ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ
ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΤΟΜΟΣ Β΄.

ΕΚΔΟΣΙΣ Β΄.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΤΥΠΟΙΣ Π. Δ. ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ
1912

Πᾶν ἀντίτυπον μὴ φέρον τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως θεωρεῖται κλοπιμαῖον.

ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Περὶ τῶν ἀπειροστῶν.

1. *Ἀπειροστὸν* λέγεται πᾶσα μεταβλητὴ ποσότης, ἥτις τείνει πρὸς τὸ μηδέν.

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ἡ αὔξησις τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς ὑποτεθῇ ἐλαττουμένη καὶ πρὸς τὸ μηδὲν τείνουσα, τουτέστιν ἐὰν γίνηται ἀπειροστή, τὸ διαφορικὸν πάσης συναρτήσεως διαφορισίμου γίνεται ἐπίσης ἀπειροστόν· ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ αὔξησις αὐτῆς. Ὁμοίως, ἐὰν τόξον τι καμπύλης γίνηται ἀπειροστόν, καὶ ἡ χορδὴ αὐτοῦ γίνεται ἀπειροστή· καὶ ἡ γωνία τῶν εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ καθέτων ὡσαύτως· καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ ἑνὸς ἄκρου ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ ἕτερον ἄκρον γίνεται ὡσαύτως ἀπειροστή, κτλ.

Διάκρισις τῶν ἀπειροστῶν εἰς τάξεις.

2. Συγκρίνοντες πρὸς ἄλληλα δύο ἀπειροστὰ ἐξαρτώμενα ἀπ' ἀλλήλων, βλέπομεν, ὅτι, ἂν καὶ ἀμφότερα τείνουσι πρὸς τὸ μηδέν, ὅμως τὸ σχετικὸν αὐτῶν μέγεθος, ἤτοι ὁ λόγος αὐτῶν, δύναται νὰ εἶνε λίαν διάφορον.

Ἐὰν παραδείγματος χάριν ποσότης τις ε τείνῃ πρὸς τὸ 0, καὶ αἱ ποσότητες $ε^2$, $ε^3$, $ε^4$, . . . πᾶσαι τείνουσι πρὸς τὸ μηδέν· τουτέστιν αἱ ποσότητες

$$ε,\ ε^2,\ ε^3,\ ε^4,\ \ldots$$

πᾶσαι εἶνε ἀπειροσταί. Ἀλλ' ὅμως εἶνε λίαν διάφοροι· διότι ἡ δευτέρα, λόγου χάριν, εἶνε λίαν μικρὰ ἢ ἀπειροστὴ ὡς πρὸς τὴν πρώτην· διότι ὁ λόγος αὐτῆς πρὸς τὴν πρώτην εἶνε $ε^2 : ε$ ἢ ε· γίνεται λοιπὸν ἡ δευτέρα μικροτέρα οὐ μόνον τῆς πρώτης, ἀλλὰ καὶ τοῦ χιλιοστοῦ αὐτῆς (ὅταν γίνῃ $\varepsilon < \dfrac{1}{1000}$) καὶ τοῦ ἑκατομμυριοστοῦ αὐτῆς (ὅταν γίνῃ $\varepsilon < \dfrac{1}{1000000}$) καὶ παντὸς τοῦ δοθέντος μέρους αὐτῆς· ὥστε τὸ ἀπειροστὸν ε^2 γίνεται ἀσυγκρίτως μικρότερον ἢ τὸ ε. Ὁμοίως τὸ ἀπειροστὸν ε^3 γίνεται ἀσυγκρίτως μικρότερον ἢ τὸ ε^2, τουτέστι γίνεται μικρότερον παντὸς τοῦ δοθέντος μέρους τοῦ ε^2· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐκ τούτων ἐννοοῦμεν τὴν ἀνάγκην τῆς διακρίσεως τῶν ἀπειροστῶν εἰς τάξεις Πρὸς τοῦτο ἐκλέγομεν ἓν ἐκ τῶν ἀπειροστῶν, ἅτινα παρεμβαίνουσιν εἰς τὸ ἐξεταζόμενον ζήτημα, καὶ θεωροῦμεν αὐτὸ ὡς πρωτεῦον· πρὸς τοῦτο δὲ καὶ τὰς δυνάμεις αὐτοῦ παραβάλλομεν πάντα τὰ ἄλλα· ὁρίζομεν δὲ τὴν τάξιν τῶν ἀπειροστῶν ὡς ἑξῆς.

Πρώτης τάξεως λέγεται πᾶν ἀπειροστὸν α, ἐὰν ὁ λόγος αὐτοῦ πρὸς τὸ πρωτεῦον ε ἔχῃ ὅριον πεπερασμένον καὶ διάφορον τοῦ 0· ἐὰν δηλαδὴ εἶνε

$$\text{ορ}\,\frac{\alpha}{\varepsilon} = K,\qquad \text{ἔνθα } K \text{ εἶνε ἀριθμός τις ὡρισμένος}$$

καὶ τοῦ 0 διάφορος.

Δευτέρας τάξεως λέγεται πᾶν ἀπειροστὸν α, ἐὰν ὁ λόγος αὐτοῦ πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ε, ἤτοι πρὸς τὸ ε^2, ἔχῃ ὅριον πεπερασμένον καὶ τοῦ 0 διάφορον· τουτέστιν ἐὰν εἶνε

$$\text{ὅρ}\,\frac{\alpha}{\varepsilon^2} = K.$$

Καὶ γενικῶς *τῆς μ τάξεως* λέγεται ἀπειροστόν τι, ἐὰν ὁ λόγος αὐτοῦ πρὸς τὸ ε^μ, ἔχῃ ὅριον πεπερασμένον καὶ τοῦ 0 διάφορον· ἤτοι ἐὰν εἶνε

$$\text{ορ}\,\frac{\alpha}{\varepsilon^\mu} = K.$$

Ἡ ἰσότης αὕτη δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς

$$\frac{\alpha}{\varepsilon^\mu} = K + \beta$$

ἔνθα β εἶνε ποσότης τις πρὸς τὸ 0 τείνουσα, τουτέστιν ἀπειροστή· ὥστε πᾶν ἀπειροστὸν τῆς τάξεως μ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$\alpha = \varepsilon^\mu (K + \beta) = K\varepsilon^\mu + \beta.\,\varepsilon^\mu.$$

Τὸ μέρος $K\varepsilon^\mu$ γίνεται ἀσυγκρίτως μεγαλήτερον ἢ τὸ $\beta\varepsilon^\mu$ (διότι β γίνεται ἀπειροστόν, τὸ δὲ Κ εἶνε ὡρισμένος ἀριθμὸς διάφορος τοῦ 0)· καὶ λέγεται διὰ τοῦτο *πρωτεῦον* ἢ *κύριον μέρος* τοῦ ἀπειροστοῦ α ὡς πρὸς τὸ ἀπειροστὸν ε.

Ἀνωτέρας τάξεως ἢ ἄλλο λέγεται ἀπειροστόν τι, ἐὰν ὁ λόγος αὐτοῦ πρὸς τὸ ἄλλο ἔχῃ ὅριον τὸ μηδέν.

Ἰσοδύναμα λέγονται δύο ἀπειροστά, ἐὰν ὁ λόγος αὐτῶν ἔχῃ ὅριον τὴν μονάδα 1· τουτέστιν ἐὰν τὰ πρωτεύοντα μέρη αὐτῶν εἶνε ἴσα.

Ἡ διαφορὰ δύο ἰσοδυνάμων ἀπειροστῶν εἶνε ἀπειροστὸν ἀνωτέρας τάξεως ἢ ταῦτα· καὶ τἀνάπαλιν.

Διότι, ἂν εἶνε $\text{ὅρ}\,\frac{\alpha'}{\alpha}=1,$ θὰ εἶνε καὶ $\frac{\alpha'}{\alpha}=1+\beta,$

ἔνθα β εἶνε ἀπειροστόν τι, ἄρα $\alpha'=\alpha+\alpha\beta\cdot$

εἶνε δηλαδὴ ἡ διαφορὰ αβ τῶν ἀπειροστῶν α καὶ α′ ἀπειροστὸν ἀνωτέρας τάξεως ἢ ταῦτα· διότι $\text{ὅρ}\,\frac{\alpha\beta}{\alpha}=0.$ Καὶ τἀνάπαλιν, ἐὰν εἶνε $\alpha'-\alpha=\delta$, ἡ δὲ διαφορὰ δ εἶνε ἀπειροστὴ ἀνωτέρας τάξεως ἢ τὸ ἕτερον τούτων, θὰ εἶνε $\frac{\alpha'}{\alpha}=1+\frac{\delta}{\alpha}$ καὶ $\text{ὅρ}\,\frac{\alpha'}{\alpha}=1\cdot$ ἤτοι τὰ ἀπειροστὰ α καὶ α′ εἶνε ἰσοδύναμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

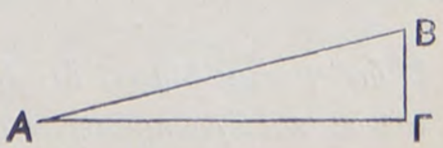
1) Ἐὰν ἡ αὔξησις ε τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x ληφθῇ ὡς πρωτεῦον ἀπειροστόν, τὸ διαφορικὸν πάσης συναρτήσεως $\sigma(x)$, ὅταν ἡ παράγωγος διαφέρῃ τοῦ 0, εἶνε ἀπειροστὸν πρώτης τάξεως, τὸ δεύτερον διαφορικὸν εἶνε ἀπειροστὸν δευτέρας τάξεως, τὸ τρίτον τρίτης, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Καὶ ἕκαστον διαφορικὸν εἶνε ἰσοδύναμον πρὸς τὴν ὁμοταγῆ διαφορὰν τῆς συναρτήσεως.

2) Τὸ τόξον πάσης καμπύλης καὶ ἡ χορδὴ αὐτοῦ γίνονται ἀπειροστὰ ἰσοδύναμα (Ι, ἐδ. 118).

3) Ἐὰν ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου μία τῶν ὀξειῶν γωνιῶν γίνηται ἀπειροστή, ἡ διαφορὰ τῶν περιεχουσῶν αὐτὴν πλευρῶν γίνεται ἀπειροστὸν δευτέρας τάξεως πρὸς αὐτήν.

Ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΓΒ, ἂς γίνηται δὲ ἀπειροστὴ ἡ γωνία Α, ἧς μέτρον ἔστω ὁ ἀριθμὸς α.



Ἐν πρώτοις εἶνε $\text{ΑΓ}=\text{ΑΒ}\,.\,\text{συν}\,\alpha$

καὶ ἐπειδὴ $\text{συν}\,\alpha=1-\frac{\alpha^2}{1\,.\,2}+\frac{\alpha^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}-\ldots,$

ἕπεται $$ΑΓ = ΑΒ\left(1 - \frac{α^2}{1.2} + \ldots\right)$$

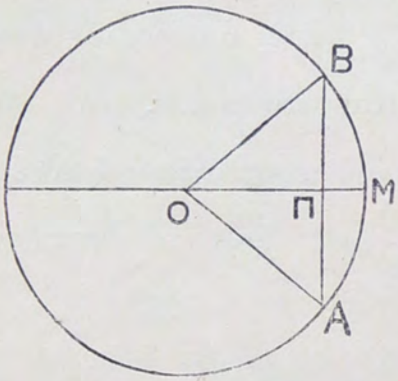
ἢ $$ΑΓ = ΑΒ - ΑΒ\left(\frac{α^2}{1.2} - \ldots\right)\cdot$$

εἶνε λοιπὸν ἡ διαφορὰ τῆς ὑποτεινούσης ΑΒ καὶ τῆς πλευρᾶς ΑΓ ἴση τῇ παραστάσει

$$\frac{1}{2}ΑΒ.α^2\left(1 - \frac{α^2}{1.2} + \ldots\right) \quad ἢ \quad \frac{1}{2}ΑΒ.α^2(1-β)$$

τοῦ β ὄντος ἀπειροστοῦ τινος.

Ἐκ τούτου γίνεται δῆλον, ὅτι, ἂν ἡ πλευρὰ ΑΒ μένῃ πεπερασμένη, ἡ εἰρημένη διαφορὰ θὰ εἶνε ἀπειροστὸν δευτέρας τάξεως πρὸς τὸ α.



4) Ἐὰν τόξον τι κύκλου γίνηται ἀπειροστόν, ἡ διαφορὰ αὐτοῦ ἀπὸ τῆς χορδῆς αὐτοῦ γίνεται ἀπειροστὸν τρίτης τάξεως πρὸς τὸ τόξον.

Ἄς γίνηται ἀπειροστὸν τὸ τόξον ΑΒ καὶ ἄς μετρῇ τὴν γωνίαν ΑΟΒ ὁ ἀριθμὸς α. Ἐὰν ἀχθῇ εἰς τὸ μέσον Μ τοῦ τόξου ἡ ἀκτὶς ΟΜ, ἣν παριστῶ διὰ ρ, θὰ εἶνε

$$ΒΠ = ρ\,ημ\left(\frac{α}{2}\right) \quad καὶ\ διὰ\ τοῦτο \quad ΑΒ = 2.ρ.ημ\left(\frac{α}{2}\right),$$

$$πρὸς\ τούτοις\ τοξ\,ΑΜΒ = ρ.α,$$

ὅθεν $$(τοξ\,ΑΜΒ) - (ΑΒ) = ρ\left(α - 2\,ημ\,\frac{α}{2}\right)$$

καὶ ἐπειδὴ $$ημ\left(\frac{α}{2}\right) = \frac{α}{2} - \frac{α^3}{2.4.6} + \frac{α^5}{2.4.6.8.10} - \ldots$$

ἕπεται $$(τοξ\,ΑΜΒ) - (ΑΒ) = ρ\left(\frac{α^3}{4.6} - \frac{α^5}{4.6.8.10} + \ldots\right) =$$

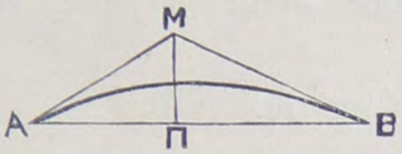
$$= ρ.\frac{α^3}{24}(1-β),$$

ἐξ ὧν γίνεται δῆλον, ὅτι ἡ εἰρημένη διαφορὰ εἶνε ἀπειροστὸν τρίτης τάξεως καὶ ἔχει πρωτεῦον μέρος τὸ

$$ρ.\frac{α^3}{24} \quad ἢ \quad τὸ \quad \frac{s^3}{24ρ^2}, \quad ἐὰν\ s = τοξ\,ΑΜΒ.$$

ΣΗΜ. Τὸ αὐτὸ ἀληθεύει καὶ περὶ τοῦ τόξου πάσης καμπύλης (ἰδὲ Ἀσκήσεις).

5) Ἐὰν τόξον τι γίνηται ἀπειροστόν, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ (ἀπὸ τῶν ἁφῶν μέχρι τῆς τομῆς αὐτῶν) διαφέρει ἀπὸ τῆς χορδῆς τοῦ τόξου κατὰ ἀπειροστὸν ἀνωτέρας τάξεως ἢ τὸ τόξον.



Διότι, ἂν ἀχθῇ ἐκ τῆς τομῆς τῶν ἐφαπτομένων κάθετος ἐπὶ τὴν χορδήν, θὰ εἶνε

$$(AM + MB) - AB < 2M\Pi$$

καὶ ἐπειδὴ $M\Pi = A\Pi \,.\, \text{εφ}\, A$, ἕπεται

$$(AM + MB) - AB < 2AB \,.\, \text{εφ}\, A\cdot$$

ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία A τείνει πρὸς τὸ 0, ἡ διαφορὰ τῶν ἐφαπτομένων ἀπὸ τῆς χορδῆς εἶνε ἀπειροστὸν ὡς πρὸς τὴν χορδήν· ἄρα ἀπειροστὸν καὶ ὡς πρὸς τὸ τόξον. Ἑπομένως τὸ τόξον AB, ἡ χορδὴ αὐτοῦ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ πέρατα αὐτοῦ γίνονται ἀπειροστὰ ἰσοδύναμα.

6) Ἐὰν τόξον τι MM′ γίνηται ἀπειροστόν, ἡ διαφορὰ τῶν ἐπ' αὐτὸ καθέτων εἰς τὰ σημεῖα M καὶ M′, θὰ γίνηται ἀπειροστὸν δευτέρας τάξεως τοὐλάχιστον ὡς πρὸς τὸ τόξον MM′.

Διότι, ἂν ἐκ τῆς τομῆς I τῶν καθέτων ἀχθῇ εἰς τὴν τομὴν E τῶν εἰς M καὶ M′ ἐφαπτομένων τοῦ τόξου, ἡ IE, ἑκατέρα τῶν καθέτων IM′, IM θὰ διαφέρῃ ἀπὸ τῆς IE κατὰ ἀπειροστὸν δευτέρας τοὐλάχιστον τάξεως ὡς πρὸς τὸ τόξον.

Ἡ σημασία τῆς διακρίσεως τῶν ἀπειροστῶν εἰς τάξεις καταφαίνεται ἐκ τῶν ἑπομένων δύο θεωρημάτων, ἅτινα ἔχουσι μέγα μέρος ἐν ταῖς ἐφαρμογαῖς τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ (τὸ πρῶτον) καὶ τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ (τὸ δεύτερον).

ΘΕΩΡΗΜΑ Α′.

3. *Τὸ ὅριον τοῦ λόγου δύο ἀπειροστῶν δὲν ἀλλάσσει, ἐὰν ἑκάτερον ἐξ αὐτῶν ἀντικατασταθῇ ὑπ' ἄλλου ἰσοδυνάμου.*

Ἔστωσαν α καὶ β δύο τυχόντα ἀπειροστὰ καὶ τοῦ μὲν α ἰσοδύναμον ἔστω τὸ α′, τοῦ δὲ β τὸ β′· λέγω, ὅτι θὰ εἶνε

$$\text{ὅρ}\,\frac{\alpha}{\beta} = \text{ὅρ}\,\frac{\alpha'}{\beta'}.$$

Διότι ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν

$$\text{ὅρ}\,\frac{\alpha'}{\alpha} = 1 \qquad \text{καὶ}\quad \text{ὅρ}\,\frac{\beta'}{\beta} = 1\cdot$$

ἑπομένως θὰ εἶνε καὶ

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = 1 + \vartheta, \qquad \frac{\beta'}{\beta} = 1 + \eta,$$

τῶν ϑ καὶ η ὄντων ἀπειροστῶν· αἱ δὲ ἰσότητες αὗται γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς·

$$\alpha' = \alpha(1 + \vartheta) \qquad \text{καὶ} \qquad \beta' = \beta(1 + \eta),$$

ἐξ ὧν
$$\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{1 + \vartheta}{1 + \eta}.$$

ὅθεν
$$\text{ὅρ}\,\frac{\alpha'}{\beta'} = \left(\text{ὅρ}\,\frac{\alpha}{\beta}\right) \cdot \text{ὅρ}\,\frac{1 + \vartheta}{1 + \eta} = \text{ὅρ}\,\frac{\alpha}{\beta}.$$

Σημ. Τὸ αὐτὸ θεώρημα ἀποδεικνύεται καὶ συντομώτερον ἐκ τῆς ταὐτότητος

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha'}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\beta'},$$

ἐὰν ληφθῶσι τὰ ὅρια ἀμφοτέρων τῶν μελῶν αὐτῆς.

4. Ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ τῶν ἰσοδυνάμων ἀπειροστῶν α καὶ α' εἶνε ἀπειροστὸν ἀνωτέρας τάξεως ἢ ταῦτα, ὡσαύτως καὶ ἡ διαφορὰ τῶν β καὶ β', συνάγεται, ὅτι τὸ αὐτὸ θεώρημα δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἕπεται.

Τὸ ὅριον τοῦ λόγου δύο ἀπειροστῶν δὲν ἀλλάσσει, ἐὰν εἰς ἑκάτερον ἐξ αὐτῶν προστεθῇ ἢ ἀφαιρεθῇ ἀπειροστόν τι ἀνωτέρας τάξεως ἢ τοῦτο.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄.

5. *Τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος ἀπειροστῶν δὲν ἀλλάσσει, ἐὰν ἕκαστον ἐξ αὐτῶν ἀντικατασταθῇ ὑπ᾽ ἄλλου ἰσοδυνάμου.*

Ἔστωσαν ἀπειροστὰ τὰ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu$, ὧν τὸ πλῆθος ὑποτίθεται αὐξάνον εἰς ἄπειρον, καθ᾽ ὅσον ἕκαστον ἐξ αὐτῶν τείνει πρὸς τὸ μηδὲν (ὡς ὅταν λόγου χάριν μέγεθός τι διαιρῆται εἰς ἴσα μέρη)· ἰσοδύναμα δὲ πρὸς αὐτὰ κατὰ σειρὰν τὰ $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \ldots, \alpha'_\nu$ · λέγω, ὅτι, ἐὰν τὸ ἄθροισμα

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_\nu$$

ἔχῃ ὅριόν τι ϱ, καὶ τὸ ἄθροισμα

$$\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 + \ldots + \alpha'_\nu \qquad \text{θὰ τείνῃ πρὸς τὸ αὐτὸ ὅριον } \varrho.$$

Διότι ἐκ τῶν ἰσοτήτων

$$ορ\frac{α'_1}{α_1}=1, \qquad ορ\frac{α'_2}{α_2}=1,\ldots \qquad ορ\frac{α'_ν}{α_ν}=1$$

συνάγεται καὶ πάλιν

$$\begin{aligned} α'_1 &= α_1 + α_1 ε_1 \\ α'_2 &= α_2 + α_2 ε_2 \\ α'_3 &= α_3 + α_3 ε_3 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ α'_ν &= α_ν + α_ν ε_ν, \end{aligned}$$

ἔνθα τὰ $ε_1$, $ε_2$, $ε_3,\ldots$ δηλοῦσιν ἀπειροστά τινα.

Ἐντεῦθεν ἕπεται

$$(α'_1+α'_2+α'_3+\ldots+α'_ν) = (α_1+α_2+α_3+\ldots+α_ν)+ \\ +(α_1 ε_1+α_2 ε_2+\ldots+α_ν ε_ν)$$

καὶ $$ὅρ(α'_1+α'_2+α'_3+\ldots+α'_ν) = ὅρ(α_1+α_2+α_3+\ldots+α_ν)+ \\ +ὅρ(α_1 ε_1+α_2 ε_2+\ldots+α_ν ε_ν).$$

Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα $\quad α_1 ε_1+α_2 ε_2+α_3 ε_3+\ldots+α_ν ε_ν$

ἔχει ὅριον τὸ μηδέν. Διότι, ἂν παραστήσωμεν τὰ μέτρα τῶν $α_1, α_2,\ldots,α_ν$ κατὰ σειρὰν διὰ $A_1, A_2,\ldots,A_ν$ καὶ τὰ μέτρα τῶν $ε_1, ε_2,\ldots,ε_ν$ διὰ τῶν $E_1, E_2,\ldots,E_ν$ τὸ δὲ μέγιστον ἐκ τῶν $E_1, E_2,\ldots,E_ν$ εἶνε τὸ $E_τ$, θὰ εἶνε προφανῶς

$$|α_1 ε_1+α_2 ε_2+α_3 ε_3+\ldots+α_ν ε_ν| < A_1 E_τ+A_2 E_τ+A_3 E_τ+\ldots+A_ν E_τ,$$

τουτέστιν $$|α_1 ε_1+α_2 ε_2+α_3 ε_3+\ldots+α_ν ε_ν| < E_τ(A_1+A_2+A_3+\ldots+A_ν)$$

καὶ τὸ μὲν ἄθροισμα $\quad A_1+A_2+A_3+\ldots+A_ν \quad$ ἔχει ὅριόν τι πεπερασμένον (διότι τότε λέγομεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα

$$α_1+α_2+α_3+\ldots+α_ν$$

ἔχει ὅριόν τι πεπερασμένον, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν ὅρων του ἔχῃ ὅριον πεπερασμένον), τὸ δὲ $E_τ$ τείνει πρὸς τὸ μηδέν· ἄρα θὰ εἶνε

$$ὅρ(α_1 ε_1+α_2 ε_2+\ldots+α_ν ε_ν)=0$$

καὶ ἑπομένως $\quad ὅρ(α'_1+α'_2+\ldots+α'_ν)=ὅρ(α_1+α_2+\ldots+α_ν).$

Τὸ αὐτὸ θεώρημα δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς·

Τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος ἀπειροστῶν δὲν ἀλλάσσει, ἐὰν εἰς ἕκα-

στον ἐξ αὐτῶν προστεθῇ ἢ ἀφαιρεθῇ ἀπειροστόν τι ἀνωτέρας τάξεως ἢ τοῦτο.

Ἐκ τῆς προηγουμένης ἀποδείξεως συνάγεται προσέτι καὶ τὸ ἑξῆς πόρισμα·

Ἐὰν τὸ ἄθροισμα πλήθους τινὸς ἀπειροστῶν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ *ἔχῃ ὅριόν τι καὶ πολλαπλασιασθῇ ἕκαστον ἐξ αὐτῶν ἐπί τι ἀπειροστόν, τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων θὰ ἔχῃ ὅριον τὸ μηδέν.*

ΣΗΜ. Ἐν τῷ θεωρήματι τούτῳ τὸ πλῆθος τῶν ἀθροιζομένων ἀπειροστῶν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ ὑποτίθεται αὐξάνον εἰς ἄπειρον, καθ' ὅσον ἕκαστον ἐξ αὐτῶν τείνει πρὸς τὸ μηδέν· διότι, ἂν τὸ πλῆθος τῶν ἀπειροστῶν μένῃ πεπερασμένον, φανερὸν εἶνε, ὅτι τὸ ἄθροισμά των ἔχει ὅριον τὸ μηδέν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

6. Τὰ δύο προηγούμενα θεωρήματα εὐκολύνουσι μεγάλως τὴν ἐφαρμογὴν τῶν ἀπειροστῶν εἰς τὴν γεωμετρίαν. Διότι ἡ ἐν τοῖς γεωμετρικοῖς ζητήμασι χρῆσις τῶν ἀπειροστῶν ἄγει συνήθως εἰς τὰ ἑξῆς δύο γενικώτατα ζητήματα.

1) *Εὑρεῖν τὸ ὅριον τοῦ λόγου δύο ἀπειροστῶν.*

Εἰς τὸ ζήτημα τοῦτο ἀνάγεται, λόγου χάριν, ἡ εὕρεσις τῆς ἐξισώσεως τῆς ἐφαπτομένης οἱασδήποτε καμπύλης εἰς δοθὲν σημεῖον (ἰδὲ Ι, ἐδ. 122).

2) *Εὑρεῖν τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος ἀπειροστῶν, τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος αὐξάνει εἰς ἄπειρον, καθ' ὅσον ταῦτα τείνουσιν ἕκαστον πρὸς τὸ μηδέν.*

Εἰς τὸ ζήτημα τοῦτο ἀνάγεται ὁ τετραγωνισμὸς τῶν ἐπιπέδων χωρίων (ἰδὲ Ι, ἐδ. 113) καὶ ἐν γένει ἡ καταμέτρησις παντὸς μεγέθους γεωμετρικοῦ. Ἔχοντες μέγεθός τι γεωμετρικὸν δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸ εἰς πλῆθος μεγεθῶν ὁμοειδῶν καὶ τοιούτων, ὥστε ἕκαστον ἐξ αὐτῶν νὰ γίνηται ἀπειροστόν, ὅτε κατ' ἀνάγκην ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν θὰ αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον· τὸ ἄθροισμα πάντων τούτων τῶν μερῶν ἰσοῦται πάντοτε πρὸς τὸ ἀρχικὸν μέγεθος. Ἀλλὰ τὸ δεύτερον θεώρημα ἐπιτρέπει τὴν ἐξομοίωσιν ἑκάστου τῶν μερῶν πρὸς ἄλλο γνωστόν, οὗτινος εἰξεύρομεν τὸ μέτρον, καὶ τὴν ἀντικατάστασιν αὐτοῦ διὰ τοῦ γνωστοῦ τούτου, χωρὶς τὸ παράπαν νὰ μεταβληθῇ τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος. Οὕτως ἐν τῇ εὑρέσει τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν ἐπιπέδων καμπύλων διῃρέσαμεν τὸ χωρίον διὰ τῶν τεταγμένων τῆς καμπύλης εἰς στενὰς ταινίας καὶ ἐξωμοιώσαμεν ἑκάστην ἐξ αὐτῶν πρὸς ὀρθογώνιον ἀποδείξαντες, ὅτι ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶνε ἀπειροστὸν ἀνωτέρας τάξεως ἢ αὐτά· καὶ ἐν ταῖς πολικαῖς συντεταγμέναις διῃρέσαμεν τὸ χωρίον εἰς τομεῖς ἔχοντας γωνίαν ἀπειροστὴν καὶ ἐξωμοιώσαμεν ἕκαστον ἐξ αὐτῶν πρὸς κυκλικὸν τομέα. Ὅμοια δὲ συμβαίνουσι καὶ ἐν τῇ καταμετρήσει παντὸς μεγέθους· ὥστε ἀνάγεται πᾶσα καταμέτρησις εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ὁρίου, πρὸς ὃ τείνει τὸ ἄθροισμα ἀπειροστῶν· τουτέστι τὸ ἄθροισμα μερῶν γνωστῶν, ὧν ἕκαστον τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ἐν ᾧ τὸ πλῆθος αὐτῶν αὐξάνει εἰς ἄπειρον· ἀλλὰ περὶ τούτων πραγματεύεται ἐν ἐκτάσει ὁ Ὁλοκληρωτικὸς Λογισμός. Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν τοῦτο μόνον, ὅτι ἡ γνῶσις τῶν ἀπειροστῶν καὶ τῆς τάξεως αὐτῶν συντελεῖ μεγάλως εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς λύσεως τῶν γεωμετρικῶν ζητημάτων· διότι παρέχει εἰς τὸν νοῦν τὰ σημαντικώτατα ἐν ἑκάστῳ ζητήματι στοιχεῖα, ἀφ' ὧν καὶ μόνων ἐξαρτᾶται ἡ λύσις· ταῦτα δὲ θεωρῶν ὁ νοῦς καὶ παρατρέχων, ὡς ἄχρηστα, πάντα τὰ λοιπά, φθάνει ταχύτερον (ἂν καὶ ὄχι ἀσφαλέστερον) εἰς τὴν λύσιν.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἡ τάξις τῶν ἀπειροστῶν δὲν ἀλλάσσει, ἐὰν ἀντὶ τοῦ πρωτεύοντος ἀπειροστοῦ ληφθῇ ἄλλο οἱονδήποτε πρώτης τάξεως πρὸς αὐτό.

2) Αἱ πρὸς ἰσοδιαφόρους τιμὰς μιᾶς μεταβλητῆς (ὧν τὸ πλῆθος πεπερασμένον) ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ οἱασδήποτε συναρτήσεως αὐτῆς δὲν εἶνε μὲν ἐν γένει ἰσοδιάφοροι· ἀλλ' αἱ διαφοραὶ αὐτῶν εἶνε ἀπειροστὰ ἰσοδύναμα.

3) Ἡ ἀπόστασις τοῦ ἑνὸς ἄκρου τοῦ τόξου οἱασδήποτε καμπύλης ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον, εἶνε ἀπειροστὸν ἀνωτέρας τάξεως ἢ τὸ τόξον, ἡ δὲ προβολὴ τοῦ τόξου ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην εἶνε ἀπειροστὸν ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τόξον.

4) Ἡ διαφορὰ τοῦ τόξου οἱασδήποτε καμπύλης ἀπὸ τῆς χορδῆς αὐτοῦ γίνεται ἀπειροστὸν τρίτης τάξεως πρὸς τὸ τόξον.

Ἡ μὲν ἀρχὴ Ο τοῦ τόξου ἂς ληφθῇ ὡς πόλος, ἡ δὲ ἐφαπτομένη αὐτοῦ ΟΧ ὡς πολικὸς ἄξων· ἡ πολικὴ ἀκτὶς $\varrho = \mathrm{OM}$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς συνάρτησις τοῦ μήκους s τοῦ τόξου ΟΜ, καὶ νὰ ἀναπτυχθῇ κατὰ τὸν τύπον τοῦ Μακλωρίνου ἔστω

$$\varrho = \mathrm{A}s + \mathrm{B}\frac{s^2}{1.2} + \Gamma . \frac{s^3}{1.2.3} + \dots$$

Ἵνα εὕρωμεν τοὺς συντελεστὰς Α, Β, Γ, ... τουτέστι τὰς τιμὰς τῶν παραγώγων $\frac{d\varrho}{ds}, \frac{d^2\varrho}{ds^2}, \dots$ διὰ $s = 0$, παρατηροῦμεν, ὅτι εἶνε $\frac{d\varrho}{ds} =$ συνφ. (Ι, ἐδ. 120).

Ἐντεῦθεν ἕπεται

$$\frac{d^2\varrho}{ds^2} = -\,\text{ημφ}.\,\frac{d\varphi}{ds}$$

$$\frac{d^3\varrho}{ds^3} = -\,\text{συνφ}.\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - \text{ημφ}\;\frac{d^2\varphi}{ds^2}$$

. . . .

ἐξ ὧν ὑποθέτοντες $s=0$, εὑρίσκομεν (διότι ἡ γωνία φ γίνεται 0 διὰ $s=0$)

$$\mathrm{A} = 1, \quad \mathrm{B} = 0, \qquad \Gamma = -\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_0^2$$

καὶ $$\varrho = s - \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_0^2 \cdot \frac{s^3}{6} - \ldots,$$

ὅθεν καὶ $$s - \varrho = \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_0^2 \cdot \frac{s^3}{6} + \ldots$$

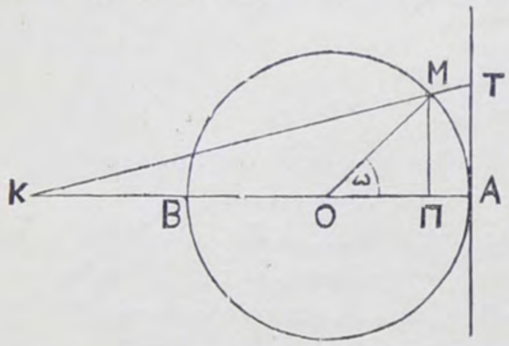
5) Αἱ δύο γωνίαι τῆς χορδῆς πρὸς τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου οἱαςδήποτε καμπύλης γίνονται ἀπειροστὰ ἰσοδύναμα.

Καὶ ἡ γωνία τῶν ἐφαπτομένων γίνεται ἀπειροστὸν ἰσοδύναμον πρὸς τὸ διπλάσιον ἑκατέρας ἐξ αὐτῶν.

6) Ἡ εἰς τόξον ἀπειροστὸν καμπύλης οἱαςδήποτε ἐγγεγραμμένη γωνία διαφέρει ἀπὸ τῶν δύο ὀρθῶν κατὰ ἀπειροστόν τι, ὅπερ εἶνε ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου.

ΣΗΜ. Τοιαῦτα θεωρήματα γεωμετρικῶς ἀποδεικνυόμενα ἰδὲ ἐν τῷ βιβλίῳ τοῦ C. Ruchonnet, Exposition géométrique des propriétés générales des courbes.

7) Ἐκ τοῦ ἑνὸς ἄκρου κυκλικοῦ τόξου, ὡς τοῦ ΑΜ, ἄγεται ἡ ἐφαπτομένη ΑΤ καὶ ἡ διάμετρος ΑΒ· ἐκ δὲ τοῦ ἄλλου ἄγεται ἡ ΜΚ, λαμβανομένου τοῦ Κ εἰς ἀπόστασιν ΑΚ τριπλασίαν τῆς ἀκτῖνος. Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης, ὅπερ ὁρίζει ἡ εὐθεῖα ΚΜ, ἤτοι τὸ ΑΤ, εἶνε μικρότερον τοῦ τόξου κατὰ ἀπειροστόν τι πέμπτης τάξεως πρὸς αὐτό.



Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ δ τὴν διαφορὰν τοξ ΑΜ—ΑΤ, εὑρίσκομεν εὐκόλως ἐκ τῶν τριγώνων ΚΜΠ καὶ ΚΤΑ

$$AT = \frac{3\varrho\eta\mu\omega}{2+\sigma\upsilon\nu\omega}, \qquad \omega = \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha\ MOA.$$

ὅθεν $$\frac{\delta}{\varrho} = \frac{\omega(2+\sigma\upsilon\nu\omega) - 3\eta\mu\omega}{2+\sigma\upsilon\nu\omega}$$ καὶ ἀναπτύσσοντες εὑρίσκομεν

$$\frac{\delta}{\varrho} = \frac{2\left(\frac{\omega^5}{1.2\ 3.4.5} - \frac{2\omega^7}{1\ldots7} + \frac{3\omega^9}{1\ldots9} - \ldots\right)}{2+\sigma\upsilon\nu\omega}.$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ἡ διαφορὰ δ ἔχει πρωτεῦον μέρος τὸ

$$\varrho\,\frac{\omega^5}{180} \quad \text{ἢ} \quad \frac{s^5}{180.\varrho^4}\cdot \quad \text{καὶ ὅτι εἶνε} \quad \delta < \varrho.\,\frac{\omega^5}{60(2+\sigma\upsilon\nu\omega)}\cdot$$

ὥστε, ἂν ὑποτεθῇ τὸ τόξον ΑΜ μικρότερον τῶν 30^0, ἤτοι $\omega < \frac{\pi}{6}$, ἢ $\omega < \frac{32}{60}$,

θὰ εἶνε $$\delta < \frac{1}{4000}\varrho.$$

Ἡ κατασκευὴ αὕτη τοῦ ἀναπτύγματος τῶν κυκλικῶν τόξων εἶνε ἁπλουστάτη καὶ δίδει τὸ μῆκος τῶν τόξων μὲ προσέγγισιν πολὺ μεγαλυτέραν, ἢ ὅση ἀπαιτεῖται εἰς τὴν πρᾶξιν, ἕνεκα τῶν εἰς τὰς κατασκευὰς συμβαινόντων λαθῶν.

8) Ἐὰν λάβωμεν ἀπὸ τοῦ σημείου Μ τὸ τόξον ΜΝ ἴσον τῷ ΑΜ (ἤτοι τοξ ΑΜΝ = 2 τοξ ΑΜ) καὶ ἐπιζεύξωμεν ἔπειτα τὴν ΚΝ, αὕτη θὰ τέμνῃ τὴν ἐφαπτομένην κατά τι σημεῖον Σ. Νὰ δειχθῇ, ὅτι εἶνε

$$\text{τοξ}\ AM = AT + \frac{2AT - A\Sigma}{30} + \text{ἀπειροστῷ τινι 7ης τάξεως}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

Περὶ τοῦ κυρτοῦ καὶ τοῦ κοίλου τῶν καμπύλων· σημεῖα καμπῆς.

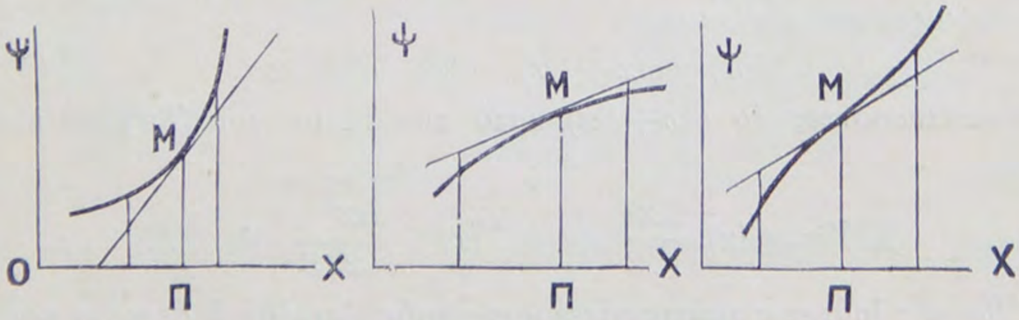
ΣΗΜ. Ἐν πᾶσι τοῖς ἑπομένοις ὁ λόγος γίνεται μόνον περὶ τῶν ὁμαλῶν σημείων τῶν καμπύλων· λέγω δὲ ὁμαλὸν τὸ σημεῖον (α, β) καμπύλης τινός, ἐὰν ἐν τῇ περιοχῇ αὐτοῦ ἡ ἑτέρα τῶν συντεταγμένων y ἢ x ἔχῃ τὸν χαρακτῆρα ἀκεραίας συναρτήσεως τῆς ἑτέρας· τουτέστιν, ἐὰν ἡ ἑτέρα τῶν αὐξήσεων $y-\beta$, ἢ $x-\alpha$, ἀναπτύσσηται εἰς σειρὰν κατὰ τὰς θετικὰς καὶ ἀκεραίας δυνάμεις τῆς ἄλλης διὰ πάσας τὰς τιμὰς αὐτῆς, ὧν τὸ μέτρον δὲν ὑπερβαίνει ἀριθμόν τινα. (Ἰδὲ Ι, σελ. 190 Σημ.).

Περὶ τῶν σημείων, ἐν οἷς τοῦτο δὲν συμβαίνει, καὶ τὰ ὁποῖα λέγω *ἀνώμαλα*, θὰ γίνῃ λόγος ἐν ἰδίῳ τόπῳ.

7. Ἐὰν εἴς τι σημεῖον καμπύλης ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη αὐτῆς, ἡ θέσις τῆς καμπύλης πρὸς τὴν ἐφαπτομένην, πλησίον τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς, δύναται νὰ εἶνε διττή· δηλονότι τὰ δύο τόξα, τὰ εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς συνερχόμενα, καὶ πρὸς τὰ δύο μέρη τῆς ἐφαπτομένης προσεγγίζοντα, ἢ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ἐφαπτομένης, ἢ κεῖνται ἐξ ἀντιθέτων. Τὰ σημεῖα, ἐν οἷς τὸ δεύτερον συμβαίνει, ἔνθα ἑπομένως ἡ ἐφαπτομένη διαπερᾷ τὴν καμπύλην κατὰ τὴν ἁφήν, λέγονται *σημεῖα καμπῆς*.

ΣΗΜ. Ἐὰν τὰ δύο τόξα τὰ εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἁφῆς συνερχόμενα προσεγγίζωσι πρὸς τὸ αὐτὸ τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης, τὸ σημεῖον τοῦτο εἶνε ἀνώμαλον.

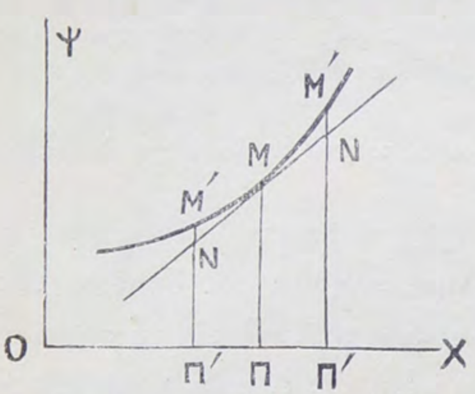
8. Ἐὰν ἡ ἐφαπτομένη δὲν εἶνε παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν τεταγμένων, γίνεται φανερὸν ἀμέσως ἐκ τοῦ σχήματος, ὅτι ἐν μὲν τῇ πρώτῃ



περιπτώσει αἱ τεταγμέναι τῆς καμπύλης ἔνθεν καὶ ἔνθεν τῆς ἁφῆς εἶνε εἴς διάστημά τι ἢ πᾶσαι μεγαλήτεραι τῶν τεταγμένων τῆς ἐφαπτομένης, ἢ πᾶσαι μικρότεραι. Ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ, τὸ μὲν ἕτερον τῶν τόξων ἔχει τεταγμένας μεγαλητέρας ἢ ἡ ἐφαπτομένη, τὸ δὲ ἕτερον μικροτέρας.

8. Τῶν ἀξόνων ὄντων ὀρθογωνίων, ἂν μὲν αἱ τεταγμέναι τῆς καμπύλης ἔνθεν καὶ ἔνθεν τῆς ἁφῆς ὑπερβαίνωσι τὰς τεταγμένας τῆς ἐφαπτομένης, λέγομεν, ὅτι εἰς τὴν ἁφὴν ἡ καμπύλη *στρέφει τὰ κοῖλα αὐτῆς πρὸς τὰ ἄνω*· ἂν δὲ αἱ τεταγμέναι τῆς καμπύλης ἔνθεν καὶ ἔνθεν τῆς ἁφῆς εἶνε μικρότεραι ἢ τῆς ἐφαπτομένης, λέγομεν, ὅτι ἡ καμπύλη *στρέφει τὰ κοῖλα αὐτῆς πρὸς τὰ κάτω*.

Τὰς θέσεις ταύτας διακρίνομεν εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς καμπύλης ἐκ τῆς δευτέρας παραγώγου $\frac{d^2y}{dx^2}$, ὡς ἑξῆς φαίνεται.



Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τῆς καμπύλης καὶ x, y αἱ συντεταγμέναι αὐτοῦ. Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης εἶνε

$$y = \sigma(x),$$

ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον Μ θὰ εἶνε

$$\Psi - y = \sigma'(x)\,(X - x).$$

Ἵνα νῦν συγκρίνωμεν τὰς τεταγμένας τῆς καμπύλης καὶ τῆς ἐφαπτομένης πέριξ τῆς ἁφῆς Μ, μεταβάλλομεν τὴν τετμημένην ΟΠ τοῦ Μ κατά τινα ποσότητα ΠΠ′, ἢ Δx, θετικὴν ἢ ἀρνητικήν. Αἱ πρὸς τὴν μεταβληθεῖσαν τετμημένην ΟΠ′, ἤτοι $x+\Delta x$, ἀντιστοιχοῦσαι τεταγμέναι τῆς μὲν καμπύλης εἶνε ἡ Π′Μ′, τῆς δὲ ἐφαπτομένης ἡ Π′Ν· ἔχομεν δὲ κατὰ τὰς ἐξισώσεις αὐτῶν

$$\Pi'M' = \sigma(x+\Delta x)$$
$$\Pi'N = y + \sigma'(x).\Delta x = \sigma(x) + \sigma'(x).\Delta x\cdot$$

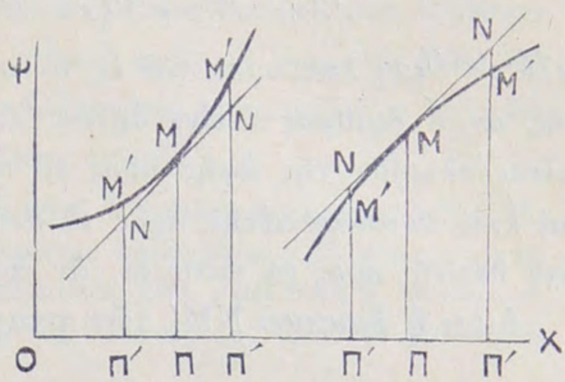
ὅθεν ἀφαιροῦντες εὑρίσκομεν

$$NM' = \sigma(x+\Delta x) - \sigma(x) - \sigma'(x)\Delta x$$

καὶ ἀναπτύσσοντες τὸ $\sigma(x+\Delta x)$ κατὰ τὸν τύπον τοῦ Taylor εὑρίσκομεν

$$NM' = \sigma''(x).\frac{\Delta x^2}{1.2} + \sigma'''(x)\,\frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \dots$$

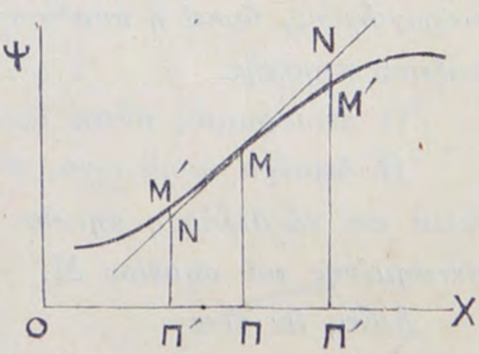
Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης γίνεται φανερόν, ὅτι, ἐὰν ἡ δευτέρα παράγωγος $\sigma''(x)$ διαφέρῃ τοῦ 0, ἡ διαφορὰ ΝΜ′ τῶν δύο τεταγμένων ἔχει ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον (τὸ τοῦ ὅρου $\sigma''(x)\,\frac{\Delta x^2}{2}$, ἤτοι τὸ τῆς παραγώγου $\sigma''(x)$), εἴτε θετικὴ ληφθῇ ἡ αὔξησις Δx εἴτε ἀρνητική, ἀρκεῖ νὰ εἶνε ἱκανῶς μικρὰ (Ι, ἐδ. 119)· τουτέστιν ἡ σχέσις τῶν τεταγμένων τῆς καμπύλης καὶ τῆς ἐφαπτομένης μένει ἡ αὐτὴ ἔνθεν καὶ ἔνθεν τῆς ἀφῆς· καὶ ἂν μὲν εἶνε $\sigma''(x)$ θετικόν, αἱ τεταγμέναι τῆς καμπύλης εἶνε μεγαλήτεραι ἢ τῆς ἐφαπτομένης· ἑπομένως ἡ καμπύλη στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω· ἂν δὲ τοὐναντίον εἶνε $\sigma''(x)$ ἀρνητικόν, αἱ τεταγμέναι τῆς καμπύλης εἶνε μικρότεραι ἢ τῆς ἐφαπτομένης· ἑπομένως ἡ καμπύλη στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ κάτω.



Ἐὰν διὰ τὴν τετμημένην τοῦ σημείου Μ εἶνε $\sigma''(x)=0$, ἀλλὰ $\sigma'''(x)$ διάφορον τοῦ 0, ἡ διαφορὰ ΝΜ′ τῶν τεταγμένων γίνεται

$$NM'=\sigma'''(x)\frac{\Delta x^3}{1.2.3.}+\ldots$$

καὶ ἑπομένως ἔχει (τῆς αὐξήσεως Δx οὔσης ἱκανῶς μικρᾶς) ἄλλο σημεῖον, ὅταν Δx εἶνε θετικόν, καὶ ἄλλο, ὅταν Δx εἶνε ἀρνητικόν· τουτέστιν αἱ τεταγμέναι τοῦ ἑτέρου τῶν δύο τόξων, τῶν εἰς τὸ Μ συνερχομένων, εἶνε μεγαλήτεραι τῶν τεταγμένων τῆς ἐφαπτομένης τοῦ δὲ ἑτέρου μικρότεραι· ὥστε ταῦτα κεῖνται πρὸς διάφορα μέρη τῆς ἐφαπτομένης· διὰ τοῦτο ἡ ἐφαπτομένη διαπερᾷ τὴν καμπύλην εἰς τὸ σημεῖον Μ τῆς ἐπαφῆς· καὶ ἑπομένως τὸ σημεῖον Μ εἶνε τότε σημεῖον καμπῆς.



Ἀλλ' ἐὰν εἰς τὸ σημεῖον Μ εἶνε συνάμα

$$\sigma''(x)=0 \quad \text{καὶ} \quad \sigma'''(x)=0,$$

ἀλλὰ $\sigma^{(4)}(x)$ διαφέρῃ τοῦ 0, ἡ διαφορὰ τῶν τεταγμένων γίνεται

$$NM'=\sigma^{(4)}(x)\cdot\frac{\Delta x^4}{1.2.3.4}+\ldots.$$

καὶ ἑπομένως ἔχει τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μερῶν περὶ τὴν ἀφὴν Μ (ὅταν ἡ αὔξησις Δx λαμβάνηται ἱκανῶς μικρά)· ὥστε ἡ καμπύλη στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω μέν, ἂν $\sigma^{(4)}(x)$ εἶνε θετική·

πρὸς τὰ κάτω δέ, ἂν ἀρνητική· καὶ κεῖται πλησίον τῆς ἁφῆς πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ἐφαπτομένης.

Ἐν γένει, ἂν ἡ τετμημένη τοῦ σημείου Μ καθιστᾷ

$$\sigma''(x)=0, \quad \sigma'''(x)=0, \quad \ldots, \quad \sigma^{(\nu)}(x)=0,$$

ἀλλὰ $\sigma^{(\nu+1)}(x)$ διάφορον τοῦ 0, τὸ σημεῖον Μ θὰ εἶνε σημεῖον καμπῆς, ἂν ὁ ἀριθμὸς ν εἶνε ἄρτιος· ἀλλ' ἂν εἶνε περιττός, ἡ καμπύλη κεῖται πλησίον τῆς ἁφῆς πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ἐφαπτομένης της καὶ ἔχει τὰ κοῖλα αὐτῆς πρὸς τὰ ἄνω μέν, ἂν ἡ παράγωγος $\sigma^{(\nu+1)}(x)$ εἶνε θετική, πρὸς τὰ κάτω δέ, ἂν ἀρνητική.

Διότι ἡ διαφορὰ ΝΜ΄ τῶν τεταγμένων γίνεται τότε

$$NM'=\sigma^{(\nu+1)}(x).\frac{\Delta x^{\nu+1}}{1.2.3..(\nu+1)}+\ldots$$

καὶ ἂν μὲν εἶνε ὁ ν ἄρτιος, θὰ εἶνε ὁ ν+1 περιττὸς καὶ ἡ διαφορὰ ΝΜ΄ ἀλλάσσει σημεῖον μετὰ τοῦ Δx· ἀλλ' ἂν εἶνε ὁ ν περιττός, ὁ ν+1 θὰ εἶνε ἄρτιος καὶ ἡ διαφορὰ ΝΜ΄ διατηρεῖ τὸ ἑαυτῆς σημεῖον ἔνθεν καὶ ἔνθεν τῆς ἁφῆς.

9. Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι

Αἱ τετμημέναι τῶν σημείων καμπῆς ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν

$$\sigma''(x)=0$$

καὶ δύνανται νὰ μηδενίζωσιν ἀπὸ τῆς δευτέρας καὶ ἑξῆς ὁσασδήποτε παραγώγους, ἀρκεῖ ἡ παράγωγος, ἥτις πρώτη δὲν μηδενίζεται, νὰ εἶνε τάξεως περιττῆς.

Ὁ περιορισμὸς οὗτος ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸν ἑπόμενον·

Ἡ δευτέρα παράγωγος $\sigma''(x)$ πρέπει οὐ μόνον νὰ μηδενίζηται ἀλλὰ καὶ νὰ ἀλλάσσῃ σημεῖον, ὅταν ἡ μεταβλητὴ x διέρχηται διὰ τῆς τετμημένης τοῦ σημείου Μ.

Διότι, ἂν εἶνε

$$\sigma''(x)=0, \qquad \sigma'''(x)=0, \ldots, \sigma^{(\nu)}(x)=0,$$

ἀλλὰ $\sigma^{(\nu+1)}(x)$ διάφορον τοῦ 0, καὶ ἀναπτυχθῇ ἡ τιμὴ $\sigma''(x+\Delta x)$ τῆς δευτέρας παραγώγου, προκύπτει

$$\sigma''(x+\Delta x)=\sigma^{(\nu+1)}(x).\frac{\Delta x^{\nu-1}}{1.2..(\nu-1)}+\ldots$$

καὶ ἂν μὲν ὁ ν+1 εἶνε περιττὸς ἀριθμός, καὶ ὁ ν—1 θὰ εἶνε τοιοῦτος, ἑπομένως ἡ παράγωγος $\sigma''(x)$ θὰ ἀλλάσσῃ σημεῖον μετὰ τοῦ Δx, (ὅταν τοῦτο εἶνε ἱκανῶς μικρόν)· θὰ ἔχῃ λοιπὸν ἔνθεν καὶ ἔνθεν τῆς ἁφῆς ἀντίθετα σημεῖα· ἂν ὅμως ὁ $\nu-1$ εἶνε ἄρτιος, τὸ σημεῖον τῆς δευτέρας παραγώγου διατηρεῖται τὸ αὐτὸ ἔνθεν καὶ ἔνθεν τῆς ἁφῆς.

Ἀλλὰ καὶ ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται ἀμέσως, ὅτι εἰς τὴν καμπὴν τὰ δύο τόξα τῆς καμπύλης ἔχουσι τὰ κοῖλα αὐτῶν πρὸς τὰ ἀντίθετα μέρη· ἤτοι, ἂν τὸ ἓν ἔχῃ τὰ κοῖλα αὐτοῦ πρὸς τὰ ἄνω, τὸ ἄλλο θὰ ἔχῃ αὐτὰ πρὸς τὰ κάτω· τουτέστιν ἡ δευτέρα παράγωγος $\sigma''(x)$ θὰ ἔχῃ ἔνθεν καὶ ἔνθεν τῆς ἁφῆς ἀντίθετα σημεῖα.

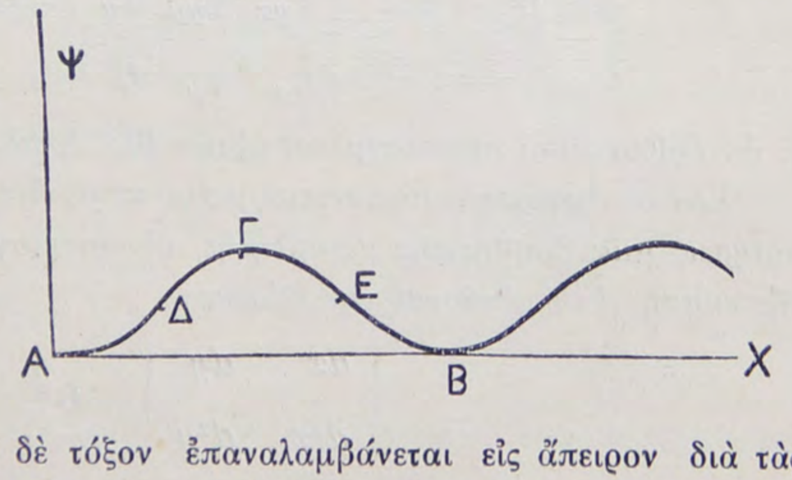
ΣΗΜ. Ἐπειδὴ εἰς τὸ σημεῖον τῆς καμπῆς, ἡ δευτέρα παράγωγος $\sigma''(x)$ ἀλλάσσει σημεῖον, ἕπεται, ὅτι ἡ τιμὴ τῆς πρώτης παραγώγου $\sigma'(x)$ γίνεται εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ἢ μεγίστη, ἢ ἐλαχίστη· καὶ ἐπειδὴ εἶνε $\sigma'(x) = \varepsilon\varphi\,\varphi$, συνάγεται, ὅτι εἰς τὸ σημεῖον τῆς καμπῆς ἡ γωνία φ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x γίνεται ἢ μεγίστη ἢ ἐλαχίστη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Πρὸς ἐφαρμογὴν τῶν προηγουμένων θὰ ζητήσωμεν τὰ σημεῖα καμπῆς τῆς καμπύλης

$$y = \alpha\,\eta\mu^2 x.$$

Διὰ $x=0$ εἶνε $y=0$, ἤτοι ἡ καμπύλη διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς. αὐξανομένου δὲ τοῦ x μέχρι τῆς τιμῆς $x=\frac{\pi}{2}$, αὐξάνει καὶ τὸ y, καὶ ὅταν γίνῃ $x=\frac{\pi}{2}$, ἡ τεταγμένη γίνεται μεγίστη· ἔπειτα τοῦ x προχωροῦντος, ἐλαττοῦται ἡ τεταγμένη ἐπανερχομένη εἰς τὰς αὐτὰς τιμάς· ὅταν δὲ γίνῃ $x=\pi$, ἡ τεταγμένη μηδενίζεται. Οὕτως ἔχομεν ἓν τόξον ΑΓΒ τῆς καμπύλης· τὸ αὐτὸ δὲ τόξον ἐπαναλαμβάνεται εἰς ἄπειρον διὰ τὰς λοιπὰς τιμὰς τοῦ x θετικάς τε καὶ ἀρνητικάς. Εἰς τὰ σημεῖα, ἔνθα ἐγγίζει τὸν ἄξονα ἡ καμπύλη, ἐφάπτεται αὐτοῦ· διότι ἡ παράγωγος



$\frac{dy}{dx}$ ἢ $2\alpha\,\eta\mu\, x\, \sigma\upsilon\nu\, x$ μηδενίζεται, ὅταν εἶνε

$$x = 0, \quad \pi, \quad 2\pi, \quad 3\pi, \ldots$$

Πρὸς εὕρεσιν τῶν σημείων τῆς καμπῆς λύομεν τὴν ἐξίσωσιν $\sigma''(x) = 0$, ἤτοι $2\alpha(\text{συν}^2 x - \text{ημ}^2 x) = 0$, τουτέστι $\text{συν}2x = 0$,

ἐξ ἧς λαμβάνομεν $x = \dfrac{\pi}{4}, \quad 3\dfrac{\pi}{4}, \quad 5\dfrac{\pi}{4}, \ldots$

Ἡ τρίτη παράγωγος εἶνε $-4\alpha\,\text{ημ}\,2x$ καὶ διὰ τὰς τιμὰς ταύτας δὲν μηδενίζεται. Ἐντεῦθεν συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ καμπύλη ἔχει ἄπειρα σημεῖα καμπῆς (ὧν αἱ τετμημέναι εἶνε $\dfrac{\pi}{4}, \quad 3\dfrac{\pi}{4}, \quad 5\dfrac{\pi}{4}, \ldots$)· δύο δὲ ἐφ' ἑκάστου τόξου.

10. Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης εἶνε ἄλυτος

$$\varphi(x, y) = 0,$$

ἡ δευτέρα παράγωγος $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (I, σελ. 179)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\varphi_y^3} \begin{vmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xy} & \varphi_x \\ \varphi_{yx} & \varphi_{yy} & \varphi_y \\ \varphi_x & \varphi_y & 0 \end{vmatrix},$$

ἑπομένως τὰ σημεῖα τῆς καμπῆς εὑρίσκονται ἐκ τῶν δύο ἐξισώσεων

$$\varphi = 0 \qquad \text{καὶ} \qquad \begin{vmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xy} & \varphi_x \\ \varphi_{yx} & \varphi_{yy} & \varphi_y \\ \varphi_x & \varphi_y & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad (1)$$

ἐξ ὧν ὁρίζονται αἱ συντεταγμέναι αὐτῶν (ἰδὲ Ἀναλ. Γεωμετρ. ἐδ. 477).

Ἐὰν δὲ ἀμφότεραι αἱ συντεταγμέναι x, y εἶνε δεδομέναι ὡς συναρτήσεις μιᾶς βοηθητικῆς μεταβλητῆς, αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων τῆς καμπῆς ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν

$$\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix} = 0$$

* 11. Ὅταν ἡ καμπύλη ἀναφέρηται πρὸς ὁμογενεῖς συντεταγμένας, ἡ ἐξίσωσις (1) τῶν σημείων τῆς καμπῆς λαμβάνει συμμετρικωτέραν μορφήν.

Ἔστω $\varphi = 0$ ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης καὶ $\sigma(x, y, z) = 0$ ἡ ὁμογενὴς ἐξίσωσις αὐτῆς ἡ προκύπτουσα ἐκ τῆς ἀντικαταστάσεως τῶν

x, y διὰ τῶν $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$· τότε θὰ εἶνε

$$\varphi(x, y) = \sigma(x, y, z) \quad \text{διὰ } z = 1, \qquad \text{οἱωνδήποτε ὄντων τῶν } x, y\text{·}$$

ἑπομένως θὰ εἶνε καὶ

$$\varphi_x = \sigma_x, \quad \varphi_y = \sigma_y \quad \text{διὰ } z = 1$$

καὶ $$\varphi_{xx} = \sigma_{xx}, \quad \varphi_{xy} = \sigma_{xy}, \quad \varphi_{yy} = \sigma_{yy} \quad \text{διὰ } z = 1\text{·}$$

ἑπομένως εἶνε

$$\begin{vmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xy} & \varphi_x \\ \varphi_{yx} & \varphi_{yy} & \varphi_y \\ \varphi_x & \varphi_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_x \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_y \\ \sigma_x & \sigma_y & 0 \end{vmatrix} \quad \text{διὰ } z = 1\text{·}$$

ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις σ εἶνε ὁμογενὴς καὶ αἱ παράγωγοι αὐτῆς ἐπίσης, ἔχομεν (I, ἐδ. 173)

$$\begin{aligned} x\sigma_{xx} + y\sigma_{xy} + z\sigma_{xz} &= (\mu-1)\sigma_x \\ x\sigma_{yx} + y\sigma_{yy} + z\sigma_{yz} &= (\mu-1)\sigma_y \qquad (\varepsilon) \\ x\sigma_{zx} + y\sigma_{zy} + z\sigma_{zz} &= (\mu-1)\sigma_z \end{aligned}$$

καὶ $$x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z = \mu\sigma = 0 \qquad \text{διὰ τὰ σημεῖα}$$

τῆς καμπύλης.

Ἐὰν δὲ ἐκ τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων ληφθῶσιν αἱ τιμαὶ τῶν παραγώγων σ_x, σ_y καὶ τεθῶσιν εἰς τὴν δευτέραν ὁρίζουσαν, ληφθῇ δὲ ὑπ' ὄψιν καὶ ἡ τετάρτη ἐξίσωσις, προκύπτει

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_x \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_y \\ \sigma_x & \sigma_y & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{(\mu-1)} \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z \end{vmatrix} \quad \text{διὰ } z = 1.$$

Ἐὰν δὲ καὶ εἰς τὴν δευτέραν τῶν ὁριζουσῶν τούτων θέσωμεν τὰς τιμὰς τῶν παραγώγων σ_x, σ_y, σ_z, προκύπτει

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_x \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_y \\ \sigma_x & \sigma_y & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{(\mu-1)^2} \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \quad \text{διὰ } z = 1.$$

ὥστε τὰ σημεῖα τῆς καμπῆς ὁρίζονται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων

$$\sigma = 0 \qquad \text{καὶ} \qquad \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Ὑποθέσωμεν, ὅτι $\sigma(x, y, z)$ εἶνε ἀλγεβρικὴ καὶ ἀκεραία συνάρτησις τῶν x, y, z τοῦ βαθμοῦ μ· τότε ἡ καμπύλη $\sigma(x, y, z) = 0$ θὰ εἶνε ἀλγεβρικὴ καὶ τοῦ βαθμοῦ μ· ἡ δὲ ἐξίσωσις (2) θὰ εἶνε ἐπίσης ἀλγεβρικὴ καὶ ἀκεραία καὶ τοῦ βαθμοῦ $3(\mu-2)$. Ἐὰν λοιπὸν μετὰ τὴν εὕρεσιν τῶν παραγώγων θέσωμεν $z = 1$ καὶ λύσωμεν τὸ σύστημα πρὸς τὰς δύο ἀγνώστους x, y, θὰ εὕρωμεν, κατὰ τὰ ἐν τῇ ἀλγέβρᾳ διδασκόμενα, ἐν γένει $3\mu(\mu-2)$ λύσεις (πραγματικὰς ἢ φανταστικάς).

Ἐκ τούτου συνάγεται τὸ ἑξῆς θεώρημα.

Ἀλγεβρικὴ καμπύλη τοῦ βαθμοῦ μ ἔχει τὸ πλεῖστον $3\mu(\mu-2)$ σημεῖα καμπῆς· κεῖνται δὲ ταῦτα πάντα ἐπί τινος καμπύλης (2) βαθμοῦ $3(\mu-2)$.

Αἱ καμπύλαι τοῦ δευτέρου βαθμοῦ οὐδὲν σημεῖον καμπῆς ἔχουσι (ὅπερ καὶ ἐκ τῆς ἀναλ. γεωμετρίας εἶνε γνωστόν), αἱ δὲ καμπύλαι τοῦ $3^{ου}$ βαθμοῦ ἔχουσιν ἐν γένει 9 σημεῖα καμπῆς.

Σημειωτέον δέ, ὅτι ἡ ὁρίζουσα (2) μηδενίζεται οὐ μόνον εἰς τὰ σημεῖα τῆς καμπῆς, ἀλλὰ καὶ εἰς ἅπαντα τὰ σημεῖα ἀνωτέρας τάξεως τῆς πρώτης (Ἀναλ. Γεωμ. ἐδ. 471) διότι εἰς πᾶν τοιοῦτο σημεῖον εἶνε

$$\sigma_x = 0, \qquad \sigma_y = 0, \qquad \sigma_z = 0\cdot$$

καὶ ἑπομένως αἱ τρεῖς ἐξισώσεις (ε) δίδουσι διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς τῶν x, y, z

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = 0.$$

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἀποδεῖξαι, ὅτι περὶ πᾶν σημεῖον (x, y) τῆς καμπύλης, ἔνθα ἡ δευτέρα παράγωγος $\sigma''(x)$ διαφέρει τοῦ μηδενός, δύναται νὰ ληφθῇ τόξον τι *κυρτὸν* τουτέστι μὴ τεμνόμενον ὑπ' εὐθείας εἰς σημεῖα περισσότερα τῶν δύο.

Ἄς ληφθῶσι πλησίον τοῦ σημείου $M(x, y)$ δύο ἄλλα σημεῖα $N(x+\varepsilon, y+\eta)$ καὶ $P(x+\varepsilon', y+\eta')$ πρὸς διάφορα μέρη τοῦ M (τουτέστιν ε καὶ ε' ἃς ἔχωσιν ἐναντία σημεῖα)· τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου MNP εἶνε

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \varepsilon & \eta \\ \varepsilon' & \eta' \end{vmatrix}$$

καὶ κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδ. 154 (Τόμ. I) εἶνε

$$2\begin{vmatrix} \varepsilon & \eta \\ \varepsilon' & \eta' \end{vmatrix} = \sigma''(x_0)\begin{vmatrix} \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon' & \varepsilon'^2 \end{vmatrix},$$

ἔνθα x_0 εἶνε τετμημένη σημείου τινὸς τοῦ τόξου NP.

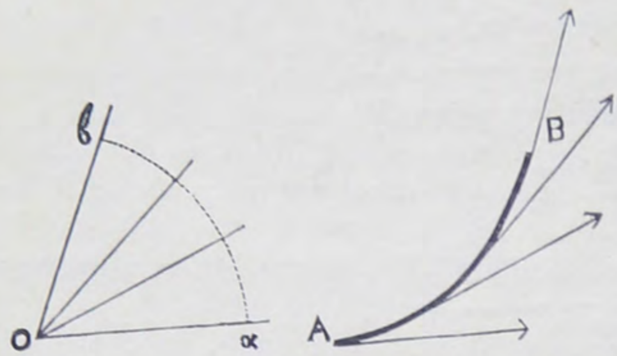
Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι, ἂν, ὁσονδήποτε μικρὸν τόξον καὶ ἂν λάβωμεν πέριξ τοῦ M, πάντοτε εὑρίσκωνται τρία σημεῖα αὐτοῦ ἐπὶ μιᾶς εὐθείας, ἡ δευτέρα παράγωγος $\sigma''(x)$ θὰ εἶνε 0.

Ἐκ τοῦ σημείου τοῦ ἐμβαδοῦ NMP δυνάμεθα προσέτι νὰ διακρίνωμεν τὸ μέρος, πρὸς ὃ ἡ καμπύλη στρέφει τὸ κυρτὸν αὐτῆς ἢ τὸ κοῖλον.

2) Ἀποδεῖξαι, ὅτι, ἐὰν εἰς ἅπαντα τὰ σημεῖα γραμμῆς τινος MN εἶνε $\sigma''(x)=0$, ἡ γραμμὴ αὕτη εἶνε εὐθεῖα γραμμή.

Περὶ καμπυλότητος.

12. *Καμπυλότης* τόξου μηδεμίαν ἔχοντος καμπὴν λέγεται ἡ γωνία τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ. Ἡ γωνία αὕτη γράφεται ὑπ' εὐθείας, ἥτις διερχομένη δι' ἑνὸς σημείου Ο κινεῖται παραλλήλως τῇ ἐφαπτομένῃ, καθ' ὅσον ἡ ἁφὴ προχωρεῖ ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἄκρου τοῦ τόξου εἰς τὸ ἄλλο.

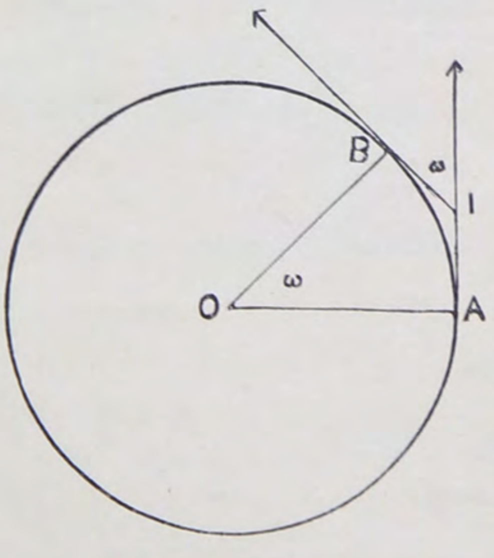


Ἡ καμπυλότης τοῦ ὅλου τόξου οἱασδήποτε καμπύλης κλειστῆς καὶ κυρτῆς (οἷον κύκλου, ἐλλείψεως καὶ τῶν τοιούτων) εἶνε κατὰ ταῦτα τέσσαρες ὀρθαί, ἤτοι 2π.

Μέση καμπυλότης τόξου κυρτοῦ λέγεται ὁ λόγος τῆς καμπυλότητος αὐτοῦ πρὸς τὸ μῆκός του.

Παραδείγματος χάριν, τοῦ τόξου ΑΒ ἡ μέση καμπυλότης εἶνε

$$\frac{\text{γων } \alpha O \beta}{\text{τοξ } AB} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{\text{τοξ } \alpha\beta}{\text{τοξ } AB}.$$



διότι ἡ γωνία αΟβ μετρεῖται ὑπὸ τοῦ κυκλικοῦ τόξου αβ, ὅπερ ἔχει ἀκτῖνα τὴν μονάδα τῶν εὐθειῶν.

13. Ἐν κύκλῳ ἡ μέση καμπυλότης τοῦ τυχόντος τόξου εἶνε πάντοτε ἡ αὐτή· ἴση δὲ τῷ ἀντιστρόφῳ τῆς ἀκτῖνος.

Διότι αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου ΑΒ σχηματίζουσι γωνίαν ἴσην τῇ γωνίᾳ ω τῶν ἀκτίνων ΟΑ, ΟΒ· ἑπομένως ἡ μέση καμπυλότης αὐτοῦ εἶνε

$$\frac{\omega}{\text{τοξ } AB}$$

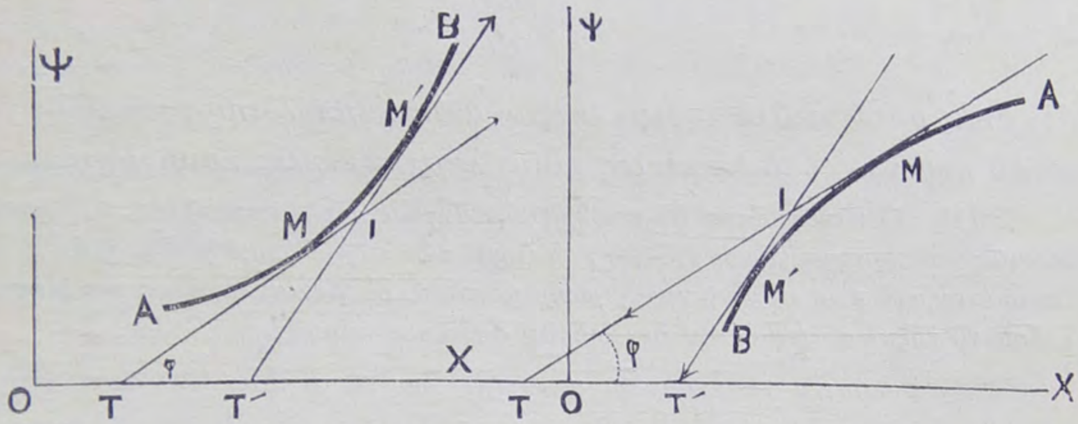
καὶ ἐπειδὴ εἶνε $\text{τοξ } AB = \omega \,.\, \rho \qquad (\rho = OA)$,

ἡ μέση καμπυλότης γίνεται $\dfrac{\omega}{\omega\rho}$ ἤτοι $\dfrac{1}{\rho}$.

14. *Καμπυλότης* οἱασδήποτε καμπύλης εἴς τι σημεῖον Μ αὐτῆς λέγεται τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ἡ μέση καμπυλότης τόξου τῆς καμπύλης ταύτης ἀρχομένου ἐκ τοῦ σημείου Μ, ὅταν τὸ τόξον τοῦτο τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν.

Ὁ κύκλος ἔχει προδήλως πανταχοῦ αὐτοῦ τὴν αὐτὴν καμπυλότητα $\frac{1}{\rho}\cdot$ δὲν συμβαίνει ὅμως τοῦτο εἰς τὰς ἄλλας καμπύλας· ἀλλ' ἡ καμπυλότης μεταβάλλεται ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖον.

Ἵνα εὕρωμεν τὴν καμπυλότητα τῆς καμπύλης ΑΒ εἰς τὸ τυχὸν



σημεῖον αὐτῆς Μ, λαμβάνομεν τόξον τι αὐτῆς ἀρχόμενον ἀπὸ τοῦ Μ, ἔστω τὸ ΜΜ′, καὶ ἄγομεν τὰς ἐφαπτομένας ΜΤ, Μ′Τ′ εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ. Ἐὰν τότε παραστήσωμεν διὰ τοῦ φ τὴν γωνίαν τῆς ἐφαπτομένης ΜΤ πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x, ἡ γωνία τῆς ἐφαπτομένης Μ′Τ′ πρὸς τὸν αὐτὸν ἄξονα θὰ εἶνε $\varphi+\Delta\varphi$, τοῦ $\Delta\varphi$ σημαίνοντος τὴν αὔξησιν τοῦ φ κατὰ τὴν μετάβασιν ἀπὸ τοῦ Μ εἰς τὸ Μ′ καὶ ἡ γωνία τῶν ἐφαπτομένων ΜΤ καὶ Μ′Τ′, ὡς ἐκ τοῦ τριγώνου ΤΙΤ′ φαίνεται, θὰ εἶνε $\Delta\varphi$. Ἐὰν δὲ ἡ ἀρχὴ τῶν τόξων τῆς καμπύλης ληφθῇ οὕτως, ὥστε αὐξανομένου τοῦ τόξου νὰ αὐξάνῃ καὶ ἡ γωνία φ (ὅπερ πάντοτε δυνατόν), θὰ εἶνε τόξον $AM = s$ καὶ τόξον $AM' = s+\Delta s\cdot$ ὅθεν τόξον $MM' = \Delta s\cdot$ καὶ ἐπομένως ἡ μέση καμπυλότης τοῦ τόξου ΜΜ′ εἶνε

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ πηλίκον τοῦτο, ὅταν τὸ τόξον ΜΜ′ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, τείνει πρὸς τὸ $\frac{d\varphi}{ds}$, συνάγεται, ὅτι ἡ καμπυλότης τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς Μ παρίσταται ὑπὸ τοῦ πηλίκου $\frac{d\varphi}{ds}$.

ΣΗΜ. Τὸ $d\varphi$ παριστᾷ τὴν γωνίαν $\Delta\varphi$ τῶν δύο ἐφαπτομένων τόσῳ ἀκριβέστερον, ὅσῳ πλησιέστεραι εἶνε αἱ ἁφαὶ αὐτῶν· λέγεται δὲ διὰ τοῦτο *γωνία συνεπαφῆς*.

Ἐὰν νοήσωμεν κύκλον ἔχοντα πανταχοῦ αὐτοῦ καμπυλότητα, ὅσην ἔχει τὸ τόξον ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Μ, ἤτοι ἴσην τῷ $\frac{d\varphi}{ds}$ καὶ παραστήσωμεν τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ διὰ τοῦ ϱ, θὰ εἶνε $\frac{1}{\varrho}=\frac{d\varphi}{ds}$ (διότι $\frac{1}{\varrho}$ εἶνε ἡ καμπυλότης τοῦ κύκλου)· ὅθεν καὶ

$$\varrho=\frac{ds}{d\varphi}.$$

Ἡ ἀκτὶς ϱ τοῦ κύκλου τούτου λέγεται *ἀκτὶς καμπυλότητος* τοῦ τόξου ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Μ· ὁ δὲ κύκλος οὗτος λέγεται *κύκλος καμπυλότητος*.

ΣΗΜ. Ὁ τύπος οὗτος θὰ παρέχῃ τὴν ἀκτῖνα ϱ τῆς καμπυλότητος θετικήν, ἐὰν (ὡς καὶ προηγουμένως ἐρρήθη) ἡ ἀρχὴ τῶν τόξων ληφθῇ οὕτως, ὥστε αὐξανομένου τοῦ s νὰ αὐξάνῃ καὶ ἡ γωνία φ· τοῦτο δὲ γίνεται εὐκόλως καὶ διαρκεῖ, ἐνόσῳ τὸ τόξον αὐξανόμενον δὲν διέλθῃ διά τινος καμπῆς.

Ἐὰν θέλωμεν νὰ ἐκφράσωμεν τὴν ἀκτῖνα ϱ διὰ τῶν συντεταγμένων x, y τοῦ σημείου Μ καὶ διὰ τῶν διαφορικῶν αὐτῶν, παρατηροῦμεν, ὅτι (τῶν ἀξόνων ὄντων ὀρθογωνίων) εἶνε

$$\text{εφ}\,\varphi=\frac{dy}{dx}, \tag{1}$$

ὅθεν
$$\frac{d\varphi}{\text{συν}^2\varphi}=d\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}.dx,$$

ἑπομένως
$$d\varphi=\text{συν}^2\varphi.\frac{d^2y}{dx^2}.dx\cdot$$

ἀλλ' εἶνε
$$\text{συν}^2\varphi=\frac{1}{1+\text{εφ}^2\varphi}=\frac{1}{1+\frac{dy^2}{dx^2}},$$

ὅθεν
$$d\varphi=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\frac{dy^2}{dx^2}}.dx\cdot \tag{ε}$$

ἔχομεν δὲ καὶ
$$ds=(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}=dx\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{ι}$$

ἄρα
$$\varrho = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}. \qquad (2)$$

ΣΗΜ. Ἐπειδὴ ἡ ἀρχὴ τῶν τόξων ἐλήφθη οὕτως, ὥστε τὰ $d\varphi$ καὶ ds νὰ εἶνε ὁμοειδῆ, καὶ τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἐξισώσεων (ε) καὶ (ι) θὰ εἶνε ὁμοειδῆ· ἑπομένως ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα

$$\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ἥτις ἐμφανίζεται εἰς τὸν ἀριθμητὴν τῆς τιμῆς τοῦ ϱ, ἔχει σημεῖον ἐντελῶς ὡρισμένον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ σημεῖον τῆς δευτέρας παραγώγου.

Κατὰ τὴν διαφόρισιν τῆς ἐξισώσεως (1) ὑπεθέσαμεν τὴν x ἀνεξάρτητον μεταβλητήν· ἂν θέλωμεν νὰ ἀφήσωμεν ἀόριστον τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητήν, πρέπει νὰ γράψωμεν ἀντὶ $\frac{d^2y}{dx^2}$ τὴν παράστασιν

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} \quad \text{ἢ} \quad \frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3}.$$

οὕτω προκύπτει ὁ τύπος

$$\varrho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y - dyd^2x} \qquad (3)$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}}{ds^3},$$

ὅστις ἰσχύει διὰ πᾶσαν ἀνεξάρτητον μεταβλητήν.

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου λαμβάνομεν ὑψοῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη εἰς τὸ τετράγωνον

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{ds^6}\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}^2 = \frac{1}{ds^6}\begin{vmatrix} ds^2 & dxd^2x + dyd^2y \\ dxd^2x + dyd^2y, & (d^2x)^2 + (d^2y)^2 \end{vmatrix}.$$

καὶ ἐπειδὴ ἐκ τῆς ἰσότητος $ds^2 = dx^2 + dy^2$ συνάγεται

$$dsd^2s = dxd^2x + dyd^2y,$$

ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{ds^4} \begin{vmatrix} 1 & d^2s \\ d^2s & (d^2x)^2 + (d^2y)^2 \end{vmatrix} = \frac{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2}{ds^4}.$$

Ἐὰν δὲ τὸ τόξον s ληφθῇ ὡς ἀνεξάρτητος μεταβλητή, θὰ εἶνε $d^2s = 0$ καὶ ὁ τύπος οὗτος γίνεται

$$\frac{1}{\varrho} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}. \qquad (4)$$

Ἐὰν ἡ καμπύλη ἀναφέρηται πρὸς πολικὰς συντεταγμένας ρ, ϑ, ὁ τύπος (3) γίνεται (I, ἐδ. 179)

$$\varrho = \frac{\left(\rho^2 + \dfrac{d\rho^2}{d\vartheta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\dfrac{d\rho^2}{d\vartheta^2} - \rho\dfrac{d^2\rho}{d\vartheta^2}}. \qquad (5)$$

Ἐὰν δὲ ἀντὶ τῆς πολικῆς ἀκτῖνος λάβωμεν τὸ ἀντίστροφον αὐτῆς, ἤτοι ἂν θέσωμεν $u.\rho = 1$, θὰ εἶνε

$$\rho = \frac{1}{u}, \qquad d\rho = -\frac{du}{u^2}, \qquad d^2\rho = -\frac{d^2u}{u^2} + 2\frac{du^2}{u^3}$$

καὶ ὁ τύπος (5) γίνεται

$$\varrho = \frac{\left(u^2 + \dfrac{du^2}{d\vartheta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{u^3\left(u + \dfrac{d^2u}{d\vartheta^2}\right)},$$

ὁ δὲ τύπος οὗτος εἴς τινα ζητήματα εἶνε καταλληλότερος τοῦ προηγουμένου.

Θετικὸν μέρος τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς καθέτου.

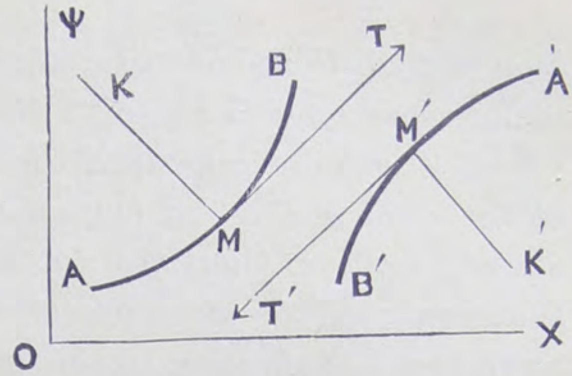
15. *Θετικὸν* μέρος τῆς ἐφαπτομένης λέγεται τὸ φέρον ἐκ τῆς ἀφῆς πρὸς ὃ μέρος αὐξάνει τὸ τόξον s· τὸ μέρος τοῦτο ὡς ἐμάθομεν ἤδη (I, ἐδ. 117) σχηματίζει πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x τὴν γωνίαν φ, δι' ἣν εἶνε

$$\text{συν}\varphi = \frac{dx}{ds}, \qquad \text{ημ}\varphi = \frac{dy}{ds}.$$

Θετικὸν δὲ μέρος τῆς καθέτου λέγεται τὸ πρὸς τὸ κοῖλον τοῦ τόξου κείμενον πλησίον τῆς ἀφῆς.

Ἀμφότερα τὰ μέρη ταῦτα εἶνε ἤδη ἐντελῶς ὡρισμένα εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς καμπύλης (πλὴν τῶν σημείων τῆς καμπῆς) ἕνεκα τοῦ τεθέντος περιορισμοῦ εἰς τὴν ἐκλογὴν τῆς ἀρχῆς τῶν τόξων (ἐδ. 200).

Παραδείγματος χάριν εἰς τὸ σημεῖον Μ τῆς καμπύλης ΑΒ θετικὸν μέρος τῆς ἐφαπτομένης εἶνε τὸ ΜΤ, τῆς δὲ καθέτου τὸ ΜΚ· ἡ δὲ ἀρχὴ τῶν τόξων λαμβάνεται εἰς τὸ Α (ἵνα αὐξανομένου τοῦ τόξου s αὐξάνῃ καὶ ἡ γωνία φ)· εἰς δὲ τὸ σημεῖον Μ΄ τῆς καμπύλης Α΄Β΄ θετικὰ μέρη εἶνε τὰ Μ΄Τ΄, Μ΄Κ΄, ἀρχὴ δὲ τῶν τόξων τὸ Α΄.



Ἐκ τοῦ σχήματος γίνεται εὐκόλως φανερόν, ὅτι τὸ θετικὸν μέρος ΜΤ τῆς ἐφαπτομένης στρεφόμενον ἐν θετικῇ περιφορᾷ κατὰ 90^0 πίπτει ἐπὶ τοῦ θετικοῦ μέρους ΜΚ τῆς καθέτου· ἑπομένως, ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ φ τὴν γωνίαν τῆς ΜΤ πρὸς τὸν ἄξονα ΟΧ (τουτέστι τὴν γωνίαν, ἣν γράφει ἐν θετικῇ περιφορᾷ ἡ ΟΧ, μέχρις οὗ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τὴν ἐκ τοῦ Ο ἀγομένην παράλληλον καὶ ὁμόρροπον τῆς ΜΤ), ἡ γωνία τῆς ΜΚ πρὸς τὸν αὐτὸν ἄξονα θὰ εἶνε $\varphi + \dfrac{\pi}{2}$.

Περὶ τοῦ κέντρου καμπυλότητος.

16. Ἐὰν ὁ κύκλος τῆς καμπυλότητος τοῦ σημείου Μ τεθῇ οὕτως, ὥστε νὰ ἐφάπτηται τῆς καμπύλης κατὰ τὸ σημεῖον τοῦτο, νὰ ἔχῃ δὲ τὸ κέντρον του ἐπὶ τοῦ θετικοῦ μέρους τῆς καθέτου, τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τούτου λέγεται *κέντρον καμπυλότητος* τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον Μ.

17. *Εἰς πᾶσαν καμπύλην τὸ κέντρον καμπυλότητος εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Μ εἶνε τὸ σημεῖον, πρὸς ὃ τείνει ἡ τομὴ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν καμπύλην εἰς τὸ Μ καὶ τῆς καθέτου εἰς ἄλλο οἱονδήποτε σημεῖον Μ΄, ὅταν τὸ Μ΄ τείνῃ νὰ συμπέσῃ μετὰ τοῦ Μ.*

Ἡ ἐξίσωσις τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν καμπύλην εἰς τὸ σημεῖον $\mathrm{M}(x,y)$ εἶνε

$$\mathrm{X}-x+(\Psi-y)\frac{dy}{dx}=0. \qquad (1)$$

Ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ Μ μεταβῶμεν εἰς ἄλλο σημεῖον Μ΄, αἱ συντεταγμέναι x, y καὶ ἡ παράγωγος $\frac{dy}{dx}$ μεταβάλλονται καὶ γίνονται

$$x+\Delta x, \qquad y+\Delta y, \qquad \frac{dy}{dx}+\Delta\frac{dy}{dx}.$$

ἑπομένως καὶ τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως τῆς καθέτου, ὅπερ συντομίας χάριν παριστῶ διὰ τοῦ V, θὰ μεταβληθῇ καὶ θὰ γίνῃ $V+\Delta V$, ἔνθα ΔV σημαίνει τὴν μεταβολὴν τοῦ V τὴν προερχομένην ἐκ τῆς αὐξήσεως τοῦ x κατὰ Δx, (κατὰ τὴν μεταβολὴν δὲ ταύτην τὰ Χ καὶ Ψ μένουσι σταθερά, (διότι περὶ τοῦ κοινοῦ σημείου πρόκειται)· ὥστε ἡ ἐξίσωσις τῆς καθέτου εἰς τὸ σημεῖον Μ΄ θὰ εἶνε $V+\Delta V=0$ καὶ αἱ συντεταγμέναι Χ, Ψ τῆς τομῆς τῶν δύο καθέτων δίδονται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων

$$V=0 \quad \text{καὶ} \quad V+\Delta V=0$$

ἢ καὶ ὑπὸ τῶν $\quad V=0 \quad$ καὶ $\quad \Delta V=0$

ἢ ὑπὸ τῶν $\quad V=0 \quad$ καὶ $\quad \frac{\Delta V}{\Delta x}=0.$

Ἐὰν δὲ τὸ Μ΄ τείνῃ νὰ συμπέσῃ μετὰ τοῦ Μ, ἡ τομὴ τῶν δύο καθέτων τείνει πρός τι σημεῖον Κ, τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι, ἃς παριστῶ διὰ ξ, η, ἐπαληθεύουσι τὰς ἐξισώσεις

$$V=0 \quad \text{καὶ} \quad \frac{dV}{dx}=0, \text{ ἐὰν τεθῶσιν ἀντὶ τῶν Χ, Ψ.}$$

Ἐκ τούτων ἡ μὲν πρώτη εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς καθέτου εἰς τὸ Μ, τὴν δὲ δευτέραν εὑρίσκομεν ἐξ αὐτῆς διαφορίζοντες πρὸς τὸ x καὶ θεωροῦντες τὰ Χ καὶ Ψ ὡς σταθερά· ὅθεν ἡ δευτέρα αὕτη ἐξίσωσις εἶνε

$$-\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)+(\Psi-y)\frac{d^2y}{dx^2}=0, \tag{2}$$

παριστᾷ δὲ ἡ ἐξίσωσις αὕτη εὐθεῖαν παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν x, ἐφ' ἧς κεῖται τὸ σημεῖον Κ.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ συντεταγμέναι ξ, η τοῦ Κ ἐπαληθεύουσι τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2), εὑρίσκομεν λύοντες

$$\eta-y=\frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \qquad \xi-x=-\frac{\frac{dy}{dx}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}}. \tag{3}$$

ἐκ δὲ τῶν τιμῶν τούτων συνάγεται ἡ ἀπόστασις ΜΚ

$$(\mathrm{MK})^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = \frac{\left(1 + \dfrac{dy^2}{dx^2}\right)^3}{\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2} = \varrho^2,$$

ὅθεν $$\mathrm{MK} = \varrho.$$

* Μένει νὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ σημεῖον Κ κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ἐφαπτομένης, πρὸς ὃ κεῖται καὶ ἡ καμπύλη πλησίον τῆς ἁφῆς· τουτέστι πρὸς τὰ κοῖλα τῆς καμπύλης. Ἄς ληφθῇ τῆς καμπύλης τυχὸν σημεῖον Μ΄ πλησίον τοῦ Μ ἔχον συντεταγμένας $x + \Delta x$, $y + \Delta y$· αἱ συντεταγμέναι αὗται τιθέμεναι εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης

$$\Psi - y - \frac{dy}{dx}(\mathrm{X} - x) = 0$$

δίδουσι τὸ ἐξαγόμενον $$\Delta y - \frac{dy}{dx} . \Delta x$$

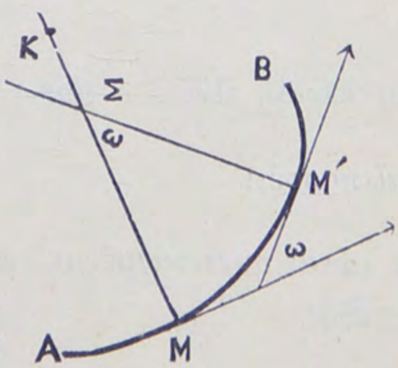
καὶ ἐπειδὴ εἶνε $$\Delta y = \frac{dy}{dx} . \Delta x + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2} + \ldots,$$

τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εἶνε $$\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{(\Delta x)^2}{1.2} + \ldots$$

Ἄς τεθῶσι νῦν καὶ αἱ συντεταγμέναι ξ, η τοῦ σημείου Κ εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης· αὗται δίδουσι τὸ ἐξαγόμενον

$$\frac{\left(1 + \dfrac{dy^2}{dx^2}\right)^2}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}.$$

ἐπειδὴ δὲ ἀμφότερα τὰ ἐξαγόμενα εἶνε ὁμοειδῆ (διότι ἔχουσι τὸ σημεῖον τῆς δευτέρας παραγώγου), συνάγεται, ὅτι τὸ Κ καὶ τὸ τυχὸν σημεῖον Μ΄ (πλησίον τῆς ἁφῆς) κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ἐφαπτομένης.



18. Τὴν προκειμένην ἰδιότητα τοῦ κέντρου τῆς καμπυλότητος δυνάμεθα νὰ δείξωμεν καὶ γεωμετρικῶς ὡς ἑξῆς.

Ἔστω ΜΚ ἡ κάθετος εἰς τὸ Μ καὶ Μ΄Σ ἡ κάθετος εἰς τὸ Μ΄· ἐὰν ἀχθῇ ἡ χορδὴ ΜΜ΄, εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ σχηματιζομένου τριγώνου

$$\frac{\text{ΜΜ}'}{\text{ημΣ}} = \frac{\text{ΜΣ}}{\text{ημΜΜ}'\text{Σ}},$$

ὅθεν
$$\text{ΜΣ} = \frac{\text{ΜΜ}'}{\text{ημΣ}}.\ \text{ημΜΜ}'\text{Σ}.$$

ἐπειδὴ δὲ ημΣ καὶ Σ εἶνε ἰσοδύναμα ἀπειροστά, ἐπίσης τὰ ΜΜ′ καὶ τοξΜΜ′, ἡ δὲ γωνία ΜΜ′Σ τείνει πρὸς τὴν ὀρθήν, συνάγεται

$$\text{ὅρ ΜΣ} = \text{ΜΚ} = \text{ὅρ}\ \frac{\text{τοξΜΜ}'}{\Sigma}.$$

ἀλλ' ἡ γωνία Σ τῶν καθέτων ἰσοῦται τῇ γωνίᾳ ω τῶν δύο ἐφαπτομένων εἰς τὰ Μ καὶ Μ′· ἄρα εἶνε

$$\text{ΜΚ} = \text{ὅρ}\ \frac{\text{τοξΜΜ}'}{\omega}$$

καὶ ἑπομένως (ἐδ. 14) $\quad \text{ΜΚ} = \varrho.$

19. Αἱ συντεταγμέναι (3) τοῦ κέντρου τῆς καμπυλότητος ἐκφράζονται ἁπλούστερον, ἐὰν εἰσαχθῇ εἰς τοὺς λογισμοὺς ἡ γωνία φ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x.

Τῷ ὄντι εὕρομεν (σελ. 24), ὅτι

$$d\varphi = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{1 + \dfrac{dy^2}{dx^2}}.dx$$

ἐκ δὲ τῆς τιμῆς ταύτης τοῦ $d\varphi$, αἱ συντεταγμέναι ξ, η γίνονται

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - \frac{dy}{d\varphi} \\ \eta &= y + \frac{dx}{d\varphi}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

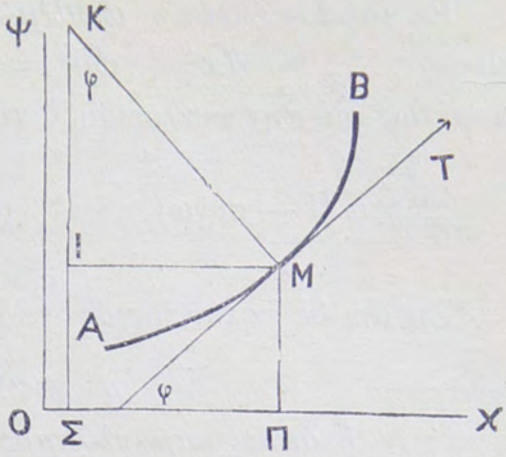
καὶ ἐπειδὴ εἶνε $\quad dx = \text{συνφ}.ds \quad$ καὶ $\quad dy = \text{ημφ}.ds$

καὶ προσέτι
$$\frac{ds}{d\varphi} = \varrho,$$

αἱ αὐταὶ συντεταγμέναι, εἰσαγομένης καὶ τῆς ἀκτῖνος ϱ, γράφονται ὡς ἑξῆς

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - \varrho\text{ημφ} \\ \eta &= y + \varrho\text{συνφ}. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

20. Αἱ ἐξισώσεις (5) δύνανται νὰ δειχθῶσι καὶ γεωμετρικῶς ὡς ἑξῆς.



Ἔστω ΜΤ ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἰς τὸ Μ καὶ ΜΚ ἡ κάθετος πρὸς αὐτὴν καὶ ἂς ληφθῇ τὸ τμῆμα ΜΚ ἴσον τῇ ἀκτῖνι ϱ τῆς καμπυλότητος· τότε τὸ σημεῖον Κ θὰ εἶνε τὸ κέντρον τῆς καμπυλότητος διὰ τὸ σημεῖον Μ.

Ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων Κ καὶ Μ καὶ ἔπειτα ἡ ΜΙ παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν x, θὰ εἶνε

$$\xi = \mathrm{O\Sigma} = \mathrm{O\Pi} - \mathrm{IM} = x - \mathrm{IM}$$

$$\eta = \mathrm{K\Sigma} = \mathrm{M\Pi} + \mathrm{IK} = y + \mathrm{IK}\cdot$$

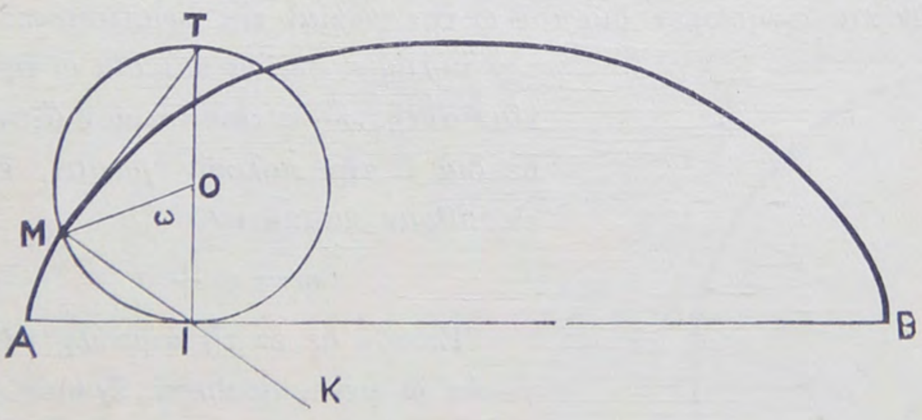
ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΙΚΜ εὑρίσκομεν εὐκόλως

$$\mathrm{IM} = \varrho\,\eta\mu\varphi,\quad \mathrm{IK} = \varrho\,\sigma\upsilon\nu\varphi,$$

ὅθεν συνάγεται
$$\xi = x - \varrho\,\eta\mu\varphi$$
$$\eta = y + \varrho\,\sigma\upsilon\nu\varphi.$$

Κέντρα καὶ ἀκτῖνες καμπυλότητος διαφόρων καμπύλων. Κυκλοειδής.

Αἱ ἐξισώσεις τῆς κυκλοειδοῦς εἶνε



$$x = \alpha(\omega - \eta\mu\omega)$$
$$y = \alpha(1 - \sigma\upsilon\nu\omega),$$

ὅθεν
$$dx = \alpha(1 - \sigma\upsilon\nu\omega)d\omega$$
$$dy = \alpha\eta\mu\omega . d\omega$$
$$d^2x = \alpha\eta\mu\omega . d\omega^2$$
$$d^2y = \alpha\sigma\upsilon\nu\omega . d\omega^2.$$

Ἐκ τούτων ἕπεται $dxd^2y - dyd^2x = \alpha^2 d\omega^3 . (\sigma\upsilon\nu\omega - 1)$

καὶ $dx^2 + dy^2 = 2\alpha^2 d\omega^2 (1 - \sigma\upsilon\nu\omega)$·

ἑπομένως διὰ τὴν κυκλοειδῆ ὁ τύπος ὁ τὴν ἀκτῖνα ϱ παρέχων γίνεται

$$\varrho = 2^{\frac{3}{2}} . \ \alpha (1 - \sigma\upsilon\nu\omega)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} . \ \alpha . \left(2\eta^2\mu \frac{\omega}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = 4\alpha\eta\mu\left(\frac{\omega}{2} \right)$$

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τοῦ τριγώνου ΜΟΙ εὑρίσκεται $\text{MI} = 2\alpha\eta\mu \left(\frac{\omega}{2} \right)$,

συνάγεται $$\varrho = 2\text{MI} = \text{MK},$$

τουτέστιν *ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς κυκλοειδοῦς εἶναι διπλασία τῆς καθέτου.*

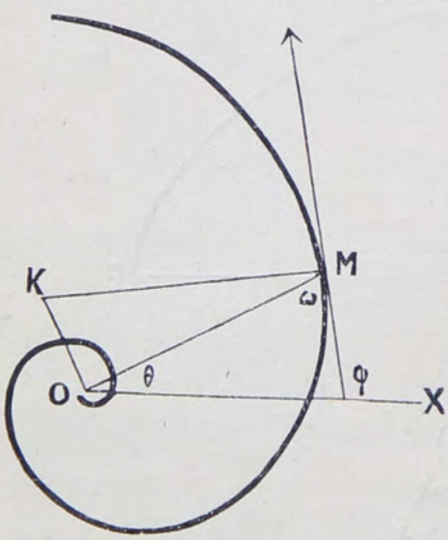
Σημειωσις. Εἰς τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο φθάνομεν ταχύτερον ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον $\varrho = \frac{ds}{d\varphi}$ καὶ ἐνθυμούμενοι, ὅτι εἰς τὴν κυκλοειδῆ εἶνε (I, σελ. 108) $d\varphi = -\frac{1}{2}d\omega$

καὶ $$ds = -2\alpha\eta\mu \left(\frac{\omega}{2} \right) . d\omega,$$

ὅθεν $$\varrho = 4\alpha\eta\mu \left(\frac{\omega}{2} \right).$$

Ἕλιξ λογαριθμική. ($\rho = e^{\mu\vartheta}$).

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ ω τὴν γωνίαν τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τὴν πολικὴν ἀκτῖνα καὶ διὰ φ τὴν γωνίαν αὐτῆς πρὸς τὸν πολικὸν ἄξονα, ἔτι δὲ διὰ ϑ τὴν πολικὴν γωνίαν, ἔχομεν εἰς πᾶσαν καμπύλην



$$\varphi = \omega + \vartheta.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἐν τῇ καμπύλῃ ταύτῃ ἡ γωνία ω μένει σταθερά, ἔχομεν

$$d\varphi = d\vartheta.$$

ὅθεν $$\varrho = \frac{ds}{d\vartheta}.$$

ἀλλ' εὕρομεν ἤδη $$ds = \sqrt{1 + \frac{1}{\mu^2}} . d\rho = \sqrt{1 + \frac{1}{\mu^2}} . \rho\mu . d\vartheta,$$

ἄρα $$\varrho = \rho\sqrt{1 + \mu^2}.$$

Ἐὰν ἀχθῇ ἡ κάθετος ΜΚ ἐπὶ τὴν καμπύλην καὶ ἡ ΟΚ κάθετος ἐπὶ τὴν πολικὴν ἀκτῖνα, σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΚΜ, ἐξ οὗ εὑρίσκομεν

$$(\mathrm{KM})^2 = (\mathrm{OM})^2 + (\mathrm{OK})^2$$

καὶ ἐπειδὴ $\mathrm{OK} = \dfrac{d\rho}{d\vartheta} = \mu\rho$, ἕπεται $(\mathrm{KM})^2 = \rho^2 + \mu^2\rho^2 = \rho^2(1+\mu^2)$,

ὅθεν $\quad \mathrm{KM} = \rho\sqrt{1+\mu^2}$, ἤτοι $\mathrm{KM} = \varrho$

ἤτοι *ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς λογαριθμικῆς ἕλικος ἰσοῦται τῇ καθέτῳ καὶ ἑπομένως τὸ κέντρον καμπυλότητος εἶνε τὸ ἄκρον τῆς ὑποκαθέτου.*

Κωνικαὶ τομαί.

Ἅπασαι αἱ κωνικαὶ τομαὶ περιέχονται ἐν τῇ ἐξισώσει

$$y^2 = 2\mu x + \nu x^2.$$

εἶνε δὲ ὁ μὲν ἄξων τῶν x ἄξων τῆς καμπύλης, ὁ δὲ ἄξων τῶν y ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης κατὰ τὸ πέρας τοῦ ἄξονος αὐτῆς.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὕρομεν ἤδη (Ι, σελ. 179)

$$y.\frac{dy}{dx} = \mu + \nu.x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\mu^2}{y^3}.$$

Ἐὰν δὲ θέσωμεν τὴν τιμὴν ταύτην τῆς δευτέρας παραγώγου εἰς τὸν τύπον τῆς ἀκτῖνος ϱ, εὑρίσκομεν

$$\varrho = \frac{y^3\left(1+\dfrac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\mu^2} = \frac{\left(y\sqrt{1+\dfrac{dy^2}{dx^2}}\right)^3}{\mu^2}$$

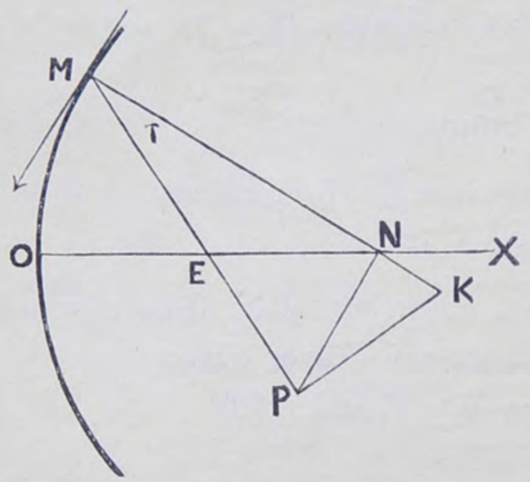
Ἐπειδὴ δὲ ἡ παράστασις $y\sqrt{1+\dfrac{dy^2}{dx^2}}$ σημαίνει (Ι, ἐδ. 105) τὸ μῆκος τῆς καθέτου ἀπὸ τῆς ἀφῆς μέχρι τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων, παριστῶντες τὸ μῆκος τοῦτο διὰ τοῦ Ν, θὰ ἔχωμεν

$$\varrho = \frac{\mathrm{N}^3}{\mu^2}$$

τουτέστιν εἰς *πᾶσαν κωνικὴν τομὴν ἡ ἀκτὶς τῆς καμπυλότητος εἶνε ἀνάλογος πρὸς τὸν κύβον τῆς καθέτου.*

Ἐπειδὴ δὲ εἰς πᾶσαν κώνου τομὴν ἡ προβολὴ τῆς καθέτου N ἐπ τὴν ἑστιακὴν ἀκτῖνα τῆς ἀφῆς εἶνε σταθερὰ καὶ ἴση τῇ παραμέτρῳ μ, ἐὰν παραστήσωμεν τὴν γωνίαν τῆς καθέτου πρὸς τὴν ἑστιακὴν ἀκτῖνα διὰ τοῦ γ, θὰ εἶνε $\mu = N.\, \sigma\upsilon\nu\gamma$· ὅθεν ἡ τιμὴ τῆς ἀκτῖνος ϱ γίνεται $\varrho = \dfrac{N}{\sigma\upsilon\nu^2\gamma}$.

Ἡ τιμὴ αὕτη τῆς ἀκτῖνος ϱ κατασκευάζεται γεωμετρικῶς ὡς ἑξῆς. Ἐκ τοῦ ἄκρου N τῆς καθέτου ὑψοῦμεν κάθετον ἐπ' αὐτήν, ἥτις θὰ τέμνῃ τὴν διὰ τῆς ἑστίας διερχομένην EM κατά τι σημεῖον P, ἔπειτα ἐκ τοῦ P ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν EP· αὕτη δὲ θὰ τέμνῃ τὴν κάθετον τῆς καμπύλης κατὰ τὸ κέντρον καμπυλότητος K καὶ θὰ εἶνε ἑπομένως ἡ MK ἴση τῇ ἀκτῖνι καμπυλότητος εἰς τὸ σημεῖον M.



Διότι εἶνε $MN = MP.\, \sigma\upsilon\nu\gamma$

καὶ $MP = MK.\, \sigma\upsilon\nu\gamma$

ὅθεν $MN = MK.\, \sigma\upsilon\nu^2\gamma$ καὶ $MK = \dfrac{MN}{\sigma\upsilon\nu^2\gamma} = \varrho$.

Δημνίσκος.

Ἡ πολικὴ ἐξίσωσις αὐτοῦ εἶνε $\rho^2 = 2\alpha^2\sigma\upsilon\nu 2\vartheta$,

ὅθεν
$$\rho\frac{d\rho}{d\vartheta} = -2\alpha^2\eta\mu 2\vartheta.$$

καὶ
$$\rho\frac{d^2\rho}{d\vartheta^2} + \frac{d\rho^2}{d\vartheta^2} = -4\alpha^2\sigma\upsilon\nu 2\vartheta = -2\rho^2.$$

Ἀντικαθιστῶντες δὲ τὴν τιμὴν τοῦ $\rho.\dfrac{d^2\rho}{d\vartheta^2}$ εἰς τὸν γενικὸν τύπον (τύπ. 5ος τοῦ ἐδ. 14) εὑρίσκομεν

$$\varrho = \frac{\left(\rho^2 + \dfrac{d\rho^2}{d\vartheta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{3\left(\rho^2 + \dfrac{d\rho^2}{d\vartheta^2}\right)} = \frac{1}{3}\sqrt{\rho^2 + \frac{d\rho^2}{d\vartheta^2}}, \qquad (\iota)$$

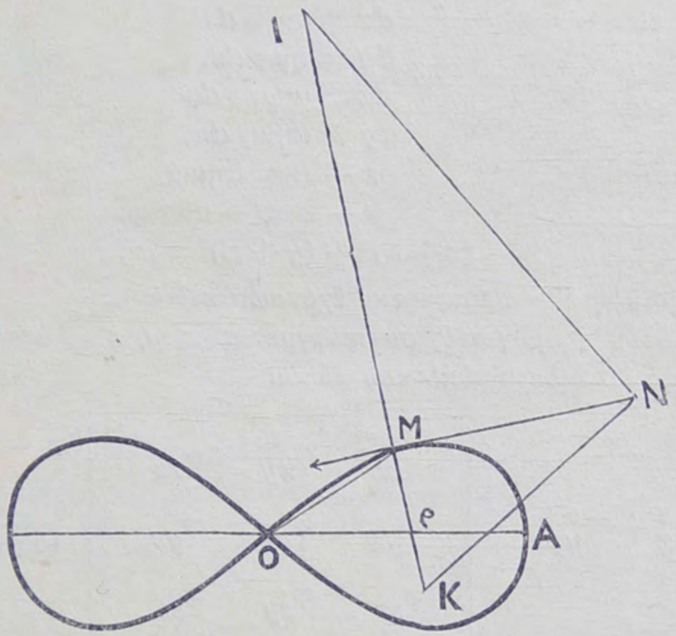
τουτέστιν εἰς τὸν λημνίσκον ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος εἶνε τὸ τρίτον τῆς πολικῆς καθέτου.

Ἐὰν δὲ εἰς τὴν ἰσότητα (ι) θέσωμεν τὴν τιμὴν τῆς παραγώγου, εὑρίσκομεν

$$\varrho = \frac{2\alpha^2}{3\rho},$$

ἤτοι ἡ ἀκτὶς τῆς καμπυλότητος εἶνε ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς πολικῆς ἀκτῖνος.

Η τιμὴ αὕτη τοῦ ϱ κατασκευάζεται εὐκόλως· τὴν δὲ κατασκευὴν



δεικνύει τὸ ἄνω σχῆμα, ἔνθα ἡ MI ἐλήφθη τριπλασία τῆς OM καὶ ἡ MN ἴση τῇ OA.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἀποδεῖξαι, ὅτι κέντρον καμπυλότητος τῆς ἑλκομένης εἶνε τὸ σημεῖον, ἔνθα ἡ κάθετος ἐπ' αὐτὴν συναντᾷ τὴν ἐκ τοῦ ἄκρου τῆς ὑφαπτομένης ἀγομένην παράλληλον ταῖς τεταγμέναις.

2) Ἀποδεῖξαι, ὅτι εἶνε

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\rho \dfrac{d^2\rho}{ds^2} + \dfrac{d\rho^2}{ds^2} - 1}{\rho\sqrt{1 - \dfrac{d\rho^2}{ds^2}}},$$

ἔνθα τὸ τόξον s τῆς καμπύλης λαμβάνεται ὡς ἀνεξάρτητος μεταβλητή· ἡ δὲ πολικὴ ἀκτὶς ρ ὡς συνάρτησις αὐτοῦ.

Πρὸς τούτοις, ὅτι $\varrho = -\rho \dfrac{d\rho}{dP}$,

ἔνθα P δηλοῖ τὴν ἀπόστασιν τοῦ πόλου ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης.

3) Ἀποδεῖξαι, ὅτι τὸ κέντρον καμπυλότητος τῆς ἁλυσοειδοῦς ἔχει τεταγμένην διπλασίαν τῆς τεταγμένης τοῦ ἀντιστοιχοῦντος σημείου, ἡ δὲ ἀκτὶς καμπυλότητος εἶνε ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς τεταγμένης.

4) Ἀποδεῖξαι, ὅτι ἡ μόνη καμπύλη, ἥτις ἔχει πανταχοῦ αὐτῆς σταθερὰν καμπυλότητα, εἶνε ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου.

Ἐὰν ἡ καμπυλότης εἴς τινα καμπύλην εἶνε σταθερά, θὰ εἶνε εἰς πᾶν σημεῖον αὐτῆς $\frac{1}{\varrho} = \text{σταθ.}$ ἢ $\varrho = \alpha$,

ὅθεν $\frac{ds}{d\varphi} = \alpha$ ἢ $ds = \alpha d\varphi$.

Ἐπειδὴ δὲ εἶνε

$$dx = \text{συν}\varphi\, ds$$
$$dy = \text{ημ}\varphi\, ds,$$

ἕπεται

$$dx = \alpha\,\text{συν}\varphi\, d\varphi$$
$$dy = \alpha\,\text{ημ}\varphi\, d\varphi,$$

ἐξ ὧν εὑρίσκομεν

$$x + \text{A} = \alpha\,\text{ημ}\varphi$$
$$y + \text{B} = -\alpha\,\text{συν}\varphi,$$

ὅθεν καὶ $(x+\text{A})^2 + (y+\text{B})^2 = \alpha^2$,

τουτέστιν ἡ καμπύλη εἶνε περιφέρεια ἔχουσα ἀκτῖνα α.

5) Δεῖξαι, ὅτι εἰς ὁμογενεῖς συντεταγμένας x, y, z ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς καμπύλης $\varphi = 0$ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\frac{1}{\varrho} = \left(\varphi_x^2 + \varphi_y^2\right)^{-\frac{3}{2}} \begin{vmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xy} & \varphi_{xz} \\ \varphi_{yx} & \varphi_{yy} & \varphi_{yz} \\ \varphi_{zx} & \varphi_{zy} & \varphi_{zz} \end{vmatrix} \frac{1}{(\mu-1)^2}.$$

6) Ἐὰν τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου (x, y) παριστῶνται διὰ τῶν μιγάδων ἀριθμῶν $x+yi$ (ἰδὲ Εἰσαγ. Ἀνωτέρ. Ἀλγέβρας σελ. 88) καὶ τεθῇ πρὸς συντομίαν

$$z = x + yi,$$

ὁ μὲν μιγὰς ἀριθμὸς z ἔχει μέτρον καὶ ὅρισμα τὰς πολικὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου $x+yi$, τὸ δὲ dz ἔχει μέτρον μὲν τὸ ds, ὅρισμα δὲ τὴν γωνίαν φ, τὴν ὁποίαν ἡ ἐφαπτομένη σχηματίζει πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x· ἤτοι εἶνε

$$dz = ds . e^{\varphi i} \quad \text{ἢ} \quad \frac{dz}{ds} = e^{\varphi i},$$

ὅθεν καὶ

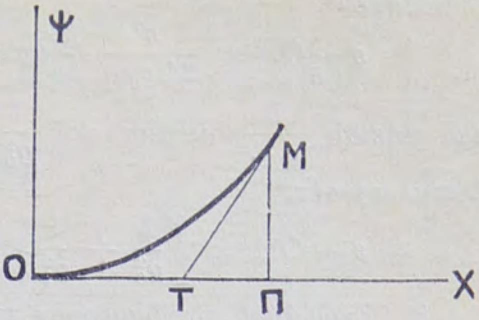
$$\frac{d^2z}{ds^2} = i e^{\varphi i}\frac{d\varphi}{ds} = i e^{\varphi i}\frac{1}{\varrho}$$

καὶ λαμβάνοντες τὰ μέτρα εὑρίσκομεν

$$\frac{1}{\varrho} = \text{μέτρ.}\left[\frac{d^2z}{ds^2}\right] = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right) + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2} \quad \text{(παράβ. ἐδ. 14, τύπ. 4).}$$

7) Ἐκφράσαι τὴν διαφορὰν τοῦ τυχόντος τόξου καὶ τῆς χορδῆς αὐτοῦ.

Ἐὰν λάβωμεν τὴν ἀρχὴν τοῦ τόξου ΟΜ ὡς ἀρχὴν τῶν ὀρθ. συντεταγμένων καὶ τὴν ἐφαπτομένην αὐτοῦ ὡς ἄξονα τῶν x, αἱ συντεταγμέναι x, y τοῦ τυχόντος σημείου Μ τοῦ τόξου δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς συναρτήσεις τοῦ μήκους τοῦ τόξου ΟΜ ($=s$ καὶ νὰ ἀναπτυχθῶσι κατὰ τὸν τύπον τοῦ Μακλωρίνου· καὶ διὰ μὲν τὴν τετμημένην x ἔχομεν



$$\frac{dx}{ds} = \text{συνφ}$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\text{ημφ}.\frac{d\varphi}{ds} = -\text{ημφ}.\frac{1}{\varrho}$$

$$\frac{d^3x}{ds^3} = -\text{ημφ}.\frac{d^2\varphi}{ds^2} - \text{συνφ}.\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = -\text{ημφ}.\frac{d\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{ds} - \text{συνφ}.\frac{1}{\varrho^2}$$

$$\frac{d^4x}{ds^4} = -3\text{συνφ}\frac{d\varphi}{ds}.\frac{d^2\varphi}{ds^2} - \text{ημφ}.\frac{d^3\varphi}{ds^3} + \text{ημφ}.\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^3.$$

. . . .

ὑποθέτοντες δὲ $s=0$ καὶ παριστῶντες διὰ ϱ_0 τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος εἰς τὸ σημεῖον Μ καὶ διὰ τοῦ Β τὴν παράγωγον $\dfrac{d\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{ds}$ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, εὑρίσκομεν τὸ ἀνάπτυγμα

$$x = s - \frac{s^3}{6\varrho_0^2} - \frac{B}{\varrho_0}\frac{s^4}{8} + \ldots$$

Ὁμοίως δὲ εὑρίσκομεν καὶ τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ y

$$y = \frac{s^2}{2\varrho_0} + B\frac{s^3}{6} + \left(\Gamma - \frac{1}{\varrho_0^3}\right)\frac{s^4}{24} + \ldots$$

Ἐκ τούτων ἕπεται

$$x^2 + y^2 = s^2 - \frac{s^4}{12\varrho_0^2} - \frac{Bs^5}{12\varrho_0} + \ldots = s^2\left(1 - \frac{s^2}{12\varrho_0^2} - \frac{B}{12\varrho_0}s^3 + \ldots\right)$$

καὶ ἐξάγοντες τὴν τετραγ. ῥίζαν κατὰ τὸν τύπον

$$\sqrt{1+\varepsilon} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 - \ldots$$

εὑρίσκομεν
$$OM = s - \frac{s^3}{24\varrho_2^2} - \frac{B}{\varrho_0}\frac{s^4}{24} + \ldots,$$

ὅθεν
$$s - OM = \frac{s^3}{24\varrho_0^2} + \frac{B}{\varrho_0}.\frac{s^4}{24} + \ldots, \qquad \textbf{(1)}$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ἡ διαφορὰ τοῦ τόξου s($=$τοξ ΟΜ) καὶ τῆς χορδῆς αὐτοῦ ΟΜ εἶνε ἀπειροστὸν τρίτης τάξεως πρὸς τὸ τόξον (παράβ. σελ. 6, ζήτημα 4) καὶ ἔχει πρωτεῦον μέρος τὸ $\dfrac{s^3}{24\varrho_0^2}$.

Ἐὰν εἰς τὸ Ο εἶνε $\dfrac{1}{\varrho_0} = 0$, τουτέστιν ἐὰν ἡ καμπυλότης εἰς τὸ σημεῖον Ο εἶνε μηδέν, ἡ διαφορὰ τοῦ τόξου ΟΜ καὶ τῆς χορδῆς αὐτοῦ εἶνε ἐν γένει ἀπειροστὸν πέμπτης τάξεως (τοῦτο συμβαίνει πάντοτε εἰς τὰ σημεῖα τῆς καμπῆς).

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ ϱ_1, τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος εἰς τὸ σημεῖον Μ, θὰ εἶνε κατὰ τὸν τύπον τοῦ Taylor

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{\varrho_0} + Bs + \Gamma.\frac{s^2}{2} + \ldots, \qquad \text{διότι } B = \frac{d\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{ds}\ldots,$$

ὅθεν λαμβάνοντες τὴν τιμὴν τοῦ Bs καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἰσότητα (1) εὑρίσκομεν

$$s - \mathrm{OM} = \frac{s^3}{24.\varrho_0\varrho_1} + \text{ἀπειροστῷ τινι πέμπτης τάξεως}\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ $\dfrac{2}{\varrho_0\varrho_1}$ διαφέρει τοῦ $\dfrac{1}{\varrho_0^2} + \dfrac{1}{\varrho_1^2}$ κατὰ ἀπειροστόν τι δευτέρας τάξεως, ἕπεται προσέτι

$$s - \mathrm{OM} = \left(\frac{1}{\varrho_0^2} + \frac{1}{\varrho_1^2}\right)\cdot\frac{s^3}{48} + \text{ἀπειρ. πέμπτης τάξεως.}$$

8) Ἐκφράσαι τὴν διαφορὰν τόξου ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ (περατουμένων εἰς τὴν τομὴν αὐτῶν).

