ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΤΟΜΟΣ Α'.

ΕΚΔΟΣΙΣ Β'.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΤΥΠΟΙΣ Π. Δ. ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ
1911

15/1/63

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ

Τὸ ἀνὰ χεῖρας σύγγραμμα περιέχει πλῆρες καὶ ἐν ἐκτάσει τὸ σύστημα τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ, τὸ ὁποῖον ἐπὶ πολλὰ ἔτη ἐδίδαξα ἐν τῷ Στρατιωτικῷ Σχολείῳ τῶν Εὐελπίδων, διδάσκω δὲ καὶ νῦν ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ καὶ ἐν τῷ Ναυτικῷ Σχολείῳ τῶν Δοκίμων.

Ὁ διαφορικὸς λογισμὸς ἐρευνᾷ τὰς σχέσεις, αἵτινες ὑπάρχουσιν ἐν ταῖς μεταβολαῖς ποσοτήτων ἐξαρτωμένων ἀπ' ἀλλήλων καθ' οἱονδήποτε τρόπον· οἱ δὲ τρόποι τῆς ἐξαρτήσεως τῶν μεταβλητῶν ἀπ' ἀλλήλων, ἤτοι αἱ συναρτήσεις, εἶνε ἄπειροι. Ἐπειδὴ δὲ αἱ συναρτήσεις ἀποτελοῦσι τὸ ὑλικόν, ἐφ' οὗ ἐργαζόμεθα ἐν τῷ διαφορικῷ λογισμῷ, διὰ τοῦτο εἶνε ἀνάγκη πρῶτον νὰ γίνωσιν εἰς τὸν μανθάνοντα γνωσταὶ αἱ κυριώτεραι συναρτήσεις, αἱ συχνότερον παρεμβαίνουσαι εἰς τὰ γεωμετρικὰ καὶ φυσικὰ ζητήματα, ἔτι δὲ καὶ αἱ σειραί, διότι δι' αὐτῶν παρίστανται συνήθως αἱ συναρτήσεις· ἀμφότερα ταῦτα γίνονται ἐν τῇ εἰσαγωγῇ.

Ἐν τῷ Α΄ βιβλίῳ περιέχεται ἡ εὕρεσις τῶν διαφορικῶν τῶν συναρτήσεων καὶ οἱ κανόνες τῆς διαφορίσεως, μετὰ δὲ ταῦτα αἱ ἰδιότητες τῶν διαφορικῶν καὶ ἐφαρμογαί τινες δεικνύουσαι τὴν χρησιμότητα αὐτῶν.

Τὸν ὁρισμὸν τοῦ διαφορικοῦ τῶν συναρτήσεων στηρίζω ἐπὶ τῆς γενικῆς ἀρχῆς τῆς ἐξομοιώσεως, ἥτις ἁπανταχοῦ ἐν τῇ ἀνωτέρᾳ μαθηματικῇ ἐπικρατεῖ καὶ ὁδηγεῖ τὸν νοῦν. Ὁδηγούμενοι ὑπὸ τῆς ἀρχῆς ταύτης φθάνομεν εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ διαφορικοῦ, ἐὰν ζητήσωμεν νὰ ἐξομοιώσωμεν τοὺς πολλοὺς καὶ ποικίλους καὶ πολυπλόκους τρόπους τῆς μεταβολῆς τῶν ποσῶν πρὸς ἕνα ἐξ αὐτῶν, τὸν ἁπλούστατον. Ἡ ἁπλουστάτη δύο μεταβλητῶν ποσῶν σχέσις, ἡ ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς ἤδη γνωστὴ, εἶνε ἡ ἀναλογία, καθ' ἣν δηλονότι τὸ ἓν ποσὸν μεταβάλλεται ἀναλόγως τοῦ ἄλλου· εἰς αὐτὴν ἡ αὔξησις τοῦ ἑνὸς προξενεῖ ἀνάλογον αὔξησιν καὶ τοῦ ἄλλου, ἤτοι καὶ αἱ αὐξήσεις τῶν ποσῶν εἶνε ἀνάλογοι. Δὲν συμβαίνει ὅμως τοῦτο εἰς πάντας τοὺς τρόπους τῆς ἐξαρτήσεως, ἤ, ὡς συνήθως λέγομεν, εἰς πάσας τὰς συναρτήσεις, π. χ. ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἐξαρτῶνται ἀπ' ἀλλήλων, ἀλλ' οὔτε αὐτὰ εἶνε ἀνάλογα οὔτε αἱ ἀντιστοιχοῦσαι αὐξήσεις αὐτῶν· ὁμοίως ἡ χορδὴ τοῦ κύκλου καὶ τὸ τόξον αὐτῆς, κλπ. Θέλοντες λοιπὸν νὰ ἐξομοιώσωμεν κατὰ τὸ δυνατὸν τὴν αὔξησιν πάσης ἐν γένει συναρτήσεως πρὸς τὴν αὔξησιν τῆς ἁπλουστάτης, ἀγόμεθα εἰς τὸ νὰ ζητήσωμεν, ἂν εἶνε δυνατόν, ἔστω καὶ εἰς μικρόν τι διάστημα, αἱ αὐξήσεις τῶν μεταβλητῶν νὰ θεωρῶνται ὡς ἀνάλογοι κατὰ προσέγγισιν· τουτέστιν, ἂν εἶνε δυνατὸν ἡ αὔξησις πάσης συναρτήσεως νὰ ἔχῃ τοὐλάχιστον μέρος τι ἀνάλογον πρὸς τὴν αὔξησιν τῆς μεταβλητῆς, ἀφ' ἧς ἐξαρτᾶται· εὑρίσκομεν δέ, ὅτι τοῦτο πράγματι συμβαίνει σ υ ν ή θ ω ς, καὶ ὅτι διὰ τὰς μικρὰς αὐξήσεις τὸ μέρος τὸ μὴ ἀνάλογον εἶνε ἐλάχιστον σχετικῶς πρὸς τὸ ἀνάλογον μέρος, καὶ τὸ πάντων σπουδαιότατον, ὅτι ἐκ τούτου καὶ μόνου τοῦ μέρους, ὅταν εἶνε γνωστόν, δύναται νὰ εὑρεθῇ ἡ συνάρτησις. Ἑπομένως ἑκάστη συνάρτησις δύναται διὰ μικρὰς αὐξήσεις νὰ ἐξομοιωθῇ πρὸς ἁπλῆν τινα ἀναλογίαν καὶ τότε τὸ μὲν ἀνάλογον μέρος τῆς αὐξήσεώς της λέγεται δ ι α φ ο ρ ι κ ὸ ν αὐτῆς, ὁ δὲ λόγος αὐτοῦ πρὸς τὴν αὔξησιν τῆς μεταβλητῆς, ἀφ' ἧς ἐξαρτᾶται, λέγεται π α ρ ά γ ω γ ο ς. Διὰ τῆς ἐξομοιώσεως ταύτης ἁπλοποιεῖται τὰ μέγιστα ἡ πρὸς ἀλλήλας σύγκρισις τῶν μικρῶν αὐξήσεων, ἥτις εἶνε ἔργον τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ, ἔτι δὲ καὶ ἡ ἄθροισις αὐτῶν, ἥτις εἶνε ἔργον τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ· διότι ἀποδεικνύεται, ὅτι οὐδὲν λάθος γίνεται, ἐὰν ἀντὶ τῶν αὐξήσεων, αἵτινες εἶνε συνήθως πολύπλοκοι καὶ δυσεύρετοι, τεθῶσι τὰ διαφορικά, ὧν ἡ εὕρεσις εἶνε εὐκολωτάτη. Αἱ δὲ ἁπλαῖ σχέσεις, αἵτινες συνδέουσι τὰ διαφορικά, εἶνε ἁρμοδιώταται πρὸς τὴν λύσιν πλήθους ζητημάτων, ἅτινα ἄλλως ἢ δὲν δύνανται νὰ λυθῶσιν ἢ λύονται διὰ διαφόρων πολυπλόκων μεθόδων οὐδεμίαν ἐχουσῶν ἑνότητα.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον ἐμφανίζεται τὸ διαφορικὸν τῶν συναρτήσεων ὡς μέρος τι τῆς αὐξήσεως αὐτῶν ἔχον ὡρισμένην μορφήν. ἐμφανίζεται δηλονότι ἡ ἰδιότης τοῦ διαφορισίμου ὡς μορφολογικὴ ἰδιότης τῶν συναρτήσεων ἢ τῶν αὐξήσεων αὐτῶν.

Ὁ τρόπος οὗτος τοῦ θεωρεῖν τὰ διαφορικὰ εἶνε εὐληπτότερος διὰ τοὺς μαθητάς, διότι οὐδόλως προαπαιτεῖ τὴν ἔννοιαν τῶν ἀπειροστῶν, ἣν εὐκόλως παρανοοῦσιν οἱ ἀρχάριοι· ἀλλὰ καὶ ὀρθότερος καὶ γενικώτερός μοι φαίνεται, διότι κατ᾽ αὐτὸν ἡ αὔξησις τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς εἰς οὐδένα ὑποβάλλεται περιορισμόν, ἀλλὰ δύναται νὰ εἶνε οἱοσδήποτε ἀριθμὸς εἴτε πραγματικὸς εἴτε μιγάς· ἐνῷ κατὰ τὸν συνήθη τρόπον, ἔνθα ὁρίζεται πρῶτον ἡ παράγωγος ὡς ὅριον τοῦ λόγου τῶν αὐξήσεων, ἔπειτα δὲ ἐξ αὐτῆς τὸ διαφορικόν, ἡ αὔξησις τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς ὑποτίθεται ἀναγκαίως σειράν τινα πραγματικῶν τιμῶν διατρέχουσα, τοῦτο δὲ περιορίζει ἄνευ ἀνάγκης τὴν γενικότητα τῶν θεωρημάτων τῆς διαφορίσεως. Ἀλλὰ πλὴν τούτου ἡ ἔννοια τοῦ διαφορικοῦ τῶν συναρτήσεων εἶνε πολλῷ οὐσιωδεστέρα καὶ θεμελιωδεστέρα ἢ ἡ ἔννοια τῆς παραγώγου· διότι καὶ ἐπὶ συναρτήσεων ἐξαρτωμένων ἐκ πολλῶν μεταβλητῶν ἐπεκτείνεται εὐκόλως καὶ αἱ συνδέουσαι τὰ διαφορικὰ ἐξισώσεις διατηροῦσιν ἀμετάβλητον τὴν ἑαυτῶν μορφήν, οἱαιδήποτε καὶ ἂν εἶνε αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταί, ἐνῷ αἱ παράγωγοι δὲν ἔχουσι τὴν ἰδιότητα ταύτην. Διὰ τοῦτο ὀρθότερόν μοι φαίνεται νὰ θεμελιώνηται ὁ διαφορικὸς λογισμὸς ἐπὶ τῆς ἐννοίας τοῦ διαφορικοῦ καὶ νὰ ἄρχηται ἀπ᾽ αὐτῆς.

Ἐν τῷ Β΄ βιβλίῳ ἐξέθηκα τὰς γεωμετρικὰς ἐφαρμογάς, ἐν αἷς μόνον τῆς πρώτης τάξεως διαφορικὰ καὶ παράγωγοι παρεμβαίνουσιν. Αἱ ἐφαρμογαὶ αὗται ἀναφέρονται εἰς τὰς ἐφαπτομένας τῶν καμπύλων, εἰς τὸ ἐμβαδὸν καὶ τὸ τόξον αὐτῶν, ἔτι δὲ καὶ εἰς τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τῶν ἐπιφανειῶν.

Ἐν τῷ Γ΄ βιβλίῳ συμπληροῦται ὁ διαφορικὸς λογισμὸς διὰ τῆς γνώσεως τῶν διαφορικῶν καὶ τῶν παραγώγων τῶν διαφόρων τάξεων καὶ διὰ τοῦ τύπου τοῦ Taylor, δι' οὗ ἐκφράζεται ἡ αὔξησις πάσης συναρτήσεως ἀναπτυσσομένη εἰς σειρὰν κατὰ τὰς θετικὰς καὶ ἀκεραίας δυνάμεις τῆς αὐξήσεως τῆς μεταβλητῆς, ἀφ' ἧς ἐξαρτᾶται ἡ συνάρτησις.

Ἐν τῷ Δ΄ βιβλίῳ ἐξέθηκα τὰς γεωμετρικὰς ἐφαρμογάς, ὅσαι ἀπαιτοῦσι τὴν γνῶσιν τῶν διαφορικῶν τῶν ἀνωτέρων τάξεων. Τὰς ἐφαρμογὰς ταύτας καὶ ἰδίως τὴν θεωρίαν τῶν καμπύλων ἐπραγματεύθην ἐν ἐκτάσει, διότι τοῦτο μὲν ἐν αὐταῖς γίνεται καταφανεστέρα ἡ δύναμις καὶ ἡ σημασία τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ, τοῦτο δὲ αἱ γεωμετρικαὶ αὗται θεωρίαι εἶνε ἀπαραίτητοι εἰς πάντα κλάδον τῶν ἐφηρμοσμένων μαθηματικῶν.

Ἐν τῷ Ε΄ τέλος βιβλίῳ περιέχονται ἀναλυτικαί τινες ἐφαρμογαὶ τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ, ἐν αἷς καὶ ἡ θεωρία τῶν μεγίστων καὶ τῶν ἐλαχίστων.

Ὡς πρὸς τὴν μέθοδον, καθ' ἣν πραγματεύομαι τὰ διάφορα ζητήματα, κρίνω καλὸν νὰ παρατηρήσω, ὅτι ἐν πολλοῖς ἐνεωτέρισα· οὕτω λόγου χάριν ἐν τοῖς περὶ σειρῶν δέχομαι ὡς συγκλινούσας σειρὰς ἐκείνας μόνον, ἐν αἷς ἡ τάξις τῶν ὅρων δὲν ἔχει ἐπιρροὴν ἐπὶ τοῦ ἀθροίσματος· καὶ τοῦτο, διότι μόνον εἰς τὰς τοιαύτας σειρὰς ἐφαρμόζεται ὁ ἀλγεβρικὸς λογισμός. Ὁμοίως ἀπέδειξα δι' ἰδίου τρόπου τὸ θεώρημα, ὅτι αἱ σειραὶ τῆς μορφῆς $\Sigma a_\nu x^\nu$ εἶνε διαφορίσιμοι· Ἐπίσης δι' ἰδίου τρόπου ἀπέδειξα καὶ τὴν σχέσιν τῶν κυκλικῶν συναρτήσεων πρὸς τὴν ἐκθετικὴν συνάρτησιν e^x· πρὸς τούτοις τὸν τύπον τοῦ Taylor καὶ πολλὰ ἄλλα ἐν τῇ γεωμετρικῇ θεωρίᾳ τῶν ἐπαφῶν, ἐν τῇ θεωρίᾳ τῶν ἐνειλιγμένων καὶ τῶν ἐξειλιγμένων τῶν ἐν τῷ χώρῳ καμπύλων, ἐν τῇ θεωρίᾳ τῶν τριῶν ἀρχικῶν εὐθειῶν εἰς ἕκαστον σημεῖον πάσης καμπύλης, ἐν τῇ εὑρέσει τοῦ ὁρίου, πρὸς ὅ τείνουσι παραστάσεις λαμβάνουσαι ἀπροσδιόριστον μορφὴν κτλ. κτλ. Ἐκτὸς τούτων ἔδωκα καὶ νέαν ἔκφρασιν τῆς $\nu^{\text{οστῆς}}$ παραγώγου πάσης συναρτήσεως διὰ τῶν αὐξήσεων αὐτῆς τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς ν διαφόρους αὐξήσεις τῆς μεταβλητῆς, ἀφ' ἧς ἐξαρτᾶται ἡ συνάρτησις.

Ἐπειδὴ αἱ ἀφῃρημέναι τῆς μαθηματικῆς θεωρίαι μόνον διὰ τῶν συχνῶν ἐφαρμογῶν καὶ διὰ τῆς λύσεως πολλῶν καὶ ποικίλων προβλημάτων δύνανται νὰ κατανοηθῶσιν ἐν πάσῃ τῇ ἐκτάσει αὐτῶν καὶ νὰ διατηρηθῶσιν ἐν τῇ μνήμῃ, διὰ τοῦτο ἔκρινα ἀπαραίτητον νὰ παραθέσω εἰς ἑκάστην θεωρίαν ἀρκετὰ προβλήματα, ἐξ ὧν τὰ πλεῖστα λελυμένα, εἰσὶ δὲ καί τινα, ὧν ὑποδεικνύεται μόνον ἡ λύσις, ἵνα δοκιμάζωσιν ἐπ' αὐτῶν οἱ μαθηταὶ τὰς δυνάμεις αὐτῶν.

Τοιοῦτον ὂν τὸ παρὸν σύγγραμμα εὔχομαι καὶ ἐλπίζω νὰ συντελέσῃ παρ' ἡμῖν εἰς τελειοτέραν καὶ εὐκολωτέραν σπουδὴν τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ.

Ἐν Ἀθήναις τῇ 1 Αὐγούστου 1889.

Ι. Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΗΣ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΠΕΡΙ ΣΕΙΡΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

1. *Σειρὰ* λέγεται πλῆθος ἄπειρον ἀριθμῶν εἴς τινα νόμον ὑποκείμενον· ἕκαστος δὲ τῶν ἀριθμῶν τούτων λέγεται *ὅρος* τῆς σειρᾶς.

Οἱ ὅροι νοοῦνται πάντες προστιθέμενοι.

2. Ἡ σειρὰ λέγεται *ἁπλῆ* ἢ *πρώτης τάξεως*, ἐὰν οἱ ὅροι αὐτῆς ἀντιστοιχῶσι πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν 1, 2, 3, . . . εἷς πρὸς ἕνα, καὶ ἀντιστρόφως· *διπλῆ* δέ, ἢ *δευτέρας τάξεως*, ἐὰν οἱ ὅροι αὐτῆς ἀντιστοιχῶσι πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ἀνὰ δύο διατάξεων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, εἷς ὅρος πρὸς μίαν διάταξιν, καὶ ἀντιστρόφως. Ὁμοίως ὁρίζονται καὶ αἱ *τριπλαῖ* ἢ *τρίτης τάξεως* σειραί· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Τῆς ἁπλῆς σειρᾶς οἱ ὅροι δύνανται νὰ γραφῶσιν ὁ εἷς μετὰ τὸν ἄλλον εἰς μίαν γραμμήν, ὡς ἑξῆς

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots\ldots + \alpha_\nu + \ldots$$

Τῆς διπλῆς σειρᾶς οἱ ὅροι δύνανται νὰ γραφῶσιν ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου εἰς ἀπείρους ἁπλᾶς σειράς, ὡς ἑξῆς

$$\begin{array}{ll} & \alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} + \ldots + \alpha_{1\nu} + \ldots \\ + & \alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23} + \ldots + \alpha_{2\nu} + \ldots \\ + & \alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33} + \ldots + \alpha_{3\nu} + \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

καὶ οὕτω καθεξῆς.

3. Ἡ σειρὰ λέγεται δεδομένη, ὅταν εἶνε γνωστὸς ὁ τρόπος, καθ' ὃν εὑρίσκονται οἱ ὅροι αὐτῆς.

Α΄) Σειραὶ ἐκ θετικῶν ἀριθμῶν.

4. *Σειρὰ ἔχουσα πάντας τοὺς ὅρους αὐτῆς θετικοὺς λέγεται **συγκλίνουσα**, ἐὰν τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ὅρων αὐτῆς μένῃ πάντοτε μικρότερον ἀκεραίου τινός.*

***Ἀποκλίνουσα** δέ, ἐὰν τοὐναντίον.*

5. Ὅτι πᾶσα τοιαύτη σειρὰ παριστᾷ ἀριθμὸν ὡρισμένον, πρὸς ὃν τείνομεν ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον, ὅταν προσθέτωμεν τοὺς ὅρους αὐτῆς, ἀπεδείχθη ἐν τῇ Εἰσαγωγῇ τῆς ἀνωτέρας ἀλγέβρας (σελ. 99 ἔκδοσις Β΄). Ἐν αὐτῇ ἀπεδείχθη καὶ ὅτι, ὡς ἄθροισμα θεωρουμένη, πᾶσα τοιαύτη σειρὰ ἔχει πάσας τὰς γενικὰς ἰδιότητας τῶν συνήθων ἀθροισμάτων. Ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τούτων ἀναγράφομεν τὰς ἑξῆς:

α΄) *Ἐν ἀθροίσματι ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τοὺς προσθετέους καθ' οἱανδήποτε τάξιν θέλομεν.*

β΄) *Ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄθροισμα, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ ἀθροίσματος καὶ προστεθῶσι τὰ γινόμενα.*

γ΄) *Ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄθροισμα, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἕκαστον μέρος τοῦ ἑνὸς ἐφ' ἕκαστον μέρος τοῦ ἄλλου καὶ προστεθῶσι τὰ γινόμενα.*

6. Ἐν τῇ Εἰσαγωγῇ τῆς ἀνωτέρας ἀλγέβρας (σελ. 45, ἔκδοσις Β΄) ἀπεδείχθη καὶ ἡ ἑξῆς ἰδιότης τῶν συγκλινουσῶν σειρῶν.

Ἐὰν σειρά τις συγκλίνῃ καὶ δοθῇ ἀριθμὸς ὁσονδήποτε μικρός, ὁ ε, δυνάμεθα πάντοτε νὰ λάβωμεν πεπερασμένον τι πλῆθος ὅρων αὐτῆς καὶ τοιούτων, ὥστε τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἐκ τῶν λοιπῶν νὰ εἶνε μικρότερον τοῦ ε· τότε τὸ ἄθροισμα τῶν ληφθέντων ὅρων θὰ διαφέρῃ ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, ὃν παριστᾷ ἡ σειρά, διαφορὰν οὐχὶ μεγαλητέραν τοῦ ε.

Γνωρίσματα, ἐξ ὧν διακρίνομεν, ἂν δοθεῖσα σειρὰ εἶνε συγκλίνουσα ἢ ἀποκλίνουσα.

7. Οὐδὲν ὑπάρχει γενικὸν γνώρισμα, ἐξ οὗ νὰ διακρίνῃ τις ἀμέσως, ἂν δεδομένη σειρὰ συγκλίνῃ ἢ ἀποκλίνῃ. Πάντες δὲ οἱ κανόνες,

οὓς ἔχομεν πρὸς διάκρισιν τούτου, στηρίζονταί ἐπὶ τῶν ἑπομένων ἁπλουστάτων καὶ αὐτοδήλων προτάσεων.

Ἐὰν σειρά τις συγκλίνῃ, καὶ πᾶσα ἄλλη ἐξ αὐτῆς προκύπτουσα διὰ τῆς σμικρύνσεως τῶν ὅρων αὐτῆς, ἐπ' ἴσης συγκλίνει.

Ἐὰν σειρά τις ἀποκλίνῃ, καὶ πᾶσα ἄλλη ἐξ αὐτῆς προκύπτουσα διὰ τῆς αὐξήσεως τῶν ὅρων αὐτῆς, ἐπ' ἴσης ἀποκλίνει.

Διὰ τῶν προτάσεων τούτων εὑρίσκομεν ἐξ ἑκάστης συγκλινούσης σειρᾶς ἕνα κανόνα διακριτικὸν τῆς συγκλίσεως, ὡς ἐκ τῶν ἑπομένων γίνεται δῆλον· (θεωροῦμεν δὲ μόνον ἁπλᾶς σειράς).

8. Ἡ σειρὰ $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\ldots+\omega^\nu+\ldots,$ τῆς ὁποίας ἕκαστος ὅρος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὸν θετικὸν ἀριθμὸν ω, συγκλίνει, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ω εἶνε μικρότερος τῆς μονάδος 1. (Ἡ σειρὰ αὕτη λέγεται *γεωμετρικὴ πρόοδος*, ὁ δὲ ω λέγεται *λόγος* αὐτῆς. (ἰδὲ στοιχ. ἄλγεβρ., ἐδ. 225).

Διότι, ἂς λάβῃ τις ὅσους θέλῃ ὅρους τῆς σειρᾶς ταύτης, ἔστω δὲ ἐκ τῶν ληφθέντων ὁ τὸν μέγιστον ἐκθέτην ἔχων ὁ ω^ν, τότε πάντες οἱ ληφθέντες ὅροι ἀθροιζόμενοι δίδουσιν ἄθροισμα οὐχὶ μεῖζον τοῦ ἑξῆς·

$$1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\ldots+\omega^\nu$$

ἤτοι τοῦ $$\frac{1-\omega^{\nu+1}}{1-\omega} \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{1-\omega}-\frac{\omega^{\nu+1}}{1-\omega}$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι, ὁσουσδήποτε ὅρους τῆς σειρᾶς καὶ ἂν προσθέσωμεν, τὸ προκύπτον ἄθροισμα θὰ εἶνε πάντοτε μικρότερον τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{1}{1-\omega}$· ἄρα ἡ σειρὰ αὕτη συγκλίνει.

Ἵνα εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι πάντες οἱ ὅροι αὐτῆς, παριστῶμεν αὐτὸν διὰ τοῦ Α καὶ γράφομεν τὴν ἰσότητα

$$A=1+\omega+\omega^2+\omega^3+\ldots$$

ὡς ἑξῆς $$A=1+\omega(1+\omega+\omega^2+\ldots.)$$

ἤτοι $$A=1+\omega A$$

ἐξ οὗ ἕπεται $$A=\frac{1}{1-\omega}.$$

9. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἡ σειρὰ

$$\alpha+\alpha\omega+\alpha\omega^2+\ldots+\alpha\omega^\nu+\ldots$$

συγκλίνει, καὶ ὁ ἀριθμὸς, ὃν ἀποτελεῖ, εἶνε ὁ $\frac{\alpha}{1-\omega}$.

10. Ἔστω νῦν οἱαδήποτε σειρὰ (πρώτης τάξεως)

$$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu+\ldots \qquad (1)$$

ἡ σειρὰ αὕτη θὰ εἶνε προδήλως συγκλίνουσα, ἐὰν ὑπάρχῃ γεωμετρική τις σειρὰ φθίνουσα καὶ ἔχουσα ὅρους μεγαλητέρους (τῶν ἀντιστοιχούντων ὅρων αὐτῆς)· ἔστω τοιαύτη γεωμετρικὴ σειρὰ ἡ ἑξῆς

$$\alpha+\alpha\omega+\alpha\omega^2+\ldots+\alpha\omega^\nu+\ldots$$

Οἱ ὅροι τῆς γεωμετρικῆς ταύτης σειρᾶς θὰ εἶνε βεβαίως μεγαλήτεροι τῶν ἀντιστοίχων ὅρων τῆς σειρᾶς (1), ἐὰν ὁ α εἶνε μεγαλήτερος τοῦ α_0 (ὅπερ πάντοτε δύναται νὰ γίνῃ) καὶ ὁ λόγος ω εἶνε μεγαλήτερος τοῦ λόγου δύο οἱωνδήποτε ἐφεξῆς ὅρων τῆς σειρᾶς (1)· καὶ ὄντως, ἂν ὑποτεθῇ $\dfrac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu-1}} < \omega$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ ν,

θὰ ἔχωμεν $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_0}<\omega, \quad \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}<\omega, \quad \ldots \quad \dfrac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu-1}}<\omega, \ldots$

ὅθεν ἕπεται $\alpha_1<\alpha_0\omega, \quad \alpha_2<\alpha_0\omega^2, \quad \alpha_3<\alpha_0\omega^3, \ldots \alpha_\nu<\alpha_0\omega^\nu \ldots$ τουτέστιν οἱ ὅροι τῆς σειρᾶς (1) εἶνε μικρότεροι ἢ οἱ ἀντίστοιχοι ὅροι τῆς γεωμετρικῆς σειρᾶς. Ἐντεῦθεν συνάγεται ἡ πρότασις

Ἐὰν ὁ λόγος οἱουδήποτε ὅρου τῆς σειρᾶς πρὸς τὸν προηγούμενον αὐτοῦ (ὅστις λόγος λέγεται λόγος τῆς σειρᾶς) μένῃ πάντοτε μικρότερος ἀριθμοῦ τινος ω μικροτέρου τῆς μονάδος, ἡ σειρὰ συγκλίνει.

Τὸ θεώρημα τοῦτο δύναται νὰ γενικευθῇ ὡς ἑξῆς.

Σειρά τις συγκλίνει, ἐὰν ὁ λόγος αὐτῆς εἶνε ἀντιστοίχως μικρότερος τοῦ λόγου σειρᾶς συγκλινούσης.

Διότι, ἂν εἶνε $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_0}<\dfrac{\beta_1}{\beta_0}, \quad \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}<\dfrac{\beta_2}{\beta_1} \quad \ldots,$

ἕπεται

$$\frac{\alpha_\nu}{\alpha_0}<\frac{\beta_\nu}{\beta_0}$$

καὶ

$$\alpha_\nu<\beta_\nu\cdot\frac{\alpha_0}{\beta_0},$$

ἀλλ᾽ ἂν ἡ σειρὰ $\beta_0+\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu+\ldots$ συγκλίνῃ, καὶ πολλαπλασιαζομένων τῶν ὅρων αὐτῆς ἐπὶ $\dfrac{\alpha_0}{\beta_0}$ θὰ συγκλίνῃ, ἄρα θὰ συγκλίνῃ καὶ ἡ σειρὰ $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu+\ldots$

11. Ἐκ τῆς ἀνισότητος $\alpha_\nu < \alpha_0 \omega^\nu$, ἥτις ἐκφράζει ὅτι οἱ ὅροι τῆς σειρᾶς (1) εἶνε ἀντιστοίχως μικρότεροι τῶν ὅρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου, ἕπεται

$$\sqrt[\nu]{\frac{\alpha_\nu}{\alpha_0}} < \omega$$

τουτέστιν ἡ σειρὰ $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_\nu + \ldots$ θὰ συγκλίνῃ, ἂν ἡ νυοστὴ ῥίζα τοῦ ὅρου α_ν (ὅστις ἔχει ν ἄλλους πρὸ αὐτοῦ) διαιρεθέντος διὰ τοῦ πρώτου μένῃ πάντοτε μικροτέρα ἀριθμοῦ τινος ω μικροτέρου τῆς μονάδος.

Ἡ πρότασις αὕτη ἀποδεικνύεται καὶ ἀμέσως ἁπλούστατα.

ΣΗΜ. Ὅτι ἡ σειρὰ ἀποκλίνει, ὅταν ὁ λόγος αὐτῆς μένῃ πάντοτε μεγαλήτερος τῆς μονάδος, εἶνε προφανές· διότι οἱ ὅροι αὐτῆς προβαίνουσιν αὐξανόμενοι. Ἀλλ' ἐὰν ὁ λόγος τῆς σειρᾶς μένῃ μὲν πάντοτε μικρότερος τῆς μονάδος, ὑπερβαίνῃ ὅμως πάντας τοὺς μικροτέρους αὐτῆς ἀριθμοὺς (ἤτοι ἔχῃ ὅριον τὴν μονάδα), δὲν δυνάμεθα νὰ ἀποφανθῶμέν τι βέβαιον περὶ τῆς συγκλίσεως ἢ τῆς ἀποκλίσεως τῆς σειρᾶς, διότι ὑπάρχουσι τοιαῦται σειραὶ καὶ συγκλίνουσαι, ὑπάρχουσι δὲ καὶ ἀποκλίνουσαι, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν ἑπομένων παραδειγμάτων.

12. Ἡ σειρὰ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{\nu} + \ldots$

εἶνε ἀποκλίνουσα, διότι δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἕπεται

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots$$

ἔνθα ἑκάστη παρένθεσις ἔχει διπλασίους ὅρους ἢ ἡ προηγουμένη· ἀλλ' ἑκάστη τῶν παρενθέσεων τούτων παρέχει ἄθροισμα μεγαλήτερον τοῦ $\frac{1}{2}$· διότι, ἂν ἀντικατασταθῶσιν ἐν αὐτῇ τὰ λοιπὰ κλάσματα διὰ τοῦ τελευταίου (ὅπερ εἶνε μικρότερον αὐτῶν), προκύπτει ἄθροισμα πάντοτε ὁ ἀριθμὸς $\frac{1}{2}$. Δύναται ἄρα τὸ ἄθροισμα ἀρκετῶν ὅρων τῆς σειρᾶς νὰ ὑπερβῇ πάντα δοθέντα ἀριθμὸν καὶ διὰ τοῦτο ἡ σειρὰ αὕτη εἶνε ἀποκλίνουσα.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἡ σειρὰ

$$\frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{3} + \ldots + \frac{\alpha}{\nu} + \ldots \qquad (2)$$

τοῦ α ὄντος οἱουδήποτε ἀριθμοῦ (διαφόρου τοῦ 0), εἶνε ἀποκλίνουσα.

13. Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι, ἐὰν οἱ ὅροι σειρᾶς τινος εἶνε μεγαλήτεροι τῶν ἀντιστοίχων ὅρων τῆς σειρᾶς (2), καὶ ἡ σειρὰ αὕτη θὰ εἶνε ἀποκλίνουσα· ἔστω τοιαύτη σειρὰ ἡ ἑξῆς

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu + \ldots$$

τότε θὰ εἶνε $$\alpha_\nu > \frac{\alpha}{\nu} \quad \text{καὶ} \quad \nu . \alpha_\nu > \alpha,$$

τουτέστιν, *ἐὰν τὸ γινόμενον τοῦ $\nu^{\text{ου}}$ ὅρου τῆς σειρᾶς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν ν μένῃ πάντοτε μεγαλήτερον ἀριθμοῦ τινος α* ($\alpha \lesseqgtr 0$), *ἡ σειρὰ εἶνε ἀποκλίνουσα.*

14. Ἡ σειρὰ $$1 + \frac{1}{2^\varrho} + \frac{1}{3^\varrho} + \ldots + \frac{1}{\nu^\varrho} + \ldots \tag{3}$$

ἔνθα ρ σημαίνει θετικὸν ἀριθμὸν καὶ μείζονα τῆς μονάδος, εἶνε συγκλίνουσα, διότι γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$1 + \left(\frac{1}{2^\varrho} + \frac{1}{3^\varrho}\right) + \left(\frac{1}{4^\varrho} + \ldots + \frac{1}{7^\varrho}\right) + \left(\frac{1}{8^\varrho} + \ldots + \frac{1}{15^\varrho}\right) + \ldots .$$

ἑκάστη παρένθεσις ἔχει διπλασίους ὅρους ἢ ἡ προηγουμένη· ὁ δὲ παρονομαστὴς τοῦ πρώτου ἐν αὐτῇ κλάσματος εἶνε δύναμίς τις τοῦ 2^ϱ. Ἐὰν νῦν ἐν ἑκάστῃ τῶν παρενθέσεων ἀντὶ τῶν λοιπῶν παρονομαστῶν τεθῇ ὁ πρῶτος, αὐξάνει τὸ ἄθροισμα, ὥστε, ἂν ἡ προκύπτουσα σειρὰ

$$1 + \left(\frac{1}{2^\varrho} + \frac{1}{2^\varrho}\right) + \left(\frac{1}{4^\varrho} + \frac{1}{4^\varrho} + \frac{1}{4^\varrho} + \frac{1}{4^\varrho}\right) + \left(\frac{1}{8^\varrho} + \ldots + \frac{1}{8^\varrho}\right) + \ldots$$

συγκλίνῃ, καὶ ἡ ἐξ ἀρχῆς δοθεῖσα (3) θὰ συγκλίνῃ· ἀλλ' ἡ νέα αὕτη σειρά, ἐὰν προστεθῶσι τὰ κλάσματα ἐν ἑκάστῃ παρενθέσει, γίνεται

$$1 + \frac{2}{2^\varrho} + \frac{4}{4^\varrho} + \frac{8}{8^\varrho} + \frac{16}{16^\varrho} + \ldots,$$

ἤτοι $$1 + \frac{1}{2^\tau} + \frac{1}{4^\tau} + \frac{1}{8^\tau} + \frac{1}{16^\tau} + \ldots \quad \text{ἐὰν τεθῇ} \quad \tau = \varrho - 1 \cdot$$

ἀλλ' ἡ σειρὰ αὕτη συγκλίνει, διότι εἶνε γεωμετρικὴ σειρὰ ἔχουσα λόγον $\frac{1}{2^\tau}$, ὅστις εἶνε μικρότερος τῆς μονάδος (διότι πᾶσα θετικὴ δύναμις παντὸς ἀριθμοῦ μεγαλητέρου τῆς μονάδος εἶνε ὡσαύτως μεγαλητέρα τῆς μονάδος)· ἑπομένως καὶ ἡ ἐξ ἀρχῆς δοθεῖσα (3) συγκλίνει καὶ μάλιστα ὁ ὑπ' αὐτῆς ἀποτελούμενος ἀριθμὸς εἶνε μικρότερος τοῦ $\frac{2^\tau}{2^\tau - 1}$, ὅν τινα ἀποτελεῖ ἡ τελευταία.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἡ σειρὰ

$$\alpha + \frac{\alpha}{2^\rho} + \frac{\alpha}{3^\rho} + \ldots + \frac{\alpha}{\nu^\rho} + \ldots$$

οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ἀριθμοῦ α εἶνε συγκλίνουσα, ἐὰν εἶνε $\rho > 1$

15. Ἐκ τούτου συνάγεται, ὅτι καὶ πᾶσα σειρὰ (πρώτης τάξεως)

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu + \ldots$$

θὰ συγκλίνῃ, ἐὰν οἱ ὅροι αὐτῆς εἶνε μικρότεροι τῶν ἀντιστοίχων ὅρων τῆς ἑξῆς

$$\alpha + \frac{\alpha}{2^\rho} + \frac{\alpha}{3^\rho} + \frac{\alpha}{4^\rho} + \ldots + \frac{\alpha}{\nu^\rho} + \ldots$$

ἤτοι, ἂν εἶνε $\alpha_\nu < \dfrac{\alpha}{\nu^\rho}$ ἤτοι $\alpha_\nu . \nu^\rho < \alpha$, τουτέστιν

ἐὰν τὸ γινόμενον τοῦ $\nu^{\text{οῦ}}$ ὅρου τῆς σειρᾶς ἐπί τινα δύναμιν τοῦ ν, ἥτις νὰ ἔχῃ ἐκθέτην μεγαλήτερον τῆς μονάδος 1, μένῃ πάντοτε μικρότερον ἀριθμοῦ τινος ὡρισμένου, ἡ σειρὰ συγκλίνει.

ΣΗΜ. Ὁ λόγος τῆς σειρᾶς (3) εἶνε

$$\frac{1}{(\nu+1)^\rho} : \frac{1}{\nu^\rho} \quad \text{ἢ} \quad \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^\rho \quad \text{ἤτοι} \quad \left(1 - \frac{1}{\nu+1}\right)^\rho$$

ἑπομένως εἶνε πάντοτε μικρότερος τῆς μονάδος τείνει ὅμως πρὸς τὴν μονάδα· ὅταν προχωρῶμεν, ἤτοι ὅταν ὁ ν αὐξάνῃ ἑπομένως ὑπερβαίνει πάντα ἀριθμὸν μικρότερον τῆς μονάδος. Κατὰ δὲ τὰ προαποδειχθέντα ἡ σειρὰ αὕτη (3) συγκλίνει μὲν, ὅταν ὁ ρ ὑποτεθῇ θετικὸς καὶ μεγαλήτερος τῆς μονάδος, ἀποκλίνει δὲ, ὅταν ὁ ρ γίνῃ 1 ἢ καὶ μικρότερος τοῦ 1.

Τὰ παραδείγματα ταῦτα εἶνε ἱκανά, ἵνα μᾶς δείξωσι, πῶς ἐξ ἑκάστης σειρᾶς συγκλινούσης δυνάμεθα, μεταχειριζόμενοι τὰς δύο ἀρχικὰς προτάσεις, νὰ συμπεράνωμεν γνώρισμά τι διακριτικὸν τῆς συγκλίσεως τῶν σειρῶν ἐν γένει.

Παρατηρητέον δέ, ὅτι τὰ γνωρίσματα ταῦτα δὲν εἶνε ἀνάγκη νὰ ἀληθεύωσιν ἀνεξαιρέτως εἰς πάντας τοὺς ὅρους τῆς σειρᾶς· ἀρκεῖ οἱ ὅροι, εἰς τοὺς ὁποίους δὲν ἀληθεύουσι, νὰ εἶνε εἰς πλῆθος πεπερασμένον· διότι, ἂν οἱ λοιποὶ ὅροι ἀποτελῶσι σειρὰν συγκλίνουσαν, φανερὸν εἶνε, ὅτι καὶ μετὰ τὴν προσθήκην τῶν ἐξαιρουμένων πάλιν θὰ ἀποτελεσθῇ σειρὰ συγκλίνουσα.

ΣΗΜ. Ἑκάστη σειρὰ συνήθως προκύπτει ἔκ τινος θεωρίας, ἥτις παρέχει καὶ τὰ μέσα, δι᾽ ὧν διακρίνεται ἡ σύγκλισις ἢ ἡ ἀπόκλισις αὐτῆς.

Β΄) Σειραὶ ἐξ ἀριθμῶν θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν.

16. *Σειρὰ ἔχουσα ὅρους θετικοὺς καὶ ἀρνητικοὺς λέγεται συγκλίνουσα, ἐὰν οἱ θετικοὶ ὅροι αὐτῆς χωρὶς λαμβανόμενοι συνιστῶσι σειρὰν συγκλίνουσαν καὶ οἱ ἀρνητικοὶ ἐπίσης· ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, ἐὰν τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ὁμοειδῶν ὅρων αὐτῆς μένῃ πάντοτε ἀπολύτως μικρότερον ἀκεραίου τινὸς ὁμοειδοῦς.*

17. Ἐὰν οἱ μὲν ὅροι τοῦ ἑνὸς εἴδους ἀποτελῶσι σειρὰν συγκλίνουσαν, οἱ δὲ ὅροι τοῦ ἄλλου ἀποτελῶσι σειρὰν ἀποκλίνουσαν, καὶ ἡ ὅλη σειρὰ προδήλως εἶνε ἀποκλίνουσα.

Ἐὰν δὲ μήτε τοῦ ἑνὸς εἴδους οἱ ὅροι ἀποτελῶσι σειρὰν συγκλίνουσαν μήτε τοῦ ἄλλου, ἡ τοιαύτη σειρὰ δὲν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς παριστῶσα ἀριθμόν, οὐδὲ ἐφαρμόζονται ἐπ' αὐτῆς οἱ ἐπὶ τῶν συνήθων ἀθροισμάτων ἰσχύοντες νόμοι· διότι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τοὺς ὅρους αὐτῆς κατὰ τοιαύτην τάξιν, ὥστε (ἐὰν προβαίνωσι φθίνοντες καὶ τείνοντες πρὸς τὸ 0) προσθέτοντες αὐτοὺς καθ' ἣν σειρὰν εἶνε γεγραμμένοι νὰ προσεγγίζωμεν ὅσον ἄν τις θέλῃ πρὸς οἱονδήποτε θέλῃ ἀριθμόν. (ἰδὲ Εἰσαγωγὴν τῆς ἀνωτέρας ἀλγέβρας σελ. 58 ἔκδοσις Β΄).

Αἱ τοιαῦται σειραὶ λέγονται *ἡμισυγκλίνουσαι.*

18. Ὅταν οἱ ὅροι συγκλινούσης σειρᾶς εἶνε ἐναλλὰξ θετικοὶ καὶ ἀρνητικοί, προβαίνωσι δὲ φθίνοντες, ὁ ὑπὸ τῆς σειρᾶς ἀποτελούμενος ἀριθμὸς περιέχεται πάντοτε μεταξὺ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ν πρώτων ὅρων αὐτῆς καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν $\nu+1$ πρώτων.

Ἔστω τῷ ὄντι τοιαύτη σειρὰ ἡ

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu + \ldots$$

καὶ Α ὁ ὑπ' αὐτῆς ἀποτελούμενος ἀριθμός· ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ Σ_ν τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων αὐτῆς, θὰ εἶνε

$$A = \Sigma_\nu + (\alpha_\nu + \alpha_{\nu+1}) + (\alpha_{\nu+2} + \alpha_{\nu+3}) + \ldots$$

ἢ καὶ
$$A = \Sigma_\nu + \alpha_\nu + (\alpha_{\nu+1} + \alpha_{\nu+2}) + (\alpha_{\nu+3} + \alpha_{\nu+4}) + \ldots$$

Ἐπειδὴ δὲ οἱ ὅροι εἶνε ἐναλλὰξ θετικοὶ καὶ ἀρνητικοὶ καὶ προχωροῦσιν ἐλαττούμενοι, ἐν ἑκάστῃ παρενθέσει ὑπερισχύει τὸ εἶδος τοῦ πρώτου ὅρου· ὥστε αἱ μὲν παρενθέσεις τῆς πρώτης ἰσότητος ἔχουσι πᾶσαι τὸ σημεῖον τοῦ ὅρου α_ν, αἱ δὲ τῆς δευτέρας ἔχουσι πᾶσαι τὸ ἀντίθετον (τὸ τοῦ ὅρου $\alpha_{\nu+1}$)· ἂν λοιπὸν αἱ πρῶται εἶνε θετικαὶ (ὅτε $A > \Sigma_\nu$), αἱ δεύτεραι θὰ εἶνε ἀρνητικαὶ (ἑπομένως $A < \Sigma_\nu + \alpha_\nu$)· καὶ τἀνάπαλιν, ἂν αἱ πρῶται εἶνε ἀρνητικαὶ (ὅτε $A < \Sigma_\nu$), αἱ δεύτεραι θὰ εἶνε θετικαὶ (ἑπομένως $A > \Sigma_\nu + \alpha_\nu$)· ὥστε πάντοτε ὁ ἀριθμὸς A εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν δύο ἀθροισμάτων

$$\Sigma_\nu \quad \text{καὶ} \quad \Sigma_\nu + \alpha_\nu,$$

δυνάμεθα ἄρα νὰ γράψωμεν

$$A = \Sigma_\nu + \vartheta\alpha_\nu, \quad \text{ἔνθα} \quad 0 < \vartheta < 1.$$

19. Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι, ἐὰν τῆς τοιαύτης σειρᾶς λάβωμεν καὶ ἀθροίσωμεν τοὺς ν πρώτους ὅρους καὶ παραλείψωμεν πάντας τοὺς ἄλλους, τὸ ἄθροισμα Σ_ν τῶν ληφθέντων ὅρων διαφέρει ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ A, ὃν ἀποτελεῖ ἡ σειρά, διαφορὰν μικροτέραν τοῦ πρώτου ἐκ τῶν παραλειφθέντων ὅρων α_ν· ὥστε, λαμβάνοντες τὸ ἄθροισμα Σ_ν ἀντὶ τοῦ A, ποιοῦμεν λάθος μικρότερον τοῦ α_ν.

ΣΗΜ. Ἐν συγκλινούσῃ σειρᾷ δύνανται προδήλως νὰ ἀντικατασταθῶσιν ὁσοιδήποτε ὅροι διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν, ἢ καὶ τοὐναντίον νὰ ἀναλυθῇ ὅρος τις εἰς ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ὁμοειδῶν ἀριθμῶν· δὲν ἐπιτρέπεται ὅμως ἡ ἀνάλυσις τῶν ὅρων εἰς ἄθροισμα ἑτεροειδῶν ἀριθμῶν, διότι ἡ οὕτω προκύπτουσα σειρὰ δύναται νὰ μὴ εἶνε συγκλίνουσα.

Τοῦτο συμβαίνει, παραδείγματος χάριν, ἐν τῇ ἑξῆς σειρᾷ

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{7.8} + \ldots + \frac{1}{(2\nu-1)2\nu} + \ldots,$$

ἥτις εἶνε συγκλίνουσα· ἐνῷ ἡ ἐξ αὐτῆς προκύπτουσα διὰ τῆς ἀναλύσεως ἑκάστου ὅρου εἰς διαφορὰν δύο ἄλλων δὲν εἶνε συγκλίνουσα

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2\nu-1} - \frac{1}{2\nu} + \ldots,$$

διότι οὔτε οἱ θετικοὶ ὅροι ἀποτελοῦσιν ἀριθμὸν οὔτε οἱ ἀρνητικοὶ (ἐδ. 13).

Γ') Σειραὶ ἐξ οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.

20. Σειρὰ ἐξ οἱωνδήποτε ἀριθμῶν συγκροτουμένη λέγεται *συγκλίνουσα*, ἐὰν οἱ ὅροι ἑκάστου εἴδους ἀποτελῶσι σειρὰν συγκλίνουσαν, ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, ἐὰν τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ὅρων αὐτῆς ὁμοειδῶν μένῃ πάντοτε ἀπολύτως μικρότερον ἀριθμοῦ τινὸς ὁμοειδοῦς.

21. Τὸ ζήτημα τῆς συγκλίσεως ἢ τῆς ἀποκλίσεως πάσης σειρᾶς ἐν γένει ἀνάγεται διὰ τοῦτο εἰς τὰ προηγουμένως εἰρημένα περὶ τῶν σειρῶν, ὧν οἱ ὅροι εἶνε θετικοὶ ἀριθμοί· ἡ αὐτὴ δὲ ἀναγωγὴ γίνεται καὶ διὰ τῆς ἑξῆς προτάσεως.

22. *Ἐὰν σειρά τις συγκλίνῃ, καὶ τὰ μέτρα τῶν ὅρων αὐτῆς συνιστῶσι σειρὰν συγκλίνουσαν·* καὶ ἀντιστρόφως, *ἐὰν τὰ μέτρα τῶν ὅρων σειρᾶς τινος συνιστῶσι σειρὰν συγκλίνουσαν, καὶ αὐτὴ ἡ σειρὰ συγκλίνει.*

Ἐὰν τῷ ὄντι τὰ μέτρα τῶν ὅρων συνιστῶσι σειρὰν συγκλίνουσαν, ἐὰν δηλονότι τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων ὁσωνδήποτε ὅρων τῆς σειρᾶς μένῃ πάντοτε μικρότερον τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ Ω, τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε θετικῶν ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς δὲν δύναται προφανῶς νὰ φθάσῃ τὸν Ω, τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἀρνητικῶν δὲν δύναται νὰ φθάσῃ τὸν $-\Omega$, καὶ τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν τῆς μονάδος i, τὸν ἀριθμὸν Ωi, καὶ τῆς μονάδος $-i$, τὸν ἀριθμὸν $-\Omega i$· ὥστε οἱ ἀριθμοὶ ἑκάστου εἴδους ἀποτελοῦσιν ἀριθμόν· ἑπομένως ἡ σειρὰ εἶνε συγκλίνουσα.

Καὶ τἀνάπαλιν, ἂν ἡ σειρὰ εἶνε συγκλίνουσα, τουτέστιν, ἂν οἱ ὅροι ἑκάστου εἴδους ἀποτελῶσιν ἀριθμόν, ἂς ἀποτελῶσιν οἱ μὲν θετικοὶ τὸν A, οἱ δὲ ἀρνητικοὶ τὸν $-B$, οἱ θετικοὶ φανταστικοὶ τὸν Γi καὶ οἱ λοιποὶ τὸν $-\Delta i$, ὅτε ἡ σειρὰ θὰ ἀποτελῇ τὸν ἀριθμὸν $A-B+(\Gamma-\Delta)i$ ἀλλὰ τότε, ὁσουςδήποτε καὶ οἱουςδήποτε ἀριθμοὺς τῆς σειρᾶς καὶ ἂν λάβωμεν, οἱ μὲν θετικοὶ ἐκ τῶν εἰλημμένων θὰ δώσωσιν ἄθροισμα τῶν μέτρων μικρότερον τοῦ A, οἱ δὲ ἀρνητικοί, μικρότερον τοῦ B, οἱ δὲ ἐκ τῆς μονάδος i, μικρότερον τοῦ Γ, οἱ δὲ λοιποί, μικρότερον τοῦ Δ· τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν μέτρων πάντων τῶν ληφθέντων ὅρων τῆς σειρᾶς θὰ εἶνε μικρότερον τοῦ ἀριθμοῦ $A+B+\Gamma+\Delta$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Οἱ ἐν τῇ σειρᾷ τυχὸν ὑπάρχοντες μιγάδες ἀριθμοὶ θεωροῦνται ἐν τοῖς ἀνωτέρω εἰρημένοις ὡς συγκείμενοι ἐκ δύο μερῶν ἕκαστος (τοῦ πραγματικοῦ καὶ τοῦ φανταστικοῦ) καὶ λαμβάνεται τὸ μέτρον ἑκατέρου χωριστά. Ἀλλὰ καὶ ἂν ἕκαστος τῶν μιγάδων ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς θεωρῆται ὡς εἷς ὅρος καὶ λαμβάνηται τὸ μέτρον αὐτοῦ, πάλιν ἀληθεύει ἡ προηγουμένη πρότασις. Διότι ἔστω ἐν τῇ σειρᾷ ὁ μιγὰς ἀριθμὸς $\alpha+\beta i$ καὶ μέτρον τοῦ μὲν α ὁ A, τοῦ δὲ β ὁ B· ἂν μὲν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ βi θεωρηθῶσιν ὡς ὅροι τῆς σειρᾶς, δίδουσι τὰ μέτρα $A+B$, ἂν δὲ ὁ ἀριθμὸς $\alpha+\beta i$ θεωρηθῇ ὡς εἷς ὅρος, δίδει τὸ μέτρον $\sqrt{A^2+B^2}$. Ἐπειδὴ δὲ εἶνε

$$\frac{1}{2}(A+B) < \sqrt{A^2+B^2} < A+B,$$

ἕπεται, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων, ἅτινα λαμβάνονται κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον εἶνε μικρότερον μὲν τοῦ ἀθροίσματος, τὸ ὁποῖον παρέχει ὁ πρῶτος τρόπος, μεγαλήτερον ὅμως τοῦ ἡμίσεως αὐτοῦ. Ἐὰν λοιπὸν ἐκ τῶν ἀθροισμάτων τούτων τὸ ἕτερον μένῃ πάντοτε μικρότερον ἀριθμοῦ τινος ὡρισμένου, καὶ τὸ ἄλλο θὰ μένῃ πάντοτε μικρότερον ἀριθμοῦ τινος ὡρισμένου.

ΣΗΜ. Ἐὰν πάντες οἱ ὅροι τῆς σειρᾶς προκύπτωσιν ἐκ μιᾶς καὶ μόνης παραστάσεως, ὅταν τὰ ἐν αὐτῇ ὑπάρχοντα ἀόριστα γράμματα λάβωσι τὰς τιμὰς 0, 1, 2, 3.., παριστῶμεν συντόμως τὴν σειρὰν γράφοντες πρὸ τῆς παραστάσεως ταύτης τὸ σύμβολον Σ καὶ ὑπ' αὐτὸ τὰ γράμματα καὶ τὰς τιμὰς, τὰς ὁποίας πρέπει ἕκαστον νὰ διατρέξῃ, ἵνα δώσῃ ἡ παράστασις τοὺς ὅρους τῆς σειρᾶς· ὡς παραδείγματος χάριν

$$\sum_{\nu=1,2,3\ldots\infty} \frac{1}{\nu} \qquad \sum_{\nu=1,2,3\ldots\infty} \frac{1}{\nu^2} \qquad \sum_{\substack{\nu=1,2,3\ldots\infty \\ \mu=1,2,3\ldots\infty}} \frac{1}{\nu^2+\mu^2}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

23. Αἱ ἐν τοῖς μαθηματικοῖς ζητήμασι θεωρούμεναι ποσότητες διακρίνονται εἰς *μεταβλητὰς καὶ σταθεράς*· καὶ μεταβληταὶ μὲν λέγονται αἱ δυνάμεναι νὰ λάβωσι πολλὰς καὶ διαφόρους τιμάς, σταθεραὶ δὲ αἱ μίαν καὶ ὡρισμένην ἔχουσαι τιμὴν καὶ ταύτην διαφυλάττουσαι, ἐν ᾧ αἱ ἄλλαι μεταβάλλονται.

24. Ἐν ἑκάστῳ ζητήματι, πολλὰς περιέχοντι μεταβλητάς, νοοῦνται αἱ μεταβληταὶ διῃρημέναι εἰς δύο· εἰς μεταβλητάς, ὧν τὰς τιμὰς νοοῦμεν αὐθαιρέτως ὁριζομένας, καὶ εἰς μεταβλητάς, ὧν αἱ τιμαὶ εἶνε ὡρισμέναι *ἐξ αὐτῆς τῆς φύσεως τοῦ ζητήματος*, εὐθὺς ὡς ὁρισθῶσιν αἱ τιμαὶ τῶν πρώτων· καὶ αἱ μὲν πρῶται λέγονται *ἀνεξάρτητοι*, αἱ δὲ δεύτεραι, αἱ ἐξ αὐτῶν ἐξαρτώμεναι, λέγονται *συναρτήσεις* αὐτῶν.

Οὕτω, παραδείγματος χάριν, ἐν τῷ κύκλῳ δύνανται νὰ νοηθῶσι τρεῖς μεταβληταί, ἡ ἀκτίς, ἡ περιφέρεια καὶ ἡ ἐπιφάνεια· μία τούτων δύναται νὰ νοηθῇ ὡς ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ καὶ νὰ ὁρισθῇ αὐτοβούλως· τότε αἱ λοιπαὶ εἶνε ἐντελῶς ὡρισμέναι· εἶνε ἄρα αἱ δύο συναρτήσεις τῆς λοιπῆς, ἢ ἐξαρτῶνται ἐξ αὐτῆς.

Ἐν ὀρθῷ κυλίνδρῳ δύνανται νὰ νοηθῶσι τέσσαρες μεταβληταί· ἤτοι ἡ βάσις, τὸ ὕψος, ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος· ὁρίζονται δὲ ἐντελῶς αἱ λοιπαί, εὐθὺς ὡς ὁρισθῶσιν αὐτοβούλως δύο ἐξ αὐτῶν· εἶνε ἄρα αἱ δύο ἀνεξάρτητοι, αἱ δὲ ἄλλαι δύο συναρτήσεις αὐτῶν.

Δῆλον δέ, ὅτι ἡ ἐκλογὴ τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν γίνεται ἐν ἑκάστῳ ζητήματι αὐτοβούλως· ἀρκεῖ, ὁριζομένων τῶν τιμῶν αὐτῶν, νὰ ὁρίζωνται ἐκ τῆς φύσεως τοῦ ζητήματος αἱ τιμαὶ τῶν λοιπῶν.

ΣΗΜ. Ἑκάστη τῶν μεταβλητῶν παρίσταται δι' ἑνὸς τῶν γραμμάτων x, y, z, ω,... ἐὰν δὲ εἶνε δύο μόνον, παριστῶμεν συνήθως διὰ τοῦ x τὴν ἀνεξάρτητον καὶ διὰ τοῦ y τὴν συνάρτησιν. Ὅταν δὲ θέλωμεν νὰ ἐκφράσωμεν ἁπλῶς, ὅτι μεταβλητή τις εἶνε συνάρτησις ἄλλης (ἔστω τῆς x), χωρὶς νὰ θεωρῶμεν τὸν τρόπον τῆς ἐξαρτήσεως, παριστῶμεν αὐτὴν διὰ τῶν ἑπομένων συμβόλων

$$\sigma(x), \quad \varphi(x), \quad f(x), \quad \Sigma(x), \quad \Phi(x), \quad F(x) \ldots$$

Ἵνα δὲ παραστήσωμεν τὴν τιμήν, ἣν λαμβάνει ἡ συνάρτησις, ὅταν ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ x γίνῃ ἴση τῷ ἀριθμῷ α, γράφομεν τοῦτον εἰς τὴν θέσιν τοῦ x ἐν τῇ παραστάσει τῆς συναρτήσεως, ὡς ἑξῆς·

$$\sigma(\alpha), \quad \varphi(\alpha), \quad f(\alpha), \quad \Sigma(\alpha), \quad \Phi(\alpha), \quad F(\alpha) \ldots$$

Ὁμοίως παριστῶμεν συναρτήσεις δύο μεταβλητῶν x καὶ y διὰ τῶν συμβόλων

$$\sigma(x,y), \quad \varphi(x,y), \quad f(x,y) \quad \text{κτλ.}$$

καὶ τὰς τιμάς, ἃς λαμβάνουσιν αὗται, ὅταν ἡ x γίνῃ ἴση τῷ ἀριθμῷ α, ἡ δὲ y τῷ β, παριστῶμεν ὡς ἑξῆς·

$$\sigma(\alpha,\beta), \quad \varphi(\alpha,\beta), \quad f(\alpha,\beta) \quad \text{κτλ.}$$

Διάφοροι τρόποι τῆς ἐξαρτήσεως τῶν μεταβλητῶν.

25. Ἡ ἐξάρτησις τῶν μεταβλητῶν ἀπ' ἀλλήλων, δυνάμει τῆς ὁποίας εἶνε ὡρισμέναι αἱ τιμαί τινων ἐξ αὐτῶν, ὅταν δοθῶσιν αὐτοβούλως αἱ ἄλλαι, ὁρίζεται κατὰ πολλοὺς καὶ ποικίλους τρόπους. Καὶ *φυσικὴ* μὲν λέγεται ἡ ἐξάρτησις τῶν μεταβλητῶν, ἐὰν ὁρίζηται ἔκ τινος φυσικοῦ φαινομένου· φυσική, λόγου χάριν, εἶνε ἡ ἐξάρτησις τῆς γωνίας τῆς προσπτώσεως καὶ τῆς γωνίας τῆς διαθλάσεως καὶ ἡ ἔκφρασις τῆς ἐξαρτήσεως ταύτης ἀποτελεῖ νόμον φυσικόν· ὁμοίως φυσικὴ εἶνε ἡ ἐξάρτησις τῆς ταχύτητος τοῦ πίπτοντος σώματος καὶ τοῦ ὕψους, ἐξ οὗ πίπτει, κλ. *Γεωμετρικὴ* δέ, ἐὰν ἔκ τινος γεωμετρικοῦ σχήματος· γεωμετρική, λόγου χάριν, εἶνε ἡ ἐξάρτησις τῶν συντεταγμένων καμπύλης γεγραμμένης ἐν ἐπιπέδῳ· ὁμοίως ἡ ἐξάρτησις τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου καὶ τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ, κλ. *Ἀριθμητικὴ* δέ, ἐὰν δίδωνται αἱ ἐκτελεστέαι πράξεις ἐπὶ τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, αἱ πρὸς εὕρεσιν τῶν συναρτήσεων ἀπαιτούμεναι· ἀριθμητική, λόγου χάριν, εἶνε ἡ ἐξάρτησις ἀριθμοῦ καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης αὐτοῦ· ὁμοίως τὸ πλῆθος τῶν διαιρετῶν ἀκεραίου ἀριθμοῦ ἐξαρτᾶται ἐξ αὐτοῦ· ὁμοίως τὸ πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν τῶν μικροτέρων ἀκεραίου τινὸς ἐξαρτᾶται ἐξ αὐτοῦ, κλ. κλ. Ἡ ἀριθμητικὴ ἐξάρτησις λέγεται *ἀναλυτική*, ἐὰν (ὡς συμβαίνει συνήθως) ἐκφράζηται δι' ἐξισώσεων συνδεουσῶν τὰς μεταβλητὰς πρὸς ἀλλήλας καὶ ἐξ ὧν εὑρίσκονται αἱ τιμαὶ τῶν συναρτήσεων, ὅταν δοθῶσιν αἱ τιμαὶ τῶν ἀνεξαρτήτων. Ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐξισώσεων πρέπει νὰ εἶνε ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν συναρτήσεων, εἶνε πρόδηλον.

Ὁ ἀναλυτικὸς ὁρισμὸς τῆς ἐξαρτήσεως τῶν μεταβλητῶν εἶνε ἁρμοδιώτατος πρὸς τὸν λογισμὸν καὶ εἰς τοῦτον ζητοῦμεν νὰ ἀνάγωμεν καὶ τοὺς ἄλλους· διὰ τοῦτο, πρὸς τὸ παρόν, μόνον αὐτὸν θὰ θεωρήσωμεν.

Εἴδη συναρτήσεων.

26. Αἱ συναρτήσεις λέγονται *ἀλγεβρικαί*, ἐὰν αἱ ἐξισώσεις, δι' ὧν συνδέονται πρὸς τὰς ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς, εἶνε ἀλγεβρικαὶ πρός τε αὐτὰς καὶ πρὸς τὰς ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς· τουτέστιν, ἐὰν τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἐξισώσεων τούτων (τῶν δευτέρων ὄντων 0) εἶνε ἢ δύνανται νὰ γίνωσιν ἀκέραια πολυώνυμα πρὸς πάσας τὰς μεταβλητὰς ταύτας.

Πᾶσα μὴ ἀλγεβρικὴ συνάρτησις λέγεται *ὑπερβατική*.

Ἀλγεβρικαὶ π. χ. εἶνε αἱ συναρτήσεις ω καὶ φ αἱ διὰ τῶν ἑπομένων ἐξισώσεων ὁριζόμεναι·

$$\omega^3 - \varphi\omega^2 + x(\omega+\varphi) - 3x^2 - 8 = 0$$

$$\varphi^2 - 2\varphi\omega x + x^2 - 5x + 9 = 0\cdot$$

τοιαύτη εἶνε καὶ ἡ συνάρτησις ω, τὴν ὁποίαν ὁρίζει ἡ ἑπομένη ἐξίσωσις

$$x\omega^4 - 5\omega^2 y + 4\omega(x-y) + x^2 - xy + 8y^2 = 0\cdot$$

τοιαύτη ἐπίσης καὶ ἡ συνάρτησις y, ἡ ἐκ τῆς ἑξῆς ἐξισώσεως ὁριζομένη

$$y^2 - 2xy - x^2 = 0.$$

27. Ἐὰν ἡ ἀλγεβρικὴ ἐξίσωσις, ἡ τὴν συνάρτησιν πρὸς τὰς ἀνεξαρτήτους μεταβλητὰς συνδέουσα, εἶνε πρώτου βαθμοῦ πρὸς αὐτὴν, ἡ συνάρτησις λέγεται *ῥητή*.

Τοιαύτη εἶνε ἡ συνάρτησις ω, τὴν ὁποίαν ὁρίζει ἡ ἐξίσωσις

$$\omega(x+1) - (x^2+x+2) = 0$$

$$\text{ἢ} \qquad \omega = \frac{x^2+x+2}{x+1}.$$

Αἱ ῥηταὶ συναρτήσεις εἶνε τῆς μορφῆς $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$, ἔνθα Μ καὶ Ν εἶνε ἀκέραια πολυώνυμα τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, ἀφ' ὧν ἐξαρτῶνται· ἑπομένως ἡ τιμὴ πάσης ῥητῆς συναρτήσεως εὑρίσκεται ἐκ τῶν δεδομένων τιμῶν τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν καὶ ἐκ γνωστῶν ἀριθμῶν (τῶν συντελεστῶν τῶν πολυωνύμων) διὰ τῶν τεσσάρων στοιχειωδῶν πράξεων.

28. Ἡ ῥητὴ συνάρτησις $\frac{M}{N}$ λέγεται *ἀκεραία*, ἐὰν ὁ παρονομαστὴς N μηδεμίαν τῶν μεταβλητῶν περιέχῃ· τουτέστιν, ἐὰν εἶνε ἴση πρὸς ἀκέραιόν τι πολυώνυμον τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν· τοιαύτη εἶνε ἡ συνάρτησις ω τῶν μεταβλητῶν x, y

$$\omega = \frac{1}{2}x^2y^3 - xy + y - x + 8\cdot$$

ἐπίσης ἡ συνάρτησις y τῆς μεταβλητῆς x

$$y = x^2 - 3x + 2.$$

29. Ἡ ἀκεραία συνάρτησις μιᾶς μεταβλητῆς x λέγεται *δύναμις*, ἐὰν ἕνα μόνον ὅρον ἔχῃ· τοιαύτη εἶνε ἡ συνάρτησις Ax^{μ}.

Ἡ πρώτη δύναμις Ax εἶνε ἡ ἁπλουστάτη τῶν συναρτήσεων τοῦ x.

30. Ἡ συνάρτησις λέγεται προσέτι *λελυμένη* μέν, ἐὰν ἡ ἐξίσωσις, δι' ἧς ὁρίζεται, εἶνε λελυμένη πρὸς αὐτήν, *πεπλεγμένη* δέ, ἐὰν ἡ ἐξίσωσις εἶνε ἄλυτος.

31. Ἐν τοῖς ἑπομένοις θὰ θεωρήσωμεν κατὰ πρῶτον συναρτήσεις μιᾶς μόνης μεταβλητῆς ἀνεξαρτήτου. Δῆλον δὲ, ὅτι, ὅταν μεταβλητή τις y εἶνε συνάρτησις μιᾶς ἄλλης x, καὶ τἀνάπαλιν ἡ x εἶνε συνάρτησις τῆς y· ὥστε ἡ μεταξὺ αὐτῶν σχέσις εἶνε ἀμοιβαία ἐξάρτησις.

Περὶ τῶν ἀντιστρόφων συναρτήσεων.

32. Ἐὰν ἡ μεταξὺ τῶν δύο μεταβλητῶν x καὶ y ὑπάρχουσα σχέσις ἐκφράζηται δι' ἐξισώσεως, δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην λελυμένην εἴτε πρὸς τὴν y, ὅτε ἐκφράζομεν τὴν y ὡς συνάρτησιν τῆς x, εἴτε πρὸς τὴν x, ὅτε προκύπτει ἡ x ἐκπεφρασμένη ὡς συνάρτησις τῆς y. Αἱ δύο οὕτω προκύπτουσαι συναρτήσεις, αἱ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ἀμοιβαίαν ἐξάρτησιν τῶν δύο μεταβλητῶν παριστῶσαι, λέγονται *ἀντίστροφοι* συναρτήσεις.

Ἐὰν παραδείγματος χάριν εἶνε $y - x^2 = 0$,

προκύπτει $\quad y = x^2 \quad$ ἢ $\quad x = \sqrt{y}\,\cdot$

ἐὰν δὲ εἶνε $\quad y - x^{\mu} = 0,$

προκύπτει $\quad y = x^{\mu} \quad$ ἢ $\quad x = \sqrt[\mu]{y}\,,$

ὥστε ἡ μυοστὴ δύναμις καὶ ἡ μυοστὴ ῥίζα εἶνε ἀντίστροφοι συναρτήσεις.

Τῶν ἀλγεβρικῶν συναρτήσεων αἱ ἀντίστροφοι εἶνε ὡσαύτως ἀλγεβρικαί, τῶν δὲ ὑπερβατικῶν, ὑπερβατικαί.

Συναρτήσεις ὁριζόμεναι διὰ σειρῶν.

33. Πολλάκις ὁρίζονται συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς καὶ μάλιστα ὑπερβατικαὶ διὰ σειρῶν συγκλινουσῶν καὶ ὧν ἕκαστος ὅρος εἶνε δύναμίς τις τοῦ x, θετικὸν καὶ ἀκέραιον ἐκθέτην ἔχουσα, ἐπί τινα ἀριθμὸν πολλαπλασιασμένη, ἤτοι διὰ σειρῶν τῆς μορφῆς

$$\Sigma\, \alpha_\nu x^\nu \qquad \nu = 0, 1, 2 \ldots \infty$$

34. Ἐὰν ἡ τοιαύτη σειρὰ συγκλίνῃ διά τινα θετικὴν τιμὴν τοῦ x, ἔστω τὴν ϱ, συγκλίνει καὶ διὰ πᾶσαν ἄλλην ἔχουσαν μέτρον ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ ϱ.

Διότι ἔστω τιμή τις τοιαύτη, ἡ x_1, καὶ μέτρον αὐτῆς τὸ ϱ_1· ἡ τιμὴ αὕτη δὲν δύναται νὰ καταστήσῃ τὰ μέτρα τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς μεγαλήτερα ἢ ἡ τιμὴ ϱ, (διότι, ἂν μέτρον τοῦ α_ν εἶνε τὸ A_ν, τὸ μέτρον τοῦ ὅρου $\alpha_\nu x_1^\nu$ θὰ εἶνε $A_\nu \varrho_1^\nu$)· ἐπειδὴ δὲ τὰ μέτρα, ἅτινα ἔδωκεν ἡ τιμὴ ϱ, ἀποτελοῦσιν ἀριθμόν, καὶ τὰ ὑπὸ τῆς x_1 διδόμενα ἀποτελοῦσιν ἀριθμὸν καὶ διὰ τοῦτο θὰ συγκλίνῃ ἡ σειρὰ διὰ τὴν τιμὴν x_1.

Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι αἱ τοιαῦται σειραὶ ἢ συγκλίνουσι διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῆς x (ὅταν διὰ πᾶσαν θετικὴν τιμὴν συγκλίνωσιν), ἢ συγκλίνουσι μὲν διὰ τὰς τιμὰς τῆς x, ὧν τὸ μέτρον εἶνε μικρότερον ἀριθμοῦ τινος, ἀποκλίνουσι δὲ διὰ τὰς τιμάς, ὧν τὸ μέτρον ὑπερβαίνει τὸν ἀριθμὸν τοῦτον (ὅστις εἶνε ἢ ὁ μέγιστος τῶν θετικῶν ἀριθμῶν, δι' οὓς συγκλίνει ἡ σειρά, ἢ ὁ ἐλάχιστος τῶν θετικῶν ἀριθμῶν, δι' οὓς ἀποκλίνει)· ἢ τέλος ἀποκλίνουσι διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῆς x (πλὴν τῆς $x = 0$). Αἱ πρῶται λέγονται *σειραὶ ἀπεριόριστοι*, αἱ δεύτεραι *σειραὶ περιωρισμέναι*, αἱ δὲ λοιπαὶ οὐδόλως θεωροῦνται.

Παραδείγματα.

1) Ἡ σειρὰ $1 + \dfrac{x}{1} + \dfrac{x^2}{1.2} + \dfrac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \dfrac{x^\nu}{1.2\,3\ldots\nu} + \ldots$ (1)

συγκλίνει διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς x.

Ἔστω τυχοῦσα τιμὴ τῆς x καὶ ϱ τὸ μέτρον αὐτῆς. Τὰ μέτρα τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς εἶνε

$$1+\frac{\varrho}{1}+\frac{\varrho^2}{1.2}+\ldots+\frac{\varrho^\nu}{1.2.3..\nu}+..$$

ἀποτελοῦσι δὲ ταῦτα ἀριθμόν· διότι ὁ λόγος τῆς σειρᾶς αὐτῶν εἶνε $\frac{\varrho}{\nu}$, καὶ ὁ λόγος οὗτος φθίνων, ὅταν ὁ ν αὔξάνῃ, καταντᾷ πάντοτε μικρότερος τῆς μονάδος 1· ἑπομένως ἡ δοθεῖσα σειρὰ (1) συγκλίνει, οἱανδήποτε τιμὴν καὶ ἂν ἔχῃ ἡ x.

2) Ἡ σειρὰ $$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^\nu}{\nu}+.. \qquad (2)$$

συγκλίνει μόνον, ὅταν τὸ μέτρον τοῦ x εἶνε μικρότερον τῆς μονάδος 1.

Ἔστω τῷ ὄντι τιμή τις τοῦ x ἔχουσα μέτρον ϱ· τὰ μέτρα τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς εἶνε

$$1+\frac{\varrho}{1}+\frac{\varrho^2}{2}+\frac{\varrho^3}{3}+..+\frac{\varrho^\nu}{\nu}+..$$

καὶ ἐπειδὴ ὁ λόγος τῆς σειρᾶς ταύτης εἶνε $\frac{\nu-1}{\nu}\varrho$ ἢ $\left(1-\frac{1}{\nu}\right).\varrho$ καὶ ἔχει ὅριον τὸν ἀριθμὸν ϱ, συνάγεται, ὅτι, ἂν μὲν εἶνε $\varrho<1$, ἀποτελοῦσι τὰ μέτρα ἀριθμὸν καὶ ἑπομένως ἡ σειρὰ (2) συγκλίνει, ἂν δὲ εἶνε $\varrho>1$, οὐδένα ἀποτελοῦσιν ἀριθμὸν τὰ μέτρα καὶ ἑπομένως ἀποκλίνει ἡ σειρὰ (2).

Ἐὰν τὸ μέτρον τῆς x εἶνε 1, ἡ σειρὰ δὲν συγκλίνει· διότι τὰ μέτρα τῆς σειρᾶς εἶνε τότε $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+..+\frac{1}{\nu}+..$

ἐμάθομεν δέ, ὅτι τὸ πλῆθος τοῦτο οὐδένα ἀποτελεῖ ἀριθμόν· ὥστε ὁ ἀριθμὸς 1 εἶνε ὁ ἐλάχιστος τῶν θετικῶν ἀριθμῶν, δι' οὓς ἡ σειρὰ (2) δὲν συγκλίνει.

3) Ἡ σειρὰ $$1+\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+..+\frac{x^\nu}{\nu^2}+.. \qquad (3)$$

συγκλίνει διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς x, ἧς τὸ μέτρον δὲν ὑπερβαίνει τὴν μονάδα 1, ἀποκλίνει δὲ διὰ πάσας τὰς λοιπάς.

Ἔστω τυχοῦσα τιμὴ τῆς x ἔχουσα μέτρον τὸ ϱ· τὰ μέτρα τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς εἶνε

$$1+\frac{\varrho}{1^2}+\frac{\varrho^2}{2^2}+\ldots+\frac{\varrho^\nu}{\nu^2}+\ldots$$

καὶ ἐπειδὴ ὁ λόγος τῆς σειρᾶς αὐτῶν εἶνε $\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^2.\varrho$, ἢ $\left(1-\frac{1}{\nu}\right)^2.\varrho$ καὶ ἔχει ὅριον τὸν ϱ, συνάγεται, ὅτι, ἂν μὲν εἶνε $\varrho<1$, ἀποτελοῦσι τὰ μέτρα ἀριθμόν, ἂν δὲ εἶνε $\varrho>1$, οὐδένα ἀποτελοῦσιν ἀριθμόν· ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι ἡ δοθεῖσα σειρὰ (3) συγκλίνει μέν, ἐὰν τὸ μέτρον τῆς x εἶνε μικρότερον τῆς μονάδος 1, ἀποκλίνει δέ, ἐὰν εἶνε μεγαλήτερον.

Ἐὰν τὸ μέτρον τῆς x εἶνε ἴσον τῇ μονάδι 1, ἡ σειρὰ συγκλίνει· διότι τὰ μέτρα τῶν ὅρων αὐτῆς εἶνε τότε

$$1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{\nu^2}+\ldots$$

ταῦτα δὲ (ἐδ 14) ἀποτελοῦσιν ἀριθμόν.

Ὥστε ἡ μονὰς 1 εἶνε ὁ μέγιστος τῶν θετικῶν ἀριθμῶν, δι' οὓς συγκλίνει ἡ σειρά.

4) Ἡ σειρὰ $1+1.x+1.2.x^2+1.2.3.x^3+\ldots+1.2.3..\nu.x^\nu+\ldots$ οὐδόλως συγκλίνει· διότι ὁ λόγος αὐτῆς εἶνε νx· ὁσονδήποτε δὲ μικρὸς καὶ ἂν ληφθῇ ὁ x, πάντοτε ὁ λόγος οὗτος καταντᾷ μεγαλήτερος τῆς μονάδος, ὅταν αὐξάνῃ ὁ ν.

Ἡ πρότασις τοῦ ἐδ. 34 περὶ τῶν σειρῶν τῆς μορφῆς $\Sigma\alpha_\nu x^\nu$ δύναται νὰ γενικευθῇ ὡς ἑξῆς.

35. *Ἐὰν διά τινα θετικὴν τιμὴν* ϱ_0 *τὸ μέτρον τοῦ γενικοῦ ὅρου, ἤτοι τὸ* $A_\nu\varrho_0^\nu$, *καθ' ὅσον αὐξάνει ὁ ν, μένῃ πάντοτε μικρότερον ἀριθμοῦ τινος* M, *ἡ σειρὰ θὰ συγκλίνῃ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ* x *ἔχουσαν μέτρον* ϱ *μικρότερον τοῦ* ϱ_0.

Διότι, ἂν εἶνε $\quad A_\nu\varrho_0^\nu<M \qquad \nu=1, 2, \ldots,$

θὰ εἶνε καὶ $\quad A_\nu<\frac{M}{\varrho_0^\nu} \quad$ καὶ $\quad A_\nu\varrho^\nu<M\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^\nu$

καὶ ἂν εἶνε $\varrho<\varrho_0$, ἡ σειρὰ $\Sigma A_\nu\varrho^\nu$ θὰ συγκλίνῃ ὡς ἔχουσα ὅρους μικροτέρους ἢ ἡ σειρὰ $\Sigma M\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^\nu$ (ἥτις εἶνε φθίνουσα γεωμετρικὴ πρόοδος)· τότε δὲ θὰ συγκλίνῃ καὶ ἡ σειρὰ $\Sigma\alpha_\nu x^\nu$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x ἔχουσαν μέτρον τὸ ρ.

ΣΗΜ. Μερικὴ περίπτωσις τῆς προτάσεως ταύτης εἶνε ἡ ἑξῆς·

Ἐὰν ἡ σειρὰ $\Sigma\alpha_\nu x_0^\nu$ εἶνε ἡμισυγκλίνουσα, ἡ σειρὰ $\Sigma\alpha_\nu x^\nu$ θὰ συγκλίνῃ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x ἔχουσαν μέτρον ρ μικρότερον τοῦ ρ_0.

* ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

Ἐὰν παριστῶμεν ἑκάστην τιμὴν τῆς μεταβλητῆς x δι' ἑνὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου, κατὰ τὸν ἐν τῇ Εἰσαγωγῇ τῆς ἀνωτέρας ἀλγέβρας (σελ. 88) ἐκτεθέντα τρόπον, δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὰ προηγουμένως περὶ τῶν σειρῶν ἀποδειχθέντα ὡς ἑξῆς.

36. Ἐκ τῶν σειρῶν τῆς μορφῆς $\Sigma\alpha_\nu x^\nu$ ἄλλαι μὲν συγκλίνουσιν ἐφ' ἅπαντος τοῦ ἐπιπέδου, ἄλλαι δὲ ἐντὸς κύκλου τινὸς κέντρον ἔχοντος τὴν ἀρχὴν (καὶ τοῦ ὁποίου τὴν ἀκτῖνα παριστᾷ ὁ μέγιστος τῶν θετικῶν ἀριθμῶν, δι' οὓς συγκλίνει ἡ σειρά, ἢ ὁ ἐλάχιστος τῶν θετικῶν ἀριθμῶν, δι' οὓς ἀποκλίνει). Ὁ κύκλος οὗτος λέγεται *κύκλος τῆς συγκλίσεως* ἢ *τόπος τῆς σειρᾶς*. Ἄλλαι δὲ συγκλίνουσι μόνον διὰ τὴν τιμὴν $x=0$. Δυνάμεθα δὲ νὰ λέγωμεν, ὅτι πᾶσα σειρὰ ἔχει κύκλον τινὰ συγκλίσεως· ἀλλὰ τῶν μὲν ἀπεριορίστων ὁ κύκλος εἶνε ἄπειρος, τῶν δὲ μηδόλως συγκλινουσῶν (εἰμὴ διὰ τὴν τιμὴν $x=0$) ὁ κύκλος ἔχει ἀκτῖνα 0.

Ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου τῆς συγκλίσεως δύναται ἡ σειρὰ νὰ εἶνε συγκλίνουσα, ὡς λόγου χάριν ἡ σειρὰ $\Sigma\,\dfrac{x^\nu}{\nu^2}$, ἢ ἡμισυγκλίνουσα, ὡς λόγου χάριν ἡ σειρὰ $\Sigma\,\dfrac{x^\nu}{\nu}$, ἢ ἀποκλίνουσα. Κατὰ δὲ τὴν πρότασιν τοῦ ἐδ. 35 μόνον ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου τῆς συγκλίσεως δύναται νὰ εἶνε ἡ σειρὰ ἡμισυγκλίνουσα.

ΣΗΜ. Διὰ τῶν σειρῶν παρίστανται αἱ συναρτήσεις (ὑπερβατικαὶ ἢ μὴ) ὡς ἄθροισμα ἀπείρων τὸ πλῆθος ἁπλουστέρων συναρτήσεων, ὅπως καὶ οἱ ἀριθμοὶ (ἀσύμμετροι ἢ μὴ) παρίστανται ὡς ἄθροισμα ἀπείρων τὸ πλῆθος συμμέτρων ἀριθμῶν.

Περὶ τῆς συνεχείας τῶν συναρτήσεων.

37. *Διάστημα* ἀπό τινος ἀριθμοῦ α μέχρις ἄλλου β καλοῦμεν τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες περιέχονται μεταξὺ α καὶ β (ὑποτίθενται οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β πραγματικοὶ καὶ α<β).

38. *Συνεχὴς* λέγεται συνάρτησίς τις ἔν τινι διαστήματι $\alpha \ldots \beta$ (δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ ὁποίου ἔχει μίαν μόνην καὶ πραγματικὴν τιμήν), ἐάν, δοθέντος ἀριθμοῦ θετικοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ η, ὑπάρχῃ πάντοτε ἀριθμός τις ε τοιοῦτος, ὥστε, τοῦ x μένοντος ἐν τῷ διαστήματι $\alpha \ldots \beta$, πᾶσα μεταβολὴ αὐτοῦ, μὴ ὑπερβαίνουσα τὸν ε, νὰ προξενῇ μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως ἀπολύτως μικροτέραν τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ η.

*39. Ἡ τοιαύτη συνάρτησις δὲν δύναται νὰ μεταβῇ ἀπὸ μιᾶς τιμῆς εἰς ἄλλην, πρὶν ἢ διέλθῃ διὰ πασῶν τῶν μεταξὺ κειμένων.

Ἐὰν δηλαδὴ γ καὶ δ εἶνε δύο τυχόντες ἀριθμοὶ τοῦ διαστήματος $\alpha \ldots \beta$ καὶ αἱ πρὸς αὐτοὺς ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τῆς συναρτήσεως εἶνε Γ καὶ Δ, ἤτοι ἂν εἶνε

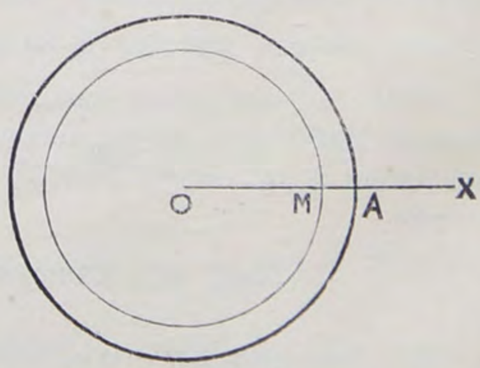
$$\sigma(\gamma)=\Gamma \qquad \text{καὶ} \qquad \sigma(\delta)=\Delta,$$

ἡ ἐξίσωσις $\sigma(x)=\mathrm{Z}$, ἔνθα ὁ ἀριθμὸς Z περιέχεται μεταξὺ τῶν Γ καὶ Δ, θὰ ἔχῃ πάντοτε ῥίζαν τινὰ μεταξὺ γ καὶ δ περιεχομένην.

Διότι ἡ συνάρτησις $\sigma(x)-\mathrm{Z}$, συνεχὴς οὖσα ἐν τῷ διαστήματι $\alpha \ldots \beta$, λαμβάνει διὰ $x=\gamma$ καὶ $x=\delta$ τιμὰς ἑτεροειδεῖς· ἑπομένως ἀποδεικνύεται, ὡς ἐν τῇ Εἰσαγωγῇ τῆς ἀνωτέρας ἀλγέβρας περὶ τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων ἀπεδείχθη (σελ. 115), ὅτι ὑπάρχει μεταξὺ γ καὶ δ ἀριθμός τις ζ μηδενίζων αὐτήν· τουτέστιν εἶνε $\sigma(\zeta)-\mathrm{Z}=0$, ἢ $\sigma(\zeta)=\mathrm{Z}$.

40. *Ὁμαλὴ* λέγεται ἡ συνάρτησις ἔν τινι διαστήματι $\alpha \ldots \beta$, ἐὰν εἶνε δυνατὸν νὰ χωρισθῇ τὸ διάστημα τοῦτο εἰς ὡρισμένον ἀριθμὸν ἄλλων καὶ τοιούτων, ὥστε ἐν ἑκάστῳ τούτων αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως ἢ νὰ αὐξάνωσι διηνεκῶς (ὅταν διηνεκῶς αὐξάνῃ ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ x) ἢ νὰ ἐλαττῶνται διηνεκῶς.

*41. Αἱ ἐξ ἀκεραίων καὶ θετικῶν δυνάμεων τοῦ x ἀποτελούμεναι σειραὶ $\Sigma \alpha_\nu x^\nu$ παριστῶσι συναρτήσεις αὐτοῦ συνεχεῖς ἐν παντὶ κύκλῳ ὁμοκέντρῳ πρὸς τὸν κύκλον τῆς συγκλίσεως καὶ μικροτέρῳ αὐτοῦ.



Ἔστω ὁ κύκλος ΟΜ ὁμόκεντρος τῷ τῆς συγκλίσεως κύκλῳ ΟΑ καὶ μικρότερος αὐτοῦ· πρόκειται νὰ δειχθῇ, ὅτι, δοθέντος θετικοῦ ἀριθμοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ, τοῦ η, ὑπάρχει πάντοτε θετικός τις ἀριθμὸς ε, τοιοῦτος ὥστε, τοῦ x μένοντος ἐν τῷ κύκλῳ ΟΜ, πᾶσα μεταβολὴ αὐτοῦ, ἔχουσα μέτρον μικρότερον τοῦ ε, προξενεῖ μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως ἔχουσαν μέτρον μικρότερον τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ η.

Διὰ τὴν τιμὴν $x = \mathrm{OM} = \varrho$ συγκλίνει ἡ σειρά· ἐπομένως τὰ μέτρα τῶν ὅρων αὐτῆς

$$\Sigma \mathrm{A}_\nu \varrho^\nu \qquad \mathrm{A}_\nu = \text{μέτρον τοῦ } \alpha_\nu$$

ἀποτελοῦσιν ἀριθμόν· καὶ διὰ τοῦτο δύναται (ἐδ. 9) νὰ διαιρεθῇ τὸ πλῆθος αὐτῶν εἰς δύο οὕτως, ὥστε τὸ μὲν πρῶτον μέρος νὰ ἔχῃ ὡρισμένον πλῆθος ὅρων, τὸ δὲ δεύτερον, τὸ ἀπείρους τὸ πλῆθος ἔχον ἀριθμούς, νὰ εἶνε μικρότερον τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{\eta}{3}$.

Ἔστωσαν τὰ μέρη ταῦτα

$$\underset{\nu=0,1,\ldots\tau}{\Sigma \mathrm{A}_\nu \varrho^\nu} \quad + \quad \underset{\nu=\tau+1,\ldots}{\Sigma \mathrm{A}_\nu \varrho^\nu}, \qquad \text{ἤτοι ἔστω } \underset{\nu=\tau+1,\ldots}{\Sigma \mathrm{A}_\nu \varrho^\nu} < \frac{\eta}{3}.$$

τούτου τεθέντος, ἂς διαιρεθῇ καὶ ἡ σειρὰ εἰς τὰ δύο μέρη

$$\underset{\nu=0,1,\ldots\tau}{\Sigma \alpha_\nu x^\nu} \quad + \quad \underset{\nu=\tau+1,\ldots}{\Sigma \alpha_\nu x^\nu} \quad = \quad \varphi(x) + f(x),$$

ὧν τὸ πρῶτον $\varphi(x)$ εἶνε ἀκέραιον πολυώνυμον βαθμοῦ τ, καὶ ἂς εὑρεθῇ (Εἰσαγ. ἀνωτέρας ἀλγέβρας σελ. 112) ἀριθμός τις ε ἀρκούντως μικρός, ὥστε πᾶσα μεταβολὴ τοῦ x ἔχουσα μέτρον μικρότερον τοῦ ε νὰ προξενῇ μεταβολὴν τοῦ ἀκεραίου τούτου πολυωνύμου ἔχουσαν μέτρον μικρότερον τοῦ $\frac{\eta}{3}$· λέγω, ὅτι πᾶσα τοιαύτη μεταβολὴ τῆς x (ἐὰν ἡ x μένῃ ἐντὸς τοῦ κύκλου ΟΜ) προξενεῖ μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως $\Sigma \alpha_\nu x^\nu$ ἔχουσαν μέτρον μικρότερον τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ η.

Καὶ ὄντως, ἐὰν ἡ x μεταβληθῇ ἀπὸ τῆς τυχούσης τιμῆς x εἰς $x+\omega$ (ἔνθα μέτρ. $\omega < \varepsilon$), ἡ μεταβολὴ τῆς σειρᾶς θὰ εἶνε

$$\Big(\varphi(x+\omega) + f(x+\omega)\Big) - \Big(\varphi(x) + f(x)\Big)$$

ἤτοι
$$\varphi(x+\omega) - \varphi(x) + f(x+\omega) - f(x)$$

καὶ ἡ μὲν διαφορὰ $\varphi(x+\omega) - \varphi(x)$ παριστᾷ τὴν μεταβολὴν τοῦ πολυωνύμου $\varphi(x)$· ἐπομένως ἔχει μέτρον μικρότερον τοῦ $\frac{\eta}{3}$· ἑκάτερος δὲ τῶν λοιπῶν δύο ὅρων ἔχει μέτρον μικρότερον τοῦ $\frac{\eta}{3}$, διότι ἐν τῷ κύκλῳ ΟΜ εἶνε πανταχοῦ $|f(x)| < \frac{\eta}{3}$· ἡ ὅλη ἄρα μεταβολὴ ἔχει μέτρον μικρότερον τοῦ $\frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3}$, ἤτοι τοῦ η.

Περὶ τῆς συναρτήσεως e^x *καὶ τῶν πρὸς αὐτὴν συνδεομένων* α^x, ημ x, συν x, lx.

42. Ἡ σειρὰ $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^\nu}{1.2.3..\nu} + \ldots$ (1)

συγκλίνει, ὡς προηγουμένως εἴδομεν, διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ x· ἑπομένως ὁρίζει συνάρτησίν τινα ἐφ' ἅπαντος τοῦ ἐπιπέδου. Ἡ συνάρτησις αὕτη ἔχει τὴν θεμελιώδη ἰδιότητα τῶν δυνάμεων, ὧν αἱ τιμαὶ τοῦ x εἶνε ἐκθέται· τουτέστι *τὸ γινόμενον δύο τιμῶν αὐτῆς, πρὸς τὰς τυχούσας τιμὰς α καὶ β τοῦ x ἀντιστοιχουσῶν, εἶνε πάλιν τιμὴ τῆς αὐτῆς συναρτήσεως ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τὸ ἄθροισμα α+β.*

Καὶ ὄντως ἡ πρὸς τὴν τιμὴν α (τοῦ x) ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τῆς συναρτήσεως εἶνε

$$1 + \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\alpha^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{\alpha^\nu}{1.2.3\ldots\nu} + \ldots,$$

ἡ δὲ πρὸς τὴν τιμὴν β ἀντιστοιχοῦσα εἶνε ἡ ἑξῆς

$$1 + \frac{\beta}{1} + \frac{\beta^2}{1.2} + \frac{\beta^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{\beta^\nu}{1.2.3\ldots\nu} + \ldots.$$

πολλαπλασιαζόμεναι δὲ αἱ τιμαὶ αὗται δίδουσιν

$$\begin{aligned} 1 &+ \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\alpha^3}{1.2.3} + \ldots \\ &+ \frac{\beta}{1} + \frac{\alpha}{1}.\frac{\beta}{1} + \frac{\alpha^2}{1.2}\frac{\beta}{1} + \ldots \\ &\qquad + \frac{\beta^2}{1.2} + \frac{\alpha}{1}\frac{\beta^2}{1.2} + \ldots \\ &\qquad\qquad + \frac{\beta^3}{1.2.3} + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

εἰς τὸ γινόμενον τοῦτο οἱ ὅροι τῆς $\mu^{\text{οστῆς}}$ διαστάσεως (πρὸς τὰ α, β) ἀποτελοῦσι τὴν $\mu^{\text{οστὴν}}$ δύναμιν τοῦ ἀθροίσματος $\alpha+\beta$ διῃρημένην διὰ τοῦ $1.2.3\ldots\mu$ (Εἰσαγ. ἀνωτέρας ἀλγέβρ. σελ. 65)· ὅθεν γράφεται τοῦτο καὶ ὡς ἑξῆς

$$1+\frac{(\alpha+\beta)}{1}+\frac{(\alpha+\beta)^2}{1.2}+\frac{(\alpha+\beta)^3}{1.2.3}+\ldots,$$

ἐξ οὗ γίνεται δῆλον, ὅτι εἶνε ἡ πρὸς τὸ ἄθροισμα $(\alpha+\beta)$ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τῆς συναρτήσεως (1).

Ἐὰν πρὸς συντομίαν παραστήσωμεν τὴν συνάρτησιν (1) διὰ τοῦ $\varphi(x)$, ἡ ἰδιότης, περὶ ἧς ὁ λόγος, γράφεται ὡς ἑξῆς

$$\varphi(\alpha).\varphi(\beta)=\varphi(\alpha+\beta), \qquad (2)$$

ἐξ ἧς ἕπεται καὶ γενικῶς

$$\varphi(\alpha).\varphi(\beta).\varphi(\gamma)\ldots\varphi(\lambda)=\varphi(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda)\cdot$$

ὶ ἂν ὑποτεθῇ $\alpha=\beta=\gamma=\ldots=\lambda$, προκύπτει ($n$ ὄντος τοῦ πλή-
η [illegible] $\ldots\lambda$)

$$\varphi(\alpha)^n=\varphi(n\alpha).$$

Ἀλλ' ἐκ τ[illegible]

τοῦ πολ[illegible] τούτων δεικνύεται εὐκόλως (ἰδὲ Εἰσ. ἀνωτ. ἀλγ. σελ. 70), ὅτι, [illegible]μέτρου καὶ πραγματικοῦ ὄντος τοῦ ἀριθμοῦ x, ἡ σειρὰ ἰσοῦται τῇ x δυνάμει ἀριθμοῦ τινος ἀσυμμέτρου, τὸν ὁποῖον παρεστήσαμεν ἐν τῷ μνησθέντι τόπῳ διὰ τοῦ γράμματος e. Ἀλλὰ καὶ οἱουδήποτε ὄντος τοῦ x, ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ ἔχει τὴν θεμελιώδη ἰδιότητα τῶν δυνάμεων (2). Διὰ ταῦτα παριστῶμεν τὸν ὑπὸ τῆς σειρᾶς ταύτης διδόμενον ἀριθμὸν πάντοτε διὰ τοῦ e^x, εἴτε σύμμετρος εἶνε ὁ x εἴτε ἀσύμμετρος, εἴτε πραγματικὸς εἴτε καὶ μιγάς· γράφοντες δηλονότι e^x οὐδὲν ἄλλο ἐννοοῦμεν ἢ τὴν σειρὰν $\Sigma\dfrac{x^\nu}{1.2\ldots\nu}$ (1).

Σχέσις τῶν κυκλικῶν συναρτήσεων πρὸς τὴν συνάρτησιν e^x.

43. Ἡ συνάρτησις e^x συνδέεται πρὸς τὰς κυκλικὰς συναρτήσεις ημ x καὶ συν x κατὰ τρόπον ἄξιον παρατηρήσεως Ἐὰν δηλαδὴ εἰς

τὴν σειρὰν (1) δώσωμεν τῇ x τιμὰς φανταστικάς, ἤτοι ἂν ἀντὶ τῆς x θέσωμεν $x\mathrm{i}$ (τοῦ x ὄντος πραγματικοῦ ἀριθμοῦ), εὑρίσκομεν

$$e^{x\mathrm{i}} = 1 + \frac{x\mathrm{i}}{1} + \frac{(x\mathrm{i})^2}{1.2} + \ldots + \frac{(x\mathrm{i})^\nu}{1.2.3\ldots\nu} + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots + (-1)^\nu \frac{x^{2\nu}}{1.2.3\ldots(2\nu)} + \ldots$$

$$+ \mathrm{i}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots + (-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1}}{1.2.3\ldots(2\nu+1)} + \ldots\right),$$

διότι αἱ ἄρτιαι δυνάμεις τοῦ i εἶνε πραγματικαί· καὶ ἡ μὲν δευτέρα εἶνε -1, ἡ τετάρτη $+1$, ἡ ἕκτη -1, καὶ οὕτω καθεξῆς· αἱ δὲ περιτταὶ εἶνε φανταστικαί· καὶ ἡ μὲν τρίτη εἶνε $-\mathrm{i}$, ἡ πέμπτη $+\mathrm{i}$, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐὰν δὲ πρὸς συντομίαν θέσωμεν

$$\left.\begin{aligned} 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots &= \varphi(x), \\ \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots &= \sigma(x), \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τῆς

ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται ὡς ἑξῆς

$$e^{x\mathrm{i}} = \varphi(x) + \mathrm{i}\sigma(x),$$

ὅθεν καὶ $e^{-x\mathrm{i}} = \varphi(x) - \mathrm{i}\sigma(x)$ (τροπῇ τοῦ x εἰς $-$

ἐκ τούτων ἕπεται $1 = \varphi(x)^2 + \sigma(x)^2.$

Ἡ ἰσότης αὕτη δεικνύει, ὅτι αἱ δύο συναρτήσεις $\sigma(x)$ καὶ $\varphi(x)$ δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς παριστῶσαι ἡ μὲν τὸ ἡμίτονον, ἡ δὲ τὸ συνημίτονον τόξου τινός, οὗ τὸ μῆκος παριστῶμεν διὰ τοῦ ω (ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου λαμβάνεται ὡς μονάς)· δύναται ἄρα νὰ τεθῇ

$$\varphi(x) = \text{συν}\,\omega \quad \text{καὶ} \quad \sigma(x) = \text{ημ}\,\omega\cdot$$

τότε ἡ ἰσότης (4) γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$e^{x\mathrm{i}} = \text{συν}\,\omega + \mathrm{i}\,\text{ημ}\,\omega. \quad (5)$$

Ὁ ἀριθμὸς ω ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ x, ἤτοι εἶνε συνάρτησις αὐτοῦ· εἶνε δὲ ἐντελῶς ὡρισμένη ἡ τιμὴ τοῦ ω ἡ πρὸς οἱανδήποτε (πραγματικὴν) τιμὴν τοῦ x ἀντιστοιχοῦσα, *ἐὰν ὡς ἀντιστοιχοῦσαν πρὸς τὴν τιμὴν* $x = 0$ *λάβωμεν μόνην τὴν τιμὴν* $\omega = 0$· (ὅταν $x = 0$, εἶνε ημ ω = 0 καὶ συν ω = 1). Διότι, ὅταν ὁ x ἀπὸ τοῦ 0 ἀρχόμενος προβαίνῃ αὐξανόμενος συνεχῶς, καὶ τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ ω θὰ μεταβάλλωνται συνεχῶς (ἐδ. 41) καὶ θὰ ἔχωσι, δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ x ἐντελῶς ὡρισμένας τιμάς. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τόξα, ἅτινα ἔχουσι τὸ αὐτὸ ἡμίτονον καὶ τὸ αὐτὸ συνημίτονον, διαφέρουσι κατὰ ὁλόκληρα πολλαπλάσια τοῦ 2π, ἔπεται, ὅτι οὐδεμία δύναται νὰ ὑπάρξῃ ἀμφιβολία εἰς τὴν ἐκλογὴν τῆς ἑκάστοτε προσηκούσης τιμῆς τοῦ ω· διότι μικρὰ μεταβολὴ τοῦ x μικρὰν θὰ ἐπιφέρῃ καὶ τὴν μεταβολὴν τοῦ ω.

Τὸ αὐτὸ δὲ προφανῶς συμβαίνει, καὶ ὅταν ὁ x ἀπὸ τοῦ 0 ἀρχόμενος προβαίνῃ μικρὸν κατὰ μικρὸν ἐλαττούμενος.

Ἐπειδὴ δὲ διὰ $x = 0$ ἔχομεν καὶ $\omega = 0$ καὶ διὰ τιμὰς τοῦ x, ἱκανῶς μικράς, ἀμφότερα, καὶ τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ ω (ὡς ἐκ τῶν σειρῶν φαίνεται) εἶνε θετικά, ἑπομένως καὶ ὁ ω εἶνε θετικός, δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν, ὅτι αὐξανομένου τοῦ x ἀπὸ τῆς τιμῆς 0 μέχρι τιμῆς τινος ε_1 ἱκανῶς μικρᾶς, καὶ ὁ ἀριθμὸς ω αὐξάνει ἀπὸ τῆς τιμῆς 0 μέχρι τιμῆς τινος η_1, ἀντιστοίχου τῆς ε_1· ἐὰν τότε παραστήσωμεν διὰ ε τυχοῦσαν τιμὴν τοῦ διαστήματος $0 \ldots \varepsilon_1$ καὶ διὰ η τὴν ἀντίστοιχον αὐτῆς τιμὴν τοῦ ω, θὰ εἶνε

$$\text{συν}\,\eta + i\,\text{ημ}\,\eta = e^{\varepsilon i}$$

Ἀλλ' ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἕπονται ἀμέσως αἱ ἀκόλουθοι διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

$$\text{συν}\,2\eta + i\,\text{ημ}\,2\eta = e^{2\varepsilon i}$$

$$\text{συν}\,3\eta + i\,\text{ημ}\,3\eta = e^{3\varepsilon i}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

καὶ γενικῶς $$\text{συν}\,(\nu\eta) + i\,\text{ημ}\,(\nu\eta) = e^{\nu\varepsilon i}$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων βλέπομεν ὅτι εἰς τὰς τιμὰς τῆς x

$$x = 0,\ \varepsilon,\ 2\varepsilon,\ 3\varepsilon,\ \ldots\ \nu\varepsilon$$

ἀντιστοιχοῦσιν αἱ τιμαὶ $\omega = 0,\ \eta,\ 2\eta,\ 3\eta,\ \ldots\ \nu\eta$

καὶ μόνον αὐταί· διότι ἑκάστη ἐξ αὐτῶν εἶνε πλησιεστέρα εἰς τὴν πρὸ αὐτῆς ἢ πᾶσαι αἱ λοιπαὶ αἱ τὸ αὐτὸ ἡμίτονον καὶ τὸ αὐτὸ συνημίτονον ἔχουσαι· ἡ τιμὴ νη, λόγου χάριν, εἶνε πλησιεστέρα εἰς τὴν πρὸ αὐτῆς $(\nu - 1)\eta$ ἢ αἱ τιμαὶ $\nu\eta + 2K\pi$, αἵτινες ἔχουσι τὸ αὐτὸ ἡμίτονον καὶ τὸ αὐτὸ συνημίτονον μὲ τὴν νη.

Κατὰ ταῦτα διπλασιαζομένου τοῦ x διπλασιάζεται καὶ ὁ ω καὶ τριπλασιαζομένου τριπλασιάζεται καὶ καθεξῆς.

