκὼν παντὸς κλειστοῦ καὶ πεπερασμένου διαστήματος δ_1, μέρους τοῦ δ, δίδει διὰ τῶν (10) συνεχὲς τόξον καμπύλης παριστανομένης ὑπ' αὐτῶν, θὰ λέγωμεν ὅτι καὶ ἡ εἰκὼν τοῦ δ εἶνε συνεχὴς καμπύλη.

Αἱ ἐξισώσεις (10) καλοῦνται ***παραμετρικαὶ*** ἐξισώσεις τῆς καμπύλης ἢ τοῦ τόξου αὐτῆς.

Καλοῦμεν ***καμπύλην*** τοῦ *Jordan* (εἰς τὸν χῶρον τῶν τριῶν διαστάσεων) τὴν παριστανομένην ὑπὸ ἐξισώσεων τῆς μορφῆς (10), ἐνῷ αἱ συναρτήσεις $\varphi(t)$, $\sigma(t)$, $f(t)$ εἶνε ὡρισμέναι καὶ συνεχεῖς εἰς κλειστὸν (πεπερασμένον) διάστημα τῆς μεταβλητῆς t, ἂν εἰς δύο διαφόρους τιμὰς τῆς t τοῦ διαστήματος ἀντιστοιχοῦν δύο διάφορα σημεῖα (x,y,z). Κατὰ ταῦτα θεωροῦμεν ὡς καμπύλην τοῦ *Jordan* τὴν καθ' ἕνα μόνον τρόπον καὶ ἀντιστρεπτὴν ***συνεχῆ*** εἰκόνα εὐθυγράμμου τινὸς τμήματος.

Ἐκ δύο σημείων M_1, M_2 τόξου ἢ καμπύλης, ἀντιστοιχούντων εἰς τὰς τιμὰς t_1 καὶ t_2 τῆς παραμέτρου, θεωροῦμεν ὡς πρῶτον ἢ προηγούμενον τὸ M_1 καὶ ὡς δεύτερον ἢ ἑπόμενον τὸ M_2, ἐὰν εἶνε $t_1 < t_2$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι ἡ θετικὴ φορὰ ἐπὶ τοῦ τόξου τούτου ἢ τῆς καμπύλης εἶνε ἡ ἐκ τοῦ M_1 πρὸς τὸ M_2. Διὰ τοῦτο, ἂν ἓν κινητὸν σημεῖον διαγράφῃ τὸ τόξον καὶ διευθύνεται ἐκ τῶν προηγουμένων σημείων αὐτοῦ πρὸς τὰ ἑπόμενα, λέγομεν ὅτι τὸ κινητὸν διαγράφει τὸ τόξον κατὰ τὴν θετικὴν φοράν.

Ἂν ἔχωμεν μόνον δύο ἐκ τῶν ἐξισώσεων (10), π.χ. τὰς $x=\varphi(t)$, $y=\sigma(t)$, μὲ τὰς ἀνωτέρω προϋποθέσεις, ἡ παρισταμένη ὑπ᾽αὐτῶν γραμμὴ καλεῖται ***ἐπίπεδος***, ὡς κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου xOy.

Ἐὰν μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων καμπύλης (k) : $x=\varphi(t)$, $y=\sigma(t)$, ἀπαλείψωμεν τὴν παράμετρον t, εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $F(x,y)=0$ (11), ὅτε ἡ συνάρτησις y τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x, ἥτις ὁρίζεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης, καλεῖται ***πεπλεγμένη***· ἂν δὲ καὶ τὴν (11) λύσωμεν ὡς πρὸς y, εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $y=f(x)$. Ἑκάστη τῶν ἐξισώσεων τούτων ἐπαληθεύεται ὑπὸ μόνων τῶν συντεταγμένων τῶν σημείων τῆς (k) καὶ παριστάνει αὐτήν. Ἐκ τῆς $y=f(x)$, ὡρισμένης εἰς ὡρισμένον διάστημα τῆς x, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὰς παραμετρικὰς ἐξισώσεις τῆς (k), ἂν τεθῇ $x=t$, $y=f(t)$, ὅπου τὸ t μεταβάλλεται ἐντὸς ὡρισμένου διαστήματος.

Ἂν ϱ, ϑ εἶνε αἱ πολικαὶ συντεταγμέναι σημείου, κειμένου ἐπὶ ἐπιπέδου, καμπύλη τις ἐπ᾽ αὐτοῦ παριστάνεται ἢ ὑπὸ δύο παραμετρικῶν ἐξισώσεων τῆς μορφῆς $\varrho=\varphi(t)$, $\vartheta=\sigma(t)$, ἤ, μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τοῦ t μεταξὺ τούτων, ὑπὸ μιᾶς τῆς μορφῆς $F(\varrho,\vartheta)=0$, ἢ ἀκόμη, ἂν καὶ αὕτη λυθῇ ὡς πρὸς ϱ, ὑπὸ μιᾶς ἐξισώσεως τῆς μορφῆς $\varrho=f(\vartheta)$.

Παραδείγματα. 1. Αἱ ἐξισώσεις $x=x_1+\alpha t$, $y=y_1+\beta t$, $z=z_1+\gamma t$ (12) παριστάνουν εὐθεῖαν (εἰς τὸν χῶρον τῶν τριῶν διαστάσεων), ὅταν τὸ t λαμβάνῃ τὰς τιμὰς $-\infty < t < +\infty$.

2. Αἱ ἐξισώσεις $x-\alpha=\varrho\,\text{συν}\varphi$, $y-\beta=\varrho\,\text{ημ}\varphi$ (13) παριστάνουν περιφέρειαν κύκλου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου xy μὲ κέντρον (α, β) καὶ ἀκτῖνα ϱ, ἐὰν τὸ φ λαμβάνῃ τὰς τιμὰς π. χ. $-\pi < \varphi \leq \pi$. Διότι, δι᾽ ἑκάστην τοιαύτην τιμὴν τοῦ φ ἔχομεν $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\varrho^2$. Ἐπίσης αἱ ἐξισώσεις $x-\alpha=\varrho.\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $y-\beta=\varrho.\dfrac{2t}{1+t^2}$ (14), ὅπου τὸ t λαμβάνει τὰς τιμὰς $-\infty < t < +\infty$, παριστάνουν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν, διότι δι᾽ ἑκάστην τιμὴν τοῦ φ, κειμένην εἰς τὸ $-\pi < \varphi < +\pi$, ἰσχύουν

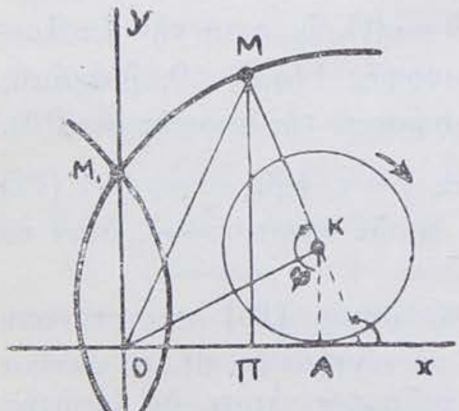
αἱ ταυτότητες $$\text{ημ}\varphi=\frac{2\text{εφ}\dfrac{\varphi}{2}}{1+\text{εφ}^2\dfrac{\varphi}{2}}, \quad \text{συν}\varphi=\frac{1-\text{εφ}^2\dfrac{\varphi}{2}}{1+\text{εφ}^2\dfrac{\varphi}{2}}$$

καθὼς καὶ διὰ $\varphi=\pi$, ἐὰν ὡς τιμὰς τῶν πρώτων μελῶν θεωροῦμεν τὰς 0 καὶ -1 (πρὸς τὰς ὁποίας τείνουν τὰ δεύτερα μέλη), ὅταν τὸ φ τείνῃ ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὸ $+\pi$, ἂν δὲ θέσωμεν εἰς τὰς (14) $t=\varepsilon\varphi\frac{\varphi}{2}$, λαμβάνομεν τὰς (13). Ὅταν τὸ t λαμβάνῃ συνεχῶς τὰς τιτιμὰς τοῦ $-\infty<t<+\infty$, τὸ φ λαμβάνει τὰς $-\pi<\varphi<+\pi$, τὸ δὲ σημεῖον M(x,y) διαγράφει τὴν περιφέρειαν τοῦ θεωρουμένου κύκλου ἀπὸ τοῦ σημείου $(\alpha-\varrho, \beta)$ κατὰ φορὰν ἀντίθετον τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου, ἐνῷ τὸ σημεῖον $(\alpha-\varrho, \beta)$ προκύπτει, ὅταν $t\rightarrow+\infty$ ἢ $t\rightarrow-\infty$.

§ 68. Περὶ τῶν κυκλοειδῶν καμπύλων.

Ἂν περιφέρεια κύκλου κυλίεται (χωρὶς νὰ ὀλισθαίνῃ) ἐπ' εὐθείας (ε) ἐφαπτομένης ταύτης, τυχὸν σημεῖον M κείμενον ἐπὶ μιᾶς ἀκτῖνος τῆς περιφερείας καὶ ἐντὸς, (Σχ. 62), ἢ ἐπὶ (Σχ. 63)· ἢ ἐκτὸς αὐτῆς (Σχ. 61) θὰ γράφῃ καμπύλην, ἀποτελουμένην ἐξ ἀπείρων τὸ πλῆθος τόξων. Ἡ καμπύλη αὕτη καλεῖται ἐν γένει ***κυκλοειδής***.

Ἔστω K τὸ κέντρον περιφερείας κύκλου, M σημεῖον ὡρισμένον, π. χ. ἐκτὸς αὐτῆς, καὶ M_0 προηγουμένη θέσις αὐτοῦ, ὅταν ἡ πεπιφέρεια ἐφήπτετο τῆς (ε) εἰς τὸ O (Σχ. 61). Λαμβάνομεν ὡς ἄξονα τῶν x τὴν (ε), ἀρχὴν τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων (ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς περιφερείας) τὸ O, θετικὴν δὲ φορὰν τοῦ ἄξονος τῶν y πρὸς τὸ μέρος τῆς (ε), πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ κυλιομένη περιφέρεια. Θετικὴ φορὰ ἐπὶ τῆς κινουμένης εὐθείας KM θεωρεῖται ἡ ἐκ τοῦ K πρὸς τὸ M (Σχ. 61). Ζητοῦνται αἱ ἐξισώσεις τῆς γραμμῆς, τὴν ὁποίαν γράφει τὸ M, ἂν α εἶνε τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος τῆς περιφερείας καὶ ὑποτεθῇ $(KM)=\alpha+k$.

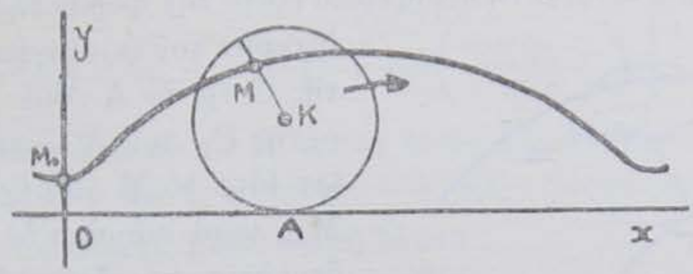


(Σχ. 61)

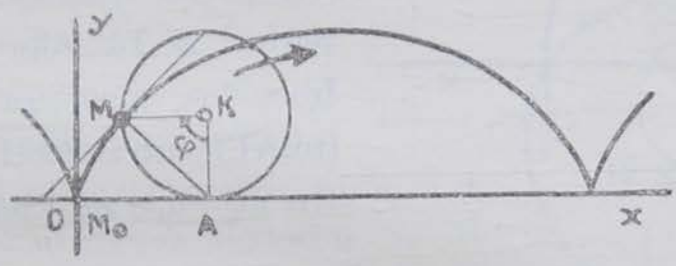
Ἔστωσαν (OΠ)=x καὶ (ΠM)=y αἱ συντεταγμέναι τοῦ M καὶ φ τὸ μέτρον τῆς γωνίας τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὸ κυλισθὲν τόξον. Ἔχομεν $OM=OK+\!\!\!\!+KM$ καὶ ἑπομένως

$$(\pi\varrho._{x,y}OM)=(\pi\varrho._{x,y}OK)+(\pi\varrho._{x,y}KM) \quad (1)$$

Ἀλλ' εἶνε $(\pi\varrho._x\, OM)=(O\Pi)=x$, $(\pi\varrho._x\, OK)=(OA)=\alpha\varphi$(διότι τὸ OA ἔχει μῆκος ἴσον μὲ τὸ μῆκος τοῦ τόξου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν γωνίαν φ),



(Σχ. 62)



(Σχ. 63).

$(\pi\varrho._x KM) = (KM).\sigma\upsilon\nu(Ox, KM) = (\alpha+k)\sigma\upsilon\nu(\pi/2+\pi-\varphi) = -(\alpha+k)\eta\mu\varphi.$

Ἑπομένως ἡ πρώτη ἐκ τῶν (1) δίδει

$$x = \alpha\varphi - (\alpha+k)\eta\mu\varphi = \alpha(\varphi - \eta\mu\varphi) - k\eta\mu\varphi.$$

Ὁμοίως ἐπειδὴ εἶνε

$(\pi\varrho._y OM) = (\Pi M) = y, (\pi\varrho._y OK) = (AK) = \alpha, (\pi\varrho._y KM) = (KM)\sigma\upsilon\nu(\pi-\varphi)$
$= -(\alpha+k)\sigma\upsilon\nu\varphi,$ ἔχομεν $y = \alpha(1-\sigma\upsilon\nu\varphi) - k\sigma\upsilon\nu\varphi.$

Ἄρα αἱ ἐξισώσεις τῆς θεωρουμένης κυκλοειδοῦς, (Σχ. 61) ἥτις καλεῖται ***γενικὴ κυκλοειδής***, εἶνε

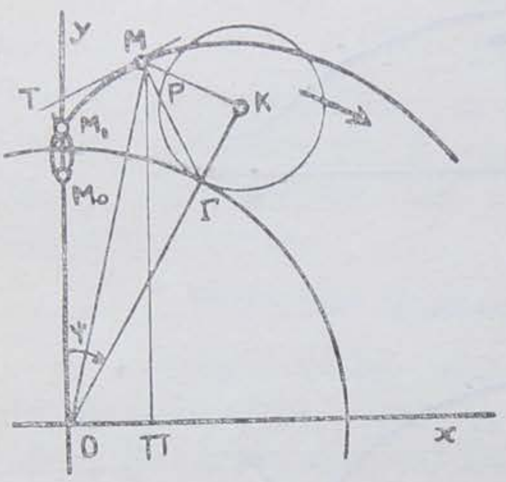
$$x = \alpha(\varphi - \eta\mu\varphi) - k\eta\mu\varphi, \quad y = \alpha(1-\sigma\upsilon\nu\varphi) - k\sigma\upsilon\nu\varphi \qquad (2)$$

Ἐὰν τὸ $k=0$, δηλαδή, ἂν τὸ σημεῖον M κεῖται ἐπὶ τῆς κυλιομένης περιφερείας, ἡ κυκλοειδὴς καλεῖται ***κοινὴ*** (Σχ.63), ἔχει δ᾽ ἐξισώσεις

$$x = \alpha(\varphi - \eta\mu\varphi), \qquad y = \alpha(1-\sigma\upsilon\nu\varphi). \qquad (3)$$

§ 69. Περὶ τῶν ἐπικυκλοειδῶν καμπύλων.

Ἔστω περιφέρεια κύκλου μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων O καὶ ἀκτῖνα μήκους α καὶ ἄλλη K μὲ ἀκτῖνα μήκους α_1, ἥτις κυλίεται ἐπὶ τῆς O(Σχ.64). Ἐὰν KM εἶνε ἀκτίς τις τῆς K καὶ σημεῖον M ἐπ᾽αὐτῆς εἰς ἀπόστασιν k ἀπὸ τοῦ K, κυλιομένης τῆς K, τὸ M γράφει καμπύλην, ἡ ὁποία καλεῖται ***ἐπικυκλοειδής***. Ὑποθέτομεν ὅτι εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς κινήσεως ἡ κινουμένη περιφέρεια (κατὰ τὴν φορὰν τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου) ἐφάπτεται τῆς O εἰς τὸ A διὰ τοῦ σημείου αὐτῆς P, τοῦ A κειμένου ἐπὶ τῆς Oy (ὅτε τὸ M θὰ ἔχῃ τὴν θέσιν M_0), μετὰ πάροδον δὲ χρόνου τινὸς ὅτι εὑρίσκεται ἔστω εἰς τὴν θέσιν K, ὅπου ἡ OK σχηματίζει μὲ τὴν KM γωνίαν ω καὶ ἡ OΓ μὲ τὴν Oy γωνίαν ψ. Τὰ τόξα AΓ καὶ ΓP ἔχουν ἴσα μήκη καὶ θὰ ἔχωμεν (τοξAΓ)$=\alpha\psi$ καὶ (τοξΓP)$=\alpha_1\omega$· ἄρα εἶνε $\alpha\psi=\alpha_1\omega$ καὶ ἑπομένως ἔχομεν



(Σχ. 64)

$\psi=\dfrac{\alpha_1\omega}{\alpha}$. Ἐπίσης εἶνε γων(Ox,KM)=γων(Ox,OK)+γων(OK,KM)=

$=\dfrac{\pi}{2}-\psi+(\pi-\omega)=\dfrac{3\pi}{2}-(\omega+\psi)$, ἐπειδὴ δὲ $OM=OK \# KM$, ἔχομεν

$$(\pi\varrho o\beta_{x,y}OM)=(\pi\varrho o\beta_{x,y}OK)+(\pi\varrho o\beta_{x,y}KM), \qquad (1)$$

$$(\pi\varrho o\beta_x\, OM)=(OM)=x,\ (\pi\varrho o\beta_x\, OK)=(OK)\sigma\upsilon\nu(Ox,\ OK)=$$

$$=(\alpha+\alpha_1)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)=(\alpha+\alpha_1)\eta\mu\psi=(\alpha+\alpha_1)\eta\mu\frac{\alpha_1\omega}{\alpha},$$

$$(\pi\varrho o\beta_x\, KM)=(KM)\sigma\upsilon\nu(Ox,KM)=k\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}-(\omega+\psi)\right)=$$

$$=-k\eta\mu(\omega+\psi)=-k\eta\mu\left(\frac{\alpha+\alpha_1}{\alpha}\omega\right),\ (\pi\varrho o\beta_y\, OM)=y,$$

$$(\pi\varrho o\beta_y\, OK)=(OK)\sigma\upsilon\nu(Oy,OK)=(\alpha+\alpha_1)\sigma\upsilon\nu\psi=(\alpha+\alpha_1)\sigma\upsilon\nu\,\frac{\alpha_1\omega}{\alpha},$$

$$(\pi\varrho o\beta_y\, KM)=(KM)\sigma\upsilon\nu(\pi-\psi-\omega)=$$

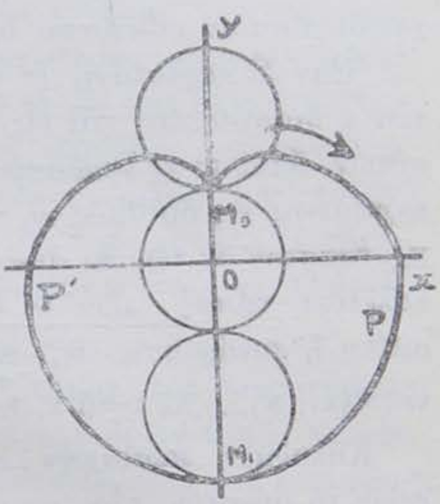
$$=-(KM)\sigma\upsilon\nu(\omega+\psi)=-k\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha+\alpha_1}{\alpha}\omega\right).$$

Οὕτω ἔχομεν ὡς ἐξισώσεις τῆς ἐπικυκλοειδοῦς τὰς ἑξῆς

$$\left.\begin{aligned} x&=(\alpha+\alpha_1)\,\eta\mu\left(\frac{\alpha_1\omega}{\alpha}\right)-k\,\eta\mu\left(\frac{\alpha+\alpha_1}{\alpha}\omega\right)\\ y&=(\alpha+\alpha_1)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha_1\omega}{\alpha}\right)-k\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha+\alpha_1}{\alpha}\omega\right)\end{aligned}\right|\quad(1)$$

Παρατηρητέον ὅτι, ἂν τὸ Μ κεῖται ἐκτὸς (Σχ.64) ἢ ἐντὸς ἢ ἐπὶ τῆς Κ, (Σχ.65) θὰ εἶνε $k>\alpha$ ἢ $k<\alpha$ ἢ $k=\alpha$. Εἰς τὴν τελευταίαν περίπτωσιν ἡ καμπύλη καλεῖται συνήθως ***κοινὴ ἐπικυκλοειδής***. Μερικὴ περίπτωσις ταύτης εἶνε ἡ καλουμένη ***καρδιοειδὴς*** καμπύλη, (Σχ.65), ἥτις προκύπτει, ὅταν $\alpha=\alpha_1=k$ καὶ ἔχει ἐξισώσεις

$$\left.\begin{aligned} x&=\alpha(2\eta\mu\omega-\eta\mu2\omega)\\ y&=\alpha(2\sigma\upsilon\nu\omega-\sigma\upsilon\nu2\omega)\end{aligned}\right|\quad(2)$$



(Σχ. 65)

Ἐὰν ὁ λόγος $\alpha_1:\alpha$ εἶνε ρητὸς καὶ ἴσος μὲ τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\mu:\nu$, αἱ τιμαὶ τοῦ x (καθὼς καὶ αἱ τοῦ y), αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς ω καὶ $\omega+2\lambda\pi.\nu$ ($\lambda=1, 2, 3,\ldots$) εἶνε ἴσαι μεταξύ των. Ἑπομένως τὰ αὐτὰ τόξα γράφονται ὑπὸ τοῦ Μ κατ᾽ ἐπανάληψιν καὶ ἡ καμπύλη εἶνε κλειστή, ἄλλως εἶνε ἀνοικτή.

Παρατήρησις. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι, 1) ἂν ἡ κινουμένη περιφέρεια ἐφάπτεται ἐσωτερικῶς τῆς ἀκινήτου καὶ εἶνε $\alpha_1<\alpha$, ἡ ὑπὸ τοῦ Μ γραφομένη καμπύλη, ἥτις καλεῖται ***ὑποκυκλοειδής***, ἔχει ἐξισώσεις

$$\left.\begin{aligned} x&=(\alpha-\alpha_1)\,\eta\mu\left(\frac{\alpha_1\omega}{\alpha}\right)-k\eta\mu\left(\frac{\alpha-\alpha_1}{\alpha}\omega\right)\\ y&=(\alpha-\alpha_1)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha_1\omega}{\alpha}\right)+k\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha-\alpha_1}{\alpha}\omega\right)\end{aligned}\right|\quad(4)$$

2) Ἂν εἶνε $\alpha_1>\alpha$, ἔχομεν τὴν καλουμένην ***περικυκλοειδῆ*** καμπύλην μὲ ἐξισώσεις

$$\left.\begin{aligned} x&=(\alpha-\alpha_1)\,\eta\mu\left(\frac{\alpha_1\omega}{\alpha}\right)+k\eta\mu\left(\frac{\alpha_1-\alpha}{\alpha}\omega\right)\\ y&=(\alpha-\alpha_1)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha_1\omega}{\alpha}\right)+k\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha_1-\alpha}{\alpha}\omega\right)\end{aligned}\right|\quad(5)$$

§ 70. Περί συνεχοῦς ἐπιφανείας.

Καθὼς αἱ συντεταγμέναι σημείου τινὸς εἰς τὸν χῶρον τῶν τριῶν διαστάσεων εἶνε τρεῖς, οὕτω δεχόμεθα ὅτι εἰς χῶρον ν διαστάσεων σημεῖόν τι παριστάνεται ὑπὸ ν πραγματικῶν ἀριθμῶν x_i, $(i=1,2,..,\nu)$ καὶ ὅτι ἀντιστρόφως ν τοιοῦτοι ἀριθμοὶ παριστάνουν σημεῖόν τι τοῦ χώρου τούτου, καλοῦνται δ'οὗτοι συντεταγμέναι αὐτοῦ.

Ἐὰν Σ παριστάνῃ ἓν ὡρισμένον σύνολον σημείων Μ τοῦ χώρου τῶν ν διαστάσεων, καὶ εἰς ἕκαστον σύστημα τῶν συντεταγμένων x_i αὐτῶν, ὅπου τὸ x_i λαμβάνει τιμὰς τοῦ διαστήματος α_i ,..,α'_i ἀντιστοιχῇ ὡρισμένος τις ἀριθμὸς w, θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ w εἶνε συνάρτησις τῶν x_i, ἕκαστον δὲ τῶν x_i ἀνεξάρτητος μεταβλητή, καὶ τὸ σύνολον τῶν Μ καλεῖται ***τόπος*** τῶν ν διαστάσεων, εἰς τὸ ὁποῖον εἶνε ὡρισμένη ἡ συνάρτησις w, παριστανομένη συμβολικῶς π. χ. διὰ τοῦ $w=f(x_1, x_2,...,x_\nu)=f(x_i)$.

Καλοῦμεν ***περιοχὴν*** σημείου $H(\eta_i)$ τοῦ χώρου τῶν ν διαστάσεων τὸ σύνολον τῶν σημείων $M(x_i)$, διὰ τὰ ὁποῖα ἔχομεν

$$\eta_i - \varepsilon_i < x_i < \eta_i + \varepsilon_i .$$

Ἔστω συνάρτησίς τις $w=f(x_i)$, ὡρισμένη εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ $M(x_i)$. Λέγομεν ὅτι τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τῆς w εἶνε ***περιωρισμένον*** πρὸς τὰ κάτω ἢ πρὸς τ' ἀριστερά, ἂν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν k_1 τοιοῦτον, ὥστε δι' ἕκαστον ἀριθμὸν w τοῦ συνόλου νὰ ἔχωμεν $k_1 \leqq w$. Κατ' ἀναλογίαν λέγομεν ὅτι τὸ σύνολον τῶν w εἶνε περιωρισμένον πρὸς τὰ ἄνω ἢ πρὸς τὰ δεξιά, ἂν ὑπάρχῃ ἀριθμὸς k_2 τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἔχωμεν $w \leqq k_2$ δι'ἕκαστον w. Οἱ ἀριθμοὶ k_1, k_2 καλοῦνται ***φραγμοὶ*** ἢ ***φράγματα*** τοῦ συνόλου w, κατώτερος καὶ ἀνώτερος ἢ ἀριστερὸς καὶ δεξιὸς φραγμός. Π.χ. δι' ἕκαστον μὲν σύνολον μὴ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν τὸ 0 εἶνε κατώτερος φραγμός, διὰ δὲ τὸ σύνολον τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, τῶν περιεχομένων μεταξὺ 0 καὶ 1, τὸ 1 εἶνε ἀνώτερος φραγμός. Ἐὰν k_1 εἶνε κατώτερος φραγμὸς τοῦ συνόλου w, πᾶς ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ k_1 θὰ εἶνε ἐπίσης κατώτερος φραγμὸς αὐτοῦ. Ἐπίσης, ἂν k_2 εἶνε ἀνώτερος φραγμὸς τοῦ συνόλου, θὰ εἶνε τοιοῦτος καὶ πᾶς ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ k_2. Οὕτω π. χ. διὰ σύνολον ἀριθμῶν μὴ ἀρνητικῶν ἕκαστος ἀρνητικὸς ἀριθμὸς εἶνε καὶ εἷς κατώτερος φραγμὸς τοῦ συνόλου καὶ τὸ 0 εἶνε ὁ μέγιστος ἐκ τῶν φραγμῶν αὐτῶν.

Παρατηρητέον ὅτι, ἂν σύνολον (πραγματικῶν) ἀριθμῶν εἶνε περιωρισμένον πρὸς τ' ἀριστερά, ὑπάρχει μεταξὺ τῶν κατωτέρων φραγμῶν αὐτοῦ εἷς μέγιστος τῶν ἄλλων. Ἤτοι ὑπάρχει εἷς ἀριθμὸς π. χ. α μὲ τὰς ἑξῆς ἰδιότητας: α') πᾶς ἀριθμὸς $\leq \alpha$ εἶνε κατώτερος φραγμὸς τοῦ συνόλου, δηλαδή, ἂν w εἶνε τυχὼν ἀριθμὸς τοῦ συνόλου, θὰ εἶνε πάντοτε $\alpha \leq w$· β') οὐδεὶς ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ α εἶνε κατώτερος φραγμὸς τοῦ συνόλου· δηλαδή, ἂν ε εἶνε τυχὼν θετικὸς ἀριθμός, ἔχομεν τουλάχιστον ἓν $w < \alpha + \varepsilon$. Ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς α καλεῖται ***κατώτερον ὅριον*** τοῦ συνόλου w. Ἂν σύνολον εἶνε περιωρισμένον πρὸς τὰ δεξιά, ὑπάρχει μεταξὺ τῶν ἀνωτέρων φραγμῶν αὐτοῦ ἓν ἐλάχιστον, ἤτοι ὑπάρχει εἷς ἀριθμὸς π. χ. α' μὲ τὰς ἑξῆς δύο ἰδιότητας: α') πᾶς ἀριθμὸς $\geq \alpha'$ εἶνε ἀνώτερος φραγμὸς τοῦ συνόλου, δηλαδὴ εἶνε πάντοτε $w \leq \alpha'$· β') οὐδεὶς ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ α' εἶνε ἀνώτερος φραγμὸς τοῦ συνόλου· ἤτοι, ἂν ε παριστάνῃ τυχόντα θετικὸν ἀριθμόν, ὑπάρχει πάντοτε ἓν τουλάχιστον $w > \alpha' - \varepsilon$. Ὁ ἀριθμὸς α' καλεῖται ***ἀνώτερον ὅριον*** τοῦ συνόλου w.

Τὸ ἀνώτερον καὶ κατώτερον ὅριον τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως $w = f(x_i)$ καλοῦνται ἀνώτερον καὶ κατώτερον ὅριον αὐτῆς εἰς τὸν τόπον (x_i), ἐὰν δ' ὑπάρχουν καὶ τὰ δύο ταῦτα, λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις εἶνε ***περιωρισμένη***.

Ἔστω ἡ συνάρτησις $\omega = \varphi(x, y)$ (1) τῶν δύο μεταβλητῶν x, y, ὡρισμένη εἰς τὸν τόπον $\alpha < x < \alpha'$, $\beta < y < \beta'$, ὅστις εἶνε, προφανῶς, ὀρθογώνιον (ἂν ἀναφέρεται εἰς ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων Oxy). Ἐὰν τεθῇ εἰς τὴν (1) $y = y_0$, ἐνῶ εἶνε $\beta < y_0 < \beta'$, ἡ $\varphi(x, y_0)$ εἶνε συνάρτησις μόνης τῆς μεταβλητῆς x, ὡρισμένη εἰς τὸ διάστημα $\alpha < x < \alpha'$. Ὁμοίως λέγομεν ὅτι ἡ $\varphi(x_0, y)$ εἶνε ὡρισμένη εἰς τὸ διάστημα $\beta < y < \beta'$ καὶ κατ' ἀναλογίαν ὅτι, ἂν ἡ συνάρτησις $w = f(x_i)$ $(i \geq 2)$ εἶνε ὡρισμένη εἰς τὸν τόπον $\alpha_i < x_i < \alpha'_i$, καὶ τεθῇ $x_\nu = x^0_\nu$, ὅπου $\alpha^0_\nu < x^0_\nu < \alpha'^0_\nu$, ἡ $\varphi(x_j, x^0_\nu)$, $(j = 1, 2, \ldots, \nu - 1)$ τῶν $\nu - 1$ μεταβλητῶν εἶνε ὡρισμένη εἰς τὸν τόπον $\alpha_j < x_j < \alpha_j'$.

Σημεῖόν τι $H(\eta_i)$ καλεῖται ***ὁρικὸν*** σημεῖον τοῦ συνόλου $M(x_i)$, ἐνῶ τὸ $H(\eta_i)$ δύναται νὰ ἀνήκῃ ἢ μὴ εἰς τὸ σύνολον, ἐὰν εἰς ἑκάστην περιοχὴν τοῦ $H(\eta_i)$ ὑπάρχῃ ἄπειρον πλῆθος σημείων τοῦ συνόλου, ἤ, τὸ ὁποῖον σημαίνει τὸ αὐτό, ἂν ὑπάρχῃ τουλάχιστον ἓν σημεῖον αὐτοῦ διάφορον τοῦ H· δηλαδή, ἐάν, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ἀριθμοῦ $\varepsilon > 0$, ὑπάρχῃ πάντοτε ἄπειρον πλῆθος σημείων $P(\varrho_i)$ αὐτοῦ τοιούτων, ὥστε νὰ εἶνε ἡ ἀπόλυτος ἀπόστασις $|(HP)| = \sqrt{\Sigma(\eta_i - \varrho_i)^2} < \varepsilon$.

Λέγομεν ὅτι συνάρτησίς τις $w=f(x_i)$ εἶνε ***συνεχὴς*** εἰς ὁρικὸν σημεῖον $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu)$ τοῦ συνόλου $M(x_i)$, εἰς τὸ ὁποῖον εἶνε ὡρισμένη, ἐὰν ἔχωμεν ὅριον $\underset{(x_i) \to (\alpha_i)}{f(x_i)} = f(\alpha_i)$.

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν αἱ μεταβληταὶ $x_1, x_2, \dots, x_{\nu-1}$ λάβουν τὰς ὡρισμένας τιμὰς $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\nu-1}$, καὶ ἡ $f(x_i)$ εἶνε συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον (α_i), ἡ συνάρτησις $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\nu-1}, x_\nu)$ τῆς μιᾶς μεταβλητῆς x_ν, θὰ εἶνε συνεχὴς διὰ $x_\nu = \alpha_\nu$, ἤτοι ἔχομεν

$$\underset{x_\nu \to \alpha_\nu}{\text{ὅριον}} f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\nu-1}, x_\nu) = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu).$$

Ἐν γένει, ἂν συνάρτησις $w=f(x_i)$ ὁσωνδήποτε μεταβλητῶν εἶνε ὡρισμένη καὶ συνεχὴς εἰς τόπον $\alpha_i < x_i < \alpha_i'$ (1'), μεταβληταί τινες δ' αὐτῆς λάβουν ὡρισμένας τιμὰς ἀνηκούσας εἰς τὸν (1'), ἡ προκύπτουσα συνάρτησις τῶν ὑπολοίπων αὐτῆς μεταβλητῶν εἶνε ἐπίσης συνεχὴς εἰς αὐτόν. Σημειωτέον ὅτι ἡ ἀντίστροφος πρότασις ταύτης δὲν ἰσχύει πάντοτε.

Συνάρτησίς τις ν μεταβλητῶν λέγεται συνεχὴς ἐπί τινος συνόλου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου εἶνε ὡρισμένη, ἐὰν εἶνε συνεχὴς εἰς ἕκαστον ὁρικὸν σημεῖον τοῦ συνόλου.

Ἐὰν αἱ συναρτήσεις

$$x=\varphi(u, v),\ y=\sigma(u, v),\ z=f(u, v) \qquad (2)$$

τῶν ἀνεξαρτήτων ἀπ' ἀλλήλων μεταβλητῶν u, v εἶνε ὡρισμέναι καὶ συνεχεῖς εἰς ὡρισμένον τόπον (Γ) τοῦ ἐπιπέδου uv, τὸ σύνολον (E) τῶν σημείων μὲ συντεταγμένας (x,y,z) ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους $Oxyz$ θεωρεῖται ὡς εἰκὼν τοῦ (Γ), προκύπτουσα διὰ τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ καλεῖται ***ἐπιφάνεια συνεχής***, αἱ δ' ἐξισώσεις αὗται καλοῦνται ***παραμετρικαὶ*** ἐξισώσεις τῆς ἐπιφανείας (E). Οὕτω, αἱ παραμετρικαὶ ἐξισώσεις σφαίρας μὲ ἀκτῖνα μήκους ϱ καὶ συντεταγμένας τοῦ κέντρου αὐτῆς α, β, γ ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους $Oxyz$ εἶνε $x=\alpha+\varrho\,\eta\mu\varphi\,\sigma\upsilon\nu\psi$, $y=\beta+\varrho\,\eta\mu\varphi\,\eta\mu\psi$, $z=\gamma+\varrho\,\sigma\upsilon\nu\varphi$, ὅπου αἱ παράμετροι φ, ψ πληροῦν τὰς συνθήκας $0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$. Διὰ τῶν σχέσεων τούτων ἐπὶ μὲν τοῦ ἐπιπέδου τῶν φ, ψ ὁρίζεται ἓν ὀρθογώνιον, ἡ δὲ σφαῖρα παρουσιάζεται ὡς εἰκὼν τοῦ ὀρθογωνίου τούτου, ἐνῶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν z τέμνει αὐτὴν εἰς σημεῖα, τὰ ὁποῖα θεωροῦνται ὡς εἰκόνες τῶν γραμμῶν $\varphi=0$ καὶ $\varphi=\pi$ τοῦ ἐν λόγῳ ὀρθογωνίου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν φ, ψ.

Ἐπιφάνειά τις παριστάνεται καὶ ὑπὸ μιᾶς μόνης ἐξισώσεως τῆς μορφῆς $F(x,y,z)=0$ (3), ἥτις προκύπτει δι' ἀπαλοιφῆς τῶν u,v μεταξὺ τῶν (2), ἢ ὑπὸ μιᾶς τῆς μορφῆς $z=f(x,y)$, ἡ ὁποία εὑρίσκεται, ἐὰν ἡ (3) λυθῇ ὡς πρὸς z. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἐπιφάνεια θεωρεῖται ὡς εἰκὼν ὡρισμένου τόπου τῶν δύο διαστάσεων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν xy, ἐπὶ τοῦ ὁποίου εἶνε ὡρισμένη ἡ συνάρτησις $f(x,y)$. Παρατηρητέον ὅτι, ἡ τελευταία ἐξίσωσις δύναται νὰ ὑπαχθῇ εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν παραμετρικῶν ἐξισώσεων, ἂν θέσωμεν π. χ.

$$x=u, \quad y=v, \quad z=f(u, v).$$

Ἐν γένει, ἀπεικόνισίς τις καθ'ἕνα μόνον τρόπον γινομένη καὶ ἀντιστρεπτὴ ἑνὸς συνόλου σημείων, ἔστω Σ, ἐπὶ ἄλλου τοιούτου Σ' καλεῖται ***συνεχὴς*** εἰς ὁρικὸν σημεῖον M_1 τοῦ Σ, ἂν δοθέντος ἀριθμοῦ τινος $\varepsilon>0$, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἄλλον $\eta>0$ τοιοῦτον, ὥστε δι' ἕκαστον σημεῖον M τοῦ Σ, διὰ τὸ ὁποῖον εἶνε $|(MM_1)|<\eta$, ἡ ἀπόλυτος ἀπόστασις τῶν εἰκόνων τῶν M_1 καὶ M ἐπὶ τοῦ Σ' εἶνε μικροτέρα τοῦ ε. Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι, ἐὰν ἡ ἀπεικόνισις εἶνε συνεχὴς εἰς ἕκαστον ὁρικὸν σημεῖον τοῦ Σ, τὸ ὁποῖον ὑποτίθεται ***κλειστὸν**** καὶ ***πεπερασμένον****), θὰ συμβαίνῃ τοῦτο καὶ διὰ τὸ Σ', ἡ δὲ ἀντίστροφος ἀπεικόνισις τοῦ Σ' ἐπὶ τοῦ Σ εἶνε πάλιν συνεχής.

§ 71. Παράγωγος συνάρτησις καὶ ἐφαπτομένη καμπύλης.