Ἐκ τοῦ προηγουμένου σχήματος εὑρίσκομεν

$$\mathrm{OT} = x - y\frac{dx}{dy}, \qquad \mathrm{MT} = y.\frac{ds}{dy}$$

καὶ
$$\mathrm{OT} + \mathrm{TM} = x + y\,\frac{ds-dx}{dy} = x + y.\,\frac{dy}{ds+dx}.$$

ὅθεν ἀντικαθιστῶντες τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τῶν $x, y,$ καὶ ἀναπτύσσοντες τὸ κλάσμα $\dfrac{dy}{ds+dx}$ κατὰ τὸν τύπον

$$\frac{\alpha}{1-\varepsilon} = \alpha(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\ldots)$$

καὶ διατηροῦντες τοὺς ὅρους τῆς τρίτης καὶ τετάρτης διαστάσεως πρὸς τὸ s, εὑρίσκομεν

$$(\mathrm{OT}+\mathrm{TM}) - s = \frac{s^3}{12\varrho_0^2} + \frac{Bs^4}{12\varrho_0} + \ldots,$$

ἐξ οὗ γίνεται δῆλον, ὅτι ἡ διαφορὰ τοῦ τόξου ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ εἶνε ὡς ἔγγιστα διπλασία τῆς διαφορᾶς αὐτοῦ ἀπὸ τῆς χορδῆς του· καὶ ὅτι τὸ τόξον περιλαμβάνεται μεταξὺ τῆς χορδῆς του καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ ἄκρα του.

Ἐκ τῶν προηγουμένων τύπων συνάγεται πρὸς τούτοις, ὅτι εἶνε

$$\text{τοξ}\mathrm{OM} = s = \frac{2}{3}\,\mathrm{OM} + \frac{\mathrm{OT}+\mathrm{TM}}{3} + \text{ἀπειροστῷ τινι πέμπτης τάξεως.}$$

9) Ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς ὑψωθῇ κάθετος ἐπ' αὐτήν, ἐκφράσαι τὴν διαφορὰν τῶν δύο μερῶν s_1, s_2, εἰς ἃ αὕτη διαιρεῖ τὸ τόξον.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ x_1, y_1 τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου N, ἔνθα ἡ εἰρημένη κάθετος τέμνει τὸ τόξον, θὰ εἶνε

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = x_1^2 + y_1^2,$$

ἤτοι
$$x^2 + y^2 = 2xx_1 + 2yy_1\cdot \tag{1}$$

καὶ ἂν καλέσωμεν s_1 τὸ τόξον ON καὶ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἰσότητα ταύτην τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τῶν x, y διὰ τοῦ τόξου s καὶ τῶν x_1, y_1, διὰ τοῦ τόξου s_1, εὑρίσκομεν

$$x^2 + y^2 = s^2 - \frac{s^4}{12\varrho^2} - \frac{Bs^5}{12\varrho} + \ldots,$$

$$2xx_1 + 2yy_1 = 2ss_1\left\{1 + \frac{3ss_1 - 2s^2 - 2s_1^2}{12\varrho^2} + \frac{B}{24\varrho}(2s^2s_1 + 2ss_1^2 - 3s^3 - 3s_1^3) + \ldots\right\},$$

ἐξ ὧν ἕπεται

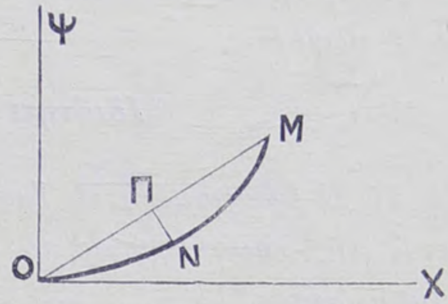
$$\frac{2s_1}{s}=1+\frac{2s_1^2+s^2-3s_1s}{12\varrho^2}+\frac{B}{24\varrho}(s^3+3s_1^3-2s^2s_1-2ss_1^2)+\ldots$$

καὶ ἂν ἀντὶ s_1 θέσωμεν τὴν τιμὴν αὐτοῦ εἰς τὸ δεύτερον μέλος (ληφθεῖσαν ἐκ τοῦ πρώτου), εὑρίσκομεν

$$\frac{2s_1}{s}=1-\frac{B}{192\varrho}s^3+\ldots,$$

ὅθεν
$$s_1=\frac{1}{2}s-\frac{B}{384\varrho}s^4+\ldots,$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶνε ἀπειροστὸν τετάρτης τάξεως καὶ ἔχει πρωτεῦον μέρος τὸ $\frac{B}{192\varrho}s^4$.



10) Ἐκφρᾶσαι τὸ βέλος τόξου.

Βέλος τόξου λέγεται ἡ κάθετος ἡ ἠγμένη ἐκ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς αὐτοῦ μέχρι τοῦ τόξου.

Παριστῶντες διὰ β τὸ βέλος ΠΝ ἔχομεν

$$\beta^2=\left(\frac{1}{2}x-x_1\right)^2+\left(\frac{1}{2}y-y_1\right)^2=\frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right)-\left(xx_1+yy_1\right)+x_1^2+y_1^2$$

καὶ κατὰ τὴν προηγουμένην ἐξίσωσιν (1)

$$\beta^2=\left(x_1^2+y_1^2\right)-\frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right).$$

ἀλλ' εἶνε
$$x^2+y^2=s^2-\frac{s^4}{12\varrho^2}-\frac{Bs^5}{12\varrho}\ldots,$$

$$x_1^2+y_1^2=s_1^2-\frac{s_1^4}{12\varrho^2}-\frac{Bs_1^5}{12\varrho}\ldots$$

καὶ ἐπειδὴ
$$s_1=\frac{1}{2}s-\frac{B}{384\varrho}s^4+\ldots,$$

ἕπεται
$$x_1^2+y_1^2=\frac{1}{4}s^2-\frac{s^4}{12.16\varrho^2}-\frac{Bs^5}{192\varrho}+\ldots$$

καὶ
$$\beta^2=\frac{s^4}{64\varrho^2}+\frac{B}{64\varrho}s^5+\ldots \qquad (\varepsilon)$$

καὶ ἑπομένως
$$\beta=\frac{s^2}{8\varrho}\left(1+\frac{1}{2}B\varrho s+\ldots\right).$$

Ἐκ τῆς τιμῆς (ε) τοῦ β^2 εὑρίσκομεν πρὸς τούτοις

$$s=OM+\frac{8}{3}\cdot\frac{\beta^2}{OM}+\text{ἀπειροστῷ τινι πέμπτης τάξεως.}$$

11) Ἐὰν ἡ καμπυλότης τοῦ τόξου ΟΜ εἶνε πεπερασμένη καὶ διάφορος τοῦ 0, τὸ μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τῆς χορδῆς του περιεχόμενον χωρίον ἔχει πρωτεῦον μέρος τὸ ἕκτον τοῦ ὀρθογωνίου, οὗτινος πλευραὶ εἶνε αἱ ἀποστάσεις τοῦ ἑνὸς ἄκρου τοῦ τόξου ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης καὶ ἀπὸ τῆς καθέτου εἰς τὸ ἄλλο. Τὸ δὲ μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τῶν εἰς τὰ ἄκρα του ἐφαπτομένων περιεχόμενον χωρίον ἔχει πρωτεῦον μέρος διπλάσιον τοῦ προηγουμένου.

Περὶ τῶν ἐνειλιγμένων.

21. *Ἐνειλιγμένη καμπύλης λέγεται ὁ τόπος τῶν κέντρων τῆς καμπυλότητος αὐτῆς.*

Πρὸς ἕκαστον σημεῖον τῆς καμπύλης ἀντιστοιχεῖ ἓν ὡρισμένον κέντρον καμπυλότητος· τὸ δὲ σύνολον τῶν κέντρων τούτων ἀποτελεῖ τὴν ἐνειλιγμένην.

Πᾶσα δὲ καμπύλη πρὸς τὴν ἐνειλιγμένην αὐτῆς σχετιζομένη λέγεται *ἐξειλιγμένη*.

Ἰδιότητες τῆς ἐνειλιγμένης.

1) *Ἡ ἐφαπτομένη εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς ἐνειλιγμένης εἶνε ἡ κάθετος τῆς καμπύλης εἰς τὸ ἀντιστοιχοῦν σημεῖον, τουτέστιν ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος.*

2) *Τὸ τόξον τῆς ἐνειλιγμένης ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τῶν εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ ἀποληγουσῶν ἀκτίνων καμπυλότητος.*

Ἵνα δείξωμεν ταῦτα, παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ συντεταγμέναι ξ, η τοῦ κέντρου τῆς καμπυλότητος μεταβάλλονται ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖον, ἤτοι εἶνε συναρτήσεις τοῦ x· διότι τοῦ x ὁρισθέντος, ὁρίζεται τὸ σημεῖον Μ τῆς καμπύλης· ἄρα ὁρίζεται καὶ τὸ κέντρον καμπυλότητος Κ· τοῦ δὲ x μεταβαλλομένου, μεταβάλλεται καὶ τὸ σημεῖον Μ, ἑπομένως μεταβάλλεται καὶ τὸ ἀντιστοιχοῦν κέντρον καμπυλότητος. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὰ διαφορικὰ τῶν ξ καὶ η θεωροῦντες αὐτὰ ὡς συναρτήσεις τῆς x, ἢ καὶ ἄλλης τινὸς οἱασδήποτε μεταβλητῆς συνδεομένης πρὸς τὴν x.

Αἱ συντεταγμέναι ξ, η τοῦ κέντρου καμπυλότητος ὁρίζονται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων (ἐδ. 20)

$$\left.\begin{aligned}\xi &= x - \varrho\,\text{ημ}\varphi \\ \eta &= y + \varrho\,\text{συν}\varphi\end{aligned}\right. \qquad \text{ἔνθα } \varrho = \frac{ds}{d\varphi}.$$

Ἐκ τούτων λαμβάνομεν διαφορίζοντες

$$d\xi = dx - \text{ημ}\varphi\, d\varrho - \varrho\, \text{συν}\varphi.\, d\varphi = dx - \text{ημ}\varphi\, d\varrho - \text{συν}\varphi.ds$$
$$d\eta = dy + \text{συν}\varphi\, d\varrho - \varrho\,\text{ημ}\varphi\, d\varphi = dy + \text{συν}\varphi\, d\varrho - \text{ημ}\varphi\, ds$$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε

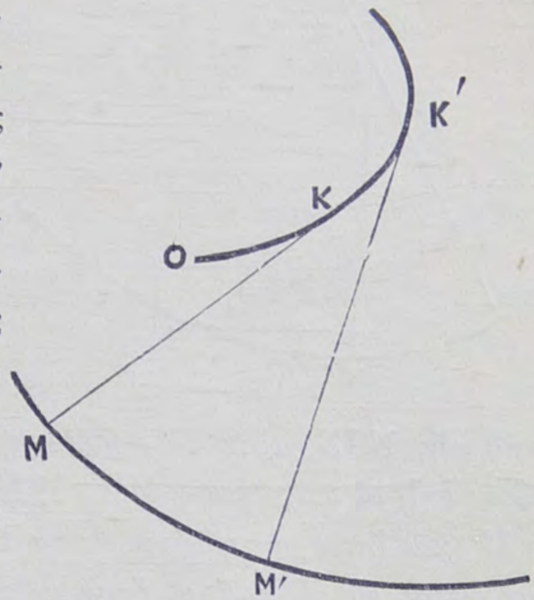
$$dx = \text{συν}\varphi.\, ds \text{ καὶ } dy = \text{ημ}\varphi.\, ds,$$

αἱ προηγούμεναι ἐξισώσεις γίνονται

$$d\xi = -\eta\mu\varphi . d\varrho$$
$$d\eta = \sigma\upsilon\nu\varphi . d\varrho . \qquad (1)$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται $\quad \dfrac{d\eta}{d\xi} = -\sigma\varphi\,\varphi \quad$ ἢ $\quad \varepsilon\varphi\varphi . \dfrac{d\eta}{d\xi} = -1.$

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον M καὶ ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἐνειλιγμένης εἰς τὸ ἀντιστοιχοῦν σημεῖον K εἶνε κάθετοι πρὸς ἀλλήλας· καὶ ἐπειδὴ ἡ MK εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς καμπύλης, συνάγεται, ὅτι αὐτὴ εἶνε ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἐνειλιγμένης εἰς τὸ K.



Ἐκ τῶν αὐτῶν ἐξισώσεων (1) ἕπεται πρὸς τούτοις

$$d\xi^2 + d\eta^2 = d\varrho^2,$$

τουτέστι $\qquad d\sigma = d\varrho \quad$ καὶ $\quad \sigma = \varrho + A,$

ἐὰν σ δηλοῖ τὸ μῆκος τοῦ τόξου τῆς ἐνειλιγμένης ἀπό τινος ἀρχῆς O λογιζόμενον· δύναται δὲ νὰ ληφθῇ ἡ ἀρχὴ αὕτη οὕτως, ὥστε νὰ αὐξάνῃ τὸ τόξον σ, ὅταν αὐξάνῃ καὶ ἡ ἀκτὶς ϱ.

Ἂς ἐφαρμοσθῇ νῦν ἡ ἐξίσωσις $\sigma = \varrho + A$ εἰς δύο τυχόντα σημεῖα τῆς ἐνειλιγμένης, τὰ K καὶ K′, τοιαῦτα, ὥστε ἐπὶ τοῦ τόξου KK′ ἡ ἀκτὶς ϱ νὰ προβαίνῃ ἢ διαρκῶς αὐξανομένη ἢ διαρκῶς ἐλαττουμένη· τότε θὰ εἶνε

τοξ OK = KM + A $\quad$ εἰς τὸ σημεῖον K,

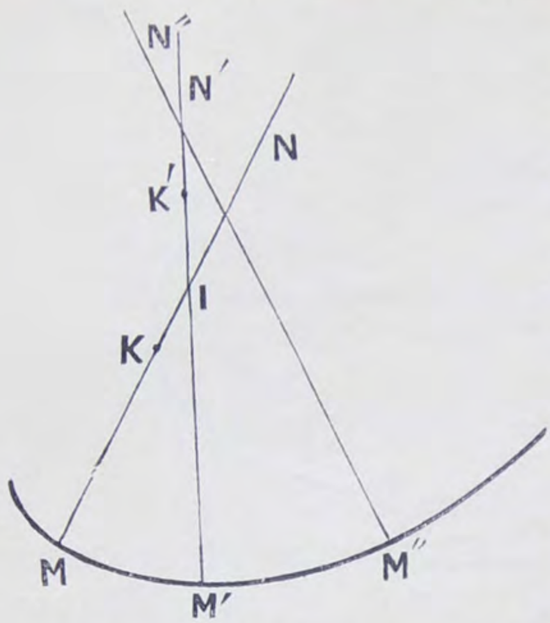
τοξ OK′ = K′M′ + A $\quad$ εἰς τὸ σημεῖον K′,

ὅθεν $\quad$ τοξ KK′ = K′M′ — KM,

ἤτοι *πᾶν τόξον τῆς ἐνειλιγμένης* (εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς καμπύλης διηνεκῶς αὐξάνει ἢ διηνεκῶς ἐλαττοῦται) *εἶνε ἴσον τῇ διαφορᾷ τῶν εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ ἀπολῃγουσῶν ἀκτίνων καμπυλότητος.*

22. Τὰς ἰδιότητας ταύτας δυνάμεθα νὰ δείξωμεν καὶ γεωμετρικῶς, ὡς ἕπεται.

Ἔστωσαν ΜΚ ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος εἰς τὸ σημεῖον Μ καὶ Μ΄Κ΄ ἡ ἀκτὶς εἰς τὸ σημεῖον Μ΄, ὅπερ ἐλήφθη πλησίον τοῦ Μ· ἂς τέμνωνται δὲ αἱ κάθετοι ΜΝ καὶ Μ΄Ν΄ εἰς τὸ σημεῖον Ι.



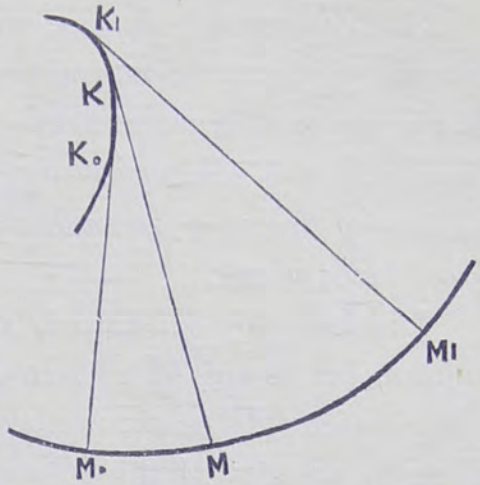
1) Ἐν πρώτοις λέγω, ὅτι τὰ κέντρα Κ καὶ Κ΄ θὰ κεῖνται ἐπὶ τῶν πλευρῶν μιᾶς τῶν ἀμβλειῶν γωνιῶν τῶν δύο καθέτων· διότι, ἂν νοήσωμεν καὶ τρίτην κάθετον εἴς τι σημεῖον Μ″ πέραν τοῦ Μ΄ καὶ πλησίον αὐτοῦ, αὕτη θὰ τέμνῃ τὰς δύο πρώτας εἰς τὰς πλευρὰς μιᾶς τῶν ὀξειῶν γωνιῶν, ἔστω τῆς Ν΄ΙΝ· τότε τὰ σημεῖα, καθ᾽ ἃ τέμνει αὐτάς, θὰ ὀπισθοχωρῶσιν ἐπὶ τῶν καθέτων ΜΝ, Μ΄Ν΄, ὅταν τὸ Μ΄΄ ὀπισθοχωρῇ πρὸς τὸ Μ· καὶ ὅταν μὲν φθάσῃ εἰς τὸ Μ΄, ἡ τομὴ αὐτῆς καὶ τῆς πρώτης εὑρίσκεται εἰς τὸ Ι· ἄρα, ὅταν φθάσῃ εἰς τὸ Μ, ἡ τομὴ αὐτῆς μετὰ τῆς πρώτης (ἤτοι τὸ κέντρον καμπυλότητος Κ) θὰ εὑρίσκηται ἐντεῦθεν τοῦ Ι. Ἡ αὐτὴ τρίτη κάθετος, ὅταν τὸ Μ΄΄ εὑρίσκηται εἰς τὸ Μ, τέμνει τὴν δευτέραν εἰς τὸ Ι· ἄρα, ὅταν ἐπιστρέφον τὸ Μ΄΄ ἔλθῃ εἰς τὸ Μ΄, ἡ τομὴ αὐτῆς καὶ τῆς Μ΄Ι θὰ εὑρίσκηται πέραν τοῦ Ι, εἰς τὸ Κ΄.

Τούτου προδειχθέντος, ἂν ἀχθῇ ἡ χορδὴ ΚΚ΄ τῆς ἐνειλιγμένης, πρόδηλον εἶνε, ὅτι ἡ γωνία Κ΄ΚΙ, τὴν ὁποίαν σχηματίζει μετὰ τῆς ΜΚ, εἶνε μικροτέρα τῆς γωνίας Ι τῶν δύο καθέτων· ἄρα ἡ γωνία Κ΄ΚΙ τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ὡς καὶ ἡ Ι· καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἐνειλιγμένης εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς Κ συμπίπτει μετὰ τῆς ΜΚ.

2) Ἵνα δείξωμεν τὴν δευτέραν ἰδιότητα, παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ τόξον ΚΚ΄ τῆς ἐνειλιγμένης, ὅπερ εἶνε ἡ αὔξησις $\Delta\sigma$ τοῦ τόξου σ αὐτῆς (τοῦ ἀρχομένου ἀπό τινος σημείου Ο μέχρι τοῦ Κ) ἡ ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τὴν αὔξησιν Δs ($=$ΜΜ΄) τοῦ τόξου s τῆς καμπύλης, εἶνε ἀπειροστὸν ἰσοδύναμον πρὸς τὴν τεθλασμένην γραμμὴν ΙΚ$+$ΙΚ΄, ἤτοι πρὸς τὴν ἴσην αὐτῇ Μ΄Κ΄—ΜΚ—(ΙΜ΄—ΙΜ)· ἐπειδὴ δὲ ἡ διαφορὰ ΙΜ΄—ΙΜ τῶν δύο καθέτων πρὸς τὴν καμπύλην εἶνε ἀπειροστὸν ἀνωτέρας τάξεως ἢ τὸ τόξον ΜΜ΄, συνάγεται, ὅτι τὸ τόξον $\Delta\sigma$ καὶ ἡ διαφορὰ Κ΄Μ΄— ΚΜ,

τουτέστιν ἡ αὔξησις $\Delta\varrho$ τῆς ἀκτῖνος καμπυλότητος εἶνε ἰσοδύναμα ἀπειροστά· εἶνε δηλαδὴ ὅρ $\dfrac{\Delta\sigma}{\Delta\varrho}=1$· ὅθεν $d\sigma=d\varrho$ καὶ $\sigma=\varrho+A$.

23. Ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τούτων προκύπτει ἡ ἑπομένη μηχανικὴ ἰδιότης τῆς ἐνειλιγμένης.



Ἔστω M_0MM_1 τυχὸν τόξον τῆς καμπύλης, ἐν τῷ ὁποίῳ ἡ ἀκτὶς ϱ προβαίνει αὐξανομένη· καὶ K_0KK_1 τὸ ἀντίστοιχον τόξον τῆς ἐνειλιγμένης. Ἐὰν νῆμα σταθεροῦ μήκους ἐφαρμοσθῇ κατὰ μέρος ἐπὶ τὴν ἐνειλιγμένην, ὥστε νὰ λάβῃ τὴν θέσιν $M_0K_0KK_1$, καὶ ἔπειτα ἐκτυλίσσηται οὕτως, ὥστε ἐν ἑκάστῃ θέσει τὸ μέρος αὐτοῦ τὸ μὴ ἐφαρμόζον ἐπὶ τὴν ἐνειλιγμένην νὰ εἶνε τεταμένον καὶ ἐφαπτόμενον αὐτῆς, τὸ πέρας M_0 τοῦ νήματος θὰ γράψῃ τὴν ἐξειλιγμένην M_0MM_1.

Διότι ἔστω τυχοῦσα θέσις τοῦ νήματος ἡ MKK_1· εἰς τὴν θέσιν ταύτην τὸ νῆμα KM ἐφάπτεται τῆς ἐνειλιγμένης καὶ διὰ τοῦτο εἶνε κάθετον ἐπὶ τὴν ἐξειλιγμένην· ἐπειδὴ δὲ τὸ μῆκος τοῦ νήματος μένει ἀμετάβλητον, θὰ εἶνε

$$\text{τοξ}\ K_1K+KM=\text{τοξ}\ K_1K+\text{τοξ}\ KK_0+K_0M_0$$

ἤτοι
$$KM-K_0M_0=\text{τοξ}\ KK_0$$

ἢ
$$KM-\varrho_0=\text{τοξ}\ KK_0$$

(διότι K_0M_0 εἶνε ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος εἰς τὸ M_0), τουτέστιν ἡ KM εἶνε ἴση τῇ ἀκτῖνι καμπυλότητος εἰς τὸ ἀντιστοιχοῦν σημεῖον τῆς ἐξειλιγμένης· ἄρα τὸ M εἶνε σημεῖον τῆς ἐξειλιγμένης.

Ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης προέκυψαν τὰ ὀνόματα *ἐξειλιγμένη* καὶ *ἐνειλιγμένη*.

Ὁμοίως δεικνύεται, ὅτι ἡ ἐξειλιγμένη γράφεται ὑπὸ τοῦ σημείου M_0 τῆς ἐφαπτομένης M_0K_0 (προσεκβαλλομένης πέραν τοῦ K_0 ἐπ' ἀόριστον), ὅταν αὕτη κυλίηται ἐπὶ τῆς ἐνειλιγμένης (παράβλ. Ἀναλ. Γεωμετρίας ἐδ. 563).

ΣΗΜ. Πᾶσαι αἱ καμπύλαι, αἵτινες προκύπτουσιν, ὅταν αἱ κάθετοι μιᾶς καμπύλης αὐξηθῶσιν ἢ ἐλαττωθῶσι κατά τινα εὐθεῖαν, ἤτοι πᾶσαι αἱ παράλληλοι καμπύλαι (I, σελ. 142), ἔχουσι τὰ αὐτὰ κέντρα καμπυλότητος καὶ ἑπομένως μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ἐνειλιγμένην· ὥστε ἑκάστη καμπύλη ἔχει ἀπείρους ἐξειλιγμένας.

Θέσις τοῦ κύκλου τῆς καμπυλότητος πρὸς τὴν καμπύλην.

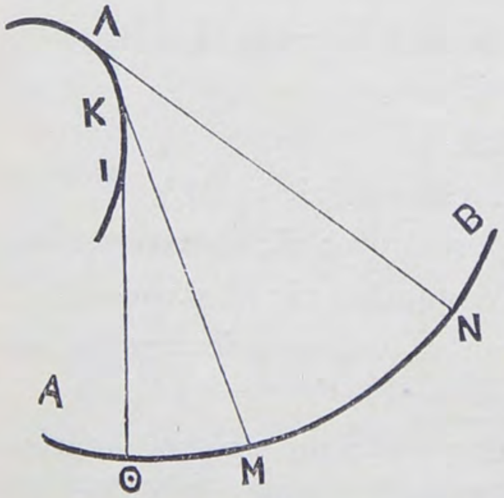
24. Ἐὰν γραφῇ ὁ πρὸς τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς καμπύλης ἀντιστοιχῶν κύκλος τῆς καμπυλότητος, πᾶν ἐκ τοῦ Μ ἀρχόμενον τόξον, ἐν τῷ ὁποίῳ ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος προβαίνει ἐλαττουμένη, θὰ κεῖται ὅλον ἐντὸς τοῦ κύκλου τούτου· πᾶν δὲ ἐκ τοῦ Μ ἀρχόμενον τόξον, ἐν τῷ ὁποίῳ ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος προβαίνει αὐξανομένη, θὰ κεῖται ὅλον ἐκτὸς αὐτοῦ.

Ἄς ὑποτεθῇ, ὅτι ἐπὶ μὲν τοῦ τόξου ΜΒ ἡ ἀκτὶς προβαίνει αὐξανομένη, ἐπὶ δὲ τοῦ ΜΑ ἐλαττουμένη, ἂς ἀντιστοιχῇ δὲ πρὸς τὸ τόξον ΑΒ τὸ τόξον ΙΚΛ τῆς ἐνειλιγμένης· ἀρκεῖ προφανῶς νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τυχὸν σημεῖον Ν τοῦ τόξου ΜΒ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου τῆς καμπυλότητος τοῦ σημείου Μ, τὸ δὲ τυχὸν σημεῖον Θ τοῦ τόξου ΑΜ κεῖται ἐντὸς αὐτοῦ.

Ἐπειδὴ ἡ ἀκτὶς ΚΜ εἶνε μεγαλητέρα τῆς ΙΘ, θὰ εἶνε

$$\text{εὐθεῖα} \quad K\Theta < \text{τοξ } KI + I\Theta,$$
$$\text{ἤτοι} \quad K\Theta < KM$$

καὶ διὰ τοῦτο θὰ κεῖται τὸ Θ ἐντὸς τοῦ κύκλου τῆς καμπυλότητος τοῦ σημείου Μ.



Ἐπειδὴ δὲ πάλιν ἡ ἀκτὶς ΚΜ εἶνε μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος ΛΝ, θὰ εἶνε

$$\Lambda N = \text{τοξ } \Lambda K + KM,$$

ἀλλ' εἶνε καὶ

$$\Lambda N < \text{τοξ } K\Lambda + KN,$$

$$\text{ἄρα} \quad KN > KM$$

καὶ διὰ τοῦτο θὰ κεῖται τὸ σημεῖον Ν ἐκτὸς τοῦ κύκλου τῆς καμπυλότητος τοῦ σημείου Μ.

Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι ὁ κύκλος τῆς καμπυλότητος εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Μ, ὅστις ἐφάπτεται τῆς καμπύλης εἰς τὸ Μ (διότι τὸ κέντρον αὐτοῦ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου), διαπερᾷ συνάμα αὐτὴν εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο· ἐκτὸς ἐὰν ἡ ἀκτίς του εἰς τὸ σημεῖον Μ γίνηται μεγίστη ἢ ἐλαχίστη· τότε, ἂν μὲν γίνηται μεγίστη, θὰ κεῖται ἡ καμπύλη ἔνθεν καὶ ἔνθεν τοῦ Μ ἐντὸς τοῦ κύκλου, ἂν δὲ ἐλαχίστη, ἐκτὸς αὐτοῦ.

Παραδείγματα ἐνειλιγμένων.

1) Ἐνειλιγμένη τῆς ἐλλείψεως.

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως πρὸς τοὺς ἄξονας αὐτῆς εἶνε

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \cdot \qquad (1)$$

ἐξ αὐτῆς εὑρίσκομεν διὰ τῆς διαφορίσεως

$$\frac{x}{\alpha^2} + \frac{y}{\beta^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{y}{\beta^2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

ἐξ ὧν προκύπτουσιν αἱ τιμαὶ τῶν παραγώγων

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\beta^2 x}{\alpha^2 y}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\beta^4}{\alpha^2 y^3}.$$

Αἱ συντεταγμέναι x_1, y_1 τοῦ κέντρου καμπυλότητος πάσης καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς (x, y) δίδονται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων

$$x_1 = x - \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \qquad y_1 = y + \frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Ἐὰν δὲ εἰς τὰς ἐξισώσεις ταύτας ἀντικαταστήσωμεν τὰς παραγώγους διὰ τῶν τιμῶν αὐτῶν, εὑρίσκομεν διὰ τὴν ἔλλειψιν

(ἐτέθη $\alpha^2 - \beta^2 = \gamma^2$)

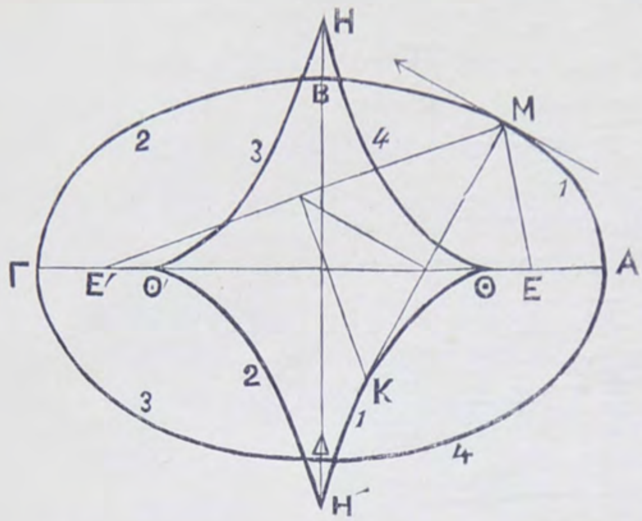
$$x_1 = \frac{\gamma^2 x^3}{\alpha^4}, \qquad y_1 = -\frac{\gamma^2 y^3}{\beta^4}. \qquad (2)$$

Αἱ τιμαὶ αὗται δεικνύουσιν, ὅτι τὸ κέντρον καμπυλότητος τοῦ τυχόντος σημείου Μ τῆς ἐλλείψεως κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐλάσσονος ἄξονος, πρὸς ὃ κεῖται καὶ τὸ Μ, ἀλλὰ πρὸς τὸ ἀντίθετον τοῦ μείζονος.

Πρὸς εὕρεσιν τῆς ἐξισώσεως τῆς ἐνειλιγμένης μένει νῦν νὰ ἀπαλείψωμεν τὰς δύο συντεταγμένας x, y ἐκ τῶν τριῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2). Ἐὰν θέσωμεν, συντομίας χάριν,

$$\alpha_1 = \frac{\gamma^2}{\alpha} \qquad \text{καὶ} \qquad \beta_1 = \frac{\gamma^2}{\beta},$$

εὑρίσκομεν
$$\left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y_1}{\beta_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$



ἥτις εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐνειλιγμένης.

Οἱ ἄξονες τῆς ἐλλείψεως εἶνε καὶ τῆς ἐνειλιγμένης ἄξονες. Τὰ σημεῖα Θ καὶ Θ′, ἔνθα συναντᾷ τὸν μείζονα ἄξονα, κεῖνται μεταξὺ τῶν δύο ἑστιῶν τῆς ἐλλείψεως· διότι $\alpha_1 < \gamma$. Τὰ δὲ σημεῖα Η καὶ Η′, ἔνθα συναντᾷ τὸν ἐλάσσονα ἄξονα, θὰ κεῖνται ἐντὸς μὲν τῆς ἐλλείψεως, ἐὰν εἶνε $\beta_1 < \beta$, τουτέστι $\beta^2 > \gamma^2$, ἤτοι $\alpha < \beta\sqrt{2}$. ἐκτὸς δὲ αὐτῆς, ἐὰν εἶνε $\alpha > \beta\sqrt{2}$· καὶ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως, ἐὰν εἶνε $\alpha = \beta\sqrt{2}$.

Τὰ σημεῖα ταῦτα εὑρίσκονται γεωμετρικῶς ὡς ἑξῆς. Ἐὰν ἐπὶ τῶν ἡμιαξόνων ΟΑ, ΟΒ τῆς ἐλλείψεως κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον τὸ ΟΑΓΒ, ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς Γ ἀγομένη κάθετος ἐπὶ τὴν διαγώνιον αὐτοῦ ΑΒ θὰ τέμνῃ τοὺς ἄξονας εἰς τὰ σημεῖα Θ καὶ Η′.

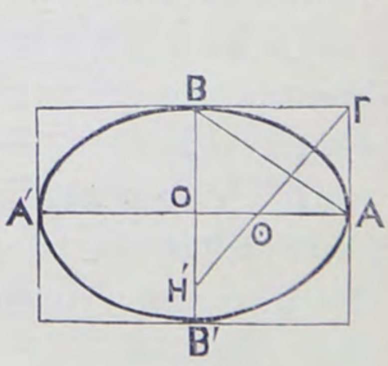
Διότι ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΓΘ καὶ ΑΓΒ ἕπεται

$$\mathrm{A\Theta} : \mathrm{A\Gamma} = \mathrm{A\Gamma} : \mathrm{B\Gamma},$$

ἤτοι
$$\mathrm{A\Theta} : \beta = \beta : \alpha \text{ καὶ } \mathrm{A\Theta} = \frac{\beta^2}{\alpha},$$

ἑπομένως
$$\mathrm{O\Theta} = \alpha - \mathrm{A\Theta} = \frac{\gamma^2}{\alpha}$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ περὶ τοῦ Η′ ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΒΓΗ′ καὶ ΒΓΑ.



Εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ μείζονος ἄξονος ἡ ἀκτὶς τῆς καμπυλότητος γίνεται ἐλαχίστη, εἰς δὲ τὰς κορυφὰς τοῦ ἐλάσσονος γίνεται μεγίστη· καὶ ἐν ἑκάστῳ τεταρτημορίῳ ἡ ἀκτὶς προβαίνει ἢ διηνεκῶς αὐξανομένη ἢ διηνεκῶς ἐλαττουμένη.

Ἵνα δειχθῇ τοῦτο εὐκολώτερον, λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις τῆς ἐλλείψεως

$$x = \alpha\sigma\upsilon\nu\varphi, \qquad y = \beta\eta\mu\varphi,$$

ἔνθα φ σημαίνει τὴν ἐκκεντρικὴν γωνίαν (ἰδὲ Ἀναλ. Γεωμ. ἐδ. 251).

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν εὐκόλως

$$dx^2 + dy^2 = (\alpha^2\eta\mu^2\varphi + \beta^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi)\,.\,d\varphi^2$$

καὶ

$$dxd^2y - dyd^2x = \alpha\beta d\varphi^3,$$

ὅθεν

$$\varrho = \frac{(\alpha^2\eta\mu^2\varphi + \beta^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{\alpha\beta} = \frac{(\beta^2 + \gamma^2\eta\mu^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{\alpha\beta}.$$

ὁ δὲ τύπος οὗτος καταδεικνύει τὴν μεταβολὴν τῆς ἀκτῖνος καμπυλότητος.

Πρὸς τὸ πρῶτον τεταρτημόριον ΑΒ τῆς ἐλλείψεως ἀντιστοιχεῖ τὸ τόξον ΘΗ′ τῆς ἐνειλιγμένης (ΟΘ$=\alpha_1$ καὶ ΟΗ′$=\beta_1$)· στρέφει δὲ τὸ τόξον τοῦτο τὰ κυρτὰ αὐτοῦ πρὸς τὰ ἄνω· διότι ἐφαπτόμεναι αὐτοῦ εἰς τὰ ἄκρα του Θ καὶ Η′ εἶνε αἱ ΘΑ καὶ Η′Β, ἡ δὲ γωνία τῆς ἐφαπτομένης του πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x προβαίνει αὐξανομένη ἀπὸ 0^0 (εἰς τὸ Θ) μέχρι τῶν 90^0 (εἰς τὸ Η′)· ὥστε οὐδὲν σημεῖον καμπῆς δύναται νὰ ἔχῃ (σελ. 17, Σημ.)· καὶ διὰ τοῦτο στρέφει τὰ κυρτὰ αὐτοῦ πανταχοῦ πρὸς τὰ ἄνω.

Ἐκ τῆς συμμετρίας δὲ τῆς ἐνειλιγμένης πρὸς τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων συνάγεται, ὅτι αὕτη στρέφει πανταχοῦ τὰ κυρτὰ αὐτῆς πρὸς τὸ κέντρον Ο.

Ἐκ τῆς γνωστῆς ἰδιότητος τῶν ἐνειλιγμένων δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος τῆς ἐνειλιγμένης τῆς ἐλλείψεως. Διότι εἰς τὴν κορυφὴν Α ἡ ἀκτὶς τῆς καμπυλότητος εἶνε $\frac{\beta^2}{\alpha} = $ ΑΘ, εἰς δὲ τὴν κορυφὴν Β ἡ ἀκτὶς εἶνε $\frac{\alpha^2}{\beta} = $ ΒΗ′· ἐντεῦθεν ἕπεται τοξ ΘΗ′$= \frac{\alpha^2}{\beta} - \frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha\beta}$· καὶ τὸ μῆκος τῆς ὅλης ἐνειλιγμένης εἶνε

$$4\frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha\beta} \quad \text{ἢ} \quad 4(\mathrm{BH'} - \mathrm{A\Theta}).$$

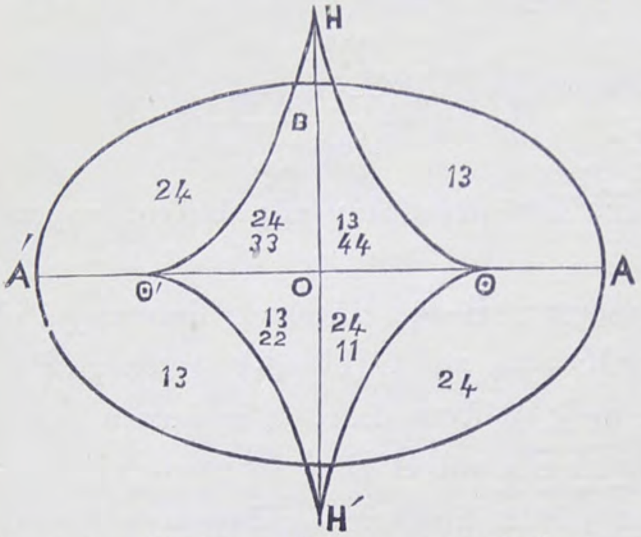
Τὸ σχῆμα τῆς καμπύλης διερευνᾶται εὐκολώτερον, ἐὰν τεθῇ

$$x_1 = \alpha_1\,\sigma\upsilon\nu^3\varphi,$$

διότι τότε ἡ ἐξίσωσις δίδει $y_1 = \beta_1\,\eta\mu^3\varphi$, ἔνθα φ εἶνε βοηθητική τις γωνία· ἑπομένως ἡ ἐνειλιγμένη τῆς ἐλλείψεως παρίσταται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων

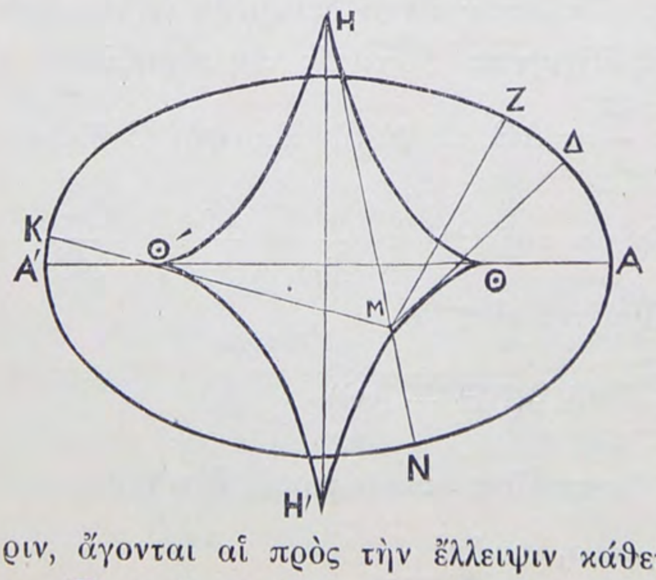
$$x_1 = \alpha_1 \,\text{συν}^3\varphi$$
$$y_1 = \beta_1 \,\text{ημ}^3\varphi.$$

Σημειωσις. Ἐκ παντὸς σημείου κειμένου ἐντὸς τῆς ἐνειλιγμένης ΘΗΘ΄Η΄Θ ἄγονται τέσσαρες κάθετοι ἐπὶ τὴν ἔλλειψιν, ἐκ παντὸς δὲ σημείου ἐκτὸς αὐτῆς κειμένου ἄγονται μόνον δύο καὶ ἐκ παντὸς σημείου ἐπ' αὐτῆς κειμένου τρεῖς. Ἵνα πεισθῶμεν περὶ τούτου, ἀρκεῖ νὰ διερευνήσωμεν τὸν τόπον, ὃν γράφουσιν αἱ ἐφαπτόμεναι ἑκάστου τεταρτημορίου τῆς ἐνειλιγμένης (διότι αἱ ἐφαπτόμεναι τῆς ἐνειλιγμένης εἶνε αἱ κάθετοι ἐπὶ τὴν ἔλλειψιν).



Αἱ ἐφαπτόμεναι, παραδείγματος χάριν, τοῦ τόξου ΘΗ γράφουσι τοὺς δύο κατὰ κορυφὴν τόπους ΨΟΧ΄ καὶ Ψ΄ΟΧ *ἅπαξ*· ἤτοι δι' ἑκάστου σημείου αὐτῶν διέρχεται μία μόνη ἐφαπτομένη τοῦ ΘΗ (τουτέστι μία κάθετος ἐπὶ τὸ ΑΒ΄)· γράφουσι δὲ προσέτι καὶ τὸν τόπον ΘΟΗ *δίς*· τουτέστι δι' ἑκάστου σημείου τοῦ τόπου τούτου διέρχονται δύο ἐφαπτόμεναι τοῦ ΘΗ (ἤτοι δύο κάθετοι τοῦ ΑΒ΄).

Ἐξακολουθοῦντες τοιουτοτρόπως βλέπομεν, ὅτι, ἐὰν παραστήσωμεν τὰ τέσσαρα τεταρτημόρια τῆς ἐλλείψεως κατὰ σειρὰν διὰ τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4, οἱ ἐν ἑκάστῳ τόπῳ γεγραμμένοι ἀριθμοὶ δεικνύουσι τὰ τεταρτημόρια, πρὸς τὰ ὁποῖα ἄγεται ἐξ αὐτοῦ κάθετος. Ἐκ τοῦ σημείου Μ, παραδείγματος χάριν, ἄγονται αἱ πρὸς τὴν ἔλλειψιν κάθετοι ΜΔ, ΜΖ, ΜΚ, ΜΝ.



Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι ἡ ἐνειλιγμένη χωρίζει τὸν τόπον τῶν σημείων, ἐξ ὧν ἄγονται ἐπὶ τὴν ἔλλειψιν τέσσαρες κάθετοι, ἀπὸ τοῦ τόπου τῶν σημείων, ἐξ ὧν ἄγονται δύο μόνον· ἑπομένως κατὰ τὴν διὰ τῆς ἐνειλιγμένης διάβασιν μεταβάλλεται ὁ ἀριθμὸς τῶν καθέτων, αὐξανόμενος ἢ ἐλαττούμενος κατὰ δύο.

Παρατηρητέον δέ, ὅτι τὴν ἰδιότητα ταύτην ἔχει ἐν γένει ἡ ἐνειλιγμένη πάσης καμπύλης· ὁ ἀριθμὸς δηλονότι τῶν πρὸς τὴν καμπύλην καθέτων μεταβάλλεται, ὅταν τὸ σημεῖον, ἐξ οὗ αἱ κάθετοι ἄγονται, διαβαίνῃ τὴν ἐνειλιγμένην· διότι τότε συμπίπτουσι δύο ἐξ αὐτῶν εἰς μίαν· (διότι εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς ἐνειλιγμένης συμπίπτουσι δύο κάθετοι τῆς καμπύλης (ἐδ. 17)· τότε δὲ μόνον δύναται νὰ μεταβληθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν λύσεων προβλήματος ἐξαρτωμένου ἀπὸ τῆς λύσεως ἐξισώσεως (καὶ τοιοῦτον εἶνε τὸ πρόβλημα νὰ ἀχθῇ ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου ἐφαπτομένη ἢ κάθετος πρὸς δοθεῖσαν καμπύλην), ὅταν δύο λύσεις συμπέσωσι· διότι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως, ἐξ ἧς ἐξαρτῶνται αἱ λύσεις, ἐὰν συνεχῶς μεταβάλλωνται, δὲν δύνανται νὰ γίνωσι φανταστικαὶ ἀπὸ πραγματικῶν, ἢ τοὐναντίον πραγματικαὶ ἀπὸ φανταστικῶν, ἐὰν μὴ πρότερον γίνωσιν ἴσαι.

Ἐνειλιγμένη τῆς ὑπερβολῆς.

Ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις τῆς ὑπερβολῆς

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

δὲν διαφέρει ἀπὸ τῆς ἐξισώσεως τῆς ἐλλείψεως ἢ ὅτι ἀντὶ β^2 ἔχει $-\beta^2$, ἕπεται, ὅτι τρέποντες ἐν τοῖς προηγουμένοις τὸ β^2 εἰς $-\beta^2$ (ἢ τὸ β εἰς βi), εὑρίσκομεν τὰ εἰς τὴν ὑπερβολὴν ἁρμόζοντα ἐξαγόμενα

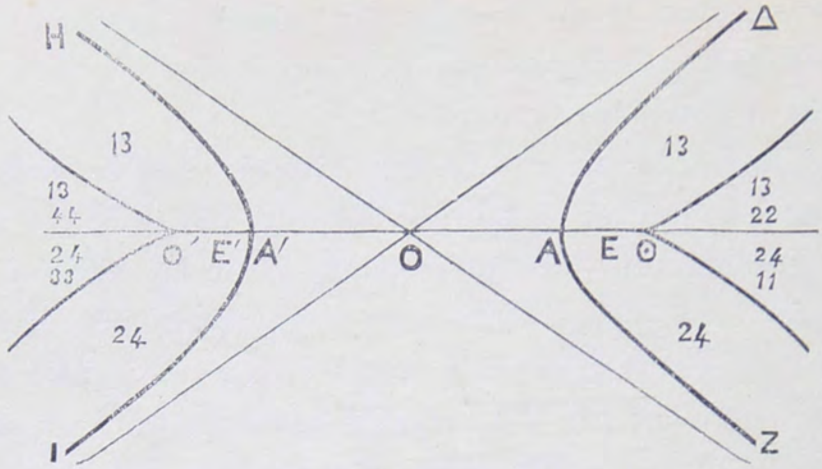
$$x_1 = \frac{\gamma^2 x^3}{\alpha^4}, \quad y_1 = -\frac{\gamma^2 y^3}{\beta^4}, \quad \text{ἔνθα } \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

καὶ ἐὰν τεθῇ $\qquad \alpha_1 = \dfrac{\gamma^2}{\alpha}, \quad \beta_1 = \dfrac{\gamma^2}{\beta},$

ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐνειλιγμένης τῆς ὑπερβολῆς εἶνε

$$\left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{y_1}{\beta_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Ἡ καμπύλη αὕτη σύγκειται ἐκ δύο μερῶν κεχωρισμένων ἀπ' ἀλλήλων, ὡς καὶ ἡ ὑπερβολή· εἶνε δὲ συμμετρικὴ πρὸς τοὺς ἄξονας καὶ τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὰ σημεῖα Θ, Θ', ἅτινα κεῖνται πέραν



τῶν ἑστιῶν, διότι εἶνε $ΟΘ = Θ'Ο = α_1 = \frac{γ^2}{α}$ καὶ $γ > α$· στρέφει δὲ πανταχοῦ τὰ κοῖλα αὐτῆς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y.

ΣΗΜ. Οἱ ἐν τῷ σχήματι γεγραμμένοι ἀριθμοὶ δεικνύουσι τοὺς κλάδους τῆς ὑπερβολῆς, πρὸς τοὺς ὁποίους ἄγονται κάθετοι ἐξ ἑκάστου τόπου. Διὰ τοῦ 1 δηλοῦται ὁ κλάδος ΑΔ, διὰ τοῦ 2 ὁ ΑΖ, διὰ τοῦ 3 ὁ Α'Η καὶ διὰ τοῦ 4 ὁ Α'Ι.

Ἐνειλιγμένη τῆς παραβολῆς.

Ἡ ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς πρὸς τὸν ἄξονα αὐτῆς καὶ πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῆς εἶνε

$$y^2 = 2μx,$$

ὅθεν διαφορίζοντες λαμβάνομεν $y\frac{dy}{dx} = μ$

καὶ

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2} = 0\cdot$$

ἐκ τούτων εὑρίσκομεν

$$\frac{dy}{dx} = \frac{μ}{y} \quad \text{καὶ} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{μ^2}{y^3}.$$

πρὸς τούτοις $\quad 1 + \frac{dy^2}{dx^2} = 1 + \frac{μ^2}{y^2} = \frac{2μx + μ^2}{y^2}.$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τοὺς γενικοὺς τύπους, δι' ὧν εὑρίσκεται τὸ κέντρον καμπυλότητος, εὑρίσκομεν

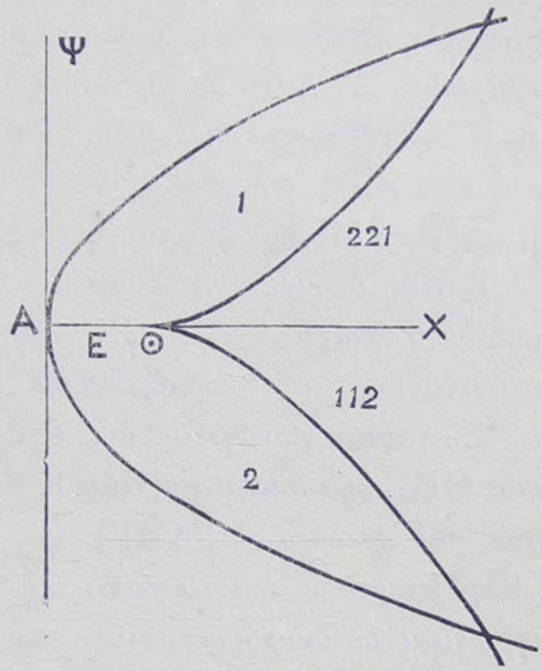
$$x_1 = μ + 3x,$$

$$y_1 = -\frac{y^3}{μ^2}.$$

Ἀπαλείφοντες δὲ τὰς συντεταγμένας x, y μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τούτων καὶ τῆς ἐξισώσεως τῆς παραβολῆς, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐνειλιγμένης

$$y_1^2 = \frac{8}{27\mu} \cdot (x_1 - \mu)^3.$$

Ἡ καμπύλη αὕτη τέμνει τὸν ἄξονα εἰς τὸ σημεῖον Θ, ὅπερ ἀπέχει ἀπὸ τῆς κορυφῆς διπλάσιον ἢ ἡ ἑστία· εἶνε δὲ συμμετρικὴ πρὸς τὸν ἄξονα τῆς παραβολῆς καὶ στρέφει πανταχοῦ τὰ κοῖλα πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y, ἐκτεινομένη ἑκατέρωθεν τοῦ ἄξονος εἰς ἄπειρον.

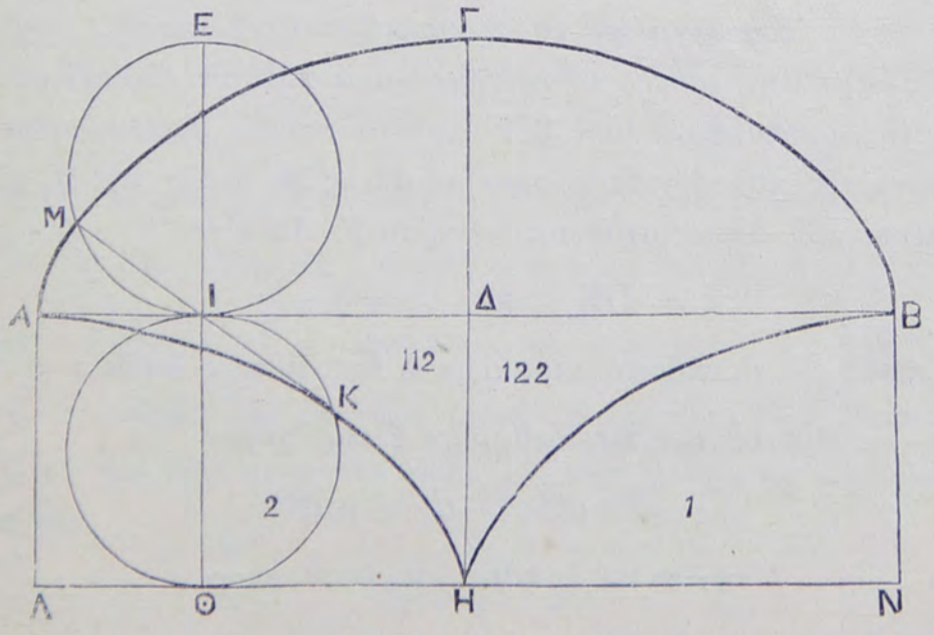


ΣΗΜ. Οἱ ἀριθμοὶ τοῦ σχήματος δηλοῦσι τοὺς κλάδους, πρὸς οὓς ἄγονται κάθετοι.

Ἐνειλιγμένη τῆς κυκλοειδοῦς.

Ἐμάθομεν ἤδη (σελ. 31), ὅτι ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς κυκλοειδοῦς εἶνε διπλασία τῆς καθέτου· στηριζόμενοι εἰς τὴν ἰδιότητα ταύτην εὑρίσκομεν τὴν ἐνειλιγμένην τῆς κυκλοειδοῦς εὐκολώτατα ὡς ἑξῆς.

Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τῆς κυκλοειδοῦς καὶ ΜΕΙ ἡ τὴν καμπύλην γράφουσα περιφέρεια· ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν κυκλοειδῆ κατὰ τὸ σημεῖον Μ θὰ εἶνε ἡ ΜΙ (Ι, σελ. 168).



Ἐὰν γράψωμεν ὑπὸ τὴν βάσιν ΑΒ τὴν περιφέρειαν ΙΚΘ ἴσην τῇ ΜΕΙ καὶ ἐφαπτομένην αὐτῆς κατὰ τὸ Ι, ἔπειτα φέρωμεν τῆς περιφερείας ταύτης ἐφαπτομένην παράλληλον τῇ βάσει, τὴν ΘΝ, προσεκβάλωμεν δὲ καὶ τὴν μεγίστην τεταγμένην ΓΔ, μέχρις οὗ συναντήσῃ τὴν ΘΝ εἰς τὸ σημεῖον Η, τὸ σημεῖον Κ, εἰς ὃ ἡ ΜΙ προσεκβαλλομένη τέμνει τὴν δευτέραν περιφέρειαν, θὰ εἶνε τὸ κέντρον καμπυλότητος εἰς τὸ σημεῖον Μ. Διότι ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν ΔΙΚ καὶ ΜΙΑ συνάγεται ἡ ἰσότης τῶν τόξων ΜΙ καὶ ΙΚ, ἐκ δὲ τούτων συνάγεται καὶ ἡ ἰσότης τῶν χορδῶν ΜΙ καὶ ΙΚ, ἄρα ΜΚ εἶνε διπλασία τῆς καθέτου ΜΙ καὶ διὰ τοῦτο τὸ Κ εἶνε τὸ κέντρον καμπυλότητος.

Ἐπειδὴ δὲ εἶνε περιφέρεια ΙΚΘΙ $=$ ΑΒ καὶ τοξ ΙΚΘ $=$ ΑΔ,
πρὸς δὲ τούτοις τοξ ΙΚ $=$ τοξ ΙΜ $=$ ΑΙ,
συνάγεται τοξ ΚΘ $=$ ΙΔ $=$ ΘΗ.

Ἐκ τούτου συνάγεται, ὅτι, ἐὰν ὁ κύκλος ΙΚΘ κυλισθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΘΗΝ, τὸ σημεῖον αὐτοῦ Κ θὰ εἶνε πανταχοῦ κέντρον καμπυλότητος τῆς κυκλοειδοῦς ΑΜΓΒ (εἰς τὸ σημεῖον, καθ' ὃ συναντᾷ αὐτὴν ἡ ΚΙ)· ἑπομένως *ἡ ἐνειλιγμένη τῆς κυκλοειδοῦς εἶνε πάλιν κυκλοειδὴς ἴση, κεῖται δὲ διαφόρως*· διότι τοῦ μὲν τόξου ΑΓ ἐνειλιγμένη εἶνε τὸ τόξον ΑΗ, τοῦ δὲ ΓΒ τὸ τόξον ΗΒ.

Ἐπειδὴ ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος προβαίνει αὐξανομένη εἰς τὸ τόξον ΑΓ ἀπὸ 0 μέχρι ΓΗ, συνάγεται, ὅτι εἶνε τοξ ΑΓ $=$ ΓΗ· ὅθεν καὶ τοξ ΑΓΒ$=2$ΓΗ$=4$ΓΔ$=8\alpha$· ὅπερ καὶ ἀλλαχοῦ εὕρομεν.

Ἐνειλιγμένη τῆς λογαριθμικῆς ἕλικος.

Τῆς καμπύλης ταύτης τὸ κέντρον καμπυλότητος εὑρίσκεται εἰς τὸ ἄκρον τῆς ὑποκαθέτου (σελ. 32). Διὰ τοῦτο, ἂν παραστήσωμεν τὰς συντεταγμένας τοῦ τυχόντος σημείου αὐτῆς Μ διὰ ρ καὶ ϑ, αἱ συντεταγμέναι τοῦ ἀντιστοιχοῦντος κέντρου Κ θὰ εἶνε

$$\rho_1 = OK \quad \text{καὶ} \quad \vartheta_1 = \vartheta + \frac{\pi}{2}.$$

Ἐπειδὴ δὲ εἰς πᾶσαν καμπύλην ἡ ὑποκάθετος ἰσοῦται τῇ παραγώγῳ $\dfrac{d\rho}{d\vartheta}$, διὰ δὲ τὴν λογαριθμικὴν ἕλικα ἔχομεν

$$\rho = e^{\mu\vartheta}, \qquad d\rho = \mu\rho d\vartheta,$$

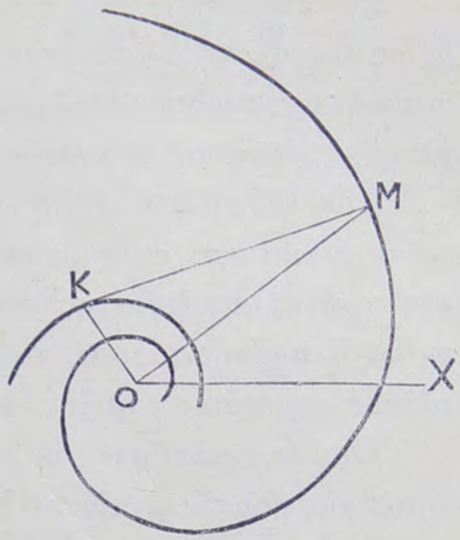
ἕπεται $\rho_1 = \mu\rho \quad \text{καὶ} \quad \vartheta_1 = \vartheta + \dfrac{\pi}{2},$

ἐξ ὧν $\rho = \dfrac{\rho_1}{\mu} \quad \text{καὶ} \quad \vartheta = \vartheta_1 - \dfrac{\pi}{2}.$

ἀντικαθιστῶντες δὲ τὰς τιμὰς ταύτας τῶν ρ καὶ ϑ εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῆς καμπύλης, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\rho_1 = \mu e^{\mu\left(\vartheta_1 - \frac{\pi}{2}\right)}$$

ἢ
$$\rho_1 = e^{\mu\left(\vartheta_1 - \frac{\pi}{2} + \frac{l\mu}{\mu}\right)},$$



ἥτις παριστᾷ τὴν ἐνειλιγμένην. Ἡ ἐνειλιγμένη αὕτη εἶνε ἡ αὐτὴ ἕλιξ εἰς ἄλλην θέσιν· διότι, ἂν στρέψωμεν τὸν πολικὸν ἄξονα τόσον, ὥστε νὰ αὐξηθῶσιν αἱ πολικαὶ γωνίαι πᾶσαι κατὰ $\frac{1}{\mu} l\mu - \frac{\pi}{2}$, θὰ γίνῃ ἡ πολικὴ γωνία τοῦ σημείου K $\vartheta_1 - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\mu} l\mu = \vartheta'$ καὶ ἐπομένως ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐνειλιγμένης θὰ γίνῃ

$$\rho_1 = e^{\mu\vartheta'}.$$

διὰ τοῦτο ἡ ἐνειλιγμένη εἶνε ἡ αὐτὴ καμπύλη στραφεῖσα περὶ τὸ O.

ΣΗΜ. Ἐὰν ἡ γωνία, καθ' ἣν στρέφεται ὁ πολικὸς ἄξων, εἶνε ἢ 0 ἢ ὁλόκληροι περιφέρειαι, ἤτοι ἂν εἶνε

$$\frac{1}{\mu} l\mu - \frac{\pi}{2} = 2K\pi,$$

τοῦ K ὄντος ἀκεραίου θετικοῦ ἢ ἀρνητικοῦ, ἡ ἕλιξ ἐπανέρχεται εἰς τὴν προτέραν θέσιν της καὶ ἐπομένως ἡ ἐνειλιγμένη αὐτῆς συμπίπτει μετ' αὐτῆς· τοῦτο δύναται νὰ συμβῇ δι' ἀπείρους τιμὰς τοῦ μ· διότι ἡ παράστασις $\frac{1}{\mu} l\mu$, ὡς φαίνεται ἐκ τῆς παραγώγου αὐτῆς $\left(\frac{1-l\mu}{\mu^2}\right)$, ὅταν μὲν ὁ μ διανύῃ τὸ διάστημα $0 \ldots e$, αὕτη αὐξάνεται ἀπὸ τοῦ $-\infty$ μέχρι τοῦ $\frac{1}{e}$· ὅταν δὲ ὁ μ αὐξάνῃ ἀπὸ τοῦ e μέχρι τοῦ ∞, αὕτη ἐλαττοῦται ἀπὸ τοῦ $\frac{1}{e}$ καὶ ἑξῆς. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ παράστασις $\frac{1}{\mu} l\mu$ διατρέχει πάσας τὰς ἀρνητικὰς τιμάς, ἂν δώσωμεν εἰς τὸ K τὴν τυχοῦσαν ἀρνητικὴν τιμήν, θὰ ὑπάρχῃ τιμή τις τοῦ μ τοιαύτη, ὥστε νὰ εἶνε

$$\frac{1}{\mu} l\mu = \frac{\pi}{2} - 2K\pi\cdot$$

ὑπάρχουσι λοιπὸν ἄπειροι λογαριθμικαὶ ἕλικες συμπίπτουσαι μετὰ τῶν ἐνειλιγμένων αὐτῶν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

25. Ἡ ἐνειλιγμένη καμπύλης ἔχει καὶ αὐτὴ ἐνειλιγμένην· αὕτη δὲ πάλιν ἄλλην ἐνειλιγμένην καὶ καθεξῆς· ὥστε δοθείσης καμπύλης διακρίνομεν *πρώτην* ἐνειλιγμένην ἢ *πρώτης τάξεως*, *δευτέραν* ἐνειλιγμένην ἢ *δευτέρας τάξεως* καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐὰν λάβωμεν τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς καμπύλης, πρὸς τὸ σημεῖον τοῦτο ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον ἐφ' ἑκάστης ἐνειλιγμένης· καὶ τὸ μὲν ἐπὶ τῆς πρώτης ἐνειλιγμένης κείμενον λέγεται *πρῶτον* κέντρον καμπυλότητος ἢ *πρώτης τάξεως*, τὸ δὲ ἐπὶ τῆς δευτέρας *δεύτερον* ἢ *δευτέρας τάξεως* καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ὁμοίως καλοῦμεν ἀκτῖνα *πρώτης τάξεως* τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος τῆς καμπύλης εἰς τὸ Μ, *δευτέρας δὲ τάξεως* ἀκτῖνα τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος τῆς ἐνειλιγμένης, *τρίτης τάξεως* τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος τῆς δευτέρας ἐνειλιγμένης καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἑκάστη τῶν ἀκτίνων τούτων παρίσταται διὰ τῆς ὁμοταγοῦς παραγώγου τοῦ τόξου s πρὸς τὴν γωνίαν φ.

Τῷ ὄντι ἡ πρώτη ἀκτὶς ϱ εὑρέθη ἤδη ἴση τῇ παραγώγῳ $\dfrac{ds}{d\varphi}$. Πρὸς εὕρεσιν δὲ τῆς δευτέρας ϱ' παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἐνειλιγμένης εἰς τὸ σημεῖον Κ (ὅπερ ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὸ Μ), τουτέστιν ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν καμπύλην εἰς τὸ Μ, σχηματίζει πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x τὴν γωνίαν $\varphi + \dfrac{\pi}{2}$· ἑπομένως ἡ γωνία τῆς συνεπαφῆς τῆς ἐνειλιγμένης εἶνε $d\varphi$ (ὡς καὶ τῆς καμπύλης), τὸ δὲ τόξον τῆς ἐνειλιγμένης ἔχει διαφορικὸν τὸ $d\varrho$ (ὅταν ἡ ἀρχὴ αὐτοῦ ληφθῇ καταλλήλως),

ἄρα
$$\varrho' = \frac{d\varrho}{d\varphi} = \frac{d^2 s}{d\varphi^2}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκεται καὶ $\varrho'' = \dfrac{d\varrho'}{d\varphi} = \dfrac{d^3 s}{d\varphi^3}$ και οὕτω καθεξῆς.

Αἱ αὐταὶ ἀκτῖνες ἐκφραζόμεναι διὰ τῶν παραγώγων τῆς τεταγμένης y τῆς ἀρχικῆς καμπύλης πρὸς τὴν τετμημένην αὐτῆς, περιέχουσιν, ὡς εὐκόλως βλέπει τις, ἡ μὲν πρώτη τὰς δύο παραγώγους y', y'', ἡ δὲ δευτέρα τὰς τρεῖς y', y'', y''', ἡ δὲ τρίτη τὰς τέσσαρας y', y'', y''', y''''· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Περὶ τῶν ἐξειλιγμένων.

ΣΗΜ. Τὸ πρόβλημα τῆς εὑρέσεως τῆς ἐνειλιγμένης δοθείσης καμπύλης ἀνάγεται, κατὰ τὰ προηγουμένως εἰρημένα, εἰς διαφορίσεις καὶ εἰς ἀπαλοιφὴν ἀγνώστων τινῶν μεταξὺ πολλῶν ἐξισώσεων· τὸ ἀντίστροφον πρόβλημα τῆς εὑρέσεως τῆς ἐξειλιγμένης δοθείσης καμπύλης ἀπαιτεῖ πρὸς τούτοις (ὡς ἀμέσως θὰ δειχθῇ) καὶ τὴν ἀντίστροφον τῆς διαφορίσεως πρᾶξιν, τουτέστι τὴν ὁλοκλήρωσιν.

26. Πᾶσα καμπύλη, ἧστινος αἱ κάθετοι ἐφάπτονται ἄλλης, εἶνε ἐξειλιγμένη αὐτῆς· διότι ἡ τομὴ δύο καθέτων, ἥτις τείνει νὰ καταστῇ κέντρον καμπυλότητος τῆς πρώτης, τείνει ὡσαύτως εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς αὐτῶν πρὸς τὴν δευτέραν.

Ὑποθέσωμεν, ὅτι αἱ συντεταγμέναι ξ, η τῆς καμπύλης, τῆς ὁποίας ζητεῖται ἡ ἐξειλιγμένη, δίδονται ὡς συναρτήσεις μιᾶς βοηθητικῆς ἀγνώστου t, ἤτοι ἔστω

$$\xi = \sigma(t),$$
$$\eta = \varphi(t).$$

Ἔστω Κ (ξ,η) τυχὸν σημεῖον τῆς δοθείσης ἐνειλιγμένης καὶ Μ (x,y) τὸ πρὸς αὐτὸ ἀντιστοιχοῦν σημεῖον τῆς ἐξειλιγμένης. Ἐπειδὴ ἡ ἀπόστασις ΚΜ (ἥτις εἶνε ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος εἰς τὸ σημεῖον Μ) πρέπει νὰ διαφέρῃ τοῦ τόξου σ τῆς ἐνειλιγμένης διαφορὰν σταθερὰν οἱανδήποτε Α, θὰ εἶνε $\quad KM = \sigma + A. \quad (1)$

Καὶ ἵνα ἡ διαφορὰ αὐτῶν μένῃ σταθερά, πρέπει αὐξανομένου τοῦ τόξου σ νὰ αὐξάνῃ καὶ ἡ ἀκτὶς ΚΜ· ἵνα δὲ τοῦτο συμβαίνῃ, δέον νὰ λαμβάνηται τὸ σημεῖον Μ ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης τοῦ Κ, πρὸς ὃ μέρος αὐτῆς ἐλαττοῦται τὸ τόξον σ, ἤτοι ἐπὶ τοῦ ἀρνητικοῦ μέρους αὐτῆς· ἐπομένως τὰ συνημίτονα τοῦ θετικοῦ μέρους τῆς ἐφαπτομένης,

ἤτοι τὰ $$\frac{d\xi}{d\sigma},\ \frac{d\eta}{d\sigma},$$

πρέπει νὰ εἶνε ἀντίθετα τῶν συνημιτόνων τῆς ΚΜ,

ἤτοι τῶν $$\frac{x-\xi}{KM},\ \frac{y-\eta}{KM}$$

ὥστε θὰ εἶνε $$\frac{x-\xi}{KM} = -\frac{d\xi}{d\sigma},\quad \frac{y-\eta}{KM} = -\frac{d\eta}{d\sigma}$$

καὶ διὰ τὴν ἐξίσωσιν (1)

$$x = \xi - (\sigma + A)\frac{d\xi}{d\sigma}, \qquad y = \eta - (\sigma + A)\frac{d\eta}{d\sigma}.$$

ἔχομεν ἐπομένως τὰς συντεταγμένας x, y ἐκπεφρασμένας διὰ τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς t· ἀπαιτεῖται ὅμως νὰ εἶνε γνωστὸν καὶ τὸ τόξον σ τῆς δοθείσης ἐνειλιγμένης ὡς συνάρτησις τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς t· τουτέστιν ἀπαιτεῖται ἡ εὕρεσις τῆς συναρτήσεως σ τοῦ t, δι' ἣν εἶνε

$$d\sigma = \sqrt{\sigma'(t)^2 + \varphi'(t)^2}.\ dt.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ποσότης Α δύναται νὰ ἔχῃ οἱανδήποτε σταθερὰν τιμήν, συνάγεται, ὅτι *ὑπάρχουσιν ἄπειροι ἐξειλιγμέναι ἔχουσαι μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ἐνειλιγμένην*· αἱ ἐξειλιγμέναι αὗται εἶνε παράλληλοι πρὸς ἀλλήλας (I, σελ. 142)· καὶ γράφονται ὑπὸ τῶν διαφόρων σημείων τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἐνειλιγμένης, ὅταν αὕτη κυλίηται ἐπ' αὐτῆς· ἢ καὶ ὑπὸ τῶν διαφόρων σημείων νήματος, ὅπερ ἐκτυλίσσεται ἐκ τῆς ἐνειλιγμένης οὕτως, ὥστε ἐν ἑκάστῃ θέσει τὸ ἐκτυλιχθὲν μέρος νὰ εἶνε τεταμένον καὶ ἐφαπτόμενον τῆς ἐνειλιγμένης (ἐδ. 23).

Ὡς παράδειγμα ἔστω ἡ ἐξειλιγμένη τοῦ κύκλου· αἱ συντεταγμέναι αὐτοῦ δίδονται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων

$$\xi = \alpha\,\text{συν}\,\omega, \qquad \eta = \alpha\,\text{ημ}\,\omega\cdot$$

ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν

$$d\xi = -\alpha\,\text{ημ}\,\omega\, d\omega, \quad d\eta = \alpha\,\text{συν}\,\omega\, d\omega, \quad d\xi^2 + d\eta^2 = \alpha^2 d\omega^2,$$

ὅθεν

$$d\sigma = \alpha d\omega \quad \text{καὶ} \quad \sigma = \alpha\omega\cdot$$

τὸ τόξον σ ἄρχεται ἀπὸ τοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν τιμὴν $\omega = 0$.

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας τῶν ξ, η, σ εἰς τὰς γενικὰς ἐξισώσεις τῆς ἐξειλιγμένης, εὑρίσκομεν

$$x = \alpha\,\text{συν}\,\omega + (\alpha\omega + A)\,\text{ημ}\,\omega$$
$$y = \alpha\,\text{ημ}\,\omega - (\alpha\omega + A)\,\text{συν}\,\omega.$$

Παρατηρητέον δέ, ὅτι αἱ ἐξειλιγμέναι τοῦ κύκλου μόνον κατὰ τὴν θέσιν διαφέρουσιν ἀπ' ἀλλήλων.

Ἐὰν ληφθῇ $A = 0$, ἡ ἐξειλιγμένη ἄρχεται ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ἐξ οὗ καὶ τὸ τόξον τοῦ κύκλου, καὶ αἱ ἐξισώσεις αὐτῆς εἶνε (παρβ. Ἀναλ. Γεωμετρίας σελ. 390)

$$x = \alpha\,\text{συν}\,\omega + \alpha\omega\,\text{ημ}\,\omega$$
$$y = \alpha\,\text{ημ}\,\omega - \alpha\omega\,\text{συν}\,\omega.$$

Σημειωσις. Τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν τῶν ἐξειλιγμένων τῆς δοθείσης καμπύλης $\varphi(\xi,\eta)=0$ εὑρίσκομεν ἀπαλείφοντες τὰς μεταβλητὰς ξ, η μεταξὺ τῶν τριῶν ἐξισώσεων

$$\varphi(\xi,\,\eta)=0 \qquad\qquad \varphi=0$$

$$\frac{d\eta}{d\xi}\cdot\frac{dy}{dx}+1=0 \qquad \text{ἤτοι} \qquad \varphi'_\xi\,dy-\varphi'_\eta\,dx=0$$

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{y-\eta}{x-\xi}+1=0 \qquad\qquad (x-\xi)dx+(y-\eta)dy=0$$

τὰς ὁποίας ἐπαληθεύουσιν αἱ συντεταγμέναι τοῦ τυχόντος σημείου $(\xi,\,\eta)$ τῆς δοθείσης καμπύλης καὶ αἱ συντεταγμέναι x, y τοῦ ἀντιστοίχου σημείου τῆς ἐξειλιγμένης αὐτῆς (ἐδ. 21)· ἐκφράζουσι δέ, ἡ μὲν πρώτη, ὅτι τὸ σημεῖον $(\xi,\,\eta)$ εἶνε σημεῖον τῆς δοθείσης ἐνειλιγμένης, ἡ δὲ δευτέρα, ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἐνειλιγμένης εἰς τὸ σημεῖον $(\xi,\,\eta)$ καὶ ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἐξειλιγμένης εἰς τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον $(x,\,y)$ εἶνε κάθετοι πρὸς ἀλλήλας, ἡ δὲ τρίτη, ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ τὰ σημεῖα ταῦτα συνδέουσα εἶνε κάθετος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἐξειλιγμένης εἰς τὸ σημεῖον $(x,\,y)$.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἀποδεῖξαι τὰς ἰδιότητας τῶν ἐνειλιγμένων διὰ τῶν μιγάδων συντεταγμένων.

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τῆς σελίδος 21, (ἢ καὶ ἀμέσως ἐκ τοῦ σχήματος) εὑρίσκομεν, ἐὰν τεθῇ $\xi+i\eta=\zeta$,

$$\zeta=z+\varrho e^{\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)i}=z+i\varrho e^{\varphi i},$$

ὅθεν $$d\zeta=ds\,e^{\varphi i}+e^{\varphi i}(i\,d\varrho-\varrho\,d\varphi\,.$$

καὶ ἐπειδὴ $$\varrho.\ d\varphi=ds,$$

ἕπεται $$d\zeta=i\,e^{\varphi i}d\varrho\cdot$$

ἀλλὰ καὶ $$d\zeta=d\sigma.\ e^{\varphi' i},$$

ἄρα $$d\sigma=d\varrho \quad \text{καὶ} \quad \varphi'=\varphi+\frac{\pi}{2}.$$

2) Ἡ συντεταγμένη ζ τοῦ κέντρου τῆς καμπυλότητος K συνδέεται πρὸς τὴν συντεταγμένην z τοῦ σημείου M διὰ τῆς ἐξισώσεως

$$\zeta=z+i\frac{dz}{d\varphi}.$$

3) Ἀποδεῖξαι, ὅτι εἶνε

$$\begin{vmatrix} d\xi & d\eta \\ d^2\xi & d^2\eta \end{vmatrix}=d\varphi.\ d\varrho^2.$$

Προσδιορίσαι διὰ τοῦ τύπου τούτου τὸ κυρτὸν καὶ τὸ κοῖλον τῆς ἐνειλιγμένης τῆς ἐλλείψεως.

4) Πᾶν τόξον τῆς ἐξειλιγμένης τοῦ κύκλου εἶνε ἴσον τῷ ἡμιαθροίσματι τῶν εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ καθέτων (ἀπὸ τῆς καμπύλης μέχρι τῆς τομῆς αὐτῶν) ἐπὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόξου τῆς ἐξειλιγμένης μεταχειριζόμεθα τὸν τύπον

$$ds = \varrho \ d\varphi.$$

5) Ἡ διαφορὰ τῶν ἀντιστοιχούντων τόξων δύο παραλλήλων καμπύλων εἶνε ἴση τόξῳ κυκλικῷ ἔχοντι ἀκτῖνα μὲν τὴν ἀπόστασιν α τῶν παραλλήλων, γωνίαν δὲ τὴν γωνίαν τῶν καθέτων εἰς τὰ ἄκρα τῶν τόξων.

Αἱ παράλληλοι καμπύλαι ἔχουσι κοινὰ τὰ κέντρα τῆς καμπυλότητος·

ὅθεν εἶνε $$ds = \varrho . \, d\varphi \quad \text{καὶ} \quad ds' = \varrho' . \, d\varphi,$$

ἐντεῦθεν ἕπεται $$ds - ds' = (\varrho - \varrho') \, d\varphi = \alpha . d\varphi,$$

ἐξ οὗ εὐκόλως εὑρίσκεται ἡ ῥηθεῖσα πρότασις.

6) Ἀποδεῖξαι, ὅτι τὸ διαφορικὸν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἐπιπέδου χωρίου, ὅπερ περιέχεται ὑπὸ καμπύλης καὶ τῆς ἐνειλιγμένης αὐτῆς καὶ ὑπὸ δύο ἀκτίνων καμπυλότητος (ὧν ἡ μία ϱ_0 ἀκίνητος, ἡ δὲ ἄλλη ϱ μεταβλητή), δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$d\text{E} = \frac{1}{2} \varrho^2 \, d\varphi.$$

Εὑρεῖν ἐκ τοῦ τύπου τούτου τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐξειλιγμένης τοῦ κύκλου.

7) Τὸ μεταξὺ δύο παραλλήλων καμπύλων καὶ δύο καθέτων ἐπ' αὐτὰς περιεχόμενον χωρίον ἰσοῦται τραπεζίῳ ἔχοντι βάσεις μὲν τὰ τόξα τῶν καμπύλων, ὕψος δὲ τὴν ἀπόστασιν αὐτῶν.

8) Ἀποδεῖξαι, ὅτι τῶν ἀλγεβρικῶν καμπύλων αἱ ἐνειλιγμέναι εἶνε ἀλγεβρικαί.

9) Ἀποδεῖξαι, ὅτι, ἂν τὸ κέντρον καμπυλότητος δι' ἅπαντα τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης εἶνε ἓν καὶ τὸ αὐτό, ἡ καμπύλη εἶνε περιφέρεια κύκλου.

Ἐκ τῆς σχέσεως $d\sigma = d\varrho$ γίνεται δῆλον, ὅτι τότε οὐδὲ ἡ ἀκτὶς ϱ μεταβάλλεται· ἑπομένως σελ. 41) ἡ καμπύλη καταντᾷ περιφέρεια.

10) Ἐὰν καμπύλη τέμνῃ τὰς ἐφαπτομένας ἄλλης ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν α, θὰ εἶνε $$\text{T}_1 - \text{T} = \sigma + s . \ \text{συν}\alpha,$$

ἔνθα s εἶνε τυχὸν τόξον τῆς καμπύλης καὶ σ τὸ ἀντίστοιχον τῆς ἄλλης· T δὲ καὶ T_1 αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου σ (περατούμεναι εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου s).

Πρὸς τούτοις εἶνε $$\varrho = \frac{\text{T}}{\text{ημ}\alpha}.$$

Διότι παριστῶντες διὰ z τὴν συντεταγμένην τοῦ τυχόντος σημείου Μ τῆς τεμνούσης καμπύλης καὶ διὰ ζ τὴν τοῦ ἀντιστοίχου σημείου Ν τῆς ἄλλης, διὰ δὲ τοῦ ω τὴν γωνίαν τῆς ἐφαπτομένης ΝΜ (= T) πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x,

θὰ ἔχωμεν $$z = \zeta + \text{T} \, e^{\omega i},$$

ὅθεν $$dz = d\zeta + e^{\omega i} \, d\text{T} + \text{T} i \, e^{\omega i} d\omega,$$

ἢ καὶ $$e^{\varphi i} ds = e^{\omega i} \, (d\sigma + d\text{T}) + \text{T} i \, e^{\omega i} d\omega\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ ὑποτίθεται $$\varphi = \omega + \alpha,$$

ἕπεται $$d\varphi = d\omega$$

ὅθεν ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις γίνεται

$$e^{\alpha i} \, ds = d\sigma + d\text{T} + i\text{T} \, d\varphi$$

Ἐντεῦθεν δὲ ἕπεται $συνα. ds = dσ + dT$

καὶ $ημα. ds = T\, dφ$ ἢ $ϱ. ημα = T$.

11) Ἐὰν ἐκ τῶν σημείων δοθείσης καμπύλης ἀχθῶσιν εὐθεῖαι ἴσαι τὸ μῆκος καὶ σχηματίζουσαι ἑκάστη πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τοῦ ἐξ οὗ ἄγεται σημείου σταθερὰν γωνίαν, τὰ ἄκρα τῶν εὐθειῶν τούτων σχηματίζουσι νέαν καμπύλην καὶ τὸ μεταξὺ τῶν δύο καμπύλων καὶ δύο οἱωνδήποτε ἐκ τῶν εἰρημένων εὐθειῶν περιεχόμενον χωρίον εἶναι ἄθροισμα τοῦ παραλληλογράμμου, ὅπερ ἔχει πλευρὰς τὸ τόξον τῆς δοθείσης καμπύλης καὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ γωνίαν αὐτῶν τὴν δοθεῖσαν, καὶ τοῦ τομέως, ὅστις ἔχει ἀκτῖνα τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ γωνίαν τὴν καμπυλότητα τοῦ τόξου.

12) Ἡ ἐνειλιγμένη τῆς καμπύλης

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = α^{\frac{2}{3}}$$

εἶνε

$$(x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}} = 2\, α^{\frac{2}{3}}.$$

Περὶ ἐπαφῶν διαφόρων τάξεων.

27. Ὅταν δύο καμπύλαι ἔχωσι κοινόν τι σημεῖον, ἂν μὲν ἔχωσιν εἰς αὐτὸ διαφόρους ἐφαπτομένας, λέγομεν, ὅτι *τέμνουσιν ἀλλήλας*· ἂν δὲ ἔχωσι καὶ τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην, λέγομεν, ὅτι *ἐφάπτονται ἀλλήλων* εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο.

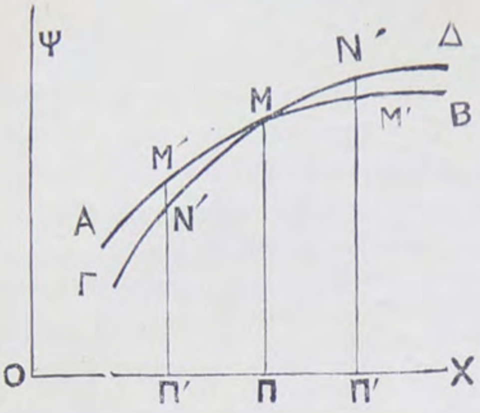
28. Εὐκόλως ἐννοεῖ πᾶς τις, ὅτι, ὅταν ἐφάπτωνται δύο καμπύλαι, ἂν καὶ ἓν μόνον σημεῖον ἔχουσι κοινόν, ὅμως πλησιάζουσι πρὸς ἀλλήλας πολὺ περισσότερον ἢ ὅταν τέμνωνται. Τοῦτο γίνεται σαφέστερον, ἐάν τις ἐξετάσῃ τὴν διαφορὰν τῶν τεταγμένων των πλησίον τοῦ κοινοῦ σημείου· διότι ἐν μὲν τῇ τομῇ ἡ εἰρημένη διαφορὰ ἀποδεικνύεται οὖσα ἀπειροστὸν πρώτης τάξεως (πρὸς τὴν αὔξησιν τῆς τετμημένης), ἐν δὲ τῇ ἐπαφῇ εἶνε ἀνωτέρας τάξεως.

Ἔστωσαν τῷ ὄντι ΑΒ καὶ ΓΔ δύο τυχοῦσαι κυμπύλαι ἔχουσαι τὸ σημεῖον Μ (x, y) κοινόν· ἐὰν ἀναφέρωμεν αὐτὰς πρός τι σύστημα εὐθυγράμμων συντεταγμένων, αἱ ἐξισώσεις αὐτῶν θὰ εἶνε

$Y = σ(X)$ τῆς ΑΒ

καὶ $Y = φ(X)$ τῆς ΓΔ.

Ἵνα συγκρίνωμεν τὰς τεταγμένας αὐτῶν πέριξ τοῦ κοινοῦ σημείου Μ, μεταβάλλομεν τὴν τετμημένην x (ἤτοι τὴν ΟΠ) κατά τινα ποσότητα $Δx$ (ἤτοι ΠΠ′) θετικὴν ἢ ἀρνητικήν· αἱ πρὸς τὴν μεταβληθεῖσαν τετμημένην $x+\Delta x$ (ἤτοι ΟΠ΄) ἀντιστοιχοῦσαι τεταγμέναι τῶν δύο καμπύλων εἶνε, τῆς μὲν ΑΒ ἡ Π΄Μ΄, τῆς δὲ ΓΔ ἡ Π΄Ν΄· ἔχομεν δὲ κατὰ τὰς ἐξισώσεις αὐτῶν



$$\Pi'M'=\sigma(x+\Delta x),$$
$$\Pi'N'=\varphi(x+\Delta x).$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται

$$N'M'=\sigma(x+\Delta x)-\varphi(x+\Delta x)$$

καὶ ἀναπτύσσοντες κατὰ τὸν τύπον τοῦ Taylor ἔχομεν

$$N'M'=\left[\sigma'(x)-\varphi'(x)\right].\Delta x+\left[\sigma''(x)-\varphi''(x)\right].\frac{(\Delta x)^2}{1.2}+\ldots$$

ἂν νῦν εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον Μ αἱ καμπύλαι τέμνωσιν ἀλλήλας, αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν εἶνε διάφοροι, κατ' ἀκολουθίαν καὶ αἱ παράγωγοι $\sigma'(X)$, $\varphi'(X)$ θὰ ἔχωσι διὰ $X=x$ τιμὰς διαφόρους· ἑπομένως ἡ διαφορὰ τῶν τεταγμένων δύναται νὰ γραφῇ ὡς ἕπεται

$$N'M'=\left[\sigma'(x)-\varphi'(x)+\alpha\right].\Delta x,$$

τοῦ α ὄντος ἀπειροστοῦ τινος· ὅθεν βλέπομεν, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τεταγμένων εἶνε ἀπειροστὸν πρώτης τάξεως πρὸς τὸ Δx.

Ἂν ὅμως αἱ καμπύλαι εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον ἔχωσι καὶ τὴν ἐφαπτομένην κοινήν, θὰ εἶνε $\sigma'(x)=\varphi'(x)$· καὶ διὰ τοῦτο ἡ διαφορὰ τῶν τεταγμένων γίνεται

$$N'M'=\left[\sigma''(x)-\varphi''(x)\right].\frac{\Delta x^2}{2}+\left[\sigma'''(x)-\varphi'''(x\right].\frac{\Delta x^3}{6}+\ldots$$

καὶ εἶναι ἀπειροστὸν δευτέρας μὲν τάξεως, ἂν αἱ τιμαὶ τῶν δευτέρων παραγώγων εἰς τὸ σημεῖον Μ, ἤτοι τὰ $\sigma''(x)$, $\varphi''(x)$, διαφέρωσιν ἀπ' ἀλλήλων· ἀνωτέρας δέ, ἐὰν καὶ αὗται εἶνε ἴσαι, ὅτε ἡ πρὸς ἀλλήλας προσέγγισις τῶν καμπύλων εἶνε μεγαλητέρα.

29. Ἐκ τούτων ἐννοοῦμεν, ὅτι καὶ κατὰ τὴν ἐπαφὴν ἡ πρὸς ἀλλήλας προσέγγισις τῶν καμπύλων δύναται νὰ εἶνε διάφορος· δύναται δηλαδὴ εἴς τινας ἐπαφὰς νὰ εἶνε ἡ προσέγγισις πολὺ μεγαλητέρα ἢ εἰς ἄλλας· ἐπειδὴ δὲ μέτρον τῆς προσεγγίσεως εἶνε ἡ τάξις τῆς ἀπειροστῆς διαφορᾶς τῶν τεταγμένων πλησίον τῆς ἀφῆς (ὅταν ἡ

αὔξησις τῆς κοινῆς τετμημένης ληφθῇ ὡς ἀπειροστὸν πρώτης τάξεως), ἀγόμεθα εἰς τὸν ἑξῆς ὁρισμὸν τῶν ἐπαφῶν.

Ἡ ἐπαφὴ δύο καμπύλων λέγεται τῆς $\mu^{οστῆς}$ τάξεως, ἐάν, αὐξανομένης τῆς κοινῆς αὐτῶν τετμημένης κατά τι ἀπειροστόν, ἡ διαφορὰ τῶν ἀντιστοιχουσῶν τεταγμένων εἶνε πρὸς αὐτὸ ἀπειροστὸν τῆς τάξεως $\mu+1$

Ἐκ τῆς προηγουμένης ἀναλύσεως γίνεται καταφανές, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τεταγμένων τῶν δύο καμπύλων πλησίον τοῦ κοινοῦ αὐτῶν σημείου (x, y) θὰ εἶναι ἀπειροστὸν τῆς $\mu+1$ τάξεως (πρὸς Δx), ἐὰν διὰ τὴν τετμημένην αὐτοῦ x $(=\mathrm{O\Pi})$ γίνηται

$$\begin{aligned}
\sigma(x) &= \varphi(x)\\
\sigma'(x) &= \varphi'(x)\\
\sigma''(x) &= \varphi''(x)\\
&\cdots\cdots\\
\overset{(\mu)}{\sigma}(x) &= \overset{(\mu)}{\varphi}(x),
\end{aligned}$$

ἀλλὰ $\qquad \overset{(\mu+1)}{\sigma}(x)$ διάφορον τοῦ $\overset{(\mu+1)}{\varphi}(x)$·

διότι τότε ἡ εἰρημένη διαφορὰ καταντᾷ

$$\mathrm{N'M'} = \frac{(\Delta x)^{\mu+1}}{1\,2..(\mu+1)}\left\{\overset{(\mu+1}{\sigma}(x) - \overset{(\mu+1)}{\varphi}(x) + \alpha\right\},$$

τουτέστιν εἶναι ἀπειροστὸν τῆς τάξεως $\mu+1$ πρὸς τὸ Δx.

Ἐὰν διὰ τὴν τετμημένην x τοῦ κοινοῦ σημείου γίνωνται ὀλιγώτεραι ἢ μ παράγωγοι ἴσαι (ἀπὸ τῆς πρώτης καὶ ἑξῆς), ἡ διαφορὰ $\mathrm{N'\Pi'}$ θὰ εἶνε προφανῶς ἀπειροστὸν τάξεως κατωτέρας τοῦ $\mu+1$· ἐὰν δὲ περισσότεραι, ἡ αὐτὴ διαφορὰ θὰ εἶνε ἀπειροστὸν τάξεως ἀνωτέρας τοῦ $\mu+1$.

Ἐντεῦθεν συνάγεται τὸ θεώρημα.

Ἵνα δύο καμπύλαι ἔχωσιν εἴς τι σημεῖον (x, y) ἐπαφὴν τῆς τάξεως μ, πρέπει καὶ ἀρκεῖ διὰ τὴν τετμημένην x τοῦ σημείου τούτου νὰ γίνωνται ἴσαι αἱ τεταγμέναι αὐτῶν καὶ αἱ ὁμοταγεῖς αὐτῶν παράγωγοι ἀπὸ τῆς πρώτης μέχρι τῆς $\mu^{οστῆς}$ (καὶ ταύτης συμπεριλαμβανομένης)· ἢ καὶ τὰ διαφορικὰ αὐτῶν ἀπὸ τοῦ πρώτου μέχρι τοῦ $\mu^{οστοῦ}$.

30. Ἡ περισσοτέρα τῶν καμπύλων πρὸς ἀλλήλας προσέγγισις εἰς τὰς ἐπαφὰς τῶν ἀνωτέρων τάξεων ἐκφράζεται καὶ διὰ τοῦ ἑπομένου θεωρήματος.

Ἐὰν δύο καμπύλαι ἔχωσιν εἴς τι σημεῖον ἐπαφὴν τῆς τάξεως μ, εἶναι ἀδύνατον νὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου τούτου καὶ μεταξὺ τῶν δύο καμπύλων ἄλλη τις καμπύλη μὴ ἔχουσα μεθ' ἑκατέρας τῶν δύο πρώτων ἐπαφὴν μ τάξεως τοὐλάχιστον.

Διότι ἡ διαφορὰ τῶν τεταγμένων τῆς τρίτης ταύτης καμπύλης καὶ ἑκατέρας τῶν δύο πρώτων θὰ εἶνε μικροτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν τεταγμένων τῶν δύο πρώτων· θὰ εἶνε λοιπὸν ἀπειροστὸν τάξεως οὐχὶ κατωτέρας τῆς $\mu+1$.

31. Ἡ πρὸς ἀλλήλας θέσις τῶν καμπύλων πλησίον τῆς ἀφῆς εἶναι ἄλλη ἐν ταῖς ἐπαφαῖς τῆς ἀρτίας τάξεως καὶ ἄλλη ἐν ταῖς ἐπαφαῖς τῆς περιττῆς· τοῦτο ἐκφράζεται ἐν τῷ ἑπομένῳ θεωρήματι.

Ἐὰν δύο καμπύλαι ἔχωσιν εἴς τι σημεῖον ἐπαφὴν τῆς $\mu^{οστῆς}$ τάξεως, εἰ μὲν ὁ μ εἶνε περιττός, ἑκατέρα τῶν καμπύλων κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ἑτέρας (πλησίον τῆς ἀφῆς), *εἰ δὲ ἄρτιος, αἱ καμπύλαι διαπερῶσιν ἀλλήλας εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο.*

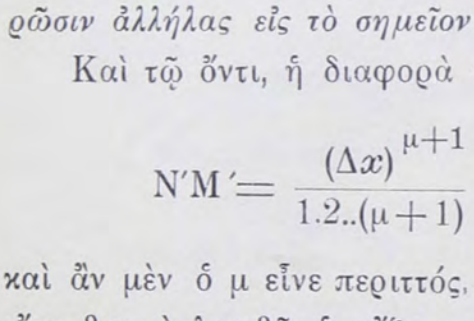
Καὶ τῷ ὄντι, ἡ διαφορὰ τῶν τεταγμένων πλησίον τῆς ἀφῆς εἶνε

$$N'M' = \frac{(\Delta x)^{\mu+1}}{1.2..(\mu+1)} \left| \sigma^{(\mu+1)}(x) - \varphi^{(\mu+1)}(x) + \alpha \right|$$

καὶ ἂν μὲν ὁ μ εἶνε περιττός, ἡ διαφορὰ $N'M'$ ἔχει τὸ αὐτὸ σημεῖον, εἴτε θετικὴ ληφθῇ ἡ αὔξησις Δx εἴτε ἀρνητικὴ (ἀρκεῖ νὰ εἶνε ἱκανῶς μικρά), τοῦτ' ἔστι τὸ σημεῖον τῆς παραστάσεως

$$\sigma^{(\mu+1)}(x) - \varphi^{(\mu+1)}(x)\cdot$$

ἑπομένως αἱ τεταγμέναι τῆς μιᾶς τῶν καμπύλων ὑπερβαίνουσι τὰς τεταγμένας τῆς ἄλλης ἔνθεν καὶ ἔνθεν τῆς ἀφῆς (ἔν τινι διαστήματι)· ὥστε ἡ πρώτη κεῖται ὑπεράνω τῆς δευτέρας. Ἂν δὲ ὁ μ εἶνε ἄρτιος,



ἡ διαφορὰ $N'M'$ τῶν τεταγμένων ἔχει ἄλλο σημεῖον, ὅταν ἡ αὔξησις Δx ληφθῇ θετική, καὶ ἄλλο, ὅταν ἀρνητική· τοῦτ' ἔστιν ἡ καμπύλη, ἥτις ἔχει μεγαλητέρας τεταγμένας ἐκ τοῦ ἑνὸς μέρους τῆς κοινῆς τεταγμένης ἔχει μικροτέρας ἐκ τοῦ ἄλλου· κατ' ἀκολουθίαν αἱ καμπύλαι διαπερῶσιν ἀλλήλας κατὰ τὴν ἀφήν, ὡς δεικνύει τὸ ὑπεράνω σχῆμα.

Σημειωσις. Ἐπειδὴ ἀλλασσομένων τῶν ἀξόνων ἀλλάσσει καὶ ἡ διαφορὰ τῶν τεταγμένων τῶν δύο καμπύλων, εἶνε ἀνάγκη νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ τάξις τῆς ἐπαφῆς εἶνε ἀνεξάρτητος ἀπὸ τῶν ἀξόνων, πρὸς οὓς ἀναφέρονται αἱ καμπύλαι· ἤτοι ὅτι, ἂν ἡ διαφορὰ τῶν τεταγμένων πρός τινας ἄξονας εἶνε τῆς τάξεως $\mu+1$, καὶ πρὸς ἄλλους οἱουσδήποτε θὰ εἶνε τῆς αὐτῆς τάξεως $\mu+1$.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ τάξις τῆς ἐπαφῆς εἶνε ἴση πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν παραγώγων (ἀπὸ τῆς πρώτης καὶ ἑξῆς), αἵτινες γίνονται εἰς αὐτὴν ἴσαι, ἀρκεῖ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ἀριθμὸς οὗτος δὲν μεταβάλλεται, ὅταν ἀλλαχθῶσιν οἱ ἄξονες.

Καὶ ὄντως· αἱ νέαι συντεταγμέναι x', y' συνδέονται πρὸς τὰς παλαιὰς διὰ πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων τῆς μορφῆς

$$x'=\alpha x+\beta y+\xi, \qquad y'=\gamma x+\delta y+\eta,$$

ὅθεν ἕπεται $dx'=\alpha dx+\beta dy, \qquad dy'=\gamma dx+\delta dy$

καὶ
$$\frac{dy'}{dx'}=\frac{\alpha+\beta\frac{dy}{dx}}{\gamma+\delta\frac{dy}{dx}}$$

ἐὰν δὲ διαφορίσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην καὶ διαιρέσωμεν ἔπειτα διὰ dx', βλέπομεν, ὅτι ἡ δευτέρα παράγωγος $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ ἐκφράζεται διὰ τῶν

$$\frac{dy}{dx} \text{ καὶ } \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Ἐξακολουθοῦντες τοιουτοτρόπως βλέπομεν, ὅτι ἐν γένει ἡ παράγωγος $\frac{d^\mu y'}{dx'^\mu}$ ἐκφράζεται διὰ τῶν παραγώγων $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^\mu y}{dx^\mu}$ ὥστε εἰς ἕκαστον σημεῖον οἱασδήποτε καμπύλης δύνανται νὰ εὑρεθῶσιν αἱ τιμαὶ τῶν νέων παραγώγων $\frac{dy'}{dx'}, \frac{d^2y'}{dx'^2}, \ldots$ ἐκ τῶν τιμῶν, ἃς ἔχουσιν εἰς αὐτὸ αἱ παλαιαὶ $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$· ἂν λοιπὸν αἱ τιμαὶ τῶν παλαιῶν παραγώγων $\frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^\nu y}{dx}$ δύο καμπύλων εἶνε ἴσαι εἴς τι σημεῖον, καὶ αἱ τιμαὶ τῶν νέων $\frac{dy'}{dx'}, \ldots, \frac{d^\nu y'}{dx'^\nu}$ θὰ εἶνε ἴσαι εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Σημειωσις. Εἰς πάντα μετασχηματισμόν, καθ' ὃν εἰς ἕκαστον σημεῖον (x, y) τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον (x', y') ἄλλου ἐπιπέδου (ἔν τινι ἐκτάσει), διατηρεῖται ἡ τάξις τῆς ἐπαφῆς· ἀποδεικνύεται δὲ τοῦτο ὁμοίως.

Ἐγγύταται καμπύλαι.

32. Ἔστω καμπύλη τυχοῦσα ἡ ΑΒ καὶ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς τὸ Μ. Ἐὰν ἐκ τῶν καμπύλων γένους τινὸς ὡρισμένου (οἷον κύκλων, εὐθειῶν, κωνικῶν τομῶν, κτλ.) εὑρεθῇ τις ἔχουσα πρὸς τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Μ ἐπαφὴν τάξεως ἀνωτέρας ἢ πᾶσαι αἱ λοιπαί, αὕτη λέγεται *ἐγγυτάτη καμπύλη* τοῦ γένους τούτου· πρὸς τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Μ· διότι προσεγγίζει πρὸς τὴν ΑΒ πέριξ τοῦ Μ περισσότερον ἢ αἱ ἄλλαι τοῦ αὐτοῦ γένους καμπύλαι· ὥστε, ἂν θέλωμεν εἰς τὰ πέριξ τοῦ σημείου Μ νὰ ἐξομοιώσωμεν τὴν καμπύλην ΑΒ πρός τινα καμπύλην τοῦ γένους ἐκείνου, ἀνάγκη νὰ λάβωμεν τὴν ἐγγυτάτην.

Ἕκαστον γένος καμπύλων ὁρίζεται ὑπό τινος ἐξισώσεως

$$\varphi(X, Y, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\mu) = 0, \tag{1}$$

ἥτις ἐκτὸς τῶν συντεταγμένων X, Y ἔχει καὶ παραμέτρους τινὰς ἀνεξαρτήτους ἀπ' ἀλλήλων, δι' ὧν διακρίνεται ἑκάστη καμπύλη τοῦ γένους ἀπὸ τῶν λοιπῶν· διότι πρὸς ἕκαστον σύστημα τιμῶν τῶν παραμέτρων τούτων ἀντιστοιχεῖ μία καμπύλη τοῦ γένους.

Λέγω δὲ τὰς παραμέτρους $\alpha_0, \ldots, \alpha_\mu$ ἀνεξαρτήτους ἀπ' ἀλλήλων, ὅταν δύνανται νὰ ὁρισθῶσιν οὕτως, ὥστε ἡ καμπύλη νὰ διέρχηται διὰ $\mu+1$ σημείων αὐτοβούλως δοθέντων.

Ἵνα τις τῶν καμπύλων τούτων ἔχῃ μετὰ τῆς ΑΒ ἐπαφὴν τῆς τάξεως ν εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς Μ (x, y), πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε

$$\begin{aligned} Y &= y \\ \frac{dY}{dx} &= \frac{dy}{dx} \\ \frac{d^2Y}{dx^2} &= \frac{d^2y}{dx^2} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d^\nu Y}{dx^\nu} &= \frac{d^\nu y}{dx^\nu}. \end{aligned} \tag{2}$$

ἔνθα διὰ Y καὶ y παρεστήσαμεν τὰς πρὸς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν τετμημένην x ἀντιστοιχούσας τεταγμένας τῆς τυχούσης ἐκ τῶν καμπύλων (1) καὶ τῆς δοθείσης.

Αἱ τεταγμέναι αὗται, ὡς καὶ αἱ παράγωγοι αὐτῶν, ὁρίζονται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων

$$y = \sigma(x)$$
$$\varphi(x, Y, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\mu) = 0.$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (2), ὧν ὁ ἀριθμὸς εἶνε $\nu+1$, ὁρίζονται ἐν γένει αἱ $\nu+1$ παράμετροι (ἐὰν εἶναι $\nu \leqq \mu$)· καὶ ἂν μὲν εἶνε $\nu<\mu$, μένουσιν ἀόριστοι $\mu-\nu$ παράμετροι, ἑπομένως ὑπάρχουσιν ἄπειροι καμπύλαι (1) ἔχουσαι πρὸς τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Μ ἐπαφὴν $\nu^{\text{οστῆς}}$ τάξεως· ἐὰν ὅμως εἶνε $\nu=\mu$, αἱ $\mu+1$ ἐξισώσεις (2) ὁρίζουσιν ἐν γένει τὰς τιμὰς τῶν $\mu+1$ παραμέτρων $\alpha_0, \ldots, \alpha_\mu$· ἑπομένως ὑπάρχει μία (ἢ ὡρισμένος ἀριθμὸς) ἐκ τῶν καμπύλων τοῦ γένους (1), ἥτις ἔχει ἐπαφὴν τάξεως μ· αὕτη δὲ εἶνε ἡ ἐγγυτάτη· διότι εἰς πᾶσαν ἄλλην ἀντιστοιχοῦσι τιμαὶ τῶν παραμέτρων $\alpha_0, \ldots, \alpha_\mu$ μὴ ἐπαληθεύουσαι πάσας τὰς ἐξισώσεις (2) καὶ διὰ τοῦτο πᾶσα ἄλλη ἐκ τῶν καμπύλων (1) θὰ ἔχῃ ἐπαφὴν κατωτέρας τάξεως. Ἡ δὲ ἐπαφὴ τῆς ἐγγυτάτης ταύτης καμπύλης εἶνε ἐν γένει τῆς τάξεως μ· διότι, ἵνα ἡ ἐπαφὴ γίνῃ τάξεως ἀνωτέρας, πρέπει καὶ ἄλλας ἐξισώσεις νὰ ἐπαληθεύωσιν αἱ τιμαὶ τῶν παραμέτρων $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$ αἱ εὑρεθεῖσαι ἐκ τῶν $\mu+1$ ἐξισώσεων (2)· ὅπερ ἐν γένει δὲν συμβαίνει (ἢ εἴς τινα σημεῖα ἐκτάκτως). Ἐκ τούτου συνάγεται, ὅτι εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς τυχούσης καμπύλης $y=\sigma(x)$ ὑπάρχει ἐγγυτάτη τις καμπύλη τοῦ γένους (1)· ἔχει δὲ μετ' αὐτῆς ἐπαφὴν ἐν γένει τῆς τάξεως μ.

ΣΗΜ. Ἡ τάξις τῆς ἐπαφῆς ἀναβιβάζεται κατὰ μίαν μονάδα, ἐὰν τὸ σημεῖον τῆς καμπύλης $y=\sigma(x)$ δὲν ληφθῇ ὡς ἔτυχεν, ἀλλὰ προσδιορισθῇ καταλλήλως· διότι μένοντος τοῦ x ἀορίστου, δυνάμεθα διὰ τῶν $\mu+2$ ἀγνώστων $x, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$ νὰ ἐπαληθεύσωμεν τὰς $\mu+1$ ἐξισώσεις (2) καὶ μίαν προσέτι, δηλονότι ἐκείνην, ἥτις προσαπαιτεῖται, ἵνα ἡ ἐπαφὴ γίνῃ τῆς τάξεως $\mu+1$.

Ἐγγυτάτη εὐθεῖα.

33. Ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις πάσης εὐθείας εἶνε τῆς μορφῆς

$$Y = \alpha X + \beta \tag{1}$$

καὶ ἔχει δύο παραμέτρους, ἡ ἐπαφὴ αὐτῆς πρὸς τὴν τυχοῦσαν καμπύλην εἰς τὸ τυχὸν αὐτῆς σημεῖον θὰ εἶνε ἐν γένει πρώτης τάξεως. Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι ἡ ἐγγυτάτη εὐθεῖα πρὸς δοθεῖσαν καμπύλην εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον εἶνε ἡ ἐφαπτομένη. Κατὰ τὴν προηγουμένην θεωρίαν ἀποδεικνύεται τοῦτο ὡς ἑξῆς.

Ἔστω $y=\sigma(x)$ ἡ ἐξίσωσις τῆς δοθείσης καμπύλης καὶ Μ (x, y) τυχὸν σημεῖον αὐτῆς· ἐὰν ἐκφράσωμεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα (1) καὶ ἡ καμπύλη ἔχουσιν εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ἐπαφὴν τῆς τάξεως μ εὑρίσκομεν τὰς ἐξισώσεις

$$\begin{aligned} \alpha x+\beta &= \sigma(x) \\ \alpha &= \sigma'(x) \\ 0 &= \sigma''(x) \\ &\cdots\cdots \\ 0 &= \sigma^{(\mu)}(x), \end{aligned}$$

τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἐπαληθεύῃ ἡ τετμημένη x τοῦ σημείου Μ καὶ αἱ παράμετροι α, β τῆς εὐθείας.

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων αἱ δύο πρῶται ἀρκοῦσιν, ἵνα ὁρισθῶσιν αἱ τιμαὶ τῶν δύο παραμέτρων α καὶ β· καὶ ἑπομένως ἡ ἐγγυτάτη εὐθεῖα· αἱ δὲ ἄλλαι ἐν γένει δὲν ἀληθεύουσιν· ὥστε ἡ ἐγγυτάτη εὐθεῖα ἔχει πρὸς τὴν καμπύλην ἐπαφὴν ἐν γένει πρώτης τάξεως.

Λαμβάνοντες τὰς τιμὰς τῶν παραμέτρων α, β

$$\alpha=\sigma'(x) \qquad \beta=\sigma(x)-x\sigma'(x)$$

καὶ θέτοντες αὐτὰς εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) τῆς εὐθείας, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐγγυτάτης εὐθείας

$$Y-y=\sigma'(x)\,(X-x),$$

ἥτις εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ ἐπαφὴ θὰ εἶνε δευτέρας τάξεως, ἐὰν εἰς τὸ σημεῖον Μ εἶνε $\sigma''(x)=0$, τρίτης, ἐὰν εἶνε καὶ $\sigma'''(x)=0$, κτλ.

Ἐὰν ἡ ἐπαφὴ εἶνε ἀρτίας τάξεως, τὸ σημεῖον θὰ εἶνε σημεῖον καμπῆς (ἐδ 195) καὶ ἡ ἐφαπτομένη θὰ διαπερᾷ τὴν καμπύλην, ἐὰν δὲ περιττῆς, ἡ ἐφαπτομένη κεῖται πρὸς τὰ κυρτὰ τῆς καμπύλης πλησίον τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς.

Ἐγγύτατος κύκλος.

34. Πᾶς κύκλος περιέχεται ἐν τῇ ἐξισώσει

$$(x-\xi)^2+(Y-\eta)^2=\varrho^2, \qquad (1)$$

ἔνθα ξ, η εἶνε αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου καὶ ρ ἡ ἀκτίς.

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει τρεῖς παραμέτρους ξ, η, ϱ· ἐπομένως ἡ πρὸς δοθεῖσαν καμπύλην εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον ἐγγυτάτη περιφέρεια, πρὸς τὴν ὁποίαν δύναται νὰ ἐξομοιωθῇ ἡ καμπύλη πέριξ τοῦ Μ ἀκριβέστερον ἢ πρὸς πᾶσαν ἄλλην, θὰ ἔχῃ μετ' αὐτῆς ἐπαφὴν ἐν γένει δευτέρας τάξεως.

Ἐκ τούτου συνάγεται, ὅτι ὁ ἐγγύτατος κύκλος εἶνε ὁ κύκλος τῆς καμπυλότητος· διότι εἰς τὸ σημεῖον Μ αἱ δύο παράγωγοι τῆς τεταγμένης τῆς καμπύλης εἶνε ἴσαι πρὸς τὰς ὁμοταγεῖς παραγώγους τοῦ κύκλου· ἐπομένως ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος ἀμφοτέρων εἶνε ἡ αὐτὴ εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο· καὶ τῆς μὲν καμπύλης ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος εἶνε ϱ, τοῦ δὲ ἐγγυτάτου κύκλου Ρ· ἄρα $P=\varrho$· ἤτοι οἱ δύο ρηθέντες κύκλοι ταὐτίζονται. Τοῦτο καὶ ἐκ τῆς γενικῆς ἰδέας, ἣν ἔχομεν περὶ τῆς προσεγγίσεως ὑποδεικνύεται· διότι φανερὸν εἶνε, ὅτι ὁ κύκλος, ὅστις ἔχει ἴσην καμπυλότητα πρὸς τὴν τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον Μ δὲν δύναται νὰ διαφέρῃ ἐκείνου, ὅστις προσεγγίζει πρὸς τὴν καμπύλην περισσότερον παντὸς ἄλλου.

Καὶ ἐκ τῆς προηγουμένης θεωρίας ἀποδεικνύεται τοῦτο ὡς ἑξῆς. Ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας διαφοριζομένη δίδει

$$\left.\begin{aligned}(x-\xi)+(Y-\eta)\frac{dY}{dx}&=0\\ 1+\frac{dY^2}{dx^2}+(Y-\eta)\frac{d^2Y}{dx^2}&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς παραγώγους $\frac{dY}{dx}$, $\frac{d^2Y}{dx^2}$ τῆς τεταγμένης τῆς περιφερείας καὶ νὰ ἐξισώσωμεν αὐτὰς πρὸς τὰς ὁμοταγεῖς παραγώγους τῆς καμπύλης λαμβανομένας ἐκ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς $y=\sigma(x)$, ἤτοι πρὸς τὰ $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$. Ἀλλ' εὐκολώτερον εὑρίσκομεν τὰς διὰ τὴν ἐπαφὴν ἀπαιτουμένας ἐξισώσεις, ἐὰν παρατηρήσωμεν, ὅτι εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον Μ πρέπει καὶ αἱ τεταγμέναι Y καὶ y (αἱ ἀντιστοιχοῦσαι πρὸς τὴν αὐτὴν τετμημένην x) ἀμφοτέρων (τοῦ τε κύκλου καὶ τῆς καμπύλης) νὰ γίνωνται ἴσαι καὶ αἱ παράγωγοι $\frac{dY}{dx}$, $\frac{d^2Y}{dx^2}$ τῆς περιφερείας ὡσαύτως ἴσαι πρὸς τὰς παραγώγους $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ τῆς δοθείσης καμπύλης· ὥστε θὰ εἶνε

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=\varrho^2$$

$$(x-\xi)+(y-\eta)\frac{dy}{dx}=0$$

$$1+\frac{dy^2}{dx^2}+(y-\eta)\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

Ἐκ δὲ τῶν τριῶν τούτων ἐξισώσεων ὁρίζονται αἱ τιμαὶ τῶν ξ, η, ϱ, ἑπομένως καὶ ὁ πρὸς τὴν καμπύλην ἐγγύτατος κύκλος.

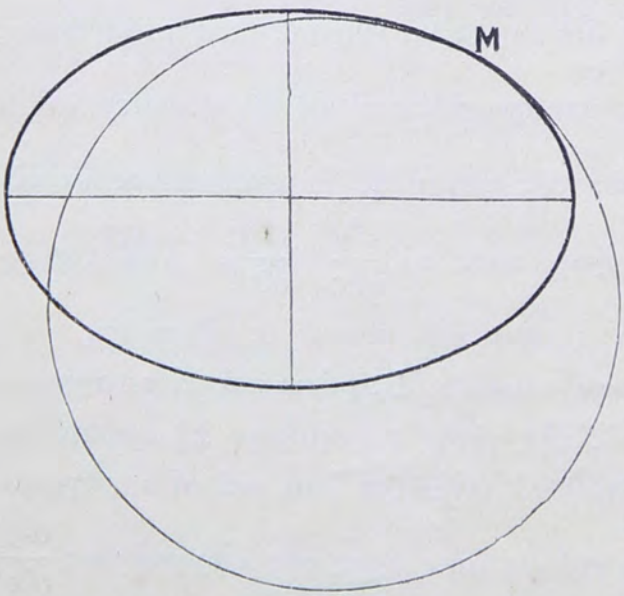
Ἐπειδὴ δὲ αἱ ἐξισώσεις (2) οὐδόλως διαφέρουσιν ἐκείνων, δι᾽ ὧν προσδιορίζεται τὸ κέντρον τῆς καμπυλότητος εἰς τὸ σημεῖον M τῆς καμπύλης, συνάγεται, ὅτι ὁ ἐγγύτατος κύκλος καὶ ὁ κύκλος τῆς καμπυλότητος συμπίπτουσι.

Σημειωσις. Ἡ ἐπαφὴ τοῦ ἐγγυτάτου κύκλου πρὸς τὴν καμπύλην θὰ εἶνε τρίτης τάξεως, ἐὰν αἱ τιμαὶ τῶν παραμέτρων ξ, η, ϱ, αἱ εὑρισκόμεναι ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2), ἐπαληθεύωσι καὶ τὴν ἐξίσωσιν

$$3\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}+(y-\eta)\frac{d^3y}{dx^3}=0,$$

ἥτις προκύπτει ἐκ τῆς δευτέρας τῶν (2) διὰ τῆς διαφορίσεως· ἐὰν δὲ ἡ τιμὴ τοῦ η ληφθῇ ἐκ τῆς ἐξισώσεως ἐκείνης καὶ τεθῇ εἰς ταύτην, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{d^3y}{dx^3}=3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2, \tag{3}$$



τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἐπαληθεύωσιν αἱ τιμαὶ τῶν παραγώγων τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον M. Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν σημεῖά τινα ἐπὶ τῆς καμπύλης, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ ἐγγύτατος κύκλος ἔχει ἐπαφὴν τρίτης τάξεως. Ἐάν, λόγου χάριν, ἡ καμπύλη εἶνε ἔλλειψις, εὑρίσκεται διὰ τῆς σχέσεως (3), ὅτι εἰς τὰς κορυφὰς αὐτῆς, καὶ μόνον εἰς αὐτάς, ἡ ἐπαφὴ γίνεται τρίτης τάξεως. Εἰς τὰ σημεῖα ταῦτα ἑπομένως ὁ ἐγγύτατος κύκλος δὲν διαπερᾷ τὴν καμπύλην· καὶ εἰς μὲν τὰς κορυφὰς τοῦ μείζονος ἄξονος ὁ ἐγγύτατος κύκλος κεῖται ὅλος ἐντὸς τῆς ἐλλείψεως, εἰς δὲ τὰς κορυφὰς τοῦ ἐλάσσονος περιέχει ἐντὸς αὐτοῦ ἅπασαν τὴν ἔλλειψιν. Εἰς πᾶν δὲ ἄλλο σημεῖον ὁ ἐγγύτατος κύκλος διαπερᾷ τὴν ἔλλειψιν, ὡς ἔχων ἐπαφὴν δευτέρας τάξεως. Περὶ τῆς θέσεως αὐτοῦ πρὸς τὴν καμπύλην ἰδὲ ἐδ. 24.

Παρατήρησις. Ἡ ἐξίσωσις (3) δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς

$$d \left| \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \right| = 0, \text{ τοῦτ' ἔστι } d\varrho = 0,$$

ἑπομένως εἰς πᾶν σημεῖον, ἔνθα ἡ ἀκτὶς τῆς καμπυλότητος γίνεται μεγίστη ἢ ἐλαχίστη (ἅτινα σημεῖα λέγονται *κορυφαὶ* τῆς καμπύλης), ἡ ἐπαφὴ θὰ εἶνε τάξεως ἀνωτέρας τῆς δευτέρας.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐπὶ τῆς προηγουμένης θεωρίας τοῦ ἐγγυτάτου κύκλου καὶ τῆς ἐξομοιώσεως τῶν καμπύλων πρὸς κύκλους στηρίζεται ἡ κατὰ προσέγγισιν κατασκευὴ τῶν καμπύλων διὰ κυκλικῶν τόξων. Ἔχοντες λόγου χάριν τοὺς ἄξονας τῆς ἐλλείψεως καὶ τὰ δύο κέντρα καμπυλότητος A_1 καὶ B_1, ἅτινα ἀντιστοιχοῦσι πρὸς τὰς κορυφὰς A καὶ B, ἄγομεν τὴν $A_1 B_1$ καὶ γράφομεν μὲ κέντρον τὸ A_1 καὶ ἀκτῖνα τὴν A_1A τόξον κύκλου ἀπὸ τοῦ A μέχρι τῆς εὐθείας $A_1 B_1$· ἔπειτα δὲ γράφομεν τόξον κύκλου μὲ κέντρον τὸ B_1 καὶ ἀκτῖνα τὴν $B_1 B$ ἀπὸ τοῦ B μέχρι τῆς εὐθείας A_1B_1· τὰ τόξα ταῦτα δὲν τέμνουσι τὴν εὐθεῖαν A_1B_1 εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἀλλὰ διὰ τῆς χειρὸς διορθοῦμεν αὐτά, ὥστε ἑνούμενα νὰ ἀποτελῶσι συνεχὲς τόξον· τότε τοῦτο παριστᾷ κατὰ προσέγγισιν τὸ τεταρτημόριον τῆς ἐλλείψεως.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

Ἐὰν διαφορίσωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\varphi(x, Y, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\mu) = 0$$

$\mu+1$ φορὰς καὶ ἔπειτα ἀπαλείψωμεν τὰς $\mu+1$ παραμέτρους $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$ μεταξὺ αὐτῆς καὶ τῶν ἐκ τῆς διαφορίσεως προκυπτουσῶν $\mu+1$ ἐξισώσεων, εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν διαφορικὴν τάξεως $\mu+1$ (περιέχουσαν δηλαδὴ παραγώγους τοῦ Y πρὸς x μέχρι τῆς τάξεως $\mu+1$), ἣν ἐπαληθεύουσιν πᾶσαι αἱ καμπύλαι τοῦ γένους $\varphi=0$· διότι αἱ διακρίνουσαι τὰς καμπύλας ταύτας ἀπ' ἀλλήλων παράμετροι $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$ δὲν ὑπάρχουσιν ἐν τῇ ἐξισώσει ταύτῃ· ἡ ἐξίσωσις αὕτη λέγεται *διαφορικὴ* ἐξίσωσις τῶν καμπύλων τοῦ γένους $\varphi=0$.

Παραδείγματος χάριν ἡ ἐξίσωσις (3) εἶνε ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν περιφερειῶν τοῦ ἐπιπέδου, διότι προέκυψεν ἐκ τῆς ἀπαλοιφῆς τῶν τριῶν παραμέτρων ξ, η καὶ ρ τῆς ἐξισώσεως αὐτῶν. Ὁμοίως ἡ ἐξίσωσις $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ εἶνε ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις πασῶν τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου· κτλ.

Γεωμετρικὴ θεωρία τῶν ἐπαφῶν.