Ἀλλ' ὅταν τοῦτο συμβαίνῃ μεταξὺ δύο μεταβλητῶν, ἡ σχέσις αὐτῶν εἶνε ἁπλῆ ἀναλογία· ἑπομένως θὰ εἶνε $\omega = \varrho . x$, τοῦ ϱ ὄντος ἀριθμοῦ τινος σταθεροῦ· ὅθεν αἱ ἰσότητες (3) γράφονται ὡς ἑξῆς

$$\left.\begin{aligned} \text{συν}\,(\varrho x) &= 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots \\ \text{ημ}\,(\varrho x) &= x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Ἵνα εὕρωμεν τὸν σταθερὸν ἀριθμὸν ϱ, παρατηροῦμεν ὅτι ὁ λόγος $\frac{\text{ημ}\tau}{\tau}$, ὅταν τὸ τόξον τ τείνῃ πρὸς τὸ 0 διηνεκῶς ἐλαττούμενον, τείνει πρὸς τὴν μονάδα διηνεκῶς αὐξανόμενος. Ἂν λοιπὸν θέσωμεν $\tau = \varrho x$, τοῦ x τείνοντος πρὸς τὸ 0, καὶ τὸ τ ποιεῖ τὸ αὐτό, ὅθεν καὶ ὁ λόγος $\frac{\text{ημ}\,(\varrho x)}{\varrho x}$ θὰ τείνῃ πρὸς τὴν μονάδα, ὅταν ὁ x τείνῃ πρὸς τὸ 0. Ἀλλ' ἐκ τῆς δευτέρας τῶν ἰσοτήτων (6) εὑρίσκομεν

$$\frac{\text{ημ}\,(\varrho x)}{\varrho x} = \frac{1}{\varrho}\left(1 - \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} - \ldots\right)$$

καὶ τοῦ x μηδενιζομένου, προκύπτει κατὰ τὰ προειρημένα

$$1 = \frac{1}{\varrho}, \quad \text{ὅθεν} \quad \varrho = 1$$

Ἐντεῦθεν βλέπομεν ὅτι οἱ δύο ἀριθμοὶ ω καὶ x εἶνε ἴσοι· ὥστε ἐκ τῶν ἰσοτήτων (6) προκύπτουσι τὰ ἑπόμενα ἀναπτύγματα τῶν κυκλικῶν συναρτήσεων

$$\text{συν}\, x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots + (-1)^\nu \frac{x^{2\nu}}{1.2.3\ldots(2\nu)} + \ldots.$$

$$\text{ημ}\, x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\ 2\ 3.4\ 5} - \ldots + (-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1}}{1.2.3\ldots(2\nu+1)} + \ldots$$

ἅτινα ἰσχύουσι προδήλως διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x· διὰ τῶν αὐτῶν δὲ σειρῶν ὁρίζομεν τὰς συναρτήσεις ημx καὶ συνx διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ x.

Ὁ τύπος (4), ἐπειδὴ ἀπεδείχθη $\omega = x$, γίνεται νῦν

$$e^{xi} = \text{συν}\, x + \mathrm{i}\, \text{ημ}\, x$$

ὁμοίως
$$\bar{e}^{xi} = \text{συν}\, x - \mathrm{i}\, \text{ημ}\, x$$

Ἐκ δὲ τῶν ἰσοτήτων τούτων εὑρίσκομεν τὰς ἑπομένας ἐκφράσεις τῶν κυκλικῶν συναρτήσεων διὰ τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως e^{xi}

$$\text{συν}\, x = \frac{e^{xi} + \bar{e}^{xi}}{2}$$

$$\text{ημ}\, x = \frac{e^{xi} - \bar{e}^{xi}}{2\mathrm{i}}$$

ἐξ ὧν
$$\text{εφ}\, x = -\mathrm{i}\, \frac{e^{xi} - \bar{e}^{xi}}{e^{xi} + \bar{e}^{xi}}$$

$$\text{σφ}\, x = \mathrm{i}\, \frac{e^{xi} + \bar{e}^{xi}}{e^{xi} - \bar{e}^{xi}}$$

ὥστε πᾶσαι αἱ κυκλικαὶ συναρτήσεις ἐκφράζονται ῥητῶς διὰ τῆς συναρτήσεως e^{xi}.

ΣΗΜ. Καὶ πᾶς ἀριθμὸς μιγὰς τίθεται ὑπὸ τὴν ἑξῆς μορφὴν $\varrho e^{\vartheta \mathrm{i}}$, ἔνθα ϱ εἶνε τὸ μέτρον αὐτοῦ καὶ ϑ τὸ ὅρισμα.

Περίοδος τῆς συναρτήσεως e^x.

44. Ἐκ τῆς θεμελιώδους ἰδιότητος τῆς συναρτήσεως e^x, ἣν ἐκφράζει ἡ ἰσότης

$$e^{\alpha} e^{\beta} = e^{\alpha+\beta},$$

ἕπεται, ὅτι ἡ συνάρτησις αὕτη εἶνε *περιοδική*· τουτέστιν ἡ τιμὴ αὐτῆς οὐδόλως μεταβάλλεται, ἐὰν ἡ x αὐξηθῇ κατά τινα ὡρισμένον ἀριθμόν, (ὅστις λέγεται περίοδος), καὶ ὄντως εἶνε

$$e^{2\pi \mathrm{i}} = \text{συν}\, 2\pi + \mathrm{i}\, \text{ημ}\, 2\pi = 1 \cdot$$

ὅθεν ἕπεται
$$e^{x+2\pi \mathrm{i}} = e^x \,.\, e^{2\pi \mathrm{i}} = e^x$$

ἐξ οὗ γίνεται δῆλον, ὅτι ἡ συνάρτησις e^x ἔχει περίοδον τὸ $2\pi \mathrm{i}$.

Ἐκ τούτου συνάγεται εὐκόλως ἡ γνωστὴ περίοδος 2π τῶν κυκλικῶν συναρτήσεων ημ x, συν x.

Περὶ τῆς συναρτήσεως lx.

45. Ἐὰν τεθῇ $e^x = y$, ὁ ἀριθμὸς x κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων λέγεται Νεπέρειος λογάριθμος τοῦ y καὶ παρίσταται διὰ τοῦ ly, ἤτοι ἡ ἐξίσωσις $\qquad e^x = y$

γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς $\qquad x = ly$

εἶνε ἄρα ὁ λογάριθμος ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως.

Ἐὰν ἐν τῇ συναρτήσει e^x ἡ μεταβλητὴ x λαμβάνῃ πραγματικὰς μόνον τιμάς, ἡ συνάρτησις e^x μένει πάντοτε θετική, καὶ ὅταν ὁ x συνεχῶς αὐξανόμενος διατρέχῃ πάσας τὰς πραγματικὰς τιμάς, ἡ συνάρτησις συνεχῶς αὐξανομένη διατρέχει πάσας τὰς θετικὰς τιμάς. Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι *πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει ἕνα καὶ ἕνα μόνον πραγματικὸν λογάριθμον, καὶ ἀρνητικὸν μὲν λογάριθμον ἔχουσιν οἱ μικρότεροι τοῦ 1 ἀριθμοί, θετικὸν δὲ οἱ μεγαλήτεροι.*

Ἀλλ' ἐὰν ἐν τῇ συναρτήσει e^x ὁ x λαμβάνῃ οἱασδήποτε τιμάς, ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως e^x δύναται νὰ γίνῃ οἱαδήποτε καὶ πᾶς ἀριθμὸς ἔχει λογάριθμον καὶ μάλιστα ὄχι μόνον ἕνα ἀλλ' ἀπείρους.

Διότι ἔστω ὁ ἀριθμὸς $\rho\,(\text{συν}\,\varphi + \mathrm{i}\,\text{ημ}\,\varphi)$, ὅστις ἔχει μέτρον ρ καὶ ὅρισμα φ· ἐὰν διὰ $x + \mathrm{i}y$ παραστήσωμεν τὸν λογάριθμον αὐτοῦ (κατὰ τὴν βάσιν e) θὰ εἶνε

$$e^{x+yi} = \rho\,(\text{συν}\,\varphi + \mathrm{i}\,\text{ημ}\,\varphi)$$

$$\text{ἢ} \qquad e^x . e^{yi} = \rho\,(\text{συν}\,\varphi + \mathrm{i}\,\text{ημ}\,\varphi)$$

$$\text{ἢ} \qquad e^x\,(\text{συν}\,y + \mathrm{i}\,\text{ημ}\,y) = \rho\,(\text{συν}\,\varphi + \mathrm{i}\,\text{ημ}\,\varphi)$$

$$\text{ἐξ ὧν ἕπεται} \qquad e^x = \rho \qquad \begin{matrix} \text{συν}\,y = \text{συν}\,\varphi \\ \text{ημ}\,y = \text{ημ}\,\varphi \end{matrix} \qquad (1)$$

καὶ ἐπειδὴ ὁ x ὑπετέθη πραγματικὸς ἀριθμός, ὡς καὶ τὸ μέτρον ρ, συνάγεται

$$x = l\rho$$

ἤτοι *τὸ πραγματικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου παντὸς ἀριθμοῦ εἶνε ὁ λογάριθμος τοῦ μέτρου αὐτοῦ.*

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) ἕπεται $y = \varphi + 2\mathrm{K}\pi$ (Κ ὄντος οἱουδήποτε

ἀκεραίου ἀριθμοῦ)· ὁ λογάριθμος ἄρα $x + yi$ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ $\rho(\sigma\upsilon\nu\,\varphi + i\,\eta\mu\,\varphi)$ εἶνε $l\rho + (\varphi + 2K\pi)i$
ἔχει ἄρα ἕκαστος ἀριθμὸς ἀπείρους λογαρίθμους διαφέροντας ἀπ' ἀλλήλων κατὰ πολλαπλάσιόν τι τοῦ $2\pi i$.

Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς εἶνε πραγματικὸς καὶ θετικός, εἶνε $\varphi = 0$ καὶ οἱ λογάριθμοι αὐτοῦ δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου $l\rho + 2K\pi i$ ρ ὄντος τοῦ ἀριθμοῦ·
ὅθεν οἱ λογάριθμοι τῆς μονάδος 1 εἶνε $2K\pi i$.

Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς εἶνε πραγματικὸς καὶ ἀρνητικός, εἶνε $\varphi = \pi$· ὅθεν οἱ λογάριθμοι αὐτοῦ δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου $l\rho + (2K + 1)\pi i$ τοῦ ἀριθμοῦ ὄντος $-\rho$.

ΣΗΜ. Ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τῶν λογαρίθμων δεικνύεται εὐκόλως ἐκ τῆς ἰδιότητος $e^x . e^y = e^{x+y}$. πρέπει ὅμως μεταξὺ τῶν ἀπείρων λογαρίθμων ἑκάστου ἀριθμοῦ νὰ λαμβάνωνται οἱ κατάλληλοι πρὸς ἐπαλήθευσιν τῆς ἰσότητος

$$l\alpha + l\beta = l(\alpha\beta).$$

Περὶ τῆς συναρτήσεως a^x.

46. Ἔστω a θετικὸς ἀριθμὸς οἱοσδήποτε καὶ la ὁ Νεπέρειος αὐτοῦ λογάριθμος, ὁ πραγματικός· τότε εἶνε

$$a = e^{la}$$

ὅθεν ἕπεται διὰ πᾶσαν σύμμετρον τιμὴν τοῦ x, ἐὰν ἐκ τῶν πολλῶν τιμῶν τοῦ a^x λαμβάνηται μόνον ἡ θετική,

$$a^x = e^{xla}$$

Ἐκ τούτου ὁδηγούμενοι ὁρίζομεν τὴν ἐκθετικὴν συνάρτησιν a^x διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x, ἐκ τῆς ἰσότητος

$$a^x = e^{xla}$$

ἤτοι ἐκ τῆς σειρᾶς $a^x = 1 + \dfrac{xla}{1} + \dfrac{(xla)^2}{1.2} + \ldots$

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἕπεται ἀμέσως, ὅτι καὶ ἡ συνάρτησις a^x ἔχει τὴν ἰδιότητα $\sigma(\alpha).\sigma(\beta) = \sigma(\alpha + \beta)$, ἤτοι εἶνε $a^\alpha . a^\beta\; a^{\alpha+\beta}$· ἑπομένως εἶνε καὶ αὐτὴ περιοδικὴ συνάρτησις καὶ ἡ περίοδος αὐτῆς εἶνε

$$\frac{2\pi}{la}\, i$$

Ἀπόδειξις τοῦ ὅτι ἡ συνάρτησις e^x καὶ αἱ πρὸς αὐτὴν συνδεόμεναι a^x, la, συνx, ημx εἶνε ὑπερβατικαί.

47. Ἡ συνάρτησις e^x εἶνε *ὑπερβατικὴ* συνάρτησις.

Ὑποθέσωμεν τῷ ὄντι, ὅτι ἡ τιμὴ αὐτῆς, ἣν παριστῶμεν διὰ τοῦ y, δίδεται ἔκ τινος ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως πρὸς x καὶ y, ἤτοι τῆς μορφῆς

$$A_0 y^n + A_1 y^{n-1} + \dots + A_n = 0$$

ἔνθα οἱ συντελεσταὶ A_0, A_1, $A_2 \dots A_n$ εἶνε ἀκέραιαι συναρτήσεις τοῦ x (τὸ δὲ y παριστᾷ τὴν συνάρτησιν e^x)· τότε εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ y θὰ ἀντεστοίχουν ὡρισμέναι τὸ πλῆθος τιμαὶ τοῦ x, τόσαι δηλονότι ὅσας μονάδας ἔχει ὁ βαθμὸς τῆς ἐξισώσεως, ὅταν ὡς ἄγνωστος θεωρῆται ὁ x· ἀλλ' ἀπεδείχθη ἀνωτέρω, ὅτι ἡ τιμὴ y τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως e^x οὐδόλως μεταβάλλεται, ἐὰν ἡ x αὐξηθῇ κατὰ $2\pi i$, ἑπομένως ἀντιστοιχοῦσιν εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ y, ἔστω τὴν y', ἄπειροι τὸ πλῆθος τιμαὶ τῆς x, καὶ ἂν μία ἐξ αὐτῶν παρασταθῇ διὰ x', αἱ λοιπαὶ εἶνε $x' + 2K\pi i$ (τοῦ K ὄντος οἱουδήποτε ἀκεραίου)· ἀδύνατον ἄρα νὰ ὑπάρχῃ μιταξὺ τοῦ y καὶ τοῦ x ἀλγεβρική τις ἐξίσωσις· εἶνε ἄρα τὸ ἕτερον ὑπερβατικὴ συνάρτησις τοῦ ἑτέρου, ἤτοι τὸ e^x εἶνε ὑπερβατικὴ συνάρτησις τοῦ x, καὶ ὁ ly εἶνε ὑπερβατικὴ συνάρτησις τοῦ y. Ὡσαύτως ὑπερβατικαὶ εἶνε αἱ κυκλικαὶ συναρτήσεις· διότι εἶνε ῥηταὶ συναρτήσεις τοῦ e^{xi}· ὡσαύτως καὶ ἡ συνάρτησις a^x· διότι ἰσοῦται τῷ e^{xla}.

Ἐκ τῆς προηγουμένης ἀποδείξεως συνάγεται προσέτι, ὅτι πᾶσα περιοδικὴ συνάρτησις εἶνε κατ' ἀνάγκην ὑπερβατική.

Σύνθεσις νέων συναρτήσεων ἐκ τῶν προηγουμένων.

Αἱ ἀλγεβρικαὶ συναρτήσεις καὶ ἡ ἐκθετικὴ συνάρτησις e^x, μετὰ τῶν εἰς αὐτὴν ὑπαγομένων κυκλικῶν συναρτήσεων καὶ τῶν ἀντιστρόφων αὐτῶν, εἶνε τὰ στοιχεῖα, ἐξ ὧν ἀποτελοῦνται, ἢ εἰς τὰ ὁποῖα ἀνάγονται, πᾶσαι αἱ ἐν τῷ παρόντι συγγράμματι θεωρούμεναι συναρτήσεις. Ὡς ἀπὸ τῶν ἁπλῶν προτάσεων, συμπλεκομένων πρὸς ἀλλήλας, γίνεται πλῆθος ἄπειρον ἄλλων, οὕτω καὶ ἐκ τῶν συναρτήσεων τούτων γίνονται ἄπειροι ἄλλαι· εἶνε δὲ οἱ κυριώτατοι τρόποι τῆς πλοκῆς τῶν συναρτήσεων οἱ ἑξῆς δύο :

1) Ἐν συναρτήσει τινὶ τοῦ x ὡς ἐν τῇ $\sigma(x)$, τίθεται εἰς τὸν τόπον τοῦ x ἄλλη συνάρτησις οἱαδήποτε τοῦ x, ὡς ἡ $\varphi(x)$· ἡ οὕτω προκύπτουσα συνάρτησις, ἥτις γράφεται ὡς ἕπεται $\sigma[\varphi(x)]$ λέγεται *συνάρτησις συναρτήσεως*, ἢ συνάρτησις ἔμμεσος τοῦ x· διότι, ἐὰν ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ παρασταθῇ δι' ἑνὸς γράμματος ω, ἡ δὲ προκύπτουσα συνάρτησις διὰ τοῦ y, εἶνε

$$y = \sigma(\omega) \qquad \text{καὶ} \qquad \omega = \varphi(x)$$

ἑπομένως δύναται νὰ θεωρηθῇ ἡ y ὡς ἐμμέσως ἐξαρτωμένη ἀπὸ τοῦ x. Οὕτω προκύπτουσιν

ἐκ τῆς συναρτήσεως	x^2	ἡ	$\varphi(x)^2$
» »	$\eta\mu\, x$		$\eta\mu\,(\varphi(x))$
	e^x		$e^{\varphi(x)}$
	lx		$l\varphi(x)$
	$\sqrt{x}$		$\sqrt{\varphi(x)}$

Ἡ τοιαύτη ἀντικατάστασις δύναται καὶ ἐπανειλημμένως νὰ γίνῃ, ὡς ἐν τοῖς ἑπομένοις

$$\eta\mu\left(\sqrt{\varphi(x)}\right) \qquad l\,\eta\mu\,(\varphi(x)) \qquad \sqrt{l\varphi(x)} \quad \text{κτλ.}$$

2) Ἐν συναρτήσει δύο ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν τίθεται εἰς τὸν τόπον ἑκάστης ἐξ αὐτῶν μία συνάρτησις τοῦ x.

Οὕτω προκύπτουσιν

ἐκ τῆς συναρτήσεως	$u+v$	ἡ	$\varphi(x)+\sigma(x)$
ἐκ τῆς	$u \,.\, v$	ἡ	$\varphi(x)\,.\,\sigma(x)$
ἐκ τῆς	$\dfrac{u}{v}$	ἡ	$\dfrac{\varphi(x)}{\sigma(x)}$
ἐκ τῆς	u^2+v^2	ἡ	$\varphi(x)^2+\sigma(x)^2$
καὶ γενικῶς ἐκ τῆς	$\Phi(u,v)$	ἡ	$\Phi[\varphi(x), \sigma(x)]$.

Αἱ οὕτω προκύπτουσαι συναρτήσεις λέγονται *σύνθετοι* συναρτήσεις.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

48. Ἡ ἁπλουστάτη σχέσις δύο μεταβλητῶν ποσοτήτων, ἡ ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς ἤδη γνωστή, εἶνε ἡ ἀναλογία· ἑπομένως ἡ ἁπλουστάτη συνάρτησις εἶνε ἡ Ax, ἔνθα A εἶνε ὡρισμένος τις ἀριθμός. Εἰς αὐτὴν συμβαίνει ἡ αὔξησις τῆς συναρτήσεως νὰ εἶνε ἀνάλογος πρὸς τὴν αὔξησιν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x. Διότι, ἂν ἡ x αὐξηθῇ κατὰ ε, ἡ συνάρτησις ἀπὸ Ax γίνεται $A(x+\varepsilon)$, ἤτοι $Ax+A\varepsilon$, καὶ ἑπομένως αὐξάνει κατὰ $A\varepsilon$, τουτέστιν ἀναλόγως τοῦ ε. Τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει προφανῶς καὶ εἰς τὴν γενικωτέραν συνάρτησιν $Ax+B$.

Ἀλλ' εἰς τοὺς λοιποὺς τρόπους τῆς ἐξαρτήσεως, τουτέστιν εἰς τὰς λοιπὰς συναρτήσεις, δὲν συμβαίνει τοῦτο. Ἐὰν δηλονότι εἰς οἱανδήποτε ἄλλην συνάρτησιν $\sigma(x)$ αὐξήσωμεν τὴν μεταβλητὴν x κατὰ ε (ἔνθα ε εἶνε οἱοσδήποτε ἀριθμός), ἡ συνάρτησις ἀπὸ $\sigma(x)$ θὰ γίνῃ $\sigma(x+\varepsilon)$· καὶ ἡ αὔξησις αὐτῆς, ἥτις παρίσταται ὑπὸ τῆς διαφορᾶς

$$\sigma(x+\varepsilon)-\sigma(x)$$

δὲν εἶνε ἀνάλογος πρὸς τὸ ε.

Θεωρήσωμεν, παραδείγματος χάριν, τὴν συνάρτησιν x^2. Ἐὰν αὐξήσωμεν τὴν x κατὰ ε, ἡ συνάρτησις γίνεται $(x+\varepsilon)^2$,

$$\text{ἤτοι } x^2+2x\varepsilon+\varepsilon^2, \text{ καὶ ἑπομένως αὐξάνει κατὰ } 2x\varepsilon+\varepsilon^2.$$

Η αὔξησις δὲ αὕτη δὲν εἶνε ἀνάλογος πρὸς τὸ ε.

Ἀλλ' ἂν καὶ δὲν εἶνε ἡ ὅλη αὔξησις ἀνάλογος πρὸς τὸ ε, ἓν ὅμως μέρος αὐτῆς, τὸ $2x\varepsilon$, εἶνε ἀνάλογον· καὶ τὸ μέρος τοῦτο εἶνε τὸ κύριον μέρος τῆς αὐξήσεως· διότι τὸ ἄλλο, τουτέστι τὸ ε^2, δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ x, *ὅταν ἡ αὔξησις αὐτοῦ ληφθῇ ἱκανῶς μικρά*, γίνεται μικρότερον παντὸς τοῦ δοθέντος μέρους τῆς αὐξήσεως· ἵνα λόγου χάριν γίνῃ τὸ ε^2 μικρότερον τοῦ ἑνὸς ἑκατομμυριοστοῦ τῆς ὅλης αὐξήσεως· ἤτοι ἵνα γίνῃ

$$\varepsilon^2 < \frac{2x\varepsilon + \varepsilon^2}{1000000}, \qquad \text{ἢ} \qquad 999\,999\,\varepsilon^2 < 2x\varepsilon$$

ἀρκεῖ νὰ ληφθῇ
$$\varepsilon < \frac{2x}{999999}$$

καὶ γενικῶς, ἵνα γίνῃ $\varepsilon^2 < \dfrac{2x\varepsilon + \varepsilon^2}{\mu}$, ὅσον δήποτε μέγας ἀριθμὸς καὶ ἂν εἶνε ὁ μ, ἀρκεῖ νὰ ληφθῇ $\varepsilon < \dfrac{2x}{\mu - 1}$.

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι ἡ συνάρτησις x^2 αὐξάνει ὡς *ἔγγιστα* ἀναλόγως πρὸς τὰς αὐξήσεις τοῦ x, ἐὰν αἱ αὐξήσεις αὗται ἀφ' ἑκάστης τιμῆς αὐτοῦ ληφθῶσιν ἱκανῶς μικραί· εἶνε δηλαδὴ ἡ αὔξησις αὐτῆς ὡς ἔγγιστα $2x\varepsilon$, καὶ τοῦτο πλησιάζει πρὸς τὴν ἀλήθειαν τοσούτῳ περισσότερον ὅσῳ μικρότεραι γίνονται αἱ αὐξήσεις τοῦ x.

49. Ἐὰν θέλωμεν νὰ ἐξομοιώσωμεν, ὅσον εἶνε δυνατόν, τὴν αὔξησιν πάσης συναρτήσεως πρὸς τὴν αὔξησιν τῆς ἁπλουστάτης Ax, ἀγόμεθα εἰς τὸ νὰ ζητήσωμεν, ἂν εἶνε δυνατόν, ἔστω καὶ εἰς μικρόν τι διάστημα νὰ θεωρῶνται ὡς ἔγγιστα ἀνάλογοι αἱ ἀντιστοιχοῦσαι αὐξήσεις τῶν ἐξ ἀλλήλων ἐξαρτωμένων μεταβλητῶν, τουτέστιν ἂν εἶνε δυνατόν, ἡ αὔξησις πάσης συναρτήσεως νὰ εἶνε κατὰ τὸ μέγιστον αὐτῆς μέρος ἀνάλογος πρὸς τὴν αὔξησιν τῆς μεταβλητῆς, ἀφ' ἧς ἐξαρτᾶται. Εὑρίσκομεν δέ, ὅτι τοῦτο συμβαίνει πράγματι εἰς τὰς πλείστας συναρτήσεις· ἡ αὔξησις δηλονότι

$$\sigma(x+\varepsilon) - \sigma(x)$$

δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο μέρη, ἐξ ὧν τὸ μὲν ἓν εἶνε ἀνάλογον πρὸς τὴν αὔξησιν ε τοῦ x, ἤτοι γινόμενον τοῦ ε ἐπί τινα ἀριθμὸν μὴ ἐξαρτώμενον ἀπὸ τοῦ ε, (ἀλλ' ὅστις δύναται νὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τοῦ x), τὸ δὲ δεύτερον εἶνε γινόμενον τῆς αὐξήσεως ε ἐπί τινα ἀριθμὸν ω, ὅστις ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ε καὶ τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ὅταν ὁ ε τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν· ἤτοι εἶνε

$$\sigma(x+\varepsilon)-\sigma(x)=\varepsilon\,.\,\varphi(x)+\varepsilon\,.\,\omega \qquad \begin{array}{l}\text{ἔνθα } \omega=0\\ \text{ὅταν } \varepsilon=0\end{array}$$

καὶ τοῦτο διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῆς αὐξήσεως ε, ἀρκεῖ τὸ μέτρον αὐτῆς νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ ἀριθμόν τινα.

Ἐὰν ἡ τοιαύτη ἀνάλυσις τῆς αὐξήσεως $\sigma(x+\varepsilon)-\sigma(x)$ εἶνε δυνατή, τὸ μὲν πρῶτον μέρος $\varepsilon\,.\,\varphi(x)$, τὸ ἀνάλογον πρὸς τὴν αὔξησιν τοῦ x, λέγεται *διαφορικὸν* τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$ καὶ ἡ εὕρεσις αὐτοῦ λέγεται *διαφόρισις*, ὁ δὲ συντελεστὴς τοῦ ε ἐν τῷ διαφορικῷ λέγεται *παράγωγος* τῆς συναρτήσεως· ἡ δὲ συνάρτησις $\sigma(x)$ λέγεται *διαφορίσιμος* εἰς τὰς τιμὰς τοῦ x, δι' ἃς συμβαίνει τοῦτο.

ΣΗΜ. Τὸ διαφορικὸν παρίσταται γραφομένου τοῦ γράμματος d πρὸ τῆς συναρτήσεως, ὡς ἑξῆς $d\sigma(x)$. ὡσαύτως καὶ ὅταν ἡ συνάρτησις παριστᾶται δι' ἑνὸς μόνου γράμματος, dy, dz, $d\omega$, κτλ.

Ἡ δὲ παράγωγος παρίσταται συνήθως διὰ τοῦ αὐτοῦ καὶ ἡ συνάρτησις συμβόλου τονιζομένου· οἷον τῆς $\sigma(x)$ ἡ παράγωγος παρίσταται διὰ τοῦ $\sigma'(x)$, τῆς $\varphi(x)$ διὰ τοῦ $\varphi'(x)$ κτλ.

Παραδείγματα.

Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ συνάρτησις x^2.

Ἐὰν ἡ μεταβλητὴ x αὐξηθῇ κατὰ ε, ἀπὸ x θὰ γίνῃ $x+\varepsilon$, ὅθεν ἡ συνάρτησις ἀπὸ x^2 θὰ γίνῃ $(x+\varepsilon)^2$· ἑπομένως θὰ αὐξήσῃ κατὰ

$$(x+\varepsilon)^2-x^2, \quad \text{ἢ} \quad 2x\varepsilon+\varepsilon\,.\,\varepsilon$$

ἐξ οὗ βλέπομεν ἀμέσως, ὅτι ἡ αὔξησις ἀνελύθη εἰς δύο μέρη, ἐξ ὧν τὸ μὲν πρῶτον, τὸ $2x\varepsilon$, εἶνε ἀνάλογον πρὸς τὴν αὔξησιν ε τοῦ x, τὸ δὲ δεύτερον, τὸ $\varepsilon\,.\,\varepsilon$, εἶνε γινόμενον τοῦ ε ἐπὶ ἀριθμόν, ὅστις μηδενίζεται μετὰ τοῦ ε. Ἐκ τούτου ἕπεται κατὰ τὸν ὁρισμόν, ὅτι εἶνε

$$d(x^2)=2x\,.\,\varepsilon.$$

Ἔστω δεύτερον ἡ συνάρτησις x^3·
ἐὰν ἡ μεταβλητὴ x αὐξήσῃ κατὰ ε, ἡ συνάρτησις ἀπὸ x^3 θὰ γίνῃ $(x+\varepsilon)^3$· ἄρα θὰ αὐξήσῃ κατὰ

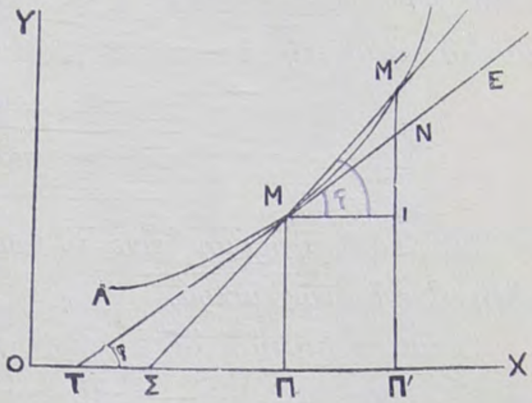
$$(x+\varepsilon)^3-x^3, \quad \text{ἢ} \quad 3x^2\varepsilon+3x\varepsilon^2+\varepsilon^3$$

ὅπερ γράφεται ὡς ἑξῆς $3x^2\varepsilon+\varepsilon(3x\varepsilon+\varepsilon^2)$·
ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι εἶνε $d(x^3)=3x^2\,.\,\varepsilon.$

ΣΗΜ. Ἐν γένει, ἐὰν ἡ αὔξησις τῆς συναρτήσεως ἀναπτύσσηται κατὰ τὰς ἀκεραίας καὶ θετικὰς δυνάμεις τῆς αὐξήσεως ε τοῦ x, ὁ ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος, ὁ τὴν πρώτην δύναμιν τοῦ ε ἔχων, εἶνε τὸ διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως.

Ἔστω πρὸς τούτοις τὸ ἑπόμενον γεωμετρικὸν παράδειγμα·

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ καμπύλη ΑΜΜ΄ ἀναφέρεται πρὸς ὀρθογωνίους ἄξονας, καὶ ὅτι εἰς ἕκαστον σημεῖον αὐτῆς ἔχει μίαν ἐφαπτομένην ἐντελῶς ὡρισμένην. Ὅτι αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων αὐτῆς ἐξαρτῶνται ἀπ᾽ ἀλλήλων, εἶνε πρόδηλον· διότι δοθείσης τῆς μιᾶς, ἡ ἄλλη εἶνε ἐντελῶς ὡρισμένη. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ θεωρήσωμεν τὴν τεταγμένην ὡς συνάρτησιν τῆς τετμημένης· λέγω, ὅτι ἡ συνάρτησις αὕτη εἶνε διαφορίσιμος.



Ἔστω τῷ ὄντι Μ τυχὸν σημεῖον τῆς καμπύλης καὶ ΟΠ, ΠΜ αἱ συντεταγμέναι αὐτοῦ, ἡ δὲ εἰς αὐτὸ ἐφαπτομένη ἔστω ἡ ΤΜΕ.

Ἐὰν ἡ τετμημένη ΟΠ αὐξηθῇ κατά τινα εὐθεῖαν ΠΠ΄, ἡ τεταγμένη αὐξάνει κατὰ τὴν ΙΜ΄· εἶνε δὲ

$$\text{ΙΜ}' = \text{ΙΝ} + \text{ΝΜ}'$$

καὶ τὸ μὲν πρῶτον μέρος ΙΝ εἶνε ἀνάλογον τῆς αὐξήσεως ΠΠ΄ τῆς τετμημένης· διότι ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΜΝΙ προκύπτει

$$\text{ΙΝ} = \text{ΙΜ} \,.\, \text{εφ ΙΜΝ} = \text{ΠΠ}' \,.\, \text{εφ}\, \varphi$$

ἔνθα φ παριστᾷ τὴν γωνίαν τῆς ἐφαπτομένης ΤΜΕ πρὸς τὸν ἄξονα τῶν τετμημένων·

τὸ δὲ δεύτερον μέρος ΝΜ΄ εἶνε γινόμενον τῆς ΠΠ΄ ἐπί τινα ἀριθμόν, ὅστις μηδενίζεται μετὰ τῆς ΠΠ΄, διότι ἀχθείσης τῆς τεμνούσης ΜΜ΄ εὑρίσκομεν εὐκόλως

$$\text{ΙΜ}' = \text{ΙΜ} \,.\, \text{εφ ΙΜΜ}' \qquad \text{καὶ} \qquad \text{ΙΝ} = \text{ΙΜ} \,.\, \text{εφ ΝΜΙ}$$

ὅθεν ἕπεται $\text{ΝΜ}' = \text{ΙΜ} \,.\, (\text{εφ ΙΜΜ}' - \text{εφ ΙΜΝ})$

ἢ $\text{ΝΜ}' = \text{ΠΠ}' (\text{εφ ΙΜΜ}' - \text{εφ ΙΜΝ})$·

ὅταν δὲ ἡ ΠΠ΄ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, καὶ ἡ χορδὴ ΜΜ΄ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, καὶ ἑπομένως ἡ τέμνουσα Μ΄ΜΣ τείνει νὰ συμπέσῃ τῇ ἐφαπτομένῃ ΕΜΤ· ἄρα ἡ γωνία ΙΜΜ΄ τείνει νὰ καταστῇ ἴση τῇ ΙΜΝ,

καὶ διὰ τοῦτο ἡ διαφορὰ εφ IMM′ — εφ IMN τείνει πρὸς τὸ μηδέν. Ἐντεῦθεν ἕπεται $d(\text{ΜΠ}) = \varepsilon\varphi\,\varphi\,.\,\text{ΠΠ}'. = \text{IN}$·
τουτέστι τὸ μὲν *διαφορικὸν τῆς τεταγμένης τῆς καμπύλης εἰς ἕκαστον σημεῖον αὐτῆς εἶνε ἴσον πρὸς τὴν αὔξησιν τῆς τεταγμένης τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον· ἡ δὲ παράγωγος αὐτῆς ἰσοῦται τῷ συντελεστῇ κατευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.*

Ἰδιότητες τῶν διαφορικῶν.

50. *Τὸ διαφορικὸν εἶνε τὸ κυριώτερον μέρος τῆς αὐξήσεως, ὅταν αὕτη εἶνε ἱκανῶς μικρά.*

Δύναται δηλαδὴ δι᾽ ἑκάστην τιμὴν τοῦ x νὰ ληφθῇ ἡ αὔξησις ε αὐτοῦ τόσον μικρά, ὥστε τὸ δεύτερον μέρος εω τῆς ἀντιστοιχούσης αὐξήσεως τῆς συναρτήσεως νὰ γίνῃ μικρότερον παντὸς τοῦ δοθέντος μέρους αὐτῆς· τῷ ὄντι, ἵνα γίνῃ τὸ εω ἀπολύτως μικρότερον τοῦ μυοστοῦ μέρους τῆς ὅλης αὐξήσεως (ἀπολύτως ἐπίσης ληφθείσης), ἤτοι, ἵνα γίνῃ

$$|\varepsilon\omega| < \frac{|\varphi(x)\varepsilon + \varepsilon\omega|}{\mu}$$

ἀρκεῖ νὰ γίνῃ
$$|\varepsilon\omega| < \frac{|\varphi(x)\varepsilon| - |\varepsilon\omega|}{\mu}$$

διότι τὸ μέτρον τοῦ $\varphi(x)\varepsilon + \varepsilon\omega$ εἶνε τοὐλάχιστον ἴσον πρὸς τὴν διαφορὰν $|\varphi(x)\varepsilon| - |\varepsilon\omega|$ τῶν μέτρων τῶν δύο μερῶν αὐτοῦ· ἐκ δὲ τῆς ἀνισότητος ταύτης συνάγεται, ὅτι ἀρκεῖ νὰ γίνῃ

$$(\mu + 1)\,.\,|\varepsilon\omega| < |\varphi(x)\,.\,\varepsilon|$$

ὅθεν
$$|\omega| < \frac{|\varphi(x)|}{\mu + 1}$$

ἵνα λ. χ. γίνῃ τὸ εω μικρότερον τοῦ $\frac{1}{1000000}$ τῆς αὐξήσεως $\varphi(x)\varepsilon + \varepsilon\omega$,

ἀρκεῖ νὰ γίνῃ
$$|\omega| < \frac{|\varphi(x)|}{1000001}.$$

γίνονται δὲ ταῦτα ἐλαττουμένου τοῦ ε· διότι τὸ μὲν ω ἐξ ὑποθέσεως τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ὅταν τὸ ε τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, τὸ δὲ $\varphi(x)$ μένει ἀμετάβλητον, ὅταν τὸ ε μεταβάλληται· διότι δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ε.

Ὅτι δὲ τὸ εω δύναται ἐπίσης νὰ γίνῃ μικρότερον παντὸς μέρους τοῦ διαφορικοῦ, εἶνε πρόδηλον.

Ἐξαιρεῖται ἡ περίπτωσις, καθ' ἣν ἡ παράγωγος εἶνε μηδέν.

51. *Ὁ λόγος τῆς αὐξήσεως πρὸς τὸ διαφορικὸν τείνει πρὸς τὴν μονάδα, ὅταν τὸ ε τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν.*

Διότι ἡ μὲν αὔξησις εἶνε $\varepsilon.\varphi(x)+\varepsilon\omega$, τὸ δὲ διαφορικὸν εἶνε $\varepsilon.\varphi(x)$· ὁ λόγος ἄρα αὐτῶν εἶνε

$$\frac{\varepsilon\varphi(x)+\varepsilon\omega}{\varepsilon\varphi(x)}, \text{ ἤτοι } 1+\frac{\omega}{\varphi(x)}$$

καὶ ἐπειδή, τοῦ ε τείνοντος πρὸς τὸ μηδέν, καὶ τὸ ω τείνει πρὸς τὸ μηδέν, τὸ κλάσμα $\frac{\omega}{\varphi(x)}$ τείνει ὡσαύτως πρὸς τὸ μηδέν, καὶ διὰ τοῦτο ὁ εἰρημένος λόγος τείνει πρὸς τὴν μονάδα. (Ἡ παράγωγος ὑποτίθεται καὶ ἐνταῦθα διάφορος τοῦ 0).

Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι αἱ διαφορίσιμοι συναρτήσεις αὐξάνουσιν *ὡς ἔγγιστα ἀναλόγως* τῶν αὐξήσεων, τὰς ὁποίας λαμβάνει ἑκάστη τιμὴ τοῦ x, ἐὰν αἱ αὐξήσεις αὗται εἶνε ἱκανῶς μικραί· εἶνε δηλαδὴ ἡ αὔξησις $\sigma(x+\varepsilon)-\sigma(x)$ ὡς ἔγγιστα ἴση τῷ $\varepsilon.\varphi(x)$ διότι ἡ διαφορὰ αὐτῶν $\varepsilon.\omega$, ὅταν τὸ ε μένῃ ἱκανῶς μικρόν, γίνεται μικροτέρα οἱουδήποτε μέρους αὐτῶν.

ΣΗΜ. Καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν γίνῃ ἡ ἀνάλυσις τῆς αὐξήσεως $\sigma(x+\varepsilon)-\sigma(x)$ εἰς τὰ δύο εἰρημένα μέρη αὐτῆς, πάντοτε τὰ αὐτὰ μέρη προκύπτουσι· διότι, ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι εἶνε

$$\sigma(x+\varepsilon)-\sigma(x)=\varepsilon.A+\varepsilon\omega, \quad \text{ἔνθα} \quad \omega=0 \text{ διὰ } \varepsilon=0$$

καὶ

$$\sigma(x+\varepsilon)-\sigma(x)=\varepsilon A_1+\varepsilon\omega_1, \quad \text{ἔνθα} \quad \omega_1=0 \text{ διὰ } \varepsilon=0$$

εὑρίσκομεν

$$A+\omega=A_1+\omega_1 \quad \text{ἢ} \quad A-A_1=\omega_1-\omega$$

ἐὰν δὲ ἡ αὔξησις ε τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, ἡ μὲν διαφορὰ $A-A_1$ δὲν μεταβάλλεται διότι οἱ ἀριθμοὶ Α καὶ A_1 δὲν ἐξαρτῶνται ἐκ τοῦ ε, ἡ δὲ $\omega_1-\omega$ τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ἑπομένως ἡ προηγουμένη ἰσότης δὲν δύναται νὰ ὑπάρξῃ, ἂν δὲν εἶνε $A-A_1=0$, ἢ $A=A_1$, ἐξ οὗ ἕπεται καὶ $\omega=\omega_1$· ἤτοι κατ' ἀμφοτέρας τὰς ἀναλύσεις τὰ αὐτὰ μέρη προκύπτουσιν.

Ἄλλος ὁρισμὸς τῆς παραγώγου.

52. Ἡ *παράγωγος εἶνε τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ὁ λόγος τῆς αὐξήσεως τῆς συναρτήσεως πρὸς τὴν ἀντιστοιχοῦσαν αὔξησιν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ὅταν ἡ αὔξησις αὕτη τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν.*

Διότι ἐκ τῆς ἰσότητος

$$σ(x+ε) - σ(x) = ε.φ(x) + ε.ω$$

ἕπεται $$\frac{σ(x+ε) - σ(x)}{ε} = φ(x) + ω$$

ὅθεν καὶ $$ὅρ.\frac{σ(x+ε) - σ(x)}{ε} = φ(x) \qquad \text{διότι } ὅρ.ω = 0$$

Ἡ ἰδιότης αὕτη λαμβάνεται συνήθως ὡς ὁρισμὸς τῆς παραγώγου.

Καὶ ἀντιστρόφως. *Ἐὰν ὁ λόγος τῶν πρὸς ἀλλήλας ἀντιστοιχουσῶν αὐξήσεων, τῆς συναρτήσεως καὶ τῆς μεταβλητῆς ἀφ' ἧς ἐξαρτᾶται, ἔχῃ ἓν ὅριον, ὅταν ἡ αὔξησις τῆς δευτέρας, οἱασδήποτε τιμὰς διατρέχουσα, τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, ἡ συνάρτησις εἶνε διαφορίσιμος καὶ τὸ ὅριον τοῦτο εἶνε ἡ παράγωγος αὐτῆς.*

Διότι, ἂν εἶνε

$$ὅρ.\frac{σ(x+ε) - σ(x)}{ε} = φ(x),$$

ἡ διαφορὰ $$\frac{σ(x+ε) - σ(x)}{ε} - φ(x)$$

κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν ὁρίων (Εἰσ. ἀν. ἀλγ. 218) τείνει πρὸς τὸ μηδὲν μετὰ τοῦ ε· ἐὰν δὲ παρασταθῇ ἡ διαφορὰ αὕτη διὰ τοῦ ω, θὰ εἶνε

$$σ(x+ε) - σ(x) = εφ(x) + εω$$

ἐξ οὗ συνάγεται ἀμέσως ἡ πρότασις.

Ὁρισμὸς τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ.

53. Ἡ εὕρεσις τῶν διαφορικῶν τῶν συναρτήσεων εἶνε ἔργον τοῦ *διαφορικοῦ λογισμοῦ*.

Εἶνε δὲ ἡ γνῶσις τῶν διαφορικῶν χρησιμωτάτη· ὄχι μόνον διότι ἐκφράζουσιν ὡς ἔγγιστα τὰς αὐξήσεις τῶν συναρτήσεων, ἀλλὰ καὶ διότι ἐν πολλοῖς ζητήμασιν, ἐν οἷς θεωροῦνται αἱ αὐξήσεις, δύναταί τις ἀντὶ τούτων, ὧν ὁ λογισμὸς εἶνε δυσχερὴς (διότι ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς αὐξήσεως ε κατὰ τρόπον πολύπλοκον), νὰ λάβῃ τὰ διαφορικά, τῶν ὁποίων ὁ λογισμὸς γίνεται κατὰ κανόνας ὡρισμένους καὶ ἁπλουστάτους. Ἡ ἁπλοποίησις αὕτη εἶνε ἡ πρώτη αἰτία, δι' ἣν ὁ διαφορικὸς λογισμὸς εὐκολώτατα καὶ τάχιστα δίδει τὴν λύσιν πλήθους προβλημάτων τῆς τε καθαρᾶς καὶ τῆς ἐφηρμοσμένης μαθηματικῆς, ὅπερ καθιστᾷ αὐτὸν ἀπαραίτητον ἐφόδιον πρὸς τὴν σπουδὴν τῶν φυσικῶν ἐπιστημῶν.

Κατὰ ταῦτα *ὁ διαφορικὸς λογισμὸς ἐν γένει μὲν ἀσχολεῖται περὶ τὴν θεωρίαν τῶν πρὸς αλλήλας ἀντιστοιχουσῶν αὐξήσεων τῶν μεταβλητῶν καὶ τῶν περὶ τὰς αὐξήσεις ταύτας συμβαινόντων· κύριον δὲ ἔργον ἔχει τὴν εὕρεσιν τῶν διαφορικῶν* (ἢ τῶν παραγώγων· διότι εἰς τὸ αὐτὸ καταντᾷ) *καὶ τῶν ἰδιωμάτων αὐτῶν· ἔτι δὲ καὶ τὴν ἔκθεσιν τῶν ἐφαρμογῶν, εἰς τὰς ὁποίας τὰ ἰδιώματα ταῦτα ἄγουσιν.*

ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ

Διαφορικὰ τῶν ἁπλῶν συναρτήσεων αx, x^2, x^μ, e^x, ημ x, συν x.

Διαφορικὸν τοῦ αx.

54. Ἐὰν ἡ x αὐξηθῇ κατὰ ποσότητά τινα οἱανδήποτε ε, ἡ συνάρτησις αx αὐξάνει κατὰ

$$\alpha(x+\varepsilon)-\alpha x, \quad \text{ἢ κατὰ} \quad \alpha\varepsilon$$

ἤτοι ἀναλόγως τοῦ ε (ὡς καὶ ἐν ἀρχῇ εἴδομεν)· ἑπομένως ἐν τῇ συναρτήσει ταύτῃ τὸ δεύτερον μέρος τῆς αὐξήσεως εἶνε μηδὲν καὶ τὸ διαφορικὸν ἰσοῦται τῇ αὐξήσει ἀκριβῶς· ὅθεν εἶνε

$$d(\alpha x)=\alpha\,.\,\varepsilon \qquad (1)$$

Ἐὰν ἐν τῷ τύπῳ τούτῳ ἡ σταθερὰ ποσότης α ὑποτεθῇ ἴση τῇ μονάδι 1, ἕπεται $$dx=\varepsilon,$$
τουτέστιν ἡ *αὔξησις* ε *τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς* x *ἰσοῦται τῷ διαφορικῷ αὐτῆς*, ὅταν ἡ x θεωρηθῇ ὡς συνάρτησις ἑαυτῆς.

Διὰ τοῦτο ὁ τύπος (1) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$d(\alpha x)=\alpha\,.\,dx.$$

Διαφορικὸν τοῦ x^2.

55. Ἐὰν ἡ x αὐξηθῇ κατὰ ποσότητά τινα οἱανδήποτε ε, ἡ συνάρτησις x^2 αὐξάνει, ὡς καὶ προηγουμένως εἴδομεν, κατὰ $(x+\varepsilon)^2-x^2$, ἤτοι $2x\varepsilon+\varepsilon^2$. Ἐντεῦθεν ἕπεται ἀμέσως, ὅτι εἶνε

$$d(x^2)=2x\,.\,\varepsilon \quad \text{ἢ} \quad d(x^2)=2x\,.\,dx.$$

Διαφορικὸν τοῦ x^μ
(μ ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός).

56. Ἐὰν ἡ x αὐξηθῇ κατὰ ε, ἡ συνάρτησις x^μ, ἔνθα μ εἶνε ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός, αὐξάνει κατὰ

$$(x+\varepsilon)^\mu - x^\mu$$

ἤτοι κατὰ $\mu\,.\,\varepsilon x^{\mu-1} + \ldots.$

οἱ παραλειφθέντες καὶ διὰ στιγμῶν ὑποδεικνυόμενοι ὅροι τῆς αὐξήσεως ἔχουσι πάντες κοινὸν παράγοντα τὸ ε^2, ἤτοι εἶνε τῆς μορφῆς $\varepsilon^2 P$, ἔνθα P σημαίνει πολυώνυμόν τι ἀκέραιον πρὸς τὰ x καὶ ε. Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι εἶνε

$$d(x^\mu) = \mu x^{\mu-1}\,.\,\varepsilon, \quad \text{ἢ} \quad d(x^\mu) = \mu x^{\mu-1}\,.\,dx.$$

Διαφορικὸν τοῦ e^x.

57. Ἡ πρὸς τὴν αὔξησιν ε τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x ἀντιστοιχοῦσα αὔξησις τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως e^x εἶνε

$$e^{x+\varepsilon} - e^x \quad \text{ἤτοι} \quad e^x(e^\varepsilon - 1)$$

καὶ κατὰ τὸ γνωστὸν (ἐδ. 42) ἀνάπτυγμα τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως e^x, ἡ αὔξησις αὕτη γίνεται

$$e^x\left(\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{1\,.\,2} + \frac{\varepsilon^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots\right)$$

ὅθεν ἕπεται $d(e^x) = e^x\,.\,dx.$

Διαφορικὸν τοῦ ημ x.

58. Ἐὰν ἡ x αὐξηθῇ κατὰ ε, ἡ συνάρτησις ημx γίνεται ημ$(x+\varepsilon)$. ἑπομένως αὐξάνει κατὰ

$$\text{ημ}\,(x+\varepsilon) - \text{ημ}\,x$$

ἤτοι $\text{ημ}\,x\,\text{συν}\,\varepsilon + \text{ημ}\,\varepsilon\,\text{συν}\,x - \text{ημ}\,x$

ἢ $\text{ημ}\,\varepsilon\,.\,\text{συν}\,x - \text{ημ}\,x\,(1 - \text{συν}\,\varepsilon).$ (α)

Ἀλλ' ἐκ τῆς τριγωνομετρίας εἶνε γνωστόν, ὅτι εἶνε

$$\text{ημ}\,\varepsilon < \varepsilon \quad \text{καὶ} \quad \text{ημ}\,\varepsilon > \varepsilon - \varepsilon^3$$

ἄρα θὰ εἶνε $\text{ημ}\,\varepsilon = \varepsilon - \mu\,.\,\varepsilon^3$

ἔνθα μ δηλοῖ ἀριθμόν τινα μεταξὺ 0 καὶ 1 περιλαμβανόμενον.

Ὁμοίως εἶνε $1 - \text{συν}\,\varepsilon = 2\,\text{ημ}^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$

ἄρα $1 - \text{συν}\,\varepsilon < 2\,.\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2$

ἢ $1 - \text{συν}\,\varepsilon < \frac{\varepsilon^2}{2}\cdot$

ἐπειδὴ δὲ προφανῶς εἶνε $1 - \text{συν}\,\varepsilon \geq 0$,

συνάγεται, ὅτι θὰ εἶνε $1 - \text{συν}\,\varepsilon = \nu\,.\,\varepsilon^2$

τοῦ ν ὄντος ἀριθμοῦ τινος μεταξὺ 0 καὶ $\frac{1}{2}$ περιλαμβανομένου.

Ἀντικαθιστῶντες δὲ τὰς τιμὰς τῶν ἡμ ε καὶ 1 — συν ε εἰς τὴν παράστασιν (α), εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ αὔξησις τοῦ ἡμ x γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$(\varepsilon - \mu\,.\,\varepsilon^3)\,.\,\text{συν}\,x - \nu\varepsilon^2\,.\,\text{ημ}\,x$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι τὸ μέρος τῆς αὐξήσεως ταύτης τὸ ἀνάλογον πρὸς τὴν αὔξησιν ε εἶνε ε . συν x

ἄρα $$d\,(\text{ημ}\,x) = \text{συν}\,x\,.\,dx.$$

Διαφορικὸν τοῦ συν x.

59. Ἐὰν ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ x αὐξηθῇ κατὰ ε, ἡ συνάρτησις συν x αὐξάνει κατὰ

$$\text{συν}(x + \varepsilon) - \text{συν}\,x$$

ἤτοι κατὰ $$\text{συν}\,x\,.\,\text{συν}\,\varepsilon - \text{ημ}\,x\,.\,\text{ημ}\,\varepsilon - \text{συν}\,x$$

ἢ $$-\,\text{ημ}\,x\,\text{ημ}\,\varepsilon - \text{συν}\,x\,(1 - \text{συν}\,\varepsilon)$$

διὰ δὲ τὰς προηγουμένως εὑρεθείσας τιμὰς τῶν ἡμ ε καὶ 1 — συν ε, ἡ αὔξησις αὕτη γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$-\,\text{ημ}\,x\,.\,(\varepsilon - \mu\varepsilon^3) - \nu\,.\,\varepsilon^2\,\text{συν}\,x.$$

Ἐκ τούτου δὲ γίνεται δῆλον, ὅτι εἶνε

$$d\,(\text{συν}\,x) = -\,\text{ημ}\,x\,.\,dx.$$

ΣΗΜ. Εἰς τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα φθάνομεν, καὶ ἂν ἀναπτύξωμεν τὰς συναρτήσεις ημ ε, συν ε κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ ε (ἐδ. 43).

Ἰδιότης τῶν διαφορικῶν ἰσοτήτων.

60. Ὅταν δύο μεταβληταί, y καὶ x, ἐξαρτῶνται ἀπ' ἀλλήλων, ἡ τὰ διαφορικὰ αὐτῶν συνδέουσα ἰσότης μένει κατὰ τὴν μορφὴν ἡ αὐτή, εἴτε θεωρεῖται ἡ ἑτέρα τούτων ὡς ἀνεξάρτητος μεταβλητή, εἴτε θεωροῦνται ἀμφότεραι ὡς συναρτήσεις μιᾶς ἄλλης οἱασδήποτε μεταβλητῆς· ἀρκεῖ ἡ συνδέουσα αὐτὰς ἐξίσωσις νὰ μὴ μεταβληθῇ.

Ἔστω $y = \sigma(x)$ ἡ τὰς μεταβλητὰς y καὶ x συνδέουσα ἐξίσωσις· λέγω, ὅτι ἡ τὰ διαφορικὰ αὐτῶν συνδέουσα ἰσότης

$$dy = \sigma'(x).dx \tag{1}$$

ἡ εὑρεθεῖσα κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἡ x εἶνε ἀνεξάρτητος μεταβλητή, οὐδόλως ἀλλάσσει μορφήν, ὅταν ἀμφότεραι, ἥ τε y καὶ ἡ x, θεωρῶνται ὡς συναρτήσεις ἄλλης οἱασδήποτε μεταβλητῆς τ καὶ λαμβάνωνται τὰ διαφορικὰ αὐτῶν πρὸς τὴν μεταβλητὴν ταύτην τ.

Ἔστω $x = \varphi(\tau)$ ἡ τὴν x πρὸς τὴν τ συνδέουσα ἐξίσωσις. Ἐὰν ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ τ αὐξηθῇ κατά τινα ποσότητα δ, ἡ μὲν x θὰ αὐξήσῃ κατά τινα ποσότητα, ἣν παριστῶ διὰ ε, ἡ δὲ y κατὰ η· καὶ διὰ μὲν τὴν ἐξίσωσιν $x = \varphi(\tau)$ θὰ εἶνε $\varepsilon = \varphi'(\tau).\delta + \Omega.\delta$ ἔνθα ὅρ $\Omega = 0$ ὅθεν $dx = \varphi'(\tau).\delta$
διὰ δὲ τὴν ἐξίσωσιν $y = \sigma(x)$ θὰ εἶνε

$$\eta = \sigma'(x)\varepsilon + \omega.\varepsilon \qquad \text{ἔνθα} \quad \text{ὅρ}\ \omega = 0$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται $\eta = \sigma'(x).\varphi'(\tau).\delta + \left[\sigma'(x).\Omega + \omega.\varphi'(\tau) + \omega\Omega\right].\delta$ ἑπομένως ἡ αὔξησις τῆς y, ἡ πρὸς τὴν αὔξησιν δ τῆς τ ἀντιστοιχοῦσα, ἀνελύθη εἰς δύο μέρη, ἐξ ὧν τὸ μὲν πρῶτον εἶνε ἀνάλογον τοῦ δ, τὸ δὲ δεύτερον εἶνε γινόμενον τοῦ δ ἐπί τινα ἀριθμόν, ὅστις τείνει πρὸς τὸ μηδὲν μετὰ τοῦ δ. Ἄρα εἶνε

$$dy = \sigma'(x).\varphi'(\tau)\,\delta = \sigma'(x)\,\varphi'(\tau)\,d\tau = \sigma'(x).dx$$

ἔνθα τὰ διαφορικὰ dy, dx ἀναφέρονται πρὸς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν τ· ὥστε ἡ ἰσότης (1), ἥτις συνέδεε τὰ διαφορικὰ τῶν y καὶ x, ἔμεινε κατὰ τὴν μορφὴν ἡ αὐτή.

Γενίκευσις τῶν διαφορικῶν τύπων.

61. Ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ τῆς y τὸ ἴσον αὐτῇ $\sigma(x)$ εὑρίσκομεν ἐκ τῆς προηγουμένης ἰσότητος

$$d\,\sigma(x) = \sigma'(x).dx$$

τουτέστι τὸ διαφορικὸν πάσης συναρτήσεως φυλάσσει τὴν αὐτὴν μορφήν, εἴτε ἀνεξάρτητος εἶνε ἡ μεταβλητή, ἀφ' ἧς ἐξαρτᾶται, εἴτε καὶ μή.

Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦτο, οἱασδήποτε οὔσης τῆς συναρτήσεως ω τοῦ x, ἔχομεν τὰς ἰσότητας

$$d(\alpha\omega) = \alpha \, . \, d\omega$$
$$d(\omega^2) = 2\omega \, . \, d\omega$$
$$d(\omega^\mu) = \mu\omega^{\mu-1} \, . \, d\omega$$
$$d(e^\omega) = e^\omega \, . \, d\omega$$
$$d(\eta\mu\,\omega) = \sigma\upsilon\nu\,\omega \, . \, d\omega$$
$$d(\sigma\upsilon\nu\,\omega) = -\,\eta\mu\,\omega \, . \, d\omega$$

αἵτινες ἐκφράζουσι τὰ ἑπόμενα θεωρήματα.

Τὸ διαφορικὸν τοῦ γινομένου σταθερᾶς ἐπὶ μεταβλητὴν ἰσοῦται τῇ σταθερᾷ ἐπὶ τὸ διαφορικὸν τῆς μεταβλητῆς.

Τὸ διαφορικὸν παντὸς τετραγώνου ἰσοῦται τῇ διπλασίᾳ βάσει αὐτοῦ ἐπὶ τὸ διαφορικὸν τῆς βάσεως.

Καὶ γενικῶς. *Τὸ διαφορικὸν πάσης δυνάμεως (ἀκεραίας καὶ θετικῆς) ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ ἐκθέτου ἐπὶ τὴν βάσιν ὑψωθεῖσαν εἰς τὴν κατὰ μονάδα μικροτέραν δύναμιν καὶ ἐπὶ τὸ διαφορικὸν τῆς βάσεως*

Τὸ διαφορικὸν τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως e^ω, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ἐκθέτου, *ἰσοῦται τῇ αὐτῇ συναρτήσει πολλαπλασιασθείσῃ ἐπὶ τὸ διαφορικὸν τοῦ ἐκθέτου.*

Τὸ διαφορικὸν παντὸς ἡμιτόνου ἰσοῦται τῷ συνημιτόνῳ τοῦ αὐτοῦ τόξου ἐπὶ τὸ διαφορικὸν τοῦ τόξου.

Τὸ διαφορικὸν παντὸς συνημιτόνου ἰσοῦται τῷ ἡμιτόνῳ τοῦ αὐτοῦ τόξου πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ —1 καὶ ἐπὶ τὸ διαφορικὸν τοῦ τόξου.

Καὶ γενικῶς, ἂν εἶνε $\quad d\,\sigma(x) = \varphi(x) \, . \, dx,$

θὰ εἶνε καὶ $\quad d\,\sigma(\omega) = \varphi(\omega) \, . \, d\omega$

ἔνθα ω παριστᾷ συνάρτησιν οἱανδήποτε τοῦ x.

Διαφορικὸν τῶν συναρτήσεων ἄλλης συναρτήσεως.

62. Τὸ διαφορικὸν συναρτήσεως ἐξ ἄλλης συναρτήσεως ἐξαρτωμένης εὑρίσκεται, ἐὰν παρασταθῇ ἡ ἄλλη συνάρτησις δι' ἑνὸς γράμματος ω καὶ θεωρηθῇ τοῦτο ὡς ἀνεξάρτητος μεταβλητή.

Διότι ἔστω ἡ συνάρτησις· $y = f(\sigma(x))$·

ἂν τεθῇ $\sigma(x) = \omega$, θὰ εἶνε $y = f(\omega)$

ὅθεν (θεωροῦντες τὴν ω ὡς ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν) λαμβάνομεν

$$dy = f'(\omega)\,.\,d\omega.$$

Ἀλλ᾽ ὁ τύπος οὗτος ἀληθεύει κατὰ τὰ προαποδειχθέντα καὶ ὅταν ἀμφότεραι αἱ μεταβληταὶ y καὶ ω θεωρῶνται ὡς συναρτήσεις τῆς x (ἀρκεῖ τὰ διαφορικὰ νὰ ἀναφέρωνται πρὸς τὴν x)· ὅθεν ἕπεται

$$dy = f'(\omega)\,.\,d\,\sigma(x) = f'\,(\sigma(x))\,.\,\sigma'(x)\,dx.$$

Παραδείγματα.

Τὸ διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως $e^{\eta\mu x}$ εὑρίσκεται, ἐὰν τεθῇ $\eta\mu\,x = \omega$ διότι εἶνε

$$d(e^{\omega}) = e^{\omega}\,.\,d\omega\text{· ὅθεν } d(e^{\eta\mu\,x}) = e^{\eta\mu\,x}\,d(\eta\mu\,x) = e^{\eta\mu\,x}\,.\,\sigma\upsilon\nu\,x\,.\,dx.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν τὸ διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως $\eta\mu\,(\eta\mu\,x)$

$$d\,\eta\mu\,(\eta\mu\,x) = \sigma\upsilon\nu\,(\eta\mu\,x)\,.\,d\,\eta\mu\,x = \sigma\upsilon\nu\,(\eta\mu\,x)\,.\,\sigma\upsilon\nu\,x\,.\,dx.$$

Ὁμοίως εἶνε $d(\eta\mu\,x)^{\mu} = \mu\,(\eta\mu\,x)^{\mu-1}\,.\,d\,\eta\mu\,x = \mu\,(\eta\mu\,x)^{\mu-1}\,.\,\sigma\upsilon\nu\,x\,.\,dx$

$$d\,(e^{x^2}) = e^{x^2}\,.\,d\,(x^2) = e^{x^2}\,.\,2x\,.\,dx$$

$$d(e^{\alpha x}) = e^{\alpha x}\,.\,d(\alpha x) = e^{\alpha x}\,\alpha\,.\,dx$$

$$d\,\eta\mu\,(2x) = \sigma\upsilon\nu\,(2x)\,.\,d\,(2x) = 2\,.\,\sigma\upsilon\nu(2x)\,.\,dx.$$

Σημειωτέον δέ, ὅτι ἐκτελοῦμεν τὰς διαφορίσεις ταύτας νοοῦντες μόνον ἀλλὰ μὴ γράφοντες τὴν παρεμπίπτουσαν μεταβλητὴν ω.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν

$$\begin{aligned} d\,\eta\mu\,(e^{\sigma\upsilon\nu\,x}) &= \sigma\upsilon\nu\,(e^{\sigma\upsilon\nu\,x})\,.\,d\,e^{\sigma\upsilon\nu\,x} = \\ &= \sigma\upsilon\nu\,(e^{\sigma\upsilon\nu\,x})\,.\,e^{\sigma\upsilon\nu\,x}\,.\,d\,\sigma\upsilon\nu\,x \\ &= -\,\sigma\upsilon\nu\,(e^{\sigma\upsilon\nu\,x})\,.\,e^{\sigma\upsilon\nu\,x}\,\eta\mu\,x\,.\,dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\,e^{\eta\mu\,(x^2)} &= e^{\eta\mu\,(x^2)}\,d\,\eta\mu\,(x^2) = \\ &= e^{\eta\mu\,(x^2)}\,.\,\sigma\upsilon\nu\,(x^2)\,d\,(x^2) = \\ &= 2\,.\,e^{\eta\mu\,(x^2)}\,.\,\sigma\upsilon\nu\,(x^2)\,.\,x\,dx \end{aligned}$$

Διαφορικὸν τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως a^x.

63. Ἐπειδὴ εἶνε (ἐδ. 46) $a^x = e^{x\,la}$ $(a > 0)$

ἕπεται $d\,(a^x) = d\,e^{x\,la} = e^{x\,la}\,d\,(x\,la) = e^{x\,la}\,.\,la\,.\,dx$

ὅθεν $d\,(a^x) = a^x\,.\,la\,.\,dx$

καὶ γενικῶς $d\,(a^{\omega}) = a^{\omega}\,la\,.\,d\omega$

τουτέστι τὸ διαφορικὸν πάσης ἐκθετικῆς συναρτήσεως, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ἐκθέτου, ἰσοῦται τῇ αὐτῇ συναρτήσει πολλαπλασιασθείσῃ ἐπὶ τὸν Νεπέρειον λογάριθμον τῆς βάσεως καὶ ἐπὶ τὸ διαφορικὸν τοῦ ἐκθέτου.

Διαφορικὰ τῶν ἀντιστρόφων συναρτήσεων.

Ἐκ τοῦ διαφορικοῦ ἑκάστης συναρτήσεως εὑρίσκεται τὸ διαφορικὸν τῆς ἀντιστρόφου αὐτῆς, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν ἑπομένων παραδειγμάτων.

Διαφορικὸν τοῦ λογαρίθμου.

64. Ἡ ἐξίσωσις $y=lx$, λυομένη πρὸς τὴν x, γίνεται $x=e^y$, ὅθεν, ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν y ὡς ἀνεξάρτητον μεταβλητήν, εὑρίσκομεν

$$dx=e^y\,.\,dy$$

ἐπειδὴ δὲ ἡ αὐτὴ σχέσις συνδέει τὰ διαφορικά, καὶ ὅταν θεωρῆται ἡ y ὡς συνάρτησις τῆς x, ἕπεται

$$dy=\frac{dx}{e^y}=\frac{dx}{x}$$

ἑπομένως $$d\,(lx)=\frac{dx}{x} \quad \text{καὶ} \quad d\,(l\omega)=\frac{d\omega}{\omega}\cdot$$

τουτέστι τὸ διαφορικὸν τοῦ Νεπερείου λογαρίθμου οἱασδήποτε μεταβλητῆς ἰσοῦται τῷ διαφορικῷ τῆς μεταβλητῆς διαιρεθέντι διὰ τῆς μεταβλητῆς ταύτης.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως $y=log\,x$, ἔνθα βάσις τῶν λογαρίθμων εἶνε ὁ τυχὼν θετικὸς ἀριθμὸς a, $\quad x=a^y$

καὶ $$dx=a^y\,.\,la\,.\,dy$$

ὅθεν $$dy=\frac{dx}{a^y}\cdot\frac{1}{la}, \quad \text{ἢ} \quad d\,(log\,x)=\frac{dx}{x}\cdot\frac{1}{la}=\frac{dx}{x}\,.\,log\,e.$$

Διαφορικὸν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης.

65. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως $y=\sqrt{x}$ ἕπεται $x=y^2$,

ὅθεν $$dx=d\,(y^2)=2y\,.\,dy$$

καὶ $$dy=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

ἑπομένως $$d\,(\sqrt{x})=\frac{dx}{2\sqrt{x}} \quad \text{καὶ γενικῶς} \quad d\,(\sqrt{\omega})=\frac{d\omega}{2\sqrt{\omega}}$$

τουτέστι τὸ διαφορικὸν πάσης τετραγωνικῆς ῥίζης ἰσοῦται τῷ διαφορικῷ τοῦ ὑπορρίζου διαιρεθέντι διὰ τῆς διπλασίας ῥίζης.

Διαφορικὸν τοῦ τοξ ημ x.

66. Ἡ ἐξίσωσις $y = \text{τοξ ημ}\, x$ λυθεῖσα πρὸς τὸ x γίνεται

$$x = \text{ημ}\, y,$$

ὅθεν $$dx = \text{συν}\, y \,.\, dy$$

καὶ $$dy = \frac{dx}{\text{συν}\, y}\cdot \quad \text{ἀλλὰ} \quad \text{συν}\, y = \sqrt{1 - \overset{2}{\text{ημ}}\, y} = \sqrt{1 - x^2}$$

ὅθεν $$d\,(\text{τοξ ημ}\, x) = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ συν y· ἐπομένως εἶνε θετικὴ μέν, ἂν τὸ τόξον y καταλήγῃ εἰς τὸ πρῶτον ἢ εἰς τὸ τέταρτον τεταρτημόριον, ἀρνητικὴ δέ, ἂν εἰς τὸ δεύτερον ἢ εἰς τὸ τρίτον.

Διαφορικὸν τοῦ τοξ συν x.

67. Ἡ ἐξίσωσις $y = \text{τοξ συν}\, x$ λυομένη πρὸς τὸ x γίνεται

$$x = \text{συν}\, y$$

ὅθεν $$dx = -\,\text{ημ}\, y\; dy$$

καὶ $$dy = -\,\frac{dx}{\text{ημ}\, y}\cdot \quad \text{ἀλλὰ} \quad \text{ημ}\, y = \sqrt{1 - \overset{2}{\text{συν}}\, y} = \sqrt{1 - x^2}$$

ὅθεν $$d\,(\text{τοξ συν}\, x) = -\,\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἔχει ἐνταῦθα τὸ σημεῖον τοῦ ημ y· εἶνε λοιπὸν θετικὴ μέν, ἂν τὸ τόξον y καταλήγῃ εἰς τὸ πρῶτον ἢ εἰς τὸ δεύτερον τεταρτημόριον, ἀρνητικὴ δέ, ἂν εἰς τὰ δύο ἄλλα.

Διαφορικὸν οἱασδήποτε δυνάμεως.

68. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως $y = x^{\mu}$, τοῦ μ ὄντος οἱουδήποτε πραγματικοῦ ἀριθμοῦ, ἕπεται ὡς γνωστὸν

$$ly = \mu\,.\,lx$$

ὅθεν $$d\,(ly) = d\,(\mu l x) = \mu\, d\,(lx)$$

ἢ $$\frac{dy}{y} = \mu \frac{dx}{x}$$

καὶ $$dy = \mu\, x^{\mu-1}\, dx$$

ὅθεν ἕπεται, ὅτι εἶνε γενικῶς $d\,(x^{\mu}) = \mu\, x^{\mu-1}\, dx$

ἤτοι τὸ διαφορικὸν πάσης δυνάμεως ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ ἐκθέτου ἐπὶ τὴν βάσιν ὑψωθεῖσαν εἰς τὴν κατὰ μονάδα μικροτέραν δύναμιν καὶ ἐπὶ τὸ διαφορικὸν τῆς βάσεως.

Διαφορικὰ συναρτήσεων συντεθειμένων ἐκ δύο ἢ περισσοτέρων ἄλλων συναρτήσεων.

69. Ἐπειδὴ ἐν τοῖς ἑπομένοις θὰ θεωρῶμεν πολλὰς συνάμα συναρτήσεις τοῦ x, θὰ παριστῶμεν, ὡς τὰ πολλά, ἑκάστην συνάρτησιν δι' ἑνὸς μόνου γράμματος, καὶ τὴν αὔξησιν, ἣν ἑκάστη λαμβάνει, ὅταν ἡ x αὐξηθῇ κατὰ ε (ἤτοι κατὰ dx), θὰ παριστῶμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ γράμματος, οὗ προτάσσεται τὸ σύμβολον Δ. Οὕτω $\Delta\omega$, $\Delta\varphi$, Δf. . . παριστῶσι τὰς αὐξήσεις τῶν συναρτήσεων ω, φ, f . . .

Διαφορικὸν ἀθροίσματος.

70. *Τὸ διαφορικὸν παντὸς ἀθροίσματος ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν διαφορικῶν τῶν μερῶν αὐτοῦ.*

Ἔστω τὸ ἄθροισμα $\omega + \varphi + f$ τῶν συναρτήσεων ω, φ καὶ f.

Ἐὰν ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ x αὐξηθῇ κατὰ ε, τὸ ἄθροισμα θὰ γίνῃ $$\omega + \Delta\omega + \varphi + \Delta\varphi + f + \Delta f$$
ἑπομένως θὰ αὐξηθῇ κατὰ $$\Delta\omega + \Delta\varphi + \Delta f$$
Ἐπειδὴ δὲ εἶνε
$$\Delta\omega = d\omega + \varepsilon.\sigma$$
$$\Delta\varphi = d\varphi + \varepsilon.\tau$$
$$\Delta f = df + \varepsilon.\upsilon$$
ἕπεται $$\Delta\omega + \Delta\varphi + \Delta f = d\omega + d\varphi + df + \varepsilon\,(\sigma + \tau + \upsilon).$$
καὶ ἐπειδή, τοῦ ε τείνοντος πρὸς τὸ μηδέν, ἕκαστον τῶν σ, τ, υ, τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ἕπεται ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $\sigma + \tau + \upsilon$ τείνει ὡσαύτως πρὸς τὸ μηδέν· καὶ διὰ τοῦτο εἶνε
$$d(\omega + \varphi + f) = d\omega + d\varphi + df,$$
φανερὸν δὲ εἶνε, ὅτι ἡ πρότασις αὕτη ἀληθεύει, ὁσαδήποτε καὶ ἂν εἶνε τὰ τὸ ἄθροισμα ἀποτελοῦντα μέρη (εἰς πλῆθος πεπερασμένον)·

Διαφορικὸν τοῦ γινομένου.

71. Τὸ γινόμενον $\omega.\varphi$ δύο συναρτήσεων τῆς x, ὅταν ἡ x αὐξηθῇ κατὰ ε, αὐξάνεται κατὰ $(\omega+\Delta\omega).(\varphi+\Delta\varphi)-\omega.\varphi$

ἤτοι κατὰ $$\omega\Delta\varphi+\varphi\Delta\omega+\Delta\varphi.\Delta\omega$$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε $$\Delta\varphi=d\varphi+\varepsilon.\tau$$
$$\Delta\omega=d\omega+\varepsilon.\upsilon$$

ἕπεται, ὅτι ἡ αὔξησις τοῦ γινομένου γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς
$$\omega\, d\varphi+\varphi\, d\omega+\varepsilon\,(\omega.\tau+\varphi.\upsilon)+\Delta\varphi.\Delta\omega$$

ἐξ ὧν βλέπομεν, ὅτι εἶνε $$d(\varphi\omega)=\varphi.d\omega+\omega.d\varphi$$

ἤτοι τὸ διαφορικὸν τοῦ γινομένου δύο μεταβλητῶν ἰσοῦται τῇ πρώτῃ ἐπὶ τὸ διαφορικὸν τῆς δευτέρας σὺν τῇ δευτέρᾳ ἐπὶ τὸ διαφορικὸν τῆς πρώτης.

Τὸ διαφορικὸν τοῦ γινομένου δύο ἢ καὶ περισσοτέρων μεταβλητῶν (εἰς πεπερασμένον πλῆθος) εὑρίσκεται καὶ ὡς ἑξῆς·

Ἔστω y τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε μεταβλητῶν, οἷον τῶν ω, φ, f καὶ u, ἤτοι ἔστω $y=\omega.\varphi.f.u$· τότε εἶνε $ly=l\omega+l\varphi+lf+lu$·

ἑπομένως $$dly=dl\omega+dl\varphi+dlf+dlu$$

ἢ $$\frac{dy}{y}=\frac{d\omega}{\omega}+\frac{d\varphi}{\varphi}+\frac{df}{f}+\frac{du}{u}$$

καὶ $$d(\varphi\omega fu)=\varphi\omega fu\left(\frac{d\varphi}{\varphi}+\frac{d\omega}{\omega}+\frac{df}{f}+\frac{du}{u}\right)$$

τουτέστι *τὸ διαφορικὸν τοῦ γινομένου ὁσωνδήποτε μεταβλητῶν ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν γινομένων, ἅτινα εὑρίσκομεν, πολλαπλασιάζοντες τὸ διαφορικὸν ἑκάστης ἐπὶ πάσας τὰς λοιπάς.*

Διαφορικὸν τοῦ πηλίκου.

72. Ἔστωσαν φ καὶ ω δύο συναρτήσεις τοῦ x καὶ ἂς παρασταθῇ τὸ πηλίκον $\frac{\varphi}{\omega}$ διὰ τοῦ y· ἔστω δηλονότι $y=\frac{\varphi}{\omega}$

τότε εἶνε $$y\,\omega=\varphi$$

ἐὰν δὲ ἡ x αὐξηθῇ κατὰ ε, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται·

$$(y+\Delta y).(\omega+\Delta\omega)=\varphi+\Delta\varphi$$

ὅθεν
$$y\Delta\omega+\omega.\Delta y+\Delta\omega.\Delta y=\Delta\varphi$$

καὶ
$$\Delta y=\frac{1}{\omega}\left[\Delta\varphi-y\,\Delta\omega-\Delta\omega.\Delta y\right]$$

ἐξ οὗ γίνεται δῆλον, ὅτι
$$dy=\frac{1}{\omega}(d\varphi-y\,d\omega)$$

ὅθεν
$$d\left(\frac{\varphi}{\omega}\right)=\frac{\omega\,d\varphi-\varphi\,d\omega}{\omega^2}$$

τουτέστι *τὸ διαφορικὸν τοῦ πηλίκου δύο μεταβλητῶν ἰσοῦται τῷ παρονομαστῇ ἐπὶ τὸ διαφορικὸν τοῦ ἀριθμητοῦ πλὴν τοῦ ἀριθμητοῦ ἐπὶ τὸ διαφορικὸν τοῦ παρονομαστοῦ, διαιρεθείσης τῆς διαφορᾶς ταύτης διὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ παρονομαστοῦ.*

ΣΗΜ. Ἐάν τις παραδεχθῇ, ὅτι τὸ πηλίκον $\frac{\varphi}{\omega}$ δύο διαφορισίμων συναρτήσεων εἶνε ὁμοίως διαφορίσιμον, εὑρίσκει τὸ διαφορικὸν αὐτοῦ τάχιστα ἐκ τῆς ἰσότητος $\omega y=\varphi$ λαμβάνων τὰ διαφορικὰ τῶν δύο ἴσων συναρτήσεων· τότε προκύπτει

$$\omega dy+yd\omega=d\varphi,\qquad \text{ἐξ οὗ καὶ}\quad dy=\frac{1}{\omega}(d\varphi-yd\omega),$$

ὅθεν προκύπτει ἀμέσως ὁ προηγούμενος τύπος.

Σημειωτέον δέ, ὅτι ὁ αὐτὸς τύπος δύναται νὰ εὑρεθῇ καὶ διὰ τῆς βοηθείας τῶν λογαρίθμων, ὡς καὶ ὁ τοῦ γινομένου.

Διαφορικὸν τῶν συναρτήσεων εφ x, σφ x, *καὶ τῶν ἀντιστρόφων αὐταῖς* τοξ εφ x, τοξ σφ x.

73. Ἐπειδὴ εἶνε
$$\text{εφ}\,x=\frac{\text{ημ}\,x}{\text{συν}\,x},$$
ἕπεται

$$d\,(\text{εφ}\,x)=\frac{\text{συν}\,x\,.\,d\,\text{ημ}\,x-\text{ημ}\,x\,.\,d\,\text{συν}\,x}{\text{συν}^2x}$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες τὰς γνωστὰς τιμὰς τῶν $d\,\text{ημ}\,x$ καὶ $d\,\text{συν}\,x$ εὑρίσκομεν

$$d\,(\text{εφ}\,x)=\frac{dx}{\text{συν}^2x}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν
$$d\,(\text{σφ}\,x)=-\frac{dx}{\text{ημ}^2x}.$$

74. Ἐὰν τεθῇ $y = \text{τοξ εφ}\, x$, ἕπεται $x = \text{εφ}\, y$, ὅθεν

$$dx = \frac{dy}{\text{συν}^2 y} \quad \text{ἐξ οὗ} \quad dy = \text{συν}^2 y \,.\, dx$$

ἐπειδὴ δὲ εἶνε $x = \text{εφ}\, y$, ἕπεται $\overset{2}{\text{συν}}\, y = \dfrac{1}{1+x^2}$ ὅθεν

$$dy = \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{ἢ} \quad d\,(\text{τοξ εφ}\, x) = \frac{dx}{1+x^2}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν καὶ $d\,(\text{τοξ σφ}\, x) = -\dfrac{dx}{1+x^2}$.

Παραδείγματα.

1ον) $\sqrt{1-x^2}$.

Κατὰ τὸν τύπον τοῦ ἐδ. 65 εἶνε $d\sqrt{1-x^2}. = \dfrac{d\,(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}$

ἀλλὰ καὶ $d\,(1-x^2) = d\,(-x^2) = -2x dx$ ὅθεν ἕπεται

$$d\sqrt{1\ \ x^2} = \frac{-x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2ον) $\dfrac{x}{1+x}$.

Κατὰ τὸν τύπον τοῦ ἐδ. 72 εἶνε

$$d\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{(1+x)dx - x d(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)dx - x dx}{(1+x)^2}$$

ἤτοι $d\left(\dfrac{x}{1+x}\right) = \dfrac{dx}{(1+x)^2}$.

3ον) $l\,(x+\sqrt{a+x^2})$.

Κατὰ τὸν τύπον τῆς διαφορίσεως τῶν λογαρίθμων εἶνε

$$dl\,(x+\sqrt{a+x^2}) = \frac{d\,(x+\sqrt{a+x^2})}{x+\sqrt{a+x^2}}$$

ἀλλὰ $d\,(x+\sqrt{a+x^2}) = dx + d\sqrt{a+x^2}$

ὅθεν $dl\,(x+\sqrt{a+x^2}) = \dfrac{dx + d\sqrt{a+x^2}}{x+\ \sqrt{a+x^2}}$, καὶ ἐπειδὴ $$d\sqrt{a+x^2} = \frac{d(x^2)}{2\sqrt{a+x^2}} = \frac{xdx}{\sqrt{a+x^2}}.$$

ἕπεται $$dl\,(x+\sqrt{a+x^2}) = \frac{\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{a+x^2}}\right)dx}{x+\sqrt{a+x^2}},$$

ἤτοι $$dl\,(x+\sqrt{a+x^2}) = \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}}.$$

4^{ov}) $$\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Κατὰ τὸν τύπον τῆς διαφορίσεως τοῦ πηλίκου εἶνε

$$d\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right) = \frac{\sqrt{a^2-x^2}\,dx - xd\sqrt{a^2-x^2}}{a^2-x^2}$$

καὶ ἐπειδὴ $d\sqrt{a^2-x^2} = \dfrac{d(a^2-x^2)}{2\sqrt{a^2-x^2}} = \dfrac{-xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, ἕπεται

$$d\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right) = \frac{\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2}.dx = \frac{a^2dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

5^{ov}) $$xlx - x.$$

Ἐν πρώτοις εἶνε $d\,(xlx-x) = d\,(xlx) - dx$

ἀλλὰ $$d\,(xlx) = xdlx + lxdx = x.\frac{dx}{x} + lxdx = dx + lx.dx$$

ὅθεν $$d\,(xlx-x) = lx.dx.$$

6^{ov}) $$e^x\,(x^2-2x+2).$$

Παριστῶντες τὴν συνάρτησιν ταύτην διὰ τοῦ y, ἔχομεν

$$dy = e^x d\,(x^2-2x+2) + (x^2-2x+2)de^x$$

καὶ $$dy = e^x\,(2x-2)dx + (x^2-2x+2)e^x\,dx = e^x.x^2.dx.$$

7^{ov}) $$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Παριστῶντες τὴν συνάρτησιν ταύτην διὰ τοῦ y, ἔχομεν

$$ly = \frac{1}{2}\,l\,(1-x) - \frac{1}{2}\,l\,(1+x)$$

ὅθεν $$\frac{dy}{y}=\frac{1}{2}\,\frac{d(1-x)}{1-x}-\frac{1}{2}\,\frac{d(1+x)}{1+x}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{dx}{1-x}+\frac{dx}{1+x}\right]=-\frac{1}{2}\,dx\,\frac{2}{1-x^2}$$

καὶ $\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{1-x^2}\cdot$ ὅθεν $d\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{1-x^2}.$

8ον) $l\sqrt{1-x^2}$. Ἐὰν τεθῇ $l\sqrt{1-x^2}=y$, εἶνε

$$y=\frac{1}{2}\,l\,(1-x^2)$$

καὶ ἐπομένως $$dy=\frac{1}{2}\,\frac{d\,(1-x^2)}{1-x^2}=\frac{-x\,dx}{1-x^2}.$$

9ον) $l\,\text{εφ}\,x$.

$$d\,l\,\text{εφ}\,x=\frac{d\,\text{εφ}\,x}{\text{εφ}\,x}=\frac{dx}{\text{συν}^2 x\,.\,\text{εφ}\,x}=\frac{dx}{\text{ημ}\,x\,\text{συν}\,x}=\frac{2dx}{\text{ημ}\,2x}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκεται καὶ τὸ ἑξῆς

$$d\left(l\,\text{εφ}\,\frac{x}{2}\right)=\frac{dx}{\text{ημ}\,x}.$$

10ον) $l\,\text{ημ}\,x$.

$$d\,l\,\text{ημ}\,x=\frac{d\,\text{ημ}\,x}{\text{ημ}\,x}=\frac{\text{συν}\,x\,dx}{\text{ημ}\,x}=\frac{dx}{\text{εφ}\,x}.$$

11ον) $\frac{1}{2}\,x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}\,a^2\,\text{τοξ}\,\text{ημ}\left(\frac{x}{a}\right)$.

Παριστῶντες τὴν συνάρτησιν ταύτην διὰ τοῦ y, ἔχομεν

$$dy=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}\,dx+\frac{1}{2}\,x\,.\,d\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}\,a^2\,\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

ἢ $$dy=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}\,dx-\frac{1}{2}\,\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{1}{2}\,\frac{a^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

ὅθεν $$dy=\sqrt{a^2-x^2}\,.\,dx.$$

$12^{ον}$) φ^{ω} (ἔνθα φ καὶ ω εἶνε τυχοῦσαι συναρτήσεις τῆς x).

Ἐὰν τεθῇ $$y = \varphi^{\omega},$$ ἕπεται
$$ly = \omega l\varphi$$
καὶ
$$\frac{dy}{y} = l\varphi \,.\, d\omega + \omega \,.\, \frac{d\varphi}{\varphi}$$
ἤτοι
$$d\,(\varphi^{\omega}) = \varphi^{\omega}\left[\frac{\omega}{\varphi}\,.\,d\varphi + l\varphi\,.\,d\omega\right].$$

*Διαφόρισις τῶν σειρῶν τῆς μορφῆς $\Sigma\alpha_\nu x^\nu$.

75. Αἱ σειραὶ τῆς μορφῆς $\Sigma\alpha_\nu x^\nu$ εἶνε διαφορίσιμοι ἐντὸς τοῦ κύκλου τῆς συγκλίσεως αὐτῶν καὶ τὸ διαφορικὸν αὐτῶν εὑρίσκεται ὡς καὶ τὸ διαφορικὸν παντὸς ἀθροίσματος.

Κατὰ πρῶτον πρέπει νὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ σειραὶ
$$\Sigma\alpha_\nu x^\nu \qquad \text{καὶ} \qquad \Sigma\nu\alpha_\nu x^{\nu-1} \tag{1}$$
ὧν ἡ δευτέρα προκύπτει, ἐὰν λάβωμεν τὰς παραγώγους τῶν ὅρων τῆς πρώτης, συγκλίνουσιν ἀμφότεραι ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ κύκλου· τουτέστιν (ἐδ. 22), ὅτι αἱ σειραὶ τῶν μέτρων τῶν ὅρων αὐτῶν
$$\Sigma A_\nu \rho^\nu \qquad \text{καὶ} \qquad \Sigma\nu A_\nu \rho^{\nu-1} \tag{2}$$
εἶνε δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ ρ ἢ ἀμφότεραι συγκλίνουσαι ἢ ἀμφότεραι ἀποκλίνουσαι· ἐξαιρουμένης μόνον τῆς μεγίστης τιμῆς τοῦ ρ, δι' ἣν ἡ πρώτη σειρὰ συγκλίνει, ἂν ὑπάρχῃ τοιαύτη (ἥτις ὅμως δὲν κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου τῆς συγκλίσεως ἀλλ' ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ)· διότι δι' αὐτὴν ἐνδέχεται νὰ μὴ συγκλίνῃ ἡ δευτέρα.

Ἔστω ρ_1 τιμή τις τοῦ ρ, δι' ἣν ἡ πρώτη σειρὰ (2) συγκλίνει· ἐπειδὴ ἡ τιμὴ αὕτη δὲν εἶνε ἡ μεγίστη, δύναται νὰ αὐξηθῇ τόσον, ὥστε νὰ μὴ φθάσῃ τὴν μεγίστην· ἑπομένως καὶ πάλιν νὰ συγκλίνῃ ἡ σειρά· ἔστω λοιπὸν $\rho_1 + \omega$ τιμή τις μεγαλητέρα τῆς ρ_1, δι' ἣν ἡ αὐτὴ σειρὰ συγκλίνει· τότε ἐν τῇ συγκλινούσῃ σειρᾷ
$$\Sigma A\,(\rho_1 + \omega)^\nu,$$
τῆς ὁποίας οἱ ὅροι εἶνε πάντες θετικοί, δυνάμεθα νὰ ἀναλύσωμεν ἕκαστον ὅρον εἰς ἄθροισμα θετικῶν ἀριθμῶν, τουτέστι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὴν σειρὰν ὡς ἑξῆς
$$\Sigma A_\nu\left(\rho_1^\nu + \nu\rho_1^{\nu-1}\,\omega + \frac{\nu(\nu-1)}{1\,.\,2}\,\rho_1^{\nu-2}\,\omega^2 + \ldots + \omega^\nu\right) \tag{3}$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι καὶ ἡ σειρὰ

$$\Sigma \nu A_\nu \rho_1^{\nu-1} \omega \quad \text{ἢ} \quad \omega \, . \, \Sigma \nu A_\nu \rho_1^{\nu-1}$$

ὡς μέρος σειρᾶς συγκλινούσης, θὰ εἶνε συγκλίνουσα· καὶ ἡ σειρὰ ἄρα $\Sigma \nu A_\nu \rho_1^{\nu-1}$ θὰ εἶνε συγκλίνουσα.

Καὶ τἀνάπαλιν· ἔστω ρ_1 τιμή τις τοῦ ρ, δι' ἣν ἡ δευτέρα σειρὰ (2) συγκλίνει· τότε, καὶ πολλαπλασιασθέντων τῶν ὅρων αὐτῆς ἐπὶ ρ_1, πάλιν θὰ συγκλίνῃ· ἤτοι καὶ ἡ σειρὰ $\Sigma \nu A_\nu \rho_1^\nu$ θὰ συγκλίνῃ· ἀλλὰ τότε καὶ ἡ πρώτη σειρὰ $\Sigma A_\nu \rho_1^\nu$, ἥτις ἔχει ὅρους μικροτέρους, θὰ συγκλίνῃ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι αἱ σειραὶ (2) συγκλίνουσι διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τοῦ ρ (πλὴν τῆς μεγίστης)· κατ' ἀκολουθίαν καὶ αἱ σειραὶ (1) θὰ συγκλίνωσιν ἐντὸς ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου (ἐδ. 34).

Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι πᾶσαι αἱ σειραὶ

$$\ldots \Sigma \alpha_\nu \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}, \quad \Sigma \alpha_\nu x^\nu, \quad \Sigma \nu \alpha_\nu x^{\nu-1}, \quad \Sigma \nu(\nu-1)\alpha_\nu x^{\nu-2} \ldots$$

ὧν ἑκάστη εὑρίσκεται ἐκ τῆς προηγουμένης διὰ τῆς διαφορίσεως τῶν ὅρων αὐτῆς, συγκλίνουσιν ἐντὸς ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

Τούτου προδειχθέντος, ἔστω r ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τῆς συγκλίσεως καὶ x τιμή τις τῆς μεταβλητῆς ἐντὸς τοῦ κύκλου τούτου κειμένη, ἤτοι ἔχουσα μέτρον ρ μικρότερον τοῦ r· ἂς δοθῇ δὲ εἰς τὴν τιμὴν x αὔξησίς τις οἱαδήποτε ε, ἀρκεῖ ἡ νέα τιμὴ $x+\varepsilon$ νὰ κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου τῆς συγκλίσεως· καὶ πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ εἶνε $|\varepsilon| < r - \rho$.

Ἡ σειρὰ $\Sigma \alpha_\nu x^\nu$ διὰ τὰς δύο τιμὰς x καὶ $x+\varepsilon$ γίνεται

$$\Sigma \alpha_\nu x^\nu \qquad \text{καὶ} \qquad \Sigma \alpha_\nu (x+\varepsilon)^\nu$$

ἡ αὔξησις ἄρα αὐτῆς εἶνε

$$\Sigma \alpha_\nu (x+\varepsilon)^\nu - \Sigma \alpha_\nu x^\nu$$

Ἐὰν νῦν ἐν τῇ σειρᾷ $\Sigma \alpha_\nu (x+\varepsilon)^\nu$ ἀναπτύξωμεν τὰς δυνάμεις $(x+\varepsilon)^\nu$ καὶ ἀντὶ ἑκάστης ἐξ αὐτῶν θέσωμεν τὸ ἄθροισμα, ἐξ οὗ σύγκειται, προκύπτει πάλιν σειρὰ συγκλίνουσα· διότι ἡ προκύπτουσα σειρὰ εἶνε

$$\Sigma \alpha_\nu \left(x^\nu + \nu x^{\nu-1} \varepsilon + \frac{\nu(\nu-1)}{1 \, . \, 2} x^{\nu-2} \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^\nu \right) \qquad (4)$$

ἡ δὲ σειρὰ αὕτη συγκλίνει· διότι καὶ ἡ ἐκ τῶν μέτρων τῶν ὅρων αὐτῆς προκύπτουσα σειρὰ $\Sigma A_\nu (\rho^\nu + \nu \rho^{\nu-1} \omega + \ldots)$ ἢ $\Sigma A_\nu (\rho + \omega)^\nu$ ἔνθα $\omega = |\varepsilon|$, συγκλίνει· διότι εἶνε $\omega < r - \rho$· ὅθεν καὶ $\rho + \omega < r$.

Ὅτι δὲ ἡ σειρὰ (4) τὸν αὐτὸν ἀποτελεῖ ἀριθμὸν καὶ ἡ σειρὰ $\Sigma\alpha_\nu(x+\varepsilon)^\nu$, εἶνε προφανές.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ σειρὰ (4) εἶνε συγκλίνουσα, δυνάμεθα νὰ διατάξωμεν τοὺς ὅρους αὐτῆς καθ' οἱανδήποτε τάξιν θέλωμεν· δυνάμεθα ἄρα νὰ ἀναλύσωμεν αὐτὴν εἰς τὰς ἑξῆς σειρὰς

$$\Sigma\alpha_\nu x^\nu + \Sigma\nu\alpha_\nu x^{\nu-1}.\varepsilon + \Sigma\frac{\nu(\nu-1)}{1\,2}\alpha_\nu x^{\nu-2}.\varepsilon^2 + \ldots.$$

αἵτινες εἶνε συγκλίνουσαι, ὡς μέρη σειρᾶς συγκλινούσης.

Διὰ ταῦτα ἡ αὔξησις τῆς συναρτήσεως $\Sigma\alpha_\nu x^\nu$ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$\varepsilon.\Sigma\nu\alpha_\nu x^{\nu-1} + \frac{\varepsilon^2}{1.2}\Sigma\nu(\nu-1)\,\alpha_\nu x^{\nu-2} + \ldots.$$

ἢ καὶ ὡς ἑξῆς $\varepsilon.\Sigma\nu\alpha_\nu x^{\nu-1} + \varepsilon^2\Omega$ ἔνθα ἐτέθη

$$\Omega = \frac{1}{1.2}\Sigma\nu(\nu-1)\,\alpha_\nu x^{\nu-2} + \frac{\varepsilon}{1.2.3}\Sigma\nu(\nu-1)(\nu-2)\,\alpha_\nu x^{\nu-3} + \ldots$$

εἶνε δὲ τὸ Ω πεπερασμένος τις ἀριθμός, διότι εἶνε μέρος συγκλινούσης σειρᾶς.

Κατὰ ταῦτα ἡ μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως $\Sigma\alpha_\nu x^\nu$, ἡ προελθοῦσα ἐκ τῆς αὐξήσεως τοῦ x κατὰ ε, ἀνελύθη εἰς δύο μέρη, ἐξ ὧν τὸ μὲν πρῶτον εἶνε ἀνάλογον τοῦ ε, τὸ δὲ δεύτερον, καὶ ὅταν διαιρεθῇ διὰ τοῦ ε, πάλιν τείνει πρὸς τὸ 0· ὅθεν συμπεραίνομεν ὅτι

$$d\,(\Sigma\alpha_\nu x^\nu) = (\Sigma\nu\alpha_\nu x^{\nu-1}).\,dx.$$

Περὶ τῶν μερικῶν διαφορικῶν καὶ τῶν μερικῶν παραγώγων.

76. Ὅταν συνάρτησις ἐξαρτᾶται ἐκ πολλῶν μεταβλητῶν, δυνάμεθα νὰ διαφορίσωμεν αὐτὴν πρὸς ἑκάστην τῶν μεταβλητῶν τούτων, θεωροῦντες αὐτὴν μόνην ὡς μεταβαλλομένην τὰς δὲ λοιπὰς ὡς σταθεράς· τὰ οὕτω λαμβανόμενα διαφορικὰ τῆς συναρτήσεως λέγονται *μερικὰ διαφορικὰ* αὐτῆς καὶ παρίστανται πρὸς διάκρισιν διὰ τοῦ συμβόλου ∂ ἀντὶ d. Παραδείγματος χάριν, $\partial_u\sigma(u,v)$ δηλοῖ τὸ μερικὸν διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως $\sigma(u,v)$ πρὸς τὸ u, $\partial_v\sigma(u,v)$ δηλοῖ τὸ μερικὸν διαφορικὸν αὐτῆς πρὸς τὸ v. Καὶ αἱ παράγωγοι αἱ οὕτω προκύπτουσαι λέγονται *μερικαὶ παράγωγοι* τῆς συναρτήσεως· παρίστανται δὲ ὡς ἑξῆς $\sigma'(u.v)_u$ καὶ $\sigma'(u,v)_v$.

Διαφορικὸν τῶν συνθέτων συναρτήσεων.

77. Ἔστω συνάρτησίς τις δύο μεταβλητῶν u καὶ v, ἡ $\sigma(u,v)$, αἵτινες ἀμφότεραι ὑποτίθενται συναρτήσεις τῆς x. Ἐὰν ἡ x αὐξηθῇ κατὰ ε, αἱ μὲν συναρτήσεις u καὶ v αὐξάνουσι κατὰ Δu καὶ Δv, ἡ δὲ σύνθετος συνάρτησις $\sigma(u,v)$ αὐξάνει κατὰ

$$\sigma(u+\Delta u,\ v+\Delta v)-\sigma(u,v).$$

Τὴν αὔξησιν ταύτην δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ ὡς ἑξῆς

$$\Big[\sigma(u+\Delta u, v+\Delta v)-\sigma(u+\Delta u, v)\Big]+\Big[\sigma(u+\Delta u, v)-\sigma(u,v)\Big]$$

Καὶ οἱ μὲν δύο τελευταῖοι ὅροι παριστῶσι τὴν αὔξησιν τῆς συναρτήσεως $\sigma(u,v)$, ἣν λαμβάνει, ὅταν μόνον ἡ μεταβλητὴ u αὐξήσῃ κατὰ Δu, ἡ δὲ v μείνῃ ἀμετάβλητος. Ἐπειδὴ δὲ ἡ συνάρτησις $\sigma(u,v)$ ὑποτίθεται διαφορίσιμος πρὸς τὴν μεταβλητὴν u, (οἱανδήποτε σταθερὰν τιμὴν καὶ ἂν ἔχῃ ἡ v), θὰ εἶνε

$$\sigma(u+\Delta u, v)-\sigma(u,v)=\sigma'(u,v)_u\,.\,\Delta u+\omega\,.\,\Delta u.$$

Οἱ δὲ δύο πρῶτοι ὅροι παριστῶσι τὴν αὔξησιν, τὴν ὁποίαν λαμβάνει ἡ συνάρτησις $\sigma(u',v)$, ὅταν ἡ v μόνον αὐξήσῃ κατὰ Δv, ἡ δὲ ἄλλη μεταβλητὴ μείνῃ ἀμετάβλητος, διατηροῦσα τὴν ἑαυτῆς τιμὴν $u'(=u+\Delta u)$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ συνάρτησις $\sigma(u,v)$ ὑποτίθεται διαφορίσιμος καὶ πρὸς τὴν μεταβλητὴν v, οἱανδήποτε σταθερὰν τιμὴν καὶ ἂν ἔχῃ ἡ u, ἕπεται $\sigma(u',v+\Delta v)-\sigma(u',v)=\sigma'(u',v)_v\,.\,\Delta v+\tau\,.\,\Delta v.$

Τούτων οὕτως ἐχόντων, ἡ αὔξησις τῆς συνθέτου συναρτήσεως $\sigma(u,v)$, ἡ πρὸς τὴν αὔξησιν ε τῆς x ἀντιστοιχοῦσα, λαμβάνει τὴν μορφὴν $\sigma'(u,v)_u\,.\,\Delta u+\sigma'(u',v)_v\,.\,\Delta v+\omega\Delta u+\tau\Delta v$

ἢ καὶ τὴν ἑξῆς

$$\sigma'(u,v)_u\Delta u+\sigma'(u,v)_v\Delta v+\Big[\sigma'(u',v)_v-\sigma'(u,v)_v\Big]\Delta v+\omega\Delta u+\tau\Delta v.$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶνε

$$\Delta u=du+\varepsilon\,.\,F$$
$$\Delta v=dv+\varepsilon\,.\,\Phi$$

τείνουσι δὲ τὰ F, Φ, ω καὶ τ πρὸς τὸ μηδέν, ὅταν ε τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, ὁμοίως δὲ καὶ ἡ διαφορὰ $\sigma'(u',v)_v-\sigma'(u,v)_v$ (διότι ἡ μερικὴ παράγωγος $\sigma'(u,v)_v$ ὑποτίθεται συνεχὴς συνάρτησις τοῦ u), συνάγεται ὅτι εἶνε $d\,\sigma(u,v)=\sigma'(u,v)_u\,du+\sigma'(u,v)_v\,dv.$

Ὁμοίως δεικνύεται, ὅτι, ἐὰν ἡ συνάρτησις $\sigma(u,v,\omega)$ ἐξαρτᾶται ἐκ τριῶν μεταβλητῶν u, v, ω, αἵτινες εἶνε συναρτήσεις τῆς x, θὰ εἶνε

$$d\,\sigma(u,v,\omega)=\sigma'(u,v,\omega)_u\,du+\sigma'(u,v,\omega)_v\,dv+\sigma'(u,v,\omega)_\omega\,d\omega.$$

Ἕκαστος τῶν ὅρων τοῦ διαφορικοῦ τούτου παριστᾷ τὸ διαφορικὸν τῆς συνθέτου συναρτήσεως $\sigma(u,v,\omega)$, πρὸς μίαν μόνην ἐκ τῶν μεταβλητῶν, ἅς περιέχει, τουτέστι τὸ διαφορικόν, τὸ ὁποῖον θὰ εἶχεν ἡ σύνθετος συνάρτησις, ἂν μόνον ἡ ἀντιστοιχοῦσα μεταβλητὴ μετεβάλλετο καὶ ἐθεωρεῖτο, ὥς εἶνε, συνάρτησις τῆς x, αἱ δὲ ἄλλαι ἔμενον σταθεραί. Ἐντεῦθεν συμπεραίνομεν, ὅτι

Τὸ διαφορικὸν πάσης συνθέτου συναρτήσεως ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν μερικῶν διαφορικῶν αὐτῆς πρὸς τὰς μεταβλητάς, ἀφ᾽ ὧν ἐξαρτᾶται, τουτέστι τῶν διαφορικῶν, τὰ ὁποῖα λαμβάνομεν, μεταβάλλοντες ἐκ διαδοχῆς μίαν ἑκάστην τῶν μεταβλητῶν τὰς δὲ λοιπὰς ἀφίνοντες ἀμεταβλήτους.

Διὰ τοῦτο οἱ εὑρεθέντες τύποι γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς

$$d\,\sigma(u,v) = d_u\,\sigma(u,v) + d_v\,\sigma(u,v)$$

$$d\,\sigma(u,v,\omega) = d_u\,\sigma(u,v,\omega) + d_v\,\sigma(u,v,\omega) + d_\omega\,\sigma(u,v,\omega).$$

Ὅτι δὲ τὸ αὐτὸ ἀληθεύει καὶ περὶ πάσης συνθέτου συναρτήσεως, ὁσασδήποτε μεταβλητὰς καὶ ἂν περιέχῃ, εἶνε φανερόν.

Πρὸς ἐφαρμογὴν θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν $u\,.\,v$ ὑποθέτοντες μεταβαλλομένην μόνην τὴν συνάρτησιν u, εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ διαφορικὸν τοῦ uv εἶνε $v\,.\,du$
ὑποθέτοντες δέ, ὅτι μεταβάλλεται μόνον ἡ v, εὑρίσκομεν διαφορικὸν τοῦ $u\,.\,v$ τὸ $u\,.\,dv$·
καὶ ἐπειδὴ τὰ δύο ταῦτα μερικὰ διαφορικὰ ἀποτελοῦσι τὸ διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως uv, ἕπεται

$$d\,(uv) = udv + vdu.$$

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἀποδεικνύεται, ὅτι εἶνε

$$d\,(uv\omega) = uvd\omega + u\omega dv + v\omega du.$$

Ὁμοίως $\quad d(u+v+\omega) = du + dv + d\omega.$

Ἔστω πρὸς τούτοις ἡ συνάρτησις φ^ω· ἐὰν μόνον τὴν φ θεωρήσωμεν ὡς μεταβαλλομένην, εὑρίσκομεν διαφορικὸν τὸ $\omega\,.\,\varphi^{\omega-1}\,.\,d\varphi$·
ἐὰν δὲ θεωρήσωμεν ὡς μεταβαλλομένην, μόνην τὴν ω,
εὑρίσκομεν διαφορικὸν τὸ $\varphi^\omega\,.\,l\varphi\,.\,d\omega.$

Ἐντεῦθεν ἕπεται

$$d(\varphi^\omega) = \omega\varphi^{\omega-1}d\varphi + \varphi^\omega l\varphi d\omega = \varphi^\omega\,.\left(l\varphi d\omega + \frac{\omega}{\varphi}\,d\varphi\right).$$

Διαφορικὸν ὁριζούσης.