Ἐὰν ἡ συνάρτησις $y=\varphi(x)$ εἶνε ὡρισμένη εἰς περιοχήν τινα τῆς τιμῆς $x=x_0$ καὶ ὑπάρχῃ ὅριον πεπερασμένον τοῦ $\dfrac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}$, ὅταν $x \to x_0$, λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις εἶνε παραγωγίσιμος διὰ $x=x_0$ καὶ τὸ ὅριον τοῦτο καλεῖται ***παράγωγος*** αὐτῆς ἢ ***διαφορικὸν πηλίκον*** τῆς $\varphi(x)$ διὰ τὴν τιμὴν ταύτην, τὸ ὁποῖον παριστάνομεν δι' ἑνὸς τῶν συμβόλων $\varphi'(x)_{x=x_0}$ ἢ $\varphi'(x_0)$, $(y')_{x=x_0}$, $(\dot{y})_{x=x_0}$, $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}$, $\left(\dfrac{d\varphi(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$ καὶ δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ἐπίσης $\lim\limits_{\nu \to \infty} \dfrac{\varphi(x_\nu)-\varphi(x_0)}{\varepsilon_\nu} = \varphi'(x_0)$, ἂν

---

* ***Κλειστὸν*** λέγεται σύνολόν τι, ἂν ἕκαστον ὁρικὸν σημεῖον αὐτοῦ εἶνε σημεῖον τοῦ συνόλου.

** ***Περιωρισμένον*** λέγεται σύνολόν τι Σ σημείων τοῦ χώρου τῶν ν διαστάσεων, ἂν δύναται νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός τις k τοιοῦτος, ὥστε νὰ εἶνε ἡ ἀπόστασις $|(AM)|\leqslant k$, ὅπου M εἶνε τυχὸν σημεῖον τοῦ συνόλου καὶ A σταθερὸν σημεῖον τοῦ χώρου.

τεθῇ $x_\nu - x_0 = \varepsilon_\nu$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$ ἢ καὶ γενικώτερον

$$\underset{\varepsilon \to 0}{\text{ὅριον}} \frac{\varphi(x_0+\varepsilon)-\varphi(x_0)}{\varepsilon} = \varphi'(x_0), \quad \text{ἢ} \quad \underset{\Delta x \to 0}{\text{ὅριον}} \frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x} = \varphi'(x).$$

Ἐὰν συνάρτησίς τις $y = \varphi(x)$ εἶνε παραγωγίσιμος διὰ $x = x_0$, τὸ γινόμενον $\varphi'(x_0).\Delta x_0$ καλεῖται ***διαφορικὸν*** τῆς συναρτήσεως διὰ τὴν τιμὴν $x = x_0$ καὶ παριστάνεται διὰ τὴν ἐν γένει τιμὴν x διὰ τοῦ $dy = d\varphi(x)$ ἢ τοῦ $\varphi'(x)dx$ (ἐπειδή, ὡς εὐκόλως δεικνύεται, εἶνε $dx = \Delta x$).

Παρατηρητέον ὅτι, ἂν συνάρτησίς τις εἶνε παραγωγίσιμος διὰ $x = x_0$, θὰ εἶνε καὶ συνεχὴς διὰ τὴν τιμὴν ταύτην. Πράγματι, ἂν θέσωμεν $\dfrac{\varphi(x_\nu)-\varphi(x_0)}{x_\nu - x_0} = k_\nu$, ἐπειδὴ ἡ ἀκολουθία (k_ν) εἶνε συγκλίνουσα, θὰ εἶνε αὕτη περιωρισμένη, ὡς ἀποδεικνύεται*, ἡ δὲ ἀκολουθία $\varphi(x_\nu) - \varphi(x_0) = k_\nu (x_\nu - x_0)$ τείνει εἰς τὸ 0 (ἐπειδὴ καὶ ἡ ἀκολουθία $(x_\nu - x_0)$ τείνει εἰς τὸ 0). Ἄρα ἔχομεν $\underset{x \to x_0}{\text{ὅριον}}\, \varphi(x) = \varphi(x_0)$.

Ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$, ὡρισμένη διὰ τὴν τιμὴν $x = x_0$ καὶ δι᾽ ἀριστερὰν ἢ δεξιὰν περιοχὴν ταύτης, λέγομεν ὅτι εἶνε παραγωγίσιμος πρὸς τὰ δεξιὰ ἢ ἀριστερὰ τῆς x_0, ἐὰν ὑπάρχῃ ὡρισμένον καὶ πεπερασμένον

$$\underset{x \to x_0+0}{\text{ὅριον τοῦ}} \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x - x_0} \quad \text{ἢ} \quad \underset{x \to x_0-0}{\text{ὅριον τοῦ}} \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x - x_0}$$

καὶ καλοῦμεν τὸ ὅριον τοῦτο παράγωγον δεξιὰν ἢ ἀριστερὰν τῆς $\varphi(x)$ διὰ $x = x_0$, παριστάνομεν δ᾽ αὐτὴν διὰ τοῦ

$$\varphi'_+(x_0) \quad \text{ἢ} \quad \varphi'_-(x_0).$$

Ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ εἶνε παραγωγίσιμος διὰ $x = x_0$, τότε καὶ μόνον, ὅταν ὑπάρχουν αἱ $\varphi'_+(x_0)$, $\varphi'_-(x_0)$ καὶ εἶνε ἴσαι, ὅτε ἡ κοινὴ τούτων τιμὴ παριστάνεται διὰ τοῦ $\varphi'(x_0)$.

Συνάρτησίς τις $\varphi(x)$ λέγεται παραγωγίσιμος εἰς διάστημα δ τοῦ

---

* Πράγματι, ἐπειδὴ (k_ν) εἶνε συγκλίνουσα, ἂν εἶνε $\underset{\nu \to \infty}{\text{ὅριον}}\, k_\nu = \xi$, ἡ ἀκολουθία $(k_\nu - \xi)$ τείνει εἰς τὸ 0, ὡς τοιαύτη δ᾽ εἶνε περιωρισμένη, ἤτοι ὑπάρχει ἀριθμός τις $A > 0$ τοιοῦτος, ὥστε νὰ εἶνε $|k_\nu - \xi| \leqslant A$ διὰ $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ Διότι, ἂν π.χ. διὰ $\varepsilon = 1$ καὶ $\nu \geqslant \nu_0$ ἔχωμεν $|k_\nu - \xi| < 1$, τὸ δὲ ϱ εἶνε τὸ μέγιστον τῶν $|k_0 - \xi|, |k_1 - \xi|, \ldots |k_{\nu_0 - 1} - \xi|$ καὶ τεθῇ $\varrho + 1 = A$, τὸ A θὰ εἶνε φραγμὸς τῆς $|k_\nu - \xi|$, ἐπειδὴ θὰ ἔχωμεν $|k_\nu - \xi| < A$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ ν.

x ἀνοικτὸν ἑκατέρωθεν, ἐὰν εἶνε ὡρισμένη εἰς τὸ δ καὶ παραγωγίσιμος δι᾽ ἑκάστην τιμὴν ἀνήκουσαν εἰς αὐτό. Τὴν παράγωγον ἢ τὸ διαφορικὸν πηλίκον τῆς φ(x) διὰ τιμήν τινα x, ἀνήκουσαν εἰς τὸ δ, παριστάνομεν μὲ ἓν ἐκ τῶν συμβόλων $\varphi'(x)$, y', $\dot{y}$, $\frac{d\varphi(x)}{dx}$, $\frac{d}{dx}\varphi(x)$, ἔχει δ᾽ αὕτη δι᾽ ἑκάστην τιμὴν τοῦ x (ἀνήκουσαν εἰς τὸ δ) ὡρισμένην τινὰ τιμήν, ἄρα εἶνε συνάρτησις τοῦ x.

Ἐὰν ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $y=\varphi(x)$, ἡ $\varphi'(x)$, εἶνε παραγωγίσιμος, παριστάνομεν τὴν παράγωγον ταύτης μὲ τὸ $\varphi''(x)$ ἢ μὲ $\ddot{y}$ ἢ y'' ἢ μὲ $\frac{d^2y}{dx^2}$ καὶ καλεῖται αὕτη ***δευτέρα παράγωγος*** ἢ ***παράγωγος β΄ τάξεως*** τῆς $y=\varphi(x)$. Κατ᾽ ἀναλογίαν ὁρίζεται ἡ νιοστὴ παράγωγος ἢ παράγωγος νιοστῆς τάξεως τῆς συναρτήσεως $y=\varphi(x)$ καὶ παριστάνεται μὲ $y^{(\nu)}=\frac{d^\nu y}{dx^\nu}=\varphi^{(\nu)}(x)$, ὅπου τὸ ν παριστάνει ἀκέραιον καὶ θετικὸν ἀριθμὸν μεγαλύτερον τοῦ δύο.

Ἔστω ἡ συνάρτησις $w=f(x_i)$ $(i=1,2,\ldots \nu)$ ὡρισμένη ἐπὶ τόπου, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκουν τοὐλάχιστον πάντα τὰ σημεῖα (x_i) μιᾶς περιοχῆς τοῦ σημείου $H(\eta_i)$, διὰ τὸ ὁποῖον εἶνε $x_2=\eta_2$, $x_3=\eta_3,\ldots$, $x_\nu=\eta_\nu$. Ἡ συνάρτησις αὕτη $f(x_1, \eta_j)=f(x_1, \eta_2, \eta_3,\ldots,\eta_\nu)$ τῆς μεταβλητῆς x_1 εἶνε ὡρισμένη τουλάχιστον εἰς περιοχήν τινα τῆς τιμῆς $x_1=\eta_1$, ἐὰν δ᾽ αὕτη εἶνε καὶ παραγωγίσιμος διὰ τὴν τιμὴν ταύτην, ἤτοι, ἂν ὑπάρχῃ ὅριον $\displaystyle\lim_{x_1\to\eta_1}\frac{f(x_1, \eta_j)-f(\eta_i)}{x_1-\eta_1}$ εἰς τὸ σημεῖον (η_i), τὸ ὅριον τοῦτο καλεῖται ***μερικὴ παράγωγος*** τῆς w ὡς πρὸς x_1 εἰς τὸ σημεῖον (η_i). Τὴν μερικὴν παράγωγον τῆς $w=f(x_i)$ ὡς πρὸς x_1 παριστάνομεν μὲ $f_{x_1}(\eta_i)$ ἢ ἐν γένει μὲ ἓν τῶν συμβόλων

$$w_{x_1},\quad \frac{\partial w}{\partial x_1},\quad \frac{\partial f(x_i)}{\partial x_1}.$$

Λέγομεν ὅτι συνάρτησίς τις $w=f(x_i)$ εἶνε παραγωγίσιμος ὡς πρὸς x_1 εἰς τὸν τόπον (T), εἰς τὸν ὁποῖον εἶνε ὡρισμένη, ἂν εἶνε παραγωγίσιμος ὡς πρὸς x_1 δι᾽ ἑκάστην τιμὴν τούτου, ἀντιστοιχοῦσαν εἰς σημεῖον τοῦ (T) καὶ θέτομεν

$$\lim_{\varepsilon_1\to 0}\frac{f(x_1+\varepsilon_1, x_j)}{\varepsilon_1}=w_{x_1}=\frac{\partial w}{\partial x_1}=f_{x_1}=\frac{\partial f(x_i)}{\partial x_1}$$

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ὁρίζομεν καὶ παριστάνομεν τὴν μερικὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως ὡς πρὸς ἄλλην τῶν μεταβλητῶν αὐτῆς, καθὼς καὶ τὰς μερικὰς παραγώγους ἀνωτέρας τάξεως τῆς w ὡς πρὸς τὰς μεταβλητὰς αὐτῆς. Οὕτω π.χ. διὰ τὴν μερικὴν παράγωγον τῆς w ὡς πρὸς x_k ἔχομεν $w_{x_k}=\frac{\partial w}{\partial x_k}=f_{x_k}(x_i)=\frac{\partial f(x_i)}{\partial x_k}$,

ἂν δ' εἶνε $w=f(x,y,z,\ldots)$, ἔχομεν π.χ. τὴν μερικὴν παράγωγον αὐτῆς ὡς πρὸς x καὶ y, παριστανομένην ὑπὸ τοῦ

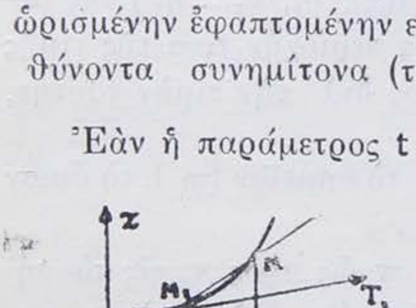
$$w_{xy}=f_{xy}(x,y,\ldots)=\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 f(x,y,\ldots)}{\partial x \partial y}.$$

Ἔστω (k) συνεχὲς τόξον καμπύλης εἰς τὸν χῶρον τῶν τριῶν διαστάσεων μὲ ἐξισώσεις (εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους Oxyz) τὰς

$$x=\varphi(t),\quad y=\sigma(t),\quad z=f(t),$$

$M_1(x_1,y_1,z_1)$ σταθερὸν σημεῖον καὶ $M(x,y,z)$ ἄλλο τυχὸν σημεῖον αὐτῆς, ἀλλ' ἑπόμενον τοῦ M_1 (Σχ.66). Ἐὰν a, b, c εἶνε τὰ διευθύνοντα συνημίτονα (τοῦ θετικοῦ μέρους) τῆς εὐθείας M_1M, ὑποθέσωμεν δ' ὅτι, τοῦ M κινουμένου ἐπὶ τοῦ (k) καὶ τείνοντος πρὸς τὸ M_1, τὰ a, b, c τείνουν πρὸς τὰς ὡρισμένας τιμὰς a_1, b_1, c_1, λέγομεν ὅτι τὸ (k) ἔχει ὡρισμένην ἐφαπτομένην εἰς τὸ M_1, τὸ ὅριον τῆς εὐθείας M_1M, μὲ διευθύνοντα συνημίτονα (τοῦ θετικοῦ μέρους) αὐτῆς τὰ a_1, b_1, c_1.

Ἐὰν ἡ παράμετρος t λαμβάνῃ συνεχῶς τὰς τιμὰς ἑνὸς ὡρισμένου κλειστοῦ καὶ πεπερασμένου διαστήματος, ἵνα τὸ τόξον (k) εἰς τὸ σημεῖον $M_1(x_1,y_1,z_1)$ ἔχῃ μίαν ὡρισμένην ἐφαπτομένην, ἀρκεῖ αἱ συναρτήσεις φ(t), σ(t), f(t) διὰ $t=t_1$ νὰ εἶνε παραγωγίσιμοι καὶ ἀκόμη $[\varphi'(t_1)]^2+[\sigma'(t_1)]^2+[f'(t_1)]^2\neq 0$. Διότι, ἂν ἡ τιμὴ $t=t_1+\varepsilon$, ὅπου $\varepsilon\neq 0$, ἀνήκῃ εἰς τὸ διάστημα τῆς t καὶ θέσωμεν $\varphi(t_1+\varepsilon)=x$, $\sigma(t_1+\varepsilon)=y$, $f(t_1+\varepsilon)=z$, τὰ διευθύνοντα συνημίτονα τῆς εὐθείας, τὴν ὁποίαν



(Σχ. 66).

ὁρίζουν τὰ $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M(x,y,z)$ εἶνε $a=\frac{x-x_1}{\varrho}$, $b=\frac{y-y_1}{\varrho}$, $c=\frac{z-z_1}{\varrho}$,

ὅπου $\varrho=\pm\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}$. Ἂν ὑποθέσωμεν $\varepsilon\to 0$, ἔχομεν $\frac{x-x_1}{\varepsilon} \rightarrow \dot{x}_1$, $\frac{y-y_1}{\varepsilon} \rightarrow \dot{y}_1$, $\frac{z-z_1}{\varepsilon} \rightarrow \dot{z}_1$, καὶ ἐπομένως θὰ εἶνε $x-x_1=\varepsilon(\dot{x}_1+\eta_1)$, $y-y_1=\varepsilon(\dot{y}_1+\eta_2)$, $z-z_1=\varepsilon(\dot{z}_1+\eta_3)$, ὅπου τὰ η_1, η_2, η_3 τείνουν εἰς τὸ 0 μετὰ τοῦ ε. Οὕτω ἔχομεν π. χ.

$$a=\frac{\varepsilon(\dot{x}_1+\eta_1)}{\pm|\varepsilon|\sqrt{(\dot{x}_1+\eta_1)^2+(\dot{y}_1+\eta_2)^2+(\dot{z}_1+\eta_3)^2}}$$ καὶ ὅταν τὸ M_1 προηγῆται τοῦ

M, ἔχομεν $\varepsilon>0$ καὶ $\varepsilon:+|\varepsilon|=1$. Ἐὰν τὸ M_1 ἕπεται τοῦ M, ὅτε $\varepsilon<0$, ἔχομεν $\varepsilon:-|\varepsilon|=1$, ἐπειδὴ τὸ πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ σημεῖον εἶνε — καὶ εἶνε πάντοτε $\varepsilon:\pm|\varepsilon|=1$. Διὰ $\varepsilon \rightarrow 0$ ἔχομεν ὡς συνημίτονα τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ M_1 τὰ ἑξῆς,

$$a_1=\frac{\dot{x}_1}{\sqrt{\dot{x}_1^2+\dot{y}^2+\dot{z}_1^2}},\quad b_1=\frac{\dot{y}_1}{\sqrt{\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2+\dot{z}_1^2}},\quad c_1=\frac{\dot{z}_1}{\sqrt{\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2+\dot{z}_1^2}},$$

αἱ δ' ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης τοῦ τόξου εἰς τὸ M_1 εἶνε

$$\frac{x-x_1}{\dot{x}_1}=\frac{y-y_1}{\dot{y}_1}=\frac{z-z_1}{\dot{z}_1}.$$

Τόξον τι καμπύλης τοῦ *Jordan* καλεῖται **ὁμαλόν,** ἂν δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ παραμετρικῶν ἐξισώσεων τῆς μορφῆς $x=\varphi(t)$, $y=\sigma(t)$, $z=f(t)$, ἐνῷ τὸ t λαμβάνει τὰς τιμὰς διαστήματος κλειστοῦ ἑκατέρωθεν, αἱ δὲ συναρτήσεις $\varphi(t)$, $\sigma(t)$, $f(t)$ ἔχουν συνεχεῖς παραγώγους πρώτης τάξεως εἰς τὸ ἐν λόγῳ διάστημα καὶ δι' ἑκάστην τοιαύτην τιμὴν τοῦ t εἶνε $[\varphi'(t)]^2+[\sigma'(t)]^2+[f'(t)]^2>0$.

Ἂν αἱ ἐξισώσεις τῆς καμπύλης εἶνε

$$y=\sigma(x),\qquad z=f(x),$$

ἵνα ὑπάρχῃ ἐφαπτομένη εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς $M_1(x_1,y_1)$, ἀρκεῖ αἱ $\sigma(x)$, $f(x)$ νὰ εἶνε παραγωγίσιμοι εἰς τὸ M_1, αἱ δ' ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης εἶνε

$$y-y_1=\dot{y}_1(x-x_1),\qquad z-\dot{z}_1=z_1(x-x_1).$$

Ἡ περίπτωσις αὕτη δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μερικὴ τῆς προηγουμένης, ἂν τεθῇ

$$x=\varphi(t)=t,\qquad y=\sigma(t),\qquad z=f(t),$$

ὅτε $\varphi'(t)=1$.

Ἐὰν αἱ ἐξισώσεις καμπύλης τινὸς συνεχοῦς (k) εἶνε τῆς μορφῆς

$$F(x,y,z)=0, \qquad \Phi(x,y,z)=0 \qquad (1),$$

αἱ ἱκαναὶ συνθῆκαι διὰ τὸν ὕπαρξιν μιᾶς ἐφαπτομένης αὐτῆς εἰς τὸ M_1 εἶνε α′) αἱ συναρτήσεις F καὶ Φ νὰ ἔχουν συνεχεῖς μερικὰς παραγώγους πρώτης τάξεως εἰς περιοχήν τινα τοῦ M_1· β′) μία τοὐλάχιστον ἐκ τῶν ὁριζουσῶν δευτέρας τάξεως, αἵτινες σχηματίζονται ἐκ τοῦ πίνακος

$$\begin{Vmatrix} F_x & F_y & F_z \\ \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \end{Vmatrix}$$ νὰ εἶνε εἰς τὸ M_1 διάφορος τοῦ 0.

Αἱ ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ M_1 τῆς (k) εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἶνε

$$\frac{x - x_1}{(F_y\,\Phi_z - F_z\,\Phi_y)_1} = \frac{y - y_1}{(F_z\,\Phi_x - F_x\,\Phi_z)_1} = \frac{z - z_1}{(F_x\,\Phi_y - F_y\,\Phi_x)_1},$$

τοῦ δείκτου ἑκάστης παρενθέσεως φανερώνοντος τὴν τιμὴν τῆς ἐν παρενθέσει ποσότητος εἰς τὸ M_1. Διότι, ἂν π.χ. εἶνε

$$(F_y\,\Phi_z - F_z\,\Phi_y)_1 \neq 0,$$

ἡ (k) δύναται νὰ παρασταθῇ ὑπὸ δύο ἐξισώσεων τῆς μορφῆς

$$y=\sigma(x), \quad z=f(x),$$

ὅπου αἱ συναρτήσεις σ(x), f(x) εἶνε παραγωγίσιμοι διὰ $x=x_1$ καὶ θὰ ἔχωμεν

$$\sigma'(x_1)=(F_z\,\Phi_x - F_x\,\Phi_z)_1 : (F_y\,\Phi_z - F_z\,\Phi_y)_1,$$
$$f'(x_1)=(F_x\,\Phi_y - F_y\,\Phi_x)_1 : (F_y\,\Phi_z - F_z\,\Phi_y)_1.$$

Ὅτι τοῦτο εἶνε δυνατὸν μὲ τὰς γενομένας προϋποθέσεις ἀποδεικνύται ὡς ἑξῆς.

Ἐν πρώτοις, «δοθέντος ἀριθμοῦ τινος θετικοῦ ε′, (ὄχι πολὺ μεγάλου), δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἄλλον η>0, τοιοῦτον ὥστε, νὰ ἔχωμεν εἰς τὸ διάστημα (τοῦ χώρου τῶν τριῶν διαστάσεων)

$$x_1 - \eta < x < x_1 + \eta, \quad y_1 - \varepsilon' < y < y_1 + \varepsilon', \quad z_1 - \varepsilon' < z < z_1 + \varepsilon' \qquad (2)$$

ἄπειρον πλῆθος σημείων περὶ τὸ M_1 μὲ συντεταγμένας ἐπαληθευούσας τὰς (1) καὶ εἰς ἕκαστον σημεῖον μὲ τετμημένην x, ἐπαληθεύουσαν τὴν πρώτην τῶν (2), ἀντιστοιχεῖ ἓν ζεῦγος τιμῶν τῶν y καὶ z, ἐπαληθεῦον τὰς δύο τελευταίας τῶν (2), αἱ ὁποῖαι μετὰ τῆς θεωρουμένης τιμῆς τοῦ x ἐπαληθεύουν τὰς (1). Αἱ τιμαὶ αὗται τῶν y καὶ z εἶνε συναρτήσεις τοῦ x τῆς μορφῆς

$$y=\sigma(x), \quad z=f(x), \qquad (3)$$

ὡρισμέναι, μονότομοι καὶ συνεχεῖς εἰς τὸ διάστημα, τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς πρώτης ἐκ τῶν (2), ἔχουν δ' αὗται συνεχεῖς παραγώγους πρώτης τάξεως εὑρισκομένας ἐκ τῶν ἐξισώσεων

$$\left.\begin{aligned} F_x + F_y \frac{dy}{dx} + F_z \frac{dz}{dx} = 0 \\ \Phi_x + \Phi_y \frac{dy}{dx} + \Phi_z \frac{dz}{dx} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (4) \qquad (\text{όπου είνε } F_y \Phi_z - F_z \Phi_y \neq 0),$$

ἐνῶ εἰς μὲν τὰς παραγώγους τῶν F καὶ Φ θεωροῦνται ὡς μεταβληταὶ αἱ x,y,z ἀντὶ δὲ τῶν y καὶ z ὑποτίθεται, ὅτι θέτομεν τὰς συναρτήσεις (3). Ἐπὶ πλέον» ἂν ὑπάρχουν πᾶσαι αἱ μερικαὶ παράγωγοι ἀνωτέρας τάξεως τῶν F καὶ Φ, θὰ ὑπάρχουν καὶ πᾶσαι αἱ παράγωγοι τῶν $\sigma(x)$ καὶ $f(x)$».

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι, ἀφοῦ εἶνε ἡ ὁρίζουσα $F_y \Phi_z - F_z \Phi_y \neq 0$ εἰς τὸ M_1, ἓν τοὐλάχιστον στοιχεῖον τῆς πρώτης στήλης αὐτῆς, ἔστω τὸ $F_y(x_1,y_1,z_1)$ εἶνε $\neq 0$. Διὰ τοῦτο, ὑπάρχει εἰς περιοχήν τινα τοῦ σημείου (x_1,z_1) μία καὶ μόνον συνεχὴς συνάρτησις, ἔστω ἡ $\sigma_1(x,z)$, ἡ ὁποία τιθεμένη ἀντὶ τοῦ y εἰς τὴν ἐξίσωσιν $F(x,y,z)=0$, ἐπαληθεύει αὐτήν, εἰς δὲ τὸ σημεῖον (x_1, z_1) ἔχει τὴν τιμὴν y_1. Ἡ συνάρτησις αὕτη εἶνε παραγωγίσιμος ὡς πρὸς x καὶ ὡς πρὸς z ἡ δὲ παράγωγος αὐτῆς ὡς πρὸς z π. χ. δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial z} = -\frac{F_z(x,\varphi_1,z)}{F_y(x,\varphi_1,z)},$$

Πράγματι, ἀφοῦ ὑπάρχει ἡ $F_y(x, y, z)$ καὶ ὑποτίθεται συνεχὴς εἰς περιοχήν τινα τοῦ σημείου M_1, ἐνῶ εἶνε $F_y(x_1,y_1,z_1) \neq 0$, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν περιοχήν τινα τοῦ M_1, διὰ τὰ σημεῖα τῆς ὁποίας τὸ $F_y(x, y, z)$ νὰ εἶνε ὁμόσημον τοῦ $F_y(x_1, y_1, z_1)$, ὑποτιθεμένου θετικοῦ (διότι ἄλλως ἀρκεῖ νὰ θεωροῦμεν ἀντὶ τῆς $F(x,y,z)=0$ τὴν $-F(x,y,z)=0$). Τὴν περιοχὴν ταύτην δυνάμεθα νὰ θεωροῦμεν ὡς ἕνα κύβον, διὰ καταλλήλου ἐκλογῆς θετικοῦ ἀριθμοῦ, ἔστω δ, ὥστε νὰ ἔχωμεν

$$x_1-\delta<x<x_1+\delta, \qquad y_1-\delta<y<y_1+\delta, \qquad z_1-\delta<z<z_1+\delta \tag{5}$$

καὶ νὰ ἀνήκῃ αὕτη εἰς τὴν (2), νὰ εἶνε δὲ διὰ πᾶν σημεῖον αὐτῆς

$$F_y(x, y, z) > 0. \tag{6}$$

Ἀλλὰ τότε, ἡ συνάρτησις $F(x_1,y,z_1)$ τῆς μεταβλητῆς y δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ y, ἀνήκουσαν εἰς τὸ διάστημα $y_1-\delta<y<y_1+\delta$, ἕνεκα τῆς (6), ἔχει μίαν παράγωγον θετικὴν καὶ (κατὰ γνωστὴν πρότασιν)* αὐξάνεται μετὰ τῶν τιμῶν τοῦ y. Ἑπομένως, ἂν ε εἶνε ἀριθμός τις θετικὸς καὶ μικρότερος τοῦ δ, θὰ ἔχωμεν

$$F(x_1, y_1-\varepsilon, z_1) < 0, \quad F(x_1, y_1, z_1)=0, \quad F(x_1, y_1+\varepsilon, z_1) > 0.$$

Θεωροῦμεν τώρα τὰς συναρτήσεις $F(x, y_1-\varepsilon, z)$ καὶ $F(x,y_1+\varepsilon, z)$ συνεχεῖς εἰς τὸ σημεῖον (x_1, z_1) καὶ ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μὲν πρώτη εἶνε ἀρνητική, ἡ δὲ δευτέρα θετικὴ εἰς αὐτό. Ὡς γνωστόν, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀριθμόν τινα θετικὸν $\delta_1<\delta$, ὥστε ἑκάστη τῶν δύο ἐν λόγῳ συναρτήσεων νὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ σημεῖον εἰς ἕκαστον σημεῖον τοῦ τετραγώνου

$$x_1-\delta_1<x<x_1+\delta_1, \quad z_1-\delta_1<z<z_1+\delta_1, \tag{7}$$

*) Βλέπε σελίδα 218.

τὸ ὁποῖον ἔχει καὶ εἰς τὸ (x_1, z_1). Οὕτω διὰ πᾶν σημεῖον τοῦ τετραγώνου (7) θὰ ἔχωμεν $F(x,y_1-\varepsilon,z)<0$, $F(x,y_1+\varepsilon,z)>0$.

Ἐὰν θεωρήσωμεν τυχὸν σημεῖον (x_0, z_0) τοῦ τετραγώνου (7), παρατηροῦμεν ὅτι, ἡ συνάρτησις $F(x_0,y,z_0)$, τῆς μεταβλητῆς y θὰ εἶνε συνεχὴς εἰς τὸ κλειστὸν διάστημα $y_1-\varepsilon\leqslant y\leqslant y_1+\varepsilon$, ἐνῶ διὰ τὰς ἄκρας τιμὰς τοῦ διαστήματος τούτου λαμβάνει τιμὰς ἑτεροσήμους. Ἄρα ὑπάρχει τοὐλάχιστον μία ἐσωτερικὴ τιμὴ τοῦ διαστήματος τούτου, ἔστω ἡ y_0 διὰ τὴν ὁποίαν ἔχομεν $F(x_0 y_0, z_0)=0$. Ἀλλ'ἐπειδὴ ἡ Fx_0, y_0, z_0 (ἔχει πανταχοῦ εἰς τὸ $y_1-\varepsilon<y<y_1+\varepsilon$ μίαν θετικὴν παράγωγον) αὐξάνεται μετὰ τοῦ y, καὶ ὑπάρχει μόνον μία τοιαύτη τιμὴ τοῦ y, οὕτω δὲ ἡ y εἶνε ὡρισμένη καὶ μονότιμος εἰς τὸ τετράγωνον (7) ὡς συνάρτησις τῶν x καὶ z καὶ ἔστω ἡ $y=\sigma_1(x, z)$, λέγομεν δ'ὅτι αὕτη ὁρίζεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως $F(x,y,z)=0$ καὶ καλεῖται ***πεπεπλεγμένη συνάρτησις*** τῶν x καὶ z.

Ὅτι ἡ συνάρτησις αὕτη εἶνε συνεχὴς εἰς τὸ τετράγωνον (7) δεικνύεται ὡς ἑξῆς.

Ἔστω τὸ σύστημα τιμῶν (x_0, z_0) τοῦ τετραγώνου (7) καὶ y_0 ἡ εἰς αὐτὸ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τῆς $\sigma_1(x,z)$. Τὸ σημεῖον (x_0,y_0,z_0) θὰ ἀνήκῃ εἰς τὸν κύβον (5) καὶ ἂν ἐκλέξωμεν δύο ἀριθμοὺς θετικοὺς ε_2 καὶ δ_2 καταλλήλως μικρούς, ὑπάρχει μία μόνον συνάρτησις, ἔστω ἡ $y=\sigma_0(x,z)$, ὡρισμένη εἰς τὸ τετράγωνον $|x-x_0|<\delta_2$, $|z-z_0|<\delta_2$, διὰ τὴν ὁποίαν ἔχομεν $F(x,\sigma_0(x,z),z)=0$ καὶ εἶνε $y_0-\varepsilon_2<y<y_0+\varepsilon_2$. Ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις αὕτη πρέπει νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν $\sigma_1(x,z)$ τοὐλάχιστον εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ (x_0,z_0), ἕπεται ὅτι, διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῶν x,z περιοχῆς τινος τοῦ (x_0, z_0) θὰ πληροῦται ἡ ἀνισότης $|\sigma_1(x,z)-$ $-\sigma_1(x_0,z_0)|<\varepsilon_2$ καὶ ἐπομένως ἡ $\sigma_1(x,z)$ εἶνε συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον (x_0,z_0), ἀφοῦ ὁ ε_2 δύναται νὰ ληφθῇ ὁσονδήποτε μικρός. Ἐπίσης ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ $\sigma_1(x,z)$ εἶνε παραγωγίσιμος ὡς πρὸς x καὶ ὡς πρὸς z εἰς περιοχήν τινα τοῦ (x_1,z_1) καὶ εὑρίσκονται αἱ μερικαὶ παράγωγοι αὐτῆς ἐκ τῶν μερικῶν παραγώγων τῆς $F(x,y,z)$ καὶ εἶνε

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{F_x(x,y.z)}{F_y(x,y,z)},\quad \frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{F_z(x,y,z)}{F_y(x,y,z)}.$$

Ἂν τώρα θέσωμεν εἰς τὴν $\Phi(x,y,z)=0$ τὴν $\sigma_1(x,z)$ ἀντὶ τοῦ y, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $\Phi(x,\sigma_1(x,z),z)=0$ (8) μεταξὺ τοῦ x, z, αἵτινες θεωροῦνται ἀνεξάρτητοι μεταξύ των, ἐπαληθεύεται δ' αὕτη ὑπὸ τῶν x_1, z_1 καὶ τὸ α' μέλος αὐτῆς εἶνε συνάρτησις παραγωγίσιμος ὡς πρὸς x καὶ z εἰς περιοχήν τινα τοῦ (x_1,z_1) καὶ αἱ παράγωγοι αὗται εἶνε συνεχεῖς εἰς τὴν περιοχὴν ταύτην. Ἐπὶ πλέον ἔχομεν

$$\frac{\partial\Phi(x,y,z)}{\partial z}=\Phi_y\frac{\partial\sigma_1}{\partial z}+\Phi_z=-\frac{\Phi_y F_z}{F_y}+\Phi_z=\frac{1}{F_y}(F_y\Phi_z-F_z\Phi_y).$$

Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὸ M_1 ἡ ἐν παρενθέσει ποσότης εἶνε διάφορος τοῦ 0, θὰ εἶνε ἰς αὐτὸ
$$\frac{\partial\Phi(x,\sigma_1,z)}{\partial z}\neq 0.$$

Ἐπομένως δυνάμεθα διὰ τῆς ἐξισώσεως (8) νὰ θεωρήσωμεν τὸ z ὡς συνάρτησιν τοῦ x μόνον, ἔστω $z=f(x)$, εἰς περιοχήν τινα τῆς τιμῆς $x=x_1$, ἐνῶ ὑποτίθεται ὅτι τὸ z θὰ λαμβάνῃ τιμὰς εἰς περιοχὴν τῆς τιμῆς z_1 καταλλήλως ἐκλεγεῖσαν. Ἂν τώρα εἰς τὴν συνάρτησιν $y=\sigma_1(x,z)$ θέσωμεν ἀντὶ τοῦ z τὴν $f(x)$, ἔχομεν τὸ y ὡς συνάρτησιν μόνον τοῦ x, ἔστω $y=\sigma(x)$, αὗται δὲ μὲ τὴν $z=f(x)$ ἐπαληθεύουν τὰς (1). Αἱ δύο αὗται συναρτήσεις τοῦ x εἶνε ὡρισμέναι καὶ παραγωγίσιμοι εἰς περιοχήν τινα τῆς τιμῆς x_1 τοῦ x. Διότι, ἂν θέσωμεν εἰς τὰς $F(x,y,z)$ καὶ $\Phi(x,y,z)$ ἀντὶ τῶν y καὶ z τὰς $\sigma(x)$ καὶ $f(x)$, εὑρίσκομεν συναρτήσεις μόνον τοῦ x, αἱ ὁποῖαι μηδενίζονται διὰ $x=x_1$, καθὼς καὶ αἱ μερικαὶ παράγωγοι αὐτῶν ὡς πρὸς y καὶ z, τοῦτο δ' ἐκφράζεται διὰ τῶν (4). Τέλος, ἂν αἱ συναρτήσεις F καὶ Φ ἔχουν μερικὰς παραγώγους καὶ ἀνωτέρας τάξεως, εἶνε δ' αὗται συνεχεῖς, δυνάμεθα νὰ παραγωγίσωμεν τὰς ἐξισώσεις (4) ὡς πρὸς x καὶ νὰ εὕρωμεν τὰς παραγώγους ἀνωτέρας τῆς πρώτης τάξεως τοῦ $\sigma(x)$ καὶ $f(x)$, ὑποθέτοντες ὅτι $(F_y\,\Phi_z - F_z\,\Phi_y)_1 \neq 0$.

Τὰς συναρτήσεις $y=\sigma(x)$, $z=f(x)$, ὁριζομένας ἐκ τῶν (1), καλοῦμεν πεπλεγμένας συναρτήσεις τῆς x.

Ἂν ἔχωμεν ἐπίπεδον συνεχῆ καμπύλην μὲ ἐξίσωσιν $y=\sigma(x)$, ἵνα αὕτη ἔχῃ ἐφαπτομένην εἰς τὸ $M_1(x_1,y_1)$, ἀρκεῖ νὰ εἶνε ἡ $\sigma(x)$ παραγωγίσιμος διὰ $x=x_1$, ὡς τοῦτο εὐκόλως δεικνύεται, ἂν θέσωμεν $x=t$, $y=\sigma(t)$, ἡ δ' ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ M_1 εἶνε

$$\frac{x-x_1}{\dot{x}_1}=\frac{y-y_1}{\dot{y}_1} \quad \text{ἢ} \quad y-y_1=\dot{y}_1(x-x_1)$$

καὶ ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως αὐτῆς εἰς τὸ M_1 ἰσοῦται μὲ τὴν παράγωγον τῆς y διὰ $x=x_1$.

Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις ἐπιπέδου καμπύλης εἶνε $F(x,y)=0$, ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα αὕτη ἔχῃ μίαν ἐφαπτομένην εἰς σημεῖον αὐτῆς $M_1(x_1,y_1)$, εἶνε ἡ $F(x,y)$ νὰ ἔχῃ συνεχεῖς μερικὰς παραγώγους πρώτης τάξεως εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ M_1 καὶ νὰ εἶνε

$$[F_x(x_1,y_1)]^2+[F_y(x_1,y_1)]^2\neq 0, \quad \text{ἤτοι} \quad F^2_x+F^2_y\neq 0 \text{ εἰς τὸ } M_1 .$$

Διότι, ἂν ὑποτεθῇ π.χ. $F_y(x_1,y_1)\neq 0$, ἡ δὲ συνάρτησις y τοῦ x, ἥτις ὁρίζεται ἐκ τῆς $F(x,y)=0$, εἶνε τῆς μορφῆς $y=y(x)$ ἔχομεν

$$\dot{y}(x_1)=-\frac{F_x(x_1,y_1)}{F_y(x_1,y_1)}$$

καὶ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ M_1 εἶνε

$$(x-x_1).F_x(x_1,y_1)+(y-y_1).F_y(x_1,y_1)=0.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 635. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία ὑπὸ τὴν ὁποίαν τέμνονται αἱ περιφέρειαι κύκλων αἱ ἔχουσαι ἐξισώσεις $x^2+y^2-4x=1$ καὶ $x^2+y^2-2y=9$.

636. Νὰ εὑρεθῇ ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως τῆς καμπύλης $y=\frac{x}{1+x^2}$ εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων.