35. Ἡ ἐπαφὴ τῶν καμπύλων δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ ἀπὸ ἄλλης ἀπόψεως μᾶλλον γεωμετρικῆς, εἰς τὴν ὁποίαν χρησιμεύει ὡς ἀφετηρία ὁ ὁρισμὸς τῆς ἐφαπτομένης· καθὼς δηλονότι λέγομεν, ὅτι εὐθεῖα καὶ καμπύλη ἐφάπτονται ἀλλήλων, ὅταν δύο τομαὶ αὐτῶν συμπέσωσιν εἰς ἓν σημεῖον, οὕτω δυνάμεθα νὰ λέγωμεν τὸ αὐτὸ καὶ περὶ δύο καμπύλων· ἐπειδὴ δὲ οὐ μόνον δύο τομαί, ἀλλὰ καὶ περισσότεραι δύνανται νὰ συμπέσωσιν εἰς ἓν σημεῖον, διὰ τοῦτο ἀνάγκη νὰ διακρίνωμεν ἐπαφὰς διαφόρων τάξεων. Οὕτως ἀγόμεθα εἰς τὸν ἑξῆς ὁρισμὸν τῶν ἐπαφῶν.

Δύο καμπύλαι λέγεται ὅτι ἔχουσιν εἴς τι σημεῖον ἐπαφὴν τῆς τάξεως μ, ὅταν εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο συμπίπτωσι $\mu+1$ σημεῖα κοινὰ τῶν καμπύλων τούτων.

Τοῦτ' ἔστιν, ὅταν δύνανται νὰ μεταβληθῶσιν οἱ συντελεσταὶ τῆς ἐξισώσεως τῆς ἑτέρας τῶν καμπύλων κατὰ ποσότητας μικροτέρας παντὸς τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ καὶ τοιαύτας, ὥστε νὰ διαχωρίζηται τὸ κοινὸν τοῦτο σημεῖον εἰς $\mu+1$ κοινὰ σημεῖα πλησίον ἀλλήλων κείμενα καὶ συμπίπτοντα, ὅταν αἱ μεταβολαὶ τῶν συντελεστῶν μηδενισθῶσι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Εἰς τὴν μεταβολὴν τῶν συντελεστῶν ἀνάγκη νὰ τεθῇ ὁ ἑξῆς περιορισμός· αἱ τεταγμέναι ἑκατέρας τῶν καμπύλων θεωρούμεναι ὡς συναρτήσεις τῆς μεταβλητῆς τετμημένης X πρέπει (ὡς καὶ ἀλλαχοῦ παρετηρήσαμεν) νὰ διαφυλάττωσι τὸν χαρακτῆρα ἀκεραίας συναρτήσεως πέριξ τοῦ κοινοῦ σημείου (x, y). Διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ ὑποθέτωμεν αὐτὰς ἀνεπτυγμένας διὰ τοῦ τύπου τοῦ Taylor κατὰ τὰς δυνάμεις τῆς διαφορᾶς $(X-x)$ καὶ νὰ νοῶμεν μεταβαλλομένους τοὺς συντελεστὰς τῶν ἀναπτυγμάτων.

36. Ἐὰν καμπύλη τέμνῃ ἄλλην εἰς $\mu+1$ σημεῖα, μεταβάλλῃ δὲ σχῆμα καὶ θέσιν, ὥστε νὰ συμπέσωσι ταῦτα πάντα εἰς ἕν, εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο καὶ αἱ τεταγμέναι τῶν καμπύλων γίνονται ἴσαι καὶ αἱ μ πρῶται παράγωγοι αὐτῶν γίνονται ἴσαι.

Διότι, ἂν ἡ καμπύλη $Y=\varphi(X)$
τέμνῃ τὴν καμπύλην $Y=\sigma(X)$
εἰς τὰ $\mu+1$ σημεῖα

$$(x_0,y_0),\ (x_1,y_1),\ldots,(x_\mu,\ y_\mu),$$

ἡ διαφορὰ $\sigma(X)-\varphi(X)$
θὰ μηδενίζηται διὰ $X=x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots,x_\mu$
κατ' ἀκολουθίαν ἡ παράγωγος αὐτῆς

$$\sigma'(X)-\varphi'(X)$$

θὰ μηδενίζηται διὰ μ τιμὰς τῆς X, κειμένας μεταξὺ τῶν $\mu+1$ προηγουμένων, τὰς $x'_0, x'_1,\ldots,x'_{\mu-1}$ (ἡ x'_0 κεῖται μεταξὺ x_0 καὶ x_1, ἡ x'_1 μεταξὺ x_1 καὶ x_2 κτλ.), διὰ τοῦτο ἡ παράγωγος αὐτῆς

$$\sigma''(X)-\varphi''(X)$$

θὰ μηδενίζηται διὰ $\mu-1$ τιμὰς τῆς X, τὰς $x''_0,\ x''_1,\ldots,x''_{\mu-2}$ κειμένας μεταξὺ τῶν προηγουμένων.

Ἐξακολουθοῦντες οὕτω φθάνομεν εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι ἡ $\mu^{\text{οστὴ}}$ παράγωγος τῆς διαφορᾶς $\sigma(X)-\varphi(X)$
ἤτοι ἡ $\sigma^{(\mu)}(X)-\varphi^{(\mu)}(X)$

θὰ μηδενίζηται διά τινα τιμὴν $x_0^{(\mu)}$ μεταξὺ τῶν τιμῶν $x_0,\ldots,x_\mu$ κειμένην.

Εὑρίσκονται λοιπὸν τιμαὶ τῆς X, αἱ $x_0,\ x'_0,\ x''_0,\ldots,x_0^{(\mu)}$ (κείμεναι μεταξὺ τῶν $\mu+1$ τιμῶν $x_0, x_1,\ldots,x_\mu$), διὰ τὰς ὁποίας ἔχομεν

$$\begin{aligned}
&\sigma(x_0)=\varphi(x_0)\\
&\sigma'(x'_0)=\varphi'(x'_0)\\
&\sigma''(x''_0)=\varphi''(x''_0)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\sigma^{(\mu)}(x_0^{(\mu)})=\varphi^{(\mu)}(x_0^{(\mu)}).
\end{aligned}$$

Ὑποθέσωμεν νῦν, ὅτι μεταβάλλονται οἱ συντελεσταὶ τῆς πρώτης ἐξισώσεως οὕτως, ὥστε νὰ συμπέσωσι τὰ $\mu+1$ κοινὰ σημεῖα εἰς ἓν σημεῖον $(x,\ y)$ τῆς καμπύλης $Y=\sigma(X)$· τότε ἡ μὲν συνάρτησις $\varphi(X)$ θὰ γίνῃ ἄλλη τις $\varphi_0(X)$· αἱ δὲ τεταγμέναι $x_0,\ x_1,\ldots,x_\mu$ γίνονται πᾶσαι ἴσαι τῇ x, ὡσαύτως δὲ καὶ αἱ μεταξὺ αὐτῶν κείμεναι

$$x_0,\ x'_0,\ x''_0,\ldots,x_0^{(\mu)}.$$

ἄρα θὰ εἶνε

$$
\begin{aligned}
\sigma(x) &= \varphi_0(x)\\
\sigma'(x) &= \varphi'_0(x)\\
\sigma''(x) &= \varphi''_0(x)\\
&\dots\dots\dots\\
\overset{(\mu)}{\sigma}(x) &= \overset{(\mu)}{\varphi_0}(x).
\end{aligned}
$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν ἡ συνάρτησις $\varphi(X)$ γίνῃ $\varphi_0(X)$, καὶ αἱ παράγωγοι αὐτῆς $\varphi'(X)$, $\varphi''(X)$, .. θὰ γίνωσι $\varphi'_0(X)$, $\varphi''_0(X)$, ...· τοῦτο δύναται νὰ ἴδῃ τις ἀναπτύσσων ἀμφοτέρας τὰς συναρτήσεις κατὰ τὸν τύπον τοῦ Taylor.

Ἡ προηγουμένη ἀπόδειξις ἀληθεύει, ὁπωςδήποτε καὶ ἂν κινῶνται τὰ $\mu+1$ σημεῖα ἐπὶ τῆς καμπύλης $Y=\sigma(X)$, μέχρις οὗ συμπέσωσιν εἰς ἕν. Δύνανται, λόγου χάριν, πρῶτον νὰ συμπέσωσιν εἰς ἓν τινὰ ἐξ αὐτῶν, οἷον τὰ $x_0, x_1, \dots, x_\varkappa$· τὰ δὲ ἄλλα νὰ εἶνε διακεκριμένα ἀπ' ἀλλήλων· τότε καὶ αἱ τιμαὶ $x_0, x'_0, x''_0, \dots, \overset{(\varkappa-1)}{x_0}$ συμπίπτουσιν εἰς μίαν· κατὰ δὲ τὰ ἄλλα αἱ προηγούμεναι ἐξισώσεις μένουσιν αἱ αὐταί.

37. Καὶ ἀντιστρόφως· ἐὰν δύο καμπύλαι

$$Y=\sigma(X), \qquad Y=\varphi(X) \tag{1}$$

διά τινα τιμὴν x τῆς μεταβλητῆς τετμημένης X ἔχωσι

$$
\begin{aligned}
\sigma(x) &= \varphi(x)\\
\sigma'(x) &= \varphi'(x)\\
&\dots\dots\dots\\
\overset{(\mu)}{\sigma}(x) &= \overset{(\mu)}{\varphi}(x),
\end{aligned}
$$

δύνανται νὰ μεταβληθῶσιν οἱ συντελεσται τῆς ἑτέρας τῶν ἐξισώσεων, ἔστω τῆς $Y=\varphi(X)$, κατὰ ποσότητας μικροτέρας παντὸς τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ καὶ τοιαύτας, ὥστε αἱ δύο καμπύλαι νὰ ἔχωσι $\mu+1$ σημεῖα κοινὰ πλησίον τοῦ σημείου (x, y) καὶ συμπίπτοντα εἰς αὐτό, ὅταν αἱ μεταβολαὶ τῶν συντελεστῶν μηδενισθῶσι.

Διότι, ἂν ἀναπτυχθῶσιν αἱ τεταγμέναι τῶν καμπύλων, ἤτοι αἱ συναρτήσεις $\sigma(X)$ καὶ $\varphi(X)$, κατὰ τὰς δυνάμεις τῆς διαφορᾶς $X-x$, θὰ συμφωνῶσι τὰ ἀναπτύγματα αὐτῶν μέχρι τοῦ ὅρου, ὅστις ἔχει τὴν $\mu+1$ δύναμιν τῆς διαφορᾶς ταύτης· ἤτοι θὰ εἶνε

$$\varphi(X)-\sigma(X)=(X-x)^{\mu+1}\left\{\mathrm{A}+\mathrm{B}(X-x)+\Gamma(X-x)^2+\dots\right\},$$

ὅθεν
$$\varphi(X)=\sigma(X)+(X-x)^{\mu+1}\left\{\mathrm{A}+\mathrm{B}(X-x)+\dots\right\}.$$

Τούτου τεθέντος, ἔστωσαν $x_0, x_1, \dots, x_\mu$ τυχοῦσαι τιμαὶ τῆς τετμημένης, αἵτινες ὁπωςδήποτε μεταβαλλόμεναι γίνονται ἴσαι τῇ x· ἂν ἐν τῇ τιμῇ τῆς συναρτήσεως $\varphi(X)$ ἀντὶ τῆς δυνάμεως $(X-x)^{\mu+1}$ θέσωμεν τὸ γινόμενον

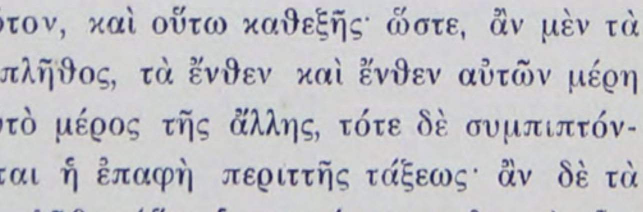
$$(X-x_0),\ (X-x_1)\ (X-x_2)\ldots(X-x_\mu),$$

θὰ μεταβληθῇ ἡ συνάρτησις $\varphi(X)$ εἴς τινα ἄλλην $\bar{\varphi}(X)$ καὶ ἡ καμπύλη $Y=\bar{\varphi}(X)$ θὰ ἔχῃ μετὰ τῆς καμπύλης $Y=\sigma(X)$ κοινὰ τὰ σημεῖα τὰ ἀντιστοιχοῦντα πρὸς τὰς τετμημένας $x_0\ x_1,\ldots,x_\mu$· συμπίπτει δὲ ἡ καμπύλη αὕτη τῇ $Y=\varphi(X)$, ὅταν αἱ τιμαὶ $x_0, x_1,\ldots,x_\mu$, ὁπωςδήποτε μεταβαλλόμεναι, γίνωσιν ἴσαι τῇ x· ὥστε τὸ κοινὸν σημεῖον (x,y) τῶν καμπύλων (1) εἶνε $\mu+1$ σημεῖα συμπεσόντα καὶ διὰ τοῦτο αἱ καμπύλαι ἔχουσιν εἰς αὐτὸ ἐπαφὴν τῆς τάξεως μ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁπωςδήποτε καὶ ἂν μεταβληθῶσιν οἱ συντελεσταὶ τῆς ἐξισώσεως $Y=\varphi(X)$ κατὰ ποσότητας τεινούσας πρὸς τὸ μηδέν, ἐὰν αἱ τιμαὶ τῶν παραγώγων $\sigma^{(\mu+1)}(x)$ καὶ $\varphi^{(\mu+1)}(x)$ εἶνε διάφοροι, εἶνε ἀδύνατον νὰ διαχωρισθῇ τὸ κοινὸν σημεῖον $(x,\ y)$ εἰς περισσότερα τῶν $\mu+1$ σημεῖα κοινὰ καὶ τείνοντα νὰ συμπέσωσιν εἰς αὐτό· διότι τότε κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδ. 36 θὰ ἦσαν ἴσαι καὶ αἱ τιμαὶ τῶν παραγώγων $\sigma^{(\mu+1)}(x)$ καὶ $\varphi^{(\mu+1)}(x)$· ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει.

Ἐκ τῶν δύο τούτων προτάσεων συνάγεται, ὅτι οἱ δύο ὁρισμοὶ τῶν ἐπαφῶν (ἐδ. 29 καὶ 35) εἶνε ἰσοδύναμοι.

38. Καὶ ἡ πρὸς ἀλλήλας θέσις τῶν καμπύλων εἰς τὴν ἀφὴν εὑρίσκεται εὐκολώτατα ἐκ τῆς γεωμετρικῆς θεωρίας. Ἐὰν τῷ ὄντι ἡ καμπύλη ΑΒΓΔ τέμνῃ ἄλλην κατὰ τὴν πρώτην μὲν τομὴν Α διέρχεται εἰς τὸ ἕτερον μέρος αὐτῆς ἢ πρίν, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν Β ἐπανέρχεται εἰς τὸ αὐτὸ καὶ πρὶν μέρος,



κατὰ τὴν τρίτην Γ διέρχεται πάλιν εἰς τὸ ἕτερον, κατὰ τὴν τετάρτην Δ ἐπιστρέφει πάλιν εἰς τὸ πρῶτον, καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε, ἂν μὲν τὰ κοινὰ σημεῖα εἶνε εἰς ἄρτιον πλῆθος, τὰ ἔνθεν καὶ ἔνθεν αὐτῶν μέρη τῆς ΑΒΓΔ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ἄλλης, τότε δὲ συμπιπτόντων εἰς ἓν τῶν σημείων γίνεται ἡ ἐπαφὴ περιττῆς τάξεως· ἂν δὲ τὰ κοινὰ σημεῖα εἶνε εἰς περιττὸν πλῆθος (ὅτε ἡ προκύπτουσα ἐπαφὴ εἶνε ἀρτίας τάξεως), τὰ ἔνθεν καὶ ἔνθεν αὐτῶν μέρη τῆς ΑΒΓΔ κεῖνται εἰς διάφορα μέρη τῆς ἄλλης.

Εὕρεσις τῆς ἐγγυτάτης καμπύλης.

39. Ἔστω $y=\sigma(x)$ ἡ ἐξίσωσις οἱασδήποτε καμπύλης καὶ $M(x, y)$ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς· πρόκειται ἐκ τῶν ἐν τῇ ἐξισώσει

$$\varphi(x, Y, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\mu)=0 \qquad (1)$$

περιεχομένων καμπύλων, ἔνθα $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$ εἶνε $\mu+1$ παράμετροι ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐγγυτάτη πρὸς τὴν καμπύλην $y=\sigma(x)$ εἰς τὸ σημεῖον M.

Ἂς ληφθῶσιν ἐπὶ τῆς καμπύλης $y=\sigma(x)$ $\mu+1$ σημεῖα τυχόντα πλησίον τοῦ M καὶ ἔστωσαν αἱ συντεταγμέναι αὐτῶν

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_\mu, y_\mu).$$

Διὰ τῶν $\mu+1$ τούτων σημείων διέρχεταί τις τῶν ἐν τῇ ἐξισώσει (1) περιεχομένων καμπύλων καὶ αἱ πρὸς αὐτὴν ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τῶν παραμέτρων εὑρίσκονται ἐκ τῶν $\mu+1$ ἐξισώσεων

$$\varphi(x_0, y_0, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\mu)=0, \ \varphi(x_1, y_1, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\mu)=0, \ldots,$$

αἵτινες ἐκφράζουσιν, ὅτι ἡ καμπύλη (1) διέρχεται διὰ τῶν ληφθέντων σημείων.

Τούτου τεθέντος, παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ παράστασις

$$\varphi(x, Y, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\mu),$$

ἐὰν ἐν αὐτῇ τὸ Y θεωρηθῇ ἴσον τῇ $\sigma(x)$, εἶνε συνάρτησις τοῦ x· ἐπειδὴ δὲ ἡ συνάρτησις αὕτη τοῦ x μηδενίζεται διὰ

$$x=x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\mu,$$

συνάγεται, ὅτι ἡ πρώτη παράγωγος αὐτῆς $\dfrac{d\varphi}{dx}$ (ἥτις εἶνε $\varphi_x+\varphi_y\,\sigma'(x)$ θὰ μηδενίζηται διὰ μ τιμὰς τῆς x, τὰς $x'_0, x'_1, \ldots, x'_{\mu-1}$, κειμένας μεταξὺ τῶν προηγουμένων· διὰ δὲ τοῦτο θὰ μηδενίζηται καὶ ἡ δευτέρα αὐτῆς παράγωγος $\dfrac{d^2\varphi}{dx^2}$ διὰ $\mu-1$ τιμάς, καὶ καθεξῆς· ἡ δὲ μ ἡ παράγωγος $\dfrac{d^\mu\varphi}{dx^\mu}$ θὰ μηδενίζηται διά τινα τιμὴν μεταξὺ τῶν πρώτων κειμένην. Ἀλλ' ὅταν τὰ ληφθέντα σημεῖα τείνωσι νὰ συμπέσωσιν εἰς τὸ M (x, y), πᾶσαι αἱ τετμημέναι $x_0, x_1, \ldots, x_\mu$ τείνουσι νὰ γίνωσιν ἴσαι τῇ x, ὡσαύτως καὶ αἱ μεταξὺ αὐτῶν κείμεναι τιμαὶ αἱ μηδενίζουσαι τὰς παραγώγους τοῦ φ. Ὅταν ἄρα συμπέσωσιν εἰς τὸ M, θὰ εἶνε

$$\varphi=0, \quad \frac{d\varphi}{dx}=0, \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2}=0, \ldots, \frac{d^\mu\varphi}{dx^\mu}=0.$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων ὁρίζονται αἱ παράμετροι α_0, $\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$ τῆς ἐγγυτάτης καμπύλης πρὸς τὴν $y=\sigma(x)$.

Παρατηρητέον δέ, ὅτι αἱ ἐξισώσεις αὗται εὑρίσκονται ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x, y, \alpha_0, \ldots, \alpha_\mu)=0$, ἐὰν διαφορίσωμεν αὐτὴν μ φορὰς πρὸς τὴν x θεωροῦντες τὰ x, y ὡς συντεταγμένας τῶν σημείων τῆς καμπύλης $y=\sigma(x)$· τοῦτ᾽ ἔστι θέτοντες $y=\sigma(x)$, $dy=\sigma'(x)dx$, κτλ.

Διὰ τὸν ἐγγύτατον κύκλον ἔχομεν λόγου χάριν τὰς ἐξισώσεις

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=\varrho^2$$

$$(x-\xi)+(y-\eta)\frac{dy}{dx}=0$$

$$1+\frac{dy^2}{dx^2}+(y-\eta)\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

αἵτινες εἶνε αἱ ἐξισώσεις τοῦ ἐδ. 34.

Ἐκ τῆς γεωμετρικῆς θεωρίας τῶν ἐπαφῶν συνάγονται προσέτι αἱ ἀκόλουθοι ἰδιότητες τῆς ἐγγυτάτης περιφερείας.

Ἡ ἐγγυτάτη περιφέρεια εἶνε τὸ ὅριον τῶν θέσεων περιφερείας διὰ τριῶν σημείων τῆς καμπύλης διερχομένης, ὅταν τὰ σημεῖα ταῦτα συμπέσωσιν εἰς ἕν· (καθὼς ἡ ἐγγυτάτη εὐθεῖα εἶνε τὸ ὅριον τῶν θέσεων τεμνούσης, τῆς ὁποίας δύο τομαὶ συνέπεσαν εἰς ἓν σημεῖον).

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν τριῶν σημείων τῆς καμπύλης, δι᾽ ὧν διέρχεται ἡ περιφέρεια, δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν πρῶτον τὰ δύο συμπίπτοντα εἰς ἓν (ὅτε ἡ περιφέρεια ἐφάπτεται τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο), τὸ δὲ ἄλλο διακεκριμένον, συνάγεται, ὅτι

Ἡ ἐγγυτάτη περιφέρεια εἶνε τὸ ὅριον τῶν θέσεων περιφερείας ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης εἴς τι σημεῖον καὶ διερχομένης δι᾽ ἄλλου σημείου αὐτῆς, ὅταν ἀμφότερα τὰ σημεῖα ταῦτα συμπέσωσιν εἰς ἕν·

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ ἐγγυτάτη καμπύλη τοῦ γένους $\varphi=0$ εἰς πᾶν σημεῖον τῆς δοθείσης καμπύλης $y=\sigma(x)$ θὰ ἔχῃ ἐπαφὴν τῆς τάξεως $\mu+1$, ἐὰν ἐπαληθεύωνται αἱ ἐξισώσεις

$$\varphi=0, \quad \frac{d\varphi}{dx}=0, \ldots, \frac{d^{\mu+1}\varphi}{dx^{\mu+1}}=0, \tag{ϑ}$$

ἃς εὑρίσκομεν διαφορίζοντες $\mu+1$ φορὰς τὴν ἐξίσωσιν $\varphi=0$ καὶ ἀντικαθιστῶντες τὰς συντεταγμένας x, y τῆς δοθείσης καμπύλης $y=\sigma(x)$ καὶ τὰς παραγώγους αὐτῶν $\frac{dy}{dx}, \ldots$ ἀντὶ τῶν συντεταγμένων X, Y τῆς καμπύλης $\varphi=0$ καὶ τῶν παραγώγων

$\frac{dY}{dX}$, $\frac{d^2Y}{dX^2}$ αὐτῶν· ἀλλὰ τότε ἀπαλείφοντες τὰς $\mu+1$ παραμέτρους α_0, $\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$ ἐκ τῶν $\mu+2$ ἐξισώσεων (ϑ) εὑρίσκομεν τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν τῶν καμπύλων τοῦ γένους $\varphi=0$· ὅθεν ἡ καμπύλη $y=\sigma(x)$, ἐπειδὴ ἐπαληθεύει τὴν διαφορικὴν ταύτην ἐξίσωσιν εἰς ἕκαστον σημεῖον αὐτῆς, ἢ εἶνε καμπύλη τις τοῦ αὐτοῦ γένους καὶ τότε ἐγγυτάτη εἶνε αὐτὴ πρὸς ἑαυτήν, ἢ εἶνε ἰδιάζουσά τις λύσις τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως· τότε δὲ ἔχει εἰς ἕκαστον σημεῖον αὐτῆς ἐπαφὴν τάξεως $\mu+1$ μετά τινος τῶν καμπύλων $\varphi=0$ (ἄλλης εἰς ἄλλο).

Συμπέρασμα τῆς θεωρίας τῶν ἐπαφῶν.

40. Ἡ ἐγγυτάτη εὐθεῖα δύναται ἄνευ λάθους νὰ ἀντικαταστήσῃ τὴν καμπύλην (τοῦτ' ἔστιν ἡ καμπύλη δύναται νὰ ἐξομοιωθῇ πρὸς εὐθεῖαν) ἐν παντὶ ζητήματι, εἰς τὸ ὁποῖον μόνον αἱ συντεταγμέναι ἑνὸς σημείου τῆς καμπύλης καὶ τὰ πρῶτα διαφορικὰ αὐτῶν εἰσέρχονται· διότι ταῦτα ἔχουσι κοινὰ ἡ ἐγγυτάτη εὐθεῖα καὶ ἡ καμπύλη· ὡσαύτως ἡ ἐγγυτάτη περιφέρεια δύναται ἄνευ λάθους νὰ ἀντικαταστήσῃ τὴν καμπύλην (ἢ ἡ καμπύλη νὰ ἐξομοιωθῇ πρὸς περιφέρειαν) ἐν παντὶ ζητήματι, εἰς τὸ ὁποῖον εἰσέρχονται μόνον αἱ συντεταγμέναι ἑνὸς σημείου τῆς καμπύλης καὶ τὰ πρῶτα καὶ τὰ δεύτερα διαφορικὰ αὐτῶν· ἐπίσης ἡ ἐξειλιγμένη τοῦ κύκλου δύναται νὰ ἀντικαταστήσῃ τὴν καμπύλην (ἢ ἡ καμπύλη νὰ ἐξομοιωθῇ πρὸς ἐξειλιγμένην τοῦ κύκλου) ἐν παντὶ ζητήματι, ἔνθα ἐμφανίζονται αἱ συντεταγμέναι ἑνὸς σημείου καὶ τὰ διαφορικὰ αὐτῶν μέχρι τῆς τρίτης τάξεως μόνον. Ἡ ἀντικατάστασις οἱαςδήποτε καμπύλης διὰ καμπύλων ὡρισμένου γένους καθιστᾷ συνήθως τὸ ζήτημα εὐκολώτερον καὶ παρέχει σαφεστέραν ἰδέαν τῆς φύσεως τοῦ ζητήματος. Ἐάν, λόγου χάριν, ζητῆται ἡ ἐφαπτομένη τῆς κογχοειδοῦς οἱαςδήποτε καμπύλης φανερὸν εἶνε (ἐκ τῆς κατασκευῆς τῶν κογχοειδῶν), ὅτι εἰς τοῦτο τὸ ζήτημα μόνον αἱ συντεταγμέναι (x, y) τοῦ τυχόντος σημείου τῆς καμπύλης καὶ τὰ πρῶτα διαφορικὰ αὐτῶν εἰσέρχονται· κατ' ἀκολουθίαν δύναται ἡ καμπύλη νὰ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς καὶ τὸ ζήτημα ἀνάγεται τοιουτοτρόπως εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς ἐφαπτομένης τῆς κογχοειδοῦς εὐθείας γραμμῆς. Ἐὰν δὲ ζητῆται τῶν κογχοειδῶν τὸ κέντρον τῆς καμπυλότητος, δύναται ἡ καμπύλη, ἐξ ἧς γίνεται ἡ κογχοειδής, νὰ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τῆς ἐγγυτάτης, αὐτῇ περιφερείας καὶ ἑπομένως ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον καμπυλότητος τῶν κογχοειδῶν τοῦ κύκλου. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ὅταν ζητῆται ἡ

ἐφαπτομένη τῶν ποδικῶν (ἰδὲ Ἀναλ. Γεωμ. σελ. 378), δύναται ἡ καμπύλη, ἐξ ἧς γίνεται ἡ ποδική, νὰ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τῆς ἐγγυτάτης αὐτῇ περιφερείας· καὶ ἑπομένως ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη τῆς ποδικῆς τοῦ κύκλου.

Ὁμοίως, ἐὰν ζητῆται ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης, ἥτις προκύπτει, ὅταν ἐξ ἑκάστου σημείου τῆς δοθείσης καμπύλης ἀχθῇ εὐθεῖα σταθερὰ τὸ μῆκος καὶ σχηματίζουσα πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς δοθείσης σταθερὰν γωνίαν, φανερὸν εἶνε, ὅτι εἰς τοὺς λογισμοὺς θὰ εἰσέρχωνται μόνον αἱ συντεταγμέναι τοῦ τυχόντος σημείου τῆς δοθείσης καμπύλης καὶ τὰ διαφορικὰ αὐτῶν πρώτης καὶ δευτέρας τάξεως· κατ' ἀκολουθίαν δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ ἡ δοθεῖσα καμπύλη ὑπὸ τῆς ἐγγυτάτης αὐτῇ περιφερείας· ἀλλ' ἂν ἡ κατασκευὴ αὕτη ἐφαρμοσθῇ εἰς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν προκύπτουσαν καμπύλην (ἥτις εἶνε πάλιν περιφέρεια) διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι καὶ γενικῶς, εἰς οἱανδήποτε καμπύλην καὶ ἂν ἐφαρμοσθῇ ἡ εἰρημένη κατασκευή, ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν προκύπτουσαν καμπύλην διέρχεται εἰς ἕκαστον σημεῖον διὰ τοῦ κέντρου τῆς καμπυλότητος τοῦ ἀντιστοιχοῦντος σημείου τῆς δοθείσης.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἀποδεῖξαι, ὅτι, ἐὰν εἴς τινα καμπύλην ὁ ἐγγύτατος κύκλος ἔχῃ πανταχοῦ ἐπαφὴν τάξεως ἀνωτέρας τῆς δευτέρας, ἡ καμπύλη αὕτη εἶνε περιφέρεια κύκλου καὶ ἡ ἐπαφὴ καταντᾷ σύμπτωσις.

2) Ἀποδεῖξαι, ὅτι οἱ ἐγγύτατοι κύκλοι τόξου, ἐν ᾧ ἡ καμπυλότης προβαίνει διηνεκῶς αὐξανομένη ἢ διηνεκῶς ἐλαττουμένη, δὲν τέμνουσιν ἀλλήλους.

3) Εἰς τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης, ἔνθα ὁ ἐγγύτατος κύκλος ἔχει ἐπαφὴν τάξεως ἀνωτέρας τῆς δευτέρας, εἶνε $d\varrho = 0$· καὶ τἀνάπαλιν.

Ἀποδεῖξαι, ὅτι, ἂν μὲν ἡ ἀκτὶς ϱ γίνῃ μεγίστη ἢ ἐλαχίστη (τοῦτ' ἔστιν, ἂν τὸ $d\varrho$ ἀλλάσσῃ σημεῖον), ἡ ἐπαφὴ εἶνε τάξεως περιττῆς· εἰ δὲ μή, εἶνε ἀρτίας.

4) Ἐὰν δύο καμπύλαι ἔχωσιν ἐπαφὴν πρώτης τάξεως, ἔχουσι κοινὴν τὴν ἐφαπτομένην· ἐὰν δευτέρας τάξεως, ἔχουσι πλὴν τῆς ἐφαπτομένης καὶ τὸ πρῶτον κέντρον καμπυλότητος κοινόν· ἐὰν δὲ τρίτης, ἔχουσι πλὴν τῆς ἐφαπτομένης καὶ τὰ δύο πρῶτα κέντρα καμπυλότητος κοινά· καὶ γενικῶς, ἐὰν ἡ ἐπαφὴ εἶνε τῆς τάξεως μ, αἱ καμπύλαι θὰ ἔχωσι πλὴν τῆς ἐφαπτομένης καὶ τὰ $\mu - 1$ πρῶτα κέντρα κοινά.

5) Ἡ πρὸς δοθεῖσαν καμπύλην ἐγγυτάτη ἐξειλιγμένη τοῦ κύκλου γράφεται, ἐὰν ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν καμπύλην κυλισθῇ ἐπὶ τοῦ ἐγγυτάτου κύκλου τῆς ἐνειλιγμένης· ἔχει δὲ ἐπαφὴν ἐν γένει τρίτης τάξεως.

6) Ἡ πρὸς δοθεῖσαν καμπύλην $y = \varphi(x)$ ἐγγυτάτη παραβολή, τοῦ βαθμοῦ μ, ἔχει τὴν ἐξίσωσιν

$$Y = \varphi(x) + (X-x)\varphi'(x) + \frac{(X-x)^2}{1.2}\varphi''(x) + \ldots + \frac{(X-x)^\mu}{1.2\ldots\mu}\varphi^{(\mu)}(x),$$

ἐν ᾗ x, y εἶνε αἱ συντεταγμέναι τῆς ἀφῆς.

7) Δεῖξαι, ὅτι, ἂν ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἴς τι σημεῖον Μ ληφθῇ ὡς ἄξων τῶν x, ἡ δὲ κάθετος ὡς ἄξων τῶν y, ἡ ἀκτὶς ϱ τοῦ εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ἐγγυτάτου κύκλου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\varrho = \text{ὅρ.}\ \frac{x^2}{2y}.$$

8) Ἐὰν ἡ καμπύλη $\varphi(x, y) = 0$ ἔχῃ πρὸς ἄλλην $y = \sigma(x)$ ἐπαφὴν τῆς τάξεως μ, τίνος τάξεως ἀπειροστὸν γίνεται ἡ παράστασις $\varphi(x, y)$ ἐπὶ τῆς καμπύλης $y = \sigma(x)$ πλησίον τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς; (Ἀπ. $\mu+1$).

9) Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Μ′ ἀχθῇ ἐφαπτομένη τοῦ εἰς τὸ Μ ἐγγυτάτου κύκλου τῆς καμπύλης, τίνος τάξεως ἀπειροστὸν εἶνε ἡ ἐφαπτομένη αὕτη, ὅταν τὸ τόξον ΜΜ′ εἶνε πρώτης τάξεως; $\left(\text{Ἀπ. } \frac{3}{2}\right)$.

10) Ὁ τόπος τῶν σημείων, ἀφ' ὧν αἱ ἀγόμεναι κάθετοι ἐπὶ καμπύλας δεδομένας ὁσασδήποτε συνδέονται διά τινος ἐξισώσεως δεδομένης, ἔχει ἐφαπτομένην εἰς ἕκαστον σημεῖον, ἥτις οὐδαμῶς βλάπτεται, ἂν αἱ καμπύλαι ἀντικατασταθῶσιν ὑπὸ τῶν ἐγγυτάτων κύκλων αὐτῶν (ἐδ. 40). Δεῖξαι, ὅτι δὲν βλάπτεται ἡ ἐφαπτομένη, καὶ ἂν ἀντὶ τῶν ἐγγυτάτων κύκλων λάβωμεν ἄλλους οἱουσδήποτε κύκλους ἐφαπτομένους τῶν καμπύλων εἰς τὰ αὐτὰ σημεῖα, εἰς ἃ καὶ οἱ ἐγγύτατοι.

11) Νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης, ἥτις εἶνε τόπος τῶν σημείων, ἀφ' ὧν αἱ ἀγόμεναι κάθετοι πρὸς δύο καμπύλας (ἢ καὶ πρὸς τὴν αὐτὴν καμπύλην) ἔχουσι δοθὲν ἄθροισμα ἢ δοθεῖσαν διαφοράν.

12) Ὁ τόπος τῶν σημείων, ἀφ' ὧν αἱ ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι πρὸς δοθείσας καμπύλας συνδέονται διά τινος δεδομένης ἐξισώσεως, ἔχει ἐφαπτομένην, ἥτις δὲν βλάπτεται, ἂν αἱ καμπύλαι ἀντικατασταθῶσιν ὑπὸ τῶν ἐγγυτάτων πρὸς αὐτὰς κύκλων.

13) Ἐὰν γωνία σταθερὰ τὸ μέγεθος κινῆται οὕτως, ὥστε αἱ πλευραὶ αὐτῆς νὰ μένωσι κάθετοι ἐπὶ δύο δεδομένας καμπύλας, ἡ κορυφὴ αὐτῆς γράφει καμπύλην, τῆς ὁποίας ἡ κάθετος εἰς ἕκαστον σημεῖον διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ σημείου τούτου καὶ διὰ τῶν κέντρων καμπυλότητος τῶν δύο καμπύλων.

14) Ἐὰν ἡ διαφορὰ τοῦ τόξου καὶ τῆς χορδῆς αὐτοῦ ἀναπτυχθῇ κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ τόξου καὶ εἶνε

$$\mathrm{A}s + \mathrm{B}.\ \frac{s^2}{1.2} + \Gamma.\ \frac{s^3}{1.2.3} + \ldots,$$

δεῖξαι, ὅτι οἱ συντελεσταὶ Α, Β, Γ ἐξαρτῶνται ἐκ μόνων τῶν συντεταγμένων τοῦ ἑνὸς ἄκρου τοῦ τόξου καὶ ἐκ τῶν δύο πρώτων παραγώγων τοῦ y· ὥστε δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ ἡ καμπύλη ὑπὸ τοῦ ἐγγυτάτου κύκλου αὐτῆς· διὰ τοῦτο εἶνε (σελ. 6)

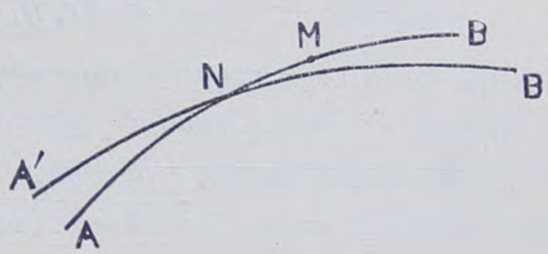
$$\mathrm{A} = 0, \quad \mathrm{B} = 0, \qquad \Gamma = \frac{1}{4\varrho^2}.$$

15) Ἐὰν ζητῆται ἡ πρὸς τὴν καμπύλην $\varphi = 0$ ἐγγυτάτη καμπύλη τοῦ γένους $\sigma = 0$, δυνάμεθα ἀντὶ τῆς ἐξισώσεως $\sigma = 0$ νὰ λάβωμεν τὴν ἑξῆς $\sigma + \mathrm{A}\varphi = 0$ (ἔνθα Α εἶνε σταθερὸς ἀριθμὸς οἱοσδήποτε)· ἡ δὲ ζητουμένη ἐγγυτάτη καμπύλη οὐδόλως μεταβάλλεται.

Περιβάλλουσαι καμπύλαι.

41. Ἐὰν ἐν τῇ ἐξισώσει καμπύλης τινὸς περιέχηται, πλὴν τῶν συντεταγμένων, καί τις παράμετρος α, μεταβαλλομένης τῆς παραμέτρου ταύτης, μεταβάλλεται ἐν γένει ἡ θέσις καὶ τὸ σχῆμα τῆς καμπύλης καὶ ἡ ἐξίσωσις διὰ τοῦτο σημαίνει πλῆθος ἄπειρον καμπύλων, ἃς εὑρίσκομεν δίδοντες τῇ παραμέτρῳ α πάσας τὰς δυνατὰς τιμάς.

Ἔστω ΑΜΒ ἐκ τῶν καμπύλων τούτων ἡ τυχοῦσα καὶ Ν ἓν τῶν σημείων, καθ' ἃ τέμνεται (ἂν τέμνηται) ὑπὸ ἄλλης· ἂς ἀντιστοιχῇ δὲ ἡ μὲν πρώτη πρὸς τὴν τιμὴν α τῆς παραμέτρου, ἡ δὲ δευτέρα πρὸς τὴν τιμὴν $\alpha+\Delta\alpha$· καθ' ὅσον ἡ διαφορὰ $\Delta\alpha$ τείνει πρὸς τὸ 0, ἡ δευτέρα καμπύλη τείνει νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τὴν πρώτην, καὶ τὸ σημεῖον Ν τῆς τομῆς αὐτῶν τείνει ἐν γένει νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπί τι σημεῖον Μ αὐτῆς· ὥστε ἐπὶ ἑκάστης τῶν θεωρουμένων καμπύλων ὑπάρχει ἐν γένει σημεῖόν τι, πρὸς ὃ τείνουσι νὰ ἐφαρμόσωσιν αἱ τομαὶ αὐτῆς ὑπὸ τῶν ἄλλων, ὅταν αὗται τείνωσι νὰ ἐφαρμόσωσιν ἐπὶ τὴν πρώτην· (δυνατὸν ὅμως καὶ περισσότερα τοιαῦτα σημεῖα νὰ ὑπάρχωσιν ἐπί τινων ἢ καὶ οὐδέν). Ὁ τόπος τῶν σημείων τούτων εἶνε ἐν γένει νέα τις καμπύλη, ἥτις λέγεται *περιβάλλουσα* τῶν ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως δηλουμένων καμπύλων· αὗται δὲ ἐν σχέσει πρὸς ἐκείνην λέγονται *περιβαλλόμεναι*· καὶ τὸ σημεῖον ἑκάστης τῶν περιβαλλομένων, πρὸς ὃ τείνουσιν αἱ τομαὶ αὐτῆς ὑπὸ τῶν ἄλλων, λέγεται *ὁρικὸν* σημεῖον αὐτῆς.



ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον αἱ μὲν ἐφαπτόμεναι οἱασδήποτε καμπύλης ἔχουσι περιβάλλουσαν αὐτὴν τὴν καμπύλην, αἱ δὲ κάθετοι ἔχουσι περιβάλλουσαν τὴν ἐνειλιγμένην αὐτῆς (ἐδ. 17).

42. Ἔστω $\varphi(x, y, \alpha)=0$ ἡ ἐξίσωσις τῶν καμπύλων, τῆς ὁποίας τὸ πρῶτον μέλος $\varphi(x, y, \alpha)$ ὑποθέτομεν, ὅτι ἔχει μίαν μόνην τιμὴν δι' ἕκαστον σύστημα τιμῶν τῶν τριῶν μεταβλητῶν x, y, α.

Πρὸς εὕρεσιν τῆς ἐξισώσεως τῆς περιβαλλούσης, παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου Ν, καθ' ὃ τέμνεται ἡ πρὸς τὴν τυχοῦσαν τιμὴν α τῆς παραμέτρου ἀντιστοιχοῦσα καμπύλη ὑπ' ἄλλης ἀντιστοιχούσης πρὸς τὴν τιμὴν $\alpha+\Delta\alpha$, ἐπαληθεύουσιν ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις

$$\begin{aligned} \varphi(x,\ y,\ \alpha) &= 0 \\ \varphi(x,\ y,\ \alpha+\Delta\alpha) &= 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Ἐκ τούτων ἡ δευτέρα, ἀναπτυσσομένη κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ $\Delta\alpha$, λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\varphi(x,\ y,\ \alpha)+\varphi_\alpha(x,\ y,\ \alpha).\Delta\alpha+\omega.\Delta\alpha=0 \qquad ὅρω=0$$

καὶ δυνάμει τῆς πρώτης

$$\varphi_\alpha(x,\ y,\ \alpha)+\omega=0\cdot$$

ἀλλά, καθ' ὅσον ἡ διαφορὰ $\Delta\alpha$ τείνει πρὸς τὸ μηδέν, τὸ μὲν σημεῖον N τείνει πρὸς τὸ M, αἱ δὲ ἐξισώσεις αὗται γίνονται

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, \alpha) &= 0 \\ \varphi_\alpha(x, y, \alpha) &= 0, \end{aligned} \qquad (2)$$

ἔνθα φ_α δηλοῖ τὴν μερικὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως φ πρὸς τὴν μεταβλητὴν α· ἐπαληθεύουσιν ἄρα αἱ συντεταγμέναι τοῦ M ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις ταύτας (τοῦτ' ἔστιν εἶνε τὸ σημεῖον M τομὴ τῶν δύο καμπύλων, τὰς ὁποίας αἱ δύο αὗται ἐξισώσεις δηλοῦσιν) καὶ κατ' ἀκολουθίαν *ἡ ἐξίσωσις τοῦ τόπου τῶν σημείων M, ἤτοι τῆς περιβαλλούσης, εὑρίσκεται, ἐὰν μεταξὺ τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων ἀπαλειφθῇ ἡ παράμετρος α.*

Δυνάμεθα δὲ νὰ θεωρήσωμεν καὶ τὰς δύο ἐξισώσεις (2) ὡς ἐξισώσεις τῆς περιβαλλούσης, θεωροῦντες τὴν α ὡς βοηθητικὴν μεταβλητήν, ἀφ' ἧς ἐξαρτῶνται αἱ συντεταγμέναι x, y· τότε πρὸς ἑκάστην τιμὴν τῆς α, ἔστω τὴν α_0, ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένον τι σημεῖον (ἢ ὡρισμένα σημεῖα) τῆς περιβαλλούσης, τοῦτ' ἔστι τὸ ὁρικὸν σημεῖον (ἢ τὰ ὁρικὰ σημεῖα) τῆς περιβαλλομένης $\varphi(x,\ y,\ \alpha_0)=0$.

43. Αἱ περιβάλλουσαι ἔχουσι τὴν ἑπομένην ἰδιότητα.

Ἡ περιβάλλουσα ἐφάπτεται ἑκάστης τῶν περιβαλλομένων εἰς τὰ ὁρικὰ σημεῖα αὐτῆς.

Ἔστω τις τῶν περιβαλλομένων ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τὴν τιμὴν α_0 τῆς παραμέτρου· ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς εἶνε

$$\varphi(x,\ y,\ \alpha_0)=0, \qquad (3)$$

ὁ δὲ συντελεστὴς κατευθύνσεος τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς εἶνε

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x(x,\ y,\ \alpha_0)}{\varphi_y(x,\ y,\ \alpha_0)}. \qquad (4)$$

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ συντελεστοῦ κατευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης τῆς περιβαλλούσης, διαφορίζομεν τὰς ἐξισώσεις αὐτῆς, θεωροῦντες τὸ α ὡς βοηθητικὴν μεταβλητήν, καὶ εὑρίσκομεν

$$\varphi_x(x, y, \alpha)\, dx + \varphi_y(x, y, \alpha)\, dy + \varphi_\alpha(x, y, \alpha) d\alpha = 0$$
$$\varphi_{x\alpha}(x, y, \alpha)\, dx + \varphi_{y\alpha}(x, y, \alpha)\, dy + \varphi_{\alpha\alpha}(x, y, \alpha)\, d\alpha = 0.$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ εἰς πᾶν σημεῖον τῆς περιβαλλούσης εἶνε $\varphi_\alpha(x, y, \alpha) = 0$, ἡ πρώτη τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων γίνεται

$$\varphi_x(x, y, \alpha)\, dx + \varphi_y(x, y, \alpha)\, dy = 0,$$

ἐξ ἧς καὶ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x(x, y, \alpha)}{\varphi_y(x, y, \alpha)}. \tag{5}$$

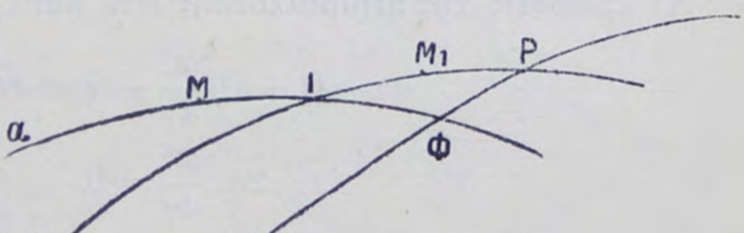
Ἔστω νῦν Μ (x, y) ὁρικόν τι σημεῖον τῆς περιβαλλομένης (3). τὸ σημεῖον τοῦτο εἶνε καὶ τῆς περιβαλλούσης· ἀντιστοιχεῖ δὲ πρὸς τὴν τιμὴν α_0 τοῦ α· διότι εἰς αὐτὸ ἐπαληθεύονται αἱ ἐξισώσεις

$$\varphi(x, y, \alpha_0) = 0$$
$$\varphi_\alpha(x, y, \alpha_0) = 0\cdot$$

ἑπομένως οἱ συντελεσταὶ κατευθύνσεως τῶν ἐφαπτομένων τῆς τε περιβαλλομένης (3) καὶ τῆς περιβαλλούσης γίνονται εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ἴσοι· διότι καὶ αἱ συντεταγμέναι x, y γίνονται ἴσαι καὶ ἡ παράμετρος α ἔχει τὴν τιμὴν α_0.

Τὴν ἰδιότητα ταύτην τῆς περιβαλλούσης δυνάμεθα νὰ δείξωμεν καὶ γεωμετρικῶς ὡς ἑξῆς.

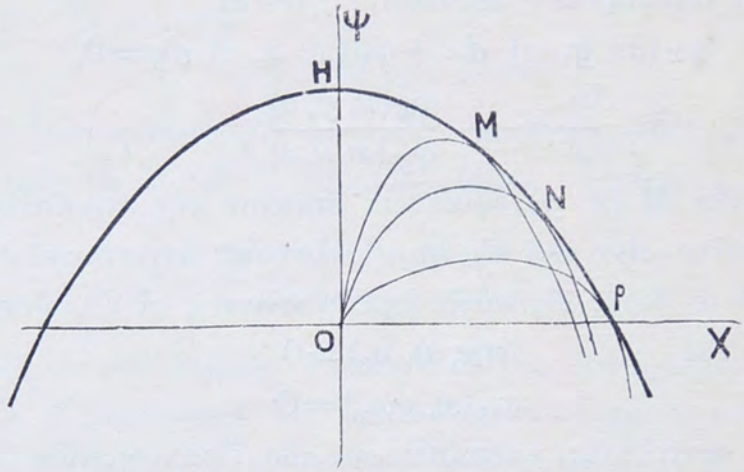
Θεωρήσωμεν τὰς τρεῖς καμπύλας, αἵτινες ἀντιστοιχοῦσι πρὸς τὰς τρεῖς τιμὰς α, α_1, α_2 τῆς παραμέτρου· ἔστω δὲ $\alpha < \alpha_1 < \alpha_2$· ἂν αἱ τομαὶ τῆς πρώτης ὑπὸ τῆς δέσμης τῶν καμπύλων $\alpha_1, \ldots, \alpha_2$ προχωρῶσιν ἐπ' αὐτῆς κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ΙΦ, τὸ ὁρικὸν σημεῖον Μ αὐτῆς θὰ κεῖται ὄπισθεν τοῦ Ι· τὸ δὲ ὁρικὸν σημεῖον M_1 τῆς δευτέρας θὰ κεῖται μεταξὺ τῶν τομῶν αὐτῆς ὑπὸ τῶν καμπύλων α καὶ α_2 ἤτοι ἐπὶ τῆς ΙΡ· ὥστε ἡ χορδὴ MM_1 τῆς περιβαλλούσης σχηματίζει πρὸς τὴν ΜΙ (ἥτις εἶνε χορδὴ τῆς περιβαλλομένης) γωνίαν ἀπειροστήν· αὐταὶ δὲ αἱ χορδαὶ MM_1 καὶ ΜΙ γίνονται ἐφαπτόμεναι τῆς περιβαλλούσης καὶ τῆς περιβαλλομένης εἰς Μ.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) *Εὑρεῖν τὴν περιβάλλουσαν τῶν καμπύλων*

$$y=\alpha x-(1+\alpha^2)\frac{x^2}{4\gamma}. \tag{1}$$



Αἱ καμπύλαι αὗται εἶναι παραβολαὶ διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων διερχόμεναι καὶ ἔχουσαι τὸν ἄξονα παράλληλον τοῖς ἀρνητικοῖς y· παριστᾷ δὲ ἑκάστη ἐξ αὐτῶν τὴν τροχιὰν τοῦ βλήματος ἐν τῷ κενῷ, ὅταν τὸ μὲν πυροβόλον εὑρίσκηται εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων, ὁ δὲ ἄξων αὐτοῦ σχηματίζῃ πρὸς τὸν ὁρίζοντα γωνίαν ἔχουσαν ἐφαπτομένην τὸ α.

Αἱ ἐξισώσεις τῆς περιβαλλούσης εἶνε κατὰ τὰ προειρημένα

$$\begin{aligned} &\alpha x-(1+\alpha^2)\frac{x^2}{4\gamma}-y=0 \\ &x-2\alpha.\frac{x^2}{4\gamma}=0, \end{aligned} \tag{2}$$

ἐξ ὧν, ἀπαλείφοντες τὸ α καὶ παραλείποντες τὴν λύσιν $x=0$, $y=0$, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς περιβαλλούσης

$$y=\gamma-\frac{x^2}{4\gamma}. \tag{3}$$

καὶ ἡ περιβάλλουσα αὕτη εἶνε παραβολὴ συμμετρικὴ πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y καὶ ἔχουσα τὸν ἄξονα πρὸς τὰ ἀρνητικὰ y ἐστραμμένον· ταύτης ἐφάπτονται πᾶσαι αἱ δοθεῖσαι παραβολαὶ καὶ ἐγκλείονται ἐντὸς αὐτῆς, ὡς φαίνονται ἐν τῷ σχήματι.

Διὰ παντὸς σημείου ἐντὸς τῆς περιβαλλούσης ταύτης κειμένου διέρχονται δύο παραβολαὶ ἐκ τῶν δεδομένων· διὰ παντὸς δὲ σημείου τῆς περιβαλλούσης μία μόνη· καὶ διὰ παντὸς σημείου ἐκτὸς τῆς περιβαλλούσης, οὐδεμία.

Ἔστωσαν x, y αἱ συντεταγμέναι τοῦ τυχόντος σημείου τοῦ ἐπιπέδου· ἵνα δι' αὐτοῦ διέρχηταί τις τῶν παραβολῶν (1), ἀνάγκη νὰ ὁρισθῇ ἡ παράμετρος α, ὥστε νὰ ἐπαληθεύηται ἡ ἐξίσωσις

$$y = \alpha x - (1+\alpha^2)\,\frac{x^2}{4\gamma}.$$

Ἐπειδὴ δὲ αἱ τιμαὶ τοῦ α εἶνε

$$\alpha = \frac{2\gamma \pm \sqrt{4\gamma^2 - x^2 - 4\gamma y}}{x},$$

ἕπεται, ὅτι δύο μὲν παραβολαὶ διέρχονται διὰ τοῦ σημείου (x, y), ἐὰν εἶνε

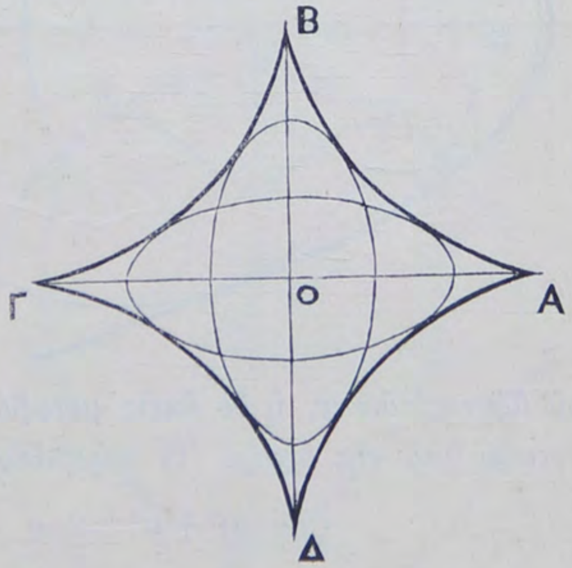
$$\gamma - y - \frac{x^2}{4\gamma} > 0,$$

οὐδεμία, ἐὰν εἶνε

$$\gamma - y - \frac{x^2}{4\gamma} < 0,$$

καὶ μία μόνη, ἐὰν εἶνε $\gamma - y - \dfrac{x^2}{4\gamma} = 0.$

2) *Εὑρεῖν τὴν περιβάλλουσαν τῶν ἐλλείψεων, αἵτινες εἶνε ὁμόκεντροι, καὶ τῶν ὁποίων οἱ ἄξονες, ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν κείμενοι, ἔχουσιν ἄθροισμα μόνιμον.*



Ἡ ἐξίσωσις τῶν ἐλλείψεων τούτων εἶνε (1)

$\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0$, ἔνθα $\alpha + \beta = K$, K ὄντος τοῦ σταθεροῦ ἡμιαθροίσματος τῶν ἀξόνων· ἐπομένως αἱ ἐξισώσεις τῆς περιβαλλούσης εἶνε

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{\alpha^3} - \frac{y^2}{\beta^3} = 0, \qquad \text{διότι } d\beta = -d\alpha\cdot$$

ἐκ τούτων ἕπεται, ἂν λύσωμεν πρὸς x^2 καὶ y^2,

$$x^2 = \frac{\alpha^3}{K}, \quad y^2 = \frac{\beta^3}{K},$$

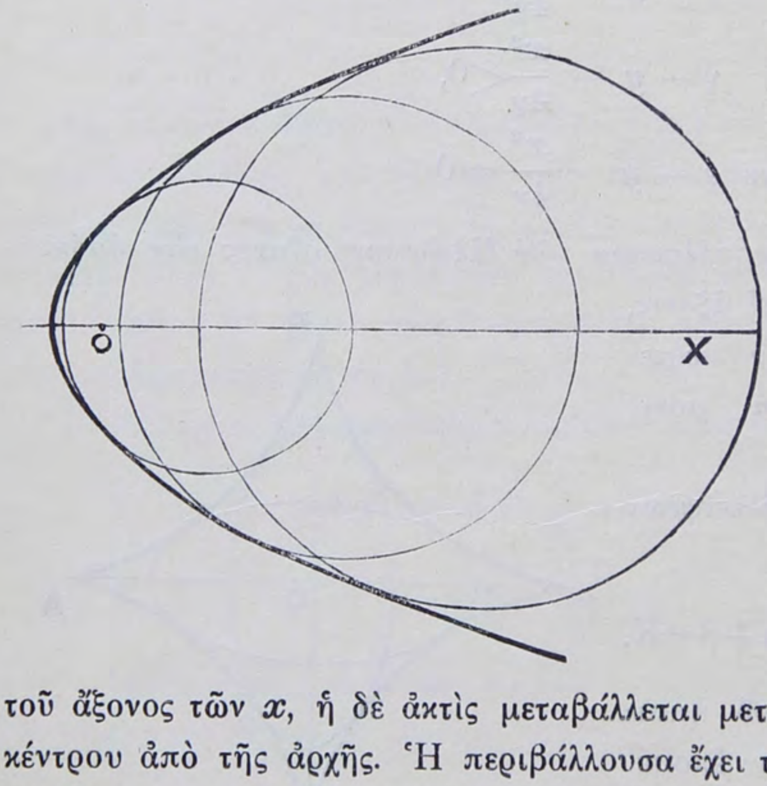
ἢ καὶ
$$x^{\frac{2}{3}} = \frac{\alpha}{K^{\frac{1}{3}}} \quad \text{καὶ} \quad y^{\frac{2}{3}} = \frac{\beta}{K^{\frac{1}{3}}},$$

ὅθεν ἡ ἐξίσωσις τῆς περιβαλλούσης

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = K^{\frac{2}{3}}.$$

Ἀποδεικνύεται δὲ εὐκόλως, ὅτι δι' ἑκάστου σημείου ἐντὸς τῆς περιβαλλούσης ταύτης κειμένου διέρχονται δύο ἐκ τῶν ἐλλείψεων (1)· δι' ἑκάστου δὲ σημείου ἐκτὸς κειμένου, οὐδεμία· καὶ δι' ἑκάστου σημείου τῆς περιβαλλούσης διέρχεται μόνον μία.

*44. Δυνατὸν νὰ συμβῇ τινὲς τῶν περιβαλλομένων νὰ μὴ ἔχωσιν ὁρικὰ σημεῖα, ὡς μὴ τεμνόμεναι ὑπὸ τῶν ἱκανῶς πλησίον αὐταῖς κειμένων· τοῦτο συμβαίνει εἰς τὸ ἑπόμενον παράδειγμα.



3) *Εὑρεῖν τὴν περιβάλλουσαν τῶν καμπύλων*

$$(x-\alpha)^2 + y^2 = 2\alpha\rho \quad (1)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη παριστᾷ κύκλους, τῶν ὁποίων τὸ μὲν κέντρον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x, ἡ δὲ ἀκτὶς μεταβάλλεται μετὰ τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς ἀρχῆς. Ἡ περιβάλλουσα ἔχει τὰς ἐξισώσεις

$$(x-\alpha)^2 + y^2 = 2\alpha\rho \qquad x = \alpha - \rho,$$

ἢ καὶ
$$\alpha - x - \rho = 0 \qquad y^2 = (2\alpha - \rho)\rho. \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων βλέπομεν, ὅτι τὰ σημεῖα τῆς περιβαλλούσης δίδονται ὑπὸ τῶν τομῶν τῶν κύκλων, οἵτινες ἀντιστοιχοῦσι πρὸς τὰς τιμὰς $\alpha > \frac{1}{2}\varrho$· διότι οἱ κύκλοι, δι' οὓς εἶνε $\alpha < \frac{1}{2}\varrho$, δὲν τέμνονται ὑπὸ τῶν ἄλλων, ὅταν εἶνε ἱκανῶς πλησίον αὐτῶν.

Ἀπαλειφομένου τοῦ α ἐκ τῶν δύο ἐξισώσεων (2), προκύπτει ἡ ἐξίσωσις τῆς περιβαλλούσης

$$y^2 = 2\varrho x + \varrho^2 \qquad \text{ἢ} \qquad y^2 + x^2 = (\varrho + x)^2,$$

ἥτις εἶνε παραβολὴ ἑστίαν ἔχουσα τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων καὶ ἄξονα τὸν ἄξονα τῶν x καὶ παράμετρον τὴν ϱ.

*45. Ἐνίοτε ἡ ἐξίσωσις τῆς περιβαλλούσης ἐπαληθεύεται εἰς σημεῖα, δι' ὧν οὐδεμία τῶν περιβαλλομένων διέρχεται, διότι δύνανται αἱ ἐξισώσεις τῆς περιβαλλούσης

$$\varphi(x, y, \alpha) = 0$$
$$\varphi_\alpha(x, y, \alpha) = 0$$

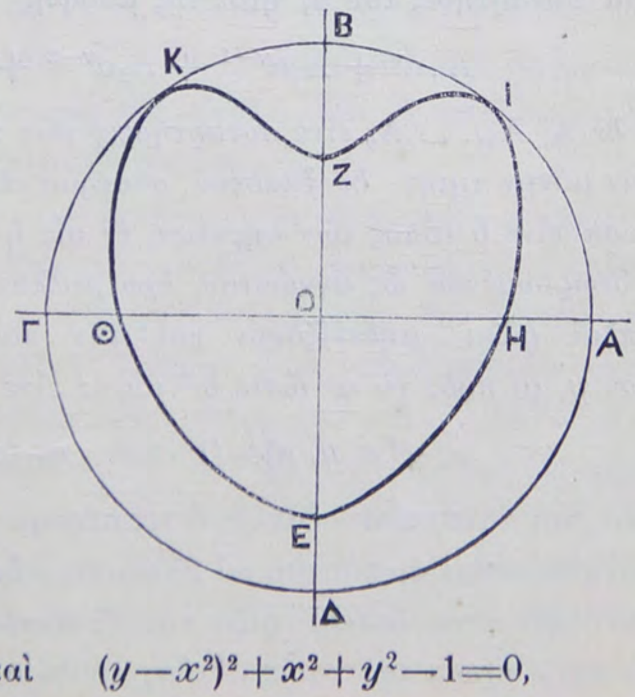
νὰ ἐπαληθεύωνται ὑπό τινος συστήματος τιμῶν x_0, y_0, α_0, ἐξ ὧν αἱ μὲν x_0, y_0 νὰ εἶνε πραγματικαί, ἡ δὲ α_0 μιγὰς ἀριθμός, τότε ἡ ἐξ αὐτῶν προκύπτουσα διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς τοῦ α, ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῶν τιμῶν x_0, y_0· ἀλλ' οὐδεμία τῶν περιβαλλομένων διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τούτου, ἐὰν ἡ παράμετρος α λαμβάνῃ πραγματικὰς τιμάς.

4) *Εὑρεῖν τὴν περιβάλλουσαν τῶν ἐλλείψεων*

$$(\alpha^2 + 2\alpha x + y)^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0. \qquad (1)$$

Λαμβάνοντες τὴν παράγωγον τοῦ πρώτου μέλους πρὸς τὴν παράμετρον α καὶ ἐξισοῦντες αὐτὴν τῷ 0, εὑρίσκομεν

$$(\alpha^2 + 2\alpha x + y).(\alpha + x) = 0\cdot$$



ἀπαλείφοντες δὲ τὴν παράμετρον μεταξὺ ταύτης καὶ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ περιβάλλουσα ἀποτελεῖται ἐκ τῶν δύο καμπύλων

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \qquad \text{καὶ} \qquad (y - x^2)^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

ἐξ ὧν ἡ πρώτη εἶνε περιφέρεια κύκλου, ἡ δὲ δευτέρα εἶνε καμπύλη τετάρτου βαθμοῦ, ἔχουσα πρὸς τὴν περιφέρειαν τὴν ἐν τῷ σχήματι ἐμφαινομένην θέσιν.

$$\mathrm{OH}=\mathrm{O\Theta}=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}},\qquad \mathrm{IH}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},\qquad \mathrm{OE}=\mathrm{OZ}=\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot$$

Ἔχοντες δὲ ὑπ' ὄψιν, ὅτι ἐκτὸς τοῦ κύκλου εἶνε

$$x^2+y^2-1>0,$$

ἐντὸς δ' αὐτοῦ $\qquad x^2+y^2-1<0$

καὶ ὅτι ἐκτὸς τῆς καμπύλης ΙΗΕΘΚΙ εἶνε

$$(y-x^2)^2+x^2+y^2-1>0,$$

ἐντὸς δ' αὐτῆς $\qquad (y-x^2)^2+x^2+y^2-1<0,$

ἀποδεικνύομεν εὐκόλως, ὅτι διὰ τῶν ἐκτὸς τῆς περιφερείας κειμένων σημείων οὐδεμία τῶν ἐλλείψεων (1) διέρχεται, δι' ἑκάστου δὲ τῶν σημείων τοῦ τόπου ΙΑΔΓΚΘΕΗΙ διέρχονται τέσσαρες· δι' ἑκάστου δὲ τῶν σημείων τῶν ἐντὸς τῆς καμπύλης ΙΗΕΘΚΖΙ διέρχονται δύο, καὶ τέλος διὰ τῶν σημείων τοῦ τόπου ΒΚΖΙΒ οὐδεμία.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ.

1) Ἐὰν τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x, y, \alpha)=0$ εἶνε ἀκεραία συνάρτησις τοῦ α, ἤτοι τῆς μορφῆς

$$\mathrm{A}.\alpha^{\nu}+\mathrm{A}_1\alpha^{\nu-1}+\mathrm{A}_2\alpha^{\nu-2}+\ldots+\mathrm{A}_{\nu}=0,$$

τὰ δὲ $\mathrm{A}, \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_{\nu}$ εἶνε συναρτήσεις τῶν συντεταγμένων x, y ἔχουσαι μίαν μόνην τιμὴν δι' ἕκαστον σύστημα τιμῶν τῶν x, y, ἡ περιβάλλουσα εἶνε ὁ τόπος τῶν σημείων, ἐν οἷς ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x, y, \alpha)=0$, τοῦ α θεωρουμένου ὡς ἀγνώστου, ἔχει πολλαπλᾶς ῥίζας. Τῷ ὄντι αἱ πολλαπλαῖ ῥίζαι μηδενίζουσι καὶ τὴν παράγωγον τοῦ πολυωνύμου $\varphi(x, y, \alpha)$ πρὸς τὸ α· ὥστε δι' αὐτὰς εἶνε

$$\varphi(x, y, \alpha)=0 \quad \text{καὶ} \quad \varphi_\alpha(x, y, \alpha)=0\cdot$$

ἀλλὰ καὶ τἀνάπαλιν· ἐὰν διά τι σύστημα τιμῶν τῶν x, y καὶ α ἐπαληθεύωνται ἀμφότεραι αἱ ἐξισώσεις αὗται, ἡ τιμὴ τοῦ α εἶνε πολλαπλῆ (ἐν γένει διπλῆ) ῥίζα τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x, y, \alpha)=0$, ὅταν τὰ μὲν x, y ἔχωσι τὰς τιμὰς αὐτῶν, τὸ δὲ α θεωρῆται ὡς ἄγνωστον.

Ἐπειδὴ δὲ δι' ἑκάστου σημείου (x', y') τοῦ ἐπιπέδου διέρχονται τόσαι περιβαλλόμεναι, ὅσαι εἶνε αἱ πραγματικαὶ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$\varphi(x', y', \alpha) = 0,$$

ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν πραγματικῶν ῥιζῶν ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως, τῆς ὁποίας οἱ συντελεσταὶ μεταβάλλονται συνεχῶς, τότε μόνον μεταβάλλεται, ὅταν τινὲς ῥίζαι γίνωσιν ἴσαι, συνάγεται, ὅτι

Ἡ περιβάλλουσα διαιρεῖ τὸ ἐπίπεδον εἰς μέρη μὴ κοινωνοῦντα ἀλλήλοις, καὶ ἐν ἑκάστῳ τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς τῶν περιβαλλομένων τῶν δι' ἑκάστου σημείου διερχομένων μένει ἀμετάβλητος.

Κατὰ τὴν διάβασιν ἀφ' ἑνὸς τῶν μερῶν τούτων εἰς ἄλλο διὰ τῆς περιβαλλούσης δύναται νὰ μεταβληθῇ ὁ εἰρημένος ἀριθμὸς κατά τινα ἀριθμὸν ἄρτιον.

Ἔστω, ὡς παράδειγμα, ἡ ἐξίσωσις

$$\alpha^3 - 6\rho x\alpha + 2\rho xy = 0 \cdot \tag{1}$$

ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει ἴσας ῥίζας, μόνον ὅταν εἶνε

$$-8\rho^3x^3 + x^2\rho^2y^2 = 0,$$

ἢ

$$\rho^2x^2(y^2 - 8\rho x) = 0 \cdot$$

ἔχει δὲ μίαν μόνην πραγματικήν, ἐὰν εἶνε

$$y^2 - 8\rho x > 0 \cdot$$

καὶ τρεῖς, ἐὰν εἶνε $\quad y^2 - 8\rho x < 0 \cdot$

τοῦτ' ἔστι διέρχεται δι' ἑκάστου σημείου κειμένου ἐκτὸς τῆς παραβολῆς $y^2 = 8\rho x$ μία μόνη ἐκ τῶν ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει (1) περιεχομένων καμπύλων· δι' ἑκάστου δὲ σημείου ἐντὸς τῆς παραβολῆς διέρχονται τρεῖς· καὶ δι' ἑκάστου σημείου τῆς παραβολῆς, δύο· ἡ παραβολὴ εἶνε ἄρα ἡ περιβάλλουσα τῶν δοθεισῶν καμπύλων.

Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x, y, \alpha) = 0$, ἀνάγωγος οὖσα πρὸς τὸ α, εἶνε δευτέρου βαθμοῦ, δι' ἑκάστου σημείου πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τῆς περιβαλλούσης κειμένου διέρχονται δύο περιβαλλόμεναι, διὰ δὲ τῶν εἰς τὸ ἕτερον μέρος κειμένων σημείων οὐδεμία· ὥστε τότε ἡ περιβάλλουσα χωρίζει τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, ὅθεν διέρχονται αἱ καμπύλαι, ἀπὸ τοῦ μέρους, πρὸς ὃ οὐδεμία εἰσχωρεῖ· ἐὰν δὲ πρὸς τούτοις ἡ περιβάλλουσα στρέφῃ τὰ κοῖλα πρὸς τὰς περιβαλλομένας, ὡς ἐν τῷ 1ῳ παραδείγματι τῆς παραβολῆς, *περιβάλλει* πράγματι αὐτάς. Ἐκ τῶν μερικῶν τούτων περιβαλλουσῶν προῆλθε καὶ τὸ κοινὸν ὄνομα πασῶν.

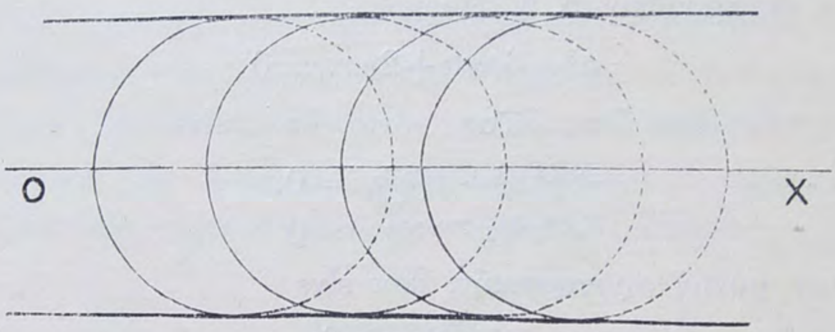
2) Ἐὰν ἡ συνάρτησις $\varphi(x,y,\alpha)$ ἔχῃ δι' ἕκαστον σύστημα τιμῶν τῶν $x, y,$ α τιμὰς περισσοτέρας τῆς μιᾶς (ὡς ὅταν ὑπάρχωσιν ἐν αὐτῇ ῥίζαι

ἢ τόξα ἐκ τῶν κυκλικῶν γραμμῶν ὁριζόμενα, καὶ ὅσα τοιαῦτα), δυνατὸν νὰ συμβῇ, ὥστε ἐν ταῖς ἐξισώσεσι τῶν δύο καμπύλων (1) (ἐδ. 42) τὰ πρῶτα μέλη $\varphi(x, y, \alpha)$ καὶ $\varphi(x, y, \alpha+\Delta\alpha)$, εἰς ὃ μέρος τέμνονται αἱ καμπύλαι, νὰ προκύπτωσιν ἐκ διαφόρων τιμῶν τῆς συναρτήσεως καὶ κατ' ἀκολουθίαν νὰ μὴ γίνωνται ἴσα διὰ $\Delta\alpha=0$, ὅτε ἐκ τῆς δευτέρας τῶν ἐξισώσεων δὲν προκύπτει πλέον ἡ ἐξίσωσις $\varphi_\alpha(x,y,\alpha)=0$. Τοῦτο γίνεται δῆλον ἐκ τοῦ ἑπομένου παραδείγματος.

Ἡ περιβάλλουσα τῶν καμπύλων $(x-\alpha)^2+y^2=\rho^2$ εὑρίσκεται κατὰ τὸν δοθέντα κανόνα καὶ ἔχει τὰς ἐξισώσεις

$$(x-\alpha)^2+y^2=\rho^2 \quad \text{καὶ} \quad x-\alpha=0,$$

ἤτοι τὴν ἐξίσωσιν $$y^2-\rho^2=0.$$



Ἀλλ' ἐὰν ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις λυθῇ πρὸς τὸ α καὶ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\alpha-x=\sqrt{\rho^2-y^2}, \tag{1}$$

ἐφαρμοσθῇ δὲ ὁ δοθεὶς κανὼν εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, προκύπτει

$$1=0\cdot$$

τοῦτ' ἔστι δὲν ὑπάρχει περιβάλλουσα· καὶ ὄντως δὲν ὑπάρχει, ἐὰν ἐν τῇ ἐξισώσει ταύτῃ ἡ ῥίζα ἔχῃ πάντοτε τὸ θετικὸν σημεῖον· διότι τότε παριστᾷ οὐχὶ περιφερείας, ἀλλ' ἡμιπεριφερείας, οὐδὲν ἐχούσας κοινὸν σημεῖον. Ἵνα δὲ ἡ ἐξίσωσις (1) παριστᾷ ὁλοκλήρους περιφερείας, πρέπει νὰ δίδωμεν εἰς τὴν ῥίζαν καὶ τὸ θετικὸν καὶ τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον, τότε δὲ εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν δύο περιφερειῶν

$$\alpha-x-\sqrt{\rho^2-x^2}=0, \qquad \alpha+\Delta\alpha-x-\sqrt{\rho^2-x^2}=0$$

αἱ δύο ῥίζαι θὰ ἔχωσιν ἐναντία σημεῖα· καὶ διὰ τοῦτο τὰ πρῶτα μέλη αὐτῶν δὲν γίνονται ἴσα, ὅταν γίνῃ $\Delta\alpha=0$.

Ὅμοιόν τι συμβαίνει πάντοτε, ὅταν ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x, y, \alpha)=0$ λυθῇ πρὸς τὸ α· ἤτοι τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\alpha=\sigma(x, y).$$

Αἱ καμπύλαι ὡς περιβάλλουσαι τῶν ἐφαπτομένων αὐτῶν θεωρούμεναι.

46. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ α τὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν ἡ ἐφαπτομένη καμπύλης εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον σχηματίζει πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x, καὶ διὰ p τὴν ἀπόστασιν αὐτῆς ἀπὸ τῆς ἀρχῆς, ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης ταύτης θὰ εἶνε (Ἐπ. Ἀναλ. ἐδ. 69)

$$x\,\text{ημ}\alpha - y\,\text{συν}\alpha = p\cdot$$

ἡ ἀπόστασις p μεταβάλλεται μετὰ τῆς γωνίας α καὶ εἶνε συνάρτησίς τις αὐτῆς· ἔστω $p=\sigma(\alpha)$· τὸ εἶδος δὲ τῆς συναρτήσεως ταύτης σ(α) ὁρίζει τὴν καμπύλην.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ καμπύλη εἶνε περιβάλλουσα τῶν ἐφαπτομένων αὐτῆς, θὰ παριστᾶται κατὰ τὴν προηγουμένην θεωρίαν ὑπὸ τῶν δύο ἐξισώσεων

$$\left.\begin{aligned} x\,\text{ημ}\alpha - y\,\text{συν}\alpha &= \sigma(\alpha) \\ x\,\text{συν}\alpha + y\,\text{ημ}\alpha &= \sigma'(\alpha). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Ἡ δὲ ἐξίσωσις αὐτῆς ἡ τὰς συντεταγμένας x, y συνδέουσα θὰ εὑρίσκηται ἐκ τούτων, ἐὰν ἀπαλειφθῇ ἡ γωνία α· εἶνε λοιπὸν ἡ καμπύλη ὡρισμένη, ὅταν δοθῇ ἡ συνάρτησις σ(α), ἢ ἡ ἐξίσωσις $p=\sigma(\alpha)$.

47. Ἐκ τῶν δύο ἐξισώσεων (1) τῆς καμπύλης εὑρίσκομεν

$$\begin{aligned} x &= \sigma(\alpha)\,.\,\text{ημ}\alpha + \sigma'(\alpha)\,.\,\text{συν}\alpha \qquad (1') \\ y &= -\sigma(\alpha)\,.\,\text{συν}\alpha + \sigma'(\alpha)\,.\,\text{ημ}\alpha \end{aligned}$$

καὶ
$$x^2+y^2=\sigma(\alpha)^2+\sigma'(\alpha)^2.$$

Πρὸς τούτοις
$$\begin{aligned} dx &= \{\sigma(\alpha)+\sigma''(\alpha)\}\,\text{συν}\alpha\cdot d\alpha \\ dy &= \{\sigma(\alpha)+\sigma''(\alpha)\}\,\text{ημ}\alpha\,.\,d\alpha, \end{aligned}$$

ὅθεν ἕπεται
$$ds=\{\sigma(\alpha)+\sigma''(\alpha)\}\,.\,d\alpha \qquad (2)$$

καὶ ἐπειδὴ
$$ds=\varrho\,.\,d\alpha,$$

ἕπεται
$$\varrho=\sigma(\alpha)+\sigma''(\alpha)\cdot \qquad (3)$$

οὕτως εὑρίσκομεν νέαν ἔκφρασιν τῆς ἀκτῖνος καμπυλότητος ϱ, ἥτις ἐν πολλοῖς ζητήμασιν εἶνε χρήσιμος.

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ζητῆται νὰ εὑρεθῇ καμπύλη, τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος ϱ εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Μ νὰ εἶνε ἴση πρὸς τὴν ἀπόστασιν p σημείου τινὸς Α ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τοῦ Μ, θὰ ἔχωμεν
$$\varrho=\sigma(\alpha),$$

ἐπομένως
$$\sigma''(\alpha)=0,$$

ἄρα $$\sigma'(\alpha)=\mu$$
καὶ $$\sigma(\alpha)=\mu\alpha+\nu,$$
τῶν μ καὶ ν ὄντων σταθερῶν ἀριθμῶν.

Αἱ δὲ ἐξισώσεις (1΄) τῆς καμπύλης εἶνε

$$x=(\mu\alpha+\nu)\,\eta\mu\alpha+\mu\,\sigma\upsilon\nu\alpha$$
$$y=-(\mu\alpha+\nu)\,\sigma\upsilon\nu\alpha+\mu\,\eta\mu\alpha\cdot$$

ἐξ ὧν βλέπομεν, ὅτι, ἐὰν μ διαφέρῃ τοῦ 0, ἡ καμπύλη εἶνε ἐξειλιγμένη τοῦ κύκλου, εἰ δὲ μή, κύκλος.

Σημειωσις. Ἐπειδὴ ἡ δευτέρα τῶν ἐξισώσεων (1) παριστᾷ τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν καμπύλην εἰς τὸ σημεῖον Μ (x, y), τοῦτ' ἔστι τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἐνειλιγμένης, ἕπεται, ὅτι αἱ ἐξισώσεις τῆς ἐνειλιγμένης θὰ εἶνε

$$x\,\sigma\upsilon\nu\alpha+y\,\eta\mu\alpha=\sigma'(\alpha)$$
$$-x\,\eta\mu\alpha+y\,\sigma\upsilon\nu\alpha=\sigma''(\alpha)\cdot$$

ὁμοίως δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ τὰς ἐξισώσεις τῆς δευτέρας ἐνειλιγμένης· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον αἱ δύο ἐξισώσεις

$$x\,\eta\mu\varphi-y\,\sigma\upsilon\nu\varphi=\sigma(\varphi)$$
$$x\,\sigma\upsilon\nu\varphi+y\,\eta\mu\varphi=0$$

παριστῶσι τὴν ποδικὴν τῆς καμπύλης (1) ἀπὸ τοῦ πόλου 0.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Εὑρεῖν τὴν περιβάλλουσαν τῶν καμπύλων

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\mu}+\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\mu}=1,$$

ἔνθα αἱ παράμετροι α καὶ β συνδέονται πρὸς ἀλλήλας διὰ τῆς ἐξισώσεως

$$\left(\frac{\alpha}{A}\right)^{\nu}+\left(\frac{\beta}{B}\right)^{\nu}=1.$$

(Ἀπ. Ἡ ζητουμένη περιβάλλουσα ἔχει τὴν ἐξίσωσιν

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\rho}+\left(\frac{y}{B}\right)^{\rho}=1,\quad \text{ἔνθα}\ \frac{1}{\rho}=\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}.$$

2) Δεῖξαι, ὅτι, ἐὰν ἡ ἐξίσωσις τῶν καμπύλων εἶνε τῆς μορφῆς

$$\varphi(x, y).\ A+\sigma(x, y)\,B=0,$$

ἔνθα Α καὶ Β εἶνε συναρτήσεις τῆς παραμέτρου α, ἡ περιβάλλουσα ἀποτελεῖται ἐκ σημείων· ἐὰν δὲ τῆς μορφῆς $\varphi(x, y)+A=0$, περιβάλλουσα δὲν ὑπάρχει.

3) Ἐὰν σύστημά τι καμπύλων ἔχῃ δύο ἐξισώσεις

$$\varphi(x, y, \alpha, t)=0, \qquad \sigma(x, y, \alpha, t)=0,$$

ἔνθα α εἶνε ἡ παράμετρος καὶ t ἡ βοηθητικὴ μεταβλητή, ἡ περιβάλλουσα τῶν καμπύλων τούτων εὑρίσκεται διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς τῶν α καὶ t μεταξὺ τῶν δύο δοθεισῶν ἐξισώσεων καὶ τῆς ἑπομένης

$$\begin{vmatrix} \varphi_\alpha & \varphi_t \\ \sigma_\alpha & \sigma_t \end{vmatrix} = 0.$$

4) Ἐὰν καμπύλη κινῆται οἱανδήποτε κίνησιν, ἡ περιβάλλουσα τῶν θέσεων αὐτῆς καὶ ἡ περιβάλλουσα τῶν καμπύλων, ἅς τινας γράφουσι τὰ σημεῖα αὐτῆς, εἶναι μία καὶ ἡ αὐτὴ καμπύλη.

5) Ἐὰν Α, Β, Γ, Δ παριστῶσι πολυώνυμα ἀκέραια τῶν συντεταγμένων x, y καὶ α παράμετρόν τινα, νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ περιβάλλουσα τῶν καμπύλων

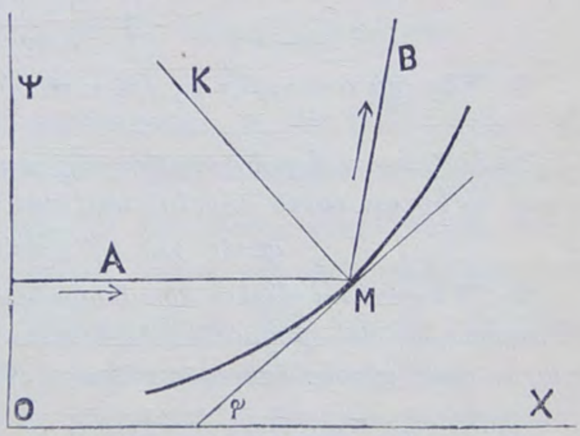
$$\left\{(\alpha-\Delta)^2-AB\right\}^2-A^2\Gamma=0$$

ἀποτελεῖται ἐκ τῶν τριῶν καμπύλων

$$A=0, \qquad B^2-\Gamma=0 \qquad \Gamma=0\cdot$$

καὶ ἡ καμπύλη $A=0$ θὰ ἔχῃ μεθ' ἑκάστης τῶν περιβαλλομένων ἐπαφὴν τρίτης τάξεως.

6) Ἐὰν δέσμη ἀκτίνων παραλλήλων προσπίπτῃ ἐπὶ καμπύλην καὶ ἀνακλᾶται κατὰ τοὺς γνωστοὺς νόμους τῆς φυσικῆς, νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῶν ἀνακλαοθεισῶν ἀκτίνων (ἥτις λέγεται *καυστικὴ* καμπύλη).



Ἐὰν ὁ ἄξων τῶν x ληφθῇ παράλληλος πρὸς τὰς ἀκτῖνας, εὑρίσκομεν εὐκόλως ἐκ τοῦ σχήματος, ὅτι ἡ ἀνακλασθεῖσα ἀκτὶς σχηματίζει πρὸς τὸν ἄξονα τοῦτον τὴν γωνίαν 2φ, τοῦτ' ἔστι διπλασίαν τῆς γωνίας, ἣν ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης σχηματίζει πρὸς τὸν ἄξονα.

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ x, y τὰς συντεταγμένας τοῦ Μ, ἡ ἐξίσωσις τῆς ἀνακλασθείσης ἀκτῖνος ΜΒ θὰ εἶνε

$$(X-x)\,\eta\mu 2\varphi-(\Psi-y)\,\sigma\upsilon\nu 2\varphi=0$$

καὶ ἑπομένως ἡ ἀπόστασις αὐτῆς ἀπὸ τῆς ἀρχῆς Ο, ἣν παριστῶ διὰ p_1, εἶνε

$$x\eta\mu 2\varphi-y\sigma\upsilon\nu 2\varphi=p_1\cdot$$

καὶ ἂν τεθῶσιν αἱ τιμαὶ τῶν x, y (1'), εὑρίσκομεν

$$p_1=p\sigma\upsilon\nu\varphi+p'\eta\mu\varphi,$$

ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τῆς ΜΒ λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$X\eta\mu 2\varphi-\Psi\sigma\upsilon\nu 2\varphi=p\sigma\upsilon\nu\varphi+p'\eta\mu\varphi$$

καὶ ἡ ζητουμένη περιβάλλουσα, τοῦτ' ἔστιν ἡ καυστική, θὰ ἔχῃ τὰς δύο ἐξισώσεις

$$X\eta\mu 2\varphi-\Psi\sigma\upsilon\nu 2\varphi=p\sigma\upsilon\nu\varphi+p'\eta\mu\varphi$$

$$X\sigma\upsilon\nu 2\varphi+\Psi\eta\mu 2\varphi=p'\sigma\upsilon\nu\varphi+\frac{1}{2}\,(p''-p)\eta\mu\varphi,$$

ἐξ ὧν λυομένων προκύπτουσιν αἱ τιμαὶ τῶν συντεταγμένων Χ, Ψ διὰ τῆς γωνίας φ καὶ τῆς γνωστῆς συναρτήσεως αὐτῆς p.

Καλοῦντες ϱ_1 τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος τῆς καυστικῆς, ἔχομεν κατὰ τὰ προηγούμενα

$$\varrho_1 = p_1 + \frac{d^2p_1}{d\varphi_1^2}, \qquad \varphi_1 = 2\varphi$$

ὅθεν εὑρίσκομεν
$$\varrho_1 = \frac{3}{4}\,\varrho\,\text{συνφ} + \frac{1}{4}\,\varrho'\,\text{ημφ}$$

καὶ
$$ds_1 = \varrho_1 d\varphi_1 = \frac{3}{2}\,dx - \frac{1}{2}\,d\xi,$$

τοῦ ξ παριστῶντος τὴν τετμημένην τοῦ κέντρου τῆς καμπυλότητος τῆς δοθείσης καμπύλης· ὅθεν καὶ

$$s_1 = \frac{3}{2}\,x - \frac{1}{2}\,\xi,$$

τοῦτ' ἔστι πᾶν τόξον τῆς καυστικῆς ἰσοῦται πρὸς τὰ $\frac{3}{2}$ τῆς προβολῆς τοῦ ἀντιστοιχοῦντος τόξου τῆς καμπύλης (ἐξ ἧς γίνεται ἡ καυστικὴ) ἐπὶ μίαν φωτεινὴν ἀκτῖνα, πλὴν τοῦ ἡμίσεως τῆς προβολῆς τοῦ ἀντιστοιχοῦντος τόξου τῆς ἐνειλιγμένης ἐπὶ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα.

7) Εὑρεῖν καμπύλην, τῆς ὁποίας ἡ καυστικὴ νὰ εἶνε περιφέρεια κύκλου.

Ἀπ. Διὰ τὴν ζητουμένην καμπύλην εἶνε (ἐὰν τὸ κέντρον τῆς περιφερείας ληφθῇ ὡς ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων)

$$p = \frac{\alpha\varphi + C}{\text{ημφ}}.$$

8) Ἐὰν διά τινα τιμὴν α_0 τοῦ α αἱ δύο ἐξισώσεις

$$\varphi = 0 \qquad \varphi'_\alpha = 0,$$

δι' ὧν ὁρίζεται τὸ ὁρικὸν σημεῖον τῆς καμπύλης $\varphi(x, y, \alpha_0) = 0$, γίνωνται ἰσοδύναμοι, τὸ ὁρικὸν τοῦτο σημεῖον ὁρίζεται ἐκ τῶν δύο ἐξισώσεων

$$\varphi = 0 \quad \text{καὶ} \quad \varphi''_\alpha = 0 \qquad \text{διὰ } \alpha = \alpha_0.$$

9) Οἱ ἐγγύτατοι κύκλοι τῶν διαφόρων σημείων καμπύλης δὲν ἔχουσι περιβάλλουσαν, ἂν καὶ ἡ καμπύλη ἐφάπτεται ἑκάστου ἐξ αὐτῶν καὶ μάλιστα ἔχει ἐπαφὴν πρὸς αὐτοὺς δευτέρας τάξεως.

Περὶ τῶν ἀνωμάλων σημείων τῶν ἐπιπέδων καμπύλων.

48. *Ἀνώμαλον* λέγεται σημεῖόν τι (α, β) καμπύλης, ἐὰν ἐν τῇ περιοχῇ αὐτοῦ μηδετέρα τῶν συντεταγμένων x, y ἔχῃ τὸν χαρακτῆρα ἀκεραίας συναρτήσεως τῆς ἄλλης· τοῦτ' ἔστιν, ὅταν μήτε ἡ αὔξησις τοῦ y ἀπὸ τῆς τιμῆς β, ἤτοι ἡ διαφορὰ $y - \beta$, ἀναπτύσσηται κατὰ τὰς θετικὰς καὶ ἀκεραίας δυνάμεις τῆς ἀντιστοιχούσης αὐξήσεως τοῦ x, ἤτοι τῆς διαφορᾶς $x - \alpha$, μήτε τἀνάπαλιν ἡ αὔξησις τοῦ x κατὰ τὰς ἀκεραίας καὶ θετικὰς δυνάμεις τῆς αὐξήσεως τοῦ y.

49. Ἐὰν τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x, y) = 0$ δύναται νὰ ἀναπτυχθῇ κατὰ τὰς ἀκεραίας καὶ θετικὰς δυνάμεις ἀμφοτέρων τῶν αὐξήσεων $x - \alpha$, $y - \beta$ (ἃς παριστῶ διὰ ε καὶ η), τοῦτ' ἔστιν, ἐὰν ἡ συνάρτησις $\varphi(x, y)$ ἔχῃ ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ σημείου (α, β) τὸν χαρα-

κτῆρα ἀκεραίας συναρτήσεως τῶν x, y (ὅπερ εἰς τὰς ἀλγεβρικὰς καμπύλας συμβαίνει πάντοτε), ἀμφότεροι οἱ πρωτοβάθμιοι ὅροι τοῦ ἀναπτύγματος

$$0=\varphi_x(\alpha,\beta)\varepsilon+\varphi_y(\alpha,\beta)\eta+\frac{1}{1.2}\varphi_{xx}(\alpha,\beta)\varepsilon^2+2\varphi_{xy}(\alpha,\beta)\varepsilon\eta+\varphi_{yy}(\alpha,\beta)\eta^2+\ldots$$

θὰ μηδενίζωνται εἰς τὸ ἀνώμαλον σημεῖον· τοῦτ' ἔστι θὰ εἶνε

$$\varphi_x(\alpha,\beta)=0 \quad \text{καὶ} \quad \varphi_y(\alpha,\beta)=0.$$

Διότι, ἂν εἷς τῶν συντελεστῶν τούτων, ἔστω ὁ $\varphi_y(\alpha,\beta)$, ἦτο διάφορος τοῦ 0, θὰ ἠδυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τοὺς συντελεστὰς Α, Β, Γ,. . ., ὥστε νὰ εἶνε

$$\eta=\mathrm{A}\varepsilon+\mathrm{B}\frac{\varepsilon^2}{1.2}+\Gamma\frac{\varepsilon^3}{1.2.3}+\ldots \qquad (1)$$

Διότι ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ η εἰς τὸ προηγούμενον ἀνάπτυγμα καὶ ἐξισοῦντες τῷ μηδενὶ τοὺς συντελεστὰς τῶν διαφόρων δυνάμεων τοῦ ε, εὑρίσκομεν τὰς ἰσότητας

$$\mathrm{A}\varphi_y(\alpha,\beta)+\varphi_x(\alpha,\beta)=0$$
$$\mathrm{B}\varphi_y(\alpha,\beta)+\varphi_{xx}(\alpha,\beta)+2\mathrm{A}\varphi_{xy}(\alpha,\beta)+\varphi_{yy}(\alpha,\beta)\mathrm{A}^2=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ἐξ ὧν ὁρίζονται ἀλλεπαλλήλως οἱ συντελεσταὶ Α, Β, Γ,. . .· εἶνε δὲ εὔκολον νὰ ἴδῃ τις, ὅτι αἱ τιμαὶ πάντων τῶν συντελεστῶν θὰ ἔχωσι παρονομαστὴν δύναμίν τινα τοῦ $\varphi_y(\alpha,\beta)$· ἑπομένως εἶνε ἐντελῶς ὡρισμέναι· ὥστε ἡ αὔξησις η ἀναπτύσσεται κατὰ τὰς ἀκεραίας καὶ θετικὰς δυνάμεις τῆς αὐξήσεως ε· (ἀποδεικνύεται δέ, ὅτι τὸ εὑρισκόμενον ἀνάπτυγμα (1) συγκλίνει ἔν τινι διαστήματι).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἀναπτύγματος (1) δύνανται νὰ εὑρεθῶσι καὶ διὰ τῆς διαφορίσεως τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x, y)=0$· διότι εἶνε αἱ τιμαὶ τῶν παραγώγων τοῦ y διὰ $x=\alpha$.

Ἐκ τῶν προειρημένων συμπεραίνομεν, ὅτι εἰς πᾶν ἀνώμαλον σημεῖον (α, β) θὰ εἶνε

$$\varphi_x(\alpha,\beta)=0 \quad \text{καὶ} \quad \varphi_y(\alpha,\beta)=0,$$

ἤτοι ἀμφότεραι αἱ μερικαὶ παράγωγοι τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἐξισώσεως θὰ μηδενίζωνται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων τοῦ ἀνωμάλου σημείου.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν τοῖς ἀνωμάλοις σημείοις ἀμφότεραι αἱ αὐξήσεις $x-\alpha$ καὶ $y-\beta$ δύνανται νὰ ἀναπτυχθῶσιν ὡς συναρτήσεις ἄλλης τινὸς βοηθητικῆς μεταβλητῆς t κατὰ τὰς θετικὰς καὶ ἀκεραίας δυνάμεις αὐτῆς (ὡς λόγου χάριν εἰς τὴν κυκλοειδῆ)· ὑπάρχουσι δὲ ἐνίοτε καὶ περισσότερα τοῦ ἑνὸς ἀναπτύγματα διάφορα ἀπ' ἀλλήλων, ὅταν διάφοροι κλάδοι τῆς καμπύλης διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἡ λεπτομερὴς ἔρευνα τῶν ἀνωμάλων σημείων ὑπερβαίνει τὰ ὅρια τοῦ παρόντος ἔργου. Διὰ τοῦτο ἀρκούμεθα εἴς τινα παραδείγματα τῶν κυριωτέρων ἀνωμαλιῶν.

50. *Διπλοῦν* λέγεται πᾶν σημεῖον, δι' οὗ διέρχονται δύο κλάδοι τῆς καμπύλης, εἴτε ἔχουσι τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην εἴτε καὶ μή· *πολλαπλοῦν* δὲ ἐν γένει λέγεται πᾶν σημεῖον, δι' οὗ διέρχονται περισσότεροι κλάδοι τῆς καμπύλης.

Ἐὰν περί τι διπλοῦν σημεῖον γραφῇ κύκλος μὲ ἀκτῖνα ἱκανῶς μικράν, ἡ περιφέρεια αὐτοῦ θὰ τέμνῃ τὴν καμπύλην εἰς τέσσαρα σημεῖα, ἀνὰ δύο κείμενα ὡς ἔγγιστα εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου· ἐὰν δὲ περὶ τριπλοῦν σημεῖον γραφῇ κύκλος, θὰ τέμνῃ εἰς ἕξ· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Παράδειγμα διπλοῦ σημείου παρέχει ἡμῖν ὁ λημνίσκος (Ι. σελ. 125).

Παράδειγμα πολλαπλοῦ σημείου παρέχει ἡμῖν ἡ καμπύλη

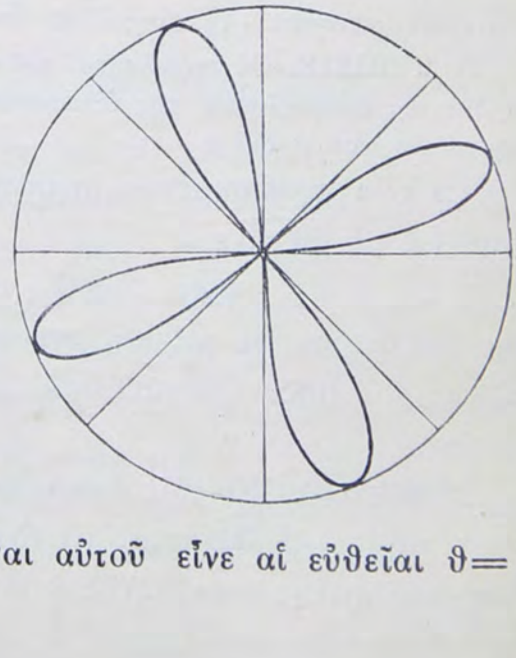
$$\rho^2 = \alpha^2 \text{ημ}\nu\vartheta, \quad \text{ἢ} \quad x^2+y^2 = \alpha^2 \text{ημ}\left\{\nu\,\text{τοξεφ}\frac{y}{x}\right\},$$

ἔνθα ν δηλοῖ ἀκέραιον καὶ θετικὸν ἀριθμόν.

Ἡ καμπύλη αὕτη εἶνε ἀλγεβρική· διότι τὸ ημνθ ἀναπτύσσεται κατὰ τὰς δυνάμεις τῶν ημθ καὶ συνθ· ἐπομένως ταῦτα δύνανται νὰ ἀπαλειφθῶσι μεταξὺ τῆς ἐξισώσεως $\rho^2 = \alpha^2 \text{ημ}\nu\vartheta$ καὶ τῶν ἐξισώσεων

$$x = \rho\,\text{συν}\vartheta, \quad y = \rho\,\text{ημ}\vartheta\cdot$$

ὅτε προκύπτει ἀλγεβρική τις ἐξίσωσις συνδέουσα τὰς ὀρθογωνίους συντεταγμένας x, y τοῦ τυχόντος σημείου τῆς καμπύλης· ἀλλ' εὐκολώτερον κατασκευάζεται καὶ διερευνᾶται ἡ καμπύλη ἐκ τῆς πολικῆς ἐξισώσεως αὐτῆς.



Πρὸς τὰς τιμὰς $\vartheta = 0 \ldots \frac{\pi}{\nu}$ ἀντιστοιχεῖ τόξον τι τῆς καμπύλης, ὅπερ ἀναχωροῦν ἐκ τοῦ πόλου ἐπιστρέφει πάλιν εἰς αὐτόν· ἐφαπτόμεναι αὐτοῦ εἶνε αἱ εὐθεῖαι $\vartheta = 0$ καὶ $\vartheta = \frac{\pi}{\nu}$.

Πρὸς τὰς τιμὰς $\vartheta = \frac{\pi}{\nu} \ldots \frac{2\pi}{\nu}$ ἀντιστοιχεῖ ρ φανταστικόν.

Πρὸς τὰς τιμὰς $\vartheta = \frac{2\pi}{\nu} \ldots \frac{3\pi}{\nu}$ ἀντιστοιχεῖ τόξον ἴσον τῷ προηγουμένῳ. Ἐξακολουθοῦντες οὕτω βλέπομεν, ὅτι ὁ πόλος εἶνε πολλαπλοῦν σημεῖον καὶ ὅτι ἡ καμπύλη ἀποτελεῖται ἐκ ν ἴσων τόξων κειμένων ἐν ταῖς γωνίαις, αἵτινες διαιροῦσι τὰς περὶ τὸν πόλον 4 ὀρθὰς εἰς 2ν ἴσα μέρη· ἐν τῷ παρακειμένῳ σχήματι ὑποτίθεται $\nu=4$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Αἱ συντεταγμέναι x, y τοῦ πρώτου τόξου, ὅπερ ἐφάπτεται τοῦ πολικοῦ ἄξονος καὶ τῆς προσεκβολῆς αὐτοῦ, ἀναπτύσσονται πλησίον τοῦ πόλου κατὰ τὰς δυνάμεις ἄλλης τινὸς μεταβλητῆς, ὡς ἑξῆς.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ἔχομεν

$$\rho = \alpha\sqrt{\eta\mu\nu\vartheta.} = \alpha\sqrt{\nu\vartheta}\left(1 - \frac{\nu^2\vartheta^2}{6} + \frac{\nu^4\vartheta^4}{120} + \ldots\right)^{\frac{1}{2}},$$

ὅθεν

$$\rho = \alpha\sqrt{\nu\vartheta}\left(1 - \frac{\nu^2\vartheta^2}{12} + \frac{\nu^4\vartheta^4}{1440} - \ldots\right),$$

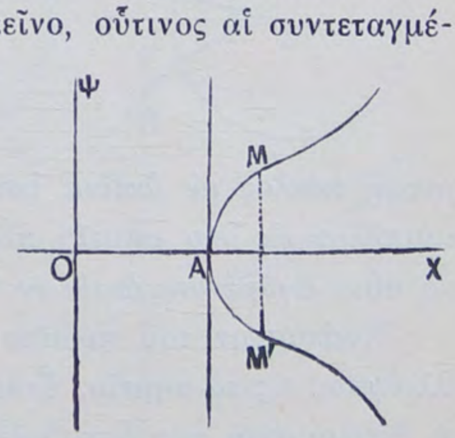
ὅθεν

$$x = \alpha\sqrt{\nu\vartheta}.\ \sigma\upsilon\nu\vartheta\left(1 - \frac{\nu^2\vartheta^2}{12} + \frac{\nu^4\vartheta^4}{1440} - \ldots\right),$$

$$y = \alpha\sqrt{\nu\vartheta}.\ \eta\mu\vartheta\left(1 - \frac{\nu^2\vartheta^2}{12} + \frac{\nu^4\vartheta^4}{1440} - \ldots\right)\cdot$$

ἐὰν δὲ τεθῇ $\vartheta = \omega^2$, ἀναπτύσσονται ἀμφότεραι αἱ συντεταγμέναι x, y κατὰ τὰς θετικὰς καὶ ἀκεραίας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς ω.

51. *Μεμονωμένον* σημεῖον λέγεται ἐκεῖνο, οὗτινος αἱ συντεταγμέναι (α, β) ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν τῆς καμπύλης, ἀλλ' οὐδεὶς κλάδος αὐτῆς διέρχεται διὰ τούτου· διότι πρὸς τετμημένας ἐλάχιστον διαφερούσας ἀπὸ τῆς τετμημένης α ἀντιστοιχοῦσι φανταστικαὶ τιμαὶ τῆς τεταγμένης.



Ἐὰν περί τι μεμονωμένον σημεῖον γραφῇ κύκλος μὲ ἀκτῖνα ἱκανῶς μικράν, ὁ κύκλος οὗτος οὐδαμοῦ προφανῶς θὰ συναντήσῃ τὴν καμπύλην.

Ἁπλούστατον παράδειγμα μεμονωμένου σημείου παρέχει ἡμῖν ἡ καμπύλη

$$y = x\sqrt{x-\alpha},$$

ἔνθα α ὑποτίθεται θετικόν.

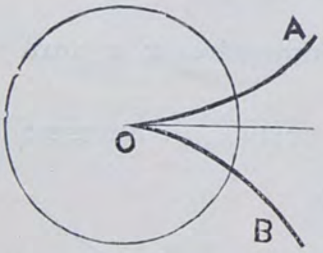
Διὰ $x=0$ ἔχομεν καὶ $y=0$· ὅθεν ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων εἶνε σημεῖον τῆς καμπύλης· ἀλλὰ διὰ $x = \pm\,\varepsilon$, ἐὰν ε εἶνε ἱκανῶς μικρὸν ($|\varepsilon| < \alpha$), ἡ τεταγμένη γίνεται φανταστική· ὥστε οὐδὲν σημεῖον ἔχει ἡ καμπύλη πλησίον τοῦ Ο.

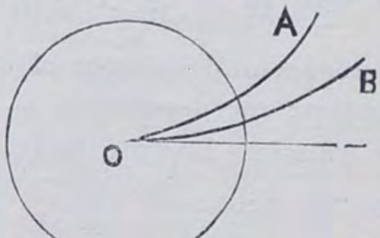
52. *Σημεῖον ἀνακάμψεως* λέγεται τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον φθάσασα ἡ καμπύλη ἐπιστρέφει πρὸς τὰ ὀπίσω, ἀντὶ νὰ προχωρήσῃ κατὰ τὴν φορὰν τῆς ἐφαπτομένης.

Τὰ δύο τόξα τὰ εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀνακάμψεως συνερχόμενα ἐφάπτονται ἀμφότερα μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἥτις εἶνε ἡ πρὸς τὴν καμπύλην ἐγγυτάτη εὐθεῖα, κεῖνται ὅμως πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ταύτην εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Ἡ κοινὴ δὲ αὕτη ἐφαπτομένη τῶν δύο τόξων τῆς καμπύλης δὲν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἡ μόνη ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν αὐτῆς (Ι. σελ. 100), διότι πᾶσα εὐθεῖα διὰ τοῦ σημείου τῆς ἀνακάμψεως διερχομένη τέμνει τὴν καμπύλην εἰς δύο σημεῖα συμπεσόντα· εἶνε ὅμως ἡ ἐγγυτάτη ἢ ἡ πρωτεύουσα ἐκ τῶν ἐφαπτομένων.

Ἡ ἀνάκαμψις λέγεται *τοῦ πρώτου εἴδους*, ἐὰν τὰ εἰς αὐτὴν συνερχόμενα τόξα κεῖνται ἐξ ἀντιθέτων μερῶν τῆς κοινῆς αὐτῶν ἐφαπτομένης· *τοῦ δευτέρου* δέ, ἐὰν ἀμφότερα κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος.





Ἐὰν περί τι σημεῖον ἀνακάμψεως γραφῇ κύκλος μὲ ἀκτῖνα ἱκανῶς μικράν, θὰ τέμνῃ ἡ περιφέρεια τὴν καμπύλην εἰς δύο σημεῖα πλησίον ἀλλήλων κείμενα καὶ ἡ γωνία τῶν εἰς αὐτὰ ἀγομένων ἀκτίνων θὰ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν.

Ἀνάκαμψιν τοῦ πρώτου εἴδους παρουσιάζει ἡ ἐνειλιγμένη τῆς ἐλλείψεως εἰς τὰ σημεῖα, ἔνθα ἐγγίζει τοὺς ἄξονας αὐτῆς· ὁμοίως καὶ αἱ ἐνειλιγμέναι τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς παραβολῆς· καὶ γενικῶς ἀνάκαμψιν τοῦ πρώτου εἴδους παρουσιάζει ἡ ἐνειλιγμένη πάσης καμπύλης εἰς τὰ σημεῖα, ἔνθα ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς καμπύλης γίνεται μεγίστη ἢ ἐλαχίστη. Ὁμοίως ἀνάκαμψιν τοῦ πρώτου εἴδους παρουσιάζει ἡ κυκλοειδὴς εἰς τὰ σημεῖα, ἐν οἷς ἐγγίζει τὴν βάσιν αὐτῆς· καὶ ἐν γένει πᾶσα καμπύλη, ἥτις γράφεται ὑπὸ σημείου καμπύλης κυλιομένης ἐπὶ ἄλλης ἀκινήτου, παρουσιάζει ἀνάκαμψιν πρώτου εἴδους, ὅταν τὸ γράφον αὐτὴν σημεῖον ἐγγίσῃ τὴν ἀκίνητον καμπύλην.

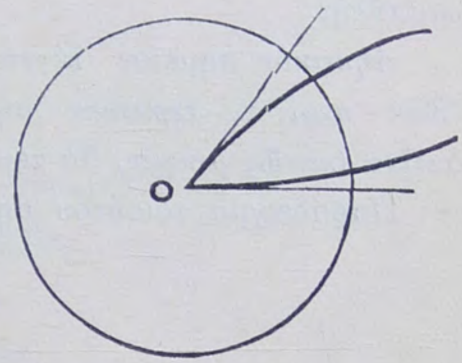
Παράδειγμα ἀνακάμψεως τοῦ δευτέρου εἴδους παρέχει ἡμῖν ἡ καμπύλη

$$y=x^2+x^{\frac{5}{2}},$$

περὶ ἧς ἴδε ἐν τῇ Ἀναλυτικῇ Γεωμετρίᾳ (σελ. 336).

53. Αἱ ὑπερβατικαὶ καμπύλαι ἔχουσιν ἐκτὸς τούτων καὶ ἄλλας ἀνωμαλίας, μὴ ἀπαντώσας εἰς τὰς ἀλγεβρικάς· τούτων αἱ πρωτεύουσαι εἶνε αἱ ἑξῆς.

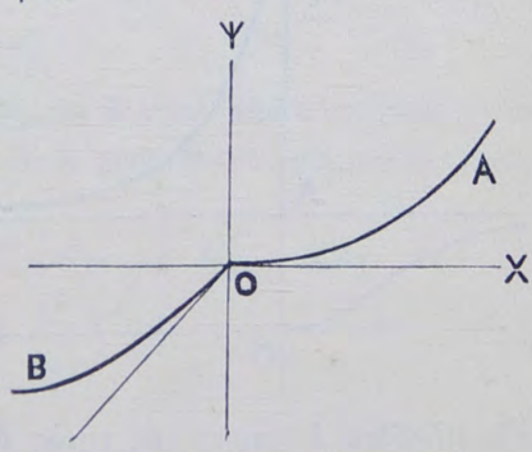
Γωνιῶδες σημεῖον λέγεται ἐκεῖνο, εἰς ὃ συνέρχονται δύο μόνον τόξα διαφόρους ἔχοντα ἐφαπτομένας.



Ἐὰν περί τι γωνιῶδες σημεῖον γραφῇ περιφέρεια κύκλου μὲ ἀκτῖνα ἱκανῶς μικράν, θὰ τέμνῃ τὴν καμπύλην εἰς δύο σημεῖα καὶ ἡ γωνία, ἣν σχηματίζουσιν αἱ εἰς αὐτὰ ἀγόμεναι ἀκτῖνες, θὰ τείνῃ πρός τινα γωνίαν διάφορον τοῦ 0^0 καὶ τῶν 180^0.

Παράδειγμα τοιούτου σημείου παρέχει ἡ καμπύλη

$$y=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}.$$



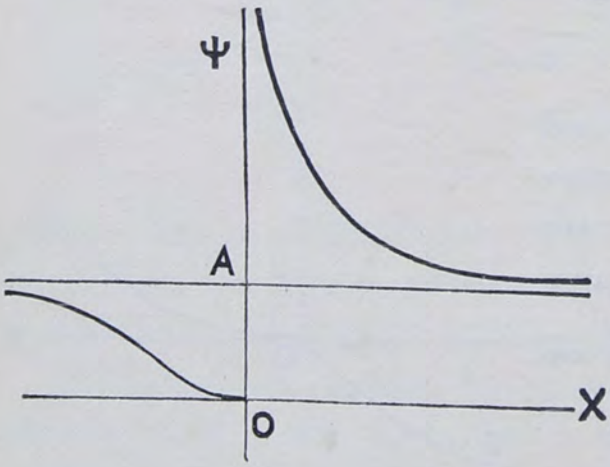
ἐὰν ὑποτεθῇ $x=0$, ἕπεται καὶ $y=0$· ὥστε ἡ ἀρχὴ εἶνε σημεῖον τῆς καμπύλης· εἰς θετικὰς τιμὰς τοῦ x ἀντιστοιχοῦσι θετικαὶ τιμαὶ τοῦ y· καὶ ὁ λόγος $\frac{y}{x}$, ἤτοι ἡ παράστασις $\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ (ὅταν x θετικὸν ὂν τείνῃ πρὸς τὸ 0) τείνει πρὸς τὸ 0· διότι τῆς συναρτήσεως $e^{\frac{1}{x}}$ αὐξάνει ὁ ἐκθέτης εἰς ἄπειρον, θετικὸς ὤν· ἑπομένως τοῦ τόξου ΟΑ ἐφάπτεται ὁ ἄξων τῶν x εἰς τὸ σημεῖον Ο. Δι' ἀρνητικὰς τιμὰς τοῦ x γίνεται καὶ τὸ y ἀρνητικόν· ἀλλ' ὁ λόγος $\frac{y}{x}$ τῶν ἀντιστοιχουσῶν αὐξήσεων (ἀπὸ τῆς τιμῆς $x=0$) τείνει νῦν πρὸς ἄλλο ὅριον· διότι ὁ ἐκθέτης τῆς συναρτήσεως $e^{\frac{1}{x}}$ αὐξάνει εἰς ἄπειρον, ἀρνητικὸς ὤν· καὶ διὰ τοῦτο ἡ συνάρτησις $e^{\frac{1}{x}}$ τείνει νῦν πρὸς τὸ μηδέν· ἑπομένως ὁ λόγος $\frac{y}{x}$ τείνει πρὸς τὴν μονάδα· ὥστε ἐφαπτομένη τοῦ τόξου ΟΒ εἰς τὸ σημεῖον Ο εἶνε ἡ διχοτομοῦσα τὴν γωνίαν τῶν ἀξόνων· κατ' ἀκολουθίαν τὸ σημεῖον Ο εἶνε γωνιῶδες σημεῖον τῆς καμπύλης.

Ληκτικὸν σημεῖον λέγεται ἐκεῖνο, εἰς ὃ ἡ καμπύλη ἀπολήγει. Ἐὰν περί τι ληκτικὸν σημεῖον γραφῇ περιφέρεια κύκλου μὲ ἀκτῖνα ἱκανῶς μικράν, θὰ τέμνῃ τὴν καμπύλην καθ' ἓν μόνον σημεῖον.

Παράδειγμα τοιούτου σημείου παρέχει ἡ καμπύλη

$$y = e^{\frac{1}{x}}.$$

Ἐὰν ἡ τετμημένη θετικὰς τιμὰς λαμβάνουσα αὐξάνῃ ἀπὸ τοῦ 0 εἰς ἄπειρον, ἡ τεταγμένη ἐλαττοῦται ἀπὸ τοῦ ἀπείρου μέχρι τῆς μονάδος· πρὸς τὰς τιμὰς ταύτας ἀντιστοιχεῖ κλάδος τις τῆς καμπύλης ἔχων ἀσύμπτωτον τὸν ἄξονα τῶν Ψ καὶ τὴν παράλληλον ΑΒ τῷ ἄξονι τῶν x (ΟΑ=1). Ἐὰν δὲ ἡ τετμημένη ἀρνητικὰς τιμὰς λαμβάνουσα ἐλαττῶται ἀπὸ 0 μέχρι τοῦ $-\infty$, ἡ τεταγμένη αὐξάνει ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τῆς μονάδος 1· πρὸς τὰς τιμὰς δὲ ταύτας ἀντιστοιχεῖ κλάδος τις τῆς καμπύλης, ὅστις ἄρχεται ἐκ τοῦ Ο καὶ ἔχει ἀσύμπτωτον τὴν αὐτὴν παράλληλον ἐκ τοῦ ἑτέρου μέρους. Τὸ σημεῖον Ο εἶνε κατὰ ταῦτα ληκτικὸν σημεῖον τῆς καμπύλης ταύτης.



Ληκτικὸν σημεῖον παρουσιάζει καὶ ἡ καμπύλη $y = \frac{1}{lx}$ εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων· διότι δι' ἀρνητικὰς τιμὰς τοῦ x γίνεται ἡ τεταγμένη φανταστική. Ἡ καμπύλη αὕτη δὲν διαφέρει τῆς προηγουμένης· διότι ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$x = e^{\frac{1}{y}}.$$

Ἡ δὲ καμπύλη $$y = \frac{1}{l\{x(1-x)\}}$$

παρουσιάζει δύο ληκτικὰ σημεῖα, $x=0$ καὶ $x=1$· διότι ὁ λογάριθμος εἶνε πραγματικός, μόνον ἐν ὅσῳ εἶνε $0 < x < 1$, γίνεται δὲ φανταστικός, ὅταν x γίνῃ ἀρνητικὸν ἢ μεγαλήτερον τῆς μονάδος.

Τέλος ἡ καμπύλη $$y = \frac{1}{l\left(\frac{1}{2}\,\text{ημ}x\right)}$$

ἔχει ἄπειρα ληκτικὰ σημεῖα, ὧν αἱ τετμημέναι εἶνε

$$x = 0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \pm 3\pi, \ldots$$

διότι εἰς τὰ διαστήματα

$$\pi \ldots 2\pi, \quad 3\pi \ldots 4\pi, \ \ldots$$

ἡ τεταγμένη γίνεται φανταστική.

Ὡς ἀξιοσημείωτον ἀνωμαλίαν ἀναφέρομεν προσέτι καὶ τὴν ἑξῆς.

Ἡ καμπύλη $$y = x\,\text{τοξημ}x$$

ἔχει ἀπείρους κλάδους· διότι πρὸς ἑκάστην τιμὴν τοῦ x

$$(-1 \leqq x \leqq 1)$$

ἀντιστοιχοῦσιν ἄπειροι τιμαὶ τοῦ τοξημx· ἀλλ' οἱ κλάδοι οὗτοι πάντες διέρχονται διὰ τῆς ἀρχῆς· διότι, ὅταν γίνῃ $x=0$, πᾶσαι αἱ τιμαὶ τοῦ y γίνονται ὡσαύτως 0.

Ἀξιοσημείωτον ἀνωμαλίαν παρουσιάζει καὶ ἡ καμπύλη

$$y = x^2\,\text{ημ}\left(\frac{1}{x}\right)$$

εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων O.

Τὸ σημεῖον τοῦτο O εἶνε σημεῖον τῆς καμπύλης· ἐν τῇ περιοχῇ δ' αὐτοῦ τέμνει ἡ καμπύλη τὸν ἄξονα OX ἀπειράκις· ἑπομένως ἡ τεταγμένη ἔχει ἄπειρα μέγιστα καὶ ἐλάχιστα πέριξ τοῦ O, εἰς ὁσονδήποτε μικρὰν ἔκτασιν καὶ ἂν περιορισθῇ ἡ x.

Ἐὰν ὁρίσωμεν τὴν ἐφαπτομένην τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον O ὡς ὅριον τῶν θέσεων τῆς διὰ τοῦ σημείου τούτου διερχομένης τεμνούσης OM, ὅταν τὸ M συμπέσῃ μετὰ τοῦ O, ὑπάρχει ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἰς τὸ Ο· εἶνε δὲ αὕτη ὁ ἄξων τῶν x. Διότι εἶνε

$$\text{εφ}\,(\text{MOX}) = \frac{y}{x} = x\,\text{ημ}\left(\frac{1}{x}\right)$$

καὶ διὰ τοῦτο $\qquad$ $\text{ορ.εφ}(\text{MOX}) = 0.$

Ἀλλὰ κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τῆς ἐφαπτομένης (I, σελ. 100) δὲν ὑπάρχει ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἰς τὸ Ο. Διότι ἄγοντες τὴν τυχοῦσαν τέμνουσαν MM_1 καὶ παριστῶντες διὰ x_1 τὴν τετμημένην τοῦ M_1 καὶ διὰ x τὴν τοῦ M, ἔτι δὲ διὰ φ τὴν γωνίαν τῆς τεμνούσης MM_1 πρὸς τὸν ἄξονα OX, θὰ ἔχωμεν

$$\text{εφφ} = \frac{x^2\text{ημ}\left(\frac{1}{x}\right) - x_1^2\text{ημ}\left(\frac{1}{x_1}\right)}{x - x_1}.$$

καὶ ἂν μὲν ἡ τετμημένη x_1 ὁρίζηται ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x} = 2\kappa\pi,$$

τοῦ x τείνοντος πρὸς τὸ 0, καὶ τὸ x_1 θὰ τείνῃ ὡσαύτως πρὸς τὸ 0· θὰ εἶνε δὲ τότε

$$\text{εφφ} = \frac{(x^2 - x_1^2)\text{ημ}\left(\frac{1}{x}\right)}{x - x_1} = (x + x_1)\text{ημ}\left(\frac{1}{x}\right),$$

ὅθεν καὶ $\qquad$ $\text{ὅρ.εφφ} = 0$·

ἀλλ' ἂν ἡ x_1 ὁρίζηται ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x} = (2\kappa + 1)\pi,$$

θὰ εἶνε

$$\text{εφφ} = \frac{(x^2 + x_1^2)\text{ημ}\left(\frac{1}{x}\right)}{x - x_1} = \frac{(x - x_1)^2\text{ημ}\left(\frac{1}{x}\right) + 2xx_1\text{ημ}\left(\frac{1}{x}\right)}{x - x_1}$$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε $\qquad$ $x - x_1 = (2\kappa + 1)\pi x x_1$,

θὰ εἶνε $\qquad$ $\text{εφφ} = (x - x_1)\text{ημ}\left(\frac{1}{x}\right) + \dfrac{2\text{ημ}\left(\frac{1}{x}\right)}{(2\kappa + 1)\pi},$

ἐξ οὗ γίνεται φανερόν, ὅτι ἡ γωνία φ οὐδὲν τότε ἔχει ὅριον.