78. Τὸ διαφορικὸν πάσης ὁριζούσης εἶνε ἄθροισμα τῶν ὁριζουσῶν, τὰς ὁποίας λαμβάνομεν θέτοντες ἀντὶ τῶν στοιχείων μιᾶς ἑκάστης ὁριζοντίας σειρᾶς τὰ διαφορικὰ αὐτῶν.

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, ἡ ὁρίζουσα τοῦ τρίτου βαθμοῦ

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

τῆς ὁποίας τὰ στοιχεῖα ὑποτίθενται συναρτήσεις τῆς x.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ Α, Β, Γ τοὺς συντελεστὰς τῶν στοιχείων α, β, γ, ἐν τῷ ἀναπτύγματι τῆς ὁριζούσης ταύτης, θὰ ἔχωμεν

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \alpha A + \beta B + \gamma \Gamma.$$

Ἐὰν δὲ ἐν τῇ ὁριζούσῃ μεταβάλωμεν μόνον τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης ὁριζοντίας σειρᾶς, ἤτοι τὰ α, β, γ, θὰ ἔχωμεν τὸ μερικὸν διαφορικὸν

$$A d\alpha + B d\beta + \Gamma d\gamma \quad \text{ἤτοι} \quad \begin{vmatrix} d\alpha & d\beta & d\gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

Ὁμοίως, ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι μεταβάλλονται μόνον τὰ στοιχεῖα τῆς δευτέρας σειρᾶς, εὑρίσκομεν μερικὸν διαφορικὸν τὸ ἑξῆς

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ d\alpha' & d\beta' & d\gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

καὶ τέλος, ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι μεταβάλλονται μόνον τὰ στοιχεῖα τῆς τρίτης σειρᾶς, θὰ ἔχωμεν μερικὸν διαφορικὸν τὸ ἑξῆς

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ d\alpha'' & d\beta'' & d\gamma'' \end{vmatrix}$$

τὰ τρία δὲ ταῦτα μερικὰ διαφορικὰ ἀποτελοῦσι τὸ διαφορικὸν τῆς ὁριζούσης· ἤτοι εἶνε

$$d\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d\alpha & d\beta & d\gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ d\alpha' & d\beta' & d\gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ d\alpha'' & d\beta'' & d\gamma'' \end{vmatrix}$$

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις ἐπὶ πάσης ὁριζούσης.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

Τὰ ἀποδειχθέντα θεωρήματα ἀρκοῦσι πρὸς εὕρεσιν τοῦ διαφορικοῦ πάσης συναρτήσεως, ἐν τῇ ἀριθμητικῇ ἐκφράσει τῆς ὁποίας περιέχονται μόνον αἱ στοιχειώδεις συναρτήσεις πρὸς ἀλλήλας συμπλεκόμεναι· διότι δι᾽ αὐτῶν ἀνάγεται ἡ εὕρεσις τοῦ διαφορικοῦ τῆς συναρτήσεως μικρὸν κατὰ μικρὸν εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ διαφορικοῦ αὐτῶν τῶν στοιχειωδῶν συναρτήσεων.

Πρὸς εὐκολωτέραν ἐπιθεώρησιν παραθέτομεν ἐνταῦθα τὰ διαφορικὰ τῶν στοιχειωδῶν συναρτήσεων καὶ τοὺς τύπους τῆς διαφορίσεως

$$d(ax) = a\,dx$$

$$d(x^2) = 2x\,.\,dx \qquad d(\sqrt{x}) = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

καὶ γενικῶς $d(x^\mu) = \mu x^{\mu-1}\,.\,dx$

$$d(e^x) = e^x\,.\,dx \qquad d(lx) = \frac{dx}{x}$$

$$d(a^x) = a^x\,.\,la\,.\,dx \qquad d(log\ x) = \frac{dx}{x}\,.\,log\,e$$

$$d(\eta\mu\,x) = \sigma\upsilon\nu\,x\,.\,dx \qquad d(\tau o\xi\,\eta\mu\,x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$d(\sigma\upsilon\nu\,x) = -\,\eta\mu\,x\,.\,dx \qquad d(\tau o\xi\,\sigma\upsilon\nu\,x) = -\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$d(\varepsilon\varphi\,x) = \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \qquad d(\tau o\xi\,\varepsilon\varphi\,x) = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$d(\sigma\varphi\,x) = -\,\frac{dx}{\eta\mu^2 x} \qquad d(\tau o\xi\,\sigma\varphi\,x) = -\,\frac{dx}{1+x^2}$$

$$d(\varphi+\omega) = d\varphi + d\omega$$

$$d(\varphi\,.\,\omega) = \varphi\,d\omega + \omega\,d\varphi$$

$$d\left(\frac{\varphi}{\omega}\right) = \frac{\omega\,d\varphi - \varphi\,d\omega}{\omega^2}$$

$$df(\omega) = f'(\omega)\,.\,d\omega$$

$$d\,\sigma(u,v) = d_u\sigma(u,v) + d_v\sigma(u,v).$$

Ἡ δὲ παράγωγος πάσης συναρτήσεως προκύπτει, ἐὰν ἐν τῷ διαφορικῷ αὐτῆς παραλειφθῇ ὁ παράγων dx, τουτέστιν, ἐὰν διαιρεθῇ τὸ διαφορικὸν αὐτῆς διὰ τοῦ dx· διὰ τοῦτο αἱ παράγωγοι τῶν συναρτήσεων παρίστανται καὶ ὡς ἑξῆς

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{ἢ} \quad \frac{d\sigma(x)}{dx}.$$

ΣΗΜ. Αἱ συναρτήσεις, περὶ τὰς ὁποίας ἀσχολούμεθα ἐνταῦθα, εἶνε διαφορίσιμοι εἰς πάσας τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς, ἀφ' ἧς ἐξαρτῶνται, ἐξαιρουμένων τιμῶν τινων μεμονωμένων· ἡ αὔξησις αὐτῶν δηλονότι γίνεται κατὰ τὸν τύπον

(1) $\qquad \varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)=\varepsilon\varphi'(x)+\varepsilon\omega \qquad$ ἔνθα $\text{ορ.}\,\omega=0$

οἱανδήποτε τιμὴν καὶ ἂν ἔχῃ ἡ x, πλὴν τινων μεμονωμένων τιμῶν αὐτῆς.

Παραδείγματος χάριν ἡ συνάρτησις $\sqrt{x}$, δὲν εἶνε διαφορίσιμος εἰς τὴν τιμὴν $x=0$· διότι ἡ αὔξησις αὐτῆς (ὅταν ἡ x αὐξηθῇ ἀπὸ τῆς τιμῆς $x=0$) εἶνε $\sqrt{\varepsilon}$· ἑπομένως δὲν ὑπάγεται εἰς τὸν θεμελιώδη τύπον (1).

Ἐν γένει εἰς τὰς μὴ διαφορισίμους τιμὰς ἡ συνάρτησις παρουσιάζει ἀνωμαλίαν τινά, ὡς λόγου χάριν, ἀοριστίαν ἢ αὔξησιν εἰς ἄπειρον. Παραδείγματος χάριν ἡ συνάρτησις $\frac{1}{x}$ δὲν εἶνε διαφορίσιμος εἰς τὴν τιμὴν $x=0$· διότι αὐξάνει εἰς ἄπειρον, ὅταν ἡ x πλησιάζῃ πρὸς τὴν τιμὴν 0, ἡ δὲ συνάρτησις $\text{τοξ}\,\text{ημ}\,x$ δὲν εἶνε διαφορίσιμος εἰς τὴν τιμὴν $x=1$· διότι ἡ παράγωγος αὐτῆς αὐξάνει εἰς ἄπειρον, ὅταν ἡ x πλησιάζῃ πρὸς τὴν τιμὴν 1. Ἐπίσης αἱ συναρτήσεις $\text{ημ}\left(\frac{1}{x}\right)$, $\text{συν}\left(\frac{1}{x}\right)$, $e^{\frac{1}{x}}$ δὲν εἶνε διαφορίσιμοι εἰς τὴν τιμὴν $x=0$, διότι γίνονται ἀόριστοι, ὅταν ἡ x τείνῃ πρὸς τὸ 0, ἤτοι πρὸς οὐδεμίαν ὡρισμένην τιμὴν τείνουσι· παρατηρητέον δέ, ὅτι ἡ συνάρτησις $e^{\frac{1}{x}}$, ἐὰν ἡ x λαμβάνῃ μόνον πραγματικὰς τιμάς, δὲν εἶνε ἐντελῶς ἀόριστος· ἀλλ' ὅταν μὲν ἡ x τείνῃ πρὸς τὸ 0 λαμβάνουσα θετικὰς μόνον τιμάς, ἡ συνάρτησις $e^{\frac{1}{x}}$ αὐξάνει εἰς ἄπειρον· διότι εἶνε

$$e^{\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{1.2.x^2}+\frac{1}{1.2.3.x^3}+\dots$$

ὅταν δὲ ἡ x τείνῃ πρὸς τὸ 0 λαμβάνουσα ἀρνητικὰς μόνον τιμάς, ἡ συνάρτησις $e^{\frac{1}{x}}$ τείνει πρὸς τὸ 0· διότι εἶνε

$$e^{-\frac{1}{x}}=\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΤΩΝ ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Πεπλεγμένη συνάρτησις ὁριζομένη ἐκ μιᾶς ἐξισώσεως.

79. Αἱ συναρτήσεις, περὶ ὧν μέχρι τοῦδε διελάβομεν, ὑπετέθησαν δεδομέναι παραστάσεις τῆς μεταβλητῆς, ἀφ' ἧς ἐξαρτῶνται. Δυνατὸν ὅμως ἡ συνάρτησις y νὰ ὁρίζηται ἔκ τινος ἐξισώσεως περιεχούσης αὐτὴν τὴν y καὶ τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν x

$$\sigma(x, y) = 0 \qquad (1)$$

καὶ μὴ λελυμένης πρὸς τὴν y. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐκφράζει τὴν ἀμοιβαίαν τῶν μεταβλητῶν τούτων ἐξάρτησιν, ἡ δὲ συνάρτησις y λέγεται *πεπλεγμένη*· καὶ τὸ διαφορικὸν αὐτῆς εὑρίσκεται, χωρὶς νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις, κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον.

Ἐπειδὴ ἡ μεταβλητὴ y εἶνε συνάρτησις τῆς x (διότι πρὸς ἑκάστην τιμὴν τῆς x ἀντιστοιχοῦσιν ὡρισμέναι τιμαὶ τῆς y, μία ἢ περισσότεραι, καὶ δίδονται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως), τὸ πρῶτον μέλος τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, ἤτοι ἡ παράστασις $\sigma(x, y)$, εἶνε συνάρτησις σύνθετος τοῦ x· καὶ διὰ τοῦτο, κατὰ τὰ περὶ συνθέτων συναρτήσεων εἰρημένα, εἶνε

$$d\sigma(x,y) = d_x\sigma(x,y) + d_y\sigma(x,y)$$

ἢ
$$d\sigma(x,y) = \sigma'(x,y)_x \cdot dx + \sigma'(x,y)_y \cdot dy$$

καὶ ἐπειδή, μεταβαλλομένης τῆς x, ἡ παράστασις $\sigma(x,y)$ διαφυλάττει μίαν καὶ τὴν αὐτὴν τιμήν, ἕπεται

$$\sigma'(x,y)_x\, dx + \sigma'(x,y)_y\, (dy = 0 \qquad (2)$$

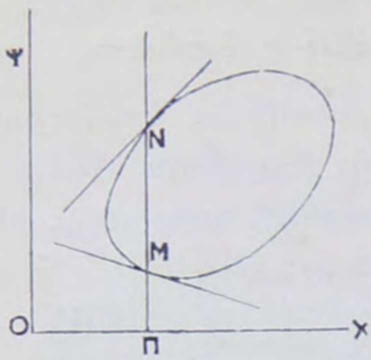
ἐξ οὗ
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sigma'(x,y)_x}{\sigma'(x,y)_y}. \qquad (3)$$

τουτέστιν, *ἡ παράγωγος τῆς πεπλεγμένης συναρτήσεως ἰσοῦται τῷ πηλίκῳ τῶν δύο μερικῶν παραγώγων τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἐξισώσεως, ἐξ ἧς ὁρίζεται, ληφθέντι μετὰ τοῦ ἀντιθέτου σημείου· εἶνε δὲ διαιρετέος ἡ πρὸς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν παράγωγος.*

ΣΗΜ. α' Ἂν πρὸς ἑκάστην τιμὴν τοῦ x (ἔν τινι διαστήματι) ἀντιστοιχῶσι τιμαὶ τοῦ y περισσότεραι τῆς μιᾶς, ἔστω αἱ $y_1, y_2 \ldots y_\nu$, ἑκάστη τῶν τιμῶν τούτων δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἰδία συνάρτησις καὶ ἑπομένως ἰσχύουσι δι' ἑκάστην ἐξ αὐτῶν αἱ ἰσότητες (1) (2) καὶ (3)· ὥστε ἡ παράγωγος $\frac{dy}{dx}$ ἔχει *ἐν γένει* τόσας τιμὰς δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ x, ὅσας τιμὰς ἔχει καὶ ἡ y, αἱ δὲ τιμαὶ αὗται εἶνε

$$\frac{dy_1}{dx} = -\frac{\sigma'(x,y_1)_x}{\sigma'(x,y_1)_y}, \qquad \frac{dy_2}{dx} = -\frac{\sigma'(x,y_2)_x}{\sigma'(x,y_2)_y}, \ldots$$

ΣΗΜ. β′ Ἐὰν αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τῶν μεταβλητῶν x καὶ y παριστῶνται ὡς εὐθύγραμμοι συντεταγμέναι ἑνὸς σημείου ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, τὸ σύνολον τῶν σημείων, ὧν αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν $\sigma(x,y)=0$, θὰ ἀποτελῇ ἐν γένει καμπύλην, τὴν ὁποίαν ἑκάστη παράλληλος τῶν τεταγμένων, οἷον ἡ ΝΠ, θὰ τέμνῃ εἰς τόσα σημεῖα, ὅσαι εἶνε αἱ τιμαὶ τῆς y αἱ ἀντιστοιχοῦσαι πρὸς τὴν τιμὴν $x=$ΟΠ. Ἑκάστου τῶν σημείων τούτων ἡ τεταγμένη μεταβάλλεται μετὰ τοῦ x καὶ εἶνε συνάρτησις αὐτοῦ ἔχουσα ἰδίαν παράγωγον (ἥτις παριστᾷ, ὡς ἐμάθομεν, τὸν συντελεστὴν κατευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον), τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου (3), ἐὰν τεθῇ ἀντὶ τοῦ y ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ αὐτοῦ.



Παραδείγματα.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}-1=0$

ἔνθα θεωρεῖται ἡ y ὡς συνάρτησις τῆς x.

Αἱ μερικαὶ παράγωγοι τοῦ πρώτου μέλους αὐτῆς (τοῦ δευτέρου ὄντος 0) εἶνε $\dfrac{2x}{\alpha^2}$ καὶ $\dfrac{2y}{\beta^2}$

ὅθεν ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως y εἶνε $-\dfrac{\beta^2 x}{\alpha^2 y}$

καὶ τὸ διαφορικὸν αὐτῆς εἶνε $dy=-\dfrac{\beta^2 x}{\alpha^2 y}.\,dx$

Ἔστω προσέτι ἡ ἐξίσωσις

$$x+lx=y+ly$$

ἢ

$$x+lx-y-ly=0$$

Αἱ μερικαὶ παράγωγοι τοῦ πρώτου μέλους εἶνε

$1+\dfrac{1}{x}$ (ἡ πρὸς τὴν x) καὶ $-1-\dfrac{1}{y}$ (ἡ πρὸς τὴν y)

ἡ παράγωγος ἄρα τῆς συναρτήσεως y εἶνε

$$\frac{x+1}{y+1}\cdot\frac{y}{x}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$x+y+e^{yx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1+ye^{xy}}{1+xe^{xy}}=-\frac{1-xy-y^2}{1-xy-x^2}$$

ΣΗΜ. Δυνάμεθα νὰ εὑρίσκωμεν τὸ διαφορικὸν τῆς y ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\sigma(x, y) = 0$ διαφορίζοντες αὐτὴν ἄνευ διακρίσεως τῶν μεταβλητῶν· διότι ἐκ τῆς ἐξισώσεως $d\,\sigma(x,y) = 0$, ἐὰν ἐφαρμοσθῶσιν εἰς αὐτὴν οἱ κανόνες τῆς διαφορίσεως, προκύπτουσιν αἱ ἐξισώσεις (2) καὶ (3). Οὐδὲ εἶνε ἀνάγκη νὰ μεταφέρωμεν πάντας τοὺς ὅρους τῆς ἐξισώσεως εἰς τὸ ἕτερον τῶν μελῶν· ἀρκεῖ νὰ λαμβάνωμεν τὰ διαφορικὰ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν καὶ νὰ ἐξισῶμεν αὐτά.

Πεπλεγμέναι συναρτήσεις ὁριζόμεναι ἐκ πολλῶν ἐξισώσεων.

80. Ὑποθέσωμεν γενικῶς, ὅτι ὁσαιδήποτε μεταβληταὶ $x, y, z, \omega \,..\, v$, ὧν τὸ πλῆθος ἔστω $\mu + 1$, συνδέονται διὰ τοσούτων ἐξισώσεων, ὅσος εἶνε ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν, πλὴν μιᾶς, ἤτοι μ· τότε μία ἐξ αὐτῶν, ἔστω ἡ x, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀνεξάρτητος μεταβλητή, *ἐὰν ὁριζομένης αὐτοβούλως τῆς τιμῆς αὐτῆς, ὁρίζωνται καὶ αἱ τιμαὶ τῶν λοιπῶν μ μεταβλητῶν ἐκ τῶν μ ἐξισώσεων*, αἱ ἄλλαι δὲ αὗται μεταβληταὶ θὰ εἶνε τότε συναρτήσεις τῆς x.

Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις

$$\begin{aligned} &\sigma(x, y, z, \omega \ldots v) = 0 \\ &\varphi(x, y, z, \omega \ldots v) = 0 \qquad (1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f(x, y, z, \omega, \ldots v) = 0 \end{aligned}$$

Τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἐξισώσεων τούτων, ἤτοι αἱ παραστάσεις $\sigma(x, y, z, \omega, \ldots v)$, $\varphi(x, y, z, \omega, \ldots v) \ldots$ κτλ. ἢ συντομώτερον $\sigma, \varphi, \ldots$ εἶνε σύνθετοι συναρτήσεις τῆς x, διότι ἐξαρτῶνται ἐκ τῶν μεταβλητῶν $x, y, z, \omega, \ldots v$, αἵτινες πᾶσαι εἶνε συναρτήσεις τῆς x· ὅθεν εἶνε

$$\begin{aligned} d\sigma &= \sigma'_x\,dx + \sigma'_y\,dy + \sigma'_z\,dz + \ldots + \sigma'_v\,dv \\ d\varphi &= \varphi'_x\,dx + \varphi'_y\,dy + \varphi'_z\,dz + \ldots + f'_v\,dv. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ df &= f'_x . dx + f'_y\,dy + f'_z\,dz + \ldots + f'_v\,dv, \end{aligned}$$

Ἐπειδὴ δὲ αἱ παραστάσεις $\sigma, \varphi, f \ldots$, τοῦ x μεταβαλλομένου διαφυλάττουσι μίαν καὶ τὴν αὐτὴν τιμὴν 0, ἕπεται, ὅτι τὰ διαφορικὰ αὐτῶν εἶνε 0· ἤτοι

$$\begin{aligned} &\sigma'_x . dx + \sigma'_y . dy + \sigma'_z . dz + \ldots + \sigma'_v . dv = 0 \\ &\varphi'_x . dx + \varphi'_y . dy + \varphi'_z . dz + \ldots + \varphi'_v . dv = 0 \qquad (2) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f'_x . dx + f'_y . dy + f'_z\,dz + \ldots + f'_v\,dv = 0 \end{aligned}$$

Αἱ μ αὗται ἐξισώσεις περιέχουσι τὰ μ διαφορικὰ τῶν μ συναρτήσεων, ἤτοι τὰ dy, dz,..dv. καὶ μάλιστα περιέχουσιν αὐτὰ εἰς τὸν πρῶτον μόνον βαθμόν· ἑπομένως λυόμεναι πρὸς τὰ διαφορικὰ ταῦτα δίδουσι τιμὰς τοιαύτας

$$dy = \mathrm{A}.dx, \quad dz = \mathrm{B}.dx, \quad d\omega = \Gamma.dx..; \quad dv = \Theta.dx$$

ἔνθα Α,Β,Γ.. Θ εἶνε γνωσταὶ παραστάσεις περιέχουσαι τὰς $\mu+1$ μεταβλητάς· αἱ παραστάσεις αὗται εἶνε αἱ παράγωγοι τῶν συναρτήσεων $y, z...v$.

Ἔστωσαν ὡς παράδειγμα αἱ τὰς τρεῖς μεταβλητὰς x, y, z συνδέουσαι δύο ἐξισώσεις

$$x^2+y^2+z^2-\varrho^2=0$$

$$\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$$

λαμβάνοντες τὰ διαφορικὰ τῶν πρώτων μελῶν, εὑρίσκομεν

$$xdx+ydy+zdz=0$$

$$\alpha dx+\beta dy+\gamma dz=0$$

ἐξ ὧν λυομένων προκύπτει

$$\frac{dx}{\begin{vmatrix} y & z \\ \beta & \gamma \end{vmatrix}} = \frac{dy}{\begin{vmatrix} z & x \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix}} = \frac{dz}{\begin{vmatrix} x & y \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}}$$

ΣΗΜ. Πλὴν τῶν μ ἐξισώσεων (2) οὐδεμία ἄλλη διάφορος τούτων δύναται νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν διαφορικῶν dx, dy,. dz· διότι τότε θὰ ὡρίζοντο αἱ τιμαὶ αὐτῶν, ὅπερ ἀδύνατον· ὥστε πᾶσα μεταξὺ τῶν διαφορικῶν τούτων σχέσις προκύπτει ἐκ τῶν ἰσοτήτων (2) καὶ (1) ὁπωσδήποτε συνδυαζομένων.

Περὶ τῆς μορφῆς τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων.

81. Περαίνοντες ἐνταῦθα τὴν θεωρίαν τῆς διαφορίσεως, παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ τὰ διαφορικὰ ὁσωνδήποτε μεταβλητῶν συνδέουσαι ἐξισώσεις, αἵτινες καὶ διαφορικαὶ ἐξισώσεις λέγονται, ἔχουσι τὰς ἑπομένας δύο ἰδιότητας.

1) *Εἶνε ὁμογενεῖς πρὸς τὰ διαφορικά, ἢ ἀναλύονται εἰς ἄλλας ὁμογενεῖς πρὸς αὐτά.*

Διότι, ἂν τὸ διαφορικὸν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν ϱ, καὶ τὰ ἄλλα πάντα (ὡς ἀνάλογα τούτου) πολλαπλασιάζονται ἐπίσης ἐπὶ ϱ, ἡ δὲ συνδέουσα αὐτὰ ἐξίσωσις πρέπει νὰ μὴ μεταβάλληται ποσῶς. Ἀλλ᾽ ὅταν ἐξίσωσις ἔχῃ τοῦτο τὸ ἰδίωμα, εἶνε ὁμογενὴς πρὸς τὰς ποσότητας, αἵτινες πολλαπλασιάζονται, ἢ ἀναλύεται εἰς ἄλλας ὁμογενεῖς πρὸς αὐτὰς (ἴδε Ἀναλ. Γεωμετρ. ἐδ. 39).

2) *Διαφυλάττουσιν ἀναλλοίωτον τὴν ἑαυτῶν μορφήν, πρὸς οἱανδήποτε ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν καὶ ἂν ἀναφέρωνται τὰ διαφορικά.* (ἀρκεῖ αἱ πρὸς ἀλλήλας σχέσεις τῶν μεταβλητῶν, ἤτοι αἱ συνδέουσαι αὐτὰς ἐξισώσεις, νὰ μὴ ἀλλοιωθῶσιν).

Ἂς συνδέωνται αἱ $\mu+1$ μεταβληταὶ $x, y, z, \omega \ldots v$ πρὸς ἀλλήλας διὰ τῶν μ ἐξισώσεων (1)· τότε τὰ διαφορικὰ αὐτῶν θὰ συνδέωνται πρὸς ἄλληλα διὰ τῶν μ πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων (2), αἵτινες προκύπτουσιν ἐκ τῶν (1) διὰ τῆς διαφορίσεως καὶ κατ' οὐδὲν προδήλως ἀλλοιοῦνται, οἱαδήποτε μεταβλητὴ καὶ ἂν θεωρῆται ἀνεξάρτητος κατὰ τὴν διαφόρισιν. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων καὶ ἐκ τῶν (1) προκύπτει πᾶσα ἄλλη μεταξὺ τῶν αὐτῶν διαφορικῶν ἐξίσωσις, συνάγεται, ὅτι πᾶσα τοιαύτη ἐξίσωσις ἔχει τὴν προκειμένην ἰδιότητα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Τῶν περὶ τὰς καταμετρήσεις ἢ παρατηρήσεις συμβαινόντων σφαλμάτων ἐπίδρασις ἐπὶ τὰ ἐξαγόμενα.

82. Ὑποθέσωμεν, ὅτι ποσότης τις y ἐξαρτᾶται κατὰ τρόπον γνωστὸν ἔκ τινος ἄλλης x, τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ εὑρέθη διὰ καταμετρήσεως, ἑπομένως εἶνε γνωστὴ μόνον κατὰ προσέγγισιν, ἔστω δὲ α ἡ κατὰ προσέγγισιν γνωστὴ τιμὴ τοῦ x καὶ $\alpha+\varepsilon$ ἡ ἀληθής· τότε ἡ πρὸς τὴν τιμὴν α ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τῆς συναρτήσεως (ἣν συνάρτησιν παριστῶμεν διὰ $\sigma(x)$) εἶνε ἡ $\sigma(\alpha)$, ἡ δὲ πρὸς τὴν ἀληθῆ τιμὴν $\alpha+\varepsilon$ ἀντιστοιχοῦσα εἶνε ἡ $\sigma(\alpha+\varepsilon)$· ἑπομένως, λαμβάνοντες ἀντὶ τῆς ἀληθοῦς τιμῆς $\sigma(\alpha+\varepsilon)$ τὴν $\sigma(\alpha)$, σφαλλόμεθα κατὰ τὴν διαφοράν.

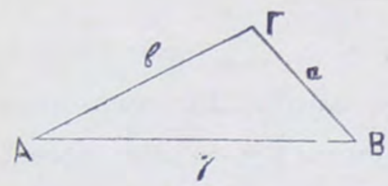
$$\sigma(\alpha+\varepsilon)-\sigma(\alpha)$$

ἤτοι κατὰ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν αὔξησιν τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$, ὅταν ἡ x ἀπὸ τῆς τιμῆς α αὐξηθῇ κατὰ ε. Ἡ αὔξησις αὕτη, (ἐὰν τὸ λάθος ε τὸ ἐπὶ τῆς τιμῆς τοῦ x ὑπάρχον εἶνε ἱκανῶς μικρόν), εἶνε ἴση *ὡς ἔγγιστα* πρὸς τὸ διαφορικὸν $d\sigma(x)$ διὰ $x=\alpha$ ἢ $\sigma'(\alpha).\varepsilon$.

Ἐντεῦθεν συμπεραίνομεν, ὅτι *τὸ σφάλμα ε εἰς τὴν τιμὴν τοῦ x προξενεῖ* *εἰς τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως λάθος ἴσον τῷ γινομένῳ τοῦ ε ἐπὶ τὴν τιμὴν τῆς παραγώγου διὰ $x=\alpha$*· ἑπομένως ἡ ἐπίδρασις τοῦ σφάλματος ε ἐπὶ τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως εἶνε τόσῳ μικροτέρα, ὅσῳ μικροτέρα εἶνε ἡ τιμὴ τῆς παραγώγου ἡ πρὸς τὴν τιμὴν α ἀντιστοιχοῦσα.

Ὡς παράδειγμα ἔστω τὸ ἑξῆς.

Ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου τινὸς ἐκ τῶν δύο πλευρῶν αὐτοῦ β καὶ γ καὶ ἐκ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας Α. Παριστῶντες τὸ ἐμβαδὸν διὰ τοῦ Ε ἔχομεν



$$E = \frac{1}{2}\beta\gamma \,.\, \eta\mu\, A$$

ἀλλ' ἐὰν εἰς τὴν καταμέτρησιν τῆς γωνίας Α συνέβη λάθος τι dA, τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν δὲν εἶνε τὸ $\frac{1}{2}\beta\gamma\ \eta\mu\, A$, ἀλλὰ τὸ $\frac{1}{2}\beta\gamma\ \eta\mu\,(A+dA)$· ἀνάγκη λοιπὸν πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀληθοῦς ἐμβαδοῦ νὰ αὐξηθῇ ἡ γωνία Α κατὰ dA, ὅτε αὐξάνεται καὶ τὸ ἐξ αὐτῆς ἐξαρτώμενον ἐμβαδὸν Ε κατὰ ΔΕ· τοῦτο δὲ εἶνε τὸ εἰς τὸ ἐμβαδὸν συμβαῖνον λάθος· λαμβάνοντες δὲ ἀντὶ τῆς αὐξήσεως ΔΕ τὸ διαφορικὸν dE, ἔχομεν ἐκ τοῦ προηγουμένου τύπου

$$dE = \frac{1}{2}\beta\gamma\ \sigma\upsilon\nu\, A \,.\, dA\cdot$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι *τὸ περὶ τὴν καταμέτρησιν τῆς γωνίας Α συμβὰν λάθος βλάπτει τὸ ἐμβαδὸν τόσῳ ὀλιγώτερον ὅσῳ ἡ γωνία αὕτη πλησιάζει πρὸς τὴν ὀρθήν*.

Ἐὰν ἐκ τῶν αὐτῶν στοιχείων πρόκειται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ ΒΓ (=α), ἔχομεν τὸν τύπον $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\ \sigma\upsilon\nu\, A$ καὶ ἂν ὑποτεθῇ ὅτι ἡ ἀληθὴς τιμὴ τῆς γωνίας εἶνε ἡ $A+dA$, ἡ ἀληθὴς τιμὴ τῆς πλευρᾶς θὰ εἶνε $\alpha+\Delta\alpha$ (ἔνθα Δα δηλοῖ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν αὔξησιν τῆς πλευρᾶς α, εἰς τὴν αὔξησιν τῆς γωνίας Α κατὰ dA)· λαμβάνοντες δὲ τὸ διαφορικὸν $d\alpha$, ἀντὶ τῆς αὐξήσεως Δα, εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ προηγουμένου τύπου

$$2\alpha d\alpha = d\,(\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\ \sigma\upsilon\nu\, A) = 2\beta\gamma\ \eta\mu\, A \,.\, dA$$

ὅθεν $$d\alpha = \frac{\beta\gamma\ \eta\mu\, A}{\alpha} \,.\, dA = \frac{2E \,.\, dA}{\alpha} = \frac{\alpha \,.\, v \,.\, dA}{\alpha} = v \,.\, dA\cdot$$

τουτέστι τὸ περὶ τὴν εὕρεσιν τῆς γωνίας Α συμβὰν λάθος βλάπτει τόσῳ ὀλιγώτερον ὅσῳ μικρότερον εἶνε τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου τὸ ἐκ τῆς γωνίας ταύτης ἐρχόμενον.

Ὁμοίως εὑρίσκονται καὶ αἱ ἑξῆς προτάσεις.

Ἐὰν ἐκ τῆς ἐφαπτομένης αὐτοῦ πρόκειται νὰ εὑρεθῇ τόξον τι, τὸ ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης συμβὰν λάθος βλάπτει τόσῳ ὀλιγώτερον, ὅσῳ μεγαλητέρα εἶνε ἡ ἐφαπτομένη.

Ἐάν τι τόξον πρόκειται νὰ εὑρεθῇ ἐκ τοῦ ἡμιτόνου αὐτοῦ ἢ ἐκ τοῦ συνημιτόνου, τὸ εἰς τὸ ἡμίτονον ἢ εἰς τὸ συνημίτονον συμβὰν λάθος βλάπτει τόσῳ ὀλιγώτερον, ὅσῳ ταῦτα εἶνε μικρότερα.

Ἐὰν ἡ ἀκτὶς κύκλου αὐξηθῇ κατὰ ποσότητα ἐλαχίστην, ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ αὐξάνει *ὡς ἔγγιστα* κατὰ ὀρθογώνιον ἔχον βάσιν τὴν περιφέρειαν καὶ ὕψος τὴν αὔξησιν τῆς ἀκτῖνος.

Ἐὰν ἡ ἀκτὶς σφαίρας αὐξηθῇ κατὰ ποσότητά τινα ἐλαχίστην, ὁ ὄγκος αὐτῆς αὐξάνει ὡς ἔγγιστα κατὰ πρίσμα ἔχον βάσιν μὲν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ τὴν αὔξησιν τῆς ἀκτῖνος.

Περὶ σχετικοῦ λάθους.

Ὁ λόγος τοῦ λάθους, ὅπερ συμβαίνει εἰς τὴν εὕρεσιν ποσότητός τινος, πρὸς αὐτὴν τὴν ποσότητα, λέγεται *σχετικὸν λάθος.*

Ἐὰν λόγου χάριν εἰς τὴν μέτρησιν μήκους τινὸς 4 μέτρων συμβῇ λάθος ἑνὸς δακτύλου, τὸ σχετικὸν λάθος εἶνε $\frac{1}{40}$· ἐὰν δὲ εἰς τὴν εὕρεσιν ἀποστάσεώς τινος 5000 μέτρων συμβῇ λάθος ἑνὸς μέτρου, τὸ σχετικὸν λάθος εἶνε $\frac{1}{5000}$.

Ἐὰν ἡ ποσότης y ἐξαρτᾶται ἐξ ἄλλης τινὸς x κατὰ τρόπον γνωστόν, ἐὰν δηλαδὴ εἶνε $y = \sigma(x)$, ἕκαστον λάθος εἰς τὴν τιμὴν τοῦ x προξενεῖ, ὡς προηγουμένως ἐμάθομεν, ἀντιστοιχόν τι λάθος εἰς τὴν τιμὴν τῆς y, ἣν ἡ ἐξίσωσις $y = \sigma(x)$ ὁρίζει· καὶ ἂν ἡ κατὰ προσέγγισιν γνωστὴ τιμὴ τοῦ x εἶνε a ἡ δὲ ἀληθὴς εἶνε $a + \varepsilon$, τὸ εἰς τὴν τιμὴν τῆς y συμβαῖνον λάθος θὰ εἶνε (ὡς ἔγγιστα) $\sigma'(a).\varepsilon$· κατ' ἀκολουθίαν τὸ σχετικὸν λάθος θὰ εἶνε

$$\frac{\sigma'(a).\varepsilon}{\sigma(a+\varepsilon)} \text{ ἢ } \frac{\sigma'(a)\,\varepsilon}{\sigma(a)}$$ διότι $\sigma(a+\varepsilon)$ ἐλάχιστον διαφέρει τοῦ $\sigma(a)$.

Ἐκ τούτων γίνεται δῆλον, ὅτι *τὸ σχετικὸν λάθος εἰς τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$ διὰ $x=\alpha$, τὸ προερχόμενον ἔκ τινος λάθους ε εἰς τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x, εἶνε ἴσον τῷ διαφορικῷ τοῦ λογαρίθμου τῆς συναρτήσεως ταύτης διὰ $x=\alpha$.*

Ὡς παράδειγμα ἔστω τὸ ἑπόμενον.

Ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὴν πλευρὰν ΑΒ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ἐκ τῆς καθέτου πλευρᾶς ΑΓ καὶ ἐκ τῆς ἀπέναντι ὀξείας γωνίας Γ. Πρὸς τοῦτο ἔχομεν τὸν ἑξῆς τύπον $\gamma=\beta\,\text{εφ}\,\Gamma$.

Ἀλλ' ἂν εἰς τὴν καταμέτρησιν τῆς γωνίας Γ συνέβη λάθος τι $d\Gamma$, εἰς τὴν τιμὴν τῆς πλευρᾶς ΑΒ, τὴν ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὑρισκομένην, θὰ συμβῇ τὸ λάθος $d\gamma$, θὰ εἶνε δὲ $d\gamma=\beta\,.\,d\,\text{εφ}\,\Gamma=\beta\,.\,\dfrac{d\Gamma}{\text{συν}^2\Gamma}$.

καὶ τὸ σχετικὸν λάθος $\dfrac{d\gamma}{\gamma}$ θὰ εἶνε $\dfrac{d\gamma}{\gamma}=\dfrac{2\,.\,d\Gamma}{\eta\mu\,(2\Gamma)}$.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι τὸ σχετικὸν λάθος θὰ εἶνε τόσῳ μικρότερον, ὅσῳ ἡ γωνία Γ πλησιάζει πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ὀρθῆς· τουτέστιν ὅσῳ αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ διαφέρουσιν ὀλιγώτερον.

Ἔστω προσέτι τὸ ἑξῆς παράδειγμα.

Ἐὰν μετρήσωμεν τὰς δύο πλευρὰς x καὶ y ὀρθογωνίου τινὸς καὶ ἐξ αὐτῶν ὑπολογίσωμεν τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ Ε, πόσον εἶνε τὸ σχετικὸν λάθος τὸ προξενούμενον ἔκ τινος σφάλματος ε ὅπερ συνέβη κατὰ τὴν μέτρησιν τῶν πλευρῶν; (δεχόμεθα, ὅτι ἀμφότεραι αἱ πλευραὶ ἔχουσι τὸ αὐτὸ σφάλμα).

Ἐκ τοῦ τύπου $E=x\,.\,y$ λαμβάνομεν $lE=lx+ly$ ὅθεν

$$\frac{dE}{E}=\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y},\quad \text{ἤτοι}\quad \frac{dE}{E}=\varepsilon\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\varepsilon\,.\,\frac{\mu}{2E},$$

ἤτοι τὸ σχετικὸν λάθος ἐπὶ τοῦ ἐμβαδοῦ ἰσοῦται τῷ σφάλματι ε ἐπὶ τὴν περίμετρον μ τοῦ ὀρθογωνίου διαιρεθεῖσαν διὰ τοῦ διπλασίου ἐμβαδοῦ· ἑπομένως ἐκ τῶν ἰσοπεριμέτρων ὀρθογωνίων τὸ ἔχον τὸ μέγιστον ἐμβαδὸν (τὸ τετράγωνον) θὰ ἔχῃ τὸ ἐλάχιστον σχετικὸν λάθος.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι, ἂν αἱ τρεῖς διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχωσι πᾶσαι τὸ αὐτὸ σφάλμα ε, τὸ σχετικὸν λάθος τοῦ ὄγκου v αὐτοῦ θὰ εἶνε

$$\frac{dv}{v}=\varepsilon\,.\,\frac{E}{2v},\ E \text{ οὔσης τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.}$$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ (*)

Ἀκολουθήματα τῆς ἰδιότητος $\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)=\varepsilon\varphi'(x)+\varepsilon\omega$.

Θεώρημα 1ον.

83. *Ἐὰν ἡ παράγωγος συναρτήσεως διά τινα τιμὴν τοῦ x εἶνε θετική, ἡ συνάρτησις μεταβάλλεται ὁμοίως τῇ x, ἤτοι, αὐξανομένου τοῦ x ἀπὸ τῆς τιμῆς ταύτης, αὐξάνει καὶ ἡ συνάρτησις, καὶ ἐλαττουμένου, ἐλαττοῦται, ἐὰν ἱκανῶς μικραὶ ὦσιν αἱ μεταβολαὶ τοῦ x· τοὐναντίον δὲ συμβαίνει, ἐὰν ἡ παράγωγος εἶνε ἀρνητική.*

Ἔστω $\sigma(x)$ ἡ συνάρτησις· ἐὰν ὁ x ἀπὸ τῆς τιμῆς α ἀναχωρῶν αὐξήσῃ κατὰ ε (ἔνθα ε σημαίνει ἀριθμόν τινα ἱκανῶς μικρὸν θετικὸν ἢ καὶ ἀρνητικόν), ἡ συνάρτησις $\sigma(x)$ αὐξάνει κατὰ $\sigma(\alpha+\varepsilon)-\sigma(\alpha)$, ἤτοι κατὰ $\varepsilon.\sigma'(\alpha)+\varepsilon\omega$.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ δεύτερον μέρος $\varepsilon.\omega$, ὅταν τὸ ε ληφθῇ ἱκανῶς μικρόν, γίνεται μικρότερον τοῦ πρώτου (ἐδ. 50), ἕπεται, ὅτι ἡ ὅλη αὔξησις θὰ ἔχῃ τότε τὸ σημεῖον τοῦ πρώτου μέρους $\varepsilon\,\sigma'(\alpha)$· ὥστε, ἂν μὲν ἡ παράγωγος $\sigma'(\alpha)$ εἶνε θετική, ἡ αὔξησις θὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον τοῦ ε, ἤτοι θὰ αὐξάνῃ ἡ συνάρτησις, αὐξανομένου τοῦ x, καὶ θὰ ἐλαττῶται, ἐλαττουμένου· ἐὰν δὲ ἡ παράγωγος $\sigma'(\alpha)$ εἶνε ἀρνητική, ἡ αὔξησις θὰ ἔχῃ σημεῖον ἐναντίον τοῦ ε· τουτέστιν ἡ συνάρτησις θὰ αὐξάνῃ, ἐλαττουμένου τοῦ x καὶ θὰ ἐλαττῶται, αὐξανομένου.

84. Ἐκ τῆς προτάσεως ταύτης ἕπεται ἀμέσως ἡ ἑξῆς.

Ἐὰν ἡ παράγωγος συναρτήσεώς τινος μένῃ πάντοτε θετικὴ ἔν τινι διαστήματι α...β, ἡ συνάρτησις ἐν τῷ αὐτῷ διαστήματι αὐξάνει μετὰ τοῦ x· ὥστε ἐκ τῶν τιμῶν αὐτῆς εἰς τὸ διάστημα τοῦτο μεγίστη μὲν εἶνε ἡ τελευταία, ἐλαχίστη δὲ ἡ πρώτη· τοὐναντίον δὲ συμβαίνει, ἐὰν ἡ παράγωγος μένῃ ἀρνητική.

ΣΗΜ. Ἡ πρότασις ἀληθεύει, καὶ ὅταν ἡ παράγωγος μηδενισθῇ ἅπαξ ἐν τῷ διαστήματι α...β διά τινα τιμὴν γ, χωρὶς νὰ ἀλλάξῃ σημεῖον· ἀρκεῖ νὰ μένῃ τότε ἡ συνάρτησις συνεχής· διότι τότε, διανύοντος τοῦ x τὸ διάστημα α...γ, αὐξάνει ἡ συνάρτησις, ὁμοίως δὲ αὐξάνει, καὶ ὅταν ὁ x διανύῃ τὸ διάστημα γ. .β, ὥστε ἡ συνάρτησις αὐξάνει διαρκῶς ἐν τῷ διαστήματι α...β.

(*) Ἐν τοῖς θεωρήμασι τούτοις αἱ τιμαὶ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x ὑποτίθενται πραγματικαί.

Θεώρημα 2ον.

85. *Ἐὰν ἔν τινι διαστήματι α...β (α<β) ἡ παράγωγος ἀλλάσσῃ τὸ σημεῖον αὐτῆς ἅπαξ (διὰ $x=\gamma$), εἰ μὲν ἐκ τοῦ θετικοῦ μεταβαίνῃ εἰς τὸ ἀρνητικόν, ἡ τιμὴ σ(γ) τῆς συναρτήσεως εἶνε ἡ μεγίστη πασῶν τῶν τιμῶν αὐτῆς εἰς τὸ διάστημα τοῦτο, εἰ δὲ τοὐναντίον ἐκ τοῦ ἀρνητικοῦ μεταβαίνῃ εἰς τὸ θετικόν, ἡ τιμὴ σ(γ) εἶνε ἡ ἐλαχίστη.*

Διότι, ἂν τὸ διάστημα α...β τμηθῇ εἰς δύο, τὰ α...γ καὶ γ...β, εἰς μὲν τὸ πρῶτον ἡ συνάρτησις αὔξάνει (διότι ἡ παράγωγος εἶνε θετική), ἑπομένως ἐκ τῶν τιμῶν σ(α),...,σ(γ) μεγίστη εἶνε ἡ τελευταία σ(γ), διανύοντος δὲ τοῦ x τὸ δεύτερον διάστημα γ...β, ἡ συνάρτησις ἐλαττοῦται (διότι ἡ παράγωγος μένει ἐν αὐτῷ ἀρνητική), ἑπομένως ἐκ τῶν τιμῶν σ(γ),...,σ(β) μεγίστη εἶνε ἡ πρώτη· ὥστε πασῶν τῶν τιμῶν σ(α),...,σ(β) τῆς συναρτήσεως σ(x) εἰς τὸ διάστημα α...β μεγίστη εἶνε ἡ σ(γ).

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ τιμὴ σ(γ) εἶνε ἡ ἐλαχίστη, ἐὰν ἡ παράγωγος μεταβαίνῃ ἀπὸ τοῦ ἀρνητικοῦ εἰς τὸ θετικόν.

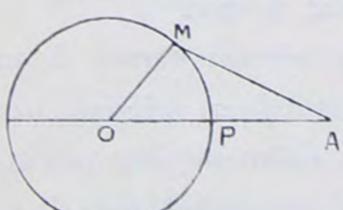
ΣΗΜ. Ἡ τιμὴ σ(γ) ὑποτίθεται πεπερασμένη καὶ ἐντελῶς ὡρισμένη.

Παραδείγματα.

Πρὸς ἐφαρμογὴν τῶν προηγουμένων λύομεν τὸ ἑξῆς γεωμετρικὸν πρόβλημα.

Ἐκ πασῶν τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἄγονται ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου Α εἰς τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν Ο, τίς εἶνε ἡ μεγίστη καὶ τίς ἡ ἐλαχίστη;

Ἐὰν ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ὡς ἀρχὴ τῶν ὀρθογωνίων συντεταγμένων καὶ ἡ εὐθεῖα ΟΑ ὡς ἄξων τῶν x, καὶ παρασταθῇ ἡ μὲν ΟΑ διὰ α, ἡ δὲ ἀκτὶς διὰ ϱ καὶ αἱ συντεταγμέναι τοῦ τυχόντος σημείου Μ τῆς περιφερείας διὰ τῶν x, y, θὰ εἶνε



$$(AM)^2=(x-\alpha)^2+y^2=x^2+y^2-2\alpha x+\alpha^2\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ $$x^2+y^2=\varrho^2,$$

συνάγεται $$(AM)^2=\varrho^2-2\alpha x+\alpha^2.$$

ἤτοι τὸ τετράγωνον τῆς ΑΜ εἶνε γνωστὴ συνάρτησις τοῦ x.

Ἐπειδὴ δὲ τῆς συναρτήσεως ταύτης ἡ παράγωγος -2α εἶνε πάντοτε ἀρνητική, συνάγεται, ὅτι ἡ συνάρτησις (αὐξανομένου τοῦ x) ἐλαττοῦται διαρκῶς. Ἀλλ' ἡ μεταβλητὴ x δὲν δύναται ἕνεκα τῆς φύσεως τοῦ ζητήματος νὰ λάβῃ ἄλλας τιμὰς ἢ τὰς τοῦ διαστήματος $-\varrho \ldots +\varrho$· ἄρα ἐλαχίστη μὲν τιμὴ τοῦ $(AM)^2$ εἶνε ἡ τελευταία, ἡ πρὸς τὴν τιμὴν $x=+\varrho$ ἀντιστοιχοῦσα, μεγίστη δὲ ἡ πρώτη, ἡ ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τὴν τιμὴν $x=-\varrho$· τὸ αὐτὸ δὲ ἰσχύει καὶ περὶ τῆς AM.

Ἔστω δεύτερον ἡ συνάρτησις $x^2-6x+18$· ἡ παράγωγος αὐτῆς εἶνε $2(x-3)$· ἐκ δὲ ταύτης βλέπομεν, ὅτι, ἐὰν ὁ x αὐξάνῃ ἀφ' οἱασδήποτε τιμῆς μικροτέρας τοῦ 3 μέχρις οἱασδήποτε ἄλλης μεγαλητέρας αὐτοῦ, ἡ παράγωγος μεταβαίνει ἅπαξ ἀπὸ τοῦ ἀρνητικοῦ εἰς τὸ θετικόν. Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι ἡ πρὸς τὴν τιμὴν $x=3$ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τῆς συναρτήσεως (ἥτις τιμὴ εἶνε 9) εἶνε ἡ ἐλαχίστη πασῶν τῶν τιμῶν αὐτῆς.

ΣΗΜ. Περὶ τῶν μεγίστων καὶ τῶν ἐλαχίστων θὰ διαλάβωμεν ἔν τινι τῶν ἑπομένων κεφαλαίων, ἐν τῷ ὁποίῳ θὰ ἴδωμεν καὶ περισσότερα παραδείγματα.

Θεώρημα 3ον.

86. *Ἐὰν ἡ παράγωγος συναρτήσεώς τινος εἶνε ἔν τινι διαστήματι $\alpha \ldots \beta$ ἴση τῷ 0, ἡ συνάρτησις αὕτη, μεταβαλλομένου τοῦ x ἐν τῷ αὐτῷ διαστήματι, διαφυλάττει μίαν καὶ τὴν αὐτὴν πάντοτε τιμήν.*

Ἔστωσαν γ καὶ δ δύο τυχοῦσαι τιμαὶ τοῦ διαστήματος $\alpha \ldots \beta$· θὰ δείξωμεν, ὅτι εἶνε $\sigma(\gamma)=\sigma(\delta)$.

Διότι εἶνε $\sigma(x+\varepsilon)-\sigma(x)=\varepsilon\omega$,

ἐὰν ὁ μὲν x ἔχῃ οἱανδήποτε τιμὴν ἀπὸ $\gamma \ldots$ μέχρι δ, ἡ δὲ αὔξησις ε εἶνε ἱκανῶς μικρά.

Ἐὰν δὲ ἐφαρμόσωμεν τὴν ἰσότητα ταύτην εἰς τὰς τιμὰς τοῦ x

$$\gamma, \quad \gamma+\varepsilon, \quad \gamma+2\varepsilon, \ldots$$

καὶ λάβωμεν τὴν αὔξησιν ε ἴσην τῷ νυοστῷ μέρει τῆς διαφορᾶς $\delta-\gamma$ (ὑποτίθεται $\delta>\gamma$), ἤτοι λάβωμεν $\varepsilon=\dfrac{\delta-\gamma}{\nu}$ καὶ ἑπομένως $\delta=\gamma+\nu\varepsilon$, εὑρίσκομεν

$$\begin{aligned}
&\sigma(\gamma+\varepsilon)-\sigma(\gamma)=\varepsilon\omega_1\\
&\sigma(\gamma+2\varepsilon)-\sigma(\gamma+\varepsilon)=\varepsilon\omega_2\\
&\sigma(\gamma+3\varepsilon)-\sigma(\gamma+2\varepsilon)=\varepsilon\omega_3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\sigma(\gamma+\nu\varepsilon)-\sigma(\gamma+(\nu-1)\varepsilon)=\varepsilon\omega_\nu,
\end{aligned}$$

ἐξ ὧν προστιθεμένων κατὰ μέλη προκύπτει

$$\sigma(\gamma+\nu\varepsilon)-\sigma(\gamma)=\varepsilon(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\ldots+\omega_\nu),$$

ἢ $$\sigma(\delta)-\sigma(\gamma)=\varepsilon(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\ldots+\omega_\nu).$$

Αἱ ποσότητες $\omega_1, \omega_2, .., \omega_\nu$ ἢ εἶνε πᾶσαι ἴσαι τῷ 0, ὅτε εἶνε $\sigma(\delta) = \sigma(\gamma)$, ἢ δύνανται νὰ γίνωσι καὶ νὰ μένωσι μικρότεραι παντὸς τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, ὅταν ὁ ε γίνῃ ἀρκούντως μικρός, τουτέστιν ὅταν ὁ ἀριθμὸς ν, εἰς ὃν διαιρεῖται ἡ διαφορὰ $\delta - \gamma$, ληφθῇ ἀρκούντως μέγας. Ἀλλ' ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν πάντα τὰ ἄλλα $\omega_1, \omega_2, ..$ διὰ τοῦ μεγίστου ἐξ αὐτῶν (ἀπολύτως), ὅπερ ἔστω τὸ ω_τ, θὰ εἶνε

$$\sigma(\delta) - \sigma(\gamma) < \varepsilon\, \omega_\tau + \omega_\tau + .. + \omega_\tau),$$

ἢ $\quad \sigma(\delta) - \sigma(\gamma) < \varepsilon . \nu . \omega_\tau \quad$ καὶ ἐπειδὴ $\quad \nu . \varepsilon = \delta - \gamma,$

ἕπεται $\quad \sigma(\delta) - \sigma(\gamma) < (\delta - \gamma) . \omega_\tau\,\cdot$

ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀριθμὸς ν δύναται νὰ ληφθῇ ὅσον θέλωμεν μέγας, ἕπεται, ὅτι ὁ ε γίνεται ὅσον θέλωμεν μικρός· ἐπομένως καὶ πάντα τὰ $\omega_1, .., \omega_\tau, .., \omega_\nu$ γίνονται καὶ μένουσι μικρότερα παντὸς ἀριθμοῦ· ἄρα καὶ ἡ διαφορὰ $\sigma(\delta) - \sigma(\gamma)$ δύναται νὰ κατασταθῇ μικροτέρα παντὸς ἀριθμοῦ· ὅπερ ἄτοπον, ἐὰν διαφέρῃ τοῦ 0. Ἀνάγκη ἄρα νὰ εἶνε

$$\sigma(\delta) - \sigma(\gamma) = 0, \qquad \text{ἢ} \quad \sigma(\delta) = \sigma(\gamma).$$

Θεώρημα 4ον.

87. *Ἐὰν ἔν τινι διαστήματι α...β δύο συναρτήσεις ἔχωσιν ἴσας παραγώγους, ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, ἴσα διαφορικά, ἡ διαφορὰ τῶν συναρτήσεων τούτων διαφυλάττει, μεταβαλλομένου τοῦ x ἐν τῷ αὐτῷ διαστήματι, μίαν καὶ τὴν αὐτὴν πάντοτε τιμήν, ἤτοι εἶνε ἀνεξάρτητος ἀπὸ τοῦ x.*

Διότι, ἂν εἶνε $\quad d\omega = d\varphi,$

ἕπεται $\quad d(\omega - \varphi) = 0,$

ἄρα εἶνε $\quad \omega - \varphi =$ σταθερᾷ τινι ποσότητι.

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἔχει, ὡς ἐν τοῖς ἑπομένοις θὰ φανῇ, ἐξαίρετον σπουδαιότητα· διότι δι' αὐτοῦ μεταβαίνομεν ἀπὸ τῶν διαφορικῶν (ἢ ἀπὸ τῶν παραγώγων) εἰς τὰς συναρτήσεις. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι *δοθέντος τοῦ διαφορικοῦ τῆς συναρτήσεως, ἡ συνάρτησις, πλὴν σταθεροῦ τινος προσθετέου ἀριθμοῦ, ὁρίζεται ἐντελῶς*· ὁρίζεται δηλονότι κατὰ τὸ μεταβλητὸν αὐτῆς μέρος.

Πρὸς ἐφαρμογὴν τοῦ θεωρήματος τούτου θὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς ζήτημα.

Εὑρεῖν συνάρτησιν, ἥτις νὰ εἶνε ἴση τῇ παραγώγῳ αὐτῆς.

Ἔστω y ἡ ζητουμένη συνάρτησις καὶ x ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητή· τότε θὰ εἶνε

$$\frac{dy}{dx}=y, \quad \text{ἢ} \quad \frac{dy}{y}=dx$$

$$\text{ὅθεν καὶ} \quad d(ly)=dx$$

ἐπειδὴ δὲ αἱ δύο συναρτήσεις ly καὶ x ἔχουσιν ἴσα διαφορικά, ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶνε σταθερά τις ποσότης A· ἄρα $ly=x+\mathrm{A}$.

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης ἕπεται $y=e^{x+\mathrm{A}}=e^x \,.\, e^{\mathrm{A}}$ καὶ ἂν τεθῇ $e^{\mathrm{A}}=a$, ὁ a εἶνε ὡσαύτως σταθερὸς ἀριθμός· ὅθεν ἕπεται $y=a\,.\,e^x$
ὥστε ae^x εἶνε ἡ μόνη συνάρτησις, ἥτις εἶνε ἴση τῇ παραγώγῳ αὐτῆς.

Θεώρημα 5ον.

88. *Ἡ αὔξησις πάσης συναρτήσεως ἡ ἐκ τῆς αὐξήσεως τοῦ x ἀπὸ α εἰς β προερχομένη ἰσοῦται πρὸς τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος τῶν διαφορικῶν αὐτῆς, ὅταν ἡ ὅλη αὔξησις $\beta-\alpha$ τοῦ x διαιρῆται εἰς πλῆθος μικροτέρων αὐξήσεων, ὧν ἑκάστη τείνει πρὸς τὸ 0.*

Ἂς ληφθῶσι μεταξὺ α καὶ β κατὰ σειρὰν ὁσαιδήποτε καὶ οἱαιδήποτε τιμαὶ $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{\nu-1}$ καὶ ἂς αὐξηθῇ ἡ x πρῶτον ἀπὸ α εἰς x_1 ἔπειτα ἀπὸ x_1 εἰς x_2.. καὶ καθεξῆς· καὶ τέλος ἀπὸ $x_{\nu-1}$ εἰς β.

Ἐὰν ἐφαρμοσθῇ ὁ θεμελιώδης τύπος

$$\sigma(x+\varepsilon)-\sigma(x)=\varepsilon\varphi(x)+\varepsilon\omega$$

(ἔνθα $\varphi(x)$ εἶνε ἡ παράγωγος τῆς $\sigma(x)$) εἰς ἑκάστην τῶν αὐξήσεων $x_1-\alpha, x_2-x_1 \ldots \beta-x_{\nu-1}$, προκύπτουσιν αἱ ἰσότητες

$$\begin{aligned}
\varphi \qquad \sigma(x_1)-\sigma(\alpha) &= (x_1-\alpha)\,.\,\varphi(\alpha)+(x_1-\alpha)\,.\,\omega_1 \\
\sigma(x_2)-\sigma(x_1) &= (x_2-x_1)\,.\,\varphi(x_1)+(x_2-x_1)\,.\,\omega_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\sigma(\beta)-\sigma(x_{\nu-1}) &= (\beta-x_{\nu-1})\,.\,\varphi(x_{\nu-1})+(\beta-x_{\nu-1})\,.\,\omega_\nu
\end{aligned}$$

ἐξ ὧν προστιθεμένων κατὰ μέλη προκύπτει

$$\begin{aligned}
\sigma(\beta)-\sigma(\alpha) &= (x_1-\alpha)\,\varphi(\alpha)+(x_2-x_1)\,\varphi(x_1)+\ldots+(\beta-x_{\nu-1})\,\varphi(x_{\nu-1}) \\
&\quad +(x_1-\alpha)\,\omega_1+(x_2-x_1)\,\omega_2+\ldots+(\beta-x_{\nu-1})\,\omega_\nu
\end{aligned}$$

ἀλλ' ὅταν αἱ αὐξήσεις $x_1-\alpha, x_2-x_1 \ldots \beta-x_{\nu-1}$ τείνωσι πᾶσαι πρὸς τὸ 0, τὸ δεύτερον ἄθροισμα τείνει καὶ αὐτὸ εἰς τὸ 0· διότι εἶνε μικρότερον

(ἀπολύτως) τοῦ $(\beta-\alpha).\omega_\rho$, ἔνθα ω_ρ εἶνε τὸ μέγιστον (κατ' ἀπόλυτον τιμὴν) ἐκ τῶν $\omega_1, \omega_2 .. \omega_\nu$· ὅπερ καὶ αὐτὸ τείνει πρὸς τὸ 0· ἑπομένως εἶνε
$$\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)=\text{ὅρ}\left[(x_1-\alpha)\,\varphi(\alpha)+(x_2-x_1)\,\varphi(x_1)+\ldots+(\beta-x_{\nu-1})\,\varphi(x_{\nu-1})\right]$$

Διὰ τοῦ θεωρήματος τούτου ἀνάγεται ἡ εὕρεσις τοῦ ὁρίου, πρὸς ὃ τείνει τὸ ἄθροισμα
$$(x_1-\alpha)\,\varphi(\alpha)+(x_2-x_1)\,\varphi(x_1)+\ldots+(\beta-x_{\nu-1})\,\varphi(x_{\nu-1})$$
(ὅταν ἑκάστη τῶν αὐξήσεων τοῦ x τείνῃ πρὸς τὸ 0) εἰς τὴν εὕρεσιν συναρτήσεως ἐχούσης παράγωγον τὴν $\varphi(x)$· διότι τὸ ὅριον τότε εἶνε $\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)$, ἤτοι ἡ αὔξησις τῆς $\sigma(x)$, ὅταν ἡ x αὐξήσῃ ἀπὸ α εἰς β. Παρατηρητέον δέ, ὅτι τοῦ ἀθροίσματος τούτου ἕκαστος τῶν προσθετέων τείνει πρὸς τὸ 0, ἀλλὰ τὸ πλῆθος αὐτῶν ὑπερβαίνει πάντα ἀριθμόν· παρίσταται δὲ συντόμως τὸ ἄθροισμα τοῦτο ὡς ἑξῆς
$$\Sigma\ \varphi(x).\Delta x \qquad\qquad x=\alpha\ldots\beta$$
ἔνθα τὸ γράμμα Σ δηλοῖ ἄθροισιν τῶν τιμῶν, ἃς λαμβάνει ἡ ὑπ' αὐτὸ παράστασις, ὅταν ἡ μεταβλητὴ x διανύῃ τὰς τιμὰς $\alpha, x_1, x_2 \ldots \beta$· τὸ δὲ Δx δηλοῖ τὴν αὔξησιν τῆς x ἀφ' ἑκάστης τιμῆς εἰς τὴν ἑπομένην· τὸ δὲ ὅριον τοῦ αὐτοῦ ἀθροίσματος παρίσταται ὡς ἑξῆς
$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx$$
καὶ λέγεται *ὁλοκλήρωμα* τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$ ἀπὸ α μέχρι β.

Τὸ προκείμενον ἄθροισμα ἐμφανίζεται πάντοτε ὁσάκις πρόκειται νὰ μετρηθῇ γεωμετρικόν τι μέγεθος· οἷον ἐμβαδόν, μῆκος καμπύλης, ὄγκος στερεοῦ, κλπ.

Ἐὰν αἱ αὐξήσεις $x_1-\alpha$, $x_2-x_1, \ldots$ ληφθῶσι πᾶσαι ἴσαι, ἐπειδὴ τὸ πλῆθος αὐτῶν εἶνε ν, ἑκάστη ἐξ αὐτῶν θὰ εἶνε $\frac{\beta-\alpha}{\nu}$· ὅθεν ὁ προηγούμενος τύπος γίνεται
$$\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)=\text{ὅρ}\left[(\beta-\alpha)\left[\frac{\varphi(\alpha)+\varphi(x_1)+\ldots+\varphi(x_{\nu-1})}{\nu}\right]\right]$$
ἢ $$\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)=(\beta-\alpha).\text{ὅρ}\left[\frac{\varphi(\alpha)+\varphi(x_1)+\ldots+\varphi(x_{\nu-1})}{\nu}\right],$$
τουτέστιν, *ἡ αὔξησις πάσης συναρτήσεως, ἡ ἐκ τῆς αὐξήσεως τοῦ x ἀπὸ α εἰς β προερχομένη, ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς αὐξήσεως τοῦ x ἐπὶ τὴν μέσην τιμὴν τῆς παραγώγου αὐτῆς ἐν τῷ διαστήματι α . . . β.*

Λέγω δὲ μέσην τιμὴν οἱαςδήποτε συναρτήσεως ἐν τῷ διαστήματι $\alpha \ldots \beta$ τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ὁ μέσος ὅρος τῶν τιμῶν, ἃς λαμβάνει αὕτη διὰ τιμὰς τοῦ x ἰσοδιαφόρους, ὧν πρώτη εἶνε ἡ α καὶ τελευταία ἡ β.

ΣΗΜ. Ἐκ τῆς προτάσεως ταύτης βλέπομεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν μέσην τιμὴν οἱαςδήποτε συναρτήσεως $\varphi(x)$ ἔν τινι διαστήματι $\alpha \ldots \beta$, ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν τὴν συνάρτησιν, τῆς ὁποίας ἡ $\varphi(x)$ εἶνε παράγωγος.

Θεώρημα 6ον.

89. *Ἐὰν συνάρτησις διαφορίσιμος ἔν τινι διαστήματι μηδενίζηται διὰ δύο τιμὰς α καὶ β τοῦ διαστήματος τούτου, καὶ ἡ παράγωγος αὐτῆς θὰ μηδενίζηται διὰ μίαν τοὐλάχιστον τιμὴν μεταξὺ α καὶ β κειμένην.*

Ἔστω $\alpha < \beta$· ἐὰν νοήσωμεν τὴν μεταβλητὴν x διανύουσαν τὸ διάστημα $\alpha \ldots \beta$, ἡ συνάρτησις $\sigma(x)$ ἀπὸ τῆς τιμῆς 0 ἀναχωροῦσα φθάνει πάλιν εἰς τὴν τιμὴν 0· ἑπομένως, ἢ εἶνε διαρκῶς ἴση τῷ 0, ὅτε καὶ ἡ παράγωγος αὐτῆς εἶνε ἴση τῷ 0, ἢ λαμβάνει ἐν τῷ μεταξὺ τιμήν τινα ὑπερβαίνουσαν πάσας τὰς λοιπὰς τιμὰς αὐτῆς (ἢ μηδεμιᾶς τούτων μικροτέραν)· τὴν τιμὴν ταύτην δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν θετικήν· διότι, ἂν εἶνε ἀρνητική, ἀρκεῖ νὰ ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον τῆς συναρτήσεως καὶ γίνεται ἡ ῥηθεῖσα τιμὴ αὐτῆς θετική. Ἡ τιμὴ αὕτη τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$ θὰ ἀντιστοιχῇ πρός τινα τιμὴν τῆς x μεταξὺ α καὶ β κειμένην, ἔστω τὴν γ, καὶ εἰς τὴν ὁποίαν ἡ συνάρτησις $\sigma(x)$ εἶνε διαφορίσιμος (διότι εἰς πᾶν τὸ διάστημα $\alpha \ldots \beta$ ὑπετέθη διαφορίσιμος). Ἀλλ' ἂν ἡ παράγωγος $\sigma'(x)$ διὰ τὴν τιμὴν $x = \gamma$ ἦτο θετική, θὰ ηὔξανεν ἡ συνάρτησις, αὐξανομένου τοῦ x ἀπὸ τῆς τιμῆς γ, ὅπερ δὲν συμβαίνει· διότι ἡ τιμὴ $\sigma(\gamma)$ οὐδεμιᾶς ἄλλης εἶνε μικροτέρα· ἂν δὲ πάλιν ἦτο ἀρνητική, θὰ ηὔξανεν ἡ συνάρτησις, ἐλαττουμένου τοῦ x ἀπὸ τῆς τιμῆς γ· ὅπερ ἀδύνατον· ἄρα θὰ εἶνε

$$\sigma'(\gamma) = 0.$$

Θεώρημα 7ον.

90. *Ἡ αὔξησις πάσης συναρτήσεως $\sigma(x)$, ἡ προερχομένη ἐκ τῆς αὐξήσεως τοῦ x ἀπὸ α εἰς β, ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς αὐξήσεως τοῦ x ἐπὶ τὴν τιμὴν τῆς παραγώγου $\sigma'(x)$ διά τινα τιμὴν τοῦ x μεταξὺ α καὶ β περιλαμβανομένην.*

τουτέστιν εἶνε $\quad \sigma(\beta) - \sigma(\alpha) = (\beta - \alpha) \cdot \sigma'(\gamma).$

Διότι παριστῶντες τὸ πηλίκον

$$\frac{\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)}{\beta-\alpha} \quad \text{διὰ τοῦ } \lambda,$$

ἔχομεν $$\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)=\lambda(\beta-\alpha) \qquad (1)$$

ἢ $$\sigma(\beta)-\lambda\beta=\sigma(\alpha)-\lambda\alpha.$$

Τούτου τεθέντος, θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν $\sigma(x)-\lambda x-\sigma(\alpha)+\lambda\alpha$, ἥτις μηδενίζεται διὰ τὰς δύο τιμὰς $x=\alpha$ καὶ $x=\beta$· κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα ὑπάρχει τιμή τις γ μεταξὺ α καὶ β, δι' ἣν ἡ παράγωγος αὐτῆς μηδενίζεται· ἀλλ' ἡ παράγωγος αὐτῆς εἶνε $\sigma'(x)-\lambda$·

ἄρα θὰ εἶνε $\sigma'(\gamma)-\lambda=0$ ἢ $\lambda=\sigma'(\gamma)$

ὅθεν ἡ ἰσότης (1) γίνεται $$\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)=(\beta-\alpha)\,\sigma'(\gamma) \qquad (2)$$

ΣΗΜ. Ἡ τιμὴ $\sigma'(\gamma)$ εἶνε ἡ μέση τιμὴ τῆς παραγώγου $\sigma'(x)$ ἐν τῷ διαστήματι $\alpha\ldots\beta$ κατὰ τὸ θεώρημα (88).

Τὸν τύπον τοῦτον δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ ἄλλως· ἐὰν δηλαδὴ θέσωμεν $\beta-\alpha=\varepsilon$, ἡ διαφορὰ $\gamma-\alpha$ εἶνε μέρος τῆς διαφορᾶς ε, ἤτοι $\gamma-\alpha=\mu\varepsilon$ (τοῦ μ ὄντος θετικοῦ τινος κλάσματος) καὶ ὁ τύπος

γίνεται $$\sigma(\alpha+\varepsilon)-\sigma(\alpha)=\varepsilon\,.\,\sigma'(\alpha+\mu\varepsilon), \qquad (3)$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι *ἡ αὔξησις πάσης συναρτήσεως ἡ πρὸς τὴν αὔξησιν ε τοῦ x ἀντιστοιχοῦσα, εἶνε ἴση τῷ γινομένῳ τῆς αὐξήσεως ε τοῦ x ἐπὶ τὴν τιμήν, ἣν λαμβάνει ἡ παράγωγος, ὅταν ἡ x αὐξηθῇ κατά τι μέρος τοῦ ε.*

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

1) Ἀνάπτυξις τῆς συναρτήσεως $l(1+x)$ εἰς σειρὰν κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ x.

Ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $l(1+x)$ εἶνε $\dfrac{1}{1+x}$· τοῦτο δὲ εἶνε τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου, τῆς ὁποίας πρῶτος ὅρος εἶνε ἡ μονὰς 1 καὶ λόγος ὁ $-x$ (ἂν ὑποτεθῇ τὸ μέτρον τοῦ x μικρότερον τῆς μονάδος 1)· ἤτοι εἶνε

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots \qquad \text{ἐὰν } [x]<1$$

Τῆς ἰσότητος ταύτης τὸ μὲν πρῶτον μέλος εἶνε ἡ παράγωγος τοῦ $l(1+x)$, τὸ δὲ δεύτερον εἶνε ἡ παράγωγος (ἐδ. 75) τῆς ἑπομένης σειρᾶς

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\dots$$

ἥτις συγκλίνει διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τοῦ x, δι' ἃς καὶ ἡ πρώτη. Ἡ ὑπὸ τῆς σειρᾶς ταύτης ὁριζομένη συνάρτησις τοῦ x (ὅταν μετρ. $x<1$) καὶ ἡ συνάρτησις $l(1+x)$ ἔχουσιν ἴσας παραγώγους, ὡς ἡ προηγουμένη ἰσότης δεικνύει· ἄρα δὲν διαφέρουσιν ἢ κατά τινα σταθερὸν ἀριθμόν· ἀλλὰ διὰ $x=0$ οὐδεμίαν ἔχουσι διαφοράν· διότι ἀμφότεραι γίνονται μηδέν· ἄρα εἶνε ἴσαι· ἤτοι εἶνε

$$l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots \qquad \text{ἐὰν} \quad [x]<1$$

ΣΗΜ. Ἐκ τῆς σειρᾶς ταύτης εὑρίσκονται ἄλλαι χρησιμώτεραι πρὸς τὸν λογισμὸν τῶν λογαρίθμων ὡς ἑξῆς.

Ἐὰν ἀντὶ τοῦ x τεθῇ $-x$, προκύπτει

$$l(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\dots \qquad [x]<1$$

ἐκ δὲ ταύτης καὶ ἐκ τῆς προηγουμένης ἰσότητος ἕπεται

$$l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots\right)$$

καὶ ἂν τεθῇ $\dfrac{1+x}{1-x}=\alpha$, προκύπτει $x=\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}$

καὶ ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$l\alpha=2\left\{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)^5+\dots\right\},$$

ἰσχύει δὲ ἡ ἰσότης αὕτη διὰ πᾶσαν θετικὴν τιμὴν τοῦ α.

Χρησιμωτέραν σειράν, ὡς ταχύτερον συγκλίνουσαν, λαμβάνομεν, ἐὰν θέσωμεν

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{\omega+1}{\omega}=1+\frac{1}{\omega}$$

τότε προκύπτει $l(\omega+1)-l\omega=2\left\{\dfrac{1}{2\omega+1}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2\omega+1}\right)^3+\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{2\omega+1}\right)^5+\dots\right\}$.

διὰ τοῦ τύπου τούτου δύναταί τις νὰ εὕρῃ τὸν Νεπέρειον λογάριθμον παντὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ, ὅταν ἔχῃ τὸν λογάριθμον τοῦ κατὰ μονάδα μικροτέρου· εἶνε δὲ ἡ σειρὰ τόσῳ χρησιμωτέρα ὅσῳ μεγαλείτερος εἶνε ὁ ἀριθμὸς ω.

Τοὺς δεκαδικοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν εὑρίσκομεν ἐκ τῶν Νεπερείων πολλαπλασιάζοντες τούτους ἐπὶ τὸν διαστολέα $\dfrac{1}{l10}$, ὅστις εἶνε 0, 43429 44819. . . .

2) Ἀνάπτυξις τῆς συναρτήσεως τοξεφ x εἰς σειρὰν κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ x.

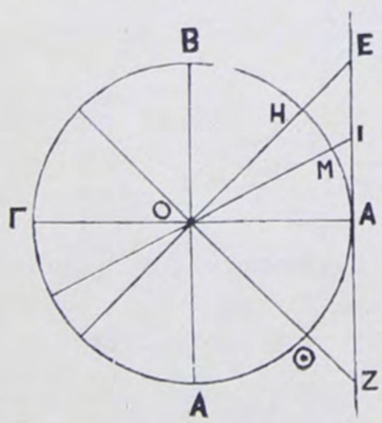
Ἡ συνάρτησις τοξεφ x ἔχει παράγωγον τὴν $\dfrac{1}{1+x^2}$ εἶνε δὲ καὶ τοῦτο ἄθροισμα τῶν ὅρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου· ἤτοι

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\dots \qquad [x]<1$$

ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης συμπεραίνομεν, ὡς καὶ προηγουμένως, ὅτι αἱ δύο συναρτήσεις

$$\text{τοξεφ}\, x \quad \text{καὶ} \quad x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots \qquad [x]<1$$

δὲν δύνανται νὰ διαφέρωσιν ἢ κατά τινα σταθερὸν ἀριθμόν. Ἡ πρώτη τούτων ἔχει ἀληθῶς ἀπείρους πραγματικὰς τιμὰς δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ x. Ἀλλ' ἐὰν διὰ $x=0$ λάβωμεν τοξεφ $0=0$ καὶ μεταβάλλωμεν τὸν x ἀπὸ τῆς τιμῆς $x=0$ ἐντὸς τῶν ὁρίων -1 καὶ $+1$ (ὡς ἀπαιτεῖ ἡ σειρά), αἱ μικραὶ μεταβολαὶ τοῦ x μικρὰν θέλουσι προξενεῖ μεταβολὴν εἰς τὴν τιμὴν τοῦ τοξεφ x· καὶ ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ τοῦ τοξεφ x, αἱ πρὸς ἑκάστην τιμὴν τοῦ x ἀντιστοιχοῦσαι, διαφέρουσιν ἀπ' ἀλλήλων κατὰ ὁλόκληρα πολλαπλάσια τοῦ ἀριθμοῦ π, ἕπεται, ὅτι οὐδεμία δύναται νὰ ὑπάρξῃ ἀμφιβολία ὡς πρὸς τὴν ἐκλογὴν τῆς ἑκάστοτε προσηκούσης τιμῆς τοῦ τοξεφ x. Τοῦτο γίνεται δῆλον καὶ ἐκ τῆς γεωμετρικῆς παραστάσεως τῶν ἐφαπτομένων. Ἐὰν τῷ ὄντι ἡ ἐφαπτομένη $AI=x$ μεταβάλληται συνεχῶς ἐντὸς τῶν ὁρίων -1 καὶ $+1$, τουτέστιν, ἐὰν τὸ ἄκρον αὐτῆς Ι πίπτῃ μεταξὺ Ε καὶ Ζ, τὸ ἄκρον Μ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος τόξου ΑΜ ἀλλάσσει συνεχῶς θέσιν καὶ δὲν δύναται νὰ ἐξέλθῃ ἐκ τοῦ τμήματος ΗΑΘ, ἐὰν ἅπαξ εὑρεθῇ εἰς αὐτό· ἑπομένως ἡ τιμὴ τοῦ τόξου εἶνε ἐντελῶς ὡρισμένη δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ x κειμένην μεταξὺ -1 καὶ $+1$ καὶ περιλαμβάνεται μεταξὺ $-\dfrac{\pi}{4}$ καὶ $+\dfrac{\pi}{4}$.



Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι ἀμφότεραι αἱ συναρτήσεις

$$\text{τοξεφ}\, x \quad \text{καὶ} \quad x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots$$

εἶνε ἐντελῶς ὡρισμέναι εἰς τὸ διάστημα $-1 \ldots +1$ (ἐὰν προσληφθῇ καὶ ὁ περιορισμὸς τοξ εφ $0 = 0$)· καὶ ἐπειδὴ δὲν δύνανται νὰ διαφέρωσιν ἢ κατά τινα σταθερὸν ἀριθμόν, γίνονται δὲ ἴσαι διὰ $x = 0$, ἕπεται, ὅτι εἶνε ἴσαι· τουτέστιν εἶνε

$$\text{τοξ εφ}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \qquad [x] < 1$$

ΣΗΜ. Ἐκ τῆς σειρᾶς ταύτης δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν εὐκόλως τὸν ἀριθμὸν π ὡς ἑξῆς.

Θέτομεν $\alpha = \text{τοξεφ}\,\frac{1}{5}$, ἤτοι $\text{εφ}\alpha = \frac{1}{5}$, τότε κατὰ τὸν τύπον $\text{εφ}\,2\alpha = \frac{2\,\text{εφ}\,\alpha}{1 - \text{εφ}^2\alpha}$

εἶνε $\text{εφ}2\alpha = \frac{5}{12}$ καὶ $\text{εφ}4\alpha = \frac{120}{119}$· ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι τὸ τόξον 4α ὑπερβαίνει κατὰ μικρόν τι τὸ $\frac{\pi}{4}$· θέτομεν λοιπὸν $4\alpha = \frac{\pi}{4} + \beta$· ὅθεν $\beta = 4\alpha - \frac{\pi}{4}$ καὶ $\text{εφ}\,\beta = \text{εφ}\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{239}$· εὑρίσκοντες λοιπὸν τὰ τόξα α καὶ β ἐκ τῶν γνωστῶν ἐφαπτομένων αὐτῶν διὰ τῆς σειρᾶς, ἔχομεν $\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \beta$, ἤτοι

$$\pi = 16.\left\{\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7 + \ldots\right\} - 4\left\{\frac{1}{239} - \ldots\right\}$$

ἐὰν λάβωμεν τοὺς γεγραμμένους ὅρους μόνον, εὑρίσκομεν (κατὰ τὰ ἐν τῷ ἐδ. (18) εἰρημένα) τὴν τιμὴν τοῦ π μὲ προσέγγισιν $\frac{1}{1000000}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

Δι' ὁμοίου τρόπου ἀναπτύσσεται εἰς σειρὰν πᾶσα συνάρτησις, τῆς ὁποίας ἡ παράγωγος εἶνε ἤδη ἀνεπτυγμένη εἰς σειρὰν κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ x.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) *Πότε ἡ ἐξίσωσις* $e^x = \beta x$ *ἔχει πραγματικήν τινα ῥίζαν;*

Ἡ συνάρτησις $e^x - bx$ ἔχει παράγωγον τὴν $e^x - b$. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς b εἶνε ἀρνητικός, ἡ παράγωγος αὕτη εἶνε πάντοτε θετικὴ καὶ ἑπομένως ἡ συνάρτησις αὐξάνει, ὅταν αὐξάνῃ ὁ x· ἀλλ' ὅταν ὁ x εἶνε ἀρνητικὸς καὶ ἀρκούντως μέγας ἀριθμός, ἡ συνάρτησις $e^x - bx$ γίνεται ἀρνητική, ὅταν δὲ ὁ x εἶνε θετικὸς καὶ ἀρκούντως μέγας, ἡ συνάρτησις γίνεται θετική· ἄρα διέρχεται ἅπαξ διὰ τοῦ 0 καὶ μόνον ἅπαξ· ὥστε ἡ ἐξίσωσις

$$e^x = \beta x \text{ ἔχει μίαν μόνην ῥίζαν, ἐὰν } b < 0$$

Ἐὰν δὲ εἶνε β θετικόν, ἡ παράγωγος $e^x - \beta$ εἶνε ἀρνητικὴ μὲν ἐν τῷ διαστήματι $-\infty \ldots + l\beta$, θετικὴ δὲ ἐν τῷ $l\beta \ldots + \infty$· ἡ συνάρτησις ἄρα γίνεται ἐλαχίστη, ὅταν εἶνε $x = l\beta$, καὶ ἡ ἐλαχίστη αὐτῆς τιμὴ εἶνε

$$e^{l\beta} - \beta l\beta \quad \text{ἤτοι} \quad \beta\,(1 - l\beta).$$

Ἐὰν νῦν ἡ ἐλαχίστη αὕτη τιμὴ εἶνε θετική, φανερόν, ὅτι οὐδέποτε μηδενίζεται ἡ συνάρτησις $e^x - \beta x$, τουτέστιν ἡ ἐξίσωσις $e^x = \beta x$ οὐδμίαν ἔχει πραγματικὴν ῥίζαν· ἐὰν δὲ εἶνε ἡ ἐλαχίστη τιμὴ ἀρνητική, (τουτέστιν ἂν εἶνε $\beta > e$, ἡ συνάρτησις $e^x - \beta x$ διέρχεται διὰ τοῦ 0 δίς, ἅπαξ μὲν ἐν τῷ πρώτῳ διαστήματι $-\infty \ldots + l\beta$ (διότι διὰ τὰς ἱκανῶς μεγάλας καὶ ἀρνητικὰς τιμὰς τοῦ x ἡ συνάρτησις εἶνε θετική, συνεχῶς δὲ ἐλαττουμένη γίνεται ἀρνητικὴ διὰ $x = l\beta$), ἅπαξ δὲ ἐν τῷ διαστήματι $+ l\beta \ldots +\infty$ δι' ὅμοιον λόγον). Ἐὰν δὲ τέλος ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς συναρτήσεως εἶνε μηδέν, φανερὸν ὅτι ἔχει μίαν μόνην ῥίζαν πραγματικήν, τουτέστι τὴν πρὸς τὸ ἐλάχιστον τοῦτο ἀντιστοιχοῦσαν τιμὴν τοῦ x, $x = l\beta$.

Ἐκ τῶν προηγουμένων πάντων συνάγεται, ὅτι ἡ ἐξίσωσις $e^x = \beta x$
ἔχει μίαν πραγματικὴν ῥίζαν, ἐὰν $\beta < 0$

οὐδεμίαν, ἐὰν $0 < \beta < e$

μίαν, ἐὰν $\beta = e$

καὶ δύο, ἐὰν $\beta > e$

2) *Εἰς ποῖον λογαριθμικὸν σύστημα ὑπάρχουσιν ἀριθμοὶ ἴσοι πρὸς τοὺς λογαρίθμους αὐτῶν ;*

Ἐὰν ἡ βάσις παρασταθῇ διὰ τοῦ α, ἀνάγκη νὰ εἶνε

$$\alpha^x = x \quad \text{ἤτοι} \quad e^{x l\alpha} - x = 0 \qquad (\text{ὑποτίθεται } \alpha > 0)$$

καὶ ἂν τεθῇ $x l\alpha = \omega$, καὶ $\frac{1}{l\alpha} = \beta$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\quad e^{\omega} - \beta\omega = 0,$

ἤτοι καταντᾷ ἡ αὐτὴ μὲ τὴν προηγουμένως διερευνηθεῖσαν.

Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι ἐὰν εἶνε $\beta < 0$, τουτέστι $0 < \alpha < 1$, ὑπάρχει εἷς ἀριθμὸς ἴσος τῷ λογαρίθμῳ αὐτοῦ.

ἐὰν εἶνε $0 < \beta < e$, τουτέστιν $\alpha > e^{\frac{1}{e}}$, οὐδεὶς ὑπάρχει τοιοῦτος,

ἐὰν $\beta = e$, τουτέστιν $\alpha = e^{\frac{1}{e}}$, ὑπάρχει εἷς

ἐὰν τέλος $\beta > e$, τουτέστιν $\alpha < e^{\frac{1}{e}}$, ὑπάρχουσι δύο.

3) *Ἀποδεῖξαι, ὅτι ἡ ἐξίσωσις* $\quad \varphi\,\text{συν}\varphi - \alpha\,\text{ημ}\varphi = 0 \quad$ *ἔχει πραγματικὰς ῥίζας ἀπείρους τὸ πλῆθος.*

Ἡ συνάρτησις $\varphi\,\text{συν}\varphi - \alpha\,\text{ημ}\varphi$ πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ $\varphi^{-\alpha-1}$ γίνεται παράγωγος τῆς $\varphi^{-\alpha}\,\text{ημ}\varphi$· καὶ ὄντως εἶνε

$$d(\varphi^{-\alpha}.\text{ημ}\varphi) = (\varphi^{-\alpha}\,\text{συν}\varphi - \alpha\varphi^{-\alpha-1}\,\text{ημ}\varphi)\,d\varphi = \varphi^{-\alpha-1}\left\{\varphi\,\text{συν}\varphi - \alpha\,\text{ημ}\varphi\right\} d\varphi$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ συνάρτησις $\varphi^{-\alpha}.\text{ημ}\varphi$ γίνεται 0 διὰ τὰς τιμὰς $\varphi = 0$ (ἐὰν $\alpha < 1$). π, $2\pi \ldots$ καὶ γενικῶς $\mu\pi$, καὶ μεταξὺ δύο ἐφεξῆς ὑπάρχει μία τοὐλάχιστον ῥίζα τῆς παραγώγου, ἕπεται, ὅτι ἡ ἐξίσωσις

$$\varphi\,\text{συν}\varphi - \alpha\,\text{ημ}\varphi = 0 \qquad \text{ἢ} \qquad \text{εφ}\varphi = \frac{\varphi}{\alpha}$$

ἔχει (πλὴν τῆς $\varphi = 0$) πραγματικὰς ῥίζας ἀπείρους τὸ πλῆθος καὶ κειμένας ἐν τοῖς διαστήμασιν $\quad 0 \ldots \pi$ (ἐὰν $\alpha < 1$) $\quad \pi \ldots 2\pi, \quad 2\pi \ldots 3\pi, \ldots$

$0 \ldots -\pi$, (ἐὰν $\alpha < 1$) $\quad -\pi, \ldots -2\pi, \; -2\pi \ldots -3\pi, \ldots$

ΣΗΜ. Τὸ αὐτὸ δεικνύεται καὶ διὰ τῆς γεωμετρικῆς παραστάσεως τῶν δύο ἐξισώσεων $y = \varepsilon\varphi x$ καὶ $y = \frac{x}{\alpha}$· διότι τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν καμπύλων, τὰς ὁποίας αὗται παριστῶσιν, ἔχουσι τετμημένας τὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως $x\sigma\upsilon\nu x - \alpha\eta\mu x = 0$ διὰ τῆς γεωμετρικῆς κατασκευῆς γίνεται μάλιστα φανερὸν ἀμέσως, ὅτι μία μόνη ῥίζα ὑπάρχει ἐν ἑκάστῳ τῶν διαστημάτων.

4) *Ποίας τιμὰς διατρέχει ἡ συνάρτησις $\frac{\eta\mu x}{x}$, ὅταν ὁ x διατρέχῃ τὰς τιμὰς $0 \ldots \frac{\pi}{2}$;*

Ἡ συνάρτησις $\frac{\eta\mu x}{x}$ ἔχει παράγωγον τὴν $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}(x - \varepsilon\varphi x)$.

Ἐπειδὴ δέ, τοῦ x εὑρισκομένου ἐν τῷ διαστήματι $0 \ldots \frac{\pi}{2}$, ἡ ἐφαπτομένη ὑπερβαίνει πάντοτε τὸ τόξον (ἤτοι εἶνε $\varepsilon\varphi x > x$), ἡ παράγωγος αὕτη εἶνε ἀρνητική· ἄρα ἐν τῷ ῥηθέντι διαστήματι ἡ συνάρτησις ἐλαττοῦται διαρκῶς. Ἀλλὰ διὰ $x = 0$ ἡ συνάρτησις γίνεται 1, διὰ δὲ $x = \frac{\pi}{2}$ γίνεται $\frac{2}{\pi}$· ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι, ὅταν ὁ x διατρέχῃ τὸ διάστημα $0 \ldots \frac{\pi}{2}$, ἡ συνάρτησις $\frac{\eta\mu x}{x}$ διατρέχει τὸ ἑξῆς $1 \ldots \frac{2}{\pi}$.

5) *Ἀποδεῖξαι, ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\eta\mu x = \alpha x$, (ἐν ᾗ $\alpha > 0$), πλὴν τῆς λύσεως $x = 0$*

ἐὰν εἶνε	$\alpha \geqq 1$	οὐδεμίαν ἔχει λύσιν
ἐὰν εἶνε	$\tau_2 < \alpha < 1$	ἔχει δύο λύσεις
ἐὰν	$\alpha = \tau_2$	τέσσαρας λύσεις
ἐὰν	$\tau_4 < \alpha < \tau_2$	ἓξ λύσεις
ἐὰν	$\alpha = \tau_4$	8 λύσεις
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .
ἐὰν	$\alpha = \tau_{2\nu}$	ἔχει 4ν λύσεις
ἐὰν	$\tau_{2\nu+2} < \alpha < \tau_{2\nu}$	ἔχει $4\nu + 2$ λύσεις

εἶνε δὲ $\tau_{2\nu} = \frac{1}{\sqrt{1+(x'+2\nu\pi)^2}}$,

ἔνθα x' ὁρίζεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$x' + 2\nu\pi = \varepsilon\varphi x' \qquad \text{καὶ } 0 < x' < \pi.$$

Τὰς ῥίζας, περὶ ὧν ὁ λόγος, δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν γεωμετρικῶς ὡς τετμημένας τῶν σημείων, ἔνθα ἡ εὐθεῖα $y = \alpha$ τέμνει τὴν καμπύλην $y = \frac{\eta\mu x}{x}$.

6) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς.

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \ldots$$

Ἐπειδὴ εἶνε
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots, \qquad |x| < 1$$

ἐὰν διαφορίσωμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα, εὑρίσκομεν

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots \qquad |x| < 1$$

ὥστε ἡ δοθεῖσα σειρὰ ἔχει ἄθροισμα τὴν παράστασιν

$$\frac{1}{(1+x)^2}$$

συγκλίνει δὲ ἐνόσῳ εἶνε $|x|<1$.

7) Ἀποδεῖξαι, ὅτι, ἐὰν ἡ αὔξησις συναρτήσεώς τινος $\varphi(x)$ εἶνε ἀνάλογος πρὸς τὴν αὔξησιν τῆς x, θὰ εἶνε $\varphi(x) = Ax + B$,
τῶν A καὶ B ὄντων σταθερῶν ἀριθμῶν ὡς πρὸς τὴν x.

Ἔστω $\varphi(x+\varepsilon) - \varphi(x) = A,\varepsilon$
διὰ πάσας τὰς αὐξήσεις τὰς μικροτέρας ἀριθμοῦ τινος δ.

Ἐὰν νοήσωμεν τὴν αὔξησιν ε μεταβαλλομένην ἀπὸ $-\delta$ μέχρι $+\delta$ τὴν δὲ x ἀμετάβλητον καὶ ἴσην τῷ ἀριθμῷ α, τὸ ἄθροισμα $x+\varepsilon$ θὰ μεταβάληται, καὶ ἂν θέσωμεν $\alpha+\varepsilon=\omega$, θὰ ἔχωμεν

$$\varphi(\omega) - \varphi(\alpha) = A(\omega-\alpha),$$

ὅθεν

$$\varphi(\omega) = A\omega + \varphi(\alpha) - A\alpha$$

ἢ

$$\varphi(\omega) = A\omega + B.$$

Τὴν πρότασιν ταύτην δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν καὶ διὰ τοῦ θεωρήματος τοῦ ἐδ. (87) παρατηροῦντες, ὅτι ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$ εἶνε τότε σταθερά.

8) Ἀποδεῖξαι, ὅτι ἐὰν φ καὶ ω εἶνε δύο τυχοῦσαι συναρτήσεις τοῦ x, θὰ εἶνε

$$\text{ὅρ}\,\frac{\Delta\varphi}{\Delta\omega} = \frac{d\varphi}{d\omega}$$

ἔνθα Δφ, Δω δηλοῦσι τὰς αὐξήσεις τῶν συναρτήσεων τὰς πρὸς τὴν αὐτὴν αὔξησιν τοῦ x ἀντιστοιχούσας.

9) Ἀποδεῖξαι ὅτι, ἐὰν ἡ αὔξησις συναρτήσεώς τινος $\varphi(x)$ δι' ἑκάστην τιμὴν τῆς x ἐν τῷ διαστήματι $\alpha \ldots \beta$ εἶνε τῆς μορφῆς

$$\varepsilon^\mu.\sigma(x) + \varepsilon^\mu.\omega \qquad \text{ἔνθα ὅρ. } \omega = \vartheta, \text{ ὅταν } \varepsilon = 0,$$

θὰ εἶνε $\mu = 1$.

10) Εὑρεῖν τὴν μέσην τιμὴν τῆς συναρτήσεως x^2 ἐν τῷ διαστήματι $0\ldots.1$.

11) Ἀποδεῖξαι ὅτι πᾶσα διαφορίσιμος συνάρτησις εἶνε συνεχὴς ἐνόσῳ ἡ παράγωγος αὐτῆς εἶνε πεπερασμένη καὶ διάφορος τοῦ 0.

12) Εὑρεῖν συνάρτησιν ἔχουσαν παράγωγον ἴσην τῷ τετραγώνῳ αὐτῆς.

13) Εὑρεῖν τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος

$$\alpha(x_1-\alpha) + x_1(x_2-x_1) + x_2(x_3-x_2) + \ldots + x_{\nu-1}(\beta - x_{\nu-1}),$$

ὅταν ἑκάστη τῶν διαφορῶν $x_1-\alpha$, $x_2-x_1, \ldots, \beta-x_{\nu-1}$ τείνῃ πρὸς τὸ 0 (α καὶ β εἶνε ἀριθμοὶ ὡρισμένοι).

14) Εὑρεῖν τὴν μέσην τιμὴν τοῦ ημ x εἰς τὸ διάστημα $0\ldots\frac{\pi}{2}$.

15) Εὑρεῖν τὴν μεγίστην τιμὴν τῆς συναρτήσεως ημ x, ημ $(\alpha - x)$.

16) Εὑρεῖν τὸ ὅριον τοῦ πηλίκου $\dfrac{1^\mu + 2^\mu + 3^\mu + \ldots + \nu^\mu}{\nu^{\mu+1}}$, ὅταν ὁ ν αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον.

17) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διαφορὰ $\left(\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{\nu}\right) - l\nu$ τείνει πρός τι ὅριον πεπερασμένον, ὅταν ὁ ν αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΩΝ

Ὁρισμὸς τοῦ διαφορικοῦ.

91. Ἐάν, αὐξανομένων πασῶν τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, ἀφ' ὧν ἡ συνάρτησις ἐξαρτᾶται, κατὰ ποσότητας ἀορίστους (ὧν τὸ μέτρον δὲν ὑπερβαίνει ἀριθμόν τινα), ἡ προκύπτουσα αὔξησις τῆς συναρτήσεως δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο μέρη, ἐξ ὧν τὸ μὲν πρῶτον νὰ εἶνε πρωτοβάθμιον καὶ ὁμογενὲς πρὸς πάσας τὰς αὐξήσεις, ε, η, ζ, ἤτοι τῆς μορφῆς $\mathrm{A}.\varepsilon + \mathrm{B}.\eta + \Gamma.\zeta$
τὸ δὲ δεύτερον νὰ εἶνε τοιοῦτον, ὥστε ὁ συντελεστὴς ἑκάστης τῶν αὐξήσεων ἐν αὐτῷ νὰ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, ὅταν πᾶσαι αἱ αὐξήσεις τείνωσι πρὸς τὸ μηδέν, τουτέστι τῆς μορφῆς

$$\varepsilon.\omega + \eta.\tau + \zeta.\upsilon + \ldots \quad \text{ἔνθα ὅρ.}\,\omega = \text{ὅρ.}\,\tau = \text{ὅρ.}\,\upsilon = 0,$$

ἐάν, λέγω, συμβαίνῃ τοῦτο, *τὸ πρῶτον μέρος τῆς αὐξήσεως τῆς συναρτήσεως, τὸ πρὸς τὰς αὐξήσεις ὁμογενὲς καὶ πρωτοβάθμιον, λέγεται διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως.* Παρίσταται δὲ καὶ τοῦτο συμβολικῶς, γραφομένου τοῦ γράμματος d πρὸ τῆς συναρτήσεως.

92. Ἐὰν συνάρτησις πολλῶν μεταβλητῶν ἀνεξαρτήτων εἶνε διαφορίσιμος ὡς πρὸς τὸ σύνολον τῶν μεταβλητῶν, εἶνε καὶ ὡς πρὸς ἑκάστην διαφορίσιμος, καὶ τὸ διαφορικὸν αὐτῆς ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν μερικῶν αὐτῆς διαφορικῶν πρὸς ἑκάστην τῶν μεταβλητῶν, ἀφ' ὧν ἐξαρτᾶται.

Καὶ ὄντως, ἂν ὑποθέσωμεν πάσας τὰς λοιπὰς αὐξήσεις ἴσας τῷ 0, πλὴν τῆς ε, εὑρίσκομεν, ὅτι, τῶν λοιπῶν μεταβλητῶν θεωρουμένων ὡς σταθερῶν καὶ μόνης τῆς x αὐξανομένης κατὰ τὴν ποσότητα ε, ἡ αὔξησις τῆς συναρτήσεως εἶνε τῆς μορφῆς $\mathrm{A}\varepsilon + \varepsilon\omega$ ἔνθα ὅρ $\omega = 0$. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ἡ συνάρτησις εἶνε διαφορίσιμος πρὸς τὴν μόνην αὐξηθεῖσαν μεταβλητὴν καὶ ὅτι τὸ μερικὸν αὐτῆς διαφορικὸν πρὸς τὴν μεταβλητὴν ταύτην εἶνε $\mathrm{A}.\varepsilon$, ἤτοι ὁ ὅρος τοῦ διαφορικοῦ, ὅστις ἔχει τὴν αὔξησιν τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς· τὸ αὐτὸ δὲ ἀληθεύει καὶ περὶ ἑκάστης τῶν ἄλλων μεταβλητῶν. Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι τὰ μερικὰ διαφορικὰ τῆς συναρτήσεως προστιθέμενα ἀποτελοῦσι τὸ διαφορικὸν αὐτῆς.

93. Κατὰ ταῦτα ἡ εὕρεσις τοῦ διαφορικοῦ συναρτήσεως δεδομένης καὶ ἐκ πολλῶν μεταβλητῶν ἐξαρτωμένης γίνεται κατὰ τοὺς ἤδη εὑρεθέντας κανόνας τῆς διαφορίσεως τῶν ἐκ μιᾶς μόνης μεταβλητῆς ἐξαρτωμένων συναρτήσεων· διότι ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῶσι τὰ μερικὰ αὐτῆς διαφορικὰ πρὸς τὰς μεταβλητάς, ἀφ' ὧν ἐξαρτᾶται, ἵνα ἐξ αὐτῶν ἀθροισθέντων προκύψῃ τὸ διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως.

Οὕτω, παραδείγματος χάριν, τῆς συναρτήσεως $x^\mu . y^\nu$ τὸ διαφορικὸν εἶνε $\mu x^{\mu-1} y^\nu dx + \nu x^\mu y^{\nu-1} dy.$

94. Ἐὰν συνάρτησις πολλῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν εἶνε διαφορίσιμος πρὸς ἑκάστην ἐξ αὐτῶν καὶ αἱ μερικαὶ αὐτῆς παράγωγοι ὦσι συνεχεῖς συναρτήσεις, ἡ αὐτὴ συνάρτησις εἶνε διαφορίσιμος καὶ πρὸς τὸ σύνολον τῶν μεταβλητῶν.

Ἔστω συνάρτησις δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν x καὶ y καὶ διαφορίσιμος πρὸς ἑκατέραν ἐξ αὐτῶν, ἡ $\varphi(x, y)$· ἡ πρὸς τὰς αὐξήσεις Δx καὶ Δy τῶν x καὶ y ἀντιστοιχοῦσα αὔξησις τῆς συναρτήσεως

$$\varphi(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - \varphi(x, y)$$

κατὰ τὰ περὶ συνθέτων συναρτήσεων εἰρημένα (ἐδ. 77) τίθεται ὑπὸ τὴν ἑξῆς μορφὴν

$$\varphi'(x,y)_x . \Delta x + \varphi'(x,y)_y . \Delta y + [\varphi'(x',y)_y - \varphi'(x,y)_y]\Delta y + \omega\Delta x + \tau\Delta y$$

ἔνθα x' ἰσοῦται τῷ $x + \Delta x$, τὰ δὲ ω καὶ τ τείνουσι πρὸς τὸ 0, ὅταν αἱ αὐξήσεις Δx, Δy τείνωσι πρὸς τὸ 0· ἑπομένως, ἐὰν ἡ μερικὴ παράγωγος $\varphi'(x,y)_y$ εἶνε συνεχὴς συνάρτησις τῆς x, ἡ ἐν τῇ παρενθέσει διαφορὰ τείνει πρὸς τὸ 0 μετὰ τοῦ Δx καὶ κατὰ τὸν δοθέντα ὁρισμὸν εἶνε $d\,\varphi(x,y) = \varphi'(x,y)_x . dx + \varphi'(x,y)_y . dy$

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ ὅταν αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ εἶνε περισσότεραι τῶν δύο.

ΣΗΜ. Ἐπειδὴ ἡ παράγωγος συναρτήσεως ἐκ μιᾶς μόνης μεταβλητῆς ἐξαρτωμένης ἔστω τῆς $\sigma(x)$, παρίσταται διὰ τοῦ πηλίκου

$$\frac{d\sigma(x)}{dx}, \text{ ἢ ἁπλούστερον } \frac{d\sigma}{dx},$$

αἱ μερικαὶ παράγωγοι συναρτήσεως ἐκ πολλῶν μεταβλητῶν ἐξαρτωμένης, ὡς τῆς $\varphi(x, y, z)$, παρίστανται ἀναλόγως ὡς ἑξῆς

$$\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial x}, \quad \frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial z}$$

$$\text{ἢ καὶ} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

διότι ἡ πρὸς ἕκαστον γράμμα παράγωγος τῆς συναρτήσεως $\varphi(x,y,z)$ εἶνε πηλίκον τοῦ διαφορικοῦ αὐτῆς πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα (ὅπερ μερικὸν διαφορικὸν παρίσταται διὰ τοῦ πλαγίου ∂) διαιρουμένου διὰ τοῦ διαφορικοῦ τοῦ αὐτοῦ γράμματος (ὅπερ διαφορικὸν γράφεται ἐπίσης διὰ τοῦ ∂ χάριν τῆς συμμετρίας). Σημειωτέον δέ, ὅτι οἱ ἀριθμηταὶ τῶν μερικῶν τούτων παραγώγων γράφονται πάντες διὰ τοῦ αὐτοῦ συμβόλου $\partial\varphi(x,y,z)$ ἢ $\partial\varphi$, ἂν καὶ διαφέρουσι· διότι ἕκαστος ἐξ αὐτῶν δηλοῖ τὸ μερικὸν διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως πρὸς μίαν τῶν μεταβλητῶν.

Ἰδιότητες τοῦ διαφορικοῦ.