637. Ποία εἶνε ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης $x^2y^2=\alpha^2(x+y)$ εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων μὲ τὸν ἄξονα τῶν x;

638. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης $y=x^3-3x^2-9x+5$, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ἐφαπτομένη αὐτῆς εἶνε παράλληλος τοῦ ἄξονος τῶν x.

639. Εἰς ποῖον σημεῖον τῆς καμπύλης $y^2=2x^3$ ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς εἶνε 3;

640. Εἰς ποῖον σημεῖον τῆς περιφερείας $x^2+y^2=\rho^2$ ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης ἰσοῦται μὲ 0,75;

641. Ἀπὸ τίνος θέσεως κινητὸν σημεῖον διαγράφον τὴν παραβολὴν $y=x^2-7x+3$ τείνει νὰ κινηθῇ παραλλήλως πρὸς τὴν εὐθεῖαν $y=5x+2$;

642. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις κινητοῦ, διαγράφοντος τὴν περιφέρειαν κύκλου $x^2+y^2=159$, ἀπὸ τῆς ὁποίας τείνει νὰ κινηθῇ καθέτως πρὸς τὴν εὐθεῖαν $5x+12y=60$.

643. Ἡ τροχιὰ βλήματος τηλεβόλου εἶνε ἡ παραβολὴ $y=2x-x^2$. Ἂν ληφθῇ ὡς μονὰς μετρήσεως ἀποστάσεων τὸ χιλιόμετρον, ὁ ἄξων τῶν x ὁριζόντιος, ὁ τῶν y κατακόρυφος καὶ ἀρχὴ τῶν ἀξόνων τὸ σημεῖον βολῆς, νὰ εὑρεθῇ ἡ διεύθυνσις τοῦ βλήματος 1) τὴν στιγμὴν τῆς βολῆς· 2) ὅταν φθάσῃ εἰς βράχον κατακόρυφον ἀπέχοντα 1,5 χιλιόμετρα· 3) εἰς ποῖον σημεῖον τῆς τροχιᾶς ἡ διεύθυνσίς του σχηματίζει γωνίαν 45^0 μὲ τὴν ὁριζοντίαν διεύθυνσιν· 4) εἰς ποῖον σημεῖον τὸ κινητὸν τείνει νὰ κινηθῇ ὁριζοντίως.

644. Ὑπὸ τίνα γωνίαν δρόμος εὐθύγραμμος μὲ ἐξίσωσιν $3y-2x-8=0$ τέμνει σιδηροδρομικὴν γραμμήν, ἔχουσαν τὸ σχῆμα τῆς παραβολῆς $y^2=8x$;

645. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία, καθ' ἣν τέμνονται ἡ παραβολὴ $y^2=6x$ καὶ ἡ περιφέρεια $x^2+y^2=16$.

646. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ Υπ μὲ ἐξίσωσιν $x^2-y^2=5$ καὶ ἡ Ελ $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$ τέμνονται καθέτως.

647. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ περιφέρεια $x^2+y^2-8\alpha x=0$ καὶ ἡ ***(κισσοειδὴς)*** καμπύλη $y^2=\frac{x^3}{2\alpha-x}$ α') τέμνονται καθέτως εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων· β') εἰς δύο ἄλλα σημεῖα τέμνονται κατὰ γωνίαν 45^0.

648. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία, καθ' ἣν τέμνονται ἡ παραβολὴ $x^2=4\alpha y$ καὶ ἡ καμπύλη $y=\frac{8\alpha^3}{x^2+4\alpha^2}$.

649 Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι τῆς καμπύλης $x^3+y^3-3\alpha xy=0$ ***(φύλλον τοῦ*** Descartes), εἰς τὰ σημεῖα, καθ' ἃ τέμνει τὴν παραβολὴν $y^2=\alpha x$, εἶνε παράλληλοι τοῦ ἄξονος τῶν y.

650. Εἰς τίνας θέσεις κινητὸν διαγράφον τὴν καμπύλην $y=x^3-2x^2+x-4$ τείνει νὰ κινηθῇ παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x.

651. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία ὑπὸ τὴν ὁποίαν τέμνονται αἱ παραβολαὶ $y=3x^2-1$ καὶ $y=2x^2+3$.

652. Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις, ἥτις συνδέει τοὺς συντελεστὰς τῶν ἐξισώσεων $\alpha x^2+\beta y^2=1$ καὶ $\alpha' x^2-\beta' y^2=1$, ἵνα αἱ καμπύλαι, τὰς ὁποίας παριστάνουν, τέμνωνται ὀρθογωνίως.

§ 72. Περὶ καθέτου, ὑποκαθέτου καὶ ὑφαπτομένης ἐπιπέδου καμπύλης.

Ἔστω $y=\varphi(x)$ ἡ ἐξίσωσις ἐπιπέδου συνεχοῦς καμπύλης (k), ἐνῷ ἡ $\varphi(x)$ εἶνε παραγωγίσιμος διὰ $x=x_1$.

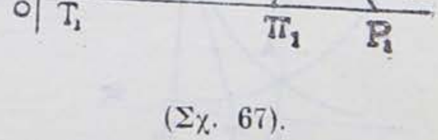
Καλοῦμεν ***κάθετον*** τῆς καμπύλης εἰς σημεῖον αὐτῆς $M_1(x_1, y_1=\varphi(x_1))$, τὴν κάθετον εὐθεῖαν ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην αὐτῆς εἰς τὸ M_1 καὶ θεωροῦμεν θετικὸν μέρος αὐτῆς τὸ μέρος μὲ τὸ ὁποῖον συμπίπτει τὸ θετικὸν μέρος τῆς ἐφαπτομένης, ὅταν στραφῇ κατά $+90^\circ$ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς καμπύλης. Ἡ ἐξίσωσις τῆς καθέτου τῆς (k) εἰς τὸ M_1 εἶνε

$$(x-x_1)+(y-y_1).\dot{y}_1=0. \qquad (1)$$

Διότι αὐτή, ὡς διερχομένη διὰ τοῦ M_1, θὰ ἔχῃ ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $y-y_1=\lambda(x-x_1)$ (Σχ. 67). Ἀλλ' ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ M_1 θὰ ἔχῃ τὸ

$$\lambda=-\frac{1}{\dot{y}_1}=-\frac{dx_1}{dy_1}$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν τοῦ λ ἀνωτέρω, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν (1).



(Σχ. 67).

Ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι εἶνε $\dot{y}_1\neq 0, \pm\infty$, ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης T_1M_1 εἰς τὸ M_1 καὶ ἡ κάθετος ἐπ' αὐτὴν P_1M_1 εἰς τὸ M_1 τέμνουν τὸν ἄξονα τῶν x ἔστω εἰς τὰ σημεῖα T_1 καὶ P_1. Ἂν Π_1 εἶνε ἡ ὀρθὴ προβολὴ τοῦ M_1 ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x, τὰ μὲν διανύσματα Π_1T_1, Π_1P_1 καλοῦνται ***διανύσματα τῆς ὑφαπτομένης*** καὶ ***ὑποκαθέτου***, τὰ δὲ M_1T_1 καὶ M_1P_1 τῆς ἐφαπτομένης καὶ καθέτου.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰ μήκη τῶν διανυσμάτων τούτων, παρατηροῦμεν ὅτι, αἱ συντεταγμέναι τοῦ μὲν T_1 εἶνε $\left(x_1 - \frac{y_1}{\dot{y}_1}, 0\right)$, τοῦ δὲ $P_1(x_1 + y_1 \cdot \dot{y}_1, 0)$. Ἄρα ἔχομεν $(\Pi_1 T_1) = -\frac{y_1}{\dot{y}_1}$, $(\Pi_1 P_1) = y_1 \cdot \dot{y}_1$ καὶ

$$(M_1 T_1) = \pm \frac{y_1}{\dot{y}_1}\sqrt{1 + \dot{y}_1^2}, \quad (M_1 P_1) = \pm y_1 \sqrt{1 + \dot{y}_1^2}.$$

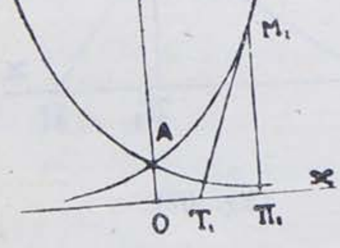
Ἐφαρμογαί. *1.* Ἔστω ἡ ἐξίσωσις (περιφερείας κύκλου) $x^2 + y^2 = \varrho^2$ καὶ σημεῖον αὐτῆς $M_1(x_1, y_1)$. Ἐπειδὴ ἔχομεν $y_1 \cdot \dot{y}_1 = -x_1$, $\dot{y}_1 = -\frac{x_1}{y_1}$ θὰ εἶνε

$$(M_1 P_1) = \pm y_1 \sqrt{1 + \dot{y}_1^2} = \pm y_1 \sqrt{1 + \frac{x_1^2}{y_1^2}} = +\varrho.$$

Ἤτοι τὸ μῆκος τοῦ διανύσματος τῆς καθέτου τῆς περιφερείας εἰς πᾶν σημεῖον αὐτῆς εἶνε σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ ϱ.

2. Ἔστω ἡ καμπύλη, τῆς ὁποίας ἐξίσωσις εἶνε ἡ $y = e^{kx}$. Ἂν $k > 0$, διὰ $0 \leqq x \leqq +\infty$, τὸ $y = 1, \ldots, +\infty$, ἐνῷ διὰ $-\infty < x < 0$, τὸ y λαμβάνει τιμὰς θετικὰς μέν, ἀλλ' ἐλαττουμένας, ὅταν τὸ x ἀπολύτως αὐξάνεται, καὶ διὰ $x \rightarrow -\infty$, τὸ $y \rightarrow 0$. Ἑπομένως, ἡ παριστανομένη ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως ταύτης καμπύλη τέμνει τὸν ἄξονα τῶν y εἰς τὸ σημεῖον $A(0,1)$, ἔχει ἀσύμπτωτον τὸ ἀρνητικὸν μέρος τοῦ ἄξονος τῶν x, σχῆμα δὲ τὸ παρακείμενον.

Εὐκόλως εὑρίσκομεν καὶ τὴν ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως παριστανομένην καμπύλην, ὅταν εἶνε $k < 0$ (Σχ. 68).



(Σχ. 68).

Ἐπειδὴ ἔχομεν $\dot{y} = ke^{kx} = ky$, τὸ μῆκος τοῦ διανύσματος τῆς ὑφαπτομένης τῆς καμπύλης εἰς τυχὸν σημεῖον αὐτῆς $M_1(x_1, y_1)$, ἔστω τὸ $(\Pi_1 T_1) = -\frac{y_1}{\dot{y}_1} = -k$.

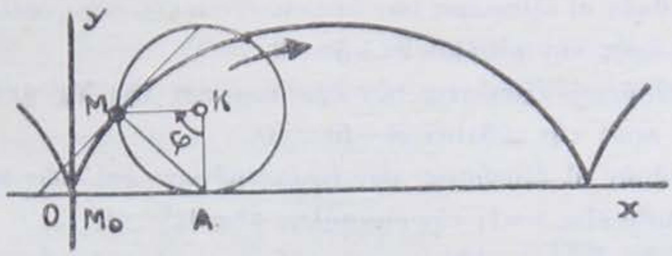
Ἤτοι τῆς καμπύλης ταύτης τὸ μῆκος τοῦ διανύσματος τῆς ὑφαπτομένης εἰς οἱονδήποτε σημεῖον εἶνε σταθερόν.

3. Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις (τῆς κοινῆς κυκλοειδοῦς) (Σχ. 69)

$$x = \alpha(\varphi - \eta\mu\varphi), \quad y = \alpha(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi).$$

Ἔχομεν $\dot{x} = \alpha(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi)$, $\dot{y} = \alpha\eta\mu\varphi$, $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\alpha\eta\mu\varphi}{y}$ καὶ $y\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \alpha\eta\mu\varphi$.

Ἐπειδὴ δέ, ἂν Π εἶνε ἡ ὀρθὴ προβολὴ τοῦ Μ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x, ἔχομεν (ΠΑ)=αημφ, ἔπεται ὅτι τὸ ΠΑ εἶνε τὸ διάνυσμα



(Σχ. 69).

τῆς ὑποκαθέτου εἰς τὸ M(x,y) τῆς καμπύλης. Ἄρα ἐφαπτομένη αὐτῆς εἰς τὸ Μ εἶνε ἡ κάθετος εὐθεῖα ἐπὶ τὸ διάνυσμα ΜΑ εἰς τὸ Μ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 653. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς καθέτου, τὰ μήκη τῶν διανυσμάτων τῆς ὑποθέτου, ὑφαπτομένης καὶ ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον (α, α) τῆς ***(κισσοειδοῦς)*** καμπύλης $y^2(2\alpha-x)=x^3$ (ἄξονες ὀρθογώνιοι).

654. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης καὶ καθέτου τῆς Ελ $x^2+2y^2-2xy-x=0$ εἰς τὰ σημεῖα διὰ τὰ ὁποῖα εἶνε $x=1$.

655. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ διάνυσμα τῆς ὑφαπτομένης τῆς $y^2=4px$ χωρίζεται εἰς δύο ἴσα μέρη διὰ τῆς κορυφῆς τῆς καμπύλης, ἡ δὲ ὑποκάθετος εἶνε σταθερὰ (καὶ ἴση μὲ 2p).

656. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ σημεῖον $x=2\alpha$ τῆς καμπύλης $y=\dfrac{8\alpha^3}{4\alpha^2+x^2}$.

657. Νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς τυχὸν σημεῖον τῆς ***(ἀλυσσοειδοῦς)*** καμπύλης

$y=\dfrac{\alpha}{2}\left(e^{\frac{x}{\alpha}}+e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)$ τὰ μήκη τῶν διανυσμάτων τῆς ὑποκαθέτου καὶ καθέτου

εἶνε $\dfrac{\alpha}{4}\left(e^{\frac{2x}{\alpha}}-e^{\frac{2x}{\alpha}}\right)$ καὶ $\dfrac{y^2}{\alpha}$.

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης καὶ καθετου καὶ τὰ μήκη τῶν διανυσμάτων τῆς ὑφαπτομένης καὶ ὑποκαθέτου δι' ἑκάστην τῶν καμπύλων, τῶν ἐχουσῶν τὰς ἑπομένας ἐξισώσεις εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους, εἰς τὰ παρ' αὐτὰς ἀναγραφόμενα σημεῖα.

658. $y=x^3$ εἰς τὸ $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{8}\right)$ 659. $y^2=4x$ εἰς τὸ (9,−6).

660. $x^2+5y^2=14$ εἰς τὸ ἔχον $y=1$. 661. $x^2+y^2-25=0$, εἰς τὸ (−3,−4).

662. $y=9-x^2$, εἰς τὸ (−3, 0). 663. $x^2=6y$, εἰς τὸ ἔχον $x=-6$.

664. $x^2-xy+2x-9=0$, εἰς τὸ (3, 2). 665. $2x^2-y-14=0$, εἰς τὸ (3, −2).

666. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ $y=\alpha^x$ ἔχει διάνυσμα ὑφαπτομένης μὲ μῆκος σταθερόν.

667 Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης τῆς $y^2=20x$, τῆς σχηματιζούσης γωνίαν 45^0 μὲ τὸν ἄξονα τῶν x.

668. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν ἐφαπτομένων τῆς περιφερείας $x^2+y^2=52$, τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν εὐθεῖαν $2x+3y=6$.

669. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν ἐφαπτομένων τῆς Υπ $4x^2-9y^2-36=0$, τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν εὐθεῖαν $2x+5y=10$.

670. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν ἐφαπτομένων καὶ τῶν καθέτων εἰς τὰ σημεῖα, διὰ τὰ ὁποῖα εἶνε $x=1$, τῆς καμπύλης $y^2=2x^2-x^3$.

671. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, τὰ περιεχόμενα μεταξὺ τῶν ἀξόνων συντεταγμένων καὶ τῆς ἐφαπτομένης τῆς $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{\alpha}$ ἔχουν μήκη μὲ ἄθροισμα σταθερὸν (καὶ ἴσον μὲ α).

672. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον (0, 0) τῆς καμπύλης $x^2(x+y)=\alpha^2(x-y)$.

673. Νὰ δειχθῇ ὅτι διὰ τὴν *(ὑποκυκλοειδῆ)* καμπύλην $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=\alpha^{\frac{2}{3}}$ τὸ τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν ἀξόνων, ἔχει μῆκος σταθερὸν (καὶ ἴσον μὲ α).

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης, τῆς καθέτου καὶ τὰ μήκη τῶν διανυσμάτων τῆς ὑποκαθέτου καὶ ὑφαπτομένης τῶν καμπύλων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς κατωτέρω (παραμετρικὰς ἐξισώσεις).

674. $x=t^2$, $2y=t$, εἰς τὸ $t=1$. 675. $x=t$, $y=t^3$, εἰς τὸ $t=1$.

676. $x=t^2$, $y=t^3$, εἰς τὸ $t=1$. 677. $x=2e^t$, $y=e^{-t}$, εἰς τὸ $t=0$.

678. $x=\eta\mu t$, $y=\sigma\upsilon\nu 2t$, εἰς τὸ $t=\frac{\pi}{6}$. 679. $x=1-t$, $y=t^2$, εἰς τὸ $t=3$.

680. $x=3t$, $y=6t$ t^2, εἰς τὸ $t=0$. 681. $x=t^3$, $y=t$ εἰς τὸ $t=2$.

682. $x=t^3$, $y=t^2$, εἰς τὸ $t=-1$. 683. $x=2^{-t}$, $y=3t^2$. εἰς τὸ $t=1$.

684. $x=\sigma\upsilon\nu t$, $y=\eta\mu 2t$, εἰς τὸ $t=\frac{\pi}{3}$. 685. $x=3e^{-t}$, $y=2e^t$, εἰς τὸ $t=0$.

686. $x=\eta\mu t$, $y=2\sigma\upsilon\nu t$, εἰς τὸ $t=\frac{\pi}{4}$. 687. $x=4\sigma\upsilon\nu t$, $y=3\eta\mu t$, εἰς τὸ $t=\frac{\pi}{}$

688. $x=l(t+2)$, $y=t$, εἰς τὸ $t=2$. 689. $x=\alpha\sigma\upsilon\nu t$, $y=\alpha\eta\mu t$, εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς.

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν διανυσμάτων τῆς ὑφαπτομένης, τῆς ὑποκαθέτου, τῆς ἐφαπτομένης καὶ καθέτου εἰς τυχὸν σημεῖον ἑκάστης τῶν καμπύλων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς κατωτέρω ἐξισώσεις.

690. $x=\alpha(\sigma\upsilon\nu t+t\eta\mu t)$, $y=\alpha(\eta\mu t-t\sigma\upsilon\nu t)$.

691. $x=4\alpha\sigma\upsilon\nu^3 t$, $y=4\alpha\eta\mu^3 t$ ***(ὑποκυκλοειδοῦς ἀστροειδοῦς)***.

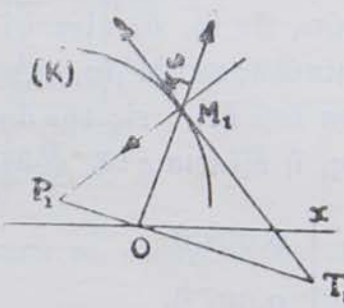
692. $x=\alpha(2\sigma\upsilon\nu t-\sigma\upsilon\nu 2t)$, $y=\alpha(2\eta\mu t-\eta\mu 2t)$ ***(καρδιοειδοῦς)***.

693. $x=\frac{3t}{1+t^3}$, $y=\frac{3t^2}{1+t^3}$ ***(φύλλου τοῦ Descartes)***.

694. $x=\frac{\alpha}{t}\sigma\upsilon\nu t$, $y=\frac{\alpha}{t}\eta\mu t$ ***(ὑπερβολικῆς ἕλικος)***.

§ 73. Περὶ ἐφαπτομένης, καθέτου καὶ ὑποκαθέτου ἐπιπέδου καμπύλης εἰς πολικὰς συντεταγμένας.

Ἔστω $\varrho = f(\vartheta)$ ἡ πολικὴ ἐξίσωσις καμπύλης συνεχοῦς (k), ἐνῶ ἡ $f(\vartheta)$ εἶνε παραγωγίσιμος διὰ τὰς θεωρουμένας τιμὰς τοῦ ϑ (Σχ. 70). Ἂν $M_1(\varrho, \vartheta)$ εἶνε σημεῖον τῆς καμπύλης, διάφορον τοῦ πόλου O, ἡ ἐφαπτομένη M_1T_1 τῆς καμπύλης εἰς τὸ M_1 ὁρίζεται ἐκ τῆς γωνίας ω αὐτῆς μὲ τὴν πολικὴν ἀκτῖνα OM_1.



(Σχ. 70).

Ἐκ τῶν γνωστῶν τύπων

$$x = \varrho\,\text{συν}\vartheta, \quad y = \varrho\,\text{ημ}\vartheta$$

ἔχομεν ὡς παραμετρικὰς ἐξισώσεις τῆς (k) εἰς ὀρθογωνίους ἄξονας μὲ ἀρχὴν τὸ O

$$x = f(\vartheta)\text{συν}\vartheta, \quad y = f(\vartheta)\text{ημ}\vartheta.$$

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν, ἂν τεθῇ

$$\dot{x} = \frac{dx}{d\vartheta}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{d\vartheta}, \quad \dot{x} = f'(\vartheta)\text{συν}\vartheta - f(\vartheta)\text{ημ}\vartheta,$$

$$\dot{y} = f'(\vartheta)\text{ημ}\vartheta + f(\vartheta)\text{συν}\vartheta, \qquad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = f'^2 + f^2 = \dot{\varrho}^2 + \varrho^2.$$

Ἀλλ' εἶνε $\omega = \varphi - \vartheta$ (ὅπου φ παριστάνει τὴν γωνίαν τῆς ἐφαπτομένης M_1T_1 μὲ τὸν ἄξονα τῶν x) καὶ

$$\text{συν}\varphi = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \qquad \text{ημ}\varphi = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}.$$

Ἄρα
$$\text{ημ}\omega = \frac{-\dot{x}\,\text{ημ}\vartheta + \dot{y}\,\text{συν}\vartheta}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + \dot{\varrho}^2}},$$

$$\text{συν}\omega = \frac{\dot{x}\,\text{συν}\vartheta + \dot{y}\,\text{ημ}\vartheta}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \frac{\dot{\varrho}}{\sqrt{\varrho^2 + \dot{\varrho}^2}} \quad \text{καὶ} \quad \text{εφ}\omega = \frac{\varrho}{\dot{\varrho}} = \frac{\varrho\, d\vartheta}{d\varrho}.$$

Ἂν εἰς τὸ σημεῖον M_1 ἀχθῇ ἡ κάθετος εὐθεῖα M_1P_1 ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην, εἰς δὲ τὸ O ἡ OP_1 κάθετος ἐπὶ τὴν OM_1, τὰ διανύσματα OT_1 καὶ OP_1 καλοῦνται διανύσματα τῆς ***ὑφαπτομένης καὶ τῆς ὑποκαθέτου***, τὰ δὲ M_1T_1 καὶ M_1P_1 ***τῆς ἐφαπτομένης καὶ καθέτου*** τῆς (k) εἰς πολικὰς συντεταγμένας καὶ τὰ μήκη αὐτῶν εἶνε

$$(OT_1) = (OM_1)\,\text{εφ}\omega = \varrho^2 \frac{d\vartheta}{d\varrho}, \quad (OP_1) = (OM_1)\,\sigma\varphi\omega = \frac{d\varrho}{d\vartheta},$$

$$(M_1T_1)^2 = (OM_1)^2 + (OT_1)^2 = \varrho^2 + \varrho^4\left(\frac{d\vartheta}{d\varrho}\right)^2, \qquad \text{ἄρα}$$

$$(M_1T_1)=\pm\varrho\sqrt{1+\varrho^2\left(\frac{d\vartheta}{d\varrho}\right)^2},(M_1P_1)^2=(OM_1)^2+(OP_1)^2=\varrho^2+\left(\frac{d\varrho}{d\vartheta}\right)^2$$

καὶ $$(M_1P_1)=\pm\sqrt{\varrho^2+\dot{\varrho}^2}\,.$$

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης M_1T_1 τῆς (k) εἰς σημεῖον αὐτῆς $M_1(\varrho_1,\vartheta_1)$, ἀναφερομένης εἰς πολικὰς συντεταγμένας, εἶνε, ἂν τεθῇ $\frac{1}{\varrho}=\varphi(\vartheta)$,

$$\varphi(\vartheta)=\varphi(\vartheta_1)\sigma\upsilon\nu(\vartheta-\vartheta_1)+\varphi'(\vartheta_1)\eta\mu(\vartheta-\vartheta_1), \tag{1}$$

Διότι, ἂν $(\varrho,\ \vartheta)$ εἶνε αἱ πολικαὶ συντεταγμέναι τυχόντος σημείου τῆς καμπύλης καὶ $M'_1(\varrho_1+\Delta\varrho_1,\vartheta_1+\Delta\vartheta_1)$ ἄλλου αὐτῆς, κειμένου εἰς περιοχήν τινα τοῦ M_1, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ $\varphi(\vartheta)$ εἶνε ὡρισμένη καὶ παραγωγίσιμος, ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας M_1M_1', τεμνούσης τὴν καμπύλην, θὰ εἶνε

$$\begin{vmatrix} \varrho\,\sigma\upsilon\nu\,\vartheta & \varrho\,\eta\mu\,\vartheta & 1 \\ \varrho_1\sigma\upsilon\nu\,\vartheta_1 & \varrho_1\eta\mu\,\vartheta_1 & 1 \\ (\varrho_1+\Delta\varrho_1)\sigma\upsilon\nu(\vartheta_1+\Delta\vartheta_1) & (\varrho_1+\Delta\varrho_1)\eta\mu(\vartheta_1+\Delta\vartheta_1) & 1 \end{vmatrix}=0$$

ἢ
$$\begin{vmatrix} \sigma\upsilon\nu\vartheta & \eta\mu\vartheta & \frac{1}{\varrho} \\ \sigma\upsilon\nu\vartheta_1 & \eta\mu\vartheta_1 & \frac{1}{\varrho_1} \\ \sigma\upsilon\nu(\vartheta_1+\Delta\vartheta_1) & \eta\mu(\vartheta_1+\Delta\vartheta_1) & \frac{1}{\varrho_1+\Delta\varrho_1} \end{vmatrix}=0.$$

Ἀφαιροῦντες ἐκ τῶν στοιχείων τῆς τελευταίας γραμμῆς τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν τῆς δευτέρας καὶ θέτοντες

$$\sigma\upsilon\nu(\vartheta_1+\Delta\vartheta_1)-\sigma\upsilon\nu\vartheta_1=\Delta\sigma\upsilon\nu\vartheta_1,\quad \eta\mu(\vartheta_1+\Delta\vartheta_1)-\eta\mu\vartheta_1=\Delta\eta\mu\vartheta_1,$$

$$\frac{1}{\varrho_1+\Delta\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_1}=\Delta\frac{1}{\varrho_1},$$ εὑρίσκομεν

$$\begin{vmatrix} \sigma\upsilon\nu\vartheta & \eta\mu\vartheta & \frac{1}{\varrho} \\ \sigma\upsilon\nu\vartheta_1 & \eta\mu\vartheta_1 & \frac{1}{\varrho_1} \\ \Delta\sigma\upsilon\nu\vartheta_1 & \Delta\eta\mu\vartheta_1 & \Delta\frac{1}{\varrho_1} \end{vmatrix}=0.$$

Ἂν διαιρέσωμεν τὰ στοιχεῖα τῆς τελευταίας γραμμῆς διὰ $\Delta\vartheta_1$ καὶ ἀκολούθως ὑποθέσωμεν ὅτι $\Delta\vartheta_1 \rightarrow 0$, ὅτε τὸ $M'_1 \rightarrow M_1$, ἡ τέμνουσα M_1M_1'

ἔχει ὅριον τὴν ἐφαπτομένην τῆς καμπύλης εἰς τὸ M_1, τὰ Δ συνϑ_1: $\Delta\vartheta_1$, Δημϑ_1 :$\Delta\vartheta_1$,$\Delta\frac{1}{\varrho_1}$: $\Delta\vartheta_1$ τείνουν πρὸς τὰς παραγώγους τῶν συνϑ, ημϑ, $\frac{1}{\varrho}$διὰ $\vartheta=\vartheta_1$ ἤτοι πρὸς τὰ $-$ημϑ_1, συνϑ_1, $\left(\frac{1}{\varrho_1}\right)'$,καὶ θὰ ἔχωμεν ὡς ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ M_1 τὴν

$$\begin{vmatrix} \sigma\upsilon\nu\vartheta & \eta\mu\vartheta & \frac{1}{\varrho} \\ \sigma\upsilon\nu\vartheta_1 & \eta\mu\vartheta_1 & \frac{1}{\varrho_1} \\ -\eta\mu\vartheta_1 & \sigma\upsilon\nu\vartheta_1 & \left(\frac{1}{\varrho_1}\right)' \end{vmatrix} = 0.$$

Δι' ἀναπτύξεως τῆς ὁριζούσης ταύτης κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς τελευταίας στήλης

$\left(\text{ἂν τεθῇ } \frac{1}{\varrho_1}=\varphi(\vartheta_1), \left(\frac{1}{\varrho_1}\right)'=\varphi'(\vartheta_1)\right)$, προκύπτει ἡ (1).

Εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι, ἡ ἐξίσωσις τῆς καθέτου εὐθείας ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον $M_1(\varrho_1,\vartheta_1)$ τῆς (k) εἶνε

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{1}{\varrho_1}\sigma\upsilon\nu(\vartheta-\vartheta_1)+\frac{1}{\varrho_1}\eta\mu(\vartheta-\vartheta_1).$$

Παρατηρήσεις. 1. Πρὸς εὕρεσιν τῆς γωνίας φ, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἰς τὸ $M_1(\varrho,\vartheta)$ μὲ τὸν ἄξονα τῶν x, παρατηροῦμεν ὅτι ἔχομεν ἐκ τοῦ τριγώνου OT_1M_1(Σχ.70 σελ. 209) $\varphi=\vartheta+\omega$ καὶ ἑπομένως

$$\varepsilon\varphi\varphi=\varepsilon\varphi(\vartheta+\omega)=\frac{\varepsilon\varphi\vartheta+\varepsilon\varphi\omega}{1-\varepsilon\varphi\vartheta\,\varepsilon\varphi\omega}.$$

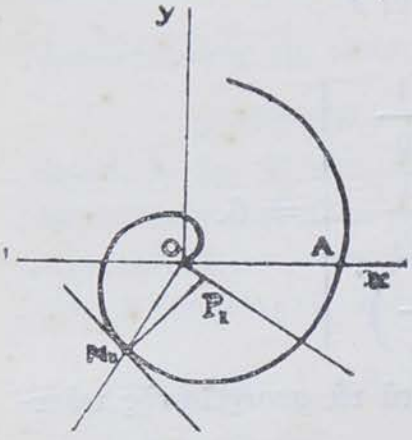
2. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν γωνίαν, ἔστω ψ, καθ' ἣν τέμνονται εἰς σημεῖον M_1 δύο καμπύλαι (k) καὶ (k') (ἤτοι αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν), τῶν ὁποίων δίδονται αἱ ἐξισώσεις εἰς πολικὰς συντεταγμένας, παρατηροῦμεν ὅτι ἔχομεν

$$\psi=\omega'-\omega \quad \text{καὶ} \quad \varepsilon\varphi\psi=\varepsilon\varphi(\omega'-\omega)=\frac{\varepsilon\varphi\omega'-\varepsilon\varphi\omega}{1+\varepsilon\varphi\omega\,\varepsilon\varphi\omega'}.$$

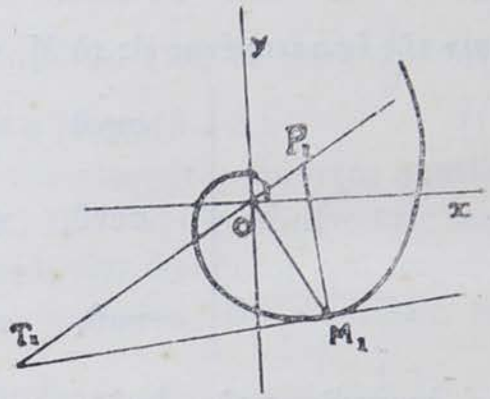
Ἐφαρμογαί. 1. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\varrho=\mu\vartheta$ (ἕλικος τοῦ Ἀρχιμήδους). Ἔχομεν $\dot{\varrho}=\mu$, ἄρα $\varepsilon\varphi\omega=\frac{\varrho}{\mu}=\vartheta$,καὶ $(OP_1)=\frac{d\varrho}{d\vartheta}=\mu$. Ἤτοι,ἡ καμπύλη αὕτη (Σχ.71) ἔχει διὰ πάντα τὰ σημεῖα αὐτῆς τὴν αὐτὴν ὑποκάθετον.

2. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις (τῆς λογαριθμικῆς ἕλικος) $\varrho=e^{\nu\vartheta}$.

Ἔχομεν $\dot{\varrho} = \nu . e^{\nu\vartheta} = \nu\varrho$, ἄρα εφω $= \frac{\varrho}{\dot{\varrho}} = \frac{1}{\nu}$. Ἤτοι, ἡ καμπύλη αὕτη τέμνει ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν πάσας τὰς ἀκτῖνας (τῆς ἐπιπέδου δέσμης), αἵτινες ἔχουν ἀρχὴν τὸν πόλον Ο (Σχ. 72).

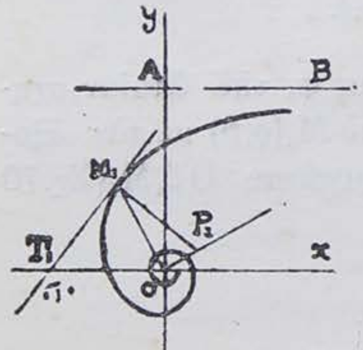


(Σχ. 71).



(Σχ. 72).

3. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις (τῆς ὑπερβολικῆς ἕλικος) $\varrho = \frac{k}{\vartheta}$. Ἔχομεν $\dot{\varrho} = -\frac{k}{\vartheta^2} = \frac{-\varrho^2}{k}$ καὶ $(OT_1) = \varrho^2 \frac{d\vartheta}{d\varrho} = \frac{\varrho^2}{\dot{\varrho}} = -k$. Ἤτοι, ἡ ὑφαπτομένη τῆς καμπύλης εἶνε ἡ αὐτὴ διὰ πᾶν σημεῖον αὐτῆς. Διὰ τοῦτο ἡ ἐφαπτομένη εἰς τυχὸν σημεῖον τῆς καμπύλης κατασκευάζεται μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ἰδιότητος ταύτης.



(Σχ. 73).

Ἂν ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα μὲ ἐξίσωσιν (εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους μὲ ἀρχὴν τὸ Ο) $y = k$, αὕτη εἶνε ἀσύμπτωτος τῆς καμπύλης. Πράγματι, ἂν (x, y) εἶνε τυχὸν σημεῖον τῆς καμπύλης, ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τῆς εὐθείας $y = k$ εἶνε ἴση μὲ

$$k - y = k - \varrho\,\eta\mu\vartheta = k - \frac{k}{\vartheta}\,\eta\mu\vartheta = k\left(1 - \frac{\eta\mu\vartheta}{\vartheta}\right).$$

Ἂν ὑποτεθῇ ὅτι $\vartheta \to 0$, τότε $\frac{\eta\mu\vartheta}{\vartheta} \to 1$, $(k - y) \to 0$· ἤτοι ἡ ἐν λόγῳ ἀπόστασις τείνει εἰς τὸ 0· ἄρα ἡ εὐθεῖα $y = k$ εἶνε ἀσύμπτωτος τῆς καμπύλης (Σχ. 73).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ, 695. Νὰ δειχθῇ ὅτι διὰ τὴν καμπύλην, τὴν ἔχουσαν ἐξίσωσιν $\varrho^2 = \alpha\sigma\upsilon\nu 2\vartheta$ ἥτις (καλεῖται λημνίσκος) εἶνε $2\omega = 4\vartheta + \pi$.

696. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἡ γωνία $\varphi=4\omega$ διὰ τὴν καμπύλην $\varrho=\alpha\eta\mu^3\frac{\vartheta}{3}$.

697. Νὰ δειχθῇ ὅτι εἶνε $\varepsilon\varphi\omega=\vartheta$ καὶ νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῆς γωνίας ω διὰ τὴν ἕλικα τοῦ Ἀρχιμήδους $\varrho=\mu\vartheta$, ὅταν $\vartheta=2\pi,..,4\pi$.

698. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία, καθ' ἣν τέμνονται ἡ εὐθεῖα $\varrho\sigma\upsilon\nu\vartheta=2\alpha$ καὶ ἡ περιφέρεια $\varrho=5\alpha\eta\mu\vartheta$.

699. Νὰ εὑρεθῇ ὑπὸ τίνα γωνίαν τέμνονται αἱ καμπύλαι (παραβολαὶ)

$$\varrho=\alpha\tau\varepsilon\mu^2\frac{\vartheta}{2} \text{ καὶ } \varrho=\beta\sigma\upsilon\nu\tau^2\frac{\vartheta}{2},$$

700. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία, καθ' ἣν τέμνονται αἱ γραμμαὶ $\varrho=\alpha\eta\mu\vartheta$ καὶ $\varrho=\alpha\eta\mu2\vartheta$.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας μὲ τὸν ἄξονα τῶν x τῆς ἐφαπτομένης εὐθείας ἑκάστης τῶν κάτωθι γραμμῶν εἰς τὸ σημειούμενον σημεῖον.

701. $\varrho=\alpha(1-\sigma\upsilon\nu\vartheta)$, εἰς τὸ $\vartheta=\frac{\pi}{2}$. 702. $\varrho=\alpha\,\tau\varepsilon\mu^2\vartheta$, εἰς τὸ $\varrho=2\alpha$.

703. $\varrho=\alpha\eta\mu4\vartheta$, εἰς τὴν ἀρχήν. 704. $\varrho^2=\alpha^2\eta\mu^24\vartheta$, εἰς τὴν ἀρχήν.

705. $\varrho=\alpha\eta\mu3\vartheta$, » » 706. $\varrho=\alpha\sigma\upsilon\nu3\vartheta$, » »

707. $\varrho=\alpha\sigma\upsilon\nu2\vartheta$, » » 708. $\varrho=\alpha\eta\mu2\vartheta$, εἰς τὸ $\vartheta=\frac{\pi}{4}$.

709. $\varrho=\mu\vartheta$, εἰς τὸ $\vartheta=\frac{\pi}{2}$. 710. $\varrho\vartheta=k$, εἰς τὸ $\vartheta=\frac{\pi}{2}$.

711. $\varrho=e^{\vartheta}$, εἰς τὸ $\vartheta=0$.

712. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ *(ἕλιξ τοῦ Ἀρχιμήδους)* $\varrho=\mu\vartheta$ καὶ ἡ (ὑπερβολικὴ ἕλιξ) $\varrho\vartheta=\mu$ τέμνονται ὀρθογωνίως.

713. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία καθ' ἣν τέμνεται ἡ (παραβολὴ) $\varrho=\sigma\tau\varepsilon\mu^2\vartheta/2$ καὶ ἡ εὐθεῖα $\varrho\eta\mu\vartheta=2\alpha$.

714. Νὰ δειχθῇ ὅτι, αἱ δύο *(καρδιοειδεῖς)* καμπύλαι $\varrho=\alpha(1+\sigma\upsilon\nu\vartheta)$ καὶ $\varrho=\alpha(1-\sigma\upsilon\nu\vartheta)$ τέμνονται ὀρθογωνίως.

715. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν διανυσμάτων τῆς ὑποκαθέτου, ὑφαπτομένης, ἐφαπτομένης καὶ καθέτου τῆς ἕλικος τοῦ Ἀρχιμήδους.