Σημειωτέον δέ, ὅτι καὶ ἡ παράγωγος $\frac{dy}{dx}$,

ἤτοι $$2x\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right),$$
πρὸς οὐδὲν τείνει ὅριον, ὅταν ἡ x τείνῃ πρὸς τὸ 0.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

Τὰ ἐν τοῖς προηγουμένοις ἀποδειχθέντα θεωρήματα περὶ τῶν ἐπιπέδων καμπύλων ἀπεδείχθησαν, ὡς καὶ ἐν ἀρχῇ ἐλέχθη, διὰ τὰ ὁμαλὰ σημεῖα· διότι πᾶσαι αἱ ἀποδείξεις ἐστηρίχθησαν ἐπὶ τῆς σειρᾶς τοῦ Taylor· διὰ τοῦτο ἐν τοῖς ἀνωμάλοις σημείοις ἐνδέχεται νὰ μὴ ἀληθεύωσιν. Ἐάν, παραδείγματος χάριν, λάβωμεν ὁμαλόν τι σημεῖον τῆς καμπύλης, ἔνθα ἡ ἐφαπτομένη ἔχει ἐπαφὴν πρώτης τάξεως, καὶ στρέψωμεν περὶ τὴν ἐφαπτομένην τὸ ἕτερον τῶν τόξων τῶν εἰς αὐτὸ συνερχομένων, μέχρις οὗ πέσῃ ἐκ τοῦ ἑτέρου μέρους αὐτῆς, ἡ μὲν προσέγγισις τῆς καμπύλης πρὸς τὴν ἐφαπτομένην (ἥτις μετρεῖται ἐκ τῆς ἀπειροστῆς ἀποστάσεως τῶν σημείων τῆς καμπύλης ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης) προφανῶς δὲν μεταβάλλεται καὶ ἡ ἐπαφὴ μένει ἑπομένως τῆς πρώτης τάξεως· καὶ ὅμως ἡ ἐφαπτομένη διαπερᾷ νῦν τὴν καμπύλην καὶ ἔχει μετ' αὐτῆς κοινὰ τρία σημεῖα συμπίπτοντα· τοῦτο συμβαίνει, διότι τὸ σημεῖον τοῦτο γίνεται ἀνώμαλον, ἐπειδὴ εἰς αὐτὸ ἡ δευτέρα παράγωγος y'' μεταπηδᾷ ἀπό τινος θετικῆς τιμῆς εἰς τὴν ἀντίθετον· ἑπομένως ἀνάπτυγμα, οἷον αἱ ἀποδείξεις ὑποθέτουσι, δὲν ὑπάρχει. Ὁμοίως, ἐὰν περί τι σημεῖον καμπῆς στρέψωμεν ἓν τῶν τόξων περὶ τὴν ἐφαπτομένην, μέχρις οὗ πέσῃ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος, ἡ ἐπαφὴ μένει ἀρτίας τάξεως· καὶ ὅμως ἡ ἐφαπτομένη δὲν διαπερᾷ τὴν καμπύλην. Ὁμοίως τὸ σημεῖον (0, 0) τῆς καμπύλης
$$y = x^{\frac{5}{3}}$$
εἶνε καμπή· καὶ ἑπομένως ὁ κύκλος τῆς καμπυλότητος ἔπρεπε νὰ γίνηται ἄπειρος (διότι εὑρίσκονται τρία σημεῖα τῆς καμπύλης ἐπὶ εὐθείας κείμενα, ὅσον δήποτε μικρὸν τόξον καὶ ἂν ληφθῇ πέριξ τοῦ σημείου τούτου)· ἐν τούτοις ἡ ἀκτὶς ρ τείνει πρὸς τὸ μηδέν, καθ' ὅσον πλησιάζομεν πρὸς τὸ σημεῖον τοῦτο ἐκ τοῦ ἑνὸς ἢ ἐκ τοῦ ἄλλου μέρους τῆς καμπύλης. Ὁμοίως ἐν τῇ κυκλοειδεῖ ἡ διαφορὰ τόξου ἀπειροστοῦ ἀπὸ τῆς χορδῆς αὐτοῦ, ἐὰν ἀρχὴ τοῦ τόξου εἶνε ἡ ἀρχὴ τῆς κυκλοειδοῦς, εἶνε ἀπειροστὸν δευτέρας τάξεως πρὸς τὸ τόξον· καὶ ἐὰν

κυλισθῇ κύκλος ἀπειροστὴν ἔχων ἀκτῖνα ἐπὶ εὐθείας, τὸ ἀπειροστὸν τόξον, ὅπερ γράφει, ἔχει λόγον πρὸς τὴν χορδὴν αὐτοῦ $\frac{8}{2\pi}$ καὶ ὄχι 1. Ὁμοίως, ἐὰν κυλίσωμεν περιφέρειαν ἐπὶ εὐθείας, τὸ σύστημα τῶν κυκλοειδῶν, τὰς ὁποίας γράφουσι τὰ διάφορα σημεῖα αὐτῆς, ἔχει περιβάλλουσαν, ἥτις σύγκειται ἐκ δύο παραλλήλων εὐθειῶν· τοῦτ' ἔστι τῆς ἐφαπτομένης αὐτῶν κατὰ τὰς κορυφὰς καὶ τῆς εὐθείας, ἐφ' ἧς γίνεται ἡ κύλισις· ταύτης δὲ τῆς εὐθείας δὲν ἐφάπτονται αἱ κυκλοειδεῖς, ἀλλὰ συναντῶσιν αὐτὴν καθέτως· διότι τὰ ὁρικὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα ἐγγίζουσιν αὐτήν, εἶνε ἀνώμαλα σημεῖα τῶν κυκλοειδῶν. Ὁμοίως αἱ παράλληλοι πρὸς δοθεῖσαν καμπύλην ἔχουσι περιβάλλουσαν τὴν κοινὴν αὐτῶν ἐνειλιγμένην, πρὸς ἣν εἶνε κάθετοι. Ὁμοίως αἱ ἐπικυκλοειδεῖς, ἅς τινας γράφει περιφέρεια κύκλου ἐντὸς ἄλλου κυλιομένη, ἔχουσι περιβάλλουσαν τὴν ἀκίνητον περιφέρειαν, πρὸς τὴν ὁποίαν εἶνε κάθετοι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΝ ΤΩ ΧΩΡΩ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

Καὶ ἐν τῇ θεωρίᾳ τῶν ἐν τῷ χώρῳ καμπύλων ὑποτίθενται ὁμαλὰ πάντα τὰ σημεῖα, περὶ ὧν γίνεται λόγος· τουτέστιν, ὅτι αἱ συντεταγμέναι x, y, z ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ σημείου τούτου ἔχουσι τὸν χαρακτῆρα ἀκεραίων συναρτήσεων μιᾶς ἐξ αὐτῶν· ὑποτίθενται δὲ αἱ συντεταγμέναι x, y, z ὀρθογώνιοι.

Περὶ τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου.

54. Καθὼς ἐκ τῶν εὐθειῶν τῶν δι' ἑνὸς σημείου Μ τῆς καμπύλης διερχομένων ὑπάρχει μία ἐγγυτάτη πρὸς τὴν καμπύλην εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο (ἡ ἐφαπτομένη), πρὸς ἣν δύναται νὰ ἐξομοιωθῇ ἡ καμπύλη πλησίον τοῦ σημείου τούτου, οὕτως ὑπάρχει καὶ ἐκ τῶν ἐπιπέδων, ἅτινα διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ἓν ἐγγύτατον πρὸς τὴν καμπύλην· τουτέστι τοιοῦτον, ὥστε ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων τῆς καμπύλης ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου τούτου πλησίον τοῦ Μ γίνεται ἀπειροστὸν ἀνωτέρας τάξεως ἢ ἡ ἀπόστασις αὐτῶν ἀπὸ παντὸς ἄλλου ἐπιπέδου· διὰ τοῦτο ἡ καμπύλη πλησίον τοῦ Μ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου καὶ ἑπομένως νὰ ἐξομοιωθῇ πρὸς ἐπίπεδον καμπύλην.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἔστω οἱαδήποτε καμπύλη ἀναφερομένη πρὸς τρεῖς ὀρθογωνίους ἄξονας καὶ ἔχουσα τὰς ἐξισώσεις

$$Y = \sigma(X)$$
$$Z = \varphi(X)\cdot$$

ἐὰν αἱ συντεταγμέναι τοῦ τυχόντος σημείου αὐτῆς Μ παρασταθῶσι διὰ x, y, z, ἡ ἐξίσωσις παντὸς ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ Μ θὰ εἶνε τῆς μορφῆς $\mathrm{A}(X-x)+\mathrm{B}(Y-y)+\Gamma(Z-z)=0$ (1)
καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου τούτου ἀπόστασις δ ἄλλου σημείου Μ′ τῆς καμπύλης, οὗ τὰς συντεταγμένας παριστῶμεν διὰ

$$x+\Delta x, \quad y+\Delta y, \quad z+\Delta z,$$

θὰ εἶνε

$$\delta = \frac{A.\Delta x + B.\Delta y + \Gamma.\Delta z}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}.$$

Ἐπειδὴ δὲ αἱ συντεταγμέναι X, Y, Z εἶνε συναρτήσεις μιᾶς ἐξ αὐτῶν, ἤ, γενικώτερον, μιᾶς ἄλλης βοηθητικῆς μεταβλητῆς ω, ἐὰν αἱ αὐξήσεις Δx, Δy, Δz ἀντιστοιχῶσι πρὸς τὴν αὔξησιν $\Delta\omega$ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς ω, θὰ εἶνε

$$\Delta x = \frac{dx}{d\omega}.\Delta\omega + \frac{d^2x}{d\omega^2}\,\frac{\Delta\omega^2}{1.2} + \frac{d^3x}{d\omega^3}\,\frac{\Delta\omega^3}{1.2.3} + \dots$$

$$\Delta y = \frac{dy}{d\omega}.\Delta\omega + \frac{d^2y}{d\omega^2}\,\frac{\Delta\omega^2}{1.2} + \frac{d^3y}{d\omega^3}.\,\frac{\Delta\omega^3}{1.2.3} + \dots$$

$$\Delta z = \frac{dz}{d\omega}.\Delta\omega + \frac{d^2z}{d\omega^2}\,\frac{\Delta\omega^2}{1.2} + \frac{d^3z}{d\omega^3}.\,\frac{\Delta\omega^3}{1.2.3} + \dots,$$

ὅθεν ἡ ἀπόστασις δ λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}\left\{\Delta\omega.\sum A\frac{dx}{d\omega} + \frac{\Delta\omega^2}{1.2}\sum A\frac{d^2x}{d\omega^2} + \frac{\Delta\omega^3}{1.2.3}\sum A\frac{d^3x}{d\omega^3} + \dots\right\},$$

ἔνθα

$$\sum A\frac{dx}{d\omega}$$

δηλοῖ (συντομίας χάριν) τὸ ἄθροισμα $A\dfrac{dx}{d\omega} + B\dfrac{dy}{d\omega} + \Gamma\dfrac{dz}{d\omega}\cdot$

ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἄλλα $\sum$.

Ἐκ τῆς τιμῆς ταύτης τοῦ δ βλέπομεν ἀμέσως, ὅτι τοῦτο εἶνε ἐν γένει (τοῦτ᾽ ἔστιν, ὅταν τὸ ἐπίπεδον (1) εἶνε τὸ τυχὸν διὰ τοῦ Μ διερχόμενον ἐπίπεδον) πρώτης τάξεως ἀπειροστὸν (πρὸς τὸ Δω ἢ καὶ πρὸς τὸ τόξον $MM' = \Delta s$)· γίνεται δὲ τὸ δ ἀπειροστὸν δευτέρας τάξεως, ἐὰν οἱ συντελεσταὶ Α, Β, Γ τοῦ ἐπιπέδου ἐπαληθεύωσι τὴν ἰσότητα

$$A\frac{dx}{d\omega} + B\frac{dy}{d\omega} + \Gamma\frac{dz}{d\omega} = 0,$$

ἥτις ἐκφράζει, ὅτι ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ σημεῖον Μ κεῖται τότε ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (1)· ὥστε ἡ ἀπόστασις τῆς καμπύλης ἀπὸ παντὸς ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ Μ γίνεται πλησίον τοῦ Μ ἀπειροστὸν δευτέρας τάξεως (πρὸς τὸ τόξον).

Ἡ ἀπόστασις δ γίνεται ἀπειροστὸν τρίτης τάξεως, ἐὰν οἱ συντελεσταὶ Α, Β, Γ τοῦ ἐπιπέδου (1) ἐπαληθεύωσι τὰς ἑξῆς δύο ἐξισώσεις

$$
\left.\begin{aligned}
\mathrm{A}\frac{dx}{d\omega}+\mathrm{B}\frac{dy}{d\omega}+\Gamma\frac{dz}{d\omega}&=0\\
\mathrm{A}\frac{d^2x}{d\omega^2}+\mathrm{B}\frac{d^2y}{d\omega^2}+\Gamma\frac{d^2z}{d\omega^2}&=0.
\end{aligned}\right\} \quad (2)
$$

Αἱ δύο αὗται ἐξισώσεις ὁρίζουσιν ἐντελῶς τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον· διότι ὁρίζουσι τοὺς λόγους $\frac{\mathrm{A}}{\Gamma}$, $\frac{\mathrm{B}}{\Gamma}$ τούτους δὲ καὶ μόνους περιέχει ἡ ἐξίσωσις (1), ὅταν διαιρεθῇ διὰ Γ. Ἀπαλείφοντες δὲ τούτους ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) (Εἰσαγ. σελ. 149), εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου

$$
\begin{vmatrix}
X-x & Y-y & Z-z\\
dx & dy & dz\\
d^2x & d^2y & d^2z
\end{vmatrix} = 0 \qquad (3)
$$

55. Ἡ ἀπόστασις δ τῶν σημείων τῆς καμπύλης ἀπὸ τοῦ ἐγγυτάτου πρὸς αὐτὴν ἐπιπέδου εἶνε κατὰ τὰ προηγούμενα ἀπειροστὸν (ἐν γένει) τρίτης τάξεως, οὗτινος τὸ πρωτεῦον μέρος εἶνε

$$
\frac{(\Delta\omega)^3}{1.2.3}\cdot\frac{\mathrm{A}\frac{d^3x}{d\omega^3}+\mathrm{B}\frac{d^3y}{d\omega^3}+\Gamma\frac{d^3z}{d\omega^3}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\Gamma^2}}. \qquad (4)
$$

Ἐκ τούτου γίνεται δῆλον, ὅτι τῶν πρὸς διάφορα μέρη τοῦ Μ κειμένων σημείων τῆς καμπύλης αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου ἔχουσιν ἐναντία σημεῖα (διότι Δω εἶνε θετικὸν εἰς τὸ ἓν μέρος καὶ ἀρνητικὸν εἰς τὸ ἄλλο)· ἑπομένως τὰ σημεῖα ταῦτα κεῖνται καὶ πρὸς διάφορα μέρη τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου· τοῦτ' ἔστι τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον διαπερᾷ (ἐν γένει) τὴν καμπύλην, καθ' ὃ σημεῖον ἐγγίζει αὐτήν.

Ἐὰν ἡ ἀπόστασις δ εἶνε ἀπειροστὸν τετάρτης τάξεως, διατηρεῖ τὸ ἑαυτῆς σημεῖον ἔνθεν καὶ ἔνθεν τοῦ Μ καὶ ἑπομένως τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον δὲν διαπερᾷ τὴν καμπύλην· ἀλλὰ τοῦτο μόνον εἴς τινα ὡρισμένα τὸ πλῆθος σημεῖα τῶν στρεβλῶν καμπύλων δύναται νὰ συμβῇ (ἰδὲ Ἀσκήσεις).

56. Παριστῶντες διὰ λ, μ, ν τὰ συνημίτονα τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζει πρὸς τοὺς ἄξονας ἡ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον, εὑρίσκομεν

$$\lambda = \frac{1}{\Theta}\begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix}, \quad \mu = \frac{1}{\Theta}\begin{vmatrix} dz & dx \\ d^2z & d^2x \end{vmatrix}, \quad \nu = \frac{1}{\Theta}\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix},$$

ἔνθα πρὸς συντομίαν ἐτέθη

$$\Theta^2 = \begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} dz & dx \\ d^2z & d^2x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}^2. \tag{5}$$

Ἡ παράστασις Θ λαμβάνει διαφόρους μορφάς, τὰς ὁποίας εἶνε χρήσιμον νὰ μάθωμεν.

Ἐὰν πρὸς συντομίαν τεθῇ

$$\begin{aligned} a &= dx & a' &= d^2x \\ b &= dy & b' &= d^2y \\ c &= dz & c' &= d^2z \end{aligned}$$

θὰ γίνῃ $\Theta^2 = (bc' - b'c)^2 + (ca' - c'a)^2 + (ab' - (a'b)^2$.

Ἐὰν δὲ ἀναπτύξωμεν τὰ τετράγωνα, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὴν παράστασιν ταύτην ὡς ἑξῆς

$$\Theta^2 = (a^2 + b^2 + c^2)\ (a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc\,)^2$$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε $a^2 + b^2 + c^2 = ds^2$

$$aa' + bb' + cc' = dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z = \frac{1}{2}d\{dx^2 + dy^2 + dz^2\} =$$

$$= \frac{1}{2}\ d(ds^2) = ds\,.\,d^2s,$$

ἕπεται $\Theta^2 = ds^2\ \left[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2\right].$ (6)

Ἐὰν δὲ ληφθῇ τὸ μῆκος s τοῦ τόξου ΑΜ (ἀπό τινος ἀρχῆς Α μέχρι τοῦ Μ) ὡς ἀνεξάρτητος μεταβλητή, ἐὰν δηλονότι θεωρηθῶσι τὰ x, y, z ὡς συναρτήσεις τοῦ s,

θὰ εἶνε $d^2s = 0$·

ὅθεν τότε γίνεται

$$\Theta^2 = ds^6\ \left\{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right\}. \tag{7}$$

Τὸν τύπον τοῦτον δυνάμεθα νὰ γράψωμεν οὕτως, ὥστε νὰ ἁρμόζῃ πρὸς οἱανδήποτε ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν (Ι, σελ. 205)· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν ἀντὶ $\frac{d^2x}{ds^2}$ τὸ $\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds}$ ἢ $\frac{dsd^2x - dxd^2s}{ds^3}$,

ὅτε προκύπτει τέλος ἡ ἑπομένη γενικὴ ἔκφρασις τοῦ Θ

$$\Theta^2 = \begin{vmatrix} dx & ds \\ d^2x & d^2s \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} dy & ds \\ d^2y & d^2s \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} dz & ds \\ d^2z & d^2s \end{vmatrix}^2, \quad (8)$$

ἥτις εὐκόλως διὰ τῆς ἀναπτύξεως τῶν τετραγώνων ἀνάγεται εἰς τὴν πρώτην (5).

57. Ἡ πρὸς τὴν καμπύλην προσέγγισις τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ ἀπὸ ἄλλης ἀπόψεως μᾶλλον γεωμετρικῆς, ἥτις ἐκφράζεται ἐν τῷ ἑπομένῳ θεωρήματι.

Τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον M εἶνε τὸ ὅριον τῶν θέσεων ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τριῶν σημείων τῆς καμπύλης, ὅταν τὰ τρία ταῦτα σημεῖα, ὁπωσδήποτε ἐπ' αὐτῆς κινούμενα, συμπέσωσιν εἰς τὸ M.

Ἔστωσαν

$$x = \varphi(\omega)$$
$$y = \sigma(\omega) \quad (1)$$
$$z = f(\omega)$$

αἱ ἐξισώσεις τῆς καμπύλης, ἐν αἷς χάριν συμμετρίας θεωροῦμεν τὰς συντεταγμένας x, y, z ὡς συναρτήσεις ἄλλης τινὸς μεταβλητῆς ω.

Ἂς ληφθῶσιν ἐπὶ τῆς καμπύλης τρία τυχόντα σημεῖα M_1, M_2, M_3 καὶ ἂς ἀντιστοιχῶσι ταῦτα πρὸς τὰς τιμὰς ω_1, ω_2, ω_3 τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς ω, ἔστω δὲ ἡ ἐξίσωσις τοῦ δι' αὐτῶν διερχομένου ἐπιπέδου

ἡ

$$AX + BY + \Gamma Z + \Delta = 0 \quad (2)$$

Ἐὰν ἐν τῷ πολυωνύμῳ $AX + BY + \Gamma Z + \Delta$ θέσωμεν ἀντὶ τῶν X, Y, Z τὰς μεταβλητὰς συντεταγμένας x, y, z τῆς καμπύλης, αἵτινες εἶνε συναρτήσεις τοῦ ω ὁριζόμεναι διὰ τῶν ἐξισώσεων (1), τὸ πολυώνυμον γίνεται τότε συνάρτησις τοῦ ω

$$A\varphi(\omega) + B\sigma(\omega) + \Gamma f(\omega) + \Delta$$

(ἥτις παρέχει τὴν τιμὴν τοῦ πολυωνύμου $AX + BY + \Gamma Z + \Delta$ εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς καμπύλης)· ἡ δὲ συνάρτησις αὕτη μηδενίζεται ἐξ ὑποθέσεως διὰ τρεῖς τιμὰς τοῦ ω, τὰς ω_1, ω_2, ω_3· κατ' ἀκολουθίαν ἡ παράγωγος αὐτῆς

$$A\varphi'(\omega) + B\sigma'(\omega) + \Gamma f'(\omega)$$

θὰ μηδενίζηται διὰ δύο τιμὰς τοῦ ω κειμένας μεταξὺ τῶν τριῶν πρώτων, ἔστω τὰς ω'_1, ω'_2· διὰ τοῦτο δὲ ἡ δευτέρα παράγωγος αὐτῆς

$$\mathrm{A}\varphi''(\omega)+\mathrm{B}\sigma''(\omega)+\Gamma f''(\omega)$$

θὰ μηδενίζηται διά τινα τιμὴν ω''_1 κειμένην μεταξὺ ω'_1 καὶ ω'_2. Ἀλλ᾽ ὅταν τὰ τρία ληφθέντα σημεῖα M_1, M_2, M_3, ὁπωςδήποτε ἐπὶ τῆς καμπύλης κινούμενα, συμπέσωσιν εἰς τὸ σημεῖον M (ὅπερ ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν τιμὴν ω), καὶ αἱ τρεῖς τιμαὶ ω_1, ω_2, ω_3 γίνονται ἴσαι τῇ ω, ὡς καὶ αἱ μεταξὺ αὐτῶν κείμεναι ω'_1, ω'_2, ω''_1· οἱ δὲ συντελεσταὶ τοῦ ἐπιπέδου (2) τείνουσι πρὸς ὅρια A_0, B_0, Γ_0, Δ_0· ἐπομένως οὗτοι θὰ ἐπαληθεύωσι τότε τὰς ἐξισώσεις

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}_0\varphi(\omega)+\mathrm{B}_0\sigma(\omega)+\Gamma_0 f(\omega)+\Delta_0=0\\
&\mathrm{A}_0\varphi'(\omega)+\mathrm{B}_0\sigma'(\omega)+\Gamma_0 f'(\omega)=0\\
&\mathrm{A}_0\varphi''(\omega)+\mathrm{B}_0\sigma''(\omega)+\Gamma_0 f''(\omega)=0
\end{aligned}$$

ἤ, ἂν παραστήσωμεν τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου M διὰ x, y, z,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}_0x+\mathrm{B}_0y+\Gamma_0z+\Delta_0=0\\
&\mathrm{A}_0dx+\mathrm{B}_0dy+\Gamma_0dz=0\\
&\mathrm{A}_0d^2x+\mathrm{B}_0d^2y+\Gamma_0d^2z=0.
\end{aligned}$$

Ἐκ τῶν τριῶν τούτων ἐξισώσεων ὁρίζεται ἐντελῶς τὸ ἐπίπεδον, ὅπερ εἶνε τὸ ὅριον τῶν θέσεων τοῦ ἐπιπέδου $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3$· καὶ ἡ μὲν πρώτη ἐκφράζει, ὅτι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο διέρχεται διὰ τοῦ σημείου M καὶ δι᾽ αὐτῆς ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐπιπέδου γίνεται

$$\mathrm{A}_0(X-x)+\mathrm{B}_0(Y-y)+\Gamma_0(Z-z)=0\cdot$$

αἱ δὲ λοιπαὶ δύο εἶνε αἱ ἤδη εὑρεθεῖσαι καὶ τοὺς συντελεστὰς A, B, Γ τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου συνδέουσαι. Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι τὸ ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τριῶν οἱωνδήποτε σημείων τῆς καμπύλης, ὅταν ταῦτα συμπέσωσιν εἰς ἕν, γίνεται ἐγγύτατον ἐπίπεδον αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης γίνεται ἀμέσως φανερὸν (παράβ. ἐδ. 38), ὅτι τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον διαπερᾷ τὴν καμπύλην.

58. Ἐὰν νοήσωμεν ἐκ τῶν τριῶν σημείων πρῶτον τὰ δύο συμπίπτοντα καὶ ἔπειτα τὸ τρίτον, εὑρίσκομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν

Τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον εἶνε τὸ ὅριον τῶν θέσεων ἐπιπέδου, ὅπερ διέρχεται διὰ τῆς ἐφαπτομένης καὶ ἑνὸς σημείου τῆς καμπύλης, ὅταν τὸ σημεῖον τοῦτο καὶ ἡ ἁφὴ συμπέσωσιν εἰς ἓν σημεῖον.

Περὶ τῶν τριῶν ἀρχικῶν εὐθειῶν ἐν ἑκάστῳ σημείῳ τῆς καμπύλης.

59. Ἐκ τῶν καθέτων ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον Μ τῆς ἐπαφῆς (αἵτινες κεῖνται πᾶσαι ἐν τῷ καθέτῳ ἐπιπέδῳ τῆς καμπύλης) ἀξιοσημείωτοι εἶνε, πρῶτον μὲν ἡ κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου, ἥτις λέγεται *πρωτεύουσα* ἢ *πρώτη κάθετος* τῆς καμπύλης, ὡς ἀναλογοῦσα πρὸς τὴν κάθετον τῶν ἐπιπέδων καμπύλων· δεύτερον δὲ ἡ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον, ἥτις λέγεται *ὀρθία* κάθετος τῆς καμπύλης, ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐφ᾽ οὗ ὡς ἔγγιστα κεῖται ἡ καμπύλη πλησίον τοῦ σημείου Μ. Αἱ δύο αὗται κάθετοι καὶ ἡ ἐφαπτομένη εἶνε *αἱ τρεῖς ἀρχικαὶ εὐθεῖαι* εἰς τὸ σημεῖον Μ τῆς καμπύλης.

Ἐξισώσεις τῆς πρώτης καθέτου.

60. Ὡς ἐξισώσεις τῆς πρώτης καθέτου εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς καμπύλης δύνανται νὰ ληφθῶσιν αἱ ἐξισώσεις τῶν δύο ἐπιπέδων. ὧν εἶνε τομή· τουτέστι τοῦ καθέτου πρὸς τὴν καμπύλην καὶ τοῦ ἐγγυτάτου εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ εἶνε γνωστὸν ἓν σημεῖον αὐτῆς, τὸ Μ (x, y, z), ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῶσι τὰ συνημίτονα τῶν γωνιῶν αὐτῆς πρὸς τοὺς ἄξονας, ἵνα εὑρεθῶσιν αἱ συμμετρικαὶ ἐξισώσεις αὐτῆς,

Τὰ εἰρημένα συνημίτονα, ἅτινα παριστῶμεν διὰ τῶν ξ η ζ, ἐπαληθεύουσι τὰς ἐξισώσεις

$$\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta=0$$
$$\lambda\xi+\mu\eta+\nu\zeta=0,$$

αἵτινες ἐκφράζουσιν, ὅτι ἡ πρώτη κάθετος εἶνε κάθετος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην καὶ πρὸς τὴν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον.

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων εὑρίσκομεν, ὅτι τὰ συνημίτονα ξ, η, ζ εἶνε ἀνάλογα πρὸς τὰς ὁριζούσας

$$\begin{vmatrix} \mu & \nu \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \nu & \lambda \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}. \tag{1}$$

ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τούτων εἶνε 1, συνάγεται, ὅτι αἱ ὁρίζουσαι αὗται εἶνε ἴσαι πρὸς τὰ ζητούμενα συνημίτονα ξ, η, ζ.

Ἐὰν εἰς τὴν πρώτην τῶν ὁριζουσῶν τούτων θέσωμεν ἀντὶ τῶν συνημιτόνων μ, ν, β, γ τὰς γνωστὰς τιμὰς αὐτῶν, εὑρίσκομεν

$$\xi = \frac{1}{\Theta.ds}\left\{-dx(dyd^2y+dzd^2z)+d^2x(dy^2+dz)^2\right\}$$

ἢ καὶ $\xi=\dfrac{1}{\Theta.ds}\left\{-dx(dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z)+d^2x(dx^2+dy^2+dz^2)\right\}$

ἐπειδὴ δὲ εἶνε $\qquad dx^2+dy^2+dz^2=ds^2$

καὶ $\qquad dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z=dsd^2s,$

συνάγεται $\qquad \xi=\dfrac{1}{\Theta.}(dsd^2x-dxd^2s)$

ἢ $\qquad \xi=\dfrac{ds^3}{\Theta}\cdot\dfrac{d\left(\dfrac{dx}{ds}\right)}{ds}.$

Ὁμοίως εὑρίσκεται $\qquad \eta=\dfrac{ds^3}{\Theta}\cdot\dfrac{d\left(\dfrac{dy}{ds}\right)}{ds} \qquad (2)$

$$\zeta=\frac{ds^3}{\Theta}\cdot\frac{d\left(\dfrac{dz}{ds}\right)}{ds}.$$

Εὑρόντες τὰς τιμὰς τῶν συνημιτόνων ξ, η, ζ τῆς πρώτης καθέτου, δυνάμεθα νῦν νὰ γράψωμεν τὰς συμμετρικὰς ἐξισώσεις αὐτῆς, αἵτινες εἶνε

$$\frac{X-x}{d\left(\dfrac{dx}{ds}\right)}=\frac{Y-y}{d\left(\dfrac{dy}{ds}\right)}=\frac{Z-z}{d\left(\dfrac{dz}{ds}\right)}$$

ἢ $\qquad \dfrac{X-x}{d\alpha}=\dfrac{Y-y}{d\beta}=\dfrac{Z-z}{d\gamma}.$

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἐὰν ἡ ἀπόστασις δ τῶν σημείων τῆς καμπύλης ἀπὸ τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς εἶνε πάντοτε ἀπειροστὸν τετάρτης τάξεως, ἡ καμπύλη εἶνε ἐπίπεδος.

Διότι, ἵνα συμβαίνῃ τοῦτο, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε

$$\sum \mathrm{A}\, dx = 0 \qquad \sum \mathrm{A} d^2x = 0 \qquad \sum \mathrm{A} d^3x = 0.$$

Ἐκ δὲ τούτων προκύπτει διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς τῶν A, B, Γ

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = 0,$$

ἡ δὲ ἐξίσωσις αὕτη πρέπει νὰ ἀληθεύῃ εἰς πᾶν σημεῖον τῆς καμπύλης.

Καὶ ἂν μὲν ἡ x εἶνε σταθερὰ (ὅτε $dx = 0$, $d^2x = 0$, $d^3x = 0$ καὶ ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἀληθεύει), ἡ καμπύλη εἶνε ἐπίπεδος καὶ κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου τῷ YZ.

Ἂν δὲ ἡ x εἶνε μεταβλητὴ καὶ ληφθῇ ὡς ἀνεξάρτητος, ἡ ἐξίσωσις αὕτη καταντᾷ

$$\begin{vmatrix} d^2y & d^2z \\ d^3y & d^3z \end{vmatrix} = 0$$

ἢ
$$\frac{d^3y}{dx^3} : \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^3z}{dx^3} : \frac{d^2z}{dx^2},$$

τοῦτ' ἔστι
$$d\left(l\,\frac{d^2y}{dx^2}\right) = d\left(l\,\frac{d^2z}{dx^2}\right),$$

ὅθεν
$$l\,\frac{d^2y}{dx^2} = l\,\frac{d^2z}{dx^2} + \mathrm{A}$$

ἢ
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{B}\,\frac{d^2z}{dx^2},$$

ἐὰν τεθῇ
$$\mathrm{A} = l\mathrm{B}.$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{B}\,\frac{dz}{dx} + C$$

καὶ
$$y = \mathrm{B}\,z + Cx + C',$$

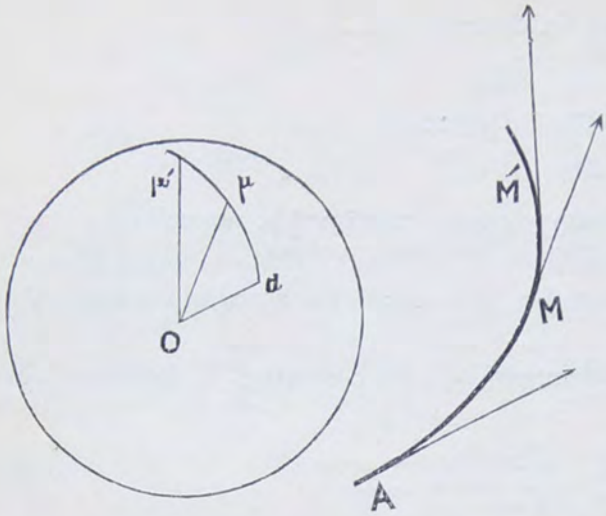
ἤτοι ἡ καμπύλη κεῖται πᾶσα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.

2) Ἡ τομὴ δύο ἐγγυτάτων ἐπιπέδων, ὅταν τὰ δύο σημεῖα, καθ' ἃ ἐγγίζουσι τὴν καμπύλην, τείνωσι νὰ συμπέσωσιν εἰς ἓν σημεῖον, τείνει πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο· (ἤτοι τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον στρέφεται περὶ τὴν ἐφαπτομένην, ὅταν τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἐγγίζει τὴν καμπύλην, πάθῃ ἀπειροστήν τινα μετατόπισιν).

Διότι, ἂν ληφθῶσιν ἐπὶ τῆς καμπύλης τέσσαρα σημεῖα πλησίον ἀλλήλων, τὰ M_1, M_2, M_3, M_4, τὰ ἐπίπεδα $M_1 M_2 M_3$ καὶ $M_2 M_3 M_4$ τείνουσι νὰ κατασταθῶσιν ἐγγύτατα ἐπίπεδα τῆς καμπύλης, ἡ δὲ τομὴ αὐτῶν, ἥτις εἶνε ἡ εὐθεῖα $M_2 M_3$, τείνει νὰ κατασταθῇ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν τῇ γεωμετρικῇ ταύτῃ ἀποδείξει θεωρεῖται κυρίως ἡ καμπύλη ὡς ὅριον πολυγωνικῆς τεθλασμένης γραμμῆς. Αἱ ἐπὶ τῆς ἀρχῆς ταύτης στηριζόμεναι ἀποδείξεις δὲν εἶνε μὲν ἀκριβεῖς ὡς αἱ ἀναλυτικαί, ἔχουσιν ὅμως τὸ πλεονέκτημα, ὅτι καθιστῶσι σαφέστερα τὰ θεωρήματα τῆς θέσεως, ἐνίοτε δὲ εἶνε καὶ συντομώτεραι.

Περὶ τῆς ἀκτῖνος καμπυλότητος.



61. Ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου σφαίρας ἐχούσης ἀκτῖνα τὴν μονάδα τοῦ μήκους ἄγωνται ἀκτῖνες παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι πρὸς τὰς ἐφαπτομένας οἱασδήποτε καμπύλης, λαμβάνηται δὲ ἡ φορὰ ἑκάστης ἐφαπτομένης, πρὸς ὃ μέρος αὐξάνει τὸ τόξον, προκύπτει σφαιρική τις καμπύλη ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τὴν δοθεῖσαν, ἥτις λέγεται *σφαιρικὴ δείκτρια* αὐτῆς· καὶ ἕκαστον μὲν τόξον τῆς σφαιρικῆς ταύτης καμπύλης, οἷον τὸ αμ, λέγεται *καμπυλότης* τοῦ ἀντιστοιχοῦντος τόξου τῆς δοθείσης, ἤτοι τοῦ ΑΜ· ὁ δὲ λόγος τῶν δύο τόξων $\frac{\alpha\mu}{AM}$ λέγεται *μέση καμπυλότης* τοῦ τόξου ΑΜ· καὶ τέλος τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ἡ μέση καμπυλότης τόξου τινὸς ἀρχομένου ἀπὸ τοῦ Μ, οἷον τοῦ ΜΜ′, ὅταν τὸ τόξον τοῦτο τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, λέγεται *καμπυλότης* τῆς καμπύλης, *εἰς τὸ σημεῖον Μ.*

Ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον μ λέγεται ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, ὅστις ἔχει πανταχοῦ αὐτοῦ καμπυλύτητα ἴσην πρὸς τὴν καμπυλότητα, ἣν ἔχει ἡ καμπύλη εἰς τὸ σημεῖον Μ· ἑπομένως, ἐὰν ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος παριστᾶται διὰ τοῦ ϱ, ἡ καμπυλότης θὰ εἶνε $\frac{1}{\varrho}$· καὶ κατ' ἀκολουθίαν θὰ εἶνε συμφώνως τῷ ὁρισμῷ

$$\frac{1}{\varrho} = \text{ὅρ}\ \frac{\mu\mu'}{MM'}.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν ἡ αὔξησις Δs ($=$ΜΜ′) τοῦ τόξου ΑΜ ($=s$) γίνηται ἀπειροστόν, ἡ γωνία τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ (τοῦτ' ἔστι τῶν παραλλήλων πρὸς αὐτὰς ἀκτίνων Ομ, Ομ′) γίνεται ἀπειροστὸν ἰσοδύναμον πρὸς τὴν ἀντιστοιχοῦσαν αὔξησιν $\Delta\sigma$ ($=$μμ′) τοῦ τόξου αμ ($=\sigma$) τῆς σφαιρικῆς δεικτρίας. Διότι ἡ γωνία μομ′ μετρεῖται ὑπὸ τοῦ τόξου τοῦ μεγίστου κύκλου, ὅστις διέρχεται διὰ τῶν σημείων μ καὶ μ′· τὸ τόξον δὲ τοῦτο τοῦ μεγίστου κύκλου καὶ τὸ τόξον μμ′ ἤτοι $\Delta\sigma$ τῆς σφαιρικῆς δεικτρίας ἔχουσι τὴν αὐτὴν χορδὴν μμ′ καὶ κατ' ἀκολουθίαν γίνονται ἀπειροστὰ ἰσοδύναμα. Διὰ ταῦτα τὸ τόξον αμ μετρεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπειροστῶν γωνιῶν, ἃς ἔγραψεν ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου ΑΜ κατὰ τὴν μετάβασιν ἀπὸ τοῦ Α εἰς τὸ Μ (ἐδ. 12). Καὶ τὸ πρωτεῦον μέρος τοῦ $\Delta\sigma$, ἤτοι τὸ $d\sigma$ (τὸ διαφορικὸν τῆς καμπυλότητος σ) μετρεῖ ὡς ἔγγιστα τὴν γωνίαν τῶν δύο ἐφαπτομένων τῆς καμπύλης κατὰ τὰ ἄκρα τοῦ ἀπειροστοῦ τόξου ΜΜ'· διὰ τοῦτο δὲ λέγεται τὸ $d\sigma$ *γωνία συνεπαφῆς.*

Ἐὰν ἡ καμπύλη εἶνε ἐπίπεδος, ἡ ἀντίστοιχος σφαιρικὴ καμπύλη αμ εἶνε τόξον μεγίστου κύκλου καὶ οἱ προηγούμενοι ὁρισμοὶ συμπίπτουσι τοῖς περὶ τῶν ἐπιπέδων καμπύλων (σελ. 22) δοθεῖσιν.

62. Ἡ καμπυλότης πάσης καμπύλης εἰς δοθὲν σημεῖον Μ (ἑπομένως καὶ ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος) ἐκφράζεται διὰ τῶν διαφορικῶν τῶν συντεταγμένων τοῦ Μ ὡς ἑξῆς.

Ἐν πρώτοις εὕρομεν $\dfrac{1}{\varrho} = \text{ορ}\, \dfrac{\mu\mu'}{MM'}.$

Ἐπειδὴ δὲ τὰ τόξα μμ' καὶ ΜΜ' δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς ἀντίστοιχοι αὐξήσεις τῶν τόξων αμ καὶ ΑΜ, ὧν τὰ μήκη παριστῶμεν διὰ $\sigma(=\alpha\mu)$ καὶ $s(=AM)$, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὴν προηγουμένην ἰσότητα ὡς ἑξῆς

$$\frac{1}{\varrho} = \text{ὅρ}\, \frac{\Delta\sigma}{\Delta s},$$

ἄρα
$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\sigma}{ds}. \tag{1}$$

διότι τὸ τόξον σ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς συνάρτησις τοῦ s· διότι πρὸς ἑκάστην τιμὴν τοῦ s ἀντιστοιχεῖ μία ὡρισμένη τιμὴ τοῦ σ.

Ἂς ληφθῇ νῦν ὡς κέντρον τῆς σφαίρας ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων· τότε αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου μ (τῆς σφαιρικῆς δεικτρίας), ὅπερ ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὸ σημεῖον Μ (τῆς δοθείσης καμπύλης), θὰ εἶναι τὰ συνημίτονα τῶν γωνιῶν, ἃς ἡ ἐφαπτομένη τοῦ Μ σχηματίζει πρὸς τοὺς ἄξονας, ἤτοι τὰ α, β, γ· κατ' ἀκολουθίαν θὰ εἶνε

$$d\sigma = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}.$$

ἄρα
$$\frac{1}{\varrho} = \sqrt{\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{ds}\right)^2}$$

ἢ
$$\frac{1}{\varrho} = \sqrt{\left\{\frac{d\left(\dfrac{dx}{ds}\right)}{ds}\right\}^2 + \left\{\frac{d\left(\dfrac{dy}{ds}\right)}{ds}\right\}^2 + \left\{\frac{d\left(\dfrac{dz}{ds}\right)}{ds}\right\}^2}. \tag{2}$$

λαμβάνοντες δ' ὑπ' ὄψιν τοὺς ἐν τῷ ἐδαφίῳ 56 εὑρεθέντας τύπους, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὴν τιμὴν τοῦ $\frac{1}{\varrho}$ καὶ ὡς ἑξῆς

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\Theta}{ds^3} \tag{3}$$

τοῦτ' ἔστιν

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} dz & dx \\ d^2z & d^2x \end{vmatrix}^2}}{ds^3}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁ τύπος (1) παρέχει τὴν ἀκτῖνα ϱ θετικήν· διότι τὰ τόξα σ καὶ s αὐξάνουσιν ἀμφότερα ἢ ἐλαττοῦνται ἀμφότερα· εἰς δὲ τὸν τύπον (2) πρέπει νὰ λαμβάνηται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα μετὰ τοῦ θετικοῦ σημείου.

Παρατήρησις. Ἔχοντες ὑπ' ὄψει τὴν ἐξίσωσιν (3) δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὰ συνημίτονα τῆς πρώτης καθέτου (σελ. 110) ὡς ἑξῆς

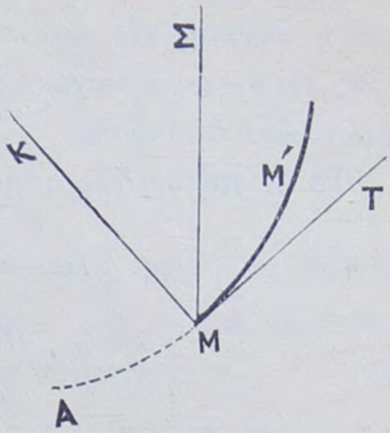
$$\xi = \varrho \frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds}, \quad \eta = \varrho \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds}, \quad \zeta = \varrho \frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds} \tag{4}$$

Περὶ τῶν θετικῶν μερῶν τῶν τριῶν ἀρχικῶν εὐθειῶν εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς καμπύλης.

63. Ἐὰν ἐπὶ τῆς καμπύλης ὁρισθῇ ἡ φορά, καθ' ἣν αὐξάνει τὸ τόξον s, καὶ ληφθῇ ἀπὸ τοῦ Μ τόξον τι ΜΜ′ ἱκανῶς μικρὸν καὶ πρὸς τὰ αὐξάνοντα τόξα, τὸ τόξον τοῦτο ΜΜ′ κεῖται ἐν μιᾷ τῶν ὀκτὼ στερεῶν γωνιῶν, ἅςτινας σχηματίζουσιν αἱ τρεῖς ἀρχικαὶ εὐθεῖαι τῆς καμπύλης εἰς τὸ Μ· τὰς ἀκμὰς ΜΤ, ΜΚ, ΜΣ τῆς στερεᾶς ταύτης γωνίας καλοῦμεν *θετικὰ* μέρη τῶν τριῶν ἀρχικῶν εὐθειῶν τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον Μ.

Ἐπειδὴ ἡ χορδὴ ΜΜ′ κεῖται ἐν τῇ στερεᾷ γωνίᾳ ΜΤΚΣ, θὰ σχηματίζῃ μεθ' ἑκάστης ἐκ τῶν ἀκμῶν αὐτῆς ὀξεῖαν γωνίαν· ἂν λοιπὸν παριστῶμεν διὰ τῶν α, β, γ τὰ συνημίτονα τοῦ θετικοῦ μέρους τῆς ἐφαπτομένης, διὰ ξ, η, ζ τὰ τοῦ θετικοῦ μέρους τῆς πρώτης καθέτου καὶ διὰ λ, μ, ν τὰ τοῦ θετικοῦ μέρους τῆς ὀρθίας καθέτου, αἱ τρεῖς παραστάσεις

$$\begin{aligned} &\alpha\Delta x+\beta\Delta y+\gamma\Delta z \\ &\xi\Delta x+\eta\Delta y+\zeta\Delta z \\ &\lambda\Delta x+\mu\Delta y+\nu\Delta z \end{aligned} \qquad (1)$$



θὰ εἶνε θετικαί· διότι, διαιρούμεναι διὰ τοῦ μήκους τῆς χορδῆς, δίδουσι τὰ συνημίτονα αὐτῆς πρὸς τὰς εὐθείας ΜΤ, ΜΚ, ΜΕ.

Ἐπειδὴ δὲ εἶνε

$$\Delta x=\frac{dx}{ds}\Delta s+\frac{d^2x}{ds^2}\frac{\Delta s^2}{2}+\dots \qquad (2)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

τὸ μὲν πρῶτον ἄθροισμα γίνεται

$$\Delta s.\left[\alpha\frac{dx}{ds}+\beta\frac{dy}{ds}+\gamma\frac{dz}{ds}\right]+\dots$$

εἶνε δὲ εὔκολον νὰ ἴδῃ τις, ὅτι αἱ τιμαὶ

$$\alpha=\frac{dx}{ds},\quad \beta=\frac{dy}{ds},\quad \gamma=\frac{dz}{ds} \qquad (3)$$

καθιστῶσι θετικὸν τὸ ἄθροισμα καὶ ἑπομένως εἶνε τὰ συνημίτονα τοῦ θετικοῦ μέρους τῆς ἐφαπτομένης (Ι σελ. 152).

Τὸ δὲ δεύτερον ἄθροισμα γίνεται

$$\frac{\Delta s^2}{2}\left[\xi\frac{d\alpha}{ds}+\eta\frac{d\beta}{ds}+\zeta\frac{d\gamma}{ds}\right]+\dots$$

εἶνε δὲ εὔκολον νὰ ἴδῃ τις, ὅτι αἱ προηγουμένως εὑρεθεῖσαι τιμαὶ τῶν ξ, η, ζ, ἤτοι αἱ τιμαὶ

$$\xi=\varrho\frac{d\alpha}{ds},\quad \eta=\varrho\frac{d\beta}{ds},\quad \zeta=\varrho\frac{d\gamma}{ds}, \qquad (4)$$

καθιστῶσι τὸ ἄθροισμα τοῦτο θετικόν· ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν εἰς αὐτὸ ἀντὶ τῶν παραγώγων $\frac{d\alpha}{ds}$, $\frac{d\beta}{ds}$, $\frac{d\gamma}{ds}$ τὰς τιμὰς αὐτῶν $\frac{\xi}{\varrho}$, $\frac{\eta}{\varrho}$, $\frac{\zeta}{\varrho}$, διότι τότε τὸ ῥηθὲν ἄθροισμα γίνεται

$$\frac{\Delta s^2}{2\varrho} \quad \text{ἤτοι θετικόν.}$$

Ἐκ τῶν τιμῶν τῶν συνημιτόνων ξ, η, ζ βλέπομεν ἀμέσως, ὅτι ἡ πρώτη κάθετος τῆς καμπύλης καὶ ἡ ἐφαπτομένη τῆς σφαιρικῆς δεικτρίας εἰς τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον εἶνε παράλληλοι καὶ τὰ θετικὰ μέρη αὐτῶν εἶνε ὁμόρροπα.

Τὸ δὲ τρίτον ἄθροισμα γίνεται

$$\Delta s\,.\sum\lambda\alpha + \frac{\Delta s^2}{2\varrho}\sum\lambda\xi + \frac{\Delta s^3}{6}\sum\lambda\,\frac{d^3x}{ds^3} + \cdot$$

ἤτοι
$$\frac{\Delta s^3}{6}\left[\lambda\,\frac{d^3x}{ds^3} + \mu\,\frac{d^3y}{ds^3} + \nu\,\frac{d^3z}{ds^3}\right] + \ldots \qquad (\alpha)$$

εὕρομεν δὲ ἤδη, ὅτι τὸ ἓν τῶν μερῶν τῆς ὀρθίας καθέτου ἔχει συνημίτονα τὰ ἑξῆς

$$(5) \qquad \frac{1}{\Theta}\begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix}, \quad \frac{1}{\Theta}\begin{vmatrix} dz & dx \\ d^2z & d^2x \end{vmatrix}, \quad \frac{1}{\Theta}\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}$$

ἢ (σ. 114)
$$\varrho\begin{vmatrix} \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\[1ex] \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \end{vmatrix}, \quad \varrho\begin{vmatrix} \frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds} \\[1ex] \frac{d^2z}{ds^2} & \frac{d^2x}{ds^2} \end{vmatrix}, \quad \varrho\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \\[1ex] \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} \end{vmatrix}.$$

Ἐὰν δὲ τὰ συνημίτονα ταῦτα θέσωμεν ἀντὶ τῶν λ, μ, ν εἰς τὴν παράστασιν (σ), εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον

$$\varrho\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\[1ex] \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \\[1ex] \frac{d^3x}{ds^3} & \frac{d^3y}{ds^3} & \frac{d^3z}{ds^3} \end{vmatrix} \frac{\Delta s^3}{6} + \ldots,$$

ὅπερ ἔχει τὸ σημεῖον τῆς ὁριζούσης ταύτης, ἣν συντομίας χάριν παριστῶμεν διὰ τοῦ *Δ*· ἂν λοιπὸν ἡ ὁρίζουσα *Δ* εἶνε θετική, τὰ συνημίτονα (5) εἶνε τοῦ θετικοῦ μέρους τῆς ὀρθίας καθέτου, ἂν δὲ ἀρνητική, τὰ αὐτὰ συνημίτονα (5) εἶνε τοῦ ἀρνητικοῦ μέρους. Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι τὰ συνημίτονα τοῦ θετικοῦ μέρους τῆς ὀρθίας καθέτου θὰ παρέχωσιν οἱ τύποι

$$\lambda = \varepsilon\varrho.\left(\frac{dy}{ds}.\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}.\frac{d^2y}{ds^2}\right)$$

$$\mu = \varepsilon\varrho.\left(\frac{dz}{ds}.\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}.\frac{d^2z}{ds^2}\right) \qquad \varepsilon^2 = 1$$

$$\nu = \varepsilon\varrho.\left(\frac{dx}{ds}.\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}.\frac{d^2x}{ds^2}\right).$$

ἐὰν τὸ ε λαμβάνηται ὁμοειδὲς τῇ ὁριζούσῃ Δ.

Παρατήρησις. Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὰς τιμὰς τῶν συνημιτόνων α, β, γ, ξ, η, ζ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὰς τιμὰς τῶν συνημιτόνων λ, μ, ν τοῦ θετικοῦ μέρους τῆς ὀρθίας καθέτου ὡς ἑξῆς

$$\lambda = \varepsilon(\beta\zeta - \gamma\eta), \quad \mu = \varepsilon(\gamma\xi - \alpha\zeta) \quad \nu = \varepsilon(\alpha\eta - \beta\xi).$$

Ἐκ δὲ τῶν τιμῶν τούτων συνάγεται, ὅτι ἡ ὁρίζουσα τῶν συνημιτόνων τῶν τριῶν ἀρχικῶν εὐθειῶν

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}$$

εἶνε ἴση τῷ ε, τοῦτ' ἔστιν ἔχει τὸ σημεῖον τῆς ὁριζούσης Δ· ἑπομένως ἡ τάξις τῆς στερεᾶς γωνίας ΜΤΚΣ θὰ εἶνε ὁμοία μὲν πρὸς τὴν τάξιν τῶν ἀξόνων ΟΧΨΖ, ἂν Δ εἶνε θετικόν, ἀνομοία ὅμως, ἂν Δ εἶνε ἀρνητικόν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Μεταχειριζόμενοι τὰ συνημίτονα τῶν τριῶν ἀρχικῶν εὐθειῶν δέον νὰ ἔχωμεν πάντοτε ὑπ' ὄψιν τὰς μεταξὺ αὐτῶν ὑπαρχούσας ἓξ σχέσεις

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1 \qquad \alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta=0$$
$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1 \qquad \xi\lambda+\eta\mu+\zeta\nu=0$$
$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1 \qquad \lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0,$$

ἐξ ὧν προκύπτουσι πᾶσαι αἱ λοιπαί.

Περὶ τοῦ κέντρου τῆς καμπυλότητος.

64. Ἐὰν ὁ κύκλος τῆς καμπυλότητος τοῦ σημείου Μ γραφῇ ἐπὶ τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο καὶ οὕτως, ὥστε νὰ ἐφάπτηται τῆς καμπύλης κατὰ τὸ Μ, νὰ ἔχῃ δὲ τὸ κέντρον του ἐπὶ τοῦ θετικοῦ μέρους τῆς πρώτης καθέτου, τὸ μὲν κέντρον

τοῦ κύκλου λέγεται ἐν τῇ θέσει ταύτῃ *κέντρον καμπυλότητος*, ἡ δὲ ἐξ αὐτοῦ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον ἠγμένη λέγεται *ἄξων τῆς καμπυλότητος*, ἢ *πολικὴ εὐθεῖα* τοῦ σημείου Μ.

Αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου τῆς καμπυλότητος εἶνε κατὰ ταῦτα

$$x_1 = x + \varrho\xi \qquad y_1 = y + \varrho\eta \qquad z_1 = z + \varrho\zeta,$$

διότι κεῖται ἐπὶ τοῦ θετικοῦ μέρους τῆς πρώτης καθέτου εἰς ἀπόστασιν ϱ ἀπὸ τοῦ σημείου Μ· τὰς συντεταγμένας ταύτας δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ ὡς ἑξῆς

$$x_1 = x + \varrho^2 \frac{d^2x}{ds^2} \qquad y_1 = y + \varrho^2 \frac{d^2y}{ds^2} \qquad z_1 = z + \varrho^2 \frac{d^2z}{ds^2},$$

ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὰς τιμὰς τῶν συνημιτόνων ξ, η, ζ (σελ. 115).

Θετικὸν μέρος τοῦ ἄξονος τῆς καμπυλότητος λέγεται τὸ ὁμόρροπον πρὸς τὸ θετικὸν μέρος τῆς ὀρθίας καθέτου.

65. *Ὁ ἄξων τῆς καμπυλότητος, ὁ πρὸς τὸ σημεῖον Μ τῆς καμπύλης ἀντιστοιχῶν, εἶνε τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ἡ τομὴ τοῦ καθέτου πρὸς τὴν καμπύλην ἐπιπέδου εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Μ καὶ τοῦ καθέτου ἐπιπέδου εἰς ἄλλο σημεῖον Μ', ὅταν τὸ Μ' τείνῃ νὰ συμπέσῃ τῷ Μ.*

Διότι ἔστωσαν συντεταγμέναι μὲν τοῦ Μ αἱ x, y, z, συνημίτονα δὲ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ Μ τὰ α, β, γ· ἡ ἐξίσωσις τοῦ καθέτου ἐπιπέδου εἰς τὸ Μ εἶνε

$$(X-x)\,\alpha + (Y-y)\,\beta + (Z-z)\,\gamma = 0\cdot \qquad (1)$$

ταύτης δὲ τῆς ἐξισώσεως τὸ πρῶτον μέλος, συντομίας χάριν, παριστῶμεν διὰ τοῦ V· ὥστε ἡ ἐξίσωσις τοῦ ῥηθέντος ἐπιπέδου γράφεται ὡς ἑξῆς· $V = 0$.

Ἵνα εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ καθέτου ἐπιπέδου εἰς τὸ σημεῖον Μ', πρέπει εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) νὰ θέσωμεν ἀντὶ τῶν x, y, z καὶ α, β, γ, τὰς νέας τιμὰς αὐτῶν, τὰς εἰς τὸ σημεῖον Μ ἀντιστοιχούσας, νὰ διατηρήσωμεν δὲ τὰ X, Y, Z ἀμετάβλητα. Πρὸς τοῦτο νοοῦμεν τὴν μεταβλητήν, ἀφ' ἧς ἐξαρτῶνται αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων τῆς καμπύλης, ἥτις ἔστω ἡ t, αὐξανομένην κατὰ Δt (κατὰ τὴν μετάβασιν ἀπὸ τοῦ Μ εἰς τὸ Μ')· τότε αἱ συντεταγμέναι ἀπὸ x, y, z θὰ γίνωσι $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ καὶ τὰ συνημίτονα α, β, γ θὰ γίνωσιν $\alpha+\Delta\alpha$, $\beta+\Delta\beta$, $\gamma+\Delta\gamma$· ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τοῦ καθέτου ἐπιπέδου εἰς τὸ Μ, θὰ εἶνε

$$V + \Delta V = 0,$$

ἔνθα ΔV δηλοῖ τὴν αὔξησιν τοῦ V, ὅταν τοῦτο θεωρῆται ὡς συνάρτησις τοῦ t (τὰ δὲ X, Y, Z μένωσι σταθερά).

Κατὰ ταῦτα ἡ τομὴ τῶν δύο καθέτων ἐπιπέδων θὰ παριστᾶται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων

$$V=0 \quad \text{καὶ} \quad V+\Delta V=0$$

ἢ ὑπὸ τῶν ἑξῆς ἰσοδυνάμων πρὸς αὐτὰς

$$V=0 \quad \text{καὶ} \quad \frac{\Delta V}{\Delta t}=0.$$

Ἐὰν δὲ τὸ Μ΄ τείνῃ νὰ συμπέσῃ τῷ Μ, αἱ ἐξισώσεις τῆς τομῆς γίνονται

$$V=0 \quad \text{καὶ} \quad \frac{dV}{dt}=0 \tag{2}$$

ἤτοι $\qquad (X-x).\,\alpha+(Y-y).\beta+(Z-z).\,\gamma=0$

καὶ $\qquad (X-x)d\alpha+(Y-y)d\beta+(Z-z)d\gamma=\alpha dx+\beta dy+\gamma dz$

καὶ ἐπειδὴ $\qquad dx=\alpha ds,\ dy=\beta ds,\ dz=\gamma ds$

καὶ $\qquad d\alpha=\frac{\xi}{\varrho}ds, \quad d\beta=\frac{\eta}{\varrho}ds, \quad d\gamma=\frac{\zeta}{\varrho}ds,$

αἱ ἐξισώσεις (2) γίνονται

$$(X-x)\ \alpha+(Y-y)\ \beta+(Z-z)\ \gamma=0$$
$$(X-x)\ \xi+(Y-y)\ \eta+(Z-z)\ \zeta=\varrho\cdot$$

καὶ ἡ μὲν πρώτη δηλοῖ ἐξ ἀρχῆς τὸ πρὸς τὴν καμπύλην εἰς τὸ σημεῖον Μ κάθετον ἐπίπεδον, ἡ δὲ δευτέρα δηλοῖ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν πρώτην κάθετον τῆς καμπύλης (ἥτις ἔχει τὰ συνημίτονα ξ, η, ζ) καὶ ἀπέχον ἀπὸ τοῦ σημείου Μ ἀπόστασιν ἴσην τῇ ἀκτῖνι ϱ· ἑπομένως διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου τῆς καμπυλότητος· ἐπειδὴ δὲ ἀμφότερα τὰ ἐπίπεδα ταῦτα εἶνε κάθετα ἐπὶ τὸ ἐγγύτατον τῆς καμπύλης ἐπίπεδον εἰς τὸ Μ, καὶ ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν (πρὸς ἣν προσεγγίζει ἡ τομὴ τῶν δύο καθέτων ἐπιπέδων) εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον· ἐπειδὴ δὲ διέρχεται ἡ τομὴ καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς καμπυλότητος, συνάγεται, ὅτι συμπίπτει τῷ ἄξονι τῆς καμπυλότητος.

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Τὸ κέντρον τῆς καμπυλότητος τοῦ σημείου Μ τῆς καμπύλης εἶνε τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ἡ τομὴ τοῦ ἐγγυτάτου πρὸς αὐτὴν ἐπιπέδου εἰς τὸ σημεῖον Μ καὶ δύο ἐπιπέδων καθέτων πρὸς αὐτήν, ὧν* *τὸ μὲν ἓν εἰς τὸ M, τὸ δὲ ἄλλο εἰς ἄλλο τι σημεῖον M', ὅταν τοῦτο τείνῃ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τὸ M.*

Καὶ ἐπειδὴ τομὴ τῶν δύο πρώτων ἐπιπέδων εἶνε ἡ πρώτη κάθετος, δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὴν αὐτὴν πρότασιν καὶ ὡς ἑξῆς.

Τὸ κέντρον τῆς καμπυλότητος τοῦ σημείου M εἶνε τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ἡ τομὴ τῆς πρώτης καθέτου εἰς τὸ M καὶ τοῦ καθέτου πρὸς τὴν καμπύλην ἐπιπέδου εἰς τὸ M', ὅταν τὸ M' τείνῃ νὰ συμπέσῃ τῷ M.

Ἢ καὶ ὡς ἑξῆς.

Τὸ κέντρον τῆς καμπυλότητος εἶνε τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ἡ τομὴ τῆς πρώτης καθέτου εἰς τὸ M καὶ μιᾶς ἐκ τῶν καθέτων πρὸς τὴν καμπύλην εἴς τι σημεῖον M', ὅταν τὸ M' τείνῃ νὰ συμπέσῃ τῷ M.

66. Περὶ τοῦ ἄξονος τῆς καμπυλότητος ἀποδεικνύεται πρὸς τούτοις καὶ τὸ ἑξῆς θεώρημα.

Ὁ ἄξων τῆς καμπυλότητος εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον M τῆς καμπύλης εἶνε τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ἡ τομὴ δύο ἐπιπέδων καθέτων εἰς τὰ μέσα δύο χορδῶν ἀρχομένων ἐκ τοῦ M, ὅταν αἱ χορδαὶ αὗται τείνωσι πρὸς τὸ μηδέν.

Ἔστωσαν x, y, z αἱ συντεταγμέναι τοῦ M

καὶ $x+\Delta x,\quad y+\Delta y,\quad z+\Delta z$

αἱ συντεταγμέναι τοῦ M' καὶ $x+\Delta' x,\ y+\Delta' y,\ z+\Delta' z$

αἱ τοῦ M''. Αἱ συντεταγμέναι τοῦ μέσου I τῆς χορδῆς MM' θὰ εἶνε

$$x+\frac{1}{2}\Delta x,\qquad y+\frac{1}{2}\Delta y,\qquad z+\frac{1}{2}\Delta z,$$

ἡ δὲ ἐξίσωσις τοῦ ἐπιπέδου, ὅπερ ἄγεται διὰ τοῦ I κάθετον πρὸς τὴν MM', θὰ εἶνε

$$\sum\left(X-x-\frac{1}{2}\Delta x\right)\Delta x=0, \tag{1}$$

διότι αἱ ἐξισώσεις τῆς χορδῆς MM' εἶνε

$$\frac{X-x}{\Delta x}=\frac{Y-y}{\Delta y}=\frac{Z-z}{\Delta z}.$$

Θεωρήσωμεν νῦν τὰς συντεταγμένας x, y, z ὡς συναρτήσεις τοῦ τόξου s (οὗτινος ἀρχὴ ἔστω οἱονδήποτε σημεῖον τῆς καμπύλης καὶ τέλος τὸ M)· τότε εἶνε

$$\Delta x=\frac{dx}{ds}.\ \Delta s+\frac{d^2x}{ds^2}.\ \frac{\Delta s^2}{2}+\ldots$$

ἢ
$$\Delta x = \alpha\Delta s + \frac{\xi}{\varrho}\frac{\Delta s^2}{2} + \ldots$$

ὁμοίως
$$\Delta y = \beta\Delta s + \frac{\eta}{\varrho}\frac{\Delta s^2}{2} + \ldots$$

$$\Delta z = \gamma\Delta s + \frac{\zeta}{\varrho}\frac{\Delta s^2}{2} + \ldots,$$

ὅθεν ἡ ἐξίσωσις (1) τοῦ ἐπιπέδου γίνεται

$$\sum\left\{(X-x)\left(\alpha\Delta s + \frac{\xi}{\varrho}\frac{\Delta s^2}{2} + \ldots\right) - \frac{1}{2}\left(\alpha\Delta s + \frac{\xi}{\varrho}\frac{\Delta s^2}{2} + \ldots\right)^2\right\} = 0$$

καὶ διατασσομένη κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ Δs, γράφεται ὡς ἑξῆς

$$\Delta s\left\{\sum(X-x)\alpha\right\} + \frac{\Delta s^2}{2\varrho}\left\{\sum(X-x)\,\xi-\varrho\right\} + \ldots = 0.$$

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου εὑρίσκεται καὶ ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐπιπέδου, ὅπερ ἄγεται ἐκ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς ΜΜ″ κάθετον πρὸς αὐτήν· εἶνε δὲ αὕτη

$$\Delta' s\left\{\sum(X-x)\alpha\right\} + \frac{\Delta' s^2}{2\varrho}\left\{\sum(X-x)\,\xi-\varrho\right\} + \ldots = 0$$

Ἑπομένως ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων τούτων παρίσταται διὰ τῶν ἐξισώσεων

$$\begin{aligned} &\sum(X-x)\alpha + \frac{\Delta s}{2\varrho}\left\{\sum(X-x)\xi-\varrho\right\} + \ldots = 0 \\ &\sum(X-x)\alpha + \frac{\Delta' s}{2\varrho}\left\{\sum(X-x)\,\xi-\varrho\right\} + \ldots = 0, \end{aligned} \qquad (2)$$

ἢ καὶ διὰ τῶν ἑξῆς

$$\sum(X-x)\alpha + \frac{\Delta s}{2\varrho}\left\{\sum(X-x)\xi-\varrho\right\} + \ldots = 0$$

$$\frac{1}{2\varrho}\left\{\left\{\sum(X-x)\xi-\varrho\right\} + (\Delta s+\Delta' s)\left\{\ldots\right\}\right\} = 0\cdot$$

ἡ δευτέρα τῶν ἐξισώσεων τούτων προκύπτει, ἐὰν ἀφαιρεθῶσιν αἱ δύο ἐξισώσεις (2) καὶ διαιρεθῇ ἡ προκύπτουσα διὰ $\Delta s - \Delta' s$.

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι, ὅταν τὰ σημεῖα Μ′ καὶ Μ″ τείνωσι νὰ συμπέσωσιν εἰς τὸ Μ, αἱ χορδαὶ ΜΜ′, ΜΜ″ τείνουσι πρὸς τὸ μηδὲν καὶ τὰ δύο ἐπίπεδα τείνουσι νὰ συμπέσωσιν, ἡ δὲ τομὴ αὐτῶν τείνει νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν, ἥτις ἔχει τὰς ἐξισώσεις

$$\sum(X-x)\alpha = 0,$$
$$\sum(X-x)\xi = \varrho \qquad (3)$$

αὗται δὲ εἶνε, ὡς προηγουμένως εὑρέθη, αἱ ἐξισώσεις τοῦ ἄξονος τῆς καμπυλότητος.

Παρατήρησις. Ἐπειδὴ πᾶσα σφαιρικὴ ἐπιφάνεια διὰ τῶν τριῶν σημείων M, M′, M″ διερχομένη ἔχει τὸ κέντρον αὑτῆς ἐπὶ τῆς εὐθείας, καθ' ἣν τέμνουσιν ἄλληλα τὰ δύο ἐπίπεδα τὰ ἐκ τῶν μέσων τῶν χορδῶν MM′, MM″ ἀγόμενα καὶ κάθετα πρὸς αὐτάς, συμπεραίνομεν, ὅτι

Ὁ ἄξων τῆς καμπυλότητος εἶνε ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρικῶν ἐπιφανειῶν, αἵτινες διέρχονται διὰ τριῶν σημείων τῆς καμπύλης συμπιπτόντων εἰς τὸ M.

Περὶ τῆς δευτέρας καμπυλότητος ἢ στρέψεως.

67. Αἱ στρεβλαὶ καμπύλαι ἐμφανίζουσι καὶ ἄλλο τι σύμπτωμα ὅπερ ἐν ταῖς ἐπιπέδοις δὲν ὑπάρχει· εἶνε δὲ τοῦτο ἡ βαθμιαία μεταβολὴ τοῦ ἐπιπέδου, ἐφ' οὗ ὡς ἔγγιστα κεῖνται τὰ ἐλάχιστα τόξα τῆς καμπύλης· τοῦτο θεωρεῖται ὡς νέον εἶδος καμπυλότητος καὶ λέγεται *στρέψις* ἢ *δευτέρα καμπυλότης.* Τὸ μέτρον τῆς στρέψεως ἀπειροστοῦ, τινος τόξου παρέχει ἡ γωνία τῶν ἐγγυτάτων ἐπιπέδων τῆς καμπύλης, ἤτοι ἡ γωνία τῶν ὀρθίων καθέτων εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ· κατ' ἀκολουθίαν, ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου σφαίρας ἐχούσης ἀκτῖνα τὴν μονάδα τοῦ μήκους ἄγωνται ἀκτῖνες παράλληλοι πρὸς τὰς ὀρθίας καθέτους οἱουδήποτε τόξου AM καὶ ὁμόρροποι πρὸς τὰ θετικὰ μέρη αὐτῶν, προκύπτει σφαιρικὴ καμπύλη am, τῆς ὁποίας τὸ τόξον τ μετρεῖ τὴν στρέψιν τοῦ τόξου AM τῆς καμπύλης (παράβλ. ἐδ. 61 Σημ.)· διὸ καὶ λέγεται ἡ σφαιρικὴ αὕτη καμπύλη *δείκτρια τῆς στρέψεως.*

Τὸ μὲν μῆκος τ τοῦ τόξου am τῆς δεικτρίας λέγεται *στρέψις* τοῦ τόξου AM, ὁ δὲ λόγος τῶν δύο τόξων $\frac{am}{\mathrm{AM}}$ ἢ $\frac{\tau}{s}$ λέγεται *μέση στρέψις* τοῦ τόξου AM· *στρέψις* δὲ *εἰς ἓν οἱονδήποτε σημεῖον* M τῆς καμπύλης λέγεται τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ἡ μέση στρέψις τόξου τινὸς ἀρχομένου ἀπὸ τοῦ Μ, οἷον τοῦ ΜΜ΄, ὅταν τὸ τόξον τοῦτο τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν.

Ἐὰν τὸ τόξον ΜΜ΄ θεωρηθῇ ὡς αὔξησις τοῦ ΑΜ ($=s$) καὶ παρασταθῇ διὰ τοῦ Δs, καὶ τὸ ἀντίστοιχον τόξον τῆς δεικτρίας, τὸ mm', θὰ εἶνε αὔξησις τοῦ τόξου am ($=\tau$) καὶ θὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ $\Delta\tau$· τὸ δὲ ὅριον τοῦ λόγου $\dfrac{\Delta\tau}{\Delta s}$ εἶνε προφανῶς $\dfrac{d\tau}{ds}$· (1)

τοῦτο δὲ εἶνε ἡ στρέψις τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον Μ.

Ἀκτὶς στρέψεως λέγεται (κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς πρώτης καμπυλότητος) τὸ ἀντίστροφον τῆς στρέψεως, ἤτοι τὸ πηλίκον $\dfrac{ds}{d\tau}$· παρίσταται δὲ ἡ ἀκτὶς στρέψεως διὰ τοῦ r, ἤτοι τίθεται

$$r=\frac{ds}{d\tau}. \tag{2}$$

68. Ἡ ἀκτὶς στρέψεως εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς καμπύλης δύναται νὰ ἐκφρασθῇ διὰ τῶν διαφορικῶν τῶν συντεταγμένων x, y, z αὐτοῦ. Διότι, ἂν ὡς κέντρον τῆς σφαίρας ληφθῇ ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων, αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου m τῆς δεικτρίας θὰ εἶνε τὰ συνημίτονα λ, μ, ν τῆς ὀρθίας καθέτου καὶ ἑπομένως εἶνε

$$d\tau=\sqrt{d\lambda^2+d\mu^2+d\nu^2}. \tag{3}$$

Πρὸς εὕρεσιν τῶν $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ παρατηροῦμεν, ὅτι εἶνε

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\Sigma\lambda d\lambda=0 \quad (\text{διότι } \Sigma\lambda^2=1)\\ &\Sigma a d\lambda=0 \quad (\text{διότι } \Sigma a d\lambda=-\Sigma\lambda da=-\Sigma\lambda\xi d\sigma=0)\cdot \end{aligned}$$

πρὸς τούτοις εἶνε $\Sigma\xi d\lambda=-\Sigma\lambda d\xi$

καὶ ἂν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸ ἄθροισμα $\Sigma\lambda d\xi$ ἀντὶ τῶν λ, μ, ν τὰς τιμὰς αὐτῶν (σελ. 117) καὶ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν καὶ τὰς τιμὰς τῶν ξ, η, ζ, (σελ. 114), εὑρίσκομεν

$$\Sigma\lambda d\xi=\varepsilon\varrho\Sigma\left[\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right]\left(\varrho\frac{d^3x}{ds^3}ds+\frac{d^2x}{ds^2}d\varrho\right)=$$

$$=\varepsilon\Delta\,.\,\varrho^2 ds, \qquad \text{ἄρα } \Sigma\xi d\lambda=-\varepsilon\varrho^2\,.\,\Delta ds. \tag{5}$$

Ἵνα νῦν λύσωμεν τὰς τρεῖς ἐξισώσεις (4) καὶ (5) πρὸς τὰ διαφορικὰ $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὰς πρῶτον ἐπὶ λ, α, ξ κατὰ σειρὰν καὶ νὰ προσθέσωμεν κατὰ μέλη, ἔπειτα ἐπὶ μ, β, η κτλ. Οὕτως εὑρίσκομεν

$$d\lambda = -\xi . \varrho^2 \varepsilon \Delta ds$$
$$d\mu = -\eta . \varrho^2 \varepsilon \Delta ds$$
$$d\nu = -\zeta . \varrho^2 \varepsilon \Delta ds.$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται $d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2 = d\tau^2 = \varrho^4 \Delta^2 ds^2$

καὶ $d\tau = \varrho^2 \varepsilon \Delta . ds.$

ἑπομένως
$$\left.\begin{aligned} d\lambda &= -\xi d\tau \\ d\mu &= -\eta d\tau \\ d\nu &= -\zeta d\tau. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Ἐπειδὴ $d\tau$ εἶνε θετικόν, διότι τὸ τόξον am τῆς δεικτρίας προβαίνει αὐξανόμενον, ἀνάγκη τὸ ε νὰ εἶνε ὁμόσημον τῇ ὁριζούσῃ Δ. Ἐὰν νῦν διαιρέσωμεν διὰ ds, εὑρίσκομεν

$$\frac{1}{r} = \varepsilon \varrho^2 . \Delta \quad \text{ἢ καὶ} \quad \varepsilon \Delta = \frac{1}{\varrho^2 r}$$

καὶ ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὰς ἤδη γνωστὰς παραστάσεις τῶν ϱ καὶ Δ διὰ τῶν διαφορικῶν τῶν συντεταγμένων, λαμβάνομεν τὸν τύπον

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon . \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} dz & dx \\ d^2z & d^2x \end{vmatrix}^2} \quad (7)$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Ἄξιον παρατηρήσεως εἶνε, ὅτι ἡ ἀκτὶς τῆς στρέψεως εἶνε ῥητὴ συνάρτησις τῶν διαφορικῶν τῶν συντεταγμένων x, y, z.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = 0$$

ἀληθεύῃ εἰς πάντα τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης, θὰ εἶνε $d\tau = 0$ ἐφ' ἁπάσης τῆς καμπύλης· ἄρα ἡ καμπύλη θὰ εἶνε ἐπίπεδος (παράβλ Ἀσκήσεις σελ 110).

Περὶ τῶν διαφορικῶν τῶν συνημιτόνων τῶν τριῶν ἀρχικῶν εὐθειῶν. Τύποι τοῦ Frenet.

69. Οἱ συντελεσταὶ τῆς μεταβάσεως ἀπὸ συστήματος συντεταγμένων ὀρθογωνίων εἰς ἄλλο ὅμοιον, τοῦτ' ἔστι τὰ ἐννέα συνημίτονα

$$\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma'',$$

συνδέονται, ὡς γνωστόν, δι' ἓξ ἐξισώσεων, ἕνεκα τῶν ὁποίων τὰ διαφορικὰ αὐτῶν ἐκφράζονται δι' αὐτῶν τούτων καὶ διὰ τριῶν νέων ποσοτήτων.

Ἐὰν τῷ ὄντι τεθῇ

$$\begin{gathered}\alpha' d\alpha'' + \beta' d\beta'' + \gamma\, d\gamma'' = p \\ \alpha'' d\alpha + \beta'' d\beta + \gamma'' d\gamma = p' \\ \alpha d\alpha' + \beta d\beta' + \gamma d\gamma' = p'',\end{gathered}$$

εὑρίσκομεν ἐκ τῶν ἐξισώσεων

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \quad \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0, \quad \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0$$

διὰ τῆς διαφορίσεως

$$\begin{gathered}\alpha d\alpha + \beta d\beta + \gamma d\gamma = 0 \\ \alpha' d\alpha + \beta' d\beta + \gamma' d\gamma = -p'' \\ \alpha'' d\alpha + \beta'' d\beta + \gamma'' d\gamma = p'\cdot\end{gathered}$$

λύοντες δὲ τὰς ἐξισώσεις ταύτας πρὸς τὰ διαφορικὰ $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ (ἡ δὲ λύσις γίνεται ἁπλούστατα, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν αὐτὰς κατὰ σειρὰν ἐπὶ α, α', α'' καὶ προσθέσωμεν· ἔπειτα ἐπὶ β, β', β'' κτλ.), εὑρίσκομεν

$$d\alpha = p'\alpha'' - p''\alpha', \quad d\beta = p'\beta'' - p''\beta', \quad d\gamma = p'\gamma'' - p''\gamma'$$

Ὁμοίως

$$\begin{aligned} d\alpha' &= p''\alpha - p\alpha'', & d\beta' &= p''\beta - p\beta'', & d\gamma' &= p''\gamma - p\gamma'' \\ d\alpha'' &= p\alpha' - p'\alpha, & d\beta'' &= p\beta' - p'\beta, & d\gamma'' &= p\gamma' - p'\gamma.\end{aligned}$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων ἕπονται καὶ αἱ ἑξῆς

$$\Sigma(d\alpha)^2 = p'^2 + p''^2, \quad \Sigma(d\alpha')^2 = p''^2 + p^2, \quad \Sigma(d\alpha'')^2 = p^2 + p'^2.$$

Τούτων τεθέντων, ἵνα ἐφαρμόσωμεν τὰς ἐξισώσεις ταύτας εἰς τὰ συνημίτονα α, β, γ, ξ, η, ζ, λ, μ, ν τῶν τριῶν ἀρχικῶν εὐθειῶν εἰς τὸ σημεῖον Μ τῆς καμπύλης, ἀνάγκη νὰ ἐνθυμηθῶμεν, ὅτι δι' αὐτὰ εὑρέθη (σελ. 115 καὶ 124)

$$d\alpha = \xi d\sigma, \qquad d\beta = \eta d\sigma, \qquad d\gamma = \zeta d\sigma$$

καὶ $$d\lambda = -\xi d\tau, \qquad d\mu = -\eta d\tau, \qquad d\nu = -\zeta d\tau,$$

κατ' ἀκολουθίαν εἶνε $p = -d\tau$, $p' = 0$, $p'' = -d\sigma$.

Εὑρεθέντων τῶν p, p', p'', αἱ ἐξισώσεις τῶν διαφορικῶν τῶν συνημιτόνων γίνονται

$$\begin{aligned} d\alpha &= \xi d\sigma = \frac{\xi}{\varrho}.\ ds \\ d\beta &= \eta d\sigma = \frac{\eta}{\varrho}.\ ds \\ d\gamma &= \zeta d\sigma = \frac{\zeta}{\varrho}.\ ds \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} d\xi &= -\alpha d\sigma + \lambda d\tau = \left(-\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\lambda}{r}\right) ds \\ d\eta &= -\beta d\sigma + \mu d\tau = \left(-\frac{\beta}{\varrho} + \frac{\mu}{r}\right) ds \\ d\zeta &= -\gamma d\sigma + \nu d\tau = \left(-\frac{\gamma}{\varrho} + \frac{\nu}{r}\right) ds \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} d\lambda &= -\xi d\tau = -\frac{\xi}{r} ds \\ d\mu &= -\eta d\tau = -\frac{\eta}{r} ds \\ d\nu &= -\zeta d\tau = -\frac{\zeta}{r} ds. \end{aligned} \tag{3}$$

Οἱ τύποι οὗτοι εἶνε θεμελιώδεις διὰ τὴν θεωρίαν τῶν καμπύλων καὶ λέγονται *τύποι τοῦ Frenet.*

Ἐκ τῶν τριῶν πρώτων καὶ τῶν τριῶν τελευταίων ἐξισώσεων γίνεται δῆλον, ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι ἀμφοτέρων τῶν σφαιρικῶν δεικτριῶν εἰς τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα αὐτῶν μ καὶ m εἶνε παράλληλοι ἀλλ' ἀντίρροποι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ ἰδιότης αὕτη τῶν δύο σφαιρικῶν δεικτριῶν δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ γεωμετρικῶς ὡς ἑξῆς.

Ἐὰν ἐκ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων φέρωμεν τὰς om, om', καθέτους ἐπὶ τὰ ἐγγύτατα ἐπίπεδα τῆς καμπύλης εἰς τὰ σημεῖα Μ, Μ' καὶ ἴσας τῇ μονάδι τοῦ μήκους, τὰ σημεῖα m, m' θὰ εἶνε σημεῖα τῆς δευτέρας σφαιρικῆς δεικτρίας καὶ ἡ mm' θὰ γίνῃ ἐφαπτομένη αὐτῆς εἰς τὸ m, ὅταν τὸ m' συμπέσῃ μετὰ τοῦ m. Ἀλλ' ἡ εὐθεῖα αὕτη mm' γίνεται τότε κάθετος ἐπὶ τὴν om, ἤτοι παράλληλος τῷ ἐγγυτάτῳ ἐπιπέδῳ τοῦ Μ· εἶνε δὲ κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν τομὴν τῶν δύο ἐγγυτάτων ἐπιπέδων, ἥτις γίνεται ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἰς τὸ Μ (σελ. 110 Ἄσκ.2)· ἄρα ἡ mm' γίνεται παράλληλος τῇ πρώτῃ καθέτῳ.

Ὁμοίως, ἂν ἐκ τῆς ἀρχῆς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ομ, ομ' ἴσαι τῇ μονάδι τοῦ μήκους καὶ παράλληλοι ταῖς ἐφαπτομέναις τῆς καμπύλης εἰς τὰ σημεῖα Μ, Μ' (τουτέστι κάθετοι ἐπὶ τὰ κάθετα ἐπίπεδα εἰς τὸ Μ καὶ Μ'), ἡ εὐθεῖα μμ', ἥτις θὰ γίνῃ ἐφαπτομένη τῆς πρώτης δεικτρίας, θὰ γίνῃ κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ομ, (ἤτοι παράλληλος τῷ καθέτῳ ἐπιπέδῳ τοῦ Μ), καὶ ἐπὶ τὴν τομὴν τῶν δύο καθέτων ἐπιπέδων, τουτέστιν ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς καμπυλότητος· ἄρα ἡ μμ' θὰ γίνῃ παράλληλος τῇ πρώτῃ καθέτῳ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

70. Αἱ παράγωγοι τῶν συντεταγμένων x, y, z τῶν σημείων τῆς τυχούσης καμπύλης πρὸς τὴν μεταβλητὴν s, θεωρουμένην ὡς ἀνεξάρτητον, ἐκφράζονται διὰ τῶν ἐννέα συνημιτόνων καὶ διὰ τῶν ἀκτίνων ϱ καὶ r καὶ τῶν παραγώγων αὐτῶν· τῷ ὄντι εἶνε

$$\frac{dx}{ds}=\alpha,$$

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\xi}{\varrho} \tag{4}$$

$$\frac{d^3x}{ds^3}=\xi.\left(\frac{1}{\varrho}\right)'+\frac{1}{\varrho}\left(-\frac{\alpha}{\varrho}+\frac{\lambda}{r}\right),$$

$$\frac{d^4x}{ds^4}=\xi\left\{\left(\frac{1}{\varrho}\right)''-\frac{1}{\varrho^3}-\frac{1}{\varrho r^2}\right\}-\alpha\left\{3\,\frac{1}{\varrho}\left(\frac{1}{\varrho}\right)'\right\}+\lambda\left\{\frac{1}{\varrho}\left(\frac{1}{r}\right)'+2\,\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\varrho}\right)'\right\}$$

. . . .

Ὁμοίως εὑρίσκονται καὶ αἱ παράγωγοι τῶν y καὶ z. . . (οἱ τόνοι δηλοῦσι παραγώγους πρὸς s).

Πρὸς ἐφαρμογὴν τῶν τύπων τούτων ὑποθέσωμεν, ὅτι ἀναφέρομεν τὴν καμπύλην πρὸς τὴν ἐφαπτομένην αὐτῆς εἴς τι σημεῖον Μ (ὅπερ ἔστω ἀρχὴ τῶν τόξων) λαμβανομένην ὡς ἄξονα τῶν x καὶ πρὸς τὴν πρώτην κάθετον ὡς ἄξονα τῶν y καὶ τὴν ὀρθίαν κάθετον ὡς ἄξονα τῶν z· θετικὰ δὲ μέρη τῶν ἀξόνων τούτων ἔστωσαν τὰ ἤδη ὁρισθέντα· τότε αἱ συντεταγμέναι τοῦ τυχόντος ἄλλου σημείου Μ' πλησίον τοῦ Μ, θεωρούμεναι ὡς συναρτήσεις τοῦ τόξου ΜΜ' $=s$, ἀναπτύσσονται διὰ τοῦ τύπου τοῦ Μακλωρίνου κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ τόξου s· διότι οἱ τύποι (4) παρέχουσι τὰς παραγώγους τῶν x, y, z πρὸς τὸ τόξον s· ἑπομένως καὶ τὰς τιμὰς αὐτῶν διὰ $s=0$, διότι εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων ἕνεκα τῆς ἐκλογῆς τῶν ἀξόνων εἶνε

$$\begin{array}{lll} \alpha=1, & \beta=0, & \gamma=0 \\ \xi=0, & \eta=1, & \zeta=0 \\ \lambda=0, & \mu=0, & \nu=1. \end{array}$$

Διὰ τοῦ τρόπου τούτου εὑρίσκομεν τὰ ἑπόμενα ἀναπτύγματα τῶν συντεταγμένων θεωρουμένων ὡς συναρτήσεων τοῦ τόξου s

$$\begin{aligned} x&=s-\frac{1}{\varrho^2}\cdot\frac{s^3}{6}-\left(\frac{1}{\varrho^2}\right)'\frac{s^4}{16}+\dots \\ y&=\frac{s^2}{2\varrho}+\left(\frac{1}{\varrho}\right)'\frac{s^3}{6}+\left[\left(\frac{1}{\varrho}\right)''-\frac{1}{\varrho^3}-\frac{1}{\varrho r^2}\right]\frac{s^4}{24}+\dots \qquad (5) \\ z&=\frac{s^3}{6\varrho r}+\left[\frac{1}{\varrho}\left(\frac{1}{r}\right)'+2\,\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\varrho}\right)'\right]\frac{s^4}{24}+\dots \end{aligned}$$

Ἐκ τῶν ἀναπτυγμάτων τούτων βλέπομεν, ὅτι αἱ δύο πρῶται παράγωγοι τοῦ z μηδενίζονται εἰς τὸ σημεῖον Μ· ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀκτὶς ϱ ἐκφράζεται μόνον διὰ τῶν δύο πρώτων παραγώγων τῶν x, y, z, συνάγεται, ὅτι ἡ αὐτὴ ἀκτὶς ϱ εὑρίσκεται, καὶ ἂν ὑποτεθῇ $z=0$· τοῦτ' ἔστιν ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος πάσης καμπύλης στρεβλῆς εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς ἰσοῦται τῇ ἀκτῖνι καμπυλότητος τῆς προβολῆς αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον κατὰ τὸ σημεῖον τοῦτο.

Ἐφαρμογὴ τῶν προηγουμένων εἰς τὴν στερεὰν ἕλικα.

Αἱ ἐξισώσεις τῆς κοινῆς στερεᾶς ἕλικος εἶνε

$$x = \alpha \sigma \upsilon \nu \omega, \quad y = \alpha \eta \mu \omega, \quad z = \alpha m \omega, \qquad (\text{I, σελ. } 163)$$

ἔνθα m σημαίνει τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἕλικος πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου.

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν διὰ τῆς διαφορίσεως

$$dx = -\alpha \eta \mu \omega d\omega, \quad dy = \alpha \sigma \upsilon \nu \omega . d\omega, \quad dz = \alpha m d\omega,$$

ὅθεν
$$ds = \alpha \sqrt{1+m^2} . d\omega$$

καὶ
$$s = \alpha \omega . \sqrt{1+m^2},$$

ἐὰν τὸ τόξον ἄρχηται ἀπὸ τοῦ σημείου Α, ἔνθα εἶνε $\omega = 0$.

Τὰ συνημίτονα τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἕλικος εἶνε

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= -\frac{\eta \mu \omega}{\sqrt{1+m^2}}, \\ \beta &= \frac{\sigma \upsilon \nu \omega}{\sqrt{1+m^2}}, \\ \gamma &= \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Διαφορίζοντες τὰς ἐξισώσεις (1) εὑρίσκομεν

$$\left.\begin{aligned} \xi d\sigma &= -\frac{\sigma \upsilon \nu \omega . d\omega}{\sqrt{1+m^2}} \\ \eta d\sigma &= -\frac{\eta \mu \omega \, d\omega}{\sqrt{1+m^2}} \\ \zeta &= 0 \cdot \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

ὅθεν καὶ
$$d\sigma = \frac{d\omega}{\sqrt{1+m^2}} \qquad (3)$$

καὶ
$$\varrho = \alpha\ (1+m^2). \qquad (4)$$

Ἐκ τούτων γίνεται φανερόν, ὅτι *ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς ἕλικος εἶνε σταθερά.*

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3) συνάγεται

$$\xi = -\sigma \upsilon \nu \omega, \quad \eta = -\eta \mu \omega, \quad \zeta = 0 \cdot \qquad (5)$$

ἐξ ὧν βλέπομεν, ὅτι *ἡ πρώτη κάθετος τῆς ἕλικος εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον M εἶνε ἡ ἐκ τοῦ σημείου τούτου ἀγομένη κάθετος πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου.*

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (5) εὑρίσκομεν

$$-\alpha d\sigma+\lambda d\tau=\eta\mu\omega\; d\omega$$
$$-\beta d\sigma+\mu d\tau=-\sigma\upsilon\nu\omega\; d\omega$$
$$-\gamma d\sigma+\nu d\tau=0\cdot$$

καὶ διὰ τοὺς τύπους (1) καὶ (3)

$$\lambda d\tau=\frac{m^2}{1+m^2}.\ \eta\mu\omega\,.\,d\omega$$

$$\mu d\tau=-\frac{m^2}{1+m^2}.\ \sigma\upsilon\nu\omega\; d\omega$$

$$\nu d\tau=\frac{m\,.\,d\omega}{1+m^2}\cdot$$

ὅθεν
$$d\tau=\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}.\ d\omega \tag{6}$$

καὶ
$$r=\frac{1+m^2}{m}.\ \alpha,$$

τοῦτ' ἔστι *καὶ ἡ ἀκτὶς στρέψεως τῆς ἕλικος εἶνε σταθερά.*

Πρὸς τούτοις εὑρίσκομεν

$$\lambda=\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}.\ \eta\mu\omega,\quad \mu=-\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\ \sigma\upsilon\nu\omega,\quad \nu=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\cdot$$

ἐξ ὧν βλέπομεν, ὅτι *τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον τῆς ἕλικος σχηματίζει πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου σταθερὰν γωνίαν* (τὴν γωνίαν τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου).

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Μ εἶνε τὸ ὅριον τῶν θέσεων ἐπιπέδου, ὅπερ διέρχεται διὰ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον Μ καὶ εἶνε παράλληλον τῇ ἐφαπτομένῃ εἰς τὸ σημεῖον Μ', ὅταν τὸ Μ' πέσῃ εἰς τὸ Μ.

Πᾶν ἐπίπεδον, ὅπερ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Μ (x, y, z), ἔχει ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $\Sigma \mathrm{A}(X-x)=0$· ἵνα δὲ διέρχηται διὰ τῆς ἐφαπτομένης

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz},$$

πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε

$$\mathrm{A}dx+\mathrm{B}dy+\Gamma dz=0\cdot \tag{1}$$

ἵνα δὲ εἶνε καὶ παράλληλον τῇ ἐφαπτομένῃ εἰς τὸ Μ′ (τῆς ὁποίας τὰ συνημίτονα εἶνε $\frac{dx}{ds}+\Delta\frac{dx}{ds}, \ldots$), πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε

$$\Sigma \mathrm{A}\left(\frac{dx}{ds}+\Delta\frac{dx}{ds}\right)=0,$$

τοῦτ᾽ ἔστι (διὰ τὴν πρώτην ἐξίσωσιν)

$$\mathrm{A}.\Delta\frac{dx}{ds}+\mathrm{B}.\Delta\frac{dy}{ds}+\Gamma.\Delta\frac{dz}{ds}=0\cdot$$

ὅταν δὲ τὸ σημεῖον Μ′ τείνῃ νὰ συμπέσῃ τῷ Μ, ἡ ἐξίσωσις αὕτη τείνει πρὸς τὴν ἑξῆς

$$\mathrm{A}\frac{d^2x}{ds^2}+\mathrm{B}\frac{d^2y}{ds^2}+\Gamma\frac{d^2z}{ds^2}=0\cdot \tag{2}$$

ἀλλ᾽ αἱ δύο ἐξισώσεις (1) καὶ (2) ὁρίζουσι τοὺς συντελεστὰς τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου· ὥστε πρὸς τοῦτο τείνει νὰ ἐφαρμόσῃ τὸ θεωρούμενον ἐπίπεδον.

2) Τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον τῆς καμπύλης εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Μ εἶνε παράλληλον τῷ μεγίστῳ κύκλῳ, ὅστις ἐφάπτεται τῆς πρώτης σφαιρικῆς δεικτρίας εἰς τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον μ.

Διότι τὸ ἐπίπεδον τοῦ μεγίστου κύκλου Ομμ′ εἶνε παράλληλον πρὸς τὰς δύο ἐφαπτομένας εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′.

3) Ἡ τομὴ τῶν ἐγγυτάτων ἐπιπέδων εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′ ἔχει ὅριον τὴν ἐφαπτομένην τοῦ Μ, ὅταν τὸ Μ′ συμπέσῃ τῷ Μ.

Τοῦτο γίνεται καταφανὲς ἐκ τῆς σφαιρικῆς δεικτρίας· διότι ἡ τομὴ τῶν δύο μεγίστων κύκλων, οἵτινες ἐφάπτονται αὐτῆς κατὰ τὰ σημεῖα μ καὶ μ′, τείνει νὰ συμπέσῃ τῇ ἀκτῖνι ομ, ὅταν τὸ μ′ τείνῃ πρὸς τὸ μ.

Δεικνύεται δὲ τὸ αὐτὸ θεώρημα καὶ ἀναλυτικῶς ὡς ἑξῆς.

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου εἰς τὸ σημεῖον Μ εἶνε·

$$\Sigma\lambda(X-x)=0\cdot$$

ἡ δὲ ἐξίσωσις τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου εἰς τὸ Μ΄ θὰ εἶνε (παράβλ. ἐδ. 65)

$$\Sigma\lambda(X-x)+d\,\Sigma\lambda(X-x)+\ldots=0\cdot$$

ἑπομένως ἡ τομὴ αὐτῶν ἔχει τὰς ἐξισώσεις

$$\Sigma\lambda(X-x)=0 \text{ καὶ } d\,\Sigma\lambda(X-x)+\ldots=0,$$

ἤτοι $\quad \Sigma\lambda(X-x)=0$ καὶ $\Sigma(X-x)d\lambda-\Sigma\lambda dx+\ldots=0\cdot$

ἀλλ' ἡ δευτέρα γίνεται (ὅταν τὸ Μ΄ συμπέσῃ τῷ Μ)

$$\Sigma(X-x)\xi=0.$$

ἐπειδὴ δὲ αὕτη σημαίνει ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ Μ καὶ κάθετον ἐπὶ τὴν πρώτην κάθετον, συνάγεται, ὅτι ἡ τομὴ αὐτοῦ καὶ τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου εἶνε ἡ ἐφαπτομένη.

4) Ἡ γωνία τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον Μ΄ πρὸς τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον τοῦ σημείου Μ εἶνε ἀπειροστὸν δευτέρας τάξεως πρὸς τὸ τόξον ΜΜ΄ καὶ ἔχει πρωτεῦον μέρος τὸ $\dfrac{\Delta s^2}{2\varrho r}\cdot$ τὸ δὲ μέρος τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ Μ΄, ἀπὸ τῆς ἀφῆς Μ΄ μέχρι τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου εἰς τὸ Μ, εἶνε ἀπειροστὸν πρώτης τάξεως καὶ ἔχει πρωτεῦον μέρος τὸ

$$\frac{\Delta s}{3} \qquad (\Delta s = \text{τοξ ΜΜ΄}).$$

5) Ἡ τομὴ τριῶν ἐγγυτάτων ἐπιπέδων εἰς τρία σημεῖα Μ, Μ΄, Μ΄΄ τῆς καμπύλης τείνει πρὸς τὸ σημεῖον Μ, ὅταν τὰ σημεῖα Μ΄ καὶ Μ΄΄ τείνωσι πρὸς τὸ Μ.

Ἡ ἀπόδειξις τούτου γίνεται ἁπλούστατα, ἐὰν ἡ καμπύλη θεωρηθῇ ὡς ὅριον πολυγωνικῆς γραμμῆς· ἐὰν τῷ ὄντι Ν, Μ, Μ΄, Μ΄΄ καὶ Μ΄΄΄ εἶνε ἐφεξῆς κορυφαὶ τῆς γραμμῆς ταύτης, τὸ μὲν ἐπίπεδον ΝΜΜ΄ εἶνε τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον εἰς τὸ Μ (ὡς περιέχον δύο πλευρὰς τῆς γραμμῆς) τὸ δὲ ΜΜ΄Μ΄΄ εἶνε τὸ ἐγγύτατον εἰς τὸ Μ΄, καὶ τέλος τὸ Μ΄Μ΄΄Μ΄΄΄ εἶνε ἐγγύτατον εἰς τὸ Μ΄΄· καὶ τὰ τρία δὲ ταῦτα ἐπίπεδα ἔχουσι κοινὸν τὸ σημεῖον Μ΄.

6) Ἡ ἀπόστασις τοῦ ἑνὸς ἄκρου τοῦ τόξου Δs ἀπὸ τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου εἰς τὸ ἄλλο εἶνε ἀπειροστὸν τρίτης τάξεως καὶ πρωτεῦον μέρος αὐτῆς εἶνε τὸ $\dfrac{\Delta s^3}{6\varrho r}$.

7) Ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ ἄκρα τοῦ

τόξου ΜΜ′ ($=\Delta s$) εἶνε ἀπειροστὸν τρίτης τάξεως πρὸς αὐτὸ (ἢ καὶ πρὸς τὴν γωνίαν των) καὶ τὸ πρωτεῦον μέρος αὐτῆς εἶνε $\dfrac{\Delta s^3}{12\varrho r}$.

Διότι αἱ ἐξισώσεις τῶν εἰρημένων ἐφαπτομένων εἶνε

$$\frac{X-x}{\alpha}=\frac{Y-y}{\beta}=\frac{Z-z}{\gamma} \quad \text{εἰς τὸ Μ,}$$

$$\frac{X-x-\Delta x}{\alpha+\Delta\alpha}=\frac{Y-y-\Delta y}{\beta+\Delta\beta}=\frac{Z-z-\Delta z}{\gamma+\Delta\gamma} \quad \text{εἰς τὸ Μ}'$$

καὶ ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις αὐτῶν εἶνε

$$(1) \qquad \frac{1}{\eta\mu\omega}\cdot\begin{vmatrix} \Delta x & \alpha & \Delta\alpha \\ \Delta y & \beta & \Delta\beta \\ \Delta z & \gamma & \Delta\gamma \end{vmatrix},$$

ω οὔσης τῆς γωνίας αὐτῶν.

Ἀναπτύσσοντες δὲ τὰς αὐξήσεις Δx, $\Delta\alpha$,... κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ τόξου ΜΜ′ ($=\Delta s$):

$$\Delta x=\alpha\Delta s+\frac{d\alpha}{ds}\cdot\frac{\Delta s^2}{1.2}+\frac{d^2\alpha}{ds^2}\cdot\frac{\Delta s^3}{6}+\ldots,$$

$$\Delta\alpha=\frac{d\alpha}{ds}\Delta s+\frac{d^2\alpha}{ds^2}\frac{\Delta s^2}{1.2}+\ldots,\ldots,$$

βλέπομεν εὐκόλως, ὅτι τὸ πρωτεῦον μέρος τῆς ὁριζούσης (1) εἶνε

$$\frac{\Delta s^4}{12}\begin{vmatrix} \dfrac{d\alpha}{ds} & \alpha & \dfrac{d^2\alpha}{ds^2} \\ \dfrac{d\beta}{ds} & \beta & \dfrac{d^2\beta}{ds^2} \\ \dfrac{d\gamma}{ds} & \gamma & \dfrac{d^2\gamma}{ds^2} \end{vmatrix}. \qquad (\mu)$$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\xi}{\varrho},\qquad \frac{d^2\alpha}{ds^2}=\frac{1}{\varrho}\left(-\frac{\alpha}{\varrho}+\frac{\lambda}{r}\right)+\xi\left(\frac{1}{\varrho}\right)',$$

τὸ πρωτεῦον μέρος (μ) γίνεται

$$\frac{\Delta s^4}{12}\begin{vmatrix} \xi & \alpha & \lambda \\ \eta & \beta & \mu \\ \zeta & \gamma & \nu \end{vmatrix}\frac{1}{\varrho^2 r}, \qquad \text{ἤτοι} \qquad \frac{\Delta s^4}{12\varrho^2 r}.$$

Ἡ δὲ γωνία ω εἶνε ἀπειροστὸν πρώτης τάξεως καὶ ἔχει πρωτεῦον μέρος τὸ Δσ (ἐδ. 61 Σημ.), ἤτοι τὸ $\frac{\Delta s}{\varrho}$· ὅθεν συνάγεται, ὅτι τὸ πρωτεῦον μέρος τῆς ἐλαχίστης ἀποστάσεως τῶν ἐφαπτομένων εἶνε $\frac{\Delta s^3}{12\varrho r}$.

8) Ἡ κοινὴ κάθετος δύο ἐφαπτομένων καταντᾷ ὀρθία κάθετος τῆς καμπύλης, ὅταν αἱ ἐπαφαὶ συμπέσωσιν.

9) Τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον Μ εἶνε ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας, ἣν ἀποτελοῦσιν αἱ ἐφαπτόμεναι τῆς καμπύλης· ἐφάπτεται δὲ αὐτῆς κατὰ πάντα τὰ σημεῖα τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ Μ.

Τὸ θεώρημα τοῦτο δύναται νὰ ἀποδειχθῇ γεωμετρικῶς, ἂν ἡ ἀναπτυκτὴ ἐπιφάνεια θεωρηθῇ ὡς ὅριον πολυεδρικῆς ἐπιφανείας, τῆς ὁποίας αἱ ἀκμαὶ εἶνε τέμνουσαι τῆς καμπύλης· διότι τότε ἑκάστη ἕδρα τῆς πολυεδρικῆς ἐπιφανείας γίνεται ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας καὶ συγχρόνως ἐγγύτατον τῆς καμπύλης τοῦ λαιμοῦ (ὡς διερχόμενον διὰ τριῶν σημείων αὐτῆς).

Ἀναλυτικῶς δὲ ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ πᾶν σημεῖον τῆς ῥηθείσης ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας κεῖται ἐπί τινος τῶν ἐφαπτομένων τῆς καμπύλης, ἂν παραστήσωμεν διὰ X, Y, Z τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου αὐτῆς, ὅπερ κεῖται ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον Μ (x, y, z) καὶ ἀπέχει ἀπὸ τοῦ Μ ἀπόστασιν ἴσην τῷ ρ, θὰ εἶνε

$$X = x + \alpha\rho,\ Y = y + \beta\rho,\ Z = z + \gamma\rho\cdot \qquad (1)$$

οὕτως ἐκφράζονται αἱ συντεταγμέναι X, Y, Z τοῦ τυχόντος σημείου τῆς ἐπιφανείας ὡς συναρτήσεις δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν ρ καὶ s·

Ἐκ τούτων ἕπεται

$$dX = dx + \alpha d\rho + \rho d\alpha = \left(\alpha + \frac{\rho\xi}{\varrho}\right) ds + \alpha d\varrho$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,$$

ὅθεν ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον (X, Y, Z) εἶνε

$$\begin{vmatrix} X'-X & \alpha & \xi \\ Y'-Y & \beta & \eta \\ Z'-Z & \gamma & \zeta \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ἢ} \quad \begin{vmatrix} X'-x & \alpha & \xi \\ Y'-y & \beta & \eta \\ Z'-z & \gamma & \zeta \end{vmatrix} = 0,$$

τοῦτ' ἔστι $(X'-x)\,\lambda+(Y'-y)\,\mu+(Z'-z)\,\nu=0$·
αὕτη δὲ εἶνε ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου εἰς τὸ σημεῖον Μ τῆς καμπύλης.

10) Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον Μ ληφθῇ τὸ μῆκος ΜΤ ἴσον τῷ τόξῳ ΜΜ', ἡ ἀπόστασις Μ' Τ εἶνε ἀπειροστὸν δευτέρας τάξεως καὶ ἔχει πρωτεῦον μέρος $\frac{\Delta s^2}{2\varrho}$, αἱ δὲ προβολαὶ τῆς Μ'Τ ἐπὶ τῶν ἀξόνων εἶνε

$$\frac{d^2x}{ds^2}\cdot\frac{\Delta s^2}{2},\qquad \frac{d^2y}{ds^2}\cdot\frac{\Delta s^2}{2},\qquad \frac{d^2z}{ds^2}\cdot\frac{\Delta s^2}{2}.$$

11) Ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις τῶν δύο πρωτευουσῶν καθέτων τῆς καμπύλης εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ' εἶνε πρώτης τάξεως ἀπειροστὸν πρὸς τὸ τόξον ΜΜ' ($=\Delta s$) καὶ ἔχει πρωτεῦον μέρος τὸ

$$\frac{\varrho\Delta s}{\sqrt{\varrho^2+r^2}}.$$

καὶ ἡ γωνία αὐτῶν εἶνε ἀπειροστὸν πρώτης τάξεως καὶ πρωτεῦον μέρος αὐτῆς εἶνε τὸ $\Delta s.\sqrt{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι αἱ πρῶται κάθετοι στρεβλῆς καμπύλης οὐδεμιᾶς καμπύλης εἶνε ἐφαπτόμεναι· ὥστε ἀποτελοῦσιν ἐπιφάνειαν εὐθειογενῆ, ἀλλὰ μὴ ἀναπτυκτήν.

12) Ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις τῶν δύο ὀρθίων καθέτων τῆς καμπύλης εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ' εἶνε ἀπειροστὸν ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τόξον ΜΜ' ($=\Delta s$) καὶ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἡ κοινὴ αὐτῶν κάθετος τέμνει τὴν πρώτην, συμπίπτει τῷ Μ, ὅταν τὸ Μ' πέσῃ εἰς τὸ Μ.

13) Ὁ τόπος τῶν κέντρων Κ τῆς καμπυλότητος εἶνε καμπύλη, τῆς ὁποίας ἡ ἐφαπτομένη εἰς ἕκαστον σημεῖον Κ κεῖται ἐπὶ τοῦ καθέτου ἐπιπέδου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος σημείου Μ τῆς δοθείσης καμπύλης.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ x_1, y_1, z_1 τὰς συντεταγμένας τοῦ κέντρου Κ, θὰ εἶνε (ἐδ. 64)

$$x_1=x+\varrho\xi,\quad y_1=y+\varrho\eta,\quad z_1=z+\varrho\zeta,$$

ὅθεν $$dx_1=\xi d\varrho+\lambda\frac{\varrho}{r}\,ds$$

$$dy_1 = \eta d\varrho + \mu \frac{\varrho}{r} ds, \tag{1}$$

$$dz_1 = \zeta d\varrho + \nu \frac{\varrho}{r} ds\cdot$$

πολλαπλασιάζοντες δὲ ταύτας ἐπὶ α, β, γ καὶ ἀθροίζοντες εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha dx_1 + \beta dy_1 + \gamma dz_1 = 0$,

ἐξ ἧς γίνεται δῆλον, ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τοῦ εἰρημένου τόπου καὶ ἡ ἐφαπτομένη τῆς δοθείσης καμπύλης εἶνε κάθετοι πρὸς ἀλλήλας.

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) εὑρίσκομεν προσέτι τὸ διαφορικὸν τοῦ τόξου s_1 τῆς καμπύλης τῶν κέντρων Κ:

$$ds_1 = \sqrt{\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 + \left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2} . ds.$$

Νὰ δειχθῇ ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἡ ἑξῆς πρότασις. Ἐὰν ἡ ἀκτὶς τῆς καμπυλότητος ϱ καμπύλης τινὸς εἶνε σταθερὰ τὸ μέγεθος, ἡ καμπύλη τῶν κέντρων Κ αὐτῆς ἔχει τόξον s_1 ἴσον τῇ σταθερᾷ ἀκτῖνι ϱ ἐπὶ τὴν γωνίαν τῆς στρέψεως τοῦ ἀντιστοίχου τόξου τῆς πρώτης καμπύλης.

14) Τὸ διὰ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον Μ καὶ διὰ τοῦ σημείου Μ΄ ἀγόμενον ἐπίπεδον σχηματίζει πρὸς τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον τοῦ σημείου Μ γωνίαν ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τρίτον τῆς γωνίας τῆς στρέψεως, ἤτοι $\frac{1}{3}\Delta\tau$, ἢ $\frac{1}{3}\frac{\Delta s}{r}$.

15) Ἐκφράσαι τὴν διαφορὰν τοῦ τόξου ἀπὸ τῆς χορδῆς αὐτοῦ.

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (5) τοῦ ἐδαφίου 70 εὑρίσκομεν

$$x^2 + y^2 + z^2 = s^2 \left(1 - \frac{s^2}{12\varrho^2} - \frac{Bs^3}{12\varrho} - \ldots\right),$$

ἔνθα
$$B = \frac{d\,\frac{1}{\varrho}}{ds}.$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι, παραλειπομένων τῶν ἀπειροστῶν τῆς 5ης τάξεως, ἡ διαφορὰ τοῦ τόξου ἀπὸ τῆς χορδῆς αὐτοῦ εἶνε ἡ αὐτή, εἴτε ἐπίπεδος ὑποτεθῇ ἡ καμπύλη εἴτε στρεβλή· ὥστε ἰσχύουσι καὶ περὶ τῶν στρεβλῶν καμπύλων οἱ τύποι (σελ. 37)

$$s - \mathrm{OM} = \frac{s^3}{24\varrho_0\varrho_1} + \text{ἀπειρ. 5ης τάξεως},$$

ἢ καὶ
$$s - \mathrm{OM} = \left(\frac{1}{\varrho_0^2} + \frac{1}{\varrho_1^2}\right)\frac{s^3}{48} + \text{ἀπειρ. 5ης τάξεως}.$$

16) Εὑρεῖν καμπύλην, τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος ϱ νὰ εἶνε σταθερά.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ s τὸ μῆκος τοῦ τόξου αὐτῆς καὶ διὰ σ τὸ μῆκος τοῦ τόξου τῆς σφαιρικῆς δεικτρίας, ἔτι δὲ διὰ τοῦ Α τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος, θὰ εἶνε

$$s = \mathrm{A}\sigma \text{ καὶ } ds = \mathrm{A}d\sigma,$$

ἑπομένως
$$dx = \alpha ds = \mathrm{A}\alpha d\sigma$$
$$dy = \beta ds = \mathrm{A}\beta d\sigma$$
$$dz = \gamma ds = \mathrm{A}\gamma d\sigma\cdot$$

α, β, γ εἶνε αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου μ τῆς σφαιρικῆς δεικτρίας, ὅπερ ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὸ σημεῖον Μ (x, y, z) τῆς καμπύλης.

Ἡ σφαιρικὴ δείκτρια δύναται νὰ εἶνε οἱαδήποτε· λέγω δηλαδή, ὅτι, ἂν ληφθῇ ἡ τυχοῦσα σφαιρικὴ καμπύλη $\alpha\mu$ καὶ παρασταθῶσι διὰ α, β, γ αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων αὐτῆς καὶ διὰ σ τὸ μῆκος τοῦ τόξου αὐτῆς, αἱ διαφορικαὶ ἐξισώσεις

(1) $$dx = \mathrm{A}.\alpha d\sigma, \quad dy = \mathrm{A}.\beta d\sigma, \quad dz = \mathrm{A}.\gamma d\sigma$$

ὁρίζουσι τὰς συντεταγμένας x, y, z (ὡς συναρτήσεις τῆς μεταβλητῆς, ἀφ' ἧς ἐξαρτῶνται αἱ συντεταγμέναι α, β, γ καὶ τὸ τόξον σ) καμπύλης ἐχούσης σταθερὰν ἀκτῖνα καμπυλότητος καὶ ἴσην τῷ Α.

Διότι ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων προκύπτουσιν αἱ ἑξῆς·

$$d^2x = \mathrm{A}\alpha d^2\sigma + \mathrm{A}d\alpha.d\sigma$$
$$d^2y = \mathrm{A}\beta d^2\sigma + \mathrm{A}d\beta.d\sigma$$
$$d^2z = \mathrm{A}\gamma d^2\sigma + \mathrm{A}d\gamma.d\sigma,$$

ὅθεν

$$\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ d\alpha & d\beta \end{vmatrix} \mathrm{A}^2 d\sigma^2$$
$$\begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ d\beta & d\gamma \end{vmatrix} \mathrm{A}^2 d\sigma^2$$
$$\begin{vmatrix} dz & dx \\ d^2z & d^2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ d\gamma & d\alpha \end{vmatrix} \mathrm{A}^2 d\sigma^2\cdot$$

ἐνθυμούμενοι δέ, ὅτι εἶνε

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$$

$$\alpha d\alpha+\beta d\beta+\gamma d\gamma=0$$

καὶ
$$d\alpha^2+d\beta^2+d\gamma^2=d\sigma^2,$$

εὑρίσκομεν (ἐδ. 62)
$$\frac{ds^2}{\varrho}=A^2 d\sigma^2$$

καὶ ἐπειδὴ $ds=A d\sigma$, συνάγεται $\varrho=A$.

Ἐπειδὴ ἡ σφαιρικὴ καμπύλη εἶνε οἱαδήποτε, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς δείκτρια τῆς καμπυλότητος οἱαςδήποτε καμπύλης (x', y', z')· τότε θὰ εἶνε $dx'=\alpha ds'$, $dy'=\beta ds'$, $dz'=\gamma ds'$,
ἢ καὶ $dx'=\alpha.\varrho'\,d\sigma$, $dy'=\beta.\varrho'\,d\sigma$, $dz'=\gamma.\varrho'\,d\sigma$,
ὅθεν αἱ διαφορικαὶ ἐξισώσεις (1) πάσης καμπύλης ἐχούσης σταθερὰν ἀκτῖνα καμπυλότητος γίνονται

$$dx=A\frac{dx'}{\varrho'},\qquad dy=A\frac{dy'}{\varrho'},\qquad dz=A\frac{dz'}{\varrho'},$$

ἔνθα x' y' z' δηλοῦσιν οἱαςδήποτε συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς καὶ ϱ' τὴν γνωστὴν παράστασιν τῆς ἀκτῖνος καμπυλότητος διὰ τῶν διαφορικῶν αὐτῶν.

17) Ἐὰν ἡ ἀναπτυκτὴ ἐπιφάνεια, τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦσιν αἱ ἐφαπτόμεναι καμπύλης στρεβλῆς, ἀναπτυχθῇ ἐπὶ ἐπιπέδου, ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος ϱ δὲν μεταβάλλεται· τουτ' ἔστιν ἡ καμπύλη καὶ τὸ ἀνάπτυγμα αὐτῆς ἔχουσι τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος εἰς τὰ ἀντιστοιχοῦντα σημεῖα.

Διότι κατὰ τὴν ἀνάπτυξιν οὔτε τὸ μῆκος τοῦ τόξου s τῆς καμπύλης βλάπτεται οὔτε ἡ ἀπειροστὴ γωνία δύο ἐφαπτομένων, τοῦτ' ἔστιν ἡ γωνία τῆς συνεπαφῆς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Πᾶν πρόβλημα, ἐν ᾧ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ καμπύλη, τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς ϱ καὶ τὸ τόξον s νὰ ἔχωσι δοθεῖσαν σχέσιν, ἀνάγεται διὰ τὴν ἰδιότητα ταύτην εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς ἐπιπέδου καμπύλης, ἥτις ἔχει τὸ αὐτὸ ἰδίωμα.

18) Πᾶσαι αἱ καμπύλαι αἱ ἔχουσαι ἀκτῖνα καμπυλότητος ϱ σταθεράν, προκύπτουσιν ἐκ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, ἐὰν τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ καμφθῇ περὶ τὰς ἐφαπτομένας του, ὥστε νὰ σχηματίσῃ ἀναπτυκτὴν ἐπιφάνειαν ἔχουσαν γενετείρας τὰς ἐφαπτομένας του.

Καὶ τἀνάπαλιν, πᾶσα τοιαύτη καμπύλη τρέπεται εἰς περιφέρειαν κύκλου, ἐὰν ἡ ἀναπτυκτὴ ἐπιφάνεια τῶν ἐφαπτομένων αὐτῆς ἀναπτυχθῇ ἐπὶ ἐπιπέδου.

19) Ἐὰν τὰ σημεῖα δύο καμπύλων ἀντιστοιχῶσι πρὸς ἄλληλα ἓν πρὸς ἓν (ὡς ὅταν αἱ συντεταγμέναι ἀμφοτέρων εἶνε ἐκπεφρασμέναι ὡς συναρτήσεις μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς t) καὶ *αἱ ἐφαπτόμεναι* αὐτῶν εἰς τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα ὦσι παράλληλοι (τουτ᾽ ἔστιν ἂν ἔχωσι τὴν αὐτὴν σφαιρικὴν δείκτριαν), θὰ εἶνε παράλληλοι καὶ αἱ λοιπαὶ ἀρχικαὶ εὐθεῖαι αὐτῶν καὶ ὁ λόγος $\frac{\varrho}{r}$ τῶν δύο ἀκτίνων καμπυλότητος θὰ εἶναι ὁ αὐτὸς εἰς τὰ ἀντιστοιχοῦντα σημεῖα· ἐπίσης δὲ θὰ εἶνε παράλληλοι καὶ αἱ ἄλλαι δύο ἀρχικαὶ εὐθεῖαι, ἂν *αἱ ὄρθιαι κάθετοι* εἶνε παράλληλοι· ἂν δὲ τέλος *αἱ πρῶται κάθετοι* εἶνε παράλληλοι, αἱ δύο ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἀντιστοιχοῦντα σημεῖα ποιοῦσι σταθερὰν γωνίαν· τὴν αὐτὴν ἄρα γωνίαν ποιοῦσι καὶ αἱ ὄρθιαι κάθετοι.

20) Εὑρεῖν καμπύλην, ἐν τῇ ὁποίᾳ ὁ λόγος $\frac{r}{\varrho}$ τῶν δύο ἀκτίνων καμπυλότητος νὰ εἶναι σταθερὸς Κ.

Ἐκ τῆς ἰσότητος $r = \mathrm{K}\varrho$ ἢ $\frac{ds}{d\tau} = \mathrm{K}.\frac{ds}{d\sigma}$

ἕπεται
$$d\sigma = \mathrm{K}.d\tau\cdot$$
ἑπομένως οἱ τύποι (1) καὶ (3) τοῦ Frenet δίδουσι
$$\begin{aligned} d(\alpha+\mathrm{K}\lambda)&=0 \quad \text{ὅθεν} \quad & \alpha+\mathrm{K}\lambda&=\mathrm{A}\\ d(\beta+\mathrm{K}\mu)&=0 & \beta+\mathrm{K}\mu&=\mathrm{B}\\ d(\gamma+\mathrm{K}\nu)&=0 & \gamma+\mathrm{K}\nu&=\Gamma. \end{aligned}$$
Ἐκ τούτων ἕπεται
$$\mathrm{A}\xi+\mathrm{B}\eta+\Gamma\zeta=0, \qquad \mathrm{A}\alpha+\mathrm{B}\beta+\Gamma\gamma=1\cdot$$
τουτ᾽ ἔστιν ἡ πρώτη κάθετος μένει πάντοτε παράλληλος ἑνὶ ἐπιπέδῳ (τῷ $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma z=0$), πρὸς τὸ ὁποῖον σχηματίζει ἡ ἐφαπτομένη σταθερὰν γωνίαν. Ἐκ τούτου συνάγεται, ὅτι ἡ ζητουμένη καμπύλη εἶνε ἕλιξ γεγραμμένη ἐπὶ τοῦ τυχόντος κυλίνδρου (Ι. σελ. 155).

Καὶ πᾶσα ἕλιξ, ἐπὶ οἱουδήποτε κυλίνδρου κειμένη, ἔχει τὴν ἰδιότητα ταύτην· διότι, λαμβανομένου τοῦ ἄξονος τῶν z παραλλήλου πρὸς τὰς γενετείρας τοῦ κυλίνδρου, θὰ εἶνε
$$\gamma = \text{σταθερὸν} = m, \qquad \text{ἄρα} \qquad d\gamma = \zeta d\sigma = 0,$$
ἑπομένως $\zeta = 0\cdot$ καὶ ἐπειδὴ $d\nu = -\zeta d\tau$,

ἕπεται $d\nu = 0$ καὶ $\nu = \text{σταθ.} = n$

ἀλλ' ἔχομεν καὶ $\quad d\zeta = -m d\sigma + n d\tau = 0,$

ὅθεν $\quad m d\sigma = n d\tau \quad$ καὶ $\quad \frac{m}{\varrho} = \frac{n}{r}$ ἢ καὶ $\frac{r}{\varrho} = \frac{n}{m} =$ σταθ.

21) Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ x', y', z' τὰς συντεταγμένας τῶν σημείων τῆς τυχούσης καμπύλης (αἵτινες θεωροῦνται ὡς συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς t) καὶ διὰ τοῦ r' τὴν ἀκτῖνα τῆς στρέψεως αὐτῆς, ἡ ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων

$$dx = b\frac{dx'}{r'}, \quad dy = b.\frac{dy'}{r'}, \quad dz = b.\frac{dz'}{r}$$

ὁριζομένη νέα καμπύλη (x, y, z) ἔχει ἀκτῖνα στρέψεως σταθεράν.

22) Ἐὰν ἐπιζευχθῶσι τρία σημεῖα Μ, Μ΄, Μ΄΄ τῆς καμπύλης δι' εὐθειῶν, ἡ διὰ τῶν τριῶν τούτων σημείων διερχομένη περιφέρεια εἶνε περιγεγραμμένη περὶ τὸ τρίγωνον ΜΜ΄Μ΄΄.

Γνωστὸν δὲ εἶνε ἐκ τῶν στοιχείων, ὅτι ἡ ἀκτὶς αὐτῆς εἶνε

$$\frac{(\mathrm{MM'})\,(\mathrm{M'M''})\,(\mathrm{M''M})}{4\,(\mathrm{MM'M''})}.$$

Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ἡ ἀκτὶς αὐτη, εἶνε ἡ ἀκτὶς τῆς καμπυλότητος ϱ· τοῦτ' ἔστιν ὅτι ὁ διὰ τῶν τριῶν σημείων Μ,Μ΄,Μ΄΄ διερχόμενος κύκλος καταντᾷ κύκλος τῆς καμπυλότητος (ὅταν τὰ σημεῖα ταῦτα συμπέσωσιν εἰς ἕν).

Περὶ τῆς ἐγγυτάτης σφαίρας.