95. *Ἐὰν τὸ διαφορικὸν συναρτήσεως ἐκ πολλῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν ἐξαρτωμένης εἶνε πάντοτε ἴσον τῷ 0, καὶ αἱ μερικαὶ αὐτῆς παράγωγοι θὰ εἶνε πᾶσαι ἴσαι τῷ 0, καὶ ἡ συνάρτησις εἶνε σταθερὰ ποσότης· τουτέστι μένει ἀμετάβλητος, ὅταν αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταί, πρὸς ἃς λαμβάνεται τὸ διαφορικόν, μεταβάλλωνται.*

Ἐπειδὴ τὸ διαφορικὸν εἶνε πάντοτε ἴσον τῷ 0, οἱασδήποτε τιμὰς καὶ ἂν ἔχωσιν αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ καὶ οἱαιδήποτε καὶ ἂν εἶνε αἱ αὐξήσεις αὐτῶν, ἕπεται, ὅτι καὶ τὰ μερικὰ διαφορικὰ πρὸς ἑκάστην τῶν μεταβλητῶν θὰ εἶνε ἴσα τῷ 0· (διότι δυνάμεθα μόνον μίαν ἐκ τῶν μεταβλητῶν νὰ αὐξήσωμεν, τὰς δὲ ἄλλας νὰ ἀφήσωμεν ἀμεταβλήτους)· ἑπομένως καὶ πᾶσαι αἱ μερικαὶ παράγωγοι τῆς συναρτήσεως θὰ εἶνε ἴσαι τῷ 0· ἤτοι

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=0\cdot$$

ἀλλ' ἡ πρώτη τῶν ἰσοτήτων τούτων δεικνύει, ὅτι, τοῦ x μόνου μεταβαλλομένου, δὲν μεταβάλλεται τὸ παράπαν ἡ συνάρτησις, ἤτοι εἶνε

$$\varphi(x+\varepsilon,\ y,z)=\varphi(x,y,z)$$

ἡ δὲ δευτέρα ὁμοίως δεικνύει, ὅτι, τοῦ y μόνου μεταβαλλομένου, δὲν μεταβάλλεται διόλου ἡ συνάρτησις· ἤτοι εἶνε

$$\varphi(x,y+\eta,z)=\varphi(x,y,z)$$

ὁμοίως ἡ τρίτη ἰσότης δεικνύει, ὅτι εἶνε

$$\varphi(x,\ y,\ z+\zeta)=\varphi(x,\ y,\ z),$$

Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι ἡ συνάρτησις δὲν μεταβάλλεται ποσῶς καὶ ὅταν πᾶσαι αἱ μεταβληταὶ μεταβάλλωνται, διότι εἶνε

$$\varphi(x+\varepsilon, y+\eta, z+\zeta)=\varphi(x+\varepsilon, y+\eta, z)$$

καὶ $$\varphi(x+\varepsilon, y+\eta, z)=\varphi(x+\varepsilon, y, z)$$

καὶ $$\varphi(x+\varepsilon, y, z)=\varphi(x, y, z)$$

ἄρα $$\varphi(x+\varepsilon, y+\eta, z+\zeta)=\varphi(x, y, z).$$

96. Ἐκ τῆς προτάσεως ταύτης ἕπεται ἀμέσως ἡ ἑξῆς·

Ἐὰν δύο συναρτήσεις, ἐκ τῶν αὐτῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν ἐξαρτώμεναι, ἔχωσιν ἴσα διαφορικά, ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶνε σταθερὰ πρὸς τὰς μεταβλητὰς ταύτας.

Διότι, ἂν εἶνε $d\varphi=d\omega$, ἕπεται $d(\varphi-\omega)=0$ (ἐδ. 93), ἐξ οὗ καὶ $\varphi-\omega=$ σταθερᾷ τινι ποσότητι.

97. *Τὸ διαφορικὸν εἶνε τὸ πρωτεῦον μέρος τῆς αὐξήσεως τῆς συναρτήσεως·*

τουτέστιν ἡ διαφορὰ αὐτοῦ ἀπὸ τῆς αὐξήσεως δύναται νὰ γίνῃ μικροτέρα παντὸς τοῦ δοθέντος μέρους τοῦ διαφορικοῦ, ὅταν αἱ αὐξήσεις τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν γίνωσιν ἱκανῶς μικραί.

Διότι τῆς συναρτήσεως $\varphi(x, y)$ τὸ μὲν διαφορικὸν εἶνε

$$\varphi'(x, y)_x \,.\, dx+\varphi'(x, y)_y \,.\, dy$$

ἡ δὲ αὔξησις εἶνε

$$\varphi'(x, y)_x \,.\, dx+\varphi'(x, y)_y dy+\omega \,.\, dx+\tau \,.\, dy.$$

ἑπομένως ἡ διαφορὰ τῆς αὐξήσεως ἀπὸ τοῦ διαφορικοῦ εἶνε $\omega . dx+\tau . dy$· καὶ ὁ λόγος τῆς διαφορᾶς ταύτης πρὸς τὸ διαφορικὸν εἶνε

$$\frac{\omega dx+\tau dy}{\varphi'_x dx+\varphi'_y \,.\, dy} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\omega+\tau\dfrac{dy}{dx}}{\varphi'_x+\varphi'_y \,.\, \dfrac{dy}{dx}}$$

Ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος τούτου διαφέρει τοῦ 0· διότι καὶ αἱ μερικαὶ παράγωγοι φ'_x, φ'_y δὲν εἶνε ἀμφότεραι ἴσαι τῷ 0 (ἄλλως θὰ ἦτο καὶ τὸ διαφορικὸν $d\varphi$ ἴσον τῷ 0) καὶ ὁ λόγος $\dfrac{dy}{dx}$ τῶν αὐξήσεων τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν δύναται νὰ τείνῃ πρὸς οἱονδήποτε ἀριθμὸν θέλωμεν. Ὁ δὲ ἀριθμητὴς τείνει πρὸς τὸ 0· διότι τὰ ω καὶ τ τείνουσι πρὸς τὸ 0, (ὅταν τὰ dx καὶ dy τείνωσι πρὸς τὸ 0)· ἑπομένως ὁ λόγος τῆς εἰρημένης διαφορᾶς πρὸς τὸ διαφορικὸν τείνει πρὸς τὸ μηδέν· ἤτοι ἡ διαφορὰ αὕτη γίνεται μικροτέρα παντὸς τοῦ δοθέντος μέρους τοῦ διαφορικοῦ.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ ἡ ἑξῆς πρότασις.

Ὁ λόγος τῆς ὅλης αὐξήσεως πρὸς τὸ διαφορικὸν τείνει πρὸς τὴν μονάδα, ὅταν αἱ αὐξήσεις τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, ἄσχετοι μένουσαι πρὸς ἀλλήλας τείνωσι πρὸς τὸ μηδέν.

Διαφορικὸν τῶν πεπλεγμένων συναρτήσεων.

98. Ἐὰν τρεῖς μεταβληταί, αἱ x, y, z, συνδέωνται πρὸς ἀλλήλας διὰ μιᾶς μόνης ἐξισώσεως

$$\varphi(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

δύο ἐκ τούτων δύνανται νὰ λάβωσιν αὐτοβούλως ὁριζομένας τιμάς, ἡ δὲ τρίτη ὁρίζεται τότε ἐκ τῆς ἐξισώσεως· ἑπομένως μία ἐξ αὐτῶν, ἔστω ἡ z, εἶνε συνάρτησις τῶν λοιπῶν δύο, αἵτινες εἶνε ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων.

Ἵνα εὕρωμεν τὸ διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως z, νοοῦμεν κατὰ πρῶτον μεταβαλλομένην μόνην τὴν x, ὅτε εὑρίσκομεν

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\, \partial_x z = 0\cdot$$

εἶτα νοοῦμεν μεταβαλλομένην μόνην τὴν y, ὅτε προκύπτει ὁμοίως

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} . dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\, \partial_y z = 0\cdot$$

προσθέτοντες δὲ τὰς ἐξισώσεις ταύτας κατὰ μέλη καὶ ἐνθυμούμενοι ὅτι εἶνε $dz = \partial_x z + \partial_y z$, εὑρίσκομεν

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\, dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} . dz = 0 \tag{2}$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὑρίσκομεν τὸ διαφορικὸν τῆς z ἢ καὶ τὰς μερικὰς παραγώγους αὐτῆς πρὸς x καὶ y.

Τὴν ἐξίσωσιν ταύτην (2) τὴν τὰ διαφορικὰ συνδέουσαν, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) καὶ κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον.

Ἐὰν ἐν τῇ παραστάσει $\varphi(x, y, z)$ θεωρηθῶσιν αἱ μεταβληταὶ x, y, z ὡς ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων,

θὰ εἶνε $$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\, dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\, dz\cdot$$

ἐὰν δὲ ἔπειτα αἱ αὐταὶ μεταβληταὶ συνδεθῶσι διὰ τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x, y, z)=0$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} . dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} . dz = 0$$

ΣΗΜ. Ἐκ τῆς συνθέσεως τῆς ἐξισώσεως ταύτης γίνεται ἀμέσως καταφανές, ὅτι αὕτη οὐδαμῶς ἀλλάσσει μορφήν, οἱαδήποτε ἐκ τῶν τριῶν μεταβλητῶν καὶ ἂν θεωρῆται ὡς συνάρτησις τῶν δύο ἄλλων.

99. Ἐὰν γενικῶς $\mu + \nu$ μεταβληταί, αἱ x, y, z.., συνδέωνται διὰ μ ἐξισώσεων τῆς μορφῆς

$$\varphi(x, y, z \ldots) = 0 \tag{1}$$

αἱ ν ἐκ τῶν μεταβλητῶν τούτων δύνανται νὰ λάβωσιν αὐτοβούλως δεδομένας τιμὰς καὶ δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς ἀνεξάρτητοι, ἀρκεῖ αἱ τιμαὶ τῶν λοιπῶν μ νὰ ὁρίζωνται τότε ὑπὸ τῶν μ ἐξισώσεων.

Λαμβάνοντες τὰ διαφορικὰ τῶν συναρτήσεων $\varphi(x, y, z \ldots) \ldots$ ἤτοι τῶν πρώτων μελῶν τῶν δοθεισῶν μ ἐξισώσεων, εὑρίσκομεν τὰς ἑπομένας μ ἐξισώσεις.

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

καὶ ἐπειδὴ αἱ μεταβληταὶ μεταβάλλονται οὕτως, ὥστε τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἐξισώσεων (1) ἤτοι αἱ συναρτήσεις $\varphi(x, y, z \ldots) \ldots$ μένουσι σταθεραὶ ποσότητες, ἕπεται

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + \ldots = 0 \tag{2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ἐκ δὲ τῶν μ τούτων ἐξισώσεων δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὰ διαφορικὰ τῶν μ μεταβλητῶν, αἵτινες θεωροῦνται ὡς συναρτήσεις τῶν λοιπῶν.

Παρατήρησις.

100. Αἱ ἐξισώσεις (2) διαφυλάττουσι προφανῶς τὴν ἑαυτῶν μορφήν, οἱαιδήποτε ἐκ τῶν $\mu + \nu$ μεταβλητῶν καὶ ἂν θεωρῶνται ὡς ἀνεξάρτητοι. Ἀλλὰ καὶ ὅταν πᾶσαι αἱ $\mu + \nu$ μεταβληταὶ θεωρηθῶσιν ὡς συναρτήσεις ἄλλων τινῶν μεταβλητῶν, οἱωνδήποτε καὶ ὁσωνδήποτε, ἀρκεῖ νὰ μένωσιν ἀμετάβλητοι αἱ τὰς $\mu + \nu$ μεταβλητὰς συνδέουσαι

μ ἐξισώσεις (1), πάλιν ἡ μορφὴ τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων (2) μένει ἡ αὐτή.

Διότι ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x, y, z \ldots) = 0$, ἐὰν αἱ ἐν αὐτῇ περιεχόμεναι μεταβληταὶ θεωρηθῶσιν ὡς συναρτήσεις τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν τ, u, $v \ldots$, εὑρίσκομεν

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\partial_\tau x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\partial_\tau y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\partial_\tau z + \ldots = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\partial_u x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\partial_u y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\partial_u z + \ldots = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\partial_v x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\partial_v y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\partial_v z + \ldots = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ἐκ δὲ τῶν ἐξισώσεων τούτων ἀθροιζομένων προκύπτει καὶ πάλιν ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz + \ldots = 0$$

τουτέστιν *ἡ ἐκ τῆς διαφορίσεως οἱασδήποτε ἐξισώσεως προκύπτουσα ἐξίσωσις καὶ τὰ διαφορικὰ τῶν ἐν αὐτῇ περιεχομένων μεταβλητῶν συνδέουσα, μένει ἡ αὐτὴ κατὰ τὴν μορφήν, οἱωνδήποτε καὶ ὁσωνδήποτε μεταβλητῶν καὶ ἂν θεωρῶνται συναρτήσεις αἱ ἐν τῇ ἐξισώσει περιεχόμεναι μεταβληταί.*

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν πάντοτε

$$d(\varphi + \omega + \ldots) = d\varphi + d\omega + \ldots$$

$$d(\omega \,.\, \varphi) = \varphi \,.\, d\omega + \omega \,.\, d\varphi$$

$$d\left(\frac{\varphi}{\omega}\right) = \frac{\omega d\varphi - \varphi d\omega}{\omega^2}$$

$$d\,\sigma(\varphi) = \sigma'(\varphi)d\varphi$$

$$d\,\sigma(\varphi,\omega) = \sigma'\,d\varphi + \sigma'_\omega\,d\omega\cdot$$

καὶ γενικῶς πάντες οἱ ἐκ τῆς διαφορίσεως προελθόντες τύποι μένουσιν οἱ αὐτοὶ κατὰ τὴν μορφήν, ὁσωνδήποτε καὶ οἱωνδήποτε μεταβλητῶν καὶ ἂν θεωρῶνται συναρτήσεις αἱ μεταβληταὶ αἱ ἐν τοῖς τύποις περιεχόμεναι.

ΒΙΒΛΙΟΝ Β'.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑΙ· ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑ ΕΠΙΠΕΔΑ· ΕΜΒΑΔΑ ΚΑΙ ΤΟΞΑ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΕΠΙΠΕΔΟΙ ΚΑΜΠΥΛΑΙ

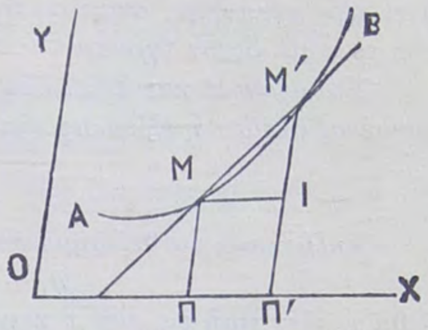
Ἐκ τῶν πολλῶν καὶ ποικίλων τρόπων, καθ' οὓς δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν γεωμετρικῶς τὴν σχέσιν τῶν μεταβλητῶν ποσοτήτων, ὁ γενικώτατος καὶ χρησιμώτατος εἶνε ἐκεῖνος, καθ' ὃν αἱ μεταβληταὶ παρίστανται ὡς συντεταγμέναι ἑνὸς σημείου ἐν ἐπιπέδῳ τινὶ (ἢ καὶ ἐν τῷ χώρῳ). Ὑποθέσωμεν, ὅτι δύο μεταβληταὶ ἐξαρτῶνται ἀπ' ἀλλήλων καὶ ὅτι ἕκαστον σύστημα τιμῶν τῶν μεταβλητῶν τούτων παρίσταται δι' ἑνὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου· ὅταν ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ διατρέχῃ πάσας τὰς πραγματικὰς τιμάς, καὶ ἡ συνάρτησις (ἐὰν ὑποτεθῇ συνεχὴς) διατρέχει τιμάς τινας, καὶ ἐπειδὴ ἕκαστον ζεῦγος ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν παρίσταται δι' ἑνὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου, τὸ σύνολον τῶν σημείων τούτων ἔχει τόπον γραμμήν τινα, ἥτις ἀπεικονίζει ἢ παριστᾷ τὴν πορείαν τῆς συναρτήσεως. Τὰ διαφορικὰ καὶ ἡ παράγωγος παρίστανται τότε ὑπὸ μεγεθῶν πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς καμπύλης ταύτης συνδεομένων, ὡς ἀμέσως θὰ ἀποδείξωμεν, θεωροῦντες τὰ δύο πρωτεύοντα συστήματα τῶν συντεταγμένων, ἤτοι τὰς εὐθυγράμμους καὶ τὰς πολικάς.

ΣΗΜ. Ἐν πᾶσι τοῖς ἑπομένοις ὑποτίθεται, ὅτι ἡ ἑτέρα τῶν μεταβλητῶν εἶνε διαφορίσιμος συνάρτησις τῆς ἄλλης. Πάντα δὲ τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης, περὶ ὧν γίνεται λόγος, ὑποτίθενται ἀντιστοιχοῦντα πρὸς τιμάς, εἰς ἃς εἶνε διαφορίσιμος ἡ συνάρτησις.

ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ.

Ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης.

101. Ἔστωσαν y καὶ x δύο μεταβληταὶ ἐξαρτώμεναι ἀπ' ἀλλήλων καὶ $y = \sigma(x)$ ἡ συνδέουσα αὐτὰς ἐξίσωσις· ἡ δὲ καμπύλη, τὴν ὁποίαν δηλοῖ ἡ ἐξίσωσις αὕτη πρὸς τοὺς ἄξονας ΨΟΧ, ἔστω ἡ ΑΒ.



Ἄς ληφθῇ τυχὸν σημεῖον τῆς καμπύλης, τὸ Μ· καὶ ἐξ αὐτοῦ ἂς ἀχθῇ τυχοῦσα τέμνουσα ἡ ΜΜ′· ἔστωσαν δὲ αἱ μὲν συντεταγμέναι τοῦ Μ αἱ x, y· αἱ δὲ αὐξήσεις τῶν συντεταγμένων, αἱ ἐκ τῆς μεταβάσεως ἀπὸ τοῦ Μ εἰς τὸ Μ′ προερχόμεναι, ἔστωσαν Δx, Δy (αἵτινες αὐξήσεις δύνανται νὰ εἶνε θετικαὶ ἢ ἀρνητικαί)· τότε αἱ συντεταγμέναι τοῦ Μ′ θὰ εἶνε $x + \Delta x$, $y + \Delta y$· καὶ ἡ ἐξίσωσις τῆς τεμνούσης ΜΜ′ εἶνε

$$\frac{X-x}{\Delta x} = \frac{\Psi - y}{\Delta y}, \quad \text{ἢ} \quad \Psi - y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(X - x) \qquad (\tau)$$

ἔνθα Χ, Ψ εἶνε αἱ συντεταγμέναι τοῦ τυχόντος σημείου τῆς τεμνούσης.

Ἐὰν δὲ ἡ τέμνουσα στρέφηται περὶ τὸ σημεῖον Μ, μέχρις οὗ τὸ Μ′ πέσῃ ἐπὶ τὸ Μ, αἱ μὲν αὐξήσεις Δx, Δy ἐλαττοῦνται μέχρις ἐκμηδενίσεως, ὁ δὲ λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ τείνει πρὸς τὴν παράγωγον $\frac{dy}{dx}$· καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἐξίσωσις (τ) γίνεται

$$\Psi - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

ἢ συμμετρικώτερον

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{\Psi - y}{dy} \qquad (1)$$

Ἀλλ' ὅταν τὸ Μ′ πέσῃ ἐπὶ τὸ Μ, ἡ τέμνουσα γίνεται ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον Μ. Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶνε τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον Μ (x, y).

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης βλέπομεν, ὅτι τὸ τμῆμα, ὅπερ ἔχει συντεταγμένας προβολὰς dx, dy, εἶνε παράλληλον τῇ ἐφαπτομένῃ· *ἡ δὲ παράγωγος* $\frac{dy}{dx}$ *δι' ἑκάστην τιμὴν τῆς* x *ἰσοῦται τῷ συντελεστῇ κατευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον* (x, y).

Ὁ γενικὸς ὁρισμὸς τῆς ἐφαπτομένης εἶνε ὁ ἑξῆς·

Ἐφαπτομένη καμπύλης εἴς τι σημεῖον Μ αὐτῆς λέγεται τὸ ὅριον τῶν θέσεων οἱασδήποτε τεμνούσης, ὅταν αὕτη κινῆται ὁπωσδήποτε, μέχρις οὗ δύο σημεῖα, καθ' ἃ τέμνει τὴν καμπύλην, συμπέσωσιν εἰς τὸ Μ.

Μένει λοιπὸν νὰ δείξωμεν, ὅτι, ὄχι μόνον ὅταν ἡ τέμνουσα στρέφηται περὶ τὸ Μ, ἀλλὰ καὶ ὅταν κινῆται ὁπωσδήποτε μέχρις οὗ τὰ δύο σημεῖα, καθ' ἃ τέμνει τὴν καμπύλην, συμπέσωσιν εἰς τὸ σημεῖον Μ (x, y), πάντοτε αἱ θέσεις αὐτῆς τὸ αὐτὸ ὅριον ἔχουσιν.

Ἔστωσαν Ρ καὶ Σ τὰ δύο σημεῖα τῆς τομῆς καὶ $(x_1\ y_1)$ $(x_2,\ y_2)$ αἱ συντεταγμέναι αὐτῶν· ἡ ἐξίσωσις τῆς τεμνούσης ΡΣ εἶνε

$$\Psi - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(\mathrm{X} - x_1)$$

Ἀλλὰ κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδαφίου 90 εἶνε

$$y_1 - y_2 = \sigma'(x_0)\ (x_1 - x_2)$$

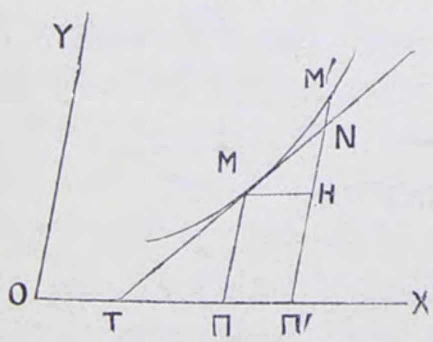
ἔνθα x_0 εἶνε τιμή τις τοῦ x κειμένη μεταξὺ x_1 καὶ x_2· ἐπειδὴ δὲ ἀμφότεραι αἱ τετμημέναι x_1, x_2 τείνουσι νὰ γίνωσιν ἴσαι τῇ x, καὶ ἡ μεταξὺ αὐτῶν περιλαμβανομένη x_0 πρὸς τὸ αὐτὸ ὅριον τείνει καὶ διὰ τοῦτο ἡ τιμὴ $\sigma'(x_0)$ τῆς παραγώγου τείνει πρὸς τὴν τιμὴν $\sigma'(x)$· (ἐπὶ τῇ ὑποθέσει, ὅτι ἡ παράγωγος $\sigma'(x)$ ὡς συνάρτησις τοῦ x θεωρουμένη, ἔχει τιμὴν ἐντελῶς ὡρισμένην καὶ μίαν μόνην δι' ἑκάστην τιμὴν τῆς x). Ὅταν λοιπὸν τὰ δύο σημεῖα Ρ καὶ Σ συμπέσωσιν εἰς τὸ Μ, ἡ ἐξίσωσις τῆς τεμνούσης γίνεται

$$\Psi - y = \sigma'(x)\ (\mathrm{X} - x), \quad \text{ἢ} \quad \Psi - y = \frac{dy}{dx}(\mathrm{X} - x)$$

Αὕτη δὲ εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον Μ.

Γεωμετρικὴ παράστασις τοῦ διαφορικοῦ.

102. Ἐάν, ἀχθείσης τῆς ἐφαπτομένης ΜΤ εἰς τὸ σημεῖον Μ, ληφθῇ ΠΠ$' = \Delta x$ καὶ ἀχθῇ ἡ τεταγμένη Μ$'$Π$'$ καὶ ἐκ τοῦ Μ παράλληλος τῷ ἄξονι ΟΧ ἡ ΜΗ, ἡ μὲν ΗΝ παριστᾷ τὴν αὔξησιν τῆς τεταγμένης τῆς ἐφαπτομένης (τὴν ἀντιστοιχοῦσαν πρὸς τὴν αὔξησιν τῆς τετμημένης x κατὰ Δx)· ἡ δὲ ΗΜ$'$ παριστᾷ τὴν αὔξησιν τῆς τεταγμένης τῆς καμπύλης (ἤτοι ἰσοῦται τῷ Δy)· καὶ ἐὰν ἐφαρμοσθῇ εἰς



τὸ σημεῖον Ν ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης, προκύπτει $\mathrm{NH} = \frac{dy}{dx}\mathrm{MH}$

καὶ ἐπειδὴ $\mathrm{MH} = \Pi\Pi' = \Delta x = dx$, ἕπεται $\mathrm{NH} = dy$,

τουτέστι *τὸ διαφορικὸν τῆς τεταγμένης τῆς καμπύλης ἰσοῦται πρὸς τὴν αὔξησιν τῆς τεταγμένης τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς·*

ὥστε, λαμβάνοντες τὸ διαφορικὸν ἀντὶ τῆς αὐξήσεως, ἀντικαθιστῶμεν τὴν ἐφαπτομένην ἀντὶ τῆς καμπύλης.

Τὸ τμῆμα MN τῆς ἐφαπτομένης ἔχει συντεταγμένας προβολὰς $dx(=\mathrm{MH})$ καὶ $dy(=\mathrm{HN})$ καί, ἂν οἱ ἄξονες εἶνε ὀρθογώνιοι, εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ τριγώνου MNH $\dfrac{dy}{dx}=\text{εφ}\varphi,$

φ οὔσης τῆς γωνίας, ἣν σχηματίζει ἡ ἐφαπτομένη πρὸς τὸν ἄξονα OX.

Διάφοροι μορφαὶ τῆς ἐξισώσεως τῆς ἐφαπτομένης.

103. Ἡ ἐξίσωσις (1) τῆς ἐφαπτομένης λαμβάνει διαφόρους μορφὰς κατὰ τὴν μορφήν, ἣν ἔχει ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης. Καὶ ἂν μὲν ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης εἶνε λελυμένη, ἤτοι τῆς μορφῆς $y=\sigma(x)$, θὰ εἶνε $dy=\sigma'(x)\,dx$ καὶ ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται

$$\Psi-y=\sigma'(x)\,(\mathrm{X}-x)$$

Ἂν δὲ ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης εἶνε ἄλυτος, ἤτοι τῆς μορφῆς

$$\sigma(x,y)=0$$

θὰ εἶνε (ἐδ. 79) καὶ $\sigma'(x,y)_x\cdot dx+\sigma'(x,y)_y\cdot dy=0$

ὅθεν ἕπεται $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\sigma'(x,y)_x}{\sigma'(x,y)_y}$

ὅθεν ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης γίνεται

$$(\mathrm{X}-x)\,\sigma'(x,y)_x+(\Psi-y)\,\sigma'(x,y)_y=0.$$

Σημειωτέον δέ, ὅτι πᾶσαι αὗται αἱ ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης μένουσιν αἱ αὐταί, εἴτε ὀρθογώνιοι εἶνε αἱ συντεταγμέναι εἴτε πλαγιογώνιοι.

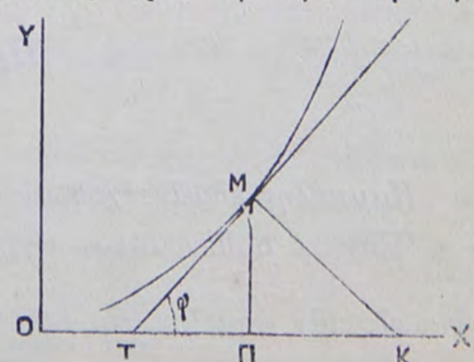
Ἐξίσωσις τῆς καθέτου.

104. Ἡ ἐξίσωσις τῆς καθέτου πρὸς τὴν καμπύλην εἰς τὸ σημεῖον M εὑρίσκεται εὐκόλως ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῆς ἐφαπτομένης καὶ εἶνε (τῶν ἀξόνων ὑποτιθεμένων ὀρθογωνίων)

$$(\mathrm{X}-x)\,dx+(\Psi-y)\,.\,dy=0.$$

Μεγέθη πρὸς τὴν ἐφαπτομένην συνδεόμενα καὶ διὰ τῆς παραγώγου ἐκφραζόμενα.

105. Ἐὰν ἐκ τῆς ἀφῆς M ἀχθῇ κάθετος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην, ἡ MK, καὶ ἡ τεταγμένη MΠ, τὸ μὲν μῆκος ΠK, ἤτοι τὸ μεταξὺ τεταγμένης καὶ καθέτου περιεχόμενον μέρος τοῦ ἄξονος OX, λέγεται *ὑποκάθετος*, τὸ δὲ ΠΤ, τουτέστι τὸ μεταξὺ τεταγμένης καὶ ἐφαπτομένης περιεχόμενον μέρος τοῦ αὐτοῦ ἄξονος, λέγεται ὑφα-



πτομένη· ἐπίσης λέγεται ἡ ΜΤ *ἐφαπτομένη*, ἡ δὲ ΜΚ *κάθετος* τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον Μ.

Τὰ μεγέθη τῶν τεσσάρων τούτων γραμμῶν εὑρίσκονται ὡς ἑξῆς (τῶν ἀξόνων ὑποτιθεμένων ὀρθογωνίων).

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΜΠΚ εὑρίσκομεν ΠΚ = ΠΜ . εφ φ

$$\text{ἤτοι} \quad \text{ΠΚ} = y \,.\, \frac{dy}{dx}, \qquad \text{διότι} \quad \text{εφ}\,\varphi = \frac{dy}{dx}$$

ἤτοι *ἡ ὑποκάθετος ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς τεταγμένης ἐπὶ τὴν παράγωγον αὐτῆς πρὸς τὴν x.*

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ τριγώνου ΜΠΤ $\quad \text{ΤΠ} = y\,\frac{dx}{dy}$

Ἐκ τῶν αὐτῶν τριγώνων εὑρίσκομεν πρὸς τούτοις

$$\text{ΜΚ} = \sqrt{y^2 + y^2\frac{dy^2}{dx^2}} \quad \text{ἢ} \quad \text{ΜΚ} = y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$$

$$\text{ΜΤ} = \sqrt{y^2 + y^2\frac{dx^2}{dy^2}} \quad \text{ἢ} \quad \text{ΜΤ} = y\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}$$

ΣΗΜ. Ἡ ἔκφρασις τῆς ὑφαπτομένης μένει ἡ αὐτὴ καὶ εἰς πλαγιογωνίους ἄξονας· διότι εἶνε $\quad \text{ΤΠ} = \text{ΤΟ} + \text{ΟΠ}$

καὶ ἐπειδὴ ἡ ΟΤ εἶνε ἡ τετμημένη τοῦ σημείου, ἔνθα ἡ ἐφαπτομένη τέμνει τὸν ἄξονα, εὑρίσκεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς καὶ εἶνε

$$\text{ΟΤ} = x - y\,\frac{dx}{dy} \quad \text{ὅθεν} \quad \text{ΤΠ} = y\,\frac{dx}{dy}$$

ΣΗΜ. Ἐὰν ὁ ποὺς Π τῆς τεταγμένης ληφθῇ ὡς ἀρχὴ τῆς ὑποκαθέτου ΠΚ, θὰ ἔχῃ τὸ τμῆμα ΠΚ τὴν θετικὴν μὲν φορὰν ΟΧ, ἐάν, αὐξανομένου τοῦ x, αὐξάνῃ καὶ ἡ τεταγμένη (κατ' ἀπόλυτον τιμήν), τὴν ἀρνητικὴν δέ, ἐὰν τοὐναντίον, διότι εἶνε $\text{ΠΚ} = \frac{1}{2}\,\frac{d(y^2)}{dx}$· ἡ δὲ ὑφαπτομένη ΠΤ ἔχει τὴν ἀντίθετον τῇ ὑποκαθέτῳ φοράν.

Πρὸς ἐφαρμογὴν τῶν προηγουμένων λύομεν τὰ ἑπόμενα προβλήματα (πρὸς ὀρθὰς συντεταγμένας).

Προβλήματα.

1ον

Καμπύλην εὑρεῖν ἔχουσαν ὑποκάθετον σταθεράν.

Ἐὰν τὸ δοθὲν μῆκος τῆς ὑποκαθέτου παρασταθῇ διὰ τοῦ α, θὰ εἶνε εἰς πᾶν σημεῖον τῆς καμπύλης $\quad y\,.\,\frac{dy}{dx} = \alpha. \qquad (\delta)$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη πρέπει νὰ ἀληθεύῃ εἰς πᾶν σημεῖον τῆς ζητουμένης καμπύλης· διὰ τοῦτο δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἐξίσωσις αὐτῆς. ἐπειδὴ δὲ περιέχει ἐκτὸς τῶν συντεταγμένων καὶ τὰ διαφορικὰ αὐτῶν, λέγεται *διαφορικὴ ἐξίσωσις* τῆς καμπύλης. Ἵνα δὲ ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὕρωμεν τὴν συνήθη ἐξίσωσιν τῆς καμπύλης, γράφομεν αὐτὴν ὡς ἕπεται

$$ydy = a.dx \quad \text{ἢ} \quad 2ydy = 2adx$$

$$\text{ἤτοι} \quad d(y^2) = d(2ax)$$

καὶ παρατηροῦμεν, ὅτι κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδ. (87) αἱ δύο συναρτήσεις y^2 καὶ $2ax$, μόνον κατὰ σταθερόν τινα ἀριθμὸν δύνανται νὰ διαφέρωσιν· ὥστε ἀνάγκη νὰ εἶνε

$$y^2 = 2ax + A$$

τοιαύτη εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς ζητουμένης καμπύλης· εἶνε δὲ ἡ καμπύλη, ὡς ἐκ τῆς ἐξισώσεως φαίνεται, παραβολὴ ἔχουσα ἄξονα τὸν ἄξονα τῶν x, καὶ κορυφὴν σημεῖόν τι οἱονδήποτε αὐτοῦ ἐξαρτώμενον ἐκ τοῦ σταθεροῦ ἀριθμοῦ A, παράμετρον δὲ τὸ μῆκος a· οἱαδήποτε δὲ καὶ ἂν εἶνε ἡ σταθερὰ ποσότης A, ἡ παραβολὴ ἔχει τὴν προταθεῖσαν ἰδιότητα, ὡς γίνεται φανερὸν ἐκ τῆς διαφορίσεως τῆς ἐξισώσεώς της.

2ον

Καμπύλην εὑρεῖν, τῆς ὁποίας ἡ κάθετος διέρχεται πάντοτε διὰ σημείου δοθέντος.

Ἐὰν τὸ δοθὲν σημεῖον ληφθῇ ὡς ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων, θὰ εἶνε εἰς πᾶν σημεῖον τῆς καμπύλης

$$xdx + ydy = 0$$

$$\text{ἤτοι} \quad d(x^2 + y^2) = 0$$

$$\text{καὶ ἑπομένως (ἐδ. 86)} \quad x^2 + y^2 = A$$

ἡ καμπύλη ἄρα εἶνε κύκλος ἔχων κέντρον τὸ δοθὲν σημεῖον.

3ον

Καμπύλην εὑρεῖν, ἧς τινος ἡ ἐφαπτομένη διέρχεται πάντοτε διὰ σημείου δοθέντος.

Ἐὰν καὶ πάλιν λάβωμεν τὸ δοθὲν σημεῖον ὡς ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων, θὰ εἶνε εἰς πᾶν σημεῖον τῆς καμπύλης

$$\frac{x}{dx} = \frac{y}{dy} \quad \text{ἢ} \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

$$\text{ὅθεν} \quad d(lx) = d(ly)$$

ἑπομένως $$ly = lx + \mathrm{A}$$

καὶ $$y = x\,e^{\mathrm{A}} = \mathrm{B}.x \qquad \text{ἐὰν τεθῇ} \quad e^{\mathrm{A}} = \mathrm{B}$$

ἤτοι τὸ ζητηθὲν συμβαίνει μόνον ἐν τῇ εὐθείᾳ γραμμῇ.

4ον

Καμπύλην εὑρεῖν, ἧς τινος ἡ κάθετος ἔχει δοθὲν μῆκος, τὸ α.

Εἰς πᾶν σημεῖον τῆς ζητουμένης καμπύλης θὰ εἶνε

$$y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} = a$$

ὅθεν $$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{a^2-y^2}{y^2} \quad \text{καὶ} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}$$

ὅθεν ἕπεται $$\frac{y\,dy}{\sqrt{a^2-y^2}} = dx$$

ἢ καὶ $$d\left(-\sqrt{a^2-y^2}\right) = dx$$

ἄρα $$-\sqrt{a^2-y^2} = x + \mathrm{A}$$

καὶ $$a^2 = y^2 + (x+\mathrm{A})^2,$$

ὥστε ἡ ζητουμένη καμπύλη εἶνε κύκλος ἔχων ἀκτῖνα a καὶ τὸ κέντρον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x.

5ον

Καμπύλην εὑρεῖν ἔχουσαν πανταχοῦ αὐτῆς ὑφαπτομένην τὴν αὐτὴν κατὰ τὸ μῆκος.

Ἐὰν παρασταθῇ τὸ σταθερὸν μῆκος τῆς ὑφαπτομένης διὰ τοῦ a, θὰ εἶνε εἰς πᾶν σημεῖον τῆς καμπύλης

$$y\frac{dx}{dy} = a$$

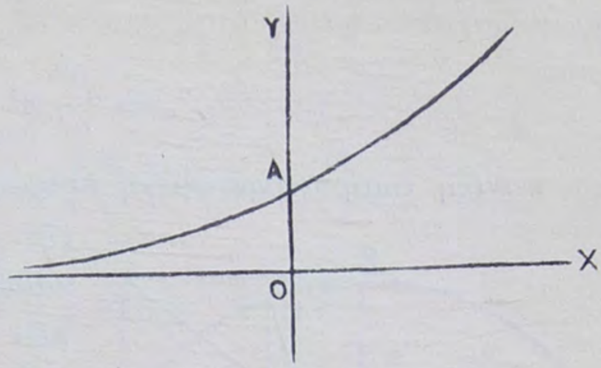
ἢ $$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{a}$$

ὅθεν $$d(ly) = d\left(\frac{x}{a}\right)$$

ἄρα $$ly = \frac{x}{a} + \mathrm{A}$$

καὶ $$y = e^{\frac{x}{a}}.e^{\mathrm{A}} = \mathrm{B}.e^{\frac{x}{a}}$$

Ἡ καμπύλη αὕτη ἔχει τὸ ἑπόμενον σχῆμα (ἔνθα Β(=ΟΑ) καὶ a ὑποτίθενται θετικὰ) ἔχει δὲ ἀσύμπτωτον τὸ ἀρνητικὸν μέρος τοῦ ἄξονος τῶν x.



Ἐπειδὴ δὲ ἡ παράγωγος εἶνε πάντοτε θετική, ἡ τεταγμένη αὐξάνει, ὅταν αὐξάνῃ ἡ x, τουτέστιν ἡ καμπύλη ἀναβαίνει διηνεκῶς πρὸς τὰ θετικὰ x.

6ον

Εὑρεῖν καμπύλην, ἐν ᾗ ἡ ὑφαπτομένη εἶνε ἀνάλογος τῆς τετμημένης.

Εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς ζητουμένης καμπύλης πρέπει νὰ εἶνε

$$y\frac{dx}{dy}=\frac{x}{a}.$$

ἤτοι
$$\frac{dy}{y}=a.\frac{dx}{x}$$

ἢ
$$d(ly)=a.d(lx)=d(alx)$$

ἄρα
$$ly=alx+\mathrm{A}$$

καὶ ἑπομένως
$$y=x^a e^{\mathrm{A}}=\mathrm{B}.x^a.$$

ΣΗΜ. Ὅταν $a=\frac{1}{2}$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $y^2=\Gamma x$, ἤτοι ἡ καμπύλη εἶνε παραβολὴ ἔχουσα ἄξονα τὸν ἄξονα τῶν x καὶ κορυφὴν τὴν ἀρχήν. Ὅταν $a=-1$ ἡ καμπύλη ἔχει τὴν ἐξίσωσιν $xy=\mathrm{B}$, ἤτοι εἶνε ὑπερβολὴ ἀναφερομένη πρὸς τὰς ἀσυμπτώτους αὐτῆς.

7ον

Πότε δύο καμπύλαι ἔχουσιν ἴσας ὑποκαθέτους ἢ ἴσας ὑφαπτομένας εἰς τὰ σημεῖα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν τετμημένην;

Ἐὰν δύο καμπύλαι ἔχωσιν ἴσας ὑποκαθέτους εἰς τὰ σημεῖα αὐτῶν τὰ ἔχοντα τετμημένην x, τεταγμένας δὲ y καὶ Y, θὰ εἶνε

$$y\frac{dy}{dx}=\varepsilon \mathrm{Y}\frac{d\mathrm{Y}}{dx}, \qquad \varepsilon^2=1.$$

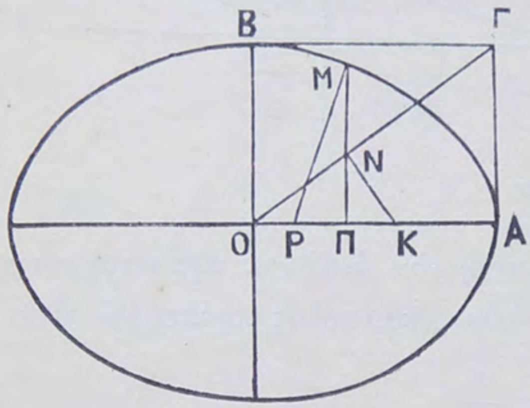
ὅθεν
$$\frac{d(y^2)}{dx}=\frac{d(\varepsilon \mathrm{Y}^2)}{dx}$$

καὶ ἑπομένως
$$y^2=\varepsilon \mathrm{Y}^2+\mathrm{A}.$$

Ἐὰν ὑποτεθῇ $Y = \frac{\beta}{\alpha} x$, τουτέστιν, ἂν ἡ μία γραμμὴ ὑποτεθῇ εὐθεῖα γραμμή, ἡ δευτέρα, ἡ ἴσην ὑποκάθετον ἔχουσα, θὰ εἶνε

$$y^2 = \varepsilon \frac{\beta^2}{\alpha^2} x^2 + A,$$

ἤτοι κωνικὴ τομὴ ἀναφερομένη πρὸς τὸ κέντρον καὶ τοὺς ἄξονας αὐτῆς· ἀνάγεται ἄρα ἡ κατασκευὴ τῆς καθέτου τῶν κωνικῶν τούτων τομῶν εἰς τὴν κατασκευὴν τῆς καθέτου πρὸς εὐθεῖαν γραμμήν· τὴν κατασκευὴν δεικνύει τὸ ἀπέναντι σχῆμα.



Ἐὰν δὲ δύο καμπύλαι ἔχωσιν ἴσας ὑφαπτομένας εἰς τὰ σημεῖα αὐτῶν, τὰ ἔχοντα τετμημένην μὲν x, τεταγμένας δὲ y καὶ Y, θὰ εἶνε

$$y \frac{dx}{dy} = \varepsilon . Y \frac{dx}{dY} \cdot \qquad \text{ἤτοι}$$

$$\frac{dy}{y} = \varepsilon \frac{dY}{Y} \cdot \qquad \text{ἢ} \quad d(ly) = d(\varepsilon l Y) \cdot$$

ὅθεν $\quad ly = \varepsilon l Y + A \quad$ καὶ ἂν τεθῇ $\quad A = lB,$

προκύπτει $\quad y = BY, \quad$ ἐὰν $\quad \varepsilon = +1$

καὶ $\quad y = \frac{B}{Y}, \quad$ ἐὰν $\quad \varepsilon = -1$

ἤτοι αἱ τεταγμέναι τῶν καμπύλων, αἵτινες ἔχουσιν ἴσας ὑφαπτομένας, εἶνε, ἢ ἀνάλογοι (ἂν αἱ ὑφαπτόμεναι ἔχωσι τὴν αὐτὴν φορὰν) ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογοι, (ἂν αἱ ὑφαπτόμεναι ἔχωσιν ἐναντίαν φοράν).

8ον

Εὑρεῖν καμπύλην ἔχουσαν ἐφαπτομένην σταθεράν.

Εἰς πᾶν σημεῖον τῆς ζητουμένης καμπύλης θὰ εἶνε

$$y \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}} = \alpha$$

ὅθεν $\quad \frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{\alpha^2 - y^2}}{y} \quad$ καὶ $\quad dx = \frac{dy}{y} \sqrt{\alpha^2 - y^2}$

Ἂν δὲ τεθῇ $y = a \, . \, \eta\mu \, \varphi$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται

$$dx = \frac{a \, \sigma\upsilon\nu^2 \varphi \, . \, d\varphi}{\eta\mu \, \varphi} = \frac{a d\varphi}{\eta\mu \, \varphi} - a \, \eta\mu \, \varphi \, . \, d\varphi$$

ἡ δὲ ἐξίσωσις αὕτη γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς (σελ. 60)

$$dx = d \left| a l \varepsilon\varphi \left(\frac{\varphi}{2} \right) + a \, \sigma\upsilon\nu \, \varphi \right|$$

ὅθεν ἕπεται $\quad x = a l \varepsilon\varphi \left(\frac{\varphi}{2} \right) + a \, \sigma\upsilon\nu \, \varphi + A.$

Τὴν σταθερὰν ποσότητα A δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ἴσην τῷ 0· διότι μεταφέροντες τὸν ἄξονα τῶν y παραλλήλως ἑαυτῷ αὐξάνομεν ἢ ἐλαττοῦμεν τὰς τετμημένας καθ' οἱονδήποτε θέλωμεν σταθερὸν ἀριθμόν· ἂν λοιπὸν λάβωμεν ὡς ἀρχὴν τὸ σημεῖον (A, 0), θὰ εἶνε $y = y'$ καὶ $x = x' + A$· ὅθεν

$$x' = a l \varepsilon\varphi \frac{\varphi}{2} + a \, \sigma\upsilon\nu \, \varphi.$$

Ἀπαλείφοντες τὴν βοηθητικὴν μεταβλητὴν φ μεταξὺ τῆς ἐξισώσεως ταύτης καὶ τῆς ἐξισώσεως $y = a \, \eta\mu \, \varphi$, θὰ εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ζητουμένης καμπύλης· ἀλλ' εἶνε προτιμότερον νὰ λάβωμεν τὰς δύο ἐξισώσεις

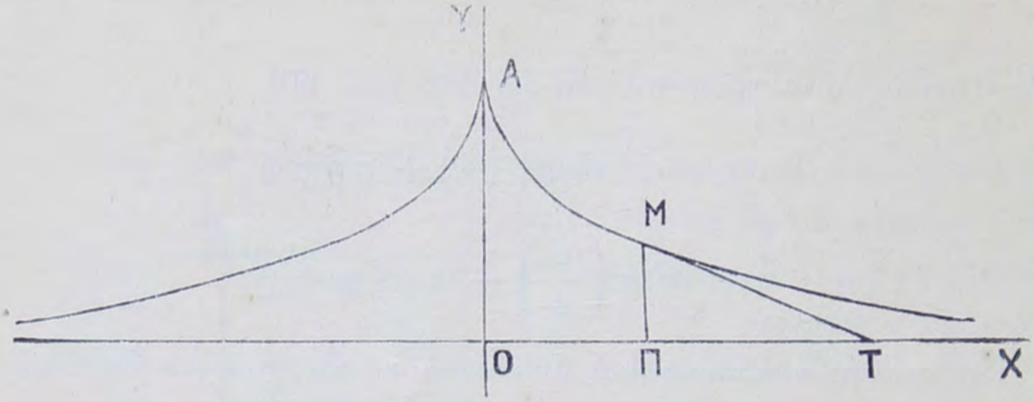
$$y = a \, \eta\mu \, \varphi$$

$$x = a \left(l \varepsilon\varphi \frac{\varphi}{2} + \sigma\upsilon\nu \, \varphi \right),$$

καὶ νὰ θεωρήσωμεν αὐτὰς ὡς ἐξισώσεις τῆς καμπύλης· διότι καὶ δι' αὐτῶν ὁρίζεται ἡ καμπύλη· διότι πρὸς ἑκάστην τιμὴν τοῦ φ ἀντιστοιχεῖ μία τιμὴ τοῦ x καὶ μία τοῦ y, τουτέστιν ἓν σημεῖον τῆς καμπύλης· δίδοντες λοιπὸν εἰς τὸ φ πάσας τὰς δυνατὰς τιμὰς θὰ λάβωμεν πάντα τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης. Σημειωτέον δέ, ὅτι ἡ βοηθητικὴ μεταβλητὴ φ σημαίνει τὴν γωνίαν, ἣν σχηματίζει ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x· διότι ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}$ προκύπτει, ἐὰν τεθῇ $y = a \, \eta\mu \, \varphi$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a \, \sigma\upsilon\nu \, \varphi}{a \, \eta\mu \, \varphi}, \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{dy}{dx} = \varepsilon\varphi \, \varphi.$$

Τὴν καμπύλην ταύτην ὀνομάζουσιν *ἑλκομένην*· ἔχει δὲ τὸ ἑπόμενον σχῆμα. Εἰς τὸ σημεῖον Α εἶνε $\varphi = \frac{\pi}{2}$ · καὶ τὰ μὲν σημεῖα τοῦ ἀρι-



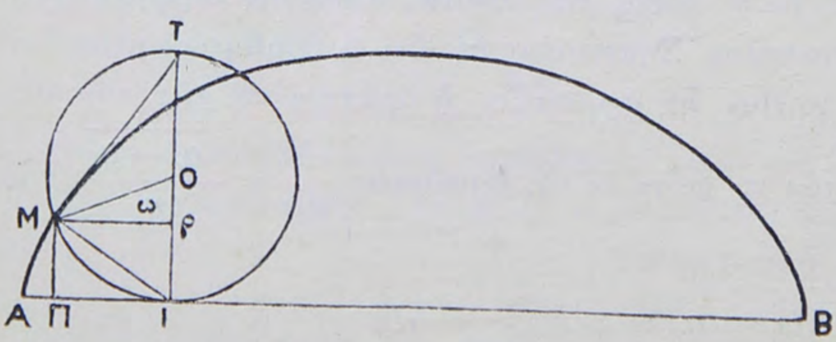
στεροῦ κλάδου ἀντιστοιχοῦσι πρὸς τὰς τιμὰς $\frac{\pi}{2} \ldots 0$, τὰ δὲ σημεῖα τοῦ δεξιοῦ πρὸς τὰς τιμὰς $\frac{\pi}{2} \ldots \pi$.

9ον

Εὑρεῖν τὴν ἐφαπτομένην τῆς κυκλοειδοῦς εἰς τὸ τυχὸν αὐτῆς σημεῖον Μ.

Κυκλοειδὴς λέγεται ἡ καμπύλη, ἥτις γράφεται ὑπὸ σημείου περιφερείας, ὅταν ἡ περιφέρεια κυλίηται ἐπὶ εὐθείας.

Λέγεται δέ, ὅτι καμπύλη τις κυλίεται ἐπὶ ἄλλης ἀκινήτου μενούσης, ὅταν ἐφάπτηται πάντοτε αὐτῆς καὶ ἡ ἁφὴ διαγράφῃ ἐπ᾽ ἀμφοτέρων τῶν καμπύλων ἴσα τόξα. Ἐὰν δηλονότι Μ καὶ Μ′ εἶνε δύο τυχόντα σημεῖα τῆς κυλιομένης καὶ Ν, Ν′ τὰ ἀντίστοιχα τῆς ἀκινήτου, (ἐκεῖνα ἐφ᾽ ὧν πίπτουσι τὰ Μ καὶ Μ′ κατὰ τὴν κίνησιν), θὰ εἶνε πάντοτε τοξ ΜΜ′ = τοξ ΝΝ′.



Ἐὰν ἡ εὐθεῖα, ἐφ᾽ ἧς κυλίεται ἡ περιφέρεια, ληφθῇ ὡς ἄξων τῶν x καὶ τὸ σημεῖον αὐτῆς Α, ἐφ᾽ ὃ ἐφαρμόζει τὸ τὴν καμπύλην γράφον σημεῖον τῆς περιφερείας, ὡς ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων, αἱ συντεταγμέναι x, y τοῦ τυχόντος σημείου τῆς κυκλοειδοῦς ἐκφράζονται εὐκόλως διὰ τῆς γωνίας ω, ἣν σχηματίζουσιν ἡ ἀκτὶς τῆς ἐπαφῆς ΟΙ καὶ ἡ ἀκτὶς ΟΜ, τῆς ὁποίας τὸ ἄκρον Μ γράφει τὴν καμπύλην· εἶνε δὲ (ἰδὲ Ἀν. ἐδ. 551).

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= a\,(\omega - \text{ημ}\,\omega) \\ y &= a\,(1 - \text{συν}\,\omega) \end{aligned} \qquad a = \text{ΟΙ}$$

Ἐκ τούτων, θεωροῦντες ἀμφότερα τὰ x καὶ y, ὡς συναρτήσεις τῆς γωνίας ω, εὑρίσκομεν

$$(2) \qquad \begin{aligned} dx &= a\,(1 - \text{συν}\,\omega)d\omega \\ dy &= a\,\text{ημ}\,\omega\,.\,d\omega \end{aligned}$$

ἐκ δὲ τούτων $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a\,\text{ημ}\,\omega}{a(1 - \text{συν}\,\omega)} = \dfrac{a\,\text{ημ}\,\omega}{y}$

ὅθεν $y\dfrac{dy}{dx} = a\,\text{ημ}\,\omega$

Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΜΡ εὑρίσκομεν

$$\text{ΜΡ} = a\,\text{ημ}\,\omega \qquad \text{καὶ ἐπειδὴ} \qquad \text{ΜΡ} = \text{ΠΙ},$$

ἕπεται $y\dfrac{dy}{dx} = \text{ΠΙ}.$

Ἡ τιμὴ αὕτη τῆς ὑποκαθέτου δεικνύει, ὅτι ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν καμπύλην κατὰ τὸ σημεῖον Μ διέρχεται διὰ τοῦ ἀντιστοίχου σημείου τῆς ἀφῆς Ι, (ὅπερ εἶνε γενικὸν ἰδίωμα τῶν κυλισιγενῶν καμπύλων) (Ἀν. Γεωμ. ἐδ. 534)· ἤτοι εἶνε ἡ ΜΙ· ἑπομένως ἡ ἐφαπτομένη θὰ εἶνε ἡ ΜΤ (παράβλ. ἀναλ. γεωμετρίαν ἐδ. 554).

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (2) συνάγεται πρὸς τούτοις

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{ημ}\,\omega}{1 - \text{συν}\,\omega} = \frac{2\,\text{ημ}\,\dfrac{\omega}{2}\;\text{συν}\,\dfrac{\omega}{2}}{2\,\text{ημ}^2\,\dfrac{\omega}{2}} = \text{σφ}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

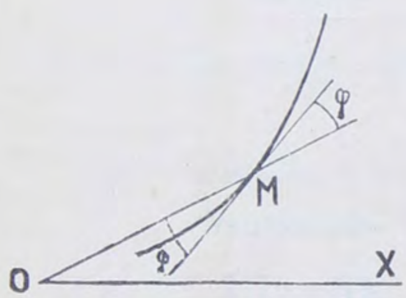
καὶ ἂν ἡ γωνία τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x παρασταθῇ διὰ φ, θὰ εἶνε $\quad \text{εφ}\,\varphi = \text{σφ}\left(\dfrac{\omega}{2}\right) \quad$ ἄρα $\quad \varphi = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\omega}{2}$

ὅπερ καὶ ἐκ τοῦ σχήματος εὑρίσκεται εὐκολώτατα· διότι τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΜΡΤ ἡ μὲν γωνία Μ εἶνε ἴση τῇ φ, ἡ δὲ Τ ἴση τῇ $\dfrac{\omega}{2}$.

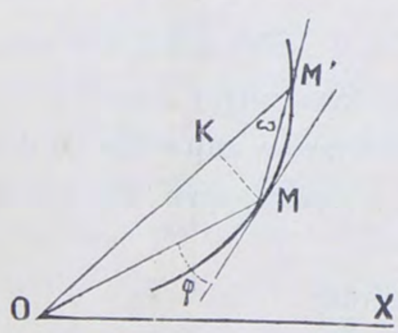
ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΩΝ ΠΟΛΙΚΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Ἐὰν δύο ἀπ' ἀλλήλων ἐξαρτώμεναι μεταβληταὶ παρασταθῶσιν ὡς πολικαὶ συντεταγμέναι σημείου τινὸς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ καὶ σημειωθῶσιν (ὡς γίνεται συνήθως) διὰ τῶν γραμμάτων ϱ καὶ ϑ, τὴν μὲν ἐξάρτησιν αὐτῶν παριστᾷ καὶ πάλιν καμπύλη τις (ἐν γένει), ἡ δὲ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης ταύτης εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς Μ (ϱ, ϑ) εὑρίσκεται ἐκ τῶν συντεταγμένων ϱ, ϑ τῆς ἀφῆς καὶ ἐκ τῶν διαφορικῶν αὐτῶν ὡς ἑξῆς·

106. Ἡ ἐφαπτομένη πάσης καμπύλης προσδιορίζεται ἐκ τῆς γωνίας, ἣν σχηματίζει πρὸς τὴν πολικὴν ἀκτῖνα, τὴν εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς καταλήγουσαν· θεωρεῖται δὲ ἐν τῷ ὁρισμῷ τῆς γωνίας ταύτης, ἣν παριστῶμεν διὰ τοῦ φ, τῆς μὲν πολικῆς ἀκτῖνος ἀρχὴ πάντοτε ὁ πόλος· ἑπομένως φορὰ ἡ πρὸς τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς· τῆς δὲ ἐφαπτομένης ἀρχὴ μὲν ἡ ἀφή, φορὰ δὲ ἡ πρὸς τὸ τόξον, ἐν ᾧ αὐξάνουσιν αἱ πολικαὶ γωνίαι.



Ἔστω ΜΜ΄ τυχοῦσα χορδὴ τῆς καμπύλης καὶ συντεταγμέναι τοῦ μὲν Μ ἔστωσαν αἱ ϱ, ϑ, τοῦ δὲ Μ΄ αἱ $\varrho + \Delta\varrho$, $\vartheta + \Delta\vartheta$. ($\Delta\varrho$ καὶ $\Delta\vartheta$ σημαίνουσι τὰς μεταβολὰς τῶν συντεταγμένων κατὰ τὴν μετάβασιν ἀπὸ τοῦ σημείου Μ εἰς τὸ Μ΄)· ἐὰν ἐκ τοῦ Μ καταβιβάσωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΜ΄, γίνεται ὀρθογώνιον τρίγωνον, τὸ ΜΜ΄Κ, ἐξ οὗ εὑρίσκομεν



$$MK = KM'.\,\text{εφ}\,\omega \tag{1}$$

Ἀλλὰ καὶ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΜΚ εὑρίσκομεν

$$MK = OM.\,\text{ημ}\,\Delta\vartheta = \varrho(\Delta\vartheta - \mu\Delta\vartheta^3) \qquad (\text{ἐδ. } 58)$$

$$KM' = OM' - OK = \varrho + \Delta\varrho - \varrho\,\text{συν}\,\Delta\vartheta = \Delta\varrho + \varrho(1 - \text{συν}\,\Delta\vartheta)$$

ἤτοι

$$KM' = \Delta\varrho + \varrho\nu\Delta\vartheta^2$$

ὥστε ἡ ἰσότης (1) γίνεται $\quad \Delta\varrho + \nu\varrho\Delta\vartheta^2 = \varrho(\Delta\vartheta - \mu\Delta\vartheta^3).\,\text{σφω}$

ἢ καὶ

$$\frac{\Delta\varrho}{\Delta\vartheta} + \nu\varrho\Delta\vartheta = \varrho(1 - \mu\Delta\vartheta^2).\,\text{σφω}.$$

Ἀλλ' ὅταν τὸ σημεῖον Μ΄ τείνῃ νὰ συμπέσῃ μετὰ τοῦ Μ, ἡ μὲν γωνία $\Delta\vartheta$ τείνει πρὸς τὸ 0, ἡ δὲ τέμνουσα ΜΜ΄ τείνει νὰ συμπέσῃ μετὰ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ Μ· ἡ δὲ γωνία ω τείνει νὰ κατασταθῇ ἴση τῇ τῇ γωνίᾳ φ· ὅθεν ἡ ἐξίσωσις αὕτη καταντᾷ

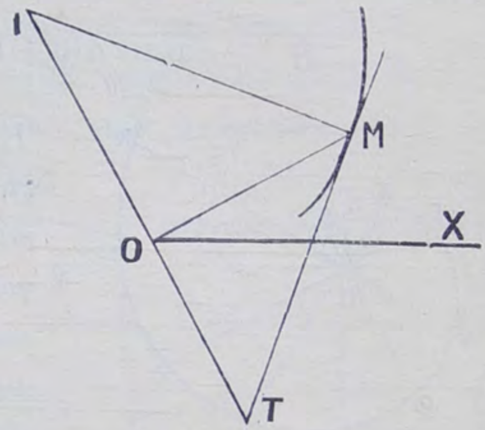
$$\frac{d\varrho}{d\vartheta} = \varrho\,.\,\sigma\varphi\varphi \qquad \text{ὅθεν} \quad \sigma\varphi\varphi = \frac{d\varrho}{\varrho d\vartheta} \qquad \text{καὶ} \quad \varepsilon\varphi\,\varphi = \frac{\varrho d\vartheta}{d\varrho} \qquad (1)$$

ἐκ δὲ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ὁρίζεται ἡ γωνία φ· ἄρα καὶ ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἰς τὸ Μ.

ΣΗΜ. Καὶ διὰ τῆς ἀλλαγῆς τῶν συντεταγμένων εὑρίσκεται ὁ τύπος (1) εὐκόλως.

Πολικὴ ὑποκάθετος, ὑφαπτομένη, κτλ.

107. Ἐὰν ἐκ τοῦ πόλου Ο ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν πολικὴν ἀκτῖνα ἡ ΟΙΤ, καὶ τέμνῃ τὴν μὲν ἐφαπτομένην κατὰ τὸ Τ, τὴν δὲ κάθετον πρὸς τὴν καμπύλην κατὰ τὸ Ι, τὸ μῆκος ΟΙ λέγεται *πολικὴ ὑποκάθετος*, τὸ δὲ ΟΤ, *πολικὴ ὑφαπτομένη*. Ὁμοίως λέγεται ἡ ΜΙ *πολικὴ κάθετος*, ἡ δὲ ΜΤ *πολικὴ ἐφαπτομένη*.



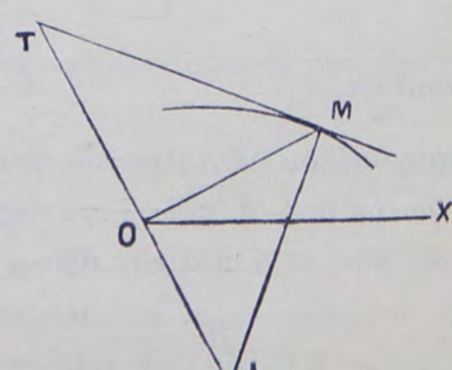
Τὰ μήκη τῶν τεσσάρων τούτων γραμμῶν εὑρίσκονται εὐκόλως ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΜΤ καὶ ΟΜΙ, εἶνε δὲ

$$\mathrm{OI} = \frac{d\varrho}{d\vartheta}, \quad \mathrm{OT} = \frac{\varrho^2 d\vartheta}{d\varrho}$$

$$\mathrm{MI} = \sqrt{\varrho^2 + \frac{d\varrho^2}{d\vartheta^2}}, \quad \mathrm{MT} = \varrho\sqrt{1 + \varrho^2\frac{d\vartheta^2}{d\varrho^2}}$$

Ἐκ τῶν τιμῶν τούτων βλέπομεν, ὅτι ἡ παράγωγος $\frac{d\varrho}{d\vartheta}$ *παρίσταται ἐνταῦθα διὰ τῆς ὑποκαθέτου.*

ΣΗΜ. Τὸ σημεῖον τῆς παραγώγου $\frac{d\varrho}{d\vartheta}$ δεικνύει τὴν φοράν, καθ' ἣν πρέπει νὰ στραφῇ ἡ πολικὴ ἀκτίς, ἵνα γράψασα 90^0 ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ὑποκαθέτου· διότι, ἂν μὲν αὐξανομένου τοῦ ϑ αὐξάνῃ καὶ τὸ ϱ, (ἂν δηλαδὴ ἡ παράγωγος $\frac{d\varrho}{d\vartheta}$ εἶνε θετική), ἡ ὑποκάθετος ἔχει τὴν ἐν τῷ προηγουμένῳ σχήματι δεικνυομένην θέσιν· ἂν δὲ τοὐναντίον, αὐξανομένου τοῦ ϑ ἐλαττοῦται τὸ ϱ, (ὅτε ἡ παράγωγος εἶνε ἀρνητική), ἡ ὑποκάθετος ἔχει τὴν ἐν τῷ ἀπέναντι σχήματι σημειουμένην θέσιν.



Προβλήματα.

1ον

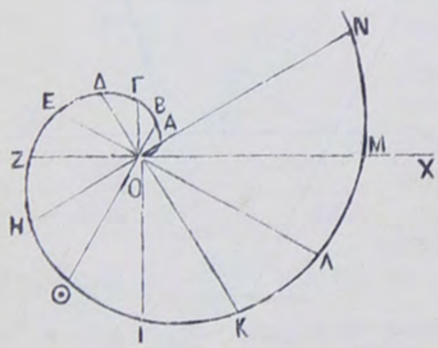
Καμπύλην εὑρεῖν, ἧς τινος ἡ ὑποκάθετος εἶνε ἴση τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

Ἐὰν παρασταθῇ διὰ τοῦ a τὸ μῆκος τῆς δοθείσης εὐθείας, θὰ εἶνε εἰς πᾶν σημεῖον τῆς καμπύλης·

$$\frac{d\varrho}{d\vartheta}=a, \quad \text{ἤτοι} \quad d\varrho=a d\vartheta=d(a\vartheta)$$

ἐπομένως $$\varrho=a\vartheta+\mathrm{A}$$

ἢ $$\varrho=a(\vartheta+\mathrm{B}) \quad \text{ἔνθα} \quad \mathrm{B}=\frac{\mathrm{A}}{a}$$



Ἐπειδὴ δὲ ἡ καμπύλη οὐδεμίαν μεταβολὴν πάσχει, ἐὰν ὁ πολικὸς ἄξων στραφῇ κατὰ γωνίαν ἴσην τῇ Β, ὅτε αἱ πολικαὶ γωνίαι τῶν σημείων αὐτῆς αὐξάνουσι πᾶσαι κατὰ Β, ἕπεται, ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης πρὸς τὸν νέον πολικὸν ἄξονα εἶνε $$\varrho=a\vartheta.$$

καὶ ἡ καμπύλη εἶνε ἐπομένως ἡ ἕλιξ τοῦ Ἀρχιμήδους (Ἐπιπέδου Ἀναλ. ἐδ. 513).

2ον

Καμπύλην εὑρεῖν, ἐν ᾗ ἡ ὑφαπτομένη εἶνε ἴση τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

Εἰς πᾶν σημεῖον τῆς καμπύλης ταύτης θὰ εἶνε $\dfrac{\varrho^2 d\vartheta}{d\varrho}=a$

ἔνθα a εἶνε τὸ μῆκος τῆς δοθείσης εὐθείας·

Ἐντεῦθεν ἕπεται $d\vartheta=\dfrac{a d\varrho}{\varrho^2}$ ἢ $d\vartheta=d\left(-\dfrac{a}{\varrho}\right)$

ἐπομένως $$\vartheta+\mathrm{A}=-\frac{\alpha}{\varrho}$$

στρεφομένου δὲ πάλιν τοῦ πολικοῦ ἄξονος κατὰ τὴν γωνίαν Α, γίνεται ἡ γωνία $\vartheta+\mathrm{A}$ πολικὴ γωνία, καὶ ἐπομένως ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης πρὸς τὸν νέον πολικὸν ἄξονα εἶνε

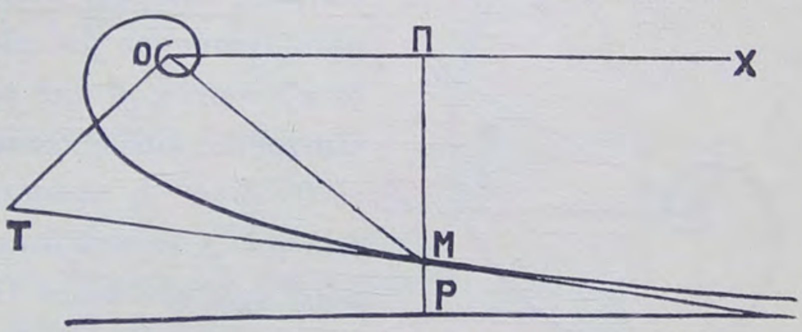
$$\vartheta=-\frac{a}{\varrho}, \qquad \text{ἢ} \qquad \varrho=-\frac{a}{\vartheta}.$$

Ἡ γωνία ϑ ἀνάγκη νὰ λαμβάνῃ μόνον ἀρνητικὰς τιμάς· εἰς τὰς μικρὰς τιμὰς τῆς ϑ ἀντιστοιχοῦσι τιμαὶ τοῦ ρ τόσῳ μεγαλήτεραι, ὅσῳ μικρότεραι εἶνε αἱ τιμαὶ τῆς ϑ· καὶ ὑπερβαίνουσι πᾶν μέγεθος, ὅταν ἡ γωνία ϑ γίνηται ἱκανῶς μικρά· αὐξανομένης δὲ τῆς ϑ, ἐλαττοῦται τὸ ρ καὶ τείνει πρὸς τὸ 0· διὰ τοῦτο ἡ καμπύλη ἐκτελεῖ ἀπείρους ἑλιγμοὺς περὶ τὸν πόλον O, πλησιάζουσα ἀπαύστως πρὸς αὐτόν, ἀλλ' οὐδέποτε φθάνουσα. Ὁ πόλος λέγεται διὰ τοῦτο *ἀσύμπτωτον σημεῖον* τῆς καμπύλης· ἡ δὲ καμπύλη, ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῆς ἐξισώσεώς της πρὸς τὴν ἐξίσωσιν τῆς ὑπερβολῆς, λέγεται *ὑπερβολικὴ ἕλιξ*.

Ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης ταύτης κατασκευάζεται ἐκ τῆς ὑφαπτομένης, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος εἶνε σταθερὸν καὶ ἴσον τῷ a.

Ἐὰν ὑπὸ τὸν πολικὸν ἄξονα OX ἀχθῇ παράλληλος αὐτῷ εἰς ἀπόστασιν a ἀπ' αὐτοῦ, ἡ παράλληλος αὕτη εἶνε ἀσύμπτωτος τοῦ εἰς ἄπειρον ἐκτεινομένου τόξου τῆς καμπύλης.

Ἔστω τῷ ὄντι M τυχὸν σημεῖον τοῦ τόξου τούτου, y ἡ τεταγμένη αὐτοῦ καὶ MP ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τῆς παραλλήλου εὐθείας· τότε εἶνε



$$PM = P\Pi - M\Pi,$$

ἢ $PM = a + y$

καὶ ἐπειδὴ

$$y = \rho\,\eta\mu\,\vartheta = -\frac{\eta\mu\,\vartheta}{\vartheta}, \quad \text{ἕπεται} \quad PM = a - a\frac{\eta\mu\,\vartheta}{\vartheta} = a\left(1 - \frac{\eta\mu\,\vartheta}{\vartheta}\right).$$

ὅθεν βλέπομεν, ὅτι τὸ ὅριον τῆς ἀποστάσεως PM εἶνε 0 (διὰ $\vartheta = 0$), ἑπομένως ἡ AB εἶνε ἀσύμπτωτος τῆς καμπύλης.

3ον

Καμπύλην εὑρεῖν, ἐν ᾗ ἡ πολικὴ ἀκτὶς σχηματίζει πρὸς τὴν ἐφαπτομένην γωνίαν ἀμετάβλητον φ.

Εἰς πᾶν σημεῖον τῆς καμπύλης θὰ εἶνε

$$\sigma\varphi\,\varphi = \frac{d\rho}{\rho d\vartheta}$$

καὶ ἂν μὲν ἡ δοθεῖσα γωνία φ εἶνε ὀρθή, θὰ εἶνε $\sigma\varphi\varphi = 0$, ἄρα $d\rho = 0$, ἤτοι $\rho =$ σταθερ. ἑπομένως ἡ καμπύλη εἶνε περιφέρεια κύκλου.

ἂν δὲ ἡ δοθεῖσα γωνία διαφέρῃ τῆς ὀρθῆς, ἂς παρασταθῇ ἡ συνεφαπτομένη αὐτῆς διὰ τοῦ μ· τότε θὰ εἶνε

$$\mu = \frac{d\varrho}{\varrho d\vartheta} \quad \text{ἢ} \quad \frac{d\varrho}{\varrho} = \mu d\vartheta,$$

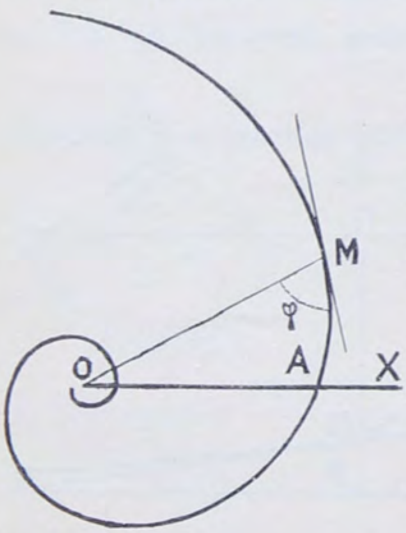
ἤτοι $$d(l\varrho) = d(\mu\vartheta),$$

ἑπομένως $$l\varrho = \mu\vartheta + \mathrm{A} = \mu(\vartheta + \mathrm{B}), \quad \text{ἔνθα} \quad \mathrm{B} = \frac{\mathrm{A}}{\mu}\cdot$$

στρεφομένου δὲ τοῦ πολικοῦ ἄξονος κατὰ τὴν γωνίαν B, γίνεται, ὡς καὶ ἐν τοῖς προηγουμένοις ζητήμασιν, ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης

$$l\varrho = \mu\vartheta \quad \text{ἢ} \quad \varrho = e^{\mu\vartheta}.$$

Αὐξανομένης τῆς ϑ ἀπὸ τοῦ 0 ἀπαύστως, αὐξάνει καὶ ἡ ἀκτὶς ρ ἀπὸ τῆς μονάδος 1 καὶ ἑξῆς ἀπαύστως· ἑπομένως ἡ καμπύλη ἄρχεται ἐκ τοῦ σημείου A τοῦ ἄξονος (OA = 1) καὶ ἐκτελεῖ ἀπείρους ἑλιγμοὺς περὶ τὸν πόλον O, ἀπομακρυνομένη ἀπαύστως ἀπ' αὐτοῦ. Ἐλαττουμένης δὲ τῆς γωνίας ϑ ἀπὸ τῆς τιμῆς 0 καὶ ἑξῆς, ἐλαττοῦται καὶ ἡ ἀκτὶς ρ καὶ τείνει πρὸς τὸ 0· ὥστε ἡ προσεκβολὴ τῆς καμπύλης ἀπὸ τοῦ A ἐκτελεῖ ὡσαύτως ἀπείρους ἑλιγμοὺς περὶ τὸν πόλον O (ἐν ἀρνητικῇ περιφορᾷ), πλησιάζουσα ἀπαύστως πρὸς αὐτόν, ἀλλ' οὐδέποτε φθάνουσα. Ὁ πόλος εἶνε ἑπομένως *ἀσύμπτωτον σημεῖον* τῆς καμπύλης ταύτης, ἥτις λέγεται *λογαριθμικὴ ἕλιξ* (διὰ τὴν ἐξίσωσιν αὐτῆς).



4ον

Πότε δύο καμπύλαι ἔχουσι τὴν αὐτὴν ὑποκάθετον εἰς τὰ σημεῖα αὐτῶν τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν πολικὴν γωνίαν;

Ἐὰν δύο καμπύλαι ἔχωσιν ἴσας ὑποκαθέτους εἰς τὰ σημεῖα αὐτῶν τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν πολικὴν γωνίαν ϑ, ἀκτῖνας δὲ ρ καὶ P, θὰ εἶνε

$$\frac{d\varrho}{d\vartheta} = \frac{d\mathrm{P}}{d\vartheta}, \quad \text{ἤτοι} \quad d\varrho = d\mathrm{P},$$

ἄρα $$\mathrm{P} = \varrho + \mathrm{A},$$

τουτέστιν αἱ ἀντιστοιχοῦσαι πολικαὶ ἀκτῖνες αὐτῶν διαφέρουσι κατὰ σταθερὰν ποσότητα, τοῦτο δὲ καὶ ἀρκεῖ.

Κατὰ ταῦτα, ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου ἄγωμεν εὐθείας εἰς οἱανδήποτε καμπύλην καὶ αὐξάνωμεν ἢ ἐλαττῶμεν αὐτὰς πάσας κατὰ δοθεῖσαν γραμμήν, τὰ ἄκρα τῶν εὐθειῶν τούτων ἔχουσι τόπον καμπύλην τινά, ἔχουσαν τὰς αὐτὰς τῇ πρώτῃ ὑποκαθέτους εἰς τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα αὐτῆς.

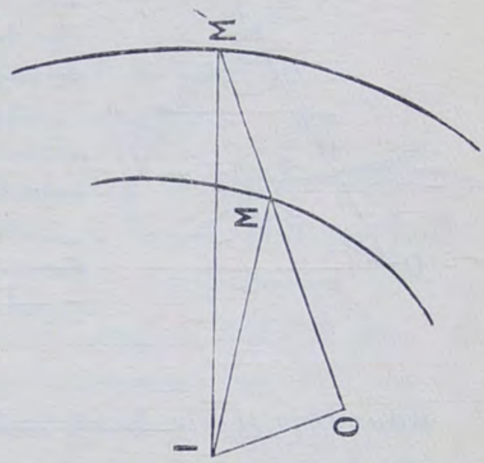
Αἱ οὕτω προκύπτουσαι καμπύλαι λέγονται *κογχοειδεῖς* τῆς καμπύλης, ἐξ ἧς γίνονται· εὑρίσκεται δὲ ἡ κάθετος (ἑπομένως καὶ ἡ ἐφαπτομένη) αὐτῶν ἐκ τῆς καθέτου τῆς ἀρχικῆς καμπύλης διὰ τῆς προειρημένης ἰδιότητος· τὴν κατασκευὴν δεικνύει τὸ ἑπόμενον σχῆμα.

ΣΗΜ. Ἐὰν ἐκ τῶν πολικῶν ἀκτίνων ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3,.. ὁσωνδήποτε καμπύλων, τῶν εἰς τὴν αὐτὴν πολικὴν γωνίαν ἀντιστοιχουσῶν, συντίθηται ἡ πολικὴ ἀκτὶς Ρ καμπύλης τινὸς οὕτως, ὥστε νὰ εἶνε

$$\mathrm{P} = \alpha_1 \varrho_1 + \alpha_2 \varrho_2 + \alpha_3 \varrho_3 + \ldots,$$

τῶν α_1, α_2, α_3,.. ὄντων σταθερῶν ἀριθμῶν, ἡ ὑποκάθετος τῆς νέας καμπύλης συντίθεται ὁμοίως ἐκ τῶν ὑποκαθέτων τῶν ἐξ ὧν γίνεται καμπύλων· διότι εἶνε

$$\frac{d\mathrm{P}}{d\vartheta} = \alpha_1 \frac{d\varrho_1}{d\vartheta} + \alpha_2 \frac{d\varrho_2}{d\vartheta} + \alpha_3 \frac{d\varrho_3}{d\vartheta} + \ldots$$



5ον

Πότε δύο καμπύλαι ἔχουσιν ἴσας ὑφαπτομένας εἰς τὰ σημεῖα αὐτῶν τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν πολικὴν γωνίαν;

Ἐὰν δύο καμπύλαι ἔχωσιν ἴσας ὑφαπτομένας εἰς τὰ σημεῖα αὐτῶν τὰ ἔχοντα πολικὴν γωνίαν ϑ καὶ ἀκτῖνας ϱ καὶ Ρ, θὰ εἶνε

$$\varrho^2 \frac{d\vartheta}{d\varrho} = \mathrm{P}^2 \frac{d\vartheta}{d\mathrm{P}}, \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{d\varrho}{\varrho^2} = \frac{d\mathrm{P}}{\mathrm{P}^2},$$

ὅθεν $d\left(\frac{1}{\varrho}\right) = d\left(\frac{1}{\mathrm{P}}\right)$ καὶ ἑπομένως $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\mathrm{P}} + \mathrm{A}$,

τουτέστι τὰ ἀντίστροφα τῶν ἀκτίνων αὐτῶν πρέπει νὰ ἔχωσι διαφορὰν σταθεράν· τοῦτο δὲ ἀρκεῖ.

6ον

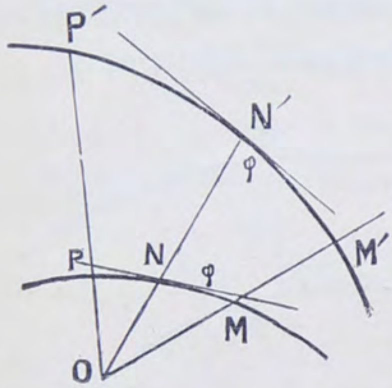
Πότε αἱ ἐφαπτόμεναι δύο καμπύλων, εἰς τὰ σημεῖα αὐτῶν τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν πολικὴν γωνίαν, σχηματίζουσι πρὸς τὴν πολικὴν ἀκτῖνα γωνίας παραπληρωματικάς;

Ἐὰν τοῦτο συμβαίνῃ εἰς τὰ σημεῖα δύο καμπύλων τὰ ἔχοντα πολικὴν γωνίαν τὴν ϑ, πολικὰς δὲ ἀκτῖνας τὰς ϱ καὶ Ρ, θὰ εἶνε

$$\frac{\varrho d\vartheta}{d\varrho} = -\frac{\mathrm{P}d\vartheta}{d\mathrm{P}}, \qquad \text{ὅθεν} \quad \frac{d\varrho}{\varrho} + \frac{d\mathrm{P}}{\mathrm{P}} = 0,$$

ἢ $d(l\varrho) + d(l\mathrm{P}) = 0$ ἢ $d\, l(\varrho \mathrm{P}) = 0$, ἄρα $\varrho . \mathrm{P} = \mathrm{A}$, τουτέστι τὸ ὀρθογώνιον τῶν ἀντιστοιχουσῶν ἀκτίνων τῶν δύο καμπύλων πρέπει νὰ εἶνε σταθερόν, ἤτοι αἱ ἀντίστοιχοι ἀκτῖνες πρέπει νὰ εἶνε ἀντίστροφοι· τοῦτο δὲ ἀρκεῖ.

ΣΗΜ. Ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου Ο ἄγωνται εὐθεῖαι εἰς καμπύλην καὶ ἐφ' ἑκάστης τῶν εὐθειῶν τούτων ΟΜ λαμβάνηται σημεῖόν τι Μ′ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶνε $\mathrm{OM}.\mathrm{OM}' = \alpha^2$, ἡ καμπύλη, τὴν ὁποίαν τὰ σημεῖα Μ′ ἔχουσι τόπον, λέγεται *μετεσχηματισμένη* τῆς πρώτης *διὰ τῶν ἀντιστρόφων ἀκτίνων* ὅτι δὲ καὶ ἡ πρώτη εἶνε μετεσχηματισμένη τῆς δευτέρας εἶνε πρόδηλον



Ἡ ἐξ ἑνὸς οἱουδήποτε σχήματος παραγωγὴ ἄλλου διὰ τοῦ εἰρημένου τρόπου λέγεται *μετασχηματισμὸς διὰ τῶν ἀντιστρόφων ἀκτίνων.*

Εἶνε δὲ εὔκολον νὰ ἴδῃ τις, ὅτι ἡ γωνία δύο οἱωνδήποτε καμπύλων εἶνε ἴση τῇ γωνίᾳ τῶν μετεσχηματισμένων αὐτῶν διὰ τῶν ἀντιστρόφων ἀκτίνων.

7ον

Καμπύλην εὑρεῖν, ἐν τῇ ὁποίᾳ ἡ γωνία τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τὴν πολικὴν ἀκτῖνα νὰ εἶνε ἀνάλογος τῆς πολικῆς γωνίας.

Εἰς πᾶν σημεῖον τῆς ζητουμένης καμπύλης θὰ εἶνε

$$\varphi = \mu\vartheta, \qquad \text{ὅθεν καὶ} \qquad \text{εφ}\,\varphi = \text{εφ}\,(\mu\vartheta),$$

ἤτοι

$$\frac{\varrho d\vartheta}{d\varrho} = \text{εφ}\,(\mu\vartheta),$$

ἐντεῦθεν ἕπεται $\dfrac{d\varrho}{\varrho} = \dfrac{d\vartheta}{\text{εφ}\,(\mu\vartheta)}$ καὶ $\mu . \dfrac{d\varrho}{\varrho} = \dfrac{d\,(\mu\vartheta)}{\text{εφ}\,(\mu\vartheta)}$,

ἢ (σελ. 60) $d\,(\mu l\varrho) = d\,\{ l\,\text{ημ}\,(\mu\vartheta) \}$,

ἄρα $\mu l\varrho = l\,\text{ημ}\,(\mu\vartheta) + \mathrm{A}$,

ἢ $\varrho^{\mu} = \mathrm{B} . \text{ημ}\,(\mu\vartheta)$, ἐὰν τεθῇ $e^{\mathrm{A}} = \mathrm{B}$.

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη, ἐὰν ὁ πολικὸς ἄξων στραφῇ κατὰ τὴν γωνίαν $\dfrac{\pi}{2\mu}$, ἤτοι ἂν τεθῇ $\vartheta = \dfrac{\pi}{2\mu} + \vartheta'$, λαμβάνει τὴν ἑξῆς μορφὴν

$$\varrho^{\mu} = \mathrm{B} . \text{συν}\,(\mu\vartheta') \qquad \text{καὶ τότε} \quad \varphi = \mu\vartheta' + \frac{\pi}{2}.$$

Τὸ σχῆμα τῆς καμπύλης ταύτης διαφέρει κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ σταθεροῦ ἀριθμοῦ μ.

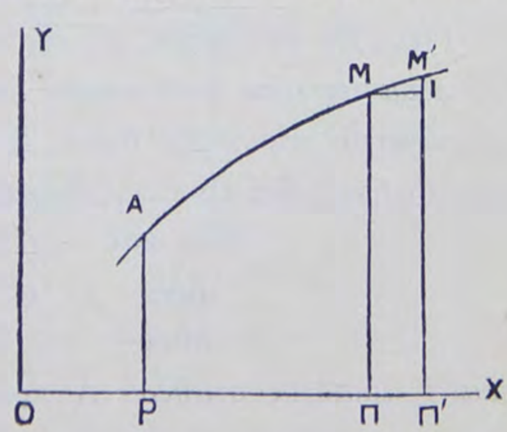
ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΝ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ. ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ ΑΥΤΩΝ· ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΝ ΑΥΤΟΥ.

Ἡ διὰ τῶν καμπύλων γραμμῶν γεωμετρικὴ παράστασις τῶν ἐξισώσεων τῶν δύο μεταβλητὰς περιεχουσῶν ἄγει εἰς συναρτήσεις γεωμετρικῶς ὁριζομένας, ὧν τὰ διαφορικὰ εὑρίσκονται εὐκόλως ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῆς καμπύλης. Τῶν τοιούτων συναρτήσεων δύο εἶνε αἱ πρωτεύουσαι, τουτέστι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεταξὺ τῆς καμπύλης καὶ εὐθειῶν τινων γραμμῶν περιεχομένου χωρίου καὶ τὸ μῆκος τοῦ τόξου τῆς καμπύλης.

Διαφορικὸν τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν καμπύλων εἰς εὐθυγράμμους συντεταγμένας.

108. Ἔστω $y = \sigma(x)$ ἡ ἐξίσωσις καμπύλης οἱασδήποτε ἀναφερομένης πρὸς ὀρθογωνίους ἄξονας. Ἐὰν ἀχθῶσι δύο τεταγμέναι, ὡς ἔτυχεν, αἱ ΑΡ καὶ ΜΠ, καὶ ἐκ τούτων ἡ μὲν ΑΡ θεωρηθῇ ὡς ἀκίνητος, ἡ δὲ ΜΠ ὡς μεταβλητή, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου ΑΜΠΡ, ὅπερ περιέχεται ὑπὸ τῆς καμπύλης καὶ τῶν δύο τεταγμένων καὶ ὑπὸ τοῦ ἄξονος τῶν x, εἶνε ὡσαύτως μεταβλητὸν καὶ ἐξαρτᾶται προδήλως ἐκ τῆς μεταβλητῆς τεταγμένης ΜΠ, ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, ἐκ τῆς τετμημένης ΟΠ, πρὸς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ ἡ ΜΠ. Ἐὰν δηλονότι παραστήσωμεν διὰ τοῦ Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου ΑΜΠΡ καὶ διὰ τοῦ x τὴν μεγίστην τετμημένην τῶν σημείων αὐτοῦ, ἤτοι τὴν ΟΠ (ὑποτίθεται ΟΠ $>$ ΟΡ), θὰ εἶνε τὸ Ε [1] συνάρτησις τοῦ x, ὁριζομένη γεωμετρικῶς· εὑρίσκεται δὲ τὸ διαφορικὸν αὐτῆς ὡς ἑξῆς.

Ἐὰν ἡ x αὐξηθῇ κατὰ Δx, ἢ ΠΠ΄, τὸ ἐμβαδὸν Ε αὐξάνει κατὰ ΔΕ, ἤτοι κατὰ τὸ ΜΠΠ΄Μ΄· ἀλλ᾽ ἐὰν ἐκ τοῦ Μ ἀχθῇ ἡ ΜΙ παράλληλος τῷ ἄξονι ΟΧ μέχρι τῆς τεταγμένης Μ΄Π΄, τὸ προκύπτον ὀρθογώνιον ΜΠΠ΄Ι εἶνε ἀνάλογον τῆς αὐξήσεως τοῦ x, διότι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶνε $y\Delta x$· τὸ ὀρθογώνιον δὲ τοῦτο, ἐὰν αἱ τεταγμέναι τοῦ τόξου ΜΜ΄ προχωρῶσιν ἢ συνεχῶς αὐξα-



(1) Δεχόμεθα ὡς φανερόν, ὅτι ὑπάρχει ἀριθμὸς παριστῶν πᾶν τὸ δοθὲν μικτόγραμμον ἢ καμπυλόγραμμον σχῆμα.

νόμεναι ἢ συνεχῶς ἐλαττούμεναι, διαφέρει ἀπὸ τοῦ ΔΕ διαφορὰν μικροτέραν τοῦ ὀρθογωνίου ΜΙ.ΙΜ′ (ὅπερ ἔχει ἐφεξῆς πλευρὰς τὰς ΜΙ, ΙΜ′) ἤτοι τοῦ $\Delta x . \Delta y$· ἐπομένως εἶνε

$$\Delta\mathrm{E} = y\Delta x + \mu \Delta x \Delta y,$$

ἔνθα μ σημαίνει ἀριθμόν τινα μεταξὺ 0 καὶ 1 περιεχόμενον.

Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι εἶνε

$$d\mathrm{E} = y dx = \sigma(x)\, dx, \qquad (1)$$

ἤτοι τὸ διαφορικὸν τοῦ ἐμβαδοῦ Ε *ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς τελευταίας αὐτοῦ τεταγμένης ἐπὶ τὸ διαφορικὸν τοῦ* x, ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, *ἰσοῦται ὀρθογωνίῳ, ὅπερ ἔχει βάσιν μὲν τὸ διαφορικὸν τῆς τετμημένης* x, *ὕψος δὲ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τεταγμένην.*

ΣΗΜ. Ὁπωσδήποτε καὶ ἂν προχωρῶσιν αἱ τεταγμέναι τοῦ τόξου ΜΜ′, εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν, ἐὰν παρατηρήσωμεν, ὅτι ἀμφότερα, τὸ ὀρθογώνιον $y\Delta x$ καὶ τὸ ΔΕ, περιλαμβάνονται μεταξὺ δύο ὀρθογωνίων ἐχόντων βάσιν μὲν κοινὴν τὴν ΠΠ′, ὕψος δέ, τὸ μὲν ἓν τὴν μεγίστην τεταγμένην y_1 τοῦ τόξου ΜΜ′, τὸ δὲ ἄλλο τὴν ἐλαχίστην y_2· μέρος ἄρα τῆς διαφορᾶς τῶν ὀρθογωνίων τούτων (ἤτοι τοῦ $(y_1 - y_2)\,\Delta x$) εἶνε ἡ διαφορὰ τῶν ΔΕ καὶ $y\Delta x$, ἤτοι εἶνε

$$\Delta\mathrm{E} = y\Delta x + \mu(y_1 - y_2)\,\Delta x,$$

ἔνθα μ σημαίνει ἀριθμόν τινα θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν μικρότερον τῆς μονάδος.

Ἐντεῦθεν συνάγεται καὶ πάλιν, ὅτι εἶνε

$$d\mathrm{E} = y dx.$$

109. Ἐὰν αἱ συντεταγμέναι εἶνε πλάγιαι, τὰ μὲν ἄλλα μένουσι τὰ αὐτά, τὰ δὲ ὀρθογώνια γίνονται παραλληλόγραμμα· καὶ ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ΜΙΠ′Π εἶνε $y\,\text{ημ}\,\vartheta . \Delta x$ (ϑ οὔσης τῆς γωνίας τῶν ἀξόνων), συνάγεται, ὅτι εἶνε τότε $d\mathrm{E} = y\,\text{ημ}\,\vartheta . dx$.

Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ.

110. Ἐκ τοῦ τύπου (1) εὑρίσκομεν ἀμέσως τὸ Ε, *ἐὰν δυνηθῶμεν νὰ εὕρωμεν μίαν συνάρτησιν, ἥτις νὰ ἔχῃ διαφορικὸν τὸ* $\sigma(x)dx$, ἤτοι παράγωγον τὴν $\sigma(x)$· διότι, ἂν παρασταθῇ διὰ τοῦ $\varphi(x)$ ἡ τοιαύτη συνάρτησις, θὰ εἶνε $d\,\varphi(x) = \sigma(x) . dx$,

$$\text{ἀλλὰ καὶ} \quad d\mathrm{E} = \sigma(x) . dx,$$

$$\text{ἄρα} \quad d\mathrm{E} = d\varphi(x),$$

$$\text{ὅθεν} \quad \mathrm{E} = \varphi(x) + \mathrm{A} \qquad (\text{ἐδ. } 87)$$

καὶ ἡ ἀόριστος σταθερὰ Α προσδιορίζεται, ὅταν ἠξεύρωμεν τὴν πρώτην τεταγμένην τοῦ ἐμβαδοῦ, ἤτοι τὴν ΑΡ, ἢ τὴν τιμὴν ΟΡ τοῦ x, πρὸς τὴν ὁποίαν ἡ ΑΡ ἀντιστοιχεῖ· διότι, ἂν μεταβάλλωμεν συνεχῶς τὴν τετμημένην ΟΠ, ἤτοι τὴν x, ἡ μὲν συνάρτησις Ε εἶνε πάντοτε συνεχὴς (ὡς ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται), ἡ δὲ $\varphi(x)$ *συνήθως*· ἑπομένως, *ἐὰν ὑποτεθῇ ἡ* $\varphi(x)$ *συνεχής*, ἡ διαφορὰ $E - \varphi(x)$ δὲν δύναται νὰ μεταβληθῇ, μεταπηδῶσα αἴφνης ἀπὸ μιᾶς τιμῆς εἰς ἄλλην, ἀλλὰ μένει πάντοτε ἴση τῇ Α· ἀλλ' ὅταν ἡ x καταντήσῃ ἴση τῇ ΟΡ $(=a)$, θὰ εἶνε $E = 0$ καὶ $\varphi(x) = \varphi(a)$· ὅθεν ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις γίνεται $0 = \varphi(a) + A$, ἐξ ἧς $A = -\varphi(a)$.

Ἀντικαθιστῶντες δὲ τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τῆς σταθερᾶς Α εἰς τὸν τύπον τοῦ ἐμβαδοῦ εὑρίσκομεν

$$E = \varphi(x) - \varphi(a), \tag{2}$$

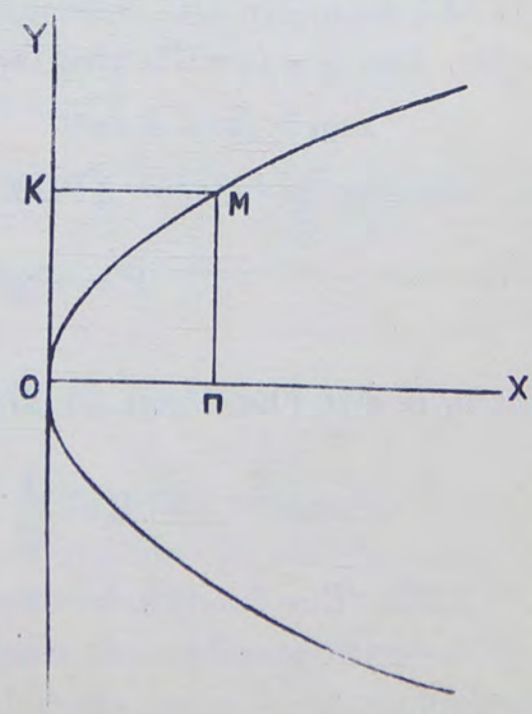
ἔνθα a εἶνε ἡ πρώτη καὶ x ἡ τελευταία τετμημένη τοῦ χωρίου· *εἶνε λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν* Ε *διαφορὰ τῶν δύο τιμῶν τῆς συναρτήσεως* $\varphi(x)$ *τῶν ἀντιστοιχουσῶν πρὸς τὴν μεγίστην καὶ πρὸς τὴν ἐλαχίστην τετμημένην τοῦ χωρίου*· ἢ ἡ αὔξησις τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$ ἡ προερχομένη ἐκ τῆς αὐξήσεως τῆς μεταβλητῆς x ἀπὸ a εἰς x.

ΣΗΜ. Ἐκ τοῦ εὑρεθέντος διαφορικοῦ τοῦ ἐμβαδοῦ συνάγεται καὶ ἄλλη τις γεωμετρικὴ παράστασις τοῦ διαφορικοῦ οἱασδήποτε συναρτήσεως $\sigma(x)$· ἐὰν δηλαδὴ κατασκευασθῇ πρὸς ὀρθογωνίους ἄξονας ἡ καμπύλη $y = \sigma'(x)$, τὸ διαφορικὸν τῆς $\sigma(x)$ παρίσταται ὑπὸ ὀρθογωνίου βάσιν μὲν ἔχοντος τὸ διαφορικὸν τῆς x, ὕψος δὲ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τεταγμένην τῆς καμπύλης ταύτης.

Προβλήματα.

1ον

Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραβολικοῦ χωρίου, ὅπερ περιέχεται ὑπὸ τῆς παραβολῆς καὶ τοῦ ἄξονος αὐτῆς καὶ ὑπὸ τῆς τυχούσης τεταγμένης.



Καλοῦντες Ε τὸ ἐμβαδὸν ἔχομεν γενικῶς

$$dE = y\,dx,$$

ἀλλ' εἰς τὴν παραβολὴν εἶνε

$$y = \sqrt{2\mu}\,.\,x^{\frac{1}{2}}, \quad \text{ὅθεν}$$

$$dE = \sqrt{2\mu}\,.\,x^{\frac{1}{2}}\,.\,dx$$

ἢ $$dE = d\left(\frac{2}{3}\sqrt{2\mu}\,.\,x^{\frac{3}{2}}\right)$$

καὶ ἑπομένως $E = \frac{2}{3}\sqrt{2\mu}.x^{\frac{3}{2}} + A$·

ἐπειδὴ δέ, μηδενιζομένου τοῦ x,

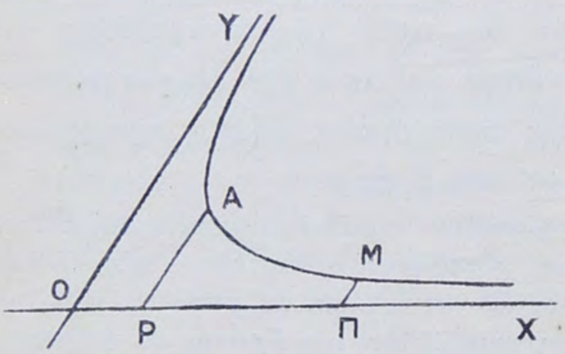
μηδενίζεται καὶ τὸ ἐμβαδὸν Ε, ἕπεται, ὅτι εἶνε $A = 0$ καὶ

$$E = \frac{2}{3}\sqrt{2\mu}\,.\,x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{2\mu x}\,.\,x = \frac{2}{3}xy,$$

ἤτοι τὸ παραβολικὸν χωρίον ΟΜΠ ἰσοῦται πρὸς τὰ δύο τρίτα τοῦ ὀρθογωνίου ΟΠΜΚ, τοῦ ὁποίου βάσις καὶ ὕψος εἶνε αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου Μ.

2ον

Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὑπερβολικοῦ χωρίου, ὅπερ περιέχεται ὑπὸ τῆς ὑπερβολῆς καὶ ὑπὸ τῆς μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων αὐτῆς καὶ δύο παραλλήλων τῇ ἄλλῃ.



Ἡ ἐξίσωσις τῆς ὑπερβολῆς πρὸς τὰς ἀσυμπτώτους αὐτῆς εἶνε $xy = \kappa$· ὅθεν παριστῶντες τὴν γωνίαν τῶν ἀσυμπτώτων διὰ τοῦ ϑ, ἔχομεν

$$dE = y\,\eta\mu\,\vartheta\,.\,dx = \kappa\,\eta\mu\,\vartheta\,.\,\frac{dx}{x} = d\,(\kappa\,\eta\mu\,\vartheta\,.\,lx)$$

καὶ ἑπομένως $$E = \kappa\,\eta\mu\,\vartheta\,.\,lx + A\cdot$$

ἐὰν δὲ ἡ τετμημένη ΟΡ παρασταθῇ διὰ τοῦ δ, τὸ ἐμβαδὸν γίνεται μηδέν, ὅταν ἡ x (=ΟΠ) γίνῃ ἴση τῷ δ· ὅθεν ἕπεται

$$\kappa\,\eta\mu\,\vartheta\,.\,l\delta + A = 0 \qquad \text{καὶ} \qquad A = -\kappa\,\eta\mu\,\vartheta\,.\,l\delta$$

καὶ ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν ΑΡΠΜ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$E = \kappa\,\eta\mu\,\vartheta\,.\,l\left(\frac{x}{\delta}\right)\cdot$$

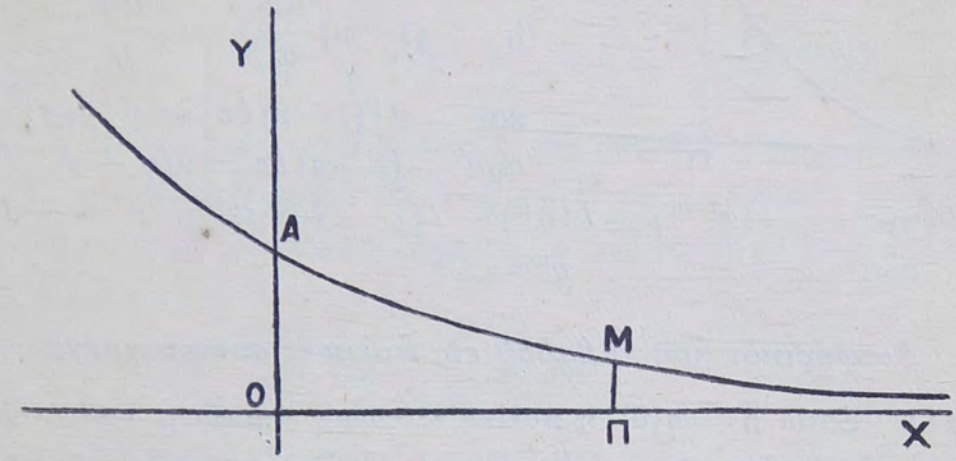
ἐπειδὴ δὲ εἶνε (Ἐπ. Ἀναλ. ἐδ. 278) $\kappa = \dfrac{a^2+b^2}{4}$, $\eta\mu\,\vartheta = \dfrac{2ab}{a^2+b^2}$,

ἕπεται $$E = \frac{1}{2}ab\,l\left(\frac{x}{\delta}\right).$$

ΣΗΜ. Ἐὰν ὑποτεθῇ $\delta = 1$ καὶ $ab = 2$, τὸ ἐμβαδὸν Ε ἰσοῦται τῷ Νεπερείῳ λογαρίθμῳ τῆς τετμημένης ΟΠ· διὰ τοῦτο οἱ Νεπέρειοι λογάριθμοι λέγονται καὶ *ὑπερβολικοί.*

3ον

Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου, ὅπερ περιέχεται ὑπὸ τῆς καμπύλης $y = \bar{e}^{x}$ καὶ ὑπὸ τῶν ἀξόνων καὶ μιᾶς οἱασδήποτε τεταγμένης.



Γενικῶς εἶνε $$dE = y \,.\, dx$$

καὶ διὰ τὴν καμπύλην ταύτην, ἐπειδὴ $y = \bar{e}^{x}$,

$$dE = \bar{e}^{x} \,.\, dx = d\,(-\bar{e}^{x}),$$

ἄρα $$E = -\bar{e}^{x} + A\cdot$$

ἐπειδὴ δὲ ἡ πρώτη τεταγμένη τοῦ ἐμβαδοῦ εἶνε ἡ ΟΑ, τὸ ἐμβαδὸν Ε μηδενίζεται, ὅταν $x = 0$, ὅθεν ἕπεται

$$0 = -1 + A \qquad \text{καὶ} \qquad A = 1,$$

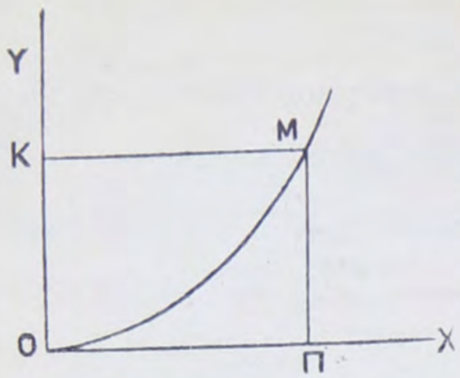
ὥστε $$E = 1 - \bar{e}^{x} = 1 - y.$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι, ὁσονδήποτε μακρὰν τοῦ Ο καὶ ἂν ληφθῇ ἡ τελευταία τεταγμένη ΜΠ τοῦ χωρίου, οὐδέποτε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ ὑπερβαίνει τὴν μονάδα· πλησιάζει ὅμως πρὸς αὐτήν, ὅσον ἡ τεταγμένη ΜΠ ἀπομακρύνεται εἰς ἄπειρον.

4ον

Καμπύλην εὑρεῖν τοιαύτην, ὥστε τὸ ὑπ' αὐτῆς καὶ τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ οἱασδήποτε τεταγμένης περιεχόμενον χωρίον νὰ εἶνε ὡρισμένον τι μέρος τοῦ ὀρθογωνίου τῶν περιεχουσῶν αὐτὸ εὐθειῶν.

Ἐὰν τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἡ καμπύλη συναντᾷ τὸν ἄξονα τῶν x, ληφθῇ ὡς ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων, θὰ εἶνε



$$E = \mu xy, \qquad \mu < 1$$

ὅθεν $dE = \mu(xdy + ydx)$

ἢ $ydx = \mu(xdy + ydx)$

καὶ $(1-\mu)\,ydx = \mu xdy$

ἢ $(1-\mu)\dfrac{dx}{x} = \mu \,.\, \dfrac{dy}{y}$

καὶ $d\{(1-\mu)\,lx\} = d\{\mu ly\}$,

ἄρα $(1-\mu)\,lx = \mu ly + A$,

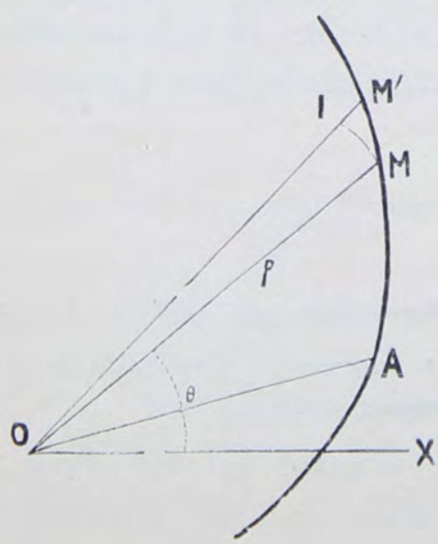
τουτέστι $l(x^{1-\mu}) = l(y^{\mu}) - lC$, ἐὰν τεθῇ $A = -lC$,

ἄρα $y^{\mu} = Cx^{1-\mu}$.