716. Ὁμοίως ὡς εἰς τὸ προηγούμενον διὰ τὴν $\varrho=\alpha^{\vartheta}$.

717. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία τῆς ἐφαπτομένης μὲ τὸν ἄξονα τῶν x ἑκάστης τῶν καμπύλων $\varrho=\alpha(1+\sigma\upsilon\nu\vartheta)$ καὶ $\varrho=\alpha(1-\sigma\upsilon\nu\vartheta)$.

718. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ (ἰσοσκελεῖς ὑπερβολαὶ) $\varrho^2\eta\mu2\vartheta=\alpha^2$ καὶ $\varrho^2\sigma\upsilon\nu2\vartheta=\beta^2$ τέμνονται ὀρθογωνίως.

§ 74. Περὶ καθέτου ἐπιπέδου εἰς σημεῖον γραμμῆς.

Ἐὰν καμπύλη τις (k) εἰς τὸν χῶρον τῶν τριῶν διαστάσεων εἰς σημεῖόν τι αὐτῆς $M_1(x_1,y_1,z_1)$ ἔχῃ μίαν ἐφαπτομένην μὲ διευθύνοντα συνημίτονα a_1, b_1, c_1, τὸ κάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ ταύτην εἰς τὸ M_1 καλεῖται κάθετον ἐπίπεδον τῆς καμπύλης εἰς τὸ M_1, ἡ δὲ ἐξίσωσις αὐτοῦ εἶνε

$$(x-x_1)a_1+(y-y_1)b_1+(z-z_1)c_1=0. \qquad (1)$$

Πράγματι, ἡ ἐξίσωσις ἐπιπέδων διερχομένων διὰ τοῦ M_1 εἶνε τῆς μορφῆς $A(x-x_1)+B(y-y_1)+\Gamma(z-z_1)=0$ (2), ἐπειδὴ δὲ τὰ διανύσματα (A, B, Γ) καὶ (a_1, b_1, c_1) θὰ εἶνε κάθετα ἐπ' αὐτό, θὰ ἔχωμεν $A : a_1 = B : b_1 = \Gamma : c_1$. Ἂν παρασταθῇ εἷς τῶν λόγων τούτων διὰ τοῦ ϱ, θὰ ἔχωμεν $A=a_1.\varrho$, $B=b_1.\varrho$, $\Gamma=c_1.\varrho$ καὶ ἡ ἐξίσωσις (2) λαμβάνει τὴν μορφὴν (1), ἂν δ' εἰς αὐτὴν θέσωμεν τὰς τιμὰς (τῆς σελ. 199) τῶν a_1, b_1, c_1, εὑρίσκομεν ὡς ἐξίσωσιν τοῦ καθέτου ἐπιπέδου εἰς τὸ σημεῖον M_1 τῆς καμπύλης τὴν

$$(x-x_1)\,\dot{x}_1+(y-y_1)\,\dot{y}_1+(z-z_1)\,\dot{z}_1=0. \qquad (1')$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης καὶ τοῦ καθέτου ἐπιπέδου τῶν ἑπομένων γραμμῶν εἰς τὸ ὁριζόμενον σημεῖον ἑκάστης αὐτῶν.

719. $x=2t$, $y=t^2$, $z=4t^2$, εἰς τὸ $t=1$.

720. $x=t^2-1$, $y=1+t$, $z=t^3$, εἰς τὸ $t=2$.

721. $x=t^3-1$, $y=t^2+t$, $z=4t^3-3t+1$, εἰς τὸ $t=1$.

722. $x=t$, $y=\eta\mu t$, $z=\sigma\upsilon\nu t$, εἰς τὸ $t=\pi/4$.

723. $x=\alpha t^2$, $y=\beta t^2$, $z=\gamma t^2$, εἰς τὸ $t=1$.

724. $x=t$, $y=1-t^2$, $z=e^{-t}$ εἰς τὸ $t=0$.

725. $x=\alpha\eta\mu t$, $y=\beta\sigma\upsilon\nu t$, $z=t$, εἰς τὸ $t=\pi/6$.

726. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ διευθύνοντα συνημίτονα τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον $t=1$ τῆς καμπύλης $x=t^2$, $y=t^3$, $z=t^4$.

727. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης καὶ τοῦ καθέτου ἐπιπέδου εἰς τὸ σημεῖον $(\varrho, \varrho, \varrho\sqrt{2})$ τῆς γραμμῆς $x^2+y^2+z^2=4\varrho^2$, $x^2+y^2=2\varrho x$.

728. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης τῆς περιφερείας $x^2+y^2+z^2=25$, $x+z=5$, εἰς τὸ $(2, 2\sqrt{3}, 3)$,

729. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τοῦ καθέτου ἐπιπέδου τῆς γραμμῆς μὲ ἐξισώσεις $x^2+y^2+z^2=\varrho^2$, $x^2-\varrho x+y^2=0$, εἰς τὸ σημεῖον (x_1, y_1, z_1).

730. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης καὶ τοῦ καθέτου ἐπιπέδου τῆς γραμμῆς $2x^2+3y^2+z^2=9$, $z^2=3x^2+y^2$ εἰς τὸ σημεῖον $(1, -1, 2)$.

731. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ διευθύνοντα συνημίτονα τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης $xyz=1$, $y^2=x$ εἰς τὸ σημεῖον $(1, 1, 1)$.

732. Ὁμοίως τῆς $y=x^2$, $z^2=1-y$ εἰς τὸ σημεῖον $(0, 0, 1)$.

733. Νὰ δειχθῇ ὅτι, αἱ ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης τῆς ***(κυλινδρικῆς ἕλικος)*** $y=x\varepsilon\varphi\, z/\gamma$, $x^2+y^2=\varrho^2$ εἰς τὸ σημεῖον (x_1, y_1, z_1) εἶνε

$$\gamma(x-x_1)+y_1(z-z_1)=0, \quad \gamma(y-y_1)-x_1(z-z_1)=0,$$

τοῦ δὲ καθέτου ἐπιπέδου $\quad y_1x-x_1y-\gamma(z-z_1)=0.$

734. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον (x_1, y_1, z_1) τῆς καμπύλης $\beta^2\gamma^2x^2+\alpha^2\gamma^2y^2-\alpha^2\beta^2z^2=0$, $x^2+y^2+z^2=\varrho^2$ εἶνε

$\gamma^2(\alpha^2-\beta^2)x_1(x-x_1)+\alpha^2(\beta^2+\gamma^2)z_1(z-z_1)=0, \gamma^2(\alpha^2-\beta^2)y_1(y-y_1)-\beta^2(\gamma^2+\alpha^2)z_1(z-z_1)=$ $=0$, τοῦ δὲ καθέτου ἐπιπέδου $\alpha^2(\beta^2+\gamma^2)y_1z_1x-\beta^2(\gamma^2+\alpha^2)z_1x_1y-\gamma^2(\alpha^2-\beta^2)x_1y_1z=0$.

§ 75. Περὶ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου καὶ καθέτου εὐθείας εἰς σημεῖον ἐπιφανείας.

Ἐπιφάνειά τις συνεχὴς καλεῖται ***ὁμαλή***, ἂν δύναται νὰ παρασταθῇ ὑπὸ παραμετρικῶν ἐξισώσεων τῆς μορφῆς

$$x=\sigma(u,v), \quad y=\varphi(u,v), \quad z=f(u,v)$$

ἐνῶ αἱ συναρτήσεις $\sigma(u,v)$, $\varphi(u,v)$, $f(u,v)$ εἶνε ὡρισμέναι ἐντὸς τόπου τινὸς τοῦ ἐπιπέδου uv καὶ ἔχουν συνεχεῖς μερικὰς παραγώγους πρώτης τάξεως, τοὐλάχιστον δὲ μία τῶν ὁριζουσῶν δευτέρας τάξεως, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ἐκ τοῦ πίνακος

$$\begin{Vmatrix} \sigma_u & \varphi_u & f_u \\ \sigma_v & \varphi_v & f_v \end{Vmatrix}$$

εἶνε διάφορος τοῦ 0 εἰς ἕκαστον σημεῖον τοῦ τόπου.

Ἔστω ὁμαλή τις ἐπιφάνεια (E), ἡ ὁποία παριστάνεται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων $x=\sigma(u,v), y=\varphi(u,v)$, $z=f(u,v)$ (1) καὶ σημεῖον $M_1(x_1,y_1,z_1)$ αὐτῆς, ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ σημεῖον (u_1, v_1) τοῦ ἐπιπέδου uv.

Θὰ δείξωμεν ὅτι, διὰ τοῦ M_1 διέρχεται μία εὐθεῖα, ἔστω (ε), κάθετος ἐπὶ ἑκάστην ἐφαπτομένην ἑκάστου ὁμαλοῦ τόξου καμπύλης, κειμένου ἐπὶ τῆς (E) καὶ διερχομένου διὰ τοῦ M_1, τῆς ὁποίας τὰ διευθύνοντα συνημίτονα εἶνε ἀνάλογα τῶν

$$A=\begin{vmatrix} \varphi_u & f_u \\ \varphi_v & f_v \end{vmatrix}, \quad B=\begin{vmatrix} f_u & \sigma_u \\ f_v & \sigma_v \end{vmatrix}, \quad C=\begin{vmatrix} \sigma_u & \varphi_u \\ \sigma_v & \varphi_v \end{vmatrix} \qquad (2)$$

ὅπου αἱ μερικαὶ παράγωγοι τῶν σ, φ, f ὑποτίθενται, ὅτι λαμβάνονται διὰ $u=u_1$, $v=v_1$, ὅτε αἱ ἐν λόγῳ ἐφαπτόμεναι κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ M_1 καὶ καθέτου ἐπὶ τὴν (ε). Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο καλοῦμεν ***ἐφαπτόμενον*** ἐπίπεδον τῆς (E) εἰς τὸ M_1.

Πράγματι, ἂν (ὁμαλόν τι) τόξον καμπύλης (k), κείμενον ἐπὶ τῆς (E) καὶ διερχόμενον διὰ τοῦ M_1 ἔχῃ ἐξισώσεις

$$x=\overline{\sigma}(t), \quad y=\overline{\varphi}(t), \quad z=\overline{f}(t) \qquad (3)$$

δύναται τὸ σημεῖον M_1 νὰ ὁρισθῇ ἐκ τῶν (3), ἔστω διὰ $t=t_1$, ὑπάρχουν δ᾽ αἱ παράγωγοι τῶν $\overline{\sigma}$, $\overline{\varphi}$, $\overline{f}$ εἰς περιοχήν τινα τῆς τιμῆς t_1, εἶνε συνεχεῖς εἰς αὐτὴν καὶ μία τουλάχιστον ἐξ αὐτῶν εἶνε διάφορος τοῦ 0. Ἂν εἶνε π. χ, τὸ $C\neq 0$ εἰς τὸ M_1, αἱ δύο ἐξισώσεις

$$\sigma(u,v)-\overline{\sigma}(t)=0, \quad \varphi(u,v)-\overline{\varphi}(t)=0, \qquad (4)$$

θὰ ἐπαληθεύωνται διὰ $u=u_1$, $v=v_1$ καὶ $t=t_1$. Ἐπειδὴ δι᾽ ἡ ὁρίζουσα, ἥτις ἔχει στοιχεῖα τὰς μερικὰς παραγώγους τῶν πρώτων μελῶν τῶν (4) ὡς πρὸς u καὶ v διὰ $u=u_1$ καὶ $v=v_1$ εἶνε ἴση μὲ $C\neq 0$, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἐκ τῶν (4) τὰ u, v διὰ τιμὰς τούτων κειμένας εἰς περιοχὴν τοῦ συστήματος τῶν τιμῶν u_1, v_1, t_1 καὶ θὰ εἶνε ἔστω $u=F(t)$, $v=\Phi(t)$. Αἱ $F(t)$, $\Phi(t)$ ἔχουν εἰς περιοχήν τινα τῆς τιμῆς t_1 συνεχεῖς παραγώγους $\dot{u}=F'(t)$, $\dot{v}=\Phi'(t)$, ἐπαληθεύουν δὲ καὶ τὴν ἐξίσωσιν

$$f(u,v)-\overline{f}(t)=0. \tag{5}$$

Διότι, ἀφοῦ ἡ (k) κεῖται ἐπὶ τῆς (E) ἐξ ὑποθέσεως, εἰς ἕκαστον σημεῖον (x,y) κείμενον εἰς περιοχήν τινα τοῦ (x_1, y_1), ἀντιστοιχεῖ ἓν μόνον σημεῖον τῆς (E), κείμενον εἰς περιοχὴν τοῦ M_1. Ἑπομένως ἔχομεν ἕνεκα τῶν (4) καὶ (5).

$\dot{x}=\overline{\sigma}'(t)=\sigma_u \cdot F_t+\sigma_v\, \Phi_t$, $\quad \dot{y}=\overline{\varphi}'(t)=\varphi_u \cdot F_t+\varphi_v \cdot \Phi_t$,

$\dot{z}=\overline{f}'(t)=f_u \cdot F_t+f_v \cdot \Phi_t$, $\quad$ προφανῶς δ' εἶνε

$$\begin{vmatrix} \sigma_u & \varphi_u & f_u \\ \sigma_v & \varphi_v & f_v \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}=0.$$

Ἐὰν εἰς τὸ πρῶτον μέλος ταύτης θέσωμεν $u=F(t)$, $v=\Phi(t)$, διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ t τῆς περιοχῆς τοῦ t_1 θὰ εἶνε $A\dot{x}+B\dot{y}+C\dot{z}=0$. Ἀλλ' αὕτη διὰ $t=t_1$ φανερώνει ὅτι, ἡ ἐφαπτομένη τῆς (k) εἰς τὸ M_1 εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τὴν διερχομενην διὰ τοῦ M_1 καὶ ἔχουσαν διευθύνοντα συνημίτονα ἀνάλογα τῶν A, B, C.

Ἄρα, αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὸ M_1 ὅλων τῶν (ὁμαλῶν) καμπύλων, τῶν κειμένων ἐπὶ τῆς (E), εἶνε κάθετοι ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε) εἰς τὸ M_1, αἱ ἐφαπτόμεναι δ' αὗται κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Ἑπομένως, εἰς ἕκαστον σημεῖον ὁμαλῆς ἐπιφανείας ὑπάρχει ἓν ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον καὶ μία εὐθεῖα (ε) κάθετος ἐπ' αὐτό, μεταβάλλεται δὲ συνεχῶς ἡ διεύθυνσις τῆς εὐθείας (ε) καὶ ἡ θέσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου μετὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς.

Κατὰ ταῦτα, ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς τὸ M_1 τῆς (E) εἶνε $\quad A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$

ἢ $\quad \begin{vmatrix} \varphi_u & f_u \\ \varphi_v & f_v \end{vmatrix}(x-x_1)+\begin{vmatrix} f_u & \sigma_u \\ f_v & \sigma_v \end{vmatrix}(y-y_1)+\begin{vmatrix} \sigma_u & \varphi_u \\ \sigma_v & \varphi_v \end{vmatrix}(z-z_1)=0.$

Καλοῦμεν ***κάθετον*** εὐθεῖαν (ὁμαλῆς) ἐπιφανείας (E) εἰς σημεῖον αὐτῆς $M_1(x_1,y_1,z_1)$ τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία εἶνε κάθετος εἰς τὸ M_1 ἐπὶ τὸ ἐφα-

πτόμενον ἐπίπεδον τῆς (Ε). Οὕτω αἱ ἐξισώσεις τῆς καθέτου εἰς τὸ M_1 τῆς (Ε) εἶνε
$$\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C}$$
ἢ
$$(x-x_1):\begin{vmatrix}\varphi_u & f_u\\ \varphi_v & f_v\end{vmatrix}=(y-y_1):\begin{vmatrix}f_u & \sigma_u\\ f_v & \sigma_v\end{vmatrix}=(z-z_1):\begin{vmatrix}\sigma_u & \varphi_u\\ \sigma_v & \varphi_v\end{vmatrix}.$$

Ἵνα ἡ γεωμετρικὴ εἰκὼν συνεχοῦς ἐπιφανείας $z=f(x, y)$ εἰς σημεῖον αὐτῆς $M_1(x_1, y_1, z_1)$, ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ (x_1, y_1) τοῦ ἐπιπέδου τῶν xy, ἔχῃ μίαν ὡρισμένην κάθετον, ἀρκεῖ ἡ $f(x,y)$ νὰ ἔχῃ συνεχεῖς μερικὰς παραγώγους πρώτης τάξεως εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ (x_1, y_1). Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀντὶ τῶν ἀνωτέρω τιμῶν τῶν A, B, C, θὰ ἔχωμεν κατὰ σειρὰν $A=-f_x$, $B=-f_y$, $C=1$. Ἡ ἀπόδειξις τούτου προκύπτει ἐκ τῶν προηγουμένων, ἂν τεθῇ $x=u$, $y=v$, $z=f(u,v)$.

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶνε
$$z-z_1=(x-x_1)f_x(x_1,y_1)+(y-y_1)f_y(x_1,y_1),$$
αἱ δ' ἐξισώσεις τῆς καθέτου
$$\frac{x-x_1}{f_x}=\frac{y-y_1}{f_y}=\frac{z-z_1}{-1}.$$

Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας εἶνε τῆς μορφῆς $F(x,y,z)=0$, ἵνα αὕτη ἔχῃ μίαν κάθετον εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς $M_1(x_1, y_1, z_1)$, ἀρκεῖ ἡ $F(x,y,z)$ νὰ εἶνε συνεχὴς καὶ νὰ ἔχῃ εἰς περιοχήν τινα τοῦ M_1 πανταχοῦ συνεχεῖς μερικὰς παραγώγους πρώτης τάξεως καὶ μία τοὐλάχιστον τῶν $F_x(x_1,y_1,z_1)$, $F_y(x_1,y_1,z_1)$, $F_z(x_1,y_1,z_1)$ νὰ εἶνε διάφορος τοῦ 0.

Πράγματι, ἐὰν π.χ. εἶνε $F_z(x_1, y_1, z_1)\neq 0$, δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν εἰς περιοχήν τινα του M_1 δι' ἐξισώσεως τῆς μορφῆς $z=f(x,y)$ συνεχοῦς, καὶ διὰ τὴν ὁποίαν θὰ ὑπάρχουν αἱ $f_x(x_1, y_1)$ καὶ $f_y(x_1, y_1)$ θὰ ἔχουν δὲ τὰς τιμάς,
$$f_x(x_1, y_1)=-\frac{F_x(x_1, y_1, z_1)}{F_z(x_1, y_1, z_1)},\quad f_y(x_1, y_1)=-\frac{F_y(x_1, y_1, z_1)}{F_z(x_1, y_1, z_1)}.$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς M_1 εἶνε
$$(x-x_1)F_x(x_1,y_1,z_1)+(y-y_1)F_y(x_1,y_1,z_1)+(z-z_1)F_z(x_1,y_1,z_1)=0,$$
αἱ δὲ ἐξισώσεις τῆς καθέτου εἶνε
$$\frac{x-x_1}{F_x(x_1, y_1, z_1)}=\frac{y-y_1}{F_y(x_1, y_1, z_1)}=\frac{z-z_1}{F_z(x_1, y_1, z_1)}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 735. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου καὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ σημεῖον $x=2$, $y=1$, $z>0$ τῆς ἐπιφανείας $4x^2+9y^2+36z^2-36=0$.

736. Ὁμοίως τῆς ἐπιφανείας $x^2-4y^2+2z^2=6$ εἰς τὸ σημεῖον (2,2,3).

737. Ὁμοίως τῆς ἐπιφανείας $\beta^2\gamma^2x^2-\alpha^2\gamma^2y^2-\alpha^2\beta^2z^2-\alpha^2\beta^2\gamma^2=0$ εἰς τὸ (x_1, y_1, z_1).

738. Ὁμοίως τῆς $\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2+\delta=0$ εἰς τὸ (x_1, y_1, z_1).

739. Ἐπίσης τῆς $x^2+y^2+z^2+Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$, εἰς τὸ (x_1,y_1,z_1).

740. Ἐπίσης τῆς ἐπιφανείας $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=\alpha^{\frac{2}{3}}$ εἰς τυχὸν σημεῖον αὐτῆς, καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν συντεταγμένων ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἶνε σταθερόν.

741. Νὰ δειχθῇ ὅτι, τὸ τετράεδρον τὸ σχηματιζόμενον ὑπὸ τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων καὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς τυχὸν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας $xyz-\alpha^3=0$ ἔχει ὄγκον σταθερόν.

742. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου καὶ τῆς καθέτου τῶν ἐπιφανειῶν.

743. $2x^2+4y^2-z=0$, εἰς τὸ $(2,1,12)$. 744. $3x^2+y^2-2z=0$, εἰς τὸ $x=1, y=1$.

745. $x^2+4y^2-z^2-16=0$, εἰς τὸ $(1,2,-1)$. 746. $x^2+y^2+2x+z^2=16$ εἰς τὸ $x=2, z=1$.

747. $x^2+y^2+z^2-11=0$, εἰς τὸ $(3,1,1)$. 748. $x^2+3y^2+2z^3=9$, εἰς τὸ $y=1, z=1$.

§ 76. Μέγιστον καὶ ἐλάχιστον συναρτήσεως μιᾶς μεταβλητῆς.

Λέγομεν ὅτι συνάρτησίς τις $y=\varphi(x)$, ὡρισμένη διὰ $x=x_1$ καὶ εἰς περιοχήν τινα ταύτης, ***μεταβάλλεται ὁμοίως ἢ ἀντιθέτως*** πρὸς τὸ x διὰ $x=x_1$, ἂν διὰ τιμὰς τοῦ $x\neq x_1$, ἀνηκούσας εἰς τὴν περιοχήν, ἡ διαφορὰ $\varphi(x)-\varphi(x_1)$ καὶ ἡ $x-x_1$ εἶνε ἀντιστοίχως ὁμόσημοι ἢ ἑτερόσημοι, δηλαδὴ ἐὰν διὰ πάσας τὰ τοιαύτας τιμὰς τοῦ x ἔχωμεν ἀντιστοίχως

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_1)}{x-x_1}>0 \quad \text{ἢ} \quad \frac{\varphi(x)-\varphi(x_1)}{x-x_1}<0.$$

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι, «***ἂν ἡ*** $\varphi(x)$ ***εἶνε παραγωγίσιμος διὰ*** $x=x_1$ ***καὶ ἡ*** $\varphi'(x_1)>0$ ἢ $\varphi'(x_1)<0$, ***ἡ συνάρτησις μεταβάλλεται ὁμοίως ἢ ἀντιθέτως μετὰ τοῦ*** x ***ἀπὸ τῆς τιμῆς*** $x=x_1$».

Διότι, ἐπειδὴ ὅταν $x\to x_1$, ἔχομεν $\frac{\varphi(x)-\varphi(x_1)}{x-x_1}\to\varphi'(x_1)$, καὶ ἑπομένως $\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(x_1)}{x-x_1}-\varphi'(x_1)\right|<\varepsilon$, ὅπου ε εἶνε ἀριθμός τις θετικὸς ὁσονδήποτε μικρός. Ἄρα εἶνε καὶ $\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(x_1)}{x-x_1}-\varphi'(x_1)\right|<|\varphi'(x_1)|$, (1)

καὶ ἂν μὲν εἶνε $\varphi'(x_1)>0$, θὰ εἶνε καὶ $\frac{\varphi(x)-\varphi(x_1)}{x-x_1}>0$ (διότι ἄλλως ἡ (1) θὰ ἦτο ἀδύνατος), ἂν δ' εἶνε $\varphi'(x_1)<0$ θὰ εἶνε καὶ

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_1)}{x-x_1}<0.$$

Ἑπομένως, ἂν $\varphi'(x_1)>0$, ἡ $\varphi(x)$ μεταβάλλεται ὁμοίως μὲ τὸ x ἀπὸ τῆς τιμῆς $x=x_1$. Διότι τότε διὰ $x>x_1$ ἔχομεν $\varphi(x)-\varphi(x_1)>0$ ἢ $\varphi(x)>\varphi(x_1)$, καὶ διὰ $x<x_1$ τὸ $\varphi(x)-\varphi(x_1)<0$ ἢ $\varphi(x)<\varphi(x_1)$. Ἐὰν εἶνε ἡ $\varphi'(x_1)<0$, ἡ $\varphi(x)$ μεταβάλλεται ἀντιθέτως πρὸς τὸ x ἀπὸ τῆς $x=x_1$. Διότι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν διὰ $x>x_1$ ἔχομεν $\varphi'(x)-\varphi(x_1)<0$, ἢ $\varphi(x)<\varphi(x_1)$, καὶ διὰ $x<x_1$ εἶνε $\varphi(x)-\varphi(x_1)>0$, ἄρα $\varphi(x)>\varphi(x_1)$.

Παρατηρητέον ὅτι, ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης ἰσχύει καὶ ὅταν ἔχωμεν $\varphi'(x)\to+\infty$ ἢ $-\infty$ διὰ $x\to x_1$, καθὼς π. χ. ἡ $\varphi(x)=\sqrt[3]{x-5}$, διὰ τὴν ὁποίαν ἡ $\varphi'(x)=\frac{1}{3}(x-5)^{-\frac{2}{3}}$ καὶ διὰ $x\to5$, $\varphi'(x)\to\infty$, ἡ δὲ $\varphi(x)$ μεταβάλλεται ὁμοίως μετὰ τῆς x διὰ $x=5$.

Λέγομεν ὅτι, ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ ἔχει ***(σχετικὸν) μέγιστον*** ἢ ***(σχετικὸν) ἐλάχιστον*** ἐν ***εὐρυτέρᾳ σημασίᾳ*** διὰ $x=x_1$, ἐὰν διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ x περιοχῆς τινος τῆς x_1 εἶνε $\varphi(x)\leqq\varphi(x_1)$ ἢ $\varphi(x)\geqq\varphi(x_1)$, ὅταν $|x-x_1|<\varepsilon$ καὶ $\varepsilon>0$. Ἐὰν εἶνε $\varphi(x)<\varphi(x_1)$ ἢ $\varphi(x)>\varphi(x_1)$ διὰ $x\neq x_1$, λέγομεν ὅτι ἡ $\varphi(x_1)$ εἶνε μέγιστον ἢ ἐλάχιστον τῆς $\varphi(x)$ ἐν ***στενωτέρᾳ σημασίᾳ,*** καὶ ἂν μὲν $\varphi(x_1)$ εἶνε μέγιστον, ἡ $\varphi(x)$ βαίνει αὐξανομένη μετὰ τοῦ x εἰς τὴν ἀριστερὰν περιοχὴν τῆς x_1 καὶ ἐλαττουμένη εἰς τὴν δεξιάν, ἂν δ' εἶνε $\varphi(x_1)$ ἐλάχιστον, ἡ $\varphi(x)$ βαίνει ἐλαττουμένη εἰς τὴν ἀριστερὰν περιοχὴν τοῦ x_1 καὶ αὐξανομένη εἰς τὴν δεξιάν.

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι, «***ἂν*** $\varphi(x_1)$ ***εἶνε σχετικὸν μέγιστον ἢ ἐλάχιστον τῆς*** $\varphi(x)$, ***θὰ ἔχωμεν*** $\varphi'(x_1)=0$». Διότι, ἂν ἦτο $\varphi'(x_1)>0$ ἢ $\varphi'(x_1)<0$, ἡ $\varphi(x)$ θὰ μεταβάλλετο ὁμοίως ἢ ἀντιθέτως πρὸς τὸ x διὰ τὰς τιμὰς περιοχῆς τινος τῆς x_1 καὶ ἡ $\varphi(x_1)$ δὲν θὰ ἦτο οὔτε μέγιστον οὔτε ἐλάχιστον.

Ἡ γεωμετρικὴ σημασία τῆς προηγουμένης συνθήκης εἶνε ὅτι, ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης (k), τῆς παριστωμένης ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $y=\varphi(x)$, εἰς τὸ σημεῖον $M_1(x_1, y_1=\varphi(x_1))$ εἶνε παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x, ὡς ἔχουσα συντελεστὴν διευθύνσεως $\varphi'(x_1)=0$, ἐνῶ τὰ σημεῖα τῆς (k) τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰς τιμὰς τῆς περιοχῆς $x_1-\varepsilon<x<x_1+\varepsilon, \varepsilon>0$ εἶνε δυνατὸν α΄) νὰ κεῖνται πάντα ἄνω τῆς ἐφαπτομένης ταύτης, (ὅτε λέγομεν ὅτι ἡ (k) στρέφει εἰς τὸ M_1 τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω)· β΄) νὰ κεῖνται πάντα κάτω αὐτῆς (ὅτε λέγομεν ἡ (k) στρέφει εἰς τὸ M_1 τὰ κοῖλα πρὸς τὰ κάτω)· γ΄) τὰ μὲν ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὴν περιοχὴν $x_1<x\leqq x_1+\varepsilon$ νὰ κεῖνται κάτω ἢ

ἄνω, τὰ δ' ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὴν $x_1-\varepsilon \leqq x < x_1$ νὰ κεῖνται ἄνω ἢ κάτω αὐτῆς (ὅτε λέγομεν ὅτι τὸ M_1 εἶνε σημεῖον καμπῆς τῆς (k)).

Διὰ τὴν εὕρεσιν σχετικοῦ μεγίστου ἢ ἐλαχίστου συναρτήσεώς τινος φ(x) ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«***Ἐὰν ἡ** $\varphi(x)$ **διὰ** $x=x_1$ **καὶ εἰς περιοχήν τινα ταύτης εἶνε παραγωγίσιμος καὶ** $\varphi'(x_1)=0$, **θὰ εἶνε ἡ** $\varphi(x_1)$ **μέγιστον ἢ ἐλάχιστον (ἐν στενωτέρᾳ σημασίᾳ), ἂν ἡ** $\varphi'(x)$ **διὰ** $x=x_1$ **ἀλλάσσῃ σημεῖον· ἤτοι ἂν διὰ τιμὰς τοῦ** x **μικροτέρας καὶ μεγαλυτέρας τῆς** x_1 **ἡ** $\varphi'(x)$ **λαμβάνῃ τιμὰς ἀντιθέτους· καὶ ἂν μὲν εἶνε** $\varphi'(x)>0$ **διὰ** $x_1-\varepsilon \leqq x<x_1$ **καὶ** $\varphi'(x)<0$ **διὰ** $x_1<x\leqq x_1+\varepsilon$, **ἡ** $\varphi(x_1)$ **εἶνε μέγιστον, ἂν δ' εἶνε** $\varphi'(x)<0$ **διὰ** $x_1-\varepsilon\leqq x<x_1$ **καὶ** $\varphi'(x_1)>0$ **διὰ** $x_1<x\leqq x_1+\varepsilon$, **ἡ** $\varphi(x_1)$ **εἶνε ἐλάχιστον τῆς** $\varphi(x)$*».

Διότι ἔχομεν, ὡς ἀποδεικνύεται *) $\varphi(x)-\varphi(x_1)=(x-x_1)\varphi'(x_1+ +\mu(x-x_1))$, ὅπου $0<\mu<1$. Ἂν ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ὑπάρχει περιοχή τις $|x-x_1|<\varepsilon$ διὰ τὴν ὁποίαν εἶνε ἀφ' ἑνὸς μὲν $\varphi'(x)>0$, ὅταν $x<x_1$ καὶ $\varphi'(x)<0$, ὅταν $x>x_1$ διὰ πάσας τὰς τιμὰς ταύτας τοῦ x θὰ ἔχωμεν $(x-x_1)\varphi(x_1+\mu(x-x_1))<0$, ἄρα καὶ $\varphi(x)<\varphi(x_1)$, ἤτοι ἡ $\varphi(x_1)$ εἶνε μέγιστον τῆς φ(x). Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι, ἂν εἶνε $\varphi'(x)<0$ διὰ $x<x_1$ καὶ $\varphi'(x)>0$ διὰ $x>x_1$, θὰ ἔχωμεν $(x-x_1)\varphi'(x_1+\mu(x-x_1))>0$ καὶ τὸ $\varphi(x_1)$ εἶνε ἐλάχιστον τῆς φ(x).

Ἔστω π.χ. ἡ συνάρτησις $\varphi(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ διὰ $x\neq 0$, ἐνῷ ὑποτίθεται $y=0$ διὰ $x=0$. Ἔχομεν $\varphi'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$.

Αὕτη ἔχει ρίζας τὰς -1 καὶ $+1$. Διὰ $-1-\varepsilon<x<-1$, $(\varepsilon>0)$ εἶνε τὸ $\varphi'(x)>0$ καὶ διὰ $-1<x<-1+\varepsilon$ τὸ $\varphi'(x)<0$. Ἄρα διὰ $x=-1$ ἡ φ(x) ἔχει μέγιστον. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἡ αὐτὴ συνάρτησις διὰ $x=1$ ἔχει ἐλάχιστον.

Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}$ διὰ $x\neq 0$ καὶ $y=0$ διὰ $x=0$. Ἔχομεν $\varphi'(x)=0$ διὰ $x=0$ καὶ $\varphi'(x)=2x\eta\mu\dfrac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}$ διὰ $x\neq 0$. Ἡ $\varphi'(x)$ δύναται νὰ λάβῃ τιμὰς θετικὰς καὶ ἀρνητικὰς εἰς ἑκάστην τῶν περιοχῶν $0-\varepsilon\leqq x<0$ καὶ $0<x<0+\varepsilon$. Ἄρα διὰ $x=0$ ἡ συνάρτησις αὕτη δὲν ἔχει οὔτε μέγιστον οὔτε ἐλάχιστον.

Τέλος παρατηροῦμεν ὅτι, ***ἂν ἡ φ(x) διὰ** $x=x_1$ **ἔχει πρώτην καὶ***

---

* Βλέπε εἰς τὴν σελίδα 225.

δευτέραν παράγωγον καὶ εἶνε $\varphi'(x_1)=0$ ἀλλὰ $\varphi''(x_1)\neq 0$, ἡ συνάρτησις ἔχει μέγιστον μέν, ἂν εἶνε $\varphi''(x_1)<0$, ἐλάχιστον δ' ἂν εἶνε $\varphi''(x_1)>0$».

Διότι, ἂν εἶνε π. χ. $\varphi''(x_1)<0$, ἀφοῦ εἶνε $\varphi'(x_1)=0$, ἡ $\varphi'(x)$ μεταβάλλεται ἀντιθέτως πρὸς τὴν μεταβολὴν τῆς x ἀπὸ τῆς τιμῆς $x=x_1$, ἤτοι διὰ $x_1-\varepsilon\leqq x<x_1$ λαμβάνει τιμὰς θετικὰς καὶ διὰ $x_1<x\leqq x_1+\varepsilon$ ἀρνητικάς. Ἄρα ἡ $\varphi(x_1)$ εἶνε μέγιστον.

Ἐν γένει δεικνύται ὅτι, ἂν ἡ $\varphi(x)$ ἔχῃ τὰς παραγώγους πρώτης, δευτέρας κλπ. τάξεως, ἡ $\varphi(x_1)$ θὰ εἶνε μέγιστον ἢ ἐλάχιστον, ἂν ἡ πρώτη κατὰ σειρὰν παράγωγος διάφορος τοῦ 0 διὰ $x=x_1$ εἶνε τάξεως ἀρτίας καὶ ἔχῃ τιμὴν ἀρνητικὴν, ἢ θετικήν ἀντιστοίχως. Ἂν δ' ἡ ἐν λόγῳ παράγωγος διάφορος τοῦ 0 διὰ $x=x_1$ εἶνε τάξεως περιττῆς, ἡ $\varphi(x_1)$ δὲν εἶνε οὔτε μέγιστον οὔτε ἐλάχιστον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 749. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου μὲ τὸν μέγιστον ὄγκον, ὅστις εἶνε ἐγγεγραμμένος εἰς σφαῖραν ἀκτῖνος ρ.

750. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου μὲ μέγιστον ὄγκον ἐγγεγραμμένον εἰς ὀρθὸν κυκλικὸν κῶνον δοθέντα.

751. Νὰ χωρισθῇ εὐθεῖα μήκους α εἰς δύο μέρη τοιοῦτα, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν μηκῶν αὐτῶν νὰ εἶνε μέγιστον.

751'. Νὰ χωρισθῇ ὁ 10 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ ἄθροισμα τοῦ διπλασίου τοῦ ἑνὸς καὶ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄλλου νὰ εἶνε ἐλάχιστον.

752. Ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμός, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν ἀντίστροφόν του δίδει τὸ ἐλάχιστον ἄθροισμα.

753. Νὰ δειχθῇ ὅτι, τὸ τετράγωνον ἔχει τὴν μεγαλυτέραν περίμετρον ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς δοθέντα κύκλον.

754. Εἰς τρίγωνον ἰσοσκελὲς μὲ μῆκος 12 μ. τῆς βάσεως καὶ 10 μ. ὕψους νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον μὲ μέγιστον ἐμβαδόν, ἂν ἡ μία βάσις αὐτοῦ κεῖται ἐπὶ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου.

755. Νὰ χωρισθῇ ὁ 4 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ ἄθροισμα τοῦ κύβου τοῦ ἑνὸς καὶ τὸ τριπλάσιον τετράγωνον τοῦ ἄλλου νὰ εἶνε μέγιστον.

756. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ τὸ μέγιστον ἐμβαδόν, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ κατασκευασθῇ ἐπὶ εὐθείας μήκους α ὡς ὑποτεινούσης αὐτοῦ.

757. Ποῖον εἶνε τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ μέγιστον ἐμβαδόν, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθέντα κύκλον.

758. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος ὀρθογωνίου μὲ μέγιστον ἐμβαδόν, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἐγγραφῇ εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ μήκη βάσεως β καὶ ὕψους υ.

759. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὴν Ελ $\beta^2x^2+\alpha^2y^2-\alpha^2\beta^2=0$.

760. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου μὲ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας αὐτοῦ μέγιστον, ὅστις δύναται νὰ ἐγγραφῇ εἰς σφαῖραν δοθεῖσαν.

761. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος κυλίνδρου μὲ μέγιστον ὄγκον, ὅστις δύναται νὰ ἐγγραφῇ εἰς σφαῖραν δοθεῖσαν.

762. Τίνες εἶνε αἱ διαστάσεις κανονικοῦ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος μὲ ἐλάχιστον ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος εἶνε $36(\mu^3)$;

763. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου μὲ ἐλάχιστον ὄγκον περιγεγραμμένου εἰς σφαῖραν δοθεῖσαν.

764. Ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος μὲ μέγιστον ὄγκον εἶνε ἐγγεγραμμένος εἰς δοθέντα ὀρθὸν κυκλικὸν κῶνον. Ἡ κορυφὴ τοῦ ἐσωτερικοῦ κώνου εὑρίσκεται εἰς τὸ κέντρον τῆς βάσεως τοῦ δοθέντος. Νὰ δειχθῇ ὅτι, τὸ ὕψος τοῦ ἐγγεγραμμένου κώνου εἶνε τὸ τρίτον τοῦ ὕψους τοῦ δοθέντος.

765. Δοθέντος ἑνὸς σημείου τοῦ ἄξονος τῆς παραβολῆς $y^2=2px$ εἰς ἀπόστασιν α ἀπὸ τῆς κορυφῆς αὐτῆς, νὰ εὑρεθῇ ἡ τετμημένη τοῦ σημείου τῆς καμπύλης, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐγγύτερον πρὸς τὸ δοθὲν σημεῖον.

766. Ποῖον εἶνε τὸ μῆκος τοῦ βραχυτέρου τμήματος εὐθείας ἐφαπτομένης τῆς Ελ $\beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$ καὶ περιεχομένου μεταξὺ τῶν ἀξόνων αὐτῆς.