71. Ἐκ τῶν δι' ἑνὸς σημείου Μ τῆς δοθείσης καμπύλης διερχομένων σφαιρῶν ὑπάρχει μία *ἐγγυτάτη* πρὸς τὴν καμπύλην, τοῦτ' ἔστι τοιαύτη, ὥστε ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων τῆς καμπύλης ἀπὸ τῆς σφαίρας ταύτης γίνεται πλησίον τοῦ Μ ἀπειροστὸν ἀνωτέρας τάξεως ἢ ἡ ἀπόστασις αὐτῶν ἀπὸ ἄλλης οἱασδήποτε σφαίρας. Διὰ τοῦτο ἡ καμπύλη ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ Μ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κειμένη ἐπὶ τῆς σφαίρας ταύτης καὶ ἑπομένως νὰ ἐξομοιωθῇ πρὸς σφαιρικὴν καμπύλην. (Σφαῖραν λέγομεν ἐνταῦθα τὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν χάριν συντομίας).

Ἔστωσαν x_0, y_0, z_0 αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου καὶ Α ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας· ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς εἶνε τότε

$$(X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2 + (Z - z_0)^2 - \mathrm{A}^2 = 0. \tag{1}$$

Ἵνα ἡ σφαῖρα αὕτη διέρχηται διὰ τοῦ σημείου Μ (x, y, z) τῆς καμπύλης, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - \mathrm{A}^2 = 0. \tag{2}$$

Λάβωμεν νῦν ἄλλο σημεῖον Μ′ τῆς καμπύλης πλησίον τοῦ Μ καὶ παραστήσωμεν τὴν ἐλαχίστην αὐτοῦ ἀπὸ τῆς σφαίρας (1) ἀπόστασιν διὰ τοῦ h· ἡ ἐλαχίστη αὕτη ἀπόστασις θὰ εἶνε ἡ μία τῶν ἐκ τοῦ Μ′ ἀγομένων καθέτων ἐπὶ τὴν σφαῖραν, ἡ δὲ ἄλλη θὰ εἶνε $h+2\mathrm{A}$· θὰ εἶνε δὲ

$$h(2\mathrm{A}+h)=(x+\Delta x-x_0)^2+(y+\Delta y-y_0)^2+(z+\Delta z-z_0)^2-\mathrm{A}^2.$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ἡ ἀπόστασις h καὶ τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως τῆς σφαίρας, ἤτοι ἡ παράστασις

$$(X-x_0)^2+(Y-y_0)^2+(Z-z_0)^2-\mathrm{A}^2,$$

ἥν τινα, συντομίας χάριν, παριστῶ διὰ τοῦ V, γίνονται ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ σημείου Μ ἀπειροστὰ τῆς αὐτῆς τάξεως· κατ' ἀκολουθίαν ἡ ἐγγυτάτη πρὸς τὴν καμπύλην σφαῖρα εἰς τὸ σημεῖον Μ θὰ εἶνε ἐκείνη, δι' ἣν ἡ παράστασις V γίνεται πλησίον τοῦ Μ ἀπειροστὸν ὅσον ἐνδέχεται ἀνωτέρας τάξεως. Ἀλλ' ἐπὶ τῆς καμπύλης ἡ παράστασις V εἶνε προφανῶς συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς, ἀφ' ἧς ἐξαρτῶνται αἱ μεταβληταὶ συντεταγμέναι X, Y, Z τῶν σημείων αὐτῆς, ἥτις ἔστω ἡ s· (διότι, ἂν θέσωμεν ἐν τῇ παραστάσει V ἀντὶ X, Y, Z τὰς τιμὰς αὐτῶν ἐκ τῶν ἐξισώσεων τῆς καμπύλης, θὰ τραπῇ τὸ V εἰς συνάρτησίν τινα τοῦ s) καὶ εἰς μὲν τὸ σημεῖον Μ ἡ παράστασις V γίνεται 0, εἰς δὲ τὸ σημεῖον Μ′ (ὅπερ ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν τιμὴν $s+\Delta s$) γίνεται αὕτη

$$\frac{d\mathrm{V}}{ds}.\Delta s+\frac{d^2\mathrm{V}}{ds^2}\frac{\Delta s^2}{1.2}+\frac{d^3\mathrm{V}}{ds^3}.\frac{\Delta s^3}{1.2.3}+\ldots$$

Διὰ τοῦτο, ἵνα ἡ ἀπόστασις h εἶνε ἀπειροστὸν τῆς τάξεως ν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ εἰς τὸ σημεῖον Μ νὰ εἶνε

$$\frac{d\mathrm{V}}{ds}=0,\quad \frac{d^2\mathrm{V}}{ds^2}=0,\ldots,\frac{d^{\nu-1}\mathrm{V}}{ds^{\nu-1}}=0.$$

Αἱ ἐξισώσεις αὗται, πλὴν τῶν συντεταγμένων x, y, z τοῦ δοθέντος σημείου Μ τῆς καμπύλης, περιέχουσι καὶ τὰς συντεταγμένας x_0, y_0, z_0 τοῦ κέντρου καὶ τὴν ἀκτῖνα Α τῆς σφαίρας· ἤτοι τὸ ὅλον τέσσαρας παραμέτρους, μεταξὺ τῶν ὁποίων ἐτέθη ἤδη ἡ ἐξίσωσις (2). Ἐὰν λοιπὸν θέσωμεν μεταξὺ αὐτῶν καὶ τὰς ἑπομένας τρεῖς ἐξισώσεις

$$\frac{d\mathrm{V}}{ds}=0,\quad \frac{d^2\mathrm{V}}{ds^2}=0,\quad \frac{d^3\mathrm{V}}{ds^3}=0,$$

αἱ συντεταγμέναι x_0, y_0, z_0 καὶ ἡ ἀκτὶς A ὁρίζονται ἐκ τῶν τεσσάρων τούτων ἐξισώσεων· ἑπομένως καὶ ἡ ἐγγυτάτη σφαῖρα εἰς τὸ δοθὲν σημεῖον τῆς καμπύλης· εἶνε δὲ ἡ ἀπόστασις h ἀπειροστὸν ἐν γένει τετάρτης τάξεως (εἴς τινα σημεῖα μόνον δύναται νὰ γίνῃ καὶ ἀνωτέρας).

Κατὰ ταῦτα αἱ ἐξισώσεις, δι' ὧν ὁρίζεται ἡ πρὸς τὴν καμπύλην ἐγγυτάτη σφαῖρα εἰς τὸ σημεῖον M (x, y, z), εἶνε αἱ ἑξῆς

$$(3)\qquad \begin{aligned} &(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-A^2=0 \\ &(x-x_0)\frac{dx}{ds}+(y-y_0)\frac{dy}{ds}+(z-z_0)\frac{dz}{ds}=0 \\ &(x-x_0)\frac{d^2x}{ds^2}+(y-y_0)\frac{d^2y}{ds^2}+(z-z_0)\frac{d^2z}{ds^2}=-1 \\ &(x-x_0)\frac{d^3x}{ds^3}+(y-y_0)\frac{d^3y}{ds^3}+(z-z_0)\frac{d^3z}{ds^3}=0\cdot \end{aligned}$$

εὑρίσκονται δὲ ἐκ τῆς πρώτης διαφοριζομένης πρὸς τὴν μεταβλητὴν s.

Ἐὰν δὲ ἀντὶ τῶν παραγώγων

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{d^2x}{ds^2}, \quad \frac{d^3x}{ds^3}, \ldots$$

θέσωμεν τὰς τιμὰς αὐτῶν (σελ. 127 ἐδ. 4), αἱ ἐξισώσεις αὗται γίνονται

$$\begin{aligned} &(x_0-x)^2+(y_0-y)^2+(z_0-z)^2=A^2 \\ &(x_0-x)\,\alpha+(y_0-y)\,\beta+(z_0-z)\,\gamma=0 \\ &(x_0-x)\,\xi+(y_0-y)\,\eta+(z_0-z)\,\zeta=\varrho \\ &(x_0-x)\,\lambda+(y_0-y)\,\mu+(z_0-z)\,\nu=r\,\frac{d\varrho}{ds}. \end{aligned}$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων εὑρίσκομεν εὐκόλως (διὰ τῶν γνωστῶν ἰδιοτήτων τῶν συνημιτόνων)

$$\begin{aligned} x_0-x&=\varrho\xi+\lambda r\,\frac{d\varrho}{ds} \\ y_0-y&=\varrho\eta+\mu r\,\frac{d\varrho}{ds} \\ z_0-z&=\varrho\zeta+\nu r\,\frac{d\varrho}{ds}\cdot \end{aligned} \qquad (4)$$

καὶ ἐκ τούτων πορίζόμεθα τὴν ἀκτῖνα A τῆς ἐγγυτάτης σφαίρας

$$A^2=\varrho^2+\left(r\frac{d\varrho}{ds}\right)^2=\varrho^2+\left(\frac{d\varrho}{d\tau}\right)^2.$$

72. Τὸ κέντρον Σ (x_0, y_0, z_0) τῆς ἐγγυτάτης σφαίρας κεῖται ἐπὶ τῆς πολικῆς εὐθείας, τοῦτ' ἔστιν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῆς καμπυλότητος. Καὶ ὄντως, ὁ ἄξων οὗτος, ὡς διερχόμενος διὰ τοῦ κέντρου τῆς καμπυλότητος καὶ ἔχων τὰ συνημίτονα λ, μ, ν, παρίσταται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων

$$X = x + \varrho\xi + \lambda\omega$$
$$Y = y + \varrho\eta + \mu\omega$$
$$Z = z + \varrho\zeta + \nu\omega,$$

ἔνθα ω εἶνε βοηθητική τις μεταβλητή, ἥτις σημαίνει τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου τῆς καμπυλότητος ἀπὸ τοῦ μεταβλητοῦ σημείου X, Y, Z τῆς εὐθείας. Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων τοῦ ἄξονος γίνεται δῆλον, ὅτι τὸ κέντρον Σ (x_0, y_0, z_0) κεῖται ἐπ' αὐτοῦ καὶ ἀπέχει ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ τῆς καμπυλότητος ἀπόστασιν ἴσην τῷ

$$r\frac{d\varrho}{ds} \quad \text{ἢ} \quad \frac{d\varrho}{d\tau}.$$

κεῖται δὲ εἰς τὸ θετικὸν μὲν μέρος τοῦ ἄξονος, ἂν ἡ ἀκτὶς ϱ αὐξάνῃ μετὰ τοῦ τόξου s· εἰς τὸ ἀρνητικὸν δέ, ἂν τοὐναντίον.

73. *Ἡ πρὸς τὴν καμπύλην ἐγγυτάτη σφαῖρα εἰς τὸ σημεῖον Μ εἶνε τὸ ὅριον τῶν θέσεων σφαίρας διερχομένης διὰ τεσσάρων σημείων τῆς καμπύλης, ὅταν ταῦτα συμπέσωσιν εἰς τὸ σημεῖον Μ.*

Διότι, ἂν ἡ ἐξίσωσις τῆς διὰ τῶν τεσσάρων σημείων διερχομένης σφαίρας εἶνε

$$(X-x_0)^2+(Y-y_0)^2+(Z-z_0)^2-A^2=0$$

καὶ σχηματισθῇ ἐκ τῶν μεταβλητῶν συντεταγμένων X, Y, Z τῶν σημείων τῆς καμπύλης ἡ παράστασις

$$(X-x_0)^2+(Y-y_0)^2+(Z-z_0)^2-A^2,$$

ἥν τινα πρὸς συντομίαν παριστῶ διὰ V, θὰ εἶνε αὕτη συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς, ἀπὸ τῆς ὁποίας ἐξαρτῶνται αἱ συντεταγμέναι X, Y, Z τῶν σημείων τῆς καμπύλης (ἥτις ἔστω ἡ t). Θὰ μηδενίζηται δὲ ἡ συνάρτησις αὕτη διὰ τέσσαρας τιμὰς τοῦ t (τὰς ἀντιστοιχούσας πρὸς τὰ τέσσαρα σημεῖα). Ἐκ τούτου ἕπεται (παραβλ. ἐδ. 57), ὅτι θὰ εὑρίσκωνται τιμαὶ τῆς t, μεταξὺ τῶν τεσσάρων τούτων κείμεναι καὶ μηδενίζουσαι τὰς τρεῖς πρώτας παραγώγους τῆς παραστάσεως V. Ἀλλ' ὅταν τὰ τέσσαρα σημεῖα συμπέσωσιν εἰς τὸ Μ, καὶ αἱ τιμαὶ τῆς t, αἱ τὰς παραγώγους τοῦ V μηδενίζουσαι, συμπίπτουσι τῇ τιμῇ

t, πρὸς ἣν ἀντιστοιχεῖ τὸ σημεῖον Μ (x, y, z)· ὥστε αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ ἡ ἀκτὶς αὐτῆς θὰ ἐπαληθεύωσι τότε τὰς ἑπομένας τέσσαρας ἐξισώσεις

$$V=0, \quad \frac{dV}{dt}=0, \quad \frac{d^2V}{dt^2}=0, \quad \frac{d^3V}{dt^3}=0,$$

ἐξ οὗ συνάγεται ἡ ταὐτότης τῆς σφαίρας ταύτης καὶ τῆς ἐγγυτάτης.

74. *Τὸ κέντρον Σ τῆς πρὸς τὴν καμπύλην ἐγγυτάτης σφαίρας εἰς τὸ σημεῖον Μ εἶνε τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ἡ τομὴ τριῶν ἐπιπέδων καθέτων ἐπὶ τὴν καμπύλην εἰς τρία σημεῖα Μ, Μ′, Μ″, ὅταν ταῦτα τείνωσι νὰ συμπέσωσι τῷ Μ.*

Διότι ἡ ἐξίσωσις τοῦ πρὸς τὴν καμπύλην καθέτου ἐπιπέδου εἰς τὸ σημεῖον Μ (x, y, z) εἶνε

$$(X - x)\frac{dx}{ds} + (Y-y)\frac{dy}{ds} + (Z-z)\frac{dz}{ds}=0 \quad \text{ἢ } V=0.$$

Ἵνα δὲ ἐκ ταύτης εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τοῦ καθέτου ἐπιπέδου εἰς τὸ σημεῖον Μ′, πρέπει, ἀντὶ τῶν x, y, z καὶ $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ νὰ θέσωμεν τὰς νέας αὐτῶν τιμάς, τὰς ἀντιστοιχούσας πρὸς τὸ σημεῖον Μ′, νὰ διατηρήσωμεν δὲ τὰ X, Y, Z ἀμετάβλητα. Πρὸς τοῦτο νοοῦμεν τὰς συντεταγμένας x, y, z τῶν σημείων τῆς καμπύλης ὡς συναρτήσεις τοῦ τόξου s καὶ αὐξάνομεν τὴν μεταβλητὴν s κατὰ h', ὅτε ἡ ἐξίσωσις τοῦ καθέτου ἐπιπέδου εἰς τὸ σημεῖον Μ′ γίνεται $V+\Delta V=0$,

$$\text{ἤτοι } V + \frac{dV}{ds}h' + \frac{d^2V}{ds^2}\frac{h'^2}{2} + \ldots = 0.$$

Ὁμοίως ἡ ἐξίσωσις τοῦ καθέτου ἐπιπέδου εἰς τὸ σημεῖον Μ″ θὰ εἶνε (ἐὰν τεθῇ τοξ ΜΜ″$=h''$)

$$V + \frac{dV}{ds}h'' + \frac{d^2V}{ds^2}\frac{h''^2}{2} + \ldots = 0.$$

Ἑπομένως ἡ τομὴ τῶν τριῶν τούτων καθέτων ἐπιπέδων ἐπαληθεύει τὰς ἐξισώσεις

$$\begin{aligned} &V=0 \\ &\frac{dV}{ds} + \frac{d^2V}{ds^2}\frac{h'}{2} + \ldots = 0 \\ &\frac{dV}{ds} + \frac{d^2V}{ds^2}\frac{h''}{2} + \ldots = 0, \end{aligned}$$

ἢ καὶ τὰς ἑξῆς ἰσοδυνάμους

$$V=0$$

$$\frac{dV}{ds}+\frac{d^2V}{ds^2}\frac{h}{2}+\ldots=0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2V}{ds^2}+\frac{1}{6}\frac{d^3V}{ds^3}(h'+h'')+\ldots=0.$$

Ἐὰν ἄρα τὰ σημεῖα M′ καὶ M′′ τείνωσι πρὸς τὸ M (ὅτε h' καὶ h'' τείνουσι πρὸς τὸ μηδέν), ἡ τομὴ τῶν τριῶν ἐπιπέδων τείνει πρὸς τὸ σημεῖον, οὗτινος αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουσι τὰς ἐξισώσεις

$$V=0, \qquad \frac{dV}{ds}=0, \qquad \frac{d^2V}{ds^2}=0\cdot$$

αὗται δὲ εἶνε αἱ ἐξισώσεις (3) τῆς σελ. 142, ἐξ ὧν ὁρίζονται αἱ συντεταγμέναι x_0, y_0, z_0 τοῦ κέντρου Σ τῆς ἐγγυτάτης σφαίρας.

75. Ἐὰν τὸ σημεῖον M′ συμπέσῃ πρῶτον τῷ M, ἡ εὐθεῖα, καθ' ἣν τέμνονται τὰ δύο κάθετα ἐπίπεδα εἰς τὰ σημεῖα M καὶ M′, γίνεται ἄξων τῆς καμπυλότητος (ἐδ. 66)· ὅθεν συνάγεται, ὅτι

Τὸ κέντρον τῆς ἐγγυτάτης σφαίρας εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον M τῆς καμπύλης εἶνε τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ἡ τομὴ τοῦ ἄξονος τῆς καμπυλότητος εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο M καὶ τοῦ καθέτου πρὸς τὴν καμπύλην ἐπιπέδου εἰς ἄλλο σημεῖον M αὐτῆς, ὅταν τοῦτο τείνῃ νὰ συμπέσῃ τῷ M.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ θεώρημα τοῦ ἐδ. 74 δύναται νὰ δειχθῇ καὶ ἄλλως, ὡς ἑξῆς.

Ἔστωσαν x_0, y_0, z_0 αἱ συντεταγμέναι τῆς τομῆς τριῶν ἐπιπέδων καθέτων ἐπὶ τὴν καμπύλην εἰς τὰ σημεῖα M′, M′′, M′′′, ἅτινα ἂς ἀντιστοιχῶσι πρὸς τὰς τιμὰς t_1, t_2, t_3 τῆς μεταβλητῆς t, ἀφ' ἧς ἐξαρτῶνται αἱ συντεταγμέναι x, y, z τῶν σημείων τῆς καμπύλης.

Ἡ ἐξίσωσις $\quad (x-x_0)\,\alpha+(y-y_0)\,\beta+(z-z_0)\,\gamma=0,$

ἧς τὸ πρῶτον μέλος εἶνε συνάρτησις τοῦ t, θὰ ἐπαληθεύηται, ὅταν τεθῇ $\quad t=t_1, \;$ ἢ $\; t=t_2 \;$ ἢ $\; t=t_3\cdot$

ἐὰν ἄρα παραστήσωμεν τὴν συνάρτησιν

$$(x-x_0)\,\alpha+(y-y_0)\,\beta+(z-z_0)\,\gamma \qquad \text{διὰ τοῦ } V,$$

ἡ συνάρτησις αὕτη θὰ μηδενίζηται διὰ τὰς τρεῖς τιμὰς t_1, t_2, t_3· ἑπομένως ἡ παράγωγος αὐτῆς $\dfrac{dV}{dt}$ θὰ μηδενίζηται διὰ δύο τιμὰς

t'_1, t'_2 μεταξὺ αὐτῶν κειμένας· καὶ ἡ δευτέρα παράγωγος $\dfrac{d^2V}{dt^2}$ θὰ μηδενίζηται διὰ μίαν τιμὴν t''_1 μεταξὺ τῶν αὐτῶν τιμῶν κειμένην. Ἀλλ' ὅταν τὰ τρία σημεῖα M′, M′′, M′′′ συμπέσωσιν εἰς τὸ M (ἔνθα ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ ἔχει τὴν τιμὴν t), καὶ αἱ τιμαὶ t'_1, t'_2, t'_3 καταντῶσιν ἴσαι τῇ τιμῇ t· ἐπίσης καὶ αἱ τιμαὶ t'_1, t'_2 καὶ ἡ t''_1· διὰ τὴν τιμὴν ἄρα ταύτην θὰ εἶνε

$$V=0, \qquad \frac{dV}{dt}=0, \qquad \frac{d^2V}{dt^2}=0\cdot$$

ἐκ τῶν τριῶν δὲ τούτων ἐξισώσεων ὁρίζονται αἱ συντεταγμέναι x_0, y_0, z_0 τοῦ σημείου, εἰς ὃ τείνει ἡ τομὴ τῶν τριῶν καθέτων ἐπιπέδων.

Τόπος τῶν κέντρων τῶν ἐγγυτάτων σφαιρῶν.

76. Ἐὰν ἡ καμπύλη μήτε ἐπίπεδος εἶνε μήτε σφαιρική, τὰ κέντρα τῶν πρὸς αὐτὴν ἐγγυτάτων σφαιρῶν ἔχουσι τόπον καμπύλην τινά, τῆς ὁποίας ἐφαπτομένη εἰς ἕκαστον σημεῖον Σ εἶνε ὁ ἄξων τῆς καμπυλότητος τοῦ ἀντιστοιχοῦντος σημείου M τῆς δοθείσης καμπύλης.

Ἐὰν τῷ ὄντι αἱ συντεταγμέναι x_0, y_0, z_0 τοῦ κέντρου τῆς ἐγγυτάτης σφαίρας εἶνε σταθεραί, θὰ εἶνε εἰς πᾶν σημεῖον τῆς καμπύλης

$$(x-x_0)\frac{dx}{ds}+(y-y_0)\frac{dy}{ds}+(z-z_0)\frac{dz}{ds}=0$$

ἢ
$$d\left\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right\}=0$$

καὶ διὰ τοῦτο
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=A^2,$$

τοῦτ' ἔστιν ἡ καμπύλη θὰ εἶνε σφαιρικὴ (ὅτι δὲ εἰς πᾶσαν σφαιρικὴν καμπύλην συμβαίνει τοῦτο, εἶνε πρόδηλον).

Ἐὰν ἡ καμπύλη εἶνε ἐπίπεδος, θὰ εἶνε $d\tau=0$, ὅθεν ἡ ἀκτὶς A τῆς ἐγγυτάτης σφαίρας γίνεται ἄπειρος καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἐγγυτάτη σφαῖρα συμπίπτει τῷ ἐπιπέδῳ τῆς καμπύλης.

Πλὴν τῶν δύο τούτων μερικῶν περιπτώσεων, τὰ κέντρα Σ ἔχουσι τόπον καμπύλην τινά. Ἵνα δὲ εὕρωμεν τὴν ἐφαπτομένην αὐτῆς, θεωροῦμεν τὰς συντεταγμένας x_0, y_0, z_0 τῶν σημείων αὐτῆς ὡς συναρτήσεις τῆς μεταβλητῆς, ἀφ' ἧς ἐξαρτῶνται καὶ αἱ συντεταγμέναι x, y, z τῶν σημείων τῆς δοθείσης καμπύλης, καὶ διαφορίζομεν τὰς ἐξισώσεις

(4) τοῦ ἐδ. (71) λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τοὺς προηγουμένους τύπους· οὕτως εὑρίσκομεν

$$\begin{aligned} dx_0 &= \lambda\left(\varrho + \frac{d^2\varrho}{d\tau^2}\right)d\tau \\ dy_0 &= \mu\left(\varrho + \frac{d^2\varrho}{d\tau^2}\right)d\tau \\ dz_0 &= \nu\left(\varrho + \frac{d^2\varrho}{d\tau^2}\right)d\tau\cdot \end{aligned} \tag{1}$$

ὅθεν καὶ

$$ds_0 = \pm\left(\varrho + \frac{d^2\varrho}{d\tau^2}\right)d\tau.$$

Ἐκ τῶν δύο σημείων $\pm$ λαμβάνομεν ἐκεῖνο, ὅπερ καθιστᾷ τὸ ds_0 ὁμοειδὲς τῷ ds (ἢ καὶ τῷ $d\tau$)· ἤτοι θέτομεν

$$ds_0 = \varepsilon\left(\varrho + \frac{d^2\varrho}{d\tau^2}\right)d\tau \qquad \varepsilon^2 = 1 \tag{2}$$

καὶ λαμβάνομεν ε ὁμοειδὲς τῷ $\varrho + \dfrac{d^2\varrho}{d\tau^2}$.

Ἐκ ταύτης καὶ τῶν προηγουμένων ἰσοτήτων (1) ἕπονται νῦν αἱ ἑξῆς σχέσεις (ἐν αἷς τὰ συνημίτονα τῶν ἀρχικῶν εὐθειῶν τῆς νέας καμπύλης φέρουσι τὸν δείκτην 0 πρὸς διάκρισιν)

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{ds_0} &= \alpha_0 = \varepsilon.\lambda \\ \frac{dy_0}{ds_0} &= \beta_0 = \varepsilon.\mu \\ \frac{dz_0}{ds_0} &= \gamma_0 = \varepsilon.\nu, \end{aligned} \tag{3}$$

ἐξ ὧν γίνεται φανερόν, ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τῆς νέας καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον Σ εἶνε ὁ ἄξων τῆς καμπυλότητος τῆς δοθείσης καμπύλης εἰς τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον αὐτῆς Μ· διότι ὁ ἄξων οὗτος διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Σ καὶ ἔχει συνημίτονα τὰ λ, μ, ν.

Διαφορίζοντες τὰς ἐξισώσεις (3) εὑρίσκομεν προσέτι

$$\begin{aligned} d\alpha_0 &= \varepsilon.d\lambda \\ d\beta_0 &= \varepsilon d\mu \\ d\gamma_0 &= \varepsilon d\nu \end{aligned} \qquad \text{ἢ} \qquad \begin{aligned} \xi_0 d\sigma_0 &= -\varepsilon\xi d\tau \\ \eta_0 d\sigma_0 &= -\varepsilon\eta d\tau \\ \zeta_0 d\sigma_0 &= -\varepsilon\zeta d\tau\cdot \end{aligned}$$

ὑψοῦντες δὲ τὰς ἐξισώσεις ταύτας εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἀθροίζοντες κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$d\sigma_0{}^2 = d\tau^2 \quad \text{τοῦτ' ἔστι} \quad d\sigma_0 = d\tau, \tag{4}$$

ἑπομένως

$$\begin{aligned} \xi_0 &= -\varepsilon\xi \\ \eta_0 &= -\varepsilon\eta \\ \zeta_0 &= -\varepsilon\zeta. \end{aligned} \tag{5}$$

Διαφορίζοντες δὲ καὶ τὰς ἐξισώσεις ταύτας, εὑρίσκομεν

$$\begin{aligned} -\alpha_0 d\sigma_0 + \lambda_0 d\tau_0 &= \varepsilon(\alpha d\sigma - \lambda d\tau) \\ -\beta_0 d\sigma_0 + \mu_0 d\tau_0 &= \varepsilon(\beta d\sigma - \mu d\tau) \\ -\gamma_0 d\sigma_0 + \nu_0 d\tau_0 &= \varepsilon(\gamma d\sigma - \nu d\tau) \end{aligned}$$

καὶ διὰ τὰς ἐξισώσεις (3)

$$\begin{aligned} \lambda_0 d\tau_0 &= \varepsilon\alpha d\sigma \\ \mu_0 d\tau_0 &= \varepsilon\beta d\sigma \\ \nu_0 d\tau_0 &= \varepsilon\gamma d\sigma, \end{aligned}$$

ὅθεν τετραγωνίζοντες καὶ ἀθροίζοντες κατὰ μέλη, λαμβάνομεν

$$d\tau_0^2 = d\sigma^2 \quad \text{ἤτοι} \quad d\tau_0 = d\sigma \tag{6}$$

καὶ ἑπομένως

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \varepsilon\alpha \\ \mu_0 &= \varepsilon\beta \\ \nu_0 &= \varepsilon\gamma. \end{aligned} \tag{7}$$

77. Ἐκ τούτων πάντων γίνεται φανερόν, ὅτι μεταξὺ τῆς δοθείσης καμπύλης καὶ τῆς καμπύλης τῶν κέντρων τῶν ἐγγυτάτων σφαιρῶν αὐτῆς, ὑπάρχουσιν αἱ ἑπόμεναι σχέσεις.

1) *Αἱ ἀρχικαὶ εὐθεῖαι τῶν δύο καμπύλων εἰς τὰ ἀντιστοιχοῦντα σημεῖα M καὶ Σ ἔχουσι τὴν ἑξῆς ἀντιστοιχίαν.*

Ἡ ἐφαπτομένη ἑκατέρας ἐξ αὐτῶν εἶνε παράλληλος τῷ ἄξονι τῆς καμπυλότητος τῆς ἄλλης· αἱ δὲ πρῶται κάθετοι αὐτῶν εἶνε παράλληλοι.

2) *Τὸ κάθετον ἐπίπεδον εἰς τὸ σημεῖον M τῆς δοθείσης καμπύλης εἶνε τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον τῆς καμπύλης τῶν κέντρων εἰς τὸ ἀντιστοιχοῦν σημεῖον Σ.* Διότι περιέχει τὴν ἐφαπτομένην αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο Σ καὶ τὴν πρώτην κάθετον αὐτῆς εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

3) *Ἡ γωνία τῆς συνεπαφῆς ἑκατέρας ἐξ αὐτῶν εἶνε ἴση τῇ γωνίᾳ τῆς στρέψεως τῆς ἄλλης.*

4) *Αἱ ἀκτῖνες τῆς καμπυλότητος* ϱ_0 *καὶ* r_0 *τῆς καμπύλης τῶν κέντρων δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων*

$$\left.\begin{aligned} \varrho_0 &= \varepsilon\left(\varrho + \frac{d^2\varrho}{d\tau^2}\right), \\ r_0 &= \varepsilon\left(\varrho + \frac{d^2\varrho}{d\tau^2}\right)\frac{\varrho}{r}, \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

ἐξ ὧν ἕπεται καὶ ἡ σχέσις $\varrho_0\varrho = r_0 r$.

Παρατήρησις. Ἐὰν ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος ϱ τῆς δοθείσης καμπύλης εἶνε σταθερά, ἤτοι ἂν εἶνε $\varrho =$ σταθ., θὰ εἶνε καὶ $\varrho_0 =$ σταθ. $= \varrho = \sqrt{rr_0}$.

Πρὸς τούτοις αἱ ἐξισώσεις τῆς καμπύλης τῶν κέντρων Σ γίνονται

$$x_0 = x + \varrho\xi, \quad y_0 = y + \varrho\eta, \quad z_0 = z + \varrho\zeta,$$

τοῦτ' ἔστιν, *ἐὰν καμπύλη ἔχῃ ἀκτῖνα καμπυλότητος σταθεράν, ἡ καμπύλη τῶν κέντρων τῶν ἐγγυτάτων σφαιρῶν αὐτῆς συμπίπτει τῇ καμπύλῃ τῶν κέντρων τῆς καμπυλότητος· ἔχει δὲ καὶ αὐτὴ ἀκτῖνα καμπυλότητος σταθερὰν καὶ ἴσην τῇ τῆς ἀρχικῆς καμπύλης. Εἶνε δὲ καὶ ἡ πρώτη καμπύλη τόπος τῶν κέντρων τῶν ἐγγυτάτων σφαιρῶν τῆς δευτέρας. Διότι ἐκ τῶν τελευταίων ἐξισώσεων ἕπεται:* $x = x_0 - \varrho\xi, \ldots$ *καὶ ἐπειδὴ τώρα* $\varrho = \varrho_0$, $-\xi = \xi_0$ (*ετώρα* $= +1$, *διότι* ϱ, ϱ_0 *πρέπει νὰ εἶνε ἀμφότερα θετικά, ὡς ἀκτῖνες καμπυλότητος*) *θὰ εἶνε*

$$x = x_0 + \varrho_0\xi_0, \quad y = y_0 + \varrho_0\eta_0, \quad z = z_0 + \varrho_0\zeta_0.$$

Περὶ τῆς πολικῆς ἐπιφανείας.

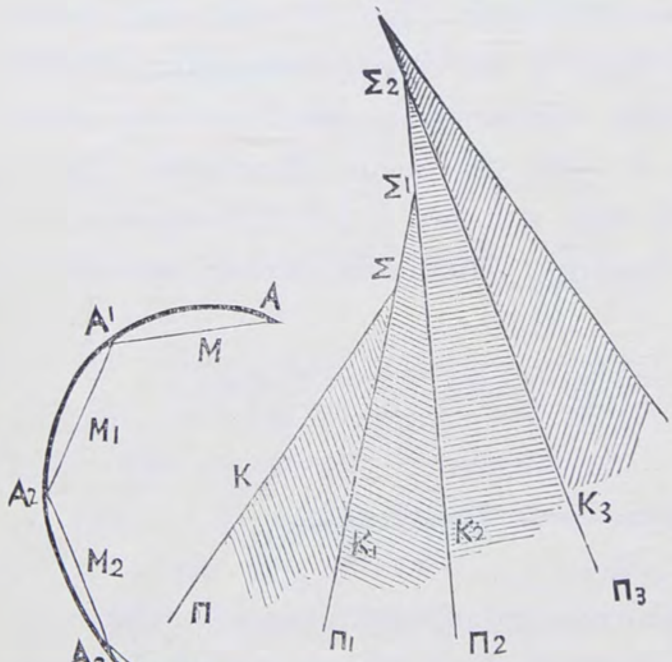
78. Οἱ ἄξονες τῆς καμπυλότητος πάσης καμπύλης συνιστῶσι κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἀναπτυκτὴν ἐπιφάνειαν, ἥτις λέγεται *πολικὴ ἐπιφάνεια* ἀντίστοιχος πρὸς τὴν καμπύλην. Ἐὰν τῷ ὄντι ἡ καμπύλη εἶνε ἐπίπεδος, οἱ ἄξονες τῆς καμπυλότητος εἶνε κάθετοι πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς καὶ συνιστῶσιν ἑπομένως κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν· ἐὰν δὲ ἡ καμπύλη εἶνε σφαιρική, οἱ εἰρημένοι ἄξονες, ὡς διερχόμενοι πάντες διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, συνιστῶσι κωνικὴν ἐπιφάνειαν· ἐὰν δὲ μήτε σφαιρικὴ εἶνε ἡ καμπύλη μήτε ἐπίπεδος, οἱ ἄξονες αὐτῆς ἐφάπτονται πάντες γραμμῆς τινος (τῆς καμπύλης τῶν κέντρων τῶν ἐγ-

γυτάτων σφαιρῶν)· ἐπομένως συνιστῶσι καὶ πάλιν ἀναπτυκτήν τινα ἐπιφάνειαν, ἥτις ἔχει λαιμὸν τὴν καμπύλην τῶν κέντρων τούτων. Ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας δὲ ταύτης κεῖται καὶ ἡ καμπύλη τῶν κέντρων Κ τῆς καμπυλότητος.

79. Ἡ πολικὴ ἐπιφάνεια ἔχει τὴν ἑπομένην κινητικὴν ἰδιότητα. *Ἐὰν τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς πολικῆς ἐπιφανείας κυλίηται ἐπ' αὐτῆς, αὐτὸ μὲν μένει πάντοτε κάθετον πρὸς τὴν καμπύλην, ἓν δὲ σημεῖον αὐτοῦ γράφει τὴν καμπύλην.*

Ἐπίπεδον λέγομεν ὅτι *κυλίεται* ἐπὶ ἐπιφανείας ἀναπτυκτῆς, ὅταν κινῆται οὕτως, ὥστε νὰ ἀναπτύσσηται ἡ ἐπιφάνεια ἐπ' αὐτοῦ, τοῦτ' ἔστιν, ὅταν τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας, ἔνθα ἐφάπτεται αὐτῆς εἰς ἑκάστην θέσιν, μένωσιν ἔπειτα προσκεκολλημένα ἐπ' αὐτοῦ.

Ἵνα δείξωμεν τοῦτο, ἐγγράφομεν εἰς τὴν καμπύλην τεθλασμένην γραμμὴν ἔχουσαν ἴσας πλευράς, τὰς AA_1, A_1A_2, A_2A_3, . . . καὶ ἐκ τοῦ μέσου ἑκάστης ἄγομεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπ' αὐτήν. Ἂς τέμνηται δὲ τὸ μὲν πρῶτον (ἤτοι τὸ κάθετον εἰς τὸ μέσον Μ τῆς AA_1) ὑπὸ τοῦ δευτέρου κατὰ τὴν εὐθεῖαν Π, τὸ δὲ δεύτερον ὑπὸ τοῦ τρίτου κατὰ τὴν Π_1, τὸ δὲ τρίτον ὑπὸ τοῦ τετάρτου κατὰ τὴν Π_2, καὶ οὕτω καθεξῆς. Αἱ εὐθεῖαι Π καὶ Π_1, ὡς κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ (τῷ δευτέρῳ), θὰ συναντῶνται εἴς τι σημεῖον Σ· ἐπίσης αἱ εὐθεῖαι Π_1 καὶ Π_2 θὰ συναντῶνται εἴς τι σημεῖον Σ_1, αἱ εὐθεῖαι Π_2 καὶ Π_3 εἴς τι σημεῖον Σ_2 κτλ. Οὕτω προκύπτει σειρὰ εὐθειῶν Π, Π_1, Π_2, . . ., αἵτινες ἀνὰ δύο κεῖνται ἐφ' ἑκάστου τῶν ἀχθέντων ἐπιπέδων καὶ ὁρίζουσι μέρος τι αὐτοῦ· τὰ μέρη δὲ ταῦτα $\Pi\Sigma\Pi_1$, $\Pi_1\Sigma_1\Pi_2$, $\Pi_2\Sigma_2\Pi_3$, . . . συνιστῶσι πολυεδρικὴν ἐπιφάνειαν ἔχουσαν αὐτὰ ἕδρας.



Νοήσωμεν νῦν ἐπίπεδον κυλιόμενον ἐπὶ τῆς πολυεδρικῆς ταύτης ἐπιφανείας· ἤτοι κατὰ πρῶτον μὲν ἐφαρμόζον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΠΣ, εἶτα στρεφόμενον περὶ τὴν εὐθεῖαν Π, μέχρις οὗ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ δευτέρου ἐπιπέδου $Μ_1Π_1Σ_1$· εἶτα στρεφόμενον πάλιν περὶ τὴν $Π_1$, μέχρις οὗ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ $Μ_2Π_2Σ_2$· καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐν τῇ κινήσει ταύτῃ τὸ μὲν ἐπίπεδον θὰ κυλίηται ἐπὶ τῆς πολυεδρικῆς ἐπιφανείας, τὸ δὲ σημεῖον Α, (ἂν ὑποτεθῇ, ὅτι τὸ κινούμενον ἐπίπεδον συμπαρασύρει καὶ τὴν ἐπ' αὐτοῦ κάθετον ΜΑ) θὰ γράψῃ γραμμὴν συγκειμένην ἐκ τόξων κυκλικῶν καὶ ἐχόντων ἄκρα τὰ σημεῖα $Α, Α_1, Α_2,$... διότι, ὅταν ἐπίπεδον στρέφηται περὶ εὐθεῖαν ἐπ' αὐτοῦ κειμένην, ἕκαστον σημεῖον στερεῶς πρὸς αὐτὸ συνδεδεμένον, γράφει τόξον κύκλου, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον εἶνε κάθετον πρὸς τὸν ἄξονα τῆς περιστροφῆς, ἀκτῖνα δὲ ἔχει τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου ἀπὸ τοῦ ἄξονος καὶ γωνίαν τὴν γωνίαν τῆς περιστροφῆς· διὰ τοῦτο τὸ σημεῖον Α, ἐν τῇ πρώτῃ περιστροφῇ θὰ γράψῃ τόξον κύκλου κείμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ $ΑΑ_1Α_2$ (εἶνε δὲ τοῦτο κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν Π διότι εἶνε κάθετον ἐπ' ἀμφότερα τὰ ἐπίπεδα ΜΠΣ, $Μ_1Π_1Σ_1$, ὧν τομὴ εἶνε ἡ Π) καὶ ἔχον ἀκτῖνα τὴν ἐκ τοῦ Α ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν Π ἀγομένην κάθετον, ἥτις ἂς πίπτῃ εἰς τὸ Κ· θὰ εἶνε δὲ $ΚΑ = ΚΑ_1 = ΚΑ_2$ (διότι πάντα τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας Π ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τῶν τριῶν σημείων $Α_1, Α_2, Α_3$)· ἡ δὲ γωνία αὐτοῦ θὰ εἶνε ἴση τῇ γωνίᾳ $ΜΚΜ_1$ τῆς περιστροφῆς, ἥτις ἰσοῦται (ὡς εὐκόλως βλέπει τις) τῇ γωνίᾳ $ΑΚΑ_1$· ὥστε τὸ σημεῖον Α ἐν τῇ πρώτῃ περιστροφῇ θὰ ἔλθῃ εἰς τὸ $Α_1$· ὁμοίως ἐν τῇ δευτέρᾳ περιστροφῇ περὶ τὴν $Π_1$ τὸ σημεῖον τοῦτο θὰ γράψῃ τόξον κυκλικὸν κείμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ $Α_1Α_2Α_3$ καὶ θὰ ἔλθῃ εἰς τὸ $Α_2$, καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε τὸ σημεῖον Α θὰ γράψῃ γραμμὴν ἐκ τόξων κυκλικῶν συγκειμένην καὶ ἔχουσαν μετὰ τῆς δοθείσης κοινὰ τὰ σημεῖα $Α, Α_1, Α_2$...

Ἀλλ' ὅταν ἕκαστον τῶν μερῶν $ΑΑ_1, Α_1Α_2,$..., εἰς ἃ διαιρεῖται τὸ τόξον ΑΒ, τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, αἱ μὲν εὐθεῖαι $Π, Π_1, Π_2,$... καταντῶσιν ἄξονες τῆς καμπυλότητος τοῦ τόξου ΑΒ (ἐδ. 66), ἡ δὲ πολυεδρικὴ ἐπιφάνεια καταντᾷ πολικὴ ἐπιφάνεια αὐτοῦ, τὰ δὲ ἐπίπεδα τῶν ἑδρῶν αὐτῆς καταντῶσιν ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τῆς πολικῆς ἐπιφανείας καὶ συγχρόνως κάθετα πρὸς τὴν καμπύλην· ἑπομένως τὸ κινούμενον ὡς εἴρηται ἐπίπεδον θὰ καταντήσῃ νὰ μένῃ πάντοτε κάθετον πρὸς τὴν καμπύλην καὶ ἐφαπτόμενον τῆς πολικῆς ἐπιφανείας καὶ θὰ κυλίηται ἐπ' αὐτῆς, τοῦτ' ἔστι τὰ σημεῖα αὐτῆς ἅμα ἐγγίσαντα τὸ ἐπίπεδον θὰ μένωσιν ἐπ' αὐτοῦ προσκεκολλημένα· ὥστε θὰ ἀναπτύσσηται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἡ ἐπιφάνεια. Ἐν τῇ κινήσει δὲ ταύτῃ ἡ γραφομένη γραμμὴ θὰ ἐφαρμόζῃ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ΑΒ καὶ τὸ γράφον αὐτὴν σημεῖον Α καταντᾷ σημεῖον τοῦ κινουμένου ἐπιπέδου.

80. Ἐκ τῆς προηγουμένης ἀποδείξεως γίνεται φανερὰ ἡ ἑξῆς πρότασις.

Ὅταν τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας κυλίηται ἐπ' αὐτῆς, ἕκαστον σημεῖον αὐτοῦ γράφει καμπύλην, πρὸς τὴν ὁποίαν μένει κάθετον καὶ ἥτις ἔχει ἑπομένως πολικὴν τὴν δοθεῖσαν ἀναπτυκτὴν ἐπιφάνειαν.

Παρατήρησις. Τὰ μὲν σημεῖα Σ, Σ_1, Σ_2,. . .καταντῶσι κέντρα τῶν ἐγγυτάτων σφαιρῶν τοῦ τόξου ΑΒ, διότι ἕκαστον ἐξ αὐτῶν ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τεσσάρων ἐφεξῆς σημείων αὐτοῦ· τὰ δὲ σημεῖα K, K_1, K_2,. . . καταντῶσι κέντρα καμπυλότητος.

Ἀνάπτυγμα τῆς καμπύλης τῶν κέντρων τῆς καμπυλότητος.

81. Ὅταν ἡ πολικὴ ἐπιφάνεια ἀναπτύσσηται ἐπὶ τοῦ κυλιομένου ἐπ' αὐτῆς ἐπιπέδου, ὁ λαιμὸς αὐτῆς (ἤτοι ἡ καμπύλη τῶν κέντρων Σ τῶν ἐγγυτάτων σφαιρῶν) τρέπεται εἰς ἐπίπεδόν τινα καμπύλην Σ, ἥτις ἐφάπτεται αὐτοῦ εἰς ἑκάστην θέσιν τοῦ ἐπιπέδου καὶ διὰ τοῦτο ἔχει ἐφαπτομένας τὰς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου, ἐφ' ὧν ἐφαρμόζουσιν αἱ ἐφαπτόμεναι τοῦ λαιμοῦ (ἤτοι οἱ ἄξονες τῆς καμπυλότητος τῆς δοθείσης καμπύλης)· ἐπειδὴ δὲ εἰς ἑκάστην τοῦ ἐπιπέδου θέσιν, ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου αὐτοῦ Α, ὅπερ γράφει τὴν δοθεῖσαν καμπύλην, καταβιβασθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν κοινὴν ἐφαπτομένην τῶν καμπύλων Σ καὶ Σ', (τοῦτ' ἔστιν ἐπὶ τὸν ἀντίστοιχον ἄξονα τῆς καμπυλότητος), ὁ ποὺς αὐτῆς θὰ εἶνε τὸ ἀντίστοιχον κέντρον τῆς καμπυλότητος, συνάγεται ἡ ἑξῆς πρότασις.

82. *Ἐὰν ἡ πολικὴ ἐπιφάνεια, ἡ πρὸς τὴν τυχοῦσαν καμπύλην ἀντίστοιχος, ἀναπτυχθῇ ἐπὶ ἐπιπέδου, τὸ ἀνάπτυγμα τῆς καμπύλης τῶν κέντρων τῆς καμπυλότητος εἶνε ποδικὴ τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ λαιμοῦ τῆς ἐπιφανείας* (ἀπὸ τοῦ σημείου, ὅπερ γράφει τὴν καμπύλην).

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου M′ ἀπὸ τῆς ἐγγυτάτης σφαίρας τοῦ σημείου M εἶνε ἀπειροστὸν τετάρτης τάξεως πρὸς τὸ τόξον MM′ ($=\Delta s$) καὶ πρωτεῦον μέρος αὐτῆς εἶνε τὸ ἑξῆς:

$$\frac{1}{24.\mathrm{A}.\varrho.r^2}.\ \frac{ds_0}{d\tau}(\Delta s)^4.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2′) τοῦ ἐδαφ. (71) λαμβάνομεν

$$h(2\mathrm{A}+h)=\sum(x+\Delta x-x_0)^2-\mathrm{A}^2=V+\frac{dV}{ds}\Delta s+\ldots$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶνε $V=0,\ \frac{dV}{ds}=0,\ \frac{d^2V}{ds^2}=0,\ \frac{d^3V}{ds^3}=0,$

συνάγεται, ὅτι θὰ εἶνε

$$h(2\mathrm{A}+h)=\frac{\Delta s^4}{24}\ \frac{d^4V}{ds^4}+\ldots,$$

ὅθεν καὶ
$$h=\frac{d^4V}{ds^4}.\ \frac{\Delta s^4}{48\mathrm{A}}+\ldots$$

Πρὸς εὕρεσιν τῆς τιμῆς τῆς τετάρτης παραγώγου $\frac{d^4V}{ds^4}$ παρατηροῦμεν, ὅτι

εἶνε
$$\frac{1}{2}\frac{dV}{ds}=\sum(x-x_0)\alpha$$

ἐξ ἧς
$$\frac{1}{2}\frac{d^2V}{ds^2}=\sum(x-x_0)\ \frac{\xi}{\varrho}+1$$

ἢ
$$\frac{1}{2}\varrho\ \frac{d^2V}{ds^2}=\sum(x-x_0)\xi+\varrho.$$

ἐκ ταύτης δὲ $\frac{1}{2}\varrho\ \frac{d^3V}{ds^3}+\frac{1}{2}\frac{d\varrho}{ds}.\ \frac{d^2V}{ds^2}=\sum(x-x_0)\left(-\frac{\alpha}{\varrho}+\frac{\lambda}{r}\right)+\frac{d\varrho}{ds}.$

ἢ
$$\frac{1}{2}\varrho r\frac{d^3V}{ds^3}+\frac{1}{2}r\frac{d\varrho}{ds}.\ \frac{d^2V}{ds^2}+\frac{1}{2}\frac{r}{\varrho}\frac{dV}{ds}=\sum(x-x_0)\lambda+r\ \frac{d\varrho}{ds}.$$

Διαφορίζοντες δὲ καὶ ταύτην καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψει, ὅτι εἶνε

$$\frac{dV}{ds}=0,\quad \frac{d^2V}{ds^2}=0,\quad \frac{d^3V}{ds^3}=0,$$

εὑρίσκομεν
$$\frac{1}{2}\varrho r\frac{d^4V}{ds^4}=-\ (x-x_0)\frac{\xi}{r}+\frac{d\left(r\frac{d\varrho}{ds}\right)}{ds},$$

ἢ διὰ τὰς προηγουμένας ἐξισώσεις

$$\frac{1}{2}\varrho r\frac{d^4V}{ds^4}=\frac{\varrho}{r}+\frac{d\left(r\frac{d\varrho}{ds}\right)}{ds}$$

καὶ
$$\frac{1}{2}\frac{d^4V}{ds^4}=\frac{1}{\varrho r}\left\{\frac{\varrho}{r}+\frac{d\left(r\frac{d\varrho}{ds}\right)}{ds}\right\}=\frac{1}{\varrho r^2}\left\{\varrho+\frac{d\left(\frac{d\varrho}{d\tau}\right)}{d\tau}\right\}.$$

Ἀλλὰ παριστῶντες διὰ τοῦ s_0 τὸ μῆκος τοῦ τόξου τῆς καμπύλης τῶν κέντρων τῶν ἐγγυτάτων σφαιρῶν, εὕρομεν (σελ. 147)

$$ds_0 = \varepsilon . \left(\varrho + \frac{d^2\varrho}{d\tau^2} \right) d\tau,$$

ὅθεν ἡ τιμὴ τῆς παραγώγου $\frac{d^4 V}{ds^4}$ γίνεται

$$\frac{d^4 V}{ds^4} = \frac{2\varepsilon}{\varrho r^2} . \frac{ds_0}{d\tau} \qquad (\varepsilon^2 = 1)$$

καὶ ἡ ζητουμένη ἀπόστασις h δύναται ἑπομένως νὰ γραφῇ ὡς ἑξῆς.

$$h = \frac{ds^4}{24\mathrm{A}} \frac{\varepsilon}{\varrho r^2} \frac{ds_0}{d\tau} . \qquad \text{ἢ} \qquad h = \varepsilon \varrho_0 \frac{ds^4}{24 \varrho r^2 \mathrm{A}} .$$

ἢ καὶ

$$h = \varepsilon . \frac{ds \; d\sigma . \Delta\tau . ds_0}{24\mathrm{A}} .$$

2) Ἐὰν ἡ ἀκτὶς Α τῆς ἐγγυτάτης σφαίρας μένῃ σταθερά, ἡ καμπύλη ἢ εἶνε σφαιρική, ἢ ἔχει ἀκτῖνα καμπυλότητος ϱ σταθεράν.

Διότι εἶνε

$$\mathrm{A} d\mathrm{A} = \left(\varrho + \frac{d^2\varrho}{d\tau^2} \right) d\varrho = \varepsilon \frac{ds_0}{d\tau} . \; d\varrho .$$

3) Ἐὰν καμπύλη ἔχῃ ἀκτῖνα καμπυλότητος σταθεράν, καὶ ἡ καμπύλη, ἥτις εἶνε τόπος τῶν κέντρων τῆς καμπυλότητος αὐτῆς, ἔχει ὡσαύτως ἀκτῖνα σταθεράν.

4) Νὰ εὑρεθῇ καμπύλη, ἐν τῇ ὁποίᾳ ἡ ἀκτὶς Α τῆς ἐγγυτάτης σφαίρας νὰ ἔχῃ λόγον σταθερὸν πρὸς τὴν ἀκτῖνα ϱ τῆς καμπυλότητος.

Ἐὰν νοήσωμεν τὴν πολικὴν ἐπιφάνειαν, ἥτις ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν ζητουμένην καμπύλην, ἀναπτυσσομένην ἐπὶ ἐπιπέδου, ἀνάγομεν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ ἑξῆς· «νὰ εὑρεθῇ ἐπίπεδος καμπύλη τοιαύτη, ὥστε ἡ πολικὴ ἀκτὶς ϱ αὐτῆς νὰ ἔχῃ λόγον σταθερὸν πρὸς τὴν ἐκ τοῦ πόλου ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην κάθετον». Μεταχειριζόμενοι τὰς συντεταγμένας φ καὶ p τοῦ ἐδαφίου 47, εὑρίσκομεν διὰ τὴν καμπύλην ταύτην $p = Ce^{\alpha\varphi}$.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΝΕΙΛΙΓΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΕΞΕΙΛΙΓΜΕΝΩΝ.

83. Ὅταν αἱ ἐφαπτόμεναι καμπύλης τινὸς τέμνωσι καθέτως ἄλλην, ἡ πρώτη καμπύλη λέγεται *ἐνειλιγμένη* τῆς δευτέρας· ἡ δὲ δευτέρα λέγεται *ἐξειλιγμένη* τῆς πρώτης.

Εὕρεσις τῶν ἐξειλιγμένων δοθείσης καμπύλης.

84. Ἔστω δοθεῖσα καμπύλη ἡ ΑΒ, τῆς ὁποίας πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὰς ἐξειλιγμένας.

Ἂς ληφθῇ τὸ τυχὸν σημεῖον Κ τῆς δοθείσης καμπύλης ΑΒ καὶ τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον Μ τῆς ἐξειλιγμένης αὐτῆς ΜΜ′ (ἐκεῖνο δηλαδή, εἰς ὃ εἶνε κάθετος ἡ ἐφαπτομένη τοῦ Κ)· ἂς παρασταθῶσι δὲ αἱ μὲν συντεταγμέναι τοῦ Κ διὰ x, y, z, αἱ δὲ τοῦ Μ διὰ x_1, y_1, z_1.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης καμπύλης ΑΒ λαμβάνομεν τὴν ἀρχὴν τῶν τόξων οὕτως, ὥστε τὸ σημεῖον Μ νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἀρνητικοῦ μέρους τῆς ἐφαπτομένης τοῦ Κ· ἐπειδὴ α, β, γ εἶνε τὰ συνημίτονα τοῦ θετικοῦ μέρους τῆς ἐφαπτομένης ΚΜ, θὰ εἶνε

$$(1) \qquad \begin{aligned} x_1 &= x - \alpha\omega \\ y_1 &= y - \beta\omega \\ z_1 &= z - \gamma\omega \end{aligned} \qquad \omega = \text{KM}.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ εὐθεῖα ΚΜ, ἥτις εἶνε ἡ ἐφαπτομένη τῆς ΑΒ εἰς τὸ Κ, πρέπει νὰ εἶνε κάθετος πρὸς τὴν καμπύλην ΜΜ′, τοῦτ᾽ ἔστι πρὸς τὴν ἐφαπτομένην αὐτῆς εἰς τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον Μ, θὰ εἶνε

$$\alpha dx_1 + \beta dy_1 + \gamma dz_1 = 0\cdot \qquad (2)$$

τοῦτο δὲ καὶ ἀρκεῖ, ἵνα ἡ καμπύλη ΜΜ′ εἶνε ἐξειλιγμένη τῆς ΑΒ· ἀλλ᾽ ἐκ τῆς διαφορίσεως τῶν ἐξισώσεων (1) εὑρίσκομεν

$$\begin{aligned} dx_1 &= \alpha(ds - d\omega) - \omega d\alpha \\ dy_1 &= \beta(ds - d\omega) - \omega d\beta \\ dz_1 &= \gamma(ds - d\omega) - \omega d\gamma\cdot \end{aligned}$$

ὅθεν ἡ ἐξίσωσις (2) γίνεται

$$ds - d\omega = 0,$$

τοῦτ᾽ ἔστιν $\qquad \omega = s + \text{A} \qquad$ (2′)

τοῦ Α ὄντος οἱουδήποτε σταθεροῦ ἀριθμοῦ.

Ἀντικαθιστῶντες νῦν τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ ω εἰς τὰς ἐξισώσεις (1), λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις

$$\begin{aligned} x_1 &= x - \alpha(s + \mathrm{A}) \\ y_1 &= y - \beta(s + \mathrm{A}) \\ z_1 &= z - \gamma(s + \mathrm{A}), \end{aligned} \tag{3}$$

αἵτινες ἐκφράζουσι τὰς συντεταγμένας x_1, y_1, z_1 τοῦ τυχόντος σημείου Μ τῆς ἐξειλιγμένης ὡς συναρτήσεις τῆς μεταβλητῆς, ἀφ' ἧς ἐξαρτῶνται αἱ συντεταγμέναι x, y, z τῆς δοθείσης καμπύλης, ἥτις ἔστω ἡ t· μένει μόνον νὰ ἐκφράσωμεν καὶ τὸ μῆκος s τοῦ τόξου τῆς δοθείσης καμπύλης ὡς συνάρτησιν τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς t· ἤτοι νὰ εὕρωμεν τὴν συνάρτησιν s ἐκ τοῦ διαφορικοῦ αὐτῆς

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

τοῦτο δὲ εἶνε ἔργον τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ.

85. Ἐπειδὴ ἡ σταθερὰ Α ἔμεινεν ἀόριστος, συνάγεται, ὅτι αἱ ἐξισώσεις (3) παριστῶσιν ἀπείρους καμπύλας (μίαν δι' ἑκάστην τιμὴν τῆς Α)· πᾶσαι δὲ αἱ καμπύλαι αὗται εἶνε ἐξειλιγμέναι τῆς δοθείσης, διότι ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν (2). Ἐντεῦθεν βλέπομεν, ὅτι *ὑπάρχουσιν ἄπειροι ἐξειλιγμέναι τῆς δοθείσης καμπύλης*· κεῖνται δὲ ἅπασαι (ὡς ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ αὐτῶν συνάγεται) ἐπὶ τῆς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας, ἥτις ἔχει λαιμὸν τὴν δοθεῖσαν καμπύλην, καὶ εἶνε πᾶσαι ἐπίπεδοι, ἐὰν ἡ δοθεῖσα εἶνε ἐπίπεδος.

86. *Πᾶν τόξον τῆς ἐνειλιγμένης ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἄγονται ἐκ τῶν ἄκρων αὐτοῦ εἰς τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα τῆς ἐξειλιγμένης.*

Ὑποτίθεται ὅτι ἡ ἀπόστασις τῶν ἀντιστοίχων σημείων τῶν δύο καμπύλων προβαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ἢ διαρκῶς αὐξανομένη ἢ διαρκῶς ἐλαττουμένη.

Διότι ἡ ἀπόστασις ω τῶν ἀντιστοίχων σημείων Κ καὶ Μ συνδέεται πρὸς τὸ τόξον s τῆς ἐνειλιγμένης διὰ τῆς ἐξισώσεως (2')

$$\omega = s + \mathrm{A},$$

ἐὰν δὲ ἐφαρμοσθῇ ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου $\mathrm{K_0K_1}$ τῆς ἐνειλιγμένης, εὑρίσκομεν

$$\begin{aligned} \mathrm{K_0M_0} &= \text{τοξ}.\, \mathrm{OK_0} + \mathrm{A} \\ \mathrm{K_1M_1} &= \text{τοξ}.\, \mathrm{OK_1} + \mathrm{A}, \end{aligned} \tag{4}$$

ἐξ ὧν καὶ

$$\mathrm{K_1M_1} - \mathrm{K_0M_0} = \text{τοξ}.\, \mathrm{K_0K_1}\cdot$$

87. Ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης συνάγεται, ὅτι *αἱ ἐξειλιγμέναι πάσης καμπύλης γράφονται ὑπὸ τῶν σημείων νήματος σταθερὸν μῆκος ἔχοντος καὶ περιειλιγμένου περὶ τὴν καμπύλην ταύτην, ὅταν τὸ νῆμα ἐκτυλίσσηται οὕτως, ὥστε τὸ ἐκτυλιχθὲν μέρος αὐτοῦ νὰ εἶνε πάντοτε τεταμένον κατὰ τὴν ἐφαπτομένην τῆς καμπύλης·* ἢ καὶ ὑπὸ τῶν διαφόρων σημείων τῆς ἐφαπτομένης, ὅταν αὕτη κυλίηται ἐπὶ τῆς καμπύλης.

Σημειωσις. Ἐὰν νοήσωμεν τὴν ἀναπτυκτὴν ἐπιφάνειαν, ἥτις ἔχει λαιμὸν τὴν δοθεῖσαν καμπύλην, ἀναπτυσσομένην ἐπὶ ἐπιπέδου, καὶ ἡ δοθεῖσα καμπύλη καὶ αἱ ἐξειλιγμέναι αὐτῆς μετασχηματίζονται εἰς ἐπιπέδους καμπύλας, χωρὶς νὰ παύσῃ ἡ πρὸς ἀλλήλας σχέσις. Διότι κατὰ τὴν ἀνάπτυξιν καὶ τὰ μήκη τῶν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας κειμένων γραμμῶν διατηροῦνται ἀμετάβλητα καὶ αἱ γωνίαι ὡσαύτως· ὥστε ἡ εὐθεῖα ΚΜ θὰ μένῃ πάλιν κάθετος ἐπὶ τὴν μετεσχηματισμένην τῆς ἐξειλιγμένης καὶ ἐφαπτομένη εἰς τὴν μετεσχηματισμένην τοῦ λαιμοῦ. Ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης ἀποδεικνύεται ἀμέσως ἡ περὶ τοῦ τόξου τῆς ἐνειλιγμένης πρότασις, ἀναγομένη εἰς τὰς ἐπιπέδους ἐνειλιγμένας.

88. Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τῶν ἐξειλιγμένων εὑρίσκομεν

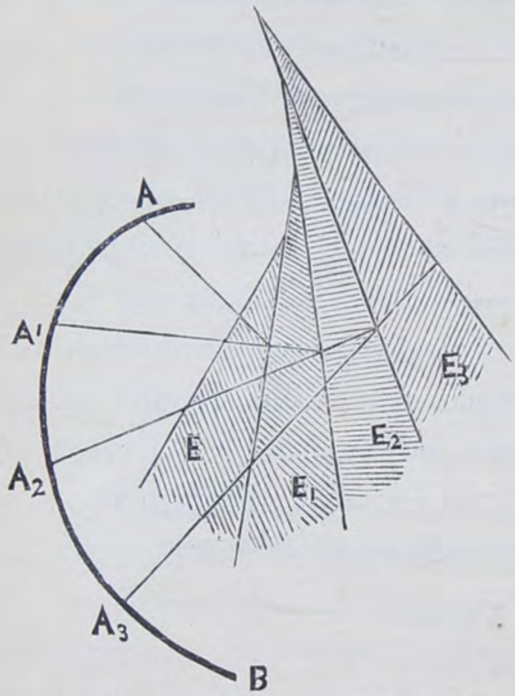
$$dx_1 = -(s+A)d\alpha$$
$$dy_1 = -(s+A)d\beta$$
$$dz_1 = -(s+A)d\gamma$$

καὶ κατὰ τοὺς προαποδειχθέντας γενικοὺς τύπους, ἐὰν παραστήσωμεν διὰ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ τὰ συνημίτονα τῆς ἐφαπτομένης τῆς τυχούσης ἐξειλιγμένης, θὰ εἶνε $\alpha_1 = -\xi$, $\beta_1 = -\eta$, $\gamma_1 = -\zeta$, τοῦτ' ἔστιν *ἡ πρώτη κάθετος τῆς ἐνειλιγμένης εἶνε παράλληλος πρὸς τὰς ἐφαπτομένας τῶν ἐξειλιγμένων* (εἰς τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα αὐτῶν).

Εὕρεσις τῶν ἐνειλιγμένων δοθείσης καμπύλης.

89. *Πᾶσα καμπύλη ἔχει ἀπείρους ἐνειλιγμένας, κεῖνται δὲ ἅπασαι ἐπὶ τῆς πρὸς τὴν καμπύλην ταύτην ἀντιστοίχου πολικῆς ἐπιφανείας.*

Ἔστω ΑΒ ἡ δοθεῖσα καμπύλη· νοήσωμεν τὸ τόξον ΑΒ διῃρημένον εἰς μέρη οἱαδήποτε AA_1, $A_1A_2 \ldots, A_\nu B$· καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως $A, A_1, A_2 \ldots, A_\nu$ τὰ κάθετα πρὸς τὴν καμπύλην ἐπίπεδα $E, E_1, E_2, \ldots, E_\nu$· ἂς τέμνωνται δὲ ταῦτα, ἕκαστον ὑπὸ τοῦ ἑπομένου αὐτῷ, κατὰ τὰς εὐθείας $\Pi_{01}, \Pi_{12}, \Pi_{23}, \ldots$ Ἐὰν ἐκ τοῦ Α φέρωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ε τυχοῦσαν εὐθεῖαν, αὕτη θὰ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν καμπύλην καὶ θὰ συναντήσῃ τὸ ἐπίπεδον E_1 κατά τι σημεῖον α_1· ἐὰν δὲ φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν $A_1\alpha_1$, αὕτη θὰ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν καμπύλην (ὡς κειμένη ἐπὶ τοῦ E_1) καὶ θὰ συναντᾷ τὸ ἐπίπεδον E_2 κατά τι σημεῖον α_2· ὁμοίως ἡ εὐθεῖα $A_2\alpha_2$ θὰ εἶνε κάθετος πρὸς τὴν καμπύλην καὶ θὰ συναντήσῃ τὸ E_3 κατά τι σημεῖον α_3· ἐπίσης ἡ εὐθεῖα $A_3\alpha_3$ θὰ εἶνε κάθετος πρὸς τὴν καμπύλην καὶ θὰ συναντήσῃ τὸ E_4 εἴς τι σημεῖον α_4· καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐξακολουθοῦντες τοιουτοτρόπως θὰ σχηματίσωμεν τεθλασμένην τινὰ γραμμὴν $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots$, ἧς αἱ πλευραὶ εἶνε πᾶσαι κάθετοι πρὸς τὴν δοθεῖσαν καμπύλην· ἀλλ' ὅταν ἕκαστον τῶν μερῶν, εἰς ἃ διαιρεῖται τὸ τόξον ΑΒ, τείνῃ πρὸς τὸ 0, αἱ εὐθεῖαι $\Pi_{01}, \Pi_{12}, \Pi_{2,3}\ldots$ καταντῶσι πολικοὶ ἄξονες τῆς δοθείσης καμπύλης, ἤτοι γενέτειραι τῆς ἀντιστοίχου πολικῆς ἐπιφανείας, ἄρα καὶ ἡ τεθλασμένη γραμμὴ $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots$, τῆς ὁποίας αἱ κορυφαὶ κεῖνται ἐπὶ τῶν εὐθειῶν τούτων, θὰ καταντήσῃ καμπύλη τις γραμμὴ Ν κειμένη ἐπὶ τῆς πολικῆς ἐπιφανείας· θὰ εἶνε δὲ ἐνειλιγμένη τῆς δοθείσης καμπύλης ΑΒ· διότι ἑκάστη κάθετος πρὸς τὴν ΑΒ θὰ ἔχῃ μετὰ τῆς καμπύλης Ν δύο σημεῖα κοινὰ συμπεσόντα εἰς ἕν· ἑπομένως ἐφάπτεται αὐτῆς.



Ἡ ἐκ τοῦ πρώτου σημείου Α ἀγομένη κάθετος δύναται νὰ εἶνε οἱαδήποτε· ταύτης δὲ ὁρισθείσης, ἡ ἐνειλιγμένη εἶνε ὡρισμένη· *ὑπάρχουσιν ἄρα ἄπειροι ἐνειλιγμέναι τῆς δοθείσης καμπύλης ΑΒ.*

Ἐξισώσεις τῶν ἐνειλιγμένων.

90. Ἔστω ΓΔ τυχοῦσα καμπύλη κειμένη ἐπὶ τῆς πολικῆς ἐπιφανείας τῆς δοθείσης καμπύλης ΑΒ· ἂς τέμνῃ δὲ ἑκάστην τῶν γενετειρῶν αὐτῆς καθ' ἓν μόνον σημεῖον· πρὸς ἕκαστον σημεῖον Μ τῆς ΑΒ ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένον τι σημεῖον Ν τῆς ΓΔ, ἐκεῖνο ὅπερ κεῖται

ἐπὶ τοῦ πολικοῦ ἄξονος, ὅστις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ Μ· καὶ τἀνάπαλιν πρὸς ἕκαστον σημεῖον Ν τῆς καμπύλης ΓΔ ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένον τι σημεῖον Μ τῆς ΑΒ, ἐκεῖνο δηλαδή, ὅπερ ἔχει πολικὸν ἄξονα τὴν διὰ τοῦ Ν διερχομένην γενέτειραν τῆς πολικῆς ἐπιφανείας. Τούτου τεθέντος, ἵνα ἡ καμπύλη ΓΔ εἶνε ἐνειλιγμένη τῆς ΑΒ, πρέπει καὶ ἀρκεῖ, αἱ τὰ τυχόντα ἀντίστοιχα σημεῖα αὐτῶν συνδέουσαι εὐθεῖαι, αἵτινες εἶνε κάθετοι πρὸς τὴν ΑΒ, νὰ εἶνε ἐφαπτόμεναι τῆς ΓΔ.

Ἔστωσαν x, y, z αἱ συντεταγμέναι τοῦ τυχόντος σημείου Μ τῆς δοθείσης καμπύλης ΑΒ καὶ x', y', z' αἱ τοῦ ἀντιστοίχου σημείου Ν τῆς ΓΔ· αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου Κ τῆς καμπυλότητος εἰς τὸ σημεῖον Μ τῆς ΑΒ εἶνε, ὡς γνωστόν,

$$x+\varrho\xi,\ y+\varrho\eta,\ z+\varrho\zeta\cdot$$

ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ ω τὴν ἀπόστασιν ΚΝ (θετικήν, ἂν τὸ Ν κεῖται ἐπὶ τοῦ θετικοῦ μέρους τοῦ ἄξονος τῆς καμπυλότητος, ἀρνητικὴν δέ, ἐὰν ἐπὶ τοῦ ἀρνητικοῦ), θὰ εἶνε

$$\begin{aligned} x' &= x+\varrho\xi+\lambda\omega \\ y' &= y+\varrho\eta+\mu\omega \\ z' &= z+\varrho\zeta+\nu\omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Ἵνα δὲ ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης ΓΔ εἰς τὸ σημεῖον Ν (x', y', z') διέρχηται διὰ τοῦ Μ, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε

$$\frac{dx'}{x'-x}=\frac{dy'}{y'-y}=\frac{dz'}{z'-z},$$

ἤ, ἂν ἕνα ἐκ τῶν λόγων τούτων παραστήσωμεν διὰ τοῦ φ,

$$\begin{aligned} dx' &= (\varrho\xi+\lambda\omega)\cdot\varphi \\ dy' &= (\varrho\eta+\mu\omega)\cdot\varphi \\ dz' &= (\varrho\zeta+\nu\omega)\cdot\varphi. \end{aligned} \tag{2}$$

Ἀλλ' ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) εὑρίσκομεν, ἔχοντες ὑπ' ὄψει τοὺς τύπους τοῦ *Frenet*

$$\begin{aligned} dx' &= \xi(d\varrho-\omega d\tau)+\lambda(d\omega+\varrho d\tau) \\ dy' &= \eta(d\varrho-\omega d\tau)+\mu(d\omega+\varrho d\tau) \\ dz' &= \zeta(d\varrho-\omega d\tau)+\nu(d\omega+\varrho d\tau), \end{aligned}$$

ὅθεν αἱ ἰσότητες (2) γίνονται

$$\begin{aligned} \xi(d\varrho-\omega d\tau-\varrho\varphi)+\lambda(d\omega+\varrho d\tau-\omega\varphi)&=0 \\ \eta(d\varrho-\omega d\tau-\varrho\varphi)+\mu(d\omega+\varrho d\tau-\omega\varphi)&=0 \\ \zeta(d\varrho-\omega d\tau-\varrho\varphi)+\nu(d\omega+\varrho d\tau-\omega\varphi)&=0. \end{aligned} \tag{3}$$

Ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν τὰς ἐξισώσεις ταύτας κατὰ σειρὰν ἐπὶ ξ, η, ζ καὶ προσθέσωμεν κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$d\varrho - \omega d\tau - \varrho\varphi = 0$$

ἐπίσης δὲ καὶ

$$d\omega + \varrho d\tau - \omega\varphi = 0. \tag{4}$$

Τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων πληρουμένων, ἀληθεύουσι καὶ αἱ τρεῖς ἐξισώσεις (3)· ἑπομένως ἡ ἐφαπτομένη τῆς ΓΔ εἰς τὸ Ν διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Μ.

Ἐὰν νῦν ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων ἀπαλείψωμεν τὴν φ, εὑρίσκομεν

$$\varrho d\omega - \omega d\varrho + (\varrho^2 + \omega^2) d\tau = 0,$$

ἢ

$$d\,\text{τοξεφ}\left(\frac{\omega}{\varrho}\right) = -d\tau,$$

ἐντεῦθεν συνάγεται

$$\frac{\omega}{\varrho} = -\text{εφ}(\tau + g),$$

τοῦ g ὄντος οἱουδήποτε σταθεροῦ ἀριθμοῦ,

καὶ

$$\omega = -\varrho\,\text{εφ}(\tau + g)\cdot$$

ὅθεν αἱ ἐξισώσεις (1) γίνονται

$$\begin{aligned} x' &= x + \varrho\xi - \lambda\varrho\,\text{εφ}(\tau + g) \\ y' &= y + \varrho\eta - \mu\varrho\,\text{εφ}(\tau + g) \\ z' &= z + \varrho\zeta - \nu\varrho\,\text{εφ}(\tau + g). \end{aligned} \tag{5}$$

91. Αἱ ἐξισώσεις αὗται δίδουσι τὰς συντεταγμένας τοῦ τυχόντος σημείου τῆς ἐνειλιγμένης ὡς συναρτήσεις τῆς μεταβλητῆς, ἀφ' ἧς ἐξαρτῶνται αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων τῆς δοθείσης καμπύλης· εἶνε δηλαδὴ αἱ ἐξισώσεις τῆς ἐνειλιγμένης· μένει δὲ μόνον νὰ ἐκφρασθῇ τὸ τόξον τ τῆς δευτέρας σφαιρικῆς δεικτρίας ὡς συνάρτησις τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς, τοῦτ' ἔστι νὰ εὑρεθῇ τὸ τ ἐκ τοῦ διαφορικοῦ αὐτοῦ (ὅπερ εἶνε γνωστόν)· τοῦτο δὲ εἶνε ἔργον τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ σταθερὰ ποσότης g ἔμεινεν ἀόριστος, ὑπάρχουσιν ἄπειροι ἐνειλιγμέναι τῆς δοθείσης καμπύλης καὶ πρὸς ἑκάστην τιμὴν τῆς παραμέτρου g ἀντιστοιχεῖ μία ἐκ τῶν ἐνειλιγμένων τούτων.

Ἐὰν ἡ καμπύλη εἶνε στρεβλή, οὐδεμία τῶν ἐνειλιγμένων αὐτῆς εἶνε ἐπίπεδος· διότι τῆς ἐπιπέδου καμπύλης ἅπασαι αἱ ἐξειλιγμέναι εἶνε ἐπίπεδοι.

Ἐὰν δὲ ἡ καμπύλη ΑΒ εἶνε ἐπίπεδος, μία μόνη ἐνειλιγμένη αὐτῆς εἶνε ἐπίπεδος (ὁ τόπος τῶν κέντρων τῆς καμπυλότητος), αἱ δὲ λοιπαὶ πᾶσαι εἶνε στρεβλαί· διότι, ἂν ἐπίπεδος καμπύλη εἶχε δύο ἐνειλιγμένας ἐπιπέδους, θὰ ἔκειντο αὗται κατ' ἀνάγκην εἰς δύο διάφορα ἐπίπεδα καὶ τομὴ τῶν δύο τούτων ἐπιπέδων θὰ ἦτο ἡ καμπύλη· ὅπερ ἄτοπον.

Αἱ ἐνειλιγμέναι ἐπιπέδου καμπύλης εἶνε πᾶσαι στερεαὶ ἕλικες. (I, σ. 155). Τοῦτο φαίνεται ἐκ τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν, αἵτινες τότε καταντῶσι

$$x_1 = x + \rho\xi \quad y_1 = y + \rho\eta \quad z = -\rho\varepsilon\varphi(\tau + g) = -\rho\varepsilon\varphi g'.$$

Ἐὰν δὲ ἡ καμπύλη εἶνε κύκλος, αἱ ἐνειλιγμέναι αὐτῆς γίνονται τὰ διάφορα σημεῖα τῆς ἐκ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ ἀγομένης καθέτου.

Σχέσις τῶν ἐνειλιγμένων πρὸς τὴν πολικὴν ἐπιφάνειαν.

92. *Πᾶσα ἐνειλιγμένη τῆς δοθείσης καμπύλης τρέπεται εἰς εὐθεῖαν γραμμὴν μετὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς πολικῆς ἐπιφανείας, ἤτοι εἶνε γεωδαισιακὴ γραμμὴ αὐτῆς* (*).

Νοήσωμεν τῷ ὄντι τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς πολικῆς ἐπιφανείας κυλιόμενον ἐπ' αὐτῆς καὶ συμπαρασύρον τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας ἅμα ἐγγίσαντα αὐτό, ὥστε ν' ἀναπτύσσηται ἐπ' αὐτοῦ ἡ ἐπιφάνεια· φανερὸν εἶνε, ὅτι πᾶσα καμπύλη ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας κειμένη καὶ τὸ ἀνάπτυγμα αὐτῆς ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐν ἑκάστῃ θέσει τοῦ ἐπιπέδου εἰς τὰ ἀντιστοιχοῦντα σημεῖα· ἀλλ' ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἐνειλιγμένης εἰς ἑκάστην θέσιν τοῦ κυλιομένου ἐπιπέδου διέρχεται δι' ἑνὸς σημείου αὐτοῦ Α (ὅπερ γράφει τὴν δοθεῖσαν καμπύλην), διότι ἐπ' αὐτῆς κεῖται τὸ νῆμα, δι' οὗ γράφεται ἡ καμπύλη, καὶ τὸ ἄκρον αὐτοῦ διέρχεται πάντοτε διὰ τοῦ Α· κατ' ἀκολουθίαν καὶ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ ἀναπτύγματος τῆς ἐνειλιγμένης θὰ διέρχηται πάντοτε διὰ τοῦ Α· ἀλλ' ὅταν ἐπιπέδου γραμμῆς αἱ ἐφαπτόμεναι διέρχωνται δι' ἑνὸς σημείου, ἡ γραμμὴ αὕτη εἶνε εὐθεῖα γραμμὴ (I, σ. 153).

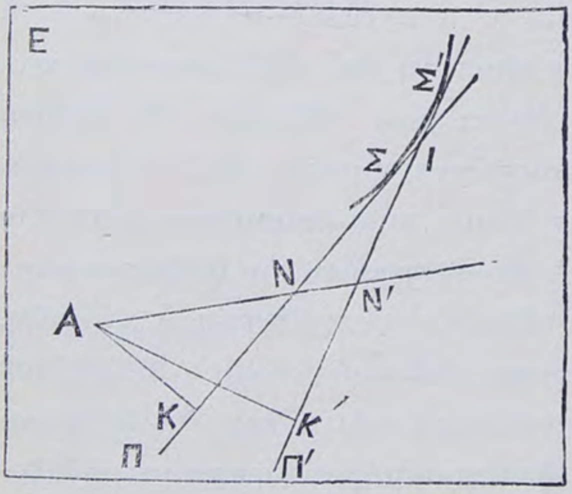
(*) Ἐν τοῖς περὶ ἐπιφανειῶν θὰ δείξωμεν ἐν γένει, ὅτι, ὅταν ἡ πρώτη κάθετος γραμμῆς εἶνε κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐφ' ἧς κεῖται ἡ γραμμή, τοῦτ' ἔστιν, ὅταν τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ὡς ἔγγιστα κεῖται ἡ καμπύλη, εἰς ἕκαστον σημεῖον αὐτῆς εἶνε κάθετον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἡ τοιαύτη γραμμὴ εἶνε γεωδαισιακὴ γραμμὴ τῆς ἐπιφανείας· (ἤτοι βραχυτάτη γραμμὴ ἐπ' αὐτῆς μεταξὺ δύο σημείων αὐτῆς μὴ λίαν ἀπεχόντων)· τοιαύτη δὲ γραμμὴ τῆς πολικῆς ἐπιφανείας εἶνε ἡ ἐνειλιγμένη· διότι ἡ πρώτη κάθετος αὐτῆς εἶνε παράλληλος τῇ ἐφαπτομένῃ τῆς δοθείσης καμπύλης, κατ' ἀκολουθίαν κάθετος ἐπὶ τὸ κάθετον ἐπίπεδον αὐτῆς, τοῦτ' ἔστιν ἐπὶ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς πολικῆς ἐπιφανείας.

Ὥστε τὸ ἀνάπτυγμα πάσης ἐνειλιγμένης εἶνε εὐθεῖα γραμμὴ διερχομένη δι᾽ ἑνὸς σημείου τοῦ κυλιομένου ἐπιπέδου (δι᾽ ἐκείνου, ὅπερ γράφει τὴν δοθεῖσαν καμπύλην).

93. *Πᾶσα εὐθεῖα τοῦ καθέτου πρὸς τὴν καμπύλην ἐπιπέδου, ἐὰν διέρχηται διὰ τοῦ σημείου Α, ἔνθα τὸ ἐπίπεδον τέμνει τὴν καμπύλην, τυλισσομένη ἐπὶ τῆς πολικῆς ἐπιφανείας κατὰ τὴν ἐπ᾽ αὐτῆς κύλισιν τοῦ ἐπιπέδου, τρέπεται εἰς καμπύλην, ἥτις εἶνε ἐνειλιγμένη τῆς δοθείσης καμπύλης.*

Διότι, ἂν ἀντὶ τῆς εὐθείας θέσωμεν νῆμα τεταμένον καὶ περατούμενον εἰς τὸ Α, κυλιομένου τοῦ ἐπιπέδου ἁρμοδίως θὰ ἐφαρμόσῃ μέρος τι τοῦ νήματος ἐπὶ τῆς εἰρημένης καμπύλης, τὸ δὲ ἄλλο μέρος θὰ εἶνε τεταμένον καὶ ἐφαπτόμενον αὐτῆς, κυλιομένου δὲ τοῦ ἐπιπέδου ἀντιθέτως, θὰ ἐκτυλίσσηται τὸ νῆμα μένον πάντοτε ἐφαπτόμενον τῆς καμπύλης καὶ ἔχον τὸ πέρας αὐτοῦ εἰς τὸ Α· ὥστε τὸ ἄκρον τοῦ ἐκτυλισσομένου νήματος γράφει τὴν δοθεῖσαν καμπύλην καὶ διὰ τοῦτο ἡ προκύπτουσα ὡς εἴρηται καμπύλη εἶνε ἐνειλιγμένη αὐτῆς.

94. Στηριζόμενοι ἐπὶ τῶν προηγουμένων ἰδιοτήτων, δυνάμεθα νῦν νὰ εὕρωμεν γεωμετρικῶς τὰς ἐξισώσεις τῶν ἐνειλιγμένων τῆς δοθείσης καμπύλης.



Πρὸς τοῦτο νοοῦμεν τὴν ἀντίστοιχον αὐτῆς πολικὴν ἐπιφάνειαν ἀναπτυσσομένην ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ε, ὅπερ κυλίεται ἐπ᾽ αὐτῆς· ἔστω δὲ ἐν τῇ τυχούσῃ θέσει αὐτοῦ Α τὸ γράφον τὴν καμπύλην σημεῖον, ΣΠ ἡ ἀντιστοιχοῦσα πολικὴ εὐθεῖα (καθ᾽ ἣν ἐφάπτεται τὸ ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας) καὶ ΑΚ κάθετος πρὸς αὐτήν· ἔστω πρὸς τούτοις ΣΣ′ τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ λαιμοῦ καὶ ΑΝΝ′ τὸ ἀνάπτυγμα τῆς τυχούσης ἐνειλιγμένης.

Ἐὰν αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου Α τῆς δοθείσης καμπύλης παρασταθῶσι διὰ x, y, z, αἱ μὲν συντεταγμέναι τοῦ σημείου Κ (ὅπερ εἶνε τὸ ἀντίστοιχον κέντρον καμπυλότητος) θὰ εἶνε (ἐδ. 94)

$$x+\varrho\xi,\quad y+\varrho\eta,\quad z+\varrho\zeta,$$

αἱ δὲ συντεταγμέναι τοῦ ἀντιστοίχου σημείου Ν τῆς θεωρουμένης ἐνειλιγμένης, ἐπειδὴ τοῦτο κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῆς καμπυλότητος, θὰ εἶνε

$$x + \varrho\xi + \lambda.KN, \qquad y + \varrho\eta + \mu.KN, \qquad z + \varrho\zeta + \nu.KN\cdot$$

ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΑΝ εὑρίσκομεν

$$KN = AK.\varepsilon\varphi\vartheta = \varrho.\varepsilon\varphi\vartheta, \qquad \text{ἔνθα } \vartheta = \text{γωνίᾳ } NAK.$$

Ἵνα δὲ εὕρωμεν τὴν γωνίαν ϑ, παρατηροῦμεν, ὅτι, ἂν τὸ ἐπίπεδον κυλισθῇ κατά τι, τὸ μὲν Α θὰ μεταβῇ εἰς ἄλλο σημεῖον τῆς δοθείσης καμπύλης, τὸ δὲ ἐπίπεδον θὰ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας κατὰ ἄλλον τινὰ ἄξονα καμπυλότητος, ἔστω τὸν Σ΄Π΄, ὅστις θὰ ἐφάπτηται τῆς καμπύλης ΣΣ΄ εἰς τὸ σημεῖον Σ΄, τὸ δὲ κέντρον τῆς καμπυλότητος θὰ μεταβῇ εἰς τὸ Κ΄ καὶ τὸ σημεῖον Ν τῆς ἐνειλιγμένης εἰς τὸ σημεῖον Ν΄· ὥστε ἡ γωνία ϑ θὰ γίνῃ Κ΄ΑΝ΄. ἑπομένως θὰ μεταβληθῇ κατὰ τὴν γωνίαν ΚΑΚ΄· ἐπειδὴ δὲ εἶνε ΚΑΚ΄=ΚΙΚ΄, ἤτοι

$$-\Delta\vartheta = \Delta\sigma \text{ τῆς καμπύλης } \Sigma\Sigma',$$

$$\text{ἕπεται καὶ } -d\vartheta = d\sigma \text{ τῆς αὐτῆς καμπύλης}\cdot$$

ἀλλ' ἡ γωνία τῆς συνεπαφῆς $d\sigma$ μένει ἀμετάβλητος κατὰ τὴν κύλισιν καὶ ἰσοῦται τῇ γωνίᾳ τῆς συνεπαφῆς τοῦ λαιμοῦ $d\sigma_0$, ἤτοι (σελ. 148) τῇ γωνίᾳ στρέψεως $d\tau$ τῆς δοθείσης καμπύλης· ἐντεῦθεν ἕπεται

$$-d\vartheta = d\tau$$

καὶ

$$-\vartheta = \tau + g,$$

ὅθεν

$$\varepsilon\varphi\vartheta = -\varepsilon\varphi(\tau + g)\cdot$$

ἑπομένως, ἂν παραστήσωμεν διὰ x', y', z' τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου Μ τῆς ἐνειλιγμένης, θὰ εἶνε

$$x' = x + \varrho\xi - \varrho\lambda\varepsilon\varphi(\tau + g)$$
$$y' = y + \varrho\eta - \varrho\mu\varepsilon\varphi(\tau + g)$$
$$z' = z + \varrho\zeta - \varrho\nu\varepsilon\varphi(\tau + g).$$

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΠΑΦΩΝ ΕΝ ΓΕΝΕΙ

1) *Ἐπιφανείας καὶ γραμμῆς*

95. Γραμμὴ καὶ ἐπιφάνεια λέγεται ὅτι ἔχουσιν εἴς τι κοινὸν σημεῖον Μ *ἐπαφὴν τῆς τάξεως ν*, ὅταν ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων τῆς γραμμῆς ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας γίνηται ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ Μ ἀπειροστὸν τῆς τάξεως $\nu+1$ ὡς πρὸς τὸ τόξον.

Ἐγγυτάτη δὲ πρὸς δοθεῖσαν γραμμὴν λέγεται ἐπιφάνειά τις ἐξ εἴδους ἐπιφανειῶν ὡρισμένου, ἐὰν ἔχῃ πρὸς αὐτὴν ἐπαφὴν ἀνωτέρας τάξεως ἢ πᾶσαι αἱ λοιπαὶ ὁμοειδεῖς ἐπιφάνειαι· ἤτοι, ἂν ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων τῆς γραμμῆς ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας ταύτης γίνηται (πλησίον τοῦ Μ) ἀπειροστὸν ἀνωτέρας τάξεως ἢ ἡ ἀπόστασις αὐτῶν ἀπὸ πάσης ἄλλης ὁμοειδοῦς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ ἐγγύτατον πρὸς γραμμὴν ἐπίπεδον ἔχει πρὸς αὐτὴν ἐπαφὴν δευτέρας τάξεως, ἡ δὲ ἐγγυτάτη σφαῖρα, τρίτης.

96. Ὁ ὁρισμὸς οὗτος τῶν ἐπαφῶν δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἄλλον εὐκολώτερον πρὸς τὰς ἐφαρμογάς.

Τῷ ὄντι, ὅταν ἡ ἀπόστασις τοῦ τυχόντος σημείου (ξ, η, ζ) ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας $\varphi(X, Y, Z)=0$ γίνῃ ἀπειροστόν, καὶ τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς γίνεται εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ἀπειροστὸν τῆς αὐτῆς τάξεως. Διότι, ἂν παραστήσωμεν διὰ x, y, z τὰς συντεταγμένας τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου, διὰ ϱ τὴν ἀπόστασιν καὶ διὰ l, m, n τὰ συνημίτονα αὐτῆς πρὸς τοὺς ἄξονας, θὰ εἶνε

$$\xi=x+l\varrho, \quad \eta=y+m\varrho, \quad \zeta=z+n\varrho$$

καὶ τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως τῆς ἐπιφανείας, τοῦτ' ἔστιν ἡ παράστασις $\varphi(X,Y,Z)$, γίνεται εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο (ξ, η, ζ)

$$\varphi(\xi,\eta,\zeta)=\varphi(x+l\varrho, \quad y+m\varrho, \quad z+n\varrho)=$$
$$=\varphi(x,y,z)+\varrho\{l\varphi_x+m\varphi_y+n\varphi_z\}+\ldots$$

καὶ ἐπειδὴ τὸ σημεῖον x, y, z εἶνε τῆς ἐπιφανείας, ἕπεται, ὅτι θὰ εἶνε

$$\varphi(x,y,z)=0.$$

Πρὸς τούτοις τὰ συνημίτονα l, m, n τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν εἰς τὸ σημεῖον (x, y, z) εἶνε (Ι σελ. 169)

$$l=\frac{\varphi x}{\sqrt{\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2}}, m=\frac{\varphi y}{\sqrt{\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2}}, n=\frac{\varphi x}{\sqrt{\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2}},$$

ἐπομένως ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$\varphi(\xi,\eta,\zeta)=\varrho\sqrt{\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2}+\ldots$$

ἐξ ἧς γίνεται φανερόν, ὅτι ἡ ἀπόστασις ρ τοῦ σημείου (ξ, η, ζ) ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας καὶ ἡ παράστασις φ(ξ, η, ζ) εἶνε ὁμοταγῆ ἀπειροστά.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ προηγουμένη ἀπόδειξις ὑποθέτει, ὅτι εἰς τὸν πόδα (x,y,z) τῆς καθέτου δὲν μηδενίζονται καὶ αἱ τρεῖς μερικαὶ παράγωγοι $\varphi_x,\varphi_y,\varphi_z$ · τοῦτ' ἔστιν ὅτι ὑπάρχει εἰς τὸ σημεῖον (x,y,z) τῆς ἐπιφανείας ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον.

97. Στηριζόμενοι εἰς τὴν ἰδιότητα ταύτην δυνάμεθα νὰ δώσωμεν τοὺς ἑξῆς ὁρισμούς.

Ἡ ἐπαφὴ γραμμῆς καὶ ἐπιφανείας εἴς τι κοινὸν σημεῖον M λέγεται τῆς $\nu^{\text{οστῆς}}$ τάξεως, ἐὰν ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ κοινοῦ τούτου σημείου τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως τῆς ἐπιφανείας γίνηται ἐπὶ τῆς καμπύλης ἀπειροστὸν τῆς τάξεως $\nu+1$, ὡς πρὸς τὴν αὔξησιν τοῦ τόξου.

Ἐγγυτάτη δὲ πρὸς δοθεῖσαν καμπύλην καὶ εἰς δοθὲν αὐτῆς σημεῖον λέγεται ἐκ τῶν ἐπιφανειῶν ἑνὸς εἴδους ἐκείνη, δι' ἣν τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως τῶν ἐπιφανειῶν γίνεται ἐπὶ τῆς καμπύλης πλησίον τοῦ δοθέντος σημείου ἀπειροστὸν ὅσον ἐνδέχεται ἀνωτέρας τάξεως.

98. Κατὰ ταῦτα δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν εὐκόλως τοὺς ὅρους, ὑπὸ τοὺς ὁποίους ἡ ἐπιφάνεια $\varphi(X,Y,Z)=0$ ἔχει πρὸς δοθεῖσαν καμπύλην καὶ εἰς δοθὲν αὐτῆς σημεῖον $M(x,y,z)$ ἐπαφὴν τῆς τάξεως ν.

Διότι τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως τῆς ἐπιφανείας, ἤτοι ἡ παράστασις $\varphi(X,Y,Z)$ γίνεται ἐπὶ τῆς καμπύλης συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς, ἀπὸ τῆς ὁποίας ἐξαρτῶνται αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων αὐτῆς (ἥτις ἔστω ἡ t)· καὶ εἰς μὲν τὸ σημεῖον M γίνεται $\varphi(x,y,z)$, εἰς δὲ τὸ σημεῖον M′ (εἰς ὃ μεταβαίνομεν αὐξάνοντες τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν t κατὰ Δt) γίνεται

$$\varphi(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z),$$

ἔνθα Δx, Δy, Δz εἶνε αἱ αὐξήσεις τῶν συντεταγμένων αἱ πρὸς τὴν αὔξησιν Δt ἀντιστοιχοῦσαι.

Ἐπειδὴ δὲ εἶνε $\varphi(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)=$

$$\varphi(x,y,z)+\frac{d\varphi(x,y\,z)}{dt}\Delta t+\frac{d^2\varphi(x,y,z)}{dt^2}\frac{\Delta t^2}{1.2}+\ldots,$$

συνάγεται, ὅτι, ἵνα τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο (ὅπερ εἶνε ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως $\varphi(X,Y,Z)$ εἰς τὸ πλησίον τοῦ M ληφθὲν σημεῖον M′) ἦ ἀπειροστὸν τῆς τάξεως $\nu+1$, ὡς πρὸς τὴν αὔξησιν Δt, ἢ ὡς πρὸς τὸ ὁμοταγὲς ἀπειροστὸν $\Delta s (= MM')$, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε

$$\varphi(x,y,z)=0,\quad \frac{d\varphi(x,y,z)}{dt}=0,\ldots\quad \frac{d^\nu\varphi(x,y,z)}{dt^\nu}=0.$$

ἤτοι αἱ συντεταγμέναι x,y,z τοῦ σημείου M καὶ τὰ διαφορικὰ αὐτῶν πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἐπαληθεύωσι τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας καὶ τὰς ἐξ αὐτῆς προκυπτούσας διὰ τῆς διαφορίσεως μέχρι καὶ τῆς τάξεως ν.

Ἵνα δὲ ἐκ τῶν ἐπιφανειῶν $\varphi(X,Y,Z,\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu)=0$, ὧν ἡ ἐξίσωσις περιέχει $\nu+1$ παραμέτρους, εὕρωμεν τὴν ἐγγυτάτην πρὸς δοθεῖσαν καμπύλην καὶ εἰς δοθὲν σημεῖον $M(x,y,z)$, ἀρκεῖ νὰ ἐκφράσωμεν, ὅτι ἡ ἐπαφὴ εἶνε τῆς $\nu^{\text{οστῆς}}$ τάξεως, διότι αἱ $\nu+1$ ἐξισώσεις

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(x,y,z,\alpha_0,\ldots,\alpha_\nu)=0\\&\frac{d\varphi(x,y,z,\alpha_0,\ldots,\alpha_\nu)}{dt}=0\\&\frac{d^2\varphi(x,y,z,\alpha_0,\ldots,\alpha_\nu)}{dt^2}=0\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\frac{d^\nu\varphi(x,y,z,\alpha_0,\ldots,\alpha_\nu)}{dt^\nu}=0\end{aligned}\right\}\quad(\varepsilon)$$

ὁρίζουσι τὰς τιμὰς τῶν παραμέτρων, ἑπομένως καὶ τὴν ἐπιφάνειαν αὕτη δὲ εἶνε ἡ ἐγγυτάτη· διότι αἱ ἄλλαι ἀντιστοιχοῦσι πρὸς τιμὰς τῶν $\alpha_0,\ldots,\alpha_\nu$ μὴ ἐπαληθευούσας πάσας τὰς ἐξισώσεις (ε)· ἀνωτέρας δὲ τάξεως ἐπαφὴ εἶνε ἐν γένει ἀδύνατος (πλὴν εἴς τινα σημεῖα ἐκτάκτως).

99. *Ἐὰν ἐπιφάνεια διέρχηται διὰ $\mu+1$ σημείων καμπύλης, τείνωσι δὲ ταῦτα πάντα νὰ συμπέσωσιν εἰς ἕν, ἡ ἐπιφάνεια τείνει νὰ κατασταθῇ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο καὶ ἡ ἐπαφὴ εἶνε τῆς τάξεως μ.*

Διότι τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως τῆς ἐπιφανείας, ὅπερ ἔστω $\varphi(X,Y,Z)$, ἔχει εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς καμπύλης ὡρισμένην τιμὴν καὶ μεταβάλλεται ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖον· εἶνε ἄρα (ἐπὶ τῆς καμπύλης) συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς, ἀπὸ τῆς ὁποίας ἐξαρτῶνται αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων τῆς καμπύλης, ἥτις μεταβλητὴ ἔστω ἡ t.

Ἀλλ' ἡ συνάρτησις αὕτη τῆς t μηδενίζεται διὰ τὰς $\mu+1$ τιμὰς

$$(\vartheta)\qquad t_0,\ t_1,\ldots,\ t_\mu,$$

πρὸς ἃς ἀντιστοιχοῦσι τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης, δι' ὧν διέρχεται ἡ ἐπιφάνεια· ἑπομένως αἱ μ παράγωγοι αὐτῆς πρὸς τὴν t

$$\frac{d\varphi(X,Y,Z)}{dt},\ \frac{d^2\varphi(X,Y,Z)}{dt^2},\ldots,\ \frac{d^{\mu}\varphi(X,Y,Z)}{dt^{\mu}}$$

θὰ μηδενίζωνται διὰ τιμάς τινας τῆς t κειμένας μεταξὺ τῶν τιμῶν (ϑ)· ὅταν δὲ τὰ σημεῖα πάντα συμπέσωσιν εἰς ἕν, καὶ αἱ τιμαὶ (ϑ) συμπίπτουσι τῇ τιμῇ t, πρὸς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ τὸ σημεῖον τοῦτο· ὁμοίως δὲ καὶ αἱ μεταξὺ αὐτῶν κείμεναι καὶ τὰς παραγώγους μηδενίζουσαι· καὶ ἑπομένως εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο (x, y, z) θὰ εἶνε

$$\varphi(x,y,z)=0$$

$$\frac{d\varphi(x,y,z)}{dt}=0$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^{\mu}\varphi(x,y,z)}{dt^{\mu}}=0,$$

ἐξ ὧν γίνεται δῆλον, ὅτι εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ἡ ἐπιφάνεια καὶ ἡ γραμμὴ ἔχουσιν ἐπαφὴν τῆς τάξεως μ.

Ἐκ τούτου συνάγεται, ὅτι *ἡ ἐγγυτάτη πρὸς καμπύλην ἐπιφάνεια ἐκ τῶν ἐπιφανειῶν εἴδους τινὸς (ὁριζομένου διὰ $\nu+1$ παραμέτρων) εἶνε τὸ ὅριον τῶν θέσεων τῆς ὁμοειδοῦς ἐπιφανείας, ἥτις διέρχεται διὰ $\nu+1$ σημείων τῆς καμπύλης, ὅταν ταῦτα συμπέσωσιν εἰς ἕν.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν ταῖς ἐπαφαῖς τῆς ἀρτίας τάξεως ἡ καμπύλη διαπερᾷ τὴν ἐπιφάνειαν (ὅπως π.χ. εἰς τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον), ἐν δὲ ταῖς περιτταῖς μένει πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας πλησίον τῆς ἁφῆς (ὅπως π. χ εἰς τὴν ἐγγυτάτην σφαῖραν)· ἀποδεικνύεται δὲ τοῦτο ὡς καὶ περὶ τῶν ἐπιπέδων καμπύλων.

2) *Γραμμῆς πρὸς γραμμήν.*

100. Δύο γραμμαὶ λέγεται ὅτι ἔχουσιν εἰς κοινόν τι σημεῖον αὐτῶν Μ (x,y,z) ἐπαφὴν τῆς τάξεως ν, ἐάν, ἐκφραζομένων τῶν συντεταγμένων τῶν σημείων αὐτῶν διὰ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς t (εἴς τινα τιμὴν τῆς ὁποίας $t=$ α νὰ ἀντιστοιχῇ τὸ κοινὸν σημεῖον Μ), ἡ ἀπόστασις τῶν ἀντιστοίχων σημείων τῶν δύο καμπύλων γίνηται πλησίον τοῦ Μ ἀπειροστὸν τῆς τάξεως $\nu+1$ ὡς πρὸς τὴν αὔξησιν τῆς μεταβλητῆς t ἀπὸ τῆς τιμῆς α.

Ἀντίστοιχα δὲ λέγω τὰ πρὸς τὴν αὐτὴν τιμὴν τῆς μεταβλητῆς t ἀντιστοιχοῦντα σημεῖα τῶν δύο καμπύλων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἂν αἱ ἐξισώσεις τῶν καμπύλων ἀναφέρωνται πρὸς δύο διαφόρους ἀνεξαρτήτους μεταβλητὰς t καὶ ω, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν $\omega = \omega_1 - \alpha + t$, ὅπου ω_1 εἶνε ἡ εἰς τὴν τιμὴν $t = \alpha$ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ω, ἵνα ἐκφράσωμεν καὶ τῶν δύο καμπύλων τὰς συντεταγμένας διὰ τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς t

Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις τῶν καμπύλων

$$\begin{array}{l|l} X = \Phi(t) & x = \varphi(t) \\ Y = F(t) & y = f(t) \\ Z = \Sigma(t) & z = \sigma(t). \end{array} \tag{1}$$

ἡ ἀπόστασις δ τῶν ἀντιστοίχων σημείων εἶνε

$$\delta = \left\{ (X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

ἢ

$$\delta = \left\{ \Big(\Phi(t) - \varphi(t)\Big)^2 + \Big(F(t) - f(t)\Big)^2 + \Big(\Sigma(t) - \sigma(t)\Big)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Ἐν πρώτοις λέγω, ὅτι, ἵνα ἡ ἀπόστασις δ γίνῃ ἀπειροστὸν τῆς τάξεως $\nu + 1$, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἑκάστη τῶν διαφορῶν $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ νὰ γίνῃ ἀπειροστὸν τῆς τάξεως $\nu + 1$. Διότι ἔστω τιμή τις τοῦ t πλησίον τῆς τιμῆς α, ἡ $\alpha + h$, τότε θὰ εἶνε

$$X - x = \Phi(\alpha + h) - \varphi(\alpha + h) = \mathrm{A} + \mathrm{A}_1 h + \mathrm{A}_2 h^2 + \dots,$$

ὁμοίως
$$Y - y = \mathrm{B} + \mathrm{B}_1 h + \mathrm{B}_2 h^2 + \dots$$

καὶ
$$Z - z = \Gamma + \Gamma_1 h + \Gamma_2 h^2 + \dots$$

ἑπομένως ἡ ἀπόστασις τῶν πρὸς τὴν τιμὴν ταύτην $\alpha + h$ ἀντιστοιχούντων σημείων τῶν δύο καμπύλων θὰ εἶνε

$$\delta = \left\{ (\mathrm{A} + \mathrm{A}_1 h + \dots)^2 + (\mathrm{B} + \mathrm{B}_1 h + \dots)^2 + (\Gamma + \Gamma_1 h + \dots)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης γίνεται φανερόν, ὅτι, ἵνα δ ᾖ ἀπειροστὸν πρώτης τάξεως πρὸς τὸ h, ἀνάγκη νὰ εἶνε

$$\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \Gamma^2 = 0, \quad \text{τοῦτ' ἔστιν} \quad \mathrm{A} = 0, \quad \mathrm{B} = 0, \quad \Gamma = 0.$$

Ἡ ἀπόστασις δ γράφεται τότε ὡς ἑξῆς

$$\delta = h \left\{ (\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 h + \dots)^2 + (\mathrm{B}_1 + \mathrm{B}_2 h + \dots)^2 + (\Gamma_1 + \Gamma_2 h + \dots)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

ἵνα δὲ ᾖ τὸ δ ἀπειροστὸν τῆς δευτέρας τάξεως πρὸς τὸ h, ἀνάγκη νὰ εἶνε

$$\mathrm{A}_1^2 + \mathrm{B}_1^2 + \Gamma_1^2 = 0, \quad \text{τοῦτ' ἔστιν} \quad \mathrm{A}_1 = 0, \quad \mathrm{B}_1 = 0, \quad \Gamma_1 = 0.$$

Ἐξακολουθοῦντες οὕτω βλέπομεν, ὅτι, ἵνα ἡ ἀπόστασις δ ᾖ ἀπειροστὸν τῆς τάξεως $\nu + 1$ ὡς πρὸς τὸ h, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε

$$\begin{array}{llll} \mathrm{A} = 0, & \mathrm{A}_1 = 0, & \mathrm{A}_2 = 0, \dots, & \mathrm{A}_\nu = 0, \\ \mathrm{B} = 0, & \mathrm{B}_1 = 0, & \mathrm{B}_2 = 0, \dots, & \mathrm{B}_\nu = 0, \\ \Gamma = 0, & \Gamma_1 = 0, & \Gamma_2 = 0, \dots, & \Gamma_\nu = 0, \end{array}$$

τοῦτ' ἔστι πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἑκάστη τῶν διαφορῶν $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ νὰ εἶνε ἀπειροστὸν τῆς τάξεως $\nu + 1$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Πρὸς οἱουςδήποτε ἄξονας καὶ ἂν ἀναφέρωμεν τὰς καμπύλας, αἱ διαφοραὶ τῶν ὁμωνύμων συντεταγμένων θὰ μείνωσιν ἀπειροστὰ τῆς τάξεως $\nu+1$ (τινὲς μόνον ἐκ τούτων δύνανται νὰ γίνωσιν ἀνωτέρας τάξεως· ἀλλ' οὐχὶ πᾶσαι). Διότι οἱ τύποι τῆς μεταβάσεως ἀπὸ συστήματος εὐθυγράμμων συντεταγμένων εἰς ἄλλο παρέχουσι τὰς διαφορὰς τῶν ὁμωνύμων συντεταγμένων $X'-x'$, $Y'-y'$ $Z'-z'$ δύο τυχόντων σημείων ὡς πρωτοβαθμίους καὶ ὁμογενεῖς συναρτήσεις τῶν ὁμοίων διαφορῶν $X-x$, $Y-y$, $Z-z$.

Ἡ τάξις τῆς ἐπαφῆς δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἐκλογῆς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς t. Ἐὰν δηλαδὴ ἡ ἀπόστασις δ, ὡς συνάρτησις τοῦ t θεωρουμένη, εἶνε ἀπειροστὸν τῆς τάξεως $\nu+1$ πρὸς τὴν αὔξησιν Δt, καὶ ἂν θεωρηθῇ ὡς συνάρτησις ἄλλης οἱαςδήποτε μεταβλητῆς ω, πάλιν θὰ εἶνε ἀπειροστὸν τῆς τάξεως $\nu+1$ πρὸς τὴν αὔξησιν $\Delta\omega$·

Ἔστω ἡ ἀπόστασις δ ὡς συνάρτησις τῆς t θεωρουμένη $\delta=\Theta(t)$.

Ἵνα ἡ ἀπόστασις αὕτη πλησίον τοῦ κοινοῦ σημείου Μ $(t=\alpha)$ γίνηται ἀπειροστὸν τῆς τάξεως $\nu+1$, ἵνα δηλαδὴ $\Theta(\alpha+h)$ γίνῃ ἀπειροστὸν τῆς τάξεως $\nu+1$ πρὸς τὸ h, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε

$$\Theta(\alpha)=0,\qquad \Theta'(\alpha)=0,\ldots,\Theta^{(\nu)}(\alpha)=0.$$

Ἂς θεωρηθῇ νῦν ἡ ἀπόστασις δ ὡς συνάρτησις ἄλλης οἱαςδήποτε μεταβλητῆς ω· καὶ ἔστω

$$\delta=H(\omega)\cdot$$

αἱ δύο μεταβληταὶ ω καὶ t εἶνε συναρτήσεις ἀλλήλων, διότι πρὸς ἑκάστην τιμὴν τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένη τις τιμὴ τῆς ἄλλης· ἔστω $t=g(\omega)$, ἂς ἀντιστοιχῇ δὲ τὸ κοινὸν σημεῖον Μ πρὸς τὴν τιμὴν $\omega=\beta$, ἤτοι ἔστω $\beta=g(\alpha)$, τότε θὰ εἶνε

$$\delta=\Theta(g(\omega))=H(\omega),$$

ὅθεν
$$H'(\omega)=\Theta'(t).g'(\omega)$$
$$H''(\omega)=\Theta'(t)g''(\omega)+\Theta''(t)g'(\omega)^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
καὶ
$$H^{(\nu)}(\omega)=\Theta'(t)g^{(\nu)}(\omega)+\ldots+\Theta^{(\nu)}(t)g'(\omega)^{\nu}\cdot$$

ἐπειδὴ δὲ ἐξ ὑποθέσεως εἶνε

$$\Theta(t)=0,\qquad \Theta'(t)=0,\qquad \Theta^{\nu}(t)=0,\ldots\quad \text{διὰ}\quad t=\alpha,$$

ἕπεται, ὅτι θὰ εἶνε καὶ

$$H(\omega)=0,\quad H'(\omega)=0,\quad H''(\omega)=0,\ldots,\quad H^{(\nu)}(\omega)=0 \text{ διὰ } \omega=\beta.$$

101. Ἵνα νῦν εὕρωμεν τοὺς ὅρους, ὑπὸ τοὺς ὁποίους δύο καμπύλαι ἔχουσιν εἴς τι κοινὸν σημεῖον $M(t=\alpha)$ ἐπαφὴν τῆς τάξεως ν, ἀρκεῖ κατὰ

τὰ προαποδειχθέντα νὰ ἐκφράσωμεν, ὅτι αἱ τρεῖς διαφοραὶ $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ τῶν ὁμωνύμων συντεταγμένων γίνονται πλησίον τοῦ M, ἤτοι διὰ $t=\alpha+h$, ἀπειροστὰ τῆς τάξεως $\nu+1$ ὡς πρὸς τὸ h· πρὸς τοῦτο πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε

$$\begin{array}{lll} \Phi(\alpha)=\varphi(\alpha), & \Sigma(\alpha)=\sigma(\alpha), & F(\alpha)=f(\alpha) \\ \Phi'(\alpha)=\varphi'(\alpha) & \Sigma'(\alpha)=\sigma'(\alpha) & F'(\alpha)=f'(\alpha) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \Phi^{(\nu)}(\alpha)=\varphi^{(\nu)}(\alpha) & \Sigma^{(\nu)}(\alpha)=\sigma^{(\nu)}(\alpha) & F^{(\nu)}(\alpha)=f^{(\nu)}(\alpha), \end{array}$$

ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό,

$$\left.\begin{array}{lll} X=x & Y=y & Z=z \\ dX=dx & dY=dy & dZ=dz \\ d^2X=d^2x & d^2Y=d^2y & d^2Z=d^2z \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ d^\nu X=d^\nu x & d^\nu Y=d^\nu y & d^\nu Z=d^\nu z \end{array}\right| \text{διὰ } t=\alpha, \tag{2}$$

πρέπει δηλαδὴ *καὶ αἱ ὁμώνυμοι συντεταγμέναι νὰ εἶνε ἴσαι καὶ τὰ διαφορικὰ αὐτῶν πρὸς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν ἴσα μέχρι τῆς $\nu^{\text{οστῆς}}$ τάξεως.*

Ἐὰν ὡς ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ ληφθῇ μία τῶν συντεταγμένων, ἔστω ἡ x, θὰ εἶνε $\Phi(t)=\varphi(t)=t$ καὶ αἱ ἐξισώσεις τῶν καμπύλων γίνονται

$$\left.\begin{array}{l} Y=F(x) \\ Z=\Sigma(x) \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} y=f(x) \\ z=\sigma(x), \end{array}$$

ἀντίστοιχα δὲ σημεῖα αὐτῶν εἶνε τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν τετμημένην x, οἱ δὲ ἀναγκαῖοι καὶ ἐπαρκεῖς ὅροι, ὑπὸ τοὺς ὁποίους αἱ καμπύλαι ἔχουσιν εἰς τὸ σημεῖον ($x=\alpha$) ἐπαφὴν τῆς τάξεως ν, γίνονται

$$\left.\begin{array}{ll} Y=y & Z=z \\ \dfrac{dY}{dx}=\dfrac{dy}{dx} & \dfrac{dZ}{dx}=\dfrac{dz}{dx} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{d^\nu Y}{dx^\nu}=\dfrac{d^\nu y}{dx^\nu} & \dfrac{d^\nu Z}{dx^\nu}=\dfrac{d^\nu z}{dx^\nu} \end{array}\right| \text{διὰ } x=\alpha.$$

Ἐὰν δὲ ὡς ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ ληφθῇ τὸ μῆκος τοῦ τόξου s, ἐὰν δηλαδὴ θεωρηθῶσιν ὡς ἀντίστοιχα σημεῖα τῶν δύο καμπύλων τὰ εἰς τὸ πέρας ἴσων τόξων (ἀπὸ τοῦ κοινοῦ σημείου) εὑρισκόμενα, οἱ ὅροι τῆς ἐπαφῆς τῆς $\nu^{\text{οστῆς}}$ τάξεως γίνονται

$$\left.\begin{array}{lll}
X=x & Y=y & Z=z \\
\dfrac{dX}{ds}=\dfrac{dx}{ds} & \dfrac{dY}{ds}=\dfrac{dy}{ds} & \dfrac{dZ}{ds}=\dfrac{dz}{ds} \\
\dfrac{d^2X}{ds^2}=\dfrac{d^2x}{ds^2} & \dfrac{d^2Y}{ds^2}=\dfrac{d^2y}{ds^2} & \dfrac{d^2Z}{ds^2}=\dfrac{d^2z}{ds^2} \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
\dfrac{d^\nu X}{ds^\nu}=\dfrac{d^\nu x}{ds^\nu} & \dfrac{d^\nu Y}{ds^\nu}=\dfrac{d^\nu Y}{ds^\nu} & \dfrac{d^\nu Z}{ds^\nu}=\dfrac{d^\nu z}{ds^\nu}
\end{array}\right\}\ \text{διὰ } s=0.$$

102. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων τούτων γίνεται φανερόν, ὅτι

Ἵνα δύο καμπύλαι ἔχωσιν ἐπαφὴν πρώτης τάξεως εἴς τι κοινὸν σημεῖον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχωσι κοινὴν τὴν εἰς αὐτὸ ἐφαπτομένην, ἵνα δὲ ἔχωσι δευτέρας τάξεως ἐπαφήν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχωσι τὰς τρεῖς ἀρχικὰς εὐθείας κοινὰς καὶ ἀκτῖνα καμπυλότητος ϱ τὴν αὐτήν, ἤ, συντομώτερον, πρέπει νὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν κύκλον καμπυλότητος.

103. Θεωρήσωμεν δύο καμπύλας, ὧν ἡ ἐπαφὴ εἶνε τῆς τάξεως ν ($\nu \geqq 2$)· ἐὰν ἀναφέρωμεν ἀμφοτέρας πρὸς τὰς ἀρχικὰς αὐτῶν εὐθείας (αἵτινες εἶναι κοιναί), ὡς πρὸς ἄξονας τῶν συντεταγμένων, καὶ ἀναπτύξωμεν τὰς συντεταγμένας αὐτῶν κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ s, πρέπει τὰ ἀναπτύγματα τῶν ὁμωνύμων συντεταγμένων νὰ συμφωνῶσι μέχρι τοῦ ὅρου, ὅστις ἔχει τὴν δύναμιν s^ν (διότι αἱ παράγωγοι τῶν ὁμωνύμων συντεταγμένων εἶνε ἴσαι μέχρι τῆς $\nu^{\text{ης}}$)· ἐκ τούτου βλέπομεν (σελ. 128) ὅτι

Ἵνα δύο καμπύλαι ἔχωσιν ἐπαφὴν τρίτης τάξεως, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχωσι τὰς αὐτὰς ἀρχικὰς εὐθείας καὶ τὰς αὐτὰς ἀκτῖνας καμπυλότητος καὶ στρέψεως εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον· ἔτι δὲ νὰ γίνωνται καὶ αἱ παράγωγοι τῶν ἀκτίνων καμπυλότητος ϱ ὡς πρὸς τὸ τόξον ἴσαι εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο.

Καὶ γενικῶς οἱ ὅροι τῆς ἐπαφῆς τῆς $\nu^{\text{οστῆς}}$ τάξεως ($\nu > 2$) δύνανται νὰ ἐκφρασθῶσιν διὰ τῶν τριῶν ἀρχικῶν εὐθειῶν καὶ διὰ τῶν δύο ἀκτίνων ϱ καὶ r καὶ διὰ τῶν παραγώγων αὐτῶν πρὸς τὸ τόξον s.

Παρατήρησις. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (2) γίνεται προσέτι φανερόν, ὅτι, *ὅταν δύο καμπύλαι ἔχωσιν εἰς κοινόν τι σημεῖον ἐπαφὴν τῆς τάξεως ν, καὶ αἱ προβολαὶ αὐτῶν ἐπὶ τὸ τυχὸν ἐπίπεδον ἔχουσιν ἐπαφὴν τοὐλάχιστον τῆς τάξεως ν.*

104. Ἐὰν αἱ ἐξισώσεις τῆς ἑτέρας τῶν καμπύλων εἶνε τῆς μορφῆς

$$\begin{aligned} \varphi(X,Y,Z)&=0 \\ \sigma(X,Y,Z)&=0, \end{aligned} \tag{3}$$

οἱ ὅροι τῆς ἐπαφῆς τῆς $\nu^{\text{οστῆς}}$ τάξεως λαμβάνουσιν ἄλλην μορφήν.

Τῷ ὄντι εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον αἱ συντεταγμέναι X, Y, Z τῶν σημείων τῆς καμπύλης ταύτης γίνονται ἴσαι πρὸς τὰς ὁμωνύμους συντεταγμένας x, y, z τῶν σημείων τῆς ἄλλης καμπύλης καὶ τὰ διαφορικὰ αὐτῶν ἐπίσης ἴσα μέχρι τῆς τάξεως ν· ἑπομένως θὰ εἶνε εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο

$$\begin{array}{l|l}
\varphi(X,Y,Z)=0=\varphi(x,y,z) & \sigma(X,Y,Z)=0=\sigma(x,y,z) \\
d\varphi(X,Y,Z)=0=d\varphi(x,y,z) & d\sigma(X,Y,Z)=0=d\sigma(x,y,z) \\
d^2\varphi(X,Y,Z)=0=d^2\varphi(x,y,z) & d^2\sigma(X,Y,Z)=0=d^2\sigma(x,y,z) \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\
d^\nu\varphi(X,Y,Z)=0=d^\nu\varphi(x,y,z) & d^\nu\sigma(X,Y,Z)=0=d^\nu\sigma(x,y,z),
\end{array}$$

ἤτοι αἱ συντεταγμέναι x, y, z τῆς δευτέρας καμπύλης καὶ τὰ διαφορικὰ αὐτῶν πρέπει εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο νὰ ἐπαληθεύωσι τὰς ἐξισώσεις (3) τῆς πρώτης καὶ τὰς προκυπτούσας ἐξ αὐτῶν διὰ τῆς διαφορίσεως μέχρι τῆς τάξεως ν.

Πρόδηλον δὲ εἶνε, ὅτι τοῦτο ἀρκεῖ· διότι αἱ μὲν ἐξισώσεις

$$\varphi(x,y,z)=0 \quad \text{καὶ} \quad \sigma(x,y,z)=0$$

δεικνύουσιν, ὅτι τὸ σημεῖον x, y, z εἶνε σημεῖον καὶ τῆς πρώτης καμπύλης· αἱ δὲ ἐξισώσεις

$$d\varphi(x,y,z)=0, \quad d\sigma(x,y,z)=0$$

δεικνύουσιν, ὅτι αἱ παράγωγοι $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ ἰσοῦνται πρὸς τὰς ὁμωνύμους παραγώγους τῆς πρώτης καμπύλης· καὶ οὕτω καθεξῆς.

105. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων τούτων βλέπομεν, ὅτι, *ἵνα ἡ καμπύλη (3) ἔχῃ πρὸς ἄλλην οἱανδήποτε εἴς τι σημεῖον ἐπαφὴν τῆς τάξεως ν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἀμφότεραι αἱ ἐπιφάνειαι, τῶν ὁποίων ἡ καμπύλη αὕτη (3) εἶνε τομή, νὰ ἔχωσι πρὸς τὴν αὐτὴν καμπύλην καὶ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐπαφὴν τῆς τάξεως ν.*

106. *Ἐὰν γραμμὴ διέρχηται διὰ $\mu+1$ σημείων ἄλλης, τείνωσι δὲ ταῦτα νὰ συμπέσωσιν εἰς ἕν, ἡ πρώτη γραμμὴ τείνει νὰ κατασταθῇ ἐφαπτομένη τῆς ἄλλης, θὰ εἶνε δὲ ἡ ἐπαφὴ αὐτῶν τῆς τάξεως μ.*

Διότι καὶ αἱ ἐπιφάνειαι, τῶν ὁποίων τομὴ εἶνε ἡ πρώτη γραμμὴ (3) διέρχονται διὰ τῶν αὐτῶν $\mu+1$ σημείων τῆς ἄλλης· ἑπομένως, ὅταν ταῦτα συμπέσωσιν εἰς ἕν, αἱ ἐπιφάνειαι ἀμφότεραι θὰ ἔχωσι πρὸς τὴν ἄλλην γραμμὴν ἐπαφὴν τῆς τάξεως μ (ἐδ. 99)· ἄρα καὶ ἡ τομὴ αὐτῶν θὰ ἔχῃ πρὸς τὴν αὐτὴν καμπύλην ἐπαφὴν τῆς $\mu^{\text{οστῆς}}$ τάξεως.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ θεώρημα τοῦτο δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ ἀμέσως, καθ' ὃν τρόπον ἀπεδείχθη καὶ περὶ τῶν ἐπιφανειῶν.

Περὶ τοῦ ἐγγυτάτου κύκλου.

107. Ἐκ τῶν καμπύλων ἑνὸς εἴδους λέγεται ἐγγυτάτη πρὸς δοθεῖσαν καμπύλην καὶ εἰς δοθὲν αὐτῆς σημεῖον ἐκείνη, ἥτις ἔχει πρὸς τὴν δοθεῖσαν καμπύλην ἐπαφὴν τάξεως ἀνωτέρας ἢ αἱ ἄλλαι ὁμοειδεῦς καμπύλαι.

Ὁ ἐγγύτατος κύκλος οὐδεὶς ἄλλος δύναται νὰ εἶνε ἢ ὁ κύκλος τῆς καμπυλότητος· διότι, ἵνα κύκλος ἔχῃ πρὸς καμπύλην οἱανδήποτε ἐπαφὴν πρώτης τάξεως, ἀρκεῖ νὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην, τοιοῦτοι δὲ κύκλοι εἶνε προφανῶς ἄπειροι· ἵνα δὲ ἔχῃ πρὸς αὐτὴν ἐπαφὴν δευτέρας τάξεως, πρέπει (ἐδ. 102) νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου τῆς καμπύλης καὶ νὰ ἔχῃ ἀκτῖνα τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος· τοῦτο δὲ ὁρίζει αὐτὸν ἐντελῶς.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ τομὴ τῶν ἐγγυτάτων σφαιρικῶν ἐπιφανειῶν εἰς τὰ σημεῖα M καὶ M_1 τῆς καμπύλης τείνει πρὸς τὴν ἐγγυτάτην περιφέρειαν τοῦ M, ὅταν τὸ M_1 τείνῃ νὰ συμπέσῃ τῷ M.