Διαφορικὸν τοῦ ἐμβαδοῦ εἰς πολικὰς συντεταγμένας.

111. Ἔστω $\rho = \sigma(\vartheta)$ ἡ πολικὴ ἐξίσωσις καμπύλης πρὸς πόλον τὸ Ο καὶ πολικὸν ἄξονα τὸν ΟΧ. Ἐὰν ἐκ τοῦ πόλου ἀχθῶσιν ὡς ἔτυχε δύο ἀκτῖνες ΟΑ, ΟΜ καὶ θεωρηθῇ ἡ μὲν ΟΑ ὡς ἀκίνητος, ἡ δὲ ΟΜ ὡς στρεφομένη περὶ τὸν πόλον, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου ΟΑΜ, τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῆς καμπύλης καὶ τῶν δύο πολικῶν ἀκτίνων, εἶνε μεταβλητὸν καὶ ἐξαρτᾶται προδήλως ἐκ τῆς μεταβλητῆς ἀκτῖνος ΟΜ, ἢ καὶ ἐκ τῆς πρὸς αὐτὴν ἀντιστοιχούσης πολικῆς γωνίας ΜΟΧ· ὥστε, ἂν παραστήσωμεν τὸ μὲν ἐμβαδὸν ΟΑΜ διὰ τοῦ Ε, τὴν δὲ μεγίστην πολικὴν γωνίαν αὐτοῦ, ἤτοι τὴν ΜΟΧ, διὰ τοῦ ϑ (ὑποτίθεται ΜΟΧ $>$ ΑΟΧ) καὶ τὴν τελευταίαν αὐτοῦ ἀκτῖνα ΟΜ διὰ τοῦ ρ, θὰ εἶνε τὸ Ε συνάρτησις τοῦ ϑ (ἢ καὶ τοῦ ρ), γεωμετρικῶς ὁριζομένη· εὑρίσκεται δὲ τὸ διαφορικὸν αὐτῆς ὡς ἑξῆς.

Ἐὰν ἡ πολικὴ γωνία ϑ αὐξηθῇ κατὰ $\Delta\vartheta$, ἢ κατὰ Μ΄ΟΜ, τὸ ἐμβαδὸν αὐξάνει κατὰ ΔΕ, ἤτοι κατὰ τὸ Μ΄ΟΜ· ἀλλ' ἂν μὲ κέντρον τὸν πόλον καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ρ γράψωμεν τόξον κυκλικὸν ἐν τῇ γωνίᾳ Μ΄ΟΜ, ὁ προκύπτων κυκλικὸς τομεὺς εἶνε ἀνάλογος τῆς αὐξήσεως τοῦ ϑ· διότι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶνε $\dfrac{1}{2}\rho^2 . \Delta\vartheta$. Ὁ τομεὺς δ' οὗτος ΟΜΙ, ὡς καὶ τὸ ἐμβαδὸν ΔΕ περιλαμβάνονται ἀμφότερα μεταξὺ δύο τομέων, γωνίαν μὲν ἐχόντων κοινὴν τὴν Μ΄ΟΜ,



ἀκτῖνας δὲ ὁ μὲν εἰς τὴν μεγίστην ἀκτῖνα ϱ_1 τοῦ τόξου Μ΄Μ, ὁ δὲ ἄλλος τὴν ἐλαχίστην ϱ_2· μέρος ἄρα τῆς διαφορᾶς τῶν τομέων τούτων $\frac{1}{2}\left(\varrho_1^2-\varrho_2^2\right)\Delta\vartheta$ εἶνε ἡ διαφορὰ τῶν ΔE καὶ $\frac{1}{2}\varrho^2\Delta\vartheta$, ἤτοι εἶνε

$$\Delta E=\frac{1}{2}\varrho^2\Delta\vartheta+\frac{1}{2}\mu\left(\varrho_1^2-\varrho_2^2\right).\Delta\vartheta,$$

ἔνθα μ εἶνε ἀριθμός τις μικρότερος τῆς μονάδος θετικὸς ἢ ἀρνητικός.

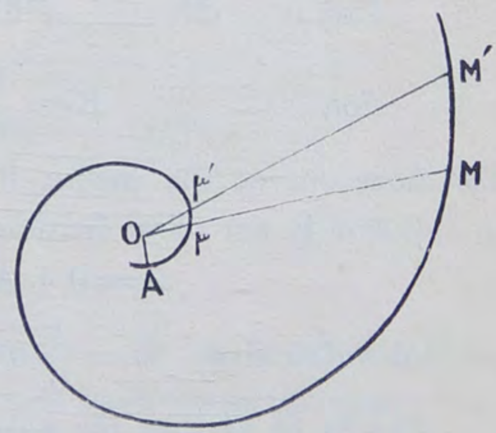
Ἐπειδὴ δὲ ἡ διαφορὰ $\varrho_1^2-\varrho_2^2$ τείνει πρὸς τὸ μηδὲν μετὰ τοῦ $\Delta\vartheta$, (διότι ἀμφότεραι αἱ πολικαὶ ἀκτῖνες ϱ_1, ϱ_2 τείνουσι πρὸς τὴν ϱ), συνάγεται, ὅτι εἶνε

$$(1) \qquad dE=\frac{1}{2}\varrho^2.d\vartheta,$$

ἤτοι *τὸ διαφορικὸν τοῦ πολικοῦ ἐμβαδοῦ ἰσοῦται πρὸς τομέα ἔχοντα κέντρον μὲν τὸν πόλον, γωνίαν δὲ τὸ διαφορικὸν τῆς ϑ καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τιμὴν τοῦ ϱ.*

ΣΗΜ. Ἐν τῇ προηγουμένῃ ἀποδείξει ὑποτίθεται, ὅτι ἡ γωνία τοῦ πολικοῦ χωρίου ΑΟΜ δὲν ὑπερβαίνει τὰς **4** ὀρθάς, τουτέστιν ὅτι αἱ πρὸς τὰς δύο ἀκτῖνας αὐτοῦ ἀντιστοιχοῦσαι πολικαὶ γωνίαι διαφέρουσιν ὀλιγώτερον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν. Ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει ἡ αὔξησις ΔΕ τοῦ ἐμβαδοῦ δὲν ἐξομοιοῦται πρὸς τομέα, ὡς ἐν τῷ ἀπέναντι σχήματι φαίνεται, ἀλλὰ πρὸς τὴν διαφορὰν δύο τομέων· ὥστε τὸ διαφορικὸν εἶνε τότε

$$\frac{1}{2}\left[(OM)^2-(O\mu)^2\right]d\vartheta.$$



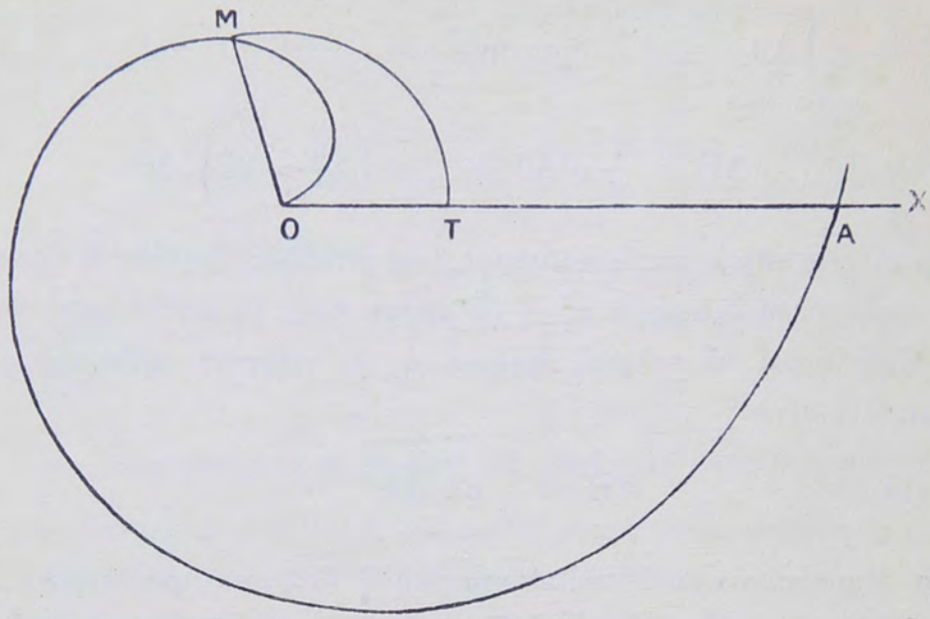
112. Διὰ τοῦ τύπου (1) ἀνάγεται ἡ εὕρεσις τοῦ πολικοῦ ἐμβαδοῦ τῶν καμπύλων εἰς τὴν εὕρεσιν συναρτήσεως ἐχούσης δοθὲν διαφορικὸν (ὡς συνέβη καὶ περὶ τοῦ πρὸς εὐθυγράμμους συντεταγμένας ὁρισθέντος ἐμβαδοῦ).

Προβλήματα.

1ον

Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου, ὅπερ περιέχεται ὑπὸ τοῦ πολικοῦ ἄξονος ΟΧ *καὶ ὑπὸ τῆς Ἀρχιμηδείου ἕλικος καὶ ὑπὸ οἱασδήποτε πο-*

λικῆς ἀκτῖνος ΟΜ (ἀντιστοιχούσης πρὸς πολικὴν γωνίαν μικροτέραν 4 ὀρθῶν).



Ἐπειδὴ εἶνε $\varrho = a\vartheta$ εἰς τὴν καμπύλην ταύτην,

ἕπεται $$dE = \frac{1}{2} a^2 \vartheta^2 d\vartheta = d\left(\frac{1}{6} a^2 \vartheta^3\right),$$

ἄρα $$E = \frac{1}{6} a^2 \vartheta^3 + A\cdot$$

ἀλλ' ἐλαττουμένης τῆς γωνίας ϑ καὶ τεινούσης πρὸς τὸ 0, ἐλαττοῦται τὸ ἐμβαδὸν Ε καὶ τείνει ὡσαύτως πρὸς τὸ 0· ὅθεν ἕπεται, διὰ $\vartheta = 0$,

$$0 = 0 + A, \quad \text{ἄρα} \quad A = 0$$

καὶ διὰ τοῦτο εἶνε $E = \frac{1}{6} a^2 \vartheta^3 = \frac{1}{6} \varrho^2 \vartheta.$

Ἐὰν δὲ μὲ κέντρον τὸν πόλον καὶ ἀκτῖνα τὴν ϱ γραφῇ κυκλικὸς τομεύς, ὁ ΟΜΤ, θὰ εἶνε

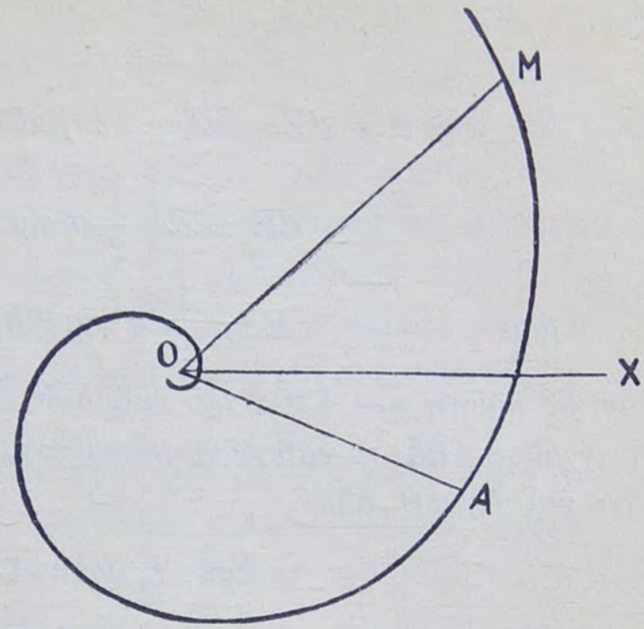
$$\text{τομ. OMT} = \frac{1}{2} \varrho^2 \vartheta,$$

ὅθεν $$E = \frac{1}{3} \,.\, \text{OMT},$$

τουτέστι τὸ ὑπὸ τῆς Ἀρχιμηδείου ἕλικος ὁριζόμενον χωρίον ἰσοῦται τῷ τρίτῳ τοῦ κυκλικοῦ τομέως τοῦ ἔχοντος κέντρον τὸν πόλον καὶ ἀκτῖνα τὴν μεγίστην ἀκτῖνα τοῦ χωρίου καὶ γωνίαν τὴν γωνίαν αὐτοῦ.

2ον

Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου ΟΑΜ, *ὅπερ περιέχεται ὑπὸ τῆς* *λογαριθμικῆς ἕλικος καὶ δύο ἀκτίνων αὐτῆς* (ὧν ἡ γωνία εἶνε μικροτέρα 4 ὀρθῶν).



Ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης ταύτης εἶνε $\varrho = e^{\mu\vartheta}$, ἐξ ἧς $d\varrho = \mu\varrho d\vartheta$, ὅθεν τὸ διαφορικὸν τοῦ ἐμβαδοῦ αὐτῆς (ἂν θεωρήσωμεν αὐτὸ ὡς συνάρτησιν τοῦ ϱ) γίνεται

$$dE = \frac{1}{2\mu}\varrho d\varrho = d\left\{\frac{1}{4\mu}\varrho^2\right\},$$

ἄρα $E = \dfrac{1}{4\mu}\varrho^2 + A\cdot$

ἐπειδὴ δέ, ὅταν ἡ τελευταία ἀκτὶς ΟΜ στρεφομένη ἀρνητικὴν στροφὴν συμπέσῃ τῇ πρώτῃ ΟΑ ($= a$), μηδενίζεται τὸ ἐμβαδόν, ἔπεται

$$0 = \frac{1}{4\mu}a^2 + A,$$

ὅθεν ἔπεται ἡ τιμὴ τοῦ Α

$$A = -\frac{1}{4\mu}a^2,$$

ἄρα καὶ

$$E = \frac{1}{4\mu}(\varrho^2 - a^2) = \frac{(OM)^2 - (OA)^2}{4\mu}.$$

3ον

Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ λημνίσκου.

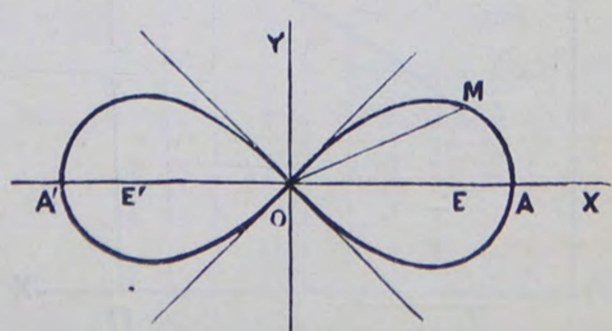
Λημνίσκος λέγεται ὁ τόπος τῶν σημείων, ὧν αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων ἔχουσιν ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον τῷ τετραγώνῳ, ὅπερ ἔχει πλευρὰν τὸ ἥμισυ τῆς ἀποστάσεως τῶν δύο σημείων (Ἐπ. Ἀν. σελ. 338).

Ἡ ἐξίσωσις αὐτοῦ πρὸς ὀρθογωνίους ἄξονας, ἐξ ὧν ὁ μὲν ΟΧ διέρχεται διὰ τῶν δύο δοθέντων σημείων Ε καὶ Ε΄, ὁ δὲ ΟΨ διὰ τοῦ μέσου τῆς ΕΕ΄, εἶνε ἡ ἑξῆς

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$$

$$a = OE.$$

Σχῆμα δὲ ἔχει τὸ ἀπέναντι.



Ἂν δὲ ἀναφέρωμεν τὴν καμπύλην ταύτην πρὸς πόλον τὸ Ο καὶ πολικὸν ἄξονα τὴν ΟΧ, ἡ ἐξίσωσις αὕτη γίνεται

$$\varrho^2 = 2a^2 . \sigma\upsilon\nu 2\vartheta\cdot$$

ὅθεν δι' αὐτὴν εἶνε $d\mathrm{E} = a^2 \sigma\upsilon\nu(2\vartheta) . d\vartheta . = \frac{1}{2} a^2 \sigma\upsilon\nu(2\vartheta) . d(2\vartheta)$,

ἢ $$d\mathrm{E} = d\left(\frac{1}{2} a^2 \eta\mu 2\vartheta\right),$$

ἄρα $$\mathrm{E} = \frac{1}{2} a^2 \eta\mu(2\vartheta) + \mathrm{A}\cdot$$

ἐὰν δὲ πρώτη μὲν ἀκτὶς τοῦ ἐμβαδοῦ θεωρηθῇ ἡ ΟΑ, τελευταία δὲ ἡ τυχοῦσα ΟΜ, τὸ ἐμβαδὸν μηδενίζεται, ὅταν γίνῃ $\vartheta = 0$· ἑπομένως εἶνε καὶ $\mathrm{A} = 0$· ὅθεν

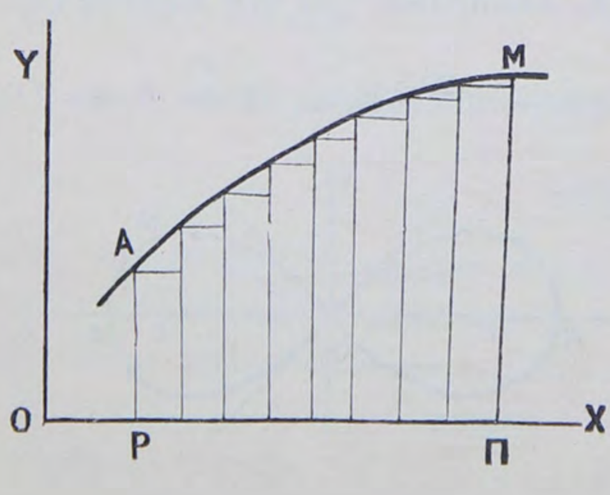
$$\mathrm{E} = \frac{1}{2} a^2 \eta\mu(2\vartheta)\cdot$$

καὶ ἂν ἡ ἀκτὶς ΟΜ στραφῇ, μέχρις οὗ γίνῃ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου ΑΟ εἰς τὸ σημεῖον Ο, ἡ πολικὴ γωνία γίνεται $\frac{\pi}{4}$ καὶ τὸ ἐμβαδὸν ΟΑΟ εἶνε $\frac{1}{2} a^2$· ὅθεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὑπὸ τῆς ὅλης καμπύλης περιεχομένου χωρίου εἶνε διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς γραμμῆς ΟΕ.

ΣΗΜ. Ἡ ἐφαπτομένη τοῦ λημνίσκου εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Μ σχηματίζει πρὸς τὴν πολικὴν ἀκτῖνα ΟΜ γωνίαν ἴσην τῷ ἀθροίσματι $\frac{\pi}{2} + 2\vartheta$ (ἰδὲ σελ. 116), ἐκ τῆς ἰδιότητος δὲ ταύτης κατασκευάζεται ἡ ἐφαπτομένη εὐκόλως.

**Τετραγωνισμὸς δι' ἀναλύσεως εἰς μέρη μεταβλητὰ καὶ πρὸς τὴν ἐκμηδένισιν τείνοντα.*

113. Ἡ εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν καμπυλογράμμων χωρίων (ἥτις καὶ *τετραγωνισμὸς* αὐτῶν λέγεται) ἀνάγεται κατὰ τὰ προηγούμενα εἰς τὴν εὕρεσιν συναρτήσεως ἐχούσης δεδομένον διαφορικόν. Εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα φθάνομεν καὶ διὰ τῆς ἑπομένης μεθόδου. Ἔστω καμπυλόγραμμον χωρίον, τὸ ΑΡΠΜ, περιεχόμενον ὑπὸ τῆς καμπύ-



λης ΑΜ, ὑπὸ τοῦ ἄξονος ΟΧ καὶ ὑπὸ τῶν τεταγμένων ΑΡ, ΠΜ. Ἐὰν ἡ βάσις αὐτοῦ ΡΠ διαιρεθῇ εἰς πλῆθος μερῶν ὁσωνδήποτε καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἀχθῶσιν αἱ τεταγμέναι τοῦ τόξου ΑΜ, διαιρεῖται τὸ χωρίον ΑΡΠΜ εἰς πλῆθος μερῶν· ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ ἄκρου ἑκάστης τεταγμένης ἀχθῇ παράλληλος τῇ ΟΧ μέχρι τῆς προσεχοῦς τεταγμένης, προκύπτει πλῆθος ὀρθογωνίων γεγραμμένων περὶ τὴν καμπύλην· λέγω δέ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων τούτων ἔχει ὅριον τὸ καμπυλόγραμμον χωρίον ΑΡΠΜ, ὅταν ἡ βάσις αὐτοῦ διαιρῆται εἰς μέρη ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον σμικρυνόμενα καὶ τείνοντα πρὸς τὸ μηδέν.

Διότι, παριστῶντες τὸ σύνολον τῶν ὀρθογωνίων τούτων διὰ τοῦ Θ, τὸ δὲ σύνολον τῶν περὶ τὴν καμπύλην σχηματισθέντων τριγωνικῶν καμπυλογράμμων χωρίων διὰ τοῦ Τ, ἔχομεν προδήλως

$$\mathrm{ΑΡΠΜ} = \Theta + \mathrm{T}, \qquad (1)$$

ὅθεν

$$\mathrm{ΑΡΠΜ} = \text{ορ}\,\Theta + \text{ορ}\,\mathrm{T}.$$

Ἀλλὰ τὸ σύνολον Τ τῶν τριγωνικῶν καμπυλογράμμων χωρίων τείνει πρὸς τὸ 0 (ὅταν ἕκαστον τῶν μερῶν, εἰς ἃ διαιρεῖται ἡ βάσις ΡΠ, τείνῃ πρὸς τὸ 0)· διότι ἕκαστον ἐξ αὐτῶν εἶναι μικρότερον ὀρθογωνίου ἔχοντος βάσιν μὲν μέρος τι τῆς βάσεως ΡΠ, ὕψος δὲ τὴν διαφορὰν δύο προσεχῶν τεταγμένων· ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ τοῦ δ τὴν μεγίστην διαφορὰν δύο προσεχῶν τεταγμένων καὶ τὰ μέρη τῆς βάσεως διὰ τῶν $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\nu$, τὸ σύνολον Τ θὰ εἶνε μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος

$$\beta_1\delta + \beta_2\delta + \ldots + \beta_\nu\delta \quad \text{ἢ} \quad (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu)\,.\,\delta,$$
$$\text{ἤτοι τοῦ } \mathrm{ΡΠ}\,.\,\delta,$$

ἤτοι μικρότερον ὀρθογωνίου ἔχοντος βάσιν μὲν τὴν βάσιν τοῦ χωρίου, ὕψος δὲ τὴν μεγίστην διαφορὰν δύο προσεχῶν τεταγμένων· (τοῦτο βλέπομεν καὶ ἀμέσως, ἐὰν καταβιβάσωμεν ἕκαστον τῶν τριγωνικῶν τούτων μερῶν παραλλήλως ἑαυτῷ, μέχρις οὗ ἡ βάσις αὐτοῦ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἀντιστοίχου τμήματος τῆς ΡΠ)· ἐπειδὴ δὲ καὶ ἡ διαφορὰ αὕτη δ τείνει πρὸς τὸ 0, ὅταν τὰ μέρη τῆς βάσεως ΡΠ τείνωσι πρὸς τὸ 0 (διότι δύο προσεχεῖς τεταγμέναι τείνουσι νὰ συμπέσωσι), συνάγεται, ὅτι εἶνε $\quad \text{ορ}\,\mathrm{ΡΠ}\,.\,\delta = 0$· ἄρα καὶ $\text{ορ}\,\mathrm{T} = 0$.

Ἐντεῦθεν προκύπτει $\text{ορ}\,\Theta = \mathrm{ΑΡΠΜ}$. ὅ. ἔ. δ.

Ἐὰν αἱ τεταγμέναι τῆς καμπύλης προχωρῶσιν ἐλαττούμεναι, τὰ τριγωνικὰ χωρία ἀφαιροῦνται ἐν τῇ ἰσότητι (1)· ὅπερ ὅμως δὲν βλάπτει τὴν ἀπόδειξιν. Ὁμοίως δὲν βλάπτεται ἡ ἀπόδειξις, καὶ ὅταν ἄλλα μὲν ἐξ αὐτῶν λαμβάνωνται ἐν τῇ αὐτῇ ἰσότητι θετικῶς, ἄλλα δὲ ἀρνητικῶς· διότι τότε κατὰ μείζονα λόγον τὸ ἄθροισμα Τ θὰ τείνῃ πρὸς τὸ 0.

ΣΗΜ. Ὁπωσδήποτε καὶ ἂν προχωρῶσιν αἱ τεταγμέναι τῆς καμπύλης ΑΜ, πάντοτε τὸ ὅριον τῶν ὀρθογωνίων εἶνε τὸ καμπυλόγραμμον χωρίον ΑΡΠΜ· διότι παριστῶντες τὰ ὀρθογώνια ταῦτα κατὰ σειρὰν διὰ $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_\nu$, τὰ δὲ ἀντίστοιχα καμπυλόγραμμα τμήματα διὰ $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$ ἔχομεν (ἐδ. 108, Σημ.)

$$u_1 = \vartheta_1 + \mu_1 \,(y'_1 - y''_1)\, \beta_1$$
$$u_2 = \vartheta_2 + \mu_2 \,(y'_2 - y''_2)\, \beta_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ἔνθα y'_1 εἶνε ἡ μεγίστη τεταγμένη τοῦ u_1 καὶ y''_1 ἡ ἐλαχίστη· ὅθεν $\text{ΑΡΠΜ} = \Theta + \{\mu_1\beta_1 (y'_1 - y''_1) + \mu_2\beta_2 (y'_2 - y''_2) + \ldots + \mu_\nu\beta_\nu (y'_\nu - y''_\nu)\}$· ἀλλὰ τὸ ἐν τῇ παρενθέσει ἄθροισμα τείνει πρὸς τὸ 0· διότι προφανῶς εἶνε μικρότερον τοῦ $\beta_1\delta + \beta_2\delta + \ldots + \beta_\nu\delta$, ἤτοι τοῦ ΡΠ.δ, ἔνθα δ δηλοῖ τὴν μεγίστην ἐκ τῶν διαφορῶν $y'_1 - y''_1, \ldots, y'_\nu - y''_\nu$, αἵτινες πᾶσαι τείνουσι πρὸς τὸ 0.

Ἐκ τούτου συνάγεται καὶ πάλιν

$$\text{ΑΡΠΜ} = \text{ορ}\,\Theta.$$

Τούτου προδειχθέντος, ἵνα ἐκφράσωμεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν ὀρθογωνίων Θ, παραστήσωμεν τὰς τετμημένας τῶν σημείων, καθ' ἃ διαιρεῖται ἡ βάσις ΡΠ, κατὰ σειρὰν διὰ τῶν $x_0, x_1, \ldots, x_\nu$ ($x_0 = \text{ΟΡ} = a$ καὶ $x_\nu = \text{ΟΠ} = \beta$)· τότε τὰ μέρη τῆς βάσεως εἶνε

$$x_1 - a, \quad x_2 - x_1, \ldots, \beta - x_{\nu-1},$$

τὰ μέρη δὲ ταῦτα εἶνε αἱ βάσεις τῶν ὀρθογωνίων, τὰ δὲ ὕψη αὐτῶν εἶνε κατὰ σειρὰν (ἐὰν $y = \sigma(x)$ εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης)

$$\sigma(a),\ \sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_{\nu-1})\cdot$$

ὅθεν συνάγεται τὸ ἐμβαδὸν αὐτῶν

$$\sigma(a)\,(x_1 - a) + \sigma(x_1)\,(x_2 - x_1) + \ldots + \sigma(x_{\nu-1})\,(\beta - x_{\nu-1}).$$

Τὸ ἄθροισμα τοῦτο κατὰ τὰ προαποδειχθέντα ἔχει ὅριον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου ΑΡΠΜ· ἀλλὰ τὸ αὐτὸ ἄθροισμα ἔχει ὅριον τὸ

$$\int_\alpha^\beta \sigma(x)\, dx \qquad (\text{ἐδ. } 88)\cdot$$

ἑπομένως εἶνε $\quad$ ἐμβ. $\text{ΑΡΠΜ} = \int_\alpha^\beta \sigma(x)\, dx$

καὶ ἂν εὑρεθῇ συνάρτησις ἔχουσα διαφορικὸν τὸ $\sigma(x)\,dx$, ἔστω ἡ $\varphi(x)$, θὰ εἶνε $\quad$ ἐμβ. $\text{ΑΡΠΜ} = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$.

Ἐὰν ἡ βάσις διαιρῆται εἰς ἴσα μέρη, συνάγεται (κατὰ τὸ ἐδάφιον 88) ἡ ἑξῆς πρότασις.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καμπυλογράμμου χωρίου ΑΡΠΜ *εἶνε γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὴν μέσην τιμὴν τῆς τεταγμένης ἐν τῷ αὐτῷ χωρίῳ.*

ΣΗΜ. Ἡ καμπύλη ΑΜ ὑποτίθεται ἐν τοῖς προηγουμένοις κειμένη ὅλη ὑπεράνω τοῦ ἄξονος ΟΧ· ἐὰν κεῖται ὅλη ὑπ' αὐτόν, τὰ y πάντα θὰ εἶνε ἀρνητικὰ καὶ διὰ τοῦτο οἱ προηγούμενοι τύποι δίδουσι τὸ ἐμβαδὸν ἀρνητικόν. Ἐὰν δὲ μέρος μὲν τῆς καμπύλης κεῖται ὑπεράνω τοῦ ἄξονος, μέρος δὲ ὑποκάτω αὐτοῦ, οἱ εὑρεθέντες τύποι δίδουσι θετικὰ μὲν τὰ ἐμβαδὰ τῶν ὑπεράνω τοῦ ἄξονος κειμένων χωρίων, ἀρνητικὰ δὲ τῶν ὑποκάτω.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

114. Ὁ τετραγωνισμὸς τῶν καμπυλογράμμων χωρίων (καὶ ἐν γένει ἡ καταμέτρησις τῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν) ἐμφανίζει δύο διαφόρους ἀπόψεις. Ἡ πρώτη βασίζεται ἐπὶ τῆς ἰδέας, ὅτι *ἕκαστον καμπυλόγραμμον χωρίον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μερικὴ τιμὴ μεταβλητοῦ τινος χωρίου, οὗτινος τὸ ἐμβαδὸν προσδιορίζεται ἐκ τοῦ διαφορικοῦ αὐτοῦ·* ἤτοι ἐκ τοῦ τρόπου, καθ' ὃν μεταβάλλεται. Ἐν τῇ δευτέρᾳ θεμελιώδης ἰδέα εἶνε *ἡ διαίρεσις τοῦ χωρίου εἰς πλῆθος μερῶν, ἅτινα σμικρύνονται ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον καὶ τείνουσι νὰ ἐκμηδενισθῶσι, καὶ ἡ ἐξομοίωσις ἑκάστου τῶν μερῶν τούτων πρὸς ἁπλούστερόν τι καὶ γνωστὸν σχῆμα ἄνευ βλάβης τοῦ ὅλου χωρίου, ὅπερ ἐμφανίζεται τότε ὡς ἄθροισμα τῶν ἁπλουστέρων τούτων σχημάτων, τῶν ὁποίων ἕκαστον τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ἐν ᾧ τὸ πλῆθος αὐτῶν αὐξάνει εἰς ἄπειρον.*

Ἀμφότεραι αἱ ἀπόψεις αὗται καὶ αἱ ἐξ αὐτῶν πηγάζουσαι μέθοδοι καταλήγουσιν, ὡς εἴδομεν, εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα· ἀνάγουσι δηλονότι τὸ ζήτημα εἰς τὴν εὕρεσιν συναρτήσεως ἐχούσης δεδομένον διαφορικόν· τουτέστιν εἰς τὸ ἀντίστροφον τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ ζήτημα. Ἡ ἄθροισις ποσοτήτων, ὧν ἑκάστη τείνει πρὸς τὸ μηδέν, τὸ δὲ πλῆθος αὐξάνει εἰς ἄπειρον (ἣν ἀπαιτεῖ ὁ δεύτερος τρόπος), ἐκλήθη *ὁλοκλήρωσις*. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἄθροισις αὕτη ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν συναρτήσεως ἐκ τοῦ διαφορικοῦ αὐτῆς, διὰ τοῦτο καὶ ἡ πρᾶξις αὕτη λέγεται ἐπίσης *ὁλοκλήρωσις*.

Περὶ τοῦ μήκους τοῦ τόξου τῶν καμπύλων.

115. *Μῆκος τόξου καμπύλης λέγεται τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ μῆκος τεθλασμένης γραμμῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ τόξον καὶ τὰ αὐτὰ*

τῷ τόξῳ ἐχούσης πέρατα, ὅταν ἑκάστη τῶν πλευρῶν αὐτῆς τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν· λέγω δὲ γραμμὴν *ἐγγεγραμμένην εἰς τόξον* πᾶσαν γραμμήν, ἥτις προκύπτει, ἐὰν τὸ τόξον διαιρεθῇ εἰς μέρη καὶ ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ αὐτῶν.

Ἐν τοῖς ἑπομένοις ὑποτίθεται, ὅτι εἰς ἕκαστον σημεῖον τοῦ τόξου ὑπάρχει μία ἐφαπτομένη ἐντελῶς ὡρισμένη· τουτέστιν, ἂν $y=\sigma(x)$ εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης, τῆς ὁποίας εἶνε τὸ τόξον, ἡ συνάρτησις $\sigma(x)$ ὑποτίθεται διαφορίσιμος εἰς πάσας τὰς τιμὰς τῆς x, πρὸς ἃς ἀντιστοιχοῦσι τὰ σημεῖα τοῦ τόξου.

Ἐὰν συμβαίνῃ τοῦτο, θὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι ὑπάρχει ὅριον τοῦ μήκους τῆς ἐγγεγραμμένης γραμμῆς καὶ μάλιστα ὅτι *πᾶσαι αἱ ἐγγεγραμμέναι γραμμαί, ὁπωσδήποτε καὶ ἂν ὁρίζωνται καὶ μεταβάλλωνται αἱ πλευραὶ αὐτῶν, πρὸς τὸ αὐτὸ τείνουσιν ὅριον*, ἐὰν μόνον αἱ πλευραὶ αὐτῶν, ἰδίᾳ ἑκάστη, τείνωσι πρὸς τὸ μηδέν.

Ἔστω $y=\sigma(x)$ ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης (πρὸς ὀρθ. ἄξονας), ἧς τὸ τόξον ΑΒ θεωροῦμεν· καὶ ΜΜ΄ ἡ τυχοῦσα χορδὴ τῆς εἰς τὸ τόξον ἐγγεγραμμένης γραμμῆς· καὶ συντεταγμέναι τοῦ μὲν Μ αἱ x y, τοῦ δὲ Μ΄ αἱ $x+\Delta x$, $y+\Delta y$· τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ΜΜ΄ εἶνε τότε

$$MM'=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε $\Delta y=\sigma'(x)\Delta x+\omega.\Delta x$, τὸ μῆκος τῆς χορδῆς γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$MM'=\Delta x\sqrt{1+[\sigma'(x)+\omega]^2}.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ τετρ. ῥίζα $\sqrt{1+[\sigma'(x)+\omega]^2}$, ὅταν Δx τείνῃ πρὸς τὸ 0, ἔχει ὅριον τὴν τετρ. ῥίζαν $\sqrt{1+\sigma'(x)^2}$, ἣν παριστῶ συντομίας χάριν διὰ $\varphi(x)$, ἐὰν θέσωμεν $\sqrt{1+[\sigma'(x)+\omega]^2}=\varphi(x)+\delta$, θὰ εἶνε ὅρ $\delta=0$ καὶ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ΜΜ΄ γίνεται

$$MM'=\varphi(x)\Delta x+\delta.\Delta x.$$

Ὁ τύπος οὗτος δίδει τὸ μῆκος τῆς τυχούσης χορδῆς, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν ἐν αὐτῷ ἀντὶ x τὴν ἐλαχίστην τετμημένην τῶν σημείων τῆς χορδῆς καὶ ἀντὶ Δx τὴν αὔξησιν τοῦ x ἐπὶ τῆς χορδῆς· ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ $\alpha, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{\nu-1}\, \beta$, τὰς τιμὰς τοῦ x εἰς τὰς κορυφὰς τῆς ἐγγεγραμμένης γραμμῆς καὶ διὰ $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\nu$ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ δ, τὸ μῆκος αὐτῆς Π, θὰ εἶνε

$$\Pi=(x_1-\alpha)\varphi(\alpha)+(x_2-x_1)\varphi(x_1)+(x_3-x_2)\varphi(x_2)+\ldots+(\beta-x_{\nu-1})\varphi(x_{\nu-1})$$
$$+(x_1-\alpha)\delta_1+(x_2-x_1)\delta_2+(x_3-x_2)\delta_3+\ldots+(\beta-x_{\nu-1})\delta_\nu$$

καὶ ἐπειδὴ τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος τοῦ δευτέρου στίχου εἶνε 0 (πρβλ.

ἐδ. 88), ἐὰν λάβωμεν τὰ ὅρια τῶν δύο μελῶν τῆς ἰσότητος, εὑρίσκομεν

$$\text{ὅρ}\,\Pi = \int_\alpha^\beta \varphi(x)dx.$$

Τοῦτο δὲ τὸ ὅριον ἐκαλέσαμεν μῆκος τοῦ τόξου ΑΒ· ἄρα

$$\text{τοξ}\,AB = \int_\alpha^\beta \varphi(x)dx.$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι καὶ ἡ εὕρεσις τοῦ μήκους τῶν τόξων ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν συναρτήσεως ἐχούσης διαφορικὸν δοθέν· καὶ ἂν εὑρεθῇ συνάρτησις ἔχουσα παράγωγον τὴν $\varphi(x)$, ἔστω τοιαύτη ἡ $f(x)$, θὰ εἶνε $\quad \text{τοξ}\,AB = f(\beta) - f(\alpha)$.

Καὶ ἂν τὸ πέρας τοῦ τόξου εἶνε μεταβλητὸν καὶ ἔχῃ τετμημένην x, θὰ εἶνε $\quad s = \text{τοξ}\,AB = f(x) - f(\alpha)$,

ὅθεν καὶ $\quad ds = f'(x)dx = \varphi(x)dx$,

ἤτοι $\quad ds = \sqrt{1+\sigma'(x)^2}\,.\,dx \qquad (1)$

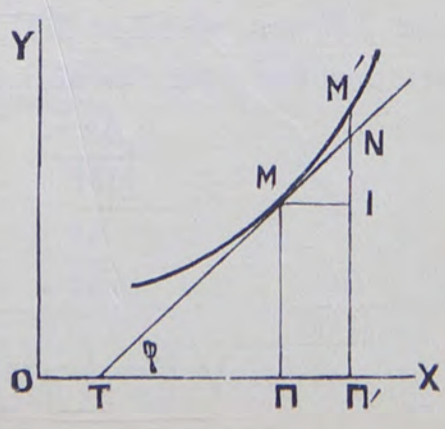
ἢ καὶ $\quad ds = \sqrt{dx^2+dy^2}. \qquad (2)$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου βλέπομεν, ὅτι *τὸ διαφορικὸν τοῦ τόξου ἰσοῦται τῇ ὑποτεινούσῃ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ὅπερ ἔχει πλευρὰς τὰ διαφορικὰ τῶν συντεταγμένων τοῦ πέρατος αὐτοῦ.*

ΣΗΜ. Τὸ σημεῖον τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἐν τῷ τύπῳ (1) πρέπει νὰ λαμβάνηται θετικὸν μέν, ἂν αὐξανομένου τοῦ x αὐξάνῃ καὶ τὸ τόξον, ἀρνητικὸν δέ, ἂν αὐξανομένου τοῦ x ἐλαττῶται τὸ τόξον· διότι ἡ τετραγωνικὴ αὕτη ῥίζα εἶνε ἴση τῇ παραγώγῳ $\dfrac{ds}{dx}$ τοῦ τόξου πρὸς τὴν x. Ὁμοίως ὁρίζομεν τὸ σημεῖον τῆς ῥίζης καὶ ἐν τῷ τύπῳ (2), ἀφοῦ διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ τοῦ διαφορικοῦ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς. Δυνάμεθα ὅμως πάντοτε νὰ λαμβάνωμεν τὴν ἀρχὴν τοῦ τόξου οὕτως, ὥστε αὐξανομένης τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς νὰ αὐξάνῃ καὶ τὸ τόξον.

Γεωμετρικὴ παράστασις τοῦ διαφορικοῦ τοῦ τόξου.

116. Τὸ διαφορικὸν τοῦ τόξου εἶνε τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης ἔχον προβολὰς dx, dy.



Διότι εἶνε $\quad MI = \Pi\Pi' = dx$

καὶ $\quad NI = dy$,

ἄρα $\quad MN = \sqrt{dx^2+dy^2} = ds.$

Συνημίτονα τῶν γωνιῶν τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τοὺς ἄξονας.

117. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ φ τὴν γωνίαν τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x, εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΜΙΝ

$$\text{συν}\,\varphi = \frac{dx}{ds} \qquad \text{καὶ} \qquad \text{ημ}\,\varphi = \frac{dy}{ds}, \tag{3}$$

τουτέστι *τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας, ἣν ἡ ἐφαπτομένη οἱασδήποτε καμπύλης ποιεῖ πρὸς ἑκάτερον τῶν ἀξόνων, ἰσοῦται πρὸς τὸ διαφορικὸν τῆς συντεταγμένης τοῦ ἄξονος τούτου διαιρεθὲν διὰ τοῦ διαφορικοῦ τοῦ τόξου τῆς καμπύλης.*

ΣΗΜ. Τὰ δύο μέρη τῆς ἐφαπτομένης, τὰ ἐκ τῆς ἁφῆς ἀρχόμενα, σχηματίζουσι πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x γωνίας διαφερούσας κατὰ 180^0 καὶ διὰ τοῦτο ἐχούσας τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην. Ὥστε ὁ τύπος

$$\frac{dy}{dx} = \text{εφ}\varphi$$

ἀληθεύει δι' ἀμφότερα ἄνευ διακρίσεως.

Ἀλλ' οἱ τύποι (3) δίδουσι προδήλως τὴν γωνίαν τοῦ ἑτέρου μόνον τῶν μερῶν· διότι ἡ τοῦ ἄλλου ἔχει ἀντίθετον ἡμίτονον καὶ συνημίτονον. Εἶνε δὲ εὔκολον νὰ διακρίνωμεν τὸ μέρος τῆς ἐφαπτομένης, ὅπερ σχηματίζει πρὸς τὸν ἄξονα ΟΧ τὴν ὑπὸ τῶν τύπων τούτων διδομένην γωνίαν φ· τὸ μέρος τοῦτο εἶνε τὸ φέρον ἀπὸ τῆς ἁφῆς πρὸς ὃ μέρος αὐξάνει τὸ τόξον· διότι τοῦτο σχηματίζει πρὸς τὸν θετικὸν ἄξονα ΟΧ ὀξεῖαν μὲν γωνίαν (ἑπομένως ἔχουσαν θετικὸν συνημίτονον), ἐὰν αὐξανομένου τοῦ x αὐξάνῃ καὶ τὸ τόξον (ὅτε $\frac{dx}{ds}$ εἶνε θετικόν), ἀμβλεῖαν δέ, ἐὰν τοὐναντίον (ὅτε $\frac{dx}{ds}$ εἶνε ἀρνητικόν).

Ὅριον τοῦ λόγου τόξου πρὸς τὴν χορδὴν αὐτοῦ.

118. *Ὁ λόγος τόξου οἱασδήποτε καμπύλης πρὸς τὴν χορδὴν αὐτοῦ τείνει πρὸς τὴν μονάδα, ὅταν τὸ τόξον τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν.*

Τοῦτο εἶνε ἄμεσον ἀκολούθημα τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ μήκους τοῦ τόξου· δύναται δὲ νὰ ἀποδειχθῇ καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἔστω τὸ τόξον ΜΜ΄. Λαμβανομένου ἐπὶ τῆς αὐτῆς καμπύλης τόξου τινὸς ΑΜ$=s$, τὸ τόξον ΜΜ΄ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς αὔξησις τοῦ s ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τὴν αὔξησιν ΠΠ΄ τῆς x, τότε ὁ ῥηθεὶς λόγος εἶνε

$$\frac{\Delta s}{MM'} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}},$$

ὅθεν $\displaystyle \frac{\Delta s}{MM'} = \frac{\frac{\Delta s}{\Delta x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}$ καὶ ὅρ. $\displaystyle \frac{\Delta s}{MM'} = \frac{\frac{ds}{dx}}{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}} = 1.$

ΣΗΜ. Ὑποτίθεται, ὅτι ἡ παράγωγος $\frac{dy}{dx}$ τείνει πρός τι ὅριον, ὅταν τὸ Μ′ τείνῃ πρὸς τὸ Μ.

Διαφορικὸν τοῦ τόξου εἰς πολικὰς συντεταγμένας.

119. Ἐπειδὴ ὁ τύπος $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$, διαφυλάττει τὴν αὐτὴν μορφήν, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶνε ἡ μεταβλητή, ἐξ ἧς ἐξαρτῶνται αἱ μεταβληταὶ s, x, y, δυνάμεθα νὰ μετασχηματίσωμεν αὐτὸν εἰς πολικὰς συντεταγμένας, θέτοντες

$$x=\rho\,\sigma\upsilon\nu\,\vartheta,\qquad y=\rho\,\eta\mu\,\vartheta \tag{1}$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς αὐτὸν τὰς τιμὰς τῶν dx καὶ dy τὰς ἐκ τῶν ἰσοτήτων τούτων εὑρισκομένας· γίνεται δὲ τοῦτο εὐκολώτατα ὡς ἑξῆς.

Ἐκ τῶν δύο ἰσοτήτων (1) προκύπτει

$$x+yi=\rho(\sigma\upsilon\nu\,\vartheta+i\,\eta\mu\,\vartheta)=\rho e^{\vartheta i}$$

καὶ $$x-yi=\rho(\sigma\upsilon\nu\,\vartheta-i\,\eta\mu\,\vartheta)=\rho e^{-\vartheta i},$$

ἐκ δὲ τούτων εὑρίσκομεν διαφορίζοντες

$$dx+idy=e^{\vartheta i}\,(d\rho+i\rho d\vartheta)$$

καὶ $$dx-idy=e^{-\vartheta i}\,(d\rho-i\rho d\vartheta),$$

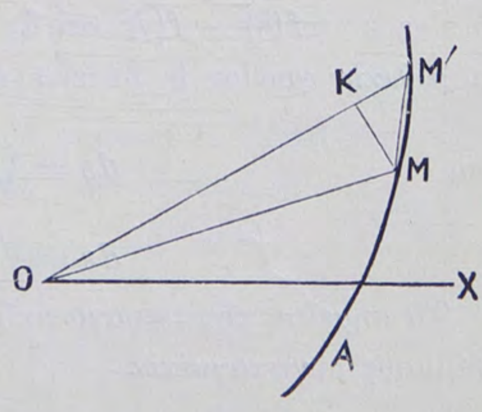
πολλαπλασιάζοντες δὲ ταύτας κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$dx^2+dy^2=d\rho^2+\rho^2 d\vartheta^2,$$

ἄρα $$ds=\sqrt{d\rho^2+\rho^2 d\vartheta^2}.$$

Τὸν τύπον τοῦτον εὑρίσκομεν καὶ ἀμέσως ὡς ἑξῆς.

Ἔστω $\rho=\sigma(\vartheta)$ ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης εἰς πολικὰς συντεταγμένας καὶ ΜΜ′ ἡ τυχοῦσα χορδὴ τῆς ἐγγεγραμμένης γραμμῆς· καὶ συντεταγμέναι τοῦ μὲν Μ αἱ (ρ, ϑ), τοῦ δὲ Μ′ αἱ $(\rho+\Delta\rho,\ \vartheta+\Delta\vartheta)$· ἐὰν ἐκ τοῦ Μ ἀχθῇ ἡ κάθετος ΜΚ ἐπὶ τὴν ΟΜ′, θὰ εἶνε



$$(\mathrm{MM'})^2=(\mathrm{MK})^2+(\mathrm{M'K})^2.$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶνε (ἐδ. 58)

$$\mathrm{MK}=\rho\,\eta\mu\,\Delta\vartheta=\rho\Delta\vartheta\,(1-\mu\Delta\vartheta^2),$$

$$\mathrm{M'K}=\rho+\Delta\rho-\rho\,\sigma\upsilon\nu\,\Delta\vartheta=\Delta\rho+\nu\rho\Delta\vartheta^2,$$

ἕπεται $$\mathrm{MM'}=\Delta\vartheta\,.\sqrt{\rho^2(1-\mu\Delta\vartheta^2)^2+\left(\frac{\Delta\rho}{\Delta\vartheta}+\nu\rho\,\Delta\vartheta\right)^2}$$

καὶ ἐπειδὴ ἡ τετρ. ῥίζα ἔχει ὅριον τὴν $\sqrt{\varrho^2+\left(\frac{d\varrho}{d\vartheta}\right)^2}$, ἤτοι τὴν $\sqrt{\sigma(\vartheta)^2+\sigma'(\vartheta)^2}$, ἣν παριστῶ, συντομίας χάριν, διὰ τοῦ $\varphi(\vartheta)$, τὸ μῆκος τῆς χορδῆς MM' γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$MM'=\varphi(\vartheta).\Delta\vartheta+\omega.\Delta\vartheta, \quad \text{ἔνθα ὅρ } \omega=0.$$

Ὁ τύπος οὗτος δίδει τὸ μῆκος τῆς τυχούσης χορδῆς, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν ἐν αὐτῷ ἀντὶ τοῦ ϑ τὴν ἐλαχίστην πολικὴν γωνίαν τῶν σημείων αὐτῆς καὶ ἀντὶ $\Delta\vartheta$ τὴν αὔξησιν τῆς γωνίας ϑ ἐπὶ τῆς χορδῆς ταύτης. Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ $\gamma, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \ldots, \vartheta_{\nu-1}, \delta$ τὰς τιμὰς τῆς γωνίας ϑ εἰς τὰς κορυφὰς τῆς ἐγγεγραμμένης γραμμῆς, τὸ μῆκος αὐτῆς Π θὰ εἶνε

$$\Pi=(\vartheta_1-\gamma)\varphi(\gamma)+(\vartheta_2-\vartheta_1)\varphi(\vartheta_1)+(\vartheta_3-\vartheta_2)\varphi(\vartheta_2)+\ldots+(\delta-\vartheta_{\nu-1})\varphi(\vartheta_{\nu-1})$$
$$+(\vartheta_1-\gamma)\omega_1+(\vartheta_2-\vartheta_1)\omega_2+(\vartheta_3-\vartheta_2)\omega_3+\ldots+(\delta-\vartheta_{\nu-1})\omega_\nu\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ τὸ ὅριον τοῦ δευτέρου στίχου εἶνε 0, ἕπεται

$$\text{ορ } \Pi=\int_\gamma^\delta \varphi(\vartheta)d\vartheta$$

καὶ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ μήκους s τοῦ τόξου

$$s=\int_\gamma^\delta \varphi(\vartheta)d\vartheta.$$

Ἀνάγεται ἄρα καὶ πάλιν ἡ εὕρεσις τοῦ μήκους τῶν τόξων εἰς τὴν εὕρεσιν συναρτήσεως ἐχούσης διαφορικὸν δοθέν· καὶ ἂν εὑρεθῇ συνάρτησίς τις τοῦ ϑ ἔχουσα διαφορικὸν τὸ $\varphi(\vartheta)\,d\vartheta$, ἔστω τοιαύτη ἡ $f(\vartheta)$, θὰ εἶνε $s=f(\delta)-f(\gamma)$· καὶ ἂν τὸ πέρας τοῦ τόξου μεταβάλληται καὶ ἔχῃ πολικὴν γωνίαν ϑ, θὰ εἶνε $ds=\varphi(\vartheta)\,d\vartheta$,

ἤτοι $$ds=\sqrt{\varrho^2+\left(\frac{d\varrho}{d\vartheta}\right)^2}\,.\,d\vartheta,$$

ἢ $$ds=\sqrt{d\varrho^2+\varrho^2 d\vartheta^2}.$$

Τὸ σημεῖον τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ὁρίζεται ὡς καὶ εἰς τὰς εὐθυγράμμους συντεταγμένας.

Ἡμίτονον καὶ συνημίτονον τῆς γωνίας φ.

120. Ἐκ τῆς ἰσότητος $\text{εφ}\,\varphi=\frac{\varrho d\vartheta}{d\varrho}$ προκύπτουσι νῦν αἱ ἑξῆς τιμαὶ

τοῦ συνημιτόνου καὶ τοῦ ἡμιτόνου τῆς γωνίας φ, ἣν σχηματίζει ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ Μ πρὸς τὴν πολικὴν ἀκτῖνα,

$$\text{συν}\,\varphi = \frac{d\varrho}{ds}, \qquad \text{ημ}\,\varphi = \frac{\varrho d\vartheta}{ds}.$$

Εὕρεσις τοῦ μήκους τοῦ τόξου.

121. Ἔχοντες τὸ διαφορικὸν τοῦ τόξου, ἀνάγομεν τὴν εὕρεσιν αὐτοῦ τοῦ τόξου εἰς τὴν εὕρεσιν συναρτήσεως ἐχούσης δοθὲν διαφορικόν· τοῦτο γίνεται δῆλον ἐκ τῶν ἑπομένων ἐφαρμογῶν.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

1ον

Εὑρεῖν τὸ μῆκος τοῦ τόξου τῆς κυκλοειδοῦς.

Αἱ ἐξισώσεις αὐτῆς εἶνε

$$x = a(\omega - \text{ημ}\,\omega), \qquad y = a(1 - \text{συν}\,\omega).$$

Ἐκ τούτων, θεωροῦντες ἀμφότερα τὰ x, y ὡς συναρτήσεις τῆς ω, λαμβάνομεν

$$dx = a(1 - \text{συν}\,\omega)\,d\omega, \qquad dy = a\,\text{ημ}\,\omega d\omega,$$

ὅθεν $$dx^2 + dy^2 = a^2 d\omega^2 (2 - 2\,\text{συν}\,\omega) = 4a^2 . \text{ημ}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) d\omega^2$$

καὶ ἑπομένως $$ds = 2a\,\text{ημ}\left(\frac{\omega}{2}\right). d\omega = 4a\,.\,\text{ημ}\left(\frac{\omega}{2}\right) d\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

ἢ $$ds = d\left[-4a\,\text{συν}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right],$$

ἐξ οὗ ἕπεται $$s = -4a\,\text{συν}\left(\frac{\omega}{2}\right) + \text{A}.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ τόξον ἄρχεται ἐκ τοῦ σημείου Α, ὅπου εἶνε $\omega = 0$, πρέπει νὰ γίνηται $s = 0$, ὅταν $\omega = 0$, ὅθεν εὑρίσκομεν

$$0 = -4a + \text{A} \qquad \text{καὶ} \qquad \text{A} = 4a,$$

ὅθεν $$s = 4a\left[1 - \text{συν}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right] = \text{AM}.$$

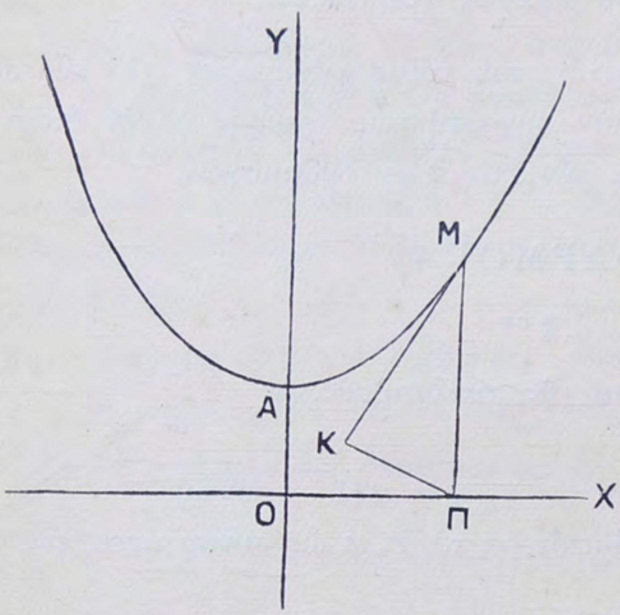
Ἐν τῷ τύπῳ τούτῳ ω σημαίνει τὴν εἰς τὸ ἄκρον Μ τοῦ τόξου ἀντιστοιχοῦσαν τιμὴν τῆς μεταβλητῆς. Ἂν δὲ τὸ ἄκρον Μ ἔλθῃ εἰς τὸ σημεῖον Β, ἡ ω γίνεται ἴση τῷ 2π· ὅθεν

$$\text{τοξ AB} = 8a,$$

ἤτοι τὸ ὅλον τόξον τῆς κυκλοειδοῦς εἶνε ὀκταπλάσιον τῆς ἀκτῖνος τῆς περιφερείας, ἐξ ἧς γίνεται.

2ον

Εὑρεῖν τὸ μῆκος τοῦ τόξου τῆς ἀλυσοειδοῦς.



Ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης ταύτης εἶνε

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Σχῆμα δὲ ἔχει τὸ ἀπέναντι· λέγεται δὲ ἀλυσοειδής, διότι τὸ σχῆμα αὐτῆς λαμβάνει ἕνεκα τῆς βαρύτητος κλωστὴ ἢ καὶ ἄλυσίς τις λεπτὴ κρεμαμένη ἐκ τῶν δύο αὐτῆς ἄκρων.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῆς καμπύλης εὑρίσκομεν

$$dy = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right).dx,$$

ὅθεν
$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{1}{4}\left(e^{2\frac{x}{a}} + e^{-2\frac{x}{a}} - 2\right)$$

καὶ
$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{1}{4}\left(e^{2\frac{x}{a}} + e^{-2\frac{x}{a}} + 2\right) = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2,$$

ὅθεν
$$ds = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).dx$$

καὶ
$$ds = d\left\{\frac{a}{2}e^{\frac{x}{a}} - \frac{a}{2}e^{-\frac{x}{a}}\right\},$$

ἄρα
$$s = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) + \mathrm{A}.$$

Ἐὰν ὡς ἀρχὴ τοῦ τόξου ληφθῇ τὸ σημεῖον Α, εἰς ὃ ἡ καμπύλη τέμνει τὸν ἄξονα τῶν y, πρέπει διὰ $x=0$ νὰ εἶνε $s=0$, ἄρα $A=0$

καὶ $$s=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)=\text{τοξ}\,\mathrm{AM}.$$

Ἐκ τῆς τιμῆς ταύτης τοῦ τόξου s καὶ ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῆς καμπύλης εὑρίσκομεν εὐκόλως τὴν ἑπομένην τῆς καμπύλης ταύτης ἰδιότητα $$s^2=y^2-a^2,$$
ἤτοι τὸ τόξον ΑΜ τῆς ἀλυσοειδοῦς εἶνε μία τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, οὗτινος αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ εἶνε αἱ τεταγμέναι τῶν ἄκρων τοῦ τόξου.

Τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο τρίγωνον γίνεται, ἐὰν ἐκ τοῦ ποδὸς Π τῆς τεταγμένης φέρωμεν τὴν κάθετον ΠΚ ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Μ,

διότι $$\mathrm{K\Pi}=y\,.\,\text{ημ}\,(90^0-\varphi)=y\,\text{συν}\,\varphi=y\,\frac{dx}{ds},$$

ἤτοι $$\mathrm{K\Pi}=a,\quad \text{ἑπομένως}\quad s=\mathrm{KM}.$$

Ἡ ἀλυσοειδὴς ἔχει καὶ τὴν ἑπομένην ἰδιότητα· τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς ΑΟΠΜ εἶνε ἀνάλογον τοῦ τόξου ΑΜ, διότι ἡ ἰσότης
$$ds=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right).\,dx$$

γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς $$ds=ydx\,\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\,d\mathrm{E},$$

ἄρα $$d\mathrm{E}=d(as)$$

καὶ $\mathrm{E}=as$ (διότι ἀμφότερα μηδενίζονται, ὅταν $x=0$), ἤτοι τὸ χωρίον ΑΟΠΜ τῆς ἀλυσοειδοῦς ἰσοῦται τῷ ὀρθογωνίῳ, ὅπερ ἔχει βάσιν μὲν τὴν ΜΚ (ἴσην τῷ τόξῳ ΑΜ), ὕψος δὲ τὴν ΑΟ.

3ον

Εὑρεῖν τὸ μῆκος τοῦ τόξου τῆς ἑλκομένης.

Εἰς πᾶν σημεῖον αὐτῆς εἶνε (σελ. 106)

$$y\sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}}=a,\ \text{ὅθεν}\ y\sqrt{dx^2+dy^2}=ady,$$

ὅθεν $$\sqrt{dx^2+dy^2}=a\,\frac{dy}{y}.$$

Ἐὰν θέλωμεν τὸ τόξον ΑΜ, πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι τὸ τόξον (ἀρχόμενον ἀπὸ τοῦ Α) αὐξάνει ἐλαττουμένου τοῦ y· ἑπομένως ἡ τετρ. ῥίζα πρέπει νὰ ληφθῇ μετὰ τοῦ σημείου — · ὥστε εἶνε

$$ds = -a\frac{dy}{y} = d(-aly),$$

ἄρα
$$s = -aly + A.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ τόξον μηδενίζεται, ὅταν ἡ τεταγμένη γίνῃ ἴση τῷ a, ἕπεται $0 = -ala + A$, ἄρα $A = ala$ καὶ ἑπομένως ὁ τὸ τόξον ΑΜ παρέχων τύπος εἶνε $s = al\left(\frac{a}{y}\right)$, ἔνθα y σημαίνει τὴν τεταγμένην τοῦ πέρατος Μ τοῦ τόξου.

4ον

Εὑρεῖν τὸ μῆκος τοῦ τόξου τῆς λογαριθμικῆς ἕλικος.

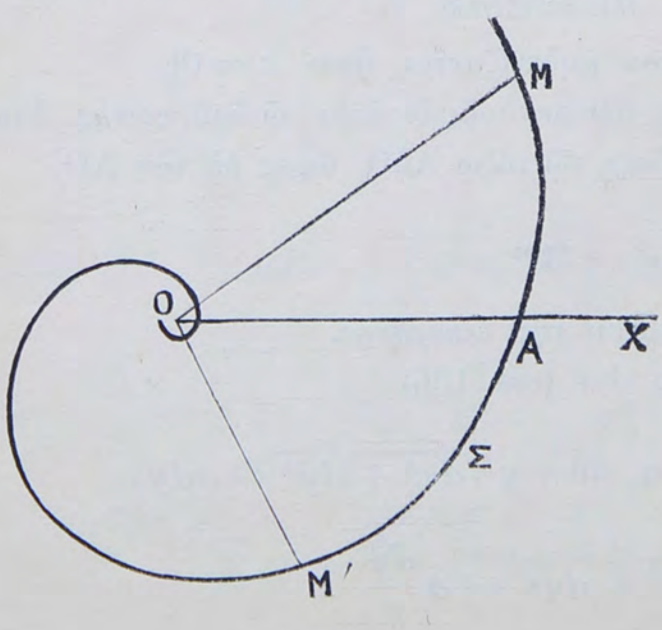
Ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς εἶνε $\varrho = e^{\mu\vartheta}$, συνάγομεν, ὅτι $d\varrho = e^{\mu\vartheta}\, d(\mu\vartheta) = \varrho\mu d\vartheta$,

ὅθεν
$$ds = \sqrt{d\varrho^2 + \frac{1}{\mu^2}\, d\varrho^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{\mu^2}}\,.\, d\varrho,$$

ἢ
$$ds = d\left\{\varrho.\sqrt{1 + \frac{1}{\mu^2}}\right\},$$

ἄρα
$$s = \varrho\sqrt{1 + \frac{1}{\mu^2}} + A.$$

Ἐὰν ἀρχὴ τοῦ τόξου ληφθῇ τὸ σημεῖον Α, ὅπερ ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν τιμὴν $\vartheta = 0$, πρέπει νὰ εἶνε $s = 0$, ὅταν $\varrho = 1$· ἄρα



$$A = -\sqrt{1 + \frac{1}{\mu^2}}\,.$$

ἑπομένως ὁ τὸ τόξον ΑΜ παρέχων τύπος εἶνε

$$s = \sqrt{1 + \frac{1}{\mu^2}}\,(\varrho - 1),$$

ἔνθα ϱ εἶνε ἡ πολικὴ ἀκτὶς τοῦ ἄκρου Μ τοῦ τόξου.

Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἕνεκα τῆς ἐξισώσεως

$$ds = \sqrt{1 + \frac{1}{\mu^2}}\; d\varrho$$

ἔχει τὸ θετικὸν μὲν σημεῖον, ἐὰν αὐξανομένου τοῦ ϱ αὐξάνῃ καὶ τὸ τόξον, ἤτοι ἂν τὸ τόξον ἀντιστοιχῇ πρὸς τὰς θετικὰς τιμὰς τῆς πολικῆς γωνίας ϑ, τὸ ἀρνητικὸν δέ, ἂν τοὐναντίον· ὥστε, ἂν ζητῆται τὸ τόξον ΑΣΜ′, ἔχομεν

$$s = \text{τοξ}\, \text{ΑΣΜ}' = \sqrt{1+\frac{1}{\mu^2}}\,(1-\varrho). \qquad \varrho = \text{ΟΜ}'$$

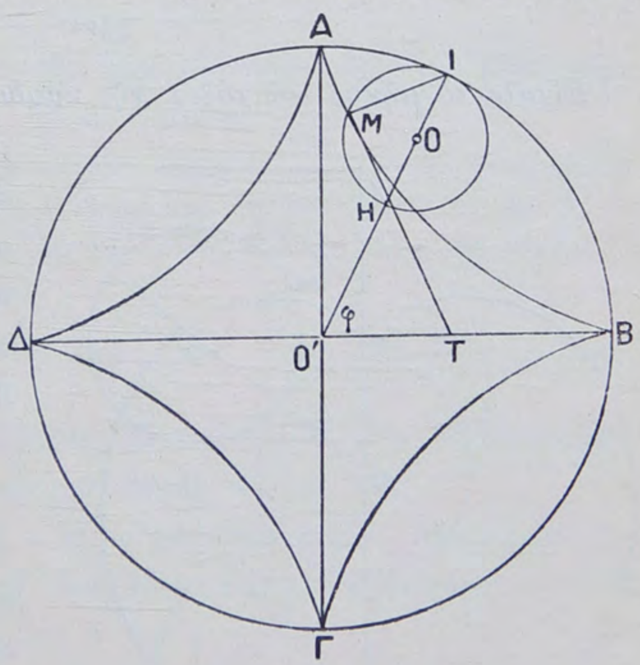
Ἐκ τοῦ τύπου τούτου γίνεται φανερόν, ὅτι ὁσουςδήποτε ἑλιγμοὺς καὶ ἂν ἐκτελέσῃ τὸ τόξον τοῦτο περὶ τὸν πόλον, οὐδέποτε τὸ μῆκος αὐτοῦ ὑπερβαίνει τὸν ἀριθμὸν $\sqrt{1+\frac{1}{\mu^2}}$, τείνει ὅμως πρὸς τοῦτον, ὅσον τὸ ἄκρον Μ πλησιάζει πρὸς τὸν πόλον.

4ον

Εὑρεῖν τὸ μῆκος τοῦ τόξου τῆς καμπύλης

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Ἡ καμπύλη αὕτη γράφεται ὑπὸ σημείου περιφερείας κυλιομένης ἐντὸς ἄλλης τετραπλασίαν ἐχούσης ἀκτῖνα (Ἐπ. Ἀν. 371)· a σημαίνει τὴν ἀκτῖνα τῆς ἀκινήτου περιφερείας.



Ἐὰν τεθῇ $x = a\,\eta\mu^3\varphi$, εὑρίσκεται $y = a\,\sigma\upsilon\nu^3\varphi$· σημαίνει δὲ ἡ γωνία φ, ὡς ἐν τῷ αὐτῷ τόπῳ εὑρέθη, τὴν γωνίαν ΑΟ′Ι, ἣν σχηματίζει ἡ ἀκτὶς τῆς ἐπαφῆς Ο′Ι πρὸς τὴν ἀκτῖνα Ο′Α.

Ἐκ τούτων ἕπεται

$$dy = -3a\,\sigma\upsilon\nu^2\varphi\,\eta\mu\,\varphi\, d\varphi, \qquad dx = 3a\,\eta\mu^2\varphi\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi\, d\varphi,$$

ἄρα $$dx^2 + dy^2 = 9a^2\,\eta\mu^2\varphi\,\sigma\upsilon\nu^2\varphi\, d\varphi^2,$$

ἑπομένως $$ds = 3a\,\eta\mu\,\varphi\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi\, d\varphi,$$

ἢ $$ds = 3a\,\eta\mu\,\varphi \,.\, d(\eta\mu\,\varphi),$$

ὅθεν καὶ $$ds = \frac{3a}{2} . d(\eta\mu^2\varphi),$$

ἢ $$ds = d\left(\frac{3}{2}\, a\, \eta\mu^2\varphi\right),$$

ἄρα $$s = \frac{3}{2}\, a\, \eta\mu^2\varphi + \mathrm{A}.$$

Ἐὰν δὲ ὡς ἀρχὴν τοῦ τόξου λάβωμεν τὸ σημεῖον Α (ἔνθα εἶνε $\varphi = 0$), πρέπει νὰ γίνηται $s = 0$, ὅταν $\varphi = 0$, ἄρα εἶνε $\mathrm{A} = 0$ καὶ ἑπομένως ὁ τὸ τόξον ΑΜ παρέχων τύπος εἶνε

$$s = \mathrm{AM} = \frac{3}{2}\, a\, \eta\mu^2\varphi \cdot$$

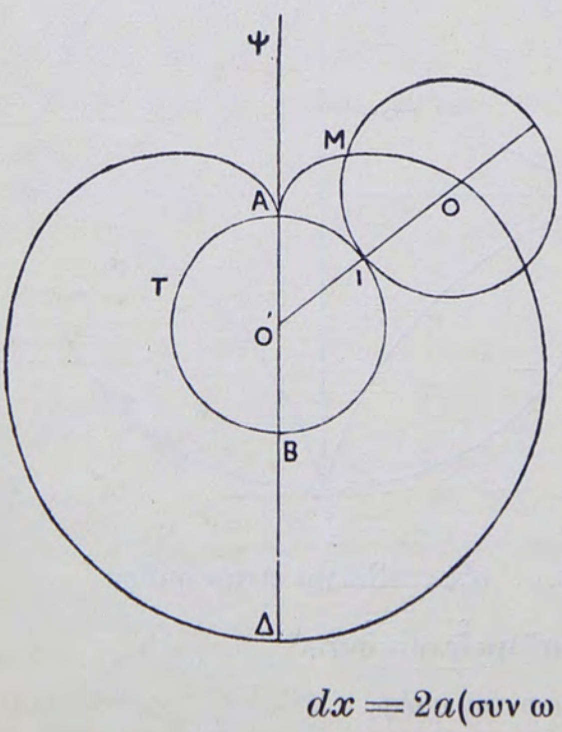
καὶ ἂν τὸ πέρας Μ τοῦ τόξου φθάσῃ εἰς τὸ σημεῖον Β, ἔνθα εἶνε $\varphi = \frac{\pi}{2}$, εὑρίσκομεν

$$\tau o\xi\,\mathrm{AB} = \frac{3}{2}\, a, \qquad \text{ὅθεν} \qquad \tau o\xi\,\mathrm{AB\Gamma\Delta A} = 6a,$$

ὥστε τὸ τόξον τῆς ὅλης καμπύλης εἶνε ἑξαπλάσιον τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἀκινήτου κύκλου.

5ον

Εὑρεῖν τὸ μῆκος τοῦ τόξου τῆς καρδιοειδοῦς.



Καρδιοειδὴς λέγεται διὰ τὸ σχῆμα αὐτῆς ἡ ὑπὸ σημείου περιφερείας γραφομένη καμπύλη, ὅταν ἡ περιφέρεια κυλίηται ἐπὶ ἄλλης ἴσης (Επ. Ἀν. 369). Αἱ ἐξισώσεις αὐτῆς εἶνε

$$x = a\,(2\,\eta\mu\,\omega - \eta\mu\,2\omega),$$
$$y = a\,(2\,\sigma\upsilon\nu\,\omega - \sigma\upsilon\nu\,2\omega).$$

Ἡ βοηθητικὴ μεταβλητὴ ω σημαίνει τὴν γωνίαν, ἣν σχηματίζει ἡ ἀκτὶς Ο΄Α πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς ἐπαφῆς Ο΄Ι.

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων εὑρίσκομεν

$$dx = 2a(\sigma\upsilon\nu\,\omega - \sigma\upsilon\nu\,2\omega)d\omega,$$
$$dy = 2a(-\eta\mu\,\omega + \eta\mu\,2\omega)d\omega.$$

Ἐκ τούτων ἕπεται

$$dx^2+dy^2=4a^2(1+1-2\,\text{συν}\,\omega\,\text{συν}\,2\omega-2\,\text{ημ}\,\omega\,\text{ημ}\,2\omega)d\omega^2,$$

ἢ $$dx^2+dy^2=8a^2(1-\text{συν}\,\omega)d\omega^2=16a^2\,\text{ημ}^2\left(\frac{\omega}{2}\right).d\omega^2,$$

ἄρα $$ds=4a\,\text{ημ}\left(\frac{\omega}{2}\right).d\omega=8a.\text{ημ}\left(\frac{\omega}{2}\right).d\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

ἢ $$ds=d\left\{-8a\,\text{συν}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right\}$$

καὶ ἑπομένως $$s=-8a\,\text{συν}\left(\frac{\omega}{2}\right)+\text{A}.$$

Ἐὰν ὡς ἀρχὴν τοῦ τόξου λάβωμεν τὸ σημεῖον Α (ἔνθα εἶνε $\omega=0$), πρέπει νὰ εἶνε $s=0$, ὅταν $\omega=0$· ἄρα $0=-8a+\text{A}$ καὶ $\text{A}=8a$, ὅθεν ὁ τὸ τόξον ΑΜ παρέχων τύπος εἶνε

$$s=\text{AM}=8a\left(1-\text{συν}\,\frac{\omega}{2}\right).$$

Ἐὰν δὲ τὸ πέρας τοῦ τόξου φθάσῃ εἰς τὸ Δ, ἔνθα εἶνε $\omega=\pi$, εὑρίσκομεν $$\text{τοξ ΑΔ}=8a\cdot$$
ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι *τὸ τόξον τῆς ὅλης καρδιοειδοῦς εἶνε δεκαεξαπλάσιον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου, ἐξ οὗ γίνεται.*

ΣΗΜ Ὁμοίως εὑρίσκεται καὶ τὸ τόξον πάσης ἐπικυκλοειδοῦς, θεωρουμένων ἀμφοτέρων τῶν συντεταγμένων ὡς ἐξαρτωμένων ἐκ τῆς γωνίας ω, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ἀκτὶς τοῦ τὴν καμπύλην γράφοντος σημείου πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς ἐπαφῆς. (Ἐπ. Ἀν. 360).

6ον

Καμπύλην εὑρεῖν, τῆς ὁποίας τὸ τόξον νὰ εἶνε πρωτοβάθμιος συνάρτησις τῶν συντεταγμένων τοῦ ἄκρου αὐτοῦ.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ s τὸ μῆκος τοῦ τόξου, ὅπερ καταλήγει εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Μ, καὶ διὰ x, y τὰς συντεταγμένας τοῦ Μ, πρέπει νὰ εἶνε $$s=\alpha x+\beta y+\gamma.$$

Ἐὰν δὲ λάβωμεν τὴν εὐθεῖαν $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ ὡς ἄξονα τῶν x (ὅπερ οὐδόλως βλάπτει τὴν καμπύλην), τὸ τριώνυμον $\alpha x+\beta y+\gamma$, ὅπερ εἶνε ἀνάλογον τῆς ἀποστάσεως τοῦ Μ ἀπὸ τῆς εὐθείας ταύτης (Ἐπ. Ἀν. 60), εἶνε ἀνάλογον τοῦ νέου y· ὥστε ἡ τεθεῖσα ἐξίσωσις λαμβάνει τότε τὴν μορφὴν $$s=\lambda y+\tau,$$

ἐξ ἧς $\qquad ds = \lambda dy \qquad$ ἢ $\qquad \sqrt{dx^2 + dy^2} = \lambda dy,$

ὅθεν $\qquad dx^2 + dy^2 = \lambda^2 dy^2$

καὶ $\qquad dx^2 = (\lambda^2 - 1)\, dy^2,$

ἄρα $\qquad dx = \sqrt{\lambda^2 - 1}\, dy = d\left\{ y\sqrt{\lambda^2 - 1} \right\}$

καὶ ἑπομένως $\qquad x = y\sqrt{\lambda^2 - 1} + A,$

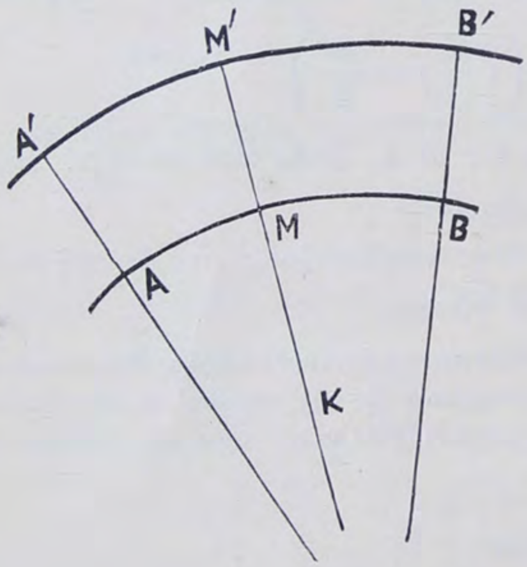
ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι τὸ ζητούμενον μόνον εἰς τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν συμβαίνει· εἰς οὐδεμίαν δὲ καμπύλην.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

α΄) Παράλληλοι καμπύλαι.

Ἐὰν αἱ κάθετοι καμπύλης αὐξηθῶσιν ἢ ἐλαττωθῶσι πᾶσαι κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, προκύπτει ἄλλη τις καμπύλη. Ἀποδεῖξαι, ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν δύο καμπύλων εἰς τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα αὐτῶν εἶνε παράλληλοι.

Ἔστω ΑΒ ἡ δοθεῖσα καμπύλη καὶ Μ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς καὶ ΜΚ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν καμπύλην· ἐὰν ἐπὶ τῆς καθέτου ταύτης (ἐκ τοῦ ἑνὸς ἢ ἐκ τοῦ ἑτέρου μέρους τοῦ Μ) ληφθῇ ΜΜ′ = α, καὶ γίνῃ τὸ αὐτὸ εἰς ἅπαντα τὰ σημεῖα τῆς ΑΒ, θὰ προκύψῃ ἡ νέα καμπύλη Α′Β′.



Αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου Μ′ θὰ εἶνε

$$x' = x + \xi\alpha$$
$$y' = y + \eta\alpha,$$

ἔνθα x, y εἶνε αἱ συντεταγμέναι τοῦ ἀντιστοίχου σημείου Μ καὶ ξ, η εἶνε τὰ συνημίτονα τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας ἡ ΜΚ σχηματίζει πρὸς τοὺς ἄξονας. (Ἐπιπ. Ἀναλ. ἐδ. 70).

Ἐντεῦθεν ἕπεται

$$dx' = dx + \alpha d\xi$$
$$dy' = dy + \alpha d\eta$$

καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν πρώτην τῶν ἐξισώσεων τούτων ἐπὶ ξ καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ η καὶ προσθέσωμεν ἔπειτα αὐτὰς κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$\xi dx' + \eta dy' = (\xi dx + \eta dy) + \alpha(\xi d\xi + \eta d\eta)\cdot$$

ἐπειδὴ δὲ εἶνε $\xi^2 + \eta^2 = 1$, ἕπεται $\xi d\xi + \eta d\eta = 0\cdot$

πρὸς τούτοις εἶνε $\xi dx + \eta dy = 0$, διότι ἡ ΜΚ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς καμπύλης εἰς τὸ Μ· ἄρα εἶνε

$$\xi dx' + \eta dy' = 0,$$

τουτέστιν ἡ ἐφαπτομένη τῆς νέας καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον Μ′ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΜΚ· ἔχουσιν ἄρα αἱ δύο καμπύλαι τὰς αὐτὰς καθέτους.

Παρατήρησις. Αἱ καμπύλαι, ὧν αἱ κάθετοι εἶνε αἱ αὐταί, καὶ αἵτινες ἑπομένως ἔχουσιν ἐφαπτομένας παραλλήλους εἰς τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα, λέγονται *παράλληλοι*.

β') Διπολικαὶ συντεταγμέναι.

Ἡ θέσις οἱουδήποτε σημείου Μ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ δύναται νὰ ὁρισθῇ καὶ διὰ τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ϱ_1 καὶ ϱ_2 ἀπὸ δύο ὡρισμένων σημείων ἢ *πόλων*· διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὰς ἀποστάσεις ταύτας ϱ_1 καὶ ϱ_2 ὡς συντεταγμένας τοῦ σημείου Μ· λέγονται δὲ αἱ συντεταγμέναι αὗται *διπολικαί*.

Ἀποδεῖξαι περὶ τῶν διπολικῶν συντεταγμένων τὰ ἑξῆς.

1) Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ φ_1 καὶ φ_2 τὰς γωνίας τῶν πολικῶν ἀκτίνων ϱ_1 καὶ ϱ_2 πρὸς τὴν ἐφαπτομένην οἱαςδήποτε καμπύλης εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον (ϱ_1, ϱ_2), θὰ εἶνε

$$\frac{d\varrho_1}{d\varrho_2} = \frac{\text{συν}\,\varphi_1}{\text{συν}\,\varphi_2}.$$

2) Νὰ δειχθῇ, ὅτι αἱ καμπύλαι

$$\varrho_1 + \varrho_2 = \alpha$$
$$\varrho_1 - \varrho_2 = \beta,$$

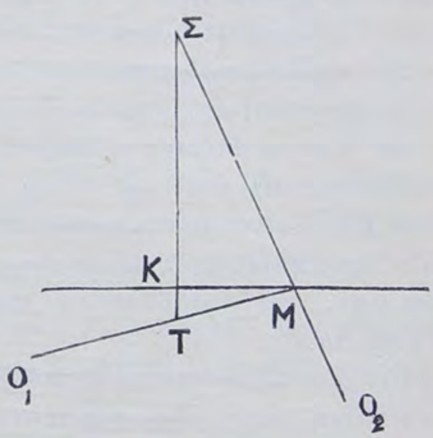
οἱωνδήποτε ὄντων τῶν σταθερῶν ἀριθμῶν α καὶ β, τέμνονται πρὸς ὀρθάς.

3) Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης

$\varrho_1 \varrho_2 = \alpha^2$ (ἰδὲ Ἐπ. Ἀναλ. σελ. 324)

κατασκευάζεται ὡς ἑξῆς.

Προσεκβάλλομεν τὴν πολικὴν ἀκτῖνα O_2M $(= \varrho_2)$ κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΜΣ ἴσην τῇ ἀκτῖνι O_1M $(= \varrho_1)$· ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος O_1M λαμβάνομεν ἀπὸ τοῦ σημείου Μ τὴν εὐθεῖαν ΜΤ ἴσην τῇ ἀκτῖνι MO_2, ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν ΣΤ καὶ πρὸς αὐτὴν κάθετον ἐκ τοῦ Μ τὴν ΜΚ· ἡ κάθετος αὕτη ΜΚ θὰ εἶνε ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη.



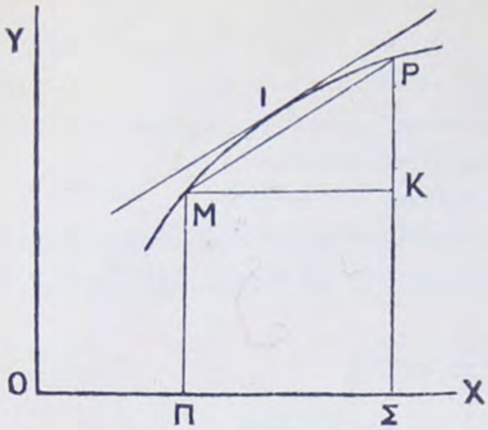
γ') Ποικίλα ζητήματα.

1) Ἐὰν καμπύλη διέρχηται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων, τὸ ὅριον τοῦ λόγου $\dfrac{y}{x}$ ἰσοῦται τῷ συντελεστῇ κατευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο (ἡ ἐφαπτομένη ὑποτίθεται ὡς ὅριον τεμνούσης διερχομένης διὰ τοῦ Ο καὶ περὶ αὐτὸ στρεφομένης, μέχρις οὗ τὸ δεύτερον σημεῖον τομῆς πέσῃ εἰς τὸ Ο).

2) Νὰ δειχθῶσι γεωμετρικῶς τὰ περὶ τῶν παραγώγων θεωρήματα, παριστωμένων τῶν τιμῶν τῆς x ὡς τετμημένων, τῶν δὲ τιμῶν τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$ ὡς τεταγμένων μιᾶς καμπύλης.

Πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ 6ου θεωρήματος (ἐδ. 89) ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $y = \sigma(x)$ παριστωμένην καμπύλην· τὸ τόξον αὐτῆς τὸ ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰς τιμὰς $x = \alpha \ldots \beta$ θὰ ἔχῃ τὰ ἄκρα αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x, διότι ἐξ ὑποθέσεως εἶνε $\sigma(\alpha) = 0$ καὶ $\sigma(\beta) = 0$· ἐὰν δὲ κινηθῇ ἡ χορδὴ αὐτοῦ παραλλήλως ἑαυτῇ, θὰ γίνῃ ποτὲ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου τούτου· καὶ εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἁφῆς θὰ εἶνε $\sigma'(x) = 0$.

Πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ 7ου θεωρήματος (ἐδ. 90) κατασκευάζομεν καὶ πάλιν τὸ τόξον τῆς καμπύλης $y=\sigma(x)$ τὸ πρὸς τὰς τιμὰς $x=\alpha\ldots\beta$ ἀντιστοιχοῦν, ὅπερ ἔστω τὸ ΜΡ, καὶ ἄγομεν τὴν χορδὴν αὐτοῦ ΜΡ. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΜΡΚ εὑρίσκομεν



$$\mathrm{KP} = \mathrm{MK}\,.\,\text{εφ}\,\mathrm{PMK},$$

τουτέστι $\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)=(\beta-\alpha)\,.\,\text{εφ}\,\mathrm{PMK}\cdot$ ἀλλ' ἡ χορδὴ ΜΡ εἶνε παράλληλος πρός τινα ἐφαπτομένην τοῦ τόξου ΜΡ διότι κινουμένη παραλλήλως ἑ θὰ γίνῃ ποτὲ ἐφαπτομένη τοῦ τό εἴς τι σημεῖον, ἔστω εἰς τὸ Ι, οὗτιν ἡ τετμημένη ἔστω γ· τότε ἡ γωνία ΡΜΚ (τῆς χορδῆς καὶ τοῦ ἄξονος ΟΧ) ε ἴση τῇ γωνίᾳ τῆς ἐφαπτομένης ταύτης καὶ τῆς ΟΧ καὶ διὰ τοῦτο εἶνε

$$\text{εφ}\,\mathrm{PMK}=\sigma'(\gamma)\cdot$$

ὅθεν ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)=(\beta-\alpha)\,\sigma'(\gamma), \qquad \text{εἶνε δὲ} \quad \alpha<\gamma<\beta.$$

3) Ἀποδεῖξαι, ὅτι τῶν ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων καμπύλων αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα εἶνε παράλληλοι.

4) Ἐὰν καμπύλη τις ἀναφέρηται πρὸς εὐθυγράμμους συντεταγμένας x, y, λαμβάνοντες dy ἀντὶ Δy καὶ ds ἀντὶ Δs, ἐξομοιοῦμεν τὴν καμπύλην πρὸς εὐθεῖαν (τὴν ἐφαπτομένην αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον x, y) ἐὰν δὲ ἡ καμπύλη ἀναφέρηται πρὸς πολικὰς συντεταγμένας, πρὸς ποίαν γραμμὴν ἐξομοιοῦμεν τὴν αὐτὴν καμπύλην, ὅταν λαμβάνωμεν $d\rho$ ἀντὶ $\Delta\rho$; πρὸς ποίαν δέ, ὅταν λαμβάνωμεν ds ἀντὶ Δs ;

5) Ἐὰν τόξον καμπύλης διαιρεθῇ εἰς μέρη καὶ ἐκ τῆς ἀρχῆς ἑκάστου ἀχθῇ ἐφαπτομένη αὐτοῦ μέχρι τῆς τεταγμένης τοῦ ἄκρου του, νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐφαπτομένων τούτων ἔχει ὅριον τὸ μῆκος τοῦ τόξου.

δ') Μετασχηματισμοὶ ἰσογώνιοι.

Ἐὰν δύο μεταβλητοὶ μιγάδες ἀριθμοὶ $z\,(x+iy)$ καὶ $z_1\,(x_1+iy_1)$ συνδέωνται διὰ τῆς τυχούσης ἐξισώσεως

$$z_1=\varphi(z) \qquad (1)$$

καὶ παρασταθῶσιν ἡ μὲν z διὰ τῶν σημείων ἐπιπέδου τινὸς Ε, ἡ δὲ z_1 διὰ τῶν σημείων ἄλλου ἐπιπέδου E_1, τὰ σημεῖα τῶν δύο τούτων ἐπιπέδων ἐν ἱκανῶς μικροῖς τμήμασιν αὐτῶν θὰ ἀντιστοιχῶσιν ἀλλήλοις ἓν πρὸς ἕν· καὶ αἱ ἐπ' αὐτῶν γραμμαὶ ἐπίσης. Ἐν τῷ μετασχηματισμῷ δὲ τούτῳ *διατηροῦνται αἱ γωνίαι ἀναλλοίωτοι*· ἤτοι ἡ γωνία δύο γραμμῶν τοῦ ἐπιπέδου Ε εἶνε ἴση τῇ γωνίᾳ τῶν ἀντιστοιχουσῶν γραμμῶν τοῦ E_1. Διὰ τοῦτο καλεῖται ὁ μετασχηματισμὸς οὗτος *ἰσογώνιος*.

Ἔστω τῷ ὄντι Μ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν δύο γραμμῶν ΜΑ καὶ MB τοῦ E καὶ M_1 τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ἀντιστοιχουσῶν γραμμῶν M_1A_1 καὶ M_1B_1 τοῦ E_1.

Τὰς ἀντιστοιχούσας μεταβολὰς τῶν συντεταγμένων z καὶ z_1 ἐπὶ μὲν τῶν καμπύλων MA, M_1A_1 παριστῶ διὰ dz καὶ dz_1, τὰς δὲ μεταβολὰς αὐτῶν ἐπὶ τῶν MB καὶ M_1B_1 παριστῶ διὰ τῶν δz, δz_1, πρὸς διάκρισιν· τότε θὰ εἶνε διὰ τὴν ἐξίσωσιν $z_1 = \varphi(z)$

$$dz_1 = \varphi'(z)\, dz,$$

$$\delta z_1 = \varphi'(z)\, \delta z \cdot \qquad (2)$$

ὅθεν (ἂν $\varphi'(z) \gtrless 0$)

$$\frac{dz}{\delta z} = \frac{dz_1}{\delta z_1} \cdot \qquad (3)$$

ἀλλὰ τοῦ dz μέτρον μὲν εἶνε τὸ διαφορικὸν τοῦ τόξου τῆς MA, ἤτοι τὸ ds, ὅρισμα δὲ ἡ γωνία τοῦ ἡμιάξονος OX πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς MA εἰς τὸ σημεῖον M, ἥν τινα γωνίαν παριστῶ διὰ τοῦ φ· (ἰδὲ Εἰσ. Ἀνωτέρας Ἀλγέβρας σελ. 89)· ὁμοίως ἑρμηνεύονται καὶ τὰ ἄλλα διαφορικά· ὅθεν ἡ ἰσότης (3) γίνεται

$$\frac{ds}{d\sigma} . e^{(\varphi - \omega) i} = \frac{ds_1}{d\sigma_1} . e^{(\varphi_1 - \omega_1) i} \cdot$$

ἐντεῦθεν ἕπεται $\qquad \varphi - \omega = \varphi_1 - \omega_1,$

ἤτοι ἡ γωνία τῶν ἐφαπτομένων τῶν δύο καμπύλων MA καὶ MB ἰσοῦται τῇ γωνίᾳ τῶν δύο ἐφαπτομένων τῶν ἀντιστοιχουσῶν καμπύλων M_1A_1 καὶ M_1B_1.

Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν μέτρων ἕπεται πρὸς τούτοις

$$\frac{ds}{ds_1} = \frac{d\sigma}{d\sigma_1},$$

ἤτοι *ὁ λόγος τῶν ἀντιστοιχούντων τόξων πέριξ ἑκάστου σημείου εἶνε ὁ αὐτός.*

Ἐκ τῆς διατηρήσεως τῶν γωνιῶν κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν $z_1 = \varphi(z)$ συνάγονται αἱ ἀκόλουθοι προτάσεις.

1) Ἐὰν τεθῇ $z_1 = \varphi(z) = P(x,y) + Q(x,y)i$, αἱ δύο σειραὶ τῶν καμπύλων $P(x,y) = C$ καὶ $Q(x,y) = C'$ τέμνονται πρὸς ὀρθάς· διότι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι πρὸς αὐτὰς τέμνονται πρὸς ὀρθάς.

2) Αἱ δύο σειραὶ τῶν καμπύλων $P + aQ = C$ καὶ $P + \beta Q = C'$ τέμνουσιν ἀλλήλας ὑπὸ γωνίαν σταθεράν, ὑπὸ τὴν ὁποίαν τέμνουσιν ἀλλήλας καὶ αἱ ἀντίστοιχοι πρὸς αὐτὰς $x + ay = C$ καὶ $x + \beta y = C'$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΚΑΜΠΥΛΑΙ ΕΝ ΤΩ ΧΩΡΩ

'Εὰν ἐκ τῶν τριῶν μεταβλητῶν x, y, z μία ὑποτεθῇ ἀνεξάρτητος, ἔστω ἡ x, αἱ δὲ λοιπαὶ συναρτήσεις αὐτῆς συνεχεῖς, πρὸς ἑκάστην τιμὴν τῆς x ἀντιστοιχοῦσιν ὡρισμέναι τιμαὶ τῶν λοιπῶν καὶ ἕκαστον σύστημα τιμῶν ἀντιστοιχουσῶν πρὸς ἀλλήλας δύναται νὰ παρασταθῇ γεωμετρικῶς διὰ τῶν συντεταγμένων ἑνὸς σημείου ἐν τῷ χώρῳ πρὸς οἱουσδήποτε ἄξονας· τότε τὸ σύνολον τῶν σημείων, ὧν συντεταγμέναι εἶνε αἱ πρὸς ἀλλήλας ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τῶν τριῶν μεταβλητῶν, εἶνε ἐν γένει γραμμή τις, ἥτις παριστᾷ γεωμετρικῶς διὰ τῶν συντεταγμένων αὐτῆς τὴν ἐξάρτησιν τῶν τριῶν μεταβλητῶν ἀπ' ἀλλήλων.

Ὁ ἐλάχιστος ἀριθμὸς ἐξισώσεων, δι' ὧν αἱ τρεῖς μεταβληταὶ συνδέονται, εἶνε δύο (ὅταν μία μόνη μεταβλητὴ μένῃ ἀνεξάρτητος)· αἱ δύο αὗται ἐξισώσεις λέγονται *ἐξισώσεις τῆς γραμμῆς*, δι' ἧς παρίσταται γεωμετρικῶς ἡ ἐξάρτησις τῶν μεταβλητῶν· ἔχουσι δὲ αἱ ἐξισώσεις αὗται τῆς γραμμῆς ἢ τὴν γενικὴν μορφὴν

$$\sigma(x, y, z) = 0, \qquad \varphi(x, y, z) = 0,$$

ἢ καὶ τὴν ἑξῆς ἁπλουστέραν

$$y = f(x), \qquad z = F(x),$$

εἰς τὴν ὁποίαν αἱ πρῶται ἀνάγονται, ὅταν λυθῶσι πρὸς τὰς δύο ἀγνώστους y καὶ z.

'Αλλὰ καὶ τρεῖς ἐξισώσεις δύνανται νὰ συνδέωσι τὰς τρεῖς μεταβλητὰς x, y, z καί τινα ἄλλην ω· τότε πρὸς εὕρεσιν τῶν ἐξισώσεων τῆς γραμμῆς, δι' ἧς παρίσταται γεωμετρικῶς ἡ ἐξάρτησις τῶν τριῶν μεταβλητῶν x, y, z ἀπ' ἀλλήλων, πρέπει νὰ ἀπαλειφθῇ ἡ τετάρτη μεταβλητὴ ω μεταξὺ τῶν τριῶν ἐξισώσεων. Πολλάκις ὅμως διατηροῦμεν τὰς τρεῖς ἐξισώσεις (ὡς ἁπλουστέρας), θεωροῦντες αὐτὰς ὡς ἐξισώσεις τῆς γραμμῆς καὶ τὴν ἐν αὐταῖς ὑπάρχουσαν μεταβλητὴν ω ὡς βοηθητικὴν μεταβλητήν, ἀφ' ἧς αἱ συντεταγμέναι x, y, z ἐξαρτῶνται· διότι εἶνε φανερόν, ὅτι πρὸς ἑκάστην τιμὴν τῆς ω ἀντιστοιχεῖ ἓν ὡρισμένον σημεῖον τῆς γραμμῆς (ἢ καὶ περισσότερα, ἀλλ' ὡρισμένα). 'Εὰν τότε λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις τῆς γραμμῆς πρὸς τὰς τρεῖς συντεταγμένας, λαμβάνουσι τὴν ἑξῆς μορφὴν

$$x = \sigma(\omega), \qquad y = \varphi(\omega), \qquad z = f(\omega).$$

ΣΗΜ. Καὶ εἰς τὰς ἐπιπέδους γραμμὰς θεωροῦνται πολλάκις ἀμφότεραι αἱ συντεταγμέναι x, y ὡς συναρτήσεις μιᾶς βοηθητικῆς μεταβλητῆς, οἷον εἰς τὴν κυκλοειδῆ, εἰς τὰς ἐπικυκλοειδεῖς, εἰς τὴν ἑλκομένην, κτλ.

Καὶ ἐν τῇ θεωρίᾳ τῶν ἐν τῷ χώρῳ καμπύλων γίνεται λόγος μόνον περὶ τῶν σημείων, εἰς τὰ ὁποῖα αἱ δύο μεταβληταὶ συντεταγμέναι, ὡς συναρτήσεις τῆς τρίτης θεωρούμεναι, εἶνε διαφορίσιμοι.

Ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης εἰς δοθὲν σημεῖον τῆς καμπύλης.

122. Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τῆς καμπύλης καὶ ΜΜ΄ τυχοῦσα τέμνουσα δι' αὐτοῦ ἠγμένη. Ἐὰν αἱ συντεταγμέναι τοῦ Μ εἶνε x, y, z, τοῦ δὲ Μ΄ $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ (τῶν Δx, Δy, Δz παριστώντων, τὰς μεταβολὰς τῶν συντεταγμένων κατὰ τὴν μετάβασιν ἀπὸ τοῦ Μ εἰς τὸ Μ΄), αἱ ἐξισώσεις τῆς τεμνούσης ΜΜ΄ εἶνε

$$\frac{X-x}{\Delta x}=\frac{\Psi-y}{\Delta y}=\frac{Z-z}{\Delta z}\cdot$$

αἱ δὲ ἐξισώσεις αὗται γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς

$$\left.\begin{aligned}\Psi-y&=\frac{\Delta y}{\Delta x}(X-x),\\ Z-z&=\frac{\Delta z}{\Delta x}(X-x).\end{aligned}\right\}\quad(\tau)$$

Ἐὰν δὲ ἡ τέμνουσα στρέφηται περὶ τὸ Μ, μέχρις οὗ τὸ σημεῖον Μ΄ πέσῃ ἐπὶ τὸ Μ, αἱ αὐξήσεις Δx, Δy, Δz ἐλαττοῦνται μέχρις ἐκμηδενίσεως, οἱ δὲ λόγοι $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, $\dfrac{\Delta z}{\Delta x}$ τείνουσι νὰ καταστῶσιν ἴσοι πρὸς τὰς παραγώγους $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$· ὅθεν αἱ ἐξισώσεις (τ) γίνονται

$$\left.\begin{aligned}\Psi-y&=\frac{dy}{dx}(X-x),\\ Z-z&=\frac{dz}{dx}(X-x).\end{aligned}\right\}\quad(\varepsilon)$$

Ἀλλ' ὅταν τὸ Μ΄ πέσῃ ἐπὶ τὸ Μ, ἡ τέμνουσα καταντᾷ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἰς τὸ Μ. Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι αἱ ἐξισώσεις αὗται εἶνε τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον Μ (x, y, z).

ΣΗΜ. Ὅτι πᾶσα τέμνουσα ἐφαρμόζει ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν (ε), ὅταν κινῆται ὁπωςδήποτε, μέχρις οὗ δύο τομαὶ αὐτῆς συμπέσωσιν εἰς τὸ Μ, ἀποδεικνύεται, ὡς καὶ περὶ τῶν ἐπιπέδων καμπύλων ἀπεδείχθη.

Διάφοροι μορφαὶ τῶν ἐξισώσεων τῆς ἐφαπτομένης.

123. Αἱ ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης γράφονται συμμετρικώτερον ὡς ἑξῆς:

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{\Psi-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}. \tag{1}$$

Λαμβάνουσι δὲ διαφόρους μορφὰς κατὰ τὴν διάφορον μορφὴν τῶν ἐξισώσεων τῆς γραμμῆς· καὶ ἂν μὲν αἱ ἐξισώσεις τῆς γραμμῆς εἶνε λελυμέναι πρὸς y καὶ z, ἤτοι ἂν εἶνε

$$y=\sigma(x) \qquad \text{καὶ} \qquad z=\varphi(x),$$

θὰ εἶνε $$\frac{dy}{dx}=\sigma'(x) \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{dz}{dx}=\varphi'(x)$$

καὶ αἱ ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης γίνονται

$$\begin{aligned} \Psi-y&=\sigma'(x)\ (X-x),\\ Z-z&=\varphi'(x)\ (X-x). \end{aligned} \tag{2}$$

Ἂν δὲ αἱ ἐξισώσεις τῆς καμπύλης εἶνε ἄλυτοι, δηλαδὴ

$$\begin{aligned} \sigma(x,y,z)&=0\\ \varphi(x,y,z)&=0, \end{aligned} \tag{α}$$

εὑρίσκομεν διαφορίζοντες αὐτὰς

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma}{\partial x}.dx+\frac{\partial\sigma}{\partial y}.dy+\frac{\partial\sigma}{\partial z}.dz&=0\\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}\ dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\ dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\ dz&=0. \end{aligned} \tag{δ}$$

Ἐκ δὲ τῶν ἐξισώσεων τούτων πρέπει νῦν νὰ εὑρεθῶσιν αἱ τιμαὶ τῶν παραγώγων $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ καὶ νὰ τεθῶσιν εἰς τὰς ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης· τουτέστι πρέπει νὰ ἀπαλειφθῶσιν αἱ δύο παράγωγοι $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ (ἢ καὶ τὰ τρία διαφορικὰ) μεταξὺ τῶν δύο ἐξισώσεων τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων (δ)· ἀλλὰ τοῦτο γίνεται εὐκολώτατα ὡς ἑξῆς.

Παριστῶντες διὰ τοῦ ϱ τὴν κοινὴν τιμὴν τῶν τριῶν κλασμάτων (1), γράφομεν τὰς ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης ὡς ἕπεται

$$X-x=\varrho.dx, \qquad \Psi-y=\varrho.dy, \qquad Z-z=\varrho.dz,$$

ὅθεν $$dx=\frac{1}{\varrho}(X-x), \quad dy=\frac{1}{\varrho}(\Psi-y), \quad dz=\frac{1}{\varrho}(Z-z),$$

ἐὰν δὲ αἱ τιμαὶ αὗται τῶν διαφορικῶν τεθῶσιν εἰς τὰς δύο ἐξισώσεις (δ), προκύπτουσιν αἱ ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma}{\partial x}.(X-x)+\frac{\partial\sigma}{\partial y}.(\Psi-y)+\frac{\partial\sigma}{\partial z}.(Z-z)=0,\\&\frac{\partial\varphi}{\partial x}.(X-x)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}.(\Psi-y)+\frac{\partial\varphi}{\partial z}.(Z-z)=0.\end{aligned}\qquad(3)$$

ΣΗΜ. Τὰ δύο ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα αἱ δύο ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης δηλοῦσιν, ὅταν λαμβάνωνται χωρὶς ἀλλήλων, καὶ τῶν ὁποίων τομὴ εἶνε ἡ ἐφαπτομένη, θὰ ἴδωμεν ἐν τοῖς ἑπομένοις, ὅτι εἶνε τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τῶν δύο ἐπιφανειῶν (α), ὧν τομὴ εἶνε ἡ καμπύλη.

Ἐὰν τέλος αἱ ἐξισώσεις τῆς γραμμῆς εἶνε τῆς μορφῆς

$$x=\sigma(\omega),\qquad y=\varphi(\omega),\qquad z=f(\omega),$$

θὰ εἶνε $dx=\sigma'(\omega)d\omega,\quad dy=\varphi'(\omega).d\omega,\quad dz=f'(\omega).d\omega$

καὶ αἱ ἐξισώσεις (1) τῆς ἐφαπτομένης γίνονται

$$\frac{X-x}{\sigma'(\omega)}=\frac{\Psi-y}{\varphi'(\omega)}=\frac{Z-z}{f'(\omega)}.\qquad(4)$$

Γεωμετρικὴ παράστασις τῶν διαφορικῶν dx, dy, dz.

124. Ἐκ τῶν συμμετρικῶν ἐξισώσεων τῆς ἐφαπτομένης γίνεται φανερόν, ὅτι καὶ τὸ σημεῖον, οὗ συντεταγμέναι εἶνε $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, εἶνε σημεῖον τῆς ἐφαπτομένης· τουτέστιν ὅτι *τὰ διαφορικὰ τῶν τριῶν μεταβλητῶν παρίστανται γεωμετρικῶς διὰ τῶν πρὸς ἀλλήλας ἀντιστοιχουσῶν αὐξήσεων τῶν συντεταγμένων τῆς ἐφαπτομένης*· ἑπομένως τὰ dx, dy, dz εἶνε αἱ συντεταγμέναι προβολαὶ τμήματός τινος τῆς ἐφαπτομένης.