767. Πρόκειται νὰ μετρηθῇ ἓν μέγεθος, τὸ ὁποῖον παρίσταται διὰ τοῦ ἀγνώστου ἀριθμοῦ x. Μετὰ ν μετρήσεις εὕρομεν ἐξαγόμενα $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, ὅτε τὰ προκύπτοντα σφάλματα εἶνε $x-\alpha_1, x-\alpha_2, \ldots, x\ \alpha_\nu$. Ἐκ τούτων τινὰ εἶνε θετικὰ καὶ ἄλλα ἀρνητικὰ καὶ δεχόμεθα, ὅτι ἡ πιθανωτέρα τιμὴ τοῦ x εἶνε ἐκείνη, ἥτις καθιστᾷ ἐλάχιστον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν σφαλμάτων, ἤτοι τὸ $\sum_{k=1}^{\nu}(x-\alpha_k)^2$. Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ σχέσις αὕτη δίδει ὡς πιθανωτέραν τιμὴν τοῦ x τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν ἐξαγομένων τῶν γενομένων παρατηρήσεων.

768. Δύο θερμαντικαὶ πηγαὶ Α καὶ Β ἔχουν ἀπόστασιν γ καὶ ἐντάσεις α καὶ β. Ἡ ὁλικὴ ἔντασις τῆς θερμότητος εἰς ἀπόστασιν x ἀπὸ τῆς Α δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\frac{\alpha}{x^2}+\frac{\beta}{(\gamma-x)^2}$. Εἰς τίνα θέσιν τῆς εὐθείας ΑΒ ἡ ἔντασις τῆς θερμότητος ἔχει τὴν ἐλαχίστην τιμήν ;

769. Βλῆμα ῥιπτόμενον εἰς τὸ κενὸν πλαγίως ἀπὸ τοῦ Ο πίπτει εἰς τὸ Α κείμενον ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου μετὰ τοῦ Ο, καὶ εἶνε $(OA)=\frac{\upsilon_0{}^2\eta\mu 2\varphi}{g}$, ὅπου υ_0 εἶνε ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τοῦ βλήματος, g ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος καὶ φ ἡ γωνία τῆς ΟΑ μετὰ τῆς ἀρχικῆς διευθύνσεως τοῦ βλήματος. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία φ, εἰς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ τὸ μέγιστον (ΟΑ), ὅταν δίδεται ἡ ἀρχικὴ ταχύτης.

770. Εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα ἡ διάρκεια τῆς κινήσεως τοῦ βλήματος δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $T=\frac{2\upsilon_0\eta\mu\varphi}{g}$. Ὑπὸ τίνα γωνίαν πρέπει νὰ ῥιφθῇ τὸ βλῆμα, ὥστε ἡ διάρκεια τῆς κινήσεως του νὰ εἶνε ἐλαχίστη.

771. Ὁ χρόνος, καθ' ὃν κυλίεται σφαῖρα κατὰ μῆκος $(AB)=\alpha$ ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου κατὰ γωνίαν φ δίδεται ὑπὸ τοῦ $T=2\sqrt{\frac{\alpha}{g\eta\mu 2\varphi}}$, ἂν πα-

ραβλεφθῇ ἡ τριβὴ κλπ. Τίς πρέπει νὰ εἶνε ἡ τιμὴ τοῦ φ, ἵνα ἡ ταχύτης τῆς πτώσεως τοῦ κινητοῦ γίνῃ μεγίστη ;

772. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως $y=(x-1)^2(x+1)^3$.

773. Νὰ ἐξετασθῇ ἡ συνάρτησις $y=\alpha-\beta(x-\gamma)^{\frac{2}{3}}$ ὡς πρὸς τὸ μέγιστον καὶ ἐλάχιστον αὐτῆς.

Ὁμοίως ἡ συνάρτησις $y=x^3+3x^2-9x+5$

Ὁμοίως ἡ $y=\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu x$.

Νὰ ἐξετασθοῦν αἱ κάτωθι συναρτήσεις ὡς πρὸς τὸ μέγιστον καὶ ἐλάχιστον αὐτῶν.

774. $y=(x-3)^2, y=(x-1)(x-2)$. 775. $y=(x-4)^5(x+2)^4$.

776. $y=(x-2)^7(2x+1)^2, y=(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-5)^2$, 777. $y=(2y-\alpha)^{\frac{1}{3}}(x-\alpha)^{\frac{1}{3}}$

778. $y=x(x-1)(x+1)^2$, $y=x(\alpha+x)^2(\alpha-x)$. 779. $y=\beta+\gamma(x-\alpha)^{\frac{2}{2}}$

780. $y=\dfrac{x^2-7x+6}{x-10}$. 781. $y=\dfrac{(\alpha-x)_2}{(\alpha-2x)}$. 782. $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$.

783. $y=\dfrac{x^2-3y+2}{x^2+3x+2}$. 784. $y=\dfrac{(x-)(\beta-x)}{x^2}$, 785. $y=\dfrac{\alpha^2}{x}+\dfrac{\beta^2}{\alpha-x}$.

786. $y=3x_2-9x^2-27x+30$, 787. $y=\dfrac{x^2}{3}-2x^2+3x+1$.

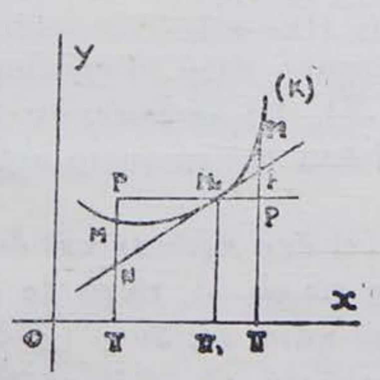
788. $y=\eta\mu x(1+\sigma\upsilon\nu x)$ 789. $y=\dfrac{x}{lx}$ 790. $y=l\sigma\upsilon\nu x$

791. $y=\alpha l^{kx}+\beta e^{-kx}$ 792. $y=\eta\mu 2x-xy=x+\eta\varphi x$.

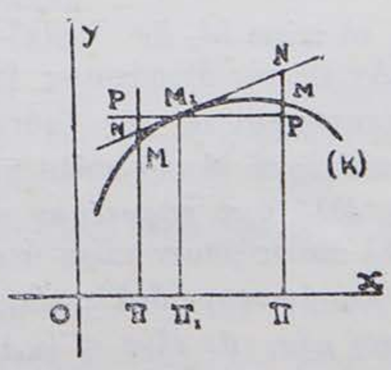
793. $y=\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu x$ 794. $y=y\sigma\upsilon\nu x$ $y=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu 2x$.

§ 77. Περὶ κυρτῶν καὶ κοίλων ἐπιπέδου καμπύλης.

Ἔστω $y=\varphi(x)$ ἡ ἐξίσωσις ἐπιπέδου καμπύλης (k), ἐνῶ ἡ $\varphi(x)$ διὰ $x=x_1$ καὶ εἰς περιοχήν τινα τῆς τιμῆς ταύτης εἶνε ὡρισμένη, πρὸς δὲ παραγωγίσιμος διὰ $x=x_1$. Λέγομεν ὅτι ἡ (k) ἢ ἡ $y=\varphi(x)$



(Σχ. 74).



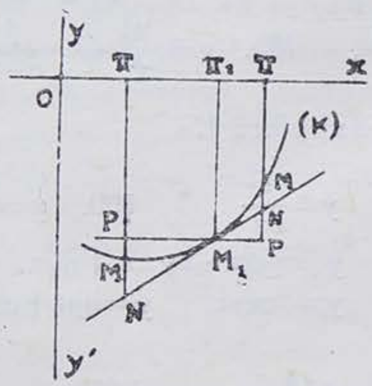
(Σχ. 75).

στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω (ἢ πρὸς τὰ θετικὰ y) καὶ τὰ κυρτὰ πρὸς τὰ κάτω εἰς τὸ σημεῖον $M_1(x_1, y_1=\varphi(x_1))$, ἐὰν πάντα τὰ σημεῖα αὐτῆς, τὰ κείμενα εἰς περιοχήν τινα τοῦ M_1, κεῖνται ἄνω τῆς ἐφαπτομένης τῆς (k) εἰς τὸ M_1 (σχ. 74 καὶ 76), ἤτοι ἂν εἶνε $(\Pi M) > (\Pi N)$ διὰ πᾶν σημεῖον τῆς (k) περιοχῆς τινος τοῦ M_1.

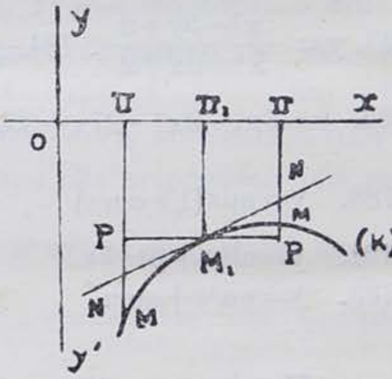
Λέγομεν ὅτι, ἡ (k) ἢ ἡ $y=\varphi(x)$ στρέφει εἰς τὸ M_1 τὰ κοῖλα αὐτῆς πρὸς τὰ κάτω καὶ τὰ κυρτὰ πρὸς τὰ ἄνω, ἐὰν τὰ ἐν λόγῳ σημεῖα τῆς (k) κεῖνται κάτω τῆς ἐφαπτομένης ταύτης, ἤτοι ἂν εἶνε $(\Pi M) < (\Pi N)$ διὰ πάντα τὰ σημεῖα τῆς (k) περιοχῆς τινος τοῦ M_1 (Σχ. 75 καὶ 77).

Ἐὰν ἡ σχέσις αὕτη πληροῦται μόνον διὰ τὰ σημεῖα τῆς (k) τὰ ἀνήκοντα εἰς δεξιὰν ἢ ἀριστερὰν περιοχὴν τοῦ M_1, λέγομεν ὅτι ἡ (k) εἶνε ἐκ δεξιῶν ἢ ἐξ ἀριστερῶν τοῦ M_1 π. χ. κοίλη πρὸς τὰ ἄνω καὶ κυρτὴ πρὸς τὰ κάτω.

Ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης τῆς (k) εἰς τὸ M_1 εἶνε
$y-\varphi(x_1)=\varphi'(x_1)(x-x_1)$ ἢ $y=\varphi(x_1)+\varphi'(x_1)(x-x_1)$ (1)



(Σχ. 76).



(Σχ. 77).

ἕπεται ὅτι, ἡ (k) στρέφει εἰς τὸ M_1 τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω μέν, ἂν διὰ $x \neq x_1$ καὶ εἰς περιοχὴν τοῦ M_1 ἔχωμεν

$$\varphi(x)-\varphi(x_1) > \varphi'(x_1)(x-x_1) \qquad (2)$$

πρὸς τὰ κάτω δέ, ἂν $\varphi(x)-\varphi(x_1) < \varphi'(x_1)(x-x_1)$ (3).

Ἂν εἰς τὰς ἀνισότητας (2) καὶ (3) ἔχωμεν παρὰ τὸ σημεῖον τῆς ἀνισότητος καὶ τὸ τῆς ἰσότητος (π. χ. $\geqq$), θὰ λέγωμεν, ὅτι ἡ (k) στρέφει εἰς τὸ M_1 τὰ κοῖλα π. χ. πρὸς τὰ ἄνω καὶ τὰ κυρτὰ πρὸς τὰ κάτω, ἀλλὰ ***ὑπὸ εὐρυτέραν σημασίαν***.

Θὰ ἀποδείξωμεν τώρα ὅτι, «***ἐὰν ἡ*** $\varphi(x)$ ***ἔχῃ πρώτην καὶ δευτέραν παράγωγον διὰ*** $x=x_1$, ***θὰ στρέφῃ εἰς τὸ*** M_1 ***τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω μέν, ἂν εἶνε*** $\varphi''(x_1)>0$, ***πρὸς τὰ κάτω δέ, ἂν*** $\varphi''(x_1)<0$».

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, δεικνύομεν πρῶτον τὴν ἑξῆς πρότασιν, (καλουμένην ***τῶν πεπερασμένων αὐξήσεων ἢ τῆς μέσης τιμῆς συναρτήσεως***).

«Ἐὰν συνάρτησίς τις $\varphi(x)$ εἶνε συνεχὴς εἰς κλειστὸν διάστημα (α,β) καὶ παραγωγίσιμος διὰ τὰς ἐσωτερικὰς τιμὰς τούτου, ὑπάρχει τοὐλάχιστον μία τιμὴ ξ, ἀνήκουσα εἰς τὸ διάστημα, διὰ τὴν ὁποίαν ἔχομεν
$$\varphi'(\xi)=\frac{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)}{\beta-\alpha}».$$

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι, ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας τῆς διερχομένης διὰ τῶν σημείων $A(\alpha,\varphi(\alpha))$ καὶ $B(\beta,\varphi(\beta))$ εἶνε
$$\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{y-\varphi(\alpha)}{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)} \quad \text{ἢ} \quad y=\varphi(\alpha)+\frac{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha).$$
Θεωροῦμεν τώρα τὴν διαφορὰν τῶν τεταγμένων $\varphi(x)$ σημείων τῆς καμπύλης $y=\varphi(x)$ καὶ τῆς εὐθείας AB, ἐχόντων τὰς αὐτὰς τετμημένας, ἤτοι τὴν διαφορὰν
$$\varphi(x)-\varphi(\alpha)-\frac{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha).$$
Ἡ συνάρτησις αὐτη τοῦ x, ἔστω $\psi(x)$, εἶνε συνεχὴς εἰς τὸ κλειστὸν διάστημα (α,β), παραγωγίσιμος διὰ τὰς ἐσωτερικὰς τιμὰς τούτου καὶ μηδενίζεται διὰ $x=\alpha$ καὶ $x=\beta$. Ἑπομένως (κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Rolle) ἡ $\psi'(x)$ θὰ μηδενίζεται διὰ μίαν τουλάχιστον ἐσωτερικὴν τιμὴν ξ τοῦ (α,β)*.

Ἤτοι ἔχομεν $\psi'(\xi)=\varphi'(\xi)-\dfrac{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)}{\beta-\alpha}=0$ καὶ $\varphi'(\xi)=\dfrac{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

Παρατηρητέον ὅτι, ἐπειδὴ εἶνε $\alpha<\xi<\beta$, ἂν τεθῇ $\xi=\alpha+\mu(\beta-\alpha)$, ὅπου ὑποτίθεται $0<\mu<1$, θὰ ἔχωμεν $\varphi'(\alpha+\mu(\beta-\alpha))=\dfrac{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

Ἡ σχέσις αὐτη δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς. Ἂν θεωρήσωμεν ἀριθμόν τινα $\varepsilon\neq 0$ καὶ ὑποθέσωμεν τὴν $\varphi(x)$ συνεχῆ εἰς τὸ

---

*) Ἐν πρώτοις ἡ $\psi(x)$ συνεχὴς εἰς τὸ $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$, ἔχει ἀνώτερον ὅριον, ἔστω P καὶ ὑπάρχει τιμὴ τοῦ διαστήματος, ἔστω $x=\xi$, διὰ τὴν ὁποίαν $\psi(\xi)=P$. Διότι ἄλλως θὰ εἴχομεν εἰς τὸ αὐτὸ διάστημα $\psi(x)-P<0$, ἐπειδὴ δ' εἶνε καὶ ἡ $\dfrac{1}{\psi(x)-P}<0$ καὶ συνεχὴς εἰς αὐτό, θὰ ἔχῃ αὕτη κατώτερον ὅριον, ἔστω $k<0$, ἤτοι θὰ εἶνε $k\leqslant\dfrac{1}{\psi(x)-P}$. Ἄρα $\psi(x)\leqslant P+\dfrac{1}{k}$, ὅτε τὸ $P+\dfrac{1}{k}$ θὰ ἦτο ἀνώτερον ὅριον τῆς $\psi(x)$, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν γενομένην ὑπόθεσιν. Ἔστω λοιπὸν $\psi(\xi)=P>0$, διότι ἄλλως θεωροῦμεν τὸ $-\psi(x)$. Θὰ εἶνε $\psi'(\xi)=0$. Πράγματι, ἂν ἦτο $\psi'(\xi)>0$ ἢ $\psi'(\xi)<0$, διὰ τιμὰς τοῦ x αὐξανομένας ἀπὸ τῆς $x=\xi$ ἢ ἐλαττουμένας ἀπὸ ταύτης, ἡ $\psi(x)$ θὰ ηὐξάνετο ἀπὸ τῆς $\psi(\xi)$, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

κλειστὸν διάστημα $(x_1, x_1+\varepsilon)$, παραγωγίσιμον δὲ τοὐλάχιστον διὰ τὰς ἐσωτερικὰς τιμὰς τούτου, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\varphi(x_1+\varepsilon)-\varphi(x_1)}{\varepsilon}=\varphi'(x_1+\mu\varepsilon) \text{ ἢ καὶ } \varphi(x_1+\varepsilon)=\varphi(x_1)+\varepsilon\varphi'(x_1+\mu\varepsilon).$$

Ἔστω τώρα $\varphi''(x_1)>0$. Ἐὰν τὸ ε εἶνε ἀριθμὸς ἀπολύτως πολὺ μικρός, ἵνα ἡ (k) στρέφῃ εἰς τὸ M_1 τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω (Σχ. 74 καὶ 76, σελ. 224—5), ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν $\varphi(x_1+\varepsilon)-\varphi(x_1)-\varepsilon\varphi'(x_1)>0$. Διότι θὰ εἶνε $(\text{ΟΠ})=x_1+\varepsilon$, $(\text{ΠΜ})=\varphi(x_1+\varepsilon)$, $(\text{ΠΡ})=(\Pi_1 M_1)=\varphi(x_1)$,

$$(\text{ΡΝ})=(M_1\text{Ρ})\varepsilon\varphi \text{ΡΜ}_1\text{Ν}=\varepsilon.\varphi'(x_1),$$

καὶ $(\text{ΝΜ})=(\text{ΠΜ})-(\text{ΠΡ})-(\text{ΡΝ})=\varphi(x_1+\varepsilon)-\varphi(x_1)-\varepsilon\varphi'(x_1)$.

Ἵνα δ' ἡ (k) στρέφῃ εἰς τὸ M_1 τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω, ἀρκεῖ νὰ εἶνε $(\text{ΝΜ})>0$. Ἀλλ' ἔχομεν

$$\varphi(x_1+\varepsilon)-\varphi(x_1)=\varepsilon\varphi'(x_1+\mu\varepsilon)\text{· ἄρα } (\text{ΝΜ})=\varepsilon[\varphi'(x_1+\mu\varepsilon)-\varphi'(x_1)]. \quad (1)$$

Ἐπειδὴ ὑπετέθη $\varphi''(x_1)>0$, ἡ συνάρτησις $\varphi'(x)$ μεταβάλλεται ὁμοίως μετὰ τοῦ x διὰ $x=x_1$ καὶ ἡ διαφορὰ $\varphi'(x_1+\mu\varepsilon)-\varphi'(x_1)$ ἔχει διὰ τὰς ἀπολύτως ἀρκούντως μικρὰς τιμὰς τοῦ $\varepsilon\neq0$ τὸ σημεῖον τοῦ $\mu\varepsilon$, ἤτοι ἔχει τὸ τοῦ ε· ἄρα τὸ (ΝΜ) ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ ε^2 καὶ εἶνε $(\text{ΝΜ})>0$, ἤτοι ἡ (k) στρέφει εἰς τὸ M_1 τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι, ἂν εἶνε $\varphi''(x_1)<0$, ἡ (k) στρέφει εἰς τὸ M_1 τὰ κοῖλα πρὸς τὰ κάτω (Σχ. 75 καὶ 77, σελ. 224—5).

Παρατηρήσεις. 1. Ἂν ἡ $\varphi(x)$ ἔχῃ παραγώγους διὰ $x=x_1$ πρώτης, δευτέρας κλπ. τάξεως, διὰ νὰ εὕρωμεν, ἂν ἡ (k) εἰς τὸ M_1 στρέφῃ τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω ἢ τὰ κάτω, εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν παραγώγων διὰ $x=x_1$, καὶ ἂν μὲν ἡ πρώτη κατὰ σειρὰν διάφορος τοῦ 0 εἶνε ἀρτίας τάξεως καὶ θετική, στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω, ἂν δ' ἀρνητική, πρὸς τὰ κάτω. Ἂν ἡ πρώτη κατὰ σειρὰν παράγωγος διάφορος τοῦ 0 διὰ $x=x_1$, εἶνε τάξεως περιττῆς εἰς τὸ M_1 ἡ (k) δὲν στρέφει τὰ κοῖλα οὔτε πρὸς τὰ ἄνω οὔτε πρὸς τὰ κάτω (καὶ λέγομεν ὅτι τὸ M_1 εἶνε σημεῖον καμπῆς τῆς καμπύλης).

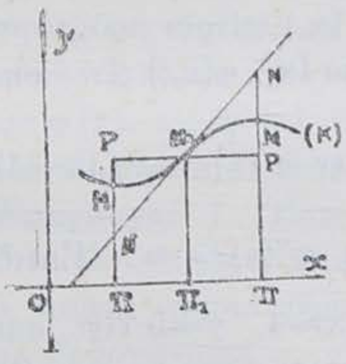
2. Ἐὰν ἡ $\varphi(x)$ ἔχῃ πρώτης καὶ δευτέρας τάξεως παραγώγους διὰ $x=x_1$ καὶ διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ x περιοχῆς τινος τῆς x_1 εἶνε $\varphi''(x)=0$, ἡ $\varphi(x)$ εἶνε τῆς μορφῆς $\varphi(x)=Ax+B$, ὅπου A, B παριστάνουν σταθερὰς ποσότητας. Πράγματι, ἂν θεωρήσωμεν δύο τιμὰς τυχούσας τοῦ x, ἀνηκούσας εἰς τὴν περιοχὴν τῆς x_1, ἔστω τὰς x_2 καὶ x_3, θὰ εἶνε $\dfrac{\varphi'(x_3)-\varphi'(x_2)}{x_3-x_2}=\varphi''(\xi)$, ὅπου εἶνε $x_2<\xi<x_3$. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὑπετέθη $\varphi''(\xi)=0$, ἔχομεν $\varphi'(x_3)=\varphi'(x_2)$, ἤτοι ἡ $\varphi'(x)$ ἔχει τὴν αὐτὴν

τιμὴν διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ x, τὰς ἀνηκούσας εἰς τὴν περιοχὴν τῆς x_1· ἄρα εἶνε $\varphi'(x)=$σταθερά, ἔστω $\varphi'(x)=A$ καὶ ἐπομένως $\varphi(x)=Ax+B$. Ὄντως, ἐπειδὴ αἱ $\varphi(x)$ καὶ Ax ἔχουν παραγώγους ἴσας μὲ A (διὰ τὰς τιμὰς τοῦ x τὰς ἀνηκούσας εἰς τὴν ἐν λόγῳ περιοχήν), ἡ διαφορὰ $\varphi(x)-Ax$ ἔχει παράγωγον μηδέν, καὶ κατ᾽ἀνάγκην εἶνε $\varphi(x)-Ax=B$ (σταθερά), ἤτοι $\varphi(x)=Ax+B$.

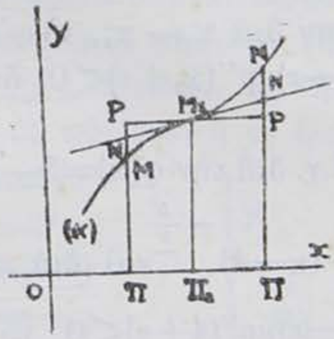
§ 78. Περὶ σημείων καμπῆς ἐπιπέδου καμπύλης.

Ἔστω $y=\varphi(x)$ ἡ ἐξίσωσις καμπύλης (k), ἐνῶ ἡ $\varphi(x)$ ἔχει πρώτης καὶ δευτέρας τάξεως παραγώγους διὰ $x=x_1$ καὶ διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ x, τὰς ἀνηκούσας εἰς περιοχήν τινα τῆς x_1.

Λέγομεν ὅτι, σημεῖον $M_1(x_1, y_1=\varphi(x_1))$ εἶνε ***σημεῖον καμπῆς*** τῆς (k), ἂν τὰ μὲν σημεῖα αὐτῆς, τὰ ἀνήκοντα εἰς δεξιὰν ἢ ἀριστεράν τινα περιοχὴν τοῦ M_1, κεῖνται ἄνω (§77) τῶν σημείων τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς (μὴ παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y) εἰς τὸ M_1, τὰ δ᾽ἀνήκοντα εἰς τὴν ἄλ-



(Σχ. 78).



(Σχ. 79).

λην περιοχὴν αὐτοῦ κεῖνται κάτωθεν τῆς αὐτῆς ἐφαπτομένης (Σχ. 78 καὶ 79). Εἶνε εὔκολον νὰ διακρίνωμεν ὅτι, ἂν εἶνε $\varphi''(x_1)=0$, ἐνῶ διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ x, τὰς ἀνηκούσας εἰς δεξιὰν ἢ ἀριστεράν τινα περιοχὴν τοῦ x_1, εἶνε $\varphi''(x)>0$, διὰ δὲ τὰς ἀνηκούσας εἰς τὴν ἄλλην περιοχὴν αὐτοῦ εἶνε $\varphi''(x)<0$, τὸ M_1 εἶνε σημεῖον καμπῆς τῆς (k). Διότι, αἱ διαφοραὶ τῶν τεταγμένων τῶν σημείων τῆς (k), τῶν κειμένων πρὸς τὸ ἓν μέρος τοῦ M_1, τῶν ἀνηκόντων εἰς περιοχήν τινα τούτου, καὶ τῶν ἀντιστοίχων αὐτῶν (ἐχόντων τὴν αὐτὴν τετμημένην) τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ M_1, εἶνε θετικαί, ἤτοι εἶνε $(\Pi M)-(\Pi N)=(NM)>0$, τῶν δὲ κειμένων πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τοῦ M_1 καὶ τῶν ἀντιστοίχων αὐτῶν τῆς ἐφαπτομένης εἶνε ἀρνητικαί, ἤτοι $(\Pi M)-(\Pi N)=(NM)<0$.

Ἀλλ' εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα φθάνομεν, ἂν θεωρήσωμεν ἀντὶ τοῦ (ΝΜ) τὴν ἴσην μὲ αὐτὸ παράστασιν (1), (βλ. σελ. 226) $\varepsilon[\varphi'(x_1+\mu\varepsilon)-\varphi'(x_1)]$, ὅπου εἶνε $0<\mu<1$. Ἂν θέσωμεν αὐτὴν ὑπὸ τὴν μορφὴν $\varepsilon^2\mu\varphi''(x_1+\mu_1\mu\varepsilon)$, ἐνῶ ὑποτίθεται $0<\mu_1<1$, παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν εἶνε τὸ $\varphi''(x+\mu_1\mu\varepsilon)>0$, θὰ ἔχωμεν $(NM)>0$, ἐνῶ, ὅταν εἶνε $\varphi'(x_1+\mu_1\mu\varepsilon)<0$, ἔχομεν $(NM)<0$.

Ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται ὅτι, ἵνα σημεῖόν τι M_1 (x_1, y_1) τῆς (k) εἶνε σημεῖον καμπῆς, πρέπει νὰ εἶνε $\varphi''(x_1)=0$, πρὸς δὲ ἡ $\varphi''(x)$ νὰ ἔχῃ τιμὰς ἀντιθέτους διὰ πάσας τὰς τιμὰς ἑκάστης τῶν δύο περιοχῶν $x_1-\varepsilon\leqq x<x_1$ καὶ $x_1<x\leqq x_1+\varepsilon$ (1).

Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι, διὰ νὰ εὕρωμεν τὰ σημεῖα καμπῆς καμπύλης τινὸς $y=\varphi(x)$, εὑρίσκομεν τὴν $\varphi''(x)$, θέτομεν $\varphi''(x)=0$ καὶ εὑρίσκομεν τὰς πραγματικὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως ταύτης. Ἀκολούθως εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα τῆς $\varphi''(x)$ διὰ τιμὰς τοῦ x ὀλίγον μικροτέρας καὶ ὀλίγον μεγαλυτέρας ἑκάστης τῶν ῥιζῶν αὐτῆς. Ἐὰν ϱ εἶνε μία ἐκ τῶν ἐν λόγῳ ῥιζῶν καὶ εἶνε $\varphi''(\varrho-\varepsilon).\varphi''(\varrho+\varepsilon)<0$, ὅπου τὸ ε εἶνε ἀπολύτως πολὺ μικρόν, τὸ σημεῖον $(\varrho, \varphi(\varrho))$ εἶνε σημεῖον καμπῆς.

Καὶ ὅταν διὰ $x \to x_1$, τὸ $\varphi'(x_1)$ καὶ $\varphi''(x_1)$ τείνουν πρὸς τὸ ∞, ἂν εἶνε $\varphi''(x_1-\varepsilon).\varphi''(x_1+\varepsilon)<0$, ὅπου $\varepsilon>0$, τὸ $(x_1, \varphi(x_1))$ εἶνε σημεῖον καμπῆς. Π.χ. διὰ τὴν $\varphi(x)=5-\sqrt[3]{x-4}$ ἔχομεν $\varphi'(x)=-{}^1/_3(x-4)^{-\frac{2}{3}}$,

$\varphi''(x)=\frac{2}{9}(x-4)^{-\frac{5}{3}}$ καὶ διὰ $x\to 4$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)\to\infty$. Ἐπειδὴ δ' εἶνε $\varphi''(4-\varepsilon).\varphi''(4+\varepsilon)<0$ τὸ σημεῖον $x=4$, $y=5$ εἶνε σημεῖον καμπῆς τῆς ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $y=\varphi(x)$ παριστανομένης καμπύλης.

Παρατηρήσεις. 1. Ἐὰν διὰ σημείου καμπῆς M_1 ἀχθῇ τέμνουσα τὴν (k) καὶ εἰς σημεῖον αὐτῆς M_1 κείμενον εἰς δεξιὰν ἢ ἀριστερὰν περιοχὴν τοῦ M_1, αὕτη θὰ τέμνῃ τὴν (k) καὶ εἰς ἓν ἀκόμη σημεῖον M', κείμενον εἰς τὴν ἄλλην περιοχὴν τοῦ M_1, ὅταν δὲ τὰ M καὶ M' τείνουν πρὸς τὸ M_1, ἡ ἐν λόγῳ τέμνουσα τείνει πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ M_1.

2. Ἐὰν διά τινας τιμὰς τοὐλάχιστον μιᾶς τῶν περιοχῶν (1) εἶνε $\varphi''(x)>0$ καὶ δι' ἄλλας τῆς αὐτῆς περιοχῆς $\varphi''(x)<0$, δὲν δυνάμεθα, κατὰ τ' ἀνωτέρω, νὰ διακρίνωμεν, ἂν τὸ M_1 εἶνε σημεῖον καμπῆς τῆς (k).

3. Διὰ νὰ εὕρωμεν σημεῖον $M_1(x_1, \varphi(x_1))$ διὰ τὸ ὁποῖον ἔχομεν $\varphi''(x_1)=0$, ἂν εἶνε σημεῖον καμπῆς, εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν παραγώγων τρίτης, τετάρτης κλπ. τάξεως, αἵτινες ὑποτίθεται ὅτι ὑπάρχουν,

διὰ $x = x_1$, καὶ ἂν μὲν ἡ πρώτη κατὰ σειρὰν ἐκ τῶν παραγώγων τούτων διάφορος τοῦ 0 εἶνε τάξεως περιττῆς, τὸ M_1 εἶνε σημεῖον καμπῆς, ἂν δ' εἶνε τάξεως ἀρτίας δὲν εἶνε τοιοῦτον.

§ 79. Κατασκευὴ ἐπιπέδου καμπύλης ἐκ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς.

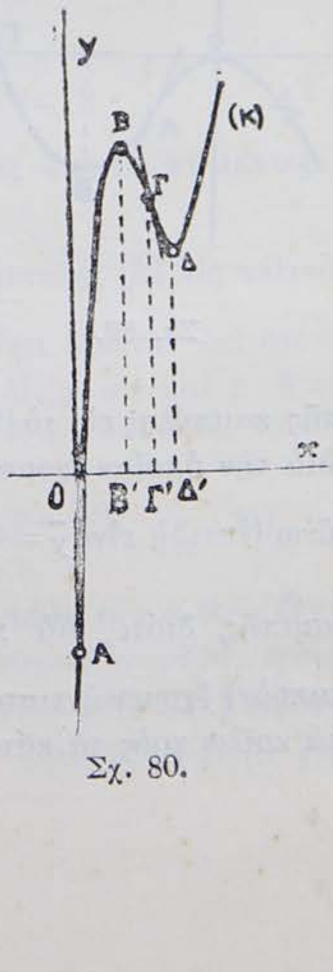
Ἔστω $y = \varphi(x)$ ἡ ἐξίσωσις ἐπιπέδου καμπύλης (k) εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους. Ἐὰν ἡ $\varphi(x)$ ἔχῃ τοὐλάχιστον πρώτην καὶ δευτέραν παράγωγον εἰς διάστημά τι τιμῆς τινος τῆς x, δυνάμεθα (κατὰ προσέγγισιν) νὰ κατασκευάσωμεν τὸ σχῆμα τῆς (k), τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ ἐν λόγῳ διάστημα. Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν διὰ τίνας πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x (ἀνηκούσας εἰς τὸ διάστημα) ἔχομεν $y = \varphi(x) = 0$, καὶ εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα ἡ (k) τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x. Δίδοντες εἰς τὸ x διαφόρους τιμὰς (ἀνηκούσας εἰς τὸ διάστημα), εὑρίσκομεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ y καὶ οὕτω ὁρίζομεν τὰ ἀντίστοιχα τούτων σημεῖα τῆς (k). Ἡ τιμὴ τῆς $\varphi'(x)$ διὰ τὰς τιμὰς ταύτας τοῦ x δίδει τὸν συντελεστὴν διευθύνσεως ἑκάστης τῶν ἐφαπτομένων εἰς ἕκαστον σημεῖον, ἄρα τὴν γωνίαν ἑκάστης αὐτῶν μὲ τὸν ἄξονα τῶν x. Χρησιμοποιοῦντες τὴν $\varphi''(x)$ εὑρίσκομεν, ἂν εἰς ἕκαστον τῶν σημείων τῆς (k) στρέφῃ αὕτη τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω ἢ πρὸς τὰ κάτω, μὲ τὴν βοήθειαν δὲ τῶν $\varphi'(x)$ καὶ $\varphi''(x)$ εὑρίσκομεν τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς (k), καὶ τὰ σημεῖα καμπῆς, ἂν ἔχῃ τοιαῦτα.

Ἐφαρμογαί. 1. Ἔστω π. χ. ἡ $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$. Ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ ἡ ὑπὸ ταύτης παριστανομένη καμπύλη εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους.

Ἔχομεν $\dot{y} = 3x^2 - 18x + 24$, ἡ δὲ $\dot{y} = 0$ ἔχει ῥίζας τὰς 2 καὶ 4, $\ddot{y} = 6x - 18$, ἡ $\ddot{y} = 0$ ἔχει ῥίζαν 3.

Διὰ $x = 0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ ἔχομεν
$y = -7,\ 13,\ 11,\ 9,\ 13.$
$\dot{y} = +,\ 0,\ -,\ 0,\ -,$
$\ddot{y} = -,\ -,\ 0,\ +,\ +.$

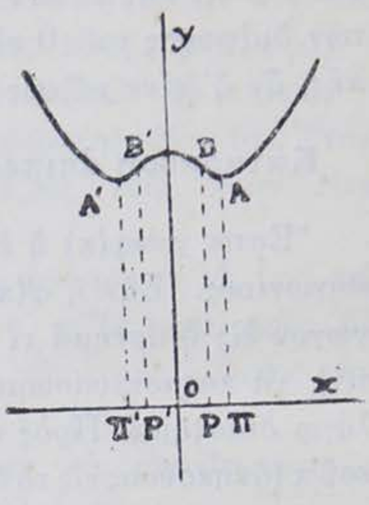
Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι, τὸ μὲν σημεῖον Γ(3, 11) εἶνε σημεῖον καμπῆς, εἰς δὲ τὸ Β(2, 13) ἀντιστοιχεῖ μέγιστον καὶ εἰς τὸ Δ(4,9) ἐλάχιστον τῆς καμπύλης. Εἰς



Σχ. 80.

μὲν τὰ σημεῖα $A(0,-7)$ καὶ $B(2,13)$ ἡ καμπύλη στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ κάτω, εἰς δὲ τὰ $\Delta(4,9)$ καὶ $(5,13)$ στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω. Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς καθέτου τῆς καμπύλης (Σχ. 80) εἰς τὸ σημεῖον καμπῆς αὐτῆς εἶνε

$3x+y=20$ καὶ $3y-x=30$.

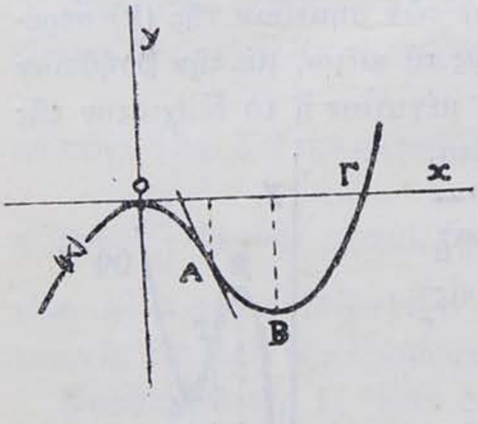


Σχ. 81.

2. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $y=x^4-2x^2+10$. Εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τὰ σημεῖα $(0, 10)$ καὶ $(\pm 1, 9)$ ἀντιστοιχοῦν μέγιστον καὶ ἐλάχιστον τῆς καμπύλης, τὰ δὲ $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{85}{9}\right)$ εἶνε σημεῖα καμπῆς αὐτῆς (Σχ. 81).

3. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $y=x^3-2x^2$ εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους Ἔχομεν $\dot{y}=3x^2-4x$, $\ddot{y}=6x-4$.

Αἱ ρίζαι τῆς $y=x^3-2x^2=x^2(x-2)=0$ εἶνε 0 καὶ 2, τῆς $\dot{y}=3x^2-4x=0$ αἱ 0 καὶ $\frac{4}{3}$, τῆς δὲ $\ddot{y}=6x-4=0$ ἡ $\frac{2}{3}$.



Σχ. 82.

Ἡ ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως παριστανομένη καμπύλη διέρχεται διὰ τῶν σημείων $(0,0)$, $(2, 0)$ καὶ διὰ $x<2$ εἶνε $y<0$, αὐξάνεται δ' ἀπολύτως τὸ y διὰ τιμὰς τοῦ $x<0$ καὶ ἀπολύτως αὐξανομένας, ἐνῶ διὰ $x>2$ καὶ x αὐξανόμενον ἔχομεν $y>0$ καὶ y αὐξανόμενον. Ἡ καμπύλη ἐφάπτεται εἰς τὸ $(0,0)$ τοῦ ἄξονος τῶν x (ἐπειδὴ εἶνε $\dot{y}=0$) καὶ στρέφει εἰς αὐτὸ τὰ κοῖλα πρὸς τὰ κάτω (εἶνε $\ddot{y}=-4$), ἐνῶ ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἰς τὸ $(2,0)$ μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν x σχηματίζει γωνίαν φ διὰ τὴν ὁποίαν ἔχομεν $\varepsilon\varphi\varphi=4$, στρέφει δ' εἰς αὐτὸ τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω (ἐπειδὴ εἶνε $\ddot{y}=8$). Τὸ σημεῖον $A\left(\frac{2}{3}, -\frac{16}{27}\right)$ εἶνε σημεῖον καμπῆς, διότι διὰ $x=\frac{2}{3}-\varepsilon$ καὶ $x=\frac{2}{3}+\varepsilon$ (ὅπου $\varepsilon>0$ καὶ πολὺ μικρὸν) ἔχομεν ἀντιστοίχως $\ddot{y}<0$ καὶ $\ddot{y}>0$, στρέφει εἰς τὰ πρὸ τοῦ A τὰ κοῖλα πρὸς τὰ κάτω εἰς τὰ μετ' αὐτὸ πρὸς τὰ ἄνω. Διὰ $x=0$ ἔχει (σχετικὸν) μέγιστον (ἐπειδὴ εἶνε $\dot{y}=0$ καὶ $\ddot{y}<0$) διὰ $x=\frac{4}{3}$ δὲ (σχετικὸν) ἐλάχιστον (διότι εἶνε $\dot{y}=0$ καὶ $\ddot{y}>0$) (Σχ. 82).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ καμπύλαι, τῶν ὁποίων δίδονται κατωτέρω αἱ ἐξισώσεις καὶ νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν ἐφαπτομένων των εἰς τὰ σημεῖα καμπῆς αὐτῶν.