Διότι, ἂν ληφθῶσιν ἐπὶ τῆς καμπύλης ἕτερα τρία σημεῖα M_2, M_3, M_4, αἱ δύο σφαιρικαὶ ἐπιφάνειαι $M\,M_1\,M_2\,M_3$ καὶ $M_1\,M_2\,M_3\,M_4$ τείνουσι νὰ γίνωσιν ἐγγύταται πρὸς τὴν καμπύλην, ἡ δὲ τομὴ αὐτῶν, τουτ' ἔστιν ἡ περιφέρεια $M_1\,M_2\,M_3$, τείνει νὰ γίνῃ ἐγγυτάτη περιφέρεια.

2) Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ τιμὴ τῶν ἐγγυτάτων σφαιρικῶν ἐπιφανειῶν εἰς τὰ τρία σημεῖα M, M_1, M_2 τῆς καμπύλης τείνει εἰς τὸ σημεῖον M, ὅταν τὰ M_1 καὶ M_2 τείνωσι νὰ συμπέσωσι τῷ M.

3) Νὰ δειχθῇ γεωμετρικῶς, ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης, ἥτις εἶνε τόπος τῶν κέντρων τῶν ἐγγυτάτων σφαιρῶν, εἶνε ὁ ἄξων τῆς καμπυλότητος.

4) Νὰ δειχθῇ, ὅτι ὁ ἄξων τῆς καμπυλότητος εἰς τὸ σημεῖον M τῆς καμπύλης εἶνε ὁ τόπος τῶν κέντρων τῆς καμπυλότητος (εἰς τὸ M) τῶν ὀρθῶν προβολῶν τῆς καμπύλης ἐπὶ τὰ *ἐφαπτόμενα* αὐτῆς ἐπίπεδα, ἤτοι τὰ διὰ τῆς εἰς τὸ M ἐφαπτομένης διερχόμενα (θεώρημα τοῦ Peterson).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΙ

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Καὶ ἐν τῇ θεωρίᾳ τῶν ἐπιφανειῶν γίνεται λόγος μόνον περὶ τῶν ὁμαλῶν σημείων αὐτῶν· λέγω δὲ *ὁμαλὸν* τὸ σημεῖον x,y,z τῆς ἐπιφανείας, ἐὰν ἐν τῇ περιοχῇ αὐτοῦ μία ἐκ τῶν συντεταγμένων, ἔστω ἡ z, ἔχῃ τὸν χαρακτῆρα ἀκεραίας συναρτήσεως τῶν δύο ἄλλων x, y. Καὶ αἱ συντεταγμέναι δὲ ὑποτίθενται ὀρθογώνιοι.

Περὶ τῶν περιβαλλουσῶν ἐπιφανειῶν.

108. Ὅταν ἐν τῇ ἐξισώσει ἐπιφανείας τινὸς περιέχηται, πλὴν τῶν μεταβλητῶν συντεταγμένων τῶν σημείων αὐτῆς x,y,z, καί τις παράμετρος α, πρὸς ἑκάστην τιμὴν αὐτῆς ἀντιστοιχεῖ μία ὡρισμένη ἐπιφάνεια· μεταβαλλομένης δὲ αὐτῆς, ἀλλάσσει ἡ ἐπιφάνεια θέσιν καὶ σχῆμα· ὥστε παρίσταται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως ἐν γένει ἄπειρον πλῆθος ἐπιφανειῶν.

Ἐφ' ἑκάστης τῶν ἐπιφανειῶν τούτων ὑπάρχει γραμμή τις, ἥτις εἶνε τὸ ὅριον τῶν θέσεων τῆς γραμμῆς, καθ' ἣν αὕτη τέμνεται ὑπὸ ἄλλης (ἐν τῇ ἐξισώσει περιεχομένης), ὅταν ἡ δευτέρα αὕτη τείνῃ νὰ συμπέσῃ αὐτῇ.

Ὁ τόπος τῶν γραμμῶν τούτων εἶνε ἐν γένει ἐπιφάνειά τις, ἥτις λέγεται *περιβάλλουσα* τῶν ἐν τῇ ἐξισώσει περιεχομένων ἐπιφανειῶν· αἱ δὲ γραμμαὶ λέγονται *γενέτειραι* αὐτῆς· καὶ αἱ ἐπιφάνειαι, ἐν σχέσει πρὸς τὴν περιβάλλουσαν αὐτῶν θεωρούμεναι, λέγονται *περιβαλλόμεναι* (παράβλ. σελ. 79).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον ἡ πολικὴ ἐπιφάνεια ἡ πρὸς καμπύλην οἱανδήποτε ἀντιστοιχοῦσα εἶνε ἡ περιβάλλουσα τῶν καθέτων πρὸς αὐτὴν ἐπιπέδων· γενέτειραι δὲ αὐτῆς εἶνε οἱ ἄξονες τῆς καμπυλότητος.

109. Πρὸς εὕρεσιν τῆς περιβαλλούσης τῶν ἐπιφανειῶν

$$\varphi(x,y,z,\alpha)=0 \qquad (1)$$

ἃς θεωρήσωμεν τὴν τυχοῦσαν ἐξ αὐτῶν, ἥτις ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν τιμὴν α τῆς παραμέτρου· ἡ τομὴ αὐτῆς ὑπ' ἄλλης, ἀντιστοιχούσης πρὸς τὴν τιμὴν $\alpha+\Delta\alpha$, παρίσταται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων

$$\varphi(x,y,z,\alpha)=0 \qquad \varphi(x,y,z,\alpha+\Delta\alpha)=0,$$

ἢ ὑπὸ τῶν ἑξῆς ἰσοδυνάμων

$$\varphi(x,y,z,\alpha)=0, \qquad \varphi_\alpha(x,y,z,\alpha)+\frac{\Delta\alpha}{2}\varphi_{\alpha\alpha}(x,y,z,\alpha)+\ldots=0\cdot$$

καθ᾽ ὅσον δὲ ἡ διαφορὰ Δα τείνῃ πρὸς τὸ μηδὲν (ἤτοι καθ᾽ ὅσον ἡ δευτέρα ἐπιφάνεια τείνῃ νὰ συμπέσῃ τῇ πρώτῃ), ἡ τομὴ τείνει πρός τινα γραμήν, ἥτις ἔχει τὰς ἐξισώσεις

$$\varphi(x,y,z,\alpha)=0 \quad \text{καὶ} \quad \varphi_\alpha(x,y,z,\alpha)=0. \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων ἀπαλείφοντες τὴν παράμετρον α εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς περιβαλλούσης ἐπιφανείας.

110. Ἀναλόγως πρὸς τὴν ἰδιότητα τῶν περιβαλλουσῶν γραμμῶν (ἐδ. 43) ἔχουσι καὶ αἱ περιβάλλουσαι ἐπιφάνειαι τὴν ἑπομένην ἰδιότητα.

Ἡ περιβάλλουσα ἐπιφάνεια ἐφάπτεται ἑκάστης τῶν περιβαλλομένων καθ᾽ ἅπαντα τὰ σημεῖα τῆς γενετείρας, ἥτις κεῖται ἐπ᾽ αὐτῆς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Λέγομεν, ὅτι δύο ἐπιφάνειαι ἐφάπτονται ἀλλήλων εἴς τι κοινὸν σημεῖον αὐτῶν, ὅταν ἔχωσιν εἰς τοῦτο τὸ αὐτὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον.

Ἔστω τις τῶν περιβαλλομένων ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τὴν τιμὴν α_0 τῆς παραμέτρου α καὶ Μ τυχὸν σημεῖον τῆς γενετείρας, ἥτις κεῖται ἐπ᾽ αὐτῆς· ἵνα δείξωμεν, ὅτι ἡ περιβάλλουσα καὶ ἡ περιβαλλομένη αὕτη ἔχουσι τὸ αὐτὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον Μ, ἀρκεῖ προφανῶς νὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ διαφορικὸν τοῦ z (θεωρουμένου ὡς συναρτήσεως τῶν x καὶ y) εἶνε δι᾽ ἀμφοτέρας τὰς ἐπιφανείας τὸ αὐτό.

Καὶ διὰ μὲν τὴν περιβαλλομένην $\varphi(x,,y,z,\alpha_0)=0$ ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\varphi_x(x,y,z,\alpha_0)dx+\varphi_y(x.y,z\alpha_{,0})dy+\varphi_z(x,y,z,\alpha_0)dz=0, \qquad (3)$$

ἐξ ἧς πορίζόμεθα τὴν τιμὴν τοῦ dz.

Διὰ δὲ τὴν περιβάλλουσαν παρατηροῦμεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς ἐξισώσεις αὐτῆς τὰς ἐξισώσεις (2), ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ α ὡς βοηθητικήν τινα μεταβλητὴν ἐξαρτωμένην ἀπὸ τῶν x, y καὶ πρὸς ἑκάστην τιμὴν τῆς ὁποίας ἀντιστοιχεῖ μία γενέτειρα τῆς περιβαλλούσης· διαφορίζοντες λοιπὸν τὰς ἐξισώσεις (2) κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ταύτην, εὑρίσκομεν

$$\varphi_x dx+\varphi_y dy+\varphi_z dz+\varphi_\alpha d\alpha=0$$

$$\varphi_{\alpha x}dx+\varphi_{\alpha y}dy+\varphi_{\alpha z}dz+\varphi_{\alpha\alpha}d\alpha=0.$$

Ἐπειδὴ δὲ εἰς πᾶν σημεῖον τῆς περιβαλλούσης εἶνε

$$\varphi_\alpha(x,y,z,\alpha)=0,$$

ἡ πρώτη τῶν ἐξισώσεων τούτων γίνεται

$$\varphi_x(x,y,z,\alpha)dx+\varphi_y(x,y,z,\alpha)dy+\varphi_z(x,y,z,\alpha)dz=0. \quad (4)$$

Ἵνα νῦν ἐφαρμόσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην εἰς τὸ σημεῖον Μ τῆς περιβαλλούσης, παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς ἅπαντα τὰ σημεῖα τῆς γενετείρας, ἐφ' ἧς κεῖται τὸ Μ, ἡ βοηθητικὴ μεταβλητὴ α ἔχει τὴν τιμὴν α_0· διότι ἐπὶ τῆς γενετείρας ταύτης ἐπαληθεύουσιν ἀμφότεραι αἱ ἐξισώσεις

$$\varphi(x,y,z,\alpha_0)=0 \quad \text{καὶ} \quad \varphi_\alpha(x,y,z,\alpha_0)=0.$$

Διὰ τοῦτο ἡ ἐξίσωσις (4) ἐφαρμοζομένη εἰς τὸ σημεῖον Μ γίνεται

$$\varphi_x(x,y,z,\alpha_0)dx+\varphi_y(x,y,z,\alpha_0)dy+\varphi_z(x,y,z,\alpha_0)dz=0.$$

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι τὸ διαφορικὸν τοῦ z δι' ἀμφοτέρας τὰς ἐπιφανείας εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον Μ εἶνε τὸ αὐτό· κατ' ἀκολουθίαν ἔχουσιν αἱ ἐπιφάνειαι τὸ αὐτὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο.

111. Ἐφ' ἑκάστης περιβαλλομένης ὑπάρχει ἐν γένει σημεῖόν τι (ἓν ἢ περισσότερα ἢ καὶ οὐδέν), πρὸς ὃ τείνει ἡ τομὴ αὐτῆς ὑπὸ δύο ἄλλων περιβαλλομένων, ὅταν αὗται τείνωσι νὰ συμπέσωσιν αὐτῇ.

Τὸ σημεῖον τοῦτο λέγεται *ὁρικὸν* σημεῖον τῆς περιβαλλομένης καὶ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς γενετείρας, τὴν ὁποίαν δίδει ἡ περιβαλλομένη αὕτη.

Ὁ τόπος τῶν ὁρικῶν σημείων πασῶν τῶν περιβαλλομένων εἶνε ἐν γένει καμπύλη τις κειμένη ἐπὶ τῆς περιβαλλούσης καὶ τῆς ὁποίας ἅπασαι αἱ γενέτειραι ἐφάπτονται (ἑκάστη εἰς τὸ ἐπ' αὐτῆς κείμενον ὁρικὸν σημεῖον)· λέγεται δὲ ἡ καμπύλη αὕτη *λαιμὸς* τῆς περιβαλλούσης.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον τὸ ὁρικὸν σημεῖον ἑκάστου τῶν ἐπιπέδων, ἅτινα εἶνε κάθετα πρὸς δοθεῖσαν καμπύλην, εἶνε τὸ κέντρον τῆς ἀντιστοίχου ἐγγυτάτης πρὸς τὴν καμπύλην σφαίρας· ὁ δὲ τόπος τῶν κέντρων τούτων εἶνε ὁ λαιμὸς τῆς πολικῆς ἐπιφανείας.

Ἔστωσαν αἱ τρεῖς περιβαλλόμεναι

$$\varphi(x,y,z,\alpha)=0, \qquad \varphi(x,y,z,\alpha+\Delta\alpha)=0, \qquad \varphi(x,y,z,\alpha)+\Delta'\alpha=0. \quad (5)$$

Τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῶν ἐπαληθεύουσι τὰς τρεῖς ταύτας ἐξισώσεις.

ἤτοι τὰς $\varphi(x,y,z,\alpha)=0$

$$\varphi_\alpha(x,y,z,\alpha)+\varphi_{\alpha\alpha}(x,y,z,\alpha)\ \frac{\Delta\alpha}{1.2}+\ldots=0$$

$$\varphi_\alpha(x,y,z,\alpha)+\varphi_{\alpha\alpha}(x,y,z,\alpha)\ \frac{\Delta'\alpha}{1.2}+\ldots=0$$

ἢ καὶ τὰς ἑξῆς, αἵτινες ἀποτελοῦσιν ἰσοδύναμον σύστημα,

$$\varphi(x,y,z,\alpha)=0$$

$$\varphi_\alpha(x,y,z,\alpha)+\varphi_{\alpha^2}(x,y,z,\alpha)\ \frac{\Delta\alpha}{1.2}+\ldots=0$$

$$\frac{1}{2}\varphi_{\alpha^2}(x,y,z,\alpha)+\frac{1}{6}\varphi_{\alpha^3}(x,y,z,\alpha).(\Delta\alpha+\Delta'\alpha)+\ldots=0\cdot$$

ὅταν δὲ αἱ ἐπιφάνειαι, αἱ πρὸς τὰς τιμὰς $\alpha+\Delta\alpha$, $\alpha+\Delta'\alpha$ ἀντιστοιχοῦσαι, τείνωσι νὰ ἐφαρμόσωσι ἐπὶ τὴν πρώτην, αἱ ἐξισώσεις αὗται γίνονται

$$\varphi(x,y,z,\alpha)=0,\quad \varphi_\alpha(x,y,z,\alpha)=0,\quad \varphi_{\alpha^2}(x,y,z,\alpha)=0\cdot \qquad (6)$$

ἑπομένως τὰς ἐξισώσεις ταύτας ἐπαληθεύουσιν αἱ συντεταγμέναι τῶν ὁρικῶν σημείων, ἅτινα κεῖνται ἐπὶ τῆς περιβαλλομένης

$$\varphi(x,\ y,\ z,\ \alpha)=0.$$

Ἐκ τῶν δύο πρώτων γίνεται φανερόν, ὅτι τὰ ὁρικὰ σημεῖα ἑκάστης περιβαλλομένης εἶνε σημεῖα τῆς γενετείρας, ἥτις κεῖται ἐπ' αὐτῆς· εἰς τὰ σημεῖα δὲ ταῦτα τείνουσιν αἱ τομαὶ τῆς γενετείρας καὶ μιᾶς οἱασδήποτε ἐκ τῶν περιβαλλομένων ἐπιφανειῶν, ὅταν αὕτη τείνῃ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τὴν περιβαλλομένην, ἥτις ἔχει τὴν γενέτειραν ταύτην (ἵνα ἐννοήσωμεν τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ ὑποθέσωμεν, ὅτι πρῶτον συμπίπτει ἡ μία τῶν ἐπιφανειῶν (5) μετὰ τῆς $\varphi(x,y,z,\alpha)=0$ καὶ ἔπειτα ἡ ἄλλη).

112. Πρὸς εὕρεσιν τῶν ἐξισώσεων τοῦ λαιμοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἀπαλείψωμεν τὴν παράμετρον α μεταξὺ τῶν τριῶν ἐξισώσεων (6)· ἀλλὰ δυνάμεθα καὶ νὰ θεωρήσωμεν τὰς τρεῖς ταύτας ἐξισώσεις ὡς ἐξισώσεις τοῦ λαιμοῦ, ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ α ὡς βοηθητικὴν μεταβλητήν, ἀφ' ἧς ἐξαρτῶνται αἱ συντεταγμέναι x, y, z· διότι πρὸς ἑκάστην τιμὴν τοῦ α ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένον τι σημεῖον (ἢ ὡρισμένα τινὰ σημεῖα) τῆς καμπύλης ταύτης.

Ἵνα δείξωμεν, ὅτι ἑκάστη τῶν γενετειρῶν ἐφάπτεται τοῦ λαιμοῦ εἰς τὸ ὁρικὸν σημεῖον τὸ ἐπ' αὐτῆς κείμενον, ἀρκεῖ προφανῶς νὰ δείξωμεν, ὅτι εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο Σ αἱ τιμαὶ τῶν $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ εἶνε αἱ αὐταὶ δι' ἀμφοτέρας τὰς καμπύλας ταύτας.

Θεωρήσωμεν τὴν γενέτειραν, ἥτις κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας

$$\varphi(x,y,z,\alpha_0)=0$$

καὶ ἥτις ἔχει ἑπομένως τὰς ἐξισώσεις

$$\varphi(x,y,z,\alpha_0)=0 \quad \text{καὶ} \quad \varphi_\alpha(x,y,z,\alpha_0)=0. \tag{7}$$

Αἱ παράγωγοι $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}$ εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον τῆς καμπύλης ταύτης εὑρίσκονται ἐκ τῶν ἐξισώσεων

$$\varphi_x(x,y,z,\alpha_0)dx+\varphi_y(x,y,z,\alpha_0)dy+\varphi_z(x,y,z,\alpha_0)dz=0$$
$$\varphi_{\alpha x}(x,y,z,\alpha_0)dx+\varphi_{\alpha y}(x,y,z,\alpha_0)dy+\varphi_{\alpha z}(x,y,z,\alpha_0)dz=0\cdot$$

Αἱ δὲ παράγωγοι $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}$ εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον τῆς καμπύλης τοῦ λαιμοῦ (6) εὑρίσκονται ἐκ τῶν ἐξισώσεων

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_x(x,y,z,\alpha)dx+\varphi_y(x,y,z,\alpha)dy+\varphi_z(x,y,z,\alpha)dz=0\\&\varphi_{\alpha x}(x,y,z,\alpha)dx+\varphi_{\alpha y}(x,y,z,\alpha)dy+\varphi_{\alpha z}(x,y,z,\alpha)dz=0,\end{aligned}\right. \tag{8}$$

ἃς εὑρίσκομεν ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν δευτέραν καὶ τὴν τρίτην τῶν ἐξισώσεων (6).

Ἔστω νῦν Σ ὁρικόν τι σημεῖον τῆς γενετείρας (7)· ἵνα ἐφαρμόσωμεν τὰς ἐξισώσεις (8) εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο τοῦ λαιμοῦ, παρατηροῦμεν, ὅτι τοῦτο ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν τιμὴν α_0 τῆς βοηθητικῆς μεταβλητῆς α, διότι εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ἐπαληθεύονται αἱ ἐξισώσεις

$$\varphi(x,y,z,\alpha_0)=0, \quad \varphi_\alpha(x,y,z,\alpha_0)=0, \quad \varphi_{\alpha^2}(x,y,z,\alpha_0)=0\cdot$$

ἑπομένως αἱ ἐξισώσεις (8) εἰς τὸ σημεῖον Σ γίνονται

$$\varphi_x(x,y,z,\alpha_0)dx+\varphi_y(x,y,z,\alpha_0)dy+\varphi_z(x,y,z,\alpha_0)dz=0$$
$$\varphi_{\alpha x}(x,y,z,\alpha_0)dx+\varphi_{\alpha y}(x,y,z,\alpha_0)dy+\varphi_{\alpha z}(x,y,z,\alpha_0)dz=0$$

καὶ οὐδόλως διαφέρουσι τῶν ἐξισώσεων τῶν διὰ τὴν γενέτειραν εὑρεθεισῶν. Ἐκ τούτων συμπεραίνεται, ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν παραγώγων $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}$ εἶνε ἴσαι δι' ἀμφοτέρας τὰς καμπύλας· ἑπομένως ἡ γενέτειρα (7) ἐφάπτεται τοῦ λαιμοῦ εἰς τὸ ἐπ' αὐτῆς κείμενον ὁρικὸν σημεῖον Σ.

113. Πρὸς ἐφαρμογὴν τῶν προηγουμένων θεωρήσωμεν τὴν περίπτωσιν τοῦ ἐπιπέδου

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma z+\Delta=0, \tag{1}$$

ἔνθα οἱ συντελεσταὶ Α, Β, Γ, Δ εἶναι συναρτήσεις οἱαιδήποτε μιᾶς παραμέτρου α. Εἰς ἑκάστην τιμὴν τῆς α ἀντιστοιχεῖ ἓν ἐπίπεδον ἢ μία θέσις τοῦ ἐπιπέδου (1) καὶ ἡ γενέτειρα ἡ ἐπὶ τοῦ τυχόντος ἐπιπέδου κειμένη εἶνε εὐθεῖα γραμμὴ ἔχουσα τὰς ἐξισώσεις

$$\begin{aligned} \mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma z+\Delta=0 \\ \mathrm{A}'x+\mathrm{B}'y+\Gamma'z+\Delta'=0, \end{aligned} \tag{2}$$

ἔνθα $\mathrm{A}', \mathrm{B}', \Gamma', \Delta'$ δηλοῦσι τὰς παραγώγους τῶν $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \Delta$ πρὸς τὴν παράμετρον α.

Ὁ δὲ λαιμὸς τῆς περιβαλλούσης ἐπιφανείας παρίσταται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων

$$\begin{aligned} \mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma z+\Delta=0 \\ \mathrm{A}'x+\mathrm{B}'y+\Gamma'z+\Delta'=0 \\ \mathrm{A}''x+\mathrm{B}''y+\Gamma''z+\Delta''=0 \end{aligned} \tag{3}$$

Ἐπειδὴ δὲ αἱ γενέτειραι (2) εἶνε ἐφαπτόμεναι τοῦ λαιμοῦ, συνάγεται, ὅτι *ἡ περιβάλλουσα τῶν θέσεων ἐπιπέδου*, ἐν τῇ ἐξισώσει τοῦ ὁποίου ὑπάρχει μία παράμετρος, *εἶνε ἀναπτυκτὴ ἐπιφάνεια.*

Ἡ ἰδιότης αὕτη δύναται νὰ ληφθῇ καὶ ὡς ὁρισμὸς τῶν ἀναπτυκτῶν ἐπιφανειῶν.

Τέλος ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας ταύτης εὑρίσκεται ἐκ τῶν ἐξισώσεων (2), ἐὰν ἀπαλειφθῇ ἡ παράμετρος α.

114. Ἕκαστον τῶν περιβαλλομένων ἐπιπέδων, τουτέστιν ἕκαστον τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων τῆς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας, εἶνε ἐγγύτατον ἐπίπεδον τοῦ λαιμοῦ εἰς τὸ ὁρικὸν σημεῖον, ὅπερ κεῖται ἐπ' αὐτοῦ.

Διότι τὸ ὁρικὸν σημεῖον τοῦ τυχόντος περιβαλλομένου ἐπιπέδου (1), ὅπερ ἀντιστοιχεῖ πρός τινα ὡρισμένην τιμὴν α_0 τῆς παραμέτρου α, ὁρίζεται ἐκ τῶν ἐξισώσεων

$$\begin{aligned} \mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma z+\Delta=0 \\ \mathrm{A}'x+\mathrm{B}'y+\Gamma'z+\Delta'=0 \\ \mathrm{A}''x+\mathrm{B}''y+\Gamma''z+\Delta''=0 \end{aligned} \qquad \text{καὶ } \alpha=\alpha_0.$$

Ὁ δὲ λαιμὸς τῆς περιβαλλούσης ἐπιφανείας ὁρίζεται ὑπὸ τῶν αὐτῶν ἐξισώσεων, ἐὰν ἡ παράμετρος α θεωρηθῇ ὡς βοηθητικὴ μεταβλητή, ἀπὸ τῆς ὁποίας ἐξαρτῶνται αἱ συντεταγμέναι x, y, z. Διαφορίζοντες δὲ τὰς ἐξισώσεις ταύτας τοῦ λαιμοῦ καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν δευτέραν καὶ τὴν τρίτην, εὑρίσκομεν

$$\begin{aligned} \mathrm{A}dx+\mathrm{B}dy+\Gamma dz=0 \\ \mathrm{A}'dx+\mathrm{B}'dy+\Gamma'dz=0\cdot \end{aligned} \tag{4}$$

διαφορίζοντες δὲ καὶ ἐκ τούτων τὴν πρώτην καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν δευτέραν, εὑρίσκομεν

$$\mathrm{A}d^2x+\mathrm{B}d^2y+\Gamma d^2z=0. \tag{5}$$

Αἱ δύο ἐξισώσεις (4) καὶ (5) δεικνύουσιν, ὅτι τὸ περιβαλλόμενον ἐπίπεδον $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma z+\Delta=0 \quad (\alpha=\alpha_0)$

εἶνε παράλληλον πρὸς τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον τοῦ λαιμοῦ εἰς τὸ ὁρικὸν σημεῖον $\alpha=\alpha_0$· ἐπειδὴ δὲ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τούτου, ἕπεται, ὅτι συμπίπτει τῷ ἐγγυτάτῳ τούτῳ ἐπιπέδῳ.

Ὡς παράδειγμα θεωρήσωμεν τὰ πρὸς τὴν τυχοῦσαν καμπύλην κάθετα ἐπίπεδα· τούτων περιβάλλουσα εἶνε ἡ πολικὴ ἐπιφάνεια, λαιμὸς δὲ αὐτῆς εἶνε ἡ καμπύλη τῶν κέντρων τῶν ἐγγυτάτων σφαιρῶν. Ἕκαστον δὲ τῶν ἐπιπέδων τούτων εἶνε ἐγγύτατον πρὸς τὴν καμπύλην ταύτην τῶν κέντρων εἰς τὸ ὁρικὸν σημεῖον Σ, ὅπερ κεῖται ἐπ' αὐτοῦ (παραβλ. ἐδ. 77).

Σημειωσις. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον (1) διέρχηται πάντοτε διὰ τινος σημείου, ἡ περιβάλλουσα εἶνε προφανῶς κωνικὴ ἐπιφάνεια, ὁ δὲ λαιμὸς καταντᾷ ἓν σημεῖον. Ἐὰν δὲ τὸ ἐπίπεδον (1) μένῃ πάντοτε παράλληλον εὐθείᾳ τινί, ἡ περιβάλλουσα γίνεται κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια καὶ ὁ λαιμὸς ἀφανίζεται εἰς τὸ ἄπειρον.

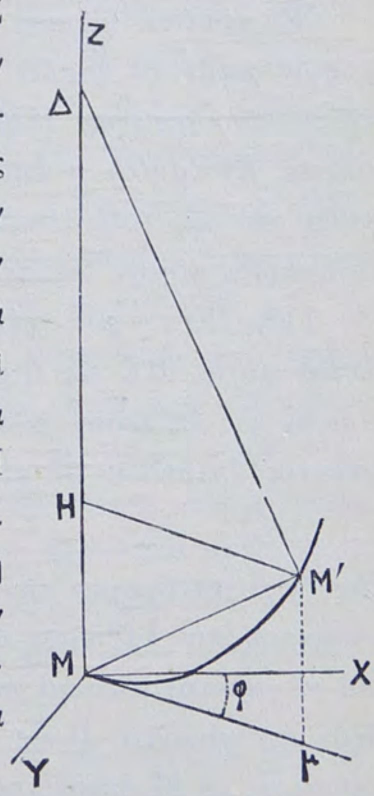
115. Ὅτι αἱ ἀναπτυκταὶ ἐπιφάνειαι δύνανται νὰ ἀναπτυχθῶσιν ἢ ἐκτυλιχθῶσιν ἐπὶ ἐπιπέδου ἄνευ συμπτύξεως ἢ διαρρήξεως τῶν μερῶν αὐτῶν, ἀποδεικνύεται εὐκόλως γεωμετρικῶς. Ἐκ τῆς γεωμετρικῆς ἀποδείξεως γίνεται προσέτι δῆλον, ὅτι καὶ τὰ μήκη τῶν ἐπὶ τῆς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας κειμένων γραμμῶν καὶ αἱ γωνίαι, καθ' ἃς τέμνουσιν ἀλλήλας αἱ γραμμαί, διατηροῦνται μετὰ τὴν ἀνάπτυξιν.

ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΣ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ ΜΙΑΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ.

Α΄. *Κάθετοι τομαί.*

116. Ἐὰν διὰ τῆς καθέτου ΜΖ εἰς τὸ σημεῖον Μ τῆς ἐπιφανείας ἀχθῇ τυχὸν ἐπίπεδον, τὸ ἐπίπεδον τοῦτο θὰ ποιήσῃ τομήν, ἥτις λέγεται *κάθετος* τομὴ τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον Μ· τὴν καμπυλότητα τῶν τομῶν τούτων τῆς ἐπιφανείας ἔχομεν κατὰ πρῶτον νὰ ἐξετάσωμεν.

117. Ἔστω τυχοῦσα κάθετος τομὴ τῆς ἐπιφανείας ἡ ΜΜ΄ καὶ *ΧΜΥ* τὸ ἐφαπτόμενον αὐτῆς ἐπίπεδον εἰς τὸ σημεῖον Μ· ἔστω πρὸς τούτοις Η τὸ σημεῖον, ἔνθα τέμνει τὴν ΜΖ τὸ διὰ τοῦ σημείου Μ΄ ἀγόμενον ἐπίπεδον παραλλήλως τῷ ἐφαπτομένῳ ἐπιπέδῳ. Πρὸς εὕρεσιν τῆς ἀκτῖνος καμπυλότητος τῆς γραμμῆς ΜΜ΄ εἰς τὸ σημεῖον Μ ἄγομεν τὴν χορδὴν ΜΜ΄ καὶ ἐκ τοῦ Μ΄ κάθετον πρὸς αὐτὴν (ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς τομῆς)· ἡ κάθετος αὕτη θὰ συναντήσῃ τὴν ΜΖ εἴς τι σημεῖον Δ καὶ ἡ ἐπὶ τῆς ΜΔ ὡς διαμέτρου γραφομένη περιφέρεια θὰ ἐφάπτηται τῆς γραμμῆς ΜΜ΄ εἰς τὸ Μ καὶ θὰ διέρχηται καὶ διὰ τοῦ σημείου Μ΄. Ὅταν δὲ τὸ Μ΄ τείνῃ νὰ συμπέσῃ τῷ Μ, ἡ περιφέρεια αὕτη τείνει πρὸς τὴν ἐγγυτάτην περιφέρειαν τῆς καμπύλης ΜΜ΄ εἰς τὸ σημεῖον Μ (διότι θὰ ἔχῃ μετ' αὐτῆς κοινὰ τρία σημεῖα συμπεσόντα).



Τούτου οὕτως ἔχοντος, ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΔΜ΄Μ εὑρίσκομεν

$$(\mathrm{M'H})^2 = \mathrm{H\Delta}\,.\,\mathrm{HM},$$

ὅθεν

$$\mathrm{H\Delta} = \frac{(\mathrm{M'H})^2}{(\mathrm{MH})}$$

καὶ διὰ τοῦτο εἶνε

$$\mathrm{M\Delta} = \mathrm{MH} + \frac{(\mathrm{M'H})^2}{(\mathrm{MH})}.$$

ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης, λαμβάνοντες τὰ ὅρια ἀμφοτέρων τῶν μελῶν, εὑρίσκομεν

$$2\varrho = \text{ὅρ}\,\frac{(M'H)^2}{(MH)}, \qquad \text{ἢ} \qquad \varrho = \text{ὅρ}\,\frac{(M'H)^2}{2MH}. \tag{1}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν διὰ τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος ϱ_1 ἄλλης οἱασδήποτε καθέτου τομῆς MM_1

$$\varrho_1 = \text{ορ}\,\frac{(M_1H)^2}{2MH},$$

(ἔνθα M_1 εἶνε ἡ τομὴ τῆς δευτέρας ταύτης καμπύλης ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου, ὅπερ ἤχθη διὰ τοῦ M' παραλλήλως τῷ ἐφαπτομένῳ).

Ἐντεῦθεν ἕπεται $\quad \dfrac{\varrho_1}{\varrho} = \text{ορ}\dfrac{(M_1H)^2}{(M'H)^2}. \qquad (2)$

Ἐκ τούτων γίνεται δῆλον, ὅτι αἱ ἀκτῖνες καμπυλότητος τῶν διαφόρων καθέτων τομῶν εἶνε ἀνάλογοι πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἀντιστοιχουσῶν ἀκτίνων HM', HM_1, . . . τῆς καμπύλης $M'M_1$ . . ., ἥτις προκύπτει, ἂν τμηθῇ ἡ ἐπιφάνεια δι' ἐπιπέδου παραλλήλου τῷ ἐφαπτομένῳ καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπειροστὴν ἀπ' αὐτοῦ· τὴν τοιαύτην τῆς ἐπιφανείας τομὴν πρέπει νῦν νὰ θεωρήσωμεν.

118. Ἔστω $z = \varphi(x, y)$ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν κάθετον αὐτῆς MZ ὡς ἄξονα τῶν z καὶ πρὸς τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τοῦ M ὡς ἐπίπεδον τῶν xy· ἐὰν τεθῇ $MH = h$, ἡ ἐξίσωσις τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου θὰ εἶνε $z = h$, ἡ δὲ ἐξίσωσις τῆς τομῆς θὰ εἶνε

$$h = \varphi(x, y)\cdot$$

ἐὰν δὲ ἀναπτύξωμεν τὴν συνάρτησιν $\varphi(x, y)$ κατὰ τὸν τύπον τοῦ Μακλωρίνου καὶ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν, ὅτι ἡ συνάρτησις $\varphi(x, y)$, ἤτοι ἡ z, καὶ αἱ πρῶται μερικαὶ αὐτῆς παράγωγοι p, q (διὰ τὴν ἐκλογὴν τῶν ἀξόνων) γίνονται 0 εἰς τὸ σημεῖον M (διότι ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου εἰς τὸ M ἐπιπέδου πρέπει νὰ εἶνε $Z = 0$), εὑρίσκομεν τὴν ἑπομένην ἐξίσωσιν τῆς τομῆς

$$2h = rx^2 + 2sxy + ty^2 + \ldots, \tag{3}$$

ἔνθα r, s, t δηλοῦσι τὰς τιμὰς τῶν μερικῶν παραγώγων τοῦ z τῆς δευτέρας τάξεως διὰ $x = 0$, $y = 0$,

τοῦτ' ἔστιν $\quad r = \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0, \quad s = \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_0, \quad t = \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_0,$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης βλέπομεν, ὅτι ἡ τομὴ τῆς ἐπιφανείας, ἐὰν θεωρήσωμεν μόνον τὸ πλησίον τοῦ Μ κείμενον μέρος αὐτῆς, εἶνε *ὡς ἔγγιστα* ἡ κωνικὴ τομὴ

$$2h = rx^2 + 2sxy + ty^2, \tag{4}$$

ἣν εὑρίσκομεν παραλείποντες τοὺς ὅρους τῶν ἀνωτέρων τῆς δευτέρας διαστάσεων. Ἡ κωνικὴ αὕτη τομὴ ἔχει τὸ κέντρον αὐτῆς ἐπὶ τῆς καθέτου ΜΖ.

119. Ἐκ τούτων γίνεται φανερόν, ὅτι τὸ σχῆμα τῆς ἐπιφανείας ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ σημείου Μ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ εἴδους τῆς κωνικῆς τομῆς (4), ἤτοι ἐκ τῆς παραστάσεως $rt - s^2$.

Καὶ ὄντως, ἐὰν εἶνε $rt - s^2 > 0$, ἡ ἀπειροστὴ τομὴ (4) εἶνε ἔλλειψις· ἐπειδὴ δὲ τὸ τριώνυμον $rx^2 + 2sxy + ty^2$ οὐδέποτε ἀλλάσσει σημεῖον, δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν αὐτὸ θετικὸν (διότι, ἵνα γίνῃ θετικόν, ἂν δὲν εἶνε, ἀρκεῖ νὰ ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον τοῦ z, ἤτοι νὰ ἀλλάξωμεν τὸ θετικὸν μέρος τοῦ ἄξονος τῶν z)· τότε τὰ πρὸς τὰ ἀρνητικὰ z ἀγόμενα ἐπίπεδα παραλλήλως τῷ ἐφαπτομένῳ δὲν τέμνουσι τὴν ἐπιφάνειαν πλησίον τοῦ Μ· ὥστε ἡ ἐπιφάνεια πλησίον τοῦ Μ κεῖται πρὸς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐφαπτομένου αὐτῆς ἐπιπέδου· ἡ ἐπιφάνεια λέγεται τότε *κυρτὴ* εἰς τὸ σημεῖον Μ.

Ἀλλ' ἐὰν εἶνε $rt - s^2 < 0$, ἡ τομὴ (3) τῆς ἐπιφανείας εἶνε πραγματική, εἴτε πρὸς τὰ θετικὰ z ἀχθῇ τὸ τέμνον ἐπίπεδον εἴτε πρὸς τὰ ἀρνητικά· εἶνε δὲ (τὸ πλησίον τοῦ Μ κείμενον μέρος αὐτῆς) ὡς ἔγγιστα ὑπερβολή· ὥστε ἡ ἐπιφάνεια ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ κεῖται πρὸς ἀμφότερα τὰ μέρη τοῦ ἐφαπτομένου αὐτῆς ἐπιπέδου καὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τέμνει ἑπομένως αὐτήν· (τοιαύτη ἐπιφάνεια εἶνε λ. χ. τὸ μονόχωνον ὑπερβολοειδές)· λέγεται δὲ τότε ἡ ἐπιφάνεια *κοιλόκυρτος* εἰς τὸ σημεῖον Μ.

Ἐὰν δὲ τέλος εἶνε $rt - s^2 = 0$, τὸ τριώνυμον (4) διατηρεῖ τὸ ἑαυτοῦ σημεῖον· ὥστε ἡ ἐπιφάνεια κεῖται πλησίον τοῦ Μ πρὸς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου· ἡ δὲ τομὴ αὐτῆς ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου $z = h$ εἶνε ὡς ἔγγιστα δύο εὐθεῖαι παράλληλοι.

120. Κατὰ τὰ προηγουμένως ἀποδειχθέντα (ἐδ. 117), αἱ ἀκτῖνες καμπυλότητος τῶν καθέτων τομῶν εἶνε ἀνάλογοι πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἀντιστοιχουσῶν ἀκτίνων τῆς τομῆς (3), ἐν ᾗ ἡ ἀπόστασις h τοῦ ποιοῦντος αὐτὴν ἐπιπέδου ἀπὸ τοῦ ἐφαπτομένου εἶνε ἀπειροστή.

Ἀλλ' ἡ ἰδιότης αὕτη τῆς τομῆς οὐδόλως βλάπτεται, ἂν πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες αὐτῆς πολλαπλασιασθῶσιν ἐφ' ἕνα οἱονδήποτε ἀριθμόν, ἤτοι ἂν τραπῇ εἰς ἄλλην ὁμοίαν καμπύλην. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ θέσωμεν

$$x = X\sqrt{2h\varepsilon}, \qquad y = Y\sqrt{2h\varepsilon},$$

ἔνθα $\varepsilon = 1$, ἂν $h > 0$, καὶ $\varepsilon = -1$, ἂν $h < 0$,

ὅτε προκύπτει ἡ πρὸς τὴν τομὴν (3) ὁμοία καμπύλη

$$\varepsilon = rX^2 + 2sXY + tY^2 + \sqrt{2h\varepsilon}(\ldots),$$

ἥτις, ὅταν τὸ h τείνῃ πρὸς τὸ 0, καταντᾷ ἴση τῇ κωνικῇ τομῇ

$$\varepsilon = rX^2 + 2sXY + tY^2. \tag{5}$$

Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι *αἱ ἀκτῖνες καμπυλότητος τῶν καθέτων τῆς ἐπιφανείας τομῶν εἶνε ἀνάλογοι πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων τῆς κωνικῆς τομῆς (5), αἵτινες κεῖνται ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν.*

Ἡ κωνικὴ αὕτη τομὴ λέγεται *δείκτρια* τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον Μ· κεῖται δὲ ἐπὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου· ὥστε αἱ ἀκτῖνες αὐτῆς εἶνε ἐφαπτόμεναι τῶν πρὸς αὐτὰς ἀντιστοιχουσῶν καθέτων τομῶν εἰς τὸ Μ.

121. Ὅταν ἡ ἐπιφάνεια πλησίον τοῦ σημείου Μ εἶνε κυρτή, ἤτοι ὅταν κεῖται πρὸς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐφαπτομένου αὐτῆς ἐπιπέδου, ληφθῇ δὲ καὶ τὸ θετικὸν μέρος τοῦ ἄξονος τῶν z πρὸς τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας, τὸ ἐπίπεδον $z = h$ θὰ τέμνῃ τὴν ἐπιφάνειαν (πλησίον τοῦ Μ), μόνον ὅταν εἶνε $h > 0$· ἑπομένως ἐν τῇ ἐξισώσει (5) τῆς δεικτρίας πρέπει νὰ ληφθῇ $\varepsilon = 1$, καὶ ἡ δείκτρια εἶνε τότε ἡ ἔλλειψις $rX^2 + 2sXY + tY^2 = 1$.

Ἀλλ' ὅταν ἡ ἐπιφάνεια πλησίον τοῦ Μ εἶνε κοιλόκυρτος, τοῦτ' ἔστιν, ὅταν κεῖται πρὸς ἀμφότερα τὰ μέρη τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου, τὸ ἐπίπεδον $z = h$ τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν, εἴτε θετικὸν εἶνε τὸ h εἴτε ἀρνητικόν· ὥστε ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἔχομεν δύο δεικτρίας· μίαν διὰ τὰς καθέτους τομάς, αἵτινες στρέφουσι τὰ κοῖλα αὐτῶν πρὸς τὰ θετικὰ z, τὴν $rX^2 + 2sXY + tY^2 = 1$,

καὶ μίαν δι' ἐκείνας, αἵτινες στρέφουσι τὰ κοῖλα αὐτῶν πρὸς τὰ ἀρνητικὰ z, τὴν $rX^2 + 2sXY + tY^2 = -1$.

Αἱ δείκτριαι αὗται εἶνε δύο συζυγεῖς ὑπερβολαί.

Ἐὰν κατασκευάσωμεν τὰς ὑπερβολὰς ταύτας ἐπὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου, βλέπομεν εὐκόλως, ὅτι αἱ κοιναὶ αὐτῶν ἀσύμπτωτοι χωρίζουσι τὰς καθέτους τομὰς τοῦ πρώτου εἴδους ἀπὸ τῶν τοῦ δευτέρου· διότι ὅσαι μὲν τομαὶ ἔχουσιν ἐφαπτομένας τὰς ἀκτῖνας τῆς μιᾶς ὑπερβολῆς στρέφουσι τὰ κοῖλα αὐτῶν πρὸς τὰ θετικὰ z, ὅσαι δὲ ἔχουσιν ἐφαπτομένας τὰς ἀκτῖνας τῆς συζυγοῦς αὐτῇ στρέφουσι τὰ κοῖλα αὐτῶν πρὸς τὰ ἀρνητικὰ z.

122. Ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς τυχούσης καθέτου τομῆς ΜΜ′ εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου (1) ὡς ἑξῆς.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ x,y,z τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου Μ′, θὰ εἶνε

$$(\mathrm{M'H})^2=x^2+y^2 \quad \text{καὶ} \quad \mathrm{MH}=z,$$

ὅθεν ὁ τύπος (1) γίνεται

$$\varrho=\text{ὅρ}\frac{x^2+y^2}{2z} \qquad (1')$$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε

$$z=\varphi(x,y)=\frac{1}{2}(rx^2+2sxy+ty^2)+\ldots,$$

ἕπεται

$$\varrho=\text{ὅρ}\frac{x^2+y^2}{rx^2+2sxy+ty^2+\ldots}.$$

ἀλλ' ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ φ τὴν γωνίαν, ἣν σχηματίζει ἡ ἐφαπτομένη Μμ τῆς τομῆς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x, θὰ εἶνε

$$x=\mathrm{M}\mu\,.\,\text{συν}\varphi, \qquad y=\mathrm{M}\mu\,.\,\text{ημ}\varphi, \qquad (\mathrm{M}\mu)^2=x^2+y^2,$$

ὅθεν ἕπεται

$$\varrho=\text{ὅρ}\frac{1}{r\text{συν}^2\varphi+2s\text{ημ}\varphi\,\text{συν}\varphi+t\text{ημ}^2\varphi+\mathrm{M}\mu(\ldots)}$$

καὶ ἑπομένως

$$\varrho=\frac{1}{r\text{συν}^2\varphi+2s\text{ημ}\varphi\,\text{συν}\varphi+t\text{ημ}^2\varphi}. \qquad (6)$$

Ὁ δὲ τύπος οὗτος δίδει θετικὰς μὲν τὰς ἀκτῖνας ϱ τὰς κειμένας ἐπὶ τοῦ θετικοῦ μέρους τοῦ ἄξονος τῶν z (τοῦτ' ἔστι τὰς ἀκτῖνας τῶν καθέτων τομῶν, αἵτινες στρέφουσι τὰ κοῖλα αὐτῶν πρὸς τὰ θετικὰ z), ἀρνητικὰς δὲ τὰς ἄλλας. Διότι διὰ τὰς πρώτας εἶνε ἐν τῷ τύπῳ (1′) τὸ z θετικόν, διὰ δὲ τὰς δευτέρας ἀρνητικόν.

Σημειωσις. Ἐκ τῆς τιμῆς (6) τῆς ἀκτῖνος καμπυλότητος ϱ δύναται νὰ δειχθῇ εὐκόλως, ὅτι αὕτη μεταβάλλεται ἀναλόγως τοῦ τετραγώνου τῆς ἀντιστοιχούσης πρὸς αὐτὴν ἀκτῖνος τῆς δεικτρίας· διότι, παριστῶντες διὰ τοῦ δ τὴν ἀκτῖνα τῆς δεικτρίας τὴν σχηματίζουσαν τὴν γωνίαν φ πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x, θὰ ἔχωμεν

$$x=\delta\,\text{συν}\varphi \qquad y=\delta\,.\,\text{ημ}\varphi,$$

ὅθεν ἡ ἐξίσωσις τῆς δεικτρίας γίνεται

$$\delta^2(r\sigma\upsilon\nu^2\varphi+2s\eta\mu\varphi\,\sigma\upsilon\nu\varphi+t\eta\mu^2\varphi)=1, \quad \text{ἤτοι} \quad \delta^2=\varrho.$$

123. Ἡ γεωμετρικὴ παράστασις τῶν ἀκτίνων ϱ τῆς καμπυλότητος τῶν καθέτων τομῶν ἄγει εἰς τὴν ἁπλοποίησιν τοῦ τύπου (6) αὐτῶν. Ἐὰν τῷ ὄντι λάβωμεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν xy ὡς ἄξονας τῶν x καὶ y τοὺς ἄξονας τῆς δεικτρίας, ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς θὰ ἀπαλλαγῇ ἀπὸ τοῦ γινομένου xy· τοῦτ' ἔστι πρὸς τὸ νέον σύστημα τῶν ἀξόνων θὰ μηδενισθῇ καὶ ἡ παράγωγος s· ὅθεν ἡ μὲν δείκτρια θὰ ἔχῃ πρὸς τοὺς ἄξονας τούτους τὴν ἐξίσωσιν

$$\varepsilon=rx^2+ty^2,$$

αἱ δὲ ἀκτῖνες ϱ τῆς καμπυλότητος τῶν καθέτων τομῶν θὰ δίδωνται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\frac{1}{\varrho}=r\sigma\upsilon\nu^2\varphi+t\eta\mu^2\varphi. \tag{7}$$

ἔνθα διὰ r καὶ t παριστῶμεν τὰς νέας τιμὰς τῶν παραγώγων, ἤτοι τὰς ἀντιστοιχούσας πρὸς τὸ νέον σύστημα τῶν ἀξόνων.

124. Αἱ δύο κάθετοι τομαί, ὧν ἐφαπτόμεναι εἶνε οἱ νέοι ἄξονες τῶν x καὶ y (τοῦτ' ἔστιν οἱ ἄξονες τῆς δεικτρίας) λέγονται *πρωτεύουσαι* τομαὶ τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον Μ· αἱ δὲ ἀκτῖνες τῆς καμπυλότητος αὐτῶν λέγονται *πρωτεύουσαι ἀκτῖνες καμπυλότητος* τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Μ.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὰς πρωτευούσας ταύτας ἀκτῖνας διὰ ϱ_1 καὶ ϱ_2, θὰ εἶνε

$$\frac{1}{\varrho_1}=r\cdot \quad \text{διότι δι' αὐτὴν εἶνε } \varphi=0, \quad \text{ἢ } \varphi=\pi$$

καὶ

$$\frac{1}{\varrho_2}=t\cdot \quad \text{διότι δι' αὐτὴν εἶνε } \varphi=\frac{\pi}{2}, \quad \text{ἢ} \quad \varphi=\pi+\frac{\pi}{2}\cdot$$

ὅθεν ὁ τύπος (7) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{1}{\varrho_1}\sigma\upsilon\nu^2\varphi+\frac{1}{\varrho_2}\eta\mu^2\varphi. \tag{8}$$

Παρατηρητέον δέ, ὅτι, ἂν μὲν ἡ δείκτρια εἶνε ἔλλειψις, ἀμφότεραι αἱ ἀκτῖνες ϱ_1 καὶ ϱ_2 θὰ εἶνε θετικαὶ καὶ θὰ εἶνε ἡ ἑτέρα τούτων ἡ μεγίστη τῶν ἀκτίνων ϱ, ἡ δὲ ἄλλη ἡ ἐλαχίστη (ἐκτὸς ἂν εἶνε $\varrho_1=\varrho_2$, ὅτε πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες ϱ εἶνε ἴσαι).

Ἂν δὲ ἡ δείκτρια εἶνε ὑπερβολή, αἱ ἀκτῖνες ϱ_1 καὶ ϱ_2 θὰ ἔχωσιν ἀντίθετα σημεῖα· διότι αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν πρωτευουσῶν τομῶν εἶνε τότε οἱ κοινοὶ ἄξονες τῶν συζυγῶν ὑπερβολῶν· ἑπομένως ἡ μὲν μία ἐκ τῶν πρωτευουσῶν τομῶν στρέφει τότε τὰ κοῖλα αὐτῆς πρὸς τὰ θετικὰ z, ἡ δὲ ἄλλη πρὸς τὰ ἀρνητικά.

Ἂν δὲ τέλος ἡ δείκτρια σύγκειται ἐκ δύο παραλλήλων εὐθειῶν (ὅτε μετὰ τὴν ἐξάλειψιν τοῦ ὀρθογωνίου xy ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς καταντᾷ $rx^2=1$), ἡ ἑτέρα τῶν πρωτευουσῶν τομῶν ἔχει ἀκτῖνα καμπυλότητος ἄπειρον, ἡ δὲ ἄλλη ἔχει τὴν ἐλαχίστην.

125. Ἐκ τῆς ἁπλῆς σχέσεως (8), ἥτις συνδέει τὰς ἀκτῖνας τῆς καμπυλότητος τῶν καθέτων τομῶν πρὸς ἀλλήλας, ἕπονται αἱ ἑξῆς προτάσεις.

1) *Δύο κάθετοι τῆς ἐπιφανείας τομαὶ ἔνθεν καὶ ἔνθεν μιᾶς πρωτευούσης τομῆς καὶ ἐξ ἴσου πρὸς αὐτὴν κεκλιμέναι ἔχουσιν ἴσας ἀκτῖνας καμπυλότητος.*

Διότι, ἂν ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἑτέρας ἐξ αὐτῶν σχηματίζῃ τὴν γωνίαν φ_0 πρὸς τὸν ἄξονα OX, ἡ τῆς ἄλλης θὰ σχηματίζῃ τὴν γωνίαν $2\pi-\varphi_0$· ὁ δὲ τύπος (8) δίδει δι' ἀμφοτέρας τὴν αὐτὴν τιμὴν τῆς ἀκτῖνος.

Τὸ ἄθροισμα $\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho'}$ *τῶν καμπυλοτήτων δύο καθέτων τῆς ἐπιφανείας τομῶν, ὧν τὰ ἐπίπεδα εἶνε κάθετα πρὸς ἄλληλα, εἶνε σταθερὸν καὶ ἑπομένως ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα* $\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho_2}$ *τῶν καμπυλοτήτων τῶν δύο πρωτευουσῶν τομῶν.*

Διότι, ἂν ἡ ἑτέρα τούτων σχηματίζῃ πρὸς τὸ ἐπίπεδον ZOX τὴν γωνίαν φ, ἡ ἄλλη θὰ σχηματίζῃ τὴν γωνίαν $\varphi+\frac{\pi}{2}$ πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· καὶ θὰ εἶνε κατὰ τὸν τύπον (8)

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{1}{\varrho_1}\,\sigma\upsilon\nu^2\varphi+\frac{1}{\varrho_2}\,\eta\mu^2\varphi, \quad \text{καὶ} \quad \frac{1}{\varrho'}=\frac{1}{\varrho'}\,\eta\mu^2\varphi+\frac{1}{\varrho_2}\sigma\upsilon\nu^2\varphi,$$

ὅθεν
$$\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho'}=\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}.$$

Ἡ σταθερὰ ποσότης $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho'}\right)$ (ἥτις εἶνε ἴση τῇ καμπυλότητι ἑκατέρας τῶν καθέτων τομῶν τῶν διχοτομουσῶν) τὴν γωνίαν τῶν πρωτευουσῶν) λέγεται *μέση καμπυλότης τῆς ἀπιφανείας* εἰς τὸ σημεῖον M.

Σημειωσις Α΄. Ἀξία προσοχῆς εἶναι ἡ μερικὴ περίπτωσις, καθ' ἣν ἡ δείκτρια εἶνε περιφέρεια κύκλου (τότε $s=0$ καὶ $r=t$)· διότι τότε πᾶσαι αἱ κάθετοι τομαὶ ἔχουσιν ἴσας ἀκτῖνας καμπυλότητος.

Τὸ τοιοῦτο σημεῖον λέγεται *σφαιρικὸν* (ἢ *ὀμφαλικὸν*) σημεῖον τῆς ἐπιφανείας.

Σημειωσις Β΄. Ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια εἶνε δευτέρου βαθμοῦ, αἱ παράλληλοι τομαὶ αὐτῆς εἶνε ὅμοιαι ἀλλήλαις· ἐπειδὴ δὲ ἡ δείκτρια εἶνε ὁμοία τῇ τομῇ, ἧς τὸ ἐπίπεδον εἶνε παράλληλον τῷ ἐφαπτομένῳ ἐπιπέδῳ καὶ ἀπέχει ἀπ' αὐτοῦ ἀπειροστὴν ἀπόστασιν, συνάγεται, ὅτι ἡ δείκτρια θὰ εἶνε ὁμοία καὶ πρὸς πᾶσαν τομὴν παράλληλον τῷ ἐφαπτομένῳ ἐπιπέδῳ.

Ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης ἕπεται, ὅτι, ὅταν ἐπιφάνεια δευτέρου βαθμοῦ ἔχῃ σφαιρικόν τι σημεῖον, τὰ ἐπίπεδα τὰ παράλληλα πρὸς τὸ ἐφαπτόμενον αὐτῆς ἐπίπεδον εἰς τὸ σφαιρικὸν σημεῖον θὰ ποιῶσι κυκλικὰς τομὰς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας· καὶ ἀντιστρόφως. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν, ὅτι τὸ ἐλλειψοειδὲς ἔχει τέσσαρα σφαιρικὰ σημεῖα, τοῦτ' ἔστι τὰ πέρατα τῶν διαμέτρων τῶν κυκλικῶν αὐτοῦ τομῶν· ὅμοιον δὲ ἀληθεύει καὶ περὶ τοῦ διχώνου ὑπερβολοειδοῦς.

Ἐπίσης τὸ ἐλλειπτικὸν παραβολοειδὲς ἔχει δύο σφαιρικὰ σημεῖα, τοῦτ' ἔστι τὰ πέρατα τῶν διαμέτρων τῶν κυκλικῶν τομῶν αὐτοῦ.

Σημειωσις Γ΄. Ἅπασα ἡ προεκτεθεῖσα θεωρία περὶ τῶν ἀκτίνων καμπυλότητος τῶν καθέτων τομῶν τῆς ἐπιφανείας καὶ τῆς σχέσεως αὐτῶν πρὸς ἀλλήλας ἐστηρίχθη ἐπὶ τῆς ὑποθέσεως, ὅτι ἡ συντεταγμένη z τῶν σημείων τῆς ἐπιφανείας ἔχει (ὡς καὶ ἐξ ἀρχῆς παρετηρήσαμεν) τὸν χαρακτῆρα ἀκεραίας συναρτήσεως τῶν δύο ἄλλων, x καὶ y. Εἴς τινα σημεῖα ἀνώμαλα τῆς ἐπιφανείας δὲν συμβαίνει τοῦτο· οἴκοθεν δὲ ἐννοεῖται, ὅτι περὶ τῶν τοιούτων σημείων δὲν ἰσχύουσι τὰ προειρημένα.

Τοῦτο συμβαίνει λ. χ. εἰς τὴν ἐπιφάνειαν

$$z=(x^2+y^2)\sigma\left(\frac{y}{x}\right)$$

εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων. Αἱ μερικαὶ παράγωγοι r, s, t οὐδεμίαν ὡρισμένην τιμὴν ἔχουσι διὰ $x=0$, $y=0$· ἑπομένως ἡ συνάρτησις z δὲν εἶνε ἀναπτύξιμος κατὰ τὰς θετικὰς καὶ ἀκεραίας δυνάμεις τῶν x καὶ y. Ἐὰν δὲ ἐφαρμοσθῇ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν ταύτην ἡ μέθοδος τοῦ ἐδ. (122) εὑρίσκεται, ὅτι ἡ ἀκτὶς ϱ τῆς καθέτου τομῆς δίδεται ὑπὸ τοῦ ἑξῆς τύπου

$$\varrho = \text{ὅρ}\frac{1}{2\sigma\left(\frac{y}{x}\right)} \quad \text{ἢ} \quad \varrho = \frac{1}{2\sigma(\text{εφα})},$$

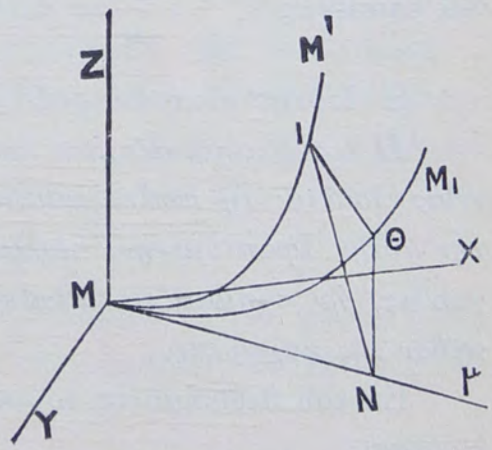
ἐὰν διὰ τοῦ α παραστήσωμεν τὴν γωνίαν, ἣν σχηματίζει ὁ ἄξων τῶν x πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς καθέτου τομῆς.

Παρατηρητέον πρὸς τούτοις, ὅτι καὶ ἐν ᾗ περιπτώσει ἡ συνάρτησις z ἔχει τὸν χαρακτῆρα ἀκεραίας συναρτήσεως τῶν x, y, δυνατὸν νὰ συμβῇ, ὥστε εἴς τι σημεῖον νὰ γίνῃ $p=0$, $q=0$, $r=0$, $s=0$, $t=0$· τότε ἡ τομὴ τῆς ἐπιφανείας δι' ἐπιπέδου παραλλήλου τῷ ἐφαπτομένῳ εἶνε ὡς ἔγγιστα τρίτου βαθμοῦ καμπύλη (ἐν γένει), ἡ δὲ καμπυλότης πασῶν τῶν τομῶν εἶνε 0.

Β΄. *Τομαὶ οἱαιδήποτε.*

126. Ἡ εὕρεσις τῆς καμπυλότητος τῶν ἄλλων τῆς ἐπιφανείας γραμμῶν ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς καμπυλότητος τῶν καθέτων τομῶν αὐτῆς· γίνεται δὲ τοῦτο ὡς ἑξῆς.

Ἔστω τυχοῦσα γραμμὴ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας κειμένη ἡ ΜΜ΄ καὶ ἐφαπτομένη αὐτῆς ἡ Μμ, κάθετος δὲ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν κατὰ τὸ σημεῖον Μ ἡ ΜΖ· τὸ διὰ τῆς καθέτου ταύτης ΜΖ καὶ διὰ τῆς ἐφαπτομένης Μμ διερχόμενον ἐπίπεδον θὰ ποιήσῃ τομὴν κάθετον, τὴν $ΜΜ_1$, ἔχουσαν τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην Μμ. Πρὸς εὕρεσιν τῆς σχέσεως, ἥτις συνδέει τὰς ἀκτῖνας καμπυλότητος τῶν δύο



γραμμῶν $ΜΜ_1$ καὶ ΜΜ΄, ἄγομεν ἔκ τινος σημείου Ν τῆς κοινῆς αὐτῶν ἐφαπτομένης ἐπίπεδον κάθετον πρὸς ταύτην· τὸ ἐπίπεδον τοῦτο θὰ συναντήσῃ τὰς καμπύλας εἰς τὰ σημεῖα Θ καὶ Ι καὶ ἂν παραστήσωμεν διὰ ϱ τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος τῆς καθέτου τομῆς $ΜΜ_1$ καὶ διὰ ϱ' τὴν τῆς καμπύλης ΜΜ΄, θὰ εἶνε (παράβλ. ἐδ. 117).

$$\varrho = \text{ὅρ}\,\frac{(\mathrm{MN})^2}{2\mathrm{N\Theta}}, \quad \varrho' = \text{ὅρ}\,\frac{(\mathrm{MN})^2}{2(\mathrm{NI})},$$

ἐντεῦθεν δ' ἕπεται $$\frac{\varrho'}{\varrho} = \text{ὅρ}\,\frac{\text{NΘ}}{\text{NI}}.$$

Ἀλλ' ἐκ τοῦ τριγώνου ΘΙΝ εὑρίσκομεν

$$\frac{\text{NΘ}}{\text{NI}} = \frac{\text{ημ NIΘ}}{\text{ημ NΘI}}, \quad \text{ὅθεν} \quad \frac{\varrho'}{\varrho} = \text{ὅρ}\,\frac{\text{ημ NIΘ}}{\text{ημ NΘI}}.$$

Ἐν τῷ τριγώνῳ ΘΝΙ παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ γωνία ΘΝΙ ἰσοῦται τῇ γωνίᾳ τῶν ἐπιπέδων ΜμΘ καὶ ΜμΙ· τὸ δεύτερον δὲ τοῦτο ἐπίπεδον τείνει νὰ γίνῃ ἐγγύτατον ἐπίπεδον τῆς καμπύλης ΜΜ′ εἰς τὸ σημεῖον Μ (διότι διέρχεται διὰ τῆς ἐφαπτομένης Μμ καὶ διὰ τοῦ σημείου Ι)· ἑπομένως ἡ γωνία ΘΝΙ τείνει πρὸς τὴν γωνίαν τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου τῆς καμπύλης ΜΜ′ καὶ τοῦ καθέτου ΖΜμ· τοῦτ' ἔστι πρὸς τὴν γωνίαν, ἣν σχηματίζει ἡ πρώτη κάθετος ΜΚ τῆς καμπύλης ΜΜ′ πρὸς τὴν κάθετον ΜΖ τῆς ἐπιφανείας, ἥν τινα γωνίαν παριστῶ διὰ τοῦ ϑ. Ἡ δὲ γωνία ΝΘΙ τείνει πρὸς τὴν ὀρθήν· διότι ἡ μὲν ΝΘ, ὡς παράλληλος τῇ ΜΖ, τείνει νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπ' αὐτήν, ἡ δὲ ΘΙ τείνει νὰ γίνῃ ἐφαπτομένη τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ Μ. Διὰ ταῦτα εἶνε

$$\text{ορ ημ NΘI} = 1, \qquad \text{ὅρ ημ NIΘ} = \text{ὅρ συν ΘNI} = \text{συν}\vartheta\cdot$$

καὶ ἑπομένως $$\frac{\varrho'}{\varrho} = \text{συν}\vartheta \quad \text{ἤτοι} \quad \varrho' = \varrho\,.\,\text{συν}\vartheta.$$

Ἡ ἰσότης αὕτη ἐκφράζει τὸ ἑξῆς θεώρημα τοῦ Meunier.

Ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος πάσης καμπύλης κειμένης ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἰσοῦται τῇ ἀκτῖνι καμπυλότητος τῆς καθέτου τομῆς, ἥτις ἔχει τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην, πολλαπλασιασθείσῃ ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας, ἣν σχηματίζει τὸ ἐπίπεδον τῆς τομῆς πρὸς τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον τῆς καμπύλης.

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου ἕπεται ἀμέσως ἡ ἑξῆς ἀξιοσημείωτος πρότασις.

Ἐὰν κατασκευασθῇ σφαῖρα ἔχουσα κέντρον τὸ κέντρον καμπυλότητος μιᾶς καθέτου τομῆς τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ Μ καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος αὐτῆς, τὰ ἐπίπεδα τὰ διὰ τῆς ἐφαπτομένης τῆς τομῆς ταύτης ἀγόμενα θὰ τέμνωσι τὴν σφαῖραν κατὰ κύκλους, οἵτινες θὰ εἶνε κύκλοι καμπυλότητος τῶν ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων τούτων γινομένων τομῶν τῆς ἐπιφανείας.

Ἀναλυτικὴ ἀπόδειξις τῶν προηγουμένων τύπων.

127. Τὰ προαποδειχθέντα θεωρήματα περὶ τῆς καμπυλότητος τῶν γραμμῶν μιᾶς ἐπιφανείας δύνανται νὰ ἀποδειχθῶσι καὶ ἀναλυτικῶς καὶ μάλιστα γενικώτερον· διότι ἐν μὲν τῇ προεκτεθείσῃ γεωμετρικῇ μεθόδῳ ὑπεθέσαμεν τὴν ἐπιφάνειαν ἀναφερομένην πρὸς τὸ ἐφαπτόμενον αὐτῆς ἐπίπεδον καὶ πρὸς τὴν κάθετον αὐτῆς ὡς ἄξονα τῶν z· ἐν δὲ τῇ ἑπομένῃ ἀναλυτικῇ μεθόδῳ οἱ ἄξονες τῶν συντεταγμένων εἶνε οἱοιδήποτε (ὀρθογώνιοι).

Ἔστω $z=\varphi(x,y)$ ἡ ἐξίσωσις τῆς τυχούσης ἐπιφανείας· ἐὰν θέσωμεν

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\qquad q=\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\qquad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\qquad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

θὰ εἶνε

$$dz=pdx+qdy \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} dp&=rdx+sdy\\ dq&=sdx+tdy\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

καὶ

$$d^2z=rdx^2+2sdxdy+tdy^2. \tag{3}$$

Τούτων τεθέντων, ἂς ληφθῇ τυχὸν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας, τὸ $M(x,y,z)$, καὶ ἂς ἀχθῇ δι' αὐτοῦ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἡ τυχοῦσα γραμμὴ AMB· τὰ διαφορικὰ τῶν συντεταγμένων τοῦ σημείου M τῆς γραμμῆς ταύτης θὰ συνδέωνται πάντοτε διὰ τῆς ἐξισώσεως (1)

$$dz=pdx+qdy\cdot$$

ἂν δὲ παραστήσωμεν διὰ α, β, γ τὰ συνημίτονα τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ ἐφαπτομένη MT τῆς καμπύλης AMB πρὸς τοὺς ὀρθ. ἄξονας, θὰ εἶνε

$$\alpha=\frac{dx}{dS},\qquad \beta=\frac{dy}{dS},\qquad \gamma=\frac{dz}{dS}, \tag{4}$$

ὅθεν ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται

$$\gamma=p\alpha+q\beta. \tag{5}$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης, ἥτις συνδέει τὰ τρία συνημίτονα τῆς κατὰ τὸ M ἐφαπτομένης εἰς πᾶσαν γραμμὴν κειμένην ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας (καὶ ἥτις ἐκφράζει, ὅτι πᾶσαι αἱ ἐφαπτόμεναι αὗται κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου), εὑρίσκομεν διὰ τῆς διαφορίσεως, ὑπ' ὄψιν ἔχοντες καὶ τοὺς τύπους (2) καὶ (4),

$$d\gamma = p d\alpha + q d\beta + (r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2) dS\cdot$$

ἀλλ' εἶνε

$$d\alpha = \frac{\xi}{\varrho}\, dS$$

$$d\beta = \frac{\eta}{\varrho}\, dS \qquad \text{(σελ. 126)}$$

$$d\gamma = \frac{\zeta}{\varrho}\, dS,$$

ἔνθα ξ, η, ζ εἶνε τὰ συνημίτονα τῆς πρώτης καθέτου τῆς καμπύλης ΑΜΒ καὶ ϱ ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον Μ.

Διὰ τὰς ἐξισώσεις ταύτας ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$(\zeta - p\xi - q\eta)\frac{1}{\varrho} = r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2,$$

ὅθεν καὶ

$$\varrho = \frac{\zeta - p\xi - q\eta}{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἕτερον τῶν μερῶν τῆς καθέτου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν εἰς τὸ Μ (τὸ σχηματίζον πρὸς τὸν θετικὸν ἡμιάξονα ΟΖ ὀξεῖαν γωνίαν), ἔστω τὸ ΜΚ, ἔχει τὰ συνημίτονα (Ι, σελ. 169)

$$\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

(ἔνθα ἡ τετρ. ῥίζα λαμβάνεται θετικῶς), ἐὰν παραστήσωμεν διὰ ϑ τὴν γωνίαν, ἣν σχηματίζει τὸ μέρος τοῦτο ΜΚ τῆς καθέτου μετὰ τοῦ θετικοῦ μέρους τῆς πρώτης καθέτου τῆς καμπύλης, θὰ εἶνε

$$\text{συν}\vartheta = \frac{\zeta - p\xi - q\eta}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\cdot$$

ὅθεν ἡ τιμὴ (6) τῆς ἀκτῖνος καμπυλότητος ϱ (τῆς καμπύλης ΑΜΒ εἰς τὸ Μ) γίνεται

$$\varrho = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}\,.\,\text{συν}\vartheta}{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}. \tag{7}$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου γίνεται φανερόν, ὅτι ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῶν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας κειμένων γραμμῶν εἰς τὸ σημεῖον Μ ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν τιμῶν τῶν παραγώγων p, q, r, s, t εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο, ἔτι δὲ καὶ ἐκ τῶν γωνιῶν, ἃς σχηματίζει ἡ ἐφαπτομένη ἑκάστης ἐξ αὐτῶν πρὸς τοὺς ἄξονας, καὶ ἐκ τῆς γωνίας, ἣν σχηματίζει ἡ πρωτεύουσα κάθετος ἑκάστης ἐξ αὐτῶν πρὸς τὴν κάθετον τῆς ἐπιφανείας.

Ἡ δὲ τιμὴ τῆς ἀκτῖνος ϱ, ἡ ἐκ τοῦ τύπου τούτου εὑρισκομένη, θὰ εἶνε θετικὴ μέν, ἂν ἡ γωνία ϑ (τῆς ΜΚ καὶ τῆς πρωτευούσης καθέτου τῆς καμπύλης) εἶνε ὀξεῖα, ἀρνητικὴ δέ, ἂν ἀμβλεῖα.

Θεώρημα τοῦ Meunier.

128. Ἔστω τυχοῦσα καμπύλη ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας κειμένη ἡ ΑΜΒ καὶ ἐφαπτομένη αὐτῆς εἰς τὸ Μ ἡ ΜΤ.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ ϱ' τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον Μ, θὰ εἶνε

$$\varrho' = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2}\,\text{συν}\vartheta. \tag{7'}$$

Ἡ κάθετος τομὴ ἡ διὰ τοῦ ἐπιπέδου ΜΚΤ γινομένη θὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην ΜΤ, ἣν ἔχει καὶ ἡ καμπύλη ΑΜΒ· ἡ δὲ ἀκτὶς καμπυλότητος ϱ τῆς τομῆς ταύτης θὰ κεῖται ἢ ἐπὶ τῆς ΜΚ ἢ ἐπὶ τῆς προεκβολῆς αὐτῆς· ὥστε δι' αὐτὴν ὁ τύπος (7) γίνεται

$$\varrho = \frac{\varepsilon\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2}, \tag{8}$$

ἔνθα ε εἶνε $+1$, ὅταν ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος ϱ κεῖται ἐπὶ τῆς ΜΚ, (ὅτε εἶνε $\vartheta=0$)· καὶ -1, ὅταν κεῖται ἐπὶ τῆς προεκβολῆς αὐτῆς (ὅτε εἶνε $\vartheta=\pi$).

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (7') καὶ (8) ἕπεται νῦν ἡ ἑξῆς

$$\varrho' = \varepsilon\,.\,\varrho\,.\,\text{συν}\vartheta, \tag{9}$$

ἥτις ἐκφράζει τὸ θεώρημα τοῦ Meunier (σελ. 189).

Σημειωσις. Ἐκ τοῦ γενικοῦ τύπου (8) εὑρίσκεται ὁ τύπος τοῦ (ἐδ. 122) ἐὰν τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον ληφθῇ ὡς ἐπίπεδον τῶν xy, ἑπομένως ἡ κάθετος ΜΚ τῆς ἐπιφανείας ὡς ἄξων τῶν z· διότι τότε θὰ εἶνε $p=0,\ q=0$· $\alpha=$ συνφ καὶ $\beta=$ ημφ· ἔνθα φ παριστᾷ τὴν γωνίαν τῆς ἐφαπτομένης ΜΤ πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x.

Ἔκφρασις τῶν πρωτευουσῶν ἀκτίνων καμπυλότητος Εὕρεσις τῶν σφαιρικῶν σημείων.

129. Ὁ τύπος
$$\varrho = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2} \tag{8}$$
δίδει τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος τῆς καθέτου τομῆς εἴς τι σημεῖον Μ, ὅταν εἶνε γνωστὰ τὰ συνημίτονα τῶν γωνιῶν, ἅς τινας σχηματίζει ἡ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ταύτης πρὸς τοὺς ἄξονας· (αἱ παράγωγοι p, q, r, s, t μένουσιν αἱ αὐταὶ διὰ πάσας τὰς καθέτους τομὰς τῆς ἐπιφανείας τὰς περὶ τὸ Μ γινομένας).

Ἀλλὰ τὰ δύο συνημίτονα α καὶ β δὲν εἶνε ἀνεξάρτητα ἀπ' ἀλλήλων· διότι μεταξὺ τῶν τριῶν συνημιτόνων α, β, γ ὑπάρχουσιν αἱ ἑξῆς δύο ἐξισώσεις
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$$
καὶ
$$\gamma = p\alpha+q\beta. \tag{ι}$$

Ἐκ δὲ τούτων διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς τοῦ γ εὑρίσκεται ἡ τὰ α καὶ β συνδέουσα ἐξίσωσις
$$\alpha^2(1+p^2)+2\alpha\beta pq+\beta^2(1+q^2)=1. \tag{10}$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ἡ ἀκτὶς ϱ (ἐὰν περὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον Μ μένωμεν) ἐξαρτᾶται ἐκ μόνου τοῦ α, ἢ ἐκ τοῦ λόγου $\frac{\beta}{\alpha}$, ὃν παριστῶ διὰ τοῦ ω. Ἐὰν τῷ ὄντι πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν τῆς ἐκφράσεως τοῦ ϱ ἐπὶ τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως (10), ὅπερ εἶνε ἴσον τῇ μονάδι 1, εὑρίσκομεν
$$\varrho = \sqrt{1+p^2+q^2}\ \frac{(1+p^2)+2pq\omega+(1+q^2)\omega^2}{r+2s\omega+t\omega^2}, \tag{11}$$
δοθέντος ἄρα τοῦ λόγου ω, εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου τούτου ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς ἀντιστοιχούσης καθέτου τομῆς, ἐκείνης δηλαδὴ τῆς ὁποίας ἡ ἐφαπτομένη ἔχει τὰ συνημίτονα α, β, γ τὰ τὴν σχέσιν $\beta=\alpha\omega$ ἐπαληθεύοντα· τὰ συνημίτονα ταῦτα ὁρίζονται τότε ἐκ τῆς σχέσεως $\beta=\alpha\omega$ καὶ ἐκ τῶν δύο ἐξισώσεων (ι).

130. Δυνάμεθα νῦν νὰ προσδιορίσωμεν ἐπὶ τῆς δοθείσης ἐπιφανείας τὰ σφαιρικὰ σημεῖα αὐτῆς. Καὶ ὄντως, ἂν τὸ θεωρούμενον σημεῖον εἶνε σφαιρικόν, ἡ τιμὴ τῆς ἀκτῖνος ϱ εἶνε ἀνεξάρτητος ἀπὸ τοῦ

λόγου ω· καὶ τἀνάπαλιν, ἂν ἡ τιμὴ τοῦ ϱ εἶνε ἀνεξάρτητος ἀπὸ τοῦ ω, τὸ σημεῖον M εἶνε σφαιρικὸν σημεῖον. Ἀλλ' ἵνα ἡ παράστασις (11) ᾖ ἀνεξάρτητος ἀπὸ τοῦ ω, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε

$$\frac{r}{1+p^2}=\frac{s}{pq}=\frac{t}{1+q^2}, \qquad (12)$$

ἑπομένως τὰ σφαιρικὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας ὁρίζονται διὰ τῶν ἐξισώσεων τούτων καὶ διὰ τῆς ἐξισώσεως τῆς ἐπιφανείας

$$z=\varphi(x,y).$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν γένει αἱ δύο ἐξισώσεις (12) μετὰ τῆς ἐξισώσεως τῆς ἐπιφανείας ὁρίζουσι πλῆθός τι σημείων αὐτῆς διακεκριμένων ἀπ' ἀλλήλων· ὥστε τὰ σφαιρικὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας εἶνε ἐν γένει διακεκριμένα ἀπ' ἀλλήλων. Δυνατὸν ὅμως νὰ συμβῇ, ὥστε αἱ δύο ἐξισώσεις (12) νὰ ἀνάγωνται εἰς μίαν μόνην, ὅταν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας· τότε ἡ ἐπιφάνεια θὰ ἔχῃ γραμμάς, ὧν τὰ σημεῖα πάντα θὰ εἶνε σφαιρικά. Εἰς δὲ τὴν σφαῖραν, καὶ μόνον εἰς αὐτήν, συμβαίνει, ὥστε αἱ ἐξισώσεις (12) νὰ ἀληθεύωσιν εἰς πᾶν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας· (ἰδὲ Bertrand, Calcul Dif. p. 714).

131. Ἐκ τοῦ τύπου (11) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς ἀκτῖνας καμπυλότητος ϱ_1 καὶ ϱ_2 τῶν δύο πρωτευουσῶν τομῶν τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον M αὐτῆς. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι διὰ $\varrho=\varrho_1$ καὶ διὰ $\varrho=\varrho_2$ αἱ δύο τιμαὶ τοῦ ω, αἱ ἐκ τοῦ τύπου τούτου εὑρισκόμεναι, πρέπει νὰ γίνωνται ἴσαι· διότι ἑκατέρα τῶν ἀκτίνων τούτων εἶνε ἢ μεγίστη τῶν περὶ αὐτὴν ἢ ἐλαχίστη· ἑπομένως εἰς τιμὰς τοῦ ϱ μικρὸν διαφερούσας ἀπὸ τῆς μιᾶς τῶν ἀκτίνων τούτων, ἔστω τῆς ϱ_1, θὰ ἀντιστοιχῶσι δύο τομαὶ πλησίον τῆς πρωτευούσης τομῆς κείμεναι (καὶ ἐξ ἴσου κεκλιμέναι πρὸς αὐτὴν (ἐδ. 125)). ὅταν ἄρα γίνῃ $\varrho=\varrho_1$, αἱ δύο κάθετοι τομαί, αἱ πρὸς τὴν τιμὴν τοῦ ϱ ἀντιστοιχοῦσαι, γίνονται μία μόνη, ἡ πρωτεύουσα τομή· καὶ αἱ δύο τιμαὶ τοῦ ω, αἱ πρὸς τὴν τιμὴν ϱ_1 ἀντιστοιχοῦσαι, γίνονται διὰ τοῦτο μία μόνη.

Συμφώνως πρὸς ταῦτα ἐκφράζομεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις (11) δίδει δύο ἴσας τιμὰς τοῦ ω καὶ εὑρίσκομεν διὰ τὴν ἀκτῖνα ϱ τὴν ἑπομένην ἐξίσωσιν

$$\left(pq-\frac{\varrho s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)^2=\left(1+p^2-\frac{\varrho r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\cdot\left(1+q^2-\frac{\varrho t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right),$$

ἢ

$$(rt-s^2)\varrho^2-\left\{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t\right\}\varrho\sqrt{1+p^2+q^2}+(1+p^2+q^2)^2=0, \qquad (13)$$

ἥτις προσδιορίζει τὰς τιμάς, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἔχῃ ἡ ἀκτὶς ϱ, ἵνα αἱ δύο τιμαὶ τοῦ ω, αἱ πρὸς αὐτὴν ἀντίστοιχοι, γίνωσιν ἴσαι· τοῦτ' ἔστιν ὁρίζει τὰς δύο πρωτευούσας ἀκτῖνας καμπυλότητος ϱ_1 καὶ ϱ_2.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης βλέπομεν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια θὰ εἶνε εἰς τὸ σημεῖον Μ κυρτὴ μέν, ἂν εἶνε $rt-s^2>0$· διότι τότε ϱ_1 καὶ ϱ_2 εἶνε ὁμοειδῆ· κοιλόκυρτος ὅμως, ἂν εἶνε $rt-s^2<0$, διότι τότε ϱ_1 καὶ ϱ_2 εἶνε ἑτεροειδῆ.

Πρὸς τούτοις εἶνε
$$\varrho_1\varrho_2=\frac{(1+p^2+q^2)^2}{rt-s^2}. \tag{14}$$

Περὶ τῶν γραμμῶν καμπυλότητος.

132. *Γραμμὴ καμπυλότητος* ἐπιφανείας τινὸς λέγεται πᾶσα γραμμὴ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας κειμένη, ἐὰν αἱ ἐκ τῶν σημείων αὐτῆς ἀγόμεναι κάθετοι πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν συνιστῶσιν ἀναπτυκτὴν ἐπιφάνειαν.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον πᾶσα γραμμὴ κειμένη ἐπὶ ἐπιπέδου ἢ ἐπὶ σφαίρας εἶνε γραμμὴ καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας· διότι αἱ ἐκ τῶν σημείων αὐτῆς ἀγόμεναι κάθετοι συνιστῶσι κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν, ἐὰν κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου, κωνικὴν δέ, ἂν ἐπὶ σφαίρας.

133. Θεωρήσωμεν οἱανδήποτε γραμμὴν κειμένην ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας $z=\varphi(x,y)$· καὶ ἔστωσαν x, y, z αἱ συντεταγμέναι τοῦ τυχόντος σημείου αὐτῆς (αἵτινες θὰ εἶνε συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς). Αἱ συντεταγμέναι x, y, z καὶ τὰ διαφορικὰ αὐτῶν ἐπαληθεύουσι τὰς ἐξισώσεις
$$z=\varphi(x,y)$$
$$dz=pdx+qdy, \qquad dp=rdx+sdy, \qquad dq=sdx+tdy,$$
διότι αὗται ἀληθεύουσιν εἰς πᾶν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας.

Ἡ δὲ κάθετος τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον (x,y,z) τῆς θεωρουμένης γραμμῆς ἔχει τὰς ἐξισώσεις
$$\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1} \tag{κ}$$

Ἡ κάθετος αὕτη ἀλλάσσει θέσιν ἀφ' ἑκάστου σημείου τῆς γραμμῆς εἰς ἄλλο καὶ διαγράφει ἐπιφάνειαν ἐν γένει μὴ ἀναπτυκτήν.

Ἐξετάσωμεν νῦν, τίνα σχέσιν πρέπει νὰ ἐπαληθεύωσιν αἱ παράμετροι x, y, z, p, q τῶν ἐξισώσεων τῆς καθέτου, (τοῦτ' ἔστιν, ὁποία τις πρέπει νὰ εἶνε ἡ γραμμή, ἣν ἀκολουθεῖ ἡ κάθετος) ἵνα αὕτη διαγράφῃ ἀναπτυκτὴν ἐπιφάνειαν.

Τὸ ζήτημα τοῦτο ὑπάγεται εἰς τὸ ἑξῆς γενικώτερον «Τίνα σχέσιν πρέπει νὰ ἔχωσιν αἱ μεταβληταὶ παράμετροι x, y, z, α, β, γ τῶν ἐξισώσεων τῆς εὐθείας

$$\frac{X-x}{\alpha}=\frac{Y-y}{\beta}=\frac{Z-z}{\gamma}, \tag{1}$$

ἵνα αὕτη διαγράφῃ ἀναπτυκτὴν ἐπιφάνειαν;».

Αἱ παράμετροι ὑποτίθενται συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς t, ἧς τινος ἡ μεταβολὴ προξενεῖ τὴν κίνησιν τῆς εὐθείας.

Ἔστωσαν x_1, y_1, z_1 αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου, ἔνθα ἡ εὐθεῖα (1) ἐφάπτεται τοῦ λαιμοῦ τῆς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας, ἣν διαγράφει. Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον τοῦτο κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας (1), θὰ εἶνε

$$\frac{x_1-x}{\alpha}=\frac{y_1-y}{\beta}=\frac{z_1-z}{\gamma},$$

ἤ, ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ ω ἕνα τῶν λόγων τούτων,

$$\begin{aligned} x_1 &= x+\alpha\omega \\ y_1 &= y+\beta\omega \\ z_1 &= z+\gamma\omega\cdot \end{aligned} \tag{2}$$

ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ λαιμοῦ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον (x_1, y_1, z_1) εἶνε ἡ εὐθεῖα (1), θὰ εἶνε

$$\frac{dx_1}{\alpha}=\frac{dy_1}{\beta}=\frac{dz_1}{\gamma}. \tag{3}$$

Ἀλλ' ἐκ τῶν ἐξισώσεων (2) εὑρίσκομεν

$$\begin{aligned} dx_1 &= dx+\alpha d\omega+\omega d\alpha \\ dy_1 &= dy+\beta d\omega+\omega d\beta \\ dz_1 &= dz+\gamma d\omega+\omega d\gamma, \end{aligned}$$

ὅθεν αἱ ἐξισώσεις (3) γίνονται

$$\frac{dx+\omega d\alpha}{\alpha}=\frac{dy+\omega d\beta}{\beta}=\frac{dz+\omega d\gamma}{\gamma},$$

ἤ, ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ φ ἕνα τῶν λόγων τούτων,

$$\begin{aligned} dx+\omega d\alpha-\alpha\varphi &= 0 \\ dy+\omega d\beta-\beta\varphi &= 0 \\ dz+\omega d\gamma-\gamma\varphi &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων ἀπαλείφοντες τὰς βοηθητικὰς μεταβλητὰς ω καὶ φ εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν

$$\begin{vmatrix} dx & \alpha & d\alpha \\ dy & \beta & d\beta \\ dz & \gamma & d\gamma \end{vmatrix} = 0, \tag{5}$$

ἥν τινα πρέπει νὰ ἐπαληθεύωσιν αἱ παράμετροι x, y, z, α, β, γ τῆς εὐθείας (1), ἵνα αὕτη διαγράφῃ ἀναπτυκτὴν ἐπιφάνειαν· τοῦτο δὲ καὶ ἀρκεῖ· διότι, ἀληθευούσης τῆς ἐξισώσεως (5), δύο οἱαιδήποτε ἐκ τῶν ἐξισώσεων (4) ὁρίζουσι τὰς βοηθητικὰς ἀγνώστους ω καὶ φ· τότε δὲ αἱ ἐξισώσεις (2) ὁρίζουσι τὰς συντεταγμένας x_1, y_1, z_1 τοῦ σημείου τῆς ἁφῆς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Αἱ ἐξισώσεις (4) δὲν δύνανται νὰ ὁρίσωσι τὰς ἀγνώστους ω καὶ φ, ἐὰν εἶνε

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ d\alpha & d\beta \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ d\beta & d\gamma \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ d\gamma & d\alpha \end{vmatrix} = 0,$$

ἤτοι

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{d\beta}{\beta} = \frac{d\gamma}{\gamma}.$$

ἀλλὰ τότε οἱ λόγοι τῶν α, β, γ πρὸς ἄλληλα μένουσι σταθεροί, ἤτοι ἡ εὐθεῖα (1) μένει παράλληλος ἑαυτῇ· ἑπομένως γράφει κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν· ὅτι δὲ καὶ τότε ἡ σχέσις (5) ἀληθεύει, εἶνε προφανές.

134. Ἵνα ἐφαρμόσωμεν τὰ προηγούμενα εἰς τὴν κάθετον τῆς ἐπιφανείας, πρέπει νὰ θέσωμεν εἰς τοὺς προηγουμένους τύπους $\alpha = p$, $\beta = q$ καὶ $\gamma = -1$· τότε ἡ σχέσις (5) γίνεται

$$\begin{vmatrix} dx & p & dp \\ dy & q & dq \\ dz & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ἢ

$$(dy + q dz) dp - (dx + p dz) dq = 0\cdot$$

ἡ δὲ ἐξίσωσις αὕτη πρέπει κατὰ τὰ εἰρημένα νὰ ἀληθεύῃ εἰς πᾶν σημεῖον ἑκάστης τῶν γραμμῶν καμπυλότητος.

Ἐπειδὴ δὲ εἶνε

$$dz = p dx + q dy, \qquad dp = r dx + s dy, \qquad dq = s dx + t dy,$$

ἡ ἐξίσωσις αὕτη γίνεται

$$\{(1+p^2)dx + pq dy\}(s dx + t dy) = \{(1+q^2)dy + pq dx\}(r dx + s dy),$$

ἤ, ἂν διαταχθῇ κατὰ τὰς δυνάμεις τῶν dx, dy,

$$\{(1+q^2)s - pqt\} dy^2 + \{(1+q^2)r - (1+p^2)t\} dy dx + \{pqr - (1+p^2)s\} dx^2 = 0.$$

ἢ καὶ ὑπὸ μορφὴν ὁριζούσης,

$$\begin{vmatrix} \frac{dy^2}{dx^2} & 1+p^2 & r \\ -\frac{dy}{dx} & pq & s \\ 1 & 1+q^2 & t \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

Ἐὰν δὲ αἱ τιμαὶ τῶν μερικῶν παραγώγων p, q, r, s, t εὑρεθῶσιν ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῆς ἐπιφανείας $z = \varphi(x,y)$ καὶ τεθῶσιν εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, θὰ προκύψῃ διαφορική τις ἐξίσωσις περιέχουσα μόνον τὰ x, y καὶ τὰ πρῶτα διαφορικὰ αὐτῶν· ἡ δὲ ἐξίσωσις αὕτη θὰ εἶνε ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν γραμμῶν, καθ' ἃς προβάλλονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν xy αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος τῆς δοθείσης ἐπιφανείας.

135. Ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις (7) δι' ἕκαστον σύστημα τιμῶν x, y δίδει δύο τιμὰς τοῦ λόγου $\frac{dy}{dx}$ $\left(\text{ἢ τοῦ ἀντιστρόφου } \frac{dx}{dy}\right)$, ἀπὸ τοῦ λόγου δὲ τούτου ἐξαρτᾶται ἡ ἐφαπτομένη τῆς γραμμῆς καμπυλότητος, συνάγεται, ὅτι δι' ἑκάστου σημείου τῆς ἐπιφανείας διέρχονται δύο γραμμαὶ καμπυλότητος. Ἐξαιροῦνται τὰ σφαιρικὰ σημεῖα· διότι δι' αὐτὰ ἡ ἐξίσωσις (7) ἀφανίζεται, μηδενιζομένων τῶν τριῶν συντελεστῶν τῶν διαφορικῶν· ὥστε δὲν δύναται νὰ προσδιορίσῃ τὸν λόγον αὐτῶν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ ἐξίσωσις (5) ἐκφράζει καὶ ἄλλην ἰδιότητα τῆς κινήσεως τῆς εὐθείας (1), ἤτοι ἰδιότητα τῆς σειρᾶς τῶν εὐθειῶν, ἃς ἡ ἐξίσωσις (1) παριστᾷ. Ἡ ἰδιότης αὕτη εἶνε ἡ ἑξῆς. *Ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις δύο εὐθειῶν τῆς σειρᾶς εἶνε ὡς πρὸς τὴν γωνίαν αὐτῶν ἀπειροστὸν τάξεως ἀνωτέρας τῆς πρώτης* (ἐκτὸς ἂν εἶνε παράλληλοι).

Ἐὰν τῷ ὄντι παραστήσωμεν διὰ τοῦ δ τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν τῶν δύο εὐθειῶν

$$\frac{X-x}{\alpha} = \frac{Y-y}{\beta} = \frac{Z-z}{\gamma}, \qquad \frac{X-x-\Delta x}{\alpha+\Delta\alpha} = \frac{Y-y-\Delta y}{\beta+\Delta\beta} = \frac{Z-z-\Delta z}{\gamma+\Delta\gamma}$$

καὶ διὰ ω τὴν γωνίαν αὐτῶν, θὰ εἶνε

$$(\iota) \qquad \delta.\eta\mu\omega = \begin{vmatrix} \Delta x & \alpha & \Delta\alpha \\ \Delta y & \beta & \Delta\beta \\ \Delta z & \gamma & \Delta\gamma \end{vmatrix}, \qquad 2\eta\mu^2\frac{\omega}{2} = -\Sigma\alpha\Delta\alpha = \frac{1}{2}\Sigma(\Delta\alpha)^2.$$

ἐν τοῖς τύποις τούτοις τὰ α, β, γ παριστῶσι τὰ συνημίτονα τῆς εὐθείας (1) πρὸς τοὺς ὀρθ. ἄξονας τῶν συντεταγμένων.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ παράμετροι x, y, z, α, β, γ τῆς εὐθείας εἶνε συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς t (ἧς ἡ μεταβολὴ προξενεῖ τὴν κίνησιν τῆς εὐθείας), θὰ εἶνε

$$\Delta x = \frac{dx}{1} + \frac{d^2x}{1.2} + \frac{d^3x}{1.2.3} + \ldots, \qquad \Delta\alpha = \frac{d\alpha}{1} + \frac{d^2\alpha}{1.2} + \frac{d^3\alpha}{1.2.3} + \ldots,$$

ὅθεν, ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας τῶν αὐξήσεων εἰς τὰς ἰσότητας (ι) καὶ διατάσσοντες τὰ ἀπειροστὰ κατὰ τάξεις, εὑρίσκομεν διὰ τὰς δύο πρώτας τάξεις

$$\delta \,.\, \eta\mu\omega = \Theta + d\Theta + .. \qquad \omega^2 = \Sigma(d\alpha)^2 + \ldots,$$

ἔνθα ἐτέθη

$$\Theta = \begin{vmatrix} dx & \alpha & d\alpha \\ dy & \beta & d\beta \\ dz & \gamma & d\gamma \end{vmatrix}.$$

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι, ἂν Θ διαφέρῃ τοῦ 0, ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις δ εἶνε ἀπειροστὸν τῆς αὐτῆς τάξεως καὶ ἡ γωνία ω· ἀλλ' ἂν εἶνε $\Theta=0$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς παραμέτρου t, ἤτοι διὰ πᾶσαν τῆς εὐθείας θέσιν, ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις δ θὰ εἶνε ἀπειροστὸν τρίτης τάξεως τοὐλάχιστον (διότι τότε καὶ $d\Theta=0$). Εἶνε δὲ τῷ ὄντι τρίτης τάξεως, ἂν ἡ εὐθεῖα (1) ἐφάπτηται στρεβλῆς καμπύλης (ἰδὲ σελ. 132, Ἄσκησ. 7)· ἀκριβῶς δὲ 0 εἶνε ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις δ, ἂν ἡ εὐθεῖα (1) ἐφάπτηται ἐπιπέδου καμπύλης

Ἰδιότητες τῶν γραμμῶν καμπυλότητος.

1η)

136. *Αἱ δύο γραμμαὶ καμπυλότητος αἱ δι' ἑκάστου σημείου τῆς ἐπιφανείας διερχόμεναι ἐφάπτονται τῶν δύο πρωτευουσῶν τομῶν αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο· ἑπομένως τέμνουσιν ἀλλήλας καθέτως.*

Τοῦτο γίνεται φανερὸν ἐκ τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (7) τῶν γραμμῶν καμπυλότητος· διότι, ἂν λάβωμεν τὴν κάθετον τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ θεωρούμενον σημεῖον Μ ὡς ἄξονα τῶν z, τὰς δὲ ἐφαπτομένας τῶν δύο πρωτευουσῶν τομῶν ὡς ἄξονας τῶν x καὶ y καὶ ἐφαρμόσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην εἰς τὸ σημεῖον Μ, θὰ γίνῃ εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο $\qquad p=0, \quad q=0, \quad s=0$

ὥστε ἡ ἐξίσωσις (7) καταντᾷ

$$(r-t)\,.\,dxdy=0,$$

καὶ ἐπειδὴ $r-t$ διαφέρει τοῦ 0 (ἄλλως τὸ σημεῖον θὰ ἦτο σφαιρικὸν σημεῖον), ἡ ἐξίσωσις (7) ἀληθεύει, μόνον ὅταν εἶνε

$$dx=0 \quad \text{ἢ} \quad dy=0\cdot$$

ἐξ ὧν βλέπομεν, ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν δύο γραμμῶν καμπυλότητος εἰς τὸ σημεῖον Μ εἶνε αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν δύο πρωτευουσῶν τομῶν· ἑπομένως αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος, ἐὰν τέμνωσιν ἀλλήλας, τέμνονται πρὸς ὀρθάς.

Διὰ τῶν γραμμῶν καμπυλότητος δύναται νὰ διαιρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια εἰς τετράπλευρα (καμπυλόγραμμα) ὀρθογώνια. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ἀχθῇ ἡ τυχοῦσα γραμμὴ καμπυλότητος ΑΒΓΔΕ..., ἔπειτα ἐκ τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ, Ε,... αὐτῆς νὰ ἀχθῶσιν αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας καὶ τέλος ἐκ τῶν σημείων α,β,γ,δ,ε,... μιᾶς ἐκ τούτων νὰ ἀχθῶσιν αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος· οὕτω σχηματίζεται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας δίκτυόν τι ἐκ τετραπλεύρων ὀρθογωνίων συγκείμενον.

2α)

137. *Ἡ καμπύλη, ἧς ἐφάπτονται αἱ κάθετοι τῆς ἐπιφανείας, αἱ ἐκ τῶν σημείων μιᾶς γραμμῆς καμπυλότητος ἀγόμεναι, εἶνε ὁ τόπος τῶν κέντρων καμπυλότητος τῶν καθέτων τομῶν, ὧν ἐφάπτεται ἡ γραμμὴ αὕτη τῆς καμπυλότητος.*

Ἐὰν δηλαδὴ ἡ ΑΜΒ εἶνε γραμμὴ καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας καὶ αμβ εἶνε ἡ καμπύλη, ἧς ἐφάπτονται αἱ κάθετοι τῆς ἐπιφανείας, αἵτινες ἄγονται ἐκ τῶν σημείων τῆς ΑΜΒ, τὸ σημεῖον μ, ἔνθα ἐφάπτεται ἡ κάθετος τοῦ Μ, θὰ εἶνε κέντρον καμπυλότητος τῆς πρωτευούσης τομῆς τοῦ Μ, ἥτις ἔχει τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην, ἣν καὶ ἡ ΑΜΒ.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς περὶ ἧς ὁ λόγος καθέτου τομῆς εἶνε ἡ Μμ.

Λαμβάνομεν καὶ πάλιν ὡς ἄξονα τῶν z τὴν κάθετον Μμ τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ Μ, ὡς ἄξονα τῶν x τὴν κοινὴν ἐφαπτομένην τῆς γραμμῆς καμπυλότητος ΑΜΒ καὶ τῆς πρωτευούσης τομῆς, καὶ ὡς ἄξονα τῶν y τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἄλλης πρωτευούσης τομῆς. Εἰς τὸ σημεῖον Μ τῆς καμπύλης ΑΜΒ θὰ εἶνε τότε

$$x=y=z=0, \quad p=q=s=0, \quad \text{καὶ} \quad dy=0,$$

διότι ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης ΑΜΒ εἰς τὸ Μ εἶνε ὁ ἄξων τῶν x· ἑπομένως αἱ ἐξισώσεις (2) καὶ (4) τοῦ ἐδ. (133), δι' ὧν ὁρίζονται αἱ συντεταγμέναι x_1, y_1, z_1 τοῦ σημείου μ, γίνονται

$$x_1=0, \quad y_1=0, \quad z_1=-\omega,$$

$$dx+\omega dp=0,$$

ἤτοι

$$dx+\omega r dx=0,$$

ἐξ ἧς

$$\omega=-\frac{1}{r},$$

ὅθεν $z_1 = \frac{1}{r}$, τοῦτ' ἔστι $M\mu = \frac{1}{r}$.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς πρωτευούσης τομῆς ZOX εἶνε $\frac{1}{r}$, συνάγεται ἡ προκειμένη πρότασις.

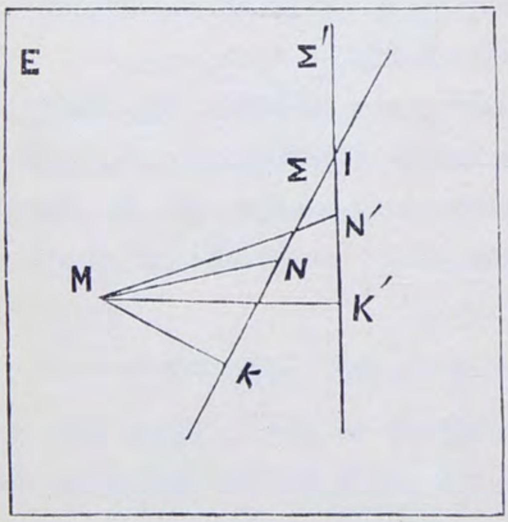
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Αἱ ἀκτῖνες καμπυλότητος εἰς τὰ διάφορα σημεῖα τῆς γραμμῆς καμπυλότητος δὲν εἶνε ἐν γένει ἴσαι πρὸς τὰς ἀκτῖνας καμπυλότητος τῶν πρωτευουσῶν τομῶν, αἵτινες ἐφάπτονται αὐτῆς κατὰ τὰ σημεῖα ταῦτα. Διότι τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον τῆς γραμμῆς καμπυλότητος εἰς τὸ τυχὸν αὐτῆς σημεῖον M σχηματίζει πρὸς τὴν κάθετον τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον M ἐν γένει γωνίαν τινὰ ϑ· ἑπομένως κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Meunier, ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ ϱ τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος τῆς γραμμῆς καμπυλότητος AMB εἰς τὸ M καὶ διὰ τοῦ ϱ_1 τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος τῆς πρωτευούσης τομῆς, ἥτις ἐφάπτεται αὐτῆς, θὰ εἶνε $\varrho = \varrho_1 . \text{συν}\vartheta$.

3η)

138. *Ἐν πάσῃ γραμμῇ καμπυλότητος εἶνε*

$$d\tau = -d\vartheta\cdot$$

ἔνθα $d\tau$ εἶνε ἡ γωνία τῆς στρέψεως τῆς γραμμῆς ταύτης εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς M, καὶ ϑ ἡ γωνία, ἣν σχηματίζει τὸ ἐγγύτατον αὐτῆς ἐπίπεδον εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον M πρὸς τὴν κάθετον τῆς ἐπιφανείας.



Καὶ τἀνάπαλιν· *πᾶσα γραμμὴ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας κειμένη, δι' ἣν ἀληθεύει ἡ σχέσις* $d\tau = -d\vartheta$, *εἶνε γραμμὴ καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας.*

Νοήσωμεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τυχοῦσαν καμπύλην καὶ τὴν ἀντίστοιχον αὐτῆς πολικὴν ἐπιφάνειαν· ἐὰν τὸ ἐφαπτόμενον τῆς πολικῆς ἐπιφανείας ἐπίπεδον κυλίηται ἐπ' αὐτῆς, ἓν σημεῖον αὐτοῦ, ἔστω τὸ M, θὰ γράψῃ τὴν καμπύλην (ἐδ. 79).

Ἔστω E ἡ τυχοῦσα θέσις τοῦ κυλιομένου ἐπιπέδου, ΣK ἡ εὐθεῖα, καθ' ἣν τοῦτο ἐφάπτεται τῆς πολικῆς ἐπιφανείας, καὶ MK ἡ πρὸς αὐτὴν κάθετος, ἥτις κάθετος θὰ εἶνε ἡ πρώτη κάθετος τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον M· ἔστω πρὸς τούτοις MN ἡ κάθετος τῆς

ἐπιφανείας εἰς τὸ Μ, ἥτις θὰ εὑρίσκηται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ε, διότι εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν καμπύλην. Ἂν τὸ ἐπίπεδον κυλισθῇ κατά τι, τὸ μὲν Μ θὰ μεταβῇ εἰς ἄλλο σημεῖον τῆς δοθείσης καμπύλης, τὸ δὲ ἐπίπεδον θὰ ἐφάπτηται τῆς πολικῆς ἐπιφανείας κατ' ἄλλην τινὰ εὐθεῖαν Σ΄Κ΄, ἡ δὲ πρωτεύουσα κάθετος θὰ λάβῃ τὴν θέσιν ΜΚ΄ καὶ ἡ κάθετος τῆς ἐπιφανείας τὴν νέαν θέσιν ΜΝ΄· ὥστε ἡ γωνία θ, ἣν σχηματίζουσιν ἡ πρώτη κάθετος τῆς δοθείσης καμπύλης καὶ ἡ κάθετος τῆς ἐπιφανείας, ἀπὸ ΚΜΝ γίνεται Κ΄ΜΝ΄·
ἑπομένως εἶνε $\Delta\vartheta = \mathrm{NMN}' - \mathrm{KMK}'$.

Ἀλλ' ἡ μὲν γωνία ΚΜΚ΄ ἰσοῦται τῇ ΚΣΚ΄ ἤτοι τῇ γωνίᾳ τῆς στρέψεως $\Delta\tau$ τῆς δοθείσης καμπύλης, ἡ δὲ γωνία ΝΜΝ΄, ἂν διὰ τοῦ ω παραστήσωμεν τὴν γωνίαν τῆς ΜΝ πρὸς ὡρισμένην τινὰ γραμμὴν τοῦ ἐπιπέδου, θὰ εἶνε $\Delta\omega$· ὅθεν ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$\Delta\vartheta = \Delta\omega - \Delta\tau$$

ἢ καὶ
$$d\vartheta = d\omega - d\tau. \qquad (1)$$

Τούτου τεθέντος, παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας γραμμὴ θὰ εἶνε γραμμὴ καμπυλότητος, ἂν αἱ κάθετοι τῆς ἐπιφανείας αἱ ἐκ τῶν σημείων αὐτῆς ἀγόμεναι συνιστῶσιν ἀναπτυκτὴν ἐπιφάνειαν, καὶ τότε μόνον.

Ἀλλὰ τότε ὁ λαιμὸς τῆς ἀναπτυκτῆς ταύτης ἐπιφανείας θὰ εἶνε ἐνειλιγμένη τῆς δοθείσης καμπύλης καὶ διὰ τοῦτο θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς πολικῆς ἐπιφανείας. Ἐπειδὴ δὲ πᾶσα ἐνειλιγμένη τῆς καμπύλης τρέπεται εἰς εὐθεῖαν γραμμὴν διερχομένην διὰ τοῦ Μ, ὅταν ἡ πολικὴ ἐπιφάνεια ἀναπτύσσηται ἐπὶ τοῦ κυλιομένου ἐπ' αὐτῆς ἐπιπέδου, συνάγεται, ὅτι ἡ δοθεῖσα καμπύλη θὰ εἶνε γραμμὴ καμπυλότητος, μόνον ὅταν ἡ εὐθεῖα ΜΝ διατηρῇ τὴν θέσιν αὐτῆς ἀμετάβλητον ἐπὶ τοῦ κυλιομένου ἐπιπέδου· τοῦτ' ἔστιν, ὅταν ἡ γωνία ω μένῃ σταθερά· ἤτοι ὅταν εἶνε $d\tau = -d\vartheta$.

Ἐὰν ἡ καμπύλη εἶνε ἐπίπεδος, θὰ εἶνε $d\tau = 0$· ὅθεν ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $d\vartheta = 0$, ἢ $\vartheta =$ σταθερᾷ. Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ πρότασις.

139. *Ἐπίπεδος καμπύλη εἶνε γραμμὴ καμπυλότητος ἐπιφανείας τινός, ἐὰν τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς τέμνῃ τὴν ἐπιφάνειαν πανταχοῦ ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν· καὶ τότε μόνον.*

4η)

140. *Ἐὰν ἡ τομὴ δύο ἐπιφανειῶν εἶνε γραμμὴ καμπυλότητος ἀμφοτέρων, αἱ ἐπιφάνειαι τέμνουσιν ἀλλήλας πανταχοῦ ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν· καὶ τἀνάπαλιν· ἐὰν δύο ἐπιφάνειαι τέμνωσιν ἀλλήλας πανταχοῦ ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν, ἡ δὲ τομὴ εἶνε γραμμὴ καμπυλότητος τῆς μιᾶς, θὰ εἶνε γραμμὴ καμπυλότητος καὶ τῆς ἄλλης.*

Διότι, ἐφαρμόζοντες τὴν προηγουμένην ἐξίσωσιν (1) ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν δύο ἐπιφανειῶν, θὰ ἔχωμεν

$$d\vartheta = d\omega - d\tau,$$

καὶ

$$d\vartheta' = d\omega' - d\tau,$$

ὅθεν

$$d\vartheta' - d\vartheta = d\omega' - d\omega. \tag{2}$$

Ἀλλ' ὅταν ἡ τομὴ εἶνε γραμμὴ καμπυλότητος ἀμφοτέρων τῶν ἐπιφανειῶν, θὰ εἶνε $d\omega' = 0$ καὶ $d\omega = 0$.
ἄρα καὶ $d\vartheta' - d\vartheta = 0$, ἢ $\vartheta' - \vartheta =$ σταθερᾷ· ἀλλ' ἡ διαφορὰ $\vartheta' - \vartheta$ εἶνε ἡ γωνία ἣν σχηματίζουσι πρὸς ἀλλήλας αἱ κάθετοι τῶν ἐπιφανειῶν, ἤτοι ἡ γωνία, τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων αὐτῶν· ἐπομένως αἱ ἐπιφάνειαι τέμνουσιν ἀλλήλας ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν.

Καὶ τἀνάπαλιν, ἂν εἶνε $\vartheta' - \vartheta =$ σταθ. καὶ $d\omega = 0$, τοῦτ' ἔστιν ἂν τέμνωσιν ἀλλήλας αἱ ἐπιφάνειαι ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν καὶ ἡ τομὴ εἶνε γραμμὴ καμπυλότητος τῆς μιᾶς, ἕπεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2) καὶ $d\omega' = 0$, ἤτοι ἡ τομὴ θὰ εἶνε γραμμὴ καμπυλότητος καὶ τῆς ἄλλης.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ πρότασις αὕτη δύναται νὰ δειχθῇ καὶ ἀμέσως διὰ τῆς ἰδιότητος τῆς πολικῆς ἐπιφανείας. Ἐὰν τῷ ὄντι ἡ τομὴ δύο ἐπιφανειῶν εἶνε γραμμὴ καμπυλότητος ἀμφοτέρων, αἱ μὲν κάθετοι τῆς μιᾶς, αἱ ἐκ τῶν σημείων τῆς τομῆς ἀγόμεναι, θὰ ἐφάπτωνται μιᾶς ἐνειλιγμένης τῆς τομῆς, αἱ δὲ κάθετοι τῆς ἄλλης θὰ ἐφάπτωνται ἄλλης ἐνειλιγμένης. Ἀλλ' αἱ εὐθεῖαι, αἵτινες ἄγονται ἐξ ἑνὸς σημείου τῆς καμπύλης εἰς τὰ ἀντίστοιχα αὐτοῦ σημεῖα δύο ἐνειλιγμένων αὐτῆς, διατηροῦσι τὴν αὐτὴν πάντοτε γωνίαν. Διότι κατὰ τὴν κύλισιν τοῦ καθέτου αὐτῆς ἐπιπέδου, αἱ εἰρημέναι εὐθεῖαι ἐφαρμόζουσι πάντοτε ἐπὶ τῶν δύο εὐθειῶν, εἰς ἃς τρέπονται αἱ δύο ἐνειλιγμέναι.

Ἐκ τῆς προτάσεως ταύτης συνάγεται ἡ ἑξῆς (γενικωτέρα τῆς προτάσεως τοῦ ἐδ. 139).

141. *Ἐπίπεδος ἢ σφαιρικὴ καμπύλη εἶνε γραμμὴ καμπυλότητος ἐπιφανείας τινός, ἐὰν τὸ ἐπίπεδον ἢ ἡ σφαῖρα, ἐφ' ἧς ἡ καμπύλη κεῖται, τέμνῃ τὴν ἐπιφάνειαν ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν· καὶ μόνον τότε.*

Διότι πᾶσα σφαιρικὴ καμπύλη εἶναι γραμμὴ καμπυλότητος τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ἐφ' ἧς κεῖται· καὶ πᾶσα ἐπίπεδος τοῦ ἐπιπέδου.

Τριαδικὰ ὀρθογώνια συστήματα ἐπιφανειῶν
Γραμμαὶ καμπυλότητος αὐτῶν

142. Τρεῖς σειραὶ ἐπιφανειῶν λέγεται ὅτι ἀποτελοῦσι *τριαδικὸν σύστημα*, ἐὰν δι' ἑκάστου σημείου τοῦ διαστήματος διέρχηται ἐν γένει μία ἐπιφάνεια ἐξ ἑκάστης σειρᾶς.

Ὀρθογώνιον δὲ λέγεται τὸ τριαδικὸν σύστημα τῶν ἐπιφανειῶν, ἐὰν ἑκάστη ἐπιφάνεια οἱασδήποτε ἐκ τῶν τριῶν σειρῶν τέμνῃ τὰς ἐπιφανείας τῶν δύο ἄλλων σειρῶν ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν.

Τριαδικὸν ὀρθογώνιον σύστημα ἀποτελοῦσι, παραδείγματος χάριν, τὰ δι' ἑκάστου σημείου τοῦ διαστήματος ἀγόμενα τρία ἐπίπεδα παραλλήλως τοῖς ἐπιπέδοις τῶν ὀρθογωνίων συντεταγμένων. Ὁμοίως τριαδικὸν ὀρθογώνιον σύστημα ἀποτελοῦσι καὶ αἱ ἑξῆς τρεῖς σειραὶ ἐπιφανειῶν· 1) αἱ ὁμόκεντροι σφαιρικαὶ ἐπιφάνειαι· 2) αἱ κωνικαὶ ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνειαι, ὧν κορυφὴ εἶνε τὸ κέντρον τῶν σφαιρῶν καὶ ὁ ἄξων κοινός· 3) τὰ ἐκ τοῦ ἄξονος τῶν κώνων ἐκβαλλόμενα ἐπίπεδα.

Μετὰ τὰ δύο ταῦτα ἁπλούστατα ὀρθογώνια συστήματα ἄξιον λόγου εἶνε τὸ σύστημα τῶν ὁμοεστίων ἐπιφανειῶν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ὅπερ σύγκειται ἐξ ἐλλειψοειδῶν, μονοχώνων ὑπερβολοειδῶν καὶ διχώνων ὑπερβολοειδῶν, ὧν πάντων αἱ πρωτεύουσαι τομαὶ ἔχουσι τὰς αὐτὰς ἑστίας.

143. Ἑκάστη σειρὰ ἐπιφανειῶν ὁρίζεται διά τινος ἐξισώσεως, ἥτις πλὴν τῶν συντεταγμένων x, y, z περιέχει καί τινα παράμετρον· πρὸς ἑκάστην δὲ ὡρισμένην τιμὴν τῆς παραμέτρου ἀντιστοιχεῖ μία ὡρισμένη ἐπιφάνεια τῆς σειρᾶς· καὶ ἂν ἡ παράμετρος λάβῃ πάσας τὰς δυνατὰς τιμὰς αὐτῆς, εὑρίσκονται ἐκ τῆς ἐξισώσεως ἅπασαι αἱ ἐπιφάνειαι τῆς σειρᾶς.

144. Ἔστωσαν

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z, u) &= 0 \\ F_2(x, y, z, v) &= 0 \\ F_3(x, y, z, w) &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

αἱ ἐξισώσεις, δι' ὧν ὁρίζονται αἱ τρεῖς σειραὶ τῶν ἐπιφανειῶν· ἵνα διέρχηται δι' ἑκάστου σημείου τοῦ χώρου (ἐκτός τινων ἐξαιρέσεων) μία καὶ μόνη ἐπιφάνεια ἐξ ἑκάστης σειρᾶς, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ σύστημα τῶν τριῶν ἐξισώσεων (1), ὅταν ἐν αὐτῷ θεωρῶνται ὡς ἄγνωστοι αἱ τρεῖς παράμετροι u, v, w, νὰ δίδῃ ἐν γένει μίαν μόνην λύσιν, ἤτοι μίαν μόνην τιμὴν δι' ἑκάστην παράμετρον, καὶ τοῦτο οἱαιδήποτε καὶ ἂν εἶνε αἱ τιμαὶ τῶν συντεταγμένων x, y, z (ἐξαιρετικά τινα σημεῖα δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν).

145. Αἱ τιμαὶ τῶν παραμέτρων u, v, w, πρὸς τὰς ὁποίας ἀντιστοιχοῦσιν αἱ τρεῖς ἐπιφάνειαι τοῦ συστήματος αἱ διὰ τοῦ σημείου x,y,z διερχόμεναι, λέγονται *συντεταγμέναι* τοῦ σημείου τούτου x, y, z· διότι, δοθεισῶν τῶν τιμῶν τούτων, τὸ σημεῖον εἶνε ὡρισμένον, ὡς τομὴ τριῶν ἐπιφανειῶν ὡρισμένων· καὶ τἀνάπαλιν, δοθέντος τοῦ σημείου x, y, z, αἱ τιμαὶ τῶν παραμέτρων u, v, w εἶνε ὡρισμέναι καὶ εὑρίσκονται ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1). Αἱ συντεταγμέναι u, v, w λέγονται, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῶν συνήθων συντεταγμένων x,y,z, *καμπυλόγραμμοι συντεταγμέναι.*

146. Τὰς ἐξισώσεις (1) δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν λελυμένας πρὸς τὰς συντεταγμένας x, y, z, ἤτοι τῆς μορφῆς

$$\begin{aligned} x &= f(u, v, w) \\ y &= \varphi(u, v, w) \\ z &= \sigma(u, v, w), \end{aligned} \tag{2}$$

διότι ἐκ τῶν u, v, w (ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω) πρέπει νὰ ὁρίζωνται καὶ αἱ x, y, z.

Αἱ ἐξισώσεις αὗται, ἂν μὲν ἡ παράμετρος u μένῃ σταθερά, αἱ δὲ λοιπαὶ λαμβάνωσι πάσας τὰς δυνατὰς τιμὰς αὐτῶν, παριστῶσι μίαν ἐπιφάνειαν τῆς πρώτης σειρᾶς· ἂν δὲ ἡ v μένῃ σταθερά, αἱ δὲ λοιπαὶ λαμβάνωσι πάσας τὰς δυνατὰς αὐτῶν τιμάς, αἱ ἐξισώσεις παριστῶσι μίαν ἐπιφάνειαν τῆς δευτέρας σειρᾶς· καὶ τέλος, ἂν ἡ w μένῃ σταθερά, αἱ δὲ ἄλλαι λαμβάνωσι πάσας τὰς τιμὰς αὐτῶν, αἱ ἐξισώσεις παριστῶσι μίαν ἐπιφάνειαν τῆς τρίτης σειρᾶς.

Ἂν αἱ δύο παράμετροι u, v μένωσι σταθεραί, ἡ δὲ w μεταβάλληται μόνη, αἱ ἐξισώσεις (2) παριστῶσι τὴν γραμμήν, καθ' ἣν τέμνουσιν ἀλλήλας ἡ ἐπιφάνεια τῆς πρώτης σειρᾶς ἡ πρὸς τὴν τιμὴν τῆς u ἀντιστοιχοῦσα καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῆς δευτέρας ἡ ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τὴν τιμὴν v. Ὁμοίως καὶ διὰ τὰς ἄλλας.

Ἂν δὲ καὶ αἱ τρεῖς παράμετροι μένωσι σταθεραί, αἱ ἐξισώσεις (2) παριστῶσι τὸ σημεῖον, εἰς ὃ τέμνουσιν ἀλλήλας αἱ τρεῖς ἐπιφάνειαι αἱ πρὸς τὰς τιμὰς αὐτῶν ἀντιστοιχοῦσαι, ἤτοι τὸ σημεῖον, ὅπερ ἔχει συντεταγμένας τὰς τιμὰς ταύτας (u, v, w).

147. Τὰς ἐξισώσεις (1) τῶν ἐπιφανειῶν δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν λελυμένας καὶ ὡς πρὸς τὰς παραμέτρους u, v w, τοῦτ' ἔστι τῆς μορφῆς

$$\begin{aligned} u &= F(x, y, z) \\ v &= \Phi(x, y, z) \\ w &= \Sigma(x, y, z). \end{aligned} \tag{3}$$

148. Ἐξετάσωμεν νῦν, ὑπὸ τίνας ὅρους τὸ τριαδικὸν σύστημα τῶν ἐπιφανειῶν θὰ εἶνε ὀρθογώνιον.

Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ διαστήματος καὶ ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ αἱ τρεῖς γραμμαί, καθ' ἃς τέμνουσιν ἀλλήλας αἱ διὰ τοῦ σημείου τούτου διερχόμεναι τρεῖς ἐπιφάνειαι τοῦ συστήματος. Αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν τριῶν τούτων γραμμῶν εἰς τὸ σημεῖον Μ ἔχουσι συνημίτονα ἀνάλογα τῶν ἑξῆς

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial u} \qquad \text{ἢ ΜΑ,}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} \qquad \text{ἢ ΜΒ,}$$

$$\frac{\partial x}{\partial w}, \quad \frac{\partial y}{\partial w}, \quad \frac{\partial z}{\partial w} \qquad \text{ἢ ΜΓ,}$$

διότι ἐπὶ τῆς ΜΑ μόνη ἡ u μεταβάλλεται, ἐπειδὴ εἶνε τομὴ δύο ἐπιφανειῶν, ἐφ' ὧν ἡ v καὶ ἡ w μένουσι σταθεραί. Ὁμοίως καὶ περὶ τῶν ἄλλων.

Αἱ δίεδροι γωνίαι τῆς στερεᾶς γωνίας, ἥτις ἔχει ἀκμὰς τὰς τρεῖς ἐφαπτομένας τῶν γραμμῶν ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ, εἶνε αἱ γωνίαι τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων τῶν ἐπιφανειῶν ἀνὰ δύο· τοῦτ' ἔστιν αἱ γωνίαι, ὑπὸ τὰς ὁποίας τέμνουσιν ἀλλήλας αἱ ἐπιφάνειαι ἀνὰ δύο· ἵνα δὲ αἱ δίεδροι αὗται γωνίαι εἶνε ὀρθαί, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε ὀρθαὶ καὶ αἱ γωνίαι τῶν ἐφαπτομένων ἀνὰ δύο· τοῦτ' ἔστι νὰ εἶνε

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=0 \\ &\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w}=0 \\ &\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial u}=0. \end{aligned} \tag{4}$$

Αἱ ἐξισώσεις αὗται ἐκφράζουσι τοὺς ἀναγκαίους καὶ ἐπαρκεῖς ὅρους, ἵνα τὸ σύστημα εἶνε ὀρθογώνιον.