Γεωμετρικὴ σημασία τῶν παραγώγων $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$.

125. Ἐπειδὴ ἡ προβολὴ τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης ἐπὶ τὸ τυχὸν ἐπίπεδον ἐφάπτεται τῆς προβολῆς τῆς καμπύλης ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, (ἀποδεικνύεται δὲ τοῦτο γεωμετρικῶς ἁπλούστατα) καὶ ἐφάπτεται εἰς τὴν προβολὴν τῆς ἀφῆς, ἕπεται, ὅτι αἱ δύο ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης

$$\Psi-y=\frac{dy}{dx}(X-x),$$

$$Z-z=\frac{dz}{dx}(X-x)$$

σημαίνουσι καὶ τὰς ἐφαπτομένας τῶν προβολῶν τῆς καμπύλης, ὅταν ἑκατέρα περιορισθῇ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν δύο μεταβλητῶν, ἃς περιέχει· καὶ ἡ μὲν πρώτη σημαίνει τὴν ἐφαπτομένην τῆς προβολῆς ἐπὶ τὸ xy ἐπίπεδον, ἡ δὲ δευτέρα τὴν ἐφαπτομένην τῆς προβολῆς ἐπὶ τὸ zx ἐπίπεδον. Διὰ τοῦτο αἱ παράγωγοι $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ εἶνε ἴσαι πρὸς τοὺς συντελεστὰς κατευθύνσεως τῶν ἐφαπτομένων τούτων ἐν τοῖς ἐπιπέδοις αὐτῶν.

Κάθετον ἐπίπεδον.

126. *Κάθετον* λέγεται ἐπίπεδον ἐπὶ καμπύλην, ἐὰν εἶνε κάθετον ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς.

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐπιπέδου, ὅπερ διερχόμενον διὰ τῆς ἀφῆς (x, y, z) εἶνε κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν $\frac{X-x}{dx}=\frac{\Psi-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}$, τουτέστιν ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην, εἶνε ἡ ἑξῆς (τῶν ἀξόνων ὑποτιθεμένων ὀρθογωνίων)

$$(X-x)\,dx+(\Psi-y)\,dy+(Z-z)\,dz=0.$$

Αἱ δὲ διάφοροι μορφαί, τὰς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις αὕτη λαμβάνει κατὰ τὰς διαφόρους μορφὰς τῶν ἐξισώσεων τῆς καμπύλης, εὑρίσκονται εὐκόλως.

Διαφορικὸν τοῦ τόξου τῶν ἐν τῷ χώρῳ καμπύλων.

127. Τὸ μῆκος τοῦ τόξου τῶν ἐν τῷ χώρῳ καμπύλων ὁρίζεται ὡς καὶ τῶν ἐπιπέδων. Ὑποτίθεται δὲ καὶ ἐνταῦθα, ὅτι εἰς ἕκαστον σημεῖον τοῦ τόξου ὑπάρχει μία ἐφαπτομένη ἐντελῶς ὡρισμένη· τουτέστιν, ἂν αἱ ἐξισώσεις τῆς καμπύλης εἶνε

$$y=\sigma(x) \qquad \text{καὶ} \qquad z=f(x)$$

ὑποτίθενται αἱ συναρτήσεις $\sigma(x)$ καὶ $f(x)$ διαφορίσιμοι εἰς πάσας τὰς τιμὰς τοῦ x, πρὸς ἃς ἀντιστοιχοῦσι τὰ σημεῖα τοῦ τόξου.

Ἔστω τυχοῦσα χορδὴ ἡ ΜΜ΄ καὶ συντεταγμέναι τοῦ μὲν Μ αἱ x, y, τοῦ δὲ Μ΄ αἱ $(x+\Delta x, y+\Delta y)$· τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ταύτης εἶνε

$$MM'=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$$

ἢ

$$MM'=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}\,.\,\Delta x$$

καὶ ἐπειδὴ ἡ τετρ. αὕτη ῥίζα ἔχει ὅριον τὴν

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

ἣν παριστῶ χάριν συντομίας διὰ τοῦ $\varphi(x)$, τὸ μῆκος τῆς χορδῆς δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς ἑξῆς

$$MM' = \Delta x . (\varphi(x) + \delta), \qquad \text{ἔνθα} \quad \text{ορ}\ \delta = 0.$$

Ὁ τύπος οὗτος δίδει τὸ μῆκος ἑκάστης χορδῆς, ἐὰν θέσωμεν ἀντὶ τοῦ x τὴν τετμημένην τῆς ἀρχῆς τῆς χορδῆς καὶ ἀντὶ Δx τὴν αὔξησιν τῆς τετμημένης ἐπὶ τῆς χορδῆς. Ἐὰν λοιπὸν $a, x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}, \beta$ εἶνε αἱ τετμημέναι τῶν κορυφῶν τῆς ἐγγεγραμμένης γραμμῆς, τὰ μήκη τῶν χορδῶν ἔχουσι τὸ ἑξῆς ἄθροισμα

$$\begin{aligned}(x_1-\alpha)\,\varphi(\alpha) + (x_2-x_1)\,\varphi(x_1) + \ldots + (\beta - x_{\nu-1})\,\varphi(x_{\nu-1})\\ + (x_1-\alpha)\,\delta_1 + (x_2-x_1)\,\delta_2 + \ldots + (\beta - x_{\nu-1})\,\delta_\nu\,,\end{aligned}$$

οὗ τὸ ὅριον εἶνε $\displaystyle\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx\cdot$

τοῦτο ἄρα εἶνε κατὰ τὸν ὁρισμὸν τὸ μῆκος τοῦ τόξου ΑΜΒ.

Ἐὰν ὡς πέρας τοῦ τόξου ληφθῇ τὸ τυχὸν σημεῖον Μ, τὸ ἔχον τετμημένην x, τὸ μῆκος τοῦ τόξου ΑΜ, ὅπερ παριστῶ διὰ τοῦ s, θὰ εἶνε

$$s = \int_\alpha^x \varphi(x)dx = \Phi(x) - \Phi(\alpha),$$

ἐὰν $\Phi'(x) = \varphi(x)$. Ἐντεῦθεν ἕπεται $ds = \Phi'(x)\,dx = \varphi(x)\,dx$,

ἄρα $$ds = \sqrt{1+\sigma'(x)^2+f'(x)^2}\,.\,dx$$

ἢ καὶ $$ds = \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}}\,.\,dx$$

ἤτοι $$ds = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου γίνεται φανερόν, ὅτι *τὸ διαφορικὸν τοῦ τόξου ἰσοῦται τῇ διαγωνίῳ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, οὗτινος ἀκμαὶ συνεχεῖς εἶνε τὰ διαφορικὰ τῶν συντεταγμένων τοῦ πέρατος αὐτοῦ.*

Παράστασις τοῦ διαφορικοῦ ds.

128. Τὸ διαφορικὸν τοῦ τόξου παρίσταται ὑπὸ τμήματος τῆς ἐφαπτομένης, ὅπερ ἔχει συντεταγμένας προβολὰς τὰ διαφορικὰ dx, dy, $dz\cdot$ διότι αἱ μὲν συντεταγμέναι x, y, z εἶνε τοῦ πέρατος Μ τοῦ τόξου,

ἤτοι τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς, αἱ δὲ $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ εἶνε συντεταγμέναι σημείου τινὸς N τῆς ἐφαπτομένης (ἐδ. 124)· εἶνε δὲ

$$\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\text{MN}=ds.$$

Ὅριον τοῦ λόγου τόξου πρὸς τὴν χορδήν του.

129. Ὁ λόγος τόξου οἱασδήποτε καμπύλης πρὸς τὴν χορδὴν αὐτοῦ ἔχει ὅριον τὴν μονάδα, ὅταν τὸ τόξον τείνῃ πρὸς τὸ 0.

Τοῦτο ἀποδεικνύεται περὶ τῶν ἐν τῷ χώρῳ καμπύλων, καθ' ὃν τρόπον ἀπεδείχθη περὶ τῶν ἐπιπέδων.

Γωνίαι τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τοὺς ἄξονας.

130. Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τῆς ἐφαπτομένης

$$\frac{\mathrm{X}-x}{dx}=\frac{\Psi-y}{dy}=\frac{\mathrm{Z}-z}{dz}$$

εὑρίσκομεν τὰ συνημίτονα τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας τὸ ἓν μέρος αὐτῆς σχηματίζει πρὸς τοὺς ἄξονας (ὑποτιθεμένους ὀρθογωνίους)· εἶνε δὲ τὰ ἑξῆς (Στ. Ἀν. ἐδ. 110)

$$\alpha=\frac{dx}{ds},\qquad \beta=\frac{dy}{ds},\qquad \gamma=\frac{dz}{ds}.$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι *τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν ἡ ἐφαπτομένη οἱασδήποτε καμπύλης ποιεῖ πρός τινα ἄξονα, ἰσοῦται πρὸς τὸ διαφορικὸν τῆς συντεταγμένης τοῦ αὐτοῦ ἄξονος διαιρεθὲν διὰ τοῦ διαφορικοῦ τοῦ τόξου τῆς καμπύλης.*

ΣΗΜ. Τὸ μέρος τῆς ἐφαπτομένης τὸ ἔχον συνημίτονα $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ εἶνε τὸ φέρον ἐκ τῆς ἁφῆς πρὸς ὃ μέρος αὐξάνει τὸ τόξον· διότι τὸ μέρος τοῦτο τῆς ἐφαπτομένης σχηματίζει πρὸς τὸν θετικὸν ἡμιάξονα OX ὀξεῖαν μὲν γωνίαν (ἑπομένως θετικὸν ἔχουσαν συνημίτονον), ἐὰν αὐξανομένου τοῦ x αὐξάνῃ καὶ τὸ τόξον (ὅτε $\frac{dx}{ds}$ εἶνε θετικόν), ἀμβλεῖαν δέ, ἐὰν τοὐναντίον (ὅτε καὶ τὸ $\frac{dx}{ds}$ εἶνε ἀρνητικόν). Φανερὸν δέ, ὅτι τὸ αὐτὸ ἀληθεύει καὶ περὶ τῶν ἄλλων ἀξόνων.

Προβλήματα.

1ον

Καμπύλην εὑρεῖν, ἧςτινος τὸ κάθετον ἐπίπεδον νὰ διέρχηται πάντοτε διὰ δεδομένου σημείου.

Ἐὰν τὸ δοθὲν σημεῖον ληφθῇ ὡς ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων, θὰ εἶνε εἰς πᾶν σημεῖον τῆς καμπύλης

$$xdx + ydy + zdz = 0$$

ἢ $$d(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

ἄρα $$x^2 + y^2 + z^2 = A.$$

Ἡ καμπύλη κεῖται κατὰ ταῦτα ἐπὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας κέντρον ἐχούσης τὸ δοθὲν σημεῖον, ἀκτῖνα δὲ τὴν τυχοῦσαν. Ὅτι δὲ πᾶσα ἐπὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας κειμένη γραμμὴ ἔχει τὴν προκειμένην ἰδιότητα, εἶνε προφανές. Λέγονται δὲ αἱ ἐπὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας κείμεναι καμπύλαι *σφαιρικαὶ καμπύλαι.*

ΣΗΜ. Ἡ καμπύλη θὰ ὁρισθῇ ἐντελῶς, ἐὰν δοθῇ καὶ ἄλλο τι ἐπίταγμα ἢ ἄλλη τις ἐπιφάνεια, ἐφ' ἧς πρέπει νὰ κεῖται.

2ον

Καμπύλην εὑρεῖν, τῆς ὁποίας ἡ ἐφαπτομένη νὰ διέρχηται πάντοτε διὰ δοθέντος σημείου.

Ἐὰν τὸ δοθὲν σημεῖον ληφθῇ ὡς ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων, θὰ εἶνε εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς καμπύλης

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z},$$

ἤτοι $$d(lx) = d(ly) = d(lz)$$

καὶ ἑπομένως $ly = lx + A$, ἄρα $y = ax$

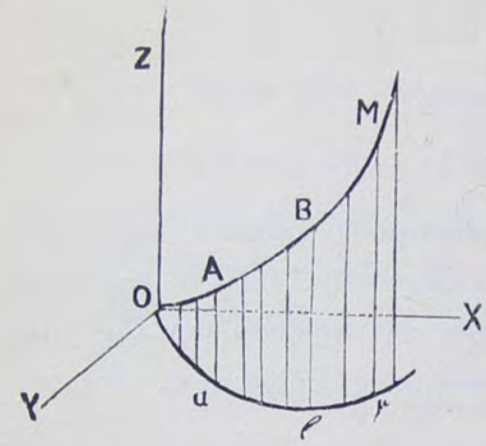
καὶ $lz = lx + B$, ἄρα $z = bx$·

ἡ ζητουμένη γραμμὴ εἶνε λοιπὸν εὐθεῖα γραμμὴ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου διερχομένη.

3ον

Καμπύλην εὑρεῖν, τῆς ὁποίας ἡ ἐφαπτομένη νὰ σχηματίζῃ πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον (ἢ πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τὴν κάθετον ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον) σταθερὰν γωνίαν φ.

Ἐὰν διά τινος σημείου τῆς καμπύλης ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον τῷ δοθέντι καὶ ληφθῇ τὸ μὲν σημεῖον ὡς ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων, τὸ δὲ ἐπίπεδον ὡς ἐπίπεδον τῶν xy, θὰ εἶνε εἰς ἕκαστον τῶν σημείων τῆς καμπύλης



$$\frac{dz}{ds} = \eta\mu\,\varphi = \frac{1}{a},$$

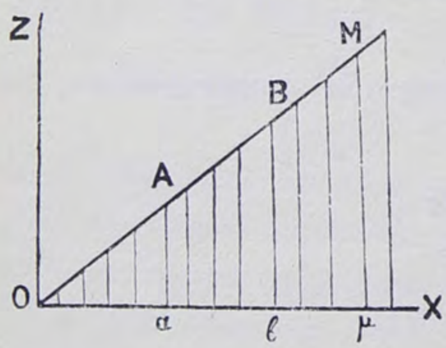
ὅθεν καὶ $\qquad ds = adz = d\, az)$,

ἑπομένως $\qquad s = az.$

Ἡ προσθετέα σταθερὰ ποσότης εἶνε 0, ἐὰν ὡς ἀρχὴ τοῦ τόξου ληφθῇ ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων· διότι τότε εἶνε συνάμα $z = 0$ καὶ $s = 0$.

Ἐντεῦθεν βλέπομεν, ὅτι τὸ τόξον τῆς καμπύλης θὰ εἶνε ἀνάλογον τοῦ ὕψους τοῦ πέρατος αὐτοῦ ὑπὲρ τὸ ἐπίπεδον τῶν xy.

Νοήσωμεν νῦν ἀπὸ τῶν σημείων τῆς καμπύλης καθέτους ἐπὶ τὸ xy ἐπίπεδον, ὅτε προκύπτει ὁ κύλινδρος, ὁ τὴν καμπύλην ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο προβάλλων. Ἐὰν ὁ κύλινδρος οὗτος ἀναπτυχθῇ ἐπὶ ἐπιπέδου, ἔστω ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν xz,



ἡ μὲν βάσις αὐτοῦ Οαβμ, τουτέστιν ἡ προβολὴ τῆς ἐν τῷ χώρῳ καμπύλης, γίνεται εὐθεῖα γραμμὴ κειμένη ἐπὶ τῆς ΟΧ, διατηροῦσα τὸ μῆκος αὐτῆς, ἡ δὲ καμπύλη τρέπεται εἰς ἄλλην τινὰ ἐπίπεδον γραμμήν, διατηροῦσα ὡσαύτως τὸ ἑαυτῆς μῆκος. Ἐπειδὴ δὲ ἐν τῇ τοιαύτῃ ἀναπτύξει τὰ z τῶν σημείων τῆς καμπύλης μένουσιν ἀμετάβλητα κατὰ τὸ μῆκος καὶ γίνονται τεταγμέναι τῶν σημείων τῆς ἐπιπέδου γραμμῆς, εἰς ἣν τρέπεται ἡ ἐν τῷ χώρῳ θεωρουμένη, ἕπεται, ὅτι καὶ διὰ τὴν ἐπίπεδον ταύτην γραμμὴν θὰ εἶνε

$$s = az,$$

ἤτοι τὸ τόξον αὐτῆς θὰ εἶνε ἀνάλογον τῆς τεταγμένης τοῦ ἄκρου του. Ἀλλ' ἀπεδείχθη, ὅτι ἐκ τῶν ἐπιπέδων γραμμῶν μόνον ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἔχει τὴν ἰδιότητα ταύτην· ὅθεν συνάγεται, ὅτι *ἡ τὴν προειρημένην ἰδιότητα ἔχουσα καμπύλη τρέπεται εἰς εὐθεῖαν γραμμήν, ἐὰν ὁ προβάλλων αὐτὴν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κύλινδρος ἀναπτυχθῇ ἐπὶ ἐπιπέδου.*

Καὶ τἀνάπαλιν ἀληθεύει· ἐὰν δηλονότι ἐπίπεδον τυλιχθῇ ἐπὶ τοῦ τυχόντος κυλίνδρου, πᾶσα εὐθεῖα γραμμὴ τοῦ ἐπιπέδου θὰ τραπῇ εἰς γραμμὴν ἔχουσαν τὴν εἰρημένην ἰδιότητα πρὸς ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸν κύλινδρον· διότι ἀναφέροντες τὴν εὐθεῖαν ταύτην γραμμὴν πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους OX, OZ διερχομένους διά τινος τῶν σημείων αὐτῆς καὶ λαμβάνοντες τὸν OZ παράλληλον πρὸς τὰς εὐθείας, ἐφ' ὧν ἐφαρμόζουσιν αἱ γενέτειραι τοῦ κυλίνδρου κατὰ τὴν τύλιξιν, ἔχομεν διὰ τὴν εὐθεῖαν $s = az$,

ἡ δὲ σχέσις αὕτη μένει, καὶ ὅταν τυλιχθῇ τὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου· διότι ἀμφότερα, καὶ τὸ μῆκος τῆς γραμμῆς καὶ τὰ z, μένουσιν ἀμετάβλητα κατὰ τὸ μέγεθος· ἄρα καὶ διὰ τὴν καμπύλην τὴν ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου προκύπτουσαν θὰ εἶνε $s = az$,

ὅθεν
$$\frac{dz}{ds} = \frac{1}{a}.$$

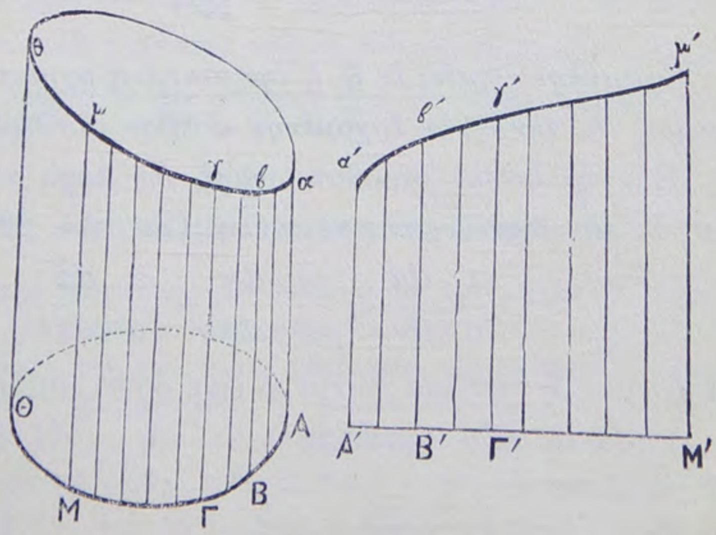
Ἐντεῦθεν συμπεραίνομεν τὴν ἑξῆς λύσιν τοῦ τεθέντος προβλήματος.

Πᾶσα καμπύλη, ἥτις προκύπτει ἐκ τῆς εὐθείας, ὅταν ἐπίπεδον περιέχον αὐτὴν τυλιχθῇ ἐπὶ τοῦ τυχόντος κυλίνδρου, ἔχει τὴν ζητουμένην ἰδιότητα· οὐδεμία δὲ ἄλλη.

Αἱ οὕτω προκύπτουσαι καμπύλαι λέγονται *στερεαὶ ἕλικες* ἢ καὶ *γεωδαισιακαὶ γραμμαὶ τοῦ κυλίνδρου.* Ἐν γένει δὲ λέγεται γραμμή τις κειμένη ἐπὶ ἐπιφανείας *γεωδαισιακὴ γραμμὴ* τῆς ἐπιφανείας ταύτης, ὅταν αὐτὴ εἶνε ὁ συντομώτατος δρόμος ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἀφ' ἑνὸς σημείου αὐτῆς εἰς ἄλλο (μὴ λίαν ἀπέχον).

Σημείωσις περὶ τῆς ἀναπτύξεως τῶν κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν.

Ἐὰν δοθῇ μέρος κυλινδρικῆς ἐπιφανείας περιεχόμενον ὑπὸ καθέτου τινὸς τομῆς ΑΒΓ...καὶ ὑπὸ ἄλλης οἱασδήποτε καμπύλης αβγ..., καὶ ὑπὸ δύο γενετειρῶν Αα, Μμ, κατασκευάζομεν τὸ ἀνάπτυγμα αὐτοῦ ὡς ἑξῆς· λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τυχοῦσαν εὐθεῖαν ἴσην τὸ μῆκος πρὸς τὸ τόξον ΑΒ..Μ τῆς καθέτου τομῆς καὶ ἐξ ἑκάστου τῶν σημείων αὐτῆς ὑψοῦμεν κάθετον ἴσην τῇ γενετείρᾳ τοῦ κυλίνδρου, ἥτις περατοῦται εἰς τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον τοῦ τόξου· τὸ προκύπτον ἐπίπεδον



χωρίον Α'Β'...Μ'μ'...γ β'α', λέγεται *ἀνάπτυγμα* τοῦ μέρους ΑΒΓ . Μμ. . γβα τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας. Εἶνε δὲ εὔκολον νὰ δειχθῇ γεωμετρικῶς, ὅτι τὸ μῆκος τῆς τυχούσης καμπύλης τῆς ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου κειμένης. οἷον τῆς αβγ...μ, μένει ἀμετάβλητον κατὰ τὴν ἀνάπτυξιν· ἀλλὰ καὶ διὰ τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ ἀποδεικνύεται ἁπλούστατα. Ἄς παρασταθῇ τῷ ὄντι τὸ τόξον αβγ...μ διὰ τοῦ s, τὸ δὲ τόξον ΑΒΓ...Μ τῆς καθέτου τομῆς διὰ τοῦ σ, καὶ τὸ τόξον α'β'γ'...μ', εἰς ὃ τρέπεται τὸ αβγ...μ, διὰ τοῦ s'· ἐὰν συντεταγμέναι τοῦ μ εἶνε αἱ x, y, z, τοῦ Μ θὰ εἶνε αἱ $x, y, 0$· ἄρα

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad \text{καὶ} \quad d\sigma^2 = dx^2 + dy^2$$

$$\text{ἑπομένως} \quad ds^2 = d\sigma^2 + dz^2.$$

Ἀλλὰ καὶ ἐν τῷ ἀναπτύγματι αἱ συντεταγμέναι τοῦ ἄκρου μ' εἶνε z καὶ σ (διότι ἡ Α'Μ' εἶνε ἴση τῷ τόξῳ ΑΜ $= \sigma$), ὅθεν $ds'^2 = d\sigma^2 + dz^2$·

$$\text{ἄρα} \qquad ds' = ds \text{ καὶ } s' = s$$

ἡ προσθετέα ποσότης εἶνε 0, διότι ἀμφότερα τὰ τόξα s' καὶ s μηδενίζονται συνάμα, ὅταν τὸ σημεῖον μ ὀπισθοχωροῦν πέσῃ ἐπὶ τοῦ α.

4ον

Καμπύλην εὑρεῖν, τῆς ὁποίας αἱ ἐφαπτόμεναι νὰ συναντῶσι πᾶσαι εὐθεῖάν τινα δεδομένην.

Ἐὰν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ληφθῇ ὡς ἄξων τῶν z, ἐπειδὴ ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον (x, y, z) τῆς καμπύλης θὰ συναντᾷ τὸν ἄξονα τῶν z, θὰ εἶνε εἰς πᾶν σημεῖον τῆς καμπύλης (Στ. Ἀν. 96)

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \qquad \text{ἢ} \qquad d(lx) = d(ly),$$

$$\text{ἄρα} \qquad ly = lx + \mathrm{A} \qquad \text{ἢ} \quad y = ax, \qquad \text{ἐὰν τεθῇ} \quad a = e^{\mathrm{A}}\cdot$$

τουτέστιν ἡ καμπύλη θὰ κεῖται ἅπασα ἐπὶ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῆς δοθείσης εὐθείας.

5ον

Καμπύλην εὑρεῖν, ἐν ᾗ ἡ ἐφαπτομένη σχηματίζει πρὸς τὴν ἐξ ἑνὸς σημείου εἰς τὴν ἀφὴν ἐρχομένην εὐθεῖαν σταθερὰν γωνίαν φ.

Ἐὰν τὸ δοθὲν σημεῖον ληφθῇ ὡς ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων, θὰ εἶνε εἰς πᾶν σημεῖον τῆς καμπύλης (Στ. Ἀν. 22)

$$\frac{x}{\rho}\frac{dx}{ds} + \frac{y}{\rho}\frac{dy}{ds} + \frac{z}{\rho}\frac{dz}{ds} = \text{συν}\,\varphi\text{'}$$

καὶ ἂν μὲν ἡ δοθεῖσα γωνία φ εἶνε ὀρθή, θὰ εἶνε

$$xdx + ydy + zdz = 0 \qquad \text{ἢ} \qquad d(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

$$\text{καὶ ἑπομένως} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \mathrm{A},$$

ἤτοι ἡ καμπύλη θὰ εἶνε σφαιρική.

Ἂν δὲ ἡ γωνία φ διαφέρῃ τῆς ὀρθῆς, παριστῶντες τὸ συνημίτονον αὐτῆς διὰ τοῦ a (ὅπερ διαφέρει τοῦ 0), θὰ ἔχωμεν εἰς πᾶν σημεῖον τῆς καμπύλης $xdx + ydy + zdz = \varrho a . ds$·
καὶ ἐπειδὴ $\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ καὶ $\varrho d\varrho = xdx + ydy + zdz$,
ἡ ἐξίσωσις αὕτη γίνεται

$$\varrho d\varrho = \varrho a ds \quad \text{ἢ} \quad d\varrho = a ds,$$

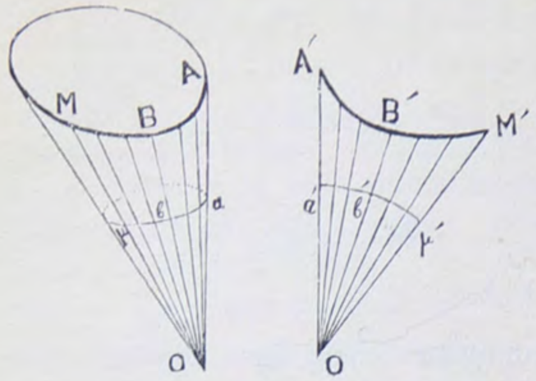
ἑπομένως $$\varrho = as + \mathrm{A}.$$

Νοήσωμεν νῦν τὴν κωνικὴν ἐπιφάνειαν, ἥτις ἔχει κορυφὴν μὲν τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων, ὁδηγὸν δὲ τὴν καμπύλην ταύτην, ἀναπτυσσομένην ἐπὶ ἐπιπέδου· τὸ τόξον s καὶ ἡ ἀπόστασις ϱ τοῦ ἄκρου αὐτοῦ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου μένουσιν ἀμετάβλητα· ἑπομένως ἡ σχέσις $d\varrho = a . ds$ θὰ ἀληθεύῃ καὶ διὰ τὴν ἐκ τῆς ἀναπτύξεως προκύπτουσαν ἐπίπεδον καμπύλην. Ἀλλ' ἡ μόνη ἐπίπεδος καμπύλη, δι' ἣν συμβαίνει τοῦτο, εἶνε ἡ λογαριθμικὴ ἕλιξ· τῷ ὄντι ἡ σχέσις αὕτη γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς $\dfrac{d\varrho}{ds} = a$· ἐξ οὗ φαίνεται, ὅτι καὶ ἐν τῇ ἐπιπέδῳ ταύτῃ καμπύλῃ ἡ γωνία τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τὴν πολικὴν ἀκτῖνα εἶνε σταθερὰ καὶ ἴση τῇ φ· ἄρα ἡ ἐπίπεδος καμπύλη, εἰς ἣν ἡ ζητουμένη τρέπεται κατὰ τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ κώνου, εἶνε λογαριθμικὴ ἕλιξ. Εὐκόλως δὲ ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ πᾶσα καμπύλη ἐπὶ κώνου κειμένη, ἥτις μετὰ τὴν ἀνάπτυξιν αὐτοῦ τρέπεται εἰς λογαριθμικὴν ἕλικα (τῆς ὁποίας πόλος εἶνε τὸ σημεῖον, ἔνθα πίπτει ἡ κορυφὴ τοῦ κώνου), ἔχει τὴν προκειμένην ἰδιότητα. Ἐντεῦθεν συμπεραίνομεν τὴν ἑξῆς λύσιν τοῦ προκειμένου προβλήματος.

Πᾶσα καμπύλη, ἥτις προκύπτει ἐκ λογαριθμικῆς ἕλικος, ὅταν τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς τυλιχθῇ ἐπὶ τοῦ τυχόντος κώνου οὕτως, ὥστε ὁ πόλος τῆς ἕλικος νὰ πέσῃ εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου, ἔχει τὴν προκειμένην ἰδιότητα· οὐδεμία δὲ ἄλλη.

Σημείωσις περὶ τῆς ἀναπτύξεως τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν.

Ἐὰν δοθῇ μέρος κωνικῆς ἐπιφανείας περιοριζόμενον ὑπὸ καμπύλης οἱασδήποτε καὶ δύο γενετειρῶν, ΟΑ, ΟΜ, κατασκευάζομεν τὸ ἀνάπτυγμα αὐτοῦ ὡς ἑξῆς. Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου καὶ μὲ ἀκτῖνα οἱανδήποτε γράφομεν ἐπὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τὴν γραμμὴν αβ...μ· ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν γράφομεν περιφέρειαν κύκλου· λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς περιφερείας ταύτης τὸ τόξον α'β'...μ' ἴσον τῷ τόξῳ τῆς σφαιρικῆς καμπύλης αβ...μ καὶ δι' ἑκάστου σημείου τοῦ τόξου α'β'...μ' ἄγομεν ἀκτῖνα, ἐφ' ἧς λαμβάνομεν τμῆμα ἴσον τῇ γενετείρᾳ τοῦ κώνου τῇ διερχομένῃ



διὰ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος σημείου τῆς σφαιρικῆς καμπυλης· οὕτω προκύπτει ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ΟΑ'Β'..Μ'Ο, ἥτις λέγεται *ἀνάπτυγμα* τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας ΟΑΒ ΜΟ.

Ἀποδεικνύεται δὲ, ὅτι τὸ μῆκος τῆς τυχούσης καμπύλης τῆς ἐπὶ τοῦ κώνου κειμένης, οἷον τῆς ΑΒ..Μ, διατηρεῖται καὶ μετὰ τὴν ἀνάπτυξιν. Παραστήσωμεν τῷ ὄντι διὰ s τὸ μῆκος τοῦ τόξου ΑΒ..Μ, διὰ σ τὸ μῆκος τοῦ ἀντιστοιχοῦντος τόξου τῆς σφαιρικῆς καμπύλης αβ μ καὶ διὰ s' τὸ μῆκος τῆς καμπύλης Α'Β..Μ', εἰς ἣν τρέπεται ἡ ΑΒ. Μ. Ἔστωσαν πρὸς τούτοις x, y, z αἱ συντεταγμέναι τοῦ Μ καὶ α, β, γ αἱ συντεταγμέναι τοῦ μ (ἀρχὴ δὲ τῶν συντεταγμένων ἡ κορυφὴ τοῦ κώνου)· τότε εἶνε

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad \text{καὶ} \qquad d\sigma^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2\cdot$$

ἀλλ' ἔχομεν πρὸς τούτοις (ἐὰν παρασταθῇ ἡ ΟΜ διὰ τοῦ ρ)

$$x = \alpha\rho,\ y = \beta\rho,\ z = \gamma\rho,$$

ἄρα
$$dx = \alpha d\rho + \rho d\alpha$$
$$dy = \beta d\rho + \rho d\beta$$
$$dz = \gamma d\rho + \rho d\gamma,$$

ἄρα
$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\sigma^2,$$

διότι $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ καὶ $\alpha d\alpha + \beta d\beta + \gamma d\gamma = 0.$

Ἀλλὰ καὶ ἐν τῷ ἀναπτύγματι αἱ πολικαὶ συντεταγμέναι τοῦ ἄκρου Μ' εἶνε ρ καὶ σ (ἐὰν ἡ ἀκτὶς ΟΑ ληφθῇ ἴση τῇ μονάδι τοῦ μήκους)· διότι ἡ ΟΜ' εἶνε ἴση τῇ ΟΜ καὶ τὸ τόξον $\alpha'\mu' = \sigma$· ἄρα εἶνε

$$ds'^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\sigma^2\cdot$$

ἐκ τούτου ἕπεται $ds' = ds$, ἄρα $s = s'$.

Ἡ προσθετέα ποσότης εἶνε 0· διότι ἀμφότερα τὰ s καὶ s' μηδενίζονται, ὅταν τὸ ἄκρον Μ ὀπισθοχωροῦν πέσῃ εἰς τὸ Α.

6ον

Καμπύλην εὑρεῖν, τῆς ὁποίας ἡ ἐφαπτομένη ἀπὸ τῆς ἀφῆς μέχρι τοῦ σημείου, καθ' ὃ τέμνει δοθὲν ἐπίπεδον, νὰ εἶνε ἴση τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ α.

Ἐὰν τὸ δοθὲν ἐπίπεδον ληφθῇ ὡς ἐπίπεδον τῶν xy, θὰ εἶνε εἰς πᾶν σημεῖον τῆς καμπύλης

$$z = a\frac{dz}{ds}$$

ἢ
$$ds = a\frac{dz}{z},$$

ὅθεν
$$s = alz + \text{A}.$$

Ἀλλ' ἐὰν ὁ τὴν καμπύλην ἐπὶ τὸ xy ἐπίπεδον προβάλλων κύλινδρος ἀναπτυχθῇ ἐπὶ ἐπιπέδου, τὸ τόξον s καὶ τὸ z τοῦ πέρατος αὐτοῦ μένουσιν ἀμετάβλητα καὶ διὰ τοῦτο εἰς πᾶν σημεῖον τῆς προκυπτούσης ἐπιπέδου καμπύλης θὰ εἶνε ὡσαύτως

$$ds = a\frac{dz}{z}.$$

Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται κατὰ ταῦτα εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς ἐπιπέδου ταύτης καμπύλης· διότι ἐκ ταύτης, εὑρεθείσης, προκύπτει ἡ ζητουμένη, ἐὰν τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς τυλιχθῇ ἐπὶ τοῦ τυχόντος κυλίνδρου οὕτως, ὥστε αἱ τεταγμέναι z νὰ ἐφαρμόσωσιν ἐπὶ τῶν γενετειρῶν τοῦ κυλίνδρου.

Ἡ ἐπίπεδος καμπύλη, δι' ἣν εἶνε $ds = a\frac{dz}{z}$, εἶνε ἡ ἑλκομένη. Τῷ ὄντι ἡ ἐξίσωσις αὕτη γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς·

$$z\sqrt{1+\frac{dx^2}{dz^2}} = a\cdot$$

ἐξ οὗ γίνεται φανερόν, ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης ταύτης ἔχει ὡσαύτως σταθερὸν μέγεθος· ἄρα εἶνε ἡ ἑλκομένη (σελ. 106).

7ον

Καμπύλην εὑρεῖν, τῆς ὁποίας ἡ ἐφαπτομένη νὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου ἀπόστασιν σταθερὰν α.

Ἐὰν τὸ δοθὲν σημεῖον ληφθῇ ὡς ἀρχή, θὰ εἶνε εἰς πᾶν σημεῖον τῆς καμπύλης (Στ. Ἀν. 124)

$$\begin{vmatrix} x & y \\ dx & dy \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y & z \\ dy & dz \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z & x \\ dz & dx \end{vmatrix}^2 = a^2\,ds^2\cdot$$

ἤτοι $\quad (x^2+y^2+z^2)\,ds^2 - (xdx+ydy+zdz)^2 = a^2\,ds^2\cdot$

ἂν δὲ τεθῇ $x^2+y^2+z^2=\varrho^2$, προκύπτει καὶ $xdx+ydy+zdz=\varrho d\varrho$ καὶ ἡ ἐξίσωσις γίνεται

$$(\varrho^2-a^2)\,ds^2 = \varrho^2 d\varrho^2$$

ἢ

$$\sqrt{\varrho^2-a^2}\,.\,ds = \varrho d\varrho.$$

Ἐὰν δὲ ὁ κῶνος, ὁ ἔχων κορυφὴν τὴν ἀρχὴν καὶ ὁδηγὸν τὴν καμπύλην ταύτην, ἀναπτυχθῇ ἐπὶ ἐπιπέδου, ἡ αὐτὴ ἐξίσωσις θὰ ἰσχύῃ καὶ διὰ τὴν ἐπίπεδον καμπύλην, εἰς ἣν τρέπεται ἡ ζητουμένη (διότι καὶ τὸ μῆκος τοῦ τόξου s καὶ ἡ ἀκτὶς ϱ τοῦ πέρατος αὐτοῦ μένουσιν ἀμετάβλητα).

Πρὸς εὕρεσιν τῆς ἐπιπέδου καμπύλης, δι' ἣν εἶνε

$$\sqrt{\varrho^2-a^2}\,.\,ds=\varrho d\varrho, \tag{ε}$$

διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

Ἂν εἶνε $\varrho=a$, ἐπαληθεύεται ἡ ἐξίσωσις (διότι εἶνε καὶ $d\varrho=0$)· ὥστε ὁ κύκλος οὗτος εἶνε μία ἐκ τῶν καμπύλων, αἵτινες πληροῦσι τὴν ἐξίσωσιν (ε). Ἂν δὲ ἡ ἀκτὶς ϱ διαφέρῃ τοῦ a, ἡ ἐξίσωσις αὕτη γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς·

$$ds=\frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{\varrho^2-a^2}}\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε $ds=\sqrt{d\varrho^2+\varrho^2 d\vartheta^2}$,

ἡ ἐξίσωσις γίνεται μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν τοῦ ds

$$d\vartheta=\frac{a d\varrho}{\varrho\sqrt{\varrho^2-a^2}}=d\left(\text{τοξ συν}\ \frac{a}{\varrho}\right),$$

ἄρα $$\vartheta+\mathrm{A}=\text{τοξ συν}\left(\frac{a}{\varrho}\right)$$

καὶ $$\varrho\,.\,\text{συν}\,(\vartheta+\mathrm{A})=a\cdot$$

ἡ δὲ ἐξίσωσις αὕτη παριστᾷ εὐθείας (μίαν δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ Α) ἀπεχούσας ἀπὸ τοῦ πόλου τὴν ἀπόστασιν a· ἑπομένως ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου $\varrho=a$.

Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν, ὅτι *πᾶσα καμπύλη λύουσα τὸ πρόβλημα προκύπτει ἐκ τοῦ κύκλου $\varrho=a$ καὶ ἐκ τῶν ἐφαπτομένων αὐτοῦ, ἐὰν τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου τυλιχθῇ ἐπὶ τοῦ τυχόντος κώνου οὕτως, ὥστε τὸ κέντρον τοῦ κύκλου νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου.*

8ον

Καμπύλην εὑρεῖν, τῆς ὁποίας αἱ ἐφαπτόμεναι νὰ ἀπέχωσι πᾶσαι ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας ἀπόστασιν δεδομένην α.

Ἐὰν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ληφθῇ ὡς ἄξων τῶν z, θὰ εἶνε εἰς πᾶν σημεῖον τῆς καμπύλης (Στ. Ἀν. 129)

$$\frac{xdy-ydx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}=a.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐξίσωσις αὕτη δὲν ἔχει z οὐδὲ dz, συνάγεται, ὅτι θὰ ἐπαληθεύῃ αὐτὴν καὶ ἡ προβολὴ τῆς καμπύλης ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν xy· ἀλλὰ καὶ τἀνάπαλιν· ἐάν τις καμπύλη ἐπίπεδος ἐπαληθεύῃ τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, θὰ ἐπαληθεύῃ αὐτὴν καὶ πᾶσα καμπύλη ἐπ' αὐτῆς προβαλλομένη· τουτέστι πᾶσα καμπύλη, ἥτις κεῖται ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν ἐπίπεδον καμπύλην. Τὸ πρόβλημα ἄρα ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς ἐπιπέδου καμπύλης, διὰ τὴν ὁποίαν εἶνε

$$xdy - ydx = a\sqrt{dx^2 + dy^2}. \qquad (1)$$

Ἐὰν ἀναφέρωμεν τὴν καμπύλην ταύτην πρὸς πολικὰς συντεταγμένας, ἤτοι ἂν θέσωμεν

$$x = \varrho \,\text{συν}\, \vartheta, \qquad y = \varrho \,\text{ημ}\, \vartheta\cdot$$

ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται

$$\varrho^2 d\vartheta = a\sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 d\vartheta^2},$$

ἐξ ἧς καὶ

$$d\vartheta = \frac{a d\varrho}{\varrho\sqrt{\varrho^2 - a^2}},$$

ἥτις εἶνε ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τοῦ προηγουμένου προβλήματος καὶ παριστᾷ κύκλον καὶ τὰς ἐφαπτομένας αὐτοῦ.

Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι *πᾶσα καμπύλη λύουσα τὸ πρόβλημα κεῖται ἢ ἐπὶ τοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου, ὅστις ἔχει ἀκτῖνα α καὶ ἄξονα τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, ἢ ἐπί τινος τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων αὐτοῦ.*

9ον

Νὰ δειχθῇ, ὅτι, ἐὰν δύο καμπύλαι ἔχωσι τὰ αὐτὰ κάθετα ἐπίπεδα, τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν σημεῖα (τὰ κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ καθέτου ἐπιπέδου) εὑρίσκονται εἰς σταθερὰν ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασιν.

Ἔστω x, y, z τυχὸν σημεῖον τῆς μιᾶς καὶ $x_1\ y_1\ z_1$ τὸ ἀντίστοιχον τῆς ἄλλης.

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ καθέτου ἐπιπέδου εἰς τὸ σημεῖον $x\ y\ z$ τῆς πρώτης καμπύλης εἶνε

$$(\mathrm{X} - x)\,dx + (\Psi - y)\,dy + (\mathrm{Z} - z)\,dz = 0,$$

ἡ δὲ ἐξίσωσις τοῦ καθέτου ἐπιπέδου εἰς τὸ σημεῖον $x_1\ y_1\ z_1$ τῆς ἄλλης εἶνε

$$(\mathrm{X} - x_1)\,dx_1 + (\Psi - y_1)\,dy_1 + (\mathrm{Z} - z_1)\,dz_1 = 0.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ πρῶτον διέρχεται διὰ τοῦ σημείου $x_1\, y_1\, z_1$ τὸ δὲ δεύτερον διὰ τοῦ σημείου $x\, y\, z$, ἕπονται αἱ δύο ἐξισώσεις

$$(x_1-x)dx+(y_1-y)dy+(z_1-z)dz=0,$$
$$(x-x_1)dx_1+(y-y_1)dy_1+(z-z_1)dz_1=0\cdot$$

ἐντεῦθεν συνάγεται

$$(x-x_1)(dx-dx_1)+(y-y_1)(dy-dy_1)+(z-z_1)(dz-dz_1)=0$$

ἢ $$d\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2\}=0$$

ὅθεν καὶ $$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=\mathrm{A}^2.$$

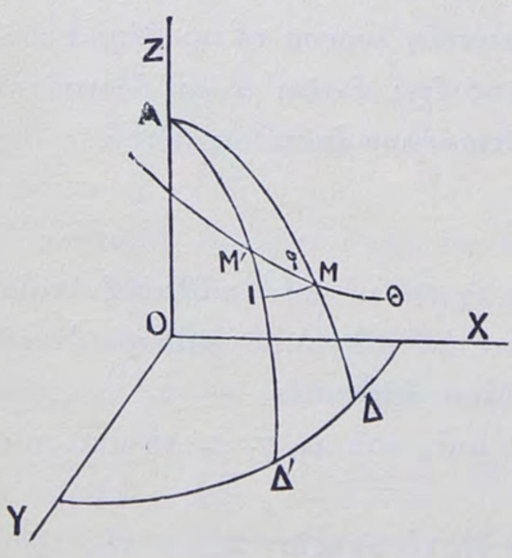
Αἱ τοιαῦται καμπύλαι λέγονται παράλληλοι.

10ον

Ἐπὶ σφαίρας δεδομένης εὑρεῖν καμπύλην τέμνουσαν πάντας τοὺς μεσημβρινοὺς ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν.

Ἔστω ἄξων τῶν z ἡ κοινὴ διάμετρος τῶν μεσημβρινῶν, ἄξονες δὲ τῶν x καὶ y δύο ἄλλαι διάμετροι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας καὶ πρὸς τὴν πρώτην.

Ἂς ληφθῇ τυχὸν σημεῖον Μ, οἱασδήποτε καμπύλης ἐπὶ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἔχον συντεταγμένας πολικὰς α, ϑ, ψ· αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου Μ΄ τῆς αὐτῆς καμπύλης θὰ εἶνε α, ϑ + Δϑ, ψ + Δψ, καὶ ἂν διὰ τῶν σημείων Μ καὶ Μ΄ φέρωμεν τοὺς μεσημβρινοὺς ΑΜΔ καὶ ΑΜ΄Δ΄ καὶ τὸ τόξον τοῦ παραλλήλου ΜΙ, γίνεται καμπυλόγραμμον τρίγωνον τὸ ΜΜ΄Ι· ἐκ δὲ τοῦ ὁμοκορύφου εὐθυγράμμου τριγώνου ΙΜ΄Μ εὑρίσκομεν $\dfrac{\text{ημ}\,\mathrm{M'MI}}{\text{ημ}\,\mathrm{IM'M}}=\dfrac{\mathrm{IM'}}{\mathrm{IM}}$.



Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία ΙΜ΄Μ τείνει πρὸς τὴν γωνίαν φ, ὑπὸ τὴν ὁποίαν τέμνει ἡ καμπύλη τὸν μεσημβρινὸν ΑΔ, ἡ δὲ γωνία Μ΄ΜΙ τείνει πρὸς τὴν γωνίαν 90^0- φ, ἔχομεν

$$\frac{\text{συν}\,\varphi}{\text{ημ}\,\varphi}=\text{ορ}\,\frac{\mathrm{IM'}}{\mathrm{IM}}=\text{ορ}\,\frac{\text{τοξ}\,\mathrm{IM'}}{\text{τοξ}\,\mathrm{IM}}$$

ἀλλ' εἶνε τοξIM' $= -a\Delta\vartheta\cdot$ (a οὔσης τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας) τὸ δὲ τόξον IM ἔχει ἀκτῖνα τὴν ἐκ τοῦ M κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα OZ (ἥτις εἶνε aημθ) καὶ γωνίαν τὴν Δψ, ὥστε εἶνε τοξIM $= a$ημθ.Δψ.

Ἐντεῦθεν συνάγεται ἡ ἰσότης

$$\sigma\varphi\varphi = -\frac{d\vartheta}{d\psi}\cdot\frac{1}{\eta\mu\,\vartheta},$$

δι' ἧς προσδιορίζεται εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς καμπύλης ἡ γωνία φ.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία φ πρέπει ἐν τῇ ζητουμένῃ καμπύλῃ νὰ εἶνε σταθερά, ἐὰν παραστήσωμεν τὴν συνεφαπτομένην αὐτῆς διὰ μ, θὰ εἶνε

$$\mu d\psi = -\frac{d\vartheta}{\eta\mu\,\vartheta}. \qquad \text{ὅθεν} \qquad d(\mu\psi) = d\left(-\,l\,\varepsilon\varphi\,\frac{\vartheta}{2}\right)$$

καὶ
$$-\,l\,\varepsilon\varphi\,\frac{\vartheta}{2} = \mu(\psi + A).$$

Ἐὰν ὁ ἄξων τῶν x ληφθῇ οὕτως, ὥστε νὰ διέρχηται διὰ τοῦ σημείου, ἔνθα ἡ καμπύλη τέμνει τὸν ἰσημερινόν, θὰ εἶνε $\psi = 0$, ὅταν $\vartheta = \frac{\pi}{2}\cdot$ ὥστε ἡ ἐξίσωσις τῆς ζητουμένης καμπύλης θὰ εἶνε

$$l\,\varepsilon\varphi\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = -\,\mu\psi$$

καὶ
$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = e^{-\mu\psi}.$$

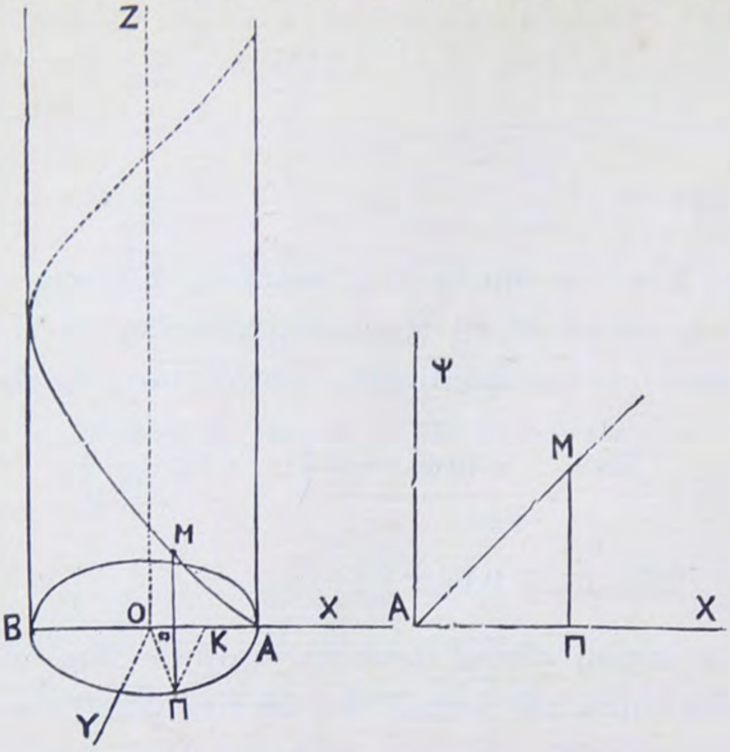
ΣΗΜ. Ἡ καμπύλη, ἥτις τέμνει τοὺς μεσημβρινοὺς τῆς γηίνης σφαίρας ὑπὸ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν, λέγεται *λοξοδρομία*. Εἰς τοὺς ναυτικοὺς χάρτας τοῦ Mercator αὕτη παρίσταται δι' εὐθείας γραμμῆς· διότι ἐν τῇ παραστάσει τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς ἐπὶ ἐπιπέδου κατὰ Μερκάτορα διατηροῦνται αἱ γωνίαι ἀμετάβλητοι· ἐπειδὴ δὲ οἱ μεσημβρινοὶ παρίστανται δι' εὐθειῶν παραλλήλων, ἀναγκαίως αἱ λοξοδρομίαι θὰ παριστῶνται δι' εὐθειῶν γραμμῶν.

Περὶ τῆς ἕλικος.

Ὅταν ἐπίπεδον τυλίσσηται ἐπὶ κυλίνδρου, πᾶσα εὐθεῖα μὴ παράλληλος πρὸς τὰς γενετείρας τοῦ κυλίνδρου μηδὲ κάθετος πρὸς αὐτὰς τρέπεται εἰς καμπύλην, ἥτις λέγεται *στερεὰ ἕλιξ* (πρόβλημα 3ον).

Μεταξὺ τῶν στερεῶν ἑλίκων ἀξιολογωτάτη εἶνε ἡ ἐπὶ τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου κειμένη· εὑρίσκομεν δὲ τὰς ἐξισώσεις αὐτῆς ὡς ἑξῆς·

Ἔστω AM ἡ εὐθεῖα, ἥτις τρέπεται εἰς τὴν ἕλικα περιτυλισσομένου τοῦ ἐπιπέδου περὶ τὸν ὀρθὸν καὶ κυκλικὸν κύλινδρον. Ἔκ τινος σημείου Α τῆς εὐθείας ἃς ἀχθῇ ἡ ΑΥ παράλληλος πρὸς τὰς εὐθείας



τοῦ ἐπιπέδου, αἵτινες θὰ ἐφαρμόσωσιν ἐπὶ τῶν γενετειρῶν τοῦ κυλίνδρου· τότε ἡ κάθετος πρὸς αὐτὴν ΑΧ θὰ τυλιχθῇ περὶ τὴν κάθετον τομὴν τοῦ κυλίνδρου, ἤτοι περὶ τὸν κύκλον ΑΠΒΑ.

Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας ΑΜ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΥΑΧ θὰ εἶνε

$$Y = \mu X,$$

ἔνθα $\mu = \text{εφ}(\text{ΜΑΠ})$.

Λάβωμεν νῦν ἐν τῷ κυλίνδρῳ ἄξονα μὲν τῶν z τὸν ἄξονα αὐτοῦ, ἐπίπεδον δὲ τῶν xy τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΑΠΒΑ, εἰς ὃν περιελίσσεται ἡ ΑΧ, καὶ ἄξονα τῶν x τὴν εὐθεῖαν ΟΑ, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τοῦ κύκλου, εἰς ὃ ἐφαρμόζει τὸ σημεῖον Α τῆς εὐθείας ΑΜ· αἱ συντεταγμέναι x, y, z τοῦ τυχόντος σημείου Μ τῆς ἕλικος εἶνε

$$x = \text{ΟΚ}, \qquad y = \text{ΚΠ}, \qquad z = \text{ΠΜ}\cdot$$

ἐὰν δὲ παραστήσωμεν τὴν γωνίαν ΑΟΠ διὰ τοῦ ω καὶ τὴν ΟΑ διὰ τοῦ a, εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΚΠ

$$x = a\,\text{συν}\,\omega, \qquad y = a\,\text{ημ}\,\omega\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε $\text{ΠΜ} = Y = \mu X$, ἡ δὲ εὐθεῖα Χ, ἤτοι ἡ ΑΠ, ἰσοῦται τῷ τόξῳ ΑΠ (διότι εἰς αὐτὸ περιετυλίχθη), ὅπερ εἶνε ἴσον τῷ $a\omega$, ἕπεται

$$\text{ΜΠ} = \mu a\omega\cdot$$

ὥστε αἱ ἐξισώσεις τῆς κοινῆς στερεᾶς ἕλικος εἶνε

$$x = a\,\text{συν}\,\omega, \qquad y = a\,\text{ημ}\,\omega, \qquad z = a\,\mu\omega.$$

ΣΗΜ. Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι, ἂν τὸ ἐπίπεδον ΥΑΧ περιτυλίσσηται περὶ τὸν κύλινδρον οὕτως, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΑΧ νὰ περιτυλίσσηται περὶ τὸν κύκλον ΑΠΒΑ, ἡ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου κειμένη καμπύλη, τῆς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις εἶνε

$$Y = \varphi(X),$$

θὰ τραπῇ εἰς καμπύλην τινὰ κειμένην ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, τῆς ὁποίας αἱ ἐξισώσεις εἶνε αἱ ἑξῆς $x = a\,\text{συν}\,\omega$, $y = a\,\text{ημ}\,\omega$, $z = \varphi(a\omega)\cdot$ διότι $z = Y$ καὶ $a\omega = X$.

Καὶ ἀντιστρόφως, ἡ ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου κειμένη καμπύλη, ἧς τινος αἱ ἐξισώσεις εἶνε $x = \alpha\,\sigma\upsilon\nu\,\omega,\quad y = a\,\eta\mu\,\omega,\quad z = \sigma(\omega)$ ἀναπτυσσομένου τοῦ κυλίνδρου τρέπεται εἰς ἄλλην ἔχουσαν ἐξίσωσιν τὴν ἑξῆς

$$\mathrm{Y} = \sigma\left(\frac{\mathrm{X}}{a}\right).$$

Θεωρήσωμεν, παραδείγματος χάριν, τὴν τομὴν τοῦ κυλίνδρου ὑπό τινος ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος τῶν x, ἔστω ὑπὸ τοῦ $y = \beta z$· ἡ τομὴ αὕτη εἶνε ἔλλειψις (Ἐπ. Ἀν. 382) καὶ ἔχει τὰς ἐξισώσεις

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{καὶ} \quad y = \beta z$$

καὶ εἰσαγομένης τῆς βοηθητικῆς γωνίας ω, αἱ ἐξισώσεις αὗται γίνονται

$$x = a\,\sigma\upsilon\nu\,\omega, \qquad y = a\,\eta\mu\,\omega, \qquad z = \frac{1}{\beta}\,a\,\eta\mu\,\omega\cdot$$

ἄρα τρέπεται ἡ ἔλλειψις αὕτη εἰς τὴν καμπύλην

$$\mathrm{Y} = \frac{a}{\beta}\,\eta\mu\left(\frac{\mathrm{X}}{a}\right)\cdot$$

τουτέστιν εἰς τὴν ἡμιτονοειδῆ καμπύλην.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν

1) Εὑρεῖν τὸ διαφορικὸν τοῦ τόξου οἱασδήποτε καμπύλης εἰς πολικὰς συντεταγμένας (ἰδὲ Στερ. Ἀν. 45).

Αἱ ἐξισώσεις, αἵτινες συνδέουσι τὰς πολικὰς συντεταγμένας ἐν τῷ χώρῳ μετὰ τῶν ὀρθογωνίων, εἶνε αἱ ἑξῆς

$$x = \varrho\,\eta\mu\,\vartheta\;\sigma\upsilon\nu\,\psi, \qquad y = \varrho\,\eta\mu\,\vartheta\;\eta\mu\,\psi, \qquad \text{καὶ } z = \varrho\;\sigma\upsilon\nu\,\vartheta.$$

Ἐὰν δὲ πρὸς συντομίαν παραστήσωμεν τὸ γινόμενον $\varrho\,\eta\mu\,\vartheta$ διὰ τοῦ ω, θὰ εἶνε (ἐδ. 119)

$$dx^2 + dy^2 = d\omega^2 + \omega^2 d\psi^2 = d(\varrho\,\eta\mu\,\vartheta)^2 + \varrho^2\,\eta\mu^2\vartheta\,d\psi^2\cdot$$

ὅθεν
$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d(\varrho\,\sigma\upsilon\nu\,\vartheta)^2 + d(\varrho\,\eta\mu\,\vartheta)^2 + \varrho^2\,\eta\mu^2\vartheta\,d\psi^2$$

ἢ
$$ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\vartheta^2 + \varrho^2\,\eta\mu^2\vartheta\,d\psi^2.$$

2) Ἡ προβολὴ τῆς λοξοδρομίας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἰσημερινοῦ ἔχει τὴν ἐξίσωσιν (εἰς ἐπιπέδους πολικὰς συντεταγμένας)

$$\frac{2\alpha}{\varrho} = e^{\mu\vartheta} + e^{-\mu\vartheta}.$$

3) Καμπύλην εὑρεῖν, ἧς αἱ ἐφαπτόμεναι νὰ εἶνε παράλληλοι πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον ἢ πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

4) Ἀποδεῖξαι ὅτι, ὅταν ἐν τῇ μετατροπῇ ἐπιφανείας τινὸς εἰς ἄλλην διατηρῶνται τὰ μήκη τῶν ἐπ' αὐτῆς γραμμῶν (ὡς λόγου χάριν, ἐν τῇ ἀναπτύξει τῶν ἀναπτυκτῶν ἐπιφανειῶν), θὰ διατηρῶνται καὶ αἱ γωνίαι αὐτῶν

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΙ. ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΝ. ΚΑΘΕΤΟΣ.

Ἐὰν τρεῖς μεταβληταὶ x, y, z, συνδέωνται διὰ μιᾶς μόνης ἐξισώσεως, οἷον τῆς $\varphi(x, y, z) = 0$, ἢ τῆς $z = \sigma(x, y)$, ἡ μία ἐξ αὐτῶν, ἔστω ἡ z δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς συνάρτησις τῶν λοιπῶν δύο· διότι, τούτων ὁρισθεισῶν αὐτοβούλως, ὁρίζεται καὶ ἡ z ἐκ τῆς ἐξισώσεως· ἐὰν δὲ παρασταθῶσιν αἱ μεταβληταὶ αὗται ὡς συντεταγμέναι σημείου τινὸς ἐν τῷ χώρῳ (εἰς οἱονδήποτε σύστημα συντεταγμένων), τὸ σύνολον τῶν σημείων, ὧν αἱ συντεταγμέναι x, y, z ἐπαληθεύουσι τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, εἶνε ἐν γένει ἐπιφάνειά τις (Στερ. Ἀν. 49), τὸ δὲ διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως z καὶ αἱ μερικαὶ αὐτῆς παράγωγοι πρὸς τὰς x καὶ y, συνδέονται τότε πρὸς τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας ταύτης, ὡς θὰ ἀποδείξωμεν ἀμέσως θεωροῦντες τὸ εὐθύγραμμον σύστημα τῶν συντεταγμένων.

ΣΗΜ. Ἐν τοῖς ἑπομένοις ὑποτίθεται ἡ μία τῶν συντεταγμένων, ἡ z, διαφορίσιμος συνάρτησις τῶν λοιπῶν δύο· καὶ πάντα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας, ἅτινα θεωροῦνται, ὑποτίθενται ἀντιστοιχοῦντα πρὸς τιμὰς τῶν x, y εἰς ἃς ἡ συνάρτησις z εἶνε διαφορίσιμος.

Ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον.

131. Ἔστω $z = \varphi(x, y)$ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας.

Ἐὰν διαφορίσωμεν αὐτήν, εὑρίσκομεν

$$dz = p\,dx + q\,dy \qquad (1) \qquad p = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad q = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη συνδέει τὰ διαφορικὰ τῶν τριῶν μεταβλητῶν x, y, z, ὁπωσδήποτε καὶ ἂν μεταβάλλωνται, ἀρκεῖ νὰ συνδέωνται αὗται διὰ τῆς ἐξισώσεως $z = \varphi\,(x, y)$· ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Μ (x, y, z) τῆς ἐπιφανείας γράψωμεν ἐπ᾽ αὐτῆς τυχοῦσαν γραμμὴν ΜΜ′, τὰ διαφορικὰ τῶν συντεταγμένων αὐτῆς θὰ συνδέωνται διὰ τῆς ἐξισώσεως (1)· ἐπὶ τῇ ὑποθέσει, ὅτι αἱ μερικαὶ παράγωγοι ἔχουσιν εἰς Μ τιμὰς πεπερασμένας καὶ ἐντελῶς ὡρισμένας. Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι τὸ τμῆμα dx, dy, dz τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης εἰς τὸ Μ ἑπομένως καὶ ἡ ἐφαπτομένη ὅλη, κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y) \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ δὲ περὶ πάσης ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον Μ πάσης γραμμῆς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας κειμένης ἰσχύει τὸ αὐτό, ἤτοι τμῆμά τι αὐτῆς dx, dy, dz κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (2), συνάγεται, ὅτι πᾶσαι αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς Μ τῶν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας κειμένων γραμμῶν κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ· τὸ ἐπίπεδον τοῦτο λέγεται *ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον* τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον Μ.

Καὶ ὅταν ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας δίδεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\varphi(x, y, z) = 0 \qquad \text{ἐξ ἧς} \qquad \varphi'_x\, dx + \varphi'_y\, dy + \varphi'_z\, dz = 0$$

δι' ὁμοίου συλλογισμοῦ εὑρίσκομεν, ὅτι (ἂν αἱ μερικαὶ παράγωγοι $\varphi'_x, \varphi'_y, \varphi'_z$ εἶνε πεπερασμέναι καὶ ἔχωσιν εἰς Μ τιμὰς ἐντελῶς ὡρισμένας) πᾶσαι αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς Μ τῶν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας κειμένων γραμμῶν κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου

$$\varphi'_x(X - x) + \varphi'_y(Y - y) + \varphi'_z(Z - z) = 0 \qquad (3)$$

ΣΗΜ. Πᾶσα ἐφαπτομένη εἰς Μ πάσης γραμμῆς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας κειμένης λέγεται καὶ ἐφαπτομένη τῆς ἐπιφανείας εἰς Μ, διότι τέμνει αὐτὴν εἰς δύο σημεῖα συμπεσόντα εἰς Μ.

132. Τὴν ἐξίσωσιν ταύτην τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς ἐπιφανείας δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ ἐκ τῶν ἐξισώσεων τῆς ἐφαπτομένης οἱασδήποτε γραμμῆς, ὡς ἑξῆς:

Πᾶσα γραμμή, ἥτις κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας $\varphi(x, y, z) = 0$, ἐπειδὴ εἶνε τομὴ τῆς ἐπιφανείας ταύτης καί τινος ἄλλης, θὰ ἔχῃ ἐξισώσεις τὰς ἑξῆς:

$$\varphi(x, y, z) = 0 \qquad \text{καὶ} \qquad F(x, y, z) = 0\cdot$$

καὶ ἡ ἐφαπτομένη αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον (x, y, z) ἔχει τὰς ἑπομένας δύο ἐξισώσεις:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(Z - z) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z - z) = 0\cdot$$

ἑπομένως ἡ ἐφαπτομένη εἶνε τομὴ τῶν δύο ἐπιπέδων, ἅτινα αἱ ἐξισώσεις αὗται σημαίνουσιν, ὅταν λαμβάνωνται χωρὶς ἀλλήλων. Ἀλλ' ἡ πρώτη ἐξίσωσις μένει πάντοτε ἡ αὐτή, οἱανδήποτε γραμμὴν καὶ ἂν λάβωμεν, ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας κειμένην· ἄρα τὸ ἐπίπεδον τὸ ὑπ' αὐτῆς σημαινόμενον περιέχει πάσας τὰς ἐφαπτομένας πασῶν τῶν καμπύλων, αἵτινες κεῖνται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας καὶ διέρχονται διὰ τοῦ σημείου Μ (x, y, z)· ἄρα τοῦτο εἶνε τὸ ἐφαπτόμενον τῆς ἐπιφανείας ἐπίπεδον εἰς τὸ σημεῖον (x, y, z).

* Ἀντὶ μιᾶς ἐξισώσεως μεταξὺ τῶν τριῶν συντεταγμένων x, y, z δίδονται ἐνίοτε τρεῖς ἐξισώσεις περιέχουσαι δύο βοηθητικὰς μεταβλητὰς u καὶ v, αἵτινες πρέπει νὰ ἀπαλειφθῶσιν, ἵνα προκύψῃ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας. Ἀλλὰ καὶ τὰς τρεῖς ἐξισώσεις ταύτας δυνάμεθα νὰ διατηρήσωμεν καὶ νὰ θεωρήσωμεν ὡς ἐξισώσεις τῆς ἐπιφανείας· διότι πρὸς ἕκαστον σύστημα τιμῶν τῶν δύο βοηθητικῶν μεταβλητῶν u, v ἀντιστοιχοῦσι τιμαὶ τῶν τριῶν συντεταγμένων ὡρισμέναι ἐκ τῶν τριῶν ἐξισώσεων· ἑπομένως ὡρισμένον τι σημεῖον τῆς ἐπιφανείας (ἓν ἢ περισσότερα). Ἐὰν δὲ νοήσωμεν τὰς ἐξισώσεις ταύτας λελυμένας πρὸς τὰς τρεῖς συντεταγμένας, θὰ ἔχωμεν τὰς ἐξισώσεις τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v), \\ y &= \sigma(u, v), \\ z &= f(u, v). \end{aligned}$$

Ἵνα εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας, διαφορίζομεν τὰς ἐξισώσεις ταύτας καὶ εὑρίσκομεν·

$$\begin{aligned} dx &= \varphi'_u\, du + \varphi'_v\, dv, \\ dy &= \sigma'_u\, du + \sigma'_v\, dv, \\ dz &= f'_u\, du + f'_v\, dv \cdot \end{aligned}$$

ἐκ τούτων ἀπαλείφοντες τὰ du, dv εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\begin{vmatrix} dx & \varphi'_u & \varphi'_v \\ dy & \sigma'_u & \sigma'_v \\ dz & f'_u & f'_v \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ἢ} \quad \mathrm{A}\,dx + \mathrm{B}\,dy + \Gamma\,dz = 0,$$

ἥτις συνδέει τὰ διαφορικὰ τῶν τριῶν συντεταγμένων· ἐκ δὲ ταύτης δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς μερικὰς παραγώγους p, q

$$p = -\frac{\mathrm{A}}{\Gamma}, \qquad q = -\frac{\mathrm{B}}{\Gamma} \cdot$$

ὅθεν καὶ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου, ἥτις εἶνε

$$\mathrm{A}(\mathrm{X} - x) + \mathrm{B}(\mathrm{Y} - y) + \Gamma(\mathrm{Z} - z) = 0$$

$$\text{ἢ} \quad \begin{vmatrix} \mathrm{X} - x & \varphi'_u & \varphi'_v \\ \mathrm{Y} - y & \sigma'_u & \sigma'_v \\ \mathrm{Z} - z & f'_u & f'_v \end{vmatrix} = 0$$

Παράστασις τοῦ dz.

133. Τὸ διαφορικὸν τοῦ z πάσης ἐπιφανείας ἰσοῦται πρὸς τὴν αὔξησιν τοῦ z τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου αὐτῆς· ἀντιστοιχεῖ δὲ ἡ αὔξησις αὕτη πρὸς τὰς αὐξήσεις τῶν μεταβλητῶν x καὶ y κατὰ dx καὶ dy.

Διότι, ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου

$$\mathrm{Z} - z = p\,(\mathrm{X} - x) + q\,(\mathrm{Y} - y)$$

θέσωμεν

$$\mathrm{X} = x + dx, \qquad \mathrm{Y} = y + dy,$$

εὑρίσκομεν

$$\mathrm{Z} - z = pdx + qdy = dz.$$

Περὶ τῆς καθέτου.

134. *Κάθετος* ἐπὶ ἐπιφάνειαν κατά τι σημεῖον M (x, y, z) λέγεται ἡ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐφαπτόμενον τῆς ἐπιφανείας ἐπίπεδον κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον. Αἱ ἐξισώσεις αὐτῆς εὑρίσκονται ἀμέσως ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου· εἶνε δὲ αἱ ἑξῆς (αἱ συντεταγμέναι ὑποτίθενται ἐνταῦθα ὀρθογώνιοι)·

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{X} - x + p\,(\mathrm{Z} - z) = 0 \\ \mathrm{Y} - y + q\,(\mathrm{Z} - z) = 0 \end{array}\right| \quad \text{ἢ} \quad \frac{\mathrm{X} - x}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}} = \frac{\mathrm{Y} - y}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}} = \frac{\mathrm{Z} - z}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}}$$

Γωνίαι τῆς καθέτου πρὸς τοὺς ὀρθογωνίους ἄξονας.

Αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζει τὸ ἕτερον τῶν μερῶν τῆς καθέτου ταύτης πρὸς τοὺς τρεῖς θετικοὺς ἡμιάξονας, ἔχουσι τὰ ἑξῆς συνημίτονα·

$$\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

ἢ

$$\mathrm{N}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad \mathrm{N}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad \mathrm{N}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

ἐὰν τεθῇ

$$\mathrm{N} = \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}}.$$

* Ἐὰν ἐν τοῖς δευτέροις τούτοις τύποις ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα λαμβάνηται θετικῶς, τὸ τὰ συνημίτονα ταῦτα ἔχον μέρος τῆς καθέτου φέρεται πρὸς τὰ θετικὰ τῆς ἐπιφανείας· τουτέστι πρὸς ὃ μέρος εἶνε ἡ συνάρτησις $\varphi\,(x, y, z)$ θετική. Καὶ ὄντως, ἐὰν ἐπὶ τοῦ μέρους τούτου τῆς καθέτου ληφθῇ εἰς ἀπόστασίν τινα ρ ἀπὸ τῆς ἀφῆς τὸ σημεῖον K, αἱ συντεταγμέναι αὐτοῦ θὰ εἶνε (Στ. Ἀν. 87)

$$x + \alpha\rho, \qquad y + \beta\rho, \qquad z + \gamma\rho\,\cdot$$

ἔνθα α, β, γ εἶνε τὰ συνημίτονα τὰ ὑπὸ τῶν δευτέρων τύπων διδόμενα· τὸ δὲ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως τῆς ἐπιφανείας, ἤτοι ἡ συνάρτησις $\varphi(x, y, z)$, γίνεται εἰς τὸ ληφθὲν σημεῖον Κ

$$\varphi(x+\alpha\varrho,\ y+\beta\varrho,\ z+\gamma\varrho)\cdot$$

ἢ καὶ $\varphi(x+\alpha\varrho,\ y+\beta\varrho,\ z+\gamma\varrho)-\varphi(x, y, z)\cdot$ διότι $\varphi(x, y, z)=0$ ἐὰν δὲ τὸ ϱ ληφθῇ ἱκανῶς μικρόν, ἡ παράστασις αὕτη θὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον τοῦ $d\varphi\cdot$ ἤτοι τοῦ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\alpha\varrho+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\beta\varrho+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\gamma\varrho$$

τουτέστι τοῦ $\varrho\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}$

εἶνε ἄρα τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως τῆς ἐπιφανείας θετικὸν εἰς τὸ ληφθὲν σημεῖον Κ.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1ον

Εὑρεῖν ἐπιφάνειαν, ἐν ᾗ ἡ κάθετος διέρχεται πάντοτε διὰ δεδομένου σημείου.

Ἐὰν τὸ δοθὲν σημεῖον ληφθῇ ὡς ἀρχὴ τῶν ὀρθογωνίων συντεταγμένων, θὰ εἶνε εἰς πᾶν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας

$$x+pz=0 \qquad \text{καὶ} \qquad y+qz=0$$

ὅθεν πολλαπλασιάζοντες τὴν πρώτην ἰσότητα ἐπὶ dx καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ dy καὶ προσθέτοντες λαμβάνομεν

$$xdx+ydy+zdz=0$$

ἢ

$$d(x^2+y^2+z^2)=0$$

ἄρα

$$x^2+y^2+z^2=A\cdot$$

ἤτοι ἡ ζητουμένη ἐπιφάνεια εἶνε σφαιρική, ἔχει δὲ κέντρον τὸ δοθὲν σημεῖον.

2ον

Εὑρεῖν ἐπιφάνειαν, τῆς ὁποίας τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον νὰ μένῃ πάντοτε παράλληλον πρὸς δεδομένην εὐθεῖαν.

Ἐὰν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ληφθῇ ὡς ἄξων τῶν x θὰ εἶνε

$$p=0 \quad \text{ἢ} \quad \frac{\partial z}{\partial x}=0\cdot$$

ἄρα ἡ μεταβλητὴ z δὲν θὰ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ x ἀλλ' ἐκ μόνου τοῦ y· ἤτοι θὰ εἶνε $z = \varphi(y)$.

Ὅτι δὲ πᾶσα τοιαύτη ἐπιφάνεια ἔχει τὴν προκειμένην ἰδιότητα, εἶνε φανερόν· διότι εἶνε κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια, τῆς ὁποίας αἱ γενέτειραι εἶνε παράλληλοι τῷ ἄξονι τῶν x.

3ον

Εὑρεῖν ἐπιφάνειαν, ἧς τινος τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον νὰ διέρχηται πάντοτε διὰ σημείου δοθέντος.

Ἐὰν τὸ δοθὲν σημεῖον ληφθῇ ὡς ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων, θὰ εἶνε εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς ἐπιφανείας

$$z = px + qy \tag{1}$$

Τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν καὶ τὴν ἰσότητα

$$dz = pdx + qdy,$$

δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ ὡς ἑξῆς (ἀπαλείφοντες τὸ p)

$$d\left(\frac{z}{x}\right) = qd\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2}$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι οἱ δύο λόγοι $\frac{z}{x}$, $\frac{y}{x}$ συνδέονται πρὸς ἀλλήλους οὕτως, ὥστε, ὅταν ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν μεταβάλληται, μεταβάλλεται καὶ ὁ ἄλλος· καὶ ὅταν ὁ εἷς μένῃ σταθερός, καὶ ὁ ἄλλος μένει σταθερός· ἐξαρτῶνται δηλονότι ἀπ' ἀλλήλων· ὥστε θὰ εἶνε

$$\frac{z}{x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3}$$

τοῦ φ δηλοῦντος ἄγνωστόν τινα συνάρτησιν.

Οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶνε ἡ συνάρτησις φ, πάντοτε ἡ τιμὴ τοῦ z ἡ ἐκ τῆς ἐξισώσεως (3) διδομένη, ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν (1), ἑπομένως ἡ ἐπιφάνεια (3) ἔχει τὴν προκειμένην ἰδιότητα, διότι ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$p = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{y}{x}$$

$$q = \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x}.$$

Ἐκ δὲ τούτων ἕπεται ἀμέσως $z = px + qy$· ὥστε ἡ λύσις (3) ἁρμόζει εἰς τὸ πρόβλημα οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶνε ἡ συνάρτησις φ.

Ἡ ἐξίσωσις (3) παριστᾷ, οἱασδήποτε οὔσης τῆς συναρτήσεως φ, κωνικὴν ἐπιφάνειαν ἔχουσαν τὴν κορυφὴν εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων· πάσης δὲ τοιαύτης ἐπιφανείας διέρχεται πᾶν ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον διὰ τῆς κορυφῆς αὐτῆς.

4ον

Εὑρεῖν ἐπιφάνειαν, τῆς ὁποίας ἡ κάθετος νὰ συναντᾷ πάντοτε δεδομένην τινὰ εὐθεῖαν.

Ἐὰν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ληφθῇ ὡς ἄξων τῶν z, θὰ εἶνε εἰς πᾶν σημεῖον τῆς ζητουμένης ἐπιφανείας

$$\frac{p}{x} = \frac{q}{y} \tag{1}$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἕπεται, (ω σημαίνει βοηθητικήν τινα μεταβλητήν)

$$p = \omega . x, \qquad q = \omega . y \tag{2}$$

ὅθεν καὶ
$$pdx + qdy = \omega(xdx + ydy)$$

ἢ
$$dz = \frac{1}{2}\omega . d(x^2 + y^2) \tag{3}$$

Ἐκ τούτου γίνεται φανερόν, ὅτι αἱ δύο μεταβληταὶ z καὶ $x^2 + y^2$ ἐξαρτῶνται ἀπ' ἀλλήλων, τουτέστιν ὅτι θὰ εἶνε

(4) $\qquad z = \varphi(x^2 + y^2) \qquad$ τοῦ φ δηλοῦντος ἄγνωστόν τινα συνάρτησιν,

Οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶνε ἡ συνάρτησις φ, πάντοτε ἡ τιμὴ (4) τοῦ z πληροῖ τὴν ἐξίσωσιν (1)· ἑπομένως ἡ ἐπιφάνεια $z = \varphi(x^2 + y^2)$ ἔχει πάντοτε τὴν προκειμένην ἰδιότητα.

Καὶ ὄντως ἐκ τῆς ἰσότητος $z = \varphi(x^2 + y^2)$ εὑρίσκομεν

$$p = \varphi'(x^2 + y^2)2x, \qquad q = \varphi'(x^2 + y^2)2y$$

ὅθεν καὶ
$$\frac{p}{x} = \frac{q}{y}$$

ὥστε ἡ λύσις (4) ἁρμόζει εἰς τὸ πρόβλημα, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶνε ἡ συνάρτησις φ. Γνωστὸν δὲ εἶνε ἐκ τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας, ὅτι ἡ ἐξίσωσις (4) παριστᾷ ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς, τῶν δὲ ἐπιφανειῶν τούτων αἱ κάθετοι συναντῶσι πάντοτε τὸν ἄξονα τῆς περιστροφῆς.

Εὐθειογενεῖς ἐπιφάνειαι. Διάκρισις αὐτῶν εἰς ἀναπτυκτὰς καὶ εἰς στρεβλάς.

Αἱ ἐξισώσεις τῆς εὐθείας, ἥτις γεννᾷ τὴν ἐπιφάνειαν, ἔστωσαν αἱ ἑξῆς

$$\frac{x-a}{\alpha}=\frac{y-b}{\beta}=\frac{z-c}{\gamma} \qquad (1)$$

ἔνθα a, b, c, α, β, γ εἶνε συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς t (τῆς ὁποίας ἡ μεταβολὴ προξενεῖ τὴν κίνησιν τῆς εὐθείας), παριστῶσι δὲ τὰ μὲν a, b, c τὰς συντεταγμένας ἑνὸς σημείου τῆς εὐθείας, τὰ δὲ α, β, γ τὰ συνημίτονα τῶν γωνιῶν αὐτῆς πρὸς τοὺς ἄξονας.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ ρ τὴν ἀπόστασιν τοῦ τυχόντος σημείου τῆς εὐθείας ἀπὸ τοῦ σημείου a, b, c αὐτῆς, θὰ εἶνε

$$\begin{aligned} x &= a+\alpha\rho \\ y &= b+\beta\rho \\ z &= c+\gamma\rho \end{aligned} \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων, ἂν μεταβάλλωμεν μόνον τὴν ρ, εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα μιᾶς γενετείρας· ἂν δὲ μεταβάλλωμεν μόνον τὴν t, εὑρίσκομεν τὴν γραμμήν, ἣν γράφει ἓν σημεῖον τῆς γενετείρας ἐν τῇ κινήσει αὐτῆς (τὸ ἀπέχον ἀπὸ τοῦ Ε(a, b, c) τὴν ἀπόστασιν ρ)· ἂν δὲ ἀμφοτέρας τὰς μεταβλητὰς μεταβάλλωμεν, εὑρίσκομεν πάντα τὰ σημεῖα πασῶν τῶν γενετειρῶν· ἄρα πάντα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας· διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν τὰς ἐξισώσεις (1) ὡς ἐξισώσεις τῆς εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας· τὰς δὲ συντεταγμένας τοῦ τυχόντος σημείου αὐτῆς ὡς συναρτήσεις τῶν δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν ρ καὶ t, τότε πρὸς ἕκαστον σύστημα τιμῶν τῶν ρ καὶ t ἀντιστοιχεῖ ἓν καὶ μόνον ἓν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας· καὶ τανάπαλιν.

ΣΗΜ. Ἡ κίνησις τῆς γενετείρας ἐπιδέχεται ἀοριστίαν τινά· διότι δύναται κινουμένη νὰ διολισθαίνῃ καὶ ἐφ' ἑαυτῆς ὁσονδήποτε θέλῃ, χωρὶς ἐκ τούτου νὰ βλαφθῇ ἡ γραφομένη ἐπιφάνεια· ἑπομένως τὸ σημεῖον Ε τῆς γενετείρας δύναται νὰ γράψῃ οἱανδήποτε γραμμὴν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας κειμένην.

Τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς τὸ σημεῖον x, y, z τῆς ἐπιφανείας ἔχει τὴν ἐξίσωσιν (σελ. 168)

$$\begin{vmatrix} X-x, & a'+\rho\alpha' & \alpha \\ Y-y & b'+\rho\beta' & \beta \\ Z-z & c'+\rho\gamma' & \gamma \end{vmatrix}=0 \quad \text{ἢ καὶ} \quad \begin{vmatrix} X-a, & a'+\rho\alpha' & \alpha \\ Y-b & b'+\rho\beta' & \beta \\ Z-c & c'+\rho\gamma' & \gamma \end{vmatrix}=0 \qquad (3)$$

ἐξ οὗ γίνεται δῆλον, ὅτι τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον μεταβάλλεται ἐν γένει μετὰ τοῦ ρ, ἤτοι ὅτι εἰς τὰ διάφορα σημεῖα μιᾶς γενετείρας τῆς εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα εἶνε ἐν γένει διάφορα. Ἵνα δὲ ἡ ἐξίσωσις (3) οἱανδήποτε τιμὴν καὶ ἂν ἔχῃ τὸ ρ, παριστᾷ ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ, ἀφοῦ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $A(X-a)+B(\Psi-b)+\Gamma(Z-c)=0$, οἱ λόγοι τῶν συντελεστῶν Α, Β, Γ πρὸς ἕνα ἐξ αὐτῶν νὰ εἶνε ἀνεξάρτητοι ἀπὸ τοῦ ρ· τουτέστι νὰ εἶνε (ω σημαίνει βοηθητικήν τινα ἄγνωστον)

$$\begin{vmatrix} a' & \alpha \\ b' & \beta \end{vmatrix} = \omega \begin{vmatrix} \alpha' & \alpha \\ \beta' & \beta \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b' & \beta \\ c' & \gamma \end{vmatrix} = \omega \begin{vmatrix} \beta' & \beta \\ \gamma' & \gamma \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} c' & \gamma \\ a' & \alpha \end{vmatrix} = \omega \begin{vmatrix} \gamma' & \gamma \\ \alpha' & \alpha \end{vmatrix}$$

Αἱ ἐξισώσεις αὗται γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς

$$\frac{a'-\alpha'\omega}{\alpha} = \frac{b'-\beta'\omega}{\beta} = \frac{c'-\gamma'\omega}{\gamma} \tag{4}$$

καὶ ἂν διὰ τοῦ φ παραστήσωμεν ἕνα τῶν ἴσων τούτων λόγων, θὰ ἔχωμεν

$$\begin{aligned} a' &= \alpha'\omega + \varphi\alpha \\ b' &= \beta'\omega + \varphi\beta \\ c' &= \gamma'\omega + \varphi\gamma \end{aligned} \tag{5}$$

ἐκ τούτων ἀπαλείφοντες τὰς βοηθητικὰς ἀγνώστους ω καὶ φ, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\begin{vmatrix} a' & \alpha' & \alpha \\ b' & \beta' & \beta \\ c' & \gamma' & \gamma \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

αὕτη δὲ ἐκφράζει τὸν ὅρον, ὑπὸ τὸν ὁποῖον τὰ σημεῖα ἑκάστης γενετείρας ἔχουσι πάντα ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον.

Ὅτι μὲν ὁ ὅρος οὗτος εἶνε ἀναγκαῖος, ἐδείχθη ἐκ τῶν προηγουμένων, ὅτι δὲ εἶνε καὶ ἐπαρκής, δεικνύεται ὡς ἑξῆς.

Τῆς ἐξισώσεως (6) ἀληθευούσης, ἂν αἱ τρεῖς ὁρίζουσαι

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta' & \gamma' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \gamma' & \alpha' \end{vmatrix} \tag{7}$$

εἶνε καὶ αἱ τρεῖς ἴσαι τῷ 0, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\gamma}$$

ἤτοι $$dla = dl\beta = dl\gamma$$

ἄρα $$la = l\beta + C = l\gamma + C'$$

ὅθεν καὶ $$\alpha = C_1\beta = C_1'\gamma, \qquad C = lC_1 \quad \text{καὶ} \quad C' = lC_1'$$

ἤτοι τὰ συνημίτονα τῆς κινουμένης εὐθείας μένουσι σταθερά· ἡ εὐθεῖα ἄρα μένει παράλληλος ἑαυτῇ κατὰ τὴν κίνησιν καὶ ἑπομένως ἡ γραφομένη ἐπιφάνεια εἶνε *κυλινδρικὴ* καὶ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον ἐφάπτεται αὐτῆς, ὡς γνωστόν, κατὰ πάντα τὰ σημεῖα ἑκάστης γενετείρας.

Ἐὰν δέ τις τῶν τριῶν ὁριζουσῶν (7) διαφέρῃ τοῦ 0, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὰς δύο ἀγνώστους φ καὶ ω, οὕτως ὥστε νὰ ἐπαληθεύωνται αἱ ἐξισώσεις (5)· ἐὰν τότε τεθῶσιν αἱ τιμαὶ τῶν a', b', c' εἰς τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου, ἀπαλλάσσεται ἡ ἐξίσωσις αὕτη τοῦ ρ καὶ λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\begin{vmatrix} X - a & \alpha & \alpha' \\ Y - b & \beta & \beta' \\ Z - c & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = 0$$

ἤτοι τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον ἐφάπτεται τῆς ἐπιφανείας κατὰ πάντα τὰ σημεῖα ἑκάστης τῶν γενετείρων. Αἱ εὐθειογενεῖς ἐπιφάνειαι, δι' ἃς συμβαίνει τοῦτο, λέγονται *ἀναπτυκταί*, αἱ δὲ λοιπαὶ *στρεβλαί*.

Αἱ τιμαὶ τῶν ω καὶ φ δύνανται νὰ γραφῶσιν ὡς ἑξῆς:

$$\omega = \frac{\Sigma a'\alpha'}{\Sigma \alpha'^2}, \qquad \varphi = \Sigma a'\alpha.$$

Πᾶσαι αἱ γενέτειραι ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας ἐφάπτονται μιᾶς καμπύλης κειμένης ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.

Τῷ ὄντι αἱ ἐξισώσεις

$$\begin{aligned} x &= a - \alpha\omega \\ y &= b - \beta\omega \qquad\qquad (8) \\ z &= c - \gamma\omega \end{aligned}$$

ἂν δὲν εἶνε σταθεραὶ καὶ αἱ τρεῖς διαφοραί, παριστῶσι καμπύλην τινὰ κειμένην ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, διότι τὸ σημεῖον (x, y, z) αὐτῆς, τὸ πρὸς ἑκάστην τιμὴν τῆς t ἀντιστοιχοῦν, κεῖται ἐπὶ τῆς ἀντιστοίχου πρὸς τὴν τιμὴν ταύτην γενετείρας (1)· ἡ δὲ ἐφαπτομένη αὐτῆς εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον εἶνε παράλληλος πρὸς τὸ τμῆμα

$$a' - \alpha\omega' - \alpha'\omega, \qquad b' - \beta\omega' - \beta'\omega, \qquad c' - \gamma\omega' - \gamma'\omega\cdot$$

ἀλλ' αἱ ἐξισώσεις (4) δεικνύουσιν, ὅτι τὸ τμῆμα τοῦτο εἶνε παράλληλον πρὸς τὴν διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου διερχομένην γενέτειραν· ἄρα ἡ γενέτειρα αὕτη ἐφάπτεται τῆς καμπύλης (8) κατὰ τὸ σημεῖον τοῦτο.

Ἡ καμπύλη (8) λέγεται *λαιμὸς* τῆς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας.

Ἐὰν δὲ αἱ τρεῖς διαφοραὶ (8) εἶνε σταθεραί, τὸ σημεῖον, ὅπερ ἔχει αὐτὰς συντεταγμένας, εἶνε κοινὸν σημεῖον πασῶν τῶν γενετειρῶν καὶ ἡ ἐπιφάνεια εἶνε *κωνική*· (κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ καμπύλη τοῦ λαιμοῦ συνεπτύχθη εἰς ἓν σημεῖον).

Καὶ πᾶσα ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων καμπύλης οἱασδήποτε σχηματιζομένη ἔχει τὴν προκειμένην ἰδιότητα, ἤτοι τὸ ἐφαπτόμενον αὐτῆς ἐπίπεδον ἐφάπτεται κατὰ πάντα τὰ σημεῖα μιᾶς γενετείρας.

Τῷ ὄντι, ἂν ἡ καμπύλη ἔχῃ τὰς ἐξισώσεις

$$x = \varphi(t)$$
$$y = \sigma(t)$$
$$z = f(t)$$

ἡ εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια, ἣν συνιστῶσιν αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῆς θὰ ἔχῃ τὰς ἐξισώσεις

$$x = \varphi(t) + \varphi'(t).\varrho$$
$$y = \sigma(t) + \sigma'(t).\varrho$$
$$z = f(t) + f'(t).\varrho$$

τὸ δὲ ἐφαπτόμενον ταύτης ἐπίπεδον εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον (x, y, z) ἔχει τὴν ἐξίσωσιν (σελ. 168) (διὰ φ'', σ'', f'' ἐσημειώθησαν αἱ παράγωγοι τῶν φ', σ', f')

$$\begin{vmatrix} X - x & \varphi'(t) & \varphi''(t) \\ Y - y & \sigma'(t) & \sigma''(t) \\ Z - z & f'(t) & f''(t) \end{vmatrix} = 0$$

ἐξ ἧς βλέπομεν, ὅτι ἐφάπτεται τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον κατὰ πάντα τὰ σημεῖα ἑκάστης τῶν γενετειρῶν.

Συνοψίζοντες πάντα τὰ προηγούμενα, συμπεραίνομεν ὅτι ἀναπτυκταὶ ἐπιφάνειαι εἶνε αἱ σχηματιζόμεναι ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων τῆς τυχούσης καμπύλης καὶ αἱ μερικαὶ τούτων περιπτώσεις αἱ κωνικαὶ ἐν αἷς ἡ καμπύλη τοῦ λαιμοῦ συνεπτύχθη εἰς ἓν σημεῖον, καὶ αἱ κυλινδρικαί, ἐν αἷς ἡ κορυφὴ ἠφανίσθη εἰς τὸ ἄπειρον· λέγονται δὲ αἱ ἐπιφάνειαι αὗται ἀναπτυκταί· διότι δύνανται νὰ ἀναπτυχθῶσιν ἐπὶ ἐπιπέδου χωρὶς νὰ συμπτυχθῶσιν ἢ σχισθῶσιν.

ΣΗΜ. Περὶ τῆς γεωμετρικῆς σημασίας τοῦ ὅρου (6) θέλομεν διαλάβει ἐν τοῖς περὶ τῶν ἐπιφανειῶν.

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ΄.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΤΑΞΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟΥ

Παράγωγοι διαφόρων τάξεων.

135. Ἡ παράγωγος συναρτήσεως οἱασδήποτε, ἐκ μιᾶς μεταβλητῆς ἐξαρτωμένης, εἶνε ἐν γένει συνάρτησις τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς· ἑπομένως δύναται νὰ ἔχῃ καὶ αὐτὴ παράγωγον· λέγεται δὲ ἡ παράγωγος τῆς παραγώγου *δευτέρα παράγωγος* τῆς συναρτήσεως, ἢ *παράγωγος δευτέρας τάξεως*. Ὁμοίως ἡ παράγωγος τῆς δευτέρας παραγώγου λέγεται *τρίτη παράγωγος* ἢ *τρίτης τάξεως*, καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε δοθείσης συναρτήσεως, ὡς τῆς $\sigma(x)$, δύναται νὰ ὑπάρχῃ σειρά τις συναρτήσεων, τὰς ὁποίας παριστῶμεν διὰ τῶν

$$\sigma'(x), \quad \sigma''(x), \quad \sigma'''(x)\ldots \quad \sigma^{(\nu)}(x)$$

ἐξ ὧν ἑκάστη εἶνε παράγωγος τῆς προηγουμένης αὐτῆς· συνδέονται δηλαδὴ πρὸς ἀλλήλας διὰ τῶν ἑπομένων ἰσοτήτων·

$$d\sigma(x)=\sigma'(x).dx, \quad d\sigma'(x)=\sigma''(x).dx, \quad d\sigma''(x)=\sigma'''(x)\, dx,\ldots$$

Ἐὰν ἡ συνάρτησις εἶνε ἀκεραία, αἱ παράγωγοι αὐτῆς εἶνε ὡσαύτως ἀκέραιαι καὶ ὁ βαθμὸς ἐλαττοῦται κατὰ μονάδα ἀφ' ἑκάστης εἰς τὴν ἑπομένην· διὰ τοῦτο, ἂν ὁ βαθμὸς τῆς συναρτήσεως εἶνε μ, ἡ μυοστὴ παράγωγος εἶνε σταθερὰ ποσότης (διάφορος τοῦ μηδενὸς) καὶ πᾶσαι αἱ ἑπόμεναι εἶνε 0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Τῆς συναρτήσεως e^x πᾶσαι αἱ παράγωγοι εἶνε e^x.

Τῆς συναρτήσεως ημx ἡ σειρὰ τῶν παραγώγων εἶνε

$$\text{ημ}x, \quad \text{συν}x, \quad -\text{ημ}x, \quad -\text{συν}x, \quad \text{ημ}x,\ldots$$

ἤτοι $\quad ημ\,x, \quad ημ\left(x+\frac{\pi}{2}\right), \quad ημ\left(x+2\frac{\pi}{2}\right), \quad ημ\left(x+3\frac{\pi}{2}\right),$

$$ημ\left(x+4\frac{\pi}{2}\right)\ldots$$

καὶ γενικῶς ἡ νυοστὴ παράγωγος εἶνε $ημ\left(x+\nu\frac{\pi}{2}\right)$.

Τῆς δὲ συναρτήσεως $συν\,x$ ἡ σειρὰ τῶν παραγώγων εἶνε ἡ ἑξῆς·

$$συν\,x, \quad -ημ\,x, \quad -συν\,x, \quad ημ\,x, \quad συν\,x\ldots$$

ἤτοι $\quad συν\,x, \quad συν\left(x+\frac{\pi}{2}\right), \quad συν\left(x+2\frac{\pi}{2}\right), \quad συν\left(x+3\frac{\pi}{2}\right),$

$$συν\left(x+4\frac{\pi}{2}\right),\ldots$$

καὶ ἡ νυοστὴ παράγωγος εἶνε $συν\left(x+\nu\frac{\pi}{2}\right)$.

Ὁμοίως ἡ συνάρτησις $l\,(1+x)$ ἔχει τὰς ἑξῆς παραγώγους

$$(1+x)^{-1}, \qquad (-1)\,(1+x)^{-2}, \qquad (-1)\,(-2)\,(1+x)^{-3}\ldots$$

καὶ ἡ νυοστὴ παράγωγος αὐτῆς εἶνε

$$(-1)(-2)(-3)\ldots(-\nu+1)(1+x)^{-\nu}.$$

Παράγωγοι τῶν πεπλεγμένων συναρτήσεων.

136. Ἐὰν ἡ συνάρτησις y εἶνε πεπλεγμένη καὶ ὁρίζηται διὰ τῆς ἐξισώσεως $\qquad σ(x,\,y)=0,$

αἱ παράγωγοι αὐτῆς (ἂς σημειοῦμεν διὰ y', y'', y''' κτλ.) εὑρίσκονται ὡς ἑξῆς.

Διαφορίζοντες τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, τῆς ὁποίας τὸ πρῶτον μέλος εἶνε σύνθετος συνάρτησις τοῦ x, εὕρομεν ἤδη (σελ. 69)

$$(1) \qquad σ'_x\,.\,dx+σ'_y\,.\,dy=0 \qquad ἢ \qquad σ'_x+σ'_y\,.\,y'=0$$

ἐξ ἧς ὁρίζεται ἡ πρώτη παράγωγος y'

διαφορίζοντες δὲ καὶ ταύτην (διότι καὶ ταύτης τὸ πρῶτον μέλος εἶνε σύνθετος συνάρτησις τοῦ x, ὡς ἐξαρτώμενον ἐκ τῶν x, y, y', ἅτινα πάντα εἶνε συναρτήσεις τοῦ x), εὑρίσκομεν

$$d\,(σ'_x)+σ'_y\,.\,dy'+y'\,.\,d(σ'_y)=0$$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε $\qquad dy'=y''\,.\,dx$

καὶ $\qquad d(σ'_x)=σ''_{xx}dx+σ''_{xy}dy$

$$d(σ'_y)=σ''_{yx}dx+σ''_{yy}dy$$

ἡ ἐξίσωσις αὕτη γίνεται

(2) $\quad \sigma''_{xx} + (\sigma''_{xy} + \sigma''_{yx})y' + \sigma''_{yy}y'^2 + \sigma'_y . y'' = 0$ (*)

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν δευτέραν παράγωγον y''· περιέχεται μὲν ἐν αὐτῇ καὶ ἡ πρώτη παράγωγος y'· ἀλλ' ἡ τιμὴ αὐτῆς εἶνε ἤδη γνωστὴ ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1)· ὥστε ἀντικαθιστῶντες αὐτὴν ἐνταῦθα, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν δευτέραν παράγωγον ἐκπεφρασμένην μόνον διὰ τῶν x καὶ y. Οὕτως εὑρίσκομεν μετά τινας πράξεις τὴν ἑξῆς τιμὴν τοῦ y''

$$y'' = \frac{1}{\sigma'^3_y} \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_x \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_y \\ \sigma_x & \sigma_y & 0 \end{vmatrix}$$

ΣΗΜ. Πρὸς παράστασιν τῶν παραγώγων τοῦ σ ἀρκοῦσιν οἱ δεῖκται· διὰ τοῦτο παρελείψαμεν τοὺς τόνους χάριν συντομίας· τοῦτο δὲ θὰ γίνηται καὶ ἐν τοῖς ἑπομένοις.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν τὴν τρίτην παράγωγον y''' διαφορίζοντες τὴν ἐξίσωσιν, ἐξ ἧς ἡ δευτέρα ὁρίζεται· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Παρατηρητέον δέ, ὅτι, πρὶν ἢ διαφορίσωμεν ἑκάστην τῶν ἐξισώσεων τούτων πρὸς εὕρεσιν τῆς ἑπομένης παραγώγου, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν αὐτὴν ὑπὸ οἱανδήποτε θέλωμεν μορφὴν ἢ καὶ νὰ συνδυάσωμεν αὐτὴν πρὸς τὰς προηγουμένας, αἵτινες περιέχουσι παραγώγους κατωτέρων τάξεων, ἐὰν τοῦτο συντείνῃ εἰς τὴν συντομίαν τῶν λογισμῶν.

Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ ἐξίσωσις

$$y^2 = 2\mu x + \nu x^2$$

ἐν ᾗ περιέχονται ἅπασαι αἱ κωνικαὶ τομαὶ (Ἐπ. Ἀν. ἐδ. 159).

Ἐξισοῦντες τὰ διαφορικὰ τῶν δύο μελῶν, εὑρίσκομεν

$$ydy = \mu dx + \nu x dx$$

ἢ $\quad y.y' = \mu + \nu x \quad$ ἐξ ἧς $\quad y' = \dfrac{\mu + \nu x}{y}$

διαφορίζοντες δὲ καὶ τὴν ἐξίσωσιν ταύτην εὑρίσκομεν

$$y.y'' + y'^2 = \nu$$

ἢ $\quad y^3.y'' + (yy')^2 = \nu y^2$

(*) Ἐν τοῖς ἑπομένοις θὰ δειχθῇ, ὅτι εἶνε πάντοτε $\sigma''_{xy} = \sigma''_{yx}$.

λαμβανομένων δὲ ὑπ' ὄψιν τῶν προηγουμένων ἐξισώσεων, ἡ ἐξίσωσις αὕτη γίνεται

$$y^3 . y'' + (\mu + \nu x)^2 = \nu (2\mu x + \nu x^2)$$

ὅθεν $\quad y^3 y'' + \mu^2 = 0 \quad$ ἐξ ἧς $\quad y'' = -\dfrac{\mu^2}{y^3}.$

ΣΗΜ. α'. Ἐπειδὴ συντελεστὴς τῆς ἀνωτάτης παραγώγου ἐν ἑκάστῃ τῶν ἐκ τῆς διαφορίσεως προκυπτουσῶν ἐξισώσεων εἶνε πάντοτε ἡ μερικὴ παράγωγος σ_y, ἕπεται, ὅτι ἐν ταῖς ἐκφράσεσι πασῶν τῶν παραγώγων ὁ παρονομαστὴς εἶνε δύναμίς τις, τῆς μερικῆς ταύτης παραγώγου· καὶ ἐὰν ἡ παράγωγος αὕτη (διά τινα τιμὴν τοῦ x) διαφέρῃ τοῦ 0, πᾶσαι αἱ παράγωγοι τῆς πεπλεγμένης συναρτήσεως y εἶνε ἐντελῶς ὡρισμέναι (διὰ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x).

* ΣΗΜ. β'. Ἐὰν διά τι σύστημα $x_0\ y_0$ ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν, ἀμφότεραι αἱ μερικαὶ παράγωγοι σ_x καὶ σ_y μηδενίζωνται (ὅτε τὸ ἀντιστοιχοῦν σημεῖον τῆς καμπύλης $\sigma(x,y)=0$ εἶνε ἀνωτέρας τάξεως), ἡ ἐξίσωσις (1) δὲν δύναται διὰ τὸ σύστημα τοῦτο τῶν τιμῶν νὰ ὁρίσῃ τὴν παράγωγον y', ἤτοι τὸν λόγον τῶν dx, dy. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, ἂν τὸ σύστημα τοῦτο τῶν τιμῶν $x_0\ y_0$ δὲν μηδενίζῃ πάσας τὰς μερικὰς παραγώγους τῆς δευτέρας τάξεως τοῦ $\sigma(xy)$ (τουτέστι τὰς σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{yx}, σ_{yy}), ἡ παράγωγος y' ὁρίζεται ἐκ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως (2), ἥτις δίδει δύο τιμὰς αὐτῆς· διότι περιέχει αὐτὴν εἰς τὸν δεύτερον βαθμόν· καὶ γενικῶς· ἂν αἱ τιμαὶ $x_0\ y_0$ μηδενίζωσι πάσας τὰς μερικὰς παραγώγους πασῶν τῶν τάξεων τοῦ $\sigma(x, y)$ μέχρι τῆς τάξεως λ, ἡ παράγωγος y', ἢ ὁ λόγος τῶν dx καὶ dy, ὁρίζεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως, ἥτις προκύπτει κατὰ τὴν λ διαφόρισιν καὶ ἔχει λ τιμὰς (πραγματικὰς ἢ φανταστικάς).

137. Καὶ ὅταν $\mu + 1$ μεταβληταὶ συνδέωνται πρὸς ἀλλήλας διὰ μ ἐξισώσεων

$$(1) \qquad \begin{aligned} &\sigma(x, y, z \ldots) = 0 \\ &\varphi(x, y, z \ldots) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f(x, y, z \ldots) = 0, \end{aligned}$$

αἱ παράγωγοι τῶν ἄλλων πρὸς μίαν ἐξ αὐτῶν, ἥτις θεωρεῖται ἀνεξάρτητος, ἔστω πρὸς τὴν x, εὑρίσκονται ὡς ἑξῆς

Διαφορίζοντες τὰς δοθείσας ἐξισώσεις (1), εὑρίσκομεν

$$\begin{aligned} &\sigma_x\, dx + \sigma_y\, dy + \sigma_z\, dz + \ldots = 0 \\ &\varphi_x\, dx + \varphi_y\, dy + \varphi_z\, dz + \ldots = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f_x\, dx + f_y\, dy + f_z\, dz + \ldots = 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων ὁρίζονται οἱ λόγοι τῶν διαφορικῶν τῶν μεταβλητῶν· ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν αὐτὰς διὰ τοῦ dx, εὑρίσκομεν τὰς ἑπομένας

$$\begin{array}{l} \sigma_x + \sigma_y \,.\, y' + \sigma_z \,.\, z' + \ldots = 0 \\ \varphi_x + \varphi_y \,.\, y' + \varphi_z \,.\, z' + \ldots = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_x + f_y \,.\, y' + f_z \,.\, z' + \ldots = 0 \end{array}$$

ἐξ ὧν ὁρίζονται αἱ μ παράγωγοι y', z'.. τῶν μ συναρτήσεων y, z..