796. $y=x^3-7x^2-26x+5$. 797. $y=1/2\,x^4-3x^2+2$.

798. $y=\frac{6x}{1+x^2}$. 799. $y=12x-x^3$.

800. $4y+x^3-9x^2+4=0$. 801. $y=x^3-3x^2-9x+9$.

802. $2y+x^3-9x+6=0$. 803. $y=x^3-6x^2-15x+2$.

804. $y(1+x^2)=x$. 805. $y=\frac{8\alpha^3}{x^2+4\alpha^2}$.

806. $y=e^{-x^2}$. 807. $y=\frac{4+x}{x^2}$.

808. $y=(1+x)^{\frac{2}{3}}(x-5)^2$. 809. $y=\frac{x+2}{x^3}$.

810. $y=x^3-3x^2-24x$. 811. $y=18+36x-3x^2-2x^3$.

812. $y=x-2\text{συν}x$. 813. $y=3x-x^3$.

814. $y=x^3-9x^2+15x-3$ 815. $x^2y=x+4$.

816. $4y=x^4-6x^2+5$. 817. $y=\frac{x^3}{x^2+3\alpha^2}$.

818. $y=\text{ημ}\,x+\frac{x}{2}$. 819. $y=\frac{x^2+4}{x}$.

820. $y=5x-2x^2-\frac{x^3}{3}$. 821. $y=\frac{1+x^2}{2x}$.

822. $y=x-2\text{ημ}x$. 823. $y=\text{λογσυν}x$.

§ 80. Κυρτὰ καὶ κοῖλα καμπύλης εἰς πολικὰς συντεταγμένας.

Ἔστω $\frac{1}{\varrho}=\varphi(\vartheta)$ ἡ ἐξίσωσις ἐπιπέδου καμπύλης (k) εἰς πολικὰς συντεταγμένας, ἐνῷ ἡ $\varphi(\vartheta)$ εἶνε ὡρισμένη καὶ ἔχει πρώτην καὶ δευτέραν παράγωγον εἰς περιοχήν τινα τοῦ σημείου $M_1(\varrho_1,\vartheta_1)$ καὶ r ἡ εἰς τυχὸν σημεῖον τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ M_1 ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τοῦ ϱ. Ἔχομεν (§ 73, σελὶς 210)

$$\varphi(\vartheta)=\varphi(\vartheta_1)\text{συν}(\vartheta-\vartheta_1)+\varphi'(\vartheta_1)\text{ημ}(\vartheta-\vartheta_1) \qquad (1)$$

ὡς ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης τῆς (k) εἰς τὸ M_1.

Λέγομεν ὅτι ἡ (k) ***στρέφει τὰ κοῖλα αὐτῆς πρὸς τὸν πόλον O εἰς τὸ M_1***(Σχ.83) καὶ τὰ κυρτὰ ἔξω τοῦ O, ἂν εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ M_1, ἡ διαφορὰ (OP)−(OM)=(MP) εἶνε θετική, καὶ τοὐναντίον, ὅτι ἡ (k) στρέφει εἰς τὸ M_1 τὰ κοῖλα ἔξω τοῦ O καὶ τὰ κυρτὰ πρὸς αὐτὸ (Σχ.84), ἂν εἶνε

$(OP)-(OM)=(MP)<0$. Ἂν τεθῇ $(OM_1)=\rho_1$, $(OM)=\rho$ καὶ $(OP)=r$, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ $(MP)=r-\rho$ ἔχει τὸ αὐτὸ σημεῖον μὲ τὸ $\frac{r-\rho}{r\rho}$ (ἐπειδὴ τὰ OM, OP θεωροῦνται θετικὰ) ἢ μὲ τὴνδιαφορὰν $\frac{1}{\rho}-\frac{1}{r}$, ἥτις εἶνε συνάρτησις τοῦ ϑ, ἔστω δ' αὕτη $\omega(\vartheta)$.

Ἕνεκα τῆς (1) ἔχομεν

$$\omega(\vartheta)=\frac{1}{\rho}-\frac{1}{r}=\varphi(\vartheta)-\varphi(\vartheta_1)\sigma\upsilon\nu(\vartheta-\vartheta_1)-\varphi'(\vartheta_1)\eta\mu(\vartheta-\vartheta_1)$$

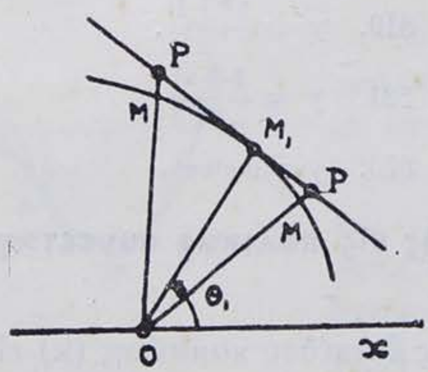
καὶ

$$\dot{\omega}(\vartheta)=\varphi'(\vartheta)+\varphi(\vartheta_1)\eta\mu(\vartheta-\vartheta_1)-\varphi'(\vartheta_1)\sigma\upsilon\nu(\vartheta-\vartheta_1)$$

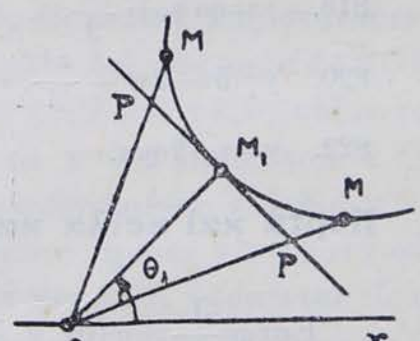
$$\ddot{\omega}(\vartheta)=\varphi''(\vartheta)+\varphi(\vartheta_1)\sigma\upsilon\nu(\vartheta-\vartheta_1)+\varphi'(\vartheta_1)\eta\mu(\vartheta-\vartheta_1)$$

ὅπου $\dot{\omega}(\vartheta)$ καὶ $\ddot{\omega}(\vartheta)$ παριστάνουν τὴν πρώτην καὶ δευτέραν παράγωγον τοῦ $\omega(\vartheta)$ ὡς πρὸς ϑ, προφανῶς δὲ διὰ $\vartheta=\vartheta_1$ εἶνε τὸ $\omega(\vartheta)=0$, $\dot{\omega}=0$, $\ddot{\omega}=\varphi''(\vartheta_1)+\varphi(\vartheta_1)$. Ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι εἶνε $\varphi(\vartheta_1)+\varphi''(\vartheta_1)>0$, ἔχομεν (σχετικὸν) ἐλάχιστον διὰ $\vartheta=\vartheta_1$ καὶ εἰς ἑκάστην τῶν περιοχῶν $\vartheta_1-\varepsilon\leqq\vartheta<\vartheta_1$ καὶ $\vartheta_1<\vartheta\leqq\vartheta_1+\varepsilon$, ὅπου ε παριστάνει ἀριθμὸν θετικόν, ἔχομεν $\omega(\vartheta)>0$, ἡ δὲ $\omega(\vartheta)$ βαίνει ἐλαττουμένη εἰς τὴν πρώτην περιοχὴν καὶ αὐξανομένη εἰς τὴν δευτέραν, ἄρα ἡ (k) στρέφει εἰς τὸ M_1 τὰ κοῖλα πρὸς τὸ O (Σχ. 83).

Ἐὰν εἶνε $\varphi(\vartheta_1)+\varphi''(\vartheta_1)<0$, ἡ $\omega(\vartheta)$ γίνεται μεγίστη διὰ $\vartheta=\vartheta_1$



Σχ. 83.



Σχ. 84.

καὶ εἶνε ἀρνητικὴ εἰς ἑκάστην τῶν δύο περιοχῶν, ἄρα ἡ (k) στρέφει εἰς τὸ M_1 τὰ κοῖλα ἔξω τοῦ O (Σχ. 84).

Ἐὰν εἶνε $\varphi(\vartheta_1)+\varphi''(\vartheta_1)=0$, ἢ ἂν τὸ ἄθροισμα $\varphi(\vartheta_1)+\varphi''(\vartheta_1)$ ἔχῃ τιμὴν ἀπροσδιόριστον, ἐξετάζομεν τὸ σημεῖον τῆς $\ddot{\omega}(\vartheta)$ διὰ τιμὰς τοῦ ϑ κειμένας εἰς ἑκάστην τῶν περιοχῶν $\vartheta_1-\varepsilon\leqq\vartheta<\vartheta_1$ καὶ $\vartheta_1<\vartheta\leqq\vartheta_1+\varepsilon$. Ἂν τὸ $\ddot{\omega}(\vartheta)$ ἀλλάσσῃ σημεῖον διὰ $\vartheta=\vartheta_1$, τὸ M_1 εἶνε σημεῖον καμπῆς τῆς (k), καὶ ἂν μὲν ἡ $\ddot{\omega}(\vartheta)$ μεταβαίνῃ π. χ. ἐκ τοῦ σημείου $+$ εἰς τὸ $-$ διὰ

$\vartheta=\vartheta_1$ τὸ εἰς τὴν πρώτην περιοχὴν ἀντιστοιχοῦν τόξον τῆς (k) στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὸ O, εἰς δὲ τὴν δευτέραν περιοχὴν στρέφει τὰ κυρτὰ πρὸς τὸ O. Ἐὰν ὅμως ἡ $\ddot{\omega}(\vartheta)$ μηδενίζεται διὰ $\vartheta=\vartheta_1$ χωρὶς νὰ ἀλλάσσῃ σημεῖον, ἤτοι ἂν ἡ $\ddot{\omega}(\vartheta)$ εἰς ἑκάστην τῶν ἐν λόγῳ περιοχῶν ἔχῃ τὸ αὐτὸ σημεῖον + ἢ τὸ —, ἡ (k) στρέφει εἰς τὸ M_1 τὰ κοῖλα πρὸς τὸ O ἢ ἐκτὸς αὐτοῦ.

Ἐν γένει, δεικνύεται ὅτι, ἂν εἶνε $\ddot{\omega}(\vartheta)=0$, ἡ δὲ τρίτη παράγωγος τῆς $\omega(\vartheta)$(ὑποτιθεμένη ὡρισμένη) διὰ $\vartheta=\vartheta_1$ εἶνε διάφορος τοῦ 0 ἢ καὶ γενικώτερον, ἐφ' ὅσον αἱ παράγωγοι διαφόρων τάξεων τῆς $\omega(\vartheta)$ εἶνε ὡρισμέναι, εὑρίσκομεν τὴν κατὰ σειρὰν πρώτην ἐκ τῶν παραγώγων τούτων διαφόρων τάξεων ἡ ὁποία διὰ $\vartheta=\vartheta_1$ εἶνε διάφορος τοῦ 0. Ἂν αὕτη εἶνε ἀρτίας τάξεως καὶ θετική, ἡ (k) στρέφει εἰς τὸ M_1 τὰ κοῖλα πρὸς τὸ O, ἐὰν δ' εἶνε ἀρνητική, στρέφει τὰ κυρτὰ πρὸς αὐτό, ἐνῷ ἂν εἶνε τάξεως περιττῆς, τὸ M_1 εἶνε σημεῖον καμπῆς.

Παρατηρητέον ὅτι θὰ ἔχωμεν τὰ ἀντίστροφα τῶν ἀνωτέρω, ἐὰν εἶνε $\varrho_1<0$, διότι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ ἔχωμεν $r-\varrho<0$, ἂν ὑποτεθῇ $|r|-|\varrho|>0$ καὶ ἑπομένως $\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{r}<0$. Ἄρα ἡ (k) θὰ στρέφῃ εἰς τὸ M_1 τὰ κοῖλα ἢ τὰ κυρτὰ πρὸς τὸ O, ἂν ἔχωμεν

$$\varphi(\vartheta_1)[\varphi(\vartheta_1)+\varphi''(\vartheta_1)]>0 \quad \text{ἢ} \quad <0.$$

Παρατήρησις. Τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα δὲν ἐφαρμόζονται, ὅταν ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ M_1 ἢ ἡ καμπύλη (k) διέρχεται διὰ τοῦ πόλου O, ὁπότε δι' ἀλλαγῆς τῆς θέσεως τοῦ πόλου ἢ καὶ τοῦ πολικοῦ ἄξονος δυνάμεθα νὰ ἐπανέλθωμεν εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 824. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα καμπῆς τῆς καμπύλης $\vartheta+\sigma\upsilon\nu\vartheta$, (α σταθερόν).

825. Ἂν ἡ καμπύλη, ἡ ὁποία ἔχει ἐξίσωσιν $\varrho(e^{\mu\vartheta}+e^{-\mu\vartheta})=\alpha$ τμηθῇ ὑπὸ εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ πόλου, νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ σημεῖα τομῆς εἶνε ἐφαπτόμεναι μιᾶς ὑπερβολῆς.

Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ καμπύλαι τῶν ὁποίων δίδονται κατωτέρω αἱ ἐξισώσεις.

826. $\varrho=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\vartheta}+\frac{1}{\eta\mu\vartheta}$. 827. $\varrho=\frac{\sigma\upsilon\nu\vartheta-\eta\mu\vartheta}{(\sigma\upsilon\nu\vartheta+\eta\mu\vartheta)^2}$ 828. $\varrho=\alpha-\beta\vartheta$.

829. $\varrho=\frac{\eta\mu\vartheta}{2\vartheta-3\sigma\upsilon\nu\vartheta}$. 830. $\varrho=\frac{1+\varepsilon\varphi\,\vartheta}{1-2\eta\mu\vartheta}$. 831. $\varrho=\frac{1+\sigma\upsilon\nu\,\vartheta}{\sigma\upsilon\nu\vartheta}$

832. $\varrho=\sqrt{1-2\lambda\,\sigma\upsilon\nu\vartheta}-\sqrt{\varepsilon\varphi\,\vartheta}$. 833. $\varrho=\frac{\varepsilon\varphi 4\vartheta}{\varepsilon\varphi\vartheta}$.

834. $\varrho=\frac{p}{1-\varepsilon\,\sigma\upsilon\nu\,\mu\vartheta}$. 835. $\vartheta=\varrho(\varrho+1)(\varrho+2)$.

836. $\varrho^2=\alpha+\beta\eta\mu\vartheta+\gamma\eta\mu^2\vartheta$. 837. $\varrho^2-3\varrho\sigma\upsilon\nu\vartheta+2\eta\mu^2\vartheta=0$.

838. $\varrho^2-2\varrho\sigma\upsilon\nu\vartheta-1=0$. 839. $\varrho^2-2\vartheta^2\varrho+\vartheta^3+1=0$.

840. $\varrho^2 - \varepsilon\varphi\vartheta - \alpha\varrho\ \eta\mu\vartheta + \sigma\upsilon\nu\vartheta = 0$. 841. $\varrho^4 - 4\varrho\sigma\upsilon\nu^2\vartheta + 4\eta\mu^2\vartheta = 0$.
842. $\varrho^4 - 2\varrho^2\sigma\upsilon\nu\vartheta + 1 - 2\eta\mu\vartheta = 0$. 843. $\varrho^2 - 3\varrho(1+\sigma\upsilon\nu\vartheta) + 2\sigma\upsilon\nu^2\vartheta = 0$.

§ 81. Περὶ ἀσυμπτώτων ἐπιπέδου καμπύλης.

Ἔστω $F(x,y)=0$ (1) ἡ ἐξίσωσις ἐπιπέδου καμπύλης ἐνῷ ἡ $F(x,y)$ εἶνε (μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν καὶ τὴν ἀπαλλαγὴν ἀπὸ τυχὸν ὑπαρχόντων ῥιζικῶν) ἀκεραία συνάρτησις βαθμοῦ μ ὡς πρὸς x καὶ y. Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις ἀσυμπτώτου τινὸς τῆς (1) εἶνε τῆς μορφῆς $y=\lambda x+B$ (2) ἢ $x=ky+A$ (3), ἐπειδὴ ἡ ἀπόστασις σημείου τινὸς $M(x,y)$ κειμένου ἐπὶ ἀπεράντου κλάδου τῆς (1) ἀπὸ τῆς (2) ἢ τῆς (3) τείνει εἰς τὸ μηδέν, ὅταν τὸ M ἀπομακρύνεται εἰς ἄπειρον (§ 19, σελὶς 39), ἕπεται ὅτι θὰ ἔχωμεν (εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους) $\dfrac{y-\lambda x-B}{\sqrt{1+\lambda^2}} \to 0$ ἢ $\dfrac{x-ky-A}{\sqrt{1+k^2}} \to 0$,

$$\text{ἢ } \lambda = \underset{x\to\infty}{\text{ὅριον}} \left(\frac{y}{x} - \frac{B}{x}\right) = \underset{x\to\infty}{\text{ὅριον}} \left(\frac{y}{x}\right) \qquad (2')$$

$$\text{καὶ } k = \underset{y\to\infty}{\text{ὅριον}} \left(\frac{x}{y} - \frac{A}{y}\right) = \underset{y\to\infty}{\text{ὅριον}} \left(\frac{x}{y}\right) \qquad (3')$$

Ἂν τὸ πρῶτον μέλος τῆς (1) γράψωμεν ὑπὸ τὴν μορφὴν $F(x,y)=\Phi_\mu + \Phi_{\mu-1} + \Phi_{\mu-2} + \ldots + \Phi_1 + \Phi_0 = 0$ (1′), ὅπου τὸ Φ_i παριστάνει τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς $F(x,y)$ βαθμοῦ i ὡς πρὸς y καὶ x, θὰ εἶνε π. χ. $\Phi_\mu = A_0 y^\mu + A_1 y^{\mu-1}x + \ldots + A_\mu x^\mu$, $\Phi_{\mu-1} = B_0 y^{\mu-1} + B_1 y^{\mu-2}x + \ldots + B_{\mu-1}x^{\mu-1}, \ldots, \Phi_1 = \Lambda_0 y + \Lambda_1 x, \Phi_0 =$ σταθερόν. Παρατηρητέον ὅτι, αἱ συντεταγμέναι τοῦ $M(x,y)$ ἐπαληθεύουν τὴν (1) ἢ τὴν (1′) καὶ ἂν διαιρέσωμεν διὰ x^μ τὰ μέλη τῆς (1′) εὑρίσκομεν

$$\frac{\Phi_\mu}{x^\mu} = A_0\left(\frac{y}{x}\right)^\mu + A_1\left(\frac{y}{x}\right)^{\mu-1} + \ldots + A_{\mu-1}\left(\frac{y}{x}\right) + A_\mu,$$

$$\frac{\Phi_{\mu-1}}{x^\mu} = \frac{1}{x}\left[B_0\left(\frac{y}{x}\right)^{\mu-1} + B_1\left(\frac{y}{x}\right)^{\mu-3} + \ldots + B_{\mu-1}\right], \ldots$$

Ἑπομένως, ἕνεκα τῆς (2′), θὰ εἶνε, ἂν τὸ λ εἶνε πεπερασμένη ποσότης,

$$\underset{x\to\infty}{\text{ὅριον}} \frac{\Phi_\mu}{x^\mu} = A_0\lambda^\mu + A_1\lambda^{\mu-1} + \ldots + A_{\mu-1}\lambda + A_\mu,$$

$$\underset{x\to\infty}{\text{ὅριον}} \frac{\Phi_{\mu-1}}{x^\mu} = 0, \quad \underset{x\to\infty}{\text{ὅριον}} \frac{\Phi_{\mu-2}}{x^\mu} = 0,$$

ἡ δὲ ἐξίσωσις (1′) γίνεται $\quad A_0\lambda^\mu + A_1\lambda^{\mu-1} + \ldots + A_\mu = 0. \qquad (4)$

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ τὸ λ παριστάνει τὸν συντελεστὴν διευθύνσεως τῆς (2), ἕπεται ὅτι εἰς τὰς διαφόρους ῥίζας τῆς ἐξισώσεως (4) ἀντιστοιχοῦν αἱ διάφοροι διευθύνσεις τῶν ἀσυμπτώτων τῆς (1).

Ἄρα, ἐὰν ἡ καμπύλη (1) εἶνε βαθμοῦ μ, ἔχει τὸ πολὺ μ σημεῖα κατ᾽ ἐκδοχὴν καὶ μ ἀσυμπτώτους, αἱ ὁποῖαι εἶνε πραγματικαὶ ἢ φανταστικαί, ἂν αἱ ῥίζαι τῆς (4) εἶνε τοιαῦται.

Παρατηρητέον ὅτι, ἂν εἶνε $A_0=0$, ἐλαττοῦται μὲν ὁ ἀριθμὸς τῶν ῥιζῶν τῆς (4), ἀλλ᾽ ὄχι καὶ ὁ τῶν ἀσυμπτώτων τῆς (1), ἐπειδὴ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην δύναται ἡ ἀσύμπτωτος νὰ ἔχῃ ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς (3). Πράγματι, ἂν διαιρέσωμεν τὰ μέλη τῆς (1') διὰ y^μ καὶ ὑποτεθῇ ὅτι $y \to \infty$, ἐπειδὴ εἶνε ὅριον $\lim\limits_{y\to\infty} \frac{x}{y}=k$, θὰ ἔχωμεν:

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\Phi_\mu}{y^\mu}=A_\mu k^\mu+A_{\mu-1}k^{\mu-1}+\dots+A_0=0, \qquad (4')$$

ἄρα, ἂν εἶνε $A_0=0$, ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει τὴν ῥίζαν $k=\frac{1}{\lambda}=0$ καὶ ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς ταύτην ἀσύμπτωτος τῆς (1) εἶνε παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y. Ἐὰν εἶνε καὶ $A_1=0$, ἡ ἀνωτέρω τελευταία ἐξίσωσις ἔχει τὴν ῥίζαν $k=0$ διπλῆν, ἑπομένως δύο ἀσύμπτωτοι τῆς (1) εἶνε παράλληλοι τοῦ ἄξονος τῶν y, κλπ.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν συντελεστὴν διευθύνσεως μιᾶς ἀσυμπτώτου, ἂν εὕρωμεν μίαν ῥίζαν τῆς (4) ἢ τῆς (4'), πρὸς εὕρεσιν δὲ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ καὶ ἡ τιμὴ τοῦ B τῆς (2) ἢ τοῦ A τῆς (3). Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν τὰς τομὰς τῆς (1) μετὰ τῆς εὐθείας (2), ἤτοι τὰς κοινὰς ῥίζας τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) ἢ τὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως $F(x, \lambda x+B)=0$ (5), ἥτις τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $F(x,\lambda x+B)=P_0x^\mu+P_1x^{\mu-1}+\dots+P_{\mu-1}x+P_\mu=0$ (5')
ἐνῷ οἱ συντελεσταὶ $P_0, P_1, \dots,$ εὑρίσκονται ἐκ τῶν $\Phi_\mu(x,\lambda x+B)$, $\Phi_{\mu-1}(x,\lambda x+B), \dots$ Οὕτω ἔχομεν π.χ.

$$\Phi_\mu(x,\lambda x+B)=A_0(\lambda x+B)^\mu+A_1(\lambda x+B)^{\mu-1}x+\dots+A_\mu x^\mu=$$
$$=(A_0\lambda^\mu+A_1\lambda^{\mu-1}+\dots+A_{\mu-1}\lambda+A_\mu)\,x^\mu+$$
$$+B[\mu.A_0\lambda^{\mu-1}+(\mu-1)A_1\lambda^{\mu-2}+\dots+2A_{\mu-2}.\lambda+A_{\mu-1}]x^{\mu-1}+\dots$$

Ἑπομένως εἶνε $P_0=A_0\lambda^\mu+A_1\lambda^{\mu-1}+\dots+A_{\mu-1}\lambda+A_\mu$,

$$P_1=B[\mu A_0\lambda^{\mu-1}+(\mu-1).A_1.\lambda^{\mu-2}+\dots+A_{\mu-1}]+$$
$$+[B_0\lambda^{\mu-1}+B_1\lambda^{\mu-2}+\dots+B_{\mu-2}.\lambda+B_{\mu-1}].$$

Ἀλλὰ κατὰ τὴν γενομένην ὑπόθεσιν ἡ τιμὴ τοῦ λ ἐπαληθεύει τὴν $P_0=0$ καὶ μία ῥίζα (ὡς πρὸς x) τῆς ἐξισώσεως (5) τείνει εἰς ∞, ἤτοι ἡ εὐθεῖα (2) διέρχεται διὰ κατ᾽ ἐκδοχὴν σημείου τῆς (1), οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶνε τὸ B. Ἀλλ᾽ ἵνα ἡ εὐθεῖα (2) ἐφάπτεται τῆς καμπύλης (1), πρέπει νὰ ὁρίσωμεν τὸ B οὕτως, ὥστε μία ἀκόμη ῥίζα τῆς (5) νὰ τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον, ἤτοι πρέπει νὰ ἔχωμεν $P_1=0$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν

$$B=-\frac{B_0\lambda^{\mu-1}+B_1\lambda^{\mu-2}+\ldots\ldots+B_{\mu-1}}{\mu A_0\lambda^{\mu-1}+(\mu-1)A_1\lambda^{\mu-2}+\ldots.+A_{\mu-1}}.$$

Ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται ὅτι, διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν ἀσυμπτώτων τῆς καμπύλης (1), ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸ Φ_μ διὰ x^μ καὶ ἀφοῦ τεθῇ $\underset{x\to\infty}{\text{ὅριον}}\dfrac{y}{x}=\lambda$ νὰ θέσωμεν

$\underset{x\to\infty}{\text{ὅριον}}\dfrac{\Phi^\mu}{x^\mu}=A_0.\lambda^\mu+A_1\lambda^{\mu-1}+\ldots\ldots+A_{\mu-1}.\lambda+A_\mu=0$, ρίζα δέ τις τῆς ἐξισώσεως ταύτης, ἔστω ἡ λ, παριστάνει τὸν συντελεστὴν διευθύνσεως τῆς (2). Ἀκολούθως θέτομεν $y=\lambda x+B$ εἰς τὴν (1) καὶ διαιροῦμεν διὰ $x^{\mu-1}$ τὸ $\Phi_\mu+\Phi_{\mu-1}=0$, θέτοντες δὲ $x\to\infty$, εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς B, ἐκ τῆς ὁποίας καὶ εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ B.

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν τὰς ἀσυμπτώτους τῆς καμπύλης (1), τὰς ἐχούσας ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $x=ky+A$, δι' ἐναλλαγῆς τῶν x καὶ y, ἡ ἐναλλαγὴ δ' αὕτη εἶνε ἀναγκαία, ὅταν μία ἢ περισσότεραι ἀσύμπτωτοι εἶνε παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y, ἤτοι ἂν εἶνε $A_0=0$, $A_1=0$,....

Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις $\varphi(\lambda)=A_0\lambda^\mu+A_1\lambda^{\mu-1}+\ldots+A_\mu=0$ (6) ἔχῃ ρίζας ἴσας, ἤτοι, ὅταν τινὲς τῶν ἀσυμπτώτων εἶνε μεταξύ των παράλληλοι, ἐπειδὴ θὰ ἔχωμεν διὰ τὴν ἐν λόγῳ πολλαπλῆν ρίζαν τῆς (6) καὶ $\varphi'(\lambda)=\mu A_0\lambda^{\mu-1}+(\mu-1)A_1\lambda^{\mu-2}+\ldots+A_{\mu-1}=0$, ἢ ἡ τιμὴ τοῦ B θὰ εἶνε ἄπειρος ἢ θὰ ἔχωμεν καὶ $B_0\lambda^{\mu-1}+B_1\lambda^{\mu-2}+\ldots+B_{\mu-1}=0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ εἶνε $P_1=0$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ B καὶ εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν (ἢ δύο τιμὰς) τούτου, ἐὰν θέσωμεν $P_2=0$.

Ἐὰν εἶνε $P_2=0$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ B, καθὼς καὶ $P_3,\ldots.,P_{\mu-1}$, εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ B οὕτως, ὥστε νὰ εἶνε καὶ $P_\mu=0$.

Ἡ τελευταία αὕτη ἐξίσωσις θὰ εἶνε βαθμοῦ ρ ὡς πρὸς B, ἐὰν ρ τιμαὶ τοῦ λ εἶνε ἴσαι, ἀντιστοιχοῦν δ' εἰς ταύτας ρ διάφοροι μεταξύ των παράλληλοι ἀσύμπτωτοι.

Τὰς ἀσυμπτώτους καμπύλης τινὸς δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ ὡς ἑξῆς, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι, ἡ ἀσύμπτωτος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἰς κατ' ἐκδοχὴν σημεῖον αὐτῆς. Ἐὰν $y=f(x)$ εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους, ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον $M_1(x_1,y_1)$ αὐτῆς εἶνε $y-y_1=\dfrac{dy_1}{dx_1}(x-x_1)$, αἱ δὲ συντεταγμέναι ταύτης ἐπὶ τὴν ἀρχὴν εἶνε

$$x_1 - y_1 \frac{dx_1}{dy_1}, \quad y_1 - x_1 \frac{dy_1}{dx_1}.$$

Ἐπειδὴ ἡ ἀσύμπτωτος θὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων ἀπόστασίν τινα ὡρισμένην, τουλάχιστον μία τῶν συντεταγμένων ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ M_1 τῆς καμπύλης θὰ ἔχῃ ὅριον ἀριθμόν τινα ὡρισμένον, ὅταν $M_1 \to \infty$. Ἂν λοιπὸν ἔχωμεν, ὅταν τὸ M_1 τείνῃ νὰ ἀπομακρυνθῇ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν ἐπὶ τῆς καμπύλης κινούμενον, ὅριον $\left(x_1 - y_1 \frac{dx_1}{dy_1}\right) = A$, ὅριον $\left(y_1 - x_1 \frac{dy_1}{dx_1}\right) = B$, ἡ ἐξίσωσις τῆς ἀσυμπτώτου θὰ εἶνε $\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 1$.

Ἐὰν μία μόνον τῶν συντεταγμένων ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης ἔχῃ ὅριον ὡρισμένον ἀριθμὸν καὶ εἶνε ὅριον τοῦ $\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right) = \lambda$, ἡ ἐξίσωσις τῆς ἀσυμπτώτου θὰ εἶνε

$$y = \lambda x + B \quad \text{ἢ} \quad x = \frac{y}{\lambda} + A.$$

Παραδείγματα. 1. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις τῆς Y_π $\beta^2 x^2 - \alpha^2 y^2 - \alpha^2 \beta^2 = 0$. Ἔχομεν $\frac{dy}{dx} = \frac{\beta^2 x}{\alpha^2 y} = \pm \frac{\beta}{\alpha \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{x^2}}}$ καὶ $\underset{x \to \infty}{\text{ὅριον}} \frac{dy}{dx} = \pm \frac{\beta}{\alpha} = \lambda$.

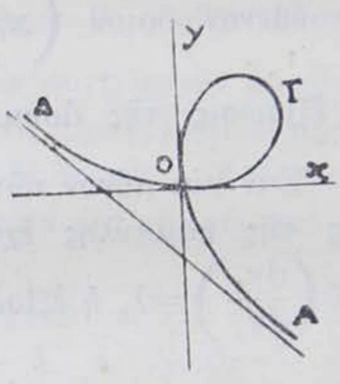
Αἱ συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον M_1 (x_1, y_1) εἶνε $\frac{\alpha^2}{x_1}$, $-\frac{\beta^2}{y_1}$ καὶ τείνουν αὗται εἰς τὸ 0, ὅταν $x_1, y_1 \to \infty$. Ἄρα αἱ ἐξισώσεις τῶν ἀσυμπτώτων τῆς Y_π εἶνε $y = \pm \frac{\beta}{\alpha} x$. Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν ἀκολουθοῦντες καὶ τὴν πρώτην ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσαν πορείαν. Πράγματι, ἔχομεν $\mu = 2$, $\frac{\Phi_2}{x^2} = \beta^2 - \frac{\alpha^2 y^2}{x^2}$ καὶ $\underset{x \to \infty}{\text{ὅριον}} \frac{\Phi_2}{x^2} = \beta^2 - \alpha^2 \lambda^2 = 0$, ἄρα $\lambda = \pm \frac{\beta}{\alpha}$. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ B τῆς ἐξισώσεως $y = \lambda x + B$, θέτομεν τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ y εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν καὶ διαιροῦντες τὸ ἐξαγόμενον διὰ x, εὑρίσκομεν $2\alpha\beta . B + \frac{\alpha^2 B^2 + \alpha^2 \beta^2}{x} = 0$, ἥτις διὰ $x \to \infty$ δίδει $B = 0$, ἄρα ἡ μία τῶν ἀσυμπτώτων ἔχει ἐξίσωσιν $y = \frac{\beta}{\alpha} x$, ὁμοίως δ' εὑρίσκομεν διὰ τὴν ἄλλην $y = -\frac{\beta}{\alpha} x$.

2. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^3+y^3-3\alpha xy=0$, ἥτις παριστάνει καμπύλην καλουμένην ***φύλλον τοῦ Descartes.*** Εἶνε

$$\frac{\Phi_3}{x^3}=1+\frac{x^3}{y^3} \text{ καὶ } \underset{x\to\infty}{\text{ὅριον}} \frac{\Phi_3}{x^3}=1+\lambda^3=0.$$

Ἐπειδὴ εἶνε $1+\lambda^3=(1+\lambda)(1-\lambda+\lambda^2)=0$, ἔχομεν $\lambda=-1$, $\lambda=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$

Ἄρα ἡ καμπύλη ἔχει μίαν πραγματικὴν ἀσύμπτωτον μὲ συντελεστὴν διευθύνσεως -1. Θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῆς καμπύλης $y=-x+B$ καὶ εὑρίσκομεν $3Bx^2-3B^2x+B^3+3\alpha x^2-3\alpha Bx=0$. Διαιροῦντες τὰ μέλη ταύτης διὰ x^2 καὶ ὑποθέτοντες $x\to\infty$, εὑρίσκομεν $B+\alpha=0$ ἢ $B=-\alpha$, ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τῆς ἀσυμπτώτου τῆς ἐν λόγῳ καμπύλης εἶνε $y+x+\alpha=0$ (Σχ. 85).



Σχ. 85.

3. Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν ἀσυμπτώτους τῆς Π_α μὲ ἐξίσωσιν $y^2-2px=0$. Ἔχομεν

$\underset{x\to\infty}{\text{ὅριον}} \frac{\Phi_2}{x^2}=\lambda^2=0$, ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν ὡς τιμὰς τοῦ λ τὰς $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$. Θέτοντες $y=B$ εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῆς καμπύλης, εὑρίσκομεν $B^2=2px$ καὶ $B=\pm\sqrt{2px}$. Διὰ $x\to\infty$ ἔχομεν $B\to\infty$, ἄρα αἱ δύο ἀσύμπτωτοι τῆς Π_α εὑρίσκονται εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν.

4. Ἔστω ἡ καμπύλη $(x-\alpha)^2y-\alpha^2x=0$. Πρὸς εὕρεσιν τῶν ἀσυμπτώτων ταύτης γράφομεν τὴν ἐξίσωσιν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$x^2y-2\alpha xy-\alpha^2x+\alpha^2y=0$ καὶ ἔχομεν $\underset{x\to\infty}{\text{ὅριον}}\frac{\Phi_3}{x^3}=\lambda=0$. Θέτοντες $y=B$

εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $Bx^2-2\alpha Bx-\alpha^2x+\alpha^2B=0$.

Διαιροῦμεν τὰ μέλη ταύτης διὰ x^2 καὶ ὑποθέτομεν $x\to\infty$, ὅτε εὑρίσκομεν $B=0$. Ἄρα μία ἀσύμπτωτος τῆς καμπύλης εἶνε ὁ ἄξων τῶν x. Διὰ τὴν εὕρεσιν ἄλλων ἀσυμπτώτων τῆς καμπύλης γράφομεν τὴν ἐξίσωσιν ὑπὸ τὴν μορφὴν

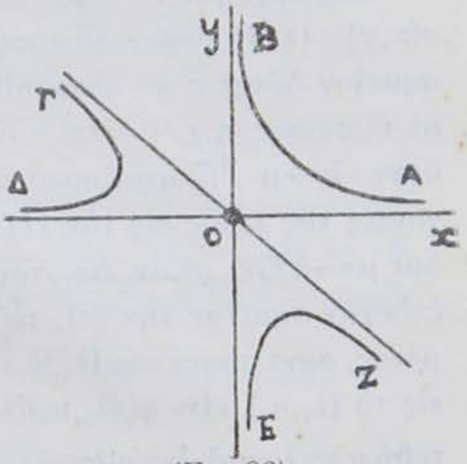
$(x-\alpha)^2y-\alpha^2x=0$ καὶ ἔχομεν ἀφ' ἑνὸς μὲν $\underset{y\to\infty}{\text{ὅριον}}\frac{\Phi_3}{y^3}=k=0$, ἐξ ἧς $k=0$ καὶ $(A-\alpha)^2y-\alpha^2A=0$. Διαιροῦντες διὰ y τὰ μέλη ταύτης καὶ ὑποθέτοντες $y\to\infty$, εὑρίσκομεν $(A-\alpha)^2=0$, ἤτοι τὸ A ἔχει δύο ρίζας ἴσας μὲ α. Ἄρα αἱ δύο ἄλλαι ἀσύμπτωτοι τῆς καμπύλης συμπίπτουν καὶ ἔχουν ἐξίσωσιν $x=\alpha$.

5 Ἔστω ἡ καμπύλη, ἥτις ἔχει ἐξίσωσιν $x^3+y^3-2\alpha x^2=0$. Ἔχομεν

$\underset{x \to \infty}{\text{ὅριον}} \dfrac{\Phi_3}{x^3} = \lambda^3 + 1 = 0$ καὶ $\lambda = -1, \dfrac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$. Ἄρα μία μόνον ἀσύμπτωτος πραγματικὴ ὑπάρχει, ἥτις ἔχει συντελεστὴν διευθύνσεως -1. Θέτοντες $y = -x + B$ εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, διαιροῦντες τὸ ἐξαγόμενον διὰ x^2 καὶ ὑποθέτοντες ὅτι $x \to \infty$, εὑρίσκομεν $3B - 2\alpha = 0$, καὶ $B = \dfrac{2\alpha}{3}$.

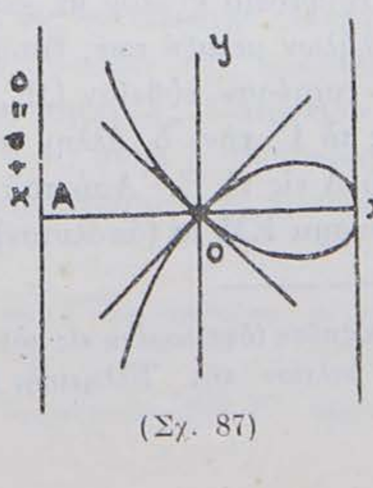
Ἄρα ἡ ἐν λόγῳ ἀσύμπτωτος ἔχει ἐξίσωσιν $y = -x + \dfrac{2\alpha}{3}$. Αἱ δύο ἄλλαι ἀσύμπτωτοι τῆς καμπύλης εἶνε φανταστικαί.

6. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $xy^2 + x^2y - \alpha^3 = 0$. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς ἀσυμπτώτους τῆς καμπύλης, τῆς παριστανομένης ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως ταύτης, παρατηροῦμεν, ὅτι εἶνε $\underset{x \to \infty}{\text{ὅριον}} \dfrac{\Phi_3}{x^3} = \lambda^2 + \lambda = 0$, ἄρα $\lambda = 0$ καὶ $\lambda = -1$. Διὰ τὴν τιμὴν $\lambda = -1$, θέτομεν εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν $y = B - x$, διαιροῦμεν τὸ ἐξαγόμενον διὰ x^2 καὶ ἀκολούθως ὑποθέτομεν ὅτι $x \to \infty$, εὑρίσκομεν δὲ $B = 0$. Ἄρα ἡ μία ἀσύμπτωτος ἔχει ἐξίσωσιν $y = -x$ ἢ $y + x = 0$. Διὰ τὴν τιμὴν $\lambda = 0$ ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε $B = 0$ καὶ συνεπῶς ἡ ἄλλη ἀσύμπτωτος τῆς καμπύλης ἔχει ἐξίσωσιν $y = 0$, ἤτοι εἶνε ὁ ἄξων των x. Εὐκόλως εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ τρίτη ἀσύμπτωτος τῆς καμπύλης εἶνε ὁ ἄξων τῶν y (Σχ. 86).



(Σχ. 86)

7. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^3 + xy^2 - \alpha x^2 + \alpha y^2 = 0$. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς ἀσυμπτώτους τῆς ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως ταύτης παριστανομένης καμπύλης, παρατηροῦμεν ὅτι, εἶνε $\underset{x \to \infty}{\text{ὅριον}} \dfrac{\Phi_3}{x^3} = \lambda^2 + 1 = 0$ καὶ $\lambda = \pm i$. Ἄρα δύο ἀσύμπτωτοι εἶνε φανταστικαί. Διὰ τὴν τρίτην ἀσύμπτωτον εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι, $k = 0$ καὶ θέτοντες $x = A$ εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, ἀφοῦ διαιρέσωμεν τὸ ἐξαγόμενον διὰ y^2 καὶ ὑποθέσωμεν $y \to \infty$, εὑρίσκομεν $A = -\alpha$. Ἄρα ἡ τρίτη ἀσύμπτωτος ἔχει ἐξίσιν $x + \alpha = 0$ (Σχ. 87).



(Σχ. 87)

Ἐὰν τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν γράψωμεν ὑπὸ τὴν μορφὴν $y = \pm \frac{x\sqrt{\alpha^2 - x^2}}{\alpha + x}$, παρατηροῦμεν ὅτι, πρέπει $|x| \leq \alpha$, ἡ δὲ καμπύλη εἶνε συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x, κεῖται δ' αὕτη μεταξὺ τῆς ἀσυμπτώτου $x+\alpha=0$ καὶ τῆς εὐθείας $x=\alpha$.

Ἐπειδὴ ἔχομεν, $\dot{y} = \pm \frac{\alpha^2 - \alpha x - x^2}{(x+\alpha)\sqrt{\alpha^2 - x^2}}$ καὶ διὰ $x=0$ $\dot{y}=\pm 1$, ἕπεται ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον (0, 0) σχηματίζουν γωνίας $\frac{\pi}{4}$ καὶ $-\frac{\pi}{4}$ μὲ τὸν ἄξονα τῶν x.

Παρατήρησις. Τὰς ἀσυμπτώτους καμπύλης (k) μὲ ἐξίσωσιν $\sigma(x,y)=0$ (1) εὑρίσκομεν καὶ ὡς ἑξῆς, παρατηροῦντες ὅτι κατ' ἐκδοχὴν σημεῖον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τομὴ ἀκτίνων δύο ἐπιπέδων δεσμῶν μὲ ἐξισώσεις π.χ. $y=\lambda x$ καὶ $y=\mu x+1$, (2) μὲ κέντρα (0,0) καὶ (0,1), ὅταν $\lambda \to \mu$ Ἐκφράζομεν τὰ x,y διὰ τῶν λ,μ ἐκ τῶν (2) καὶ εἰσάγοντες τὰς τιμὰς εἰς τὴν (1), εὑρίσκομεν ἔστω τὴν $\varphi(\lambda,\mu)=0$ (3), ἥτις διὰ $\mu \to \lambda$ ἔχει ρίζαν ὡς πρὸς λ ἔστω τὴν λ_1, ἀντιστοιχοῦσαν εἰς κατ' ἐκδοχὴν σημεῖον τὴν (k), τὸ ὁποῖον παριστάνομεν μὲ δεσμικὰς (καλουμένας, συντεταγμένας $(\lambda_1, \mu_1 = \lambda_1)$. Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης τῆς (3) εἰς τὸ (λ_1, μ_1) εἶνε $\varphi'_\lambda(\lambda_1,\mu_1)(\lambda-\lambda_1)+\varphi'_\mu(\lambda_1,\mu_1)(\mu-\mu_1)=0$, ἂν δ' εἰς ταύτην τεθῇ $\mu_1=\lambda_1$ καὶ ἐκφράσωμεν τὰ λ καὶ μ διὰ τῶν x καὶ y, εὑρίσκομεν τὴν εἰς τὴν λ_1 ἀντιστοιχοῦσαν ἐξίσωσιν τῆς ἀσυμπτώτου*). Π.χ. διὰ τὴν $(x^2+1)y^2=x^2(x^2-1)$ ἔχομεν $\lambda^2[1+(\lambda-\mu)^2]=1-(\lambda-\mu)^2$. Ὅταν $\lambda=\mu$ εἶνε $\lambda^2=1$ καὶ $\lambda=\pm 1$. Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ $(\pm 1, \pm 1)$ ἔχουν ἐξισώσεως $\lambda=\pm 1$, ἤτοι αἱ ἀσύμπτωτοι τῆς καμπύλης εἶνε αἱ $y=\pm x$.

§ 82. Περὶ τῆς κισσοειδοῦς καμπύλης.

Καλοῦμεν ***κισσοειδῆ*** καμπύλην (τοῦ Διοκλέους) τὴν παραγομένην ὡς ἑξῆς. Περιφέρεια κύκλου μὲ κέντρον ἔστω Κ ἐφάπτεται δύο εὐθειῶν παραλλήλων μεταξύ των, ἔστω εἰς τὰ σημεῖα Ο καὶ Δ. Διὰ τοῦ Ο φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΟΕ, τέμνουσαν τὴν μὲν περιφέρειαν ἔστω καὶ εἰς τὸ Γ, τὴν δ' ἄλλην εὐθεῖαν ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας κατὰ τὸ Δ εἰς τὸ Ε. Ἀπὸ τοῦ Ε λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΟΕ πρὸς τὸ Ο τὸ διάνυσμα ΕΜ μὲ (ἀπόλυτον) μῆκος ἴσον πρὸς τὸ τοῦ ΟΓ. Τὸ

---

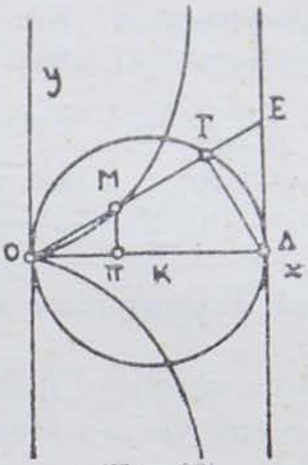
*) Ἡ μέθοδος αὕτη (ὀφειλομένη εἰς τὸν κ. Κ. Γιαννόπουλον) ἐκτίθεται ἐν ἐκτάσει εἰς τὸ Δελτίον τῆς Ἑλληνικῆς Μαθημ. Ἑταιρείας (Τόμ. ΙΔ', τεῦχος Α', 1933).

σημεῖον Μ γράφει τὴν κισσοειδῆ καμπύλην, ὅταν ἡ ΟΕ στρέφεται περὶ τὸ Ο (Σχ. 88).

Θὰ εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς κισσοειδοῦς, παριστάνοντες μὲ α τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος τῆς περιφερείας Κ, καὶ μὲ θ τὸ μέτρον τῆς γωνίας ΔΟΜ, ἂν (ΟΜ)=ϱ. Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΔΕ καὶ ΟΓΔ ἔχομεν $2\alpha=(\text{ΟΕ})\text{συν}\vartheta$, $(\text{ΟΓ})=2\alpha\text{συν}\vartheta$, ἐπομένως

$$(\text{ΟΜ})=\varrho=(\text{ΟΕ})-(\text{ΟΓ})=\frac{2\alpha}{\text{συν}\vartheta}(1-\text{συν}^2\vartheta)$$

ἢ $\varrho=\dfrac{2\alpha\eta\mu^2\vartheta}{\text{συν}\vartheta}$, ἥτις εἶνε ἡ πολικὴ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης.



(Σχ. 88)

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς καμπύλης καὶ εἰς εὐθυγράμμους συντεταγμένας, μὲ ἄξονα τῶν y τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΔ εἰς τὸ Ο, παρατηροῦμεν ὅτι, αἱ συντεταγμέναι τοῦ Μ εἶνε $(\text{ΟΠ})=\varrho\,\text{συν}\vartheta$, $(\text{ΠΜ})=\varrho\,\eta\mu\vartheta$, ἄρα $x=2\alpha\,\eta\mu^2\vartheta$, $y=\dfrac{2\alpha\eta\mu^3\vartheta}{\text{συν}\vartheta}$ καὶ δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ θ εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $x^3+xy^2-2\alpha y^2=0$.

Ὡς παρατηροῦμεν, ἡ καμπύλη διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων καὶ κεῖται δεξιὰ τοῦ ἄξονος τῶν x (διότι δι' ἀρνητικὰς τιμὰς τοῦ x τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως λαμβάνει τιμὴν $\neq 0$), εἶνε δὲ συμμετρικὴ πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y (ἐπειδὴ διὰ τιμὰς τοῦ $x>0$ τὸ y ἔχει δύο τιμὰς ἀντιθέτους).

Πρὸς εὕρεσιν τῶν ἀσυμπτώτων τῆς κισσοειδοῦς ἔχομεν

$\underset{x\to\infty}{\text{ὅριον}}\dfrac{\Phi_3}{x^3}=1+\lambda^2=0$ καὶ $\lambda=\pm i$, ἤτοι δύο ἀσύμπτωτοι εἶνε φανταστικαί, διὰ δὲ τὴν τρίτην ἔχομεν ὡς συντελεστὴν διευθύνσεως ∞ (ἐπειδὴ ὁ συντελεστὴς τοῦ y^3 εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῆς καμπύλης εἶνε 0). Θέτομεν $x=A$ εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῆς καμπύλης, διαιροῦμεν τὸ ἐξαγόμενον διὰ y^2 καὶ ὑποθέτομεν ὅτι $y\to\infty$, οὕτω δ' εὑρίσκομεν $A=2\alpha$. Ἄρα ἡ ἐξίσωσις τῆς πραγματικῆς ἀσυμπτώτου τῆς κισσοειδοῦς εἶνε $x=2\alpha$, ἤτοι εἶνε ἡ εὐθεῖα ΔΕ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀσύμπτωτοι τῶν καμπύλων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς κάτωθι ἐξισώσεις.

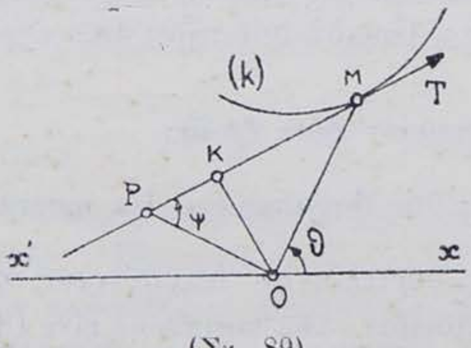
844. $y=e^x$, 845. $y=e^{-x^2}$, 846. $-y=lx$, 847. $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

848. $y=\varepsilon\varphi x$. 849. $y=e^{\frac{1}{x}}-1$. 850. $y^3-6x^2-x^3=0$, 851. $y^3-\alpha^2+x^3=0$,
852. $\alpha y^2-y^2x-x^3=0$, 853. $y^2(x^2+1)=x^2(x^2-1)$, 854. $y^2(x-2\alpha)=x^3-\alpha^3$,
855. $x^2y^2=\alpha^2(x^2+y^2)$, 856. $y(x^2-2\beta x+8\beta^2)=x^3-3\alpha x^2+\alpha^3$,
857. $y=\frac{\alpha^3}{(x-\beta)^2}+v$, 858. $xy^2+x^2y-\alpha^3=0$, 859. $x^3+2x^2y-xy^2-2y^3+4y^2+$
$+2xy+y-1=0$, 860. $xy^2-x+2y-1=0$, 861. $x^3-3xy^2-\alpha^3=0$.
862. $x(x^2-\alpha^2)-2y(y^2-\alpha^2)-3xy^2-\alpha^3=0$.

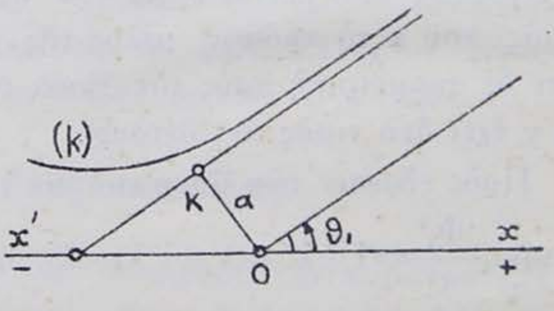
§ 83. Περὶ ἀσυμπτώτων καμπύλης εἰς πολικὰς συντεταγμένας.

Ἔστω $\varphi(\varrho,\vartheta)=0$ ἡ ἐξίσωσις καμπύλης (k) ἀναφερομένης εἰς πολικὰς συντεταγμένας. Πρὸς εὕρεσιν ἀσυμπτώτου αὐτῆς, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀπόστασις ἀσυμπτώτου τῆς (k) ἀπὸ τοῦ πόλου O ἰσοῦται μὲ τὸ ὅριον τοῦ μήκους τοῦ διανύσματος τῆς ὑφαπτομένης τῆς καμπύλης εἰς σημεῖον αὐτῆς $M(\varrho,\vartheta)$, ὅταν τὸ M τείνῃ νὰ ἀπομακρυνθῇ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν. Πράγματι, ἐὰν (OP) εἶνε τὸ μῆκος τῆς ὑφαπτομένης τῆς (k) εἰς τὸ M καὶ (OK) ἡ ἀπόστασις τοῦ O ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης, θὰ ἔχωμεν (Σχ. 89 καὶ 90)

$(OK)=(OP)\eta\mu(OPK)$, ἂν δὲ $M\rightarrow\infty$, ὅριον $(OK)=$ὅριον (OP),



(Σχ. 89)



(Σχ. 90).

Διὰ τοῦτο ἀρκεῖ πρῶτον νὰ εὕρωμεν τὰς τιμὰς τοῦ ϑ, διὰ τὰς ὁποίας ἔχομεν $\varrho\rightarrow\infty$ *), οὕτω δ' ἔχομεν τὰς διευθύνσεις τῶν ἀσυμπτώ-

*) Ἂν τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως εἶνε ἀκέραιον πολυώνυμον ὡς πρὸς ϱ, τοῦ δευτέρου ὄντος 0, διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς τιμὰς ταύτας τοῦ ϑ, θέτομεν τὸν συντελεστὴν τῆς ἀνωτέρας δυνάμεως τοῦ ϱ ἴσον μὲ 0.

των. Ἀκολούθως εὑρίσκομεν τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ μῆκος τῆς ὑφαπτομένης $\varrho^2 . \frac{d\vartheta}{d\varrho}$, ὅταν τὸ ϑ τείνῃ πρὸς τὰς εὑρεθείσας τιμὰς (διὰ τὰς ὁποίας $\varrho \to \infty$). Ἐὰν τὸ ὅριον τοῦ μήκους τῆς ὑφαπτομένης εἶνε ὡρισμένον, ἔστω α, ὑπάρχει ἀσύμπτωτος, ἀπέχουσα ἀπόστασιν α ἀπὸ τοῦ πόλου καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ἐπιβατικὴν ἀκτῖνα τοῦ σημείου ἐπαφῆς.

Ἡ ἐν λόγῳ ἀσύμπτωτος κεῖται πρὸς τὸ ἓν ἢ τὸ ἄλλο μέρος ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἐπιβατικὴν ἀκτῖνα τοῦ σημείου ἐπαφῆς εἰς τὸ κατ' ἐκδοχὴν σημεῖον τῆς καμπύλης, καθόσον ἡ εὑρεθεῖσα ἀπόστασις εἶνε θετικὴ ἢ ἀρνητική.

Παράδειγμα. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις (τῆς λογαριθμικῆς ἕλικος) $\varrho = \frac{\alpha}{\vartheta}$. Παρατηροῦμεν ὅτι, διὰ $\vartheta \to 0$, $\varrho \to \infty$, $\frac{d\varrho}{d\vartheta} = -\frac{\alpha}{\vartheta^2}$ καὶ $\varrho^2 . \frac{d\vartheta}{d\varrho} = -\alpha$. Ἑπομένως εἶνε $\lim\limits_{\vartheta \to \infty} (\varrho^2 \frac{d\vartheta}{d\varrho}) = -\alpha$, ἤτοι ἡ καμπύλη ἔχει ἀσύμπτωτον παράλληλον τοῦ πολικοῦ ἄξονος (διὰ $\vartheta \to 0$) καὶ ἀπέχουσαν ἀπὸ τοῦ πόλου ἀπόστασιν $-\alpha$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀσύμπτωτοι τῶν καμπύλων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς κάτωθι ἐξισώσεις.

863. $\varrho\sigma\upsilon\nu\vartheta - \alpha\sigma\upsilon\nu 2\vartheta = 0$, 864. $\varrho = \varepsilon\varphi\vartheta$, 865. $\varrho\sqrt{\vartheta} = \alpha$, 866. $\varrho = \alpha\tau\varepsilon\mu\vartheta$,
867. $(\varrho - \alpha)\eta\mu\vartheta = \beta$. 868. $\varrho = \alpha(\tau\varepsilon\mu 2\vartheta + \varepsilon\varphi 2\vartheta)$.
869. $\varrho^2\eta\mu\vartheta = \alpha^2\sigma\upsilon\nu 2\vartheta$. 870. $\varrho(1 - \sigma\upsilon\nu\vartheta) = \alpha$.

§ 84. Περὶ διπλῶν σημείων ἐπιπέδου καμπύλης.

Ἔστω $\Phi(x,y) = 0$ (1) ἡ ἐξίσωσις ἐπιπέδου καμπύλης (k) ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους, ἐνῷ ἡ $\Phi(x,y)$ εἶνε ὡρισμένη εἰς τὴν περιοχὴν σημείου τινὸς αὐτῆς $M_1(x_1, y_1)$ καὶ μὲ παραγώγους τοὐλάχιστον μέχρι καὶ β' τάξεως ὡς πρὸς x καὶ y (αἱ δὲ Φ_{xy} καὶ Φ_{yx} συνεχεῖς εἰς τὸ M_1).

Λέγομεν ὅτι τὸ M_1 εἶνε ***διπλοῦν*** σημεῖον τῆς (k), ἐὰν δι' αὐτοῦ διέρχωνται δύο κλάδοι τῆς καμπύλης, ἢ ἂν αὕτη διέρχεται δύο φορὰς δι' αὐτοῦ. Διὰ νὰ εὕρωμεν διὰ τίνας τιμὰς τῶν x καὶ y ἡ (k) ἔχει διπλοῦν σημεῖον, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι αὕτη εἰς ἓν τοιοῦτον σημεῖον δύναται νὰ ἔχῃ τὸ πολὺ δύο ἐφαπτομένας, διότι δυνάμεθα δι' ἕκαστον τῶν δύο αὐτῶν κλάδων νὰ ἔχωμεν ἀνὰ μίαν ἐφαπτομένην αὐτοῦ εἰς τὸ διπλοῦν σημεῖον, ὑποτιθεμένου ὅτι ἑκάστη τούτων θεωρεῖται ὡς ὅριον τεμνούσης ἑκάστου τῶν κλάδων εἰς δύο σημεῖα αὐτοῦ, τὰ ὁποῖα τείνουν πρὸς τὸ διπλοῦν σημεῖον. Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι, εἰς ἕκαστον σημεῖον (x,y) τῆς (k) ἔχομεν μίαν τιμὴν τοῦ $\frac{dy}{dx}=-\frac{\Phi_x(x,y)}{\Phi_y(x,y)}$ ἄρα μίαν μόνην ἐφαπτομένην αὐτῆς, ἂν εἶνε εἰς αὐτὸ $\Phi_x^2+\Phi_y^2>0$. Ἂν ὅμως δι' ἓν σημεῖον (x_1,y_1) ἔχωμεν $\Phi_x(x_1,y_1)=0$, $\Phi_y(x_1,y_1)=0$, δὲν δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα ὑπάρξεως μιᾶς μόνης παραγώγου πεπλεγμένης συναρτήσεως καὶ εἶνε δυνατὸν νὰ ἔχῃ τὸ $\frac{dy}{dx}$ τιμὰς περισσοτέρας τῆς μιᾶς. Πρὸς εὕρεσιν τῶν τοιούτων τιμῶν αὐτοῦ ἀποδεικνύομεν πρῶτον τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«Ἐὰν δύο συναρτήσεις $\varphi(x)$ καὶ $f(x)$ εἶνε ὡρισμέναι εἰς περιοχήν τινα $\alpha<x\leq\alpha+\varepsilon$ (ὅπου $\varepsilon>0$) τῆς τιμῆς $x=\alpha$, ἐξαιρέσει τῆς τιμῆς ταύτης, καὶ παραγωγίσιμοι εἰς τὴν περιοχὴν ταύτην, διὰ δὲ $x\to\alpha+0$ ἔχωμεν $\varphi(x)\to0$, $f(x)\to0$ καὶ $f'(x)\neq0$, θὰ εἶνε

$$\underset{x\to\alpha+0}{\text{ὅριον}}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\underset{x\to\alpha+0}{\text{ὅριον}}\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}».$$

Πράγματι, αἱ $\varphi(x)$, $f(x)$ θὰ εἶνε συνεχεῖς εἰς τὸ κλειστὸν διάστημα $\alpha\leq x\leq\alpha+\varepsilon$, ἂν $\varphi(\alpha)=0$, $f(\alpha)=0$, καὶ ἐπειδὴ ἔχομεν $f'(x)\neq0$, θὰ εἶνε τὸ $f(x)\neq0$ εἰς τὸ διάστημα $\alpha<x\leq\alpha+\varepsilon$, τὸ δὲ πηλίκον $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ θὰ εἶνε ὡρισμένον εἰς αὐτό. Ἐὰν λάβωμεν τυχοῦσαν ἀκολουθίαν ἀριθμῶν (x_ν) τῆς ὁποίας οἱ ἀριθμοὶ ἀνήκουν εἰς τὴν περιοχὴν $\alpha<x\leq\alpha+\varepsilon$ καὶ τείνουν εἰς τὸ α, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\varphi(x_\nu)}{f(x_\nu)}=\frac{\varphi(x_\nu)-\varphi(\alpha)}{f(x_\nu)-f(\alpha)}\quad\text{καὶ}\quad\frac{\varphi(x_\nu)}{f(x_\nu)}=\frac{\varphi'(x'_\nu)}{f'(x'_\nu)}\qquad(2)$$

ἐνῷ εἶνε $\alpha<x'_\nu<x_\nu$. Διότι, αἱ $\varphi(x)$, $f(x)$ εἶνε συνεχεῖς εἰς τὸ κλειστὸν διάστημα $\alpha,\ldots,\alpha+\varepsilon$ καὶ παραγωγίσιμοι τοὐλάχιστον ἐντὸς αὐτοῦ, ἡ δὲ $f'(x)\neq0$ εἰς αὐτό. Ἄρα, εἶνε τὸ $f(x_\nu)-f(\alpha)\neq0$, ἐπειδὴ ἔχομεν $f(x_\nu)-f(\alpha)=(x_\nu-\alpha)f'(\alpha+\mu(x_\nu-\alpha))$, $0<\mu<1$ καὶ ἕκαστος τῶν παραγόντων τοῦ β' μέλους τῆς ἰσότητος ταύτης εἶνε $\neq0$.

Ἂν τώρα σχηματίσωμεν τὴν συνάρτησιν τοῦ x

$$\Psi(x)=\varphi(x)-\frac{\varphi(x_\nu)-\varphi(\alpha)}{f(x_\nu)-f(\alpha)}\Big(f(x)-f(\alpha)\Big),$$ παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ ἐν λόγῳ κλειστὸν διάστημα εἶνε αὕτη συνεχής, πρὸς δὲ ἔχομεν $\Psi(\alpha)=0$, $\Psi(x_\nu)=0$, ἑπομένως (κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Rolle), ὑπάρχει τιμή τις $\alpha<x'_\nu<x_\nu$ διὰ τὴν ὁποίαν ἔχομεν

$\Psi'(x'_\nu)=0$, ἤτοι $\varphi'(x'_\nu) - \dfrac{\varphi(x_\nu)-\varphi(\alpha)}{f(x_\nu)-f(\alpha)}.f'(x'_\nu)=0$, ἐξ ἧς προκύπτει ἡ (2). Ἂν ὑποθέσωμεν $x_\nu \to \alpha+0$, ἔχομεν

$$\underset{x_\nu \to \alpha+0}{\text{ὅριον}} \frac{\varphi(x_\nu)}{f(x_\nu)} = \frac{\underset{x_\nu \to \alpha}{\text{ὅριον}}\ \varphi'(x'_\nu)}{\underset{x_\nu \to \alpha+0}{\text{ὅριον}}\ f'(x'_\nu)} = \frac{\varphi'(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Εὐκόλως δεικνύεται ὅτι καὶ $\underset{x \to \alpha}{\text{ὅριον}} \dfrac{\varphi(x)}{f(x)} = \dfrac{\varphi'(\alpha)}{f'(\alpha)}$

Συμφώνως πρός τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν

$$\underset{\substack{x \to x_1 \\ y \to y_1}}{\text{ὅριον}} \frac{dy}{dx} = \underset{\substack{x \to x_1 \\ y \to y_1}}{\text{ὅριον}} - \frac{\Phi_x(x,y)}{\Phi_y(x,y)} = \underset{\substack{x \to x_1 \\ y \to y_1}}{\text{ὅριον}} - \frac{\Phi_{x^2}(x,y) + \Phi_{xy}(x,y)\dfrac{dy}{dx}}{\Phi_{yx}(x,y) + \Phi_{y^2}(x,y)\dfrac{dy}{dx}}$$

Ἑπομένως* ἔχομεν $\left(\Phi_{xy} + \Phi_{y^2}\dfrac{dy}{dx}\right).\dfrac{dy}{dx} = -\left(\Phi_{x^2} + \Phi_{xy}\dfrac{dy}{dx}\right)$ ἤ

$\Phi_{y^2}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 2\Phi_{xy}\dfrac{dy}{dx} + \Phi_{x^2}=0$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\Phi_{xy} \pm \sqrt{\Phi^2_{xy} - \Phi_{x^2}\Phi_{y^2}}}{\Phi_{y^2}}.$$

Ἤτοι, ἂν τουλάχιστον ἕν τῶν Φ_{x^2}, Φ_{xy}, Φ_{y^2} εἶνε $\neq 0$ εἰς τὸ M_1, τὸ $\dfrac{dy}{dx}$ ἔχει δύο πραγματικὰς τιμὰς εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο, ἂν εἶνε $\Phi^2_{xy} - \Phi_{x^2}\Phi_{y^2} > 0$, ὅτε ἔχομεν δύο ἐφαπτομένας τῆς καμπύλης εἰς αὐτό. Ἂν ἔχωμεν $\Phi^2_{xy} - \Phi_{x^2}\Phi_{y^2} < 0$, αἱ δύο ἐφαπτόμεναι εἰς τὸ M_1 εἶνε φανταστικαί, ἂν δε $\Phi^2_{xy} - \Phi_{x2}\Phi_{y2}=0$ συμπίπτουν εἰς μίαν.

Ὅθεν, ἐὰν σημεῖον $M_1(x_1,y_1)$ τῆς (1) εἶνε διπλοῦν σημεῖον αὐτῆς, τὰ x_1, y_1 θὰ ἐπαληθεύουν τὰς ἐξισώσεις $\Phi(x,y)=0$, $\Phi_x(x,y)=0$, $\Phi_y(x,y)=0$ καὶ τουλάχιστον ἓν τῶν $\Phi_{x^2}(x,y)$, $\Phi_{xy}(x,y)$, (ἢ $\Phi_{xy}(x \cdot y)$)*), $\Phi_{y^2}(x,y)$ θὰ εἶνε διάφορον τοῦ μηδενὸς διὰ $x=x_1$, $y=y_1$.

Παρατήρησις. Τὴν ἀνωτέρω διπλῆν τιμὴν τοῦ $\dfrac{dy}{dx}$ εὑρίσκομεν καὶ ὡς ἑξῆς. Παραγωγίζοντες ὡς πρὸς x τὴν $\Phi(x,y)=0$ εὑρίσκομεν $\Phi_x + \Phi_y . \dfrac{dy}{dx}=0$. Παραγωγίζοντες καὶ ταύτην ὡς πρὸς x, εὑρίσκομεν $\Phi_{x^2} + (\Phi_{xy} + \Phi_{yx}) . \dfrac{dy}{dx} + \Phi_{y^2} . \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + \Phi_y . \dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$,

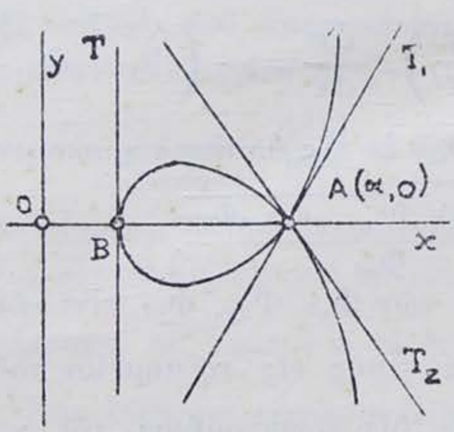
Ἐπειδὴ εἰς τὸ διπλοῦν σημεῖον εἶνε $\Phi_x=0$, $\Phi_y=0$, ἔχομεν

*) Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶνε $\Phi_{xy}(x,y) = \Phi_{yx}(x,y)$.

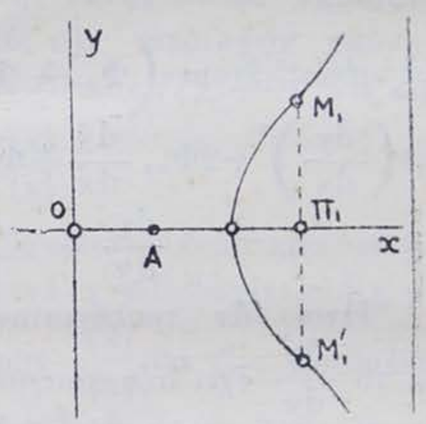
$$\Phi_{x^2}+2\Phi_{xy}\frac{dy}{dx}+\Phi_{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0,$$ ἐξ ἧς εὑρίσκομεν τὸ $\frac{dy}{dx}$.

Παραδείγματα. 1. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις καμπύλης ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους $\Phi(x,y)=y^2-(x-\alpha)^2.(x-\beta)=0$ (Σχ.91), ἢ $\Phi(x,y)=y^2-x^3+(2\alpha+\beta)x^2-(\alpha^2+2\alpha\beta)x+\alpha^2\beta=0$. Ἔχομεν $\Phi_x=-3x^2+2(2\alpha+\beta)x-\alpha(\alpha+2\beta)=(x-\alpha)(\alpha+2\beta-3x)$, $\Phi_y=2y$, $\Phi_{xx}=2(2\alpha+\beta)-6x$, $\Phi_{xy}=0$, $\Phi_{yy}=2$. Διὰ $x=\alpha$, $y=0$. εἶνε $\Phi(\alpha,0)=0$, $\Phi_x(\alpha,0)=0$, $\Phi_y(\alpha,0)=0$ καὶ $\Phi_{xx}(\alpha,0)=-2(\alpha-\beta)$, $\Phi_{xy}(\alpha,0)=0$, $\Phi_{yy}=2$. Ἑπομένως εὑρίσκομεν διὰ $x=\alpha$, $y=0$ ὅτι $\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\alpha-\beta}$.

Ἐὰν εἶνε $\alpha>\beta$ ἔχομεν δύο ἐφαπτομένας τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον $(\alpha,0)$, καὶ ἂν γράψωμεν τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν ὑπὸ



(Σχ. 91).



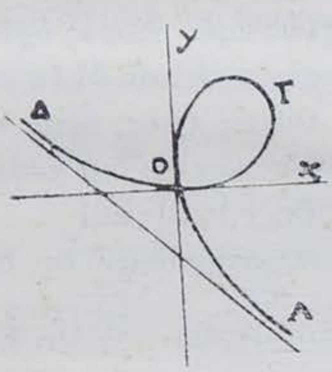
(Σχ. 92).

τὴν μορφὴν $y=\pm(x-\alpha)\sqrt{x-\beta}$, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ καμπύλη εἶνε συμμετρικὴ πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x, κεῖται δ' αὕτη δεξιὰ τῆς εὐθείας $x=\beta$, ἐνῷ ἡ εὐθεῖα μὲ τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἐφάπτεται αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον $B(\beta,0)$ καὶ διέρχονται δι' αὐτοῦ δύο κλάδοι τῆς καμπύλης, συμμετρικοὶ πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x, τέμνονται δ' οἱ δύο οὗτοι κλάδοι εἰς τὸ $A(\alpha,0)$ (Σχ.91).

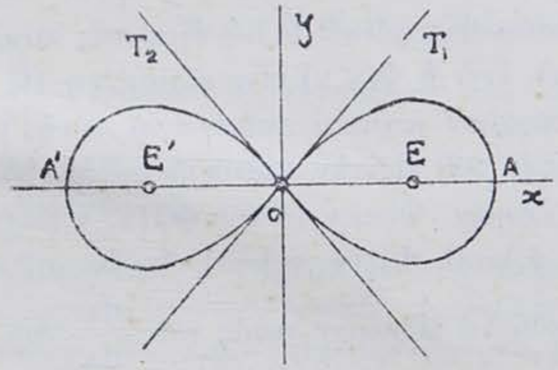
Ἐὰν εἶνε $\alpha<\beta$, $(\alpha,0)$ τὸ σημεῖον $(\alpha,0)$ ἀνήκει εἰς τὴν καμπύλην, ἀλλὰ διὰ $x<\alpha$ καὶ $\alpha<x<\beta$ τὸ y ἔχει τιμὰς φανταστικάς. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ καμπύλη διέρχεται διὰ τοῦ $B(0,\beta)$, ἐνῷ τὸ σημεῖον $A(\alpha,0)$ καλεῖται ***μεμονωμένον*** σημεῖον αὐτῆς καὶ θεωρεῖται ὡς ***διπλοῦν***, εἰς τὸ ὁποῖον τέμνονται δύο φανταστικοὶ κλάδοι τῆς καμπύλης.

Παρατηρητέον ὅτι διὰ $x=\frac{4\beta-\alpha}{3}$, $y=\pm\frac{4(\beta-\alpha)}{3}\sqrt{\frac{\beta-\alpha}{3}}$ ἔχομεν δύο σημεῖα καμπῆς M_1, M_1' τῆς καμπύλης (Σχ.92).

2. Ἔστω (εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους) ἡ ἐξίσωσις (τοῦ ***φύλλου τοῦ*** *Descartes* (Σχ. 93)), $\Phi(x,y)=x^3+y^3-3\alpha xy=0$. Ἔχομεν $\Phi_x=3x^2-3\alpha y$, $\Phi_y=3y^2-3\alpha x$, $\Phi_{x^2}=6x$, $\Phi_{xy}=-3\alpha$, $\Phi_{y^2}=6y$. Διὰ $x=0$, $y=0$ ἔχομεν $\Phi(0,0)=0$, $\Phi_x(0,0)=0$, $\Phi_y(0,0)=0$, $\Phi_{xy}(0,0)=-3\alpha$. Ἄρα ἡ ἀρχὴ τῶν ἀξόνων εἶνε διπλοῦν σημεῖον τῆς τῆς καμπύλης, ἐπειδὴ ἔχομεν $\frac{dy}{dx}=\frac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4xy}}{2y}$. Ἂν μὲν λάβωμεν τὸ σημεῖον $+$ πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ εἶνε $\frac{dy}{dx}\to\infty$ διὰ $x\to0$, $y\to0$, ἂν δὲ τὸ $-$, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-4xy}}{2y}$



(Σχ. 93).



(Σχ. 94).

ἐπὶ $\alpha+\sqrt{\alpha^2-4xy}$ καὶ εὑρίσκομεν $\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4xy}}$, τὸ ὁποῖον διὰ $x=0$, $y=0$ γίνεται 0. Ἄρα αἱ δύο ἐφαπτόμεναι τῆς καμπύλης εἰς τὸ $(0,0)$ σχηματίζουν μὲ τὸν ἄξονα τῶν x γωνίας $\frac{\pi}{2}$ καὶ 0, ἤτοι οἱ ἄξονες τῶν συντεταγμένων ἐφάπτονται εἰς τὸ $(0,0)$ τοῦ φύλλου τοῦ Descartes.

3. Ἔστω (εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους) ἡ ἐξίσωσις καμπύλης, ἡ ὁποία καλεῖται ***λημνίσκος***, $\Phi(x,y)=(x^2+y^2)^2-\alpha^2(x^2-y^2)=0$ (Σχ. 94).

Ἔχομεν $\Phi_x=4x(x^2+y^2)-2\alpha^2x$, $\Phi_y=4y(x^2+y^2)+2\alpha^2y$, $\Phi_{x^2}=4(3x^2+y^2)-2\alpha^2$, $\Phi_{xy}=8xy$, $\Phi_{y^2}=4(x^2+3y^2)+2\alpha^2$. Διὰ $x=0$, $y=0$, $\Phi(0,0)=0$, $\Phi_x(0,0)=0$, $\Phi_y(0,0)=0$, $\Phi_{x^2}(0,0)=-2\alpha^2\neq0$, ἄρα τὸ σημεῖον $(0,0)$ εἶνε διπλοῦν τοῦ λημνίσκου.

Πρὸς εὕρεσιν τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὸ $(0,0)$ ἔχομεν $\Phi_{xy}(0,0)=0$, $\Phi_{y^2}(0,0)=2\alpha^2$ καὶ $\frac{dy}{dx}=\pm1$, ἑπομένως αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο σχηματίζουν μὲ τὸν ἄξονα τῶν x γωνίας $\frac{\pi}{4}$ καὶ $-\frac{\pi}{4}$. Εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι οἱ δύο κλάδοι τῆς καμπύλης, οἵτινες διέρχονται διὰ τοῦ (0,0) ἔχουν τοῦτο ὡς σημεῖον καμπῆς.

§ 85. Περὶ πολλαπλῶν σημείων ἐπιπέδου καμπύλης.

Σημεῖόν τι $M_1(x_1,y_1)$ καμπύλης τινὸς (συνεχοῦς) καλεῖται ***πολλαπλοῦν***, ἂν δι' αὐτοῦ διέρχωνται περισσότεροι τῶν δύο κλάδων τῆς καμπύλης καὶ ἕκαστος ἔχῃ ἀνὰ μίαν πραγματικὴν ἐφαπτομένην εἰς αὐτό. Ἂν αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς πολλαπλοῦν σημεῖον τῆς καμπύλης εἶνε τρεῖς, τέσσαρες,... καλεῖται τοῦτο ***τριπλοῦν, τετραπλοῦν,....*** σημεῖον αὐτῆς.

Ἔστω $\Phi(x,y)=0$ (1) ἡ ἐξίσωσις καμπύλης (ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίας), ἐνῷ ἡ $\Phi(x,y)$ εἶνε ὡρισμένη εἰς περιοχήν τινα τοῦ $M_1(x_1,y_1)$ καὶ ὑπάρχουν μερικαὶ παράγωγοι αὐτῆς μέχρι τάξεώς τινος, ἔστω τῆς νιοστῆς ($\nu>2$) εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ M_1. Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι διὰ $x=x_1$, $y=y_1$ ἔχομεν $\Phi(x_1,y_1)=0$, $\Phi_x(x_1,y_1)=0$, $\Phi_y(x_1,y_1)=0$ καὶ $\Phi_{x^2}(x_1,y_1)=0$, $\Phi_{xy}(x_1,y_1)=0$, $\Phi_{y^2}(x_1,y_1)=0$, παρατηροῦμεν ὅτι δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τιμὰς τοῦ $\frac{dy}{dx}$ διὰ $x=x_1$, $y=y_1$, ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$\Phi_{x^2}+2\Phi_{xy}\frac{dy}{dx}+\Phi_{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\Phi_y\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

Ἐὰν παραγωγίσωμεν ὡς πρὸς x τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, ἕνεκα τῶν ἀνωτέρω γενομένων ὑποθέσωμεν διὰ $x=x_1$, $y=y_1$ εὑρίσκομεν

$$\Phi_{x^3}+3\Phi_{x^2y}\cdot\frac{dy}{dx}+3\Phi_{xy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\Phi_{y^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3=0.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης, ἥτις εἶνε τρίτου βαθμοῦ ὡς πρὸς $\frac{dy}{dx}$, εὑρίσκομεν τρεῖς ἐν γένει τιμὰς αὐτοῦ, ἄρα καὶ τρεῖς ἐφαπτομένας τῆς καμπύλης εἰς τὸ M_1, ἐκ τούτου δ' ἕπεται ὅτι διὰ τοῦ M_1 διέρχονται τρεῖς κλάδοι τῆς καμπύλης, ἤτοι τὸ M_1 εἶνε ***τριπλοῦν*** σημεῖον αὐτῆς.

Ἐὰν γίνωνται μηδὲν διὰ $x=x_1$, $y=y_1$, ὄχι μόνον ἡ $\Phi(x,y)$ καὶ αἱ μερικαὶ παράγωγοι πρώτης καὶ δευτέρας τάξεως ταύτης ὡς πρὸς x καὶ y, ἀλλὰ καὶ αἱ τῆς τρίτης τάξεως, δυνάμεθα παραγωγίζοντες ὡς πρὸς x τὴν ἀνωτέρω τελευταίαν ἐξίσωσιν καὶ θέτοντες $x=x_1$, $y=y_1$ εἰς τὸ ἐξαγόμενον, νὰ εὕρωμεν τὰς τιμὰς τοῦ $\frac{dy}{dx}$, αἱ ὁποῖαι θὰ εἶνε τέσσαρες ἐν γένει (διότι ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις ὡς πρὸς $\frac{dy}{dx}$ θὰ εἶνε τετάρτου βαθμοῦ). Οὕτω θὰ ἔχωμεν τέσσαρας ἐφαπτομένας τῆς καμπύλης (1) εἰς τὸ $M_1(x_1y_1)$, ἄρα διέρχονται δι᾽ αὐτοῦ τέσσαρες κλάδοι αὐτῆς, ἤτοι τὸ σημεῖον M_1 εἶνε ***τετραπλοῦν*** τῆς καμπύλης. Ἐν γένει, ἂν διὰ $x=x_1$, $y=y_1$ γίνωνται 0 ἡ $\Phi(x,y)$ καὶ πᾶσαι αἱ μερικαὶ παράγωγοι ταύτης ὡς πρὸς x καὶ y μέχρι τῆς $\nu-1$ τάξεως περιλαμβανομένης, ἐνῷ μία τουλάχιστον τῆς νιοστῆς τάξεως εἶνε διάφορος τοῦ 0, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς τιμὰς τοῦ $\frac{dy}{dx}$ διὰ $x=x_1$, $y=y_1$, ἂν θέσωμεν τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν ἐξίσωσιν τὴν προκύπτουσαν, ἂν παραγωγίσωμεν τὴν $\Phi(x,y)=0$ μετὰ τὴν νιοστὴν παραγώγισιν ὡς πρὸς x. Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ᾽ ἣν εὑρίσκομεν οὕτω ν πραγματικὰς τιμὰς τοῦ $\frac{dy}{dx}$, ἔχομεν ν ἐφαπτομένας τῆς καμπύλης (1) εἰς τὸ $M_1(x_1,y_1)$, ἄρα διέρχονται ν κλάδοι αὐτῆς διὰ τοῦ M_1 καὶ τὸ σημεῖον αὐτὸ καλεῖται ***νιπλοῦν*** τῆς καμπύλης.

Παράδειγμα. Ἔστω ἡ καμπύλη μὲ ἐξίσωσιν (ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους) $\Phi(x,y)=(x^2+y^2)^3-(y^2-3x^2)y=0$. Ἔχομεν

$\Phi_x=6x^5+12x^3y^2+6xy^4+6xy$, $\Phi_y=6y^5+6x^4y+12x^2y^3-3y^2+3x^2$

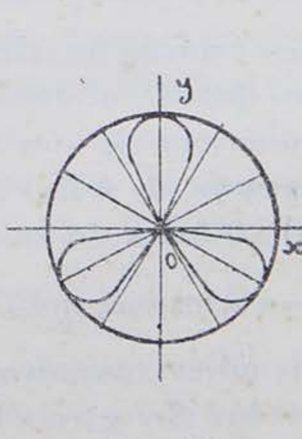
$$\Phi_{x^2}=30x^4+36x^2y^2+6y^4+6y,$$

$\Phi_{xy}=24x^3y+24xy^3+6x$, $\quad\Phi_{y^2}=6x^4+36x^2y^2+30y^4-6y$,

$\Phi_{x^3}=120x^3+72xy^2$, $\quad\Phi_{x^2y}=72x^2y+24y^3+6$,

$\Phi_{xy^2}=24x^3+72xy^2$, $\quad\Phi_{y^3}=72x^2y+120y^3-6$.

Διὰ $x=0$, $y=0$ ἐπαληθεύονται αἱ $\Phi=0$, $\Phi_x=0$, $\Phi_y=0$, $\Phi_{x^2}=0$, $\Phi_{xy}=0$, $\Phi_{y^2}=0$, $\Phi_{x^3}=0$, $\Phi_{x^2y}=6$, $\Phi_{xy^2}=0$, $\Phi_{y^3}=-6$, ἑπομένως τὸ σημεῖον (0,0) εἶνε τριπλοῦν, αἱ δὲ διευθύνσεις τῶν ἐφαπτομένων τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο εὑρίσκονται ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως $18\cdot\frac{dy}{dx}-6\left(\frac{dy}{dx}\right)^3=0$. Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι αἱ γωνίαι ἑκάστης τῶν ἐφαπτομένων μὲ τὸν ἄξονα τῶν x εἶνε 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, ἡ δὲ ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως παριστανομένη καμπύλη ἔχει τὸ (Σχ. 95).



(Σχ. 95)

§ 86. Περὶ σημείων ἀνακάμψεως ἐπιπέδων καμπύλων.

Ἔστω $\Phi(x,y)=0$ (1) ἡ ἐξίσωσις ἐπιπέδου καμπύλης (ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους), ἐνῶ ἡ $\Phi(x,y)$ εἶνε ὡρισμένη καὶ συνεχὴς εἰς περιοχήν τινα τοῦ σημείου $M_1(x_1,y_1)$ καὶ ἔχει μερικὰς παραγώγους τοὐλάχιστον μέχρι καὶ δευτέρας τάξεως ὡς πρὸς x καὶ y. Ἐὰν εἶνε $\Phi(x_1,y_1)=0$, $\Phi_x(x_1,y_1)=0$, $\Phi_y(x_1,y_1)=0$ καὶ τοὐλάχιστον μία τῶν μερικῶν παραγώγων δευτέρας τάξεως εἶνε $\neq 0$ διὰ $x=x_1$, $y=y_1$, θὰ ἔχωμεν ὡς γνωστὸν (διὰ $x=x_1$, $y=y_1$), $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{-\Phi_{xy}\pm\sqrt{\Phi^2_{xy}-\Phi_{x^2}\Phi_{y^2}}}{\Phi_y}$.

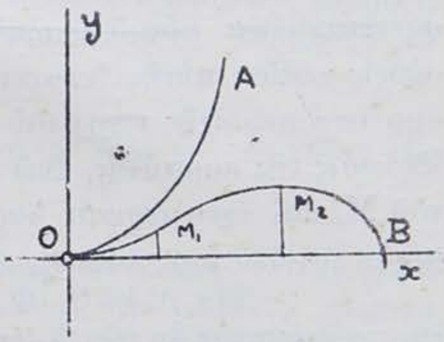
Ἐὰν εἶνε καὶ $\Phi^2_{xy}-\Phi_{x^2}\Phi_{y^2}=0$, αἱ δύο τιμαὶ τοῦ $\dfrac{dy}{dx}$ εἶνε ἴσαι καὶ αἱ δύο ἐφαπτόμεναι τῆς καμπύλης (1) εἰς τὸ M_1 συμπίπτουν εἰς μίαν, ἤτοι διὰ τοῦ M_1 διέρχονται μὲν δύο κλάδοι τῆς (1), ἀλλ' οὗτοι ἔχουν κοινὴν ἐφαπτομένην, δηλαδὴ ἐφάπτονται μεταξύ των καὶ κεῖνται πρὸς τὸ ἓν μέρος τῆς ἐφαπτομένης τοῦ σημείου M_1, ἐνῶ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος αὐτῆς οἱ δύο κλάδοι εἶνε φανταστικοί.

Ἐὰν π.χ. ἔχωμεν $\Phi(x,y)=[y-\varphi(x)]^2-(x-\alpha)^2f(x)=0$, ὅπου $\varphi(x)$ καὶ $f(x)$ εἶνε ῥηταὶ συναρτήσεις ὡρισμέναι καὶ συνεχεῖς εἰς περιοχὴν τοῦ σημείου $M_1(x_1,y_1)$, θὰ εἶνε $\Phi_x=-2[y-\varphi(x)]\varphi'(x)-2(x-\alpha)f(x)-(x-\alpha)^2f'(x)$, $\Phi_y=2[y-\varphi(x)]$, $\Phi_{x^2}=2\varphi'(x)^2-2[y-\varphi(x)]\varphi''(x)-2f(x)-4(x-\alpha)f'(x)-(x-\alpha)^2f''(x)$, $\Phi_{xy}=-2\varphi'(x)$, $\Phi_{y^2}=2$. Διὰ $x=\alpha$, $y=\varphi(\alpha)$ εὑρίσκομεν $\Phi(\alpha,\varphi(\alpha))=0$, $\Phi_x(\alpha,\varphi(\alpha))=0$, $\Phi_y(\alpha,\varphi(\alpha))=0$, $\Phi_{x^2}=2\varphi'(\alpha)^2-2f(\alpha)$, $\Phi_{xy}=-2\varphi'(\alpha)$, $\Phi_{y^2}=2$ καὶ $\dfrac{dy}{dx}=\varphi'(\alpha)\pm\sqrt{f(\alpha)}$.

Ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι εἶνε $[\Phi_{xy}(\alpha,\varphi(\alpha))]^2-\Phi_{x^2}(\alpha,\varphi(\alpha)),\ \Phi_{y^2}(\alpha,\varphi(\alpha))=0$, ἤτοι $f(\alpha)=0$, αἱ δύο ἐφαπτόμεναι εἰς τὸ διπλοῦν σημεῖον $(\alpha,\varphi(\alpha))$ συμπίπτουν εἰς μίαν καὶ ἡ καμπύλη ἔχει εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο μίαν ***κορυφήν***, ἂν ἡ $f(x)$ ἀλλάσσῃ σημεῖον μετὰ τοῦ $x-\alpha$. Ἐὰν π. χ. εἶνε $f(x)>0$ διὰ $x<\alpha$ καὶ $f(x)<0$ διὰ $x>\alpha$ (ὅπου θεωροῦμεν τιμὰς τοῦ $x-\alpha$ *ἀπολύτως* πολὺ μικράς), αἱ δύο τιμαὶ τοῦ y καὶ τοῦ $\dfrac{dy}{dx}$ εἶνε τότε μόνον πραγματικαί, ἐὰν εἶνε τὸ $x\leqq\alpha$. Αὗται θὰ εἶνε φανταστικαί, ἐὰν εἶνε $x>\alpha$. Ἐὰν εἶνε $f(x)>0$ διὰ $x>\alpha$, αἱ δύο τιμαὶ τοῦ y καὶ $\dfrac{dy}{dx}$ θὰ εἶνε τότε μόνον πραγματικαί, ἐὰν εἶνε $x\geqq\alpha$. Αὗται θὰ εἶνε φανταστικαί, ἂν ἔχωμεν $x<\alpha$. Ἑπομένως, οἱ δύο κλάδοι τῆς θεωρουμένης καμπύλης ἔχουν εἰς τὸ διπλοῦν σημεῖον τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην καὶ περατοῦνται εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο οὕτως, ὥστε νὰ θεωρῆται ὁ εἷς κλάδος ὡς συνέχεια τοῦ ἄλλου. Τὸ τοιοῦτον σημεῖον καμπύλης καλεῖται ***κορυφὴ*** ἢ σημεῖον ***ἀνακάμψεως*** αὐτῆς.

Ἔστω ἀκόμη ἡ καμπύλη μὲ ἐξίσωσιν $\Phi(x,y)=y^2-(x-\alpha)^3=0$. Ἔχομεν $\Phi_x=-3(x-\alpha)^2$, $\Phi_y=2y$, $\Phi_{xx}=-6(x-\alpha)$, $\Phi_{xy}=0$, $\Phi_{yy}=0$. Διὰ $x=\alpha, y=0$ εἶνε $\Phi=0, \Phi_x=0, \Phi_y=0$, $\Phi^2_{xy}-\Phi_{x^2}.\Phi_{y^2}=0$, ἄρα ἔχομεν $\dfrac{dy}{dx}=0$ αἱ δύο ἐφαπτόμεναι τῆς καμπύλης εἰς τὸ $(\alpha,0)$ συμπίπτουν μὲ τὸν ἄξονα τῶν x καὶ τὸ σημεῖον τοῦτο εἶνε κορυφὴ τῆς καμπύλης.

Ἐκ τῶν δύο κλάδων καμπύλης, ἐχούσης σημεῖον ἀνακάμψεως, οὗ συναντώμενοι ἐφάπτονται εἰς αὐτό, καὶ συνήθως ὁ εἷς στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω καὶ ὁ ἄλλος πρὸς τὰ κάτω, ἡ δὲ κοινὴ ἐφαπτομένη αὐτῶν κεῖται (εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου) μεταξὺ τούτων. Τὰ τοιαῦτα σημεῖα ἀνακάμψεως (ἢ κορυφὰς) καλοῦμεν πρώτου εἴδους, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ ἐκείνων εἰς τὰ ὁποῖα οἱ δύο κλαδοι κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου.



(Σχ. 96).

Ἔστω π. χ. ἡ ἐξίσωσις $y=x^2\pm x^{\frac{5}{2}}$ ἢ $\Phi(x,y)=y^2-2x^2y+x^4-x^5=0$. Ἔχομεν $\Phi_x=-4xy+4x^3-5x^4$, $\Phi_y=2y-2x^2$, $\Phi_{xx}=-4y+12x^2-20x^3$, $\Phi_{xy}=-4x$, $\Phi_{yy}=2$. Διὰ $x=0$, $y=0$ μηδενίζονται τὰ $\Phi(x,y), \Phi_x(x,y)$, $\Phi_y(x,y)$, ἐνῷ $\Phi_{y^2}\neq 0$· ἄρα τὸ $(0,0)$ εἶνε διπλοῦν σημεῖον. Εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι, αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν δύο κλάδων τῆς καμπύλης εἰς τὸ διπλοῦν σημεῖον συμπίπτουν μὲ τὸν ἄξονα τῶν x, ἤτοι τὸ $(0,0)$ εἶνε κορυφὴ τῆς καμπύλης. Ἐκ τῆς πρώτης μορφῆς τῆς ἐξισώσεως τῆς καμπύλης εὑρίσκομεν $\dot{y}=2x\pm\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$ καὶ $\ddot{y}=2\pm\frac{15}{4}\sqrt{x}$. Τὸ διπλοῦν σημεῖον πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως καὶ τῶν δύο ἀνωτέρω τελευταίων δεικνύει ὅτι, εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ x ἀντιστοιχοῦν δύο τοῦ y, ἤτοι ἔχομεν δύο σημεῖα τῆς καμπύλης. Εἰς τὸ σημεῖον $(0,0)$ συμπίπτουν τὰ δύο ταῦτα σημεῖα καθὼς καὶ αἱ δύο ἐφαπτόμεναι τῆς καμπύλης (Σχ. 96). Ἐὰν ἔχωμεν $0<x<1$, οἱ δύο κλάδοι κεῖνται ἄνω τῆς κοινῆς ἐφαπτομένης, δηλαδὴ κεῖνται (εἰς περιοχὴν τοῦ $(0,0)$)

ἄνω τοῦ ἄξονος τῶν x, ἐπειδὴ καὶ αἱ δύο τιμαὶ τοῦ y εἶνε θετικαί. Διὰ τιμὰς $0 < x < \dfrac{64}{225}$ αἱ δύο τιμαὶ τοῦ $\ddot{y}$ θὰ εἶνε θετικαί, καὶ οἱ δύο κλάδοι τῆς καμπύλης θὰ στρέφουν εἰς τὸ διάστημα $(0, {}^{64}/_{225})$ τῆς κορυφῆς τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω, ἐνῶ ὁ κλάδος $y = x^2 + x^{\frac{5}{2}}$ στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ $x > 0$. Διὰ $x = \dfrac{64}{225}$ θὰ εἶνε $\ddot{y} = 0$, καὶ ὁ κατώτερος κλάδος $y = x^2 - x^{\frac{5}{2}}$ τῆς καμπύλης θὰ ἔχῃ τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον εἰς τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x ὡς σημεῖον καμπῆς, ἐνῶ πρὸ αὐτοῦ στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω καὶ πέραν αὐτοῦ πρὸς τὰ κάτω.

§ 87. Περὶ μεμονωμένων, γωνιακῶν καὶ τελικῶν σημείων ἐπιπέδου καμπύλης.

Σημεῖον τι $M_1(x_1, y_1)$ καμπύλης τινὸς λέγεται ***μεμονωμένον***, ἂν αἱ συντεταγμέναι αὐτοῦ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν τῆς καμπύλης, ἀλλ' οὐδεὶς κλάδος αὐτῆς διέρχεται διὰ τοῦ σημείου, καθὼς καὶ διὰ τῶν σημείων περιοχῆς τινος τοῦ σημείου τούτου. Ἐὰν $\Phi(x,y) = 0$ εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης, ἐνῶ ἡ $\Phi(x,y)$ εἶνε ὡρισμένη εἰς περιοχήν τινα τοῦ M_1 καὶ ἔχει μερικὰς παραγώγους ὡς πρὸς x καὶ y τοὐλάχιστον μέχρι καὶ δευτέρας τάξεως, εἶνε δὲ

$$\Phi(x_1, y_1) = 0, \quad \Phi_x(x_1, y_1) = 0, \quad \Phi_y(x_1, y_1) = 0,$$

καὶ τοὐλάχιστον ἓν τῶν $\Phi_x(x_1, y_1)$, $\Phi_{xy}(x_1, y_1)$, $\Phi_{y^2}(x_1, y_1)$ εἶνε διάφορον τοῦ 0, πρὸς δὲ $\Phi^2_{xy}(x_1, y_1) - \Phi_{x^2}(x_1, y_1)\Phi_{y^2}(x_1 y_1) < 0$, αἱ δύο τιμαὶ τοῦ $\dot{y}$ (διὰ $x = x_1$, $y = y_1$) αἱ εὑρισκόμεναι ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\Phi_{x^2} + 2\Phi_{xy}\cdot\dot{y} + \Phi_{y^2}\dot{y}^2 = 0$ εἶνε φανταστικαί. Ἄρα διὰ τοῦ πραγματικοῦ σημείου M_1 διέρχονται δύο φανταστικοὶ κλάδοι τῆς καμπύλης.

Ἔστω π. χ. ἡ καμπύλη μὲ ἐξίσωσιν $y^2 = x^3 - x^2$ (εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους) ἢ $\Phi(x,y) = y^2 - x^3 + x^2 = 0$. Ἔχομεν

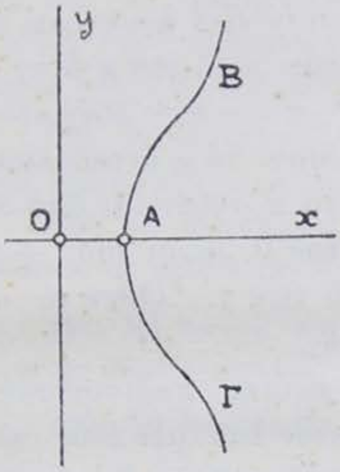
$$\Phi_x = -3x^2 + 2x, \quad \Phi_y = 2y, \quad \Phi_{x^2} = -6x + 2, \quad \Phi_{xy} = 0, \quad \Phi_{y^2} = 2.$$

Διὰ $x = 0$, $y = 0$ ἔχομεν $\Phi = 0$, $\Phi_x = 0$, $\Phi_y = 0$, $\Phi_{x^2} = 2$, $\Phi_{xy} = 0$, $\Phi_{y^2} = 2$ καὶ $\dot{y} = \pm\sqrt{-1}$. Ἄρα τὸ σημεῖον (0,0) εἶνε μεμονωμένον τῆς καμπύλης (Σχ. 97). Ἂν λύσωμεν τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς y, εὑρίσκομεν $y = \pm x\sqrt{x-1}$ καὶ διὰ $x = 0$ ἔχομεν $\dot{y} = \pm\sqrt{-1}$, ἤτοι φανταστικὰς τιμὰς τοῦ $\dot{y}$, τοιαύτας ἔχομεν ἐπίσης καὶ διὰ $x < 1$.

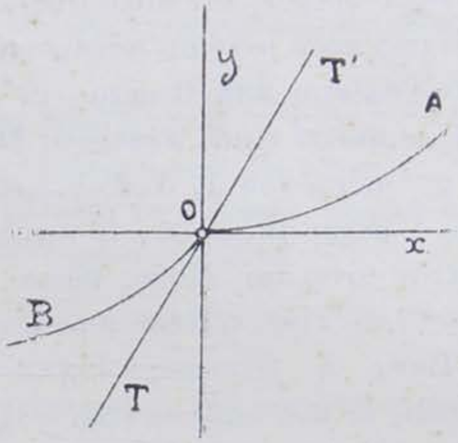
Γωνιακὸν λέγεται ἓν σημεῖον καμπύλης, ἂν εἰς αὐτὸ περατοῦνται δύο κλάδοι τῆς καμπύλης, ἔχοντες εἰς αὐτὸ διαφόρους ἐφαπτομένας.

Ἔστω π. χ. ἡ καμπύλη μὲ ἐξίσωσιν $y(1 + e^{\frac{1}{x}}) - x = 0$. Διὰ $x \to 0$

μὲ θετικὰς τιμάς, ἔχομεν $\frac{1}{x} \to \infty$ καὶ $y \to 0$, ἤτοι ἡ καμπύλη διέρ-



(Σχ. 97)



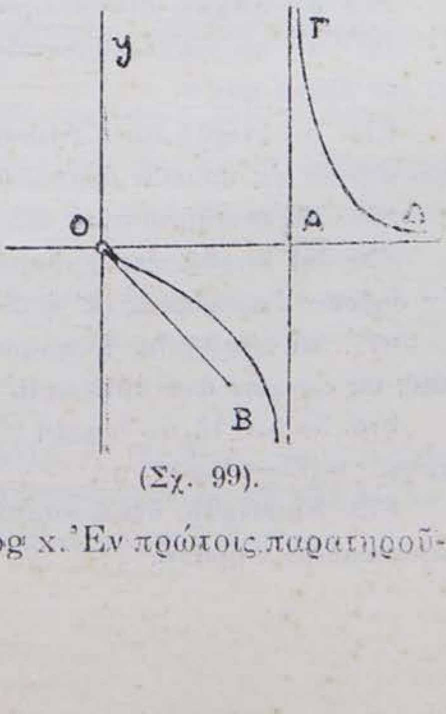
(Σχ. 98)

χεται διὰ τοῦ (0,0). Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι διὰ $x > 0$ εἶνε $y > 0$, καθὼς καὶ διὰ $0 < x \leq 0 + \varepsilon$ (ὅπου ε εἶνε ἀριθμὸς θετικὸς ἀρκούντως μικρός), ἐπὶ πλέον δὲ ὅταν $x \to 0$ (διὰ τιμὰς τῆς θεωρουμένης περιοχῆς) τὸ

$$\dot{y} = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$$ ἔχει ὅριον τὸ 0. Ἄρα καὶ τὸ τόξον τῆς καμπύλης τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς τιμὰς ταύτας τῶν x καὶ y κεῖται δεξιὰ τοῦ ἄξονος τῶν y καὶ ἄνω τοῦ τῶν x. Διὰ τιμὰς $0 - \varepsilon \leq x < 0$ εἶνε τὸ $y < 0$, καὶ ὅταν $x \to 0$, τὸ $y \to 0$ καὶ $\dot{y} \to 1$ (ἐπειδὴ ὁ ἐκθέτης τοῦ $e^{\frac{1}{x}}$ εἶνε ἀρνητικὸς καὶ τείνει εἰς τὸ $-\infty$ καὶ $\underset{x \to 0}{\text{ὅριον}}\, e^{\frac{1}{x}} \to 0$). Ἄρα ἡ

ἡ ἐφαπτομένη τοῦ ἄλλου κλάδου τῆς καμπύλης εἰς τὸ (0,0) εἶνε διχοτόμος τῆς γωνίας τῶν ἀξόνων καὶ τὸ σημεῖον (0,0) εἶνε γωνιῶδες σημεῖον τῆς καμπύλης (Σχ. 98).

Τελικὸν λέγεται σημεῖόν τι καμπύλης, ἐὰν εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο διακόπτεται ἡ συνέχεια κλάδου αὐτῆς, ἤτοι ἂν εἰς αὐτὸ περατοῦται ἡ καμπύλη (Σχ. 99).



(Σχ. 99).

Ἔστω ἡ καμπύλη μὲ ἐξίσωσιν $y = x \log x$. Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ x δὲν δύνανται νὰ εἶνε ἀρνητικαὶ (ἐπειδὴ οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουν λογάριθμον πραγματικόν). Διὰ τιμὰς τοῦ $x<1$ θετικὰς καὶ πολὺ μικράς, αἱ τιμαὶ τοῦ y εἶνε ἀρνητικαὶ καὶ ἀπολύτως πολὺ μικραί, αὐξάνονται δ' ἀπολύτως μετὰ τοῦ x ὅταν τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ 0 μέχρι e^{-1} (διὰ $x=e^{-1}$, $y=-e^{-1}$ ἐλάχιστον). Τὸ y λαμβάνει τιμὰς ἀπολύτως ἐλαττουμένας, ὅταν τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ e^{-1} μέχρι τοῦ 1, ὅπου γίνεται 0. Ὅταν τὸ x αὐξάνεται ἀπὸ τῆς τιμῆς 1 μέχρι τοῦ $+\infty$, τὸ y αὐξάνεται ἀπὸ τοῦ 0, μέχρι τοῦ $+\infty$, κείμενον ἄνω τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ δεξιὰ τοῦ τῶν y. Ὅθεν τὸ σημεῖον (0,0) εἶνε τελικὸν σημεῖον τῆς καμπύλης.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $y \log x = 1$. Ἡ ὑπὸ ταύτης παριστανομένη καμπύλη ἐκ δύο κλάδων (Σχ. 99) μὲ ἀσύμπτωτον τοῦ μὲν ἑνὸς κλάδου τὴν $x=1$, τοῦ δ' ἄλλου τὴν $x=1$ καὶ τὴν Ox, ἔχει, ὡς εὐκόλως δεικνύεται, τὸ (0,0) τελικὸν σημεῖον.

Τὰ σημεῖα καμπῆς τὰ πολλαπλᾶ, ἀνακάμψεως, μεμονωμένα, γωνιώδη καὶ τελικὰ καλοῦνται καὶ ἀνώμαλα σημεῖα τῆς θεωρουμένης καμπύλης, τὰ δὲ ἄλλα σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα ὑπάρχει μία μόνον ἐφαπτομένη αὐτῆς καλοῦνται πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῶν ἀνωμάλων **ἁπλᾶ** ἢ **ὁμαλὰ** σημεῖα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. 871. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ καμπύλη μὲ ἐξίσωσιν (εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους) $y^2=2x^2+x^3$ ἔχει διπλοῦν σημεῖον τὸ (0,0) καὶ νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν γωνιῶν ἑκάστης τῶν ἐφαπτομένων αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο μὲ τὸν ἄξονα τῶν x.

872 Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἀρχὴ τῶν (ὀρθογωνίων ἀξόνων) εἶνε διπλοῦν σημεῖον τῆς καμπύλης $y^2(\alpha^2+x^2)=x^2(\alpha^2-x^2)$, αἱ δὲ ἐφαπτόμεναι αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο εἶνε διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τῶν ἀξόνων.

873. Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ σημεῖον (α,0) εἶνε διπλοῦν σημεῖον τῆς καμπύλης $y^2=x(x-\alpha)^2$ καὶ νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο μὲ τὸν ἄξονα τῶν x.

874. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ *(κισσοειδὴς)* καμπύλη $y^2(2\alpha-x)=x^3$ ἔχει τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων ὡς σημεῖον ἀνακάμψεως (πρώτου εἴδους).

875. Νὰ δειχθῇ τὸ αὐτὸ διὰ τὴν καμπύλην $y^3=2\alpha x^2-x^3$.

876. Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ καμπύλη $(y-x^2)^2=x^\nu$ ἔχει τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων ὡς σημεῖον ἀνακάμψεως (α' ἢ β' εἴδους καθόσον εἶνε τὸ $\nu<4$ ἢ $\nu>4$).

877. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ καμπύλη $x^4-2\alpha x^2y-\alpha xy^2+\alpha^2y^2=0$ ἔχει τὸ σημεῖον (0,0) ὡς σημεῖον ἀνακάμψεως (β' εἴδους).

878. Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ἀρχὴ τῶν ἀξόνων εἶνε μεμονωμένον σημεῖον τῆς καμπύλης $y^2(x^2-\alpha^2)=x^2$.

879. Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ καμπύλη $y^2=x.(\alpha+x)^2$ ἔχει τὸ σημεῖον $(-\alpha, 0)$ ὡς μεμονωμένον σημεῖον.

880. Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ καμπύλη $\alpha y^2 - x^3 + \beta x^2 = 0$ ἔχει τὸ σημεῖον (0,0) ὡς μεμονωμένον ἂν εἶνε $\alpha\beta > 0$ καὶ ὡς διπλοῦν σημεῖον, ἐὰν $\alpha\beta < 0$.

881. Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ καμπύλη $x^4 + 2\alpha x^2 y - \alpha y^3 = 0$ ἔχει τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων ὡς τριπλοῦν σημεῖον, αἱ δὲ γωνίαι τῶν ἐφαπτομένων εἰς αὐτὸ μὲ τὸν ἄξονα τῶν x ἔχουν ἐφαπτομένας 0, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$.

882. Νὰ δειχθῇ, ὅτι αἱ τομαὶ τῆς καμπύλης $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{\beta}\right)^{2/3} = 1$ μὲ τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων εἶνε σημεῖα ἀνακάμψεως (α' εἴδους).

883. Νὰ δειχθῇ, ὅτι δὲν ὑπάρχει καμπύλη μὲ ἐξίσωσιν δευτέρου ἢ τρίτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y μὲ σημεῖον ἀνακάμψεως β' εἴδους.

884. Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ καμπύλη $y = e^{-\frac{1}{x}}$ ἔχει τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων ὡς τελικὸν σημεῖον.

885. Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ καμπύλη $y = x \,\text{τοξεφ}\, \frac{1}{x}$ ἔχει γωνιακὸν σημεῖον τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων καὶ νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι τῶν ἐφαπτομένων μὲ τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο

ΔΙΑΦΟΡΟΙ. 886. Εἰς τετράεδρον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀκμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν, οἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν.

887. Τὸ κέντρον βάρους τετραέδρου εἶνε καὶ κέντρον βάρους τοῦ τετραέδρου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὰ κέντρα βάρους τῶν ἑδρῶν του.

888. Ἐὰν δοθοῦν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ καὶ δύο σημεῖα Ρ,Ρ' κείμενα ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου, αἱ εὐθεῖαι καθ' ἃς τέμνονται τὰ ζεύγη τῶν ἐπιπέδων ΡΑΒ, Ρ'ΓΔ καὶ ΡΓΔ, Ρ'ΑΒ ὁρίζουν ἐπίπεδον. Τὰ ἓξ ἐπίπεδα τὰ προκύπτοντα διὰ συνδυασμοῦ τῶν σημείων Α,Β,Γ,Δ καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους, τέμνονται κατὰ εὐθεῖαν, ἥτις συναντᾷ τὴν ΡΡ'.

889. Ἐὰν διὰ τῶν κέντρων τεσσάρων περιφερειῶν κύκλων ἐπιπέδου φέρωμεν τὰς καθέτους ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον καὶ λάβωμεν ἐπὶ τῶν εὐθειῶν τούτων τμήματα ἀνάλογα πρὸς τὰς δυνάμεις ἑνὸς σημείου τυχόντος τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὰς περιφερείας, τὰ ἄκρα τῶν τμημάτων τούτων εἶνε κορυφαὶ τετραέδρου, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος εἶνε ἀνεξάρτητος τοῦ σημείου.

890. Τμῆμα εὐθείας ΑΒ, δεδομένου μήκους, στρέφεται περὶ ἓν σημεῖον αὐτοῦ, ὥστε οἱ λόγοι $\frac{(\text{ΑΓ})}{(\text{ΑΔ})}$ καὶ $\frac{(\text{ΒΓ})}{(\text{ΒΔ})}$ τῶν ἀποστάσεων τῶν ἄκρων Α,Β ἀπὸ δύο ὡρισμένα σημεῖα Γ,Δ νὰ εἶνε ἴσοι. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ γράφει ἐπίπεδον.

891. Ἔστω περιφέρεια κύκλου καὶ σημεῖον Ρ κινούμενον ἐπ' εὐθείας κειμένης ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς περιφερείας κύκλου καὶ Ρ' τὸ σημεῖον καθ' ὃ ἡ εὐθεῖα τέμνει τὴν πολικὴν τοῦ Ρ ὡς πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ σφαῖρα ἡ γραφομένη ἐπὶ τῆς ΡΡ' ὡς διαμέτρου διέρχεται δι' ὡρισμένης περιφερείας κύκλου.

892. Δίδεται σφαῖρα Σ, εὐθεῖα Δ καὶ σημεῖον Ρ. Συνδέομεν τὸ σημεῖον Ρ μὲ τὸν πόλον Μ ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῆς Δ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου καθ' ὃ ἡ εὐθεῖα ΡΜ τέμνει τὸ ἐπίπεδον.

893. Δεδομένων τριῶν σφαιρῶν, νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος σημείων τοιούτων, ὥστε τὰ μήκη τῶν διανυσμάτων, ἐφαπτομένων καὶ ἀγομένων ἀπ' αὐτῶν εἰς τὰς τρεῖς σφαίρας νὰ εἶνε ἀνάλογα πρὸς δεδομένα μήκη.

894. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν εὐθειῶν, τῶν ἀγομένων δι' ἑνὸς σημείου καὶ τοιούτων ὥστε, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζει ἑκάστη μὲ δύο ἄλλας ὡρισμένας εὐθείας νὰ εἶνε σταθερόν.

895. Ἐπὶ ἐπιπέδου δίδονται δύο εὐθεῖαι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας, ΟΑ καὶ ΟΒ, καὶ περιφέρεια κύκλου Κ. Περιστρέφομεν τὴν περιφέρειαν κύκλου περὶ τὴν ΟΑ, καὶ ἀκολούθως περὶ τὴν ΟΒ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ προβολὴ τῆς τομῆς τῶν δύο παραγομένων ἐπιφανειῶν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΟΑΒ.

896. Τί παριστάνει ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2+4y^2+9z^2+12yz-6zx-4xy+2x+2\beta y+2\gamma z+1=0$;

897. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ συντεταγμέναι τῶν κοινῶν σημείων τῶν τριῶν ἐπιφανειῶν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ $x^2+y^2+z^2-3x=0$, $x^2=yz$, $x^2=\pm y$,

898. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τοῦ ὑπερβολοειδοῦς, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τῶν τριῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἐξισώσεις $x=0$, $y=\alpha$; $y=0$, $z=\alpha$; $z=0$, $x=\alpha$.

899. Εἰς τὸν χῶρον τῶν τριῶν διαστάσεων δίδονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′. Συνδέομεν τυχὸν σημεῖον τοῦ Μ ἐπιπέδου τοῦ ΑΒΓ μὲ τὰς κορυφὰς Α,Β,Γ καὶ λαμβάνομεν (εἰς τὸν χῶρον) σημεῖον Ρ ὥστε ΡΑ′=ΜΑ, ΡΒ′=ΜΒ, ΡΓ′=ΜΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ τόπος τοῦ σημείου Ρ εἶνε ἐπιφάνεια δευτέρου βαθμοῦ.

900. Διὰ τοῦ κέντρου ἐλλειψοειδοῦς φέρομεν τὰ παράλληλα ἐπίπεδα πρὸς τὰ ἐφαπτόμενα εἰς τὰ Α, Β αὐτοῦ. Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα τέμνουν τὴν χορδὴν ΑΒ εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν Α, Β.

901. Διὰ μιᾶς τῶν κορυφῶν ἐλλειψοειδοῦς φέρομεν τὰς καθέτους πρὸς τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τῆς ἐπιφανείας. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν ἄκρων τῶν ἴσων καὶ παραλλήλων διανυσμάτων τῶν ἀγομένων διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλλειψοειδοῦς.

902. Φέρομεν τὰς καθέτους πρὸς ἐλλειψοειδὲς εἰς τὰ σημεῖα μιᾶς ἐπιπέδου τομῆς του. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν ἰχνῶν αὐτῶν τῶν καθέτων ἑνὸς τῶν πρωτευόντων ἐπιπέδων.

903. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῆς κοινῆς καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς καὶ μιᾶς γενετείρας τῆς ἐπιφανείας.

904. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ εὐθύγραμμοι γενέτειραι τῆς ἐπιφανείας, τῆς ἐχούσης ἐξίσωσιν $\lambda(xz-1)+\mu(z-xy)+\nu(y-z^2)=0$ καὶ νὰ διερευνηθῇ αὕτη.

905. Ποῖος ὁ τόπος τῶν ἀσυμπτώτων ἑνὸς μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἀπὸ τὰ σημεῖα εὐθείας, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου.

906. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν μέσων τῶν παραλλήλων χορδῶν πρὸς τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία συνδέει τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων μὲ τὸ σημεῖον Μ(2,1,1), διὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἥτις ἔχει ἐξίσωσιν $x^2+2y^2-3z^2+2xy+5x+z=0$.