Τοὺς ὅρους τούτους δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν καὶ ἄλλως, ὡς ἑξῆς. Ἐπειδὴ ἡ γωνία τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων δύο ἐπιφανειῶν ἰσοῦται τῇ γωνίᾳ τῶν καθέτων ἐπ' αὐτάς, ἵνα αἱ ἐπιφάνειαι τέμνωσιν ἀλλήλας πρὸς ὀρθάς, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ κάθετοι τῶν ἐπιφανειῶν εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον M νὰ σχηματίζωσι πρὸς ἀλλήλας ὀρθὰς γωνίας· τὰ συνημίτονα δὲ τῶν καθέτων τούτων εἶνε ἀνάλογα τῶν ἑξῆς·

$$\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial z} \qquad \text{τῆς πρώτης ἐπιφανείας,}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial z} \qquad \text{τῆς δευτέρας,}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x},\quad \frac{\partial w}{\partial y},\quad \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \text{τῆς τρίτης,}$$

ἑπομένως πρέπει νὰ εἶνε

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}=0\\
&\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z}=0\\
&\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}=0.
\end{aligned} \tag{4'}$$

Ἰδιότης τῶν ὀρθογωνίων συστημάτων.

149. Περὶ τῶν τριαδικῶν ὀρθογωνίων συστημάτων τῶν ἐπιφανειῶν ἰσχύει τὸ ἑξῆς θεώρημα τοῦ Dupin.

Ἐν παντὶ τριαδικῷ ὀρθογωνίῳ συστήματι αἱ τομαὶ ἑκάστης ἐπιφανείας μιᾶς οἱασδήποτε σειρᾶς ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο ἄλλων σειρῶν εἶνε γραμμαὶ καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας ταύτης.

Ἔστω τυχοῦσα ἐπιφάνεια τῆς πρώτης σειρᾶς ($u =$ σταθερᾷ) καὶ τομαὶ αὐτῆς ὑπὸ δύο οἱωνδήποτε ἐπιφανειῶν τῶν ἄλλων σειρῶν αἱ γραμμαὶ MB, MΓ· πρόκειται νὰ δειχθῇ, ὅτι αἱ γραμμαὶ αὗται εἶνε γραμμαὶ καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας MBΓ.

Ἡ κάθετος τῆς ἐπιφανείας MBΓ εἰς τὸ M (τοῦτ' ἔστιν ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης ΜΑ, καθ' ἣν τέμνουσιν ἀλλήλας αἱ δύο ἐπιφάνειαι τῶν δύο ἄλλων σειρῶν) ἔχει συνημίτονα ἀνάλογα τῶν

$$\frac{\partial x}{\partial u},\ \frac{\partial y}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial u}.$$

ἵνα δὲ ἡ κάθετος αὕτη, ὅταν ὁ ποὺς αὐτῆς κινῆται ἐπὶ τῆς γραμμῆς ΜΒ (ἐφ' ἧς u καὶ w μένουσι σταθερά), διαγράφῃ ἀναπτυκτὴν ἐπιφάνειαν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε (ἐδ. 133)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

Ἵνα δείξωμεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἀληθεύει διὰ τὰ τριαδικὰ ὀρθογώνια τῶν ἐπιφανειῶν συστήματα, ἀρκεῖ νὰ διαφορίσωμεν τὰς ἐξισώσεις (4) (αἵτινες ἐκφράζουσιν, ὅτι τὸ τριαδικὸν σύστημα (2) εἶνε ὀρθογώνιον), τὴν μὲν πρώτην πρὸς w, τὴν δὲ δευτέραν πρὸς u, τὴν δὲ τρίτην πρὸς v· τότε εὑρίσκομεν

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial w} + \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial w} = 0$$

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial w \partial u} + \Sigma\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} = 0$$

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial w \partial v} = 0.$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων ἕπονται αἱ ἑξῆς (ἐὰν προστεθῶσιν αἱ δύο καὶ ἀφαιρεθῇ ἡ ἄλλη)

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial w} = 0$$

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial w \partial u} = 0 \qquad (6)$$

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = 0.$$

Ἐκ δὲ τῆς τρίτης τῶν ἐξισώσεων τούτων καὶ ἐκ τῶν ἐξισώσεων (4), ἐὰν ἀπαλείψωμεν τὰς μερικὰς παραγώγους

$$\frac{\partial x}{\partial w}, \quad \frac{\partial y}{\partial w}, \quad \frac{\partial z}{\partial w},$$

εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα (5)· ἐξ οὗ ἕπεται, ὅτι ἡ γραμμὴ ΜΒ εἶνε γραμμὴ καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας ΜΒΓ. Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ περὶ τῆς γραμμῆς ΜΓ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Οἱαδήποτε σειρὰ ἐπιφανειῶν $u=f(x,y,z)$ δὲν δύναται νὰ ἀποτελέσῃ μέρος τριαδικοῦ ὀρθογωνίου συστήματος. Πρὸς τοῦτο ἀπαιτεῖται ἡ συνάρτησις $f(x,y,z)$ τῶν τριῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν x,y,z νὰ ἐπαληθεύῃ διαφορικήν τινα ἐξίσωσιν περιέχουσαν μερικὰς παραγώγους μέχρι τῆς τρίτης τάξεως. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἕπεται ὁ ἑξῆς γεωμετρικὸς ὅρος. Ὁ τόπος τῶν σφαιρικῶν σημείων τῶν διαφόρων ἐπιφανειῶν τῆς σειρᾶς πρέπει νὰ τέμνῃ τὰς ἐπιφανείας ταύτας καθέτως». (ἰδὲ Journal de l' École Polytechnique, Tom. XXVI, p. 174).

Γραμμαὶ καμπυλότητος ἐπιφανειῶν τινων.

Ἐλλειψοειδές.

150. Αἱ τρεῖς σειραὶ τῶν ἑξῆς ἐπιφανειῶν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ

$$(a>b>c)$$

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}=1, \qquad u>-c^2$$

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2+v}+\frac{y^2}{b^2+v}+\frac{z^2}{c^2+v}=1, \qquad -b^2<v<-c^2$$

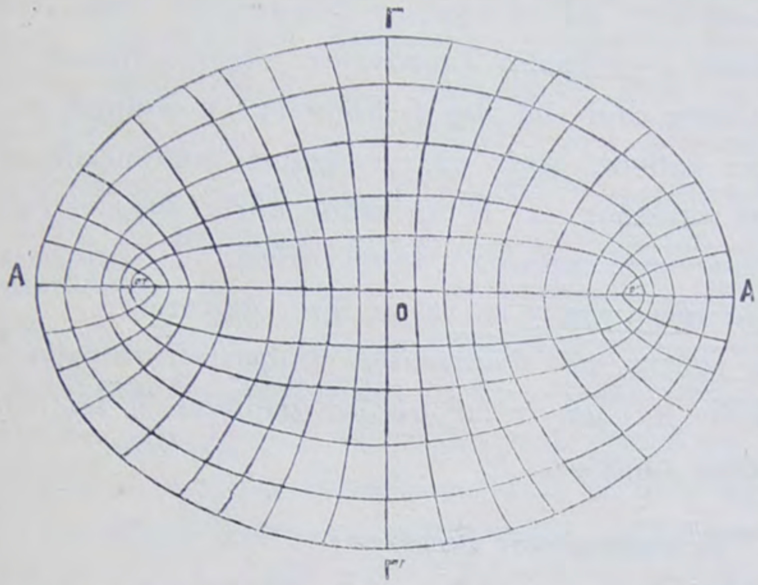
$$(3) \qquad \frac{x^2}{a^2+w}+\frac{y}{b^2+w}+\frac{z^2}{c^2+w}=1, \qquad -a^2<w<-b^2$$

ἀποτελοῦσι τριαδικὸν ὀρθογώνιον σύστημα· καὶ ἡ μὲν πρώτη σειρὰ σύγκειται ἐξ ἐλλειψοειδῶν, ἡ δὲ δευτέρα ἐκ μονοχώνων ὑπερβολοειδῶν, ἡ δὲ τρίτη ἐκ διχώνων. Αἱ πρωτεύουσαι τομαὶ τῶν ἐπιφανειῶν τούτων ἔχουσι τὰς αὐτὰς ἑστίας, δι' ὃ καὶ λέγονται *ὁμοέστιοι* ἐπιφάνειαι.

Ἐκ τῆς ἰδιότητος τῶν τριαδικῶν ὀρθογωνίων συστημάτων συνάγεται νῦν, ὅτι τοῦ ἐλλειψοειδοῦς $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος εἶναι αἱ τομαὶ αὐτοῦ ὑπὸ τῶν δύο σειρῶν τῶν ὁμοεστίων αὐτῷ ὑπερβολοειδῶν (2) καὶ (3).

151. Τὴν θέσιν τῶν γραμμῶν καμπυλότητος τοῦ ἡμίσεως τοῦ ἐλλειψοειδοῦς δεικνύει τὸ ἀπέναντι σχῆμα· τὰ δύο σημεῖα σ καὶ σ΄, περὶ τὰ ὁποῖα συσπειροῦνται αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος καὶ πρὸς τὰ ὁποῖα στρέφουσι πᾶσαι τὸ κοῖλον αὐτῶν, εἶνε σφαιρικὰ σημεῖα δι' αὐτῶν οὐδεμία ἄλλη γραμμὴ καμπυλότητος διέρχεται πλὴν τῆς πρωτευούσης τομῆς, ἐφ' ἧς κεῖνται· καὶ τὸ μὲν μέρος σσ΄ αὐτῆς εἶνε τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνουσιν αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος τῆς μιᾶς σειρᾶς (ἥτις γίνεται διὰ τῶν μονοχώνων ὑπερβολοειδῶν), τὰ δὲ μέρη σΑ καὶ σ΄Α΄ εἶνε τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνουσιν αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος τῆς ἄλλης σειρᾶς.



Ἀναπτυκταὶ ἐπιφάνειαι.

151. Αἱ γενέτειραι τῶν ἀναπτυκτῶν ἐπιφανειῶν εἶνε γραμμαὶ καμπυλότητος αὐτῶν· διότι τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας εἶνε καθ' ἅπαντα τὰ σημεῖα ἑκάστης γενετείρας ἓν καὶ τὸ αὐτό· διὰ τοῦτο αἱ κάθετοι τῆς ἐπιφανείας, αἱ ἐκ τῶν σημείων ἑκάστης γενετείρας ἀγόμεναι, εἶνε παράλληλοι καὶ συνιστῶσιν ἐπίπεδον (κάθετον ἐπὶ τὸ ἐφαπτόμενον). Καὶ αἱ μὲν γενέτειραι ἀποτελοῦσι τὴν μίαν σειρὰν τῶν γραμμῶν καμπυλότητος· διότι δι' ἑκάστου σημείου τῆς ἐπιφανείας διέρχεται μία· τὴν δὲ ἄλλην σειρὰν ἀποτελοῦσιν αἱ ἐξειλιγμέναι τοῦ λαιμοῦ· διότι αὗται τέμνουσι τὰς πρώτας πανταχοῦ πρὸς ὀρθάς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Εἰς τοὺς κυλίνδρους ἡ δευτέρα σειρὰ τῶν γραμμῶν καμπυλότητος εἶνε αἱ κάθετοι τομαί.

Ἐν ταῖς ἀναπτυκταῖς ἐπιφανείαις ἡ μία τῶν πρωτευουσῶν ἀκτίνων καμπυλότητος εἶναι ἄπειρος· καὶ τἀνάπαλιν, πᾶσα ἐπιφάνεια, ἥτις εἰς ἕκαστον σημεῖον αὐτῆς ἔχει ἄπειρον τὴν μίαν τῶν πρωτευουσῶν ἀκτίνων, εἶνε ἀναπτυκτὴ ἐπιφάνεια. Διότι, ἂν θεωρήσωμεν μίαν οἱανδήποτε ἐκ τῶν γραμμῶν καμπυλότητος, ὧν ἐφάπτονται αἱ πρωτεύουσαι τομαὶ αἱ ἔχουσαι ἄπειρον ἀκτῖνα, αἱ ἐκ τῶν σημείων αὐτῆς ἀγόμεναι κάθετοι τῆς ἐπιφανείας θὰ συνιστῶσιν ἀναπτυκτὴν ἐπιφάνειαν ἄνευ λαιμοῦ, τοῦτ' ἔστι κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν· τῆς κυλινδρικῆς δὲ ταύτης ἐπιφανείας κάθετος τομὴ θὰ εἶνε ἡ θεωρουμένη γραμμὴ καμπυλότητος (διότι εἶνε κάθετος πρὸς τὰς γενετείρας τοῦ κυλίνδρου) καὶ διὰ τοῦτο θὰ εἶνε ἐπίπεδος καὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς θὰ εἶνε ἐφαπτόμενον τῆς ἐπιφανείας κατὰ πάντα τὰ σημεῖα αὐτῆς. Ἡ ἐπιφάνεια ἄρα εἶνε περιβάλλουσα τῶν θέσεων ἐπιπέδου, ἤτοι ἀναπτυκτή.

Ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης τῶν ἀναπτυκτῶν ἐπιφανειῶν συνάγεται (ἐδ. 124) ὅτι ἐπ' αὐτῶν καὶ μόνον ἐπ' αὐτῶν ἀληθεύει ἡ ἐξίσωσις $rt - s^2 = 0$ εἰς ἕκαστον σημεῖον.

Ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνειαι.

152. Ἡ μὲν μία σειρὰ τῶν γραμμῶν καμπυλότητος ἀποτελεῖται ἐκ τῶν μεσημβρινῶν, οἵτινες εἶνε γραμμαὶ καμπυλότητος, διότι αἱ κάθετοι τῆς ἐπιφανείας, αἱ ἐκ τῶν σημείων ἑκάστου μεσημβρινοῦ ἀγόμεναι, ἐπειδὴ συναντῶσι τὸν ἄξονα (I, σελ. 172), κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ μεσημβρινοῦ καὶ ἐφάπτονται τῆς ἐνειλιγμένης αὐτοῦ.

Ἡ δὲ δευτέρα σειρὰ ἀποτελεῖται ὑπὸ τῶν παραλλήλων, διότι αἱ κάθετοι τῆς ἐπιφανείας, αἱ ἐκ τῶν σημείων ἑκάστου παραλλήλου ἀγόμεναι, συναντῶσι τὸν ἄξονα εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ συνιστῶσιν ἑπομένως κωνικὴν ἐπιφάνειαν.

Αἱ δύο πρωτεύουσαι ἀκτῖνες καμπυλότητος εἰς ἕκαστον σημεῖον εἶνε προφανῶς ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τοῦ μεσημβρινοῦ καὶ τὸ τμῆμα τῆς πρὸς αὐτὸν καθέτου τὸ μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τοῦ ἄξονος ἀπολαμβανόμενον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Εἰς τὴν σφαῖραν πᾶσα γραμμὴ τῆς ἐπιφανείας εἶνε γραμμὴ καμπυλότητος.

Περιβάλλουσαι σφαιρικῶν ἐπιφανειῶν.

153. Εἰς τὰς περιβαλλούσας σφαιρικῶν ἐπιφανειῶν (ὧν ἡ ἐξίσωσις ἔχει μίαν μόνην μεταβλητὴν παράμετρον) γραμμὴ καμπυλότητος τῆς μιᾶς σειρᾶς εἶνε αἱ κυκλικαι γενέτειραι αὐτῶν· τοῦτ' ἔστιν αἱ περιφέρειαι, καθ' ἃς ἑκάστη τῶν σφαιρικῶν ἐπιφανειῶν ἐφάπτεται τῆς

περιβαλλούσης ἐπιφανείας. Διότι αἱ κάθετοι τῆς ἐπιφανείας, αἱ ἐκ τῶν σημείων μιᾶς τοιαύτης περιφερείας ἀγόμεναι, θὰ εἶνε κάθετοι καὶ πρὸς τὴν σφαῖραν (διότι ἡ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια καὶ ἡ περιβάλλουσα ἐφάπτονται ἀλλήλων κατὰ πάντα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας ταύτης) καὶ διὰ τοῦτο θὰ ἔρχωνται ἅπασαι εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας· ἡ δὲ ἀκτὶς τῆς σφαίρας ταύτης θὰ εἶνε μία τῶν πρωτευουσῶν ἀκτίνων καμπυλότητος δι' ἅπαντα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας.

154. Πᾶσα δὲ ἐπιφάνεια, ἥτις ἔχει τὴν μίαν σειρὰν τῶν γραμμῶν καμπυλότητος ἐκ περιφερειῶν ἀποτελουμένην, εἶνε περιβάλλουσα σφαιρικῶν ἐπιφανειῶν· διότι τὸ ἐπίπεδον ἑκάστης περιφερείας (ἥτις εἶνε γραμμὴ καμπυλότητος) θὰ τέμνῃ τὴν ἐπιφάνειαν ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν· ἐὰν ἄρα ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι τῆς ἐπιφανείας ἐκ τῶν σημείων τῆς περιφερείας ταύτης, θὰ σχηματίζωσιν ἅπασαι πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς τὴν αὐτὴν γωνίαν καὶ διὰ τοῦτο θὰ ἔρχωνται ἅπασαι εἰς ἓν σημεῖον κείμενον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῆς περιφερείας ταύτης. Ἐὰν δὲ γραφῇ σφαῖρα ἔχουσα κέντρον τὸ σημεῖον τοῦτο καὶ διερχομένη διὰ τῆς περιφερείας, ἡ σφαῖρα αὕτη θὰ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας κατὰ πάντα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας. Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο συμβαίνει δι' ἑκάστην περιφέρειαν, συνάγεται, ὅτι ἡ θεωρουμένη ἐπιφάνεια εἶνε περιβάλλουσα σφαιρικῶν ἐπιφανειῶν.

155. Ἐὰν ἡ ἀκτὶς τῆς περιβαλλομένης σφαίρας μένῃ σταθερά, ἡ περιβάλλουσα ἐπιφάνεια λέγεται διὰ τὸ σχῆμα αὐτῆς *σωληνοειδής*· ἔχει δὲ κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα τὴν μίαν τῶν πρωτευουσῶν ἀκτίνων καμπυλότητος ἴσην τῇ ἀκτῖνι τῆς περιβαλλομένης σφαίρας καὶ διὰ τοῦτο σταθεράν.

Ὅτι δὲ καὶ πᾶσα ἐπιφάνεια, ἥτις ἔχει σταθερὰν τὴν μίαν τῶν πρωτευουσῶν ἀκτίνων καμπυλότητος, εἶνε σωληνοειδής, ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς. Νοήσωμεν μίαν οἱανδήποτε ἐκ τῶν γραμμῶν καμπυλότητος, ὧν ἐφάπτονται αἱ πρωτεύουσαι τομαὶ αἱ σταθερὰν ἔχουσαι ἀκτῖνα καμπυλότητος· αἱ ἐκ τῶν σημείων αὐτῆς ἀγόμεναι κάθετοι πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν θὰ ἐφάπτωνται μιᾶς τῶν ἐνειλιγμένων τῆς γραμμῆς ταύτης καὶ τὸ τμῆμα ἑκάστης τὸ ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας μέχρι τῆς ἀφῆς ἀπολαμβανόμενον θὰ εἶνε σταθερὸν (διότι τοῦτο εἶνε ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς πρωτευούσης τομῆς, ἥτις ἐφάπτεται τῆς γραμμῆς καμπυλότητος). Ἀλλ' ἡ εὐθεῖα, ἥτις συνδέει τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα τῆς ἐξειλιγμένης καὶ τῆς ἐνειλιγμένης, δὲν δύναται νὰ εἶνε σταθερὰ (ἐδ. 86), ἐκτὸς ὅταν ἡ ἐνειλιγμένη καταντήσῃ ἓν σημεῖον· ἀνάγκη ἄρα αἱ εἰρημέναι κάθετοι τῆς ἐπιφανείας νὰ ἔρχωνται εἰς ἓν σημεῖον' ἀπέχον ἐξ ἴσου ἐκ πάντων τῶν σημείων τῆς γραμμῆς καμπυλότητος. Ἐὰν δὲ γραφῇ σφαῖρα ἔχουσα κέντρον τὸ σημεῖον τοῦτο καὶ διερχομένη διὰ τῆς γραμμῆς καμπυλότητος, ἡ σφαῖρα αὕτη θὰ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας κατὰ πάντα τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς ταύτης. Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο συμβαίνει δι᾽ ἑκάστην ἐκ τῶν εἰρημένων γραμμῶν καμπυλότητος, συνάγεται, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια εἶνε περιβάλλουσα σφαιρικῶν ἐπιφανειῶν σταθερᾶς ἀκτῖνος τοῦτ᾽ ἔστι σωληνοειδής.

Κυλισιγενεῖς ἐπιφάνειαι.

156. *Κυλισιγενεῖς* καλῶ τὰς ἐπιφανείας, αἵτινες γεννῶνται ὑπὸ γραμμῆς ἐπιπέδου, ὅταν τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς κυλίηται ἐπὶ ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας.

Τῶν κυλισιγενῶν ἐπιφανειῶν ἡ μία σειρὰ τῶν γραμμῶν καμπυλότητος εἶνε ἡ γενέτειρα ἐπίπεδος γραμμὴ εἰς τὰς διαφόρους θέσεις αὐτῆς. Διότι τὸ κυλιόμενον ἐπίπεδον εἰς ἑκάστην θέσιν του εἶνε κάθετον πρὸς τὰς γραμμάς, ἃς γράφουσι τὰ σημεῖα αὐτοῦ (ἐδ. 180)· ἑπομένως ἂν ἀχθῇ εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς γενετείρας ἡ κάθετος αὐτῆς, αὕτη θὰ εἶνε κάθετος ἐπὶ δύο γραμμὰς τῆς ἐπιφανείας, τοῦτ᾽ ἔστιν ἐπὶ τὴν γενέτειραν καὶ ἐπὶ τὴν γραμμήν, ἣν γράφει τὸ σημεῖον Μ ἐν τῇ κυλίσει· ἄρα θὰ εἶνε κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ κάθετοι τῆς ἐπιφανείας αἱ ἐκ τῶν σημείων μιᾶς γενετείρας ἀγόμεναι κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς καὶ ἐφάπτονται τῆς ἐπιπέδου ἐνειλιγμένης αὐτῆς, συνάγεται, ὅτι ἡ γενέτειρα εἶνε γραμμὴ καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας.

Ἡ αὐτὴ γενέτειρα εἶνε καὶ πρωτεύουσα τομὴ τῆς ἐπιφανείας εἰς ἕκαστον σημεῖον αὐτῆς.

Περὶ τῶν γεωδαισιακῶν γραμμῶν.

157. *Γεωδαισιακὴ γραμμὴ* τῆς ἐπιφανείας λέγεται ἡ τὸ ἐλάχιστον μῆκος ἔχουσα ἐκ πασῶν τῶν γραμμῶν τῶν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας κειμένων καὶ ἐξ ἑνὸς σημείου αὐτῆς εἰς ἄλλο ἀγουσῶν.

Διὰ δύο τυχόντων σημείων τῆς ἐπιφανείας διέρχεται πάντοτε μία τοὐλάχιστον συντομωτάτη γραμμή· δυνατὸν ὅμως καὶ περισσότεραι νὰ διέρχωνται· ἑκάστη τούτων εἶνε τότε συντομωτέρα ἢ αἱ πλησίον αὐτῆς διερχόμεναι καὶ τὰ αὐτὰ δύο σημεῖα συνδέουσαι.

158. Ἐὰν ἐπὶ γεωδαισιακῆς γραμμῆς λάβωμεν δύο τυχόντα σημεῖα μὴ λίαν ἀπέχοντα, ἡ γεωδαισιακὴ αὕτη γραμμὴ εἶνε ἡ συντομωτάτη τῆς ἐπιφανείας γραμμὴ ἡ τὰ σημεῖα ταῦτα συνδέουσα· ἀλλ' ἂν τὸ μὲν ἓν τῶν σημείων τούτων μένῃ ἀκίνητον, τὸ δὲ ἄλλο προχωρῇ ἐπὶ τῆς γεωδαισιακῆς γραμμῆς, παύει συνήθως ἡ γραμμὴ πέραν ὁρίου τινὸς νὰ εἶνε ἡ συντομωτάτη μεταξὺ τῶν δύο τούτων σημείων· π. χ. ἐπὶ τῆς σφαίρας αἱ γεωδαισιακαὶ γραμμαὶ εἶνε αἱ περιφέρειαι τῶν μεγίστων κύκλων· εἶνε δὲ ἑκάστη ἐξ αὐτῶν συντομωτάτη μεταξὺ δύο σημείων αὐτῆς, ὅταν τὸ μεταξὺ αὐτῶν τόξον εἶνε μικρότερον τῆς ἡμιπεριφερείας.

159. Ἡ χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τῶν γεωδαισιακῶν γραμμῶν ἐκφράζεται διὰ τοῦ ἑπομένου θεωρήματος.

Τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς γεωδαισιακῆς γραμμῆς περιέχει τὴν κάθετον τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο, ἤτοι εἶνε κάθετον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν.

Λάβωμεν ἐπὶ μιᾶς γεωδαισιακῆς γραμμῆς τόξον τι ἀπειροστόν, τὸ αγβ· ἐὰν συνδέσωμεν τὰ ἄκρα τοῦ τόξου τούτου δι' οἱαςδήποτε ἄλλης γραμμῆς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας κειμένης, οἷον τῆς αδβ, θὰ εἶνε πάντοτε

$$\text{τοξ } \alpha\gamma\beta < \text{τοξ } \alpha\delta\beta\cdot$$

ἀλλὰ τὰ δύο ἀπειροστὰ τόξα αγβ καὶ αδβ δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς κυκλικὰ τόξα, ἤτοι ὡς κείμενα, τὸ μὲν αγβ ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἥτις διέρχεται διὰ τῶν τριῶν σημείων α,γ,β· τὸ δὲ αδβ ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἥτις διέρχεται διὰ τῶν α,δ,β· ἐπειδὴ δὲ τὰ τόξα ταῦτα ἔχουσι τὴν αὐτὴν χορδὴν αβ, ἕπεται, ὅτι θὰ εἶνε μικρότερον τὸ ἔχον τὴν μεγαλητέραν ἀκτῖνα. Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας αγβ πρέπει νὰ εἶνε μεγαλητέρα τῆς ἀκτῖνος τῆς περιφερείας αδβ.

Ἀλλ' αἱ εἰρημέναι περιφέρειαι εἶνε αἱ ἐγγύταται περιφέρειαι τῶν δύο καμπύλων αγβ καὶ αδβ εἰς τὸ σημεῖον α, ἔχουσι δὲ αἱ καμπύλαι αὗται ἀμφότεραι τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην (τὸ ὅριον τῆς κοινῆς αὐτῶν χορδῆς) εἰς τὸ σημεῖον α. Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῶν γεωδαισιακῶν γραμμῶν εἰς ἕκαστον αὐτῶν σημεῖον πρέπει νὰ εἶνε μεγαλητέρα ἢ τῶν ἄλλων γραμμῶν τῆς ἐπιφανείας τῶν διὰ τοῦ σημείου τούτου διερχομένων καὶ τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην ἐχουσῶν· ἀνάγκη ἄρα (ἐδ. 126) τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον αὐτῆς νὰ περιέχῃ τὴν κάθετον τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο.

160. Ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης τῶν γεωδαισιακῶν γραμμῶν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν αὐτῶν.

Διότι ἔστω (x,y,z) τὸ τυχὸν σημεῖον μιᾶς τῶν γεωδαισιακῶν γραμμῶν τῆς ἐπιφανείας

$$z=\varphi(x,y)\cdot \tag{1}$$

τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον τῆς γραμμῆς ταύτης ἔχει τὴν ἐξίσωσιν

$$\begin{vmatrix} X-x & dx & d^2x \\ Y-y & dy & d^2y \\ Z-z & dz & d^2z \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

ἔνθα αἱ συντεταγμέναι x,y,z θεωροῦνται ὡς συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς.

Ἡ δὲ κάθετος ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο (x, y, z) ἔχει τὰς ἐξισώσεις

$$\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1}.$$

ἑπομένως, ἵνα ἡ κάθετος αὕτη κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (2), πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε

$$\begin{vmatrix} p & dx & d^2x \\ q & dy & d^2y \\ -1 & dz & d^2z \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

τοῦτο δὲ εἰς πᾶν σημεῖον τῆς γεωδαισιακῆς γραμμῆς.

Ἀλλ' εἰς πᾶν σημεῖον αὐτῆς εἶνε καὶ

$$dz=pdx+qdy,$$

ἐξ οὗ ἕπεται καὶ

$$d^2z=rdx^2+2sdxdy+tdy^2+pd^2x+qd^2y,$$

ὅθεν ἡ ἐξίσωσις (3) γίνεται διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς τῶν dz, d^2z

$$(1+p^2+q^2)(dxd^2y-dyd^2x)-(pdy-qdx)(rdx^2+2sdxdy+tdy^2)=0\cdot(4)$$

ἡ δὲ ἐξίσωσις αὕτη εἶνε ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου xy προβολῶν τῶν γεωδαισιακῶν γραμμῶν τῆς ἐπιφανείας (1).

161. Αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος εἶνε ἐν γένει διάφοροι τῶν γεωδαισιακῶν· ἵνα δὲ ἡ αὐτὴ γραμμὴ εἶνε καὶ γεωδαισιακὴ γραμμὴ καὶ γραμμὴ καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας, ἀνάγκη νὰ εἶνε ἐπίπεδος. Διότι ἐκ τῆς ἐξισώσεως $d\tau = d\omega - d\vartheta$, (ἐδ. 137) ἥτις ἰσχύει διὰ πᾶσαν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας κειμένην γραμμήν, ἕπεται, ἂν ὑποτεθῇ $d\omega = 0$ καὶ $\vartheta = 0$,

$$d\tau = 0,$$

τοῦτ' ἔστιν ἡ γραμμὴ εἶνε ἐπίπεδος.

Αἱ ἐπίπεδοι γεωδαισιακαὶ γραμμαὶ εἶνε καὶ γραμμαὶ καμπυλότητος· διότι, ὅταν εἶνε $d\tau = 0$ καὶ $\vartheta = 0$, ἕπεται καὶ $d\omega = 0$· (τοιαῦται γραμμαὶ εἶνε π. χ. οἱ μεσημβρινοὶ τῶν ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανειῶν)· ἀλλ' αἱ ἐπίπεδοι γραμμαὶ καμπυλότητος δὲν εἶνε πάντοτε γεωδαισιακαί· διότι, ἂν ὑποτεθῇ $d\tau = 0$, ἕπεται $d\vartheta = 0$, ὅθεν $\vartheta =$ σταθερᾷ· π. χ. οἱ παράλληλοι τῶν ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανειῶν εἶνε ἐπίπεδοι γραμμαὶ καμπυλότητος, ἀλλὰ δὲν εἶνε καὶ πάντοτε γεωδαισιακαὶ γραμμαί.

Περὶ τῶν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν τῆς ἐπιφανείας.

162. Ἐὰν εἰς ἕκαστον σημεῖον γραμμῆς τινος ἡ κάθετος τομὴ τῆς ἐπιφανείας, ἡ τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην ἔχουσα, ἔχῃ καμπυλότητα ἴσην τῷ 0, ἡ γραμμὴ αὕτη λέγεται *ἀσυμπτωτικὴ* γραμμὴ τῆς ἐπιφανείας.

Λέγεται δὲ ἡ τοιαύτη γραμμὴ ἀσυμπτωτική, διότι ἡ ἐφαπτομένη αὐτῆς εἰς ἕκαστον σημεῖον εἶνε ἀσύμπτωτος τῆς δεικτρίας τοῦ σημείου τούτου.

Καὶ ὄντως αἱ μόναι κάθετοι τομαὶ αἱ ἔχουσαι καμπυλότητα 0 εἶνε ἐκεῖναι, τῶν ὁποίων ἐφάπτονται ἀκτῖνες τῆς δεικτρίας ἄπειροι τὸ μῆκος· τοιαύτας δὲ ἀκτῖνας ἔχει ἡ δείκτρια, μόνον ὅταν σύγκειται ἐκ δύο συζυγῶν ὑπερβολῶν (τὰς κοινὰς αὐτῶν ἀσυμπτώτους), ἢ ὅταν σύγκειται ἐκ δύο παραλλήλων εὐθειῶν (τὴν πρὸς αὐτὰς παράλληλον), αἵτινες ὅμως δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς ὑπερβολή, τῆς ὁποίας αἱ ἀσύμπτωτοι συνέπεσαν εἰς μίαν εὐθεῖαν.

Αἱ κυρταὶ ἐπιφάνειαι δὲν ἔχουσι πραγματικὰς ἀσυμπτωτικὰς γραμμάς, διότι ἡ δείκτρια αὐτῶν δὲν ἔχει πραγματικὰς ἀσυμπτώτους.

163. Πρὸς εὕρεσιν τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως τῶν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν, ἀρκεῖ νὰ ὑποθέσωμεν ἐν τῷ τύπῳ (8) τοῦ ἐδ. 129 $\frac{1}{\varrho} = 0$· οὕτως εὑρίσκομεν τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν

$$r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2 = 0, \quad \text{ἤτοι} \quad r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2 = 0, \qquad (1)$$

ἥτις ἀληθεύει εἰς πᾶν σημεῖον τῆς ἀσυμπτωτικῆς γραμμῆς καὶ εἶνε διὰ τοῦτο ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) γίνεται φανερόν, ὅτι δι' ἑκάστου σημείου τῶν κοιλοκύρτων ἐπιφανειῶν διέρχονται δύο ἀσυμπτωτικαὶ γραμμαί, διότι ὁ λόγος $\frac{dy}{dx}$ ἔχει δύο πραγματικὰς καὶ ἀνίσους τιμὰς εἰς ἕκαστον σημεῖον αὐτῶν (διότι δι' αὐτὰς εἶνε $rt - s^2 < 0$)· ὥστε ὑπάρχουσιν ἐπὶ τῶν ἐπιφανειῶν τούτων δύο συστήματα ἢ δύο σειραὶ ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν, αἵτινες διαιροῦσι τὴν ἐπιφάνειαν εἰς τετράπλευρα καμπυλόγραμμα. Δι' ἑκάστου δὲ σημείου ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας διέρχεται μία ἀσυμπτωτικὴ γραμμή, ἢ δύο συμπεσοῦσαι εἰς μίαν· διότι ἡ ἐξίσωσις (1), ὅταν εἶνε $s^2 = rt$, δίδει μίαν μόνην τιμὴν τοῦ λόγου $\frac{dy}{dx}$· ὥστε ἐπὶ τῶν ἀναπτυκτῶν ἐπιφανειῶν αἱ δύο σειραὶ τῶν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν συμπίπτουσιν εἰς μίαν.

164. Τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον τῆς ἀσυμπτωτικῆς γραμμῆς εἰς ἕκαστον σημεῖον αὐτῆς εἶνε ἐφαπτόμενον τῆς ἐπιφανείας.

Καὶ ὄντως ἡ ἐξίσωσις

$$\varrho(r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2) = \text{συνθ}.\sqrt{1 + p^2 + q^2} \qquad (\text{ἐδ. } 128),$$

ἐὰν ἡ ἀκτὶς ϱ ἔχῃ τιμὴν πεπερασμένην, γίνεται εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον τῆς ἀσυμπτωτικῆς γραμμῆς συνθ $= 0$· ὅθεν συνάγεται, ὅτι ἡ πρώτη κάθετος τῆς γραμμῆς ταύτης εἶνε κάθετος πρὸς τὴν κάθετον τῆς ἐπιφανείας, τοῦτ' ἔστι τὸ ἐγγύτατον αὐτῇ ἐπίπεδον ἐφάπτεται τῆς ἐπιφανείας. Ἐὰν δὲ ἡ ἀκτὶς ϱ εἶνε ἄπειρος εἰς πᾶν σημεῖον τῆς ἀσυμπτωτικῆς γραμμῆς, ἡ γραμμὴ αὕτη θὰ εἶνε εὐθεῖα καὶ πᾶν ἐπίπεδον δι' αὐτῆς διερχόμενον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἐγγύτατον αὐτῆς ἐπίπεδον· ἑπομένως καὶ τὸ ἐφαπτόμενον.

165. Πᾶσα εὐθεῖα κειμένη ἐπὶ ἐπιφανείας εἶνε ἀσυμπτωτικὴ γραμμὴ αὐτῆς, διότι καὶ κάθετος τομὴ τῆς ἐπιφανείας εἶνε καὶ καμπυλότητα ἔχει 0.

Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι τῶν εὐθειογενῶν καὶ μὴ ἀναπτυκτῶν ἐπιφανειῶν αἱ γενέτειραι ἀποτελοῦσι τὴν μίαν σειρὰν τῶν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν· τῶν δὲ ἀναπτυκτῶν αἱ γενέτειραι εἶνε ἀμφότεραι αἱ σειραὶ συμπεσοῦσαι.

Τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς καὶ τοῦ ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς αἱ ἀσυμπτωτικαὶ γραμμαὶ εἶνε τὰ δύο συστήματα τῶν εὐθυγράμμων γενετειρῶν αὐτῶν.

Περὶ τῆς καμπυλότητος τῶν ἐπιφανειῶν.

166. Ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου σφαίρας ἐχούσης ἀκτῖνα τὴν μονάδα τοῦ μήκους ἄγωνται ἀκτῖνες παράλληλοι πρὸς τὰς καθέτους τῆς τυχούσης ἐπιφανείας, πρὸς ἕκαστον σημεῖον τῆς ἐπιφανείας ταύτης θὰ ἀντιστοιχῇ ἓν ὡρισμένον σημεῖον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας καὶ πρὸς ἕκαστον μέρος Ω τῆς αὐτῆς ἐπιφανείας θὰ ἀντιστοιχῇ μέρος τι ω τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας.

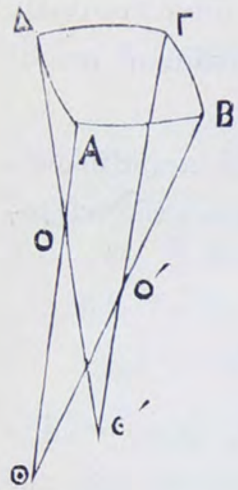
167. Τὸ μέρος ω τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, τὸ πρὸς τὸ μέρος Ω τῆς δοθείσης ἐπιφανείας ἀντιστοιχοῦν, λέγεται *καμπυλότης* αὐτοῦ· ὁ δὲ λόγος $\frac{\omega}{\Omega}$ λέγεται *μέση καμπυλότης* αὐτοῦ.

Καμπυλότης δὲ τῆς ἐπιφανείας εἰς ἓν σημεῖον Μ αὐτῆς λέγεται τὸ ὅριον τοῦ λόγου $\frac{\omega}{\Omega}$, ἔνθα Ω σημαίνει μέρος οἱονδήποτε τῆς ἐπιφανείας, περιέχον τὸ σημεῖον Μ, καὶ ω τὸ πρὸς αὐτὸ ἀντίστοιχον μέρος τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ὅταν τὰ μέρη ταῦτα τείνωσι πρὸς τὸ 0.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Οἱ ὁρισμοὶ οὗτοι τῆς καμπυλότητος τῶν ἐπιφανειῶν εἶνε ἡ κατὰ φύσιν γενίκευσις τῶν ὁρισμῶν τῆς καμπυλότητος τῶν ἐπιπέδων καμπύλων (ἐδ. 12)· τὸ μῆκος τοῦ τόξου τῆς ἐπιπέδου καμπύλης ἀντικατεστάθη νῦν διὰ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ μέρους τῆς ἐπιφανείας, τὸ δὲ μῆκος τοῦ κυκλικοῦ τόξου, ὅπερ ὁρίζουσιν αἱ παράλληλοι πρὸς τὰς ἐφαπτομένας τοῦ τόξου ἢ πρὸς τὰς καθέτους αὐτοῦ, ἀντικατεστάθη νῦν διὰ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ μέρους τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ὅπερ ὁρίζουσιν αἱ παράλληλοι πρὸς τὰς καθέτους τοῦ αὐτοῦ μέρους τῆς ἐπιφανείας.

168. Πρὸς εὕρεσιν τῆς καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ τυ-

χὸν αὐτῆς σημεῖον Μ νοοῦμεν τετράπλευρον, τὸ ΑΒΓΔ, ἐκ γραμμῶν καμπυλότητος ἀποτελούμενον καὶ περιέχον τὸ σημεῖον Μ. *Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου τούτου εἶνε τὸ γινόμενον ΑΒ.ΑΔ (παραλειπομένων τῶν ἀπειροστῶν τῶν ἀνωτέρων τάξεων).*



Διότι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ΑΒΓΔ εἶνε ἀπειροστὸν ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο εὐθυγράμμων τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΒΓΔ· καὶ τὸ μὲν τρίγωνον ΑΒΔ ἔχει ἐμβαδὸν ἰσοδύναμον τῷ

$$\frac{1}{2}(\text{τοξ.}AB).(\text{τοξ.}A\Delta)\cdot$$

διότι καὶ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ διαφέρουσιν ἀπὸ τῶν τόξων ΑΒ καὶ ΑΔ κατὰ ἀπειροστὰ ἀνωτέρων τάξεων καὶ ἡ γωνία Δ\Β αὐτοῦ ἔχει ὅριον τὴν ὀρθήν.

Τὸ δὲ τρίγωνον ΒΓΔ ἔχει ἐπίσης ἐμβαδὸν ἰσοδύναμον τῷ

$$\frac{1}{2}(\text{τοξ.}AB).(\text{τοξ.}A\Delta)\cdot$$

διότι τὰ ἀπέναντι τόξα ΑΔ καὶ ΒΓ εἶνε ἰσοδύναμα ἀπειροστά, ἐπίσης καὶ τὰ ΑΒ, ΔΓ.

Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶνε ἀπειροστὸν ἰσοδύναμον τῷ

$$(\text{τοξ}\,AB).(\text{τοξ}\,A\Delta).$$

Μένει νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀντιστοίχου μέρους τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας· πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ κάθετοι τῆς ἐπιφανείας, αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν σημείων τῆς περιμέτρου ΑΒΓΔ, συνιστῶσι τέσσαρα ἀπειροστὰ μέρη ἀναπτυκτῶν ἐπιφανειῶν, ἅτινα δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς τρίγωνα ἀπειροστὰ τὸ πλάτος καὶ τῶν ὁποίων ἕκαστον τέμνει τὰ δύο πλησίον αὐτοῦ ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν

Ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὰς καθέτους ταύτας τῆς ἐπιφανείας, θὰ σχηματίσωσιν αἱ παράλληλοι αὗται τετράεδρον γωνίαν, ἔχουσαν ὀρθὰς τὰς διέδρους αὐτῆς γωνίας καὶ περιλαμβάνουσαν ἐντὸς αὐτῆς τὸ ἀντίστοιχον μέρος τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας αβγδ. Τὰ τόξα αβ, βγ, γδ, δα τοῦ μέρους τούτου εἶνε ἴσα πρὸς τὰς γωνίας ΑΘΒ, ΒΟ′Γ, ΓΘ′Δ, ΔΟΑ, ἃς σχηματίζουσιν αἱ κάθετοι εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ τῆς ἐπιφανείας· αἱ δὲ γωνίαι αὗται εἶνε (παραλειπομένων τῶν ἀπειροστῶν ἀνωτέρας τάξεως)

$$\text{γωνία ΑΘΒ} = \frac{\text{τοξ ΑΒ}}{\varrho_1}, \quad \text{γων. ΒΟ'Γ} = \frac{\text{τοξ ΒΓ}}{\varrho_2} \quad (\text{ἐδ. } 18)\cdot$$

ὅθεν ἡ μὲν καμπυλότης τοῦ μέρους ΑΒΓΔ τῆς ἐπιφανείας εἶνε $\frac{(\text{ΑΒΓΔ})}{\varrho_1\varrho_2}$, ἡ δὲ καμπυλότης τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον Μ εἶνε $\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}$, τοῦτ'ἔστιν ἀντίστροφος τοῦ γινομένου τῶν δύο ἀκτίνων καμπυλότητος τῶν δύο πρωτευουσῶν τομῶν αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον Μ.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ δύο ἀκτῖνες ϱ_1 καὶ ϱ_2 τῶν πρωτευουσῶν τομῶν τῆς ἐπιφανείας ὁρίζονται ἐκ τῆς ἐξισώσεως (13) τοῦ ἐδαφίου 131, συνάγεται, ὅτι ἡ καμπυλότης τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς Μ εἶνε ἴση τῇ παραστάσει $\frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐθεωρήσαμεν μέρος τῆς ἐπιφανείας ὁριζόμενον ὑπὸ τεσσάρων γραμμῶν καμπυλότητος· ἀλλ' ὁπωςδήποτε καὶ ἂν ὁρίζηται τὸ θεωρούμενον μέρος Ω αὐτῆς, πάντοτε εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν.

Τῷ ὄντι, οἱονδήποτε σχῆμα καὶ ἂν ἔχῃ τὸ μέρος Ω, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸ εἰς πλῆθος τετραπλεύρων $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_\nu$ συνισταμένων ἐκ γραμμῶν καμπυλότητος (ἐδ. 136)· τότε καὶ τὸ ἀντίστοιχον μέρος ω τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας διαιρεῖται εἰς τὰ μέρη $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$, ἀντίστοιχα τῶν $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_\nu$· ἐπειδὴ δὲ εἶνε

$$\text{ὅρ}\frac{\omega_1}{\Omega_1} = \frac{1}{\varrho_1\varrho_2}, \qquad \text{ὅρ}\frac{\omega_2}{\Omega_2} = \frac{1}{\varrho_1\varrho_2}, \qquad \ldots, \text{ὅρ}\frac{\omega_\nu}{\Omega_\nu} = \frac{1}{\varrho_1\varrho_2},$$

συνάγεται
$$\text{ὅρ}\frac{\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_\nu}{\Omega_1+\Omega_2+\ldots+\Omega_\nu} = \frac{1}{\varrho_1\varrho_2}.$$

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΕΠΑΦΗΣ ΤΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ.

169. Δύο ἐπιφάνειαι λέγεται ὅτι ἔχουσιν εἰς κοινόν τι σημεῖον ἐπαφὴν τῆς τάξεως ν, ἐάν, ἐκφραζομένων τῶν συντεταγμένων τῶν σημείων αὐτῶν διὰ δύο καὶ τῶν αὐτῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν u, v καὶ οὕτως, ὥστε τὸ κοινὸν σημεῖον νὰ ἀντιστοιχῇ πρὸς ἓν σύστημα τιμῶν ($u=\alpha$, $v=\beta$) τῶν μεταβλητῶν τούτων, ἡ ἀπόστασις τῶν ἀντιστοίχων σημείων τῶν δύο ἐπιφανειῶν γίνηται πλησίον τοῦ κοινοῦ σημείου ἀπειροστὸν τῆς τάξεως $\nu+1$ ὡς πρὸς τὰς αὐξήσεις τῶν μεταβλητῶν u, v ἀπὸ τῶν τιμῶν α, β.

Ἀντίστοιχα μὲν λέγω τὰ πρὸς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σύστημα τιμῶν τῶν μεταβλητῶν u, v ἀντιστοιχοῦντα δύο σημεῖα τῶν δύο ἐπιφανειῶν.

Ποσότητα δὲ οἱανδήποτε, ἐξαρτωμένην ἀπὸ τῶν δύο αὐξήσεων $u-\alpha$, $v-\beta$, ἢ Δu, Δv (αἵτινες εἶνε ὅλως ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων), λέγω ἀπειροστὴν τῆς τάξεως ν ὡς πρὸς τὰς αὐξήσεις Δu, Δv, ὅταν διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως $\Delta v = K.\Delta u$, ἡ ποσότης αὕτη τρέπηται εἰς ἀπειροστὸν τῆς τάξεως ν ὡς πρὸς τὸ Δu, τῆς τιμῆς τοῦ K μενούσης ἐντελῶς ἀορίστου.

170. Αἱ ἑξῆς προτάσεις ἀποδεικνύονται σχεδὸν ἀπαραλλάκτως ὡς αἱ ὅμοιαι αὐταῖς ἐν τῇ θεωρίᾳ περὶ τῆς ἐπαφῆς τῶν γραμμῶν.

1) Ἡ ἀπόστασις δ τῶν ἀντιστοίχων σημείων θὰ εἶνε ἀπειροστὸν τῆς τάξεως $\nu+1$ ὡς πρὸς τὰς αὐξήσεις Δu, Δv, μόνον ἐὰν ἑκάστη τῶν τριῶν διαφορῶν $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ τῶν συντεταγμένων τῶν αὐτῶν σημείων εἶνε ἀπειροστὸν τῆς τάξεως $\nu+1$ ὡς πρὸς Δu, Δv.

2) Ἡ τάξις τῆς ἐπαφῆς εἶνε ἀνεξάρτητος ἀπὸ τῆς ἐκλογῆς τῶν ἀξόνων· ἐπίσης εἶνε ἀνεξάρτητος ἀπὸ τῆς ἐκλογῆς τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν· ἐὰν δηλαδὴ τεθῇ

$$u = f(\varphi, \omega) \qquad v = \sigma(\varphi,\omega),$$

ὅτε αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων ἀμφοτέρων τῶν ἐπιφανειῶν γίνονται συναρτήσεις τῶν δύο μεταβλητῶν φ, ω, καὶ ἀντιστοιχῇ τὸ κοινὸν σημεῖον ($u=\alpha$, $v=\beta$) πρὸς τὰς τιμὰς $\varphi=\varrho$, $\omega=\tau$ τῶν νέων μεταβλητῶν, ἡ ἀπόστασις δ θὰ εἶνε πρὸς τὰς αὐξήσεις $\varphi-\varrho$, $\omega-\tau$ πλησίον τοῦ κοινοῦ σημείου ἀπειροστὸν τῆς αὐτῆς τάξεως ὡς καὶ πρὸς τὰς αὐξήσεις $u-\alpha$, $v-\beta$· (ὑποτίθεται, ὅτι αἱ μεταβληταὶ u, v, ὡς συναρτήσεις τῶν φ, ω θεωρούμεναι, ἔχουσιν, ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ συστήματος α,β, τὸν χαρακτῆρα ἀκεραίων συναρτήσεων· καὶ ἀντιστρόφως αἱ φ, ω πρὸς τὰς u, v).

171. Οἱ ἀναγκαῖοι καὶ ἐπαρκεῖς ὅροι, ἵνα δύο ἐπιφάνειαι ἔχωσιν εἴς τι κοινὸν σημεῖον ἐπαφὴν τῆς τάξεως ν, εὑρίσκονται νῦν ὡς ἑξῆς.

Ἔστωσαν
$$\begin{array}{l|l} X=\Phi(u,v) & x=\varphi(u,v) \\ Y=F(u,v) & y=f(u,v) \\ Z=\Sigma(u,v) & z=\sigma(u,v) \end{array} \qquad (1)$$
αἱ ἐξισώσεις τῶν δύο ἐπιφανειῶν· τὸ δὲ κοινὸν σημεῖον αὐτῶν ἃς ἀντιστοιχῇ πρὸς τὰς τιμὰς $u=\alpha$, $v=\beta$ τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν u, v· ἐὰν ἀπὸ τῶν τιμῶν τούτων α,β αὐξηθῶσιν αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ κατὰ Δu, Δv, καὶ αἱ συντεταγμέναι θὰ αὐξηθῶσιν· θὰ εἶνε δὲ κατὰ τὸν τύπον τοῦ Taylor
$$\Delta X=\frac{dX}{1}+\frac{d^2X}{1.2}+\frac{d^3X}{1.2.3}+\ldots,\quad \Delta x=dx+\frac{d^2x}{1.2}+\frac{d^3x}{1.2.3}+\ldots,$$
ἔνθα $d^\nu X$ σημαίνει τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν τῆς ν τάξεως, τοῦ X θεωρουμένου ὡς συναρτήσεως τῶν δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν u, v.

Ἕκαστον τῶν διαφορικῶν τούτων εἶνε ὡς πρὸς τὰς αὐξήσεις $\Delta u, \Delta v$ ὁμογενὲς καὶ βαθμὸν ἔχει τὴν τάξιν του· κατ' ἀκολουθίαν, ἵνα αἱ διαφοραὶ $X-x$, $Y-y$, $Z-z$, αἵτινες εἶνε 0 εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον, γίνωνται πλησίον αὐτοῦ ἀπειροστὰ τῆς τάξεως $\nu+1$ πρὸς τὰ $\Delta u, \Delta v$, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε
$$(2)\qquad \begin{array}{l|l|l|} X=x & Y=y & Z=z \\ dX=dx & dY=dy & dZ=dz \\ d^2X=d^2x & d^2Y=d^2y & d^2Z=d^2z \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ d^\nu X=d^\nu x & d^\nu Y=d^\nu y & d^\nu Z=d^\nu z \end{array} \quad \left(\text{διὰ}\ \begin{matrix} u=\alpha \\ v=\beta \end{matrix}\right).$$

Ἀλλ' ἑκάστη τῶν ἐξισώσεων τούτων διαλύεται ἐνταῦθα εἰς πολλὰς ἄλλας· διότι αἱ αὐξήσεις Δu, Δv εἶνε ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων· αἱ δὲ ἐξισώσεις (2) πρέπει νὰ ἀληθεύωσιν, οἱαιδήποτε καὶ ἂν εἶνε αἱ αὐξήσεις. Θεωρήσωμεν π. χ. τὴν ἐξίσωσιν $d^\mu X=d^\mu x$· ἤτοι
$$\frac{\partial^\mu X}{\partial u^\mu}(\Delta u)^\mu+\mu\frac{\partial^\mu X}{\partial u^{\mu-1}\partial v}\cdot(\Delta u)^{\mu-1}(\Delta v)+\ldots+\frac{\partial^\mu X}{\partial v^\mu}(\Delta v)^\mu=$$
$$=\frac{\partial^\mu x}{\partial u^\mu}(\Delta u)^\mu+\mu\frac{\partial^\mu x}{\partial u^{\mu-1}\partial v}\cdot(\Delta u)^{\mu-1}(\Delta v)+\ldots+\frac{\partial^\mu x}{\partial v^\mu}(\Delta v)^\mu.$$

Ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ τοῦ $(\Delta u)^{\mu}$ καὶ παραστήσωμεν τὸν λόγον $\dfrac{\Delta v}{\Delta u}$ διὰ τοῦ ω, τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης γίνονται ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ ω· καὶ πρέπει νὰ εἶνε ἴσα διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ ω. Πρὸς τοῦτο πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{\mu} X}{\partial u^{\mu}} &= \frac{\partial^{\mu} x}{\partial u^{\mu}} \\ \frac{\partial^{\mu} X}{\partial u^{\mu-1}\partial v} &= \frac{\partial^{\mu} x}{\partial u^{\mu-1}\partial v} \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial^{\mu} X}{\partial v^{\mu}} &= \frac{\partial^{\mu} x}{\partial v^{\mu}}. \end{aligned} \tag{3}$$

172. Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι, *ἵνα δύο ἐπιφάνειαι ἔχωσιν εἰς κοινόν τι σημεῖον ἐπαφὴν τῆς τάξεως ν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο καὶ αἱ συντεταγμέναι νὰ γίνωνται ἴσαι καὶ αἱ ὁμοταγεῖς καὶ ὅμοιαι παράγωγοι αὐτῶν (πρὸς τὰς μεταβλητάς, ἀφ' ὧν ἐξαρτῶνται) ἴσαι μέχρι τῆς τάξεως ν.*

173. Ἐκ τῆς μορφῆς τῶν ἐξισώσεων (2) συνάγεται ἀμέσως ἡ ἑξῆς πρότασις.

Ἐὰν δύο ἐπιφάνειαι ἔχωσιν εἰς κοινόν τι σημεῖον ἐπαφὴν τῆς τάξεως ν, δύο οἱαιδήποτε ἀντίστοιχοι γραμμαὶ αὐτῶν (ὧν τὰ σημεῖα εἶνε ἀντίστοιχα) *ἔχουσιν ἐπίσης ἐπαφὴν τῆς τάξεως ν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.*

174. Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς ἀντίστοιχα σημεῖα τῶν δύο ἐπιφανειῶν τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν προβολὴν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν xy· τοῦτ' ἔστι δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὡς ἀνεξαρτήτους μεταβλητὰς τὰς δύο συντεταγμένας x, y· τότε αἱ ἐξισώσεις τῶν δύο ἐπιφανειῶν θὰ εἶνε

$$z = f(x,y) \quad \text{καὶ} \quad Z = F(x,y) \tag{4}$$

ὅθεν αἱ ἐξισώσεις (2) γίνονται

$$\begin{aligned} Z &= z \\ dZ &= dz \\ d^2Z &= d^2z \\ &\dots\dots \\ d^{\nu}Z &= d^{\nu}z, \end{aligned} \tag{5}$$

ἤτοι $$Z = z$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \tag{6}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^\nu Z}{\partial x^\nu}=\frac{\partial^\nu z}{\partial x^\nu}, \quad \frac{\partial^\nu Z}{\partial x^{\nu-1}\partial y}=\frac{\partial^\nu z}{\partial x^{\nu-1}\partial y}, \ldots\ldots \frac{\partial^\nu Z}{\partial y^\nu}=\frac{\partial z}{\partial y^\nu}.$$

Αὗται εἶνε οἱ ἀναγκαῖοι καὶ ἐπαρκεῖς ὅροι, ἵνα αἱ δύο ἐπιφάνειαι (4) ἔχωσιν εἰς τὸ σημεῖον (x,y,z) ἐπαφὴν τῆς τάξεως ν.

Παρατηρητέον δέ, ὅτι αἱ συνθῆκαι τῆς ἐπαφῆς τῆς πρώτης μόνον τάξεως ἐκφράζουσι *γεωμετρικῶς*, ὅτι αἱ δύο ἐπιφάνειαι ἔχουσιν εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον τὸ αὐτὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον (ἐπομένως καὶ τὴν αὐτὴν κάθετον)· αἱ δὲ τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας, ὅτι καὶ αἱ δύο πρωτεύουσαι διευθύνσεις τῆς μιᾶς συμπίπτουσιν ἀντιστοίχως, ἐπὶ τοῦ κοινοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου, πρὸς τὰς τῆς ἄλλης καὶ αἱ πρωτεύουσαι ἀκτῖνες καμπυλότητος ἐπίσης.

175. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐξισώσεων τούτων εἶνε προφανῶς

$$1+2+3+\ldots+(\nu+1) \qquad \text{ἤτοι} \qquad \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}.$$

Ἐκ τούτου γίνεται φανερόν, ὅτι ἐκ τῶν ἐπιφανειῶν γένους τινὸς ὡρισμένου θὰ ὑπάρχῃ μία ἐγγυτάτη πρὸς τὴν τυχοῦσαν ἐπιφάνειαν καὶ εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς, μόνον ὅταν ὁ ἀριθμὸς λ τῶν παραμέτρων, δι' ὧν ὁρίζεται τὸ γένος τοῦτο τῶν ἐπιφανειῶν, εἶνε τῆς μορφῆς

$$\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}, \qquad \text{ἤτοι} \qquad 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ldots$$

Ἐγγύτατον ἐπίπεδον ὑπάρχει εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς τυχούσης ἐπιφανείας (διότι τὸ ἐπίπεδον ὁρίζεται διὰ 3 παραμέτρων), εἶνε δὲ τὸ ἐφαπτόμενον· ἀλλὰ σφαῖρα ἐγγυτάτη εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον τῆς δοθείσης ἐπιφανείας δὲν ὑπάρχει, διότι ἡ σφαῖρα ὁρίζεται διὰ 4 παραμέτρων· μόνον εἰς τὰ σφαιρικὰ σημεῖα τῆς δοθείσης ἐπιφανείας ὑπάρχει ἐγγυτάτη σφαῖρα (Hermite, Calcul Dif., p. 146) καὶ ἔχει τὴν ἐξίσωσιν:

$$(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2=\frac{2pq}{s}\left[(Z-z)-p(X-x)-q(Y-y)\right].$$

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄

ΑΝΑΛΥΤΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι.

ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΛΑΜΒΑΝΟΥΣΩΝ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΟΝ ΜΟΡΦΗΝ

176. Ὅταν οἱ ὅροι κλάσματος, ὡς τοῦ $\frac{\varphi(x)}{\sigma(x)}$, εἶνε συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς, δυνατὸν νὰ συμβῇ διά τινα μερικὴν τιμὴν α τῆς μεταβλητῆς ταύτης νὰ μηδενίζωνται ἀμφότεροι· ὅτε τὸ κλάσμα λαμβάνει τὴν ἀπροσδιόριστον μορφὴν $\frac{0}{0}$.

Ἡ ὑπόθεσις, ἡ τὸν παρονομαστὴν μηδενίζουσα, εἶνε ἀληθὲς ὅτι πρέπει νὰ γίνηται οὐχὶ ἐν τῷ κλάσματι, ἀλλ' ἐν τῇ ἐξισώσει, ἐξ ἧς τὸ κλάσμα παρήχθη διὰ τῆς διαιρέσεως· διότι τότε μόνον δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν σημασίαν, ἣν ἔχει αὕτη διὰ τὸ πρόβλημα, ἐξ οὗ παρήχθη ὁ τύπος· ἀνεξαρτήτως ὅμως τῆς σημασίας ταύτης δυνατὸν εἶνε νὰ ζητηθῇ, πρὸς ποῖον ἀριθμὸν πλησιάζει ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος (ἂν πλησιάζῃ), ὅταν ἡ μεταβλητὴ x πλησιάζῃ πρὸς τὴν τιμὴν α. Τοῦτο δὲ δύναται νὰ εὑρεθῇ διὰ τοῦ τύπου τοῦ Taylor ὡς ἑξῆς.

Ἔστω τιμὴ μικρὸν διαφέρουσα τῆς α, ἡ α + ε· δι' αὐτὴν εἶνε

$$\sigma(\alpha+\varepsilon)=\sigma(\alpha)+\varepsilon\sigma'(\alpha+\mu\varepsilon)$$

$$\varphi(\alpha+\varepsilon)=\varphi(\alpha)+\varepsilon\varphi'(\alpha+\mu'\varepsilon)$$

καὶ ἐπειδὴ $\sigma(\alpha)=0$ καὶ $\varphi(\alpha)=0$,

ἕπεται
$$\frac{\varphi(\alpha+\varepsilon)}{\sigma(\alpha+\varepsilon)}=\frac{\varphi'(\alpha+\mu\varepsilon)}{\sigma'(\alpha+\mu'\varepsilon)}.$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης φαίνεται, ὅτι, ὅσον τὸ ε τείνει πρὸς τὸ 0, ἤτοι ὁ x πρὸς τὸ α, τόσον ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος τείνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν $\frac{\varphi'(\alpha)}{\sigma'(\alpha)}$.

ἤτοι πρὸς τὸ πηλίκον τῶν παραγώγων τῶν δύο ὅρων τοῦ κλάσματος, ἐν αἷς τίθεται ἡ τιμὴ $x = \alpha$. (*Κανὼν τοῦ L'Hôpital*).

Ἐὰν ἡ τιμὴ α μηδενίζῃ ἀμφοτέρας τὰς παραγώγους $\varphi'(\alpha)$ καὶ $\sigma'(\alpha)$, διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δεικνύεται, ὅτι τὸ δοθὲν κλάσμα $\frac{\varphi(x)}{\sigma(x)}$ πλησιάζει πρὸς τὸν ἀριθμὸν $\frac{\varphi''(\alpha)}{\sigma''(\alpha)}$, ἤτοι πρὸς τὸ πηλίκον τῶν δευτέρων παραγώγων· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Παραδείγματα.

1) $$\frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}.$$

Ὅταν ὁ ἀριθμὸς x τείνῃ πρὸς τὸ 0, ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος τούτου τείνουσι πρὸς τὸ 0· λαμβάνοντες δὲ τὰς παραγώγους τῶν ὅρων αὐτοῦ καὶ θέτοντες ἐν τῷ πηλίκῳ αὐτῶν $\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ τὴν τιμὴν $x = 0$, εὑρίσκομεν 0· τουτέστιν, ὅσον ὁ x πλησιάζει πρὸς τὸ 0, τοσοῦτον καὶ τὸ κλάσμα τείνει ὁμοίως πρὸς τὸ 0.

2) $$\frac{\frac{\pi}{2} - x}{\sigma\varphi x}.$$

Ὅταν $x = \frac{\pi}{2}$, ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος τούτου γίνονται 0· ἀλλὰ τὸ πηλίκον τῶν παραγώγων τῶν δύο ὅρων αὐτοῦ εἶνε

$$\frac{-1}{-\frac{1}{\eta\mu^2 x}} \quad \text{ἢ} \quad \eta^2\mu x$$

καὶ ἐξ αὐτοῦ βλέπομεν, ὅτι ὅσον ὁ x τείνει πρὸς τὴν τιμὴν $\frac{\pi}{2}$, τόσον πλησιάζει τὸ θεωρούμενον κλάσμα πρὸς τὸν ἀριθμὸν 1.

3) $$\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \eta\mu x}.$$

Διὰ $x=0$ ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος τούτου μηδενίζονται· λαμβάνοντες δὲ τὰς πρώτας παραγώγους εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον αὐτῶν

$$\frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \text{συν} x}.$$

ἀλλὰ καὶ τοῦτο λαμβάνει τὴν αὐτὴν ἀπροσδιόριστον μορφήν, ὅταν ὑποτεθῇ $x=0$. Ὅθεν λαμβάνομεν τὰς δευτέρας παραγώγους καὶ εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον αὐτῶν $\dfrac{e^x - e^{-x}}{\text{ημ} x}$.

ἐπειδὴ δὲ καὶ τοῦτο τὴν αὐτὴν μορφὴν λαμβάνει, ὅταν $x=0$, εὑρίσκομεν τὰς τρίτας παραγώγους: $\dfrac{e^x + e^{-x}}{\text{συν} x}$

καὶ ἐκ τοῦ πηλίκου αὐτῶν βλέπομεν, ὅτι ὅσον ὁ x πλησιάζει πρὸς τὸ 0, τόσον πλησιάζει τὸ δοθὲν κλάσμα πρὸς τὸν ἀριθμὸν 2.

177. Ἐὰν οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος ἐξαρτῶνται ἀπὸ δύο μεταβλητῶν x, y ἀνεξαρτήτων ἀπ' ἀλλήλων, μηδενίζωνται δὲ διά τι σύστημα τιμῶν ($x=\alpha, y=\beta$) τῶν μεταβλητῶν τούτων, τὸ κλάσμα πρὸς οὐδεμίαν ἐν γένει τείνει ὡρισμένην τιμήν, ὅταν αἱ μεταβληταὶ x, y τείνωσι πρὸς τὸ σύστημα τῶν τιμῶν α, β.

Διότι ἔστω τὸ κλάσμα $\dfrac{\sigma(x,y)}{\varphi(x,y)}$. (1)

ἐὰν ἡ μὲν μεταβλητὴ x ἔχῃ τιμήν τινα $\alpha + h$ πλησίον τοῦ α, ἡ δὲ y τιμήν τινα $\beta + k$ πλησίον τοῦ β, τὸ κλάσμα θὰ ἔχῃ τὴν τιμὴν

$$\frac{\sigma(\alpha+h, \beta+k)}{\varphi(\alpha+h, \beta+k)}. \tag{2}$$

ἀλλ' εἶνε κατὰ τὸν τύπον τοῦ Taylor

$$\sigma(\alpha+h, \beta+k) = \sigma_x(\alpha,\beta)h + \sigma_y(\alpha,\beta)k + \ldots$$
$$\varphi(\alpha+h, \beta+k) = \varphi_x(\alpha,\beta)h + \varphi_y(\alpha,\beta)k + \ldots,$$

ὅθεν τὸ κλάσμα γίνεται

$$\frac{\sigma_x(\alpha,\beta)h + \sigma_y(\alpha,\beta)k + \ldots}{\varphi_x(\alpha,\beta)h + \varphi_y(\alpha,\beta)k + \ldots}. \tag{3}$$

ὅταν δὲ τὰ h καὶ k τείνωσι πρὸς τὸ 0 (ἀνεξαρτήτως ἀπ' ἀλλήλων), οἱ ὅροι τῶν ἀνωτέρων διαστάσεων γίνονται ἀπειροστοὶ ὡς πρὸς τοὺς ὅρους τῆς πρώτης διαστάσεως καὶ ἑπομένως τὸ κλάσμα γίνεται ὡς ἔγγιστα ἴσον τῷ ἑξῆς $\dfrac{\sigma_x(\alpha,\beta)h + \sigma_y(\alpha,\beta)k}{\varphi_x(\alpha,\beta)h + \varphi_y(\alpha,\beta)k}$. (4)

ἀλλὰ τοῦτο πρὸς οὐδὲν ὡρισμένον ὅριον τείνει· διότι ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ λόγου $\dfrac{k}{h}$, ὅστις δύναται νὰ εἶνε οἱοσδήποτε. Ἐξαιρετέον μόνον τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν εἶνε

$$\frac{\sigma_x(\alpha,\beta)}{\varphi_x(\alpha,\beta)} = \frac{\sigma_y(\alpha,\beta)}{\varphi_y(\alpha,\beta)}.$$

διότι τότε τὸ κλάσμα (4) εἶνε ἴσον τῷ ἑτέρῳ τῶν ἴσων τούτων λόγων, ἑπομένως ἀνεξάρτητον ἀπὸ τοῦ λόγου τῶν αὐξήσεων h, k.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅμοιον συμβαίνει, καὶ ὅταν οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος ἐξαρτῶνται ἀπὸ πλειόνων μεταβλητῶν.

Ἄλλαι ἀπροσδιόριστοι μορφαί.

Αἱ ἑξῆς ἀπροσδιόριστοι μορφαὶ ἀνάγονται εὐκόλως εἰς τὴν μορφὴν $\dfrac{0}{0}$.

1) $\dfrac{\infty}{\infty}$.

178. Ἐὰν κλάσματος, οὗτινος οἱ ὅροι ἐξαρτῶνται ἐκ μιᾶς μεταβλητῆς x, ὡς τοῦ $\dfrac{\varphi(x)}{\sigma(x)}$, διά τινα τιμὴν α τῆς μεταβλητῆς ταύτης ἀμφότεροι οἱ ὅροι αὐξάνωνται εἰς ἄπειρον, τὸ κλάσμα τοῦτο δύναται νὰ τείνῃ πρός τι ὅριον πεπερασμένον, ὅπερ ζητεῖται νὰ εὕρωμεν.

Ἵνα τὸ ζήτημα τοῦτο ἀναχθῇ εἰς τὸ προηγούμενον, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν τὸ δοθὲν κλάσμα ὡς ἑξῆς·

$$\frac{\varphi(x)}{\sigma(x)} = \frac{\left\{\dfrac{1}{\sigma(x)}\right\}}{\left\{\dfrac{1}{\varphi(x)}\right\}}.$$

διότι τότε ἔχομεν νέον κλάσμα ἴσον τῷ δοθέντι καὶ τοῦ ὁποίου ἀμφότεροι οἱ ὅροι τείνουσι πρὸς τὸ 0 διὰ $x = \alpha$.

2) $0 \times \infty$.

179. Δυνατὸν εἶνε ἐν γινομένῳ δύο παραγόντων $\sigma(x)$, $\varphi(x)$, ὅταν ἡ μεταβλητὴ x, ἀφ' ἧς οἱ παράγοντες ἐξαρτῶνται, τείνῃ πρός τινα

τιμὴν α, ὁ μὲν εἷς παράγων, ἔστω ὁ $\sigma(x)$, νὰ τείνῃ πρὸς τὸ 0, ὁ δὲ ἄλλος νὰ αὔξάνῃ εἰς ἄπειρον· τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀνάγομεν εἰς τὴν πρώτην, γράφοντες τὸ γινόμενον ὡς ἕπεται

$$\sigma(x).\,\varphi(x) = \frac{\sigma(x)}{\left\{\dfrac{1}{\varphi(x)}\right\}}.$$

διότι τότε τρέπομεν τὸ δοθὲν γινόμενον εἰς κλάσμα, οὗτινος ἀμφότεροι οἱ ὅροι μηδενίζονται διὰ $x = \alpha$.

3) 0^0.

180. Ἐὰν ἐν τῇ συναρτήσει $\varphi(x)^{\sigma(x)}$ καὶ ἡ βάσις $\varphi(x)$ καὶ ὁ ἐκθέτης $\sigma(x)$ τείνωσι πρὸς τὸ 0 διὰ $x = \alpha$, παριστῶμεν τὴν συνάρτησιν ταύτην δι᾽ ἑνὸς γράμματος, οἷον τοῦ y, ἤτοι θέτομεν

$$y = \varphi(x)^{\sigma(x)}$$

καὶ λαμβάνομεν τὸν λογάριθμον ἀμφοτέρων τῶν ἴσων, ὅτε εὑρίσκομεν

$$ly = \sigma(x).\,l\varphi(x)\cdot$$

εἶνε δὲ ὁ ly γινόμενον δύο παραγόντων $\sigma(x)$ καὶ $l\varphi(x)$, ἐξ ὧν ὁ μὲν πρῶτος τείνει πρὸς τὸ 0, ὁ δὲ δεύτερος αὔξάνει εἰς ἄπειρον διὰ $x = \alpha$.

Εὑρίσκοντες ἄρα τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ὁ ly, θὰ εὕρωμεν ἔπειτα καὶ τὸ ὅριον τοῦ y, ἤτοι τῆς δεδομένης συναρτήσεως· ἐὰν λόγου χάριν εὑρεθῇ ορ $ly = \beta$, θὰ εἶνε $y = e^{\beta}$.

4) 1^{∞}.

181. Ἐὰν ἐν τῇ συναρτήσει $\varphi(x)^{\sigma(x)}$ διά τινα τιμὴν α τοῦ x ἡ μὲν βάσις τείνῃ πρὸς τὴν μονάδα, ὁ δὲ ἐκθέτης αὔξάνῃ εἰς ἄπειρον, θέτομεν καὶ πάλιν $\quad y = \varphi(x)^{\sigma(x)}$,

ὅθεν ἕπεται $\quad ly = \sigma(x).\,l\varphi(x)\cdot$

εὑρίσκομεν ἔπειτα τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ γινόμενον $\sigma(x).\,l\varphi(x)$, οὗτινος ὁ μὲν πρῶτος παράγων αὔξάνει εἰς ἄπειρον, ὁ δὲ δεύτερος τείνει πρὸς τὸ 0 (διὰ $x = \alpha$), μετὰ δὲ ταῦτα εὑρίσκομεν τὸ ὅριον τοῦ y, ὡς καὶ προηγουμένως.

5) ∞^0.

182. Ἐὰν ἐν τῇ συναρτήσει $\varphi(x)^{\sigma(x)}$ διὰ $x = \alpha$ ἡ μὲν βάσις αὔξάνῃ εἰς ἄπειρον, ὁ δὲ ἐκθέτης τείνῃ πρὸς τὸ 0, θέτομεν καὶ πάλιν

$$y = \varphi(x)^{\sigma(x)}, \qquad \text{ὅθεν} \qquad ly = \sigma(x)l\varphi(x)$$

καὶ εὑρίσκομεν τὸ ὅριον ly, ὅθεν καὶ τοῦ y.

6) $\infty - \infty$.

183. Ἐὰν τῆς διαφορᾶς $\sigma(x)-\varphi(x)$, τῆς ὁποίας οἱ ὅροι ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς μεταβλητῆς x, διά τινα τιμὴν α τῆς μεταβλητῆς ταύτης ἀμφότεροι οἱ ὅροι αὐξάνωσιν εἰς ἄπειρον, θέτομεν

$$\sigma(x) = l\Sigma(x), \quad \text{ὅθεν} \quad \Sigma(x) = e^{\sigma(x)},$$
$$\varphi(x) = l\Phi(x), \quad \text{ὅθεν} \quad \Phi(x) = e^{\varphi(x)}\cdot$$

ἐκ τούτων ἕπεται

$$\sigma(x)-\varphi(x) = l\left\{\frac{\Sigma(x)}{\Phi(x)}\right\}.$$

ἑπομένως ἀνάγεται ἡ εὕρεσις τοῦ ὁρίου, πρὸς ὃ τείνει ἡ διαφορὰ $\sigma(x)-\varphi(x)$, εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ὁρίου, πρὸς ὃ τείνει τὸ πηλίκον $\frac{\Sigma(x)}{\Phi(x)}$. ἂν δὲ τὸ ὅριον τούτου εἶνε β, τὸ ὅριον τῆς διαφορᾶς θὰ εἶνε $l\beta$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

Πάντα τὰ προηγούμενα περὶ τῶν ὁρίων ζητήματα ἀνάγονται, ὡς ἐμάθομεν, εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ὁρίου, πρὸς ὃ τείνει τὸ κλάσμα $\frac{\varphi(x)}{\sigma(x)}$, ὅταν ἡ μεταβλητὴ x τείνῃ πρὸς τὴν τιμὴν α, ἥτις μηδενίζει ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους αὐτοῦ· τὴν εὕρεσιν δὲ τοῦ ὁρίου τούτου ἐστηρίξαμεν ἐπὶ τῆς ὑποθέσεως, ὅτι αἱ συναρτήσεις $\sigma(\alpha+\varepsilon)$ καὶ $\varphi(\alpha+\varepsilon)$ δύνανται νὰ ἀναπτυχθῶσι κατὰ τὰς θετικὰς καὶ ἀκεραίας δυνάμεις τοῦ ε, κατὰ τὸν τύπον τοῦ Taylor. Ἐὰν τοῦτο δὲν συμβαίνῃ, ὁ εὑρεθεὶς κανὼν δὲν δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ.

184. Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ., ὅτι ζητεῖται τὸ ὅριον τῆς παραστάσεως

$$\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^\eta}$$

διὰ $x=0$, τοῦ η ὄντος θετικοῦ τινος ἀριθμοῦ.

Ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ μεταβλητὴ x λαμβάνῃ μόνον πραγματικὰς τιμάς, ἡ παράστασις αὕτη τείνει πρός τι ὡρισμένον ὅριον, ὅταν ἡ x τείνῃ πρὸς τὸ 0· εὑρίσκομεν δὲ τὸ ὅριον τοῦτο εὐκόλως, ἐὰν γράψωμεν αὐτὴν ὡς ἑξῆς·

$$\frac{1}{x^\eta . \, e^{\frac{1}{x^2}}}$$

καὶ ἔπειτα ἀναπτύξωμεν τὴν ἐκθετικὴν συνάρτησιν $e^{\frac{1}{x^2}}$ κατὰ τὰς θετικὰς καὶ ἀκεραίας δυνάμεις τοῦ ἐκθέτου αὐτῆς· οὕτως εὑρίσκομεν

$$\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^\eta}=\frac{1}{x^\eta\left\{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2x^4}+\frac{1}{2.3\,x^6}+\ldots\right\}}$$

ἀλλ' ὁσονδήποτε μέγας καὶ ἂν εἶνε ὁ θετικὸς ἀριθμὸς η, ὅταν ἐν τῷ παρονομαστῇ ἐκτελεσθῇ ὁ πολλαπλασιασμός, θὰ μείνωσιν ἄπειροι ὅροι τῆς σειρᾶς διαιρούμενοι διὰ δυνάμεων τοῦ x· ἑπομένως ὁ παρονομαστὴς θὰ αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον, ὅταν ἡ x *πραγματικὰς μόνον τιμὰς λαμβάνουσα* τείνῃ πρὸς τὸ 0. Ἐντεῦθεν ἕπεται

$$\text{ορ}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^\eta}=0 \text{ διὰ } x=0 \text{ (πραγ. τιμαί).}$$

Ἀλλ' ἂν ἡ μεταβλητὴ x λαμβάνουσα οἱασδήποτε τιμὰς τείνῃ πρὸς τὸ 0, ἡ δοθεῖσα παράστασις πρὸς οὐδὲν τείνει ὅριον.

Καὶ ὄντως ἔστω $\quad x=\varrho(\text{συν}\varphi+i\text{ημ}\varphi)$.

Ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ x θὰ τείνῃ πρὸς τὸ 0, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ὁρίσματος αὐτῆς φ, ἐὰν μόνον τὸ μέτρον ϱ αὐτῆς τείνῃ πρὸς τὸ 0· ἀλλ' ἂν θέσωμεν τὴν τιμὴν ταύτην ἐν τῇ δοθείσῃ παραστάσει, εὑρίσκομεν

$$\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^\eta}=\frac{e^{-\frac{1}{\varrho^2}\text{συν}2\varphi}}{\varrho^\eta}\;e^{\left(\frac{1}{\varrho^2}\text{ημ}2\varphi-\eta\varphi\right)i}.$$

Τοῦτο δὲ προφανῶς οὐδὲν ἔχει ὅριον διὰ $\varrho=0$.

Σημειωτέον δέ, ὅτι ἡ ἀνωμαλία αὕτη δὲν συμβαίνει, ὅταν αἱ συναρτήσεις $\varphi(x)$ καὶ $\sigma(x)$ (οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος) ἔχωσι τὸν χαρακτῆρα ἀκεραίων συναρτήσεων ἐν τῇ περιοχῇ τῆς τιμῆς α· διότι ἡ αὔξησις ε δύναται ἐν τοῖς ἀναπτύγμασιν αὐτῶν νὰ εἶνε οἱοςδήποτε ἀριθμός, εἴτε πραγματικὸς εἴτε καὶ μιγάς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Κατὰ τὴν γενικὴν θεωρίαν ἔπρεπε πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου ὁρίου τῆς παραστάσεως

$$\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^\eta}$$

νὰ ἀναπτύξωμεν τὸν ἀριθμητὴν αὐτῆς κατὰ τὰς θετικὰς καὶ ἀκεραίας δυνάμεις τοῦ x. Ἀλλ' ἡ συνάρτησις, περὶ ἧς ὁ λόγος, δὲν ἔχει τοιοῦτον ἀνάπτυγμα. Ἐὰν τῷ ὄντι θέλωμεν νὰ ἐφαρμόσωμεν εἰς αὐτὴν τὸν τύπον τοῦ Μακλωρίνου,

$$F(x)=F(0)+xF'(0)+\ldots+\frac{x^\nu}{1.2\ldots\nu}F^{(\nu)}(0)+V\nu,$$

εὑρίσκομεν, ὅτι ἑκάστη παράγωγος αὐτῆς εἶνε ἄθροισμα ὅρων τῆς μορφῆς

$$\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^\varrho}$$

καί, κατὰ τὰ προαποδειχθέντα, διὰ $x=0$ γίνονται πᾶσαι 0 (ἐὰν ἡ x λαμβάνῃ μόνον πραγματικὰς τιμάς)· ὅθεν διὰ τὴν συνάρτησιν ταύτην ὁ τύπος τοῦ Μακλωρίνου γίνεται

$$e^{-\frac{1}{x^2}}=V^\nu\,.$$

Ὡς δεύτερον παράδειγμα ἀνωμαλίας ἔστω τὸ ἑξῆς.

185. Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ζητεῖται τὸ ὅριον τῆς παραστάσεως $\frac{lx}{x}$, ὅταν ἡ x αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον.

Ἡ γενικὴ θεωρία ἐνταῦθα δὲν ἐφαρμόζεται· διότι πρῶτον, ἵνα καταστήσωμεν πεπερασμένην τὴν τιμὴν τοῦ x, δι' ἣν ζητοῦμεν τὸ ὅριον, πρέπει νὰ θέσωμεν $x=\frac{1}{y}$, ὅτε εὑρίσκομεν τὴν παράστασιν $-yly$, ἧς ζητεῖται τὸ ὅριον διὰ $y=0$· ἀλλ' ἡ συνάρτησις $\frac{1}{ly}$ δὲν ἀναπτύσσεται κατὰ τὰς θετικὰς καὶ ἀκεραίας δυνάμεις τοῦ y.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου ὁρίου ἀρκεῖ νὰ ἀναπτύξωμεν τὴν x κατὰ τὰς θετικὰς καὶ ἀκεραίας δυνάμεις τοῦ lx· καὶ ὄντως εἶνε διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ ἐκθέτου ω

$$e^\omega=1+\frac{\omega}{1}+\frac{\omega^2}{1.2}+\frac{\omega^3}{1.2.3}+\ldots$$

καὶ ἂν τεθῇ $\omega=lx$, προκύπτει ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης ἡ ἑξῆς

$$e^{lx}\text{ ἤτοι } x=1+\frac{lx}{1}+\frac{(lx)^2}{1.2}+\ldots$$

ὥστε τὸ δοθὲν κλάσμα ἰσοῦται τῷ ἑξῆς κλάσματι

$$\frac{lx}{1+\frac{lx}{1}+\frac{(lx)^2}{1.2}+\ldots}\,.$$

ἐὰν δὲ τοῦ κλάσματος τούτου διαιρέσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους διὰ lx, βλέπομεν εὐκόλως, ὅτι, ἂν ἡ μεταβλητὴ x λαμβάνῃ μόνον πραγματικὰς καὶ θετικὰς τιμάς, θὰ εἶνε

(1) $$\text{ορ}\frac{lx}{x}=0 \text{ διὰ } x=\infty. \quad \text{(πραγμ. καὶ θετικαὶ τιμαί)}.$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι εἶνε καὶ ορ $\frac{(lx)^n}{x}=0$ διὰ $x=\infty$, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ n.

Ἐὰν ἡ μεταβλητὴ x λαμβάνουσα οἱασδήποτε τιμὰς αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον, ἡ δοθεῖσα παράστασις δὲν ἔχει ὅριον· διότι ἔστω $x=\rho e^{\varphi i}$ ἡ τιμὴ τοῦ x, τότε θὰ εἶνε

$$\frac{lx}{x}=\frac{l\rho+i(\varphi+2\kappa\pi)}{\rho e^{\varphi i}}=\frac{l\rho}{\rho}e^{-\varphi i}+\frac{(\varphi+2\kappa\pi)}{\rho}\cdot e^{\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)i}.$$

καὶ ὁ μὲν πρῶτος ὅρος τείνει πρὸς τὸ 0, ἀλλ' ὁ δεύτερος δὲν ἔχει ὅριον· διότι τὸ ὅρισμα φ δύναται νὰ συναυξάνηται μετὰ τοῦ ρ.

186. Ἔστω πρὸς τούτοις τὸ ἑξῆς παράδειγμα $x^n lx$ $(n>0)$.

Ἡ παράστασις αὕτη διὰ $x=0$ λαμβάνει τὴν ἀπροσδιόριστον μορφὴν $0\times\infty$, ἀλλ' ἂν τεθῇ $\quad x=\frac{1}{y}$,

προκύπτει $$x^n lx=\frac{-ly}{y^n}.$$

τὸ ὅριον τῆς παραστάσεως $\frac{ly}{y^n}$, ὅταν ἡ y αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον, εἶνε 0· διότι αὕτη γράφεται ὡς ἑξῆς·

$$\frac{ly}{y^n}=\left\{\frac{(ly)^{\frac{1}{n}}}{y}\right\}^n,$$

εἶνε δὲ ὡς ἀνωτέρω εὕρομεν ορ $\frac{(ly)^{\frac{1}{n}}}{y}=0$.

Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι εἶνε καὶ ορ $x^n lx=0$ διὰ $x=0$· (ἡ μεταβλητὴ x δέον νὰ λαμβάνῃ πραγματικὰς μόνον καὶ θετικὰς τιμάς).

187. Παρατηρητέον πρὸς τούτοις, ὅτι ἡ ἐκθετικὴ συνάρτησις $\varphi(x)^{\sigma(x)}$, τῆς ὁποίας καὶ ἡ βάσις καὶ ὁ ἐκθέτης μηδενίζονται διὰ $x=\alpha$, μόνον τὸ ὅριον 1 ἔχει, ὅταν ἀμφότεραι αἱ συναρτήσεις ἔχωσι

τὸν χαρακτῆρα ἀκεραίων συναρτήσεων ἐν τῇ περιοχῇ τῆς τιμῆς α, ἡ δὲ x λαμβάνῃ πραγ. τιμάς. Διότι ἔστω

$$\varphi(\alpha+\varepsilon)=\varepsilon\varphi'(\alpha)+\frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''(\alpha)+\ldots$$

$$\sigma(\alpha+\varepsilon)=\varepsilon\sigma'(\alpha)+\frac{\varepsilon^2}{1.2}\sigma''(\alpha)+\ldots,$$

τότε θὰ εἶνε

$$\sigma(\alpha+\varepsilon)l\varphi(\alpha+\varepsilon)=\left\{\sigma'(\alpha)+\frac{\varepsilon}{1.2}\sigma''(\alpha)+\ldots\right\}.\varepsilon.\left\{l\varepsilon+l[\varphi'(\alpha)+\varepsilon.\omega]\right\}$$

ἐκ τούτου γίνεται φανερόν, ὅτι εἶνε

$$\text{ὅρ}\ \sigma(\alpha+\varepsilon).\,l\varphi(\alpha+\varepsilon)=0 \quad \text{διὰ} \quad \varepsilon=0,$$

ἄρα

$$\text{ὅρ}\ \varphi(\alpha+\varepsilon)^{\sigma(\alpha+\varepsilon)}=1 \quad \text{διὰ} \quad \varepsilon=0.$$

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἀποδεῖξαι γεωμετρικῶς, ὅτι εἶνε

$$\text{ὅρ}\frac{\varphi(x)}{\sigma(x)}=\frac{\varphi'(\alpha)}{\sigma'(\alpha)}, \quad \text{ὅταν} \quad \varphi(\alpha)=\sigma(\alpha)=0.$$

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ κατασκευασθῶσιν αἱ δύο καμπύλαι

$$y=\varphi(x) \quad \text{καὶ} \quad Y=\sigma(x),$$

αἵτινες θὰ τέμνωσιν ἀμφότεραι τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὸ σημεῖον (α, 0) καὶ νὰ παραβληθῶσιν αἱ τεταγμέναι αὐτῶν, αἱ πρὸς τὴν αὐτὴν τετμημένην ἀντιστοιχοῦσαι, πλησίον τῆς τομῆς.

2) Εὑρεῖν τὰ ὅρια τῶν ἑπομένων παραστάσεων

$$(\text{συν}x)^{\frac{1}{x^2}} \quad \text{διὰ} \quad x=0 \quad \left(\text{'Απ.}\ e^{-\frac{1}{2}}\right).$$

$$\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} \quad \text{διὰ} \quad x=7 \quad \left(\text{'Απ.}-\frac{1}{56}\right).$$

$$\frac{\alpha^x-1}{x} \quad \text{διὰ} \quad x=0 \quad (\text{'Απ.}\ l\alpha).$$

$$\frac{lx}{\sqrt{x^2-1}} \quad \text{διὰ} \quad x=1 \quad (\text{'Απ.}\ 0).$$

$$\frac{l\text{συν}x}{x} \quad \text{διὰ} \quad x=0 \quad (\text{'Απ.}\ 0).$$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{l(1+x)}, \quad \text{διὰ} \quad x=0 \quad \left(\text{'Απ.}-\frac{1}{2}\right).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ

188. *Μέγιστον* λέγεται τιμή τις σ(α) τῆς συναρτήσεως σ(x), ἐὰν εἶνε ἡ μεγίστη τῶν τιμῶν αὐτῆς, ὅταν ἡ μεταβλητὴ x, ἀφ' ἧς ἡ συνάρτησις ἐξαρτᾶται, μένῃ περὶ τὴν τιμὴν α ἐντὸς διαστήματος ἱκανῶς μικροῦ· τουτέστιν, ὅταν ἡ διαφορὰ

$$\sigma(\alpha+\varepsilon)-\sigma(\alpha)$$

τοῦ ε μένοντος μεταξὺ $-h$ καὶ $+h$, εἶνε πάντοτε ἀρνητική.

Ἐλάχιστον δὲ λέγεται ἡ τιμὴ σ(α), ἐὰν εἶνε ἡ ἐλαχίστη πασῶν τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως, ὅταν ἡ μεταβλητὴ x ὁμοίως περιορισθῇ· τουτέστιν, ὅταν ἡ διαφορὰ

$$\sigma(\alpha+\varepsilon)-\sigma(\alpha)$$

τοῦ ε μένοντος μεταξὺ τοῦ $-h$ καὶ $+h$, εἶνε πάντοτε θετική.

Προφανὲς δὲ εἶνε, ὅτι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον δύναται συνάρτησίς τις νὰ ἔχῃ ὁσαδήποτε μέγιστα καὶ ἐλάχιστα εἰς διάφορα διαστήματα.

189. Ὅταν συνάρτησις ὁμαλὴ (ἐδ. 40) γίνῃ μεγίστη, παύεται προδήλως αὐξανομένη καὶ ἄρχεται ἐλαττουμένη· ὡσαύτως, ὅταν γίνῃ ἐλαχίστη, παύεται ἐλαττουμένη καὶ ἄρχεται αὐξανομένη.

Ἂν λοιπὸν ἡ τιμὴ σ(α) εἶνε μέγιστον, αἱ μὲν μικρότεραι τοῦ α τιμαὶ (μέχρι τινὸς) θὰ καθιστῶσι τὴν παράγωγον θετικήν, αἱ δὲ μεγαλήτεραι (μέχρι τινὸς) ἀρνητικήν· τοὐναντίον δὲ θὰ συμβαίνῃ, ἐὰν ἡ τιμὴ σ(α) εἶνε ἐλάχιστον. Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι

Ἐὰν ἡ συνάρτησις σ(x) γίνηται μεγίστη ἢ ἐλαχίστη διά τινα τιμὴν α τῆς x, ἡ παράγωγος αὐτῆς διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν ἀλλάσσει σημεῖον καὶ μεταβαίνει (αὐξανομένου τοῦ x) *ἐκ τοῦ θετικοῦ εἰς τὸ ἀρνητικόν, ἂν ἡ συνάρτησις γίνηται μεγίστη, ἐκ τοῦ ἀρνητικοῦ δὲ εἰς τὸ θετικόν, ἂν ἐλαχίστη.*

Τὴν ἀντίστροφον πρότασιν ἀπεδείξαμεν ἤδη (ἐδ. 85).

190. Διὰ τῶν προτάσεων τούτων δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰ μέγιστα καὶ τὰ ἐλάχιστα δοθείσης συναρτήσεως, ὡς ἐκ τῶν ἑπομένων παραδειγμάτων φαίνεται.

1ον) Ἔστω ἡ συνάρτησις $(x-\alpha)^{\frac{2}{3}}$

ἡ παράγωγος αὐτῆς εἶνε $\frac{2}{3}(x-\alpha)^{-\frac{1}{3}}$,

εἶνε δὲ ἡ παράγωγος αὕτη ἀρνητικὴ μέν, ἐνόσῳ εἶνε $x<\alpha$, θετικὴ δέ, ὅταν γίνῃ $x>\alpha$· τουτέστιν, ὅταν ἡ x διατρέχῃ τὸ διάστημα $\alpha-h\ldots\alpha+h$, ἡ παράγωγος μεταβαίνει ἐκ τοῦ ἀρνητικοῦ εἰς τὸ θετικόν· ἑπομένως διὰ τὴν τιμὴν $x=\alpha$ ἡ συνάρτησις γίνεται ἐλαχίστη.

2ον) Ἔστω ἡ συνάρτησις x^x·

ἡ παράγωγος αὐτῆς εἶνε

$$x^x.\ (1+lx) \quad \text{ἢ} \quad x^x.\ l(ex).$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ἐνόσῳ εἶνε

$$ex<1, \quad \text{ἤτοι} \quad x<\frac{1}{e},$$

ἡ παράγωγος εἶνε ἀρνητική, ὅταν δὲ γίνῃ

$$ex>1, \quad \text{ἤτοι} \quad x>\frac{1}{e},$$

ἡ παράγωγος γίνεται θετική· ἑπομένως ἡ συνάρτησις γίνεται ἐλαχίστη διὰ τὴν τιμὴν $x=\frac{1}{e}$.

3ον) Εὑρεῖν τὸ μέγιστον τοῦ πηλίκου $\frac{lx}{x}$.

Ἡ παράγωγος αὐτοῦ εἶνε $\frac{1-lx}{x^2}$ ἢ $\frac{1}{x^2}\, l\left(\frac{e}{x}\right)$

καὶ ἀλλάσσει σημεῖον, μόνον ὅταν ἡ x διέρχηται διὰ τῆς τιμῆς $x=e$ ἐπειδὴ δὲ διὰ μὲν τὰς μικροτέρας τοῦ e τιμὰς ἡ παράγωγος εἶνε θετική, διὰ δὲ τὰς μεγαλητέρας ἀρνητική, συνάγεται, ὅτι διὰ $x=e$ γίνεται τὸ πηλίκον μέγιστον.

191. Καὶ ὁ τύπος τοῦ Taylor ἄγει εἰς τὰ αὐτὰ γνωρίσματα τοῦ μεγίστου καὶ ἐλαχίστου, δίδει δὲ εἰς αὐτὰ μορφήν, ἥτις πολλάκις καθιστᾷ εὐκολωτέραν τὴν ἐφαρμογὴν αὐτῶν· ἀλλ' ὑποθέτει ἀναγκαίως τὴν παράγωγον συνεχῆ καὶ διαφορίσιμον.

Ὅταν ἡ τιμὴ $\sigma(\alpha)$ τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$ εἶνε μεγίστη ἢ ἐλαχίστη, ἡ διαφορὰ $\sigma(\alpha+\varepsilon)-\sigma(\alpha)$

διαφυλάττει τὸ ἑαυτῆς σημεῖον, ἐνόσῳ ὁ ε μένει ἐντὸς τοῦ διαστήματος $-h\ldots+h$, τοῦ h ὄντος ἀριθμοῦ ὡρισμένου· εἶνε δὲ θετικὴ μέν, ἂν σ(α) εἶνε ἐλάχιστον, ἀρνητικὴ δέ, ἂν μέγιστον.

Ἀλλὰ κατὰ τὸν εἰρημένον τύπον εἶνε

$$\sigma(\alpha+\varepsilon)-\sigma(\alpha)=\varepsilon\sigma'(\alpha)+\frac{\varepsilon^2}{1.2}\sigma''(\alpha+\mu\varepsilon)\cdot$$

καὶ ἂν ἡ παράγωγος σ′(α) διαφέρῃ τοῦ 0, δύναται νὰ ληφθῇ ὁ ε τόσον μικρός, ὥστε ἡ διαφορὰ $\sigma(\alpha+\varepsilon)-\sigma(\alpha)$ νὰ εἶνε ὁμοειδὴς τῷ γινομένῳ $\varepsilon\sigma'(\alpha)$· ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦτο δὲν δύναται νὰ διαφυλάξῃ τὸ σημεῖον αὐτοῦ, ὅταν ὁ ε ἀλλάξῃ σημεῖον· ἀνάγκη ἄρα (ἂν ἡ τιμὴ σ(α) εἶνε μέγιστον ἢ ἐλάχιστον) νὰ εἶνε $\sigma'(\alpha)=0$·
τούτου δὲ ὄντος, ἔχομεν

$$\sigma(\alpha+\varepsilon)-\sigma(\alpha)=\frac{\varepsilon^2}{1.2}\sigma''(\alpha)+\frac{\varepsilon^3}{1.2.3}\sigma'''(\alpha+\mu\varepsilon).$$

Ἐὰν νῦν ἡ δευτέρα παράγωγος σ″(α) διαφέρῃ τοῦ 0 καὶ περιορισθῇ ὁ ε ἐντὸς διαστήματος ἱκανῶς μικροῦ, $-h\ldots+h$, ἡ διαφορὰ

$$\sigma(\alpha+\varepsilon)-\sigma(\alpha)$$

εἶνε ὁμοειδὴς τῷ γινομένῳ $\frac{\varepsilon^2}{1.2}\sigma''(\alpha)$, ἤτοι τῇ παραγώγῳ σ″(α)· καὶ ἑπομένως διαφυλάττει τὸ ἑαυτῆς σημεῖον, ὁπωςδήποτε καὶ ἂν μεταβάλληται ὁ ε ἐντὸς τοῦ διαστήματος $-h\ldots+h$· ὥστε ἡ τιμὴ σ(α) εἶνε μέγιστον μέν, ἂν σ″(α) εἶνε ἀρνητική, ἐλάχιστον δέ, ἂν θετική.

Ἀλλ' ἐὰν ἡ δευτέρα παράγωγος εἶνε ὡσαύτως 0, ἔχομεν

$$\sigma(\alpha+\varepsilon)-\sigma(\alpha)=\frac{\varepsilon^3}{1.2.3}\sigma'''(\alpha)+\frac{\varepsilon^4}{1.2.3.4}\sigma''''(\alpha+\mu\varepsilon).$$

καὶ ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ $\sigma(\alpha+\varepsilon)-\sigma(\alpha)$ δι' ἱκανῶς μικρὰς τιμὰς τοῦ ε εἶνε ὁμοειδὴς τῷ $\frac{\varepsilon^3}{1.2.3}\sigma'''(\alpha)$, συνάγεται, ὅτι δὲν δύναται νὰ διαφυλάξῃ τὸ ἑαυτῆς σημεῖον, ὅταν ὁ ε ἀλλάξῃ σημεῖον· ὥστε οὔτε μέγιστον εἶνε τότε ἡ τιμὴ σ(α), οὔτε ἐλάχιστον, ἐκτὸς ἂν εἶνε καὶ

$$\sigma'''(\alpha)=0.$$

Ἐξακολουθοῦντες τοιουτοτρόπως φθάνομεν εἰς τὴν ἑπομένην πρότασιν.

Ἵνα τιμή τις α τοῦ x καθιστᾷ τὴν συνάρτησιν σ(x) μέγιστον ἢ ἐλάχιστον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ μηδενίζῃ περιττόν τινα ἀριθμὸν παραγώγων αὐτῆς ἀπὸ τῆς πρώτης καὶ ἐφεξῆς κατὰ σειρὰν εἶνε *δὲ ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τῆς συναρτήσεως μέγιστον μέν, ἂν ἡ πρώτη ἐκ τῶν μὴ μηδενιζομένων παραγώγων* (ἥτις θὰ εἶνε ἀρτίας τάξεως) *εἶνε ἀρνητική, ἐλάχιστον δέ, ἐὰν θετική.*

192. Ἡ πρότασις αὕτη συμπίπτει τῇ ἐν τῷ ἐδαφίῳ (189) ἀναπτυχθείσῃ· διότι, ἂν μὲν τὸ πλῆθος τῶν μηδενιζομένων παραγώγων εἶνε περιττόν, ἀλλάσσει ἡ πρώτη παράγωγος σημεῖον κατὰ τὴν τιμὴν α καὶ ἡ συνάρτησις γίνεται μέγιστον ἢ ἐλάχιστον, ἂν δὲ εἶνε ἄρτιον, διαφυλάσσει τὸ ἑαυτῆς σημεῖον· ἐπομένως ἡ συνάρτησις οὔτε μέγιστον γίνεται οὔτε ἐλάχιστον.

Καὶ ὄντως, ἂν πᾶσαι αἱ παράγωγοι $\sigma'(x)$, $\sigma''(x)$,. . . μηδενίζωνται μέχρι τῆς $\sigma^{(\tau)}(x)$, ἀλλ' αὕτη διαφέρῃ τοῦ 0, θὰ εἶνε

$$\sigma'(\alpha+\varepsilon)=\frac{\varepsilon^{\tau}-1}{1.2.3...(\tau-1)}.\ \sigma^{(\tau)}(\alpha)+\ldots$$

καὶ θὰ ἔχῃ ἡ παράγωγος πλησίον τῆς τιμῆς α τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου $\varepsilon^{\tau-1}$ $\sigma^{\tau}(\alpha)$· ἐπομένως, ἂν μὲν εἶνε ὁ $\tau-1$ περιττὸς (ὅστις εἶνε ὁ ἀριθμὸς τῶν μηδενισθεισῶν παραγώγων), θὰ ἀλλάξῃ σημεῖον ἡ πρώτη παράγωγος μετὰ τοῦ ε· ἂν ὅμως ὁ $\tau-1$ εἶνε ἄρτιος, θὰ διαφυλάξῃ ἡ παράγωγος τὸ σημεῖον αὐτῆς ἀμετάβλητον.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1ον) *Εὑρεῖν τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως* $e^{x}+e^{-x}$.

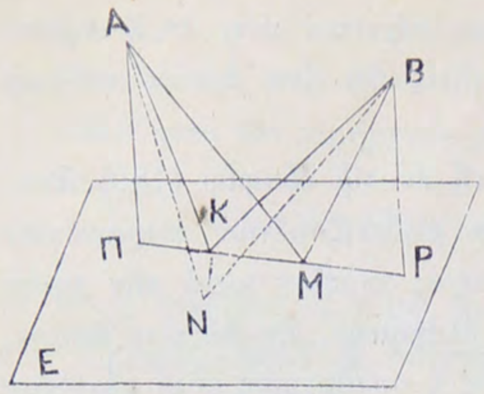
Ἡ παράγωγος αὐτῆς εἶνε

$$e^{x}-e^{-x} \quad \text{ἢ} \quad e^{x}-\frac{1}{e^{x}}$$

καὶ μηδενίζεται, μόνον ὅταν εἶνε $x=0$· ἐπειδὴ δὲ ἡ τιμὴ αὕτη καθιστᾷ τὴν δευτέραν παράγωγον θετικὴν συνάγεται, ὅτι δι' αὐτὴν ἡ δοθεῖσα συνάρτησις εἶνε ἐλάχιστον· ἐπομένως ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς δοθείσης συναρτήσεως εἶνε 2.

2ον) *Δίδεται ἐπίπεδον καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου κείμενα· ζητεῖται δὲ νὰ προσδιορισθῇ ἡ συντομωτάτη ὁδός, ἥτις φέρουσα ἐκ τοῦ Α εἰς τὸ Β ἐγγίζει ἐν τῷ μεταξὺ τὸ ἐπίπεδον.*

Ὅτι ἡ συντομωτάτη ὁδὸς θὰ σύγκειται ἐκ δύο εὐθειῶν γραμμῶν εἰς ἓν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου συναπτομένων, εἶνε πρόδηλον. Ἔστωσαν αἱ ΑΠ καὶ ΒΡ κάθετοι ἀπὸ τῶν σημείων ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον· ἡ συντο-



μωτάτη ὁδὸς θὰ ἐγγίζῃ τὸ ἐπίπεδον κατά τι σημεῖον τῆς ΠΡ· διότι θεωρήσωμεν ὁδόν τινα ΑΝΒ ἐγγίζουσαν τὸ ἐπίπεδον εἴς τι σημεῖον Ν ἐκτὸς τῆς ΠΡ κείμενον· ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΝΚ, κάθετος ἐπὶ τὴν ΠΡ, καὶ ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΑΚ καὶ ΚΒ, εἶνε φανερόν, ὅτι ἡ ὁδὸς ΑΚΒ εἶνε τῆς ΑΝΒ συντομωτέρα· (διότι ΑΚ$<$ΑΝ καὶ ΒΚ$<$ΒΝ). Ἔστω νῦν τυχὸν σημεῖον τῆς ΠΡ, τὸ Μ, ἀπέχον ἀπὸ τοῦ Π τὴν ἀπόστασιν x· ἐὰν τεθῇ

$$\text{ΑΠ}=\alpha,\qquad \text{ΒΡ}=\beta,\qquad \text{καὶ}\qquad \text{ΠΡ}=\gamma,$$

θὰ εἶνε $\qquad \text{ΑΜ}=\sqrt{\alpha^2+x^2},\qquad \text{ΒΜ}=\sqrt{\beta^2+(\gamma-x)^2},$

ὅθεν τὸ μῆκος τῆς ὁδοῦ ΑΜΒ παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἀθροίσματος

$$\sqrt{\alpha^2+x^2}+\sqrt{\beta^2+(\gamma-x)^2}\cdot$$

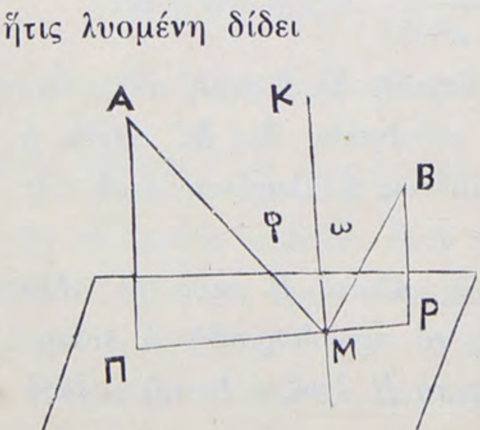
ταύτης δὲ τῆς συναρτήσεως τοῦ x πρόκειται νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον· ἡ παράγωγος αὐτῆς εἶνε

$$\frac{x}{\sqrt{\alpha^2+x^2}}-\frac{\gamma-x}{\sqrt{\beta^2+(\gamma-x)^2}}$$

καὶ ἑπομένως τὸ σημεῖον τῆς ΠΡ, τὸ εἰς τὴν ἐλαχίστην ὁδὸν ἀντιστοιχοῦν, ὁρίζεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{x}{\sqrt{\alpha^2+x^2}}=\frac{\gamma-x}{\sqrt{\beta^2+(\gamma-x)^2}}, \tag{1}$$

ἥτις λυομένη δίδει



$$\frac{x}{\alpha}=\frac{\gamma-x}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha+\beta}\quad\text{καὶ}\quad x=\frac{\alpha\gamma}{\alpha+\beta}.$$

Ἐὰν γράψωμεν τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν ὡς ἑξῆς

$$\frac{x}{\text{ΑΜ}}=\frac{\gamma-x}{\text{ΒΜ}}$$

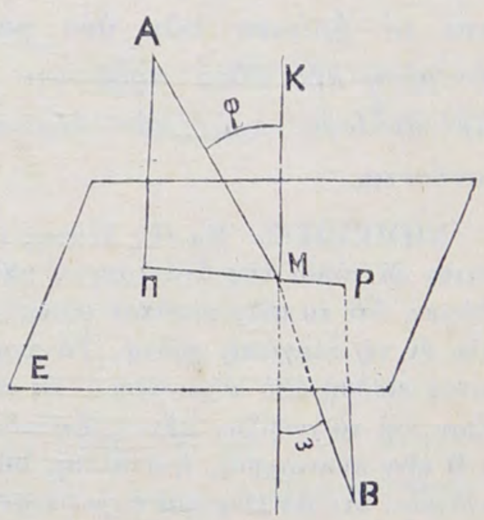
ἢ καὶ $\quad$ συν ΑΜΠ $=$ συν ΒΜΡ,

προκύπτει ΑΜΠ $=$ ΒΜΡ, ἢ $\varphi=\omega$, τουτέστιν *αἱ δύο εὐθεῖαι, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται ἡ συντομωτάτη ὁδός, σχηματίζουσι πρὸς τὸ ἐπίπεδον* (ἢ πρὸς τὴν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον) *ἴσας γωνίας*.

Σημειωσις. Τὸ σημεῖον, εἰς ὃ ἡ συντομωτάτη ὁδὸς θὰ ἐγγίζῃ τὴν ΠΡ, εὑρίσκεται γεωμετρικῶς, ἂν προσεκβληθῇ ἡ κάθετος ΑΠ καὶ ληφθῇ Πα = ΠΑ, ἔπειτα δὲ ἀχθῇ ἡ αΒ· αὕτη θὰ τέμνῃ τὴν ΠΡ κατὰ τὸ ζητούμενον σημεῖον· (ἰδὲ Στοιχεῖα Γεωμετρίας ἐδ. 161).

3ον) *Δύο ὁμογενεῖς τόποι χωρίζονται ἀπ' ἀλλήλων δι' ἐπιπέδου ἐπιφανείας· πρόκειται δὲ νὰ μεταβῇ κινητόν τι ἐξ ἑνὸς σημείου Α τοῦ πρώτου εἴς τι σημεῖον Β τοῦ δευτέρου, ἔχον ἐν μὲν τῷ πρώτῳ τόπῳ ταχύτητα* u *ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ ταχύτητα* v· *ζητεῖται, ποίαν ὁδὸν πρέπει νὰ ἀκολουθήσῃ τὸ κινητόν, ἵνα γίνῃ ἡ μετάβασις ἐν χρόνῳ ὅσον ἐνδέχεται ἐλαχίστῳ.*

Ἐν πρώτοις παρατηρητέον, ὅτι ἡ ὁδὸς θὰ σύγκειται ἐκ δύο εὐθειῶν· διότι ἐν ἑκατέρῳ τῶν τόπων ἡ κίνησις γίνεται ἰσοταχῶς καὶ ἑπομένως ὁ χρόνος εἶνε ἀνάλογος τοῦ διανυομένου διαστήματος. Ἂν δὲ ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Β ἀχθῶσιν αἱ κάθεται ΑΠ καὶ ΒΡ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ε, ἀποδεικνύεται ὡς καὶ ἐν τῷ προηγουμένῳ προβλήματι, ὅτι ἡ ζητουμένη ὁδὸς θὰ κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν καθέτων τούτων, ἤτοι θὰ συναντᾷ τὸ ἐπίπεδον κατά τι σημεῖον τῆς ΠΡ.



Τούτων οὕτως ἐχόντων, ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τῆς ΠΡ ἀπέχον ἀπὸ τοῦ Π τὴν ἀπόστασιν x· ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΜ καὶ ΒΜ καὶ παρασταθῇ διὰ τοῦ t, ὁ ἀπαιτούμενος χρόνος, ἵνα τὸ κινητὸν διανύσῃ τὴν ὁδὸν ΑΜΒ, αἱ δὲ ἀποστάσεις ΑΠ, ΒΡ, ΠΡ κατὰ σειρὰν διὰ τῶν α, β, γ, θὰ εἶνε

$$t = \frac{\sqrt{\alpha^2 + x^2}}{u} + \frac{\sqrt{\beta^2 + (\gamma - x)^2}}{v}$$

ταύτης δὲ τῆς συναρτήσεως τοῦ x ζητεῖται τὸ ἐλάχιστον.

Ἐὰν ἐξισώσωμεν τῷ 0 τὴν παράγωγον αὐτῆς, εὑρίσκομεν, ὅτι ἵνα ὁ χρόνος t γίνῃ ἐλάχιστος, πρέπει ἡ x νὰ πληροῖ τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{1}{u} \frac{x}{\sqrt{\alpha^2 + x^2}} = \frac{1}{v} \frac{\gamma - x}{\sqrt{\beta^2 + (\gamma - x)^2}}$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη, ἐξ ἧς πρέπει νὰ προσδιορισθῇ ἡ τιμὴ τῆς x ἡ πρὸς τὸν ἐλάχιστον χρόνον ἀντιστοιχοῦσα, ἀπαλλασσομένη ἀπὸ τῶν ῥιζικῶν γίνεται τετάρτου βαθμοῦ. Δυνάμεθα ὅμως καὶ χωρὶς νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, νὰ εὕρωμεν ἰδιότητά τινα γεωμετρικὴν τῆς ζητουμένης ὁδοῦ· πρὸς τοῦτο γράφομεν τὴν ἐξίσωσιν ὡς ἕπεται·

$$\frac{\text{συν}(\text{ΑΜΠ})}{u}=\frac{\text{συν}\ (\text{ΡΜΡ})}{v}$$

καὶ ἂν ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Μ ἡ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κάθετος ΜΚ καὶ παρασταθῶσιν αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας αὕτη σχηματίζει πρὸς τὰς εὐθείας ΑΜ καὶ ΜΒ διὰ τῶν φ καὶ ω, ἡ ἐξίσωσις γίνεται

$$\frac{\text{ημ}\varphi}{u}=\frac{\text{ημ}\omega}{v} \tag{1}$$

ἤτοι *τὰ ἡμίτονα τῶν δύο γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουσι τὰ δύο μέρη τῆς ὁδοῦ πρὸς τὴν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, πρέπει νὰ εἶνε ἀνάλογα πρὸς τὰς δύο ταχύτητας, μεθ' ὧν τὰ μέρη ταῦτα διανύονται.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐκ τῆς λύσεως τῶν δύο προηγουμένων προβλημάτων συνάγονται οἱ νόμοι τῆς ἀνακλάσεως καὶ τῆς διαθλάσεως τοῦ φωτός, ἐὰν παραδεχθῶμεν, ὅτι τὸ φῶς κινεῖται οὕτως, ὥστε νὰ μεταβαίνῃ ἀφ' ἑνὸς σημείου εἰς ἄλλο ἐν τῷ ἐλαχίστῳ χρόνῳ. Τὰ πειράματα δεικνύουσιν, ὅτι, ὅταν ἡ ἀκτὶς τοῦ φωτὸς εἰσδύῃ ἀπὸ ἀραιοτέρου εἰς πυκνότερον τόπον, πλησιάζει πρὸς τὴν κάθετον ἐπὶ τὸ χωρίζον αὐτοὺς ἐπίπεδον, τουτέστιν, ἂν ὁ τόπος, ἐν ᾧ εὑρίσκεται τὸ Β εἶνε πυκνότερος, ἢ ὁ ἄλλος, θὰ εἶνε $\omega<\varphi$· ἀλλὰ τότε ἐκ τῆς ἰσότητος (1) συνάγεται ὅτι θὰ εἶνε καὶ $v<u$· τουτέστιν ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς εἶνε μικροτέρα ἐν τῷ πυκνοτέρῳ τόπῳ.

Μέγιστα καὶ ἐλάχιστα πεπλεγμένων συναρτήσεων.

193. Ἐὰν ἡ συνάρτησις y, ἧς τινος ζητοῦνται τὰ μέγιστα καὶ τὰ ἐλάχιστα, ὁρίζηται ὑπὸ τῆς ἀλύτου ἐξισώσεως

$$\varphi(x,y)=0 \tag{1}$$

αἱ περὶ τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων προτάσεις κατ' οὐδὲν μεταβάλλονται, ἡ παράγωγος ὅμως y' δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,y'=0 \tag{1$'$}$$

καὶ ἂν παραδεχθῶμεν, ὅτι ἡ συνάρτησις $\varphi(x,y)$ καὶ αἱ μερικαὶ αὐτῆς παράγωγοι εἶνε πεπερασμέναι καὶ συνεχεῖς συναρτήσεις τῶν δύο μεταβλητῶν x καὶ y καὶ ὅτι πρὸς ἕκαστον σύστημα τιμῶν τῶν x καὶ y ἀντιστοιχεῖ μία ἐντελῶς ὡρισμένη τιμὴ ἑκάστης τῶν συναρτήσεων τούτων, πᾶσα τιμὴ τῆς x, πρὸς ἣν ἀντιστοιχεῖ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον τῆς y, θὰ ἐπαληθεύῃ τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0 \tag{2}$$

διότι ἡ τοιαύτη τιμὴ θὰ καθιστᾷ τὴν παράγωγον y' ἴσην τῷ 0, καὶ ἑπομένως θὰ μηδενίζῃ καὶ τὸ γινόμενον $\frac{\partial\varphi}{\partial y}y'$.

Αἱ δύο ἐξισώσεις (1) καὶ (2), (διάφοροι οὖσαι ἐν γένει ἀπ' ἀλλήλων) ὁρίζουσι τὰς δύο μεταβλητὰς x καὶ y. Ἔστω x_0, y_0 σύστημά τι τιμῶν ἐπαληθευουσῶν αὐτάς· ἡ τιμὴ y_0 θὰ εἶνε μέγιστον ἢ ἐλάχιστον ἂν ἡ δευτέρα παράγωγος y'' διαφέρῃ τοῦ 0 διὰ τὴν τιμὴν x_0 καὶ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν αὐτῇ y_0.

Πρὸς εὕρεσιν τῆς παραγώγου y'' διαφορίζομεν τὴν ἐξίσωσιν (1') πρὸς τὴν x καὶ παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ σύστημα x_0, y_0 μηδενίζει τὴν y' ὅτε εὑρίσκομεν

$$y''_0=-\frac{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}} \quad \text{διὰ τὰς τιμὰς } (x_0 y_0).$$

Ὁμοίως διὰ τῆς διαφορίσεως θὰ πορισθῶμεν, ἐὰν εἶνε ἀνάγκη, τὰς πρὸς τὸ σύστημα (x_0, y_0) ἀντιστοιχούσας τιμὰς τῶν παραγώγων τῶν ἀνωτέρων τάξεων.

*Παρατηρητέον δὲ ὅτι, ἂν τὸ σύστημα x_0, y_0, τὸ τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) ἐπαληθεῦον, μηδενίζῃ καὶ τὴν παράγωγον $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, ἡ ἐξίσωσις (1') ἀφανίζεται καὶ ἡ τιμὴ τῆς παραγώγου y' δὲν δύναται νὰ προσδιορισθῇ ἐξ αὐτῆς, ὥστε δὲν δυνάμεθα τότε νὰ βεβαιώσωμεν ὅτι ἡ πρὸς τὸ σύστημα τοῦτο ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τῆς παραγώγου y' εἶνε 0· ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ τιμὴ τῆς y' θὰ προσδιορισθῇ ἐκ τῆς ἐξισώσεως, ἥτις προκύπτει, ἂν διαφορίσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (1').

Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$y^3-3axy+x^3=0$$

ὁριζομένη συνάρτησις.

Αἱ τὰ μέγιστα καὶ τὰ ἐλάχιστα ὁρίζουσαι ἐξισώσεις εἶνε ἐνταῦθα

$$y^3-3axy+x^3=0$$
$$-ay+x^2=0$$

λαμβάνοντες δὲ τὴν τιμὴν τῆς y ἐκ τῆς δευτέρας καὶ ἀντικαθιστῶντες αὐτὴν εἰς τὴν πρώτην, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$x^6-2\alpha^3x^3=0=x^3(x^3-2\alpha^3)$$

ἐξ ἧς ἢ $x=0$ ἢ $x=\alpha\sqrt[3]{2}$

πρὸς τὴν τιμὴν $x=0$ ἀντιστοιχεῖ ἡ $y=0$

πρὸς δὲ τὴν $x=\alpha\sqrt[3]{2}$ ἡ $y=\alpha\sqrt[3]{4}$

ὥστε ἔχομεν τὰ δύο συστήματα $(0,0)$ καὶ $(\alpha\sqrt[3]{2},\ \alpha\sqrt[3]{4})$

ἀλλὰ τὸ σύστημα $(0, 0)$ μηδενίζει ἀμφοτέρας τὰς μερικὰς παραγώγους τῆς δοθείσης συναρτήσεως $y^3-3axy+x^3$· ἑπομένως ἡ πρὸς αὐτὸ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τῆς παραγώγου δὲν δύναται νὰ εὑρεθῇ ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$(y^2-\alpha x)\,y'+(x^2-\alpha y)=0 \qquad (3)$$

ἀλλ' ἐὰν διαφορίσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην καὶ ἐν τῇ προκυπτούσῃ

$$2yy'^2-2\alpha y'+(y^2-\alpha x)y''+2x=0 \qquad (4)$$

ὑποθέσωμεν $x=0$ καὶ $y=0$, εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ μία ἐκ τῶν δύο τιμῶν τῆς y' εἶνε 0· πρὸς εὕρεσιν τῆς ἀντιστοιχούσης τιμῆς τῆς y'' διαφορίζομεν καὶ πάλιν καὶ ἐν τῇ προκυπτούσῃ ποιοῦμεν $x=0$, $y=0$, $y'=0$, ὅτε εὑρίσκομεν $3ay''=2$· ὥστε *ἐκ τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως* y *τῶν πρὸς τὴν τιμὴν* $x=0$ *ἀντιστοιχουσῶν μία εἶνε ἐλαχίστη.*

Διὰ τὸ δεύτερον σύστημα εὑρίσκομεν ἐκ τῶν ἐξισώσεων (3) καὶ (4) ὅτι ἡ δευτέρα παράγωγος y'' εἶνε ἀρνητική, ἑπομένως ἡ τιμὴ

$$y=\alpha\sqrt[3]{4},$$

ἡ πρὸς τὴν τιμὴν $x=\alpha\sqrt[3]{2}$ ἀντιστοιχοῦσα, εἶνε μέγιστον.