Διαφορίζοντες δὲ καὶ τὰς ἐξισώσεις ταύτας (ὧν τὰ πρῶτα μέλη εἶνε σύνθετοι συναρτήσεις τοῦ x, ὡς ἐξαρτώμενα ἐκ τῶν $\mu+1$ μεταβλητῶν καὶ ἐκ τῶν μ παραγώγων y', z'.. ἅτινα πάντα εἶνε συναρτήσεις τοῦ x), εὑρίσκομεν

$$(3) \qquad \begin{array}{l} \sigma_y \,.\, y'' + \sigma_z \,.\, z'' + \ldots = 0 \\ \varphi_y \,.\, y'' + \varphi_z \,.\, z'' + \ldots = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_y \,.\, y'' + f_z \,.\, z'' + \ldots = 0. \end{array}$$

Ἐκ τῶν μ τούτων ἐξισώσεων δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὰς δευτέρας παραγώγους y'', z''... (διότι αἱ τιμαὶ τῶν πρώτων παραγώγων y', z'... εἶνε ἤδη γνωσταὶ ἐκ τῶν προηγουμένων).

Παρατηρητέον δέ, ὅτι οἱ συντελεσταὶ τῶν δευτέρων παραγώγων ἐν ταῖς ἐξισώσεσι (3) εἶνε οἱ αὐτοί, οὓς καὶ αἱ πρῶται παράγωγοι ἔχουσιν ἐν ταῖς ἐξισώσεσιν (2)· τοῦτο δὲ συμβαίνει καὶ εἰς πάσας τὰς ἑπομένας παραγώγους· ὥστε, ἐὰν ἡ ὁρίζουσα

$$\begin{vmatrix} \sigma_y & \sigma_z & \ldots \\ \varphi_y & \varphi_z & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_y & f_z & \ldots \end{vmatrix}$$

ἥτις συγκροτεῖται ἐκ τῶν πρώτων μερικῶν παραγώγων τῶν παραστάσεων $\sigma, \varphi, \ldots f$ *πρὸς τὰς μεταβλητὰς* $y, z, \ldots$ *διὰ σύστημά τι τιμῶν* $x_0, y_0, z_0, \ldots$ *διαφέρῃ τοῦ* 0, *ἅπασαι αἱ παράγωγοι πασῶν τῶν συναρτήσεων* y, $z, \ldots$ *εἶνε ἐντελῶς ὡρισμέναι καὶ εὑρίσκονται ἐκ τῶν διὰ τῆς διαφορίσεως προκυπτουσῶν ἐξισώσεων.*

* ΣΗΜ. Οἱ λόγοι τῶν διαφορικῶν dx, dy, dz,... πρὸς ἓν ἐξ αὐτῶν δὲν δύνανται νὰ εὑρεθῶσιν ἐκ τῶν ἐξισώσεων (2), ὅταν διά τι σύστημα τιμῶν $x_0 y_0 z_0$... μηδενίζωνται πᾶσαι αἱ ὁρίζουσαι τῆς μ τάξεως αἱ συγκροτούμεναι ἐκ τῶν μερικῶν παραγώγων

$$\begin{array}{cccc} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \cdots \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z & \cdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_x & f_y & f_z & \cdots \end{array}$$

διὰ τῆς παραλείψεως τῶν ἐπὶ μιᾶς οἱαςδήποτε καθέτου γραμμῆς εὑρισκομένων. Ὑποθέσωμεν τότε, ὅτι παραλείποντες $\rho+1$ καθέτους καὶ ρ ὁριζοντίας γραμμάς, εὑρίσκομεν ὁρίζουσαν τάξεως $\mu-\rho$, διαφέρουσαν τοῦ 0, ἔστω δὲ ἡ ὁρίζουσα αὕτη τῆς μεγίστης τάξεως· ἤτοι ἔστωσαν πᾶσαι, αἱ περισσοτέρας γραμμὰς ἔχουσαι ὁρίζουσαι καὶ ἐκ τῶν αὐτῶν παραγώγων (καθ' ἣν τάξιν εἶνε γεγραμμέναι) συγκροτούμεναι, ἴσαι τῷ 0· δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν, ὅτι αἱ ἐν τῇ ὁριζούσῃ ταύτῃ ὑπάρχουσαι μερικαὶ παράγωγοι εἶνε αἱ τῶν $\mu-\rho$ πρώτων ἐξισώσεων (2)· τότε πᾶσαι αἱ λοιπαὶ ἐξισώσεις (2) εἶνε τούτων ἀκολουθήματα (Εἰσ. Ἀν. Ἀλ. σελ. 144)· ἤτοι ἑκάστη ἐκ τῶν λοιπῶν ἐξισώσεων, λόγου χάριν ἡ $f_x\, dx+f_y\, dy+..=0$, εἶνε συνδυασμός τις τῶν $\mu-\rho$ πρώτων ἔχων τὴν μορφὴν

$$\alpha(\sigma_x\, dx+\sigma_y\, dy+\ldots)+\beta(\varphi_x\, dx+\varphi_y\, dy+\ldots)+\ldots=0$$

ἔνθα $\alpha, \beta, \gamma\ldots$ εἶνε πολλαπλασιασταὶ τοιοῦτοι ὥστε

$$\left.\begin{aligned}\alpha\sigma_x+\beta\varphi_x\ldots&=f_x\\ \alpha\sigma_y+\beta\varphi_y+\ldots&=f_y\end{aligned}\right\}\quad \text{(διὰ τὰς τιμὰς } x_0, y_0, z_0\ldots)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ἀλλ' ἂν ἐπὶ τοὺς αὐτοὺς πολλαπλασιαστὰς $\alpha, \beta, \gamma\ldots$ πολλαπλασιάσωμεν τὰς $\mu-\rho$ πρώτας ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (3) καὶ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ αὐτοῦ συστήματος, ἣν δίδει διαφοριζομένη ἡ ἐξίσωσις $f_x+f_y\, y'+f_z\, z'+\ldots=0$, προκύπτει ἐξίσωσις οὐδεμίαν τῶν δευτέρων παραγώγων περιέχουσα· ὥστε ἀντὶ τῶν ρ ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (2) αἵτινες εἶνε ἀκολουθήματα τῶν ἄλλων, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἐκ τοῦ συστήματος (3) ρ ἄλλας ἐξισώσεις περιεχούσας μόνον τὰς πρώτας παραγώγους. Αἱ ρ αὗται ἐξισώσεις μετὰ τῶν $\mu-\rho$ πρώτων ὁρίζουσι τὰς τιμὰς τῶν μ παραγώγων, τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς τὸ σύστημα τῶν τιμῶν $x_0\; y_0\ldots$ ἐπειδὴ ὅμως περιέχονται ἐν αὐτοῖς καὶ αἱ δεύτεραι δυνάμεις τῶν παραγώγων, δύναται ἑκάστη ἐκ τούτων νὰ ἔχῃ τιμὰς περισσοτέρας τῆς μιᾶς.

Τέλος παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν τὸ σύστημα τῶν τιμῶν $x_0\; y_0\ldots$ μηδενίζῃ πάσας τὰς μερικὰς παραγώγους $\sigma_x, \sigma_y\ldots\varphi_x, \varphi_y\ldots f_x, f_y\ldots$ πρὸς εὕρεσιν τῶν ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν τῶν παραγώγων χρησιμεύουσιν αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (3), αἵτινες τότε περιέχουσι μόνον τὰς παραγώγους πρώτης τάξεως, $y', z'\ldots$

ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ TAYLOR

138. Ἐὰν ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ εἶνε διαφορίσιμος ἔν τινι διαστήματι $\alpha \ldots \beta$, ἡ αὔξησις αὐτῆς, ἡ πρὸς τὴν ἀόριστον ἀλλ' ἱκανῶς μικρὰν αὔξησιν ε τοῦ x ἀντιστοιχοῦσα, ἔχει μέρος τι ἀνάλογον τοῦ ε (τουτέστι τὸ διαφορικὸν αὐτῆς) καὶ τὸ μέρος τοῦτο τῆς ὅλης αὐξήσεως γίνεται ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον κυριώτερον μέρος, ὅσῳ ἡ αὔξησις ε γίνεται μικροτέρα. Πρόκειται νῦν νὰ ἐκφράσωμεν ἀκριβέστερον τὴν εἰρημένην αὔξησιν διὰ τῶν ἀλλεπαλλήλων παραγώγων τῆς συναρτήσεως, παραδεχόμενοι, ὅτι πᾶσαι αὗται αἱ παράγωγοι μέχρι τάξεώς τινος τ εἶνε διαφορίσιμοι ἐν τῷ αὐτῷ διαστήματι $\alpha \ldots \beta$, ἐν τῷ ὁποίῳ ὑποτίθενται κείμεναι ἀμφότεραι αἱ τιμαὶ x καὶ $x+\varepsilon$.

Ἐὰν τὸν ἐν τῷ ἐδαφίῳ (90) ἀποδειχθέντα τύπον

$$(1) \qquad \varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)=\varepsilon\,.\,\varphi'(x+\mu\varepsilon), \qquad \text{ἔνθα } 0<\mu<1$$

ἐφαρμόσωμεν εἰς τὴν παράγωγον $\varphi'(x)$, εὑρίσκομεν

$$\varphi'(x+\mu\varepsilon)-\varphi'(x)=\mu\varepsilon\,.\,\varphi''(x+\lambda\varepsilon), \qquad \text{ἔνθα } 0<\lambda<\mu$$

$$\text{ἢ} \qquad \varphi'(x+\mu\varepsilon)=\varphi'(x)+\mu\varepsilon\varphi''(x+\lambda\varepsilon)$$

ὅθεν ὁ τύπος (1) γίνεται

$$\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)=\varepsilon\,.\,\varphi'(x)+\mu\,.\,\varepsilon^2\,\varphi''(x+\lambda\varepsilon)$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου βλέπομεν, ὅτι ἡ διαφορὰ

$$\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)-\varepsilon\varphi'(x)$$

εἶνε γινόμενον τοῦ ε^2 ἐπί τινα ἀριθμόν, ὅστις ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ x καὶ ἐκ τοῦ ε, εἶνε δὲ πάντοτε μικρότερος τῆς μεγίστης τιμῆς τῆς δευτέρας παραγώγου $\varphi''(x)$ ἐν τῷ διαστήματι $\alpha \ldots \beta$· παριστῶντες διὰ τοῦ K, τὸν ἀριθμὸν τοῦτον, θὰ ἔχωμεν

$$\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)=\varepsilon\varphi'(x)+\varepsilon^2K.$$

$$\text{ἢ} \qquad \varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)-\varepsilon\varphi'(x)-\varepsilon^2K=0 \qquad (2)$$

Ἵνα εὕρωμεν τιμήν τινα τοῦ ἀριθμοῦ τούτου K, θεωρήσωμεν τὴν ἑξῆς συνάρτησιν τῶν δύο μεταβλητῶν u καὶ v

$$\varphi(u+v)-\varphi(u)-v\varphi'(u)-v^2K, \qquad (3)$$

ἥτις προκύπτει ἐκ τοῦ πρώτου μέλους τῆς τεθείσης ἰσότητος (2), πλὴν τοῦ K, ἐὰν ἡ τιμὴ x ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τῆς μεταβλητῆς u, ἡ δὲ αὔξησις ε ὑπὸ τῆς μεταβλητῆς v· ἃς συνδέωνται δὲ αἱ μεταβληταὶ u καὶ v πρὸς ἀλλήλας διὰ τῆς ἐξισώσεως

$$u+v=x+\varepsilon \qquad \text{ἢ} \qquad v=x+\varepsilon-u$$

ἕνεκα τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἡ συνάρτησις (3) εἶνε συνάρτησις μιᾶς μόνης ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ἔστω τῆς u· εὐκόλως δὲ δεικνύεται, ὅτι ἡ συνάρτησις αὕτη ἔχει δύο ῥίζας, τὰς $u=x$ καὶ $u=x+\varepsilon$, ἐπομένως, κατὰ τὸ ἐν ἐδαφίῳ (89) ἀποδειχθὲν θεώρημα, ἡ παράγωγος αὐτῆς θὰ ἔχῃ ῥίζαν τινὰ μεταξὺ αὐτῶν κειμένην, ἔστω τὴν $u=x+\rho\varepsilon$, ἔνθα ρ εἶνε θετικόν τι κλάσμα.

Ἀλλὰ τὸ διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως, περὶ ἧς ὁ λόγος, εἶνε

$$\begin{aligned}&\varphi'(u+v)\;(du+dv)\\&-[\varphi'(u)+v\varphi''(u)]du\\&-[\varphi'(u)+2v\mathrm{K}]dv\end{aligned}$$

καὶ λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς σχέσεως

$$du+dv=0.$$

εὑρίσκεται ἡ παράγωγος αὐτῆς

$$v[-\varphi''(u)+2\mathrm{K}]$$

Ἐὰν δὲ εἰς τὴν παράγωγον ταύτην θέσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ u, ἥτις μηδενίζει αὐτήν, εὑρίσκομεν

$$v\Big(-\varphi''(x+\rho\varepsilon)+2\mathrm{K}\Big)=0$$

ὅθεν $$\mathrm{K}=\frac{1}{2}.\varphi''(x+\rho\varepsilon)\cdot$$

καὶ ἡ ἰσότης (2) γίνεται

$$\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)=\frac{\varepsilon}{1}.\varphi'(x)+\frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''(x+\rho\varepsilon). \tag{4}$$

Ἐὰν νῦν ἐφαρμόσωμεν καὶ πάλιν τὸν τύπον (1) εἰς τὴν συνάρτησιν $\varphi''(x)$, εὑρίσκομεν

$$\varphi''(x+\rho\varepsilon)-\varphi''(x)=\rho\varepsilon.\varphi'''(x+\tau\varepsilon)\qquad 0<\tau<\rho$$

ὅθεν ὁ τύπος (4) λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)=\frac{\varepsilon}{1}.\varphi'(x)+\frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''(x)+\frac{1}{2}.\rho\varepsilon^3.\varphi'''(x+\tau\varepsilon)$$

ἐξ ἧς γίνεται δῆλον, ὅτι ἡ διαφορὰ

$$\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)-\left\{\frac{\varepsilon}{1}\varphi'(x)+\frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''(x)\right\}$$

εἶνε γινόμενον τοῦ ε^3 ἐπί τινα ἀριθμόν, ὅστις ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν x καὶ ε καὶ ὅστις εἶνε μικρότερος τῆς μεγίστης τιμῆς τῆς $\varphi'''(x)$ ἐν τῷ διαστήματι $\alpha \ldots \beta$· παριστῶντες δὲ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον διὰ τοῦ Κ, θὰ ἔχωμεν

$$\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)=\frac{\varepsilon}{1}\varphi'(x)+\frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''(x)+\varepsilon^3.K$$

καὶ δι' ὁμοίου τρόπου εὑρίσκομεν τὸν τύπον

$$\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)=\frac{\varepsilon}{1}\varphi'(x)+\frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''(x)+\frac{\varepsilon^3}{1.2.3}\varphi'''(x+\mu\varepsilon) \quad (5)$$

Ἐξακολουθοῦντες τοιουτοτρόπως, φθάνομεν εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι ἡ διαφορὰ

$$\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)-\left\{\frac{\varepsilon}{1}\varphi'(x)+\frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''(x)+\ldots+\frac{\varepsilon^\nu}{1.2\ldots\nu}\varphi^\nu(x)\right\}$$

θὰ εἶνε γινόμενον τοῦ $\varepsilon^{\nu+1}$ ἐπί τινα ἀριθμόν, ὅστις δὲν ὑπερβαίνει τὴν μεγίστην τιμὴν τῆς $\varphi^{\nu+1}(x)$ ἐν τῷ διαστήματι $\alpha \ldots \beta$· καὶ ὅτι θὰ εἶνε

$$\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)=\frac{\varepsilon}{1}\varphi'(x)+\frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''(x)+\ldots+\frac{\varepsilon^\nu}{1.2.3\ldots\nu}\varphi^\nu(x)+$$

$$+\frac{\varepsilon^{\nu+1}}{1.2\ldots(\nu+1)}\varphi^{\nu+1}(x+\mu\varepsilon)$$

Ἵνα δείξωμεν τοῦτο γενικῶς, ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ ῥηθεῖσα διαφορὰ εἶνε ἴση τῷ γινομένῳ δυνάμεώς τινος τοῦ ε, ἔστω τῆς ε^ϱ, ἐπί τινα ἀριθμὸν Κ, ὅστις μένει πάντοτε πεπερασμένος (ἐν ὅσῳ αἱ τιμαὶ x καὶ $x+\varepsilon$ μένουσιν ἐν τῷ διαστήματι $\alpha \ldots \beta$)· τουτέστιν ἂς θέσωμεν

$$\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)-\left[\frac{\varepsilon}{1}\varphi'(x)+\frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''(x)+\ldots+\frac{\varepsilon^\nu}{1.2\ldots\nu}\varphi^\nu(x)\right]=\varepsilon^\varrho K$$

$$\text{ἢ } \varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)-\frac{\varepsilon}{1}\varphi'(x)-\frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''(x)-\ldots-\frac{\varepsilon^\nu}{1.2\ldots\nu}\varphi^\nu(x)-$$

$$-\varepsilon^\varrho.K=0. \quad (6)$$

Ἐὰν καὶ πάλιν ἐκ τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἰσότητος ταύτης (πλὴν τοῦ Κ) σχηματισθῇ ἡ συνάρτησις

$$\varphi(u+v)-\varphi(u)-\frac{v}{1}\varphi'(u)-\frac{v^2}{1.2}\varphi''(u)-\ldots-\frac{v^\nu}{1.2\ldots\nu}\varphi^\nu(u)-v^\varrho K \quad (7)$$

καὶ τεθῇ $u+v=x+\varepsilon$, ἡ συνάρτησις αὕτη τοῦ u ἔχει δύο ῥίζας τὰς ἑξῆς $u=x$ καὶ $u=x+\varepsilon$,

ἑπομένως ἡ παράγωγος αὐτῆς θὰ ἔχῃ ῥίζαν τινὰ u' μεταξὺ αὐτῶν κειμένην· ἀλλὰ τὸ διαφορικὸν τῆς σχηματισθείσης συναρτήσεως εἶνε

$$\varphi'(u+v).(du+dv)-$$

$$-\left\{\varphi'(u)+\frac{v}{1}\varphi''(u)+\frac{v^2}{1.2}\varphi'''(u)+\ldots+\frac{v^{\nu-1}}{1.2\ldots(\nu-1)}\varphi^{\nu}(u)+\right.$$

$$\left.+\frac{v^{\nu}}{1.2\ldots\nu}\varphi^{\nu+1}(u)\right\}du-$$

$$-\left\{\varphi'(u)+\frac{v}{1}\varphi''(u)+\frac{v^2}{1.2}\varphi'''(u)+\ldots+\frac{v^{\nu-1}}{1.2\ldots\nu-1}\varphi^{\nu}(u)\right\}dv-$$

$$-\varrho v^{\varrho-1}\mathrm{K}dv$$

καὶ λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς σχέσεως $du+dv=0$, ἡ παράγωγος πρὸς u τῆς συναρτήσεως (7) εὑρίσκεται ἴση τῇ παραστάσει

$$-\frac{v^{\nu}}{1\,2\ldots\nu}.\varphi^{\nu+1}(u)+\varrho\mathrm{K}.v^{\varrho-1},$$

ἢ $$\varrho v^{\varrho-1}\left\{\mathrm{K}-\frac{v^{\nu-\varrho+1}}{\varrho\,1.2.3\ldots\nu}\varphi^{\nu+1}(u)\right\}.$$

Ἡ τιμὴ u' τοῦ u ἡ τὴν παράγωγον ταύτην μηδενίζουσα δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς ἑξῆς $u'=x+\mu\varepsilon$, ἔνθα μ κεῖται μεταξὺ 0 καὶ 1 (διότι u' κεῖται μεταξὺ x καὶ $x+\varepsilon$), ἡ δὲ πρὸς αὐτὴν ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τοῦ v εἶνε $(1-\mu)\varepsilon$· θέτοντες δὲ τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν παράγωγον καὶ ἐξισοῦντες αὐτὴν τῷ 0, λαμβάνομεν

$$\mathrm{K}=(1-\mu)^{\nu-\varrho+1}\frac{\varepsilon^{\nu-\varrho+1}}{\varrho.1.2\ldots\nu}\varphi^{\nu+1}(x+\mu\varepsilon)$$

ὅθεν ἡ τεθεῖσα ἰσότης (6) γίνεται

$$\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)=\frac{\varepsilon}{1}\varphi'(x)+\frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''(x)+\ldots+\frac{\varepsilon^{\nu}}{1\,2\ldots\nu}\varphi^{\nu}(x)+$$

$$+(1-\mu)^{\nu-\varrho+1}\frac{\varepsilon^{\nu+1}}{\varrho\,1.2\ldots\nu}\varphi^{\nu+1}(x+\mu\varepsilon) \qquad (8)$$

καὶ ἂν μὲν τὸν ἀριθμὸν ϱ, ὅστις ἔμεινεν ἀόριστος, θέσωμεν ἴσον τῷ $\nu+1$, εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ τύπου τούτου τὸν ἑπόμενον

$$(9) \qquad \varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)=$$

$$\frac{\varepsilon}{1}.\varphi'(x)+\frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''(x)+\ldots+\frac{\varepsilon^{\nu}}{1.2.3\ldots\nu}\varphi^{\nu}(x)+\frac{\varepsilon^{\nu+1}}{1.2.3\ldots(\nu+1)}.\varphi^{\nu+1}(x+\vartheta\varepsilon)$$

τοῦ ϑ κειμένου μεταξὺ 0 καὶ 1.

Ἐὰν δὲ θέσωμεν $\varrho = 1$, εὑρίσκομεν τὸν ἑξῆς

(10) $$\varphi(x+\varepsilon) - \varphi(x) =$$
$$\frac{\varepsilon}{1}\varphi'(x) + \frac{\varepsilon^2}{1\,.\,2}\varphi''(x) + \ldots + \frac{\varepsilon^\nu}{1.2.3..\nu}\varphi^\nu(x) + (1-\delta)^\nu \frac{\varepsilon^{\nu+1}}{1.2.3..\nu}\varphi^{\nu+1}(x+\delta\varepsilon)$$

ἔνθα ὁ ἀριθμὸς δ κεῖται μεταξὺ 0 καὶ 1.

Ὁ τύπος (8) λέγεται *τύπος τοῦ Taylor* καὶ κατ' αὐτὸν ἀναπτύσσεται ἡ αὔξησις τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$, ἡ πρὸς τὴν ἀόριστον αὔξησιν ε τοῦ x ἀντιστοιχοῦσα, κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ ε μέχρι δυνάμεώς τινος οἱασδήποτε ν· ἀρκεῖ, ὡς ἐξ ἀρχῆς ὑπετέθη, ἡ συνάρτησις καὶ αἱ παράγωγοι αὐτῆς μέχρι τῆς τάξεως ν νὰ εἶνε διαφορίσιμοι ἔν τινι διαστήματι α..β περιέχοντι τὰς τιμὰς x καὶ $x+\varepsilon$. Τοῦ ἀναπτύγματος τούτου οἱ ὅροι ἔχουσι πάντες ὁμοίαν σύνθεσιν πλὴν τοῦ τελευταίου, ὅστις διαφέρει τῶν λοιπῶν καὶ λέγεται *συμπληρωματικὸς ὅρος τοῦ τύπου* ἢ καὶ *ὑπόλοιπον αὐτοῦ*.

Ὁ ὅρος οὗτος δίδει τὸ λάθος, τὸ ὁποῖον γίνεται, ὅταν ἀντὶ τῆς αὐξήσεως $\varphi(x+\varepsilon) - \varphi(x)$ ληφθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τοῦ τύπου (8), ὅταν δηλονότι τεθῇ

$$\varphi(x+\varepsilon) - \varphi(x) = \frac{\varepsilon}{1}\varphi'(x) + \frac{\varepsilon^2}{1\,.\,2}\varphi''(x) + \,.\,.+ \frac{\varepsilon^\nu}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,\nu}\varphi^\nu(x)$$

Ἡ μορφὴ τοῦ ὅρου τούτου εἶνε διάφορος ἐν τοῖς τύποις (9) καὶ (10).

Περίπτωσις, καθ' ἣν ἡ αὔξησις ε εἶνε λίαν μικρά.

139. Ἐὰν ἡ αὔξησις ε ληφθῇ ἱκανῶς μικρά, ἕκαστος ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος τῆς διαφορᾶς $\varphi(x+\varepsilon) - \varphi(x)$, ἐὰν δὲν εἶνε ἴσος τῷ 0, ὑπερβαίνει πάντας ὁμοῦ τοὺς ἑπομένους αὐτῷ καὶ ἀποτελοῦσιν οὗτοι πάντες μέρος τι ἐλάχιστον (ὁσονδήποτε μικρὸν) τοῦ ληφθέντος ὅρου· διότι ἔστω ὅρος τις, ὁ

$$\frac{\varepsilon^\eta}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,n}\varphi^\eta(x)$$

διάφορος τοῦ 0· πάντες οἱ ἑπόμενοι αὐτοῦ ἐν τῷ ἀναπτύγματι ἀποτελοῦσι τὸν συμπληρωματικὸν ὅρον

$$\frac{\varepsilon^{\eta+1}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.(n+1)}\varphi^{(\eta+1)}(x+\mu\varepsilon)$$

καὶ ἵνα οὗτος γίνῃ μικρότερος τοῦ μυοστοῦ μέρους τοῦ ληφθέντος ὅρου, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε

$$\varepsilon\,.\,\varphi^{\eta+1}(x+\mu\varepsilon) < (n+1)\,.\,\frac{\varphi^\eta(x)}{\mu}$$

τοῦτο δὲ γίνεται πάντοτε, ὅταν ὁ ε ληφθῇ ἱκανῶς μικρός· διότι, ἂν διὰ τοῦ Μ παραστήσωμεν τὴν μεγίστην (ἀπολύτως) τιμὴν τῆς $n+1$ παραγώγου ἐν τῷ διαστήματι α. . β, ἀρκεῖ νὰ ληφθῇ

$$\varepsilon < \frac{n+1}{M\,.\,\mu}\,.\,\varphi^{\eta}(x)$$

λαμβάνοντες τότε ἀντὶ τῆς διαφορᾶς

$$\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)$$

τοὺς $n-1$ πρώτους ὅρους τοῦ ἀναπτύγματος, ἤτοι θέτοντες

$$\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)=\frac{\varepsilon}{1}\,\varphi'(x)+\frac{\varepsilon^2}{1\,.\,2}\,\varphi''(x)+\,.\,.+\frac{\varepsilon^{\eta-1}}{12\,.\,.\,n-1}\,\varphi^{\eta-1}(x)$$

ποιοῦμεν λάθος ὡς ἔγγιστα ἴσον τῷ ἑπομένῳ ὅρῳ $\dfrac{\varepsilon^{\eta}}{12\,.\,.\,n}\,\varphi^{\eta}(x)$

διότι οἱ λοιποὶ ἐλάχιστόν τι μέρος τούτου ἀποτελοῦσι.

Κατὰ ταῦτα δι' αὐξήσεις ε ἱκανῶς μικρὰς ἡ διαφορὰ

$$\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)$$

δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἔγγιστα ἴση τῷ $\varepsilon\,.\,\varphi'(x)$, καὶ τὸ λάθος, ὅπερ τότε γίνεται, τουτέστιν ἡ διαφορὰ

$$\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)-\varepsilon\varphi'(x)$$

δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἔγγιστα ἴσον τῷ $\dfrac{\varepsilon^2}{1\,.\,2}\,\varphi''(x)$.

Ἔτι δὲ ἀκριβέστερον δύναται ἡ διαφορὰ $\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)$ νὰ θεωρηθῇ ἴση πρὸς τὸ $\dfrac{\varepsilon}{1}\,\varphi'(x)+\dfrac{\varepsilon^2}{1\,.\,2}\,\varphi''(x)$, καὶ τὸ λάθος, ὅπερ τότε γίνεται, εἶνε ὡς ἔγγιστα ἴσον τῷ $\dfrac{\varepsilon^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,\varphi'''(x)$· καὶ οὕτω καθεξῆς.

ΣΗΜ. Ὁ τύπος τοῦ Taylor συμπληροῖ τὸν θεμελιώδη τύπον τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ, παρέχων τὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως μεθ' ὅσης ἂν θέλωμεν προσεγγίσεως· διὰ τοῦτο ἀποτελεῖ τὴν βάσιν τῶν ἐφαρμογῶν τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ εἴς τε τὴν γεωμετρίαν καὶ εἰς τὴν ἀνάλυσιν.

Σειρὰ τοῦ Taylor.

140. Ἐὰν πᾶσαι αἱ παράγωγοι τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$ εἶνε διαφορίσιμοι ἐν τῷ διαστήματι α. . . β, δυνάμεθα ἐν τῷ τύπῳ (10) νὰ ὑποθέσωμεν τὸν ἀριθμὸν ν ὅσον θέλωμεν μέγαν. Οὕτω προκύπτει ἡ σειρὰ

$$\frac{\varepsilon}{1}\,\varphi'(x)+\frac{\varepsilon^2}{1\,.\,2}\,\varphi''(x)+\frac{\varepsilon^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,\varphi'''(x)+\,.\,.+\frac{\varepsilon^{\nu}}{1\,.\,2\,.\,.\,\nu}\,\varphi^{\nu}(x)+\,.\,.\quad(1)$$

τῆς ὁποίας οἱ ὅροι ἔχουσι πάντες ὁμοίαν σύνθεσιν.

Ἡ σειρὰ αὕτη λέγεται *σειρὰ τοῦ Taylor*.

Ἐὰν ἡ σειρὰ αὕτη συγκλίνῃ, εὐκόλως εὑρίσκομεν τὸν ὑπ' αὐτῆς ἀποτελούμενον ἀριθμόν· διότι τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων αὐτῆς εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου (10) καὶ εἶνε

$$\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)-V_\nu$$

ἔνθα V_ν παριστᾷ τὸν συμπληρωματικὸν ὅρον, ὅστις ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν x, ε καὶ ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ ν. Ἐὰν δὲ ὁ ν αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον, τὸ ἄθροισμα τοῦτο γίνεται

$$\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)-\text{ορ}\, V_\nu \qquad \text{διὰ} \quad \nu=\infty$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι, ἵνα ἡ σειρὰ (1) συγκλίνῃ, ἀνάγκη ἡ παράστασις V_ν νὰ τείνῃ πρός τι πεπερασμένον ὅριον, ὅταν ὁ ν αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον.

Ἐάν, τοῦ x ἔχοντος τιμήν τινα x, διά τινα θετικὴν τιμὴν ε_1 τῆς αὐξήσεως ε, ἡ παράστασις V_ν τείνῃ πρός τι πεπερασμένον ὅριον Κ, (ὅταν ὁ ν αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον), ἡ σειρὰ (1) συγκλίνει διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν τοῦ x καὶ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ ε ἔχουσαν μέτρον μικρότερον τοῦ ε_1.

Διότι ἡ σειρὰ αὕτη συνίσταται ἐκ τῶν θετικῶν καὶ ἀκεραίων δυνάμεων τοῦ ε, ὧν ἑκάστη ἔχει συντελεστήν τινα· ἐπειδὴ δὲ διὰ $\varepsilon=\varepsilon_1$ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων αὐτῆς, καθ' ἣν τάξιν εἶνε γεγραμμένοι, τείνει πρὸς τὸ ὅριον

$$\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)-\text{ορ}\, V_\nu$$

συνάγεται (ἐδ. 35), ὅτι θὰ συγκλίνῃ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ ε ἔχουσαν μέτρον μικρότερον τοῦ ε_1.

141. Ἐκ τούτων συμπεραίνομεν, ὅτι, τοῦ x ἔχοντος ὡρισμένην τινὰ τιμὴν ἐν τῷ διαστήματι α. . . β, δι' ἁπάσας τὰς αὐξήσεις αὐτοῦ, αἵτινες πληροῦσι τὸν περιορισμὸν $\quad \text{ορ}\, V_\nu=0, \quad$ διὰ $\nu=\infty$

θὰ εἶνε $\qquad \varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)=$

$$\frac{\varepsilon}{1}\varphi'(x)+\frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''(x)+\frac{\varepsilon^3}{1.2.3}\varphi'''(x)+\ldots+\frac{\varepsilon^\nu}{1.2.3\ldots\nu}\varphi^\nu(x)+\ldots \qquad (2)$$

Παρατηρητέον ὅμως, ὅτι διὰ τὴν μεγίστην τιμὴν τοῦ ε, ἥτις πληροῖ τὸν περιορισμὸν ορ $V_\nu=0$, (ἂν ὑπάρχῃ τοιαύτη) ἐνδέχεται ἡ σειρὰ αὕτη νὰ εἶνε ἡμισυγκλίνουσα· δίδει ὅμως καὶ τότε τὴν αὔξησιν τῆς συναρτήσεως, ἐὰν οἱ ὅροι αὐτῆς προστεθῶσι καθ' ἣν τάξιν ἔχουσιν.

Ὁ τύπος οὗτος, ἐὰν τεθῇ $x+\varepsilon = X$, γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$\varphi(X) - \varphi(x) =$$
$$\frac{(X-x)}{1}.\varphi'(x) + \frac{(X-x)^2}{1.2}.\varphi''(x) + \frac{(X-x)^3}{1.2.3}.\varphi'''(x) +$$
$$\ldots + \frac{(X-x)^\nu}{1.2.3.\;\nu}\varphi^\nu(x) + \ldots$$

ΣΗΜ. Ὅταν, τοῦ x αὐξανομένου ἀπό τινος τιμῆς x καθ' οἱανδήποτε ποσότητα ε (ἧς τὸ μέτρον δὲν ὑπερβαίνει ἀριθμόν τινα), ἡ ἀντιστοιχοῦσα αὔξησις τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$ ἀναπτύσσηται εἰς σειρὰν κατὰ τὰς θετικὰς καὶ ἀκεραίας δυνάμεις τοῦ ε, τότε λέγομεν, ὅτι ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ πέριξ τῆς τιμῆς ταύτης x (ἢ ἐν τῇ περιοχῇ αὐτῆς), ἔχει τὸν χαρακτῆρα ἀκεραίας συναρτήσεως, ἢ ὅτι μεταβάλλεται ὡς ἀκεραία συνάρτησις· διότι τῶν ἀκεραίων συναρτήσεων ἡ αὔξησις ἀναπτύσσεται, ἐξ οἱασδήποτε τιμῆς καὶ ἂν αὐξάνῃ ἡ x, εἰς τοιαύτην σειρὰν (Εἰσ. ἀν. ἀλγέβρ. ἐδ. 236).

Σημειωτέον δέ, ὅτι αἱ συναρτήσεις, τὰς ὁποίας ἐγνωρίσαμεν, ἔχουσι τὸν χαρακτῆρα τῶν ἀκεραίων συναρτήσεων εἰς πάσας τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς, ἀφ' ἧς ἐξαρτῶνται, ἐξαιρουμένων τιμῶν τινων αὐτῆς μεμονωμένων· αἱ τιμαὶ αὗται, ἐν τῇ περιοχῇ τῶν ὁποίων ἡ συνάρτησις δὲν μεταβάλλεται ὡς ἀκεραία, λέγονται ἀνώμαλοι. Ἡ φύσις καὶ ἡ σημασία τῶν ἀνωμάλων τούτων τιμῶν ἐρευνᾶται ἐν τῇ θεωρίᾳ τῶν συναρτήσεων.

Σειρὰ τοῦ Μακλωρίνου.

142. Ἐὰν ἡ τιμὴ 0 περιέχηται ἐν τῷ διαστήματι $\alpha\,..\,\beta$, ἐν τῷ ὁποίῳ ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ καὶ αἱ παράγωγοι αὐτῆς εἶνε διαφορίσιμοι, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $x=0$ ἐν τῇ ἰσότητι (8), ὅτε προκύπτει

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \frac{\varepsilon}{1}\varphi'(0) + \frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''(0) + .. + \frac{\varepsilon^\nu}{1.2.3..\nu}\varphi^\nu(0) + V_\nu,$$

ἔνθα $$V_\nu = \frac{\varepsilon^{\nu+1}}{1.2.3..(\nu+1)}\varphi^{\nu+1}(\vartheta\varepsilon) \quad \text{κατὰ τὸν τύπον (9)}$$

ἢ $$V_\nu = \frac{\varepsilon^{\nu+1}}{1.2.3..\nu}(1-\delta)^\nu\varphi^{\nu+1}(\delta\varepsilon) \quad \text{κατὰ τὸν τύπον (10)}$$

Ἐπειδὴ δὲ ε σημαίνει μεταβλητὸν ἀριθμὸν ἀνεξάρτητον, δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν αὐτὸν διὰ τοῦ γράμματος x, δι' οὗ παριστῶμεν συνήθως τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητήν, ὅτε ὁ προηγούμενος τύπος γίνεται

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{x}{1}\varphi'(0) + \frac{x^2}{1.2}\varphi''(0) + .. + \frac{x^\nu}{1.2.3..\nu}\varphi^\nu(0) + V_\nu$$

ἔνθα $$V_\nu = \frac{x^{\nu+1}}{1.2.3..(\nu+1)}\varphi^{\nu+1}(\vartheta x)$$

ἢ καὶ $$V_\nu = \frac{x^{\nu+1}}{1.2.3..\nu}(1-\delta)^\nu\varphi^{\nu+1}(\delta x)$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ τύπου (2) τὸν ἑξῆς

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{x}{1}\varphi'(0) + \frac{x^2}{1.2}\varphi''(0) + \frac{x^3}{1.2.3}\varphi'''(0) + \ldots$$
$$+ \frac{x^\nu}{1.2.3\ldots\nu}\varphi^\nu(0) + \ldots \qquad (3)$$

ὅστις (κατὰ τὰ προειρημένα) ἀληθεύει διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ x, δι' ἃς εἶνε $\quad$ ορ $V_\nu = 0$

Μόνον διὰ τὴν μεγίστην ἐκ τούτων (ἐὰν τοιαύτη ὑπάρχῃ) δύναται ἡ σειρὰ (3) νὰ εἶνε ἡμισυγκλίνουσα· τότε δὲ οἱ ὅροι πρέπει νὰ λαμβάνωνται κατὰ τὴν τάξιν, ἣν ἔχουσιν ἐν τῷ τύπῳ (2).

Ὁ τύπος οὗτος παρέχει τὸ ἀνάπτυγμα τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$ εἰς σειρὰν κατὰ τὰς θετικὰς καὶ ἀκεραίας δυνάμεις τοῦ x· λέγεται δὲ ἡ σειρὰ αὕτη *σειρὰ τοῦ Μακλωρίνου.*

ΣΗΜ. Ἐάν, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ x, αἱ παράγωγοι τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$ εἶνε πᾶσαι μικρότεραι ἀριθμοῦ τινος Μ, θὰ εἶνε ὅρ $\frac{x^\nu}{1.2..\nu}\varphi^\nu(\vartheta x) <$ Μ ὅρ $\frac{x^\nu}{1.2..\nu}$ καὶ ἐπειδὴ $\frac{x^\nu}{1.2..\nu}$ εἶνε ὅρος συγκλινούσης σειρᾶς, (τῆς σειρᾶς τοῦ e^x) τείνει πρὸς τὸ 0, ὅταν ὁ ν αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον, ὥστε εἶνε καὶ ορ $V_\nu = 0$ οἱουδήποτε ὄντος τοῦ x· ἑπομένως ἡ σειρὰ (3) ἰσχύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x.

143. Ἡ σειρὰ τοῦ Μακλωρίνου παρέχει τὸ μόνον δυνατὸν ἀνάπτυγμα τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$ κατὰ τὰς θετικὰς καὶ ἀκεραίας δυνάμεις τοῦ x· λέγω δηλαδή, ὅτι, καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν ἀναπτυχθῇ συνάρτησίς τις $\varphi(x)$ εἰς σειρὰν κατὰ τὰς ἀκεραίας καὶ θετικὰς δυνάμεις τοῦ x, θὰ προκύψῃ τὸ ἀνάπτυγμα (3).

Καὶ ὄντως· ὑποθέσωμεν, ὅτι συνάρτησίς τις $\varphi(x)$, κατὰ τὴν σειρὰν τοῦ Μακλωρίνου ἀναπτυχθεῖσα, ἔδωκε τὸ ἀνάπτυγμα

$$\text{Α} + \text{Β}x + \Gamma x^2 + \ldots$$

κατ' ἄλλον δὲ οἱονδήποτε τρόπον ἔδωκε τὸ ἑξῆς

$$\text{Α}' + \text{Β}'x + \Gamma' x^2 + \ldots$$

Τὰ ἀναπτύγματα ταῦτα θὰ ἰσχύωσι διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ x ἀπὸ 0 μέχρι τιμῆς τινος α· ἐπειδὴ δὲ εἶνε ἴσα πρὸς τὴν συνάρτησιν $\varphi(x)$, θὰ εἶνε καὶ πρὸς ἄλληλα ἴσα· ἤτοι θὰ εἶνε

$$\text{Α} + \text{Β}x + \Gamma x^2 + \ldots = \text{Α}' + \text{Β}'x + \Gamma' x^2 + \ldots$$

ἐὰν δὲ θέσωμεν $x = 0$, εὑρίσκομεν ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης Α = Α′ ὅθεν ἕπεται καὶ

$$\text{Β} + \Gamma x + \Delta x^2 + \ldots = \text{Β}' + \Gamma' x + \Delta' x^2 + \ldots$$

καὶ θέτοντες πάλιν $x=0$, εὑρίσκομεν $B=B'$· καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε οἱ συντελεσταὶ τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ x θὰ εἶνε ἴσοι καὶ τὰ ἀναπτύγματα κατ' οὐδὲν διαφέρουσιν.

Ἐκ τούτων ἀπεδείχθη προσέτι, ὅτι δύο σειραὶ ἐκ θετικῶν καὶ ἀκεραίων δυνάμεων τῆς μεταβλητῆς x ἀπαρτιζόμεναι ἀδύνατον νὰ εἶνε ἴσαι ἔν τινι διαστήματι $0 \,.\,.\, \alpha$, ἐκτὸς ἂν μηδόλως διαφέρωσιν.

ΣΗΜ. Ὁ τύπος τοῦ Μακλωρίνου εἶνε ἄμεσον ἀκολούθημα τοῦ τύπου τοῦ Taylor· ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως ἐκ τοῦ τύπου τοῦ Μακλωρίνου ἕπεται ἀμέσως ὁ τοῦ Taylor· ἐὰν τῷ ὄντι ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον τοῦ Μακλωρίνου εἰς τὴν συνάρτησιν $\varphi(x+\varepsilon)$ τοῦ x καὶ ἔπειτα ἀνταλλάξωμεν τὰ γράμματα x καὶ ε, εὑρίσκομεν τὸν τύπον τοῦ Taylor.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

Ἀνάπτυγμα τῆς συναρτήσεως $(1+x)^{\mu}$.

Πρὸς ἐφαρμογὴν τῆς σειρᾶς τοῦ Μακλωρίνου θὰ ζητήσωμεν τὸ ἀνάπτυγμα τῆς συναρτήσεως

$$(1+x)^{\mu}.$$

Αἱ παράγωγοι αὐτῆς εἶνε κατὰ σειρὰν

$\mu(1+x)^{\mu-1}$, $\mu(\mu-1)(1+x)^{\mu-2}$, $\mu(\mu-1)(\mu-2)(1+x)^{\mu-3}\ldots$

καὶ ἡ νυοστὴ $\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\nu+1)(1+x)^{\mu-\nu}$

καὶ αἱ τιμαὶ αὐτῶν διὰ $x=0$, εἶνε αἱ ἑξῆς

μ, $\mu(\mu-1)$, $\mu(\mu-1)(\mu-2), \ldots \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\nu+1)$.

ὅθεν ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον τοῦ Μακλωρίνου, εὑρίσκομεν,

$$(1+x)^{\mu}=1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3+\ldots$$
$$+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\nu+1)}{1\ 2\ 3\ldots\nu}x^{\nu}+\ldots \qquad (1)$$

Πρὸς εὕρεσιν τῶν τιμῶν τῆς x, δι' ἃς ἰσχύει τὸ ἀνάπτυγμα τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ λόγος τῆς σειρᾶς εἶνε

$$\frac{\mu-\nu}{\nu+1}x \qquad \text{ἢ} \qquad \left(1-\frac{\mu+1}{\nu+1}\right)(-x)$$

ἐπειδὴ δὲ ὁ λόγος οὗτος τείνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν $-x$, ὅταν ὁ ν αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον, συνάγεται, ὅτι, ἵνα ἡ σειρὰ συγκλίνῃ, ἀνάγκη ὁ x νὰ ὑποτεθῇ ἐν τῷ διαστήματι $-1 \ldots +1$, ὥστε μόνον ἐν τούτῳ τῷ διαστήματι δύναται ἡ σειρὰ νὰ παριστᾷ τὴν συνάρτησιν $(1+x)^{\mu}$.

Μένει νὰ ἐρευνήσωμεν, ἂν ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ $-1 \ldots +1$ τὸ ὅριον τοῦ ὑπολοίπου V_ν εἶνε 0· καὶ ἂν μὲν ὁ x εἶνε θετικός, λαμβάνομεν τὴν πρώτην μορφὴν τοῦ ὑπολοίπου, ἥτις ἐνταῦθα εἶνε

$$\frac{\mu(\mu-1)\,(\mu-2)\ldots(\mu-\nu+1)}{1.\ 2.\ 3.\,.\nu}\, x^\nu (1+\vartheta x)^\mu \frac{1}{(1+\vartheta x)^\nu}$$

καὶ ὁ μὲν παράγων $\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu+1)}{1.2.3..\nu}x^\nu$ εἶνε ὅρος τῆς συγκλινούσης σειρᾶς (1) (ἥτις συγκλίνει διότι $x<1$)· ὥστε, αὐξανομένου τοῦ ν, τείνει πρὸς τὸ 0, ὁ δὲ παράγων $\frac{1}{(1+\vartheta x)^\nu}$ εἶνε πάντοτε μικρότερος τῆς μονάδος, καὶ τέλος ὁ παράγων $(1+\vartheta x)^\mu$ κεῖται μεταξὺ 1 καὶ $(1+x)^\mu$· ὥστε τὸ ὅλον γινόμενον τείνει πρὸς τὸ 0.

Ἐὰν δὲ ὁ x εἶνε ἀρνητικός, λαμβάνομεν τὴν δευτέραν μορφὴν τοῦ ὑπολοίπου, ὅπερ ἐνταῦθα γράφεται ὡς ἑξῆς (ἐὰν τεθῇ $-x = x'$)

$$\mu\,\frac{(\mu-1)\,(\mu-2)\ldots(\mu-\nu+1)}{1\ .\ 2\,.\,.\,(\nu-1)}\,(-x')^\nu\,(1-\delta x')^{\mu-1}.\left(\frac{1-\delta}{1-\delta x'}\right)^{\nu-1}.$$

καὶ ὁ μὲν παράγων $\frac{(\mu-1)\,(\mu-2)\ldots(\mu-\nu+1)}{1\quad 2\quad \nu-1}(-x')^{\nu-1}$ εἶνε πάλιν ὅρος σειρᾶς συγκλινούσης, (ἐκείνης, ἥτις προκύπτει ἐκ τῆς σειρᾶς (1), ἐὰν ἀντὶ τοῦ μ τεθῇ $\mu-1$)· ὥστε τείνει πρὸς τὸ 0· ὁ δὲ παράγων $\left(\frac{1-\delta}{1-\delta x'}\right)^{\nu-1}$ τείνει ὡσαύτως πρὸς τὸ 0· διότι τοῦ x' ὄντος θετικοῦ κλάσματος, εἶνε $1-\delta x' > 1-\delta$, ὅθεν $\frac{1-\delta}{1-\delta x'} < 1$· αἱ δὲ δυνάμεις παντὸς κλάσματος προβαίνουσι φθίνουσαι καὶ τείνουσαι πρὸς τὸ 0.

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται, ὅτι, ἐν ὅσῳ τὸ μέτρον τοῦ x εἶνε μικρότερον τῆς μονάδος, θὰ εἶνε $(1+x)^\mu =$

$$1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2+\frac{\mu(\mu-1)\,(\mu-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}x^3+\ldots$$

$$+\frac{\mu(\mu-1)\,(\mu-2)\ldots(\mu-\nu+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ \nu}x^\nu+\ldots$$

Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς μ εἶνε ἀκέραιος καὶ θετικός, τὸ ἀνάπτυγμα ἔχει $\mu+1$ ὅρους μόνον· διότι οἱ λοιποὶ ὅροι ἔχουσι παράγοντα τὸν $\mu-\mu$, ἤτοι τὸ 0· καὶ προκύπτει ὁ τύπος τοῦ δυωνύμου.

Ἄλλο γνώρισμα τῆς συγκλίσεως τῶν σειρῶν.

Διὰ τοῦ ἀναπτύγματος τῆς δυνάμεως $(1+x)^{\mu}$ δυνάμεθα νῦν νὰ ἀποδείξωμεν καὶ τὸ ἑξῆς γνώρισμα τῆς συγκλίσεως τῶν σειρῶν.

Ἐὰν ὁ λόγος σειρᾶς τινος τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$1-\frac{\alpha}{\nu}$$

καὶ αὐξανομένου τοῦ ν εἰς ἄπειρον, ὁ α μένῃ πάντοτε μεγαλήτερος ἀριθμοῦ τινὸς ρ μεγαλητέρου τῆς μονάδος 1, ἡ σειρὰ εἶνε συγκλίνουσα.

Διότι ἐκ τῆς ἀνισότητος $\alpha>\varrho$ ἕπεται $1-\dfrac{\alpha}{\nu}<1-\dfrac{\varrho}{\nu}$

ἀλλὰ κατὰ τὸ εἰρημένον ἀνάπτυγμα εἶνε

$$\left(1-\frac{1}{\nu}\right)^{\varrho}=1-\frac{\varrho}{\nu}+\frac{1}{2\nu^2}\varrho(\varrho-1)\left(1-\frac{\delta}{\nu}\right)^{\varrho-2},\quad 0<\delta<1$$

ὅθεν ἕπεται $$\left(1-\frac{1}{\nu}\right)^{\varrho}>1-\frac{\varrho}{\nu}>1-\frac{\alpha}{\nu}$$

τουτέστιν ὁ λόγος τῆς σειρᾶς εἶνε μικρότερος τοῦ λόγου τῆς συγκλινούσης σειρᾶς $\Sigma\dfrac{1}{\nu^{\varrho}}$· ἑπομένως συγκλίνει καὶ αὐτή.

Ἐὰν ὁ α οὐδέποτε ὑπερβαίνῃ τὴν μονάδα 1, ἡ σειρὰ ἀποκλίνει,

διότι τότε εἶνε $$1-\frac{\alpha}{\nu}\geqq 1-\frac{1}{\nu}$$

ἤτοι ὁ λόγος τῆς σειρᾶς εἶνε ἴσος ἢ μεγαλήτερος τοῦ λόγου τῆς ἀποκλινούσης σειρᾶς $\Sigma\dfrac{1}{\nu}$· ἄρα καὶ αὐτὴ εἶνε ἀποκλίνουσα.

ΣΗΜ. Ἀμφιβολία μένει, ὅταν ὁ ἀριθμὸς α, μένων πάντοτε μείζων τῆς μονάδος 1, ἔχῃ ὅριον τὴν μονάδα· ἢ ὅταν γίνηται ἀπειράκις ἴσος τῇ μονάδι χωρὶς νὰ τείνῃ εἰς οὐδὲν ὅριον.

Ἐφαρμόζοντες τὸ γνώρισμα τοῦτο εἰς τὴν σειρὰν (1), ὅταν $x=\pm 1$, ὅτε λόγος τῆς σειρᾶς εἶνε $1-\dfrac{\mu+1}{\nu+1}$ (πάντων τῶν ὅρων θετικῶς λαμβανομένων), βλέπομεν, ὅτι συγκλίνει μὲν ἡ σειρὰ ὅταν $\mu>0$ οὐχὶ δὲ καὶ ὅταν $\mu<0$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

Ἐκ τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ $(1+x)^{\mu}$ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $l(1+x)$ καὶ τῶν δυνάμεων αὐτοῦ ὡς ἑξῆς·

Ἐν πρώτοις εἶνε

$$(1+x)^\mu = e^{\mu l(1+x)} = 1+\mu l(1+x)+\mu^2\frac{[l(1+x)]^2}{1\,.\,2}+\ldots$$

ἀλλὰ καὶ $(1+x)^\mu = 1+\mu x+\dfrac{\mu(\mu-1)}{1\,.\,2}x^2+\dfrac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3+\ .$

Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ μ· (ἐὰν $[x]<1$), θὰ εἶνε

$$1+\mu l(1+x)+\frac{\mu^2[l(1+x)]^2}{1\,.\,2}+\frac{\mu^3[l(1+x)]^3}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots$$

$$=1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3+\ldots$$

ἀλλ' ἵνα γίνηται τοῦτο, πρέπει οἱ συντελεσταὶ τῶν αὐτῶν δυνάμεων τοῦ μ νὰ εἶνε ἴσοι· ἐὰν δὲ ἐξισώσωμεν τοὺς συντελεστὰς τῆς πρώτης δυνάμεως τοῦ μ, εὑρίσκομεν

$$l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{\nu+1}\frac{x^\nu}{\nu}+\ldots$$

ἐὰν δὲ ἐξισώσωμεν τοὺς συντελεστὰς τοῦ μ^2, εὑρίσκομεν

$$\left\{l(1+x)\right\}^2=x^2-x^3+\frac{11}{12}x^4-\ldots$$

$$+(-1)^\nu 2.\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\nu-1}\right)\frac{x^\nu}{\nu}+\ldots$$

Ἀνάπτυγμα τοῦ τοξ ημ x.

Τὸ ἀνάπτυγμα τῆς συναρτήσεως ταύτης εὑρίσκομεν εὐκόλως ἐκ τοῦ ἀναπτύγματος τῆς παραγώγου αὐτῆς, ἥτις εἶνε $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ἢ $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ · διότι κατὰ τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $(1+x)^\mu$, εἶνε

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\ldots$$

$$+\frac{1.3.5\ldots 2\nu-1}{2.4.6\ldots 2\nu}x^{2\nu}+\ldots \qquad (1)$$

καὶ τὸ μὲν πρῶτον μέλος εἶνε παράγωγος τοῦ τοξ ημ x, τὸ δὲ δεύτερον εἶνε παράγωγος τῆς ἑπομένης σειρᾶς

$$x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{1.3.5\ldots(2\nu-1)}{2.4.6\ldots 2\nu}\,\frac{x^{2\nu+1}}{2\nu+1}+\ldots$$

ἄρα αἱ δύο αὗται συναρτήσεις διαφέρουσιν ἀπ' ἀλλήλων μόνον κατά τινα σταθερὸν ἀριθμόν· ἐπειδὴ δὲ διὰ $x=0$ εἶνε ἴσαι (ἐὰν λαμβάνωμεν τοξημ$0=0$), συνάγεται, ὅτι θὰ εἶνε

$$\text{τοξημ}\,x=\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{1.3.5..2\nu-1}{2.4.6..\;2\nu}\,\frac{x^{2\nu+1}}{2\nu+1}+\ldots$$

συγκλίνει δὲ ἡ σειρὰ αὕτη, ὡς καὶ ἡ παράγωγος αὐτῆς (1), ἐν ὅσῳ εἶνε

$$[x]<1.$$

Συγκλίνει δὲ καὶ διὰ $x=\pm 1$· διότι ὁ λόγος αὐτῆς εἶνε τότε $\left(1-\frac{1}{2\nu}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{2\nu+1}\right)$ καὶ ἂν τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $1-\frac{\alpha}{\nu}$, ὁ α ἔχει ὅριον $\frac{3}{2}$.

Ἐκ τῶν ἀπείρων τόξων τῶν ἐχόντων τὸ αὐτὸ ἡμίτονον x, ἡ σειρὰ δίδει μόνον ἕν, τουτέστι τὸ μεταξὺ $-\frac{\pi}{2}$ καὶ $+\frac{\pi}{2}$ περιλαμβανόμενον· καὶ ὄντως διὰ $x=0$, δίδει τοξημ$0=0$ τοῦ δὲ x (ἤτοι τοῦ ἡμιτόνου) μεταβαλλομένου συνεχῶς καὶ μένοντος μικροτέρον τοῦ 1, καὶ τὸ τόξον μεταβάλλεται συνεχῶς καὶ μένει πάντοτε μικρότερον τοῦ $\frac{\pi}{2}$ (πρβλ. σελ. 86).

ΣΗΜ. Ἡ δυσκολία κατὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῶν συναρτήσεων εἰς σειρὰς συνίσταται κυρίως εἰς τοῦτο, ὅτι δυνάμεθα μὲν νὰ εὕρωμεν ὅσας θέλωμεν παραγώγους, δὲν ἀνακαλύπτομεν ὅμως εὐκόλως τὸν νόμον, καθ' ὃν προχωροῦσιν αἱ παράγωγοι, τουτέστι τὴν γενικὴν ἔκφρασιν ὅλων τῶν παραγώγων. Τοῦτο κατορθοῦται ἐνίοτε διὰ διαφόρων μεθόδων, περὶ ὧν ἰδὲ Bertrand Traité de Calcul Différentiel.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΤΑΞΕΩΝ

Ἐν τοῖς προηγουμένοις ἐθεωροῦμεν δύο μόνον τιμὰς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x καὶ τὰς ἀντιστοιχούσας τιμὰς τῆς συναρτήσεως αὐτῆς y καὶ παρεβάλλομεν τὰς αὐξήσεις ἢ διαφορὰς Δx καὶ Δy πρὸς ἀλλήλας. Ἐν τῷ παρόντι κεφαλαίῳ θὰ θεωρήσωμεν ὅσαςδήποτε τὸ πλῆθος τιμὰς τῆς x, τὰς ὁποίας διὰ τὴν ἁπλότητα θὰ ὑποθέσωμεν ἰσοδιαφόρους, καὶ τὰς ἀντιστοιχούσας τιμὰς τῆς συναρτήσεως y ἢ $\sigma(x)$.

Διαφοραὶ διαφόρων τάξεων.

144. Ἔστωσαν τιμαὶ τῆς x αἱ $x, x_1, x_2, x_3, \ldots x_\nu$ καὶ διαφορὰ δύο ἐφεξῆς ἡ Δx, ἀντιστοιχοῦσαι δὲ τιμαὶ τῆς y κατὰ σειρὰν αἱ ἑξῆς $\quad y, y_1, y_2, y_3, \ldots y_\nu \qquad (1)$

Ἐκ τῶν τιμῶν τούτων, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἑκάστην ἀπὸ τῆς ἑπομένης αὐτῇ, εὑρίσκομεν τὰς διαφορὰς

$$y_1 - y,\quad y_2 - y_1,\quad y_3 - y_2 \ldots y_\nu - y_{\nu-1}$$

αἵτινες παρίστανται συντόμως διὰ τοῦ συμβόλου Δ, γραφομένου πρὸ τοῦ ἀφαιρετέου· ἤτοι

$$\Delta y,\quad \Delta y_1,\quad \Delta y_2 \ldots \Delta y_{\nu-1} \qquad (2)$$

καὶ λέγονται *διαφοραὶ πρώτης τάξεως* τῶν ἀριθμῶν (1)

Ἐκ τῶν ἀριθμῶν (2) εὑρίσκομεν ὁμοίως τὰς διαφορὰς

$$\Delta\Delta y,\ \Delta\Delta y_1,\ \Delta\Delta y_2 \ldots\ldots \Delta\Delta y_{\nu-2}$$

ἢ ἁπλούστερον $\Delta^2 y,\ \Delta^2 y_1,\ \Delta^2 y_2 \ldots\ldots \Delta^2 y_{\nu-2}$

αἵτινες λέγονται *διαφοραὶ δευτέρας τάξεως* τῶν ἀριθμῶν (1)· ἐξακολουθοῦντες τοιουτοτρόπως σχηματίζομεν τὸν ἑπόμενον πίνακα τῶν διαφορῶν τῶν διαφόρων τάξεων

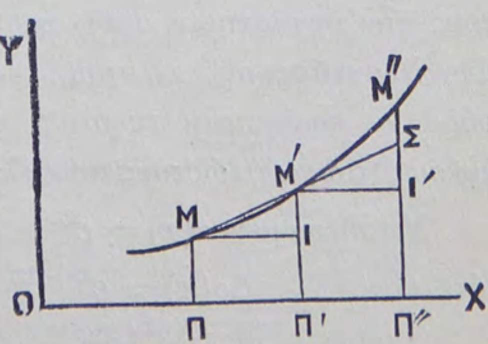
$$\begin{array}{lllll}
y & y_1 & y_2 & y_3 \ldots\ldots & y_\nu \\
\Delta y & \Delta y_1 & \Delta y_2 & \Delta y_3 \ldots\ldots & \Delta y_{\nu-1} \\
\Delta^2 y, & \Delta^2 y_1, & \Delta^2 y_2, & \Delta^2 y_3 \ldots\ldots & \Delta^2 y_{\nu-2} \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\
\Delta^\nu y\cdot & & & &
\end{array}$$

ἡ νυοστὴ τάξις ἔχει μόνον μίαν διαφοράν· διότι ἀπὸ τάξεως εἰς τάξιν ἐλαττοῦται τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμῶν κατὰ μονάδα.

Ἐὰν λόγου χάριν θεωρήσωμεν τρεῖς μόνον τιμὰς τῆς x, τὰς x, $x + \varepsilon$, $x + 2\varepsilon$, αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς y καὶ αἱ διαφοραὶ αὐτῶν σχηματίζουσι τὸν ἑξῆς πίνακα

$$\begin{array}{lll}
y, & y_1, & y_2 \\
\Delta y, & \Delta y_1, & \\
\Delta^2 y, & &
\end{array}$$

Ἐν τῷ παρακειμένῳ σχήματι παρίστανται αἱ τιμαὶ τῆς x ὡς τετμημέναι, αἱ δὲ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς y ὡς τεταγμέναι καμπύλης τινός. Ἐὰν τότε ἀχθῶσιν αἱ ΜΙ, Μ΄Ι΄ παράλληλοι τῇ ΟΧ καὶ ἡ εὐθεῖα ΜΜ΄Σ, θὰ εἶνε



$y = \text{ΜΠ},\ y_1 = \text{Μ΄Π΄},\ y_2 = \text{Μ΄΄Π΄΄}$

$\Delta y = \text{ΙΜ΄},\ \Delta y_1 = \text{Ι΄Μ΄΄}$

$\Delta^2 y = \text{ΣΜ΄΄}$

Ὁρισμὸς τῶν διαφορικῶν τῶν διαφόρων τάξεων.

145. Τὰ διαφορικὰ τῆς συναρτήσεως y ὁρίζονται ἐκ τῶν διαφορῶν αὐτῆς κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον.

Ἐὰν ἡ νυοστὴ διαφορὰ $\Delta^\nu y$ τῆς συναρτήσεως y ἀναπτυχθῇ κατὰ τὰς δυνάμεις τῆς διαφορᾶς Δx, *ὁ τὴν ἐλαχίστην δύναμιν αὐτῆς ἔχων ὅρος καλεῖται νυοστὸν διαφορικὸν* ἢ διαφορικὸν *τῆς* $\nu^{οστῆς}$ *τάξεως τῆς συναρτήσεως* y *πρὸς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν* x.

Τὸ $\nu^{οστὸν}$ διαφορικὸν παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου d^ν γραφομένου πρὸ τῆς συναρτήσεως, ὡς $d^\nu y$, $d^\nu \sigma(x)$· εἶνε δὲ τὸ πρωτεῦον μέρος τῆς $\nu^{οστῆς}$ διαφορᾶς $\Delta^\nu y$.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ $\nu^{οστοῦ}$ διαφορικοῦ τῆς συναρτήσεως y ἢ $\sigma(x)$, παρατηροῦμεν, ὅτι εἶνε

$$\Delta\sigma(x) = \sigma(x_1) - \sigma(x)$$

$$\Delta^2\sigma(x) = \Delta\sigma(x_1) - \Delta\sigma(x) = \sigma(x_2) - 2\sigma(x_1) + \sigma(x)$$

καὶ γενικῶς $\Delta^\nu\sigma(x) = A\sigma(x) + A_1\sigma(x_1) + A_2\sigma(x_2) + \ldots + A_\nu\sigma(x_\nu)$ ἔνθα $A, A_1, A_2 \ldots A_\nu$ εἶνε ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἐντελῶς ὡρισμένοι (δεικνύεται δὲ εὐκόλως, ὅτι εἶνε οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἀναπτύγματος τῆς δυνάμεως $(1-x)^\nu$).

Ἐπειδὴ δὲ εἶνε $x_1 = x + \Delta x$, $x_2 = x + 2\Delta x, \ldots x_\nu = x + \nu\Delta x$, ἂν ἀναπτυχθῶσιν οἱ ὅροι, ἐξ ὧν σύγκειται ἡ διαφορὰ $\Delta^\nu\sigma(x)$, κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ Δx διὰ τοῦ τύπου τοῦ Taylor, θὰ εἶνε

$$\Delta^\nu\sigma(x) = B\sigma(x) + B_1\sigma'(x).\Delta x + B_2\sigma''(x).(\Delta x)^2 + \ldots.$$
$$+ B_\varrho\sigma^{\varrho}(x)\,(\Delta x)^\varrho. + \ldots. \qquad (1)$$

ἔνθα οἱ συντελεσταὶ $B, B_1, B_2 \ldots$ εἶνε ἀριθμοὶ ἐντελῶς ὡρισμένοι.

Ἵνα προσδιορίσωμεν αὐτούς, μεταχειριζόμεθα τὴν ἑπομένην μέθοδον, ἥτις ἐν πολλοῖς ὁμοίοις ζητήμασι παρέχει σπουδαῖα ὠφελήματα. Παρατηροῦντες δηλαδή, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶνε ὅλως ἄσχετοι πρὸς τὴν συνάρτησιν $\sigma(x)$, ἤτοι μένουσιν οἱ αὐτοί, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶνε ἡ συνάρτησις, ἐκλέγομεν συνάρτησίν τινα, τῆς ὁποίας ἡ $\nu^{η}$ διαφορὰ νὰ εὑρίσκηται εὐκόλως καὶ ἀμέσως, ἐκ δὲ ταύτης εὑρίσκομεν ἀμέσως τοὺς ἀγνώστους συντελεστάς.

Ὑποθέσωμεν $\sigma(x) = e^x$

τότε εἶνε $\Delta\sigma(x) = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x\,(e^{\Delta x} - 1)$

$$\Delta^2\sigma(x) = e^{x+\Delta x}.(e^{\Delta x} - 1) - e^x\,(e^{\Delta x} - 1) = e^x\,(e^{\Delta x} - 1)^2.$$

ὁμοίως $\Delta^3\sigma(x) = e^x(e^{\Delta x} - 1)^3,$

καὶ γενικῶς $\Delta^\nu\sigma(x) = e^x . (e^{\Delta x} - 1)^\nu$

ἤτοι $$\Delta^\nu\sigma(x) = e^x \left\{ \frac{\Delta x}{1} + \frac{(\Delta x)^2}{1.2} + \frac{(\Delta x)^3}{1.2.3} + \ldots \right\}^\nu$$

ἀλλὰ κατὰ τὸν γενικὸν τύπον (1) εἶνε

$$\Delta^\nu\sigma(x) = e^x \left\{ B + B_1\Delta x + B_2(\Delta x)^2 + B_3(\Delta x)^3 + \ldots . \right\}$$

ὅθεν ἕπεται

$$B + B_1\Delta x + B_2(\Delta x)^2 + B_3(\Delta x)^3 + \ldots = \left\{ \frac{\Delta x}{1} + \frac{(\Delta x)^2}{1.2} + \frac{(\Delta x)^3}{1.2.3} + \ldots \right\}^\nu$$

ἐπειδὴ δὲ ἡ ἰσότης αὕτη ἰσχύει οἱουδήποτε ὄντος τοῦ Δx, ἐξισοῦντες τοὺς συντελεστὰς τῶν ἴσων δυνάμεων αὐτοῦ, εὑρίσκομεν

$$B = B_1 = B_2 = \ldots . B_{\nu-1} = 0$$

$$B_\nu = 1,\ B_{\nu+1} = \frac{\nu}{2},\ B_{\nu+2} = \frac{\nu(3\nu+1)}{24},\ B_{\nu+3} = \frac{\nu^2(\nu+1)}{48}, \text{ κτλ.}$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται γενικῶς

$$\Delta^\nu\sigma(x) = \sigma^\nu(x) . (\Delta x)^\nu + \sigma^{\nu+1}(x) . \frac{\nu}{2}(\Delta x)^{\nu+1} + \ldots \qquad (2)$$

καὶ ἑπομένως κατὰ τὸν ὁρισμὸν εἶνε

$d^\nu\sigma(x) = \sigma^\nu(x) . (dx)^\nu$ ἢ ἁπλούστερον $\sigma^\nu(x)\, dx^\nu$·

τουτέστι τὸ $\nu^{\text{ὸν}}$ *διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως* $\sigma(x)$ *πρὸς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν* x *ἰσοῦται τῇ* $\nu^{\text{ῃ}}$ *παραγώγῳ αὐτῆς ἐπὶ τὴν* $\nu^{\text{ὴν}}$ *δύναμιν τοῦ διαφορικοῦ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.*

Ἰδιότητες τῶν διαφορικῶν.

146. Τὸ $d^\nu y$ εὑρίσκεται ἐκ τοῦ προηγουμένου αὐτοῦ $d^{\nu-1}y$ διὰ τῆς διαφορίσεως, *ἐὰν ὁ παράγων* dx *κατὰ τὴν διαφόρισιν θεωρῆται σταθερός.*

Καὶ ὄντως εἶνε

$$d(dy) = d\left\{\sigma'(x) . dx\right\} = d\Big(\sigma'(x)\Big) . dx = \sigma''(x)dx^2 = d^2y$$

$$d(d^2y) = d\left\{\sigma''(x)dx^2\right\} = d\Big(\sigma''(x)\Big) . dx^2 = \sigma'''(x)\, dx^3 = d^3y$$

καὶ γενικῶς $d(d^{\nu-1}_y) = d^\nu y.$

Ὥστε τὸ $\nu^{\text{ὸν}}$ διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$ πρὸς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν x εἶνε τὸ ἐξαγόμενον, ὅπερ λαμβάνομεν διαφορίζοντες αὐτὴν ν φοράς, θεωροῦντες δὲ κατὰ τὴν διαφόρισιν τὸν παράγοντα dx σταθερόν.

147. Ἐκ τῆς ἰσότητος $d^\nu y = \sigma^\nu(x) \, . \, dx^\nu$ ἕπεται

$$\sigma^\nu(x) = \frac{d^\nu y}{dx^\nu}$$

ἤτοι ἡ ν^{η} *παράγωγος ἰσοῦται τῷ* ν^{φ} *διαφορικῷ τῆς συναρτήσεως διαιρεθέντι διὰ τῆς* $\nu^{\eta\varsigma}$ *δυνάμεως τοῦ διαφορικοῦ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.*

148. Ἡ σειρὰ τοῦ Taylor

$$\sigma(x+\varepsilon) - \sigma(x) = \frac{\varepsilon}{1}\,\sigma'(x) + \frac{\varepsilon^2}{1\,.\,2}\,\sigma''(x) + \,. \,.$$

δύναται διὰ τῶν διαφορικῶν τῆς συναρτήσεως νὰ γραφῇ ὡς ἑξῆς

$$\Delta\sigma(x) = d\sigma(x) + \frac{d^2\,\sigma(x)}{1\,.\,2} + \frac{d^3\,\sigma(x)}{1\,.\,2\,.\,3} + \,.\,. + \frac{d^\nu\,\sigma(x)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,\nu} + \,.\,.$$

ἢ καὶ $$\Delta y = dy + \frac{d^2 y}{1\,.\,2} + \frac{d^3 y}{1\,.\,2\,.\,3} + \,.\,.\,.\,.\, \frac{d^\nu y}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,\nu} + \,.\,.\,.\,.$$

τουτέστιν ἡ ὅλη αὔξησις τῆς συναρτήσεως, ἡ πρὸς τὴν αὔξησιν Δx τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x ἀντιστοιχοῦσα, ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι πάντων τῶν διαφορικῶν αὐτῆς, ὅταν ἕκαστον διαιρεθῇ διὰ τοῦ γινομένου τῶν ἀκεραίων **ἀπὸ** *τοῦ 1 μέχρι τοῦ δεικνύοντος τὴν τάξιν αὐτοῦ·* καὶ τὸ $\nu^{\text{ὸν}}$ διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$ ἰσοῦται τῷ τὴν $\nu^{\text{ὴν}}$ δύναμιν τοῦ Δx ἔχοντι ὅρῳ ἐν τῷ ἀναπτύγματι τῆς αὐξήσεως $\Delta\sigma(x)$, ἐὰν ὁ ὅρος οὗτος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,.\,.\,\nu$.

149. Ἐκ τῆς ἰσότητος (2) βλέπομεν, ὅτι εἶνε

$$\Delta^\nu \sigma(x) = \sigma^\nu(x)\,.\,(\Delta x)^\nu \left\{ 1 + \alpha \right\}$$

τοῦ α τείνοντος πρὸς τὸ 0, ὅταν ἡ διαφορὰ Δx τείνῃ πρὸς τὸ 0. Ἐντεῦθεν ἕπονται τὰ ἑπόμενα θεωρήματα, ὧν ἡ ἀπόδειξις εἶνε ἁπλουστάτη.

1) *Ὁ* ***λόγος*** *τοῦ $\nu^{\text{οῦ}}$ διαφορικοῦ πρὸς* ***τὴν*** *$\nu^{\text{ὴν}}$ διαφορὰν τείνει πρὸς τὴν μονάδα 1.*

2) *Τὸ $\nu^{\text{ὸν}}$ διαφορικὸν διαφέρει ἀπὸ τῆς $\nu^{\text{ῆς}}$ διαφορᾶς κατὰ ποσότητα, ἥτις γίνεται μέρος αὐτῆς τόσῳ μικρότερον ὅσῳ μικροτέρα γίνεται ἡ αὔξησις Δx.*

3) *Ὁ λόγος τῆς $\nu^{\text{ῆς}}$ διαφορᾶς $\Delta^\nu y$ πρὸς τὴν $\nu^{\text{ὴν}}$ δύναμιν τῆς διαφορᾶς Δx ἔχει ὅριον τὴν $\nu^{\text{ὴν}}$ παράγωγον·* ἤτοι

$$\text{ὅρ}\, \frac{\Delta^\nu y}{\Delta x^\nu} = \frac{d^\nu y}{dx^\nu} = \sigma^\nu(x)$$

Παρατήρησις. Τὸ πρῶτον διαφορικὸν πάσης συναρτήσεως $\sigma(x)$, ἤτοι τὸ $\sigma'(x)\ dx$, διαφυλάττει, ὡς ἐμάθομεν, τὴν αὐτὴν μορφήν, εἴτε εἶνε ἡ x ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ εἴτε καὶ μή. Δὲν συμβαίνει ὅμως τοῦτο ἐπὶ τῶν λοιπῶν διαφορικῶν· διότι ταῦτα ὑποθέτουσιν, ὅτι ἡ μεταβλητὴ x, ἀφ' ἧς ἐξαρτᾶται ἡ συνάρτησις $\sigma(x)$, λαμβάνει τιμὰς ἰσοδιαφόρους. ἂν ὅμως ἡ x εἶνε συνάρτησις ἄλλης μεταβλητῆς, οἷον τῆς t, καὶ λαμβάνῃ ἡ t τιμὰς ἰσοδιαφόρους, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τῆς x δὲν εἶνε ἰσοδιάφοροι (ἐκτὸς ἂν εἶνε $x = \alpha t + \beta$)· ἑπομένως τὸ $\nu^{\text{ον}}$ διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$ πρὸς τὴν t δὲν δύναται νὰ εἶνε τὸ $\sigma^{\nu}(x)\ dx^{\nu}$.

Ὡς παράδειγμα ἔστω ἡ συνάρτησις $y = x^3$· ἐὰν ἡ x εἶνε ἀνεξάρτητος μεταβλητή, θὰ εἶνε

$$dy = 3x^2dx, \quad d^2y = 6xdx^2. \tag{1}$$

Ἐὰν ὅμως ἡ x εἶνε συνάρτησις ἄλλης μεταβλητῆς t, ἔστω $x = t^2$, θὰ εἶνε $\quad dx_t = 2tdt, \quad dy_t = 6t^5dt, \quad d^2_ty = 30t^4dt^2$

καὶ τὰ διαφορικὰ ταῦτα πρὸς t δὲν ἐπαληθεύουσι τὴν ἰσότητα (1).

Διαφορικὰ συναρτήσεως πρὸς οἱανδήποτε μεταβλητήν.

150. Ἐὰν ἡ μεταβλητὴ x, ἀφ' ἧς ἐξαρτᾶται ἡ συνάρτησις $\sigma(x)$, δὲν εἶνε ἀνεξάρτητος ἀλλ' ἐξαρτᾶται ἔκ τινος ἄλλης t, ἡ συνάρτησις $\sigma(x)$ θὰ εἶνε συνάρτησις συναρτήσεως, τὰ δὲ διαφορικὰ αὐτῆς πρὸς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν t, (ἥτις λαμβάνει τιμὰς ἰσοδιαφόρους), εὑρίσκονται ὡς ἑξῆς·

Ἐν πρώτοις εἶνε, ἂν $\qquad x = \varphi(t)$

$$d\,\sigma(x) = \sigma'(x)\ dx = \sigma'(x)\,.\,\varphi'(t)\,.\,dt$$

πρὸς εὕρεσιν τοῦ δευτέρου διαφορικοῦ $d^2\sigma(x)$, πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ διαφορικὸν τοῦ πρώτου $\sigma'(x)\ \varphi'(t)\ dt$, ἢ $\sigma'(x)\ dx$, θεωροῦντες τὸ dt ὡς σταθερὰν ποσότητα· τότε τὸ διαφορικὸν dx εἶνε συνάρτησις τοῦ t ἐπὶ τὴν σταθερὰν ποσότητα dt πολλαπλασιαζομένη ($dx = \varphi'(t)\ dt$) καὶ διαφορικὸν αὐτοῦ εἶνε τὸ d^2x· ὅθεν ἕπεται·

$$d^2\sigma(x) = d\,\{\sigma'(x)\,.\,dx\} = \sigma''(x)\ dx^2 + \sigma'(x)\ d^2x.$$

διαφορίζοντες καὶ πάλιν πρὸς t, εὑρίσκομεν

$$d^3\sigma(x) = \sigma'''(x)\ dx^3 + 3\sigma''(x)\ dx\ d^2x + \sigma'(x)\ d^3x$$

καὶ γενικῶς εἶνε

$$d^{\nu}\sigma(x) = \sigma^{(\nu)}(x)\,.\,dx^{\nu} + \mathrm{A}\ \sigma^{\nu-1}(x) + \mathrm{B}\ \sigma^{\nu-2}(x) + \,.\,.\, + \sigma'(x)\,.\,d^{\nu}x \tag{1}$$

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι τὸ $\nu^{\text{ον}}$ διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$ πρὸς τὴν τυχοῦσαν μεταβλητὴν t εὑρίσκεται ἐξ αὐτῆς, ἂν διαφορίσωμεν αὐτὴν ν φορὰς θεωροῦντες τὴν x καὶ τὰ διαφορικὰ αὐτῆς dx, $d^2x, ..$ ὡς συναρτήσεις τῆς t· ἀποτελεῖται δὲ ἐκ τῶν παραγώγων τῆς αὐτῆς συναρτήσεως ἀπὸ τῆς πρώτης $\sigma'(x)$ μέχρι τῆς $\nu^{\eta\varsigma}$ $\sigma^{\nu}(x)$, ὧν ἑκάστη πολλαπλασιάζεται ἐπί τινα ἀκεραίαν συνάρτησιν τῶν διαφορικῶν dx, $d^2x, . \; d^{\nu}x$, ἤτοι τῶν διαφορικῶν τῆς μεταβλητῆς, ἀφ' ἧς ἡ συνάρτησις ἀμέσως ἐξαρτᾶται. Παρατηρητέον δέ, ὅτι πάντες οἱ ὅροι εἶνε ἰσοβάθμιοι, ἐὰν ὡς βαθμὸς ἑκάστου διαφορικοῦ θεωρηθῇ ὁ δείκτης αὐτοῦ· διότι, ἂν θέσωμεν ἀντὶ τῶν διαφορικῶν dx, $d^2x, ...$ $d^{\nu}x$ τὰς τιμὰς αὐτῶν

$$dx = \varphi'(t)\, dt, \qquad d^2x = \varphi''(t)\, dt^2, .. \; d^{\nu}x = \varphi^{\nu}(t)\, dt^{\nu}.$$

πρέπει νὰ εὕρωμεν πανταχοῦ κοινὸν παράγοντα τὸ dt^{ν}.

Φανερὸν δὲ εἶνε, ὅτι τὰ διαφορικὰ ταῦτα διαφυλάττουσι τὴν ἑαυτῶν μορφήν, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶνε ἡ μεταβλητή, πρὸς ἣν ἀναφέρονται, ἀρκεῖ νὰ λαμβάνῃ αὕτη τιμὰς ἰσοδιαφόρους, διότι οὐδόλως ὑπάρχει ἐν αὐτοῖς ἡ t.

Ἐκ τῶν διαφορικῶν τούτων τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$ πρὸς τὴν τυχοῦσαν μεταβλητὴν t, ἐπανευρίσκομεν τὰ διαφορικὰ αὐτῆς πρὸς τὴν x, ἂν ὑποθέσωμεν $x = t$ καὶ ἑπομένως $dx = dt$, $d^2x = 0, d^3x = 0, ...$ τουτέστιν ἂν ὑποθέσωμεν τὸ dx σταθερὰν ποσότητα.

*151. Τοὺς συντελεστὰς τῶν παραγώγων ἐν τῇ ἐκφράσει (1) τοῦ $d^{\nu}\sigma(x)$ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν διὰ τοῦ τύπου τοῦ Taylor ὡς ἑξῆς·

Ἔστω h αὔξησις οἱαδήποτε τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς t, Δx ἡ πρὸς αὐτὴν ἀντιστοιχοῦσα αὔξησις τοῦ x καὶ $\Delta\sigma(x)$ ἡ αὔξησις τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$· τότε εἶνε κατὰ τὸν τύπον τοῦ Taylor (ἂν $x = \varphi(t)$)

$$\Delta x = \varphi(t+h) - \varphi(t) = \varphi'(t).h + \varphi''(t)\frac{h^2}{1.2} + ..$$

$$\text{καὶ } \Delta\sigma(x) = \sigma'(x)\,\Delta x + \sigma''(x)\,\frac{\Delta x^2}{1.2} + \sigma'''(x)\frac{\Delta x^3}{1.2.3} + ..$$

ἐντεῦθεν ἕπεται

$$\begin{aligned}\Delta\sigma(x) = \sigma'(x) &\left\{\varphi'(t)\,h + \varphi''(t)\,\frac{h^2}{1.2} + ..\right\} + \\ + \frac{\sigma''(x)}{1.2}\,. &\left\{\varphi'(t)\,h + \varphi''(t)\,\frac{h^2}{1.2} + ..\right\}^2 + \\ + \frac{\sigma'''(x)}{1.2.3}\,. &\left\{\varphi'(t)\,h + \varphi''(t)\,\frac{h^2}{1.2} + ..\right\}^3 + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

ἐπειδὴ δὲ τοῦτο εἶνε τὸ ἀνάπτυγμα τῆς αὐξήσεως $\Delta\sigma(x)$ κατὰ τὰς δυνάμεις τῆς αυξήσεως h τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς t, ὁ τὴν $\nu^{\text{ην}}$ δύναμιν h^ν ἔχων ὅρος, ἐὰν ἐπὶ $1.2.3..\nu$ πολλαπλασιασθῇ, ἰσοῦται τῷ $\nu^{\text{ῳ}}$ διαφορικῷ τῆς $\sigma(x)$ πρὸς τὴν t, ἤτοι εἶνε

$$d^\nu\sigma(x) = (1.2.3.\nu)\left\{A_1\frac{\sigma'(x)}{1} + A_2\frac{\sigma''(x)}{1.2} + A_3\frac{\sigma'''(x)}{1.2.3} + \ldots + A_\nu\frac{\sigma^\nu(x)}{1.2\ldots\nu}\right\}$$

ἔνθα A_λ σημαίνει τὸ σύνολον τῶν ὅρων τοῦ ν βαθμοῦ ἐν τῇ δυνάμει

$$\left\{\varphi'(t)h + \varphi''(t)\frac{h^2}{1.2} + ..\right\}^\lambda,$$

$$\text{ἤτοι ἐν τῇ}\ \left\{\varphi'(t)h + \varphi''(t)\ \frac{h^2}{1.2} + \ ..\ \varphi^\nu(t)\ \frac{h^\nu}{1.2\ 3..\nu}\right\}^\lambda$$

διότι οἱ λοιποὶ ὅροι τῆς σειρᾶς $\varphi'(t)h + \varphi''(t)\ \dfrac{h^2}{1.2} + ..$ ἀπὸ τοῦ $\nu^{\text{οῦ}}$ καὶ ἐφεξῆς ἔχουσι δυνάμεις τοῦ h ἀνωτέρας τῆς $\nu^{\text{ης}}$.

Ἐπειδὴ δὲ εἶνε $\qquad \varphi'(t)\,h = dx, \quad \varphi''(t)\,h^2 = d^2x, \ldots,$

ἕπεται, ὅτι τὸ A_λ σημαίνει τὸ σύνολον τῶν ὅρων τῆς $\nu^{\text{ης}}$ διαστάσεως ἐν τῇ ἑξῆς δυνάμει·

$$\left\{dx + \frac{d^2x}{1.2} + \frac{d^3x}{1.2.3} + .. + \frac{d^\nu x}{1.2.3..\nu}\right\}^\lambda$$

ἐὰν ὁ βαθμὸς ἑκάστου τῶν διαφορικῶν dx, d^2x .. λαμβάνηται ἴσος πρὸς τὴν τάξιν αὐτοῦ. Οἱ ὅροι οὗτοι, κατὰ τὸ γνωστὸν ἀνάπτυγμα τῆς λ δυνάμεως οἱουδήποτε πολυωνύμου, δίδονται ὑπὸ τοῦ ἑπομένου ἀθροίσματος

$$A_\lambda = \Sigma(1.2.3...\lambda)\frac{\left(\dfrac{dx}{1}\right)^{\alpha_1}\cdot\left(\dfrac{d^2x}{1.2}\right)^{\alpha}\cdots\left(\dfrac{d^\nu x}{12..\nu}\right)^{\alpha^\nu}}{12..\alpha_1\ \ 12..\alpha_2...12..\alpha_\nu}$$

ἔνθα ἡ ἄθροισις ἐκτείνεται ἐφ᾽ ἅπαντας τοὺς θετικοὺς καὶ ἀκεραίους ἀριθμοὺς α_1, α_2, .. α_ν διὰ τοὺς ὁποίους εἶνε

$$\alpha_1 + \alpha_2 + .. + \alpha_\nu = \lambda$$

καὶ $\qquad \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + .. + \nu\alpha_\nu = \nu.$

*152. Τῶν αὐτῶν συντελεστῶν A_1, A_2, .. A_λ .. δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ ἄλλην ἔκφρασιν διάφορον τῆς προηγουμένης. Ἐπειδὴ ἡ παράστασις $\varphi'(t)\dfrac{h}{1}+\varphi''(t)\dfrac{h^2}{1.2}+\ldots$ ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ

$$\varphi(t+h)-\varphi(t) \quad \text{καὶ ἡ} \quad \left\{\varphi'(t)\frac{h}{1}+\varphi''(t)\frac{h^2}{1.2}+\ldots\right\}^{\lambda}$$

ἰσοῦται τῇ δυνάμει $\left\{\varphi(t+h)-\varphi(t)\right\}^{\lambda}$,

συνάγεται, ὅτι ὁ A_λ ἰσοῦται πρὸς τὸ σύνολον τῶν ἐν αὐτῇ ὅρων τοῦ $\nu^{\text{οῦ}}$ βαθμοῦ πρὸς τὸ h.

Οἱ δὲ ὅροι οὗτοι ἰσοῦνται τῷ γινομένῳ τοῦ $\dfrac{h^\nu}{1.2\ldots\nu}$ ἐπὶ τὴν $\nu^{\text{ην}}$ παράγωγον τῆς αὐτῆς παραστάσεως πρὸς τὸ h, ἐὰν τεθῇ ἐν αὐτῇ $h=0$. (κατὰ τὸν τύπον τοῦ Μακλωρίνου)· ἀλλ' ἡ $\nu^{\text{η}}$ παράγωγος, εὑρισκομένη μετὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς δυνάμεως, εἶνε

$$\varphi^\nu(t+h)^\lambda-\frac{\lambda}{1}\varphi^\nu(t+h)^{\lambda-1}\varphi(t)+\frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2}\varphi^\nu(t+h)^{\lambda-2}\varphi(t)^2-\ldots$$
$$\pm\frac{\lambda}{1}\varphi^\nu(t+h)\varphi(t)^{\lambda-1}$$

ἔνθα $\varphi^\nu(t+h)^\lambda$ σημαίνει τὴν $\nu^{\text{ην}}$ παράγωγον (πρὸς t ἢ πρὸς h) τῆς δυνάμεως $\varphi(t+h)^\lambda$. ἐντεῦθεν συνάγεται ὅτι εἶνε

$$A_\lambda=\left\{\varphi^\nu(t)^\lambda-\frac{\lambda}{1}\varphi^\nu(t)^{\lambda-1}.\varphi(t)+\frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2}\varphi^\nu(t)^{\lambda-2}.\varphi(t)^2-\right.$$
$$\left.\ldots\pm\frac{\lambda}{1}\varphi^\nu(t)\ \varphi(t)^{\lambda-1}\right\}\frac{h^\nu}{1.2.3\ldots\nu}$$

$$\text{ἢ καὶ } A_\lambda=\frac{1}{1.2.3\ldots\nu}\left\{d^\nu(x^\lambda)-\frac{\lambda}{1}xd^\nu(x^{\lambda-1})\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2}x^2d^\nu(x^{\lambda-2})-\ldots\pm\frac{\lambda}{1}x^{\lambda-1}d^\nu(x)\right\}.$$

Σημείωσις. Διαιροῦντες διὰ τοῦ dt^ν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (1), ἥτις παρέχει τὴν τιμὴν τοῦ $d^\nu\sigma(x)$, εὑρίσκομεν τύπον παρέχοντα τὴν $\nu^{\text{ην}}$ παράγωγον τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$ πρὸς τὴν μεταβλητὴν t, ἤτοι τὴν $\nu^{\text{ην}}$ παράγωγον συναρτήσεως ἄλλης συναρτήσεως ἐκπεφρασμένην διὰ τῶν παραγώγων τῆς $\sigma(x)$ πρὸς τὴν x καὶ διὰ τῶν παραγώγων τῆς x πρὸς τὴν t.

῎Εκφρασις τῶν παραγώγων τῆς συναρτήσεως σ(x) πρὸς τὴν x διὰ τῶν διαφορικῶν πρὸς οἱανδήποτε μεταβλητήν.

153. Οἱαςδήποτε οὔσης τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς t, ἔχομεν

$$dy = \sigma'(x) . dx \qquad ἂν \quad y = \sigma(x)$$

ὅθεν

$$\sigma'(x) = \frac{dy}{dx} \tag{1}$$

τὰ διαφορικὰ dy, dx εἶνε συναρτήσεις τοῦ t πολλαπλασιασμέναι ἐπὶ τὸν σταθερὸν παράγοντα dt· δυνάμεθα λοιπὸν νὰ λάβωμεν τὸ διαφορικὸν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος (1) πρὸς τὴν μεταβλητὴν t ὅτε εὑρίσκομεν

$$d\sigma'(x) = \sigma''(x) . dx = d\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

ὅθεν

$$\sigma''(x) = \frac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx}$$

καὶ ἐκτελοῦντες τὴν διαφόρισιν

$$\sigma''(x) = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3} = \frac{\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}}{dx^3}$$

῾Ομοίως εὑρίσκομεν ἐκ ταύτης

$$\sigma'''(x) = \frac{1}{dx^5}\begin{vmatrix} dy & dx & 0 \\ d^2y & d^2x & dx \\ d^3y & d^3x & 3d^2x \end{vmatrix}$$

Αἱ τιμαὶ αὗται τῶν παραγώγων $\sigma'(x)$, $\sigma''(x)$. . . . δύνανται νὰ εὑρεθῶσι καὶ ἐκ τῶν ἰσοτήτων, αἵτινες δίδουσι τὰ διαφορικὰ τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$, ἤτοι τὰ dy, d^2y . . . . πρὸς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν t· διότι καὶ αἱ ἐξισώσεις ἐκεῖναι προέκυψαν ἐκ τῆς διαφορίσεως τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως (1) γεγραμμένης ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$dy = \sigma'(x)\, dx.$$

᾿Εκ τῶν τιμῶν τούτων εὑρίσκομεν τὰς ἁπλουστέρας, αἵτινες ὑποθέτουσι τὴν x ἀνεξάρτητον μεταβλητήν, ἐὰν ὑποθέσωμεν

$$dx = dt, \quad d^2x = 0, \quad d^3x = 0 \, . \, . \, . \, .$$

* Ἔκφρασις τῶν παραγώγων τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$ διὰ τῶν αὐξήσεων τῆς x καὶ τῶν ἀντιστοιχουσῶν αὐξήσεων τῆς συναρτήσεως.

154. Ἔστωσαν $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_\nu$ αὐξήσεις οἱαιδήποτε τῆς μεταβλητῆς x, καὶ $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \ldots \eta_\nu$ αἱ ἀντίστοιχοι αὐξήσεις τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$.

Οἱαιδήποτε καὶ ἂν εἶνε αἱ αὐξήσεις $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_\nu$, ἀρκεῖ νὰ μὴ εἶνε δύο ἴσαι, δυνάμεθα πάντοτε νὰ προσδιορίσωμεν ν ἀριθμοὺς A_1, $A_2 \ldots A_\nu$ τοιούτους ὥστε νὰ εἶνε

$$\eta_\varrho = \sigma(x+\varepsilon_\varrho) - \sigma(x) = \Sigma A_\tau \varepsilon_\varrho^\tau \qquad \text{διὰ } \varrho = 1,.2,..\nu$$

διότι λύοντες τὰς ν ταύτας ἐξισώσεις πρὸς τὰς $A_1, A_2, \ldots A_\nu$ εὑρίσκομεν

$$A_\varrho = \frac{|\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_1^{\varrho-1}\ \eta_1 \varepsilon_1^{\varrho+1} \ldots \varepsilon^\nu{}_1|}{|\varepsilon_1 \ldots \varepsilon^\nu{}_1|}$$

ἔνθα, συντομίας χάριν, ἐσημειώθη μόνον ἡ πρώτη γραμμὴ ἑκατέρας τῶν ὁριζουσῶν.

Τούτου τεθέντος, θεωρήσωμεν τὴν ἑπομένην συνάρτησιν τοῦ ω

$$\sigma(x+\omega) - \sigma(x) - \omega A_1 - \omega^2 A_2 \ldots \omega^\nu A_\nu$$

ἡ συνάρτησις αὕτη γίνεται 0 διὰ τὰς ἑξῆς $\nu+1$ τιμὰς τοῦ ω

$$0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_\nu$$

κατ' ἀκολουθίαν ἡ παράγωγος αὐτῆς θὰ γίνηται 0 διὰ ν τιμὰς τοῦ ω μεταξὺ αὐτῶν κειμένας· διὰ δὲ τοῦτο ἡ δευτέρα παράγωγος θὰ γίνηται 0 διὰ $\nu - 1$ τιμὰς μεταξὺ τῶν ἄλλων κειμένας· καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε ἡ ν^{η} παράγωγος τῆς συναρτήσεως ταύτης θὰ μηδενίζηται διὰ μίαν τοὐλάχιστον τιμὴν τοῦ ω μεταξὺ τῶν τιμῶν $0, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\nu$ κειμένην· ἀλλ' ἡ ν^{η} παράγωγος εἶνε

$$\sigma^\nu(x+\omega) - 1.2.3..\nu A$$

ὅθεν ἕπεται, ὅτι θὰ εἶνε $A_\nu = \dfrac{\sigma^\nu(x_0)}{1.2.3..\nu}$

ἔνθα x_0 διαφέρει τοῦ x διαφορὰν μικροτέραν τοῦ μεγίστου ἐκ τῶν $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\nu$.

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης προκύπτει ἕνεκα τῆς τιμῆς τοῦ A_ν

$$\frac{\sigma^\nu(x_0)}{1.2..\nu} = \frac{|\varepsilon_1\ \varepsilon^2{}_1 \ldots \varepsilon_1^{\nu-1}\ \eta_1|}{|\varepsilon_1\ \varepsilon^2{}_1 \ldots \varepsilon^\nu{}_1|} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\sigma^\nu(x)}{1.2..\nu} = \text{ὅρ} \frac{|\varepsilon_1\ \varepsilon_1{}^2 \ldots \varepsilon^{\nu-1}\ \eta_1|}{|\varepsilon_1\ \varepsilon^2{}_1 \ldots \varepsilon^\nu{}_1|}$$

Ἰδιαιτέρας μνείας κρίνομεν ἀξίους τοὺς ἑξῆς τύπους

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \eta_1 \\ \varepsilon_2 & \eta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon^2_1 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon^2_2 \end{vmatrix} . \frac{\sigma''(x_0)}{1.2}$$

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon^2_1 & \eta_1 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon^2_2 & \eta_2 \\ \varepsilon_3 & \varepsilon^2_3 & \eta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon^2_1 & \varepsilon^3_1 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon^2_2 & \varepsilon^3_2 \\ \varepsilon_3 & \varepsilon^2_3 & \varepsilon^3_3 \end{vmatrix} \frac{\sigma'''(x_0)}{1.2.3}$$

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἀποδεῖξαι, ὅτι εἶνε

$$d^\nu(\omega.\varphi) = \omega d^\nu\varphi + \nu d\omega . d^{\nu-1}\varphi + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2} d^2\omega d^{\nu-2}\varphi + . . + \varphi d^\nu\omega$$

ἢ συμβολικῶς $d^\nu(\omega\varphi) = (d\omega + d\varphi)^{(\nu)}$. ἔνθα $d\omega^0$ σημαίνει ω καὶ $d\omega^\nu$ ἀντικαθίσταται διὰ $d^\nu\omega$.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$d^\nu(\omega\varphi z \ldots \tau) = (d\omega + d\varphi + dz + \ldots + d\tau)^{(\nu)}$$

2) Εὑρεῖν τὸ $\nu^{\text{ὸν}}$ διαφορικὸν τοῦ πηλίκου $\frac{\varphi}{\omega}$.

Παριστῶντες τὸ πηλίκον τοῦτο διὰ τοῦ y ἔχομεν

$$y\omega - \varphi = 0$$

$$yd\omega + \omega dy - d\varphi = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ἐκ τούτων δὲ τῶν ἰσοτήτων, ἐὰν λάβωμεν τὰς τιμὰς τῶν y, dy, d^2y ..$d^\nu y$ εὑρίσκομεν

$$d^\nu\left(\frac{\varphi}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega^{\nu+1}} . \begin{vmatrix} \varphi & \omega & 0 & 0 & . & 0 \\ d\varphi & d\omega & \omega & 0 & . & 0 \\ d^2\varphi & d^2\omega & 2d\omega & \omega & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ d^\nu\varphi, & d^\nu\omega, & \nu d^{\nu-1}\omega, & \frac{\nu(\nu-1)}{1.2} d^{\nu-2}\omega & \ldots & \nu d\omega \end{vmatrix} (-1)^\nu$$

3) Ἀποδεῖξαι ὅτι εἶνε

$$\frac{d^\nu(e^\omega)}{1.2.3..\nu} = e^\omega \sum \frac{\left(\frac{d\omega}{1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{d^2\omega}{1.2}\right)^{\alpha_2} \ldots \left(\frac{d^\nu\omega}{1.2..\nu}\right)^{\alpha_\nu}}{1.2..\alpha_1 \; 1.2..\alpha_2 \ldots 1.2..\alpha_\nu}$$

ἔνθα ἡ ἄθροισις ἐκτείνεται ἐπὶ τὰς τιμὰς τῶν α_1 α_2..α_ν, δι᾽ ἃς εἶνε

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + \nu\alpha_\nu = \nu.$$

4) Δεῖξαι ὅτι, ἐὰν ε_1 ε_2 εἶνε δύο τυχοῦσαι αὐξήσεις τῆς x καὶ η_1 η_2 αἱ ἀντιστοιχοῦσαι αὐξήσεις τῆς $\sigma(x)$, θὰ εἶνε $\sigma'(x) = \text{ορ}\, \frac{\eta_1 - \eta_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}$.

5) Εὑρεῖν τὸ ὅριον τοῦ λόγου τῶν δύο ὁριζουσῶν

$$\begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_1^2 \\ \eta_2 & \eta_2^2 \end{vmatrix} \quad \text{καὶ} \quad \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_1^2 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 \end{vmatrix}.$$

6) Ἐὰν $\varphi(x)$ καὶ $\sigma(x)$ εἶνε τυχοῦσαι συναρτήσεις τοῦ x καὶ αἱ πρὸς τὰς αὐξήσεις ε_1, ε_2 (τοῦ x) ἀντιστοιχοῦσαι αὐξήσεις αὐτῶν εἶνε η_1, η_2 καὶ ϑ_1, ϑ_2, εὑρεῖν τὸ ὅριον τοῦ λόγου τῶν ὁριζουσῶν

$$\begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \vartheta_1 & \vartheta_2 \end{vmatrix} \quad \text{καὶ} \quad \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_1^2 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 \end{vmatrix}$$

Κατὰ τὰ προηγουμένως ἐκτεθέντα (ἐδ. 154) οἱ ἐκ τῶν δύο ἐξισώσεων

$$\eta_1 = A_1\varepsilon_1 + A_2\varepsilon_1^2$$

$$\eta_2 = A_1\varepsilon_2 + A_2\varepsilon_2^2$$

ὁριζόμενοι ἀριθμοὶ A_1, A_2 τείνουσι πρὸς τὰς παραγώγους $\frac{\sigma'(x)}{1}$, $\frac{\sigma''(x)}{1\ 2}$ τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$· οἱ δὲ ἐκ τῶν ἑπομένων ὁριζόμενοι ἀριθμοὶ B_1, B_2

$$\vartheta_1 = B_1\varepsilon_1 + B_2\varepsilon_1^2$$

$$\vartheta_2 = B_1\varepsilon_2 + B_2\varepsilon_2^2$$

τείνουσι πρὸς τὰς παραγώγους $\frac{\varphi'(x)}{1}$ καὶ $\frac{\varphi''(x)}{1.2}$.

Ἀλλὰ κατὰ τὰ γνωστὰ ἰδιώματα τῶν ὁριζουσῶν εἶνε

$$\begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \vartheta_1 & \vartheta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_1^2 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 \end{vmatrix}$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται

$$\text{ὅρ} \frac{\begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \vartheta_1 & \vartheta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_1^2 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 \end{vmatrix}} = \text{ὅρ} \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma'(x) & \dfrac{\sigma''(x)}{1.2} \\ \varphi'(x) & \dfrac{\varphi''(x)}{1.2} \end{vmatrix}$$

Ἡ ἐπέκτασις τῆς ἰδιότητος ταύτης ἐπὶ ὁσωνδήποτε συναρτήσεων εἶνε προφανής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΩΝ

Παράγωγοι συναρτήσεως ἐξαρτωμένης ἐκ πολλῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν. Τύπος τοῦ Taylor καὶ τοῦ Μακλωρίνου. Ἰδιότητες τῶν μερικῶν παραγώγων. Πλῆθος αὐτῶν. Διαφορικὰ διαφόρων τάξεων.

155. Πᾶσα συνάρτησις πολλῶν μεταβλητῶν ἔχει τόσας μερικὰς παραγώγους (ἐδ. 76) ὅσαι εἶνε αἱ μεταβληταί, ἀφ' ὧν ἐξαρτᾶται. Αἱ παράγωγοι αὗται λέγονται *πρώτης τάξεως παράγωγοι*.

Αἱ παράγωγοι τῶν παραγώγων πρώτης τάξεως λέγονται *δευτέρας τάξεως παράγωγοι* τῆς συναρτήσεως. Αἱ παράγωγοι τούτων πάλιν λέγονται *τρίτης τάξεως*· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Τύπος τοῦ Taylor.

156. Ὁ τύπος τοῦ Taylor ἐκτείνεται καὶ ἐπὶ τὰς συναρτήσεις τὰς ἐκ πολλῶν μεταβλητῶν ἐξαρτωμένας, ὥστε παρέχει τὸ ἀνάπτυγμα τῆς αὐξήσεως τῶν τοιούτων συναρτήσεων κατὰ τὰς δυνάμεις τῶν αὐξήσεων τῶν μεταβλητῶν.

Ἔστω συνάρτησις δύο μεταβλητῶν x καὶ y ἀνεξαρτήτων ἀπ' ἀλλήλων, ὡς ἡ $\varphi(x, y)$· ἂν αὐξηθῇ πρῶτον ἡ x κατὰ ε, ἡ δὲ y μείνῃ ἀμετάβλητος, θὰ εἶνε κατὰ τὸν ἀποδειχθέντα τύπον τοῦ Taylor

$$\varphi(x+\varepsilon,y)-\varphi(x,y)=\frac{\varepsilon}{1}\varphi(x,y)_x+\frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi(x,y)_{x^2}+\frac{\varepsilon^3}{1.2.3}\varphi(x,y)_{x^3}+\\ \ldots+\frac{\varepsilon^\nu}{1.2.3..\nu}\varphi(x,y)_{x^\nu}+\,..$$

ἐπειδὴ δὲ τὸ ἀνάπτυγμα τοῦτο ἰσχύει, οἱανδήποτε τιμὴν καὶ ἂν ἔχῃ ἡ y (ἔν τινι διαστήματι), ἂν θέσωμεν $y+\eta$ ἀντὶ y, προκύπτει

$$\varphi(x+\varepsilon,y+\eta)=\varphi(x,y+\eta)+\frac{\varepsilon}{1}\varphi(x,y+\eta)_x+\frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi(x,y+\eta)_{x^2}+\,..\\ +\frac{\varepsilon^\nu}{1.2.3..\nu}\varphi(x,y+\eta)_{x^\nu}\,..$$

καὶ ἂν ἀναπτυχθῶσι πᾶσαι αἱ συναρτήσεις τοῦ δευτέρου μέλους κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ η διὰ τοῦ αὐτοῦ τύπου, προκύπτει ὁ τὸ ἀνάπτυγμα τῆς αὐξήσεως παρέχων τύπος

$$\varphi(x+\varepsilon, y+\eta)-\varphi(x,y)=$$

$$\frac{\eta}{1}\varphi(x,y)_y+\frac{\eta^2}{1.2}\varphi(x,y)_{y^2}+\ldots+\frac{\eta^\mu}{1.2.3..\mu}\varphi(x,y)_{y^\mu}+\ldots$$

$$+\frac{\varepsilon}{1}\left\{\varphi(x,y)_x+\frac{\eta}{1}\varphi(x,y)_{xy}+\frac{\eta^2}{1.2}\varphi(x,y)_{xy^2}+.+\frac{\eta^\mu}{1.2.3..\mu}\varphi(x,y)_{xy^\mu}+\right\}+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{1.2}\left\{\varphi(x,y)_{x^2}+\frac{\eta}{1}\varphi(x,y)_{x^2y}+\frac{\eta^2}{1.2}\varphi(x,y)_{x^2y^2}+.+\frac{\eta^\mu}{1.2.3..\mu}\varphi(x,y)_{x^2y^\mu}+.\right\}+$$

. . . .

$$+\frac{\varepsilon^\nu}{1.2.3\ldots\nu}\left\{\varphi(x,y)_{x^\nu}+\frac{\eta}{1}\varphi(x,y)_{x^\nu y}+\frac{\eta^2}{1.2}\varphi(x,y)_{x^\nu y^2}+\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{\eta^\mu}{1.2.3\ldots\mu}\varphi(x,y)_{x^\nu y^\mu}+..\right\}+\ldots$$

. . . .

Ἐν τῷ τύπῳ τούτῳ ἡ παράστασις $\varphi(x,y)_{x^\nu y^\mu}$ σημαίνει τὴν παράγωγον, ἣν εὑρίσκομεν λαμβάνοντες τῆς συναρτήσεως $\varphi(x,y)$ πρῶτον τὴν παράγωγον τῆς ν τάξεως πρὸς τὴν x, τῆς δὲ παραγώγου ταύτης πάλιν τὴν παράγωγον τῆς μ τάξεως πρὸς τὴν y.

Ἐὰν διαταχθῶσι νῦν οἱ ὅροι κατὰ διαστάσεις (πρὸς τὰς αὐξήσεις ε καὶ η), ὁ τύπος οὗτος γράφεται ὡς ἕπεται

$$(1)\qquad \varphi(x+\varepsilon,\ y+\eta)-\varphi(x,y)=$$

$$\frac{\varepsilon}{1}\varphi_x+\frac{\eta}{1}\varphi_y+\frac{1}{1.2}\left\{\varepsilon^2\varphi_{x^2}+2\varepsilon\eta\varphi_{xy}+\eta^2\varphi_{y^2}\right\}+\ldots.$$

$$+\frac{1}{1.2.3..\nu}\left\{\varepsilon^\nu\varphi_{x^\nu}+\nu\varepsilon^{\nu-1}\eta.\varphi_{x^{\nu-1}y}+..+\eta^\nu\varphi_{y^\nu}\right\}+..$$

Οὗτος δὲ εἶνε ὁ τύπος τοῦ Taylor διὰ τὰς συναρτήσεις δύο μεταβλητῶν.

Οἱ ὅροι τῆς $\nu^{\text{ης}}$ διαστάσεως εἶναι τόσοι, ὅσοι εἶνε καὶ οἱ ὅροι τῆς δυνάμεως $(\varepsilon+\eta)^\nu$, καὶ συντελεστὰς ἔχουσι τοὺς αὐτούς· δύνανται δὲ νὰ γραφῶσι συμβολικῶς ὡς ἕπεται $(\varepsilon\varphi_x+\eta\varphi_y)^{(\nu)}$
ἂν μετὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς ν δυνάμεως ἀντὶ

$$\varphi_x^\alpha\ \varphi_y^\beta \quad \text{τεθῇ} \quad \varphi_{x^\alpha y^\beta}$$

Ἡ ἐπέκτασις τοῦ τύπου τοῦ Taylor ἐπὶ συναρτήσεις τριῶν μεταβλητῶν, ἢ καὶ περισσοτέρων, εἶνε προφανής.

ΣΗΜ. Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν αὔξησιν

$$\varphi(x+\varepsilon,\ y+\eta)-\varphi(x,\ y)$$

ὡς μερικὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως τοῦ ω, $\varphi(x+\varepsilon\omega,\ y+\eta\omega)-\varphi(x,y)$ ἀντιστοιχοῦσαν πρὸς τὴν τιμὴν $\omega=1$, καὶ νὰ ἀναπτύξωμεν ταύτην κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ ω διὰ τοῦ τύπου τοῦ Μακλωρίνου, ἔπειτα δὲ νὰ θέσωμεν ἐν τῷ ἀναπτύγματι $\omega=1$. Διὰ τῆς μεθόδου ταύτης (περὶ ἧς ἰδὲ Serret (Cours de Calcul Différentiel.) εὑρίσκομεν καὶ μορφήν τινα τοῦ ὑπολοίπου (ὅταν τὸ ἀνάπτυγμα περιορισθῇ εἰς τοὺς ὅρους τῶν ὁποίων ἡ διάστασις δὲν ὑπερβαίνει τὸν ν), ἥτις ὅμως εἶνε ἀρκούντως πολύπλοκος.

Τύπος τοῦ Μακλωρίνου.

157. Ἐὰν θέσωμεν $x=0$, $y=0$ ἐν τῷ τύπῳ (1) καὶ μετὰ ταῦτα γράψωμεν ἀντὶ ε καὶ η, τὰ x καὶ y, εὑρίσκομεν τὸν ἑξῆς τύπον, δι' οὗ ἀναπτύσσεται ἡ συνάρτησις $\varphi(x,y)$ κατὰ τὰς δυνάμεις τῶν x καὶ y

$$\varphi(x,y)=\varphi(0,0)+x\varphi(0,0)_x+y\varphi(0,0)_y+$$
$$+\frac{1}{1.2}\left\{x^2\varphi(0,0)_{x^2}+2xy\varphi(0,0)_{xy}+y^2\varphi(0,0)_{y^2}\right\}+\ldots$$
$$+\frac{1}{1.2.3..\nu}\left\{x^\nu\varphi(0,0)_{x^\nu}+\nu x^{\nu-1}y.\varphi(0,0)_{x^{\nu-1}y}+..+y^\nu\varphi(0,0)_{y^\nu}\right\}+\ldots$$

Οὗτος δὲ εἶνε ὁ τύπος τοῦ Μακλωρίνου διὰ τὰς συναρτήσεις δύο μεταβλητῶν.

Ἰδιότης τῶν μερικῶν παραγώγων πάσης συναρτήσεως.

158. Ἡ τάξις, καθ' ἣν ἐκτελοῦνται αἱ διαφορίσεις ἐν τῇ εὑρέσει τῶν μερικῶν παραγώγων, εἶνε ἀδιάφορος πρὸς τὸ ἐξαγόμενον.

Ἐν τῷ εὑρεθέντι ἀναπτύγματι τῆς αὐξήσεως

$$\varphi(x+\varepsilon,\ y+\eta)-\varphi(x,y)$$

αἱ παράγωγοι πᾶσαι λαμβάνονται πρῶτον πρὸς τὴν μεταβλητὴν x καὶ ἔπειτα πρὸς τὴν y· τοῦτο συνέβη, διότι ηὐξήθη πρῶτον ἡ x καὶ ἔπειτα ἡ y· πρόδηλον ὅμως εἶνε, ὅτι καὶ τοὐναντίον δύναται νὰ γίνῃ· τότε θὰ προκύψῃ ἀνάπτυγμα τῆς αὐτῆς αὐξήσεως διαφέρον τοῦ ἤδη εὑρεθέντος μόνον κατὰ τοῦτο, ὅτι εἰς τὸν τόπον τῆς παραγώγου $\varphi_{x^\nu y^\mu}$ θὰ ἔχῃ τὴν $\varphi_{y^\mu x^\nu}$· ἐπειδὴ δὲ τὰ δύο ταῦτα ἀναπτύγματα, ἴσα πρὸς τὴν αὐτὴν ὄντα αὔξησιν, πρέπει νὰ εἶνε καὶ πρὸς ἄλληλα ἴσα, συνάγεται (κατὰ τὸν ἐν τῷ ἐδ. (143) ἐκτεθέντα τρόπον), ὅτι οὐδόλως διαφέρουσιν ἀπ' ἀλλήλων καὶ ἑπομένως ἀνάγκη νὰ εἶνε

$$\varphi_{x^\nu y^\mu} = \varphi_{y^\mu x^\nu}$$

ὅθεν ἕπεται $\varphi_{xy} = \varphi_{yx}$ · ἐὰν ὑποτεθῇ $\mu = \nu = 1$.

Ἡ ἰσότης αὕτη ἐκφράζει μίαν τῶν σπουδαιοτάτων ἰδιοτήτων τῶν συναρτήσεων πολλῶν μεταβλητῶν· τουτέστιν ὅτι

Τὸ ἐξαγόμενον, εἰς ὃ ἄγουσι δύο ἀλλεπάλληλοι διαφορίσεις οἱασδήποτε συναρτήσεως πρὸς δύο μεταβλητάς, μένει τὸ αὐτό, ὁποτέρα ἐξ αὐτῶν καὶ ἂν ἐκτελεσθῇ πρώτη.

Ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης ἕπεται καὶ γενικῶς, ὅτι

Ἐν τῇ εὑρέσει τῶν μερικῶν παραγώγων συναρτήσεως πολλῶν μεταβλητῶν ἡ τάξις, καθ' ἣν ἐκτελοῦνται ἀλλεπαλλήλως αἱ διαφορίσεις, οὐδεμίαν ἐπίδρασιν ἔχει ἐπὶ τὸ ἐξαγόμενον· ἀρκεῖ τὸ πλῆθος τῶν διαφορίσεων πρὸς ἑκάστην τῶν μεταβλητῶν νὰ μένῃ ἐν συνόλῳ τὸ αὐτό.

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἀποδεικνύεται ἀπαραλλάκτως, ὡς ἀποδεικνύεται ἐν τῇ ἀριθμητικῇ ἡ ἰδιότης τοῦ γινομένου, (καθ' ἣν τοῦτο δὲν μεταβάλλεται, καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν ληφθῶσιν οἱ παράγοντες ἐν τῇ πράξει), γνωστοῦ ὄντος, ὅτι δὲν μεταβάλλεται τὸ γινόμενον, ἐὰν ἀλλαχθῇ ἡ τάξις δύο ἐφεξῆς παραγόντων.

Τὴν θεμελιώδη ταύτην ἰδιότητα τῶν συναρτήσεων δύο μεταβλητῶν δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν καὶ ἄλλως, ὡς ἑξῆς·

Ἔστω συνάρτησις $\varphi(x, y)$ δύο μεταβλητῶν x, y ἀνεξαρτήτων ἀπ' ἀλλήλων καὶ ἂς ὑποτεθῇ συνεχὴς καὶ αὐτὴ καὶ αἱ δύο μερικαὶ αὐτῆς παράγωγοι. Ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν διαφορὰν $\varphi(x_1, y) - \varphi(x, y) = \delta$ ὡς συνάρτησιν τῆς y καὶ αὐξήσωμεν τὴν y κατὰ Δy, ἡ ἀντίστοιχος αὔξησις τῆς διαφορᾶς δ, ἤτοι ἡ παράστασις

$$\varphi(x_1 y_1) - \varphi(x y_1) - \varphi(x_1 y) + \varphi(x, y) \qquad \begin{aligned} x_1 &= x + \Delta x \\ y_1 &= y + \Delta y \cdot \end{aligned}$$

θὰ εἶνε (ἐδ. 90) $\left[\varphi'_y(x_1, y + \lambda\Delta y) - \varphi'_y(x, y + \lambda\Delta y)\right]\Delta y, \quad 0 < \lambda < 1$

ἀλλὰ καὶ ἡ ἐν τῇ παρενθέσει παράστασις εἶνε ἡ αὔξησις τῆς συναρτήσεως $\varphi'_y(x, y + \lambda\Delta y)$, ὅταν ἡ x αὐξήσῃ κατὰ Δx· εἶνε ἄρα ἴση τῷ γινομένῳ $\Delta x\left[\varphi''_{yx}(x + \varrho\Delta x, y + \lambda\Delta y)\right]$. Ἐντεῦθεν ἕπεται

$$\varphi(x_1 y_1) - \varphi(x_1 y) - \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y) = \Delta x . \Delta y . \varphi''_{yx}(x + \varrho\Delta x, y + \lambda\Delta y).$$

Ὁμοίως ἀναχωροῦντες ἐκ τῆς διαφορᾶς $\varphi(x, y_1) - \varphi(x, y)$, εὑρίσκομεν

$$\varphi(x_1, y_1) - \varphi(x, y_1) - \varphi(x_1, y) + \varphi(x, y) = \Delta x . \Delta y . \varphi''_{xy}(x + \vartheta\Delta x, y + \mu\Delta y)$$

ὅθεν ἕπεται

$$\varphi''_{xy}(x+\vartheta\Delta x, y+\mu\Delta y)=\varphi''_{yx}(x+\varrho\Delta x, y+\lambda\Delta y)$$

καὶ ἐπειδὴ αἱ αὐξήσεις Δx, Δy δύνανται νὰ ληφθῶσιν ὅσον θέλωμεν μικραί, συνάγεται ἡ ἰσότης

$$\varphi''_{xy}=\varphi''_{yx}.$$

Πλῆθος τῶν παραγώγων τῆς $\nu^{\eta\varsigma}$ *τάξεως.*

159. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα, ὅταν συνάρτησίς τις φ ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν δύο μεταβλητῶν x καὶ y, ἔχει τόσας παραγώγους δευτέρας τάξεως (διαφόρους ἀπ' ἀλλήλων), ὅσοι εἶνε οἱ διάφοροι συνδυασμοὶ τῶν δύο γραμμάτων x, y ἀνὰ δύο, ἤτοι

$$\varphi_{x^2} \qquad \varphi_{xy} \qquad \varphi_{y^2}$$

ὅσοι εἶνε καὶ οἱ ὅροι τῆς δυνάμεως $(x+y)^2$.
καὶ γενικῶς ἔχει τόσας παραγώγους τῆς $\nu^{\eta\varsigma}$ τάξεως, ὅσοι εἶνε οἱ διάφοροι ἀπ' ἀλλήλων συνδυασμοὶ (μετ' ἐπαναλήψεως) τῶν δύο γραμμάτων x, y ἀνὰ ν λαμβανομένων, ἤτοι

$$\varphi_{x^\nu}, \quad \varphi_{x^{\nu-1}y}, \quad \varphi_{x^{\nu-2}y^2}, \ldots \varphi_{y^\nu}$$

δηλαδὴ ὅσοι εἶνε οἱ ὅροι τῆς δυνάμεως $(x+y)^\nu$.

Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ συνάρτησις

$$x^\alpha y^\beta=\varphi$$

αὕτη ἔχει δύο παραγώγους πρώτης τάξεως

$$\varphi_x=\alpha x^{\alpha-1}y^\beta \qquad \varphi_y=\beta x^\alpha y^{\beta-1},$$

δευτέρας δὲ τάξεως ἔχει τρεῖς

$$\varphi_{x^2}=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^\beta, \ \varphi_{xy}=\alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1}, \ \varphi_{y^2}=\beta(\beta-1)x^\alpha y^{\beta-2}$$

τρίτης δὲ τάξεως ἔχει τέσσαρας

$$\varphi_{x^3}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}y^\beta,$$
$$\varphi_{x^2y}=\alpha(\alpha-1)\beta x^{\alpha-2}y^{\beta-1}$$
$$\varphi_{xy^2}=\alpha\beta(\beta-1)x^{\alpha-1}y^{\beta-2}$$
$$\varphi_{y^3}=\beta(\beta-1)(\beta-2)x^\alpha y^{\beta-3} \quad \text{καὶ καθεξῆς.}$$

Καὶ ἐν γένει δεικνύεται δι' ὁμοίου τρόπου, ὅτι, ἐὰν ἡ συνάρτησις φ ἐξαρτᾶται ἐκ μ μεταβλητῶν x, y, z . . . αἱ τῆς τάξεως ν μερικαὶ παράγωγοι αὐτῆς (αἱ διάφοροι ἀπ' ἀλλήλων) εἶνε τόσαι ὅσοι εἶνε οἱ διάφοροι ὅροι τῆς δυνάμεως $(x+y+z+\ldots)^\nu$, ἤτοι

$$\frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+\nu-1)}{1.2\ldots\nu}$$

ὅσοι εἶνε καὶ οἱ ἐπαναληπτικοὶ συνδυασμοὶ τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ ν λαμβανομένων.

Διαφορικὰ διαφόρων τάξεων.

α') Ὁλικὰ διαφορικά

160. Ἔστω $z=\varphi(x, y)$ συνάρτησις δύο μεταβλητῶν ἀνεξαρτήτων ἀπ' ἀλλήλων. Ἐὰν αἱ μεταβληταὶ αὗται λάβωσι $\nu+1$ συστήματα τιμῶν ἰσοδιαφόρων, ὡς τὰ

$$(x, y), \quad (x_1, y_1), \quad (x_2, y_2) \ldots\ldots (x_\nu, y_\nu)$$

(ἔνθα ἡ μὲν x αὐξάνεται κατὰ Δx ἀφ' ἑκάστης τιμῆς εἰς ἄλλην, ἡ δὲ y κατὰ Δy) καὶ ἐκ τῶν πρὸς αὐτὰς ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν τῆς z

$$z, \quad z_1, \quad z_2 \ldots z_\nu$$

εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ τῆς τάξεως ν, ἡ $\Delta^\nu z$, καὶ ἀναπτυχθῇ ἡ διαφορὰ αὕτη κατὰ τὰς δυνάμεις τῶν διαφορῶν Δx καὶ Δy, τὸ σύνολον τῶν ὅρων τῆς κατωτάτης διαστάσεως πρὸς τὰ Δx, Δy λέγεται *νὸν διαφορικὸν* τῆς συναρτήσεως z καὶ παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου $d^\nu z$.

Ἡ εὕρεσις τοῦ διαφορικοῦ τούτου γίνεται, καθ' ὃν τρόπον εὑρίσκεται καὶ τὸ νὸν διαφορικὸν συναρτήσεως ἐξαρτωμένης ἐκ μιᾶς μόνης μεταβλητῆς· (ἀντὶ τῆς συναρτήσεως e^x λαμβάνεται ἐνταῦθα ὡς βοηθητικὴ συνάρτησις ἡ e^{x+y}). Οὕτως εὑρίσκομεν, ὅτι εἶνε

$$d^\nu z=\varphi_{x^\nu}\,.\,dx^\nu+\nu\varphi_{x_{\nu-1}y}\cdot dx^{\nu-1}dy+\ldots\varphi_{y^\nu}dy^\nu$$

ἢ συμβολικῶς $$d^\nu z=(\varphi_x\,dx+\varphi_y dy)^{(\nu)}.$$

ἤτοι τὸ *νὸν διαφορικὸν ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ συνόλου τῶν ὅρων τῆς νῆς διαστάσεως ἐν τῷ ἀναπτύγματι τῆς διαφορᾶς*

$$\Delta z \quad \text{ἢ} \quad \varphi(x+\Delta x, y+\Delta y)-\varphi(x, y),$$

ὅταν οἱ ῥηθέντες ὅροι πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 1.2.3.....ν.

Κατὰ ταῦτα ὁ τύπος τοῦ Taylor ἐπὶ οἱασδήποτε συναρτήσεως ἐφαρμοζόμενος γράφεται ὡς ἑξῆς·

$$\Delta z=dz+\frac{d^2z}{1.2}+\frac{d^3z}{1.2.3}+\ldots+\frac{d^\nu z}{1.2.3\ldots\nu}+\ldots$$

Χάριν συντομίας ὑπεθέσαμεν δύο μόνον ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς· φανερὸν ὅμως εἶνε, ὅτι τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο ἀληθεύει καὶ ἐπὶ περισσοτέρων.

Ἰδιότητες τοῦ διαφορικοῦ.

161. *Τὸ νὸν διαφορικὸν $d^\nu z$ εὑρίσκεται ἐκ τοῦ προηγουμένου αὐτοῦ*

$d^{\nu-1}z$ διὰ τῆς διαφορίσεως, ἐὰν οἱ παράγοντες dx, dy (ἤτοι αἱ διαφοραὶ Δx, Δy) κατὰ τὴν διαφόρισιν θεωρῶνται σταθεροί· ἤτοι εἶνε

$$d(d^{\nu-1}z) = d^{\nu}z$$

καὶ ὄντως εἶνε
$$dz = \varphi_x\, dx + \varphi_y\, dy$$
ὅθεν
$$d(dz) = d(\varphi_x)\cdot dx + d(\varphi_y)dy =$$
$$= dx\,\{\varphi_{x^2}dx + \varphi_{xy}dy\} + dy\,\{\varphi_{yx}dx + \varphi_{y^2}dy\} =$$
$$= \varphi_{x^2}dx^2 + 2\varphi_{xy}dx\,dy + \varphi_{y^2}dy^2$$

Ἵνα δείξωμεν τοῦτο γενικῶς, παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ν$^{\text{ὸν}}$ διαφορικὸν γράφεται συμβολικῶς ὡς ἑξῆς·

$$d^{\nu} z = (\varphi_x\, dx + \varphi_y\, dy)$$

ἂν μετὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς δυνάμεως ἀντὶ $\varphi_x^{\alpha}\cdot\varphi_y^{\beta}$ γραφῇ ἡ παράγωγος $\varphi_{x^{\alpha}y^{\beta}}$.

Ὁμοίως εἶνε $\quad d_z^{\nu-1} = (\varphi_x\, dx + \varphi_y\, dy)^{(\nu-1)}$

Ἔστω τυχὼν ὅρος τοῦ $d_z^{\nu-1}$ ὁ $A\varphi_{x^u y^\tau}.dx^u.dx^\tau$, ἔνθα Α δηλοῖ τὸν ἁρμόζοντα ἀριθμητικὸν συντελεστήν, τὸ δὲ ἄθροισμα $u+\tau$ ἰσοῦται τῷ $\nu-1$.

Τὸ διαφορικὸν τοῦ ὅρου τούτου εἶνε

$$A dx^u.dy^\tau\,\{\varphi_{x^{u+1}y^\tau}dx + \varphi_{x^u y^\tau}\, dy\}$$

καὶ εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ αὐτὸς ὅρος ἐπὶ

$$\varphi_x\, dx + \varphi_y\, dx$$

γίνῃ δὲ εἰς τὸ γινόμενον ἡ εἰρημένη τροπή. Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο ἰσχύει δι' ἕκαστον ὅρον τοῦ $d_z^{\nu-1}$, ἕπεται ὅτι εἶνε

$$d\,(d_z^{\nu-1}) = d_z^{\nu-1}\,(\varphi_x\, dx + \varphi_y\, dy) = (\varphi_x\, dx + \varphi_y\, dy)^{(\nu)} = d^{\nu}z.$$

*162. Τὴν αὐτὴν ἰδιότητα τῶν διαφορικῶν δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἐν πρώτοις εἶνε $\quad \Delta^{\nu} z = \Delta^{\nu-1} z_1 - \Delta^{\nu-1} z = \Delta\,(\Delta^{\nu-1} z)$

ἀλλὰ καὶ $\quad \Delta^{\nu-1} z = d_z^{\nu-1} + \delta$

ἔνθα δ δηλοῖ τὸ σύνολον τῶν ὅρων τῆς διαφορᾶς $\Delta^{\nu-1}z$, ὧν ἡ διάστασις πρὸς τὰ Δx, Δy εἶνε βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ $\nu-1$. Ἐντεῦθεν

ἕπεται $\quad \Delta(\Delta^{\nu-1}z) = \Delta(d_z^{\nu-1} + \delta) = \Delta(d^{\nu-1}z) + \Delta(\delta)$

ἤτοι $\quad \Delta^{\nu}z = \Delta(d_z^{\nu-1}) + \Delta(\delta)$.

Ἀλλ' ἡ διαφορὰ $\Delta(\delta)$ σύγκειται ἐξ ὅρων, τῶν ὁποίων ἡ διάστασις ὑπερβαίνει τὸν ν, διότι ἔστω $\sigma(x,y)\Delta x^{\tau}\Delta y^{\varkappa}$ ὅρος τις τοῦ δ (ἔνθα $\tau+u\geq\nu$)· ὁ ὅρος οὗτος θὰ δώσῃ εἰς τὴν διαφορὰν Δ(δ) τὸν ἑπόμενον

$$\Delta x^{\tau}\Delta y^{u}\,\{\sigma(x+\Delta x, y+\Delta y)-\sigma(x,y)\}\text{ ἤτοι }\Delta x^{\tau}.\Delta y^{\varkappa}.\Delta\sigma(x,y)$$

τοῦ ὁποίου τὸ ἀνάπτυγμα δίδει ὅρους ἔχοντας διάστασιν μεγαλητέραν τοῦ ν.

Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι οἱ ὅροι τῆς διαφορᾶς $\Delta^{\nu}z$ οἱ τὴν ἐλαχίστην ἔχοντες διάστασιν (οἵτινες ἀποτελοῦσι τὸ $d^{\nu}z$) περιέχονται πάντες ἐν τῇ διαφορᾷ $\Delta(d^{\nu-1}z)$ ἀλλ' ἐν τῇ διαφορᾷ οἱασδήποτε συναρτήσεως οἱ τὴν ἐλαχίστην διάστασιν ἔχοντες ὅροι ἀποτελοῦσι τὸ διαφορικὸν τῆς αὐτῆς συναρτήσεως· ὥστε εἶνε $d^{\nu}z=d(d^{\nu-1}z)$.

163. Αἱ ἑπόμεναι προτάσεις ἀποδεικνύονται, ὡς αἱ ὅμοιαι αὐταῖς ἀπεδείχθησαν περὶ τῶν συναρτήσεων μιᾶς μεταβλητῆς (ἐδ. 149).

1) Τὸ ν$^{\text{ὸν}}$ διαφορικὸν διαφέρει ἀπὸ τῆς ν$^{\text{ῆς}}$ διαφορᾶς κατὰ ποσότητα, ἥτις γίνεται μέρος αὐτῆς τόσῳ μικρότερον, ὅσῳ μικρότεραι γίνονται αἱ αὐξήσεις Δx, Δy τῶν μεταβλητῶν x, y.

2) Ὁ λόγος τῆς ν$^{\text{ῆς}}$ διαφορᾶς $\Delta^{\nu}z$ πρὸς τὸ ν$^{\text{ὸν}}$ διαφορικὸν $d^{\nu}z$ τείνει πρὸς τὴν μονάδα, ὅταν αἱ αὐξήσεις Δx, Δy (μηδεμίαν ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας ἐξάρτησιν) τείνωσι πρὸς τὸ μηδέν.

β΄) Μερικὰ διαφορικά.

164. Ὑποθέσωμεν, ὅτι ἀντὶ νὰ συναυξάνωνται αἱ μεταβληταὶ x καὶ y, ἀφ' ὧν ἐξαρτᾶται ἡ συνάρτησις $\varphi(x,y)$, αὐξάνεται πρῶτον ἡ x λαμβάνουσα τιμὰς ἰσοδιαφόρους, τὰς x, x_1, x_2, . . . x_{μ} καὶ ἐκ τῶν ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως $\varphi(x,y)=z$ εὑρίσκεται ἡ μ$^{\text{η}}$ διαφορὰ $\Delta^{\mu}z$, εἶτα, τῆς x διαφυλαττούσης τὴν αὐτὴν τιμὴν x_{μ}, αὐξάνεται καὶ ἡ y λαμβάνουσα τιμὰς ἰσοδιαφόρους, τὰς y, y_1 y_2, ... y_{ν} καὶ ἐκ τῶν ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν τῆς διαφορᾶς $\Delta^{\mu}z$ σχηματίζεται ἡ ν διαφορά, ἤτοι ἡ $\Delta^{\nu}(\Delta^{\mu}z)$· οἱ ὅροι τῆς ἐλαχίστης διαστάσεως ἐν τῇ διαφορᾷ ταύτῃ ἀποτελοῦσι τὸ μερικὸν διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως z τὸ ἔχον πρὸς μὲν τὴν x τὴν τάξιν μ, πρὸς δὲ τὴν y τὴν τάξιν ν· ὅπερ γράφεται $\partial^{\mu+\nu}z$.

Καὶ τοῦ διαφορικοῦ τούτου ἡ εὕρεσις γίνεται ὡς καὶ τῶν ἄλλων, εἶνε δὲ

$$\partial^{\mu+\nu}z=\varphi_{x^{\mu}y^{\nu}}\,dx^{\mu}dy^{\nu}\,. \qquad (1)$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι τὸ μερικὸν διαφορικὸν $\partial^{\mu+\nu}z$ εἶνε τὸ ἐξαγόμενον, ὅπερ λαμβάνομεν, ἐὰν διαφορίσωμεν τὴν συνάρτησιν μ φορὰς πρὸς x καὶ ν φορὰς πρὸς y· ἤτοι

$$\partial^{\mu+\nu}z=\partial^{\nu}(\partial^{\mu}z)=\partial^{\mu}(\partial^{\nu}z)$$

165. Ἐκ τῆς ἰσότητος (1) συνάγεται

$$\varphi_{x^\mu y^\nu} = \frac{\partial^{\mu+\nu} z}{\partial x^\mu \partial y^\nu} \qquad \partial x = dx,\ \partial y = dy$$

ἤτοι ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως φ, ἡ ἔχουσα πρὸς μὲν τὴν x τὴν τάξιν μ, πρὸς δὲ τὴν y τὴν τάξιν ν, ἰσοῦται πρὸς τὸ ὁμοταγὲς μερικὸν διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως διαιρεθὲν διὰ τῆς μ δυνάμεως τοῦ διαφορικοῦ τῆς x καὶ διὰ τῆς ν δυνάμεως τοῦ διαφορικοῦ τῆς y.

Παρατήρησις. Πᾶσαι αἱ τῆς αὐτῆς τάξεως παράγωγοι γράφονται κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμητοῦ· οὕτω τῆς πρώτης τάξεως εἶνε

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}$$

τῆς δευτέρας
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

τῆς τρίτης
$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \text{ κτλ.}$$

δὲν πρέπει ὅμως νὰ ὑπολαμβάνωνται οἱ ἀριθμηταὶ οὗτοι ὡς ἴσοι· διότι ἕκαστος σημαίνει ἄλλο μερικὸν διαφορικόν, οὗ ἡ τάξις πρὸς ἑκατέραν τῶν μεταβλητῶν φαίνεται ἐκ τοῦ παρονομαστοῦ.

166. Τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν τῆς τάξεως ν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν μερικῶν διαφορικῶν τῆς αὐτῆς τάξεως, ἐὰν ἕκαστον πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν συντελεστὴν τοῦ ἀντιστοιχοῦντος ὅρου τῆς δυνάμεως $(dx + dy)^\nu$.
τοῦτο γίνεται κατάδηλον ἐξ αὐτῆς τῆς συνθέσεως τοῦ ὁλικοῦ διαφορικοῦ τῆς ν τάξεως.

Διαφορικὰ συναρτήσεως πρὸς οἱασδήποτε μεταβλητάς.

167. Ἐὰν ἐν τῇ συναρτήσει $\varphi(x, y)$ αἱ μεταβληταὶ x, y δὲν εἶνε ἀνεξάρτητοι, ἀλλ' ἐξαρτῶνται ἀπ' ἄλλων, ἔστω τῶν u, v, ἡ μὲν συνάρτησις $\varphi(x, y)$ εἶνε συνάρτησις σύνθετος τῶν u, v, τὰ δὲ διαφορικὰ αὐτῆς πρὸς τὰς ἀνεξαρτήτους μεταβλητὰς u, v ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ ἐφεξῆς ἀλλάσσουσι μορφήν· εὑρίσκονται δὲ ὡς ἑξῆς.

Ἐν πρώτοις εἶνε πάντοτε (ἐδ. 77)

$$d\varphi = \varphi_x\, dx + \varphi_y\, dy$$

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ δευτέρου διαφορικοῦ $d^2\varphi$, πρέπει νὰ διαφορίσωμεν τὸ πρῶτον, θεωροῦντες τὰ διαφορικὰ dx, καὶ dy ὡς συναρτήσεις τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν u, v· διότι εἶνε

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} . du + \frac{\partial x}{\partial v} . dv$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} . du + \frac{\partial y}{\partial v} . dv$$

συντίθενται δηλονότι τὰ dx, dy, ἐκ συναρτήσεων τῶν u, v πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ τὰ σταθερὰ διαφορικὰ du, dv,

Διὰ ταῦτα εἶνε

$$d^2\varphi = d(\varphi_x) . dx + d(\varphi_y) . dy + \varphi_x d^2x + \varphi_y d^2y$$

ἤτοι $d^2\varphi = \varphi_{x^2} dx^2 + 2\varphi_{xy} dxdy + \varphi_{y^2} dy^2 + \varphi_x d^2x + \varphi_y d^2y$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν καὶ τὸ διαφορικὸν τρίτης τάξεως, διαφορίζοντες τὸ $d^2\varphi$ καὶ θεωροῦντες τὰ dx, dy, d^2x, d^2y ὡς συναρτήσεις τῶν μεταβλητῶν u, v, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Σημ. Ἐκ τῶν διαφορικῶν $d\varphi$, $d^2\varphi$, $d^3\varphi$. . . εὑρίσκονται καὶ τὰ μερικὰ διαφορικὰ τῆς συναρτήσεως φ καὶ αἱ μερικαὶ αὐτῆς παράγωγοι πρὸς τὰς μεταβλητὰς u, v κατὰ τὰ προηγουμένως εἰρημένα (ἐδ. 166).

Διαφορικὰ καὶ παράγωγοι τῶν πεπλεγμένων συναρτήσεων.

168. Ἔστωσαν τρεῖς μεταβληταὶ x, y, z συνδεόμεναι διὰ μιᾶς ἐξισώσεως $\varphi(x, y, z) = 0$

ἥτις ὁρίζει τὴν z ὡς συνάρτησιν τῶν δύο ἄλλων x, y.

Ἵνα εὕρωμεν τὰ διαφορικὰ τῆς συναρτήσεως z, διαφορίζομεν τὴν συνάρτησιν $\varphi(x, y, z)$ τῶν τριῶν μεταβλητῶν x, y, z (πρὸς οἱασδήποτε μεταβλητὰς ἀνεξαρτήτους) καὶ εὑρίσκομεν

$$d\varphi = \varphi_x dx + \varphi_y dx + \varphi_z dz$$

$$d^2\varphi = \varphi_{xx} dx^2 + \varphi_{yy} dy^2 + \varphi_{zz} dz^2 + 2\varphi_{xy} dxdy + 2\varphi_{yz} dydz + 2\varphi_{zx} dzdx + \varphi_x d^2x + \varphi_y d^2y + \varphi_z d^2z$$

. . . .

καὶ ἐπειδὴ αἱ μεταβληταὶ x, y, z μεταβάλλονται οὕτως, ὥστε μένει πάντοτε $\varphi = 0$ καὶ αἱ x, y εἶνε ἀνεξάρτητοι μεταβληταί, συνάγεται

$$\varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_z dz = 0$$

$$\varphi_{xx} dx^2 + \varphi_{yy} dy^2 + \varphi_{zz} dz^2 + 2\varphi_{xy} dxdy + 2\varphi_{yz} dydz + 2\varphi_{zx} dzdx + \varphi_z d^2z = 0$$

. . . .

Ἡ πρώτη τῶν ἐξισώσεων τούτων παρέχει τὸ dz, (ὡς καὶ ἀλλαχοῦ εὕρομεν), ἡ δὲ δευτέρα τὸ d^2z· περιέχει μὲν αὐτὴ καὶ τὸ πρῶτον διαφορικὸν dz, ἀλλ' ἡ τιμὴ αὐτοῦ εἶνε γνωστὴ ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως· ἂν δὲ λάβωμεν τὴν τιμὴν αὐτοῦ καὶ θέσωμεν αὐτὴν εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν, εὑρίσκομεν μετά τινας πράξεις τὴν ἑξῆς τιμὴν τοῦ d^2z.

$$d^2z = \frac{1}{\varphi_z^3}\begin{vmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xz} & \varphi_x \\ \varphi_{zx} & \varphi_{zz} & \varphi_z \\ \varphi_x & \varphi_z & 0 \end{vmatrix} dx^2 + \frac{1}{\varphi_z^3}\begin{vmatrix} \varphi_{xy} & \varphi_{xz} & \varphi_x \\ \varphi_{zy} & \varphi_{zz} & \varphi_z \\ \varphi_y & \varphi_z & 0 \end{vmatrix} 2dxdy +$$

$$+ \frac{1}{\varphi_z^3}\begin{vmatrix} \varphi_{yy} & \varphi_{yz} & \varphi_y \\ \varphi_{zy} & \varphi_{zz} & \varphi_z \\ \varphi_y & \varphi_z & 0 \end{vmatrix} dy^2$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν καὶ τὸ διαφορικὸν τρίτης τάξεως d^3z, καὶ οὕτω καθεξῆς.

169. Ἔχοντες τὰ διαφορικὰ dz, d^2z, d^3z. . . δυνάμεθα ἐξ αὐτῶν νὰ εὕρωμεν τὰ μερικὰ διαφορικὰ καὶ τὰς μερικὰς παραγώγους τῆς πεπλεγμένης συναρτήσεως z κατὰ τὰ προηγουμένως εἰρημένα.

Ἐκ τῶν προηγουμένων ἐξισώσεων εὑρίσκομεν, παραδείγματος χάριν

$$p = -\frac{\varphi_x}{\varphi_z}, \qquad q = -\frac{\varphi_y}{\varphi_z}$$

$$r = \frac{1}{\varphi_z^3}\begin{vmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xz} & \varphi_x \\ \varphi_{zx} & \varphi_{zz} & \varphi_z \\ \varphi_x & \varphi_z & 0 \end{vmatrix}, \quad s = \frac{1}{\varphi_z^3}\begin{vmatrix} \varphi_{xy} & \varphi_{xz} & \varphi_x \\ \varphi_{zy} & \varphi_{zz} & \varphi_z \\ \varphi_y & \varphi_z & 0 \end{vmatrix}$$

$$t = \frac{1}{\varphi_z^3}\begin{vmatrix} \varphi_{yy} & \varphi_{yz} & \varphi_y \\ \varphi_{zy} & \varphi_{zz} & \varphi_z \\ \varphi_y & \varphi_z & 0 \end{vmatrix}$$

ἔνθα r, s, t παριστῶσι πρὸς συντομίαν τὰς μερικὰς παραγώγους

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\ (=r), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\ (=s) \text{ καὶ } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\ (=t).$$

Ἀλλ' εὐκολώτερον εὑρίσκονται αἱ μερικαὶ παράγωγοι ἀμέσως διὰ τῶν μερικῶν διαφορίσεων τῆς ἐξισώσεως $\varphi=0$ πρὸς μίαν ἑκάστην τῶν μεταβλητῶν x, y. Διαφορίζοντες αὐτήν, λόγου χάριν, πρῶτον πρὸς τὴν x καὶ ἔπειτα πρὸς τὴν y, λαμβάνομεν τὰς δύο ἐξισώσεις

$$\varphi_x + \varphi_z\, p = 0 \qquad \varphi_y + \varphi_z\, q = 0$$

ἐξ ὧν εὑρίσκομεν τὰς δύο μερικὰς παραγώγους p, q τῆς πρώτης τάξεως.

Διαφορίζοντες δὲ πάλιν ἑκατέραν τῶν ἐξισώσεων τούτων πρὸς x καὶ πρὸς y λαμβάνομεν

$$\varphi_{xx} + 2\varphi_{xz} p + \varphi_{zz} p^2 + \varphi_z r = 0$$

$$\varphi_{xy} + \varphi_{xz} q + \varphi_{yz} p + \varphi_{zz} pq + \varphi_z s = 0$$

$$\varphi_{yy} + 2\varphi_{yz} q + \varphi_{zz} q^2 + \varphi_z . t = 0$$

ἐξ ὧν εὑρίσκομεν τὰς τρεῖς μερικὰς παραγώγους r, s, t τῆς δευτέρας τάξεως· διότι αἱ τιμαὶ τῶν πρώτων παραγώγων p, q εἶνε ἤδη γνωσταί.

Σημειωτέον δέ, ὅτι ἡ διαφόρισις τῆς πρώτης ἐξισώσεως πρὸς τὴν y καὶ ἡ διαφόρισις τῆς δευτέρας πρὸς τὴν x ἔδωκαν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον· διότι τῆς μὲν πρώτης τὸ πρῶτον μέλος εἶνε $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$ τῆς δὲ δευτέρας $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$ εἶνε δὲ, ὡς γνωστόν,

$$\frac{\partial \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \right)}{\partial y} = \frac{\partial \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \right)}{\partial x}$$

Ὡς παράδειγμα ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2.$$

Διαφορίζοντες αὐτὴν λαμβάνομεν

$$x + pz = 0, \qquad y + qz = 0.$$

Διαφορίζοντες δὲ καὶ ταύτας εὑρίσκομεν

$$1 + p^2 + zr = 0$$

$$pq + zs = 0$$

$$1 + q^2 + zt = 0$$

ὅθεν προκύπτουσιν αἱ ἑπόμεναι τιμαὶ τῶν μερικῶν παραγώγων

$$p = -\frac{x}{z}, \qquad q = -\frac{y}{z}$$

$$r = -\frac{x^2 + z^2}{z^3}, \qquad s = -\frac{xy}{z^3}, \qquad t = -\frac{y^2 + z^2}{z^3}$$

ΣΗΜ. Καὶ ὅταν ἡ πεπλεγμένη συνάρτησις ὁρίζηται διὰ πλειόνων ἐξισώσεων, τὰ διαφορικὰ αὐτῆς καὶ αἱ μερικαὶ παράγωγοι εὑρίσκονται ὁμοίως.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΟΜΟΓΕΝΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

170. Συνάρτησις πολλῶν μεταβλητῶν x, y, z . . λέγεται ὁμογενὴς πρὸς αὐτάς, ἐάν, πολλαπλασιαζομένων πασῶν τῶν μεταβλητῶν τούτων ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν t, ἡ συνάρτησις πολλαπλασιάζηται ἐπὶ δύναμίν τινα τοῦ t, ἤτοι ἂν εἶνε (οἱουδήποτε ὄντος τοῦ t)

$$\varphi(tx,\, ty,\, tz\,..) = t^{\mu}.\varphi(x,\, y,\, z\,..) \qquad (1)$$

ὁ ἀριθμὸς μ λέγεται βαθμὸς τῆς ὁμογενοῦς συναρτήσεως δύναται δὲ νὰ εἶνε οἱοςδήποτε ἀριθμός.

Παραδείγματος χάριν αἱ συναρτήσεις

$$\sqrt{xy}, \qquad lx - ly \qquad x^2 + y^2 + z^2,$$

εἶνε ὁμογενεῖς ἡ πρώτη καὶ ἡ δευτέρα εἶνε ὁμογενεῖς πρὸς x, y ἡ δὲ τρίτη πρὸς x, y, z. εἶνε δὲ ἡ μὲν πρώτη τοῦ πρώτου βαθμοῦ, ἡ δευτέρα τοῦ 0 καὶ ἡ τρίτη τοῦ δευτέρου.

Ἰδιότητες τῶν ὁμογενῶν συναρτήσεων.

171. Ἐὰν ὑποθέσωμεν $t = \dfrac{1}{x}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$(2) \qquad \varphi\left(\frac{y}{x},\ \frac{z}{x}\ .\right) = \frac{\varphi(x, y, z\,..)}{x^{\mu}}$$

τουτέστιν, *ἐὰν ἡ ὁμογενὴς συνάρτησις τοῦ βαθμοῦ μ διαιρεθῇ διὰ μιᾶς τῶν μεταβλητῶν (x) ὑψωμένης εἰς τὴν δύναμιν μ, τὸ πηλίκον ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῶν λόγων τῶν ἄλλων μεταβλητῶν πρὸς τὴν μεταβλητὴν ταύτην (x).*

Καὶ τἀνάπαλιν. *Ἐὰν συνάρτησις πολλῶν μεταβλητῶν ἔχῃ τὴν ἰδιότητα ταύτην, εἶνε ὁμογενής.*

Διότι ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2) εὑρίσκεται

$$\varphi(x, y, z\,..) = x^{\mu}\,\varphi\left(\frac{y}{x},\ \frac{z}{x}\,..\right)$$

καὶ ἂν τεθῇ tx, ty, tz ἀντὶ x, y, z, προκύπτει

$$\varphi(tx, ty, tz\,..) = t^{\mu}\,x^{\mu}\,\varphi\left(\frac{y}{x},\ \frac{z}{x}\,..\right)$$

ὅθεν $$\varphi(tx, ty, tz\,..) = t^{\mu}\,\varphi(x, y, z\,..)$$

τουτέστιν ἡ συνάρτησις $\varphi(x, y, z\,..)$ εἶνε ὁμογενὴς καὶ ἔχει βαθμὸν μ.

172. *Αἱ μερικαὶ παράγωγοι πάσης ὁμογενοῦς συναρτήσεως εἶνε ἐπίσης ὁμογενεῖς συναρτήσεις βαθμοῦ κατωτέρου κατὰ μονάδα.*

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\varphi(tx, ty, tz) = t^{\mu}\,\varphi(x, y, z)$, τὴν ὁποίαν ἐπαληθεύει πᾶσα ὁμογενὴς συνάρτησις τῶν μεταβλητῶν x, y, z, ἐὰν θέσωμεν $tx=u$, $ty=v$, καὶ $tz=\omega$, λαμβάνομεν

$$\varphi(u, v, \omega) = t^{\mu}\, \varphi(x, y, z) \tag{3}$$

ἐὰν δὲ τὴν ἐξίσωσιν ταύτην διαφορίσωμεν πρὸς τὴν x, εὑρίσκομεν

$$\varphi_u(u, v, \omega)\, .\, t = t^{\mu}\, \varphi_x(x, y, z)$$

ἢ καὶ
$$\varphi_u(u, v, \omega) = t^{\mu-1}\, .\, \varphi_x(x, y, z)$$

ἀλλ' ἡ παράγωγος $\varphi_u(u, v, \omega)$ κατ' οὐδὲν ἄλλο διαφέρει ἀπὸ τῆς παραγώγου $\varphi_x(x, y, z)$ ἢ ὅτι τὸν τόπον τοῦ x κατέχει ἡ u (ἤτοι tx) τὸν τόπον τοῦ y κατέχει ἡ v (ἤτοι ty) καὶ τὸν τόπον τοῦ z ἡ ω (ἤτοι tz)· ἑπομένως, ἂν ἐν τῇ παραγώγῳ $\varphi_x(x, y, z)$ θέσωμεν ἀντὶ τῶν x, y, z τὰ tx, ty, tz ἤτοι τὰ u, v, ω, θὰ προκύψῃ

$$\varphi_x(u, v, \omega) \quad \text{ἤτοι} \quad t^{\mu-1}\varphi_x(x, y, z)\cdot$$

εἶνε ἄρα ἡ συνάρτησις $\varphi_x(x, y, z)$ ὁμογενὴς καὶ ὁ βαθμὸς αὐτῆς εἶνε μ-1.

Ὁμοίως δεικνύεται τοῦτο καὶ περὶ τῶν ἄλλων μερικῶν παραγώγων τῆς πρώτης τάξεως.

Ἐντεῦθεν προκύπτει, ὅτι αἱ δεύτεραι μερικαὶ παράγωγοι τῆς ὁμογενοῦς συναρτήσεως τοῦ βαθμοῦ μ θὰ εἶνε ὁμογενεῖς συναρτήσεις βαθμοῦ $\mu-2$, αἱ τρίται θὰ εἶνε βαθμοῦ $\mu-3$· καὶ οὕτω καθεξῆς·

173. Αἱ ὁμογενεῖς συναρτήσεις ἔχουσι πρὸς τούτοις καὶ τὴν ἑπομένην ἰδιότητα.

Πᾶσα ὁμογενὴς συνάρτησις ἐπὶ τὸν βαθμὸν αὐτῆς πολλαπλασιασθεῖσα γίνεται ἴση τῷ ἀθροίσματι τῶν μερικῶν αὐτῆς παραγώγων, ἐὰν ἑκάστη πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὴν ἀντίστοιχον μεταβλητήν.

ἤτοι εἶνε
$$\mu\varphi = x\varphi_x + y\varphi_y + z\varphi_z$$

Ἵνα δείξωμεν τοῦτο, διαφορίζομεν τὴν ἐξίσωσιν (3) πρὸς t, ὅτε εὑρίσκομεν (διότι τὰ u, v, ω εἶνε συναρτήσεις τοῦ t)·

$$x\varphi_u(u, v, \omega) + y\varphi_v(u, v, \omega) + z\varphi_\omega(u, v, \omega) = \mu t^{\mu-1}\varphi(x, y, z) \tag{4}$$

καὶ ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην θέσωμεν $t=1$, προκύπτει

$$x\varphi_x(x, y, z) + y\varphi_y(x, y, z) + z\varphi_z(x, y, z) = \mu\varphi(x, y, z).$$

Σημειωσις. Ἐὰν ὁ βαθμὸς τῆς ὁμογενοῦς συναρτήσεως φ εἶνε μηδέν, θὰ εἶνε
$$x\varphi_x + y\varphi_y + z\varphi_z = 0.$$

Ἐὰν διαφορίσωμεν καὶ πάλιν τὴν ἐξίσωσιν (4) πρὸς t, καὶ ἐν τῇ προκυπτούσῃ θέσωμεν $t=1$, εὑρίσκομεν

$$x^2\varphi_{xx} + y^2\varphi_{yy} + z^2\varphi_{zz} + 2xy\varphi_{xy} + 2yz\varphi_{yz} + 2zx\varphi_{zx} = \mu(\mu-1)\,\varphi$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν καὶ γενικῶς ὅτι εἶνε

$$(x\varphi_x + y\varphi_y + z\varphi_z)^{(\nu)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\nu+1)\,.\,\varphi$$

τουτέστι πᾶσα ὁμογενὴς συνάρτησις ἐπὶ σταθερόν τινα παράγοντα πολλαπλασιασθεῖσα γίνεται ἴση πρὸς τὸ τυχὸν διαφορικὸν αὐτῆς, ἐὰν τὰ διαφορικὰ τῶν μεταβλητῶν ἀντικατασταθῶσιν ὑπ' αὐτῶν τῶν μεταβλητῶν.

174. Τὴν ἰδιότητα ταύτην τῶν ὁμογενῶν συναρτήσεων δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν καὶ ὡς ἑξῆς. (χάριν συντομίας θεωροῦμεν συναρτήσεις τριῶν μεταβλητῶν).

Κατὰ τὸν τύπον τοῦ Taylor, ἐὰν ἡ μὲν x αὐξηθῇ κατὰ ωx, ἡ δὲ y κατὰ ωy, ἡ δὲ z κατὰ ωz, θὰ εἶνε

$$\varphi(x+\omega x, y+\omega y, z+\omega z) = \varphi(x,y,z) + \omega \{ x\varphi_x + y\varphi_y + z\varphi_z \} + \\ + \frac{\omega^2}{1.2}(x\varphi_x + y\varphi_y + z\varphi_z)^{(2)} + \dots \\ + \frac{\omega^\nu}{1.2.3..\nu}(x\varphi_x + y\varphi_y + z\varphi_z)^{(\nu)} + \dots.$$

Ἀλλὰ τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος ταύτης γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$\varphi(x(1+\omega),\ y(1+\omega),\ z(1+\omega))$$

καὶ ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις $\varphi(x, y, z)$ ὑποτίθεται ὁμογενής, θὰ εἶνε

$$\varphi(x(1+\omega),\ y(1+\omega),\ z(1+\omega)) = (1+\omega)^\mu . \varphi(x, y, z)$$

ὅθεν ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$\varphi(x, y, z).(1+\omega)^\mu = \varphi(x, y, z) + \omega \{ x\varphi_x + y\varphi_y + z\varphi_z \} + \\ + \frac{\omega^2}{1.2}\{ x\varphi_x + y\varphi_y + z\varphi_z \}^{(2)} + \dots. \\ + \frac{\omega^\nu}{1.2...\nu}\{ x\varphi_x + y\varphi_y + z\varphi_z \}^{(\nu)} + \dots.$$

ἀναπτύσσοντες δὲ τὴν δύναμιν $(1+\omega)^\mu$ καὶ ἐξισοῦντες τοὺς συντελεστὰς τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ ω, εὑρίσκομεν τὰς ἰσότητας

$$x\varphi_x + y\varphi_y + z\varphi_z = \mu\varphi \qquad (x\varphi_x + y\varphi_y + z\varphi_z)^{(2)} = \mu(\mu-1)\varphi$$

καὶ γενικῶς $(x\varphi_x + y\varphi_y + z\varphi_z)^{(\nu)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)..(\mu-\nu+1)\varphi$.

Ὡς παράδειγμα ἔστω ἡ ὁμογενὴς συνάρτησις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ τῶν τριῶν μεταβλητῶν x, y, z.

$$\varphi = Ax^2 + By^2 + \Gamma z^2 + 2\Delta xy + 2Eyz + 2Hzx.$$

Αἱ μερικαὶ αὐτῆς παράγωγοι εἶνε

$$\varphi_x = 2Ax + 2\Delta y + 2Hz$$
$$\varphi_y = 2\Delta x + 2By + 2Ez$$
$$\varphi_z = 2Hx + 2Ey + 2\Gamma z$$

καὶ ἂν πολλαπλασιασθῶσι κατὰ σειρὰν ἐπὶ x, y, z καὶ προστεθῶσι προκύπτει

$$x\varphi_x + y\varphi_y + z\varphi_z = 2(\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}y^2 + \Gamma z^2 + 2\Delta xy + 2\mathrm{E}yz + 2\mathrm{H}zx) = 2\varphi$$

175. Πρὸς ἐφαρμογὴν τῶν ἰδιοτήτων τούτων θὰ ζητήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον οἱασδήποτε ἐπιπέδου καμπύλης ἀναφερομένης πρὸς ὁμογενεῖς συντεταγμένας x, y, z, (ἴδε Ἀναλ. Γεωμ. ἐδ. 433).

Ἔστω $\sigma(x, y) = 0$ ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης καὶ $\varphi(x, y, z) = 0$ ἡ ὁμογενὴς ἐξίσωσις ἡ προκύπτουσα ἐκ τῆς $\sigma(x, y) = 0$ διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως τῶν $\dfrac{x}{z}$, $\dfrac{y}{z}$ ἀντὶ τῶν x, y· τότε θὰ εἶνε οἱωνδήποτε ὄντων τῶν x, y

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \sigma(x, y) \\ \varphi'_x &= \sigma'_x \\ \varphi'_y &= \sigma'_y \end{aligned}\right| \quad \text{διὰ } z = 1$$

καὶ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον x, y θὰ εἶνε

$$\sigma'_x(\mathrm{X} - x) + \sigma'_y(\mathrm{Y} - y) = 0$$

ἢ καὶ

$$\mathrm{X}\varphi'_x + \mathrm{Y}\varphi'_y - x\varphi'_x - y\varphi'_y = 0 \qquad \text{διὰ } z = 1$$

καὶ ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις $\varphi(x, y, z)$ εἶνε ὁμογενὴς πρὸς x, y, z θὰ εἶνε διὰ τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης $x\varphi'_x + y\varphi'_y + z\varphi'_z = 0$ καὶ διὰ τὴν σχέσιν ταύτην ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης γίνεται

$$\mathrm{X}\varphi'_x + \mathrm{Y}\varphi'_y + \mathrm{Z}\varphi'_z = 0 \qquad \text{διὰ } z = \mathrm{Z} = 1.$$

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Δεῖξαι, ὅτι πᾶσα ὁμογενὴς συνάρτησις φ τῶν τριῶν μεταβλητῶν x, y, z πληροῖ τὴν ἐξίσωσιν

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\mu}{\mu - 1}.\varphi, & \varphi_x, & \varphi_y, & \varphi_z \\ \varphi_x, & \varphi_{xx}, & \varphi_{xy}, & \varphi_{xz} \\ \varphi_y, & \varphi_{yx}, & \varphi_{yy}, & \varphi_{yz} \\ \varphi_z, & \varphi_{zx}, & \varphi_{zy}, & \varphi_{zz} \end{vmatrix} = 0$$

ἔνθα μ εἶνε ὁ βαθμὸς τῆς συναρτήσεως.

2) Ἀποδεῖξαι, ὅτι αἱ δύο διαφοραὶ

$$\Delta^{\nu}(\Delta^{\mu}z) \qquad \Delta^{\mu}(\Delta^{\nu}z$$

αἱ εὑρισκόμεναι κατὰ τὰ ἐν τῷ ἐδ. 164 εἰρημένα, εἶνε ἴσαι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΑΛΛΑΓΗ ΤΗΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟΥ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

176. Πολλάκις, θεωροῦντες πλῆθός τι μεταβλητῶν καὶ εὑρόντες ἐξίσωσίν τινα συνδέουσαν αὐτὰς καὶ τὰ διαφορικὰ αὐτῶν ληφθέντα πρὸς μίαν ἐξ αὐτῶν, θεωρηθεῖσαν ὡς ἀνεξάρτητον, ἀγόμεθα εἰς τὸ νὰ ζητήσωμεν, ὁποία θὰ ἦτο ἡ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρισκομένη ἐξίσωσις, ἂν ἄλλη τις ἐκ τῶν μεταβλητῶν ἐλαμβάνετο ὡς ἀνεξάρτητος· τουτέστιν, *ὁποίαν μορφὴν θὰ λάβῃ ἡ εὑρεθεῖσα ἐξίσωσις, ὅταν ἡ ὡς ἀνεξάρτητος θεωρηθεῖσα καὶ διὰ τοῦτο ἰσοδιαφόρους τιμὰς λαμβάνουσα μεταβλητὴ παύσῃ νὰ εἶνε τοιαύτη, ληφθῇ δέ τις ἄλλη ἐκ τῶν μεταβλητῶν ὡς ἀνεξάρτητος.*

Ἡ ἀλλαγὴ αὕτη τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς εἶνε ἐπωφελεστάτη ἐν τῇ θεωρίᾳ τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων· διότι διὰ τῆς καταλλήλου ἐκλογῆς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς καταντῶσιν αἱ ἐξισώσεις αὗται ἁπλούστεραι καὶ πρὸς τὸν σκοπὸν ἡμῶν χρησιμώτεραι.

Γραφὴ τῶν διαφορικῶν παραστάσεων ἁρμόζουσα πρὸς οἱανδήποτε ἀνεξάρτητον μεταβλητήν.

177. Ἔχοντες διαφορικὴν παράστασιν, ἐν ᾗ τὰ διαφορικὰ ἀναφέρονται πρὸς μίαν τῶν ἐν αὐτῇ μεταβλητῶν, δυνάμεθα νὰ μετασχηματίσωμεν αὐτήν, ὥστε νὰ μένῃ κατὰ τὴν μορφὴν ἡ αὐτή, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶνε ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητή.

Διότι ἔστω ἡ παράστασις

$$\varphi\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx},\; \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^\nu y}{dx^\nu}\right),$$

ἐν ᾗ τὰ διαφορικὰ ἀναφέρονται πρὸς τὴν x. Ἐὰν ἀντὶ τῶν παραγώγων θέσωμεν τὰς τιμὰς αὐτῶν (ἐδ. 153), αἵτινες περιέχουσι διαφορικὰ πρὸς τὴν τυχοῦσαν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν ἀναφερόμενα, θὰ προκύψῃ παράστασις ἀμετάβλητος μένουσα κατὰ τὴν μορφήν, οἱαδήποτε μεταβλητὴ καὶ ἂν ληφθῇ ὡς ἀνεξάρτητος.

Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ παράστασις

$$\frac{\left(1+\dfrac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}},$$

ἐν ᾗ ἡ x θεωρεῖται ὡς ἀνεξάρτητος μεταβλητή.

Ἡ πρώτη παράγωγος $\dfrac{dy}{dx}$ οὐδόλως, ὡς γνωστόν, ἀλλάσσει μορφήν, οἱαδήποτε μεταβλητὴ καὶ ἂν ληφθῇ ἀνεξάρτητος· ἐὰν δὲ ἀντὶ τῆς δευτέρας παραγώγου $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ θέσωμεν τὴν τιμὴν αὐτῆς

$$\frac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx} \quad \text{ἢ} \quad \frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^3},$$

προκύπτει ἡ παράστασις

$$\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y-dyd^2x},$$

ἀναφέρονται δὲ τὰ διαφορικὰ ταῦτα πρὸς οἱανδήποτε μεταβλητήν.

Ἀλλαγὴ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.

178. Ἵνα μεταβῶμεν ἀπό τινος ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x εἰς ἄλλην t, μετασχηματίζομεν πρῶτον τὴν παράστασιν, ὥστε τὰ ἐν αὐτῇ περιεχόμενα διαφορικὰ νὰ ἀναφέρωνται πρὸς πᾶσαν ἀνεξάρτητον μεταβλητήν· ἔπειτα καθιστῶμεν τὰ διαφορικὰ τῆς t ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ ἐφεξῆς πάντα ἴσα τῷ 0.

Ὅταν ἡ μεταβλητὴ t δὲν ὑπάρχῃ ἐν τῇ παραστάσει, συνδέεται συνήθως πρὸς τὴν x διά τινος ἐξισώσεως δεδομένης· τότε εὑρίσκομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης τὰ διαφορικὰ τῆς x καὶ ἀντικαθιστῶμεν τὰς τιμὰς αὐτῶν εἰς τὴν παράστασιν.

Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ ἐξίσωσις

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+ay=0,$$

ἥτις πρόκειται νὰ μετασχηματισθῇ λαμβανομένης ἀνεξαρτήτου τῆς μεταβλητῆς t, τῆς συνδεομένης πρὸς τὰς ἄλλας διὰ τῆς ἐξισώσεως

$$x=\text{ημ}\, t.$$

Πρὸς οἱανδήποτε ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν ἀναφερομένη ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται

$$(1-x^2)\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^3}-x\frac{dy}{dx}+ay=0.$$

λαμβανομένης δὲ τῆς t ὡς ἀνεξαρτήτου, ἔχομεν

$$dx=\text{συν}\,t\,.\,dt,\qquad d^2x=-\text{ημ}\,t\,.\,dt^2,$$

ὅθεν ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν τὴν μετεσχηματισμένην ἐξίσωσιν

$$\frac{d^2y}{dt^2}+ay=0.$$

Ἡ λύσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, τουτέστιν ἡ εὕρεσις τῆς συναρτήσεως y τοῦ x, ἥτις ἐπαληθεύει αὐτήν, ἄγεται διὰ τῆς ἀλλαγῆς ταύτης εἰς τὴν λύσιν τῆς μετεσχηματισμένης, ἥτις εἶνε πολὺ ἁπλουστέρα τῆς δοθείσης.

Ἔστω δεύτερον ἡ ἐξίσωσις

$$(x-x^3)\frac{d^2y}{dx^2}+(1-3x^2)\frac{dy}{dx}-xy=0,$$

τῆς ὁποίας ζητεῖται ἡ μετεσχηματισμένη, ὅταν ληφθῇ ἀνεξάρτητος ἡ μεταβλητὴ t, δι' ἣν εἶνε

$$x=\sqrt{1-t^2}.$$

Ἐν πρώτοις γράφομεν τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν ὡς ἕπεται

$$(x-x^3)\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^3}+(1-3x^2)\frac{dy}{dx}-xy=0.$$

ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς ἐξισώσεως $x=\sqrt{1-t^2}$ εὑρίσκομεν

$$dx=\frac{-tdt}{\sqrt{1-t^2}},\qquad d^2x=\frac{-1}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}dt^2,$$

ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων

$$(t-t^3)\frac{d^2y}{dt^2}-(1-3t^2)\frac{dy}{dt}-ty=0,$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη οὐδαμῶς διαφέρει τῆς δοθείσης ἢ ὅτι ἀντὶ x ἔχει t.

Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι, ἂν ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχῃ λύσιν τινὰ $y=\varphi(x)$, θὰ ἔχῃ καὶ τὴν $y=\varphi(t)$, ἤτοι τὴν $y=\varphi(\sqrt{1-x^2})$.

Ἐκ τούτου ἐννοοῦμεν, ὅτι ἡ ἀλλαγὴ τῶν μεταβλητῶν δύναται νὰ παρέχῃ γνῶσιν τῶν ἰδιοτήτων τῶν συναρτήσεων, τὰς ὁποίας ὁρίζουσιν αἱ διαφορικαὶ ἐξισώσεις.

Ἔστω πρὸς τούτοις ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0,$$

ἥτις πρόκειται νὰ μετασχηματισθῇ, λαμβανομένης τῆς y ὡς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.

Ἐν πρώτοις γράφεται ὡς ἑξῆς

$$\frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3} + y\frac{dy^3}{dx^3} = 0,$$

ἐπειδὴ δέ, ὅταν ἡ y ληφθῇ ὡς ἀνεξάρτητος, θὰ εἶνε $d^2y = 0$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται

$$\frac{d^2x}{dy^2} - y = 0.$$

Ἀλλαγὴ πασῶν τῶν μεταβλητῶν.

179. Ἐνίοτε ζητεῖται νὰ ἀντικατασταθῶσι πᾶσαι αἱ ἐν τῇ παραστάσει ὑπάρχουσαι μεταβληταὶ δι' ἄλλων, αἵτινες συνδέονται πρὸς τὰς πρώτας διὰ δεδομένων ἐξισώσεων.

Ὑποθέσωμεν παραδείγματος χάριν, ὅτι διαφορική τις παράστασις περιέχει τὰς δύο μεταβλητὰς x, y καὶ θέλομεν νὰ ἀντικαταστήσωμεν ἀντ' αὐτῶν δύο ἄλλας u, v, αἵτινες ὁρίζονται διὰ τῶν ἐξισώσεων

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(u, v) \\ y &= \sigma(u, v) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

τότε γράφομεν καὶ πάλιν τὴν διαφορικὴν παράστασιν οὕτως, ὥστε νὰ ἁρμόζῃ πρὸς οἱανδήποτε ἀνεξάρτητον μεταβλητήν, καὶ ἔπειτα ἐκ τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων (1) εὑρίσκομεν τὰ διαφορικὰ τῶν x καὶ y

$$dx = \frac{\partial\varphi}{\partial u}.\, du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}.\, dv$$

$$d^2x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}dudv + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}dv^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial u}d^2u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}d^2v$$

. . . .

καὶ ἀντικαθιστῶμεν αὐτὰ εἰς τὴν δοθεῖσαν παράστασιν.

Παρατηρητέον δέ, ὅτι ἐν τῇ ἐκφράσει ἑκάστου διαφορικοῦ τῶν x καὶ y δὲν περιέχονται διαφορικὰ τῶν u, v ἀνωτέρας τάξεως· ὥστε ἡ παράγωγος $\frac{d^\nu y}{dx^\nu}$ ἐκφράζεται διὰ τῶν παραγώγων $\frac{dv}{du}, \frac{d^2v}{du^2}, \ldots, \frac{d^\nu v}{du^\nu}$ (ἐὰν ἡ u ληφθῇ ὡς ἀνεξάρτητος μεταβλητή).

Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ παράστασις

$$\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y-dyd^2x},$$

ἥτις πρόκειται νὰ μετασχηματισθῇ, ἀντικαθισταμένων τῶν x καὶ y διὰ τῶν μεταβλητῶν ϱ καὶ ϑ, δι' ἃς εἶνε

$$x=\varrho\ \text{συν}\vartheta, \qquad y=\varrho\text{ημ}\vartheta.$$

Ἀμφότεραι αἱ ἐξισώσεις αὗται περιλαμβάνονται εἰς τὴν ἑξῆς

$$x+yi=\varrho\, e^{\vartheta i},$$

ἐξ ἧς ἕπεται $\quad dx+idy=(d\varrho+\varrho id\vartheta)\,e^{\vartheta i}$

καὶ $\quad d^2x+id^2y=(d^2\varrho-\varrho d\vartheta^2+2i\,d\varrho d\vartheta)\,e^{\vartheta i},$

λαμβανομένης τῆς ϑ ὡς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.

Ἐκ τούτων, ἐὰν ἐν τῇ δευτέρᾳ θέσωμεν $-i$ ἀντὶ i καὶ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὴν καὶ τὴν τρίτην κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν ἐξισοῦντες τοὺς συντελεστὰς τοῦ i

$$dxd^2y-dyd^2x=2d\varrho^2d\vartheta+\varrho^2d\vartheta^3-\varrho d\vartheta d^2\varrho$$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε (ἐδ. 119) $\quad dx^2+dy^2=d\varrho^2+\varrho^2d\vartheta^2,$

συνάγεται $\quad \dfrac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y-dyd^2x}=\dfrac{(d\varrho^2+\varrho^2d\vartheta^2)^{\frac{3}{2}}}{d\vartheta\,(2d\varrho^2+\varrho^2d\vartheta^2-\varrho d^2\varrho)},$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

180. Ὅταν διαφορική τις παράστασις ἀναφέρηται πρὸς οἱανδήποτε ἀνεξάρτητον μεταβλητήν, ἔχει τὸ ἀξιοσημείωτον τοῦτο ἰδίωμα: ὅτι, ἂν ληφθῇ τις τῶν ἐν αὐτῇ μεταβλητῶν ὡς ἀνεξάρτητος καὶ ἔπειτα ἡ προκύπτουσα παράστασις μετασχηματισθῇ, ὥστε νὰ ἁρμόζῃ πρὸς οἱανδήποτε μεταβλητήν,πρέπει νὰ ἐπανευρίσκηται ἡ ἀρχικὴ παράστασις.

Ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι θεωροῦντες τὰς τρεῖς μεταβλητὰς x, y καὶ ω καὶ μηδεμίαν ὑποθέσαντες ἀνεξάρτητον μεταβλητήν, εὕρομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\omega=\frac{dxd^2y+dyd^2x}{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ἂν ληφθῇ ἡ x ὡς ἀνεξάρτητος, ἡ ἐξίσωσις αὕτη καταντᾷ

$$\omega = \frac{dxd^2y}{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{ἢ} \quad \omega = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

ἀλλ' ἂν τώρα ἐκ ταύτης ἐπανέλθωμεν εἰς οἱανδήποτε ἀνεξάρτητον μεταβλητήν, εὑρίσκομεν

$$\omega = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{\left(dx^2 + dy^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

ἥτις διαφέρει τῆς δοθείσης· ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶνε ἐσφαλμένη.

ΣΗΜ. Περὶ τῆς ἀλλαγῆς τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν εἰς διαφορικὰς παραστάσεις, αἵτινες περιέχουσι δύο ἢ περισσοτέρας ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς, ἰδὲ Serret, p. 119.

* ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Διαφορικὰ καὶ παράγωγοι συστήματος.

181. Ὅταν δύο μεταβληταὶ ἐξαρτῶνται ἀμοιβαίως ἀπ' ἀλλήλων, ὥστε πρὸς ἑκάστην τιμὴν τῆς ἑτέρας ἐξ αὐτῶν νὰ ἀντιστοιχῇ ὡρισμένη τιμὴ τῆς ἄλλης, ἑκατέρα ἐξ αὐτῶν δύναται νὰ ἔχῃ διαφορικὸν καὶ παράγωγον πρὸς τὴν ἄλλην καὶ ἡ σχέσις αὐτῶν εἶνε ὁμοία. Ἀλλ' ὅταν μία μεταβλητὴ εἶνε συνάρτησις πολλῶν ἄλλων, ἡ μεταξὺ αὐτῆς καὶ τούτων σχέσις εἶνε ἀνομοία· διότι, ὁρισθεισῶν τῶν τιμῶν τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, ὁρίζεται καὶ ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως, οὐχὶ δὲ καὶ ἀντιστρόφως. Ἡ σχέσις ὅμως ἀποκαθίσταται ἀμοιβαία ἢ ἰσόζυγος, ὅταν, θεωροῦντες ν ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς, θεωρῶμεν συνάμα καὶ ν συναρτήσεις αὐτῶν διαφερούσας ἀπ' ἀλλήλων· λέγονται δὲ ν συναρτήσεις *διάφοροι ἀπ' ἀλλήλων*, ὅταν δύνανται νὰ λάβωσι πᾶν σύστημα τιμῶν αὐτοβούλως δεδομένον (τοὐλάχιστον ἐντὸς ὁρίων τινῶν), ἤτοι, ὅταν ὑπάρχωσι τιμαὶ τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, πρὸς ἃς ἀντιστοιχοῦσιν αἱ αὐτοβούλως δοθεῖσαι τιμαὶ τῶν συναρτήσεων.

Διὰ τοῦ τρόπου τούτου ἐπεκτείνεται κατὰ φύσιν ἡ ἰσόζυγος σχέσις δύο μεταβλητῶν εἰς ἰσόζυγον σχέσιν ὁσωνδήποτε μεταβλητῶν καὶ εὑρίσκονται θεωρήματα πολλὴν ἔχοντα ὁμοιότητα πρὸς τὰ ἐπὶ δύο μεταβλητῶν εὑρεθέντα, ὡς ἐκ τῶν ἑπομένων γίνεται φανερόν.

182. Ἔστωσαν x καὶ y δύο μεταβληταὶ ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων καὶ ω, φ δύο συναρτήσεις αὐτῶν, αἱ τυχοῦσαι· ἐὰν αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ λάβωσι δύο συστήματα αὐξήσεων ε, η καὶ ε′, η′, *διάφορα ἀπ' ἀλλήλων*, τουτέστι τοιαῦτα, ὥστε ἡ ἐξ αὐτῶν συγκροτουμένη ὁρίζουσα

$$\begin{vmatrix} \varepsilon & \eta \\ \varepsilon' & \eta' \end{vmatrix} \qquad (1)$$

νὰ διαφέρῃ τοῦ 0, καὶ αἱ συναρτήσεις λαμβάνουσι δύο ἀντίστοιχα συστήματα αὐξήσεων Δω, Δφ καὶ Δ′ω, Δ′φ· ἐὰν δὲ ἡ ἐκ τῶν αὐξήσεων τούτων συγκροτουμένη ὁρίζουσα

$$\begin{vmatrix} \Delta\omega & \Delta\varphi \\ \Delta'\omega & \Delta'\varphi \end{vmatrix} \qquad (2)$$

ἀναπτυχθῇ κατὰ τὰς δυνάμεις τῶν αὐξήσεων ε, η, ε′, η′, τὸ σύνολον τῶν ὅρων τῆς ἐλαχίστης διαστάσεως πρὸς ε, η, ε΄, η΄ καλεῖται *διαφορικὸν τοῦ συστήματος* (ω, φ) *πρὸς τὸ* (x, y).

Καὶ τὸ διαφορικὸν συστήματος γράφεται διὰ τοῦ αὐτοῦ συμβόλου, δι' οὗ καὶ τὸ διαφορικὸν μιᾶς μεταβλητῆς, οἷον d(ω,φ), ἡ δὲ ὁρίζουσα (2) γράφεται συντόμως ὡς ἑξῆς Δ (ω, φ).

Οἱ ὅροι τῆς ἐλαχίστης διαστάσεως ἐν τῇ παραστάσει

$$\begin{vmatrix} \Delta\omega & \Delta\varphi \\ \Delta'\omega & \Delta'\varphi \end{vmatrix}$$

εὑρίσκονται προφανῶς, ἂν ληφθῶσιν ἑκάστης τῶν αὐξήσεων οἱ τὰς πρώτας δυνάμεις τῶν ε, η καὶ ε΄, η΄ ἔχοντες ὅροι· ἤτοι, ἂν ἀντὶ τῶν αὐξήσεων Δω, Δφ, Δ΄ω, Δ΄φ ληφθῶσι τὰ πρὸς αὐτὰς ἀντιστοιχοῦντα διαφορικά· ἑπομένως εἶνε

$$d(\varphi, \omega) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x}\varepsilon + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\eta & \frac{\partial\omega}{\partial x}\varepsilon + \frac{\partial\omega}{\partial y}\eta \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}\varepsilon' + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\eta' & \frac{\partial\omega}{\partial x}\varepsilon' + \frac{\partial\omega}{\partial y}\eta' \end{vmatrix},$$

$$\text{ἤτοι } d(\varphi, \omega) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x}, & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\omega}{\partial x}, & \frac{\partial\omega}{\partial y} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon & \eta \\ \varepsilon' & \eta' \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

ἐπειδὴ δὲ ὑποθέτοντες $\varphi = x$ καὶ $\omega = y$ εὑρίσκομεν

$$d(x,y) = \begin{vmatrix} \varepsilon & \eta \\ \varepsilon' & \eta' \end{vmatrix}$$

(ὅπερ καὶ ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ αὐτοῦ συνάγεται), δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὴν ἰσότητα (3) καὶ ὡς ἑξῆς

$$d(\varphi, \omega) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\omega}{\partial x} & \frac{\partial\omega}{\partial y} \end{vmatrix} \cdot d(x, y). \qquad (4)$$

$$\text{ἢ καὶ ὡς ἑξῆς } \quad \frac{d(\varphi, \omega)}{d(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x}, & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\omega}{\partial x}, & \frac{\partial\omega}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

ἡ ὁρίζουσα αὕτη, ὡς πηλίκον τῶν δύο διαφορικῶν $d(\varphi, \omega)$, $d(x, y)$, λέγεται *παράγωγος* τοῦ συστήματος (φ, ω) πρὸς τὸ σύστημα (x, y)· ἔτι δὲ καὶ *διαφορικὴ ὁρίζουσα*.

Παρατήρησις. Ἡ παράγωγος τοῦ συστήματος φ, ω πρὸς τὰς μεταβλητὰς x, y, ἀφ' ὧν ἐξαρτᾶται, ἰσοῦται τῇ ὁριζούσῃ τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy$$

$$d\omega = \frac{\partial\omega}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\omega}{\partial y}\,dy,$$

δι' ὧν ἐκφράζονται τὰ διαφορικὰ τῶν συναρτήσεων φ, ω διὰ τῶν διαφορικῶν τῶν μεταβλητῶν x καὶ y.

Ἰδιότητες τοῦ διαφορικοῦ συστήματος.

183. Περὶ τῶν διαφορικῶν τῶν συστημάτων πολλῶν μεταβλητῶν ἀποδεικνύονται αἱ ἑπόμεναι προτάσεις, αἵτινες εἶνε ὅμοιαι πρὸς τὰς περὶ τῶν ἁπλῶν διαφορικῶν εὑρεθείσας.

1) *Ὁ λόγος τῆς ὁριζούσης $\Delta(\varphi,\omega)$, ἥτις συγκροτεῖται ἐκ τῶν αὐξήσεων τῶν μεταβλητῶν φ, ω, πρὸς τὴν ὁρίζουσαν $\Delta(x, y)$, ἥτις συγκροτεῖται ἐκ τῶν αὐξήσεων τῶν μεταβλητῶν x, y, τείνει εἰς τὴν παράγωγον τοῦ συστήματος (φ, ω) πρὸς τὸ σύστημα (x, y), ὅταν αἱ αὐξήσεις $\varepsilon, \eta, \varepsilon', \eta'$, διάφοροι ἀπ' ἀλλήλων μένουσαι, τείνωσι πρὸς τὸ 0.*

Καὶ ὄντως· ἂν ὑποτεθῇ ἡ ὁρίζουσα

$$\begin{vmatrix} \varepsilon & \eta \\ \varepsilon' & \eta' \end{vmatrix} \quad \text{ἤτοι } \Delta(x, y)$$

διάφορος τοῦ 0, δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τοὺς τέσσαρας ἀριθμοὺς Α, Β, καὶ Μ, Ν οὕτως, ὥστε νὰ εἶνε

$$\Delta\varphi = A\varepsilon + B\eta \qquad \Delta\omega = M\varepsilon + N\eta$$

$$\Delta'\varphi = A\varepsilon' + B\eta' \qquad \Delta'\omega = M\varepsilon' + N\eta'.$$

τότε θὰ εἶνε $\Delta(\varphi, \omega)$ ἤτοι $\begin{vmatrix} \Delta\varphi & \Delta\omega \\ \Delta'\varphi & \Delta'\omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ M & N \end{vmatrix} . \Delta(x, y)$.

ὅθεν συνάγεται $\dfrac{\Delta(\varphi, \omega)}{\Delta(x, y)} = \begin{vmatrix} A, & B \\ M & N \end{vmatrix}$.

Ἀλλ' οἱ ἀριθμοὶ Α καὶ Β τείνουσι πρὸς τὰς μερικὰς παραγώγους $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$, ὅταν αἱ αὐξήσεις ε, η, ε', η' τείνωσι πρὸς τὸ 0 (ὡς φαίνεται ἐκ τῶν ἀναπτυγμάτων τῶν αὐξήσεων $\Delta\varphi$, $\Delta'\varphi$ κατὰ τὸν τύπον τοῦ Taylor)· ἐπίσης καὶ οἱ ἀριθμοὶ M, N τείνουσι πρὸς τὰς μερικὰς παραγώγους $\frac{\partial\omega}{\partial x}$, $\frac{\partial\omega}{\partial y}$. Κατ' ἀκολουθίαν εἶνε

$$\text{ὅρ}\,\frac{\Delta(\varphi,\omega)}{\Delta(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\omega}{\partial x} & \frac{\partial\omega}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{d(\varphi,\omega)}{d(x,y)}.$$

Παρατήρησις. Τὸ θεώρημα τοῦτο δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ διὰ τῆς ἀναπτύξεως τῶν αὐξήσεων $\Delta\varphi$, $\Delta'\varphi$, $\Delta\omega$, $\Delta'\omega$ κατὰ τὸν τύπον τοῦ Taylor· διότι τότε ἡ ὁρίζουσα $\begin{vmatrix} \Delta\varphi & \Delta\omega \\ \Delta'\varphi & \Delta'\omega \end{vmatrix}$ διαιρεῖται διὰ τῆς

$$\begin{vmatrix} \varepsilon & \eta \\ \varepsilon' & \eta' \end{vmatrix},$$

ΣΗΜ. Ἐὰν αἱ μεταβληταὶ x, y παριστῶνται ὡς ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι ἑνὸς σημείου ἔν τινι ἐπιπέδῳ, ἡ ὁρίζουσα $\Delta(x, y)$ παριστᾷ τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου, οὗτινος αἱ κορυφαὶ ἔχουσι τὰς ἑξῆς συντεταγμένας

$$(x,\ y), \qquad (x+\varepsilon,\ y+\eta), \qquad (x+\varepsilon',\ y+\eta')$$

διότι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τούτου εἶνε

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x, & y & 1 \\ x+\varepsilon, & y+\eta & 1 \\ x+\varepsilon', & y+\eta' & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \varepsilon & \eta \\ \varepsilon' & \eta' \end{vmatrix},$$

Ἡ δὲ ὁρίζουσα $\Delta(\varphi,\omega)$, ἐὰν αἱ μεταβληταὶ φ, ω παρασταθῶσιν ἐπίσης ὡς ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι ἑνὸς σημείου ἐν ἄλλῳ ἐπιπέδῳ, παριστᾷ ἐπίσης τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου, οὗτινος αἱ κορυφαὶ ἔχουσι τὰς ἑξῆς συντεταγμένας

$$(\varphi,\omega), \qquad (\varphi+\Delta\varphi,\ \omega+\Delta\omega), \qquad (\varphi+\Delta'\varphi,\ \omega+\Delta'\omega).$$

2) *Ὅταν δύο συστήματα μεταβλητῶν, ὡς αἱ φ, ω καὶ αἱ x y, ἐξαρτῶνται ἀπ' ἀλλήλων, ἡ τὰ διαφορικὰ αὐτῶν συνδέουσα ἰσότης μένει κατὰ τὴν μορφὴν ἡ αὐτή, εἴτε θεωρῶνται αἱ μεταβληταὶ τοῦ ἑτέρου ἐξ αὐτῶν ὡς ἀνεξάρτητοι, εἴτε θεωρῶνται ἀμφότερα τὰ συστήματα ὡς ἐξαρτώμενα ἀπ' ἄλλου οἱουδήποτε συστήματος· ἀρκεῖ νὰ μὴ μεταβληθῶσιν αἱ ἐξισώσεις αἱ τὴν ἀμοιβαίαν ἐξάρτησιν τῶν δύο συστημάτων ἐκφράζουσαι.*

Ἔστωσαν
$$\begin{aligned} \varphi &= f(x,\ y) \\ \omega &= \sigma(x,\ y) \end{aligned} \qquad (1)$$

αἱ τὴν ἐξάρτησιν τοῦ συστήματος $(\varphi,\ \omega)$ ἀπὸ τοῦ συστήματος $(x,\ y)$

καθορίζουσαι ἐξισώσεις· ὑποθέτοντες τὰς μεταβλητὰς x, y ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα·

$$d(\varphi,\,\omega) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial x} & \dfrac{\partial\omega}{\partial y} \end{vmatrix} .\, d(x,y)\cdot$$

λέγω δέ, ὅτι ἡ αὐτὴ σχέσις συνδέει τὰ διαφορικὰ τῶν συστημάτων $(\varphi,\,\omega)$ καὶ $(x,\,y)$, καὶ ὅταν ἀμφότερα ἐξαρτῶνται ἀπ' ἄλλου οἱουδήποτε συστήματος, οἷον τοῦ $(u,\,v)$, καὶ λαμβάνωνται τὰ διαφορικὰ αὐτῶν πρὸς τοῦτο· ἀρκεῖ αἱ συνδέουσαι αὐτὰ ἐξισώσεις (1) νὰ μὴ μεταβληθῶσιν.

Ἐὰν αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ u, v λάβωσι δύο διάφορα συστήματα αὐξήσεων Δu, Δv καὶ $\Delta' u$, $\Delta' v$, αἱ μὲν μεταβληταὶ x, y λαμβάνουσιν ἀντίστοιχα συστήματα αὐξήσεων, ἔστωσαν τὰ

$$\Delta x,\ \Delta y \qquad \text{καὶ} \qquad \Delta' x,\ \Delta' y$$

αἱ δὲ φ, ω τὰ ἑξῆς

$$\Delta\varphi,\ \Delta\omega \qquad \text{καὶ} \qquad \Delta'\varphi,\ \Delta'\omega.$$

Τούτων τεθέντων εἶνε

$$\Delta(\varphi,\,\omega) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial x} & \dfrac{\partial\omega}{\partial y} \end{vmatrix} .\, \Delta(x,\,y) + \ldots,$$

ἔνθα οἱ παραλειφθέντες καὶ διὰ στιγμῶν ὑποδεικνυόμενοι ὅροι εἶνε διαστάσεως πρὸς τὰ $\Delta x, \Delta y, \Delta' x, \Delta' y$ ἀνωτέρας τῆς δευτέρας.

Ἐπειδὴ δὲ εἶνε καὶ $\Delta(x,\,y) = d(x,\,y) + \ldots,$

ἕπεται
$$\Delta(\varphi,\,\omega) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial x} & \dfrac{\partial\omega}{\partial y} \end{vmatrix} .\, d(x,\,y) + \ldots$$

ἐπειδὴ δὲ πάντες οἱ παραλειφθέντες ὅροι εἶνε πρὸς τὰ Δu, Δv, $\Delta' u$, $\Delta' v$ διαστάσεως ἀνωτέρας τῆς δευτέρας (διότι οἱ ὅροι τῆς $\nu^{\text{ης}}$ διαστάσεως πρὸς τὰ $\Delta x, \Delta y, \Delta' x, \Delta' y$, ὅταν αἱ αὐξήσεις αὗται ἀναπτυχθῶσι κατὰ τὰς δυνάμεις τῶν Δu, Δv, $\Delta' u$, $\Delta' v$, δίδουσιν ὅρους ἴσης ἢ καὶ μεγαλητέρας διαστάσεως), συνάγεται, ὅτι εἶνε

$$d(\varphi, \omega) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial x} & \dfrac{\partial\omega}{\partial y} \end{vmatrix} . \, d(x, y),$$

τῶν διαφορικῶν νοουμένων πρὸς τὰς ἀνεξαρτήτους μεταβλητὰς u, v.

Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι, ὅταν τὸ σύστημα (φ, ω) ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ (x, y) καὶ τοῦτο πάλιν ἀπὸ τοῦ (u, v), ἔχομεν

$$d(\varphi, \omega) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial x} & \dfrac{\partial\omega}{\partial y} \end{vmatrix} . \, d(x, y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial x} & \dfrac{\partial\omega}{\partial y} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} . \, d(u, v).$$

Παρατήρησις. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εὑρίσκομεν καὶ ἐκ τῶν ἐξισώσεων

$$\left\{ \begin{aligned} d\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy \\ d\omega &= \frac{\partial\omega}{\partial x} dx + \frac{\partial\omega}{\partial y} dy \end{aligned} \right. \quad \text{καὶ} \quad \left\{ \begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv. \end{aligned} \right.$$

διότι ἐκ τούτων ἕπεται, ἐὰν αἱ τιμαὶ τῶν dx, dy, ἐκ τῶν δευτέρων ληφθεῖσαι ἀντικατασταθῶσιν εἰς τὰς πρώτας,

$$d\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \right) dv$$

$$d\omega = \left(\frac{\partial\omega}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial\omega}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial\omega}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \right) dv.$$

ἐπειδὴ δὲ ἡ παράγωγος τοῦ συστήματος (φ, ω) πρὸς τὸ (u, v) εἶνε ἡ ὁρίζουσα τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων τούτων, ἕπεται

$$\frac{d(\varphi,\omega)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \dfrac{\partial y}{\partial u}, & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial x} \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial\omega}{\partial y} \dfrac{\partial y}{\partial u}, & \dfrac{\partial\omega}{\partial x} \dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial\omega}{\partial y} \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

ἤτοι $$\frac{d(\varphi,\,\omega)}{d(u,\,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial x} & \dfrac{\partial\omega}{\partial y} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} .$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν $u=\varphi$ καὶ $v=\omega$, εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ τύπου τούτου

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial x} & \dfrac{\partial\omega}{\partial y} \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial \omega} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \omega} \end{vmatrix} = 1.$$

ἤτοι *τὸ γινόμενον τῶν δύο παραγώγων δύο συστημάτων, ἑκατέρου πρὸς τὸ ἄλλο εἶνε ἴσον τῇ μονάδι.*

Αἱ διὰ τῶν ἑπομένων ἰσοτήτων ἐκφραζόμεναι ἰδιότητες ἀποδεικνύονται εὐκολώτατα διὰ τῶν γνωστῶν ἰδιωμάτων τῶν ὁριζουσῶν διὰ τοῦτο παραλείπομεν τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν:

$$d(x+y,\,z) = d(x,\,z) + d(y,\,z),$$
$$d(xy,\,z) = x.d(y,\,z) + y.d(x,\,z),$$
$$d\left(\frac{y}{x},\,z\right) = \left| xd(y,z) - yd(x,z) \right| . \frac{1}{x^2},$$
$$d(x+y,\,z+\omega) = d(x,\,z) + d(x,\,\omega) + d(y,\,z) + d(y,\,\omega),$$

τῶν διαφορικῶν ἀναφερομένων πρὸς δύο τυχούσας ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς.

3) *Ἐὰν δύο μεταβληταὶ $(\varphi,\,\omega)$ ἐξαρτῶνται ἀφ' ὁσωνδήποτε ἄλλων $z_1,\,z_2,\,z_3,\ldots,z_\nu$, εἶνε δὲ αἱ $z_1,\,z_2,\ldots,z_\nu$ συναρτήσεις τῶν μεταβλητῶν $x,\,y$, ἤτοι ἂν εἶνε*

$$\varphi = f(z_1\,,z_2,\ldots,z_\nu),$$
$$\omega = \sigma(z_1\,,z_2,\ldots,z_\nu),$$

θὰ εἶνε

$$\frac{d(\varphi,\,\omega)}{d(x,\,y)} = \sum \frac{\partial(\varphi,\,\omega)}{\partial(z_\lambda\,,\,z_\mu)} . \frac{d(z_\lambda\,,\,z_\mu)}{d(x,\,y)}, \qquad (1)$$

ἔνθα ἡ ἄθροισις $\sum$ ἀναφέρεται πρὸς πάντας τοὺς ἀνὰ δύο συνδυασμοὺς τῶν μεταβλητῶν $z_1\,,z_2,\ldots,z_\nu$ καὶ

$$\frac{\partial(\varphi,\,\omega)}{\partial(z_\lambda\,,\,z_\mu)}$$

σημαίνει τὴν *μερικὴν* παράγωγον τοῦ συστήματος (φ, ω), ὅταν μόναι αἱ μεταβληταὶ z_λ, z_μ μεταβάλλωνται, αἱ δὲ ἄλλαι πᾶσαι μένωσιν ἀμετάβλητοι.

Ἵνα δείξωμεν τοῦτο, ἀρκεῖ ἐν τῇ ὁριζούσῃ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \omega}{\partial x} & \frac{\partial \omega}{\partial y} \end{vmatrix}$$

νὰ θέσωμεν ἀντὶ τῶν μερικῶν παραγώγων $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y}$ τὰς τιμὰς αὐτῶν, αἵτινες εἶνε αἱ ἑξῆς

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_3}\frac{\partial z_3}{\partial x} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial z_\nu}\frac{\partial z_\nu}{\partial x},$$

. . . .

καὶ νὰ ἀναλύσωμεν τὴν προκύπτουσαν ὁρίζουσαν εἰς ἄλλας, ὧν ἕκαστον στοιχεῖον νὰ σύγκειται ἐξ ἑνὸς μόνου ὅρου.

4) *Ἐὰν αἱ μεταβληταὶ φ, ω εἶνε πεπλεγμέναι συναρτήσεις τῶν x, y, ἤτοι, ἂν αἱ συνδέουσαι αὐτὰς ἐξισώσεις εἶνε τῆς μορφῆς*

$$\begin{aligned} f(x, y, \varphi, \omega) &= 0 \\ \sigma(x, y, \varphi, \omega) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

θὰ εἶνε
$$\frac{d(\varphi, \omega)}{d(x, y)} = (-1)^2 . \frac{\dfrac{\partial(f, \sigma)}{\partial(x, y)}}{\dfrac{\partial(f, \sigma)}{\partial(\varphi, \omega)}}. \tag{2}$$

Διότι ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1), ἂν μόνον ἡ x μεταβληθῇ, ἕπεται

$$-\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial x}$$

$$-\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial x}.$$

ἂν δὲ μόνον ἡ y μεταβληθῇ, ἕπεται

$$-\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial y}$$

$$-\frac{\partial \sigma}{\partial y} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \sigma}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x} & \frac{\partial \sigma}{\partial y} \end{vmatrix} \cdot (-1)^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial \varphi} & \frac{\partial f}{\partial \omega} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} & \frac{\partial \sigma}{\partial \omega} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \omega}{\partial x} & \frac{\partial \omega}{\partial y} \end{vmatrix},$$

τουτέστι

$$(-1)^2 \cdot \frac{\partial (f, \sigma)}{\partial (x, y)} = \frac{\partial (f, \sigma)}{\partial (\varphi, \omega)} \cdot \frac{d(\varphi, \omega)}{d(x, y)},$$

ἐξ οὗ συνάγεται ἀμέσως ἡ ἐξίσωσις (2).

Παρατήρησις. Συντομίας χάριν ἐθεωρήσαμεν μέχρι τοῦδε συστήματα δύο μόνον μεταβλητὰς ἔχοντα· ἀλλὰ τὰ προηγούμενα ἐκτείνονται εὐκόλως καὶ ἐπὶ συστημάτων ὁσαςδήποτε μεταβλητὰς ἐχόντων (ἰδὲ Bertrand, Traité de Calcul Différentiel et Intégral, Tom. 1, p. 61).

Ἰδιαιτέρα μορφὴ τῆς παραγώγου.

184. Ἐὰν αἱ τὰς μεταβλητὰς $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_\nu$ πρὸς τὰς $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ συνδέουσαι ἐξισώσεις ἀχθῶσιν εἰς τὴν ἑξῆς μορφὴν

$$(1) \qquad \begin{aligned} y_1 &= \varphi_1 (x_1, x_2, \ldots, x_\nu) \\ y_2 &= \varphi_2 (y_1, x_2, \ldots, x_\nu) \\ y_3 &= \varphi_3 (y_1, y_2, x_3, \ldots, x_\nu) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_\nu &= \varphi_\nu (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{\nu-1}, x_\nu), \end{aligned}$$

ἡ παράγωγος τοῦ συστήματος $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ πρὸς τὸ $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ καταντᾷ ἴση τῷ γινομένῳ

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\nu}.$$

Ἔστωσαν τῷ ὄντι $dx_{1\varrho}, dx_{2\varrho}, \ldots, dx_{\nu\varrho}$ $\qquad \varrho = 1, 2, 3, \ldots, \nu$

ν συστήματα αὐξήσεων τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ καὶ $dy_{1\varrho}, dy_{2\varrho}, \ldots, dy_{\nu\varrho}$ τὰ πρὸς τὰς αὐξήσεις ταύτας ἀντίστοιχα διαφορικὰ τῶν συναρτήσεων $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$·

Ἐὰν τὰ ν συστήματα τῶν αὐξήσεων $dx_{1\varrho}, dx_{2\varrho}, \ldots, dx_{\nu\varrho}$ εἶνε διάφορα ἀπ' ἀλλήλων, τουτέστιν, ἂν ἡ ὁρίζουσα

$$\left| dx_{1\varrho} \; dx_{2\varrho} \; dx_{3\varrho} \ldots dx_{\nu\varrho} \right| \qquad \varrho = 1, 2, 3, \ldots, \nu$$

διαφέρῃ τοῦ 0, τὸ διαφορικὸν τοῦ συστήματος y_1, y_2, y_ν πρὸς τὰς ἀνεξαρτήτους μεταβλητὰς $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, ἤτοι τὸ $d(y_1, y_2, \ldots, y_\nu)$, θὰ εἶνε (ἐδ. 182) ἡ ὁρίζουσα

$$(2) \qquad \left| dy_{1\varrho} \; dy_{2\varrho} \; dy_{3\varrho} \ldots dy_{\nu\varrho} \right| \qquad \varrho = 1, 2, 3, \ldots, \nu$$

Ἀλλ' ἐκ τῆς διαφορίσεως τῶν ἐξισώσεων (1) προκύπτει

$$dy_{1\varrho} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} dx_{1\varrho} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} dx_{2\varrho} + \ldots + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_\nu} dx_{\nu\varrho}$$

$$dy_{2\varrho} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_1} dy_{1\varrho} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} dx_{2\varrho} + \ldots + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_\nu} dx_{\nu\varrho}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$dy_{\nu\varrho} - \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial y_1} dy_{1\varrho} - \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial y_2} dy_{2\varrho} - \ldots = \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_\nu} dx_{\nu\varrho},$$

ὅθεν ἡ ὁρίζουσα (2) γίνεται

$$d(y_1, y_2, \ldots, y_\nu) =$$

$$\left| \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} dx_{1\varrho} + \ldots + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_\nu} dx_{\nu\varrho} \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} dx_{2\varrho} + \ldots + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_\nu} dx_{\nu\varrho} \quad \ldots \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_\nu} dx_{\nu\varrho} \right|,$$

ἡ δὲ ὁρίζουσα αὕτη εἶνε γινόμενον τῶν ἑξῆς δύο

$$\left| dx_{1\varrho} \; dx_{2\varrho} \ldots dx_{\nu\varrho} \right| \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_\nu} \\ 0 & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_\nu} \end{vmatrix}.$$

ἐντεῦθεν συνάγεται $d(y_1, y_2, \ldots, y_\nu) = d(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) \cdot \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_\nu}$

Περίπτωσις, καθ' ἣν ἡ παράγωγος εἶνε 0.

185. *Ἐὰν αἱ ν συναρτήσεις*

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$$
$$\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$$

τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ *δὲν εἶνε διάφοροι ἀπ' ἀλλήλων* (ἐὰν δηλονότι δὲν δύνανται νὰ λάβωσι πάσας τὰς αὐτοβούλως δεδομένας τιμάς, (ἑκάστη ἔν τινι διαστήματι), *ἡ παράγωγος αὐτῶν θὰ εἶνε 0 διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν* $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$· τοῦτ' ἔστι θὰ εἶνε

$$(1)\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_\nu} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_1}, & \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_\nu} \end{vmatrix} = 0 \text{ ἢ καὶ } d(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu) = 0.$$

Ἐπειδὴ αἱ συναρτήσεις $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$, ὁπωσδήποτε καὶ ἂν μεταβάλλωνται αἱ $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, δὲν δύνανται νὰ λάβωσι πάσας τὰς αὐτοβούλως δεδομένας τιμάς, ἀνάγκη αἱ τιμαί τινῶν ἐξ αὐτῶν νὰ εἶνε ὡρισμέναι ἐκ τῶν τιμῶν τῶν ἄλλων· ἤτοι ἀνάγκη νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν συναρτήσεων τούτων μία ἢ περισσότεραι σχέσεις τῆς μορφῆς

$$F(\varphi\ \ \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu) = 0\cdot \qquad (2)$$

ἀλλὰ τότε εἶνε

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi_1} d\varphi_1 + \frac{\partial F}{\partial\varphi_2} d\varphi_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial\varphi_\nu} d\varphi_\nu = 0,$$

ἤτοι

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial\varphi_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial\varphi_\nu}\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial\varphi_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} + \ldots \frac{\partial F}{\partial\varphi_\nu}\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_2} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F}{\partial\varphi_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_\nu} + \ldots \frac{\partial F}{\partial\varphi_\nu}\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_\nu} = 0,$$

ἐκ δὲ τούτων ἕπεται ἀμέσως ἡ ἰσότης (1).

Καὶ τἀνάπαλιν, ἐὰν ἡ παράγωγος

$$\frac{d(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu)}{d(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)}$$

εἶνε 0 διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν $x_1, x_2 \ldots x_\nu$, αἱ συναρτήσεις $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$ δὲν εἶνε διάφοροι ἀπ' ἀλλήλων, ἀλλὰ συνδέονται διὰ μιᾶς τοὐλάχιστον ἐξισώσεως τῆς μορφῆς (2).

Διότι, τῆς ὁριζούσης τοῦ συστήματος

$$d\varphi_1 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_\nu} dx_\nu$$

$$d\varphi_2 = \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_\nu} dx_\nu$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$d\varphi_\nu = \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_\nu} \partial x_\nu$$

οὔσης ἴσης τῷ 0, εὑρίσκονται πολλαπλασιασταί τινες $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ (ὧν τινες τοὐλάχιστον διαφέρουσι τοῦ 0), τοιοῦτοι, ὥστε νὰ εἶνε

$$A_1\, d\varphi_1 + A_2\, d\varphi_2 + \ldots + A_\nu\, d\varphi_\nu = 0$$

ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης, ἂν ὑποτεθῇ A_ϱ διάφορον τοῦ 0, γίνεται δῆλον, ὅτι τῶν λοιπῶν φ μενόντων ἀμεταβλήτων οὐδὲ τὸ φ_ϱ μεταβάλλεται, καὶ τῶν λοιπῶν μεταβαλλομένων μεταβάλλεται ἀναγκαίως καὶ τὸ φ_ϱ εἶνε ἄρα τοῦτο συνάρτησις τῶν λοιπῶν· ἤτοι

$$\varphi_\varrho = F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{\varrho-1}, \varphi_{\varrho+1}, \ldots, \varphi_\nu)\cdot$$

ὥστε ὑπάρχει μεταξὺ τῶν $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$ μία τοὐλάχιστον ἐξίσωσις.

Ἡ πρότασις αὕτη δύναται καὶ ἄλλως νὰ ἀποδειχθῇ, ὡς ἑξῆς· ἐὰν ἡ συνάρτησις φ_2 ἐκφρασθῇ διὰ τῶν $\varphi_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu$ καὶ ἡ φ_3 διὰ τῶν $\varphi_1, \varphi_2, x_3 \ldots x_\nu$ καὶ οὕτω καθεξῆς, ἤτοι ἂν τεθῇ

$$\varphi_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu)$$

$$\varphi_2 = f_2(\varphi_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu)$$

$$\varphi_3 = f_3(\varphi_1, \varphi_2, x_3, x_4, \ldots, x_\nu)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_\nu = f_\nu(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{\nu-1}, x_\nu),$$

ἡ ὁρίζουσα τοῦ συστήματος $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_\nu$ πρὸς τὸ $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ καταντᾷ ἴση τῷ γινομένῳ

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\nu}$$

καὶ ἂν ἡ ὁρίζουσα αὕτη εἶνε ἴση τῷ 0, θὰ εἶνε

$$\frac{\partial f_\varrho}{\partial x_\varrho} = 0, \quad \text{ἔνθα } \varrho = 1 \text{ ἢ } 2 \text{ ἢ } 3 \ldots \text{ ἢ } \nu.$$

τουτέστιν ἡ συνάρτησις φ_ϱ θὰ ἐκφράζηται μόνον διὰ τῶν $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{\varrho-1}, x_{\varrho+1} \ldots x_\nu$ · ἀλλὰ τότε δυνάμεθα ἐκ τῶν ἐξισώσεων

$$\varphi_\varrho = f_\varrho (\varphi_1\ \varphi_2 \ldots x_{\varrho+1} \ldots x_\nu)$$
$$\varphi_{\varrho+1} = f_{\varrho+1} (\varphi_1\ \varphi_2, \ldots, \varphi_\varrho,\ x_{\varrho+1}, \ldots, x_\nu)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_\nu = f_\nu (\varphi_1\ \varphi_2, \ldots, \varphi_{\nu-1},\ x_\nu)$$

νὰ ἀπαλείψωμεν τὰς μεταβλητὰς $x_{\varrho+1}, x_{\varrho+2}, \ldots, x_\nu$, ὅτε θὰ εὕρωμεν μίαν ἐξίσωσιν συνδέουσαν τὰ $\varphi_\varrho, \varphi_{\varrho+1}, \ldots, \varphi_\nu$.

ΣΗΜ. Ἂν ἐκ τῶν ν συναρτήσεων $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$ μόνον αἱ τ εἶναι διάφοροι ἀπ' ἀλλήλων, αἱ δὲ λοιπαὶ ν—τ ὁρίζωνται ἐκ τούτων διὰ ν—τ ἐξισώσεων τῆς μορφῆς (2), πᾶσαι αἱ ὁρίζουσαι αἱ ἐκ τῆς διαφορικῆς ὁριζούσης (1) προκύπτουσαι καὶ περισσοτέρας τῶν τ γραμμῶν ἔχουσαι εἶνε ἴσαι τῷ 0 διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ · καὶ ἀντιστρόφως.

ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ Α' ΤΟΜΟΥ

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄.

Διαφορικὰ καὶ παράγωγοι πρώτης τάξεως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι.