194. Ἔστωσαν γενικῶς ν συναρτήσεις τῆς x, αἱ $y, z, \omega \ldots v$ ὁριζόμεναι ὑπὸ τῶν ν ἐξισώσεων

$$\left.\begin{array}{l}\sigma(x, y, z, \omega \ldots v)=0\\ f(x, y, z, \omega \ldots v)=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varphi(x, y, z, \omega \ldots v)=0\end{array}\right\} \qquad (1)$$

Ἐὰν ζητῶνται τὰ μέγιστα ἢ τὰ ἐλάχιστα μιᾶς ἐξ αὐτῶν, ἔστω τῆς y, (γίνωσι δὲ ἐπὶ τῶν δοθεισῶν συναρτήσεων σ, f,. . φ αἱ προηγουμένως ἐπὶ τῆς $\varphi(x,y)$ γενόμεναι ὑποθέσεις), διαφορίζομεν τὰς ἐξισώσεις ταύτας πρὸς τὴν x καὶ ποιοῦμεν ἔπειτα $y'=0$· οὕτως εὑρίσκομεν, ὅτι πᾶσα τιμὴ τῆς x, πρὸς ἣν ἀντιστοιχεῖ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον τῆς y, ἀνάγκη νὰ ἐπαληθεύῃ, μετὰ τῶν πρὸς αὐτὴν ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν τῶν ἄλλων μεταβλητῶν, τὰς ἑπομένας ἐξισώσεις

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\frac{\partial\sigma}{\partial z}.z'+\frac{\partial\sigma}{\partial\omega}.\,\omega'+\ldots+\frac{\partial\sigma}{\partial v}.\,v'=0\\ \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}.z'+\frac{\partial f}{\partial\omega}.\,\omega'+\ \ .+\frac{\partial f}{\partial v}.\,v'=0\\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}.z'+\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}.\,\omega'+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial v}.\,v'=0\end{aligned}\qquad(1')$$

ἐν ταῖς ἐξισώσεσι ταύταις περιέχονται αἱ παράγωγοι τῶν $\nu-1$ ἄλλων συναρτήσεων z, ω. . v, ἐὰν δὲ ἀπαλειφθῶσιν αὗται, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$(2)\qquad\begin{vmatrix}\frac{\partial\sigma}{\partial x} & \frac{\partial\sigma}{\partial z} & \frac{\partial\sigma}{\partial\omega}\cdots & \frac{\partial\sigma}{\partial v}\\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial\omega}\cdots & \frac{\partial f}{\partial v}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} & \frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\cdots & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\end{vmatrix}=0$$

ἥτις περιέχει μόνον τὴν x καὶ τὰς συναρτήσεις αὐτῆς y, z, ω,. . . v. Ἡ δὲ ἐξίσωσις αὕτη καὶ αἱ ν δοθεῖσαι (1) ἀποτελοῦσι σύστημα, ἐξ οὗ ὁρίζονται αἱ ζητούμεναι τιμαὶ τῆς x καὶ αἱ πρὸς αὐτὰς ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τῶν ν συναρτήσεων αὐτῆς y, z, ω,. . v.

*Σημειωσις. Ἐάν τι σύστημα τιμῶν x_0, y_0. . . v_0 ἐπαληθεῦον τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2), μηδενίζῃ καὶ τὴν ὁρίζουσαν

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial\sigma}{\partial y} & \frac{\partial\sigma}{\partial z}\cdots & \frac{\partial\sigma}{\partial v}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdots & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\end{vmatrix}$$

διὰ τὸ τοιοῦτο σύστημα αἱ τιμαὶ τῶν παραγώγων δὲν δύνανται νὰ εὑρεθῶσιν ἐκ τῶν ἐξισώσεων, ἅς τινας δίδουσιν αἱ (1) διαφοριζόμεναι, θὰ εὑρεθῶσιν ὅμως ἐκ τῶν διὰ τῆς δευτέρας διαφορίσεως προκυπτουσῶν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Ἐνίοτε ζητεῖται τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον δεδομένης συναρτήσεως $F(x, y, \ldots v)$, ἥτις ἐξαρτᾶται ἐκ μ μεταβλητῶν x, $y, \ldots v$, μεταξὺ τῶν ὁποίων δίδονται (μ-1) ἐξισώσεις τῆς μορφῆς (1).

Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀνάγεται ἀμέσως εἰς τὸ προηγούμενον. διότι ἂν αἱ δοθεῖσαι μ—1 ἐξισώσεις προσλάβωσι καὶ τὴν ἐξίσωσιν

$$u - F(x, y, z, \ldots v) = 0$$

ἀποτελοῦσι σύστημα μ ἐξισώσεων ἐχουσῶν μ+1 μεταβλητάς, τουτέστι τὰς $u, x, y, z \ldots v$· ζητεῖται δὲ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον μιᾶς ἐξ αὐτῶν, τῆς u.

Προβλήματα.

1) *Ἐκ τῶν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένων κώνων τίς ἔχει τὸν μέγιστον ὄγκον;*

Ἔστω α ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας· ἐὰν θεωρήσωμεν τὸν τυχόντα ἐκ τῶν ῥηθέντων κώνων καὶ παραστήσωμεν διὰ y τὸ ὕψος καὶ διὰ x τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως αὐτοῦ, διὰ δὲ τοῦ ω τὸν ὄγκον αὐτοῦ, θὰ εἶνε

$$\omega = \frac{1}{3} \pi x^2 . y \qquad (1)$$

ἀλλ' ἐὰν διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κώνου νοήσωμεν ἐπίπεδον, τέμνεται ἡ μὲν σφαῖρα κατὰ μέγιστον κύκλον, ὁ δὲ κῶνος κατὰ τρίγωνον ἰσοσκελὲς ἔχον τὸ ὕψος y καὶ βάσιν $2x$· ἐκ δὲ τοῦ σχήματος εὑρίσκεται ἀμέσως ἡ τὰς μετάβλητὰς x καὶ y συνδέουσα ἐξίσωσις

$$x^2 + y^2 - 2\alpha y = 0 \qquad (2)$$

ὥστε ἔχομεν τὰς τρεῖς μεταβλητὰς x, y, ω, αἵτινες συνδέονται πρὸς ἀλλήλας διὰ τῶν δύο ἐξισώσεων (1) καὶ (2), καὶ ζητεῖται τὸ μέγιστον τῆς ω.

Διαφορίζοντες τὰς ἐξισώσεις καὶ ὑποθέτοντες ω′, ἢ $d\omega$, ἴσον τῷ 0, εὑρίσκομεν τὰς ἑπομένας

$$x^2 dy + 2yx . dx = 0$$
$$x dx + (y - \alpha) dy = 0$$

ἐξ ὧν ἀπαλείφοντες τὰ διαφορικὰ (τουτέστι τὸν λόγον αὐτῶν) εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$x^2 = 2y(y-\alpha)\cdot$$

τὴν ὁποίαν προσλαβοῦσαι αἱ δύο πρῶται δίδουσι τὴν λύσιν

$$y = \frac{4}{3}\alpha, \qquad x = \frac{2}{3}\alpha\sqrt{2}, \qquad \text{καὶ} \quad \omega = \frac{32}{81}\pi.\alpha^3.$$

ἐξ ἧς βλέπομεν, ὅτι *ὁ τὸν μέγιστον ὄγκον ἔχων κῶνος ἔχει ὕψος τὰ δύο τρίτα τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Ἡ εὕρεσις τῆς δευτέρας παραγώγου τοῦ ω εἶνε ἐνταῦθα περιττή διότι ἡ φύσις τοῦ προβλήματος δεικνύει, ὅτι ὑπάρχει μέγιστον.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Ἐὰν ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) ἀπαλειφθῇ ἡ x, προκύπτει

$$\omega = \frac{1}{3}\pi y^2(2\alpha - y)$$

ὥστε ἀνάγεται ἡ εὕρεσις τοῦ μεγίστου τοῦ ω εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ μεγίστου δεδομένης συναρτήσεως μιᾶς μεταβλητῆς.

2) *Ἐκ τῶν τὰς αὐτὰς πλευρὰς ἐχόντων τετραπλεύρων ποῖον ἔχει τὴν μεγίστην ἐπιφάνειαν;*

Ἔστωσαν α, β, γ, δ αἱ πλευραὶ τῶν εἰρημένων τετραπλεύρων καὶ ϑ, ω δύο ἀπέναντι γωνίαι τοῦ τυχόντος ἐξ αὐτῶν (αἱ περιεχόμεναι ὑπὸ τῶν πλευρῶν α, β καὶ γ, δ), οὗτινος τὸ ἐμβαδὸν παριστῶμεν διὰ τοῦ Ε· ἐὰν ἀχθῇ ἡ διαγώνιος, ἡ ἀπέναντι τῶν γωνιῶν ϑ καὶ ω, διαιρεῖ τὸ τετράπλευρον εἰς δύο τρίγωνα, ἐξ ὧν εὑρίσκομεν τὰς ἐξισώσεις

$$2E = \alpha\beta\,\eta\mu\vartheta + \gamma\delta\,\eta\mu\omega$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\,\sigma\upsilon\nu\vartheta = \gamma^2 + \delta^2 - 2\gamma\delta\,\sigma\upsilon\nu\omega$$

ἔχομεν ἄρα μεταξὺ τῶν τριῶν μεταβλητῶν, ϑ, ω καὶ Ε, δύο ἐξισώσεις ὥστε αἱ δύο ἐξ αὐτῶν, ἔστωσαν αἱ Ε καὶ ω, εἶνε συναρτήσεις τῆς λοιπῆς ϑ.

Διαφορίζοντες τὰς ἐξισώσεις ταύτας εὑρίσκομεν

$$2.dE = \alpha\beta.\sigma\upsilon\nu\vartheta.d\vartheta + \gamma\delta.\sigma\upsilon\nu\omega.d\omega$$

$$\alpha\beta\,\eta\mu\vartheta.d\vartheta = \gamma\delta.\eta\mu\omega.d\omega$$

Ἐκ δὲ τούτων προκύπτει

$$dE = \eta\mu(\omega+\vartheta)\frac{1}{2}.\alpha\beta.\frac{d\vartheta}{\eta\mu\omega}$$

καὶ ἵνα γίνῃ $dE = 0$, ἀνάγκη νὰ εἶνε $\eta\mu(\vartheta+\omega) = 0$ τουτέστιν $\omega + \vartheta = 180^0\cdot$ (διότι αἱ λύσεις $\omega + \vartheta = 0$, ἢ $= 360$ ἢ 540 κτλ. δὲν ἁρμόζουσι προδήλως εἰς τὸ προκείμενον πρόβλημα)· ὥστε *ἐκ πάντων τῶν τὰς αὐτὰς πλευρὰς ἐχόντων τετραπλεύρων μέγιστον εἶνε τὸ εἰς κύκλον ἐγγράψιμον.*

Εὐκόλως ἐκ τούτου ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ αὐτὸ ἀληθεύει καὶ περὶ πάντων ἐν γένει τῶν πολυγώνων τῶν τὰς αὐτὰς πλευρὰς ἐχόντων.

*ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

195. Αἱ περὶ τῶν μεγίστων καὶ τῶν ἐλαχίστων ἀποδειχθεῖσαι προτάσεις (ἐδ. 190) ὑποθέτουσι, ὅτι αἱ μεταβληταί, ἅς τινας ἐν ἑκάστῳ προβλήματι θεωροῦμεν, πλὴν τῶν ἐξισώσεων, δι' ὧν συνδέονται πρὸς ἀλλήλας, οὐδένα ἔχουσιν ἄλλον περιορισμόν· μάλιστα δὲ ὅτι ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ δύναται νὰ λάβῃ πᾶσαν τιμὴν θετικὴν ἢ ἀρνητικήν.

Ἀλλ' εἰς πλεῖστα προβλήματα, καὶ μάλιστα γεωμετρικά, αἱ μεταβληταί, πλὴν τῶν ἐξισώσεων, ὑπόκεινται καὶ εἴς τινας ἄλλους περιορισμοὺς ἐκφραζομένους δι' ἀνισοτήτων καὶ πηγάζοντας ἐκ τῆς φύσεως τῶν ποσοτήτων, τὰς ὁποίας παριστῶσιν. Εὐνόητον δὲ εἶνε, ὅτι τότε δέον καὶ οἱ περιορισμοὶ νὰ λαμβάνωνται ὑπ' ὄψιν· διότι ἕνεκεν αὐτῶν δύναται τὸ εὑρεθὲν μέγιστον ἢ ἐλάχιστον νὰ μὴ ἁρμόζῃ εἰς τὸ πρόβλημα· ὁμοίως εἶνε δυνατὸν οἱ περιορισμοὶ νὰ γίνωνται αἴτιοι τοῦ μεγίστου ἢ τοῦ ἐλαχίστου, ἄνευ δ' αὐτῶν οὐδὲν τοιοῦτον νὰ ὑπάρχῃ. Ταῦτα γίνονται φανερὰ ἐκ τῶν ἑπομένων προβλημάτων.

1) *Ἐκ τῶν εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένων ὀρθογωνίων ποῖον περιστραφὲν περὶ τὴν ΑΒ γράφει τὸν ἔχοντα τὴν μεγίστην ἐπιφάνειαν κύλινδρον;*

Ἐκ τῶν εἰρημένων ὀρθογωνίων ἔστω τυχὸν τὸ ΚΜΠΑ· ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὴν βάσιν ΑΠ καὶ διὰ τοῦ y τὸ ὕψος ΑΚ τοῦ ὀρθογωνίου τούτου, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν τοῦ γραφομένου κυλίνδρου διὰ τοῦ Ε, εὑρίσκομεν $\quad E = 2\pi(y^2 + xy)$

ἀλλ' ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΑΜ, διαιρεῖ τὸ τρίγωνον εἰς δύο ἄλλα, ἔχοντα βάσεις τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, ἃς παριστῶμεν διὰ γ καὶ β, ὕψη δὲ τὰ x καὶ y. Ἐντεῦθεν συνάγεται ἡ τὰ x καὶ y συνδέουσα ἐξίσωσις

$$\beta x + \gamma y = \beta\gamma\cdot$$

ὥστε ἔχομεν τρεῖς μεταβλητάς, x, y καὶ Ε, συνδεομένας διὰ δύο ἐξισώσεων, ζητοῦμεν δὲ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς Ε.

Ἡ κατὰ τὰ προηγούμενα εὑρισκομένη τρίτη ἐξίσωσις, ἥν τινα ἐπαληθεύουσιν αἱ αὐταὶ μεταβληταί, ὅταν ἡ Ε γίνῃ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον, εἶνε ἡ ἀκόλουθος $\beta(x+2y)=\gamma y$.

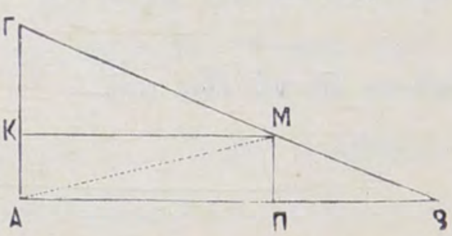
Ἐκ δὲ ταύτης καὶ τῶν δύο πρώτων εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς

$$y=\frac{\beta\gamma}{2(\gamma-\beta)},\qquad x=\frac{\gamma(\gamma-2\beta)}{2(\gamma-\beta)},\qquad E=\frac{\pi\beta\gamma^2}{2(\gamma-\beta)}.$$

Ἀλλ' ἡ φύσις τοῦ προκειμένου προβλήματος εἶνε τοιαύτη, ὥστε αἱ μεταβληταὶ x καὶ y πρέπει νὰ πληρῶσι καὶ τοὺς περιορισμοὺς

$$0<x<\gamma$$
$$0<y<\beta\cdot$$

οἱ δὲ περιορισμοὶ οὗτοι πληροῦνται (ὥς τις εὐκόλως εὑρίσκει) ὑπὸ τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν, μόνον ὅταν εἶνε $\gamma>2\beta$· τότε δὲ ἡ εὑρεθεῖσα λύσις εἶνε μέγιστον.



Ἀλλ' ἐὰν εἶνε $\gamma<2\beta$, αἱ εὑρεθεῖσαι τιμαὶ τῶν μεταβλητῶν x, y ἔχουσιν ἐναντία σημεῖα· ὥστε ἓν ἐξ αὐτῶν εἶνε ἀρνητικὸν καὶ ἡ λύσις ἀπορρίπτεται, ὡς μὴ ἁρμόζουσα εἰς τὸ προκείμενον πρόβλημα.

Ἵνα εὕρωμεν τότε τὸν κύλινδρον, ὅστις ἔχει τὴν μεγίστην ἢ τὴν ἐλαχίστην ἐπιφάνειαν, παρατηροῦμεν, ὅτι, μεταβαλλομένου τοῦ x ἀπὸ 0 μέχρι γ, ἡ παράγωγος $\frac{dE}{dx}$ οὐδαμοῦ μηδενίζεται (διότι ἡ μηδενίζουσα τὴν παράγωγον τιμὴ κεῖται ἐκτὸς τοῦ διαστήματος τούτου), ἑπομένως φυλάττει ἓν καὶ τὸ αὐτὸ πανταχοῦ σημεῖον· ὥστε ἡ ἐπιφάνεια Ε ἢ αὐξάνει συνεχῶς, ἢ ἐλαττοῦται συνεχῶς· ἀλλὰ διὰ $x=0$ εἶνε $E=2\pi\beta^2$, διὰ δὲ $x=\gamma$ εἶνε $E=0$· ὥστε ἡ συνάρτησις Ε προβαίνει ἐλαττουμένη καὶ γίνεται μέγιστον μὲν διὰ $x=0$, ἐλάχιστον δὲ διὰ $x=\gamma$.

Ἐν γένει παρατηροῦμεν, ὅτι, ὅταν ἡ παράγωγος συναρτήσεως ἔν τινι διαστήματι φυλάττῃ ἀμετάβλητον τὸ ἑαυτῆς σημεῖον, δὲν δύναται δὲ ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ νὰ ἐξέλθῃ τοῦ διαστήματος τούτου, αἱ ἄκραι τιμαὶ τῆς συναρτήσεως εἶνε ἡ μὲν μία ἡ μεγίστη, ἡ δὲ ἄλλη ἡ ἐλαχίστη.

2) *Δοθείσης ἐλλείψεως, εὑρεῖν ἐκ τῶν εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένων ὀρθογωνίων τὸ ἔχον τὴν μεγίστην ἢ τὴν ἐλαχίστην περίμετρον.*

Ἔστω τυχὸν ἐκ τῶν εἰρημένων ὀρθογωνίων τὸ ΜΝΡΣ, ἔχον τὴν κορυφὴν Μ ἐν τῇ θετικῇ τῶν ἀξόνων γωνίᾳ· ἐὰν αἱ συντεταγμέναι τοῦ Μ παρασταθῶσι διὰ x, y καὶ ἡ περίμετρος τοῦ ὀρθογωνίου διὰ τοῦ φ, τὰ δὲ μήκη τῶν ἀξόνων τῆς ἐλλείψεως διὰ 2α, 2β, θὰ εἶνε

$$\varphi = 4(x+y)\cdot \qquad (1)$$

συνδέονται δὲ τὰ x, y διὰ τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1. \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων εὑρίσκομεν κατὰ τὰ προειρημένα, ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν μεταβλητῶν x, y, φ, αἱ πρὸς μέγιστον ἢ πρὸς ἐλάχιστον τοῦ φ ἀντιστοιχοῦσαι, ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{x}{\alpha^2}=\frac{y}{\beta^2}.$$

ἀνάγκη δὲ νὰ εἶνε καὶ

$$0<x<\alpha$$
$$0<y<\beta.$$

Ἐκ τῶν τριῶν ἐξισώσεων εὑρίσκομεν τὰς ἑπομένας τιμὰς τῶν μεταβλητῶν

$$x=\frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \qquad y=\frac{\beta^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \qquad \varphi=4\sqrt{\alpha^2+\beta^2},$$

αἵτινες ἀντιστοιχοῦσι πρὸς μέγιστον τοῦ φ (διότι φ γίνεται καὶ 0 ἐὰν $x=-y$).

Ἐλάχιστον οὐδὲν εὑρέθη· διότι οὐδὲ ὑπάρχει, ὅταν αἱ μεταβληταὶ εἰς οὐδένα ἄλλον ὑπόκεινται περιορισμὸν ἢ μόνον νὰ ἐπαληθεύωσι τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2)· ἀλλὰ τὸ προκείμενον πρόβλημα προδήλως ἐπιδέχεται καὶ ἐλάχιστον. Ἵνα εὕρωμεν τοῦτο, παρατηροῦμεν, ὅτι ἐν τῷ διαστήματι $x=0\ldots\alpha$, ἐν τῷ ὁποίῳ πρέπει νὰ περιορίσωμεν τὴν μεταβλητὴν x, ἡ παράγωγος $\frac{d\varphi}{dx}$ μόνον ἅπαξ ἀλλάσσει σημεῖον, μεταβαίνουσα ἐκ τοῦ θετικοῦ εἰς τὸ ἀρνητικόν· ἐλάχισται λοιπὸν τιμαὶ τοῦ φ εἶναι αἱ ἄκραι· ἐκ δὲ τούτων ἐλαχίστη εἶνε ἡ ἀντιστοιχοῦσα πρὸς $x=0$, ἤτοι ἡ $\varphi=4\beta$.

Μέγιστα καὶ ἐλάχιστα συναρτήσεων ἐξαρτωμένων ἐκ πολλῶν μεταβλητῶν ἀνεξαρτήτων ἀπ᾽ ἀλλήλων.

196. Ἔστωσαν ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ αἱ $x, y, z, \ldots$, συνάρτησις δ᾽ αὐτῶν ἡ $\varphi(x, y, z, \ldots)$. Ἐὰν ἡ πρὸς τὰς τιμὰς $x_0, y_0, z_0, \ldots$ τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τῆς συναρτήσεως εἶνε ἡ μεγίστη τῶν τιμῶν αὐτῆς, ὅταν αἱ μεταβληταὶ $x, y, z, \ldots$ περιορισθῶσι περὶ τὰς τιμὰς $x_0, y_0, z_0, \ldots$ ἑκάστη ἐντὸς διαστήματος ἱκανῶς μικροῦ, ἡ τιμὴ αὕτη $\varphi(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ λέγεται *μέγιστον*. Ἐὰν δὲ ἡ τιμὴ $\varphi(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ εἶνε ἡ ἐλαχίστη τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως, ὅταν αἱ μεταβληταὶ ὁμοίως περιορισθῶσιν, ἡ τιμὴ αὕτη λέγεται *ἐλάχιστον*.

Ὁ ὁρισμὸς οὗτος τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων δύναται προδήλως νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς.

Μέγιστον μὲν λέγεται ἡ τιμὴ $\varphi(x_0, y_0, z_0, \ldots)$, ἐὰν ἡ διαφορὰ

$$\varphi(x_0+\varepsilon, y_0+\eta, z_0+\zeta, \ldots)-\varphi(x_0, y_0, z_0, \ldots)$$

μένῃ πάντοτε ἀρνητική, ἐνόσῳ αἱ αὐξήσεις $\varepsilon, \eta, \zeta, \ldots$ μένωσιν ἐντὸς τῶν διαστημάτων

$$-h<\varepsilon<h$$
$$-k<\eta<k$$
$$-\vartheta<\zeta<\vartheta\cdot$$

ἐλάχιστον δέ, ἐὰν ἡ αὐτὴ διαφορά, ὑπὸ τοὺς αὐτοὺς ὅρους μένῃ πάντοτε θετική.

Ὅταν ἡ συνάρτησις $\varphi(x, y, z, \ldots)$ εἶνε συνεχὴς καὶ διαφορίσιμος, καὶ αἱ παράγωγοι αὐτῆς ὡσαύτως (μέχρι τινὸς τάξεως), δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰ μέγιστα καὶ τὰ ἐλάχιστα αὐτῆς διὰ τοῦ τύπου τοῦ Taylor ὡς ἕπεται.

Ἀναπτύσσοντες τὴν διαφορὰν

$$\varphi(x_0+\varepsilon, y_0+\eta, z_0+\zeta, \ldots)-\varphi(x_0, y_0, z_0, \ldots)$$

κατὰ τὰς δυνάμεις τῶν αὐξήσεων $\varepsilon, \eta, \zeta, \ldots$ καὶ περιορίζοντες τὸ ἀνάπτυγμα εἰς τὰς δύο πρώτας διαστάσεις, εὑρίσκομεν

$$\varepsilon\varphi(x_0, y_0, z_0, \ldots)_x+\eta\varphi(x_0, y_0, z_0, \ldots)_y+\zeta.\varphi(x_0, y_0, z_0, \ldots)_z$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi(x_0, \ldots)_{x^2}+\frac{\varepsilon}{1}.\frac{\eta}{1}\varphi(x_0, \ldots)_{xy}+\frac{\eta^2}{1.2}\varphi(x_0, \ldots)_{y^2}+\frac{\zeta^2}{1.2}\varphi(x_0 \ldots)_{z^2}+\ldots$$

. . . . , ἀλλ' ἂν μηδενίσωμεν πάσας τὰς αὐξήσεις, πλὴν τῆς ε, ἡ διαφορὰ γίνεται

$$\varepsilon\varphi(x_0, y_0, \dots)x + \frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi(x_0, y_0, \dots)x^2 + \dots$$

καὶ ἵνα διαφυλάττῃ τὸ ἑαυτῆς σημεῖον, ὅταν ἡ αὔξησις ε ἀπὸ θετικῆς τραπῇ εἰς ἀρνητικήν, ἀνάγκη νὰ εἶνε

$$\varphi(x_0, y_0, \dots)x = 0\cdot$$

ἐπειδὴ δὲ τοῦτο προδήλως ἐφαρμόζεται καὶ ἐφ' ἑκάστης τῶν λοιπῶν αὐξήσεων, συνάγεται, ὅτι, *ἵνα ἡ πρὸς τὰς τιμὰς $x_0, y_0, z_0, \dots$ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τῆς συναρτήσεως $\varphi(x_0, y_0, z_0, \dots)$ ᾖ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον, ἀνάγκη νὰ εἶνε*

$$\varphi(x_0, \dots)x = 0 \qquad \varphi(x_0, \dots)y = 0 \qquad \varphi(x_0, \dots)z = 0 \dots,$$

ἐξ ὧν καὶ $\qquad d\varphi = 0$

τοῦτ' ἔστιν ἀνάγκη αἱ τιμαὶ $x_0, y_0, \dots$ νὰ μηδενίζωσι πάσας τὰς παραγώγους τῆς πρώτης τάξεως, ἤτοι τὸ διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως.

Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι θὰ εὕρωμεν πάντα τὰ συστήματα τιμῶν τῶν μεταβλητῶν $x, y, z, \dots$ διὰ τὰ ὁποῖα ἡ συνάρτησις $\varphi(x, y, z, \dots)$ γίνεται μέγιστον ἢ ἐλάχιστον, ἂν λύσωμεν τὰς ἐξισώσεις

$$\varphi(x, y, \dots)x = 0 \qquad \varphi(x, y, \dots)y = 0 \dots$$

ὧν τὸ πλῆθος εἶνε ἴσον τῷ ἀριθμῷ τῶν ἀγνώστων.

Ἐάν τι σύστημα τιμῶν $x_0, y_0, z_0, \dots$ πληροῖ τὰς ἐξισώσεις ταύτας, ἀνάγκη νὰ πληροῖ καί τινας ἄλλους ὅρους, τοὺς ὁποίους παρακατιόντες θὰ ἀναπτύξωμεν, ἵνα ἡ πρὸς αὐτὸ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τῆς συναρτήσεως ᾖ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον. Παρατηρητέον ὅμως, ὅτι ἡ τῶν δευτέρων τούτων ὅρων ἔρευνα ἀποβαίνει περιττή, ὅταν ἐκ τῆς φύσεως τοῦ προβλήματος εἶνε γνωστὴ ἡ ὕπαρξις τοῦ μεγίστου ἢ τοῦ ἐλαχίστου, αἱ δὲ ἐξισώσεις μόνον ὑφ' ἑνὸς συστήματος τιμῶν ἐπαληθεύωνται.

Ἐφαρμογαί.

1) Εὑρεῖν τὸ μέγιστον τῆς συναρτήσεως

$$\omega = x^\mu y^\nu (\alpha - x - y)^\lambda,$$

ἔνθα μ, ν καὶ λ παριστῶσιν ἀκεραίους καὶ θετικοὺς ἀριθμούς.

Αἱ μερικαὶ αὐτῆς παράγωγοι εἶνε

$$\mu x^{\mu-1} y^\nu (\alpha - x - y)^\lambda - \lambda x^\mu y^\nu (\alpha - x - y)^{\lambda-1}$$
$$\nu x^\mu . y^{\nu-1} (\alpha - x - y)^\lambda - \lambda x^\mu y^\nu (\alpha - x - y)^{\lambda-1},$$

ἐξισοῦντες δ' αὐτὰς τῷ 0, εὑρίσκομεν τὰς ἐξισώσεις

$$x^{\mu-1} y^{\nu} (\alpha - x - y)^{\lambda-1} \left\{ \mu(\alpha - x - y) - \lambda x \right\} = 0$$

$$x^{\mu} y^{\nu-1} (\alpha - x - y)^{\lambda-1} \left\{ \nu(\alpha - x - y) - \lambda y \right\} = 0.$$

Ἀλλ' ὅταν εἶνε $x = 0$, ἢ $y = 0$, ἢ $\alpha - x - y = 0$, ἡ δοθεῖσα συνάρτησις γίνεται 0· ὥστε ἀνάγκη νὰ εἶνε

$$\mu(\alpha - x - y) - \lambda x = 0$$

$$\nu(\alpha - x - y) - \lambda y = 0\cdot$$

ἐκ τούτων ἕπεται ἀμέσως διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς τοῦ $\alpha - x - y$

$$\nu x = \mu y \quad \text{ἢ} \quad \frac{x}{\mu} = \frac{y}{\nu}\cdot$$

ἀντικαθιστῶντες δὲ τὸ μy ἐν τῇ πρώτῃ ὑπὸ τοῦ ἴσου αὐτῷ νx, εὑρίσκομεν

$$x = \frac{\alpha\mu}{\mu+\nu+\lambda}, \quad y = \frac{\alpha\nu}{\mu+\nu+\lambda}, \quad \omega = \left(\frac{\alpha}{\mu+\nu+\lambda}\right)^{\mu+\nu+\lambda} . \mu^{\mu} . \nu^{\nu} . \lambda^{\lambda} .$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ πρόβλημα προδήλως ἐπιδέχεται μέγιστον, συνάγεται, ὅτι αἱ τιμαὶ αὗται καθιστῶσι τὴν δοθεῖσαν συνάρτησιν μέγιστον.

2) *Εὑρεῖν τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν δοθέντος σημείου ἀπὸ δεδομένης ἐπιφανείας.*

Ἔστωσαν x', y', z' αἱ συντεταγμέναι τοῦ δοθέντος σημείου καὶ $z = \varphi(x, y)$ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας· ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ ω τὴν ἀπόστασιν τοῦ δοθέντος σημείου ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου τῆς ἐπιφανείας, θὰ εἶνε

$$\omega^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

εἶνε δὲ ἡ ἀπόστασις ω συνάρτησις τῶν δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν x καὶ y (διότι $z = \varphi(x, y)$). Λαμβάνοντες τὰς δύο μερικὰς παραγώγους τοῦ ω πρὸς x καὶ y καὶ ἐξισοῦντες αὐτὰς τῷ 0, εὑρίσκομεν

$$\begin{aligned} (x - x') + (z - z')p &= 0 \\ (y - y') + (z - z')q &= 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

ἔνθα p καὶ q δηλοῦσι τὰς μερικὰς παραγώγους τοῦ z πρὸς τὰς x καὶ y, ἤτοι τὰς $\varphi(x,y)_x$ καὶ $\varphi(x,y)_y$.

Αἱ δύο αὗται ἐξισώσεις προσλαβοῦσαι καὶ τὴν τῆς ἐπιφανείας ἐξίσωσιν ὁρίζουσι τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου τῆς ἐπιφανείας, ὅπερ ἀπέχει ἀπὸ τοῦ δοθέντος τὴν ἐλαχίστην ἢ τὴν μεγίστην ἀπόστασιν (ὅταν τοιοῦτο σημεῖον ὑπάρχῃ).

Ἐπειδὴ δὲ αἱ ἐξισώσεις (1) προκύπτουσιν ἐκ τῶν ἐξισώσεων τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐὰν ἀντὶ X, Y, Z τεθῇ x', y', z', συνάγεται, ὅτι, ἂν ἐκ τοῦ σημείου τῆς ἐπιφανείας, ἔνθα ἡ ἀπόστασις γίνεται μέγιστον ἢ ἐλάχιστον, ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν κάθετος, αὕτη θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου· τοῦτ᾽ ἔστιν ὅτι *ἡ ἐλαχίστη ἢ ἡ μεγίστη ἀπόστασις (ὅταν ὑπάρχῃ) εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν.*

3) Ἔστω πρὸς τούτοις τὸ ἑπόμενον πρόβλημα ἐκ τοῦ λογισμοῦ τῶν πιθανοτήτων.

Πολλάκις ἐν τοῖς φυσικοῖς προβλήμασιν ἐρευνῶντες τὴν ἀλληλεξαρτησίαν δύο μεταβλητῶν ποσοτήτων x καὶ y, ἀγόμεθα εἰς τὸ νὰ παραδεχθῶμεν μεταξὺ αὐτῶν σχέσιν τινὰ τῆς μορφῆς

$$y = \alpha r + \beta s + ct + \ldots + m\omega, \tag{1}$$

ἔνθα τὰ $r, s, t, \ldots, \omega$ εἶνε γνωσταὶ συναρτήσεις τοῦ x, τὰ δὲ $\alpha, \beta, c \ldots, m$ εἶνε συντελεσταὶ σταθεροί, ἀλλ᾽ ἄγνωστοι καὶ τοὺς ὁποίους πρέπει νὰ προσδιορίσωμεν διὰ πειραμάτων.

Παραδείγματος χάριν, ἂν αἱ δύο μεταβληταὶ x, y, αἱ ἀπ᾽ ἀλλήλων ἐξαρτώμεναι, μηδενίζωνται συνάμα, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν

$$y = \mathrm{A}x + \mathrm{B}x^2$$

καὶ νὰ προσδιορίσωμεν τοὺς συντελεστὰς Α, Β διὰ πειραμάτων· τότε ὁ τύπος οὗτος θὰ παρέχῃ, διὰ τὰς ἱκανῶς μικρὰς τιμὰς τοῦ x, τὰς τιμὰς τοῦ y *ὡς ἔγγιστα*.

Ὑποθέσωμεν, ὅτι ἐμετρήσαμεν διὰ πειραμάτων τὰς τιμὰς τοῦ y, αἵτινες ἀντιστοιχοῦσι πρὸς τὰς τιμὰς $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ τοῦ x καὶ εὕρομεν αὐτὰς ἴσας τοῖς ἀριθμοῖς $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$·
ἐπειδὴ αἱ παρατηρήσεις ἡμῶν, μεθ᾽ ὅσηςδήποτε προσοχῆς καὶ ἐπιμελείας καὶ ἂν γίνωνται, πάντοτε ὑπόκεινται εἰς λάθη, μικρὰ μέν, ἀλλ᾽ ἀναπόφευκτα, διὰ τοῦτο αἱ ἐκ τῶν πειραμάτων εὑρισκόμεναι τιμαὶ τῆς y, ὡς ἀντιστοιχοῦσαι πρὸς τὰς $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ δὲν θὰ εἶνε αἱ ἀληθεῖς, ἀλλ᾽ ἄλλαι τινές, ὀλίγον διαφέρουσαι τῶν ἀληθῶν· ἔστωσαν ἀληθεῖς αἱ $y_1 + \Delta y_1, y_2 + \Delta y_2, \ldots, y_\nu + \Delta y_\nu$,
ἔνθα $\Delta y_1, \Delta y_2, \ldots, \Delta y^\nu$ παριστῶσι τὰ λάθη τῶν παρατηρήσεων.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ τεθεῖσα ἐξίσωσις

$$y = \alpha r + \beta s + ct + \ldots + m\omega$$

θὰ ἀληθεύῃ διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς x, ἐφαρμόζοντες αὐτὴν διὰ τὰς τιμὰς $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, εὑρίσκομεν τὰς ἐξισώσεις

$$\begin{aligned} \Delta y_1 &= -y_1 + \alpha r_1 + \beta s_1 + \ldots \\ \Delta y_2 &= -y_2 + \alpha r_2 + \beta s_2 + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta y_\nu &= -y_\nu + \alpha r_\nu + \beta s_\nu + \ldots, \end{aligned} \tag{2}$$

ὧν τὸ πλῆθος εἶνε ὅσον καὶ τὸ πλῆθος τῶν μετρηθεισῶν τιμῶν $y_1, \ldots, y_\nu$.

Τὰ συμβάντα λάθη $\Delta y_1, \ldots, \Delta y_\nu$ εἶνε ὅλως ἄγνωστοι ἀλλὰ μικραὶ ποσότητες· ἂν λοιπὸν τὸ πλῆθος τῶν ἐξισώσεων (2) εἶνε μ (ὅσον καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὁριστέων συντελεστῶν $\alpha, \beta, \ldots, m$), δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν ὅλως τὰ πρῶτα μέλη αὐτῶν, ὅτε λύοντες θὰ εὕρωμεν προσεγγιζούσας τιμὰς τῶν ἀγνώστων συντελεστῶν $\alpha, \beta, \ldots, m$.

Ἀλλ' εὐνόητον εἶνε, ὅτι θὰ προσεγγίσωμεν περισσότερον πρὸς τὴν ἀλήθειαν, ἂν μὴ ἀρκεσθῶμεν εἰς τὴν μέτρησιν μ μόνον τιμῶν τῆς y, ἀλλὰ μετρήσωμεν ὅσον δυνάμεθα περισσοτέρας· τότε ὅμως προκύπτει τὸ ζήτημα· *πῶς πρέπει νὰ συνδυασθῶσιν αἱ τότε προκύπτουσαι ν ἐξισώσεις* (2), *ὥστε νὰ εὑρεθῶσι τιμαὶ τῶν ἀγνώστων συντελεστῶν ὅσον ἐνδέχεται ἀκριβεῖς;* Τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου παρέχει ὁ λογισμὸς τῶν πιθανοτήτων διὰ τῆς μεθόδου *τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων*, ἥτις στηρίζεται ἐπὶ τοῦ ἑπομένου θεωρήματος.

Ἐκ πασῶν τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων συντελεστῶν ἐκεῖναι εἶνε αἱ πιθανώταται (ἤτοι αἱ πιθανώτατα ἀληθεῖς), *αἵτινες καθιστῶσιν ἐλάχιστον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν λαθῶν*, ἤτοι τὸ $\Sigma \Delta y_\nu^2$ ἢ τὸ ἴσον αὐτῷ

$$\Sigma\left(-y_1 + \alpha r_1 + \ldots\right)^2.$$

Διὰ τοῦ θεωρήματος τούτου εὐκόλως εὑρίσκονται νῦν αἱ πιθανώταται τιμαὶ τῶν συντελεστῶν $\alpha, \beta \ldots, m$· διότι, ἵνα γίνῃ τὸ ῥηθὲν ἄθροισμα ἐλάχιστον, πρέπει νὰ μηδενισθῶσι πᾶσαι αἱ μερικαὶ αὐτοῦ παράγωγοι πρὸς τὰς ἀγνώστους α $\beta, \ldots, m$· ἤτοι νὰ εἶνε

$$\begin{aligned} &\Sigma\left(-y_1 + \alpha r_1 + \beta s_1 + \ldots\right) r_1 = 0 \\ &\Sigma\left(-y_1 + \alpha r_1 + \beta s_1 + \ldots\right) s_1 = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3}$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων (ὧν τὸ πλῆθος εἶνε ἴσον τῷ τῶν ἀγνώστων $\alpha, \beta, \ldots, m$) εὑρίσκομεν νῦν τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων συντελεστῶν, αἵτινες εἶνε αἱ πιθανώταται.

Πρὸς ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου ταύτης θεωρήσωμεν τὴν ἁπλουστάτην περίπτωσιν, καθ' ἣν πρόκειται νὰ μετρηθῇ ὡρισμένη τις καὶ σταθερὰ ποσότης α· τότε ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $y=\alpha$. ἔστωσαν $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ αἱ μετρηθεῖσαι τιμαὶ τοῦ y· ἐπειδὴ ἡ ἀληθὴς τιμὴ εἶνε α, τὰ γενόμενα λάθη εἶνε

$$\alpha-y_1,\quad \alpha-y_2,\quad \alpha-y_3, \ldots \alpha-y_\nu$$

καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν εἶνε

$$\sum\left(\alpha-y_1\right)^2$$

ἵνα δὲ γίνῃ τοῦτο ἐλάχιστον, ἀνάγκη ὁ α νὰ πληροῖ τὴν ἐξίσωσιν

$$\sum\left(\alpha-y_1\right)=0,$$

ἤτοι νὰ εἶνε
$$\nu\alpha-\Sigma y_1=0,$$

τοῦτ' ἔστιν
$$\alpha=\frac{\Sigma y_1}{\nu},$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ἡ πιθανωτάτη τιμὴ τῆς ποσότητος α εἶνε ἡ μέση τιμὴ τῶν μετρηθεισῶν τιμῶν αὐτῆς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ μέθοδος τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων παρέχει προσέτι τὸ ἀσφαλὲς μέσον τοῦ νὰ διακρίνωμεν ἐκ δύο ἐξισώσεων διαφόρου μορφῆς, διὰ τῶν ὁποίων ζητοῦμεν νὰ ἐκφράσωμεν τὴν ἀλληλεξαρτησίαν δύο μεταβλητῶν (ὅταν δὲν γνωρίζωμεν τὴν ἀληθῆ ἐξίσωσιν), τίς εἶνε ἡ πιθανωτέρα, ἤτοι πρὸς τὰς γενομένας παρατηρήσεις συμφωνοτέρα· διότι ἐκείνη βεβαίως εἶνε πιθανωτέρα, εἰς τὴν ὁποίαν τὸ ἐλάχιστον ἄθροισμα τῶν τετραγώνων γίνεται μικρότερον ἢ εἰς τὴν ἄλλην.

Μέγιστα καὶ ἐλάχιστα συναρτήσεως πεπλεγμένης.

197. Ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν ν ἐξισώσεις

$$\begin{matrix} \sigma(x, y, z, \ldots, u, v, w, \ldots)=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix} \qquad (1)$$

δι' ὧν συνδέονται πρὸς ἀλλήλας $\nu+\mu$ μεταβληταί, αἱ

$$x, y, z, \ldots, u, v, w, \ldots$$

τότε ἐκ τῶν μεταβλητῶν τούτων αἱ μ δύνανται νὰ λάβωσιν οἱασδήποτε τιμάς, ἤτοι εἶνε ἀνεξάρτητοι, αἱ δὲ λοιπαὶ ν ὁρίζονται ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1), εὐθὺς ὡς ὁρισθῶσιν αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταί, ὥστε εἶνε συναρτήσεις αὐτῶν· ἔστωσαν ἀνεξάρτητοι αἱ $x, y, z, \ldots$, συναρτήσεις δ' αὐτῶν αἱ $u, v, w, \ldots$

Τούτων τεθέντων, ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὰ μέγιστα ἢ τὰ ἐλάχιστα μιᾶς τῶν συναρτήσεων τούτων, ἔστω τῆς u· πρὸς τοῦτο διαφορίζομεν τὰς ἐξισώσεις (1), ὅτε προκύπτουσιν αἱ ν ἐξισώσεις

$$\sigma_x\, dx + \sigma_y\, dy + \ldots + \sigma_u\, du + \ldots = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ἐκ τῶν ν τούτων ἐξισώσεων, αἵτινες ὁρίζουσι τὰ διαφορικὰ τῶν ν συναρτήσεων, δυνάμεθα λύοντες νὰ εὕρωμεν τὸ διαφορικὸν τῆς u· ἔστω

$$du = \mathrm{A}dx + \mathrm{B}dy + \ldots$$

Ὅταν ἡ u γίνῃ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον, πᾶσαι αἱ μερικαὶ παράγωγοι αὐτῆς (αἵτινες εἶνε A, B, . .) γίνονται 0 (ὡς καὶ τὸ διαφορικὸν αὐτῆς)· ὥστε θὰ εἶνε

$$\mathrm{A} = 0, \qquad \mathrm{B} = 0, \ldots$$

ἔνθα αἱ παραστάσεις A, B, . . περιέχουσιν ἢ δύνανται νὰ περιέχωσι πάσας τὰς μεταβλητάς. Αἱ μ αὗται ἐξισώσεις μετὰ τῶν ν δοθεισῶν ἀποτελοῦσι σύστημα $\mu + \nu$ ἐξισώσεων, ἐξ ὧν προσδιορίζονται αἱ τιμαὶ τῶν μεταβλητῶν, αἵτινες (μόναι αὗται) δύνανται νὰ καταστήσωσι τὴν συνάρτησιν μέγιστον ἢ ἐλάχιστον.

Ὡς παράδειγμα ἔστω τὸ ἑπόμενον πρόβλημα.

Ἐκ τῶν τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν ἐχόντων ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων ποῖον ἔχει τὸν μέγιστον ὄγκον;

Ἔστωσαν διαστάσεις τοῦ τυχόντος ἐκ τῶν εἰρημένων παραλληλεπιπέδων αἱ x, y, z· ἐὰν παραστήσωμεν διὰ α^2 τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ καὶ διὰ ω τὸν ὄγκον, θὰ εἶνε

$$\omega = xyz$$

καὶ

$$\tfrac{1}{2}\,\alpha^2 = xy + yz + zx$$

ἔχομεν λοιπὸν δύο ἐξισώσεις περιεχούσας τέσσαρας μεταβλητὰς ω, x, y, z· ἑπομένως δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὰς ω καὶ z ὡς συναρτήσεις τῶν x καὶ y.

Διαφορίζοντες τὰς ἐξισώσεις εὑρίσκομεν

$$d\omega = xydz + yzdx + zxdy$$
$$0 = (x+y)dz + (y+z)dx + (z+x)dy$$

καὶ ἀπαλείφοντες τὸ dz, εὑρίσκομεν

$$(x+y)d\omega = \{(x+y)yz - xy(y+z)\}dx + \{(x+y)zx - xy(z+x)\}dy$$

ἢ

$$(x+y)d\omega = y^2(z-x)dx + x^2(z-y)dy.$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν μεταβλητῶν, διὰ τὰς ὁποίας ὁ ὄγκος γίνεται μέγιστον, πληροῦσι τὰς ἐξισώσεις

$$z-x=0, \qquad z-y=0.$$

Ἐκ δὲ τούτων καὶ τῶν δύο πρώτων εὑρίσκομεν τὴν λύσιν

$$x=y=z=\frac{\alpha}{\sqrt{6}} \quad \text{καὶ} \quad \omega=\frac{\alpha^3}{6\sqrt{6}},$$

ἥτις προδήλως ἀντιστοιχεῖ πρὸς μέγιστον.

Ἐκ τῆς λύσεως ταύτης βλέπομεν, ὅτι ἐκ τῶν τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν ἐχόντων ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων μέγιστον κατὰ τὸν ὄγκον εἶνε ὁ κύβος.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

198. Εἰς τὴν προηγουμένην γενικὴν περίπτωσιν ὑπάγεται καὶ τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Εὑρεῖν τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς δοθείσης συναρτήσεως

$$\varphi(x, y, z, \ldots),$$

ἥτις περιέχει $\mu+\nu-1$ μεταβλητὰς $x, y, z, \ldots$, ἐξ ὧν αἱ μ εἶνε ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων, αἱ δὲ $\nu-1$ εἶνε συναρτήσεις αὐτῶν, ὁριζόμεναι διὰ τῶν $\nu-1$ ἐξισώσεων

$$\begin{aligned} &\sigma^{(1)}(x, y, z, \ldots)=0 \\ &\sigma^{(2)}(x, y, z, \ldots)=0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\sigma^{(\nu-1)}(x, y, z, \ldots)=0. \end{aligned} \tag{1}$$

Διότι, ἂν παρασταθῇ ἡ συνάρτησις, τῆς ὁποίας ζητεῖται τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον, διὰ τοῦ u, ἤτοι ἂν τεθῇ

$$u=\varphi(x, y, z, \ldots), \tag{2}$$

γίνονται ν ἐξισώσεις συνδέουσαι $\mu+\nu$ μεταβλητὰς (τὴν u καὶ τὰς $x, y, z, \ldots$)· ζητεῖται δὲ μιᾶς ἐξ αὐτῶν (τῆς u) τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον (τὰ τοιαῦτα μέγιστα καὶ ἐλάχιστα λέγονται ἐνίοτε καὶ *σχετικὰ* μέγιστα καὶ ἐλάχιστα).

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν

$$du = \varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_z dz + \dots$$

$$0 = \sigma_x^{(1)} dx + \sigma_y^{(1)} dy + \sigma_z^{(1)} dz + \dots \qquad (3)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$0 = \sigma_x^{(\nu-1)} dx + \sigma_y^{(\nu-1)} dy + \sigma_z^{(\nu-1)} dz + \dots,$$

κατὰ δὲ τὰ προειρημένα (ἐδ. 197) πρέπει νῦν ἐκ τοῦ συστήματος τούτου νὰ ἐκφράσωμεν τὸ du διὰ τῶν διαφορικῶν τῶν μ ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν· ἤτοι πρέπει νὰ ἀπαλείψωμεν ἐξ αὐτοῦ τὰ $\nu-1$ διαφορικὰ τῶν ἄλλων συναρτήσεων (πλὴν τῆς u).

Τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν ὡς ἑξῆς· πολλαπλασιάζομεν τὰς ἐξισώσεις (3) κατὰ σειρὰν ἐπὶ $1, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\nu-1}$ καὶ ἔπειτα προσθέτομεν αὐτὰς κατὰ μέλη, ὁρίζομεν δὲ τοὺς πολλαπλασιαστὰς

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\nu-1}$$

οὕτως, ὥστε ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις

$$du = (\varphi_x + \lambda_1 \sigma_x^{(1)} + \lambda_2 \sigma_x^{(2)} + \dots) dx + (\varphi_y + \lambda_1 \sigma_y^{(1)} + \lambda_2 \sigma_y^{(2)} + \dots) dy + \dots$$

νὰ μὴ περιέχῃ τὰ ἀπαλειπτέα διαφορικὰ τῶν ἄλλων συναρτήσεων, ὅπερ γίνεται, ἐὰν ἐξισώσωμεν τοὺς συντελεστὰς αὐτῶν τῷ 0. Ἐπειδὴ δὲ μετὰ τοῦτο θὰ ἐξισώσωμεν πρὸς τὸ 0 καὶ τοὺς συντελεστὰς τῶν ἄλλων διαφορικῶν, ἕπεται, ὅτι θὰ ἔχωμεν τὰς ἑπομένας $\mu+\nu-1$ ἐξισώσεις

$$\varphi_x + \lambda_1 \sigma_x^{(1)} + \lambda_2 \sigma_x^{(2)} + \dots = 0$$

$$\varphi_y + \lambda_1 \sigma_y^{(1)} + \lambda_2 \sigma_y^{(2)} + \dots = 0 \qquad (4)$$

$$\varphi_z + \lambda_1 \sigma_z^{(1)} + \lambda_2 \sigma_z^{(2)} + \dots = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

ἐξ ὧν πρέπει νὰ ἀπαλείψωμεν τὰς βοηθητικὰς ποσότητας

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\nu-1},$$

ἵνα εὕρωμεν τὰς πρὸς λύσιν τοῦ ζητήματος ἀναγκαίας μ ἐξισώσεις μεταξὺ τῶν μεταβλητῶν.

199. Αἱ ἐξισώσεις (4) θὰ εὑρίσκοντο, ἂν ἐζητεῖτο τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως

$$\varphi + \lambda_1 \sigma^{(1)} + \lambda_2 \sigma^{(2)} + \dots,$$

ἐθεωροῦντο δὲ αἱ $\mu+\nu-1$ μεταβληταί, αἱ ἐν τῇ συναρτήσει ταύτῃ περιεχόμεναι, πᾶσαι ὡς ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων.

Ἐκ τούτου ἀγόμεθα εἰς τὴν ἑξῆς πρότασιν, ἥτις πολλάκις εὐκολύνει τὰς ἐφαρμογάς.

Ἐὰν ζητῆται τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως φ, αἱ δὲ ἐν αὐτῇ περιεχόμεναι μεταβληταὶ δὲν εἶνε πᾶσαι ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων, ἀλλὰ συνδέωνται πρὸς ἀλλήλας διὰ τῶν ἐξισώσεων

$$\sigma^{(1)}=0,\quad \sigma^{(2)}=0,\ldots,\sigma^{(\nu-1)}=0,$$

αἱ τιμαὶ τῶν μεταβλητῶν τούτων, αἱ πρὸς τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς φ ἀντιστοιχοῦσαι, εὑρίσκονται ἐκ τῆς συναρτήσεως

$$\varphi+\lambda_1\sigma^{(1)}+\lambda_2\sigma^{(2)}+\ldots+\lambda_{\nu-1}\sigma^{(\nu-1)}$$

(ἔνθα $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\nu-1}$ δηλοῦσιν ἀγνώστους, ἀλλὰ σταθερὰς ποσότητας), ἐὰν ἐν αὐτῇ πᾶσαι αἱ μεταβληταὶ θεωρηθῶσιν ὡς ἀνεξάρτητοι καὶ ζητηθῶσι τὰ μέγιστα καὶ τὰ ἐλάχιστα αὐτῆς.

Πρόσθετοι ὅροι, τοὺς ὁποίους πρέπει νὰ πληρῶσιν αἱ τιμαὶ τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, ἵνα καθιστῶσι τὴν συνάρτησιν μέγιστον ἢ ἐλάχιστον.

200. Ἐὰν σύστημά τι τιμῶν $x_0, y_0, z_0, \ldots$ τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν $x, y, z, \ldots$ μηδενίζῃ πάσας τὰς πρωτοταγεῖς παραγώγους τῆς συναρτήσεως $\varphi(x, y, z, \ldots)$, ἀλλ' οὐχὶ καὶ πάσας τῆς δευτέρας τάξεως, θὰ εἶνε

$$(1)\quad \varphi(x_0+\varepsilon, y_0+\eta, z_0+\zeta,\ldots)-\varphi(x_0, y_0, z_0,\ldots)=\frac{d^2\varphi}{1.2}+\frac{d^3\varphi}{1.2.3}+\ldots,$$

διὰ νὰ εἶνε δὲ ἡ τιμὴ $\varphi(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως $\varphi(x, y, z, \ldots)$, πρέπει καὶ ἀρκεῖ *νὰ διαφυλάττῃ ἡ διαφορὰ* $\varphi(x_0+\varepsilon, y_0+\eta, z_0+\zeta,\ldots)-\varphi(x_0, y_0, z_0,\ldots)$ *ἐπὶ ἱκανῶς μικρῶν αὐξήσεων ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον, οἱαιδήποτε καὶ ἂν ὦσι κατὰ τὰ ἄλλα αἱ αὐξήσεις* $\varepsilon, \eta, \zeta, \ldots$ *καὶ νὰ μὴ μηδενίζηται, εἰμὴ ὅταν πᾶσαι αἱ αὐξήσεις μηδενισθῶσιν.*

Ἀλλ' ἡ εἰρημένη διαφορὰ δι' αὐξήσεις ἱκανῶς μικρὰς ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ $d^2\varphi$, ὅπερ εἶνε ἀκεραία καὶ ὁμογενὴς δευτεροβάθμιος συνάρτησις τῶν αὐξήσεων $\varepsilon, \eta, \zeta, \ldots$· ἀνάγκη ἄρα ἡ συνάρτησις αὕτη $d^2\varphi$ ἐπὶ ἱκανῶς μικρῶν αὐξήσεων νὰ διαφυλάττῃ ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον, οἱαιδήποτε καὶ ἂν ὦσι κατὰ τὰ ἄλλα αἱ αὐξήσεις καὶ νὰ μηδενίζηται, μόνον ὅταν μηδενισθῶσι πᾶσαι αἱ αὐξήσεις.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Τὴν μερικὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν τὸ $d^2\varphi$ δὲν ἀλλάσσει μὲν τὸ σημεῖόν του, μηδενίζεται ὅμως, χωρὶς νὰ μηδενισθῶσι πᾶσαι αἱ αὐξήσεις, δὲν θεωροῦμεν ἐνταῦθα.

Λέγω νῦν, ὅτι, ἂν ἡ συνάρτησις $d^2\varphi$ δι' αὐξήσεις ἱκανῶς μικρὰς διατηρῇ ἓν καὶ τὸ αὐτὸ πάντοτε σημεῖον, καὶ διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῶν αὐξήσεων θὰ διατηρῇ τὸ αὐτὸ σημεῖον. Διότι, ἂς ὑποτεθῇ, ὅτι εἶνε $d^2\varphi$ πάντοτε θετικόν, ἐν ὅσῳ εἶνε

$$-h<\varepsilon<h,\ -k<\eta<k,\ -\vartheta<\zeta<\vartheta \qquad (2)$$

καὶ ἔστωσαν ε_1, η_1, $\zeta_1, \ldots$ τυχοῦσαι τιμαὶ τῶν αὐξήσεων· ἐπειδὴ $d^2\varphi$ εἶνε ὁμογενὲς πρὸς τὰς αὐξήσεις, τὰ δύο συστήματα τῶν τιμῶν

$$\varepsilon=\varepsilon_1,\ \eta=\eta_1,\ \zeta=\zeta_1, \ldots \quad \text{καὶ} \quad \varepsilon=\frac{\varepsilon_1}{\varrho},\quad \eta=\frac{\eta_1}{\varrho},\quad \zeta=\frac{\zeta_1}{\varrho}, \ldots$$

τιθέμενα εἰς τὴν συνάρτησιν $d^2\varphi$ δίδουσι τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα, μὲ μόνην τὴν διαφοράν, ὅτι τὸ δεύτερον εἶνε διῃρημένον διὰ ϱ^2· ὥστε ἔχουσι τὸ αὐτὸ σημεῖον· ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸν ἀριθμὸν ϱ ἱκανῶς μέγαν, ὥστε τὸ δεύτερον σύστημα νὰ πληροῖ τοὺς περιορισμοὺς (2), ὅτε παρέχει ἐξαγόμενον θετικόν· ἄρα καὶ τὸ πρῶτον σύστημα θὰ παρέχῃ ἐξαγόμενον θετικόν.

201. Ἐκ τῶν προειρημένων συνάγεται, ὅτι, *ἵνα τὸ σύστημα τῶν τιμῶν* $x_0, y_0, z_0, \ldots$, *ὅπερ μηδενίζει πάσας τὰς πρωτοταγεῖς παραγώγους τῆς συναρτήσεως* $\varphi(x,y,z,\ldots)$, *καθιστᾷ αὐτὴν μέγιστον ἢ* ***ἐλάχιστον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ διαφυλάττῃ ἡ συνάρτησις*** $d^2\varphi$ ***ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῶν αὐξήσεων*** $\varepsilon, \eta, \zeta, \ldots$ ***καὶ νὰ μὴ μηδενίζηται, εἰ μὴ ὅταν πᾶσαι αἱ αὐξήσεις αὗται μηδενισθῶσιν.***

202. Ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον, ὅτι αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ εἶνε μόνον δύο· τότε εἶνε

$$d^2\varphi=\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_0\varepsilon^2+2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)_0\varepsilon\eta+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)_0\eta^2$$

ἢ

$$d^2\varphi=\mathrm{A}\varepsilon^2+2\mathrm{B}\varepsilon\eta+\Gamma\eta^2,$$

ἔνθα Α, Β, Γ δηλοῦσι τὰς τιμὰς τῶν παραγώγων τῆς δευτέρας τάξεως τὰς ἀντιστοιχούσας πρὸς τὸ σύστημα (x_0, y_0).

Οἱ συντελεσταὶ Α καὶ Γ ἀνάγκη νὰ διαφέρωσι τοῦ 0· διότι, ἂν π.χ. ὑποτεθῇ $\mathrm{A}=0$, θὰ εἶνε $d^2\varphi=0$, διὰ $\eta=0$, οἱουδήποτε ὄντος **τοῦ** ε.

Τούτου τεθέντος, ἡ παράστασις $d^2\varphi$ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς·

$$d^2\varphi=\frac{1}{\mathrm{A}}\left\{(\mathrm{A}\varepsilon+\mathrm{B}\eta)^2+(\Gamma\mathrm{A}-\mathrm{B}^2)\eta^2\right\},$$

ἐκ τῆς μορφῆς δὲ ταύτης τοῦ $d^2\varphi$ βλέπομεν, ὅτι, ἵνα τοῦτο διαφυλάττη πάντοτε ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἔστω π. χ. θετικόν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε

$$\mathrm{A}>0 \quad \text{καὶ} \quad \mathrm{A\Gamma}-\mathrm{B}^2>0.$$

Ἔστωσαν νῦν τρεῖς αἱ ἀνεξάρτηται μεταβληταί· τότε θὰ εἶνε

$$d^2\varphi=\mathrm{A}\varepsilon^2+\mathrm{A}'\eta^2+\mathrm{A}''\zeta^2+2\mathrm{B}\eta\zeta+2\mathrm{B}'\zeta\varepsilon+2\mathrm{B}''\varepsilon\eta\cdot \tag{1}$$

ἔνθα $\mathrm{A}, \mathrm{A}', \mathrm{A}''$, $\mathrm{B}, \mathrm{B}', \mathrm{B}''$ δηλοῦσι τὰς τιμὰς τῶν δευτεροταγῶν παραγώγων τοῦ φ τὰς ἀντιστοιχούσας πρὸς τὸ σύστημα (x_0, y_0, z_0).

Τὸ πολυώνυμον (1) τοῦ δευτέρου βαθμοῦ δύναται, ὡς ἐκ τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας εἶνε γνωστὸν νὰ λάβη τὴν μορφὴν

$$\lambda_1\varepsilon'^2+\lambda_2\eta'^2+\lambda_3\zeta'^2\cdot \tag{2}$$

ἔνθα $\varepsilon', \eta', \zeta'$ εἶνε πρωτοβάθμιοι συναρτήσεις τῶν μεταβλητῶν ε, η, ζ, καὶ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ εἶνε αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A}-\lambda & \mathrm{B}'' & \mathrm{B}' \\ \mathrm{B}'' & \mathrm{A}'-\lambda & \mathrm{B} \\ \mathrm{B}' & \mathrm{B} & \mathrm{A}''-\lambda \end{vmatrix}=0. \tag{3}$$

Ἐκ τῆς μορφῆς δὲ ταύτης γίνεται ἀμέσως φανερόν, ὅτι, ἵνα τὸ $d^2\varphi$ διατηρῇ πάντοτε ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἔστω τὸ θετικόν, καὶ μηδενίζηται, μόνον ὅταν πᾶσαι αἱ αὐξήσεις μηδενισθῶσι, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε $\lambda_1>0,\ \lambda_2>0,\ \lambda_3>0$,

τουτέστιν αἱ ῥίζαι τῆς τριτοβαθμίου ἐξισώσεως (3) νὰ εἶνε πᾶσαι θετικαί.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁσαιδήποτε καὶ ἂν εἶνε αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταί, ὁ ἀναγκαῖος καὶ ἐπαρκὴς ὅρος, ἵνα τὸ $d^2\varphi$ διαμένη πάντοτε θετικὸν καὶ μηδενίζηται, μόνον ὅταν πᾶσαι αἱ αὐξήσεις μηδενισθῶσιν, εἶνε ὁ ἑξῆς.

Ἐὰν εἶνε $d^2\varphi=\mathrm{A}_1\varepsilon^2+\mathrm{A}_2\eta^2+\mathrm{A}_3\zeta^2+\ldots+2\mathrm{B}_{12}\varepsilon\eta+2\mathrm{B}_{13}\varepsilon\zeta+\ldots$,

πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A}_1-\lambda & \mathrm{B}_{12} & \mathrm{B}_{13}\ldots & \mathrm{B}_{1\nu} \\ \mathrm{B}_{21} & \mathrm{A}_2-\lambda & \mathrm{B}_{23}\ldots & \mathrm{B}_{2\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{B}_{\nu1} & \mathrm{B}_{\nu2} & \mathrm{B}_{\nu3}\ldots & \mathrm{A}_\nu-\lambda \end{vmatrix}=0$$

νὰ εἶνε πᾶσαι θετικαί. (Ἀποδεικνύεται δέ, ὅτι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶνε πάντοτε πραγματικαί, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ A καὶ B εἶνε πραγματικοί).

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Εὑρεῖν τὰ μέγιστα καὶ τὰ ἐλάχιστα τῶν ἑξῆς συναρτήσεων·

α') $e^{-x^2}\,\eta\mu 2x$.

β') $x^{\eta}.e^{-x}$.

γ') $x+\sqrt{1-x^2}$.

δ') $x\sqrt{2-x^2}$.

ε') $2\eta\mu x+\eta\mu 2x$.

ϛ') $\sigma(x).\sigma(\alpha-x)$ ἐν τῷ διαστήματι $0\ldots\alpha$.

ζ') $f(x)+f\left(\frac{\alpha}{x}\right)$.

2) Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου ἀφαιροῦνται τέσσαρα ἴσα τετράγωνα ἀπὸ τῶν τεσσάρων κορυφῶν, τοῦ δὲ μένοντος σχήματος τὰ τέσσαρα πέριξ ὀρθογώνια ἀνυψοῦνται, ὥστε νὰ γίνωσι κάθετα πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ ὀρθογωνίου· οὕτω σχηματίζεται παραλληλεπίπεδον ὀρθὸν (ἀνοικτὸν ἄνωθεν)· τίς πρέπει νὰ εἶνε ἡ πλευρὰ τῶν ἀφαιρουμένων τετραγώνων, ἵνα τὸ προκύπτον πρίσμα ἔχῃ τὴν μεγίστην χωρητικότητα ;

3) Ἐκ τῶν τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν ἐχόντων κυλίνδρων τίς ἔχει τὸν μέγιστον ὄγκον ;

4) Ἐκ τῶν κυλινδρικῶν δοχείων, ἅτινα ἔχουσι τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν (παράπλευρον ἐπιφάνειαν καὶ βάσιν) ποῖον ἔχει τὴν μεγίστην χωρητικότητα ;

5) Ἐκ τοῦ δοθέντος κύκλου λαμβάνεται τομεύς τις καὶ συστρέφεται, ὥστε νὰ ἀποτελέσῃ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν ὀρθοῦ κώνου· τίς πρέπει νὰ εἶνε ὁ τομεὺς οὗτος, ἵνα ὁ ἐξ αὐτοῦ προκύπτων κῶνος ἔχῃ τὸν μέγιστον ὄγκον ;

6) Εὑρεῖν κύκλον, ἐν τῷ ὁποίῳ τμῆμα δοθείσης περιμέτρου νὰ ἔχῃ τὴν μεγίστην ἐπιφάνειαν (ἢ τομεὺς δοθείσης περιμέτρου).

7) Ἐκ τῶν ὁδῶν, αἵτινες ἄγουσιν ἐξ ἑνὸς σημείου εἰς ἄλλο ἐγγίζουσαι δοθεῖσαν καμπύλην, ἢ δοθεῖσαν ἐπιφάνειαν, τίς εἶνε ἡ συντομωτάτη ;

(Ἀπ. Τὰ δύο τμήματα τῆς ὁδοῦ θὰ σχηματίζωσι πρὸς τὴν κάθετον τῆς καμπύλης ἢ τῆς ἐπιφανείας, εἰς ὃ σημεῖον ἐγγίζουσιν αὐτήν, ἴσας γωνίας).

8) Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις δύο καμπύλων ἀπ' ἀλλήλων εἶνε κάθετος πρὸς ἀμφοτέρας.

9) Δοθέντος τριγώνου νὰ εὑρεθῇ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτοῦ σημεῖόν τι τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ἀπὸ τῶν τριῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου νὰ εἶνε ἐλάχιστον.

(Ἀπ. Ἐὰν ἡ μία τῶν ἀποστάσεων διατηρῆται σταθερά, ὑπάγεται τὸ πρόβλημα τοῦτο εἰς τὸ 7ον. Ἐκ τούτου δὲ γίνεται φανερόν, ὅτι αἱ τρεῖς ἀποστάσεις θὰ διαιρῶσι τὰς περὶ τὸ σημεῖον τέσσαρας ὀρθὰς εἰς τρία ἴσα μέρη, ὥστε θὰ σχηματίζωσι πρὸς ἀλλήλας γωνίας 120^0. Ἐὰν μηδεμία γωνία τοῦ τριγώνου εἶνε μεγαλητέρα τῶν 120^0, ὑπάρχει ἐντὸς αὐτοῦ σημεῖόν τι, οὗ αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν τριῶν κορυφῶν ἔχουσιν ἄθροισμα ἐλάχιστον. Ἀλλ' ἐὰν μία γωνία τοῦ τριγώνου ὑπερβαίνει τὰς 120^0, ἡ κορυφὴ αὐτῆς εἶνε τὸ ζητούμενον σημεῖον).

10) Ἐπὶ δεδομένης ἐπιφανείας νὰ εὑρεθῇ σημεῖόν τι Μ τοιοῦτον, ὥστε τὸ

ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ἀπὸ τριῶν δοθέντων σημείων Α, Β, Γ νὰ εἶνε ἐλάχιστον.

Ἀπ. Ἐὰν ἡ μία τῶν ἀποστάσεων, ἔστω ἡ ΜΑ, διατηρῆται σταθερά, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων θὰ εἶνε ἐλάχιστον ἐπὶ τῆς γραμμῆς, καθ' ἣν τέμνεται ἡ ἐπιφάνεια ὑπὸ σφαιρικῆς τινος ἐπιφανείας· ἡ δὲ ἐφαπτομένη τῆς γραμμῆς ταύτης θὰ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας ΜΑ καὶ ἐπὶ τὴν κάθετον τῆς δοθείσης ἐπιφανείας ΜΚ καὶ ἐπὶ τὴν διχοτομοῦσαν τὴν γωνίαν ΒΜΓ τῶν δύο ἄλλων ἀποστάσεων. Ἐκ τούτου συνάγεται ἡ ἑξῆς γεωμετρικὴ ἰδιότης τοῦ ζητουμένου σημείου.

Τὰ τρία ἐπίπεδα, τὰ δι' ἑκάστης τῶν ἀποστάσεων ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ καὶ διὰ τῆς διχοτομούσης τῶν ἄλλων δύο διερχόμενα, διέρχονται διὰ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν δεδομένην ἐπιφάνειαν κατὰ τὸ σημεῖον τοῦτο.

Ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης συνάγεται ἡ γεωμετρικὴ λύσις τοῦ ἑξῆς προβλήματος.

Νὰ ἀχθῇ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς δοθὲν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας, ἧς τινος τὰ σημεῖα ἀπέχουσιν ἀπὸ τριῶν δοθέντων σημείων ἀποστάσεις ἐχούσας σταθερὸν ἄθροισμα.

Ἡ κάθετος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν ταύτην εἰς τὸ δοθὲν σημεῖον Μ εὑρίσκεται κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ἐὰν μὲ κέντρον τὸ Μ καὶ ἀκτῖνα τὴν τυχοῦσαν γραφῇ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια καὶ ἐν τῷ σφαιρικῷ τριγώνῳ αβγ, οὗτινος κορυφαὶ εἶνε τὰ σημεῖα, ἔνθα αἱ ἀποστάσεις ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ τέμνουσι τὴν σφαιρικὴν ταύτην ἐπιφάνειαν, εὑρεθῇ τὸ σημεῖον μ, καθ' ὃ τέμνουσιν ἄλληλα τὰ τρία τόξα μεγίστου κύκλου τὰ ἀπὸ τῶν τριῶν κορυφῶν εἰς τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἀγόμενα. Ἡ εὐθεῖα Μμ θὰ εἶνε ἡ κάθετος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν.

11) Ἐκ τῶν εἰς δεδομένην καμπύλην (κυρτὴν καὶ κλειστὴν) ἐγγραφομένων πολυγώνων, ὧν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν εἶνε δεδομένος, εὑρεῖν τὸ ἔχον τὴν μεγίστην περίμετρον.

(Ἀπ. Ἐὰν νοήσωμεν μεταβαλλομένας δύο μόνον πλευρὰς τοῦ πολυγώνου τούτου, εὑρίσκομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα αὐτοῦ. Αἱ διχοτομοῦσαι τὰς γωνίας του πρέπει νὰ εἶνε κάθετοι πρὸς τὴν δεδομένην καμπύλην).

12) Ἐκ τῶν ὁμωνύμων πολυγώνων, ἅτινα περιγράφονται περὶ δεδομένην καμπύλην (κυρτὴν καὶ κλειστὴν) εὑρεῖν τὸ ἔχον τὸ ἐλάχιστον ἐμβαδόν.

(Ἀπ. Ἐὰν νοήσωμεν μόνον ἓν σημεῖον ἐπαφῆς μεταβαλλόμενον, τὰ δὲ λοιπὰ μένοντα ἀμετάβλητα, εὑρίσκομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα τοῦ ἐλαχίστου πολυγώνου. Τὸ μέσον ἑκάστης πλευρᾶς αὐτοῦ εἶνε τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς αὐτῆς καὶ τῆς καμπύλης).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΓΕΝΕΣΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Καλεῖται *διαφορικὴ ἐξίσωσις* πᾶσα ἐξίσωσις, ἥτις περιέχει διαφορικὰ ἢ παραγώγους συναρτήσεως.

203. Ὅταν ζητῆται συνάρτησίς τις ἄγνωστος, εὑρίσκεται συνήθως διαφορική τις ἐξίσωσις, ἣν ἡ ζητουμένη συνάρτησις ὀφείλει νὰ πληροῖ καὶ ἐκ τῆς ὁποίας προσδιορίζεται· (τοῦτο δύναταί τις νὰ ἴδῃ εἰς πολλὰ προβλήματα τοῦ πρώτου βιβλίου τοῦ Α΄ τόμου). Ἡ ἐκ τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως εὕρεσις τῆς ἀγνώστου συναρτήσεως, ἔργον οὖσα τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ, εἶνε ἐκ τῶν σπουδαιοτάτων καὶ δυσχερεστάτων προβλημάτων τῆς Μαθηματικῆς.

Τοὐναντίον, δοθείσης συναρτήσεως $y=\sigma(x)$, εἶνε εὔκολον νὰ εὕρωμεν ὁσαςδήποτε διαφορικὰς ἐξισώσεις, τὰς ὁποίας αὐτὴ καὶ τὰ διαφορικὰ αὐτῆς ἐπαληθεύουσιν· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ διαφορίσωμεν τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν

$$y=\sigma(x) \tag{1}$$

καὶ νὰ συνδυάσωμεν τὴν ἐκ τῆς διαφορίσεως προκύπτουσαν

$$dy=\sigma'(x)dx, \text{ ἢ } \frac{dy}{dx}=\sigma'(x) \tag{2}$$

καθ᾽ οἱονδήποτε τρόπον μετὰ τῆς δοθείσης· πᾶσα τοιουτοτρόπως προκύπτουσα ἐξίσωσις, ἐν ᾗ y δηλοῖ τὴν ἄγνωστον συνάρτησιν, πληροῦται προδήλως ὑπὸ τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$ καὶ τοῦ διαφορικοῦ αὐτῆς, ἤτοι γίνεται ταὐτότης (οἱουδήποτε ὄντος τοῦ x), ἂν ἐν αὐτῇ τεθῶσιν αἱ τιμαὶ τοῦ y καὶ τοῦ dy ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) ληφθεῖσαι. Δυνάμεθα μάλιστα νὰ διαφορίσωμεν πολλάκις ἐφεξῆς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν (1) καὶ νὰ συνδυάσωμεν αὐτὴν καθ' οἱονδήποτε θέλωμεν τρόπον μετὰ τῶν ἐκ τῆς διαφορίσεως προκυπτουσῶν. Συνδυάζοντες δὲ καταλλήλως τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν πρὸς τὰς ἐξ αὐτῆς προκυπτούσας διὰ τῆς διαφορίσεως, εὑρίσκομεν πολλάκις διαφορικὴν ἐξίσωσιν κατὰ πολὺ ἁπλουστέραν τῆς δοθείσης καὶ προσφορωτέραν πρὸς τὴν ἔρευναν τῶν ἰδιωμάτων τῆς συναρτήσεως ἢ πρὸς τὴν ἀνάπτυξιν αὐτῆς. (δυνάμεθα π. χ. νὰ ἀπαλείψωμεν ῥιζικὰ ὑπάρχοντα ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει ἢ ἄλλην τινὰ οἱανδήποτε παράστασιν δυσχεραίνουσαν τὰς ἐρεύνας ἡμῶν). Ἰδιαζόντως δὲ ἁπλαῖ εἶνε αἱ διαφορικαὶ ἐξισώσεις, αἵτινες εἶνε πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὴν συνάρτησιν y καὶ τὰς παραγώγους αὐτῆς.

Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ ἐξίσωσις

$$y=\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^m+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^m. \tag{1}$$

ἐξ αὐτῆς ἕπεται

$$y'=\frac{m}{\sqrt{x^2-1}}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^m-\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^m\right]$$

$$y''=\frac{m^2}{x^2-1}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^m+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^m\right]$$

$$-\frac{mx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^m-\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^m\right].$$

Ἐκ τούτων συνάγεται ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις

$$y''(x^2-1)+y'x-m^2y=0, \tag{2}$$

ἥτις εἶνε πρώτου βαθμοῦ πρὸς τὴν συνάρτησιν y καὶ τὰς παραγώγους αὐτῆς y', y''.

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη δύναται νὰ χρησιμεύσῃ εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῆς συναρτήσεως y κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ x· διότι διαφορίζοντες αὐτὴν ν φορὰς καὶ ποιοῦντες $x=0$ ἐν τῇ προκυπτούσῃ, εὑρίσκομεν

$$y_0^{(\nu+2)}=(\nu^2-m^2)y_0^{(\nu)}.$$

Ἐκ δὲ τῆς ἐξισώσεως ταύτης πορίζόμεθα τὰς τιμὰς τῶν παραγώγων y_0'', y_0''', ... διὰ $x=0$· (τὰς τιμὰς y_0 καὶ y'_0 εὑρίσκομεν ἐκ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως)· ἑπομένως καὶ τὸ ἀνάπτυγμα τῆς δοθείσης συναρτήσεως y κατὰ τὸν τύπον τοῦ Μακλωρίνου.

Ἐὰν ὁ m ὑποτεθῇ ἀκέραιος καὶ θετικὸς καὶ τεθῇ $x=$ συνφ, ἕπεται

$$y=2\text{συν}m\varphi,$$

εὑρίσκεται δὲ τὸ ἑξῆς ἀνάπτυγμα·

$$\text{συν}m\varphi=(-1)^{\frac{m}{2}}\left[1-\frac{m^2}{2}\text{συν}^2\varphi+\frac{m^2(m^2-2^2)}{2.3.4}\text{συν}^4\varphi-\dots\right],$$

ἐὰν m εἶνε ἄρτιος·

ἢ

$$\sigma\upsilon\nu m\varphi = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \left\{ m\sigma\upsilon\nu\varphi - \frac{m(m^2-1)}{2.3}\sigma\upsilon\nu^3\varphi + \frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)}{2.3.4.5}\sigma\upsilon\nu^5\varphi - \dots \right\},$$

ἐὰν m εἶνε περιττός,

Ἔστω πρὸς τούτοις ἡ συνάρτησις

$$y = e^{m(\tau o\xi\eta\mu x)}, \tag{1}$$

ἥτις πρόκειται νὰ ἀναπτυχθῇ κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ x.

Ἐκ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν

$$y' = y.\frac{m}{\sqrt{1-x^2}}. \quad \text{ἢ} \quad y'^2(1-x^2) - m^2y^2 = 0$$

ὅθεν ἕπεται ἡ ἐξίσωσις

$$y''(1-x^2) - xy' - m^2y = 0 \tag{2}$$

ἥτις εἶνε πρωτοβάθμιος ὡς πρὸς τὴν συνάρτησιν y καὶ τὰς παραγώγους αὐτῆς.

Ἐὰν δὲ τὴν ἐξίσωσιν ταύτην διαφορίσωμεν ν φορὰς καὶ ἐν τῇ προκυπτούσῃ ποιήσωμεν $x = 0$, εὑρίσκομεν

$$y_0^{(\nu+2)} = (\nu^2 + m^2)y_0^{(\nu)},$$

ἐξ ἧς προσδιορίζομεν τὰς παραγώγους ἀπὸ τῆς δευτέρας καὶ ἐφεξῆς. εἶνε δὲ πρὸς τούτοις $y_0 = 1$ καὶ $y'_0 = m$· ὅθεν προκύπτει τὸ ἑξῆς ἀνάπτυγμα·

$$e^{m\tau o\xi\eta\mu x} = \left\{ 1 + m^2.\frac{x^2}{1.2} + m^2(m^2+2^2).\frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots \right\} +$$

$$+ m\left\{ \frac{x}{1} + (m^2+1^2)\frac{x^3}{1.2.3} + (m^2+1^2)(m^2+3^2)\frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \dots \right\}$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶνε καὶ $e^{m\tau o\xi\eta\mu x} = 1 + \dfrac{m\,(\tau o\xi\eta\mu x)}{1} + \dfrac{m^2(\tau o\xi\eta\mu x)^2}{1.2} + \dots$

ἐὰν ἐξισώσωμεν τοὺς συντελεστὰς τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ m εἰς ἀμφότερα τὰ ἀναπτύγματα, εὑρίσκομεν

$$\tau o\xi\eta\mu x = x + 1^2\frac{x^3}{1.2.3} + 1^2.3^2\frac{x^5}{1.2.3.4.5} + 1^2.3^2.5^2.\frac{x^7}{1.2.3...7} + \dots,$$

$$\frac{1}{2}(\tau o\xi\eta\mu x)^2 = \frac{x^2}{1.2} + 2^2.\frac{x^4}{1.2.3.4} + 2^2.4^2.\frac{x^6}{1.2...6} + 2^2.4^2.6^2.\frac{x^8}{1.2...8} + \dots,$$

. . . .

Ἀπαλοιφὴ τῶν αὐθαιρέτων σταθερῶν.

204. Ἐὰν ἐν τῇ ἐξισώσει, δι' ἧς συνδέεται ἡ συνάρτησις y πρὸς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν x, ὑπάρχῃ ποσότης τις σταθερὰ α αὐθαίρετον ἔχουσα τιμήν, ὡς ἐν τῇ

$$\varphi(x, y, \alpha)=0, \qquad (1)$$

δύναται ἡ αὐθαίρετος αὕτη ποσότης νὰ ἀπαλειφθῇ μεταξὺ τῆς ἐξισώσεως ταύτης καὶ τῆς ἐξ αὐτῆς προκυπτούσης διὰ τῆς διαφορίσεως, ἤτοι τῆς

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y} y'=0, \qquad (2)$$

οὕτω προκύπτει διαφορικὴ ἐξίσωσις ἔχουσα τὴν μορφὴν

$$\sigma(x, y, y')=0. \qquad (3)$$

Ὁ τρόπος οὗτος τῆς γενέσεως διαφορικῶν ἐξισώσεων εἶνε ὁ σπουδαιότατος καὶ γενικώτατος πάντων· διότι, ὡς δεικνύεται ἐν τῷ ὁλοκληρωτικῷ λογισμῷ, πᾶσα διαφορικὴ ἐξίσωσις τῆς μορφῆς (3) προκύπτει ἔκ τινος ἐξισώσεως τῆς μορφῆς (1) διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς τῆς αὐθαιρέτου ποσότητος α.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ ἀπαλοιφὴ τῆς αὐθαιρέτου ποσότητος α μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) δύναται νὰ γίνῃ κατ' ἀπείρους τρόπους· δύναται, παραδείγματος χάριν, νὰ λυθῇ πρῶτον ἡ ἐξίσωσις (1) πρὸς τὴν α, ἤτοι νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $\alpha=F(x, y)$

καὶ ἔπειτα νὰ ληφθῇ τὸ διαφορικὸν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν αὐτῆς, ὅτε ἀπαλείφεται ἡ σταθερὰ ποσότης α καὶ προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y} y'=0\cdot$$

ἀλλ' ὁπωσδήποτε καὶ ἂν γίνῃ ἡ ἀπαλοιφὴ τῆς αὐθαιρέτου σταθερᾶς α, εἶνε ἀδύνατον νὰ προκύψωσιν ἐκ τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως (1) δύο διάφοροι ἐξισώσεις τῆς μορφῆς (3)· διότι, ἂν ὑποτεθῇ, ὅτι ὑπῆρχε καὶ ἄλλη τοιαύτη ἐξίσωσις

$$\sigma_1(x, y, y')=0$$

διάφορος τῆς (3), διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς τοῦ y' μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων

$$\sigma(x, y, y')=0 \quad \text{καὶ} \quad \sigma_1(x, y, y')=0$$

θὰ προέκυπτε μία ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $f(x, y)=0$· ἑπομένως θὰ ἦτο ἡ τιμὴ τοῦ y ὡρισμένη ἐκ τῆς τιμῆς τοῦ x καὶ ἀνεξάρτητος ἀπὸ τῆς τιμῆς τοῦ α· ὅπερ ἀδύνατον, ὡς ἐκ τῆς ἀρχικῆς ἐξισώσεως (1) φαίνεται.

205. Ἐὰν αἱ μεταβληταὶ x, y παρασταθῶσιν ὡς συντεταγμέναι ἐν ἐπιπέδῳ, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις (1) παριστᾷ πλῆθος ἄπειρον καμπύλων (μίαν δι' ἑκάστην τιμὴν τῆς παραμέτρου α), ἡ δὲ διαφορικὴ ἐξί-

σωσις (3) εἶνε ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις αὐτῶν· διότι ἀληθεύει εἰς ἕκαστον σημεῖον ἑκάστης ἐξ αὐτῶν· ἐκφράζει δὲ ἰδιότητά τινα κοινὴν εἰς ἁπάσας τὰς καμπύλας ταύτας.

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἀναφέρεται ἐν γένει εἰς τὴν ἐφαπτομένην καὶ εἰς τὰ μετ' αὐτῆς συνδεόμενα μεγέθη. Ἵνα δείξωμεν τοῦτο ἐπὶ παραδείγματος, θεωρήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$y^2 = 2\mu x,$$

ἥτις παριστᾷ πάσας τὰς παραβολάς, αἵτινες ἔχουσι κοινὰ τὴν κορυφὴν καὶ τὸν ἄξονα.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἕπεται

$$ydy = \mu dx$$

καὶ ἀπαλειφομένου τοῦ μ $\quad ydx = 2xdy$

ἢ

$$y\frac{dx}{dy} = 2x\cdot$$

αὕτη εἶνε ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν εἰρημένων παραβολῶν, ἐκφράζει δὲ τὴν ἑξῆς ἰδιότητα αὐτῶν· *ἡ ὑφαπτομένη* (ἐν ἁπάσαις ταῖς παραβολαῖς, αἵτινες ἔχουσι τὴν αὐτὴν κορυφὴν καὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα) *εἶνε διπλασία τῆς τετμημένης.*

Ἔστω προσέτι ἡ ἐξίσωσις $\quad yx = k,$

ἥτις παριστᾷ πάσας τὰς ὑπερβολάς, ὧν ἀσύμπτωτοι εἶνε οἱ ἄξονες τῶν συντεταγμένων· ἐξ αὐτῆς προκύπτει ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις

$$ydx + xdy = 0 \quad ἢ \quad y\frac{dx}{dy} = -x,$$

ἥτις ἐκφράζει τὴν ἑξῆς ἰδιότητα τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος ὑπερβολῶν· *ἡ ὑφαπτομένη αὐτῶν εἶνε ἴση τῇ τετμημένῃ, ἀλλ' ἔχει ἀντίθετον φοράν.*

206. Ἐὰν ἡ τὰς μεταβλητὰς y, x συνδέουσα ἐξίσωσις περιέχῃ μ σταθερὰς αὐθαιρέτους, διαφόρους ἀπ' ἀλλήλων, ὡς ἡ

$$\varphi(x, y, A, B, \Gamma, \ldots, M) = 0, \tag{1}$$

δυνάμεθα νὰ ἀπαλείψωμεν αὐτὰς διὰ τῶν ἀλλεπαλλήλων διαφορίσεων.

Καὶ ὄντως διαφορίζοντες τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν μ φοράς, εὑρίσκομεν μ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x, y, y', A, B, \Gamma, \ldots, M) = 0 \\ &\varphi_2(x, y, y', y'', A, B, \Gamma, \ldots, M) = 0 \qquad\qquad (2) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_\mu(x, y, y', y'', \ldots y^{(\mu)}, A, B, \ldots, M) = 0. \end{aligned}$$

Ἐὰν δὲ ἐκ τῶν $\mu+1$ ἐξισώσεων (1) καὶ (2) ἀπαλείψωμεν τὰς μ σταθερὰς Α, Β, Γ,. . .,Μ, θὰ λάβωμεν μίαν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς

$$\sigma(x, y, y', y'', \ldots y^{(\mu)})=0, \qquad (3)$$

τουτέστι διαφορικὴν ἐξίσωσιν τῆς τάξεως μ.

207. Ἀξιοπαρατήρητος εἶνε ἡ περίπτωσις, καθ' ἣν ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις (1) εἶνε πρώτου βαθμοῦ πρὸς τὴν y καὶ τὰς αὐθαιρέτους σταθερὰς Α, Β, Γ,. . .,Μ· ἤτοι τῆς μορφῆς

$$y=\mathrm{A}\sigma(x)+\mathrm{B}\varphi(x)+\ldots+\mathrm{M}f(x)+F(x)\cdot$$

τότε εὑρίσκομεν $y'=\mathrm{A}\sigma'(x)+\mathrm{B}\varphi'(x)+\ldots+\mathrm{M}f'(x)+F'(x)$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^{(\mu)}=\mathrm{A}\sigma^{(\mu)}(x)+\mathrm{B}\varphi^{(\mu)}(x)+\ldots+\mathrm{M}f^{(\mu)}(x)+F^{(\mu)}(x),$$

ὅθεν ἕπεται διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς τῶν αὐθαιρέτων σταθερῶν

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} y-F(x), & \sigma(x), & \varphi(x)\ \ldots & f(x) \\ y'-F'(x), & \sigma'(x) & \varphi'(x)\ldots & f'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y^{(\mu)}-F^{\mu}(x), & \sigma^{\mu}(x), & \varphi^{\mu}(x),\ldots & f^{\mu}(x) \end{vmatrix}=0$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι τότε ἡ προκύπτουσα διαφορικὴ ἐξίσωσις εἶνε πρώτου βαθμοῦ πρὸς τὴν συνάρτησιν y καὶ τὰς παραγώγους αὐτῆς.

Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ ἐξίσωσις

$$y=\mathrm{A}e^{\alpha x}+\mathrm{B}e^{\beta x}+\ldots+\mathrm{K}e^{\varkappa x},$$

ἔνθα Α,Β,Γ,. . .,Κ εἶνε αἱ αὐθαίρετοι σταθεραὶ καὶ α, β, γ,. . .,κ ὡρισμέναι σταθεραὶ ποσότητες.

Ἐξ αὐτῆς εὑρίσκομεν

$$\frac{dy}{dx}=\mathrm{A}\alpha e^{\alpha x}+\mathrm{B}\beta e^{\beta x}+\ldots+\mathrm{K}\varkappa e^{\varkappa x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\mathrm{A}\alpha^2e^{\alpha x}+\mathrm{B}\beta^2e^{\beta x}+\ldots+\mathrm{K}\varkappa^2e^{\varkappa x}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^\nu y}{dx^\nu}=\mathrm{A}\alpha^\nu e^{\alpha x}+\mathrm{B}\beta^\nu e^{\beta x}+\ldots+\mathrm{K}\varkappa^\nu e^{\varkappa x}$$

καὶ ἀπαλείφοντες τὰ Α,Β,Γ,. . .,Κ, εὑρίσκομεν

$$\begin{vmatrix} y & 1 & 1\ldots 1 \\ \dfrac{dy}{dx} & \alpha & \beta\ldots\varkappa \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{d^\nu y}{dx^\nu} & \alpha^\nu, & \beta^\nu\ldots\varkappa^\nu \end{vmatrix} = 0,$$

ἤτοι $$\alpha_\nu \frac{d^\nu y}{dx^\nu} + \alpha_{\nu-1}\frac{d^{\nu-1}y}{dx^{\nu-1}} + \ldots + \alpha_1 \frac{dy}{dx} + \alpha_0 y = 0 \qquad (2)$$

ἔνθα $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ εἶνε οἱ συντελεσταὶ τῶν δυνάμεων $\omega^0, \omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^\nu$ τοῦ ω ἐν τῇ ἐξισώσει

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\ldots 1 \\ \omega & \alpha & \beta\ldots\varkappa \\ \omega^2 & \alpha^2 & \beta^2\ldots\varkappa^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega^\nu & \alpha^\nu & \beta^\nu\ldots\varkappa^\nu \end{vmatrix} = 0\cdot$$

ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐξίσωσις αὕτη μηδενίζεται διὰ $\omega=\alpha$, $\omega=\beta, \ldots,$ $\omega=\varkappa$, ἕπεται, ὅτι γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$(\omega-\alpha).\ (\omega-\beta).\ (\omega-\gamma)\ldots(\omega-\varkappa).T,$$

ἑπομένως οἱ συντελεσταὶ $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$ τῆς προκυπτούσης ἐξισώσεως (2) εἶνε οἱ συντελεσταὶ τῆς ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως

$$(\omega-\alpha).\ (\omega-\beta).\ (\omega-\gamma)\ldots(\omega-\varkappa)=0,$$

α_τ εἶνε ὁ συντελεστὴς τοῦ ω^τ.

Ἔστω δεύτερον ἡ ἐξίσωσις

$$y = A(x-\alpha)^m + B(x-\beta)^m + \ldots + K(x-\varkappa)^m \cdot \qquad (1)$$

ἐξ αὐτῆς εὑρίσκομεν

$$\frac{1}{m_1}.\frac{dy}{dx} = A(x-\alpha)^{m-1} + B(x-\beta)^{m-1} + \ldots + K(x-\varkappa)^{m-1}$$

$$\frac{1}{m_2}.\frac{d^2y}{dx^2} = A(x-\alpha)^{m-2} + B(x-\beta)^{m-2} + \ldots + K(x-\varkappa)^{m-2}$$

. . . .

$$\frac{1}{m_\nu}.\frac{d^\nu y}{dx^\nu} = A(x-\alpha)^{m-\nu} + B(x-\beta)^{m-\nu} + \ldots + K(x-\varkappa)^{m-\nu}$$

ἔνθα πρὸς συντομίαν ἐτέθη

$$m_1 = m, \quad m_2 = m.(m-1), \quad m_3 = m.(m-1).(m-2), \quad \text{κτλ.}$$

Ἀπαλείφοντες νῦν τὰς ν αὐθαιρέτους σταθερὰς Α,Β,...,Κ, εὑρίσκομεν

$$\begin{vmatrix} y, & (x-\alpha)^m \ldots (x-\varkappa)^m \\ \frac{1}{m_1}.\frac{dy}{dx} & (x-\alpha)^{m-1} \ldots (x-\varkappa)^{m-1} \\ \frac{1}{m_2}.\frac{d^2y}{dx^2} & (x-\alpha)^{m-2} \ldots (x-\varkappa)^{m-2} \\ \ldots & \ldots \\ \frac{1}{m_\nu}.\frac{d_\nu y}{dx^\nu} & (x-\alpha)^{m-\nu} \ldots (x-\varkappa)^{m-\nu} \end{vmatrix} = 0,$$

ἤτοι

$$\sigma_0(x).y + \frac{1}{m_1}\sigma_1(x)\frac{dy}{dx} + \frac{1}{m_2}\sigma_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + \frac{1}{m_\nu}\sigma_\nu(x)\frac{d^\nu y}{dx^\nu} = 0, \quad (2)$$

ἔνθα $\sigma_\tau(x)$ εἶνε ὁ συντελεστὴς τοῦ $\omega^{\nu-\tau}$ ἐν τῇ ἐξισώσει

$$\begin{vmatrix} \omega^\nu & (x-\alpha)^m & \ldots (x-\varkappa)^m \\ \omega^{\nu-1} & (x-\alpha)^{m-1} & \ldots (x-\varkappa)^{m-1} \\ \omega^{\nu-2} & (x-\alpha)^{m-2} & \ldots (x-\varkappa)^{m-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & (x-\alpha)^{m-\nu} & \ldots (x-\varkappa)^{m-\nu} \end{vmatrix} = 0\cdot$$

ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐξίσωσις αὕτη μηδενίζεται, ὅταν τεθῇ

$$\omega = x - \alpha, \quad \text{ἢ} \quad \omega = x - \beta, \ldots,$$

ἕπεται, ὅτι γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$T(\omega - x + \alpha).(\omega - x + \beta).(\omega - x + \gamma)\ldots(\omega - x + \varkappa)\cdot$$

ἑπομένως (παραλειπομένου τοῦ κοινοῦ παράγοντος Τ) οἱ συντελεσταὶ

$$\sigma_0(x),\ \sigma_1(x), \ldots, \sigma_\nu(x)$$

τῆς προκυπτούσης διαφορικῆς ἐξισώσεως εἶνε οἱ συντελεσταὶ τῶν δυνάμεων ω^ν, $\omega^{\nu-1}, \ldots, \omega^0$ τοῦ ω ἐν τῷ γινομένῳ

$$(\omega - x + \alpha).(\omega - x + \beta)\ldots(\omega - x + \varkappa)\cdot \quad (3)$$

ἀλλ' ἂν θέσωμεν

$$(-1)^\nu (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\varkappa) = \varphi(x),$$

τὸ γινόμενον (3) ἰσοῦται τῷ $\varphi(x-\omega)$, ἤτοι τῷ $\varphi(x)-\frac{\omega}{1}\varphi'(x)+\frac{\omega^2}{1.2}\varphi''(x)-\ldots,$

ὅθεν ἕπεται

$$\sigma_\nu(x)=\varphi(x),\quad \sigma_{\nu-1}(x)=-\varphi'(x),\quad \sigma_{\nu-2}(x)=\frac{\varphi''(x)}{1.2},\ \text{κτλ.}$$

καὶ ἡ προκύπτουσα διαφορικὴ ἐξίσωσις (2) πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ m_ν γίνεται (ἐὰν τεθῇ $m-\nu+1=\mu$)

$$\varphi(x).\frac{d^\nu y}{dx^\nu}-\frac{\mu}{1}\varphi'(x)\frac{d^{\nu-1}y}{dx^{\nu-1}}+\frac{\mu(\mu+1)}{1.2}\varphi''(x)\frac{d^{\nu-2}y}{dx^{\nu-2}}+\ldots$$
$$+\frac{\mu(\mu+1).(\mu+2)\ldots(\mu+\nu-1)}{1.2.3\ldots\nu}\varphi^{(\nu)}(x).y=0.$$

Διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν κωνικῶν τομῶν.

Ἡ γενικὴ ἐξίσωσις τῶν κωνικῶν τομῶν λυομένη πρὸς y γίνεται

$$y=Ax+B\pm\sqrt{cx^2+2c_1x+c_2},$$

ὅθεν $$y''=(cc_2-c_1^2)\,(cx^2+2c_1x+c_2)^{-\frac{3}{2}},$$

ἐκ δὲ ταύτης εὑρίσκομεν

$$\left\{(y'')^{-\frac{2}{3}}\right\}'''=0 \quad \text{ἤτοι}\quad 40(y''')^2-45y''y'''y''''+9y''^2y^{(5)}=0$$

Διαφορικαὶ ἐξισώσεις εἰς μερικὰς παραγώγους.

208. Ἐὰν ἐξίσωσις συνδέῃ δύο ἢ περισσοτέρας ἀνεξαρτήτους μεταβλητὰς πρός τινα συνάρτησιν αὐτῶν, διὰ τῆς διαφορίσεως τῆς ἐξισώσεως ταύτης δύνανται νὰ ἀπαλειφθῶσιν οὐ μόνον αὐθαίρετοι σταθεραὶ ποσότητες, ἀλλὰ καὶ συναρτήσεις αὐθαίρετοι, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν ἑξῆς παραδειγμάτων.

1) Ἡ γενικὴ ἐξίσωσις τῶν κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν, ὧν αἱ γενέτειραι εἶνε παράλληλοι τῇ εὐθείᾳ

$$x-\alpha z=0,\quad y-\beta z=0,$$

εἶνε ἡ ἑξῆς $$y-\beta z=\varphi(x-\alpha z),\tag{1}$$

ἔνθα φ δηλοῖ συνάρτησιν αὐθαίρετον· καὶ πρὸς ἑκάστην ὡρισμένην μορφὴν τῆς συναρτήσεως ταύτης ἀντιστοιχεῖ μία ὡρισμένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια.

Πρὸς ἀπαλοιφὴν τῆς συναρτήσεως ταύτης, διαφορίζομεν τὴν ἐξίσωσιν (1) πρὸς ἑκατέραν τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, ὅτε εὑρίσκομεν

$$-\beta p = \varphi'(x - \alpha z).(1-\alpha p)$$
$$1-\beta q = \varphi'(x-\alpha z).(-\alpha q),$$

ἐξ ὧν διαιρουμένων ἕπεται

$$\frac{\beta p}{1-\beta q} = \frac{1-\alpha p}{\alpha q},$$

ἢ μετὰ τὰς πράξεις $\qquad 1 = \alpha p + \beta q.$

Ἡ διαφορικὴ αὕτη ἐξίσωσις, ἡ τὰς μερικὰς παραγώγους τῆς συναρτήσεως z περιέχουσα, λέγεται *διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν*. Ἐκφράζει δὲ ἰδιότητα κοινὴν ἁπασῶν τῶν κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν (διότι ἡ συνάρτησις φ, καθ' ἣν διαφέρουσιν ἀπ' ἀλλήλων αἱ ἐξισώσεις τῶν ἐπιφανειῶν τούτων, δὲν ὑπάρχει ἐν τῇ διαφορικῇ ἐξισώσει), τὴν ἑξῆς· ὅτι τὸ ἐφαπτόμενον αὐτῶν ἐπίπεδον μένει πάντοτε παράλληλον τῇ εὐθείᾳ $x = \alpha z, \quad y = \beta z.$

2) Ἡ γενικὴ ἐξίσωσις τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν, αἵτινες ἔχουσι κολυφὴν τὸ σημεῖον (a,b,c), εἶνε ἡ ἑξῆς

$$f\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right)=0\cdot$$

ἐκφράζει δέ, ὅτι αἱ δύο παραστάσεις

$$\frac{x-a}{z-c}, \quad \frac{y-b}{z-c}$$

ἐξαρτῶνται ἀπ' ἀλλήλων καθ' οἱονδήποτε τρόπον, ἤτοι ὅτι ἑκατέρα τούτων εἶνε συνάρτησις τῆς ἄλλης, καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἐξίσωσις αὕτη (ἂν νοηθῇ λελυμένη πρὸς τὴν μίαν τῶν ἐν αὐτῇ περιεχομένων παραστάσεων) δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἕπεται

$$\frac{y-b}{z-c} = \varphi\left(\frac{x-a}{z-c}\right).$$

Πρὸς ἀπαλοιφὴν τῆς αὐθαιρέτου συναρτήσεως φ διαφορίζομεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην πρὸς ἑκατέραν τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν καὶ εὑρίσκομεν

$$-p(y-b)=\varphi'\left(\frac{x-a}{z-c}\right)\left\{(z-c)-p(x-a)\right\}$$

$$(z-c)-q(y-b)=\varphi'\left(\frac{x-a}{z-c}\right)\left\{-(x-a)q\right\},$$

ἐξ ὧν διαιροῦντες εὑρίσκομεν τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν

$$p(x-a)+q(y-b)=z-c,$$

ἥτις εἶνε ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν· ἐκφράζει δὲ τὴν κοινὴν ἁπασῶν τῶν ἐπιφανειῶν τούτων ἰδιότητα, ὅτι τὸ ἐφαπτόμενον αὐτῶν ἐπίπεδον διέρχεται πάντοτε διὰ τῆς κορυφῆς (a, b, c).

3) Ἡ γενικὴ ἐξίσωσις τῶν κωνοειδῶν ἐπιφανειῶν, ὧν αἱ γενέτειραι μένουσι παράλληλοι τῷ ἐπιπέδῳ τῶν xy καὶ τέμνουσι τὸν ἄξονα τῶν z, εἶνε ἡ ἑξῆς·

$$f\left(z, \frac{y}{x}\right) = 0$$

ἢ καὶ

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὑρίσκομεν διὰ τῆς διαφορίσεως

$$p = -\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{y}{x^2}$$

$$q = \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x}.$$

ἐκ τούτων ἕπεται διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς τῆς συναρτήσεως φ'

$$px + qy = 0,$$

ἥτις εἶνε ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν θεωρουμένων ἐπιφανειῶν καὶ ἐκφράζει, τὴν κοινὴν αὐτῶν ἰδιότητα, ὅτι τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον αὐτῶν εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον περιέχει τὴν εὐθεῖαν γενέτειραν (ἤτοι ὅτι τὸ διὰ τοῦ σημείου (x, y, z) διερχόμενον ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον διέρχεται καὶ διὰ τοῦ σημείου $(0, 0, z)$.

4) Ἡ γενικὴ ἐξίσωσις τῶν ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανειῶν, αἵτινες ἔχουσιν ἄξονα τὸν ἄξονα τῶν z, εἶνε ἡ ἑξῆς (πρὸς ὀρθὰς συντεταγμένας)

$$z = \varphi(x^2 + y^2)\cdot$$

ἐξ αὐτῆς εὑρίσκομεν διὰ τῆς διαφορίσεως

$$p = \varphi'(x^2 + y^2) \, . \, 2x$$

$$q = \varphi'(x^2 + y^2) \; 2y,$$

ὅθεν ἕπεται ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν ἐπιφανειῶν τούτων

$$\frac{p}{x} = \frac{q}{y},$$

ἥτις ἐκφράζει ἰδιότητα κοινὴν ἁπασῶν τῶν ἐπιφανειῶν τούτων, ὅτι ἡ κάθετος αὐτῶν τέμνει πάντοτε τὸν ἄξονα (ἰδὲ σελ. 172 Α΄ τόμ. πρόβλ. 4ον).

Παρατήρησις. Αἱ προηγούμεναι ἐξισώσεις ἔχουσι πᾶσαι τὴν ἑπομένην μορφὴν $f(u, v) = 0$ ἢ $v = \varphi(u)$, ἔνθα u καὶ v εἶνε γνωσταὶ συναρτήσεις τῶν μεταβλητῶν x, y, z, ἡ δὲ $\varphi(u)$ αὐθαίρετος συνάρτησις τοῦ u.

Ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις, εἰς ἣν ἄγει πᾶσα τοιαύτη ἐξίσωσις, εἶνε πρωτοβάθμιος πρὸς τὰς μερικὰς παραγώγους p, q καὶ ὄντως ἐκ τῆς διαφορίσεως αὐτῆς προκύπτει

$$\frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z}=\varphi'(u).\left\{\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}\right\}$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}=\varphi'(u).\left\{\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}\right\},$$

ὅθεν ἕπεται ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ p & q & -1 \end{vmatrix}=0.$$

209. Καὶ περισσότεραι αὐθαίρετοι συναρτήσεις δύνανται ν' ἀπαλειφθῶσι διὰ τῶν ἀλλεπαλλήλων διαφορίσεων, ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ ἑξῆς παραδείγματος.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $z=\varphi(x+\alpha y)+f(x-\alpha y)$, ἔνθα φ καὶ f δηλοῦσιν αὐθαιρέτους συναρτήσεις.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὑρίσκομεν

$$\begin{aligned} p&=\varphi'(x+\alpha y)+f'(x-\alpha y)\\ q&=\alpha\varphi'(x+\alpha y)-\alpha f'(x-\alpha y)\\ r&=\varphi''(x+\alpha y)+f''(x-\alpha y)\\ t&=\alpha^2\varphi''(x+\alpha y)+\alpha^2 f''(x-\alpha y), \end{aligned}$$

ἐκ τούτων δὲ ἕπεται ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις

$$t=\alpha^2 r \qquad \text{ἤτοι} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\alpha^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

210. Ὅταν ἐπιφάνειά τις ὁρίζηται γεωμετρικῶς ὡς τόπος γραμμῆς, ἥτις ἀλλάσσει θέσιν καὶ σχῆμα (οἷαι αἱ κυλινδρικαί, αἱ κωνικαί, αἱ ἐκ περιστροφῆς κτλ.), ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς εὑρίσκεται ἐκ τῶν δύο ἐξισώσεων τῆς γενετείρας διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς τῆς μεταβλητῆς παραμέτρου α, ἣν αἱ ἐξισώσεις αὗται περιέχουσι καὶ τῆς ὁποίας ἡ μεταβολὴ προξενεῖ τὴν ἀλλαγὴν τῆς γενετείρας.

Ἐὰν δὲ αἱ ἐξισώσεις τῆς γενετείρας περιέχωσι περισσοτέρας παραμέτρους, πᾶσαι αἱ λοιπαὶ εἶνε συναρτήσεις μιᾶς ἐξ αὐτῶν· ὥστε αἱ ἐξισώσεις τῆς γενετείρας εἶνε ἐν γένει τῆς μορφῆς

$$\begin{aligned}&\varphi(x, y, z, \alpha, A, B, \ldots, M)=0\\&f(x, y, z, \alpha, A, B, \ldots M)=0,\end{aligned} \tag{1}$$

ἔνθα A, B, . . ., M δηλοῦσι μ συναρτήσεις οἱασδήποτε τοῦ α.

Ἐκ τούτου ὁδηγούμεθα εἰς τὸ ἑπόμενον γενικώτερον πρόβλημα ἀπαλοιφῆς αὐθαιρέτων συναρτήσεων.

211 Ἐκ τῶν δύο ἐξισώσεων

$$\begin{aligned}&\varphi(x, y, z, \alpha, A, B, \ldots, M)=0\\&f(x, y, z, \alpha, A, B, \ldots, M)=0,\end{aligned} \tag{1}$$

ἐν αἷς φ καὶ f εἶνε δεδομέναι συναρτήσεις τῶν ἐν αὐταῖς περιεχομένων γραμμάτων, τὰ δὲ A, B, . . ., M εἶνε αὐθαίρετοι συναρτήσεις τοῦ α, ὁρίζεται ἡ μεταβλητὴ z ὡς συνάρτησις τῶν x, y· διότι ἀπαλειφομένου τοῦ α μεταξὺ αὐτῶν θὰ προκύψῃ ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $z = \sigma(x, y)$ (τὸ εἶδος τῆς συναρτήσεως σ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς μορφῆς τῶν συναρτήσεων A, B, . . ., M τοῦ α)· ζητεῖται, χωρὶς νὰ εὑρεθῇ ἡ τὴν μεταβλητὴν z πρὸς τὰς x, y συνδέουσα ἐξίσωσις (ἥτις ἐν γένει τότε μόνον δύναται νὰ εὑρεθῇ, ὅταν ὁρισθῶσιν αἱ συναρτήσεις A, B, . . ., M τοῦ α) ν' ἀπαλειφθῶσιν ἥ τε παράμετρος α καὶ αἱ αὐθαίρετοι συναρτήσεις αὐτῆς A, B, . . ., M διὰ τῆς διαφορίσεως καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις, ἣν ἐπαληθεύει ἡ οὕτως ὁριζομένη συνάρτησις z.

Πρὸς λύσιν τοῦ ζητήματος τούτου παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις (1) δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς ὁρίζουσαι τὰς δύο συναρτήσεις z καὶ α τῶν x, y.

Ἐὰν δὲ διαφορίσωμεν αὐτὰς πρὸς ἑκατέραν τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, εὑρίσκομεν τὰς ἑπομένας τέσσαρας ἐξισώσεις

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}p+\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}=0\\&\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}q+\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y}=0\\&\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p+\frac{\partial f}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}=0\\&\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q+\frac{\partial f}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y}=0.\end{aligned} \tag{2}$$

Μεταφέροντες δὲ εἰς τὸ δεύτερον μέλος τοὺς ὅρους, οἵτινες ἔχουσι τὰς παραγώγους τῆς α, καὶ διαιροῦντες ἔπειτα τὰς ἐξισώσεις ἀνὰ δύο, εὑρίσκομεν

$$\frac{\frac{\partial \alpha}{\partial x}}{\frac{\partial \alpha}{\partial y}}=\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}+p\frac{\partial \varphi}{\partial z}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}+q\frac{\partial \varphi}{\partial z}}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}}, \tag{3}$$

Ἐκ τούτων δὲ ἕπεται ἡ ἐξίσωσις

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ p & q & -1 \end{vmatrix} = 0, \tag{4}$$

ἥτις περιέχει ὅσας καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις (1) περιεῖχε ποσότητας, πρὸς δὲ καὶ τὰς μερικὰς παραγώγους p, q.

Διαφορίζοντες νῦν καὶ τὴν ἐξίσωσιν (4), ἧς τινος τὸ πρῶτον μέλος, συντομίας χάριν, παριστῶμεν διὰ

$$\varphi_1(x, y, z, p, q, \alpha, A, B, \ldots, M),$$

εὑρίσκομεν τὰς ἑξῆς δύο ἐξισώσεις

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}p+\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}r+\frac{\partial \varphi_1}{\partial q}s+\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x}&=0 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}q+\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}s+\frac{\partial \varphi_1}{\partial q}t+\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y}&=0 \end{aligned} \tag{5}$$

μεταφέροντες δὲ καὶ πάλιν τοὺς ὅρους, οἵτινες ἔχουσι τὰς παραγώγους τῆς α, εἰς τὸ δεύτερον μέλος καὶ διαιροῦντες ἔπειτα τὰς ἐξισώσεις κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν τὸν λόγον τῶν δύο παραγώγων τῆς α· ἀλλ' ὁ αὐτὸς λόγος τῶν παραγώγων δίδεται καὶ ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων (3)· ἐντεῦθεν συνάγεται καὶ δευτέρα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς

$$\varphi_2(x, y, z, \alpha, A, B, \ldots, M, p, q, r, s, t)=0. \tag{6}$$

Ἐξακολουθοῦντες τοιουτοτρόπως, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ὅσας θέλωμεν ἐξισώσεις περιεχούσας τὰς τρεῖς μεταβλητὰς x, y, z, τὰς ποσότητας α, A, B, . . . ,M καὶ τὰς μερικὰς παραγώγους τῆς z ὡς πρὸς τὰς x, y. Ἀλλ' ἀρκεῖ νὰ προχωρήσωμεν μέχρι τῶν παραγώγων τῆς τάξεως μ (μ εἶνε ὁ ἀριθμὸς τῶν αὐθαιρέτων συναρτήσεων A, B, . . . ,M τῆς α)· διότι αἱ μ ἐξισώσεις αἱ τὰς μερικὰς παραγώγους περιέχουσαι, μετὰ τῶν δύο δοθεισῶν ἐξισώσεων (1) ἡνωμέναι, ἀρκοῦσι πρὸς ἀπαλοιφὴν τῶν $\mu+1$ ποσοτήτων $\alpha, A, B, \ldots, M$· ὅτε προκύπτει ἐξίσωσις διαφορικὴ περιέχουσα τὰς μεταβλητὰς x, y, z καὶ τὰς μερικὰς παραγώγους τῆς z μέχρι τῆς τάξεως μ.

212. Ἡ ἀπαλοιφὴ τῆς παραμέτρου α καὶ τῶν αὐθαιρέτων συναρτήσεων αὐτῆς $A, B, \ldots, M$ ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) διὰ τῆς διαφορίσεως δύναται νὰ γίνῃ καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ αἱ τέσσαρες μεταβληταὶ x, y, z, α συνδέονται διὰ τῶν δύο δοθεισῶν ἐξισώσεων (1), δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὰς x, y ὡς συναρτήσεις τῶν z καὶ α. Ἐὰν λοιπὸν διαφορίσωμεν αὐτὰς πρὸς τὴν z μ φοράς, θὰ εὕρωμεν 2μ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς

$$(7)\qquad \begin{array}{l} \varphi_1(x, y, z, \alpha, A, B, \ldots, M, x', y')=0 \\ \varphi_2(x, y, z, \alpha, A, B, \ldots, M, x', y', x'', y'')=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

αἵτινες πλὴν τῶν μεταβλητῶν x, y, z, α καὶ τῶν συναρτήσεων $A, B, \ldots, M$ θὰ περιέχωσι καὶ τὰς παραγώγους τῶν x, y πρὸς τὴν z, ἤτοι τὰς

$$x',\ y',\ x'',\ y'', \ldots$$

ἀλλ' ἂν νοήσωμεν τὴν μεταβλητὴν α ἀπαλειφθεῖσαν μεταξὺ τῶν δύο δοθεισῶν ἐξισώσεων (1), προκύπτει ἐξίσωσις τῆς μορφῆς

$$z=\sigma(x, y),$$

ἥτις θὰ καταντήσῃ ταὐτότης, ὅταν αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ y ληφθῶσιν ἐκ τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων καὶ τεθῶσιν εἰς αὐτήν. Ἐὰν δὲ διαφορίσωμεν καὶ ταύτην μ φορὰς πρὸς z, θὰ ἔχωμεν

$$(8)\qquad \begin{array}{l} 1=\dfrac{\partial z}{\partial x}x'+\dfrac{\partial z}{\partial y}y' \\ 0=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}x'^2+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}x'y'+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}y'^2+\dfrac{\partial z}{\partial x}x''+\dfrac{\partial z}{\partial y}y'' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \end{array}$$

αἱ διὰ τῆς διαφορίσεως λαμβανόμεναι 3μ ἐξισώσεις (7) καὶ (8), μετὰ τῶν 2 δοθεισῶν ἡνωμέναι, ἀρκοῦσι πρὸς ἀπαλοιφὴν τῆς παραμέτρου α καὶ τῶν μ αὐθαιρέτων συναρτήσεων αὐτῆς $A, B, \Gamma, \ldots, M$, ἔτι δὲ καὶ τῶν 2μ παραγώγων $x', x'', \ldots, x^{(\mu)}, y', y'', \ldots, y^{(\mu)}$.
Ἐκ τῆς ἀπαλοιφῆς δὲ τῶν $3\mu+1$ τούτων ποσοτήτων θὰ προκύψῃ ἡ ζητουμένη διαφορικὴ ἐξίσωσις.

Ἐφαρμογαί.

1) Ἡ γενικὴ ἐξίσωσις τῶν εὐθειογενῶν ἐπιφανειῶν, αἵτινες ἔχουσιν ὁδηγοῦν ἐπίπεδον τὸ ἐπίπεδον τῶν xy, εὑρίσκεται διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς τῆς παραμέτρου α ἐκ τῶν ἐξισώσεων

$$\begin{aligned} z &= \alpha \\ y &= \mathrm{A}x+\mathrm{B}, \end{aligned} \qquad (1)$$

ἔνθα Α καὶ Β δηλοῦσι συναρτήσεις αὐθαιρέτους τοῦ α (διότι αἱ ἐξισώσεις αὗται παριστῶσι τὴν γενέτειραν εὐθεῖαν εἰς τὴν τυχοῦσαν θέσιν αὐτῆς).

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν, θεωροῦντες τὰ z καὶ α ὡς συναρτήσεις τῶν x,y,

$$p=\frac{\partial\alpha}{\partial x}, \quad q=\frac{\partial\alpha}{\partial y}$$

$$0=\mathrm{A}+(\mathrm{A}'x+\mathrm{B}')\frac{\partial\alpha}{\partial x}, \qquad 1=(\mathrm{A}'x+\mathrm{B}')\frac{\partial\alpha}{\partial y},$$

ὅθεν ἕπεται ἡ ἐξίσωσις $\quad p+\mathrm{A}q=0 \qquad (2)$

διαφορίζοντες δὲ καὶ τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, εὑρίσκομεν

$$r+\mathrm{A}s+\mathrm{A}'q\frac{\partial\alpha}{\partial x}=0, \qquad s+\mathrm{A}t+\mathrm{A}'q\frac{\partial\alpha}{\partial y}=0,$$

ἐξ ὧν $\quad qr+\mathrm{A}sq=ps+\mathrm{A}pt \qquad (3)$

τέλος ἀπαλείφοντες τὴν συνάρτησιν Α μεταξὺ τῆς ἐξισώσεως ταύτης καὶ τῆς (2), εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$p^2t-2pqs+q^2r=0,$$

ἥτις εἶνε ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν εἰρημένων ἐπιφανειῶν.

2) Ἅπασαι αἱ εὐθειογενεῖς ἐπιφάνειαι περιέχονται ἐν ταῖς ἐξισώσεσιν

$$\begin{aligned} x &= az+\delta \\ y &= \beta z+\varepsilon, \end{aligned} \qquad (1)$$

ἔνθα a, β, δ, ε εἶνε συναρτήσεις οἱαιδήποτε μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς παραμέτρου α.

Θεωροῦντες τὰ x, y ὡς συναρτήσεις τῶν z καὶ α ὁριζομένας ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ διαφορίζοντες, εὑρίσκομεν

$$x'=a, \quad x''=0, \quad x'''=0, \ldots$$
$$y'=\beta, \quad y''=0, \quad y'''=0, \ldots$$

ἔχομεν δὲ καὶ τὰς ἐξισώσεις (8), αἵτινες νῦν καταντῶσι

$$\alpha p+\beta q=1$$
$$\alpha^2 r+2\alpha\beta s+\beta^2 t=0$$
$$\alpha^3\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+3\alpha^2\beta\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}+3\alpha\beta^2\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}+\beta^3\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=0.$$

Ἐκ τῶν δύο τελευταίων ἐξισώσεων ἀπαλείφεται ὁ λόγος τῶν δύο συναρτήσεων α, β καὶ προκύπτει ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις ἁπασῶν τῶν εὐθειογενῶν ἐπιφανειῶν, ἥτις εἶνε τῆς τρίτης τάξεως.

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶνε ἡ ἑξῆς

$$\omega^3\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+3\omega^2\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}+3\omega\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=0,$$

ἔνθα
$$\omega=\frac{-s\pm\sqrt{s^2-rt}}{r}.$$

Παρατηρητέον δέ, ὅτι ἡ αὐτὴ ἐξίσωσις δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς
$$M^2t^3+N^2r^3+2MN.s.(3rt-4s^2)=0,$$
ἐὰν τεθῇ πρὸς συντομίαν

$$M=r\frac{\partial\Delta}{\partial x}-\frac{4}{3}\frac{\partial r}{\partial x}\Delta,\qquad N=t\frac{\partial\Delta}{\partial y}-\frac{4}{3}\frac{\partial t}{\partial y}\Delta \qquad \text{καὶ } \Delta=rt-s^2.$$

Τέλος παραθέτομεν τὸ ἑπόμενον παράδειγμα ἀπαλοιφῆς αὐθαιρέτων συναρτήσεων, ἔνθα εὑρίσκονται δύο παράμετροι.

Ἅπασαι αἱ ἀναπτυκταὶ ἐπιφάνειαι περιέχονται ἐν ταῖς ἐξισώσεσιν

$$\begin{aligned} x&=\varphi(u)+v\varphi'(u)\\ y&=f(u)+vf'(u)\\ z&=\sigma(u)+v\sigma'(u), \end{aligned}\qquad (1)$$

ἔνθα u καὶ v εἶνε παράμετροι μεταβληταί, αἱ δὲ συναρτήσεις $\varphi(u)$, $f u)$ καὶ $\sigma(u)$ εἶνε οἱαιδήποτε.

Ἵνα ἀπαλείψωμεν τὰς αὐθαιρέτους συναρτήσεις

$$\varphi(u),\ f(u),\ \sigma(u),$$

διαφορίζομεν τὰς ἐξισώσεις ταύτας θεωροῦντες τὰ x, y, z ὡς συναρτήσεις τῶν u καὶ v καὶ εὑρίσκομεν

$$dx = \left| \varphi'(u) + v\varphi''(u) \right| du + \varphi'(u)dv$$

$$dy = \left| f'(u) + vf''(u) \right| du + f'(u)dv$$

$$dz = \left| \sigma'(u) + v\sigma''(u) \right| du + \sigma'(u)dv\cdot$$

ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων ἀπαλείφοντες τὰ διαφορικὰ τῶν παρα μέτρων u, v, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\begin{vmatrix} dx & \varphi'(u) & \varphi''(u) \\ dy & f'(u) & f''(u) \\ dz & \sigma'(u) & \sigma''(u) \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

ἥτις συνδέει τὰ διαφορικὰ dx, dy, dz.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης προσδιορίζονται αἱ μερικαὶ παράγωγοι p, q· εἶνε δὲ τῆς μορφῆς

$$p = F(u), \quad q = \Phi(u),$$

ὅθεν καὶ

$$q = \Sigma(p), \tag{3}$$

ἔνθα Σ δηλοῖ συνάρτησιν αὐθαίρετον (διότι καὶ αἱ συναρτήσεις φ, f, σ εἶνε αὐθαίρετοι).

Πρὸς ἀπαλοιφὴν τῆς συναρτήσεως Σ διαφορίζομεν τὴν ἐξίσωσιν (3) πρὸς x καὶ y (θεωροῦντες τὸ z ὡς συνάρτησιν τῶν x, y), ὅτε εὑρίσκομεν

$$s = \Sigma'(p).r$$
$$t = \Sigma'(p)s,$$

ἐξ ὧν ἕπεται ἀμέσως ἡ ἐξίσωσις

$$s^2 - rt = 0, \tag{4}$$

ἥτις εἶνε ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν ἀναπτυκτῶν ἐπιφανειῶν (παράβαλε ἐδ. 151).

ΤΕΛΟΣ

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄.

Γεωμετρικαὶ ἐφαρμογαί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ.