ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΧΑΤΖΙΔΑΚΗ
ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΟΥ ΕΘΝΙΚΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ, Α'

ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

(ΤΟΥ ΤΡΙΔΙΑΣΤΑΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ)

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΟΜ. Α'

ΑΘΗΝΑΙ
ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ ΠΑΡΑΣΚΕΥΑ ΛΕΩΝΗ
Οδός Πεσματζόγλου
[illegible]

ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΧΑΤΖΙΔΑΚΗ
ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΟΥ ΕΘΝΙΚΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ, Α΄

ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

(ΤΟΥ ΤΡΙΔΙΑΣΤΑΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ)

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΟΜ. Α΄

ΑΘΗΝΑΙ
ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ ΠΑΡΑΣΚΕΥΑ ΛΕΩΝΗ
30—Ὁδὸς Περικλέους—30
1935

Κάθε γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφήν μου.

ΑΦΙΕΡΩΝΕΤΑΙ

ΣΤΗ ΜΝΗΜΗ

ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΜΟΥ ΔΙΔΑΣΚΑΛΟΥ:

ΤΟΥ ΠΑΤΕΡΑ ΜΟΥ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Μετὰ τὴν πρὸ ἐτῶν ἔκδοσιν τοῦ βιβλίου μου περὶ τῆς ***Θεωρίας τῶν Ἐπιφανειῶν*** ἔμενεν ἐπιτακτικὴ ἡ ἀνάγκη τῆς ἐκδόσεως καὶ μιᾶς, ὁπωσδήποτε ἐκτενοῦς, ***Θεωρίας τῶν Καμπύλων.*** Αὐτῆς τὴν ἔκδοσιν ἐπιχειρῶ σήμερον. Μὲ τοὺς τρεῖς τόμους μου: ***«Θεωρία τῶν Καμπύλων»***, ***«Θεωρία τῶν Ἐπιφανειῶν»*** καὶ ***«Σμήνη καὶ Συμπλέγματα Καμπύλων καὶ Ἐπιφανειῶν»*** παρέχω εἰς τοὺς Ἕλληνας φοιτητὰς ἓν ***πλῆρες καὶ ἀρκετὰ ἐκτενὲς σύστημα Διαφορικῆς Ἀπειροστικῆς Γεωμετρίας***.

Μὲ τὴν ἔκδοσιν δὲ καὶ τοῦ β΄ τόμου τῆς ***«Κινητικῆς Ἀπειροστικῆς Γεωμετρίας» μου***, ποὺ θὰ ἐπακολουθήσῃ, συμπληρώνεται, μαζὶ μὲ τὸν ἐκδοθέντα ἤδη α΄, καὶ τὸ σύστημα τῆς ***Κινητικῆς Ἀπειροστικῆς Γεωμετρίας,*** ποὺ πρῶτος εἰσήγαγον εἰς τὸ πανεπιστήμιόν μας καὶ ἀπὸ ἐτῶν διδάσκω εἰς τοὺς τεταρτοετεῖς φοιτητάς.

Εἰς τὸ παρὸν βιβλίον ἠκολούθησα μὲν κατὰ τὰς γενικάς της γραμμὰς τὴν σειράν, μὲ τὴν ὁποίαν εἶχον ἐκτεθῆ αἱ θεωρίαι αὐταὶ ἀπὸ τὸν πατέρα μου εἰς τὸν ***Διαφορικὸν Λογισμόν*** του, μετέβαλα ὅμως καὶ συνεπλήρωσα οὐσιωδῶς τὸν τρόπον τῆς ἐκθέσεως πολλῶν θεωριῶν καὶ προσέθεσα πολλὰς νέας θεωρίας καὶ πλουσίαν συλλογὴν ἀσκήσεων, ὥστε τὸ βιβλίον μου αὐτὸ καὶ κατὰ τὴν ἔκτασιν καὶ κατὰ τὸ περιεχόμενον νὰ μὴ ὑπολείπεται τῶν ἀναλόγων του γαλλικῶν καὶ γερμανικῶν. Εἰς μερικὰ δὲ μέρη προσέθηκα καὶ ἰδικάς μου κατὰ καιροὺς ἐρεύνας.

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΧΑΤΖΙΔΑΚΗΣ

Ἀθῆναι, 11 Νοεμβρίου 1934.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

(ΛΗΜΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ)

Α´) ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΙΑΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ ΚΑΙ ΜΙΑΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

α´) Ἐξισώσεις μιᾶς ἐπιπέδου καμπύλης.

1. ***«Κανονική»* ἐξίσωσις.** — Ἡ ἐξίσωσις : $y=\sigma(x)$, ἢ εἰς πολικὰς συντεταγμένας : $\varrho=\sigma(\vartheta)$, παριστάνει, εἰς τὸ ἐπίπεδον xy, ἐν γένει μίαν καμπύλην· ***καὶ ἀντιστρόφως*** : Κάθε καμπύλη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου xy ἔχει μίαν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς : $y=\sigma(x)$ ἢ $\varrho=\sigma(\vartheta)$.

2. ***Ἄλυτος ἐξίσωσις.*** — Ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης εἰμπορεῖ νὰ εἶναι καὶ ***ἄλυτος*** πρὸς τὸ y ἢ τὸ ϱ, τῆς μορφῆς δηλ.

$$\varphi(x,y)=0 \quad ἢ \quad \varphi(\varrho,\vartheta)=0.$$

3. ***«Παραμετρικαὶ» ἐξισώσεις, μὲ μίαν παράμετρον.***—Μία ἐπίπεδος καμπύλη εἰμπορεῖ νὰ ἔχῃ καὶ ***δύο*** ἐξισώσεις τῆς μορφῆς : $\sigma(x,y,u)=0$, $\varphi(x,y,u)=0$ ἢ $\sigma(\varrho,\vartheta,u)=0$, $\varphi(\varrho,\vartheta,u)=0$ ἢ καὶ λυμένας πρὸς τὰ x, y (*«**κανονικαὶ**»* παραμετρικαὶ ἐξισώσεις) ἢ τὰ ϱ, ϑ :

$$x=\sigma_1(u),\ y=\varphi_1(u), \quad ἢ \quad \varrho=\sigma_1(u),\ \vartheta=\varphi_1(u),$$

ὅπου τὸ u εἶναι μία ***βοηθητικὴ*** ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ (*«**παράμετρος**»*), ποὺ συχνὰ ἔχει ***γεωμετρικὴν*** σημασίαν, δηλ. παριστάνει ἓν γεωμετρικὸν ποσὸν (μῆκος ἢ γωνίαν), ποὺ εἰσέρχεται εἰς τὴν καταγραφὴν τῆς καμπύλης· ἰδιαιτέρως σπουδαία εἶναι ἡ περίπτωσις, ποὺ τὸ $u\equiv s$, ὅπου s τὸ τόξον τῆς καμπύλης.

Ὅτι δὲ αἱ δύο αὐταὶ ἐξισώσεις παριστάνουν μίαν καμπύλην, φαίνεται ἀμέσως ἀπὸ τὴν ἀπαλοιφὴν τῆς παραμέτρου u μεταξύ των.

(***Παράδειγμα*** : Αἱ ἐξισώσεις τῆς κυκλοειδοῦς : $x=\alpha(\omega-ημω)$, $y=\alpha(1-συνω)$).

4. ***Παραμετρικαὶ ἐξισώσεις μὲ πολλὰς παραμέτρους.***—Γενικῶς, ἓν σύστημα ***ν*** ἐξισώσεων μὲ ***ν—1*** παραμέτρους, τῆς μορφῆς :

$$\begin{cases} \sigma_1(x,y,u_1,u_2,\ldots,u_{\nu-1})=0, \\ \sigma_2(x,y,u_1,u_2,\ldots,u_{\nu-1})=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma_\nu(x,y,u_1,u_2,\ldots,u_{\nu-1})=0, \end{cases} \quad \text{ἢ} \quad \begin{cases} \sigma_1(\varrho,\vartheta,u_1,u_2,\ldots,u_{\nu-1})=0, \\ \sigma_2(\varrho,\vartheta,u_1,u_2,\ldots,u_{\nu-1})=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma_\nu(\varrho,\vartheta,u_1,u_2,\ldots,u_{\nu-1})=0 \end{cases}$$

παριστάνει πάλιν μίαν ἐπίπεδον καμπύλην (καθὼς φαίνεται ἀπὸ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν ν—1 παραμέτρων ἀπὸ τὰς ν ἐξισώσεις). Συνηθέστεραι εἶναι αἱ περιπτώσεις ***μιᾶς*** ἐξισώσεως ***χωρὶς*** παράμετρον (***«συνήθης»*** ἐξίσωσις τῆς καμπύλης) καὶ ***δύο*** ἐξισώσεων μὲ ***μίαν*** παράμετρον (καὶ ἰδιαιτέρως μὲ $u\equiv s$, τὸ τόξον τῆς καμπύλης).

β′) Ἐξισώσεις μιᾶς Ἐπιφανείας.

5. «***Κανονικὴ***» ***ἐξίσωσις.***—Ἡ ἐξίσωσις : $z=\sigma(x,y)$ ἢ εἰς πολικὰς συντεταγμένας : $\psi=\sigma(\vartheta,\varrho)$ παριστάνει μίαν ἐπιφάνειαν· ***καὶ ἀντιστρόφως :*** Κάθε ἐπιφάνεια ἔχει μίαν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς : $z=\sigma(x,y)$ ἢ $\psi=\sigma(\varrho,\vartheta)$.

6. ***Ἄλυτος ἐξίσωσις.***—Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας εἱμπορεῖ νὰ εἶναι καὶ ***ἄλυτος*** πρὸς τὸ z ἢ τὸ ψ, δηλ. τῆς μορφῆς :

$$\varphi(x,y,z)=0 \quad \text{ἢ} \quad \varphi(\varrho,\vartheta,\psi)=0.$$

7. «***Παραμετρικαὶ***» ***ἐξισώσεις.***—Μία ἐπιφάνεια εἱμπορεῖ νὰ ἔχῃ καὶ ***παραμετρικὰς*** ἐξισώσεις : α′) ***Δύο*** ἐξισώσεις μὲ ***μίαν*** παράμετρον u, δηλ. τῆς μορφῆς : $\sigma_1(x,y,z,u)=0$, $\varphi_1(x,y,z,u)=0$ ἢ $\sigma_1(\varrho,\vartheta,\psi,u)=0$, $\varphi_1(\varrho,\vartheta,\psi,u)=0$, ἢ καὶ λυμένας, τῆς μορφῆς :

$$y=\sigma(x,u),\ z=\varphi(x,u) \quad \text{ἢ} \quad \varrho=\sigma(\vartheta,u),\ \psi=\varphi(\vartheta,u).$$

(Διότι ἡ ἀπαλοιφὴ τοῦ u μᾶς δίδει τὴν ***«συνήθη»*** ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας : $\Phi(x,y,z)=0$ ἢ $\Phi(\varrho,\vartheta,\psi)=0$).

β′) ***Τρεῖς*** ἐξισώσεις μὲ ***δύο*** παραμέτρους u,v, τῆς μορφῆς :

$$\sigma_1(x,y,z,u,v)=0,\quad \varphi_1(x,y,z,u,v)=0,\quad f_1(x,y,z,u,v)=0,$$

ἢ $$\sigma_1(\varrho,\vartheta,\psi,u,v)=0,\quad \varphi_1(\varrho,\vartheta,\psi,u,v)=0,\quad f_1(\varrho,\vartheta,\psi,u,v)=0,$$

ἢ λυμένας πρὸς τὰ x,y,z ἢ ρ,θ,ψ :

$$x=\sigma(u,v),\ y=\varphi(u,v),\ z=f(u,v) \quad \text{ἢ} \quad \varrho=\sigma(u,v),\ \vartheta=\varphi(u,v),\ \psi=f(u,v).$$

(Ἡ ἀπαλοιφὴ τῶν u,v μᾶς δίδει πάλιν τὴν συνήθη ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας).

(***Παράδειγμα*** : Αἱ παραμετρικαὶ ἐξισώσεις τῆς σφαίρας: $x=\alpha\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\psi$, $y=\alpha\eta\mu\vartheta\eta\mu\psi$, $z=\alpha\sigma\upsilon\nu\vartheta$ (ὅπου $\vartheta\equiv u$, $\psi\equiv v$)).

γ΄) ***ν*** ἐξισώσεις μὲ $\nu-1$ παραμέτρους, τῆς μορφῆς :

$$\begin{cases} \sigma_1(x,y,z,u_1,\ldots,u_{\nu-1})=0, \\ \sigma_2(x,y,z,u_1,\ldots,u_{\nu-1})=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma_\nu(x,y,z,u_1,\ldots,u_{\nu-1})=0 \end{cases} \quad \text{ἢ} \quad \begin{cases} \sigma_1(\varrho,\vartheta,\psi,u_1,\ldots,u_{\nu-1})=0, \\ \sigma_1(\varrho,\vartheta,\psi,u_1,\ldots,u_{\nu-1})=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma_\nu(\varrho,\vartheta,\psi,u_1,\ldots,u_{\nu-1})=0. \end{cases}$$

(Καὶ πάλιν ἡ ἀπαλοιφὴ τῶν ***ν***-1 παραμέτρων θά μας δώση τὴν συνήθη ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας).

Σπουδαιότεραι ἀπὸ τὰς παραστάσεις αὐτὰς τῶν ἐξισώσεων τῆς ἐπιφανείας εἶναι :

α΄) Ἡ παράστασις ***χωρὶς*** παραμέτρους, δηλ. ἡ συνήθης ἐξίσωσις :

$$\varphi(x,y,z)=0, \quad \text{ἢ} \quad \text{λυμένη πρὸς } z: \ z=\sigma(x,y).$$

β΄) Ἡ παράστασις μὲ ***δύο*** παραμέτρους :

$x=\sigma(u,v)$, $y=\varphi(u,v)$, $z=f(u,v)$ («***κανονικαὶ***» παραμετρικαὶ ἐξισώσεις ἢ «***ἐξισώσεις κατὰ*** *Gauss*» (Γκάους)).

γ΄) Εἰς μερικὰς θεωρίας καὶ ἡ παράστασις μὲ ***μίαν*** παράμετρον :

$$\sigma(x,y,z,u)=0, \quad \varphi(x,y,z,u)=0.$$

γ΄) Ἐξισώσεις μιᾶς καμπύλης τοῦ χώρου.

8. «***Συνήθεις***» ***ἐξισώσεις τῆς καμπύλης.***—Τὸ σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων : $\sigma_1(x,y,z)=0$, $\varphi_1(x,y,z)=0$ ἢ $\sigma_1(\varrho,\vartheta,\psi)=0$, $\varphi_1(\varrho,\vartheta,\psi)=0$ παριστάνει μίαν καμπύλην τοῦ χώρου (ὡς ***τομὴν*** τῶν δύο ἐπιφανειῶν: $\sigma_1(x,y,z)=0$ καὶ $\varphi_1(x,y,z)=0$ ἢ $\sigma_1(\varrho,\vartheta,\psi)=0$ καὶ $\varphi_1(\varrho,\vartheta,\psi)=0$), ἢ λυμένον πρὸς τὸ x ἢ τὸ ϑ: $y=\sigma(x)$, $z=\varphi(x)$ (α) ἢ $\varrho=\sigma(\vartheta)$, $\psi=\varphi(\vartheta)$ (β). Αἱ (α) δίδουν τότε τὴν καμπύλην ὡς τομὴν τῶν δύο κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν : $y=\sigma(x)$ καὶ $z=\varphi(x)$, πού την προβάλλουν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου xy ἡ α΄ καὶ ἐπὶ τοῦ xz ἡ β΄· αἱ δὲ (β) ὡς τομὴν τῶν δύο ἐπιφανειῶν: $\varrho=\sigma(\vartheta)$ (ἐπιφάνεια ***ἐκ περιστροφῆς*** περὶ τὸν ἄξονα OZ) καὶ $\psi=\varphi(\vartheta)$ (ἐπιφάνεια ***κωνική,*** μὲ κορυφὴν τὸ O).

Ἡ μορφή : $y=\sigma(x)$, $z=\varphi(x)$ λέγεται ***κανονικὴ*** μορφὴ τῶν συνήθων ἐξισώσεων τῆς καμπύλης.

9. ***Παραμετρικαὶ ἐξισώσεις*] *τῆς καμπύλης*.—α΄) *Τρεῖς* ἐξισώσεις μὲ *μίαν* παράμετρον :

(α) $\sigma_1(x,y,z,u)=0, \quad \varphi_1(x,y,z,u)=0, \quad f_1(x,y,z,u)=0$

ἢ $\sigma_1(\varrho,\vartheta,\psi,u)=0, \quad \varphi_1(\varrho,\vartheta,\psi,u)=0, \quad f_1(\varrho,\vartheta,\psi,u)=0.$ (β)

(Ἡ ἀπαλοιφὴ τοῦ u μᾶς δίδει τὰς δύο συνήθεις ἐξισώσεις).

Ἂν λυθοῦν αἱ (α) καὶ (β) πρὸς τὰ x,y,z καὶ ϱ,ϑ,ψ δίδουν:

$x=\sigma(u)$, $y=\varphi(u)$, $z=f(u)$ (***«κανονικαὶ»*** παραμετρικαὶ ἐξισώσεις τῆς καμπύλης), ἢ καί : $x=\sigma(s)$, $y=\varphi(s)$, $z=f(s)$ ($u\equiv s\equiv$τόξον)· καί : $\varrho=\sigma(u)$, $\vartheta=\varphi(u)$, $\psi=f(u)$.

β΄) ν ἐξισώσεις μὲ ν—2 παραμέτρους, τῆς μορφῆς :

$$\left\{\begin{array}{l}\sigma_1(x,y,z,u_1,\ldots,u_{\nu-2})=0,\\ \sigma_2(x,y,z,u_1,\ldots,u_{\nu-2})=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \sigma_\nu(x,y,z,u_1,\ldots,u_{\nu-2})=0\end{array}\right. \quad \text{ἢ} \quad \left\{\begin{array}{l}\sigma_1(\varrho,\vartheta,\psi,u_1,\ldots,u_{\nu-2})=0,\\ \sigma_2(\varrho,\vartheta,\psi,u_1,\ldots,u_{\nu-2})=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \sigma_\nu(\varrho,\vartheta,\psi,u_1,\ldots,u_{\nu-2})=0.\end{array}\right.$$

(Ἡ ἀπαλοιφὴ τῶν ν—2 παραμέτρων μᾶς δίδει πάλιν τὰς δύο ἐξισώσεις τῆς καμπύλης).

Σπουδαιότεραι εἶναι αἱ παραστάσεις τῆς καμπύλης μὲ ***δύο*** ἐξισώσεις ***χωρὶς*** παράμετρον καὶ μὲ ***τρεῖς*** ἐξισώσεις καὶ ***μίαν*** παράμετρον. (Ἰδιαιτέρως δὲ μὲ $u\equiv s$, δηλ. τὸ τόξον τῆς καμπύλης).

Β΄) ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΩΝ ΠΛΗΘΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

α΄) Γένη.

10. ***Γένος ἐπιπέδων καμπύλων***. — Ἡ ἐξίσωσις : $\sigma(x,y,u)=0$ ἢ $\sigma(\varrho,\vartheta,u)=0$ παριστάνει, εἰς τὸ ἐπίπεδον xy, ἓν ***μονοπαραμετρικὸν*** πλῆθος καμπύλων (***μίαν*** καμπύλην διὰ ***κάθε*** ἀριθμητικὴν τιμὴν τῆς παραμέτρου u), τὸ ὅλον λοιπὸν ∞^1 καμπύλας· τὸ πλῆθος αὐτὸ τὸ λέγομεν ***ἐπίπεδον «γένος»*** καμπύλων. (***Παράδειγμα*** : Περιφέρειαι ὁμόκεντροι : $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=u^2$).

Γενικῶς ἓν σύστημα ν ἐξισώσεων μὲ ν παραμέτρους, τῆς μορφῆς :

$$\sigma_1(x,y,u_1,\ldots,u_\nu)=0,\ldots,\sigma_\nu(x,y,u_1,\ldots,u_\nu)=0,$$

ἢ $$\sigma_1(\varrho,\vartheta,u_1,\ldots,u_\nu)=0,\ldots,\sigma_\nu(\varrho,\vartheta,u_1,\ldots,u_\nu)=0$$

παριστάνει πάλιν ἓν ἐπίπεδον γένος καμπύλων· διότι ἡ ἀπαλοιφὴ ν—1 ἀπὸ τὰς ν παραμέτρους θά μας δώσῃ μίαν ἐξίσωσιν :

$$\sigma(x,y,u)=0 \quad \text{ἢ} \quad \sigma(\varrho,\vartheta,u)=0.$$

11. ***Γένος ἐπιφανειῶν.*** — Ἡ ἐξίσωσις : $\sigma(x,y,z,u)=0$ ἢ $\sigma(\varrho,\vartheta,\psi,u)=0$ παριστάνει ἓν ***γένος*** ἐπιφανειῶν, δηλ. ἓν ***μονοπαραμετρικὸν*** πλῆθος ἐπιφανειῶν (∞^1 ἐπιφανείας). (***Παράδειγμα*** : Σφαιρικαὶ ἐπιφάνειαι ὁμόκεντροι : $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=u^2$).

Γενικῶς ἓν σύστημα ν ἐξισώσεων μὲ ν παραμέτρους, τῆς μορφῆς :

$$\sigma_1(x,y,z,u_1,\ldots,u_\nu)=0,\ldots,\sigma_\nu(x,y,z,u_1,\ldots,u_\nu)=0$$
$$\text{ἢ}\quad \sigma_1(\varrho,\vartheta,\psi,u_1,\ldots,u_\nu)=0,\ldots,\sigma_\nu(\varrho,\vartheta,\psi,u_1,\ldots,u_\nu)=0$$

παριστάνει πάλιν ἓν γένος ἐπιφανειῶν· διότι ἡ ἀπαλοιφὴ ν—1 παραμέτρων μᾶς δίδει : $\sigma(x,y,z,u)=0$ ἢ $\sigma(\varrho,\vartheta,\psi,u)=0$.

12. ***Γένος καμπύλων τοῦ χώρου.*** — Τὸ σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων : $\sigma(x,y,z,u)=0$, $\varphi(x,y,z,u)=0$ ἢ $\sigma(\varrho,\vartheta,\psi,u)=0$, $\varphi(\varrho,\vartheta,\psi,u)=0$ παριστάνει ἓν ***«γένος»*** καμπύλων τοῦ χώρου (δηλ. ∞^1 καμπύλας). (***Παράδειγμα*** : Αἱ εὐθεῖαι : $y=\alpha x+\beta$, $z=\gamma x+\delta$, ὅπου τὰ $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ τὰ ὑποθέτομεν συναρτήσεις ***μιᾶς*** παραμέτρου u).

Ἓν γένος καμπύλων τοῦ χώρου ἀποτελεῖται προφανῶς ἀπὸ τὰς ***τομὰς*** δύο γενῶν ἐπιφανειῶν, τῶν : $\sigma(x,y,z,u)=0$ καὶ $\varphi(x,y,z,u)=0$, ἢ $\sigma(\varrho,\vartheta,\psi,u)=0$ καὶ $\varphi(\varrho,\vartheta,\psi,u)=0$.

Ἡ ἀπαλοιφὴ τῆς u μεταξὺ τῶν δύο ἐξισώσεων τοῦ γένους μᾶς δίδει : $f(x,y,z)=0$ ἢ $f(\varrho,\vartheta,\psi)=0$, δηλ. ***τὴν ἐπιφάνειαν***, ποὺ ἀποτελοῦν αἱ καμπύλαι τοῦ γένους· ἀλλὰ ***καὶ αἱ ἴδιαι*** αἱ δύο ἐξισώσεις τοῦ γένους παριστάνουν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν αὐτὴν (ἐδ. 7, α΄).

Γενικῶς ν ἐξισώσεις μὲ ν—1 παραμέτρους, τῆς μορφῆς :

$$\sigma_1(x,y,z,u_1,\ldots,u_{\nu-1})=0,\ldots,\sigma_\nu(x,y,z,u_1,\ldots u_{\nu-1})=0$$
$$\text{ἢ}\quad \sigma_1(\varrho,\vartheta,\psi,u_1,\ldots,u_{\nu-1})=0,\ldots,\sigma_\nu(\varrho,\vartheta,\psi,u_1,\ldots,u_\nu)=0$$

παριστάνουν πάλιν ἓν γένος καμπύλων· διότι, ἂν λάβωμεν τὰς τιμὰς ν—2 ἀπὸ τὰς ν—1 παραμέτρους (ἀπὸ ν—2 ἀπὸ τὰς ν αὐτὰς ἐξισώσεις) καὶ τὰς θέσωμεν εἰς τὰς λοιπὰς δύο ἐξισώσεις, θὰ ἔχωμεν :

$$\sigma(x,y,z,u)=0,\ \varphi(x,y,z,u)=0,\quad \text{ἢ}\quad \sigma(\varrho,\vartheta,\psi,u)=0,\ \varphi(\varrho,\vartheta,\psi,u)=0.$$

β΄) Σμήνη.

13. ***Σμῆνος ἐπιπέδων καμπύλων.*** — Ἡ ἐξίσωσις : $\sigma(x,y,u,v)=0$ ἢ $\sigma(\varrho,\vartheta,u,v)=0$ παριστάνει, εἰς τὸ ἐπίπεδον xy, ∞^2 καμπύλας, δηλ. ἓν ***διπαραμετρικὸν*** πλῆθος καμπύλων ἢ ἓν ***γένος ἀπὸ γένη***, ἓν (ἐπίπε-

δον) «**σμῆνος**» καμπύλων. (***Παράδειγμα :*** Αἱ ἴσαι περιφέρειαι : $(x-u)^2+(y-v)^2=\varrho^2$).

Εἰς κάθε σχέσιν : $v=\varrho(u)$ ἀντιστοιχεῖ ἓν **γένος** ἀπὸ ∞^1 καμπύλας τοῦ σμήνους.

Γενικῶς ἓν σύστημα ν ἐξισώσεων μὲ $\nu+1$ παραμέτρους, τῆς μορφῆς : $\sigma_1(x,y,u_1,\ldots,u_{\nu+1})=0, \ldots, \sigma_\nu(x,y,u_1,\ldots,u_{\nu+1})=0$ ἢ $\sigma_1(\varrho,\vartheta,u_1,\ldots,u_{\nu+1})=0,\ldots,\sigma_\nu(\varrho,\vartheta,u_1,\ldots,u_{\nu+1})=0$ παριστάνει ἓν σμῆνος ἐπιπέδων καμπύλων· διότι, ἂν λάβωμεν τὰς τιμὰς $\nu-1$ ἀπὸ τὰς $\nu+1$ παραμέτρους (ἀπὸ $\nu-1$ ἀπὸ τὰς ν αὐτὰς ἐξισώσεις) καὶ τὰς θέσωμεν εἰς τὴν λοιπήν, θὰ εὕρωμεν : $\sigma(x,y,u,v)=0$ ἢ $\sigma(\varrho,\vartheta,u,v)=0$.

14. ***Σμῆνος ἐπιφανειῶν.*** — Ἡ ἐξίσωσις : $\sigma(x, y, z, u, v) = 0$ ἢ $\sigma(\varrho,\vartheta,\psi,u,v)=0$ παριστάνει ∞^2 ἐπιφανείας, δηλ. ἓν **σμῆνος** ἐπιφανειῶν (ἓν ***γένος ἀπὸ γένη***). (***Παράδειγμα :*** Αἱ σφαιρικαὶ ἐπιφάνειαι: $(x-u^2)+(y-v)^2+z^2=\varrho^2$). Εἰς κάθε σχέσιν : $v=\varrho(u)$ ἀντιστοιχεῖ ἓν ***γένος*** ἀπὸ ∞^1 ἐπιφανείας τοῦ σμήνους.

Γενικῶς ἓν σύστημα ἐξισώσεων μὲ $\nu+1$ παραμέτρους, τῆς μορφῆς :

$$\sigma_1(x,y,z,u_1,\ldots,u_{\nu+1})=0, \ \ldots, \ \sigma_\nu(x,y,z,u_1,\ldots,u_{\nu+1})=0$$
$$\text{ἢ } \sigma(\varrho,\vartheta,\psi,u_1,\ldots,u_{\nu+1})=0,\ldots\sigma_\nu(\varrho,\vartheta,\psi,u_1,\ldots,u_{\nu+1})=0$$

παριστάνει ἓν σμῆνος ἐπιφανειῶν· διότι, ἂν λάβωμεν τὰς τιμὰς $\nu-1$ ἀπὸ τὰς $\nu+1$ παραμέτρους (ἀπὸ $\nu-1$ ἀπὸ τὰς ν αὐτὰς ἐξισώσεις) καὶ τὰς θέσωμεν εἰς τὴν λοιπήν, θὰ ἔχωμεν : $\sigma(x,y,z,u,v)=0$ ἢ $\sigma(\varrho,\vartheta,\psi,u,v)=0$.

15. ***Σμῆνος καμπύλων τοῦ χώρου.*** — Αἱ δύο ἐξισώσεις : $\sigma(x,y,z,u,v)=0$, $\varphi(x,y,z,u,v)=0$ ἢ $\sigma(\varrho,\vartheta,\psi,u,v)=0$, $\varphi(\varrho,\vartheta,\psi,u,v)=0$ παριστάνουν ∞^2 καμπύλας τοῦ χώρου, δηλ. ἓν **σμῆνος** καμπύλων (ἓν ***γένος*** ἀπὸ ***γένη***). (***Παράδειγμα :*** Αἱ περιφέρειαι, ποὺ διέρχονται ἀπὸ δύο σημεῖα τοῦ χώρου).

Ἓν σμῆνος καμπύλων τοῦ χώρου ἀποτελεῖται προφανῶς ἀπὸ τὰς ***τομὰς*** δύο σμηνῶν ἐπιφανειῶν, τῶν :

$$\sigma(x,y,z,u,v)=0 \text{ καὶ } \varphi(x,y,z,u,v)=0$$
$$\text{ἢ } \sigma(\varrho,\vartheta,\psi,u,v)=0 \text{ καὶ } \varphi(\varrho,\vartheta,\psi,u,v)=0.$$

Εἰς κάθε σχέσιν : $v=\varrho(u)$ ἀντιστοιχεῖ ἓν ***γένος*** ἀπὸ καμπύλας τοῦ σμήνους, δηλ. ***μία ἐπιφάνεια*** τοῦ σμήνους.

Γενικῶς ἓν σύστημα ν ἐξισώσεων μὲ ν παραμέτρους, τῆς μορφῆς;

$$\sigma_1(x,y,z,u_1,\ldots,u_\nu)=0,\ldots,\sigma_\nu(x,y,z,u_1,\ldots,u_\nu)=0$$
$$\text{ἢ } \sigma_1(\varrho,\vartheta,\psi,u_1,\ldots,u_\nu)=0,\ldots,\sigma_\nu(\varrho,\vartheta,\psi,u_1,\ldots,u_\nu)=0$$

παριστάνει πάλιν ἓν σμῆνος καμπύλων, διότι, ἂν, ἀπὸ $\nu-2$ ἀπὸ τὰς ν αὐτὰς ἐξισώσεις, λάβωμεν τὰς τιμὰς $\nu-2$ ἀπὸ τὰς ν παραμέτρους καὶ τὰς θέσωμεν εἰς τὰς λοιπὰς δύο ἐξισώσεις, θὰ εὕρωμεν: $\sigma(x,y,z,u,v)=0$, $\varphi(x,y,z,u,v)=0$ ἢ $\sigma(\varrho,\vartheta,\psi,u,v)=0$, $\varphi(\varrho,\vartheta,\psi,u,v)=0$.

γ΄) Συμπλέγματα.

16. ***Σύμπλεγμα ἐπιπέδων καμπύλων.***—Ἡ ἐξίσωσις: $\sigma(x,y,u,v,w)=0$ παριστάνει, εἰς τὸ ἐπίπεδον xy, ∞^3 καμπύλας, δηλ. ἓν ***τριπαραμετρικὸν*** πλῆθος ἢ ἓν ***«σύμπλεγμα»*** καμπύλων (ἓν ***γένος ἀπὸ σμήνη*** ἢ ἓν ***σμῆνος ἀπὸ γένη***).

(***Παράδειγμα***: Αἱ περιφέρειαι τοῦ ἐπιπέδου:

$$(x-u)^2+(y-v)^2=w^2).$$

Εἰς κάθε σχέσιν: $\varphi(u,v,w)=0$ ἀντιστοιχεῖ ἓν ***σμῆνος*** ἀπὸ ∞^3 καμπύλας τοῦ συμπλέγματος· εἰς ***δύο*** δὲ σχέσεις τῆς ἰδίας μορφῆς ἀντιστοιχεῖ ἓν ***γένος*** τοῦ συμπλέγματος.

Γενικῶς: ἓν σύστημα ν ἐξισώσεων μὲ $\nu+2$ παραμέτρους, τῆς μορφῆς:

$$\sigma_1(x,y,u_1,\ldots,u_{\nu+2})=0,\ldots,\sigma_\nu(x,y,u_1,\ldots,u_{\nu+2})=0$$
$$\text{ἢ } \sigma_1(\varrho,\vartheta,u_1,\ldots,u_{\nu+2})=0,\ldots,\sigma_\nu(\varrho,\vartheta,u_1,\ldots,u_{\nu+2})=0$$

παριστάνει ἓν ἐπίπεδον σύμπλεγμα καμπύλων· διότι, ἂν λάβωμεν, ἀπὸ $\nu-1$ ἀπὸ τὰς ν αὐτὰς ἐξισώσεις, τὰς τιμὰς $\nu-1$ παραμέτρων ἀπὸ τὰς $\nu+2$ καὶ τὰς θέσωμεν εἰς τὴν λοιπὴν ἐξίσωσιν, θὰ εὕρωμεν: $\sigma(x,y,u,v,w)=0$ ἢ $\sigma(\varrho,\vartheta,u,v,w)=0$.

19. ***Σύμπλεγμα ἐπιφανειῶν.***—Ἡ ἐξίσωσις: $\sigma(x,y,z,u,v,w)=0$ ἢ $\sigma(\varrho,\vartheta,\psi,u,v,w)=0$ παριστάνει ∞^3 ἐπιφανείας, δηλ. ἓν ***σύμπλεγμα*** ἐπιφανειῶν (ἓν ***γένος ἀπὸ σμήνη*** ἢ ἓν ***σμῆνος ἀπὸ γένη***). (***Παράδειγμα***: Αἱ ἴσαι σφαιρικαὶ ἐπιφάνειαι: $(x-u)^2+(y-v)^2+(z-w)^2=\varrho^2$). Εἰς κάθε σχέσιν: $f(u,v,w)=0$ ἀντιστοιχεῖ ἓν ***σμῆνος*** τοῦ συμπλέγματος καὶ εἰς δύο τοιαύτας σχέσεις, ἓν ***γένος*** του.

Γενικῶς ἓν σύστημα ν ἐξισώσεων μὲ $\nu+2$ παραμέτρους, τῆς μορφῆς :

$$\sigma_1(x,y,z,u_1,\ldots,u_{\nu+2})=0,\ldots,\sigma_\nu(x,y,z,u_1,\ldots,u_{\nu+2})=0$$
$$\text{ἢ}\quad \sigma(\varrho,\vartheta,\psi,u_1,\ldots,u_{\nu+2})=0,\ldots,\sigma(\varrho,\vartheta,\psi,u_1,\ldots,u_{\nu+2})=0$$

παριστάνει πάλιν ἓν σμῆνος ἐπιφανειῶν· διότι, ἂν λάβωμεν τὰς τιμὰς $\nu-1$ ἀπὸ τὰς $\nu+2$ παραμέτρους, ἀπὸ $\nu-1$ ἀπὸ τὰς ν αὐτὰς ἐξισώσεις, καὶ τὰς θέσωμεν εἰς τὴν λοιπήν, θὰ εὕρωμεν :

$$\sigma(x,y,z,u,v,w)=0 \quad \text{ἢ} \quad \sigma(\varrho,\vartheta,\psi,u,v,w)=0.$$

18. ***Σύμπλεγμα καμπύλων τοῦ χώρου.*** —Τὸ σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων : $\sigma(x,y,z,u,v,w)=0$, $\varphi(x,y,z,u,v,w)=0$ ἢ $\sigma(\varrho,\vartheta,\psi,u,v,w)=0$, $\varphi(\varrho,\vartheta,\psi,u,v,w)=0$ παριστάνει ∞^3 καμπύλας τοῦ χώρου, δηλ. ἓν ***σύμπλεγμα*** καμπύλων (ἓν ***γένος ἀπὸ σμήνη*** ἢ ἓν ***σμῆνος ἀπὸ γένη***). (***Παράδειγμα*** : Αἱ περιφέρειαι, ποὺ ἐφάπτονται εἰς τὰ σημεῖα μιᾶς καμπύλης).

Ἓν σύμπλεγμα καμπύλων τοῦ χώρου ἀποτελεῖται προφανῶς ἀπὸ τὰς ***τομὰς*** τῶν δύο συμπλεγμάτων ἐπιφανειῶν, ποὺ παριστάνουν αἱ ἐξισώσεις του, ἂν τας λάβωμεν καθεμίαν χωριστά.

Ἂν θέσωμεν : $f(u,v,w)=0$, εὑρίσκομεν ἓν σμῆνος τοῦ συμπλέγματος· εἰς δύο δὲ τοιαύτας σχέσεις ἀντιστοιχεῖ ἓν ***γένος*** καμπύλων (μία ἐπιφάνεια) τοῦ συμπλέγματος.

Γενικῶς : Ἓν σύστημα ν ἐξισώσεων μὲ $\nu-1$ παραμέτρους, τῆς μορφῆς :

$$\sigma_1(x,y,z,u_1,\ldots,u_{\nu+1})=0,\ldots,\sigma_\nu(x,y,z,u_1,\ldots,u_{\nu+1})=0$$
$$\text{ἢ}\quad \sigma(\varrho,\vartheta,\psi,u_1,\ldots,u_{\nu+1})=0,\ldots\sigma_\nu(\varrho,\vartheta,\psi,u_1,\ldots,u_{\nu+1})=0$$

παριστάνει πάλιν ἓν σύμπλεγμα καμπύλων τοῦ χώρου· διότι, ἂν λάβωμεν, ἀπὸ $\nu-2$ ἀπὸ τὰς ν αὐτὰς ἐξισώσεις, τὰς τιμὰς $\nu-2$ ἀπὸ τὰς $\nu+1$ παραμέτρους καὶ τὰς θέσωμεν εἰς τὰς λοιπὰς δύο ἐξισώσεις, θὰ εὕρωμεν ***δύο*** ἐξισώσεις μὲ ***τρεῖς*** παραμέτρους.

δ′) Πολυπαραμετρικὰ πλήθη ἐν γένει.

19. ***Ἐπίπεδον πολυπαραμετρικὸν πλῆθος καμπύλων*** .—Αὐτὸ ἔχει ∞^k καμπύλας καὶ ἡ ἐξίσωσίς του εἶναι, εἰς τὸ ἐπίπεδον xy : $\sigma(x,y,u_1,\ldots,u_k)=0$ ἢ $\sigma(\varrho,\vartheta,u_1,\ldots,u_k)=0$. Λέγεται δὲ πλῆθος ***τῆς*** k ***τάξεως***. Ἂν $k=4$, λέγεται ἰδιαιτέρως ***ὑπερσύμπλεγμα*** (ἓν ***γένος***

ἀπὸ συμπλέγματα ἢ ἓν ***σμῆνος ἀπὸ σμήνη***, ἢ ἓν ***σύμπλεγμα ἀπὸ γένη***).

(***Παράδειγμα ὑπερσυμπλέγματος :*** Αἱ καμπύλαι τοῦ β΄ βαθμοῦ :

$$u_1x^2+u_2xy+u_3y^2+u_4x+\alpha y+\beta=0\cdot$$

παράδειγμα γενικώτερον : ὅλαι αἱ καμπύλαι τοῦ β΄ βαθμοῦ (πλῆθος τῆς $5^{ης}$ τάξεως) :

$$x^2+u_1xy+u_2y^2+u_3x+u_4y+u_5=0).$$

Εἰς λ σχέσεις τῆς μορφῆς : $f(u_1,\ldots,u_k)=0$ ἀντιστοιχεῖ ἓν πλῆθος τῆς k—λ τάξεως τοῦ ὅλου πλήθους τῆς k τάξεως.

Γενικῶς : Ἓν σύστημα ν ἐξισώσεων μὲ k+ν—1 παραμέτρους, τῆς μορφῆς :

$$\sigma_1(x,y,u_1,\ldots,u_{k+\nu-1})=0,\ldots,\sigma_\nu(x,y,u_1,\ldots,u_{k+\nu-1})=0$$

$$\text{ἢ}\ \sigma_1(\varrho,\vartheta,u_1,\ldots,u_{k+\nu-1})=0,\ldots,\sigma_\nu(\varrho,\vartheta,u_1,\ldots,u_{k+\nu-1})=0$$

παριστάνει πάλιν ἓν πολυπαραμετρικὸν πλῆθος ἐπιπέδων καμπύλων τῆς k τάξεως· διότι, ἂν λάβωμεν, ἀπὸ ν—1 ἀπὸ τὰς ν ἐξισώσεις, τὰς τιμὰς ν—1 παραμέτρων καὶ τὰς θέσωμεν εἰς τὴν ἀπομένουσαν ἐξίσωσιν, εὑρίσκομεν : $\sigma(x,y,u_1,\ldots,u_k)=0$ ἢ $\sigma(\varrho,\vartheta,u_1,\ldots,u_k)=0$.

20. ***Πολυπαραμετρικὸν πλῆθος ἐπιφανειῶν***.—Αὐτὸ ἔχει ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς :

$$\sigma(x,y,z,u_1,\ldots,u_k)=0 \quad \text{ἢ} \quad \sigma(\varrho,\vartheta,\psi,u_1,\ldots,u_k)=0$$

καὶ λέγεται πλῆθος ***τῆς k τάξεως.*** Ἂν k=4, τὸ λέγομεν ἰδιαιτέρως ***ὑπερσύμπλεγμα*** (ἓν ***γένος ἀπὸ συμπλέγματα*** ἢ ἓν ***σμῆνος ἀπὸ σμήνη*** ἢ ἓν ***σύμπλεγμα ἀπὸ γένη***).

(***Παράδειγμα ὑπερσυμπλέγματος*** : Ὅλαι αἱ σφαιρικαὶ ἐπιφάνειαι τοῦ χώρου : $(x-u_1)^2+(y-u_2)^2+(z-u_3)^2=u_4^2\cdot$ παράδειγμα γενικώτερον : Ὅλαι αἱ ἐπιφάνειαι τοῦ β΄ βαθμοῦ :

$$x^2+u_1y^2+u_2z^2+u_3xy+u_4yz+u_5zx+u_6x+u_7y+u_8z+u_9=0$$

(πλῆθος τῆς $9^{ης}$ τάξεως.) Εἰς λ σχέσεις τῆς μορφῆς : $f(u_1,\ldots,u_k)=0$ ἀντιστοιχεῖ ἓν πλῆθος τῆς k—λ τάξεως τοῦ ὅλου πλήθους τῆς k τάξεως.

Γενικῶς ἓν σύστημα ν ἐξισώσεων μὲ k+ν—1 παραμέτρους, τῆς μορφῆς :

$$\sigma_1(x,y,z,u_1,\ldots,u_{k+\nu-1})=0,\ldots,\sigma_\nu(x,y,z,u_1,\ldots,u_{k+\nu-1})=0$$

παριστάνει πάλιν ἓν πλῆθος ἐπιφανειῶν τῆς k τάξεως· διότι, ἂν λάβωμεν, ἀπὸ ν—1 ἀπὸ τὰς ν ἐξισώσεις, τὰς τιμὰς ν—1 παραμέτρων καὶ τὰς θέσωμεν εἰς τὴν λοιπὴν ἐξίσωσιν, εὑρίσκομεν :

$$\sigma(x,y,z,u_1,\ldots,u_k)=0 \quad \text{ἢ} \quad \sigma(\varrho,\vartheta,\psi,u_1,\ldots,u_k)=0.$$

21. ***Πολυπαραμετρικὸν πλῆθος καμπύλων τοῦ χώρου.*** — Αἱ δύο ἐξισώσεις :

$$(\alpha) \quad \sigma(x,y,z,u_1,\ldots,u_k)=0, \quad \varphi(x,y,z,u_1,\ldots,u_k)=0$$
$$\text{ἢ} \quad \sigma(\varrho,\vartheta,\psi,u_1,\ldots,u_k)=0, \quad \varphi(\varrho,\vartheta,\psi,u_1,\ldots,u_k)=0$$

παριστάνουν ἓν πλῆθος καμπύλων τοῦ χώρου ***τῆς k τάξεως***. Διὰ $k=4$ ἔχομεν ἓν ***ὑπερσύμπλεγμα*** καμπύλων τοῦ χώρου.

Ἓν πλῆθος καμπύλων τοῦ χώρου τῆς k τάξεως ἀποτελεῖται προφανῶς ἀπὸ τὰς **τομὰς** τῶν δύο πληθῶν ἐπιφανειῶν τῆς k τάξεως, ποὺ παριστάνουν αἱ ἐξισώσεις του, ἂν τὰς λάβωμεν καθεμίαν χωριστά. Εἰς λ σχέσεις τῆς μορφῆς : $f(u_1,\ldots,u_k)=0$ ἀντιστοιχεῖ ἓν πλῆθος καμπύλων τῆς $k-\lambda$ τάξεως τοῦ ὅλου πλήθους τῆς k τάξεως.

Γενικῶς ἓν σύστημα ν ἐξισώσεων μὲ $k+\nu-2$ παραμέτρους, τῆς μορφῆς :

$$\sigma_1(x,y,z,u_1,\ldots,u_{k+\nu-2})=0,\ldots,\sigma_\nu(x,y,z,u_1,\ldots,u_{k+\nu-2})=0$$
$$\text{ἢ} \quad \sigma_1(\varrho,\vartheta,\psi,u_1,\ldots,u_{k+\nu-2})=0,\ldots,\sigma_\nu(\varrho,\vartheta,\psi,u_1,\ldots,u_{k+\nu-2})=0$$

παριστάνει πάλιν ἓν πλῆθος καμπύλων τῆς k τάξεως· διότι, ἂν λάβωμεν, ἀπὸ ν—2 ἀπὸ τὰς ν αὐτὰς ἐξισώσεις, τὰς τιμὰς ν—2 παραμέτρων καὶ τὰς θέσωμεν εἰς τὰς λοιπὰς δύο ἐξισώσεις, εὑρίσκομεν δύο ἐξισώσεις τῆς μορφῆς (α).

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΜΕΡΟΣ Α΄.

ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄.

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ· ΚΑΘΕΤΟΣ. ΚΑΘΕΤΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΝ.
ΕΜΒΑΔΑ ΚΑΙ ΤΟΞΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΕΠΙΠΕΔΟΙ ΚΑΜΠΥΛΑΙ

Α΄) ΤΥΠΟΙ ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΟΙ ΕΙΣ ΤΑΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΣ

α΄) Ἐφαπτόμεναι καὶ κάθετοι μιᾶς καμπύλης.

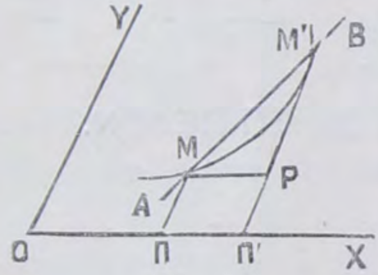
1. *Ὁρισμὸς τῆς ἐφαπτομένης.* — ***Ἐφαπτομένη*** μιᾶς καμπύλης εἰς ἓν σημεῖόν της Μ λέγεται ἡ ὁρικὴ θέσις μιᾶς εὐθείας, ποὺ κόπτει τὴν καμπύλην εἰς δύο σημεῖα Μ καὶ Μ΄, ***ὅταν τὸ Μ΄, κινούμενον ἐπὶ τῆς καμπύλης, τείνῃ νὰ πέσῃ εἰς τὸ Μ***· ἤ, γενικώτερα, ***μιᾶς εὐθείας, ποὺ κόπτει τὴν καμπύλην εἰς δύο σημεῖα Μ΄ καὶ Μ΄΄, ὅταν αὐτὰ τείνουν, κινούμενα καὶ τὰ δύο ἐπὶ τῆς καμπύλης, νὰ πέσουν εἰς ἓν ἄλλο σημεῖόν της Μ.***

Ὅτι δὲ ***ὑπάρχει*** (ἐν γένει) τοιαύτη ὁρικὴ θέσις, καὶ μάλιστα ***ἡ ἰδία*** καὶ διὰ τοὺς δύο αὐτοὺς τρόπους τῆς κινήσεως τῆς ***τεμνούσης***, θά το δείξωμεν κατὰ σειράν, ὡς ἑξῆς.

2. ***Ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης.***—α΄) Ἂν ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης εἶναι: $y=\sigma(x)$ καὶ $M(x,y)$, $M'(x+\Delta x, y+\Delta y)$ τὰ δύο σημεῖα τῆς τεμνούσης (σχ. 1), ἡ ἐξίσωσις τῆς τεμνούσης θὰ εἶναι:

$\frac{X-x}{\Delta x}=\frac{Y-y}{\Delta y}$ ἢ καί: $Y-y=\frac{\Delta y}{\Delta x}(X-x)$· ὅταν ὅμως ἡ τέμνουσα στρέφεται πέριξ τοῦ M καὶ τὸ σημεῖον M′ τείνῃ νὰ συμπέσῃ μὲ τὸ M, τὰ $\Delta x, \Delta y$ τείνουν πρὸς τὸ 0, ὁ δὲ λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ τείνει πρὸς τὴν παράγωγον $\frac{dy}{dx} \equiv \sigma'(x)$ (δηλ. τὴν τιμήν της εἰς τὸ M) καὶ ἡ ὁρικὴ λοιπὸν μορφὴ τῆς ἐξισώσεως τῆς τεμνούσης θὰ εἶναι :

(1) $Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)$, ἢ συμμετρικῶς : $\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}$ καὶ παριστάνει κατὰ τὸν α′, τὸν ***μερικώτερον*** ὁρισμόν, τὴν ***ἐφαπτομένην*** τῆς καμπύλης εἰς τὸ M.



Σχ. 1.

β′) Διὰ νὰ δείξωμεν, ὅτι καὶ μὲ τὸν β′, ***τὸν γενικώτερον*** ὁρισμόν, πάλιν τὴν ἰδίαν ὁρικὴν μορφὴν (1) εὑρίσκομεν, ἂς ὀνομάσωμεν $M_1(x_1,y_1)$ καὶ $M_2(x_2,y_2)$ τὰς δύο τομὰς τῆς καμπύλης ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν· τότε ἡ τέμνουσα M_1M_2 θὰ ἔχῃ τὴν ἐξίσωσιν :

$Y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(X-x_1)$· ἐπειδὴ δὲ τὸ θεώρημα ***τῆς μέσης τιμῆς*** μιᾶς συναρτήσεως ***(Διαφ. Λογ. Ἰ. Ν. Χατζιδάκη, τόμ. Α′, σελ. 83, Θεώρ. 7ον)*** μᾶς δίδει : $y_2-y_1=\sigma'(x_0)(x_2-x_1)$, (ὅπου $x_1<x_0<x_2$), συνάγομεν, ὅτι ἡ ὁρικὴ μορφὴ τῆς ἐξισώσεως τῆς τεμνούσης θὰ εἶναι (ὅταν τὰ x_1, y_1 καὶ x_2, y_2 γίνουν ἀντιστοίχως ἴσα μὲ τὰ x, y καὶ τὸ x_0 λοιπὸν γίνῃ καὶ αὐτὸ $=x$): $Y-y=\sigma'(x)(X-x)$ ἢ $Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)$, δηλ. πάλιν ἡ ἰδία ἐξίσωσις (1).

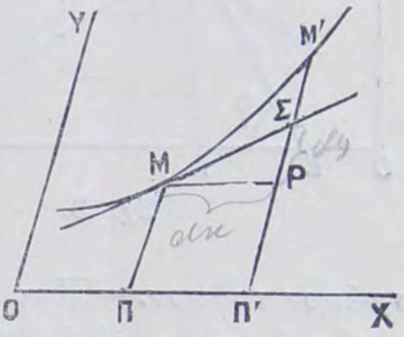
Ἡ ἐξίσωσις (1) τῆς ἐφαπτομένης μᾶς δεικνύει, ὅτι $\frac{dy}{dx}$ εἶναι ὁ ***συντελεστὴς κατευθύνσεως*** τῆς ἐφαπτομένης· ἑπομένως, ὅταν οἱ ἄξονες εἶναι ὀρθογώνιοι, ἴσος μὲ εφφ, ὅπου φ ἡ γωνία τῆς ἐφαπτομένης μὲ τὸν ἄξονα x.

Παρατήρησις. Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ y εἶναι εἰς ὅλα τὰ σημεῖα, ποὺ θεωροῦμεν, ***ὁμαλὴ καὶ διαφορίσιμος*** συνάρτησις τοῦ x· εἰς ὅσα τυχὸν σημεῖα αὐτὸ δὲν συμβαίνει, τ᾽ ἀνωτέρω δὲν ἰσχύουν.

3. ***Γεωμετρικὴ παράστασις τοῦ διαφορικοῦ τῆς τεταγμένης.***— Ἀπὸ τὸ σχῆμα (2) βλέπομεν, ὅτι εἰς τὴν αὔξησιν $\Pi\Pi' \equiv \Delta x$ τῆς τετμημένης ἀντιστοιχεῖ αὔξησις $PM' \equiv \Delta y$ τῆς ***τεταγμένης τῆς καμπύλης***

καὶ αὔξησις ΡΣ τῆς ***τεταγμένης τῆς ἐφαπτομένης της***· θὰ δείξω, ὅτι τὸ ΡΣ εἶναι τὸ ***διαφορικὸν*** τῆς αὐξήσεως Δy· πραγματικῶς, αἱ συντεταγμέναι τοῦ Σ, ἂν τεθοῦν εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης, μᾶς δίδουν: $P\Sigma=\frac{dy}{dx}\cdot \Pi\Pi'$ ἢ $P\Sigma=\frac{dy}{dx}dx$· ὥστε $P\Sigma=dy$.

Τὸ τμῆμα δὲ μὲ συντεταγμένας προβολὰς τὰ dx, dy εἶναι προφανῶς τὸ ΜΣ καί, ἂν οἱ ἄξονες εἶναι ***ὀρθογώνιοι***, θὰ εἶναι: $M\Sigma=\sqrt{dx^2+dy^2}$.



Σχ. 2.

4. ***Διάφοροι μορφαὶ τῆς ἐξισώσεως τῆς ἐφαπτομένης.***—Ἀναλόγως τῆς μορφῆς τῆς ἐξισώσεως τῆς καμπύλης λαμβάνει καὶ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης διαφόρους μορφάς, τὰς ἑξῆς:

1) Ἂν $y=\sigma(x)$, τότε: $Y-y=\sigma'(x)(X-x)$. (1′)

2) Ἂν $\varphi(x,y)=0$, τότε: $Y-y=-\frac{\varphi_x(x,y)}{\varphi_y(x,y)}(X-x)$

ἢ συμμετρικώτερα: $(X-x)\varphi_x(x,y)+(Y-y)\varphi_y(x,y)=0$. (1″)

3) Ἂν $x=\varphi(u)$, $y=f(u)$, τότε: $\frac{Y-y}{f'(u)}=\frac{X-x}{\varphi'(u)}$. (1‴)

5. ***Ἐξίσωσις τῆς καθέτου τῆς καμπύλης.***—***Κάθετος*** εἰς ἓν σημεῖον Μ μιᾶς καμπύλης λέγεται ἡ κάθετος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην της εἰς τὸ ἴδιον σημεῖον. Ἡ ἐξίσωσις τῆς καθέτου, ἂν ὑποθέσωμεν τοὺς ἄξονας ὀρθογωνίους, εἶναι:

(2) $(X-x)dx+(Y-y)dy=0$ (μὲ συντελεστὴν κατευθύνσεως: $-\frac{dx}{dy}$)· λαμβάνει δὲ καὶ αὐτὴ τὰς ἑξῆς τρεῖς μορφάς:

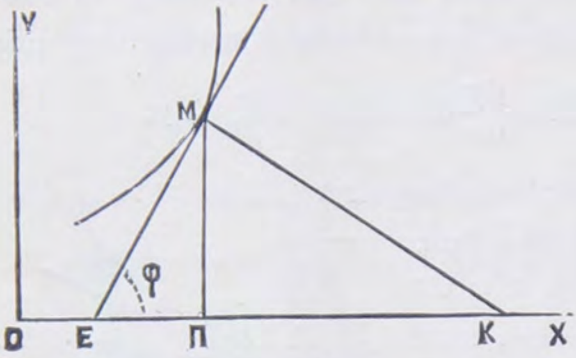
(2′) $Y-y=-\frac{1}{\sigma'(x)}(X-x)$, (2″) $\frac{X-x}{\varphi_x(x,y)}=\frac{Y-y}{\varphi_y(x,y)}$,

(2‴) $(X-x)\varphi'(u)+(Y-y)f'(u)=0$, καθόσον ἡ καμπύλη ἔχει τὴν ἐξίσωσιν $y=\sigma(x)$ ἢ τὴν $\varphi(x,y)=0$ ἢ τὰς $x=\varphi(u), y=f(u)$.

β′) Ἐκφράσεις τῶν ἀνυσμάτων: ὑφαπτομένη, ὑποκάθετος, ἐπεφαπτομένη, ἐπικάθετος.

6. ***Ὁρισμὸς τῆς ὑφαπτομένης, τῆς ὑποκαθέτου, τῆς ἐπεφαπτομένης καὶ τῆς ἐπικαθέτου.***— Ἂν (σχ. 3) Ε εἶναι ἡ τομὴ τῆς

ἐφαπτομένης ἀπὸ τὸν ἄξονα τῶν x, K ἡ τομὴ τῆς καθέτου καὶ Π



Σχ. 3.

σημαίνη τὸν πόδα τῆς τεταγμένης τοῦ M (ἄξ. ὀρθογ.), ὀνομάζομεν :

1) **Ὑφαπτομένην** (τῆς καμπύλης **εἰς τὸ M**) τὸ ἄνυσμα ΕΠ.

2) **Ὑποκάθετον**, τὸ ΠΚ.

3) **Ἐπεφαπτομένην**, τὸ ΜΕ.

καὶ 4) **Ἐπικάθετον**, τὸ ΜΚ.

7. **Ὑπολογισμὸς τῶν ἀνυσμάτων τούτων.**—Εἶναι εὔκολον νὰ εὕρωμεν τὰ μήκη τῶν ἀνυσμάτων αὐτῶν, διότι ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΜΠΚ· ΜΠΕ ἔχομεν :

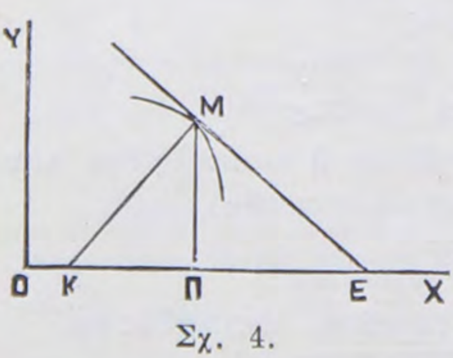
$$\text{ΠΚ}=\text{y εφ}\varphi=\text{y}\frac{dy}{dx},\quad \text{ΕΠ}=\text{y σφ}\varphi=\text{y}\frac{dx}{dy}\ \text{καί :}$$

$$\text{ΜΚ}=\text{y}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},\quad \text{ΜΕ}=\text{y}\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$$

Παρατήρησις α΄. Ἂν οἱ ἄξονες εἶναι πλαγιογώνιοι, αἱ ἐκφράσεις τῶν μηκῶν αὐτῶν ἀλλάσσουν καὶ περιέχουν τὴν γωνίαν θ τῶν ἀξόνων· πλὴν τῆς ὑφαπτομένης, ποὺ ἡ ἔκφρασίς της μένει ***ἡ ἰδία*** καὶ εἰς πλαγιογωνίους ἄξονας· διότι ἔχομεν : ΕΠ=ΟΠ—ΟΕ· ἀλλά : ΟΠ=x καὶ ΟΕ (εὑρισκόμενον ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης, ἂν θέσωμεν: εἰς αὐτὴν Y=0) εἶναι $= x-y\frac{dx}{dy}$.

$$\text{ὥστε :}\quad \text{ΕΠ}=x-\left(x-y\frac{dx}{dy}\right)=y\frac{dx}{dy}.$$

Παρατήρησις β΄. Ἂν λάβωμεν ὡς ***κοινὴν ἀρχὴν*** τῆς ὑποκαθέτου καὶ τῆς ὑφαπτομένης τὸν πόδα Π τῆς τεταγμένης, τότε ἡ ὑποκάθετος θὰ ἔχη τὴν ***θετικὴν*** μὲν φορὰν ΟΧ, ἄν, ὅταν αὐξήση τὸ x, αὐξάνη (κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν) καὶ τὸ y· τὴν ἀρνητικὴν δὲ ΧΟ, ἂν συμβαίνη τὸ ἀντίθετον (σχ. 4)· διότι ἔχομεν :



Σχ. 4.

$$\text{ΠΚ}=y\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\ \frac{d(y^2)}{dx}.$$

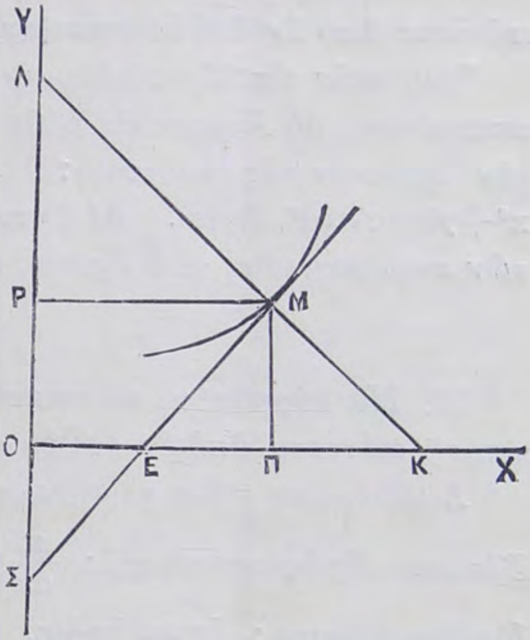
Τῆς δὲ ὑφαπτομένης ΠΤ ἡ φορὰ εἶναι ἡ ἀντίθετος πρὸς τὴν φορὰν τῆς ΠΚ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῆς καθέτου εἰς ***πλαγιογωνίους*** ἄξονας μὲ γωνίαν θ εἶναι: $Y-y=-\frac{dx+\text{συνθ}.dy}{dy+\text{συνθ}\cdot dx}(X-x)$.

2) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐκφράσεις τῆς ***ὑποκαθέτου,*** τῆς ***ἐπεφαπτομένης*** καὶ τῆς ***ἐπικαθέτου*** εἰς ***πλαγιογωνίους*** ἄξονας (μὲ γωνίαν θ).

Νὰ εὑρεθοῦν εἰς ἄξονας ***ὀρθογωνίους*** (σχ. 5) :



Σχ. 5.

3) Ἡ ἀπόστασις ΕΣ τῶν ***τομῶν τῆς ἐφαπτομένης*** μὲ τοὺς ἄξ. ΟΧ, ΟΥ.

4) Ἡ ἀπόστασις ΚΛ τῶν ***τομῶν τῆς καθέτου*** μὲ τοὺς ἄξονας.

5) Αἱ ἀποστάσεις ΡΣ, ΡΛ τῶν τομῶν μὲ τὸν ἄξ. ΟΥ τῆς ἐφαπτομένης, τῆς καθέτου καὶ τῆς παραλλήλου ἀπὸ τὸ Μ πρὸς τὸν ἄξ. ΟΧ.

6) Τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριγώνων ΜΕΚ, ΜΣΛ καὶ ΟΕΣ, ΟΚΛ.

7) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὑφαπτομένη τῆς καμπύλης : $x=e^{\frac{x-y}{y}}$ $\left(\text{Ἀπ.} \frac{x^2}{x-y} \right)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1ον.

8. ***Νὰ εὑρεθοῦν αἱ καμπύλαι, ποὺ ἔχουν ὑποκάθετον σταθεράν.***

Πρέπει εἰς κάθε σημεῖόν των νὰ ἔχωμεν : $y\frac{dy}{dx}=\alpha$ (σταθ.)· ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ εἶναι ***διαφορικὴ*** τῆς α΄ τάξεως (διότι περιέχει πρῶτα διαφορικὰ τῶν x, y)· τὴν ***ὁλοκληρώνομεν*** δὲ ὡς ἑξῆς :

$ydy=\alpha dx$, $d(y^2)=d(2\alpha x)$, $y^2=2\alpha x+c$ ($c\equiv$σταθερὰ αὐθαίρετος τῆς ὁλοκληρώσεως)· ὥστε : ***Αἱ ζητούμεναι καμπύλαι εἶναι αἱ***

ἴσαι παραβολαί, ποὺ ἔχουν ἄξονα τὸν ἄξ. τῶν x καὶ κορυφὰς τὰ σημεῖα τοῦ ἄξονος. Εἶναι λοιπὸν ∞^1 καὶ ἀποτελοῦν ἓν ***γένος*** παραβολῶν (***Εἰσαγωγή***, ἐδ. 10· ***παράμετρος*** ἐδῶ εἶναι ἡ ***αὐθαίρετος*** σταθερὰ τῆς ὁλοκληρώσεως).

$2^{ον}$.

9. ***Νὰ εὑρεθοῦν αἱ καμπύλαι, τῶν ὁποίων ἡ κάθετος περνᾷ πάντοτε ἀπὸ ἓν δοθὲν σημεῖον.***

Ἂν, πρὸς εὐκολίαν, λάβωμεν τὸ σημεῖον αὐτὸ ὡς ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων, θὰ ἔχωμεν εἰς κάθε σημεῖον τῶν καμπύλων αὐτῶν (ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τῆς καθέτου): $xdx+ydy=0$, δηλ. $d(x^2+y^2)=0$, $x^2+y^2=c\equiv\alpha^2$. ὥστε: ***Αἱ ζητούμεναι καμπύλαι εἶναι τὸ γένος τῶν περιφερειῶν, ποὺ ἔχουν κέντρον τὸ δοθὲν σημεῖον.***

$3^{ον}$.

10. ***Νὰ εὑρεθοῦν αἱ καμπύλαι, τῶν ὁποίων ἡ ἐφαπτομένη περνᾷ πάντοτε ἀπὸ ἓν δοθὲν σημεῖον.***

Λαμβάνομεν πάλιν τὸ σημεῖον αὐτὸ ὡς ἀρχὴν καὶ ἔχομεν (ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης): $\frac{x}{dx}=\frac{y}{dy}$ ἤ: $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$ καί, ἀφοῦ ὁλοκληρώσωμεν: $ly=lx+c_1$ ($l\equiv$ ὁ νεπέρειος λογάριθμος) ἢ καὶ $ly=lx+l(e^{c_1})$, δηλ. $y=e^{c_1}x$ ἢ $y=cx$· ὥστε:

Αἱ ζητούμεναι καμπύλαι εἶναι τὸ γένος τῶν εὐθειῶν, ποὺ περνοῦν ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον.

$4^{ον}$.

11. ***Νὰ εὑρεθοῦν αἱ καμπύλαι, ποὺ ἔχουν ἐπικάθετον σταθεράν.***

Πρέπει τώρα νὰ ἔχωμεν: $y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\alpha$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{\alpha^2-y^2}{y^2}$, ἢ καί: $\frac{dy}{dx}=\pm\frac{\sqrt{\alpha^2-y^2}}{y}$· καί, ***ἂν χωρίσωμεν τὰς μεταβλητάς:*** $\frac{\pm ydy}{\sqrt{\alpha^2-y^2}}=dx$ ἢ $d(\mp\sqrt{\alpha^2-y^2})=dx$· λοιπόν, ἂν ὁλοκληρώσωμεν: $\mp\sqrt{\alpha^2-y^2}=x+c'\equiv x-c$ καί: $(x-c)^2+y^2=\alpha^2$· ὥστε:

Αἱ ζητούμεναι καμπύλαι εἶναι τὸ γένος τῶν ἴσων περιφερειῶν μὲ ἀκτῖνα τὸ α καὶ μὲ κέντρα τὰ σημεῖα τοῦ ἄξ. OX.

5ον.

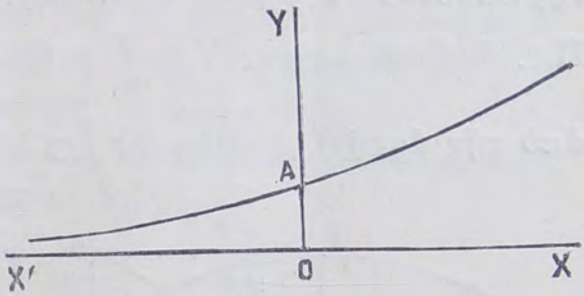
12. ***Νὰ εὑρεθοῦν αἱ καμπύλαι, ποὺ ἔχουν ὑφαπτομένην σταθεράν.***

Θὰ ἔχωμεν τώρα : $y\frac{dx}{dy}=\alpha$ ἢ $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{\alpha}$,

λοιπόν : $ly=\frac{x}{\alpha}+c'$, $y=e^{\frac{x}{\alpha}+c'}=e^{\frac{x}{\alpha}}.e^{c'}=ce^{\frac{x}{\alpha}}$. (1)

ὥστε : ***Αἱ ζητούμεναι καμπύλαι εἶναι τὸ γένος τῶν «ἐκθετικῶν» καμπύλων*** (1).

Τὸ σχῆμα τῆς ἐκθετικῆς καμπύλης εὑρίσκεται εὔκολα (σχ. 6, ὅπου ὑποθέτομεν τὰ ΟΑ καὶ α θετικά) : κόπτει τὸν ἄξ. ΟΥ εἰς τὸ σημεῖον Α (ΟΑ=c), ἀνέρχεται διαρκῶς εἰς τὴν θετικὴν γωνίαν τῶν ἀξόνων (διότι ἡ παράγωγος $\frac{dy}{dx}$ εἶναι ***πάντοτε*** θετική) καὶ ἔχει ἀσύμπτωτον τὸ ἀρνητικὸν μέρος τοῦ ἄξ. ΟΧ.



Σχ. 6.

6ον.

13. ***Νὰ εὑρεθοῦν αἱ καμπύλαι, ποὺ ἔχουν ὑφαπτομένην ἀνάλογον τῆς τετμημένης.***

Θὰ ἔχωμεν εἰς ὅλα τὰ σημεῖά των : $y\frac{dx}{dy}=\frac{x}{\alpha}$, δηλ.

$\frac{dy}{y}=\alpha\frac{dx}{x}$, λοιπόν: $ly=\alpha lx+c'$ ἢ $ly=l(x^{\alpha})+lc=l(cx^{\alpha})$, ἑπομένως: $y=cx^{\alpha}$ (1)· ὥστε : ***Αἱ ζητούμεναι καμπύλαι ἀποτελοῦν τὸ γένος (1) καὶ τὸ εἶδός των ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν τιμὴν τοῦ α.*** Διὰ $\alpha=\frac{1}{2}$ ἔχομεν τὸ γένος ***τῶν παραβολῶν*** : $y^2=c^2x$, ποὺ ἔχουν ἄξονα τὸν ἄξ. ΟΧ καὶ κορυφὴν τὴν ἀρχήν. Διὰ $\alpha=-1$, τὸ γένος ***τῶν ὑπερβολῶν*** : $xy=c$, μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν καὶ ἄξονας τὰς ἀσυμπτώτους των (τὴν γωνίαν τῶν ἀσυμπτώτων τῆς καθεμιᾶς ὁρίζει τὸ c).

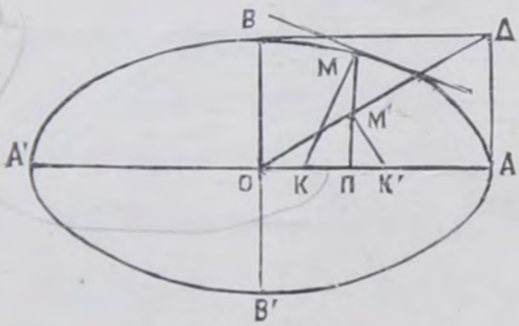
7ον.

14. ***Ποία σχέσις πρέπει νὰ συνδέῃ τὰς τεταγμένας δύο καμπύ-***

λων, τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς τὴν ἰδίαν τετμημένην, διὰ νὰ ἔχουν αἱ καμπύλαι εἰς τὰ σημεῖα αὐτὰ τῶν ἴσων τετμημένων ἴσας (ἀπολύτως) ὑποκαθέτους ἢ ἴσας (ἀπολύτως) ὑφαπτομένας ;

α') ***Ἴσαι ὑποκάθετοι.***—Θὰ ἔχωμεν τότε: $y\frac{dy}{dx}=\varepsilon Y\frac{dY}{dx}(\varepsilon^2=1)$, δηλ. $y^2=\varepsilon Y^2+c$· ὥστε τότε : ***Ἡ διαφορὰ (ἂν ε=+1) ἢ τὸ ἄθροισμα (ἂν ε=—1) τῶν τετραγώνων τῶν τεταγμένων των (εἰς τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα) εἶναι σταθερά.***

Ἡ σχέσις αὐτὴ εἰμπορεῖ νὰ χρησιμεύσῃ εἰς τὴν εὔκολον κατασκευὴν ***τῆς καθέτου τῆς μιᾶς καμπύλης ἀπὸ τὴν κάθετον τῆς ἄλλης.*** Π.χ. ἂν ὑποθέσωμεν : $Y=\frac{\beta}{\alpha}x$ (δηλ. τὴν μίαν καμπύλην ***εὐθεῖαν ἀπὸ τὴν ἀρχήν***), ἡ ἄλλη θὰ ἔχῃ τὴν ἐξίσωσιν : $y^2=\pm\frac{\beta^2}{\alpha^2}x^2+c$, θὰ εἶναι λοιπὸν ***κωνικὴ τομὴ*** (ἔλλειψις ἢ ὑπερβολὴ) ἀναφερομένη εἰς τοὺς ἄξονάς της. Τὴν κατασκευὴν τῆς καθέτου (διὰ τὴν ἔλλειψιν) δεικνύει τὸ σχῆμα (7).



Σχ. 7,

β') ***Ἴσαι ἐφαπτόμεναι.***—Θὰ ἔχωμεν τώρα : $y\frac{dx}{dy}=\pm Y\frac{dx}{dY}$, δηλ. $\frac{dy}{y}=\pm\frac{dY}{Y}$, $lY=\pm ly+c_1$· λοιπόν: ἢ $Y=cy$ (ἂν ε=+1) ἢ $Y=\frac{c}{y}$ (ἂν ε=—1). ὥστε τότε : ***Αἱ τεταγμέναι*** (εἰς τ' ἀντίστοιχα σημεῖα) ***εἶναι ἢ ἀνάλογοι (ἂν ε=+1) ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογοι (ἂν ε=—1).***

8ον.

15. ***Νὰ εὑρεθοῦν αἱ καμπύλαι, ποὺ ἔχουν ἐπεφαπτομένην σταθεράν.***

Θὰ ἔχωμεν τώρα εἰς ὅλα τὰ σημεῖά των :

$$y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}=\alpha, \quad \text{ἢ} \quad \frac{dx}{dy}=\frac{\pm\sqrt{\alpha^2-y^2}}{y},$$

ἢ καὶ $dx=\pm\frac{\sqrt{\alpha^2-y^2}}{y}dy$, λοιπόν : $x=\pm\int\frac{\sqrt{\alpha^2-y^2}}{y}dy$·

πρὸς εὐκολώτερον ὑπολογισμὸν τῆς ὁλοκληρώσεως αὐτῆς θέτομεν: $y=\alpha\eta\mu\varphi$· τότε θὰ ἔχωμεν (τὸ σημεῖον — ἐξαλείφεται, ἂν ἀλλάξῃ ἡ θετ. διεύθυνσις τοῦ ἄξ. ΟΧ):

$$dx = \frac{\alpha\sigma\upsilon\nu^2\varphi d\varphi}{\eta\mu\varphi} = \frac{\alpha d\varphi}{\eta\mu\varphi} - \alpha\eta\mu\varphi d\varphi,$$

καὶ ἂν ὁλοκληρώσωμεν:

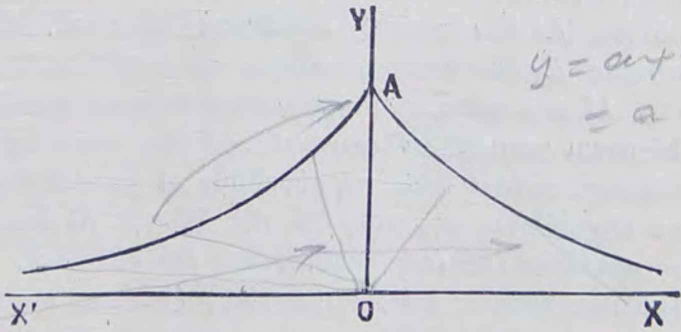
$$x = \alpha.l\varepsilon\varphi\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \alpha\sigma\upsilon\nu\varphi + c\cdot$$

ὥστε: ***Αἱ δύο ἐξισώσεις*** : $x=\alpha l\varepsilon\varphi\left(\frac{\varphi}{2}\right)+\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi+c$ ***καὶ*** $y=\alpha\eta\mu\varphi$ ***εἶναι αἱ παραμετρικαὶ ἐξισώσεις τοῦ ζητουμένου γένους καμπύλων***. Ἀπὸ τὸν τρόπον δέ, ποὺ ἡ σταθερὰ c εἰσέρχεται εἰς τὸ x (εἰς τὸ y δὲν ὑπάρχει), βλέπομεν ἀμέσως, ὅτι αἱ καμπύλαι τοῦ γένους εἶναι ***μία καὶ ἡ ἰδία*** καμπύλη, ***μόνον ὅτι κινεῖται παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξ. ΟΧ***. Ἂν λοιπὸν λάβωμεν $c=0$, ἔχομεν:

$$x=\alpha\left(l\varepsilon\varphi\left(\frac{\varphi}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu\varphi\right),\qquad y=\alpha\eta\mu\varphi.$$

Ἡ βοηθητικὴ μεταβλητὴ φ εἶναι ἡ γωνία τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης μὲ τὸν ἄξ. ΟΧ· διότι ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν: $\frac{dx}{dy}=\frac{\sqrt{\alpha^2-y^2}}{y}$ εὑρίσκομεν (ἀφοῦ $y=\alpha\eta\mu\varphi$): $\frac{dx}{dy}=\frac{\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi}{\alpha\eta\mu\varphi}$, δηλ. $\frac{dy}{dx}=\varepsilon\varphi\varphi$.

Ἡ καμπύλη αὐτὴ λέγεται ***ἕλκουσα*** (γαλ. tractrice)· τὸ σχῆμά της εὑρίσκεται εὔκολα (σχ. 8): εἰς τὸ Α ἔχομεν $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $OA=\alpha$· τὰ σημεῖα τοῦ ἀριστεροῦ κλάδου δίδουν αἱ τιμαὶ τοῦ $\varphi\ \frac{\pi}{2},\ldots,0$· τὰ δὲ τοῦ δεξιοῦ, αἱ τιμαὶ $\frac{\pi}{2},\ldots,\pi$. Ὁ ἄξων τῶν x εἶναι ***ἀσύμπτωτος*** τῆς καμπύλης.

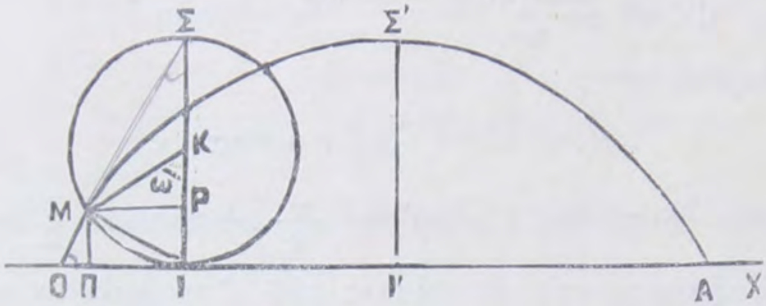


Σχ. 8.

9ον.

16. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἡ ἐφαπτομένη τῆς κυκλοειδοῦς εἰς τὸ τυχὸν σημεῖόν της.***

Κυκλοειδὴς λέγεται ἡ καμπύλη, ποὺ γράφει ἓν σημεῖον περιφερείας (ἑνὸς τροχοῦ), ὅταν ***κυλίεται*** (¹) ἐπὶ εὐθείας (τοῦ ἐδάφους). Αἱ παραμετρικαί της ἐξισώσεις εἶναι :



Σχ. 9.

$x = \alpha(\omega - \eta\mu\omega)$, $y = \alpha(1 - \sigma\upsilon\nu\omega)$ $(\alpha \equiv KI,\ \omega \equiv \gamma\omega\nu.\ IKM$, σχ. 9)·
θὰ εἶναι λοιπόν : $dx = \alpha(1 - \sigma\upsilon\nu\omega)d\omega = yd\omega$, $dy = \alpha\eta\mu\omega d\omega$ καὶ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha\eta\mu\omega}{y} \quad \text{ἢ} \quad y\frac{dy}{dx} = \alpha\eta\mu\omega\cdot$$

---

¹) Λέγομεν, ὅτι μία καμπύλη *κυλίεται* ἐπὶ μιᾶς ἄλλης ἀκινήτου, ὅταν κινεῖται οὕτως, ὥστε *νὰ ἐφάπτεται πάντοτε τῆς ἄλλης* (δηλ. νὰ ἔχῃ τὴν ἰδίαν ἐφαπτομένην) καὶ *δύο τυχόντα ἀντίστοιχα τόξα ΜΜ' καὶ ΝΝ', ἐπὶ τῆς κυλιομένης καὶ ἐπὶ τῆς ἀκινήτου, νὰ εἶναι διαρκῶς ἴσα μεταξύ των : τοξ ΜΜ'=τοξ ΝΝ'* (ὅπου Ν,Ν' εἶναι τὰ σημεῖα τῆς ἀκινήτου, ἐπὶ τῶν ὁποίων συμπίπτουν τὰ Μ,Μ' κατὰ τὴν κύλισιν). (Γενικωτέρα κίνησις εἶναι ἡ *ὀλίσθησις καὶ κύλισις συγχρόνως*, δηλ. τόξ. ΜΜ' διάφορον τοῦ τόξ. ΝΝ'), *ὁριακαὶ* δὲ περιπτώσεις: ἡ *ἁπλῆ* κύλισις (ἂν δὲν ὑπάρχῃ ὀλίσθησις· τότε τοξ. ΜΜ'=τοξ ΝΝ') καὶ ἡ *ἁπλῆ* ὀλίσθησις (ἂν δὲν ὑπάρχῃ κύλισις· τότε τόξ. ΜΜ'=0).

Αἱ καμπύλαι, ποὺ γράφονται *ἀπὸ τὰ σημεῖα μιᾶς κυλιομένης καμπύλης*, λέγονται γενικῶς *κυλισιγενεῖς*. (*Κάθε* καμπύλη εἶναι δυνατὸν νὰ παραχθῇ ἀπὸ κύλισιν, πρέπει ὅμως νὰ εὑρεθοῦν αἱ *κατάλληλοι* καμπύλαι, ποὺ τὴν παράγουν μὲ τὴν κύλισιν τῆς μιᾶς ἐπὶ τῆς ἄλλης). Αἱ ἁπλούστεραι κυλισιγενεῖς εἶναι: 1) ἡ *κυκλοειδὴς* (κύλισις περιφερείας ἐπὶ εὐθείας), 2) ἡ *«ἐξειλιγμένη»* τοῦ κύκλου (κύλισις εὐθείας ἐπὶ περιφερείας) (θά την σπουδάσωμεν εἰς τὰ ἑπόμενα), 3) αἱ *ἐπικυκλοειδεῖς* (κύλισις περιφερείας *ἐξωτερικῶς* ἐπὶ ἄλλης περιφερείας) καὶ 4) αἱ *ὑποκυκλοειδεῖς* (κύλισις περιφερείας *ἐσωτερικῶς* ἐπὶ ἄλλης περιφερείας). Αἱ δὲ καμπύλαι, ποὺ γράφουν τὰ σημεῖα τοῦ *κινητοῦ ἐπιπέδου* τῆς κυλιομένης καμπύλης τὰ *μὴ εὑρισκόμενα* ἐπ' αὐτῆς, λέγονται κυλισιγενεῖς *βραχυνθεῖσαι* μὲν (roulettes raccourcies) ἐκεῖναι, ποὺ ἔχουν ἁπλᾶς *κυμάνσεις* ἀντιστοίχους εἰς τὰ *σημεῖα ἀνακάμψεως* τῆς ἀντιστοίχου ἁπλῆς κυλισιγενοῦς· *ἐπιμηκυνθεῖσαι* δὲ (roulettes allongées), ἐκεῖναι, ποὺ ἔχουν *βρόχους* ἀντιστοίχους τῶν σημείων ἀνακάμψεως τῆς ἁπλῆς κυλισιγενοῦς.

τὸ ὀρθ. ὅμως τρίγωνον ΜΡΚ μᾶς δίδει: ΜΡ=αημω, ἢ καὶ: ΠΙ=αημω, δηλ. $y\frac{dy}{dx}=$ ΠΙ· ὥστε: ***Ἡ ὑποκάθετος εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀπόστασιν τοῦ ποδὸς τῆς τεταγμένης τοῦ Μ ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς Ι, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ Μ.***

Ἡ κάθετος λοιπὸν εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Μ περνᾷ ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς Ι[1] καὶ ἡ ἐφαπτομένη ἑπομένως κατασκευάζεται ἀμέσως καὶ εἶναι ἡ ΜΣ.

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τέλος:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\eta\mu\omega}{1-\sigma\upsilon\nu\omega}=\frac{2\eta\mu\frac{\omega}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}}{2\eta\mu^2\frac{\omega}{2}}=\sigma\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

εὑρίσκομεν ***τὴν σχέσιν μεταξὺ τῶν γωνιῶν ω καὶ φ:***

$$\varepsilon\varphi\varphi=\sigma\varphi\frac{\omega}{2},\ \text{δηλ.}\ \varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{\omega}{2}.$$

(Τὴν σχέσιν αὐτὴν τὴν δεικνύει ἀμέσως καὶ τὸ σχῆμα, διότι εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΜΡΣ εἶναι γων. Μ=φ καὶ γων. $\Sigma=\frac{\omega}{2}$).

10ον.

17. ***Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐφαπτομένων, ποὺ εἰμποροῦν νὰ ἀχθοῦν εἰς τὰ σημεῖα μιᾶς ἀλγεβρικῆς καμπύλης ἀπὸ ἓν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου της μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς καμπύλης.***

Ἀλγεβρικὴ λέγεται μία καμπύλη, ὅταν ἡ ἐξίσωσίς της εἰς ***καρτεσιανὰς*** συντεταγμένας εἶναι ἀλγεβρική. Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ Μ(x,y) τῆς καμπύλης φ(x,y)=0 εἶναι, καθὼς εἴδομεν:
$(X-x)\varphi_x+(Y-y)\varphi_y=0$, ἢ καί: $X\varphi_x+Y\varphi_y=x\varphi_x+y\varphi_y$.
Ἂν τώρα ἡ καμπύλη εἶναι ἀλγεβρικὴ τοῦ βαθμοῦ μ, τὸ β′ μέλος: $x\varphi_x+y\varphi_y$ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς φαίνεται μὲν ἐκ πρώτης ὄψεως ἀλγεβρικὴ συνάρτησις τοῦ μ βαθμοῦ τῶν συντεταγμένων x,y τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς, εἶναι ὅμως πραγματικῶς μόνον τοῦ μ—1. Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου γράφομεν τὴν συνάρτησιν φ(x,y) ὡς ἑξῆς:

---

[1]) Ἡ Κινητικὴ ἀποδεικνύει, ὅτι: ***Ἡ ἰδιότης αὐτὴ*** (νὰ περνᾷ δηλ. ἡ κάθετος τῆς κυκλοειδοῦς εἰς κάθε σημεῖον ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον τῆς ἐπαφῆς) ***εἶναι γενικὴ ἰδιότης ὅλων τῶν κυλισιγενῶν καμπύλων.***

$\varphi(x,y)\equiv\varphi_\mu(x,y)+\varphi_{\mu-1}(x,y)+\varphi_{\mu-2}(x,y)+\ldots$, ὅπου $\varphi_\mu(x,y)$ παριστάνει τὸ σύνολον τῶν ὅρων τοῦ $\mu^{\text{οστοῦ}}$ βαθμοῦ, $\varphi_{\mu-1}(x,y)$ τὸ σύνολον τῶν ὅρων τοῦ βαθμοῦ $\mu-1$ κτλ. Θὰ ἔχωμεν λοιπόν :

$$x\varphi_x+y\varphi_y\equiv[x(\varphi_\mu)_x+y(\varphi_\mu)_y]+[x(\varphi_{\mu-1})_x+y(\varphi_{\mu-1})_y]+$$
$$+[x(\varphi_{\mu-2})_x+y(\varphi_{\mu-2})_y]+\ldots.$$

καὶ κατὰ τὸ γνωστὸν θεώρημα τοῦ ***Οὔλερ*** διὰ τὰς ***ὁμογενεῖς*** συναρτήσεις ***(Ν. Χατζιδάκη, Στοιχεῖα Ἀνωτέρας Ἀλγέβρας Α΄, ἐδ. 264)*** θὰ ἔχωμεν :

$$x\varphi_x+y\varphi_y\equiv\mu\varphi_\mu+(\mu-1)\varphi_{\mu-1}+(\mu-2)\varphi_{\mu-2}+\ldots\equiv$$
$$\equiv\mu(\varphi_\mu+\varphi_{\mu-1}+\varphi_{\mu-2}+\ldots)-\varphi_{\mu-1}-2\varphi_{\mu-2}-3\varphi_{\mu-3}-\ldots.$$

Ἐπειδὴ ὅμως τὸ σημεῖον $M(x,y)$ εἶναι τῆς καμπύλης, ἔχομεν :

$$\mu(\varphi_\mu+\varphi_{\mu-1}+\varphi_{\mu-2}+\ldots)=\mu\varphi(x,y)=0\cdot$$

ὥστε ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης γίνεται :

$$X\varphi_x+Y\varphi_y+\varphi_{\mu-1}+2\varphi_{\mu-2}+3\varphi_{\mu-3}+\ldots=0,$$

δηλ. ***δὲν περιέχει ὅρους τοῦ μ βαθμοῦ πρὸς τὰ x,y.***

Παράδειγμα: $Ax^2+Bxy+\Gamma y^2+\Delta x+Ey+Z=0$ ***(Κωνικαὶ τομαί).***

Ἔχομεν τώρα : $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2Ax+By+\Delta}{2\Gamma y+Bx+E}$.

ἡ ἐξίσωσις λοιπὸν τῆς ἐφαπτομένης γίνεται :

$$(2Ax+By+\Delta)(X-x)+(2\Gamma y+Bx+E)(Y-y)=0,$$

ἤ: $(2Ax+By+\Delta)X+(2\Gamma y+Bx+E)Y=(2Ax+By+\Delta)x+$
$+(2\Gamma y+Bx+E)y,$

ἢ καί : $(2Ax+By+\Delta)X+(2\Gamma y+Bx+E)Y=$
$=2(Ax^2+Bxy+\Gamma y^2+\Delta x+Ey+Z)-\Delta x-Ey-2Z,$

δηλ. (κατὰ τὴν ἐξίσωσιν τῆς καμπύλης) :

$$(2Ax+By+\Delta)X+(2\Gamma y+Bx+E)Y+\Delta x+Ey+2Z=0.$$

Ἂς θεωρήσωμεν τώρα μίαν ***τυχοῦσαν*** καμπύλην $\varphi(x,y)=0$· αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων της, ποὺ ἄγονται ἀπὸ ἓν ***ἐξωτερικὸν*** σημεῖον (x_1,y_1), ὁρίζονται προφανῶς ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις : $\varphi(x,y)=0$, $x_1\varphi_x+y_1\varphi_y=x\varphi_x+y\varphi_y$, ***λυομένας πρὸς τὰ x,y.***

Ἂν τώρα ἡ καμπύλη εἶναι ἀλγεβρικὴ τοῦ βαθμοῦ μ, ἡ β΄ ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς εἶναι βαθμοῦ μ—1, ὥστε, (κατὰ γνωστὸν θεώρημα τῆς Ἀλγέβρας περὶ τῶν κοινῶν λύσεων δύο ἐξισώσεων) : ***Ὑπάρχουν τότε μ(μ—1) (τὸ πολὺ) σημεῖα ἐπαφῆς καὶ ἑπομένως μ(μ—1) (τὸ πολὺ) ἐφαπτόμεναι ἀπὸ τὸ τυχὸν ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ***

ἐπιπέδου. Π. χ. διὰ $\mu=2$ (κωνικαὶ τομαὶ) ἔχομεν δύο (τὸ πολὺ) ἐφαπτομένας· διὰ $\mu=3$, τὸ πολὺ 6 κτλ.

(Ἡ β′ ἐξίσωσις, ***ἀφοῦ ἀναχθῇ εἰς τὸν μ—1 βαθμόν,*** παριστάνει, ***μόνη της,*** μίαν καμπύλην τοῦ $\mu-1$ βαθμοῦ (τὸ πολύ), ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖνται τὰ $\mu(\mu-1)$ σημεῖα τῆς ἐπαφῆς).

11ον.

18. ***Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐφαπτομένων μιᾶς ἀλγεβρικῆς καμπύλης : $\varphi(x,y)=0$ τῶν παραλλήλων πρὸς μίαν δοθεῖσαν εὐθεῖαν : $Y=\alpha X$.***

Ἀρκεῖ προφανῶς νὰ εἶναι : $\frac{dy}{dx}=\alpha$ (1)· ἡ ἐξίσωσις δὲ αὐτή, μαζὶ μὲ τὴν $\varphi(x,y)=0$, θὰ ὁρίσῃ τὰς συντεταγμένας τῶν ζητουμένων σημείων ἐπαφῆς.

Ἂν δὲ ἡ καμπύλη $\varphi(x,y)=0$ εἶναι ἀλγεβρικὴ τοῦ μ βαθμοῦ, ἡ ἐξίσωσις (1), θὰ γίνῃ ἡ ἐξίσωσις τοῦ $\mu-1$ βαθμοῦ : $\varphi_x+\alpha\varphi_y=0$· ὥστε: ***Ὑπάρχουν τότε (τὸ πολὺ) μ(μ—1) ἐφαπτόμεναι παράλληλοι πρὸς τὴν τυχοῦσαν διεύθυνσιν.***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

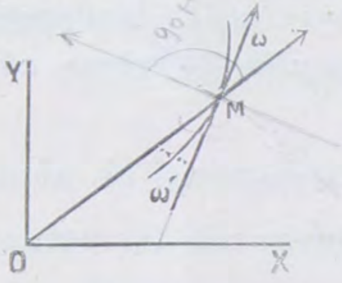
Νὰ εὑρεθοῦν αἱ καμπύλαι, τῶν ὁποίων :

1) Ἡ ὑποκάθετος εἶναι (εἰς κάθε σημεῖον) ἴση μὲ τὴν ὑφαπτομένην.
2) Ἡ ἐπικάθετος ἴση μὲ τὴν ἐπεφαπτομένην.
3) Ἡ ὑποκάθετος ἀνάλογος τῆς τετμημένης.
4) Ἡ ὑποκάθετος ἀνάλογος τῆς τεταγμένης.
5) Ἡ ὑφαπτομένη ἀνάλογος τῆς τεταγμένης.
6) Τὸ ἄθροισμα ὑποκαθέτου καὶ ὑφαπτομένης σταθερόν.

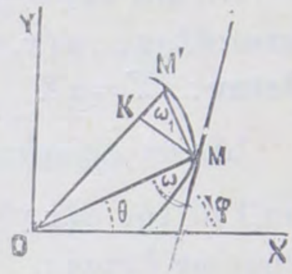
Β') ΤΥΠΟΙ ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΟΙ ΕΙΣ ΤΑΣ ΠΟΛΙΚΑΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΣ

α') Ἐφαπτομένη καὶ κάθετος.

19. ***Προσδιορισμὸς τῆς ἐφαπτομένης.***—Ἂν ἡ καμπύλη ἔχῃ, εἰς πολικὰς συντεταγμένας, τὴν ἐξίσωσιν : $\varrho = \sigma(\vartheta)$, ἡ ἐφαπτομένη της εἰς ἓν σημεῖον Μ εἰμπορεῖ νὰ ὁρισθῇ ἀπὸ τὴν γωνίαν ω, ποὺ σχηματίζει μὲ τὴν πολικὴν ἀκτῖνα τὴν ἀγομένην εἰς τὸ Μ (σχ. 10). Φοραὶ δὲ τῶν δύο πλευρῶν τῆς γωνίας αὐτῆς ***θετικαὶ*** θεωροῦνται τῆς πολικῆς ἀκτῖνος ἡ ΟΜ, τῆς δὲ ἐφαπτομένης ἡ ἀπὸ τὸ Μ πρὸς τὸ μέρος τοῦ τόξου, ὅπου αὐξάνουν αἱ πολικαὶ γωνίαι. Πρέπει λοιπὸν νὰ εὕρωμεν, πῶς ἐκφράζεται ἡ γωνία ω μὲ τὰς πολικὰς συντεταγμένας καὶ τὰ διαφορικά των. Αὐτὸ γίνεται κατὰ δύο τρόπους· ἢ ***ἀπευθείας*** ἢ ***ἐμμέσως.***



Σχ. 10.



Σχ. 11.

20. ***Ἔκφρασις τῆς γωνίας ω.—Α' τρόπος (ἀπευθείας).***—Ἂν ΜΜ' εἶναι μία χορδὴ τῆς καμπύλης (σχ. 11) καὶ συντεταγμέναι τοῦ μὲν Μ αἱ ϱ, ϑ, τοῦ δὲ Μ' αἱ $\varrho + \Delta\varrho$, $\vartheta + \Delta\vartheta$, καταβιβάζοντες ἀπὸ τὸ Μ κάθετον πρὸς τὴν ΟΜ' σχηματίζομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΜΚΜ', πού μας δίδει τὴν σχέσιν : (α) $KM = KM'.\varepsilon\varphi\omega_1$ (ω_1 = γωνία ΟΜ'Μ)· ἀπὸ τὸ ἄλλο ὅμως ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΚΜ ἔχομεν :

$$KM = OM\eta\mu(\Delta\vartheta) = \varrho\left(\Delta\vartheta - \frac{\Delta\vartheta^3}{3!} + \dots\right),$$

$$KM' = OM' - OK = (\varrho + \Delta\varrho) - \varrho\sigma\upsilon\nu(\Delta\vartheta) =$$

$$= \Delta\varrho + \varrho(1 - \sigma\upsilon\nu(\Delta\vartheta)) = \Delta\varrho + \varrho\left(\frac{\Delta\vartheta^2}{1.2} - \dots\right)\cdot$$

Ἡ ἰσότης λοιπὸν (α) δίδει :

$$\varrho\left(\Delta\vartheta - \frac{\Delta\vartheta^3}{3!} + \dots\right) = \left(\Delta\varrho + \varrho\left[\frac{\Delta\vartheta^2}{2!} - \dots\right]\right)\varepsilon\varphi\omega_1,$$

$$\text{ἢ} \quad \varrho\left(1 - \frac{\Delta\vartheta^2}{3!} + \dots\right) = \left(\frac{\Delta\varrho}{\Delta\vartheta} + \varrho\left[\frac{\Delta\vartheta}{2!} - \dots\right]\right)\varepsilon\varphi\omega_1$$

$$\text{ἢ καὶ } \varrho\sigma\varphi\omega_1\left(1 - \frac{\Delta\vartheta^2}{3!} + \dots\right) = \frac{\Delta\varrho}{\Delta\vartheta} + \varrho\left[\frac{\Delta\vartheta}{1.2} + \dots\right]\cdot$$

καὶ εἰς τὸ ὅριον ἔχομεν λοιπόν : $\frac{d\varrho}{d\vartheta} = \varrho\sigma\varphi\omega$ (διότι $\text{ὅρ}\Delta\vartheta = 0$ καὶ $\text{ὅρ}\,\omega_1 = \omega$), ὥστε εἶναι : $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\varrho d\vartheta}{d\varrho}$. Ἑπομένως καί:

$$\eta\mu\omega = \frac{\varrho d\vartheta}{\sqrt{d\varrho^2+\varrho^2 d\vartheta^2}}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{d\varrho}{\sqrt{d\varrho^2+\varrho^2 d\vartheta^2}}.$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν ὁρίζεται ἡ γωνία ω (διότι $\frac{d\varrho}{d\vartheta} = \sigma'(\vartheta)$) καὶ ἐπομένως καταγράφεται ***ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ Μ***.

Β' τρόπος (ἐμμέσως). — Ἀπὸ τὸ σχῆμα (11) βλέπομεν, ὅτι : $\omega = \varphi - \vartheta$, δηλ. $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\varepsilon\varphi\varphi - \varepsilon\varphi\vartheta}{1+\varepsilon\varphi\varphi\varepsilon\varphi\vartheta}\cdot$ ἀλλὰ $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{dy}{dx}$, $\varepsilon\varphi\vartheta = \frac{y}{x}$ (ἀπὸ τοὺς τύπους : $x = \varrho\sigma\upsilon\nu\vartheta$, $y = \varrho\eta\mu\vartheta$), ὥστε :

$$(\alpha) \quad \varepsilon\varphi\omega = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{ydy}{xdx}} = \frac{xdy - ydx}{xdx + ydy}\cdot$$ ἐπειδὴ ὅμως εἶναι :

$\frac{y}{x} = \varepsilon\varphi\vartheta$ καὶ $x^2 + y^2 = \varrho^2$, συνάγομεν : $\frac{xdy - ydx}{x^2} = \frac{d\vartheta}{\sigma\upsilon\nu^2\vartheta}$,

$$\text{ἢ } xdy - ydx = \varrho^2 d\vartheta \text{ καὶ } xdx + ydy = \varrho d\varrho\cdot$$

ὁ τύπος λοιπὸν (α) γίνεται : $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\varrho^2 d\vartheta}{\varrho d\varrho} = \frac{\varrho d\vartheta}{d\varrho}$.

21. ***Τύπος τῆς καθέτου.*** — Ἡ ***κάθετος*** τῆς καμπύλης εὑρίσκεται ἀπὸ τὸν τύπον :

$$\varepsilon\varphi\omega' = -\frac{d\varrho}{\varrho d\vartheta}$$

($\omega' \equiv 90^0 + \omega\cdot$ θετικὴ φορὰ τῆς καθέτου θεωρεῖται ἡ σχηματίζουσα γωνίαν $\omega + 90^0$ μὲ τὴν πολικὴν ἀκτῖνα).

22. ***Πολικὴ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης.*** — Ἡ ***πολικὴ*** ἐξίσωσις μιᾶς εὐθείας, ποὺ περνᾷ ἀπὸ δύο σημεῖα, δίδεται ἀπὸ τὴν ***Ἀναλυτικὴν Γεωμετρίαν*** καὶ εἶναι, διὰ τὴν ***τέμνουσαν*** M_1M_2 τῆς καμπύλης, ἡ ἑξῆς :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\varrho} & \sigma\upsilon\nu\vartheta & \eta\mu\vartheta \\ \frac{1}{\varrho_1} & \sigma\upsilon\nu\vartheta_1 & \eta\mu\vartheta_1 \\ \frac{1}{\varrho_1} + \Delta\frac{1}{\varrho_1} & \sigma\upsilon\nu(\vartheta_1 + \Delta\vartheta_1) & \eta\mu(\vartheta_1 + \Delta\vartheta_1) \end{vmatrix} = 0\cdot$$

(ὅτι ἡ εὐθεῖα, ποὺ παριστάνει ἡ ἐξίσωσις αὐτή, περνᾷ ἀπὸ τὰ δύο σημεῖα $M_1(\varrho_1, \vartheta_1)$ καὶ $M_2\left(\frac{1}{\varrho_1}+\Delta\frac{1}{\varrho_1}, \vartheta_1+\Delta\vartheta_1\right)$ εἶναι προφανές).

Ἀπὸ αὐτὴν νὰ εὑρεθῇ μὲ τὴν μετάβασιν ***εἰς τὸ ὅριον*** (μὲ τὴν ***σύμπτωσιν*** τῶν M_1, M_2) ἡ ἑξῆς ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης (εἰς τὸ M_1):

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\varrho} & \sigma\upsilon\nu\vartheta & \eta\mu\vartheta \\ \frac{1}{\varrho_1} & \sigma\upsilon\nu\vartheta_1 & \eta\mu\vartheta_1 \\ \left(\frac{1}{\varrho_1}\right)' & -\eta\mu\vartheta_1 & \sigma\upsilon\nu\vartheta_1 \end{vmatrix} = 0,$$

ἢ ἁπλούστερα : $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_1}\sigma\upsilon\nu(\vartheta-\vartheta_1) + \left(\frac{1}{\varrho_1}\right)'\eta\mu(\vartheta-\vartheta_1)$· (ὁ τόνος σημαίνει παραγώγισιν πρὸς τὸ ϑ).

23. ***Πολικὴ ἐξίσωσις τῆς καθέτου.***— Ἐπειδὴ ἡ κάθετος περνᾷ ἀπὸ τὸ M_1 καὶ ἀπὸ τὸ ἄκρον $N\left(\varrho'_1, \vartheta_1+\frac{\pi}{2}\right)$ τῆς ὑποκαθέτου, ἡ ἐξίσωσίς της θὰ εἶναι :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\varrho} & \sigma\upsilon\nu\vartheta & \eta\mu\vartheta \\ \frac{1}{\varrho_1} & \sigma\upsilon\nu\vartheta_1 & \eta\mu\vartheta_1 \\ \frac{1}{\varrho'_1} & -\eta\mu\vartheta_1 & \sigma\upsilon\nu\vartheta_1 \end{vmatrix} = 0,$$

ἢ ἁπλούστερα : $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_1}\sigma\upsilon\nu(\vartheta-\vartheta_1) + \frac{1}{\varrho'_1}\eta\mu(\vartheta-\vartheta_1)$.

β') Ὁρισμὸς τῶν ἀνυσμάτων :

Πολικὴ ὑφαπτομένη, πολ. ὑποκάθετος, πολ. ἐπεφαπτομένη, πολ. ἐπικάθετος.

24. ***Πολικὴ ὑφαπτομένη, ὑποκάθετος, ἐπεφαπτομένη, ἐπικάθετος.***—Ἂν ἀπὸ τὴν ἀρχὴν O φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν πολικὴν ἀκτῖνα OM (σχ. 12) καὶ σημειώσωμεν μὲ E καὶ K τὰς τομὰς τῆς καθέτου αὐτῆς ἀπὸ τὴν ἐφαπτομένην καὶ ἀπὸ τὴν κάθετον εἰς τὸ M ἀντιστοίχως, ὀνομάζομεν :

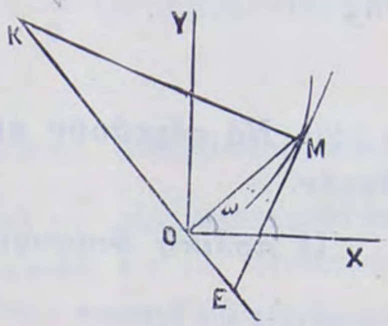
1) Τὸ ἄνυσμα OE ***πολικὴν ὑφαπτομένην*** (τῆς καμπύλης ***εἰς τὸ M***).

2) Τὸ ἄνυσμα ΟΚ πολικὴν ὑποκάθετον.

3) Τὸ ἄνυσμα ΕΜ πολικὴν ἐπεφαπτομένην.

4) Τὸ ἄνυσμα ΚΜ πολικὴν ἐπικάθετον.

25. ***Ὑπολογισμὸς τῶν ἀνυσμάτων αὐτῶν.***



Σχ. 12.

Εἶναι εὔκολον νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς ἐκφράσεις τῶν ἀνυσμάτων αὐτῶν μὲ τὰς πολικὰς συντεταγμένας ϱ, ϑ καὶ τὰ διαφορικά των.

Πραγματικῶς ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΕΜ ἔχομεν :

$$\text{OE}=\text{OM}\,\text{εφ}(\text{OME}) \text{ ἢ } \text{OE}=\varrho\,.\,\text{εφ}\omega, \text{ δηλ. } \text{OE}=\varrho\frac{\varrho d\vartheta}{d\varrho}=\frac{\varrho^2 d\vartheta}{d\varrho}.$$

Ἐπίσης ἀπὸ τὸ ΟΚΜ εὑρίσκομεν :

$$\text{OK}=\text{OM}\,.\,\text{εφ}(\text{OMK})=\varrho\,\text{σφ}\omega=\varrho\,.\,\frac{d\varrho}{\varrho d\vartheta}=\frac{d\varrho}{d\vartheta}.$$

Τέλος ἀπὸ τὰ ἴδια τρίγωνα εὑρίσκομεν καὶ τὰς ὑποτεινούσας ΕΜ καὶ ΚΜ καὶ ἔχομεν λοιπὸν κατὰ σειράν :

1) ***πολικὴ ὑφαπτομένη*** : $\text{OE}=\varrho^2.\dfrac{d\vartheta}{d\varrho}.$

2) ***πολικὴ ὑποκάθετος*** : $\text{OK}=\dfrac{d\varrho}{d\vartheta}.$

3) ***πολικὴ ἐπεφαπτομένη*** : $\text{EM}=\varrho\sqrt{1+\varrho^2\left(\dfrac{d\vartheta}{d\varrho}\right)^2}.$

4) ***πολικὴ ἐπικάθετος*** : $\text{KM}=\sqrt{\varrho^2+\left(\dfrac{d\varrho}{d\vartheta}\right)^2}.$

Τὸ σημεῖον τῆς $\dfrac{d\varrho}{d\vartheta}$ δεικνύει τὴν φοράν, ποὺ θὰ στραφῇ ἡ πολ. ἀκτίς, διὰ νὰ γράψῃ 90° καὶ πέσῃ ἐπὶ τῆς ὑποκαθέτου (Ἀπόδειξις εὔκολος).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων : ΟΕΜ, ΟΚΜ, ΚΜΕ.

2) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ***καρτεσιαναὶ*** ἐκφράσεις τῶν ***πολικῶν*** ἀνυσμάτων ΟΕ, ΟΚ, ΕΜ, ΚΜ.

3) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ***πολικαὶ*** ἐκφράσεις τῶν ***καρτεσιανῶν*** ἀνυσμάτων τοῦ ἐδ. 6.

4) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ σχέσεις μεταξὺ τῆς καρτεσιανῆς καὶ τῆς πολικῆς ὑφαπτομένης, καθὼς καὶ τῆς καρτεσιανῆς καὶ τῆς πολικῆς ὑποκαθέτου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

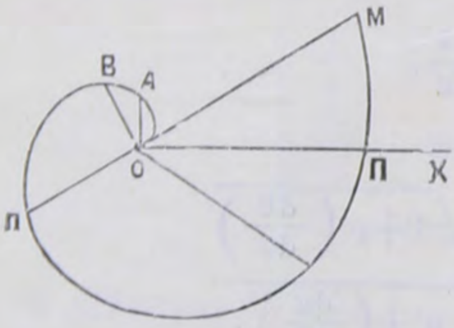
1ον.

26. ***Νὰ εὑρεθοῦν αἱ καμπύλαι, ποὺ ἔχουν ὑποκάθετον σταθεράν.***

Ἡ ***πολικὴ διαφορικὴ*** ἐξίσωσίς των θὰ εἶναι: $\frac{d\varrho}{d\theta} = \alpha \ (\alpha > 0)$·

ἑπομένως θὰ ἔχωμεν: $\varrho = \alpha\theta + c_1$, δηλ. ἓν γένος καμπύλων γνωστῶν ἀπὸ τὴν ***Ἀναλυτικὴν Γεωμετρίαν***· διότι, ἂν γράψωμεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν ὡς ἑξῆς: $\varrho = \alpha(\theta + c)$, βλέπομεν, ὅτι μία στροφὴ τοῦ πολικοῦ ἄξονος κατὰ τὴν γωνίαν c ἁπλοποιεῖ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν εἰς τήν: $\varrho = \alpha\theta$.

Ὥστε: ***Τὸ ζητούμενον γένος καμπύλων ἀποτελεῖται ἀπὸ ἴσας ἕλικας τοῦ Ἀρχιμήδους, μὲ τὸν ἴδιον πόλον, μὲ ἄξονα ὅμως πολικὸν τυχοῦσαν εὐθεῖαν πέριξ τοῦ πόλου αὐτοῦ.***



Σχ. 13.

Σημείωσις.—Ἡ ἕλιξ τοῦ Ἀρχιμήδους παράγεται ὡς ***σύνθετος*** τροχιὰ ἑνὸς σημείου, ποὺ κινεῖται ***ὁμαλῶς*** ἐπὶ μιᾶς εὐθείας, ἐνῷ ἡ εὐθεῖα στρέφεται ***ὁμαλῶς*** περὶ τὴν ἀρχήν.—Διὰ $\theta = 2\pi$, ἔχομεν: $\varrho = 2\pi\alpha = \text{ΟΠ}$ (σχ. 13), δηλ. ***τὸ ἀνάπτυγμα μιᾶς περιφερείας μὲ ἀκτῖνα α***· ὥστε ἡ καμπύλη αὐτὴ (καθὼς καὶ ἡ κυκλοειδὴς) ***τετραγωνίζει*** τὸν κύκλον. (Εἶναι ὅμως καὶ αἱ δύο ***ὑπερβατικαί***· ***ἀλγεβρικὴ*** καμπύλη, ποὺ νὰ τετραγωνίζῃ τὸν κύκλον, δὲν ὑπάρχει).

2ον.

27. ***Νὰ εὑρεθοῦν αἱ καμπύλαι, ποὺ ἔχουν ὑφαπτομένην σταθεράν.***

Ἡ πολικὴ διαφορικὴ ἐξίσωσίς των θὰ εἶναι: $\varrho^2 \frac{d\theta}{d\varrho} = \alpha \ (\alpha > 0)$·

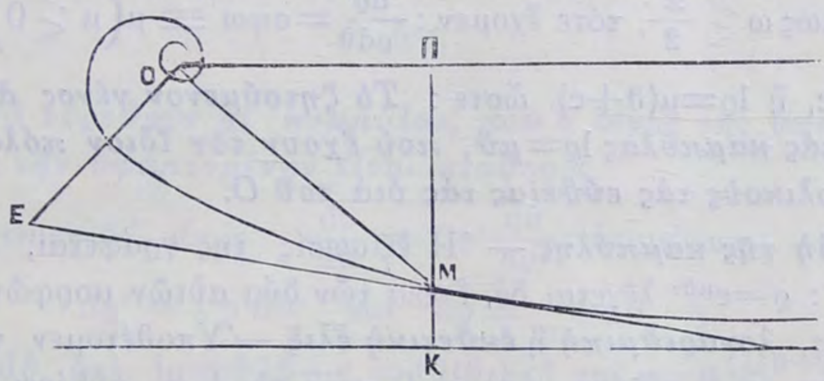
καὶ μετὰ τὴν ὁλοκλήρωσιν εὑρίσκομεν: $\theta + c = \frac{-\alpha}{\varrho}$.

Ὥστε: ***Τὸ ζητούμενον γένος καμπύλων ἀποτελεῖται ἀπὸ καμπύλας ἴσας, μὲ πολικὸν ἄξονα τυχ. εὐθεῖαν διὰ τοῦ πόλου Ο.***

Διότι ἡ ἐξίσωσις γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς: $\vartheta = \frac{-\alpha}{\varrho}$ (μετὰ μίαν στροφὴν τοῦ πολ. ἄξονος κατὰ τὴν γωνίαν c).

Ἡ καμπύλη: $\vartheta = -\frac{\alpha}{\varrho}$ ἢ $\varrho.\vartheta = -\alpha$ λέγεται ***ὑπερβολικὴ ἕλιξ*** (διότι ἡ ***πολικὴ*** αὐτὴ ἐξίσωσίς της ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ***καρτεσιανὴν*** ἐξίσωσιν: $xy = \alpha$ τῆς ***ὑπερβολῆς,*** ὅταν ἀναφέρεται εἰς τὰς ἀσυμπτώτους της).

Διερεύνησις τοῦ σχήματος τῆς λογαριθμικῆς ἕλικος.— Τὸ ϑ πρέπει προφανῶς νὰ λαμβάνῃ ***μόνον*** ἀρνητικὰς τιμὰς (διότι α καὶ ρ θετικά). Διὰ $\vartheta = 0$ ἔχομεν $\varrho = \infty$, διὰ δὲ $\vartheta = -\infty$ ἔχομεν $\varrho = 0$· δηλ. (σχ. 14) ἡ καμπύλη ἔχει «***ἀσύμπτωτον***» ***σημεῖον*** τὸν πόλον (ἐκτελεῖ



Σχ. 14.

ἀπείρους ἑλιγμοὺς πέριξ αὐτοῦ καὶ τὸν πλησιάζει διαρκῶς, χωρὶς ὅμως ποτὲ νὰ τὸν φθάσῃ). Ἡ ἕλιξ αὐτὴ ἔχει καὶ μίαν «***ἀσύμπτωτον***» ***εὐθεῖαν***· τὴν παράλληλον πρὸς τὸν πολικὸν ἄξονα, ποὺ κόπτει τὸν ἄξονα ΟΥ εἰς τὸ σημεῖον —α. Πραγματικῶς, ἂν ἡ τεταγμένη ἑνὸς τυχ. σημείου της εἶναι ἡ ΠΜ καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ Μ ἀπὸ τὴν παράλληλον αὐτὴν ἡ ΚΜ, ἔχομεν ἀπὸ τὸ σχῆμα:

$$KM = K\Pi - M\Pi = \alpha + y = \alpha + \varrho \eta\mu\vartheta = \alpha\left(1 - \frac{\eta\mu\vartheta}{\vartheta}\right)\cdot \text{ ὥστε:}$$

$$\text{ορ } KM = \alpha.\text{ορ}\left(1 - \frac{\eta\mu\vartheta}{\vartheta}\right) = 0.$$

ΚΠ
ΠΚ
ΠΜ
ΜΠ

Κατασκευὴ τῆς ἐφαπτομένης.—Κατασκευάζεται ἀμέσως ἀπὸ τὴν σταθερὰν ὑφαπτομένην της (Βλ. τὸ σχῆμα).

$\vartheta \to 0$

Σημείωσις. Ἂν ὑποθέσωμεν $\alpha<0$, ἡ καμπύλη καὶ ἡ ἀσύμπτωτός της ***ἀναστρέφονται*** πέριξ τοῦ ἄξ. OX.

$3^{ον}$.

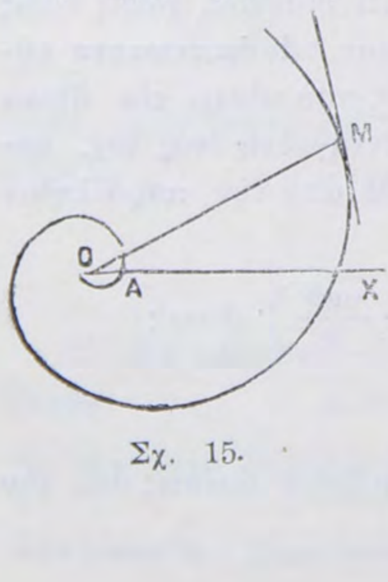
28. ***Νὰ εὑρεθοῦν αἱ καμπύλαι, ποὺ ἡ ἐφαπτομένη των σχηματίζει σταθερὰν γωνίαν ω μὲ τὴν πολικὴν ἀκτῖνα.***

Θὰ ἔχωμεν τώρα τὴν πολικὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν : $\frac{d\rho}{\rho d\vartheta}=$ σφω.

Ἂν λοιπὸν κατὰ πρῶτον ἡ γωνία ω εἶναι ***ὀρθή***, θὰ εἶναι $d\rho=0$, δηλ. $\rho=c$· ὥστε : ***Τὸ ζητούμενον γένος εἶναι ὁμόκεντροι περιφέρειαι.***

Ἂν ὅμως $\omega \gtrless \frac{\pi}{2}$, τότε ἔχομεν : $\frac{d\rho}{\rho d\vartheta}=$ σφω $\equiv \mu\left(\mu \gtrless 0\right)$, δηλ. $l\rho=\mu\vartheta+c_1$ ἢ $l\rho=\mu(\vartheta+c)$. ὥστε : ***Τὸ ζητούμενον γένος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς καμπύλας*** $l\rho=\mu\vartheta$, ***ποὺ ἔχουν τὸν ἴδιον πόλον O καὶ ἄξονας πολικοὺς τὰς εὐθείας τὰς διὰ τοῦ O.***

Σπουδὴ τῆς καμπύλης.— Ἡ ἐξίσωσίς της γράφεται, ἂν λυθῇ πρὸς τὸ ρ : $\rho=e^{\mu\vartheta}$· λέγεται δέ, ἕνεκα τῶν δύο αὐτῶν μορφῶν τῆς ἐξισώσεώς της, ***λογαριθμικὴ*** ἢ ***ἐκθετικὴ ἕλιξ.***—Ὑποθέτομεν τὸ $\mu>0$. Τότε, ὅταν τὸ ϑ αὐξάνῃ ἀπὸ τὸ 0 πρὸς τὸ $+\infty$, αὐξάνει καὶ τὸ ρ ἀπὸ τὸ $+1$ πρὸς τὸ $+\infty$· ὥστε, διὰ τὰς τιμὰς αὐτὰς τοῦ ϑ, ἡ καμπύλη ἀρχίζει (σχ. 15) ἀπὸ τὸ σημεῖον A ($OA=1$), ὅπου κόπτει τὸν ἄξ. OX, ἐκτελεῖ ἀπείρους ἑλιγμοὺς πέριξ τοῦ πόλου καὶ ἀπομακρύνεται διαρκῶς ἀπὸ αὐτόν. Διὰ ϑ ὅμως ἀπὸ $0 \ldots -\infty$, τὸ ρ ἐλαττώνεται ἀπὸ 1 πρὸς τὸ 0· δηλ. ἡ καμπύλη, διὰ τὰς τιμὰς αὐτὰς τοῦ ϑ, συνεχίζεται ἀπὸ τὸ A ἀντιθέτως καὶ ἐκτελεῖ πάλιν ἀπείρους ἑλιγμοὺς πέριξ τοῦ πόλου· τὸν πλησιάζει ὅμως τώρα ἀπεριορίστως, χωρὶς ποτὲ νά τον φθάσῃ· ὥστε : ***Ἔχει ἀσύμπτωτον σημεῖον τὸν πόλον.***



Σχ. 15.

4^{ov}.

29. ***Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία ω τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἐλλείψεως πρὸς τὴν πολικὴν ἀκτῖνα.*** (Ὅπου πόλος ἡ δεξιὰ ἑστία της Ε καὶ πολικὸς ἄξων ὁ μέγας ἄξων της).

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως εἶναι τότε, καθὼς γνωρίζομεν :

$$\varrho = \frac{\mu}{1+\varepsilon\sigma\upsilon\nu\vartheta}\cdot \quad (\varepsilon \text{ ἡ } \textit{ἐκκεντρότης}).$$

Εἶναι λοιπόν : $d\varrho = \dfrac{\varepsilon\mu\eta\mu\vartheta d\vartheta}{(1+\varepsilon\sigma\upsilon\nu\vartheta)^2}$ καὶ $\dfrac{d\vartheta}{d\varrho} = \dfrac{(1+\varepsilon\sigma\upsilon\nu\vartheta)^2}{\varepsilon\mu\eta\mu\vartheta}$.

Ὥστε : $\varepsilon\varphi\omega = \varrho\dfrac{d\vartheta}{d\varrho} = \dfrac{1+\varepsilon\sigma\upsilon\nu\vartheta}{\varepsilon\eta\mu\vartheta}$.

5^{ov}.

30. ***Νὰ εὑρεθοῦν αἱ καμπύλαι, ποὺ ὁ λόγος τῆς ὑποκαθέτου των πρὸς τὴν ὑφαπτομένην εἶναι σταθερός.***

Θὰ ἔχωμεν δι᾽ αὐτάς : $\dfrac{d\varrho}{d\vartheta} = \lambda^2\varrho^2\dfrac{d\vartheta}{d\varrho}\cdot$ ἑπομένως :

$$d\varrho^2 = \lambda^2\varrho^2 d\vartheta^2 \quad \text{καὶ} \quad d\varrho = \pm\lambda\varrho d\vartheta \quad \text{ἢ}$$

$\dfrac{d\varrho}{\varrho} = \pm\lambda d\vartheta$, δηλ. $l\varrho = \pm\lambda\vartheta + c_1 = \pm\lambda(\vartheta + c)$ καὶ $\varrho = e^{\pm\lambda(\vartheta+c)}$, ἢ (μὲ στροφὴν τοῦ πολ. ἄξονος) : $\varrho = e^{\pm\lambda\vartheta} = e^{\mu\vartheta}$. Ὥστε : ***Τὴν ζητουμένην ἰδιότητα ἔχουν μόνον αἱ ἐκθετικαὶ ἕλικες (Ἄσκ. 3η).***

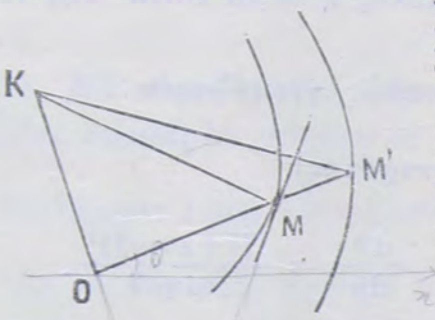
(Ἂν $\lambda = 1$ (*ἰσότης* ὑποκαθέτου καὶ ὑφαπτομένης), ἔχομεν τὴν ἐκθετικὴν ἕλικα : $\varrho = e^{\pm\vartheta}$).

6^{ov}.

31. ***Νὰ εὑρεθῇ, πότε δύο καμπύλαι ἔχουν ἴσας ὑποκαθέτους εἰς τὰ σημεῖά των, ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ ἴδιον ϑ.***

Θὰ ἔχωμεν τώρα : $\dfrac{dP}{d\vartheta} = \dfrac{d\varrho}{d\vartheta}\cdot$ λοιπόν : $P = \varrho + c$. Ὥστε : ***Ἡ μία καμπύλη (Κ) κατασκευάζεται ἀπὸ τὴν ἄλλην (κ), ἂν αὐξήσωμεν τὰς πολικὰς ἀκτῖνας τῆς (κ), τὰς ἀπὸ τὸ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ὡς πόλου ἀγομένας, κατὰ σταθερὸν μῆκος αὐθαίρετον*** $(c \gtrless o)$.

Αἱ ἄπειροι καμπύλαι (*παράμετρος* τὸ c τῆς ὁλοκληρώσεως), ποὺ μὲ πόλον τὸ τυχὸν σημεῖον Ο τοῦ ἐπιπέδου παράγονται μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν ἀπὸ μίαν δοθεῖσαν καμπύλην, λέγονται ***κογχοειδεῖς*** της(ὡς πρὸς τὸ Ο). Ἡ κάθετός των, ἑπομένως καὶ ἡ ἐφαπτομένη των, κατασκευάζεται, κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα, ἀπὸ τὴν κάθετον τῆς ἀρχικῆς καμπύλης εὐκολώτατα, καθὼς δεικνύει τὸ σχῆμα 16.



Σχ. 16.

Σημείωσις α'.—Ἡ κογχοειδὴς τῆς εὐθείας γραμμῆς εἶναι ἡ ἁπλουστέρα ἀπὸ ὅλας καὶ μᾶς εἶναι γνωστὴ ἀπὸ τὴν ***Αναλυτικὴν Γεωμετρίαν.***

Σημείωσις β'.—Ἂν μᾶς δοθοῦν ν καμπύλαι μὲ πολικὰς ἀκτῖνας $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\nu$, ποὺ ν' ἀντιστοιχοῦν εἰς ***τὴν ἰδίαν*** πολικὴν γωνίαν ϑ, καὶ κατασκευάσωμεν ἀπὸ αὐτὰς μίαν νέαν καμπύλην (Κ) μὲ πολικὴν ἀκτῖνα : $P = \alpha_1\varrho_1 + \alpha_2\varrho_2 + \ldots + \alpha_\nu\varrho_\nu$, (ὅπου $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ σταθεροὶ ἀριθμοί), ἡ ὑποκάθετος τῆς (Κ) θ' ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς ὑποκαθέτους τῶν ν ἀρχικῶν καμπύλων μὲ τὸν ἴδιον τρόπον· διότι :

$$\frac{dP}{d\vartheta} = \alpha_1\frac{d\varrho_1}{d\vartheta} + \alpha_2\frac{d\varrho_2}{d\vartheta} + \ldots + \alpha_\nu\frac{d\varrho_\nu}{d\vartheta}.$$

7ον.

32. ***Νὰ εὑρεθῇ, πότε δύο καμπύλαι ἔχουν ἴσας ὑφαπτομένας εἰς τὰ σημεῖά των, ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ ἴδιον ϑ.***

Θὰ ἔχωμεν τότε :

$$P^2\frac{d\vartheta}{dP} = \varrho^2\frac{d\vartheta}{d\varrho}, \text{ δηλ. } \frac{dP}{P^2} = \frac{d\varrho}{\varrho^2} \text{ ἢ καὶ : } \frac{1}{P} = \frac{1}{\varrho} + c\cdot$$

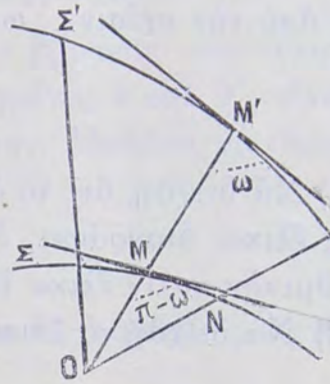
ὥστε : ***Τ' ἀντίστροφα τῶν πολικῶν ἀκτίνων των πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχουν διαφορὰν σταθεράν.***

8ον.

33. ***Νὰ εὑρεθῇ, πότε αἱ ἐφαπτόμεναι δύο καμπύλων σχηματίζουν, εἰς τὰ σημεῖα, ποὺ ἔχουν τὴν ἰδίαν πολικὴν γωνίαν, γωνίας μὲ τὴν πολικὴν ἀκτῖνα παραπληρωματικάς.***

Πρέπει τώρα νὰ ἔχωμεν : $P\frac{d\vartheta}{dP} = -\varrho\frac{d\vartheta}{d\varrho}$, ἢ καί: $\frac{dP}{P} + \frac{d\varrho}{\varrho} = 0$

ἑπομένως : $dl(P\varrho)=0$· δηλ. $P\varrho=c$· Ὥστε : ***Αἱ δύο καμπύλαι πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχουν τὸ γινόμενον τῶν ἀντιστοίχων ἀκτίνων των σταθερόν.***



Σχ. 17.

Μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν παράγει κανεὶς ἀπὸ μίαν δοθεῖσαν καμπύλην (κ) ἀπείρους ἄλλας (*παράμετρος* τὸ c), «*μετασχηματισμένας τῆς πρώτης μὲ τὰς ἀντιστρόφους ἀκτῖνας*» (σχ. 17).

Εὐκολώτατα δὲ ἀποδεικνύεται ἡ ἰδιότης τοῦ μετασχηματισμοῦ αὐτοῦ, ὅτι : ***Ἡ γωνία τ δύο ἀρχικῶν καμπύλων (κ) καὶ (κ_1) εἶναι ἴση (ἀπολύτως) μὲ τὴν γωνίαν Τ τῶν μετασχηματισμένων των (Κ) καὶ (K_1).***

(Διότι εἶναι : $T=\Omega_1-\Omega=(\pi-\omega_1)-(\pi-\omega)=\omega-\omega_1=-\tau$)

9ον.

34. ***Νὰ εὑρεθοῦν αἱ καμπύλαι, εἰς τὰς ὁποίας ἡ γωνία τῆς ἐφαπτομένης μὲ τὴν πολικὴν ἀκτῖνα εἶναι ἀνάλογος τῆς πολικῆς γωνίας.***

Θὰ εἶναι τώρα : $\omega=\mu\vartheta$, ἢ καί : $\varepsilon\varphi\omega=\varepsilon\varphi(\mu\vartheta)$, δηλ. $\varrho\dfrac{d\vartheta}{d\varrho}=\varepsilon\varphi(\mu\vartheta)$

ἢ καί : $\dfrac{d\varrho}{\varrho}=\dfrac{d\vartheta}{\varepsilon\varphi(\mu\vartheta)}$, ἢ $\mu\dfrac{d\varrho}{\varrho}=\dfrac{d(\mu\vartheta)}{\varepsilon\varphi(\mu\vartheta)}$ καὶ μετὰ τὴν ὁλοκλήρωσιν : $\mu l\varrho=l\eta\mu(\mu\vartheta)+c_1$ δηλ. $\varrho^{\mu}=c\eta\mu(\mu\vartheta)$· ἂν δὲ ὁ πολικὸς ἄξων στραφῇ κατὰ τὴν γωνίαν $\dfrac{\pi}{2\mu}$, δηλ. ἂν θέσωμεν : $\vartheta=\dfrac{\pi}{2\mu}+\vartheta'$, ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ λαμβάνει καὶ τὴν μορφήν : $\varrho^{\mu}=c\sigma\upsilon\nu(\mu\vartheta')$ (τότε δὲ εἶναι : $\varphi=\mu\vartheta'+\dfrac{\pi}{2}$).

Ὥστε : ***Τὸ ζητούμενον γένος καμπύλων ἔχει τὴν ἐξίσωσιν : $\varrho^{\mu}=c\sigma\upsilon\nu(\mu\vartheta)$.*** Τὸ δὲ σχῆμα τῶν καμπύλων αὐτῶν διαφέρει κατὰ τὰς διαφόρους τιμάς, ποὺ δίδομεν εἰς τὸ μ. Π.χ. διὰ $\mu=2$ ἔχομεν τὸν «***λημνίσκον***»: $\varrho^2=2\alpha^2\sigma\upsilon\nu(2\vartheta)$ ($c=2\alpha^2$), δηλ. ***Τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα («ἑστίας») παρέχουν ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον μὲ τὸ τετράγωνον, ποὺ ἔχει πλευρὰν τὸ ἥμισυ τῆς ἀποστάσεως 2α***

τῶν δύο ἑστιῶν. Ἡ ἐφαπτομένη τοῦ λημνίσκου κατασκευάζεται εὔκολα ἀπὸ τὴν σχέσιν: $\omega = 2\vartheta + \frac{\pi}{2}$.

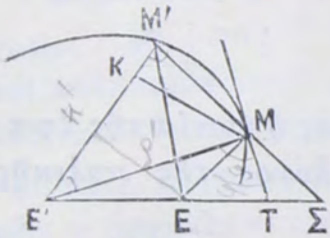
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ ἄκρον Ε τῆς ***ὑφαπτομένης*** ΜΕ τῆς λογαριθμικῆς ἕλικος διαγράφει, ὅταν τὸ Μ διαγράφῃ τὴν καμπύλην, μίαν λογαριθμικὴν πάλιν ἕλικα ***ἴσην***, ἀλλὰ κειμένην εἰς ***διάφορον*** θέσιν.

2) Νὰ δειχθῇ τὸ ἴδιον καὶ διὰ τὸ ἄκρον Κ τῆς ***ἐπικαθέτου***.

Γ') ΤΥΠΟΙ ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΟΙ ΕΙΣ ΤΑΣ ΔΙΠΟΛΙΚΑΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΣ

α') Γραμμικαὶ διπολικαὶ συντεταγμέναι.



Σχ. 18.

35. ***Τύπος τῆς ἐφαπτομένης.*** — Ἂν ἡ ἐξίσωσις μιᾶς καμπύλης εἰς ***γραμμικὰς*** διπολικὰς συντεταγμένας ϱ, ϱ' εἶναι ἡ: $\varphi(\varrho,\varrho')=0$, ἡ ἐφαπτομένη της εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Μ εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς. Γράφομεν (σχ. 18) τὴν τέμνουσαν ΜΜ′ καὶ φέρομεν τὴν ΜΚ κάθετον πρὸς τὴν Ε′Μ′ (Ε′, Ε εἶναι οἱ δύο ***πόλοι***). Ἂν τότε θέσωμεν:

$$E'M=\varrho', \quad EM=\varrho, \quad E'M'=\varrho'+\Delta\varrho', \quad EM'=\varrho+\Delta\varrho,$$

καὶ $\gamma\omega\nu(ME'M')=\Delta\vartheta$, $\tau o\xi MM'=\Delta s$, $\gamma\omega\nu(E'MT)=\varphi'$, $\gamma\omega\nu(EMT)=\varphi$, θὰ ἔχωμεν: $\sigma\upsilon\nu(E'M'M)=\dfrac{M'K}{MM'}=\dfrac{M'K}{\Delta s}\cdot\dfrac{\Delta s}{MM'}$, ἢ καί:

$$\sigma\upsilon\nu(E'M'M)=\frac{\Delta\varrho'+2\varrho'\eta\mu^2\left(\frac{\Delta\vartheta}{2}\right)}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta s}{MM'}.$$

Εἶναι ὅμως: $\text{ορ}(E'M'M)=\varphi'$, $\text{ορ}\left(\dfrac{\tau o\xi MM'}{MM'}\right)=1$ καὶ

$$\text{ορ}\ \frac{2\varrho'\eta\mu^2\left(\frac{\Delta\vartheta}{2}\right)}{\Delta s}=0\cdot \quad \text{ἑπομένως:}$$

$\sigma\upsilon\nu\varphi'=\dfrac{d\varrho'}{ds}$ καὶ ὁμοίως: $\sigma\upsilon\nu\varphi=\dfrac{d\varrho}{ds}$ · ὥστε εἶναι:

$$\text{ορ}\ \frac{\sigma\upsilon\nu(E'M'M)}{\sigma\upsilon\nu(EM'M)}=\frac{\sigma\upsilon\nu\varphi'}{\sigma\upsilon\nu\varphi}=\frac{d\varrho'}{d\varrho}\cdot \quad (\alpha)$$

$-(M'K)=(E'M')-(E'K')=\rho+\Delta\rho'-\rho'\sigma\upsilon\nu\Delta\vartheta$
$=\Delta\rho'+\rho'(1-\sigma\upsilon\nu\Delta\vartheta)=\Delta\rho'+2\rho'\eta\mu^2\left(\frac{\Delta\vartheta}{2}\right)$

Ἀπὸ τὸν τύπον δὲ αὐτὸν ὁρίζεται ἡ ἐφαπτομένη ΜΤ.

β΄) Γωνιακαὶ διπολικαὶ σοντεταγμέναι.

36. ***Τύπος τῆς ἐφαπτομένης*** — Ἂν ἔχωμεν ἐξίσωσιν καμπύλης, ποὺ περιέχει τὰς ***γωνιακὰς*** διπολικὰς συντεταγμένας ϑ καὶ ϑ', εἶναι εὔκολον, μὲ μέθοδον ἀνάλογον πρὸς τὴν τοῦ προηγ. ἐδαφίου, νὰ εὕρωμεν τὸν ἑξῆς τύπον :

$$\frac{\text{συν}\psi}{\text{συν}\psi'} = \frac{\eta\mu\vartheta' d\vartheta}{\eta\mu\vartheta d\vartheta'}, \quad (\beta)$$

ὅπου ψ καὶ ψ' εἶναι αἱ δύο γωνίαι τῆς ***καθέτου*** τῆς καμπύλης εἰς τὸ Μ πρὸς τὰς δύο πολικὰς ἀκτῖνας ΜΕ,ΜΕ΄.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

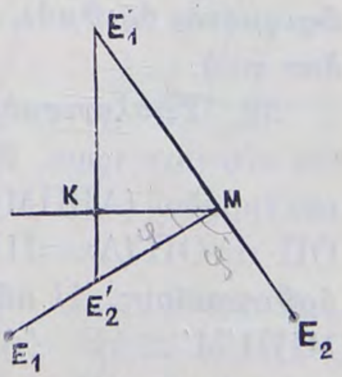
1) Νὰ δειχθῇ ἀπὸ τὸν τύπον (α), ὅτι εἰς τὴν ἔλλειψιν : $\varrho+\varrho'=2\alpha$ αἱ δύο πολικαὶ ἀκτῖνες εἰς τὸ τυχὸν σημεῖόν της Μ σχηματίζουν μὲ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον αὐτό, ***πρὸς τὸ ἴδιον μέρος της,*** δύο γωνίας ***συμπληρωματικάς***.

2) Νὰ δειχθῇ ἡ ἀνάλογος πρότασις διὰ τὴν ὑπερβολήν.

3) Νὰ δειχθῇ, ὅτι αἱ καμπύλαι : $\varrho+\mu\varrho'=\alpha$, $\varrho'-\mu\varrho=\beta$ κόπτονται ὀρθογωνίως (α, β ***τυχόντες*** σταθεροί).

4) Νὰ δειχθῇ ἀπὸ τὸν τύπον (β), ὅτι διὰ τὴν καμπύλην, ποὺ εἶναι ὁ γεωμ. τύπος τῆς τομῆς δύο κινητῶν εὐθειῶν στρεφομένων ***ὁμαλῶς*** πέριξ τῶν δύο πόλων, ἀντιστοίχως, θὰ ἔχωμεν : $\dfrac{\text{συν}\psi}{\text{συν}\psi'} = \dfrac{\nu.\eta\mu\vartheta'}{\nu'.\eta\mu\vartheta}$, ὅπου ν, ν' εἶναι αἱ ***σταθεραὶ γωνιακαὶ ταχύτητες*** τῶν εὐθειῶν.

5) Ν᾽ ἀποδειχθῇ ἡ ἑξῆς γεωμετρικὴ κατασκευὴ τῆς ἐφαπτομένης τοῦ λημνίσκου : $\varrho\varrho'=\alpha^2$ (σχ. 19).



Σχ. 19.

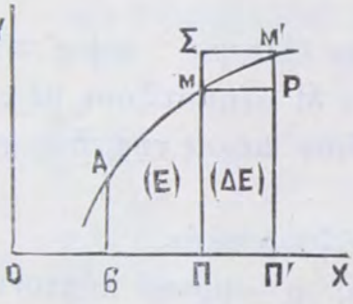
Ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς πολικῆς ἀκτῖνος $E_2M\equiv\varrho_2$ λαμβάνομεν μῆκος ME'_1, ἴσον μὲ τὴν ἄλλην πολικὴν ἀκτῖνα $E_1M\equiv\varrho_1$· ἐπὶ δὲ τῆς ἀκτῖνος E_1M λαμβάνομεν ἀπὸ τὸ Μ τὸ μῆκος ME'_2, ἴσον μὲ τὴν πολικὴν ἀκτῖνα ME_2· ἄγομεν ἔπειτα τὴν εὐθεῖαν $E'_1E'_2$ καὶ ἀπὸ τὸ Μ τὴν κάθετον πρὸς αὐτὴν ΜΚ. ***Ἡ ΜΚ εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη τοῦ λημνίσκου εἰς τὸ Μ.***

ΕΜΒΑΔΑ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

α΄) Καρτεσιανὰ ἐμβαδά.

37. ***Γεωμετρικαὶ συναρτήσεις τῆς καμπύλης.***—Δύο σπουδαῖαι συναρτήσεις ὁριζόμεναι ***γεωμετρικῶς*** ἀπὸ μίαν ἐπίπεδον καμπύλην εἶναι: 1) τὸ ***ἐμβαδὸν*** τοῦ μέρους τοῦ ἐπιπέδου («***χωρίου***»), ποὺ περικλείουν ἡ καμπύλη καὶ μερικαὶ ὡρισμέναι εὐθεῖαι· καὶ 2) τὸ ***μῆκος*** τοῦ τόξου τῆς καμπύλης.

38. ***Καρτεσιανὸν ἐμβαδὸν τῆς καμπύλης.***—Ὅταν μᾶς δοθῇ ἡ καρτεσιανὴ ἐξίσωσις μιᾶς καμπύλης : $y=\sigma(x)$, ἂν φέρωμεν (σχ. 20) ἀπὸ δύο σημεῖά της Α καὶ Μ τὰς τεταγμένας ΑΒ καὶ ΜΠ, σχηματίζομεν ἓν σχῆμα τετρακόρυφον, τὸ ***μεικτόγραμμον*** τετράπλευρον ΑΒΠΜ, ποὺ ἔχει τρεῖς πλευρὰς ***εὐθείας***, τὰς ΑΒ,ΒΠ,ΠΜ καὶ μίαν, τὴν ΑΜ, ***καμπύλην***. Ἂν δὲ ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ μὲν ΑΒ μένει ***ἀκίνητος,*** ἡ ΜΠ ὅμως εἶναι ***μεταβλητὴ*** (δηλ. ὅτι τὸ Μ ***κινεῖται*** ἐπὶ τῆς καμπύλης), τότε καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ «***χωρίου***» ΑΒΠΜ θὰ εἶναι ***μεταβλητόν,*** συνάρτησις (***γεωμετρικῶς*** ὁριζομένη) τῆς τελευταίας κάθε φορὰν τεταγμένης $ΠΜ\equiv y$) ἢ καὶ τῆς τελευταίας τετμημένης $ΒΠ(\equiv x)$. (Παραδεχόμεθα ὡς φανερόν, ὅτι εἰς ***κάθε*** μεικτόγραμμον ἢ καὶ καμπυλόγραμμον σχῆμα ἀντιστοιχεῖ ***εἷς ὡρισμένος ἀριθμός,*** ποὺ ἐκφράζει τὴν ἔκτασίν του καὶ λέγεται ***ἐμβαδόν*** του).



Σχ. 20.

39. ***Ὑπολογισμὸς τοῦ διαφορικοῦ τοῦ καρτεσιανοῦ ἐμβαδοῦ.***—Θὰ εὕρωμεν τώρα, ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τῆς καμπύλης, τὸ ***διαφορικὸν*** τοῦ ἐμβαδοῦ (ΑΒΠΜ), ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς αὔξησιν τοῦ x κατὰ Δx, ἀπὸ ΟΠ εἰς ΟΠ′(Δx=ΠΠ′) (σχ. 20). ***Ἂς ὑποθέσωμεν πρῶτα τοὺς ἄξονας ὀρθογωνίους.*** Ἡ ***αὔξησις*** τοῦ ἐμβαδοῦ Ε εἶναι προφανῶς τὸ ***χωρίον*** ΜΠΠ′Μ′≡ΔΕ. Ἂν φέρωμεν δὲ ἀπὸ τὸ Μ τὴν παράλληλον ΜΡ πρὸς τὸν ἄξ. ΟΧ, διαιρεῖται ἡ αὔξησις αὐτὴ εἰς δύο μέρη : τὸ ὀρθογώνιον ΜΠΠ′Ρ καὶ τὸ ***μεικτόγραμμον*** τρίγωνον ΜΡΜ′· τοῦ πρώτου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι : **(ΠΜ)(ΠΠ′)**$\equiv y\Delta x$· τοῦ δὲ δευτέρου τὸ ἐμβαδόν, ***ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι εἰς τὸ τόξον ΜΜ′ αἱ τεταγμέναι ἢ συνεχῶς***

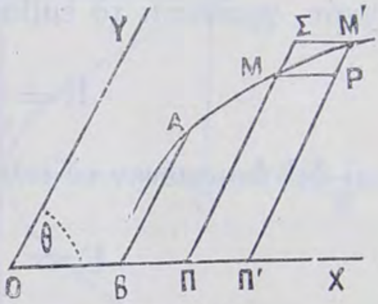
αὐξάνουν ἢ συνεχῶς ἐλαττώνονται, εἶναι μέρος μόνον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου ΣΜΡΜ΄, δηλ. τοῦ (ΜΡ)(ΡΜ΄)$\equiv\Delta x . \Delta y$. Ὥστε ἔχομεν : (α) $\Delta E = y\Delta x + \mu\Delta x . \Delta y$ (ὅπου $0<|\mu|<1$), ἐπομένως: $dE \equiv y\Delta x \equiv ydx$ (ἐνόσῳ τὸ x εἶναι ***ἀνεξάρτητος*** μεταβλητή)˙ ὥστε :

Τὸ διαφορικὸν τοῦ καρτεσιανοῦ ἐμβαδοῦ εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς τελευταίας τεταγμένης του ἐπὶ τὸ διαφορικὸν τοῦ x. (δηλ. ***ἰσοδύναμον μὲ τὸ ὀρθογώνιον, ποὺ ἔχει βάσιν τὸ dx καὶ ὕψος τὸ τελευταῖον y τοῦ ἐμβαδοῦ).***

2) Ἂν τώρα ὑποθέσωμεν τοὺς ἄξονας ***πλαγιογωνίους*** μὲ γωνίαν θ, ἡ προηγουμένη ἀπόδειξις μεταβάλλεται μόνον κατὰ τοῦτο, ὅτι τὰ ὀρθογώνια γίνονται παραλληλόγραμμα μὲ κλίσιν θ (σχ. 21)˙ ἐπομένως ἡ ἰσότης (α) θὰ τραπῇ τώρα εἰς τὴν ἑξῆς :

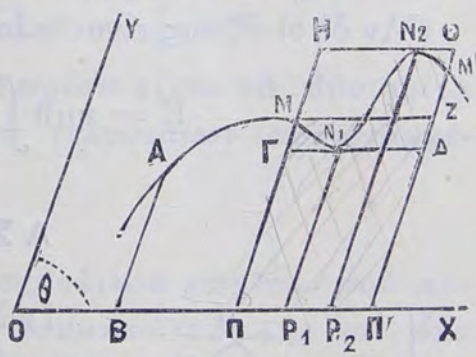
$$\Delta E = y\eta\mu\theta . \Delta x + \mu\eta\mu\theta\Delta x\Delta y\cdot$$

ὥστε θὰ εἶναι $dE = y\eta\mu\theta dx$.



Σχ. 21.

40. ***Παρατήρησις.***—Καὶ ἂν θεωρήσωμεν αὔξησιν τόξου ΜΜ΄, ὅπου αἱ τεταγμέναι νὰ μεταβάλλωνται ***ὅπως τύχῃ*** καὶ νὰ μὴ εἶναι ἐπομένως ἡ ***πρώτη*** τεταγμένη του ἡ ***ἐλαχίστη*** (ἢ ἡ ***μεγίστη***) καὶ ἡ τελευταία του ἡ μεγίστη (ἢ ἡ ἐλαχίστη) (σχ. 22), πάλιν τὸ ἴδιον διαφορικὸν τοῦ ἐμβαδοῦ θὰ ἔχωμεν. Διότι, ἂν ὀνομάσωμεν $y_2(\equiv P_2N_2)$ τὴν μεγίστην καὶ $y_1(\equiv P_1N_1)$ τὴν ἐλαχίστην τεταγμένην τοῦ τόξου ΜΜ΄, τὸ παραλληλόγραμμον $y\eta\mu\theta\Delta x$ καὶ τὸ ΔΕ περιλαμβάνονται καὶ τὰ δύο μεταξὺ τῶν δύο παραλληλογράμμων $y_1\eta\mu\theta\Delta x$ καὶ $y_2\eta\mu\theta\Delta x$˙ δηλ. ἔχομεν :



Σχ. 22.

$$\begin{cases} y_1\eta\mu\theta\Delta x < y\eta\mu\theta\Delta x < y_2\eta\mu\theta\Delta x \quad \text{καί :} \\ y_1\eta\mu\theta\Delta x < \Delta E < y_2\eta\mu\theta\Delta x\text{˙ εἶναι λοιπόν :} \end{cases}$$

$\Delta E = y\eta\mu\theta\Delta x + \mu\eta\mu\theta(y_2 - y_1)\Delta x$ $(0<|\mu|<1)$˙ καὶ ἐπειδὴ εἶναι : $\text{ορ}(y_2 - y_1) = 0$ (διὰ $\Delta x = 0$), συνάγομεν καὶ πάλιν : $dE = y\eta\mu\theta\Delta x$ (καὶ μὲ ὀρθογωνίους ἄξονας : $dE = ydx$).

41. ***Εὕρεσις τοῦ καρτεσιανοῦ ἐμβαδοῦ.***—Ἀπὸ τὸν τύπον (μὲ ὀρθογ. ἄξονας) : $dE = ydx \equiv \sigma(x)dx$ εὑρίσκομεν : $E = \int\sigma(x)dx + c$˙

→ $\Delta E - y\eta\mu\theta\Delta x = (\Gamma M N_1 N_2 M' Z \Delta \Gamma) = \mu\nu(\Gamma\Delta\Theta H)$
$= \mu\eta\mu\theta(y_2 - y_1)$

ἤ, ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι εὑρέθη ἡ ***παράγουσα*** $\varphi(x)$ τῆς $\sigma(x)$: $E=\varphi(x)+c$ (ὅπου x ἡ ***τελευταία*** κάθε φορὰν τετμημένη τοῦ χωρίου).

Τὴν σταθερὰν c τὴν ὁρίζομεν ὡς ἑξῆς : ἡ συνάρτησις E εἶναι πάντοτε ***συνεχὴς*** (ἂν εἶναι συνεχὴς καὶ ἡ $\sigma(x)$)· ἂν λοιπὸν εἶναι καὶ ἡ $\varphi(x)$ συνεχής, ὑπολογίζομεν τὴν c ἀπὸ τὸ ὅτι διὰ $x=OB\equiv\alpha$ τὸ ἐμβαδὸν E γίνεται 0, δηλ. $0=\varphi(\alpha)+c$, ὥστε $c=-\varphi(\alpha)$· ἑπομένως : $E=\varphi(x)-\varphi(\alpha)$.

Ὑπὸ μορφὴν ***ὡρισμένου*** ὁλοκληρώματος ἀπὸ $x=OB=\alpha$ ἕως x τυχόν, γράφεται τὸ ἐμβαδὸν ὡς ἑξῆς :

$$E=\int_{\alpha}^{x}\sigma(x)dx=\varphi(x)-\varphi(\alpha)\cdot$$

καὶ δι' ὡρισμένον τὸ τελευταῖον $x(\equiv\beta)$:

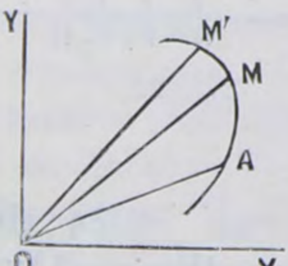
$$E=\int_{\alpha}^{\beta}\sigma(x)dx=\varphi(\beta)-\varphi(\alpha).$$

Ὥστε : ***Τὸ ἐμβαδὸν E (εἰς ὀρθογ. ἄξονας) εἶναι ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τιμῶν τῆς παραγούσης τῆς συναρτήσεως $y=\sigma(x)$, ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν μεγίστην καὶ εἰς τὴν ἐλαχίστην τετμημένην τοῦ χωρίου*** (δηλ. μὲ τὴν αὔξησιν τῆς παραγούσης $\varphi(x)$, ὅταν τὸ x αὐξήσῃ ἀπὸ α εἰς β).

(Ἂν δὲ οἱ ἄξονες εἶναι ***πλαγιογώνιοι*** μὲ γωνίαν ϑ, ἔχομεν :

$$E=\eta\mu\vartheta\int_{\alpha}^{x}\sigma(x)dx=\eta\mu\vartheta[\varphi(x)-\varphi(\alpha)]).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ



Σχ. 23.

1) Νὰ ὑπολογισθῇ (ἀπὸ τὸ σχῆμα) εἰς ***καρτεσιανὰς*** συντεταγμένας τὸ διαφορικὸν OMM′ τοῦ «***πολικοῦ***» ἐμβαδοῦ OAM (σχ. 23).

2) Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν ἔχωμεν μίαν ***τυχοῦσαν*** καμπύλην ***κλειστήν***, τὴν ΑΒΓΔΕΖΑ, τὸ ἐμβαδόν της εἰς ἄξονας μὲν ***ὀρθογωνίους*** δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον : $E=\int_{\alpha}^{\beta}(y_2-y_1)dx$, ὅπου $y_1\equiv\Sigma B$, $y_2\equiv\Sigma\Delta$ εἶναι αἱ δύο τεταγμέναι τῆς καμπύλης, ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ τυχὸν $x(\equiv O\Sigma)$· (ὑποθέτομεν, ὅτι κάθε πα-

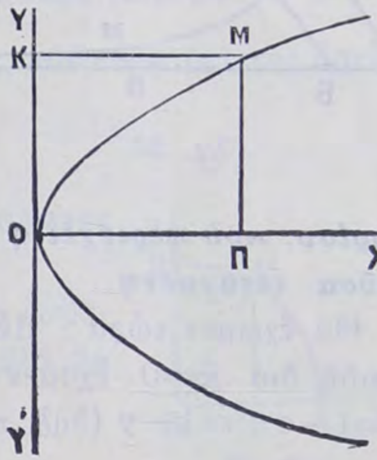
ράλληλος τοῦ ἄξ. ΟΥ κόπτει τὴν καμπύλην εἰς **δύο μόνον** σημεῖα)· εἰς ἄξονας δὲ **πλαγιογωνίους**, ἀπὸ τὸν τύπον :

$$E = \eta\mu\vartheta \int_{\alpha}^{\beta} (y_2 - y_1)dx.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1ον.

42. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραβολικοῦ χωρίου, ποὺ περιέχεται ἀπὸ τὴν παραβολήν, ἀπὸ τὸν ἄξονά της καὶ ἀπὸ τὴν τυχοῦσαν τεταγμένην της.***



Σχ. 25.

Ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσίς της εἶναι : $y^2 = 2\mu x$, ὁ τύπος: $dE = ydx$ γίνεται δι' αὐτήν : $dE = \sqrt{2\mu}\,.\,x^{1/2}.dx$,

ἢ καί : $dE = d\,\frac{2}{3}\sqrt{2\mu}\,.\,x^{3/2}$, ἑπομένως :

$$E = \frac{2}{3}\sqrt{2\mu}\,.\,x^{3/2} + c\cdot$$

τὸ c εἶναι $=0$. διότι διὰ $x=0$ ἔχομεν καὶ $E=0$ (σχ. 25). Ὥστε εἶναι :

$$E = \frac{2}{3}\sqrt{2\mu}\,.\,x^{3/2} = \frac{2}{3}\sqrt{2\mu x}\,.\,x = \frac{2}{3}xy\cdot$$

δηλ. ***Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραβολικοῦ χωρίου εἶναι τὰ δύο τρίτα τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου τῶν δύο τελευταίων συντεταγμένων του.***

2ον.

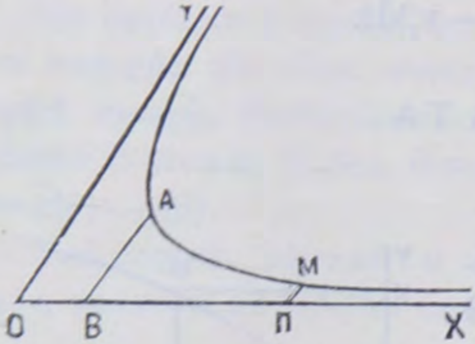
43. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὑπερβολικοῦ χωρίου, ποὺ περιέχουν ἡ ὑπερβολή, μία ἀπὸ τὰς ἀσυμπτώτους της καὶ δύο τεταγμέναι παράλληλοι πρὸς τὴν ἄλλην ἀσύμπτωτον.***

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ὑπερβολῆς πρὸς ἄξονας τὰς ἀσυμπτώτους της εἶναι : $xy = k\cdot$ ἐπειδὴ δὲ αἱ ἀσύμπτωτοι σχηματίζουν ἐν γένει μίαν γωνίαν ϑ, ϑὰ ἐφαρμόσωμεν τώρα τὸν τύπον : $dE = \eta\mu\vartheta ydx$, δηλ. διὰ τὴν ὑπερβολήν : $dE = k\eta\mu\vartheta\,.\,\frac{dx}{x}$, ἑπομένως ϑὰ ἔχωμεν: $E = k\eta\mu\vartheta lx + c\cdot$ διὰ $x=\delta$ εἶναι $E=0$ (σχ. 26), ἑπομένως : $E = k\eta\mu\vartheta\,.\,l\left(\frac{x}{\delta}\right)$.

καὶ ἐπειδὴ ἔχομεν ἀπὸ τὴν ***Ἀναλυτικὴν Γεωμετρίαν :***

$$k = \frac{\alpha^2+\beta^2}{4},\ \eta\mu\vartheta = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2},$$

ὁ τύπος τοῦ ἐμβαδοῦ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς : $E = \frac{1}{2}\cdot\alpha\beta\, l\left(\frac{x}{\delta}\right)$.



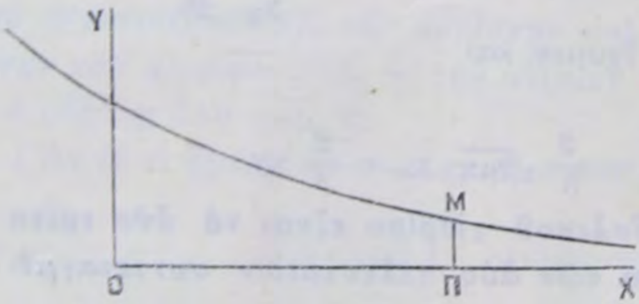
Σχ. 26.

Παρατήρησις.—Ἂν ὑποθέσωμεν : $\delta=1$ καὶ $\alpha\beta=2$, εὑρίσκομεν : $E = lx$· ὥστε ***τὸ ὑπερβολικὸν ἐμβαδὸν εἶναι τότε ὁ νεπέρειος λογάριθμος τῆς τετμημένης***· δι' αὐτὸ δὲ λέγονται οἱ νεπέρειοι λογάριθμοι καὶ ***ὑπερβολικοί.***

3^{ov}.

44. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου, ποὺ περιέχει ἡ καμπύλη $y=e^{-x}$, οἱ ἄξονες καὶ μία τυχοῦσα τεταγμένη.***

Θὰ ἔχωμεν τώρα : $dE = ydx = e^{-x}dx$, δηλ. $E = -e^{-x}+c$· καὶ ἐπειδὴ διὰ $x=0$ ἔχομεν καὶ $E=0$, θὰ εἶναι $c=1$ καὶ ἐπομένως : $E=1-e^{-x}=1-y$ (δηλ. πάντοτε <1, ἀφοῦ y θετικόν) (σχ. 27). Ἔχομεν λοιπὸν ἐδῶ ἓν παράδειγμα ἐμβαδοῦ, ποὺ ἂν καὶ ἐκτείνεται κατὰ τὴν μίαν διάστασίν του πρὸς τὸ ***ἄπειρον*** (δηλ. ***δὲν*** εἶναι ***κλειστόν***), ἐντούτοις εἶναι πάντοτε <1, δηλ. ***πεπερασμένον***. Ἡ ἰδιότης αὐτὴ ἐξηγεῖται ἀμέσως, ἂν παρατηρήσωμεν, ὅτι ἡ ***ἄλλη*** διάστασις τοῦ ἐμβαδοῦ τείνει πρὸς τὸ 0, διότι ὁ ἄξων OX εἶναι ***ἀσύμπτωτος*** τῆς καμπύλης.



Σχ. 27.

Σημείωσις.—Ἡ καμπύλη αὐτὴ περιλαμβάνεται εἰς τὰς ***ἐκθετικὰς*** καμπύλας τοῦ προβλ. 5, σελ. 23, ἂν ὑποθέσωμεν $c=1$ καὶ $a=-1$.

4^{ov}.

45. ***Νὰ εὑρεθῇ μία καμπύλη, ποὺ νὰ ἔχῃ τὴν ἑξῆς ἰδιότητα: τὸ χωρίον, ποὺ περιέχεται ἀπὸ τὴν καμπύλην, ἀπὸ τὸν ἄξ. τῶν x καὶ ἀπὸ τὴν τυχοῦσαν τεταγμένην (ἄξ. ὀρθογώνιοι), νὰ εἶναι ἓν ὡρισμένον μέρος τοῦ ὀρθογωνίου τῶν δύο τελευταίων συντεταγμένων του.***

Ἂν λάβωμεν ὡς ἀρχὴν τὸ σημεῖον, ὅπου ἡ καμπύλη κόπτει τὸν ἄξ. τῶν x, θὰ ἔχωμεν : $E=\mu xy$ (ὅπου $\mu<1$)· ἐπομένως :

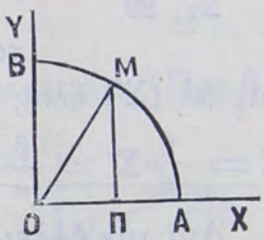
$$dE=ydx=\mu(xdy+ydx), \quad \text{ἢ καί} : \mu\frac{dy}{y}=(1-\mu)\frac{dx}{x}, \text{ ἐπομένως} :$$

$$\mu ly=(1-\mu)lx+c_1, \quad \text{ἢ καί} : \ l(y^\mu)=l(cx^{1-\mu})\cdot \text{ ὥστε} : y^\mu=cx^{1-\mu}.$$

Διὰ $\mu=\frac{2}{3}$ ἔχομεν : $y^{\frac{2}{3}}=cx^{\frac{1}{3}}$ ἢ καί : $y^2=c^3x$, δηλ. ἐπανευρίσκομεν τὴν ἰδιότητα τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ***παραβολῆς*** (***Πρόβλ. 1***^{ov}). Διὰ $\mu=\frac{1}{2}$ ἔχομεν : $y^{1/2}=cx^{1/2}$ ἢ καί: $y=c^2x$, ***εὐθεῖαν*** διὰ τῆς ἀρχῆς.

5^{ov}.

46. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τμήματος τοῦ κύκλου.***



Σχ. 28.

Ἡ ἐξίσωσίς του εἶναι : $x^2+y^2=\alpha^2$. Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τμήματός του, τοῦ ΒΟΠΜ (σχ. 28) θὰ δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον :

$$E=\int_0^x\sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ κατὰ παράγοντας ὁλοκλήρωσις μᾶς δίδει :

$$\int\sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx=x\sqrt{\alpha^2-x^2}+\int\frac{x^2dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}=x\sqrt{\alpha^2-x^2}+\alpha^2\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}-$$

$$-\int\sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx, \text{ βλέπομεν, ὅτι} :$$

$$E=\int_0^x\sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx=\frac{x\sqrt{\alpha^2-x^2}}{2}+\frac{\alpha^2}{2}\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\alpha^2-x^2}}{2}+\frac{\alpha^2}{2}\text{τοξημ}\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

(Ἡ σταθερὰ c εἶναι $=0$, ἐπειδὴ τὸ κάτω ὅριον τῶν ὁλοκληρωμάτων εἶναι 0).

Ἂν θέλωμεν τώρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ***τομέως*** Τ=ΒΟΜ, ἔχομεν :

$$(T)\equiv(OBM)=(BO\Pi M)-\text{τρίγ.}(O\Pi M)=$$

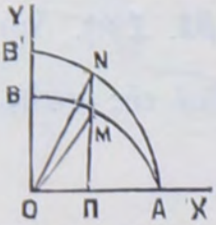
$$=\left[\frac{x\sqrt{\alpha^2-x^2}}{2}+\frac{\alpha^2}{2}\text{τοξημ}\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right]-\frac{x\sqrt{\alpha^2-x^2}}{2}=\frac{\alpha^3}{2}\text{τοξημ}\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

ἑπομένως: $(T) = \frac{\alpha^2}{2}$ τοξημ$\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{\alpha}{2}\,\alpha$ τοξημ$\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{\alpha}{2}$τοξ.ΒΜ. (Τὸ γνωστὸν ἐξαγόμενον τῆς ***Στοιχειώδους Γεωμετρίας***).

6ον.

47. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τμήματος τῆς ἐλλείψεως.***

Ἡ ἐξίσωσίς της εἶναι: $\alpha^2 y^2 + \beta^2 x^2 = \alpha^2\beta^2$· ἔχομεν λοιπόν (σχ. 29):


Σχ. 29.

$$E \equiv (\text{ΒΟΠΜ}) = \frac{\beta}{\alpha}\int_0^x \sqrt{\alpha^2 - x^2}\,dx\cdot$$ τὸ ὁλοκλήρωμα ὅμως εἶναι τὸ ἐμβαδὸν $E' \equiv (\text{Β'ΟΠΝ})$ τοῦ ***κυκλικοῦ*** τμήματος μὲ τὴν ἰδίαν βάσιν τοῦ ἡμικυκλίου μὲ ἀκτῖνα 2α. Εἶναι λοιπόν: $E = \frac{\beta}{\alpha}E'$ ἂν ἑπομένως παραστήσωμεν μὲ (Σ) τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐλλείψεως καὶ μὲ (Σ') ὅλου τοῦ κύκλου, θὰ ἔχωμεν:

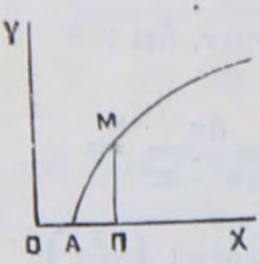
$\Sigma = \frac{\beta}{\alpha}\Sigma' = \frac{\beta}{\alpha}\pi\alpha^2 = \pi\alpha\beta$. (Τὸν γνωστὸν τύπον).

Διὰ τὸν ***ἐλλειπτικὸν*** δὲ τομέα ΟΒΜ (σχ. 29) ἔχομεν:

$$\frac{\text{ΟΒΜ}}{\text{ΟΒ'Ν}} = \frac{\beta}{\alpha},\ \text{δηλ.}\ (\text{ΟΒΜ}) = \frac{\alpha\beta}{2}\text{τοξημ}\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

Καὶ τέλος ὁ ***τυχὼν*** ἄλλος ἐλλειπτικὸς τομεὺς εἶναι διαφορὰ δύο τομέων μὲ πρώτην πλευρὰν ἐπὶ τοῦ ἄξ. ΟΥ.

7ον.


Σχ. 30.

48. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τμήματος τῆς ὑπερβολῆς.***

Διὰ τὸ τμῆμά της ΑΠΜ (σχ. 30) θὰ ἔχωμεν:

$$E = \frac{\beta}{\alpha}\int_0^x \sqrt{x^2 - \alpha^2}\,dx$$ (διότι ἔχει ἐξίσωσιν: $y = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2 - \alpha^2}$).

Ἔχομεν ὅμως:

$$\int \sqrt{x^2 - \alpha^2}\,.\,dx = x\sqrt{x^2 - \alpha^2} - \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}} =$$

$$= x\sqrt{x^2 - \alpha^2} - \int \sqrt{x^2 - \alpha^2}\,dx - \alpha^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}}.$$

λοιπόν : $E = \frac{\beta}{\alpha}\int\sqrt{\alpha^2 - x^2}dx = \beta\,\frac{x\sqrt{x^2-\alpha^2}}{2\alpha} - \frac{\alpha\beta}{2}\,l\left(\frac{x+\sqrt{x^2-\alpha^2}}{2}\right)$.

(Ἡ σταθ. c εἶναι πάλιν 0 διὰ τὸν ἴδιον λόγον τοῦ προβλ. $5^{ου}$).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

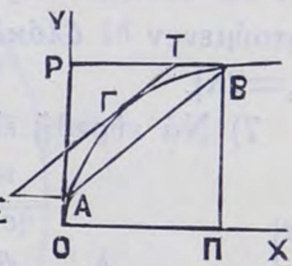
1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδόν, ποὺ περιέχει ἓν τόξον AB τῆς παραβολῆς, ὁ ἄξων OX καὶ δύο τεταγμέναι ΑΠ, ΒΡ.

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν E, ποὺ περικλείεται ἀπὸ ἓν τόξον ΑΓΒ τῆς παραβολῆς καὶ ἀπὸ τὴν χορδήν του AB.

(Ἀπ. $E = \frac{4}{3}xy\eta\mu\,(\mathrm{T\Sigma A}) = \frac{2}{3}$ τοῦ ἐμβ. τοῦ παραλληλ. ΣΑΒΤ(σχ.31)).

3) Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν $(\mathrm{OM\Pi}) \equiv E$ τῆς ***γενικῆς*** παραβολῆς $y^\mu = kx^\nu$ (μ καὶ ν θετικὰ) εἶναι $E = \frac{\mu}{\mu+\nu}xy$· ὅτι ἑπομένως εἶναι :

$\frac{(\mathrm{OM\Pi})}{xy-(\mathrm{OM\Pi})} = \frac{\mu}{\nu}$ (1). Καὶ ***ἀντιστρόφως, κάθε*** καμπύλη, διὰ τὴν ὁποίαν ἰσχύει ἡ σχέσις (1), εἶναι ***γενικὴ*** παραβολὴ (Προβ. ***πρόβλ. 4ον***).



Σχ. 31.

4) Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν E τῆς ***γενικῆς*** ὑπερβολῆς $x^\mu y^\nu = k$ (μ, ν ἀκέραιοι θετικοὶ) εἶναι, ἂν ὑποθέσωμεν $\nu > \mu$:

$$E = k^{\frac{1}{\nu}}\int_\alpha^x x^{-\frac{\mu}{\nu}}.dx = \frac{\nu}{\nu-\mu}.k^{\frac{1}{\nu}}\left[x^{\frac{\nu-\mu}{\nu}} - \alpha^{\frac{\nu-\mu}{\nu}}\right].$$

Ὥστε διὰ $\text{ορ}x = \infty$ ἔχομεν καὶ $\text{ορ}E = \infty$ · ἂν ὅμως $x =$ σταθ. καὶ τὸ α τείνῃ πρὸς τὸ 0, τὸ ἐμβαδὸν αὐξάνει μὲν διαρκῶς, μένει ὅμως πεπερασμένον καὶ εἰς τὸ ὅριον γίνεται :

$$E = \frac{\nu}{\nu-\mu}\,k^{\frac{1}{\nu}}.x^{\frac{\nu-\mu}{\nu}} = \frac{\nu}{\nu-\mu}\,xy\ (2).$$

5) Νὰ δειχθῇ, ὅτι καὶ ***ἀντιστρόφως*** ἡ ἰδιότης (2) ἰσχύει ***μόνον*** διὰ τὰς γενικὰς ὑπερβολάς : $x^\mu y^\nu = k$.

6) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν Ε τὸ περιεχόμενον ἀπὸ τὴν κυκλοειδῆ καὶ τὴν βάσιν της (σχ. 9, σελ. 26).

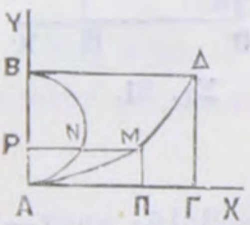
[᾿Απ. $E=3\pi\alpha^2$. Θὰ εὑρεθῇ ὡς ἑξῆς: αἱ ἐξισώσεις της εἶναι: $x=\alpha(\omega-\eta\mu\omega)$, $y=\alpha(1-\sigma\upsilon\nu\omega)$ ἑπομένως διὰ ***τυχὸν*** x_1 θὰ ἔχωμεν:

$$(E)_x=\alpha^2\int_0^{\omega_1}(1-\sigma\upsilon\nu\omega)^2 d\omega=8\alpha^2\int_0^{\omega_1}\eta\mu^4\left(\frac{\omega}{2}\right)d\left(\frac{\omega}{2}\right)=$$

$$=8\alpha^2\int_\sigma^{\varphi_1}\eta\mu^4\varphi d\varphi\cdot$$

θὰ ὑπολογίσωμεν κατόπιν τὸ ***ἀόριστον*** ὁλοκλήρωμα: $\int\eta\mu^4\varphi d\varphi$ (κατὰ τὸν γνωστὸν τύπον ἀπὸ τὸν ῾Ολοκληρ. Λογισμὸν διὰ τὸ $\int\eta\mu^\mu\varphi d\varphi$) καὶ θὰ θέσωμεν εἰς τὸ ἐξαγόμενον τὰ ὅρια 0 καὶ φ_1 ***γενικῶς***· διὰ τὸ ζητούμενον δὲ ***ὁλόκληρον*** ἐμβαδὸν τῆς καμπύλης θὰ θέσωμεν κατόπιν $\varphi_1=2\pi$].

7) Νὰ εὑρεθῇ εἰς τὴν κυκλοειδῆ (πρὸς νέους (παραλλήλους πρὸς τοὺς ἀρχικοὺς) ἄξονας: ***τῶν x τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ μέσον τοῦ τόξου της καὶ τῶν y τὴν κάθετον ἀπὸ τὸ μέσον αὐτὸ πρὸς τὴν βάσιν της***) τὸ ἐμβαδὸν ΑΠΜ (σχ. 32) (καὶ ἑπομένως καὶ ***ὁλόκληρον*** τὸ ἐμβαδὸν μεταξὺ τοῦ τόξου καὶ τῆς βάσεως) τῆς κυκλοειδοῦς.



Σχ. 32.

[᾿Απ. ᾿Απὸ τὰς ἐξισώσεις της: $x=\alpha(\omega-\eta\mu\omega)$, $y=\alpha(1-\sigma\upsilon\nu\omega)$ εὑρίσκομεν, ἂν διαφορίσωμεν καὶ ἀπαλείψωμεν ἔπειτα τὸ $d\omega$:

$$dx=\sqrt{\frac{2\alpha-y}{y}}\,.\,dy\cdot$$

(῾Η ἀλλαγὴ τῶν ἀξόνων δὲν μεταβάλλει τὴν διαφορικὴν ταύτην ἐξίσωσιν τῆς καμπύλης, διότι αὐξάνει μόνον τὰ x καὶ y κατὰ σταθερὰ ποσά)· ὥστε εἶναι: $\varepsilon\mu\beta(AM\Pi)=\int_0^y y dx=\int_0^y\sqrt{2\alpha y-y^2}.dy\cdot$ ἐπειδὴ ὅμως εἶναι καὶ κυκλ. ἐμβαδὸν $(APN)=\int_0^y\sqrt{2\alpha y-y^2}.dy$, συνάγομεν:

$x^2+(y-a)^2=a^2$ $x=\sqrt{a^2-(y-a)^2}=\sqrt{2ay-y^2}$

$(APN)=\int_0^y x\,dy=\int_0^y\sqrt{2ay-y^2}\,dy$

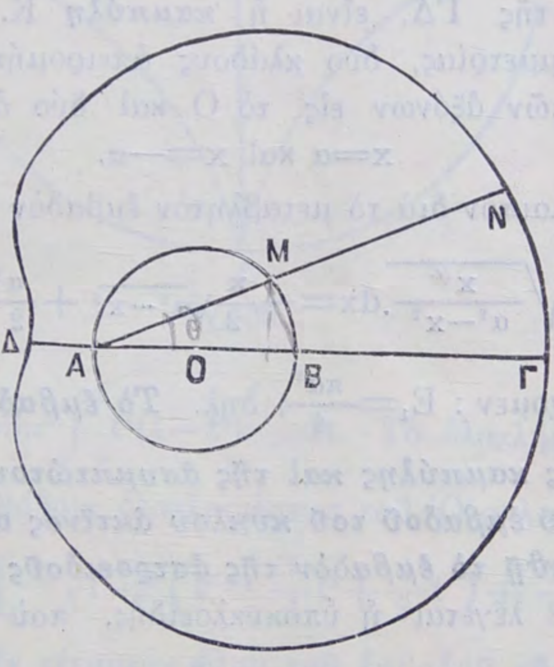
$\grave{\epsilon}\mu\beta(\text{ΑΜΠ}) = \grave{\epsilon}\mu\beta(\text{ΑΡΝ})$· διὰ $x = \pi\alpha$, λοιπὸν $y = 2\alpha$, ἔχ. $(\text{ΑΓΔ}) = \frac{\pi\alpha^2}{2}$.
$(\text{ΑΜΔΒ}) = (\text{ΑΒΔΓ}) - (\text{ΑΓΔ}) = 2\pi\alpha^2 - \frac{\pi\alpha^2}{2} = \frac{3\pi\alpha^2}{2}$· ὥστε τὸ ὅλον ἐμβαδὸν τῆς κυκλοειδοῦς $2(\text{ΑΜΔΒ})$ εἶναι : $3\pi\alpha^2$].

Σημείωσις. Ἡ χωρὶς παραμέτρους ἐξίσωσις τῆς κυκλοειδοῦς εὑρίσκεται, ἂν ἀπαλείψωμεν τὸ ω ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ εἶναι :

$$x = \text{ατοξσυν}\,\frac{\alpha - y}{\alpha} \mp \sqrt{2\alpha y - y^2}$$

(νὰ ἐξηγηθῇ ἡ παρουσία τοῦ διπλοῦ σημείου).

8) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ***κογχοειδοῦς τῆς περιφερείας*** (σχ. 33).



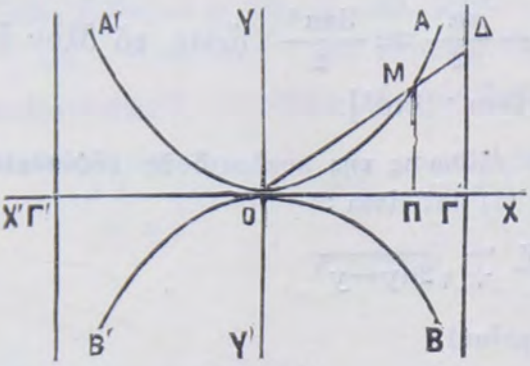
Σχ. 33.

Ἂν λάβωμεν τὸ σημεῖον τῆς περιφερείας, ἀπὸ τὸ ὁποῖον φέρομεν τὰς ἀκτῖνας, ὡς πόλον καὶ τὴν διάμετρον ΑΟΒ ὡς πολ. ἄξονα. ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης εἶναι: $\rho = \beta + 2\alpha\,\text{συν}\,\vartheta$ (ὑποθ. $\beta > 2\alpha$, $\beta \equiv \text{ΒΓ}$, $2\alpha \equiv \text{ΑΒ}$).
Θὰ ἔχωμεν λοιπόν :

$$E = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\beta + 2\alpha\,\text{συν}\,\vartheta)^2 d\vartheta, \quad \text{δηλ. } E = \pi\,[\beta^2 + 2\alpha^2].$$

9) ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ καρτεσιανὸν ἐμβαδὸν τῆς καμπύλης τοῦ δ' βαθμοῦ :*** $x^2(x^2 + y^2) = \alpha^2 y^2$ ***(ἢ εἰς πολικὰς συντεταγμένας***

$\varrho=\alpha\varepsilon\varphi\vartheta$). («Καμπύλη Κ» κατὰ τὸν Aubry (Ὠμπρύ). Τὴν εὕρηκε πρῶτος ὁ Barrow (Μπάρροου), « Lectiones geometricae » 1669). Κατασκευάζεται ὡς ἑξῆς (σχ. 34) :



Σχ. 34.

Φέρομεν μίαν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΓΔ : $x=\alpha$ καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς ἓν τυχὸν τμῆμα ΓΔ. κατόπιν λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΟΔ ἓν τμῆμα ΟΜ ἴσον μὲ τὸ ΓΔ· ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ, ὅταν τὸ Δ κινεῖται ἐπὶ τῆς ΓΔ, εἶναι ἡ ***καμπύλη*** Κ. Ἔχει τοὺς ἄξονας ΟΧ, ΟΥ ἄξ. συμμετρίας, δύο κλάδους ἀπειρομήκεις ΑΟΒ, Α'ΟΒ' ἐφαπτομένους τῶν ἀξόνων εἰς τὸ Ο καὶ δύο ἀσυμπτώτους, τὰς :

$$x=\alpha \text{ καὶ } x=-\alpha.$$

Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν διὰ τὸ μεταβλητὸν ἐμβαδὸν ΟΜΠ :

$$E=\int_0^x \sqrt{\frac{x^4}{\alpha^2-x^2}}.dx=-\frac{x}{2}\sqrt{\alpha^2-x^2}+\frac{\alpha^2}{2}\text{τοξημ}\left(\frac{x}{\alpha}\right)\cdot$$

καὶ διὰ $x=\alpha$ ἔχομεν : $E_1=\frac{\pi\alpha^2}{4}$, δηλ. ***Τὸ ἐμβαδὸν τὸ μεταξὺ τοῦ ἑνὸς κλάδου της καμπύλης καὶ τῆς ἀσυμπτώτου του εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου ἀκτῖνος α.***

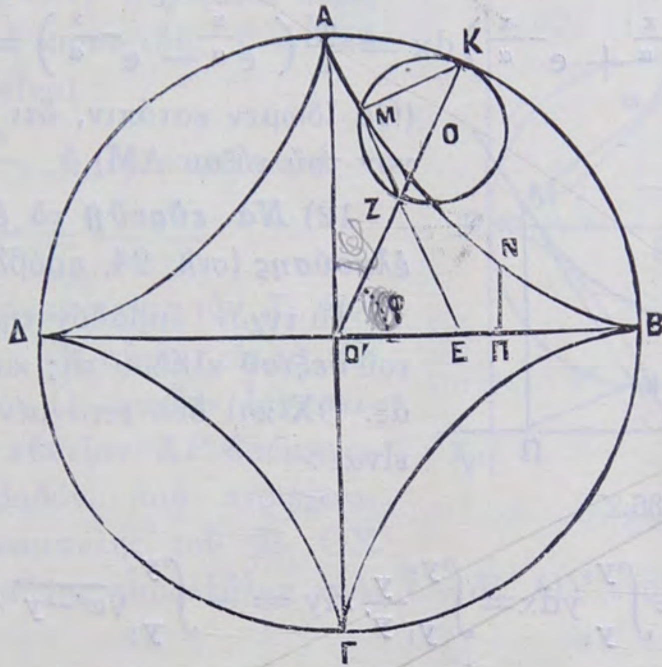
10) ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἀστροειδοῦς.***

Ἀστροειδὴς λέγεται ἡ ὑποκυκλοειδής, ποὺ παράγεται ἀπὸ ἓν σημεῖον μιᾶς περιφερείας μὲ ἀκτῖνα $\frac{\alpha}{4}$, ὅταν κυλίεται ἐντὸς μιᾶς ἄλλης μὲ ἀκτῖνα α.—Ἔχει τὴν καρτεσιανὴν ἐξίσωσιν :

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=\alpha^{\frac{2}{3}}, \quad \text{ἢ τὰς παραμετρικάς :}$$

(α) $x=\alpha\eta\mu^3\varphi$, $y=\alpha\sigma\upsilon\nu^3\varphi$ ($\varphi\equiv$γων. ΑΟ'Κ, σχ. 35).

Ἀποτελεῖται ἀπὸ τέσσαρας κλάδους ***συμμετρικοὺς*** πρὸς τοὺς ἄξονας καὶ ἔχει τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ ***σημεῖα ἀνακάμψεως τοῦ α' εἴδους («λογχοειδῆ» σημεῖα).***—Θὰ ἔχωμεν τώρα διὰ τὸ ἐμβαδὸν (ΑΟ'ΠΝ), (ποὺ περικλείεται ἀπὸ τὸ τόξον ΑΝ, τοὺς ἄξονας καὶ τὴν τυχ. τεταγμένην ΠΝ): $E=\int_0^x\sqrt{\left(\alpha^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^3}\,.\,dx$· ἢ καὶ (ἀπὸ τὰς (α), ἂν θέσω-



Σχ. 35.

μεν ημφ≡t) : $E=3\alpha^2\int_0^t t^2(1-t^2)^{3/2}\,.\,dt$. Τὸ ὁλοκλήρωμα αὐτὸ εὑρίσκεται κατὰ τὰς μεθόδους ὁλοκληρώσεως τοῦ Ὁλοκλ. Λογισμοῦ καὶ εἶναι : $E=\frac{1}{2}\alpha^2\left[-\sqrt{1-t^2}\left(t^5-\frac{7}{4}t^3+\frac{3}{8}t\right)+\frac{3}{8}\text{τοξημ}t\right]$.

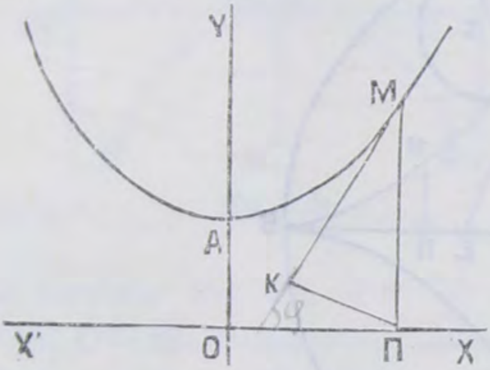
Διὰ t≡1 ἔχομεν τὸ ἓν τέταρτον ὅλου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἀστροειδοῦς : $\frac{3\pi\alpha^2}{32}$. ὥστε : ***Ὁλόκληρον τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἀστροειδοῦς εἶναι τὰ*** $\frac{3}{8}$ ***τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἀκινήτου κύκλου.***

11) ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἁλυσσοειδοῦς.***

Ἁλυσσοειδὴς λέγεται ἡ καμπύλη, ποὺ ἔχει τὴν ***ὑπερβατικὴν*** ἐξίσωσιν : $y=\frac{\alpha}{2}\left(e^{\frac{x}{\alpha}}+e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)$.

(Ἡ ***Θεωρητικὴ Μηχανικὴ*** ἀποδεικνύει, ὅτι τὸ σχῆμα τῆς καμπύλης αὐτῆς λαμβάνει ἓν νῆμα ὁμογενές, βαρύ, καμπτὸν καὶ ἀνέκτατον, ποὺ κρέμεται ἀπὸ δύο σταθερὰ σημεῖα. (***Ἰάκωβος Μπερνούλλι*** (Bernoulli) καὶ Λάϊμπνιτς (Leibnitz), 1690).—Τὸ τυχὸν ἐμβαδόν της (ΑΟΠΜ) (σχ. 36) θὰ εὑρεθῇ ἀπὸ τὸν τύπον:

$$E=\frac{\alpha}{2}\int\left(e^{\frac{x}{\alpha}}+e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)dx=\frac{\alpha^2}{2}\left(e^{\frac{x}{\alpha}}-e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)=\alpha\sqrt{y^2-\alpha^2}.$$



Σχ. 36.

(Θὰ ἴδωμεν κατόπιν, ὅτι εἶναι ἀνάλογον τοῦ τόξου ΑΜ).

12) ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἑλκούσης*** (σελ. 24, πρόβλ. 8ον).

Τὸ τυχὸν ἐμβαδόν της, τὸ μεταξὺ τοῦ ***δεξιοῦ*** κλάδου τῆς καμπύλης, τοῦ ἄξ. ΟΧ καὶ δύο τεταγμένων y_1, y_2 θὰ εἶναι:

$$E=\int_{y_1}^{y_2} y dx=\int_{y_1}^{y_2}\frac{y}{y'}.dy=-\int_{y_1}^{y_2}\sqrt{\alpha^2-y^2}.\,dy.$$

(διότι διὰ τὸν ***δεξιὸν*** κλάδον: $\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{\sqrt{\alpha^2-y^2}}$). Δηλ.

$$E=\int_{y_2}^{y_1}\sqrt{\alpha^2-y^2}.dy=\frac{\alpha^2}{2}\left[\text{τοξημ}\frac{y_1}{\alpha}-\text{τοξημ}\frac{y_2}{\alpha}\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\left[y_1\sqrt{\alpha^2-y_1^{\,2}}-y_2\sqrt{\alpha^2-y_2^{\,2}}\right].$$

Διὰ $y_1=\alpha$ καὶ ορ$y_2=0$ ἔχομεν λοιπόν: $E=\frac{\pi\alpha^2}{4}\cdot$ ὥστε: ***Ὁλόκληρον τὸ ἀπειρόμηκες ἐμβαδόν, ποὺ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῆς ἑλκούσης καὶ τῶν δύο ἀξόνων εἶναι πεπερασμένον καὶ ἴσον μὲ τὸ ἓν τέταρτον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου μὲ ἀκτῖνα α.*** (Ἡ ἰδιότης τοῦ ***πεπερασμένου*** καὶ συγχρόνως ***ἀπειρομήκους*** ἐξηγεῖται, καθὼς καὶ εἰς τὸ πρόβλ. 3ον σελ. 46).

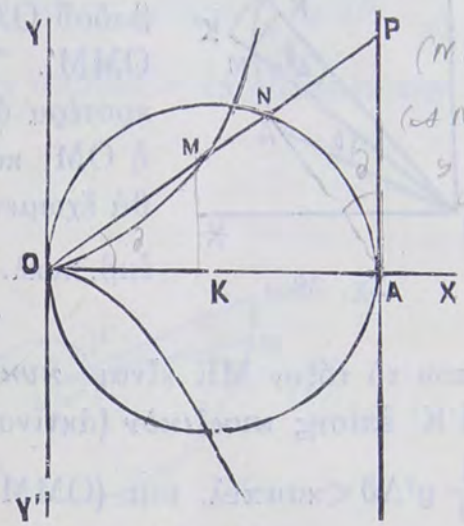
13) ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς «κισσοειδοῦς».***

Κισσοειδὴς (τοῦ ***Διοκλέους***) λέγεται ἡ καμπύλη, ποὺ παράγεται ὡς ἑξῆς: Γράφομεν περιφέρειαν μὲ ἀκτῖνα α καὶ εἰς τὸ ἄκρον Α μιᾶς διαμέτρου της ΟΑ (σχ. 37) φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην, ἀπὸ δὲ τὸ ἄλλο ἄκρον τῆς διαμέτρου ΟΑ, τὸ Ο, φέρομεν μίαν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΟΝΡ, ποὺ κόπτει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Ν καὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Ρ.

Λαμβάνομεν τέλος ἐπὶ τῆς ΟΝΡ τὸ τμῆμα ΟΜ ἴσον μὲ τὸ ΝΡ. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου Μ, ὅταν ἡ εὐθεῖα ΟΝΡ στρέφεται πέριξ τοῦ Ο, εἶναι ἡ κισσοειδής· ἡ πολική της ἐξίσωσις εἶναι :

$\varrho = \frac{2\alpha\eta\mu^2\vartheta}{\sigma\upsilon\nu\vartheta}$, ἡ δὲ καρτεσιανή

της : $\quad y^2 = \frac{x^3}{2\alpha - x}$.



Σχ. 37.

(NP) = ρ

(AN) = 2α

Ἔχει ἄξονα συμμετρίας τὸν ἄξ. ΟΧ καὶ ἐφάπτεται εἰς αὐτὸν εἰς τὸ Ο· ἔχει τὴν ἀρχὴν Ο σημεῖον ***λογχοειδὲς*** καὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΡ ἀσύμπτωτον.—Τὸ ἐμβαδόν, ποὺ περιέχεται μεταξὺ τῆς καμπύλης, τοῦ ἄξ. ΟΧ καὶ μιᾶς τυχούσης παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξ. ΟΥ εὑρίσκεται ἀπὸ τὸν τύπον :

$$E = \int_0^x \sqrt{\frac{x}{2\alpha - x}}\,.\,x\,dx = \alpha^2\left[-\frac{(x+3\alpha)\sqrt{x(2\alpha - x)}}{2\alpha^2} + 3\,\tau o\xi\varepsilon\varphi\sqrt{\frac{x}{2\alpha - x}}\right].$$

Διὰ $x = 2\alpha$ εὑρίσκομεν : $2E_1 = 3\pi\alpha^2$, δηλ.

Τὸ ἀπειρόμηκες ἐμβαδὸν τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῆς κισσοειδοῦς καὶ τῆς ἀσυμπτώτου της εἶναι πεπερασμένον καὶ ἴσον μὲ τὸ τριπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου, πού την παράγει.

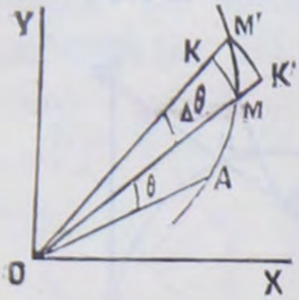
β′) Πολικὰ ἐμβαδά.

49. ***Ὁρισμὸς τοῦ πολικοῦ ἐμβαδοῦ.***—Ὅταν μᾶς δοθῇ ἡ ***πολικὴ*** ἐξίσωσις μιᾶς καμπύλης ; $\varrho = \sigma(\vartheta)$, τὸ τρικόρυφον ἐμβαδὸν ΟΑΜ (σχ. 38), δηλ. ὁ ***καμπυλικὸς*** τομεύς, ποὺ περικλείεται ἀπὸ τὰς δύο πολικὰς ἀκτῖνας ΟΑ, ΟΜ καὶ ἀπὸ τὸ τόξον ΑΜ, λέγεται ***πολικὸν ἐμβαδὸν*** τῆς καμπύλης (ἀντίστοιχον τοῦ τόξου ΑΜ). Ἂν ἡ πρώτη ἀκτὶς ΟΑ μένῃ σταθερά, ἡ δευτέρα ὅμως ΟΜ μεταβάλλεται (δηλ. τὸ Μ κινεῖται ἐπὶ τῆς καμπύλης), καὶ τὸ πολικὸν ἐμβαδὸν ΟΑΜ μεταβάλλεται καὶ εἶναι προφανῶς ***γεωμετρικὴ*** συνάρτησις τῆς τελευταίας πολικῆς ἀκτῖνός του ΟΜ ἢ καὶ τῆς τελευταίας του ***πολικῆς γωνίας*** ΧΟΜ.

→ OKM. ANP. $\frac{(NP)}{y} = \frac{(AN)}{(NK)}$

OAN · OKM $\quad \frac{(AM)}{y} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\ldots}} \quad AN = \frac{2\alpha x}{\sqrt{\ldots}}$

50. ***Εὕρεσις τοῦ διαφορικοῦ τοῦ πολικοῦ ἐμβαδοῦ.***—Ἀπὸ τὰ σχ. 38 βλέπομεν, ὅτι ἡ αὔξησις τοῦ πολ. ἐμβαδοῦ ΟΑΜ=Ε εἶναι ὁ ***«καμπυλικὸς»*** τομεὺς ΟΜΜ΄. Ἂν ὑποθέσωμεν κατ᾽ ἀρχάς, ὅτι ἡ μικροτέρα ἀκτὶς τοῦ τομέως αὐτοῦ εἶναι ἡ πρώτη, ἡ ΟΜ, καὶ ἡ μεγαλυτέρα ἡ τελευταία, ἡ ΟΜ΄, θὰ ἔχωμεν προφανῶς ἀπὸ τὸ σχῆμα :



Σχ. 38.

ἐμβ. κυκλ. τομ. (ΟΜΚ) < ἐμβ. καμπ. τομ.(ΟΜΜ΄) < < ἐμβ. κυκλ. τομ. (ΟΜ΄Κ΄)·

ὅπου τὸ τόξον ΜΚ εἶναι ***κυκλικὸν*** (ἀκτῖνος ΟΜ$\equiv \varrho$) καὶ τὸ τόξον Μ΄Κ΄ ἐπίσης ***κυκλικὸν*** (ἀκτῖνος ΟΜ΄$\equiv \varrho + \Delta\varrho$). Δηλαδὴ θὰ ἔχωμεν :

$\frac{1}{2}\varrho^2\Delta\vartheta <$ καμπυλ. τομ. (ΟΜΜ΄) $< \frac{1}{2}(\varrho+\Delta\varrho)^2 . \Delta\vartheta$· (Ἡ διπλῆ ἀνισότης ***ϑ᾽ ἀντιστραφῆ,*** ἂν εἶναι ἡ ΟΜ΄ ἡ μικροτέρα καὶ ἡ ΟΜ ἡ μεγαλυτέρα ἀκτὶς τοῦ καμπυλ. τομέως). Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν :

$$\text{καμπυλ. τομ. (ΟΜΜ΄)} = \frac{1}{2}\varrho^2\Delta\vartheta + \frac{\mu}{2}\Big[(\varrho+\Delta\varrho)^2 - \varrho^2\Big]\Delta\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2}\varrho^2\Delta\vartheta + \frac{\mu}{2}\Big[2\varrho\Delta\varrho + (\Delta\varrho)^2\Big]\Delta\vartheta,$$

ὅπου $|\mu| < 1$· ὥστε εἶναι :

$$dE = \frac{1}{2}\varrho^2 d\vartheta \quad (1),$$

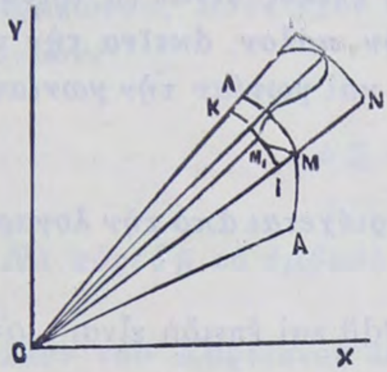
δηλ. ***Τὸ διαφορικὸν τοῦ πολικοῦ ἐμβαδοῦ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως, ποὺ ἔχει κέντρον τὸν πόλον, γωνίαν τὸ διαφορικὸν τῆς ϑ καὶ ἀκτῖνα τὴν εἰς τὸ ϑ αὐτὸ ἀντιστοιχοῦσαν τιμὴν τοῦ ϱ.***

Ἂν καὶ εἶναι πάντοτε δυνατόν, ἂν λαμβάνωμεν ***ἀρκετὰ*** μικρὸν τὸ τὸ Δϑ, νὰ ἔχωμεν μικροτέραν ἀκτῖνα τὴν ***πρώτην*** καὶ μεγαλυτέραν τὴν ***τελευταίαν*** (ἢ καὶ ἀντιστρόφως), ἂς ὑποθέσωμεν ὅμως γενικώτερα, ὅτι οὔτε ἡ μικροτέρα ἀκτίς, ἡ ϱ_1, οὔτε ἡ μεγαλυτέρα, ἡ ϱ_2, συμπίπτουν ἀντιστοίχως μὲ τὰς δύο ἄκρας ἀκτῖνας. Τότε θὰ ἔχωμεν πάλιν ὁμοίως :

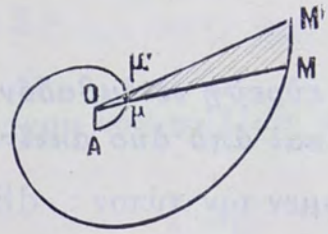
$$\Delta E = \frac{1}{2}\varrho^2\Delta\vartheta + \frac{\mu}{2}\Big(\varrho_2^{\,2} - \varrho_1^{\,2}\Big)\Delta\vartheta,$$

διότι τότε καὶ ὁ κυκλ. τομεὺς $\frac{1}{2}\varrho^2\Delta\vartheta$ καὶ τὸ ΔΕ περιλαμβάνονται, καθὼς ἀμέσως φαίνεται (σχ. 39), μεταξὺ τῶν δύο κυκλ. τομέων: $\frac{1}{2}\varrho_1{}^2\Delta\vartheta$ καὶ $\frac{1}{2}\varrho_2{}^2\Delta\vartheta$. Ὥστε εἶναι καὶ πάλιν: $dE=\frac{1}{2}\varrho^2 d\vartheta$.

Παρατήρησις.—Εἰς τὴν προηγουμένην ἀπόδειξιν ὑποθέτομεν τὴν



Σχ. 39.



Σχ. 40.

γωνίαν τοῦ πολ. ἐμβαδοῦ ΟΑΜ, ποὺ αὐξάνομεν, ***ὄχι μεγαλυτέραν ἀπὸ 4 ὀρθὰς*** (δηλ. τὴν διαφορὰν τῶν γωνιῶν τῶν δύο ἀκτίνων του: $\vartheta-\vartheta_0 \leq 4$ ὀρθ.). Ἂν ὅμως ἡ καμπύλη κάμνῃ ἑλιγμοὺς πέριξ τοῦ πόλου καὶ θεωρήσωμεν ἓν ἐμβαδὸν $(OAM)\equiv E$ (σχ. 40) μὲ γωνίαν > 4 ὀρθ., τότε τὸ σχῆμα ἀμέσως μᾶς δεικνύει, ὅτι ἡ αὔξησις τοῦ Ε εἶναι ἡ ***διαφορὰ*** δύο καμπυλικῶν τομέων, δηλ. $\Delta E = OMM' - O\mu\mu'$ (διότι ὁ $O\mu\mu'$ προϋπῆρχεν ἤδη εἰς τὸ ἐμβαδὸν ΟΑΜ)· ὥστε τότε ἔχομεν τὸν τύπον:

$$dE=\frac{1}{2}\left[(OM)^2-(O\mu)^2\right]d\vartheta.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1ον.

51. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου, ποὺ περιέχεται ἀπὸ τὸν πολ. ἄξονα ΟΧ, ἀπὸ τὴν ἕλικα τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ ἀπὸ τὴν τυχοῦσαν πολ. ἀκτῖνά της*** (ποὺ νὰ ἔχῃ ὅμως $\vartheta < 4$ ὀρθ.).

Θὰ ἔχωμεν τώρα: $dE=\frac{1}{2}\varrho^2 d\vartheta=\frac{1}{2}\alpha^2\vartheta^2 d\vartheta$ (διότι $\varrho=\alpha\vartheta$)· δηλ. $E=\frac{1}{6}\alpha^2\vartheta^3+c$· καὶ ἐπειδὴ διὰ $\vartheta=0$ εἶναι καὶ $E=0$, ἔχομεν:

$E = \frac{1}{6}\alpha^2\vartheta^3 \equiv \frac{1}{6}\varrho^2\vartheta$. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{1}{2}\varrho^2\vartheta$ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλ. τομέως $\Theta MK \equiv T$ μὲ κέντρον τὸ O καὶ ἀκτῖνα τὸ ϱ, συνάγομεν, ὅτι : $E = \frac{1}{3}T$· δηλ.

Ὁ τυχὼν τομεὺς τῆς ἀρχιμηδείου ἕλικος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ κυκλικοῦ τομέως, ποὺ ἔχει κέντρον τὸν πόλον, ἀκτῖνα τὴν τελευταίαν ἀκτῖνα τοῦ καμπυλικοῦ τομέως καὶ γωνίαν τὴν γωνίαν του.

2ον.

52. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδόν, ποὺ περιέχεται ἀπὸ τὴν λογαριθμικὴν ἕλικα καὶ ἀπὸ δύο ἀκτῖνάς της.***

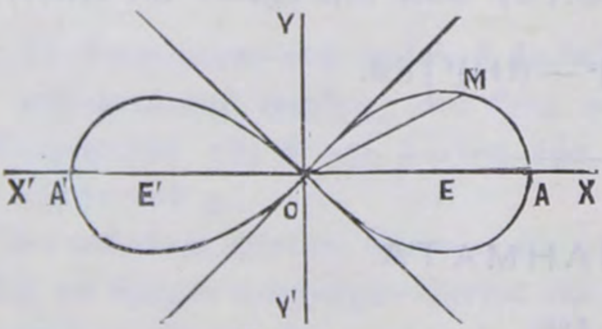
Θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον : $dE = \frac{1}{2}\varrho^2 d\vartheta$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι : $\varrho = e^{\mu\vartheta}$, ***ἐκφράζομεν τὸ*** $d\vartheta$ ***μὲ τὸ*** $d\varrho$, δηλ. $d\vartheta = \frac{d\varrho}{\mu\varrho}$ (διότι μὲ τὸ $d\varrho$ εἶναι ὁ τύπος ἁπλούστερος) καὶ ἔχομεν τότε :

$$dE = \frac{1}{2\mu}\varrho d\varrho = d\left[\frac{1}{4\mu}\varrho^2\right] \text{ καὶ } E = \frac{1}{4\mu}\varrho^2 + c\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ διὰ $E=0$ ἔχομεν $\varrho = OA \equiv \alpha$, συνάγομεν :

$$E = \frac{1}{4\mu}\left(\varrho^2 - \alpha^2\right).$$

3ον.



Σχ. 41.

53. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ λημνίσκου.***

Ἔχομεν τὴν πολικὴν ἐξίσωσίν του : $\varrho^2 = 2\alpha^2$συν(2ϑ) (σελ. 39). Ζητοῦμεν λοιπὸν πρῶτα γενικῶς τὸ πολ. ἐμβαδόν του OAM (σχ. 41).

Θὰ εἶναι τώρα :

$$dE = \alpha^2\text{συν}(2\vartheta)d\vartheta = d\left[\frac{\alpha^2}{2}\text{ημ}(2\vartheta)\right]\cdot \text{ δηλαδή :}$$

$E = \frac{\alpha^2}{2}$ημ$(2\vartheta) + c$· εἶναι ὅμως $E=0$ διὰ $\vartheta=0$, ὥστε : $E = \frac{\alpha^2}{2}$ημ(2ϑ).

Ἂν τώρα θέλωμεν τὸ ἐμβαδὸν E_1 τοῦ ***δεξιοῦ βρόχου*** τοῦ λημνίσκου, θὰ θέσωμεν εἰς τὸν τύπον αὐτόν : $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ (διότι ἐφαπτομένη τοῦ τόξου ΑΟ εἰς τὸ Ο εἶναι ἡ διχοτομοῦσα τὴν γων. ΧΟΥ)· εἶναι λοιπόν: $E_1=2E'=\alpha^2$· καὶ ἐπομένως τὸ ἐμβαδὸν ὅλου τοῦ λημνίσκου εἶναι: $E_1+E_2=(\Lambda)=2\alpha^2$, δηλ.

Τὸ ἐμβαδὸν ὅλου τοῦ λημνίσκου εἶναι ἴσον μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου, ποὺ ἔχει πλευρὰν τὸ ἥμισυ τῆς ἀποστάσεως τῶν ἑστιῶν.

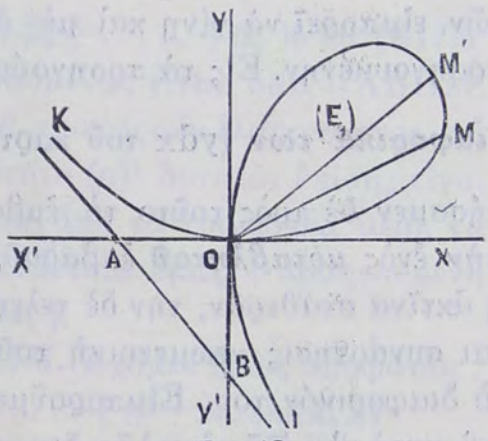
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ βρόχου τοῦ φύλλου τοῦ Καρτεσίου.***

Φύλλον τοῦ Καρτεσίου λέγεται ἡ καμπύλη τοῦ γ΄ βαθμοῦ, ποὺ ἔχει τὴν καρτεσιανὴν ἐξίσωσιν:

$$x^3+y^3=\alpha xy.$$

Σύγκειται ἀπὸ δύο ἀπειρομήκεις κλάδους, ποὺ διασταυρώνονται εἰς τὴν ἀρχὴν Ο (σχ. 42) καὶ ἔχουν κοινὴν ἀσύμπτωτον τὴν εὐθεῖαν: $x+y+\frac{\alpha}{3}=0$. — Ἡ πολική της ὅμως ἐξίσωσις εἶναι ἁπλουστέρα:



Σχ. 42.

$\varrho=\dfrac{\alpha \eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta}{\eta\mu^3\vartheta+\sigma\upsilon\nu^3\vartheta}$. Ὥστε ὁ γενικὸς τύπος τοῦ πολικοῦ ἐμβαδοῦ (ἀπὸ 0 εἰς τυχὸν ϑ) γίνεται τώρα:

$$E=\frac{\alpha^2}{2}\int_0^\vartheta \frac{\eta\mu^2\vartheta\sigma\upsilon\nu^2\vartheta}{(\sigma\upsilon\nu^3\vartheta+\eta\mu^3\vartheta)^2}d\vartheta=\frac{\alpha^2}{2}\int_0^\vartheta \frac{\varepsilon\varphi^2\vartheta.\dfrac{d\vartheta}{\sigma\upsilon\nu^2\vartheta}}{(1+\varepsilon\varphi^3\vartheta)^2}.$$

καὶ ἂν θέσωμεν: $1+\varepsilon\varphi^3\vartheta=z$, θὰ ἔχωμεν:

$$E=\frac{\alpha^2}{2}.\frac{1}{3}\int\frac{dz}{z^2}=-\frac{\alpha^2}{6}.\frac{1}{z}+c=-\frac{\alpha^2}{6}.\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^3\vartheta}+c\cdot$$

διὰ $\vartheta=0$ ἔχομεν: $c=\frac{\alpha^2}{6}$· ὥστε: $E=\frac{\alpha^2}{6}.\frac{\varepsilon\varphi^3\vartheta}{1+\varepsilon\varphi^3\vartheta}=\frac{\alpha^2}{6}.\frac{1}{1+\sigma\varphi^3\vartheta}$.

Διὰ τὸ ἐμβαδὸν E_1 ὅλου τοῦ βρόχου τῆς καμπύλης θὰ θέσωμεν: $\vartheta=\frac{\pi}{2}$ καὶ ἐπομένως: $E_1=\frac{\alpha^2}{6}$, δηλ.

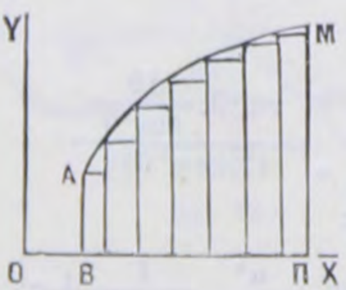
Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ βρόχου τοῦ φύλλου τοῦ Καρτεσίου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἓν ἕκτον τοῦ τετραγώνου, ποὺ ἔχει πλευρὰν τὴν παράμετρον τῆς καμπύλης.

2) ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κλειστοῦ μέρους τῆς καμπύλης*** : $x^4+y^4=\alpha^2xy$, ***τοῦ εὑρισκομένου εἰς τὴν θετικὴν γωνίαν τῶν ἀξόνων.*** $\left[\text{Ἀπ.}\ \frac{\pi\alpha^2}{8}\right]$.

ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΙΚΩΝ ΕΜΒΑΔΩΝ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΙΝ ΤΩΝ ΕΙΣ ΜΕΡΗ ΑΠΕΙΡΟΣΤΑ

54. Ἡ εὕρεσις τῶν ***καμπυλικῶν*** ἐμβαδῶν, καρτεσιανῶν καὶ πολικῶν, εἰμπορεῖ νὰ γίνῃ καὶ μὲ ἄλλην μέθοδον, διαφορετικὴν ἀπὸ τὴν προηγουμένην. Εἰς τὰ προηγούμενα εὑρήκαμεν τὰ ἐμβαδὰ αὐτὰ ***ἀπὸ τὰ διαφορικά των*** (ydx τοῦ καρτεσιανοῦ, $\frac{1}{2}\rho^2 d\theta$ τοῦ πολικοῦ). Ἐθεωρήσαμεν δὲ πρὸς τοῦτο τὸ ἐμβαδόν, πού μας ἐδόθη, ὡς ***μερικὴν τιμὴν*** ἑνὸς ***μεταβλητοῦ*** ἐμβαδοῦ, ποὺ ἔχει τὴν μὲν πρώτην τεταγμένην ἢ ἀκτῖνα σταθεράν, τὴν δὲ τελευταίαν μεταβλητήν· τότε τὸ ἐμβαδὸν εἶναι συνάρτησις γεωμετρικὴ τοῦ τελευταίου του x ἢ ρ καὶ εὑρίσκομεν τὸ διαφορικόν του. Εἰμποροῦμεν ὅμως νὰ εὕρωμεν τὰ ἴδια ἐξαγόμενα καὶ κατὰ τὸν ἑξῆς ἐντελῶς διαφορετικὸν τρόπον, ***μὲ τὴν θεωρίαν τῶν ἁπλῶν ὡρισμένων ὁλοκληρωμάτων.***

α′) Ἂς θεωρήσωμεν κατ᾿ ἀρχὰς τὸ ***καρτεσιανὸν*** ἐμβαδὸν (ΑΒΠΜ) (σχ. 43). Διαιροῦμεν τὴν βάσιν του ΒΠ εἰς πλῆθος ὁσωνδήποτε μερῶν καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως φέρομεν τὰς τεταγμένας τοῦ τόξου ΑΜ. Τὸ ***χωρίον*** ΑΒΠΜ διαιρεῖται τότε εἰς πλῆθος ***ταινιῶν,*** ἐπίσης καμπύλων εἰς τὴν ἐπάνω των πλευράν. Κατόπιν ἀπὸ τὸ ἄκρον κάθε τεταγμένης φέρομεν παράλληλον τῆς ΟΧ ἕως εἰς τὴν ἐπομένην τεταγμένην· κάθε ταινία διαιρεῖται τότε (εἰς τὸ σχῆμα 43, ὅπου αἱ τεταγμέναι προχωροῦν αὐξάνουσαι) εἰς ἓν ὀρθογώνιον καὶ εἰς ἓν τριγωνικὸν μεικτόγραμμον σχῆμα· θὰ δείξω, ὅτι ***τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρ-***



Σχ. 43.

θογωνίων αὐτῶν ἔχει ὅριον τὸ καμπυλόγραμμον χωρίον ΑΒΠΜ, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν μερῶν τῆς βάσεως αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον καὶ κάθε μέρος τείνῃ πρὸς τὸ 0. Πραγματικῶς, ἂν παραστήσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων μὲ τὸ Κ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τριγωνικῶν μερῶν μὲ τὸ Τ, θὰ εἶναι :

$$ΑΒΠΜ = Κ + Τ, \quad \text{καί :} \quad ΑΒΠΜ = ορΚ + ορΤ \cdot \quad (α)$$

εἶναι ὅμως εὔκολον νὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ ὅριον τοῦ Τ εἶναι τὸ 0˙ διότι καθὲν ἀπὸ τὰ μέρη τοῦ Τ εἶναι μικρότερον ἀπὸ ἓν ὀρθογώνιον, ποὺ ἔχει βάσιν ἓν ἀπὸ τὰ μέρη τῆς βάσεως καὶ ὕψος τὴν διαφορὰν δύο ἐφεξῆς τεταγμένων˙ καὶ ἂν τὴν μεγαλυτέραν ἀπὸ τὰς διαφορὰς δύο ἐφεξῆς τεταγμένων τὴν παραστήσωμεν μὲ δ καὶ τὰ μέρη τῆς βάσεως μὲ $β_1, β_2, \ldots\ldots, β_ν$, θὰ ἔχωμεν :

$$Τ \equiv β_1δ_1 + β_2δ_2 + \ldots\ldots + β_ν δ_ν \leq (β_1 + β_2 + \ldots\ldots + β_ν)δ = (ΒΠ)δ \cdot$$

ὥστε : $ορΤ = ορ(ΒΠ.δ) = (ΒΠ)ορδ = 0$. Ἑπομένως εἶναι: $ορΚ = ΑΒΠΜ$.

Ἂν τώρα συνέβαινεν αἱ τεταγμέναι νὰ προχωροῦν ἐλαττούμεναι, τὰ τριγωνικὰ μέρη θ᾽ ἀφῃροῦντο εἰς τὴν ἰσότητα (α)˙ δυνατὸν ἐπίσης εἶναι τὸ σχῆμα νὰ εἶναι τοιοῦτον, ὥστε ἄλλα μὲν ἀπὸ τὰ τριγωνικὰ μέρη νὰ προσθέτωνται καὶ ἄλλα ν᾽ ἀφαιροῦνται. Πάντοτε ὅμως ἡ προηγουμένη ἀπόδειξις ἰσχύει καὶ ἔχομεν $ορΚ = ΑΒΠΜ$[1].

Ἔχομεν λοιπὸν πάντοτε : $ορΚ = ΑΒΠΜ$. Ἔχομεν ὅμως προφανῶς :

$$Κ = (x_1 - α)σ(α) + (x_2 - x_1)σ(x_1) + \ldots\ldots + (β - x_{ν-1})σ(x_{ν-1}) \cdot$$

ἑπομένως $ορΚ = (ΑΒΠΜ) = ορ[(x_1 - α)σ(α) + \ldots + (β - x_{ν-1})σ(x_{ν-1})]$,

δηλ. $(ΑΒΠΜ) = \int_α^β σ(x)dx = φ(β) - φ(α)$, ὅπου $φ(x)$ ἡ παράγουσα τῆς $σ(x)(\equiv y)$.

Ἂν δὲ ἡ βάσις διαιρεθῇ εἰς μέρη ἴσα, βλέπομεν (κατὰ τὸ θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς) ὅτι :

---

(1) Καὶ ἂν ἀκόμη αἱ ἄκραι τεταγμέναι κάθε ταινίας δὲν εἶναι ἡ μεγίστη καί ἡ ἐλαχίστη, πάλιν ἡ ἰσότης : $ορΚ = ΑΒΠΜ$ ἰσχύει˙ διότι, ἂν τὰ ὀρθογώνια τῶν ταινιῶν εἶναι τὰ $κ_1, κ_2, \ldots, κ_ν$ καὶ αἱ ταινίαι αἱ $τ_1, τ_2, \ldots, τ_ν$, θὰ ἔχωμεν, καθὼς γνωρίζομεν :

$$τ_1 = κ_1 + μ_1(y''_1 - y'_1)β_1, \quad τ_2 = κ_2 + μ_2(y''_2 - y'_2)β_2, \ldots, \quad τ_ν = κ_ν + (y''_ν - y'_ν)β_ν$$

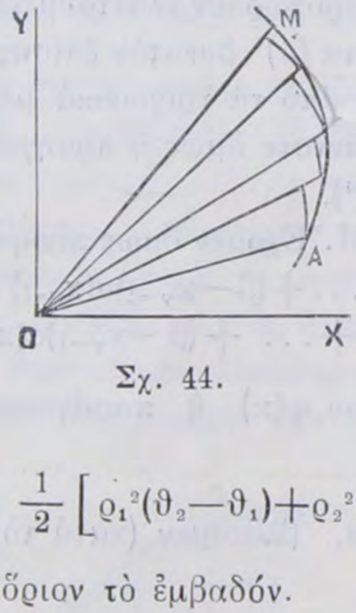
(ὅπου y''_k εἶναι ἡ μεγαλειτέρα καὶ y'_k ἡ μικροτέρα τεταγμένη τοῦ $τ_k$).

θὰ εἶναι λοιπόν : $ΑΒΠΜ = Κ + [μ_1β_1(y''_1 - y'_1) + \ldots\ldots + μ_νβ_ν(y''_ν - y'_ν)]$.

τὸ ἄθροισμα ὅμως τῆς παρενθέσεως ἔχει ὅριον τὸ 0, διότι εἶναι $\leq (β_1 + \ldots + β_ν)δ \equiv (ΒΠ).δ$ (ὅπου δ ἡ μεγαλυτέρα ἀπὸ τὰς διαφορὰς $y''_k - y'_k$).

Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς καρτεσιανοῦ χωρίου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου μὲ βάσιν τὴν βάσιν τοῦ χωρίου καὶ μὲ ὕψος τὴν μέσην τεταγμένην του(¹).

Ἡ εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν καμπυλογράμμων χωρίων ἔχει ὡς ἄμεσον συνέπειαν ***τὴν κατασκευὴν τετραγώνου ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ χωρίον***· δι' αὐτὸ δὲ λέγεται ἡ εὕρεσις αὐτὴ καὶ ***τετραγωνισμὸς τοῦ χωρίου***. Ἐπειδὴ δὲ ἀκόμη ἀνάγομεν, μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν τῆς διαιρέσεως εἰς ταινίας, τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν (ἀπείρων) μερῶν του, δηλ. εἰς τὴν ***«ὁλοκλήρωσίν» του ἀπὸ τὰ μέρη του***, ἡ δὲ ***ὁλοκλήρωσις*** αὐτὴ γίνεται, ***ἂν εὑρεθῇ μία ἄγνωστος συνάρτησις ἀπὸ τὸ διαφορικόν της***, δι' αὐτὸ ὀνομάζεται καὶ ἡ μετάβασις αὐτὴ ἀπὸ τὸ διαφορικὸν εἰς τὴν συνάρτησιν (δηλ. ἡ ἀντίστροφος πρὸς τὴν ***διαφόρισιν*** πρᾶξις) ***ὁλοκλήρωσις*** τῆς συναρτήσεως καὶ τὸ ἐξαγόμενον, ***ὁλοκλήρωμα***.



Σχ. 44.

β') Ἂν ἔχωμεν ***πολικὸν*** ἐμβαδόν, οἱ συλλογισμοὶ μένουν ἐντελῶς οἱ ἴδιοι, μόνον ὅτι, αἱ ταινίαι τοῦ ἐμβαδοῦ διαιροῦνται καθεμία τώρα εἰς ἕνα ***κυκλικὸν τομέα*** καὶ εἰς ἓν τρίγωνον μεικτόγραμμον (σχ. 44)· καὶ τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τριγώνων αὐτῶν ἀποδεικνύεται πάλιν, ὅτι ἔχει ὅριον τὸ 0, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν κυκλικῶν τομέων :

$$\frac{1}{2}\left[\varrho_1^2(\vartheta_2-\vartheta_1)+\varrho_2^2(\vartheta_3-\vartheta_2)+\ldots\ldots+\varrho_\nu^2(\vartheta_\nu-\vartheta_{\nu-1})\right]$$

ἔχει ὅριον τὸ ἐμβαδόν.

(¹) Ἡ καμπύλη ΑΜ εἰς τὸ σχῆμα (43) εὑρίσκεται ὁλόκληρος ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἄξονα ΟΧ· ἂν εἶναι ὅλη κάτω ἀπὸ αὐτόν, τὰ y της εἶναι ὅλα ἀρνητικὰ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τὸ δίδουν οἱ τύποι μας *ἀρνητικόν*. Ἂν δὲ ἓν μέρος τῆς καμπύλης εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἄξ. ΟΧ καὶ ἓν μέρος ἀπὸ κάτω, τότε οἱ τύποι μᾶς δίδουν *θετικὰ* μὲν τὰ ἐμβαδὰ τῶν χωρίων τῶν ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἄξονα, *ἀρνητικὰ* δέ, τὰ ὑποκάτω.

$\frac{\mu_1}{2}(\vartheta_2-\vartheta_1)(\rho_2-\rho_1)^2 + \ldots + \frac{\mu_\nu}{2}(\vartheta_{\nu+1}-\vartheta_\nu)(\rho_{\nu+1}-\rho_\nu)^2$

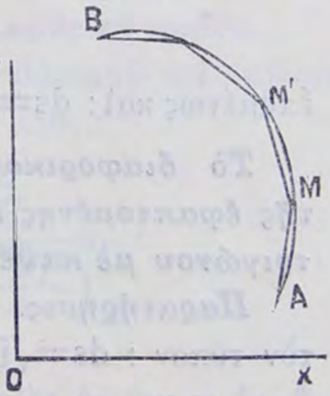
$\leq \frac{1}{2}(\mu_1\vartheta_1' + \mu_2\vartheta_1' + \ldots + \mu_\nu\vartheta_\nu')\rho_0^2 \quad \rho_0 \to 0$

ΤΟΞΑ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

55. ***Ὁρισμὸς τοῦ μήκους ἑνὸς τόξου.*—*Μῆκος*** ἑνὸς τόξου μιᾶς καμπύλης ὀνομάζομεν ***τὸ ὅριον τοῦ μήκους μιᾶς τεθλασμένης γραμμῆς, ποὺ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τόξον καὶ ἔχει τὰ ἴδια ἄκρα μὲ αὐτό, ὅταν κάθε πλευρά της τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν.***

(***Ἐγγεγραμμένη*** εἰς ἓν τόξον λέγεται κάθε τεθλασμένη γραμμή, ποὺ παράγεται, ὅταν διαιρέσωμεν τὸ τόξον εἰς μέρη καὶ φέρωμεν τὰς χορδάς του).

Πρέπει λοιπὸν νὰ δείξωμεν, διὰ νὰ εἶναι ὀρθὸς ὁ ὁρισμός μας, ὅτι ὑπάρχει ὅριον ***ἐντελῶς ὡρισμένον*** τοῦ μήκους τῆς ἐγγεγραμμένης τεθλασμένης καὶ μάλιστα ***τὸ ἴδιον πάντοτε*** διὰ ***κάθε ἐγγεγραμμένην*** καὶ διὰ ***κάθε μεταβολὴν*** τῶν πλευρῶν της (μὲ ὅριον ὅμως τῆς καθεμιᾶς τὸ 0). Αὐτὸ ὅμως ἀληθεύει, μόνον ὅταν ἰσχύῃ ὁ ἑξῆς περιορισμός: ***Εἰς κάθε σημεῖον τοῦ τόξου νὰ ὑπάρχῃ μία ἐφαπτομένη ἐντελῶς ὡρισμένη*** (δηλ. ***ἀναλυτικῶς:*** ἡ τεταγμένη τῆς καμπύλης, ἡ σ(x), νὰ εἶναι ***διαφορίσιμος*** διὰ τὰς τιμὰς τοῦ x εἰς ***ὅλα*** τὰ σημεῖα τοῦ τόξου).



Σχ. 45.

56. ***Εὕρεσις τοῦ μήκους τοῦ τόξου.*** — *α′*) ***Εὕρεσις τοῦ μήκους τοῦ τόξου καὶ τοῦ διαφορικοῦ του εἰς ὀρθογωνίους καρτεσιανὰς συντεταγμένας.*** — Ἂν ΑΒ εἶναι τὸ τόξον (σχ. 45), ΜΜ′ μία τυχοῦσα χορδή του (δηλ. πλευρὰ τῆς ἐγγεγραμμένης τεθλασμένης), x, y αἱ συντεταγμέναι τοῦ Μ καὶ $x+\Delta x$, $y+\Delta y$ τοῦ Μ′, θὰ ἔχωμεν:

$(MM')=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ · ἐπειδὴ ὅμως εἶναι: $\Delta y=\sigma'(x)\Delta x+\omega\Delta x$, ἔχομεν: $(MM')=\sqrt{1+[\sigma'(x)+\omega]^2}\,.\,\Delta x$ · εἶναι ὅμως καί: $\text{ορ}\sqrt{1+[\sigma'(x)+\omega]^2}=\sqrt{1+[\sigma'(x)]^2}$, δηλ. $\sqrt{1+[\sigma'(x)+\omega]^2}=\sqrt{1+[\sigma'(x)]^2}+\vartheta$ (ϑ ἀπειροστόν)· ὥστε: $MM'=[\sqrt{1+[\sigma'(x)]^2}+\vartheta]\Delta x\equiv[\varphi(x)+\vartheta]\Delta x$, ἂν πρὸς συντομίαν γράψωμεν: $\sqrt{1+[\sigma'(x)]^2}\equiv\varphi(x)$. Τὸ μῆκος λοιπὸν ὅλης τῆς ἐγγεγραμμένης θὰ εἶναι ἀπὸ $A(x=\alpha)$ ἕως B $(x=\beta)$:

$$T=\Sigma\varphi(x)\Delta x=(x_1-\alpha)\varphi(\alpha)+(x_2-x_1)\varphi(x_1)+\dots\dots+(\beta-x_{\nu-1})\varphi(x_{\nu-1})+$$
$$+(x_1-\alpha)\vartheta_1+(x_2-x_1)\vartheta_2+\dots\dots+(\beta-x_{\nu-1})\vartheta_\nu\cdot$$

$\Sigma[\varphi(x)+\vartheta]\Delta x$

$=\Sigma[\varphi(x)+\vartheta]\Delta x$

τὸ ὅριον ὅμως τοῦ β′ ἀθροίσματος εἶναι τὸ 0, διότι εἶναι :

$$\leqq \Theta \Sigma (x_\lambda - x_{\lambda-1}) \equiv \Theta(\beta - \alpha),$$

ὅπου Θ εἶναι τὸ μεγαλύτερον ἀπὸ τὰ ἀπειροστὰ ϑ. θετικῶς λαμβανόμενον καὶ β—α εἶναι ***πεπερασμένον.*** Ὥστε εἶναι :

$$\text{ορ}T \equiv s = \text{ορ}\sum (x_\lambda - x_{\lambda-1})\varphi(x_{\lambda-1}) = \int_\alpha^\beta \varphi(x)dx \equiv \int_\alpha^\beta \sqrt{1+[\sigma'(x)]^2}.dx$$

(s τὸ μῆκος τοῦ τόξου). Ἔχομεν λοιπὸν τὸν ***θεμελιώδη τύπον*** :

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{1+y'^2}.dx.$$

Χρειάζεται ἐπομένως νὰ γίνῃ ***μία ὁλοκλήρωσις***· ἂν εὕρωμεν : $\int \sqrt{1+y'^2}.dx = f(x)$, θὰ ἔχωμεν : $s = f(\beta) - f(\alpha)$·

57. ***Διαφορικὸν τοῦ τόξου.*** — Ἂν ὑποθέσωμεν τὸ τελευταῖον ἄκρον τοῦ τόξου μεταβλητὸν (μὲ τετμημένην x) θὰ εἶναι :

$$s = f(x) - f(\alpha)\cdot$$

ἐπομένως καὶ : $ds = f'(x)dx \equiv \sqrt{1+y'^2}.dx = \sqrt{dx^2+dy^2}$· ὥστε :

Τὸ διαφορικὸν τοῦ τόξου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄνυσμα MN ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ M, ποὺ εἶναι ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ καθέτους πλευρὰς τὰ dx ***καὶ*** dy ***(Πρβλ. σελ. 19).***

Παρατήρησις. Ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τῆς τετραγωνικῆς ρίζης εἰς τὸν τύπον : $ds = \sqrt{1+y'^2}.dx$, παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι ***θετικὸν*** μέν, ἂν τὸ x καὶ τὸ τόξον αὐξάνουν ***ὁμοσήμως, ἀρνητικὸν*** δέ, ἂν ***ἑτεροσήμως*** (διότι ἡ ρίζα εἶναι ἴση μὲ τὴν παράγωγον $\frac{ds}{dx}$). Εἰμποροῦμεν ὅμως πάντοτε νὰ ἐκλέγωμεν τὴν ἀρχὴν τοῦ τόξου κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τὸ x καὶ τὸ s νὰ αὐξάνουν ὁμοσήμως καὶ ἐπομένως νὰ εἶναι ἡ ρίζα θετική.

58. ***Συνημίτονα (α,β) τῶν γωνιῶν τῆς ἐφαπτομένης μὲ τοὺς ὀρθογωνίους ἄξονας.*** — Ἀπὸ τὸν τύπον : $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{dy}{dx}$ συνάγομεν :

$$\alpha \equiv \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}, \quad \beta \equiv \eta\mu\varphi = \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\cdot$$

οἱ τύποι λοιπὸν αὐτοὶ γράφονται τώρα :

$$(\alpha) \quad \alpha \equiv \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{dx}{ds}, \quad \beta \equiv \eta\mu\varphi = \frac{dy}{ds}\cdot$$

(τύποι ***θεμελιώδεις*** διὰ τὴν ἐφαπτομένην).

Παρατήρησις.—Οἱ τύποι (α) μᾶς δίδουν τὴν γωνίαν τῆς μιᾶς ***μόνον*** φορᾶς τῆς ἐφαπτομένης (ἡ ἄλλη ἔχει συνημίτονα τὰ —α, —β). Εὔκολα δὲ βλέπομεν, ὅτι ***ἡ φορά, ποὺ ὁρίζουν οἱ τύποι (α), εἶναι ἐκείνη, ποὺ φέρει ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς πρὸς τὸ μέρος, ὅπου τὸ τόξον αὐξάνει.*** Πραγματικῶς, ἡ φορὰ αὐτὴ σχηματίζει μὲ τὸν ἄξ. OX ***ὀξεῖαν*** μὲν γωνίαν (μὲ ***θετικὸν*** λοιπὸν συνημίτονον), ἂν τὸ x καὶ τὸ s αὐξάνουν ***ὁμοσήμως*** (καὶ ἑπομένως : $\frac{dx}{ds} > 0$)· ***ἀμβλεῖαν*** δέ, ἂν ἀντιστρόφως (καὶ ἑπομένως: $\frac{dx}{ds} < 0$).

59. ***Ὅριον τοῦ λόγου κάθε τόξου πρὸς τὴν χορδήν του.***—***Ὁ λόγος κάθε τόξου (κάθε δηλ. καμπύλης) πρὸς τὴν χορδήν του τείνει πρὸς τὴν μονάδα, ὅταν τὸ τόξον τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν.***

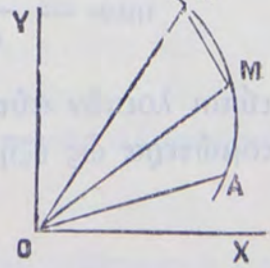
Ἂν καὶ αὐτὸ εἶναι λογικὸν πόρισμα τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ μήκους κάθε τόξου (ἐδ. 55), ἀποδεικνύεται ὅμως καὶ ὡς ἑξῆς :

Ἔχ. $$\frac{\tau o\xi\, MM'}{\chi o\rho\delta MM'} = \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{\frac{\Delta s}{\Delta x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}\cdot$$

ἑπομένως :

$$o\rho\left(\frac{\tau o\xi\, MM'}{\chi o\rho\delta\, MM'}\right) = \frac{\frac{ds}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = 1.$$

Διαφορικὸν τοῦ τόξου εἰς πολικὰς συντεταγμένας.



Σχ. 46

60. ***Α΄ τρόπος : ἀπευθείας.***—Ἀπὸ τὸ τρίγωνον OMM΄ (σχ. 46) ἔχομεν :

$$(MM')^2 = (OM')^2 + (OM)^2 - 2(OM')(OM)\sigma\upsilon\nu(MOM') \equiv$$
$$\equiv (\varrho + \Delta\varrho)^2 + \varrho^2 - 2\varrho(\varrho + \Delta\varrho)\sigma\upsilon\nu(\Delta\vartheta)\cdot$$

ἢ καὶ : $(MM')^2 = 2\varrho^2[1 - \sigma\upsilon\nu(\Delta\vartheta)] + 2\varrho\Delta\varrho[1 - \sigma\upsilon\nu(\Delta\vartheta)] + \Delta\varrho^2$·

ἢ ἀκόμη : $(MM')^2 = 2\varrho^2\left[\frac{\Delta\vartheta^2}{1.2} - \ldots\right] + 2\varrho\Delta\varrho\left[\frac{\Delta\vartheta^2}{1.2} - \ldots\right] + \Delta\varrho^2$,

δηλ. $$\frac{(MM')^2}{(\tau o\xi MM')^2} \cdot \frac{(\tau o\xi MM')^2}{\Delta\vartheta^2} = 2\varrho^2\left[\frac{1}{2} - \frac{\Delta\vartheta^2}{4!} + \ldots\right] +$$
$$+ 2\varrho\Delta\varrho\left[\frac{1}{2} - \frac{\Delta\vartheta^2}{4!} + \ldots\right] + \frac{\Delta\varrho^2}{\Delta\vartheta^2}.$$

Ἑπομένως, ἂν λάβωμεν τὰ ὅρια τῶν δύο μελῶν, θὰ εἶναι (ἕνεκα τῆς προτάσεως τοῦ ἐδ. 59) :

$$\text{ορ}\left(\frac{\Delta s}{\Delta\vartheta}\right)^2 = \left(\frac{ds}{d\vartheta}\right)^2 = \varrho^2 + \frac{d\varrho^2}{d\vartheta^2}.$$

ὥστε ἔχομεν τὸν ζητούμενον τύπον :

$$ds = \sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 d\vartheta^2}.$$

61. ***Β' τρόπος : ἐμμέσως.***—Εἰς ***καρτεσιανὰς*** συντεταγμένας ἔχομεν εὕρει : $ds^2 = dx^2 + dy^2$· (α)· ἀλλά : $x = \varrho\,\sigma\upsilon\nu\vartheta$, $y = \varrho\,\eta\mu\vartheta$· ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ ἐκφράσωμεν τὰ διαφορικὰ dx, dy μὲ τὰ διαφορικὰ $d\varrho$, $d\vartheta$ καὶ νὰ τὰ θέσωμεν εἰς τὸν τύπον (α). Αὐτὸ δὲ γίνεται εὐκολώτερα μὲ τὸν ἑξῆς τρόπον :

Ἔχομεν : $dx + idy = e^{\vartheta i}(d\varrho + i\varrho d\vartheta)$, $dx - idy = e^{-\vartheta i}(d\varrho - i\varrho d\vartheta)$· ἂν λοιπὸν πολλαπλασιάσωμεν τὰς δύο τελευταίας σχέσεις κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν :

$$dx^2 + dy^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\vartheta^2 \cdot \quad \text{ὥστε :} \quad ds = \sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 d\vartheta^2} \ (\beta).$$

62. ***Ἡμίτονον καὶ συνημίτονον τῆς γωνίας ω.***—Εἴχομεν εὕρει (ἐδ. 20) :

$$\eta\mu\omega = \frac{\varrho d\vartheta}{\sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 d\vartheta^2}}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{d\varrho}{\sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 d\vartheta^2}}.$$

Οἱ τύποι λοιπὸν αὐτοὶ γράφονται τώρα, σύμφωνα μὲ τὴν σχέσιν (β), συντομώτερα ὡς ἑξῆς :

$$\eta\mu\omega = \frac{\varrho d\vartheta}{ds}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{d\varrho}{ds}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Α') Ἐφαρμογαὶ τοῦ τύπου : $ds^2 = dx^2 + dy^2$.

1ον.

63. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ «ἀνάπτυγμα» τοῦ τόξου τῆς κυκλοειδοῦς.***

Ἀνάπτυγμα ἑνὸς τόξου λέγεται τὸ ***εὐθύγραμμον*** τμῆμα, ποὺ ἔχει μῆκος τὸ μῆκος τοῦ τόξου· ὥστε ***εὕρεσις τοῦ ἀναπτύγματος*** ἑνὸς τόξου σημαίνει ***ὑπολογισμὸς τοῦ μήκους του.***

Ἡ εὕρεσις τοῦ ἀναπτύγματος ἑνὸς τόξου λέγεται ἐπίσης, συντομώτερα, ***εὐθειοποίησις*** (γαλλ. rectification)[1] τοῦ τόξου.

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις τῆς κυκλοειδοῦς : $x = \alpha(\omega - \eta\mu\omega)$, $y = \alpha(1 - \sigma\upsilon\nu\omega)$ εὑρίσκομεν : $dx = \alpha(1 - \sigma\upsilon\nu\omega)d\omega$, $dy = \alpha\eta\mu\omega d\omega$· ἐπομένως.

$$ds^2 = 2\alpha^2(1 - \sigma\upsilon\nu\omega)d\omega^2 = 4\alpha^2\eta\mu^2\left(\frac{\omega}{2}\right)d\omega^2\cdot$$

εἶναι λοιπόν : $ds = 2\alpha\,\eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right)d\omega = 4\alpha\eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right)d\left(\frac{\omega}{2}\right)$ καὶ ἐπομένως : $s \equiv \tau o\xi OM = -4\alpha\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega}{2}\right) + c$.

Ἀφοῦ ὅμως ἀρχὴ τοῦ τόξου εἶναι τὸ σημεῖον Ο (σχ. 9, σελ. 26), ἔχομεν $s = 0$ διὰ $\omega = 0$, ὥστε :

$$c = 4\alpha \quad \text{καὶ} \quad s \equiv \tau o\xi OM = 4\alpha\left[1 - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega}{2}\right)\right].$$

Ἂν τώρα θέλωμεν ὅλον τὸ τόξον ΟΣ'Α τῆς κυκλοειδοῦς, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν τὸ ω (ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ἄκρον Μ) ἴσον μὲ τὸ ω τοῦ Α, δηλ. μὲ 2π. Εἶναι λοιπόν : τοξΟΣ'Α$=8\alpha$, δηλ.

Τὸ τόξον ὅλης τῆς κυκλοειδοῦς εἶναι ὀκταπλάσιον ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας, ποὺ τὴν παράγει.

2ον.

64. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ τόξου τῆς ἁλυσσοειδοῦς.***

---

[1] Λατινικά : rectificatio, ἀπὸ τὸ ῥῆμα rectificare=εὐθειοποιῶ (recta=εὐθεῖα καὶ facio=ποιῶ).

᾿Από τὴν ἐξίσωσίν της :

$$y=\frac{\alpha}{2}\left(e^{\frac{x}{\alpha}}+e^{-\frac{x}{\alpha}}\right) \text{ ἔχομεν : } dy=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{\alpha}}-e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)dx\cdot$$

$$\text{ἑπομένως : } \left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{1}{4}\left[e^{\frac{2x}{\alpha}}+e^{-\frac{2x}{\alpha}}-2\right] \text{ καί :}$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{1}{4}\left[e^{\frac{2x}{\alpha}}+e^{-\frac{2x}{\alpha}}+2\right]=\frac{1}{4}\left[e^{\frac{x}{\alpha}}+e^{-\frac{x}{\alpha}}\right]^2.$$

Θὰ εἶναι λοιπόν :

$$ds=\frac{1}{2}\left[e^{\frac{x}{\alpha}}+e^{-\frac{x}{\alpha}}\right]dx \quad \text{καί : } s=\frac{\alpha}{2}\left[e^{\frac{x}{\alpha}}-e^{-\frac{x}{\alpha}}\right]+c\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ διὰ $x=0$ εἶναι καὶ $s=0$ (ἂν ἐκλέξωμεν ὡς ἀρχὴν τοῦ τόξου τὸ A (σχ. 36, σελ. 54), συνάγομεν : $s\equiv AM=\frac{\alpha}{2}\left(e^{\frac{x}{\alpha}}-e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)$.

Α′ ἰδιότης τῆς ἀλυσσοειδοῦς.— Ἂν συγκρίνωμεν τὸ s καὶ τὸ y, εὑρίσκομεν ἀμέσως τὴν σχέσιν : $s^2=y^2-\alpha^2$, δηλ.

Τὸ τυχὸν τόξον τῆς ἀλυσσοειδοῦς εἶναι ἡ μία κάθετος πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ποὺ ἔχει ὑποτείνουσαν σταθερὰν α καὶ δευτέραν κάθετον πλευρὰν τὴν τεταγμένην y τοῦ ἄκρου του.

Εἶναι λοιπὸν πολὺ εὔκολον νὰ κατασκευάσωμεν τὸ ***ἀνάπτυγμα*** τοῦ τόξου s· ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν ἀπὸ τὸν πόδα Π τῆς τεταγμένης τὴν κάθετον ΠΚ πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ M· θὰ εἶναι τότε $s=KM$· Πραγματικῶς ἔχομεν : $K\Pi=y\eta\mu(90^0-\varphi)=y\sigma\upsilon\nu\varphi=y\frac{dx}{ds}=\alpha$.

Β′ ἰδιότης τῆς ἀλυσσοειδοῦς.— Τὴν ἀνεφέραμεν ἤδη (σελ. 54) : ***Τὸ καρτεσιανὸν ἐμβαδόν της ΟΑΜΠ εἶναι ἀνάλογον τοῦ τόξου του ΑΜ.*** Πραγματικῶς ἔχομεν :

$$ds=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{\alpha}}+e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)dx=\frac{y}{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha}dE, \quad \text{ὥστε :}$$

$dE=d(\alpha s)$ καί : $E\equiv\alpha s$ ($c=0$, διότι διὰ $x=0$ εἶναι καὶ s καὶ E ἴσα μὲ τὸ 0). Ἔχομεν λοιπὸν ἀκόμη : ***Τὸ τυχὸν καρτεσιανὸν ἐμβαδὸν***

τῆς ἁλυσσοειδοῦς εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου, ποὺ ἔχει βάσιν τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ τόξου του καὶ ὕψος σταθερὸν α.

3ον.

65. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ τόξου τῆς ἑλκούσης.***

Εἴχομεν (ἐδ. 15, σελ. 24) :

$$y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}=\alpha\text{· ἑπομένως:}\sqrt{dx^2+dy^2}=\pm\alpha\frac{dy}{y}.$$

Ἂν ὅμως ζητοῦμεν τὸ δεξιὸν τόξον τῆς καμπύλης (σχ. 8, σελ. 25), τὸ τόξον τοῦτο αὐξάνει **ἑτεροσήμως** πρὸς τὸ y· θὰ ἔχῃ λοιπὸν ἡ τετρ. ῥίζα τὸ σημεῖον — (ἐδ. 57)·

καὶ ἑπομένως : $ds=-\alpha\frac{dy}{y}$, ὥστε : $s=-\alpha ly+c$· εἶναι ὅμως $s=0$

διὰ $y=\alpha$, λοιπόν : $c=\alpha l\alpha$ καί : $s=\alpha l\left(\frac{\alpha}{y}\right)$.

4ον.

66. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ τόξου τῆς ἀστροειδοῦς.***

Ἀπὸ τὰς παραμετρικάς της ἐξισώσεις (σελ. 52, πρόβλ. 10) :

$x=\alpha\eta\mu^3\varphi,\ y=\alpha\sigma\upsilon\nu^3\varphi$ εὑρίσκομεν :

$$dx=3\alpha\eta\mu^2\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi d\varphi,\qquad dy=-3\alpha\sigma\upsilon\nu^2\varphi\eta\mu\varphi d\varphi,$$

ἑπομένως :

$$ds^2=9\alpha^2\eta\mu^2\varphi\sigma\upsilon\nu^2\varphi d\varphi^2 \text{ καὶ } ds=3\alpha\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi d\varphi=3\alpha\eta\mu\varphi d(\eta\mu\varphi)\text{·}$$

εἶναι λοιπόν : $s=\frac{3\alpha}{2}\eta\mu^2\varphi+c$· καὶ ἂν ὡς ἀρχὴν τοῦ τόξου λάβωμεν τὸ σημεῖον Α (ὅπου $\varphi=0$) (σχ. 35, σελ. 53), θὰ εἶναι ἐκεῖ: $s=0$· ὥστε :

$$s=\frac{3\alpha}{2}\eta\mu^2\varphi.$$

Ἂν τώρα θέλωμεν τὸ τόξον ΑΒ, θὰ θέσωμεν $\varphi=\frac{\pi}{2}$ καὶ ἑπομένως :

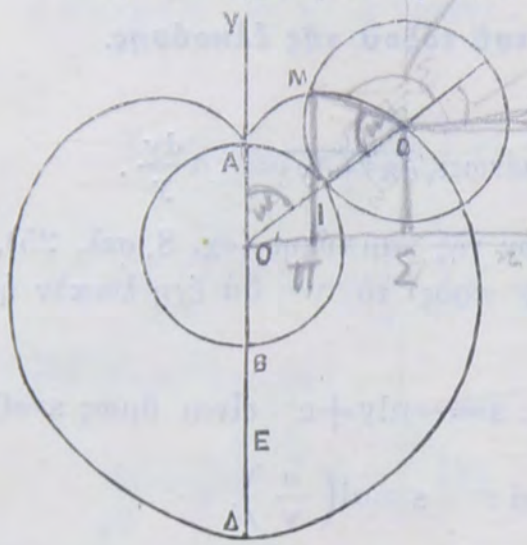
$$\tau o\xi AB=\frac{3\alpha}{2}\cdot \qquad \text{ὥστε :}$$

Τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ τόξου ὅλης τῆς ἀστροειδοῦς εἶναι ἑξαπλάσιον ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα τῆς ἀκινήτου περιφερείας.

180°-ω
90-ω

5ον.

67. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ τόξου τῆς «καρδιοειδοῦς».*** ***Καρδιοειδὴς*** λέγεται ἡ ***ἐπικυκλοειδής, ποὺ παράγει ἓν σημεῖον περιφερείας, ὅταν αὐτὴ κυλίεται ἐπὶ ἄλλης περιφερείας ἴσης.*** Τὰς παραμετρικάς της ἐξισώσεις τὰς εὑρίσκει εὔκολα ἡ ***Ἀναλυτικὴ Γεωμετρία*** καὶ εἶναι :



Σχ. 47.

$$x=\alpha(2\eta\mu\omega-\eta\mu(2\omega)),$$
$$y=\alpha(2\sigma\upsilon\nu\omega-\sigma\upsilon\nu(2\omega))$$

(ω εἶναι ἡ γων. ΑΟ'Ι (σχ. 47). Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τώρα :

$$dx=2\alpha(\sigma\upsilon\nu\omega-\sigma\upsilon\nu(2\omega))d\omega,$$
$$dy=2\alpha(-\eta\mu\omega+\eta\mu(2\omega))d\omega\cdot$$

ἑπομένως :

$$ds^2=8\alpha^2[1-\sigma\upsilon\nu\omega\,\sigma\upsilon\nu(2\omega)-\eta\mu\omega\,\eta\mu(2\omega)]d\omega^2=$$
$$=8\alpha^2(1-\sigma\upsilon\nu\omega)d\omega^2=16\alpha^2\eta\mu^2\left(\frac{\omega}{2}\right)d\omega^2$$

καί : $$ds=8\alpha\,\eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right)d\left(\frac{\omega}{2}\right)\cdot\quad \text{ὥστε : } s=-8\alpha\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega}{2}\right)+c\cdot$$

Ἂν ὡς ἀρχὴν τοῦ τόξου ἐκλέξωμεν τὸ σημεῖον Α (ω=0), θὰ εἶναι s=0 διὰ ω=0· ὥστε c=8α καί :

$$s\equiv\tau o\xi AM=8\alpha\left[1-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega}{2}\right)\right].$$

Καὶ ἂν θέλωμεν τὸ ἥμισυ ὅλου τοῦ τόξου τῆς καμπύλης, τὸ τόξον ΑΔ, θὰ θέσωμεν ω=π καὶ τότε ἔχομεν : $s\equiv\tau o\xi A\Delta=8\alpha\cdot$ ὥστε : ***Ὅλον τὸ τόξον τῆς καρδιοειδοῦς εἶναι δεκαεξαπλάσιον ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας, πού την παράγει.***

6ον.

68. ***Νὰ εὑρεθῇ μία καμπύλη, ποὺ τὸ τόξον της νὰ εἶναι πρωτοβάθμιος συνάρτησις τῶν συντεταγμένων τοῦ ἄκρου του.***

Δηλ. ζητοῦμεν νὰ εἶναι : $s=\alpha x+\beta y+\gamma$.

Πρὸς ἁπλοποίησιν λαμβάνομεν ὡς νέον ἄξονα τῶν x τὴν εὐθεῖαν: $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ (αὐτὸ βέβαια προφανῶς ἐπιτρέπεται)· τότε τὸ τριώνυμον $\alpha x+\beta y+\gamma$, πού, ὅπως γνωρίζομεν, εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὴν ἀπόστασιν τοῦ ἄκρου M ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν αὐτήν, θὰ εἶναι ἀνάλογον τοῦ νέου y· ὥστε ἡ ζητουμένη ἰδιότης τῆς καμπύλης ἐκφράζεται τότε ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν: $s=\lambda y+\mu$. Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τώρα αὐτὴν ἔχομεν:

$$ds=\lambda dy, \quad \text{δηλ.} \quad dx^2+dy^2=\lambda^2dy^2 \quad \text{καὶ ἑπομένως:}$$

$dy^2=\frac{1}{\lambda^2-1}dx^2$, $dy=\pm\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}}dx$· καὶ τέλος: $y=\pm\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}}x+c$ ἢ καί: $y=kx+c$· ὥστε: ***Μόνη καμπύλη μὲ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν εἶναι ἡ εὐθεῖα γραμμή.***

Β') Ἐφαρμογαὶ τοῦ τύπου: $ds^2=d\varrho^2+\varrho^2d\vartheta^2$.

7ον.

69. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ τόξου τῆς λογαριθμικῆς ἕλικος.***

Ἡ πολική της ἐξίσωσις εἶναι: $\varrho=e^{\mu\vartheta}$· ἑπομένως: $d\varrho=e^{\mu\vartheta}\mu d\vartheta=$ $=\varrho\mu d\vartheta$ καὶ $d\vartheta=\frac{d\varrho}{\mu\varrho}$· εἶναι λοιπόν:

$$ds=\sqrt{d\varrho^2+\frac{d\varrho^2}{\mu^2}}=\sqrt{1+\frac{1}{\mu^2}}d\varrho \text{ καὶ: } s=\sqrt{1+\frac{1}{\mu^2}}.\varrho+c\cdot$$

καὶ ἂν ἐκλέξωμεν ὡς ἀρχὴν τοῦ τόξου τὸ σημεῖον, ὅπου $\vartheta=0$, (σχ. 15, σελ. 36), θὰ εἶναι $s=0$ διὰ $\varrho=1$, δηλ. θὰ ἔχωμεν:

$$c=-\sqrt{1+\frac{1}{\mu^2}} \text{ καὶ } s=\sqrt{1+\frac{1}{\mu^2}}.(\varrho-1).$$

Ἡ τετρ. ρίζα, ἐπειδὴ εἶναι ἴση μὲ $\frac{ds}{d\varrho}$, θὰ εἶναι ***θετική***, ὅπου τὸ ϱ καὶ τὸ s αὐξάνουν ***ὁμοσήμως***, δηλ. διὰ τὰς ***θετικὰς*** τιμὰς τῆς ϑ· ἀρνητικόν, δέ, ὅταν ἀντιστρόφως. Διὰ τὸ τόξον λοιπὸν ἀπὸ $\varrho=1$ ἕως $\varrho=\infty$ θὰ ἔχωμεν: $s=\sqrt{1+\frac{1}{\mu^2}}(\varrho-1)$, ἀλλὰ διὰ τὸ τόξον, ποὺ ἑλίσσεται πέριξ τοῦ πόλου, $(\varrho<1)$: $s=\sqrt{1+\frac{1}{\mu^2}}.(1-\varrho)$· ἑπομένως ὁ κλάδος τῆς καμπύλης, ποὺ ἔχει $\vartheta = 0 \ldots -\infty$ καὶ **ἀσύμπτωτον** σημεῖον τὸν πόλον O, ἐκτελεῖ μὲν **ἀπείρους** ἑλιγμοὺς πέριξ τοῦ O καὶ **δὲν τελειώνει**, ἔχει ὅμως μῆκος πεπερασμένον, διότι, καθόσον τὸ ρ τείνει πρὸς τὸ 0, τὸ s τείνει πρὸς τὸν πεπερασμένον ἀριθμόν : $\sqrt{1+\frac{1}{\mu^2}}$. (Αὐτὸ ἐξηγεῖται, διότι ἡ **αὔξησις** τοῦ τόξου **εἰς κάθε κύκλωσιν τοῦ O** τείνει πρὸς τὸ 0).

8ον.

70. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ τόξου τῆς ἀρχιμηδείου ἕλικος.***

Ἔχομεν τώρα : $\varrho = \alpha\vartheta$, $d\varrho = \alpha d\vartheta$· ἑπομένως :

$$ds^2 = \alpha^2 d\vartheta^2 + \alpha^2\vartheta^2 d\vartheta^2 = \alpha^2(1+\vartheta^2)d\vartheta^2 \cdot$$

εἶναι λοιπόν: $ds = \alpha\sqrt{1+\vartheta^2}\,.\,d\vartheta$ καὶ : $s = \alpha\int_0^\vartheta \sqrt{1+\vartheta^2}\,.\,d\vartheta$. Ἔχομεν δὲ (κατὰ τὸν ***Ὁλοκληρωτικὸν Λογισμόν***) :

$$\int_0^\vartheta \sqrt{1+\vartheta^2}\,.\,d\vartheta = \frac{1}{2}\vartheta\sqrt{1+\vartheta^2} + \frac{1}{2}l[\vartheta+\sqrt{1+\vartheta^2}] \cdot$$

ὥστε : $s = \text{τοξ}OAM = \frac{\alpha}{2}[\vartheta\sqrt{1+\vartheta^2} + l(\vartheta+\sqrt{1+\vartheta^2})]$.

9ον.

71. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ τόξου τῆς ὑπερβολικῆς ἕλικος.***

Ἔχομεν τὴν πολικὴν ἐξίσωσίν της : $\varrho = \frac{\alpha}{\vartheta}$· ἑπομένως :

$$d\varrho = \frac{\alpha}{\vartheta^2}d\vartheta \text{ καὶ } ds^2 = \left[\frac{\alpha^2}{\vartheta^4} + \frac{\alpha^2}{\vartheta^2}\right]d\vartheta^2 \cdot$$

δηλ. $ds = \alpha\frac{\sqrt{1+\vartheta^2}}{\vartheta^2}d\vartheta$· ἑπομένως :

$$s = \alpha\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1}\frac{\sqrt{1+\vartheta^2}}{\vartheta^2}d\vartheta + c = \alpha\left[-\frac{\sqrt{1+\vartheta^2}}{\vartheta} + l(\vartheta+\sqrt{1+\vartheta^2})\right]_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} (\vartheta \text{ ἀρν.}).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) ***Εὐθειοποίησις τοῦ τυχόντος τόξου τῆς παραβολῆς.***—Ἔχομεν : $y^2=2\mu x$, λοιπὸν $ds^2=dx^2+dy^2=\frac{y^2dy^2}{\mu^2}+dy^2$·

$$\text{ἑπομένως : } ds=\frac{\sqrt{y^2+\mu^2}}{\mu}dy \text{ καὶ : } s=\frac{1}{\mu}\int_0^y\sqrt{\mu^2+y^2}dy.$$

$$\text{Εἶναι ὅμως : } \int\sqrt{\mu^2+y^2}.dy=\frac{1}{2}y\sqrt{\mu^2+y^2}+\frac{\mu^2}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{\mu^2+y^2}}.$$

ἑπομένως : $s=\frac{y\sqrt{\mu^2+y^2}}{2\mu}+\frac{\mu}{2}l(y+\sqrt{\mu^2+y^2})+c$· καὶ ἐπειδὴ τὸ $\int$ μηδενίζεται διὰ $y=0$, εἶναι : $c=-\frac{\mu}{2}l\mu$· ὥστε τελικῶς :

$$s=\frac{y\sqrt{\mu^2+y^2}}{2\mu}+\frac{\mu}{2}l\left[\frac{y+\sqrt{\mu^2+y^2}}{\mu}\right].$$

Τὸ ***ἀλγεβρικὸν*** μέρος τῆς ἐκφράσεως αὐτῆς τοῦ s εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἐφαπτομένης ἀπὸ τὴν ἐπαφὴν ἕως τὴν τομήν της μὲ τὸν ἄξ. ΟΥ.

2) ***Εὐθειοποίησις τῆς ἐλλείψεως.***—Θεωροῦμεν τὸ τόξον της ΒΜ, ποὺ ἀρχίζει ἀπὸ τὴν κορυφήν της Β. Ἔχομεν : $\frac{dy}{dx}=-\frac{\beta^2x}{\alpha^2y}$, ἑπομένως :

$$ds=\sqrt{1+\frac{\beta^4x^2}{\alpha^2(\alpha^2\beta^2-\beta^2x^2)}}.dx=\sqrt{\frac{\alpha^4-(\alpha^2-\beta^2)x^2}{\alpha^2(\alpha^2-x^2)}}.dx=\sqrt{\frac{\alpha^2-\varepsilon^2x^2}{\alpha^2-x^2}}.dx$$

(ὅπου ε ἡ ἐκκεντρότης). Διὰ τὸ τόξον ΒΑ θέτομεν : $x=\alpha\eta\mu\varphi$ ($\varphi=0\ldots$ $\ldots\frac{\pi}{2}$)· ἑπομένως :

$$ds=\alpha\sqrt{1-\varepsilon^2\eta\mu^2\varphi}.d\varphi \text{ καὶ } s\equiv\text{τοξ}BM=\alpha\int_0^\varphi\sqrt{1-\varepsilon^2\eta\mu^2\varphi}.d\varphi.$$

Τὸ ὁλοκλήρωμα αὐτὸ (πού, ἀκριβῶς διότι ἐκφράζει τὸ μῆκος τοῦ ἐλλειπτικοῦ τόξου, λέγεται ***ἐλλειπτικὸν***) ***δὲν εἰμπορεῖ νὰ ἐκφρασθῇ***

μὲ τὰς γνωστάς μας συναρτήσεις (ἀλγεβρικὰς καὶ ὑπερβατικάς), εἶναι δηλ. ***νέα*** ὑπερβατικὴ συνάρτησις τοῦ φ καὶ ***μόνον εἰς σειρὰν*** εἰμποροῦμεν νὰ τὸ ἀναπτύξωμεν. Αὐτὸ δὲ γίνεται ὡς ἑξῆς : Ἔχομεν :

$$\left(1-\varepsilon^2\eta\mu^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\eta\mu^2\varphi-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\varepsilon^4\eta\mu^4\varphi-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\right)\varepsilon^6\eta\mu^6\varphi$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\right)\varepsilon^8\eta\mu^8\varphi-\ldots$$

Ἑπομένως :

$$s=\alpha\left[\varphi-\frac{1}{2}\varepsilon^2\int\eta\mu^2\varphi d\varphi-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\varepsilon^4\int\eta\mu^4\varphi d\varphi-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\right)\varepsilon^6\int\eta\mu^6\varphi d\varphi-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\right)e^8\int\eta\mu^8\varphi d\varphi-\ldots\right].$$

Κατόπιν θὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν γενικὸν τύπον :

$$\int\eta\mu^\mu\varphi d\varphi=-\frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{\mu}\left[\eta\mu^{\mu-1}\varphi+\frac{\mu-1}{\mu-2}\eta\mu^{\mu-3}\varphi+\right.$$
$$\left.+\frac{(\mu-1)(\mu-3)}{(\mu-2)(\mu-4)}\eta\mu^{\mu-5}\varphi+\ldots+\frac{(\mu-1)\ldots3.1}{(\mu-2)\ldots4.2}\eta\mu\varphi\right]+\frac{(\mu-1)\ldots3.1}{(\mu-2)\ldots4.2}\cdot\frac{\varphi}{\mu}$$

εἰς τὰ ὁλοκληρώματα τοῦ β′ μέλους (δηλ. τῆς σειρᾶς). (Ἡ σταθερὰ c εἶναι $=0$, ἀφοῦ διὰ $\varphi=0$ εἶναι καὶ $s=0$).

Διὰ τὸ ***τεταρτημόριον*** τῆς ἐλλείψεως $\left(\varphi=0\ldots\frac{\pi}{2}\right)$ ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ὁλοκληρωμάτων τῆς σειρᾶς εἶναι εὐκολώτερος, διότι ἔχομεν :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^\mu\varphi d\varphi=\frac{1.3.5\ldots.(\mu-3)(\mu-1)}{2.4.6\ldots.(\mu-2).\mu}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot$$

θὰ ἔχωμεν λοιπὸν διὰ τὸ τόξον $BA\equiv s$ ***τὸ ἑξῆς ἀνάπτυγμα εἰς σειρὰν κατὰ τὰς δυνάμεις τῆς ἐκκεντρότητος ε :***

$$s=\frac{\pi\alpha}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\varepsilon^2\right)^2-\frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\varepsilon^3\right)^2-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{7}\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\varepsilon^4\right)^2-\ldots\right].$$

Ἡ σειρὰ αὐτὴ συγκλίνει τόσον ταχύτερα, ὅσον ἡ ἐκκεντρότης ε εἶναι μικροτέρα· ὥστε, ἂν ἡ ἔλλειψις διαφέρῃ πολὺ ὀλίγον ἀπὸ τὴν περιφέρειαν (καθὼς συμβαίνει εἰς τὰς ἐλλειπτικὰς τροχιὰς τῶν πλανητῶν περὶ τὸν ἥλιον), ἀρκεῖ νὰ ὑπολογισθῇ ἓν μικρὸν πλῆθος ὅρων τῆς σειρᾶς αὐτῆς, διὰ νὰ ἔχωμεν τὸ μῆκος τοῦ τόξου τῆς ἐλλείψεως μὲ ἀρκετὴν προσέγγισιν. (Ἐννοεῖται, ὅτι διὰ $\varepsilon=0$ ἐπανευρίσκομεν τὸν στοιχειώδη τύπον τοῦ ἀναπτύγματος τῆς περιφερείας : $2\pi\alpha$). Ἡ γωνία φ εἶναι τὸ συμπλήρωμα τῆς ***ἐκκέντρου*** γωνίας τοῦ σημείου Μ.

3) ***Εὐθειοποίησις ἑνὸς τόξου τῆς ὑπερβολῆς.***—Θὰ ἔχωμεν τώρα:

$$ds=\sqrt{\frac{(\alpha^2+\beta^2)x^2-\alpha^4}{\alpha^2(x^2-\alpha^2)}}\,dx.$$

Θέτομεν : $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\alpha\varepsilon$ καὶ ἔχομεν : $ds=\sqrt{\dfrac{\varepsilon^2x^2-\alpha^2}{x^2-\alpha^2}}.dx$· τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ α ἕως ∞, εἰμποροῦμεν λοιπὸν νὰ θέσωμεν :

$$x=\frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\varphi}\ \left(\varphi=0\ldots\ldots\frac{\pi}{2}\right).\ \text{Τότε :}\ dx=\frac{\alpha\eta\mu\varphi d\varphi}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}\cdot\ \text{ἐπομένως :}$$

$$ds=\frac{d\varphi}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}\sqrt{\alpha^2\varepsilon^2-\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi}=\frac{\alpha\varepsilon d\varphi}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}\sqrt{1-\frac{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}{\varepsilon^2}}.$$

Θὰ εἶναι λοιπόν : $s=\tau o\xi AM=\alpha\varepsilon\displaystyle\int_0^\varphi\sqrt{1-\frac{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}{\varepsilon^2}}.\frac{d\varphi}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}.$

Καὶ ἂν ἀναπτύξωμεν πάλιν τὴν ρίζαν, εὑρίσκομεν :

$$s=\alpha\varepsilon\int_0^\varphi\Big[1-\frac{1}{2}.\frac{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}{\varepsilon^2}-\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{\sigma\upsilon\nu^4\varphi}{\varepsilon^4}-\ldots\ldots-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1.3\ldots.(2\nu-3)}{2.4.6\ldots.(2\nu)}\right)\frac{\sigma\upsilon\nu^{2\nu}\varphi}{\varepsilon^{2\nu}}-\ldots\ldots\Big]\frac{d\varphi}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}.\ \text{ἢ :}$$

$$s=\alpha\varepsilon.\varepsilon\varphi\varphi-\frac{1}{2}.\frac{\alpha}{\varepsilon}.\varphi-\frac{\alpha}{\varepsilon}\int_0^\varphi\left(\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}{\varepsilon^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1.3}{4.6}\right)\frac{\sigma\upsilon\nu^4\varphi}{\varepsilon^4}+..\right)d\varphi$$

Ἡ ἀπαιτουμένη κατόπιν ὁλοκλήρωσις παραστάσεων τῆς μορφῆς : $\sigma\upsilon\nu^{2\mu}\varphi d\varphi$ γίνεται κατὰ τὸν γνωστὸν τύπον :

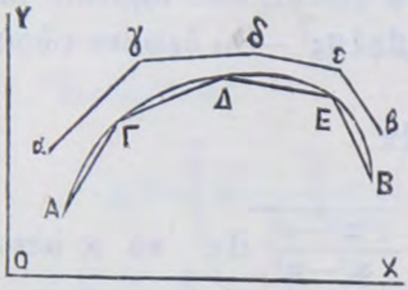
$$\int\sigma\upsilon\nu^m x dx=\frac{\sigma\upsilon\nu^{m-1}x\eta\mu x}{m}+\frac{m-1}{m}\int\sigma\upsilon\nu^{m-2}xdx.$$

4) Ἂν ἔχωμεν δύο τόξα καμπύλων, τὸ $OM_1=s_1$ καὶ τὸ $OM_2=s_2$, ποὺ νὰ ἐφάπτωνται τὸ ἓν τοῦ ἄλλου εἰς τὴν ἀρχὴν Ο καὶ νὰ ἔχουν τὰς

ἐφαπτομένας$_3$ των παραλλήλους εἰς τὰ ἀντίστοιχα σημεῖά των $M_1(x_1,y_1)$ καὶ $M_2(x_2,y_2)$ καὶ κατασκευάσωμεν μίαν τρίτην καμπύλην $OM_3 \equiv s_3$, ποὺ νὰ ὁρίζεται ἀπὸ τὰς σχέσεις:

$x_3 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, $y_3 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$, θὰ ἔχωμεν: $s_3 = \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2$.

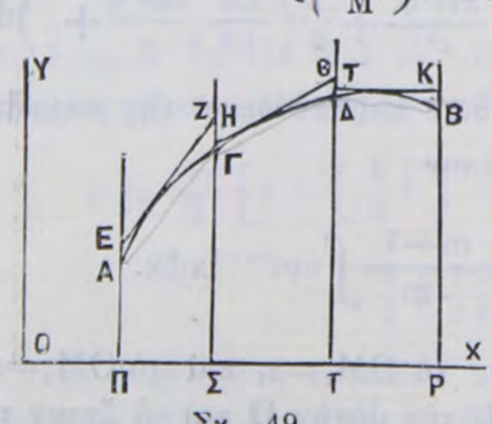
5) Ἂν ἡ αγδεβ εἶναι μία τεθλασμένη γραμμὴ μὲ ***ἴσον ἀριθμὸν*** πλευρῶν πρὸς τὴν ἐγγεγραμμένην εἰς ἓν τόξον ΑΒ τεθλασμένην ΑΓΔΕΒ (σχ.48) καὶ συμβαίνῃ, καθόσον αἱ κορυφαὶ Α,Γ,Δ,Ε,Β πλησιάζουν ὁλονὲν καὶ ὁ ἀριθμός των αὐξάνει εἰς ἄπειρον, αἱ πλευραὶ αγ, γδ, δε, εβ νὰ τείνουν νὰ γίνουν ἀντιστοίχως ἴσαι μὲ τὰς ΑΓ,ΓΔ,ΔΕ,ΕΒ, τότε τὸ ὅριον τῆς γραμμῆς αγδεβ θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὅριον τῆς ΑΓΔΕΒ, δηλ. μὲ τὸ τόξον ΑΒ. Διότι, ἂν τῆς α′ γραμμῆς αἱ πλευραὶ ὀνομασθοῦν: $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \ldots, \rho'$ καὶ τῆς ἐγγεγραμμένης: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \rho$ καὶ θέσωμεν: $\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' + \ldots + \rho' = M'$ καὶ $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots + \rho = M$, τὸ



Σχ. 48.

κλάσμα: $\frac{M'}{M}$ περιλαμβάνεται, ὡς γνωστόν, μεταξὺ δύο ἄλλων κλασμάτων: τοῦ ***ἐλαχίστου λόγου*** δύο ἀντιστοίχων πλευρῶν τῶν δύο γραμμῶν (ἂς εἶναι αὐτὸς ὁ $\frac{m'}{m}$) καὶ τοῦ ***μεγίστου*** (ἂς εἶναι αὐτὸς ὁ $\frac{n'}{n}$)· θὰ εἶναι δηλ. $\frac{m'}{m} < \frac{M'}{M} < \frac{n'}{n}$· ἐπειδὴ ὅμως τὸ ὅριον τῶν ἄκρων λόγων εἶναι ἡ μονάς, θὰ εἶναι καί:

$$\text{ορ}\left(\frac{M'}{M}\right) = 1, \text{ δηλ. } \text{ορ}M' = \text{ορ}M.$$



Σχ. 49.

6) Ν' ἀποδειχθῇ (μὲ ὅμοιον τρόπον) ἡ ἑξῆς πρότασις: Ἂν φέρωμεν μεταξὺ τῶν δύο ἄκρων τεταγμένων ἑνὸς τόξου ΑΒ (σχ. 49) ὁσασδήποτε ***παραλλήλους πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y*** καὶ ἐγγράψωμεν μεταξὺ αὐτῶν ***ἐφαπτομένας τῶν τόξων, ποὺ ἀποκόπτουν, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐφα-***

πτομένων αὐτῶν, καθόσον ὁ ἀριθμὸς τῶν παραλλήλων τείνει εἰς τὸ ἄπειρον, ἔχει πάλιν ὅριον ***τὸ μῆκος τοῦ τόξου***, ἀκόμη καὶ ὅταν αἱ ἐφαπτόμεναι δὲν ἀποτελοῦν ***συνεχῆ*** τεθλασμένην γραμμήν.

7) ***Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔκφρασις τοῦ διαφορικοῦ τοῦ τόξου εἰς γραμμικὰς διπολικὰς συντεταγμένας.***

$$\left[\text{᾿Απ.}\quad ds^2 = \frac{4\varrho_1\varrho_2[\varrho_1\varrho_2(d\varrho_1^2+d\varrho_2^2)-(\varrho_1^2+\varrho_2^2-\alpha^2)d\varrho_1 d\varrho_2]}{(\varrho_1+\varrho_2+\alpha)(\varrho_1+\varrho_2-\alpha)(\alpha+\varrho_1-\varrho_2)(\alpha+\varrho_2-\varrho_1)}\right]\cdot$$

(α ἡ ἀπόστασις τῶν πόλων).

᾿Εφαρμογὴ εἰς τὰς κωνικὰς τομάς.

8) ***Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔκφρασις τοῦ διαφορικοῦ τοῦ τόξου εἰς γωνιακὰς διπολικὰς συντεταγμένας.***

$$\Big[\text{᾿Απ.}\quad ds^2 = \frac{\alpha^2}{\eta\mu^4(\vartheta_1+\vartheta_2)}[\eta\mu^2\vartheta_2 d\vartheta_1^2+\eta\mu^2\vartheta_1 d\vartheta_2^2 -$$
$$- 2\eta\mu\vartheta_1\eta\mu\vartheta_2\sigma\upsilon\nu(\vartheta_1+\vartheta_2)d\vartheta_1 d\vartheta_2]\Big]\cdot$$

9) ***Νὰ εὑρεθῇ ἡ γενικὴ ἔκφρασις τοῦ διαφορικοῦ τοῦ τόξου εἰς τυχούσας «καμπυλογράμμους» συντεταγμένας***(1).

---

(1) Ἂν x,y εἶναι αἱ καρτεσιαναὶ συντεταγμέναι ἑνὸς σημείου Μ τοῦ ἐπιπέδου καὶ θέσωμεν : $x=\sigma(u,v)$, $y=\varphi(u,v)$, ὅπου u καὶ v εἶναι δύο βοηθητικαὶ μεταβληταί, «*παράμετροι*», τὸ σημεῖον Μ ὁρίζεται, ἅμα τὰ u,v ὁρισθοῦν· καὶ ἀντιστρόφως. *Γεωμετρικῶς*, αὐτὸ σημαίνει, ὅτι μᾶς δίδονται δύο *γένη* καμπύλων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, τὰ : $\sigma_1(x,y)=u$ καὶ $\varphi_1(x,y)=v$ μὲ *παραμέτρους* τὰ u καὶ v· ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι *κάθε* καμπύλη τοῦ ἑνὸς γένους κόπτει *κάθε* καμπύλην τοῦ ἄλλου εἰς *ἓν μόνον* σημεῖον, τότε εἰς κάθε σημεῖον Μ θ' ἀντιστοιχῇ ἓν ὡρισμένον σύστημα τιμῶν τῶν u,v τὸ (u_1,v_1)· καὶ ἀντιστρόφως, εἰς κάθε σύστημα τιμῶν (u_1,v_1) ἓν ὡρισμένον σημεῖον Μ. Δι' αὐτὸ ὀνομάζονται γενικῶς αἱ παράμετροι u,v *καμπυλόγραμμοι συντεταγμέναι* τοῦ ἐπιπέδου· τοῦ σημείου δηλ. Μ συντεταγμέναι u,v εἶναι αἱ δύο τιμαὶ u_1,v_1 τῶν παραμέτρων, πού μας δίδουν τὰς δύο καμπύλας: $\sigma_1(x,y)=u_1$, $\varphi_1(x,y)=v_1$, τῶν ὁποίων τομὴ εἶναι τὸ σημεῖον Μ. (Μίαν καμπύλην τοῦ α΄ γένους εἰμποροῦμεν νὰ ἐκλέξωμεν ὡς *ἀξονικὴν καμπύλην* τῶν u, π.χ. τὴν $u=u_0$, καὶ μίαν τοῦ β΄ ὡς *ἀξονικὴν* καμπύλην τῶν v, π. χ. τὴν $v=v_0$). Πρέπει ὅμως νὰ μὴ νομίσωμεν, ὅτι αἱ καμπυλόγραμμοι συντεταγμέναι εἶναι *τὰ τόξα τῶν καμπύλων* κάθε γένους, ποὺ περιλαμβάνονται μεταξὺ δύο καμπύλων τοῦ ἄλλου γένους. Διότι τὰ τόξα αὐτὰ s_1,s_2 *δὲν εἶναι ἐν γένει τὰ ἴδια* μὲ τὰ u_1,v_1. (Δὲν ἐκλέγομεν δὲ ὡς συντεταγμένας τὰ τόξα, διότι, διὰ νὰ ὁρισθοῦν ὡς συναρτήσεις τῶν u,v, χρειάζονται ὁλοκληρώσεις). Ὅλα τὰ ὡρισμένα συστήματα συντεταγμένων, ποὺ θεωροῦμεν συνήθως, εἶναι μερικαὶ

Θὰ ἔχωμεν τότε διὰ ***κάθε*** σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου : $x=\sigma(u,v)$, $y=\varphi(u,v)$· ἂν ὅμως θεωρήσωμεν τὸ v ***ὡς συνάρτησιν τοῦ u,*** δηλ. ὑποθέσωμεν, ὅτι $v=\varrho(u)$, αἱ ἐξισώσεις : $x=\sigma(u,\varrho(u))$, $y=\varphi(u,\varrho(u))$ ὁρίζουν ***μίαν καμπύλην*** (μὲ παράμετρον τὸ u). Χάριν δὲ συντομίας καὶ συμμετρίας γράφομεν τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς ἁπλῶς : $x=\sigma(u,v)$, $y=\varphi(u,v)$, ὅπου ὅμως τὸ v τὸ ὑποθέτομεν ***ὄχι πλέον ἀνεξάρτητον,*** ἀλλὰ συνάρτησιν τοῦ u ($v=\varrho(u)$). Θὰ ἔχωμεν λοιπόν :

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv,\quad dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\text{· ἑπομένως :}$$

$$ds^2=\left[\frac{\partial x}{\partial u}d\cancel{x}+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right]^2+\left[\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right]^2,\text{ δηλ.}$$

$$ds^2=\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\right]du^2+2\left[\frac{\partial x}{\partial u}.\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}.\frac{\partial y}{\partial v}\right]dudv+$$
$$+\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\right]dv^2.$$

Τὸν γενικὸν αὐτὸν τύπον τὸν γράφομεν συνήθως, χάριν συντομίας, ὡς ἑξῆς :
$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2,$$

ὅπου : $E\equiv\sum\limits_{x,y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2$, $F\equiv\sum\limits_{x,y}\frac{\partial x}{\partial u}.\frac{\partial x}{\partial v}$, $G\equiv\sum\limits_{x,y}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2$

καὶ $\qquad v=\varrho(u),\qquad dv=\varrho'(u)du.$

Νὰ εὑρεθοῦν ἀπὸ τὸν τύπον αὐτὸν οἱ ***μερικοὶ*** διὰ τὰς καρτεσιανάς, τὰς πολικὰς καὶ τὰς διπολικὰς συντεταγμένας.

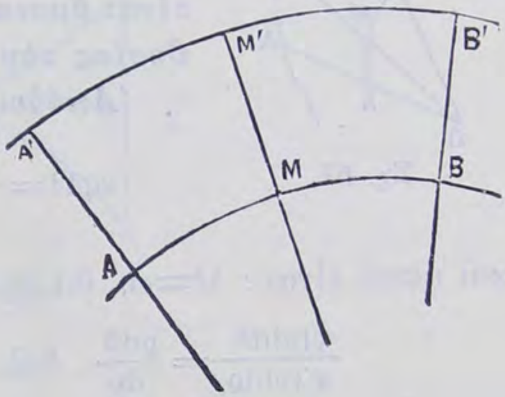
10) ***Ἀντιστοίχισις δύο καμπύλων.***—Ἂν μᾶς δοθοῦν δύο καμπύλαι : $y=\sigma(x)$ καὶ $Y=\Sigma(X)$, εἰμποροῦμεν νὰ ὁρίσωμεν ***κατ᾽ ἀπείρους τρόπους*** μίαν ***ἀντιστοίχισιν*** τῶν σημείων τῆς μιᾶς εἰς τὰ σημεῖα τῆς ἄλλης· ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν : $X=\varrho(x)$· τότε εἰς κάθε σημεῖον x_1 τῆς πρώτης θ᾽ ἀντιστοιχοῦν ἓν ἢ πολλὰ σημεῖα τῆς ἄλλης· ἂν δὲ θέλωμεν ἡ ἀντιστοίχισις αὐτὴ νὰ εἶναι ***ἰσόζυγος,*** δηλ. εἰς ἓν σημεῖον τῆς α΄ ν᾽ ἀντιστοιχῇ ἓν σημεῖον τῆς β΄ ***καὶ ἀντιστρόφως,*** ἀρκεῖ νὰ

περιπτώσεις τῶν καμπυλογράμμων· π.χ. διὰ τὰς *καρτεσιανάς,* τὰ δύο γένη τῶν καμπύλων εἶναι εὐθεῖαι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τοὺς ἄξονας· διὰ τὰς *πολικάς,* εὐθεῖαι ἀπὸ τὴν ἀρχὴν καὶ περιφέρειαι μὲ κέντρον τὴν ἀρχήν· διὰ τὰς *διπολικάς,* δύο γένη ὁμοκέντρων περιφερειῶν μὲ κέντρον τοὺς πόλους· κτλ..

θέσωμεν : $X = \alpha x + \beta$˙ τότε εἰς τὸ σημεῖον (x_1) θ' ἀντιστοιχῇ τὸ σημεῖον $(X_1 = \alpha x_1 + \beta)$.

Γεωμετρικῶς ἡ ἀντιστοίχισις εἰμπορεῖ νὰ ὁρισθῇ κατὰ ποικίλους τρόπους. Π.χ. εἰμποροῦμεν : 1) ν' αὐξήσωμεν ἢ νὰ ἐλαττώσωμεν τὰς καθέτους μιᾶς καμπύλης ***κατὰ σταθερὸν μῆκος ὅλας***˙ 2) νὰ κατασκευάσωμεν μιᾶς καμπύλης μίαν ***ὁμοίαν καὶ ὁμοιόθετον*** (ἀπὸ τὸ τυχὸν κέντρον)˙ 3) νὰ κατασκευάσωμεν ἄλλην καμπύλην ἀπὸ μίαν δοθεῖσαν ***μὲ τὰς ἀντιστρόφους ἀκτῖνας***˙ κτλ.

Θεώρημα 1ον : Αἱ καμπύλαι, ποὺ κατασκευάζονται μὲ τὴν αὔξησιν ἢ τὴν ἐλάττωσιν τῶν καθέτων μιᾶς καμπύλης κατὰ σταθερὸν μῆκος, ἔχουν εἰς τ' ἀντίστοιχα σημεῖά των παραλλήλους πρὸς τὴν πρώτην ἐφαπτομένας˙ καὶ ἀντιστρόφως.



Σχ. 50.

Ἀπόδειξις. Ἂς αὐξήσωμεν τὰς καθέτους κατὰ ἓν θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, ***μεταβλητὸν ἐν γένει***, τμῆμα (σχ. 50)˙ αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημ. M′ τῆς β′ καμπύλης θὰ εἶναι τότε : $X = x + a\xi$, $Y = y + a\eta$,

ὅπου a τὸ μῆκος τοῦ τμήματος καὶ ξ, η τὰ συνημίτονα τῆς καθέτου μὲ τοὺς ἄξονας. Θὰ εἶναι λοιπόν :

$$dX = dx + a d\xi + \xi da, \quad dY = dy + a d\eta + \eta da\text{˙} \quad \text{ἑπομένως καί :}$$

$$\xi dX + \eta dY = \xi dx + y dy + (\xi d\xi + \eta d\eta) a + (\xi^2 + \eta^2) da\text{˙}$$

ἀλλά : $\xi^2 + \eta^2 = 1$, $\xi d\xi + \eta d\eta = 0$ καί : $\xi dx + \eta dy = ds(\xi\alpha + \eta\beta) = 0$ (α, β τὰ συνημίτονα τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ M). Ὥστε, ἂν $da = 0$, δηλ. $a =$ σταθ., θὰ εἶναι καί : $\xi dX + \eta dY = 0$, ἢ $\xi \frac{dX}{dS} + \eta \frac{dY}{dS} = 0$˙

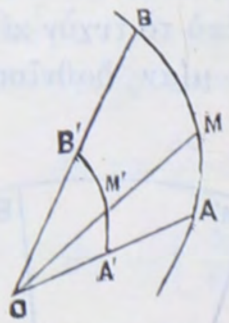
ἂν δὲ πάλιν : $\xi dX + \eta dY = 0$, θὰ εἶναι καί : $da = 0$, δηλ. $a =$ σταθ. Τὰς καμπύλας, ποὺ ἔχουν τὰς καθέτους των ***κοινὰς*** (καὶ ἑπομένως τὰς ἐφαπτομένας των ***παραλλήλους*** εἰς τὰ σημεῖα ***κάθε*** κοινῆς καθέτου) τὰς λέγομεν ***παραλλήλους***.

Θεώρημα 2ον : Τῶν ὁμοίων καὶ ὁμοιοθέτων καμπύλων αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τ' ἀντίστοιχα σημεῖα εἶναι παράλληλοι˙ καὶ ἀντιστρόφως.

$\alpha = \frac{dx}{ds}$ $\beta = \frac{dy}{ds}$

Ἀπόδειξις. α΄) Ἂν λάβωμεν τὸ κέντρον τῆς ὁμοιοθεσίας ὡς πόλον, θὰ ἔχωμεν προφανῶς (σχ. 51): $P=\varrho.a$· λοιπὸν $dP=ad\varrho$· ἐπομένως καί:

$$\varepsilon\varphi\Omega=\frac{Pd\vartheta}{dP}=\frac{\varrho a.d\vartheta}{ad\varrho}=\frac{\varrho d\vartheta}{d\varrho}=\varepsilon\varphi\omega.$$



Σχ. 51.

β΄) ***Ἀντιστρόφως***: ***Ἂν αἱ ἐφαπτόμεναι δύο καμπύλων εἰς τὰ δύο σημεῖα M καὶ M΄ τὰ εὑρισκόμενα ἐπὶ τῆς ἰδίας πολικῆς ἀκτῖνος εἶναι πάντοτε παράλληλοι, αἱ καμπύλαι εἶναι ὅμοιαι καὶ ὁμοιόθετοι, μὲ κέντρον ὁμοιοθεσίας τὸν πόλον.***

Ἀπόδειξις. Θὰ ἔχωμεν: $P=\varphi(\varrho)$· ἐπομένως:

$$\varepsilon\varphi\Omega=\frac{Pd\vartheta}{dP}=\frac{\varphi(\varrho)d\vartheta}{\varphi'(\varrho)d\varrho}.\quad \varepsilon\varphi\omega=\frac{\varrho d\vartheta}{d\varrho}\cdot$$

καὶ ἀφοῦ εἶναι: $\Omega=\omega$, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\varphi(\varrho)d\vartheta}{\varphi'(\varrho)d\varrho}=\frac{\varrho d\vartheta}{d\varrho},\ \delta\eta\lambda.\ \frac{\varphi(\varrho)}{\varphi'(\varrho)}=\varrho,\quad \ddot{\eta}\quad \frac{\varphi'(\varrho)}{\varphi(\varrho)}=\frac{1}{\varrho}$$

καὶ ἐπομένως: $l\varphi(\varrho)=l\varrho+c$ καί: $\varphi(\varrho)=\varrho.a$, δηλ. $P=\varrho.a$.

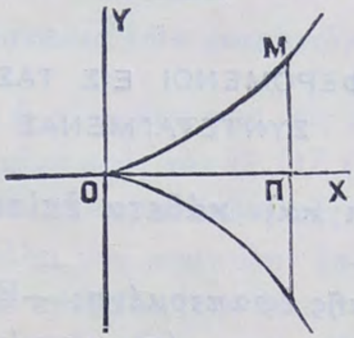
Σημείωσις.—Ἄλλα παραδείγματα τοιούτων ἀντιστοιχίσεων μᾶς παρέχουν τὰ προβλήματα: 7ον (σελ. 23), 6ον (σελ. 37) καὶ 7ον (σελ. 38).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΛΥΤΟΙ

1) Μῆκος τόξου τῆς **ἐκθετικῆς** καμπύλης : $y=e^{-\frac{x}{a}}$.

$$\left[\text{'Απ.}\ s=\text{τόξ}\,AM=\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1+y_1^2}-a\log y_1+a\log\left(\frac{a+\sqrt{a^2+y_1^2}}{a+\sqrt{a^2+1}}\right)\right].$$

2) Μῆκος τόξου τῆς καμπύλης : $ay^2=x^3$ $(\alpha>0)$ (σχ. 52).



Σχ. 52.

Εἶναι ἡ πρώτη καμπύλη, ποὺ εὑρέθη ἀκριβῶς τὸ ἀνάπτυγμά της (ἀπὸ τὸν Ἄγγλον *Neil* ***(Νέϊλ)***, 1657)

$$\left[\text{'Απ.}\ s=\text{τοξ}\,OM=\frac{8}{27}\,\alpha\left[\left(1+\frac{9x_1}{4\alpha}\right)^{3/2}-1\right]\right].$$

3) Νὰ δειχθῇ, ὅτι, ***ὅταν μία παραβολὴ κυλίεται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας, ἡ ἑστία της διαγράφει μίαν ἀλυσσοειδῆ*** (θὰ χρησιμοποιηθῇ ἡ ἄσκησις 1^{η}, σελ. 73).

4) Νὰ ἐκφρασθῇ μὲ τὰ ὁλοκληρώματα Γ τοῦ *Euler* ***("Οϊλερ)*** τὸ μῆκος τοῦ τόξου τοῦ λημνίσκου.

$$\left[\text{'Απ.}\ s=\alpha\sqrt{2}\int_0^1 u^{-\frac{3}{4}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}.du=\alpha\sqrt{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}=\right.$$

$$\left.=\alpha\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}{\sqrt{\pi}}\right].$$

5) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ τόξου τῆς καμπύλης :

$$y=\log\left(\frac{1}{\text{συν}x}\right)\ \text{ἀπὸ}\ x=0\ \text{ἕως}\ x=\frac{\pi}{4}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

ΚΑΜΠΥΛΑΙ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

Α΄) ΤΥΠΟΙ ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΟΙ ΕΙΣ ΤΑΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΣ

α΄) Ἐφαπτόμεναι καὶ κάθετα ἐπίπεδα μιᾶς καμπύλης.

72. ***Ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης.***—Εἰς κάθε **ὁμαλὸν** σημεῖον μιᾶς καμπύλης τοῦ χώρου : $y=\sigma(x)$, $z=\varphi(x)$ ὑπάρχει πάλιν πάντοτε μία ἐφαπτομένη ***ἐντελῶς ὡρισμένη*** καὶ ὁρίζεται ἀκριβῶς μὲ τὸν ***ἴδιον τρόπον***, μὲ τὸν ὁποῖον καὶ εἰς τὰς ἐπιπέδους καμπύλας (ἐδ.1).

Αἱ δὲ ἐξισώσεις της θὰ εὑρεθοῦν ὡς ἑξῆς. Τῆς τεμνούσης M_1M_2 αἱ ἐξισώσεις εἶναι :

$$Y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(X-x_1),\quad Z-z_1=\frac{z_2-z_1}{x_2-x_1}(X-x_1),$$

ἢ κατὰ τὸ θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς :

$$Y-y_1=\sigma'(x_0)(X-x_1),\qquad Z-z_1=\varphi'(x_0)(X-x_1)\cdot$$

καὶ ἑπομένως, ὅταν τὰ M_1, M_2, κινούμενα ἐπὶ τῆς καμπύλης, πέσουν εἰς τὸ M, θὰ ἔχωμεν τὰς ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης :

$$Y-y=\sigma'(x)(X-x),\qquad Z-z=\varphi'(x)(X-x)\ \text{ἢ καί :}$$

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x),\quad Z-z=\frac{dz}{dx}(X-x)\quad (1),$$

ἢ ἀκόμη, συμμετρικῶς : $\dfrac{X-x}{dx}=\dfrac{Y-y}{dy}=\dfrac{Z-z}{dz}$ (1α)

ἢ ἀκόμη καί : (1β) $\dfrac{X-x}{\alpha}=\dfrac{Y-y}{\beta}=\dfrac{Z-z}{\gamma}$, ὅπου :

$$\alpha\equiv\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}},\ \beta\equiv\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}},\ \gamma\equiv\frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

εἶναι τὰ συνημίτονα τῶν γωνιῶν τῆς ἐφαπτομένης μὲ τοὺς (***ὀρθογωνίους*** τώρα) ἄξονας.

73. ***Γεωμετρικὴ παράστασις τῶν διαφορικῶν τῶν*** y ***καὶ*** z.— Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1), ἂν θέσωμεν $X=x+\Delta x\equiv x+dx$, εὑρίσκομεν : $Y-y=dy$, $Z-z=dz$, δηλ. ***Τὰ διαφορικὰ*** dy ***καὶ*** dz ***τῶν*** y ***καὶ*** z ***τῆς καμπύλης εἶναι αἱ αὐξήσεις τῶν*** Y ***καὶ*** Z ***τῆς ἐφαπτομένης της. Ἑπομένως τὸ σημεῖον*** $N(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)$ ***εἶναι σημεῖον τῆς ἐφαπτομένης καὶ τὰ*** dx, dy, dz ***εἶναι αἱ συντεταγμέναι προβολαὶ ἑνὸς ἀνύσματος ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης.***

74. ***Γεωμετρικὴ παράστασις τῶν παραγώγων*** $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$.—Ἀπὸ τὰς δύο αὐτὰς ἐξισώσεις (1) ἡ α΄, ***μόνη της***, εἰς μὲν τὸν ***χῶρον*** παριστάνει ἓν ***ἐπίπεδον*** παράλληλον πρὸς τὸν ἄξ. OZ (τὸ ***ἐφαπτόμενον*** (καθὼς δεικνύει ἡ ***Θεωρία τῶν Ἐπιφανειῶν***) τῆς ***κυλινδρικῆς*** ἐπιφανείας : $y=\sigma(x)$, ποὺ προβάλλει τὴν καμπύλην ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου xy)· εἰς δὲ τὸ ***ἐπίπεδον*** xy μίαν ***εὐθεῖαν*** (τὴν ἐφαπτομένην τῆς προβολῆς: $y=\sigma(x)$ τῆς καμπύλης ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου xy). Ἡ δὲ β΄, μόνη της, εἰς τὸν ***χῶρον*** μέν, τὸ ***ἐπίπεδον***, ποὺ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸν ἄξ. OY καὶ ἐφάπτεται τῆς ***κυλινδρικῆς*** ἐπιφανείας $z=\varphi(x)$, ποὺ προβάλλει τὴν καμπύλην εἰς τὸ ἐπίπεδον xz· εἰς δὲ τὸ ***ἐπίπεδον*** xz, τὴν ***ἐφαπτομένην*** τῆς προβολῆς : $z=\sigma(x)$) τῆς καμπύλης ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου xz. Αἱ δύο δὲ ἐφαπτόμεναι τῶν προβολῶν τῆς καμπύλης εἶναι συγχρόνως καὶ αἱ προβολαὶ τῆς ἐφαπτομένης της. ***Ἑπομένως*** $\frac{dy}{dx}$ ***καὶ*** $\frac{dz}{dx}$ ***εἶναι οἱ συντελεσταὶ κατευθύνσεως τῶν δύο αὐτῶν ἐφαπτομένων.***

75. ***Διάφοροι μορφαὶ τῶν ἐξισώσεων τῆς ἐφαπτομένης.***—Ἀναλόγως πρὸς τὴν μορφὴν τῶν ἐξισώσεων τῆς καμπύλης, ἔχομεν καὶ τὰς ἑξῆς μορφὰς τῶν ἐξισώσεων τῆς ἐφαπτομένης της :

1) Ἂν $y=\sigma(x)$, $z=\varphi(x)$· τότε :

$$Y-y=\sigma'(x)(X-x),\quad Z-z=\varphi'(x)(X-x). \qquad (1')$$

2) Ἂν $\sigma_1(x,y)=0$, $\varphi_1(x,z)=0$· τότε :

$$Y-y=-\frac{\sigma_1(x,y)_x}{\sigma_1(x,y)_y}(X-x),\qquad Z-z=-\frac{\varphi_1(x,z)_x}{\varphi_1(x,z)_z}(X-x),$$

ἢ συμμετρικῶς :

$$(1'')\quad \begin{cases} (X-x)\sigma_1(x,y)_x+(Y-y)\sigma_1(x,y)_y=0, \\ (X-x)\varphi_1(x,z)_x+(Z-z)\varphi_1(x,z)_z=0. \end{cases}$$

3) Ἂν $\varrho_1(x,y,z)=0$, $\varrho_2(x,y,z)=0$· τότε :

$$(1''')\left\{\begin{array}{l}(X-x)\frac{\partial\varrho_1}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial\varrho_1}{\partial y}+(Z-z)\frac{\partial\varrho_1}{\partial z}=0,\\ (X-x)\frac{\partial\varrho_2}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial\varrho_2}{\partial y}+(Z-z)\frac{\partial\varrho_2}{\partial z}=0.\end{array}\right.$$

(διότι ἔχομεν τότε : $(\alpha)\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial\varrho_1}{\partial x}dx+\frac{\partial\varrho_1}{\partial y}dy+\frac{\partial\varrho_1}{\partial z}dz=0,\\ \frac{\partial\varrho_2}{\partial x}dx+\frac{\partial\varrho_2}{\partial y}dy+\frac{\partial\varrho_2}{\partial z}dz=0\cdot\end{array}\right.$

καὶ ἂν γράψωμεν τὰς ἐξισώσεις (1) τῆς ἐφαπτομένης ὡς ἑξῆς :

$X-x=\omega dx$, $Y-y=\omega dy$, $Z-z=\omega dz$, καὶ θέσωμεν τὰς τιμὰς αὐτὰς τῶν dx, dy, dz εἰς τὰς (α), εὑρίσκομεν τὰς (1''')).

Σημείωσις. Καθεμία ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1'''), ***μόνη της,*** παριστάνει (καθὼς ἀποδεικνύεται εἰς τὴν ***Θεωρίαν τῶν Ἐπιφανειῶν***) τὸ ***ἐφαπτόμενον*** ἐπίπεδον τῆς ἀντιστοίχου ἐπιφανείας, ἀπὸ τὰς δύο : $\varrho_1(x,y,z)=0$ καὶ $\varrho_2(x,y,z)=0$, τῶν ὁποίων τομὴ εἶναι ἡ καμπύλη.

4) Ἂν $x=\sigma(u)$, $y=\varphi(u)$, $z=f(u)$· τότε :

$$\frac{X-x}{\sigma'(u)}=\frac{Y-y}{\varphi'(u)}=\frac{Z-z}{f'(u)} \quad (1'''').$$

76. ***Ἐξίσωσις τοῦ καθέτου ἐπιπέδου.***—Τὸ ἐπίπεδον τὸ κάθετον πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς καμπύλης εἰς τὸ Μ λέγεται ***κάθετον ἐπίπεδον τῆς καμπύλης εἰς τὸ Μ.***

Ἡ ἐξίσωσίς του, ἂν ὑποθέσωμεν τοὺς ἄξονας ὀρθογωνίους, εἶναι :

$(X-x)dx+(Y-y)dy+(Z-z)dz=0$ ἢ συντομώτερα :

$$\sum_{x,y,z}(X-x)dx=0, \quad \text{ἢ καὶ:} \quad \sum(X-x)\alpha=0.$$

Λαμβάνει δὲ καὶ ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ διαφόρους μορφάς, ἀντιστοίχους πρὸς τὰς μορφὰς τῆς ἐξισώσεως τῆς ἐφαπτομένης, δηλ.

1) $y=\sigma(x)$, $z=\varphi(x)$: $\quad X-x+(Y-y)\sigma'(x)+(Z-z)\varphi'(x)=0.$

2) $\sigma_1(x,y)=0$, $\varphi_1(x,z)=0$: $X-x=\dfrac{\sigma_{1x}(x,y)}{\sigma_{1y}(x,y)}(Y-y)+\dfrac{\varphi_{1x}(x,z)}{\varphi_{1z}(x,z)}(Z-z)$,

ἢ μὲ μορφὴν ὁριζούσης : $\begin{vmatrix} X-x & \sigma_{1x} & \varphi_{1x} \\ Y-y & \sigma_{1y} & 0 \\ Z-z & 0 & \varphi_{1z}\end{vmatrix}=0.$

3) $\varrho_1(x,y,z)=0,\ \varrho_2(x,y,z)=0$:

$$(X-x)\begin{vmatrix} \varrho_{1y} & \varrho_{2y} \\ \varrho_{1z} & \varrho_{2z} \end{vmatrix} + (Y-y)\begin{vmatrix} \varrho_{1z} & \varrho_{2z} \\ \varrho_{1x} & \varrho_{2x} \end{vmatrix} + (Z-z)\begin{vmatrix} \varrho_{1x} & \varrho_{2x} \\ \varrho_{1y} & \varrho_{2y} \end{vmatrix} = 0,$$

ἢ συντομώτερα :

$$\begin{vmatrix} X-x & \varrho_{1x} & \varrho_{2x} \\ Y-y & \varrho_{1y} & \varrho_{2y} \\ Z-z & \varrho_{1z} & \varrho_{2z} \end{vmatrix} = 0.$$

4) $x=\sigma(u),\ y=\varphi(u),\ z=f(u)$:

$$(X-x)\sigma'(u)+(Y-y)\varphi'(u)+(Z-z)f'(u)=0.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τοῦ καθέτου ἐπιπέδου εἰς ***πλαγιογωνίους*** ἄξονας.

2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῶν ***ἐφαπτομένων*** ἐπιπέδων μιᾶς καμπύλης.

Ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα, μιᾶς καμπύλης εἰς ἓν σημεῖόν της M λέγονται τὰ ∞^1 ἐπίπεδα (δηλ. τὸ ***γένος*** τῶν ἐπιπέδων), ποὺ περνοῦν ἀπὸ τὴν ἐφαπτομένην της εἰς τὸ M.

$$\Big[\text{Ἀπ. } A[(Y-y)dz-(Z-z)dy]=B[(Z-z)dx-(X-x)dz\Big],$$

$$\left(\text{ὅπου } \frac{A}{B} \text{ ἡ παράμετρος}\right)\Big].$$

3) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς τὸ M, ποὺ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸν ἄξ. τῶν z. $\left[\text{Ἀπ. } (Y-y)=\frac{dy}{dx}(X-x)\right].$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1ον.

77. ***Νὰ εὑρεθοῦν αἱ καμπύλαι, τῶν ὁποίων ἡ ἐφαπτομένη περνᾷ πάντοτε ἀπὸ ἓν σταθερὸν σημεῖον.***

Ἂν λάβωμεν τὸ σημεῖον αὐτὸ ὡς ἀρχήν, θὰ ἔχωμεν εἰς κάθε σημεῖον τῶν ζητουμένων καμπύλων:

$$(\alpha)\ \frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z},\ \text{δηλ. } ly=lx+c,\ \ lz=lx+c',$$

ἢ καὶ $y=c_1x,\ z=c_2x$· ὥστε:

Αἱ καμπύλαι, ποὺ ζητοῦμεν, εἶναι τὸ σμῆνος τῶν εὐθειῶν, ποὺ περνοῦν ἀπὸ τὸ σταθερὸν σημεῖον.

2^{ον}.

78. ***Νὰ εὑρεθοῦν αἱ καμπύλαι, τῶν ὁποίων τὸ κάθετον ἐπίπεδον περνᾷ πάντοτε ἀπὸ ἓν σταθερὸν σημεῖον.***

Ἂν λάβωμεν πάλιν τὸ σημεῖον αὐτὸ ὡς ἀρχήν, θὰ ἔχωμεν εἰς ὅλα τὰ σημεῖα τῶν καμπύλων αὐτῶν:

$$xdx+ydy+zdz=0,\ \ \text{δηλ.}\ \ (1)\ x^2+y^2+z^2=c\equiv\alpha^2\text{· ὥστε:}$$

Αἱ ζητούμεναι καμπύλαι κεῖνται ὅλαι ἐπάνω εἰς τὰς ἐπιφανείας τοῦ γένους (1) (παράμετρος τὸ α^2), ποὺ εἶναι σφαῖραι μὲ κοινὸν κέντρον τὸ δοθὲν σημεῖον. Δὲν ὁρίζονται λοιπὸν αἱ καμπύλαι, μόνον περιορίζονται ***νὰ εἶναι «σφαιρικαί».*** Θὰ ὁρισθοῦν ἐντελῶς, ἄν μας δοθῇ δι' αὐτὰς καὶ ***ἄλλο ἓν ἐπίταγμα***, ἢ ***ἄλλο ἓν γένος ἐπιφανειῶν***, ἐπὶ τοῦ ὁποίου πρέπει νὰ κεῖνται.

3^{ον}.

79. ***Νὰ εὑρεθοῦν αἱ καμπύλαι, τῶν ὁποίων ἡ ἐφαπτομένη κόπτει πάντοτε μίαν δοθεῖσαν εὐθεῖαν.***

Ἂν τὴν εὐθεῖαν αὐτὴν τὴν λάβωμεν ὡς ἄξονα τῶν z, αἱ προβολαὶ τῶν ἐφαπτομένων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου xy, θὰ περνοῦν ὅλαι ἀπὸ τὴν ἀρχήν. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν $\frac{-x}{dx}=\frac{-y}{dy}$ ἢ: $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$ καί: $ly=lx+c_1$, δηλ. $y=cx$· ὥστε: ***Αἱ ζητούμεναι καμπύλαι εἶναι τυχοῦσαι ἐπίπεδοι καμπύλαι, κείμεναι ἐπὶ ἐπιπέδου, ποὺ περνᾷ ἀπὸ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν.***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ καμπύλαι, τῶν ὁποίων ἡ ἐφαπτομένη μένει πάντοτε παράλληλος πρὸς μίαν δοθεῖσαν εὐθεῖαν (καὶ ἑπομένως τὸ κάθετον ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς ἓν ἐπίπεδον).

['Απ. Αἱ εὐθεῖαι γραμμαί].

2) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ καμπύλαι, τῶν ὁποίων τὸ κάθετον ἐπίπεδον μένει πάντοτε παράλληλον πρὸς μίαν δοθεῖσαν εὐθεῖαν (τὸν ἄξ. OZ) (καὶ ἑπομένως ἡ ἐφαπτομένη των παράλληλος πρὸς ἓν δοθὲν ἐπίπεδον).

['Απ. ***Τυχοῦσαι*** ἐπίπεδοι καμπύλαι ἐπὶ ἐπιπέδου ***παραλλήλου*** πρὸς τὸ xy]. $0 \cdot dx + 0 \cdot dy + dz = 0$

β΄) Διαφορικὸν τοῦ τόξου τῶν καμπύλων τοῦ χώρου.

80. ***Ὁρισμὸς τοῦ μήκους τοῦ τόξου.***—Εἶναι ὁ ἴδιος μὲ τὸν τοῦ μήκους τοῦ τόξου τῶν ἐπιπέδων καμπύλων. Καὶ πάλιν δὲ ὑποθέτομεν, ὅτι εἰς ***κάθε*** σημεῖον τοῦ τόξου ὑπάρχει μία ὡρισμένη ἐφαπτομένη· (δηλ. ***ἀναλυτικῶς,*** ὅτι αἱ συναρτήσεις $\sigma(x)=y$ καὶ $\varphi(x)=z$ εἶναι διαφορίσιμοι διὰ τὰς τιμὰς τοῦ x εἰς ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ τόξου).

81. ***Εὕρεσις τοῦ διαφορικοῦ τοῦ τόξου.***—Ἂν λάβωμεν μίαν τυχοῦσαν χορδὴν τοῦ τόξου, τὴν MM΄ (δηλ. πλευρὰν τῆς ἐγγεγραμμένης τεθλασμένης), θὰ ἔχωμεν πάλιν, καθὼς καὶ εἰς τὰς ἐπιπέδους καμπύλας (ἄξ. ὀρθογ.):

$$MM'=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}, \text{ ἢ } MM'=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}\,.\Delta x\cdot$$

ἐπειδὴ ὅμως ἡ τετρ. ῥίζα ἔχει ὅριον (διὰ $\Delta x=0$) τήν:

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}, \text{ θὰ ἔχωμεν :}$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}+\vartheta$$

(ὅπου ϑ ἀπειροστόν). Τὸ μῆκος λοιπὸν T τῆς τεθλασμένης θὰ εἶναι:

$$T=\Sigma\left[\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}+\vartheta\right]\Delta x,$$

1) $\frac{dx}{\lambda}=\frac{dy}{\mu}=\frac{dz}{\nu}$ $dy=\frac{\mu}{\lambda}dx$ $y=Qx+c_1$, $z=Px+c_2$ εὐθεῖαι

ἢ καί : $T=\sum\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.\Delta x+\sum\vartheta.\Delta x\cdot$

καὶ ἑπομένως :

$$\text{ορ}T=\text{τόξον } s_1=\text{ορ}\sum\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.\Delta x+\text{ορ}\sum\vartheta.\Delta x\cdot$$

καὶ τὸ μὲν β′ ἄθροισμα ἔχει ὅριον τὸ 0 (διότι εἶναι $\leq\Theta\Delta x=\sum\Theta(\beta-\alpha)$, ὅπου Θ εἶναι τὸ μεγαλύτερον ἀπὸ τ' ἀπειροστὰ ϑ, θετικῶς λαμβανόμενον, καὶ α, β εἶναι αἱ δύο ***ἄκραι*** τετμημέναι τοῦ τόξου)· τὸ δὲ α′ ἔχει ὅριον ἓν ὡρισμένον ἁπλοῦν ὁλοκλήρωμα (διότι προφανῶς εἶναι:

$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\equiv f(x)\Big)\cdot$ ὥστε :

$$\text{τοξ.}AB\equiv s_1=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.dx.$$

Ἂν τώρα ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ τέλος τοῦ τόξου εἶναι μεταβλητόν, θὰ γράψωμεν x ἀντὶ β ὡς ἄνω ὅριον τοῦ ὁλοκληρώματος :

$$\text{τοξ.}AM\equiv s=\int_\alpha^x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.dx.$$

Ἀπὸ τὸν τύπον δὲ αὐτὸν συνάγομεν :

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.dx=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}\cdot \text{ ὥστε :}$$

Τὸ διαφορικὸν τοῦ τόξου εἶναι ἡ διαγώνιος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ποὺ ἔχει ἐφεξῆς ἀκμὰς τὰ διαφορικὰ τῶν συντεταγμένων. Ἑπομένως (ἐδ. 73) ***εἶναι τὸ τμῆμα ΜΝ τῆς ἐφαπτομένης, ποὺ ἔχει προβολὰς ἐπὶ τῶν ἀξόνων τὰ διαφορικὰ τῶν συντεταγμένων.***

Σημείωσις. Ἂν ἡ καμπύλη κεῖται ἐπὶ ***ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ*** xy, ὁ τύπος αὐτὸς καταντᾷ ὁ ἀντίστοιχος τῶν ἐπιπέδων καμπύλων : $ds^2=dx^2+dy^2$.

82. ***Ὅριον τοῦ λόγου τοῦ τόξου πρὸς τὴν χορδήν του.—Τὸ ὅριον αὐτὸ εἶναι πάλιν*** (διὰ τὸ τυχὸν τόξον τῆς τυχούσης καμπύλης) ***ἴσον μὲ τὴν μονάδα*** (διὰ ὅρ. τόξου = 0). Ἀπόδειξις ἐντελῶς ἡ

ἰδία : Ἔχομεν : $\frac{\Delta s}{\text{χορδ.}MM'}=\frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}}$,

ἢ καί : $\frac{\Delta s}{MM'}=\frac{\frac{\Delta s}{\Delta x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}}$· ἑπομένως :

$$\text{ορ}\frac{\Delta s}{MM'}=\frac{\frac{ds}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}=1.$$

83. ***Γωνίαι τῆς ἐφαπτομένης μὲ τοὺς ἄξονας.***—Αἱ ἐκφράσεις τῶν συνημιτόνων α,β,γ τῶν γωνιῶν αὐτῶν, τὰς ὁποίας εὑρήκαμεν εἰς τὸ ἐδ. 72 :

$$\alpha=\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}},\ \beta=\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}},\ \gamma=\frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}},$$

γράφονται τώρα συντομώτερα ὡς ἑξῆς :

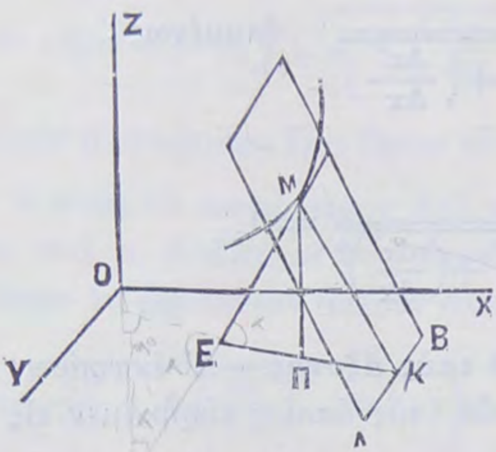
$$\alpha=\frac{dx}{ds},\ \beta=\frac{dy}{ds},\ \gamma=\frac{dz}{ds}\cdot\ \text{δηλ.}$$

Τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας τῆς ἐφαπτομένης πρὸς κάθε ἄξονα εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ διαφορικοῦ τῆς πρὸς τὸν ἄξονα τοῦτον συντεταγμένης τῆς καμπύλης διὰ τοῦ διαφορικοῦ τοῦ τόξου.

Παρατήρησις.—Τὰ συνημίτονα : $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ εἶναι ***ἐκείνου τοῦ μέρους τῆς ἐφαπτομένης, τὸ ὁποῖον φέρει ἀπὸ τὴν ἐπαφὴν πρὸς τὸ μέρος, ποὺ αὐξάνει τὸ τόξον***· πραγματικῶς, τὸ μέρος αὐτὸ τῆς ἐφαπτομένης σχηματίζει μὲ τὸν θετ. ἡμιάξ. OX ***ὀξεῖαν*** μὲν γωνίαν (μὲ συνημίτονον ἑπομένως ***θετικόν***), ἂν τὸ x καὶ τὸ s αὐξάνουν ***ὁμοσήμως*** $\left(\text{τότε δὲ } \frac{dx}{ds} \text{ εἶναι } \textbf{θετικόν}\right)$· ἀμβλεῖαν ὅμως, ἂν συμβαίνῃ τὸ ἀντίθετον $\left(\text{τότε δὲ } \frac{dx}{ds} \text{ εἶναι ἀρνητικόν}\right)$. Τὸ ἴδιον δὲ προφανῶς ἀληθεύει καὶ διὰ τοὺς δύο ἄλλους ἄξονας.

γ') Ὑφαπτομένη, ὑποκάθετος, ἐπεφαπτομένη, ἐπικάθετος.

84. ***Ὁρισμὸς καὶ ὑπολογισμὸς τῶν καρτεσιανῶν τμημάτων : ὑφαπτομένης, ὑποκαθέτου, ἐπεφαπτομένης καὶ ἐπικαθέτου.*** — Ἂν ὑποθέσωμεν τοὺς ἄξονας ὀρθογωνίους καὶ ὀνομάσωμεν (σχ 53) Ε τὴν τομὴν τοῦ ἐπιπέδου xy ἀπὸ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Μ καὶ Π τὸν πόδα τῆς κατηγμένης τοῦ Μ, ἡ εὐθεῖα ΕΠ κόπτει τὴν τομὴν ΑΒ τοῦ καθέτου ἐπιπέδου μὲ τὸ ἐπίπεδον xy εἰς ἓν σημεῖον Κ· ὁρίζομεν τώρα ὡς :



Σχ. 53.

1) ***Ὑφαπτομένην*** (τῆς καμπύλης εἰς τὸ Μ) τὸ τμῆμα ΕΠ, 2) ***Ὑποκάθετον***, τὸ ΠΚ, 3) ***Ἐπεφαπτομένην***, τὸ ΜΕ καὶ 4) ***Ἐπικάθετον***, τὸ ΜΚ.

Τὰ μήκη τῶν τεσσάρων αὐτῶν τμημάτων τὰ εὑρίσκομεν εὐκολώτατα ἀπὸ τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα : ΜΠΕ, ΜΠΚ καὶ ἔχομεν :

$$\text{ΕΠ}=z\,\sigma\varphi\tau, \quad \text{ΠΚ}=z\,\varepsilon\varphi\tau \quad (\tau=\text{γων. ΠΕΜ}=\text{γων. ΠΜΚ})\cdot$$

εἶναι ὅμως : γων. $\tau=$γων. ἐφαπτομένης καὶ ἐπιπέδου $xy=90^\circ-\tau'$ (γων. ἐφαπτομένης καὶ ἄξ. ΟΖ)· ἐπομένως : $\text{ΕΠ}=z\,\varepsilon\varphi\tau'$, $\text{ΠΚ}=z\,\sigma\varphi\tau'$ καὶ ἐπειδὴ $\sigma\upsilon\nu\tau'=\frac{dz}{ds}$, θὰ εἶναι :

$$\eta\mu\tau'=\frac{\sqrt{ds^2-dz^2}}{ds}=\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{ds}, \quad \varepsilon\varphi\tau'=\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dz}.$$

Ἔχομεν λοιπὸν τελικῶς τοὺς δύο τύπους :

$$\text{ΕΠ}=\frac{z\sqrt{dx^2+dy^2}}{dz} \quad \text{καὶ} \quad \text{ΠΚ}=\frac{z\,dz}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καί : $\text{ΜΕ}=\frac{z}{\eta\mu\,\tau}$ καὶ $\text{ΜΚ}=\frac{z}{\sigma\upsilon\nu\tau}$, ἢ: $\text{ΜΕ}=\frac{z}{\sigma\upsilon\nu\tau'}$, $\text{ΜΚ}=\frac{z}{\eta\mu\tau'}$, εὑρίσκομεν τελικῶς καὶ τοὺς δύο τύπους :

$$\text{ΜΕ}=\frac{z\,ds}{dz}, \qquad \text{ΜΚ}=\frac{z\,ds}{\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

Σημείωσις α'.—Οἱ τύποι αὐτοὶ διὰ τὰ τμήματα ΕΠ, ΠΚ, ΜΕ καὶ ΜΚ ἀποτελοῦν προφανῶς γενίκευσιν τῶν ἀντιστοίχων τύπων τῶν ἐπιπέδων καμπύλων καὶ καταντοῦν ἐκεῖνοι, ὅταν ἡ καμπύλη κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου xz.

Σημείωσις β'.—Αἱ προηγούμεναι ἐκφράσεις τῶν τμημάτων ΕΠ, ΠΚ, ΜΕ, ΜΚ μεταβάλλονται εἰς ***πλαγιογωνίους*** ἄξονας· πλὴν τῆς ἐκφράσεως τῆς ὑφαπτομένης, ποὺ (ὅταν ἡ γωνία ΧΟΥ εἶναι ***ὀρθὴ***) μένει πάλιν ἡ ἰδία (καθὼς καὶ εἰς τὰς ἐπιπέδους καμπύλας)· πραγματικῶς, ἡ ἀπόστασις ΕΠ εὑρίσκεται καὶ ἀπὸ τὸν τύπον τῆς ἀποστάσεως δύο σημείων τοῦ ἐπιπέδου (εἰς ***ὀρθογωνίους*** ἄξ. ΟΧ, ΟΥ):

$$\delta = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

ἂν εὑρεθοῦν αἱ συντεταγμέναι τῶν Ε καὶ Π· καὶ τοῦ μὲν Π εἶναι: x,y,0, τοῦ δὲ Ε μᾶς τὰς δίδουν αἱ ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης:

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x),\qquad Z-z=\frac{dz}{dx}(X-x),$$

ἢ καί: $$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x),\qquad Z-z=\frac{dz}{dy}(Y-y),$$

$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}=\frac{-z}{dz}$

ἂν θέσωμεν εἰς τὰς τελευταίας: Z=0· καὶ εἶναι:

$X_1=x-$

$$X_1=x-z\frac{dx}{dz},\quad Y_1=y-z\frac{dy}{dz}\cdot$$ θὰ ἔχωμεν λοιπόν $Y_1=$

$$E\Pi=z\sqrt{\frac{dx^2}{dz^2}+\frac{dy^2}{dz^2}}=\frac{z\sqrt{dx^2+dy^2}}{dz}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ (¹)

1ον.

85. ***Νὰ εὑρεθοῦν αἱ καμπύλαι, τῶν ὁποίων ἡ ἐφαπτομένη εἰς κάθε σημεῖον σχηματίζει σταθερὰν γωνίαν (φ) μὲ ἓν δοθὲν***

(¹) **Ἐπειδὴ μία καμπύλη τοῦ χώρου ὁρίζεται ἀπὸ δύο ἐξισώσεις μεταξὺ τῶν συντεταγμένων τῶν σημείων της, εἶναι φανερόν, ὅτι, ἂν μᾶς ζητηθοῦν αἱ καμ-**

ἐπίπεδον (ἢ καὶ μὲ μίαν δοθεῖσαν εὐθεῖαν : τὴν κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον).

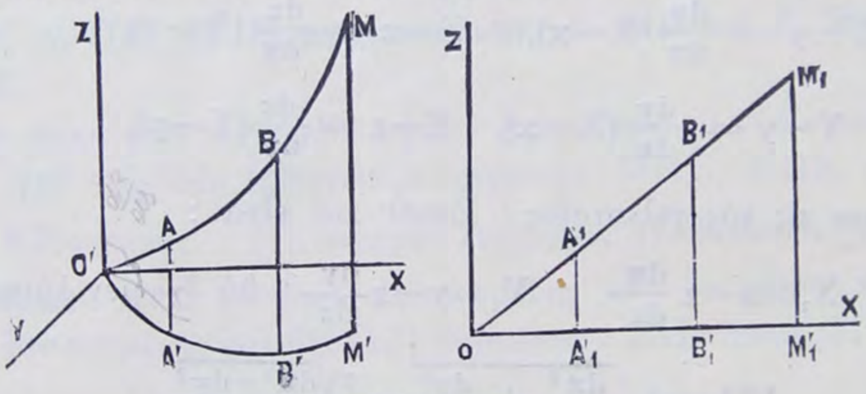
α΄) Φέρομεν ἀπὸ τὸ τυχὸν σημεῖον μιᾶς ἀπὸ τὰς ζητουμένας καμπύλας ἓν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ δοθὲν καὶ ἐκλέγομεν ὡς ἀρχὴν μὲν τὸ σημεῖον αὐτὸ O, ὡς ἐπίπεδον δὲ τῶν xy τὸ ἐπίπεδον αὐτό· Θὰ ἔχωμεν τότε εἰς κάθε σημεῖον τῆς καμπύλης :

$$\frac{dz}{ds} = \eta\mu\varphi = \sigma\tau\alpha\vartheta. \equiv \frac{1}{\alpha} \cdot \quad \delta\eta\lambda.\ s = \alpha z + c \cdot$$

καὶ ἂν λάβωμεν ὡς ἀρχὴν τοῦ τόξου τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων, θὰ ἔχωμεν $c=0$, δηλ. $s=\alpha z$· ὥστε :

Αἱ ζητούμεναι καμπύλαι πρέπει (καὶ ἀρκεῖ) νὰ ἔχουν τόξον ἀνάλογον τῆς κατηγμένης τοῦ ἄκρου του.

β΄) Διὰ νὰ εὕρωμεν τώρα, ***ποῖαι*** καμπύλαι ἔχουν τὴν ἰδιότητα αὐτήν, ἂς γράψωμεν τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν, ποὺ προβάλλει τὴν



Σχ. 54—55.

καμπύλην εἰς τὸ ἐπίπεδον xy· ἔπειτα δὲ ἂς τὴν «***ἐκτυλίξωμεν***» ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν xz· τότε (σχ. 54—55) ἡ μὲν βάσις της O΄A΄B΄M΄ (δηλ. ἡ προβολὴ τῆς καμπύλης τοῦ χώρου) θὰ μετατραπῇ προφανῶς εἰς μίαν

πύλαι, ποὺ ἐπαληθεύουν ἓν ***μόνον*** δοθὲν ἐπίταγμα (ὡς πρὸς τὰ προηγούμενα ἀνύσματα ἢ τὰς γωνίας, ἢ τὴν ἐφαπτομένην ἢ τὸ κάθετον ἐπίπεδον), τὸ πρόβλημα δὲν εἶναι ὡρισμένον· αἱ καμπύλαι ἁπλῶς ***περιορίζονται*** (νὰ κεῖνται ἐπὶ ὡρισμένου εἴδους ἐπιφανειῶν), ἀλλὰ δὲν ***ὁρίζονται***. Διὰ νὰ ὁρισθοῦν ἐντελῶς, πρέπει νὰ μᾶς δοθοῦν ***δύο*** ἐπιτάγματα, ποὺ ἀποτελοῦν τότε ἓν ***σύστημα*** διαφορικῶν ἐξισώσεων (α΄ τάξεως)· ὅταν δὲ αὐτὸ ὁλοκληρωθῇ, θά μας δώσῃ δύο ἐξισώσεις τῆς μορφῆς : $\sigma(x,y,z,c_1)=0$ καὶ $\varphi(x,y,z,c_2)=0$, δηλ. ἓν ***σμῆνος*** καμπύλων (ἀφοῦ ἔχομεν ***δύο*** παραμέτρους c_1, c_2).

ἰσομήκη εὐθεῖαν γραμμὴν ἐπὶ τοῦ ἄξ. ΟΧ, ἡ δὲ καμπύλη τοῦ χώρου θὰ μετατραπῇ εἰς μίαν ἄλλην ***ἐπίπεδον καὶ ἰσομήκη*** καμπύλην. Κατὰ τὸ «***ἐκτύλιγμα***» ὅμως αὐτὸ αἱ κατηγμέναι τῶν σημείων τῆς καμπύλης τοῦ χώρου μένουν προφανῶς αἱ ἴδιαι κατὰ τὸ μῆκος, γίνονται δὲ αἱ τεταγμέναι z τῆς ἐπιπέδου καμπύλης, ποὺ εἶναι τὸ ***ἐκτύλιγμα*** τῆς ἀρχικῆς. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν καὶ διὰ τὴν ἐπίπεδον αὐτὴν καμπύλην: $s_1=az$ ($s_1=s$). Αὐτὴ ὅμως ἡ σχέσις, καθὼς ἀπεδείξαμεν (ἐδ. 68, πρόβλ. 6ον), ἰσχύει ***μόνον διὰ τὰς εὐθείας γραμμάς***· ὥστε :

Κάθε τοιαύτη ζητουμένη καμπύλη μετατρέπεται εἰς εὐθεῖαν γραμμήν, ὅταν ὁ κύλινδρος, ποὺ τὴν προβάλλει ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου, ἐκτυλιχθῇ ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου.

Καὶ ἀντιστρόφως : ***Ἂν τυλίξωμεν ἓν ἐπίπεδον ἐπὶ τῆς τυχούσης κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, κάθε εὐθεῖά του θὰ μετατραπῇ εἰς μίαν καμπύλην, ποὺ ἡ ἐφαπτομένη της θὰ σχηματίζῃ σταθερὰν γωνίαν πρὸς ἓν τυχὸν ἐπίπεδον κάθετον πρὸς τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν.***—Διότι, ἂν λάβωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, μὲ ἀρχὴν ἓν τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας, ἄξονας ὀρθογωνίους ΟΧ, ΟΖ, ἀπὸ τοὺς ὁποίους ὁ ΟΖ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς εὐθείας, ποὺ ἐφαρμόζουν ἐπὶ τῶν γενετειρῶν τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας κατὰ τὴν τύλιξιν, ἔχομεν διὰ τὴν εὐθεῖαν $s_1=\alpha z$· καὶ ἐπειδὴ καὶ τὸ z καὶ τὸ s_1 διατηροῦν τὰ μήκη των κατὰ τὴν τύλιξιν, θὰ ἰσχύῃ ἡ ἰδία σχέσις καὶ διὰ τὴν καμπύλην, εἰς τὴν ὁποίαν μετατρέπεται ἡ εὐθεῖα, δηλ. θὰ εἶναι καὶ δι᾽ αὐτήν : $s=\alpha z$ ($s=s_1$), ἢ καί : $\frac{dz}{ds}=\frac{1}{\alpha}$· ὥστε :

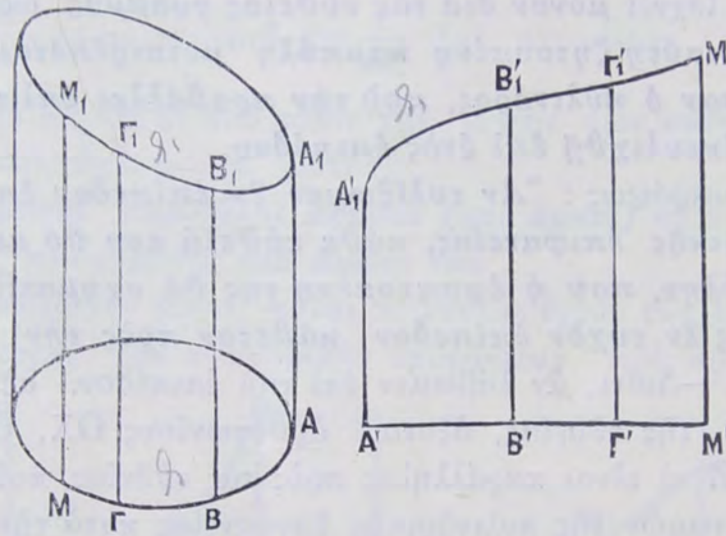
Κάθε καμπύλη, ποὺ παράγεται ἀπὸ μίαν τυχοῦσαν εὐθεῖαν γραμμήν, ὅταν ἓν ἐπίπεδον, ποὺ περιέχει τὴν εὐθεῖαν, τυλιχθῇ ἐπὶ τῆς τυχούσης κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, ἔχει τὴν ζητηθεῖσαν ἰδιότητα. Καὶ κάθε καμπύλη, ποὺ ἔχει τὴν ἀπαιτηθεῖσαν ἰδιότητα, παράγεται κατ᾽ αὐτὸν τρόπον ἀπὸ μίαν εὐθεῖαν γραμμήν.

Αἱ καμπύλαι τοῦ εἴδους αὐτοῦ εἶναι ***στρεβλαὶ*** (δηλ. ὄχι ἐπίπεδοι) καὶ λέγονται ***(στερεαὶ) κυλινδρικαὶ*** ἕλικες· ἔχουν δὲ καὶ τὴν ἰδιότητα νὰ εἶναι ***ὁ συντομώτερος δρόμος*** ἀπὸ ἓν σημεῖον εἰς ἄλλο τῆς ἐπιφανείας, ὅταν τὰ σημεῖα αὐτὰ δὲν κεῖνται οὔτε ***ἐπὶ τῆς ἰδίας γενετείρας,*** οὔτε ***ἐπὶ τῆς ἰδίας καθέτου τομῆς*** τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας[1].

---

(1) Μεταξὺ τῶν ἀπείρων γραμμῶν, ποὺ φέρουν ἀπὸ ἓν σημεῖον εἰς ἄλλο μιᾶς *τυχούσης* ἐπιφανείας *καὶ κεῖνται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας*, ὑπάρχει πάντοτε

γ΄) Ὄχι μόνον τὸ μῆκος κάθε **εὐθείας** τοῦ ἐπιπέδου δὲν μεταβάλλεται κατὰ τὴν τύλιξιν, ἀλλὰ οὔτε τὸ μῆκος τῆς τυχούσης ***καμπύλης*** τοῦ ἐπιπέδου· πραγματικῶς, ἂς κατασκευάσωμεν πρῶτα γεωμετρικῶς τὸ ***ἐκτύλιγμα*** ἑνὸς ***μέρους*** τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, ποὺ νὰ περιέχεται ἀπὸ μίαν κάθετον τομήν της ΑΒΓ. . . .Μ, ἀπὸ μίαν ἄλλην τυχοῦσαν καμπύλην της $A_1B_1\Gamma_1 \ldots M_1$ καὶ ἀπὸ δύο γενετείρας της, τὰς AA_1, MM_1 (σχ. 56—57) : λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου μίαν τυχοῦσαν



Σχ. 56—57.

εὐθεῖαν Α΄Β΄Γ΄..Μ΄, μὲ μῆκος ἴσον πρὸς τὸ μῆκος τῆς καθέτου τομῆς καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας αὐτῆς ὑψώνομεν καθέτους ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τὰ τμήματα τῶν γενετειρῶν τὰ ἀπὸ τῆς καθέτου τομῆς ΑΒΓ. . . .Μ μέχρι τῆς καμπύλης $A_1B_1\Gamma_1 \ldots M_1$. Παράγομεν οὕτως ἓν ἐπίπεδον ***χωρίον*** $A'B'\Gamma' \ldots M'M'_1 \ldots \Gamma'_1B'_1A'_1$, ποὺ λέγεται ***ἐκτύλιγμα*** τοῦ καμπύλου μέρους τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας· εἶναι δὲ ***γεωμετρικῶς*** προφανές, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐκτυλιχθέντος ***καμπύλου*** μέρους τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐκτυλίγματος, καθὼς καὶ ὅτι τὸ μῆκος κάθε γραμμῆς τοῦ καμπύλου χωρίου εἶναι ἴσον μὲ τὸ μῆκος τοῦ ***ἐκτυλίγματος*** τῆς γραμμῆς· ἄς το ἀποδείξωμεν

μία, ποὺ εἶναι *ἡ συντομωτέρα ἀπὸ ὅλας τὰς ἄλλας* (τὴν εὑρίσκομεν *πρακτικῶς*, ἂν τεντώσωμεν ἓν νῆμα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας μεταξὺ τῶν δύο σημείων)· αἱ συντομώτεραι αὐταὶ γραμμαὶ λέγονται *γεωδαισιακαὶ* γραμμαὶ τῆς ἐπιφανείας. Ὥστε αἱ κυλινδρικαὶ ἕλικες εἶναι *γεωδαισιακαὶ γραμμαὶ* τῶν κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν, ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται.

ὅμως καὶ ***ἀναλυτικῶς***: ἅ; θέσωμεν: τοξ.ΑΒΓ...Μ$\equiv$s, τοξ$A_1B_1\Gamma_1...M_1 \equiv s_1$, τοξ. $A_1'B_1'\Gamma_1'....M_1' \equiv s_1'$ καὶ : συντεταγμέναι τοῦ $M_1 \equiv x,y,z$. τότε συντεταγμέναι τοῦ Μ εἶναι αἵ x,y,0· $ds_1^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, $ds^2 = dx^2 + dy^2$· τοῦ δὲ Μ', συντεταγμέναι εἶναι αἵ z καὶ s (διότι εὐθεῖα Α'Β'Γ'. . . .Μ'=τοξ ΑΒΓ. . .Μ)· ὥστε $ds_1'^2 = ds^2 + dz^2$· εἶναι λοιπόν : $ds_1' = ds_1$ καὶ $s_1' = s_1$ (ἡ σταθερὰ c εἶναι=0, διότι καὶ τὸ s_1' καὶ τὸ s_1 γίνονται = 0 συγχρόνως, ὅταν τὸ M_1 πέσῃ εἰς τὸ A_1)(¹).

2ον.

86. ***Νὰ εὑρεθοῦν αἱ καμπύλαι, ποὺ ἔχουν ἐπεφαπτομένην σταθεράν.***

Θὰ ἔχωμεν (ἐδ. 84): (1) $z = \alpha \frac{dz}{ds}$, ἢ $ds = \alpha \frac{dz}{z}$ καί : $s = \alpha lz + c$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς καμπύλας αὐτάς, παρατηροῦμεν, ὅτι, ἂν ἐκτυλίξωμεν ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν, ποὺ προβάλλει τὴν καμπύλην ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου xy, τὸ τόξον s καὶ τὸ z τοῦ ἄκρου του διατηροῦν τὰ μήκη των, ὥστε καὶ διὰ τὴν καμπύλην τοῦ ἀναπτύγματος θὰ ἔχωμεν ἐπίσης: $ds_1 = \alpha \frac{dz}{z} (s_1 = s)$· ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὰς ***ἐπιπέδους*** καμπύλας, ποὺ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν· διότι ἀπὸ αὐτὰς παράγονται ἔπειτα αἱ ζητούμεναι, ἂν τὸ ἐπίπεδον τῆς καθεμιᾶς τυλιχθῇ ἐπὶ μιᾶς τυχούσης κυλινδρικῆς ἐπιφανείας οὕτως, ὥστε αἱ τεταγμέναι z νὰ ἐφαρμόσουν ἐπὶ τῶν γενετειρῶν τῆς ἐπιφανείας. Ἡ ἐπίπεδος δὲ καμπύλη, ποὺ ἐπαληθεύει τὴν προηγουμένην ἐξίσωσιν, εἶναι ἡ ἕλκουσα (πρόβλ. 8, σελ. 24)· διότι ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς : $z\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2} = \alpha$· εἶναι δηλ. ἡ ἐπεφαπτομένη σταθερά.

3ον.

87. ***Νὰ εὑρεθοῦν αἱ καμπύλαι, ποὺ αἱ ἐφαπτόμεναι τῆς καθεμιᾶς ἀπέχουν ἀπὸ μίαν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἀπόστασιν σταθερὰν α.***

(¹) Περὶ τῶν κυλινδρικῶν ἑλίκων θὰ ὁμιλήσωμεν ἐκτενέστερα εἰς τὸ κεφάλαιον τῆς ἰδιαιτέρας σπουδῆς μερικῶν στρεβλῶν καμπύλων, καθὼς καὶ εἰς τὸ Β΄ βιβλίον.

Ἂν λάβωμεν τὴν εὐθεῖαν αὐτὴν ὡς ἄξονα τῶν z, αἱ προβολαὶ(ἄξ.ὀρθ.) τῶν ἐφαπτομένων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου xy θ' ἀπέχουν ἀπὸ τὴν ἀρχὴν ἀπόστασιν α· καὶ ἐπειδὴ ἡ προβολὴ τῆς ἐφαπτομένης εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τῆς προβολῆς τῆς καμπύλης, θὰ ἔχῃ τὴν ἐξίσωσιν : $Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)$· καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν διὰ τὴν προβολὴν τῆς καμπύλης .

$$\frac{xdy-ydx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}=\alpha\cdot$$

ἀντιστρόφως, ἂν μιᾶς καμπύλης τοῦ χώρου ἡ προβολὴ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου xy ἐπαληθεύῃ τὴν ἐξίσωσιν : $\frac{xdy-ydx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}=\alpha$, ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης τοῦ χώρου ἀπέχει σταθερὰν ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν ἄξονα τῶν z. Ὥστε :

Διὰ νὰ ἔχῃ μία καμπύλη τὴν ζητηθεῖσαν ἰδιότητα, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ κεῖται ἐπὶ μιᾶς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, ποὺ ἡ τομή της ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον xy ***(τὸ κάθετον πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν) νὰ ἐπαληθεύῃ τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν*** : $\frac{xdy-ydx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}=\alpha$.

Τὸ πρόβλημα λοιπὸν ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν καμπύλων. Διὰ νὰ τὰς εὕρωμεν, μεταγράφομεν τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εἰς ἐπιπέδους πολικὰς συντεταγμένας : $\varrho^2 d\vartheta=\alpha\sqrt{d\varrho^2+\varrho^2 d\vartheta^2}$, δηλ. $d\vartheta=\frac{\alpha d\varrho}{\varrho\sqrt{\varrho^2-\alpha^2}}$· καὶ ἂν μὲν $\varrho=\alpha$, ἔχομεν ***περιφέρειαν***, ἂν δὲ $\varrho>\alpha$, εὑρίσκομεν εὔκολα : $\vartheta+c=\text{τοξσυν}\left(\frac{\alpha}{\varrho}\right)$, ἢ $\varrho\,\text{συν}(\vartheta+c)=\alpha$: γένος εὐθειῶν, ποὺ ἀπέχουν ἀπὸ τὴν ἀρχὴν ἀπόστασιν α, δηλ. ***τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας αὐτῆς***. Ὥστε : ***Αἱ τυχοῦσαι καμπύλαι τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου μὲ ἀκτῖνα α καὶ ἄξονα τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, καθὼς καὶ αἱ τυχοῦσαι καμπύλαι ἑνὸς τυχόντος ἐφαπτομένου ἐπιπέδου του, καὶ μόνον αὐταί, λύουν τὸ πρόβλημα.***

4ον.

(Ἀντιστοίχισις καμπύλων).

88. ***Νὰ δειχθῇ, ὅτι, ἂν ἡ ἀπόστασις*** M_1M_2 ***τῶν ἀντιστοίχων σημείων δύο καμπύλων εἶναι διαρκῶς κοινὴ κάθετος τῶν καμ-***

πύλων εἰς τὰ δύο αὐτὰ σημεῖα $M_1(x_1,y_1,z_1)$ καὶ $M_2(x_2,y_2,z_2)$, θὰ εἶναι σταθερὰ κατὰ τὸ μῆκος.

Ἀπόδειξις. Τὰ συνημίτονα τῆς M_1M_2 εἶναι :

$$\frac{x_2-x_1}{(M_1M_2)},\quad \frac{y_2-y_1}{(M_1M_2)},\quad \frac{z_2-z_1}{(M_1M_2)},$$

τῶν δὲ ἐφαπτομένων εἰς τὰ M_1,M_2 εἶναι κατὰ σειράν :

$$\frac{dx_1}{ds_1},\ \frac{dy_1}{ds_1},\ \frac{dz_1}{ds_1}\quad \text{καί :}\quad \frac{dx_2}{ds_2},\ \frac{dy_2}{ds_2},\ \frac{dz_2}{ds_2}.$$

$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=$

Ἔχομεν λοιπόν, κατὰ τὴν ὑπόθεσίν μας :

$$\sum(x_2-x_1)dx_1=0,\qquad \sum(x_2-x_1)dx_2=0\cdot\ \text{ἐπομένως καί :}$$

$$\sum(x_2-x_1)d(x_2-x_1)=0\cdot\qquad \text{ὥστε :}\quad \sum(x_2-x_1)^2=\text{σταθ.}\equiv\alpha^2\cdot$$

Ἀντιστρόφως : Ἂν ἡ ἀπόστασις M_1M_2 εἶναι σταθερὰ (=α) καὶ κάθετος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς μιᾶς καμπύλης, θὰ εἶναι κάθετος καὶ πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἄλλης.

Διότι τότε θὰ ἔχωμεν : $\sum(x_2-x_1)^2=\alpha^2$ καὶ $\sum(x_2-x_1)dx_1=0\cdot$ ἡ α΄ ὅμως ἀπὸ τὰς σχέσεις αὐτὰς μᾶς δίδει :

$$\sum(x_2-x_1)dx_2=\sum(x_2-x_1)dx_1\cdot\ \text{ἐπομένως (κατὰ τὴν β΄) καί :}$$

$$\sum(x_2-x_1)dx_2=0\cdot$$

Παρατήρησις.—Αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν δύο καμπύλων (εἰς τὰ M_1,M_2) ***δὲν εἶναι ἀναγκαστικῶς παράλληλοι***· σχηματίζουν ***ἐν γένει*** μίαν μεταβλητὴν γωνίαν ω, ***ἴσην*** μὲ τὴν γωνίαν τῶν δύο καθέτων ἐπιπέδων (εἰς τὰ M_1,M_2), τὰ ὁποῖα ***περνοῦν ἀπὸ τὴν M_1M_1***.

Β΄) ΤΥΠΟΙ ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΟΙ ΕΙΣ ΠΟΛΙΚΑΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΣ

α΄) Διαφορικὸν τοῦ τόξου.

89. ***Εὕρεσις τοῦ τύπου τοῦ διαφορικοῦ τοῦ τόξου.***— Ἔχομεν ἀπὸ τὴν ***Ἀναλυτικὴν Γεωμετρίαν*** τὰς σχέσεις : x=ρημθσυνψ, y=ρημθημψ, z=ρσυνθ. Διαφορίζομεν λοιπὸν καὶ ἔχομεν :

$$dx^2+dy^2=d(\rho\eta\mu\theta)^2+(\rho\eta\mu\theta)^2d\psi^2,$$

$$dx^2+dy^2+dz^2=d(\rho\eta\mu\theta)^2+\rho^2\eta\mu^2\theta d\psi^2+d(\rho\sigma\upsilon\nu\theta)^2\cdot$$

εἶναι ὅμως :

dx = d(ρημθ)συνψ − ρημθημψdψ

dy = d(ρημθ)ημψ + ρημθσυνψdψ

$$d(\varrho\eta\mu\vartheta)^2+d(\varrho\sigma\upsilon\nu\vartheta)^2=d\varrho^2(\eta\mu^2\vartheta+\sigma\upsilon\nu^2\vartheta)+\varrho^2d\vartheta^2(\sigma\upsilon\nu^2\vartheta+\eta\mu^2\vartheta)+$$
$$+2\varrho d\varrho d\vartheta(\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta-\sigma\upsilon\nu\vartheta\eta\mu\vartheta)=d\varrho^2+\varrho^2d\vartheta^2.$$

Ὥστε ἔχομεν τελικῶς τὸν τύπον :

$$ds^2=d\varrho^2+\varrho^2d\vartheta^2+\varrho^2\eta\mu^2\vartheta d\psi^2.$$

Σημείωσις.—Ἂν ἡ καμπύλη κεῖται ***ἐπὶ ἐπιπέδου διὰ τοῦ ἄξ. OZ,*** ὁ τύπος αὐτὸς καταντᾷ ὁ ***μερικώτερος*** τῶν ἐπιπέδων καμπύλων : $ds^2=d\varrho^2+\varrho^2d\vartheta_1{}^2(\vartheta_1=90^0-\vartheta)$. $\varphi=c$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(εγχειρ.)

1) Διὰ ποίας καμπύλας εἶναι : $ds^2=\varrho^2(d\vartheta^2+\eta\mu^2\vartheta d\psi^2)$;
2) Διὰ ποίας καμπύλας εἶναι : $ds^2=d\varrho^2+\varrho^2\eta\mu^2\vartheta d\psi^2$;

β') Γωνία τῆς ἐφαπτομένης μὲ τὴν πολικὴν ἀκτῖνα.

90. ***Εὕρεσις τῆς γωνίας ω ἐφαπτομένης καὶ πολ. ἀκτῖνος.*** — Ἂν τὴν ὀνομάσωμεν ω τὴν γωνίαν αὐτήν, θὰ ἔχωμεν :

$$\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{x}{\varrho}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{y}{\varrho}\cdot\frac{dy}{ds}+\frac{z}{\varrho}\cdot\frac{dz}{ds}.$$

εἶναι ὅμως : $x^2+y^2+z^2=\varrho^2$, ἑπομένως : $xdx+ydy+zdz=\varrho d\varrho$ καὶ ὁ προηγούμενος τύπος γίνεται : $\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{d\varrho}{ds}$· θὰ εἶναι λοιπὸν καί :

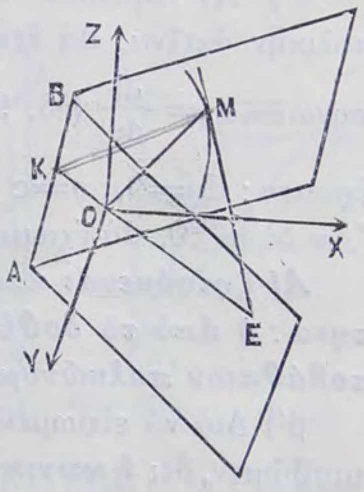
$\eta\mu\omega=\frac{\sqrt{ds^2-d\varrho^2}}{ds}$ καὶ τελικῶς : $\varepsilon\varphi\omega=\frac{\sqrt{ds^2-d\varrho^2}}{d\varrho}$, ἢ καί, σύμφωνα μὲ τὴν πολικὴν ἔκφρασιν τοῦ ds (ἐδ. 89) : $\varepsilon\varphi\omega=\frac{\varrho\sqrt{d\vartheta^2+\eta\mu^2\vartheta d\psi^2}}{d\varrho}$.

Σημείωσις α'.—Ὁ τύπος αὐτὸς ἀποτελεῖ προφανῶς γενίκευσιν τοῦ τύπου : $\varepsilon\varphi\omega=\frac{\varrho d\vartheta}{d\varrho}$ τῶν ἐπιπέδων καμπύλων καὶ καταντᾷ ὁ ἴδιος, ὅταν ἡ καμπύλη κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου διὰ τοῦ ἄξ. OZ.

Σημείωσις β'.—Ὁ τύπος αὐτὸς δὲν ἀρκεῖ προφανῶς ***διὰ νὰ ὁρισθῇ ἡ θέσις*** τῆς ἐφαπτομένης (διότι τὴν ἰδίαν γωνίαν σχηματίζουν μὲ τὴν πολ. ἀκτῖνα καὶ ὅλαι αἱ γενέτειραι ἑνὸς κώνου μὲ ἄξονα τὴν πολ. ἀκτῖνα). Χρειάζεται λοιπὸν νὰ μᾶς δοθῇ καὶ ***ἄλλη μία*** γωνία τῆς ἐφαπτομένης μὲ ἄλλην εὐθεῖαν ***γνωστήν***. Π.χ. ἂν λάβωμεν τὴν γωνίαν της φ μὲ τὸν ἄξ. OZ, θὰ ἔχωμεν : $\sigma\upsilon\nu\varphi \equiv \gamma = \frac{dz}{ds}$ καὶ εἰς πολ. συντεταγμένας : $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\sigma\upsilon\nu\vartheta d\varrho - \varrho\eta\mu\vartheta d\vartheta}{ds}$. καὶ ἑπομένως, ὕστερ' ἀπ' ὀλίγας πράξεις : $\quad \varepsilon\varphi\varphi = \frac{\sqrt{d(\varrho\eta\mu\vartheta)^2 + \varrho^2\eta\mu^2\vartheta d\psi^2}}{\sigma\upsilon\nu\vartheta d\varrho - \varrho\eta\mu\vartheta d\vartheta}$.

γ') Πολ. ὑφαπτομένη, πολ. ὑποκάθετος, πολ. ἐπεφαπτομένη, πολ. ἐπικάθετος.

91. ***Ὁρισμὸς καὶ ὑπολογισμὸς τῆς πολ. ὑφαπτομένης, πολ. ὑποκαθέτου, πολ. ἐπεφαπτομένης καὶ πολ. ἐπικαθέτου.*** — Ἂν φέρωμεν ἀπὸ τὴν ἀρχὴν O τὸ ἐπίπεδον τὸ κάθετον πρὸς τὴν πολικὴν ἀκτῖνα (σχ. 58), αὐτὸ κόπτεται ἀπὸ τὴν ἐφαπτομένην εἰς ἓν σημεῖον E καὶ ἀπὸ τὸ κάθετον ἐπίπεδον τῆς καμπύλης κατὰ μίαν εὐθεῖαν AB· ἡ εὐθεῖα τότε EO κόπτει τὴν AB εἰς ἓν σημεῖον K· ὁρίζομεν λοιπὸν τώρα ὡς :



Σχ. 58.

1) ***Πολικὴν ὑφαπτομένην*** (τῆς καμπύλης εἰς τὸ M) τὸ τμῆμα EO, 2) ***Πολικὴν ὑποκάθετον***, τὸ OK, 3) ***Πολικὴν ἐπεφαπτομένην***, τὸ ME καὶ 4) ***Πολικὴν ἐπικάθετον***, τὸ MK.

Πρὸς ὑπολογισμὸν τῶν μηκῶν τῶν τμημάτων τούτων ἔχομεν ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα MOE, MOK :

$$EO = \varrho\varepsilon\varphi\omega, \quad OK = \varrho\sigma\varphi\omega, \quad ME = \frac{\varrho}{\sigma\upsilon\nu\omega}, \quad MK = \frac{\varrho}{\eta\mu\omega}.$$

ἑπομένως (ἐδ. 90) :

$$EO = \frac{\varrho\sqrt{ds^2 - d\varrho^2}}{d\varrho} \equiv \frac{\varrho^2\sqrt{d\vartheta^2 + \eta\mu^2\vartheta d\psi^2}}{d\varrho},$$

$$OK = \frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{ds^2 - d\varrho^2}} \equiv \frac{d\varrho}{\sqrt{d\vartheta^2 + \eta\mu^2\vartheta d\psi^2}}, \quad ME = \frac{\varrho ds}{d\varrho},$$

$$MK = \frac{\varrho ds}{\sqrt{ds^2 - d\varrho^2}} \equiv \frac{ds}{\sqrt{d\vartheta^2 + \eta\mu^2\vartheta d\psi^2}}.$$

Σημείωσις. Οἱ τύποι αὐτοὶ ἀποτελοῦν πάλιν προφανῶς γενίκευσιν τῶν ἀντιστοίχων τύπων τῶν ἐπιπέδων καμπύλων (ἐδ. 25).

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1ον.

92. ***Νὰ εὑρεθοῦν αἱ καμπύλαι, τῶν ὁποίων ἡ ἐφαπτομένη εἰς κάθε σημεῖον σχηματίζει σταθερὰν γωνίαν μὲ τὴν εὐθεῖαν, ποὺ ἑνώνει τὸ σημεῖον ἐπαφῆς μὲ ἓν σταθερὸν σημεῖον τοῦ χώρου.***

α΄) Ἂν λάβωμεν τὸ σημεῖον αὐτὸ ὡς πόλον καὶ τὴν εὐθεῖαν ὡς πολικὴν ἀκτῖνα, θὰ ἔχωμεν εἰς κάθε σημεῖον διὰ τὴν γωνίαν αὐτὴν ω: $\text{συν}\omega \equiv \alpha = \frac{d\varrho}{ds}$ (ἐδ. 90). Καὶ ἂν μὲν εἶναι $\omega = 90^\circ$, δηλ. $\alpha = 0$, θὰ ἔχωμεν: $d\varrho = 0$, $\varrho = c$· ὥστε: ***Ἡ καμπύλη εἶναι τότε σφαιρική.***
Ἂν δὲ $\alpha \lessgtr 0$, θὰ ἔχωμεν: $\varrho = \alpha s + c$. Ὥστε:

Αἱ ζητούμεναι καμπύλαι πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχουν τὴν ἰδιότητα: ἡ ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον πολικὴ ἀκτίς των νὰ εἶναι πρωτοβάθμιον πολυώνυμον τοῦ τόξου των.

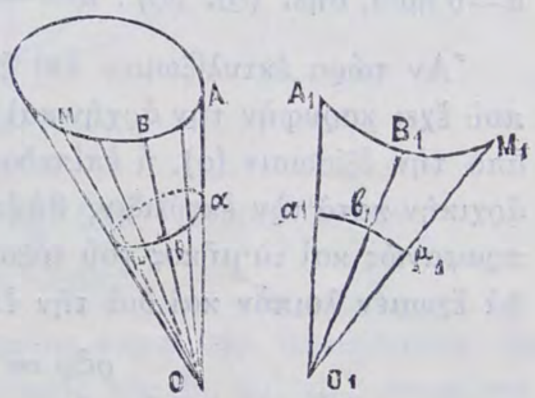
β΄) Διὰ νὰ εὕρωμεν τώρα, ***ποῖαι*** εἶναι αἱ καμπύλαι αὐταί, ἂς φαντασθῶμεν, ὅτι ἡ ***κωνικὴ*** ἐπιφάνεια, ποὺ ἔχει ***κορυφὴν*** τὸν πόλον Ο καὶ ***ὁδηγὸν*** μίαν ἀπὸ τὰς καμπύλας αὐτάς, ***ἐκτυλίσσεται*** ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου· κατὰ τὴν ***ἐκτύλιξιν*** αὐτὴν καὶ τὸ μῆκος τοῦ τόξου s τῆς καμπύλης καὶ τὸ μῆκος τῆς ἀποστάσεως ϱ τοῦ ἄκρου του ἀπὸ τὸ Ο μένουν προφανῶς τὰ ἴδια· ἑπομένως ἰσχύει καὶ διὰ τὴν ἐπίπεδον καμπύλην, ποὺ εἶναι τὸ ἐκτύλιγμα τῆς δοθείσης, ἡ σχέσις:
$s_1 = \alpha\varrho_1 + c$ ($s_1 \equiv s$, $\varrho_1 \equiv \varrho$)· ἢ καί: $ds_1 = \alpha d\varrho_1$ ἢ $\frac{ds_1}{d\varrho_1} = \alpha$· δηλ. καὶ ἡ ἐπίπεδος καμπύλη ἔχει τὴν ***ἰδίαν*** ἰδιότητα: νὰ εἶναι ἡ γωνία τῆς ἐφαπτομένης της καὶ τῆς πολικῆς ἀκτῖνος σταθερά· εἶναι λοιπὸν ***λογαριθμικὴ*** ἕλιξ (ἐδ. 25)· ὥστε:

Κάθε τοιαύτη ζητουμένη καμπύλη μετατρέπεται εἰς λογαριθμικὴν ἕλικα, ὅταν ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια, ποὺ ἔχει κορυφὴν τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ ὁδηγὸν τὴν καμπύλην, ἐκτυλιχθῇ ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου. Καὶ τὸ ἀντίστροφον δέ: ὅτι δηλ. ***Κάθε καμπύλη, ποὺ παρά-***

γεται ἀπὸ μίαν λογαριθμικὴν ἕλικα, ὅταν τὸ ἐπίπεδόν της τυλιχθῇ ἐπὶ μιᾶς κωνικῆς ἐπιφανείας μὲ κορυφὴν τὸν πόλον τῆς ἕλικος, ἔχει τὴν ζητηθεῖσαν ἰδιότητα, εἶναι πολὺ εὔκολον νὰ δειχθῇ. Ὥστε :

Αἱ καμπύλαι, ποὺ ἔχουν τὴν δοθεῖσαν ἰδιότητα, εἶναι μόνον ὅσαι παράγονται ἀπὸ μίαν λογαριθμικὴν ἕλικα, ὅταν τὸ ἐπίπεδόν της τυλιχθῇ ἐπὶ μιᾶς τυχούσης κωνικῆς ἐπιφανείας οὕτως, ὥστε ὁ πόλος τῆς ἕλικος νὰ πέσῃ εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου.

γ΄) ***Κατασκευὴ τοῦ ἐκτυλίγματος ἑνὸς μέρους μιᾶς κωνικῆς ἐπιφανείας.***—Ἂν τὸ μέρος αὐτὸ περιορίζεται ἀπὸ ἓν τόξον μιᾶς καμπύλης καὶ ἀπὸ δύο γενετείρας ΟΑ, ΟΜ (σχ. 59—60), μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ μὲ ἀκτῖνα τυχοῦσαν χαράσσομεν ἐπὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας μίαν ***σφαιρικὴν*** γραμμήν : αβ. . .μ· κατόπιν μὲ κέντρον τὸ τυχὸν σημεῖον O_1 τοῦ ἐπιπέδου καὶ μὲ τὴν ἰδίαν ἀκτῖνα γράφομεν περιφέρειαν· ἐπ' αὐτῆς δὲ λαμβάνομεν :



Σχ. 59—60.

$\text{τοξ}(\alpha_1\beta_1 \ldots \mu_1) = \text{τοξ}(\alpha\beta \ldots \mu)$· τέλος ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ τόξου $\alpha_1\beta \ldots \mu_1$ φέρομεν τὰς εὐθείας $O_1\alpha_1$, $O_1\beta_1, \ldots, O_1\mu_1$ καὶ ἐπάνω εἰς τὴν καθεμίαν λαμβάνομεν (ἀπὸ τὸ O_1) τμῆμα ἴσον μὲ τὴν γενέτειραν τοῦ κώνου, ποὺ περνᾷ ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον τῆς αβ....μ· τότε παράγεται τὸ ἐπίπεδον ***χωρίον*** $O_1A_1B_1 \ldots M_1O_1$, ποὺ εἶναι τὸ ***ἐκτύλιγμα*** τοῦ κωνικοῦ χωρίου ΟΑΒ. . . .ΜΟ. — Εἶναι δὲ εὔκολον νὰ δείξωμεν, ὅτι ***τὸ μῆκος τῆς τυχούσης γραμμῆς τοῦ κωνικοῦ χωρίου*** (π. χ. τῆς ΑΒ. . . .Μ) ***εἶναι ἴσον μὲ τὸ τῆς ἀντιστοιχούσης τοῦ ἐκτυλίγματος.*** Διότι, ἂν S εἶναι τὸ μῆκος τοῦ τόξου ΑΒ. . . . .Μ, s τὸ μῆκος τῆς αβ. . . . .μ καὶ S_1 τὸ μῆκος τῆς $A_1B_1 \ldots M_1$, αἱ δὲ συντεταγμέναι τοῦ μὲν Μ εἶναι αἱ (x,y,z), τοῦ δὲ μ αἱ (α,β,γ), θὰ ἔχωμεν :

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2\text{·}$$ OM: $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} =$

εἶναι δὲ καὶ $x = \alpha\varrho$, $y = \beta\varrho$, $z = \gamma\varrho$ ($\varrho \equiv OM$), ὥστε :

$$dx = \alpha d\varrho + \varrho d\alpha, \quad dy = \beta d\varrho + \varrho d\beta, \quad dz = \gamma d\varrho + \varrho d\gamma\text{· λοιπόν :}$$

$dS^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 ds^2$ (διότι $\Sigma\alpha d\alpha = 0$)· καὶ εἰς τὸ ***ἀνάπτυγμα*** ὅμως αἱ πο-

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$

λικαὶ συντεταγμέναι τοῦ M_1 εἶναι αἱ ρ καὶ s (ἂν λάβωμεν $OA=1$), διότι $OM_1=OM$ καὶ τοξ $\alpha_1\beta_1\ldots\mu_1=s_1=s$˙ θὰ ἔχωμεν λοιπὸν καί: $dS^2_1=d\varrho^2+\varrho^2 ds^2$˙ ὥστε: $dS_1=dS$ καὶ $S_1=S$. (Τὸ c εἶναι 0, διότι S_1, S μηδενίζονται συγχρόνως, ὅταν τὸ M πέσῃ εἰς τὸ A).

2ον.

93. ***Νὰ εὑρεθοῦν αἱ καμπύλαι, ποὺ αἱ ἐφαπτόμεναι τῆς καθεμιᾶς ἀπέχουν ἀπὸ ἓν δοθὲν σημεῖον σταθερὰν ἀπόστασιν α.***

Λαμβάνομεν τὸ δοθὲν σημεῖον ὡς ἀρχήν˙ τότε εἰς κάθε σημεῖον μιᾶς τοιαύτης καμπύλης θὰ ἔχωμεν:

$\alpha=\varrho$ ημω, δηλ. (ἐδ. 90): $\alpha=\dfrac{\varrho\sqrt{ds^2-d\varrho^2}}{ds}$, ἢ καί: $\varrho d\varrho=\sqrt{\varrho^2-\alpha^2}ds$. (α)

Ἂν τώρα ἐκτυλίξωμεν ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου τὴν κωνικὴν ἐπιφάνειαν ποὺ ἔχει κορυφὴν τὴν ἀρχὴν καὶ ὁδηγὸν τὴν καμπύλην τὴν διδομένην ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (α), ἡ ἐπίπεδος καμπύλη, ποὺ θὰ προκύψῃ ἀπὸ τὴν ἀρχικὴν κατὰ τὴν ἐκτύλιξιν, θὰ ἐπαληθεύῃ τὴν ἰδίαν ἐξίσωσιν (α) (διότι προφανῶς καὶ τὸ μῆκος τοῦ τόξου s καὶ ἡ πολ. ἀκτὶς ρ δὲν ἀλλάσσουν)˙ θὰ ἔχωμεν λοιπὸν καὶ διὰ τὴν ἐπίπεδον καμπύλην:

$$\varrho d\varrho = \sqrt{\varrho^2-\alpha^2}\,.ds\text{˙}$$

θὰ ἔχωμεν δηλ. πάλιν ὡς λύσιν τὴν τοῦ προβλήματος 3ου (ἐδ. 87). Ὥστε: ***Κάθε καμπύλη, ποὺ λύει τὸ πρόβλημα, παράγεται ἀπὸ τὴν περιφέρειαν ρ=α καὶ τὰς ἐφαπτομένας της, ἂν τὸ ἐπίπεδόν της τυλιχθῇ ἐπὶ ἑνὸς τυχόντος κώνου οὕτως, ὥστε τὸ κέντρον της νὰ πέσῃ εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου.***

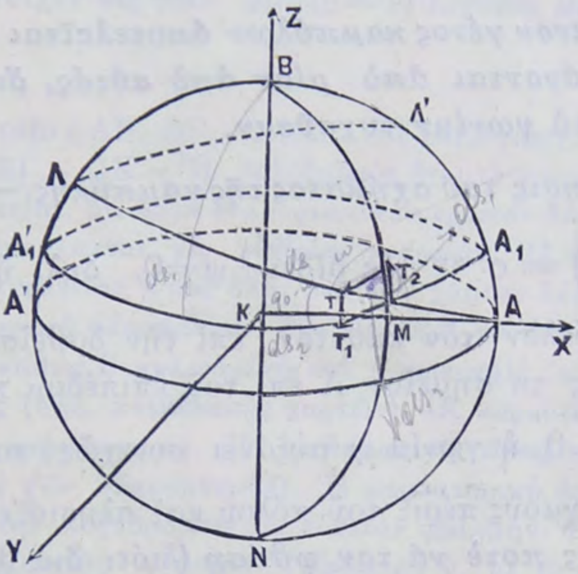
3ον.

94. ***Νὰ εὑρεθοῦν ἐπὶ μιᾶς σφαίρας μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα α αἱ καμπύλαι, ποὺ ἡ καθεμία κόπτει τοὺς μεγίστους κύκλους τῆς σφαίρας τοὺς διερχομένους ἀπὸ μίαν δοθεῖσαν διάμετρόν της BN ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν.***

Διὰ ***κάθε σφαιρικὴν*** καμπύλην ἔχομεν: $ds^2=\alpha^2 d\vartheta^2+\alpha^2\eta\mu^2\vartheta d\psi^2$. Ὁ α΄ ὅρος τοῦ β΄ μέλους τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ διαφορικοῦ τοῦ τόξου s_1 τῶν καμπύλων ψ=σταθ., δηλ. (ἂν λάβωμεν ὡς ἄξ. τῶν z τὴν δοθεῖσαν διάμετρον), τῆς σειρᾶς τῶν ***δοθέντων μεγίστων κύκλων*** (σχ. 61)˙ ὁ δὲ β΄ ὅρος μᾶς δίδει τὸ τετράγωνον τοῦ

(OΠ) = α = ρ ημω

διαφορικοῦ τοῦ τόξου s_2 τῶν καμπύλων $\vartheta =$σταθ., δηλ. τῶν ***παραλ-***



Σχ. 61.

λήλων, τῶν καθέτων πρὸς τὸν ἄξ. ΟΖ. Ἔχομεν λοιπόν :

$$ds^2 = ds_1^{\,2} + ds_2^{\,2}.$$

Εἶναι ἑπομένως τὸ ds τῆς ζητουμένης καμπύλης ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ καθέτους πλευρὰς τὰς ds_1 καὶ ds_2· ἑπομένως εἶναι : $ds_1 = ds_2$σφω (ω $\equiv$ ἡ ***σταθερὰ*** γωνία τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης μὲ τὴν ἐφαπτομένην τοῦ μεγίστου κύκλου)· δηλ.

$$(\alpha) \qquad \text{σφ}\omega \equiv \mu = \frac{ds_1}{ds_2} = \frac{-d\vartheta}{\text{ημ}\vartheta d\psi}.$$

(τὸ σημεῖον τοῦ $d\vartheta$ εἶναι ***ἀρνητικόν,*** διότι τὸ τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου ***αὐξάνει*** πρὸς τὸν πόλον (ὅταν ἀρχίζῃ ἀπὸ τὸν ***ἰσημερινόν),*** ἐνῷ τὸ ϑ ***ἐλαττώνεται,*** ὥστε : $\dfrac{ds_1}{d\vartheta} < 0$).

Ἡ διαφορικὴ αὐτὴ ἐξίσωσις : $\dfrac{d\vartheta}{\text{ημ}\vartheta} = -\,\mu d\psi$ θὰ μᾶς δώσῃ, ἅμα ὁλοκληρωθῇ, τὴν ***μίαν*** ἀπὸ τὰς δύο πολικὰς ἐξισώσεις τοῦ ζητουμένου γένους καμπύλων (ἡ ἄλλη εἶναι ἡ ***κοινὴ δι' ὅλας*** τὰς σφαιρικὰς καμπύλας : $\varrho = \alpha$). Ἡ ὁλοκλήρωσις δὲ μᾶς δίδει : $l\text{εφ}\left(\dfrac{\vartheta}{2}\right) = -\mu\psi + c$, δηλ. $\text{εφ}\left(\dfrac{\vartheta}{2}\right) = e^{-\mu\psi + c} = e^{-\mu(\psi + c_1)}$. καὶ ἂν τὸ ἐπίπεδον xz στραφῇ κατὰ γωνίαν c_1, ἡ ἐξίσωσις γίνεται : $\varepsilon\varphi\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = e^{-\mu\psi}$. Ὥστε :

Τὸ ζητούμενον γένος καμπύλων ἀποτελεῖται ἀπὸ ἴσας καμπύλας, ποὺ παράγονται ἀπὸ μίαν ἀπὸ αὐτάς, ὅταν στραφῇ πέριξ τοῦ ἄξ. ΟΖ κατὰ γωνίαν τυχοῦσαν.

α') ***Διερεύνησις τοῦ σχήματος τῆς καμπύλης.***—Διὰ $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ἡ ἐξίσωσις : $\varepsilon\varphi\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = e^{-\mu\psi}$ μᾶς δίδει : $\psi = 0$, δηλ. ἡ καμπύλη κόπτει τὸν μέγιστον κύκλον τὸν κάθετον ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν διάμετρον (**τὸν *ἰσημερινὸν***) εἰς τὸ σημεῖον Α ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου xz. Διὰ τὰς τιμὰς τοῦ ϑ : $\frac{\pi}{2} \ldots 0$, ἡ γωνία ψ αὐξάνει συνεχῶς καὶ ἡ καμπύλη ἐκτελεῖ ἀπείρους ἑλιγμοὺς πέριξ τοῦ πόλου καὶ πλησιάζει ὁλονὲν πρὸς αὐτόν, ***χωρὶς ὅμως ποτὲ νά τον φθάσῃ*** (διότι διὰ $\vartheta = 0$ εἶναι $\psi = \infty$)· εἶναι λοιπὸν ὁ πόλος Β ***ἀσύμπτωτον*** σημεῖόν της (τοῦ κλάδου της τοῦ εἰς τὸ ***βόρειον*** ἡμισφαίριον, ὑπεράνω τοῦ ἐπιπέδου xy)· ἐπίσης διὰ $\vartheta = \frac{\pi}{2} \ldots \pi$, τὸ ψ αὐξάνει (ἀπολύτως)· ὁ ἄλλος λοιπὸν κλάδος τῆς καμπύλης, ὁ ὑποκάτω τοῦ ἐπιπέδου xy, ἐκτελεῖ ἐπίσης ἀπείρους ἑλιγμοὺς πέριξ τοῦ πόλου Ν, τὸν πλησιάζει ὁλονέν, ποτὲ ὅμως δὲν τὸν φθάνει· εἶναι δηλ. καὶ ὁ πόλος Ν ***ἀσύμπτωτον*** σημεῖον τῆς καμπύλης. Αἱ καμπύλαι αὐταὶ λέγονται ***λοξοδρομίαι*** (ἢ ***καμπύλαι τοῦ Νουνιές***)[1]. Ἀπο-

---

[1] Ἡ λοξοδρομία παρουσιάσθη πρώτην φορὰν πρακτικῶς κατὰ τοὺς πλοῦς τῶν ὠκεανῶν ἀπὸ τοὺς Πορτογάλους θαλασσοπόρους. Πρῶτος δὲ τὴν ἐπραγματεύθη ὁ Πορτογάλος μαθηματικὸς *Pedro Nunhes* ***(Πέντρο Νουνιὲς)*** («Tratado em defensâo de carta de marear», 1537). Κατόπιν τὴν ἐσπούδασεν ὁ *Stevin* ***(Στέβιν)***, ὁ *Snellius* ***(Σνέλλιους)*** καὶ πολλοὶ ἄλλοι.

Ὅταν ἓν πλοῖον ταξειδεύῃ εἰς τὸν Ἀτλαντικὸν π. χ. ὠκεανόν, ἂν διατηρῇ ***σταθερὰν γωνίαν πλοῦ*** (τὸ ὁποῖον καὶ ***εὐκολώτερον*** εἶναι καὶ ***δὲν ἀφαιρεῖ ταχύτητα μὲ τὴν στροφήν***), κόπτει τοὺς μεσημβρινούς, ποὺ ἀπαντᾷ καθ' ὁδόν, ὅλους ὑπὸ ***σταθερὰν*** γωνίαν· ἡ τροχιά του λοιπὸν εἶναι ***λοξοδρομία.*** Ὁ δρόμος αὐτὸς δὲν εἶναι ὅμως ὁ συντομώτερος (ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας συντομώτερος δρόμος εἶναι, καθὼς καὶ στοιχειωδῶς ἀποδεικνύεται, ***τὸ τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου***)· δι' αὐτὸ δὲ καὶ ὠνομάσθη ***λοξοδρομία*** (**λοξὸς** δρόμος) κατ' ἀντίθεσιν πρὸς τὴν ***ὀρθοδρομίαν***, τὸ τόξον δηλ. τοῦ μεγίστου κύκλου. Ἐπειδὴ δέ, ἂν πρόκειται διὰ μεγάλον τόξον, ἡ λοξοδρομία ἀπομακρύνεται πάρα πολὺ ἀπὸ τὸν συντομώτερον δρόμον, διαιροῦν συνήθως τὸ τόξον ΑΚ τοῦ μεγίστου κύκλου, ποὺ ἑνώνει τὸν λιμένα Α τοῦ ἀπόπλου μὲ τὸν λιμένα Β τοῦ κατάπλου τελοῦν δὲ προφανῶς ἓν **γένος,** ἂν τὸ μ θεωρηθῇ **παράμετρος**. Ἡ λοξοδρομία, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς γων. 45° (μ=1) λέγεται **μέση** λοξοδρο-

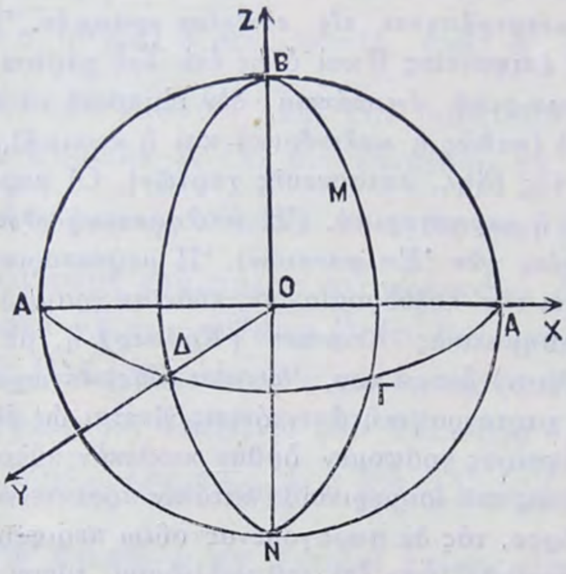
---

εἰς μικρότερα **κυκλικὰ** τόξα : ΑΒ, ΒΓ,....., ΙΚ καὶ λαμβάνουν κατόπιν τὰ **λοξοδρομικὰ** τόξα : ΑΒ,ΒΓ,...,ΙΚ.—Ἡ λοξοδρομία ἔχει τὸ σπουδαιότατον **διὰ τοὺς ναυτικοὺς** πλεονέκτημα, ὅτι **κατὰ ἕνα ὡρισμένον τρόπον ἀπεικονίσεως τῆς γῆς ἐπὶ τοῦ χάρτου μετατρέπεται εἰς εὐθεῖαν γραμμήν.** Ἡ ἀπεικόνισις ἑνὸς μέρους τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἢ καὶ ὅλης ἐπὶ τοῦ χάρτου λέγεται **χαρτογραφία.** Ἐπειδὴ δὲ ἡ **σφαιρικὴ ἐπιφάνεια** δὲν εἰμπορεῖ νὰ **ἐκτυλιχθῇ** ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (τοῦ χάρτου) (καθὼς ἡ **κυλινδρικὴ** καὶ ἡ **κωνική**), εὑρέθησαν ἄλλοι τρόποι ἀπεικονίσεώς της (δηλ. κατασκευῆς χαρτῶν). Οἱ κυριώτεροι εἶναι δύο : ἡ **στερεογραφικὴ** καὶ ἡ **μερκατορική**. (Ἡ **μαθηματικὴ θεωρία** των ἀπαιτεῖ τὴν γνῶσιν τῆς **Θεωρίας τῶν Ἐπιφανειῶν**). Ἡ μερκατορικὴ ἀπεικόνισις εἶναι ἐκείνη, ποὺ μετατρέπει τὴν λοξοδρομίαν εἰς εὐθεῖαν γραμμήν. Τὴν ηὗρε πρῶτος ὁ Ὁλλανδὸς μαθηματικὸς *Kraemer* **(Κράμερ)** ἤ, μὲ τὸ **ἐκλατινισμένον** (κατὰ τὴν τότε συνήθειαν) ὄνομά του, *Mercator* **(Μερκάτωρ**=ἔμπορος**)**.

Ἡ μερκατορικὴ χαρτογραφικὴ ἀπεικόνισις γίνεται ὡς ἑξῆς. Μὲ βάσιν τὸν τὸν ἰσημερινὸν τῆς σφαίρας γράφομεν ὀρθὸν κυκλικὸν κύλινδρον (ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας κατὰ μῆκος τοῦ ἰσημερινοῦ)· κατόπιν προεκτείνομεν τοὺς **παραλλήλους** μέχρι τοῦ κυλίνδρου, τὰς δὲ παραγομένας οὕτω περιφερείας (τὰς ἴσας πρὸς τὸν ἰσημερινὸν) τὰς ἀναβιβάζομεν ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου τόσον, ὥστε ἡ **κατακόρυφος** διάστασις ἑνὸς μικροῦ μέρους τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας πλησίον τοῦ παραλλήλου νὰ πολλαπλασιασθῇ, ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου, μὲ τὸν ἴδιον παράγοντα, ποὺ πολλαπλασιάζεται ἡ **ὁριζοντία**· ὁ παράγων αὐτὸς εἶναι προφανῶς $\frac{1}{\text{συν}\lambda}$ (ὅπου λ τὸ πλάτος τοῦ παραλλήλου)· αὐξάνει λοιπόν, ὅσον προχωροῦμεν ἀπὸ τὸν ἰσημερινὸν πρὸς τὸν πόλον· καὶ εἰς τὸν πόλον γίνεται $\frac{1}{\text{συν}90^0}$, δηλ. ∞. Καὶ ἐπειδὴ καὶ ἡ ἄλλη διάστασις τῶν τόπων τῶν πλησίον τοῦ πόλου θὰ πολλαπλασιασθῇ (περίπου) ἐπὶ ∞, βλέπομεν, ὅτι τῶν παρὰ τὸν πόλον μερῶν ἡ ἀπεικόνισις ἀφανίζεται εἰς τὸ ἄπειρον. Κατόπιν φανταζόμεθα τὸν κύλινδρον **ἐκτυλισσόμενον** ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (ἑνὸς φύλλου χάρτου) καὶ ἔχομεν οὕτω τὸν **ναυτικὸν** ἢ **μερκατορικὸν** χάρτην. Ἡ ἀπεικόνισις αὐτὴ **δὲν εἶναι διόλου καλή**, ὅταν πρόκειται ν'ἀπεικονίσωμεν **ὅσον τὸ δυνατὸν ὁμοιότερον** τὰ σχήματα τῶν διαφόρων μερῶν τῆς γῆς· διότι ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος ἑνὸς μέρους τῆς γῆς πρὸς τὴν ἀπεικόνισίν του δὲν εἶναι σταθερός, ἀλλ'αὐξάνει ταχέως πρὸς τοὺς πόλους ἑπομένως μία νῆσος(π.χ. ἡ Ἰσλανδία) κειμένη πλησιέστερον εἰς τοὺς πόλους φαίνεται πολὺ μεγαλυτέρα εἰς τὸν χάρτην ἀπὸ μίαν ἄλλην νῆσον, καὶ μεγαλυτέρας ἀκόμη ἐκτάσεως, ἀλλὰ κειμένην πλησίον τοῦ ἰσημερινοῦ. Οἱ **γεωγραφικοὶ** λοιπὸν χάρται (τῶν σχολείων) **δὲν** γίνονται κατὰ τὴν **μερκατορικὴν** μέθοδον, ἀλλὰ κατὰ τὴν **στερεογραφικήν.** Ἔχει ὅμως, καθὼς εἴπομεν, ἓν σπουδαῖον διὰ τοὺς ναυτικοὺς πλεονέκτημα ἡ μερκατορικὴ ἀπεικόνισις (καὶ δι' αὐτὸ **μόνον αὐτὴν** μεταχειρίζονται εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν μία. (Διὰ $\mu=0$ ἡ λοξοδρομία ***ἐκφυλίζεται*** εἰς ***ἕνα παράλληλον,*** διὰ $\mu=\infty$, εἰς ἕνα ***μεσημβρινὸν*** (καθὼς δεικνύει ὁ τύπος (α)).

4ον.

95. Ἐπὶ δοθείσης σφαιρικῆς ἐπιφανείας θεωροῦμεν ἕνα μέγιστον κύκλον, τὸν ΒΑΝ, ἀκίνητον (σχ. 62)· καὶ ἕνα ἄλλον, τὸν ΒΓΝ, στρεφό-



Σχ. 62.

μενον περὶ τὸν ἄξ. τῶν z: ΒΝ ***ὁμαλῶς***· συγχρόνως ἓν κινητὸν σημεῖον

ναυτικῶν χαρτῶν), ὅτι *αἱ λοξοδρομίαι ἀπεικονίζονται μὲ εὐθείας γραμμάς.* Ἡ ἀπόδειξις τούτου στηρίζεται εἰς τὴν ἰδιότητα (τὴν ὁποίαν δεικνύει ἡ μαθηματικὴ θεωρία), ὅτι εἰς τὴν ἀπεικόνισιν αὐτὴν διατηροῦνται αἱ γωνίαι : *ἡ γωνία δύο γραμμῶν τῆς σφαίρας (δηλ. τῶν ἐφαπτομένων των) εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν τῶν ἀπεικονίσεών των.* Ἐπειδὴ λοιπὸν (καθὼς ἀμέσως φαίνεται) εἰς τὴν ἀπεικόνισιν αὐτὴν οἱ μὲν παράλληλοι (καὶ ὁ ἰσημερινὸς) ἀπεικονίζονται μὲ εὐθείας γραμμὰς ὁριζοντίας (τ' ἀναπτύγματα τοῦ ἰσημερινοῦ), οἱ δὲ μεσημβρινοὶ μὲ εὐθείας κατακορύφους, ἡ τυχοῦσα λοξοδρομία, ἀφοῦ ἐπὶ τῆς σφαίρας σχηματίζει σταθερὰν γωνίαν μὲ τοὺς μεσημβρινούς, θὰ ἔχῃ ὡς ἀπεικόνισιν ἐπὶ τοῦ χάρτου μίαν γραμμήν, ποὺ νὰ κόπτῃ ὅλας τὰς (παραλλήλους) κατακορύφους ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν· *τοιαύτη γραμμὴ ὅμως εἶναι προφανῶς μόνον ἡ εὐθεῖα γραμμή.* Ὅταν λοιπὸν πρόκειται ἓν πλοῖον νὰ ταξειδεύσῃ ἀπὸ τὸν λιμένα Α (π.χ. τὸ *Cork (Κὸρκ)* τῆς Ἰρλανδίας) εἰς τὸν λιμένα Β (π.χ. τὴν Νέαν Ὑόρκην), ἀρκεῖ νὰ χαραχθῇ ἐπὶ τοῦ ναυτικοῦ χάρτου ἡ εὐθεῖα ΑΒ : ἡ γωνία, ποὺ σχηματίζει ἡ ΑΒ μὲ τὰς κατακορύφους (τὰς ἀπεικονίσεις τῶν μεσημβρινῶν) εἶναι ἡ ἁρμόζουσα σταθερὰ γωνία πλοῦ.

Μ κατέρχεται ἀπὸ τὸ Β ἐπὶ τῆς στρεφομένης μεγίστης περιφερείας ***πάλιν ὁμαλῶς***· ὁ λόγος δὲ τῶν δύο σταθερῶν ταχυτήτων (τῆς περιστροφικῆς τοῦ μεγίστου κύκλου καὶ τῆς τοῦ σημείου Μ) εἶναι τοιοῦτος, ὥστε, ὅταν ὁ στρεφόμενος κύκλος ἐκτελέσῃ ὁλόκληρον στροφήν, τὸ Μ φθάνει εἰς τὸ σημεῖον Α τοῦ ***ἰσημερινοῦ***.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ πολικὴ ἐξίσωσις τῆς ἀπολύτου τροχιᾶς τοῦ Μ, τὴν ὁποίαν πρῶτος ἐθεώρησεν ὁ ἀρχαῖος Ἕλλην μαθηματικὸς ***Πάππος*** καὶ δι᾽ αὐτὸ τὴν λέγουν ***ἕλικα τοῦ Πάππου***.

Ἀπὸ τὸν περιορισμόν, ποὺ ἐθέσαμεν διὰ τὸν λόγον τῶν ταχυτήτων, εὑρίσκομεν ἀμέσως τὴν σχέσιν : $\vartheta = \frac{\psi}{4}$, ποὺ ἀποτελεῖ ἑπομένως τὴν μίαν πολικὴν ἐξίσωσιν τῆς ἕλικος τοῦ Πάππου (ἡ ἄλλη εἶναι ἡ $\varrho=\alpha$). Αἱ δὲ καρτεσιαναὶ ἐξισώσεις τῆς καμπύλης εἶναι προφανῶς :

$$x = \alpha\eta\mu\left(\frac{\psi}{4}\right)\sigma\upsilon\nu\,\psi, \quad y = \alpha\,\eta\mu\left(\frac{\psi}{4}\right)\eta\mu\psi, \quad z = \alpha\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\psi}{4}\right)\cdot$$

α΄) Τὸ ***μῆκος*** ἑνὸς τόξου τῆς καμπύλης δίδεται ἀπὸ τὸ ὁλοκλήρωμα:

$$s = \alpha\int_0^{\psi}\sqrt{\frac{1}{16} + \eta\mu^2\left(\frac{\psi}{4}\right)}.d\psi \text{ (διότι : } ds^2 = \alpha^2\,(d\vartheta^2 + \eta\mu^2\vartheta d\psi^2) =$$

$$= \alpha^2\left[\left(\frac{d\psi}{4}\right)^2 + \eta\mu^2\left(\frac{\psi}{4}\right)d\psi^2\right)\Big]\cdot$$

$$\text{ἢ καὶ } s = \frac{\sqrt{17}}{4}\alpha\int_0^{\psi}\sqrt{1 - \frac{16}{17}\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\psi}{4}\right)}\,d\psi\cdot$$

καὶ ἂν θέσωμεν : $\omega = \frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{4}$:

$$s = -\sqrt{17}\,.\,\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{\omega}\sqrt{1 - \frac{16}{17}\eta\mu^2\,\omega}.\,d\omega,$$

ἀνάγεται δηλ. εἰς τὸ μῆκος ἑνὸς ***ἐλλειπτικοῦ*** τόξου (σελ. 73, ἄσκ. 2^{α}).

*β΄) Ἀπὸ τὸν ***γενικὸν*** τύπον τῆς ***Μετρικῆς Ἀπειροστικῆς Γεωμετρίας***, ποὺ ἐκφράζει ***τὸ ἐμβαδὸν Ε μιᾶς καμπύλης ἐπιφανείας μὲ ἓν διπλοῦν ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα*** (ποὺ τώρα διὰ τὴν ***σφαιρικὴν*** ἐπιφάνειαν ἁπλοποιεῖται εἰς τὸν ἑξῆς : $E=\alpha^2\iint\eta\mu\vartheta d\vartheta d\psi$), ἀποδεικνύεται καὶ ἡ ἑξῆς ἰδιότης τῆς καμπύλης, εὑρεθεῖσα ἐπίσης ἀπὸ τὸν Πάππον (πρότ. 30^{η} τοῦ $4^{ου}$ Βιβλίου τῆς «***Μαθηματικῆς Συναγωγῆς***» του):

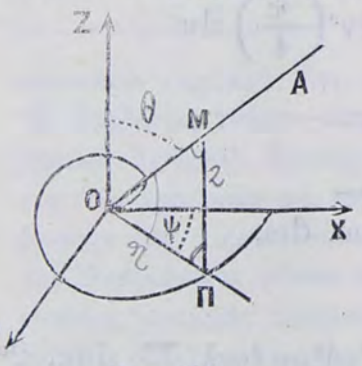
Τὸ σφαιρικὸν ἐμβαδὸν τὸ περικλειόμενον ἀπὸ τὴν ἕλικα τοῦ Πάππου, ἀπὸ τὸν ἰσημερινὸν καὶ ἀπὸ τὸν ἀκίνητον μεσημβρινὸν (μέγιστον κύκλον) εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας $(E=4\alpha^2)$. (Τὸ ἀρχαιότατον παράδειγμα ***τετραγωνισμοῦ*** μιᾶς ***καμπύλης*** ἐπιφανείας).

*γ΄) Τέλος ἀπὸ τὸν ***γενικὸν*** τύπον, ποὺ δίδει μὲ ***ἓν διπλοῦν ὡρισμένον*** ὁλοκλήρωμα ***τὸν ὄγκον*** V ***ἑνὸς στερεοῦ*** (ποὺ διὰ τὴν ***σφαῖραν*** γίνεται : $V=\int_0^{2\pi} d\psi \int_{\alpha\eta\mu\frac{\psi}{4}}^{\alpha} \sqrt{\alpha^2-r^2}\,.\,r dr$ (ὅπου $r=\sqrt{x^2+y^2}$)), εὑρίσκεται καὶ ἡ ἑξῆς ἰδιότης τῆς καμπύλης :

Ὁ ὄγκος ὁ περικλειόμενος ἀπὸ τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸ μεταξὺ τῆς ἕλικος τοῦ Πάππου καὶ τοῦ ἰσημερινοῦ, ἀπὸ τὸν ἰσημερινὸν καὶ ἀπὸ τὴν ὀρθὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν, ποὺ ἔχει βάσιν τὴν καμπύλην, εἶναι ἴσος μὲ τὰ $\frac{8}{9}$ ***τοῦ ὄγκου τοῦ κύβου, ποὺ ἔχει ἀκμὴν τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας*** $\left(V=\frac{8}{9}\alpha^3\right)$.

5ον.

96. ***Νὰ εὑρεθῇ ἡ καμπύλη, ποὺ παράγει, ἐπὶ κωνικῆς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς μὲ κορυφὴν τὴν ἀρχήν, ἄξονα τὸν ἄξ. OZ καὶ ἄνοιγμα : γων. AOZ=ϑ*** (σχ. 63), ***ἓν σημεῖον M κινούμενον ἐπ᾿ αὐτῆς οὕτως, ὥστε ἡ κατηγμένη του z νὰ εἶναι ἀνάλογος τῆς πολ. συντεταγμένης ψ***. Ἡ καμπύλη αὐτή, θεωρηθεῖσα πάλιν πρῶτα ἀπὸ τὸν Πάππον (***Μαθ. Συναγωγῆς*** Βιβλ. 4ον, πρότ. 29η), ὠνομάσθη ἀπὸ τὸν *Chasles* ***(Σάλ) κωνικὴ ἕλιξ***. Ἔχομεν διὰ τὰς καρτεσιανὰς συντεταγμένας της :



Σχ. 63.

$$x=r\sigma\upsilon\nu\psi,\quad y=r\eta\mu\psi,\quad z=r\sigma\varphi\vartheta=\alpha\psi$$

(ὅπου **r** εἶναι ἡ προβολὴ τῆς πολ. ἀκτῖνος ρ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου xy),
ἢ καί : $x=\alpha\psi\sigma\upsilon\nu\psi\varepsilon\varphi\vartheta,\quad y=\alpha\psi\eta\mu\psi\varepsilon\varphi\vartheta,\quad z=\alpha\psi.$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν : $r=\alpha\psi\varepsilon\varphi\vartheta$ συνάγομεν, ὅτι : ***Ἡ προβολὴ τῆς***

$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 \eta\mu^2\vartheta\, d\psi^2$ $z = \rho\,\sigma\upsilon\nu\vartheta = \alpha\psi\,\varepsilon\varphi\vartheta$

$\rho = \frac{\alpha\psi}{\sigma\upsilon\nu\vartheta}$

καμπύλης εἰς κάθε ἐπίπεδον κάθετον πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κώνου εἶναι ἕλιξ τοῦ Ἀρχιμήδους (ἐδ. 26).

Τὸ μῆκος τοῦ τόξου τῆς κωνικῆς ἕλικος τὸ δίδει ὁ τύπος :

$$s=\frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\vartheta}\int\sqrt{1+\psi^2\eta\mu^2\vartheta}.d\psi\cdot$$

$d\vartheta=0$

ὥστε εἶναι : $s=\frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\vartheta}\left[\psi(1+\psi^2\eta\mu^2\vartheta)^{1/2}+\frac{1}{\eta\mu\vartheta}\log(\psi\eta\mu\vartheta+\sqrt{1+\psi^2\eta\mu^2\vartheta})\right]$.

* Ὁ δὲ ὄγκος V τοῦ στερεοῦ, ποὺ περικλείεται ἀπὸ τὸν κύλινδρον μὲ βάσιν τὸ ἐμβαδὸν τὸ ὁριζόμενον ἀπὸ τὸν πρῶτον ***γῦρον*** τῆς προβολῆς τῆς καμπύλης ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου xy, ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου καὶ ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα xz καὶ yz, δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον :

$$V=\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\alpha\psi\varepsilon\varphi\vartheta}r^2\sigma\varphi\vartheta dr=\frac{4}{3}\alpha^3\pi^4\varepsilon\varphi^2\vartheta.$$

6ον.

97. ***Νὰ εὑρεθοῦν, ἐπὶ μιᾶς κωνικῆς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς, αἱ καμπύλαι, τῶν ὁποίων αἱ ἐφαπτόμεναι σχηματίζουν σταθερὰν γωνίαν ω μὲ τὰς γενετείρας τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας.*** Αἱ καμπύλαι αὗται λέγονται ἕλικες ***κυλινδροκωνικαὶ (Tissot (Τισσὼ)*** 1852, ***Serret (Σερρὲ)*** 1860). (Παράβ. ἐδ. 92).

Ἔχομεν τώρα (ἐδ. 90) : $\frac{d\varrho}{ds}=\sigma\upsilon\nu\omega\equiv\alpha$, δηλ.

$r=\varrho\,\eta\mu\vartheta$ $dr=d\varrho\,\eta\mu$ $\frac{d\varrho}{\varrho}$

$$d\varrho^2=\alpha^2\left[d\varrho^2+\varrho^2\eta\mu^2\vartheta d\psi^2\right]$$

(διότι ὁ ὅρος $\varrho^2d\vartheta^2$ εἶναι $=0$, ἀφοῦ $\vartheta=$ σταθ.), ἢ καί :

$$\frac{d\varrho}{\varrho}\cdot\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}=\eta\mu\vartheta d\psi\cdot \text{ ἑπομένως καὶ } \frac{dr}{r}=\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\cdot\eta\mu\vartheta d\psi.$$

(διότι : $r=\varrho\eta\mu\vartheta$ καὶ $dr=\eta\mu\vartheta d\varrho$)· ἑπομένως θὰ ἔχωμεν : $r=e^{k\psi}$, ὅπου $k\equiv\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\eta\mu\vartheta$. (ἡ σταθερὰ c μηδενίζεται μὲ κατάλληλον στροφὴν τοῦ ἄξ. OZ). Λοιπὸν αἱ ***καρτεσιαναὶ*** ἐξισώσεις τῆς καμπύλης εἶναι :

$$x=e^{k\psi}.\sigma\upsilon\nu\psi,\quad y=e^{k\psi}.\eta\mu\psi,\quad z=e^{k\psi}.\sigma\varphi\vartheta.$$

$x=r\sigma\upsilon\nu\varphi$
$z=r\sigma\varphi\vartheta$

Αἱ δὲ ***πολικαὶ*** εἶναι : $\vartheta=$σταθ., $\varrho=\frac{e^{k\psi}}{\eta\mu\vartheta}$·

Ἐπειδὴ ἡ προβολὴ τῆς καμπύλης ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου xy εἶναι ἡ καμπύλη : $r = e^{k\psi}$, βλέπομεν, ὅτι : ***Ἡ προβολὴ τῆς κυλινδροκωνικῆς ἕλικος ἐπὶ κάθε ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κώνου εἶναι λογαριθμικὴ ἕλιξ*** (ἐδ. 28).

Ἀπὸ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν συνάγομεν ἀμέσως, ὅτι : ***Καὶ ἡ κυλινδροκωνικὴ ἕλιξ ἔχει ἀσύμπτωτον σημεῖον, τὸ ἴδιον μὲ τὴν λογαριθμικὴν ἕλικα, δηλ. τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου.***

Τὸ ὄνομα ***κυλινδροκωνικὴ ἕλιξ*** ἐδόθη εἰς τὴν καμπύλην αὐτήν, διότι δὲν εἶναι μόνον ἕλιξ μιᾶς ***κωνικῆς ἐκ περιστροφῆς*** ἐπιφανείας, ἀλλὰ καὶ ***ἕλιξ*** μιᾶς ***κυλινδρικῆς*** (***μὴ ἐκ περιστροφῆς***). Πραγματικῶς, ἡ γωνία φ τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης μὲ τὸν ἄξονα OZ εἶναι $\quad \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{dz}{ds} = \frac{k\sigma\varphi\vartheta}{\sqrt{k^2+1+k^2\sigma\varphi^2\vartheta}}$ · ἐπομένως εἶναι καί : $\varphi = \sigma\tau\alpha\vartheta.$

Κεῖται λοιπὸν ἡ καμπύλη καὶ ἐπὶ τῆς ὀρθῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, ποὺ ἔχει βάσιν τὴν λογαριθμικὴν ἕλικα· καὶ εἶναι ἕλιξ ἐπ᾽ αὐτῆς.

Τὸ μῆκος τοῦ τόξου τῆς καμπύλης τὸ δίδει ὁ τύπος :

$[s]^r_1 = \frac{1}{k}\sqrt{1+\frac{k^2}{\eta\mu^2\vartheta}}(r-1)$, ἂν ὡς ἀρχὴν τοῦ τόξου s λάβωμεν τὸ σημεῖόν του T, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σημεῖον T′ τῆς προβολῆς τῆς καμπύλης τὸ ἔχον $\psi = 0$ καὶ ἐπομένως $r = 1$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ s καὶ τὸ s′ αὐξάνουν ὁμοσήμως καὶ εἶναι : $ds' = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}}.d\varrho$ (σελ. 71, πρβλ. 7ον), ἡ τετραγ. ρίζα θὰ ἔχῃ τὸ θετικὸν σημεῖον, ἂν ρ καὶ s αὐξάνουν ὁμοσήμως, δηλ. ἂν τὸ τόξον ἀντιστοιχεῖ εἰς θετικὰς τιμὰς τῆς γωνίας ψ· τὸ ἀρνητικὸν ὅμως, ἂν τὸ ἐναντίον· διὰ τὸ τόξον λοιπόν, ποὺ ἀρχίζει ἀπὸ τὸ σημεῖον T καὶ πλησιάζει πρὸς τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου (διὰ ψ ἀρνητικόν), ὁ τύπος θὰ εἶναι :

$s = \frac{1}{k}\sqrt{1+\frac{k^2}{\eta\mu^2\vartheta}}(1-r)$· ὥστε : ***Τὸ τόξον τοῦτο, ὁσουσδήποτε ἑλιγμοὺς καὶ ἂν ἐκτελέσῃ πέριξ τοῦ πόλου, μένει πάντοτε πεπερασμένον (ἂν καὶ δὲν φθάνει ποτὲ τὸν πόλον) καὶ τείνει*** (ἀπὸ μικροτέρας τιμὰς) ***πρὸς τὸν ἀριθμόν*** : $\frac{1}{k}\sqrt{1+\frac{k^2}{\eta\mu^2\vartheta}}$, ***καθ᾽ ὅσον τὸ κινητὸν ἄκρον του τείνει πρὸς τὸν πόλον.*** (Ἔχει δηλ. ἡ κυλινδροκωνικὴ ἕλιξ τὴν ἰδίαν ἰδιότητα μὲ τὴν προβολήν της).

$\vartheta = c \qquad \rho = \frac{e^{k\psi}}{\psi\vartheta}$

Παρατήρησις.

98. ***Ἐπίπεδοι καὶ στρεβλαὶ καμπύλαι.***— Ἐπειδὴ αἱ *ἐπίπεδοι* καμπύλαι χρησιμεύουν περισσότερον εἰς τὰς γεωμετρικὰς κατασκευὰς ἐπὶ τοῦ χάρτου καὶ εἰς τὰς ἐφαρμογάς, εἶναι δὲ καὶ ἡ σπουδή των ἁπλουστέρα, ἔχουν ἐρευνηθῆ ἀπὸ τοὺς μαθηματικοὺς πολὺ λεπτομερέστερα ἀπὸ τὰς ***στρεβλάς*** (***Στρεβλὴ*** λέγεται μία καμπύλη τοῦ χώρου, ὅταν ***κανὲν μέρος της, ὁσονδήποτε μικρόν, δὲν εἶναι ἐπίπεδον***). Δὲν πρέπει ὅμως δι᾿ αὐτὸ νὰ νομίσῃ κανείς, ὅτι αἱ στρεβλαὶ καμπύλαι εἶναι ὀλιγώτεραι ἀπὸ τὰς ἐπιπέδους· καὶ αἱ μὲν καὶ αἱ δὲ εἶναι ἄπειροι, αἱ στρεβλαὶ μάλιστα ***ἀπειράκις περισσότεραι*** ἀπὸ τὰς ἐπιπέδους. Αὐτὸ τὸ ἐννοοῦμεν, ἂν θεωρήσωμεν μίαν τυχοῦσαν καμπύλην τοῦ χώρου ὡς τομὴν δύο ἐπιφανειῶν· ἔχει τότε τὰς ἐξισώσεις : $\sigma(x,y,z)=0$, $\varphi(x,y,z)=0$: ἔχομεν λοιπὸν εἰς τὸ σύστημα αὐτὸ ***δύο αὐθαιρέτους συναρτήσεις (σ καὶ φ)***· ἂν τώρα ἡ πρώτη ἐξίσωσις καταντήσῃ ἓν ***πολυώνυμον πρώτου βαθμοῦ πρὸς*** x,y,z (δηλ. ἡ μία ἐπιφάνεια ἐπίπεδος), θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα : $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$, $\varphi(x,y,z)=0$· αὐτὸ δὲ προφανῶς παριστᾷ κάθε ***ἐπίπεδον*** καμπύλην· τώρα ὅμως ***περιωρίσθη*** τὸ σύστημα ἀφοῦ, ἀντὶ μιᾶς ***τυχούσης*** συναρτήσεως $\sigma(x,y,z)$, ἔχομεν ἓν πρωτοβάθμιον πολυώνυμον. Γενικῶς αἱ καμπύλαι αἱ κείμεναι ἐπὶ μιᾶς ***δοθείσης*** ἐπιφανείας εἶναι ἀπείρως ὀλιγώτεραι ἀπὸ ὅλας τὰς καμπύλας τοῦ χώρου· διότι διὰ τὰς πρώτας ἡ μία συνάρτησις $\sigma(x,y,z)$ εἶναι ***ὡρισμένη***.

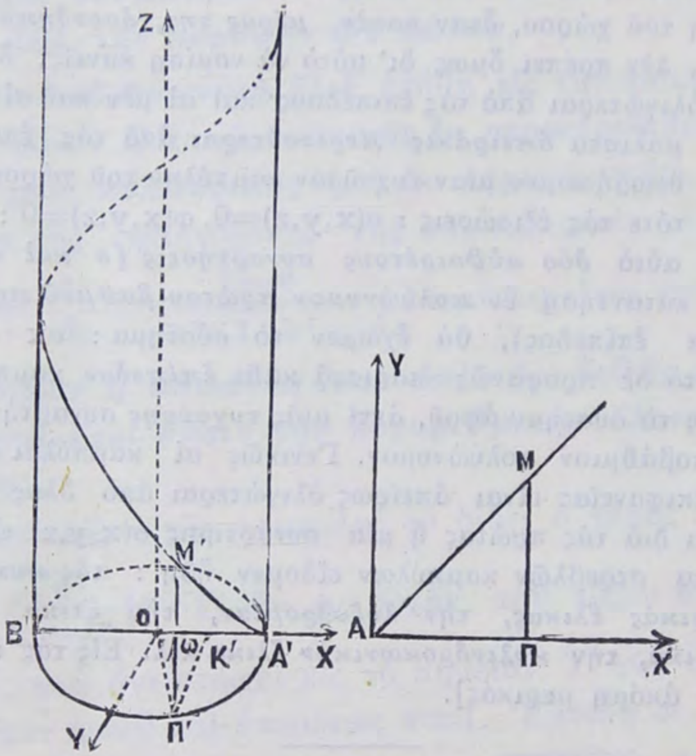
Παραδείγματα στρεβλῶν καμπύλων εἴδομεν ἤδη : τὰς ***κυκλικὰς*** καὶ τὰς ***γενικὰς κυλινδρικὰς ἕλικας***, τὴν ***λοξοδρομίαν***, τὴν ***ἕλικα τοῦ Πάππου***, τὴν ***κωνικὴν ἕλικα***, τὴν ***κυλινδροκωνικὴν ἕλικα*** κτλ. Εἰς τὰς ἑπομένας ἀσκήσεις ἀναφέρομεν ἀκόμη μερικάς].

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

---

1) ***Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις καὶ τὸ μῆκος τοῦ τόξου τῆς κυκλικῆς στερεᾶς ἕλικος.***—Εἰς τὸ ἐδ. 85 εὑρήκαμεν τὰς καμπύλας, τῶν ὁποίων ἡ ἐφαπτομένη σχηματίζει σταθερὰν γωνίαν μὲ μίαν δοθεῖσαν εὐθεῖαν (τὸν ἄξ. τῶν z), δηλ. τὰς ***στερεὰς ἕλικας***. Ἁπλουστέρα ἀπὸ αὐτὰς εἶναι ἡ ***κυκλικὴ*** στερεὰ ἕλιξ (ὅταν ἡ κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια, ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται, εἶναι ***ὀρθὸς κυκλικὸς*** κύλινδρος). Ἂς εὕρωμεν τὰς ἐξισώσεις τῆς κυκλικῆς στερεᾶς ἕλικος. Ἂν ΑΜ εἶναι ἡ εὐθεῖα, ποὺ τρέπεται εἰς τὴν ἕλικα κατὰ τὴν τύλιξιν τοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου (σχ. 64), φέρωμεν δὲ ἀπὸ ἓν σημεῖον Α τῆς εὐθείας μίαν παράλληλον ΑΥ πρὸς τὰς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου, ποὺ θὰ ἐφαρμόσουν εἰς τὰς γενετείρας τοῦ κυλίνδρου, ἡ κάθετος πρὸς αὐτὴν ΟΧ θὰ τραπῇ εἰς κάθετον τομὴν τοῦ κυλίνδρου, δηλ. εἰς τὴν περιφέρειαν Α΄Π΄Β΄Α΄ καὶ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας ΑΜ

εἰς τὸ ἐπίπεδον XAY θὰ εἶναι : $Y = \mu X$ ($\mu \equiv$ εφ XAM)' ἂν δὲ λάβωμεν εἰς τὸν κύλινδρον ὡς ἄξ. τῶν z τὸν ἄξονά του, ὡς ἐπίπεδον xy τὸ τοῦ κύκλου Α΄Π΄Β΄Α΄ καὶ ὡς ἄξ. x τὴν ΟΑ΄, ποὺ περνᾷ ἀπὸ τὸ σημεῖον Α΄ τοῦ κύκλου, ὅπου ἐφαρμόζει τὸ Α τῆς ΑΜ, αἱ συντεταγμέναι x,y,z τοῦ τυχ. σημείου Μ΄ τῆς ἕλικος θὰ εἶναι (ΟΑ΄$\equiv$α) :



Σχ. 64.

$x = OK' \equiv O\Pi'$συν$A'O\Pi' \equiv \alpha$συνω, $y = K'\Pi' = O\Pi'$ημ$A'O\Pi' = \alpha$ημω, $z = \Pi'M' = Y \equiv \mu X = \mu$. τοξ $(A'\Pi') \equiv \mu\alpha\omega$. ***Ἔχει λοιπὸν ἡ κυκλικὴ στερεὰ ἕλιξ τὰς ἐξισώσεις :***

$$x = \alpha\text{συν}\omega, \quad y = \alpha\text{ημ}\omega, \quad z = \alpha\mu\omega.$$

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς εὑρίσκομεν :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \alpha^2(1 + \mu^2)d\omega^2, \; ds = \alpha\sqrt{1+\mu^2}.d\omega,$$

$s = \alpha\sqrt{1+\mu^2}\omega = \frac{1}{\mu}\sqrt{1+\mu^2}.z$ (ἂν λάβωμεν ὡς ἀρχὴν τοῦ τόξου τὸ Α΄). (***Παράβ. σελ. 92, α΄***).

Παρατήρησις. Μὲ ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν γενικῶς τὰς ἐξισώσεις τῆς κυλινδρικῆς καμπύλης, ποὺ παράγει κατὰ τὴν προηγ. τύλιξιν τοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου ἡ ***τυχοῦσα*** ἐπίπεδος καμπύλη : $Y = \sigma(X)$:

$$x = \alpha\text{συν}\omega, \; y = \alpha\text{ημ}\omega, \; z = \sigma(\alpha\omega).$$

Ἀντιστρόφως, ἡ κυλινδρικὴ καμπύλη : $x=\alpha\sigma\upsilon\nu\omega$, $y=\alpha\eta\mu\omega$, $z=\sigma(\omega)$ τρέπεται εἰς τὴν ἐπίπεδον : $Y=\sigma\left(\frac{X}{\alpha}\right)$.

Π. χ. ἡ τομὴ τοῦ κυλίνδρου ἀπὸ ἓν ἐπίπεδον διὰ τοῦ ἄξονος τῶν x, τὸ $y=\beta z$, δηλ. ἡ ἔλλειψις : $x^2+y^2=\alpha^2$, $y=\beta z$, ἤ :

$x=\alpha\sigma\upsilon\nu\omega$, $y=\alpha\eta\mu\omega$, $z=\frac{\alpha}{\beta}\eta\mu\omega$, τρέπεται εἰς τὴν καμπύλην :

$$Y=\frac{\alpha}{\beta}\eta\mu\left(\frac{X}{\alpha}\right),$$ δηλ. τὴν ***ἡμιτονοειδῆ***.

2) ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ τόξου τῆς λοξοδρομίας***.

Αἱ πολικαί της ἐξισώσεις εἶναι: $\varrho=\alpha$, $\varepsilon\varphi\left(\frac{\vartheta}{2}\right)=e^{-\mu\psi}$ (ἐδ. 94).

θὰ ἔχωμεν λοιπόν : $d\varrho=0$, $d\vartheta=-\frac{2\mu e^{-\mu\psi}}{1+e^{-2\mu\psi}}d\psi$ καὶ ἑπομένως :

$$s=2\alpha\sqrt{1+\mu^2}\int_0^{\psi_1}\frac{e^{-\mu\psi}d\psi}{1+e^{-2\mu\psi}}=2\alpha\sqrt{1+\frac{1}{\mu^2}}\left[\frac{\pi}{4}-\tau o\xi\varepsilon\varphi(e^{-\mu\psi_1})\right].$$

Τὸ τόξον ἀρχίζει ἀπὸ τὸ σημεῖον $\psi=0$ (ὅπου ἡ καμπύλη κόπτει τὸν ἰσημερινὸν) καὶ τελειώνει εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον (ὅπου $\psi=\psi_1$). Ὅταν τώρα τὸ ψ_1 αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον, τὸ μῆκος τοῦ τόξου ἔχει ὅριον τὸν ἀριθμόν :

$$\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{1+\frac{1}{\mu^2}}\equiv\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\omega}\cdot$$ ὥστε :

Τὸ μῆκος τοῦ τόξου τῆς λοξοδρομίας εἶναι πεπερασμένον, ἂν καὶ ἡ καμπύλη ἐκτελεῖ ἀπείρους ἑλιγμοὺς πέριξ τοῦ πόλου. (Τοῦτο συμβαίνει, διότι ὁ πόλος εἶναι ***ἀσύμπτωτον*** σημεῖον τῆς καμπύλης).

3) ***Καμπύλη τοῦ Viviani (Βιβιάνι) (1692).***— Εἶναι ἡ κλειστὴ καμπύλη, ποὺ ἀποκόπτουν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς ἡμισφαιρίου δύο ἴσοι ὀρθοὶ κυκλικοὶ κύλινδροι ἔχοντες βάσεις τὰς περιφερείας, ποὺ γράφονται ἐπὶ ἑνὸς μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας μὲ κέντρα τὰ μέσα τῶν δύο ἀκτίνων μιᾶς διαμέτρου καὶ μὲ ἀκτῖνα τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας (σχ. 65). Αἱ ἐξισώσεις της, πρὸς ἄξονας μὲ ἀρχὴν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, ἐπίπεδον yz τὸ τῆς βάσεως τῶν κυλίνδρων καὶ ἄξ. τῶν y τὴν κοινὴν ἐφαπτομένην τῶν βάσεων, εἶναι :

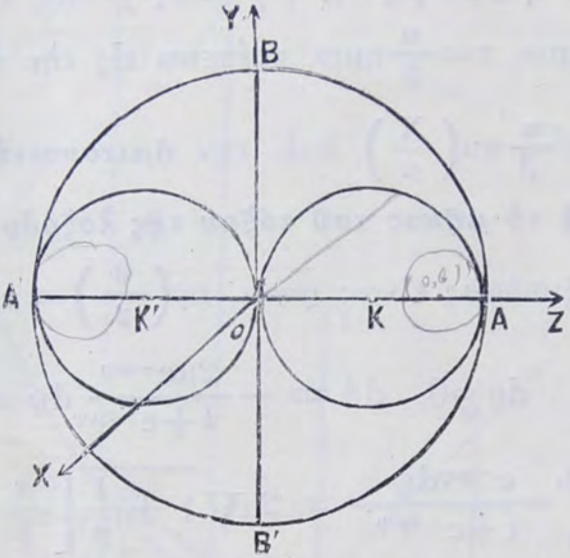
$x^2+y^2+z^2=\alpha^2$, $y^2+z^2=\pm\alpha z$ (α ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας).

Αἱ καμπύλαι τοῦ Viviani περιλαμβάνονται, ὡς ***μερικὴ περίπτω-***

σις $\left(\text{διὰ } \beta = \frac{\alpha}{2}\right)$, εἰς τὰς ἑξῆς καμπύλας («***σφαιρικοὺς λημνίσκους***»):

$$x^2+y^2+z^2=\alpha^2, \quad y^2+(z\mp\beta)^2=(\alpha-\beta)^2,$$

δηλ. τὰς τομὰς μιᾶς σφαίρας μὲ ἀκτῖνα α καὶ δύο ἴσων ὀρθῶν κυκλικῶν



Σχ. 65.

κυλίνδρων ἐφαπτομένων ἐσωτερικῶς εἰς αὐτήν· (0,β) εἶναι αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου τῆς βάσεως τοῦ ἑνὸς κυλίνδρου). Τὰς καμπύλας αὐτὰς («***ὑποπέδας***») τὰς ἐθεώρησε πρῶτος ὁ ***Εὔδοξος ὁ Κνίδιος*** (400 π.Χ. περίπου). (Κατὰ τὸν *P. Tannery* ***(Ταννερὺ)*** ἡ καμπύλη τοῦ ***Βιβιάνι*** συμπίπτει μὲ τὴν «***παράδοξον***» τοῦ ***Μενελάου,*** ποὺ ἀορίστως τὴν ἀναφέρει ὁ ***Πάππος***). Ὁ ***Εὔδοξος*** τὰς μετεχειρίσθη πρὸς παράστασιν τῶν τροχιῶν τῶν ἀνωμάλων κινήσεων τῶν πλανητῶν. Ὁ *Schiapparelli* ***(Σκιαπαρέλλι)*** τὰς ὠνόμασε ***σφαιρικοὺς λημνίσκους***. Ἐπίσης περιλαμβάνονται αἱ καμπύλαι τοῦ Viviani εἰς τὰς ***κυκλοκυλινδρικὰς*** καμπύλας τοῦ La Loubère (Λαλουμπέρ):
$x^2+y^2+z^2=\alpha^2$, $y^2+(z\mp\beta)^2=\beta^2$, ποὺ εἶναι οἱ γεωμ. τόποι τῶν σημείων τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου τῶν ἀπεχόντων ἴσον ἀπὸ ἓν δοθὲν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς.

Ἰδιότητες τῆς καμπύλης τοῦ Βιβιάνι.

α') ***Ἡ καμπύλη τοῦ Βιβιάνι εἶναι ἡ στερεογραφικὴ προβολὴ ἑνὸς λημνίσκου τοῦ*** *Bernoulli* ***(Μπερνούλλι)*** [*D'Arrest* ***(Ντ'Αρρέ)***].

Ἀπόδειξις. Αἱ ἐξισώσεις τοῦ λημνίσκου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου xy (σχ. 65) εἶναι : $z=0$, $(x^2+y^2)^2=\alpha^2(x^2-y^2)$. Ἂν τώρα θεωρήσωμεν καὶ ἕνα κῶνον μὲ κορυφὴν $(0,0,-\alpha)$ καὶ ὁδηγὸν τὸν λημνίσκον, αἱ ἐξισώσεις τῆς γενετείρας του θὰ εἶναι : $x=ky,\ z+\alpha=\mu y$.

Ἡ ἀπαλοιφὴ τῶν x,y,z μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν καὶ τῶν τοῦ λημνίσκου μᾶς δίδει τὴν ***σχέσιν μεταξὺ τῶν παραμέτρων*** k καὶ μ (τὴν ***συνθήκην*** δηλ. νὰ κόπτῃ ἡ γενέτειρα τὸν λημνίσκον) : $(k^2+1)^2=(k^2-1)\mu^2$· καὶ τέλος ἡ ἀπαλοιφὴ τῶν k καὶ μ μεταξὺ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς καὶ τῶν τῆς γενετείρας παρέχει τὴν ἐξίσωσιν τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας : $(x^2+y^2)^2=(z+\alpha)^2(x^2-y^2)$· αὐτὴ δέ, μαζὶ μὲ τὴν ἐξίσωσιν τῆς σφαίρας, δίδει μίαν καμπύλην, τῆς ὁποίας ἡ προβολὴ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου yz ἔχει ἐξίσωσιν, τὴν παραγομένην ἀπὸ τὴν ἀπαλοιφὴν τοῦ x μεταξὺ τῶν : $(x^2+y^2)^2=(z+\alpha)^2(x^2-y^2)$ καὶ $x^2+y^2+z^2=\alpha^2$, δηλ. τὴν ἑξῆς : $(z^2+2\alpha z+\alpha^2)(z^2+y^2-\alpha z)=0$· αὐτὴ ὅμως σχίζεται εἰς δύο καὶ ἡ β′ εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς μιᾶς ἀπὸ τὰς δύο περιφερείας, ποὺ εἶναι βάσεις τῶν κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν, ἀπὸ τὰς ὁποίας παράγεται ἡ καμπύλη τοῦ Viviani. Ὁμοίως δὲ ὁ κῶνος μὲ τὴν κορυφὴν $(0,0,\alpha)$ θὰ μᾶς δώσῃ τὸ ἄλλο μέρος τῆς καμπύλης τοῦ Viviani, ποὺ προβάλλεται ἐπὶ τῆς ἄλλης περιφερείας : $z^2+y^2+\alpha z=0$.

β′) Αἱ πολικαὶ ἐξισώσεις τῶν δύο μερῶν τῆς καμπύλης τοῦ Viviani εἶναι : τοῦ μὲν προβαλλομένου ἐπὶ τῆς περιφερείας : $y^2+z^2-\alpha z=0$ ἢ : $\vartheta=\psi$, τοῦ δὲ ἐπὶ τῆς περιφερείας : $y^2+z^2+\alpha z=0$ ἢ : $\vartheta=\pi-\psi$, ὅπου ϑ τὸ ***γεωγραφικὸν πλάτος*** καὶ ψ τὸ ***γεωγρ. μῆκος*** τῶν σημείων τῆς καμπύλης. (Ἡ ἀπόδειξις εὐκολωτάτη).

*γ′) Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μέρους τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἡμισφαιρίου, ποὺ μένει, ὅταν ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν ὅλου τοῦ ἡμισφαιρίου ἀφαιρεθοῦν τὰ δύο «***παράθυρα***», ποὺ ἀποκόπτει ἡ καμπύλη τοῦ Viviani, εἶναι ***«ἀκριβῶς τετραγωνιστὸν»*** (δηλ. δὲν περιέχει πλέον τὸν (ὑπερβατικὸν) παράγοντα π). Αὐτὸ φαίνεται ἀπὸ τὸν τύπον, ποὺ δίδει τὰ καμπύλα ἐμβαδὰ μὲ διπλοῦν ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα, ποὺ τώρα γίνεται διὰ τὸ ἐμβαδὸν αὐτὸ E :

$$E=4\iint_{(\varepsilon)}\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}\,dydz=4\iint_{(\varepsilon)}\frac{\alpha}{x}\,dydz\cdot$$

ἢ εἰς ἐπιπέδους πολικὰς συντεταγμένας: $x=r\sigma\upsilon\nu\psi, y=r\eta\mu\psi\ (x^2=\alpha^2-r^2)$:

$$E=4\alpha\iint\frac{rdrd\psi}{\sqrt{\alpha^2-r^2}}.$$

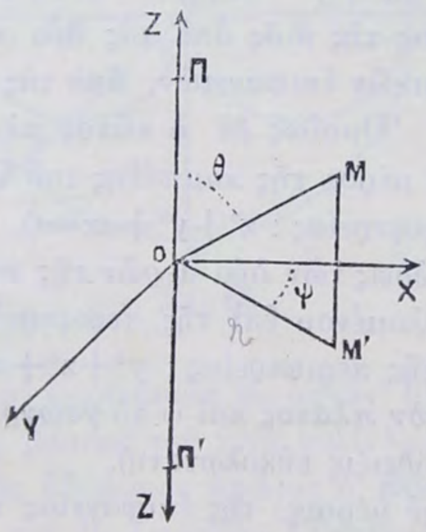
a: $x=ky$
b: $\frac{y}{\beta}+\frac{z}{-\alpha}=1$, $-\frac{\alpha}{\beta}y+z+\alpha=0$
$z+\alpha=\mu y$

ἑπομένως : $E = 4\alpha\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_{\alpha\sigma\upsilon\nu\psi}^{\alpha} \frac{rdr}{\sqrt{\alpha^2-r^2}} = 4\alpha\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \alpha\eta\mu\psi d\psi = 4\alpha^2$, δηλ.

Τὸ ἐμβαδὸν αὐτὸ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τοῦ τετραγώνου, ποὺ ἔχει πλευρὰν τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας (Βιβιάνι).

(Ὁμοίαν ἰδιότητα ἔχει καὶ τὸ ἐμβαδὸν E_1 τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, ποὺ παράγει τὴν καμπύλην, τὸ μεταξὺ τῆς βάσεως τοῦ ἡμισφαιρίου καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας· εὑρίσκεται δέ, ὅτι εἶναι $E_1 = 2\alpha^2$. [*Roberval*, ***(Ρόμπερβαλ)***, 1730].

4) «***Κλελίαι***». Εἰς σφαῖραν ἀκτῖνος α μὲ πόλους Π, Π΄ (σχ. 66)



Σχ. 66.

θεωροῦμεν ἐπὶ τοῦ ἰσημερινοῦ ΧΟΥ ἐν σημεῖον Μ΄, προβολὴν τοῦ σημείου Μ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τοῦ ἔχοντος ***συμπλήρωμα πλάτους*** ΜΟΠ≡θ καὶ μῆκος ΧΟΜ΄≡ψ. Ἂν θέσωμεν ΟΜ΄≡**r**, θὰ ἔχωμεν : r=αημθ. Ἂν τώρα τὸ Μ κινεῖται ἐπὶ τῆς σφαίρας οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι διαρκῶς: θ=μψ, τὸ μὲν Μ΄ θὰ γράψῃ ἐπὶ τοῦ ἰσημερινοῦ τὴν «***ροδοειδῆ***» καμπύλην: **r**=αημ(μψ), τὸ δὲ Μ ἐπὶ τῆς σφαίρας μίαν καμπύλην στρεβλὴν (ἔχουσαν προβολὴν τὴν προηγουμένην), ποὺ τὴν ἐθεώρησε πρῶτος ὁ *Guido Grandi* ***(Γκουΐντο Γκράντι)*** εἰς τὸ βιβλίον του «Flores Geometrici», (1728) καὶ τὴν ὠνόμασε «***Κλελίαν***» (πρὸς τιμὴν μιᾶς κομίσσης). Ἡ ***ἕλιξ τοῦ Πάππου*** εἶναι μερικὴ περίπτωσις τῆς καμπύλης αὐτῆς διὰ $\mu=\frac{1}{4}$.

Κάθε τοιαύτη καμπύλη ἀποτελεῖται ἀπὸ πολλὰ ἴσα **φύλλα,** ποὺ ἐφάπτονται ὅλα τοῦ ἰσημερινοῦ καὶ συνενώνονται ὅλα εἰς τὸν πόλον Π (**«πολλαπλοῦν»** σημεῖον τῆς καμπύλης).

Αἱ καρτεσιαναὶ ἐξισώσεις τῆς κλελίας εἶναι :

$$x = \alpha\, \eta\mu(\mu\psi)\sigma\upsilon\nu\psi, \quad y = \alpha\, \eta\mu(\mu\psi)\eta\mu\psi, \quad z = \alpha\, \sigma\upsilon\nu(\mu\psi). \qquad (\alpha)$$

Τὸ τόξον της θὰ εὑρεθῇ ἀπὸ τὸν τύπον :

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\psi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\psi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\psi}\right)^2}\,.\,d\psi,$$

ποὺ ἕνεκα τῶν (α) γίνεται :

$$ds = \alpha\sqrt{1+\mu^2}\sqrt{1 - \frac{1}{1+\mu^2}\sigma\upsilon\nu^2(\mu\psi)}\,.\,d\psi,$$

ἤ, ἂν θέσωμεν : $\mu\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$:

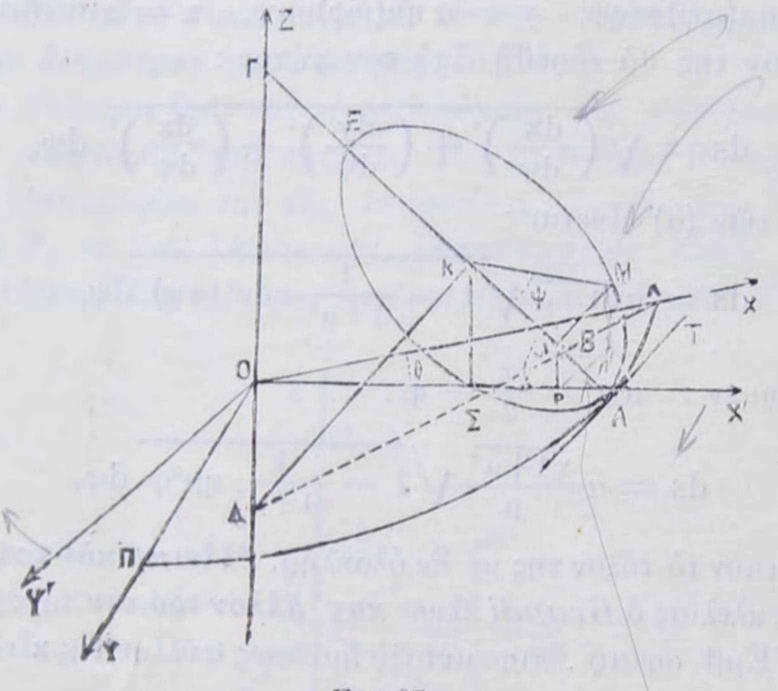
$$ds = \alpha\frac{\sqrt{1+\mu^2}}{\mu}\sqrt{1 - \frac{1}{1+\mu^2}\eta\mu^2\varphi}\,.\,d\varphi,$$

δίδεται λοιπὸν τὸ τόξον της μὲ ἓν ὁλοκλήρ. **ἐλλειπτικὸν τοῦ β΄ εἴδους.**

Μὲ τὰς κλελίας ὁ *Grandi* ἔλυσε **κατ' ἄλλον τρόπον** τὸ πρόβλημα τοῦ **Βιβιάνι** [Ἐμβ. σφαιρ. ἐπιφ. μεταξὺ ἡμίσεως φύλλου τῆς κλελίας, τοῦ μεσημβρινοῦ καὶ τοῦ ἰσημερινοῦ $= \frac{\alpha^2}{\mu}$].

5) ***Σφαιρικαὶ ἐπικυκλοειδεῖς.*** (***Ἰάκωβος Ἕρμανν*** (*Hermann*), 1718 καὶ κατόπιν ***Ἰ. Μπερνούλλι***). Ὀνομάζεται ***σφαιρικὴ ἐπικυκλοειδὴς ἡ καμπύλη, ποὺ παράγει ἓν σημεῖον μιᾶς κινητῆς περιφερείας, ὅταν αὐτὴ κυλίεται ἐπὶ μιᾶς ἄλλης περιφερείας ἀκινήτου, τῆς ὁποίας τὸ ἐπίπεδον σχηματίζει σταθερὰν γωνίαν μὲ τὸ ἐπίπεδον τῆς πρώτης***. (Λέγεται δὲ ***σφαιρική***, διότι, καθὼς θὰ ἴδωμεν, κεῖται ἐπὶ μιᾶς σφαιρικῆς ἐπιφανείας).—Ἡ ἀκτὶς τῆς ἀκινήτου περιφερείας ΛΑΠ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου xy ἂς ὀνομασθῇ ρ καὶ ἂς λάβωμεν τὸ κέντρον της Ο ὡς ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων (σχ. 67)· τῆς δὲ κινητῆς περιφερείας ΑΜΕΑ ἂς εἶναι ἀκτὶς ἡ r καὶ κέντρον τὸ Κ, καὶ τῆς παραγομένης ἐπικυκλοειδοῦς τυχὸν σημεῖον τὸ Μ καὶ ἄξων τῶν x ἡ εὐθεῖα ΟΛ, ὅπου Λ ἡ ἀρχικὴ θέσις τοῦ Μ. Ἂς ὀνομάσωμεν ἀκόμη ω τὴν γωνίαν τῶν ἐπιπέδων τῶν δύο περιφερειῶν, ΟΧ΄, ΟΥ΄, δύο νέους κινητοὺς ὀρθογ. ἄξονας συντεταγμένων, ἀπὸ τοὺς ὁποίους ὁ ΟΧ΄ νὰ περνᾷ ἀπὸ τὸ σημ. Α, ὅπου ἡ κινητὴ περιφέρεια ἐφάπτεται τῆς ἀκινήτου, ψ τὴν γωνίαν ΜΚΑ καὶ θ τὴν γωνίαν ΛΟΑ.

Ἡ ἀπὸ τὸ Μ παράλληλος ΜΒ πρὸς τὴν κοινὴν ἐφαπτομένην τῶν δύο περιφερειῶν εἰς τὸ Α, τὴν ΑΤ, κόπτει τὴν ΚΑ εἰς ἓν σημεῖον Β ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΖΟΑ, ποὺ προβάλλεται εἰς τὸ σημεῖον Ρ τοῦ ἄξ. ΟΧ΄.Τὸ



Σχ. 67.

δὲ Κ θὰ προβάλλεται εἰς τὸ Σ τοῦ ἄξ. ΟΧ΄ καὶ ἡ γωνία ΚΑΣ θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ω. Θὰ ἔχωμεν δέ : τοξΜΑ=τοξΛΑ, δηλ. $r\psi=\varrho\vartheta$· καὶ ἐπειδὴ αἱ συντεταγμέναι τοῦ Μ πρὸς τοὺς ἄξ. ΟΧ΄Υ΄Ζ εἶναι $x'=OP$, $y'=MB$, $z=BP$, θὰ ἔχωμεν :

$$x' = OA-PA=OA-(KA-KB)\sigma\upsilon\nu\,\omega=\varrho-r(1-\sigma\upsilon\nu\psi)\sigma\upsilon\nu\omega,$$

$$y' = -r\eta\mu\psi, \quad z=BA\eta\mu\omega = r(1-\sigma\upsilon\nu\psi)\eta\mu\omega\cdot$$

ἢ καί : $x'=\varrho-r\left[1-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\varrho}{r}\vartheta\right)\right]\sigma\upsilon\nu\omega, \quad y'=-r\eta\mu\left(\frac{\varrho}{r}\vartheta\right).$

$$z = r\left[1-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\varrho}{r}\vartheta\right)\right]\eta\mu\omega\cdot$$

εἶναι ὅμως καί : $x=x'\sigma\upsilon\nu\vartheta-y'\eta\mu\vartheta, \quad y=x'\eta\mu\vartheta+y'\sigma\upsilon\nu\vartheta\cdot$

ἑπομένως ἔχομεν τελικῶς τὰς ἐξισώσεις τῆς σφαιρικῆς ἐπικυκλοειδοῦς :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \varrho\,\sigma\upsilon\nu\vartheta - r\left[1-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\varrho}{r}\vartheta\right)\right]\sigma\upsilon\nu\,\omega\,\sigma\upsilon\nu\vartheta + r\,\eta\mu\left(\frac{\varrho}{r}\vartheta\right)\eta\mu\vartheta, \\ y = \varrho\,\eta\mu\vartheta - r\left[1-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\varrho}{r}\vartheta\right)\right]\sigma\upsilon\nu\,\omega\,\eta\mu\vartheta - r\,\eta\mu\left(\frac{\varrho}{r}\vartheta\right)\sigma\upsilon\nu\vartheta, \\ z = r\left[1-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\varrho}{r}\vartheta\right)\right]\eta\mu\omega, \end{array}\right.$$

(ϑ ἡ παράμετρος).

Ἂν ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς κινητῆς περιφερείας φέρωμεν τὴν κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδόν της, ἡ κάθετος αὐτὴ θὰ κόψῃ τὸν ἄξ. ΟΖ εἰς ἓν σημεῖον Δ, ἀνεξάρτητον τοῦ ϑ, κορυφὴν ἑνὸς κώνου ἐκ περιστροφῆς μὲ βάσιν τὴν κινητὴν περιφέρειαν. Ἑπομένως: ***Ἡ σφαιρικὴ ἐπικυκλοειδὴς παράγεται καὶ ἀπὸ ἓν σημεῖον μιᾶς περιφερείας, ποὺ εἶναι ἡ βάσις ἑνὸς ὀρθοῦ κώνου, ὅταν αὐτὸς κυλίεται ἐπὶ ἑνὸς ἄλλου κώνου ἀκινήτου μὲ κορυφὴν τὴν κορυφὴν τοῦ κινητοῦ καὶ μὲ βάσιν τὴν ἀκίνητον περιφέρειαν.***

Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς σφαιρικῆς ἐπικυκλοειδοῦς εὑρίσκονται ἐπὶ μιᾶς σφαιρικῆς ἐπιφανείας μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα $R = \Delta\Lambda$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀκτῖνα $\Delta\Lambda \equiv R$, ἀρκεῖ νὰ μεταφέρωμεν τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων εἰς τὸ Δ, θέτοντες $Z = z + k$, ὅπου θὰ ὁρίσωμεν ὡς ἑξῆς τὸ k. Ἐπειδὴ εἶναι: $R^2 = x^2 + y^2 + Z^2$, θὰ ἔχωμεν:

$$R^2 = \varrho^2 + 2r^2 - 2r^2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\varrho}{r}\vartheta\right) - 2\varrho r\left[1-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\varrho}{r}\vartheta\right)\right]\sigma\upsilon\nu\omega + k^2 + \\ + 2kr\left[1-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\varrho}{r}\vartheta\right)\right]\eta\mu\omega.$$

(α

καὶ ἐπειδὴ πρέπει τὸ R^2 νὰ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ ϑ, θὰ εἶναι:

$k = \dfrac{\varrho\,\sigma\upsilon\nu\omega - r}{\eta\mu\omega}$· ἡ ἀκτὶς λοιπὸν R εἶναι: $R^2 = \varrho^2 + \left[\dfrac{\varrho\,\sigma\upsilon\nu\omega - r}{\eta\mu\omega}\right]^2$.

Τὸ τόξον τῆς καμπύλης τὸ εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς. Ἔχομεν:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{d\vartheta} = -\varrho\,\eta\mu\vartheta + r\left[1-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\varrho}{r}\vartheta\right)\right]\sigma\upsilon\nu\omega\,\eta\mu\vartheta - \\ -\varrho\,\eta\mu\left(\frac{\varrho}{r}\vartheta\right)\sigma\upsilon\nu\omega\,\sigma\upsilon\nu\vartheta + r\,\eta\mu\left(\frac{\varrho}{r}\vartheta\right)\sigma\upsilon\nu\vartheta + \varrho\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\varrho}{r}\vartheta\right)\eta\mu\vartheta, \\ \frac{dy}{d\vartheta} = \varrho\,\sigma\upsilon\nu\vartheta - r\left[1-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\varrho}{r}\vartheta\right)\right]\sigma\upsilon\nu\omega\,\sigma\upsilon\nu\vartheta - \\ -\varrho\,\eta\mu\left(\frac{\varrho}{r}\vartheta\right)\sigma\upsilon\nu\omega\,\eta\mu\vartheta + r\,\eta\mu\left(\frac{\varrho}{r}\vartheta\right)\eta\mu\vartheta - \varrho\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\varrho}{r}\vartheta\right)\sigma\upsilon\nu\vartheta, \\ \frac{dz}{d\vartheta} = \varrho\,\eta\mu\left(\frac{\varrho}{r}\vartheta\right)\eta\mu\omega \end{array}\right.$$

$R^2 = x^2 + y^2 + (z+k)^2 = \varrho^2 + k^2 + 2\varrho \ldots$

ἐπομένως: $ds^2 = \left[A + B\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\varrho}{r}\vartheta\right) - r^2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\varrho}{r}\vartheta\right)\eta\mu^2\omega \right] d\vartheta^2$,

ὅπου :

$A \equiv 2\varrho^2 + r^2\sigma\upsilon\nu^2\omega + r^2 - 4\varrho r\sigma\upsilon\nu\omega, \qquad B \equiv -2\varrho^2 - 2r^2\sigma\upsilon\nu^2\omega + 4\varrho r.\sigma\upsilon\nu\omega\cdot$

ἢ καὶ : $ds = \frac{r}{\varrho}\sqrt{\frac{r^2t^2\eta\mu^2\omega - Bt - A}{t^2-1}}\,.\,dt = \frac{r}{\varrho}\sqrt{\frac{r^2t\eta\mu^2\omega + r^2\eta\mu^2\omega - B}{t+1}}dt,$

$$\text{ὅπου}: \quad t \equiv \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\varrho}{r}\vartheta\right), \qquad dt = -\frac{\varrho}{r}\eta\mu\left(\frac{\varrho}{r}\vartheta\right)d\vartheta\cdot$$

ἢ ἀκόμη συντομώτερα :

$$ds = -\frac{r^2}{\varrho}\eta\mu\omega\sqrt{\frac{t+k}{t+1}}dt, \ \text{ὅπου}: \ k \equiv \frac{r^2\eta\mu^2\omega - B}{r^2\eta\mu^2\omega}.$$

Νὰ ὁρισθῇ κατόπιν τὸ τόξον s :

$$s = -\frac{r^2}{\varrho}\eta\mu\omega\left[\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\varrho}{r}\vartheta\right) + (k+1)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\varrho}{r}\vartheta\right) + k} + \right.$$

$$\left.\frac{k-1}{2}\log\left(k+1+2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\varrho}{r}\vartheta\right) + 2\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\varrho}{r}\vartheta + (k+1)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\varrho}{r}\vartheta\right) + k}\right)\right]$$

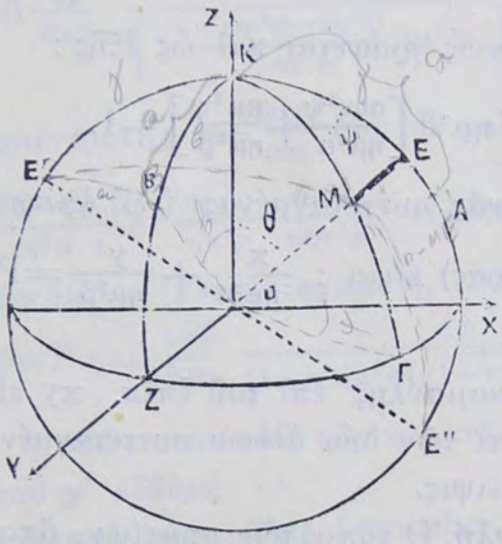
Εἰς τὴν ***μερικὴν*** περίπτωσιν : $k = 1$, δηλ. $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\varrho}{r}$, τὸ s ἔχει ἔκφρασιν καθαρῶς ***ἀλγεβρικήν***· αὐτὸ συμβαίνει, ὅταν ἡ ἀκτὶς r τῆς κινητῆς περιφερείας εἶναι $= R$, δηλ. ***ὅταν τὸ κέντρον τῆς κινητῆς περιφερείας συμπίπτῃ μὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας***· ἔχομεν τότε :

$s = \frac{r^2}{\varrho}\eta\mu\omega\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\varrho}{r}\vartheta\right) + 1\right]$, δηλ. ἡ καμπύλη ***εὐθειοποιεῖται ἀκριβῶς***.

(Ἡ μερικὴ αὐτὴ περίπτωσις χρησιμεύει εἰς τὴν λύσιν ***τοῦ προβλήματος τοῦ Ὀφφεμπούργου*** (1718) : «***Νὰ κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας ἓν «παράθυρον» περικλειόμενον ἀπὸ καμπύλην ἀκριβῶς «εὐθειοποιητήν»***»).

6) α′) ***Σφαιρικὴ ἔλλειψις.***— Ἐπὶ μιᾶς μεγίστης περιφερείας μιᾶς σφαίρας λαμβάνομεν δύο σημεῖα E καὶ E′ (σχ. 68)· ἓν σημεῖον M κινεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας μὲ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ εἶναι διαρκῶς : $ME + ME' = \sigma\tau\alpha\vartheta. = 2\alpha$, ὅπου ME, ME' εἶναι δύο (διαφορετικὰ) τόξα μεγίστων κύκλων. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ τόπου τοῦ σημείου M, ποὺ ὀνομάζεται, κατὰ γενίκευσιν τῆς ***ἐπιπέδου***

ἐλλείψεως, ***σφαιρικὴ*** ἔλλειψις (Fuss '(Φοὺςς), 1788), λαμβάνομεν ὡς ἐπίπεδ. xz τὸ τοῦ μεγίστου κύκλου ΕΟΕ΄, ὡς ἐπίπεδ. yz τὸ τοῦ μεγίστου κύκλου, ποὺ περνᾷ ἀπὸ τὸ μέσον σημεῖον Κ τοῦ τόξου



Σχ. 68

ΕΕ΄ καὶ ὡς ἐπίπεδ. xy τὸ διὰ τοῦ κέντρου Ο κάθετον πρὸς τὰ δύο προηγούμενα· ὀνομάζομεν ἐπίσης ψ τὸ γεωγρ. μῆκος ΕΚΓ καὶ θ τὸ συμπλήρωμα ΚΜ τοῦ γεωγρ. πλάτους τοῦ σημείου Μ. Ἂν θέσωμεν ΕΚ=γ, ἔχομεν ἀπὸ τὴν ***Σφαιρ. Τριγωνομετρίαν***:

$$\text{συν}(\text{ME})=\text{συν}\theta\,\text{συν}\gamma+\text{ημ}\theta\,\text{ημ}\gamma\,\text{συν}\psi,$$
$$\text{συν}(\text{ME}')=\text{συν}\theta\,\text{συν}\gamma-\text{ημ}\theta\,\text{ημ}\gamma\,\text{συν}\psi\cdot$$

ἑπομένως καί : $\text{συν}\left(\dfrac{\text{ME}'-\text{ME}}{2}\right).\text{συν}\left(\dfrac{\text{ME}'+\text{ME}}{2}\right)=$

$$=\frac{1}{2}[\text{συν}(\text{ME}')+\text{συν}(\text{ME})]=\text{συν}\theta\,\text{συν}\gamma,$$

$$-\text{ημ}\left(\frac{\text{ME}'-\text{ME}}{2}\right)\text{ημ}\left(\frac{\text{ME}'+\text{ME}}{2}\right)=\frac{1}{2}[\text{συν}(\text{ME}')-\text{συν}(\text{ME})]=\text{ημ}\theta\,\text{ημ}\gamma\,\text{συν}\psi$$

ὥστε ἔχομεν τελικῶς : $\dfrac{\text{συν}^2\theta\,\text{συν}^2\gamma}{\text{συν}^2\alpha}+\dfrac{\text{ημ}^2\theta\,\text{ημ}^2\gamma\,\text{συν}^2\psi}{\text{ημ}^2\alpha}=1.$

Αὐτὴ εἶναι (εἰς ***σφαιρικὰς*** συντεταγμένας) ἡ ἐξίσωσις τῆς ***σφαιρικῆς ἐλλείψεως***, ποὺ ἔχει ***κέντρον*** τὸ Κ καὶ ***ἑστίας*** τὰ Ε,Ε΄. Εἶναι συμμετρικὴ πρὸς τὰ ἐπίπ. xz καὶ yz καὶ κόπτει τὴν μεγίστην περιφέρειαν

$\text{συν}^2\left(\frac{\text{ME}'-\text{ME}}{2}\right)\text{συν}^2\alpha=\text{συν}^2\theta\,\text{συν}^2\gamma$ $\quad \text{συν}^2\left(\frac{\text{ME}'-\text{ME}}{2}\right)=$

$\text{ημ}^2\left(\frac{\text{ME}'-\text{ME}}{2}\right)\text{ημ}^2\alpha=\text{ημ}^2\theta\,\text{ημ}^2\gamma\,\text{συν}^2\psi$ $\quad \text{ημ}^2(\quad)=$

Ε'ΚΕ εἰς ἓν σημ. Α, ὅπου : $KA = \frac{1}{2}(EA + E'A) = \alpha$· καὶ τὸ τόξον ΚΖ εἰς τὸ Β, ὅπου : $BE = BE' = \alpha$.

Νὰ δειχθῇ, ὅτι : α') Ἂν θέσωμεν: $KB \equiv \beta$ $\left(\sigma\upsilon\nu\beta = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\gamma}\right)$, ἡ ἐξίσωσις τῆς σφαιρ. ἐλλείψεως γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\eta\mu^2\vartheta\left[\frac{\sigma\upsilon\nu^2\psi}{\eta\mu^2\alpha} + \frac{\eta\mu^2\psi}{\eta\mu^2\beta}\right] = 1.$$

β') Εἰς ***καρτεσιανὰς*** συντεταγμένας ἡ β' ἐξίσωσις τῆς καμπύλης (α' εἶναι ἡ τῆς σφαίρας) εἶναι : $\frac{x^2}{\eta\mu^2\alpha} + \frac{y^2}{\eta\mu^2\beta} = P^2$, (ὅπου Ρ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας).

Ἡ προβολὴ τῆς καμπύλης ἐπὶ τοῦ ἐπιπ. xy εἶναι μία ἔλλειψις· αἱ δὲ προβολαί της ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων συντεταγμένων ἐπιπέδων, μία ὑπερβολὴ καὶ μία ἔλλειψις.

β') *Σφαιρικὴ ὑπερβολή*. Ὁ τόπος τῶν σημείων, ὅπου $ME' - ME = 2\alpha$, θὰ εὑρεθῇ ὡς ἑξῆς : θέτομεν $KE'' = \pi - \gamma$, τότε :

$ME'' + ME = \pi - ME' + ME = \pi - 2\alpha = 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$· εἶναι λοιπὸν ἡ «σφαιρικὴ ὑπερβολή» πάλιν ***σφαιρικὴ ἔλλειψις***, εἰς διαφορετικὴν θέσιν ἀπὸ τὴν προηγουμένην ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας.

Νὰ δειχθῇ, ὅτι : ***Κάθε σφαιρικὴ ἔλλειψις εἶναι τομὴ τῆς σφαίρας καὶ ἑνὸς κώνου μὲ βάσιν ἐλλειπτικήν, μὲ κορυφὴν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας καὶ μὲ ἄξονα τὴν ἀκτῖνα, ποὺ περνᾷ ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς ἐλλείψεως.***

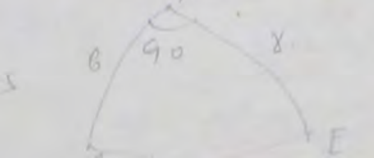
Τὸ μῆκος τοῦ τόξου τῆς σφαιρ. ἐλλείψεως, θὰ ἐκφρασθῇ ὡς ἑξῆς : Θέτομεν πρῶτα τὴν ἐξίσωσιν τῆς σφαίρας ὑπὸ τὴν μορφήν :

$z = \sqrt{P^2 - [A^2\sigma\upsilon\nu^2\omega + B^2\eta\mu^2\omega]}$ (ὅπου : $A = P\eta\mu\alpha$, $B = P\eta\mu\beta$)· τότε :

$$ds^2 = \left[\left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\omega}\right)^2\right] d\omega^2 = \frac{P^2(A^2\eta\mu^2\omega + B^2\sigma\upsilon\nu^2\omega - A^2B^2}{P^2 - (A^2\sigma\upsilon\nu^2\omega + B^2\eta\mu^2\omega)} . d\omega^2$$

καὶ ἂν θέσωμεν: $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{A}{B}\sqrt{\frac{P^2 - B^2}{P^2 - A^2}}\varepsilon\varphi\omega$, εὑρίσκεται :

$$ds = \frac{B^2}{A}\sqrt{\frac{P^2 - A^2}{P^2 - B^2}} \frac{d\varphi}{\left[1 - \frac{P^2(A^2 - B^2)}{A^2(P^2 - B^2)}\eta\mu^2\varphi\right]\sqrt{1 - \frac{A^2 - B^2}{A^2}\eta\mu^2\varphi}}, \text{ ἢ καί :}$$



$$ds = P\frac{\eta\mu^2\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha\;\sigma\upsilon\nu\beta}\cdot\frac{d\varphi}{\left[1-\frac{\eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\beta}{\eta\mu^2\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\beta}\eta\mu^2\varphi\right]\cdot\sqrt{1-\frac{\eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\beta}{\eta\mu^2\alpha}\eta\mu^2\varphi}}, \text{ ἢ καί:}$$

$$ds = P\,\eta\mu\beta\,\frac{\varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha}\cdot\frac{d\varphi}{\left[1-\frac{\varepsilon\varphi^2\alpha-\varepsilon\varphi^2\beta}{\varepsilon\varphi^2\alpha}\eta\mu^2\varphi\right]\sqrt{1-\frac{\eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\beta}{\eta\mu^2\alpha}\eta\mu^2\varphi}}\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ ἡ ἐκκεντρότης $\varepsilon\equiv\frac{\eta\mu\gamma}{\eta\mu\alpha}$ δίδεται καὶ ἀπὸ τὸν τύπον:

$\varepsilon^2=\frac{\varepsilon\varphi^2\alpha-\varepsilon\varphi^2\beta}{\varepsilon\varphi^2\alpha}=\frac{\eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\beta}{\eta\mu^2\alpha\,.\,\sigma\upsilon\nu^2\beta}$, εὑρίσκομεν τελικῶς τὸν ἑξῆς τύπον τοῦ *Gudermann* (***Γκούντερμανν***), 1830:

$$ds = P\,\eta\mu\beta\,\frac{\varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha}\,.\,\frac{d\varphi}{(1-\varepsilon^2\eta\mu^2\varphi)\sqrt{1-\varepsilon^2\sigma\upsilon\nu^2\beta\eta\mu^2\varphi}}\cdot$$

ἐξαρτᾶται δηλ. ἡ ***εὐθειοποίησις*** τῆς καμπύλης ***ἀπὸ ἓν ἐλλειπτικὸν ὁλοκλήρωμα τοῦ γ΄ εἴδους***.

7) ***Ὑπερκυκλικαὶ καμπύλαι*** («courbes cycliques«, *Laguerre* ***(Λαγκέρ)***, 1867· *Darboux* ***(Νταρμπού)***, 1873). Εἶναι αἱ τομαὶ ***ἑνὸς τυχ. κώνου τοῦ β΄ βαθμοῦ*** μὲ μίαν ***σφαῖραν***. Παράγονται ἐπίσης ἀπὸ τὴν τομὴν μιᾶς ***σφαίρας*** μὲ μίαν ***τυχ. ἐπιφάνειαν τοῦ β΄ βαθμοῦ*** (*Painvin* ***(Παινβέν)***, 1868—9, Nouvelles Annales de Math.). Ἂν λάβωμεν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ὡς ἀρχὴν καὶ α,β,γ εἶναι αἱ συντεταγμέναι τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου, αἱ ἐξισώσεις τῶν καμπύλων αὐτῶν εἶναι: $x^2+y^2+z^2=P^2$, $A(x-\alpha)^2+B(y-\beta)^2+\Gamma(z-\gamma)^2=0$ (ὅπου P ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας καὶ Α,Β,Γ τυχ. σταθεραί).—Ἡ σφαιρικὴ ἔλλειψις εἶναι μερικὴ περίπτωσίς των, ***ὅταν ἡ κορυφὴ του κώνου συμπέσῃ μὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας***.

Ἔχουν αἱ καμπύλαι αὐταὶ πολλὰς ἰδιότητας, τὰς ὁποίας ὅμως δὲν θ᾿ ἀναπτύξωμεν ἐδῶ.

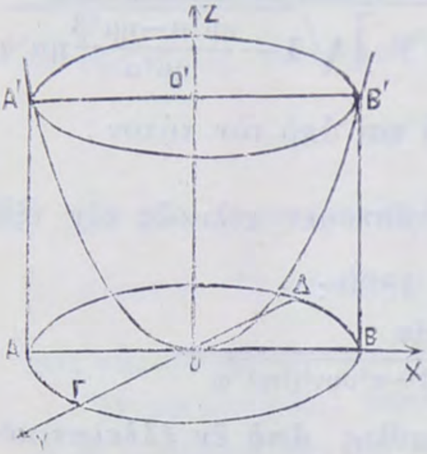
8) ***Λογαριθμικαὶ ἔλλειψις, ὑπερβολὴ καὶ παραβολὴ*** τοῦ ***Booth (Μπούθ)*** (A Treatise on some new geometrical Methods, 1877). α΄) ***Λογαριθμικὴ ἔλλειψις*** λέγεται ἡ καμπύλη, ποὺ εἶναι τομὴ ἑνὸς ***παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς*** (ποὺ παράγεται ἀπὸ τὴν παραβολὴν Α΄ΟΒ΄ (σχ. 69) στρεφομένην πέριξ τοῦ ἄξ. της ΟΖ καὶ ἑνὸς ***ὀρθοῦ ἐλλειπτικοῦ κυλίνδρου***, ποὺ ἔχει βάσιν ΑΓΒΔ καὶ ἄξονα τὸν τοῦ παραβολοειδοῦς.

Ἔχει τὰς ἐξισώσεις: $x^2+y^2=2\mu z$ (1) καὶ $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ (2).—Νὰ δειχθῇ, ὅτι

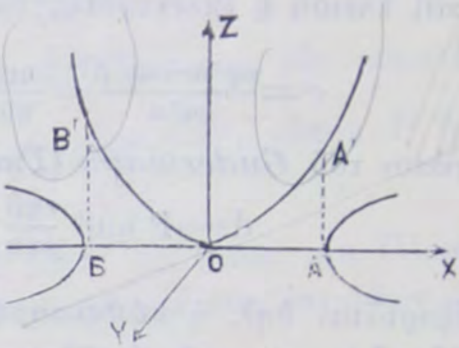
ἀπαλ. τὸ y μεταξὺ τῶν (1) καὶ (2)

Ἔχω $x^2+\beta^2\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)=2\mu z$ [illegible] αἱ προβολαί της ἐπὶ **τῶν** ἐπιπ. xz καὶ yz εἶναι παραβολαί.—Τὸ τόξον της τὸ δίδει τύπος ἀρκετὰ μακρὸς μὲ ἐλλειπτικὰ ὁλοκληρώματα τοῦ α′, τοῦ β′ καὶ τοῦ γ′ εἴδους.

β′) ***Λογαριθμικὴ ὑπερβολὴ*** λέγεται ἡ τομὴ ***ἑνὸς παραβολοειδοῦς***



Σχ. 69.



Σχ. 70.

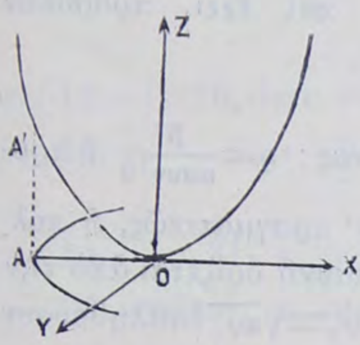
ἐκ περιστροφῆς μὲ ***ἕνα ὀρθὸν ὑπερβολικὸν κύλινδρον***, ποὺ ὁ ἄξων του συμπίπτει μὲ **τὸν** τοῦ παραβολοειδοῦς. —Ἔχει τὰς ἐξισώσεις: $x^2+y^2=2\mu z$, $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ καὶ σύγκειται ἀπὸ δύο κλάδους ἴσους, συμμετρικοὺς πρὸς τὰ ἐπίπεδα yz καὶ zx· ἔχει ἀκόμη δύο ***ἀσυμπτώτους παραβολάς***, ποὺ ὁρίζονται ὡς τομαὶ τοῦ παραβολοειδοῦς ἀπὸ δύο ἐπίπεδα κάθετα πρὸς τὸ ἐπίπ. xy, διὰ τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ὑπερβολῆς (σχ. 70). Τὸ τόξον της εὑρίσκεται ἀπὸ τὸν τύπον διὰ τὸ τόξον τῆς λογαρ. ἐλλείψεως, ἂν τρέψωμεν τὸ β^2 εἰς $-\beta^2$.

γ′) ***Λογαριθμικὴ παραβολὴ*** λέγεται ἡ τομὴ ***ἑνὸς παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς*** μὲ ***τὸν ὀρθὸν κύλινδρον***, ποὺ ἔχει βάσιν μίαν παραβολὴν μὲ ἑστίαν ἓν σημεῖον τοῦ ἄξονος ~~τοῦ παραβολοειδοῦς~~ (σχ. 71). Ἔχει ἐξισώσεις: $x^2+y^2=2\mu z$, $y^2=4k^2+4kx$, εἶναι συμμετρικὴ πρὸς τὸ ἐπίπ. xz καὶ ἐκτείνεται εἰς τὸ ἄπειρον.

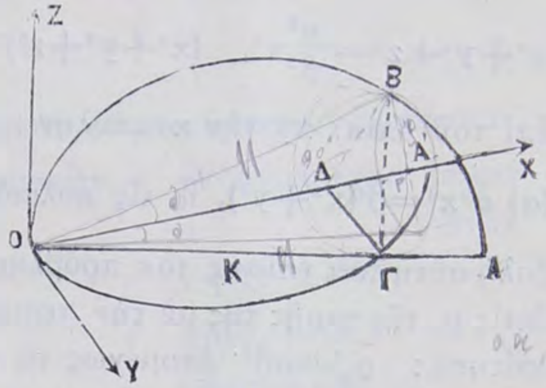
Ἡ ἔκφρασις τοῦ τόξου της περιέχει ἓν μέρος ἀπὸ στοιχειώδης συναρτήσεις καὶ ἓν μέρος ἀπὸ ἐλλειπτικὰ ὁλοκληρώματα τοῦ α′ καὶ τοῦ β′ εἴδους (ποὺ δίδουν ἓν τόξον ὑπερβολῆς).

9) ***Καμπύλη τοῦ Ἀρχύτα***.—Ἂν ΟΒΑ εἶναι μία ἡμιπεριφέρεια μὲ διάμετρον ΟΑ≡α (σχ. 72), ΟΖ μία εὐθεῖα κάθετος πρὸς τὴν ΟΑ καὶ ΟΓΑ′ ἄλλη ἴση ἡμιπεριφέρεια μὲ ἐπίπεδον κάθετον πρὸς τὸ τῆς

πρώτης καὶ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΟΖ, λέγεται ***καμπύλη τοῦ Ἀρχύτα ἡ τομὴ τῆς σπείρας, ποὺ παράγει ἡ περιφέρεια ΟΒΑ, ὅταν στραφῇ πέριξ τῆς ΟΖ, μὲ τὸν κύλινδρον, ποὺ ἔχει βάσιν τὴν περιφέρειαν***



Σχ, 71.



Σχ, 72.

ΟΓΑ'. Τὴν ἐθεώρησε πρῶτος ὁ Ἕλλην μαθηματικὸς ***Ἀρχύτας*** (400 περίπου π. Χ.) καὶ τὴν ἐχρησιμοποίησεν εἰς τὴν λύσιν ***τοῦ «προβλήματος τῆς Δήλου»*** (Ἀρχιμήδους Opera omnia, ἐκδ. Heiberg, III). Ἂν λάβωμεν ὡς ἄξ. ΟΧ τὴν εὐθεῖαν, ποὺ ἑνώνει τὸ Ο μὲ τὸ κέντρον τῆς περιφ. ΟΓΑ', αἱ ἐξισώσεις τῆς καμπύλης θὰ εἶναι :

$$(x^2+y^2+z^2)^2=\alpha^2(x^2+y^2), \qquad x^2+y^2=\alpha x.$$

Τὸ «***πρόβλημα τῆς Δήλου***» συνίσταται ***εἰς τὴν γεωμετρικὴν εὕρεσιν δύο μηκῶν μέσων ἀναλόγων πρὸς δύο ἄλλα δοθέντα μήκη*** τὸ ἔλυσε δὲ ὁ Ἀρχύτας ὡς ἑξῆς : Ἂν Γ εἶναι ἡ τομὴ τῆς ἡμιπεριφερείας ΟΓΑ' μὲ τὴν εὐθεῖαν ΟΑ, Β τὸ σημεῖον τῆς ἡμιπεριφερείας ΟΒΑ, ποὺ προβάλλεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου xy εἰς τὸ Γ καὶ ΓΔ ἡ κάθετος πρὸς τὴν ΟΑ' ἀπὸ τὸ Γ, τὸ Β ἀνήκει εἰς τὴν καμπύλην τοῦ Ἀρχύτα, ***οἱαδήποτε*** καὶ ἂν εἶναι ἡ ΟΑ· τὴν ὁρίζομεν λοιπὸν εἰς τρόπον, ὥστε νὰ εἶναι : $\frac{\text{ΟΔ}}{\text{ΟΒ}}=\frac{\beta}{\alpha}$ $(\beta<\alpha)$· αὐτὸ γίνεται, ἂν ὁρισθῇ τὸ Β ἀπὸ τὴν τομὴν τῆς καμπύλης τοῦ Ἀρχύτα μὲ τὸν κῶνον, ποὺ ἔχει βάσιν κυκλικήν, ἄξονα τὸν ΟΧ καὶ γενέτειραν σχηματίζουσαν μὲ τὸν ἄξ. ΟΧ γωνίαν $\vartheta \equiv$ τοξ συν$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$. Τὰ ***ΟΒ, ΟΓ εἶναι τότε τὰ ζητούμενα μήκη***. Πραγματικῶς, ἔχ. $(\text{ΟΓ})^2=\alpha.\text{ΟΔ}$, $(\text{ΟΒ})^2=\alpha.\text{ΟΓ}$, ἢ καί :
$(\text{ΟΒ})^2=\alpha.\text{ΟΓ}$, $(\text{ΟΓ})^2=\beta.\text{ΟΒ}$, δηλ. $\frac{\alpha}{\text{ΟΒ}}=\frac{\text{ΟΒ}}{\text{ΟΓ}}=\frac{\text{ΟΓ}}{\beta}$.

Ἡ λύσις αὐτὴ ἀποτελεῖ τὸ ***ἀρχαιότερον*** παράδειγμα ***λύσεως ἑνὸς προβλήματος τῆς Ἐπιπέδου Γεωμετρίας μὲ τὴν βοήθειαν τῆς Στερεᾶς***. Ἡ τομὴ τοῦ προηγ. κώνου μὲ τὴν σπεῖραν ἔχει τὰς ἐξισώσεις:

$x^2+y^2+z^2=\frac{\alpha^2}{\beta^2}x^2$, $(x^2+y^2+z^2)^2=\alpha^2(x^2+y^2)$ καὶ ἔχει προβολὴν ἐπὶ τοῦ ἐπιπ. xy τὴν καμπύλην :

(α) $\alpha^2x^4=\beta^4(x^2+y^2)$, ἤ, εἰς πολικὰς συντεταγμένας : $\varrho=\frac{\beta^2}{\alpha\sigma\upsilon\nu^2\vartheta}$· ἡ προβολὴ αὐτὴ λύει ἐπίσης τὸ « πρόβλημα τῆς Δήλου»· πραγματικῶς, ἡ πολ. ἀκτὶς ϱ_1 τῆς τομῆς της μὲ τὴν περιφέρειαν : $\varrho=\alpha\sigma\upsilon\nu\vartheta$ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν ἰσότητα : $\varrho_1^3=\alpha\beta^2$· ἐπομένως τὰ μήκη ϱ_1 καὶ $\varrho_2\equiv\sqrt{\alpha\varrho_1}$ ἐπαληθεύουν τὰς σχέσεις: $\frac{\beta}{\varrho_1}=\frac{\varrho_1}{\varrho_2}=\frac{\varrho_2}{\alpha}$. [1]

ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ Α΄ ΒΙΒΛΙΟΥ

[1] Ἀναφέρεται (*Commentarii* τοῦ ***Εὐτοκίου***, βλ. *Gino Loria : Le Scienze esatte nell' antica Grecia, I, 1893*), ὅτι ὁ ***Εὔδοξος ὁ Κνίδιος*** εἶχε μεταχειρισθῆ διὰ τὴν λύσιν τοῦ «προβλήματος ***τῆς Δήλου***» μίαν ἐπίπεδον καμπύλην μὲ σημεῖα καμπῆς, τὴν «***καμπύλην***», μὴ γνωστὴν ὅμως εἰς ἡμᾶς σήμερον· ἀπὸ τὸ ὅτι ὁ Εὔδοξος ὑπῆρξε μαθητὴς τοῦ Ἀρχύτα, εἶναι, κατὰ τὸν *P. Tannery*, πιθανόν, ὅτι ἡ «***καμπύλη***» αὐτὴ τοῦ Εὐδόξου ἦτο ἡ (α).

$(y^2+z^2)=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\beta^2}x^2$

$(x^2+y^2+z^2)=\frac{\alpha^2}{\beta^2}x^2$

ΤΑ ΚΥΡΙΩΤΕΡΑ ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

Σελ. 12, στίχ. 16, ἀντὶ: σύστημα ἐξισώσεων, γράφε: σύστημα ν ἐξισώσεων.

» 14, » 5, » ἓν σμῆνος ἐπιφανειῶν, » ἓν σύμπλεγμα ἐπιφανειῶν.

» 14, » 21, » $\nu-1$ » $\nu+1$.

» 31, » τελευτ., » ημ$(\vartheta+\Delta\vartheta_1)$ » ημ$(\vartheta_1+\Delta\vartheta_1)$.

» 35, στίχ. 9, » λογαριθμικῆς » ὑπερβολικῆς.

» 41, » 14, » συμπληρωματικὰς » παραπληρωματικάς.

» 47, » 5 (ἀποκάτω), ἀντί: $=\sqrt{\ }\ldots$ » $=x\sqrt{\ }\ldots$

» 48, » 9, ἀντί : ἀκτῖνα 2α » ἀκτῖνα α.

» 48, » 14, » $\frac{\beta}{2\alpha}$ τοξημ$\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ » $\frac{\alpha\beta}{2}$ τοξημ$\left(\frac{x}{\alpha}\right)$.

» 52, » 17, » $\sqrt{\frac{x}{\alpha^2-x^2}}$ » $\sqrt{\frac{x^2}{\alpha^2-x^2}}$.

» 53, σχῆμα 35, ὡς γωνία φ νὰ σημειωθῇ, ἀντὶ τῆς ΚΟ΄Β, ἡ ΑΟ΄Β.

» 63, στίχ. προτελευτ., ἀντί : $\sum\varphi(x)\Delta x$ γράφε : $\sum[\varphi(x)+\vartheta]\,\Delta x$.

» 68, » 12—3, ν' ἀνταλλαχθοῦν αἱ λέξεις : ὑποτείνουσαν, καί : δευτέραν κάθετον πλευράν.

» 72, » 3(ἀποκάτω), ἀντί : $\frac{\alpha}{\vartheta}d\vartheta$ γράφε : $\frac{\alpha}{\vartheta^2}d\vartheta$.

» 76, » 4, » $\alpha_1x_1+\alpha_2y_2$ » $\alpha_1y_1+\alpha_2y_2$.

» 97, » 9 (ἀποκάτω), ἀντί : M_1M_1 γράφε : M_1M_2.

» 109, στίχ. 9, ἀντί : καὶ yx γράφε : καὶ yz.

» 110, » 19, » $d\varrho$ » dr.

ΤΑ ΚΥΡΙΩΤΕΡΑ ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

Σελ. 12, στίχ. 16, ἀντί: σύστημα ἑξαδικὸν γράφε: σύστημα ν ἑξάδων.
» 14, [illegible] » Ἐγγραφῆς ἐπιφανείᾳ, » ἐν σφαλματι [illegible]
» 14, » 21, » ν−1 » ν+1.
» 31, στίχ. 1, » μμ(θ+Δθ)Δ » μμ($θ_1$+$Δθ_1$).
» 35, στίχ. 9, » λογαριθμικῆς » ὑπερβολικῆς.
» 41, » 14, » συμπληρωματικῶς » συμπληρωματικῶς.
» 47, » 5 (κάτωθεν), ἀντί: =y » =x.
» 48, » 8, ἀντί: ἀκτῖνα 2α » ἀκτῖνα α.
» 49, » 16, » $\frac{\theta}{2a}$ τόξημ$\left(\frac{x}{a}\right)$ » $\frac{a\theta}{2}$ τόξημ$\left(\frac{x}{a}\right)$.
» 52, » 17, » $\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ » $\sqrt{\frac{x^2}{a^2-x^2}}$.
» 53, σχῆμα 35, ἡ γωνία φ νὰ ἀφαιρεθῇ, ἀντὶ τῆς ΚΟ'Β, ἡ ΑΟ'Β.
» 63, στίχ. προτελευτ., ἀντί: $\Sigma\varphi(x)\Delta x$ γράφε: $\Sigma[\varphi(x)+\theta]\,\Delta x$.
» 68, » 12—3, ν' ἀντικατασταθῶσιν αἱ λέξεις: ἀποτελοῦσιν, καὶ δευτέραν καθέτου πλευράν.
» 72, » 3 (κάτωθεν), ἀντί: $\frac{a}{b}d\theta$ γράφε: $\frac{a}{b}d\theta$.
» 78, » 4, » $a_1x_1+a_2y_2$ » $a_1y_1+a_2y_2$.
» 97, » 9 (κάτωθεν), ἀντί: M_1M_1 γράφε: M_1M_2.
» 109, στίχ. 9, ἀντί: καὶ γx γράφε: καὶ γz.
» 110, » 19, » dρ » dr.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ, 1.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΕΙΣ ΤΗΝ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΝ ΘΕΩΡΙΑΝ

ΤΩΝ

ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

ΥΠΟ

ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΧΑΤΖΙΔΑΚΗ
ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΟΥ ΕΘΝΙΚΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ

«*Moderne Mathematik hat zum Ziel, Gedanken an Stelle der Rechnung zu setzen*».
FELIX KLEIN.

ΑΘΗΝΑΙ
ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ Π. Δ. ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ
1912

Πᾶν ἀντίτυπον μὴ φέρον τὴν ὑπογραφήν μου εἶναι κλοπιμαῖον.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

«Moderne Mathematik hat zum Ziel, Gedanken an Stelle der Rechnung zu setzen».
FELIX KLEIN.

Μὲ τὸν κοινὸν αὐτὸν τίτλον ἔχω σκοπὸν νὰ ἐκδίδω κατὰ διαστήματα ἐγχειρίδια σύντομα, πραγματευόμενα μονογραφικῶς ποικίλα κεφάλαια τῆς Ἀνωτέρας Μαθηματικῆς, κυρίως ἀπὸ τὴν Διαφορικὴν Γεωμετρίαν, τὴν Κινητικὴν Γεωμετρίαν καὶ τὴν Ἀνωτέραν Κινητικήν. Θ᾽ ἀποτελέσουν συμπλήρωμα τῶν ὀλίγων ὑπαρχόντων ἑλληνικῶν πανεπιστημιακῶν βιβλίων, χρήσιμον, ἐλπίζω, εἰς τοὺς ἕλληνας φοιτητάς.

Τὸ παρὸν πρῶτον τεῦχος περιέχει τὴν εἰσαγωγὴν εἰς τὴν Ἀναλυτικὴν Θεωρίαν τῶν Ἐπιφανειῶν. Συνετάχθη μὲ βάσιν τὰς γερμανικὰς Ἀπειροστικὰς Γεωμετρίας καὶ ἰδίως τὴν νεωτέραν τοῦ Scheffers.

Ἰδικά μου ὅμως εἶναι ἡ εὕρεσις τοῦ τύπου τῆς ἀκτῖνος καμπυλότητος τῶν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας καμπύλων, αἱ δύο ἀποδείξεις τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως τῶν γεωδαισιακῶν γραμμῶν καὶ ἡ εὕρεσις τῶν δύο τελευταίων ἀπὸ τὰς τρεῖς θεμελιώδεις ἐξισώσεις μεταξὺ τῶν ἀρχικῶν ποσῶν.

Ἀθῆναι, Ἀπρίλιος τοῦ 1912.

Νικόλαος Χατζιδάκης.

ΑΦΙΕΡΩΝΕΤΑΙ ΕΙΣ ΤΟΝ ΠΡΩΤΟΝ ΜΟΥ ΔΙΔΑΣΚΑΛΟΝ,

ΤΟΝ ΠΑΤΕΡΑ ΜΟΥ.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ
ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΝ ΘΕΩΡΙΑΝ ΤΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τῆς γενικῆς θεωρίας τῶν ἐπιφανειῶν, *τῆς ἀναλυτικῆς*, δηλ. τῆς διὰ τῶν καμπυλογράμμων συντεταγμένων u, v γινομένης([1]), τὰς βάσεις ἔθεσε πρῶτος ὁ *Gauss* (1828) εἰς τὴν διατριβήν του: « *Disquisitiones generales circa superficies curvas* », δείξας τὴν σπουδαιότητα τῶν ἓξ θεμελιωδῶν ποσῶν E, F, G, D, D′, D″. Ἀπὸ τὰς θεμελιώδεις ὅμως ἐξισώσεις μεταξὺ τῶν ποσῶν τούτων μόνον τὴν μίαν εὗρεν ὁ *Gauss*, τὰς δὲ δύο ἄλλας βραδύτερον ὁ *Mainardi* (1857) καὶ ἔπειτα ὑπὸ ἁπλουστέραν μορφὴν ὁ *Codazzi* (1868). Πλῆθος δὲ ἄλλων μαθηματικῶν ἐξέτεινε καὶ προήγαγε κατόπιν τὴν θεωρίαν τῶν ἐπιφανειῶν, ἡ ὁποία σήμερον ἀποτελεῖ τὸν ἐκτενέστερον κλάδον τῆς *Ἀπειροστικῆς Γεωμετρίας*. Ἐνταῦθα θὰ ἐκθέσω συντομώτατα τὰ πρῶτα μόνον στοιχεῖα τῆς θεωρίας ταύτης, καθὼς περίπου τὰ ἐδίδαξα εἰς τὸ πανεπιστήμιον κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη.

([1]) Ὑπάρχει καὶ ἄλλος τρόπος σπουδῆς τῶν ἐπιφανειῶν, ὑπὸ τῶν γάλλων ἰδίως μαθηματικῶν κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη μορφωθείς, ἡ λεγομένη *κινητικὴ* μέθοδος, κατὰ τὴν ὁποίαν, ἀντὶ τῶν συντεταγμένων, θεωροῦνται ποσὰ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν συνδεόμενα καὶ *κινητικὴν* ἔχοντα σημασίαν. Κατὰ βάθος αἱ οὕτω προκύπτουσαι ἐξισώσεις δὲν διαφέρουν ἀπὸ τὰς κατὰ τὴν ἀναλυτικὴν μέθοδον εὑρισκομένας, δύνανται μάλιστα καὶ νὰ τραποῦν αἱ μὲν εἰς τὰς δέ, ὅταν ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν *αἱ σχέσεις αἱ τ' ἀναλυτικὰ καὶ τὰ κινητικὰ ποσὰ πρὸς ἄλληλα συνδέουσαι*. Ἡ κινητικὴ μέθοδος ἔχει τὸ πλεονέκτημα, ὅτι δίδει συντομωτέρας γενικῶς ἐξισώσεις ἀπὸ τὴν ἀναλυτικήν, ἀλλ' ἀφ' ἑτέρου τὸ μειονέκτημα, ὅτι αἱ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν σχέσεις τῶν κινητικῶν ποσῶν ἐπιδέχονται ἀοριστίαν τινά. Συστηματικὴ ἐφαρμογὴ τῆς μεθόδου ταύτης ἔγινε κατὰ πρῶτον ἀπὸ τὸν *Darboux* εἰς τὸ τετράτομόν του βιβλίον: « *Leçons sur la théorie générale des surfaces* » (1887-1896), τὸ ἐκτενέστερον περὶ ἐπιφανειῶν σύγγραμμα μέχρι σήμερον. Ἡ κινητικὴ μέθοδος ἐφαρμόζεται καὶ εἰς ὅλην γενικῶς τὴν Ἀπειροστικὴν Γεωμετρίαν, δυνάμεθα λοιπὸν νὰ διακρίνωμεν, ἀναλόγως τῆς μεθόδου: *Ἀναλυτικὴν Ἀπειροστικὴν Γεωμετρίαν* καὶ *Κινητικὴν Ἀπειροστικὴν Γεωμετρίαν*.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Κυριώτερα συγγράμματα τῆς ἀναλυτικῆς θεωρίας τῶν ἐπιφανειῶν εἶναι τὰ ἑξῆς:

1) *Knoblauch, Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen* (1888).

2) *Hoppe, Lehrbuch der analytischen Geometrie. Zweiter Teil: Principien der Flächentheorie* (1890).

3) *Joachimsthal, Anwendung der Differential- und Integralrechung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung* (3η ἔκδ., 1890).

4) *Stahl und Kommerell. Die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie* (1893).

5) *Bianchi, Lezioni di Geometria Differenziale* (1894). (Τὸ ἴδιον καὶ γερμανιστὶ ὑπὸ *Lukat*, 1899).

6) *Scheffers, Einführung in die Theorie der Flächen* (1902), τὸ νεώτερον καὶ τελειότερον.

Ἐκτὸς αὐτῶν (καὶ τῶν *Surfaces* τοῦ *Darboux*) ὑπάρχουν καὶ δύο ἄλλα ἀξιοσημείωτα βιβλία:

7) *Mannheim, Principes et développements de géométrie cinématique* (1894).

8) *Cesàro, Lezioni di Geometria Intrinseca* (1896).

(Τὸ ἴδιον καὶ γερμανιστὶ ὑπὸ *Kowalewski*, 1901).

Ἀπὸ τὰ τελευταῖα αὐτὰ τὸ μὲν πρῶτον ἀναπτύσσει μεθόδους καθαρῶς κινητικάς, χωρὶς σχεδὸν ἐξισώσεις, τὸ δὲ δεύτερον ἐξετάζει τὰς ἐπιφανείας (καὶ τὰς καμπύλας) *συστηματικῶς χωρὶς συντεταγμένας* (méthode *intrinsèque*).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΤΑ ΠΟΣΑ ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ E, F, G.

α΄) Παραμετρικὴ παράστασις τῶν ἐπιφανειῶν [1].

1. *Ἐξισώσεις τῆς ἐπιφανείας.* — *Αἱ τρεῖς ἐξισώσεις:*

$$x=\sigma(u,v),\quad y=\varphi(u,v),\quad z=f(u,v) \tag{1}$$

παριστάνουν γενικῶς ἐπιφάνειαν· διότι ἡ μεταξὺ αὐτῶν ἀπαλοιφὴ τῶν βοηθητικῶν μεταβλητῶν u,v δίδει ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς: $\Phi(x,y,z)=0$, δηλ. ἐπιφάνειαν. Αἱ βοηθητικαὶ μεταβληταὶ ἢ «*παράμετροι*» u,v πρέπει νὰ εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων· αἱ δὲ συναρτήσεις σ,φ,f τῶν u,v ὑποτίθενται *πεπερασμέναι, μονότιμοι, συνεχεῖς καὶ διαφορίσιμοι*, τοὐλάχιστον εἰς τὸ μέρος ἐκεῖνο τῆς ἐπιφανείας, τὸ ὁποῖον ἑκάστοτε θεωροῦμεν.

ΣΗΜ. Α΄. Καὶ αἱ *πρὸς* x,y,z *ἄλυτοι* ἐξισώσεις:

$$\varphi_1(x,y,z,u,v)=0,$$
$$\varphi_2(x,y,z,u,v)=0,$$
$$\varphi_3(x,y,z,u,v)=0$$

ὁρίζουν προφανῶς πάλιν ἐπιφάνειαν· συνήθως ὅμως ὑποτίθενται λελυμέναι πρὸς τὰ x,y,z, ἤτοι τῆς μορφῆς (1).

ΣΗΜ. Β΄. Ἂν αἱ u καὶ v συνδέωνται διὰ μιᾶς σχέσεως: $\pi(u,v)=0$ ἢ $v=\varrho(u)$, ἡ ἀντικατάστασις τοῦ $\varrho(u)$ ἀντὶ τοῦ v εἰς τὰς ἐξισώσεις (1) δίδει:

$$x=\sigma(u,\varrho(u))\equiv\sigma_1(u),\qquad y=\varphi(u,\varrho(u))\equiv\varphi_1(u),\qquad z=f(u,\varrho(u))\equiv f_1(u),$$

δηλ. *καμπύλην*. Τὸ ἴδιον συμβαίνει, καὶ ἂν αἱ τρεῖς συναρτήσεις σ,φ,f συνδέωνται καὶ δι' ἄλλης σχέσεως πρὸς ἀλλήλας, ἐκτὸς ἐκείνης, τὴν ὁποίαν δίδει ἡ ἀπαλοιφὴ τῶν u,v, δηλ. τῆς $\Phi(\sigma,\varphi,f)=0$ ἢ $\Phi(x,y,z)=0$· διότι, ἂν ἔχωμεν τὸ σύστημα:

$$\Phi(x,y,z)=0,\qquad F(x,y,z)=0,$$

ἢ καὶ τὸ διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς πρῶτον τοῦ z κ' ἔπειτα τοῦ x προκῦπτον ἰσοδύναμον:

$$(\alpha)\qquad \Phi_1(x,y)=0,\qquad F_1(y,z)=0,$$

αἱ δύο αὐταὶ ἐξισώσεις παριστάνουν προφανῶς καμπύλην. [Τοῦτο φαίνεται καὶ

---

[1] Πρβλ. *Διαφορικοῦ Λογισμοῦ* Α΄, σελ. 168. (Αἱ παραπομπαὶ ὅλαι ἀναφέρονται εἰς τὰ βιβλία τοῦ πατρός μου).

ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις **(1)**, διότι ἀπὸ τὰς (α) ἕπεται: $y = \Phi_2(x)$, $z = F_2(x)$ καὶ τότε ἡ δευτέρα τῶν **(1)** δίδει: $\Phi_2(x) = \varphi(u,v)$ ἢ $v = \Phi_3(u,x)$, ὅθεν ἡ πρώτη τῶν (1) γίνεται: $x = \sigma(u,\Phi_3(u,x))$ ἢ $x = \sigma_1(u)$, ἐπομένως καί:

$$y = \Phi_2(x) = \Phi_2(\sigma_1(u)) \equiv \varphi_1(u), \qquad z = F_2(x) = F_2(\sigma_1(u)) \equiv f_1(u)].$$

Ἀντιστρόφως, *ἡ τυχοῦσα ἐπιφάνεια παρίσταται ὑπὸ μιᾶς τριάδος ἐξισώσεων τῆς μορφῆς (1)*. Πραγματικῶς, ἂν δοθῇ ἡ ἐπιφάνεια: $\Phi(x,y,z)=0$, θέτομεν: $x=\sigma(u,v)$, $y=\varphi(u,v)$, ὅπου σ καὶ φ εἶναι δύο *ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων* συναρτήσεις τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν u καὶ v· τότε ἡ ἐξίσωσις: $\Phi(x,y,z) = 0$ δίδει: $z = f(u,v)$· ἔχομεν λοιπὸν τὴν τριάδα τῶν ἐξισώσεων:

$$x = \sigma(u,v), \qquad y = \varphi(u,v), \qquad z = f(u,v),$$

ἡ ὁποία προφανῶς παριστᾷ τὴν ἰδίαν ἐπιφάνειαν: $\Phi(x,y,z) = 0$. Ἐπειδὴ δὲ αἱ συναρτήσεις σ καὶ φ εἶναι αὐθαίρετοι, ἕπεται, ὅτι *ἡ ἰδία ἐπιφάνεια* δύναται νὰ παρασταθῇ *κατ' ἀπείρους τρόπους* δι' ἐξισώσεων τῆς μορφῆς (1).

ΣΗΜ. Ἡ ἀπόδειξις αὐτὴ δὲν ἐφαρμόζεται, ὅταν ἡ ἐξίσωσις: $\Phi = 0$ τῆς ἐπιφανείας δὲν περιέχῃ τὴν z· ἀλλὰ τότε θέτομεν: $x = \sigma(u,v)$, $z = f(u,v)$, ὅτε ἡ $\Phi(x,y) = 0$ δίδει καί: $y = \varphi(u,v)$

Ἡ διὰ τῶν ἐξισώσεων (1) παράστασις τῶν ἐπιφανειῶν (τὴν ὁποίαν πρῶτος *συστηματικῶς* μετεχειρίσθη ὁ *Gauss*) εἶναι ἡ γενικωτέρα ἀπὸ ὅλας καὶ ἔχει ἐκτὸς ἄλλων καὶ τὸ πλεονέκτημα, ὅτι *δίδει τύπους συμμετρικοὺς καὶ πρὸς τὰς τρεῖς συντεταγμένας* x,y,z. Πρὸς διάκρισιν θὰ ὀνομάζωμεν τὴν μορφὴν (1) *παραμετρικὴν* παράστασιν τῶν ἐπιφανειῶν, τὴν δέ: $z = f(x,y)$ (ἡ ὁποία προφανῶς προκύπτει ἀπὸ τὴν (1), ἂν $x=u, y=v$) *συνήθη*.

2. *Παραμετρικαὶ γραμμαί. Καμπυλόγραμμοι συντεταγμέναι.*— Ἂν εἰς τὰς ἐξισώσεις (1) ὑποθέσωμεν $v =$ σταθ. $\equiv c_2$, εὑρίσκομεν *τὴν καμπύλην*:

$$x = \sigma(u,c_2), \qquad y = \varphi(u,c_2), \qquad z = f(u,c_2),$$

ἡ ὁποία προφανῶς κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας· καὶ ἂν τὸ c_2 λάβῃ ὅλας τὰς δυνατὰς τιμάς, ἔχομεν *μίαν ἄπειρον* (∞^1) *σειρὰν καμπύλων* (τὸ σύνολον τῶν ὁποίων ἀποτελεῖ τὴν ἐπιφάνειαν). Ἐπίσης, ἂν εἰς τὰς ἰδίας ἐξισώσεις (1) ὑποθέσωμεν $u =$ σταθ. $\equiv c_1$, προκύπτει ἡ ἐπίσης ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας κειμένη καμπύλη:

$$x = \sigma(c_1,v), \qquad y = \varphi(c_1,v), \qquad z = f(c_1,v)\cdot$$

καὶ ἂν τὸ c_1 λάβῃ ὅλας τὰς δυνατὰς τιμάς, εὑρίσκεται δευτέρα ἄπειρος (∞^1) σειρὰ καμπύλων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας κειμένων (ἐκ τῶν ὁποίων πάλιν ἀποτελεῖται ἡ ἐπιφάνεια). Τὰς δύο αὐτὰς σειρὰς τῶν καμπύλων:

$$v=c_2 \quad \text{καὶ} \quad u=c_1$$

καλοῦμεν *παραμετρικὰς* γραμμὰς τῆς ἐπιφανείας καὶ ὀνομάζομεν αὐτὰς συντόμως *γραμμὰς (v)* τὰς πρώτας καὶ *γραμμὰς (u)* τὰς δευτέρας, ὁμοῦ δὲ *παραμετρικὸν δίκτυον* ἢ *δίκτυον (u,v)*. Ἂν ἐξομοιώσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν πρὸς *ὕφασμα λεπτότατον* (ἢ *δικτυωτόν*), αἱ παραμετρικαὶ γραμμαὶ ἀντιστοιχοῦν πρὸς *τὸν στήμονα* καὶ *τὸ ὑφάδιον* τοῦ ὑφάσματος (μὲ τὴν διαφοράν, ὅτι ἡ μία σειρὰ τῶν γραμμῶν δὲν εἶναι πάντοτε *κάθετος* ἐπὶ τὴν ἄλλην).

Ἐὰν τώρα φαντασθῶμεν τὸ δίκτυον (u,v) χαραχθὲν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, δι' ἑκάστου σημείου τῆς ἐπιφανείας διέρχεται (γενικῶς) μία καμπύλη (u) καὶ μία (v)· καὶ ἡ θέσις ἑκάστου σημείου Μ τῆς ἐπιφανείας ὁρίζεται ἀπὸ τὰς τιμὰς τῶν u,v (π. χ. u_μ, v_μ) τῶν δύο καμπύλων (u_μ), (v_μ) τῶν διερχομένων δι' αὐτοῦ· αἱ μεταβληταὶ u,v λέγονται δι' αὐτὸ *καμπυλόγραμμοι συντεταγμέναι* τῶν σημείων τῆς ἐπιφανείας· αἱ δὲ γραμμαὶ (v) καὶ (u) καὶ *συντεταγμέναι* γραμμαί.

ΣΗΜ. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα γίνεται φανερόν, ὅτι αἱ ἐξισώσεις (1) ἀποτελοῦν τὴν φυσικὴν γενίκευσιν τῶν *δύο* ἐξισώσεων: $x=\sigma(u,v)$, $y=\varphi(u,v)$, αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν τὴν θέσιν σημείου *ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου* διὰ τῶν *καμπυλογράμμων* συντεταγμένων (Ἐπίπ. Ἀναλ. Γεωμ. σελ. 363, Παρατήρ.).

3. ***Παραδείγματα.***— 1) Αἱ ἐξισώσεις:

$$x=\sigma(u)+v\sigma_1(u), \quad y=\varphi(u)+v\varphi_1(u), \quad z=f(u)+vf_1(u)$$

παριστάνουν τὴν τυχοῦσαν *εὐθειογενῆ* ἐπιφάνειαν· αἱ γραμμαὶ (u) εἶναι αἱ γενέτειραι τῆς ἐπιφανείας. Ἂν $\sigma_1(u)=\sigma'(u)$, $\varphi_1(u)=\varphi'(u)$, $f_1(u)=f'(u)$, ἡ ἐπιφάνεια εἶναι *ἀναπτυκτὴ* καὶ αἱ γραμμαὶ (u) εἶναι *αἱ ἐφαπτόμεναι τοῦ λαιμοῦ*.

2) Αἱ ἐξισώσεις:

$$x=\rho\,\text{συν}u\,\text{συν}v, \quad y=\rho\,\text{συν}u\,\text{ημ}v, \quad z=\rho\,\text{ημ}u$$

παριστάνουν *σφαῖραν*· αἱ γραμμαὶ (u) εἶναι αἱ καμπύλαι σταθεροῦ πλάτους, δηλ. *οἱ παράλληλοι*, καὶ αἱ (v) αἱ καμπύλαι σταθεροῦ μήκους, δηλ. *οἱ μεσημβρινοί*.— 3) Αἱ ἐξισώσεις: $x=\rho u\,\text{συν}v$, $y=\rho u\,\text{ημ}v$, $z=\rho m v$ παριστάνουν *τὸ κοινὸν στρεβλὸν ἑλικοειδὲς* (Ὁλοκληρ. Λογ. σελ. 327-8)· αἱ γραμμαὶ (v) εἶναι αἱ εὐθεῖαι γενέτειραι, αἱ δὲ (u) αἱ ἕλικες αὐτοῦ.

4. ***Ἀλλαγὴ τῶν παραμέτρων.***— Εἰς ἑκάστην *ὡρισμένην* παράστασιν (1) τῆς ἐπιφανείας διὰ τῶν u,v ἀντιστοιχεῖ *ὡρισμένον* δίκτυον

παραμετρικῶν γραμμῶν ἐπ' αὐτῆς· ἀλλ' ὄχι καὶ ἀντιστρόφως· διότι, ἂν θέσωμεν: $u = \pi(u')$, $v = \varrho(v')$, εἶναι φανερόν, ὅτι αἱ καμπύλαι: $u' =$ σταθ., $v' =$ σταθ. εἶναι αἱ ἴδιαι μὲ τάς: $u =$ σταθ., $v =$ σταθ. Ἂν ὅμως θέσωμεν γενικώτερον:

$$u = \pi(u', v'), \qquad v = \varrho(u', v'),$$

τὸ νέον δίκτυον (u', v') εἶναι διάφορον ἀπὸ τὸ παλαιὸν (u, v). Αἱ δὲ ἐξισώσεις (1) τῆς ἐπιφανείας γίνονται:

$$x = \sigma(\pi(u', v'), \varrho(u', v')) \equiv \Sigma(u', v') \text{ καὶ ὁμοίως: } y = \Phi(u', v'), z = F(u', v').$$

Ἀντιστρόφως, ἂν ἔχωμεν τῆς *ἰδίας* ἐπιφανείας δύο *διαφόρους* παραστάσεις: (α) $x = \sigma(u, v)$, $y = \varphi(u, v)$, $z = f(u, v)$

καὶ (β) $x = \Sigma(u', v')$, $y = \Phi(u', v')$, $z = F(u', v')$,

θὰ εἶναι τὰ u, v συναρτήσεις τῶν u', v' (καὶ ἀντιστρόφως)· διότι εἰς ἕκαστον ζεῦγος τιμῶν τῶν u', v' ἀντιστοιχεῖ, ἀπὸ τὰς (β), ἓν ὡρισμένον σημεῖον τῆς ἐπιφανείας καὶ εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο πάλιν, ἀπὸ τὰς (α), ἓν ὡρισμένον ζεῦγος τιμῶν τῶν u, v.

5. *Ἐξίσωσις τῆς τυχούσης γραμμῆς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.*— Ἡ παραμετρικὴ γραμμὴ $u' =$ σταθ. ἔχει εἰς τὰς *παλαιὰς* παραμέτρους u, v τὴν ἐξίσωσιν: $u' \equiv \vartheta(u, v) =$ σταθ. Γενικῶς, ἡ τυχοῦσα ἐξίσωσις μεταξὺ u καὶ v: $\tau(u, v) = 0$, ἢ $v = \chi(u)$, ὁρίζει μίαν γραμμὴν τῆς ἐπιφανείας: τὴν $x = \sigma(u, \chi(u))$, $y = \varphi(u, \chi(u))$, $z = f(u, \chi(u))$ (Πρβλ. § 1, Σημ. Β'). (Αἱ παραμετρικαὶ γραμμαὶ περιέχονται εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\tau(u, v) = 0$, ἂν λείπῃ ἀπὸ αὐτὴν τὸ v ἢ τὸ u). Καὶ ἀντιστρόφως, πᾶσα γραμμὴ τῆς ἐπιφανείας ὁρίζεται ἀπὸ μίαν σχέσιν: $\tau(u, v) = 0$· διότι, ἂν ἔχῃ τὰς ἐξισώσεις: $X = \Sigma(t)$, $Y = \Phi(t)$, $Z = F(t)$, ἐπειδὴ κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας (1), θὰ εἶναι διαρκῶς: $x = X$, $y = Y$, $z = Z$, ἤ:

$$\sigma(u, v) = \Sigma(t), \quad \varphi(u, v) = \Phi(t), \quad f(u, v) = F(t)\cdot$$

καὶ λύοντες δύο ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς πρὸς τὰ u, v, θὰ ἔχωμεν: $u = \pi(t)$, $v = \varrho(t)$, ὅθεν δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ t: $\tau(u, v) = 0$. Πολλάκις ὅμως προτιμῶμεν τὸν διὰ τῶν ἐξισώσεων: $u = \pi(t)$, $v = \varrho(t)$ ὁρισμὸν τῆς γραμμῆς, ἂν ἡ ἀπαλοιφὴ τοῦ t εἶναι δύσκολος ἢ δίδει ἐξίσωσιν πολύπλοκον.

6. *Διαφορικὴ ἐξίσωσις μιᾶς σειρᾶς γραμμῶν τῆς ἐπιφανείας.* — Συνήθως ὁρίζεται *μία ὁλόκληρος σειρὰ* γραμμῶν τῆς ἐπιφανείας ἀπὸ μίαν *συνήθη διαφορικὴν* ἐξίσωσιν πρώτης τάξεως μεταξὺ u καὶ v,

τῆς μορφῆς: $U(u,v)dv - V(u,v)du = 0$, ἢ $\dfrac{dv}{du} = \dfrac{V(u,v)}{U(u,v)}$. πραγματικῶς, ἡ ἐξίσωσις αὕτη ὁλοκληρωθεῖσα δίδει: $\vartheta(u,v) =$ σταθ. $\equiv c$ καὶ ὅταν ἡ σταθερὰ τῆς ὁλοκληρώσεως c λάβῃ ὅλας τὰς δυνατὰς τιμάς, ἔχομεν μίαν ἄπειρον (∞^1) σειρὰν γραμμῶν τῆς ἐπιφανείας.

Συχνότατα δίδεται ἐξίσωσις β′ βαθμοῦ καὶ ὁμογενής:

$$(\iota) \qquad \mathrm{A}(u,v)du^2 + 2\mathrm{B}(u,v)dudv + \Gamma(u,v)dv^2 = 0,$$

ἤ:
$$\mathrm{A}(u,v) + 2\mathrm{B}(u,v)\frac{dv}{du} + \Gamma(u,v)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0\cdot$$

αὕτη σχίζεται εἰς δύο: $\dfrac{dv}{du} = \mu(u,v)$, $\dfrac{dv}{du} = \nu(u,v)$ $\qquad (\varkappa)$

καὶ δίδει δύο (γενικῶς) σειρὰς καμπύλων τῆς ἐπιφανείας (δι' ὁλοκληρώσεως τῶν (κ)) ([1]). Ἀντιστρόφως, *δύο* τυχοῦσαι σειραὶ γραμμῶν τῆς ἐπιφανείας:

$$\alpha du + \beta dv = 0 \qquad \text{καὶ} \qquad \gamma du + \delta dv = 0$$

περιλαμβάνονται πάντοτε εἰς *μίαν* ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς (ι), τὴν ἑξῆς:

$$(\alpha du + \beta dv)(\gamma du + \delta dv) \equiv \alpha\gamma du^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)dudv + \beta\delta dv^2 = 0.$$

(Τὰς παραμετρικὰς γραμμὰς δίδει ἡ ἐξίσωσις: $dudv = 0$).

ΣΗΜ. Τὰς ἐξισώσεις (κ) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ ἄλλως. Γράφομεν τὴν σχέσιν (ι) ὡς ἑξῆς:

$$\left[\sqrt{\mathrm{A}}du + \frac{\mathrm{B} + \sqrt{\mathrm{B}^2 - \mathrm{A}\Gamma}}{\sqrt{\mathrm{A}}}dv\right] \cdot \left[\sqrt{\mathrm{A}}du + \frac{\mathrm{B} - \sqrt{\mathrm{B}^2 - \mathrm{A}\Gamma}}{\sqrt{\mathrm{A}}}dv\right] = 0,$$

([1]) *Πρὶν ὁλοκληρωθῇ*, ἡ ἐξίσωσις (ι) (ἢ αἱ (κ)) ὁρίζει εἰς ἕκαστον σημεῖον Μ (u,v) τῆς ἐπιφανείας δύο τιμὰς k_1, k_2 τοῦ λόγου $\dfrac{dv}{du}$, ἂν δὲ αἱ τιμαὶ αὗται τεθοῦν εἰς τὰ dx, dy, dz τῆς ἐπιφανείας, δίδουν:

$$(dx)_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial u} + k_1\frac{\partial x}{\partial v}\right)du,$$

$$(dx)_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u} + k_2\frac{\partial x}{\partial v}\right)du,$$

. . . .

ὁρίζουν ἑπομένως τὰ συνημίτονα $\left(\dfrac{dx}{ds}\right)_1, \ldots \left(\dfrac{dx}{ds}\right)_2, \ldots$ τῶν ἐφαπτομένων δύο καμπύλων τῆς ἐπιφανείας, ἤ, ὅπως συντομώτερον λέγομεν, *δύο διευθύνσεις ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἀπὸ τὸ Μ.*

ἢ καὶ ἁπλούστερον $\left(A \gtrless 0\right)$:

$$\left[A du + (B+\sqrt{B^2-A\Gamma})\,dv\right]\cdot\left[A du + (B-\sqrt{B^2-A\Gamma})\,dv\right]=0,$$

ὅτε σχίζεται εἰς τὰς δύο:

$$A du + (B+\sqrt{B^2-A\Gamma})\,dv=0,\qquad A du + (B-\sqrt{B^2-A\Gamma})\,dv=0\cdot$$

καὶ διαφέρουν αὗται ἀπ' ἀλλήλων, ἐκτὸς ἂν $B^2-A\Gamma=0$ (δηλ. (ι) τέλειον τέτράγωνον), ὅτε αἱ δύο σειραὶ τῶν καμπύλων συμπίπτουν εἰς μίαν.

β') Γραμμικὸν στοιχεῖον τῆς ἐπιφανείας.

7. *Γραμμικὸν στοιχεῖον τῆς ἐπιφανείας.* — Τὸ διαφορικὸν τοῦ τόξου τῆς τυχούσης γραμμῆς τῆς ἐπιφανείας λέγεται συντόμως *γραμμικὸν στοιχεῖον* τῆς ἐπιφανείας κ' εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς. Ἔχομεν γενικῶς διὰ πᾶσαν καμπύλην (Διαφ. Λογ. Α', σελ. 151):

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2\cdot$$

ἀλλ' ἐπὶ τῆς καμπύλης τῆς ἐπιφανείας εἶναι:

$$x=\sigma(u,v),\quad y=\varphi(u,v),\quad z=f(u,v)$$

καὶ τὰ u,v συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς t: $u=\pi(t)$, $v=\varrho(t)$ (§ 5)· ὅθεν:

$$dx=\left[\frac{\partial\sigma}{\partial u}\cdot\pi'(t)+\frac{\partial\sigma}{\partial v}\cdot\varrho'(t)\right]dt=\left[\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}\right]dt=x_u du+x_v dv,\ ^{(1)}$$

ἐπίσης: $\quad dy=y_u du+y_v dv,\qquad dz=z_u du+z_v dv\cdot$

καὶ ὁ τύπος διὰ τὸ ds^2 γίνεται μετὰ τὰς πράξεις:

$$ds^2=(x_u^2+y_u^2+z_u^2)du^2+2(x_u x_v+y_u y_v+z_u z_v)du\,dv+$$
$$+(x_v^2+y_v^2+z_v^2)dv^2\cdot$$

ἂν δὲ πρὸς συντομίαν τεθῇ:

$$x_u^2+y_u^2+z_u^2=\sum_{x,y,z}x_u^2=E,\quad x_u x_v+y_u y_v+z_u z_v=\sum_{x,y,z}x_u x_v=F,$$
$$x_v^2+y_v^2+z_v^2=\sum_{x,y,z}x_v^2=G,$$

ὁ τύπος γράφεται συντόμως:

$$(2)\qquad ds^2=E du^2+2F du\,dv+G dv^2.$$

Τὰ τρία ποσὰ E,F,G, τὰ εἰς τὸν τύπον τοῦτον παρουσιαζόμενα,

---

(1) Χάριν συντομεύσεως τῶν τύπων θὰ γράφωμεν τοῦ λοιποῦ τὰς παραγώγους τῶν συντεταγμένων μὲ δείκτας: x_u, x_v κτλ. ἀντὶ $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$ κτλ.

ἔχουν ἐξαιρετικὴν σπουδαιότητα δι' ὅλην τὴν θεωρίαν τῶν ἐπιφανειῶν καὶ λέγονται δι' αὐτὸ *θεμελιώδη ποσὰ τῆς πρώτης τάξεως* (διότι μόνον πρώτης τάξεως παραγώγους περιέχουν).

Τὰ διαφορικὰ τῶν τόξων τῶν παραμετρικῶν γραμμῶν εὑρίσκονται ἀπὸ τὸν τύπον (2), ἂν τεθῇ: $dv=0$, ἢ $du=0$:

$$ds^2_{(v)}=\mathrm{E}du^2, \qquad ds^2_{(u)}=\mathrm{G}dv^2.$$

ΣΗΜ. Α'. Καὶ εἰς τὸ *ἐμβαδικὸν στοιχεῖον* τῆς ἐπιφανείας, δηλ. τὸ στοιχεῖον τοῦ τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς ἐκφράζοντος ὁλοκληρώματος: $\int\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\Gamma^2}\, d(u,v)$ (Ὁλοκληρ. Λογ. σ. 327), τὰ ἴδια ποσὰ E, F, G εἰσέρχονται· διότι, κατὰ τὴν γνωστὴν ταὐτότητα τοῦ Lagrange, εἶναι:

$$\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\Gamma^2=\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2.$$

ΣΗΜ. Β'.— Διὰ τὴν *συνήθη* ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας: $z=f(x,y)$ $(x=u, y=v)$ ἔχομεν:

$$\mathrm{E}\equiv1+p^2,\quad \mathrm{F}\equiv pq,\quad \mathrm{G}\equiv1+q^2\quad \left(p\equiv\frac{\partial z}{\partial x},\ q\equiv\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

καὶ ἑπομένως:

$$ds^2=(1+p^2)dx^2+2pqdxdy+(1+q^2)dy^2\quad (\text{καὶ } \mathrm{EG}-\mathrm{F}^2\equiv1+p^2+q^2).$$

8. **Παραδείγματα.** — 1) Διὰ *τὴν σφαῖραν*: $x=\rho\,\text{συν}u\,\text{συν}v$, $y=\rho\,\text{συν}u\,\eta\mu v$, $z=\rho\,\eta\mu u$ εὑρίσκομεν: $ds^2=\rho^2du^2+\rho^2\text{συν}^2u\,dv^2$.—2) Διὰ *τὴν ἀναπτυκτὴν* ἐπιφάνειαν: $x=\sigma(u)+v\sigma'(u)$, $y=\varphi(u)+v\varphi'(u)$, $z=f(u)+vf'(u)$, *ὅπου* u *σημαίνει τὸ μῆκος τοῦ τόξου τοῦ λαιμοῦ*, εἶναι:

$$x_u=\alpha+\frac{\xi}{\rho}v,\quad y_u=\beta+\frac{\eta}{\rho}v,\quad z_u=\gamma+\frac{\zeta}{\rho}v \quad (\text{Διαφ. Λογ. Β', σελ. 126}),$$

ὅπου $\alpha\equiv\sigma'(u)$, $\beta\equiv\varphi'(u)$, $\gamma\equiv f'(u)$ εἶναι τὰ συνημίτονα τῆς ἐφαπτομένης τοῦ λαιμοῦ, ξ, η, ζ τὰ τῆς πρώτης καθέτου του καὶ ρ ἡ ἀκτὶς καμπυλότητός του· ὥστε:

$$ds^2=\left(1+\frac{v^2}{\rho^2}\right)du^2+2dudv+dv^2.$$

γ') Ἰδιότητες τῶν ποσῶν E, F, G.

9. *Ἀναλλοίωτον τῶν ποσῶν E, F, G.*— Τὰ ποσὰ E, F, G ἔχουν τὴν θεμελιώδη ἰδιότητα *νὰ μένουν ἀναλλοίωτα εἰς πᾶσαν ἐντὸς τοῦ χώρου μετατόπισιν* τῆς ἐπιφανείας, *ὑποτιθεμένης ἀμεταβλήτου κατὰ τὸ σχῆμα*· δηλαδὴ αἱ τρεῖς αὐταὶ συναρτήσεις τῶν u,v (αἱ ὁποῖαι *ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖον* τῆς ἐπιφανείας μεταβάλλονται) διατηροῦν *εἰς τὸ ἴδιον σημεῖον* τῆς ἐπιφανείας *τὰς ἰδίας τιμάς*, ὁπωσδήποτε καὶ ἂν κινηθῇ ἡ ἐπιφάνεια, ἀρκεῖ νὰ μὴ μεταβάλῃ σχῆμα.

Ἀπόδειξις. Ἂν φαντασθῶμεν τοὺς ἄξονας OXYZ στερεῶς συνδεδεμένους πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν, μετὰ τὴν μετατόπισιν αὐτῆς θὰ εὑρεθοῦν εἰς μίαν ἄλλην θέσιν O′X′Y′Z′, τὸ δὲ τυχὸν σημεῖον M τῆς ἐπιφανείας εἰς ἄλλην θέσιν M′ καὶ αἱ συντεταγμέναι x', y', z' τοῦ M′ πρὸς τοὺς ἄξονας O′X′Y′Z′ θὰ εἶναι προφανῶς αἱ ἴδιαι μὲ τὰς συντεταγμένας x, y, z τοῦ M (εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν) πρὸς τοὺς OXYZ (εἰς τὴν ἀρχικήν των θέσιν)· καὶ δι' αὐτό, ἂν καλέσωμεν x_1, y_1, z_1 τὰς συντεταγμένας τοῦ M′ πρὸς τοὺς ἄξονας OXYZ (εἰς τὴν ἀρχικήν των θέσιν), θὰ ἔχωμεν:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + a, \\ y_1 = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + b, \\ z_1 = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + c, \end{cases}$$

ὅθεν καί:

$$x_{1u} = \alpha_1 x_u + \alpha_2 y_u + \alpha_3 z_u, \quad x_{1v} = \alpha_1 x_v + \alpha_2 y_v + \alpha_3 z_v \quad \text{κτλ},$$

εἶναι δηλ. αἱ νέαι παράγωγοι γραμμικαὶ καὶ ὁμογενεῖς συναρτήσεις τῶν παλαιῶν· ἀπὸ δὲ τὰς τιμὰς αὐτὰς τῶν νέων παραγώγων ἕπεται (ἂν ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν αἱ γνωσταὶ σχέσεις μεταξὺ τῶν συνημιτόνων $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ κτλ.):

$$E_1 \equiv \sum x_{1u}^2 = \sum x_u^2 \equiv E, \qquad F_1 \equiv \sum x_{1u} x_{1v} = \sum x_u x_v \equiv F,$$
$$G_1 \equiv \sum x_{1v}^2 = \sum x_v^2 \equiv G.$$

10. *Μεταβολὴ τῶν E, F, G κατὰ τὴν ἀλλαγὴν τῶν παραμέτρων.*— Ἂν ἀπὸ τὸ δίκτυον (u, v) μεταβῶμεν εἰς ἄλλο u', v': $u = \pi(u', v')$, $v = \rho(u', v')$, θὰ εἶναι:

$$x_{u'} = x_u \frac{\partial u}{\partial u'} + x_v \frac{\partial v}{\partial u'}, \qquad x_{v'} = x_u \frac{\partial u}{\partial v'} + x_v \frac{\partial v}{\partial v'} \quad \text{κτλ.}$$

ὅθεν ἁπλοῦς ὑπολογισμὸς δίδει τὰς τιμὰς τῶν νέων ποσῶν E′, F′, G′:

$$(3) \quad \begin{cases} E' = \left(\dfrac{\partial u}{\partial u'}\right)^2 . E + 2\dfrac{\partial u}{\partial u'} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial u'} . F + \left(\dfrac{\partial v}{\partial u'}\right)^2 . G, \\ F' = \dfrac{\partial u}{\partial u'} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial v'} . E + \left(\dfrac{\partial u}{\partial u'} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial v'} + \dfrac{\partial v}{\partial u'} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial v'}\right) . F + \dfrac{\partial v}{\partial u'} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial v'} . G, \\ G' = \left(\dfrac{\partial u}{\partial v'}\right)^2 . E + 2\dfrac{\partial u}{\partial v'} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial v'} \cdot F + \left(\dfrac{\partial v}{\partial v'}\right)^2 . G. \end{cases}$$

δ΄) Ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον καὶ κάθετος.

11. *Ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον.* — Αἱ ἐξισώσεις τῆς εὐθείας τῆς διὰ τῶν δύο σημείων $M(u,v)$ καὶ $M'(u+\Delta u, v+\Delta v)$ τῆς ἐπιφανείας διερχομένης εἶναι προφανῶς :

$$\frac{X-x}{x_u \Delta u + x_v \Delta v + \ldots} = \frac{Y-y}{y_u \Delta u + y_v \Delta v + \ldots} = \frac{Z-z}{z_u \Delta u + z_v \Delta v + \ldots},$$

ἢ καί: $$\frac{X-x}{x_u + x_v \dfrac{\Delta v}{\Delta u} + \ldots} = \frac{Y-y}{y_u + y_v \dfrac{\Delta v}{\Delta u} + \ldots} = \frac{Z-z}{z_u + z_v \dfrac{\Delta v}{\Delta u} + \ldots}.$$

καὶ ὅταν τὸ M', ἀκολουθοῦν μίαν τυχοῦσαν γραμμὴν τῆς ἐπιφανείας, τὴν $v=\varrho(u)$, πέσῃ εἰς τὸ M, αἱ ἐξισώσεις αὐταὶ καταντοῦν αἱ ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ M τῆς καμπύλης αὐτῆς τῆς ἐπιφανείας :

$$\frac{X-x}{x_u + x_v . \varrho'(u)} = \frac{Y-y}{y_u + y_v . \varrho'(u)} = \frac{Z-z}{z_u + z_v . \varrho'(u)} \left(\varrho'(u) = \frac{dv}{du} = \text{o}\varrho\left(\frac{\Delta v}{\Delta u}\right)\right),$$

ἢ καί : (4) $X = x + (x_u + x_v . \varrho'(u))t$, $Y = y + (y_u + y_v . \varrho'(u))t$,

$$Z = z + (z_u + z_v . \varrho'(u))t,$$

μὲ βοηθητικὴν μεταβλητὴν τὴν t. Ἂν τώρα φαντασθῶμεν τὴν συνάρτησιν $\varrho'(u)$ μεταβαλλομένην καὶ λαμβάνουσαν ὅλας τὰς τιμάς, αἱ ἐξισώσεις (4) παριστάνουν ὅλας *τὰς ∞^1 ἐφαπτομένας εἰς τὸ M τῆς ἐπιφανείας*, δηλ. τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὸ M ὅλων τῶν γραμμῶν τῆς ἐπιφανείας, ὅσαι διέρχονται διὰ τοῦ M. *Ὁ γεωμετρικὸς τόπος ὅλων αὐτῶν τῶν ἐφαπτομένων εἶναι ἓν ἐπίπεδον·* πραγματικῶς, ἂν γράψωμεν τὰς ἐξισώσεις (4) ὡς ἑξῆς:

$$X = x + x_u \cdot t + x_v \cdot \omega, \quad Y = y + y_u \cdot t + y_v \cdot \omega, \quad Z = z + z_u \cdot t + z_v \cdot \omega$$

$$(\omega = \varrho'(u) . t)$$

καὶ ἀπαλείψωμεν μεταξύ των τὰς μεταβλητὰς t καὶ ω, εὑρίσκομεν τὸ ἐπίπεδον :

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} X-x & x_u & x_v \\ Y-y & y_u & y_v \\ Z-z & z_u & z_v \end{vmatrix} = 0,$$

τὸ ὁποῖον προφανῶς διέρχεται διὰ τοῦ M καὶ περιέχει ὅλας τὰς ἐφαπτομένας (4) τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ M καὶ δι' αὐτὸ λέγεται *ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον* τῆς ἐπιφανείας (Πρβλ. Διαφ. Λογ. Α΄, σελ. 168). (Ὡς ἐφαρμογὴν βλέπε τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῶν *εὐθειογενῶν* ἐπιφανειῶν, Διαφ. Λογ. Α΄, σελ. 173-6).

ΣΗΜ. Α΄. Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς συνήθους ἐξισώσεως τῆς ἐπιφανείας: $z=f(x,y)$, ἡ ἐξίσωσις (5) καταντᾷ:

$$\begin{vmatrix} X-x & 1 & 0 \\ Y-y & 0 & 1 \\ Z-z & p & q \end{vmatrix}=0, \quad \text{δηλ. } Z-z=p(X-x)+q(Y-y)$$
(Πρβλ. Διαφ.Λογ. Α΄, σελ. 166).

ΣΗΜ. Β΄. Τὰ προηγούμενα ὑποθέτουν, ὅτι εἰς τὸ σημεῖον M δὲν μηδενίζονται οὔτε *ὅλαι* αἱ πρὸς u, οὔτε *ὅλαι* αἱ πρὸς v μερικαὶ παράγωγοι τῶν συντεταγμένων τῆς ἐπιφανείας (ἄλλως ἡ ἐξίσωσις (5) προφανῶς ἀφανίζεται). Ἂν ὑποθέσωμεν *πρῶτον*, ὅτι ἡ μία τριὰς τῶν παραγώγων, π. χ. ἡ πρὸς v, μηδενίζεται εἰς τὸ M: $x_v=y_v=z_v=0$, ὄχι ὅμως καὶ αἱ τρεῖς ἄλλαι, θὰ εἶναι:

$$\Delta x=x_u\Delta u+\ldots+{}^1/_2 x_{v^2}\Delta v^2+\ldots,\ \Delta y=\ldots,\ \Delta z=\ldots,$$

ἄρα: $$dx=x_u du+{}^1/_2 x_{v^2}dv^2,\ dy=\ldots,\ dz=\ldots$$

καὶ ἑπομένως αἱ ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης εἶναι:

$$X=x+x_u t+{}^1/_2 x_{v^2}kt,\ Y=\ldots,\ Z=\ldots$$

$\left(\text{ὅπου } k=\dfrac{(dv)^2}{du}\right)$, δηλ. *γραμμικαὶ* πρὸς t καὶ kt· ὥστε καὶ πάλιν ὑπάρχει ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον, ἀλλ' ἡ ἐξίσωσίς του εἶναι τώρα:

$$(5') \quad \begin{vmatrix} X-x & x_u & x_{v^2} \\ Y-y & y_u & y_{v^2} \\ Z-z & z_u & z_{v^2} \end{vmatrix}=0.$$

Ἂν ὅμως *δεύτερον* καὶ αἱ ἓξ παράγωγοι μηδενίζωνται εἰς τὸ M:

$$x_u=y_u=z_u=0, \qquad x_v=y_v=z_v=0,$$

θὰ ἔχωμεν:

$$\Delta x={}^1/_2 x_{u^2}.\Delta u^2+x_{uv}\Delta u\Delta v+{}^1/_2 x_{v^2}\Delta v^2+\ldots,\ \Delta y=\ldots,\ \Delta z=\ldots$$

καὶ αἱ ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης θὰ εἶναι, ἂν τεθῇ $\text{ορ}\left(\dfrac{\Delta v}{\Delta u}\right)=\dfrac{dv}{du}=\omega$:

$$X=x+({}^1/_2 x_{u^2}+x_{uv}\omega+{}^1/_2 x_{v^2}\omega^2)t,$$
$$Y=y+({}^1/_2 y_{u^2}+y_{uv}\,\omega+{}^1/_2 y_{v^2}.\omega^2)t,$$
$$Z=z+({}^1/_2 z_{u^2}+z_{uv}.\omega+{}^1/_2 z_{v^2}.\omega^2)t\cdot$$

ἂν δὲ μεταξὺ αὐτῶν ἀπαλείψωμεν τὰς δύο βοηθητικὰς μεταβλητὰς t καὶ ω, εὑρίσκομεν τώρα τὴν ἐξίσωσιν:

$$(5')\quad 4\begin{vmatrix} X-x & x_{uv} & x_{v^2} \\ Y-y & y_{uv} & y_{v^2} \\ Z-z & z_{uv} & z_{v^2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_{u^2} & x_{uv} & X-x \\ y_{u^2} & y_{uv} & Y-y \\ z_{u^2} & z_{uv} & Z-z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{u^2} & X-x & x_{v^2} \\ y_{u^2} & Y-y & y_{v^2} \\ z_{u^2} & Z-z & z_{v^2} \end{vmatrix}^2,$$

ἡ ὁποία παριστᾷ *κῶνον* β′ βαθμοῦ μὲ κορυφὴν τὸ σημεῖον (x,y,z)· ὥστε *ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὸ M εἶναι ὄχι πλέον ἐπίπεδον, ἀλλὰ κωνικὴ ἐπιφάνεια β′ βαθμοῦ* («ἐφαπτόμενος κῶνος»). (Τοῦτο π. χ. συμβαίνει εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ τυχόντος κώνου τοῦ β′ βαθμοῦ, ὅπου αἱ ἐφαπτόμεναι ὅλαι ἀποτελοῦν τὸν ἴδιον τὸν κῶνον· ἐπίσης, ἂν κύκλος στραφῇ πέριξ μιᾶς χορδῆς του, ἡ παραγομένη σπεῖρα ἔχει δύο τοιαῦτα σημεῖα, τὰς τομὰς αὐτῆς καὶ τῆς χορδῆς, ὅπου ὑπάρχουν δύο ἐφαπτόμενοι ἐκ περιστροφῆς κῶνοι). Ἓν τοιοῦτο σημεῖον λέγεται *ἀνώμαλον*. (Ἡ ἀνωμαλία δύναται νὰ γίνῃ καὶ *ἀνωτέρας τάξεως*, ἂν μηδενίζωνται καὶ ἀνωτέρων τάξεων παράγωγοι).

ΣΗΜ. Γ′. Ἡ ἐξίσωσις (5) ἀναπτυσσομένη γίνεται τῆς μορφῆς:

$$\mathrm{A}X+\mathrm{B}Y+\Gamma Z=\Delta,$$

ὅπου τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὡς παραστάσεις ἐκ τῶν x,y,z, x_u, y_u, z_u, x_v, y_v, z_v συγκείμεναι, εἶναι συναρτήσεις τῶν δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν u,v· ὑπάρχουν ἑπομένως (γενικῶς) ∞^2 ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα εἰς τὴν τυχοῦσαν ἐπιφάνειαν, ὅσα καὶ τὰ σημεῖά της· ἐξαιρετικῶς ὅμως καὶ μόνον ∞^1· τοῦτο συμβαίνει εἰς τὰς *ἀναπτυκτὰς* ἐπιφανείας (πρβλ. Διαφ. Λογ. Α′, σελ. 173-6).

12. *Ἡ ἐπιφάνεια ὡς περιβάλλουσα τῶν ἐφαπτομένων της ἐπιπέδων.*— Ὅπως ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἡ τυχοῦσα καμπύλη ἔχει ∞^1 ἐφαπτομένας καί, ἀντιστρόφως, μία ∞^1 σειρὰ εὐθειῶν ἐφάπτεται (γενικῶς) μιᾶς καμπύλης τοῦ ἐπιπέδου («περιβαλλούσης»), οὕτω κ᾿ ἐδῶ, ἄν, ἀντιστρόφως, δοθῇ μία ∞^2 σειρὰ ἐπιπέδων (δηλ. μὲ συντελεστὰς ἐξαρτωμένους ἀπὸ δύο ἀνεξαρτήτους μεταβλητὰς u,v), ὑπάρχει γενικῶς, μία ἐπιφάνεια, τῆς ὁποίας αὐτὰ εἶναι τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα («*περιβάλλουσα*» ἐπιφάνεια) [1].

Ἀπόδειξις. Ἡ ἐξίσωσις τῶν ∞^2 ἐπιπέδων θὰ εἶναι τῆς μορφῆς:

$$(\alpha)\qquad \mathrm{A}(u,v)X+\mathrm{B}(u,v)Y+\Gamma(u,v)Z=\Delta(u,v).$$

Ἂν ἀπὸ τοὺς τρεῖς λόγους τῶν Α, Β, Γ, Δ πρὸς ἄλληλα δύο εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀλλήλων συναρτήσεις τῶν u,v, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐπιπέδων (α) εἶναι ∞^2· ἄλλως εἶναι: $\dfrac{\mathrm{A}}{\Delta}=\sigma(\omega)$, $\dfrac{\mathrm{B}}{\Delta}=\varphi(\omega)$, $\dfrac{\Gamma}{\Delta}=f(\omega)$, τοῦ ω ὄντος μιᾶς συναρτήσεως τῶν u,v, καὶ ἑπομένως:

$$\mathrm{A}=\varrho_1(\omega)\,.\,\pi(u,v),\quad \mathrm{B}=\varrho_2(\omega)\,.\,\pi(u,v),$$
$$\Gamma=\varrho_3(\omega)\,.\,\pi(u,v),\quad \Delta=\varrho_4(\omega)\,.\,\pi(u,v)$$

---

[1] Ἡ *περιβάλλουσα* αὐτὴ διαφέρει προφανῶς ἀπὸ τὴν περιβάλλουσαν μιᾶς ∞^1 σειρᾶς ἐπιφανειῶν (Διαφ. Λογ. Β′, σελ. 174).

καὶ τὰ ἐπίπεδα ἔχουν τὴν ἐξίσωσιν:

$$\varrho_1(\omega)X+\varrho_2(\omega)Y+\varrho_3(\omega)Z=\varrho_4(\omega),$$

ὥστε εἶναι μόνον ∞^1, τότε ὅμως ἔχομεν ὡς περιβάλλουσαν τῶν ἐπιπέδων *ἀναπτυκτὴν* ἐπιφάνειαν (Διαφ. Λογ. Β΄, σελ. 178—80)· ὥστε δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν τώρα τὴν περίπτωσιν αὐτήν.

Ἂν ὑπάρχῃ περιβάλλουσα, ἕκαστον τῶν ἐπιπέδων (α) θὰ περιέχῃ ἓν σημεῖον (x,y,z) τῆς περιβαλλούσης, θὰ εἶναι λοιπὸν καὶ τὰ x,y,z συναρτήσεις τῶν u,v, ἀφοῦ θὰ ὁρισθῇ τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς (x,y,z), ἂν ὁρισθῇ τὸ ἐπίπεδον, δηλ. τὰ u,v εἰς τὴν ἐξίσωσιν (α). Ὅταν αἱ συναρτήσεις αὗται εὑρεθοῦν, θὰ ἔχωμεν τὰς παραμετρικὰς ἐξισώσεις τῆς ἐπιφανείας (μὲ τὰ u,v). Ἐπειδὴ τώρα τὸ τυχὸν ἐπίπεδον (u,v) ἐκ τῶν (α) θὰ περιέχῃ ὅλας τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὸ σημεῖον (u,v) (δηλ. x,y,z) τῆς ἐπιφανείας, θὰ ἔχωμεν:

$$\sum \mathrm{A}(x+x_u t+x_v\,\omega)=\Delta\cdot$$

καὶ αὐτὸ δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῶν u,v, καθὼς καὶ τῶν t,ω· ὥστε ἡ σχέσις αὐτὴ σχίζεται εἰς τάς:

$$\sum \mathrm{A}x=\Delta,\qquad \sum \mathrm{A}x_u=0,\qquad \sum \mathrm{A}x_v=0.$$

ἐπειδὴ δὲ ἀπὸ τὴν πρώτην ἕπεται: $\sum \mathrm{A}_u x+\sum \mathrm{A}x_u=\Delta_u$, $\sum \mathrm{A}_v x+\sum \mathrm{A}x_v=\Delta_v$, ἕπονται *αἱ ἑξῆς τρεῖς συνθῆκαι* διὰ τὰς ἀγνώστους συναρτήσεις x,y,z:

$$\sum \mathrm{A}x=\Delta,\qquad \sum \mathrm{A}_u x=\Delta_u,\qquad \sum \mathrm{A}_v x=\Delta_v. \tag{β}$$

Περίπτωσις α΄. Οἱ λόγοι τῶν Α, Β, Γ μόνον (χωρὶς τὸ Δ) πρὸς ἄλληλα ἐξαρτῶνται ἀπ' ἀλλήλων· τότε θὰ εἶναι: $\dfrac{\mathrm{B}}{\Gamma}=\vartheta\left(\dfrac{\mathrm{A}}{\Gamma}\right)$, ἢ γενικώτερον: $\dfrac{\mathrm{A}}{\Gamma}=\vartheta_1(\omega)$, $\dfrac{\mathrm{B}}{\Gamma}=\vartheta_2(\omega)$ (ὅπου τὸ ω εἶναι τυχοῦσα συνάρτησις τῶν u,v)· ἀλλὰ διὰ νὰ συμβαίνῃ αὐτό, ἀνάγκη νὰ εἶναι τὰ Α, Β, Γ συναρτήσεις *μιᾶς καὶ τῆς ἰδίας* συναρτήσεως ω τῶν u,v, πολλαπλασιασμέναι ἴσως ἐπὶ ἕνα κοινὸν παράγοντα $\pi(u,v)$· τὸν κοινὸν αὐτὸν ὅμως παράγοντα δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν ἀπ' ἀρχῆς ἀπαλείψει, διαιρέσαντες καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (α) δι' αὐτοῦ· ὥστε δυνάμεθα νὰ θέσωμεν:

$$\mathrm{A}=\mathrm{A}(\omega),\qquad \mathrm{B}=\mathrm{B}(\omega),\qquad \Gamma=\Gamma(\omega)$$

καὶ ἡ ἐξίσωσις (α) γίνεται: $\quad \mathrm{A}(\omega)X+\mathrm{B}(\omega)Y+\Gamma(\omega)Z=\Delta(u,v)$·
τότε ὅμως τὸ Δ δὲν δύναται νὰ εἶναι συνάρτησις *μόνον* τοῦ ω (ἄλλως ἔχομεν ἀναπτυκτὴν ἐπιφάνειαν)· αἱ δὲ συνθῆκαι (β) γίνονται τώρα:

$$\Sigma \mathrm{A}x=\Delta, \quad \omega_u \Sigma \mathrm{A}_\omega x=\Delta_u, \quad \omega_v \Sigma \mathrm{A}_\omega x=\Delta_v,$$

ἀπὸ τὰς ὁποίας αἱ δύο τελευταῖαι εἶναι ἀντιφατικαὶ πρὸς ἀλλήλας, διότι δίδουν: $\begin{vmatrix} \omega_u & \Delta_u \\ \omega_v & \Delta_v \end{vmatrix}=0$, ἄρα: $\Delta=\sigma(\omega)$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον (ἂν ἡ ἐπιφάνεια δὲν εἶναι ἀναπτυκτή). *Δὲν ὑπάρχει λοιπὸν τώρα περιβάλλουσα*· τὰ ∞^2 ἐπίπεδα (α) εἶναι παράλληλα πρὸς τὰ ∞^1 διὰ τῆς ἀρχῆς ἐπίπεδα:

$$\mathrm{A}(\omega)X+\mathrm{B}(\omega)Y+\Gamma(\omega)Z=0,$$

τὰ περιβάλλοντα ἕνα κῶνον.

Περίπτωσις β'. Οἱ λόγοι τῶν Α, Β, Γ πρὸς ἄλληλα (χωρὶς τὸ Δ) εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων. Τότε, ἄν, διαιροῦντες διὰ Δ, φέρωμεν τὴν ἐξίσωσιν (α) εἰς τὴν μορφήν:

$$\mathrm{A}X+\mathrm{B}Y+\Gamma Z=1, \quad (\alpha')$$

θὰ εἶναι καὶ οἱ λόγοι τῶν νέων συντελεστῶν Α, Β, Γ ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων. (Ἡ διὰ τοῦ Δ διαίρεσις εἶναι τότε μόνον ἀδύνατος, ὅταν Δ=0, δηλ. τὰ ∞^2 ἐπίπεδα (α) εἶναι τὰ διὰ τῆς ἀρχῆς ἐπίπεδα). Τότε αἱ τρεῖς συνθῆκαι (β) γίνονται:

$$\Sigma \mathrm{A}x=1, \qquad \Sigma \mathrm{A}_u x=0, \qquad \Sigma \mathrm{A}_v x=0\cdot \qquad (\gamma)$$

καὶ ἡ ὁρίζουσά των (ὡς πρὸς τὰς ἀγνώστους x,y,z) εἶναι:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \Gamma \\ \mathrm{A}_u & \mathrm{B}_u & \Gamma_u \\ \mathrm{A}_v & \mathrm{B}_v & \Gamma_v \end{vmatrix} = \Gamma^3 . \begin{vmatrix} \left(\frac{\mathrm{A}}{\Gamma}\right)_u & \left(\frac{\mathrm{B}}{\Gamma}\right)_u \\ \left(\frac{\mathrm{A}}{\Gamma}\right)_v & \left(\frac{\mathrm{B}}{\Gamma}\right)_v \end{vmatrix}, \qquad (\delta)$$

ὥστε, διὰ νὰ γίνῃ 0, πρέπει ἢ Γ=0, τὸ ὁποῖον ἀποφεύγομεν δι' ἀνταλλαγῆς τῶν συντεταγμένων, ἀφοῦ δύο ἀπὸ τὰ Α, Β, Γ διαφέρουν τοῦ 0, ἢ νὰ εἶναι τὰ $\frac{\mathrm{A}}{\Gamma}, \frac{\mathrm{B}}{\Gamma}$ ἐξηρτημένα ἀπ' ἀλλήλων, ἀντιθέτως πρὸς τὴν προϋπόθεσιν. Δύνανται λοιπὸν αἱ ἐξισώσεις (γ) νὰ λυθοῦν πρὸς τὰ x,y,z. Καὶ ἂν μὲν ἀπὸ τὰς λύσεις x,y,z δύο εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων, ἡ περιβάλλουσα εἶναι ἐπιφάνεια· ἂν ὅμως τὰ x,y,z εἶναι ἐξηρτημέναι ἀπ' ἀλλήλων συναρτήσεις τῶν u,v, ἡ περιβάλλουσα *ἐκφυλίζεται* εἰς καμπύλην, τῆς ὁποίας ἐφάπτονται τὰ ∞^2 ἐπίπεδα· τέλος, ἂν τὰ x,y,z εἶναι σταθερά, δίδουν σημεῖον, διὰ τοῦ ὁποίου διέρχονται ὅλα τὰ ∞^2 ἐπίπεδα.

Ἀπεδείχθη λοιπὸν οὕτως ἡ ἑξῆς πρότασις (ἂν εἰς τὴν β′ περίπτωσιν ἐπανέλθωμεν ἀπὸ τὴν μερικὴν (α′) εἰς τὴν γενικὴν μορφὴν (α)):

Τῆς ∞^2 σειρᾶς τῶν ἐπιπέδων:

$$\mathrm{A}(u,v)X+\mathrm{B}(u,v)Y+\Gamma(u,v)Z=\Delta(u,v)$$

ὑπάρχει τότε καὶ τότε μόνον περιβάλλουσα ἐπιφάνεια, ὅταν αἱ τρεῖς ἐξισώσεις:

$$(\vartheta)\qquad \begin{aligned} &\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma z=\Delta,\\ &\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial u}x+\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial u}y+\frac{\partial \Gamma}{\partial u}z=\frac{\partial \Delta}{\partial u},\\ &\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v}x+\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial v}y+\frac{\partial \Gamma}{\partial v}z=\frac{\partial \Delta}{\partial v} \end{aligned}$$

δύνανται νὰ λυθοῦν πρὸς x,y,z· αἱ δὲ λύσεις αὐταὶ εἶναι αἱ παραμετρικαὶ ἐξισώσεις τῆς ἐπιφανείας. Ἡ ἐπιφάνεια ἐκφυλίζεται εἰς καμπύλην, ἂν αἱ λύσεις x,y,z εἶναι ἐξηρτημέναι ἀπ' ἀλλήλων συναρτήσεις τῶν u,v· καὶ εἰς σημεῖον, ἂν τὰ x,y,z εἶναι σταθερά. Ἂν δὲ αἱ ἐξισώσεις (ϑ) δὲν λύωνται, τὰ ∞^2 ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα πρὸς τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα ἑνὸς κώνου.

13. *Κάθετος.*— Ἡ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐφαπτόμενον εἰς τὸ M ἐπίπεδον λέγεται *κάθετος τῆς ἐπιφανείας* εἰς τὸ M. Αἱ ἐξισώσεις της εὑρίσκονται ἀμέσως ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (5) καὶ εἶναι (οἱ ἄξονες ὑποτίθενται ὀρθογώνιοι):

$$(6)\qquad \frac{X-x}{y_u z_v-z_u y_v}=\frac{Y-y}{z_u x_v-x_u z_v}=\frac{Z-z}{x_u y_v-y_u x_v},$$

τὰ δὲ συνημίτονα: l,m,n τῆς μιᾶς ἀπὸ τὰς δύο φοράς της, τῆς «θετικῆς», εἶναι:

$$(7)\quad l=\frac{y_u z_v-z_u y_v}{\mathrm{D}},\quad m=\frac{z_u x_v-x_u z_v}{\mathrm{D}},\quad n=\frac{x_u y_v-y_u x_v}{\mathrm{D}},$$

ὅπου: $\mathrm{D}^2\equiv \sum\limits_{x,y,z}(x_u y_v-y_u x_v)^2=\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2$ (κατὰ τὴν ταὐτότητα τοῦ Lagrange).

ΣΗΜ. Α′. Ὅταν $z=f(x,y)$, αἱ ἐξισώσεις (6) τῆς καθέτου γίνονται: $\dfrac{X-x}{-p}=\dfrac{Y-y}{-q}=\dfrac{Z-z}{1}$ καὶ τὰ συνημίτονά της (7) εἶναι:

$$l=\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad m=\frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad n=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

(Πρβλ. Διαφ. Λογ. Α′, σ. 169).

ΣΗΜ. Β΄. Ἐπειδὴ: $D^2 = \Sigma(x_u y_v - y_u x_v)^2$, τὸ D^2 εἶναι πάντοτε *θετικόν*, ἂν ἡ ἐπιφάνεια εἶναι *πραγματικὴ* καὶ αἱ παράμετροι *ἐπίσης*. Οὔτε 0 δὲν δύναται νὰ εἶναι *τότε* τὸ D δι' *ὅλα* τὰ πραγματικὰ σημεῖα, ἄλλως θὰ ἦτο ἐκ ταὐτότητος:

$$x_u y_v - y_u x_v = 0, \quad y_u z_v - z_u y_v = 0, \quad z_u x_v - x_u z_v = 0,$$

ἀλλὰ τότε θὰ ἦσαν τὰ x, y, z, *ἀνὰ δύο*, συναρτήσεις ἀλλήλων (Διαφ. Λογ. Α΄, § 185) καὶ αὐτὸ εἶναι ἀδύνατον (§ 1, Σημ. Β΄)· ὥστε μόνον εἴς *τινα* σημεῖα δύναται τὸ D νὰ εἶναι 0. Διὰ *φανταστικὰς* ὅμως ἐπιφανείας τὸ D *δύναται* νὰ εἶναι καὶ ἐκ ταὐτότητος 0.

ΣΗΜ. Γ΄. Ἀξιοσημείωτος εἶναι ἡ ταὐτότης:

$$D = \begin{vmatrix} x_u & x_v & l \\ y_u & y_v & m \\ z_u & z_v & n \end{vmatrix}.$$

ε΄) *Γωνία δύο γραμμῶν τῆς ἐπιφανείας.*

14. *Γωνία δύο παραμετρικῶν γραμμῶν.*— Τὰ συνημίτονα τῆς εἰς τὸ Μ ἐφαπτομένης τῆς παραμετρικῆς γραμμῆς $v = c_2$, ἐπειδὴ ἐπὶ τῆς γραμμῆς αὐτῆς μεταβάλλεται μόνον τὸ u, εἶναι:

$$\frac{x_u}{\sqrt{E}}, \quad \frac{y_u}{\sqrt{E}}, \quad \frac{z_u}{\sqrt{E}}.$$

ὁμοίως τὰ τῆς $u = c_1$ εἶναι:

$$\frac{x_v}{\sqrt{G}}, \quad \frac{y_v}{\sqrt{G}}, \quad \frac{z_v}{\sqrt{G}}.$$

τὸ συνημίτονον λοιπὸν τῆς γωνίας ω τῶν δύο αὐτῶν γραμμῶν εἰς τὸ Μ εἶναι:

$$(8) \qquad \text{συνω} = \frac{x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v}{\sqrt{EG}} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

καὶ τὸ ἡμίτονον: $$\text{ημω} = \frac{D}{\sqrt{EG}}.$$

15. ***Ὀρθογωνιότης τοῦ παραμετρικοῦ δικτύου.***—Ἂν εἰς τὸ Μ εἶναι: $F = 0$, αἱ δύο γραμμαὶ $u = c_1$ καὶ $v = c_2$ τέμνονται ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν εἰς τὸ Μ. Ἂν δὲ εἰς *ὅλα* τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας εἶναι *ἐκ ταὐτότητος*: $F = 0$, *ἑκάστη* γραμμὴ u τέμνει *ἑκάστην* γραμμὴν v ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν καὶ τὸ παραμετρικὸν δίκτυον λέγεται *ὀρθογώνιον*.

Παραδείγματα.— 1) Ὀρθογώνιον παραμετρικὸν δίκτυον ἀποτελοῦν ἐπὶ τῆς σφαίρας: $x = \rho\,\text{συν}u\,\text{συν}v$, $y = \rho\,\text{συν}u\,\text{ημ}v$, $z = \rho\,\text{ημ}u$ οἱ παράλληλοι ($u = c_1$) καὶ οἱ μεσημβρινοὶ ($v = c_2$), πραγματικῶς δὲ εἶναι: $F = 0$. 2) Ἐπὶ τοῦ ὀρθοῦ ἐκ περιστροφῆς κυλίνδρου: $x=\rho\sigma\upsilon\nu v$, $y=\rho\eta\mu v$, $z=u$ εἶναι $F=0$· καὶ πραγματικῶς τέμνονται αἱ γραμμαὶ (u) (αἱ κυκλικαὶ κάθετοι τομαὶ) καὶ αἱ γραμμαὶ (v) (αἱ γενέτειραι) καθέτως.

Ἐπὶ τῆς τυχούσης ἐπιφανείας ὑπάρχει (γενικῶς) μία γραμμή, εἰς τῆς ὁποίας τὰ σημεῖα εἶναι $F=0$· διότι ἡ ἐξίσωσις: $F=0$ ὁρίζει τὸ v ὡς συνάρτησιν τοῦ u καὶ ἡ ἀντικατάστασις τῆς τιμῆς αὐτῆς τοῦ u εἰς τὰς ἐξισώσεις τῆς ἐπιφανείας δίδει μίαν γραμμὴν ἐπ' αὐτῆς (§ 1, Σημ. Β').

ΣΗΜ. Α'. Ἕνεκα τῆς τιμῆς (8) τοῦ F ὁ τύπος (2) τοῦ γραμμικοῦ στοιχείου δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

$$ds^2=Edu^2+2\sqrt{E}\sqrt{G}\sigma\upsilon\nu\omega\, du dv+Gdv^2$$

(καὶ ἂν τὸ δίκτυον εἶναι ὀρθογώνιον: $ds^2=Edu^2+Gdv^2$).

ΣΗΜ. Β'. *Γεωμετρικὴ σημασία τοῦ D.* — Τὸ ἐπὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου ἀπειροστὸν παραλληλόγραμμον μὲ πλευρὰς τὰ $ds_{(v)}$ καὶ $ds_{(u)}$ τῶν παραμετρικῶν γραμμῶν ἔχει ἐμβαδόν: $ds_{(v)}\cdot ds_{(u)}\cdot\eta\mu\omega$

καὶ ἐπειδή: $ds_{(v)}=\sqrt{E}du,\ ds_{(u)}=\sqrt{G}dv$

καὶ: $\eta\mu\omega=\dfrac{D}{\sqrt{EG}}$,

τὸ ἐμβαδὸν αὐτὸ γίνεται: $D du dv$·

ὥστε τὸ *ἐμβαδικὸν στοιχεῖον* τῆς ἐπιφανείας, δηλ. τὸ ἐμβαδὸν τοῦ *ἀπειροστοῦ* παραλληλογράμμου μὲ κορυφὰς τὰ τέσσαρα σημεῖα: (u,v), $(u+\Delta u,v)$, $(u,v+\Delta v)$ καὶ $(u+\Delta u,v+\Delta v)$ τῆς ἐπιφανείας, εἶναι γινόμενον τοῦ D ἐπὶ $du dv$ (πρβλ. Ὁλοκληρωτ. Λογ. σελ. 327).

16. *Γωνία δύο ὁποιωνδήποτε γραμμῶν τῆς ἐπιφανείας.*— Ἂν λάβωμεν δύο τυχούσας γραμμὰς τῆς ἐπιφανείας τεμνομένας εἰς ἓν σημεῖον Μ, τὰς: $v=\rho_1(u)$ καὶ $v=\rho_2(u)$, τὰ συνημίτονα τῆς εἰς τὸ Μ ἐφαπτομένης τῆς πρώτης εἶναι (ἂν τεθῇ $\rho'_1(u)=k_1$):

$$\frac{x_u+k_1x_v}{\sqrt{\sum\limits_{x,y,z}(x_u+k_1x_v)^2}},\quad \frac{y_u+k_1y_v}{\sqrt{\sum\limits_{x,y,z}(x_u+k_1x_v)^2}},\quad \frac{z_u+k_1z_v}{\sqrt{\sum\limits_{x,y,z}(x_u+k_1x_v)^2}},$$

ἀλλά:

$$\Sigma(x_u+k_1x_v)^2=E+2k_1F+k_1^2G,$$

ὥστε τὰ συνημίτονα αὐτὰ γίνονται:

$$\frac{x_u+k_1x_v}{\sqrt{E+2k_1F+k_1^2G}},\quad \frac{y_u+k_1y_v}{\sqrt{E+2k_1F+k_1^2G}},\quad \frac{z_u+k_1z_v}{\sqrt{E+2k_1F+k_1^2G}}.$$

τῆς δὲ δευτέρας εἶναι ὁμοίως:

$$\frac{x_u+k_2x_v}{\sqrt{E+2k_2F+k_2^2G}},\quad \frac{y_u+k_2y_v}{\sqrt{E+2k_2F+k_2^2G}},\quad \frac{z_u+k_2z_v}{\sqrt{E+2k_2F+k_2^2G}}.$$

τὸ συνημίτονον λοιπὸν τῆς γωνίας των ω εἰς τὸ M θὰ εἶναι:

$$\text{συνω} = \frac{\Sigma(x_u + k_1 x_v) \cdot (x_u + k_2 x_v)}{\sqrt{E + 2k_1 F + k_1^2 G} \cdot \sqrt{E + 2k_2 F + k_2^2 G}},$$

ἤ, μετὰ τὰς πράξεις:

$$(9) \quad \text{συνω} = \frac{E + (k_1 + k_2)F + k_1 k_2 G}{\sqrt{E + 2k_1 F + k_1^2 G} \cdot \sqrt{E + 2k_2 F + k_2^2 G}}.$$

ΣΗΜ. Ἡ γωνία ω θὰ εἶναι ὀρθή, ἂν εἶναι εἰς τὸ M:

$$(\vartheta) \quad E + (k_1 + k_2)F + k_1 k_2 G = 0$$

καὶ ἂν οὐδεμία ἀπο τὰς τετραγωνικὰς ῥίζας τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ συνω εἶναι 0· ἡ μηδένισις ὅμως μιᾶς ῥίζης, π.χ. τῆς πρώτης: $E + 2k_1 F + k_1^2 G = 0$ (ι), δίδει δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ k_1 ἀπὸ τὰς δύο ἐξισώσεις (ϑ) καὶ (ι): $D(E + 2k_2 F + k_2^2 G) = 0$, ὥστε ἤ: $D = 0$ ἤ: $E + 2k_2 F + k_2^2 G = 0$ (κ)· ἀλλὰ τότε αἱ δύο ἐξισώσεις (ι) καὶ (κ) δίδουν: $k_1 + k_2 = -\dfrac{2F}{G}$, $k_1 k_2 = \dfrac{E}{G}$, καὶ ἡ (ϑ) ἑπομένως καταντᾷ: $D = 0$. Ὥστε *ἡ συνθήκη τῆς εἰς τὸ M καθετότητος τῶν δύο γραμμῶν εἶναι ἡ* (ϑ), *μὲ τὴν ὑπόθεσιν*: $D \gtrless 0$.

17. *Ὀρθογώνια δίκτυα γραμμῶν.*—Ἂν δοθῇ τὸ ἀπὸ τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν:

$$A(u,v)du^2 + 2B(u,v)du\,dv + \Gamma(u,v)dv^2 = 0$$

ὁριζόμενον δίκτυον (§ 6), ἡ ἀναγκαία καὶ ἀρκετὴ συνθήκη νὰ εἶναι ὀρθογώνιον, εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς: ἂν τὰς δύο λύσεις τῆς ἐξισώσεως ταύτης ὀνομάσωμεν k_1 καὶ k_2, θὰ εἶναι:

$$k_1 + k_2 = -\frac{2B}{\Gamma}, \quad k_1 k_2 = \frac{A}{\Gamma}.$$

καὶ ἐπειδὴ k_1, k_2 εἰς ἕκαστον σημεῖον $M(u,v)$ τῆς ἐπιφανείας ὁρίζουν *τὰς διευθύνσεις* τῶν δύο γραμμῶν τοῦ δικτύου τῶν διερχομένων διὰ τοῦ M, πρέπει καὶ ἀρκεῖ, διὰ νὰ εἶναι τὸ δίκτυον ὀρθογώνιον, νὰ ἔχωμεν:

$$E + F\left(-\frac{2B}{\Gamma}\right) + G\frac{A}{\Gamma} = 0, \text{ δηλ. } (10) \quad E\Gamma - 2FB + GA = 0. \ (D \gtrless 0).$$

Ἂν δοθῇ μία σειρὰ γραμμῶν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας: (ϑ) $\dfrac{dv}{du} = \lambda(u,v)$, δυνάμεθα εὐκόλως νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν τῶν ὀρ-

θογωνίων τροχιῶν των, δηλ. τῆς ἐπὶ τὴν σειρὰν (ϑ) καθέτου σειρᾶς γραμμῶν· διότι, ἂν παρασταθῇ διά: $\frac{dv}{du}=\mu(u,v)$, θὰ εἶναι:

$$E+F(\lambda+\mu)+G\lambda\mu=0, \text{ ὅθεν ὁρίζεται τὸ } \mu: \quad \mu=-\frac{E+F\lambda}{F+G\lambda}.$$

*ϛ΄) *Μηδενικαὶ γραμμαί.*

18. *Μηδενικαὶ γραμμαί.* Ἡ ἐξίσωσις:

$$(\vartheta) \qquad ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2=0$$

ὁρίζει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας δύο σειρὰς *φανταστικῶν* γραμμῶν, τῶν ὁποίων τὸ διαφορικὸν τοῦ μήκους εἶναι πανταχοῦ $=0$. Αἱ γραμμαὶ αὗται λέγονται *μηδενικαὶ* γραμμαὶ τῆς ἐπιφανείας. (Ὅτι τοῦτο θὰ συμβαίνῃ μόνον διὰ *φανταστικὰς* τιμὰς τοῦ λόγου $\frac{dv}{du}$, εἶναι φανερόν, διότι ἐπὶ *πραγματικῆς* ἐπιφανείας μὲ *πραγματικὰ* u,v τὸ ποσὸν $EG-F^2=D^2$ δὲν γίνεται ποτὲ ἀρνητικὸν (§ 13, Σημ. Β΄)). Αἱ δύο αὗται σειραὶ συμπίπτουν προφανῶς, μόνον ὅταν: $EG-F^2=0$. Ἂν ἰδιαιτέρως ἡ ἐξίσωσις (ϑ) εἶναι τῆς μορφῆς: $dudv=0$, δίκτυον τῶν μηδενικῶν γραμμῶν εἶναι τὸ ἴδιον τὸ παραμετρικὸν δίκτυον· καὶ τότε μόνον· τὸ δὲ γραμμικὸν στοιχεῖον τῆς ἐπιφανείας καταντᾷ τότε: $ds^2=2Fdudv$ (τότε δὲ προφανῶς ἀντιστοιχοῦν εἰς πραγματικὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας φανταστικαὶ τιμαὶ τῶν u,v).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΤΑ ΠΟΣΑ ΤΗΣ ΔΕΥΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΩΣ L, M, N.

I. ΣΠΟΥΔΗ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΠΕΡΙΟΧΗΝ ΕΝΟΣ ΣΗΜΕΙΟΥ.

α΄) Καμπυλότης τῆς τυχούσης τομῆς. Θεώρημα τοῦ Meusnier.

19. *Ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς τυχούσης τομῆς.* — Διὰ νὰ σπουδάσωμεν τὸ σχῆμα τῆς ἐπιφανείας πέριξ ἑνὸς σημείου της M, πρέπει νὰ γνωρίσωμεν τὴν καμπυλότητα τῶν γραμμῶν τῆς ἐπιφανείας τῶν διερχομένων διὰ τοῦ M. Ἂς λάβωμεν δι᾿ αὐτὸ μίαν τυχοῦσαν γραμμὴν τῆς ἐπιφανείας, ἤ, ὅπως πολλάκις λέγομεν, μίαν *τομήν* της [1]. Ἂν ὡς ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν ἐπὶ τῆς MM΄ λάβωμεν τὸ τόξον τῆς γραμμῆς αὐτῆς s, τὰ συνημίτονα τῆς ἐφαπτομένης της α, β, γ θὰ εἶναι:

$$\alpha = x_u \cdot u' + x_v \cdot v', \quad \beta = y_u \cdot u' + y_v \cdot v', \quad \gamma = z_u \cdot u' + z_v \cdot v',$$

$$\left(u' \equiv \frac{du}{ds}, \quad v' \equiv \frac{dv}{ds}\right).$$

ἂν δὲ τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς (αἳ ὁποῖαι ἰσχύουν καθ᾿ ὅλον τὸ μῆκος τῆς καμπύλης) παραγωγίσωμεν πρὸς s, εὑρίσκομεν:

$$\frac{d\alpha}{ds} = x_u \cdot u'' + x_v \cdot v'' + u'(x_{u^2} . u' + x_{uv} \cdot v') + v'(x_{vu} \cdot u' + x_{v^2} . v'),$$

$$\frac{d\beta}{ds} = \ldots, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \ldots,$$

$$\frac{\xi}{\varrho} = x_u \cdot u'' + x_v \cdot v'' + x_{u^2}\, u'^2 + 2x_{uv} \cdot u'v' + x_{v^2} . v'^2,$$

ἢ καί: $$\frac{\eta}{\varrho} = y_u \cdot u'' + y_v \cdot v'' + y_{u^2}\, u'^2 + 2y_{uv}\, u'v' + y_{v^2} . v'^2,$$

$$\frac{\zeta}{\varrho} = z_u \cdot u'' + z_v \cdot v'' + z_{u^2}\, u'^2 + 2z_{uv} \cdot u'v' + z_{v^2} . v'^2.$$

---

[1] Θεωροῦμεν δηλ. τὴν δοθεῖσαν καμπύλην ὡς τομὴν τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν ἔχομεν, καὶ μιᾶς ἄλλης ὁποιασδήποτε ἐπιφανείας.

$\left(\dfrac{d\alpha}{ds}=\dfrac{\xi}{\varrho}, \dots\right.$ τύποι τοῦ *Frenet*· ξ, η, ζ τὰ συνημίτονα τῆς α΄ καθέτου, $\left.\dfrac{1}{\varrho}\right.$ ἡ καμπυλότης τῆς καμπύλης (Διαφ. Λογ. Β΄, σελ. 126)).

Τὰς σχέσεις αὐτὰς πολλαπλασιάζομεν τώρα κατὰ σειρὰν ἐπὶ τὰ συνημίτονα l,m,n τῆς καθέτου τῆς ἐπιφανείας καὶ προσθέτομεν, ὅτε ἔχομεν:

$$\frac{1}{\varrho}\,\Sigma\xi l = u''.\Sigma x_u.l + v''.\Sigma x_v.l +$$
$$+ u'^2\Sigma x_{u^2}.l + + 2u'.v'\Sigma x_{uv}l + v'^2.\Sigma x_{v^2}l\cdot$$

καὶ τὰ μὲν ἀθροίσματα $\Sigma x_u.l$ καὶ $\Sigma x_v.l$ εἶναι 0, διότι, ἂν διαιρεθῇ τὸ πρῶτον διὰ $ds_{(v)}$ καὶ τὸ δεύτερον διὰ $ds_{(u)}$ (τῶν διαφορικῶν τῶν τόξων τῶν παραμετρικῶν γραμμῶν), γίνονται τὰ συνημίτονα τῶν *ὀρθῶν* γωνιῶν τῶν ἐφαπτομένων (εἰς τὸ Μ) τῶν παραμετρικῶν γραμμῶν πρὸς τὴν κάθετον τῆς ἐπιφανείας· τὸ δὲ $\Sigma\xi.l$ εἶναι τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας (εἰς τὸ Μ) τῆς α΄ καθέτου τῆς καμπύλης ΜΜ΄ καὶ τῆς καθέτου τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γωνίαν ὀνομάζομεν ϑ· ἂν δὲ καὶ ἀντὶ ds εἰς τὰς παραγώγους u',v' θέσωμεν τὴν τιμήν του ἀπὸ τὸν τύπον (2), ὁ τύπος καταντᾷ:

$$\frac{\text{συν}\vartheta}{\varrho}=\frac{du^2.\Sigma x_{u^2}.l+2dudv.\Sigma x_{uv}.l+dv^2.\Sigma x_{v^2}.l}{\mathrm{E}du^2+2\mathrm{F}dudv+\mathrm{G}dv^2},$$

$$\text{ἢ: } \frac{\text{συν}\vartheta}{\varrho}=\frac{\mathrm{L}du^2+2\mathrm{M}dudv+\mathrm{N}dv^2}{\mathrm{E}du^2+2\mathrm{F}dudv+\mathrm{G}dv^2}, \qquad (11)$$

ἂν τεθῇ: $\Sigma x_{u^2}.l = \mathrm{L}$, $\Sigma x_{uv}.l = \mathrm{M}$, $\Sigma x_{v^2}.l = \mathrm{N}$. (12)

Ὁ τύπος αὐτὸς ὁρίζει τὴν καμπυλότητα τῆς τομῆς ΜΜ΄, ἂν δοθῇ τὸ συνϑ (ἢ καὶ ἀντιστρόφως), διότι τὸ δεξιόν του μέλος ἀποτελεῖται ἀπὸ γνωστὰ μεγέθη $\left(\mathrm{E,F,G,L,M,N} \text{ καὶ } \dfrac{dv}{du}\right)$.

Τὰ τρία ποσὰ L, M, N γράφονται προφανῶς, ἕνεκα τῶν τιμῶν τῶν l,m,n (τύπος 7), καὶ ὡς ὁρίζουσαι:

$$L=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} x_{u^2} & x_u & x_v \\ y_{u^2} & y_u & y_v \\ z_{u^2} & z_u & z_v \end{vmatrix},$$

$$(13)\qquad M=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} x_{uv} & x_u & x_v \\ y_{uv} & y_u & y_v \\ z_{uv} & z_u & z_v \end{vmatrix},$$

$$N=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} x_{v^2} & x_u & x_v \\ y_{v^2} & y_u & y_v \\ z_{v^2} & z_u & z_v \end{vmatrix}$$

καὶ ἔχουν (καθὼς καὶ τὰ E,F,G) ἐξαιρετικὴν σημασίαν δι' ὅλην τὴν θεωρίαν τῶν ἐπιφανειῶν· δι' αὐτὸ δὲ λέγονται *θεμελιώδη ποσὰ τῆς δευτέρας τάξεως* (διότι περιέχουν καὶ παραγώγους δευτέρας τάξεως)(1).

ΣΗΜ. Ἂν ἔχωμεν $z=f(x,y)$, ὁ τύπος (11) καταντᾷ ὁ γνωστὸς τύπος (7) (Διαφ. Λογ. Β', σελ. 192), διότι τότε εἶναι:

$$L=\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad M=\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad N=\frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

20. *Θεώρημα τοῦ Meusnier.* Ἐπειδὴ, ἂν ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον (11) εἰς τὴν *κάθετον* τομὴν τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ M, τὴν ἔχουσαν τὴν ἰδίαν ἐφαπτομένην μὲ τὴν ἀρχικὴν καμπύλην (δηλ. τὴν τομὴν τὴν γινομένην ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς καὶ τῆς καθέτου), εὑρίσκομεν (διότι συνϑ=1, τὰ δὲ E,F,G,L,M,N, καθὼς καὶ τὸ $\frac{dv}{du}$, εἶναι προφανῶς τὰ ἴδια καὶ διὰ τὴν κάθετον αὐτὴν τομήν):

$$(14)\qquad \frac{1}{\varrho_1}=\frac{L du^2+2M du dv+N dv^2}{E du^2+2F du dv+G dv^2},$$

ἕπεται ἡ σχέσις: $\frac{\text{συν}\vartheta}{\varrho}=\frac{1}{\varrho_1}$, ἢ: (15) $\varrho=\varrho_1\ \text{συν}\vartheta$,

δηλ. τὸ γνωστὸν θεώρημα τοῦ *Meusnier* (Διαφ. Λογ. Β', σελ. 190).

ΣΗΜ. Αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου καμπυλότητος μιᾶς καθέτου τομῆς εἶναι:

$$x_1=x+\varrho_1 l,\quad y_1=y+\varrho_1 m,\quad z_1=z+\varrho_1 n.$$

β') Ἰδιότητες τῶν ποσῶν L, M, N.

21. *Ἀναλλοίωτον τῶν ποσῶν L,M,N.— Ὅπως τὰ ποσὰ E,F,G,*

---

(1) Παλαιότερον ἐλαμβάνοντο ὡς ἀρχικὰ ποσὰ τὰ Δ≡LD, Δ'≡MD, Δ''≡ND, δηλ. αἱ τρεῖς ὁρίζουσαι (13).

οὕτω καὶ τὰ L, M, N μένουν ἀναλλοίωτα εἰς πᾶσαν ἐντὸς τοῦ χώρου μετατόπισιν τῆς ἐπιφανείας (ἀμεταβλήτου κατὰ τὸ σχῆμα). Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν διὰ τὰ E,F,G. Ὅπως ἐκεῖ, θὰ ἔχωμεν καὶ ἐδῶ:

$$x_1 = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + a \text{ κτλ.}$$

ἑπομένως καί:

$$x_{1u} = \alpha_1 x_u + \alpha_2 y_u + \alpha_3 z_u, \quad x_{1v} = \alpha_1 x_v + \alpha_2 y_v + \alpha_3 z_v \text{ κτλ.}$$

καὶ ἐπίσης: $$x_{1u^2} = \alpha_1 x_{u^2} + \alpha_2 y_{u^2} + \alpha_3 z_{u^2},$$

$$x_{1uv} = \alpha_1 x_{uv} + \alpha_2 y_{uv} + \alpha_3 z_{uv}, \quad x_{1v^2} = \alpha_1 x_{v^2} + \alpha_2 y_{v^2} + \alpha_3 z_{v^2} \text{ κτλ.}$$

ἂν δὲ τὰς τιμὰς αὐτὰς θέσωμεν εἰς τὰ νέα ποσὰ L_1, M_1, N_1, προκύπτουν (κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ὁριζουσῶν) τὰ παλαιὰ L, M, N, πολλαπλασιασμένα ἐπὶ τὴν ὁρίζουσαν:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \text{ δηλ. τὴν μονάδα.}$$

22. *Ἂν ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἐπίπεδος, τὰ L, M, N εἶναι 0 ἐκ ταὐτότητος· καὶ ἀντιστρόφως.* Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, εὑρίσκομεν ἄλλην ἔκφρασιν τῶν L, M, N, ὡς ἑξῆς. Ἀπὸ τὰς προφανεῖς σχέσεις: $\Sigma x_u . l = 0$, $\Sigma x_v . l = 0$ ἕπονται, διὰ μερικῶν διαφορίσεων πρὸς u καὶ πρὸς v, αἱ τέσσαρες ἐξισώσεις:

$$\Sigma x_{u^2} . l + \Sigma x_u . l_u = 0, \quad \Sigma x_{uv} . l + \Sigma x_u . l_v = 0,$$

$$\Sigma x_{vu} . l + \Sigma x_v . l_u = 0, \quad \Sigma x_{v^2} . l + \Sigma x_v . l_v = 0,$$

ὅθεν: $L = -\Sigma x_u . l_u$, $M = -\Sigma x_u . l_v = -\Sigma x_v l_u$, $N = -\Sigma x_v . l_v$. (16)

Ἂν τώρα ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἐπίπεδος, εἶναι προφανῶς τὰ l, m, n σταθερά, ἑπομένως τὰ L, M, N εἶναι 0, καθὼς ἀμέσως φαίνεται ἐκ τῶν τιμῶν αὐτῶν. Ἀντιστρόφως, ἂν τὰ L, M, N εἶναι ἐκ ταὐτότητος 0, αἱ ἀπὸ τοὺς τύπους (16) προκύπτουσαι ἐξισώσεις:

$$0 = \Sigma x_u l_u, \quad 0 = \Sigma x_u l_v = \Sigma x_v l_u, \quad 0 = \Sigma x_v l_v$$

δίδουν τὰς ἀναλογίας:

$$\frac{l_u}{y_u z_v - z_u y_v} = \frac{m_u}{z_u x_v - x_u z_v} = \frac{n_u}{x_u y_v - y_u x_v}$$

καὶ $$\frac{l_v}{y_u z_v - z_u y_v} = \frac{m_v}{z_u x_v - x_u z_v} = \frac{n_v}{x_u y_v - y_u x_v},$$

ἢ καί, ἕνεκα τῶν τιμῶν τῶν l, m, n:

$$\frac{l_u}{l}=\frac{m_u}{m}=\frac{n_u}{n} \quad \text{καὶ} \quad \frac{l_v}{l}=\frac{m_v}{m}=\frac{n_v}{n}.$$

ἀλλὰ τότε ἀπὸ τὰς σχέσεις αὐτὰς καὶ τὰς: $\Sigma l^2=1$, $\Sigma l.l_u=0$, $\Sigma l.l_v=0$ θὰ εἴχομεν καὶ: $\Sigma l^2=0$, ἂν δὲν ἦσαν ἐκ ταὐτότητος 0 ὅλαι αἱ παράγωγοι τῶν l, m, n, δηλ. τὰ l, m, n σταθερά: c_1, c_2, c_3. Τότε ὅμως αἱ ταὐτότητες: $\Sigma x_u l=0$, $\Sigma x_v l=0$ γίνονται: $\Sigma c_1 x_u=0$, $\Sigma c_1 x_v=0$, ὅθεν διὰ προσθέσεως: $\Sigma c_1 dx=0$ καὶ δι᾽ ὁλοκληρώσεως: $c_1x+c_2y+c_3z=c_4$, δηλ. ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἐπίπεδος.

γ') Ὀμφαλικὰ σημεῖα. — Πρωτεύουσαι ἀκτῖνες.

23. *Ὀμφαλικὰ σημεῖα.*— Ὁ τύπος:

$$(14')\quad \frac{1}{\varrho_1}=\frac{\mathrm{L}du^2+2\mathrm{M}dudv+\mathrm{N}dv^2}{\mathrm{E}du^2+2\mathrm{F}dudv+\mathrm{G}dv^2}=\frac{\mathrm{L}+2\mathrm{M}k+\mathrm{N}k^2}{\mathrm{E}+2\mathrm{F}k+\mathrm{G}k^2}\left(k=\frac{dv}{du}\right)$$

δίδει τὴν καμπυλότητα τῆς τυχούσης καθέτου τομῆς (ἢ καὶ πάσης ἄλλης καμπύλης τῆς ἐπιφανείας, ἐχούσης (εἰς τὸ M) τὴν ἰδίαν ἐφαπτομένην καὶ τὴν κάθετον τῆς ἐπιφανείας ὡς πρώτην κάθετον). Ἂν λοιπὸν τὸ k θεωρηθῇ μεταβλητόν, εὑρίσκομεν τὰς καμπυλότητας τῶν πέριξ τοῦ M ∞^1 καθέτων τομῶν καὶ αὐτὰς τώρα θὰ συγκρίνωμεν. Τρεῖς περιπτώσεις εἶναι δυναταί.

1ον) *Ἂν ἡ ἔκφρασις τοῦ* $\frac{1}{\varrho_1}$ *εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπὸ τοῦ* k: αὐτὸ προφανῶς συμβαίνει, μόνον ἂν εἰς τὸ M εἶναι:

$$\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{E}}=\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{F}}=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{G}}. \tag{17}$$

Τότε εἶναι *ὅλων* τῶν διὰ τοῦ M καθέτων τομῶν αἱ καμπυλότητες ἴσαι:

$$\frac{1}{\varrho_1}=\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{E}}=\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{F}}=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{G}}.$$

εἶναι δηλ. τὸ M *σφαιρικὸν* ἢ *ὀμφαλικὸν σημεῖον* ἢ συντομώτερον *ὀμφαλὸς* τῆς ἐπιφανείας. Ἐπειδὴ δὲ αἱ ἀναλογίαι (17) εἶναι *γενικῶς* δύο σχέσεις μεταξὺ τῶν u, v, οἱ ὀμφαλοὶ εἶναι *γενικῶς μεμονωμένα* σημεῖα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας. Δυνατὸν ὅμως ν᾽ ἀποτελοῦν αἱ (17) *μίαν μό-*

νον σχέσιν, ὅτε ἔχομεν *ὀμφαλικὴν γραμμήν*· ἢ καὶ νὰ εἶναι *ταὐτότητες*, ὅτε *ὅλα* τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας εἶναι ὀμφαλοί· τοιαύτη ὅμως ἐπιφάνεια εἶναι *μόνον* ἡ σφαῖρα (καὶ ἡ μερικὴ περίπτωσίς της: τὸ ἐπίπεδον) (βλέπε Σημ. Γ′).

ΣΗΜ. Α′. Πρβλ. τὰς ἐξισώσεις (12) τῆς σελ. 195 (Διαφ. Λογ. Β′), αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἀπὸ τὰς (17), διότι τότε εἶναι :

$$E=1+p^2,\quad F=pq,\quad G=1+q^2,$$

$$L=\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad M=\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad N=\frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

ΣΗΜ. Β′. *Παράδειγμα ὀμφαλικῶν γραμμῶν.*— Ἡ ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνεια:

$$x=p(u).\text{συν}v,\quad y=p(u).\text{ημ}v,\quad z=q(u),$$

τῆς ὁποίας ὁ μεσημβρινὸς $v=0$ ἔχει τὰς ἐξισώσεις: $x=p(u)$, $y=0$, $z=q(u)$, ἔχει (ἂν u σημαίνῃ τὸ μῆκος τοῦ τόξου τοῦ μεσημβρινοῦ) :

$E=1$, $F=0$, $G=p^2$, $D=p(u)$ (πάντοτε δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν $p(u)>0$) καί: $L=p'q''-q'p''$, $M=0$, $N=pq'$·

καὶ ἐπειδή: $p'^2+q'^2=1$, $p'p''+q'q''=0$, εἶναι καί: $L=-\dfrac{p''}{q'}$,

ὥστε αἱ συνθῆκαι τοῦ ὀμφαλοῦ ἀνάγονται τώρα εἰς μίαν : $pp''+q'^2=0$·
εἶναι λοιπὸν ἐκεῖνα τὰ σημεῖα τοῦ μεσημβρινοῦ $v=0$ ὀμφαλοί, τῶν ὁποίων τὰ κέντρα καμπυλότητος κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῆς περιστροφῆς, καὶ κατὰ τὴν περιστροφὴν παράγουν παραλλήλους, τῶν ὁποίων ὅλα τὰ σημεῖα εἶναι ὀμφαλοί.

ΣΗΜ. Γ′. *Ἀπόδειξις τοῦ ὅτι μόνον ἡ σφαῖρα ἔχει ὅλα τὰ σημεῖά της ὀμφαλικά.*

Πρὸς εὐκολίαν, ἐκλέγομεν τὴν μορφὴν $z=f(x,y)$.

Ἐπειδή: $l=-\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, $m=-\dfrac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, $n=\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$,

ἕπεται:

$$\frac{\partial l}{\partial x}=\frac{pqs-(1+q^2)r}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},\qquad \frac{\partial l}{\partial y}=\frac{pqt-(1+q^2)s}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial m}{\partial x}=\frac{pqr-(1+p^2)s}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{\partial m}{\partial y}=\frac{pqs-(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

αἱ ἐξισώσεις λοιπόν: $\dfrac{r}{1+p^2}=\dfrac{s}{pq}=\dfrac{t}{1+q^2}$ γίνονται τώρα:

$$\frac{\partial l}{\partial y}=0,\ \frac{\partial m}{\partial x}=0,\ \frac{\partial l}{\partial x}=\frac{\partial m}{\partial y}.$$

αἱ δύο πρῶται δεικνύουν, ὅτι l ἀνεξάρτητον τοῦ y καὶ m τοῦ x, δηλ. $l=\sigma(x)$ καὶ $m=\varphi(y)$· ὥστε ἡ τρίτη γίνεται: $\sigma'(x)=\varphi'(y)$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον, ἂν δὲν εἶναι καὶ τὰ δύο σταθερά: $\sigma'(x)=\varphi'(y)=\dfrac{1}{\alpha}$ ἤ: $\dfrac{\partial l}{\partial x}=\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{\partial m}{\partial y}=\dfrac{1}{\alpha}$.

ἀλλ'ἀπὸ αὐτὰς ἕπεται: $l=\frac{x-x_0}{\alpha}$, $m=\frac{y-y_0}{\alpha}$ (x_0,y_0 σταθερά), ὥστε:

$n=\frac{\sqrt{\alpha^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}}{\alpha}$. ἀλλά: $p=-\frac{l}{n}$, $q=-\frac{m}{n}$, ὥστε ὁ τύπος:

$dz=pdx+qdy$ γίνεται:

$$dz=-\frac{(x-x_0)dx+(y-y_0)dy}{\sqrt{\alpha^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}}=d\sqrt{\alpha^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}$$

καὶ ἑπομένως: $\quad z-z_0=\sqrt{\alpha^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2},$

δηλ. $\quad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\alpha^2.$

* 24. *Γραμμὴ τοῦ Stäckel.*—2ον) *Ἂν ἡ ἔκφρασις τοῦ* $\frac{1}{\varrho_1}$ *εἶναι ἁπλοποιήσιμος μὲ ἕνα γραμμικὸν παράγοντα πρὸς τὸ* k· τότε εἶναι τὸ $\frac{1}{\varrho_1}$ γραμμικὴ ῥητὴ συνάρτησις τοῦ k. Αὐτὸ σημαίνει, ὅτι αἱ δύο ἐξισώσεις:

$$\mathrm{E}+2\mathrm{F}k+\mathrm{G}k^2=0 \qquad \text{καὶ} \qquad \mathrm{L}+2\mathrm{M}k+\mathrm{N}k^2=0$$

ἔχουν μίαν κοινὴν ῥίζαν, δηλ. ὅτι:

$$(18) \qquad 4(\mathrm{EM}-\mathrm{FL})(\mathrm{FN}-\mathrm{GM})=(\mathrm{GL}-\mathrm{EN})^2$$

καὶ τότε: (19) $\quad \frac{1}{\varrho_1}=\frac{\alpha k+\beta}{\gamma k+\delta}$ ($\alpha,\beta,\gamma,\delta$ συναρτήσεις τῶν u,v).

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν συμπεραίνεται εὐκόλως, ὅτι τότε τέσσαρα τυχόντα κάθετα ἐπίπεδα διὰ τοῦ $\mathrm{M}(u,v)$ ἔχουν ἀναρμονικὸν λόγον τὸν τῶν τεσσάρων ἀντιστοίχων κέντρων καμπυλότητος ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ M. Ἡ δὲ συνθήκη (18) ὁρίζει *γενικῶς μίαν καμπύλην* ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἔχουσαν τοιαῦτα σημεῖα («*γραμμὴ τοῦ Stäckel*»)(1).

25. *Μέγιστον καὶ ἐλάχιστον τῆς καμπυλότητος.*—3ον) *Γενικὴ περίπτωσις*· τότε ἡ καμπυλότης ἔχει ἓν μέγιστον καὶ ἓν ἐλάχιστον διὰ δύο τιμὰς τοῦ k· διότι ἡ παράγωγος πρὸς k τοῦ δεξιοῦ μέλους, ἐξισωθεῖσα μὲ τὸ 0, δίδει:

$$(\mathrm{M}+\mathrm{N}k)(\mathrm{E}+2\mathrm{F}k+\mathrm{G}k^2)-(\mathrm{F}+\mathrm{G}k)(\mathrm{L}+2\mathrm{M}k+\mathrm{N}k^2)=0, \quad (\vartheta)$$

ἤ: $\quad (\mathrm{EM}-\mathrm{FL})-(\mathrm{GL}-\mathrm{EN})k+(\mathrm{FN}-\mathrm{GM})k^2=0,$

(1) Τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἠρεύνησεν ἐκτενῶς ὁ Stäckel (1896).

δηλ.
$$\begin{vmatrix} k^2 & E & L \\ -k & F & M \\ 1 & G & N \end{vmatrix} = 0 \cdot \qquad (20)$$

καὶ ἂν αἱ δύο ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς ὀνομασθοῦν k_1, k_2, θὰ ἔχωμεν:

$$k_1 + k_2 = \frac{GL-EN}{FN-GM}, \qquad k_1 k_2 = \frac{EM-FL}{FN-GM}.$$

Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὴν περίπτωσιν πραγματικῆς ἐπιφανείας (ὡς εὐκόλως εὑρίσκομεν) ἡ δευτέρα παράγωγος τοῦ $\frac{1}{\varrho_1}$ δὲν μηδενίζεται διὰ τὰς τιμὰς αὐτὰς k_1, k_2 (διαφόρους ἀλλήλων, ἄλλως θὰ ἦτο:

$$4(EM-FL)(FN-GM) = (GL-EN)^2 \text{ (περίπτωσις } 2^{\alpha}\text{)},$$

καί, καθὼς εὐκόλως φαίνεται, πραγματικάς), ἕπεται, ὅτι ὑπάρχει *πράγματι* ἓν μέγιστον *καὶ* ἓν ἐλάχιστον τῆς καμπυλότητος $\frac{1}{\varrho_1}$, τὰ ὁποῖα, ἀπὸ τὰς (14′) καὶ (ϑ), εἶναι:

$$\frac{1}{P_\lambda} = \frac{M + N k_\lambda}{F + G k_\lambda} \quad (\lambda = 1,2) \ (\varkappa).$$

Αἱ δύο αὐταὶ διευθύνσεις k_1, k_2 εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, διότι, καθὼς ἀμέσως φαίνεται, πληροῦν τὴν συνθήκην τῆς καθετότητος (§ 16, Σημ.):

$$E + F(k_1 + k_2) + G k_1 k_2 = 0.$$

26. *Ἐξίσωσις δίδουσα τὰ P_1, P_2.* — Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ ἐξίσωσιν παρέχουσαν ἀμέσως τὰ P_1, P_2 διὰ τῶν E, F, G, L, M, N, ὡς ἑξῆς. Ἂν λύσωμεν τὴν (ϰ) πρὸς k_λ, ἔχομεν:

$$k_\lambda = -\frac{MP_\lambda - F}{NP_\lambda - G} \quad (\lambda = 1,2)\cdot$$

ὅθεν ἀπὸ τὴν (20) εὑρίσκομεν (διὰ $k \equiv k_\lambda$, $P \equiv P_\lambda$):

$$\begin{vmatrix} (MP-F)^2 & E & L \\ (MP-F)(NP-G) & F & M \\ (NP-G)^2 & G & N \end{vmatrix} = 0 \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} (MP-F)^2-(G-NP)E+P(G-NP)L & E & L \\ (MP-F)(NP-G)-(G-NP)F+P(G-NP)M & F & M \\ (NP-G)^2-(G-NP)G+P(G-NP)N & G & N \end{vmatrix} \text{[1]} \cdot$$

[1] Ἀφῃρέθησαν δηλ. ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τῆς α′ στήλης τὰ στοιχεῖα τῆς β′ πολλαπλασιασμένα ἐπὶ (G—NP) καὶ προσετέθησαν τὰ τῆς γ′ πολλαπλασιασμένα ἐπὶ P (G—NP).

καὶ ἐπειδὴ τώρα τὸ β′ καὶ τὸ γ′ στοιχεῖον τῆς α′ στήλης εἶναι ἐκ ταὐτότητος 0, ἂν ἀναπτύξωμεν καὶ κατατάξωμεν κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ P, ἕπεται ἡ ἐξίσωσις:

$$(21)\qquad (LN-M^2)P^2-(EN-2FM+GL)P+(EG-F^2)=0,$$

τῆς ὁποίας αἱ δύο ῥίζαι P_1, P_2 δίδουν *ἀπ' εὐθείας* τὴν μεγίστην καὶ τὴν ἐλαχίστην ἀκτῖνα, ἄρα καὶ τὴν ἐλαχίστην καὶ τὴν μεγίστην καμπυλότητα: $\dfrac{1}{\varrho_1}$, $\dfrac{1}{\varrho_2}$.

27. *Πρωτεύουσαι ἀκτῖνες καὶ διευθύνσεις. Μέση καὶ ὁλικὴ καμπυλότης τῆς ἐπιφανείας.*— Αἱ δύο ἀκτῖνες P_1, P_2 λέγονται *πρωτεύουσαι* ἀκτῖνες τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ M, τὰ κέντρα καμπυλότητός των *πρωτεύοντα* κέντρα καὶ αἱ καμπυλότητες $\dfrac{1}{P_1}$, $\dfrac{1}{P_2}$ *πρωτεύουσαι* καμπυλότητες· καὶ αἱ διευθύνσεις δὲ k_1, k_2, πρὸς τὰς ὁποίας ἀντιστοιχοῦν αἱ πρωτεύουσαι ἀκτῖνες P_1, P_2, λέγονται *πρωτεύουσαι* διευθύνσεις· καὶ *πρωτεύουσαι* τομαὶ αἱ κάθετοι τομαὶ αἱ ἔχουσαι ἐφαπτομένας τὰς πρωτευούσας διευθύνσεις. Αἱ πρωτεύουσαι καμπυλότητες πληροῦν τὴν ἐξίσωσιν:

$$(21')\qquad \frac{1}{P^2}(EG-F^2)-(EN-2FM+GL)\frac{1}{P}+(LN-M^2)=0,$$

ἑπομένως εἶναι:

$$(21'')\qquad \frac{1}{P^2}+\frac{1}{P_2}=\frac{EN-2FM+GL}{EG-F^2},\quad \frac{1}{P_1}\cdot\frac{1}{P_2}=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}.$$

Τὸ ποσὸν $\dfrac{1}{P_1}\cdot\dfrac{1}{P_2}\equiv K$ λέγεται «*ὁλικὴ καμπυλότης*» τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ M (διὰ λόγον, τὸν ὁποῖον θὰ ἐξηγήσωμεν βραδύτερον). (Ἐπίσης λέγεται τὸ ποσὸν $\dfrac{1}{P_1}+\dfrac{1}{P_2}\equiv H$ «*μέση καμπυλότης*» τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ M).

ΣΗΜ. Διὰ τὴν συνήθη μορφήν, $z=f(x,y)$, ἡ ἐξίσωσις (20) καταντᾷ:

$$\begin{vmatrix} k^2 & 1+p^2 & r \\ -k & pq & s \\ 1 & 1+q^2 & t \end{vmatrix}=0,$$

ἡ δὲ (21):

$$(rt-s^2)P^2-\sqrt{1+p^2+q^2}\,\big\{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t\big\}\,P+(1+p^2+q^2)^2=0,$$

δηλ. ἡ ἐξίσωσις (13) τῆς σελ. 195 (Διαφ. Λογ. Β')· καὶ ἡ μέση καὶ ἡ ὁλικὴ καμπυλότης γίνονται:

$$H = \frac{(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{καὶ} \quad K = \frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}$$

(πρβλ. τύπ. (14), Διαφ. Λογ. Β', σελ. 196).

28. ***Παραδείγματα.*** — 1) *Τὸ κοινὸν στρεβλὸν ἑλικοειδές:*

$$x = u\,\text{συν}v, \quad y = u\,\text{ημ}v, \quad z = qv$$

ἔχει τὰ ἑξῆς θεμελιώδη ποσά:

$$E=1, \quad F=0, \quad G=u^2+q^2, \quad D=\sqrt{u^2+q^2},$$

$$L=0, \quad M=-\frac{q}{\sqrt{u^2+q^2}}, \quad N=0,$$

ὅθεν:

$$H=0, \quad K=-\frac{q^2}{(u^2+q^2)^2}, \qquad k_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{u^2+q^2}}\cdot$$

ὥστε (H=0): *αἱ δύο πρωτεύουσαι ἀκτῖνες εἶναι ἐπὶ τοῦ ἑλικοειδοῦς αὐτοῦ εἰς ἕκαστον σημεῖον ἴσαι καὶ ἀντίθετοι:* $P_2=-P_1$.

2) *Αἱ ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνειαι:*

$$x=p(u)\text{συν}v, \quad y=p(u).\text{ημ}v, \quad z=q(u)$$

($x=p(u)$, $y=0$, $z=q(u)$ αἱ ἐξισώσεις τοῦ μεσημβρινοῦ)

ἔχουν: $E=1, \quad F=0, \quad G=p^2, \quad D=p,$

$$L=-\frac{p''}{q'}, \quad M=0, \quad N=pq',$$

$$l=-q'\text{συν}v, \quad m=-q'\text{ημ}v, \quad n=p',$$

$$k_{1,2}=0,\ \infty,$$

$$P_1=-\frac{q'}{p''}, \qquad P_2=\frac{p}{q'}.$$

Αἱ τιμαὶ τῶν k: $k_1=0$, $k_2=\infty$, δηλ. $dv=0$, $du=0$, δεικνύουν, ὅτι πρωτεύουσαι διευθύνσεις εἶναι ἡ τοῦ μεσημβρινοῦ καὶ ἡ τοῦ παραλλήλου. Ἐπειδὴ δὲ διὰ τὰ σημεῖα τοῦ μεσημβρινοῦ ($v=0$) εἶναι: (ϑ) $l=-q'$, $m=0$, $n=p'$, οἱ γενικοὶ τύποι τῶν συντεταγμένων τοῦ κέντρου καμπυλότητος (§ 20, Σημ.) γίνονται διὰ τὸ πρῶτον τῶν πρωτευόντων κέντρων:

$$x_1=p+\frac{q'^2}{p''}, \quad y_1=0, \quad z_1=q-\frac{p'q'}{p''}=q+\frac{p'^2}{q'}$$

(διότι: $p'^2+q'^2=1$, ἐκ τῶν (ϑ), ἄρα: $p'p''+q'q''=0$)·

ἀπὸ τὰς τιμὰς αὐτὰς τῶν x_1, y_1, z_1 φαίνεται, ὅτι ἡ P_1 εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος τοῦ μεσημβρινοῦ $v=0$ (εἰς τὸ ἴδιον σημεῖον). Διὰ τὸ δεύτερον πρωτεῦον κέντρον ἔχομεν: $x_2=0$, $y_2=0$, $z_2=q+\dfrac{pp'}{q'}$, δηλ. P_2 εἶναι ἴσον μὲ τὸ τμῆμα τῆς καθέτου ἀπὸ τὸ M ἕως τὸν ἄξονα τῆς περιστροφῆς (Πρβλ. Διαφ. Λογ. Β', σελ. 212).

δ′) *Ἀσυμπτωτικαὶ διευθύνσεις.*

29. *Ἀσυμπτωτικαὶ διεύθύνσεις.*—Ἂν εἰς τὸν τύπον (14′):

$$\frac{1}{\varrho_1}=\frac{\mathrm{L}+2\mathrm{M}k+\mathrm{N}k^2}{\mathrm{E}+2\mathrm{F}k+\mathrm{G}k^2}$$

θέσωμεν: (22) $\mathrm{L}+2\mathrm{M}k+\mathrm{N}k^2=0$, εὑρίσκομεν $\frac{1}{\varrho_1}=0$, δηλ. κάθετον τομὴν ἔχουσαν καμπυλότητα 0 εἰς τὸ Μ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐξίσωσις: $\mathrm{L}+2\mathrm{M}k+\mathrm{N}k^2=0$ ἔχει δύο ῥίζας k_1, k_2, ὑπάρχουσιν γενικῶς εἰς ἕκαστον σημεῖον Μ δύο τοιαῦται τομαί, πραγματικαὶ ἢ φανταστικαὶ ἢ καὶ συμπίπτουσαι. Αἱ δύο αὗται διευθύνσεις k_1, k_2 καλοῦνται *ἀσυμπτωτικαὶ* διευθύνσεις καὶ αἱ ἐφαπτόμεναί των *ἀσυμπτωτικαὶ* ἐφαπτόμεναι (διὰ λόγον, τὸν ὁποῖον θὰ ἴδωμεν βραδύτερον). Ἔχομεν λοιπὸν (διὰ τὰς πραγματικὰς ἐπιφανείας) τρεῖς περιπτώσεις:

1) k_1, k_2 φανταστικά, δηλ. $\mathrm{LM}-\mathrm{N}^2>0$· τότε δὲν ὑπάρχουν εἰς τὸ Μ πραγματικαὶ ἀσυμπτωτικαὶ διευθύνσεις· ἡ δὲ ἐπιφάνεια λέγεται ἐκεῖ *κυρτὴ* (ἢ *κοίλη*) καὶ τὸ σημεῖον Μ *ἐλλειπτικόν*· P_1 καὶ P_2 εἶναι τότε ὁμόσημα.

2) k_1, k_2 ἴσα (ἄρα πραγματικά), δηλ. $\mathrm{LN}-\mathrm{M}^2=0$· τότε ὑπάρχει εἰς τὸ Μ μία μόνον πραγματικὴ ἀσυμπτωτικὴ διεύθυνσις (διπλῆ), συμπίπτουσα μὲ μίαν τῶν πρωτευουσῶν διευθύνσεων· ἡ ἐπιφάνεια λέγεται ἐκεῖ *ἐπιπεδόκυρτος* καὶ τὸ Μ *παραβολικὸν* σημεῖον· ἓν τῶν P_1, P_2 εἶναι τότε ∞.

3) k_1, k_2 πραγματικὰ καὶ ἄνισα, δηλ. $\mathrm{LN}-\mathrm{M}^2<0$· ὑπάρχουν τότε εἰς τὸ Μ δύο πραγματικαὶ ἀσυμπτωτικαὶ διευθύνσεις καὶ ἡ ἐπιφάνεια λέγεται ἐκεῖ *κυλόκυρτος*, τὸ δὲ σημεῖον Μ *ὑπερβολικόν*· P_1 καὶ P_2 εἶναι τότε ἑτερόσημα.

ΣΗΜ. Α′. Ὅταν $z=f(x,y)$, ἡ παράστασις $\mathrm{LN}-\mathrm{M}^2$ γίνεται: $\frac{rt-s^2}{1+p^2+q^2}$ (πρβλ. Διαφ. Λογ. Β′, σελ. 183).

ΣΗΜ. Β′. Παραδείγματα *πανταχοῦ* κυρτῶν ἐπιφανειῶν εἶναι: ἡ σφαῖρα, τὸ ἐλλειψοειδές, τὸ ἐλλειπτικὸν παραβολοειδές, τὸ δίχωνον ὑπερβολοειδὲς κτλ. πανταχοῦ κυλοκύρτων: τὸ ὑπερβολικὸν παραβολοειδές, τὸ μονόχωνον ὑπερβολοειδὲς κτλ. πανταχοῦ ἐπιπεδοκύρτων: οἱ κύλινδροι, οἱ κῶνοι καὶ γενικῶς αἱ ἀναπτυκταὶ ἐπιφάνειαι. Ἀποδεικνύεται δὲ εὐκόλως₂ ὅτι *μόνον* αἱ ἀναπτυκταὶ ἐπιφάνειαι εἶναι πανταχοῦ ἐπιπεδόκυρτοι. (Πρβλ. Διαφ. Λογ. Β′, σελ. 211-2).

ΣΗΜ. Γ'. Μετασχηματισμοὶ τῆς ὁριζούσης $\begin{vmatrix} L & M \\ M & N \end{vmatrix}$. — 1) Ἕνεκα τῶν δευτέρων τιμῶν τῶν L, M, N (τύπ. 16) ἔχομεν:

$$LN-M^2=\Sigma x_u l_u . \Sigma x_v l_v - \Sigma x_u l_v . \Sigma x_v l_u = \Sigma(l_u m_v - m_u l_v)(x_u y_v - y_u x_v),$$

$$\text{ἤ: } LN-M^2=D\,\Sigma(l_u m_v - m_u l_v).n = D . \begin{vmatrix} l & l_u & l_v \\ m & m_u & m_v \\ n & n_u & n_v \end{vmatrix} . \quad (23)$$

καὶ ἐπειδὴ $D>0$, τὸ σημεῖον τῆς ὁριζούσης αὐτῆς ὁρίζει τὸ εἶδος τῆς ἐπιφανείας. 2) Ἂν πολλαπλασιάσωμεν τῆς ὁριζούσης αὐτῆς τὰς ὁριζοντίας γραμμὰς κατὰ σειρὰν ἐπὶ l, m, n, προσθέσωμεν καὶ λάβωμεν τ' ἀθροίσματα ὡς στοιχεῖα τῆς πρώτης γραμμῆς, προκύπτει:

$$l . \begin{vmatrix} l & l_u & l_v \\ m & m_u & m_v \\ n & n_u & n_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Sigma l^2 & \Sigma l l_u & \Sigma l l_v \\ m & m_u & m_v \\ n & n_u & n_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_u & m_v \\ n_u & n_v \end{vmatrix} (\text{διότι } \Sigma l^2=1, \Sigma l l_u=0, \Sigma l l_v=0),$$

ὅθεν:

$$LN-M^2=\frac{D}{l}.(m_u n_v - n_u m_v).$$

ὁμοίως εὑρίσκομεν καί:

$$LN-M^2=\frac{D}{m}(n_u l_v - l_u n_v) = \frac{D}{n}(l_u m_v - m_u l_v). \quad (24)$$

ε') *Τύπος τοῦ Euler. Δείκτρια τοῦ Dupin.*
Ἐπιφάνειαι παραστατικαὶ τῆς καμπυλότητος.

30. *Τύπος τοῦ Euler.*—Ἂν ἐκλέξωμεν ὡς ἄξονα τῶν z τὴν κάθετον τῆς ἐπιφανείας, ὡς ἀρχὴν τὸ σημεῖον M, ὡς ἄξονας τῶν x, y τὰς πρωτευούσας ἐφαπτομένας καὶ ὡς u, v τὰς συντεταγμένας x, y, ὁ τύπος:

$$\frac{1}{\varrho_1}=\frac{L_1+2M_1 k+N_1 k^2}{E_1+2F_1 k+G_1 k^2}$$

(ὅπου οἱ δεῖκται 1 εἰς τὸ δεξιὸν μέλος δεικνύουν τὰ θεμελιώδη ποσὰ πρὸς τοὺς νέους αὐτοὺς ἄξονας) ἁπλοποιεῖται, διότι τότε εἶναι εἰς τὸ M:

$$k=\frac{dy}{dx}, \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M=0, \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M=0, (E_1)_M=1, (F_1)_M=0, (G_1)_M=1, (D_1)_M=1.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐξίσωσις (20) ἔχει τώρα τὰς λύσεις: $k_1=0, k_2=\infty$, ἀνάγκη νὰ καταντᾷ: $k=0$, δηλ. ὁ συντελεστὴς τοῦ k^2 νὰ εἶναι 0, δηλ. νὰ εἶναι εἰς τὸ Μ καί: $(M_1)_M=0$, ἢ $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_M=0$. Ἀλλὰ τότε ὁ τύπος γίνεται εἰς τὸ Μ:

$$\frac{1}{\varrho_1}=\frac{(L_1)_M+(N_1)_M k^2}{1+k^2}$$

καὶ ἐπειδὴ διὰ $k=0$, $k=\infty$ δίδει: $\frac{1}{P_1}=(L_1)_M$, $\frac{1}{P_2}=(N_1)_M$, ἂν ὀνομάσωμεν φ τὴν γωνίαν τῆς διευθύνσεως k πρὸς τὸν ἄξονα τῶν $x (k=0)$, δηλ. ἂν θέσωμεν:
$$\varepsilon\varphi\varphi=\frac{dy}{dx}=k,$$
ἕπεται ὁ τελικὸς τύπος:

$$\frac{1}{\varrho_1}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}{P_1}+\frac{\eta\mu^2\varphi}{P_2}, \quad (25)$$

δηλ. ὁ τύπος τοῦ *Euler* (πρβλ. Διαφ. Λογ. Β΄, σελ. 186).

ΣΗΜ. Τὰ πορίσματα αὐτοῦ τοῦ τύπου βλέπε εἰς τὴν σελ. 187 (Διαφ. Λογ. Β΄). Ἐδῶ προσθέτομεν μόνον, ὅτι, ἂν ὀνομάσωμεν φ_1 τὴν γωνίαν τῶν ἀσυμπτωτικῶν διευθύνσεων πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x (δηλ. τὴν ἐφαπτομένην τῆς μιᾶς πρωτευούσης τομῆς), θὰ εἶναι:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu^2\varphi_1}{P_1}+\frac{\eta\mu^2\varphi_1}{P_2}=0, \text{ ὥστε: } \varepsilon\varphi\varphi_1=\pm\sqrt{-\frac{P_2}{P_1}},$$

δηλ. *αἱ δύο πρωτεύουσαι διευθύνσεις διχοτομοῦν τὰς γωνίας τῶν δύο ἀσυμπτωτικῶν διευθύνσεων.*

31. *Δείκτρια τοῦ Dupin.* — Τὴν θεωρίαν της, ὅταν οἱ ἄξονες τῶν συντεταγμένων ληφθοῦν ὡς εἰς τὴν § 30 (1), βλέπε εἰς τὴν σελ. 184 (Διαφ. Λογ. Β΄). Ἐδῶ θά την εὕρωμεν διὰ τὴν περίπτωσιν τυχόντων ἀξόνων. Τὸ ἐφαπτόμενον εἰς τὸ Μ ἐπίπεδον ἔχει τὴν ἐξίσωσιν: $\Sigma(X-x)l=0$, τὸ δὲ παράλληλον πρὸς αὐτὸ εἰς ἀπόστασιν ε: $\Sigma(X-x)l=\varepsilon$ καὶ εἰς τὰ σημεῖα τῆς τομῆς του μὲ τὴν ἐπιφάνειαν θὰ εἶναι:

$$X=x+x_u du+x_v dv+\frac{1}{2}(x_{u^2}du^2+2x_{uv}dudv+x_{v^2}dv^2)+\ldots,$$
$$Y=\ldots,\ Z=\ldots,$$

(1) Τὸ σύστημα τῶν ἀξόνων αὐτῶν θὰ ὀνομάζωμεν τοῦ λοιποῦ χάριν συντομίας *«τὸ συνοδεῦον τρίεδρον»* τῆς ἐπιφανείας.

ἑπομένως ἐπὶ τῆς τομῆς αὐτῆς θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{1}{2}(du^2\Sigma x_{u^2}.l+2dudv\,.\,\Sigma x_{uv}.l+dv^2\,.\,\Sigma x_{v^2}.l)+\ldots=\varepsilon,$$

δηλ. $$\mathrm{L}du^2+2\mathrm{M}dudv+\mathrm{N}dv^2=2\varepsilon, \quad (26)$$

ἂν παραλείψωμεν τ' ἀπειροστὰ *τῶν ἀνωτέρων* τάξεων. Ἡ δὲ ἐξίσωσις αὐτὴ παριστᾷ τὴν εἰς ἀπειροστὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ Μ ἀπειροστὴν τομὴν τῆς ἐπιφανείας δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ ἐφαπτόμενον· ἀπ' αὐτὴν προκύπτει εὐκολώτατα *ἡ δείκτρια τοῦ Dupin* (βλέπε Διαφ. Λογ. Β΄, σελ. 183-4).

ΣΗΜ. Ἡ ἐξίσωσις (22) δίδει προφανῶς τὰς ἀσυμπτώτους τῆς δεικτρίας τοῦ Dupin.

32. *Ἐπιφάνειαι παραστατικαὶ τῆς καμπυλότητος.* (*Ἀντικατάστασις τῆς ἐπιφανείας δι' ἄλλης ἁπλουστέρας χωρὶς βλάβην τῆς εἰς τὸ Μ καμπυλότητος τῶν καμπύλων της*).—Ἡ ἀντικατάστασις αὐτή, διὰ τῆς ὁποίας ἀποκτῶμεν σαφεστέραν παράστασιν τῆς εἰς τὸ Μ καμπυλότητος τῶν καμπύλων τῆς ἐπιφανείας, δύναται νὰ γίνῃ κατὰ πολλοὺς τρόπους. Τρεῖς κυριώτεροι εἶναι οἱ ἑξῆς.

1ον) *Ἐγγύτατον παραβολοειδές* (*τοῦ Euler*). —Τὸ παραβολοειδὲς τὸ ἔχον ὡς πρὸς τὸ *συνοδεῦον* τρίεδρον εἰς τὸ Μ τὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{X^2}{\mathrm{P}_1}+\frac{Y^2}{\mathrm{P}_2}=2Z \quad (27)$$

ἔχει προφανῶς ἐπαφὴν β΄ τάξεως πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν καὶ εἶναι ἐγγύτατον πρὸς αὐτὴν (εἰς τὸ Μ) μεταξὺ ὅλων τῶν ἐχόντων τὴν κορυφήν των εἰς τὸ Μ· καὶ δύο τυχοῦσαι *ἀντίστοιχοι* καμπύλαι αὐτοῦ καὶ τῆς ἐπιφανείας (δηλ. ἔχουσαι *κοινὸν* ἐγγύτατον ἐπίπεδον εἰς τὸ Μ τὸ τυχὸν διὰ τῆς *κοινῆς* καθέτου ἐπίπεδον) ἔχουν εἰς τὸ Μ ἐπαφὴν δευτέρας τάξεως, δηλ. τὴν ἰδίαν ἀκτῖνα καμπυλότητος. Δυνάμεθα λοιπόν, εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῆς εἰς τὸ Μ καμπυλότητος τῶν καμπύλων τῆς ἐπιφανείας, ν' ἀντικαταστήσωμεν αὐτὴν διὰ τοῦ παραβολοειδοῦς, ἐλλειπτικοῦ ἢ ὑπερβολικοῦ, καθ' ὅσον καὶ ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἐκεῖ κυρτὴ ἢ κοιλόκυρτος· ἂν τὸ Μ εἶναι ὀμφαλός, τὸ παραβολοειδὲς εἶναι ἐκ περιστροφῆς· ἂν δὲ ἡ ἐπιφάνεια εἰς τὸ Μ εἶναι ἐπιπεδόκυρτος, τὸ παραβολοειδὲς *ἐκφυλίζεται* εἰς τὸν παραβολικὸν κύλινδρον:

$$\frac{X^2}{\mathrm{P}_1}=2Z).$$

2ον) *Ἐγγυτάτη σπεῖρα.* Ἡ σπεῖρα, ἡ ὁποία κατασκευάζεται, ὅταν ὁ εἷς τῶν πρωτευόντων κύκλων καμπυλότητος περιστραφῇ πέριξ τοῦ εἰς τὸ ἐπίπεδόν του κειμένου ἄξονος τοῦ ἄλλου πρωτεύοντος κύκλου καμπυλότητος, εἶναι προφανῶς ἐγγυτάτη πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν εἰς τὸ Μ καὶ ἔχει ἐπαφὴν β΄ τάξεως (διότι ἔχει τὰς πρωτευούσας ἀκτῖνάς της ἀντιστοίχως ἴσας μὲ τὰς τῆς ἐπιφανείας (Διαφ. Λογ. Β΄, σελ. 225)). Καὶ ἂν μὲν τὸ σημεῖον Μ τῆς ἐπιφανείας εἶναι ἐλλειπτικόν, εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τῆς σπείρας (δηλ. τοῦ κυρτοῦ μέρους της) (καὶ ἂν ἰδιαιτέρως τὸ Μ εἶναι ὀμφαλός, ἡ σπεῖρα καταντᾷ ἡ ἐγγυτάτη σφαῖρα)· ἂν δὲ ὑπερβολικόν, τοῦ ἐσωτερικοῦ (τοῦ κοιλοκύρτου), καὶ ἂν παραβολικόν, ἡ σπεῖρα καταντᾷ κύλινδρος. Ἡ πρὸς τὸ συνοδεῦον τρίεδρον ἐξίσωσις τῆς σπείρας αὐτῆς εὑρίσκεται εὐκόλως.

3ον) *Ἐγγυτάτη κυκλογενὴς ἐπιφάνεια.* Τὸ σύνολον τῶν εἰς τὸ Μ κύκλων καμπυλότητος ὅλων τῶν καθέτων τομῶν τῆς ἐπιφανείας (εἰς τὸ Μ) ἀποτελεῖ ἐπιφάνειαν *κυκλογενῆ*, ἔχουσαν ἐκ κατασκευῆς τὰς ἰδίας πρωτευούσας ἀκτῖνας (εἰς τὸ Μ) μὲ τὴν ἐπιφάνειαν, ἑπομένως ἐπαφὴν β΄ τάξεως. Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς, ἡ ὁποία εἶναι *ἀλγεβρικὴ τοῦ 4ου βαθμοῦ*, εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς.

Ἂν ὀνομάσωμεν ψ τὴν γωνίαν τῆς ἀκτῖνος ϱ_1 τοῦ τυχόντος σημείου Ν ἑνὸς ὁποιουδήποτε ἀπὸ τοὺς κύκλους αὐτοὺς μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ σημείου Μ, X, Y, Z τὰς συντεταγμένας τοῦ Ν πρὸς τὸ συνοδεῦον τρίεδρον εἰς τὸ Μ καὶ φ τὴν γωνίαν τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου αὐτοῦ πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς πρωτευούσης τομῆς zMx, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{1}{\varrho_1}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}{P_1}+\frac{\eta\mu^2\varphi}{P_2},$$

$$X=\varrho_1\eta\mu\psi\sigma\upsilon\nu\varphi,\quad Y=\varrho_1\eta\mu\psi\eta\mu\varphi,\quad Z=\varrho_1(1-\sigma\upsilon\nu\psi),$$

ὅπου: $\varrho_1=\dfrac{P_1P_2}{P_1\eta\mu^2\varphi+P_2\sigma\upsilon\nu^2\varphi}$. Ἑπομένως αἱ ἐξισώσεις τῆς ζητουμένης ἐπιφανείας μὲ παραμέτρους τὰς φ καὶ ψ εἶναι:

$$X=\frac{P_1P_2\eta\mu\psi\sigma\upsilon\nu\varphi}{P_1\eta\mu^2\varphi+P_2\sigma\upsilon\nu^2\varphi},\quad Y=\frac{P_1P_2\eta\mu\psi\eta\mu\varphi}{P_1\eta\mu^2\varphi+P_2\sigma\upsilon\nu^2\varphi},\quad Z=\frac{P_1P_2(1-\sigma\upsilon\nu\psi)}{P_1\eta\mu^2\varphi+P_2\sigma\upsilon\nu^2\varphi}.$$

Ἡ συνήθης ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας δύναται νὰ εὑρεθῇ, ἂν ἀπαλείψωμεν μεταξὺ αὐτῶν τῶν τριῶν τὰ φ καὶ ψ· ταχύτερον ὅμως εὑρίσκεται ὥς ἑξῆς· ὁ τὴν ἐπιφάνειαν παράγων κύκλος ἔχει τὰς ἐξισώσεις:

$$\frac{Y}{X}=\varepsilon\varphi\varphi \quad \text{καὶ} \quad X^2+Y^2+Z^2=2\varrho_1 Z,$$

μὲ δύο παραμέτρους, τὸ φ καὶ τὸ ϱ_1, συνδεομένας διὰ τῆς σχέσεως:

$$\frac{1}{\varrho_1}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}{P_1}+\frac{\eta\mu^2\varphi}{P_2}.$$

πρέπει λοιπὸν ν'απαλειφθοῦν τὰ φ καὶ ϱ_1 ἀπὸ τὰς δύο ἐξισώσεις τοῦ κύκλου καὶ τὴν ἐξίσωσιν τὴν συνδέουσαν τὰς παραμέτρους· αὐτὸ δὲ γίνεται ὥς ἑξῆς·

ἂν τὴν τιμὴν τοῦ φ ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν: $\frac{Y}{X}=\varepsilon\varphi\varphi$ θέσωμεν εἰς τὴν: $\frac{1}{\varrho_1}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}{P_1}+\frac{\eta\mu^2\varphi}{P_2}$, εὑρίσκομεν: $\frac{1}{\varrho_1}=\left(\frac{X^2}{P_1}+\frac{Y^2}{P_2}\right)\frac{1}{X^2+Y^2}$ καὶ ἡ ἀντικατάστασις τῆς τιμῆς αὐτῆς τοῦ ϱ_1 εἰς τὴν ἐξίσωσιν: $X^2+Y^2+Z^2=2\varrho_1 Z$ δίδει τὴν ἐξίσωσιν τῆς ζητουμένης ἐπιφανείας (*ἀλγεβρικῆς καὶ τοῦ 4ου βαθμοῦ*):

$$(28) \quad (X^2+Y^2+Z^2).\left(\frac{X^2}{P_1}+\frac{Y^2}{P_2}\right)=2Z(X^2+Y^2),$$

τῆς ὁποίας τὸ σχῆμα διαφέρει, καθ' ὅσον ἡ ἐπιφάνεια εἶναι κυρτή, κοιλόκυρτος ἢ ἐπιπεδόκυρτος εἰς τὸ Μ. Πεπερασμένη εἶνε μόνον εἰς τὴν α΄ περίπτωσιν. Ἂν δὲ τὸ Μ εἶναι ὀμφαλὸς ($P_1=P_2$), ἡ ἐπιφάνεια καταντᾷ ἡ ἐγγυτάτη σφαῖρα.

ΣΗΜ. Μία ἄλλη ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία χρησιμεύει πρὸς παράστασιν τῆς θέσεως τῶν ∞^2 κύκλων καμπυλότητος *ὅλων* τῶν τομῶν τῆς ἐπιφανείας (*καθέτων καὶ πλαγίων*) εἰς τὸ Μ καὶ ἡ ὁποία ἔχει τὴν ἰδιότητα νὰ διατηρῇ τὸ ἴδιον σχῆμα, εἴτε κυρτὴ εἴτε κοιλόκυρτος εἴτε ἐπιπεδόκυρτος εἶναι ἡ ἐπιφάνεια εἰς τὸ Μ, εἶναι ἡ εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια, τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦν αἱ ∞^1 *εὐθεῖαι τοῦ Hachette*(1), αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰς ∞^1 ἐφαπτομένας τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ Μ.

Αἱ ἐξισώσεις της πρὸς τὸ συνοδεῦον τρίεδρον εἶναι:

$$X=-t\eta\mu\varphi, \quad Y=t\sigma\upsilon\nu\varphi, \quad Z=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}{P_1}+\frac{\eta\mu^2\varphi}{P_2},$$

ἤ: $$(29) \quad X=-t\eta\mu\varphi, \quad Y=t\sigma\upsilon\nu\varphi, \quad Z=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_1}-\frac{1}{P_2}\right)\sigma\upsilon\nu\, 2\varphi,$$

---

(1) *Θεώρημα τοῦ Hachette* (πόρισμα τοῦ θεωρήματος τοῦ Meusnier): Ἂν ἐπὶ τῶν (εἰς τὸ Μ) πρώτων καθέτων ὅλων τῶν καμπύλων τῆς ἐπιφανείας τῶν ἐχουσῶν κοινὴν εἰς τὸ Μ ἐφαπτομένην μίαν ἐφαπτομένην ΜΤ τῆς ἐπιφανείας λάβωμεν ἀπὸ τὸ Μ τμήματα ἴσα πρὸς τὰς ἀντιστοιχούσας καμπυλότητας, τ' ἄκρα τῶν τμημάτων αὐτῶν ἀποτελοῦν εὐθεῖαν στρεβλῶς πρὸς τὴν ΜΤ κειμένην, ἀλλὰ κάθετον ἐπ' αὐτήν (*«εὐθεῖα τοῦ Hachette»*).

μὲ παραμέτρους τὰς t καὶ φ (φ ἡ γωνία τῆς τυχούσης ἐφαπτομένης πρὸς τὸν ἄξονα x).

ϛ') *Συζυγεῖς διευθύνσεις.*

33. *Ὁρικὴ εὐθεῖα τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου.*—Τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τῆς ἐπιφανείας κατὰ μῆκος μιᾶς γραμμῆς της: $v=\varrho(u)$ παράγουν ἀναπτυκτὴν ἐπιφάνειαν (πρβλ. Διαφ. Λογ. Β', σελ. 178-9), τῆς ὁποίας ἡ γενέτειρα (*ὁρικὴ* εὐθεῖα) ἔχει τὰς ἐξισώσεις:

$$\Sigma(X-x)l=0 \text{ καὶ } \Sigma(X-x)\left(l_u+l_v\frac{dv}{du}\right)-\Sigma\left(x_u+x_v\frac{dv}{du}\right)l=0$$

(ὅπου: $\frac{dv}{du}=\varrho'(u)$)· ἢ καὶ (ἐπειδή: $\Sigma x_u l=0$, $\Sigma x_v l=0$):

$$(\vartheta)\quad \Sigma(X-x)\,l=0,\quad \Sigma(X-x)\left(l_u+l_v\frac{dv}{du}\right)=0\cdot$$

ἂν δὲ $\frac{\delta v}{\delta u}$ εἶναι ἡ *διεύθυνσις* τῆς εὐθείας αὐτῆς, αἱ συμμετρικαί της ἐξισώσεις εἶναι:

$$\frac{X-x}{x_u+x_v\frac{\delta v}{\delta u}}=\frac{Y-y}{y_u+y_v\frac{\delta v}{\delta u}}=\frac{Z-z}{z_u+z_v\frac{\delta v}{\delta u}}$$

καὶ ἂν εἰς τὰς (ϑ) ἀντὶ τῶν: $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ θέσωμεν τὰ ἀνάλογα πρὸς αὐτὰ ποσά: $x_u+x_v\frac{\delta v}{\delta u},\ldots$, ἡ μὲν πρώτη γίνεται 0 ἐκ ταὐτότητος (ἕνεκα τῶν: $\Sigma x_u l=0, \Sigma x_v l=0$), ἡ δὲ δευτέρα δίδει:

$$\Sigma\left(x_u+x_v\frac{\delta v}{\delta u}\right)\left(l_u+l_v\frac{du}{dv}\right)=0, \text{ ἤ, μετὰ τὰς πράξεις:}$$

$$\mathrm{L}+\mathrm{M}(k+\varkappa)+\mathrm{N}k\varkappa=0\cdot \quad (30)$$

$$\left(k\equiv\frac{dv}{du},\ \varkappa\equiv\frac{\delta v}{\delta u}\right)$$

ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ὁρίζει τὴν διεύθυνσιν ($\varkappa$) τῆς ὁρικῆς εὐθείας· ἐπειδὴ δὲ εἶναι συμμετρικὴ πρὸς k καὶ $\varkappa$, ἕπεται, ὅτι ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν διευθύνσεων (τῆς ἀρχικῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς ὁρικῆς εὐθείας) εἶναι *ἀντιστρεπτὴ* (δηλ. ἂν θεωρήσωμεν δύο ἀπείρως πλησίον ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα *κατὰ μῆκος* τῆς διευθύνσεως (κ), ὁρικὴ εὐθεῖά των θὰ εἶναι ἡ (k)).

ΣΗΜ. Ὁ τύπος (30) δίδει γενικῶς διαφόρους ἀλλήλων τιμὰς τοῦ κ διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ k, ἐκτὸς ἂν:

$$L+M(k+\varkappa)+Nk\varkappa\equiv(\alpha+\beta k)\,(\alpha+\beta\varkappa)\cdot$$

διότι τότε εἰς τὸ τυχὸν k ἀντιστοιχεῖ πάντοτε ἡ ἰδία τιμὴ τοῦ κ: $\varkappa=-\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot$ αὐτὸ δὲ συμβαίνει, ὅταν:

$$L:M:N=\alpha^2:\alpha\beta:\beta^2,\ \text{δηλ.}\ LN-M^2=0,$$

ἢ (§ 29) ὅταν ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἐπιπεδόκυρτος (ἀναπτυκτή). (Αὐτὸ φαίνεται καὶ ἀπ' εὐθείας γεωμετρικῶς).

34. *Συζυγεῖς διευθύνσεις.* Αἱ δύο διευθύνσεις (k) καὶ (κ), αἱ διὰ τῆς ἐξισώσεως (30) συνδεόμεναι, λέγονται *συζυγεῖς* διευθύνσεις. Καὶ αὐτό, διότι αἱ ἐπ' αὐτῶν κείμεναι διάμετροι τῆς δεικτρίας τοῦ Dupin εἶναι *συζυγεῖς*. Πρὸς ἀπόδειξιν αὐτοῦ λαμβάνομεν ἄξονας τοὺς τοῦ συνοδεύοντος τριέδρου εἰς τὸ Μ καὶ $u\equiv x$, $v\equiv y$, ὅτε ἡ σχέσις (30) γίνεται (πρβλ. § 30):

$$\frac{1}{P_1}+\frac{k\varkappa}{P_2}=0\cdot$$

ἀλλὰ δύο συζυγεῖς διάμετροι τῆς δεικτρίας σχηματίζουν μὲ τὸν α' ἄξονά της γωνίας α καὶ β, διὰ τὰς ὁποίας:

$$\frac{1}{P_1}+\frac{\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}{P_2}=0\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ *τώρα* εἶναι καί: $k=\dfrac{dy}{dx}$, $\varkappa=\dfrac{\delta y}{\delta x}$, ἕπεται, ὅτι k καὶ κ εἶναι ἀκριβῶς αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας δύο συζυγεῖς τῆς δεικτρίας διάμετροι σχηματίζουν μὲ τὸν α' ἄξονα.

ΣΗΜ. Α'. Ἂν $z=f(x,y)$, ἡ ἐξίσωσις (30) καταντᾷ:

$$r+s\left(\frac{dy}{dx}+\frac{\delta y}{\delta x}\right)+t\frac{dy}{dx}\cdot\frac{\delta y}{\delta x}=0.$$

ΣΗΜ. Β'. Διὰ $\varkappa=k$ αἱ δύο συζυγεῖς διάμετροι συμπίπτουν (κατὰ τὴν Ἀναλ. Γεωμ.) εἰς μίαν ἀσύμπτωτον τῆς δεικτρίας, αἱ δὲ συζυγεῖς διευθύνσεις εἰς μίαν ἀσυμπτωτικὴν διεύθυνσιν, διότι ἡ ἐξίσωσις (30) συμπίπτει μὲ τὴν (22)· (πρβλ. § 31, Σημ).

II. ΙΔΙΑΙΤΕΡΑΙ ΓΡΑΜΜΑΙ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΑ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ.

α′) Γραμμαὶ καμπυλότητος.

35. *Ὁρισμὸς καὶ ἐξίσωσις τῶν γραμμῶν καμπυλότητος.*—Ὅταν αἱ κάθετοι τῆς ἐπιφανείας κατὰ μῆκος μιᾶς γραμμῆς της ἀποτελοῦν ἀναπτυκτὴν ἐπιφάνειαν, ἡ γραμμὴ αὐτὴ λέγεται *γραμμὴ καμπυλότητος* τῆς ἐπιφανείας. Ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν γραμμῶν καμπυλότητος εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς.

Αἱ ἐξισώσεις τῆς καθέτου εἶναι:

$$X=x+tl, \quad Y=y+tm, \quad Z=z+tn$$

καὶ ἡ συνθήκη τοῦ νὰ παράγῃ αὐτὴ κατὰ μῆκος τῆς θεωρουμένης γραμμῆς ἀναπτυκτὴν ἐπιφάνειαν εἶναι (πρβλ. Διαφ. Λογ. Β′, σελ. 198):

$$\begin{vmatrix} dx & l & dl \\ dy & m & dm \\ dz & n & dn \end{vmatrix}=0.$$

ἂν δὲ πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν ἐπὶ τὴν ($\gtrless 0$) ὁρίζουσαν:

$$\mathrm{D}=\begin{vmatrix} x_u & x_v & l \\ y_u & y_v & m \\ z_u & z_v & n \end{vmatrix}, \text{ εὑρίσκομεν: } \begin{vmatrix} \Sigma x_u dx & \Sigma x_u . l & \Sigma x_u dl \\ \Sigma x_v dx & \Sigma x_v . l & \Sigma x_v dl \\ \Sigma l dx & \Sigma l^2 & \Sigma l dl \end{vmatrix}=0\cdot$$

ἀλλά:

$\Sigma l^2=1$, $\Sigma l dl=0$, $\Sigma x_u l=0$, $\Sigma x_v l=0$, $\Sigma l dx=0$,
$\Sigma x_u dx=\Sigma x_u(x_u du+x_v dv)=\mathrm{E}du+\mathrm{F}dv$, $\Sigma x_v dx=\mathrm{F}du+\mathrm{G}dv$,
$\Sigma x_u dl=\Sigma x_u(l_u du+l_v dv)=-(\mathrm{L}du+\mathrm{M}dv)$, $\Sigma x_v dl=-(\mathrm{M}du+\mathrm{N}dv)$,

ὥστε ἡ ἐξίσωσις γίνεται:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{E}du+\mathrm{F}dv & 0 & -(\mathrm{L}du+\mathrm{M}dv) \\ \mathrm{F}du+\mathrm{G}dv & 0 & -(\mathrm{M}du+\mathrm{N}dv) \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

$$\text{ἤ: } \begin{vmatrix} \mathrm{E}du+\mathrm{F}dv & \mathrm{L}du+\mathrm{M}dv \\ \mathrm{F}du+\mathrm{G}dv & \mathrm{M}du+\mathrm{N}dv \end{vmatrix}=0. \quad (31)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτή, β′ βαθμοῦ πρὸς τὸν λόγον $\frac{dv}{du}$, εἶναι ἡ *διαφορικὴ ἐξίσωσις τοῦ δικτύου* τῶν (πάντοτε πραγματικῶν) γραμμῶν καμπυλότητος (πρβλ. § 6).

Ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις (31) τῶν γραμμῶν καμπυλότητος εἶναι ἡ ἰδία μὲ τὴν ἐξίσωσιν:

$$\begin{vmatrix} dv^2 & E & L \\ -dudv & F & M \\ du^2 & G & N \end{vmatrix} = 0,$$

δηλ. τὴν ἐξίσωσιν (20), ἡ ὁποία ὁρίζει τὰς πρωτευούσας διευθύνσεις, ἕπεται, ὅτι εἰς ἕκαστον σημεῖον αἱ δύο γραμμαὶ καμπυλότητος ἔχουν ἐφαπτομένας τὰς πρωτευούσας διευθύνσεις· ὥστε εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας (πρβλ. Διαφ. Λογ. Β′, σελ. 200). (1)

ΣΗΜ. Α′. Ἡ ἐξίσωσις τῶν γραμμῶν καμπυλότητος καταντᾷ ταὐτότης, ὅταν εἶναι διαρκῶς: $\frac{L}{E}=\frac{M}{F}=\frac{N}{G}$, δηλ. ἡ ἐπιφάνεια σφαῖρα (ἢ ἐπίπεδον) (§ 23, Σημ. Γ′.).

ΣΗΜ. Β′. Διὰ $z=f(x,y)$ ἡ ἐξίσωσις τῶν γραμμῶν καμπυλότητος καταντᾷ ἡ ἐξίσωσις (5), Διαφ. Λογ. Β′, σελ. 199.

36. *Ἄλλη μορφὴ τῆς ἐξισώσεως τῶν γραμμῶν καμπυλότητος.*— Ἂν τὴν ἐξίσωσιν:

$$(\vartheta)\quad \begin{vmatrix} dx & l & dl \\ dy & m & dm \\ dz & n & dn \end{vmatrix} = 0 \quad \text{γράψωμεν ὡς ἑξῆς:} \quad \begin{vmatrix} \Sigma l dx & \Sigma l^2 & \Sigma l dl \\ dy & m & dm \\ dz & n & dn \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{δηλ.} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ dy & m & dm \\ dz & n & dn \end{vmatrix} = 0, \quad \text{βλέπομεν, ὅτι:} \quad \frac{dm}{dy} = \frac{dn}{dz}.$$

(1) Τὴν ἰδιότητα αὐτὴν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν καὶ ὡς ὁρισμόν: *γραμμὴ καμπυλότητος εἶναι ἡ καμπύλη, τῆς ὁποίας ἡ ἐφαπτομένη εἰς ἕκαστον σημεῖον εἶναι μία ἀπὸ τὰς πρωτευούσας διευθύνσεις*· δυνάμεθα δηλ. εἰς τὴν ἐξίσωσιν (20) (ἡ ὁποία δι' ὡρισμένον ζεῦγος τιμῶν (u,v) ὁρίζει τὰς πρωτευούσας διευθύνσεις τοῦ ἀντιστοίχου σημείου) νὰ θεωρήσωμεν τὰ u,v μεταβλητά, ὅτε ἔχομεν τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν τοῦ δικτύου τῶν γραμμῶν καμπυλότητος κατὰ τὸν τελευταῖον αὐτὸν ὁρισμόν.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν καὶ $\frac{dl}{dx}=\frac{dm}{dy}$, ὥστε αἱ δύο ἐξισώσεις:

$$\frac{dl}{dx}=\frac{dm}{dy}=\frac{dn}{dz} \quad (32)$$

ὁρίζουν τὰς γραμμὰς καμπυλότητος (διότι καὶ ἀντιστρόφως, ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (32) ἕπεται προφανῶς ἡ (ϑ)).

37. *Γεωμετρ. σημασία καὶ ἀπ' εὐθείας εὕρεσις τῶν ἐξισώσεων (32).*— Αἱ ἐξισώσεις (32) ἐκφράζουν γεωμετρικῶς, ὅτι *ἡ ἐφαπτομένη τῆς γραμμῆς καμπυλότητος* $\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)$ *εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν πρώτην κάθετον (συνημίτονα ἀνάλογα τῶν* dl, dm, dn) *τῆς καμπύλης, τῆς ὁποίας ἐφάπτονται αἱ κάθετοι τῆς ἐπιφανείας κατὰ μῆκος τῆς γραμμῆς αὐτῆς τῆς καμπυλότητος.* Ἀπὸ τὴν γεωμετρικὴν δὲ αὐτὴν σημασίαν βλέπομεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς καὶ ἀπ' εὐθείας, διὰ τῆς θεωρίας τῶν ἐνειλιγμένων· διότι ἡ μὲν γραμμὴ καμπυλότητος εἶναι μία τῶν ἐξειλιγμένων τῆς καμπύλης, τῆς ὁποίας ἐφάπτονται αἱ κάθετοι τῆς ἐπιφανείας, τῆς δὲ καμπύλης αὐτῆς (ἐνειλιγμένης) αἱ πρῶται κάθετοι πρέπει νὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς ἐφαπτομένας τῆς ἐξειλιγμένης (Διαφ. Λογ. Β΄, σελ. 157).

38. *Αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος ὡς παραμετρικαί.*—Διὰ νὰ συμπίπτῃ τὸ δίκτυον τῶν γραμμῶν καμπυλότητος μὲ τὸ παραμετρικόν, πρέπει νὰ ἔχῃ τὴν ἐξίσωσιν:

$du dv=0$, δηλ. νὰ εἶναι: $EM-FL=0$, $FN-GM=0$·

καὶ ἂν μὲν εἶναι $F \gtrless 0$, ἕπεται: $L=\frac{EM}{F}, N=\frac{GM}{F}$,

ἢ $E:G:F=L:N:M$,

δηλ. ἡ ἐπιφάνεια εἶναι σφαῖρα (ἢ ἐπίπεδον) (§ 23, Σημ. Γ΄)· ἂν δὲ $F=0$, τότε: $M=0$ (διότι E καὶ G δὲν εἶναι συγχρόνως 0)· ὥστε αἱ ἀναγκαῖαι καὶ ἀρκεταὶ συνθῆκαι τοῦ ζητουμένου εἶναι: $F=M=0$. (33)

ΣΗΜ. Α΄. Τὰς κυριωτέρας ἰδιότητας τῶν γραμμῶν καμπυλότητος βλ. εἰς τὰς σελ. 200-4, Διαφ. Λογ. Β΄, παραδείγματα δὲ τοιούτων ἐπὶ *ἰδιαιτέρων* ἐπιφανειῶν εἰς τὰς σελ. 210-4, Διαφ. Λογ. Β΄.

ΣΗΜ. Β΄. Ἀπὸ τοὺς τύπους (32) ἕπονται εὐκόλως οἱ ἑξῆς:

$dx+Pdl=0$, $dy+Pdm=0$, $dz+Pdn=0$, ὅπου $P=P_1$ ἢ P_2.

(*τύποι τοῦ Olinde Rodrigue*) (34).

β΄) Ἀσυμπτωτικαὶ γραμμαί.

39. *Ὁρισμὸς καὶ ἐξίσωσις τῶν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν.* — Ἡ πρώτη κάθετος τῆς τυχούσης γραμμῆς τῆς ἐπιφανείας δὲν συμπίπτει γενικῶς *κατὰ μῆκος τῆς γραμμῆς*, μὲ τὴν κάθετον τῆς ἐπιφανείας, ἀλλ' ἀποτελεῖ πρὸς αὐτὴν μίαν γωνίαν ϑ, γενικῶς μεταβλητήν. *Πᾶσα καμπύλη τῆς ἐπιφανείας, εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς ὁποίας ἡ πρώτη κάθετος σχηματίζει ὀρθὴν γωνίαν πρὸς τὴν κάθετον τῆς ἐπιφανείας* (δηλ. τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδόν της εἶναι πανταχοῦ ἐφαπτόμενον τῆς ἐπιφανείας), *λέγεται ἀσυμπτωτικὴ γραμμὴ αὐτῆς*. Ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ εἶναι γενικῶς (τύπος 11):

$$(\iota)\quad \text{συν}\vartheta = \xi l + \eta m + \zeta n = \varrho.\frac{\mathrm{L}du^2 + 2\mathrm{M}du dv + \mathrm{N}dv^2}{\mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}du dv + \mathrm{G}dv^2},$$

ἕπεται, ὅτι, διὰ νὰ εἶναι διαρκῶς: $\text{συν}\vartheta = 0$, πρέπει νὰ εἶναι κατὰ μῆκος τῆς ἀσυμπτωτικῆς: $\mathrm{L}du^2 + 2\mathrm{M}du dv + \mathrm{N}dv^2 = 0$ (διότι ϱ δὲν δύναται νὰ εἶναι διαρκῶς 0).

Ἀντιστρόφως, ἂν εἶναι διαρκῶς: $\mathrm{L}du^2 + 2\mathrm{M}du dv + \mathrm{N}dv^2 = 0$, θὰ εἶναι διαρκῶς καί: $\text{συν}\vartheta = 0$, ἐκτὸς ἂν διαρκῶς: $\varrho = \infty$ (ὅτε ὅμως ἡ καμπύλη εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ καὶ ἔχει πρώτην κάθετον ἀόριστον, ἄρα καὶ ϑ, καθὼς δίδει τότε καὶ ὁ τύπος (ι): $\text{συν}\vartheta = \infty . 0$). Ὥστε ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν εἶναι:

$$(35)\quad \mathrm{L}du^2 + 2\mathrm{M}du dv + \mathrm{N}dv^2 = 0.$$

Εἶναι λοιπὸν ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ἡ ἰδία μὲ τὴν τῆς § 29, ἡ ὁποία δι' ἕκαστον σημεῖον $\mathrm{M}(u,v)$ ὁρίζει τὰς ἀσυμπτωτικὰς διευθύνσεις, ἀρκεῖ τὰ u,v νὰ θεωρηθοῦν εἰς αὐτὴν μεταβλητά. Ὥστε δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὴν ἀσυμπτωτικὴν γραμμὴν καὶ ὡς ἑξῆς: *ἀσυμπτωτικὴ γραμμὴ τῆς ἐπιφανείας λέγεται μία γραμμή της, ὅταν εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς γραμμῆς ἡ κάθετος τομὴ τῆς ἐπιφανείας, ἡ ἔχουσα τὴν ἰδίαν ἐφαπτομένην, ἔχῃ καμπυλότητα 0*, ἢ καὶ (§ 34, Σημ. Β΄) *ὅταν ἡ ἐφαπτομένη της εἰς ἕκαστον σημεῖον συμπίπτῃ μὲ τὴν μίαν τῶν ἀσυμπτώτων τῆς εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο δεικτρίας τοῦ Dupin* (δι' αὐτὸ καὶ τὸ ὄνομα *ἀσυμπτωτική*). Επομένως δι' ἑκάστου σημείου τῆς ἐπιφανείας διέρχονται δύο ἀσυμπτωτικαὶ γραμμαί· πραγματικαὶ μέν, ἂν ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἐκεῖ κοιλόκυρτος· φανταστικαί, ἂν κυρτή· καὶ συμπίπτουσαι εἰς μίαν, ἂν ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἐκεῖ ἐπιπεδόκυρτος. Ἂν δὲ ἡ ἐπιφάνεια εἶναι *πανταχοῦ* ἐπιπεδόκυρτος (δηλ. ἀναπτυκτή), αἱ δύο σειραὶ τῶν ἀσυμπτωτικῶν συμπίπτουν εἰς μίαν: τὰς εὐθείας γενετείρας (§ 29, Σημ. Β΄).

ΣΗΜ. Διὰ $z=f(x,y)$ ἡ ἐξίσωσις τῶν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν καταντᾷ ἡ ἐξίσωσις (1) τῆς σελ. 218, Διαφ. Λογ. Β΄.

40. *Αἱ ἀσυμπτωτικαὶ γραμμαὶ ὡς παραμετρικαί.*— Ἂν αἱ ἀσυμπτωτικαὶ γραμμαὶ ληφθοῦν ὡς παραμετρικαί, θὰ ἔχουν προφανῶς τὴν ἐξίσωσιν: $dudv=0$, ὥστε ἀπὸ τὴν γενικὴν ἐξίσωσίν των ἕπεται:

$$L=N=0 \cdot \quad (36)$$

αἱ δύο δὲ αὐταὶ ἀναγκαῖαι συνθῆκαι εἶναι προφανῶς καὶ ἀρκεταί.

γ΄) Γεωδαισιακαὶ γραμμαί.

41. *Ὁρισμὸς καὶ ἐξίσωσις τῶν γεωδαισιακῶν γραμμῶν.*—*Ὅταν μιᾶς γραμμῆς τῆς ἐπιφανείας ἡ πρώτη κάθετος εἰς ἕκαστον σημεῖον συμπίπτῃ μὲ τὴν κάθετον τῆς ἐπιφανείας, ἡ γραμμὴ αὐτὴ λέγεται γεωδαισιακὴ (ἢ γεωδαιτικὴ) γραμμὴ τῆς ἐπιφανείας.* Ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν γεωδαισιακῶν γραμμῶν εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ ἡ ὀρθία κάθετος τῆς γεωδαισιακῆς σχηματίζει πανταχοῦ ὀρθὴν γωνίαν πρὸς τὴν ἀντιστοιχοῦσαν κάθετον τῆς ἐπιφανείας, ἕπεται ἡ ἐξίσωσις:

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0,$$

ὅπου οἱ τόνοι δεικνύουν τὰς παραγώγους πρὸς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν t ($u=u(t), v=v(t)$ ἂς εἶναι αἱ ἐξισώσεις τῆς γεωδαισιακῆς). Ἂν τώρα τῆς ὁριζούσης αὐτῆς πολλαπλασιάσωμεν τὰ στοιχεῖα τῆς α΄ στήλης ἐπὶ x_u, τῆς β΄ ἐπὶ y_u, τῆς τρίτης ἐπὶ z_u καὶ προσθέσωμεν καὶ τὰ ἀθροίσματα θέσωμεν ὡς στοιχεῖα τῆς α΄ στήλης, ὡς στοιχεῖα δὲ τῆς β΄ στήλης γράψωμεν τὰ ὅμοια ἀθροίσματα, ὅταν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ x_v, y_v, z_v καὶ προσθέσωμεν, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$\begin{vmatrix} \Sigma x_u x' & \Sigma x_v x' & z' \\ \Sigma x_u x'' & \Sigma x_v x'' & z'' \\ \Sigma x_u l & \Sigma x_v l & n \end{vmatrix} = 0,$$

ἤ: $n. \begin{vmatrix} \Sigma x_u x' & \Sigma x_v x' \\ \Sigma x_u x'' & \Sigma x_v x'' \end{vmatrix} = 0$· καὶ ἐπειδὴ ἀναλόγως δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καί:

$$l \begin{vmatrix} \Sigma x_u x' & \Sigma x_v x' \\ \Sigma x_u x'' & \Sigma x_v x'' \end{vmatrix} = 0, \quad m \begin{vmatrix} \Sigma x_u x' & \Sigma x_v x' \\ \Sigma x_u x'' & \Sigma x_v x'' \end{vmatrix} = 0$$

καὶ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι συγχρόνως: $l = m = n = 0$, ἕπεται:

$$\begin{vmatrix} \Sigma x_u x' & \Sigma x_u x'' \\ \Sigma x_v x' & \Sigma x_v x'' \end{vmatrix} = 0 \cdot \quad (\vartheta)$$

ἡ ἐξίσωσις ὅμως αὐτὴ λαμβάνει ἄλλην μορφὴν διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῶν ἀρχικῶν ποσῶν· διότι ἔχομεν:

$$\Sigma x_u x' = \Sigma x_u (x_u u' + x_v v') = \mathrm{E}u' + \mathrm{F}v',$$
$$\Sigma x_v x' = \Sigma x_v (x_u u' + x_v v') = \mathrm{F}u' + \mathrm{G}v'$$

καί:

$$\Sigma x_u x'' = \Sigma x_u (x_u u'' + x_v v'' + x_{u^2} u'^2 + 2 x_{uv} u'v' + x_{v^2} v'^2) =$$
$$\mathrm{E}u'' + \mathrm{F}v'' + \frac{1}{2} \mathrm{E}_u u'^2 + \mathrm{E}_v u'v' + (\mathrm{F}_v - \frac{1}{2} \mathrm{G}_u) v'^2,$$

ὅπου:

$$\mathrm{E}_u \equiv \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u}, \ \mathrm{E}_v \equiv \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v} \quad \text{καὶ} \quad \Sigma x_u x_{v^2} = \Sigma x_u x_{v^2} + \Sigma x_{uv} x_v - \Sigma x_{uv} x_v =$$
$$= \mathrm{F}_v - \frac{1}{2} \mathrm{G}_u,$$

ὁμοίως δὲ εὑρίσκομεν καί:

$$\Sigma x_v x'' = \mathrm{F}u'' + \mathrm{G}v'' + (\mathrm{F}_u - \frac{1}{2} \mathrm{E}_v) u'^2 + \mathrm{G}_u u'v' + \frac{1}{2} \mathrm{G}_v v'^2 \cdot$$

ἕνεκα τῶν τιμῶν αὐτῶν ἡ ὁρίζουσα (ϑ) λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$(37) \quad \begin{vmatrix} \mathrm{E}u' + \mathrm{F}v' & \frac{1}{2} \mathrm{E}_u u'^2 + \mathrm{E}_v u'v' + (\mathrm{F}_v - \frac{1}{2} \mathrm{G}_u) v'^2 + \mathrm{E}u'' + \mathrm{F}v'' \\ \mathrm{F}u' + \mathrm{G}v' & (\mathrm{F}_u - \frac{1}{2} \mathrm{E}_v) u'^2 + \mathrm{G}_u u'v' + \frac{1}{2} \mathrm{G}_v v'^2 + \mathrm{F}u'' + \mathrm{G}v'' \end{vmatrix} = 0.$$

Ἡ διαφορικὴ αὐτὴ ἐξίσωσις τῶν γεωδαισιακῶν γραμμῶν βλέπομεν ὅτι περιέχει *μόνον* τὰ ποσὰ τῆς α΄ τάξεως E,F,G καὶ τὰς παραγώγους των, *ὄχι καὶ τὰ τῆς β΄ τάξεως* L, M, N. Ἐπίσης παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ εἶναι *β΄ τάξεως* πρὸς τὰς παραγώγους τῶν u,v, δηλ. περιέχει καὶ δευτέρας παραγώγους τῶν u,v. Ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν ὑπεθέσαμεν τυχοῦσαν, τὴν t· δυνάμεθα ὅμως νὰ θέσωμεν (ἂν ἐξαιρέσωμεν τὰς παραμετρικὰς γραμμὰς $u=c$, διὰ τὰς ὁποίας, ὡς γεωδαισιακάς, θὰ γίνῃ λόγος κατωτέρω, σελ. 50): $u\equiv t$, δηλ. $v=v(u)$, ὅτε ἡ ἐξίσωσις (37) καταντᾷ:

$$(38)\quad \begin{vmatrix} E+Fv' & \frac{1}{2}E_u+E_v v'+(F_v-\frac{1}{2}G_u)v'^2+Fv'' \\ F+Gv' & F_u-\frac{1}{2}E_v+G_u v'+\frac{1}{2}G_v v'^2+Gv'' \end{vmatrix}=0$$

$$\left(\text{ὅπου}: v'=\frac{dv}{du}, v''=\frac{d^2v}{du^2}\right),$$

ἐξίσωσις διαφορικὴ β΄ τάξεως πρὸς τὴν συνάρτησιν v τοῦ u· ὥστε, ἀντιθέτως πρὸς τὰς γραμμὰς καμπυλότητος καὶ τὰς ἀσυμπτωτικάς, αἱ ὁποῖαι, καθὼς εἴδομεν, ἀποτελοῦν ∞^1 ζεύγη ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, αἱ γεωδαισιακαὶ εἶναι ∞^2· καὶ δι' ἑκάστου σημείου τῆς ἐπιφανείας διέρχονται ∞^1 γεωδαισιακαὶ γραμμαί, μία καθ' ἑκάστην διεύθυνσιν· διότι, ἂν ἅπαξ ὁλοκληρωθῇ ἡ ἐξίσωσις (38), θὰ προκύψῃ διὰ τὸν λόγον $\frac{dv}{du}$ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῆς μορφῆς:

$$\frac{dv}{du}=\pi(u,c),$$

ὅπου c εἶναι ἡ σταθερὰ τῆς ὁλοκληρώσεως.

ΣΗΜ. Α΄. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν (θ) δυνάμεθα καὶ ἄλλως νὰ φθάσωμεν: ἡ γεωδαισιακὴ γραμμὴ ὁρίζεται προφανῶς ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις:

$$\xi=l,\ \eta=m,\ \zeta=n,$$

ἢ καί: $$\frac{y_u z_v-z_u y_v}{D}=\varrho\frac{dsd^2x-dxd^2s}{ds^3},\quad \frac{z_u x_v-x_u z_v}{D}=\varrho\frac{dsd^2y-dyd^2s}{ds^3},$$

$$\frac{x_u y_v-y_u x_v}{D}=\varrho\frac{dsd^2z-dzd^2s}{ds^3},$$

δηλ. $$\frac{y_u z_v-z_u y_v}{dsd^2x-dxd^2s}=\frac{z_u x_v-x_u z_v}{dsd^2y-dyd^2s}=\frac{x_u y_v-y_u x_v}{dsd^2z-dzd^2s}$$

καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμητὰς καὶ παρονομαστὰς ἐπὶ x_u, y_u, z_u κατὰ σειρὰν καὶ προσθέσωμεν χωριστά, εὑρίσκομεν, ὅτι οἱ λόγοι αὐτοὶ εἶναι ἴσοι μὲ τὸν ἑξῆς:

$$\frac{0}{\Sigma x_u(dsd^2x-dxd^2s)},\ \text{ἢ καὶ}\ \frac{0}{\Sigma x_u(s'x''-xs')},$$

ὥστε κατ' ἀνάγκην θὰ εἶναι: $\Sigma x_u(s'x''-x's'')=0$, ἤ: $\dfrac{\Sigma x_u x''}{\Sigma x_u x'}=\dfrac{s''}{s'}$.

καὶ ἐπειδὴ εὑρίσκομεν ὁμοίως καί: $\dfrac{\Sigma x_v x''}{\Sigma x_v x'}=\dfrac{s''}{s'}$,

συμπεραίνομεν:

$$\frac{\Sigma x_u x''}{\Sigma x_u x'}=\frac{\Sigma x_v x''}{\Sigma x_v x'},\ \text{δηλ. τὴν ἐξίσωσιν } (\vartheta).$$

ΣΗΜ. Β'. Πᾶσα εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας δύναται προφανῶς νὰ θεωρηθῇ ὡς γεωδαισιακὴ (καθὼς καὶ ὡς ἀσυμπτωτική), διότι ἡ α' κάθετός της εἶναι ἀόριστος. Ἐπαληθεύεται δὲ τότε καὶ ἡ ἐξίσωσις (37), ἢ ἡ ἰσοδύναμός της (ϑ), διότι διὰ τὴν εὐθεῖαν εἶναι: $x=x_1+a\varrho(t)$, $y=y_1+b\varrho(t)$, $z=z_1+c\varrho(t)$,

$$\text{ὥστε: } x'=a\varrho'(t),\ y'=b\varrho'(t),\ z'=c\varrho'(t)$$
$$\text{καί: } x''=a\varrho''(t),\ y''=b\varrho''(t),\ z''=c\varrho''(t),$$

ἐπομένως ἡ (ϑ) γίνεται ταὐτότης.

42. *Αἱ γεωδαισιακαὶ γραμμαὶ ὡς παραμετρικαί.* — Αἱ παραμετρικαὶ γραμμαὶ τῆς μιᾶς σειρᾶς, π. χ. αἱ $u=$σταθ., ἔχουν τὰς δύο ἐξισώσεις: $u=c_1$, $v=v(t)$, ἢ ἁπλούστερον (ἂν θέσωμεν τὸ v ἴσον μὲ τὸ t): $u=c_1$, $v=t$, ἂν δὲ μία ἐξ αὐτῶν, ἡ $u=c_1$, εἶναι γεωδαισιακὴ γραμμή, θὰ ἔχωμεν ἀπὸ τὴν γενικὴν ἐξίσωσιν (37), θέτοντες: $u'=u''=v''=0$ καὶ $v'=1$:

$$(39)\quad \begin{vmatrix} F & F_v-\frac{1}{2}G_u \\ G & \frac{1}{2}G_v \end{vmatrix}=0 \text{ ἤ: } FG_v-2GF_v+GG_u=0,$$ (ὅπου τὸ μὲν u ἔχει τὴν τιμὴν $u=c_1$, τὸ δὲ v εἶναι τυχόν)· ἡ δὲ ἀναγκαία αὐτὴ συνθήκη εἶναι προφανῶς καὶ ἀρκετή.

43. *Αἱ γεωδαισιακαὶ γραμμαὶ ὡς συντομωτάτη ὁδὸς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.*— Αἱ γεωδαισιακαὶ γραμμαὶ ἔχουν τὴν χαρακτηριστικὴν ἰδιότητα, ὅτι εἶναι ὁ *συντομώτατος δρόμος ἀπὸ σημεῖον εἰς σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.* Ἡ ἰδιότης αὐτὴ ἀποδεικνύεται λεπτομερῶς εἰς τὸν *Λογισμὸν τῶν Μεταβολῶν* (Calcul des Variations), δεικνύεται ὅμως καὶ διὰ τοῦ ἑπομένου συντόμου συλλογισμοῦ: ἡ συντομωτάτη ὁδὸς θὰ εἶναι *ὅσον τὸ δυνατὸν εὐθυτέρα,* θὰ ἔχῃ δηλαδὴ εἰς ἕκαστον σημεῖον *τὴν ἐλαχίστην δυνατὴν καμπυλότητα,* ἢ τὴν μεγίστην ἀκτῖνα καμπυλό-

τητος· ἀλλ' ἀπὸ ὅλας τὰς γραμμὰς τῆς ἐπιφανείας, ὅσαι διέρχονται δι' ἑνὸς σημείου M καὶ ἔχουν ὡρισμένην ἐφαπτομένην, μεγίστην ἀκτῖνα καμπυλότητος ἔχουν, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Meusnier, αἱ καμπύλαι, τῶν ὁποίων ἡ πρώτη κάθετος εἰς τὸ M συμπίπτει μὲ τὴν κάθετον τῆς ἐπιφανείας· ὥστε τῆς συντομωτάτης ὁδοῦ ἡ πρώτη κάθετος συμπίπτει *εἰς ἕκαστον σημεῖον* μὲ τὴν ἀντίστοιχον κάθετον τῆς ἐπιφανείας καὶ ἑπομένως ἡ συντομωτάτη ὁδὸς εἶναι ἡ γεωδαισιακὴ γραμμή (πρβλ. Διαφ. Λογ. Β', σελ. 215-6).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ′.

Η ΟΛΙΚΗ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΣ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΚΑΙ ΑΙ ΤΡΕΙΣ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΕΞ ΑΡΧΙΚΩΝ ΠΟΣΩΝ.

I. Η ΟΛΙΚΗ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΣ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ.

44. *Ὁρισμὸς τῆς ὁλικῆς καμπυλότητος.* Ἐντελῶς ἀναλόγως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τῆς καμπυλότητος τῶν ἐπιπέδων καμπύλων (Διαφ. Λογ. Β′, σελ. 22-23), ὁρίζεται καὶ ἡ καμπυλότης τῶν ἐπιφανειῶν ὡς ἑξῆς. Ἀπὸ τὸ κέντρον σφαίρας μὲ ἀκτῖνα τὴν μονάδα φέρομεν ἀκτῖνας παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους πρὸς τὰς καθέτους τῆς ἐπιφανείας· τότε πρὸς ἕκαστον μέρος Ω τῆς δοθείσης ἐπιφανείας ἀντιστοιχεῖ ἓν ὡρισμένον μέρος ω τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας· τὸ μέρος τοῦτο ω ὀνομάζομεν ***ὁλικὴν καμπυλότητα ἀπόλυτον*** τοῦ Ω· καὶ τὸ πηλίκον $\frac{\omega}{\Omega}$ ***ὁλικὴν καμπυλότητα μέσην*** τοῦ Ω· καὶ τέλος ὀνομάζεται ***ὁλικὴ καμπυλότης*** τῆς ἐπιφανείας *εἰς τὸ τυχὸν σημεῖόν της* M τὸ ὅριον τοῦ πηλίκου $\frac{\omega}{\Omega}$, ὅταν Ω, ἑπομένως καὶ ω, τείνουν καὶ κατὰ τὰς δύο διαστάσεις πρὸς τὸ 0, τοῦ Ω περιέχοντος πάντοτε τὸ σημεῖον Μ. (πρβλ. Διαφ. Λογ. Β′, σελ. 219).

ΣΗΜ. *Ὁλικὴ* λέγεται ἡ καμπυλότης πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῆς *μέσης εἰς ἓν σημεῖον*: $\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_2}$ (πρβλ. § 27). Ὅτι δὲ ἡ ὁλικὴ αὐτὴ καμπυλότης συμπίπτει μὲ τὸ ὁμοίως ὀνομασθὲν γινόμενον $\frac{1}{P_1}\cdot\frac{1}{P_2}$ (§ 27) δεικνύεται κατωτέρω (σελ. 53).

45. *Ἔκφρασις τῆς καμπυλότητος εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Μ διὰ τῶν ἀρχικῶν ποσῶν.*— Ἡ καμπυλότης εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Μ εἶναι προφανῶς τὸ πηλίκον τῶν δύο *ἐμβαδικῶν στοιχείων* τῆς σφαιρικῆς καὶ τῆς δοθείσης ἐπιφανείας. Καὶ τὸ μὲν ἐμβαδικὸν στοιχεῖον τῆς ἐπιφανείας εἶναι (πρβλ. Ὁλοκλ. Λογ. σελ. 327): $D\,du\,dv$, διὰ νὰ εὕ-

ρωμεν δὲ τὸ τῆς σφαίρας, ἐκλέγομεν ὡς κέντρον της τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων, ὅτε συντεταγμέναι τοῦ τυχόντος σημείου της μ εἶναι τὰ συνημίτονα l, m, n τῆς καθέτου τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον M· εἶναι λοιπὸν τότε καὶ τῆς σφαίρας αἱ συντεταγμέναι συναρτήσεις τῶν u,v καὶ τὸ ἐμβαδικόν της στοιχεῖον εἶναι $\delta du dv$, ὅπου $\delta=\sqrt{eg-f^2}$, καὶ e, f, g εἶναι τὰ θεμελιώδη ποσὰ πρώτης τάξεως τῆς σφαίρας. Ἀλλὰ καθ' ὑπόθεσιν εἶναι ἡ κάθετος τῆς σφαίρας παράλληλος πρὸς τὴν κάθετον τῆς ἐπιφανείας, καὶ ἑπομένως, ἂν l_σ, m_σ, n_σ εἶναι τὰ συνημίτονα τῆς καθέτου τῆς σφαίρας, θὰ ἔχωμεν:

$$l_\sigma = l, \quad m_\sigma = m, \quad n_\sigma = n,$$

ἢ ἀπὸ τὴν τρίτην: $$\frac{l_u m_v - m_u l_v}{\delta} = n,$$

ἢ καί: $$\delta = \frac{l_u m_v - m_u l_v}{n}.$$

ἑπομένως ἡ καμπυλότης K εἰς τὸ σημεῖον M τῆς ἐπιφανείας θὰ εἶναι:

$$K = \frac{\delta}{D} = \frac{l_u m_v - m_u l_v}{n} \cdot \frac{1}{D}.$$

ἀλλ' εὕρομεν (τύπ. 24):

$$\frac{l_u m_v - m_u l_v}{n} = \frac{LN - M^2}{D},$$

ὥστε ἡ καμπυλότης K γίνεται:

$$K = \frac{LN - M^2}{D^2}. \quad (40)$$

46. *Ἔκφρασις τῆς καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας διὰ τῶν καμπυλοτήτων τῶν πρωτευουσῶν τομῶν της.* — Ἐπειδὴ εὕρομεν (§ 27):

$$\frac{LN - M^2}{D^2} = \frac{1}{P_1} \cdot \frac{1}{P_2}, \text{ ἕπεται: } K = \frac{1}{P_1} \cdot \frac{1}{P_2}, \quad (41) \text{ δηλ.}$$

ἡ καμπυλότης τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον M εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δύο πρωτευουσῶν της καμπυλοτήτων εἰς τὸ ἴδιον σημεῖον.

ΣΗΜ. Ἡ ἔκφρασις (40) τῆς καμπυλότητος, ἂν ὑποτεθῇ $z = f(x,y)$, καταντᾷ:

$$K = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2}. \quad \text{(Πρβ. Διαφ. Λογ. Β', σελ. 221).}$$

II. ΑΙ ΤΡΕΙΣ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ.

47. *Ἡ ἐξίσωσις τοῦ Gauss.* — Ἡ καμπυλότης K δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ *μόνον* διὰ *τῶν ποσῶν τῆς πρώτης τάξεως* καὶ τῶν παραγώγων των πρώτης καὶ δευτέρας τάξεως πρὸς u καὶ v. Ἀρκεῖ δὲ νὰ δειχθῇ αὐτὸ διὰ τὸν ἀριθμητὴν μόνον τῆς τιμῆς της (40), δηλ. διὰ τὴν ἔκφρασιν $LN-M^2$ (διότι ὁ παρονομαστὴς D^2 ἀποτελεῖται ἤδη ἀπὸ μόνον τὰ E,F,G). Ἔχομεν λοιπὸν κατὰ πρῶτον:

$$LN=\frac{1}{D^2}\begin{vmatrix} x_{u^2} & x_u & x_v \\ y_{u^2} & y_u & y_v \\ z_{u^2} & z_u & z_v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_{v^2} & x_u & x_v \\ y_{v^2} & y_u & y_v \\ z_{v^2} & z_u & z_v \end{vmatrix} = \frac{1}{D^2}\begin{vmatrix} \Sigma x_{u^2}x_{v^2} & \Sigma x_u x_{v^2} & \Sigma x_v x_{v^2} \\ \Sigma x_{u^2}x_u & \Sigma x_u^2 & \Sigma x_v x_u \\ \Sigma x_{u^2}x_v & \Sigma x_u x_v & \Sigma x_v^2 \end{vmatrix}.$$

ἀλλ' εὑρίσκομεν: $\Sigma x_{u^2} x_u = \frac{1}{2} E_u, \quad \Sigma x_v x_{v^2} = \frac{1}{2} G_v,$

$$\Sigma x_{u^2}x_v = F_u - \frac{1}{2}E_v, \quad \Sigma x_u x_{v^2} = F_v - \frac{1}{2} G_u,$$

ὥστε:
$$LN=\frac{1}{D^2}\begin{vmatrix} \Sigma x_{u^2}x_{v^2} & F_v - \frac{1}{2} G_u & \frac{1}{2} G_v \\ \frac{1}{2} E_u & E & F \\ F_u - \frac{1}{2} E_v & F & G \end{vmatrix}.$$

Ἂς ὑπολογίσωμεν τώρα καὶ τὸ M^2:

$$M^2=\frac{1}{D^2}\begin{vmatrix} x_{uv} & x_u & x_v \\ y_{uv} & y_u & y_v \\ z_{uv} & z_u & z_v \end{vmatrix}^2 = \frac{1}{D^2}\begin{vmatrix} \Sigma x_{uv}^2 & \Sigma x_u x_{uv} & \Sigma x_v x_{uv} \\ \Sigma x_{uv} x_u & \Sigma x_u^2 & \Sigma x_v x_u \\ \Sigma x_{uv} x_v & \Sigma x_u x_v & \Sigma x_v^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{D^2}\begin{vmatrix} \Sigma x_{uv}^2 & \frac{1}{2} E_v & \frac{1}{2} G_u \\ \frac{1}{2} E_v & E & F \\ \frac{1}{2} G_u & F & G \end{vmatrix}.$$

ἑπομένως εἶναι:

$$LN-M^2=\frac{1}{D^2}\left\{\begin{vmatrix}\Sigma x_{u^2}x_{v^2} & F_v-\frac{1}{2}G_u & \frac{1}{2}G_v\\ \frac{1}{2}E_u & E & F\\ F_u-\frac{1}{2}E_v & F & G\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\Sigma x_{uv}^2 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u\\ \frac{1}{2}E_v & E & F\\ \frac{1}{2}G_u & F & G\end{vmatrix}\right\}.$$

καὶ ἐπειδὴ οἱ ὅροι $\Sigma x_{u^2}x_{v^2}$ καὶ Σx_{uv}^2 ἔχουν εἰς τὰς δύο ὁριζούσας τὸν ἴδιον συντελεστήν, $(EG-F^2)$, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὴν προηγουμένην ἰσότητα καὶ ὡς ἑξῆς:

$$LN-M^2=$$

$$=\frac{1}{D^2}\left\{\begin{vmatrix}\Sigma x_{u^2}x_{v^2}-\Sigma x_{uv}^2 & F_v-\frac{1}{2}G_u & \frac{1}{2}G_v\\ \frac{1}{2}E_u & E & F\\ F_u-\frac{1}{2}E_v & F & G\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u\\ \frac{1}{2}E_v & E & F\\ \frac{1}{2}G_u & F & G\end{vmatrix}\right\}.$$

Μένει λοιπὸν νὰ ἐκφρασθῇ ἡ διαφορά: $\Sigma x_{u^2}x_{v^2}-\Sigma x_{uv}^2$ διὰ τῶν E, F, G· διὰ τὸν σκοπὸν αὐτὸν παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι, καθὼς ἤδη εὕρομεν:

$$\Sigma x_v\, x_{u^2}=F_u-\frac{1}{2}E_v,$$

ἄρα:

$$\Sigma x_{v^2}x_{u^2}=-\Sigma x_v\, x_{u^2v}+F_{uv}-\frac{1}{2}E_{v^2}$$

καὶ ἐπειδή:

$$\Sigma x_v\, x_{uv}=\frac{1}{2}G_u,\quad \Sigma x_v\, x_{u^2v}=\frac{1}{2}G_{u^2}-\Sigma x_{uv}^2.$$

ἕπεται:

$$\Sigma x_{u^2}x_{v^2}-\Sigma x_{uv}^2=F_{uv}-\frac{1}{2}E_{v^2}-\frac{1}{2}G_{u^2}.$$

ἔχομεν λοιπὸν τὸν τελικὸν τύπον (42):

$$K=\frac{1}{D^4}\left\{\begin{vmatrix}F_{uv}-\frac{1}{2}E_{v^2}-\frac{1}{2}G_{u^2} & F_v-\frac{1}{2}G_u & \frac{1}{2}G_v\\ \frac{1}{2}E_u & E & F\\ F_u-\frac{1}{2}E_v & F & G\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u\\ \frac{1}{2}E_v & E & F\\ \frac{1}{2}G_u & F & G\end{vmatrix}\right\},$$

ὁ ὁποῖος ἀποδεικνύει τὴν πρότασιν.

48. *Ἀναλλοίωτον τῆς καμπυλότητος κατὰ τὴν κάμψιν.* — Ἐπειδὴ εἰς πᾶσαν *κάμψιν* τῆς ἐπιφανείας (δηλ. *τοιαύτην* μεταβολὴν τοῦ σχήματός της, ὥστε τὰ μήκη τῶν ἐπ' αὐτῆς κειμένων γραμμῶν νὰ μένουν *ἀναλλοίωτα*) τὰ ποσὰ E, F, G μένουν ἀναλλοίωτα (ὅπως φαίνεται ἀμέσως ἀπὸ τὸ ἀναλλοίωτον τῶν παραμετρικῶν γραμμικῶν στοιχείων: $ds_{(v)} = \sqrt{E}du$, $ds_{(u)} = \sqrt{G}dv$), συμπεραίνομεν τὸ ἑπόμενον «*ὑπέροχον θεώρημα*» («*theorema egregium*») τοῦ Gauss:

Ἡ ὁλικὴ καμπυλότης τῆς ἐπιφανείας μένει ἀναλλοίωτος εἰς πᾶσαν κάμψιν της.

49. *Αἱ δύο ἐξισώσεις τῶν Mainardi-Codazzi.* — Ἡ ἔκφρασις τῆς καμπυλότητος K διὰ μόνων τῶν ποσῶν τῆς πρώτης τάξεως (τύπ. 42) ἀποτελεῖ προφανῶς, ἂν τὸ K ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τοῦ ἴσου του: $\dfrac{LN-M^2}{D^2}$, μίαν σχέσιν μεταξὺ τῶν ἓξ ποσῶν E, F, G, L, M, N. Σχέσεις τοιαῦται ὅμως ὑπάρχουν *καὶ δύο ἄλλαι*: αἱ τῶν Mainardi-Codazzi, ἀνεξάρτητοι τῆς πρώτης καὶ ἀλλήλων. *Μόνον* ὅμως αἱ τρεῖς αὐταί: ὁποιαδήποτε ἄλλη εἶναι συνέπεια τῶν τριῶν αὐτῶν, αἱ ὁποῖαι δι' αὐτὸ λέγονται *αἱ τρεῖς θεμελιώδεις ἐξισώσεις μεταξὺ τῶν ἓξ ἀρχικῶν ποσῶν*. Αἱ δύο αὐταὶ τελευταῖαι ἐξισώσεις εὑρίσκονται ὡς ἑξῆς.

Θὰ κατασκευάσωμεν πρῶτον τὴν διαφορὰν: $L_v - M_u$. Ἔχομεν ἀπὸ τὰς τιμὰς τῶν L, M, N (τύπ. 13):

$$L_v - M_u =$$

$$= D.\left[L.\frac{\partial\left(\frac{1}{D}\right)}{\partial v} - M.\frac{\partial\left(\frac{1}{D}\right)}{\partial u}\right] + \frac{1}{D}\left[\begin{vmatrix} x_{u^2v} & x_u & x_v \\ y_{u^2v} & y_u & y_v \\ z_{u^2v} & z_u & z_v \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_{uvu} & x_u & x_v \\ y_{uvu} & y_u & y_v \\ z_{uvu} & z_u & z_v \end{vmatrix}\right] +$$

$$+\frac{1}{D}\left[\begin{vmatrix} x_{uu} & x_{uv} & x_v \\ y_{uu} & y_{uv} & y_v \\ z_{uu} & z_{uv} & z_v \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_{uv} & x_{uu} & x_v \\ y_{uv} & y_{uu} & y_v \\ z_{uv} & z_{uu} & z_v \end{vmatrix}\right] +$$

$$+\frac{1}{D}\left[\begin{vmatrix} x_{uu} & x_u & x_{vv} \\ y_{uu} & y_u & y_{vv} \\ z_{uu} & z_u & z_{vv} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_{uv} & x_u & x_{vu} \\ y_{uv} & y_u & y_{vu} \\ z_{uv} & z_u & z_{vu} \end{vmatrix}\right],$$

ἢ μετὰ τὰς ἁπλοποιήσεις :

$$L_v - M_u = D\left[L\frac{\partial\left(\frac{1}{D}\right)}{\partial v} - M\frac{\partial\left(\frac{1}{D}\right)}{\partial u}\right] + \frac{2}{D}\begin{vmatrix} x_{uu} & x_{uv} & x_v \\ y_{uu} & y_{uv} & y_v \\ z_{uu} & z_{uv} & z_v \end{vmatrix} +$$

$$+\frac{1}{D}\begin{vmatrix} x_{uu} & x_u & x_{vv} \\ y_{uu} & y_u & y_{vv} \\ z_{uu} & z_u & z_{vv} \end{vmatrix}.$$

Ἀλλ' ἀπὸ τοὺς τρεῖς ὅρους τοῦ β΄ μέλους ὁ μὲν α΄ γράφεται προφανῶς καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\frac{1}{2D^2}\left[M\frac{\partial(D^2)}{\partial u} - L\frac{\partial(D^2)}{\partial v}\right],$$

δηλ. μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν διαφορίσεων :

$$(\alpha)\ \frac{1}{2D^2}\left[M(GE_u + EG_u - 2FF_u) - L(GE_v + EG_v - 2FF_v)\right]\cdot$$

ὁ δὲ β΄ μετασχηματίζεται ὡς ἑξῆς :

$$\frac{2}{D^2}\begin{vmatrix} x_{uu} & x_{uv} & x_v \\ y_{uu} & y_{uv} & y_v \\ z_{uu} & z_{uv} & z_v \end{vmatrix}.\ D,\ \text{ἢ } (\S\ 13,\ \Sigma\eta\mu.\Gamma'):$$

$$\frac{2}{D^2}\begin{vmatrix} x_{uu} & x_{uv} & x_v \\ y_{uu} & y_{uv} & y_v \\ z_{uu} & z_{uv} & z_v \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} x_u & x_v & l \\ y_u & y_v & m \\ z_u & z_v & n \end{vmatrix} = \frac{2}{D^2}\begin{vmatrix} \Sigma x_{uu}x_u & \Sigma x_{uu}x_v & \Sigma x_{uu}\cdot l \\ \Sigma x_{uv}x_u & \Sigma x_{uv}x_v & \Sigma x_{uv}\cdot l \\ \Sigma x_v x_u & \Sigma x_v^2 & \Sigma x_v\cdot l \end{vmatrix},$$

$$\text{δηλ. } \frac{2}{D^2}\begin{vmatrix} \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v & L \\ \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u & M \\ F & G & O \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{D^2}[L(GE_v - FG\ \ ) - M(GE_u - 2FF_u + FE_v)]\cdot \quad (\beta)$$

καὶ τέλος ὁ γ΄ ὁμοίως :

$$\frac{1}{D^2}\begin{vmatrix} x_{uu} & x_u & x_{vv} \\ y_{uu} & y_u & y_{vv} \\ z_{uu} & z_u & z_{vv} \end{vmatrix}.\ D = \frac{1}{D^2}\begin{vmatrix} \Sigma x_{uu}x_u & \Sigma x_{uu}x_v & \Sigma x_{uu}l \\ \Sigma x_u^2 & \Sigma x_u x_v & \Sigma x_u l \\ \Sigma x_{vv}x_u & \Sigma x_{vv}x_v & \Sigma x_{vv}l \end{vmatrix} =$$

$$=\frac{1}{D^2}\begin{vmatrix} \frac{1}{2}E_u & F_u-\frac{1}{2}E_v & L \\ E & F & O \\ F_v-\frac{1}{2}G_u & \frac{1}{2}G_v & N \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2D^2}\,[L(EG_v-2FF_v+FG_u)+N(FE_u-2EF_u+EE_v)]\,(\gamma).$$

Ἂν τώρα ἀθροίσωμεν τοὺς συντελεστὰς τοῦ L εἰς τὰς τρεῖς ἰσότητας (α), (β), (γ), ἐπίσης δὲ καὶ τῶν M καὶ N, εὑρίσκομεν τὴν τελικὴν ἐξίσωσιν :

$$(43)\quad L_v-M_u=\frac{GE_v-FG_u}{2D^2}.\,L+$$

$$\frac{EG_u-GE_u+2F(F_u-E_v)}{2D^2}M+\frac{FE_u+EE_v-2EF_u}{2D^2}N,$$

ἡ ὁποία εἶναι *ἡ πρώτη ἀπὸ τὰς δύο σχέσεις τῶν Mainardi-Codazzi* μεταξὺ τῶν ἓξ θεμελιωδῶν ποσῶν καὶ ἐκφράζει τὴν διαφορὰν L_v-M_u διὰ τῶν E, F, G, L, M, N καὶ τῶν παραγώγων *μόνον τῶν* E, F, G.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τώρα καὶ τὴν δευτέραν σχέσιν τῶν *Mainardi-Codazzi*, εἶναι περιττὸν νὰ ἐκτελέσωμεν ὁμοίους μετασχηματισμούς· ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι, ἐπειδὴ αἱ μεταβληταὶ u, v εἶναι τυχοῦσαι, ἕκαστος τύπος περιέχων τὰ u, v πρέπει νὰ εἶναι *συμμετρικὸς* πρὸς αὐτά, πρέπει δηλαδὴ νὰ ἰσχύῃ καὶ μετὰ τὴν τροπὴν τῶν u, v εἰς ἄλληλα· ἀλλ' ἡ τροπὴ τῶν u, v εἰς v, u τρέπει προφανῶς κατὰ σειρὰν τὰ ποσά: E, F, G, D, L, M, N, εἰς τὰ G, F, E, D,—N,—M,—L, ἡ δὲ τελευταία αὐτὴ τροπὴ παράγει ἀπὸ τὸν τύπον (43) τὸν ἀκόλουθον *δεύτερον τύπον τῶν Mainardi-Codazzi* :

$$(44)\quad N_n-M_v=\frac{FG_v+GG_u-2GF_v}{2D^2}.\,L+$$

$$+\frac{GE_v-EG_v+2F(F_v-G_u)}{2D^2}.\,M+\frac{EG_u-FE_v}{2D^2}N.\ (^1)$$

(1) Τὸν τύπον τοῦ Gauss (42) ἡ τροπὴ αὐτὴ τὸν ἀφίνει ἀμετάβλητον (δηλ.

Οἱ τύποι (42), (43) καὶ (44) εἶναι αἱ τρεῖς θεμελιώδεις σχέσεις μεταξὺ τῶν ἓξ θεμελιωδῶν ποσῶν ([1]). Ὅτι εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀλλήλων, εἶναι φανερόν, ὅτι δὲ *οὐδεμία ἄλλη ἀνεξάρτητος* ἀπὸ αὐτὰς ὑπάρχει, φαίνεται ὡς ἑξῆς· ἂν ὑπῆρχε καὶ τετάρτη, διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς τῶν L, M, N μεταξὺ τῶν 4 αὐτῶν ἐξισώσεων θὰ παρήγετο ἐξίσωσις συνδέουσα μόνον τὰ E, F, G· αὐτὸ ὅμως εἶναι ἀδύνατον, διότι εὐκόλως δεικνύεται, ὅτι, *ὁπωσδήποτε* καὶ ἂν ὁρισθοῦν τὰ ποσὰ E, F, G, ὑπάρχουν πάντοτε ἐπιφάνειαι ἔχουσαι αὐτὰ ὡς θεμελιώδη ποσὰ τῆς πρώτης τάξεως.

50. *Ἰδιαίτεραι μορφαὶ τῶν θεμελιωδῶν ἐξισώσεων.*—Αἱ τρεῖς θεμελιώδεις ἐξισώσεις λαμβάνουν ποικίλας ἁπλουστέρας μορφάς, ἂν ἐκλέξωμεν ἰδιαίτερα συστήματα παραμετρικῶν γραμμῶν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας. Αἱ κυριώτεραι ἀπὸ τὰς μορφὰς αὐτὰς εἶναι αἱ ἑξῆς (πρβλ. Ι. Ν. Χατζιδάκη, Περὶ τῆς κάμψεως τῶν Ἐπιφανειῶν, σελ. 10-14).

1ον) Ἂν εἶναι $F=0$ (δηλ. τὸ δίκτυον (u, v) *ὀρθογώνιον* (§ 15)), ἔχομεν ἁπλούστερον:

$$(42\,\alpha)\quad K=\frac{1}{4E^2G^2}[EE_vG_v+GG_uE_u-2GE(E_{v^2}+G_{u^2})+GE_v^2+EG_u^2],$$

$$(43\,\alpha)\quad L_v-M_u=\frac{E_v}{2E}.L+\frac{1}{2}\left(\frac{G_u}{G}-\frac{E_u}{E}\right).M+\frac{E_v}{2G}.N.$$

$$(44\,\alpha)\quad N_u-M_v=\frac{G_u}{2E}.L+\frac{1}{2}\left(\frac{E_v}{E}-\frac{G_v}{G}\right).M+\frac{G_u}{2G}.N.$$

τὸν τρέπει εἰς ἑαυτόν). Εὐκόλως ὅμως εὑρίσκεται καὶ ἡ ἑξῆς μορφὴ τοῦ τύπου αὐτοῦ:

$$K=\frac{1}{D}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{-EE_v-FE_u+2EF_u}{2ED}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{EG_u-FE_v}{2ED}\right)\right].$$

([1]) Ὁ τρόπος αὐτὸς τῆς εὑρέσεως τῶν τύπων τῶν *Mainardi-Codazzi* ἔχει τὸ μειονέκτημα, ὅτι εἶναι *ἐκ τῶν ὑστέρων*, διότι λαμβάνεται αὐθαιρέτως ἡ διαφορὰ L_v-M_u, τὸ πλεονέκτημα ὅμως, ὅτι εἶναι συντομώτερος ἀπὸ ὅλους τοὺς ποικίλους ἄλλους, κατὰ τοὺς ὁποίους εὑρίσκονται πρῶτον αἱ ἐκφράσεις τῶν παραγώγων τῆς γ΄ τάξεως τῶν x, y, z καὶ ἔπειτα ἐξισώνονται αἱ δύο τιμαὶ ἑκάστης παραγώγου. (Πρβλ. Ι. Ν. Χατζιδάκη, Περὶ τῆς Κάμψεως τῶν Ἐπιφανειῶν, σελ. 8-9, ὅπου, πρὸς ἁπλοποίησιν τῶν τύπων, ἔχουν εἰσαχθῆ περαιτέρω συντομεύσεις (σελ. 7)).— Ἡ μορφὴ τῶν ἐξισώσεων (42-44) ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν συνήθη ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας $z=f(x, y)$ εὑρίσκεται εὐκόλως, ἂν τὰ θεμελιώδη ποσὰ ἀντικατασταθοῦν διὰ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν των (§ 23, Σημ. Α΄).

2ον) Ἂν εἶναι $F=0$ καὶ $M=0$ (δηλ. παραμετρικὸν δίκτυον τὸ *τῶν γραμμῶν καμπυλότητος* (§ 38)), οἱ τύποι ἁπλοποιοῦνται ἀκόμη περισσότερον:

$$(42\,\beta)\ LN=-\frac{1}{2}E_{v^2}-\frac{1}{2}G_{u^2}+\frac{1}{4}\frac{E_v^2+E_uG_u}{E}+\frac{1}{4}\frac{G_u^2+E_vG_v}{G},$$

$$(43\,\beta)\ L_v=\frac{1}{2}\left(\frac{L}{E}+\frac{N}{G}\right)E_v,\quad (44\,\beta)\ N_u=\frac{1}{2}\left(\frac{L}{E}+\frac{N}{G}\right)G_u.$$

3ον) Ἂν εἶναι $E=G=0$ (δηλαδὴ γραμμαὶ (u) καὶ (v) αἱ *μηδενικαὶ* γραμμαὶ τῆς ἐπιφανείας (§ 18)), οἱ τύποι γίνονται:

$$(42\,\gamma)\ K=\frac{F_uF_v-FF_{uv}}{F^3}\equiv\frac{1}{F}\frac{\partial^2 lF}{\partial u\partial v},$$

$$(43\,\gamma)\ L_v-M_u=-\frac{F_u}{F}M,\quad (44\,\gamma)\ N_u-M_v=-\frac{F_v}{F}M.$$

4ον) Ἂν τέλος εἶναι: $F=0$, $G=1$ (δηλ. αἱ γραμμαὶ (u) *γεωδαισιακαὶ* γραμμαὶ καὶ αἱ (v) *αἱ ὀρθογώνιοι τροχιαί* των (¹)), οἱ τύποι (42 α), (43 α), (44 α) καταντοῦν:

$$(42\,\delta)\ K=\frac{1}{4E^2}(E_v^2-2EE_{v^2})\equiv-\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial^2\sqrt{E}}{\partial v^2}$$

$$(43\,\delta)\ L_v-M_u=\frac{1}{2E}(E_vL-E_uM+EE_vN),$$

$$(44\,\delta)\ N_u-M_v=\frac{1}{2}\frac{E_v}{E}M.$$

[Ἂν δὲ ἀντιστρόφως εἶναι $F=0$, $E=1$, εἶναι *αἱ* (v) γεωδαισιακαὶ καὶ *αἱ* (u) αἱ ὀρθογώνιοι τροχιαί των (²)· τότε δὲ οἱ ἴδιοι τύποι γίνονται:

(¹) Εἰς τὴν § 42 εὑρήκαμεν τὴν συνθήκην νὰ εἶναι αἱ (u) γεωδαισιακαί· ἐπειδὴ ὅμως τώρα εἶναι καὶ $F=0$, ἡ συνθήκη ἐκείνη (39) καταντᾷ $GG_u=0$· καὶ ἐπειδὴ διὰ *πραγματικὰς* γεωδαισιακὰς (u) (ὄχι *μηδενικάς*, § 18)) $G \gtrless 0$, ἕπεται $G_u=0$, δηλ. G συνάρτησις *μόνον τοῦ* $v.\equiv\varrho(v)$, καὶ ἐπειδὴ εἰμποροῦμεν νὰ θέσωμεν $v_1=$ τυχ. συνάρτησις τοῦ v (§ 4), θέτομεν: $dv_1=\sqrt{\varrho(v)}\,dv$, ὅτε τὸ νέον G γίνεται (§ 10): $G_1=1$· εἰμποροῦμεν λοιπὸν νὰ ὑποθέσωμεν ἀπαρχῆς τὸ $G=1$.

(²) Ἡ συνθήκη θὰ εὑρεθῇ τώρα ἀπὸ τὴν (39) διὰ τροπῆς τῶν u, v εἰς v, u· εἶναι λοιπόν: $FE_u-2EF_u+EE_v=0$, ἢ ἁπλῶς (ἐπειδὴ τώρα καὶ $F=0$):

$$(42\,\delta_1)\quad K = \frac{1}{4G^2}(G_u^2 - 2GG_{u^2}) \equiv -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2},$$

$$(43\,\delta_1)\quad L_v - M_u = \frac{1}{2}\frac{G_u}{G}M,$$

$$(44\,\delta_1)\quad N_u - M_v = \frac{1}{2G}\,(GG_uL - G_vM + G_uN)].\ (^1)$$

51. *Ὁρισμὸς τοῦ σχήματος τῆς ἐπιφανείας ἀπὸ τὰ ἕξ θεμελιώδη ποσά.* — Εἰς τὰς §§ 9 καὶ 21 εἴδομεν, ὅτι τὰ ἕξ θεμελιώδη ποσὰ E, F, G, L, M, N ἔχουν τὴν σπουδαίαν ἰδιότητα νὰ μένουν *ἀναλλοίωτα* εἰς ὁποιανδήποτε *μετατόπισιν* τῆς ἐπιφανείας (*ἀμεταβλήτου κατὰ τὸ σχῆμα*). Ἀποδεικνύεται ὅμως εὐκόλως καὶ ἡ *ἀντίστροφος* πρότασις: Ἂν δύο ἐπιφάνειαι, τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι εἶναι συναρτήσεις *τῶν ἰδίων* μεταβλητῶν u, v, ἔχουν τὰ *ἴδια* ἕξ θεμελιώδη ποσά, αἱ δύο αὐταὶ ἐπιφάνειαι διαφέρουν (ἂν διαφέρουν) *μόνον κατὰ τὴν θέσιν των ἐντὸς τοῦ χώρου*, δηλ. εἶναι δύο διάφοροι (γενικῶς) θέσεις τῆς *ἰδίας* ἐπιφανείας· ὥστε, *ἂν δοθοῦν τὰ ἕξ θεμελιώδη ποσὰ μιᾶς ἐπιφανείας (ὡς γνωσταὶ συναρτήσεις τῶν u, v), ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένη κατὰ τὸ σχῆμα, ἡ θέσις της ὅμως ἐντὸς τοῦ χώρου μένει ἀόριστος.* Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως αὐτῆς (στηριζομένην εἰς τὰ ἀναπτύγματα τῶν συντεταγμένων τῆς ἐπιφανείας κατὰ τὸν τύπον τοῦ MacLaurin καὶ εἰς τὴν παρατήρησιν, ὅτι *ὅλαι* αἱ παράγωγοι τῶν x, y, z πρὸς u ἢ πρὸς v ἀπὸ τὰς τῆς β′ τάξεως καὶ ἐφεξῆς εἰμποροῦν νὰ ἐκφρασθοῦν μὲ τὰ ἕξ θεμελιώδη ποσά, τὰς παραγώγους των, τὰς παραγώγους $x_u, \ldots, z_v$ καὶ τὰ l, m, n) βλέπε: *Περὶ τῆς Κάμψεως τῶν Ἐπιφανειῶν*, σελ. 15-6.

$EE_v = 0$, δηλ. ($E \gtrless 0$, διὰ *πραγματικὰς* γεωδαισιακὰς (v)): $E_v = 0$, ἑπομένως τὸ E συνάρτησις μόνον τοῦ u, $\equiv \pi(u)$, καί, καθὼς εἰς τὴν ἀντίστροφον περίπτωσιν, εἰμποροῦμεν πάλιν θέτοντες: $du_1 = \sqrt{\pi(u)}\,du$, νὰ κάμωμεν τὸ $E = 1$.

(1) Οἱ τύποι αὐτοὶ παράγονται προφανῶς καὶ ἀπὸ τοὺς (42δ-44δ), ἂν γίνῃ ἡ τροπὴ τῶν u, v εἰς v, u.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

ΒΑΘΥΤΕΡΑ ΣΠΟΥΔΗ ΤΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ: ΚΑΘΕΤΟΣ ΚΑΙ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΗ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΣ. ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΟΙ ΚΥΚΛΟΙ Α' ΚΑΙ Β' ΕΙΔΟΥΣ. ΣΤΡΕΨΙΣ ΚΑΙ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΗ ΣΤΡΕΨΙΣ. ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ BONNET, ΤΟΥ ENNEPER ΚΑΙ ΤΟΥ BURGATTI. ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΟΙ. ΑΠΕΙΡΟΣΤΗ ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΚΑΘΕΤΩΝ.

α') *Κάθετος καὶ γεωδαισιακὴ καμπυλότης.*

52. *Κάθετος καὶ ἐφαπτομενικὴ καμπυλότης.*— Ἂν ἐπὶ τῆς πρώτης καθέτου τῆς ἐπιφανειακῆς καμπύλης λάβωμεν ἀπὸ τὸ M τμῆμα ἴσον μὲ τὴν καμπυλότητά της $\frac{1}{\varrho}$ καὶ τὸ προβάλωμεν ἐπὶ τὴν κάθετον τῆς ἐπιφανείας καὶ ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην αὐτῆς τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς καμπύλης, αἱ δύο αὐταὶ προβολαὶ θὰ εἶναι $\frac{\text{συν}\vartheta}{\varrho} \equiv \left(\frac{1}{\varrho}\right)_\varkappa$ καὶ $\frac{\text{ημ}\vartheta}{\varrho} \equiv \left(\frac{1}{\varrho}\right)_\varepsilon$. Ἡ πρώτη ἀπὸ αὐτάς, ἡ ὁποία, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Meusnier (§ 20), εἶναι ἴση μὲ τὴν καμπυλότητα τῆς καθέτου τομῆς τῆς ἐχούσης τὴν ἰδίαν ἐφαπτομένην, δηλ. μὲ $\frac{1}{\varrho_\varkappa}$ ($\varrho_\varkappa$ ἡ ἀκτὶς τῆς καθέτου αὐτῆς τομῆς), λέγεται συντόμως *κάθετος καμπυλότης* τῆς καμπύλης (εἰς τὸ M). Ἡ δευτέρα, $\frac{\text{ημ}\vartheta}{\varrho}$, εἶμπορεῖ νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς: $\frac{\text{συν}\varphi}{\varrho}$, ὅπου φ εἶναι ἡ γωνία τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου τῆς καμπύλης καὶ τοῦ ἐφαπτομένου τῆς ἐπιφανείας· ἀλλά, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Meusnier, ἐφαρμοζόμενον εἰς τὴν *κυλινδρικὴν* ἐπιφάνειαν τὴν προβάλλουσαν (ὀρθῶς) τὴν καμπύλην ἐπὶ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας, θὰ ἔχωμεν:

$\varrho = \varrho_\varepsilon\, \text{συν}\varphi = \varrho_\varepsilon\, \text{ημ}\vartheta$, ἑπομένως καί: $\frac{1}{\varrho_\varepsilon} = \frac{\text{συν}\varphi}{\varrho} = \frac{\text{ημ}\vartheta}{\varrho}$, ὅπου ϱ_ε

εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς προβολῆς τῆς καμπύλης ἐπὶ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον· εἶναι λοιπὸν $\left(\frac{1}{\varrho}\right)_\varepsilon = \frac{1}{\varrho_\varepsilon}$, δηλ. *ἡ προβολὴ τῆς καμπυλότητος* $\frac{1}{\varrho}$ *ἐπὶ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἶναι ἴση μὲ τὴν καμπυλότητα τῆς προβολῆς τῆς καμπύλης* (ἐπὶ τὸ ἴδιον ἐπίπεδον) [1]. Ἡ προβολὴ αὐτὴ $\frac{\eta\mu\vartheta}{\varrho}$ λέγεται συντόμως *ἐφαπτομενικὴ καμπυλότης* τῆς καμπύλης (εἰς τὸ M). Ἔχομεν δὲ προφανῶς τὴν σχέσιν: $\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{\varrho_\varkappa^2} + \frac{1}{\varrho_\varepsilon^2}$.

53. *Ἔκφρασις τῆς καθέτου καὶ τῆς ἐφαπτομενικῆς καμπυλότητος διὰ τῶν θεμελιωδῶν ποσῶν.* — Τὴν ἔκφρασιν τῆς πρώτης δίδει ὁ ἤδη εὑρεθεὶς τύπος (14), ὁ ὁποῖος, ἂν θεωρηθῇ τὸ s ὡς μεταβλητὴ ἀνεξάρτητος, γράφεται συντομώτερον:

$$(14\alpha) \qquad \frac{1}{\varrho_\varkappa} = Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2.$$

---

[1] *Γενικῶς* ἰσχύει τὸ ἑξῆς θεώρημα (ἄμεσον πόρισμα τοῦ θεωρήματος τοῦ Meusnier): *Ἡ ὀρθὴ προβολὴ μιᾶς καμπύλης ἐπὶ ἓν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν εἰς τὸ M ἐφαπτομένην της ἔχει καμπυλότητα (εἰς τὸ M)* $\frac{1}{\varrho_1}$ *ἴσην μὲ* $\frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{\varrho}$, *ὅπου* $\frac{1}{\varrho}$ *εἶναι ἡ καμπυλότης (εἰς τὸ M) τῆς ἀρχικῆς καμπύλης καὶ* φ *ἡ γωνία τῆς α' καθέτου τῆς καμπύλης μὲ τὸ ἐπίπεδον.* [Ἰδοὺ καὶ ἀπ' εὐθείας ἀπόδειξις. Ἐκλέγομεν τὸ ἐπίπεδον τῆς προβολῆς ὡς ἐπίπεδον τῶν xy· $x=\sigma(s)$, $y=\varphi(s)$, $z=f(s)$ ἂς εἶναι αἱ ἐξισώσεις τῆς καμπύλης (s τὸ τόξον της)· αἱ ἐξισώσεις τῆς προβολῆς της εἶναι τότε: $x_1=\sigma(s)$, $y_1=\varphi(s)$, $z_1=0$ (ὅπου ὅμως s *δὲν* εἶναι τὸ τόξον τῆς προβολῆς), εἶναι λοιπὸν διαρκῶς $x=x_1$, $y=y_1$· ἂν δὲ α, β, γ· ξ, η, ζ· λ, μ, ν εἶναι τὰ συνημίτονα τῶν ἀρχικῶν εὐθειῶν τῆς προβαλλομένης καμπύλης καὶ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ κτλ. τῆς προβολῆς, θὰ ἔχωμεν γενικῶς $ds_1 = \sqrt{1-\gamma^2}\, ds$, εἰς τὸ σημεῖον ὅμως M (ὅπου γ ἐξ ὑποθέσεως$=0$): $ds_1=ds$· ὥστε θὰ ἔχωμεν *εἰς τὸ M*: $\alpha_1 = \frac{dx_1}{ds_1} = \frac{dx}{ds} = \alpha$, $\beta_1=\beta$, $\gamma_1=\gamma=0$· $\frac{\xi_1}{\varrho_1} = \frac{d^2x_1}{ds_1^{\,2}} = \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{\xi}{\varrho}$, $\frac{\eta_1}{\varrho_1} = \frac{\eta}{\varrho}$, ἀλλὰ $\zeta_1=0$· καὶ ἂν τετραγωνίσωμεν καὶ προσθέσωμεν τὰς τελευταίας αὐτὰς ἐξισώσεις, εὑρίσκομεν: $\frac{1}{\varrho_1^2} = \frac{1-\zeta^2}{\varrho^2}$ (διότι: $\xi_1^{\,2}+\eta_1^{\,2}=1$, $\xi^2+\eta^2=1-\zeta^2$) καὶ ἐπειδὴ προφανῶς: $1-\zeta^2=1-\eta\mu^2\varphi=\sigma\upsilon\nu^2\varphi$, ἔχομεν τὴν ζητουμένην σχέσιν: $\frac{1}{\varrho_1} = \frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{\varrho}$]. Ἂν τώρα ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα αὐτὸ εἰς τὴν προβολὴν τῆς ἐπιφανειακῆς καμπύλης ἐπὶ τὸ διὰ τῆς ἐφαπτομένης της κάθετον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας, βλέπομεν, ὅτι ἡ κάθετος καμπυλότης εἰμπορεῖ νὰ ὁρισθῇ *καὶ ὡς ἡ καμπυλότης τῆς καθέτου αὐτῆς προβολῆς.*

Πρὸς ὑπολογισμὸν τώρα τῆς δευτέρας παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας τῆς ὀρθίας καθέτου τῆς καμπύλης μὲ τὴν κάθετον τῆς ἐπιφανείας, δηλ. τὸ ημθ, εἶναι προφανῶς (ἂν ὡς ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ ληφθῇ πάλιν τὸ s):

$$\eta\mu\vartheta = \Sigma\lambda l = \varrho \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ l & m & n \end{vmatrix} = \varrho . \frac{1}{\mathrm{D}} \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ l & m & n \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ l & m & n \end{vmatrix} =$$

$$= \varrho \frac{1}{\mathrm{D}} \begin{vmatrix} \Sigma x_u x' & \Sigma x_u x'' & \Sigma x_u l \\ \Sigma x_v x' & \Sigma x_v x'' & \Sigma x_v l \\ \Sigma l x' & \Sigma l x'' & \Sigma l^2 \end{vmatrix} = \varrho \frac{1}{\mathrm{D}} \begin{vmatrix} \Sigma x_u x' & \Sigma x_u x'' \\ \Sigma x_v x' & \Sigma x_v x'' \end{vmatrix} .$$

ἀλλὰ τὴν ὁρίζουσαν αὐτὴν τὴν ὑπελογίσαμεν ἤδη (σελ. 48) καὶ ἂν ἀπὸ ἐκεῖ λάβωμεν τὴν ἔκφρασίν της (τύπ. 37), εὑρίσκομεν τὴν ἐφαπτομενικὴν καμπυλότητα διὰ τῶν θεμελιωδῶν ποσῶν *(τύπος τοῦ Minding)*:

$$(45) \quad \frac{1}{\varrho_\varepsilon} = \frac{1}{\mathrm{D}} \begin{vmatrix} \mathrm{E}u' + \mathrm{F}v' & {}^1/_2 \mathrm{E}_u u'^2 + \mathrm{E}_v u'v' + (\mathrm{F}_v - \tfrac{1}{2}\mathrm{G}_v) v'^2 + \mathrm{E}u'' + \mathrm{F}v'' \\ \mathrm{F}u' + \mathrm{G}v' & (\mathrm{F}_u - \tfrac{1}{2}\mathrm{E}_v) u'^2 + \mathrm{G}_u u'v' + \tfrac{1}{2}\mathrm{G}_v v'^2 + \mathrm{F}u'' + \mathrm{G}v'' \end{vmatrix} .$$

Πορίσματα τοῦ τύπου αὐτοῦ εἶναι τὰ ἑξῆς: 1) Ἡ ἐφαπτομενικὴ καμπυλότης τῆς τυχούσης *γεωδαισιακῆς* γραμμῆς εἶναι εἰς ὅλα τὰ σημεῖά της *ἴση μὲ τὸ 0* (τύπ. 37)· 2) ἡ ἐφαπτομενικὴ καμπυλότης μένει *ἀναλλοίωτος* εἰς τὴν τυχοῦσαν *κάμψιν* τῆς ἐπιφανείας· διότι (ἀντιθέτως πρὸς τὴν *κάθετον* καμπυλότητα) περιέχει *μόνον* τὰ ποσὰ E, F, G (§ 48).

54. *Ἔκφρασις τῆς κλίσεως καὶ τῆς («ὁλοκλήρου») καμπυλότητος $\frac{1}{\varrho}$ διὰ τῶν θεμελιωδῶν ποσῶν.*— Διαιροῦντες τὸν τύπον (45) διὰ τοῦ (14 α) εὑρίσκομεν τὴν εἰς τὸ M ὡς πρὸς τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας *κλίσιν* $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2} - \vartheta$ τῆς καμπύλης:

$$(46) \quad \sigma\varphi\vartheta_1 = \frac{\begin{vmatrix} \mathrm{E}u' + \mathrm{F}v' & {}^1/_2 \mathrm{E}_u u'^2 + \mathrm{E}_v u'v' + (\mathrm{F}_v - {}^1/_2 \mathrm{G}_u) v'^2 + \mathrm{E}u'' + \mathrm{F}v'' \\ \mathrm{F}u' + \mathrm{G}v' & (\mathrm{F}_u - {}^1/_2 \mathrm{E}_v) u'^2 + \mathrm{G}_u u'v' + {}^1/_2 \mathrm{G}_v v'^2 + \mathrm{F}u'' + \mathrm{G}v'' \end{vmatrix}}{\mathrm{D}.\ (\mathrm{L}u'^2 + 2\mathrm{M}u'v' + \mathrm{N}v'^2)} .$$

Ἂν δὲ εἰς τὸν τύπον: $\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{\varrho_\varkappa^2} + \frac{1}{\varrho_\varepsilon^2}$ θέσωμεν τὰς τιμὰς (14α) καὶ (45) τῶν $\frac{1}{\varrho_\varkappa}$ καὶ $\frac{1}{\varrho}$, εὑρίσκομεν τὴν (*«ὁλόκληρον»*) καμπυλότητα $\frac{1}{\varrho}$:

$$(47) \quad \frac{1}{\varrho^2} = (\mathrm{L}u'^2 + 2\mathrm{M}u'v' + \mathrm{N}v'^2)^2 +$$

$$+ \frac{1}{\mathrm{D}^2} \begin{vmatrix} \mathrm{E}u' + \mathrm{F}v' & {}^1/_2 \mathrm{E}_u u'^2 + \mathrm{E}_v u'v' + (\mathrm{F}_v - {}^1/_2 \mathrm{G}_u) v'^2 + \mathrm{E}u'' + \mathrm{F}v'' \\ \mathrm{F}u' + \mathrm{G}v' & (\mathrm{F}_u - {}^1/_2 \mathrm{E}_v) u'^2 + \mathrm{G}_u u'v' + {}^1/_2 \mathrm{G}_v v'^2 + \mathrm{F}u'' + \mathrm{G}v'' \end{vmatrix}^2 .$$

ΣΗΜ. Οἱ γενικοὶ τύποι διὰ τὴν κάθετον καὶ τὴν ἐφαπτομενικὴν καμπυλότητα εἰς τὴν περίπτωσιν *ὁποιασδήποτε ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς* t εὑρίσκονται εὐκόλως ἐκ τῶν προηγουμένων (14α) καὶ (45) διὰ τῶν ἀντικαταστάσεων:

$$\frac{du}{ds}=\frac{du}{dt}\frac{dt}{ds}, \quad \frac{d^2u}{ds^2}=\frac{d^2u}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\frac{du}{dt}\,\frac{d^2t}{ds^2},$$

$$\text{καὶ } \frac{dt}{ds}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2\mathrm{F}\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt}+\mathrm{G}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}}, \quad \frac{d^2t}{ds^2}=\ldots.$$

55. *Ὁρισμὸς τῆς γεωδαισιακῆς καμπυλότητος.* — Ἡ καμπυλότης μιᾶς *ἐπιπέδου* καμπύλης ὡρίσθη (Διαφ. Λογ. Β', σελ. 113) ὡς πηλίκον *τῆς γωνίας συνεπαφῆς* $d\sigma$ διὰ *τοῦ γραμμικοῦ στοιχείου* ds τῆς καμπύλης. Τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν εἰμποροῦμεν τώρα νὰ γενικεύσωμεν διὰ μίαν ἐπὶ τῆς τυχούσης ἐπιφανείας κειμένην καμπύλην, ὡς ἑξῆς. Ἀντὶ τῶν ἐφαπτομένων εὐθειῶν τῆς ἐπιπέδου καμπύλης (δηλ. τῶν *γεωδαισιακῶν* γραμμῶν τοῦ ἐπιπέδου της) θεωροῦμεν τὰς γεωδαισιακὰς γραμμὰς τῆς ἐπιφανείας, αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται τῆς θεωρουμένης καμπύλης· εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς καμπύλης ὑπάρχει μία *καὶ μία μόνη* (1)

---

(1) Τὴν σπουδαίαν αὐτὴν ἰδιότητα τῶν γεωδαισιακῶν γραμμῶν (τὴν ὁποίαν καὶ εἰς τὴν σελ. 49 χωρὶς ἀπόδειξιν ἀνεφέραμεν) εἰμποροῦμεν νὰ τὴν ἀποδείξωμεν ὡς ἑξῆς. Ἂν δύο γεωδαισιακαὶ εἶχον εἰς τὸ Μ τὴν ἰδίαν ἐφαπτομένην, θὰ ἦτο ἡ τιμὴ τῆς παραγώγου $\frac{dv}{du}$ εἰς τὸ Μ, ἡ $\left(\frac{dv}{du}\right)_{\mathrm{M}}$, κατ' ἀνάγκην ἡ ἰδία καὶ διὰ τὰς δύο· ἀλλὰ τότε ἀπὸ τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν τῶν γεωδαισιακῶν γραμμῶν (τύπ. 38), τὴν ὁποίαν καὶ αἱ δύο ἐπαληθεύουν, θὰ ἦτο καὶ ἡ β' παράγωγος $\left(\frac{d^2v}{du^2}\right)_{\mathrm{M}}$ ἡ ἰδία διὰ τὰς δύο γεωδαισιακὰς (διότι ἡ ἐξίσωσις (38) ὁρίζει τὸ $\frac{d^2v}{du^2}$ ὡς ἔκφρασιν ἐκ συναρτήσεων τῶν $u, v, \frac{dv}{du}$ καὶ αὐτὰ ἔχουν εἰς τὸ Μ, κατὰ τὴν ὑπόθεσίν μας, τὰς ἰδίας τιμὰς καὶ διὰ τὰς δύο γεωδαισιακάς)· τότε ὅμως, ἂν παραγωγίσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (38), θὰ εὕρωμεν πάλιν, ὅτι καὶ $\left(\frac{d^3v}{du^3}\right)_{\mathrm{M}}$ εἶναι τὸ ἴδιον καὶ διὰ τὰς δύο γεωδαισιακάς, ὡς συνάρτησις τῶν ἰδίων $(u)_{\mathrm{M}}$, $(v)_{\mathrm{M}}$, $\left(\frac{dv}{du}\right)_{\mathrm{M}}$, $\left(\frac{d^2v}{du^2}\right)_{\mathrm{M}}$; καὶ ἂν προχωροῦμεν μὲ τὸν τρόπον αὐτόν, εὑρίσκομεν, ὅτι αἱ εἰς τὸ Μ τιμαὶ *ὅλων* τῶν παραγώγων τοῦ v πρὸς τὸ u: $\left(\frac{dv}{du}\right)_{\mathrm{M}}$, $\left(\frac{d^2v}{du^2}\right)_{\mathrm{M}}$, $\left(\frac{d^3v}{du^3}\right)_{\mathrm{M}}$, ... εἶναι αἱ ἴδιαι καὶ διὰ τὰς δύο γεωδαισιακάς. Αἱ δύο ὅμως γεωδαισιακαὶ ὁρίζονται ἀπὸ δύο σχέσεις τῆς μορφῆς: $v=\varrho_1(u)$, $v=\varrho_2(u)$ (§ 5) καὶ ἂν ἀναπτύξωμεν

ἐφαπτομένη γεωδαισιακή· ἂν λοιπὸν θεωρήσωμεν τὰς δύο γεωδαισιακάς, αἳ ὁποῖαι ἐφάπτονται τῆς καμπύλης εἰς τὰ δύο ἀπείρως πλησίον σημεῖά της M καὶ M′ καὶ ὀνομάσωμεν $d\sigma_\gamma$ (*«γεωδαισιακὴν γωνίαν συνεπαφῆς»*) τὴν ἀπειροστὴν γωνίαν των, ὁρίζομεν (κατὰ τὸν Liouville) ὡς *«γεωδαισιακὴν καμπυλότητα»* τῆς καμπύλης εἰς τὸ M τὸ πηλίκον: $\dfrac{d\sigma_\gamma}{ds} \equiv \dfrac{1}{\varrho_\gamma}$.

56. *Θεώρημα τοῦ Liouville.*—*Ἡ γεωδαισιακὴ καμπυλότης εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς καμπύλης εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀντίστοιχον ἐφαπτομενικήν της καμπυλότητα.*

Διὰ ν' ἀποδείξωμεν τὸ θεώρημα αὐτό, χρειαζόμεθα τὰ ἑξῆς δύο λήμματα.

1) Ἂν ἐκλέξωμεν ὡς παραμετρικὰς γραμμὰς τῆς *μιᾶς* σειρᾶς ($v=c$) μίαν (∞^1) σειρὰν γεωδαισιακῶν γραμμῶν καὶ ὡς γραμμὰς (u) τὰς ὀρθογωνίους τροχιάς των (*«γεωδαισιακαί» συντεταγμέναι* ἢ παράμετροι τοῦ *Gauss*), θὰ εἶναι (§ 50): $E=1$, $F=0$ *καὶ τὸ γραμμικὸν στοιχεῖον γίνεται*: $ds^2=du^2+Gdv^2$· u σημαίνει τότε προφανῶς τὸ μῆκος *ὅλων* τῶν παραμετρικῶν γραμμῶν (v) μεταξὺ τῶν γραμμῶν $u=0$ καὶ $u=u$ ($(ds)_v^2=du^2$, $(ds)_v=du$, ($s_v=u$)).

2) *Ἂν θεωρήσωμεν τοιαύτας γεωδαισιακὰς παραμέτρους, ἡ γωνία ω τῆς τυχούσης γεωδαισιακῆς μὲ τὰς παραμετρικὰς γεωδαισιακὰς γραμμὰς (v) ἔχει παράγωγον πρὸς τὸ v:*

$$\frac{d\omega}{dv}=-D_u\equiv-(\sqrt{G})_u,$$

ὅπου D σημαίνει, ὅπως πάντοτε, τὴν *θετικὴν* ῥίζαν τοῦ θετικοῦ ποσοῦ (διὰ *πραγματικὴν* ἐπιφάνειαν καὶ *πραγματικὰς* παραμέτρους, § 13, Σημ. Β′): $D^2=G$.

Ἀπόδειξις τοῦ β′ λήμματος. Ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν γεωδαισιακῶν γραμμῶν (τύπ. 37) γίνεται τώρα ($E=1, E_u=E_v=0, F=0, D=\sqrt{G}$):

$$D(u'v''-v'u'')+2D_u u'^2.v'+D_v u'v'^2+D^2.D_u v'^3=0,$$

ἢ ἁπλούστερον, ἂν ἐκλέξωμεν τὸ v ὡς ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν ($v'=1, v''=0$):

$$\text{(α)}\qquad -D\frac{d^2u}{dv^2}+2D_u\left(\frac{du}{dv}\right)^2+D_v.\frac{du}{dv}+D^2.D_u=0.$$

τὰς δύο αὐτὰς συναρτήσεις $v(u)$ κατὰ τὴν σειρὰν τοῦ Taylor, θὰ εὕρωμεν *τὸ ἴδιον* ἀνάπτυγμα:

$$v=(v)_M+\left(\frac{dv}{du}\right)_M(v-(v)_M)+\left(\frac{d^2v}{du^2}\right)_M\frac{(v-(v)_M)^2}{1.2}+\ldots..$$

εἶναι λοιπὸν κατ' ἀνάγκην: $\varrho_1(u)\equiv\varrho_2(u)$, δηλαδὴ *αἱ δύο γεωδαισιακαὶ συμπίπτουν εἰς μίαν.*

Ἂν τώρα καλέσωμεν ω τὴν γωνίαν τῆς τυχούσης γεωδαισιακῆς (Γ), ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ τυχόντος σημείου (u, v), μὲ τὴν διὰ τοῦ ἰδίου σημείου παραμετρικὴν γεωδαισιακὴν (v), θὰ ἔχωμεν ἀπὸ τὸν τύπον (9) τῆς σελ. 23 (ἐπειδὴ κατὰ μῆκος τῆς (v) εἶναι $dv=0$):

$$\text{συνω} = \frac{1}{\sqrt{1+D^2\left(\frac{dv}{du}\right)^2}} \quad \text{καὶ ἑπομένως: } \text{εφω} = \pm D\frac{dv}{du}.$$

Ἂν λάβωμεν ὡς *θετικὴν* φορὰν τῆς (Γ) *τὴν φορὰν τοῦ αὐξάνοντος* v, θὰ λάβωμεν εἰς τὸν τύπον αὐτὸν τὸ *θετικὸν* σημεῖον, διότι $D>0$ καὶ $\omega < \frac{\pi}{2}$ ἢ $> \frac{\pi}{2}$, *καθόσον τὸ* u *αὐξάνει ἢ ἐλαττώνεται ἐπὶ τῆς* (Γ) (καθὼς φαίνεται ἀμέσως ἀπὸ τὸ σχῆμα). Ἔχομεν λοιπόν:

$$\text{εφω} = D\frac{dv}{du} \quad \text{καὶ} \quad \frac{du}{dv} = D\,\text{σφω}. \quad (\beta)$$

Κατὰ μῆκος τῆς (Γ) μεταβάλλεται τὸ ω: ἂν εἰς αὔξησιν dv ἀντιστοιχῇ αὔξησις $d\omega$ τοῦ ω, θὰ ἔχωμεν:

$$(\gamma) \qquad \frac{d^2u}{dv^2} = \frac{dD}{dv}\text{σφω} - \frac{D}{\text{ημ}^2\omega}\cdot\frac{d\omega}{dv}.$$

καὶ ἐπειδή: $\frac{dD}{dv} = D_u\frac{du}{dv} + D_v$, ἢ κατὰ τὴν ἐξίσ. (β): $\frac{dD}{dv} = D.\, D_u\,\text{σφω} + D_v$,

ὁ τύπος (γ) γίνεται: $\frac{d^2u}{dv^2} = D.\,D_u\,\text{σφ}^2\omega + D_v\,\text{σφω} - \frac{D}{\text{ημ}^2\omega}\cdot\frac{d\omega}{dv}\cdot$ (δ)

ἂν τώρα εἰς τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν (α) τῆς γεωδαισιακῆς γραμμῆς (Γ) θέσωμεν τὰς τιμὰς (β) καὶ (δ) τῶν $\frac{du}{dv}$ καὶ $\frac{d^2u}{dv^2}$, θὰ ἔχωμεν ἁπλῶς:

$$\frac{d\omega}{dv} = -D_u, \text{ δηλ. τὸ δεύτερον λῆμμα.}$$

Στηριζόμενοι εἰς τὰς δύο αὐτὰς προτάσεις εἰμποροῦμεν τώρα ν' ἀποδείξωμεν τὸ θεώρημα τοῦ Liouville ὡς ἑξῆς.

Ἐκλέγομεν ὡς καμπύλας (v) τὰς γεωδαισιακὰς τὰς καθέτους ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν καμπύλην (Κ) τότε εἰς τὰς καμπύλας (u), τὰς ὀρθογωνίους τροχιὰς τῶν (v), περιλαμβάνεται προφανῶς καὶ ἡ δοθεῖσα καμπύλη· ἂς ἀντιστοιχεῖ δὲ γενικῶς εἰς τὴν τιμὴν u τῆς u. Ἂν εἰς τὸ Μ αἱ τιμαὶ τῶν παραμέτρων εἶναι u, v, εἰς τὸ Μ′ θὰ εἶναι u, $v+dv$· παραδεχόμεθα ἀκόμη, ὅτι τὸ v αὐξάνει κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΜΜ′. Ἐπειδὴ εἶναι γενικῶς (λῆμμα 1ον): $ds^2 = du^2 + G dv^2$, θὰ εἶναι διὰ τὴν (u): $ds = \sqrt{G}dv = D dv$. Τὴν γεωδαισιακὴν καμπύλην (Γ), ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῆς (u) εἰς τὸ Μ, διατρέχομεν κατὰ τὴν ἰδίαν φορὰν μὲ τὴν (u), δηλ. τὴν φορὰν τοῦ αὐξάνοντος (v)· διὰ τὴν γωνίαν της ω μὲ τὴν γεωδαισιακὴν (v) ἔχομεν τότε (λῆμμα 2ον): $d\omega = -D_u\,dv$. Εἰς τὴν θέσιν Μ εἶναι ἡ ω ἴση μὲ $\frac{\pi}{2}$· ἑπομένως εἰς τὴν τομὴν Π τῆς (Γ) μὲ τὴν $(v+dv)$, δηλ. τὴν εἰς τὸ Μ′ κάθετον ἐπὶ τὴν (u) γεωδαισιακήν, θὰ εἶναι ἡ ω ἴση μὲ $\frac{\pi}{2} + d\omega$, δηλ. $\frac{\pi}{2} - D_u\,dv$. Ἂς θεωρήσωμεν τώρα τὸ ἀπειροστὸν τρίγωνον ΠΜ'Τ, ὅπου Τ σημαίνει τὴν τομὴν τῶν δύο εἰς τὰ Μ καὶ Μ' ἐφαπτομένων τῆς (u) γεωδαισιακῶν (Γ) καὶ (Γ') ἡ εἰς τὸ Μ' γωνία του εἶναι κατὰ τὴν ὑπόθεσίν μας ὀρθή· ἐπειδὴ δὲ ἓν ἀπειροστὸν τρίγωνον τῆς ἐπιφανείας εἱμπορεῖ, *ἂν παραλειφθοῦν ἀπειροστὰ ἀνωτέρας τάξεως*, νὰ θεωρηθῇ ὡς *ἐπίπεδον*[1], ἂν θεωρήσωμεν τὸ ΠΜ'Τ ὡς τοιοῦτο, ἡ εἰς τὸ Τ γωνία του, δηλ. ἡ $d\sigma_\gamma$, θὰ εἶναι ἴση (ἂν παραλειφθοῦν τ' ἀπειροστὰ ἀνωτέρας τάξεως) μὲ: $\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-D_u\,dv\right)=D_u\,dv$. Εἶναι λοιπὸν ἡ *γεωδαισιακὴ καμπυλότης* τῆς (u) εἰς τὸ (Μ) (ἐπειδὴ δι' αὐτὴν ἔχομεν καὶ $ds=D\,dv$):

$$(\varepsilon)\qquad \frac{d\sigma_\gamma}{ds}=\frac{D_u}{D}.$$

Ἂν τώρα ὑπολογίσωμεν καὶ τὴν *ἐφαπτομενικὴν* καμπυλότητα τῆς (u) εἰς τὸ Μ ἀπὸ τὸν τύπον (45), εὑρίσκομεν (ἐπειδὴ τώρα: $E=1$, $F=0$, $G=D^2$ καὶ κατὰ μῆκος τῆς (u): $u=\text{σταθ.}, u'=0, u''=0, v'=\frac{dv}{ds}=\frac{1}{D}$):

$$\frac{1}{\varrho_\varepsilon}=\frac{1}{2}\frac{G_u}{D^2}=\frac{D_u}{D},$$

ἑπομένως: (48) $\frac{d\sigma_\gamma}{ds}=\frac{1}{\varrho_\varepsilon}$, δηλ. τὸ θεώρημα τοῦ *Liouville*.

β') Γεωδαισιακοὶ κύκλοι α' καὶ β' εἴδους.

57. *Γεωδαισιακοὶ κύκλοι α' καὶ β' εἴδους.* — Εἰς τὸ ἐπίπεδον αἱ καμπύλαι μὲ σταθερὰν καμπυλότητα εἶναι, ὡς γνωστόν, οἱ κύκλοι (Διαφ. Λογ. Β', σελ. 36, ἄσκ. 4η). Γενικεύοντες τὴν ἰδιότητα αὐτήν,

[1] Εἰς τὴν γενικὴν θεωρίαν τῶν γεωδαισιακῶν παραμέτρων ἀποδεικνύεται γενικῶς ἡ ἑξῆς πρότασις: *Ἡ ἀπόλυτος ὁλικὴ καμπυλότης ω (§ 44) ἑνὸς ἀπὸ γεωδαισιακὰς γραμμὰς ἀποτελουμένου τριγώνου εἶναι ἴση μὲ τὴν ὑπεροχὴν τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν γωνιῶν του ὑπὲρ τὰς 2 ὀρθάς*, δηλ.

$$\omega=a+b+c-\pi\cdot$$

ἂν τώρα διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος αὐτῆς διὰ Ω (τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου), θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\omega}{\Omega}=\frac{a+b+c-\pi}{\Omega}\cdot$$

καὶ λαμβάνοντες τὰ ὅρια (διὰ τρίγωνον ἀπειροστὸν) θὰ ἔχωμεν:

$$\text{ορ}\,\frac{\omega}{\Omega}\equiv K=\frac{\text{ορ}\,(a+b+c-\pi)}{\text{ορ}\,\Omega}\cdot\ \text{ἀλλὰ ορ}\,\Omega=0,\ \text{ὥστε καί}:$$

$$\text{ορ}\,(a+b+c-\pi)=0,\ \text{δηλ. ορ}\,(a+b+c)=\pi.$$

ὀνομάζομεν, ἐπὶ τῆς *τυχούσης* ἐπιφανείας, *γεωδαισιακοὺς κύκλους τὰς καμπύλας, τῶν ὁποίων ἡ γεωδαισιακὴ καμπυλότης εἶναι σταθερά*. Ἀλλὰ καὶ ὁ ὁρισμὸς τοῦ κύκλου, ὡς τόπου τῶν σημείων τῶν ἀπεχόντων ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ ἓν σταθερὸν σημεῖον, εἶμπορεῖ ἐπίσης νὰ γενικευθῇ, ἄν, ἐπὶ τῆς τυχούσης ἐπιφανείας, θεωρήσωμεν τὰς καμπύλας, *τῶν ὁποίων αἱ γεωδαισιακαὶ ἀποστάσεις ἀπὸ ἓν σταθερὸν σημεῖον εἶναι ἰσομήκεις*. Ἐπειδὴ καὶ αἱ καμπύλαι αὗται εἶναι γενικεύσεις τῶν ἐπιπέδων κύκλων, ὀνομάζομεν καὶ αὐτὰς *γεωδαισιακοὺς* κύκλους· πρὸς διάκρισιν ὅμως (ἐπειδή, καθὼς ἀμέσως θὰ ἴδωμεν (§ 58), δὲν εἶναι *γενικῶς* αἱ ἴδιαι μὲ τὰς πρώτας) ὀνομάζομεν τὰς τελευταίας αὐτὰς γεωδαισιακοὺς κύκλους *τοῦ α' εἴδους*, τὰς δὲ προηγουμένας *τοῦ β'*.

58. *Διάκρισις τῶν γεωδαισιακῶν κύκλων τοῦ β' εἴδους ἀπὸ τοὺς τοῦ α'*. — Οἱ γεωδαισιακοὶ κύκλοι τοῦ β' εἴδους *δὲν* ταυτίζονται γενικῶς μὲ τοὺς τοῦ α' (καθὼς συμβαίνει εἰς τὸ ἐπίπεδον). Διὰ νὰ τὸ ἀποδείξωμεν αὐτό, λαμβάνομεν *γεωδαισιακὰς πολικὰς συντεταγμένας* ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας: ἐκλέγομεν δηλ. ὡς καμπύλας (v) ∞^1 γεωδαισιακάς, *ὅλας δι' ἑνὸς σημείου A διερχομένας* καὶ ὡς καμπύλας (u) τὰς ὀρθογωνίους τροχιάς των· ὡς μίαν ἀπὸ τὰς τελευταίας αὐτάς, τὴν (u_0) π. χ., *ἐκφυλισθεῖσαν εἰς ἓν σημεῖον*, εἶμποροῦμεν τότε νὰ θεωρήσωμεν καὶ τὸ ἴδιον τὸ σημεῖον A· εἶναι δηλ. αἱ παραμετρικαὶ αὗται γραμμαὶ μερικὴ περίπτωσις τῶν γεωδαισιακῶν παραμέτρων τοῦ *Gauss* (§ 56) (¹).

Ἡ τυχοῦσα ἄλλη ὀρθογώνιος τροχιὰ (u) ἀποκόπτει τότε ἐπὶ *ὅλων* τῶν ἀπὸ τὸ A ἀρχιζουσῶν γεωδαισιακῶν (v) τὸ ἴδιον μῆκος τόξου: $u-u_0$· ὥστε εἶναι αἱ (u) *αἱ καμπύλαι σταθερᾶς γεωδαισιακῆς ἀποστάσεως ἀπὸ τὸ A*, δηλ. γεωδαισιακοὶ κύκλοι *τοῦ α' εἴδους*. Ἂν ἰδιαιτέρως ἐκλέξωμεν ὡς εἰς τὸ A ἐκφυλισθεῖσαν γεωδαισιακὴν (u_0) τὴν $u=0$, ἡ γεωδαισιακὴ ἀπόστασις τοῦ τυχόντος σημείου (u, v) ἀπὸ τὸ A εἶναι *ἀκριβῶς* u. Τότε, κατὰ τὸν τύπον (ε) τῆς § 56, διὰ νὰ εἶναι

(¹) Αἱ *γεωδαισιακαὶ πολικαὶ συντεταγμέναι* ἐπὶ τῆς τυχούσης ἐπιφανείας εἶναι ἡ φυσικὴ γενίκευσις τῶν *πολικῶν συντεταγμένων* ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου.

Ἐπειδὴ τὸ A εἶναι ἡ εἰς σημεῖον ἐκφυλισθεῖσα καμπύλη $u=u_0$, θὰ εἶναι:

$$(G)_{u=u_0}=0.$$

αἱ (u) *καὶ τοῦ β' εἴδους* γεωδαισιακοὶ κύκλοι, πρέπει νὰ εἶναι κατὰ μῆκος αὐτῶν: $\frac{\partial l D}{\partial u}=$ σταθ., δηλ. νὰ ἐξαρτᾶται ἡ συνάρτησις $\frac{\partial l D}{\partial u}$ *μόνον* ἀπὸ τὸ u, τὸ ὁποῖον βέβαια δὲν συμβαίνει *γενικῶς*.

γ') Στρέψις καὶ γεωδαισιακὴ στρέψις.

59. *Ὑπολογισμὸς τῆς στρέψεως.* — Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν στρέψιν τῆς ἐπιφανειακῆς καμπύλης, παραγωγίζομεν τὸν τύπον: ημϑ$=\Sigma\lambda l$ (1) μὲ ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν τὸ s· τότε ἔχομεν:

$$\text{συνϑ}.\vartheta'=\Sigma\lambda l'+\Sigma l\lambda', \text{ ἢ καὶ: συνϑ}.\vartheta'=\Sigma\lambda l'-\Sigma l\frac{\xi}{r}=\Sigma\lambda l'-\frac{\text{συνϑ}}{r}.$$

καὶ ἂν λύσωμεν πρὸς τὸ $\frac{1}{r}$, εὑρίσκομεν: (α) $\frac{1}{r}=\frac{\Sigma\lambda l'}{\text{συνϑ}}-\vartheta'$·

καὶ ἡ μὲν παράγωγος ϑ' εἰμπορεῖ νὰ ὑπολογισθῇ διὰ τῶν θεμελιωδῶν ποσῶν ἀπὸ τὴν ἔκφρασιν τῆς εφϑ (σφϑ$_1$) (τύπ. 46), μένει λοιπὸν νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα $\Sigma\lambda l'$· ἔχομεν:

$$\Sigma\lambda l'=\varrho\begin{vmatrix} l' & x' & x'' \\ m' & y' & y'' \\ n' & z' & z'' \end{vmatrix}=\frac{\varrho}{D}\begin{vmatrix} l' & x' & x'' \\ m' & y' & y'' \\ n' & z' & z'' \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x_u & x_v & l \\ y_u & y_v & m \\ z_u & z_v & n \end{vmatrix},$$

δηλαδή:

$$\Sigma\lambda l'=\frac{\varrho}{D}\begin{vmatrix} \Sigma l'x_u & \Sigma l'x_v & \Sigma l'l \\ \Sigma x'x_u & \Sigma x'x_v & \Sigma x'l \\ \Sigma x''x_u & \Sigma x''x_v & \Sigma x''l \end{vmatrix}.$$

ἀλλά: $\Sigma l'l=0$, $\Sigma x'l\equiv\Sigma(x_u u'+x_v v')l=0$, ὥστε:

$$\Sigma\lambda l'=\frac{\varrho}{D}\cdot\begin{vmatrix} \Sigma l'x_u & \Sigma l'x_v \\ \Sigma x'x_u & \Sigma x'x_v \end{vmatrix}\cdot\Sigma x''l\cdot$$

---

(1) Ἡ γωνία ϑ_1 τῆς ὀρθίας καθέτου μὲ τὴν κάθετον τῆς ἐπιφανείας εἶναι (ὅπως τὸ σχῆμα ἀμέσως δεικνύει) $\frac{\pi}{2}-\vartheta$ ἢ $\frac{\pi}{2}+\vartheta$, ἑπομένως εἶναι $\Sigma\lambda l=\pm$ημϑ· εἰμποροῦμεν ὅμως νὰ ἀποφύγωμεν τὸ διπλοῦν σημεῖον, ἂν θεωρήσωμεν τὸ ϑ ὡς θετικὸν κατὰ τὴν α' καὶ ὡς ἀρνητικὸν κατὰ τὴν β' περίπτωσιν· ἂν δηλ. ὡς θετικὴν φορὰν τῆς ϑ_1 λάβωμεν τὴν ἀπὸ τὴν κάθετ. τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ὀρθ. κάθ., ὡς θετ. φορὰν τῆς ϑ ἐκλέγομεν τὴν ἀπὸ τὴν α' κάθ. πρὸς τὴν κάθετον τῆς ἐπιφανείας.

καὶ ἐπειδή: $\Sigma l' x_u \equiv \Sigma(l_u u' + l_v v') x_u = -\mathrm{L}u' - \mathrm{M}v',$

$$\Sigma l' x_v \equiv \Sigma(l_u u' + l_v v') x_v = -\mathrm{M}u' - \mathrm{N}v',$$

$$\Sigma x' x_u \equiv \Sigma(x_u u' + x_v v') x_u = \mathrm{E}u' + \mathrm{F}v',$$

$$\Sigma x' x_v \equiv \Sigma(x_u u' + x_v v') x_v = \mathrm{F}u' + \mathrm{G}v'$$

καί: $\varrho . \Sigma x'' l = \Sigma \xi l = \text{συνϑ},$

ϑὰ ἔχωμεν:

$$\Sigma \lambda l' = -\frac{\text{συνϑ}}{\mathrm{D}} \begin{vmatrix} \mathrm{L}u' + \mathrm{M}v' & \mathrm{M}u' + \mathrm{N}v' \\ \mathrm{E}u' + \mathrm{F}v' & \mathrm{F}u' + \mathrm{G}v' \end{vmatrix},$$

δηλαδὴ (§ 35): $\Sigma \lambda l' = \dfrac{\text{συνϑ}}{\mathrm{D}} \begin{vmatrix} v'^2 & \mathrm{E} & \mathrm{L} \\ -u'v' & \mathrm{F} & \mathrm{M} \\ u'^2 & \mathrm{G} & \mathrm{N} \end{vmatrix}.$

Ἡ ἀντικατάστασις τῆς τιμῆς αὐτῆς τοῦ $\Sigma \lambda l'$ εἰς τὸν τύπον (α) δίδει τέλος τὴν ἔκφρασιν τῆς στρέψεως:

$$(49) \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{\mathrm{D}} \begin{vmatrix} v'^2 & \mathrm{E} & \mathrm{L} \\ -u'v' & \mathrm{F} & \mathrm{M} \\ u'^2 & \mathrm{G} & \mathrm{N} \end{vmatrix} - \vartheta',$$

ὅπου, καθὼς ἤδη εἴπομεν, ὑποθέτομεν, ὅτι ἡ παράγωγος ϑ' ἔχει ἐκφρασθῆ διὰ τῶν θεμελιωδῶν ποσῶν ἀπὸ τὸν τύπον (46).

60. *Γεωδαισιακὴ στρέψις.*— Ἂν ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον (49) εἰς τὴν γεωδαισιακὴν γραμμὴν τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ M τῆς ἐπιφανειακῆς καμπύλης, ϑὰ ἔχωμεν:

$$(49') \qquad \left(\frac{1}{r}\right)_\gamma = \frac{1}{\mathrm{D}} \begin{vmatrix} v'^2 & \mathrm{E} & \mathrm{L} \\ -u'v' & \mathrm{F} & \mathrm{M} \\ u'^2 & \mathrm{G} & \mathrm{N} \end{vmatrix},$$

διότι ϑ' εἶναι 0 ἐπὶ τῆς γεωδαισιακῆς, ἀφοῦ κατὰ μῆκος αὐτῆς εἶναι $\vartheta = 0$. Συγκρίνοντες τώρα τοὺς τύπους (49) καὶ (49'), βλέπομεν, ὅτι (ἐπειδὴ τὰ u', v' τῆς ἀρχικῆς καμπύλης καὶ τῆς ἐφαπτ. γεωδαισιακῆς εἶναι εἰς τὸ M ἴσα[1]) ϑὰ εἶναι:

---

[1] u' τῆς ἀρχ. καμπύλης $= \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{E} + 2\mathrm{F}\dfrac{\mathrm{dv}}{\mathrm{du}} + \mathrm{G}\left(\dfrac{\mathrm{dv}}{\mathrm{du}}\right)^2}} =$ μὲ τὸ ἴδιον ποσὸν τῆς γεωδαισ. (διότι τὸ $\dfrac{\mathrm{dv}}{\mathrm{du}}$ εἶναι τὸ ἴδιον καὶ διὰ τὰς δύο καμπύλας) $= \mathrm{u}'$ τῆς γεωδαισιακῆς.

$$\left(\frac{1}{r}\right)_\gamma = \frac{1}{r} + \vartheta'.$$

τὸ ποσὸν αὐτό: $\frac{1}{r} + \frac{d\vartheta}{ds}$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ *στρέψις τῆς ἐφαπτομένης γεωδαισιακῆς*, τὸ ὀνομάζομεν συντόμως *γεωδαισιακὴν στρέψιν* τῆς ἐπιφανειακῆς καμπύλης [1], εἶναι δέ, καθὼς εἰς τὴν προηγουμένην σελίδα εὕρομεν:

$$(49') \quad \left(\frac{1}{r}\right)_\gamma \equiv \frac{1}{r_\gamma} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} v'^2 & E & L \\ -u'v' & F & M \\ u'^2 & G & N \end{vmatrix}.$$

ΣΗΜ. Ἀπὸ τὴν μορφὴν τοῦ τύπου (49') βλέπομεν ἀμέσως, ὅτι *ἡ γεωδαισιακὴ στρέψις τῶν γραμμῶν καμπυλότητος εἶναι ἴση μὲ τὸ 0* (§ 35). *Τῶν δὲ ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν ἡ γεωδαισιακὴ στρέψις εἶναι ἴση μὲ τὴν («ἀπόλυτον») στρέψιν των*, διότι καὶ δι' αὐτὰς εἶναι $\vartheta =$ σταθ. $\left(=\frac{\pi}{2}\right)$.

δ') *Τύποι τοῦ Bonnet, τοῦ Enneper καὶ τοῦ Burgatti.*

61. *Τύπος τοῦ Bonnet.* — Ὁ τύπος (49') τῆς γεωδαισιακῆς στρέψεως εἰμπορεῖ νὰ λάβῃ πολὺ ἁπλουστέραν μορφήν· πρὸς εὕρεσιν αὐτῆς ἐκλέγομεν ὡς τρίεδρον τῶν ἀξόνων *τὸ συνοδεῦον τρίεδρον* εἰς τὸ M (§ 31, ὑποσημ.) καὶ ὡς u, v τὰ x, y· καθὼς ἤδη εὕρομεν (§ 30), θὰ ἔχωμεν τότε ἐκεῖ:

$$\frac{du}{ds} \equiv \frac{dx}{ds} = \text{συν}\varphi, \quad \frac{dv}{ds} \equiv \frac{dy}{ds} = \text{ημ}\varphi,$$

$$E=1, F=0, G=1, L=\frac{1}{P_1}, M=0, N=\frac{1}{P_2},$$

ὥστε ὁ τύπος (49') γίνεται:

$$(50) \quad \frac{1}{r_\gamma} \equiv \frac{1}{r} + \frac{d\vartheta}{ds} = \left(\frac{1}{P_2} - \frac{1}{P_1}\right)\text{ημ}\varphi\,\text{συν}\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_2} - \frac{1}{P_1}\right)\text{ημ}\,2\varphi$$

(*τύπος τοῦ Bonnet*).

62. *Τύπος τοῦ Enneper.* — Ἡ στρέψις μιᾶς ἀσυμπτωτικῆς γραμ-

---

[1] Ὁ ὅρος αὐτός, καθὼς ἀμέσως βλέπομεν, δὲν ἔχει οὐδεμίαν ἀναλογίαν πρὸς τὸν ὅρον *γεωδαισιακὴ καμπυλότης* (§ 55).

μῆς, ἐπειδὴ καὶ δι' αὐτὴν εἶναι $\vartheta' = 0$ (διότι $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ἐπ' αὐτῆς), θὰ εἶναι:

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} v'^2 & E & L \\ -u'v' & F & M \\ u'^2 & G & N \end{vmatrix} \cdot$$

ἂν δὲ λάβωμεν ὡς παραμετρικὰς γραμμὰς τὰς ἀσυμπτωτικάς, θὰ εἶναι $L = N = 0$ (§ 40) καὶ ὁ τύπος (α) καταντᾷ:

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{D}(Eu'^2 - Gv'^2) \cdot$$

ἀλλ' ἔχομεν ἀκόμη διὰ τὴν ἀσυμπτωτικὴν (u): $u' = 0$ καὶ διὰ τὴν (v): $v' = 0$, ὥστε, ἂν ὀνομάσωμεν $\frac{1}{r_1}$ καὶ $\frac{1}{r_2}$ τὰς στρέψεις τῶν δύο διὰ τοῦ τυχόντος σημείου $M(u, v)$ ἀσυμπτωτικῶν, θὰ εἶναι:

$$(51) \qquad \begin{aligned} \frac{1}{r_1} &= -\frac{MG}{D} v'^2 = -\frac{M}{D} \left(\text{διότι } v'^2 \equiv \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = \frac{dv^2}{Gdv^2} = \frac{1}{G} \right), \\ \frac{1}{r_2} &= \frac{ME}{D} u'^2 = \frac{M}{D} \left(\text{διότι } u'^2 \equiv \left(\frac{du}{ds}\right)^2 = \frac{du^2}{Edu^2} = \frac{1}{E} \right) \cdot \end{aligned}$$

καὶ ἀπὸ τὰς σχέσεις αὐτὰς εὑρίσκομεν ἀμέσως *τὸν τύπον τοῦ Enneper*:

$$(52) \qquad \frac{1}{r_1 r_2} = -\frac{M^2}{D^2} = K \quad (\text{διότι } L = N = 0),$$

δηλ. αἱ στρέψεις τῶν δύο ἀσυμπτωτικῶν εἰς ἕκαστον σημεῖον M τῆς ἐπιφανείας εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι (1) *καὶ τὸ γινόμενον των εἶναι ἴσον μὲ τὴν ὁλικὴν καμπυλότητα τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ ἴδιον σημεῖον* (2).

---

(1) Ἀπὸ τὸν τύπον τοῦ *Bonnet* βλέπομεν ἀμέσως, ὅτι γενικῶς *αἱ γεωδ. στρέψεις δύο διευθύνσεων συμμετρικῶν πρὸς μίαν πρωτεύουσαν τομὴν εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι*. Δύο δὲ τοιαῦται εἶναι καὶ αἱ ἀσυμπτωτικαὶ (§ 30, Σημ.).

(2) Ἂν τὸ M εἶναι *ὑπερβολικὸν* σημεῖον τῆς ἐπιφανείας (§ 29), εἶναι $K < 0$ (§ 45) ὥστε $\frac{M^2}{D^2} > 0$, δηλαδὴ $\frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{r_2}$ *πραγματικὰ* (τύπ. 51)· πραγματικαὶ δὲ εἶναι τότε ἀληθῶς καὶ αἱ ἀσυμπτωτικαὶ (§ 39). Ἂν ὅμως τὸ M εἶναι *ἐλλειπτικὸν* σημεῖον, εἶναι $K > 0$, $\frac{M^2}{D^2} < 0$ καὶ $\frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{r_2}$ *φανταστικά*· φανταστικαὶ δὲ εἶναι τότε πραγ-

ΣΗΜ. Α'. Τὸν τύπον αὐτὸν τοῦ *Enneper* εἰμποροῦμεν νὰ τὸν εὕρωμεν καὶ συντομώτερον ἀπὸ τὸν τύπον (50) τοῦ *Bonnet*· διότι διὰ τὰς ἀσυμπτωτικὰς γραμμὰς ἔχομεν (σελ. 37, Σημ.): $\varepsilon\varphi\varphi = \pm\sqrt{-\frac{P_2}{P_1}}$· ὥστε διὰ τὴν μίαν ἀπὸ αὐτὰς εἶναι:

$$\eta\mu\varphi_1 = \frac{\sqrt{-P_2}}{\sqrt{P_1 - P_2}}, \quad \sigma\upsilon\nu\varphi_1 = \frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_1 - P_2}}$$

καὶ διὰ τὴν ἄλλην: $\eta\mu\varphi_2 = \frac{\sqrt{-P_2}}{\sqrt{P_1 - P_2}}, \quad \sigma\upsilon\nu\varphi_2 = \frac{-\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_1 - P_2}}.$

καὶ ἂν τὰς τιμὰς αὐτὰς τὰς θέσωμεν εἰς τὸν τύπον τοῦ *Bonnet*, εὑρίσκομεν:

$$\frac{1}{r_1} = -\frac{1}{\sqrt{-P_1 P_2}} \quad \text{καὶ} \quad \frac{1}{r_2} = +\frac{1}{\sqrt{-P_1 P_2}}\cdot \quad \text{καὶ ἑπομένως:} \quad \frac{1}{r_1 r_2} = \frac{1}{P_1 P_2} = K.$$

ΣΗΜ. Β'. *Τύπος τοῦ Kommerell.*—Ἂν ἀπὸ τὸν τύπον τοῦ *Bonnet* απα-

---

ματικῶς καὶ αἱ ἀσυμπτωτικαὶ (§ 39). Ἂν τέλος εἶναι τὸ Μ *παραβολικὸν* σημεῖον, θὰ εἶναι $K = 0$, ὥστε καὶ $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2} = 0$. Αἱ δύο ἀσυμπτωτικαὶ διευθύνσεις συμπίπτουν τότε εἰς μίαν (§ 39): *τὴν μέσην παράλληλον* τῶν δύο παραλλήλων, εἰς τὰς ὁποίας τότε ἐκφυλίζεται ἡ δείκτρια τοῦ *Dupin* (Διαφ. Λογ. Β', σελ. 183)· διότι ὁ τύπος: $\varepsilon\varphi\varphi_1 = \pm\sqrt{-\frac{P_2}{P_1}}$ (σελ. 37, Σημ.) δίδει, διὰ $\frac{1}{P_1} = 0$, $\varepsilon\varphi\varphi_1 = 0, \varphi_1 = 0$. Ἡ μηδένισις τῶν στρέψεων τῶν ἀσυμπτωτικῶν ἐκεῖ σημαίνει, ὅτι *τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδόν των (δηλαδὴ τὸ ἐφαπτόμενον τῆς ἐπιφανείας) ἔχει εἰς τὸ Μ ἐπαφὴν 3ης τάξεως πρὸς αὐτὰς (τοὐλάχιστον) καὶ (γενικῶς δὲν διαπερᾷ αὐτὰς* (Διαφ. Λογ. Β', σελ 105 καὶ 110). — Παράδειγμα τοιούτων σημείων παρέχει ἡ *σπεῖρα*: αἱ δύο περιφέρειαι, τὰς ὁποίας γράφουν τ' ἄκρα τῆς πρὸς τὸν ἄξονά της παραλλήλου διαμέτρου τοῦ παράγοντος κύκλου, χωρίζουν τὸ *κοιλόκυρτον* μέρος τῆς σπείρας (τὸ ἐσωτερικὸν) ἀπὸ τὸ *κυρτόν* της (τὸ ἐξωτερικὸν) καὶ τὰ σημεῖά των ὅλα εἶναι *παραβολικὰ* σημεῖα τῆς σπείρας· αἱ περιφέρειαι αὐταὶ εἶναι *ἀσυμπτωτικαὶ* γραμμαὶ τῆς σπείρας (διότι ὄρθιαι κάθετοί των εἶναι αἱ κάθετοι τῆς ἐπιφανείας, εἶναι δὲ καὶ *περιβάλλουσαι* ὅλων τῶν εἰς τὸ κοιλόκυρτον μέρος τῆς σπείρας ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν (αἱ ὁποῖαι προφανῶς δὲν ἐξέρχονται εἰς τὸ κυρτόν της μέρος)· εἰς τὰ σημεῖα λοιπὸν τῶν δύο αὐτῶν περιφερειῶν αἱ δύο ἀσυμπτωτικαὶ διευθύνσεις συμπίπτουν εἰς *μίαν*, τὴν ἐφαπτομένην τῆς μιᾶς ἀπὸ τὰς περιφερείας αὐτάς, ἡ ὁποία ἐφαπτομένη εἶναι συγχρόνως καὶ μία ἀπὸ τὰς *πρωτευούσας* διευθύνσεις (ἐκείνη, τῆς ὁποίας ἡ κάθετος καμπυλότης εἶναι ἴση μὲ τὸ 0)· καὶ τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον τῶν ἀσυμπτωτικῶν τῆς σπείρας εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον μιᾶς τῶν περιφερειῶν αὐτῶν, δηλ. *τὸ ἴδιον τὸ ἐπίπεδον τῆς περιφερείας*, δὲν διαπερᾷ πραγματικῶς τὰς ἀσυμπτωτικάς, ἀφοῦ ἀφίνει ὁλόκληρον τὴν σπεῖραν ἀπὸ τὸ ἓν μέρος του.

λείψωμεν τὴν γωνίαν φ, λαμβάνοντες τὴν τιμήν της ἀπὸ τὸν τύπον (25) τοῦ *Euler*:

$$\text{συν}^2\varphi=\frac{\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{P_2}}{\frac{1}{P_1}-\frac{1}{P_2}},\quad \text{ὥστε:}\ \text{ημ}^2\varphi=\frac{\frac{1}{P_1}-\frac{1}{\varrho_1}}{\frac{1}{P_1}-\frac{1}{P_2}},$$

εὑρίσκομεν:

$$\frac{1}{r^2_\gamma}=\left(\frac{1}{P_1}-\frac{1}{\varrho_1}\right)\cdot\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{P_2}\right)\cdot \tag{53}$$

ὁ τύπος αὐτὸς ἐκφράζει τὴν γεωδαισιακὴν στρέψιν τῆς τυχούσης ἐπιφανειακῆς καμπύλης διὰ τῆς καθέτου καμπυλότητός της $\frac{1}{\varrho_1}$ *καὶ τῶν πρωτευουσῶν καμπυλοτήτων τῆς ἐπιφανείας* καὶ εὑρέθη ὑπὸ τοῦ *Kommerell*.

Ὁ ἴδιος τύπος γράφεται προφανῶς καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\frac{1}{r^2_\gamma}=\left(\frac{1}{P_1}-\frac{\text{συν}\vartheta}{\varrho}\right)\cdot\left(\frac{\text{συν}\vartheta}{\varrho}-\frac{1}{P_2}\right),$$

ἢ καὶ ὡς ἑξῆς:

$\frac{1}{r^2_\gamma}=-\frac{\text{συν}^2\vartheta}{\varrho^2}+\frac{\text{συν}\vartheta}{\varrho}\cdot H-K$ (H καὶ K ἡ μέση καὶ ἡ ὁλικὴ καμπυλότης τῆς ἐπιφανείας) καὶ περιέχει τὸν τύπον τοῦ *Enneper* ὡς *μερικὴν* περίπτωσιν (διὰ $\frac{1}{\varrho_1}=0$).

63. *Τύπος τοῦ Burgatti.* — Ἂν τὸν τύπον τοῦ *Bonnet*:

$$\frac{1}{r_\gamma}=\left(\frac{1}{P_2}-\frac{1}{P_1}\right)\text{ημφσυνφ}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_2}-\frac{1}{P_1}\right)\text{ημ}2\varphi \tag{50}$$

τὸν ἐφαρμόσωμεν εἰς τὰς καμπύλας τὰς ἐχούσας τὴν διεύθυνσιν $\varphi=\frac{\pi}{4}$, δηλ. τὴν διχοτομοῦσαν τὰς πρωτευούσας, εὑρίσκομεν:

$$\frac{1}{r_{\gamma_1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_2}-\frac{1}{P_1}\right)\cdot \tag{α}$$

καὶ ἂν ἀπαλείψωμεν τὴν διαφορὰν $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_2}-\frac{1}{P_1}\right)$ μεταξὺ τῶν σχέσεων (50) καὶ (α), εὑρίσκομεν:

$$\frac{1}{r_\gamma}=\frac{1}{r_{\gamma_1}}\text{ημ}\,2\varphi\cdot \tag{50'}$$

ὁ τύπος αὐτὸς ἐκφράζει τὴν γεωδαισιακὴν στρέψιν $\frac{1}{r_\gamma}$ *τῶν καμπύλων τῆς τυχούσης διευθύνσεως διὰ τῆς γεωδαισιακῆς στρέψεως* $\frac{1}{r_{\gamma_1}}$ *τῆς διχοτομούσης καὶ τῆς γωνίας φ.*

Ὁ τύπος (50′) λαμβάνει ἄλλην μορφήν, ἂν θέσωμεν $\varphi = \frac{\pi}{4} \pm \omega$, ὅπου ω εἶναι ἡ γωνία τῶν δύο διευθύνσεων τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς τὰς γεωδαισιακὰς στρέψεις $\frac{1}{r_\gamma}$ καὶ $\frac{1}{r_{\gamma_1}}$· διότι τότε γράφεται:

$$\frac{1}{r_\gamma} = \frac{1}{r_{\gamma_1}} \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} \pm 2\omega\right) = \frac{1}{r_{\gamma_1}} \sigma\upsilon\nu\, 2\omega = \frac{1}{r_{\gamma_1}} (\sigma\upsilon\nu^2\omega - \eta\mu^2\omega) =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{r_{\gamma_1}} + \frac{\eta\mu^2\omega}{r_{\gamma_2}},$$

ὅπου $\frac{1}{r_{\gamma_2}} = -\frac{1}{r_{\gamma_1}}$ εἶναι ἡ γεωδαισιακὴ στρέψις τῆς ἄλλης διχοτομούσης διευθύνσεως $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ (§ 62, ὑποσημ.). Ὁ τύπος αὐτὸς:

$$\frac{1}{r_\gamma} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{r_{\gamma_1}} + \frac{\eta\mu^2\omega}{r_{\gamma_2}} \tag{51}$$

εἶναι *ἐντελῶς τῆς ἰδίας μορφῆς* μὲ τὸν τοῦ *Euler* διὰ τὰς καμπυλότητας τῶν καθέτων τομῶν (τύπ. 25) καὶ εὑρέθη ἀπὸ τὸν *Burgatti*. Αἱ δύο γεωδαισιακαὶ στρέψεις $\frac{1}{r_{\gamma_1}}$ καὶ $\frac{1}{r_{\gamma_2}}$ (αἱ ἀπολύτως μεγαλύτεραι ἀπὸ ὅλας τὰς ἄλλας καὶ ἀπολύτως ἴσαι) λέγονται *πρωτεύουσαι* γεωδαισιακαὶ στρέψεις.

ΣΗΜ. Α′. *Διερεύνησις τῶν γεωδ. στρέψεων πέριξ τοῦ Μ.*—Ἀπὸ τὸν τύπον τοῦ *Burgatti*, ἢ καὶ ἀμέσως ἀπὸ τὸν τοῦ *Bonnet*, βλέπομεν, ὅτι ὅλαι αἱ πέριξ τοῦ Μ γεωδαισιακαὶ στρέψεις δίδονται διὰ $\varphi = 0 \ldots \frac{\pi}{4}$· διότι αἱ γεωδ. στρέψεις δύο διευθύνσεων συμμετρικῶν πρὸς τὰς διχοτομούσας εἶναι ἴσαι καὶ δύο συμμετρικῶν πρὸς τὰς πρωτευούσας τομὰς ἀντίθετοι. Ἡ γεωδ. λοιπὸν στρέψις αὐξάνει (ἀπολύτως) συνεχῶς ἀπὸ 0 εἰς $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_2} - \frac{1}{P_1}\right)$ $\left(\delta\iota\grave{\alpha}\ \varphi = 0 \ldots \frac{\pi}{4}\right)$, ἔπειτα ἐλαττώνεται συνεχῶς ἀπὸ $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_2} - \frac{1}{P_1}\right)$ εἰς 0 $\left(\delta\iota\grave{\alpha}\ \varphi = \frac{\pi}{4} \ldots \frac{\pi}{2}\right)$ καὶ οὕτω καθεξῆς, ἐναλλάξ. Καθὼς δὲ ὁ τύπος τοῦ *Euler* ὁδηγεῖ γεωμετρικῶς εἰς τὴν κατασκευὴν τῆς δεικτρίας *τῶν καμπυλοτήτων* (τοῦ *Dupin*), εἶμπορεῖ καὶ ὁ τύπος τοῦ *Burgatti* νὰ ἑρμηνευθῇ γεωμετρικῶς διὰ μιᾶς *δεικτρίας τῶν γεωδ. στρέψεων*, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο συζυγεῖς *ἰσοσκελεῖς ὑπερβολὰς* (ἐπὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου) μὲ ἡμιάξονα $\sqrt{\frac{1}{r_{\gamma_1}}}$ καὶ ἀσυμπτώτους τὰς ἐφαπτομένας τῶν πρωτευουσῶν τομῶν:

τὸ τετράγωνον τῆς τυχούσης ἡμιδιαμέτρου εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα γεωδ. στρέψεως τῶν καμπύλων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἐφαπτομένην τὴν ἡμιδιάμετρον.

ΣΗΜ. Β′. Ἄξιαι σημειώσεως εἶναι καὶ αἱ δύο φανεραὶ σχέσεις:

$\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{r_{\gamma_1}}=\frac{1}{P_1}$, $\frac{1}{\varrho_2}-\frac{1}{r_{\gamma_2}}=\frac{1}{P_2}$. $\left(\frac{1}{\varrho_1}=\frac{1}{\varrho_2}\right.$ ἡ καμπυλότης τῶν διχοτομουσῶν καθέτων τομῶν: $\varphi=\frac{\pi}{4}$ καὶ $\left.\varphi=\frac{3\pi}{4}\right)$ καὶ ἡ ἀπὸ αὐτὰς καὶ τὴν τοῦ *Euler* παραγομένη:

$\frac{1}{\varrho}=\frac{1}{\varrho_1}+\frac{\eta\mu 2\omega}{r_{\gamma_1}}\equiv\frac{1}{\varrho_2}-\frac{\eta\mu 2\omega}{r_{\gamma_2}}$. (ὅπου ἡ ω ἔχει σημεῖον θετ ἢ ἀρνητ. ἀναλόγως τῆς φορᾶς της).

ΣΗΜ. Γ′. Ἂν τὸν τύπον (50′) τὸν ἐφαρμόσωμεν κατὰ σειρὰν εἰς τὴν τυχοῦσαν καμπύλην καὶ εἰς τὴν ἀσυμπτωτικήν, εὑρίσκομεν

$$\frac{1}{r_\gamma}=\frac{1}{\sqrt{-P_1P_2}}\frac{\eta\mu 2\varphi}{\eta\mu 2\varphi_1}=\frac{1}{\sqrt{-P_1P_2}}\frac{\sigma\upsilon\nu 2\omega}{\sigma\upsilon\nu 2\omega_1},$$

δηλ. γενίκευσιν τοῦ τύπου τοῦ *Enneper*.

ΣΗΜ. Δ′. *Γενίκευσις τοῦ τύπου τοῦ Burgatti.*—Ἂν ἐκλέξωμεν μίαν τυχοῦσαν διεύθυνσιν (δ_1) ὡς *ἀρχικὴν* καὶ ὀνομάσωμεν φ_1 τὴν γωνίαν της μὲ τὴν πρωτεύουσαν διεύθυνσιν τῆς $\frac{1}{P_1}$ καὶ ω τὴν γωνίαν τῆς τυχούσης ἄλλης διευθύνσεως (δ) μὲ τὴν (δ_1), θὰ εἶναι: $\varphi=\varphi_1+\omega$ (μὲ ω θετ. ἢ ἀρνητ. ἀναλόγως τῆς φορᾶς) καί:

$$\frac{1}{r_\gamma}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_2}-\frac{1}{P_1}\right)\eta\mu(2\varphi_1+2\omega)=$$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_2}-\frac{1}{P_1}\right)(\sigma\upsilon\nu 2\varphi_1\eta\mu 2\omega+\sigma\upsilon\nu 2\omega\eta\mu 2\varphi_1)$ καὶ ἐπειδή: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_2}-\frac{1}{P_1}\right)\eta\mu 2\varphi_1=$ $=\frac{1}{r_{\gamma_1}}$, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{1}{r_\gamma}=\frac{\sigma\upsilon\nu 2\omega}{r_{\gamma_1}}+\eta\mu 2\omega\cdot\frac{\sigma\varphi\, 2\varphi_1}{r_{\gamma_1}} \text{ ἢ καί:}$$

$$\frac{1}{r_\gamma}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega-\eta\mu^2\omega}{r_{\gamma_1}}+\frac{1}{2}\eta\mu\, 2\omega\frac{\sigma\varphi\varphi_1-\varepsilon\varphi\varphi_1}{r_{\gamma_1}}.$$

καὶ ἂν, διὰ τὴν συμμετρίαν, εἰσαγάγωμεν καὶ τὴν στρέψιν $\frac{1}{r_{\gamma_2}}=-\frac{1}{r_{\gamma_1}}$ τῆς διευθύνσεως (δ_2), τῆς συμμετρικῆς τῆς (δ_1) ὡς πρὸς τὴν πρωτεύουσαν, ὁ τύπος γίνεται:

$$\frac{1}{r_\gamma}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{r_{\gamma_1}}+\frac{\eta\mu^2\omega}{r_{\gamma_2}}+\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma\varphi\varphi_1}{r_{\gamma_1}}-\frac{\varepsilon\varphi\varphi_2}{r_{\gamma_2}}\right)\eta\mu 2\omega. \tag{52}$$

Διὰ τὴν μερικὴν περίπτωσιν $\varphi_1=\frac{\pi}{4}$, ἐπανευρίσκομεν τὸν τύπον τοῦ *Burgatti*. Εἰς δὲ τὴν μερικὴν περίπτωσιν, ὅπου (δ_1) καὶ (δ_2) εἶναι αἱ *ἀσυμπτωτικαὶ* διευθύνσεις, εἶναι $\varepsilon\varphi\varphi_1 = \sqrt{-\frac{P_2}{P_1}}$ καὶ ὁ γενικὸς τύπος (52) καταντᾷ:

$$(52') \qquad \frac{1}{r_\gamma} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{r_{\gamma_1}} + \frac{\eta\mu^2\omega}{r_{\gamma_2}} + \frac{1}{2}\,\eta\mu 2\omega\left(\frac{1}{r_{\gamma_1}}\sqrt{-\frac{P_1}{P_2}} + \frac{1}{r_{\gamma_2}}\sqrt{-\frac{P_2}{P_1}}\right).$$

(Εἰς τὴν περίπτωσιν *ἰσοσκελικοῦ* σημείου ($P_2 = -P_1$) ὁ τύπος αὐτὸς συμπίπτει πάλιν μὲ τὸν τοῦ *Burgatti*).

ε') *Ἀναλλοίωτοι.*

64. *Ἡ κάθετος καμπυλότης καὶ ἡ γεωδαισιακὴ στρέψις ὡς ἀναλλοίωτοι.* — Ἀπὸ τὸν τύπον τοῦ *Meusnier*: $\frac{1}{\varrho_\varkappa} = \frac{\sigma\upsilon\nu\vartheta}{\varrho}$ βλέπομεν, ὅτι τὸ πηλίκον $\frac{\sigma\upsilon\nu\vartheta}{\varrho}$ δηλ. *ἡ κάθετος καμπυλότης* (§ 52) *μένει ἡ ἰδία δι' ὅλας τὰς καμπύλας τῆς ἐπιφανείας ὅσαι ἔχουν τὴν ἰδίαν ἐφαπτομένην*, μολονότι οἱ δύο ὅροι της: συνθ καὶ ϱ μεταβάλλονται (γενικῶς) ἀπὸ καμπύλην εἰς καμπύλην. Ἓν τοιοῦτο ποσὸν λέγεται συντόμως *ἀναλλοίωτος* (ὡς πρὸς τὴν ἐφαπτομένην). Ἡ ἀναλλοίωτος $\frac{\sigma\upsilon\nu\vartheta}{\varrho}$ ὀνομάζεται *τῆς β' τάξεως* (διότι περιέχει τὰ διαφορικὰ τῶν συντεταγμένων α' καὶ β' τάξεως *μόνον*). — Μίαν δευτέραν ἀναλλοίωτον παρέχει ὁ τύπος τοῦ *Bonnet*:

$$\frac{1}{r_\gamma} \equiv \frac{1}{r} + \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_2} - \frac{1}{P_1}\right)\eta\mu 2\varphi,$$

δηλ. τὴν *γεωδαισιακὴν στρέψιν*: $\frac{1}{r} + \frac{d\vartheta}{ds}$ (§ 60). Ἡ ἀναλλοίωτος αὐτὴ εἶναι *τῆς γ' τάξεως*.

65. *Ἀναλλοίωτος τοῦ Laguerre.* — Ἀναλλοίωτος τῆς β' τάξεως δὲν ὑπάρχει προφανῶς ἄλλη ἀπὸ τὴν $\frac{\sigma\upsilon\nu\vartheta}{\varrho}$ γ' ὅμως τάξεως ὑπάρχουν δύο: ἡ γεωδαισιακὴ στρέψις καὶ μία ἄλλη, ἡ ὁποία περιέχει *τὴν παράγωγον τῆς ἀκτῖνος καμπυλότητος*: $\frac{d\varrho}{ds}$ καὶ εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς.

Ἀπὸ τοὺς τύπους τοῦ *Euler* καὶ τοῦ *Meusnier* ἔχομεν:

$$(\alpha)\quad \frac{\sigma\upsilon\nu\vartheta}{\varrho}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}{P_1}+\frac{\eta\mu^2\varphi}{P_2}\cdot$$

ἂν τώρα θεωρήσωμεν μίαν καμπύλην τῆς ἐπιφανείας, τὰ ποσά: $\sigma\upsilon\nu\vartheta$, $\frac{1}{\varrho}$, φ, $\frac{1}{P_1}$ καὶ $\frac{1}{P_2}$ εἶναι ὅλα, κατὰ μῆκος τῆς καμπύλης, συναρτήσεις τοῦ τόξου της s· ἂς παραγωγίσωμεν λοιπὸν τὸν τύπον (α) ὡς πρὸς s· θὰ ἔχωμεν (ἂν οἱ τόνοι παριστοῦν τὰς παραγώγους ὡς πρὸς τὸ s):

$$\sigma\upsilon\nu\vartheta\left(\frac{1}{\varrho}\right)'-\frac{1}{\varrho}\eta\mu\vartheta.\vartheta'=\sigma\upsilon\nu^2\varphi\left(\frac{1}{P_1}\right)'+\eta\mu^2\varphi\left(\frac{1}{P_2}\right)'+\left(\frac{1}{P_2}-\frac{1}{P_1}\right)\eta\mu 2\varphi.\varphi',$$

ἢ καί:

$$(\beta)\quad -\frac{1}{\varrho}.\varrho'-\varepsilon\varphi\vartheta.\vartheta'=\left[\sigma\upsilon\nu^2\varphi\left(\frac{1}{P_1}\right)'+\eta\mu^2\varphi\left(\frac{1}{P_2}\right)'\right]\frac{\varrho}{\sigma\upsilon\nu\vartheta}+\frac{2\varrho}{\sigma\upsilon\nu\vartheta}\frac{1}{r_\gamma}\varphi'\cdot$$

θὰ ὑπολογίσωμεν τώρα τὸ φ' καὶ πρὸς συντόμευσιν τῶν τύπων ἐκλέγομεν ὡς παραμετρικὰς γραμμὰς τὰς γραμμὰς καμπυλότητος. Ἔχομεν τότε ἀπὸ τὸν τύπον (9) τῆς σελ. 23, ἂν θέσωμεν $F=0$, $k_1=0$:

$$\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{E}{\sqrt{E}.\sqrt{E+k_2^2G}}=\frac{\sqrt{E}\,du}{ds}=\sqrt{E}.u',\quad \eta\mu\varphi=\sqrt{G}.v'$$

καὶ ἑπομένως:
$$\varphi'=\begin{vmatrix}\sigma\upsilon\nu\varphi & -\eta\mu\varphi.\varphi' \\ \eta\mu\varphi & \sigma\upsilon\nu\varphi.\varphi'\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}\sqrt{E}\,u' & \sqrt{E}.u''+\dfrac{1}{2\sqrt{E}}\left(E_u u'^2+E_v u'v'\right) \\ \sqrt{G}\,v' & \sqrt{G}.v''+\dfrac{1}{2\sqrt{G}}\left(G_u u'v'+G_v v'^2\right)\end{vmatrix}.\quad (\gamma)$$

ἂν ὅμως παραβάλωμεν τὴν ὁρίζουσαν (γ) μὲ τὴν ὁρίζουσαν τοῦ τύπου (45), ἡ ὁποία τώρα (ὅπου $F=0$) γίνεται ἁπλουστέρα:

$$\frac{1}{\varrho_\varepsilon}=\frac{1}{\sqrt{EG}}\begin{vmatrix} Eu' & \frac{1}{2}E_u u'^2+E_v u'v'-\frac{1}{2}G_u v'^2+Eu'' \\ Gv' & -\frac{1}{2}E_v u'^2+G_u u'v'+\frac{1}{2}G_v v'^2+Gv'' \end{vmatrix},$$

βλέπομεν, ὅτι εἰμποροῦμεν νὰ γράψωμεν τὴν (γ) καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\varphi'=\frac{1}{\sqrt{EG}}\begin{vmatrix} Eu' & \left(\frac{1}{2}E_u u'^2+E_v u'v'-\frac{1}{2}G_u v'^2+Eu''\right)+\left(\frac{1}{2}G_u v'^2-\frac{1}{2}E_v u'v'\right) \\ Gv' & \left(-\frac{1}{2}E_v u'^2+G_u u'v'+\frac{1}{2}G_v v'^2+Gv''\right)+\left(-\frac{1}{2}G_u u'v'+\frac{1}{2}E_v u'^2\right) \end{vmatrix},$$

δηλαδὴ:

$$\varphi'=\frac{1}{\varrho_\varepsilon}+\frac{1}{2\sqrt{EG}}\begin{vmatrix} Eu' & G_u v'^2-E_v u'v' \\ Gv' & -G_u u'v'+E_v u'^2 \end{vmatrix},$$

ἢ καὶ:

$$\varphi'=\frac{1}{\varrho_\varepsilon}+\frac{G_u v'}{2\sqrt{EG}}\begin{vmatrix} Eu' & v' \\ Gv' & -u' \end{vmatrix}+\frac{E_v u'}{2\sqrt{EG}}\begin{vmatrix} Eu' & -v' \\ Gv' & u' \end{vmatrix}.$$

ἀλλὰ αἱ δύο αὐταὶ ὁρίζουσαι εἶναι ἴσαι μὲ $-(Eu'^2+Gv'^2)$ ἡ πρώτη καὶ $+(Eu'^2+Gv'^2)$ ἡ δευτέρα, δηλαδὴ μὲ -1 καὶ $+1$ (διότι $Edu^2+Gdv^2=ds^2$), ὥστε ἔχομεν:

$$(\delta)\qquad \varphi'=\frac{1}{\varrho_\varepsilon}+\frac{1}{2\sqrt{EG}}(E_v u'-G_u v')\cdot$$

ἡ τιμὴ αὐτὴ τοῦ φ' μετασχηματίζει τὸν τύπον (β) ὡς ἑξῆς:

$$-\frac{1}{\varrho}\cdot\varrho'-\varepsilon\varphi\vartheta.\vartheta'=\left[\sigma\upsilon\nu^2\varphi\left(\frac{1}{P_1}\right)'+\eta\mu^2\varphi\left(\frac{1}{P_2}\right)'\right]\frac{\varrho}{\sigma\upsilon\nu\vartheta}+2\varepsilon\varphi\vartheta.\frac{1}{r_\gamma}+$$

$$+\frac{\varrho}{\sigma\upsilon\nu\vartheta}\cdot\frac{1}{r_\gamma}\cdot\frac{E_v u'-G_u v'}{\sqrt{EG}},$$

ἢ καὶ:

$$(\varepsilon)\qquad -\frac{1}{\varrho}\cdot\varrho'-\varepsilon\varphi\vartheta.\left(\frac{2}{r}+3\vartheta'\right)=\left[\sigma\upsilon\nu^2\varphi\left(\frac{1}{P_1}\right)'+\eta\mu^2\varphi\left(\frac{1}{P_2}\right)'+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r_\gamma}\,\frac{E_v u'-G_u v'}{\sqrt{EG}}\right]\cdot\varrho_\varkappa.$$

'Από τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν βλέπομεν, ὅτι τὸ πρῶτον μέλος της, δηλ. ἡ παράστασις:

$$(53) \qquad -\frac{1}{\varrho}\cdot\varrho' - \varepsilon\varphi\vartheta\left(\frac{2}{r}+3\vartheta'\right),$$

εἶναι *ἀναλλοίωτος*, διότι προφανῶς ἀναλλοίωτον εἶναι τὸ δεύτερον μέλος της. Ἡ παράστασις αὐτὴ (53) εἶναι ἡ δευτέρα ἀναλλοίωτος τῆς τρίτης τάξεως καὶ εὑρέθη ἀπὸ τὸν *Laguerre*.

ΣΗΜ. Ἡ ἀγκύλη τοῦ β' μέλους τῆς ἐξισώσεως (ε) εἰμπορεῖ νὰ λάβῃ καὶ ἄλλην μορφήν, τὴν ἑξῆς:

$$\mathrm{E}\frac{\partial\left(\frac{1}{\mathrm{P}_1}\right)}{\partial u}u'^3+3\mathrm{E}\frac{\partial\left(\frac{1}{\mathrm{P}_1}\right)}{\partial v}u'^2v'+3\mathrm{G}\frac{\partial\left(\frac{1}{\mathrm{P}_2}\right)}{\partial u}u'v'^2+\mathrm{G}\frac{\partial\left(\frac{1}{\mathrm{P}_2}\right)}{\partial v}v'^3,$$

ἢ καὶ

$$-\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{P}_1^{\,2}}\frac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial u}u'^3-3\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{P}_1^{\,2}}\frac{\partial \mathrm{R}_1}{\partial v}u'^2v'-3\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{R}_2^{\,2}}\frac{\partial \mathrm{R}_2}{\partial u}u'v'^2-\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{R}_2^{\,2}}\frac{\partial \mathrm{R}_2}{\partial v}v'^3.$$

Πραγματικῶς, εἶναι κατὰ πρῶτον:

$$\sigma\upsilon\nu^2\varphi\left(\frac{1}{\mathrm{P}_1}\right)'+\eta\mu^2\varphi\left(\frac{1}{\mathrm{P}_2}\right)'=\mathrm{E}u'^2\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{\mathrm{P}_1}\right)}{\partial u}u'+\frac{\partial\left(\frac{1}{\mathrm{P}_1}\right)}{\partial v}v'\right)+$$

$$+\mathrm{G}v'^2\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{\mathrm{P}_2}\right)}{\partial u}u'+\frac{\partial\left(\frac{1}{\mathrm{P}_2}\right)}{\partial v}v'\right),$$

$$\delta\eta\lambda. =\mathrm{E}\frac{\partial\left(\frac{1}{\mathrm{P}_1}\right)}{\partial u}u'^3+\mathrm{E}\frac{\partial\left(\frac{1}{\mathrm{P}_1}\right)}{\partial v}u'^2v'+\mathrm{G}\frac{\partial\left(\frac{1}{\mathrm{P}_2}\right)}{\partial u}v'^2u'+\mathrm{G}\frac{\partial\left(\frac{1}{\mathrm{P}_2}\right)}{\partial v}v'^3.$$

μένει λοιπὸν νὰ δείξωμεν, ὅτι:

$$\frac{1}{r_\gamma}\cdot\frac{\mathrm{E}_v u'-\mathrm{G}_u v'}{\sqrt{\mathrm{EG}}}=2\mathrm{E}\frac{\partial\left(\frac{1}{\mathrm{P}_1}\right)}{\partial v}u'^2v'+2\mathrm{G}\frac{\partial\left(\frac{1}{\mathrm{P}_2}\right)}{\partial u}u'v'^2,$$

ἢ καί:

$$\left(\frac{1}{\mathrm{P}_2}-\frac{1}{\mathrm{P}_1}\right)\sqrt{\mathrm{EG}}u'v'.\frac{\mathrm{E}_v u'-\mathrm{G}_u v'}{\sqrt{\mathrm{EG}}}=2\mathrm{E}\frac{\partial\left(\frac{1}{\mathrm{P}_1}\right)}{\partial v}u'^2v'+2\mathrm{G}\frac{\partial\left(\frac{1}{\mathrm{P}_2}\right)}{\partial u}u'v'^2,$$

δηλ.
$$\left(\frac{1}{\mathrm{P}_2}-\frac{1}{\mathrm{P}_1}\right)(\mathrm{E}_v u'-\mathrm{G}_u v')=2\mathrm{E}\frac{\partial\left(\frac{1}{\mathrm{P}_1}\right)}{\partial v}u'+2\mathrm{G}\frac{\partial\left(\frac{1}{\mathrm{P}_2}\right)}{\partial u}v'. \qquad (\alpha)$$

ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν ὅμως (21΄) (σελ. 33) τὴν δίδουσαν τὰς καμπυλότητας $\frac{1}{P_1}$, $\frac{1}{P_2}$, ἡ ὁποία τώρα, ὅπου $F=M=0$, καταντᾷ:

$$EG\,\frac{1}{P^2}-(EN+GL)\frac{1}{P}+LN=0,$$

εὑρίσκομεν:

$$\frac{1}{P_1}=\frac{L}{E},\ \frac{1}{P_2}=\frac{N}{G},\ \text{ὥστε:}\ \frac{\partial\left(\frac{1}{P_1}\right)}{\partial v}=\frac{L_v}{E}-\frac{LE_v}{E^2},\quad \frac{\partial\left(\frac{1}{P_2}\right)}{\partial u}=\frac{N_u}{G}-\frac{NG_u}{G^2}.$$

καὶ ἂν λάβωμεν τὰς τιμὰς τῶν L_v, N_u ἀπὸ τὰς δύο ἐξισώσεις τῶν *Mainardi—Codazzi* (43β) καὶ (44β) (σελ. 60):

$$L_v=\frac{1}{2}\left(\frac{L}{E}+\frac{N}{G}\right)E_v \qquad N_u=\frac{1}{2}\left(\frac{L}{E}+\frac{N}{G}\right)G_u,$$

εὑρίσκομεν:

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{P_1}\right)}{\partial v}=\frac{E_v}{2E}\left(\frac{N}{G}-\frac{L}{E}\right)=\frac{E_v}{2E}\left(\frac{1}{P_2}-\frac{1}{P_1}\right),\ \frac{\partial\left(\frac{1}{P_2}\right)}{\partial u}=\frac{G_u}{2G}\left(\frac{L}{E}-\frac{N}{G}\right)=\frac{G_u}{2G}\left(\frac{1}{P_1}-\frac{1}{P_2}\right)$$

καὶ ἂν τέλος θέσωμεν τὰς τιμὰς αὐτὰς τῶν $\frac{\partial\left(\frac{1}{P_1}\right)}{\partial v}$, $\frac{\partial\left(\frac{1}{P_2}\right)}{\partial u}$ εἰς τὴν ἰσότητα (α), τὴν ὁποίαν ἐπρόκειτο ν' ἀποδείξωμεν, προκύπτει ταὐτότης.

66. *Ἐφαρμογὴ τῆς ἀναλλοιώτου τοῦ Laguerre: περίπτωσις ἀοριστίας τοῦ τύπου τοῦ Meusnier.* — Ἂν ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον τοῦ *Meusnier* εἰς μίαν καμπύλην τῆς ἐπιφανείας ἐφαπτομένην (εἰς τὸ M) μιᾶς ἀπὸ τὰς δύο ἀσυμπτωτικάς, εὑρίσκομεν:

$$\frac{\text{συν}\vartheta}{\varrho}=\frac{1}{\varrho_1}=0\cdot$$

ἂν λοιπὸν εἶναι (εἰς τὸ M) $\text{συν}\vartheta \gtrless 0$, θὰ ἔχωμεν: $\frac{1}{\varrho}=0$, δηλ. ἀπὸ *τὰς καμπύλας τῆς ἐπιφανείας τὰς ἐφαπτομένας (εἰς τὸ M) μιᾶς ἀσυμπτωτικῆς ὅσαι δὲν ἔχουν ἐκεῖ ὡς ἐγγύτατον ἐπίπεδον τὸ ἐφαπτόμενον τῆς ἐπιφανείας ἔχουν εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ἀκτῖνα καμπυλότητος* ∞. Διὰ τὰς καμπύλας ὅμως, *τῶν ὁποίων τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον συμπίπτει μὲ τὸ ἐφαπτόμενον,* εἶναι καὶ $\text{συν}\vartheta=0$ *καὶ ἑπομένως δι' αὐτὰς ὁ τύπος τοῦ Meusnier λαμβάνει τὴν ἀπροσδιόριστον μορφήν:*

$$\varrho=\frac{0}{0}$$

καὶ δὲν ὁρίζει τὸ ϱ (¹).

(¹) Ἓν ἁπλούστατον παράδειγμα τῆς ἀοριστίας αὐτῆς παρέχει τὸ ἐπίπεδον:

Τὴν ἐξαιρετικὴν αὐτὴν περίπτωσιν ἐθεώρησε πρῶτος ὁ *Bonnet.* Ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος ϱ ὑπολογίζεται τότε ὡς ἑξῆς:

Ἂς ὀνομάσωμεν $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{\varrho}$ τὴν στρέψιν καὶ τὴν καμπυλότητα τῆς θεωρουμένης καμπύλης καὶ $\frac{1}{r_\alpha}$, $\frac{1}{\varrho_\alpha}$ τὰ ἀντίστοιχα ποσὰ τῆς ἀσυμπτωτικῆς.

Αἱ δύο ἐκφράσεις:

$$\frac{1}{r}+\frac{d\vartheta}{ds} \qquad \text{καὶ} \qquad -\frac{\text{συν}\vartheta}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{ds}-\frac{\text{ημ}\vartheta}{\varrho}\left(\frac{2}{r}+3\frac{d\vartheta}{ds}\right)$$

ἔχουν εἰς τὸ M, ὡς ἀναλλοίωτοι, τὰς ἰδίας τιμὰς καὶ διὰ τὴν καμπύλην καὶ διὰ τὴν ἀσυμπτωτικήν· καὶ ἡ μὲν γωνία ϑ εἶναι (εἰς τὸ M) ὀρθὴ *καὶ διὰ τὰς δύο αὐτὰς γραμμάς*· ἀλλὰ ἡ $\frac{d\vartheta}{ds}$ εἶναι ἀναγκαστικῶς ἴση μὲ τὸ 0 *μόνον* εἰς τὴν ἀσυμπτωτικὴν (διότι ἐπ' αὐτῆς εἶναι *διαρκῶς* $\vartheta=0$). Θὰ ἔχωμεν λοιπόν:

$$\frac{1}{r}+\frac{d\vartheta}{ds}=\frac{1}{r_\alpha}, \qquad \frac{1}{\varrho}\left(\frac{2}{r}+3\frac{d\vartheta}{ds}\right)=\frac{2}{\varrho_\alpha r_\alpha}$$

καὶ ἂν ἀπαλείψωμεν τὸ $\frac{d\vartheta}{ds}$ μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν σχέσεων εὑρίσκομεν:

(54) $$\varrho=\frac{1}{2}\varrho_\alpha\cdot\left(3-\frac{r_\alpha}{r}\right)$$ (τύπος τοῦ *Bonnet*).

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτήν, ἂν ὑποθέσωμεν γνωστὰς τὰς ἀκτῖνας ϱ_α, r_α τῆς ἀσυμπτωτικῆς, εὑρίσκομεν ἑκάστην φορὰν τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος ϱ, ὅταν δοθῇ ἡ ἀκτὶς στρέψεως r. Ἂν π. χ. ζητήσωμεν τὴν ἀκτῖνα ϱ τῆς τομῆς τῆς ἐπιφανείας ἀπὸ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδόν της, θὰ ἔχωμεν: $r=\infty$ καὶ ἑπομένως:

(55) $$\varrho=\frac{3}{2}\varrho_\alpha$$ (τύπος τοῦ *Beltrami*).

αἱ κάθετοι τομαί του εἰς τὸ τυχὸν σημεῖόν του M εἶναι ὅλαι εὐθεῖαι γραμμαὶ καὶ ἑπομένως ἔχουν $\frac{1}{\varrho_1}=0$· αἱ καμπύλαι του ὅμως αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν εὐθειῶν αὐτῶν εἰς τὸ M δὲν ἔχουν ἐκεῖ ἀναγκαστικῶς $\frac{1}{\varrho}=0$· διότι δι' ὅλας αὐτὰς εἶναι συν$\vartheta=0$.

67. *Ὑπολογισμὸς τῆς ἀκτῖνος καμπυλότητος τῶν ἀσυμπτωτικῶν.*— Ὁ τύπος (54) προϋποθέτει γνωστὰς τὰς δύο ἀκτῖνας τῆς ἀσυμπτωτικῆς. Καὶ τὴν μὲν στρέψιν $\frac{1}{r_\alpha}$ εὑρήκαμεν ἤδη (τύπος τοῦ *Enneper*, § 62), μένει λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὴν καμπυλότητα. Ἔχομεν κατὰ πρῶτον ἀπὸ τὸν τύπον (δ) τῆς σελ. 80 (ἐπειδὴ διὰ τὴν ἀσυμπτωτικὴν εἶναι προφανῶς $\left(\frac{1}{\varrho_\alpha}\right)_\varepsilon \equiv \frac{1}{\varrho_\alpha}$):

$$\text{(α)} \qquad \frac{1}{\varrho_\alpha} = \varphi' - \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(E_v u' - G_u v'\right)\cdot$$

εἰς τὴν σημείωσιν ὅμως τῆς § 65 εὑρήκαμεν, ὅτι:

$$\left(\frac{1}{P_2} - \frac{1}{P_1}\right)\left(E_v u' - G_u v'\right) = 2E\cdot\frac{\partial\left(\frac{1}{P_1}\right)}{\partial v}u' + 2G\cdot\frac{\partial\left(\frac{1}{P_2}\right)}{\partial u}v',$$

ὥστε ὁ τύπος (α) γίνεται:

$$\frac{1}{\varrho_\alpha} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}u' + \frac{\partial\varphi}{\partial v}v' - \frac{1}{\sqrt{EG}}\left(E\,\frac{\partial\left(\frac{1}{P_1}\right)}{\partial v}u' + G\,\frac{\partial\left(\frac{1}{P_2}\right)}{\partial u}v'\right)\frac{P_1 . P_2}{P_1 - P_2},$$

ἢ καὶ (ἐπειδὴ (σελ. 79): $\text{συνφ} = \sqrt{E}.u'$, $\text{ημφ} = \sqrt{G}.v'$):

$$\frac{1}{\varrho_\alpha} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\text{συνφ}}{\sqrt{E}} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\text{ημφ}}{\sqrt{G}} +$$

$$+\left(\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial l P_1}{\partial v}P_2\frac{\text{συνφ}}{\sqrt{E}} + \sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial l P_2}{\partial u}P_1\frac{\text{ημφ}}{\sqrt{G}}\right)\frac{1}{P_1 - P_2}\cdot$$

εὑρήκαμεν ὅμως (§ 62, σημ. Α΄):

$$\text{ημ}^2\varphi = \frac{-P_2}{P_1 - P_2}, \quad \text{συν}^2\varphi = \frac{P_1}{P_1 - P_2}, \quad (\beta)$$

ὥστε ὁ τύπος λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$\frac{1}{\varrho_\alpha} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\text{συνφ}}{\sqrt{E}} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\text{ημφ}}{\sqrt{G}} + \left(-\frac{\text{ημ}^2\varphi\;\text{συνφ}}{\sqrt{G}}\cdot\frac{\partial l P_1}{\partial v} + \frac{\text{συν}^2\varphi\;\text{ημφ}}{\sqrt{E}}\cdot\frac{\partial l P_2}{\partial u}\right),$$

ἢ καὶ τὴν ἑξῆς, προφανῶς ἰσοδύναμον:

$$\frac{1}{\varrho\alpha}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\varphi\,\eta\mu\varphi}{\sqrt{E}}\cdot\frac{\partial l\,(P_2\varepsilon\varphi\varphi)}{\partial u}-\frac{\eta\mu^2\varphi\,\sigma\upsilon\nu\varphi}{\sqrt{G}}\cdot\frac{\partial l(P_1\sigma\varphi\varphi)}{\partial v}$$

καὶ ἂν θέσωμεν καὶ τὰς τιμὰς (β) τῶν ημφ, συνφ, εὑρίσκομεν:

$$\frac{1}{\varrho\alpha}=\frac{1}{(P_1-P_2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left[\frac{P_1\sqrt{-P_2}}{\sqrt{E}}\cdot\frac{\partial l\left(P_2\sqrt{-\frac{P_2}{P_1}}\right)}{\partial u}+\right.$$

$$\left.+\frac{P_2\sqrt{P_1}}{\sqrt{G}}\frac{\partial l P_1\left(\sqrt{-\frac{P_1}{P_2}}\right)}{\partial v}\right],$$

ἢ μετὰ μικρὸν μετασχηματισμόν:

$$\frac{1}{\varrho\alpha}=\frac{1}{(P_1-P_2)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{P_1^{\,2}}{2(-P_2)^{\frac{5}{2}}}\cdot\frac{\partial\left(-\frac{P_2^{\,3}}{P_1}\right)}{\partial s_1}-\frac{P_2^{\,2}}{2P_1^{\,\frac{5}{2}}}\cdot\frac{\partial\left(-\frac{P_1^{\,3}}{P_2}\right)}{\partial s_2}\right], \tag{56}$$

ὅπου ∂s_1 καὶ ∂s_2 εἶναι τὰ διαφορικὰ τῶν τόξων τῶν γραμμῶν καμπυλότητος. Ὁ τύπος αὐτὸς δίδει τὴν ζητουμένην ἔκφρασιν τῆς καμπυλότητος τῆς ἀσυμπτωτικῆς διὰ τῶν πρωτευουσῶν ἀκτίνων P_1, P_2 καὶ τῶν παραγώγων των, εἰμπορεῖ ὅμως ν' ἁπλοποιηθῇ περισσότερον, ἂν λάβωμεν ὡς βοηθητικὰς μεταβλητὰς τὰς $-\frac{P_1}{P_2^{\,3}}$ καὶ $-\frac{P_2}{P_1^{\,3}}$, διότι εἶναι προφανῶς:

$$\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{-P_2^{\,3}}{P_1}\right)=\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{1}{\frac{P_1}{-P_2^{\,3}}}\right)=-\frac{\partial}{\partial s_1}\left(-\frac{P_1}{P_2^{\,3}}\right)\cdot\frac{P_2^{\,6}}{P_1^{\,2}},$$

ὥστε, ἂν πρὸς συντομίαν καλέσωμεν A τὸν πρῶτον ὅρον τῆς ἀγκύλης τοῦ τύπου (56), θὰ ἔχωμεν:

$$A=-\frac{1}{2}\left(-P_2\right)^{\frac{7}{2}}\cdot\frac{\partial}{\partial s_1}\left(-\frac{P_1}{P_2^{\,3}}\right),$$

ἢ καί:

$$\mathrm{A} = -\frac{1}{2}\left(-\mathrm{P}_2\right)^{\frac{7}{2}} \frac{\partial}{\partial s_1}\left[\left(-\frac{\mathrm{P}_1}{\mathrm{P}_2{}^3}\right)^{\frac{1}{8}}\right]^8 =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\mathrm{P}_2\right)^{\frac{7}{2}} \cdot 8\left[\left(-\frac{\mathrm{P}_1}{\mathrm{P}_2{}^3}\right)^{\frac{1}{8}}\right]^7 \frac{\partial}{\partial s_1}\left(-\frac{\mathrm{P}_1}{\mathrm{P}_2{}^3}\right)^{\frac{1}{8}}$$

δηλαδή:

$$\mathrm{A} = -4(-\mathrm{P}_1\,\mathrm{P}_2)^{\frac{7}{8}} \frac{\partial}{\partial s_1}\left(-\frac{\mathrm{P}_1}{\mathrm{P}_2{}^3}\right)^{\frac{1}{8}}.$$

ὁμοίως μετασχηματίζομεν καὶ τὸν δεύτερον ὅρον ($\equiv \mathrm{B}$) τῆς ἀγκύλης τοῦ τύπου (56):

$$\mathrm{B} = +4(-\mathrm{P}_2\,\mathrm{P}_1)^{\frac{7}{8}} \frac{\partial}{\partial s_2}\left(-\frac{\mathrm{P}_2}{\mathrm{P}_1{}^3}\right)^{\frac{1}{8}}.$$

ὥστε ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῶν *δύο* ἀκτίνων ϱ_α δίδεται ἀπὸ τὸν διπλοῦν τύπον:

$$(56') \quad \frac{1}{\varrho_\alpha} = \frac{4(-\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2)^{\frac{7}{8}}}{(\mathrm{P}_1-\mathrm{P}_2)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{\partial}{\partial s_1}\left(-\frac{\mathrm{P}_1}{\mathrm{P}_2{}^3}\right)^{\frac{1}{8}} \mp \frac{\partial}{\partial s_2}\left(-\frac{\mathrm{P}_2}{\mathrm{P}_1{}^3}\right)^{\frac{1}{8}}\right] \quad \text{(Τύπος τοῦ } \textit{Bonnet}\text{)}.$$

68. *Ἀναλλοίωτοι ὁποιασδήποτε τάξεως.*— Ἐκτὸς τῶν τριῶν ἀναλλοιώτων α′ καὶ β′ τάξεως:

$$\frac{\text{συν}\vartheta}{\varrho}, \quad \frac{1}{r}+\vartheta' \quad \text{καὶ} \quad -\frac{1}{\varrho}\varrho' - \varepsilon\varphi\vartheta\left(\frac{2}{r}+3\vartheta'\right),$$

τὰς ὁποίας προηγουμένως εὕρομεν, *ὑπάρχουν καὶ ἄλλαι ἄπειροι, ἀνὰ δύο εἰς ἑκάστην τάξιν.* Πραγματικῶς, ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι εὑρήκαμεν μίαν ἀναλλοίωτον τῆς τάξεως ν τῆς μορφῆς:

$$\mathrm{A} = \Theta,$$

ὅπου τὸ μὲν Α περιέχει διαφορικὰ τῶν συντεταγμένων μέχρι καὶ τῆς τάξεως ν, τὸ δὲ Θ εἶναι παράστασις περιέχουσα ποσὰ ἐξαρτώμενα μόνον ἀπὸ τὴν θέσιν τοῦ σημείου Μ καὶ ἀπὸ τὴν ἐφαπτομένην (δηλ. μόνον ἀπὸ τὰ u, v, φ)· ἂν παραγωγίσωμεν τὴν σχέσιν αὐτὴν πρὸς τὸ s, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{d\mathrm{A}}{ds} = \frac{d\Theta}{ds}, \quad \text{ἢ καί:} \quad \frac{d\mathrm{A}}{ds} = \frac{\partial\Theta}{\partial u}\cdot\frac{du}{ds} + \frac{\partial\Theta}{\partial v}\frac{dv}{ds} + \frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{ds}.$$

καὶ ἐπειδὴ (σελ. 80, τύπος (δ)): $\dfrac{d\varphi}{ds}=\dfrac{1}{\varrho_\varepsilon}+\dfrac{1}{2\sqrt{EG}}(E_v u'-G_u v')$,

ὁ τύπος γίνεται:

$$\frac{dA}{ds}-\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}\cdot\frac{1}{\varrho_\varepsilon}=\frac{\partial\Theta}{\partial u}\cdot\frac{du}{ds}+\frac{\partial\Theta}{\partial v}\frac{dv}{ds}+\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}\frac{1}{2\sqrt{EG}}(E_v u'-G_u v')\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ τὸ β΄ μέλος του ἐξαρτᾶται προφανῶς μόνον ἀπὸ τὰ ποσὰ u, v, φ, συμπεραίνομεν, ὅτι καὶ ἡ παράστασις τῆς $\nu+1$ τάξεως:

$$\frac{dA}{ds}-\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}\cdot\frac{1}{\varrho_\varepsilon}$$

εἶναι καὶ αὐτὴ ἀναλλοίωτος.

Ἂν λοιπὸν ἐφαρμόσωμεν τὴν μέθοδον αὐτὴν εἰς τὰς δύο ἀναλλοιώτους τῆς γ΄ τάξεως:

$$\frac{1}{r}+\vartheta' \quad \text{καὶ} \quad -\frac{1}{\varrho}\varrho'-\varepsilon\varphi\vartheta\left(\frac{2}{r}+3\vartheta'\right),$$

θὰ εὕρωμεν δύο νέας ἀναλλοιώτους, τῆς δ΄ τάξεως· καὶ ἀπὸ αὐτὰς πάλιν μὲ τὴν ἰδίαν μέθοδον δύο ἄλλας ἀναλλοιώτους, τῆς ε΄ τάξεως· καὶ ὁμοίως ἕως ὁποιανδήποτε τάξιν. Αἱ ἐκφράσεις ὅμως τῶν ἀναλλοιώτων αὐτῶν γίνονται, ἐννοεῖται, ὁλονὲν πολυπλοκώτεραι.

Π. χ. ἀπὸ τὴν ἀναλλοίωτον $\dfrac{1}{r}+\dfrac{d\vartheta}{ds}$ εὑρίσκεται, μετὰ ὀλίγας πράξεις, ἡ ἑξῆς ἀναλλοίωτος τῆς δ΄ τάξεως:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{r}+\frac{d\vartheta}{ds}\right)+\frac{\eta\mu\vartheta}{\varrho}\left(\frac{2\sigma\upsilon\nu\vartheta}{\varrho}-\frac{1}{P_1}-\frac{1}{P_2}\right)=\Theta_1, \tag{57}$$

ὅπου τὸ Θ_1 εἶναι ὡρισμένη ἔκφρασις ἐξαρτωμένη μόνον ἀπὸ τὰ u, v καὶ φ.

ς΄) Ἀπειροστὴ γωνία δύο καθέτων.

69. *Ἀπειροστὴ γωνία δύο καθέτων τῆς ἐπιφανείας.*—Ἂν ὀνομάσωμεν $\tilde{\omega}$ τὴν γωνίαν δύο καθέτων τῆς ἐπιφανείας εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Μ μιᾶς τυχούσης γραμμῆς της [1], τὸ διαφορικὸν $d\tilde{\omega}$ τῆς γωνίας

[1] Δηλ. δύο παραλλήλων πρὸς αὐτὰς ἀπὸ τὸ τυχὸν σημεῖον τοῦ χώρου.

αὐτῆς, ἢ ἡ παράγωγός της πρὸς τὸ ds τῆς γραμμῆς, εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς.

Ἡ αὔξησις $\Delta\tilde{\omega}$ τῆς γωνίας $\tilde{\omega}$ ἀπὸ τὴν θέσιν Μ εἰς τὴν Μ′ τῆς γραμμῆς, θὰ ἔχῃ συνημίτονον:

$$\text{συν}(\Delta\tilde{\omega})=\Sigma l(l+\Delta l)=1+\Sigma l\Delta l,$$

θὰ ἔχωμεν δηλαδή:

$$\frac{(\Delta\tilde{\omega})^2}{2!}-\frac{(\Delta\tilde{\omega})^4}{4!}+\ldots=-\Sigma l\left(dl+\frac{d^2l}{2!}+\frac{d^3l}{3!}+\ldots\right)\cdot$$

εἶναι ὅμως: $\Sigma l dl=0$, ὥστε: $\Sigma l d^2l=-\Sigma(dl)^2,$

ὥστε θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{(\Delta\tilde{\omega})^2}{2!}-\frac{(\Delta\tilde{\omega})^4}{4!}+\ldots=\frac{\Sigma(dl)^2}{2!}-\frac{\Sigma l d^3l}{3!}-\ldots,$$

δηλαδή:

$$\frac{1}{2!}\left(d\tilde{\omega}+\frac{d^2\tilde{\omega}}{2!}+\ldots\right)^2-\frac{1}{4!}\left(d\tilde{\omega}+\frac{d^2\tilde{\omega}}{2!}+\ldots\right)^4+\ldots=\frac{\Sigma(dl)^2}{2!}-\frac{\Sigma l d^3l}{3!}+\ldots,$$

ἢ καί:

$$\frac{1}{2!}\left(\frac{d\tilde{\omega}}{ds}+\frac{1}{2!}\frac{d^2\tilde{\omega}}{ds^2}ds+\ldots\right)^2-\frac{ds^2}{4!}\left(\frac{d\tilde{\omega}}{ds}+\frac{1}{2!}\frac{d^2\tilde{\omega}}{ds^2}ds+\ldots\right)^4+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2!}\Sigma\left(\frac{dl}{ds}\right)^2-\frac{ds}{3!}\Sigma l\frac{d^3l}{ds^3}+\ldots$$

καὶ διὰ $ds=0$ εὑρίσκομεν:

$$\text{(α)}\qquad \left(\frac{d\tilde{\omega}}{ds}\right)^2=\Sigma\left(\frac{dl}{ds}\right)^2,\quad \text{ἢ καὶ}\quad d\tilde{\omega}^2=\Sigma dl^2.$$

ΣΗΜ. Τὸν τύπον αὐτὸν (α) εἰμποροῦμεν νὰ τὸν εὕρωμεν καὶ ταχύτερον, ἂν θεωρήσωμεν τὰς παραλλήλους πρὸς τὰς καθέτους τῆς ἐπιφανείας, τὰς ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων· αἱ τομαὶ τῶν παραλλήλων αὐτῶν μὲ τὴν σφαῖραν τῆς ἀκτῖνος 1 ἀποτελοῦν μίαν καμπύλην αμμ′, τῆς ὁποίας ἡ αὔξησις τοῦ τόξου Δk εἶναι ἀπειροστὸν ἰσοδύναμον πρὸς τὴν αὔξησιν $\Delta\tilde{\omega}$ τῆς γωνίας $\tilde{\omega}$ (διότι ἡ γωνία $\Delta\tilde{\omega}$ μετρεῖται ὑπὸ τόξου μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας αὐτῆς, ἔχοντος τὴν ἰδίαν χορδὴν μὲ τὸ τόξον Δk) [1], εἶναι λοιπὸν $d\tilde{\omega}=dk$ τὸ dk^2 ὅμως βλέπομεν

---

[1] Πρβλ. Διαφ. Λογ. Β′, σελ. 112. Τὸ ἴδιον ἰσχύει καὶ διὰ τὴν τυχοῦσαν σειρὰν εὐθειῶν εἰς τὸν χῶρον.

ἀμέσως ὅτι εἶναι Σdl^2 (διότι l, m, n εἶναι αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου μ τῆς καμπύλης αμμ', ἡ ὁποία δι' αὐτὸ λέγεται *σφαιρικὴ δείκτρια τῆς γωνίας* ϖ.

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τώρα εὐκολώτερον τὸ ἄθροισμα Σdl^2, ἐκλέγομεν ὡς ἄξονας εἰς τὸ Μ τοὺς ἄξονας *τοῦ συνοδεύοντος τριέδρου* τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ καὶ ὡς u, v τὰς συντεταγμένας x, y (§ 30 καὶ 31)· τότε εἶναι εἰς τὸ Μ (καθὼς ἐκεῖ εἴδομεν):

$$\mathrm{E}=1, \mathrm{F}=0, \mathrm{G}=1, \mathrm{D}=1, \mathrm{L}=\frac{1}{\mathrm{P}_1}, \mathrm{M}=0, \mathrm{N}=\frac{1}{\mathrm{P}_2}\cdot$$

$$\frac{du}{ds}\equiv\frac{dx}{ds}=\text{συν}\varphi, \frac{dv}{ds}\equiv\frac{dy}{ds}=\text{ημ}\varphi, \frac{dv}{du}\equiv\frac{dy}{dx}=\text{εφ}\varphi$$

καὶ $l=0, m=0, n=1$· $x_u=1, y_u=0, z_u=0$· $x_v=0, y_v=1, z_v=0$·

τότε ὅμως οἱ τύποι (§ 22):

$$\Sigma x_u l_u=-\mathrm{L}, \quad \Sigma x_u l_v=\Sigma x_v l_u=-\mathrm{M}, \quad \Sigma x_v l_v=-\mathrm{N}$$

καταντοῦν: $\quad l_u=-\mathrm{L}, \quad l_v=m_u=0, \quad m_v=-\mathrm{N}$

καὶ οἱ $\quad \Sigma l_u l=0, \quad \Sigma l_v l=0$ δίδουν: $n_u=0, \quad n_v=0$·

ἔχομεν λοιπόν: $\quad l_u=-\mathrm{L}, \quad m_u=0, \quad n_u=0,$

$$l_v=0, \quad m_v=-\mathrm{N}, \quad n_v=0\cdot$$

ὥστε εἶναι:

$$\Sigma dl^2=\Sigma(l_u du+l_v dv)^2=l_u^2 du^2+m_v^2 dv^2=\mathrm{L}^2 dx^2+\mathrm{N}^2 dy^2,$$

ἢ καὶ
$$\Sigma dl^2=ds^2\left(\frac{\text{συν}^2\varphi}{\mathrm{P}_1{}^2}+\frac{\text{ημ}^2\varphi}{\mathrm{P}_2{}^2}\right)$$

καὶ ἂν τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ Σdl^2 τὴν θέσωμεν εἰς τὸν τύπον (α), εὑρίσκομεν τέλος τὸν τύπον:

$$(58) \qquad \left(\frac{d\varpi}{ds}\right)^2=\frac{\text{συν}^2\varphi}{\mathrm{P}_1{}^2}+\frac{\text{ημ}^2\varphi}{\mathrm{P}_2{}^2},$$

ὁ ὁποῖος ὁμοιάζει μὲ τὸν τοῦ Euler (25) (ἔχει ὅμως παρονομαστὰς *τὰ τετράγωνα* τῶν πρωτευουσῶν ἀκτίνων) καὶ εἰμπορεῖ ἑπομένως νὰ ἑρμηνευθῇ καὶ αὐτὸς γεωμετρικῶς διὰ μιᾶς *δεικτρίας* (*πάντοτε* ἐλλείψεως), ἀναλόγου τῆς τοῦ *Dupin*: ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ἐπὶ ἑκάστης τῶν ἐφαπτομένων πέριξ τοῦ Μ τὸ ἀντίστοιχον τμῆμα $\frac{ds}{d\varpi}$· τὰ ἄκρα αὐτῶν ἀποτελοῦν ἔλλειψιν μὲ ἡμιάξονας ἐπὶ τῶν πρωτευουσῶν ἐφαπτομένων κειμένους καὶ ἔχοντας μήκη τὰς πρωτευούσας ἀκτῖνας εἰς τὸ Μ (καὶ τὰς δύο θετικῶς λαμβανομένας)· ἡ παράγωγος λοιπὸν $\frac{d\tilde{\omega}}{ds}$ εἶναι δι' ἑκάστην διεύθυνσιν τὸ ἀντίστροφον τῆς ἀκτῖνος τῆς δεικτρίας αὐτῆς.

70. *Ἄλλη εὕρεσις τοῦ τύπου* (58). — Τὸν ἴδιον τύπον (58) εἰμποροῦμεν νὰ τὸν εὕρωμεν καὶ πολὺ συντομώτερον, ἀπὸ τὸν τύπον $d\tilde{\omega}^2 = \Sigma dl^2$, ὡς ἑξῆς: ἐπειδὴ κατὰ μῆκος μιᾶς γεωδαισιακῆς εἶναι: $l = \xi_\gamma$, $m = \eta_\gamma$, $n = \zeta_\gamma$, θὰ εἶναι καὶ $dl = d\xi_\gamma$, $dm = d\eta_\gamma$, $dn = d\zeta_\gamma$· ἂν λοιπὸν θεωρήσωμεν τὴν ἐκ τοῦ Μ γεωδαισιακὴν τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Μ τῆς καμπύλης ΑΜΜ′, θὰ ἔχωμεν (ἐπειδὴ εἶναι προφανῶς καί: $ds = ds_\gamma$):

$$\left(\frac{d\tilde{\omega}}{ds}\right)^2 = \Sigma\left(\frac{dl}{ds}\right)^2 = \Sigma\left(\frac{d\xi_\gamma}{\partial s_\gamma}\right)^2.$$

καὶ κατὰ τοὺς τύπους τοῦ *Frenet:*

$$\left(\frac{d\tilde{\omega}}{ds}\right)^2 = \frac{1}{\varrho_\gamma^2} + \frac{1}{r_\gamma^2}. \tag{α}$$

ἔχομεν ὅμως καὶ τοὺς τύπους:

$$\frac{1}{\varrho_\gamma} = \frac{\text{συν}^2\varphi}{P_1} + \frac{\text{ημ}^2\varphi}{P_2}, \quad \frac{1}{r_\gamma} = \left(\frac{1}{P_2} - \frac{1}{P_1}\right)\text{ημφσυνφ}$$

καὶ ἂν τὰς τιμὰς αὐτὰς τῶν $\frac{1}{\varrho_\gamma}$, $\frac{1}{r_\gamma}$ θέσωμεν εἰς τὸν τύπον (α), εὑρίσκομεν τὸν τύπον (58).

71. *Πορίσματα τοῦ τύπου (58).* — 1ον) Ἂν λάβωμεν δύο διευθύνσεις ds_1 καὶ ds_2 *καθέτους ἐπ' ἀλλήλας* μὲ ἀντιστοίχους γωνίας τῶν καθέτων $d\tilde{\omega}_1$ καὶ $d\tilde{\omega}_2$, θὰ εἶναι:

$$\left(\frac{d\tilde{\omega}_1}{ds_1}\right)^2 + \left(\frac{d\tilde{\omega}_2}{ds_2}\right)^2 = \frac{1}{P_1^2} + \frac{1}{P_2^2}. \tag{58α′}$$

2ον) Ἂν λάβωμεν δύο *συζυγεῖς* διευθύνσεις ds_1, ds_2, εἶναι (§ 34):

$$\text{εφ}^2\varphi_1\text{εφ}^2\varphi_2 = \frac{P_2^2}{P_1^2}. \tag{β}$$

καὶ ἂν ὑπολογίσωμεν τὰς εφφ$_1$, εφφ$_2$ ἀπὸ τὸν γενικὸν τύπον (58) καὶ τὰς θέσωμεν εἰς τὸν (β), εὑρίσκομεν:

$$(58\beta') \qquad \left(\frac{d\tilde{\omega}_1}{ds_1}\cdot\frac{d\tilde{\omega}_2}{ds_2}\right)^2=\left(\frac{1}{P_1 P_2}\right)^2.$$

ὁ τύπος αὐτός, τὸν ὁποῖον εὑρῆκεν ὁ *Kommerell* (1901), ἀποτελεῖ προφανῶς γενίκευσιν τοῦ τύπου τοῦ *Enneper*· διότι ἑκάστη ἀσυμπτωτικὴ διεύθυνσις εἶναι συζυγὴς ἑαυτῆς (§ 34, Σημ. Β΄).

*72. *Γενίκευσις τοῦ τύπου (58).* — Ἂν θεωρήσωμεν μίαν εὐθεῖαν κινητὴν ἐντὸς τοῦ χώρου καὶ ὀνομάσωμεν A, B, C τὰ συνημίτονά της πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους ἀκινήτους καὶ a, b, c τὰ συνημίτονά της πρὸς τὸ πρωτεῦον τρίεδρον (α, β, γ· ξ, η, ζ· λ, μ, ν) μιᾶς δοθείσης καμπύλης τοῦ χώρου καὶ ὑποθέσωμεν τὰ a, b, c συναρτήσεις τοῦ τόξου s τῆς καμπύλης αὐτῆς, θὰ εἶναι:

$$A=\alpha a+\xi b+\lambda c,\quad B=\beta a+\eta b+\mu c,\quad C=\gamma a+\zeta b+\nu c\cdot$$

καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν, κατὰ τοὺς τύπους τοῦ *Frenet*, ἂν παραστήσωμεν τὰς παραγώγους πρὸς τὸ s διὰ τόνων:

$$A'=\alpha\left(a'-\frac{b}{\varrho}\right)+\xi\left(b'+\frac{a}{\varrho}-\frac{c}{r}\right)+\lambda\left(c'+\frac{b}{r}\right),$$

$$B'=\beta\left(a'-\frac{b}{\varrho}\right)+\eta\left(b'+\frac{a}{\varrho}-\frac{c}{r}\right)+\mu\left(c'+\frac{b}{r}\right),$$

$$C'=\gamma\left(a'-\frac{b}{\varrho}\right)+\zeta\left(b'+\frac{a}{\varrho}-\frac{c}{r}\right)+\nu\left(c'+\frac{b}{r}\right).$$

καὶ ἂν τετραγωνίσωμεν καὶ προσθέσωμεν τὰς σχέσεις αὐτάς, εὑρίσκομεν τὸν γενικώτατον τύπον:

$$\Pi'^2=\Sigma A'^2=\left(\frac{a}{\varrho}-\frac{c}{r}\right)^2+b^2\left(\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}\right)+\Sigma a'^2+2b\left(\frac{c'}{r}-\frac{a'}{\varrho}\right)+2b'\left(\frac{a}{\varrho}-\frac{c}{r}\right)=$$

$$(59) \qquad =\frac{a^2+b^2}{\varrho^2}+\frac{b^2+c^2}{r^2}-\frac{2ac}{\varrho r}+\Sigma a'^2+\frac{2}{\varrho}\left(ab'-ba'\right)+\frac{2}{r}\left(bc'-cb'\right),$$

ὅπου Π εἶναι ἡ γωνία δύο θέσεων τῆς κινητῆς εὐθείας (πρβλ. § 69, Σημ.) [1]. Καὶ ἂν ἡ καμπύλη κεῖται ἐπὶ δοθείσης ἐπιφανείας, εἰμποροῦμεν μεταξὺ τοῦ τύπου αὐτοῦ καὶ τῶν:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\vartheta}{\varrho}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}{P_1}+\frac{\eta\mu^2\varphi}{P_2},\quad \frac{1}{r}+\vartheta'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_2}-\frac{1}{P_1}\right)\eta\mu 2\vartheta$$

---

(1) Βλέπε *Ἐπετηρίδα τοῦ Ἐθν. Πανεπιστημίου*, 1906, σελ. 349: «*N. Hatzidakis. Generalization of a formula from the theory of the surfaces*» καὶ Proceedings of the fifth International Congress of Mathematicians, Vol. II, p. 138: « On pairs of Frenet'ian trihedra», by N. Hatzidakis.

ν' ἀπαλείψωμεν τὰς ἀκτῖνας ϱ, r· καὶ τότε εὑρίσκομεν:

$$\Pi'^2 = \frac{a^2+b^2}{\sigma\upsilon\nu^2\vartheta}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}{P_1}+\frac{\eta\mu^2\varphi}{P_2}\right)^2+\left(b^2+c^2\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_2}-\frac{1}{P_1}\right)\eta\mu 2\varphi-\vartheta'\right]^2-$$

$$(60)\qquad -\frac{2ac}{\sigma\upsilon\nu\vartheta}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}{P_1}+\frac{\eta\mu^2\varphi}{P_2}\right)\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_2}-\frac{1}{P_1}\right)\eta\mu 2\varphi-\vartheta'\right)+$$

$$+\left(\frac{2(ab'-ba')}{\sigma\upsilon\nu\vartheta}\right)\left(\frac{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}{P_1}+\frac{\eta\mu^2\varphi}{P_2}\right)+2\left(bc'-cb'\right)\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_2}-\frac{1}{P_1}\right)\eta\mu 2\varphi-\vartheta'\right)+\Sigma a'^2.$$

Εἰς τὸ πλῆθος τῶν μερικῶν περιπτώσεων τοῦ γενικοῦ αὐτοῦ τύπου περιλαμβάνεται καὶ ὁ τύπος (58) (διὰ $a=0$, $b=\sigma\upsilon\nu\vartheta$, $c=\eta\mu\vartheta$).

ΠΡΟΣΘΗΚΑΙ

1) *Εἰς τὴν § 12: Γενικὴ θεωρία τῆς περιβαλλούσης μιᾶς διπαραμετρικῆς σειρᾶς ἐπιφανειῶν.* —Ἡ τομὴ τῆς τυχούσης ἀπὸ αὐτάς:

$$\varphi(x,y,z,\alpha,\beta)=0 \qquad (\alpha)$$

καὶ τῆς πλησίον της $\quad \varphi(x,y,z,\ \alpha+\Delta\alpha,\ \beta+\Delta\beta)=0$

εἶναι μία καμπύλη (Κ), τῆς ὁποίας ἡ *ὁρικὴ* θέσις, διὰ $\Delta\alpha=0$, $\Delta\beta=0$, ἐξαρτᾶται προφανῶς ἀπὸ τὸν λόγον $\dfrac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}$· ἂν δηλ. εἶναι $\beta=\sigma(\alpha)$, ὅρ. $\dfrac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}=\sigma'(\alpha)$, ἡ ὁρικὴ θέσις θὰ εἶναι ἡ καμπύλη:

$$(\beta) \qquad \varphi(x,y,z,\ \alpha,\sigma(\alpha))=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\sigma'(\alpha)=0.$$

Ὁποιαδήποτε ὅμως καὶ ἂν εἶναι ἡ αὐθαίρετος συνάρτησις σ(α), αἱ καμπύλαι (β) θὰ ἔχουν κοινὰ τὰ σημεῖα τὰ ὁριζόμενα, δι' ἕκαστον ζεῦγος τιμῶν τῶν α, β, ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις:

$$(\gamma) \qquad \varphi(x,y,z,\ \alpha,\beta)=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}=0\cdot$$

αἱ ἐξισώσεις αὐταὶ ὁρίζουν γενικῶς μεμονωμένα σημεῖα δι' ἕκαστον ζεῦγος τιμῶν (α.β)· καὶ ἂν τὰ α,β, μεταβάλλωνται, αἱ τρεῖς ἐξισώσεις (γ) ὁρίζουν μίαν ἐπιφάνειαν (Ε), λεγομένην *περιβάλλουσαν* τῆς διπαραμέτρου σειρᾶς τῶν ἐπιφανειῶν (α) καὶ τῆς ὁποίας ἡ συνήθης ἐξίσωσις θὰ εὑρεθῇ δι' ἀπαλοιφῆς τῶν α,β μεταξὺ τῶν (γ).

Ἡ περιβάλλουσα ἐφάπτεται ἑκάστης «περιβαλλομένης» $\varphi(x,y,z,\alpha,\beta)=0$ εἰς τὸ κοινὸν σημεῖόν των (x,y,z) τὸ ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (γ) ὁριζόμενον. Διότι οἱ μὲν συντελεσταὶ p καὶ q τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς (α) θὰ ὁρισθοῦν ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις:

$$(\delta) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x}+p\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}+q\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0,$$

τῆς δὲ περιβαλλούσης ἀπὸ τὰς ἑξῆς:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+p\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+p\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}+p\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)=0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}+q\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+q\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\left(\frac{\partial\beta}{\partial y}+q\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)=0,$$

ἢ καί, ἕνεκα τῶν: $\qquad \dfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=0,\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\beta}=0$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+p\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}+q\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον, διὰ τὰ ὡρισμένα α,β, εἶναι κοινὰ καὶ τὰ x,y,z, αἱ ἐξισώσεις αὐταὶ συμπίπτουν ἐκεῖ μὲ τὰς (δ) τῆς περιβαλλομένης, ὥστε ἡ περιβάλλουσα καὶ ἡ περιβαλλομένη ἔχουν πραγματικῶς τὸ ἴδιον ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς τὸ κοινὸν σημεῖόν των.

2) *Εἰς τὴν § 22*: Ἡ ἀπόδειξις τῆς σταθερότητος τῶν l, m, n ἐκ τῶν ἐξισώσεων $\frac{l_u}{l}=\frac{m_u}{m}=\frac{n_u}{n}$ καὶ $\frac{l_v}{l}=\frac{m_v}{m}=\frac{n_v}{n}$ εἱμπορεῖ νὰ γίνῃ καὶ ὡς ἑξῆς· ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς εὑρίσκομεν ἀμέσως:

$$\frac{dl}{l}=\frac{dm}{m}=\frac{dn}{n}\ \text{δηλ.}\ \log m=\log l+A_1,\ \log n=\log l+B_1\cdot\ m=Al,\ n=Bl\cdot$$

$$l^2+A^2l^2+B^2l^2=1,\ \text{ὅθεν}\ l=c_1\ \text{καὶ ἑπομένως καὶ}\ m=Ac_1\equiv c_2,\ n=Bc_1\equiv c_3.$$

3) *Εἰς τὴν § 38, Σημ. Β'*: Οἱ τύποι (34) τοῦ ***Olinde Rodrigue*** εὑρίσκονται ἀπὸ τοὺς τύπους (32) ὡς ἑξῆς. Οἱ (32) γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\frac{dl}{dx}=\frac{dm}{dy}=\frac{dn}{dz}=\frac{\Sigma\alpha dl}{\Sigma\alpha dx}=\Sigma\alpha\frac{dl}{ds}\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ εἶναι:

$$\Sigma\alpha\frac{dl}{ds}=-\Sigma l\frac{d\alpha}{ds}\ (\text{διότι}\ \Sigma\alpha l=0),\ \text{ἢ καὶ}:\ \Sigma\alpha\frac{dl}{ds}=-\frac{1}{\varrho}\Sigma l\xi=-\frac{1}{\varrho}\text{συνθ}=-\frac{1}{P_{1,2}},$$

οἱ τύποι (32) γίνονται:

$$dx+P_{1,2}dl=0, dy+P_{1,2}dm=0, dz+P_{1,2}dn=0.\ (\text{Πρβλ. Διαφ. Λογ., Β', § 137}).$$

4) *Εἰς τὴν § 41*: ἡ ἐξίσωσις: $\begin{vmatrix}\Sigma x_u x' & \Sigma x_v x' \\ \Sigma x_u x'' & \Sigma x_v x''\end{vmatrix}=0$

εὑρίσκεται, καὶ ἂν πολλαπλασιασθῇ ἡ ἐξίσωσις:

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ l & m & n \end{vmatrix}=0$$

$$\text{ἐπὶ}\ D\equiv\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ l & m & n \end{vmatrix}\ (\text{§ 13, Σημ. Γ'}),$$

διότι γίνεται:

$$\begin{vmatrix} \Sigma x_u x' & \Sigma x_v x' & \Sigma l x' \\ \Sigma x_u x'' & \Sigma x_v x'' & \Sigma l x'' \\ \Sigma x_u l & \Sigma x_v l & \Sigma l^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \Sigma x_u x' & \Sigma x_v x' & 0 \\ \Sigma x_u x'' & \Sigma x_v x'' & \Sigma l x'' \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \Sigma x_u x' & \Sigma x_v x' \\ \Sigma x_u x'' & \Sigma x_v x'' \end{vmatrix}.$$

5) *Εἰς τὴν § 50*: Εἰς τὴν περίπτωσιν ὀρθογωνίου δικτύου, αἱ ἐξισώσεις τῶν

Mainardi—Codazzi, δηλ. οἱ τύποι (42α - 44α), λαμβάνουν γεωμετρικωτέραν μορφήν, ἂν εἰσαγάγωμεν, ἀντὶ τῶν θεμελιωδῶν ποσῶν, τὰς καμπυλότητας:

$$\left(\frac{1}{\varrho_\varkappa}\right)_v, \left(\frac{1}{\varrho_\varkappa}\right)_u, \left(\frac{1}{\varrho_\varepsilon}\right)_v, \left(\frac{1}{\varrho_\varepsilon}\right)_u, \left(\frac{1}{r_\gamma}\right)_v = -\left(\frac{1}{r_\gamma}\right)_u^{(1)}.$$

ἂν τὰ ποσὰ αὐτὰ ὀνομασθοῦν κατὰ σειρὰν πρὸς συντομίαν: $\varkappa_v, \varkappa_u, \gamma_v, \gamma_u, \sigma_v = -\sigma_u$, οἱ τύποι (42α - 44α) μετασχηματίζονται εὐκόλως εἰς τοὺς ἑξῆς:

$$(42\text{-}4)\,\alpha'\quad\begin{cases}\dfrac{\partial\varkappa_u}{\partial s_v}+\dfrac{\partial\sigma_v}{\partial s_u}+2\sigma_v\gamma_v=(\varkappa_v-\varkappa_u)\,\gamma_u,\\[2ex] \dfrac{\partial\varkappa_v}{\partial s_u}-\dfrac{\partial\sigma_u}{\partial s_v}-2\sigma_u\gamma_u=(\varkappa_u-\varkappa_v)\,\gamma_v,\\[2ex] \dfrac{\partial\gamma_v}{\partial s_u}+\dfrac{\partial\gamma_u}{\partial s_v}+\gamma_v^2+\gamma_u^2=-\sigma_u\sigma_v-\varkappa_u\varkappa_v\equiv-\mathrm{K}.\end{cases}$$

(Πρβλ. Cesàro, Geometria Intrinseca, σελ. 158).

Καὶ ἂν λάβωμεν μερικώτερον ὡς παραμετρικὰς γραμμὰς τὰς γραμμὰς καμπυλότητος ($\sigma_v = -\sigma_u = 0$), οἱ τύποι αὐτοὶ καταντοῦν:

$$(42\text{-}4)\,\alpha''\quad\begin{cases}\dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{\mathrm{P}_u}\right)}{\partial s_v}=\left(\dfrac{1}{\mathrm{P}_v}-\dfrac{1}{\mathrm{P}_u}\right)\left(\dfrac{\eta\mu\vartheta}{\varrho}\right)_u,\\[3ex] \dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{\mathrm{P}_v}\right)}{\partial s_u}=\left(\dfrac{1}{\mathrm{P}_u}-\dfrac{1}{\mathrm{P}_v}\right)\left(\dfrac{\eta\mu\vartheta}{\varrho}\right)_v,\\[3ex] \dfrac{\partial\left(\dfrac{\eta\mu\vartheta}{\varrho}\right)_v}{\partial s_u}+\dfrac{\partial\left(\dfrac{\eta\mu\vartheta}{\varrho}\right)_u}{\partial s_v}+\left(\dfrac{\eta\mu\vartheta}{\varrho}\right)_v^2+\left(\dfrac{\eta\mu\vartheta}{\varrho}\right)_u^2=-\varkappa_u\varkappa_v\equiv-\mathrm{K}.\end{cases}$$

Ἀπὸ τοὺς τύπους (42-44,α′) ὁ τελευταῖος εἶναι μερικὴ περίπτωσις γενικωτέρου τύπου τοῦ Liouville:

$$(44\alpha''')\qquad \mathrm{K}=\frac{1}{\mathrm{D}}\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial u\partial v}+\frac{\partial}{\partial u}(\varkappa_u\sqrt{\mathrm{G}})+\frac{\partial}{\partial v}(\varkappa_v\sqrt{\mathrm{E}})\right],$$

ὅπου ω εἶναι ἡ γωνία τῶν παραμετρικῶν γραμμῶν. (Βλέπε Bianchi, Geom. Diff., σ. 147).

Καὶ οἱ γενικοὶ τύποι τῶν ἐπιφανειῶν (42-44) εἰμποροῦν νὰ μετασχηματισθοῦν

---

(1) Ὅτι δύο γραμμῶν καθέτων ἐπ' ἀλλήλας αἱ γεωδαισ. στρέψεις εἶναι ἀντίθετοι, φαίνεται ἀμέσως ἀπὸ τὸν τύπον τοῦ *Bonnet* (50), ἂν τεθῇ $\varphi_1 = \varphi + \frac{\pi}{2}$.

διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῶν καμπυλοτήτων $\varkappa_u$, $\varkappa_v$, γ_u, γ_v, σ_u, σ_v: βλέπε Darboux, Surfaces, Τόμ. II, σ. 392-393.

6) *Εἰς τὴν § 53, τύπον (45)*: Ἡ ἐφαπτομενικὴ καμπυλότης ἔχει καὶ ἄλλην ἔκφρασιν (τοῦ Bonnet):

$$(45\alpha)\qquad \frac{1}{\varrho_\varepsilon}=\frac{1}{D}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F\frac{\partial\varphi}{\partial v}-G\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2-2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F\frac{\partial\varphi}{\partial u}-E\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2-2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}}\right)\right],$$

ὅπου $\varphi(u, v)=$ σταθ. εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς γραμμῆς.

(Βλέπε Bianchi, Geom. Diff., σελ. 145, τύπ. (4)).

7) *Εἰς τὴν § 56, λῆμμα 2ον*: Ὁ τύπος $\dfrac{d\omega}{dv}=-D_u$ εἶναι μερικὴ περίπτωσις γενικωτέρου τύπου τοῦ Gauss διὰ τυχούσας παραμετρικὰς γραμμάς:

$$Dd\omega=\frac{1}{2}\frac{F}{E}(E_u du+E_v dv)+\frac{1}{2}E_v du-F_u du-\frac{1}{2}G_u dv,\ \text{διὰ}\ F=0, E=1.$$

(Βλέπε Bianchi, Geometria Differenziale, σελ. 151, τύπος (11)).

8) *Συμφυεῖς ἐξισώσεις τῆς ἐπιφανείας*: Ὅπως αἱ ἐξισώσεις $\varrho=\sigma(s)$, $r=\varphi(s)$ εἶναι αἱ *συμφυεῖς* ἢ *ἀναξονικαὶ* (ἄνευ ἀξόνων) ἐξισώσεις μιᾶς καμπύλης (équations intrinsèques), καθ' ὅμοιον τρόπον καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἔχει τὰς ἑξῆς *συμφυεῖς* ἐξισώσεις:

$$(61)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial s_1}&=\Phi_1(P_1, P_2), & \frac{\partial P_1}{\partial s_2}&=\Phi_2(P_1, P_2),\\ \frac{\partial P_2}{\partial s_1}&=\Phi_3(P_1, P_2), & \frac{\partial P_2}{\partial s_2}&=\Phi_4(P_1, P_2), \end{aligned}$$

ὅπου $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ εἶναι 4 τυχοῦσαι συναρτήσεις. (Βλέπε Scheffers, Flächen, σελ. 353).

9) ***Εἰς τὴν Βιβλιογραφίαν** (σελ. 6)*: Κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ἐκτυπώσεως τοῦ παρόντος βιβλίου ἐξεδόθησαν καὶ τὰ ἑξῆς νέα συγγράμματα:

G. Demartres, *Cours de géométrie infinitésimale* (1912).

R. v. Lilienthal, *Flächentheorie*, Τόμ. 1ος (1913).

ΣΥΛΛΟΓΗ ΤΩΝ ΘΕΜΕΛΙΩΔΩΝ ΤΥΠΩΝ.

(1) ***Ἐξισώσεις τῆς ἐπιφανείας*** : $x=\sigma(u, v)$, $y=\varphi(u, v)$, $z=f(u, v)$.

(2) ***Γραμμικὸν στοιχεῖον τῆς ἐπιφανείας*** : $ds^2=\mathrm{E}du^2+2\mathrm{F}dudv+\mathrm{G}dv^2$.

(3) ***Μεταβολὴ τῶν E, F, G κατὰ τὴν ἀλλαγὴν τῶν παραμέτρων*** :

$$\mathrm{E}'=\left(\frac{\partial u}{\partial u'}\right)^2 \mathrm{E}+2\frac{\partial u}{\partial u'}\cdot\frac{\partial v}{\partial u'}\mathrm{F}+\left(\frac{\partial v}{\partial u'}\right)^2\mathrm{G},$$

$$\mathrm{F}'=\frac{\partial u}{\partial u'}\cdot\frac{\partial u}{\partial v'}\mathrm{E}+\left(\frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial v'}+\frac{\partial v}{\partial u'}\frac{\partial u}{\partial v'}\right)\mathrm{F}+\frac{\partial v}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial v'}\mathrm{G},$$

$$\mathrm{G}'=\left(\frac{\partial u}{\partial v'}\right)^2\mathrm{E}+2\frac{\partial u}{\partial v'}\frac{\partial v}{\partial v'}\mathrm{F}+\left(\frac{\partial v}{\partial v'}\right)^2\mathrm{G}.$$

(4) ***Ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης*** :

$$\mathrm{X}=x+(x_u+x_v\varrho'(u))t,\quad \mathrm{Y}=y+(y_u+y_v\varrho'(u))t,\quad \mathrm{Z}=z+(z_u+z_v\varrho'(u))t.$$

(5) ***Ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου (γενικῶς)*** :

$$\begin{vmatrix} \mathrm{X}-x & x_u & x_v \\ \mathrm{Y}-y & y_u & y_v \\ \mathrm{Z}-z & z_u & z_v \end{vmatrix}=0.$$

(5′) ***Ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου, ἂν $x_v=y_v=z_v=0$*** :

$$\begin{vmatrix} \mathrm{X}-x & x_u & x_{v^2} \\ \mathrm{Y}-y & y_u & y_{v^2} \\ \mathrm{Z}-z & z_u & z_{v^2} \end{vmatrix}=0.$$

(5″) ***Ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου κώνου***

(ὅταν $x_u=y_u=z_u=x_v=y_v=z_v=0$) :

$$4.\begin{vmatrix} \mathrm{X}-x & x_{uv} & x_{v^2} \\ \mathrm{Y}-y & y_{uv} & y_{v^2} \\ \mathrm{Z}-z & z_{uv} & z_{v^2} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x_{u^2} & x_{uv} & \mathrm{X}-x \\ y_{u^2} & y_{uv} & \mathrm{Y}-y \\ z_{u^2} & z_{uv} & \mathrm{Z}-z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_{u^2} & \mathrm{X}-x & x_{v^2} \\ y_{u^2} & \mathrm{Y}-y & y_{v^2} \\ z_{u^2} & \mathrm{Z}-z & z_{v^2} \end{vmatrix}^2.$$

(6) ***Ἐξισώσεις τῆς καθέτου*** :

$$\frac{\mathrm{X}-x}{y_uz_v-z_uy_v}=\frac{\mathrm{Y}-y}{z_ux_v-x_uz_v}=\frac{\mathrm{Z}-z}{x_uy_v-y_ux_v}.$$

(7) ***Συνημίτονά της*** :

$$l=\frac{y_uz_v-z_uy_v}{\mathrm{D}},\quad m=\frac{z_ux_v-x_uz_v}{\mathrm{D}},\quad n=\frac{x_uy_v-y_ux_v}{\mathrm{D}}.$$

(8) *Γωνία δύο παραμετρικῶν γραμμῶν* :

$$\text{συνω} = \frac{F}{\sqrt{EG}} \quad \left(\text{ημω}=\frac{D}{\sqrt{EG}}\right).$$

(9) *Γωνία δύο ὁποιωνδήποτε γραμμῶν* :

$$\text{συνω} = \frac{E+(k_1+k_2)F+k_1k_2G}{\sqrt{E+2k_1F+k_1^2G}.\ \sqrt{E+2k_2F+k_2^2G}}$$

(10) *Συνθήκη ὀρθογωνιότητος ἑνὸς δικτύου* :

$$E\Gamma - 2FB + GA = 0.$$

(11) *Ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς τυχούσης τομῆς* :

$$\frac{\text{συνθ}}{\varrho} = \frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}.$$

(12) Πρώτη μορφὴ τῶν L, M, N :

$$\Sigma x_{u^2}.l \equiv L, \quad \Sigma x_{uv}.l \equiv M, \quad \Sigma x_{v^2}.l \equiv N.$$

(13) *Δευτέρα μορφὴ τῶν* L, M, N :

$$L=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} x_{u^2} & x_u & x_v \\ y_{u^2} & y_u & y_v \\ z_{u^2} & z_u & z_v \end{vmatrix}, \quad M=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} x_{uv} & x_u & x_v \\ y_{uv} & y_u & y_v \\ z_{uv} & z_u & z_v \end{vmatrix}, \quad N=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} x_{v^2} & x_u & x_v \\ y_{v^2} & y_u & y_v \\ z_{v^2} & z_u & z_v \end{vmatrix}.$$

(14) *Ἀκτὶς καμπυλότητος καθέτου τομῆς*:

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}.$$

(15) *Θεώρημα τοῦ Meusnier* : $\varrho = \varrho_1 \text{συνθ}$.

(16) *Τρίτη μορφὴ τῶν* L, M, N :

$$L = -\Sigma x_u l_u, \quad M = -\Sigma x_u l_v = -\Sigma x_v l_u, \quad N = -\Sigma x_v l_v.$$

(17) *Συνθῆκαι ὀμφαλικοῦ σημείου* :

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}.$$

(18) *Συνθήκη σημείου τοῦ Stäckel* :

$$4(EM-FL)(FN-GM) = (GL-EN)^2.$$

(19) *Καμπυλότης εἰς ἓν σημεῖον τοῦ Stäckel* :

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{\alpha k+\beta}{\gamma k+\delta}.$$

(20) *Διευθύνσεις τῆς μεγίστης καὶ τῆς ἐλαχίστης καμπυλότητος* :

$$\begin{vmatrix} k^2 & E & L \\ -k & F & M \\ 1 & G & N \end{vmatrix} = 0.$$

(21) ***Ἐξίσωσις παρέχουσα τὴν μεγίστην καὶ τὴν ἐλαχίστην ἀκτῖνα:***

$$(LN-M^2)P^2-(EN-2FM+GL)P+(EG-F^2)=0.$$

(21′) ***Ἐξίσωσις παρέχουσα τὴν μεγίστην καὶ τὴν ἐλαχίστην καμπυλότητα:***

$$\left(\frac{1}{P}\right)^2(EG-F^2)-(EN-2FM+GL)\frac{1}{P}+(LN-M^2)=0.$$

(21″) ***Ἄθροισμα καὶ γινόμενον τῶν δύο πρωτευουσῶν καμπυλοτήτων:***

$$\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_2}=\frac{EN-2FM+GL}{EG-F^2},\quad \frac{1}{P_1}\cdot\frac{1}{P_2}=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}.$$

(22) ***Ἀσυμπτωτικαὶ διευθύνσεις:*** $L+2Mk+Nk^2=0.$

(23) ***Πρώτη τιμὴ τῆς ὁριζούσης*** $LN-M^2$:

$$LN-M^2=D.\begin{vmatrix} l & l_u & l_v \\ m & m_u & m_v \\ n & n_u & n_v \end{vmatrix}.$$

(24) ***Δευτέρα τιμὴ τῆς ὁριζούσης*** $LN-M^2$:

$$LN-M^2=\frac{D}{l}\left(m_u n_v-n_u m_v\right)=\frac{D}{m}\left(n_u l_v-l_u n_v\right)=\frac{D}{n}\left(l_u m_v-m_u l_v\right).$$

(25) ***Τύπος τοῦ Euler:***

$$\frac{1}{\varrho_1}=\frac{\text{συν}^2\varphi}{P_1}+\frac{\text{ημ}^2\varphi}{P_2}\equiv\frac{1}{P_1}+\text{ημ}^2\varphi\left(\frac{1}{P_2}-\frac{1}{P_1}\right)\equiv\frac{1}{P_2}+\text{συν}^2\varphi\left(\frac{1}{P_1}-\frac{1}{P_2}\right).$$

(26) ***Ἀπειροστὴ τομὴ τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου*** $\Sigma(X-x)\,l=\varepsilon$:

$$Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=2\varepsilon.$$

(27) ***Ἐγγύτατον παραβολοειδές:***

$$\frac{X^2}{P_1}+\frac{Y^2}{P_2}=2Z.$$

(28) ***Ἐγγυτάτη κυκλογενὴς ἐπιφάνεια:***

$$(X^2+Y^2+Z^2)\left(\frac{X^2}{P_1}+\frac{Y^2}{P_2}\right)=2Z\,(X^2+Y^2).$$

(29) ***Εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια τοῦ Hachette:***

$$X=-t\,\text{ημ}\varphi,\quad Y=t\,\text{συν}\varphi,\quad Z=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_1}-\frac{1}{P_2}\right)\text{συν}\,2\varphi.$$

(30) ***Συζυγεῖς διευθύνσεις:*** $L+M(k+\varkappa)+Nk\varkappa=0.$

(31) ***Διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν γραμμῶν καμπυλότητος:***

$$\begin{vmatrix} Edu+Fdv & Ldu+Mdv \\ Fdu+Gdv & Mdu+Ndv \end{vmatrix}=0.$$

(32) *Ἄλλη μορφὴ τῆς ἐξισώσεως τῶν γραμμῶν καμπυλότητος*:

$$\frac{dl}{dx}=\frac{dm}{dy}=\frac{dn}{dz}.$$

(33) *Συνθῆκαι διὰ νὰ εἶναι παραμετρ. αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος*: $F=M=0$.

(34) *Τύποι τοῦ Olinde Rodrigue*:

$$dx+\mathrm{P}dl=0,\ dy+\mathrm{P}dm=0,\ dz+\mathrm{P}dn=0\ (\mathrm{P}\equiv \mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2).$$

(35) *Διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν*:

$$\mathrm{L}du^2+2\mathrm{M}dudv+\mathrm{N}dv^2=0.$$

(36) *Συνθῆκαι διὰ νὰ εἶναι αἱ παραμετρικαὶ γραμμαὶ ἀσυμπτωτικαί*:

$$\mathrm{L}=\mathrm{N}=0.$$

(37) *Διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν γεωδαισιακῶν γραμμῶν*:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{E}u'+\mathrm{F}v' & \frac{1}{2}\mathrm{E}_u u'^2+\mathrm{E}_v u'v'+(\mathrm{F}_v-\frac{1}{2}\mathrm{G}_u)v'^2+\mathrm{E}u''+\mathrm{F}v'' \\ \mathrm{F}u'+\mathrm{G}v' & (\mathrm{F}_u-\frac{1}{2}\mathrm{E}_v)u'^2+\mathrm{G}_u u'v'+\frac{1}{2}\mathrm{G}_v v'^2+\mathrm{F}u''+\mathrm{G}v'' \end{vmatrix}=0.$$

(38) *Μερικὴ μορφὴ αὐτῆς, ἂν* $u=t$:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{E}+\mathrm{F}v' & \frac{1}{2}\mathrm{E}_u+\mathrm{E}_v v'+(\mathrm{F}_v-\frac{1}{2}\mathrm{G}_u)v'^2+\mathrm{F}v'' \\ \mathrm{F}+\mathrm{G}v' & \mathrm{F}_u-\frac{1}{2}\mathrm{E}_v+\mathrm{G}_u v'+\frac{1}{2}\mathrm{G}_v v'^2+\mathrm{G}v'' \end{vmatrix}=0.$$

(39) *Συνθήκη διὰ νὰ εἶναι αἱ παραμετρικαὶ γραμμαὶ* $u=c$ *γεωδαισιακαί*:

$$\mathrm{F}\mathrm{G}_v-2\mathrm{G}\mathrm{F}_v+\mathrm{G}\mathrm{G}_u=0.$$

(40) *Καμπυλότης τῆς ἐπιφανείας (διὰ τῶν θεμελιωδῶν ποσῶν)*:

$$\mathrm{K}=\frac{\mathrm{LN}-\mathrm{M}^2}{\mathrm{D}^2}.$$

(41) *Καμπυλότης τῆς ἐπιφανείας (διὰ τῶν πρωτευουσῶν καμπυλοτήτων)*:

$$\mathrm{K}=\frac{1}{\mathrm{P}_1}\cdot\frac{1}{\mathrm{P}_2}.$$

(42) *Καμπυλότης τῆς ἐπιφανείας (διὰ μόνον τῶν ποσῶν τῆς α΄ τάξεως, τύπος τοῦ Gauss)*:

$$\mathrm{K}=\frac{1}{\mathrm{D}^4}\cdot\left\{\begin{vmatrix} \mathrm{F}_{uv}-\frac{1}{2}\mathrm{E}_{v^2}-\frac{1}{2}\mathrm{G}_{u^2} & \mathrm{F}_v-\frac{1}{2}\mathrm{G}_u & \frac{1}{2}\mathrm{G}_v \\ \frac{1}{2}\mathrm{E}_u & \mathrm{E} & \mathrm{F} \\ \mathrm{F}_u-\frac{1}{2}\mathrm{E}_v & \mathrm{F} & \mathrm{G} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}\mathrm{E}_v & \frac{1}{2}\mathrm{G}_u \\ \frac{1}{2}\mathrm{E}_v & \mathrm{E} & \mathrm{F} \\ \frac{1}{2}\mathrm{G}_u & \mathrm{F} & \mathrm{G} \end{vmatrix}\right\}$$

$$\equiv\frac{1}{\mathrm{D}}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{-\mathrm{E}\mathrm{E}_v-\mathrm{F}\mathrm{E}_u+2\mathrm{E}\mathrm{F}_u}{2\mathrm{ED}}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{E}\mathrm{G}_u-\mathrm{F}\mathrm{E}_v}{2\mathrm{ED}}\right)\right].$$

(43) *Πρῶτος τύπος τῶν Mainardi—Codazzi:*

$$L_v - M_u = \frac{GE_v - FG_u}{2D^2} \cdot L + \frac{EG_u - GE_u + 2F(F_u - E_v)}{2D^2} M + \\ + \frac{FE_u + EE_v - 2EF_u}{2D^2} N.$$

(44) *Δεύτερος τύπος τῶν Mainardi—Codazzi:*

$$N_u - M_v = \frac{FG_v + GG_u - 2GF_v}{2D^2} L + \frac{GE_v - EG_v + 2F(F_v - G_u)}{2D^2} M + \frac{EG_u - FE_v}{2D^2} N.$$

Θεμελιώδεις ἐξισώσεις δι᾽ ὀρθογ. δίκτυον:

(42α) $$K = \frac{1}{4E^2G^2}\left[EE_vG_v + GG_uE_u - 2GE\,(E_{v^2} + G_{u^2}) + GE_v^2 + EG_u^2\right].$$

(43α) $$L_v - M_u = \frac{E_v}{2E} L + \frac{1}{2}\left(\frac{G_u}{G} - \frac{E_u}{E}\right) M + \frac{E_v}{2G} N,$$

(44α) $$N_u - M_v = \frac{G_u}{2E} L + \frac{1}{2}\left(\frac{E_v}{E} - \frac{G_v}{G}\right) M + \frac{G_u}{2G} N.$$

Θεμ. ἐξισώσεις μὲ παραμετρ. γραμμ. τὰς γραμμὰς καμπυλότητος:

(42β) $$LN = -\frac{1}{2}E_{v^2} - \frac{1}{2}G_{u^2} + \frac{1}{4}\frac{E_v^2 + E_uG_u}{E} + \frac{1}{4}\frac{G_u^2 + E_vG_v}{G},$$

(43β) $$L_v = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G}\right)E_v,$$ (44β) $$N_u = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G}\right)G_u.$$

Θεμ. ἐξισώσεις μὲ παραμετρ. γραμμ. τὰς μηδενικάς:

(42γ) $$K = \frac{F_uF_v - FF_{uv}}{F^3} \equiv -\frac{1}{F}\frac{\partial^2 lF}{\partial u\,\partial v},$$

(43γ) $$L_v - M_u = -\frac{F_u}{F} M,$$ (44γ) $$N_u - M_v = -\frac{F_v}{F} M.$$

Θεμ. ἐξισώσεις μὲ γεωδ. παραμέτρους (u), (v):

(42δ) $$K = \frac{1}{4E^2}(E^2_v - 2EE_{v^2}) \equiv -\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial^2\sqrt{E}}{\partial v^2},$$

(43δ) $$L_v - M_u = \frac{1}{2E}(E_vL - E_uM + EE_vN),$$

(44δ) $$N_u - M_v = \frac{1}{2}\frac{E_v}{E} M.$$

Θεμ. ἐξισώσεις μὲ γεωδ. παραμ. (v), (u):

(42δ₁) $$K = \frac{1}{4G^2}(G_u^2 - 2GG_{u^2}) \equiv -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2},$$

(43δ₁) $$L_v - M_u = \frac{1}{2}\frac{G_u}{G} M,$$

(44δ₁) $$N_u - M_v = \frac{1}{2G}(GG_uL - G_vM + G_uN).$$

(14α) ***Κάθετος καμπυλότης:***

$$\frac{1}{\varrho_\varkappa}=\mathrm{L}u'^2+2\mathrm{M}u'v'+\mathrm{N}v'^2.$$

(45) ***Ἐφαπτομενικὴ καμπυλότης:***

$$\frac{1}{\varrho_\varepsilon}=\frac{1}{\mathrm{D}}\begin{vmatrix} \mathrm{E}u'+\mathrm{F}v' & \frac{1}{2}\mathrm{E}_u u'^2+\mathrm{E}_v u'v'+(\mathrm{F}_v-\frac{1}{2}\mathrm{G}_u)v'^2+\mathrm{E}u''+\mathrm{F}v'' \\ \mathrm{F}u'+\mathrm{G}v' & (\mathrm{F}_u-\frac{1}{2}\mathrm{E}_v)u'^2+\mathrm{G}_u u'v'+\frac{1}{2}\mathrm{G}_v v'^2+\mathrm{F}u''+\mathrm{G}v'' \end{vmatrix}.$$

(46) ***Κλίσις ϑ_1 τῆς καμπύλης:***

$$\sigma\varphi\vartheta_1=\frac{\begin{vmatrix} \mathrm{E}u'+\mathrm{F}v' & \frac{1}{2}\mathrm{E}_u u'^2+\mathrm{E}_v u'v'+(\mathrm{F}_v-\frac{1}{2}\mathrm{G}_u)v'^2+\mathrm{E}u''+\mathrm{F}v'' \\ \mathrm{F}u'+\mathrm{G}v' & (\mathrm{F}_u-\frac{1}{2}\mathrm{E}_v)u'^2+\mathrm{G}_u u'v'+\frac{1}{2}\mathrm{G}_v v'^2+\mathrm{F}u''+\mathrm{G}v'' \end{vmatrix}}{\mathrm{D}(\mathrm{L}u'^2+2\mathrm{M}u'v'+\mathrm{N}v'^2)}.$$

(47) ***Ὁλόκληρος καμπυλότης:***

$$\frac{1}{\varrho^2}=(\mathrm{L}u'^2+2\mathrm{M}u'v'+\mathrm{N}v'^2)^2+$$

$$+\frac{1}{\mathrm{D}^2}\begin{vmatrix} \mathrm{E}u'+\mathrm{F}v' & \frac{1}{2}\mathrm{E}_u u'^2+\mathrm{E}_v u'v'+(\mathrm{F}_v-\frac{1}{2}\mathrm{G}_u)v'^2+\mathrm{E}u''+\mathrm{F}v'' \\ \mathrm{F}u'+\mathrm{G}v' & (\mathrm{F}_u-\frac{1}{2}\mathrm{E}_v)u'^2+\mathrm{G}_u u'v'+\frac{1}{2}\mathrm{G}_v v'^2+\mathrm{F}u''+\mathrm{G}v'' \end{vmatrix}^2.$$

(48) ***Γεωδαισιακὴ καμπυλότης (τύπος τοῦ Liouville):***

$$\frac{d\sigma_\gamma}{ds}=\frac{1}{\varrho_\varepsilon}.$$

(49) ***Στρέψις:***

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\mathrm{D}}\begin{vmatrix} v'^2 & \mathrm{E} & \mathrm{L} \\ -u'v' & \mathrm{F} & \mathrm{M} \\ u'^2 & \mathrm{G} & \mathrm{N} \end{vmatrix}-\vartheta'.$$

(49′) ***Γεωδαισιακὴ στρέψις:***

$$\left(\frac{1}{r}\right)_\gamma\equiv\frac{1}{r_\gamma}=\frac{1}{\mathrm{D}}\begin{vmatrix} v'^2 & \mathrm{E} & \mathrm{L} \\ -u'v' & \mathrm{F} & \mathrm{M} \\ u'^2 & \mathrm{G} & \mathrm{N} \end{vmatrix}.$$

(50) ***Γεωδαισιακὴ στρέψις (τύπος τοῦ Bonnet):***

$$\frac{1}{r_\gamma}\equiv\frac{1}{r}+\frac{d\vartheta}{ds}=\left(\frac{1}{\mathrm{P}_2}-\frac{1}{\mathrm{P}_1}\right)\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{P}_2}-\frac{1}{\mathrm{P}_1}\right)\eta\mu2\varphi\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}{\mathrm{P}_1}+\frac{\eta\mu^2\varphi}{\mathrm{P}_2}\right)\equiv\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\varrho_\varkappa}\right).$$

(51) ***Στρέψεις τῶν ἀσυμπτωτικῶν:***

$$\frac{1}{r_1}=-\frac{M}{D},\quad \frac{1}{r_2}=\frac{M}{D}.$$

(51′) ***Τύπος τοῦ Enneper:***

$$\frac{1}{r_1 r_2}=K.$$

(52) ***Τύπος τοῦ Kommerell:***

$$\frac{1}{r_\gamma{}^2}=\left(\frac{1}{P_1}-\frac{1}{\varrho_1}\right)\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{P_2}\right).$$

Τύποι τοῦ Burgatti:

(50′)
$$\frac{1}{r_\gamma}=\frac{1}{r_{\gamma_1}}\eta\mu 2\varphi$$

(50″)
$$\frac{1}{r_\gamma}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{r_{\gamma_1}}+\frac{\eta\mu^2\omega}{r_{\gamma_2}}.$$

Γενίκευσις τοῦ τύπου τοῦ Burgatti:

μερικὴ περίπτωσις:

(50α)
$$\frac{1}{r_\gamma}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{r_{\gamma_1}}+\frac{\eta\mu^2\omega}{r_{\gamma_2}}+\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma\varphi\varphi_1}{r_{\gamma_1}}-\frac{\varepsilon\varphi\varphi_2}{r_{\gamma_2}}\right)\eta\mu 2\omega,$$

(50β)
$$\frac{1}{r_\gamma}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{r_{\gamma_1}}+\frac{\eta\mu^2\omega}{r_{\gamma_2}}+\frac{1}{2}\eta\mu 2\omega\left(\frac{1}{r_{\gamma_1}}\sqrt{-\frac{P_1}{P_2}}+\frac{1}{r_{\gamma_2}}\sqrt{-\frac{P_2}{P_1}}\right).$$

(53) ***Ἀναλλοίωτος τοῦ Laguerre:***

$$-\frac{1}{\varrho}\varrho'-\varepsilon\varphi\vartheta\left(\frac{2}{r}+3\vartheta'\right)=\left[\sigma\upsilon\nu^2\varphi\left(\frac{1}{P_1}\right)'+\eta\mu^2\varphi\left(\frac{1}{P_2}\right)'+\frac{1}{r_\gamma}\frac{E_v u'-Guv'}{\sqrt{EG}}\right]\varrho_\varkappa=$$

$$=\left[E\frac{\partial\left(\frac{1}{P_1}\right)}{\partial u}u'^3+3E\frac{\partial\left(\frac{1}{P_1}\right)}{\partial v}u'^2v'+3G\frac{\partial\left(\frac{1}{P_2}\right)}{\partial u}u'v'^2+G\frac{\partial\left(\frac{1}{P_2}\right)}{\partial v}v'^3\right]\varrho_\varkappa.$$

(54) ***Τύπος τοῦ Bonnet:***

$$\varrho=\frac{1}{2}\varrho_\alpha\left(3-\frac{r_\alpha}{r}\right).$$

(55) ***Τύπος τοῦ Beltrami:***

$$\varrho=\frac{3}{2}\varrho_\alpha.$$

(56) ***Ἀκτὶς καμπυλότητος τῶν ἀσυμπτωτικῶν:***

$$\frac{1}{\varrho_\alpha}=\frac{1}{(P_1-P_2)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{P_1{}^2}{2(-P_2)^{\frac{5}{2}}}\frac{\partial\left(-\frac{P_2{}^3}{P_1}\right)}{\partial s_1}\mp\frac{P_2{}^2}{2P_1{}^{\frac{5}{2}}}\frac{\partial\left(-\frac{P_1{}^3}{P_2}\right)}{\partial s_2}\right].$$

(56′) *Ἄλλη μορφὴ τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς:*

$$\frac{1}{\varrho_\alpha}=\frac{4(-\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2)^{\frac{7}{8}}}{(\mathrm{P}_1-\mathrm{P}_2)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{\partial}{\partial s_1}\left(-\frac{\mathrm{P}_1}{\mathrm{P}_2{}^3}\right)^{\frac{1}{8}}\mp\frac{\partial}{\partial s_2}\left(-\frac{\mathrm{P}_2}{\mathrm{P}_1{}^3}\right)^{\frac{1}{8}}\right]$$ *(Τύπος τοῦ Bonnet).*

(57) *Ἀναλλοίωτος τῆς δ′ τάξεως:*

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{r}+\frac{d\vartheta}{\vartheta s}\right)+\frac{\eta\mu\vartheta}{\varrho}\left(\frac{2\sigma\upsilon\nu\vartheta}{\varrho}-\frac{1}{\mathrm{P}_1}-\frac{1}{\mathrm{P}_2}\right)=\Theta_1.$$

(58) *Παράγωγος τῆς γωνίας δύο καθέτων τῆς ἐπιφανείας:*

$$\left(\frac{d\tilde{\omega}}{ds}\right)^2=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}{\mathrm{P}_1{}^2}+\frac{\eta\mu^2\varphi}{\mathrm{P}_2{}^2}.$$

(58α′) *Παράγωγοι τῆς ϖ πρὸς δύο καθέτους διευθύνσεις:*

$$\left(\frac{d\tilde{\omega}_1}{ds_1}\right)^2+\left(\frac{d\tilde{\omega}_2}{ds_2}\right)^2=\frac{1}{\mathrm{P}_1{}^2}+\frac{1}{\mathrm{P}_2{}^2}.$$

(58β′) *Παράγωγοι τῆς ϖ πρὸς δύο συζυγεῖς διευθύνσεις:*

$$\left(\frac{d\tilde{\omega}_1}{ds_1}\cdot\frac{d\tilde{\omega}_2}{ds_2}\right)^2=\left(\frac{1}{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}\right)^2.$$

(59) *Παράγωγος τῆς γωνίας δύο θέσεων κινητῆς εὐθείας:*

$$\Pi'^2=\Sigma\mathrm{A}'^2=\left(\frac{a}{\varrho}-\frac{c}{r}\right)^2+b^2\left(\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}\right)+\Sigma a'^2+2b\left(\frac{c'}{r}-\frac{a'}{\varrho}\right)+2b'\left(\frac{a}{\varrho}-\frac{c}{r}\right)=$$

$$=\frac{a^2+b^2}{\varrho^2}+\frac{b^2+c^2}{r^2}-\frac{2ac}{\varrho r}+\Sigma a'^2+\frac{2}{\varrho}(ab'-ba')+\frac{2}{r}(bc'-cb').$$

(60) *Παράγωγος τῆς Π, ὅταν ἔχωμεν ἐπιφανειακὴν καμπύλην:*

$$\Pi'^2=\frac{a^2+b^2}{\sigma\upsilon\nu^2\vartheta}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}{\mathrm{P}_1}+\frac{\eta\mu^2\varphi}{\mathrm{P}_2}\right)^2+(b^2+c^2)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{P}_2}-\frac{1}{\mathrm{P}_1}\right)\eta\mu 2\varphi-\vartheta'\right]^2-$$

$$-\frac{2ac}{\sigma\upsilon\nu\vartheta}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}{\mathrm{P}_1}+\frac{\eta\mu^2\varphi}{\mathrm{P}_2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{P}_2}-\frac{1}{\mathrm{P}_1}\right)\eta\mu 2\varphi-\vartheta'\right)+$$

$$+\frac{2(ab'-ba')}{\sigma\upsilon\nu\vartheta}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}{\mathrm{P}_1}+\frac{\eta\mu^2\varphi}{\mathrm{P}_2}\right)+2(bc'-cb')\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{P}_2}-\frac{1}{\mathrm{P}_1}\right)\eta\mu 2\varphi-\vartheta'\right)+\Sigma a'^2.$$

ΠΡΟΣΘΗΚΑΙ

***Τύποι τοῦ** Cesàro*:

$$\frac{\partial \varkappa_u}{\partial s_v}+\frac{\partial \sigma_v}{\partial s_u}+2\sigma_v\gamma_v=(\varkappa_v-\varkappa_u)\gamma_u,$$

(42—44,α′)
$$\frac{\partial \varkappa_v}{\partial s_u}-\frac{\partial \sigma_u}{\partial s_v}-2\sigma_u\gamma_u=(\varkappa_u-\varkappa_v)\gamma_v,$$

$$\frac{\partial \gamma_v}{\partial s_u}+\frac{\partial \gamma_u}{\partial s_v}+\gamma_v^2+\gamma_u^2=-\sigma_u\sigma_v-\varkappa_u\varkappa_v\equiv-\mathrm{K}$$

(42-44,α′′) *Μερικὴ περίπτωσις τῶν τύπων τοῦ* *Cesàro*:

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{\mathrm{P}_u}\right)}{\partial s_v}=\left(\frac{1}{\mathrm{P}_v}-\frac{1}{\mathrm{P}_u}\right)\left(\frac{\eta\mu\vartheta}{\varrho}\right)_u,\quad \frac{\partial\left(\frac{1}{\mathrm{P}_v}\right)}{\partial s_u}=\left(\frac{1}{\mathrm{P}_u}-\frac{1}{\mathrm{P}_v}\right)\left(\frac{\eta\mu\vartheta}{\varrho}\right)_v,$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\eta\mu\vartheta}{\varrho}\right)_v}{\partial s_u}+\frac{\partial\left(\frac{\eta\mu\vartheta}{\varrho}\right)_u}{\partial s_v}+\left(\frac{\eta\mu\vartheta}{\varrho}\right)_v^2+\left(\frac{\eta\mu\vartheta}{\varrho}\right)_u^2=-\varkappa_u\varkappa_v\equiv-\mathrm{K}.$$

(44α′′) *Τύπος τοῦ* *Liouville*:

$$\mathrm{K}=\frac{1}{\mathrm{D}}\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial u\partial v}+\frac{\partial}{\partial u}(\varkappa_u\sqrt{\mathrm{G}})+\frac{\partial}{\partial v}(\varkappa_v\sqrt{\mathrm{E}})\right].$$

(45α) *Τύπος τοῦ* *Bonnet*:

$$\frac{1}{\varrho_\varepsilon}=\frac{1}{\mathrm{D}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{F}\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\mathrm{G}\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{\mathrm{E}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2-2\mathrm{F}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\mathrm{G}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mathrm{F}\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\mathrm{E}\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{E}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2-2\mathrm{F}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\mathrm{G}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}}\right)\right].$$

(61) ***Συμφυεῖς ἐξισώσεις τῆς ἐπιφανείας***:

$$\frac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial s_1}=\Phi_1(\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2),\quad \frac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial s_2}=\Phi_2(\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2),$$

$$\frac{\partial \mathrm{P}_2}{\partial s_1}=\Phi_3(\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2),\quad \frac{\partial \mathrm{P}_2}{\partial s_2}=\Phi_4(\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2).$$

ΔΙΟΡΘΩΤΕΑ

1) σελ. 33, τύπ. (21′) καὶ (21″),

εἰς τὸν α′ $\frac{1}{P^2}\left(\text{ἀντὶ } \frac{1}{P_2}\right)$, εἰς τὸν β′ $\frac{1}{P_1}\left(\text{ἀντὶ } \frac{1}{P^2}\right)$·

2) σελ. 35, περίπτ. 1η, $LN - M^2$ (ἀντὶ $LM - N^2$)·

3) σελ. 64, τύπ. (45), $F_v - \frac{1}{2} G_u$ (ἀντὶ $F_v - \frac{1}{2} G_v$)·

4) σελ. 73, ὁ τύπος (52) ν' ἀριθμηθῇ (51′)·

5) σελ. 75, ὁ τύπος (53) ν' ἀριθμηθῇ (52)·

6) σελ. 76, ὁ τύπος (51) ν' ἀριθμηθῇ (50″)·

7) σελ. 77, ὁ τύπος (52) ν' ἀριθμηθῇ (50α)·

8) σελ. 78, «ὁ γεν. τύπος 50α» (ἀντὶ «ὁ γεν. τύπος 52») καὶ ὁ τύπος (52′) ν' ἀριθμηθῇ (50β).

9) σελ. 85, τύπ. (56), τὸ τρίτον — τῆς ἀγκύλης νὰ γραφῇ $\mp$.

Ἐκτὸς τῶν ἤδη ἀναφερθέντων ἰδικά μου εἶναι καὶ ἡ γενίκευσις τοῦ τύπου τοῦ Burgatti, ἡ *ἀναλυτικὴ* εὕρεσις τῆς ἀναλλοιώτου τοῦ Laguerre, ἡ *ἀναλυτικὴ* εὕρεσις τῆς καμπυλότητος τῶν ἀσυμπτωτικῶν, ἡ εὕρεσις τῆς παραγώγου τῆς γωνίας δύο καθέτων καὶ οἱ γενικοὶ τύποι (59) καὶ (60).

ΣΥΛΛΟΓΗ ΤΩΝ ΕΙΔΙΚΩΝ ΟΡΩΝ.

RECUEIL DES TERMES SPÉCIAUX.

SAMMLUNG DER SPEZIALAUSDRÜCKE.

(Οἱ μὲ ἀστερίσκον ὅροι δὲν εὑρίσκονται εἰς τὰ ξένα βιβλία).

Ἀκτὶς—Rayon—Radius.
Ἀναλλοίωτον—Invariance—Invarianz.
Ἀναλλοίωτος—Invariant—Invariante.
Ἀναπτυκτὴ ἐπιφάνεια—Surface développable—Abwickelbare Fläche.
Ἀπειροστὴ γωνία—Angle Infiniment petit—Unendlich kleiner Winkel.
Ἀπειροστικὴ Γεωμετρία—Géométrie Infinitésimale—Infinitesimalgeometrie.
Ἀσυμπτωτικὴ γραμμὴ (καμπύλη)—Ligne (courbe) asymptotique—Asymptotenkurve, Haupttangentenkurve (=linie).

Γενέτειρα (εὐθύγραμμος)—Génératrice (rectiligne)—(Geradlinige) Erzeugende.
Γεωδαισιακὴ ἀπόστασις—Distance géodésique—Geodätische Entfernung.
Γεωδαισιακὴ γραμμὴ (καμπύλη)—Ligne (courbe) géodésique—Geodätische Kurve (Linie).
Γεωδαισιακὴ γωνία συνεπαφῆς—Angle géodésique de contingence—Geodätischer Kontingenzwinkel.
Γεωδαισιακοὶ κύκλοι—Cercles géodésiques—Geodätische Kreise.

Δείκτρια—Indicatrice—Indikatrix.
Διαφορικὴ Γεωμετρία—Géométrie Différentielle—Differenzialgeometrie.
Διεύθυνσις—Direction—Richtung.
Δίκτυον (παραμετρικόν, ὀρθογώνιον)—Réseau (paramétrique, orthogonal)—(Rechtwinkliges, Parameter) Netz.
Διπαραμετρικὴ σειρὰ ἐπιφανειῶν—Famille de surfaces à deux paramètres—Zweiparametrige Flächenschar.

Ἐγγυτάτη κυκλογενὴς ἐπιφάνεια—Surface osculatrice des cercles de courbure—Oskulierende Fläche der Krümmungskreise.
Ἐγγύτατον παραβολοειδὲς—Paraboloïde osculateur—Oskulierendes Paraboloid.

Ἐγγυτάτη σπεῖρα—Tore osculateur—Oskulierende Ringfläche.
Ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνεια—Surface de rotation—Rotationsfläche.
Ἑλικοειδὲς (κοινὸν στρεβλὸν)—Hélicoïde gauche à plan directeur—Gemeine Schraubenfläche.
Ἐλλειψοειδὲς—Ellipsoïde—Ellipsoid.
* Ἐπιπεδόκυρτος ἐπιφάνεια —* Surface plane—convexe—* Eben—konvexe Fläche.
Ἐπίπεδον—Plan—Ebene.
Εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια—Surface réglée—Geradlinige Fläche.
Ἐφαπτομένη—Tangente—Tangente.
Ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον—Plan tangent—Tangentenebene, Tangenzialebene.
Ἐφαπτόμενος κῶνος—Cône tangent—Tangentenkegel, Tangenzialkegel.

Θεμελιώδεις ἐξισώσεις—Équations fondamentales—Fundamentalgleichungen.
Θεμελιώδη ποσὰ—Quantités fondamentales—Fundamentalgrössen.
Θεωρία τῶν Ἐπιφανειῶν—Théorie des Surfaces—Flächentheorie.

* Ισοσκελικὸν σημεῖον—* Point isoscèle—* Gleichschenkliger Punkt.

Κάθετος τῆς ἐπιφανείας—Normale à la surface—Flächennormale.
Καμπυλότης ἀπόλυτος—Courbure absolue—Absolute Krümmung.
Καμπυλότης γεωδαισιακὴ—Courbure géodésique—Geodätische Krümmung.
Καμπυλότης εἰς ἓν σημεῖον—Courbure en un point—Krümmung in einem Punkt.
Καμπυλότης ἐφαπτομενικὴ—Courbure tangentielle—Tangenzialkrümmung.
Καμπυλότης κάθετος—Courbure normale—Normalkrümmung.
Καμπυλότης μέση—Courbure moyenne—Mittlere Krümmung.
Καμπυλότης ὁλικὴ—Courbure totale—Totalkrümmung.
Καμπυλότητος γραμμὴ—Ligne de courbure—Krümmungskurve (=linie).
Καμπυλότητος κέντρον—Centre de courbure—Krümmungsmittelpunkt.
Κάμψις—Déformation—Biegung.
Κλίσις (τῆς καμπύλης)—Inclinaison (de la courbe)—Neigung (der Kurve).
Κοίλη ἐπιφάνεια—Surface concave—konkave Fläche.
Κοιλόκυρτος ἐπιφάνεια—Surface concave-convexe—Konkav-konvexe Fläche.
Κυρτὴ ἐπιφάνεια—Surface convexe—Konvexe Fläche.
Κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια—Surface cylindrique—Zylinderfläche.

Λαιμὸς τῆς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας—Arête de rebroussement de la développable—Gratlinie (Rückkehrkante) der abwichelbaren Fläche.

Μεσημβρινὸς—Méridien—Meridian.
Μηδενικὴ γραμμὴ—Ligne de longueur nulle—Minimalkurve.

Ὀμφαλικὴ γραμμὴ—Ligne ombilicale—* Nabelpunktlinie.
Ὀμφαλὸς (ὀμφαλικόν, σφαιρικὸν σημεῖον)—Ombilic—Nabelpunkt.

Ὀρθογώνιος τροχιά—Trajectoire orthogonale—Orthogonale Trajektorie.
Ὀρθογωνιότης—Orthogonalité—Orthogonalität.
Ὁρικὴ εὐθεῖα—(Droite) caractéristique—Grenzschnittgerade.

Παραβολοειδὲς ἐλλειπτικὸν—Paraboloïde elliptique—Elliptisches Paraboloid.
Παραβολοειδὲς ὑπερβολικὸν — Paraboloïde hyperbolique — Hyperbolisches Paraboloid.
Παράλληλος (κύκλος)—Parallèle—Breitenkreis.
Παραμετρικὴ γραμμὴ (καμπύλη) — Ligne (courbe) paramétrique — Parameterlinie (=kurve).
Παράμετρος—Paramètre—Parameter.
Περιβαλλομένη—Enveloppée—Eingehüllte, Umgehüllte.
Περιβάλλουσα—Enveloppe—Einhüllende, Umhüllende (Enveloppe).
Πρωτεύουσαι ἀκτῖνες (καμπυλότητος) — Rayons principaux (de courbure) Hauptkrümmungsradien.
Πρωτεύουσαι διευθύνσεις—Directions principales—Hauptrichtungen.
Πρωτεύουσαι κάθετοι τομαὶ — Sections normales principales — Hauptnormalschnitte.
Πρωτεύουσαι καμπυλότητες—courbures principales—Hauptkrümmungen.
Πρωτεύοντα κέντρα (καμπυλότητος) — Centres (de courbure) principaux — Hauptkrümmungsmittelpunkte.

Σημεῖον ἐλλειπτικὸν—Point elliptique—Elliptischer Punkt.
Σημεῖον παραβολικὸν—Point parabolique—Parabolischer Punkt.
Σημεῖον ὑπερβολικὸν—Point hyperbolique—Hyperbolischer Punkt.
Στοιχεῖον γραμμικὸν (τοῦ τόξου) — Élément linéaire (d'arc) — Bogenelement, Linienelement.
Στοιχεῖον ἐμβαδικὸν—Élément de surface—Flächenelement.
Στρέψις (ἀπόλυτος)—Torsion (absolue)—(Absolute) Torsion.
Στρέψις γεωδαισιακὴ—Torsion géodésique—Geodätische Torsion.
Σφαῖρα—Sphère—Kugel.
Σφαιρικὴ δείκτρια—Indicatrice sphérique—Sphärische Indikatrix.
Συζυγεῖς διευθύνσεις—Directions conjuguées—Konjugierte Richtungen.
Συμφυεῖς (ἢ ἀναξονικαὶ) ἐξισώσεις—Équations intrinsèques—Natürliche Gleichungen.
*Συνήθης ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας— *Équation ordinaire de la surface— *Gemeine Gleichung der Fläche.
Συνοδεῦον τρίεδρον — Trièdre (mobile) *accompagnant — Begleitendes Axenkreuz.
Συντεταγμέναι γεωδαισιακαὶ (πολικαὶ) — Coordonnées géodésiques (polaires) — Geodätische (Polar=) Koordinaten.
Συντεταγμέναι γραμμαὶ—Lignes (courbes) coordonnées—Koordinatenlinien.
Συντεταγμέναι καμπυλόγραμμοι — Coordonnées curvilignes — Krummlinige Koordinaten.

Τομὴ τῆς ἐπιφανείας κάθετος—Section normale de la surface—Normalschnitt der Fläche.

Τομὴ τῆς ἐπιφανείας πλαγία—Section inclinée de la surface—Schräger Schnitt der Fläche.

Ὑπερβολοειδὲς δίχωνον—Hyperboloïde à deux nappes—Zweischaliges Hyperboloid.

Ὑπερβολοειδὲς μονόχωνον—Hyperboloïde à une nappe—Einschaliges Hyperboloid.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.

(TABLE DES MATIÈRES).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄. (CHAPITRE I.)

Τὰ ποσὰ τῆς α΄ τάξεως E,F,G. (Les quantités de premier ordre E,F,G). (7-24).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄. (CHAPITRE II.)

Τὰ ποσὰ τῆς β΄ τάξεως L,M,N. (Les quantités de deuxième ordre L,M,N). (25—51).

*I. **Σπουδὴ τῆς ἐπιφανείας εἰς τὴν περιοχὴν ἑνὸς σημείου.** (Étude de la surface aux environs d'un point).* (25—42).

ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΧΑΤΖΙΔΑΚΗ
Τακτικοῦ καθηγητοῦ τοῦ Ἐθνικοῦ Πανεπιστημίου

ΣΜΗΝΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΛΕΓΜΑΤΑ
ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

ΑΝΩΤΕΡΟΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΝ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ (1927—1928)

«*Geometrica geometrice*»

11-II-44
Σ 75.000

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ ΠΑΡΑΣΚΕΥΑ ΛΕΩΝΗ
20—Ὁδὸς Περικλέους—20
1928

Στὴ μνήμη τοῦ καλύτερού μου φίλου,

ΤΟΥ ΠΑΤΕΡΑ ΜΟΥ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τὸ παρὸν βιβλίον περιέχει εἰς μεγαλυτέραν κάπως ἔκτασιν, τὰ μαθήματα, ποὺ ἐδίδαξα φροντιστηριακῶς πρὸ διετίας εἰς τοὺς τεταρτοετεῖς φοιτητὰς τῶν μαθηματικῶν καὶ ἐφέτος πάλιν ἐκτενέστερον. Ἀποτελεῖ μίαν ἀπόπειραν συστηματοποιήσεως θεωριῶν, ποὺ εὑρίσκει κανεὶς ἐγκατεσπαρμένας ἐδῶ κ' ἐκεῖ εἰς τὰ μεγαλύτερα συγγράμματα Ἀπειροστικῆς Γεωμετρίας, ἀλλὰ ὄχι συγκεντρωμένας εἰς ἓν ὅλον. Εἶχα ὑπ' ὄψιν μου τὰ ἑξῆς βιβλία:

1) *Darboux*, Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces, II.
2) *Bianchi*, Lezioni di Geometria Differenziale, I.
3) *Cesàro*, Lezioni di Geometria Intrinseca.
4) *Blaschke*, Vorlesungen über Differentialgeometrie, I.

Καθὲν ἀπὸ τὰ βιβλία αὐτὰ πραγματεύεται μέρος μόνον τῶν σχετικῶν θεωριῶν μὲ μεθόδους διαφορωτάτας, γεωμετρικωτέρας μὲν τὰ τῶν Darboux καὶ Cesàro, ἀναλυτικωτέραν τὸ τοῦ Bianchi (ἐπὶ τῇ βάσει τῆς θεωρίας τοῦ Gauss) καὶ μὲ μέθοδον εἰς ἄκρον συνεπτυγμένην, πλήρη συμβολισμῶν καὶ πολλαχοῦ δυσνόητον, τὸ τοῦ Blaschke. Ἐγὼ ἐπροσπάθησα πρῶτον νὰ συστηματοποιήσω εἰς ἓν τὰ ἐδῶ κ' ἐκεῖ ἐγκατεσπαρμένα καὶ δεύτερον νὰ μεταχειρισθῶ μέθοδον ἑνιαίαν καὶ σύμφωνον μὲ τὴν ἀρχήν: *Geometrica geometrice* (**τὰ γεωμετρικὰ γεωμετρικῶς**)· ἀπέφυγα ἑπομένως ὅσον τὸ δυνατὸν τὴν σχοινοτενῆ ἀναλυτικὴν μέθοδον τοῦ Gauss. Πλὴν τούτου ὅμως εὗρηκα καὶ μερικὰς νέας ἐκφράσεις τῶν κυριωτέρων τῆς θεωρίας αὐτῆς ποσῶν, ἰδίως δὲ τῆς **στρεβλότητος**. Ἐπειδὴ πρώτην φορὰν διδάσκονται εἰς τὸ πανεπιστήμιόν μας αἱ θεωρίαι αὐταί, μᾶς ἔλειπαν καὶ πολλοὶ σχετικοὶ ὅροι· ἠναγκάσθην λοιπὸν νὰ τοὺς σχηματίσω μόνος μου. Ἐλπίζω, ὅτι τοὺς ἀπέδωκα ὅσον γίνεται ἐπιτυχέστερον, καθὼς δεικνύει ὁ εἰς τὸ τέλος τοῦ βιβλίου **Πίναξ τῶν εἰδικῶν ὅρων**.

Τὸ παρὸν βιβλίον περιέχει μόνον τὴν **γενικὴν** θεωρίαν τῶν σμηνῶν καὶ τῶν συμπλεγμάτων. Εἰδικωτέρας θεωρίας (ὅπως π. χ. τὰ κυκλ. σμήνη, τὰ τοῦ Ribaucour κτλ.) ἐλπίζω νὰ πραγματευθῶ τὸ ἑπόμενον ἔτος.

Ἀθῆναι, Ἀπρίλιος 1928.

Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΗΣ.

ΣΜΗΝΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΛΕΓΜΑΤΑ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Εἰς τὸ Φροντιστήριον αὐτὸ θὰ ἐξετάσωμεν τὰς ἰδιότητας, ποὺ παρουσιάζουν τὰ πλήθη τῶν καμπύλων καὶ τὰ πλήθη τῶν ἐπιφανειῶν.

α΄) Διακρίνομεν διαφόρων εἰδῶν πλήθη καμπύλων: 1) Ἓν πλῆθος καμπύλων λέγεται ***γένος***, ὅταν ὁρίζεται ἀπὸ δύο ἐξισώσεις, ποὺ περιέχουν μίαν παράμετρον, δηλ. εἶναι τῆς μορφῆς: $\sigma(x, y, z, u)=0$, $\varphi(x, y, z, u)=0$. Ἓν γένος καμπύλων περιέχει ἑπομένως ∞^1 καμπύλας· καὶ ἂν κόψωμεν ὅλας τὰς καμπύλας του μὲ μίαν ἐπιφάνειαν, ὅλαι αἱ τομαὶ ὁμοῦ ἀποτελοῦν ***μόνον μίαν καμπύλην*** τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς.

Παραδείγματα : 1) Αἱ ἐφαπτόμεναι μιᾶς καμπύλης. 2) Αἱ ἐγγύταται περιφέρειαι μιᾶς καμπύλης. 3) Αἱ τομαὶ μιᾶς ἐπιφανείας ἀπὸ ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς ἓν δοθὲν ἐπίπεδον. 4) Αἱ ἕλικες αἱ ἴσαι καὶ παράλληλοι πρὸς μίαν δοθεῖσαν ἕλικα ἐπάνω εἰς ἕνα ὀρθὸν κυκλικὸν κύλινδρον. 5) Αἱ ἐξειλιγμέναι μιᾶς καμπύλης. 6) Αἱ ἐνειλιγμέναι μιᾶς καμπύλης. 7) Αἱ προβολαὶ μιᾶς καμπύλης ἐπάνω εἰς τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδά της εἰς ἓν σημεῖον. 8—9) Καθεμία ἀπὸ τὰς δύο σειρὰς τῶν γραμμῶν καμπυλότητος ἢ τῶν ἀσυμπτωτικῶν μιᾶς ἐπιφανείας· κ.τ.λ.

Ἓν ***ἐπίπεδον*** γένος (δηλ. γένος ἀπὸ καμπύλας ὅλας ἐπάνω εἰς τὸ ἴδιον ἐπίπεδον, π. χ. τῶν x y) ἔχει ***μίαν μόνον*** ἐξίσωσιν, τῆς μορφῆς: $\sigma(x, y, u)=0$. ***Παραδείγματα :*** 1) Οἱ ὁμόκεντροι κύκλοι. 2) Αἱ ὅμοιαι καὶ ὁμοιόθετοι ἐλλείψεις ἢ ὑπερβολαὶ κ.τ.λ.

Σημ. Μὲ ***δύο*** γένη καμπύλων ὁρίζονται αἱ ***καμπυλόγραμμοι*** συντεταγμέναι ἐπάνω εἰς ἓν ἐπίπεδον ἢ εἰς μίαν τυχοῦσαν ἐπιφάνειαν (βλ. ***Θεωρίαν Ἐπιφανειῶν Ν. Χατζιδάκη***).

2) Ἓν πλῆθος καμπύλων λέγεται ***σμῆνος***, ὅταν ὁρίζεται ἀπὸ δύο ἐξισώσεις μὲ ***δύο*** παραμέτρους. δηλ. τῆς μορφῆς :

$$\sigma(x, y, z, u, v)=0, \quad \varphi(x, y, z, u, v)=0.$$

Ἕν σμῆνος καμπύλων περιέχει ἑπομένως ∞^2 καμπύλας, καὶ ἂν κόψωμεν ὅλας τὰς καμπύλας του μὲ μίαν ἐπιφάνειαν, αἱ τομαὶ ὅλαι ὁμοῦ ἀποτελοῦν (γενικῶς) ***ὁλόκληρον τὴν ἐπιφάνειαν***. ***Παραδείγματα***: 1) Αἱ εὐθεῖαι, ποὺ διέρχονται ἀπὸ ἓν σημεῖον τοῦ χώρου. 2) Αἱ περιφέρειαι, ποὺ διέρχονται ἀπὸ δύο σημεῖα τοῦ χώρου. 3) Αἱ περιφέρειαι, ποὺ ἐφάπτονται εἰς ἓν δοθὲν σημεῖον μιᾶς καμπύλης. 4) Αἱ γεωδαισιακαὶ γραμμαὶ μιᾶς ἐπιφανείας κ.τ.λ.

Ἕν ***ἐπίπεδον*** σμῆνος, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν xy, ὁρίζεται ἀπὸ μίαν μόνον ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $\sigma(x, y, z, u, v)=0$. ***Παραδείγματα***: 1) Αἱ περιφέρειαι, ποὺ διέρχονται ἀπὸ ἓν δοθὲν σημεῖον. 2) Αἱ ἐλλείψεις ἢ ὑπερβολαί, ποὺ ἔχουν ὅλαι κέντρον ἓν δοθὲν σημεῖον καὶ τὰς ἑστίας των ἐπάνω εἰς μίαν δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

3) Ἕν πλῆθος καμπύλων λέγεται ***σύμπλεγμα***, ὅταν ὁρίζεται ἀπὸ δύο ἐξισώσεις μὲ ***τρεῖς*** παραμέτρους, δηλ. τῆς μορφῆς:

$$\sigma(x, y, z, u, v, w)=0, \quad \varphi(x, y, z, u, v, w)=0.$$

Ἕν σύμπλεγμα καμπύλων περιέχει ἑπομένως ∞^3 καμπύλας.

Παραδείγματα: 1) Αἱ εὐθεῖαι ὅλαι, ποὺ ἐφάπτονται εἰς μίαν ἐπιφάνειαν. 2) Αἱ εὐθεῖαι, ποὺ διέρχονται ἀπὸ τὰ σημεῖα μιᾶς καμπύλης. 3) Αἱ περιφέρειαι, ποὺ διέρχονται ἀπὸ ἓν σταθερὸν σημεῖον καὶ ἀπὸ ἓν μεταβλητὸν σημεῖον μιᾶς δοθείσης καμπύλης. 4) Αἱ περιφέρειαι, ποὺ ἐφάπτονται εἰς τὰ διάφορα σημεῖα μιᾶς καμπύλης.

Ἕν ἐπίπεδον σύμπλεγμα ἐπάνω εἰς τὸ ἐπίπεδον xy ἔχει μόνον μίαν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς: $\sigma(\;, y, u, v, w)=0$.

Παραδείγματα: 1) Ὅλαι αἱ περιφέρειαι τοῦ ἐπιπέδου. 2) Ὅλαι αἱ ὁμόκεντροι ἐλλείψεις ἢ ὑπερβολαὶ τοῦ ἐπιπέδου.

Πλήθη καμπύλων ὁριζόμενα ἀπὸ ἐξισώσεις μὲ ***περισσοτέρας ἀπὸ τρεῖς*** παραμέτρους δὲν θὰ ἐξετάσωμεν ἐδῶ.

β′) Ἐπίσης διακρίνομεν διαφόρων εἰδῶν πλήθη ἐπιφανειῶν.

1) ***Γένος*** λέγομεν ἓν πλῆθος ἐπιφανειῶν, ὅταν ὁρίζεται ἀπὸ μίαν ἐξίσωσιν μὲ μίαν παράμετρον, δηλ. τῆς μορφῆς: $\sigma(x, y, z, u)=0$ καὶ περιέχει ἑπομένως ∞^1 ἐπιφανείας.

Παραδείγματα: 1) Τὰ κάθετα ἐπίπεδα μιᾶς καμπύλης. 2) Αἱ ὁμόκεντροι σφαῖραι. 3) Τὰ ὅμοια καὶ ὁμοιόθετα ἐλλειψοειδῆ. 4—5) Αἱ σφαῖραι καμπυλότητος ἢ αἱ ἐγγύταται σφαῖραι μιᾶς καμπύλης. 6) Αἱ σφαῖραι μὲ τὴν ἰδίαν ἀκτῖνα καὶ μὲ κέντρα τὰ σημεῖα μιᾶς καμπύλης κ.τ.λ.

Σημ. Μὲ ***τρία*** γένη ἐπιφανειῶν ὁρίζονται αἱ καμπυλόγραμμοι συντεταγμέναι ἐντὸς τοῦ χώρου. (Βλ. Διαφ. Λογισμὸν Ι. Χατζιδάκη, Τόμ. Β΄).

2) ***Σμῆνος*** λέγομεν ἓν πλῆθος ἐπιφανειῶν, ὅταν ὁρίζεται ἀπὸ μίαν ἐξίσωσιν μὲ ***δύο*** παραμέτρους, δηλ. τῆς μορφῆς: $\sigma(x, y, z, u, v)=0$. Τὸ σμῆνος ἑπομένως περιέχει ∞^2 ἐπιφανείας.

Παραδείγματα: 1) Τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα μιᾶς ἐπιφανείας. 2) Αἱ ἴσαι σφαῖραι, ποὺ ἔχουν κέντρα τὰ σημεῖα μιᾶς ἐπιφανείας. 3) Αἱ σφαῖραι, ποὺ ἔχουν κέντρα των τὰ σημεῖα μιᾶς γραμμῆς. 4) Τὰ ἐλλειψοειδῆ, ποὺ ἔχουν κοινὰ τὸ κέντρον, τὰς εὐθείας τῶν ἀξόνων συμμετρίας καὶ τὸ μῆκος ἑνὸς ἄξονος κ.τ.λ.

3) ***Σύμπλεγμα*** λέγομεν ἓν πλῆθος ἐπιφανειῶν, ὅταν ὁρίζεται ἀπὸ μίαν ἐξίσωσιν μὲ ***τρεῖς*** παραμέτρους, δηλ. τῆς μορφῆς: $\sigma(x, y, z, u, v, w)=0$. Ἓν σύμπλεγμα λοιπὸν περιέχει ∞^3 ἐπιφανείας.

Παραδείγματα: 1) Αἱ σφαῖραι, ποὺ διέρχονται ἀπὸ ἓν δοθὲν σημεῖον. 2) Τὰ ἐλλειψοειδῆ, ποὺ ἔχουν τοὺς ἄξονάς των ἐπάνω εἰς τὸ ἴδιον ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων. 3) Αἱ σφαῖραι, ποὺ ἔχουν κέντρα τὰ σημεῖα μιᾶς ἐπιφανείας. 4) Αἱ ἐγγύταται σφαῖραι τῶν γεωδαισιακῶν γραμμῶν μιᾶς ἐπιφανείας κ.τ.λ.

Πλήθη ἐπιφανειῶν ὁριζόμενα ἀπὸ ἐξισώσεις μὲ ***περισσοτέρας ἀπὸ τρεῖς*** παραμέτρους δὲν θὰ ἐξετάσωμεν ἐδῶ.

ΜΕΡΟΣ Α΄.

ΓΕΝΗ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

Ἐπίπεδα γένη καμπύλων.

Ἀπὸ τὰς δύο σπουδαιοτέρας θεωρίας διὰ τὰ ἐπίπεδα γένη καμπύλων, τὴν πρώτην, τὴν τῆς περιβαλλούσης, τὴν ὑποθέτομεν γνωστὴν (Βλ. ***Διαφ. Λογισμὸν Ι. Χατζιδάκη***, Τόμ. Β΄.) καὶ ἐξετάζομεν μόνον τὴν δευτέραν, τὴν τῶν σταθερογωνίων τροχιῶν.

Σταθερογώνιοι τροχιαί.

1. ***Διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν τροχιῶν.*** – Ὅταν μᾶς δοθῇ ἓν ἐπίπεδον γένος καμπύλων, ὀνομάζομεν ***σταθερογωνίους τροχιάς*** του μὲ κλίσιν ω ἓν ἄλλο γένος καμπύλων, ποὺ κάθε καμπύλη του κόπτει κάθε καμπύλην τοῦ πρώτου μὲ γωνίαν σταθερὰν ω. Ἂν ἰδιαιτέρως ἡ ω εἶναι ὀρθή, αἱ τροχιαὶ λέγονται ***ὀρθογώνιοι***· ἂν ὄχι, ***πλαγιογώνιοι***.

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ πρώτου γένους: $\sigma(x, y, u)=0$ ἢ καὶ τὴν ***διαφορικήν*** του μόνον ἐξίσωσιν, εἶναι εὔκολον νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν τῶν σταθερογωνίων τροχιῶν του μὲ κλίσιν ω, ὡς ἑξῆς.

Ἂν διαφορίσωμεν τὴν ἐξίσωσιν: $\sigma(x, y, u)=0$ (δι᾿ ἓν ὡρισμένον u), θὰ ἔχωμεν $\sigma_x(x, y, u)dx+\sigma_y(x, y, u)dy=0$· καὶ ἂν ἀπαλείψωμεν τὸ u μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν ἐξισώσεων [1], εὑρίσκομεν μίαν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς: $\varphi(x, y)dx+f(x,y)dy=0$ ἢ καὶ $-Y(x, y)dx+X(x, y)dy=0$, δηλ. $\frac{dy}{dx}=\frac{Y}{X}$. Τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν, ποὺ μᾶς δίδει τὸν γωνιακὸν συντελεστὴν τῆς ἐφαπτομένης κάθε καμπύλης τυ γένους, τὴν ὀνομάζομεν ***διαφορικὴν ἐξίσωσιν τοῦ γένους.*** Ἀπὸ αὐτὴν θὰ εὕρωμεν τώρα τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν τῶν τροχιῶν μὲ κλίσιν ω ὡς ἑξῆς: Ἂν φ_1 καὶ φ εἶναι ἀντιστοίχως αἱ γωνίαι τῶν ἐφαπτομένων μιᾶς καμπύλης τοῦ γένους τῶν τροχιῶν καὶ μιᾶς τοῦ ἀρχικοῦ, θὰ ἔχωμεν:

---

[1] Ἡ παράμετρος ἐξαφανίζεται ἀμέσως, ἂν λύσωμεν πρῶτα τὴν ἐξίσωσιν τοῦ γένους πρὸς τὴν παράμετρον, δηλ. τὴν φέρωμεν εἰς τὴν μορφὴν $\varphi(x, y)=u$.

$$\varepsilon\varphi\varphi_1 = \varepsilon\varphi(\varphi+\omega) = \frac{\varepsilon\varphi\varphi+\varepsilon\varphi\omega}{1-\varepsilon\varphi\varphi\varepsilon\varphi\omega} = \frac{\frac{Y}{X}+\varepsilon\varphi\omega}{1-\frac{Y}{X}\varepsilon\varphi\,\omega} = \frac{X\eta\mu\omega+Y\sigma\upsilon\nu\omega}{X\sigma\upsilon\nu\omega - Y\eta\mu\omega}.$$

Τὸ γένος λοιπὸν τῶν τροχιῶν ἔχει τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{X\eta\mu\omega+Y\sigma\upsilon\nu\omega}{X\sigma\upsilon\nu\omega-Y\eta\mu\omega},$$

ἢ καὶ $(X\eta\mu\omega+Y\sigma\upsilon\nu\omega)\,dx-(X\sigma\upsilon\nu\omega-Y\eta\mu\omega)dy=0$ (α)

καὶ ἐπομένως, διὰ νὰ εὑρεθῇ ἡ πεπερασμένη του ἐξίσωσις, χρειάζεται νὰ ὁλοκληρωθῇ ἡ διαφορικὴ αὐτὴ ἐξίσωσις τῆς α΄. τάξεως: τότε θὰ εἰσέλθῃ μία σταθερὰ τῆς ὁλοκληρώσεως, δηλ. ἡ ***παράμετρος*** τοῦ γένους τῶν τροχιῶν. Ἂν $\omega=90^0$, ἡ διαφορικὴ αὐτὴ ἐξίσωσις καταντᾷ: $Xdx+Ydy=0$ καὶ παράγεται ἀπὸ τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἀρχικοῦ γένους μὲ τὸν ἑξῆς κανόνα: Τρέπομεν τὸ dx εἰς dy καὶ τὸ dy εἰς —dx (δηλ. ἀντὶ $\frac{dy}{dx}$ γράφομεν $-\frac{dx}{dy}$).

2. Ἀκτὶς καμπυλότητος τῶν τροχιῶν.—Ἀπὸ μόνην τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν τῶν τροχιῶν (δηλ. τῶν ὁλοκληρωτικῶν καμπύλων τῆς ἐξισώσεως (α)), χωρὶς νὰ τὴν ὁλοκληρώσωμεν, εἰμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητός των, ὡς ἑξῆς: α΄) Ἂν ἔχωμεν γενικῶς μίαν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς: $-Ydx+Xdy=0$, ἔχομεν ἀμέσως τὴν τιμὴν τῆς α΄ παραγώγου: $\frac{dy}{dx}=\frac{Y}{X}$· τὴν β΄ παράγωγον εὑρίσκομεν ἔπειτα παραγωγίζοντες τὴν α΄ ***ὁλικῶς*** πρὸς x:

$$y'' = \frac{(Y_x + Y_y\, y')\,X - (X_x + X_y\, y')Y}{X^2}.$$

καὶ ἂν θέσωμεν εἰς αὐτὴν τὴν τιμὴν $\frac{Y}{X}$ τῆς α΄ παραγώγου, εὑρίσκομεν:

$$y'' = \frac{Y_x X^2 + (Y_y - X_x)XY - X_y Y^2}{X^3}.$$

Ἐπομένως ἡ καμπυλότης $\frac{1}{\varrho}$ τῆς τυχούσης καμπύλης τοῦ γένους εἶναι:

$$(\beta)\quad \frac{1}{\varrho} = \frac{Y_x X^2 + (Y_y - X_x)XY - X_y Y^2}{(X^2+Y^2)^{3/2}}$$

β΄) Διὰ νὰ εὕρωμεν τώρα τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος $\frac{1}{\varrho_1}$ τοῦ γένους τῶν τροχιῶν, ἀρκεῖ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον (β) εἰς τὸ γένος τῶν καμπύλων (α)· δηλ. νὰ θέσωμεν πρὸς στιγμήν: $X\eta\mu\omega + Y\sigma\upsilon\nu\omega \equiv -Y_1$, $-(X\sigma\upsilon\nu\omega - Y\eta\mu\omega) \equiv X_1$, (γ)· ὅτε ὁ τύπος (β) γίνεται:

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{Y_{1x} X_1^2 + (Y_{1y} - X_{1x}) X_1 Y_1 - X_{1y} Y_1^2}{(X_1^2 + Y_1^2)^{3/2}}$$

Καὶ ἂν θέσωμεν τὰς τιμὰς τῶν X_1, Y_1 καὶ τῶν παραγώγων των ἀπὸ τὰς σχέσεις (γ), εὑρίσκομεν, ὕστερ᾽ ἀπὸ ὀλίγας πράξεις: (δ) $\dfrac{1}{\varrho_1} =$

$$= \frac{[Y_x X^2 + (Y_y - X_x) XY - X_y Y^2]\,\sigma\upsilon\nu\omega + [X_x Y^2 - (X_y + Y_x) XY + Y_y X^2]\,\eta\mu\omega}{(X^2 + Y^2)^{3/2}} \; (^1).$$

3. Σχέσις μεταξὺ $\dfrac{1}{\varrho_0}$, $\dfrac{1}{\varrho_{\frac{\pi}{2}}}$ *καὶ* $\dfrac{1}{\varrho_\omega}$. Διὰ $\omega = 0$ ὁ τύπος αὐτὸς μᾶς δίδει προφανῶς πάλιν τὸν τύπον (β) τῆς καμπυλότητος $\dfrac{1}{\varrho_0}$ τῶν ἀρχικῶν καμπύλων, διὰ δὲ $\omega = 90^0$ τὴν καμπυλότητα $\left(\dfrac{1}{\varrho_{\frac{\pi}{2}}}\right)$ τῶν ὀρθογωνίων τροχιῶν, δηλ. εἶναι:

$$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{Y_x X^2 + (Y_y - Y_x) XY - X_y Y^2}{(X^2 + Y^2)^{3/2}},$$

$$\frac{1}{\varrho_{\frac{\pi}{2}}} = \frac{X_x Y^2 - (X_y + Y_x) XY + Y_x X^2}{(X^2 + Y^2)^{3/2}}$$

καὶ ἑπομένως γενικῶς διὰ τὴν καμπυλότητα $\dfrac{1}{\varrho_\omega}$ τῶν τροχιῶν μὲ γωνίαν ω: (ε) $\dfrac{1}{\varrho_\omega} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\varrho_0} + \dfrac{\eta\mu\omega}{\varrho_{\frac{\pi}{2}}}$.

Ὁ τύπος αὐτὸς (ε) συνδέει ***τὰς εἰς τὸ ἴδιον σημεῖον Μ καμπυλότητας τῆς ἀρχικῆς καμπύλης, τῆς ὀρθογωνίου τροχιᾶς της καὶ τῆς τυχούσης ἄλλης τροχιᾶς της***, ἐπιδέχεται δὲ τὴν ἑξῆς γεωμετρικὴν ἑρμηνείαν.

Τὰ κέντρα καμπυλότητος εἰς ἓν σημεῖον Μ τῶν τροχιῶν μὲ γωνίας ὁποιασδήποτε ω κεῖνται ὅλα ἐπάνω εἰς τὴν εὐθεῖαν, ποὺ

---

(1) Συντελεστὴς τοῦ συνω εἶναι, καθὼς βλέπομεν, ὁ ἴδιος ὁ ἀριθμητὴς τοῦ τύπου (β). Ὁ δὲ συντελεστὴς τοῦ ημω παράγεται ἀπὸ τὸν τοῦ συνω, ἂν τρέψωμεν τὸ X εἰς −Y καὶ τὸ Y εἰς X.

ἑνώνει τὰ κέντρα καμπυλότητος K_0 ***καὶ*** $K_{\frac{\pi}{2}}$ ***(εἰς τὸ ἴδιον σημεῖον M) τῆς ἀρχικῆς καμπύλης καὶ τῆς ὀρθογωνίου τροχιᾶς της.***

Ἀπόδειξις. Συντεταγμέναι τοῦ τυχόντος κέντρου K_ω πρὸς ἄξονας τὰς εὐθείας MK_0 καὶ $MK_{\frac{\pi}{2}}$ εἶναι αἱ $x = MK_\omega \,\text{συν}\omega = \varrho_\omega \,\text{συν}\omega$, $y = \varrho_\omega \,\text{ημ}\omega$· καὶ ἂν αἱ τιμαὶ αὗται τεθοῦν εἰς τὸν τύπον (ε), εὑρίσκεται ἡ γραμμικὴ ἐξίσωσις: $\frac{x}{\varrho_0} + \frac{y}{\varrho_{\frac{\pi}{2}}} = 1$ (ε′)

Ἑπομένως κεῖνται ὅλα τὰ κέντρα K_ω ἐπάνω εἰς τὴν εὐθεῖαν αὐτὴν (ε′), δηλ. τὴν $K_0\, K_{\frac{\pi}{2}}$.

4. Πόρισμα τῆς ἰδιότητος αὐτῆς. — Ἐπειδὴ καὶ οἱ τρεῖς κύκλοι καμπυλότητος μὲ ἀκτῖνας τὰς ϱ_0, $\varrho_{\frac{\pi}{2}}$ καὶ ϱ_ω διέρχονται ἀπὸ τὸ M, διέρχονται καὶ ἀπὸ τὸ συμμετρικὸν τοῦ M σημεῖον M′ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν $K_0K_{\frac{\pi}{2}}$. Ἂν δὲ δώσωμεν εἰς τὸ ω ὅλας τὰς δυνατὰς τιμάς, βλέπομεν, ὅτι ***οἱ*** ∞^1 ***κύκλοι καμπυλότητος εἰς τὸ M ὅλων τῶν τροχιῶν διέρχονται ὅλοι ἀπὸ δύο σταθερὰ σημεῖα (τὰ M καὶ M′)· ἀποτελοῦν δηλ. δέσμην μὲ κορυφὰς τὰ δύο αὐτὰ σημεῖα καὶ ἑπομένως δὲν ἔχουν περιβάλλουσαν καμπύλην.*** [1]

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β′.

Γένη καμπύλων ἐντὸς τοῦ χώρου.

5. Ἀδύνατον τῆς ὑπάρξεως περιβαλλούσης (γενικῶς). — ***Ἓν γένος καμπύλων τοῦ χώρου δὲν ἔχει γενικῶς περιβάλλουσαν.***

---

(1) Ἡ περιβάλλουσα ἑνὸς γένους ὁρίζεται, καθὼς γνωρίζομεν, ἀπὸ τὸ σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων: $\sigma(x, y, u)=0$, $\sigma_u(x, y, u)=0$, ποὺ γενικῶς δίδουν τὰ x, y ὡς συναρτήσεις τοῦ u· εἰμπορεῖ ὅμως νὰ συμβῇ, αἱ τιμαὶ τῶν x, y, ποὺ δίδονται ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις αὐτάς, νὰ εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀπὸ τὸ u, δηλ. **σταθεραί**· τότε εἶναι φανερόν, ὅτι περιβάλλουσα **καμπύλη** τοῦ γένους αὐτοῦ δὲν ὑπάρχει, δηλ. **ἐκφυλίζεται** εἰς ἓν ἢ περισσότερα **μεμονωμένα σημεῖα**. Αὐτὸ λοιπὸν ἀκριβῶς συμβαίνει ἐδῶ.

Ἀπόδειξις. Ἡ τομὴ τῆς τυχούσης καμπύλης τοῦ γένους καὶ τῆς γειτονικῆς της θὰ ἐδίδετο ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma(x, y, z, u)=0,\ \varphi(x, y, z, u)=0, \\ \sigma(x, y, z, u+\Delta u)=0,\ \varphi(x, y, z, u+\Delta u)=0. \end{array}\right\} (\alpha)$$

Ἑπομένως τὸ ὅριον τῆς τομῆς αὐτῆς (διὰ ορ$\Delta u=0$), ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις: $\sigma(x,y,z,u)=0$, $\varphi(x,y,z,u)=0$, $\sigma_u(x,y,z,u)=$, $\varphi_u(x, y, z, u)=0$· αἱ ἐξισώσεις ὅμως αὐταί, καθὼς καὶ αἱ (α), εἶναι ***4***, ἐνῷ αἱ ἄγνωστοι συντεταγμέναι τῆς τομῆς, καθὼς καὶ τοῦ ὁρικοῦ σημείου, εἶναι μόνον ***3***· ἑπομένως, ***γενικῶς***, δηλ. ἂν δὲν πληροῦται ***κάποια συνθήκη*** (διὰ νὰ ἔχουν αἱ τέσσαρες αὐταὶ ἐξισώσεις ἓν ***κοινὸν*** σύστημα λύσεων x, y, z), δὲν ὑπάρχει οὔτε τομή, οὔτε ὅριον τῆς τομῆς, ***ὥστε οὔτε περιβάλλουσα***.

6. ***Περιβάλλουσα τῶν ὁρικῶν γραμμῶν ἑνὸς γένους ἐπιφανειῶν.***—Μία ἀξιοσημείωτος ***μερικὴ*** περίπτωσις, ποὺ ἓν γένος καμπύλων τοῦ χώρου ἔχει περιβάλλουσαν, εἶναι, ὅταν αἱ ἐξισώσεις του εἶναι τῆς μορφῆς: $\sigma(x, y, z, u)=0$, $\sigma_u(x, y, z, u)=0$ (α), (δηλ. ὅταν ἡ μία ἀπὸ τὰς δύο ἐξισώσεις εἶναι ἡ παράγωγος τῆς ἄλλης πρὸς τὴν παράμετρον u). Τότε εἶναι φανερόν, ὅτι αἱ προηγούμεναι ἐξισώσεις καταντοῦν μόνον 3: $\sigma(x, y, z, u)=0$, $\sigma_u(x, y, z, u)=0$, $\sigma_{u^2}(x, y, z, u)=0$ καὶ ἑπομένως ***τότε*** ὑπάρχει περιβάλλουσα. Τὰ γένη τῶν καμπύλων, ποὺ ἔχουν ἐξισώσεις τῆς μορφῆς (α), τὰ ἔχομεν ἤδη συναντήσει εἰς τὴν θεωρίαν τῆς περιβαλλούσης ἑνὸς γένους ἐπιφανειῶν (Διαφ. Λογισμός, Ι. Χατζιδάκη, Τομ. Β'): εἶναι αἱ ***ὁρικαὶ*** γραμμαὶ καὶ ἡ περιβάλλουσά των εἶναι ***ὁ λαιμός***.

7. ***Γένη εὐθειῶν ἐντὸς τοῦ χώρου.***—Ἓν γένος εὐθειῶν ἀποτελεῖ μίαν ἐπιφάνειαν, ποὺ λέγεται ***εὐθειογενής***. Γνωρίζομεν δὲ ἤδη ἀπὸ τὴν Ἀπειροστικὴν Γεωμετρίαν (Διαφ. Λογισμός, Ι. Χατζιδάκη, Τομ. Β'), ὅτι διὰ νὰ ἔχῃ ἓν τοιοῦτο γένος περιβάλλουσαν, δηλ. διὰ νὰ ἐφάπτωνται αἱ εὐθεῖαί του εἰς μίαν καμπύλην τοῦ χώρου, χρειάζεται μία συνθήκη· καὶ ἡ συνθήκη αὐτὴ εἶναι: $\| dx\ \alpha\ d\alpha \| =0$, [1] ὅπου $\dfrac{X-x}{\alpha}=\dfrac{Y-y}{\beta}=\dfrac{Z-z}{\gamma}$ εἶναι αἱ ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν τοῦ γένους.

---

[1] Μὲ τὴν σύντομον αὐτὴν γραφὴν ἐννοοῦμεν τὴν ὁρίζουσαν: $\begin{vmatrix} dx & \alpha & d\alpha \\ dy & \beta & d\beta \\ dz & \gamma & d\gamma \end{vmatrix}$.

Τὸ ἴδιον θὰ κάμνωμεν παντοῦ εἰς τὰ ἑπόμενα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

Γένη ἐπιφανειῶν.

8. Περιβάλλουσα.—Τὴν θεωρίαν τῆς περιβαλλούσης ἑνὸς γένους ἐπιφανειῶν τὴν ἐμάθομεν ἤδη εἰς τὴν Διαφορικὴν Γεωμετρίαν (Ι. Ν. Χατζ. Διαφ. Λογ. Τόμ. Β΄), εἶναι λοιπὸν περιττὸν νὰ τὴν ἐπαναλάβωμεν. Προσθέτομεν μόνον, ὅτι ***ὁ λαιμὸς ἔχει μὲ ἑκάστην περιβαλλομένην ἐπιφάνειαν ἐπαφὴν β΄ τάξεως*** [1] (ἡ ἀπόδειξις ἁπλουστάτη).

9. Τρισορθογώνια συστήματα.—Καὶ περὶ αὐτῶν ἐμάθομεν εἰς τὴν Ἀπειροστ. Γεωμ. (Ι. Ν. Χατζ. Διαφ. Λογ, Τόμ. Β΄.) τὰ ἑξῆς: 1) τὰς συνθήκας καθετότητος, 2) τὸ θεώρημα τοῦ Dupin καὶ 3) τὴν ἀπαιτουμένην συνθήκην, διὰ ν᾽ ἀποτελέσῃ μία σειρὰ ἐπιφανειῶν μέρος τρισορθογωνίου συστήματος.

---

[1] Ἐπαφὴ β΄ τάξεως μιᾶς καμπύλης (Κ) καὶ μιᾶς ἐπιφανείας (Ε) εἰς ἓν σημεῖον Μ σημαίνει ***γεωμετρικῶς***, ὅτι ἡ καμπύλη ἔχει: α΄) ἐφαπτομένην εἰς τὸ Μ κειμένην ἐπὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς (Ε) (ἐπαφὴ α΄ τάξ.) καὶ β΄) κύκλον καμπυλότητος εἰς τὸ Μ τὸν ἴδιον κατάθεσιν καὶ μέγεθος πρὸς τὸν κύκλον καμπυλότητος τῆς τομῆς τῆς (Ε) ὑπὸ τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου τῆς (Κ).

ΜΕΡΟΣ Β΄.

ΣΜΗΝΗ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

Γενικὴ θεωρία τοῦ σμήνους καμπύλων.

10. Ἐξισώσεις τοῦ σμήνους.—Ἓν σμῆνος καμπύλων ὁρίζεται ἀπὸ τὰς δύο ἐξισώσεις: (1) $\sigma(x, y, z, u, v)=0$, $\varphi(x, y, z, u, v)=0$. Εἰς κάθε σχέσιν: $v=\rho(u)$ ἀντιστοιχεῖ μία ἐπιφάνεια ἀποτελουμένη ἀπὸ ∞^1 καμπύλας τοῦ σμήνους, μία «***ἐπιφάνεια τοῦ σμήνους***»· καὶ εἰς κάθε ζεῦγος τιμῶν u_1, v_1 μία καμπύλη ***(ἓν «στοιχεῖον»)*** τοῦ σμήνους. Εἰς κάθε διαφορικὴν σχέσιν: $\frac{dv}{du}=f(u, v)$ ἀντιστοιχεῖ μία σειρὰ ἐπιφανειῶν τοῦ σμήνους, δηλ. ***μία σύνδεσις τῶν ∞^2 καμπύλων του ἀνὰ ∞^1 εἰς μίαν σειρὰν ἐπιφανειῶν.***

11. Καμπύλαι τοῦ σμήνους δι᾽ ἑνὸς σημείου.—Ἀπὸ κάθε σημεῖον τοῦ χώρου διέρχεται γενικῶς ὡρισμένος ἀριθμὸς καμπύλων τοῦ σμήνους· διότι, ἂν τεθοῦν εἰς τὰς ἐξισώσεις (1), αἱ συντεταγμέναι (x_1, y_1, z_1) τοῦ τυχόντος σημείου τοῦ χώρου, αἱ δύο ἐξισώσεις: $\sigma(x_1, y_1, z_1, u, v)=0$, $\varphi(x_1, y_1, z_1, u, v)=0$ (2) ὁρίζουν τὰς παραμέτρους u, v καὶ δίδουν ὡρισμένα ζεύγη τιμῶν δι᾽ αὐτάς.

Εἶναι ὅμως δυνατὸν αἱ δύο αὐταὶ ἐξισώσεις (2) εἰς μερικὰ ἰδιαίτερα σημεῖα τοῦ χώρου νὰ καταντοῦν μόνον μία ἢ καὶ ταὐτότητες· τότε, εἰς μὲν τὴν α΄. περίπτωσιν διέρχονται ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτὰ ∞^1 καμπύλαι τοῦ σμήνους, εἰς δὲ τὴν β΄. ὅλαι αἱ ∞^2 καμπύλαι τοῦ σμήνους.

Παράδειγμα τῆς α΄. περιπτώσεως. Ἂν θεωρήσωμεν τὸ σμῆνος τῶν εὐθειῶν, ποὺ διέρχονται ἀπὸ τὰ σημεῖα μιᾶς δοθείσης καμπύλης (Κ) καὶ ἐφάπτονται εἰς μίαν δοθεῖσαν ἐπιφάνειαν (Ε), ἀπὸ κάθε σημεῖον Μ τοῦ χώρου διέρχεται μία ἢ ὡρισμένος ἀριθμὸς εὐθειῶν τοῦ σμήνους· διότι θὰ εἶναι αἱ τομαὶ δύο κωνικῶν ἐπιφανειῶν μὲ κορυφὴν τὸ Μ, τῆς μιᾶς διερχομένης διὰ τῆς καμπύλης (Κ) καὶ τῆς ἄλλης περιγεγραμμένης περὶ τὴν ἐπιφάνειαν (Ε). Ἂν ὅμως τὸ Μ πέσῃ ἐπάνω εἰς τὴν (Κ), τότε ἔχομεν ∞^1 εὐθείας τοῦ σμήνους ἀπὸ τὸ Μ, δηλ. τὰς γενετείρας τοῦ κώνου μὲ κορυφὴν τὸ Μ. τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὴν ἐπιφάνειαν.

Παράδειγμα τῆς β΄. περιπτώσεως. Ἀπὸ τὸ σμῆνος τῶν περιφερειῶν, ποὺ διέρχονται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β τοῦ χώρου, μία μόνον διέρχεται καὶ ἀπὸ τὸ τυχὸν ἄλλο σημεῖον Μ τοῦ χώρου· ἂν ὅμως τὸ Μ συμπέσῃ μὲ τὸ Α ἢ τὸ Β, τότε διέρχεται ἀπὸ αὐτὸ ὁλόκληρον τὸ σμῆνος.

12. Ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον μιᾶς ἐπιφανείας τοῦ σμήνους.— Ἂν θέσωμεν $v = \varrho(u)$, ἔχομεν μίαν ἐπιφάνειαν τοῦ σμήνους:

$$\sigma(x, y, z, u, \varrho(u)) = 0, \quad \varphi(x, y, z, u, \varrho(u)) = 0. \quad (3)$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδόν της εἰς ἓν σημεῖόν της, διαφορίζομεν:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x\, dx + \sigma_y\, dy + \sigma_z\, dz + (\sigma_u + \sigma_v\, \varrho'(u))\, du = 0 \\ \varphi_x\, dx + \varphi_y\, dy + \varphi_z\, dz + (\varphi_u + \varphi_v\, \varrho'(u))\, du = 0 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

καὶ ἑπομένως διὰ διαιρέσεως:

$$\frac{\sigma_x\, dx + \sigma_y\, dy + \sigma_z\, dz}{\varphi_x\, dx + \varphi_y\, dy + \varphi_z\, dz} = \frac{\sigma_u + \sigma_v\, \varrho'(u)}{\varphi_u + \varphi_v\, \varrho'(u)} \equiv \frac{A}{B} \quad (5)$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν τὸ dz:

$$(6) \quad dz = -\frac{B\sigma_x - A\varphi_x}{B\sigma_z - A\varphi_z} dx - \frac{B\sigma_y - A\varphi_y}{B\sigma_z - A\varphi_z} \cdot dy \equiv p\,dx + q\,dy.$$

καὶ ἂν τὰς τιμὰς αὐτὰς τῶν p, q θέσωμεν εἰς τὴν γενικὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσίν του ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$(7) \quad (B\sigma_x - A\varphi_x)(X - x) + (B\sigma_y - A\varphi_y)(Y - y) + (B\sigma_z - A\varphi_z)(Z - z) = 0.$$

13. Ἀναρμονικὸς λόγος 4 ἐφαπτομένων ἐπιπέδων.— Ἀπὸ τὴν μορφὴν τῆς ἐξισώσεως (5), ἐπειδὴ εἰς αὐτήν, κατὰ τὴν μετάβασιν ἀπὸ μίαν ἐπιφάνειαν εἰς ἄλλην, μόνον τὸ $\varrho'(u)$ μεταβάλλεται, ἕπεται, ὅτι: ***Ἂν θεωρήσωμεν 4 ἐπιφανείας τοῦ σμήνους, ποὺ νὰ διέρχωνται ἀπὸ μίαν τυχοῦσαν καμπύλην του (Γ), ὁ ἀναρμονικὸς λόγος τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων τῶν 4 ἐπιφανειῶν εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς (Γ) (ποὺ διέρχονται ὅλα ἀπὸ τὴν ἐφαπτομένην τῆς (Γ) εἰς τὸ Μ) εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀναρμονικὸν λόγον τῶν 4 τιμῶν τῶν συναρτήσεων $\varrho_1(u)$, $\varrho_2(u)$, $\varrho_3(u)$, $\varrho_4(u)$ διὰ $u = u_0$ (τὸ u τῆς (Γ)),***

ποὺ ὁρίζουν τὰς 4 ἐπιφανείας· καὶ μένει ἑπομένως ὁ ἴδιος, ὅταν τὸ Μ διατρέχῃ τὴν (Γ).

14. ***Ἑστίαι.***—Ἡ ἐξίσωσις (7) μᾶς δεικνύει, ὅτι τῶν ἐπιφανειῶν τοῦ σμήνους, ποὺ διέρχονται ἀπὸ μίαν καμπύλην του (Γ) (u_1, v_1), τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον τῆς (Γ) μεταβάλλονται γενικῶς ἀπὸ ἐπιφάνειαν εἰς ἐπιφάνειαν. Διὰ νὰ μὴ συμβαίνῃ ὅμως αὐτό, πρέπει καὶ ἀρκεῖ, τὸ κλάσμα $\frac{A}{B}$ νὰ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ $\varrho'(u)$. Ἀλλ' αὐτὸ συμβαίνει ***τότε καὶ τότε μόνον***, ὅταν :

$$\frac{\sigma_u(x, y, z, u_1, v_1)}{\sigma_v(x, y, z, u_1, v_1)} = \frac{\varphi_u(x, y, z, u_1, v_1)}{\varphi_v(x, y, z, u_1, v_1)}. \qquad (\ )$$

Ἡ σχέσις αὐτὴ καὶ αἱ ἐξισώσεις $\sigma(x, y, z, u_1, v_1) = 0$, $\varphi(\,, y, z, u_1, v_1)=0$ τῆς (Γ) συνδέουν τὰς τρεῖς συντεταγμένας τοῦ ζητουμένου σημείου· καὶ ἐπειδὴ εἶναι τρεῖς, μᾶς δίδουν ὡρισμένα συστήματα λύσεων : x_1, y_1, z_1· x_2, y_2, z_2 κ. τ. λ. Τὰ σημεῖα αὐτὰ $E_1(x_1, y_1, z_1), E_2(x_2, y_2, z_2)$ κ.τ.λ. λέγονται ***ἑστίαι*** (ἢ ***ἑστιακὰ σημεῖα***) τῆς θεωρηθείσης καμπύλης (Γ). Εἰς αὐτὰ τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα ὅλων τῶν ἐπιφανειῶν τοῦ σμήνους, ποὺ διέρχονται ἀπὸ τὴν (Γ), συμπίπτουν, καὶ ἡ ἐξίσωσίς των εἶναι προφανῶς : (ὅπου $u=u_1$, $v=v_1$) :

$$\begin{aligned}(\sigma_x \varphi_u - \varphi_x \sigma_u)(X-x) + (\sigma_y \varphi_u - \varphi_y \sigma_u)(Y-y) &+ \\ (9) \qquad + (\sigma_z \varphi_u - \varphi_z \sigma_u)(Z-z) &= 0, \text{ ἢ καί:} \\ (\sigma_x \varphi_v - \varphi_x \sigma_v)(X-x) + (\sigma_y \varphi_v - \varphi_y \sigma_v)(Y-y) &+ \\ + (\sigma_z \varphi_v - \varphi_z \sigma_v)(Z-z) &= 0.\end{aligned}$$

15. ***Ἑστιακὴ ἐπιφάνεια.***—Τὸ σύνολον τῶν ἑστιῶν ὅλων τῶν καμπύλων τοῦ σμήνους ἀποτελεῖ προφανῶς μίαν ἐπιφάνειαν, ποὺ λέγεται ***ἑστιακὴ ἐπιφάνεια*** τοῦ σμήνους.

Αὐτὴ δὲν ἀποτελεῖ γενικῶς ἐπιφάνειαν τοῦ σμήνους καὶ ἔχει τὰς ἐξισώσεις (μὲ ***μεταβλητὰ τώρα*** τὰ u καὶ v) :

$$\sigma(x, y, z, u, v)=0, \ \varphi(x, y, z, u, v)=0,$$

$$(10) \qquad \frac{\sigma_u(x, y, z, u, v)}{\varphi_u(x, y, z, u, v)} = \frac{\sigma_v(x, y, z, u, v)}{(\varphi_v x, y, z, u, v)}.$$

Ἡ ἑστιακὴ ἐπιφάνεια ἀποτελεῖται προφανῶς ἀπὸ τόσας ***χώνας***, ὅσαι εἶναι αἱ ἑστίαι κάθε καμπύλης τοῦ σμήνους· π.χ. διὰ τὰ ***εὐθειακὰ*** σμήνη: $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$, $A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1=0$ ἢ ἐξίσωσις: $\dfrac{\sigma_u}{\varphi_u}=\dfrac{\sigma_v}{\varphi_v}$ εἶναι πρὸς τὰ x, y, z ἀλγεβρικὴ β′ βαθμοῦ:

$$\frac{A_u\,x+B_u\,y+\Gamma_u\,z+\Delta_u}{A_{1u}x+A_{1u}y+\Gamma_{1u}z+\Delta_{1u}}=\frac{A_v\,x+B_v\,y+\Gamma_v\,z+\Delta_v}{A_{1v}x+B_{1v}y+\Gamma_{1v}z+\Delta_{1v}}$$

καὶ ἑπομένως ***ἡ ἑστιακὴ ἐπιφάνεια τῶν εὐθειακῶν σμηνῶν εἶναι δίχωνος***.

Γενικώτερον, ἂν ἡ $\sigma(x, y, z, u, v)=0$ εἶναι ἀλγεβρικὴ τοῦ βαθμοῦ μ καὶ ἡ $\varphi(x, y, z, u, v)=0$ ἀλγεβρικὴ τοῦ α′ βαθμοῦ (πρὸς τὰ x, y, z) (καὶ τότε τὸ σμῆνος ἀποτελεῖται ἀπὸ ***ἐπιπέδους*** καμπύλας βαθμοῦ μ), ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{\sigma_v}{\varphi_v}=\dfrac{\sigma_u}{\varphi_u}$ εἶναι ἀλγεβρικὴ βαθμοῦ $\mu+1$ καὶ ἑπομένως ***ἡ ἑστιακὴ ἐπιφάνεια ἀποτελεῖται ἀπὸ μ(μ+1) χώνας***. Π. χ. ἓν σμῆνος κωνικῶν τομῶν ἔχει 6 ($\mu(\mu+1)=2\times3$) ἑστίας ἐπάνω εἰς κάθε κωνικήν.

Παρατήρησις α′. Ἡ ἑστιακὴ ἐπιφάνεια εἶναι δυνατὸν ***ἐξαιρετικῶς*** νὰ ἐκφυλισθῇ καὶ εἰς γραμμὴν ἢ γραμμὰς ἢ καὶ εἰς σημεῖα ἢ καὶ ν᾿ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπιφάνειαν καὶ γραμμὰς καὶ σημεῖα, ἢ μόνον ἀπὸ ἐπιφάνειαν καὶ γραμμὰς ἢ σημεῖα ἢ ἀπὸ γραμμὰς καὶ σημεῖα. Π.χ. ἂν σμῆνος εὐθειῶν διέρχεται ἀπὸ ἓν σταθερὸν σημεῖον Κ, ἡ ἑστιακὴ ἐπιφάνειά του ἔχει ἐκφυλισθῇ εἰς τὸ Κ. Ἐπίσης τὸ σμῆνος τῶν εὐθειῶν, ποὺ ἑνώνουν κάθε σημεῖον μιᾶς σταθερᾶς καμπύλης (Κ) μὲ κάθε σημεῖον ἄλλης σταθερᾶς καμπύλης (K_1), ἔχει ἑστιακὴν ἐπιφάνειαν ἐκφυλισθεῖσαν εἰς τὰς δύο ταύτας καμπύλας (Κ) καὶ (K_1).

Παρατήρησις β′. Ἂν ***ἐξαιρετικῶς*** ὅλαι αἱ καμπύλαι τοῦ σμήνους κεῖνται ἐπάνω εἰς μίαν ἐπιφάνειαν (Ε), ὅλαι αἱ ἐπιφάνειαι τοῦ σμήνους συμπίπτουν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτήν· ὥστε ὅλα τὰ σημεῖα κάθε καμπύλης τοῦ σμήνους εἶναι ἑστιακὰ καὶ ἑπομένως ***ἑστιακὴ ἐπιφάνειά του εἶναι ἡ ἰδία ἡ (Ε)***.

16. Περίπτωσις σταθερᾶς καμπύλης ἢ σταθερῶν σημείων.— Ἂν αἱ καμπύλαι τοῦ σμήνους συναντοῦν ὅλαι μίαν σταθερὰν καμπύλην (Κ), τὰ σημεῖα τῆς συναντήσεως εἶναι προφανῶς ἑστίαι καὶ ἑπομένως ἡ καμπύλη (Κ) κεῖται ἐπὶ τῆς ἑστιακῆς ἐπιφανείας· διότι αἱ ἐπιφάνειαι τοῦ σμήνους, ποὺ διέρχονται ἀπὸ μίαν καμπύλην του (Γ), θὰ ἔχουν ὅλαι εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς Α τῆς (Γ) καὶ τῆς (Κ) ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τὸ ἴδιον: ***τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο εἰς τὸ Α ἐφαπτομένων τῆς (Γ) καὶ τῆς (Κ).***

Ἐπίσης, ἂν ὅλαι αἱ καμπύλαι τοῦ σμήνους διέρχωνται ἀπὸ ἓν σταθερὸν σημεῖον Α, τὸ σημεῖον αὐτὸ εἶναι ἑστία, διότι τὸ εἰς τὸ Α ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον ὅλων τῶν ἐπιφανειῶν τοῦ σμήνους, ποὺ διέρχονται ἀπὸ μίαν καμπύλην του (Γ), δὲν εἶναι ὡρισμένον ἐντελῶς: πᾶν ἐπίπεδον διερχόμενον ἀπὸ τὴν εἰς τὸ Α ἐφαπτομένην τῆς (Γ) εἰμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς ἐφαπτόμενον. Ἑπομένως εἰμποροῦμεν νὰ τὸ θεωρήσωμεν ὡς τὸ ἴδιον δι᾽ ὅλας τὰς ἐπιφανείας τὰς διερχομένας ἀπὸ τὴν (Γ)

Λέγω τώρα, ὅτι, ἂν αἱ ἐξισώσεις τοῦ σμήνους εἶναι ἀλγεβρικαί, ἓν τοιοῦτο σημεῖον Α πρέπει νὰ θεωρηθῇ ***ὡς δύο τοὐλάχιστον ἑστίαι συμπίπτουσαι.*** Πραγματικῶς, ἂν τὸ ἐκλέξωμεν ὡς ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων, αἱ ἐξισώσεις τοῦ σμήνους δὲν θὰ περιέχουν σταθερὸν ὅρον· ὥστε οἱ ὅροι των κατωτάτης διαστάσεως θὰ εἶναι τοὐλάχιστον πρωτοβάθμιοι καὶ ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις ἡ ὁρίζουσα τὰς ἑστίας θὰ ἔχῃ ὅρους κατωτάτης διαστάσεως τοὐλάχιστον δευτεροβαθμίους· καὶ ἂν θέσωμεν εἰς αὐτὴν ἀντὶ y καὶ z τὰς τιμάς των ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1) (διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς τετμημένας τῶν ἑστιῶν), ἡ ἐξίσωσις, ποὺ θὰ εὕρωμεν, θὰ ἔχῃ ὅρους κατωτάτης διαστάσεως τοὐλάχιστον δευτεροβαθμίους (πρὸς x) καὶ ἑπομένως θὰ ἔχῃ τὴν ῥίζαν $x=0$ διπλῆν (ὡς ῥίζαν καὶ τῆς παραγώγου της).

17. Πρώτη ἰδιότης τῆς ἑστιακῆς ἐπιφανείας. Θεώρημα. ***Ἡ ἑστιακὴ ἐπιφάνεια (Ε) ἔχει εἰς τὸ τυχὸν σημεῖόν της Ε τὸ ἴδιον ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον μὲ τὴν τυχοῦσαν ἐπιφάνειαν (Σ) ($v=\varrho(u)$) τοῦ σμήνους, τὴν διερχομένην ἀπὸ τὴν καμπύλην (u_1, v_1), τὴν ἔχουσαν ἑστίαν τὸ Ε.***

Ἀπόδειξις. Ἂς ὑπολογίσωμεν πρῶτα τὰς μερικὰς παραγώγους p καὶ q τῆς ἐπιφανείας τοῦ σμήνους. Ἔχομεν ἀπὸ τὸν τύπον (6) ἐφαρμοζόμενον εἰς τὴν ἑστίαν Ε, ὅπου $\dfrac{A}{B}=\dfrac{\sigma_u}{\varphi_u}=\dfrac{\sigma_v}{\varphi_v}$:

$$dz=-\frac{\sigma_x\varphi_u-\varphi_x\sigma_u}{\sigma_z\varphi_u-\varphi_z\sigma_u}\,dx-\frac{\sigma_y\varphi_u-\varphi_y\sigma_u}{\sigma_z\varphi_u-\varphi_z\sigma_u}\,dy\cdot$$

καὶ ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις (7) τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς (Σ) γίνεται εἰς τὸ Ε:

$$(12)\quad (\sigma_x\varphi_u-\varphi_x\sigma_u).(X-x)+(\sigma_y\varphi_u-\varphi_y\sigma_u).(Y-y)+$$
$$+(\sigma_z\varphi_u-\varphi_z\sigma_u).(Z-z)=0$$

$$\left(\text{ὅπου}\ \begin{matrix} u=u_1 \\ v=v_1=\varrho(u_1) \end{matrix}\right)$$

Ἄς εὕρωμεν τώρα τὰ P καὶ Q τῆς ἑστιακῆς ἐπιφανείας. Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις της εὑρίσκομεν:

$$\begin{cases} \sigma_x\, dx+\sigma_y\, dy+\sigma_z\, dz+\sigma_u\, du+\sigma_v\, dv=0, \\ \varphi_x\, dx+\varphi_y\, dy+\varphi_z\, dz+\varphi_u\, du+\varphi_v\, dv=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_x\, dx+\sigma_y\, dy+\sigma_z\, dz=-(\sigma_u\, du+\sigma_v\, dv) \\ \varphi_x\, dx+\varphi_y\, dy+\varphi_z\, dz=-(\varphi_u\, du+\varphi_v\, dv) \end{cases}$$

$\dfrac{\sigma x dx+\sigma y dy+\sigma z dz}{\varphi x dx+\varphi y dy+\varphi z dz}=\dfrac{\sigma u}{\varphi u}$, δυνάμει τῆς γ′ ἐξισώσεως (10)· καὶ ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς (B) εἰς τὸ τυχὸν σημεῖόν της εἶναι:

$$(13)\quad (\sigma_x\, \varphi_u-\varphi_x\, \sigma_u)(X-x)+(\sigma_y\, \varphi_u-\varphi_y\, \sigma_u)(Y-y)+ \\ +(\sigma_z\, \varphi_u-\varphi_z\, \sigma_u)(Z-z)=0.$$

(ὅπου u, v ***μεταβληταὶ ἀνεξάρτητοι***).

Ἂν τώρα ἐφαρμόσω τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν εἰς τὸ σημεῖον E, ὅπου $u=u_1$, $v=v_1$, οἱ συντελεσταὶ τῶν (X—x), . . . θὰ γίνουν ἀκριβῶς οἱ ἴδιοι μὲ τοὺς τῆς ἐξισώσεως (12). ***Ἑπομένως τὰ δύο ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τῆς (E) καὶ τῆς (Σ) συμπίπτουν.***

Παρατήρησις. Ἡ ἰδιότης αὐτὴ μᾶς ἐνθυμίζει τὴν ἰδιότητα τῆς περιβαλλούσης ἐπιφανείας ἑνὸς γένους ἐπιφανειῶν: νὰ ἐφάπτεται κάθε περιβαλλομένης εἰς τὰ κοινά των σημεῖα, δηλ. τὰ τῆς ἀντιστοίχου ὁρικῆς γραμμῆς· μὲ τὰς ἑξῆς ὅμως διαφοράς: α′) ὅτι ἡ ἑστιακὴ ἐπιφάνεια ἐφάπτεται ***ὄχι μιᾶς, ἀλλ' ∞^1 ἐπιφανειῶν τοῦ σμήνους*** καὶ β′) ὅτι τὰ κοινά της σημεῖα εἰς κάθε τοιοῦτο γένος ἐπιφανειῶν τοῦ σμήνους ***δὲν εἶναι ∞^1*** (ὅπως τὰ τῆς ὁρικῆς γραμμῆς), ***ἀλλὰ πεπερασμένος ἀριθμὸς μεμονωμένων σημείων.***

18. Δευτέρα ἰδιότης τῆς ἑστιακῆς ἐπιφανείας.— Ἡ ἑστιακὴ ἐπιφάνεια εἶναι ὁ τόπος τῶν περιβαλλουσῶν τῶν καμπύλων τοῦ σμήνους, λαμβανομένων ἀνὰ ∞^1 οὕτως, ὥστε νὰ ἔχουν περιβάλλουσαν.

Ἀπόδειξις. Ἂν θέσωμεν $v=\varrho(u)$, εὑρίσκομεν ἓν γένος καμπύλων τοῦ σμήνους:

$$\sigma(x, y, z, u, \varrho(u))=0, \quad \varphi(x, y, z, u, \varrho(u))=0\cdot$$

διὰ νὰ ἔχῃ τὸ γένος αὐτὸ περιβάλλουσαν, πρέπει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ u αἱ 4 ἐξισώσεις:

$$\sigma=0, \ \varphi=0, \ \sigma_u+\sigma_v\cdot\varrho'(u)=0, \ \varphi_u+\varphi_v\cdot\varrho'(u)=0 \ (14)$$

νὰ παρέχουν κοινὰς τιμὰς τῶν x, y, z. Πρὸς τοῦτο, ἂν ἐξισώσωμεν τὰς δύο τιμὰς τοῦ $\varrho'(u)$ ἀπὸ τὰς δύο τελευταίας, ἔχομεν: $\dfrac{\sigma_u}{\sigma_v}=\dfrac{\varphi_u}{\varphi_v}$, δηλ. πάλιν τὴν συνθήκην τῶν ἑστιῶν· ὥστε ***αἱ περιβάλλουσαι ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἑστίας καὶ ἑπομένως κεῖνται ἐπὶ τῆς ἑστιακῆς ἐπιφανείας.***

Παρατήρησις. Ἂν τοὐναντίον ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (14) ἀπαλείψωμεν τὰ x, y, z, παράγεται ἡ ἐξίσωσις:

$$\Phi(u, v, \frac{dv}{du})=0.$$

Ὥστε ἡ τελεία λύσις τοῦ προβλήματος ἀπαιτεῖ τὴν ὁλοκλήρωσιν τῆς διαφορικῆς αὐτῆς ἐξισώσεως τῆς α΄. τάξεως.

Ὀρθογωνιότης σμήνους καμπύλων καὶ γένους ἐπιφανειῶν.

*19. **Συνθήκη τοῦ** Beltrami.*—***Θὰ εὕρωμεν τὴν ἀναγκαίαν καὶ ἀρκετὴν συνθήκην, διὰ νὰ ὑπάρχῃ ἓν γένος ἐπιφανειῶν, ποὺ νὰ κόπτουν ὅλας τὰς καμπύλας τοῦ σμήνους καθέτως.***

Ἂς λάβωμεν τὰς ἐξισώσεις τοῦ σμήνους λυμένας πρὸς τὰς συντεταγμένας x, y, z, δηλ. τῆς μορφῆς: (15) $x=\sigma(u, v, t)$, $y=\varphi(u, v, t)$, $z=f(u, v, t)$. (Διὰ κάθε σύστημα τιμῶν u_0, v_0 ἔχομεν μίαν καμπύλην τοῦ σμήνους ἀπὸ τὰς συντεταγμένας της x, y, z, ὡς συναρτήσεις (15) τῆς παραμέτρου t).

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα, ὅτι ὑπάρχει μία ἐπιφάνεια (E), ποὺ νὰ κόπτῃ ὅλας τὰς καμπύλας τοῦ σμήνους ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν· ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ θὰ κόπτῃ τὴν τυχοῦσαν καμπύλην τοῦ σμήνους εἰς ἓν σημεῖον, ὅπου τὸ t θὰ ἔχῃ μίαν κάποιαν ὡρισμένην τιμήν, μεταβαλλομένην ὅμως ἀπὸ καμπύλην εἰς καμπύλην. Ἑπομένως ***ἐπὶ τῆς (E)*** θὰ εἶναι $t=\varrho(u, v)$ καὶ αἱ ἐξισώσεις της θὰ εἶναι:

$$x=\sigma(u, v, \varrho(u, v)), \ y=\varphi(u, v, \varrho(u, v)), \ z=f(u, v, \varrho(u, v)).$$

Ἂς λάβωμεν τώρα τὴν τυχοῦσαν καμπύλην, τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὰς τιμὰς u_0, v_0. Τὰ συνημίτονα τῆς ἐφαπτομένης της θὰ εἶναι ἀνάλογα τῶν: $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ εὐθεῖα αὐτὴ θὰ εἶναι ἡ κάθετος τῆς (E), θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν τυχοῦσαν καμπύλην τῆς ἐπιφανείας, τὴν ἔχουσαν συνημίτονα:

$\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ (ὅπου $x=\sigma(u, v, t)$ κ.τ.λ. μὲ $t=\varrho(u, v)$).

Ὥστε θὰ ἔχωμεν: $\frac{\partial x}{\partial t}.dx+\frac{\partial y}{\partial t}.dy+\frac{\partial z}{\partial t}.dz=0$. Ἔχομεν ὅμως:

$$dx=\frac{\partial x}{\partial t}.dt+\frac{\partial x}{\partial u}.du+\frac{\partial x}{\partial v}.dv,\ dy=\ldots,\ dz=\ldots$$

Ὥστε:
$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial t}dt+\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)=0$$

καὶ ἂν θέσωμεν:

$$\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2\equiv T,\ \Sigma\frac{\partial x}{\partial t}.\frac{\partial x}{\partial u}\equiv U,\ \Sigma\frac{\partial x}{\partial t}.\frac{\partial x}{\partial v}\equiv V,$$

θὰ ἔχωμεν τὴν ***εἰς ὁλικὰ διαφορικὰ*** ἐξίσωσιν, ποὺ πρέπει νὰ ἐπαληθεύῃ ἡ ζητουμένη συνάρτησις $t=\varrho(u, v)$:

$$(16)\quad Tdt+Udu+Vdv=0,$$

ἐπομένως καὶ τὴν γνωστὴν συνθήκην ὁλοκληρωσιμότητος:

$$(17)\quad T\left(\frac{\partial U}{\partial v}-\frac{\partial V}{\partial u}\right)+U\left(\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial T}{\partial v}\right)+V\left(\frac{\partial T}{\partial u}-\frac{\partial U}{\partial t}\right)=0.$$

Αὐτὴ λοιπὸν εἶναι ἡ ζητουμένη ἀναγκαία καὶ ἀρκετὴ συνθήκη. Ἂν ἐπαληθεύεται ἐκ ταὐτότητος (δηλ. διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῶν t,u,v), τότε ὑπάρχει ἓν ***γένος*** ἐπιφανειῶν (E) (διότι τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς (16) θὰ περιέχῃ μίαν αὐθαίρετον σταθερὰν τῆς ὁλοκληρώσεως), καθέτων πρὸς τὰς καμπύλας τοῦ σμήνους. Ἂν ὄχι, τότε μόνον μερικαὶ μεμονωμέναι ἐπιφάνειαι εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχουν κάθετοι πρὸς τὸ σμῆνος (ἂν ἡ (17) δίδῃ διὰ τὸ t μίαν ἢ περισσοτέρας τιμὰς ἐπαληθευούσας τὴν (16)).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

Θεωρία τῶν εὐθειογενῶν ἐπιφανειῶν.

Διὰ τὴν ἰδιαιτέραν σπουδὴν ***τοῦ ἁπλουστέρου*** εἴδους σμηνῶν, δηλ. τῶν ἀποτελουμένων ἀπὸ εὐθείας, τῶν ὁποίων ἑπομένως αἱ ἐπιφάνειαι εἶναι ***εὐθειογενεῖς***, εἶναι ἀνάγκη νὰ προτάξωμεν τὴν θεωρίαν τῶν ἐπιφανειῶν τούτων.

Α΄) *Γενίκευσις τῶν τύπων τοῦ Frenet.*

20. Ὅταν μία εὐθεῖα (ἢ καὶ ***διεύθυνσις***) (Ε) κινεῖται ***μονοπαραμετρικῶς***, τὰ συνημίτονά της Α, Β, Γ πρὸς ὀρθογωνίους ἄξονας ἔχουν διαφορικὰ dΑ, dΒ, dΓ· ἂς θεωρήσωμεν καὶ τὴν ***διεύθυνσιν*** τὴν ἔχουσαν συνημίτονα Ξ, Η, Ζ:

$$\Xi = \frac{dA}{\sqrt{\Sigma dA^2}},\ H = \frac{dB}{\sqrt{\Sigma dA^2}},\ Z = \frac{d\Gamma}{\sqrt{\Sigma dA^2}}\cdot$$

εἶναι προφανῶς κάθετος πρὸς τὴν Α, Β, Γ, διότι $\Sigma A\Xi = 0$.

Ἂν τώρα ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων Ο φέρωμεν εὐθείας παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους πρὸς τὰς διαφόρους θέσεις τῆς (Ε), σχηματίζεται ὁ ***διευθύνων κῶνος*** τῆς (Ε) καὶ ἡ τομή του ἀπὸ τὴν σφαῖραν μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα 1 θὰ εἶναι καμπύλη (***«πρώτη σφαιρικὴ δείκτρια»*** τῆς (Ε)), ἔχουσα διαφορικὸν τόξου: $d\Sigma^2 = \Sigma dA^2$, ὥστε ἔχομεν: $dA = \Xi d\Sigma$, $dB = H d\Sigma$, $d\Gamma = Z d\Sigma$ (18). Ἂς θεωρήσωμεν τώρα καὶ τὴν ***διεύθυνσιν:***

$$\Lambda = \varepsilon(BZ - \Gamma H),\ M = \varepsilon(\Gamma\Xi - AZ),\ N = \varepsilon(AH - B\Xi)\ (\varepsilon^2 = 1),$$

δηλ. τὴν κοινὴν κάθετον τῶν δύο προηγουμένων, καὶ ἂς θέσωμεν:

$$d\Lambda = -\Xi_1\sqrt{\Sigma d\Lambda^2},\ dM = -H_1\sqrt{\Sigma d\Lambda^2},\ dN = -Z_1\sqrt{\Sigma d\Lambda^2}.$$

Λέγω, ὅτι ἡ νέα αὐτὴ διεύθυνσις (Ξ_1, H_1, Z_1), εἶναι ἡ ἰδία ἡ (Ξ, Η, Ζ)· πραγματικῶς ἔχομεν: $\Sigma A\Xi = 0$, $\Sigma\Lambda\Xi = 0$, ἀλλὰ καί:

$$\Sigma\Lambda\Xi_1 = -\frac{\Sigma\Lambda d\Lambda}{\sqrt{\Sigma d\Lambda^2}} = 0,\quad \Sigma A\Lambda = 0,\ \Sigma A d\Lambda + \Sigma\Lambda dA = 0,$$

$$\text{ἢ καί:}\quad \sqrt{\Sigma d\Lambda^2}.\Sigma A\Xi_1 + \sqrt{\Sigma dA^2}.\Sigma\Lambda\Xi = 0,\ \text{δηλ.}\ \Sigma A\Xi_1 = 0.$$

Καὶ ἂν κατασκευάσωμεν καὶ τὴν ***«δευτέραν σφαιρικὴν δείκτριαν»*** (ὁμοίως μὲ τὴν πρώτην) μὲ διαφορικὸν τόξου τό: $dT^2 = \Sigma d\Lambda^2$, ἔχομεν τοὺς τύπους: $d\Lambda=-\Xi dT$, $dM=-HdT$, $dN=-ZdT$ (19). Τέλος εὑρίσκομεν:

$$\Sigma Ad\Xi=-\Sigma\Xi dA=-d\Sigma,\ \Sigma\Xi d\Xi=0,\ \Sigma\Lambda d\Xi=-\Sigma\Xi d\Lambda=dT\cdot$$

καὶ ἑπομένως:

$$d\Xi=-Ad\Sigma+\Lambda dT,\ dH=-Bd\Sigma+MdT,\ dZ=-\Gamma d\Sigma+NdT (20).$$

Οἱ 9 τύποι (18), (19) καὶ (20) ἀποτελοῦν προφανῶς ***γενίκευσιν*** τῶν τύπων τοῦ Frenet. Διότι ἰσχύουν γενικῶς δι' ἓν «***τρίεδρον διευθύνσεων***» καὶ ὄχι μόνον δι' ἓν ***τρίεδρον καμπύλης***, καθὼς οἱ τοῦ Frenet. Ὅταν ὡς ***εὐθεῖαν*** (Α, Β, Γ) λάβωμεν τὴν ἐφαπτομένην μιᾶς καμπύλης, εἰμποροῦμεν νὰ λάβωμεν ὡς εὐθεῖαν (Ξ, Η, Ζ) τὴν α'. κάθετόν της καὶ ὡς εὐθεῖαν (Λ, Μ, Ν) τὴν ὀρθίαν της κάθετον. Δι' αὐτὸ ὀνομάζομεν γενικῶς τὴν (Ξ, Η, Ζ) «***πρώτην κάθετον***» τῆς «***ἀρχικῆς***» διευθύνσεως καὶ τὴν (Λ, Μ, Ν) «***ὀρθίαν κάθετον***».

Β') ***Εὐθειογενεῖς ἐπιφάνειαι.***

21. ***Ἐξισώσεις μιᾶς εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας.***—Αὐταὶ εἶναι:

$$\frac{X-x}{A}=\frac{Y-y}{B}=\frac{Z-z}{\Gamma} \quad \text{ἢ καί:}$$

$$X=x+A\omega,\ Y=y+B\omega,\ Z=z+\Gamma\omega\cdot (21)$$

ὅπου τὰ (x, y, z) (αἱ συντεταγμέναι ἑνὸς σημείου τῆς γενετείρας) καὶ τὰ συνημίτονά της Α, Β, Γ εἶναι ὅλα συναρτήσεις ***μιᾶς παραμέτρου*** *u*. Κατὰ τὴν κίνησιν τῆς γενετείρας τὸ σημεῖον x, y, z γράφει μίαν καμπύλην τῆς ἐπιφανείας λεγομένην ***ὁδηγὸν*** ἢ ***ἀρχικὴν*** (ἢ καὶ ἀφετηριακήν).

22. ***Ὁρισμὸς τοῦ λαιμοῦ.***—Ἂν θεωρήσωμεν διαφόρους θέσεις τῆς γενετείρας, τὰς Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4,..., ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις τῶν Γ_1, Γ_2 εἶναι ἓν τμῆμα $\Pi_1\Pi_2$, ἡ ἐλαχίστη τῶν Γ_2, Γ_3 ἓν ἄλλο $\Pi_2'\Pi_3$, ἡ τῶν Γ_3, Γ_4, τὸ $\Pi'_3\Pi_4$ κ. ο. κ.

Ἔχομεν λοιπὸν μίαν τεθλασμένην γραμμήν, τὴν $\Pi_1\Pi_2\Pi'_2\Pi_3\Pi'_3\Pi_4$..., ποὺ σύγκειται ἀπὸ δύο εἰδῶν τμήματα: τὰς ἐλαχίστας ἀποστάσεις $\Pi_1\Pi_2$, $\Pi'_2\Pi_3$, ..., καὶ τὰς ἀποστάσεις τῶν ποδῶν τῶν ἐλαχίστων ἀποστάσεων ἐπάνω εἰς κάθε γενέτειραν, τὰ $\Pi_2\Pi'_2$, $\Pi_3\Pi'_3$, ... Ἂν τώρα φαντασθῶμεν, ὅτι αἱ θέσεις αὐταὶ τῆς γενετείρας πυκνώνονται ὁλονὲν περισσότερον, ἡ τεθλασμένη $\Pi_1\Pi_2\Pi'_2\Pi_3\Pi'_3\Pi_4$ ... θὰ τραπῇ εἰς τὸ ὅριον εἰς μίαν καμπύλην. Ἡ καμπύλη αὐτή, σπουδαιοτάτη ὡς πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν, λέγεται ***λαιμός*** της, ἢ ***γραμμὴ συσφίγξεως***. Ἡ δὲ ὁρικὴ θέσις, ἐπάνω εἰς κάθε γενέτειραν, τοῦ ποδὸς Π_1 τῆς κοινῆς καθέτου τῆς γενετείρας αὐτῆς καὶ τῆς ἀπείρως γειτονικῆς της λέγεται ***κεντρικὸν σημεῖον*** τῆς γενετείρας.

Παρατήρησις. Ὁ λαιμὸς δὲν κόπτει τὰς γενετείρας ἐν γένει ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν (γενικώτερον, οὔτε ὑπὸ σταθεράν), ἐπειδή, πλὴν τῶν ἐλαχίστων ἀποστάσεων (καθέτων πρὸς τὰς γενετείρας), ὑπάρχουν καὶ τ' ἄλλα τμήματα ***ἐπάνω*** εἰς τὰς γενετείρας ($\Pi_2\Pi'_2$, . . .), τὰ ὁποῖα ἐκτρέπουν τὴν ὁρικὴν καμπύλην ἀπὸ τὴν καθετότητα.

23. Συντεταγμέναι τοῦ κεντρικοῦ σημείου. — Ἐξισώσεις τοῦ λαιμοῦ.

Αἱ συντεταγμέναι x_1, y_1, z_1 τοῦ κεντρικοῦ σημείου θὰ εἶναι αἱ κοιναὶ λύσεις (πρὸς x, y, z) τῶν ἐξισώσεων τῆς γενετείρας (Α, Β, Γ) καὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἀγομένου διὰ τῆς γειτονικῆς γενετείρας (Α+ΔΑ, ...) καθέτου πρὸς τὸ διὰ τῆς γενετείρας (Α+ΔΑ, . . .) ἐπίπεδον, τὸ παράλληλον πρὸς τὴν (Α, Β, Γ), ὅταν ορ Δu=0.

Καὶ αἱ μὲν ἐξισώσεις τῆς γενετείρας εἶναι αἱ:

$$\frac{X-x}{A}=\frac{Y-y}{B}=\frac{Z-z}{\Gamma},$$

ἡ δὲ τοῦ ἐπιπέδου τούτου εἶναι:

$$\| X-x-\Delta x \quad A+\Delta A \quad B\Delta\Gamma-\Gamma\Delta B \| =0.$$

ἡ ἐξίσωσις ὅμως αὐτὴ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\| X-x \quad A \quad B\Delta\Gamma-\Gamma\Delta B \| + \| X-x \quad \Delta A \quad B\Delta\Gamma-\Gamma\Delta B \| +$$
$$+ \| -\Delta x \; A \; B\Delta\Gamma-\Gamma\Delta B \| + \| -\Delta x \; \Delta A \; \Delta B\Gamma-\Gamma\Delta B \| =0.$$

Ἀπὸ τὰς 4 αὐτὰς ὁριζούσας ἡ α' εἶναι=0 ἕνεκα τῶν ἐξισώσεων τῆς γενετείρας (Α, Β, Γ) καὶ ἂν διαιρέσωμεν τὰς ἄλλας διὰ $(\Delta u)^2$, εὑρίσκομεν:

$$\| X-x \; \frac{\Delta A}{\Delta u} \; B\frac{\Delta\Gamma}{\Delta u}-\Gamma\frac{\Delta B}{\Delta u} \| + \| -\frac{\Delta x}{\Delta u} \; A \; B\frac{\Delta\Gamma}{\Delta u}-\Gamma\frac{\Delta B}{\Delta u} \| +$$
$$+ \| -\frac{\Delta x}{\Delta u} \; \Delta A \; B\frac{\Delta\Gamma}{\Delta u}-\Gamma\frac{\Delta B}{\Delta u} \| =0\cdot$$

καὶ ἂν λάβωμεν τὰ ὅρια:

$$\| X-x \; \frac{dA}{du} \; B\frac{d\Gamma}{du}-\Gamma\frac{dB}{du} \| + \| -\frac{dx}{du} \; A \; B\frac{d\Gamma}{du}-\Gamma\frac{dB}{du} \| =0$$

(διότι τὸ ὅριον τῆς γ' ὁριζούσης εἶναι προφανῶς μηδέν)· ἂν θέσωμεν δὲ καὶ τὰς τιμὰς τῶν παραγώγων τῶν συνημιτόνων τοῦ «τριέδρου» τῆς (Α, Β, Γ) (§ 20), εὑρίσκομεν:

$$\| X-x\ \Xi\ \Lambda \| = \| dx\ A\ \Lambda \| \frac{1}{d\Sigma}, \text{ ἢ καί: } \Sigma(X-x)A = -\Sigma\Xi dx \frac{1}{d\Sigma}.$$

ἑπομένως αἱ συντεταγμέναι x_1, y_1, z_1 τοῦ κεντρικοῦ σημείου ἐπαληθεύουν τὰς ἐξισώσεις:

$$\frac{x_1-x}{A} = \frac{y_1-y}{B} = \frac{z_1-z}{\Gamma} = \frac{\Sigma(x_1-x)A}{\Sigma A^2} = -\frac{\Sigma\Xi dx}{d\Sigma} = -\frac{\Sigma dAdx}{d\Sigma^2} = \omega_1.$$

ὅπου τὸ ω_1 εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ κεντρικοῦ σημείου ἀπὸ τὸ σημεῖον (x, y, z). Ἔχομεν λοιπόν:

$$x_1 = x - A\frac{\Sigma dxdA}{d\Sigma^2}, \quad y_1 = y - B\frac{\Sigma dydB}{d\Sigma^2}, \quad z_1 = z - \Gamma\frac{\Sigma dzd\Gamma}{d\Sigma^2} \quad (22).$$

Αἱ ἐξισώσεις αὐταὶ εἶναι προφανῶς καὶ ***αἱ ἐξισώσεις τοῦ τόπου τῶν κεντρικῶν σημείων εἰς ὅλας τὰς γενετείρας*, *δηλ. τοῦ λαιμοῦ*, *ἂν ὑποτεθῇ εἰς αὐτὰς μεταβλητὸν τὸ*** u.

Ἰδιότητες τοῦ λαιμοῦ.

24. Πρώτη ἰδιότης.—Ἂν ἡ ἀρχικὴ καμπύλη εἶναι ὁ ἴδιος ὁ λαιμός, πρέπει νὰ εἶναι: $x_1=x$, $y_1=y$, $z_1=z$, δηλ. $\frac{\Sigma dxdA}{d\Sigma^2}=0$. Ἡ συνθήκη αὐτή, χαρακτηρίζουσα τὸν λαιμόν, γράφεται καί: (23) $\frac{\Sigma\alpha\Xi}{d\Sigma}.ds=0$, δηλ. $\Sigma\alpha\Xi=0$· ἐκφράζει λοιπόν, ὅτι ***ἡ ἐφαπτομένη τοῦ λαιμοῦ εἰς τὸ τυχ. σημεῖόν του M_1 εἶναι κάθετος πρὸς τὴν διὰ τοῦ M_1 α´ κάθετον τῆς γενετείρας***· ἀλλὰ τότε ἡ ἀπὸ τὸ M_1 διερχομένη (Ξ, Η, Ζ), ὡς κάθετος ἐπὶ ***δύο*** ἐφαπτομένας τῆς εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας: τὴν γενέτειραν καὶ τὸν λαιμόν, θὰ εἶναι ἡ κάθετος τῆς ἐπιφανείας. Ὥστε ***ὁ λαιμὸς ἔχει καὶ τὴν ἰδιότητα νὰ εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων τῆς ἐπιφανείας, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ἀπὸ αὐτὰ διερχομένη πρώτη κάθετος τῆς γενετείρας συμπίπτει μὲ τὴν κάθετον τῆς ἐπιφανείας.***

25. Δευτέρα ἰδιότης.—Ἂν εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον M_1 τοῦ λαιμοῦ θεωρήσωμεν τὴν ἀπὸ τὸ M_1 γενέτειραν καὶ τὴν ὀρθογώνιον τροχιάν της (Τ), τὴν ἀπὸ τὸ M_1, καὶ α, β, γ, εἶναι τὰ συνημίτονα τῆς ἐφαπτομένης τῆς (Τ), θὰ ἔχωμεν: $\Sigma\alpha A=0$, $\Sigma\alpha\Xi=0$· ὥστε: $\alpha=\Lambda$, $\beta=M$, $\gamma=N$· καὶ ἑπομένως διὰ διαφορίσεως: $\xi=\Xi$, $\eta=H$, $\zeta=Z$· ὥστε ἡ α´ κάθετος (Ξ, Η, Ζ) τῆς γενετείρας, δηλ. ἡ κάθετος τῆς ἐπιφανείας, εἶναι α΄. κάθετος τῆς (Τ) εἰς τὸ M_1. Ἑπομένως ***ἡ γεωδαισιακὴ καμπυλότης*** $\frac{\eta\mu\vartheta}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_\gamma}$ ***τῆς (Τ) εἰς τὸ M_1 εἶναι*** 0. Ὥστε : ***Ὁ λαιμὸς εἶναι καὶ ὁ τόπος τῶν σημείων, ὅπου ἡ γεωδαισιακὴ καμπυλότης τῶν ὀρθογωνίων τροχιῶν τῶν γενετειρῶν εἶναι*** $=0$.

Θεώρημα τοῦ *Bonnet*.

26. Ἂν ὀνομάσωμεν φ τὴν γωνίαν τῆς τυχούσης καμπύλης (Κ) τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν γενέτειραν, θὰ ἔχωμεν : $\Sigma A\alpha = \sigma\upsilon\nu\varphi$· ἐπομένως: $\Sigma A\xi d\sigma + \Sigma\alpha\Xi d\Sigma = -\eta\mu\varphi d\varphi$. Βλέπομεν λοιπόν, ὅτι ὁ μηδενισμὸς ***δύο*** ἐκ τῶν τριῶν ὅρων τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς συνεπάγεται τὸν μηδενισμὸν καὶ τοῦ τρίτου. Καὶ ὁ μὲν μηδενισμὸς τοῦ $d\varphi$ σημαίνει, ὅτι ἡ (Κ) κόπτει τὰς γενετείρας ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν· ὁ μηδενισμὸς τοῦ $\Sigma\alpha\Xi$ σημαίνει, ὅτι ἡ (Κ) εἶναι ὁ λαιμὸς (§ 24 · τέλος ὁ μηδενισμὸς τοῦ $\Sigma A\xi$ σημαίνει, ὅτι ἡ (Κ) εἶναι ***γεωδαισιακὴ*** τῆς ἐπιφανείας (διότι τότε ἡ α΄ της κάθετος (ξ, η, ζ), ὡς κάθετος πρὸς τὴν (Κ) καὶ τὴν γενέτειραν (Α, Β, Γ), συμπίπτει μὲ τὴν κάθετον τῆς ἐπιφανείας). Ὥστε:

Τὸ νὰ ἔχῃ μία γραμμὴ τῆς ἐπιφανείας δύο ἀπὸ τὰς ἑξῆς 3 ἰδιότητας : 1) νὰ εἶναι ὁ λαιμὸς τῆς ἐπιφανείας, 2) νὰ εἶναι γεωδαισιακὴ καὶ 3) νὰ κόπτῃ τὰς γενετείρας ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν, συνεπάγεται τὸ νὰ ἔχῃ καὶ τὴν λοιπήν.

27. ***Ἐπιφάνειαι μὲ λαιμὸν κάθετον πρὸς τὰς γενετείρας.***— Ἂν διὰ τὸν λαιμόν, εἶναι $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, θὰ ἔχωμεν : $\Sigma A\alpha_1 = 0$ καὶ ἂν διαφορίσωμεν : $d\Sigma\Sigma\alpha_1\Xi + d\sigma_1\Sigma A\xi_1 = 0$· ἀλλὰ $\Sigma\alpha_1\Xi = 0$, ὥστε καὶ $\Sigma A\xi_1 = 0$· ἐπομένως ἀπὸ τὰς δύο ἐξισώσεις : $\Sigma A\alpha_1 = 0$, $\Sigma A\xi_1 = 0$, συνάγομεν : $A = \lambda_1$, $B = \mu_1$, $\Gamma = \nu_1$· δηλ. ***αἱ γενέτειραι εἶναι αἱ ὄρθιαι κάθετοι τοῦ λαιμοῦ.*** Ἑπομένως: ***Αἱ μόναι εὐθειογενεῖς ἐπιφάνειαι, τῶν ὁποίων ὁ λαιμὸς κόπτει καθέτως τὰς γενετείρας, εἶναι αἱ ἀποτελούμεναι ἀπὸ τὰς ὀρθίας καθέτους μιᾶς καμπύλης τοῦ χώρου.***

Παρατήρησις.— Ἡ ἐπιφάνεια τῶν πρώτων καθέτων μιᾶς καμπύλης (Κ) ἔχει ἐπομένως λαιμὸν ***διάφορον τῆς (Κ)***· αἱ δὲ ἐξισώσεις του εἶναι : $x_1 = x + \xi\frac{\varrho r^2}{\varrho^2 + r^2}$, $y_1 = \ldots$, $z_1 = \ldots$, δηλ. εἶναι ὁ τόπος τῆς τομῆς τῆς α′ καθέτου ἀπὸ τὸν στιγμιαῖον ἄξονα ἑλικώσεως (Βλ. Ν. Χατζιδάκη, Μαθ. Ἀπειροστ. Γεωμετρ., σελ. 11).

Σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν τριέδρων τοῦ λαιμοῦ καὶ τῆς γενετείρας.

28. 1) Ἂν θέσωμεν: $\Sigma A\alpha_1 = \text{συν}\varphi_1$, θὰ ἔχωμεν: $\Sigma \Xi\alpha_1 = 0$, $\Sigma \Lambda\alpha_1 = \text{ημ}\varphi_1$· ὥστε $\alpha_1 = A\,\text{συν}\varphi_1 + \Lambda\,\text{ημ}\varphi_1$, $\beta_1 = \ldots$, $\gamma_1 = \ldots$ ἑπομένως:

$$d\sigma_1^2 = \Sigma d\alpha_1^2 = \Sigma\,[(-A\,\text{ημ}\varphi_1 + \Lambda\,\text{συν}\varphi_1)\,d\varphi_1 + \Xi\,(\text{συν}\varphi_1 d\Sigma - \text{ημ}\varphi_1 dT)\,]^2,$$

δηλ.:
$$d\sigma_1^2 = d\varphi_1^2 + (\text{συν}\varphi_1 d\Sigma - \text{ημ}\varphi_1 dT)^2 \quad (24).$$

29. 2) Ἐπίσης ἔχομεν:

$$\Sigma\alpha_1\Xi = 0,\ \Sigma\xi_1\Xi = \text{συν}\vartheta_1,\ \Sigma\lambda_1\Xi = \text{ημ}\vartheta_1,$$

ὥστε:
$$\Xi = \xi_1\,\text{συν}\vartheta_1 + \lambda_1\,\text{ημ}\vartheta_1,\ H = \ldots,\ Z = \ldots\cdot$$

ἑπομένως:
$$\Sigma d\Xi^2 = \Sigma[(-\xi_1\,\text{ημ}\vartheta_1 + \lambda_1\,\text{συν}\vartheta_1)d\vartheta_1 + \\ + \text{συν}\vartheta_1(-\alpha_1 d\sigma_1 + \lambda_1 d\tau_1) - \text{ημ}\vartheta_1\xi_1 d\tau_1]^2,$$

δηλ.:
$$d\Sigma^2 + dT^2 = (d\vartheta_1 + d\tau_1)^2 + \text{συν}^2\vartheta_1 d\sigma_1^2 \quad (25).$$

Παρατήρησις.—Οἱ τύποι αὐτοὶ εἶναι μερικὴ περίπτωσις τῶν γενικῶν τύπων μου διὰ τὰ τρίεδρα ἑνὸς ζεύγους καμπύλων (Βλ. Ν. Χατζ. Ἀπειροστ. Γεωμ.), οἱ ὁποῖοι ἰσχύουν καὶ διὰ δύο τρίεδρα ***διευθύνσεων*** (ἢ καὶ ἑνὸς διευθύνσεων καὶ ἑνὸς καμπύλης, ὅπως ἐδῶ).

Θεώρημα τοῦ *Chasles*.

30. ***Νόμος στροφῆς τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου***.—Τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον μιᾶς γενετείρας ἔχει τὴν ἐξίσωσιν:

$$(26)\ \|\ X_1 - x_1\ A\ x_{1u}\ \| + \omega_1\ \|\ X_1 - x_1\ A\ A_u\ \| = 0$$

(ἂν λάβωμεν ὡς ἐξισώσεις τῆς ἐπιφανείας τὰς περιεχούσας τὰ $x_1, \ldots,$ τοῦ λαιμοῦ: $X = x_1 + A\omega_1$ κ.τ.λ.)· ἑπομένως ἐξαρτᾶται ἐν γένει ἀπὸ τὸ ω_1 καὶ μεταβάλλεται ἀπὸ σημεῖον εἰς σημεῖον τῆς ἰδίας γενετείρας· ἐπειδὴ ὅμως περιέχει πάντοτε τὴν γενέτειραν, στρέφεται ἁπλῶς περὶ αὐτήν. Τὸν νόμον τῆς στροφῆς αὐτῆς τὸν δίδει τὸ θεώρημα τοῦ Chasles: ***Ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας ψ τῶν δύο ἐφαπτομένων ἐπιπέ-***

δων εἰς τὸ κεντρικὸν σημεῖον M_1 καὶ εἰς τὸ τυχὸν ἄλλο M τῆς γενετείρας (Γ) εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀποστάσεως $M_1 M$.

Ἀπόδειξις. Πρὸς ἁπλοποίησιν τῶν τύπων ἂς λάβωμεν ὡς ἄξονα τῶν z τὴν γενέτειραν (Γ) καὶ ἀρχὴν τὸ M_1· τότε ἡ ἐξίσωσις (26) τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον M θὰ γίνῃ: $Y_1\,(x_{1u}+A_u\,\omega_1)=$ $=X\,(y_{1u}+B_u\,\omega_1)$, εἰς δὲ τὸ κεντρ. σημεῖον M_1: $Y_1\,X_{1u}=X_1\,y_{1u}$.

Ἂν ὅμως λάβωμεν καὶ ὡς ἐπίπεδον τῶν xz τὸ ἐφαπτόμενον εἰς τὸ M_1, θὰ εἶναι καὶ $y_{1u}=0$ καὶ $\Xi=\dfrac{A_u}{\sqrt{\Sigma A^2_u}}=1$ (ἐπὶ τοῦ λαιμοῦ)=0 (διότι ἡ (l, m, n) εἶναι τώρα ἄξ. τῶν y·) καὶ ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομ. ἐπιπέδου εἰς τὸ M γίνεται: $Y_1\;x_{1u}=X_1\;B_u\;\omega_1$, ἑπομένως:

$$\varepsilon\varphi\;\psi=\omega_1\frac{B_u}{x_{1u}}=\lambda\omega_1,$$

ὅπου λ σταθερὸν δι' ὅλα τὰ σημεῖα τῆς γενετείρας.

31. ***Πόρισμα.*** Ἂν στρέψωμεν τὸ εἰς τὸ M_1 ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον κατὰ μίαν γωνίαν ψ, ἡ νέα θέσις του θὰ ἐφάπτεται τῆς ἐπιφανείας εἰς ἓν σημεῖον ὁριζόμενον ἀπὸ τὴν σχέσιν: $\omega'_1=\dfrac{\varepsilon\varphi\;\psi}{\lambda}$· θὰ εἶναι δὲ κάθετον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν εἰς τὸ σημεῖον: $\omega''_1=-\dfrac{\sigma\varphi\;\psi}{\lambda}$. Ὥστε: ***Κάθε ἐπίπεδον διὰ μιᾶς γενετείρας (Γ) ὁρίζει ἐπὶ τῆς (Γ) δύο σημεῖα M′, M″, εἰς τὰ ὁποῖα εἶναι ἀντιστοίχως ἐφαπτόμενον καὶ κάθετον τῆς ἐπιφανείας.*** Ὅταν δὲ τὸ ἐπίπεδον στρέφεται περὶ τὴν (Γ), τὰ δύο σημεῖα M′, M″ παράγουν μίαν ***ἐνέλιξιν***, μὲ κέντρον τὸ κεντρικὸν σημεῖον.

Παρατήρησις. Αἱ κάθετοι τῆς ἐπιφανείας κατὰ μῆκος μιᾶς γενετείρας ἀποτελοῦν ἓν ὑπερβολικὸν παραβολοειδές. Ἡ ἀπόδειξις εὔκολος. Μόνον ἂν ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἀναπτυκτή, αἱ κάθετοι αὗται ἀποτελοῦν ἓν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ ἐφαπτόμενον.

Στρεβλότης.

32. ***Ὀνομάζομεν «στρεβλότητα» σ τῆς εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας κατὰ μῆκος μιᾶς γενετείρας (Γ) τὸ ὅριον τοῦ λόγου*** $\dfrac{\Delta I}{\Delta\Omega}=\dfrac{dI}{d\Omega}$,

ὅπου ΔI εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις τῶν γενετειρῶν (Γ) καὶ Γ′ $(A+\Delta A,\ldots)$ καὶ $\Delta\Omega$ ἡ γωνία των. Ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις ΔΙ δίδεται ἀπὸ τὸν γνωστὸν τύπον τῆς Ἀναλ. Γεωμετρίας (Βλ. Ι. Χατζιδάκη, Στερ. Ἀναλ. Γεωμετρία, σελ. 63):

$$\frac{\| a'-a\ \alpha\ \alpha' \|}{\sqrt{\Sigma(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2}}, \text{ ἂν θέσωμεν : } \begin{cases} a'-a=x_1+\Delta x_1-x_1=\Delta x_1, \text{ κτλ.} \\ \alpha=A, \text{ κ.τ.λ.}, \ \alpha'=A+\Delta A, \text{ κ.τ.λ.} \end{cases}$$

καὶ εἶναι : $(x_1, \ldots$ αἱ συντεταγμέναι τοῦ λαιμοῦ$)$

$$\Delta I=\frac{\| \Delta x_1\ A\ A+\Delta A \|}{\sqrt{\Sigma(A.\Delta B-B.\Delta A)^2}}=\frac{\| \Delta x_1\ A\ \Delta A \|}{\sqrt{\Sigma(A\ \Delta B-B\ \Delta A)^2}}\cdot$$

ἀλλά :

$$\Sigma(A\Delta B-B\Delta A)^2=\Sigma A^2.\Sigma(A+\Delta A)^2-[\Sigma A(A+\Delta A)]^2=$$
$$=1-\sigma\upsilon\nu^2(\Delta\Omega=\eta\mu^2(\Delta\Omega)$$

καί : $$\| \Delta x_1\ A\ \Delta A \|=\Sigma\Delta x_1(B\Delta\Gamma-\Gamma\Delta B).$$

Ἑπομένως : $$\sigma=o\varrho\left(\frac{\Delta I}{\Delta\Omega}\right)=o\varrho\frac{\Sigma\Delta x_1(B\Delta\Gamma-\Gamma\Delta B)}{\Delta\Omega\eta\mu\Delta\Omega}=$$

$$=\frac{\Sigma dx_1(Bd\Gamma-\Gamma dB)}{d\Omega^2}=\frac{ds_1.d\Sigma}{d\Omega^2}.\Sigma\alpha_1\Lambda=\frac{ds_1.d\Sigma}{d\Omega^2}\eta\mu\varphi_1\cdot$$

ἀλλὰ : $$o\varrho\frac{\eta\mu^2(\Delta\Omega)}{(\Delta\Omega)^2}=o\varrho\frac{\Sigma(A\Delta B-B\Delta A)^2}{\Delta\Omega^2}=\frac{\Sigma(AdB-BdA)^2}{d\Omega^2}=$$

$$=\frac{d\Sigma^2}{d\Omega^2}\Sigma(AH-B\Xi)^2=\frac{d\Sigma^2}{d\Omega^2}\Sigma\Lambda^2=\frac{d\Sigma^2}{d\Omega^2}, \text{ δηλ. } 1=\frac{d\Sigma}{d\Omega}$$

καὶ $d\Omega=d\Sigma$. Ὥστε ἔχομεν διὰ τὴν στρεβλότητα σ τὸν τύπον :

$$\sigma=\frac{ds_1}{d\Sigma}\eta\mu\varphi_1 \qquad (27),$$

δηλ. ***Ἡ στρεβλότης τῆς εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας κατὰ μῆκος μιᾶς γενετείρας εἶναι ἡ ἐπὶ τῆς (Γ) τιμὴ τῆς παραγώγου τοῦ τόξου τοῦ λαιμοῦ πρὸς τὸ διαφορικὸν τῆς σφαιρικῆς ἀπεικονίσεως $d\Sigma$ τῆς (Γ) πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς κλίσεως φ_1 τοῦ λαιμοῦ πρὸς τὴν γενέτειραν.***

Μερικαὶ περιπτώσεις.— 1η) Ἂν διαρκῶς $\varphi_1=0$, δηλ. ἂν ὁ λαιμὸς ἐφάπτεται τῆς ἐπιφανείας (ἀναπτυκτὴ ἐπιφάνεια), ἡ στρεβλότης εἶναι παντοῦ $=0$. (Ἐκτὸς ἂν καὶ $d\Sigma=0$, δηλ. Α, Β, Γ σταθερά· τότε σ ἀπροσδιόριστον· αὐτὸ συμβαίνει μόνον εἰς τὰς κυλινδρικὰς ἐπιφανείας). Ἀντιστρόφως, ἂν σ παντοῦ $=0$, θὰ εἶναι καὶ φ_1 διαρκῶς $=0$ (ἂν δὲν εἶναι $ds_1=0$, δηλ. ἡ ἐπιφάνεια κωνική). Ὥστε: ***Αἱ ἀναπτυκταὶ ἐπιφάνειαι, καὶ μόνον αὐταί, ἔχουν στρεβλότητα εἰς ὅλας τὰς γενετείρας των*** $=0$.— 2α) Ἂν $\varphi_1=\frac{\pi}{2}$, ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ὁ τόπος τῶν ὀρθίων καθέτων μιᾶς καμπύλης (§ 27). καὶ ἡ στρεβλότης της εἶναι: $\frac{ds_1}{d\Sigma}$· ἀλλὰ τώρα $d\Sigma^2=\Sigma dA^2=\Sigma d\lambda^2_1=d\tau^2_1$, ὥστε $\sigma=\frac{ds_1}{d\tau_1}$, δηλ. ***Τῆς «δικαθετικῆς» εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας ἡ στρεβλότης εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα στρέψεως τοῦ λαιμοῦ.*** Καὶ ἀντιστρόφως.

Παρατήρησις. Ἂν ἐλαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις τῆς εὐθειογενοῦς ὑπὸ τὴν μορφήν: $X=x+A\omega,\ldots$, θὰ εὑρίσκομεν ὡς ἀριθμητὴν τοῦ πηλίκου $\frac{\Delta I}{\Delta\Omega}$ τὴν ὁρίζουσαν: (α) $\|\Delta x\ A\ \Delta A\|$, ἴσην πρὸς τὴν $\|\Delta x_1\ A\ \Delta A\|$, διότι $\Delta x_1=\Delta x+A\Delta\omega+(\omega+\Delta\omega)\Delta A$. Ἂν δὲ μετασχηματίσωμεν τὴν (α), καθὼς πρίν, θὰ τὴν εὕρωμεν ἴσην μέ: $ds_1.d\Sigma.\Sigma\alpha\Lambda$. Τώρα ὅμως τὸ $\Sigma\alpha\Lambda$ δὲν εἶναι $=\eta\mu\varphi_1$, ἀλλά: $\Sigma\alpha\Lambda=\Sigma(A\sigma\upsilon\nu\,\varphi+\alpha_1\eta\mu\varphi)\Lambda$ $=\eta\mu\varphi.\Sigma\alpha_1\Lambda=\eta\mu\varphi.\Sigma l\Xi=\eta\mu\varphi.\sigma\upsilon\nu\psi$, ὅπου $(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$ ἡ ἐφαπτομένη τῆς ὀρθογώνου τροχιᾶς τῆς γενετείρας, l, m, n τὰ συνημίτονα τῆς καθέτου τῆς ἐπιφανείας καὶ ψ ἡ γωνία τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων εἰς τὰ δύο σημεῖα M_1 (τοῦ λαιμοῦ) καὶ M. Ὥστε: $ds\ \eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\psi=$ $=ds_1\eta\mu\varphi_1$. Εὐκόλως δὲ δεικνύεται καὶ ἀπ' εὐθείας ἡ ταὐτότης τῶν δύο τούτων ἐξαγομένων.

33. Ἄλλη ἔκφρασις τῆς στρεβλότητος.— Ἂν θεωρήσωμεν τὴν ὀρθογώνιον τροχιὰν (T_1') τῶν γενετειρῶν, τὴν διὰ τοῦ κεντρικοῦ σημείου διερχομένην, θὰ εἶναι εἰς τὸ κεντρικὸν σημεῖον: $ds'_1=ds_1.\eta\mu\varphi$ καὶ ἑπομ. $\sigma=\frac{ds'_1}{d\Sigma}$. Ἀπὸ κάθε σημεῖον τοῦ λαιμοῦ διέρχεται μία ὀρθογώνιος τροχιὰ τῶν γενετειρῶν. ***Ἡ στρεβλότης λοιπὸν τῆς εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας κατὰ μῆκος μιᾶς γενετείρας της (Γ) εἶναι ἴση μὲ τὴν τιμήν, ποὺ λαμβάνει εἰς τὸ κεντρικὸν σημεῖον K τῆς (Γ) ἡ παράγωγος τοῦ τόξου τῆς ὀρθογωνίου τροχιᾶς τῆς (Γ), τῆς διὰ τοῦ K διερχομένης, πρὸς τὸ*** $d\Sigma$.

Θεμελιώδη ποσὰ καὶ καμπυλότης τῆς ἐπιφανείας.

34. Ἂν θεωρήσωμεν τὰς ἐξισώσεις τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ τὴν μορφήν: $X=x+A\omega$, ὅπου ἡ ὁδηγὸς καμπύλη (x, y, z) νὰ εἶναι ὀρθογώνιος τροχιὰ τῶν γενετειρῶν καὶ ὅπου ἡ παράμετρος u νὰ εἶναι τὸ τόξον τῆς θὰ ἔχωμεν :

$$E=\Sigma(x_s+\omega A_s)^2=1+\omega^2\Sigma A_s{}^2+2\omega\Sigma A_s x_s,\ G=\Sigma A^2=1,$$
$$F=\Sigma(x_s+\omega A_s)A=\Sigma A x_s=0 \text{ καὶ } D=\sqrt{E}.\quad \text{Ἑπομένως:}$$
$$dS^2=(1+\omega^2\Sigma A_s{}^2+2\omega\Sigma A_s x_s)ds^2+d\omega^2=$$

$$=\left[1+\omega^2\left(\frac{d\Sigma}{ds}\right)^2+2\omega\frac{d\Sigma}{ds}\Sigma\Xi\alpha\right]ds^2+d\omega^2\cdot$$

ἀπὸ δὲ τὰ ποσὰ τῆς β′ τάξεως L, M, N τὸ N εἶναι=0, διότι : $N=$ $=\|A_\omega\ x_s+\omega A_s\ A\|=\|0\ x_s+\omega A_s\ A\|=0$, ὥστε διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς καμπυλότητος K τῆς ἐπιφανείας : $K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$ (Θεωρ. Ἐπιφ. Ν. Χατζ., σ. 53), ἀρκεῖ νὰ ὑπολογισθῇ μόνον τὸ M, διότι τώρα: $K=-\frac{M^2}{E}$. Ἔχομεν :

$$M=\frac{1}{\sqrt{E}}\|A_s\ x_s\ A\|=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{d\Sigma}{ds}\|\Xi\,\alpha\,A\|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{d\Sigma}{ds}\|A\ \Xi\ \alpha\|=\frac{1}{\sqrt{E}}\cdot\frac{d\Sigma}{ds}\Sigma\alpha\Lambda=\frac{1}{\sqrt{E}}\cdot\frac{d\Sigma}{ds}\Sigma l\Xi\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ $\Sigma l\Xi$ εἶναι ἡ γωνία τῆς εἰς τὸ κεντρ. σημεῖον τῆς γενετείρας καθέτου τῆς ἐπιφανείας (διότι $\Xi=l_1$, § 24), καὶ τῆς εἰς τὸ σημεῖον τῆς ὀρθογωνίου τροχιᾶς καθέτου, θὰ εἶναι: $\Sigma l\Xi=$συνψ καὶ $\Sigma\alpha\Xi=$ημψ,

ὥστε : $$K=-\frac{\left(\frac{d\Sigma}{ds}\right)^2\text{συν}^2\psi}{\left[1+\omega^2\left(\frac{d\Sigma}{ds}\right)^2+2\omega\frac{d\Sigma}{ds}\,\text{ημψ}\right]^2}\cdot$$

Ὁ τύπος ὅμως αὐτὸς ἁπλοποιεῖται, ἂν λάβωμεν ὡς ὀρθογώνιον τροχιὰν (x, y, z) τὴν διερχομένην ἀπὸ τὸ κεντρ. σημεῖον τῆς γενετείρας, διότι τότε συνψ=1, ημψ=0 καὶ ἑπομένως ($\omega=\omega_1$):

$$K=-\frac{\left(\frac{d\Sigma}{ds}\right)^2}{\left[1+\omega_1^2\left(\frac{d\Sigma}{ds}\right)^2\right]^2}.\quad(28)$$

Ὁ τύπος αὐτὸς μᾶς δεικνύει, ὅτι: α′) ***Ἡ ἐπιφάνεια εἶναι κοιλόκυρτος*** ($K<0$), β′) ***Ἡ καμπυλότης τῆς ἐπιφανείας εἶναι μεγίστη εἰς τὸ κεντρ. σημεῖον***: $K=-\frac{d\Sigma^2}{ds^2}$ καὶ γ′) ***Ἡ καμπυλότης ἐλαττώνεται ἀπεριορίστως, ὅσον ἀπομακρυνόμεθα ἀπὸ τὸ κεντρ. σημεῖον (δηλ. ορ $K=0$ διὰ ορ $\omega_1=\infty$) καὶ εἶναι ἡ ἰδία εἰς τὰ σημεῖα τὰ συμμετρικὰ πρὸς τὸ κεντρικὸν*** (ω_1 καὶ $-\omega_1$). Δηλ. ἡ ἐπιφάνεια, ὅσον ἀπομακρυνόμεθα ἀπὸ τὸν λαιμόν, εἴτε ἀπὸ τὸ ἓν εἴτε ἀπὸ ἄλλο μέρος του, τείνει ἀπεριορίστως νὰ γίνῃ ***ἀναπτυκτὴ*** ($K=0$), χωρὶς ὅμως ποτὲ νὰ γίνεται ἀκριβῶς. Παράδειγμα τούτου ἁπλοῦν ἔχομεν τὸ μονόχωνον ***ὑπερβολοειδές***, τὸ ὁποῖον τείνει ἀπεριορίστως νὰ συμπέσῃ μὲ τὸν ***ἀσύμπτωτον κῶνον***.

35. ***Σχέσις καμπυλότητος καὶ στρεβλότητος.*** Ὁ τύπος (28), ἂν θέσωμεν εἰς αὐτὸν τὴν τιμὴν τοῦ $\frac{d\Sigma}{ds}$ (§ 33), γίνεται: (29) $K=-\frac{\sigma^2}{[\sigma^2+\omega_1^2]^2}$ καὶ συνδέει καμπυλότητα καὶ στρεβλότητα. Εἰς δὲ τὸ κεντρ. σημεῖον γίνεται: (30) $K=-\frac{1}{\sigma^2}$, δηλ. ***Εἰς τὸ κεντρικὸν σημεῖον ἡ καμπυλότης εἶναι ἀντίθετος καὶ ἀντίστροφος τοῦ τετραγώνου τῆς στρεβλότητος.***

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ.

Θεωρία τῶν εὐθυγράμμων σμηνῶν.

Α′) Ἀναπτυκταὶ ἐπιφάνειαι τοῦ εὐθυγράμμου σμήνους.

36. ***Ἐξισώσεις τοῦ εὐθυγράμμου σμήνους.*** Αὐταὶ εἶναι: $X=x+A\omega$, $Y=\ldots$, $Z=\ldots$, ὅπου τὰ x, y, z, A, B, Γ εἶναι συναρτήσεις ***δύο*** ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν u καὶ v. Ἡ ἐπιφάνεια $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, $z=z(u, v)$ εἶναι ἡ ***ὁδηγὸς*** ἢ ***ἀρχικὴ*** ἐπιφάνεια τοῦ σμήνους.

37. ***Θεώρημα: Κάθε εὐθύγραμμον σμῆνος ἔχει ἢ καμίαν ἢ μίαν ἢ δύο τὸ πολὺ σειρὰς ἀναπτυκτῶν ἐπιφανειῶν.***

Ἀπόδειξις. Ἂν θέσωμεν $\frac{dv}{du}=\varrho(u, v)=k$, δηλ. $v=\varrho_1(u, c)$, ***συναρμολογοῦμεν ἢ προσκολλῶμεν*** τὰς ∞^2 εὐθείας τοῦ σμήνους εἰς ∞^1 εὐθειογενεῖς ἐπιφανείας. Ἡ συνθήκη ὅμως, διὰ νὰ εἶναι αἱ ἐπιφάνειαι αὐταὶ ἀναπτυκταί, εἶναι (Διαφ. Λογ. Ι. Χατζ. ΙΙ): $\| dx\ A\ dA \| = 0$ ἢ ἀπὸ τὰς ἐξισ. τοῦ σμήνους: $X = x + \omega A$ κ.τ.λ.:

$$\| x_u + kx_v\ A\ A_u + kA_v \| = 0 \quad \text{δηλ.}$$

$$\| x_u\ A\ A_u \| + k[\| x_u\ A\ A_v \| + \| x_v\ A\ A_u \|] +$$

$$+ k^2 \| x_v\ A\ A_v \| = 0 \text{ ἢ συντομώτερον}: E + 2\Phi k + \Gamma k^2 = 0.$$

Ἡ ἐξίσωσις δὲ αὐτὴ μᾶς δίδει προφανῶς δύο τιμὰς τοῦ k, ἢ πραγματικὰς καὶ διαφόρους ἢ μίαν διπλῆν ἢ δύο φανταστικάς· εἶναι δὲ αἱ τιμαὶ αὐταὶ συναρτήσεις τῶν Ε, Φ, Γ, δηλ. τῶν u, v.

Β′) Στρεβλότης τῶν ἐπιφανειῶν τοῦ σμήνους.

38. *Τύπος τῆς στρεβλότητος τῆς τυχούσης ἐπιφανείας τοῦ σμήνους.* — Ἡ στρεβλότης σ τῆς τυχούσης ἐπιφανείας τοῦ σμήνους ἐπάνω εἰς μίαν γενέτειράν της δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον: $\sigma = \dfrac{\| dx\ A\ dA \|}{d\Sigma^2}$ ἢ καί:

$$\sigma = \frac{E + 2\Phi k + \Gamma k^2}{\left(\dfrac{d\Sigma}{du}\right)^2},$$

$$\text{ἀλλὰ } d\Sigma^2 = \Sigma dA^2 = \Sigma (A_u\, du + A_v\, dv)^2 =$$

$$= du^2 \Sigma A_u^{\,2} + 2du\,dv\, \Sigma A_u A_v + dv^2 \Sigma A_v^{\,2}$$

ἢ καὶ $d\Sigma^2 = E_\sigma du^2 + 2F_\sigma du\,dv + G_\sigma dv^2$ (ὅπου $d\Sigma$ εἶναι τὸ διαφορικὸν τοῦ τόξου τῆς α′. σφαιρικῆς δεικτρίας τῆς γενετείρας), ἑπομένως:

$$(31)\quad \sigma = \frac{E + 2\Phi k + \Gamma k^2}{E_\sigma + 2F_\sigma k + G_\sigma k^2}.$$

39. *Ἰσόστρεβλοι εὐθεῖαι τοῦ σμήνους.* — Ἂς ἐξετάσωμεν πρῶτα, πότε ἡ τιμὴ αὐτὴ τῆς σ εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ k· ἀναγκαία καὶ ἀρκετὴ συνθήκη πρὸς τοῦτο εἶναι προφανῶς νὰ ἔχωμεν:

$$(32)\quad \frac{E}{E_\sigma} = \frac{\Phi}{F_\sigma} = \frac{\Gamma}{G_\sigma}.$$

αἱ δύο αὗται ἐξισώσεις περιέχουν τὰ u, v καὶ ὁμοῦ μὲ τὰς ἐξισώσεις τοῦ σμήνους δίδουν γενικῶς ὡρισμένα συστήματα τιμῶν τῶν u, v: (u_1, v_1), (u_2, v_2) κ.τ.λ., πεπερασμένα τὸ πλῆθος. Ὥστε: ***Κάθε εὐθύγραμμον σμῆνος ἔχει ἕνα πεπερασμένον ἀριθμὸν εὐθειῶν (ἢ καὶ καμίαν), εἰς ἑκάστην τῶν ὁποίων αἱ στρεβλότητες ὅλων τῶν ἐπιφανειῶν τοῦ σμήνους τῶν δι' αὐτῆς διερχομένων εἶναι, ἐπάνω εἰς τὴν εὐθεῖαν αὐτήν, ἴσαι***. Μία τοιαύτη εὐθεῖα τοῦ σμήνους λέγεται ***ἰσόστρεβλος***. Εἰμπορεῖ ὅμως νὰ συμβῇ αἱ δύο ἐξισώσεις νὰ συμπίπτουν εἰς μίαν· τότε ὁρίζεται τὸ v ὡς συνάρτησις τοῦ u καὶ ἐπομένως ὑπάρχουν μέσα εἰς τὸ σμῆνος ***ἐπιφάνειαι ἰσόστρεβλοι*** εἰς πεπερασμένον ἀριθμὸν (ποὺ ἔχουν δηλ. ὅλας τὰς γενετείρας των ἰσοστρέβλους). Τέλος, ἂν τύχῃ αἱ ἐξισώσεις (32) νὰ εἶναι ταὐτότητες, ὅλαι αἱ εὐθεῖαι τοῦ σμήνους εἶναι ἰσόστρεβλοι, δηλ. τὸ ***σμῆνος εἶναι ἰσόστρεβλον.***

Παρατήρησις. Ἡ θεωρία αὐτή, καθὼς βλέπομεν, ἔχει μεγάλην ὁμοιότητα μὲ τὴν θεωρίαν τῶν ὀμφαλικῶν σημείων τῶν ἐπιφανειῶν (τὰ ἰσόστρεβλα σμήνη ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὴν σφαῖραν). Ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος αὐτῆς εἶναι ἡ ***μορφολογικὴ*** ὁμοιότης τοῦ τύπου (31) μὲ τὸν τύπον τῆς καμπυλότητος τῶν καθέτων τομῶν (Θεωρ. Ἐπιφ. Ν. Χατζ. § 23).

40. Μέγιστον καὶ ἐλάχιστον τῆς στρεβλότητος.—Εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν, ποὺ καμία ἀπὸ τὰς σχέσεις (32) δὲν ἀληθεύει, ἡ στρεβλότης τῶν ἐπιφανειῶν τοῦ σμήνους, ποὺ διέρχονται ἀπὸ μίαν ὡρισμένην εὐθεῖάν του, εἶναι, ἐπάνω εἰς αὐτήν, διὰ καθεμίαν ἐπιφάνειαν διάφορος. Ἂς ζητήσωμεν τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον αὐτῆς. Πρὸς τοῦτο πρέπει ***(καὶ ἐδῶ καὶ ἀρκεῖ)*** νὰ μηδενίσωμεν τὸν ἀριθμητὴν τῆς παραγώγου τῆς ἐκφράσεως (31) τῆς σ, δηλ. νὰ θέσωμεν:

$$(E_\sigma+2F_\sigma k+G_\sigma k^2)(2\Phi+2\Gamma k)-(E+2\Phi k+\Gamma k^2)(2F_\sigma+2G_\sigma k)=0$$

ἐπομένως: (πρβλ. Θεωρ. Ἐπιφ. Ν. Χατζ. § 25):

$$\begin{vmatrix} k^2 & E_\sigma & E \\ -k & F_\sigma & \Phi \\ 1 & G_\sigma & \Gamma \end{vmatrix}=0 \quad (33).$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ὁρίζει δύο τιμὰς τοῦ k: k_1 καὶ k_2, ποὺ δίδουν τὴν μεγίστην καὶ τὴν ἐλαχίστην στρεβλότητα: σ_μ καὶ σ_ε. ***Ὑπάρχουν λοιπὸν διὰ κάθε εὐθεῖαν*** τοῦ σμήνους δύο ἐπιφάνειαι τοῦ σμήνους, ἀπὸ τὰς ὁποίας ἡ μία ἔχει ἐκεῖ τὴν μεγίστην καὶ ἡ ἄλλη τὴν ἐλαχίστην στρεβλότητα ἀπὸ ὅλας τὰς ἄλλας ἐπιφανείας τοῦ σμήνους, ποὺ διέρχονται ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν αὐτήν. Αἱ ἐπιφάνειαι αὐταὶ λέγονται ***πρωτεύουσαι*** ἐπιφάνειαι καὶ εἶναι πάντοτε πραγματικαὶ καὶ κάθετοι πρὸς ἀλλήλας (ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἡ ἰδία, ὅπως καὶ διὰ τὴν καθετότητα τῶν πρωτευουσῶν τομῶν τῆς ἐπιφανείας). Αἱ δὲ τιμαὶ τῶν σ_ε καὶ σ_μ ὁρίζονται ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις:

$$\frac{\Phi+\Gamma k_1}{F_\sigma+G_\sigma k_1}=\sigma_\varepsilon, \quad \frac{\Phi+\Gamma k_2}{F_\sigma+G_\sigma k_2}=\sigma_\mu \quad (34).$$

41. Ἐξίσωσις δίδουσα τὰ σ_ε ***καὶ*** σ_μ. — Ἂν θεωρήσωμεν τὰ u, v μεταβλητὰ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (33), ἔχομεν δύο ***σειρὰς πρωτευουσῶν ἐπιφανειῶν*** τοῦ σμήνους (μίαν διὰ κάθε τιμὴν τοῦ k), ποὺ ἀναλογοῦν πρὸς τὰς δύο σειρὰς τῶν γραμμῶν καμπυλότητος (πρβλ. Παρατ. § 39).

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν τὴν δίδουσαν τὰ σ_μ καὶ σ_ε, λύομεν τὰς ἐξισώσεις (34) πρὸς τὰ k_1, k_2: $k_1=-\dfrac{\Phi-F_\sigma\sigma_\varepsilon}{\Gamma-G_\sigma\sigma_\varepsilon}$, $k_2=\dfrac{\Phi-F_\sigma\sigma_\mu}{\Gamma-G_\sigma\sigma_\mu}$ καὶ τὴν τιμὴν αὐτήν: $k=-\dfrac{\Phi-F_\sigma\sigma}{\Gamma-G_\sigma\sigma}$ θέτομεν εἰς τὴν (33)· τότε, ὕστερ' ἀπ' ὀλίγας πράξεις, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$(E_\sigma G_\sigma-F_\sigma^2)\sigma^2-(E_\sigma\Gamma-2F_\sigma\Phi+G_\sigma E)\sigma+(E\Gamma-\Phi^2)=0. \quad (35)$$

Ἔχομεν λοιπὸν καί:

$$\sigma_\varepsilon+\sigma_\mu=\frac{E_\sigma\Gamma-2F_\sigma\Phi+G_\sigma E}{E_\sigma G_\sigma-F_\sigma^2}, \quad \sigma_\varepsilon\sigma_\mu=\frac{E\Gamma-\Phi^2}{E_\sigma G_\sigma-F_\sigma^2} \quad (36)$$

(πρβλ. Θεωρ. Ἐπιφ. Ν. Χατζ. § 26).

42. Τύπος τοῦ *Mannheim.* — Ἂν ἐκλέξωμεν ὡς ***παραμετρικὰς*** σειρὰς ἐπιφανειῶν τοῦ σμήνους ($u=c_1$, $v=c_2$) τὰς δύο σειρὰς τῶν πρωτευουσῶν ἐπιφανειῶν, ἡ ἐξίσωσις (33) θὰ ἔχῃ ρίζας τὰς $k_1=0$ καὶ $k_2=\infty$, ἐπομένως θὰ εἶναι $E_\sigma\Gamma-G_\sigma E=0$, $F_\sigma\Gamma-G_\sigma\Phi=0$, ὥστε (ἄν δὲν εἶναι $\frac{E}{E_\sigma}=\frac{\Phi}{F_\sigma}=\frac{\Gamma}{G_\sigma}$): $F_\sigma=0$, $\Phi=0$ (διότι $\Gamma \gtrless 0$, $G_{\sigma} \gtrless 0$)· ὁ τύπος λοιπὸν (31) καταντᾷ:

(α) $\sigma=\frac{E+\Gamma k^2}{E_\sigma+G_\sigma k^2}$. Ἀπὸ τὸν τύπον αὐτὸν εὑρίσκομεν διὰ $k=0$: $\sigma_\varepsilon=\frac{E}{E_\sigma}$ καὶ διὰ $k=\infty$: $\sigma_\mu=\frac{\Gamma}{G_\sigma}$· ἐπομένως:

$$\sigma=\sigma_\varepsilon \frac{E_\sigma}{E_\sigma+G_\sigma k^2}+\sigma_\mu \cdot \frac{G_\sigma k^2}{E_\sigma+G_\sigma k^2}.$$

Ἔχομεν ὅμως διὰ τὴν γωνίαν δύο ***διευθύνσεων*** k' καὶ k'' γενικῶς, δηλ. διὰ τὴν δίεδρον γωνίαν (εἰς τὰ κεντρικὰ σημεῖα) τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων τῶν δύο διὰ τῆς εὐθείας τοῦ σμήνους ἐπιφανειῶν (k') καὶ (k''), ἢ καὶ τὴν ἀντίστοιχόν της ἐπίπεδον γωνίαν τῶν ἐφαπτομένων τῶν δύο σφαιρικῶν δεικτριῶν τῆς εὐθείας, ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς δύο ἐπιφανείας (k') καὶ (k''), τὸν τύπον (πρβλ. Θεωρ. Ἐπιφ. Ν Χαιζ. § 16):

$$\sigma\upsilon\nu\,\Omega=\frac{E_\sigma+F_\sigma(k'+k'')+G_\sigma k'k''}{\sqrt{E_\sigma+2F_\sigma k'+G_\sigma k'^2}\sqrt{E\sigma+2F_\sigma k''+G_\sigma k''^2}}.$$

Ὁ δὲ τύπος αὐτὸς διὰ τὰς ἐπιφανείας μὲ στρεβλότητας σ_μ καὶ σ_ε (τιμὰς τοῦ k: $k''=0$ καὶ $k'=k$) καταντᾷ, (ἐπειδὴ τώρα $F_\sigma=0$):

$$\sigma\upsilon\nu\,\Omega=\frac{E_\sigma}{\sqrt{E_\sigma+G_\sigma k^2}\sqrt{E_\sigma}}=\frac{\sqrt{E_\sigma}}{\sqrt{E_\sigma+G_\sigma k^2}}.$$

Εἶναι λοιπὸν καὶ $\eta\mu\Omega=\frac{k\sqrt{G_\sigma}}{\sqrt{E_\sigma+G_\sigma k^2}}$.

Ἑπομένως ὁ τελευταῖος τύπος (α) τῆς στρεβλότητος γίνεται:

$$\sigma=\sigma_\varepsilon\,\sigma\upsilon\nu^2\Omega+\sigma_\mu\,\eta\mu^2\Omega. \qquad (37)$$

Ὁ τύπος αὐτός, ***τύπος τοῦ Mannheim***, εἶναι ἐντελῶς ὅμοιος (μορφολογικῶς) μὲ τὸν τύπον τοῦ Euler διὰ τὰς καθέτους τομὰς μιᾶς ἐπιφανείας: $\frac{1}{\varrho_1}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{P_1}+\frac{\eta\mu^2\omega}{P_2}$ (Θεωρ. Ἐπιφ. Ν. Χατζ. § 30). (Ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος αὐτῆς ἐξηγήθη ἤδη εἰς τὴν παρατήρ. τῆς § 39).

Γ') Κεντρικὰ σημεῖα τῶν εὐθειῶν τοῦ σμήνους.

43. Τύπος τῆς ἀποστάσεως τοῦ τυχ. κεντρ. σημείου ἀπὸ τὴν ὁδηγὸν ἐπιφάνειαν. Ἡ ἀπόστασις τοῦ κεντρ. σημείου τῆς τυχούσης ἐπιφανείας τοῦ σμήνους ἐπάνω εἰς μίαν εὐθεῖαν τοῦ σμήνους ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον τῆς ὁδηγοῦ ἐπιφανείας εὑρίσκεται ἀπὸ τὸν τύπον $\omega=-\frac{\Sigma dAdx}{d\Sigma^2}$ ποὺ τώρα γίνεται:

$$\omega=-\frac{du^2\Sigma A_u X_u+dudv(\Sigma A_u X_v+\Sigma A_v X_u)+dv^2\Sigma A_v X_v}{E_\sigma\, du^2+2F_\sigma\, dudv+G_\sigma\, dv^2},$$

ἢ συντομώτερα: $$\omega=-\frac{e+2fk+gk^2}{E_\sigma+2F_\sigma k+G_\sigma k^2}. \quad (38)$$

44. Μονόκεντροι ἐπιφάνειαι τοῦ σμήνους.—Διὰ νὰ εἶναι τὸ ω ἀνεξάρτητον τοῦ k, δηλ. ὅλα τὰ κεντρικὰ σημεῖα μιᾶς εὐθείας τοῦ σμήνους νὰ συμπίπτουν εἰς ἕν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι:

$$\frac{e}{E_\sigma}=\frac{f}{F_\sigma}=\frac{g}{G_\sigma}. \quad (39)$$

Αἱ σχέσεις αὗται ὁρίζουν γενικῶς πεπερασμένον ἀριθμὸν εὐθειῶν τοῦ σμήνους (ἢ καὶ καμίαν), εἰς καθεμίαν ἀπὸ τὰς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα τῆς τομῆς της ἀπὸ τοὺς λαιμοὺς τῶν διαφόρων ἐπιφανειῶν τοῦ σμήνους συμπίπτουν εἰς ἕν. Τὰς εὐθείας αὐτὰς τὰς λέγομεν δι' αὐτὸ ***μονοκέντρους***. Ἂν αἱ ἐξισώσεις (39) καταντήσουν μόνον μία, ἔχομεν πεπερασμένον ἀριθμὸν ***μονοκέντρων ἐπιφανειῶν*** τοῦ σμήνους (τῶν ὁποίων δηλ. αἱ γενέτειραι εἶναι ὅλαι μονόκεντροι). Τέλος, ἂν αἱ (39) τύχῃ νὰ εἶναι ταὐτότητες, εἶναι ὅλον τὸ σμῆνος μονόκεντρον (δηλ. ὅλαι αἱ εὐθεῖαί του μονόκεντροι).

45. Ἄκρα σημεῖα. Εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν, ποὺ καμία ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις δὲν ἀληθεύει, τὰ κεντρικὰ σημεῖα ἐπάνω εἰς τὴν τυχοῦσαν γενέτειραν εἶναι διάφορα. Ἂς ζητήσωμεν τὴν μεγίστην (ω_2) καὶ τὴν ἐλαχίστην (ω_1) τιμὴν τοῦ ω· θὰ ἔχωμεν πάλιν, καθὼς καὶ εἰς τὴν §40:

$$(E_\sigma+2F_\sigma k+G_\sigma k^2)(f+gk)-(e+2fk+gk^2)(F_\sigma+G_\sigma k)=0,$$

$$\text{δηλ.}\quad \begin{vmatrix} k & e & E_\sigma \\ -k & f & F_\sigma \\ 1 & g & G_\sigma \end{vmatrix} = 0 \cdot (40)$$

αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς : k_1, k_2 δίδουν τὰς **ἄκρας** τιμὰς ω_1 ω_2, τοῦ ω :

$$\omega_1 = \frac{f+gk_1}{F_\sigma + G_\sigma k_1}, \quad \omega_2 = \frac{f+gk_2}{F_\sigma + G_\sigma k_2} . (41)$$

Τὰ δύο σημεῖα A_1, A_2 τ'ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰς τιμὰς ω_1, ω_2 λέγονται ***ἄκρα σημεῖα*** τῆς εὐθείας· ***μεταξὺ αὐτῶν περιλαμβάνονται ὅλα τ' ἄλλα κεντρικὰ σημεῖα, δηλ. ὅλα τὰ κεντρικὰ σημεῖα ἀποτελοῦν ἐπάνω εἰς τὴν εὐθεῖαν μόνον ἓν πεπερασμένον (γενικῶς) τμῆμα τῆς A_1 A_2.*** Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν : $\omega_\lambda = \frac{f+gk_\lambda}{F_\sigma + G_\sigma k_\lambda}$ $(\lambda=1, 2)$· εὑρίσκομεν : $k_\lambda = -\frac{f-F_\sigma \omega_\lambda}{g-G_\sigma \omega_\lambda}$ καὶ θέτοντες τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ k εἰς τὴν ἐξίσωσιν (40), ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν τὴν δίδουσαν τὰ ω_1, ω_2 :

$$(42)\quad (E_\sigma G_\sigma - F_\sigma{}^2)\omega^2 + (E_\sigma g - 2F_\sigma f + G_\sigma e)\omega + (eg-f^2) = 0,$$

ἑπομένως καὶ :

$$(43)\quad \omega_1+\omega_2 = \frac{E_\sigma . g - 2F_\sigma f + G_\sigma e}{E_\sigma G_\sigma - F_\sigma{}^2}, \qquad \omega_1\omega_2 = \frac{eg-f^2}{E_\sigma G_\sigma - F_\sigma{}^2}.$$

46. ***Τύπος τοῦ*** *Hamilton*.—Ἂν θεωρήσωμεν καὶ ἐδῶ μεταβλητὰ τὰ u, v εἰς τὴν ἐξίσωσιν (40), ἔχομεν δύο σειρὰς ἐπιφανειῶν τοῦ σμήνους ἀντιστοιχούσας εἰς τὰς δύο τιμὰς k_1, k_2, ποὺ δίδουν τὸ ἐλάχιστον καὶ τὸ μέγιστον ω. Ἂν δὲ τὰς ἐπιφανείας αὐτάς, τὰς **«ἀκρικάς»**, τὰς λάβωμεν ὡς παραμετρικάς, ἡ ἐξίσωσις (40) θὰ ἔχῃ ρίζας $k_1=0$ καὶ $k_2=\infty$, ἑπομένως θὰ εἶναι : $E_\sigma g - G_\sigma e = 0$, $F_\sigma . g - G_\sigma f = 0$, δηλ. (ἂν δὲν εἶναι $\frac{e}{E_\sigma} = \frac{f}{F_\sigma} = \frac{g}{G_\sigma}$) : $F_\sigma = 0$, $f=0$ (διότι $g \gtrless 0, G_\sigma \gtrless 0$). Ὁ τύπος λοιπὸν (38) γίνεται : $\omega = \frac{e+gk^2}{E_\sigma + G_\sigma k^2}$· ἑπομένως, διὰ $k=0$, ἔχομεν : $\omega_1 = \frac{e}{E_\sigma}$ καὶ διὰ $k=\infty$:

$\omega_2 = \frac{g}{G_\sigma}$, ὥστε: $\omega = \omega_1 \frac{E_\sigma}{E_\sigma + G_\sigma k^2} + \omega_2 \frac{G_\sigma k^2}{E_\sigma + G_\sigma k^2}$.

καὶ ἐπειδὴ πάλιν εἶναι:

$$\text{συν}\,\Theta = \frac{\sqrt{E_\sigma}}{\sqrt{E_\sigma + G_\sigma k^2}},\ \text{ημ}\,\Theta = \frac{k\sqrt{G_\sigma}}{\sqrt{E_\sigma + G_\sigma k^2}},$$

ὅπου Θ εἶναι τώρα ἡ γωνία τῆς **διευθύνσεως** $k=0$ πρὸς **τὴν τυχοῦσαν** k, ἕπεται:

$$\omega = \omega_1 \text{συν}^2\Theta + \omega_2 \text{ημ}^2\Theta, \quad (44)$$

ὁ τύπος τοῦ *Hamilton* (ἐντελῶς ἀνάλογος πρὸς τὸν τοῦ **Mannheim** διὰ τὰς στρεβλότητας).

Δ') Σχέσεις μεταξὺ τῶν ποσῶν Ε, Φ, Γ καὶ e, f, g.

47. ***Τρεῖς ταὐτότητες. (Λῆμμα ἀπὸ τὴν Θεωρίαν τῶν Ἐπιφανειῶν).***—Ἂν x, y, z εἶναι αἱ συντεταγμέναι ἑνὸς σημείου μιᾶς ἐπιφανείας καὶ l, m, n τὰ συνημίτονα τῆς καθέτου της, θὰ **εἶναι ἐκ** ταὐτότητος:

$$\left\{\begin{aligned} l y_u - m x_u &= \frac{E}{D} z_v - \frac{F}{D} z_u, \\ m z_u - n y_u &= \frac{E}{D} x_v - \frac{F}{D} x_u \\ n x_u - l z_u &= \frac{E}{D} y_v - \frac{F}{D} y_u. \end{aligned}\right.$$

καὶ:

$$\left\{\begin{aligned} l y_v - m x_v &= \frac{F}{D} z_v - \frac{G}{D} z_u, \\ m z_v - n y_v &= \frac{F}{D} x_v - \frac{G}{D} x_u, \\ n x_v - l z_v &= \frac{F}{D} y_v - \frac{G}{D} y_u. \end{aligned}\right.$$

Ἀπόδειξις. Ἂς λάβωμεν π. χ. τὸν α' ἀπὸ τοὺς **τύπους αὐτούς** ἔχομεν:

$l y_u - m x_u = [\,y_u (y_u z_v - z_u y_v) - x_u (z_u x_v - x_u z_v)\,] \cdot \frac{1}{D}$, ἢ καί:

$l y_u - m x_u = \frac{1}{D} [z_v (x_u^2 + y_u^2 + z_u^2) - z_u (x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v)] =$

$= \frac{E}{D} z_v - \frac{F}{D} z_u$. Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ διὰ τοὺς ἄλλους.

Ἂν τώρα ἐφαρμόσωμεν τὰς ταὐτότητας αὐτὰς εἰς τὴν σφαῖραν τοῦ Gauss (ὅπου ἀπεικονίζομεν τὴν κίνησιν τῆς γενετείρας τοῦ σμήνους), δηλ. εἰς τὰ Α, Β, Γ, θὰ ἔχωμεν (διότι τώρα : $l\equiv A$, $m\equiv B$, $n\equiv \Gamma$ καὶ συγχρόνως : $x\equiv A$, $y\equiv B$, $z\equiv \Gamma$) :

$$AB_u - BA_u = \frac{E_\sigma}{D_\sigma}\Gamma_v - \frac{F_\sigma}{D_\sigma}\Gamma_u, \quad B\Gamma_u - \Gamma B_u =$$

$$\frac{E_\sigma}{D_\sigma}A_v - \frac{F_\sigma}{D_\sigma}A_u, \quad \Gamma A_u - A\Gamma_u = \frac{E_\sigma}{D_\sigma}B_v - \frac{F_\sigma}{D_\sigma}B_u,$$

καί :

$$AB_v - BA_v = \frac{F_\sigma}{D_\sigma}\Gamma_v - \frac{G_\sigma}{D_\sigma}\Gamma_u, \quad B\Gamma_v - \Gamma B_v =$$

$$= \frac{F_\sigma}{D_\sigma}A_v - \frac{G_\sigma}{D_\sigma}A_u, \quad \Gamma A_v - A\Gamma_v = \frac{F_\sigma}{D_\sigma}B_v - \frac{G_\sigma}{D_\sigma}B_u. \quad (45)$$

48. ***Ἄλλη ἔκφρασις τῶν συνημιτόνων τῆς κοινῆς καθέτου δύο ἀπείρως γειτονικῶν γενετειρῶν.*** Ἂν τὰ ὀνομάσωμεν a, b, c, θὰ εἶναι :

$$a = \frac{Bd\Gamma - \Gamma dB}{d\Sigma}, \quad b = \frac{\Gamma dA - Ad\Gamma}{d\Sigma}, \quad c = \frac{AdB - BdA}{d\Sigma}$$

ἢ καὶ $a = \dfrac{(B\Gamma_u - \Gamma B_u)\,du + (B\Gamma_v - \Gamma B_v)\,dv}{d\Sigma}$ κτλ. καὶ ἑπομένως ἕνεκα τῶν (45) :

$$a = \frac{(E_\sigma A_v - F_\sigma A_u)\,du + (F_\sigma A_v - G_\sigma A_u)\,dv}{D_\sigma\, d\Sigma}, \text{ κτλ. κυκλικῶς} \quad (46)$$

49. ***Ἄλλη ἔκφρασις τῆς στρεβλότητος.***—Ἔχομεν :

$$\sigma = \frac{dI}{d\Sigma} = \frac{\Sigma a dx}{d\Sigma}.$$

Ἀλλὰ ἀπὸ τὰς (46) εὑρίσκομεν :

$$\Sigma a dx = \frac{1}{D_\sigma\, d\Sigma}\begin{vmatrix} E_\sigma du + F_\sigma dv & F_\sigma du + G_\sigma dv \\ e du + f_1 dv & f_2 du + g dv \end{vmatrix}.$$

ὅπου : $f_1 = \Sigma A_u x_v$, $f_2 = \Sigma A_v x_u$ (δηλ. $f_1 + f_2 = 2f$, § 43)·

ὥστε : $$\sigma = \frac{1}{D_\sigma d\Sigma^2} \begin{vmatrix} E_\sigma du + F_\sigma dv & F_\sigma du + G_\sigma dv \\ edu + f_1 dv & f_2 du + gdv \end{vmatrix}. \quad (47)$$

50. Παραβολὴ τῶν δύο ἐκφράσεων τῆς στρεβλότητος. — Ἐπειδὴ εὑρήκαμεν καὶ :

$$\sigma = \frac{Edu^2 + 2\Phi dudv + \Gamma dv^2}{d\Sigma^2}$$ (§ 38), θὰ εἶναι :

$$\frac{Edu^2 + 2\Phi dudv + \Gamma dv^2}{d\Sigma^2} = \frac{1}{D_\sigma d\Sigma^2} \begin{vmatrix} E_\sigma du + F_\sigma dv & F_\sigma du + G_\sigma dv \\ edu + f_1 dv & f_2 du + gdv \end{vmatrix},$$

δηλ. $$Edu^2 + 2\Phi dudv + \Gamma dv^2 = \frac{1}{D_\sigma} [(E_\sigma f_2 - E_\sigma e) du^2 +$$

$$dudv (E_\sigma g - eG_\sigma + F_\sigma (f_2 - f_1)) + (F_\sigma g - f_1 G_\sigma) dv^2]. \quad (48).$$

51. Σχέσεις μεταξὺ τῶν E, Φ, Γ καὶ τῶν e, f, g. — Ἀπὸ τὴν (48) εὑρίσκομεν ἀμέσως τὰς ἑξῆς σχέσεις μεταξὺ τῶν ποσῶν E, Φ, Γ καὶ e, f, g :

$$E = \frac{E_\sigma f_2 - F_\sigma e}{D_\sigma}, 2\Phi = \frac{E_\sigma g - eG_\sigma + F_\sigma (f_2 - f_1)}{D_\sigma}, \Gamma = \frac{F_\sigma g - f_1 G_\sigma}{D_\sigma}. \quad (49).$$

52. Ἔκφρασις τοῦ ω διὰ τῶν σ₁ καὶ σ₂. — Ἂν ὡς παραμετρικὰς ἐπιφανείας λάβωμεν τὰς ***πρωτευούσας*** (§ 42), θὰ εἶναι :

$F_\sigma = 0$, $\Phi = 0$ καὶ οἱ τύποι (49) γίνονται :

$$\frac{E}{E_\sigma} = \frac{f_2}{\sqrt{E_\sigma G_\sigma}}, \; E_\sigma g - eG_\sigma = 0, \; \frac{\Gamma}{G_\sigma} = -\frac{f_1}{\sqrt{E_\sigma G_\sigma}}, \text{δηλ.}$$

$$\sigma_1 = \frac{f_2}{\sqrt{E_\sigma G_\sigma}}, \; \sigma_2 = -\frac{f_1}{\sqrt{E_\sigma G_\sigma}}.$$ Ἀφ᾽ ἑτέρου, ἂν ἐκλέξωμεν ὡς ὁδηγὸν ἐπιφάνειαν τὴν ***μέσην***, δηλ. τὸν γεωμετρικὸν τόπον τοῦ μέσου τοῦ τμήματος τοῦ ἑνώνοντος τὰ ἄκρα σημεῖα (ω_1, ω_2), θὰ εἶναι

$\omega_2 = -\omega_1$ ἢ $\omega_1 + \omega_2 = 0$· ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις(42), ποὺ δίδει τὰς τιμὰς ω_1 καὶ ω_2, θὰ ἔχῃ συντελεστὴν τοῦ πρωτοβαθμίου ὅρου $= 0$, δηλ. θὰ εἶναι (43):
$E_\sigma g + G_\sigma e = 0$, ἀλλ' εὑρήκαμεν καί: $E_\sigma g - eG_\sigma = 0$, ὥστε $(E_\sigma \gtrless 0,\ G_\sigma \gtrless 0)$: $e = 0$, $g = 0$. Ὁ τύπος λοιπὸν τώρα (38), ποὺ δίδει τὸ ω, καταντᾷ:

$\omega = \dfrac{2kf}{E_\sigma + G_\sigma k^2}$, καὶ ἂν θέσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ $2f = f_1 + f_2 =$ $(\sigma_1 - \sigma_2)\sqrt{E_\sigma G_\sigma}$ καὶ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν, ὅτι: $\eta\mu(2\Omega) = 2\eta\mu\Omega\sigma\upsilon\nu\Omega =$ $= \dfrac{2k\sqrt{E_\sigma}\sqrt{G_\sigma}}{E_\sigma + G_\sigma k^2}$ (§ 42), εὑρίσκομεν τὸν ἀξιοσημείωτον τύπον:

$$\omega = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\,\eta\mu(2\Omega), \tag{50}$$

συνδέοντα τὸ ω πρὸς τὰς δύο ἄκρας στρεβλότητας σ_1 καὶ σ_2.

Ἀπὸ τὸν τύπον αὐτὸν βλέπομεν, ὅτι αἱ δύο ἄκραι τιμαὶ τοῦ ω εὑρίσκονται διὰ $2\Omega = 90°$ καὶ $270°$:

$$\omega_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad \text{καὶ} \quad \omega_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}.$$

53. *Κάθε ἰσόστρεβλος γενέτειρα εἶναι καὶ μονόκεντρος· καὶ ἀντιστρόφως.*— Αὐτὸ φαίνεται ἀμέσως ἀπὸ τὸν τύπον (50)· διότι, ἂν $\sigma_1 = \sigma_2$ (ὅτε καὶ $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$), θὰ εἶναι καὶ $\omega = 0$ (διὰ τυχὸν Ω)· καὶ ἂν $\omega = 0$, διὰ τυχὸν Ω, θὰ εἶναι $\sigma_1 = \sigma_2$.

Ὥστε ***κάθε ἰσόστρεβλον σμῆνος εἶναι καὶ μονόκεντρον· καὶ ἀντιστρόφως.***

54. *Τὰ ἄκρα σημεῖα καὶ αἱ ἑστίαι ἔχουν κοινὸν τὸ μέσον σημεῖον.*— Ἄς εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν, ποὺ δίδει τὰς ἀποστάσεις δ_1 καὶ δ_2 τῶν ἑστιῶν ἀπὸ τὸ ἀρχικὸν σημεῖον (τῆς ὁδηγοῦ). Θὰ ἔχωμεν: $x_1 = x + \delta A$ κτλ. $(\delta = \delta_1, \delta_2)$ καὶ ἑπομένως $dx_1 = dx + \delta dA + Ad\delta$ κτλ. Πρέπει δὲ νὰ εἶναι:

$$\frac{dx + \delta dA + Ad\delta}{A} = \frac{dy + \delta dB + Bd\delta}{B} = \frac{dz + \delta d\Gamma + \Gamma d\delta}{\Gamma} \text{ ἢ ἁπλῶς:}$$

$dx+\delta dA=\lambda A$, $dy+\delta dB=\lambda B$, $dz+\delta d\Gamma=\lambda\Gamma$. Πολλαπλασιάζοντες τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς πρῶτα ἐπὶ A_u, B_u, Γ_u κατὰ σειρὰν καὶ προσθέτοντες κ' ἔπειτα ἐπὶ A_v, B_v, Γ_v καὶ προσθέτοντες, εὑρίσκομεν:

$$edu+f_1dv+\delta(E_\sigma du+F_\sigma dv)=0,\ f_2du+gdv+\delta(F_\sigma du+G_\sigma dv)=0.$$

Καὶ ἂν μὲν ἀπαλείψωμεν μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν ἐξισώσεων τὸ δ, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$(f_2E_\sigma-eF_\sigma)du^2+[gE_\sigma+(f_2-f_1)F_\sigma-eG_\sigma]dudv+(gF_\sigma-f_1G_\sigma)dv^2=0$$

δηλ., ἕνεκα τῶν σχέσεων (49), τὴν ἐξίσωσιν $E+2\Phi k+\Gamma k^2=0$, τῶν δύο διευθύνσεων, ποῦ δίδουν τὰς ἀναπτυκτὰς ἐπιφανείας τοῦ σμήνους (37).

Ἂν δὲ ἀπαλείψωμεν τὸν λόγον $\frac{dv}{du}=k$, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$(E_\sigma G_\sigma-F_\sigma^2)\delta^2+[gE_\sigma-(f_1+f_2)F_\sigma+eG_\sigma]\delta+(eg-f_1f_2)=0, \quad (51)$$

ποὺ μᾶς δίδει τὰς δύο ἑστίας (δ_1, δ_2).

Παραβάλλοντες τώρα τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν (51) πρὸς τὴν ὁρίζουσαν τὸ ω_1, ω_2, δηλ. τὴν (42), βλέπομεν, ὅτι ἔχουν τὸν ἴδιον συντελεστὴν τοῦ πρωτοβαθμίου ὅρου· ἐπομένως εἶναι:

$$\omega_1+\omega_2=\delta_1+\delta_2, \quad (52)$$

55. ***Σχέσις τῶν ἀκρικῶν ἐπιπέδων πρὸς τὰ ἑστιακά***. — Ὀνομάζομεν ***ἀκρικὰ*** ἐπίπεδα μιᾶς γενετείρας (Γ) τὰ δύο ἐπίπεδα, τὰ κάθετα πρὸς ἐκείνας τὰς ἐλαχίστας ἀποστάσεις τῆς (Γ), ποὺ ἔχουν τετμημένας τὰς ω_1, ω_2· ***ἑστιακὰ*** δὲ τὰ ἐφαπτόμενα τῶν ἀναπτυκτῶν ἐπιφανειῶν, εἰς τὰς δύο ἑστίας τῆς (Γ) (καὶ ἐπομένως καὶ εἰς τὸ τυχὸν σημεῖόν της).

Ἂν ὀνομάσωμεν ϑ τὴν γωνίαν τῶν ἑστιακῶν ἐπιπέδων, θὰ ἔχωμεν: $\vartheta=\Theta_2-\Theta_1$, ὅπου Θ_2, Θ_1 εἶναι αἱ τιμαὶ τῆς γωνίας Θ τοῦ τύπου τοῦ Hamilton εἰς τὰς ἑστίας· καὶ ἂν λάβωμεν ὡς ὁδηγὸν ἐπιφάνειαν τὴν μέσην, θὰ εἶναι $\omega=\omega'\text{συν}(2\Theta)$ (ὅπου $\omega'=\omega_1=-\omega_2$)· ἐπομένως:

$$(53)\quad \text{συν}(2\Theta_1)=\frac{\delta}{\omega'},\ \text{συν}(2\Theta_2)=-\frac{\delta}{\omega'}\ (\delta=\delta_1=-\delta_2).$$

ὥστε: $\Theta_1+\Theta_2=\frac{\pi}{2}$ (54) καί:

$$\vartheta=\frac{\pi}{2}-2\Theta_1,\ \text{ημ}\vartheta=\frac{\delta}{\omega'},\ \text{συν}\vartheta=\frac{\sqrt{\omega'^2-\delta^2}}{\omega'} \quad (55)$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν (54) συμπεραίνομεν, ὅτι:

Τὰ ἑστιακὰ ἐπίπεδα ἔχουν τὰ ἴδια διχοτομοῦντα ἐπίπεδα μὲ τὰ ἀκρικά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

Ἐνειλιγμέναι ἐπιφάνειαι.

α΄) Καθετικὰ σμήνη.

56. ***Καθετικὸν σμῆνος.***—Αἱ κάθετοι μιᾶς ἐπιφανείας ἀποτελοῦν προφανῶς ἓν εὐθύγραμμον σμῆνος, ποὺ ἔχει τὰς ἐξισώσεις:

$$X = x + \omega l \quad \text{κ. τ. λ.}$$

Τὸ ἀντίστροφον ὅμως δὲν ἀληθεύει· δηλ. τὸ τυχὸν εὐθύγραμμον σμῆνος δὲν εἶναι πάντοτε καθετικόν. Χρειάζεται δι᾿ αὐτὸ μία συνθήκη (Προβλ. § 19).

57. ***Συνθήκη διὰ νὰ εἶναι ἓν σμῆνος καθετικόν.***—Τὴν συνθήκην αὐτὴν εἰμποροῦμεν νὰ τὴν εὕρωμεν καὶ ἀπὸ τὴν γενικὴν συνθήκην (17) τοῦ Beltrami, εὐκολώτερον ὅμως τὴν εὑρίσκομεν ἀπευθείας, ὡς ἑξῆς.

Ἂν ὀνομάσωμεν x_0, y_0, z_0 τὰς συντεταγμένας τῆς ἐπιφανείας τῆς καθέτου πρὸς τὸ σμῆνος, πρέπει νὰ ἔχωμεν:

$$A dx_0 + B dy_0 + \Gamma dz_0 = 0\cdot$$

καὶ ἐπειδή: $\quad dx_0 = dx + \omega dA + A d\omega \quad \text{κ.τ.λ.}$

θὰ εἶναι: $\quad d\omega + \Sigma A dx_0 = 0,$

ἤ, ἂν θέσωμεν: $\quad U \equiv \Sigma A \dfrac{\partial x_0}{\partial u}, \quad V \equiv \Sigma A \dfrac{\partial x_0}{\partial v},$

$$d\omega = -(U du + V dv):$$

πρέπει ἑπομένως νὰ ἔχωμεν: $\dfrac{\partial U}{\partial v} = \dfrac{\partial V}{\partial u}$, δηλ. $f_1 = f_2$

Ἂν ἡ συνθήκη αὐτὴ ἀληθεύῃ, τὸ σμῆνος εἶναι κάθετον πρὸς μίαν σειρὰν ἐπιφανειῶν, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$\omega = c - \int (U du + V dv).$$

Ἐπειδὴ δὲ $f_1 = f_2$, αἱ ἐξισώσεις (42) καὶ (51) ταυτίζονται, δηλ. ***συμπίπτουν τὰ ἄκρα σημεῖα μὲ τὰς ἑστίας.***

Ἐπίσης, ἐπειδὴ τώρα $\delta = \omega'$, θὰ εἶναι : $\sigma\upsilon\nu(2\Theta_1) = \frac{\delta}{\omega'} = 1$, ὥστε $\Theta_1 = 0$ καὶ ἑπομένως : $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, δηλ. ***Τὰ ἑστιακὰ ἐπίπεδα τέμνονται ὀρθογωνίως.***

Ἀντιστρόφως : Ἀπὸ τὴν ὑπόθεσιν $\delta = \omega'$ ἢ τὴν $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, ἕπεται : $f_1 = f_2$. Ὥστε :

Ἀναγκαία καὶ ἀρκετὴ συνθήκη, διὰ νὰ εἶναι ἓν σμῆνος καθετικόν, εἶναι ἡ σύμπτωσις τῶν ἑστιῶν πρὸς τ' ἄκρα σημεῖα ἢ καὶ ἡ καθετότης τῶν ἑστιακῶν ἐπιπέδων.

58. ***Παρατήρησις.*** Εἶναι εὔκολον νὰ ἴδωμεν, ὅτι εἰς τὸ καθετικὸν σμῆνος αἱ ἑστίαι εἶναι ***πάντοτε πραγματικαί***· πραγματικῶς, τὸ ὑπόρριζον τῶν δύο ριζῶν τῆς ἐξισώσεως τοῦ δ καταντᾷ τώρα, ποὺ $f_1 = f_2$, ὅταν ὡς παραμετρικὰς ἐπιφανείας λάβωμεν τὰς πρωτευούσας ($F_\sigma = 0$, $\Phi = 0$) : $4 f_1^2 E_\sigma G_0$ δηλ. θετικόν.

Β´) Θεωρία τῶν ἐνειλιγμένων ἐπιφανειῶν.

59. ***Ὁρισμὸς τῆς ἐνειλιγμένης ἐπιφανείας.— Ἐνειλιγμένη ἐπιφάνεια (E_1) μιᾶς δοθείσης ἐπιφανείας (E) λέγεται ὁ τόπος τῶν πρωτευόντων κέντρων καμπυλότητος τῆς (E).*** Ἀντιστρόφως ἡ E λέγεται ***ἐξειλιγμένη*** τῆς E_1. Ἡ ἐνειλιγμένη ἐπιφάνεια ἀποτελεῖται προφανῶς ἀπὸ δύο ***χώνας,*** ἀφοῦ εἰς κάθε σημεῖον M τῆς (E) ἀντιστοιχοῦν ***δύο*** σημεῖα K_1 καὶ K_2 τῆς (E_1).—Αἱ δύο αὐταὶ χῶναι εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχουν μερικὰ σημεῖα ἢ καὶ μερικὰς γραμμὰς κοινάς. Πραγματικῶς εἶναι πρῶτα φανερόν, ὅτι τὰ ὀμφαλικὰ σημεῖα τῆς (E) εἶναι κοινὰ σημεῖα τῶν δύο χωνῶν (X_1) καὶ (X_2). Ἀλλὰ καὶ κατ'

ἄλλον τρόπον εἶναι δυνατὸν αἱ δύο χῶναι νὰ ἔχουν κοινὰ σημεῖα: ἂν τύχῃ εἰς δύο διαφορετικὰ σημεῖα M καὶ M′ τῆς (E) τὸ πρῶτον κέντρον K_1 εἰς τὸ M καὶ τὸ δεύτερον K′, εἰς τὸ M′ νὰ συμπίπτουν. Ἂν δὲ ἡ (E) ἔχῃ ὀμφαλικὴν γραμμὴν ἢ ἡ σύμπτωσις κατὰ τὸν β′ τρόπον συμβαίνῃ εἰς μίαν συνεχῆ σειρὰν σημείων, αἱ δύο χῶναι θὰ ἔχουν ὁλόκληρον γραμμὴν κοινήν.—Εἶναι ὅμως ἀδύνατον αἱ δύο χῶναι νὰ συμπίπτουν, πλὴν ὅταν ἡ (E) εἶναι σφαῖρα καὶ τότε ἡ (E_1) ***ἐκφυλίζεται*** εἰς ἓν σημεῖον.

60. ***Ἑστιακὴ ἐπιφάνεια τοῦ καθετικοῦ σμήνους.***—Ἑστιακὴ ἐπιφάνεια τοῦ σμήνους τῶν καθέτων μιᾶς ἐπιφανείας (E) εἶναι προφανῶς ἡ ἐνειλιγμένη ἐπιφάνεια (E_1)· διότι, κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῶν γραμμῶν καμπυλότητος, ἡ μὲν μία χώνη (X_1) ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐνειλιγμένας τῆς μιᾶς σειρᾶς γραμμῶν καμπυλότητος (Γ_1) τῆς (E), ἡ δὲ ἄλλη, ἡ (X_2), ἀπὸ ἐνειλιγμένας τῆς ἄλλης σειρᾶς γραμμῶν καμπυλότητος (Γ_2) τῆς (E)· ἑπομένως, κατὰ τὴν β′ ἰδιότητα τῆς ἑστιακῆς ἐπιφανείας (§ 18), ἡ ἐνειλιγμένη ἐπιφάνεια τῆς (E) εἶναι ἡ ἑστιακὴ τοῦ σμήνους τῶν καθέτων τῆς (E).—Βλέπομεν οὕτω συγχρόνως, ὅτι ***κάθε ἐπιφάνεια ἔχει μίαν μόνην ἐνειλιγμένην· ἀλλ' ἀντιστρόφως ἀπείρους ἐξειλιγμένας.*** Εἶναι δὲ αἱ ἐξειλιγμέναι (E) μιᾶς ἐπιφανείας (E_1) ***παράλληλοι*** ἐπιφάνειαι.

Παρατήρησις. Ἡ θεωρία τῶν ἐνειλιγμένων καὶ ἐξειλιγμένων τῶν ἐπιφανειῶν εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν θεωρίαν τῶν ἐνειλιγμένων καὶ ἐξειλιγμένων τῶν καμπύλων ***τοῦ ἐπιπέδου (ὄχι τοῦ χώρου)***· καὶ διαφέρει γεωμετρικῶς μόνον κατὰ τὴν αὔξησιν τῶν διαστάσεων κατὰ μίαν: τὸ ἐπίπεδον ***(γραμμικὴ διδιάστατος ἔκτασις)*** γίνεται χῶρος ***(γραμμικὴ τριδιάστατος ἔκτασις)***, ἡ δὲ καμπύλη ***(μονοδιάστατος καμπύλη ἔκτασις)*** γίνεται ἐπιφάνεια ***(διδιάστατος καμπύλη ἔκτασις)***.—Καὶ τὰ ὀνόματα δὲ ***ἐνειλιγμένη*** καὶ ***ἐξειλιγμένη***, εἰμποροῦν νὰ ἑρμηνευθοῦν διὰ τῆς ἐξελίξεως νημάτων ἐφαπτομένων τῶν ἐνειλιγμένων τῶν γραμμῶν καμπυλότητος, καθὼς εἰς τὸ ἐπίπεδον.

61. ***Ἐξισώσεις τῆς ἐνειλιγμένης.***—Τῆς μὲν χώνης (X_1) εἶναι προφανῶς:

$$(56)\quad \left.\begin{aligned} x_1&=x+P_1 l,\\ y_1&=y+P_1 m,\\ z_1&=z+P_1 n\cdot \end{aligned}\right\} \qquad \text{τῆς δὲ } (X_2): \left\{\begin{aligned} x_2&=x+P_2 l,\\ y_2&=y+P_2 m,\\ z_2&=z+P_2 n\cdot \end{aligned}\right. \quad (56')$$

Ἀντίστοιχα σημεῖα M καὶ M_1 ἢ M_2, ἐπὶ τῆς (E) καὶ τῆς χώνης (X_1) ἢ (X_2), εἶναι τ' ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὸ ἴδιον σύστημα τιμῶν (u,v), ***ἀντίστοιχα*** δέ, M_1 καὶ M_2, ἐπὶ τῆς (X_1) καὶ τῆς (X_2) εἶναι τ' ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὸ ἴδιον σημεῖον, τὸ M, τῆς (E).—***Ὁμόστοιχον*** ἢ ***οἰκείαν*** σειρὰν γραμμῶν καμπυλότητος τῆς (E) πρὸς κάθε χώνην τῆς (E_1) λέγομεν ἐκείνην, ποὺ αἱ ἐνειλιγμέναι της ἀποτελοῦν τὴν χώνην· τὴν δὲ ἄλλην σειρὰν τὴν λέγομεν ***ἑτερόστοιχον*** ἢ ***μὴ οἰκείαν***· τῆς χώνης δηλ. (X_1) οἰκεία μὲν εἶναι ἡ σειρὰ γραμμῶν καμπυλότητος (Γ_1) τῆς (E), ἑτερόστοιχος δὲ ἡ (Γ_2)· τῆς δὲ (X_2), ἀντιστρόφως.

62. Θεώρημα α'.—***Εἰς κάθε χώνην τῆς ἐνειλιγμένης αἱ ἀντίστοιχοι γραμμαὶ τῆς οἰκείας σειρᾶς γραμμῶν καμπυλότητος εἶναι γεωδαισιακαὶ γραμμαὶ τῆς χώνης· αἱ δὲ ἀντίστοιχοι γραμμαὶ τῆς ἑτεροστοίχου σειρᾶς εἶνε συζυγεῖς γραμμαὶ τῶν γεωδαισιακῶν αὐτῶν.***

α') Ἀπόδειξις τοῦ α' μέρους τοῦ θεωρήματος. Ἐπειδὴ, κατὰ τὴν θεωρίαν τῶν ἐνειλιγμένων, ἡ πρώτη κάθετος τῆς ἐνειλιγμένης (ε_k) τῆς γραμμῆς καμπυλότητος (Γ_k) $(k=1,2)$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς γραμμῆς αὐτῆς καμπυλότητος (δηλ. τῆς ἐξειλιγμένης τῆς (ε_k)), ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ κάθετος τῆς χώνης (X_k) εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς (Γ_k). Ἂς λάβωμεν ὡς παραμετρικὰς γραμμὰς τὰς γραμμὰς καμπυλότητος τῆς (E)· τὰ συνημίτονα $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ τῆς ἐφαπτομένης τῆς (Γ_1) θὰ εἶναι τότε ἀνάλογα τῶν ποσῶν: x_u, y_u, z_u, τὰ δὲ συνημίτονα (l_1, m_1, n_1) τῆς καθέτου τῆς χώνης (X_1) ἀνάλογα τῶν ποσῶν: $y_{1u}\, z_{1v} - z_{1u}\, y_{1v}$, κτλ. Ἔχομεν ὅμως:

$$\left.\begin{aligned}
y_{1u} &= y_u + P_1 m_u + P_{1u}\cdot m = P_{1u}\cdot m,\\
z_{1u} &= z_u + P_1 n_u + P_{1u}\cdot n = P_{1u}\cdot n,\\
y_{1v} &= y_v + P_1 m_v + P_{1v}\cdot m = y_v\left(1-\frac{P_1}{P_2}\right) + P_{1v}\cdot m,\\
z_{1v} &= z_v + P_1 n_v + P_{1v}\cdot n = z_v\left(1-\frac{P_1}{P_2}\right) + P_{1v}\cdot n
\end{aligned}\right\} \quad (57)$$

(κατὰ τοὺς τύπους τοῦ Olinde Rodrigues, Θεωρ. Ἐπιφ. Ν. Χατζ., τύποι (34)).
ἑπομένως θὰ εἶναι:

$$y_{1u}\, z_{1v} - z_{1u}\, y_{1v} = P_{1u}\left(1-\frac{P_1}{P_2}\right)(m\, z_v - n\, y_v)\text{· καὶ ὁμοίως:}$$

$$z_{1u}\, x_{1v} - x_{1u}\, z_{1v} = P_{1u}\left(1 - \frac{P_1}{P_2}\right)(n\, x_v - l\, z_v),$$

$$x_{1u}\, y_{1v} - y_{1u}\, x_{1v} = P_{1u}\left(1 - \frac{P_1}{P_2}\right)(l\, y_v - m\, x_v)\cdot$$

εἶναι λοιπὸν τὰ συνημίτονα l_1, m_1, n_1 ἀνάλογα τῶν ποσῶν $m\, z_v -$ $- n\, y_v$, κτλ. καὶ ἐπειδὴ προφανῶς αὐτὰ εἶναι ἀνάλογα τῶν $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ (διότι ἡ ἐφαπτομένη τῆς (Γ_1) εἶναι κοινὴ κάθετος τῆς ἐφαπτομένης τῆς (Γ_2) καὶ τῆς καθέτου τῆς (E)), συμπεραίνομεν, ὅτι:

$$l_1 = \alpha_1,\ m_1 = \beta_1,\ n_1 = \gamma_1.$$

β') Ἀπόδειξις τοῦ β' μέρους τοῦ θεωρήματος.—Ἐπειδὴ αἱ δύο σειραὶ τῶν γραμμῶν τῆς ἐνειλιγμένης, ποὺ πρόκειται ν' ἀποδειχθοῦν συζυγεῖς, εἶναι παραμετρικαί, ἀρκεῖ (Θεωρ. Ἐπιφ. Ν. Χατζ., § 33) νὰ δείξωμεν, ὅτι M_1 (ἢ M_2) $= 0$. Πραγματικῶς εἶναι:

$$M_1 = -\Sigma x_{1u}\, l_{1v} = -P_{1u}\cdot \Sigma l . l_{1v} = -P_{1u}\, \Sigma l(\alpha_1)_v =$$

$$-P_{1u}\cdot \Sigma l\left[\frac{x_{uv}}{\sqrt{E}} + x_u \cdot \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right)\right] = -\frac{P_{1u}}{\sqrt{E}}\, M = 0.$$

63. *Θεώρημα β'. Αἱ ὀρθογώνιοι τροχιαὶ τῶν γεωδαισιακῶν γραμμῶν κάθε κώνης (X_k), ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν οἰκείαν σειρὰν τῶν γραμμῶν καμπυλότητος, ἔχουν ἀντιστοίχους εἰς τὴν (E) τὰς γραμμὰς $P_k = C$ ($k = 1, 2$).*

Ἀπόδειξις. Ἂν ὑπολογίσωμεν τὰ E_1, F_1, G_1, εὑρίσκομεν ἀπὸ τοὺς τύπους (57):

$$ds^2_1 = R^2_{1u}\, du^2 + 2R_{1u}.R_{1v}.du\, dv + \left[G\left(1 - \frac{P_1}{P_2}\right)^2 + P^2_{1v}\right] dv^2,$$

καὶ ἂν λάβωμεν ὡς παραμετρικὰς γραμμὰς εἰς τὴν (E_1) τὰς v=σταθ. καὶ R_1=σταθ., θὰ ἔχωμεν: $ds^2_1 = dR^2_1 + G\left(1 - \frac{P_1}{P_2}\right)^2 dv^2$, ὥστε αἱ γραμμαὶ v=σταθ. εἶναι γεωδαισιακαὶ (Θεωρ. Ἐπιφ. Ν. Χατζ. § 56) καὶ αἱ P_1=σταθ. αἱ ὀρθογώνιοι τροχιαί των.

Σημείωσις. Τὰ δύο προηγούμενα θεωρήματα εἱμποροῦν ν' ἀποδειχθοῦν καὶ γεωμετρικῶς.

ΜΕΡΟΣ Γ΄.

ΣΜΗΝΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΚΑΙ ΣΥΜΠΛΕΓΜΑΤΑ ΚΑΜΠΥΛΩΝ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

Σμήνη ἐπιφανειῶν.

64. ***Περιβάλλουσα ἑνὸς σμήνους ἐπιφανειῶν.*** — Ἡ ἐξίσωσίς του εἶναι: $\varphi(x, y, z, u, v)=0$· ἡ τομὴ λοιπὸν δύο ἐπιφανειῶν του, τῶν: $\varphi(x, y, z, u, v)=0$, $\varphi(x, y, z, u+\Delta u, v+\Delta v)=0$ εἶναι μία καμπύλη (K) μὲ ὁρικὴν θέσιν, διὰ ορ $\Delta u=0$, ορ $\Delta v=0$, ἐξαρτωμένην ἀπὸ τὸν λόγον $\frac{\Delta v}{\Delta u}$· ἂν δηλ. εἶναι: $v=\varrho(u)$, ορ $\frac{\Delta v}{\Delta u}=\varrho'(u)$, ἡ ὁρικὴ θέσις εἶναι ἡ ὡρισμένη καμπύλη: $\varphi[x, y, z, u, \varrho(u)]=0$ καὶ $\varphi_u+\varphi_v\cdot\varrho'(u)=0$. — Ἂν μεταβάλωμεν τὴν $\varrho(u)$, θὰ ἔχωμεν ἄλλην καμπύλην. ***Ὅλαι ὅμως αἱ καμπύλαι αὐταὶ ἔχουν προφανῶς κοινὰ τὰ μεμονωμένα σημεῖα, ποὺ ὁρίζουν, διὰ κάθε ζεῦγος τιμῶν τῶν u, v, αἱ ἐξισώσεις: $\varphi=0$, $\varphi_u=0$, $\varphi_v=0$ (α).*** Ὅταν δὲ τὰ u, v μεταβάλλωνται, αἱ ἐξισώσεις (α) ὁρίζουν μίαν ἐπιφάνειαν (E), ποὺ λέγεται ***περιβάλλουσα*** τῶν ἐπιφανειῶν τοῦ σμήνους. Αἱ δὲ ἐπιφάνειαι (E_σ) τοῦ ***σμήνους*** λέγονται ὡς πρὸς τὴν (E) ***περιβαλλόμεναι.***

65. ***Θεώρημα. Ἡ περιβάλλουσα ἐφάπτεται κάθε περιβαλλομένης εἰς τὰ κοινὰ σημεῖά των*** (τὰ ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (α) ὁριζόμενα). — ***Ἀπόδειξις.*** Οἱ μὲν συντελεσταὶ p, q τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς περιβαλλομένης ὁρίζονται ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις: $\varphi_x+p\varphi_z=0$, $\varphi_y+q\varphi_z=0$ (β)· οἱ δὲ τῆς περιβαλλούσης ἀπὸ τὰς ἑξῆς:

$$\left.\begin{array}{ll}\varphi_x+p\varphi_z+\varphi_u(u_x+pu_z)+\varphi_v(v_x+pv_z)=0 & \text{δηλ. } \varphi_x+p\varphi_z=0\\ \varphi_y+q\varphi_z+\varphi_u(u_y+qu_z)+\varphi_v(v_y+qv_z)=0 & \text{τὰς } \varphi_y+q\varphi_z=0\end{array}\right\} \quad (\gamma)$$

(ἀφοῦ $\varphi_u=0$, $\varphi_v=0$)· καὶ ἐπειδὴ εἰς τὰ κοινὰ σημεῖα τὰ x, y, z, u, v γίνονται διὰ τὰς δύο ἐπιφανείας τὰ ἴδια, αἱ τελευταῖαι ἐξισώσεις (γ) συμπίπτουν ἐκεῖ μὲ τὰς (β) καὶ ἐπομένως καὶ τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τῶν δύο ἐπιφανειῶν. (Πρβλ. Θεωρ. Ἐπιφ. Ν. Χατζ., σ. 93).

Σημείωσις α'. Εἶναι εὔκολον νὰ δειχθῇ, ὅτι, ἂν θεωρήσωμεν τὴν τομὴν ***τριῶν*** ἐπιφανειῶν τοῦ σμήνους, ὁ γεωμετρ. τόπος τῶν ὁρικῶν θέσεων τῶν σημείων τούτων εἶναι πάλιν ἡ περιβάλλουσα.

Σημείωσις β'. Ἓν ἁπλοῦν παράδειγμα σμήνους ἐπιφανειῶν ἀποτελοῦν τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα μιᾶς ἐπιφανείας· περιβάλλουσά των εἶναι ἡ ἐπιφάνεια (Πρβλ. Θεωρ. Ἐπιφ. Ν. Χατζ., § 12).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

Συμπλέγματα καμπύλων.

Α') Γενικὰ συμπλέγματα.

66. Ἐξισώσεις τοῦ συμπλέγματος.—Ἓν σύμπλεγμα καμπύλων ἔχει τὰς ἐξισώσεις: $\sigma(x, y, z, u, v, w)=0$, $\varphi(x, y, z, u, v, w)=0$.

Εἰς κάθε σχέσιν: $w=\varrho(u, v)$ ἀντιστοιχεῖ ἓν σμῆνος καμπύλων τοῦ συμπλέγματος, εἰς κάθε δὲ ζεῦγος σχέσεων: $v=\varrho_1(u)$, $w=\varrho_2(u)$ ἓν γένος καμπύλων, δηλ. μία ἐπιφάνεια τοῦ συμπλέγματος. Εἰς κάθε διαφορικὴν ὁλοκληρώσιμον σχέσιν: $dw=f_1(u,v)\,du+f_2(u,v)dv$ ἀντιστοιχεῖ μία σειρὰ σμηνῶν τοῦ συμπλέγματος, δηλ. μία ***ὡρισμένη κατάταξις*** τῶν καμπύλων του εἰς σμήνη· καὶ εἰς κάθε ζεῦγος διαφορικῶν ἐξισώσεων: $dv=\varphi_1(v,v)du$, $dw=\varphi_2(u,v)du$ ἀντιστοιχεῖ ἓν σμῆνος ἐπιφανειῶν τοῦ συμπλέγματος, δηλ. μία ***ὡρισμένη σύνδεσις*** τῶν ∞^3 καμπύλων του εἰς ∞^2 ἐπιφανείας.

67. Ἰδιάζον σμῆνος τοῦ συμπλέγματος. Κάθε σμῆνος τοῦ συμπλέγματος ἔχει ἑστίας· ἃς ζητήσωμεν, ἂν ὑπάρχουν καὶ ***ὑπερεστίαι,*** δηλ. σημεῖα ἐπάνω εἰς κάθε καμπύλην τοῦ συμπλέγματος, ὅπου ***ὅλαι αἱ*** ∞^2 ἐπιφάνειαι τοῦ σμήνους, ποὺ διέρχονται ἀπὸ τὴν καμπύλην αὐτήν, νὰ ἔχουν τὸ ἴδιον ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον. Τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον θὰ ὁρισθῇ διὰ τὴν τυχοῦσαν ἀπὸ τὰς ἐπιφανείας· αὐτὰς ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x\, dx+\sigma_y\, dy+\sigma_z\, dz+[\sigma_u+\sigma_v\, \varrho'_1(u)+\sigma_w \varrho'_2(u)]du=0,\\ \varphi_u\, dx+\varphi_y\, dy+\varphi_z\, dz+[\varphi_u+\varphi_v\, \varrho'_1(u)+\varphi_w \varrho'_2(u)]du=0,\end{aligned}\right. \left(\begin{aligned}v=\varrho_1(u),\\ w=\varrho_2(u).\end{aligned}\right)$$

$$\text{ἑπομένως: } \frac{\sigma_x\, dx+\sigma_y\, dy+\sigma_z\, dz}{\varphi_x\, dx+\varphi_y\, dy+\varphi_z\, dz}=\frac{\sigma_u+\sigma_v\, \varrho'_1(u)+\sigma_w\, \varrho'_2(u)}{\varphi_u+\varphi_v\, \varrho'_1(u)+\varphi_w \varrho'_2(u)}.$$

Ἐξαρτᾶται λοιπὸν γενικῶς τὸ dz καὶ ἑπομ. καὶ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον ἀπὸ τὰ $\varrho'_1(u)$, $\varrho'_2(u)$· καὶ τότε μόνον θὰ εἶναι ἀνεξάρτητον ἀπὸ αὐτά, ὅταν: $\frac{\sigma_u}{\varphi_u}=\frac{\sigma_v}{\varphi_v}=\frac{\varphi_w}{\sigma_w}$· (α) Ἀλλ' αἱ δύο αὐταὶ ἐξισώσεις, ὁμοῦ μὲ τὰς $\sigma=0$, $\varphi=0$, ἀποτελοῦν σύστημα 4 ἐξισώσεων μὲ 3 μόνον ἀγνώστους: τὰς x, y, z. Ὥστε ***γενικῶς δὲν ὑπάρχουν ὑπερεστίαι.***

Ἂν τώρα μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τοῦ συμπλέγματος καὶ τῶν (α) ἀπαλείψωμεν τὰς x, y, z, προκύπτει μία σχέσις τῆς μορφῆς: $f(u, v, w)=0$· ὅταν δὲ ἡ σχέσις αὐτὴ ἀληθεύῃ, ὑπάρχουν προφανῶς ὑπερεστίαι· ἀλλ' ἡ σχέσις αὐτὴ ὁρίζει ἓν σμῆνος τοῦ συμπλέγματος, ὥστε: ***Μόνον εἰς τὰς καμπύλας ἑνὸς ἰδιαιτέρου σμήνους τοῦ συμπλέγματος ὑπάρχουν ὑπερεστίαι.*** Τὸ σμῆνος αὐτὸ τὸ λέγομεν ***ἰδιάζον*** καὶ τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν ὑπερεστιῶν, ***ὑπερεστιακὴν ἐπιφάνειαν*** τοῦ συμπλέγματος. Ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ ἀποτελεῖται προφανῶς ἀπὸ χώνας τῆς ἑστιακῆς ἐπιφανείας τοῦ ἰδιάζοντος σμήνους, ἔχει δὲ εἰς τὴν ὑπερεστίαν ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τὸ κοινὸν τῶν ἐπιφανειῶν τοῦ συμπλέγματος.

Β'). Εὐθύγραμμα συμπλέγματα.

68. **Ἐξισώσεις τοῦ εὐθυγράμμου συμπλέγματος.** Αὐταὶ εἶναι: $x=x_1+A\omega$ κτλ., ὅπου τὰ x_1, y_1, z_1, A, B, Γ εἶναι συναρτήσεις τῶν u, v, w, ἢ συντομώτερα: $x=\alpha z+\beta$, $y=\gamma z+\delta$ (α, β, γ, δ συναρτήσεις τῶν u, v, w).

Αἱ ἐξισώσεις λοιπὸν (α) τῆς προηγ. παραγράφου θὰ γίνουν :

$$(\alpha') \quad \frac{z\alpha_u + \beta_u}{z\gamma_u + \delta_u} = \frac{z\alpha_v + \beta_v}{z\gamma_v + \delta_v} = \frac{z\alpha_w + \beta_w}{z\gamma_w + \delta_w},$$

δηλ. δύο ἐξισώσεις β′ βαθμοῦ· ἡ ἀπαλοιφὴ τοῦ z μεταξὺ αὐτῶν θὰ δώσῃ σχέσιν τῆς μορφῆς : $f(u, v, w)=0$. Κάθε καμπύλη τοῦ ἰδιάζοντος σμήνους θὰ ἔχῃ τώρα ***μίαν μόνην*** ὑπερεστίαν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν κοινὴν ῥίζαν z τῶν ἐξισώσεων (α′), καὶ ἑπομένως ***ἡ ὑπερεστιακὴ ἐπιφάνεια εἶναι τώρα μονόχωνος*** καὶ εἶναι μία ἀπὸ τὰς δύο χώνας τῆς ἑστιακῆς ἐπιφανείας τοῦ ἰδιάζοντος σμήνους.

ΜΕΡΟΣ Δ΄.

ΣΥΜΠΛΕΓΜΑΤΑ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ.

Δύο ἐπιφάνειαι τοῦ συμπλέγματος κόπτονται κατὰ τὴν καμπύλην:

$$\varphi(x, y, z, u, v, w) = 0,$$
$$\varphi(x, y, z, u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w) = 0,$$

τῆς ὁποίας ἡ ὁρικὴ θέσις διὰ ορ $\Delta u = 0$, ορ $\Delta v = 0$, ορ $\Delta w = 0$ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τοὺς λόγους: $\frac{\Delta v}{\Delta u}$, $\frac{\Delta w}{\Delta u}$· ἂν δηλ. θέσωμεν: $v = \varrho_1(u)$, $w = \varrho_2(u)$, ἡ ὁρικὴ θέσις εἶναι ἡ ὡρισμένη καμπύλη: $\varphi(x, y, z, u, \varrho_1(u), \varrho_2(u)) = 0$ καὶ $\varphi_u + \varphi_v \varrho_1'(u) + \varphi_w \varrho_2'(u) = 0$.

Περιβάλλουσα ὅμως τοῦ συμπλέγματος, ἀνάλογος πρὸς τὴν τοῦ σμήνους (§ 64), **δὲν** ὑπάρχει ἐν γένει· διότι αἱ *4* **τώρα** ἐξισώσεις: $\varphi = 0$, $\varphi_u = 0$, $\varphi_v = 0$, $\varphi_w = 0$ δὲν ἔχουν ἐν γένει κοινὰς λύσεις εἰς x, y, z. Τὰ διάφορα ὅμως σμήνη ἐπιφανειῶν τοῦ συμπλέγματος, τὰ ὁποῖα εὑρίσκομεν θέτοντες: $v = \varrho_1(u)$ ἢ $w = \varrho_2(u)$, ἔχουν προφανῶς περιβαλλούσας: τὰ $v = \varrho_1(u)$ ἔχουν τὴν περιβάλλουσαν: $\varphi = 0$, $\varphi_u + \varphi_v \varrho_1'(u) = 0$, $\varphi_w = 0$, τὰ δὲ $w = \varrho_2(u)$ τὴν: $\varphi = 0$, $\varphi_v = 0$, $\varphi_u + \varphi_w \varrho_2'(u) = 0$. Τὰ 3 σμήνη τοῦ συμπλέγματος, διὰ τὰ ὁποῖα $u = c_1$ ἢ $v = c_2$ ἢ $w = c_3$, λέγονται ***παραμετρικὰ*** σμήνη καὶ αἱ 3 περιβάλλουσαι αὐτῶν ***παραμετρικαὶ*** περιβάλλουσαι τοῦ συμπλέγματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

Α) Στρεβλαὶ ἐπιφάνειαι.—1) Αἱ ἐπιφάνειαι, ποὺ ἔχουν λαιμὸν μίαν ***γεωδαισιακήν*** των κόπτουσαν τὰς γενετείρας ὑπὸ ***σταθερὰν*** γωνίαν, παράγονται ἀπὸ εὐθεῖαν εὑρισκομένην εἰς τὸ εὐθειοποιοῦν ἐπίπεδον μιᾶς καμπύλης τοῦ χώρου, διερχομένην ἀπὸ τὴν καμπύλην καὶ σχηματίζουσαν σταθερὰν γωνίαν πρὸς αὐτήν.

2) Ὅταν ὁ λαιμὸς εἶναι καὶ ἀσυμπτωτική, ἡ ἐφαπτομένη τῆς σφαιρικῆς δεικτρίας τῆς γενετείρας εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ὀρθίαν κάθετον τοῦ λαιμοῦ.

3) Μεταξὺ τῶν γραμμῶν καμπυλότητος κάθε σειρᾶς ὑπάρχουν γενικῶς 4, ποὺ κόπτουν τὰς γενετείρας ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν (P. Serret). Μόνον εἰς τὸ κοινὸν ἑλικοειδὲς κόπτουν ***ὅλαι*** αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος τὰς γενετείρας ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν.

4) Ἡ μόνη στρεβλὴ ἐπιφάνεια μὲ ἐπιπέδους ὅλας τὰς γραμμὰς καμπυλότητός της εἶναι τὸ μονόχωνον ὑπερβολοειδὲς τὸ ἐκ περιστροφῆς (Dini).

5) Ἡ μία σειρὰ τῶν ἀσυμπτωτικῶν τῆς στρεβλῆς ἐπιφανείας ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς γενετείρας· ὡς πρὸς τὴν ἄλλην, εἰμποροῦμεν νὰ ζητήσωμεν (Bertrand), ἂν ὑπάρχουν εἰς αὐτὴν καμπύλαι τέμνουσαι τὰς γενετείρας ὀρθογωνίως. Τότε αἱ γενέτειραι θὰ εἶναι πρῶται κάθετοι μιᾶς τοιαύτης ἀσυμπτωτικῆς.

Δυναταὶ περιπτώσεις 4: α′) Δὲν ὑπάρχει καμία τοιαύτη. β′) Ὑπάρχει μόνον μία· (τότε ἡ ἐξίσωσις τοῦ Riccati διὰ τὰς ἀσυμπτωτικὰς καταντᾷ γραμμικὴ καὶ ὁλοκληρώνεται μὲ τετραγωνισμοὺς (Bour)). γ′) Ὑπάρχουν δύο. Τότε εἶναι καὶ αἱ δύο καμπύλαι τοῦ Bertrand$\left(\frac{A}{\rho}+\frac{B}{r}=\Gamma\right)$ καὶ δ′) Ὑπάρχουν ἄπειροι· τότε ἔχει καθεμία καμπυλότητα καὶ στρέψιν σταθερὰς καὶ εἶναι κυκλικαὶ ἕλικες, ἡ δὲ ἐπιφάνεια εἶναι κοινὸν ἑλικοειδές.

6) Εἰς κάθε εὐθειογενῆ ἐπιφάνειαν (Ε) ἀντιστοιχοῦν δύο ἄλλαι: ὁ τόπος (E_1) τῶν ἀπὸ τὸν λαιμὸν διερχομένων πρώτων καθέτων τῶν γενετειρῶν τῆς (Ε)· καὶ ὁ τόπος (E_2) τῶν ὀρθίων καθέτων, τῶν διερχομένων διὰ τοῦ λαιμοῦ. Ἡ (E_2) λέγεται ***συζυγὴς*** τῆς (Ε) καὶ ἔχει τὸν ἴδιον λαιμόν· εἶναι δὲ ὁ λόγος $\frac{d\Omega'}{d\Omega}$ τῶν γωνιῶν δύο ἀπείρως γειτονι-

κῶν γενετειρῶν τῆς (Ε) καὶ τῶν δύο ἀντιστοίχων τῆς (E_2) ἴσος μὲ τὴν γεωδαισιακὴν καμπυλότητα τῆς σφαιρικῆς δεικτρίας τῆς (Ε) (P. Serret).

Β') Εὐθειογενῆ σμήνη.—7) Αἱ δύο σειραὶ τῶν ἀναπτυκτῶν κόπτουν τὰς χώνας τῆς ἑστιακῆς ἐπιφανείας κατὰ συζυγεῖς γραμμάς.

8) ***Σύμπτωσις τῶν δύο χωνῶν τῆς ἑστιακῆς ἐπιφανείας***: αἱ περιβάλλουσαι τῶν γενετειρῶν ἐπάνω εἰς τὴν ἑστιακὴν εἶναι αἱ ἀσυμπτωτικαὶ τῆς μιᾶς σειρᾶς· εἶναι δὲ καί: $2\delta = \frac{1}{\sqrt{-K}}$, ὅπου 2δ ἡ ἀπόστασις τῶν ἄκρων σημείων καὶ Κ ἡ καμπυλότης τῆς ἑστιακῆς.

9) ***Θεώρημα τῶν Malus—Dupin καὶ θεώρημα τοῦ Beltrami.***—Ἂν ἡ ἐξίσωσις (Ι): $\frac{\partial U}{\partial v} = \frac{\partial V}{\partial u}$ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν: $\frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{E_1}\,\text{συν}\,\alpha) = \frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{G_1}\,\text{συν}\,\beta)$, ὅπου E_1, G_1 τ' ἀρχικὰ ποσὰ τῆς ὁδηγοῦ ἐπιφανείας καὶ α, β αἱ γωνίαι τῆς γενετείρας (u, v) μὲ τὰς παραμετρικὰς γραμμὰς v καὶ u τῆς ὁδηγοῦ, βλέπομεν, ὅτι: α') ***Ἂν ἓν καθετικὸν σμῆνος φωτεινῶν ἀκτίνων ὑποστῇ ὁσασδήποτε ἀνακλάσεις καὶ διαθλάσεις (εἰς ὁμογενῆ περιέχοντα),*** μένει πάντοτε καθετικὸν (Malus)·

καὶ β') ***Ἂν αἱ εὐθεῖαι ἑνὸς καθετικοῦ σμήνους ἀρχίζουν ἀπὸ μίαν ἐπιφάνειαν (Σ) καὶ τερματίζωνται εἰς μίαν τῶν καθέτων ἐπιφανειῶν (Σ_1), εἰς πᾶσαν κάμψιν τῆς (Σ), παρασυρούσης τὰς εὐθείας τοῦ σμήνους στερεῶς πρὸς τὴν (Σ) συνδεδεμένας, ὁ τόπος τῶν ἄκρων τῶν τμημάτων τούτων θὰ εἶναι πάντοτε ἐπιφάνεια κάθετος πρὸς αὐτὰ*** (Beltrami).

10) ***Ἡ μέση περιβάλλουσα ἐπιφάνεια κάθε ἰσοστρεβλου σμήνους*** (δηλ. ἡ περιβάλλουσα τῶν ἐπιπέδων τῶν καθέτων πρὸς τὰς γενετείρας εἰς τὰ μέσα σημεῖα) ***εἶναι ἐπιφάνεια ἐλαχίστης ἐκτάσεως (Ribaucour).***

Γ') Ἐνειλιγμέναι ἐπιφάνειαι.—11) α') Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ὁλικαὶ καμπυλότητες K_1, K_2 τῶν δύο χωνῶν τῆς ἐνειλιγμένης καὶ β') Νὰ δειχθῇ, ὅτι διὰ τὰς **ἐπιφανείας τοῦ *Weingarten*** (δηλ. ποὺ αἱ πρωτεύουσαι ἀκτῖνές των συνδέονται μὲ σχέσιν τῆς μορφῆς: $f(P_1, P_2) = 0$) εἶναι: $K_1 K_2 = \frac{1}{(P_2 - P_1)^4}$ (τύπος τοῦ Halphen).

12) ***Περίπτωσις ἐκφυλίσεως τῆς μιᾶς χώνης τῆς ἐνειλιγμένης εἰς γραμμήν*:** τότε ἡ ὁμόστοιχος σειρὰ τῶν γραμμῶν καμπυλότητος ἀποτελεῖται ἀπὸ περιφερείας καὶ ἡ ἐξειλιγμένη ἐπιφάνεια εἶναι ἡ περιβάλλουσα ἑνὸς γένους σφαιρῶν, ποὺ τὰ κέντρα των ἀποτελοῦν μίαν καμπύλην (K). Αἱ κάθετοι τῆς ἐπιφανείας κατὰ μῆκος κάθε περιφερείας ἀποτελοῦν κῶνον μὲ κορυφὴν A ἓν σημεῖον τῆς καμπύλης (K)· αἱ δὲ ἀποστάσεις τοῦ A ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας εἶναι αἱ ἀντίστοιχοι πρωτεύουσαι ἀκτῖνες. Τ' ἄκρα τῶν ἄλλων πρωτευουσῶν ἀκτίνων κατὰ μῆκος τῆς περιφερείας ἀποτελοῦν κωνικὴν τομήν, παραγομένην ἀπὸ τὸν προηγούμενον κῶνον καὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ κάθετον πρὸς τὸ ἐγγύτατον τῆς καμπύλης (K).

Ἂν **δύο** ἀπὸ τὰς μὴ κυκλικὰς γραμμὰς **κυμπυλότητος** εἶναι ἐπίπεδοι, θὰ εἶναι **ὅλαι** ἐπίπεδοι καὶ τὰ ἐπίπεδά των διέρχονται ἀπὸ μίαν εὐθεῖαν. Δύο περιφέρειαι ἀπείρως γειτονικαὶ γενικῶς δὲν κόπτονται· ὑπάρχουν λοιπὸν ἐπάνω εἰς καθεμίαν δύο ἰδιαίτερα σημεῖα: 1) ὁ ποὺς Π_1 τῆς ἐλαχίστης ἀποστάσεως ἀπὸ τὴν γειτονικήν της καὶ 2) ὁ ποὺς Π_2 τῆς μεγίστης ἀποστάσεως· ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Π_1 λέγεται ***γραμμὴ συσφίγξεως***, ὁ δὲ τοῦ Π_2 ***γραμμὴ ἀπομακρύνσεως***. Τοιαῦται γραμμαὶ ὑπάρχουν γενικῶς 4 (Enneper). Δύο μερικαὶ περιπτώσεις τοιούτων ἐπιφανειῶν εἶναι: α') αἱ ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνειαι, β') αἱ **σωληνοειδεῖς** ἐπιφάνειαι (ὅταν ἡ ἀκτὶς τῶν σφαιρῶν σταθερά, βλ. Διαφ. Λογ. I. Χατζ. Β', παράγρ. 153—5).

Τρόπος παραγωγῆς τῶν ἐπιφανειῶν τούτων*:** Ἂν s εἶναι τὸ τόξον τῆς καμπύλης (K) καὶ R τυχοῦσα συνάρτησις τοῦ s, λαμβάνομεν εἰς κάθε ἐφαπτομένην τῆς (K), ἀπὸ τὴν ἀφήν, τὸ τμῆμα: $-R\frac{dR}{ds}$ καὶ τὸ ἄκρον του ὡς κέντρον περιφερείας μὲ ἀκτῖνα $R\sqrt{1-\left(\frac{dR}{ds}\right)^2}$ καὶ κειμένης εἰς τὸ ἐπίπεδον τὸ κάθετον πρὸς τὸ ἄνυσμα $-R\frac{dR}{ds}$. Αἱ περιφέρειαι αὐταὶ ἀποτελοῦν μίαν ἐπιφάνειαν, ποὺ ἔχει ὡς μίαν χώνην τῆς ἐνειλιγμένης της τὴν καμπύλην (K). (Προπλάσματα*** τοῦ Finsterwalder, μὲ β' σειρὰν γραμμῶν καμπυλότητος σφαιρικὰς καμπύλας).

13) ***Περίπτωσις ἐκφυλίσεως καὶ τῶν δύο χωνῶν εἰς καμπύλας. Κυκλὶς τοῦ Dupin.***—Ἡ ἐξειλιγμένη ἐπιφάνεια εἶναι ἡ περιβάλλουσα ἑνὸς γένους σφαιρῶν, ποὺ ἐφάπτονται ὅλαι εἰς τρεῖς ἀκινήτους σφαίρας· αἱ δὲ δύο καμπύλαι εἶναι κωνικαὶ τομαί, ἀπὸ τὰς ὁποίας καθεμία εἶναι ὁ τόπος τῶν κορυφῶν τῶν κυκλικῶν κώνων, ποὺ διέρχονται ἀπὸ τὴν ἄλλην. Ἡ ἐξειλιγμένη λέγεται ***κυκλὶς τοῦ Dupin***. Ἡ ἁπλουστέρα ἀπὸ αὐτὰς εἶναι ***ἡ σπεῖρα***.—Αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος τῶν κυκλίδων ἀποτελοῦνται ἀπὸ περιφερείας (Liouville).—Ἡ μετεσχηματισμένη διὰ τῶν ἀντιστρόφων ἀκτίνων τῆς κυκλίδος εἶναι ἡ σπεῖρα, ὅταν ὁ πόλος τοῦ μετασχηματισμοῦ κεῖται ἐπάνω εἰς μίαν περιφέρειαν, κόπτουσαν καθέτως τὰς τρεῖς σταθερὰς σφαίρας καὶ κειμένην εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν κέντρων τῶν 3 σφαιρῶν (Mannheim).

14) ***Κατασκευὴ τῶν κυκλίδων κατὰ τὸν Maxwell.***—Λαμβάνομεν τὴν ἔλλειψιν:

$x_1 = a$ συν α, $y_1 = \sqrt{a^2 - e^2}$ ημα, $z_1 = 0$· καὶ τὴν ὑπερβολήν:

$x_2 = \dfrac{e}{\text{συν}\,\beta}$, $y_2 = 0$, $z_2 = \sqrt{a^2 - e^2}$ εφβ· ἂν M εἶνε ἓν σημεῖον τῆς ἐλλείψεως, M_1 ἓν ἄλλο τῆς ὑπερβολῆς, θὰ εἶναι $(M M_1) = \dfrac{a}{\text{συν}\,\beta} - e$ συνα. Καὶ ἂν λάβωμεν ἐπάνω εἰς τὸ MM_1 ἀπὸ τὸ M τὸ ἄνυσμα (MΠ)=k—e συν α (ὅπου k τυχ. σταθερά), τὸ σημ. Π γράφει κυκλίδα τοῦ Dupin, ποὺ εἶναι οὕτως ἡ περιβάλλουσα καθενὸς ἀπὸ τὰ δύο γένη σφαιρῶν, ποὺ ἔχουν τὰς ἐξισώσεις:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2 = \left(k - \frac{e}{a}\, x_1\right)^2,$$

$$(x - x_2)^2 + y^2 + (z - z_2)^2 = \left(k - \frac{a}{e}\, x_2\right)^2.$$

ΤΕΛΟΣ

ΠΙΝΑΞ
ΕΛΛΗΝΟ-ΓΑΛΛΟ-ΓΕΡΜΑΝΟ-ΑΓΓΛΟ-ΙΤΑΛΙΚΟΣ
ΤΩΝ ΕΙΔΙΚΩΝ ΟΡΩΝ

[Οἱ ξενόγλωσσοι ὅροι μὲ * εἶναι ἰδικοί μου]

---

1) *Ἄκρα σημεῖα*—Points limites—Grenzpunkte—Limit points—Punti limiti.
2) *Ἀκρικὰ ἐπίπεδα*—Plans limites—Grenzebenen—Limit planes—Piani limiti.
3) *Γένος*—Famille—Schar—Family—Serie.
4) *Γραμμὴ ἀπομακρύνσεως*—Ligne d'élongation—Elongationslinie—Line of elongation—Linea di elongazione.
5) *Γραμμὴ συσφίγξεως*—Ligne de striction—Striktionslinie—Line of striction—Linea di stringimento.
6) *Δικαθετικὴ* (εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια)—Surface des binormales (binormalie *)—Binormalenfläche—Surface of the bi- [normals—Superficie delle binormali.
7) *Ἑστία*—Foyer—Brennpunkt—Focus—Fuoco.
8) *Ἑστιακὸν* (ἐπίπεδον, ἐπιφάνεια)—Plan, surface focale—Brennpunktebene,-fläche—Focal plane, surface—piano, [superficie focale.
9) *Ἰδιάζον σμῆνος* (συμπλέγματος)—Congruence singulière—Singuläre Kongruenz—Singular congruence—Con- [gruenza singolare.
10) *Ἰσόστρεβλος* (εὐθεῖα, ἐπιφάνεια, σμῆνος)—Isotrope—Isotrop—Isotrop—Isotropo.
11) *Κεντρικὸν σημεῖον*—Point central—Zentralpunkt—Central point—Punto centrale.
12) *Κυκλὶς* (τοῦ Dupin)—Cyclide—Zyklide—Cyclid—Ciclide.
13) *Λαιμὸς*—Ligne de gorge—Kehllinie—Line of throat (?)*—Curva di gola.
14) *Μέση περιβάλλουσα ἐπιφάνεια*—Surface enveloppe moyenne—Mitteleinhüllende Fläche—(Median) middle en- [velop (surface)—Superficie inviluppata media.

15) *Μονόκεντρος* (εὐθεῖα, ἐπιφάνεια, σμῆνος)—à un centre—Einzentrig*—with one centre—con un centro.

16) *Πρωτεύουσα ἐπιφάνεια* (τοῦ σμήνους)—Surface principale—Hauptfläche—Principal surface—Superficie principale (¹).

17) *Σμῆνος* (εὐθειακόν, καθετικὸν)—Congruence (rectiligne, normalie)—Geradencongruenz (Strahlsystem)—Rectilinear congruence (congr. of straight lines)—congruenza rettilinea.

18) *Στρεβλότης*—Paramètre de distribution—Drall—Parameter of distribution—Parametro distributore(²).

19) *Συζυγὴς* (εὐθ. ἐπιφάνεια)—Surface conjuguée—Konjugierte Fläche—Conjugate surface—Superficie conjugata.

20) *Σύμπλεγμα* (καμπύλων, ἐπιφανειῶν)—Complexe—Komplex—Complex—Complesso.

21) *Τρίεδρον διευθύνσεων*—Trièdre de directions*—Richtungstrieder*—Triedre of directions*—triedro di direzioni*

22) *Ὑπερεστία*—Foyer de seconde espèce (surfoyer?)*—Brennpunkt zweiter Art*—Focus of second kind*—Fuoco di seconda spezie*.

23) *Ὑπερεστιακὴ ἐπιφάνεια*—Surface surfocale(?)*—Brennpunktfläche 2er Art*—Focal surface of second kind*—Superficie focale di seconda spezie*.

24) *Χώνη ὁμόστοιχος, οἰκεία*—Nappe associée—Entprechende Schale—corresponding sheet—Falda corrispondente.

25) *Χώνη ἑτερόστοιχος, μὴ οἰκεία*—Nappe non associée—Nicht entsprechende Schale—Non corresponding sheet—Falda non corrispondente.

---

[1] Διὰ τὴν ὀνομασίαν αὐτὴν ὑπάρχει διαφορὰ εἰς τοὺς διαφόρους συγγραφεῖς.

[2] Εἰς τὸ τελευταῖον Διεθνὲς Συνέδριον τῶν Μαθηματικῶν (Bologna, 3—10 Σεπτ. 1928) ἐπρότεινα τὸν ὅρον contorcimento.

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ.

ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΧΑΤΖΙΔΑΚΗ
ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΟΥ ΕΘΝΙΚΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ, Δ'.

ΚΙΝΗΤΙΚΗ
ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

(ΤΟΥ ΤΡΙΔΙΑΣΤΑΤ[illegible]ΚΟΥ ΧΩΡΟΥ)

ΤΟΜ[illegible]

ΜΟΝΟΠΑΡ[illegible] ΚΙΝΗΣΕΙΣ
[illegible]

ΑΘΗΝΑΙ
ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ [illegible]
[illegible]
193[illegible]

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ.

ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΧΑΤΖΙΔΑΚΗ
ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΟΥ ΕΘΝΙΚΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ, Δ΄.

ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

(ΤΟΥ ΤΡΙΔΙΑΣΤΑΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ)

ΤΟΜΟΣ Α΄.

ΜΟΝΟΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑΙ ΚΙΝΗΣΕΙΣ
(ΚΑΜΠΥΛΑΙ)

ΑΘΗΝΑΙ
ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ ΠΑΡΑΣΚΕΥΑ ΛΕΩΝΗ
30—Ὁδὸς Περικλέους—30
1934

Κάθε ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφήν μου.

ΣΤΗ ΜΝΗΜΗ

ΤΟΥ **GASTON DARBOUX**

Μ' ΕΥΓΝΩΜΟΣΥΝΗ

Ο ΜΑΘΗΤΗΣ ΤΟΥ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ἡ σπουδὴ τῆς **Ἀπειροστικῆς Γεωμετρίας** μὲ **κινητικὰς** μεθόδους, ποὺ τὰς ἐμόρφωσαν οἱ Γάλλοι μαθηματικοὶ τῶν τελευταίων κυρίως δεκαετιῶν τοῦ 19ου αἰῶνος, ἀπεκρυσταλλώθη εἰς ἓν ἑνιαῖον σύστημα ἀπὸ τὸν μεγάλον Γάλλον μαθηματικὸν *Gaston Darboux* εἰς τὸ μνημειῶδες τετράτομον σύγγραμμά του: «*Leçons sur la théorie générale des Surfaces*». Εὐτυχήσας νὰ ὑπάρξω μαθητής του, εἰσήγαγον πρῶτος εἰς τὸ Πανεπιστήμιόν μας τὴν **Κινητικὴν** αὐτὴν **Ἀπειροστικὴν Γεωμετρίαν** καὶ τὴν διδάσκω εἰς τοὺς τεταρτοετεῖς φοιτητὰς τῶν μαθηματικῶν ἐπὶ μακρὰν σειρὰν ἐτῶν, ἐκδώσας πρὸ δεκαπενταετίας καὶ μικρὸν λιθογραφημένον τεῦχος τοῦ α΄ μέρους της, τὴν **Κινητικὴν Θεωρίαν τῶν Καμπύλων**, ποὺ ἔχει ὅμως πρὸ πολλοῦ τελείως ἐξαντληθῆ. Σήμερα ἐκδίδω τυπωμένον, συστηματικώτερα καὶ πολὺ ἐκτενέστερα, τὸν παρόντα α΄ τόμον τοῦ βιβλίου μου, τὴν **Κινητικὴν Θεωρίαν τῶν Καμπύλων**. Τὴν **Θεωρίαν τῶν Ἐπιφανειῶν** ἐλπίζω νὰ ἐκδώσω εἰς ἴδιον, β΄ τόμον.

Τὸν τόμον αὐτὸν ἐκδίδω ὡς **τέταρτον** τῆς σειρᾶς τῶν πανεπιστημιακῶν ἔργων μου, ποὺ ἀφοροῦν τὴν **Ἀνωτέραν Γεωμετρίαν** (Géométrie Supérieure): ὡς **α΄** τόμον ἀριθμῶ τὴν **Διαφορικὴν Γεωμετρίαν τῶν Καμπύλων**, ποὺ διδάσκω ἐκτενέστατα εἰς τοὺς τριτοετεῖς μαθητὰς καὶ ποὺ ἐλπίζω προσεχῶς νὰ ἐκδώσω, παρ᾽ ὅλην τὴν ἀπὸ τὴν μεγάλην της ἔκτασιν δυσκολίαν τῆς ἐκδόσεώς της· ὡς **β΄**, τὴν **Διαφορικὴν** Γεωμετρίαν **τῶν Ἐπιφανειῶν** («**Ἀναλυτικὴν Θεωρίαν τῶν Ἐπιφανειῶν**»), ποὺ ἔχω ἐκδώσει ἀπὸ ἐτῶν· ὡς **γ΄** τέλος τὴν «**Θεωρίαν τῶν Σμηνῶν καὶ τῶν Συμπλεγμάτων τῶν Καμπύλων καὶ τῶν Ἐπιφανειῶν**», ποὺ ἐξέδωκα πρὸ ἑξαετίας. Μετὰ τὴν ἔκδοσιν καὶ τοῦ α΄ τόμου καὶ τοῦ ε΄ (τῆς Κινητικῆς Γεωμετρίας τῶν Ἐπιφανειῶν) τὸ ἔργον μου, ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν ἕδραν τῆς **Ἀνωτέρας**

Γεωμετρίας, πού κατέχω, θὰ ἔχῃ κατὰ τὸ κυριώτερόν του μέρος συμπληρωθῆ : οἱ 3 πρῶτοι θ' ἀποτελοῦν ἓν ἀρκετὰ ἐκτενὲς ἑλληνικὸν σύγγραμμα τῆς **Διαφορικῆς** Γεωμετρίας τοῦ τριδιαστάτου γραμμικοῦ χώρου, οἱ δὲ 2 τελευταῖοι ἓν ἐπίσης **πληρέστατον** ἑλληνικὸν βιβλίον τῆς **Κινητικῆς** Γεωμετρίας. Θὰ ὑπολείπωνται ἴσως ἀκόμη μία «**Εἰδικὴ Θεωρία τῶν ἐπὶ μέρους Καμπύλων καὶ Ἐπιφανειῶν**» καὶ μία «**Ἀπειροστικὴ ν-διάστατος Γεωμετρία**».

Πλὴν τοῦ ὅλου τρόπου τῆς ἐκθέσεως τῶν λεπτῶν αὐτῶν θεωριῶν, πού κατὰ τὸ πλεῖστον εἶναι ἰδικός μου, ἐπλούτισα τὸ βιβλίον μου καὶ μὲ πολλὰ νέα παραδείγματα, καθὼς καὶ μὲ ἰδικάς μου ἐρεύνας, δημοσιευθείσας κατὰ καιροὺς εἰς τὰ εἰδικὰ γαλλικά, γερμανικὰ καὶ ἀμερικανικὰ περιοδικά, καθὼς εἶναι π. χ. ἡ γενικὴ θεωρία **τοῦ ζεύγους καμπύλων**, ἡ **γενίκευσις** τῶν τύπων τοῦ Darboux κτλ.

Ἐθεώρησα δὲ χρήσιμον νὰ προτάξω καὶ ἓν κεφάλαιον μὲ τὰς κυριωτέρας θεωρίας τῆς **καθαρᾶς Κινητικῆς τοῦ Σημείου**, ὅσαι εἶναι **ἀπαραίτητοι** διὰ τὴν κατανόησιν τῆς θεωρίας τοῦ Darboux (1).

Ἐλπίζω, ὅτι τὸ βιβλίον μου αὐτό, μαζὶ μὲ τ' ἄλλα, πού ἔχω ἤδη ἐκδώσει, θὰ ὑποβοηθήσῃ καὶ θὰ τονώσῃ τὴν ἀγάπην τῶν νέων μας μαθηματικῶν πρὸς τὸν ὡραιότερον ἴσως κλάδον τῆς ὅλης μαθηματικῆς ἐπιστήμης, τὴν **Ἀπειροστικὴν Γεωμετρίαν**, ἰδιαιτέρως δὲ πρὸς τὴν **Κινητικὴν Γεωμετρίαν**, πού, χωρὶς ἀμφιβολίαν, εἶναι ἕνα **κάπως δύσβατον ἴσως πνευματικῶς**, ἀλλὰ **σημαντικώτατα συντομώτερον μονοπάτι** ἀπὸ τὴν **πλατεῖαν καὶ προσιτωτέραν**, ἀλλὰ **μακροτάτην** ἐστρωμένην λεωφόρον («via strata») τῆς **Διαφορικῆς** Γεωμετρίας.

Ἀθῆναι, Δεκέμβριος τοῦ 1933

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΧΑΤΖΙΔΑΚΗΣ

---

(1) Ἐννοεῖται, ὅτι ἡ σπουδὴ τῆς **Κινητικῆς Γεωμετρίας** προϋποθέτει τὴν ἐν γένει γνῶσιν τῆς **Κινητικῆς τοῦ Σημείου**. Ἴδιον βιβλίον μου **Κινητικῆς τοῦ Σημείου** ὑπάρχει τυπωμένον ἀπὸ ἐτῶν.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Α΄.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ. ΔΙΑΚΡΙΣΙΣ ΤΗΣ ΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΝ ΚΑΙ ΚΙΝΗΤΙΚΗΝ

1. ***Ὁρισμὸς τῆς Ἀπειροστικῆς Γεωμετρίας.***— Ἡ ***Ἀπειροστικὴ Γεωμετρία*** σπουδάζει τὰς ***ἀπειροστικὰς*** ἰδιότητας τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων, δηλ. τὰς ἰδιότητας τῶν ***ἀπειροστῶν*** μερῶν των[1].

2. ***Διαφορικὴ Γεωμετρία.***— Ἡ σπουδὴ αὐτὴ τῶν ἀπειροστικῶν ἰδιοτήτων τῶν σχημάτων γίνεται μὲ βάσιν τὴν ***Θεωρίαν τῶν Ἀπειροστῶν,*** δηλ. τὸν ***Ἀπειροστικὸν Λογισμόν.*** Ἡ ***φυσικωτέρα*** ὁδὸς πρὸς αὐτήν, ποὺ δι᾿ αὐτὸν τὸν λόγον καὶ πρώτη ἱστορικῶς εὑρέθη, εἶναι ἡ προέκτασις τῆς ***Θεωρίας τῶν Συντεταγμένων*** (τῆς ***Ἀναλυτικῆς*** δηλ. ***Γεωμετρίας***) διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν ***διαφορικῶν*** καὶ τῶν ***παραγώγων*** τῶν συντεταγμένων· δι᾿ αὐτὸ δὲ καὶ ὠνομάσθη ***Διαφορικὴ Γεωμετρία.*** Οἱ τύποι ὅμως τῆς Διαφορικῆς Γεωμετρίας ἔχουν δύο μειονεκτήματα : α΄) ὅτι εἶναι ἐν γένει ***ἀρκετὰ μακροὶ*** καὶ β΄) ὅτι, ἀναφερόμενοι εἰς ἄξονας ***ἀκινήτους*** ἐντὸς τοῦ χώρου καὶ ***ἔξω τοῦ θεωρουμένου σχήματος*** κειμένους, ἐκφράζουν ἰδιότητας ἀνηκούσας εἰς τὰ σχήματα, ***συμφυεῖς μὲ αὐτὰ*** καὶ ἀνεξαρτήτους ἐπομένως τῶν ἀξόνων, διὰ στοιχείων ***μεταβαλλομένων, ὅταν ἀλλάξουν οἱ ἄξονες.***

---

(1) Εἰμποροῦμεν λοιπὸν νά την παρομοιώσωμεν·πρὸς τὴν ***Ἀνατομικὴν*** τῶν Ζῴων καὶ τῶν Φυτῶν, ποὺ ἐξετάζει τὰ ***κύτταρα*** τῶν ζώντων ὀργανισμῶν. Πρὸς τὴν ***Συστηματικὴν*** τότε τῆς Ζῳολογίας καὶ τῆς Φυτολογίας θ᾿ ἀντιστοιχίσωμεν τὴν ***Προβολικὴν Γεωμετρίαν,*** ποὺ ἐξετάζει τὰς ***δέσμας*** τῶν εὐθειῶν, τῶν ἐπιπέδων κτλ.

3. ***Κινητικὴ Γεωμετρία***.— Δι' αὐτὸ ἀπὸ τὰ μέσα περίπου τοῦ παρελθόντος αἰῶνος οἱ Γάλλοι κυρίως μαθηματικοὶ ἐζήτησαν καὶ εὗρον διαφόρους τρόπους, μὲ τοὺς ὁποίους σπουδάζομεν τὰς ἰδιότητας **τῶν** σχημάτων, ***χωρὶς νὰ τ' ἀναφέρωμεν εἰς ἀκινήτους ἄξονας συντεταγμένων,*** ἀλλὰ μεταχειριζόμενοι ἄξονας ***κινητούς, συνδεομένους*** μὲ τὸ σχῆμα. Οἱ τότε παραγόμενοι τύποι εἶναι ἀπαλλαγμένοι καὶ ἀπὸ τὰ δύο προηγούμενα μειονεκτήματα: καὶ ***σύντομοι*** εἶναι καὶ περιέχουν στοιχεῖα ***ἴδια*** τοῦ σχήματος ***καὶ ὄχι ἔξω αὐτοῦ εὑρισκόμενα***.

Τὴν τοιαύτην Ἀπειροστικὴν Γεωμετρίαν θὰ εἰμπορούσαμεν ἴσως νά την λέγωμεν ***Ἀναξονικὴν Γεωμετρίαν,*** δηλ. χωρὶς ἀκινήτους ἄξονας. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ θεωρία της γίνεται κομψοτέρα, ὅταν θεωρήσωμεν τὰς ***ταχύτητας*** τῶν διαφόρων σημείων τοῦ σχήματος, ἐπεκράτησε δι' αὐτὴν τὸ ὄνομα ***Κινητικὴ (Ἀπειροστικὴ) Γεωμετρία***(1). Πατὴρ τῆς Κινητικῆς Ἀπειροστικῆς Γεωμετρίας πρέπει νὰ θεωρηθῇ κυρίως ὁ πρὸ ὀλίγων ἐτῶν ἀποθανὼν μέγας Γάλλος μαθηματικὸς *Gaston Darboux*, διότι αὐτὸς πρῶτος συνήνωσεν εἰς μίαν ἁπλῆν καὶ γόνιμον κινητικὴν μέθοδον τὰ ἐπιμέρους καὶ ποικιλόμορφα πορίσματα τῶν προηγουμένων του Γάλλων μαθηματικῶν εἰς τὸ μνημειῶδες τετράτομον βιβλίον του: «*Théorie Générale des Surfaces*».

4. ***Διαίρεσις τῆς Κινητικῆς Γεωμετρίας***. Ἡ Κινητικὴ Γεωμετρία διαιρεῖται, καθὼς καὶ ἡ Διαφορική, εἰς δύο μεγάλα μέρη: τὴν ***Θεωρίαν τῶν Καμπύλων*** καὶ τὴν ***Θεωρίαν τῶν Ἐπιφανειῶν***. Εἰς τὸν τόμον αὐτὸν θὰ σπουδάσωμεν μόνον τὰς ***καμπύλας***. Ἐπειδὴ δὲ θά μας χρειασθοῦν δι' αὐτὸ πολλαὶ θεωρίαι ἀπὸ τὴν ***καθαρὰν Κινητικὴν τοῦ Σημείου,*** τὰς προτάσσω ἀμέσως εἰς τὰ ἑπόμενα.

---

(1) Ἡ εἰσαγωγὴ ὅμως αὐτὴ τῶν ταχυτήτων δὲν εἶναι *ἀπαραίτητος*· οἱ τύποι τοῦ *Darboux* εἰμποροῦν, ὅπως ἐντὸς τοῦ βιβλίου ἀποδεικνύω, νὰ εὑρεθοῦν ***καὶ ἀπευθείας***.

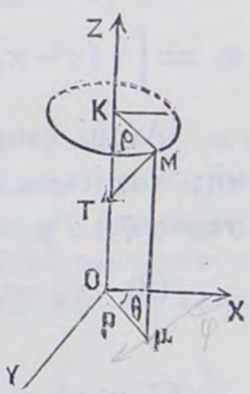
Β΄.

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΚΑΘΑΡΑΝ ΚΙΝΗΤΙΚΗΝ

α΄) Περιστροφικὴ κίνησις περὶ ἄξονα μόνιμον.

1. ***Ἀξονικαὶ προβολαὶ τῆς ταχύτητος, ὅταν ἄξων περιστροφῆς εἶναι ὁ ΟΖ.*** —Ὅταν ἓν σῶμα ἢ σχῆμα (Σ) στρέφεται πέριξ τοῦ ἄξ. ΟΖ, κάθε σημεῖόν του Μ, ποὺ δὲν ἔχει ***καὶ ἰδικήν του*** κίνησιν, ἔχει συντεταγμένας καρτεσιανὰς ὀρθογωνίους: x, y, z, ἀπὸ τὰς ὁποίας κατὰ τὴν περιστροφὴν μένει σταθερὰ ***μόνον μία,*** ἡ z· ***ἡμιπολικὰς*** δέ: ϱ, ϑ, z, ὅπου ***δύο,*** ἡ ϱ καὶ ἡ z, μένουν σταθεραὶ (Σχ. 1). Ἔχομεν τώρα: $x=\varrho\sigma\upsilon\nu\vartheta$, $y=\varrho\eta\mu\vartheta$· ἑπομένως: $\frac{dx}{dt}=-\varrho\eta\mu\vartheta.\frac{d\vartheta}{dt}$, $\frac{dy}{dt}=\varrho\sigma\upsilon\nu\vartheta.\frac{d\vartheta}{dt}$.

Ἐπειδὴ δὲ $\frac{d\vartheta}{dt}$ εἶναι ἡ ***γωνιακὴ*** ἢ ***περιστροφικὴ*** ταχύτης ω τοῦ σώματος (***ἡ ἰδία δι᾿ ὅλα*** τὰ σημεῖά του, διότι διὰ δύο σημεῖα M_1 καὶ M_2 ἔχομεν: $\vartheta_1-\vartheta_2=\sigma\tau\alpha\vartheta.$ καὶ ἑπομένως: $\frac{d\vartheta_1}{dt}=\frac{d\vartheta_2}{dt}=\omega$),



(Σχ. 1)

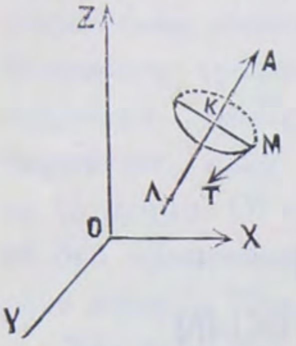
ἔχομεν τελικῶς τοὺς ἑξῆς τύπους (ὅπου v_x, v_y, v_z, εἶναι αἱ ἀξονικαὶ προβολαὶ τῆς ταχύτητος v τοῦ Μ):

(1) $v_x=-y\omega$, $v_y=x\omega$, $v_z=0$, ἑπομένως καί: $v=\omega.\sqrt{x^2+y^2}=\omega\varrho$.

Παρατήρησις. Εἰμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν τοὺς τύπους αὐτοὺς καὶ μὲ ἄλλον τρόπον: ἔχομεν: $s=\varrho\vartheta$ (s τὸ κυκλικὸν τόξον, ποὺ γράφει τὸ Μ), ἑπομένως: $s'=\varrho\vartheta'$ ἢ $v=\varrho\omega$· καὶ $v_x=\varrho\omega\sigma\upsilon\nu\varphi$, $v_y=\varrho\omega\eta\mu\varphi$· ἀλλὰ φ (ἡ γωνία τῆς ΜΤ πρὸς τὸν ἄξ. ΟΧ) εἶναι $=\vartheta+\frac{\pi}{2}$, ἑπομένως: $v_x=-y\omega$, $v_y=x\omega$, $v_z=0$.

2. ***Ἀξονικαὶ προβολαὶ τῆς ταχύτητος, ὅταν ὁ ἄξων περιστρο-***

φῆς εἶναι τυχών.— Ἂν ὁ ἄξων περιστροφῆς ΚΑ εἶναι τυχοῦσα εὐθεῖα, τὰ v_x, v_y, v_z, εὑρίσκονται ὡς ἑξῆς (Σχ. 2): ἂν τὰ συνημίτονα τοῦ ἄξονος ΚΑ πρὸς τοὺς ὀρθογωνίους ἄξονας εἶναι τὰ α, β, γ καὶ τῆς ΚΜ τὰ



(Σχ. 2)

$$\frac{x-x_1}{\varrho},\quad \frac{y-y_1}{\varrho},\quad \frac{z-z_1}{\varrho}$$

(ὅπου x,y,z αἱ συντεταγμέναι τοῦ Μ καὶ x_1, y_1, z_1 αἱ τοῦ Κ), τὰ συνημίτονα a, b, c τῆς ταχύτητος ΜΤ θὰ εἶναι:

$$a = \frac{1}{\varrho}\Big[\beta(z-z_1) - \gamma\,(y-y_1)\Big],\quad b = \frac{1}{\varrho}\Big[\gamma(x-x_1) - \alpha(z-z_1)\Big],$$

$$c = \frac{1}{\varrho}\Big[\alpha\,(y-y_1)-\beta(x-x_1)\Big].^{(1)}$$

ἑπομένως:

$$v_x = v.a = \varrho\omega.\frac{1}{\varrho}\Big[\beta\,(z-z_1)-\gamma(y-y_1)\Big] = \Big[\beta(z-z_1)-\gamma(y-y_1)\Big].\omega$$

καὶ ὁμοίως:

$$v_y = \Big[\gamma\,(x-x_1)-\alpha(z-z_1)\Big].\,\omega,\quad v_z = \Big[\alpha(y-y_1)-\beta(x-x_1)\Big].\omega.$$

Ἂν δὲ ὀνομάσωμεν τὰς ἀξονικὰς προβολὰς ωα, ωβ, ωγ τῆς γωνιακῆς ταχύτητος ω (θεωρουμένης ***ὡς ἀνύσματος ἐπὶ τοῦ ἄξ. περιστροφῆς***): p, q, r, ἔχομεν τελικῶς τοὺς τύπους:

$$(2)\quad v_x = q(z-z_1)-r(y-y_1),\quad v_y = r(x-x_1)-p(z-z_1),$$
$$v_z = p(y-y_1)-q(x-x_1).$$

Τὰ ποσὰ p, q, r θά τα ὀνομάζωμεν τοῦ λοιποῦ, χάριν συντομίας, ***ἀξονικὰς περιστροφάς,*** ἢ καὶ ἁπλῶς ***περιστροφάς.***

3. ***Γενικωτέρα μορφὴ τῶν τύπων (2).***—Εἰς τοὺς τύπους αὐτοὺς x_1, y_1, z_1 εἶναι αἱ συντεταγμέναι τοῦ Κ (ποὺ μεταβάλλονται ἀπὸ σημεῖον εἰς σημεῖον)· θὰ δείξω, ὅτι αἱ προβολαὶ v_x, v_y, v_z λαμβάνουν τὰς ἑξῆς ***γενικωτέρας*** ἐκφράσεις:

$$v_x = q(z-z_2)-r(y-y_2),\quad v_y = r(x-x_2)-p(z-z_2),$$
$$v_z = p(y-y_2)-q(x-x_2),\quad (3),$$

---

(1) Οἱ τύποι αὐτοὶ θὰ ἔπρεπε νὰ ἔχουν $\pm$· ἀλλ' ἡ *θετικὴ* διεύθυνσις τοῦ ἄξονος τῆς περιστροφῆς, δηλ. τοῦ ἀνύσματος τῆς περιστροφῆς ω, λαμ-

ὅπου x_2, y_2, z_2 εἶναι αἱ συντεταγμέναι ***τοῦ τυχόντος σημείου*** τοῦ ἄξ. περιστροφῆς καὶ ἑπομένως ***αἱ ἴδιαι*** διὰ ***κάθε*** σημεῖον Μ. Πραγματικῶς οἱ τύποι (2) γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$v_x = q[(z-z_2)+(z_2-z_1)]-r[(y-y_2)+(y_2-y_1)] \text{ κτλ. δηλ.}$$

$$v_x = q(z-z_2)-r(y-y_2)+q(z_2-z_1)-r(y_2-y_1) \text{ κτλ. Αἱ διαφοραὶ ὅμως:}$$

$$q(z_2-z_1)-r(y_2-y_1), \quad r(x_2-x_1)-p(z_2-z_1) \quad p(y_2-y_1)-q(x_2-x_1)$$

εἶναι $=0$, διότι τὸ σημεῖον Λ (x_2, y_2, z_2) πρέπει νὰ ἐπαληθεύῃ τὰς ἐξισώσεις τοῦ ἄξονος περιστροφῆς:

$$(4) \qquad \frac{X-x_1}{\alpha}=\frac{Y-y_1}{\beta}=\frac{Z-z_1}{\gamma}.$$

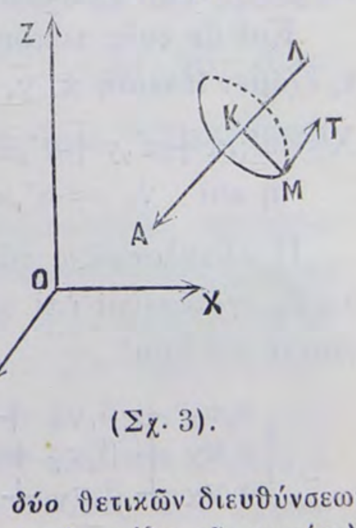
4. ***Ἁπλουστέρα μορφὴ τῶν τύπων (3).*** — Ἂν ὁ ἄξων περιστροφῆς διέρχεται ἀπὸ τὴν ἀρχὴν Ο, εἰμποροῦμεν νὰ ἐκλέξωμεν τὴν ἀρχὴν αὐτὴν ὡς σημεῖον Λ· τότε: $x_2 = y_2 = z_2 = 0$ καὶ οἱ τύποι (3) ἁπλοποιοῦνται καὶ γίνονται:

$$(5) \qquad v_x = qz-ry, \quad v_y = rx-pz, \quad v_z = py-qx.$$

(Καὶ ἂν συμπέσῃ ὁ ΚΑ μὲ τὸν ἄξονα ΟΖ, ἐπανευρίσκομεν τοὺς τύπους (1)).

βάνεται, ὡς γνωστόν, οὕτως, ὥστε εἷς παρατηρητής, ὅταν ἔχῃ τοὺς πόδας εἰς τὸ Κ καὶ τὴν κεφαλὴν εἰς τὸ Α, νὰ βλέπῃ τὸ κινητὸν Μ στρεφόμενον κατὰ τὴν *θετικὴν* φορὰν (δηλ. ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά)· καὶ ἐπειδὴ θέλομεν, εἰς τὴν μερικὴν περίπτωσιν, ποὺ ὁ ἄξων ΛΑ συμπίπτει μὲ τὸν ἄξονα ΟΖ, νὰ συμπίπτουν αἱ *θετικαὶ* διευθύνσεις τῶν ἀξόνων (διὰ νὰ ἐπανεύρωμεν τοὺς μερικωτέρους τύπους (1)), ἡ στερεὰ γωνία τῶν εὐθειῶν ΚΜ, ΜΤ, ΛΑ θὰ εἶναι *ὁμοία κατὰ τὴν τάξιν* μὲ τὴν τῶν ἀξόνων ΟΧ, ΟΥ, ΟΖ· ἡ ὁρίζουσα λοιπὸν τῶν συνημιτόνων:

$$\begin{vmatrix} \frac{x-x_1}{\varrho} & \frac{y-y_1}{\varrho} & \frac{z-z_1}{\varrho} \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$ θὰ εἶναι $=+1$· ἑπομένως: $a=\frac{1}{\varrho}[\beta(z-z_1)-\gamma(y-y_1)]$ κτλ.



(Σχ. 3).

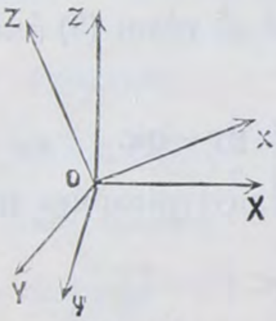
(Ἂν ἡ κίνησις γίνεται κατὰ τὸ σχῆμα (3), πάλιν ἡ τάξις τῆς γωνίας τῶν εὐθειῶν ΚΜ, ΜΤ, ΛΑ εἶναι ὁμοία μὲ τῶν ἀξόνων· διότι ἡ ἀλλαγὴ ***δύο*** θετικῶν διευθύνσεων μιᾶς στερεᾶς γωνίας (τῶν ΜΤ καὶ ΛΑ) δὲν μεταβάλλει τὴν τάξιν τῆς γωνίας)·

5. ***Ἄλλη μορφὴ τῶν ἐξισώσεων (4).***—Ἐπειδὴ $p=\omega\alpha$, $q=\omega\beta$, $r=\omega\gamma$, αἱ ἐξισώσεις (4) τοῦ ἄξ. περιστροφῆς λαμβάνουν καὶ τὴν μορφήν : (6) $\frac{X-x_1}{p}=\frac{Y-y_1}{q}=\frac{Z-z_1}{r}$ (ὅπου x_1, y_1, z_1, αἱ συντεταγμέναι τοῦ τυχ. σημείου του).

Καὶ ἂν διέρχεται ἀπὸ τὸ 0, γίνονται : $\frac{X}{p}=\frac{Y}{q}=\frac{Z}{r}$ (7).

β') Κίνησις σώματος, ὅταν ἓν σημεῖόν του εἶναι ἀκίνητον.

6. ***Προβολαὶ τῆς ταχύτητος ἑνὸς σταθεροῦ σημείου τοῦ σώματος ἐπὶ τῶν κινητῶν ἀξόνων.***—Ἂν θεωρήσωμεν τὸ ἀκίνητον σημεῖον ὡς ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων O καὶ λάβωμεν, πλὴν τῶν ***ἀκινήτων*** ὀρθογωνίων ἀξόνων OXYZ, καὶ ***κινητούς***, ἐπίσης ὀρθογωνίους, Oxyz περὶ τὴν ἰδίαν ***ἀκίνητον*** ἀρχὴν O καὶ στερεῶς συνδεδεμένους μὲ τὸ σῶμα (Σχ. 4), θὰ ἔχωμεν διὰ τὰ δύο συστήματα συντεταγμένων τοῦ τυχ. σημείου M τοῦ σώματος (ποὺ δὲν ἔχει ***καὶ ἰδικήν του*** κίνησιν) :



(Σχ. 4)

$$X=\alpha_1x+\alpha_2y+\alpha_3z,\quad Y=\beta_1x+\beta_2y+\beta_3z,$$
$$Z=\gamma_1x+\gamma_2y+\gamma_3z,$$

ὅπου τὰ συνημίτονα τῶν δύο ἀξονικῶν συστημάτων, τοῦ ἑνὸς ὡς πρὸς τὸ ἄλλο, εἶναι συναρτήσεις τοῦ χρόνου t.

Καὶ ἂν τοὺς τύπους αὐτοὺς τοὺς παραγωγίσωμεν πρὸς τὸν χρόνον t, ἔχομεν (ἐπειδὴ x, y, z σταθερά) :

$$X'=\alpha'_1.x+\alpha'_2y+\alpha'_3z,\quad Y'=\beta'_1x+\beta'_2y+\beta'_3z,\quad Z'=\gamma'_1x+\gamma'_2y+\gamma'_3z,$$
ἢ καὶ $v_X=\alpha'_1x+\alpha'_2y+\alpha'_3z,\quad v_Y=\ldots,\quad v_Z=\ldots.$

Πολλαπλασιάζω τώρα τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς κατὰ σειρὰν πρῶτα ἐπὶ α_1, β_1, γ_1, ἔπειτα ἐπὶ α_2, β_2, γ_2 καὶ τέλος ἐπὶ α_3, β_3, γ_3, προσθέτω κάθε φορὰν καὶ ἔχω :

$$\begin{cases}\alpha_1v_X+\beta_1v_Y+\gamma_1v_Z=v_x=x\Sigma\alpha_1\alpha'_1+y\Sigma\alpha_1\alpha'_2+z\Sigma\alpha_1\alpha'_3,\\ \alpha_2v_X+\beta_2v_Y+\gamma_2v_Z=v_y=x\Sigma\alpha_2\alpha'_1+y\Sigma\alpha_2\alpha'_2+z\Sigma\alpha_2\alpha'_3,\\ \alpha_3v_X+\beta_3v_Y+\gamma_3v_Z=v_z=x\Sigma\alpha_3\alpha'_1+y\Sigma\alpha_3\alpha'_2+z\Sigma\alpha_3\alpha'_3.\end{cases}$$

(ὅπου v_x v_y, v_z, εἶναι αἱ προβολαὶ τοῦ v ἐπὶ τῶν ***κινητῶν*** ἀξόνων καὶ τὰ Σ παριστάνουν ἀθροίσματα τριῶν ὅρων, ποὺ διαφέρουν μόνον κατὰ τὸ ὄνομα τοῦ γράμματος).

Εἶναι ὅμως προφανῶς : $\Sigma\alpha_1\alpha'_1=0$, $\Sigma\alpha_2\alpha'_2=0$, $\Sigma\alpha_3\alpha'_3=0$· ἐπίσης :

$\Sigma\alpha_1\alpha'_2=-\Sigma\alpha_2\alpha'_1$, $\Sigma\alpha_2\alpha'_3=-\Sigma\alpha_3\alpha'_2$, $\Sigma\alpha_3\alpha'_1=-\Sigma\alpha_1\alpha'_3$ (διότι $\Sigma\alpha_1\alpha_2=0$, $\Sigma\alpha_2\alpha_3=0$, $\Sigma\alpha_3\alpha_1=0$)· ἂν λοιπὸν θέσωμεν :

(8) $\quad \Sigma\alpha_3\alpha'_2\equiv p, \quad \Sigma\alpha_1\alpha'_3\equiv q, \quad \Sigma\alpha_2\alpha'_1\equiv r$, θὰ εἶναι καί :

$$\Sigma\alpha_2\alpha'_3=-p,\ \Sigma\alpha_3\alpha'_1=-q,\ \Sigma\alpha_1\alpha'_2=-r \qquad (8')$$

καὶ οἱ προηγούμενοι τύποι γίνονται :

$$(9) \quad v_x=qz-ry, \quad v_y=rx-pz, \quad v_z=py-qx.$$

7. ***Στιγμιαῖος ἄξων περιστροφῆς.***— Οἱ τύποι αὐτοί, ἂν τοὺς παραβάλωμεν μὲ τοὺς (5), μᾶς δεικνύουν, ὅτι αἱ προβολαὶ τῆς ταχύτητος v ἐπὶ τῶν κινητῶν ἀξόνων εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι μὲ τὰς προβολὰς τῆς ταχύτητος, ποὺ θὰ εἶχε τὸ M, ***ἂν ἀπὸ τὴν θεωρουμένην στιγμὴν καὶ πέραν τὸ σῶμα ἐστρέφετο πέριξ ἑνὸς ἄξονος μονίμου, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὴν ἀρχήν.***

Ἡ κίνησις δηλαδή, ποὺ θὰ εἶχε τὸ M, ***ἀπὸ τὴν στιγμὴν αὐτὴν καὶ πέραν,*** ἡ περιστροφικὴ πέριξ τοῦ ἄξονος αὐτοῦ, καὶ ἡ κίνησις, ποὺ ***πραγματικῶς ἔχει*** πέριξ τοῦ ἀκινήτου σημείου O, ἔχουν τὴν στιγμὴν αὐτὴν ***κινητικὴν ἐπαφὴν (α΄ τάξεως)***· δηλ. τὸ M εἶναι ***κοινὸν*** εἰς τὰς δύο αὐτὰς τροχιὰς καὶ αἱ δύο ταχύτητες τοῦ M κατὰ τὰς δύο αὐτὰς κινήσεις εἶναι ***αἱ ἴδιαι ἀκριβῶς κατὰ μέγεθος καὶ θέσιν.*** Αὐτὸ συμβαίνει προφανῶς διὰ κάθε στιγμὴν τῆς κινήσεως, μόνον ὅτι ὁ ἄξων αὐτὸς τῆς περιστροφῆς ***μεταβάλλεται μαζὶ μὲ τὸν χρόνον*** (διότι τὰ συνημίτονά του : $\frac{p}{\omega}$, $\frac{q}{\omega}$, $\frac{r}{\omega}$ $(\omega=\sqrt{p^2+q^2+{}^2r})$ δὲν εἶναι πλέον ἐν γένει ***σταθερά,*** ὅπως εἰς τοὺς τύπους (5), ἀλλὰ ***συναρτήσεις τοῦ*** t).

Ὥστε: ***Αἱ ταχύτητες τῶν σημείων τοῦ σώματος κάθε στιγμὴν τῆς κινήσεως εἶναι αἱ ἴδιαι, ὡς ἂν τὸ σῶμα ἐστρέφετο πέριξ ἑνὸς ἄξονος μεταβλητοῦ, διερχομένου ὅμως πάντοτε ἀπὸ τὴν ἀρχὴν O (ἑπομένως γράφοντος μίαν κωνικὴν ἐπιφάνειαν).*** Τὸν ἄξονα αὐτὸν τὸν ὀνομάζομεν ***στιγμιαῖον ἄξονα περιστροφῆς.*** Αἱ ἐξισώσεις του πρὸς τοὺς ***κινητοὺς*** ἄξονας θὰ εὑρεθοῦν προφανῶς ἀπὸ τὴν ἰδιότητα τῶν σημείων του ***νὰ εἶναι τὰ μόνα σημεῖα τοῦ σώματος, ποὺ ἔχουν*** ταχύτητα $= 0$ καὶ εἶναι λοιπόν : $qz-ry=0,\ rx-pz=0,\ py-qx=0,$

ἢ καί : $\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r}$. (10)

8. ***Προβολαὶ τῆς ταχύτητος σημείου ἔχοντος καὶ ἰδικήν του κίνησιν.***—Ἂν εἰς τοὺς τύπους, ποὺ συνδέουν τὰ X, Y, Z μὲ τὰ x,y,z, εἶναι καὶ τὰ τελευταῖα συναρτήσεις τοῦ χρόνου (ἂν δηλ. τὸ σημεῖον M ἔχει καὶ ***ἰδικήν του*** κίνησιν), ἡ παραγώγισις θά μας δώσῃ :

$X' = \alpha'_1 x+\alpha'_2 y+\alpha_2 z+\alpha_1 x'+\alpha_2 y'+\alpha_3 z',\quad Y = \ldots,\quad Z = \ldots,$

καὶ μὲ τοὺς πολλαπλασιασμοὺς τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν ἐπὶ $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$· $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$· $\alpha_3,\beta_3,\gamma_3$, θὰ εὕρωμεν :

$$v_x = x\Sigma\alpha\alpha'_1+y\Sigma\alpha_1\alpha'_2+z\Sigma\alpha_1\alpha'_3+x'\Sigma\alpha_1^2+y'\Sigma\alpha_1\alpha_2+z'\Sigma\alpha_1\alpha_3 \text{ κτλ.}$$

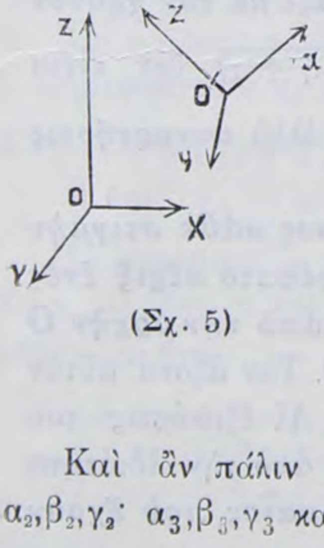
δηλ. $v_x = qz-ry+x'$ (διότι : $\Sigma\alpha_1^2=1,\ \Sigma\alpha_1\alpha_2=0,\ \Sigma\alpha_1\alpha_3=0$)

καὶ ὁμοίως : $v_y = rx-pz+y',\quad v_z = py-qx+z'$. (11)

Εἶναι δηλ. αἱ προβολαὶ $v_x\ v_y,\ v_z$ (ἐπὶ τῶν κινητῶν ἀξόνων) τῆς ***ἀπολύτου*** ταχύτητος τοῦ M ***ἀθροίσματα*** τῶν ἀντιστοίχων προβολῶν ($qz-ry,\ rx-pz,\ py-qx$) τῆς ***μετοχικῆς*** καὶ τῶν x',y',z' τῆς ***σχετικῆς*** ταχύτητός του. Δηλ. ἀποδεικνύομεν οὕτως ***ἀναλυτικῶς*** τὸ γνωστὸν θεμελιῶδες θεώρημα : $v_\alpha = v_\mu + v_\sigma$ (ποὺ καὶ ***γεωμετρικῶς*** εὔκολα δεικνύεται).

γ') Τυχοῦσα κίνησις σώματος.

9. ***Προβολαὶ τῆς ταχύτητος ἑνὸς σταθεροῦ σημείου ἐπὶ τῶν ἀξόνων*** $O'xyz$.— Ἂν λάβωμεν πάλιν (Σχ. 5) ἐν κινητὸν σύστημα ἀξόνων, στερεῶς συνδεδεμένον μὲ τὸ σῶμα καὶ μὲ ἀρχὴν τὸ τυχὸν σημεῖον τοῦ σώματος $O'(X_0,Y_0,Z_0)$, θὰ ἔχωμεν διὰ τὸ τυχὸν ***σταθερὸν*** σημεῖόν του :



(Σχ. 5)

$$X=X_0+\alpha x_1+\alpha_2 y+\alpha_3 z \text{ κτλ.}$$

καὶ ἐπομένως (x,y,z σταθερά) :

$$X'=X'_0+\alpha'_1 x+\alpha'_2 y+\alpha'_3 z,$$
$$Y'=Y'_0+\beta'_1 x+\beta'_2 y+\beta'_3 z,$$
$$Z'=Z'_0+\gamma'_1 x+\gamma'_2 y'+\gamma'_3 z.$$

Καὶ ἂν πάλιν πολλαπλασιάσωμεν κατὰ σειρὰν ἐπὶ $\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1$· $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$· $\alpha_3,\beta_3,\gamma_3$ καὶ προσθέσωμεν, εὑρίσκομεν :

$\alpha_1 X' + \beta_1 Y' + \gamma_1 Z' = (\alpha_1 X'_0 + \beta_1 Y'_0 + \gamma_1 Z'_0) + qz - ry$, κτλ. δηλ.
$\alpha_1 v_X + \beta_1 v_Y + \gamma_1 v_Z = (\alpha_1 v_{0X} + \beta_1 v_{0Y} + \gamma_1 v_{0Z}) + qz - ry$ κτλ.
ἢ: (12) $v_x = v_{0x} + qz - ry$, $v_y = v_{0y} + rx - pz$, $v_z = v_{0z} + py - qx$, ὅπου v_0 εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ O′.

10. ***Στιγμιαῖος ἄξων ἑλικώσεως.***— Οἱ τύποι (12) μᾶς λέγουν, ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ Μ κάθε στιγμὴν εἶναι ***γεωμετρικὸν*** ἄθροισμα δύο ταχυτήτων: τῆς v_0 καὶ ἐκείνης, ποὺ ἔχει προβολάς: $qz - ry$, $rx - pz$, $py - qx$. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τὸ εἶδος τῆς κινήσεως, ποὺ παράγει τὰς ταχύτητας αὐτάς, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Θεωροῦμεν τὰς δύο ***μερικὰς*** περιπτώσεις, ποὺ ἢ ἡ μία ἢ ἡ ἄλλη ἀπὸ τὰς ταχύτητας αὐτὰς εἶναι $= 0$. Ἂν λοιπὸν 1) εἶναι $v_0 = 0$, δηλ. ἡ ἀρχὴ O′ εἶναι ἀκίνητος, ἔχομεν πάλιν προφανῶς τοὺς τύπους (9) καὶ ἡ κίνησις εἶναι ***στιγμιαία περιστροφὴ περὶ ἕνα ἄξονα*** (§ 7) (ὅπου ὅμως ἔχει ὑποτεθῆ, ὅτι ***τὸ O′ συμπίπτει μὲ τὸ O,*** δηλ. ἐλήφθη ὡς ἀρχὴ τῶν ἀκινήτων ἀξόνων τὸ ἀκίνητον σημεῖον τοῦ σώματος, ἐνῷ αὐτὸ δὲν εἶναι ***ὑποχρεωτικόν,*** ἀρκεῖ τὸ O′ νὰ εἶναι ***ἀκίνητον,*** δηλ. αἱ συντεταγμέναι του X_0, Y_0, Z_0 ***σταθεραὶ*** καὶ ἑπομένως $v_0 = 0$). Ἂν τώρα 2) ὑποτεθῇ ἀντιστρόφως, ὅτι ἡ ἄλλη ταχύτης εἶναι$=0$, δηλ. ὅτι: $qz - ry = rx - pz = py - qx = 0$, οἱ τύποι μας γίνονται $v_x = v_{0x}$, $v_y = v_{0y}$, $v_z = v_{0z}$· εἶναι ἑπομένως τότε κάθε στιγμὴν τῆς κινήσεως αἱ ταχύτητες ***ὅλων*** τῶν σημείων τοῦ σώματος ***ἴσαι καὶ παράλληλοι***· καὶ ἑπομένως, ***τὴν στιγμὴν ἐκείνην,*** ἡ κίνησις ἔχει ***κινητικὴν ἐπαφὴν (α′ τάξεως)*** μὲ μίαν ***μεταφορικὴν*** κίνησιν, ποὺ ἔχει ***μεταφορὰν*** v_0 διευθύνσεως: $\frac{v_{0x}}{v_0}, \frac{v_{0y}}{v_0}, \frac{v_{0z}}{v_0}$. Εἶναι δηλ. τότε ἡ κίνησις ***στιγμιαία*** μεταφορικὴ κίνησις (τῆς ὁποίας ἡ ***μεταφορὰ*** μεταβάλλεται συνεχῶς κατὰ μέγεθος καὶ διεύθυνσιν).

Ἂν τώρα θεωρήσωμεν πάλιν τοὺς γενικοὺς τύπους (12), βλέπομεν, σύμφωνα πρὸς τὰ προηγούμενα, ὅτι ***κάθε στιγμὴν*** ἡ κίνησις εἶναι ***σύνθετος*** ἀπὸ δύο κινήσεις: μίαν ***μεταφορικὴν*** καὶ μίαν ***περιστροφικήν***· ἑπομένως (κατὰ γνωστὸν θεώρημα τῆς Κινητικῆς) ***κάθε στιγμὴν αἱ ταχύτητες ὅλων τῶν σημείων τοῦ σώματος εἶναι ἐντελῶς αἱ ἴδιαι μὲ τὰς ταχύτητας, ποὺ θὰ εἶχον, ἄν, ἀπὸ τὴν στιγμὴν αὐτὴν καὶ πέραν, ἡ κίνησις ἐγίνετο ἑλικοειδὴς περὶ ἕνα μόνιμον ἄξονα ἑλικώσεως,*** ἢ (μὲ ἄλλον τρόπον ἐκφράσεως) ***ἡ κίνησις κάθε στιγμὴν ἔχει κινητικὴν ἐπαφὴν (α′ τάξεως) μὲ μίαν ἑλικοειδῆ κίνησιν.*** Ὁ ἄξων ὅμως αὐτὸς τῆς ἑλικώσεως δὲν μένει ***σταθερός,*** ἀλλὰ ***μεταβάλλει θέσιν συνεχῶς εἰς τὸν χῶρον*** (γράφει ἑπομένως μίαν ***εὐθειογενῆ*** ἐπιφάνειαν). Δι᾽ αὐτὸ δὲ ὀνομάζεται ***στιγμιαῖος*** ἄξων ἑλικώσεως· καὶ ***κάθε κίνησις λοιπὸν εἶναι μία στιγμιαία ἑλίκωσις πέριξ ἑνὸς μεταβλητοῦ ἄξονος ἑλικώσεως.***

11. ***Ἐξισώσεις τοῦ στιγμιαίου ἄξονος ἑλικώσεως.***— Ὁ στιγμιαῖος ἄξων ἑλικώσεως εἶναι προφανῶς ***ὁ τόπος τῶν σημείων τοῦ σώματος, τῶν ὁποίων αἱ ταχύτητες εἶναι παράλληλοι πρὸς αὐτόν.*** Καὶ τὰ μὲν συνημίτονα τοῦ στιγμιαίου ἄξονος πρὸς τοὺς κινητοὺς ἄξονας συντεταγμένων Oxyz εἶναι προφανῶς: $\frac{p}{\omega}, \frac{q}{\omega}, \frac{r}{\omega}\cdot$ τὰ δὲ συνημίτονα τῆς ταχύτητος τοῦ τυχ. σημείου εἶναι: $\frac{v_x}{v}, \frac{v_y}{v}, \frac{v_z}{v}\cdot$ τὸν τόπον λοιπὸν τῶν ζητουμένων σημείων, δηλ. τὸν στιγμιαῖον ἄξονα, ὁρίζουν αἱ ἐξισώσεις:

$$\frac{v_x}{p}=\frac{v_y}{q}=\frac{v_z}{r} \text{ δηλ. } \frac{v_{0x}+qz-ry}{p}=\frac{v_{0y}+rx-pz}{q}=\frac{v_{0z}+py-qx}{r} \qquad (13)$$

Πραγματικῶς δὲ αἱ ἐξισώσεις αὗται, α΄ βαθμοῦ πρὸς τὰ x,y,z, παριστάνουν εὐθεῖαν· εἶναι δηλ. αἱ ἐξισώσεις τοῦ στιγμιαίου ἄξονος ἑλικώσεως ὡς πρὸς τοὺς ***κινητοὺς*** ἄξονας τῶν συντεταγμένων.

Ἂν τώρα πολλαπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ μὲν α΄ κλάσματος τῶν (13) ἐπὶ p, τοῦ β΄ ἐπὶ q καὶ τοῦ γ΄ ἐπὶ r, εὑρίσκομεν, προσθέτοντες πρῶτα τοὺς ἀριθμητὰς καὶ ἔπειτα τοὺς παρονομαστάς:

$$\frac{v_{0x}+qz-ry}{p}=\frac{v_{0y}+rx-pz}{q}=\frac{v_{0z}+py-qx}{r}=$$

$$=\frac{(pv_{0x}+qv_{0y}+rv_{0z})+\begin{vmatrix} p & q & r \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}}{p^2+q^2+r^2}=\frac{pv_{0x}+qv_{0y}+rv_{0z}}{\omega^2}=$$

$$=\frac{v_{0x}\cdot\frac{p}{\omega}+v_{0y}\cdot\frac{q}{\omega}+v_{0z}\frac{r}{\omega}}{\omega}\cdot$$

ὁ ἀριθμητὴς ὅμως τοῦ τελευταίου κλάσματος εἶναι προφανῶς ἡ προβολὴ τῆς ταχύτητος v_0 ἐπὶ τοῦ στιγμιαίου ἄξονος, δηλ. ἡ ***ὀλίσθησις*** g· ἔχομεν ἑπομένως τὰς ἐξισώσεις:

$$\frac{v_{0x}+qz-ry}{p}=\frac{v_{0y}+rx-pz}{q}=\frac{v_{0z}+py-qx}{r}=\frac{g}{\omega} \qquad (14)$$

("Αν $g=0$, ἡ ἑλίκωσις καταντᾷ ***ἁπλῆ περιστροφή***, καὶ αἱ ἐξισώσεις τοῦ στιγμιαίου ἄξονος (***τῆς περιστροφῆς*** τώρα) γίνονται :

$$v_{0x}+qz-ry=0,\quad v_{0y}+rx-pz=0,\quad v_{0z}+py-qx=0^{\cdot}\quad (\S\ 7).$$

12. ***Παραγωγὴ τῆς τυχούσης κινήσεως τοῦ σώματος δι᾽ ἑλικώσεως.*** "Αν θεωρήσωμεν τὸν τόπον τῶν στιγμιαίων ἀξόνων ἑλικώσεως ἐντὸς τοῦ χώρου, ἔχομεν μίαν ***ἀκίνητον*** εὐθειογενῆ ἐπιφάνειαν· ἂν τώρα θεωρήσωμεν καὶ τὸν τόπον, ποὺ ἀποτελοῦν οἱ στιγμιαῖοι ἄξονες ἑλικώσεως ἐντὸς τοῦ κινουμένου σώματος καὶ ποὺ προφανῶς εἶναι διάφορος ἀπὸ τὸν προηγούμενον, θὰ ἔχωμεν μίαν ***δευτέραν*** εὐθειογενῆ ἐπιφάνειαν, ποὺ εἰς κάθε θέσιν θὰ ἔχῃ προφανῶς μίαν γενέτειραν ***κοινὴν*** μὲ τὴν πρώτην· καὶ κάθε στιγμὴν ἡ κοινὴ αὐτὴ γενέτειρα θὰ εἶναι ὁ στιγμιαῖος ἄξων ἑλικώσεως ***τῆς στιγμῆς αὐτῆς***· δηλ. τὸ σῶμα θὰ ὑποστῇ μίαν ὀλίσθησιν g καὶ μίαν περιστροφὴν ω πέριξ τῆς γενετείρας· ὥστε :

Ἡ τυχοῦσα κίνησις ἑνὸς σώματος εἰμπορεῖ νὰ πραγματοποιηθῇ, ἂν μία κατάλληλος κινητὴ εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια (Ε′) ἑλικωθ πέριξ μιᾶς ἀκινήτου εὐθειογενοῦς (Ε). (**«Ἑλίκωσις»** δὲ τῆς (Ε) σημαίνει κίνησιν τῆς (Ε′) τοιαύτην, ὥστε κάθε στιγμὴν τῆς κινήσεως νὰ ἔχουν αἱ δύο ἐπιφάνειαι μίαν γενέτειραν ***κοινὴν*** καὶ νὰ γίνεται ***ἑλικοειδὴς κίνησις στιγμιαία*** τοῦ σώματος πέριξ αὐτῆς).

13. ***Δύο σπουδαῖαι μερικαὶ περιπτώσεις*** : 1) ***"Αν τὸ σῶμα ἔχῃ ἓν σημεῖον ἀκίνητον Ο***. Αἱ δύο εὐθειογενεῖς ἐπιφάνειαι (Ε) καὶ (Ε′) καταντοῦν τότε ***κωνικαί***, μὲ ***κοινὴν*** κορυφὴν τὸ Ο· ἡ ἑλίκωσις καταντᾷ ἁπλῆ ***περιστροφὴ*** πέριξ ἑνὸς ***στιγμιαίου*** ἄξονος ***περιστροφῆς*** : τῆς ***κοινῆς*** γενετείρας τῶν (Ε) καὶ (Ε′)· ***καὶ ἡ κίνησις λοιπὸν τοῦ σώματος παράγεται διὰ κυλίσεως τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας (Ε′) ἐπὶ τῆς (Ε)***· ἢ προφανῶς καὶ ὡς ἑξῆς : θεωροῦμεν μίαν σφαῖραν μὲ ἀκτῖνα τυχοῦσαν (π. χ. = 1)· αὐτὴ κόπτει τὰς ἐπιφανείας (Ε) καὶ (Ε′) κατὰ δύο καμπύλας (Κ) καὶ (Κ′)· ***ἡ κίνησις τοῦ σώματος παράγεται, ἂν ἐπὶ τῆς σφαίρας κυλισθῇ ἡ κινητὴ καμπύλη (Κ′) ἐπὶ τῆς ἀκινήτου (Κ)***.—

2) ***"Αν τὸ σῶμα κινεῖται παραλλήλως πρὸς ἓν σταθερὸν ἐπίπεδον*** (Π). Τότε αἱ ταχύτητες ὅλων τῶν σημείων του εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ (Π) καὶ ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ σώματος, ποὺ εὑρίσκονται μίαν ὡρισμένην στιγμὴν ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου (Π′), παραλλήλου πρὸς τὸ (Π), μένουν διαρκῶς ἐπ᾽αὐτοῦ καὶ ἀποτελοῦν ἓν ἐπίπεδον ἀμετάβλητον σχῆμα κινούμενον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ. Οἱ στιγμιαῖοι ἄξονες ἑλικώσεως ποὺ τώρα

γίνονται ἄξονες ***περιστροφῆς***, μένουν κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π), ἀποτελοῦν λοιπὸν μίαν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν· ***ἡ δὲ κίνησις τοῦ σώματος παράγεται, ἂν κυλισθῇ ἡ κινητὴ κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια (Ε′) ἐπὶ τῆς ἐπίσης κυλινδρικῆς ἀκινήτου (Ε)***· ἢ καὶ ὡς ἑξῆς: Τὸ ἐπίπεδον (Π) κόπτει τὰς δύο κυλινδρικὰς ἐπιφανείας (Ε), (Ε′) κατὰ δύο καμπύλας (Κ), (Κ′)· ***ἡ κίνησις τοῦ σώματος παράγεται, ἂν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) κυλισθῇ ἡ κινητὴ καμπύλη (Κ′) ἐπὶ τῆς ἀκινήτου (Κ)***. Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι ἡ περίπτωσις αὐτὴ εἶναι ***ὁρικὴ*** περίπτωσις τῆς πρώτης· ἀρκεῖ τὸ σημεῖον Ο ν᾽ ἀπομακρυνθῇ εἰς τὸ ἄπειρον κινούμενον ἐπὶ εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π).

14. ***Προβολαὶ τῆς ταχύτητος σημείου, ποὺ ἔχει καὶ ἰδικήν του κίνησιν.***— Εἶναι φανερόν, ὅτι τότε πρέπει νὰ προστεθοῦν εἰς τὰς ἐκφράσεις (12) τῶν v_x, v_y, v_z, καὶ αἱ προβολαὶ τῆς σχετικῆς ταχύτητος: x', y', z'· θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τοὺς γενικωτέρους τύπους:

$$(15)\qquad v_x = v_{0x} + qz - ry + x', \quad v_y = v_{0y} + rx - pz + y', \quad v_z = v_{0z} + py - qx + z'.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΣΘΗΚΑΙ.

1) Αἱ ἐξισώσεις τοῦ στιγμιαίου ἄξονος πρὸς τοὺς κινουμένους ἄξονας (§ 11) εὑρίσκονται καὶ ἀπὸ τὴν ἰδιότητα τῶν σημείων του ***νὰ ἔχουν ἑκάστην στιγμὴν τὴν ἐλαχίστην ταχύτητα*** ἀπὸ ὅλα τὰ ἄλλα σημεῖα τοῦ σώματος. [Ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως: $(v_{0x}+qz-ry)^2 + (v_{0y}+rx-pz)^2+(v_{0z}+py-qx)^2$].

2) ***Προβολαὶ τῆς ταχύτητος ἐπὶ τῶν ἀκινήτων ἀξόνων.***— Αἱ προβολαὶ αὐταὶ τῆς ταχύτητος τοῦ τυχόντος σημείου Μ τοῦ σώματος (ποὺ ἐνδεχομένως ἔχει καὶ ἰδικήν του κίνησιν), λαμβάνουν τὴν μορφήν:

$$v_X = v_{0X} + Q(Z-Z_0) - R(Y-Y_0), \quad v_Y = v_{0Y} + R(X-X_0) - P(Z-Z_0),$$
$$v_Z = v_{0Z} + P(Y-Y_0) - Q(X-X_0), \qquad (16)$$

ὅπου: P, Q, R εἶναι αἱ προβολαὶ τῆς περιστροφῆς ω ἐπὶ τῶν ***ἀκινήτων*** ἀξόνων.

Καὶ αἱ ἐξισώσεις λοιπὸν τοῦ στιγμιαίου ἄξονος ἑλικώσεως πρὸς τοὺς ἀκινήτους ἄξονας εἶναι:

$$\frac{v_{0X}+Q(Z-Z_0)-R(Y-Y_0)}{P} = \frac{v_{0Y}+R(X-X_0)-P(Z-Z_0)}{Q} =$$
$$= \frac{v_{0Z}+P(Y-Y_0)-Q(X-X_0)}{R}. \qquad (17)$$

το Σ επι και

Εἶναι δέ:

$P=\alpha_1 p+\alpha_2 q+\alpha_3 r, \qquad Q=\beta_1 p+\beta_2 q+\beta_3 r, \qquad R=\gamma_1 p+\gamma_2 q+\gamma_3 r\cdot$

καὶ ἀντιστρόφως:

$p=\alpha_1 P+\beta_1 Q+\gamma_1 R, \quad q=\alpha_2 P+\beta_2 Q+\gamma_2 R, \quad r=\alpha_3 P+\beta_3 Q+\gamma_3 R.$

3) ***Νὰ δειχθῇ ὅτι***: ὅπως εἶναι: $p=\Sigma\alpha_3\alpha'_2$, $q=\Sigma\alpha_1\alpha'_3$, $r=\Sigma\alpha_2\alpha'_1$, ἐντελῶς ὁμοίως εἶναι καί: $P=\Sigma\beta_1\gamma'_1$, $Q=\Sigma\gamma_1\alpha_1'$, $R=\Sigma\alpha_1\beta'_1$.(18)

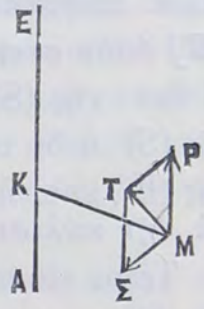
Πραγματικῶς εἶναι:

$$\Sigma\beta_1\gamma'_1=\Sigma\beta_1(r\gamma_2-q\gamma_3)=\beta_1(r\gamma_2-q\gamma_3)+\beta_2(p\gamma_3-r\gamma_1)+\beta_3(q\gamma_1-p\gamma_2)=$$
$$=p(\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2)+q(\beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3)+r(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1),$$

δηλ.$=p\alpha_1+q\alpha_2+r\alpha_3=P\cdot$ καὶ Q καὶ R ὁμοίως.

4) ***Μέγεθος καὶ διεύθυνσις τῆς ταχύτητος.***— Ἡ ταχύτης τοῦ τυχόντος σταθεροῦ σημείου Μ τοῦ (Σ) ὁρίζεται κατὰ μέγεθος καὶ διεύθυνσιν ὡς ἑξῆς:

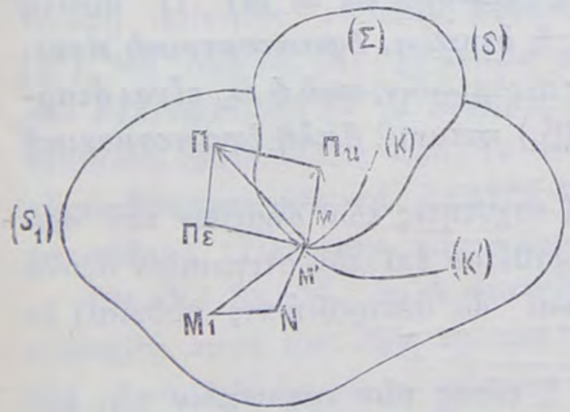
Ἂν ἡ ἀπόστασίς του ἀπὸ τὸν στιγμιαῖον ἄξονα ΑΕ εἶναι δ (=ΚΜ, Σχ. 6), ἡ περιστροφική του ταχύτης ΜΣ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΕΜ καὶ ἴση μὲ ωδ, ἡ δὲ μεταφορική του ΜΡ θὰ εἶναι ἄνυσμα παράλληλον καὶ ἴσον πρὸς τὴν ὀλίσθησιν g. Ἡ ὁλικὴ λοιπὸν ταχύτης του εὑρίσκεται εἰς ἓν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν δ καὶ εἶναι: (19) $v=\sqrt{\omega^2\delta^2+g^2}$, ἡ δὲ δὲ διεύθυνσίς του ὁρίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:



(Σχ. 6)

(ΜΚ=δ, ΜΡ=g, ΜΣ=ωδ, ΜΤ=v)

$$\varepsilon\varphi(PMT)=\frac{\omega\delta}{g}. \qquad (20)$$



(Σχ. 7)

5) ***Κύλισις καὶ στροβίλισις μιᾶς κινητῆς ἐπιφανείας ἐπὶ ἄλλης ἀκινήτου.***— Τρίτη ***μερικὴ*** περίπτωσις τῆς ***γενικῆς*** κινήσεως στερεοῦ, μετὰ τὰς δύο τῆς § 13, εἶναι ἡ ἑξῆς.

Ἓν κινητὸν στερεὸν σῶμα (Σ) καταλήγει εἰς στερεὰν ἐπιφάνειαν (S), ὑποχρεωμένην νὰ μένῃ εἰς ἐπαφὴν μὲ μίαν ἄλλην ἀκίνητον(S_1)(Σχ.7). Κάθε στιγμὴν t ἓν σημεῖον Μ τῆς (S) συμπίπτει μὲ ἓν σημεῖον Μ′ τῆς (S_1). Ἂν τὴν στιγμὴν αὐτὴν t ἡ ταχύτης v_0 τοῦ Μ δὲν εἶναι =0, ***θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ κοινοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς τὸ Μ τῶν δύο ἐπιφανειῶν***· διότι ἂν τὴν στιγμὴν $t+dt$ τὸ νέον σημεῖον ἐπαφῆς εἶναι τὸ N καὶ M_1 εἶναι ἡ νέα θέσις τοῦ M, τὰ ἀνύσματα NM′ καὶ NM_1 εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ κοινοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῶν (S) καὶ (S_1) εἰς τὸ N ἐπ᾽ αὐτοῦ λοιπὸν κεῖται καὶ τὸ ἄνυσμα $M'M_1$, δηλ. ἡ ***ἀπόλυτος (ἀπειροστὴ) μετατόπισις τοῦ M***. Αἱ ταχύτητες τῶν διαφόρων σημείων τοῦ (Σ) εἶναι ***αἱ ἴδιαι***, ὡς ἂν τὸ (Σ) εἶχε μίαν ***μεταφορικὴν*** κίνησιν, μεταφορᾶς v_0, καὶ μίαν ***περιστροφικήν***, περιστροφῆς ΜΠ ($\equiv\omega$), πέριξ ἑνὸς ἄξονος διερχομένου ἀπὸ τὸ M.

Εἰς τὴν μερικὴν περίπτωσιν, ποὺ ἡ ταχύτης v_0 τοῦ σημείου ἐπαφῆς M εἶναι $= 0$, λέγομεν, ὅτι ***ἡ ἐπιφάνεια (S) (καὶ τὸ σῶμα (Σ)) στρέφεται καὶ «στροβιλίζεται» ἐπὶ τῆς (S_1)***. Τότε ὁ στιγμιαῖος ἄξων ***ἑλικώσεως*** καταντᾷ ἄξων ***περιστροφῆς*** διὰ τοῦ M, ὁ ΜΠ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ὀλίσθησις εἶναι $= 0$, ***ἡ κίνησις παράγεται ἀπὸ τὴν ἁπλῆν κύλισιν (ὄχι ἑλίκωσιν) τῆς κινητῆς εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας (E) (τῶν στιγμιαίων ἀξόνων ἐντὸς τοῦ σώματος) ἐπὶ τῆς ἀκινήτου (E′) (τῶν στιγμιαίων ἀξόνων εἰς τὸν χῶρον)***. Ὁ τόπος τοῦ σημείου M ἐπὶ τῆς (S) εἶναι μία καμπύλη (K), τομὴ τῆς ἐπιφανείας (E) καὶ τῆς (S)· ὁ δὲ τόπος τοῦ M′ ἐπὶ τῆς (S_1) μία ἄλλη καμπύλη (K_1), τομὴ τῆς (E′) καὶ τῆς (S_1)· ***ἡ κίνησις λοιπὸν εἰμπορεῖ νὰ παραχθῇ καὶ μὲ τὴν κύλισιν τῆς (K) ἐπὶ τῆς (K_1)***.

Τέλος εἰμποροῦμεν ν᾽ ἀναλύσωμεν τὴν περιστροφὴν ω($\equiv$ΜΠ) εἰς δύο ἄλλας, ω_κ ($\equiv$ΜΠ$_\kappa$) καὶ ω_ε ($\equiv$ΜΠ$_\varepsilon$), τὴν πρώτην ***κάθετον*** ἐπὶ τῶν (S) καὶ (S_1) εἰς τὸ M καὶ τὴν δευτέραν ***ἐφαπτομένην*** αὐτῶν (δηλ. κειμένην ἐπὶ τοῦ κοινοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς τὸ M). Ἡ πρώτη λέγεται ***περιστροφὴ στροβιλίσεως***, ἡ δευτέρα, ***ἐφαπτομενικὴ περιστροφή***. Εἰς τὴν ἀκόμη ***μερικωτέραν*** περίπτωσιν, ***ποὺ ἡ ω_κ εἶναι διαρκῶς $= 0$***, ἡ κίνησις τῆς (S) ἐπὶ τῆς (S_1) καταντᾷ ***ἁπλῆ ἐφαπτομενικὴ περιστροφή***.

6) Εἰς μίαν ὡρισμένην στιγμὴν αἱ ταχύτητες τῶν σημείων τοῦ σώματος, ὅσα κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὸν στιγμιαῖον ἄξονα ἑλικώσεως, ἀποτελοῦν (προεκτεινόμεναι ὡς ἀπειρομήκεις εὐθεῖαι) ἓν ὑπερβολικὸν παραβολοειδές.

7) Εἰς μίαν ὡρισμένην στιγμὴν ὁ τόπος τῶν ταχυτήτων τῶν σημείων τοῦ σώματος, τῶν συντρεχουσῶν εἰς ἓν σημεῖον, εἶναι (ἂν προεκταθοῦν ὡς εὐθεῖαι) μία κωνικὴ ἐπιφάνεια τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

8) Ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων, μίαν ὡρισμένην στιγμήν, αἱ ταχύτητες εἶναι ἴσαι, εἶναι κύλινδρος ἐκ περιστροφῆς πέριξ τοῦ στιγμιαίου ἄξονος ***(Chasles (Σάλ))***.

9) Εἰς κάθε κινούμενον στερεόν, τὰ ἐπίπεδα τὰ κάθετα εἰς τὰς

τροχιὰς τῶν σημείων τοῦ σώματος τῶν εὑρισκομένων ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου (E), διέρχονται ἀπὸ ἓν σημεῖον A. Τὰ δὲ κάθετα εἰς τὰς τροχιὰς τῶν σημείων τῶν κειμένων ἐπὶ μιᾶς εὐθείας (Δ) διέρχονται ἀπὸ μίαν εὐθεῖαν (D).

10) ***Κατασκευὴ τοῦ στιγμιαίου ἄξονος ἑλικώσεως.*** *(Poncelet (Πονσελέ)).*—Ἀπὸ τὸ τυχὸν σημεῖον O φέρομεν τρία ἀνύσματα OV_1, OV_2, OV_3 ἴσα καὶ παράλληλα πρὸς τὰς ταχύτητας τριῶν τυχόντων σημείων M_1, M_2, M_3 τοῦ σώματος· ὁ στιγμιαῖος ἄξων εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (E) τῶν τριῶν σημείων V_1, V_2, V_3· ἂς προβάλωμεν ἐπὶ τοῦ (E) δύο ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα, τὰ M_1 καὶ M_2· ἂν μ_1, μ_2 εἶναι αἱ προβολαί των καὶ $\mu_1 v_1, \mu_2 v_2$ αἱ προβολαὶ τῶν ταχυτήτων των, αἱ κάθετοι ἀπὸ τὰ μ_1, μ_2 ἐπὶ τὰς $\mu_1 \upsilon_1$, $\mu_2 \upsilon_2$ κόπτονται εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τοῦ στιγμιαίου ἄξονος ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον (E). Ὁ στιγμιαῖος ἄξων λοιπὸν ὡρίσθη ἐντελῶς.

11) Νὰ εὑρεθοῦν ὁ στιγμιαῖος ἄξων καὶ αἱ εὐθειογενεῖς ἐπιφάνειαι (E) καὶ (E′) εἰς τὴν ἑξῆς κίνησιν ἑνὸς σώματος: Εὐθεῖα AB στερεῶς συνδεδεμένη μὲ ἕνα ἄξονα OZ στρέφεται πέριξ του μὲ γωνιακὴν ταχύτητα σταθερὰν ω· συγχρόνως ἓν στερεὸν σῶμα (Σ), στερεῶς συνδεόμενον μὲ τὴν AB, στρέφεται πέριξ της μὲ τὴν ἰδίαν ***σχετικὴν*** γωνιακὴν ταχύτητα ω.

12) Κύλινδρος ἐκ περιστροφῆς (K) ***κυλίεται*** ἐντὸς ἑνὸς ἄλλου κυλίνδρου (K′) ***διπλασίας ἀκτῖνος,*** ἐνῷ συγχρόνως ***ὀλισθαίνει*** παραλλήλως πρὸς τὰς γενετείρας οὕτως, ὥστε ἓν σημεῖον τοῦ (K) νὰ διαγράφῃ ἀκίνητον εὐθεῖαν, συναντῶσαν ἀναγκαστικῶς τὸν ἄξονα τοῦ (K′). Νὰ δειχθῇ, ὅτι : 1) ***Κάθε σημεῖον τοῦ κινητοῦ σώματος γράφει ἔλλειψιν*** καὶ 2) ***Ἡ κίνησις αὐτὴ εἶναι ἡ μόνη*** (πλὴν τῆς μετατοπίσεως παραλλήλως πρὸς ἓν σταθερὸν ἐπίπεδον), ***κατὰ τὴν ὁποίαν εἶναι δυνατὸν ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ σώματος νὰ γράφουν τροχιὰς ἐπιπέδους.*** (Darboux, (Νταρμπού)).

13) Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ συνεχὴς κίνησις ἑνὸς σώματος εἰμπορεῖ νὰ παραχθῇ κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον (Poinsot (Ποενσό)) : Κῶνος στερεὸς (K), συνδεδεμένος μὲ τὸ σῶμα, κυλίεται χωρὶς ὀλίσθησιν ἐπὶ ἄλλου κώνου (K′) στερεοῦ, ποὺ ἔχει μεταφορικὴν κίνησιν. (Θὰ ληφθῇ ἓν τυχὸν σημεῖον O ἐντὸς τοῦ σώματος καὶ θὰ θεωρηθῇ ἡ ***σχετικὴ*** κίνησις τοῦ σώματος πρὸς ἄξονας OX′Y′Z′ μὲ ἀρχὴν τὸ O καὶ μὲ ***σταθερὰς*** διευθύνσεις).

14) Ὁ τόπος τῶν ἀξόνων **καμπυλότητος** τῶν **τροχιῶν** τῶν διαφό-

ρων σημείων μιᾶς κινητῆς εὐθείας εἶναι, ***κατὰ μῆκος αὐτῆς,*** ἓν ὑπερβολοειδές.

15) ***Θεμελιώδης ἰδιότης τοῦ στιγμιαίου ἄξονος ἑλικώσεως.— Ἂν ὁ στιγμιαῖος ἄξων ἑλικώσεως διατηρῇ σταθερὰν διεύθυνσιν ὡς πρὸς τὸ κινούμενον σῶμα, διατηρεῖ σταθερὰν διεύθυνσιν καὶ πρὸς τὸν ἀκίνητον χῶρον· καὶ ἀντιστρόφως.***

Ἀπόδειξις τοῦ *α΄*. Ἂν εἶναι ἡ διεύθυνσις τοῦ ἄξ. ἑλικώσεως σταθερὰ ὡς πρὸς τὸ σῶμα, ***θὰ εἶναι τὰ σχετικὰ*** (πρὸς τοὺς κινουμένους ἄξονας) ***συνημίτονά τ̔ου*** $\frac{p}{\omega}$, $\frac{q}{\omega}$, $\frac{r}{\omega}$ ***σταθερά.*** ἔχομεν ὅμως:

$$\frac{P}{\omega}=\alpha_1\frac{p}{\omega}+\alpha_2\frac{q}{\omega}+\alpha_3\frac{r}{\omega}\cdot \text{ κτλ.}$$

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν εὑρίσκομεν παραγωγίζοντες πρὸς t:

$\left(\frac{P}{\omega}\right)'=\frac{p}{\omega}.\alpha'_1+\frac{q}{\omega}.\alpha'_2+\frac{r}{\omega}.\alpha'_3$ (α)· ἀπὸ τὰς ἰσότητας ὅμως: $\Sigma\alpha_3\alpha'_2=p$, $\Sigma\alpha_1\alpha'_3=q$, $\Sigma\alpha_2\alpha'_1=r$ εὑρίσκομεν εὔκολα: $\alpha'_1=r\alpha_2-q\alpha_3$, $\alpha'_2=p\alpha_3-r\alpha_1$, $\alpha'_3=q\alpha_1-p\alpha_2$· καὶ ἡ ἰσότης (α) γίνεται:

$$\left(\frac{P}{\omega}\right)'=\frac{1}{\omega}\Big[p(r\alpha_2-q\alpha_3)+q(p\alpha_3-r\alpha_1)+r(q\alpha_1-p\alpha_2)\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{\omega}.\begin{vmatrix} p & q & r \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ p & q & r \end{vmatrix}=0.$$

Εἶναι λοιπὸν $=0$ ἡ παράγωγος $\left(\frac{P}{\omega}\right)'$ καὶ (μὲ ὁμοίαν ἀπόδειξιν) αἱ $\left(\frac{Q}{\omega}\right)'$, $\left(\frac{R}{\omega}\right)'$. Ἑπομένως ***καὶ τὰ ἀπόλυτα συνημίτονα τοῦ στιγμιαίου ἄξονος σταθερά.***

Ἀπόδειξις τοῦ β΄. Ἂν εἶναι ἡ ***ἀπόλυτος*** διεύθυνσις τοῦ στιγμ. ἄξονος σταθερά, θὰ εἶναι: $\frac{P}{\omega}$, $\frac{Q}{\omega}$, $\frac{R}{\omega}$ σταθερά. Ἀλλά:

$$\frac{p}{\omega}=\alpha_1\frac{P}{\omega}+\beta_1\frac{Q}{\omega}+\gamma_1\frac{R}{\omega}\text{ κτλ. ἑπομένως:}$$

$$\left(\frac{p}{\omega}\right)'=\frac{P}{\omega}\alpha'_1+\frac{Q}{\omega}.\beta'_1+\frac{R}{\omega}\gamma'_1 \quad (\beta)\cdot$$

εἶναι ὅμως: $P=p\alpha_1+q\alpha_2+r\alpha_3$, $Q=p\beta_1+q\beta_2+r\beta_3$, $R=p\gamma_1+q\gamma_2+r\gamma_3$· ὥστε ἡ ἰσότης (β) γίνεται:

$$\left(\frac{p}{\omega}\right)' = \frac{1}{\omega}\cdot\left[p.\Sigma\alpha\alpha'_1 + q\Sigma\alpha_2\alpha'_1 + r\Sigma\alpha_3\alpha'_1\right] = \frac{1}{\omega}\left[qr - rq\right] = 0\cdot$$

εἶναι λοιπὸν τὰ $\left(\frac{p}{\omega}\right)'$, $\left(\frac{q}{\omega}\right)'$, $\left(\frac{r}{\omega}\right)' = 0$ καὶ ἑπομένως ***καὶ τὰ σχετικὰ συνημίτονα τοῦ στιγμ. ἄξονος $\frac{p}{\omega}$, $\frac{q}{\omega}$, $\frac{r}{\omega}$ σταθερά.***

Μερικὴ περίπτωσις. Ἂν τὸ σῶμα ἔχῃ ἓν σημεῖον ***ἀκίνητον***, ὁ στιγμιαῖος ἄξων ἑλικώσεως καταντᾷ ἁπλῶς ἄξων περιστροφῆς καὶ ἑπομένως, ***ἂν μένῃ σταθερὸς ὡς πρὸς τὸ σῶμα, θὰ μένῃ σταθερὸς καὶ ὡς πρὸς τὸν ἀκίνητον χῶρον· καὶ ἀντιστρόφως.***

16) ***Ἄλλη μορφὴ τῶν σχετικῶν ἐξισώσεων τοῦ στιγμ. ἄξονος.***— Ἂν x_1, y_1, z_1 εἶναι αἱ συντεταγμέναι ἑνὸς τυχόντος σημείου τοῦ στιγμ. ἄξονος, αἱ συμμετρικαί του ἐξισώσεις εἶναι τῆς μορφῆς :

$$\frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = \frac{z - z_1}{r}.$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν ἓν τοιοῦτο σημεῖον, ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις (ἂν θέσωμεν πρὸς συντομίαν : $v_{0x} \equiv A$, $v_{0y} \equiv B$, $v_{0z} \equiv \Gamma$) :

$$\frac{A + qz_1 - ry_1}{p} = \frac{B + rx_1 - pz_1}{q} = \frac{\Gamma + py_1 - qx_1}{r} = \frac{Ap + Bq + \Gamma r}{\omega^2},$$

ἀπὸ τὰς ὁποίας εὑρίσκομεν :

$$qz_1 - ry_1 = p.\frac{Ap + Bq + \Gamma r}{\omega^2} - A = \frac{Ap^2 + Bpq + \Gamma pr}{\omega^2} - \frac{A(p^2 + q^2 + r^2)}{\omega^2} =$$

$$= \frac{1}{\omega^2}\left[Bpq + \Gamma pr - Aq^2 - Ar^2\right] = q\left(\frac{Bp - Aq}{\omega^2}\right) - r\left(\frac{Ar - \Gamma p}{\omega^2}\right).$$

ἐπίσης δὲ εἶναι καί : $rx_1 - pz_1 = r\left(\frac{\Gamma q - Br}{\omega^2}\right) - p\left(\frac{Bp - Aq}{\omega^2}\right)$,

$$py_1 - qx_1 = p\left(\frac{Ar - \Gamma p}{\omega^2}\right) - q\left(\frac{\Gamma q - Br}{\omega^2}\right).$$

ἢ συντομώτερα :

$$qz_1 - ry_1 = q\frac{\Gamma_1}{\omega^2} - r\frac{B_1}{\omega^2}, \quad rx_1 - pz_1 = r\frac{A_1}{\omega^2} - p\frac{\Gamma_1}{\omega^2},$$

$$py_1 - qx_1 = p\frac{B_1}{\omega^2} - q\frac{A_1}{\omega^2},$$

(ὅπου : $A_1 \equiv \Gamma q - Br$, $B_1 \equiv Ar - \Gamma p$, $\Gamma_1 = Bp - Aq$).

Αἱ συμμετρικαὶ λοιπὸν ἐξισώσεις τοῦ στιγμ. ἄξονος γίνονται :

$$\frac{x - \frac{A_1}{\omega^2}}{p} = \frac{y - \frac{B_1}{\omega^2}}{q} = \frac{z - \frac{\Gamma_1}{\omega^2}}{r}. \qquad (21)$$

17) ***Προβολαὶ τῆς ἐπιταχύνσεως ἐπὶ τῶν ἀκινήτων ἀξόνων.***— Αἱ προβολαὶ τῆς ταχύτητος τοῦ τυχ. σημείου τοῦ σώματος ἐπὶ τῶν ἀκινήτων ἀξόνων εἶναι (ἄσκ. 1η):

$$v_X = v_{0X} + Q(Z - Z_0) - R(Y - Y_0), \text{ κτλ.}$$

ἢ καὶ $v_X = (v_{0X} - QZ_0 + RY_0) + QZ - RY \equiv T_1 + QZ - RY$ κτλ.
$(v_{0X} - QZ_0 + RY_0 \equiv T_1$ κτλ.)· καὶ ἂν παραγωγίσωμεν πρὸς t, ἔχομεν:
$E_X = T'_1 + QZ' - RY' + ZQ' - YR'$ κτλ. $(E \equiv$ ἐπιτάχυνσις), ἢ καὶ:
$E_X = T'_1 + (QT_3 - RT_2) + Q(PY - QX) - R(RX - PZ) + ZQ' - YR'$,
ἢ ἀκόμη:
$$E_X = T'_1 + (QT_3 - RT_2) + P(PX + QY + RZ) - \omega^2 X + ZQ' - YR' \quad (22)$$
ὁμοίως δὲ καί:
$$E_Y = T'_2 + (RT_1 - PT_3) + Q(PX + QY + RZ) - \omega^2 Y + XR' - ZP',$$
$$E_Z = T'_3 + (PT_2 - QT_1) + R(PX + QY + RZ) - \omega^2 Z + YP' - XQ'.$$

18) ***Προβολαὶ τῆς ἐπιταχύνσεως ἐπὶ τῶν κινητῶν ἀξόνων.***— Ἀπὸ τοὺς τύπους: $X = X_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z$ κτλ. εὑρίσκομεν, ἂν παραγωγίσωμεν: $X'' = (X''_0) + \alpha''_1 x + \alpha''_2 y + \alpha''_3 z$ κτλ.· ἑπομένως ἔχομεν, ἂν πολλαπλασιάσωμεν κατὰ σειρὰν ἐπὶ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ καὶ προσθέσωμεν:

$\Sigma E_X \alpha_1 = \Sigma(E_0)_X \alpha_1 + x\Sigma\alpha_1\alpha''_1 + y\Sigma\alpha_1\alpha''_2 + z\Sigma\alpha_1\alpha''_3$, δηλαδή:
$E_x = (E_0)_x + x\Sigma\alpha_1\alpha''_1 + y\Sigma\alpha_1\alpha''_2 + z\Sigma\alpha_1\alpha''_3$· ὑπολογίζω τώρα τοὺς συντελεστὰς τῶν x,y,z,· ἔχομεν ***πρῶτα***: $\Sigma\alpha_1\alpha'_1 = 0$, ὥστε: $\Sigma\alpha_1\alpha''_1 = -\Sigma\alpha'^2_1$ καὶ ἐπειδὴ (ἄσκ. 15η): $\alpha'_1 = r\alpha_2 - q\alpha_3$, $\beta'_1 = r\beta_2 - q\beta_3$, $\gamma'_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3$, ἕπεται: $\Sigma\alpha'^2_1 = q^2 + r^2$, ὥστε: $\Sigma\alpha_1\alpha''_1 = -(q^2 + r^2)$· διὰ τὸ ***δεύτερον*** ἄθροισμα $\Sigma\alpha_1\alpha''_2$, παρατηρῶ, ὅτι $\Sigma\alpha_1\alpha_2 = 0$, $\Sigma\alpha_1\alpha'_2 = -\Sigma\alpha_2\alpha'_1 = -r$ καί: $\Sigma\alpha_1\alpha''_2 + \Sigma\alpha'_1\alpha'_2 = -r'$· ἀλλά:
$\Sigma\alpha'_1\alpha'_2 = \Sigma(r\alpha_2 - q\alpha_3).(p\alpha_3 - r\alpha_1) = -pq$· ἑπομένως: $\Sigma\alpha_1\alpha''_2 = -r' + pq$. τέλος τὸ ***τρίτον*** ἄθροισμα ὑπολογίζεται ὡς ἑξῆς: εἶναι $\Sigma\alpha_1\alpha_3 = 0$,

$$\Sigma\alpha_1\alpha'_3 = -\Sigma\alpha_3\alpha'_1 = q \quad \text{καὶ} \quad \Sigma\alpha_1\alpha''_3 + \Sigma\alpha'_1\alpha'_3 = q'\text{· ἀλλὰ}$$
$$\Sigma\alpha'_1\alpha'_3 = \Sigma(r\alpha_2 - q\alpha_3)(q\alpha_1 - p\alpha_2) = -pr\text{· ὥστε: } \Sigma\alpha_1\alpha''_3 = q' + pr.$$

Ἔχομεν λοιπὸν τελικῶς:
$$E_x = (E_0)_x - (q^2 + r^2)x + (pq - r')y + (pr + q')z \text{ ἢ καί:}$$

Ἑπομένως δὲ καί:
$$\left.\begin{aligned} E_x &= (E_0)_x - \omega^2 x + p(px + qy + rz) + q'z - r'y. \\ E_y &= (E_0)_y - \omega^2 y + q(px + qy + rz) + r'x - p'z, \\ E_z &= (E_0)_z - \omega^2 z + r(px + qy + rz) + p'y - q'x. \end{aligned}\right\} (23)$$

ΚΙΝΗΤΙΚΗΣ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΤΟΜΟΣ Α΄.

ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

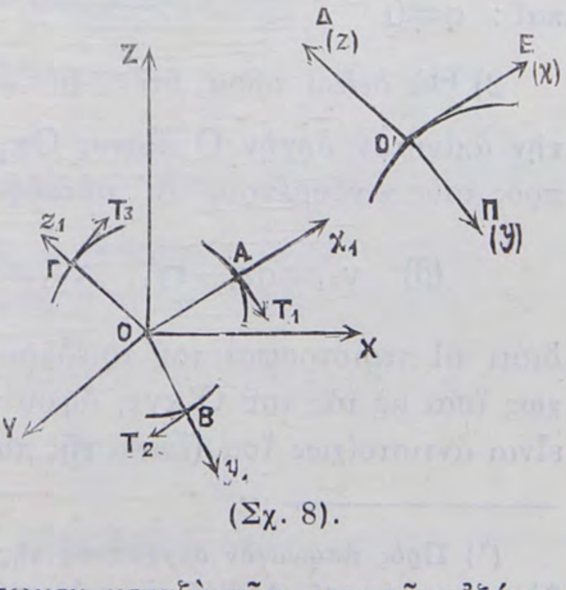
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

Θεμελιώδεις τύποι τοῦ *Darboux*.

15. ***Σύμπτωσις τῶν ἀξόνων O΄xyz μὲ τὸ πρωτεῦον τρίεδρον τῆς τροχιᾶς τοῦ O΄.***—Εἰς τὴν τυχοῦσαν κίνησιν ἑνὸς στερεοῦ εὑρήκαμεν (§ 9) τοὺς τύπους :

(α) $v_x = v_{0x} + qz - ry, \quad v_y = v_{0y} + rx - pz, \quad v_z = v_{0z} + py - qx.$

Ἡ κινητὴ ἀρχὴ O΄ διαγράφει κατὰ τὴν κίνησιν (ἂν δὲν εἶναι σταθερὰ) μίαν **τροχιάν**, δηλ. μίαν τυχοῦσαν καμπύλην τοῦ χώρου, εἰς κάθε σημεῖον τῆς ὁποίας ὑπάρχει ἓν ***πρωτεῦον τρίεδρον*** (Π) (= τρισορθογώνιος τρίεδρος γωνία τῶν **ἀρχικῶν** διευθύνσεων: ***ἐφαπτομένης, πρώτης*** καὶ ***ὀρθίας καθέτου***). Οἱ κινούμενοι ἄξονες O΄xyz εἰς τοὺς γενικοὺς τύπους (α) εἶναι προφανῶς τυχόντες, ἑπομένως ἐντελῶς ἄσχετοι μὲ τὰς ἀκμὰς τοῦ (Π). Εἰμποροῦμεν λοιπόν, χωρὶς νὰ παύσουν νὰ ἰσχύουν οἱ τύποι (α), νὰ θεωρήσωμεν μεταξὺ τῶν κινητῶν ἀξόνων καὶ τοῦ (Π) ὁποιανδήποτε σχέσιν ***ἀμοιβαίας θέσεως*** θέλομεν. Ἡ ἁπλου-



(Σχ. 8).

στέρα σχέσις εἶναι βέβαια ἡ ***σύμπτωσις τῶν ἀξόνων Ο΄xyz μὲ τοὺς ἄξονας τοῦ (Π)***. Κατὰ τὴν σύμπτωσιν δὲ αὐτὴν λαμβάνομεν συνήθως ὡς ἄξονα Ο΄x τὴν ***ἐφαπτομένην*** τῆς τροχιᾶς τοῦ Ο΄, ὡς ἄξονα Ο΄y τὴν ***πρώτην κάθετον*** καὶ ὡς ἄξονα Ο΄z τὴν ***δικάθετον*** (ὀρθίαν κάθετον). Οἱ τύποι (α) τότε ἁπλοποιοῦνται καὶ τὰ ***κινητικὰ*** ποσὰ p, q, r, ποὺ περιέχουν, λαμβάνουν ***γεωμετρικὴν*** σημασίαν καὶ ἐκφράζουν στοιχεῖα θεμελιώδη τῆς καμπύλης (τὴν ***καμπυλότητα*** καὶ τὴν ***στρέψιν*** της), καθὼς ἀμέσως θ᾽ ἀποδείξωμεν.

16. ***Ἀπόδειξις τῶν τύπων τοῦ Darboux.***—1) Θὰ δείξω πρῶτα, ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ q εἶναι $=0$. Πρὸς τοῦτο ***μεταγράφω*** τὰ συνημίτονα τῶν κινητῶν ἀξόνων μὲ τὰ σύμβολα, ποὺ εἰς τὴν Διαφορικὴν Γεωμετρίαν ἔχομεν διὰ τὰ συνημίτονα τῶν ἀρχικῶν διευθύνσεων, δηλ. γράφω ἀντὶ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$: α, β, γ· ἀντὶ $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$: ξ, η, ζ καὶ ἀντὶ $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$: λ, μ, ν. Θὰ ἔχω τότε :

$$p=\Sigma\alpha_3\alpha'_2=\Sigma\lambda\xi', \quad q=\Sigma\alpha_1\alpha'_3=\Sigma\alpha\lambda', \quad r=\Sigma\alpha_2\alpha'_1=\Sigma\xi\alpha'.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ δικάθετος εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο ***ἀπείρως γειτονικὰς*** ἐφαπτομένας τῆς καμπύλης (διότι τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον εἶναι τὸ ὅριον τοῦ ἐπιπέδου, ποὺ περνᾷ ἀπὸ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Ο΄ καὶ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Ο΄΄, ὅταν τὸ Ο΄΄ τείνῃ νὰ πέσῃ εἰς τὸ Ο΄), ἕπεται : $\Sigma\lambda\alpha=0$, $\Sigma\lambda(\alpha+d\alpha)=0$ ἢ καὶ $\Sigma\lambda\alpha=0$, $\Sigma\lambda d\alpha=0$, ἢ ἀκόμη : $\Sigma\lambda\alpha=0$, $\Sigma\alpha\lambda'=0$· ἡ τελευταία ὅμως ἐξίσωσις γράφεται καί : $q=0$. $\Sigma\lambda\alpha' + \Sigma\lambda'\alpha = 0$

2) Θὰ δείξω τώρα, ὅτι : $p=-\dfrac{1}{R}$ καὶ $r=\dfrac{1}{P}$.(1) Ἂς φέρω ἀπὸ τὴν ἀκίνητον ἀρχὴν Ο ἄξονας $Ox_1y_1z_1$ παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους πρὸς τοὺς κινουμένους. Δι᾽ αὐτοὺς ἰσχύουν (§ 6) οἱ τύποι :

$$(\beta) \quad v_{x_1}=qz_1-ry_1, \quad v_{y_1}=rx_1-pz_1, \quad v_{z_1}=py_1-qx_1,$$

διότι αἱ περιστροφαὶ τοῦ τριέδρου $Ox_1y_1z_1$ εἶναι προφανῶς ἀντιστοίχως ἴσαι μὲ τὰς τοῦ Ο΄xyz, ἀφοῦ τὰ συνημίτονα, ποὺ τὰς ἀποτελοῦν, εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα (ἕνεκα τῆς παραλληλίας τῶν τριέδρων).

---

(1) Πρὸς ἀποφυγὴν *συγχύσεως* τῆς περιστροφῆς r μὲ τὴν ἀκτῖνα στρέψεως θὰ γράφωμεν τοῦ λοιποῦ τὴν τελευταίαν μὲ τὸ κεφαλαῖον R καί, χάριν τῆς ὁμοιομορφίας, καὶ τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος μὲ τὸ κεφαλαῖον P.

Ἂν τώρα θεωρήσωμεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος Ox_1 τὸ σημεῖον Α(1,0 0), οἱ τύποι (β) θὰ γίνουν δι᾽ αὐτό :

$$v_{x_1}=0, \quad v_{y_1}=\mathbf{r}, \quad v_{z_1}=0\cdot$$

ὥστε θὰ εἶναι : $v_{y_1}=v=\frac{ds_1}{dt}=\mathbf{r}$, ὅπου ds_1 εἶναι τὸ διαφορικὸν τοῦ τόξου τῆς ***τροχιᾶς*** τοῦ Α· ἡ τροχιὰ ὅμως αὐτὴ δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο παρὰ ἡ ***δείκτρια καμπυλότητος*** τῆς τροχιᾶς τοῦ σημείου Ο′ (διότι ἡ $O\mathbf{x}_1$ εἶναι παράλληλος καὶ ὁμόρροπος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην Ο′x τοῦ Ο′)· θὰ ἔχωμεν λοιπόν : $\frac{ds_1}{dt}=\frac{d\sigma}{dt}=\frac{d\sigma}{ds_0}\cdot\frac{ds_0}{dt}=\mathbf{r}$ ἤ: (γ) $\frac{1}{P}\cdot\frac{ds_0}{dt}=\mathbf{r}$ (ὅπου s_0 εἶναι τὸ τόξον τῆς τροχιᾶς τοῦ Ο′). Ἐπειδὴ ὅμως εἰς τὴν Γεωμετρίαν ἐνδιαφερόμεθα μόνον διὰ τὸ ***σχῆμα*** τῶν τροχιῶν καὶ ὄχι διὰ τὸν ***χρόνον,*** εἰς τὸν ὁποῖον διαγράφονται, εἰμποροῦμεν, χωρὶς καμίαν βλάβην τῶν ὑποθέσεών μας, νὰ θεωρήσωμεν τὴν κίνησιν τοῦ Ο′ ὡς ***ὁμαλήν·*** τότε θὰ εἶναι $s_0=kt+m$· καὶ ἂν ἰδιαιτέρως λάβωμεν καὶ $k=1$, $m=0$, θὰ ἔχωμεν $s_0=t$, δηλ. ***τὸ τόξον s_0 τῆς τροχιᾶς τοῦ Ο′ θὰ παριστᾷ καὶ τὸν χρόνον·*** τότε ὅμως ὁ τύπος (γ) γίνεται : $\frac{1}{P}=\mathbf{r}$, δηλ. ἡ περιστροφὴ $\mathbf{r}$ εἶναι ἡ καμπυλότης τῆς τροχιᾶς τοῦ Ο′.

Ἂν ἔπειτα θεωρήσωμεν ὁμοίως ἐπὶ τοῦ ἄξονος Oz_1 τὸ σημεῖον Γ (0,0,1), θὰ ἔχωμεν δι᾽ αὐτὸ ἀπὸ τοὺς τύπους (β) :

$$v_{\mathbf{x}_1}=0 \text{ (διότι q ἐδείχθη ἤδη } = 0), \quad v_{y_1}=-p, \quad v_{z_1}=0\cdot$$

δηλ. $v_{y_1}=v=\frac{ds_2}{dt}=-p$ (ὅπου s_2 τὸ τόξον τῆς τροχιᾶς τοῦ Γ)· ἀλλὰ ἡ τροχιὰ τοῦ Γ εἶναι προφανῶς ἡ ***δείκτρια στρέψεως*** τοῦ Ο′ (διότι ἡ Oz_1 εἶναι παράλληλος καὶ ὁμόρροπος πρὸς τὴν δικάθετον τοῦ Ο′). ὥστε : $\frac{ds_2}{dt}=\frac{d\tau}{dt}=-p$, ἢ καὶ (ἀφοῦ ὑπεθέσαμεν t=s) : $\frac{d\tau}{ds_0}=-p$,

$$\text{ἢ } p=-\frac{d\tau}{ds_0}=-\frac{1}{R}.$$

Ἀπεδείξαμεν λοιπὸν τὰς ἑξῆς θεμελιώδεις σχέσεις τῶν περιστροφῶν p,q,r πρὸς τὰς καμπυλότητας $\frac{1}{P}$ καὶ $\frac{1}{R}$:

$$p = -\frac{1}{R}, \qquad q=0, \qquad r=\frac{1}{P}. \quad (24)$$

Ἂν τώρα λάβωμεν ὑπ᾽ ὄψιν μας τὰς τιμὰς αὐτὰς τῶν p,q,r, τὴν ὑπόθεσιν $s_0=t$ (ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἕπεται :

$$\frac{ds_0}{dt} \equiv v_0 = 1)$$

καὶ ὅτι τώρα εἶναι: $v_{0x}=v_0$, $v_{0y}=0$, $v_{0z}=0$ (διότι ἡ ταχύτης τοῦ O′ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος O′x), βλέπομεν, ὅτι οἱ θεμελιώδεις ***κινητικοὶ*** τύποι (α) λαμβάνουν τὴν ἑξῆς ***γεωμετρικὴν*** μορφήν :

$$v_x = 1-\frac{y}{P}+x', \quad v_y = \frac{x}{P}+\frac{z}{R}+y', \quad v_z = -\frac{y}{R}+z'. \quad (25)$$

Ἂν δὲ τὸ σημεῖον M(x,y,z) εἶναι ***στερεῶς συνδεδεμένον*** μὲ τὸ κινούμενον σῶμα, οἱ τύποι αὐτοὶ ἁπλοποιοῦνται εἰς τοὺς ἑξῆς :

$$v_x = 1-\frac{y}{P}, \quad v_y = \frac{x}{P}+\frac{z}{R}, \quad v_z = -\frac{y}{R} \quad (25').$$

Αὐτοὶ εἶναι οἱ τρεῖς θεμελιώδεις τύποι τοῦ Darboux, ποὺ ἀποτελοῦν τὴν βάσιν τῆς Κινητικῆς Θεωρίας τῶν Καμπύλων.

17. **Γενίκευσις τῶν τύπων τοῦ** *Darboux*. — Γενικωτέρα σχέσις τῶν δύο τριέδρων (Π) καὶ O′xyz εἶναι νὰ συμπίπτῃ ***μόνον ἓν ζεῦγος ἀκμῶν των*** (π.χ. O′T μὲ O′x κτλ). Καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, καθὼς καὶ εἰς τὴν γενικωτάτην τῆς τυχούσης θέσεως τοῦ (T) ὡς πρὸς τὸ O′xyz, εὑρίσκονται τύποι ὁμοίας κατασκευῆς πρὸς τοὺς τοῦ Darboux, ἀλλὰ γενικώτεροι (Βλ. ***Ἀσκήσεις***).

18. **Τύποι τοῦ** *Frenet*. — Οἱ θεμελιώδεις εἰς τὴν ***Διαφορικὴν*** Γεωμετρίαν τύποι τοῦ Frenet εἰμποροῦν τώρα νὰ ἐπανευρεθοῦν εὐκολώτατα ὡς ἑξῆς :

Ἔχομεν τώρα : $\Sigma\alpha\alpha'=0$, $\Sigma\xi\alpha'=r=\frac{1}{P}$, $\Sigma\lambda\alpha'=-q=0$· ἐπομένως : $\alpha'=\frac{\xi}{P}$, $\beta'=\frac{\eta}{P}$, $\gamma'=\frac{\zeta}{P}$. (26)

Ἐπίσης ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις : $\Sigma\alpha\xi'=-r=-\frac{1}{P}$, $\Sigma\xi\xi'=0$,

$$\Sigma\lambda\xi' = p = -\frac{1}{R}$$ εὑρίσκομεν :

$$\xi' = -\frac{\alpha}{P} - \frac{\lambda}{R},$$

καὶ ὁμοίως: $$\eta' = -\frac{\beta}{P} - \frac{\mu}{R}, \quad \zeta' = -\frac{\gamma}{R} - \frac{\nu}{R}. \quad (27)$$

Τέλος αἱ ἐξισώσεις : $\Sigma\alpha\lambda' = q = 0$, $\Sigma\xi\lambda' = -p = \frac{1}{R}$, $\Sigma\lambda\lambda' = 0$ μᾶς δίδουν: $\lambda' = +\frac{\xi}{R}$, $\mu' = +\frac{\eta}{R}$, $\nu' = +\frac{\zeta}{R}$. (28)

19. **Ἐξισώσεις τοῦ στιγμιαίου ἄξονος ἑλικώσεως.** — Αἱ ἐξισώσεις τοῦ ἄξονος αὐτοῦ (§ 11) γίνονται τώρα :

$$\frac{1 - \frac{y}{P}}{-\frac{1}{R}} = \frac{\frac{x}{P} + \frac{z}{R}}{0} = \frac{-\frac{y}{R}}{\frac{1}{P}} \text{ ἢ καί : } z = -\frac{R}{P}x, \; y = \frac{\frac{1}{P}}{\frac{1}{P^2} + \frac{1}{R^2}}. \quad (29)$$

Κόπτει λοιπὸν ὁ στιγμιαῖος ἄξων τὴν πρώτην κάθετον εἰς ἀπόστασιν: $\frac{\frac{1}{P}}{\frac{1}{P^2} + \frac{1}{R^2}} \equiv \frac{PR^2}{P^2 + R^2}$ ***ἀπὸ τὸ Ο′ καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν «εὐθειοποιοῦσαν» εὐθεῖαν*** $(y = 0, \; z = -\frac{R}{P}x)$.

Ἡ δὲ ὀλίσθησις g γίνεται τώρα :

$$g \equiv (pv_{0x} + qv_{0y} + zv_{0z})\frac{1}{\omega} = -\frac{\frac{1}{R}}{\sqrt{\frac{1}{P^2} + \frac{1}{R^2}}} = \frac{-P}{\sqrt{P^2 + R^2}}. \quad (30)$$

20. **Μερικὴ περίπτωσις ἐπιπέδου τροχιᾶς τοῦ Ο′.** — Ἂν ἡ τροχιὰ τοῦ Ο′ εἶναι *ἐπίπεδος* καμπύλη, αἱ ἐξισώσεις (24), (25), (29) καὶ (30) ἁπλοποιοῦνται καὶ λαμβάνουν τὴν μορφήν :

$$p = 0, \; q = 0, \; r = \frac{1}{P}. \quad (24')$$

$$v_x = 1 - \frac{y}{P} + x', \; v_y = \frac{x}{P} + y', \; v_z = z'. \quad (25')$$

$$x = 0, \quad y = P. \quad (29')$$

$$g = 0. \quad (30')$$

Ἑπομένως τότε : 1) ***Ὁ στιγμ. ἄξων ἑλικώσεως συμπίπτει μὲ τὸν ἄξονα καμπυλότητος τῆς τροχιᾶς τοῦ Ο΄.***

2) ***Ἡ ἑλίκωσις καταντᾷ ἁπλῆ περιστροφή·*** διότι αἱ προβολαὶ τῆς ταχύτητος τῶν σημείων τοῦ στιγμ. ἄξονος, εὑρισκόμεναι ἀπὸ τοὺς τύπους : $v_x = 1 - \frac{y}{P}$, $v_y = \frac{x}{P}$, $v_z = 0$, ἂν θέσωμεν : $x=0$, $y=P$, γίνονται : $v_x = 1 - \frac{P}{P} = 0$, $v_y = 0$, $v_z = 0$, δηλ. $v=0$.

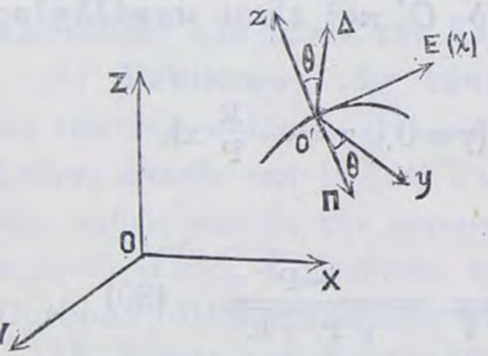
(Ὅτι τότε ἔχομεν ἁπλῆν περιστροφήν, φαίνεται καὶ ἀπὸ τὴν τιμὴν τῆς ὀλισθήσεως g (τύπ. 30), ποὺ τώρα καταντᾷ $=0$).

Ἀσκήσεις καὶ Προσθῆκαι.

1) Μερικὴ περίπτωσις, ποὺ ἡ τροχιὰ τοῦ Ο΄ εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης τοῦ σημείου Β (ΟΒ=1) τοῦ ἄξονος Oy_1 (Σχ. 8). [Ἀπ. (31) $v = \sqrt{\frac{1}{P^2} + \frac{1}{R^2}} = \frac{1}{PR}\sqrt{P^2+R^2}$ = «***ὁλικὴ***» ***καμπυλότης*** τῆς τροχιᾶς τοῦ Ο΄].

3) Ἂν ***μόνον*** ὁ κινούμενος ἄξων Ο΄x συμπίπτῃ μὲ τὴν ἐφαπτομένην Ο΄Ε τῆς τροχιᾶς τοῦ Ο΄ (Σχ. 9) καὶ ὀνομάσωμεν ϑ τὴν (***μεταβλητὴν*** ἐν γένει), γωνίαν τῶν ἀξ.Ο΄y καὶ Ο΄Π, εὑρίσκομεν διὰ τὰς προβ. τῆς ταχύτητος v_x, v_y, v_z γενικωτέρους τύπους ἀπὸ τοὺς τοῦ Darboux, ὡς ἑξῆς : Τὸ ***τρίεδρον*** (Ο΄x,Ο΄y,Ο΄z) ἔχει ***περιστροφὰς*** p,q,r· τοῦ δὲ πρωτεύοντος τριέδρου τῆς τροχιᾶς τοῦ Ο΄ αἱ περιστροφαὶ



(Σχ. 9.)

εἶναι (§ 16) : $p_1 = -\frac{1}{R}$, $q_1 = 0$, $r_1 = \frac{1}{P}$· ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὰς μεταξὺ τῶν p,q,r καὶ p_1, q_1, r_1 σχέσεις. Ἡ περιστροφὴ ω τοῦ τριέδρου Ο΄xyz θὰ εἶναι ***γεωμετρικὸν ἄθροισμα*** τῆς περιστροφῆς ω_1 τοῦ πρωτ. τριέδρου Ο΄ΕΠΔ καὶ τῆς ***σχετικῆς*** περιστροφῆς ω_σ τοῦ Ο΄xyz πρὸς τὸ Ο΄ΕΠΔ· ἑπομένως αἱ προβολαὶ p,q,r τῆς ω θὰ εἶναι ***ἀλγεβρικὰ*** ἀθροίσματα τῶν ὁμωνύμων προβολῶν τῆς ω_1 καὶ τῆς ω_σ· ἐπειδὴ ὅμως μόνη δυνατὴ κίνησις τοῦ Ο΄xyz πρὸς τὸ Ο΄ΕΠΔ εἶναι ἡ περιστροφὴ πέριξ τῆς ***κοινῆς*** ἀκμῆς των Ο΄Ε ≡ Ο΄x, δηλαδὴ ἢ $\frac{d\vartheta}{dt}\equiv\vartheta'$, εὑρίσκομεν ἀμέσως, ὅτι :

$$p=p_1+\vartheta',\quad q=q_1\sigma\upsilon\nu\vartheta+r_1\eta\mu\vartheta,\quad r=-q_1\eta\mu\vartheta+r_1\sigma\upsilon\nu\vartheta,$$

$$\text{δηλ. } p=-\frac{1}{R}+\vartheta',\quad q=\frac{\eta\mu\vartheta}{P},\quad r=\frac{\sigma\upsilon\nu\vartheta}{P}.$$

ἑπομένως οἱ τύποι (15) τῆς § 14 γίνονται τώρα :

$$(32)\quad\begin{cases} v_x=1+\frac{1}{P}(z\eta\mu\vartheta-y\sigma\upsilon\nu\vartheta)+x', \\ v_y=\frac{x\sigma\upsilon\nu\vartheta}{P}-z\left(-\frac{1}{R}+\vartheta'\right)+y', \\ v_z=\left(-\frac{1}{R}+\vartheta'\right)y-\frac{x\eta\mu\vartheta}{P}+z'. \end{cases}$$

Καὶ ἂν ἡ γωνία ϑ εἶναι ***σταθερά,*** ἔχομεν τοὺς ἁπλουστέρους τύπους : $v_x=1+\frac{1}{P}(z\eta\mu\vartheta-y\sigma\upsilon\nu\vartheta)+x'$, $v_y=\frac{x\sigma\upsilon\nu\vartheta}{P}+\frac{z}{R}+y'$,

$$v_z=-\frac{y}{R}-\frac{x\eta\mu\vartheta}{P}+z'.\quad (32')$$

Διὰ δὲ $\vartheta=0$ ἐπανευρίσκομεν τοὺς τύπους τοῦ Darboux.

Παρατήρησις α΄. Τὰ ποσά : $\frac{\sigma\upsilon\nu\vartheta}{P},\ \frac{\eta\mu\vartheta}{P},\ -\frac{1}{R}+\vartheta'$ ἐπιδέχονται τὴν ἑξῆς ***γεωμετρικὴν*** ἑρμηνείαν : ἂν θεωρήσωμεν μίαν τυχοῦσαν ἐπιφάνειαν, ποὺ νὰ διέρχεται ἀπὸ τὴν τροχιὰν τοῦ Ο΄ καὶ νὰ ἔχῃ ***κατὰ μῆκος τῆς τροχιᾶς αὐτῆς*** κάθετον τὴν Ο΄y, τὰ τρία προηγούμενα ποσὰ εἶναι ἡ ***κάθετος καμπυλότης,*** ἡ ***γεωδαισιακὴ καμπυλότης*** καὶ ἡ ***γεωδαισιακὴ στρέψις*** τῆς τροχιᾶς τοῦ Ο΄. (Βλέπε τὸ βιβλίον μου : ***Θεωρία Ἐπιφανειῶν***).

Παρατήρησις β΄. Τοὺς τύπους (32) εἰμποροῦμεν νὰ τοὺς εὕρωμεν καὶ μὲ ἄλλον τρόπον (μὲ περισσοτέρας ὅμως πράξεις), ἂν ἐκφράσωμεν τὰ ἀθροίσματα $\Sigma\alpha_3\alpha'_2=p$ κτλ. διὰ τῶν ξ,η,ζ,λ,μ,ν καὶ τῶν παραγώγων των ἀπὸ τὰς σχέσεις : $\alpha_2=\xi\sigma\upsilon\nu\vartheta+\lambda\eta\mu\vartheta$ κτλ.,

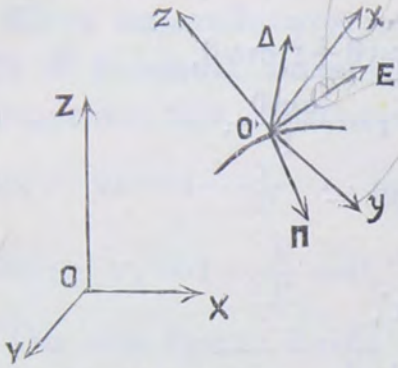
$$\alpha_3=-\xi\eta\mu\vartheta+\lambda\sigma\upsilon\nu\vartheta \text{ κτλ.}$$

4) Νὰ εὑρεθοῦν μὲ ὅμοιον τρόπον, ἂν συμπίπτουν ***μόνον*** οἱ δύο ἄξ. Ο΄Π καὶ Ο΄y, οἱ ἀντίστοιχοι τύποι διὰ τὰ v_x, v_y, v_z.

5) Ὁμοίως, ὅταν συμπίπτουν οἱ Ο΄Δ καὶ Ο΄z.

6) Ἂς λάβωμεν τώρα τὴν γενικὴν περίπτωσιν, ποὺ οἱ ἄξονες Ο΄xyz εἶναι ***ἄσχετοι*** πρὸς τὸ πρωτ. τρίεδρον Ο΄ΕΠΔ τῆς τροχιᾶς (Σχ. 10)·

ἐκφράζοντες τὰς ἀπολύτους (πρὸς τοὺς ἀκινήτους ἄξονας) περιστροφὰς τοῦ α΄ τριέδρου p,q,r, μὲ τὰς ἀπολύτους τοῦ δευτέρου p_1,q_1,r_1 καὶ μὲ τὰς ***σχετικὰς*** περιστροφὰς τοῦ $O'xyz$ πρὸς τὸ $O'\Pi E\Delta$, θὰ ἔχωμεν προφανῶς:



(Σχ. 10).

$$p=p_1\alpha_1+q_1\xi_1+r_1\lambda_1+p_\sigma,\quad q=p_1\beta_1+q_1\eta_1+r_1\mu_1+q_\sigma,\quad r=p_1\gamma_1+q_1\zeta_1+r_1\nu_1+r_\sigma,$$

ὅπου $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1\cdot\ \xi_1,\eta_1,\zeta_1\cdot\ \lambda_1,\mu_1,\nu_1$ εἶναι κατὰ σειρὰν τὰ συνημίτονα τῶν $O'E$, $O'\Pi$, $O'\Delta$ πρὸς τοὺς $O'x$, $O'y$, $O'z$ καὶ $p_\sigma, q_\sigma, r_\sigma$ αἱ προβολαὶ ἐπὶ τῶν ἀξόνων $O'xyz$ τῆς σχετικῆς περιστροφῆς ω_σ τοῦ τριέδρου $O'xyz$ πρὸς τὸ $O'E\Pi\Delta$· καὶ ἐπειδὴ $p_\sigma=\gamma_1\beta'_1+\zeta_1\eta'_1+\nu_1\mu'_1$, $q_\sigma=\alpha_1\gamma'_1+\xi_1\zeta'_1+\lambda_1\nu'_1$, $r_\sigma=\beta_1\alpha'_1+\eta_1\xi'_1+\mu_1\lambda'_1$, οἱ προηγούμενοι τύποι λαμβάνουν τὴν τελικὴν μορφήν:

$$(33)\quad \begin{cases} p=\dfrac{\lambda_1}{P}-\dfrac{\alpha_1}{R}+(\gamma_1\beta'_1+\zeta_1\eta'_1+\nu_1\mu'_1), \\[2mm] q=\dfrac{\mu_1}{P}-\dfrac{\beta_1}{R}+(\alpha_1\gamma'_1+\xi_1\zeta'_1+\lambda_1\nu'_1), \\[2mm] r=\dfrac{\nu_1}{P}-\dfrac{\gamma_1}{R}+(\beta_1\alpha'_1+\eta_1\xi'_1+\mu_1\lambda'_1). \end{cases}$$

Ἑπομένως αἱ προβολαὶ τῆς ταχύτητος v_x, v_y, v_z ἐκφράζονται τώρα ὡς ἑξῆς:

$$(34)\quad \begin{cases} v_x=v_{0x}+\left(\dfrac{\mu_1}{P}-\dfrac{\beta_1}{R}+\alpha_1\gamma'_1+\xi_1\zeta'_1+\lambda_1\nu'_1\right)z- \\ \qquad -\left(\dfrac{\nu_1}{P}-\dfrac{\gamma_1}{R}+\beta_1\alpha'_1+\eta_1\xi'_1+\mu_1\lambda'_1\right)y+x'. \\[2mm] v_y=v_{0y}+\left(\dfrac{\nu_1}{P}-\dfrac{\gamma_1}{R}+\beta_1\alpha'_1+\eta_1\xi'_1+\mu_1\lambda'_1\right)x- \\ \qquad -\left(\dfrac{\lambda_1}{P}-\dfrac{\alpha_1}{R}+\gamma_1\beta'_1+\zeta_1\eta'_1+\nu_1\mu'_1\right)z+y', \\[2mm] v_z=v_{0z}+\left(\dfrac{\lambda_1}{P}-\dfrac{\alpha_1}{R_1}+\gamma_1\beta'_1+\zeta_1\eta'_1+\nu_1\mu'_1\right)y- \\ \qquad -\left(\dfrac{\mu_1}{P}-\dfrac{\beta_1}{R_1}+\alpha_1\gamma'_1+\xi_1\zeta'_1+\lambda_1\nu'_1\right)x+z'. \end{cases}$$ [1]

Οἱ τύποι (33) καὶ (34) εἶναι ***οἱ γενικώτεροι ἀπὸ ὅλους*** καὶ περιλαμβάνουν ἑπομένως ὅλους τοὺς προηγουμένους ὡς ***μερικὰς*** περιπτώσεις.

---

(1) *Congrès International des mathématiciens (Zurich, 1932): N. Hatzidakis, Beziehungen zwischen den Drehungskomponenten eines beweglichen Achsensystems und den Krümmungen der Bahnkurve des beweglichen Anfangspunktes.*

7) *Ὁ στιγμιαῖος ἄξων ἑλικώσεως τοῦ πρωτεύοντος τριέδρου τῆς καμπύλης εἶναι τὸ ὅριον τῆς κοινῆς καθέτου τῆς πρώτης καθέτου ΜΠ εἰς τὸ Μ καὶ τῆς πρώτης καθέτου Μ'Π' εἰς τὸ Μ', ὅταν τὸ Μ' τείνῃ νὰ πέσῃ εἰς τὸ Μ.*

Ἀπόδειξις. Ἂν τοὺς γνωστοὺς τύπους:

(α) $\begin{vmatrix} X-x & \xi & \Delta\xi \\ Y-y & \eta & \Delta\eta \\ Z-z & \zeta & \Delta\zeta \end{vmatrix} = 0$ (ἐξίσωσις τοῦ διὰ τῆς ΜΠ παραλλήλου πρὸς τὴν Μ'Π' ἐπιπέδου (Σ)),

(β) $\begin{vmatrix} X-x & \xi & \eta\Delta\zeta-\zeta\Delta\eta \\ Y & y & \eta & \zeta\Delta\xi-\xi\Delta\zeta \\ Z-z & \zeta & \xi\Delta\eta-\eta\Delta\xi \end{vmatrix}=0$ (ἐξίσωσις τοῦ διὰ τῆς ΜΠ καθέτου ἐπὶ τὸ (Σ) ἐπιπέδου (Σ_1),

(γ) $\begin{vmatrix} X-x-\Delta x & \xi+\Delta\xi & \eta\Delta\zeta-\zeta\Delta\eta \\ Y-y-\Delta y & \eta+\Delta\eta & \zeta\Delta\xi-\xi\Delta\zeta \\ Z-z-\Delta z & \zeta+\Delta\zeta & \xi\Delta\eta-\eta\Delta\xi \end{vmatrix}=0$ (ἐξίσωσις τοῦ διὰ τῆς Μ'Π' καθέτου ἐπὶ τὸ (Σ) ἐπιπέδου (Σ_2),

τοὺς ἐφαρμόσωμεν εἰς τὴν περίπτωσιν, ποὺ ἄξονες εἶναι αἱ πρωτεύουσαι εὐθεῖαι εἰς τὸ Μ, θὰ ἔχωμεν:

$$(\alpha')\begin{vmatrix} X & 0 & \Delta\xi \\ Y & 1 & \Delta\eta \\ Z & 0 & \Delta\zeta \end{vmatrix}=0,\quad (\beta')\begin{vmatrix} X & 0 & \Delta\zeta \\ Y & 1 & 0 \\ Z & 0 & -\Delta\xi \end{vmatrix}=0,\quad (\gamma')\begin{vmatrix} X-\Delta x & \Delta\xi & \Delta\zeta \\ Y-\Delta y & 1+\Delta\eta & 0 \\ Z-\Delta z & \Delta\zeta & -\Delta\xi \end{vmatrix}=0\cdot$$

αἱ δύο ἐξισώσεις (β') καὶ (γ') μᾶς δίδουν, ὡς γνωστόν, τὴν ***κοινὴν κάθετον*** τῶν ΜΠ καὶ Μ'Π'· ἡ ὁρικὴ ὅμως μορφή των εἶναι ἡ ἑξῆς:

$$(\beta'')\quad \frac{d\xi}{ds}X+\frac{d\zeta}{ds}Z=0$$

καί:

$$(\gamma'')\quad \frac{dx}{ds}\cdot\frac{d\xi}{ds}+\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d\zeta}{ds}+\frac{d\zeta}{ds}\left(Y\frac{d\zeta}{ds}-Z\frac{d\eta}{ds}\right)-\frac{d\xi}{ds}\left(X\frac{d\eta}{ds}-Y\frac{d\xi}{ds}\right)=0$$

καὶ ὕστερ' ἀπὸ τὰς πράξεις:

$$(\beta''')\quad \frac{X}{P}+\frac{Z}{R}=0 \quad \text{καὶ} \quad (\gamma''')\quad -\frac{1}{P}+Y\left(\frac{1}{P^2}+\frac{1}{R^2}\right)=0,$$

δηλ. ἐπανευρίσκομεν τὸν στιγμιαῖον ἄξονα ἑλικώσεως.

8—9) Νὰ δειχθῇ ὁμοίως, ὅτι ἡ κοινὴ κάθετος ***δύο ἐφαπτομένων*** εἰς τὰ Μ, Μ' ἔχει ὅριον τὴν ***ὀρθίαν κάθετον***· καὶ ἡ κοινὴ κάθετος ***δύο δικαθέτων***, τὴν ***ἐφαπτομένην***.

10) ***Εὕρεσις τῶν τύπων τοῦ Darboux χωρὶς τὴν ἔννοιαν τῆς ταχύτητος*** [1]. — Εἰμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν τοὺς τύπους τοῦ Darboux καὶ μὲ κάπως διαφορετικὸν τρόπον, ***χωρὶς νὰ μεταχειρισθοῦμεν ταχύτητας.*** (Ἡ ταχύτης v τοῦ Darboux δὲν εἶναι ἄλλο παρὰ ὁ ***λόγος*** $\frac{ds}{ds_0}$ ***δύο τόξων).***

Ἔχομεν διὰ τὰς ***ἀπολύτους*** καὶ τὰς ***σχετικὰς*** (πρὸς τὸ πρωτεῦον τρίεδρον μιᾶς καμπύλης) συντεταγμένας τοῦ τυχόντος σημείου M_1 τοὺς τύπους μεταβάσεως:

$$X = X_0 + \alpha x + \xi y + \lambda z, \quad Y = Y_0 + \beta x + \eta y + \mu z, \quad Z = Z_0 + \gamma x + \zeta y + \nu z.$$

Ἑπομένως:

$$dX = dX_0 + \alpha dx + \xi dy + \lambda dz + x d\alpha + y d\xi + z d\lambda, \ dY = \ldots, \ dZ = \ldots;$$

καὶ ἂν θέσωμεν: $\frac{dX}{dS} = A$, $\frac{dY}{dS} = B$, $\frac{dZ}{dS} = \Gamma$, ἔχομεν:

$$AdS = \alpha ds_0 + \alpha dx + \xi dy + \lambda dz + x d\alpha + y d\xi + z d\lambda \text{ κτλ.}$$

(ὅπου ds_0 εἶναι τὸ διαφορικὸν τῆς τροχιᾶς τῆς κινητῆς ἀρχῆς, dS τὸ διαφορικὸν τῆς τροχιᾶς τοῦ M_1 καὶ A, B, Γ τ' ἀπόλυτα συνημίτονα τῆς ἐφαπτομένης της).

Καὶ ἂν τὰς τρεῖς αὐτὰς ἰσότητας:

$$AdS = \alpha ds_0 + \ldots, \quad BdS = \beta ds_0 + \ldots, \quad \Gamma dS = \gamma ds_0 + \ldots$$

τὰς πολλαπλασιάσω κατὰ σειρὰν ἐπὶ α, β, γ καὶ τὰς προσθέσω, εὑρίσκω:

$$dS.\Sigma A\alpha = ds_0 \Sigma\alpha^2 + dx\Sigma\alpha^2 + dy\Sigma\alpha\xi + dz\Sigma\alpha\lambda + x\Sigma\alpha d\alpha + y\Sigma\alpha d\xi + z\Sigma\alpha d\lambda,$$

δηλ. (α) $dS \sigma\upsilon\nu\varphi_1 = ds_0 + dx - y\frac{ds_0}{P}$. [2].

Ὁμοίως δέ, ἂν πολλαπλασιάσω κατὰ σειρὰν ἐπὶ ξ, η, ζ καὶ προσθέσω καὶ ἔπειτα ἐπὶ λ, μ, ν καὶ προσθέσω, εὑρίσκω:

---

[1] *N. Hatzidakis, Geometrical proof of Darboux's kinematical formulas.* ***Δελτίον Ἑλλ. Μαθ. Ἑταιρείας, Τ. 6ος, σελ. 15.***

[2] Λαμβάνω τὴν τιμὴν τοῦ $\Sigma\alpha d\xi$ ἀπὸ τοὺς τύπους τοῦ Frenet (σελ. 28—9), οἱ ὁποῖοι διαφέρουν ἀπὸ τοὺς ἰδίους τύπους τῆς ***Διαφορικῆς*** Γεωμετρίας (ὅπως συνήθως τοὺς γράφομεν) ***κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ*** $\frac{1}{R}$ (ἢ ***τοῦ*** $d\tau$)· ἐπομένως εἰς τὴν Κινητικὴν Γεωμετρίαν ὅλοι οἱ τύποι θὰ διαφέρουν ἀπὸ τοὺς ἀντιστοίχους τῆς ***Διαφορικῆς*** κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ $\frac{1}{R}$ (ἢ τοῦ $d\tau$).

$$dS\Sigma A\xi = ds_0\Sigma\alpha\xi + dx\Sigma\alpha\xi + dy\Sigma\xi^2 + dz\Sigma\lambda\xi + x\Sigma\xi d\alpha + y\Sigma\xi d\xi + z\Sigma\xi d\lambda,$$
$$dS\Sigma A\lambda = ds_0\Sigma\alpha\lambda + dx\Sigma\alpha\lambda + dy\Sigma\xi\lambda + dz\Sigma\lambda^2 + x\Sigma\lambda d\alpha + y\Sigma\lambda d\xi + z\Sigma\lambda d\lambda,$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{δηλ.}: \quad dS\,\text{συν}\varphi_2 = dy + \left(\frac{x}{P} + \frac{z}{R}\right)ds_0 \\ &\text{καί}: \quad dS\,\text{συν}\varphi_3 = dz - \frac{y}{R}ds_0 \end{aligned}\right\} (\beta)$$

(ὅπου $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ εἶναι κατὰ σειρὰν αἱ γωνίαι τῆς ἐφαπτομένης τῆς τροχιᾶς τοῦ M_1 πρὸς τοὺς ἄξονας τοῦ πρωτεύοντος τριέδρου τῆς M).

Οἱ τρεῖς αὐτοὶ τύποι (α) καὶ (β) συμπίπτουν μὲ τοὺς τοῦ Darboux, ἂν λάβωμεν $ds_0 = dt$, διαιρέσωμεν διὰ τοῦ ds_0 καὶ παραστήσωμεν διὰ v_x, v_y, v_z τὰς προβολὰς τῆς ταχύτητος τοῦ M_1: $\frac{dS}{ds_0} = \frac{dS}{dt} = v$ ἐπὶ τῶν ἀξόνων Mxyz, δηλ. τὰ ποσά:

$$\frac{dS}{ds_0}\text{συν}\varphi_1, \quad \frac{dS}{ds_0}\text{συν}\varphi_2, \quad \frac{dS}{ds_0}\text{συν}\varphi_3.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

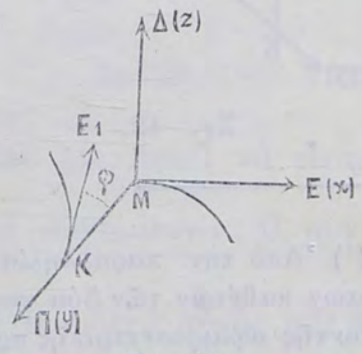
ΚΑΜΠΥΛΑΙ ΚΑΙ ΑΝΑΠΤΥΚΤΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΙ ΣΥΝΔΕΟΜΕΝΑΙ ΜΕ ΜΙΑΝ ΚΑΜΠΥΛΗΝ

α') Καμπύλη τῶν κέντρων καμπυλότητος.

21. Αἱ ***σχετικαὶ*** συντεταγμέναι τοῦ κέντρου καμπυλότητος K εἶναι προφανῶς: $x=0$, $y=P$, $z=0$ (Σχ. 11) (ὅπου ἀντὶ O θὰ γράφωμεν τοῦ λοιποῦ M). Οἱ τύποι λοιπὸν τοῦ Darboux γίνονται τώρα:

$$v_{x_1} = 1 - \frac{P}{P} = 0, \quad v_y = \frac{dP}{ds}, \quad v_z = -\frac{P}{R}$$

(ἀντὶ s_0 γράφομεν ἁπλῶς s). Ἡ α' ἐξίσωσις μᾶς δεικνύει ἀμέσως, ὅτι: ***Ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης τῶν κέντρων κεῖται ἐπὶ τοῦ καθέτου ἐπιπέδου τῆς ἀρχικῆς καμπύλης***· ἡ δὲ β' καὶ ἡ γ' μᾶς δίδουν: (35) $ds_1 = \sqrt{\frac{P^2}{R^2} + \left(\frac{dP}{ds}\right)^2}\cdot ds$·



Σχ. 11.

$V = \frac{ds_1}{ds} = dt$

τέλος ἡ εφφ τῆς γωνίας τῆς ἐφαπτομένης τῆς β′ καμπύλης μὲ τὴν α′ κάθετον τῆς α′ δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον : (36) $\varepsilon\varphi\varphi = -\frac{Pds}{RdP}$. (Αἱ δύο αὐταὶ εὐθεῖαι ***συμπίπτουν,*** ὅταν $\varphi=0$, δηλ. ὅταν $\frac{1}{R} = 0$: εἰς τὰς ***ἐπιπέδους*** καμπύλας· εἶναι δὲ ***κάθετοι*** μεταξύ των, ὅταν $\varphi=\frac{\pi}{2}$, δηλ. ὅταν $dP=0$, $P=$σταθ. : εἰς τοὺς ***στρεβλοὺς*** κύκλους).

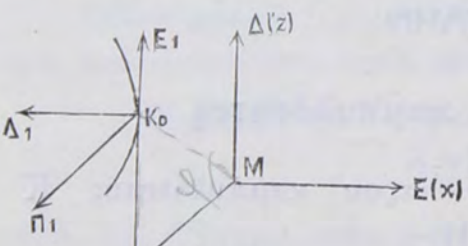
Παρατήρησις. Τὰς ἐξισώσεις τῆς καμπύλης τῶν κέντρων πρὸς τοὺς ***ἀκινήτους*** ἄξονας τὰς εὑρίσκομεν ἀμέσως ἀπὸ τὰς σχέσεις : $X=X_0+\alpha x+\xi y+\lambda z$ κτλ., ἂν ὑποθέσωμεν : $x=0$, $y=P$, $z=0$· καὶ εἶναι : $X = X_0+P\xi$ κτλ., ἢ μὲ τὴν γραφὴν τῆς ***Διαφορικῆς*** Γεωμετρίας : $x_1=x+\rho\xi$ κτλ.

β′) Σφαιροκεντρικὴ καμπύλη.

22. Τὸ κέντρον K_0 τῆς ἐγγυτάτης σφαίρας ἔχει ***σχετικὰς*** συντεταγμένας : $x=0$, $y=P$, $z= -\frac{dP}{d\tau}$ (Σχ. 12). Θὰ ἔχωμεν λοιπόν :

$$v_{x_0}= 1 - \frac{P}{P}=0,\quad v_{y_0}= -\frac{1}{R}\cdot\frac{dP}{d\tau}+\frac{dP}{ds}=0,$$

$$v_z =-\frac{P}{R}-\frac{d^2P}{d\tau^2}\cdot\frac{d\tau}{ds}=-\frac{1}{R}\left(P + \frac{d^2P}{d\tau^2}\right).$$



Σχ. 12.

οἱ δύο πρῶτοι τύποι μᾶς λέγουν, ὅτι : ***Ἡ ἐφαπτομένη τῆς σφαιροκεντρικῆς καμπύλης εἶναι ὁ ἄξων καμπυλότητος τῆς ἀρχικῆς καμπύλης, ἑπομένως παράλληλος πρὸς τὴν ὀρθίαν της κάθετον***(1)· ὁ δὲ γ′ μᾶς δίδει :

(1) Ἀπὸ τὴν παραλληλίαν αὐτὴν συνάγεται ἀμέσως καὶ ἡ παραλληλία τῶν πρώτων καθέτων τῶν δύο καμπύλων καὶ ἑπομένως καὶ ἡ παραλληλία τῆς δικαθέτου τῆς σφαιροκεντρικῆς πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἀρχικῆς καμπύλης· διότι, ἂν εἶναι γενικῶς διὰ δύο καμπύλας (εἰς τὰ ἀντίστοιχα σημεῖά των) : $\alpha_1=\pm\lambda$ κτλ., θὰ ἔχωμεν καί: $\frac{\xi_1}{P_1}ds_1 = \pm\frac{\xi}{R}ds$ κτλ. ὅθεν: $\frac{ds_1}{P_1} = \pm\frac{ds}{R}$, ἑπομένως καί: $\xi_1=\pm\xi$ κτλ. (Βλέπε καὶ τὸ ἑπόμενον κεφάλαιον).

$ds_1 = -\frac{1}{R}\left(P+\frac{d^2P}{d\tau^2}\right)ds$ (37). Ἐπίσης εὑρίσκομεν ἀμέσως τὴν σχετικὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐγγυτάτης σφαίρας:

$$\Sigma x^2 = 2Py - 2\frac{dP}{d\tau}z \qquad (38)$$

καὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας $KMK_0 \equiv \varphi$: $\varepsilon\varphi\varphi = -\frac{1}{P}\frac{dP}{d\tau}$ (39).

Παρατήρησις. Αἱ ἀπόλυτοι συντεταγμέναι τοῦ κέντρου καὶ ἡ ἀπόλυτος ἐξίσωσις τῆς σφαίρας εὑρίσκονται ἀπὸ τοὺς τύπους:

$X = X_0 + \alpha x + \xi y + \lambda z$ κτλ. καὶ εἶναι: $x_0 = x + \varrho\xi - \lambda\frac{d\varrho}{d\tau}$ (40) κτλ. καί:

$$\Sigma(X-x)^2 = 2P\Sigma(X-x)\xi - 2\frac{dP}{d\tau}\Sigma(X-x)\lambda \ (41).$$

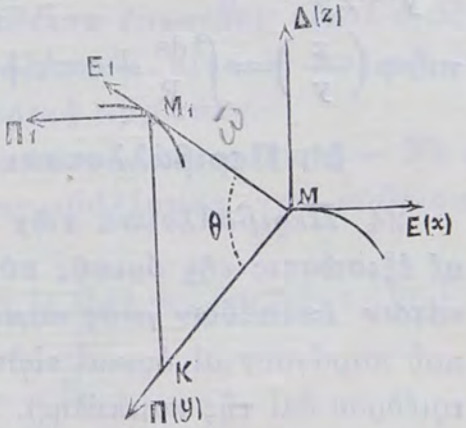
γ′) Ἐνειλιγμέναι μιᾶς καμπύλης.

23. Αἱ σχετικαὶ συντεταγμέναι ἑνὸς τυχόντος σημείου M_1 τοῦ καθέτου ἐπιπέδου μιᾶς καμπύλης εἶναι: $0, y, z$ (Σχ. 13)· καὶ ἂν θέσωμεν $MM_1 = \omega$ καὶ γωνία $KMM_1 = \vartheta$, θὰ εἶναι $y = \omega\sigma\upsilon\nu\vartheta$, $z = \omega\eta\mu\vartheta$· οἱ τύποι λοιπὸν τοῦ Darboux γίνονται

διὰ τὸ M_1: $v_x = 1 - \frac{\omega}{P}\sigma\upsilon\nu\vartheta$,

$$v_y = \frac{\omega}{R}\eta\mu\vartheta + (\omega\sigma\upsilon\nu\vartheta)',$$

$v_z = -\frac{\omega}{R}\sigma\upsilon\nu\vartheta + (\omega\eta\mu\vartheta)'$· διὰ νὰ εἶναι τώρα ἡ MM_1 ἐφαπτομένη τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου τοῦ M_1 (δηλ. ἡ καμπύλη τοῦ M_1 ἐνειλιγμένη τῆς πρώτης), πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι:



Σχ. 13.

$\frac{v_x}{0} = \frac{v_y}{\sigma\upsilon\nu\vartheta} = \frac{v_z}{\eta\mu\vartheta}$ (διότι ἡ MM_1 ἔχει σχετικὰ συνημίτονα: 0, συνθ, ημθ)· δηλ. $v_x = 0$, $\frac{v_y}{\sigma\upsilon\nu\vartheta} = \frac{v_z}{\eta\mu\vartheta}$· ἡ α′ ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς μᾶς δίδει: (42) $\omega = \frac{P}{\sigma\upsilon\nu\vartheta}$· ἡ προβολὴ δηλ. τοῦ M_1 ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου xy εἶναι τὸ κέντρον καμπυλότητος· καὶ ἐπομένως: ***Αἱ ἐνειλιγμέναι κεῖνται ὅλαι ἐπὶ τῆς πολικῆς ἐπιφανείας τῆς ἀρχικῆς καμπύλης.*** Ἡ β′ ἐξίσωσις

δίδει : $\frac{\omega}{R}$εφϑ$-\omega$εφϑϑ$'=-\frac{\omega}{R}$σφϑ$+\omega$σφϑ.ϑ$'$, δηλ. εφϑ$\left(\frac{1}{R}-\vartheta'\right)=$
$=-$σφϑ$\left(\frac{1}{R}-\vartheta'\right)$, ἢ καί : $\left(\frac{1}{R}-\vartheta'\right)\frac{1}{\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta}=0$ καὶ ἑπομένως :
$\frac{1}{R}-\vartheta'=0$ καὶ $\vartheta=\int\frac{ds}{R}+c=\tau+c$ (43).

Αἱ σχετικαὶ λοιπὸν ἐξισώσεις τῶν ἐνειλιγμένων εἶναι :

$$x=0,\quad y=P,\quad z=P\varepsilon\varphi(\tau+c) \quad (44).$$

Παρατήρησις α΄. Τὰς ***ἀπολύτους*** ἐξισώσεις τῶν ἐνειλιγμένων μᾶς τας δίδουν πάλιν ἀμέσως οἱ τύποι :

$X=X_0+\alpha x+\xi y+\lambda z$ κτλ. καὶ εἶναι : $X=x+\rho\xi+\lambda\rho\varepsilon\varphi(\tau+c)$ κτλ. (45).

Παρατήρησις β΄. Εἰς τὰ ἴδια ἐξαγόμενα φθάνομεν καὶ χωρὶς τὴν βοήθειαν τῆς γωνίας ϑ, ὡς ἑξῆς.

Ἔχομεν ἀπὸ τὰς προηγουμένας ἐξισώσεις : $\dfrac{\frac{dy}{ds}+\frac{z}{R}}{\frac{dz}{ds}-\frac{y}{R}}=-\frac{y}{z}$, ἢ καί:

$\frac{ydz-zdy}{y^2+z^2}=\frac{ds}{R}$ καὶ ὁλοκληρώνοντες εὑρίσκομεν :

τοξεφ$\left(\frac{z}{y}\right)=\int\frac{ds}{R}+c=\tau+c$, $\frac{z}{y}=$εφ$(\tau+c)$, ἢ καὶ εφϑ$=$εφ$(\tau+c)$κτλ.

δ΄) Περιβάλλουσαι τῶν πρωτευόντων ἐπιπέδων.

24. ***Περιβάλλουσα τῶν ἐγγυτάτων ἐπιπέδων.*** — ***Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῆς ὁρικῆς εὐθείας καὶ ἡ περιβάλλουσα τῶν ἐγγυτάτων ἐπιπέδων μιᾶς καμπύλης*** (δηλ. τῆς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας, ποὺ παράγουν αἱ ὁρικαὶ εὐθεῖαι κατὰ τὴν ***κύλισιν***(1) τοῦ πρωτεύοντος τριέδρου ἐπὶ τῆς καμπύλης).

Κάθε σημεῖον τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου ἔχει σχετικὰς συντεταγμένας x,y,0· οἱ τύποι τοῦ Darboux γίνονται δι' αὐτό :

$$v_x=1-\frac{y}{P}+x',\quad v_y=\frac{x}{P}+y',\quad v_z=-\frac{y}{R}.$$

ἡ ***ὁρικὴ*** ὅμως εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ (δηλ. τὸ ὅριον τῆς τομῆς του μὲ τὸ εἰς τὸ Μ΄ ἐγγύτατον ἐπίπεδον) εἶναι προφανῶς ***ὁ τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων αἱ ταχύτητες κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἰδίου ἐπιπέδου***· ὥστε δι' αὐτὰ — καὶ μόνον δι' αὐτὰ — θὰ ἐπαληθεύεται

(1) ***Κύλισιν*** τοῦ τριέδρου θὰ λέγωμεν συντόμως τὴν μετάβασίν του ἀπὸ σημεῖον εἰς σημεῖον τῆς καμπύλης μὲ τὴν διατήρησιν τῆς ἰδιότητός του ὡς πρωτεύοντος

ἡ σχέσις : $\frac{y}{R}=0$· ἂν λοιπὸν ἡ καμπύλη δὲν εἶναι ***ἐπίπεδος*** (ὅτε τὸ ἐγγύτατόν της ἐπίπεδον εἶναι τὸ ***ἀκίνητον*** ἐπίπεδον, ὅπου κεῖται), θὰ εἶναι $y=0$· δηλ. ***Ὁρικὴ εὐθεῖα τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου εἶναι ἡ ἐφαπτομένη***· καὶ ἑπομένως ***λαιμὸς τῆς περιβαλλούσης (ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας) τῶν ἐγγυτάτων ἐπιπέδων (τοῦ τόπου δηλ. τῶν ἐφαπτομένων) εἶναι ἡ ἰδία ἡ καμπύλη.***

25. ***Περιβάλλουσα τῶν καθέτων ἐπιπέδων.— Νὰ εὑρεθῇ ὁμοίως ἡ ὁρικὴ εὐθεῖα καὶ ἡ περιβάλλουσα τῶν καθέτων ἐπιπέδων μιᾶς καμπύλης.***

Κάθε σημεῖον τοῦ καθέτου ἐπιπέδου ἔχει σχετικὰς συντεταγμένας : $0,y,z$· ὥστε δι' αὐτὸ θὰ εἶναι :

$$v_x = 1-\frac{y}{P}, \quad v_y = \frac{z}{R}+y', \quad v_z = -\frac{y}{R}+z'.$$

καὶ ἐπειδὴ τώρα πρέπει νὰ εἶναι: $v_x = 0$ (διότι ἡ ταχύτης τῆς ὁρικῆς εὐθείας θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου yz), θὰ ἔχωμεν : $1-\frac{y}{P}=0$, ἢ $y=P$· δηλ. ***Ὁρικὴ εὐθεῖα τοῦ καθέτου ἐπιπέδου εἶναι ὁ ἄξων καμπυλότητος· καὶ ἑπομένως περιβάλλουσα εἶναι ἡ πολικὴ ἐπιφάνεια καὶ λαιμός της ἡ σφαιροκεντρικὴ καμπύλη.***

26. ***Περιβάλλουσα τῶν εὐθειοποιούντων ἐπιπέδων. — Νὰ εὑρεθῇ τέλος ἡ ὁρικὴ εὐθεῖα καὶ ἡ περιβάλλουσα τῶν εὐθειοποιούντων ἐπιπέδων.***

Θὰ ἔχωμεν τώρα διὰ κάθε σημειον $(x,0,z)$ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ :

$$v_x = 1+x', \quad v_y = \frac{x}{P}+\frac{z}{R}, \quad v_z = z'.$$

ἑπομένως τὴν ὁρικὴν εὐθεῖαν ὁρίζει ἡ ἐξίσωσις :

$$\frac{x}{P}+\frac{z}{R}=0, \text{ ἢ } z=-\frac{R}{P}x \text{· δηλ.}$$

Ὁρικὴ εὐθεῖα τοῦ εὐθειοποιοῦντος ἐπιπέδου εἶναι ἡ εὐθειοποιοῦσα εὐθεῖα καὶ περιβάλλουσα ἡ εὐθειοποιοῦσα ἐπιφάνεια [1].

---

[1] Ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ λέγεται *εὐθειοποιοῦσα* (rectifiante), διότι *κατὰ τὴν ἀνάπτυξίν της ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τρέπει τὴν καμπύλην εἰς εὐθεῖαν γραμμήν*. Αὐτὸ φαίνεται ἀμέσως ὡς ἑξῆς· ἡ καμπύλη εἶναι προφανῶς *γεωδαισιακὴ* γραμμὴ τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς (ἀφοῦ ἡ πρώτη της κάθετος, ἡ ΜΠ, εἶναι κάθετος πρὸς

Παρατήρησις. Τὰ ***σχετικὰ*** συνημίτονα τῆς εὐθειοποιούσης εὐθείας εἶναι :

$$\text{συνϑ},\ 0,\ \text{ημϑ}\ \left(\text{εφϑ}=-\frac{R}{P}\right),\ \text{δηλ.}\ \frac{P}{\sqrt{P^2+R^2}},\ 0,\ \frac{-R}{\sqrt{P^2+R^2}}\ (46)\cdot$$

καὶ ἐπομένως ***τ' ἀπόλυτα*** (A, B, Γ) εἶναι :

$$A=\alpha\,\text{συνϑ}+\xi.0+\lambda\,\text{ημϑ}=\alpha\,\text{συνϑ}+\lambda\,\text{ημϑ},\quad B=\beta\,\text{συνϑ}+\mu\,\text{ημϑ},$$
$$\Gamma=\gamma\,\text{συνϑ}+\nu\,\text{ημϑ},$$

$$\text{δηλ.}\ A=\frac{\alpha P-\lambda R}{\sqrt{P^2+R^2}},\quad B=\frac{\beta P-\mu R}{\sqrt{P^2+R^2}},\quad \Gamma=\frac{\gamma P-\nu R}{\sqrt{P^2+R^2}}\ (47).$$

Αἱ ἀπόλυτοι λοιπὸν ἐξισώσεις τῆς εὐθειοποιούσης εὐθείας εἶναι :

$$(\alpha)\qquad \frac{X-x}{\alpha P-\lambda R}=\frac{Y-y}{\beta P-\mu R}=\frac{Z-z}{\gamma P-\nu R}\quad (48)$$

Καὶ αἱ παραμετρικαὶ ἐξισώσεις τῆς εὐθειοποιούσης ἐπιφανείας θὰ εἶναι ἐπομένως :

$$X=x+(\alpha P-\lambda R)\omega,\quad Y=y+(\beta P-\mu R)\omega,\quad Z=z+(\gamma P-\nu R)\omega\ (49).$$

(ω ὁ κοινὸς λόγος τῶν (α)· παράμετροι τὸ ω καὶ τὸ s τῆς καμπύλης).

ε´) Ἄλλαι ἀναπτυκταὶ ἐπιφάνειαι συνδεόμεναι μὲ τὴν καμπύλην.

27. ***Εὐθεῖαι διὰ τοῦ Μ ἐπὶ τοῦ καθέτου ἐπιπέδου***. — Εὐθεῖαι διερχόμεναι ἀπὸ τὸ Μ καὶ κείμεναι ἐπὶ τοῦ ***καθέτου*** ἐπιπέδου τῆς καμπύλης, ποὺ νὰ παράγουν, κατὰ τὴν κύλισίν του κατὰ μῆκος τῆς καμπύλης, ***ἀναπτυκτὰς*** ἐπιφανείας, προφανῶς δὲν ὑπάρχουν ἄλλαι ἀπὸ τὰς ***ἐνειλιγμένας*** τῆς καμπύλης (§ 23) (ποὺ ἔχουν **κλίσιν** πρὸς τὴν πρώτην της κάθετον : $\vartheta=\tau+c$).

28. Ἄς εὕρωμεν τώρα ***τὰς εὐθείας τὰς διὰ τοῦ Μ καὶ ἐπὶ τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου, πού, κατὰ τὴν κύλισίν του, παράγουν ἀναπτυκτὰς ἐπιφανείας***.

τὸ ἐπίπεδον ΕΜΔ, δηλ. τὸ ἐφαπτόμενον τῆς ἐπιφανείας)· ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν ἀνάπτυξιν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ***διατηροῦνται τὰ μήκη τῶν γραμμῶν τῆς ἐπιφανείας***, ἡ συντομωτέρα ὁδὸς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, ἡ ***γεωδαισιακή***, θὰ μετασχηματισθῇ εἰς τὴν συντομωτέραν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, δηλ. εἰς ***εὐθεῖαν*** γραμμήν.

Θὰ ἔχωμεν τώρα, ἂν θέσωμεν : $MM_1=\omega$: $x=\omega\sigma\upsilon\nu\vartheta$, $y=\omega\eta\mu\vartheta$, $z=0$ ($\vartheta=$γων. xMM_1)· θὰ εἶναι λοιπόν, διὰ τὸ σημεῖον M_1:

$$v_x = 1-\frac{\omega\eta\mu\vartheta}{P}+(\omega\sigma\upsilon\nu\vartheta)', \quad v_y=\frac{\omega\sigma\upsilon\nu\vartheta}{P}+(\omega\eta\mu\vartheta)', \quad v_z=-\frac{\omega\eta\mu\vartheta}{R}.$$

ἐπομένως, διὰ νὰ εἶναι ἡ MM_1 ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης τοῦ M_1, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι :

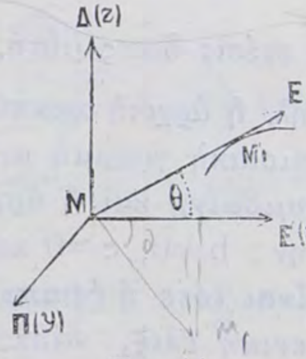
$$\frac{1-\dfrac{\omega\eta\mu\vartheta}{P}+(\omega\sigma\upsilon\nu\vartheta)'}{\sigma\upsilon\nu\vartheta}=\frac{\dfrac{\omega\sigma\upsilon\nu\vartheta}{P}+(\omega\eta\mu\vartheta)'}{\eta\mu\vartheta}=\frac{-\dfrac{\omega\eta\mu\vartheta}{R}}{0}.$$

θὰ εἶναι λοιπόν :

$\vartheta=0$ (ἂν δὲν εἶναι $\frac{1}{R}=0$, ὅτε τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον εἶναι ἀκίνητον, τὸ τῆς *ἐπιπέδου* καμπύλης).

Ὥστε : ***Εἰς μίαν στρεβλὴν καμπύλην δὲν ὑπάρχει ἐπὶ τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου καμία ἄλλη εὐθεῖα διὰ τοῦ M, ποὺ νά παράγη ἀναπτυκτὴν ἐπιφάνειαν, ἐκτὸς ἀπὸ τὴν ἐφαπτομένην· εἰς μίαν ἐπίπεδον ὅμως ὑπάρχουν προφανῶς ἄπειροι.***

29. ***Εὐθεῖαι διὰ τοῦ M ἐπὶ τοῦ εὐθειοποιοῦντος ἐπιπέδου.***—Εἰς τὸ ἀντίστοιχον πρόβλημα διὰ τὰς εὐθείας τοῦ εὐθειοποιοῦντος ἐπιπέδου τὰς διὰ τοῦ M, θὰ ἔχωμεν, διὰ τὸ τυχὸν σημεῖόν του M_1 (Σχ. 14) : $x=\omega\sigma\upsilon\nu\vartheta$, $y=0$, $z=\omega\eta\mu\vartheta$· ἐπομένως διὰ τὸν ζητούμενον λαιμὸν τῆς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας θὰ εἶναι ($\omega=MM_1$) :



Σχ. 14.

$$\frac{1+(\omega\sigma\upsilon\nu\vartheta)'}{\sigma\upsilon\nu\vartheta}=\frac{\omega\left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu\vartheta}{P}+\dfrac{\eta\mu\vartheta}{R}\right)}{0}=\frac{(\omega\eta\mu\vartheta)'}{\eta\mu\vartheta}. \quad \text{ὥστε :}$$

(ἂν $\omega \gtrless 0$) $\quad \frac{\sigma\upsilon\nu\vartheta}{P}+\frac{\eta\mu\vartheta}{R}=0$, ἢ $\varepsilon\varphi\vartheta=-\frac{R}{P}$ καὶ $z=-\frac{R}{P}x$· δηλ.

Ἐπὶ τοῦ εὐθειοποιοῦντος ἐπιπέδου ὑπάρχουν τοιαῦται εὐθεῖαι μόνον δύο : ἡ ἐφαπτομένη ($\omega=0$) καὶ ἡ εὐθειοποιοῦσα εὐθεῖα. Τὴν ἀπόστασιν δὲ ω τὴν ὁρίζει ἡ ἄλλη ἐξίσωσις :

$$\omega=\frac{\dfrac{-R}{\sqrt{P+R}}}{\dfrac{d}{ds}\,\text{τοξεφ}\,\dfrac{-R}{P}} \qquad (50).$$

30. ***Εὐθεῖαι διὰ τοῦ M στερεῶς συνδεόμεναι μὲ τὸ πρωτεῦον***

τρίεδρον. —***Ποῖαι εὐθεῖαι διὰ τοῦ M, στερεῶς συνδεόμεναι μὲ τὸ πρωτεῦον τρίεδρον τῆς καμπύλης, παράγουν (κατὰ τὴν κύλισίν του) ἀναπτυκτὰς ἐπιφανείας;***

Ἂν τὰ ***σταθερὰ*** σχετικὰ συνημίτονα τῆς εὐθείας τὰ ὀνομάσωμεν a, b, c καὶ τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου, ὅπου ἡ εὐθεῖα ἐφάπτεται τοῦ λαιμοῦ τῆς παραγομένης ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας : x,y,z, θὰ εἶναι: $x=a\omega$, $y=b\omega$, $z=c\omega$· ἑπομένως θὰ ἔχωμεν :

$$v_x=1-\frac{b\omega}{P}+a\omega',\quad v_y=\left(\frac{a}{P}+\frac{c}{R}\right)\omega+b\omega',\quad v_z=-\frac{b\omega}{R}+c\omega'.$$

πρέπει καὶ ἀρκεῖ λοιπὸν ν' ἀληθεύουν αἱ σχέσεις :

$$(\alpha)\qquad \frac{1-\frac{b\omega}{P}}{a}=\frac{\left(\frac{a}{P}+\frac{c}{R}\right)\omega}{b}=\frac{-\frac{b\omega}{R}}{c}.$$

Ἀπὸ τὴν β' ἀπ' αὐτὰς ἔχομεν :

$$\left(\frac{a}{P}+\frac{c}{R}\right)c=-\frac{b^2}{R},\ \text{ἤ}:\ \frac{ac}{P}+\frac{b^2+c^2}{R}=0\quad(51)$$

ἡ σχέσις ὅμως αὐτή, ἂν δὲν εἶναι ***ταυτότης,*** μᾶς δίδει $\frac{P}{R}=$ σταθ, δηλ. ἡ ἀρχικὴ καμπύλη εἶναι κατ' ἀνάγκην ***γενικὴ στερεὰ ἕλιξ*** (γεωδαισιακὴ γραμμὴ μιᾶς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας)· ἂν λοιπὸν αὐτὸ ***δὲν συμβαίνῃ*** καὶ ἡ ἀρχικὴ καμπύλη εἶναι τυχοῦσα, θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην : $b=0$, $c=0$ καὶ ἑπομένως : $a=1$· δηλ. ***Μόνη τοιαύτη εὐθεῖα εἶναι τότε ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης.*** Ἂν ὅμως ἡ καμπύλη εἶναι ***γενικὴ ἕλιξ,*** κάθε εὐθεῖα διὰ τοῦ M μὲ σταθερὰ συνημίτονα, ποὺ νὰ ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν (51), παράγει ἀναπτυκτὴν ἐπιφάνειαν· διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν εὐθειῶν αὐτῶν, ***εἰς κάθε σημεῖον M τῆς καμπύλης,*** παρατηροῦμεν, ὅτι, ἀφοῦ :
$x=a\omega$, $y=b\omega$, $z=c\omega$, ἡ σχέσις (51) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\frac{xz}{P}+\frac{y^2+z^2}{R}=0\cdot\ (52)$$

ἡ ἐξίσωσις ὅμως αὐτὴ παριστᾷ (πρὸς τοὺς ἄξονας Mxyz) ***μίαν κωνικὴν ἐπιφάνειαν τοῦ β' βαθμοῦ : κάθε λοιπὸν γενέτειρα τοῦ κώνου αὐτοῦ παράγει ἀναπτυκτὴν ἐπιφάνειαν (καὶ καμία ἄλλη εὐθεῖα).***

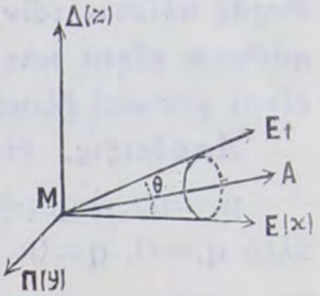
Ἡ θέσις τῆς κωνικῆς αὐτῆς ἐπιφανείας πρὸς τὸ τρίεδρον Mxyz ὁρίζεται εὔκολα ἀπὸ τὰς τομάς της μὲ τὰ πρωτεύοντα ἐπίπεδα (Σχ.15):

1) Τομὴ μὲ τὸ ἐπίπεδον xy : ἡ εὐθεῖα $y=0$, δηλ. ***ἡ ἐφαπτομένη***

(ἂν $\frac{1}{R} \gtrless 0$, δηλ. ἂν εἶναι ***στρεβλὴ*** ἡ καμπύλη· ἄλλως y ἀόριστον καὶ ἔχομεν τὰς ***ἐνειλιγμενοειδεῖς*** τῆς ἐπιπέδου καμπύλης, (βλέπε Ι. Ν. Χατζιδάκη, Διαφορικὸς Λογισμός, Τ. Β΄. σελ. 58, ἄσκ. 10^{η}).

2) Τομὴ μὲ τὸ ἐπίπεδον yz: τὸ σημεῖον $y=0$, $z=0$· δηλ. ἡ ***ἀρχὴ Μ.*** Ἂν ὅμως $\frac{1}{R}=0$, ἔχομεν τὰς ***ἐνειλιγμένας μιᾶς ἐπιπέδου*** καμπύλης (γενικὰς στερεὰς ἕλικας).

3) Τομὴ μὲ τὸ ἐπίπεδον zx: αἱ δύο εὐθεῖαι : $z=0$ καὶ $\frac{x}{P}+\frac{z}{R}=0$, δηλ. ἡ ***ἐφαπτομένη*** καὶ ἡ ***εὐθειοποιοῦσα*** εὐθεῖα, ἡ ME_1.



Σχ. 15.

Ἡ α΄ ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (α) μᾶς δίδει τὴν ἀπόστασιν ω τοῦ ἀντιστοίχου σημείου τοῦ λαιμοῦ ἀπὸ τὸ Μ:

$$b-\frac{b^2\omega}{P}=\left(\frac{a^2}{P}+\frac{ac}{R}\right)\omega, \text{ ἐπομένως: } \omega=\frac{b}{\frac{a^2+b^2}{P}+\frac{ac}{R}}. \quad (53)$$

καὶ αἱ ***σχετικαὶ*** λοιπὸν ἐξισώσεις τοῦ λαιμοῦ θὰ εἶναι:

$$x=\frac{ab}{\Omega}, \quad y=\frac{b^2}{\Omega}, \quad z=\frac{cb}{\Omega} \quad \left(\Omega\equiv\frac{a^2+b^2}{P}+\frac{ac}{R}\right). \ (54)$$

Τέλος αἱ ***ἀπόλυτοι*** εὑρίσκονται ἀπὸ τοὺς τύπους τῆς μεταβάσεως καὶ εἶναι:

$$X=x+\alpha\frac{ab}{\Omega}+\xi.\frac{b^2}{\Omega}+\lambda\frac{cb}{\Omega}\equiv x+\frac{b}{\Omega}\left(\alpha a+\xi b+\lambda c\right)=x+\frac{b}{\Omega}\,\text{συνφ}_1,$$

$$(55) \qquad Y=y+\frac{b}{\Omega}\,\text{συνφ}_2, \quad Z=z+\frac{c}{\Omega}\,\text{συνφ}_3,$$

ἂν ὀνομασθοῦν κατὰ σειρὰν φ_1, φ_2, φ_3 αἱ γωνίαι τῆς εὐθείας (a,b,c) πρὸς τοὺς τρεῖς ἀκινήτους ἄξονας ΟΧ, ΟΥ, ΟΖ.

Τὸ ***γενικώτερον*** ὅμοιον πρόβλημα, ὅταν ἡ εὐθεῖα ***δὲν*** διέρχεται ἀπὸ τὸ Μ, θά το ἴδωμεν εἰς τὰ ἑπόμενα.

Ἀσκήσεις καὶ Προσθῆκαι.

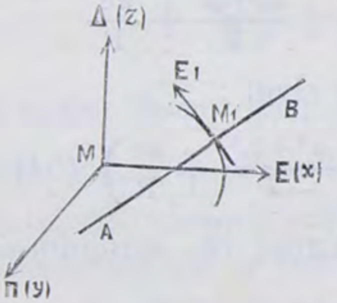
1) Νὰ δειχθῇ, ὅτι: ***Ἂν αἱ πρῶται κάθετοι δύο καμπύλων εἰς τὰ ἀντίστοιχα σημεῖά των εἶναι παράλληλοι, αἱ ἐφαπτόμεναί των (καὶ ἐπομένως καὶ αἱ ὄρθιαι κάθετοι) σχηματίζουν σταθερὰν γωνίαν.***

Ἀπόδειξις: Θὰ εἶναι τότε: $q_1=q+\vartheta'$ καὶ ἐπειδὴ $q_1=0$, $q=0$, θὰ εἶναι καὶ $\vartheta'=0$, δηλ. $\vartheta=$σταθερόν.

2) Νὰ δειχθῇ τὸ ἀντίστροφον, δηλ. ὅτι: ***Ἂν τὰ πρωτεύοντα τρίεδρα δύο καμπύλων εἰς τὰ ἀντίστοιχα σημεῖά των διατηροῦν σταθερὰς κλίσεις τῶν ἀξόνων των τὸ ἓν πρὸς τὸ ἄλλο, αἱ πρῶταί των κάθετοι εἶναι κατ᾽ ἀνάγκην παράλληλοι, ἐκτὸς ἂν αἱ καμπύλαι εἶναι γενικαὶ ἕλικες.*** (***Θεώρημα τοῦ Spieweck (Σπίβεκ)***).

Ἀπόδειξις. Θὰ εἶναι τότε:

$p_1=p\alpha_1+q\beta_1+r\gamma_1$, $q_1=p\alpha_2+q\beta_2+r\gamma_2$, $r_1=p\alpha_3+q\beta_3+r\gamma_3$· ἀλλὰ $q_1=0$, $q=0$· ὥστε: $p\alpha_2+r\gamma_2=0$· ἂν λοιπὸν ἡ α′ καμπύλη δὲν εἶναι ***γενικὴ ἕλιξ*** $\left(\frac{p}{r}=-\frac{P}{R}=-\frac{\gamma_2}{\alpha_2}=\text{σταθ.}\right)$ (ὅτε καὶ ἡ β′ εἶναι τοιαύτη, διότι $q=p_1\beta_1+q_1\beta_2+r_1\beta_3$, ἑπομένως: $p_1\beta_1+r_1\beta_3=0$), θὰ εἶναι: $\alpha_2=\gamma_2=0$, δηλ. ἡ πρώτη κάθετος τῆς α′ κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην καὶ ἐπὶ τὴν δικάθετον τῆς β′, λοιπὸν παράλληλος πρὸς τὴν πρώτην κάθετον τῆς β′.



Σχ. 16.

3) Μία εὐθεῖα εἶναι στερεῶς συνδεδεμένη μὲ τὸ πρωτεῦον τρίεδρον μιᾶς καμπύλης· πότε μένει ***κάθετος ἐπὶ τὴν τροχιὰν ἑνὸς σταθεροῦ σημείου της,*** κατὰ τὴν κύλισιν τοῦ τριέδρου ἐπὶ τῆς ἀρχικῆς καμπύλης;

Ἂν τὰ σταθερὰ συνημίτονά της ὀνομασθοῦν a, b, c καὶ αἱ συντεταγμέναι τοῦ σταθεροῦ σημείου της M_1: x, y, z (Σχ. 16), θὰ ἔχωμεν:

$v_x=1-\frac{y}{P}$, $v_y=\frac{x}{P}+\frac{z}{R}$, $v_z=-\frac{y}{R}$· ὥστε ἀνάγκη νὰ εἶναι:

$$\left(1-\frac{y}{P}\right)a+\left(\frac{x}{P}+\frac{z}{R}\right)b-\frac{y}{R}c=0 \text{ ἢ καί: } \frac{1}{P}(ay-bx)-\frac{1}{R}(bz-cy)=a.$$

Ἡ σχέσις αὐτὴ (56) εἶναι τῆς μορφῆς: $\frac{A}{P}+\frac{B}{R}=\Gamma$ (α), ὅπου τὰ Α, Β, Γ εἶναι σταθερὰ ποσά· ἡ ἀρχικὴ λοιπὸν καμπύλη δὲν εἶναι ***τυχοῦσα***, ἀλλὰ ἡ καμπυλότης καὶ ἡ στρέψις της συνδέονται μὲ τὴν ἐξίσωσιν (α), ***α′ βαθμοῦ πρὸς τὰ*** $\frac{1}{P}$, $\frac{1}{R}$. Αἱ καμπύλαι τοῦ εἴδους αὐτοῦ λέγονται ***καμπύλαι τοῦ Bertrand***· θὰ τὰς σπουδάσωμεν ***λεπτομερῶς*** εἰς τὸ ἑπόμενον κεφάλαιον.

Μερικαὶ περιπτώσεις τῶν καμπύλων τοῦ Bertrand εἶναι :

1) Αἱ καμπύλαι ***σταθερᾶς στρέψεως*** (A=0),

2) Αἱ καμπύλαι ***σταθερᾶς καμπυλότητος*** («*στρεβλοὶ κύκλοι*») (B=0),

3) Αἱ ***γενικαὶ στερεαὶ ἕλικες*** (Γ=0).

Σημείωσις. Τὴν γενικωτέραν περίπτωσιν, ὅπου ἡ γωνία, ἀντὶ νὰ εἶναι ***ὀρθή***, εἶναι ἁπλῶς ***σταθερά,*** θὰ τὴν ἐξετάσωμεν εἰς τὰ ἑπόμενα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΣΥΜΠΤΩΣΙΣ ΔΥΟ ΠΡΩΤΕΥΟΥΣΩΝ ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΩΝ ΔΥΟ ΚΑΜΠΥΛΩΝ. ΚΑΜΠΥΛΑΙ ΤΟΥ BERTRAND. ΚΑΜΠΥΛΑΙ ΤΟΥ MANNHEIM·

---

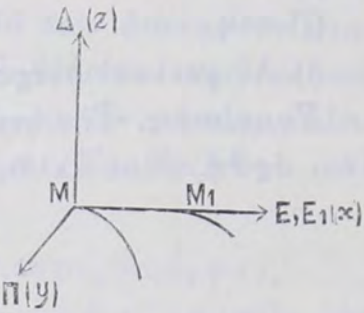
31. Τὰ σημεῖα δύο καμπύλων εἰμποροῦμεν νὰ ***τ᾽ ἀντιστοιχίσωσωμεν ἓν πρὸς ἕν,*** ἂν μεταξὺ τῶν τόξων των θέσωμεν μίαν σχέσιν ***α΄ βαθμοῦ*** τῆς μορφῆς: $s_1=\varkappa s+\lambda$ (ὅπου κ, λ σταθεροὶ ἀριθμοί).Εἰς τ᾽ ἀντίστοιχα σημεῖα τῶν δύο καμπύλων τὰ πρωτεύοντα τρίεδρά των ἔχουν ***ἐν γένει*** τυχοῦσαν θέσιν τὸ ἓν ὡς πρὸς τὸ ἄλλο. Πῶς τότε τὰ στοιχεῖα τῆς μιᾶς καμπύλης ἐκφράζονται μὲ τὰ στοιχεῖα τῆς ἄλλης καὶ μὲ τὰ στοιχεῖα, ποὺ μᾶς ὁρίζουν τὴν ἀμοιβαίαν θέσιν τῶν δύο τριέδρων, αὐτὸ θὰ τὸ ἴδωμεν εἰς τὰ ἑπόμενα. Τώρα θὰ σπουδάσωμεν τὴν ἁπλουστέραν περίπτωσιν τῆς ***συμπτώσεως*** δὺο πρωτευουσῶν διευθύνσεων εἰς τ᾽ ἀντίστοιχα σημεῖα τῶν δύο καμπύλων. Φανερὸν εἶναι, ὅτι ***ὅλαι*** αἱ δυναταὶ περιπτώσεις εἶναι τότε αἱ ἑξῆς 6 (ἂν μὲ τὸ σύμβολον $\frown$ παραστήσωμεν τὴν ***σύμπτωσιν***) :

$$ME \frown M_1E_1,\quad M\Pi \frown M_1\Pi_1,\quad M\Delta \frown M_1\Delta_1,$$
$$ME \frown M_1\Pi_1,\quad ME \frown M_1\Delta_1,\quad M\Pi \frown M_1\Delta_1 \cdot$$

αἱ 3 πρῶται εἶναι συμπτώσεις ***ὁμοειδῶν*** διευθύνσεων, αἱ δὲ 3 ἄλλαι ***ἑτεροειδῶν***. Θά τας θεωρήσωμεν ὅλας, κατὰ τὴν ἑξῆς ὅμως σειρὰν (κατὰ τάξιν σπουδαιότητος τῶν ἐξαγομένων) : 1) $ME \frown M_1E_1$, 2) $ME \frown M_1\Pi_1$, 3) $ME \frown M_1\Delta_1$, 4) $M\Delta \frown M_1\Delta_1$, 5) $M\Pi \frown M_1\Pi$, καὶ 6) $M\Pi \frown M_1\Delta_1$.

1) Σύμπτωσις τῶν ἐφαπτομένων ($ME \simeq M_1E_1$).

32. Ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης Mx τῆς α΄ καμπύλης λαμβάνω ἓν σημεῖον M_1 μὲ σχετικὰς συντεταγμένας x, 0, 0 (Σχ. 17). Οἱ τύποι τοῦ Darboux, ἐφαρμοζόμενοι εἰς τὸ M_1, μᾶς δίδουν:



Σχ. 17.

$$v_x = 1 + x', \quad v_y = \frac{x}{P}, \quad v_z = 0 \cdot$$

ἐπειδὴ ὅμως θέλομεν ἡ ταχύτης τοῦ M_1 νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξ. Mx, θὰ ἔχωμεν:

$v_y = \frac{x}{P} = 0$ ἑπομένως, ἀφοῦ $x \gtrless 0$ (διότι ἄλλως τὸ M_1 συμπίπτει μὲ τὸ M), θὰ εἶναι: $\frac{1}{P} = 0$· δηλ. ***ἡ καμπύλη εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ*** (καὶ τὸ x μένει ἀόριστον)· πλὴν λοιπὸν αὐτῆς τῆς (ἀπὸ πρὶν φανερᾶς) λύσεως ***καμία ἄλλη*** δὲν ὑπάρχει. Δηλ.

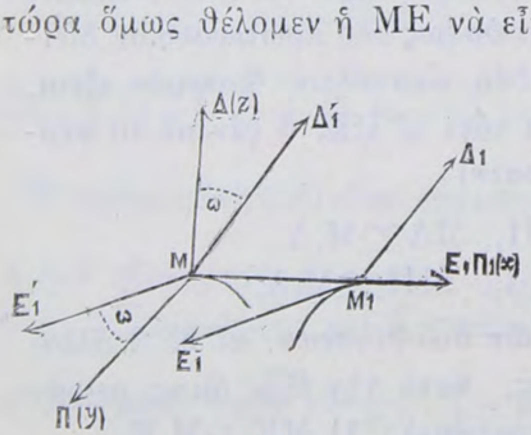
Αἱ ἐφαπτόμεναι μιᾶς καμπύλης (μὴ εὐθείας) δὲν εἱμποροῦν νὰ εἶναι ἐφαπτόμεναι καὶ ἄλλης καμπύλης.

2) Σύμπτωσις ἐφαπτομένης καὶ πρώτης καθέτου ($ME \simeq M_1\Pi_1$).

33. Ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης ME λαμβάνω πάλιν ἓν σημεῖον M_1 (x,0,0) (Σχ. 18). Οἱ τύποι τοῦ Darboux μᾶς δίδουν δι᾽ αὐτό:

$$(\alpha) \quad v_x = 1 + x', \quad v_y = \frac{x}{P}, \quad v_z = 0 \cdot$$

τώρα ὅμως θέλομεν ἡ ME νὰ εἶναι πρώτη κάθετος τῆς καμπύλης τοῦ M_1, ἡ $M_1\Pi_1$· ἑπομένως ἡ ταχύτης τῆς καμπύλης τοῦ M_1 θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ME, δηλ. θὰ εἶναι $v_x = 1 + x' = 0$, ἢ $x = -(s + c)$· ἐξεφράσαμεν οὕτως, ὅτι ἡ ME εἶναι ***ἁπλῶς μία*** κάθετος τῆς δευτέρας καμπύλης· ζητοῦμεν ὅμως νὰ εἶναι ἡ ***πρώτη*** της κάθετος· ἑπομένως ἡ περιστροφὴ q_1 τῆς καμπύλης τοῦ M_1 πρέπει νὰ εἶναι $= 0$· ἔχομεν ὅμως: $p_1 = q\,\text{συν}\omega + r\,\text{ημ}\omega = r\,\text{ημ}\omega$, $q_1 = p + \omega'$, $r_1 = -q\,\text{ημ}\omega + r\,\text{συν}\omega =$



Σχ. 18.

$=r\sigma\upsilon\nu\omega$, ὅπου ω' εἶναι ἡ ***σχετικὴ*** περιστροφὴ τοῦ τριέδρου τῆς M_1 πρὸς τὸ τῆς Μ· θὰ εἶναι λοιπόν : $\omega' = \frac{1}{R}$. Ἔχομεν ἀκόμη ἀπὸ τοὺς τύπους (α) : $v_y = v$ (ἀφοῦ $v_x = 0$, $v_z = 0$), ἢ $v\sigma\upsilon\nu\omega = v$, δηλ. $\omega = 0$, ὥστε καί : $\omega' = \frac{1}{R} = 0$· δηλ. ***ἡ α΄ καμπύλη εἶναι ἐπίπεδος***· καὶ ἀπὸ τὴν σχέσιν $p_1 = r\eta\mu\omega = r.0 = 0$, βλέπομεν, ὅτι ***καὶ ἡ β΄ εἶναι ἐπίσης ἐπίπεδος***· ὥστε ἡ μόνη λύσις εἶναι : ***Μία καμπύλη ἐπίπεδος (ἡ α΄) ἐνειλιγμένη τῆς β΄***. Ἡ δὲ σχέσις $x = -(s+c)$, ἐφαρμοζομένη εἰς δύο τιμὰς τοῦ x καὶ s, μᾶς δίδει τὴν γνωστὴν ἰδιότητα ***τῆς ἰσότητος τοῦ τόξου τῆς ἐνειλιγμένης πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν εἰς τὰ ἄκρα του ἀκτίνων***. Τέλος τὸ ὅτι ***ἡ ἐνειλιγμένη εἶναι καὶ ὁ τόπος τῶν κέντρων καμπυλότητος τῆς ἐξειλιγμένης*** φαίνεται ἀπὸ τὸν τύπον $r_1 = r\sigma\upsilon\nu\omega$ ἢ $r_1 = r$, δηλ. $\frac{v}{P_1} = \frac{1}{P} = \left(\text{ἀπὸ τὸν τύπον} : v_y = v = \frac{x}{P}\right) = \frac{v}{x}$, ὥστε $x = P_1$.

34. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα συνάγομεν, ὅτι : ***Στρεβλῆς καμπύλης αἱ πρῶται κάθετοι ἀποτελοῦν ἐπιφάνειαν μὴ ἀναπτυκτὴν («στρεβλήν»)***. Ἡ ἰδιότης αὐτὴ συνάγεται καὶ ἀπὸ τὴν θεωρίαν τῶν ἐνειλιγμένων (διότι ἡ γωνία των πρὸς τὴν πρώτην κάθετον τῆς ἐξειλιγμένης εἶναι μεταβλητή, δὲν εἰμπορεῖ λοιπὸν ποτὲ νὰ εἶναι $=0$)· καθὼς καὶ ἀπὸ τὴν § 30 (διότι καμία γενέτειρα τοῦ κώνου ἐκείνου δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ καθέτου ἐπιπέδου)· ἀλλὰ καὶ ***ἀπευθείας*** ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς : Πρέπει νὰ ἔχωμεν, ἂν λάβωμεν ἐπὶ τῆς πρώτης καθέτου ἓν σημεῖον $M_1(0,y,0)$ καὶ ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ πρώτη κάθετος ἐφάπτεται τῆς καμπύλης τοῦ M_1 :

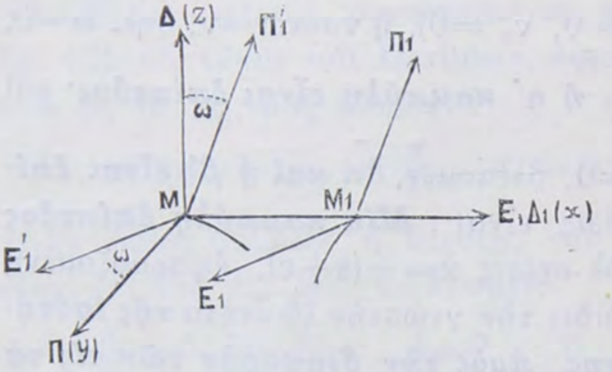
$$\frac{1-\frac{y}{P}}{0} = \frac{y'}{1} = \frac{-\frac{y}{R}}{0}, \qquad \text{δηλ. } 1-\frac{y}{P} = 0 \text{ καὶ } \frac{y}{R} = 0,$$

$$\text{εἶναι δηλ. } \frac{1}{R} = 0 \qquad \text{καὶ } y = P.$$

3) Σύμπτωσις ἐφαπτομένης καὶ ὀρθίας καθέτου ($ME \frown M_1\Delta_1$).

35. Λαμβάνω πάλιν ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης τὸ σημεῖον M_1 (x,0,0)

(Σχ. 19)· τότε δι' αὐτὸ οἱ τύποι τοῦ Darboux γίνονται: $v_x=1+x'$, $v_y=\frac{x}{P}$, $v_z=0$· θὰ εἶναι δὲ πάλιν: $v_x=0$, δηλ. $1+x'=0$. Ἂν δὲ ὀνομάσωμεν ω τὴν γωνίαν $\Pi M E'_1$, θὰ ἔχωμεν:



Σχ. 19.

$p_1=q\sigma\upsilon\nu\omega+r\eta\mu\omega=r\eta\mu\omega$,

$q_1=-q\eta\mu\omega+r\sigma\upsilon\nu\omega=r\sigma\upsilon\nu\omega$,

$r_1=p+\omega'$· ἀλλὰ q_1 πρέπει νὰ εἶναι $=0$· ὥστε: $r\sigma\upsilon\nu\omega=0$, δηλ. ἢ $r=0$ ἢ $\omega=\frac{\pi}{2}$· ἂν $r=\frac{1}{P}=0$, ἡ α' καμπύλη εἶναι εὐθεῖα, τότε ὅμως εἶναι καὶ $v_y=0$, δηλ $v=0$· δηλ. ἡ β' καμπύλη ἐκφυλίζεται εἰς σημεῖον. Ἂν δὲ $\omega=\frac{\pi}{2}$, θὰ εἶναι: $v_y=v\sigma\upsilon\nu\omega=v=0$, ἑπομένως πάλιν: $\frac{x}{P}=0$ καὶ $\frac{1}{P}=0$.

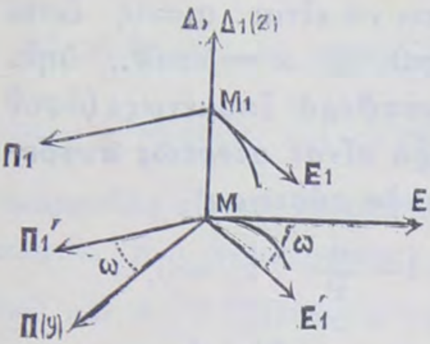
Ὥστε:

Καμιᾶς καμπύλης αἱ ὄρθιαι κάθετοι δὲν ἐφάπτονται ἄλλης καμπύλης. Αὐτὸ δὲ φαίνεται πάλιν καὶ ἀπὸ τὴν θεωρίαν τῶν ἑνειλιγμένων (διότι $\vartheta' \gtrless 0$), καθὼς καὶ ἀπὸ τὴν § 30· ἀλλὰ καὶ ***ἀπευθείας***, ὡς ἑξῆς. Θὰ ἔχωμεν τότε διὰ τὸ σημεῖον $M_1(0,0,z)$ ἐπὶ τῆς ὀρθίας καθέτου: $\frac{1}{0}=\frac{\frac{z}{R}}{0}=\frac{z'}{1}$, ἢ καὶ $\frac{z}{R}=0$, δηλ. $\frac{1}{R}=0$, συγχρόνως ὅμως καί: $z=\infty$ (ὅταν δηλ. ἡ καμπύλη εἶναι ἐπίπεδος, τὸ M_1 ἀφανίζεται εἰς τὸ ἄπειρον· πραγματικῶς αἱ ὄρθιαι κάθετοι τότε ἀποτελοῦν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν).

4) Σύμπτωσις τῶν ὀρθίων καθέτων ($M\Delta \frown M_1\Delta_1$).

36. Λαμβάνομεν τώρα ἐπὶ τῆς δικαθέτου ΜΔ τὸ σημεῖον $M_1(0,0,z)$ (Σχ.20)· θὰ ἔχωμεν δι' αὐτὸ ἀπὸ τοὺς τύπους τοῦ Darboux: $v_x=1$, $v_y=\frac{z}{R}$, $v_z=z'$· πρέπει ὅμως νὰ εἶναι: $v_z=0$ ἢ $z'=0$, δηλ.

z=σταθ·: ***ἡ ἀπόστασις ΜΜ₁ τῶν ἀντιστοίχων σημείων τῶν δύο καμπύλων θὰ εἶναι σταθερά.*** Θὰ ἔχωμεν δὲ καί :



Σχ. 20.

$$p_1 = p\,συνω + q\,ημω = p\,συνω,$$
$$q_1 = -p\,ημω + q\,συνω = -p\,ημω,$$
$$r_1 = r + ω' \quad (ω = γων.\ EME'_1).$$

Πρέπει ὅμως νὰ εἶναι $q_1=0$, ὥστε : ἢ $p=0$ ἢ $ω=0$· ἀλλὰ ***τὸ ἓν συνεπάγεται τὸ ἄλλο***· διότι, ἂν εἶναι $p=0$, δηλ. $\frac{1}{R}=0$, θὰ εἶναι καί : $v_y = \frac{z}{R} = 0$, ἢ καί : $v\,ημω=0$, ὥστε $ω=0$ ἂν δὲ πάλιν εἶναι : $ω=0$, δηλ. $ημω=0$, θὰ εἶναι καὶ $v_y = v\,ημω = 0$, δηλ. $\frac{z}{R} = 0$, ὥστε καὶ $\frac{1}{R}=0$. Λοιπόν : ***Ἡ ἀρχικὴ καμπύλη εἶναι ἐπίπεδος, ἡ δὲ β′ εἶναι κάθετος τομὴ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας τῶν δικαθέτων τῆς πρώτης***· καὶ ἐπειδὴ z μένει ἀόριστον, ὄχι μόνον ***μία***, ἀλλὰ ***ἄπειροι*** καμπύλαι ἔχουν τὰς ἰδίας δικαθέτους μὲ τὴν ἀρχικήν: ***ὅλαι αἱ κάθετοι τομαὶ μιᾶς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας.*** Πλὴν λοιπὸν τῆς (ἀπὸ πρὶν φανερᾶς) αὐτῆς λύσεως, ***δὲν ὑπάρχει καμμία ἄλλη.*** Ὥστε :

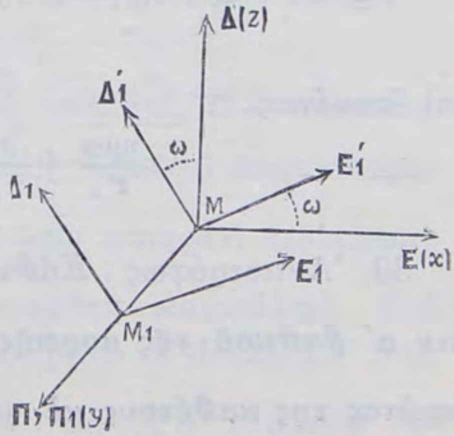
Μιᾶς στρεβλῆς καμπύλης αἱ δικάθετοι δὲν εἶναι δικάθετοι καὶ ἄλλης καμπύλης.

5) Σύμπτωσις τῶν πρώτων καθέτων ($M\Pi \cong M_1\Pi_1$).

α′) Εὕρεσις τῶν συνθηκῶν τῆς συμπτώσεως.

37. Θὰ ἔχωμεν τώρα διὰ τὸ σημεῖον $M_1(0,y,0)$ (Σχ. 21) :

(α) $v_x = 1 - \frac{y}{P}$, $v_y = y'$, $v_z = -\frac{y}{R}$ καὶ ἐπειδὴ πρέπει νὰ εἶναι: $v_y = 0$, θὰ εἶναι : y=σταθερὸν=$α$· δηλ. ***Ἡ ἀπόστασις ΜΜ₁ τῶν ἀντιστοίχων σημείων εἶναι σταθερά***· οἱ δὲ τύποι, ποὺ μᾶς δίδουν τὰς περιστροφὰς p_1, q_1, r_1, εἶναι τώρα :



Σχ. 21.

$$p_1 = p\,\sigma\upsilon\nu\omega + r\,\eta\mu\omega,\quad q_1 = q + \omega',\quad r_1 = -p\,\eta\mu\omega + r\,\sigma\upsilon\nu\omega\cdot$$

(ω=γων. τῶν ἐφαπτομένων). Ἀλλὰ πρέπει νὰ εἶναι: $q_1=0$, ὥστε ἡ σχέσις: $q_1 = q + \omega'$ καταντᾷ $\omega'=0$ ἢ ω = σταθ., δηλ. ***Καὶ ἡ γωνία τῶν ἐφαπτομένων εἶναι σταθερά***· ἑπομένως (ἀφοῦ $y=\alpha$=σταθ. καὶ ω=σταθ.) : ***Τὰ δύο τρίεδρα εἶναι στερεῶς συνδεδεμένα*** (ἀποτελοῦν δηλ. ἓν ***στερεὸν μηχανικὸν σύστημα***).

38. Οἱ τύποι (α) γίνονται τώρα : $v_x = 1-\frac{\alpha}{P}$, $v_y=0$, $v_z = -\frac{\alpha}{R}$· καὶ ἐπειδὴ $v_x = v\,\sigma\upsilon\nu\omega$, $v_z = v\,\eta\mu\omega$, θὰ εἶναι :

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{-\frac{\alpha}{R}}{1-\frac{\alpha}{P}},\ \text{δηλ.}\ \frac{\eta\mu\omega}{P} - \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{R} = \frac{\eta\mu\omega}{\alpha}\quad (57)\text{: ὥστε:}$$

Τῆς α΄ καμπύλης ἡ καμπυλότης καὶ ἡ στρέψις συνδέονται μὲ τὴν σχέσιν αὐτὴν τοῦ α΄ βαθμοῦ, δηλ. ἡ α΄ καμπύλη εἶναι ***καμπύλη τοῦ*** *Bertrand* (Ἄσκ. 3η, σελ. 44).

Ὅτι δὲ καὶ ἡ β΄ ἐπίσης θὰ εἶναι, φαίνεται ἀπὸ τὸ ὅτι ἡ σχέσις τῶν δύο καμπύλων εἶναι ***ἰσόζυγος*** (δηλ. ἡ ἰδία καὶ διὰ τὴν μίαν καὶ διὰ τὴν ἄλλην)· πραγματικῶς, ἂν ἀρχίζαμεν ἀπὸ τὴν καμπύλην τοῦ M_1, θὰ εἴχαμεν ὅλας τὰς προηγουμένας σχέσεις, ***μὲ μόνον τὴν ἀλλαγὴν τῶν σημείων τῶν α καὶ ω***· ὥστε θὰ εἶναι :

$$v_{0x_1} = 1 + \frac{\alpha}{P_1},\ v_{0y_1}=0,\ v_{0z_1} = +\frac{\alpha}{R_1}\cdot\ \varepsilon\varphi\omega_1 = -\varepsilon\varphi\omega = \frac{\frac{\alpha}{R_1}}{1+\frac{\alpha}{P_1}}\cdot$$

καὶ ἑπομένως :

$$\frac{\eta\mu\omega}{P_1} + \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{R_1} = -\frac{\eta\mu\omega}{\alpha}\ (57').$$

39. Ἀντιστρόφως : ***Κάθε καμπύλη, ποὺ ἐπαληθεύει μίαν σχέσιν α΄ βαθμοῦ τῆς μορφῆς***: $\frac{A}{P}+\frac{B}{R}=\Gamma$ (α), ***ἔχει κοινὰς τὰς πρώτας της καθέτους μὲ μίαν ἀκόμη καμπύλην μὲ ἐξίσωσιν τῆς ἰδίας μορφῆς.*** Ἀρκεῖ προφανῶς ν᾽ ἀναχθῇ ἡ μορφὴ (α) εἰς τὴν (57)· δηλ. νὰ τεθῇ :

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \eta\mu\omega,\quad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = -\sigma\upsilon\nu\omega,\quad \frac{\Gamma}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{\eta\mu\omega}{\alpha}.$$

β') Μερικαὶ περιπτώσεις τῶν καμπύλων τοῦ Bertrand.

40. 1) Ἂν $\Gamma=0$, ἡ ἐξίσωσις (α) καταντᾷ: $\frac{A}{P}+\frac{B}{R}=0$, δηλ. $\frac{P}{R}=-\frac{A}{B}=$σταθ. καὶ τὸ $\alpha\left(=\frac{A}{\Gamma}\right)$ καταντᾷ τότε ∞· δηλ. ***Τότε ἡ α΄ καμπύλη εἶναι γενικὴ στερεὰ ἕλιξ καὶ ἡ β΄ ἠφανίσθη εἰς τὸ ἄπειρον.*** Καὶ ἀντιστρόφως· ἂν $\alpha=\infty$, θὰ εἶναι καί: $\Gamma=0$ καὶ $A\gtrless 0$ (ἄλλως α ἀπροσδιόριστον)· ὥστε ἡ καμπύλη στερεὰ ἕλιξ.

2) Ἂν $A=0$ (ὅτε καὶ $\omega=0$), θὰ εἶναι: $\frac{1}{R}=\frac{\Gamma}{B}=$ σταθ: ***Ἡ δοθεῖσα καμπύλη ἔχει στρέψιν σταθεράν· ἡ δὲ β΄ συμπίπτει μὲ τὴν πρώτην*** (διότι τότε $\alpha=0$ (ἂν $\Gamma\gtrless 0$)). Καὶ ἀντιστρόφως: ἂν $\alpha=0$ (καὶ $\Gamma\gtrless 0$), θὰ εἶναι $A=0$.

3) Ἂν $B=0$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\frac{1}{P}=\frac{\Gamma}{A}=$σταθ: ***Ἡ α΄ καμπύλη εἶναι «στρεβλὸς» κύκλος καὶ ἡ β΄ ἐπίσης*** $\left(\frac{A}{P_1}=-\Gamma\right)$ τότε δέ: $\alpha=P=-P_1$· ***κάθε καμπύλη ἀπὸ τὰς δύο εἶναι τόπος τῶν κέντρων καμπυλότητος*** (καὶ τόπος τῶν κέντρων τῶν ἐγγυτάτων σφαιρῶν) ***τῆς ἄλλης (Monge (Μόνζ)).*** Καὶ ἀντιστρόφως: ἂν $\frac{1}{P}=$ σταθ., θὰ εἶναι καὶ $B=0$ (ἐκτὸς ἂν καὶ $\frac{1}{R}=$σταθ· δηλ. ἡ καμπύλη ***κυκλικὴ στερεὰ ἕλιξ,*** βλέπε περίπτωσιν 6ην).

4) Ἂν $A=\Gamma=0$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται: $\frac{B}{R}=0$, δηλ. ***Ἡ α΄ καμπύλη εἶναι ἐπίπεδος καὶ ἡ β΄ ἐπίσης·*** τὸ δὲ α τότε καταντᾷ ***ἀπροσδιόριστον*** $\left(=\frac{A}{\Gamma}\right)$ (δηλ. ἔχομεν τότε τὴν (ἀπὸ πρὶν φανερὰν) περίπτωσιν ***τῶν ἀπείρων ἐξειλιγμένων δοθείσης ἐπιπέδου καμπύλης***). Καὶ ἀντιστρόφως, διὰ νὰ εἶναι α ἀπροσδιόριστον, πρέπει νὰ εἶναι $A=\Gamma=0$.

5) Ἂν $B=\Gamma=0$· τότε θὰ εἶναι: $\frac{A}{P}=0$, δηλ. ἡ α΄ καμπύλη ***εὐθεῖα γραμμή·*** τὸ α γίνεται ∞ καὶ ἡ β΄ καμπύλη ***ἠφανίσθη εἰς τὸ ἄπειρον.***

6) Ἂν εἶναι : $\frac{1}{P}$=σταθ. καὶ $\frac{1}{R}$=σταθ., δηλ. ἡ α′ καμπύλη ***κυκλικὴ στερεὰ ἕλιξ***, θὰ ἔχωμεν: $\frac{ημω}{P}-\frac{συνω}{R}$=σταθ.=Γ (διὰ ***κάθε*** σταθερὸν ω)· ἂν λοιπὸν θέσωμεν : $Γ=\frac{ημω}{α}$, δηλ. $α=\frac{ημω}{Γ}$, εἰς κάθε τιμὴν τοῦ ω θ' ἀντιστοιχῇ ἓν ὡρισμένον α· ὑπάρχουν λοιπὸν τότε ***ἄπειροι*** ἄλλαι καμπύλαι, ποὺ ἔχουν τὰς ἰδίας καθέτους μὲ τὴν κυκλικὴν στερεὰν ἕλικα· εἶναι δὲ καὶ αὗται ὅλαι ***κυκλικαὶ στερεαὶ ἕλικες***, διότι ἔχουν πρώτας καθέτους τὰς καθέτους πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου τῆς ἀρχικῆς ἕλικος· τὸ ἴδιον δὲ φαίνεται καὶ ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις : $νσυνω=1-\frac{α}{P}$, $νημω=-\frac{α}{R}$ τῆς ἀρχικῆς καὶ τὰς ἀντιστοίχους μιᾶς ἀπὸ τὰς δευτέρας : $ν_0συνω_1=1-\frac{α_1}{P_1}$, $ν_0ημω_1=-\frac{α_1}{R_1}$ ἢ καί :

$\frac{συνω}{ν}=1+\frac{α}{P_1}$, $\frac{ημω}{ν}=-\frac{α}{R_1}$ (ἐπειδὴ εἶναι: $ω_1=-ω$, $α_1=-α$ καὶ $νν_0\equiv\frac{ds}{ds_0}.\frac{ds_0}{ds}=1$)· διότι ἀπὸ μὲν τὰς πρώτας βλέπομεν, ὅτι τὸ ν $\left(=\sqrt{\left(1-\frac{α}{P}\right)^2+\left(\frac{α}{R}\right)^2}\right)$ εἶναι ***σταθερόν***, ἀπὸ δὲ τὰς δευτέρας, ὅτι τότε καί: $\frac{1}{P_1}=\frac{1}{α}\left(\frac{συνω}{ν}-1\right)$ = ***σταθερὸν*** καὶ $\frac{1}{R_1}=-\frac{ημω}{αν}$, ἐπίσης ***σταθερόν***.

γ′) Σχέσεις μεταξὺ τῶν α, ω, $dσ$, $dτ$, $dσ_1$, $dτ_1$ ἑνὸς ζεύγους καμπύλων τοῦ *Bertrand*.

41. ***Ζεῦγος καμπύλων τοῦ*** *Bertrand*.—Εἰς κάθε καμπύλην τῆς κατηγορίας : $\frac{A}{P}+\frac{B}{R}=Γ$ μὲ ***ὡρισμένα*** Α,Β,Γ ἀντιστοιχεῖ, κατὰ τὰ προηγούμενα, ἓν ***ὡρισμένον*** (ἐν γένει) α $\left(=\frac{A}{Γ}\right)$ καὶ ἓν ὡρισμένον ω $\left(=-τοξεφ\left(\frac{A}{B}\right)\right)$, ἑπομένως καὶ μία ὡρισμένη β′ καμπύλη τῆς ἰδίας κατηγορίας. Αἱ δύο αὐταὶ καμπύλαι ἔχουν κοινὰς τὰς πρώτας των καθέτους. Ὥστε : ***Αἱ καμπύλαι τοῦ*** ***Bertrand*** ***εἰμποροῦν νὰ***

καταταχθοῦν εἰς ἄπειρα ζεύγη καὶ εἰς κάθε ζεῦγος εἶναι κοιναὶ αἱ πρῶται κάθετοι.

42. ***Πρώτη ἔκφρασις τοῦ α διὰ τῶν καμπυλοτήτων τῶν δύο καμπύλων.***—Ἀπὸ τοὺς τύπους :

$$\frac{\eta\mu\omega}{P}-\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{R}=\frac{\eta\mu\omega}{\alpha},\quad \frac{\eta\mu\omega}{P_1}+\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{R_1}=-\frac{\eta\mu\omega}{\alpha}$$ εὑρίσκομεν :

ἀπὸ μὲν τὸν α′ : $\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{P}-\frac{\sigma\varphi\omega}{R}$, ἀπὸ δὲ τὸν β′ : $\frac{\sigma\varphi\omega}{R_1}=-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{P_1}$.

καὶ μὲ τὴν ἀπαλοιφὴν τῆς σφω :

$$(58)\qquad \alpha=\frac{\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R}}{\frac{1}{PR_1}+\frac{1}{RP_1}}.$$

43. ***Ἔκφρασις τῶν $d\sigma_1$, $d\tau_1$ διὰ τῶν $d\sigma$, $d\tau$ καὶ ω.*** — Ἀπὸ τοὺς τύπους :

$p_1=\rho\sigma\upsilon\nu\omega+r\eta\mu\omega$, $r_1=-\rho\eta\mu\omega+r\sigma\upsilon\nu\omega$ εὑρίσκομεν :

$$-\frac{v}{R_1}=-\frac{1}{R}\sigma\upsilon\nu\omega+\frac{1}{P}\eta\mu\omega,\quad \frac{v}{P_1}=\frac{1}{R}\eta\mu\omega+\frac{1}{P}\sigma\upsilon\nu\omega$$

ἢ καὶ $\left(\text{ἐπειδὴ } v=\frac{ds_1}{ds}\right)$: (59) $d\tau_1=d\tau\sigma\upsilon\nu\omega-d\sigma\eta\mu\omega$,

$d\sigma_1=d\tau\eta\mu\omega+d\sigma\sigma\upsilon\nu\omega$· σχέσεις δηλ., ποὺ ἐκφράζουν τὰς γωνίας συνεπαφῆς καὶ στρέψεως τῆς β′ καμπύλης τοῦ ζεύγους μὲ τ᾽ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τῆς α′ καὶ μὲ τὴν γωνίαν ω.

44. ***Ἔκφρασις τοῦ ω διὰ τῶν καμπυλοτήτων καὶ τῶν στρέψεων.***— Ἀπὸ τοὺς ἰδίους ἀρχικοὺς τύπους εὑρίσκομεν :

$$\frac{\varepsilon\varphi\omega}{P}-\frac{1}{R}=\frac{\varepsilon\varphi\omega}{\alpha},\quad \frac{\varepsilon\varphi\omega}{P_1}+\frac{1}{R_1}=-\frac{\varepsilon\varphi\omega}{\alpha}.$$

καὶ ἑπομένως :

$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{P}+\frac{1}{P_1}}\qquad(60).$$

45. ***Τύπος τοῦ Schell (Σέλλ).***—Ἀπὸ τοὺς τύπους :

$$v_x=1-\frac{\alpha}{P}=v\sigma\upsilon\nu\omega,\quad v_y=0,\quad v_z=-\frac{\alpha}{R}=v\eta\mu\omega$$

καὶ τοὺς ὁμοίους ***διὰ τὴν β′ καμπύλην :***

$$v_{0x_1}=1+\frac{\alpha}{P_1}=v_0\sigma\upsilon\nu\omega,\quad v_{0y_1}=0,\quad v_{0z_1}=\frac{\alpha}{R_1}=-v_0\eta\mu\omega$$

εὑρίσκομεν : $vv_0\eta\mu^2\omega=\frac{\alpha^2}{RR_1}$ καὶ ἐπειδὴ $vv_0=1$, συνάγομεν ***τὸν τύπον τοῦ Schell:***

$$(61)\qquad \frac{1}{RR_1}=\frac{\eta\mu^2\omega}{\alpha^2}=\sigma\tau\alpha\vartheta.$$

δηλ. ***Τὸ γινόμενον τῶν στρέψεων ἑνὸς ζεύγους καμπύλων τοῦ Bertrand εἶναι σταθερόν.***

46. ***Σχέσις μεταξὺ ω, α, P, P_1.***— Ἀπὸ τοὺς ἰδίους τύπους τῆς προηγουμένης παραγράφου εὑρίσκομεν :

$$vv_0\sigma\upsilon\nu^2\omega=\left(1-\frac{\alpha}{P}\right)\left(1+\frac{\alpha}{P_1}\right)\ \delta\eta\lambda.\ \sigma\upsilon\nu^2\omega=\left(1-\frac{\alpha}{P}\right)\left(1+\frac{\alpha}{P_1}\right)\ (62)\cdot$$

ἀπὸ τὸν τύπον αὐτὸν βλέπομεν, ὅτι : ***Ὁ ἀναρμονικὸς λόγος τῶν τεσσάρων σημείων M, M_1, K, K_1*** (ὅπου K, K_1 τ' ἀντίστοιχα κέντρα καμπυλότητος) ***εἶναι ἀριθμὸς σταθερὸς καὶ θετικός***· διότι εἶναι :

$MK=P$, $KM_1=\alpha-P$, $M_1K_1=P_1$, $MK_1=\alpha+P_1$, ἑπομένως :

$$\frac{MK}{KM_1}:\frac{MK_1}{K_1M_1}=\frac{P}{\alpha-P}:\frac{\alpha+P_1}{-P_1}=\frac{-PP_1}{(\alpha-P)(\alpha+P_1)}=\frac{-1}{\left(\frac{\alpha}{P}-1\right)\left(\frac{\alpha}{P_1}+1\right)}=$$

$$=\frac{1}{\left(1-\frac{\alpha}{P}\right)\left(1+\frac{\alpha}{P_1}\right)}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}\cdot$$

47. Πόρισμα τῆς ἰδιότητος αὐτῆς εἶναι, ὅτι: ***Τὰ δύο κέντρα καμπυλότητος K,K_1 κεῖνται διαρκῶς ἢ καὶ τὰ δύο μεταξὺ τῶν σημείων M,M_1 ἢ καὶ τὰ δύο ἔξω ἀπὸ τὸ τμῆμα MM_1***· (ὥστε ποτὲ δὲν εἶναι ***ἁρμονικὰ*** τὰ τέσσαρα αὐτὰ σημεῖα).

48. ***2α ἔκφρασις τοῦ α διὰ τῶν καμπυλοτήτων καὶ τῶν στρέψεων.***— Ἀπὸ τὰς προηγουμένας σχέσεις :

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega=\left(1-\frac{\alpha}{P}\right)\left(1+\frac{\alpha}{P_1}\right),\ \eta\mu^2\omega=\frac{\alpha^2}{RR_1}\ \text{εὑρίσκομεν :}$$

$$\left(1-\frac{\alpha}{P}\right)\left(1+\frac{\alpha}{P_1}\right)+\frac{\alpha^2}{RR_1}=1$$

καὶ ἀπὸ αὐτὴν πάλιν συνάγεται :

$$(63)\qquad \alpha=\frac{\frac{1}{P_1}-\frac{1}{P}}{\frac{1}{PP_1}-\frac{1}{RR_1}}$$

(σχέσις ἰσοδύναμος πρὸς τὴν (59), ἕνεκα τῶν εὐκόλως εὑρισκομένων σχέσεων :(64) $v^2=\dfrac{\dfrac{1}{P^2}+\dfrac{1}{R^2}}{\dfrac{1}{P_1^2}+\dfrac{1}{R_1^2}}$ καὶ $\dfrac{v}{v_0}=\dfrac{R_1}{R}$

49. ***Ἔκφρασις τοῦ P_1 διὰ τῶν α, P, R.***—Ἀπὸ τὸν τύπον : $\dfrac{ds_1}{P_1}=\dfrac{ds}{R}\eta\mu\omega+\dfrac{ds}{P}\sigma\upsilon\nu\omega$ συνάγομεν: $\dfrac{v}{P_1}=\dfrac{1}{R}\cdot\dfrac{\varepsilon\varphi\omega}{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\omega}}+\dfrac{1}{P}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\omega}}$. καὶ ἐπειδὴ εὑρήκαμεν :

$$v=\sqrt{\left(1-\frac{\alpha}{P}\right)^2+\frac{\alpha^2}{R^2}} \quad \text{καὶ} \quad \varepsilon\varphi\omega=\frac{-\dfrac{\alpha}{R}}{1-\dfrac{\alpha}{P}},$$

παράγεται εὔκολα ὁ τύπος :

$$P_1=\frac{\left(1-\dfrac{\alpha}{P}\right)^2+\dfrac{\alpha^2}{R^2}}{\dfrac{1}{P}-\alpha\left(\dfrac{1}{P^2}+\dfrac{1}{R}\right)} \quad (65).$$

50. ***Ἔκφρασις τοῦ R_1 διὰ τῶν α, P, R.***—Ἀπὸ τὸν τύπον τοῦ Schell καὶ τὸν τύπον : $\eta\mu^2\omega=\dfrac{\dfrac{\alpha^2}{R^2}}{\left(1-\dfrac{\alpha}{P}\right)^2+\dfrac{\alpha^2}{R^2}}$ (εὑρισκόμενον ἀπὸ τὸν $\left.\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{-\dfrac{\alpha}{R}}{1-\dfrac{\alpha}{P}}\right)$ συνάγομεν : $R_1=R\left[\left(1-\dfrac{\alpha}{P}\right)^2+\dfrac{\alpha^2}{R^2}\right]$. (66)

6) Σύμπτωσις τῆς πρώτης καθέτου καὶ τῆς δικαθέτου ($M\Pi \simeq M_1\Delta_1$).

α') Εὕρεσις τῶν καμπύλων τοῦ Mannheim.

51. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΜΠ ἓν σημεῖον M_1 (0,y,0) (Σχ. 22)· οἱ τύποι τοῦ Darboux δίδουν δι' αὐτό :

$$v_x=1-\frac{y}{P}, \quad v_y=y', \quad v_z=-\frac{y}{R}\cdot$$

θὰ εἶναι δὲ πάλιν προφανῶς: $v_y=0$, δηλ. $y=\alpha$· ὥστε :

$$v_x = v\sigma\upsilon\nu\omega = 1 - \frac{\alpha}{P}, \quad v_z = v\eta\mu\omega = -\frac{\alpha}{R}.$$

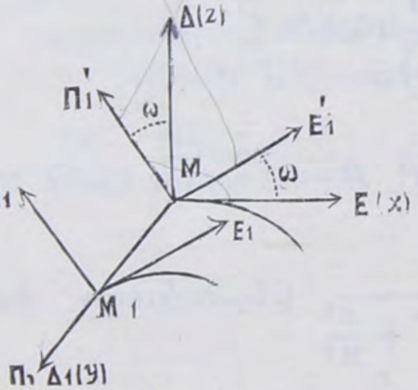
Διὰ τὰς περιστροφὰς δὲ ἔχομεν τώρα :

$$p_1 = p\sigma\upsilon\nu\omega + r\eta\mu\omega, \quad q_1 = -p\eta\mu\omega + r\sigma\upsilon\nu\omega, \quad r_1 = q + \omega' \text{ ἢ καί :}$$
$$p_1 = p\sigma\upsilon\nu\omega + r\eta\mu\omega, \quad 0 = -p\eta\mu\omega + r\sigma\upsilon\nu\omega, \quad r_1 = \omega'\cdot$$

ἡ μεσαία ἀπὸ τὰς ἰσότητας αὐτὰς μᾶς δίδει : $\varepsilon\varphi\omega = \frac{r}{p} = -\frac{R}{P}\cdot$

καὶ ἐπειδὴ εἶναι καί : $\varepsilon\varphi\omega = \frac{v_z}{v_x} = \dfrac{-\frac{\alpha}{R}}{1 - \frac{\alpha}{P}}$, συνάγεται :

$$\frac{R}{P} = \frac{\frac{\alpha}{R}}{1 - \frac{\alpha}{P}}, \text{ ἢ καί : } \alpha\left(\frac{1}{P^2} + \frac{1}{R^2}\right) = \frac{1}{P}. \quad (67)$$



Σχ. 22.

Ὥστε : ***Τῆς α' καμπύλης*** (τῆς ὁποίας αἱ πρῶται κάθετοι εἶναι ὄρθιαι τῆς ἄλλης) ***ἡ καμπυλότης καὶ ἡ στρέψις συνδέονται μὲ τὴν ἰδιαιτέραν αὐτὴν σχέσιν τοῦ β' βαθμοῦ***, ἡ ὁποία ἐκφράζει, ὅτι ***ὁ λόγος τῆς ἁπλῆς καμπυλότητός της πρὸς τὴν ὁλικὴν εἶναι ἀριθμὸς σταθερός.*** Αἱ καμπύλαι τῆς κατηγορίας αὐτῆς λέγονται ***καμπύλαι τοῦ*** *Mannheim* ***(Μανχάϊμ).***

52. ***Κινητικὴ σημασία τῆς ἐξισώσεως (67).***—Ἀπὸ τὰς σχετικὰς ἐξισώσεις τοῦ στιγμιαίου ἄξονος ἑλικώσεως (τύποι (29) σελ. 29) βλέπομεν ἀμέσως, ὅτι : ***Εἰς τὰς καμπύλας τοῦ*** *Mannheim* ***ὁ στιγμ. ἄξων ἑλικώσεως κόπτει τὴν πρώτην κάθετον εἰς ἓν σταθερὸν σημεῖον*** M_1 ***μεταξὺ*** M καὶ K (κέντρου καμπυλότητος) πάντοτε εὑρισκόμενον, διότι $0 \leq \alpha \leq P$.

53. ***Μερικὴ περίπτωσις, ὅπου ω=σταθ.***—Τότε ἔχομεν διὰ τὰς καμπυλότητας $\frac{1}{P}$ καὶ $\frac{1}{R}$ ***δύο*** ἐξισώσεις :

$$\frac{R}{P} = -\varepsilon\varphi\omega = \sigma\tau\alpha\vartheta. = c \quad \text{καί :} \quad \frac{\frac{\alpha}{R}}{1 - \frac{\alpha}{P}} = -\varepsilon\varphi\omega = \sigma\tau\alpha\vartheta. = c,$$

δηλ. τὸ σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων : $\frac{R}{P}=c$ καὶ $\frac{\alpha}{R}=\left(1-\frac{\alpha}{P}\right)c$, ποὺ μᾶς δίδει τὴν λύσιν :

$$\frac{1}{P}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{c^2}{1+c^2}=\frac{\eta\mu^2\omega}{\alpha} \quad \text{καὶ} \quad \frac{1}{R}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{c}{1+c^2}=-\frac{\eta\mu(2\omega)}{2\alpha} \quad (68)\cdot$$

εἶναι λοιπὸν τότε ἡ καμπυλότης καὶ ἡ στρέψις τῆς α΄ καμπύλης σταθεραὶ καὶ ἑπομένως ἡ καμπύλη κυκλικὴ στερεὰ ἕλιξ. Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν δέ : $r_1=\frac{v}{P_1}=\omega'=0$, δηλ. $\frac{1}{P_1}=0$, βλέπομεν, ὅτι τότε ***ἡ β΄ καμπύλη καταντᾷ εὐθεῖα γραμμή.*** Δηλ. ἡ λύσις τότε τοῦ προβλήματος εἶναι : ***Ἡ α΄ καμπύλη στερεὰ κυκλικὴ ἕλιξ, ἡ β΄ καμπύλη ὁ ἄξων τοῦ κυλίνδρου τῆς ἕλικος***· πραγματικῶς δὲ αἱ πρῶται κάθετοι τῆς ἕλικος, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου, εἰμποροῦν νὰ ὑποτεθοῦν ὡς ὄρθιαι κάθετοί του (ἀφοῦ ὀρθία κάθετος τῆς εὐθείας εἶναι ἡ τυχοῦσα κάθετος πρὸς αὐτήν).

β΄) Μερικαὶ περιπτώσεις τῶν καμπύλων τοῦ Mannheim.

54) 1) $\frac{1}{P}=0$, $\frac{1}{R}\gtrless 0$· τότε θὰ εἶναι $\alpha=0$· αἱ δύο καμπύλαι συμπίπτουν εἰς ***μίαν εὐθεῖαν*** (κάθε σειρὰ καθέτων της εἶναι καὶ πρῶταί της κάθετοι καὶ ὄρθιαι).

2) $\frac{1}{P}=0$, $\frac{1}{R}=0$· τότε α ***ἀπροσδιόριστον***· ἡ α΄ καμπύλη εὐθεῖα· ἡ β΄ ἐπίσης εὐθεῖα, ***τυχοῦσα παράλληλος πρὸς τὴν α΄***· τὰς κοινὰς καθέτους των εἰμποροῦμεν νά τας θεωρήσωμεν ὡς πρώτας καθέτους τῆς α΄ καὶ ὡς ὀρθίας τῆς β΄.

3) $\frac{1}{R}=0$, $\frac{1}{P}\gtrless 0$· τότε $\alpha=P$· ἡ α΄ καμπύλη ***ἐπίπεδος*** καὶ ἡ β΄ ὁ τόπος τῶν κέντρων καμπυλότητος τῆς α΄· ἀλλὰ οἱ τύποι: $v_x=1-\frac{\alpha}{P}$, $v_y=0$, $v_z=-\frac{\alpha}{R}$ γίνονται τώρα : $v_x=0$, $v_y=0$, $v_z=0$, δηλ. $v=0$ καὶ ἑπομένως ἡ β΄ καμπύλη καταντᾷ ***σημεῖον*** καὶ ἡ α΄ λοιπὸν περιφέρεια κύκλου. (Τῆς εἰς τὸ κέντρον τῆς περιφερείας ἐκφυλισθείσης β΄ καμπύλης εἰμποροῦμεν νὰ θεωρήσωμεν ὡς ὀρθίας καθέτους τὰς ἀκτῖνας τῆς περιφερείας).

γ') Σχέσεις μεταξὺ τῶν α, ω, $\frac{1}{P}$, $\frac{1}{P_1}$, $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{R_1}$.

55. ***Ἔκφρασις τοῦ τόξου*** ds_1. — Ἀπὸ τὰς προβολὰς τῆς ταχύτητος εὑρίσκομεν :

$$v^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{P}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{R^2} \quad \text{ἢ καί :} \quad v^2 = 1 - \frac{2\alpha}{P} + \alpha^2\left(\frac{1}{P^2} + \frac{1}{R^2}\right),$$

δηλ. (ἕνεκα τῆς ἐξισώσεως τῶν καμπύλων τοῦ Mannheim) :

$$v^2 = 1 - \frac{2\alpha}{P} + \frac{\alpha}{P} = 1 - \frac{\alpha}{P}\cdot \quad \text{ὥστε :}$$

$ds_1^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{P}\right)ds^2$ καὶ : (69) $ds_1 = \sqrt{1 - \frac{\alpha}{P}}\, ds$ (μὲ τὸ ριζικὸν ***πάντοτε πραγματικόν,*** ἀφοῦ $\alpha < P$).

56. ***Ἔκφρασις τοῦ ω διὰ τῶν α,*** $\frac{1}{P}$ ***ἢ διὰ τῶν α,*** $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{R_1}$. — Θὰ ἔχωμεν προφανῶς μὲ ***ἀρχικὴν*** τὴν β' καμπύλην :

$$v_{0x_1} = 1, \quad v_{0y_1} = \frac{z_1}{R_1}, \quad v_{0z_1} = z'_1$$

(διότι αἱ σχετικαὶ συντεταγμέναι τοῦ Μ πρὸς τὸ β' τρίεδρον εἶναι $0, 0, z_1$)· πρέπει λοιπὸν νὰ εἶναι πάλιν : $z'_1 = 0$, $z_1 = \text{σταθ.} = \alpha_1 = -\alpha$. (Θὰ κεῖται δὲ τὸ M_1 ἐπὶ ***τοῦ ἀρνητικοῦ ἄξονος τῶν*** z_1, ἀφοῦ $\alpha > 0$). Θὰ εἶναι ἔπειτα :

$$v_{0x_1} = v_0 \sigma\upsilon\nu\omega_1 = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{v} = 1, \quad v_{0y_1} = -v_0 \eta\mu\omega_1 = +\frac{\eta\mu\omega}{v} = \frac{\alpha_1}{R_1} = \frac{-\alpha}{R_1}, \text{ ἢ}$$

$\frac{\eta\mu\omega}{v} = -\frac{\alpha}{R_1}$, ἢ ἀκόμη : $\eta\mu\omega = -v \cdot \frac{\alpha}{R_1}$· καὶ ἐπειδή: $v = -\frac{\alpha}{R} \cdot \frac{1}{\eta\mu\omega}$,

θὰ ἔχωμεν τελικῶς τοὺς τύπους : (70) $\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \frac{\alpha}{P}$, $\eta\mu^2\omega = \frac{\alpha^2}{RR_1}$.

57. ***1η ἔκφρασις τοῦ*** $\frac{1}{R_1}$. — Ἀπὸ τὰς προηγουμένας ἐξισώσεις (70) βλέπομεν, ὅτι : $\eta\mu^2\omega = \frac{\alpha}{P}$ καὶ $\eta\mu^2\omega = \frac{\alpha^2}{RR_1}$· ἑπομένως :

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{R}{P} \quad (71).$$

58. ***2α ἔκφρασις τοῦ*** $\frac{1}{R_1}$. — Ἀπὸ τοὺς τύπους : $v_0 \sigma\upsilon\nu\omega_1 = 1$, $v_0 \eta\mu\omega_1 = \frac{\alpha}{R_1}$ εὑρίσκομεν : $v_0^2 = 1 + \frac{\alpha^2}{R_1^2}$· καὶ ἐπειδή $v_0^2 = \frac{1}{v^2} =$

$$= \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{P}} = \frac{P}{P - \alpha}, \text{ συνάγομεν : } \frac{P}{P - \alpha} = 1 + \frac{\alpha^2}{R_1^2}, \text{ ἑπομένως :}$$

$v_2 = -\frac{\alpha}{R} = v\, \eta\mu\omega$ $\quad -\frac{\alpha v}{R\, \eta\mu\omega}$

$$\frac{1}{R_1^2}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{P-\alpha} \quad (72).$$

59. ***3η ἔκφρασις τοῦ*** $\frac{1}{R_1}$. — Ἀπὸ τοὺς τύπους :

$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{-\frac{\alpha}{R}}{1-\frac{\alpha}{P}}, \quad \varepsilon\varphi\,\omega_1=-\varepsilon\varphi\omega=\frac{\alpha}{R_1}, \text{ συνάγεται: } \frac{\frac{\alpha}{R}}{1-\frac{\alpha}{P}}=\frac{\alpha}{R_1}, \text{ καὶ}$$

ἑπομένως : $$\frac{1}{R_1}=\frac{1}{R}\cdot\frac{P}{P-\alpha} \quad (73).$$

60. ***Ἔκφρασις τοῦ*** $\frac{1}{P_1}$. — Ἀπὸ τὴν σχέσιν : $r_1=\omega'$, δηλ. $\frac{v}{P_1}=\frac{d\omega}{ds}$, εὑρίσκομεν : $\frac{1}{P_1}=\frac{1}{v}\cdot\frac{d\omega}{ds}$.

ἀλλά: $\frac{1}{v}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\alpha}{P}}}$ καὶ $\omega=\text{τοξεφ}\left(-\frac{R}{P}\right)$ ὥστε :

$$\frac{1}{P_1}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\alpha}{P}}}\cdot\frac{d}{ds}\,\text{τοξεφ}\left(-\frac{R}{P}\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\alpha}{P}}}\cdot\frac{d}{ds}\,\text{τοξσφ}\left(\frac{P}{R}\right), \quad (74)$$

ἢ καί :

$$\frac{1}{P_1}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\alpha}{P}}}\cdot\frac{R\frac{dP}{ds}-P\frac{dR}{ds}}{P^2+R^2}=\frac{1}{\text{συνω}}\cdot\frac{\alpha}{PR^2}\left(R\frac{dP}{ds}-P\frac{dR}{ds}\right). \quad (74')$$

ε′) Σχέσις μεταξὺ καμπυλότητος καὶ στρέψεως τῆς β′ καμπύλης.

61. Ἡ β′ καμπύλη προφανῶς δὲν εἶναι καὶ αὐτὴ ***καμπύλη τοῦ*** *Mannheim*, δηλ. δὲν ἐπαληθεύει τὴν σχέσιν : $\frac{1}{P_1}=\alpha_1\left(\frac{1}{P_1^2}+\frac{1}{R_1^2}\right)$, διότι ἡ μεταξὺ τῶν δύο καμπύλων σχέσις δὲν εἶναι ***ἰσόζυγος***. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν μεταξὺ τῶν $\frac{1}{P_1}$ καὶ $\frac{1}{R_1}$ ὑπάρχουσαν ***διαφορικὴν*** σχέσιν, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν εἰς τὸν τύπον: $\frac{1}{P_1}=\frac{1}{v}\cdot\frac{d\omega}{ds}$ τὰς τιμὰς τῶν $\frac{1}{v}$, $d\omega$ $\frac{1}{ds}$ μὲ τὰ στοιχεῖα τῆς β′ καμπύλης, ποὺ εἶναι κατὰ σειράν :

$$\frac{1}{v}=\sqrt{1+\frac{\alpha_1^2}{R_1^2}}, \quad d\omega=d\,\text{τοξεφ}\left(\frac{\alpha_1}{R_1}\right), \quad ds=\sqrt{1+\frac{\alpha_1^2}{R_1^2}}\cdot ds_1$$

καὶ τότε ἔχομεν :

$$\frac{1}{P_1}=\frac{d\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{\alpha_1}{R_1}\right)}{ds_1}=\frac{-\alpha_1\frac{dR_1}{ds_1}}{\alpha^2_1+R^2_1}. \quad (75)$$

Ἀσκήσεις.

1) ***Σχέσις μεταξὺ τῶν ἐγγυτάτων σφαιρῶν ἑνὸς ζεύγους καμπύλων τοῦ** Bertrand*.— Νὰ δειχθῇ **ἀναλυτικῶς** ἡ ἑξῆς πρότασις : ***Ἂν ἀπὸ τ' ἀντίστοιχα κέντρα καμπυλότητος K, K_1 ἑνὸς ζεύγους καμπύλων τοῦ** Bertrand **φέρωμεν τὰς καθέτους $K\Lambda$, $K_1\Lambda_1$ πρὸς τὰς ἀκτῖνας $M\Sigma$, $M_1\Sigma_1$ τῶν ἐγγυτάτων σφαιρῶν των, αἱ τομαὶ Λ, Λ_1 τῶν καθέτων αὐτῶν μὲ τὸ εὐθειοποιοῦν ἐπίπεδον τῆς καμπύλης M ὁρίζουν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς καμπύλης M_1**.*
(***Καθαρῶς γεωμετρικὴν*** ἀπόδειξιν δίδει ὁ Mannheim : Géométrie Cinématique, 1894, σελ. 542).

2) Νὰ εὑρεθῇ εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν καὶ ***ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων τῶν κέντρων τῶν ἐγγυτάτων σφαιρῶν ἀπὸ τὴν κοινὴν πρώτην κάθετον τῶν δύο καμπύλων.***

3) ***Εὐθειογενεῖς ἐπιφάνειαι ἐλαχίστης ἐκτάσεως***.— Ὅταν μᾶς δοθῇ μία κλειστὴ καμπύλη ***στρεβλὴ*** (ἓν «περίγραμμα» στρεβλόν), ὑπάρχει πάντοτε μία ἐπιφάνεια, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸ περίγραμμα αὐτὸ καὶ διὰ τὴν ὁποίαν τὸ μέρος της τὸ περικλειόμενον ἀπὸ τὸ περίγραμμα ἔχει τὸ μικρότερον ἐμβαδὸν ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχον ἐμβαδὸν κάθε ἄλλης ἐπιφανείας, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸ ἴδιον περίγραμμα. Αἱ ἐπιφάνειαι αὐταὶ λέγονται ἐπιφάνειαι ***τῆς ἐλαχίστης ἐκτάσεως*** (surfaces à aire minima). Ὁ ***Λογισμὸς τῶν Μεταβολῶν*** ἀποδεικνύει, ὅτι δι' αὐτὰς εἶναι ***εἰς κάθε σημεῖόν των*** : $\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_2}=0$, δηλ. ***αἱ δύο πρωτεύουσαι ἀκτῖνές των εἶναι εἰς κάθε σημεῖόν των ἀντίθετοι*** (ἡ ***μέση καμπυλότης*** των λοιπόν : $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_2}\right)$ εἶναι $=0$).

Μὲ τὴν θεωρίαν τῶν καμπύλων τοῦ Bertrand εἰμποροῦμεν τώρα νὰ λύσωμεν εὔκολα τὸ ἑξῆς πρόβλημα :

$\frac{x}{p_1}+\frac{y}{p_2}=\pm 1$

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ εὐθειογενεῖς ἐπιφάνειαι ἐλαχίστης ἐκτάσεως.

Ἐπειδὴ τῶν ζητουμένων ἐπιφανειῶν ἡ ***δείκτρια τοῦ Dupin*** (***Διαφορικὸς Λογισμὸς Ι. Ν. Χατζιδάκη,*** Τόμ. Β', σελ. 184), θὰ εἶναι ***ἰσοσκελὴς*** ὑπερβολή, ἡ σειρὰ τῶν ***καμπύλων ἀσυμπτωτικῶν*** γραμμῶν των θὰ κόπτῃ τὴν ἄλλην σειρὰν ἀσυμπτωτικῶν, δηλ. ***τὰς γενετείρας,*** κατ' ὀρθὴν γωνίαν· θὰ εἶναι λοιπὸν αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ γενέτειραι ***πρῶται*** κάθετοι ὅλης τῆς σειρᾶς τῶν καμπύλων ἀσυμπτωτικῶν· ἑπομένως, κατὰ τὴν θεωρίαν τῶν καμπύλων τοῦ Bertrand, αἱ καμπύλαι αὐταὶ ἀσυμπτωτικαί, ἀφοῦ ἔχουν ***ὅλαι*** τὰς ἰδίας πρώτας καθέτους, θὰ εἶναι ***κατ' ἀνάγκην κυκλικαὶ στερεαὶ ἕλικες***· ἡ εὐθειογενὴς λοιπὸν ἐπιφάνεια (τῶν πρώτων καθέτων των) θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην τὸ ***κοινὸν στρεβλὸν ἑλικοειδές.*** Δηλ.

Μόναι εὐθειογενεῖς ἐπιφάνειαι ἐλαχίστης ἐκτάσεως εἶναι τὰ κοινὰ στρεβλὰ ἑλικοειδῆ.

4) Τὰ προβλήματα τοῦ Bertrand καὶ τοῦ Mannheim περιλαμβάνονται εἰς τὰ ἑξῆς δύο ***γενικώτερα*** προβλήματα : ***Μία σειρὰ καθέτων μιᾶς καμπύλης σχηματίζουσα σταθερὰν γωνίαν πρὸς τὰς πρώτας καθέτους της πότε ἀποτελεῖ 1) τὰς πρώτας καὶ 2) τὰς ὀρθίας καθέτους μιᾶς ἄλλης καμπύλης;*** (1)

Ἂν λάβωμεν, διὰ τὴν α' περίπτωσιν, ἐπὶ τοῦ καθέτου ἐπιπέδου yz τὴν εὐθεῖαν MM_1 σχηματίζουσαν τὴν σταθερὰν γωνίαν θ μὲ τὴν πρώτην κάθετον My καὶ θέσωμεν $MM_1=\delta$, θὰ ἔχωμεν ὡς συντεταγμένας τοῦ M_1 : 0, δσυνθ, δημθ· οἱ τύποι λοιπὸν τοῦ Darboux θά μας δώσουν διὰ τὸ M_1 :

$$\left\{\begin{aligned} v_x &= 1-\frac{\delta\sigma\upsilon\nu\vartheta}{P},\\ v_y &= \frac{\delta\eta\mu\vartheta}{R}+\sigma\upsilon\nu\vartheta\delta',\\ v_z &= -\frac{\delta\sigma\upsilon\nu\vartheta}{R}+\eta\mu\vartheta.\delta'.\end{aligned}\right.$$

Καὶ διὰ νὰ εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ M_1 κάθετος πρὸς τὴν MM_1, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι :

$$\left(\frac{\delta\eta\mu\vartheta}{R}+\sigma\upsilon\nu\vartheta.\delta'\right)\sigma\upsilon\nu\vartheta+\left(-\frac{\delta\sigma\upsilon\nu\vartheta}{R}+\eta\mu\vartheta.\delta'\right)\eta\mu\vartheta=0,$$

δηλ. $\delta'=0$ καὶ $\delta=$σταθ. : ἡ ἀπόστασις λοιπὸν MM_1 θὰ εἶναι σταθερά.

---

(1) *N. Hatzidakis, Sur une relation particulière entre deux courbes (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1900).*

Ἂν τώρα τὴν γωνίαν τῆς M_1x_1 μὲ τὴν Mx τὴν ὀνομάσωμεν ω, ἡ γωνία τῆς M_1z_1 μὲ τὴν Mx θὰ εἶναι $90^0 - \omega$ (διότι ἡ Mx εἶναι προφανῶς παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον $x_1M_1z_1$)· ἔχομεν δέ :

$$q_1 = q\sigma\upsilon\nu\vartheta + r\eta\mu\vartheta + \omega'$$

(ω' ἡ σχετικὴ περιστροφὴ τοῦ νέου τριέδρου $M_1x_1y_1z_1$),

δηλ. $0 = r\eta\mu\vartheta + \omega' = \frac{\eta\mu\vartheta}{P} + \omega'$ καὶ $\omega' = -\frac{\eta\mu\vartheta}{P}$, ἤ:

$$(76)\quad \omega = -\eta\mu\vartheta\int\frac{ds}{P} = -\eta\mu\vartheta\int d\sigma = -\eta\mu\vartheta.\sigma + c.$$

Οἱ τύποι ὅμως τῶν προβολῶν τῆς ταχύτητος γίνονται τώρα (ἀφοῦ $\delta' = 0$) :

$$v_x = 1 - \frac{\delta\sigma\upsilon\nu\vartheta}{P}, \quad v_y = \frac{\delta\eta\mu\vartheta}{R}, \quad v_z = -\frac{\delta\sigma\upsilon\nu\vartheta}{R}.$$

ἑπομένως: (77) $v^2 = \left(1 - \frac{\delta\sigma\upsilon\nu\vartheta}{P}\right)^2 + \frac{\delta^2}{R^2}$· εἶναι ὅμως : $v_x = v\sigma\upsilon\nu\omega$, ἢ

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{v_x}{v}, \text{ δηλ.}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1 - \frac{\delta\sigma\upsilon\nu\vartheta}{P}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\delta\sigma\upsilon\nu\vartheta}{P}\right)^2 + \frac{\delta^2}{R^2}}} \text{ καὶ } \varepsilon\varphi\omega = \frac{\frac{\delta}{R}}{1 - \frac{\delta\sigma\upsilon\nu\vartheta}{P}} \quad (78)\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ εὑρέθη : $\omega = -\eta\mu\vartheta.\sigma + c$, συνάγομεν :

$$\tau o\xi\varepsilon\varphi \frac{\frac{\delta}{R}}{1 - \frac{\delta\sigma\upsilon\nu\vartheta}{P}} = -\eta\mu\vartheta.\sigma + c \quad (79)\cdot$$

ὥστε καί :

$$\frac{d}{ds}\left(\tau o\xi\varepsilon\varphi \frac{\frac{\delta}{R}}{1 - \frac{\delta\sigma\upsilon\nu\vartheta}{P}}\right) = -\frac{\eta\mu\vartheta}{P} \quad (79').$$

***Ἡ σχέσις λοιπὸν αὐτὴ* (79) *συνδέει τώρα τὰς καμπυλότητας τῆς ἀρχικῆς καμπύλης καὶ τὸ τόξον τῆς α΄ σφαιρικῆς δεικτρίας της* (ὅπου δ καὶ θ σταθερά).**

Μερικαὶ περιπτώσεις. **1)** Διὰ $\vartheta = 0$, ἔχομεν προφανῶς ἓν ζεῦγος ***καμπύλων τοῦ Bertrand*** · ἡ ἐξίσωσις (76) δίδει $\omega = \sigma\tau\alpha\vartheta.$ καὶ ἡ (79) μᾶς δίδει : $\dfrac{\frac{\delta}{R}}{1-\frac{\delta}{P}} =$ σταθ., δηλ. τὴν ἐξίσωσιν τῶν καμπύλων τοῦ Bertrand.

2) Διὰ $\vartheta=\frac{\pi}{2}$, ἡ ***δευτέρα*** καμπύλη εἶναι ***καμπύλη τοῦ*** *Mannheim*. ἡ δὲ πρώτη ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν (79′) μὲ $\vartheta=\frac{\pi}{2}$, δηλ. τὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{d}{ds}\left[\text{τοξεφ}\frac{\delta}{R}\right]=-\frac{1}{P} \quad \text{(Πρβλ. τύπ. (75), σελ. 60).}$$

Τὸ ***β′ πρόβλημα*** λύεται μὲ ὅμοιον τρόπον· διὰ $\vartheta=0$ ἡ α′ καμπύλη εἶναι καμπύλη τοῦ Mannheim, διὰ $\vartheta=\frac{\pi}{2}$ ἔχομεν τὴν σύμπτωσιν τῶν ὀρθίων καθέτων (§ 36).

5) ***Δύο καμπύλων τὰ πρωτεύοντα τρίεδρα ἔχουν σταθερὰς κλίσεις τὸ ἓν πρὸς τὸ ἄλλο καὶ ἡ εὐθεῖα, ποὺ ἑνώνει τὰ δύο ἀντίστοιχα σημεῖα τῶν καμπύλων ἔχει σταθερὰ συνημίτονα καὶ πρὸς τὰ δύο τρίεδρα. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν καμπύλων***(1).

Ἡ περίπτωσις αὐτὴ περιλαμβάνει προφανῶς τὰς καμπύλας τοῦ Bertrand, ***ὄχι ὅμως*** καὶ τὰς τοῦ Mannheim.

Σύμφωνα μὲ τὴν ἄσκ. 2 (σελ. 44) αἱ πρῶται κάθετοι τῶν δύο καμπύλων θὰ εἶναι τότε ἀναγκαστικῶς παράλληλοι· ἀπὸ τὰς σχέσεις δέ : $p_1=a_1p+c_1r$, $r_1=a_3p+c_3r$ εὑρίσκομεν ($a_1\equiv$ συνφ) :

$$\frac{P_1}{R_1}=\frac{\frac{1}{R}-\frac{\text{εφφ}}{P}}{\frac{1}{P}+\frac{\text{εφφ}}{R}} \quad (80).$$

Θέτομεν τώρα : $x=\vartheta_1.\delta$, $y=\vartheta_2.\delta$, $z=\vartheta_3.\delta$· ὅπου x, y, z αἱ σχετικαὶ συντεταγμέναι τοῦ M_1, $\delta\equiv MM_1$ καὶ $\vartheta_1,\vartheta_2,\vartheta_3$ τὰ σχετικὰ συνημίτονα τῆς MM_1. Οἱ τύποι τοῦ Darboux γίνονται τότε διὰ τὸ M_1 :

$$(\alpha)\quad v_x=1-\frac{\vartheta_2\delta}{P}+\vartheta_1\delta',\quad v_y=\left(\frac{\vartheta_1}{P}+\frac{\vartheta_3}{R}\right)\delta+\vartheta_2\delta',\quad v_z=-\frac{\vartheta_2\delta}{R}+\vartheta_3\delta'.$$

(1) *N. Hatzidakis, Sur une généralisation des courbes de Bertrand* (Ἐπιστημονικὴ Ἐπετηρὶς τοῦ Ἐθν. Πανεπιστημίου, 1925).

Εἶναι ὅμως $v_y=0$ (ἀφοῦ αἱ πρῶται κάθετοι εἶναι παράλληλοι), ἐπομένως:

$$\left(\frac{\vartheta_1}{P}+\frac{\vartheta_3}{R}\right)\delta+\vartheta_2\delta'=0, \quad \delta'=-\frac{\delta}{\vartheta_2}\left(\frac{\vartheta_1}{P}+\frac{\vartheta_3}{R}\right). \quad (81)$$

Ἔχομεν ὅμως ἀκόμη ἀπὸ τὰς σχέσεις (α), ἂν ἀπαλείψωμεν τὸ δ′ ἀπὸ τὴν (81):

$$\frac{v_z}{v_x}=\varepsilon\varphi\varphi=\frac{-\dfrac{\delta}{\vartheta_2}\left(\dfrac{\vartheta_2{}^2+\vartheta_3{}^2}{R}+\dfrac{\vartheta_1\vartheta_3}{P}\right)}{1-\dfrac{\delta}{\vartheta_2}\left(\dfrac{\vartheta_1{}^2+\vartheta_2{}^2}{P}+\dfrac{\vartheta_1\vartheta_3}{R}\right)}.$$

καὶ ἂν τὴν σχέσιν αὐτὴν τὴν γράψωμεν ὡς ἑξῆς (82):

$$\frac{1}{P}\left[-\varepsilon\varphi\varphi(\vartheta_1^2+\vartheta_2^2)+\vartheta_1\vartheta_3\right]+\frac{1}{R}\left[(\vartheta_2^2+\vartheta_3^2)-\varepsilon\varphi\varphi\vartheta_1\vartheta_3\right]=-\varepsilon\varphi\varphi.\frac{\vartheta_2}{\delta},$$

ἢ καί: $\dfrac{A'}{P}+\dfrac{B'}{R}=\dfrac{\Gamma'}{\delta}$, ὅπου οἱ συντελεσταὶ A′, B′, Γ′, εἶναι ***σταθεροί***, βλέπομεν, ὅτι ***μεταξὺ τῶν*** $\dfrac{1}{P}$, $\dfrac{1}{R}$, $\dfrac{1}{\delta}$ ***ὑπάρχει μία γραμμικὴ σχέσις***· προφανῶς δὲ ὁμοίας μορφῆς σχέσις ὑπάρχει καὶ διὰ τὴν β′ καμπύλην: $\dfrac{A'_1}{P_1}+\dfrac{B'_1}{R_1}=\dfrac{\Gamma'_1}{\delta_1}$ (ὅπου $\delta_1=-\delta$).

Ἡ σχέσις αὐτὴ ἀποτελεῖ γενίκευσιν τῆς σχέσεως τοῦ Bertrand:

$$\frac{A}{P}+\frac{B}{R}=\Gamma.$$

Διὰ $\vartheta_1=\vartheta_3=0$, $\vartheta_2=1$ ἐπανευρίσκομεν (ἀπὸ τὸν τύπον (82)) τὰς καμπύλας τοῦ Bertrand. Εἶναι ὅμως ἄξιον παρατηρήσεως, ὅτι ***καὶ μόνον ἡ ὑπόθεσις δ=σταθ***. μᾶς ἐπαναφέρει (μὲ τὴν ἐξίσωσιν (81)) εἰς τὰς καμπύλας τοῦ Bertrand· αὐτὸ σημαίνει, ὅτι: ***Ἂν τὰ συνημίτονα*** ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 ***εἶναι σταθερά, ἡ ἀπόστασις δ δὲν εἱμπορεῖ νὰ εἶναι σταθερά, ἐκτὸς ἂν κεῖται ἐπὶ τῆς πρώτης καθέτου.***

Εἱμπορούμεν ἀκόμη νὰ ὑπολογίσωμεν καὶ τὴν παράγωγον $\dfrac{d\omega}{ds}$ τῆς γωνίας δύο ἀποστάσεων δ, εἰς δύο σημεῖα M, M′ τῆς α′ καμπύλης, ὡς ἑξῆς.

Ἔχομεν γενικώτερα διὰ μίαν τυχοῦσαν διεύθυνσιν δ μὲ σχετικὰ συνημίτονα ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 καὶ ἀπόλυτα Θ_1, Θ_2, Θ_3:

$$\Theta_1=\alpha\vartheta_1+\xi\vartheta_2+\lambda\vartheta_3, \quad \Theta_2=\ldots\ldots, \quad \Theta_3=\ldots\ldots$$

ἐπομένως:

$$\frac{d\Theta_1}{ds}=\alpha\left(\vartheta'_1-\frac{\vartheta_2}{P}\right)+\xi\left(\vartheta'_2+\frac{\vartheta_1}{P}+\frac{\vartheta_3}{R}\right)+\lambda\left(\vartheta'_3-\frac{\vartheta_2}{R}\right),$$

$$\frac{d\Theta_2}{ds}=\ldots,\quad \frac{d\Theta_3}{ds}=\ldots$$

ὥστε :

$$\left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2=\Sigma\frac{d\Theta^2}{ds^2}=\frac{\vartheta_1{}^2+\vartheta_2{}^2}{P^2}+\frac{\vartheta_2{}^2+\vartheta_3{}^2}{R^2}+\frac{2\vartheta_1\vartheta_3}{PR}+\Sigma\vartheta'^2+\frac{2}{P}\left(\vartheta_1\vartheta'_2-\vartheta_2\vartheta'_1\right)-$$
$$-\frac{2}{R}\left(\vartheta_2\vartheta'_3-\vartheta_3\vartheta'_2\right) \quad (83)$$

καὶ ὅταν τὰ ϑ εἶναι σταθερά, ἔχομεν ἁπλούστερα :

$$\left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2=\vartheta_2{}^2\left(\frac{1}{P^2}+\frac{1}{R^2}\right)+\left(\frac{\vartheta_1}{P}+\frac{\vartheta_3}{R}\right)^2. \quad (83')$$

6) Ἂν εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν εἶναι ***ἀντιστρόφως*** τὸ δ ***σταθερὸν*** καὶ τὰ ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 ***μεταβλητὰ*** (συναρτήσεις τοῦ s) (1), θὰ ἔχωμεν :

$$v_x=1+\delta\left(\vartheta'_1-\frac{\vartheta_2}{P}\right),\quad v_y=\delta\left(\vartheta'_2+\frac{\vartheta_1}{P}+\frac{\vartheta_3}{R}\right),\quad v_z=\delta\left(\vartheta'_3-\frac{\vartheta_2}{R}\right)$$

καὶ $v_y=0$, δηλ. $\vartheta'_2=-\left(\frac{\vartheta_1}{P}+\frac{\vartheta_3}{R}\right)$ (α)· ἐπίσης:

$$\frac{v_z}{v_x}=\text{σταθ.}=c=\frac{\delta\left(\vartheta'_3-\frac{\vartheta_2}{R}\right)}{1+\delta\left(\vartheta'_1-\frac{\vartheta_2}{P}\right)}\cdot = \varepsilon\varphi\varphi = C^{te}$$

ἀλλά: $\vartheta'_3=-\frac{1}{\vartheta_3}\left(\vartheta_1\vartheta'_1+\vartheta_2\vartheta'_2\right)=\frac{\vartheta_2}{R}+\frac{\vartheta_1}{\vartheta_3}\left(\frac{\vartheta_2}{P}-\vartheta'_1\right)$ (β)· ὥστε·

$$\frac{\frac{\vartheta_1}{\vartheta_3}\left(\frac{\vartheta_2}{P}-\vartheta'_1\right)}{\frac{1}{\delta}-\left(\frac{\vartheta_2}{P}-\vartheta'_1\right)}=c \text{ καὶ ἑπομένως : } \vartheta'_1=\frac{\vartheta_2}{P}-\frac{1}{\delta\left(1+\frac{\vartheta_1}{c\vartheta_3}\right)}.$$

καὶ κατὰ συνέπειαν ἀπὸ τὴν (β) : $\quad \vartheta'_3=\frac{\vartheta_2}{R}+\frac{1}{\delta\left(\frac{\vartheta_3}{\vartheta_1}+\frac{1}{c}\right)}.$

Ἔχομεν λοιπὸν τελικῶς τὰς παραγώγους ϑ'_1, ϑ'_2, ϑ'_3 ὡς συναρτήσεις τῶν $\frac{1}{P}$, $\frac{1}{R}$ καὶ τῶν ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 ἀπὸ τοὺς τύπους :

---

(1) *N. Hatzidakis, Sur quelques relations entre les trièdres de deux courbes* (*Δελτίον Ἑλλ. Μαθημ. Ἑταιρείας, Τόμ. Θ', 1928*).

$$\vartheta'_1=\frac{\vartheta_2}{P}-\frac{1}{\delta\left(1+\frac{\vartheta_1}{c\vartheta_3}\right)},\ \vartheta'_2=-\left(\frac{\vartheta_1}{P}+\frac{\vartheta_3}{R}\right),\ \vartheta'_3=\frac{\vartheta_2}{R}+\frac{1}{\delta\left(\frac{\vartheta_3}{\vartheta_1}+\frac{1}{c}\right)}. \quad (84)$$

Ὅμοιοι δὲ τύποι ἰσχύουν προφανῶς καὶ διὰ τὴν β′ καμπύλην, μὲ $\delta_1=-\delta$ καὶ μὲ ***ἄλλα*** $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$.

Νὰ ἐρευνηθοῦν αἱ μερικαὶ περιπτώσεις :

1) $\vartheta_1=$σταθ., 2) $\vartheta_2=$σταθ., 3) $\vartheta_3=$σταθ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ′.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ ΔΥΟ ΠΡΩΤΕΥΟΥΣΩΝ ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΩΝ ΔΥΟ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

---

1) Παραλληλία τῶν ἐφαπτομένων.

62. Ἂν αἱ ***ἐφαπτόμεναι*** ME καὶ M_1E_1 δύο καμπύλων (K) καὶ (K_1) εἶναι ***διαρκῶς*** παράλληλοι εἰς τ' ἀντίστοιχα σημεῖά των M καὶ M_1, θὰ ἔχωμεν (ἂν $\omega\equiv$γων. τῶν πρώτων καθέτων) :

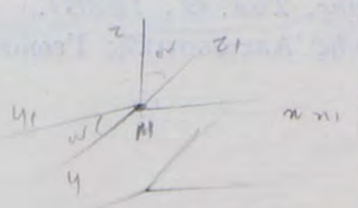
$$v_x=v,\ v_y=0,\ v_z=0 \cdot\ p_1=p+\omega',\ q_1=0=q\,\sigma\upsilon\nu\omega+r\,\eta\mu\omega=\mathbf{r}\,\eta\mu\omega,$$
$$r_1==-q\,\eta\mu\omega+r\,\sigma\upsilon\nu\omega=\mathbf{r}\,\sigma\upsilon\nu\omega \cdot \quad (\alpha)$$

ὥστε : $r\,\eta\mu\omega=0$· ἂν λοιπὸν δὲν εἶναι : $\mathbf{r}=\frac{1}{P}=0$, δηλ. ἡ α′, καὶ ἑπομένως καὶ ἡ β′, καμπύλη εὐθεῖα (ὅτε ω ἀόριστον), θὰ εἶναι : $\eta\mu\omega=0$, $\omega=0$, δηλ. ***καὶ αἱ πρῶται κάθετοι καὶ ἑπομένως καὶ αἱ δικάθετοι, παράλληλοι. Εἶναι λοιπὸν τὰ τρίεδρα τῶν δύο καμπύλων παράλληλα***· οἱ δὲ τύποι (α) μᾶς δίδουν :

$$p_1=p,\quad r_1=r,\ \text{δηλ.}\ \frac{ds_1}{R_1}=\frac{ds}{R},\ \frac{ds_1}{P_1}=\frac{ds}{P}\cdot\ \text{ἑπομένως καί :}\ \frac{P_1}{P}=\frac{R_1}{R},$$

$$\text{ἢ καί :}\ \frac{P}{R}=\frac{P_1}{R_1}\quad (85):$$

Ὁ λόγος τῶν δύο ἀκτίνων εἶναι ὁ ἴδιος εἰς τ' ἀντίστοιχα σημεῖα τῶν δύο καμπύλων. (Παράδειγμα : Αἱ ***ἐξειλιγμέναι*** μιᾶς καμπύλης).



2) Παραλληλία τῶν ὀρθίων καθέτων.

63. Ἂν αἱ ***δικάθετοι*** ΜΔ καὶ $M_1\Delta_1$ εἶναι ***διαρκῶς*** παράλληλοι, θὰ ἔχωμεν :

$$v_x = v\sigma\upsilon\nu\omega, \quad v_y = v\eta\mu\omega, \quad v_z = 0 \ (\omega \equiv \gamma\omega\nu.\ \tau\tilde{\omega}\nu\ \dot{\epsilon}\varphi\alpha\pi\tau o\mu\dot{\epsilon}\nu\omega\nu)\cdot$$

$$p_1 = p\sigma\upsilon\nu\omega + q\eta\mu\omega = p\sigma\upsilon\nu\omega, \quad q_1 = 0 = -p\eta\mu\omega + q\sigma\upsilon\nu\omega = -p\eta\mu\omega,$$
$$r_1 = r + \omega'\cdot$$

ὥστε : $p\eta\mu\omega = 0$· ἂν λοιπὸν δὲν εἶναι : $p = \frac{1}{R} = 0$, δηλ. ἡ α΄ καμπύλη, ἑπομένως, ἀπὸ τὸν τύπον $p_1 = p\sigma\upsilon\nu\omega$, καὶ ἡ β΄, ***ἐπίπεδος*** (καὶ τότε μένει ἡ γωνία ω ἀόριστος : ***δύο τυχοῦσαι καμπύλαι ἐπὶ παραλλήλων ἐπιπέδων***), θὰ εἶναι $\eta\mu\omega = 0$, $\omega = 0$, δηλ. ***καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι παράλληλοι· εἶναι λοιπὸν πάλιν τὰ δύο τρίεδρα παράλληλα.*** Καὶ ἑπομένως ἔχομεν καὶ πάλιν τὴν σχέσιν : $\frac{P}{R} = \frac{P_1}{R_1}$.

3) Παραλληλία τῶν πρώτων καθέτων.

64. Ἂν αἱ ***πρῶται κάθετοι*** ΜΠ καὶ $M_1\Pi_1$ εἶναι ***διαρκῶς*** παράλληλοι, θὰ ἔχωμεν :

$$v_x = v\sigma\upsilon\nu\omega, \quad v_y = 0, \quad v_z = v\eta\mu\omega \ (\omega \equiv \gamma\omega\nu.\ \dot{\epsilon}\varphi\alpha\pi\tau o\mu\dot{\epsilon}\nu\omega\nu)\cdot$$

$$p_1 = p\sigma\upsilon\nu\omega + r\eta\mu\omega, \quad q_1 = 0 = q + \omega' = \omega', \quad r_1 = -p\eta\mu\omega + r\sigma\upsilon\nu\omega\cdot \quad (\alpha)$$

ὥστε : $\omega' = 0$, $\omega = \sigma\tau\alpha\vartheta.$: ***ἡ γωνία τῶν ἐφαπτομένων εἶναι σταθερά· ἑπομένως : ἡ κλίσις τοῦ ἑνὸς τριέδρου πρὸς τὸ ἄλλο εἶναι σταθερά.*** (Πρβλ. σελ. 43, ἄσκ. 1). Ἔχομεν ἀκόμη ἀπὸ τὰς (α) :

$$p_1^2 + r_1^2 = p^2 + r^2, \ \delta\eta\lambda.\ ds_1^2\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{P_1^2}\right) = ds^2\left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{P^2}\right) \quad (86)$$

ἐπίσης δὲ καί: $-\frac{P_1}{R_1} = \frac{-P + R\varepsilon\varphi\omega}{P\varepsilon\varphi\omega + R}$, ἑπομένως : $\varepsilon\varphi\omega = \frac{PR_1 - RP_1}{PP_1 + RR_1} = \sigma\tau\alpha\vartheta.$ (86΄).

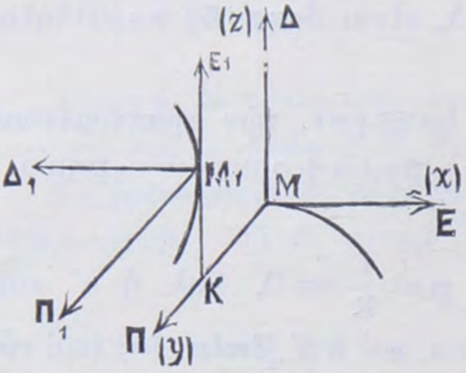
4) Παραλληλία ἐφαπτομένης καὶ δικαθέτου,

65. Ἂν εἶναι ἡ $M_1\Delta_1$ ***διαρκῶς*** παράλληλος πρὸς τὴν ΜΕ, θὰ ἔχωμεν (Σχ. 23) :

$$v_x = 0, \ v_y = v\sigma\upsilon\nu\omega, \ v_z = v\eta\mu\omega \ (\omega \equiv \gamma\omega\nu.\ \tau\tilde{\eta}\varsigma\ M_1E_1\ \pi\rho\grave{o}\varsigma\ \tau\grave{\eta}\nu\ M\Pi)\cdot$$

$$p_1 = q\sigma\upsilon\nu\omega + r\eta\mu\omega = r\eta\mu\omega, \quad q_1 = 0 = -q\eta\mu\omega + r\sigma\upsilon\nu\omega = r\sigma\upsilon\nu\omega,$$
$$r_1 = p + \omega'\cdot \quad (\alpha)$$

ὥστε: $r\sigma\upsilon\nu\omega=0$· λοιπὸν ἢ $r=0$ ἢ $\sigma\upsilon\nu\omega=0$, $\omega=\frac{\pi}{2}$· 1) $r=0$ δίδει



Σχ. 23.

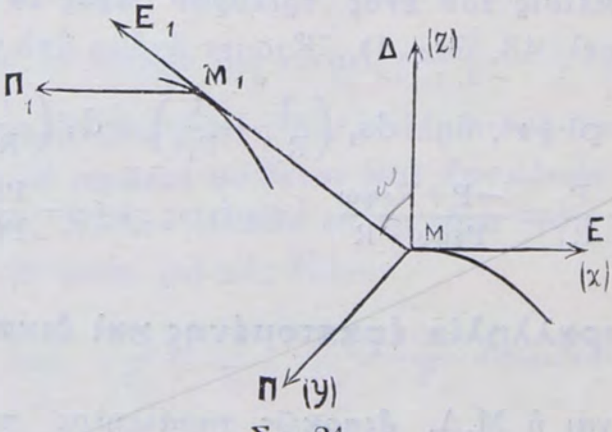
εὐθεῖαν τὴν α′ καμπύλην· τότε ὅμως θὰ εἶναι καὶ $p_1=r\eta\mu\omega=0$, δηλ. ἡ β′ καμπύλη ***ἐπίπεδος***: λύσις: ***μία ἐπίπεδος καμπύλη (ἡ β′) καὶ μία εὐθεῖα γραμμὴ (ἡ α′), κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς β′***.—2) $\omega=\frac{\pi}{2}$ δίδει τὴν M_1E_1 ***κάθετον*** πρὸς τὴν ΜΠ· λοιπὸν ***παράλληλον πρὸς τὴν ΜΔ· εἶναι ἑπομένως καὶ αἱ πρῶται κάθετοι παράλληλοι***. ***Τὰ δύο τρίεδρα λοιπὸν εἶναι παράλληλα***: $ME \parallel M_1\Delta_1$, $M\Pi \parallel M_1\Pi_1$, $M_1E_1 \parallel M\Delta$. Ἔχομεν ἀκόμη ἀπὸ τοὺς τύπους (α):

$p_1=r$, $r_1=p$, δηλ. $-\frac{ds_1}{R_1}=\frac{ds}{P}$, $\frac{ds_1}{P_1}=-\frac{ds}{R}$, ἑπομένως: $PP_1=RR_1$ (87)

(***Παράδειγμα***. Ἡ ***σφαιροκεντρικὴ*** καμπύλη καὶ ἡ ***ἀρχικὴ*** καμπύλη).

5) Παραλληλία ἐφαπτομένης καὶ πρώτης καθέτου.

66. Ἂν εἶναι ἡ $M_1\Pi_1$ ***διαρκῶς*** παράλληλος πρὸς τὴν ΜΕ (***παράδειγμα***: καμπύλη (K_1) καὶ μία ἀπὸ τὰς ***ἐξειλιγμένας*** της), θὰ ἔχωμεν (Σχ. 24):



Σχ. 24.

$v_x=0$, $v_y=v\eta\mu\omega$, $v_z=v\sigma\upsilon\nu\omega$ ($\omega\equiv$γων. τῆς M_1E_1 πρὸς τὴν ΜΔ).

$$\left.\begin{array}{l} p_1=r\sigma\upsilon\nu\omega+q\eta\mu\omega=r\sigma\upsilon\nu\omega, \quad q_1=0=p+\omega', \\ r_1=-r\eta\mu\omega+q\sigma\upsilon\nu\omega=-r\eta\mu\omega\cdot \end{array}\right\} \quad (\alpha)$$

ὥστε: $p = -\omega'$, ἢ: $\frac{1}{R} = \frac{d\omega}{ds}$ · $\quad - \frac{r_1}{p_1} = \frac{R_1}{P_1} = \varepsilon\varphi\omega$ · (88

$$\eta\mu\omega = \frac{R_1}{\sqrt{P_1^2 + R_1^2}}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{P_1}{\sqrt{P_1^2 + R_1^2}}.$$

Ἔχομεν ἐπίσης ἀπὸ τὰς (α): $p_1^2 + r_1^2 = r^2$, δηλ.

$$ds_1 = \frac{\frac{1}{P}}{\sqrt{\frac{1}{P_1^2} + \frac{1}{R_1^2}}} . ds = \frac{P_1 R_1}{P\sqrt{P_1^2 + R_1^2}} ds \quad (89),$$

$$\text{ἢ καὶ } ds_1 = \frac{R_1}{P} \sigma\upsilon\nu\omega ds = \frac{P_1}{P} \eta\mu\omega ds. \quad (89')$$

Μεταξὺ τῶν ἀκτίνων τῶν δύο καμπύλων ὑπάρχει ἀκόμη μία ***διαφορικὴ*** σχέσις (περιέχουσα τὸ ds)· διότι ἔχομεν: $\varepsilon\varphi\omega = \frac{R_1}{P_1}$· ἐπομένως:

$$\frac{d\omega}{ds} = \sigma\upsilon\nu^2\omega \, . \, \frac{d}{ds}\left(\frac{R_1}{P_1}\right), \text{ ἢ καί: } \frac{1}{R} = \frac{P_1^2}{P_1^2 + R_1^2} \cdot \frac{P_1 \frac{dR_1}{ds} - R_1 \frac{dP_1}{ds}}{P_1^2},$$

$$\text{δηλ.} \quad \frac{1}{R} = \frac{P_1 \frac{dR_1}{ds} - R_1 \frac{dP_1}{ds}}{P_1^2 + R_1^2} \quad (90).$$

Ἂν ἰδιαιτέρως ἡ α' καμπύλη εἶναι ***ἐπίπεδος***, θὰ εἶναι: $\omega =$ σταθ. καὶ ἐπομένως ἡ σχέσις: $\varepsilon\varphi\omega = \frac{R_1}{P_1}$ δίδει διὰ τὴν β' καμπύλην μίαν ***γενικὴν στερεὰν ἕλικα***: αἱ ***πρῶται κάθετοι*** τῆς γενικῆς στερεᾶς ἕλικος εἶναι ***παράλληλοι*** πρὸς τὰς ***πρώτας καθέτους*** μιᾶς ***καθέτου τομῆς*** τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, ἐπὶ τῆς ὁποίας εὑρίσκεται ἡ ἕλιξ· ἐπομένως ***παράλληλοι*** πρὸς τὰς ἐφαπτομένας ***κάθε καμπύλης μὲ ἐφαπτομένας παραλλήλους*** πρὸς τὰς πρώτας καθέτους τῆς καθέτου τομῆς (π. χ. πρὸς τὴν ***ἐπίπεδον ἐνειλιγμένην*** τῆς καθέτου τομῆς).

6) Παραλληλία δικαθέτου καὶ πρώτης καθέτου.

67. Ἂν ἡ $M_1\Pi$, εἶναι ***διαρκῶς*** παράλληλος πρὸς τὴν ΜΔ (***παράδειγμα***: καμπύλη (K_1) καὶ ἡ σφαιροκεντρικὴ μιᾶς ἐξειλιγμένης της), θὰ ἔχωμεν ($\omega =$ γων. τῆς M_1E_1 πρὸς τὴν ΜΠ) (Σχ. 25):

$$v_x = v\eta\mu\omega, \quad v_y = v\sigma\upsilon\nu\omega, \quad v_z = 0 \cdot$$

$$p_1 = q\,\text{συνω} + p\,\text{ημω} = p\,\text{ημω}, \quad r_1 = -q\,\text{ημω} + p\,\text{συνω} = p\,\text{συνω},$$
$$q_1 = 0 = r + \omega' \quad (\alpha)\cdot$$

$$\text{ὥστε}: \; r = -\omega', \; \text{δηλ.} \; \frac{1}{P} = -\frac{d\omega}{ds}\cdot \; \frac{p_1}{r_1} = -\frac{P_1}{R_1} = \text{εφω}\cdot \qquad (91)$$

$$\text{ημω} = -\frac{P_1}{\sqrt{P_1^2+R_1^2}}, \quad \text{συνω} = \frac{R_1}{\sqrt{P_1^2+R_1^2}}.$$

Ἔχομεν ἀκόμη ἀπὸ τὰς (α) : $p_1^2 + r_1^2 = p^2$, δηλ.

$$ds_1 = \frac{\frac{1}{R}}{\sqrt{\frac{1}{P_1^2}+\frac{1}{R_1^2}}}.ds = \frac{P_1R_1}{R\sqrt{P_1^2+R_1^2}}.ds \quad (92).$$

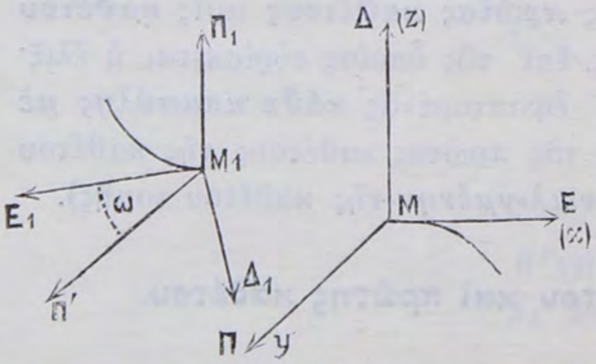
$$\text{ἢ καί}: ds_1 = \frac{P_1}{R}\text{συνω}ds = -\frac{R_1}{R}\text{ημω}ds. \qquad (92')$$

Ἐπίσης ἔχομεν καὶ μίαν ***διαφορικὴν*** σχέσιν μεταξὺ τῶν ἀκτίνων (περιέχουσαν τὸ ds)· διότι εἶναι : $\text{εφω} = -\frac{P_1}{R_1}$· ἐπομένως :

$$\frac{d\omega}{ds} = \text{συν}^2\omega\frac{d}{ds}\left(-\frac{P_1}{R_1}\right), \text{ ἢ καί : } \frac{1}{P} = \text{συν}^2\omega d\left(\frac{P_1}{R_1}\right), \text{ δηλ.}$$

$$\frac{1}{P} = \frac{R_1^2}{P_1^2+R_1^2}.\frac{R_1\frac{dP_1}{ds} - P_1\frac{dR_1}{ds}}{R_1^2}, \text{ ἢ ἁπλῶς : } \frac{1}{P} = \frac{R_1\frac{dP_1}{ds} - P_1\frac{dR_1}{ds}}{P_1^2+R_1^2} \quad (93)$$

Ἂν ἰδιαιτέρως ἡ α΄ καμπύλη εἶναι ***εὐθεῖα*** γραμμή, θὰ εἶναι : $\omega = \text{σταθ.}$ καὶ ἐπομένως ἡ σχέσις : $\text{εφω} = -\frac{P_1}{R_1}$ δίδει ὡς β΄ καμπύλην μίαν ***γενικὴν στερεὰν ἕλικα***.



Σχ. 25.

Λύσις : εὐθεῖα τυχοῦσα (ἡ α΄ καμπύλη) καὶ τυχοῦσα ***γενικὴ ἕλιξ*** (ἡ β΄ καμπύλη) ἐπὶ κυλινδρικῆς ἐπιφανείας μὲ ***γενετείρας παραλλήλους*** πρὸς τὴν εὐθεῖαν : αἱ ***πρῶται κάθετοι*** τῆς ἕλικος εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς γενετείρας τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, ἐπομένως καὶ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν· ***μία δὲ σειρὰ*** καθέτων πρὸς τὴν εὐθεῖαν, ἀντιστοίχως παραλλήλων πρὸς τὰς πρώτας καθέτους τῆς ἕλικος, εἰμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς ἡ σειρὰ τῶν ***δικαθέτων*** της.

Ἀσκήσεις καὶ Προσθῆκαι.

Ἐπειδὴ ἡ ***σύμπτωσις*** δύο εὐθειῶν εἶναι ***μερικὴ*** περίπτωσις τῆς ***παραλληλίας*** των, οἱ τύποι τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ ἰσχύουν προφανῶς καὶ διὰ τὰς περιπτώσεις ***συμπτώσεως*** τοῦ προηγουμένου κεφαλαίου. Ἡ σύμπτωσις ὅμως συνεπάγεται ***καὶ ἄλλα*** πορίσματα καὶ τύπους, μὴ ἰσχύοντα εἰς τὴν ἁπλῆν παραλληλίαν. Π. χ. ἡ ἁπλῆ ***παραλληλία*** τῶν πρώτων καθέτων ***δὲν*** δίδει καμπύλας τοῦ Bertrand κτλ.

1) Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ σχέσις (86), ὅταν αἱ πρῶται κάθετοι ***συμπέσουν,*** καταντᾷ ἡ σχέσις (60) τῶν καμπύλων τοῦ *Bertrand*.

2) Νὰ δειχθῇ, ὅτι αἱ σχέσεις (92′) καὶ (93), ὅταν ἡ δικάθετος συμπέσῃ μὲ τὴν πρώτην κάθετον, καταντοῦν αἱ σχέσεις (69) καὶ (74′) τῶν καμπύλων τοῦ Mannheim. (Εἰς τὴν (74′) πρέπει νὰ γραφῇ $-\frac{1}{P_1}$ ἀντὶ $\frac{1}{P_1}$).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε′.

ΣΥΜΦΥΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ· ΣΧΕΣΕΙΣ ΙΔΙΑΙΤΕΡΑΣ ΜΟΡΦΗΣ ΜΕΤΑΞΥ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΟΣ ΚΑΙ ΣΤΡΕΨΕΩΣ·

α′) Ἤδη γνωσταὶ σχέσεις.

68. ***Συμφυεῖς ἐξισώσεις κάθε καμπύλης.***—Διὰ ***κάθε*** καμπύλην τοῦ χώρου εἶναι προφανῶς:

$$P = \sigma(s), \quad R = \varphi(s)\cdot$$

τὰς δύο αὐτὰς ἐξισώσεις, ποὺ ὁρίζουν ἐντελῶς τὸ ***σχῆμα*** τῆς καμπύλης (ὄχι ὅμως καὶ τὴν ***θέσιν*** της ἐντὸς τοῦ χώρου) τὰς λέγομεν «***συμφυεῖς***» ἐξισώσεις τῆς καμπύλης. Ἀπὸ αὐτὰς συνάγομεν: $R = f(P)$ ἢ γενικώτερα:

$$(\alpha) \quad \Phi(P, R) = 0\cdot \quad \text{δηλ.}$$

Εἰς κάθε καμπύλην ὑπάρχει πάντοτε μία σχέσις μεταξὺ P καὶ R, ἤ, μὲ ἄλλας λέξεις: ***Ἡ καμπυλότης καὶ ἡ στρέψις εἶναι ἡ μία συνάρτησις τῆς ἄλλης.***

Κάθε σχέσις τῆς μορφῆς (α), μὲ ***ὡρισμένην*** συνάρτησιν, ὁρίζει μίαν ***κατηγορίαν*** καμπύλων, τῆς ὁποίας ***χαρακτηριστικὴν*** ἐξίσωσιν ὀνομάζομεν τὴν (α). Ἀναλόγως δὲ πρὸς τὸ εἶδος τῆς σχέσεως ταύτης ἔχομεν καὶ εὐρυτέραν ἢ στενωτέραν κατηγορίαν καμπύλων. Καὶ εἰμποροῦμεν μὲν νὰ θέσωμεν μεταξὺ $\frac{1}{P}$ καὶ $\frac{1}{R}$. ***ὁποιανδήποτε σχέσιν*** θέλομεν, δὲν εἶναι ὅμως εὔκολον ν᾿ ἀνακαλύψωμεν ***γεωμετρικὰς ἰδιότητας*** τῆς ἀντιστοίχου κατηγορίας καμπύλων. Αἱ ἁπλούστεραι βέβαια σχέσεις εἶναι αἱ ἀλγεβρικαὶ καὶ μάλιστα τ᾿ ἀκέραια πολυώνυμα. Τὰς καμπύλας, ποὺ ἔχουν χαρακτηριστικὴν ἀλγεβρικὴν ἐξίσωσιν α΄ βαθμοῦ πρὸς $\frac{1}{P}$ καὶ $\frac{1}{R}$: $\frac{A}{P}+\frac{B}{R}=\Gamma$, τὰς εὑρήκαμεν ἤδη : εἶναι αἱ καμπύλαι τοῦ Bertrand (σελ. 44, ἄσκ. 3η καὶ σελ. 50). Μίαν ἀλγεβρικὴν σχέσιν β΄ βαθμοῦ ἰδιαιτέρας μορφῆς εὑρήκαμεν εἰς τὰς καμπύλας τοῦ Mannheim:

$$\frac{1}{P}=\alpha\left(\frac{1}{P^2}+\frac{1}{R^2}\right).$$

β΄) Σχέσις β΄ βαθμοῦ πλήρης.

69. ***Γενίκευσις τῆς ἀσκ. 3 (σελ. 44).***—Χαρακτηριστικὴν ***πλήρη*** β΄ βαθμοῦ ἐξίσωσιν μᾶς παρέχει τὸ πρόβλημα τῆς ἀσκ. 3 (σελ. 44), ἂν ἡ γωνία δὲν εἶναι ***ὀρθή,*** ἀλλ᾿ ἁπλῶς ***σταθερά·*** διότι θὰ ἔχωμεν πάλιν τότε :

$$v_x=1-\frac{y}{P},\quad v_y=\frac{x}{P}+\frac{z}{R},\quad v_z=-\frac{y}{R}\ \text{καὶ ἑπομένως :}$$

$$av_x+bv_y+cv_z=\text{συνφ}.v=Kv\quad (K\ \text{σταθερὸν}),$$

ἢ

$$(av_x+bv_y+cv_z)^2=K^2v^2,\ \text{δηλ.}$$

$$\left[a+\frac{1}{P}(bx-ay)-\frac{1}{R}(cy-bz)\right]^2=$$

$$(94)\qquad =K^2\left[\left(1-\frac{y}{P}\right)^2+\left(\frac{x}{P}+\frac{z}{R}\right)^2+\frac{y^2}{R^2}\right]=$$

$$=K^2\left[1-\frac{2y}{P}+\frac{2xz}{PR}+\frac{1}{P^2}\left(x^2+y^2\right)+\frac{1}{R^2}\left(y^2+z^2\right)\right].$$

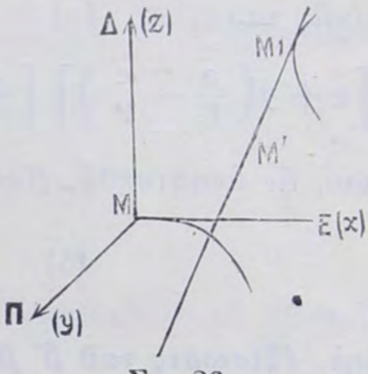
Ὑπάρχει λοιπὸν μεταξὺ τῶν $\frac{1}{P}$ καὶ $\frac{1}{R}$ μία ἀλγεβρικὴ ἐξίσωσις τοῦ β΄ βαθμοῦ πλήρης, τῆς μορφῆς :

$$(94')\qquad \frac{A}{P^2}+\frac{B}{PR}+\frac{\Gamma}{R^2}+\frac{\Delta}{P}+\frac{E}{R}+Z=0.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ περιλαμβάνει προφανῶς ὡς μερικὴν περίπτωσιν καὶ τὴν α'-βάθμιον σχέσιν τῶν καμπύλων τοῦ Bertrand, καθὼς καὶ τὴν α' ἀπὸ τὰς καμπύλας τοῦ Mannheim.

γ') Καμπύλαι τοῦ *Cesàro*.

70. ***Πρόβλημα.***—Εἰς τὴν § 30 (σελ. 41—2) εὑρήκαμεν, πότε εὐθεῖα στερεῶς συνδεομένη μὲ τὸ πρωτεῦον τρίεδρον καὶ διερχομένη ἀπὸ τὸ M παράγει ἀναπτυκτὴν ἐπιφάνειαν. Ἄς ἐξετάσωμεν τώρα γενικώτερα τὸ ἴδιον πρόβλημα, ὅταν ἡ εὐθεῖα εἶναι ***τυχοῦσα*** (μὴ ἀναγκαστικῶς διὰ τῆς ἀρχῆς M), συνδέεται ὅμως πάντοτε στερεῶς μὲ τοὺς ἄξονας Mxyz (Σχ. 26).[1]



Σχ. 26.

Αἱ σχετικαὶ ἐξισώσεις τῆς εὐθείας θὰ εἶναι :

$$X=x+a\omega, \quad Y=y+b\omega, \quad Z=z+c\omega$$

(ὅπου x,y,z αἱ ***σταθεραὶ*** συντεταγμέναι ἑνὸς σημείου της M')· καὶ εἰς τὸ σημεῖον $M_1(x_1,y_1,z_1)$ τῆς ἐπαφῆς της μὲ τὸν λαιμὸν τῆς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας, ποὺ θέλομεν νὰ παράγη, θὰ εἶναι :

$$x_1=x+a\omega, \quad y_1=y+b\omega, \quad z_1=z+c\omega\cdot$$

Θὰ ἔχωμεν δὲ διὰ τὴν ταχύτητα τοῦ M_1 :

$$(\alpha) \quad v_x=1-\frac{y+b\omega}{P}+a\omega', \quad v_y=\frac{x+a\omega}{P}+\frac{z+c\omega}{R}+b\omega',$$

$$v_z=-\frac{y+b\omega}{R}+c\omega'.$$

ἐπομένως αἱ συνθῆκαι τῆς παραγωγῆς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας εἶναι :

$$(\beta) \quad \frac{1-\dfrac{y+b\omega}{P}}{a}=\frac{\dfrac{x+a\omega}{P}+\dfrac{z+c\omega}{R}}{b}=\frac{-\dfrac{y+b\omega}{R}}{c}.$$

---

(1) *N. Hatzidakis, Sur les courbes de M. Cesàro* (***Ἐπιστημονικὴ Ἐπετηρὶς Ἐθν. Πανεπιστημίου, 1905-6, σελ.*** 319—339). Πρβλ. καὶ Cesàro (*Rivista di Matematica, 1892*, ***σελ. 155,*** καὶ *Geometria Intrinseca*, σελ. 149).

Ἂν δὲ ἐξισώσωμεν τὰς δύο τιμὰς τοῦ ω, ποῦ μᾶς δίδουν αἱ ἐξισώσεις αὐταί :

$$\omega = -\frac{c+y\left(\frac{a}{R}-\frac{c}{P}\right)}{b\left(\frac{a}{R}-\frac{c}{P}\right)} \text{ καί : } \omega = -\frac{\frac{cx}{P}+\frac{by+cz}{R}}{\frac{ac}{P}+\frac{b^2+c^2}{R}},$$

εὑρίσκομεν τὴν ἑξῆς σχέσιν μεταξὺ καμπυλότητος καὶ στρέψεως τῆς ἀρχικῆς καμπύλης : (γ)

$$\left[c+y\left(\frac{a}{R}-\frac{c}{P}\right)\right]\left[\frac{ac}{P}+\frac{b^2+c^2}{R}\right]=\left(\frac{cx}{P}+\frac{by+cz}{R}\right)b\left(\frac{a}{R}-\frac{c}{P}\right),$$

πού, ἂν ἀναπτυχθῇ, γίνεται τῆς μορφῆς :

$$(\delta) \quad \frac{A}{P^2}+\frac{B}{PR}+\frac{\Gamma}{R^2}+\frac{\Delta}{P}+\frac{E}{R}=0.$$

δηλ. ***ἐξίσωσις τοῦ β' βαθμοῦ πρὸς*** $\frac{1}{P}$, $\frac{1}{R}$ ***πλήρης, πλὴν τοῦ σταθεροῦ ὅρου, ποὺ δὲν ὑπάρχει.***

Αἱ καμπύλαι, τῶν ὁποίων τὰ $\frac{1}{P}$, $\frac{1}{R}$ ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν αὐτὴν (δ), λέγονται ***καμπύλαι τοῦ*** *Cesàro*. Περιλαμβάνουν:
1) τὰς καμπύλας τοῦ Bertrand (ἂν $A=B=\Gamma=0$, ἢ ἂν τὸ τριώνυμον $\frac{A}{P^2}+\frac{B}{PR}+\frac{\Gamma}{R^2}$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ διωνύμου $\frac{\Delta}{P}+\frac{E}{R}$) καὶ
2) τὰς πρώτας καμπύλας τοῦ Mannheim (ἂν $B=E=0$ καὶ $A=\Gamma$).

71. 1) ***Περίπτωσις τυχαίας καμπύλης.*** Ἂν ἡ ἀρχικὴ καμπύλη εἶναι ***τυχαία***, πρέπει ἡ ἐξίσωσις (δ) νὰ εἶναι ***ταὐτότης***· ἡ ἐξίσωσις ὅμως αὐτὴ γράφεται, ἂν καταταχθῇ κατὰ τὰ $\frac{1}{P}$, $\frac{1}{R}$, ὡς ἑξῆς :

$$(95) \quad \frac{c(bx-ay)}{P^2}-\frac{a(bx-ay)+c(cy-bz)}{PR}+\frac{a(cy-bz)}{R^2}+\frac{ac}{P}+\frac{b^2+c^2}{R}=0.$$

διὰ νὰ εἶναι λοιπὸν ***ταὐτότης***, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι :

$$b=0, \quad c=0 \text{ (ὥστε } a=1) \text{ καὶ } y=0\cdot$$

δηλ. ***μόναι τοιαῦται εὐθεῖαι, ποὺ νὰ παράγουν ἀναπτυκτὰς ἐπιφανείας, εἶναι αἱ παράλληλοι πρὸς τὴν ἐφαπτομένην, ποὺ κεῖνται ἐπὶ τοῦ εὐθειοποιοῦντος ἐπιπέδου.***

72. 2) ***Περίπτωσις καμπύλης τοῦ*** *Cesàro*. Ἂς ἐξετάσωμεν τώρα

καὶ τὴν β' περίπτωσιν, ποὺ ἡ καμπύλη ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν (95). Πρέπει τότε νὰ ἔχωμεν :

$$(\varepsilon)\qquad \frac{c(bx-ay)}{A}=-\frac{a(bx-ay)+c(cy-bz)}{B}=\frac{a(cy-bz)}{\Gamma}=\frac{ac}{\Delta}=\frac{b^2+c^2}{E},$$

ἂν δὲ μεταξὺ τῶν τριῶν ἐξισώσεων :

$$\frac{c(bx-ay)}{A}=\frac{ac}{\Delta},\quad -\frac{a(bx-ay)+c(cy-bz)}{B}=\frac{ac}{\Delta},\quad \frac{a(cy-bz)}{\Gamma}=\frac{ac}{\Delta}$$

ἀπαλείψωμεν τὰς δύο παραστάσεις $bx-ay$ καὶ $cy-bz$, εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν :

$$(\zeta)\qquad Aa^2+\Gamma c^2+Bac=0,$$

ἡ ὁποία, μαζὶ μὲ τὴν τελευταίαν ἀπὸ τὰς (ε) :

$$(\eta)\qquad \Delta(b^2+c^2)=Eac,$$

ἀποτελοῦν τὰς δύο σχέσεις, ποὺ πρέπει νὰ ἐπαληθεύουν τὰ συνημίτονα a, b, c.

Αἱ εὐθεῖαι, τῶν ὁποίων τὰ συνημίτονα ἐπαληθεύουν τὰς δύο σχέσεις (ζ) καὶ (η) (ὅταν δὲν εἶναι ταυτότητες), ***εἶναι τέσσαρες εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὰς τομὰς τοῦ κώνου τοῦ β' βαθμοῦ :*** $\Delta(y_1^2+z_1^2)=Ex_1z_1$, ***ἀπὸ τὰ δύο ἐπίπεδα :*** $Ax_1^2+\Gamma z_1^2+Bx_1z_1=0$, ***ποὺ διέρχονται ἀπὸ τὴν πρώτην κάθετον.*** Αἱ συντεταγμέναι x,y,z τοῦ σημείου κάθε τοιαύτης εὐθείας καὶ ἑπομένως καὶ αἱ ἐξισώσεις της θὰ εὑρεθοῦν, ἂν ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (ζ) καὶ (η) λάβωμεν τὰς τιμὰς τῶν a,b,c καὶ τὰς θέσωμεν εἰς τὰς (ε). ***Διὰ τὰς καμπύλας λοιπὸν τοῦ Cesàro ὑπάρχουν καὶ ἄλλαι τέσσαρες εὐθεῖαι μὲ τὴν ζητουμένην ἰδιότητα, πλὴν τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῶν κειμένων ἐπὶ τοῦ εὐθειοποιοῦντος ἐπιπέδου.***

73. 3) ***Μερικὴ περίπτωσις καμπύλης τοῦ Bertrand.*** — Ἂν τὸ τριώνυμον : $\frac{A}{P^2}+\frac{B}{PR}+\frac{\Gamma}{R^2}$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ διωνύμου : $\frac{\Delta}{P}+\frac{E}{R}$ (διαφόρου ἀπὸ τὸ 0, ἄλλως ἡ καμπύλη εἶναι ἕλιξ), ἡ ἐξίσωσις (δ) καταντᾷ τῆς μορφῆς : $\frac{\Pi}{P}+\frac{\Sigma}{R}+1=0$, δηλ. ἔχομεν καμπύλην τοῦ Bertrand. Τότε ὅμως αἱ ἐξισώσεις (ζ) καὶ (η) εἰμποροῦν νὰ γραφοῦν ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$(\Pi a+\Sigma c)\,(\Delta a+Ec)=0,\qquad a(\Delta a+Ec)=\Delta\qquad (\vartheta)$$

διότι εἶναι : $b^2+c^2=1-a^2$ καὶ ἀπὸ τὴν ταὐτότητα :

$$\frac{A}{P^2}+\frac{B}{PR}+\frac{\Gamma}{R^2}+\frac{\Delta}{P}+\frac{E}{R}=\left(\frac{\Delta}{P}+\frac{E}{R}\right)\left(\frac{\Pi}{P}+\frac{\Sigma}{R}\right)$$ συνάγομεν :

$A=\Delta\Pi$, $B=E\Pi+\Delta\Sigma$, $\Gamma=E\Sigma$ καὶ ἂν αἱ τιμαὶ αὗται τεθοῦν εἰς τὰς (ζ) καὶ (η), δίδουν τὰς (ϑ)).

Θὰ ἔχωμεν λοιπόν : ἢ $\Pi a+\Sigma c=0$ ἢ $\Delta a+Ec=0$.

α΄) Ἡ β΄ ὑπόθεσις δίδει καὶ $\Delta=0$, ὥστε καὶ $c=0$ (διότι $E\gtrless 0$)· ἑπομένως εἶναι καί :

$A=\Delta\Pi=0$, $B=E\Pi$, $\Gamma=E\Sigma$ καὶ αἱ σχέσεις (ε) γίνονται :

$$\frac{a(ay-bx)}{\Pi}=-\frac{abz}{\Sigma}=b^2\cdot$$

καὶ ἂν μὲν εἶναι πρῶτα οἱ ἀριθμηταὶ ***ὅλοι*** $=0$, θὰ εἶναι καὶ $b=0$, $a=1$, $y=0$· ***ἐπανευρίσκομεν δηλ. τὰς παραλλήλους πρὸς τὴν ἐφαπτομένην ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου*** xz. Ἂν δὲ ***δὲν*** εἶναι ὅλοι $=0$, αἱ σχέσεις αὐταὶ ὁρίζουν ἓν ***σμῆνος*** εὐθειῶν, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἡ σχέσις : $c=0$ ἀποσπᾷ ***ἓν ὑπερβολικὸν παραβολοειδές***· πραγματικῶς, ἀπὸ τὰς σχέσεις :

$$(ay-bx)\Sigma=-bz\Pi, \quad b\Sigma=-az, \quad z_1=z$$

καὶ τήν : $\frac{x_1-x}{a}=\frac{y_1-y}{b}$ ἢ $x_1b-y_1a=xb-ya$ εὑρίσκομεν :

$$(\iota) \quad \Sigma(ay_1-bx_1)=-\Pi bz_1, \quad b\Sigma=-az_1\cdot$$

καὶ ἂν ἀπαλείψωμεν τὸν λόγον $\frac{a}{b}$, παράγεται ἡ ἐξίσωσις :

$$\Sigma^2.y_1-\{\Pi z_1+\Sigma x_1\}z_1=0 \quad (96)$$

ἐξίσωσις ἑνὸς ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς (διότι εἶναι εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια τοῦ β΄ βαθμοῦ, περιέχουσα τὰς εὐθείας (ι), ***τὰς παραλλήλους πρὸς τὸ ἐπίπεδον*** x_1y_1).

β΄) Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα : $\Pi a+\Sigma c=0$· εἶναι :

$$\frac{c(ay-bx)}{\Delta.\Pi}=\frac{-ac}{\Delta}, \quad \frac{a(bz-cy)}{E\Sigma}=-\frac{b^2+c^2}{E}, \text{ δηλ.}$$

$$bx-ay=a\Pi, \quad b(az-cx+b\Sigma)=0.$$

Ἡ πρώτη ὑπόθεσις $b=0$ μᾶς δίδει ***εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὸ ἐπίπεδον*** xz ***καὶ παραλλήλους πρὸς ὡρισμένην διεύθυνσιν (διότι***

$\frac{c}{a}=-\frac{\Pi}{\Sigma}$), ***κειμένας ὅλας ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου*** $y_1=-\Pi$ (διότι ἡ σχέσις: $bx-ay=a\Pi$ δίδει: $y=-\Pi$). Ἐπειδὴ δὲ τὰ x καὶ z μένουν ἀόριστα, ***κάθε τοιαύτη εὐθεῖα αὐτοῦ τοῦ ἐπιπέδου λύει τὸ ζήτημα.***

Ἡ δευτέρα ὑπόθεσις: $az-cx+b\Sigma=0$ δίδει:

$$a\Pi+c\Sigma=0, \quad bx-ay=a\Pi, \quad az-cx=-b\Sigma\cdot$$

αἱ ἐξισώσεις δὲ αὐταὶ ὁρίζουν πάλιν ἓν ὑπερβολικὸν παραβολοειδές, ὡς ἑξῆς.

Ἀπὸ τὰς σχέσεις: $\frac{x_1-x}{a}=\frac{y_1-y}{b}=\frac{z_1-z}{c}$ εὑρίσκομεν:

$x_1b-y_1a=xb-ya$, $x_1c-z_1a=xc-za$ καὶ μὲ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν x,y,z: $\Pi a+\Sigma c=0$, $x_1b-y_1a=a\Pi$, $z_1a-x_1c=-b\Sigma\cdot$ καὶ τέλος μὲ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν $\frac{c}{a}$ καὶ $\frac{b}{a}$ παράγεται ἡ ἐξίσωσις:

$$(\Pi+y_1)\Sigma^2+\Sigma z_1x_1+\Pi x_1^2=0 \qquad (97),$$

ἐξίσωσις ἑνὸς δευτέρου ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς (διότι εἶναι εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια μὲ μίαν σειρὰν γενετειρῶν ***παραλλήλων πρὸς τὸ ἐπίπεδον*** $\Pi x_1=-\Sigma z_1$ (ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸν ἄξονα y_1).

74. ***Συμπέρασμα.— Ἂν ἡ καμπύλη εἶναι καμπύλη τοῦ*** *Bertrand*, ***εὐθεῖαι, ποὺ νὰ συνδέωνται στερεῶς μὲ τὸ τρίεδρόν της καὶ νὰ παράγουν (κατὰ τὴν κύλισίν του) ἀναπτυκτὰς ἐπιφανείας, εἶναι μόνον αἱ ἑξῆς:***

1) ***Αἱ παράλληλοι πρὸς τὴν ἐφαπτομένην αἱ κείμεναι ἐπὶ τοῦ εὐθειοποιοῦντος ἐπιπέδου.***

2) ***Αἱ παράλληλοι πρὸς τὴν εὐθεῖαν***: $b=0$, $\frac{c}{a}=-\frac{\Pi}{\Sigma}$ ***αἱ κείμεναι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου***: $y_1=-\Pi$, ***τοῦ παραλλήλου πρὸς τὸ εὐθειοποιοῦν.***

3) ***Αἱ γενέτειραι τοῦ ἑνὸς συστήματος τοῦ ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς***: $\Sigma^2y_1+\Pi z_1^2-\Sigma z_1x_1=0$, ***αἱ παράλληλοι πρὸς τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον.***

4) ***Αἱ γενέτειραι τοῦ ἑνὸς συστήματος τοῦ ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς:*** $\Pi\Sigma^2+y_1\Sigma^2+\Sigma z_1x_1+\Pi x_1^2=0$, ***αἱ παράλληλοι πρὸς τὸ ἐπίπεδον:*** $\Pi x_1=-\Sigma z_1$ ***(τὸ διὰ τῆς πρώτης καθέτου).***

Παρατήρησις. Ἡ παρουσία **δύο** σειρῶν παραλλήλων εὐθειῶν καὶ **δύο** ὑπερβολικῶν παραβολοειδῶν ἐξηγεῖται εὔκολα ὡς ἑξῆς. Κάθε καμπύλη τοῦ Bertrand : $\frac{\Pi}{P}+\frac{\Sigma}{R}+1=0$ ἔχει, καθὼς εἴδαμεν, κοινὰς τὰς πρώτας της καθέτους μὲ μίαν ἄλλην καμπύλην τοῦ Bertrand : $-\frac{\Pi}{P_1}+\frac{\Sigma}{R_1}+1=0$ καὶ ἡ γωνία ϑ τῶν ἐφαπτομένων των δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν $\sigma\varphi\vartheta=-\frac{\Sigma}{\Pi}=$σταθ. Ἐπίσης ἡ ἀπόστασις τῶν ἀντιστοίχων σημείων των εἶναι σταθερὰ $=-\Pi$. Λοιπὸν τὸ α΄ σύστημα εὐθειῶν καὶ τὸ α΄ παραβολοειδὲς ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν α΄ καμπύλην· τὸ β΄ σύστημα εὐθειῶν καὶ τὸ β΄ παραβολοειδὲς εἰς τὴν β΄ καμπύλην· ἀλλὰ ***κάθε εὐθεῖα στερεῶς συνδεομένη μὲ τὸ τρίεδρον τῆς μιᾶς ἀπὸ τὰς καμπύλας αὐτὰς συνδέεται προφανῶς στερεῶς καὶ μὲ τὸ τρίεδρον τῆς ἄλλης*** (ἀφοῦ καὶ τὰ δύο τρίεδρα συνδέονται στερεῶς).

75. ***Δύο μερικώτεραι περιπτώσεις τῶν καμπύλων τοῦ*** *Bertrand*.— α΄) ***Καμπύλαι σταθερᾶς στρέψεως ($\Pi=O$). Τὰ δύο συστήματα τῶν παραλλήλων εὐθειῶν συμπίπτουν τότε εἰς ἕν, τὸ πρῶτον*** (διότι $y_1=-\Pi=0$ καὶ $c=-a\frac{\Pi}{\Sigma}=0$)· ***τὰ δὲ δύο παραβολοειδῆ συμπίπτουν καὶ αὐτὰ εἰς ἕν, τό*** : $\Sigma y_1=-z_1x_1$.

β΄) ***Στρεβλοὶ κύκλοι ($\Sigma=O$). Τὰ δύο παραβολοειδῆ ἐκφυλίζονται εἰς τὰς ἐφαπτομένας δύο παραβολῶν*** : ***ἡ μία κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου, μὲ κορυφὴν τὸ M καὶ ἑστίαν τὸ κέντρον καμπυλότητος K· ἡ ἄλλη κεῖται ἐπὶ τοῦ καθέτου ἐπιπέδου καὶ ἔχει, ἀντιστρόφως, ἑστίαν τὸ M καὶ κορυφὴν τὸ κέντρον καμπυλότητος*** (Βλέπε Ἀσκήσεις).

76. ***Μερικὴ περίπτωσις καμπύλης τοῦ*** *Mannheim*, ***ἢ τῶν καμπύλων τοῦ β΄ προβλ. τῆς ἀσκ. 4, σελ. 61.***—Ἂν εἶναι :

$$\Pi\left(\frac{1}{P^2}+\frac{1}{R^2}\right)=\frac{1}{P} \text{ ἢ γενικώτερα: } \Pi\left(\frac{\eta\mu^2\vartheta}{P^2}+\frac{1}{R^2}\right)=\frac{\eta\mu\vartheta}{P}, \quad (^1)$$

εὐθεῖαι λύουσαι τὸ πρόβλημα εἶναι μόνον αἱ παράλληλοι πρὸς τὴν ἐφαπτομένην ἐπὶ τοῦ εὐθειοποιοῦντος ἐπιπέδου. Πραγματικῶς, ὁ κῶνος καὶ τὰ ἐπίπεδα, ποὺ δίδουν τὰς ἄλλας ***ζητουμένας εὐθείας***, γίνονται τώρα :

$$-\eta\mu\vartheta(y_1^2+z_1^2)=0, \quad \eta\mu^2\vartheta x_1^2+z_1^2=0, \quad \delta\eta\lambda. \quad x_1=y_1=z_1=0 \ (\vartheta \gtrless 0).$$

(¹) Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ἰσχύει εἰς τὸ β΄ πρόβλ. τῆς ἀσκ. 4.

Ἀσκήσεις καὶ προσθῆκαι.

1) ***Καμπύλαι τοῦ*** *Cesàro*: ***περίπτωσις τῶν στρεβλῶν κύκλων.*** — Ὅτι τότε τὰ δύο παραβολοειδῆ ἐκφυλίζονται εἰς τὰς ἐφαπτομένας δύο παραβολῶν, ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς.

Θὰ ἔχωμεν τότε: $\Pi a(\Delta a+Ec)=0$, $a(\Delta a+Ec)=\Delta$, ἑπομένως: ἢ $a=0$ ἢ $\Delta a+Ec=0$. Ἡ ὑπόθεσις $a=0$ δίδει καὶ $\Delta=0$ καὶ ἑπομένως: $\frac{cbx}{\Delta\Pi}=\frac{c(bz-cy)}{E\Pi}=\frac{b^2+c^2}{E}=\frac{1}{E}$· ἐπειδὴ δὲ $E\gtrless 0$ (ἄλλως ἡ σχέσις $\frac{E}{R}\left(\frac{\Pi}{P}+1\right)=0$ θὰ ἔδιδε τὸ $\frac{\Pi}{P}+1$ ἀπροσδιόριστον, δηλ. αὐθαίρετον καμπύλην), θὰ εἶναι: ἢ $c=0$ ἢ $b=0$ ἢ $x=0$· $c=0$ εἶναι ἀδύνατον (ἀφοῦ $\Pi\gtrless 0$)· $b=0$ δίδει: $c=1$, $y=-\Pi$: τὰς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $y=-\Pi$ παραλλήλους πρὸς τὴν δικάθετον τώρα εὐθείας.

Τέλος $x=0$ δίδει εὐθείας ἐπὶ τοῦ καθέτου ἐπιπέδου (καθὼς φαίνεται καὶ ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ παραβολοειδοῦς: $\Pi\Sigma^2+y_1\Sigma^2+\Sigma z_1x_1+\Pi x_1^2=0$, πού, διὰ $\Sigma=0$, γίνεται: $x_1^2=0$). Ἄς εὕρωμεν τὴν περιβάλλουσάν των. Ἔχουν ἐξίσωσιν ἐπὶ τοῦ καθέτου ἐπιπέδου: $c(z_1b-y_1c)=\Pi$ ἢ καί: $c(z_1\sqrt{1-c^2}-y_1c)=\Pi$. Ὥστε ἡ περιβάλλουσά των ἔχει τὰς ἐξισώσεις:

$c(z_1\sqrt{1-c^2}-y_1c)=\Pi$, $2y_1c\sqrt{1-c^2}=z_1(1-2c^2)$· εἶναι λοιπόν:

$c^2=\frac{z_1^2-2\Pi y_1}{2(y_1^2+z_1^2)}$· καὶ ἂν θέσωμεν τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ c^2 εἰς τὴν σχέσιν: $(y_1^2+z_1^2)c^4+(2\Pi y_1-z_1^2)c^2=-\Pi^2$, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς περιβαλλούσης: $z_1^2-4\Pi y_1=4\Pi^2$, δηλ. ***παραβολὴν μὲ κορυφὴν τὸ κέντρον καμπυλότητος K καὶ ἑστίαν τὸ M***.

Μένει ἡ περίπτωσις: $\Delta a=-Ec$· εἶναι τότε καὶ $\Delta=0$ καὶ ἑπομένως καὶ $c=0$· αἱ δὲ σχέσεις μας γίνονται: $\frac{a(ay-bx)}{\Pi}=\frac{abz}{\Sigma}=b^2$ καὶ ἐπειδὴ $\Sigma=0$, θὰ εἶναι: ἢ $a=0$ ἢ $b=0$ ἢ $z=0$· ἂν $a=0$, θὰ εἶναι καὶ $b=0$, ποὺ εἶναι ἀδύνατον (ἀφοῦ καὶ $c=0$)· ἂν $b=0$, θὰ εἶναι $a=1$, $y=0$ (αἱ παράλληλοι τῆς ἐφαπτομένης ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου xz). Τέλος διὰ $z=0$ ἔχομεν εὐθείας ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου xy (αὐτὸ φαίνεται καὶ ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ παραβολοειδοῦς: $\Sigma^2y_1-\Pi z_1^2+\Sigma z_1x_1=0$, πού, διὰ $\Sigma=0$, γίνεται: $z_1^2=0$). Αὐτῶν ἡ ἐξίσωσις ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου xy εἶναι: $a(ay_1-bx_1)=b^2\Pi$ ἢ καί: $a(ay_1-\sqrt{1-a^2}.x_1)=(1-a^2)\Pi$.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς περιβαλλούσης των ἔχομεν :

$$x_1 a\sqrt{1-a^2}=a^2(\Pi+y_1)-\Pi,\ 2(y_1+\Pi)a\sqrt{1-a^2}=x_1(1-2a^2)\cdot$$

ὥστε : $a^2=\dfrac{x_1^2+2\Pi(\Pi+y_1)}{2[x_1^2+(\Pi+y_1)^2]}$ καὶ μὲ τὴν ἀπαλοιφὴν τοῦ a^2 εἰς τὴν ἐξίσωσιν :

$$a^4[(\Pi+y_1)^2+x_1^2]-a^2[2(\Pi+y_1)\Pi+x_1^2]+\Pi^2=0$$

εὑρίσκομεν τὴν περιβάλλουσαν : $x_1^2=-4\Pi y_1$, δηλ. ***παραβολὴν μὲ κορυφὴν τὸ M καὶ ἑστίαν τὸ κέντρον καμπυλότητος K.***

2) ***Ἄλλος τρόπος εὑρέσεως τῶν παραβολῶν τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως.*** — 1) Τὸ α΄ παραβολοειδές : $\Sigma^2 y_1=z_1(\Pi z_1-\Sigma x_1)$ ἔχει τὰ δύο συστήματα γενετειρῶν :

$$(\alpha)\left\{\begin{array}{l} z_1=\Sigma^2\lambda, \\ \Pi z_1-\Sigma x_1=\dfrac{y_1}{\lambda}\end{array}\right\} \text{ καὶ } (\beta)\left\{\begin{array}{l} z_1=\lambda y_1, \\ \Pi z_1-\Sigma x_1=\dfrac{\Sigma^2}{\lambda}\end{array}\right\}\cdot$$

αἱ πρῶται εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ ἐπίπεδον $z_1=0$, αἱ δεύτεραι, πρὸς τὸ $\Pi z_1-\Sigma x_1=0$· τὸ πρωτεῦόν του ἐπίπεδον λοιπόν, τὸ διχοτομοῦν τὴν γωνίαν τῶν δύο προηγουμένων ἐπιπέδων, θὰ εἶναι τό :

$$\frac{\Pi z_1-\Sigma x_1}{\sqrt{\Pi^2+\Sigma^2}}=-z_1 \text{ ἢ καί : } z_1=\frac{\Sigma x_1}{\Pi+\sqrt{\Pi^2+\Sigma^2}}\cdot$$

καὶ ἡ πρωτεύουσα τομὴ θὰ ἔχῃ τὰς ἐξισώσεις :

$$z_1=\frac{\Sigma x_1}{\Pi+\sqrt{\Pi^2+\Sigma^2}} \text{ καὶ } \Sigma^2 y_1=z_1(\Pi z_1-\Sigma x_1)\cdot$$

ἡ ἀπαλοιφὴ τώρα τοῦ z_1 θά μας δώσῃ τὴν προβολὴν τῆς πρωτευούσης τομῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου x_1y_1:

$$y_1(\Pi+\sqrt{\Pi^2+\Sigma^2})^2=-x_1^2\sqrt{\Pi^2+\Sigma^2},$$

$$\text{ἢ καί : } x_1^2=-\frac{2\Pi^2+\Sigma^2+2\Pi\sqrt{\Pi^2+\Sigma^2}}{\sqrt{\Pi^2+\Sigma^2}}y_1.$$

καὶ διὰ $\Sigma=0$, εὑρίσκομεν λοιπόν : $x_1^2=-4\Pi y_1$, δηλ. ἐξίσωσιν παραβολῆς· εἶναι δὲ ἡ παραβολὴ αὐτὴ τώρα, ποὺ $\Sigma=0$, ***ἡ ἰδία ἡ τομὴ*** (διότι τὸ ἐπίπεδον : $\dfrac{\Pi z_1-\Sigma x_1}{\sqrt{\Pi^2+\Sigma^2}}=-z_1$ συμπίπτει τώρα μὲ τὸ ἐπίπεδον x_1y_1).

— 2) Τὸ β′ παραβολοειδές: $(\Pi+y_1)\Sigma^2+\Sigma x_1 z_1+\Pi x_1^2=0$ ἔχει τὰ δύο συστήματα γενετειρῶν : $(\Pi+y_1)\Sigma^2=-x_1(\Sigma z_1+\Pi x_1)$.

$$(\alpha)\left\{\begin{array}{l} x_1=\Sigma^2\lambda, \\ \Sigma z_1+\Pi x_1=-\dfrac{\Pi+y_1}{\lambda} \end{array}\right. \quad \text{καὶ } (\beta)\left\{\begin{array}{l} x_1=(\Pi+y_1)\lambda, \\ \Sigma z_1+\Pi x_1=-\dfrac{\Sigma^2}{\lambda}\cdot \end{array}\right.$$

αἱ πρῶται εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ **κάθετον** ἐπίπεδον, αἱ δεύτεραι πρὸς τό : $\Sigma z_1+\Pi x_1=0$. Ἡ ἐξίσωσις τοῦ πρωτεύοντός του ἐπιπέδου εἶναι λοιπόν : $\dfrac{\Sigma z_1+\Pi x_1}{\sqrt{\Pi^2+\Sigma^2}}=-x_1$ ἢ καί : $x_1=\dfrac{-\Sigma z_1}{\Pi+\sqrt{\Pi^2+\Sigma^2}}\cdot$

καὶ ἡ πρωτεύουσα τομὴ τοῦ παραβολοειδοῦς ἔχει τὰς ἐξισώσεις :

$$x_1=\frac{-\Sigma z_1}{\Pi+\sqrt{\Pi^2+\Sigma^2}}, \quad (\Pi+y_1)\Sigma^2+\Sigma x_1 z_1+\Pi x_1^2=0\cdot$$

ἡ δὲ προβολή της ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $y_1 z_1$ ἔχει τὴν ἐξίσωσιν :

$$z_1^2=(\Pi+y_1)\,\frac{2\Pi^2+\Sigma^2+2\Pi\sqrt{\Pi^2+\Sigma^2}}{\sqrt{\Pi^2+\Sigma^2}}\,.$$

ἡ ἐξίσωσις ὅμως αὐτή, διὰ $\Sigma=0$, καταντᾷ ἡ παραβολή: $z_1^2=4\Pi y_1+4\Pi^2$ καὶ παριστᾷ τώρα ***τὴν ἰδίαν τὴν τομὴν*** (ἀφοῦ τὸ ἐπίπεδον: $\dfrac{\Sigma z_1+\Pi x_1}{\sqrt{\Pi^2+\Sigma^2}}=-x_1$ γίνεται τότε τὸ κάθετον ἐπίπεδον).

3) ***Καμπύλαι τοῦ Cesàro: μερικὴ περίπτωσις τῆς ἕλικος.***—Αἱ ἕλικες περιλαμβάνονται εἰς τὰς καμπύλας τοῦ Bertrand (διὰ $\Gamma=0$)· τότε δὲ εὐθεῖαι, ποὺ λύουν τὸ πρόβλημα, εἶναι ***αἱ γενέτειραι τοῦ γνωστοῦ μας*** κώνου (σελ. 75), ***ὄχι ὅμως καὶ αἱ παράλληλοί των*** (Πλὴν τῶν παραλλήλων τοῦ ἄξονος x τῶν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου xz). Διότι ἀπὸ τὰς σχέσεις :

$$-c(ay-bx)=a(ay-bx)+c(bz-cy)=-a(bz-cy)=0$$

εὑρίσκομεν (ἂν ἐξαιρέσωμεν τὰς ***ἐπιπέδους*** καμπύλας, ποὺ δίδει ὁ μηδενισμὸς τοῦ a ἢ τοῦ c) : $ay=bx$, $bz=cy$ ἢ καί : $ay_1=bx_1$, $bz_1=cy_1$, δηλ. εὐθείας ***διὰ τοῦ M***). Ἄν, ἀντὶ νὰ ἔχωμεν, ὅπως τώρα, $A=B=\Gamma=0$ (εἰς τὴν γενικὴν ἐξίσωσιν τοῦ Cesàro), ἔχωμεν : $\Delta = E = 0$, ἡ ἐξίσωσις : $\frac{A}{P^2} + \frac{B}{PR} + \frac{\Gamma}{R^2} = 0$ μᾶς δίδει τὰς ***δύο*** ἕλικας : $\frac{P}{R} = -\frac{B}{2\Gamma} \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4A\Gamma}}{2\Gamma}$.

4) Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ***κυκλικῆς*** ἕλικος, εὐθεῖαι, ποὺ λύουν τὸ πρόβλημα, εἶναι, πλὴν τῶν γενετειρῶν τοῦ κώνου (§ 30), καὶ κάθε εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τυχ. διὰ τοῦ Μ εὐθεῖαν (a,b,c) καὶ κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου : (α) $\frac{1}{k}(ay_1 - bx_1) + \frac{1}{m}(bz_1 - cy_1) = \frac{mac - k(b^2 + c^2)}{ka + mc}$, παραλλήλου πρὸς τὴν εὐθεῖαν μὲ τὰ συνημίτονα a,b,c Μεταξὺ αὐτῶν εἶναι ἐπίσης καὶ ὁ στιγμιαῖος ἄξων ἑλικώσεως, τοῦ ὁποίου αἱ ἐξισώσεις : $b = 0$, $\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{m^2}\right) y_1 = \frac{1}{k}$, $\frac{x_1}{k} - \frac{z_1}{m} = 0$ ἐπαληθεύουν τὴν (α).

5) ***Ἄλλη κλάσις καμπύλων μὲ ἐξίσωσιν μεταξὺ $\frac{1}{P}$ καὶ $\frac{1}{R}$ β′ βαθμοῦ εἰδικῆς μορφῆς.*** — Ὁ ἄξων τῆς ἕλικος, ποὺ ἔχει μὲ δοθεῖσαν καμπύλην κοινὰ εἰς τὸ Μ τὰ $\frac{1}{P}$ καὶ $\frac{1}{R}$, ἔχει τὰς ἐξισώσεις :

$$(\alpha) \quad \frac{z_1}{x_1} = -\frac{R}{P}, \quad y_1 = \frac{PR^2}{P^2 + R^2}, \text{ ὅπου } P = \sigma(s),\ R = \varphi(s)\cdot$$

ἂν λοιπὸν ἀπαλείψωμεν τὸ s μεταξὺ τῶν (α), θὰ ἔχωμεν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς : $\Phi\left(\frac{z_1}{x_1}, y_1\right) = 0$, ποὺ παριστᾷ, καθὼς γνωρίζομεν, μίαν ἐπιφάνειαν ***κωνοειδῆ***, μὲ **τὰς** γενετείρας της παραλλήλους πρὸς τὸ ἐπίπεδον $x_1 z_1$ καὶ συναντώσας τὸν ἄξονα y_1. Διὰ νὰ εἶναι τώρα ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ ***κωνοειδὲς τοῦ*** *Plücker* ***(Πλύκκερ)***, πρέπει νὰ ἔχῃ ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς: $\Phi\left(\frac{z_1}{y_1}, x_1\right) \equiv Ax_1z_1 + Bx_1^2 + \Gamma z_1^2 + \Delta y(x_1^2 + z_1^2) = 0$,

δηλ. $A\frac{x_1}{z_1} + B\left(\frac{x_1}{z_1}\right)^2 + \Gamma + \Delta y_1\left[1 + \left(\frac{z_1}{x_1}\right)^2\right] = 0$ καὶ ἑπομένως ἀπὸ τὰς (α) εὑρίσκεται : $-A\frac{R}{P} + B\frac{R^2}{P^2} + \Gamma + \Delta\frac{PR^2}{P^2 + R^2}\left(1 + \frac{R^2}{P^2}\right) = 0$,

$$\text{δηλ.} \quad -\frac{A}{PR} + \frac{B}{P^2} + \frac{\Gamma}{R^2} + \frac{\Delta}{P} = 0\cdot \quad (98)$$

ἐπαληθεύει δηλ. ἡ καμπύλη αὐτὴν τὴν ***ἰδιαιτέρας μορφῆς β′-βάθμιον ἐξίσωσιν.*** (Διὰ $\Gamma = 0$ ἐπανευρίσκομεν τὰς καμπύλας τοῦ Bertrand).

6) ***Θεώρημα τοῦ*** *Mannheim* ***διὰ τὰς καμπύλας σταθερᾶς ὁλικῆς καμπυλότητος.*** — Ἡ ἐξίσωσίς των εἶναι : $\frac{1}{P^2} + \frac{1}{R^2} = c \equiv \frac{1}{\alpha^2}$. Ἡ

εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια τῶν πρώτων καθέτων μιᾶς τυχούσης καμπύλης ἔχει τὰς ἐξισώσεις :

$$(\alpha)\quad X = x + \omega\xi,\quad Y = y + \omega\eta,\quad Z = z + \omega\zeta,$$

ὅπου τὰ $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ εἶναι συναρτήσεις τοῦ τόξου s. Ἑπομένως ἡ ***γραμμὴ συσφίγξεως*** τῆς ἐπιφανείας θὰ ἔχῃ τὰς ἐξισώσεις (***Ν. Χατζιδάκη, Σμήνη καὶ Συμπλέγματα, σελ.*** 28) :

$$(\beta)\quad x_1 = x + \frac{PR^2}{P^2+R^2}\xi,\quad y_1 = y + \frac{PR^2}{P^2+R^2}\eta,\quad z_1 = z + \frac{PR^2}{P^2+R^2}\zeta.$$

Ἂς εὕρωμεν τώρα τὸν τόπον (Λ) τῶν σημείων τῆς ἐπιφανείας, ὅπου ἡ μέση καμπυλότης της εἶναι = 0· ὁ τόπος αὐτός, διὰ τὴν ***τυχοῦσαν*** ἐπιφάνειαν, ὁρίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (***Ν. Χατζιδάκη, Θεωρία τῶν Ἐπιφανειῶν, σελ.*** 33) :

$$(\gamma)\quad EN - 2FM + GL = 0\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ εἰς τὰς εὐθειογενεῖς ἐπιφανείας εἶναι (***Ν. Χατζιδάκη, Σμήνη καὶ Συμπλέγματα, σελ.*** 33) :
$F = 0$, $G = 1$, $N = 0$, ἡ ἐξίσωσις (γ) γίνεται ἁπλῶς : $L = 0$, δηλ.

$$\frac{\omega P'}{P^2} + \frac{R'}{R}\left(1 - \frac{\omega}{P}\right) = 0^{(1)}. \quad (\delta)$$

Ὑπάρχει λοιπὸν ἐπάνω εἰς κάθε γενέτειραν ἓν σημεῖον τῆς καμπύλης (Λ), ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τιμὴν τοῦ ω : $\omega = \frac{P^2R'}{R'P - RP'}$, ὅπου ἡ μέση καμπυλότης τῆς εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας εἶναι = 0· διὰ νὰ συμπίπτῃ τώρα τὸ σημεῖον αὐτὸ μὲ τὸ κεντρικόν, δηλ. ***ἡ καμπύλη (Λ) μὲ τὴν γραμμὴν συσφίγξεως (Κ)***, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι :

$$\frac{P^2R'}{R'P - RP'} = \frac{PR^2}{P^2+R^2},\ \text{ἢ καί:}\ \frac{P'}{P^3} + \frac{R'}{R^3} = 0,\ \text{δηλ.}\ \frac{1}{P^2} + \frac{1}{R^2} = \text{σταθ.} = \frac{1}{\alpha^2}.$$

Ὥστε : ***Κάθε καμπύλη σταθερᾶς ὁλικῆς καμπυλότητος ἔχει τὴν ἰδιότητα νὰ συμπίπτῃ ὁ λαιμὸς τῆς εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας τῶν πρώτων καθέτων της μὲ τὸν τόπον τῶν σημείων, ὅπου ἡ μέση καμπυλότης τῆς ἐπιφανείας εἶναι*** = 0. (*A. Mannheim*,

---

(1) $L = \frac{1}{\sqrt{E}} \left\| \frac{d^2x}{ds^2} + \omega\cdot\frac{d^2\xi}{ds^2}\quad \frac{dx}{ds} + \omega\cdot\frac{d\xi}{ds}\quad \xi \right\|$ καὶ ὕστερ' ἀπὸ τὰς πράξεις εὑρίσκεται ἡ ἐξίσωσις (δ).

Principes et développements de Géométrie Cinématique, Paris, 1894, σελ. 537).

7) Τὰς καμπύλας σταθερᾶς ὁλικῆς καμπυλότητος τὰς εὗρηκε καὶ ὁ *Cesàro* εἰς τὸ πρόβλημα : **Νὰ εὑρεθοῦν αἱ καμπύλαι, τῶν ὁποίων οἱ στιγμιαῖοι ἄξονες ἑλικώσεως εἶναι αἱ ὄρθιαι κάθετοι ἄλλης καμπύλης. (Περιοδικὸν** *Mathésis*, **II σειρά, Τόμ. X, 1900, σελ. 40).**

8) Κλάσεις καμπύλων μὲ σχέσιν μεταξὺ τῶν $\frac{1}{P}$ καὶ $\frac{1}{R}$ ἀνωτέρου βαθμοῦ ἀπὸ τὸν β′ ἐλάχισται εἶναι γνωσταί. Αἱ κυριώτεραι εἶναι :

α) Ἡ κλάσις τῶν καμπύλων τοῦ *Klaucke* **(Κλάουκε)** :

$$\frac{\alpha^3}{P^3}-\frac{3\alpha^2}{P^2}+\frac{3\alpha}{P}+\frac{1}{P}.\frac{1}{R^3}=1. \quad (99)$$

Αὐταὶ παρουσιάζονται εἰς τὸ ἑξῆς ζήτημα : Γνωρίζομεν, ὅτι εἰς κάθε σημεῖον καμπύλης ὑπάρχουν ∞^1 κυκλικαὶ στερεαὶ ἕλικες **ἐγγύταται πρὸς αὐτήν**· μιᾶς δὲ ἀπὸ αὐτὰς ὁ ἄξων εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῶν πρώτων καθέτων τῆς καμπύλης. Ἂν τώρα ζητήσωμεν καμπύλην, εἰς τὴν ὁποίαν ὅλοι οἱ ∞^1 οὕτω παραγόμενοι ὀρθοὶ κύλινδροι νὰ ἔχουν τὴν ἰδίαν ἀκτῖνα α, εὑρίσκομεν, ὅτι κάθε τοιαύτη ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν (99).

β′) Αἱ καμπύλαι, διὰ τὰς ὁποίας οἱ στιγμιαῖοι ἄξονες ἑλικώσεως τοῦ τριέδρου των ἀποτελοῦν εὐθειογενῆ γ′-βάθμιον ἐπιφάνειαν τοῦ *Cayley*, ἐπαληθεύουν ἐξίσωσιν 3ου βαθμοῦ μεταξὺ $\frac{1}{P}$ καὶ $\frac{1}{R}$.

γ′) Αἱ γεωδαισιακαί, καθὼς καὶ αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος, ἑνὸς ἑλικοειδοῦς-κωνοειδοῦς ἔχουν καμπυλότητα καὶ στρέψιν συνδεομένας μὲ ἐξίσωσιν **διτετράγωνον**. *(Cesàro, Mathésis, 1900,* **σελ.** *60—1).*

δ′) Καμπύλην μὲ ἐξίσωσιν 6ου βαθμοῦ μεταξὺ $\frac{1}{P}$ καὶ $\frac{1}{R}$ εὗρηκεν ὁ *Enneper (Math. Annalen, 1881, σ. 78)*, ζητῶν τὰς γεωδαισιακὰς τοῦ ἀναπτυκτοῦ ἑλικοειδοῦς.

9) Ὑπάρχουν τέλος καμπύλαι μὲ σχέσιν **διαφορικὴν** μεταξὺ $\frac{1}{P}$ καὶ $\frac{1}{R}$. Τοιαύτη εἶναι π.χ. ἡ β′ καμπύλη εἰς τὸ πρόβλημα τοῦ *Mannheim* (σελ. 59). Ἐπίσης, ἂν ζητήσωμεν τὰς καμπύλας, διὰ τὰς ὁποίας ἡ ἀκτὶς A τῆς ἐγγυτάτης σφαίρας εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀκτῖνος καμπυλότητος : $A=kP$, εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν: (100) $\sqrt{k^2-1}.P=RP'$.

(Καὶ ἂν ἰδιαιτέρως : $k=\sqrt{2}$, ἡ σχέσις αὕτη ἁπλοποιεῖται εἰς τὴν ἑξῆς : $P=R.\frac{dP}{ds}$). Τέλος ὑπάρχουν περιπτώσεις σχέσεως μεταξὺ στοιχείων **συμφυῶν** πρὸς τὴν καμπύλην καὶ ***μὴ συμφυῶν***. Π.χ. τοῦτο συμβαίνει εἰς τὸ πρόβλημα 5ον, σελ. 63. (Πρβλ. καί : *Hoel, Über einige halbnatürliche Koordinaten, Norsk Matem. Foreningens Skrifter, 1923*).

10) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν λαιμῶν τῶν παραγομένων ἀναπτυκτῶν ἐπιφανειῶν εἰς τὸ πρόβλημα τοῦ Cesàro κατὰ τὴν περίπτωσιν τῶν καμπύλων τοῦ Bertrand. Ἐπίσης καὶ εἰς τὸ μερικώτερον πρόβλημα τῆς § 30.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ϛ΄.

ΓΕΝΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΕΝΟΣ ΖΕΥΓΟΥΣ ΚΑΜΠΥΛΩΝ (1)

α΄) Ζεῦγος καμπύλων.

77. Ἂν λάβωμεν δύο τυχούσας καμπύλας ἐντὸς τοῦ χώρου, εἶναι πάντοτε δυνατὸν ***ν᾿ ἀντιστοιχίσωμεν*** τὰ σημεῖά των κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ***εἰς κάθε σημεῖον τῆς μιᾶς ν᾿ ἀντιστοιχῇ ἓν τῆς ἄλλης***· Π.χ. εἰμποροῦμεν νὰ θέσωμεν μεταξὺ τῶν τόξων των μίαν ***πρωτοβάθμιον*** σχέσιν τῆς μορφῆς : $s_1=\alpha s+\beta$ (α), ὅπου α καὶ β εἶναι δύο τυχόντες πραγματικοὶ ἀριθμοὶ (πρβλ. § 31). Ἡ σχέσις τότε αὐτή, καθὼς καὶ κάθε ἄλλη μεταξὺ s_1 καὶ s, συνδέει τὰς καμπύλας εἰς ἓν «***ζεῦγος***».

78. Συνήθως μᾶς δίδεται μία καμπύλη («***ἀρχική***») καὶ εἷς ***γεωμετρικὸς*** τρόπος κατασκευῆς ἀπὸ τὴν ἀρχικὴν μιᾶς νέας καμπύλης, ***σημεῖον πρὸς σημεῖον***· δηλ. μᾶς δίδεται ***ὡρισμένη γεωμετρικὴ ἀντιστοίχισις*** ἑνὸς νέου σημείου M_1 εἰς κάθε σημεῖον M τῆς ἀρχικῆς· ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ M_1 εἶναι τότε μία νέα καμπύλη («***παρηγμένη***» τῆς ἀρχικῆς), ποὺ μαζὶ μὲ τὴν πρώτην ἀποτελοῦν ἓν **ζεῦγος.**

---

(1) *N. Hatzidakis, Trois formules très générales relatives aux courbes dans l'espace (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1900).* Βλέπε καὶ ἄλλην μου ἀπόδειξιν, μὲ τοὺς τύπους τῆς Σφαιρικῆς Τριγωνομετρίας, εἰς τὸ *Nyt Tidsskrift for Matematik* (1902).

Παραδείγματα ἔχομεν πάμπολλα ἀπὸ τὰ προηγούμενα:

1) Μία καμπύλη καὶ ἡ καμπύλη τῶν κέντρων καμπυλότητός της. 2) Μία καμπύλη καὶ ἡ σφαιροκεντρική της. 3) Μία καμπύλη καὶ μία ἀπὸ τὰς ἐνειλιγμένας της. 4) Μία καμπύλη καὶ μία ἀπὸ τὰς ἐξειλιγμένας της. 5) Μία καμπύλη καὶ ὁ λαιμὸς τῆς εὐθειοποιούσης ἐπιφανείας της· κτλ.

79. Ἐννοεῖται, ὅτι ἡ σχέσις μεταξὺ s_1 καὶ s εἰς τὰς διαφόρους αὐτὰς περιπτώσεις δὲν εἶναι ἐν γένει τόσον ἁπλῆ, ὅσον ἡ (α)· π.χ. εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς καμπύλης τῶν κέντρων καμπυλότητος ἔχομεν (§ 21):

$$ds_1 = \sqrt{\frac{P^2}{R^2} + \left(\frac{dP}{ds}\right)^2} . ds, \text{ εἰς τὴν τῆς σφαιροκεντρικῆς :}$$

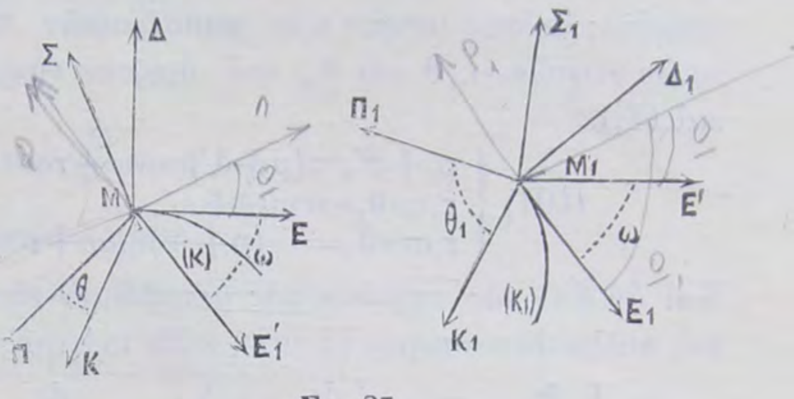
$$ds_0 = -\varepsilon\left(P + \frac{d^2P}{d\tau^2}\right)\frac{ds}{R} \quad (\varepsilon^2 = 1)\text{· κτλ.}$$

80. Ἡ δυσκολία τῆς παραγωγῆς τῆς μιᾶς ἀπὸ τὰς δύο καμπύλας ἑνὸς ζεύγους ἀπὸ τὴν ἄλλην δὲν εἶναι συνήθως ἡ ἰδία καὶ διὰ τὰς δύο καμπύλας. Π. χ. ἀπὸ τὴν τυχοῦσαν καμπύλην (Κ) παράγεται μὲ ***μόνον διαφορίσεις*** ἡ καμπύλη τῶν κέντρων καμπυλότητος (K_1), καθὼς καὶ ἡ σφαιροκεντρικὴ (K_0), ἐνῷ ἡ παραγωγὴ τῆς (Κ) ἀπὸ τὴν (K_1) ἢ τὴν (K_0) χρειάζεται ***ὁλοκληρώσεις.***

β') Γενικοὶ τύποι ἑνὸς ζεύγους καμπύλων.

81. Μᾶς δίδεται ἓν ζεῦγος καμπύλων (Κ) καὶ (K_1) ἐντὸς τοῦ χώρου. τὰ πρωτεύοντά των τρίεδρα (Τ) καὶ (T_1) εἰς τ' ἀντίστοιχα σημεῖά των Μ καὶ M_1 ἔχουν ἐν γένει τυχοῦσαν θέσιν τὸ ἓν πρὸς τὸ ἄλλο. Ἡ θέσις ἑνὸς ὀρθογωνίου συστήματος ἀξόνων πρὸς ἓν ἄλλο, ἐπίσης ὀρθογώνιον, ὁρίζεται γενικῶς ἀπὸ τρεῖς γωνίας τοῦ ἑνὸς πρὸς τὸ ἄλλο (πρβλ. τοὺς τύπους τοῦ Euler εἰς τὴν Στερεὰν Ἀναλυτικὴν Γεωμετρίαν Ι. Ν. Χατζιδάκη, σελ. 18). Ἐδῶ θὰ εὕρωμεν τρεῖς τύπους, πού μας ἐκφράζουν τὰ $d\sigma_1$ καὶ $d\tau_1$ τῆς καμπύλης (K_1) μὲ τὰ $d\sigma$ καὶ $d\tau$ τῆς (Κ) καὶ μὲ τρεῖς γωνίας, ποὺ ὁρίζουν τὴν ἀμοιβαίαν ***κλίσιν*** τῶν δύο τριέδρων.

Ἀπὸ τὸ σημεῖον Μ τῆς (Κ) (Σχ. 27) φέρω τὴν ME'_1, παράλληλον καὶ ὁμόρροπον τῆς M_1E_1 καὶ ἀπὸ τὸ M_1 τὴν M_1E', παράλληλον καὶ ὁμόρροπον τῆς ΜΕ· τὴν γωνίαν EME'_1 ἢ τὴν ἴσην της $E'ME_1$, καλῶ ω. Φέρω ἔπειτα εἰς τὸ Μ τὴν ***κοινὴν κάθετον*** ΜΚ τῶν ΜΕ, ME'_1 καὶ εἰς τὸ M_1 τὴν ***κοινὴν κάθετον*** M_1K_1 τῶν M_1E', M_1E_1. Αἱ MK καὶ M_1K_1 εἶναι προφανῶς ***παράλληλοι***. Τέλος φέρω τὴν $M\Sigma$ ***κοινὴν κάθετον*** τῶν ME, MK καὶ τὴν $M_1\Sigma_1$, ***κοινὴν κάθετον*** τῶν M_1E_1, M_1K_1. Ἐσχημάτισα μὲ αὐτὸν τὸν τρόπον ἄλλα δύο τρίεδρα, τὸ $(ME, MK, M\Sigma) \equiv T'$ καὶ τὸ $(M_1E_1, M_1K_1, M_1\Sigma_1) \equiv T'_1$· τὰ 4 τότε τρίεδρα: T, T', T'_1, T_1 ἔχουν ἀπὸ δύο-δύο ἕνα ἄξονα ***κοινὸν*** ἢ ***παράλληλον :***



Σχ. 27.

1) Τὰ T καὶ T', δηλ. τὰ $(ME, M\Pi, M\Delta)$ καὶ $(ME, MK, M\Sigma)$, τὴν ME ***κοινήν,***

2) Τὰ T' καὶ T'_1 δηλ. τὰ $(ME, MK, M\Sigma)$ καὶ $(M_1E_1, M_1K_1, M_1\Sigma_1)$, τὴν MK ***παράλληλον*** τῆς M_1K_1 καὶ

3) τὰ T'_1 καὶ T_1, δηλ. τὰ $(M_1E_1, M_1K_1, M_1\Sigma_1)$ καὶ $(M_1E_1, M_1\Pi_1, M_1\Delta_1)$, τὴν M_1E_1 ***κοινήν.***

Ἀντὶ τώρα νὰ μεταβῶ ***ἀπευθείας*** ἀπὸ τὸ πρωτεῦον τρίεδρον (T) τῆς (K) εἰς τὸ πρωτεῦον (T_1) τῆς (K_1) (ποὺ δὲν ἔχουν ἐν γένει ***κανένα*** ἄξονα παράλληλον), μεταβαίνω ***ἐμμέσως,*** ὡς ἑξῆς: ἀπὸ τὸ (T) εἰς τὸ (T') (***κοινὸς*** ἄξων ὁ ME), ἔπειτα ἀπὸ τὸ (T') εἰς τὸ (T'_1) (***παράλληλοι*** ἄξονες οἱ MK, M_1K_1) καὶ τέλος ἀπὸ τὸ (T'_1) εἰς τὸ (T_1) (***κοινὸς*** ἄξων ὁ M_1E_1).

Ἂς ὀνομάσωμεν p, $q(=0)$, r τὰς περιστροφὰς τοῦ (T)· p', q', r' τοῦ (T')· p'_1, q'_1, r'_1 τοῦ (T'_1) καὶ p_1, $q_1(=0)$, r_1 τοῦ (T_1)·

Ἀπὸ τὰ τρίεδρα (T) καὶ (T') θὰ ἔχωμεν πρῶτα :

$$(\alpha) \quad p' = p + \vartheta', \quad q' = q\,\sigma\upsilon\nu\vartheta + r\,\eta\mu\vartheta = r\,\eta\mu\vartheta,$$
$$r' = -q\,\eta\mu\vartheta + r\,\sigma\upsilon\nu\vartheta = r\,\sigma\upsilon\nu\vartheta \quad (\vartheta \equiv \gamma\omega\nu.\ \Pi MK)\cdot$$

ἀπὸ τὰ (T') καὶ (T'_1) εὑρίσκομεν ἔπειτα :

$$(\beta) \quad p'_1 = p'\,\sigma\upsilon\nu\omega + r'\,\eta\mu\omega, \quad q'_1 = q' + \omega', \quad r'_1 = -p'\,\eta\mu\omega + r'\,\sigma\upsilon\nu\omega\cdot$$

καὶ τέλος ἀπὸ τὰ (T'_1) καὶ (T_1) θὰ ἔχωμεν :

$$(\gamma) \quad p'_1 = p_1 + \vartheta'_1, \quad q'_1 = q_1\,\sigma\upsilon\nu\vartheta_1 + r_1\,\eta\mu\vartheta_1 = r_1\,\eta\mu\vartheta_1,$$
$$r'_1 = -q_1\,\eta\mu\vartheta_1 + r_1\,\sigma\upsilon\nu\vartheta_1 = r_1\,\sigma\upsilon\nu\vartheta_1 \quad (\vartheta_1 \equiv \gamma\omega\nu.\ \Pi_1 M_1 K_1).$$

Ἂν τώρα ἀπαλείψωμεν μεταξὺ τῶν ἰσοτήτων (α), (β) καὶ (γ) τὰς

6 ***ἐνδιαμέσους*** περιστροφὰς p', q', r' καὶ p'_1, q'_1, r'_1, εὑρίσκομεν τὰς ζητουμένας σχέσεις μεταξὺ τῶν περιστροφῶν τῶν (T) καὶ (T_1) καὶ τῶν τριῶν γωνιῶν ω, ϑ καὶ ϑ_1, ποὺ ὁρίζουν τὴν ἀμοιβαίαν θέσιν τῶν (T) καὶ (T_1) :

$$(101)\quad \begin{cases} p_1+\vartheta'_1=(p+\vartheta')\text{συν}\omega+r\,\text{συν}\vartheta.\text{ημ}\omega, \\ r_1\text{ημ}\vartheta_1=r\,\text{ημ}\vartheta+\omega', \\ r_1\text{συν}\vartheta_1=-(p+\vartheta')\text{ημ}\omega+r\,\text{συν}\vartheta.\text{συν}\omega. \end{cases}$$

Καὶ ἂν ἀπὸ τὰς περιστροφὰς μεταβῶμεν εἰς τὰς καμπυλότητας (§ 16 καὶ πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη κάθε ἰσότητος ἐπὶ ds, εὑρίσκομεν :

$$(102)\quad \begin{cases} \dfrac{ds_1}{R_1}-d\vartheta_1=\left(\dfrac{ds}{R}-d\vartheta\right)\text{συν}\omega-\dfrac{ds}{P}\text{συν}\vartheta.\text{ημ}\omega, \\ \dfrac{ds_1}{P_1}\text{ημ}\vartheta_1=\dfrac{ds}{P}\text{ημ}\vartheta+d\omega, \\ \dfrac{ds_1}{P_1}\text{συν}\vartheta_1=\left(\dfrac{ds}{R}-d\vartheta\right)\text{ημ}\omega+\dfrac{ds}{P}\text{συν}\vartheta.\text{συν}\omega. \end{cases}$$

$\rho_1 = -\frac{r_1}{R_1} = -\frac{d\theta_1}{ds}\ \frac{1}{R_1}$

ἢ συντομώτερα :

$$(102)'\quad \begin{cases} d\tau_1-d\vartheta_1=(d\tau-d\vartheta)\text{συν}\omega-d\sigma.\text{συν}\vartheta.\text{ημ}\omega, \\ d\sigma_1\text{ημ}\vartheta_1=d\sigma\,\text{ημ}\vartheta+d\omega, \\ d\sigma_1\text{συν}\vartheta_1=(d\tau-d\vartheta)\text{ημ}\omega+d\sigma\,\text{συν}\vartheta\ \text{συν}\omega. \end{cases}$$

82. ***Εὕρεσις τῶν $d\sigma_1$, $d\tau_1$.***—Ἀπὸ τοὺς τύπους αὐτοὺς εὑρίσκομεν ἀμέσως καὶ τὰ $d\tau_1$ καὶ $d\sigma_1$:

$$(103)\quad \begin{cases} d\tau_1=d\vartheta_1+(d\tau-d\vartheta)\text{συν}\omega-d\sigma\,\text{συν}\vartheta\,\text{ημ}\omega, \\ d\sigma_1{}^2=[d\sigma\,\text{ημ}\vartheta+d\omega]^2+[(d\tau-d\vartheta)\text{ημ}\omega+d\sigma\,\text{συν}\vartheta\,\text{συν}\omega]^2. \end{cases}$$

83. ***Συντομωτέρα γραφὴ τῶν τύπων (102).***— Ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι δύο ***ἐπιφάνειαι*** (E) καὶ (E_1) διέρχονται ἀντιστοίχως ἀπὸ τὰς καμπύλας (K) καὶ (K_1) καὶ ὅτι ***αἱ κάθετοί των κατὰ μῆκος τῶν (K) καὶ (K_1)*** εἶναι, εἰς τ' ἀντίστοιχα σημεῖα, αἱ παράλληλοι MK καὶ M_1K_1 (πρᾶγμα πάντοτε δυνατόν), τότε τὰ ποσά: $\frac{1}{P_1}\text{συν}\vartheta_1$, $\frac{1}{P_1}\text{ημ}\vartheta_1$, $\frac{1}{R_1}-\frac{d\vartheta_1}{ds_1}$ εἶναι κατὰ σειράν : ἡ ***κάθετος*** καμπυλότης, ἡ ***γεωδαισιακὴ*** καμπυλότης καὶ ἡ ***γεωδαισιακὴ*** στρέψις τῆς (K_1) ὡς πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν (E_1) (Βλέπε τὸ βιβλίον μου : ***Θεωρία τῶν Ἐπιφανειῶν***, σελ. 62 καὶ 72· ἡ γεωδ. στρέψις λαμβάνεται ἐκεῖ ἀντιθέτως)· τὰ δὲ $\frac{1}{P}\text{συν}\vartheta$, $\frac{1}{P}\text{ημ}\vartheta$, $\frac{1}{R}-\frac{d\vartheta}{ds}$ τ' ἀντίστοιχα ποσὰ τῆς (K) ὡς πρὸς τὴν (E)· εἰμποροῦμεν λοιπὸν νὰ γράψωμεν τοὺς τύπους (102) συντομώτερα (μὲ τὰ σύμβολα τῆς ***Θεωρίας τῶν Ἐπιφανειῶν***, ὅπου ἀντὶ γ καὶ κ γράφομεν g καὶ n), ὡς ἑξῆς :

$\left(-\frac{1}{R}, \frac{d\theta}{ds}\right)$

$$(102)'' \begin{cases} \dfrac{ds_1}{R_{1g}}=\dfrac{ds}{R_g}\text{συν}\omega-\dfrac{ds}{P_n}\text{ημ}\omega, \\ \dfrac{ds_1}{P_{1g}}=\dfrac{ds}{P_g}+d\omega, \\ \dfrac{ds_1}{P_{1n}}=\dfrac{ds}{R_g}\text{ημ}\omega+\dfrac{ds}{P_n}\text{συν}\omega \end{cases}$$

ἢ καὶ ὡς ἑξῆς, ἀκόμη συντομώτερα :

$$(102)''' \begin{cases} d\tau_{1g}=d\tau_g\text{συν}\omega-d\sigma_n\text{ημ}\omega, \\ d\sigma_{1g}=d\sigma_g+d\omega, \\ d\sigma_{1n}=d\tau_g\text{ημ}\omega+d\sigma_n\text{συν}\omega. \end{cases}$$

(ὅπου $d\sigma_n$, $d\sigma_g$, $d\tau_g$ εἶναι κατὰ σειρὰν ***ἡ κάθετος*** καὶ ***ἡ γεωδαισιακὴ γωνία συνεπαφῆς*** καὶ ***ἡ γεωδαισιακὴ γωνία στρέψεως***). Καὶ τότε καὶ οἱ (103) γράφονται καὶ αὐτοὶ συντομώτερα :

$$(103)' \begin{cases} d\tau_1=d\vartheta_1+d\tau_g\text{συν}\omega-d\sigma_n\text{ημ}\omega, \\ d\sigma_1^2=(d\sigma_g+d\omega)^2+(d\tau_g\text{ημ}\omega+d\sigma_n\text{συν}\omega)^2. \end{cases}$$

84. ***Τύποι διὰ τὸ ω καὶ τὸ ϑ_1.***—Ἀπὸ τοὺς τύπους (102)'' καὶ (102)''' εὑρίσκομεν ἐπίσης :

$$(104)\ \text{εφ}\omega=\frac{P_nR_{1g}-P_{1n}R_g}{P_nP_{1n}+R_gR_{1g}}\quad \text{ἢ καί: } \text{εφ}\omega=\frac{d\tau_g d\sigma_{1n}-d\tau_{1g}d\sigma_n}{d\sigma_n d\sigma_{1n}+d\tau_n d\tau_{1g}}.\ (104)'$$

Ὁμοίως δὲ καί :

$$(105)\ \text{εφ}\vartheta_1=\frac{P_nR_g\left(\dfrac{1}{P_g}+\dfrac{d\omega}{ds}\right)}{P_n\text{ημ}\omega+R_g\text{συν}\omega},\ \text{ἢ καί: } \text{εφ}\vartheta_1=\frac{d\sigma_g+d\omega}{d\tau_g\text{ημ}\omega+d\sigma_n\text{συν}\omega}\ (105)'$$

85. ***Ἀντιστροφὴ τῶν τύπων.***—Εἶναι φανερόν, ὅτι οἱ προηγούμενοι τύποι ***ἀντιστρέφονται***· ἀρκεῖ ἁπλῶς ν' ἀνταλλαχθῇ ἡ φορὰ τῆς γωνίας ω· παράγονται ὅμως οἱ ἀντίστροφοι, καὶ ἂν λυθοῦν οἱ πρῶτοι τύποι πρὸς τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης καμπύλης.

Ἂν π.χ. πολλαπλασιάσωμεν τὸν α′ ἀπὸ τοὺς (102)''' ἐπὶ συνω, τὸν γ′ ἐπὶ ημω καὶ προσθέσωμεν· καὶ ἔπειτα τὸν α′ ἐπὶ —ημω, τὸν γ′ ἐπὶ συνω καὶ προσθέσωμεν (ἀλλάξωμεν δὲ καὶ τὸ σημεῖον τοῦ ω: $-\omega\equiv\omega_1$), εὑρίσκομεν : $d\tau_g=d\tau_{1g}\text{συν}\omega_1-d\sigma_{1n}\text{ημ}\omega_1$, $d\sigma_g=d\sigma_{1g}+d\omega_1$,

$$d\sigma_n=d\tau_{1g}\text{ημ}\omega_1+d\sigma_{1n}\text{συν}\omega_1.$$

86. ***Ἀναλλοίωτοι τοῦ ζεύγους.***—Ἀπὸ τοὺς τύπους (102)''' παράγεται ἀμέσως ὁ ἑξῆς :

$$(106)\ d\sigma_{1n}^2+d\tau_{1g}^2=d\sigma_n^2+d\tau_g^2\cdot$$

ἔχει δηλ. ἡ ἔκφρασις : $d\sigma_n^2 + d\tau_g^2$ *τὴν ἰδίαν τιμὴν καὶ εἰς τὴν ἄλλην καμπύλην*· ὥστε εἶναι μία **ἀναλλοίωτος** τοῦ ζεύγους.

Ἂν τώρα φέρωμεν ἀπὸ τὸ M τὴν MΛ κάθετον ἐπὶ τὴν MK καὶ ἀπὸ τὸ M_1 τὴν $M_1\Lambda_1$ κάθετον ἐπὶ τὴν M_1K_1 καὶ παράλληλον τῆς MΛ καὶ ὀνομάσωμεν Ω καὶ Ω_1 τὰς γωνίας ΛME καὶ $\Lambda_1M_1E_1$, θὰ εἶναι : $\omega=\Omega_1-\Omega$ καὶ οἱ τύποι (102)‴ γράφονται ὡς ἑξῆς :

$$\begin{cases} d\tau_{1g} = d\tau_g \text{συν}(\Omega_1-\Omega) - d\sigma_n \text{ημ}(\Omega_1-\Omega), \\ d\sigma_{1g} = d\sigma_g + d\Omega_1 - d\Omega, \\ d\sigma_{1n} = d\tau_g \text{ημ}(\Omega_1-\Omega) + d\sigma_n \text{συν}(\Omega_1-\Omega), \end{cases}$$

καὶ μετὰ τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου μετασχηματίζονται εἰς τοὺς ἑξῆς :

$$(107)\begin{cases} d\tau_{1g}\text{συν}\Omega_1 - d\sigma_{1n}\text{ημ}\Omega_1 = d\tau_g\text{συν}\Omega - d\sigma_n\text{ημ}\Omega, \\ d\sigma_{1g} + d\Omega_1 = d\sigma_g + d\Omega, \\ d\tau_{1g}\text{ημ}\Omega_1 + d\sigma_{1n}\text{συν}\Omega_1 = d\tau_g\text{ημ}\Omega + d\sigma_n\text{συν}\Omega\cdot \end{cases}$$

ἔχομεν δηλ. καὶ ἄλλας τρεῖς **ἀναλλοιώτους** τοῦ ζεύγους.

Παρατήρησις. Ἡ ὕπαρξις τῶν ἀναλλοιώτων (106) καὶ (107) ἐξηγεῖται εὔκολα ***κινητικῶς***: 1) διὰ τὴν (106) ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι γράφεται μὲ τὰς περιστροφὰς ὡς ἑξῆς : $\sqrt{p'^2_1+q'^2_1}=\sqrt{p'^2+q'^2}$· καὶ ἡ μὲν πρώτη ρίζα εἶναι ἡ συνισταμένη περιστροφὴ τῶν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $(M_1E_1, M_1\Sigma_1)$ συνιστωσῶν τῆς ὅλης περιστροφῆς Θ_1 τοῦ τριέδρου $(M_1E_1, M_1K_1, M_1\Sigma_1)$, ἡ δὲ δευτέρα ἡ συνισταμένη τῶν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (ME, MΣ) (τοῦ παραλλήλου πρὸς τὸ $(M_1E_1, M_1\Sigma_1)$) συνιστωσῶν τῆς ὅλης περιστροφῆς Θ τοῦ τριέδρου (ME, MK, MΣ)· ἐπειδὴ δὲ οἱ ἄξονες MK, M_1K_1 εἶναι παράλληλοι, θὰ εἶναι: $\Theta_1=\Theta+\omega'$ (δηλ. ***γεωμετρικὸν*** ἄθροισμα τῶν Θ καὶ ω′)· ἀλλ' ἡ ω′ κεῖται ἐπὶ τῆς M_1K_1· ἑπομένως αἱ ἄλλαι δύο συνιστῶσαι τῶν Θ_1 καὶ Θ ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων τῶν καθέτων πρὸς τὰς MK, M_1K_1 θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην ἴσαι.—2) Διὰ τὰς (107) τὸ πρᾶγμα εἶναι ἀκόμη φανερώτερον, διότι τὰ τρίεδρα $(M_1K_1, M_1\Lambda_1, M_1P_1)$ (M_1P_1 ἡ κοινὴ κάθετος τῶν M_1K_1, $M_1\Lambda_1$) καὶ (MK, MΛ, MP) (MP ἡ κοινὴ κάθετος τῶν MK, MΛ) εἶναι (ἀπὸ τὴν κατασκευήν των) ***παράλληλα***· ἑπομένως αἱ συνιστῶσαι τῶν περιστροφῶν των ἐπὶ τῶν ὁμωνύμων ἀξόνων των θὰ εἶναι ἴσαι· ἀλλὰ αἱ συνιστῶσαι αὐταί : p''_1, q''_1, r''_1 καὶ p'', q'', r'' εἶναι ἀκριβῶς : αἱ πρῶται τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἀναλλοιώτων (107) καὶ αἱ δεύτεραι τὰ δεύτερα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΤΥΠΩΝ ΤΟΥ ΖΕΥΓΟΥΣ:

ΚΑΘΕΤΟΤΗΣ ΠΡΩΤΕΥΟΥΣΩΝ ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΩΝ. ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ SCHÖNFLIES. ΕΝΕΙΛΙΓΜΕΝΟΕΙΔΕΙΣ ΚΑΙ ΕΞΕΙΛΙΓΜΕΝΟΕΙΔΕΙΣ. ΚΥΚΛΟΠΟΙΟΥΣΑ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ. ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ MOLINS. ΤΟΠΟΣ ΤΩΝ ΚΟΡΥΦΩΝ ΤΩΝ ΕΓΓΥΤΑΤΩΝ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ ΚΩΝΩΝ.

α') Καθετότης δύο πρωτευουσῶν διευθύνσεων.

87. Αἱ σπουδαιότεραι τοιαῦται περιπτώσεις εἶναι:

1) $ME \perp M_1E_1$· τότε θὰ εἶναι: $\omega = \frac{\pi}{2}$ καὶ οἱ γενικοὶ τύποι τοῦ ζεύγους (102)'' μᾶς δίδουν:

$$\frac{ds_1}{R_{1g}} = \frac{-ds}{P_n}, \quad \frac{ds_1}{P_{1g}} = \frac{ds}{P_g}, \quad \frac{ds_1}{P_{1n}} = \frac{ds}{R_g} \text{ καί : } P_nP_{1n} + R_gR_{1g} = 0. \quad (108)$$

2) $ME \perp M_1\Pi_1$· τότε εἶναι: $\vartheta_1 = 0$ καὶ οἱ γενικοὶ τύποι δίδουν:

$$\frac{ds_1}{R_1} = \frac{ds}{R_g}\text{συνω} - \frac{ds}{P_n}\text{ημω}, \quad 0 = \frac{ds}{P_g} + d\omega, \quad \frac{ds_1}{P_1} = \frac{ds}{R_g}\text{ημω} + \frac{ds}{P_n}\text{συνω}\cdot$$

ὥστε τώρα εἶναι: $\frac{1}{P_g} = -\frac{d\omega}{ds}$. (109)

3) $ME \perp M_1\Delta_1$· θὰ εἶναι τότε: $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$· οἱ γενικοὶ λοιπὸν τύποι δίδουν:

$$\frac{ds}{R_1} = \frac{ds}{R_g}\text{συνω} - \frac{ds}{P_n}\text{ημω}, \quad \frac{ds_1}{P_1} = \frac{ds}{P_g} + d\omega, 0 = \frac{ds}{R_g}\text{ημω} + \frac{ds}{P_n}\text{συνω}\cdot$$

ὥστε τώρα εἶναι: $\text{εφω} = -\frac{R_g}{P_n}$. (110)

β') Τύποι τοῦ *Schönflies*[1].

88. Ἂν (Κ) εἶναι μία τυχοῦσα καμπύλη καὶ (Ε) μία ἐπιφάνεια, ποὺ νὰ διέρχεται ἀπὸ τὴν (Κ), ἂς θεωρήσωμεν εἰς τὰ διάφορα σημεῖα τῆς

(1) Göttinger Nachrichten, 1899.

(Κ) τὰς ***συζυγεῖς*** πρὸς τὰς ἐφαπτομένας της διευθύνσεις ὡς πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν (Ε)· αἱ διευθύνσεις αὐταὶ ἀποτελοῦν ***ἀναπτυκτὴν*** ἐπιφάνειαν (Α), ***περιβάλλουσαν*** τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων τῆς (Ε) κατὰ μῆκος τῆς (Κ), (πρβλ. ***Θεωρίαν Ἐπιφανειῶν Ν. Χατζιδάκη, σελ.*** 41) μὲ ***λαιμὸν*** μίαν ἄλλην καμπύλην ($Κ_1$). Πρόκειται νὰ ἐφαρμοσθοῦν οἱ γενικοὶ τύποι εἰς τὸ ζεῦγος (Κ) καὶ ($Κ_1$).

Ἐπειδὴ ἡ ($Κ_1$) εἶναι ***ἀσυμπτωτικὴ*** τῆς (Α) (διότι τὸ ***ἐγγύτατον*** ἐπίπεδόν της εἶναι ***ἐφαπτόμενον*** τῆς (Α)), θὰ εἶναι :

$$\frac{1}{P_{1n}}=0,\quad \frac{1}{P_{1g}}=\frac{1}{P_1},\quad \frac{1}{R_{1g}}=\frac{1}{R_1}\cdot$$

ὥστε οἱ γενικοὶ τύποι τοῦ ζεύγους γίνονται τώρα : (111)

$$\frac{ds_1}{R_1}\text{συνω}=\frac{ds}{R_g},\quad \frac{ds_1}{P_1}+d\omega=\frac{ds}{P_g},\quad \frac{ds_1}{R_1}\text{ημω}=\frac{ds}{P_n}\ \text{καί: εφω}=\frac{R}{P_n}.$$

γ') Ἐνειλιγμενοειδεῖς καὶ ἐξειλιγμενοειδεῖς.

89. Ἂν ἀχθοῦν ἀπὸ τὰ σημεῖα μιᾶς καμπύλης (Κ) εὐθεῖαι (Δ), ποὺ νὰ σχηματίζουν ***σταθερὰν*** γωνίαν ω μὲ τὰς ἐφαπτομένας τῆς (Κ) καὶ νὰ ἐφάπτωνται μιᾶς ἄλλης καμπύλης ($Κ_1$), ἡ ($Κ_1$) λέγεται ***ἐνειλιγμενοειδὴς*** (développoïde) τῆς (Κ), ἡ δὲ (Κ) ***ἐξειλιγμενοειδὴς*** (développantoïde) τῆς ($Κ_1$). (Ἂν $\omega=90^0$, ἔχομεν τὰς ***ἐνειλιγμένας*** καὶ τὰς ***ἐξειλιγμένας***) [1].

Ἂν τώρα φαντασθῶμεν μίαν ἐπιφάνειαν (Ε), ποὺ νὰ διέρχεται ἀπὸ τὴν (Κ) καὶ νὰ ἔχῃ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα κατὰ μῆκος τῆς (Κ) τὰ ἔχοντα περιβάλλουσαν τὴν ἀναπτυκτὴν ἐπιφάνειαν (Α), ποὺ ἀποτελοῦν αἱ εὐθεῖαι (Δ), βλέπομεν, ὅτι ἰσχύουν πάλιν οἱ τύποι τοῦ Schönflies, μὲ τὴν ***περιπλέον*** περίπτωσιν : $\omega=$σταθ.$\equiv c$· οἱ τύποι λοιπὸν (111) τοῦ Schönflies γίνονται :

$$(112)\quad \frac{ds_1}{R_1}\text{συνω}=\frac{ds}{R}+d\lambda,\quad \frac{ds_1}{P_1}=\frac{ds}{P}\text{συνλ},\quad \frac{ds_1}{R_1}\text{ημω}=\frac{ds}{P}\text{ημλ},$$

ὅπου $\lambda=\frac{\pi}{2}-\vartheta$ εἶναι ἡ γωνία τῶν ἐγγυτάτων ἐπιπέδων, ἢ τῶν δικαθέτων τῶν (Κ) καὶ ($Κ_1$).

---

[1] Ἂν ἡ καμπύλη εἶναι *τυχοῦσα*, αἱ εὐθεῖαι (Δ) σχηματίζουν *μεταβλητὰς* γωνίας πρὸς τὰς δύο ἄλλας ἀρχικὰς εὐθείας τῆς (Κ) (Πρβλ. § 30).

Ἔχομεν λοιπὸν καί :

$$(112)' \quad \left(\frac{ds_1}{R_1}\right)^2=\left(\frac{ds}{P}\right)^2 \eta\mu^2\lambda+\left(\frac{ds}{R}+d\lambda\right)^2, \quad \varepsilon\varphi\omega=\frac{\eta\mu\lambda}{P}\cdot\frac{R}{1+R\frac{d\lambda}{ds}}=\sigma\tau\alpha\vartheta.$$

Ἂν δὲ αἱ ἐξισώσεις αὐταὶ λυθοῦν πρὸς τὰ στοιχεῖα τῆς (K), μᾶς δίδουν τὰς σχέσεις τῶν ***ἐξειλιγμενοειδῶν*** πρὸς τὴν (K_1). (Διὰ $\omega=\frac{\pi}{2}$ ἐπανευρίσκομεν τοὺς τύπους τῶν ἐνειλιγμένων καὶ τῶν ἐξειλιγμένων).

δ΄) Κυκλοποιοῦσα ἐπιφάνεια.

90. ***Κυκλοποιοῦσα*** ἐπιφάνεια (surface cyclifiante) μιᾶς καμπύλης ***(K)*** λέγεται μία ***ἀναπτυκτὴ*** ἐπιφάνεια ***(A)***, ***ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὴν καμπύλην καὶ ποὺ κατὰ τὴν ἀνάπτυξίν της ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου μετασχηματίζει τὴν καμπύλην αὐτὴν εἰς περιφέρειαν ἢ τόξον περιφερείας δοθείσης ἀκτῖνος.*** Διὰ νὰ ὑπάρχῃ τοιούτη ἐπιφάνεια, πρέπει ἡ δοθεῖσα ἀκτὶς ***νὰ μὴ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὴν μεγίστην ἀκτῖνα καμπυλότητος τῆς δοθείσης καμπύλης.*** (Βλέπε : *Molins*, *Journal de Mathématiques*, *2e série*, ***Τόμ. I***, ***σελ.*** *265*). Μὲ ὁμοίαν σκέψιν πρὸς τὴν τῆς προηγουμένης παραγράφου βλέπομεν, ὅτι καὶ τώρα ἰσχύουν διὰ τὴν (K) καὶ τὸν λαιμὸν (K_1) τῆς (A) οἱ τύποι τοῦ Schönflies· καὶ ἂν ὀνομάσωμεν λ τὴν γωνίαν τοῦ ***κυκλοποιοῦντος*** ἐπιπέδου (δηλ. τοῦ ἐφαπτομένου τῆς κυκλοποιούσης ἐπιφανείας) πρὸς τὸ ἐγγύτατον τῆς (K), εὑρίσκομεν ἀμέσως $\lambda=\frac{\pi}{2}-\vartheta$ καὶ οἱ τύποι τοῦ Schönflies μᾶς δίδουν τοὺς ἑξῆς ***τύπους τοῦ*** *Molins*:

$$\frac{ds_1}{R_1}\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{ds}{R}+d\lambda, \quad \frac{ds_1}{P_1}=\frac{ds}{P}\sigma\upsilon\nu\lambda-d\omega, \quad \frac{ds_1}{R_1}\eta\mu\omega=\frac{ds}{P}\eta\mu\lambda \qquad (113)$$

ἐπομένως καί :

$$\left(\frac{ds_1}{R_1}\right)^2=\left(\frac{ds}{P}\right)^2\eta\mu^2\lambda+\left(\frac{ds}{R}+d\lambda\right)^2,$$

$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{R_g}{P_n}=\frac{\eta\mu\lambda}{P}\cdot\frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{d\lambda}{ds}}=\frac{R\eta\mu\lambda}{P\left[1+R\frac{d\lambda}{ds}\right]}. \qquad (113)'$$

ε΄) Τόπος τῶν κορυφῶν τῶν ἐγγυτάτων ἐκ περιστροφῆς κώνων.

91. Κατὰ γνωστὸν θεώρημα τῆς ***Διαφορικῆς Γεωμετρίας*** ὁ ἄξων καμπυλότητος μιᾶς καμπύλης (K), ὁ ἀντίστοιχος ἑνὸς τυχόντος σημείου της M, εἶναι καὶ ***ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κορυφῶν κώνων***

ἐκ περιστροφῆς, ποὺ ἔχουν εἰς τὸ M ἐπαφὴν β′ τάξεως μὲ τὴν καμπύλην· μεταξὺ δὲ αὐτῶν ὑπάρχει εἷς ἐγγύτατος πρὸς τὴν καμπύλην, ποὺ ἔχει γ′ τάξεως ἐπαφήν (1).

Ὁ τόπος τῶν κορυφῶν τῶν ἐγγυτάτων αὐτῶν κώνων δι᾽ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς (K) εἶναι μία νέα καμπύλη (K_1). Θὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν (K) καὶ (K_1). Πρὸς εὐκολίαν θὰ παρεμβάλωμεν ὡς ***βοηθητικὴν*** τὴν σφαιροκεντρικὴν καμπύλην τῆς (K), τὴν (K_2)· αἱ σχέσεις τῆς (K) μὲ τὴν (K_2) εἶναι αἱ γνωσταὶ (§ 22 καὶ 65)· αἱ δὲ σχέσεις τῆς (K_2) μὲ τὴν (K_1) εἶναι πάλιν αἱ τῶν τύπων τοῦ Schönflies, διότι καὶ αἱ δύο αὐταὶ καμπύλαι κεῖνται ἐπὶ μιᾶς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας (τῆς πολικῆς τῆς (K)), τῆς ὁποίας ἡ (K_2) εἶναι ὁ λαιμός· θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς δύο ὁμάδας τύπων :

$$\frac{ds_2}{R_2}=-\frac{ds}{P},\quad \frac{ds_2}{P_2}=-\frac{ds}{R}\quad \text{καί:}$$

$$\frac{ds_1}{R_{1g}}=\frac{ds_2}{R_2}\text{συνω},\quad \frac{ds_1}{P_{1g}}=\frac{ds_2}{P_2}+d\omega,\quad \frac{ds_1}{P_{1n}}=\frac{ds_2}{R_2}\text{ημω}\cdot$$

καὶ μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν στοιχείων τῆς (K_2) :

$$(114)\quad \frac{ds_1}{R_{1g}}=-\frac{ds}{P}\text{συνω},\quad \frac{ds_1}{P_{1g}}=-\frac{ds}{R}+d\omega,\quad \frac{ds_1}{P_{1n}}=-\frac{ds}{P}\text{ημω}\cdot$$

ἑπομένως καί :

$$(114)'\quad \left(\frac{ds_1}{P_1}\right)^2=\left(\frac{ds}{P}\right)^2\text{ημ}^2\omega+\left(-\frac{ds}{R}+d\omega\right)^2,\qquad \text{εφω}=\frac{R_{1g}}{P_{1n}}.$$

Σημείωσις. Ἄλλας ἐφαρμογὰς τῶν γενικῶν τύπων τοῦ ζεύγους, καθὼς καὶ τύπους ἀκόμη γενικωτέρους διὰ τὰς καμπύλας τὰς κειμένας

---

(1) Ἡ συνθήκη τῆς ἐπαφῆς *α′ τάξεως* μεταξὺ γραμμῆς καὶ ἐπιφανείας εἰς ἓν σημεῖον M ***(Διαφ. Λογισμὸς Ι. Ν. Χατζιδάκη, Β′, σελ. 164)*** ἐκφράζει *γεωμετρικῶς*, ὅτι *εἰς τὸ M ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς ἐπιφανείας*· ἡ τῆς *β′ τάξεως*, ὅτι *ἡ τομὴ τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου τῆς καμπύλης ἔχει τὴν ἰδίαν καμπυλότητα (εἰς τὸ M) μὲ τὴν καμπύλην.* Κάθε λοιπὸν κῶνος, ποὺ ἔχει ὡς κορυφήν του ἓν τυχὸν σημεῖον τοῦ ἄξονος καμπυλότητος καὶ ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸν κύκλον καμπυλότητος τῆς καμπύλης εἰς τὸ M, ἔχει προφανῶς ἐπαφὴν β′ τάξεως μὲ τὴν καμπύλην· ἐπειδὴ ὅμως μένει *ἀόριστος* εἰς τοὺς κώνους αὐτοὺς μία *παράμετρος* (ἡ ἀπόστασις δ τῆς κορυφῆς ἀπὸ τὸ κέντρον καμπυλότητος), θὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ αὐτῶν εἷς, ποὺ θὰ ἔχῃ ἐπαφὴν γ′ τάξεως (διὰ *κατάλληλον* τιμὴν τοῦ δ)· προφανῶς δὲ θὰ εἶναι αὐτὸς *ὁ ἐγγύτατος* πρὸς τὴν καμπύλην ***(Διαφ. Λογ. Ι. Ν. Χατζιδάκη, Β′, σελ. 166).***

ἐπὶ δύο ***ὁποιωνδήποτε*** ἐπιφανειῶν, θὰ ἴδωμεν εἰς τὸν Β' τόμον (***τὴν Κινητικὴν Θεωρίαν τῶν Ἐπιφανειῶν***).

Ἀσκήσεις καὶ Προσθῆκαι.

1) ***Παραλληλία δύο πρωτευουσῶν διευθύνσεων.*** — Ν' ἀποδειχθοῦν οἱ τύποι τῆς ***παραλληλίας*** δύο πρωτευουσῶν διευθύνσεων (Κεφάλ. Δ') ἀπὸ τοὺς γενικοὺς τύπους τοῦ ζεύγους.

2) «***Ἀνεπτυγμένη***» ***καὶ*** «***συνεπτυγμένη***» ***μιᾶς καμπύλης.*** — Εἰς τὸν ***Διαφορικὸν Λογισμὸν Ι. Ν. Χατζιδάκη*** (Τόμ. Β', σελ. 150—2) ἀποδεικνύεται ***γεωμετρικῶς***, ὅτι: ***ὅταν τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς πολικῆς ἐπιφανείας μιᾶς καμπύλης κυλίεται ἐπ' αὐτῆς, μένει πάντοτε κάθετον πρὸς τὴν καμπύλην καὶ ἓν σημεῖόν του γράφει τὴν καμπύλην αὐτήν.***

Ἡ καθετότης αὐτὴ ἀποδεικνύεται ***κινητικῶς*** ἁπλούστατα: ἂς ζητήσωμεν ἐπὶ τοῦ ***καθέτου*** ἐπιπέδου μιᾶς καμπύλης (Κ) ἓν σημεῖον $(0, y, z)$ (κινητὸν ἐπ' αὐτοῦ), ποὺ νὰ γράφῃ μίαν καμπύλην (K_1) ***κάθετον ἐπὶ τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον τῆς (Κ).*** Οἱ τύποι τοῦ Darboux μᾶς δίδουν δι' αὐτό: $v_x = 1 - \frac{y}{P}$, $v_y = \frac{z}{R} + y'$, $v_z = -\frac{y}{R} + z'$ καὶ πρέπει νὰ ἔχωμεν: $v_x = 0$, $v_y = 0$· ὥστε: $1 - \frac{y}{P} = 0$, $\frac{z}{R} + y' = 0$, δηλ. $y = P$, $z = -R\frac{dP}{ds}$. Ἐπανευρίσκομεν δηλ. τὴν σφαιροκεντρικὴν καμπύλην. ***Κάθε καμπύλη ἔχει μίαν μόνον σφαιροκεντρικήν***· ἀντιστρόφως ὅμως, ***εἰς κάθε σφαιροκεντρικὴν ἀντιστοιχοῦν ἄπειροι ἀρχικαὶ καμπύλαι (Κ)***: ὅλαι αἱ παράλληλοι μιᾶς ἐξ αὐτῶν, ***αἱ ἔχουσαι τὰ ἴδια κάθετα ἐπίπεδα.*** Αἱ καμπύλαι (Κ), ποὺ παράγονται κατὰ τὴν κύλισιν τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου τῆς (K_1) ἐπ' αὐτῆς, λέγονται «***ἀνεπτυγμέναι***» (γερμ. Planevolventen) τῆς (K_1)· ἡ δὲ (K_1) «***συνεπτυγμένη***» (γερμ. Planevolute) μιᾶς τυχούσης ἀπὸ τὰς (Κ). Αἱ σχέσεις λοιπὸν μεταξὺ τῆς συνεπτυγμένης (K_1) καὶ μιᾶς ἀνεπτυγμένης (Κ) εἶναι αἱ γνωσταὶ σχέσεις (65) τῆς σφαιροκεντρικῆς πρὸς τὴν ἀρχικήν της καμπύλην.

3) ***Καμπύλη (Κ) καὶ τόπος (K_1) τῶν κέντρων καμπυλότητός της.*** — Ἂν παρεμβάλωμεν ὡς ***βοηθητικὴν*** τὴν σφαιροκεντρικὴν τῆς (Κ), τὴν (K_2), θὰ ἔχωμεν πρῶτα:

$$\frac{ds_2}{R_2} = -\frac{ds}{P},\ \frac{ds_2}{P_2} = -\frac{ds}{R} \quad (\alpha)\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ αἱ σχέσεις μεταξὺ (K_1) καὶ (K_2) εἶναι πάλιν αἱ τοῦ Schönflies (διότι καὶ αἱ δύο κεῖνται ἐπὶ τῆς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας (A) τῶν ἀξόνων καμπυλότητος τῆς (K) καὶ ἡ (K_2) εἶναι ὁ λαιμὸς τῆς (A)), θὰ ἔχωμεν ἀκόμη:

$$\frac{ds_1}{R_{1g}} = \frac{ds_2}{R_2}\text{συνω},\ \frac{ds_1}{P_{1g}} = \frac{ds_2}{P_2} + d\omega,\ \frac{ds_1}{P_{1n}} = -\frac{ds_2}{R_2}\text{ημω}.$$

καὶ μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν στοιχείων τῆς (K_2):

$$\frac{ds_1}{R_{1g}} = -\frac{ds}{P}\text{συνω},\ \frac{ds_1}{P_{1g}} = -\frac{ds}{R} + d\omega,\ \frac{ds_1}{P_{1n}} = -\frac{ds}{P}\text{ημω}\cdot$$

καὶ ἑπομένως καὶ τὰς ἑξῆς ***σχέσεις τοῦ*** *Molins*:

$$(115)\begin{cases} \left(\frac{ds_1}{P_1}\right)^2 = \left(-\frac{ds}{R} + d\omega\right)^2 + \left(\frac{ds}{P}\right)^2 \text{ημ}^2\omega,\ \text{εφ}\lambda = \dfrac{-\frac{ds}{P}\text{ημω}}{-\frac{ds}{R} + d\omega}, \\ \frac{ds_1}{R_1} = -\frac{ds}{P}\text{συνω} - d\lambda,\ \frac{\text{ημ}\lambda}{\text{ημω}} = -\frac{P_1}{P}\cdot\frac{ds}{ds_1},\ \text{συνφ} = -\text{ημ}\lambda.\text{ημω} \end{cases}$$

ὅπου: $\lambda = \frac{\pi}{2} - \vartheta_1$ καὶ $\varphi \equiv$ γωνία τῶν δικαθέτων τῶν (K) καὶ (K_1). (Τὴν τελευταίαν σχέσιν τὴν δίδει ἓν ὀρθογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον).

4) ***Καμπύλη (K) καὶ λαιμὸς (K_1) τῆς εὐθειοποιούσης ἐπιφανείας της.***— Εἶναι φανερόν, ὅτι ἰσχύουν πάλιν οἱ τύποι τοῦ Schönflies, μὲ τὴν ***περιπλέον*** περίπτωσιν, ὅτι ἡ (K) εἶναι ***γεωδαισιακὴ*** τῆς εὐθειοποιούσης ἐπιφανείας (σελ. 39, ὑποσημ.). Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τώρα τοὺς ἑξῆς τύπους:

$$(116)\quad \frac{ds}{R} = \frac{ds_1}{R_1}\text{συνω},\ 0 = \frac{ds_1}{P_1} + d\omega,\ \frac{ds}{P} = -\frac{ds_1}{R_1}\text{ημω}\cdot$$

ἑπομένως καί: $\quad (116)' \quad d\sigma_1 = -d\omega,\ d\tau_1^2 = d\sigma^2 + d\tau^2.$

5) ***Καμπύλη (K) καὶ καθεμία ἀπὸ τὰς καμπύλας (K_1) καὶ (K_2), ποὺ κεῖνται ἐπὶ τῆς πολικῆς ἐπιφανείας τῆς (K) καὶ εἶναι ὁ τό-***

πος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν ἀκτῖνος Τ τῶν ἐγγυτάτων τῆς (Κ). Αἱ δύο αὗται καμπύλαι παρουσιάζονται εἰς τὴν θεωρίαν τῆς ***κυκλοποιούσης*** ἐπιφανείας (ὅταν Τ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς δοθείσης περιφερείας). Εὔκολα ἀποδεικνύεται, ὅτι ***τῆς καθεμιᾶς τὸ κάθετον ἐπίπεδον διέρχεται ἀπὸ τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἀρχικῆς καμπύλης*** καὶ ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τῆς (K_1) ἢ τῆς (K_2) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ κυκλοποιοῦν ἐπίπεδον. (Βλέπε: *Schell, Kurven doppelter Krümmung,* ***ἔκδ. β΄, σελ. 145***). Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν διὰ τὸ ζεῦγος (Κ) καὶ (K_1) ἢ (K_2) τύπους ὁμοίους πρὸς τοὺς τύπους τῆς 3ης ἀσκήσεως.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1) *Darboux, Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces.*
2) *Cesàro, Lezioni di Geometria Intrinseca.*
3) *Gino Loria, Curve sghembe Speciali.*
4) *Schell, Theorie der Kurven doppelter Krümmung.*

ΔΙΟΡΘΩΤΕΑ

Σελ. 28, στίχ. 7 : ἀντί : τύποι (α) γράφε : τύποι (15).— ***Σελ. 59***, τύπ. (74)′ : τὸ β′ μέλος νὰ γραφῇ μὲ —. Στίχ. 11 : ἀντὶ ε′) νὰ γραφῇ : δ′). — ***Σελ. 76***, στίχ. 8 : ἀντί : $B=EA$ γράφε : $B=E\Pi$. Στίχ. 9 : τὸ α′ μέλος τῆς ἰσότητος νὰ γραφῇ μὲ +. Τύπ. (ι): τὸ β′ μέλος νὰ γραφῇ μὲ —. Τύπ. (96): εἰς τὸ α′ μέλος νὰ γραφῇ ὁ ὅρος Πz_1 μὲ —. ***Σελ. 77***, στίχ. 7 (ἀπὸ κάτω) : Ν' ἀνταλλαχθοῦν τὰ σημεῖα τῶν β′ ὅρων τοῦ α′ μέλους τῆς ἐξισ. Στίχ. 13 : ἀντί : $-\Pi x_1^2$ γράφε : $+\Pi x_1^2$. ***Σελ. 79***, στίχ. 14 : ἀντί : $-\Pi x_1^2$ γράφε : $+\Pi x_1^2$.

ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΧΑΤΖΙΔΑΚΗ
ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΟΥ ΕΘΝΙΚΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ, Δ΄.

ΚΙΝΗΤΙΚΗ
ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

(ΤΟΥ ΤΡΙΔΙΑΣΤΑΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ)

ΤΟΜΟΣ Β΄.

ΔΙΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑΙ ΚΙΝΗΣΕΙΣ
(ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΙ)

ΑΘΗΝΑΙ
ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ ΠΑΡΑΣΚΕΥΑ ΛΕΩΝΗ
30—Ὁδὸς Περικλέους—30
1936

Κάθε ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφήν μου.

ΣΤΗ ΜΝΗΜΗ

ΤΟΥ GASTON DARBOUX

Μ᾿ ΕΥΓΝΩΜΟΣΥΝΗ

Ο ΜΑΘΗΤΗΣ ΤΟΥ

Κάθε ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφήν μου.

[illegible]

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ὁ Β′ αὐτὸς τόμος τῆς Κινητικῆς Γεωμετρίας μου ἀποτελεῖ συνέχειαν τοῦ Α′, ποὺ ἐξέδωσα προπέρυσι, καὶ συμπληρώνει τὴν σειρὰν τῶν μαθημάτων τοῦ κλάδου αὐτοῦ τῆς Ἀπειροστικῆς Γεωμετρίας, ποὺ διδάσκω εἰς τὸ Πανεπιστήμιον. Ἡ θεωρία τῶν Ἐπιφανειῶν εἶναι σήμερον τόσον ἀχανής, ὥστε εἶναι ἀνθρωπίνως ἀδύνατον οὔτε τὰ κυριώτερα μέρη της νὰ πραγματευθῇ κανεὶς—καὶ συντόμως ἀκόμη—εἰς ἓν ὀλιγοσέλιδον βιβλίον, καθὼς τὸ παρόν. Ἐπροσπάθησα ὅμως νὰ περιλάβω προπάντων ἐκεῖνα τὰ μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα κυρίως φαίνεται ἡ ὑπεροχὴ τῆς ***Κινητικῆς*** μεθόδου ὑπὲρ τὴν ***Διαφορικήν***. Περισσότερα σχετικῶς περὶ Ἐπιφανειῶν περιλαμβάνει τὸ βιβλίον μου: ***Ἀναλυτικὴ Θεωρία τῶν Ἐπιφανειῶν***. Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως: πολλὰς ἀνωτέρας θεωρίας μὴ εὑρισκομένας ἐκεῖ πραγματεύομαι εἰς τὸν παρόντα τόμον.

Ὅπως εἰς τὸν Α′ Τόμον, προτάσσω καὶ ἐδῶ, πρὸς εὐκολωτέραν κατανόησιν, τὰς ἀναγκαίας θεμελιώδεις θεωρίας ἀπὸ τὴν ***καθαρὰν Κινητικὴν τῶν διπαραμετρικῶν κινήσεων.***

Ἀθῆναι, κατὰ Ἰανουάριον τοῦ 1936.

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΧΑΤΖΙΔΑΚΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΔΙΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΩΝ ΚΙΝΗΣΕΩΝ

α΄) Μερικαὶ παράγωγοι τῶν συνημιτόνων καὶ παραμετρικαὶ περιστροφαί.

1. ***Διπαραμετρικὴ κίνησις.***—Ὅταν ἡ κίνησις ἑνὸς κινητοῦ σχήματος, ἢ ἑνὸς συστήματος στερεῶς πρὸς αὐτὸ συνδεομένων κινητῶν ἀξόνων, ἐξαρτᾶται ἀπὸ **δύο** παραμέτρους u_1 καὶ u_2 (***αὐθαιρέτους*** συναρτήσεις τοῦ χρόνου), ἡ κίνησις λέγεται ***διπαραμετρική***. Ἂν μεταξὺ τῶν u_1 καὶ u_2 θέσωμεν μίαν τυχοῦσαν σχέσιν : $u_2=\varrho(u_1)$, ἡ κίνησις καταντᾷ ***μονοπαραμετρική***. Τότε τὸ κινητὸν σχῆμα λαμβάνει μίαν ***ὡρισμένην*** κίνησιν καὶ ἡ κινητὴ ἀρχὴ Ο΄ γράφει μίαν ***καμπύλην***· ἐπομένως, ὅταν τὰ u_1 καὶ u_2 μένουν ***ἀσύνδετα,*** τὸ σχῆμα ἐπιδέχεται ∞^1 κινήσεις καὶ ἡ κινητὴ ἀρχὴ Ο΄ γράφει μίαν ***ἐπιφάνειαν***.

2. ***Παραμετρικαὶ κινήσεις.***—Αἱ δύο κινήσεις, εἰς τὰς ὁποίας ***μόνον τὸ*** u_1 ἢ ***μόνον τὸ*** u_2 μεταβάλλεται (ἐνῷ τὸ ἄλλο u μένει ***σταθερόν***), λέγονται ***παραμετρικαὶ*** κινήσεις τοῦ συστήματος.

3. ***Κίνησις πέριξ ἑνὸς σταθεροῦ σημείου.***—Ἂν τὸ σύστημα ἔχῃ ἓν ***σταθερὸν*** σημεῖον, ἐκλέγομεν αὐτὸ ὡς ***κοινὴν*** ἀρχὴν Ο καὶ τῶν ἀκινήτων καὶ τῶν κινητῶν ἀξόνων. Ἂν τότε ὀνομάσωμεν, καθὼς συνήθως, τὰ συνημίτονα τῶν ὀρθογωνίων κινητῶν ἀξόνων Οx, Οy, Οz πρὸς τοὺς ἐπίσης ὀρθογωνίους ἀκινήτους ΟX, ΟY, ΟZ κατὰ σειράν : $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$· $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$· $\alpha_3,\beta_3,\gamma_3$, θὰ ἔχωμεν πάλιν, καθὼς καὶ εἰς τὰς μονοπαραμετρικὰς κινήσεις (Τόμ. Α΄, σελ. 13), εἰς τὴν τυχοῦσαν κίνησιν τοῦ συστήματος, τὰς προβολὰς ἐπὶ τῶν κινητῶν ἀξόνων τῆς ταχύτητος

ἑνὸς τυχ. σημείου M, ***στερεῶς*** συνδεομένου μὲ τοὺς ἄξονας O'xyz, ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$(1)\quad v_x = Qz - Ry,\quad v_y = Rx - Pz,\quad v_z = Py - Qx,$$

ὅπου : $P \equiv \sum \alpha_3 \frac{d\alpha_2}{dt},\quad Q \equiv \sum \alpha_1 \frac{d\alpha_3}{dt},\quad R \equiv \sum \alpha_2 \frac{d\alpha_1}{dt}.$

Ἂν δὲ τὸ σημεῖον ἔχῃ καὶ ***ἰδικήν του*** κίνησιν, θὰ εἶναι :

$$(1')\quad v_x = Qz - Ry + x' \text{ κτλ.}$$

Ἐπειδὴ ὅμως τὰ συνημίτονα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ κτλ. εἶναι συναρτήσεις ***σύνθετοι*** τοῦ χρόνου t (ὡς συναρτήσεις τῶν $u_1(t)$, $u_2(t)$), θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{\partial\alpha_1}{\partial u_1}\cdot\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial\alpha_1}{\partial u_2}\cdot\frac{du_2}{dt} \equiv \frac{\partial\alpha_1}{\partial u_1}u'_1 + \frac{\partial\alpha_1}{\partial u_2}u'_2 \text{ κτλ.}$$

ἑπομένως :

$$P = \sum \alpha_3 \frac{\partial\alpha_2}{\partial u_1}u'_1 + \sum \alpha_3 \frac{\partial\alpha_2}{\partial u_2}u'_2,\quad Q = \sum \alpha_1 \frac{\partial\alpha_3}{\partial u_1}u'_1 + \sum \alpha_1 \frac{\partial\alpha_3}{\partial u_2}u'_2,$$

$$R = \sum \alpha_2 \frac{\partial\alpha_1}{\partial u_1}u'_1 + \sum \alpha_2 \frac{\partial\alpha_1}{\partial u_2}u'_2.$$

καὶ ἂν θέσωμεν :

$$p_1 \equiv \sum \alpha_3 \frac{\partial\alpha_2}{\partial u_1},\quad q_1 \equiv \sum \alpha_1 \frac{\partial\alpha_3}{\partial u_1},\quad r_1 \equiv \sum \alpha_2 \frac{\partial\alpha_1}{\partial u_1}$$

καί : $$p_2 \equiv \sum \alpha_3 \frac{\partial\alpha_2}{\partial u_2},\quad q_2 \equiv \sum \alpha_1 \frac{\partial\alpha_3}{\partial u_2},\quad r_2 \equiv \sum \alpha_2 \frac{\partial\alpha_1}{\partial u_2}$$

(καὶ τότε αἱ ***περιστροφαὶ*** τῶν παραμετρικῶν κινήσεων, αἱ ***«παραμετρικαὶ» περιστροφαί,*** θὰ εἶναι κατὰ σειράν : p_1u_1', q_1u_1', r_1u_1' καὶ p_2u_2', q_2u_2', r_2u_2'),
θὰ ἔχωμεν :

$$(2)\quad P = p_1u_1' + p_2u_2',\quad Q = q_1u_1' + q_2u_2',\quad R = r_1u_1' + r_2u_2'.$$

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις τώρα :

$\sum \alpha_1 \frac{\partial\alpha_1}{\partial u_1} = 0,\quad \sum \alpha_2 \frac{\partial\alpha_1}{\partial u_1} = r_1,\quad \sum \alpha_3 \frac{\partial\alpha_1}{\partial u_1} = -q_1$ εὑρίσκομεν :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\alpha_1}{\partial u_1} = r_1\alpha_2 - q_1\alpha_3,\quad \frac{\partial\beta_1}{\partial u_1} = r_1\beta_2 - q_1\beta_3,\quad \frac{\partial\gamma_1}{\partial u_1} = r_1\gamma_2 - q_1\gamma_3\cdot\\
\text{ὁμοίως : }&\frac{\partial\alpha_2}{\partial u_1} = p_1\alpha_3 - r_1\alpha_1,\quad \frac{\partial\beta_2}{\partial u_1} = p_1\beta_3 - r_1\beta_1,\quad \frac{\partial\gamma_2}{\partial u_1} = p_1\gamma_3 - r_1\gamma_1\cdot\\
&\frac{\partial\alpha_3}{\partial u_1} = q_1\alpha_1 - p_1\alpha_2,\quad \frac{\partial\beta_3}{\partial u_1} = q_1\beta_1 - p_1\beta_2,\quad \frac{\partial\gamma_3}{\partial u_1} = q_1\gamma_1 - p_1\gamma_2\cdot
\end{aligned}\right\}(3)$$

ἐπίσης δὲ ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις:

$$\sum \alpha_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial u_2} = 0, \quad \sum \alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial u_2} = r_2, \quad \sum \alpha_3 \frac{\partial \alpha_1}{\partial u_2} = -q_2 \text{ συνάγομεν:}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \alpha_1}{\partial u_2} = r_2\alpha_2 - q_2\alpha_3, \quad \frac{\partial \beta_1}{\partial u_2} = r_2\beta_2 - q_2\beta_3, \quad \frac{\partial \gamma_2}{\partial u_2} = r_2\gamma_2 - q_2\gamma_3 \cdot \\
\text{ὁμοίως:}\ &\frac{\partial \alpha_2}{\partial u_2} = p_2\alpha_3 - r_2\alpha_1, \quad \frac{\partial \beta_2}{\partial u_2} = p_2\beta_3 - r_2\beta_1, \quad \frac{\partial \gamma_2}{\partial u_2} = p_2\gamma_3 - r_2\gamma_1 \cdot \\
&\frac{\partial \alpha_3}{\partial u_2} = q_2\alpha_1 - p_2\alpha_2, \quad \frac{\partial \beta_3}{\partial u_2} = q_2\beta_1 - p_2\beta_2, \quad \frac{\partial \gamma_3}{\partial u_2} = q_2\gamma_1 - p_2\gamma_2 .
\end{aligned}\right\} (3')$$

Αἱ 18 ἐξισώσεις (3) καὶ (3′) ὁρίζουν τὰς μερικὰς παραγώγους τῶν συνημιτόνων μὲ τὰ ἴδια τὰ συνημίτονα καὶ μὲ τὰς παραμετρικὰς «περιστροφὰς» (1) p_1, q_1, r_1˙ p_2, q_2, r_2.

β′) Ἐξισώσεις τῶν *Combescure — Darboux.*

4. ***Σχέσεις μεταξὺ τῶν παραμετρικῶν περιστροφῶν καὶ τῶν μερικῶν παραγώγων των.*** — Ἂν ἐξισώσωμεν τὰς δύο τιμὰς τῆς $\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial u_1 \partial u_2}$, ποὺ μας δίδουν αἱ δύο πρῶται ἀπὸ τὰς σχέσεις (3) καὶ (3′), θὰ ἔχωμεν:

$$r_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial u_2} - q_1 \frac{\partial \alpha_3}{\partial u_2} + \alpha_2 \frac{\partial r_1}{\partial u_2} - \alpha_3 \frac{\partial q_1}{\partial u_2} =$$
$$= r_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial u_1} - q_2 \frac{\partial \alpha_3}{\partial u_1} + \alpha_2 \frac{\partial r_2}{\partial u_1} - \alpha_3 \frac{\partial q_2}{\partial u_1},$$

ἢ καί, μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν τῶν τιμῶν τῶν παραγώγων τῶν συνημιτόνων ἀπὸ τὰς (3) καὶ (3′):

$$r_1(p_2\alpha_3 - r_2\alpha_1) - q_1(q_2\alpha_1 - p_2\alpha_2) + \alpha_2 \frac{\partial r_1}{\partial u_2} - \alpha_3 \frac{\partial q_1}{\partial u_2} =$$
$$= r_2(p_1\alpha_3 - r_1\alpha_1) - q_2(q_1\alpha_1 - p_1\alpha_2) + \alpha_2 \frac{\partial r_2}{\partial u_1} - \alpha_3 \frac{\partial q_2}{\partial u_1}$$

ἢ ἀκόμη, ἀφοῦ κατατάξωμεν κατὰ τὰ συνημίτονα α_2, α_3:

$$\alpha_2 \left[\frac{\partial r_1}{\partial u_2} - \frac{\partial r_2}{\partial u_1} + q_1p_2 - q_2p_1 \right] = \alpha_3 \left[\frac{\partial q_1}{\partial u_2} - \frac{\partial q_2}{\partial u_1} + p_1r_2 - p_2r_1 \right],$$

δηλ. συντόμως: $\alpha_2 T = \alpha_3 \Sigma$ (α)

(ὅπου Τ καὶ Σ παριστοῦν κατὰ σειρὰν τὰς δύο ἀγκύλας)˙ καὶ ἐπειδὴ (ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τῶν δύο τιμῶν τῆς $\frac{\partial^2 \beta_1}{\partial u_1 \partial u_2}$, καθὼς καὶ τῶν δύο τῆς

---

(1) Χάριν συντομίας θὰ λέγωμεν *περιστροφὰς* ἁπλῶς τὰ p_1, p_2 κτλ. ἀντὶ τῶν $p_1u'_1$, $p_2u'_2$ κτλ.

$\frac{\partial^2\gamma_1}{\partial u_1 \partial u_2}$) εἶναι καί : (β) $\beta_2 T = \beta_3 \Sigma$, $\gamma_2 T = \gamma_3 \Sigma$, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰς 3 αὐτὰς ἐξισώσεις (α) καὶ (β) κατὰ σειρὰν πρῶτα ἐπὶ $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ καὶ προσθέσωμεν καὶ ἔπειτα ἐπὶ $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ καὶ προσθέσωμεν, εὑρίσκομεν : $T=0$, $\Sigma=0$. Ἂν δὲ τέλος ἐξισώσωμεν καὶ τὰς ἄλλας β΄ παραγώγους : $\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial u_1 \partial u_2}$ κτλ., θὰ εὕρωμεν καὶ μίαν τρίτην σχέσιν :

$$\frac{\partial p_1}{\partial u_2} - \frac{\partial p_2}{\partial u_1} + r_1 q_2 - r_2 q_1 = \Pi = 0\cdot$$

φθάνομεν λοιπὸν οὕτως ***εἰς τὸ ἑξῆς θεμελιῶδες σύστημα 3 ἐξισώσεων εἰς μερικὰς παραγώγους μεταξὺ τῶν 6 περιστροφῶν*** p_1, q_1, r_1 ***καὶ*** p_2, q_2, r_2 :

$$(4) \qquad \frac{\partial p_1}{\partial u_2} - \frac{\partial p_2}{\partial u_1} = q_1 r_2 - q_2 r_1, \qquad \frac{\partial q_1}{\partial u_2} - \frac{\partial q_2}{\partial u_1} = r_1 p_2 - r_2 p_1,$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial u_2} - \frac{\partial r_2}{\partial u_1} = p_1 q_2 - p_2 q_1.$$

Τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς τὰς εὗρῆκαν σχεδὸν συγχρόνως ὁ Combescure καὶ ὁ Darboux (1866—7).

γ΄) Κίνησις τυχοῦσα.

5. ***Προβολαὶ ἐπὶ τῶν ἀξόνων OXYZ τῆς ταχύτητος*** v_0 ***τῆς κινητῆς ἀρχῆς εἰς τὰς παραμετρικὰς κινήσεις.***—Ἂν τὸ κινούμενον σύστημα εἶναι ***ἐλεύθερον***, θὰ ἔχωμεν πάλιν προφανῶς τὰς προηγουμένας σχέσεις (3) καὶ (3)΄ τῶν συνημιτόνων, ***καθὼς καὶ τὰς ἐξισώσεις (4) τῶν Combescure—Darboux***. Πλὴν αὐτῶν ὅμως, ἂν ὀνομάσωμεν $A_1 u_1', B_1 u_1', \Gamma_1 u_1'$ τὰς προβολὰς τῆς ταχύτητος τῆς κινητῆς ἀρχῆς $O'(X_0, Y_0, Z_0)$ ἐπὶ τῶν ***κινητῶν*** ἀξόνων κατὰ τὴν παραμετρικὴν κίνησιν u_2=σταθ. καὶ $A_2 u_2', B_2 u_2', \Gamma_2 u_2'$ τ᾿ ἀντίστοιχα ποσὰ κατὰ τὴν παραμετρικὴν κίνησιν u_1=σταθ., θὰ ἔχωμεν διὰ τὰς ἀντιστοίχους προβολὰς ἐπὶ τῶν ἀκινήτων ἀξόνων :

$$\left(\frac{dX_0}{dt}\right)_{u_2=c_2} = \alpha_1 A_1 u_1' + \alpha_2 B_1 u_1' + \alpha_3 \Gamma_1 u_1'\cdot \text{ κτλ.}$$

καὶ ἐπειδή : $\left(\frac{dX_0}{dt}\right)_{u_2=c_2} = \frac{\partial X_0}{\partial u_1} u_1'$ κτλ. συνάγομεν :

$$(5) \qquad \frac{\partial X_0}{\partial u_1} = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 B_1 + \alpha_3 \Gamma_1, \qquad \frac{\partial Y_0}{\partial u_1} = \beta_1 A_1 + \beta_2 B_1 + \beta_3 \Gamma_1 \cdot$$
$$\frac{\partial Z_0}{\partial u_1} = \gamma_1 A_1 + \gamma_2 B_1 + \gamma_3 \Gamma_1 \cdot$$

καὶ ὁμοίως :

$$(5') \qquad \frac{\partial X_0}{\partial u_2} = \alpha_1 A_2 + \alpha_2 B_2 + \alpha_3 \Gamma_2, \qquad \frac{\partial Y_0}{\partial u_2} = \beta_1 A_2 + \beta_2 B_2 + \beta_3 \Gamma_2,$$
$$\frac{\partial Z_0}{\partial u_2} = \gamma_1 A_2 + \gamma_2 B_2 + \gamma_3 \Gamma_2.$$

6. ***Προβολαὶ ἐπὶ τῶν ἀξόνων OXYZ τῆς ταχύτητος τοῦ O′ εἰς τὴν τυχοῦσαν κίνησιν.***—Ἔχομεν τότε :

$$v_{oX} = \frac{dX_0}{dt} = \frac{\partial X_0}{\partial u_1} u'_1 + \frac{\partial X_0}{\partial u_2} u_2' =$$
$$= u_1'(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 B_1 + \alpha_3 \Gamma_1) + u_2'(\alpha_1 A_2 + \alpha_2 B_2 + \alpha_3 \Gamma_2) =$$
$$= \alpha_1 (A_1 u_1' + A_2 u_2') + \alpha_2 (B_1 u_1' + B_2 u_2') + \alpha_3 (\Gamma_1 u_1' + \Gamma_2 u_2') \cdot \text{ κτλ.}$$

καὶ ἂν τὰ ποσὰ $A_1 u_1' + A_2 u_2'$ κτλ., ποὺ εἶναι αἱ προβολαὶ τῆς ταχύτητος τοῦ O′ ἐπὶ τῶν κινητῶν ἀξόνων εἰς τὴν **τυχοῦσαν** κίνησιν, τὰ γράψωμεν A,B,Γ, θὰ εἶναι :

$$(6)\; v_{oX} = \alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 \Gamma, \; v_{oY} = \beta_1 A + \beta_2 B + \beta_3 \Gamma, \; v_{oZ} = \gamma_1 A + \gamma_2 B + \gamma_3 \Gamma.$$

7. ***Προβολαὶ ἐπὶ τῶν ἀξόνων O′xyz τῆς ταχύτητος τοῦ τυχ. σημείου τοῦ συστήματος.***—Ἂν μὲν τὸ σημεῖον συνδέεται στερεῶς μὲ τοὺς ἄξονας O′xyz, αἱ προβολαὶ αὐταὶ θὰ εἶναι προφανῶς (ὅπως καὶ εἰς τὰς μονοπαραμετρικὰς κινήσεις) :

$$v_x = v_{ox} + Qz - Ry, \quad v_y = v_{oy} + Rx - Pz, \quad v_z = v_{oz} + Py - Qx \quad (7) \cdot$$

ἂν δὲ ἔχῃ καὶ ἰδικήν του κίνησιν, θὰ εἶναι :

$$v_x = v_{ox} + Qz - Ry + x', \qquad v_y = v_{oy} + Rx - Pz + y',$$
$$v_z = v_{oz} + Py - Qx + z'. \qquad (8)$$

δ′) Ἐξισώσεις τῶν *Kirchhoff—Darboux.*

8. ***Σχέσεις μεταξὺ τῶν παραμετρικῶν περιστροφῶν καὶ τῶν προβολῶν τῶν παραμετρικῶν «ταχυτήτων»*** (¹) ***τῆς ἀρχῆς ἐπὶ τῶν κινητῶν ἀξόνων.*** — Ἂν ἐξισώσωμεν καὶ ἐδῶ τὰς δύο τιμὰς τῆς $\frac{\partial^2 X_0}{\partial u_1 \partial u_2}$, ποὺ δίδουν οἱ τύποι (5) καὶ (5′), θὰ ἔχωμεν :

(¹) Χάριν συντομίας θὰ ὀνομάζωμεν προβολὰς τῶν παραμετρικῶν «ταχυτήτων» μόνον τοὺς συντελεστὰς A_1, A_2 κτλ. τῶν ταχυτήτων $A_1 u'_1$, $A_2 u'_2$ κτλ.

$$A_1\frac{\partial\alpha_1}{\partial u_2}+B_1\frac{\partial\alpha_2}{\partial u_2}+\Gamma_1\frac{\partial\alpha_3}{\partial u_2}+\alpha_1\frac{\partial A_1}{\partial u_2}+\alpha_2\frac{\partial B_1}{\partial u_2}+\alpha_3\frac{\partial\Gamma_1}{\partial u_2}=$$

$$=A_2\frac{\partial\alpha_1}{\partial u_1}+B_2\frac{\partial\alpha_2}{\partial u_1}+\Gamma_2\frac{\partial\alpha_3}{\partial u_1}+\alpha_1\frac{\partial A_2}{\partial u_1}+\alpha_2\frac{\partial B_2}{\partial u_1}+\alpha_3\frac{\partial\Gamma_2}{\partial u_1}.$$

καὶ ἂν πάλιν ἀντικαταστήσωμεν τὰς τιμὰς τῶν παραγώγων τῶν συνημιτόνων ἀπὸ τοὺς τύπους (3) καὶ (3)', εὑρίσκομεν:

$$A_1(\mathbf{r}_2\alpha_2-q_2\alpha_3)+B_1(p_2\alpha_3-\mathbf{r}_2\alpha_1)+\Gamma_1(q_2\alpha_1-p_2\alpha_2)+\alpha_1\frac{\partial A_1}{\partial u_2}+\alpha_2\frac{\partial B_1}{\partial u_2}+$$

$$+\alpha_3\frac{\partial\Gamma_1}{\partial u_2}=A_2(\mathbf{r}_1\alpha_2-q_1\alpha_3)+B_2(p_1\alpha_3-\mathbf{r}_1\alpha_1)+\Gamma_2(q_1\alpha_1-p_1\alpha_2)+$$

$$+\alpha_1\frac{\partial A_2}{\partial u_1}+\alpha_2\frac{\partial B_2}{\partial u_1}+\alpha_3\frac{\partial\Gamma_2}{\partial u_1},$$

ἤ, ὕστερ᾽ ἀπὸ ὀλίγας πράξεις:

$$\alpha_1\left[\Gamma_1q_2-\Gamma_2q_1+B_2\mathbf{r}_1-B_1\mathbf{r}_2+\frac{\partial A_1}{\partial u_2}-\frac{\partial A_2}{\partial u_1}\right]+$$

$$+\alpha_2\left[A_1\mathbf{r}_2-A_2\mathbf{r}_1+\Gamma_2p_1-\Gamma_1p_2+\frac{\partial B_1}{\partial u_2}-\frac{\partial B_2}{\partial u_1}\right]+$$

$$+\alpha_3\left[B_1p_2-B_2p_1+A_2q_1-A_1q_2+\frac{\partial\Gamma_1}{\partial u_2}-\frac{\partial\Gamma_2}{\partial u_1}\right]=0,$$

ἢ καί: $\alpha_1\Pi+\alpha_2\Sigma+\alpha_3T=0$· καὶ ἐπειδὴ εἶναι προφανῶς καί:

$$\beta_1\Pi+\beta_2\Sigma+\beta_3T=0,\quad \gamma_1\Pi+\gamma_2\Sigma+\gamma_3T=0,$$

συνάγομεν πάλιν, μὲ τὸν ἴδιον τρόπον τοῦ ἐδ. 4, ὅτι:

$$\Pi=0,\quad \Sigma=0,\quad T=0,$$

δηλ. (9)
$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial A_1}{\partial u_2}-\frac{\partial A_2}{\partial u_1}&=(q_1\Gamma_2-q_2\Gamma_1)-(\mathbf{r}_1B_2-\mathbf{r}_2B_1),\\ \frac{\partial B_1}{\partial u_2}-\frac{\partial B_2}{\partial u_1}&=(\mathbf{r}_1A_2-\mathbf{r}_2A_1)-(p_1\Gamma_2-p_2\Gamma_1),\\ \frac{\partial\Gamma_1}{\partial u_2}-\frac{\partial\Gamma_2}{\partial u_1}&=(p_1B_2-p_2B_1)-(q_1A_2-q_2A_1).\end{aligned}\right.$$

Αἱ 3 αὐταὶ ἐξισώσεις εὑρέθησαν κατὰ πρῶτον ὑπὸ ἄλλην μορφὴν ἀπὸ τὸν Kirchhoff (1876), ὑπὸ τὴν μορφὴν δὲ (9) ἀπὸ τὸν Darboux.

ε΄) **Συμπέρασμα**.

9. ***Θεμελιώδεις ἐξισώσεις κάθε διπαραμετρικῆς κινήσεως.***— Μεταξὺ τῶν 6 «*παραμετρικῶν*» περιστροφῶν: $p_1, q_1, \mathbf{r}_1$· $p_2, q_2, \mathbf{r}_2$ καὶ τῶν

6 προβολῶν τῶν ***παραμετρικῶν*** ταχυτήτων ἐπὶ τῶν κινητῶν ἀξόνων : A_1, B_1, Γ_1· A_2, B_2, Γ_2 ὑπάρχουν ***6 θεμελιώδεις σχέσεις εἰς μερικὰς παραγώγους*** (ἀπὸ τὰς ὁποίας αἱ 3 πρῶται συνδέουν ***μόνον*** τὰς περιστροφάς) :

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial p_1}{\partial u_2} - \frac{\partial p_2}{\partial u_1} = q_1 r_2 - q_2 r_1, \\
&\frac{\partial q_1}{\partial u_2} - \frac{\partial q_2}{\partial u_1} = r_1 p_2 - r_2 p_1, \\
&\frac{\partial r_1}{\partial u_2} - \frac{\partial r_2}{\partial u_1} = p_1 q_2 - p_2 q_1, \\
&\frac{\partial A_1}{\partial u_2} - \frac{\partial A_2}{\partial u_1} = (q_1 \Gamma_2 - q_2 \Gamma_1) - (r_1 B_2 - r_2 B_1), \\
&\frac{\partial B_1}{\partial u_2} - \frac{\partial B_2}{\partial u_1} = (r_1 A_2 - r_2 A_1) - (p_1 \Gamma_2 - p_2 \Gamma_1), \\
&\frac{\partial \Gamma_1}{\partial u_2} - \frac{\partial \Gamma_2}{\partial u_1} = (p_1 B_2 - p_2 B_1) - (q_1 A_2 - q_2 A_1) \ (^1)
\end{aligned}
\right.
$$

ς') Ἐξισώσεις τῶν στιγμιαίων ἀξόνων ἑλικώσεως. Ὕπαρξις δύο ἀξόνων περιστροφῆς.

10. ***Παραμετρικοὶ καὶ τυχόντες ἄξονες ἑλικώσεως.***—Οἱ στιγμιαῖοι ἄξονες ἑλικώσεως τῶν ***παραμετρικῶν*** κινήσεων: u_2=σταθ. καὶ u_1=σταθ. ἔχουν ἀντιστοίχως τὰς ἐξισώσεις :

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{A_1 + q_1 z - r_1 y}{p_1} = \frac{B_1 + r_1 x - p_1 z}{q_1} = \frac{\Gamma_1 + p_1 y - q_1 x}{r_1}, \\
&\frac{A_2 + q_2 z - r_2 y}{p_2} = \frac{B_2 + r_2 x - p_2 z}{q_2} = \frac{\Gamma_2 + p_2 y - q_2 x}{r_2}.
\end{aligned}
\right.
$$

Ὁ δὲ στιγμ. ἄξων τῆς ***τυχούσης*** κινήσεως ($u_2 = \varrho(u_1)$) ἔχει τὰς ἐξισώσεις :

---

(1) Ἂν θεωρήσωμεν ***γενικώτερα*** μίαν κίνησιν ***πολυπαραμετρικὴν*** μὲ k παραμέτρους : $u_1, u_2, \ldots, u_k$ ἐντὸς ἑνὸς ***ὑπερχώρου*** n διαστάσεων, μεταξὺ τῶν παραμετρικῶν περιστροφῶν καὶ τῶν προβολῶν τῶν παραμετρικῶν ταχυτήτων τῆς ἀρχῆς ἐπὶ τῶν κινητῶν ἀξόνων εὑρίσκονται σχέσεις ὅμοιαι πρὸς τὰς (10), ἀλλὰ πολυπληθέστεραι. (Βλέπε : *N. Hatzidakis, «Displacements depending on one, two, three,... parameters in a space of n dimensions», American Journal of Mathematics, 1900).*

$$(11)' \quad \frac{A+Qz-Ry}{P}=\frac{B+Rx-Pz}{Q}=\frac{\Gamma+Py-Qx}{R}.$$

11. ***Ἄξονες περιστροφῆς***.—Μεταξὺ τῶν ἀπείρων ἑλικοειδῶν κινήσεων τοῦ M ἂς ἴδωμεν, ἂν ὑπάρχουν καὶ ἁπλαῖ ***περιστροφαί***· διὰ νὰ συμβαίνῃ τοῦτο, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ ***ὀλίσθησις*** νὰ εἶναι $=0$, δηλ. νὰ ἔχωμεν: $PA+QB+R\Gamma=0$, ἢ καί:

$$(12) \quad \sum(p_1du_1+p_2du_2)(A_1du_1+A_2du_2)=0\cdot$$

ἡ ἐξίσωσις αὐτή, β′ βαθμοῦ πρὸς τὸν λόγον $\frac{du_2}{du_1}\equiv k$, δίδει δύο τιμὰς τοῦ k: k_1, k_2· ὑπάρχουν δηλ. ἐν γένει δύο ἀπειροσταὶ κινήσεις τοῦ M, πραγματικαὶ ἢ φανταστικαί, ποὺ εἶναι ***ἁπλαῖ στιγμιαῖαι περιστροφαί***. Αἱ ἐξισώσεις τοῦ ἀντιστοίχου ἄξονος περιστροφῆς θὰ εἶναι δι' αὐτάς:

$$(13)\left\{\begin{aligned}&(A_1+A_2k_j)+(q_1+q_2k_j)z-(r_1+r_2k_j)y=0,\\&(B_1+B_2k_j)+(r_1+r_2k_j)x-(p_1+p_2k_j)z=0,\\&(\Gamma_1+\Gamma_2k_j)+(p_1+p_2k_j)y-(q_1+q_2k_j)x=0.\end{aligned}\right. \qquad (j=1,2).$$

ζ′) Θεώρημα τοῦ *Schönemann*.

12. ***Θεώρημα τοῦ Schönemann (1855).—Ἡ κάθετος τῆς ἐπιφανείας, ποὺ γράφει τὸ τυχὸν σημεῖον τοῦ κινουμένου στερεοῦ συστήματος, κόπτει καὶ τοὺς δύο ἄξονας τῶν δύο περιστροφικῶν κινήσεων.***

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ἡ κάθετος αὐτὴ θὰ εἶναι κάθετος πρὸς ***κάθε*** μετατόπισιν τοῦ σημείου, θὰ εἶναι κάθετος καὶ πρὸς τὰς μετατοπίσεις του κατὰ τὰς περιστροφάς· ἑπομένως θὰ κόπτῃ κατ' ἀνάγκην τοὺς ἄξονας τῶν περιστροφῶν αὐτῶν.

η′) Θεώρημα τοῦ *Ribaucour*.(1)

13. ***Περίπτωσις δύο πραγματικῶν ἀξόνων περιστροφῆς, ποὺ ἔχουν κοινὸν σημεῖον***.—Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ***ἡ ἐξίσωσις (12) καταντᾷ ταὐτότης***.

---

(1) Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences (Paris), Τόμ. LXX, σελ. 330.

Ἀπόδειξις. Τὸ σημεῖον $T(x_1, y_1, z_1)$ τῆς τομῆς τῶν δύο ἀξόνων περιστροφῆς θὰ μένῃ προφανῶς ἀκίνητον κατὰ τὰς περιστροφάς· καὶ ἂν ἐκλέξωμεν τὰς διευθύνσεις τῶν περιστροφικῶν κινήσεων ὡς παραμετρικάς, θὰ ἔχωμεν:

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{ll} A_1+q_1z_1-r_1y_1=0, & A_2+q_2z_1-r_2y_1=0, \\ B_1+r_1x_1-p_1z_1=0, & B_2+r_2x_1-p_2z_1=0, \\ \Gamma_1+p_1y_1-q_1x_1=0 \cdot & \Gamma_2+p_2y_1-q_2x_1=0 \cdot \end{array}\right\}$$

ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις δὲ αὐτὰς παράγονται εὐκολώτατα αἱ:

$$(14)' \quad \left\{\begin{array}{l} A+Qz_1-Ry_1=0, \\ B+Rx_1-Pz_1=0, \\ \Gamma+Py_1-Qx_1=0 \cdot \end{array}\right.$$

καὶ ἑπομένως καὶ ἡ (12).

14. ***Θεώρημα τοῦ*** *Ribaucour*.—Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ***δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῶν u_1 καὶ u_2*** ὑπάρχουν τιμαὶ τῶν x_1, y_1, z_1 ἐπαληθεύουσαι τὰς ἐξισώσεις (14). Τότε τὸ σημεῖον $T(x_1, y_1, z_1)$, θεωρούμενον ὡς σημεῖον τοῦ ***κινητοῦ*** συστήματος, θὰ γράψῃ μίαν ἐπιφάνειαν (ε), ***πού την ὑποθέτομεν ἀνήκουσαν εἰς τὸ κινητὸν σύστημα***· τὸ ἴδιον σημεῖον T, ἂν ἀναφερθῇ εἰς τὸ ***ἀκίνητον*** σύστημα, θὰ γράψῃ μίαν ***ἄλλην*** ἐπιφάνειαν (E)· ἂν δὲ τὰ u_1, u_2 αὐξήσουν ἀντιστοίχως κατὰ du_1, du_2, τὸ σημεῖον θὰ κινηθῇ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας (E) καὶ θὰ διαγράψῃ ἓν ἀπειροστὸν τόξον, τοῦ ὁποίου αἱ προβολαὶ ἐπὶ τῶν κινητῶν ἀξόνων θὰ εἶναι, ἕνεκα τῶν ἐξισώσεων (14):

$$dx_1, dy_1, dz_1 \cdot$$

ἀλλὰ dx_1, dy_1, dz_1, εἶναι καὶ αἱ προβολαὶ ἐπὶ τῶν κινητῶν ἀξόνων τοῦ ἀπειροστοῦ τόξου, ποὺ γράφει τὸ ἴδιον σημεῖον ἐπὶ τῆς κινητῆς ἐπιφανείας (ε). Ἀφοῦ λοιπὸν τὰ δύο αὐτὰ ἀπειροστὰ τόξα ἔχουν καὶ τὴν ἰδίαν διεύθυνσιν καὶ τὸ ἴδιον μῆκος, ***αἱ δύο ἐπιφάνειαι (ε) καὶ (E) ἐφάπτονται καὶ κυλίονται ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης,*** οὕτως, ὥστε τὰ δύο τόξα, ποὺ διαγράφονται ἐπ' αὐτῶν ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς των, ***ἔχουν πάντοτε τὴν ἰδίαν διεύθυνσιν καὶ τὸ ἴδιον μῆκος***. Αἱ δύο δηλ. ἐπιφάνειαι (ε) καὶ (E) ἀντιστοιχοῦν ***σημεῖον πρὸς σημεῖον*** καὶ αἱ ***ἀντίστοιχοι*** καμπύλαι των εἶναι ***ἰσομήκεις***. ***Εἶναι ἑπομένως ἡ μία ἐπιφάνεια κάμψις τῆς ἄλλης***.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΣΘΗΚΑΙ

1) ***Γενίκευσις τῶν τύπων τῶν Combescure—Darboux.***[1] — α′) Ἂν φέρωμεν ἀπὸ τὴν ἀκίνητον κοινὴν ἀρχὴν O μίαν τυχοῦσαν εὐθεῖαν OE μὲ **σχετικὰ** (πρὸς τοὺς στρεφομένους ἄξονας) συνημίτονα: a,b,c καὶ **ἀπόλυτα:** A,B,C, τὸ σημεῖον M τῆς OE, ὅπου $OM=1$, θὰ ἔχῃ σχετικὰς συντεταγμένας: a.b,c, καὶ ἀπολύτους A,B,C· ἂν δὲ ἐφαρμόσωμεν εἰς τὸ M τοὺς θεμελιώδεις τύπους: $v_x = Qz - Ry + x'$ κτλ., θὰ ἔχωμεν διὰ τὴν παραμετρικὴν κίνησιν $u_2=c_2$:

$$\Sigma A'_{u_1}\alpha_1 = q_1c - r_1b + a'_{u_1},\quad \Sigma A'_{u_1}\alpha_2 = r_1a - p_1c + b'_{u_1},$$
$$\Sigma A'_{u_1}\alpha_3 = p_1b - q_1a + c'_{u_1}.$$

καὶ ἐπομένως:

$$A'_{u_1} = \alpha_1\Pi_1 + \alpha_2\Sigma_1 + \alpha_3T_1,\quad B'_{u_1} = \beta_1\Pi_1 + \beta_2\Sigma_1 + \beta_3T_1,$$
$$C'_{u_1} = \gamma_1\Pi_1 + \gamma_2\Sigma_1 + \gamma_3T_1$$

ὅπου ἐγράψαμεν συντόμως:

$$\Pi_1 \equiv q_1c - r_1b + a'_{u_1},\quad \Sigma_1 \equiv r_1a - p_1c + b'_{u_1},\quad T_1 \equiv p_1b - q_1a + c'_{u_1}.$$

Ὁμοίως θὰ εὕρωμεν διὰ τὴν ἄλλην παραμετρικὴν κίνησιν $u_1=c_1$:

$$A'_{u_2} = \alpha_1\Pi_2 + \alpha_2\Sigma_2 + \alpha_3T_2,\quad B'_{u_2} = \beta_1\Pi_2 + \beta_2\Sigma_2 + \beta_3T_2,$$
$$C'_{u_2} = \gamma_1\Pi_2 + \gamma_2\Sigma_2 + \gamma_3T_2,$$

ὅπου πάλιν:

$$\Pi_2 \equiv q_2c - r_2b + a'_{u_2},\quad \Sigma_2 \equiv r_2a - p_2c + b'_{u_2},\quad T_2 \equiv p_2b - q_2a + c'_{u_2}.$$

Ἂν τώρα ἐφαρμόσωμεν καὶ πάλιν τὴν σχέσιν: $\dfrac{\partial A'_{u_1}}{\partial u_2} = \dfrac{\partial A'_{u_2}}{\partial u_1}$, εὑρίσκομεν, ἀφοῦ κατατάξωμεν τὴν ἐξίσωσιν:

---

(1) *N. Hatzidakis, Généralisation des formules de Combescure—Darboux* («Δελτίον Ἑλλην. Μαθημ. Ἑταιρείας», Τόμ. Β′, 1920, σελ. 16—18).

$$\alpha_1\left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial u_2}-\frac{\partial \Pi_2}{\partial u_1}-r_2\Sigma_1+r_1\Sigma_2+q_2T_1-q_1T_2\right)+$$
$$+\alpha_2\left(\frac{\partial \Sigma_1}{\partial u_2}-\frac{\partial \Sigma_2}{\partial u_1}-p_2T_1+p_1T_2+r_2\Pi_1-r_1\Pi_2\right)+$$
$$+\alpha_3\left(\frac{\partial T_1}{\partial u_2}-\frac{\partial T_2}{\partial u_1}-q_2\Pi_1+q_1\Pi_2+p_2\Sigma_1-p_1\Sigma_2\right)=0\cdot$$

ἢ συντόμως : $\alpha_1\Omega_1+\alpha_2\Omega_2+\alpha_3\Omega_3=0\cdot$

καὶ ἐπειδὴ προφανῶς θὰ ἔχωμεν καὶ ἄλλας δύο σχέσεις :

$$\beta_1\Omega_1+\beta_2\Omega_2+\beta_3\Omega_3=0, \qquad \gamma_1\Omega_1+\gamma_2\Omega_2+\gamma_3\Omega_3=0,$$

συνάγομεν ἀμέσως τὰς τρεῖς ἐξισώσεις :

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Pi_1}{\partial u_2}-\dfrac{\partial \Pi_2}{\partial u_1}=(r_2\Sigma_1-r_1\Sigma_2)-(q_2T_1-q_1T_2), \\ \dfrac{\partial \Sigma_1}{\partial u_2}-\dfrac{\partial \Sigma_2}{\partial u_1}=(p_2T_1-p_1T_2)-(r_2\Pi_1-r_1\Pi_2), \\ \dfrac{\partial T_1}{\partial u_2}-\dfrac{\partial T_2}{\partial u_1}=(q_2\Pi_1-q_1\Pi_2)-(p_2\Sigma_1-p_1\Sigma_2). \end{cases}$$

Οἱ τύποι αὐτοὶ ἀποτελοῦν γενίκευσιν τῶν τύπων τῶν Combescure—Darboux. Πραγματικῶς, ἂν ἡ εὐθεῖα ΟΕ συμπέσῃ μὲ τὸν ἄξονα Ox, θὰ εἶναι a=1, b=0, c=0, δηλ.

$$\Pi_1=0,\ \Sigma_1=r_1,\ T_1=-q_1\cdot\ \Pi_2=0,\ \Sigma_2=r_2,\ T_2=-q_2\cdot$$

ἑπομένως ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (15) ἡ μὲν α′ γίνεται ταὐτότης, αἱ δὲ δύο ἄλλαι γίνονται ἡ γ′ καὶ ἡ β′ ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις τῶν Combescure — Darboux· καὶ ἂν ἔπειτα ὑποθέσωμεν διαδοχικῶς a=0, b=1, c=0 καὶ a=0, b=0, c=1, εὑρίσκομεν ἀκόμη μόνον μίαν νέαν ἐξίσωσιν, τὴν α′ τῶν ἐξισώσεων τῶν Combescure—Darboux.

β′) Καθὼς αἱ ἐξισώσεις τῶν Combescure—Darboux ἰσχύουν ***γενικῶς*** καὶ διὰ δύο ***τυχόντα*** συστήματα ἀξόνων OXYZ καὶ O′xyz, ὁμοίως καὶ αἱ ἐξισώσεις (15) ἰσχύουν διὰ δύο τυχόντα συστήματα OXYZ, O′xyz· διότι συντεταγμέναι τοῦ σημείου M τῆς O′E θὰ εἶναι τότε, σχετικαὶ μὲν πάλιν τὰ a,b,c, ἀπόλυτοι ὅμως αἱ $A+X_0$, $B+Y_0$, $C+Z_0$· ἡ σχέσις ὅμως, ποὺ ἰσχύει τότε : $v_x=v_{ox}+qz-ry+x'$, μᾶς δίδει :

$$\Sigma(A'_{u_1}+X'_{ou_1})\alpha_1=(v_{ou_1})_x+qc-rb+a'_{u_1}\ \text{κτλ.}$$

καὶ ἐπειδή : $\Sigma X'_{ou_1}\cdot\alpha_1=(v_{ou})_x$ κτλ., εὑρίσκομεν πάλιν τὰς ἰδίας ἐξισώσεις :

$$\sum A'_{u_1}\alpha_1 = qc - rb + a'_{u_1} \text{ κτλ.}$$

2) ***Γενίκευσις τῶν τύπων τῶν Kirchhoff—Darboux***[1]. — Ἂν θεωρήσωμεν ἓν τυχὸν σημεῖον M τοῦ χώρου μὲ συντεταγμένας σχετικὰς x,y,z καὶ ἀπολύτους X,Y,Z, θὰ ἔχωμεν διὰ τὴν παραμετρικὴν κίνησιν $u_2 = c_2$:

$$(v_{u_1})_X = \sum \frac{dX}{dt}\alpha_1 = (v_{ou_1})_X + (q_1 z - r_1 y + x'_{u_1})u'_1 \text{ κτλ.· δηλ.}$$

$$\sum \frac{dX}{du_1}\alpha_1 = (v_{ou_1})_X \cdot \frac{1}{u'_1} + q_1 z - r_1 y + x'_{u_1} \text{ ἢ καὶ (ἐδ. 5):}$$

$$\sum \frac{dX}{du_1}\alpha_1 = A_1 + q_1 z - r_1 y + x'_{u_1} \text{· ὁμοίως δὲ καί :}$$

$$\sum \frac{dX}{du_1}\alpha_2 = B_1 + r_1 x - p_1 z + y'_{u_1},$$

$$\sum \frac{dX}{du_1}\alpha_3 = \Gamma_1 + p_1 y - q_1 x + z'_{u_1}.$$

ἑπομένως θὰ εἶναι :

$$\frac{dX}{du_1} = \alpha_1(A_1 + q_1 z - r_1 y + x'_{u_1}) + \alpha_2(B_1 + r_1 x - p_1 z + y'_{u_1}) + \\ + \alpha_3(\Gamma_1 + p_1 y - q_1 x + z'_{u_1}),$$

ἢ συντομώτερα : $\dfrac{dX}{du_1} = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 S_1 + \alpha_3 T_1$·

ἐπίσης δὲ καί :

$$\frac{dY}{du_1} = \beta_1 P_1 + \beta_2 S_1 + \beta_3 T_1, \quad \frac{dZ}{du_1} = \gamma_1 P_1 + \gamma_2 S_1 + \gamma_3 T_1.$$

Διὰ τὴν ἄλλην παραμετρικὴν κίνησιν $u_1 = c_1$, θὰ ἔχωμεν ὁμοίως :

$$\frac{dX}{du_2} = \alpha_1(A_2 + q_2 z - r_2 y + x'_{u_2}) + \alpha_2(B_2 + r_2 x - p_2 z + y'_{u_2}) + \\ + \alpha_3(\Gamma_2 + p_2 y - q_2 x + z'_{u_2}) \text{ κτλ.}$$

ἢ καί : $\dfrac{dX}{du_2} = \alpha_1 P_2 + \alpha_2 S_2 + \alpha_3 T_2,$

ὁμοίως δέ : $\dfrac{dY}{du_2} = \beta_1 P_2 + \beta_2 S_2 + \beta_3 T_2$ καὶ $\dfrac{dZ}{du_2} = \gamma_1 P_2 + \gamma_2 S_2 + \gamma_3 T_2.$

Ἂν τώρα ἐξισώσωμεν τὰς δύο τιμὰς τῆς $\dfrac{\partial^2 X}{\partial u_1 \partial u_2}$ κτλ., εὑρίσκομεν

(1) Τὴν γενίκευσιν αὐτὴν τὴν δημοσιεύω πρώτην φορὰν ἐδῶ.

ὕστερ' ἀπὸ ὀλίγας πράξεις :

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial P_1}{\partial u_2}-\dfrac{\partial P_2}{\partial u_1}=(q_1T_2-q_2T_1)-(r_1S_2-r_2S_1), \\ \dfrac{\partial S_1}{\partial u_2}-\dfrac{\partial S_2}{\partial u_1}=(r_1P_2-r_2P_1)-(p_1T_2-p_2T_1), \\ \dfrac{\partial T_1}{\partial u_2}-\dfrac{\partial T_2}{\partial u_1}=(p_1S_2-p_2S_1)-(q_1P_2-q_2P_1). \end{cases}$$

Οἱ τύποι αὐτοὶ εἶναι γενικώτεροι ἀπὸ τοὺς τῶν *Kirchhoff—Darboux*. Πραγματικῶς, ἂν ὡς σημεῖον Μ λάβωμεν τὴν κινητὴν ἀρχὴν Ο', θὰ εἶναι : $P_1=A_1$, $S_1=B_1$, $T_1=\Gamma_1$· $P_2=A_2$, $S_2=B_2$, $T_2=\Gamma_2$· τότε ὅμως **αἱ ἐξισώσεις (16) καταντοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν** *Kirchhoff—Darboux*.

3) Ὡς ***πόρισμα*** τοῦ θεωρήματος τοῦ *Ribaucour* ἀποδεικνύεται εὔκολα ἡ ἑξῆς πρότασις : ***Ὅταν ὑπάρχουν, εἰς κάθε θέσιν τοῦ κινητοῦ συστήματος, δύο πραγματικαὶ ἀπειροσταὶ κινήσεις, ποὺ εἶναι ἁπλαῖ περιστροφαὶ περὶ ἄξονας τεμνομένους εἰς ἓν σημεῖον Τ, κάθε ἄλλη ἀπειροστὴ κίνησις τοῦ συστήματος εἶναι καὶ αὐτὴ ἁπλῆ περιστροφὴ περὶ ἄξονα διὰ τῆς τομῆς Τ τῶν δύο προηγουμένων διερχόμενον.*** Τὸ σημεῖον τοῦτο Τ λέγεται τότε ***στιγμιαῖον κέντρον περιστροφῆς*** *(Darboux)*.

4) ***Ἂν θεωρήσωμεν πρῶτα μίαν ἀπειροστὴν μετατόπισιν μὲ ὡρισμένης διευθύνσεως ἄξονα περιστροφῆς καὶ ἔπειτα τὴν μετατόπισιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ προηγουμένη διεύθυνσις γίνεται ἡ τῆς τροχιᾶς τοῦ στιγμιαίου κέντρου, ὁ νέος ἄξων περιστροφῆς θὰ ἔχη τὴν διεύθυνσιν τῆς τροχιᾶς τοῦ στιγμιαίου κέντρου κατὰ τὴν πρώτην μετατόπισιν.*** Θεωρία δηλ. ἀνάλογος πρὸς τὴν τῶν ***συζυγῶν*** διευθύνσεων καὶ τῶν ***ἀσυμπτωτικῶν*** γραμμῶν. (*Darboux*).

5) Ἡ ὕπαρξις δύο ἐπιφανειῶν (ε) καὶ (Ε), ποὺ εἶναι ***κάμψεις*** ἡ μία τῆς ἄλλης, ὁρίζει μίαν κίνησιν ***διπαραμετρικὴν*** μὲ τὰς ἰδιότητας, ποὺ ἀνεφέραμεν εἰς τὴν προηγουμένην θεωρίαν. *(Darboux)*.

6) Ὡς ***παράδειγμα*** τῆς ἀσκήσεως 3ης ἂς θεωρήσωμεν ὅλας τὰς ∞^2 ἐπιφανείας (ε) τὰς ***συμμετρικὰς*** πρὸς τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα μιᾶς δοθείσης ἐπιφανείας (Ε)· τότε εἶναι εὔκολον νὰ δειχθῇ, ὅτι : ***Αἱ ἐπιφάνειαι, ποὺ διαγράφουν τὰ διάφορα σημεῖα τοῦ κινητοῦ συστήματος, εἶναι ὁμοιόθετοι πρὸς τὰς ποδικὰς τῶν διαφόρων σημείων τοῦ χώρου ὡς πρὸς τὴν (Ε), μὲ λόγον ὁμοιοθεσίας τὸν 2.*** *(Darboux)*.

ΚΙΝΗΤΙΚΗΣ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
ΤΟΜΟΣ Β΄.

ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

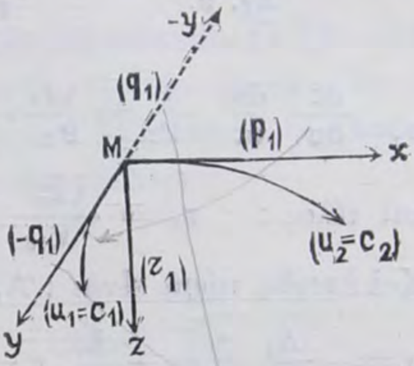
15. ***Σύμπτωσις τοῦ ἄξονος Ο΄z μὲ τὴν κάθετον τῆς ἐπιφανείας τοῦ Ο΄.***—Ἡ κινητὴ ἀρχὴ Ο΄ ἢ Μ γράφει κατὰ τὴν διπαραμετρικὴν κίνησιν μίαν ἐπιφάνειαν, πού την παριστῶμεν συντόμως ὡς ἐπιφάνειαν (Μ) («ἐπιφάνειαν τῆς ἀρχῆς»). Πρὸς ἁπλοποίησιν λοιπὸν τῶν προηγουμένων τύπων ἐκλέγομεν ὡς κινητὸν ἄξονα τῶν z τὴν ***κάθετον*** τῆς ἐπιφανείας (Μ)· (οἱ ἄξονες Mx, My κεῖνται τότε ἐπὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς ἐπιφανείας). Θὰ εἶναι τότε: $\Gamma_1=0$, $\Gamma_2=0$, διότι ἡ ταχύτης τοῦ Μ, καθ' ***ὅλας*** τὰς δυνατάς του κινήσεις, θὰ εἶναι προφανῶς κάθετος ἐπὶ τὴν κάθετον τῆς ἐπιφανείας. Ἑπομένως ἀπὸ τὰς 6 θεμελιώδεις κινητικὰς ἐξισώσεις (10) αἱ μὲν 3 πρῶται θὰ μείνουν αἱ ἴδιαι, αἱ 3 ἄλλαι ὅμως ἁπλοποιοῦνται καὶ ἔχομεν οὕτω, διὰ τοὺς νέους αὐτοὺς κινητοὺς ἄξονας, τὰς ἑξῆς ***6 ἐξισώσεις μεταξὺ τῶν 10 κινητικῶν ποσῶν:*** p_1, q_1, r_1· $p_2\, q_2\, r_2$ καὶ A_1, B_1· A_2, B_2:

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial p_1}{\partial u_2}-\frac{\partial p_2}{\partial u_1}=q_1 r_2-q_2 r_1, && \frac{\partial A_1}{\partial u_2}-\frac{\partial A_2}{\partial u_1}=B_1 r_2-B_2 r_1,\\ &\frac{\partial q_1}{\partial u_2}-\frac{\partial q_2}{\partial u_1}=r_1 p_2-r_2 p_1, && \frac{\partial B_1}{\partial u_2}-\frac{\partial B_2}{\partial u_1}=A_2 r_1-A_1 r_2,\\ &\frac{\partial r_1}{\partial u_2}-\frac{\partial r_2}{\partial u_1}=p_1 q_2-p_2 q_1, && A_2 q_1-A_1 q_2=B_2 p_1-B_1 p_2. \end{aligned}\right.$$

Οἱ τύποι αὐτοὶ εἶναι θεμελιώδεις εἰς τὴν ***κινητικὴν*** θεωρίαν τῶν ἐπιφανειῶν καὶ ἀντιστοιχοῦν πρὸς τοὺς 3 τύπους τοῦ *Gauss* καὶ τῶν *Mainardi—Codazzi* μεταξὺ τῶν 6 ποσῶν E,F,G,L,M,N εἰς τὴν

διαφορικὴν θεωρίαν. (Βλέπε : N. Χατζιδάκη, ***Θεωρ. Ἐπιφ. σελ. 55—58***).

16. ***Πρώτη γεωμετρικὴ μορφὴ τῶν ἐξισώσεων (17) εἰς ὀρθογώνιον παραμετρικὸν δίκτυον.***—Αἱ περιστροφαὶ p_1, q_1, r_1· p_2, q_2, r_2 εἰμποροῦν νὰ λάβουν (καθὼς αἱ περιστροφαὶ p, q, r εἰς τὴν ***Κινητικὴν Θεωρίαν τῶν Καμπύλων***) καὶ ***γεωμετρικὴν*** σημασίαν, ποὺ εἶναι ***ἰδιαιτέρως ἁπλῆ***, ὅταν τὸ παραμετρικὸν δίκτυον : $u_1 = c_1$, $u_2 = c_2$ εἶναι ***ὀρθογώνιον***. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἐκλέγομεν ὡς ἄξονα τῶν x τὴν ἐφαπτομένην τῆς γραμμῆς $u_2 = c_2$ καὶ τῶν y τὴν τῆς $u_1 = c_1$. Τότε εἰς τὴν παραμετρικὴν κίνησιν $u_2 = c_2$ παρατηροῦμεν, ὅτι θὰ ἔχωμεν διὰ τὰς περιστροφὰς τοὺς τύπους τῆς σελίδος 31 τοῦ Α΄ τόμου, μὲ τὰς ἑξῆς ὅμως διαφορὰς (σχ. 1) : οἱ ἄξονες My καὶ Mz ἔχουν τώρα ἀνταλλαχθῆ, ὥστε καὶ αἱ περιστροφαὶ q καὶ r πρέπει καὶ αὗται νὰ τραποῦν ἀντιστοίχως εἰς $r_1 u'_1$ καὶ $q_1 u'_1$· ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀνταλλαγὴ αὐτὴ μεταβάλλει τὴν ***τάξιν*** τῆς στερεᾶς γωνίας Mxyz, πρέπει νὰ ἀλλάξῃ καὶ ἡ φορὰ ἑνὸς ἄξονος, δηλ. τὸ σημεῖον μιᾶς περιστροφῆς· καὶ ἐπειδὴ ὑποθέτομεν ὡρισμένας τὰς φορὰς τῶν ἀξόνων Mx καὶ Mz, δ' ἀλλάξωμεν τὴν φορὰν τοῦ ἄξ. y, δηλ. θὰ τρέψωμεν τὸ q_1 εἰς $-q_1$. ὕστερ' ἀπὸ τὴν ἀλλαγὴν αὐτὴν τῶν p, q, r εἰς $p_1 u'_1$, $r_1 u'_1$, $-q_1 u'_1$, εὑρίσκομεν :



Σχ. 1.

$$p_1 \frac{du_1}{dt} = -\frac{v_{01}}{R_1} + \frac{d\vartheta_1}{dt} = v_{01}\left[-\frac{1}{R_1} + \frac{d\vartheta_1}{ds_1}\right] = -\frac{v_{01}}{R_{1g}} \quad \text{δηλ.,}$$

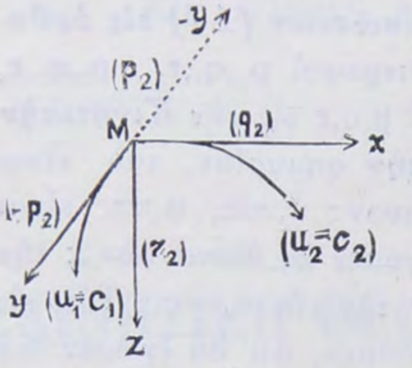
$$p_1 = -\frac{dt}{du_1}\cdot\frac{ds_1}{dt}\cdot\frac{1}{R_{1g}} = -\frac{ds_1}{du_1}\cdot\frac{1}{R_{1g}} = -\frac{\sqrt{E}}{R_{1g}}.$$

ὁμοίως δέ : $-q_1 \frac{du_1}{dt} = \frac{v_{01}}{P_{1n}}$, ἤ: $q_1 = -\frac{dt}{du_1}\cdot\frac{ds_1}{dt}\cdot\frac{1}{P_{1n}} = -\frac{\sqrt{E}}{P_{1n}}$.

καὶ ἐπίσης : $r_1 \frac{du_1}{dt} = \frac{v_{01}}{P_{1g}}$, ἢ $r_1 = \frac{\sqrt{E}}{P_{1g}}$.

(ὅπου $\frac{1}{R_{1g}}$, $\frac{1}{P_{1n}}$, $\frac{1}{P_{1g}}$ εἶναι, καθὼς πάντοτε, ***ἡ γεωδαισιακὴ στρέψις, ἡ κάθετος καὶ ἡ γαιωδαισιακὴ καμπυλότης*** τῆς γραμμῆς $u_2 = c_2$).

Ἂν τώρα ἔλθωμεν εἰς τὴν ἄλλην παραμετρικὴν κίνησιν $u_1 = c_1$, παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς αὐτὴν θὰ ἔχωμεν τὰς ἑξῆς διαφορὰς ἀπὸ τὴν προηγουμένην (σχ. 2): ἐφαπτομένη τῆς γραμμῆς $u_1 = c_1$ εἶναι τώρα ὁ ἄξων y· ἐπομένως θ' ἀνταλλαχθοῦν αἱ περιστροφαὶ p_1 καὶ q_1 καὶ θὰ γίνουν ἀντιστοίχως q_2 καὶ p_2, καὶ διὰ νὰ μείνῃ πάλιν ἡ τάξις τῆς στερεᾶς γωνίας ἡ ἰδία μὲ τὴν προηγουμένην, πρέπει νὰ τρέψωμεν τὸ p_2 εἰς $-p_2$· ἐπομένως, μετὰ τὴν ἀλλαγὴν αὐτὴν τῶν p_1, r_1, $-q_1$ εἰς q_2, r_2, p_2, θὰ ἔχωμεν τώρα:



Σχ. 2.

$$p_2 = \frac{dt}{du_2} \cdot \frac{ds_2}{dt} \cdot \frac{1}{P_{2n}} = \frac{\sqrt{G}}{P_{2n}} \cdot \text{ ἐπίσης δέ : } q_2 = -\frac{dt}{du_2} \cdot \frac{ds_2}{dt} \cdot \frac{1}{R_{2g}} = \frac{-\sqrt{G}}{R_{2g}}.$$

καὶ τέλος: $\quad r_2 = \dfrac{\sqrt{G}}{P_{2g}}.$

Καὶ ἐπειδὴ τώρα εἶναι: $A_1 = \sqrt{E}$, $A_2 = 0$, $B_1 = 0$, $B_2 = \sqrt{G}$, θὰ ἔχωμεν:

$$p_1 = -\frac{A_1}{R_{1g}},\ q_1 = -\frac{A_1}{P_{1n}},\ r_1 = \frac{A_1}{P_{1g}} \text{ καί: } p_2 = \frac{B_2}{P_{2n}},\ q_2 = -\frac{B_2}{R_{2g}},\ r_2 = \frac{B_2}{P_{2g}}. \quad (18)$$

Ἂν δὲ τέλος θέσωμεν τὰς τιμὰς αὐτὰς τῶν περιστροφῶν εἰς τὰς ἐξισώσεις (17), εὑρίσκομεν τοὺς ἑξῆς τύπους, ποὺ περιέχουν ***γεωμετρικὰ*** στοιχεῖα:

$$(19)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u_2}\left(-\frac{A_1}{R_{1g}}\right) - \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{B_2}{P_{2n}}\right) = A_1 B_2\left(-\frac{1}{P_{1n}} \cdot \frac{1}{P_{2g}} + \frac{1}{R_{2g}} \cdot \frac{1}{P_{1g}}\right),\\
&\frac{\partial}{\partial u_2}\left(-\frac{A_1}{P_{1n}}\right) - \frac{\partial}{\partial u_1}\left(-\frac{B_2}{R_{2g}}\right) = A_1 B_2\left(\frac{1}{P_{1g}} \cdot \frac{1}{P_{2n}} + \frac{1}{P_{2g}} \cdot \frac{1}{R_{1g}}\right),\\
&\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{A_1}{P}\right) - \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{B_2}{P_{2g}}\right) = A_1 B_2\left(\frac{1}{R_{1g}} \cdot \frac{1}{R_{2g}} + \frac{1}{P_{2n}} \cdot \frac{1}{P_{1n}}\right),\\
&\frac{\partial A_1}{\partial u_2} = -\frac{A_1 B_2}{P_{1g}},\\
&\frac{\partial B_2}{\partial u_1} = \frac{A_1 B_2}{P_{2g}},\\
&\frac{1}{R_{1g}} = \frac{-1}{R_{2g}}.\ {}^{(1)}
\end{aligned}\right.$$

---

(1) Ἀπὸ τοὺς τελευταίους αὐτοὺς τρεῖς τύπους οἱ μὲν δύο πρῶτοι παράγονται ἀμέσως ἀπὸ τὸν τύπον τοῦ *Minding* (*Θεωρ. Ἐπιφ. Ν. Χατζιδάκη*, σελ.

17. ***Μερικὴ περίπτωσις***.—Ἂν ἰδιαιτέρως λάβωμεν ὡς παραμετρικὸν δίκτυον τὸ δίκτυον τῶν γραμμῶν καμπυλότητος, θὰ εἶναι ἀκόμη καὶ $\frac{1}{R_{1g}}=0$, $\frac{1}{R_{2g}}=0$ καὶ οἱ τύποι (19) γίνονται :

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{B_2}{P_{2n}}\right)=A_1B_2\cdot\frac{1}{P_{1n}}\cdot\frac{1}{P_{2g}}, & \frac{\partial A_1}{\partial u_2}=-\frac{A_1B_2}{P_{1g}}, \\ \frac{\partial}{\partial u_2}\left(-\frac{A_1}{P_{1n}}\right)=A_1B_2\cdot\frac{1}{P_{1g}}\cdot\frac{1}{P_{2n}}, & \frac{\partial B_2}{\partial u_1}=\frac{A_1B_2}{P_{2g}}, \\ \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{A_1}{P_{1g}}\right)-\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{B_2}{P_{2g}}\right)=A_1B_2\cdot\frac{1}{P_{2n}}\cdot\frac{1}{P_{1n}}, & 0=0. \end{array}\right.$$

18. ***Δευτέρα γεωμετρικὴ μορφὴ τῶν ἐξισώσεων (17)***.—Αἱ ἐξισώσεις (19) λαμβάνουν καὶ ἄλλην μορφήν, εἰς τὴν ὁποίαν δὲν εἰσέρχονται μὲν τὰ A_1, B_2, παρουσιάζεται ὅμως καὶ ἕνας νέος ὅρος. Τοῦτο γίνεται ὡς ἑξῆς. Ἐκτελοῦμεν πρῶτα τὰς παραγωγίσεις :

$$\frac{\partial}{\partial u_2}\left(-\frac{A_1}{R_{1g}}\right)=-A_1\frac{\left(\partial\frac{1}{R_{1g}}\right)}{\partial u_2}-\frac{1}{R_{1g}}\cdot\frac{\partial A_1}{\partial u_2}\ \text{κτλ.}$$

ἔπειτα γράφομεν ἀντὶ $\frac{\partial}{\partial u_1}$: $\frac{\partial}{\partial s_1}\cdot\frac{ds_1}{du_1}=A_1\frac{\partial}{\partial s_1}$· καὶ ἀντὶ $\frac{\partial}{\partial u_2}$ ὁμοίως : $\frac{\partial}{\partial s_2}\cdot\frac{ds_2}{du_2}=B_2\frac{\partial}{\partial s_2}$· τέλος λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν μας καὶ τοὺς 3 δευτέρους τύπους ἀπὸ τοὺς (19)· ἐξαλείφεται τότε ὁ κοινὸς παράγων ὅλων τῶν ὅρων A_1B_2 καὶ παράγονται αἱ ἑξῆς ἐξισώσεις (ἂν πρὸς συντόμευσιν θέσωμεν :

$$\frac{1}{P_{1n}}\equiv N_1,\ \frac{1}{P_{2n}}\equiv N_2,\ \frac{1}{P_{1g}}\equiv\Gamma_1,\ \frac{1}{P_{2g}}\equiv\Gamma_2,$$

$$\frac{1}{R_{1g}}\equiv\Sigma_1,\quad \frac{1}{R_{2g}}\equiv\Sigma_2=-\Sigma_1):$$

---

64), ἂν θέσωμεν διὰ τὸν α′ : $F=0$, $u'_2=0$, $u''_2=0$· διὰ τὸν β′ : $F=0$, $u'_1=0$, $u''_1=0$. ὁ δὲ γ′ εἶναι ἄμεσος συνέπεια τοῦ τύπου τοῦ *Bonnet* (***Θεωρ. Ἐπιφ. Ν. Χατζιδάκη***, σελ. 72).

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial N_2}{\partial s_1}+\dfrac{\partial \Sigma_1}{\partial s_2}-2\Sigma_1\Gamma_1=(N_1\ \ N_2)\Gamma_2, \\[2mm] \dfrac{\partial \Sigma_2}{\partial s_1}-\dfrac{\partial N_1}{\partial s_2}+2\Sigma_2\Gamma_2=(N_2-N_1)\Gamma_1, \\[2mm] \dfrac{\partial \Gamma_2}{\partial s_1}-\dfrac{\partial \Gamma_1}{\partial s_2}+\Gamma_1^2+\Gamma_2^2=\Sigma_1^2-N_1N_2. \end{cases}$$

(Πρβλ. *Cesàro, Geometria Intrinseca*, σελ. 158 καὶ ***Θεωρ. Ἐπιφ. Ν. Χ.***, σ. 95, τύποι 42-4).

19. ***Μερικὴ περίπτωσις.*** — Ἂν λάβωμεν πάλιν τὸ δίκτυον τῶν γραμμῶν καμπυλότητος ὡς παραμετρικόν, οἱ τύποι (21) ἁπλοποιοῦνται εἰς τοὺς ἑξῆς:

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial N_2}{\partial s_1}=(N_1-N_2)\Gamma_2, \\[2mm] \dfrac{\partial N_1}{\partial s_2}=(N_1-N_2)\Gamma_1, \\[2mm] \dfrac{\partial \Gamma_2}{\partial s_1}-\dfrac{\partial \Gamma_1}{\partial s_2}+\Gamma_1^2+\Gamma_2^2=-N_1N_2. \end{cases}$$

Σημείωσις. — Ἐπειδὴ οἱ τύποι (17) εἶναι ***γενικώτεροι*** καὶ συγχρόνως ***ἁπλούστεροι ὡς πρὸς τὴν μορφὴν*** ἀπὸ τοὺς (19) καὶ τοὺς (21), θὰ γράφωμεν συνηθέστερα εἰς τὰ ἑπόμενα, ***ἀκόμη καὶ ὅταν τὸ παραμετρικὸν δίκτυον εἶναι ὀρθογώνιον***, τοὺς τύπους (17) καὶ τοὺς ἀπὸ αὐτοὺς παραγομένους· θὰ ἔχωμεν ὅμως πάντοτε ὑπ' ὄψιν μας τότε τὰς τιμὰς (18) τῶν περιστροφῶν. Καὶ ***γενικῶς*** θὰ γράφωμεν συνήθως εἰς τοὺς τύπους μας τὰς περιστροφὰς $p_1, q_1, \mathbf{r}_1$; $p_2, q_2, \mathbf{r}_2$ ἀντὶ τῶν τιμῶν των (18).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΣΘΗΚΑΙ

1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ γεωμετρικὴ μορφὴ τῶν τύπων (17), ὅταν ὡς παραμετρικὸν δίκτυον λάβωμεν τὸ δίκτυον τῶν ***ἀσυμπτωτικῶν*** γραμμῶν.

2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ γεωμετρικὴ μορφὴ τῶν ἰδίων τύπων, ὅταν γενικῶς τὸ παραμετρικὸν δίκτυον εἶναι ***τυχὸν (πλαγιογώνιον).***

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΤΥΠΟΙ ΤΗΣ ΤΥΧΟΥΣΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΗΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

α΄) **Τύποι τῶν προβολῶν τῶν ταχυτήτων (εἰς ὀρθογ. δίκτυον).**

20. ***Προβολαὶ τῆς ταχύτητος.*** —Οἱ τύποι (8) (ἐδ. 7):

$$v_x = v_{0x} + Qz - Ry + x', \quad v_y = v_{0y} + Rx - Pz + y',$$
$$v_z = v_{0z} + Py - Qx + z',$$

πού μας δίδουν τὰς προβολὰς ἐπὶ τῶν κινητῶν ἀξόνων τῆς ταχύτητος τοῦ τυχόντος σημείου, εἰμποροῦν τώρα, ποὺ $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$, νὰ γραφοῦν καὶ ὡς ἑξῆς:

$$(\alpha)\left\{\begin{array}{l} v_x = (A_1u'_1 + A_2u'_2) + (q_1u'_1 + q_2u'_2)z - (r_1u'_1 + r_2u'_2)y + x', \\ v_y = (B_1u'_1 + B_2u'_2) + (r_1u'_1 + r_2u'_2)x - (p_1u'_1 + p_2u'_2)z + y', \\ v_z = \qquad (p_1u'_1 + p_2u'_2)y - (q_1u'_1 + q_2u'_2)x + z'. \end{array}\right.$$

Ἂν ὅμως τὸ παραμετρικὸν δίκτυον τὸ ὑποθέσωμεν ***ὀρθογώνιον***, εὑρήκαμεν (ἐδ. 16) διὰ τὰς περιστροφὰς γεωμετρικὰς τιμάς, εἶναι δὲ καί: $A_2 = 0$, $B_1 = 0$ (ἐδ. 16)· ἂν λοιπὸν θέσωμεν εἰς τοὺς τύπους (α) τὰς τιμὰς αὐτὰς τῶν περιστροφῶν, εὑρίσκομεν τοὺς ἑξῆς τύπους:

$$v_x = A_1u'_1 - \left(\frac{A_1}{P_{1n}}u'_1 + \frac{B_2}{R_{2g}}u'_2\right)z - \left(\frac{A_1}{P_{1g}}u'_1 + \frac{B_2}{P_{2g}}u'_2\right)y + x' \text{ κτλ.}$$

ἤ, μετὰ τὴν κατάταξιν:

$v_{01} = A_1u'_1 + A_2u'_2$
$v_{02} = B_1u'_1 + B_2u'_2$

$$(23)\left\{\begin{array}{l} v_x = v_{01}\left[1 - \dfrac{z}{P_{1n}} - \dfrac{y}{P_{1g}}\right] - v_{02}\left[\dfrac{z}{R_{2g}} + \dfrac{y}{P_{2g}}\right] + x', \\ v_y = v_{01}\left[\dfrac{x}{P_{1g}} + \dfrac{z}{R_{1g}}\right] + v_{02}\left[1 + \dfrac{x}{P_{2g}} - \dfrac{z}{P_{2n}}\right] + y', \\ v_z = v_{01}\left[-\dfrac{y}{R_{1g}} + \dfrac{x}{P_{1n}}\right] + v_{02}\left[\dfrac{y}{P_{2n}} + \dfrac{x}{R_{2g}}\right] + z'. \end{array}\right.$$

(ὅπου : $v_{01} \equiv A_1 u'_1$, $v_{02} \equiv B_2 u'_2$ καί : $x' = x_{u_1} u'_1 + x_{u_2} u'_2$ κτλ.)
ἢ καί, μὲ τὴν συντομωτέραν γραφὴν τοῦ *Cesàro* :

$$(23)' \quad \begin{cases} v_x = v_{01}[1 - N_1 z - \Gamma_1 y] - v_{02}[\Sigma_2 z + \Gamma_2 y] + x', \\ v_y = v_{01}[\Gamma_1 x + \Sigma_1 z] + v_{02}[1 + \Gamma_2 x - N_2 z] + y', \\ v_z = v_{01}[-\Sigma_1 y + N_1 x] + v_{02}[N_2 y + \Sigma_2 x] + z'.\text{(1)} \end{cases}$$

Οἱ τύποι αὐτοὶ (23) ἀποτελοῦν προφανῶς γενίκευσιν τῶν τύπων τοῦ Darboux διὰ μίαν καμπύλην τοῦ χώρου (Τόμ. Α΄, σελ. 28, τύποι (25))· ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ ὑποτεθῇ, ὅτι ἡ ἐπιφανειακὴ καμπύλη εἶναι ***ἀσυμπτωτικὴ*** γραμμὴ τῆς ἐπιφανείας (ποὺ εἰμποροῦμεν νά την ὑποθέσωμεν ***κοιλόκυρτον***) καὶ ὅτι συμπίπτει μὲ μίαν παραμετρικὴν γραμμήν : $u_2 = c_2$· διότι τότε θὰ εἶναι : $u'_2 = 0$ (δηλ. $v_{02} = 0$) καὶ $\frac{1}{P_{1n}} = 0$, $\frac{1}{P_{1g}} \equiv \frac{1}{P_1}$, $\frac{1}{R_{1g}} \equiv \frac{1}{R_1}$ καὶ ἑπομένως οἱ τύποι (23) καταντοῦν οἱ τύποι τοῦ Darboux, ἂν λάβωμεν καὶ $v_{01} = 1$, δηλ. $s_1 = t$.

Ἂν δὲ ἡ καμπύλη εἶναι πάλιν παραμετρική : $u_2 = c_2$ καὶ συγχρόνως ***γεωδαισιακὴ*** τῆς ἐπιφανείας, οἱ τύποι (23) καταντοῦν εἰς τοὺς ἑξῆς (ὅπου πάλιν λαμβάνομεν $v_{01} = 1$) :

$$(24) \quad v_x = 1 - \frac{z}{P_1} + x_{u_1} u'_1, \quad v_y = \frac{z}{R_1} + y_{u_1} u'_1,$$
$$v_z = -\frac{y}{R_1} + \frac{x}{P_1} + z_{u_1} u'_1.$$

Καὶ τέλος, ἂν εἶναι ***γραμμὴ καμπυλότητος*** καὶ παραμετρικὴ ($u_2 = c_2$) θὰ ἔχωμεν τοὺς τύπους (ὅπου πάλιν : $v_{01} = 1$) :

$$(25) \quad v_x = 1 - \frac{z}{P_{1n}} - \frac{y}{P_{1g}} + x_{u_1} u'_1, \quad v_y = \frac{x}{P_{1g}} + y_{u_1} u'_1, \quad v_z = \frac{x}{P_{1n}} + z_{u_1} u'_1.$$

---

(1) Οἱ τύποι (23) μὲ τὴν *γεωμετρικὴν* μορφὴν πρώτην φορὰν ἀναγράφονται ἐδῶ. Δὲν εὑρίσκονται οὔτε εἰς τοῦ *Darboux* οὔτε εἰς τοῦ *Cesàro* τὸ βιβλίον.

Παρατηροῦμεν ἀκόμη, ὅτι γενικῶς διὰ τὰς ταχύτητας τῶν ***παραμετρικῶν*** γραμμῶν οἱ τύποι (23) μᾶς δίδουν :

α΄) διὰ τὰς γραμμὰς $u_2 = c_2$:

$$(26)\quad \begin{cases} v_x = v_{01}\left[1 - \dfrac{z}{P_{1n}} - \dfrac{y}{P_{1g}}\right] + x_{u_1} u'_1, \\ v_y = v_{01}\left[\dfrac{x}{P_{1g}} + \dfrac{z}{R_{1g}}\right] + y_{u_1} u'_1, \\ v_z = v_{01}\left[-\dfrac{y}{R_{1g}} + \dfrac{x}{P_{1n}}\right] + z_{u_1} u'_1. \end{cases}$$

β΄) διὰ τὰς γραμμὰς $u_1 = c_1$:

$$(27)\quad \begin{cases} v_x = -v_{02}\left[\dfrac{z}{R_{2g}} + \dfrac{y}{P_{2g}}\right] + x_{u_2} u'_2, \\ v_y = v_{02}\left[1 + \dfrac{x}{P_{2g}} - \dfrac{z}{P_{2n}}\right] + y_{u_2} u'_2, \\ v_z = v_{02}\left[\dfrac{y}{P_{2n}} + \dfrac{x}{R_{2g}}\right] + z_{u_2} u'_2. \end{cases}$$

β΄) Στιγμιαῖοι ἄξονες ἑλικώσεως (εἰς ὀρθογώνιον δίκτυον).

21. ***Ἐξισώσεις τῶν παραμετρικῶν ἀξόνων ἑλικώσεως.*** — Αὐταὶ εὑρίσκονται, δι᾿ ὀρθογώνιον δίκτυον, ἀπὸ τοὺς τύπους (11), ἂν θέσωμεν : $A_2 = 0$, $B_1 = 0$ καὶ ἀντὶ τῶν $p_1, p_2, \ldots$ τὰς γεωμετρικὰς τιμάς των (ἐδ. 16)· εἶναι λοιπὸν αἱ ἑξῆς :

$$(28)\quad \begin{cases} \dfrac{1 - \dfrac{z}{P_{1n}} - \dfrac{y}{P_{1g}}}{-\dfrac{1}{R_{1g}}} = \dfrac{\dfrac{x}{P_{1g}} + \dfrac{z}{R_{1g}}}{-\dfrac{1}{P_{1n}}} = \dfrac{-\dfrac{y}{R_{1g}} + \dfrac{x}{P_{1n}}}{\dfrac{1}{P_{1g}}}. \\[2ex] \dfrac{-\dfrac{z}{R_{2g}} - \dfrac{y}{P_{2g}}}{\dfrac{1}{P_{2n}}} = \dfrac{1 + \dfrac{x}{P_{2g}} - \dfrac{z}{P_{2n}}}{-\dfrac{1}{R_{2g}}} = \dfrac{\dfrac{y}{P_{2n}} + \dfrac{x}{R_{2g}}}{\dfrac{1}{P_{2g}}}. \end{cases}$$

ἢ καί :
$$\begin{cases} \dfrac{1}{P_{1g}} = y\left(\dfrac{1}{P_{1g}^2}+\dfrac{1}{R_{1g}^2}\right)+\dfrac{1}{P_{1n}}\left(\dfrac{z}{P_{1g}}-\dfrac{x}{R_{1g}}\right), \\ \dfrac{x^2}{P_1^2} = \dfrac{1}{R_{1g}}\left(\dfrac{y}{P_{1n}}-\dfrac{z}{P_{1g}}\right). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{P_{2g}} = -x\left(\dfrac{1}{P_{2g}^2}+\dfrac{1}{R_{2g}^2}\right)+\dfrac{1}{P_{2n}}\left(\dfrac{z}{P_{2g}}-\dfrac{y}{R_{2g}}\right), \\ \dfrac{y}{P_2^2} = -\dfrac{1}{R_{2g}}\left(\dfrac{z}{P_{2g}}+\dfrac{x}{P_{2n}}\right).\text{(1)} \end{cases}$$

22. ***Ἐξισώσεις τοῦ τυχόντος ἄξονος ἑλικώσεως.*** — Αὗται προφανῶς εἶναι :

$$(29)\quad \frac{v_{01}\left(1-\dfrac{z}{P_{1n}}-\dfrac{y}{P_{1g}}\right)-v_{02}\left(\dfrac{z}{R_{2g}}+\dfrac{y}{P_{2g}}\right)}{-\dfrac{v_{01}}{R_{1g}}+\dfrac{v_{02}}{P_{2n}}} =$$

$$= \frac{v_{01}\left(\dfrac{x}{P_{1g}}+\dfrac{z}{R_{1g}}\right)+v_{02}\left(1+\dfrac{x}{P_{2g}}-\dfrac{z}{P_{2n}}\right)}{-\left(\dfrac{v_{01}}{P_{1n}}+\dfrac{v_{02}}{R_{2g}}\right)} =$$

$$= \frac{v_{01}\left(-\dfrac{y}{R_{1g}}+\dfrac{x}{P_{1n}}\right)+v_{02}\left(\dfrac{y}{P_{2n}}+\dfrac{x}{R_{2g}}\right)}{\dfrac{v_{01}}{P_{1g}}+\dfrac{v_{02}}{P_{2g}}}\text{(1)}.$$

γ') Γραμμικὸν στοιχεῖον τῆς ἐπιφανείας καὶ τῆς σφαιρικῆς ἀπεικονίσεώς της.

23. ***Γραμμικὸν στοιχεῖον τῆς ἐπιφανείας.***—Ἂν αὐτὸ ὀνομασθῇ ds καὶ ω ἡ γωνία του πρὸς τὸν κινητὸν ἄξονα τῶν x, θὰ ἔχωμεν :

(30) $ds\,\text{συν}\omega = A_1 du_1 + A_2 du_2$ καὶ : $ds\,\text{ημ}\omega = B_1 du_1 + B_2 du_2$· ἑπομένως :

---

(1) Καὶ οἱ τύποι αὐτοὶ πρώτην φορὰν ἀναγράφονται ἐδῶ.

(31) $ds^2 = (A_1^2 + B_1^2)du_1^2 + 2(A_1A_2 + B_1B_2)du_1du_2 + (A_2^2 + B_2^2)du_2^2.$

Σημείωσις α΄. Ἂν παραβάλωμεν τὴν μορφὴν αὐτὴν τοῦ ds^2 πρὸς τὴν ἀντίστοιχόν του εἰς τὴν θεωρίαν τοῦ *Gauss* :

$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ (Θεωρ. Ἐπιφ. Ν. Χατζ., σελ. 12),

βλέπομεν, ὅτι :

$$E = A_1^2 + B_1^2, \quad F = A_1A_2 + B_1B_2, \quad G = A_2^2 + B_2^2 \cdot$$

καὶ ἑπομένως :

$$D^2 = (A_1^2 + B_1^2)(A_2^2 + B_2^2) - (A_1A_2 + B_1B_2)^2 \equiv (A_1B_2 - A_2B_1)^2.$$

Σημείωσις β΄. Ὅταν τὸ παραμετρικὸν δίκτυον εἶναι ***ὀρθογώνιον***, ὁ τύπος (31) ἁπλοποιεῖται : (31΄) $ds^2 = A_1^2du_1^2 + B_2^2du_2^2.$

24. ***Γραμμικὸν στοιχεῖον τῆς σφαιρικῆς ἀπεικονίσεως τῆς ἐπιφανείας (ἐπὶ τῆς σφαίρας τοῦ Gauss μὲ ἀκτῖνα 1).***—Ἂν ἡ σφαιρικὴ ἀπεικόνισις τοῦ σημείου Μ τῆς ἐπιφανείας ἐπὶ τῆς σφαίρας αὐτῆς εἶναι τὸ μ καὶ φέρωμεν ἄξονας ἀπὸ τὸ κέντρον της Ο παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους πρὸς τοὺς Mxyz, τοὺς $Ox_1y_1z_1$, τὸ τρίεδρόν των (T_1) θὰ ἔχῃ τὰς ἰδίας περιστροφὰς μὲ τὸ (T) τῶν Mxyz, δηλ. τὰς p_1, q_1, r_1· p_2, q_2, r_2· καὶ αἱ ἀπειροσταὶ μετατοπίσεις τοῦ μ παραλλήλως τῶν ἀξόνων $Ox_1y_1z_1$ (ἢ καὶ τῶν Mxyz) θὰ εἶναι (ἐδ. 7, τύπ. 7):

$$r_x = q_1du_1 + q_2du_2, \quad r_y = -(p_1du_1 + p_2du_2), \quad r_z = 0,$$

ἀφοῦ συντεταγμέναι τοῦ μ εἶναι αἱ 0,0,1. Ὥστε τὸ γραμμικὸν στοιχεῖον τῆς σφαίρας θὰ εἶναι :

(32) $$d\sigma^2 = (p_1du_1 + p_2du_2)^2 + (q_1du_1 + q_2du_2)^2 =$$
$$= (p_1^2 + q_1^2)du_1^2 + 2(p_1p_2 + q_1q_2)du_1du_2 + (p_2^2 + q_2^2)du_2^2 \cdot$$

διότι : (33) $d\sigma.\text{συν}\vartheta = q_1du_1 + q_2du_2, \quad d\sigma.\text{ημ}\vartheta = -(p_1du_1 + p_2du_2),$ (ϑ=γων. τῆς ἐφαπτομένης τοῦ τόπου τοῦ μ μὲ τὸν ἄξ. τῶν x_1 ἢ καὶ τῶν x).

25. ***Γωνία τῶν ἐφαπτομένων μιᾶς καμπύλης καὶ τῆς σφαιρικῆς της ἀπεικονίσεως.*** — Διὰ τὴν γωνίαν αὐτὴν $\omega - \vartheta$ ἔχομεν προφανῶς :

$$(34) \quad \begin{cases} d\sigma.\text{συν}(\omega - \vartheta) = -(p_1du_1 + p_2du_2)\text{ημ}\omega + (q_1du_1 + q_2du_2)\text{συν}\omega, \\ d\sigma.\text{ημ}(\omega - \vartheta) = (p_1du_1 + p_2du_2)\text{συν}\omega + (q_1du_1 + q_2du_2)\text{ημ}\omega. \end{cases}$$

26. ***Σχέσις δύο συζυγῶν ἐφαπτομένων.***—Ἐπειδὴ ἡ ***συζυγὴς***

εὐθεῖα τῆς ἐφαπτομένης μιᾶς ἐπιφανειακῆς καμπύλης εἶναι ἡ ***ὀρικὴ*** γραμμὴ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς ἐπιφανείας κατὰ μῆκος τῆς καμπύλης ***(Θεωρ. Ἐπιφ. Ν. Χατζ., ἐδ. 33)***, θὰ εἶναι ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου, ποὺ ἔχουν ταχύτητας κειμένας ἐπάνω εἰς τὸ ἐπίπεδον αὐτό· ὥστε ἡ συζυγὴς αὐτὴ εὐθεῖα ὁρίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$Py - Qx = 0 \text{ ἤ : } (p_1 du_1 + p_2 du_2)y - (q_1 du_1 + q_2 du_2)x = 0, \quad (35)$$

ποὺ μᾶς τὴν δίδουν οἱ τύποι (8) τοῦ ἐδ. (7), ἂν θέσωμεν $v_z = 0$.

Ἂν δὲ ὀνομάσωμεν ω' τὴν γωνίαν τῆς συζυγοῦς αὐτῆς εὐθείας μὲ τὸν ἄξ. τῶν x, θὰ εἶναι τὰ x,y ἀνάλογα τῶν συνω′, ημω′ καὶ ἡ σχέσις (35) γίνεται :

$$(p_1 du_1 + p_2 du_2)\eta\mu\omega' - (q_1 du_1 + q_2 du_2)\sigma\upsilon\nu\omega' = 0 \quad (35')$$

Καὶ ἐπειδὴ διὰ τὰς αὐξήσεις δs, δu_1, δu_2 τῶν s, u_1, u_2 κατὰ μῆκος τῆς συζυγοῦς διευθύνσεως ἔχομεν πάλιν (ἐδ. 23) :

$$\delta s\sigma\upsilon\nu\omega' = A_1 \delta u_1 + A_2 \delta u_2, \quad \delta s\eta\mu\omega' = B_1 \delta u_1 + B_2 \delta u_2,$$

ἡ σχέσις (35′) λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$(35'') \quad (p_1 B_1 - q_1 A_1) du_1 \delta u_1 + (p_2 B_1 - q_2 A_1) du_2 \delta u_1 + \\ + (p_1 B_2 - q_1 A_2) du_1 \delta u_2 + (p_2 B_2 - p_2 A_1) du_2 \delta u_3 = 0,$$

συμμετρικὴν πρὸς τὰ διαφορικά : d καὶ δ (ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν συντελεστῶν τῶν δύο μεσαίων ὅρων της, κατὰ τὸν τελευταῖον ἀπὸ τοὺς τύπους (17), ἐδ. (15)). Ἔχομεν λοιπὸν καὶ τὴν σχέσιν : (35α′) : $(p_1 \delta u_1 + p_2 \delta u_2)\eta\mu\omega - (q_1 \delta u_1 + q_2 \delta u_2)\sigma\upsilon\nu\omega = 0$, ἰσοδύναμον τῆς (35′).

27. ***Πόρισμα.*** Ἂν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς τύπους (33) κατὰ σειρὰν ἐπὶ συνω′, ημω′ καὶ τοὺς προσθέσωμεν, θὰ ἔχωμεν :

$$d\sigma.\sigma\upsilon\nu(\omega' - \vartheta) = (q_1 du_1 + q_2 du_2)\sigma\upsilon\nu\omega' - (p_1 du_1 + p_2 du_2)\eta\mu\omega' = 0$$

(κατὰ τὸν τύπον (35)). Ὥστε : ***Ἡ σφαιρικὴ ἀπεικόνισις κάθε καμπύλης τῆς ἐπιφανείας εἶναι κάθετος πρὸς τὴν συζυγῆ ἐφαπτομένην τῆς καμπύλης.***

δ′) Κάθετος καὶ γεωδαισιακὴ καμπυλότης.

29. ***Κάθετος καὶ γεωδαισιακὴ καμπυλότης.*** — Αἱ περιστροφαὶ τοῦ τριέδρου (T_1), τοῦ παραλλήλου ἀπὸ τὸ Ο πρὸς τὸ κινητὸν τρίε-

δρον (Τ), εἶναι : $p_1u_1'+p_2u_2'$, $q_1u_1'+q_2u_2'$, $r_1u_1'+r_2u_2'$, ἤ, ἂν θέσωμεν $t=s$ (τῆς καμπύλης) :

$$p_1\frac{du_1}{ds}+p_2\frac{du_2}{ds},\quad q_1\frac{du_1}{ds}+q_2\frac{du_2}{ds},\quad r_1\frac{du_1}{ds}+r_2\frac{du_2}{ds}.$$

Ἂν τώρα ἀπὸ τὸ Ο φέρωμεν μίαν παράλληλον πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς καμπύλης ἕως τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, ποὺ ἔχει κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα $=1$, ἡ ταχύτης τοῦ ἄκρου μ τῆς παραλλήλου αὐτῆς θὰ εἶναι (ὅταν $t=s$) ἴση προφανῶς μὲ τὴν καμπυλότητα τής καμπύλης : $\frac{d\sigma}{ds}=\frac{1}{P}$· ὥστε, ἂν προβάλωμεν τὴν ταχύτητα αὐτὴν $\frac{1}{P}$ ἐπὶ τῶν ἀξόνων τοῦ τριέδρου (T_1) ἢ τοῦ (Τ), ἐπειδὴ αἱ συντεταγμέναι τοῦ μ πρὸς τὸ (T_1) εἶναι : συνω, ημω, 0, θὰ ἔχωμεν (κατὰ τοὺς τύπους (8)) :

$$(37)\quad\begin{cases}\dfrac{\xi_1}{P}ds=-\eta\mu\omega(r_1du_1+r_2du_2+d\omega),\\ \dfrac{\eta_1}{P}ds=\ \sigma\upsilon\nu\omega(r_1du_1+r_2du_2+d\omega),\\ \dfrac{\zeta_1}{P}ds=\eta\mu\omega(p_1du_1+p_2du_2)-\sigma\upsilon\nu\omega(q_1du_1+q_2du_2),\end{cases}$$

(ὅπου ξ_1, η_1, ζ_1 εἶναι τὰ ***σχετικὰ*** συνημίτονα τῆς πρώτης καθέτου τῆς καμπύλης).

28. ***Ἁπλοποίησις τῶν τύπων*** (37).—Ἂν $\bar\omega$ εἶναι ἡ γωνία τῆς α′ καθέτου μὲ τὴν κάθετον τῆς ἐπιφανείας, θὰ εἶναι : $\zeta_1=\sigma\upsilon\nu\bar\omega$· καὶ ἀπὸ τὰς σχέσεις : $\Sigma\alpha_1\xi_1=0$ ($\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ τὰ ***σχετικὰ*** συνημίτονα τῆς ἐφαπτομένης) ἢ καί : $\xi_1\sigma\upsilon\nu\omega+\eta_1\eta\mu\omega=0$ καὶ $\xi_1^2+\eta_1^2=\eta\mu^2\bar\omega$ εὑρίσκομεν :

$$\eta_1=\sigma\upsilon\nu\omega\eta\mu\bar\omega,\quad \xi_1=-\eta\mu\omega\eta\mu\bar\omega\quad (36)\cdot$$

αἱ ἐξισώσεις ὅμως τότε (37), μὲ τὰς τιμὰς αὐτὰς τῶν ξ_1,η_1,ζ_1, γίνονται μόνον δύο :

$$(37')\quad\begin{cases}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\bar\omega}{P}ds=\eta\mu\omega(p_1du_1+p_2du_2)-\sigma\upsilon\nu\omega(q_1du_1+q_2du_2),\\ \dfrac{\eta\mu\bar\omega}{P}ds=r_1du_1+r_2du_2+d\omega.\end{cases}$$

Ἀπὸ τοὺς δύο αὐτοὺς τύπους ὁ α′ μᾶς δίδει ἀμέσως ***τὸ θεώρημα τοῦ*** *Meusnier*, ὁ δὲ β′ μᾶς δίδει τὴν ***γεωδαισιακὴν*** καμπυλότητα ***(Θεωρ. Ἐπιφ. Ν. Χατζ., ἐδ.*** 20 ***καὶ ἐδ.*** 52***)***. (Καθὼς δὲ γνωρίζομεν, τὰ «***κέντρα τῆς καθέτου καὶ τῆς γεωδαισιακῆς καμπυλότητος***» κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἄξονος καμπυλότητος).

ε΄) Γεωδαισιακὴ στρέψις.

29. ***Συνημίτονα τῆς ὀρθίας καθέτου.***—Τὰ ***σχετικὰ*** αὐτὰ συνημίτονα λ_1, μ_1, ν_1 εὑρίσκονται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\begin{vmatrix} \text{συν}\omega & \text{ημ}\omega & 0 \\ -\text{ημ}\omega\text{ημ}\tilde{\omega} & \text{συν}\omega\text{ημ}\tilde{\omega} & \text{συν}\tilde{\omega} \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \end{vmatrix} = 1$$

καὶ εἶναι : $\lambda_1 = \text{ημ}\omega\text{συν}\tilde{\omega}$, $\mu_1 = -\text{συν}\omega\text{συν}\tilde{\omega}$, $\nu_1 = \text{ημ}\tilde{\omega}$. (38)

30. ***Γεωδαισιακὴ στρέψις.***—Ἂν φέρωμεν ἀπὸ τὸ Ο μίαν παράλληλον πρὸς τὴν δικάθετον τῆς καμπύλης ἴσην μὲ τὴν 1, τὸ ἄκρον της μ θὰ ἔχῃ συντεταγμένας πρὸς τὸ τρίεδρον (T_1) τάς: ημωσυνπ, —συνωσυνπ, ημπ· καὶ ἐπειδὴ ἡ ταχύτης τοῦ μ εἶναι (διὰ t=s) προφανῶς ἴση μὲ τὴν στρέψιν : $\frac{d\tau}{ds} \equiv \frac{1}{R}$, αἱ προβολαί της ἐπὶ τῶν ἀξόνων τοῦ (T_1), ἢ καὶ τοῦ (T), θὰ εἶναι : $\frac{\xi_1}{R}$, $\frac{\eta_1}{R}$, $\frac{\zeta_1}{R}$ (διότι εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν α΄ κάθετον), ἢ καί :

$$-\frac{\text{ημ}\omega\text{ημ}\tilde{\omega}}{R}, \quad \frac{\text{συν}\omega\text{ημ}\tilde{\omega}}{R}, \quad \frac{\text{συν}\tilde{\omega}}{R} \quad (39).$$

εἶναι ὅμως καί :

$$\frac{\text{συν}\tilde{\omega}}{R} \equiv v_z = \left(p_1\frac{du_1}{ds} + p_2\frac{du_2}{ds}\right)y - \left(q_1\frac{du_1}{ds} + q_2\frac{du_2}{ds}\right)x + \frac{dz}{ds}$$

ἐπομένως :

$$\frac{1}{R} - \frac{d\tilde{\omega}}{ds} = -(p_1u'_1 + p_2u'_2)\text{συν}\omega - (q_1u'_1 + q_2u'_2)\text{ημ}\omega \quad (40).(^1)$$

Ἔχομεν δηλ. τὴν ***γεωδαισιακὴν στρέψιν (Θεωρ. Ἐπιφ. Ν.Χ. ἐδ.60).***

31. ***Ἄλλη ἔκφρασις τῆς γεωδαισιακῆς στρέψεως.***—Ἂς ὑπολογίσωμεν τὴν $\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\text{συν}\tilde{\omega}}{P}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{1}{P_n}\right)$: εὑρήκαμεν (τύποι 37΄) :

(1) Πρὸς συντομίαν θὰ γράφωμεν εἰς τὰ ἑπόμενα : u'_1, u'_2 ἀντὶ $\frac{du_1}{ds}$, $\frac{du_2}{ds}$.

$\frac{1}{P_n} = \eta\mu\omega(p_1u_1'+p_2u_2') - \sigma\upsilon\nu\omega(q_1u_1'+q_2u_2')$· αἱ δὲ παράγωγοι u_1', u_2' ὑπολογίζονται ἀπὸ τοὺς τύπους : $ds\sigma\upsilon\nu\omega = A_1du_1 + A_2du_2$, $ds\eta\mu\omega=B_1du_1+B_2du_2$ καὶ εἶναι :

$$u_1' = \frac{B_2\sigma\upsilon\nu\omega - A_2\eta\mu\omega}{A_1B_2-A_2B_1}, \quad u_2' = \frac{A_1\eta\mu\omega - B_1\sigma\upsilon\nu\omega}{A_1B_2-A_2B_1}.$$

Ἂς ὑπολογίσωμεν ἀκόμη ἀπὸ τοὺς τύπους αὐτοὺς τὰς παραγώγους :

$$\frac{\partial u_1'}{\partial\omega}, \frac{\partial u_2'}{\partial\omega}: \frac{\partial u_1'}{\partial\omega} = -\frac{B_2\eta\mu\omega + A_2\sigma\upsilon\nu\omega}{A_1B_2-A_2B_1}, \quad \frac{\partial u_2'}{\partial\omega} = \frac{A_1\sigma\upsilon\nu\omega + B_1\eta\mu\omega}{A_1B_2-A_2B_1}.$$

Ἂν τώρα θέσωμεν τὰς τιμὰς αὐτὰς εἰς τὴν ἐξίσωσιν :

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{P_n}\right)}{\partial\omega} = \frac{\partial}{\partial\omega}\Big[(p_1\eta\mu\omega - q_1\sigma\upsilon\nu\omega)u_1' + (p_2\eta\mu\omega - q_2\sigma\upsilon\nu\omega)u_2'\Big] =$$
$$= (p_1\sigma\upsilon\nu\omega + q_1\eta\mu\omega)u_1' + (p_2\sigma\upsilon\nu\omega + q_2\eta\mu\omega)u_2' +$$
$$+ (p_1\eta\mu\omega - q_1\sigma\upsilon\nu\omega)\frac{\partial u_1'}{\partial\omega} + (p_2\eta\mu\omega - q_2\sigma\upsilon\nu\omega)\frac{\partial u_2'}{\partial\omega},$$

εὑρίσκομεν, ὕστερ᾽ ἀπ᾽ ὀλίγας πράξεις (μὲ χρησιμοποίησιν τῆς τελευταίας ἀπὸ τὰς σχέσεις (17)) :

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{P_n}\right)}{\partial\omega} = 2\Big[\sigma\upsilon\nu\omega(p_1u_1' + p_2u_2') + \eta\mu\omega(q_1u_1' + q_2u_2')\Big].$$

Ἔχομεν λοιπὸν καὶ τὴν ἑξῆς β΄ ἔκφρασιν τῆς γεωδαισιακῆς στρέψεως :

$$\frac{1}{R} - \frac{d\varpi}{ds} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{1}{P_n}\right). \quad (40')$$

ϛ΄) Ἐφαπτομενικαὶ ἀναλλοίωτοι.

32. ***Ἐφαπτομενικαὶ ἀναλλοίωτοι α΄ καὶ β΄ τάξεως.*** — ***Ἀναλλοίωτα*** στοιχεῖα, ἢ ἁπλῶς ***ἀναλλοίωτοι*** (παραστάσεις) ὅλων τῶν καμπύλων τῆς ἐπιφανείας, ποὺ περνοῦν ἀπὸ τὸ M καὶ ἔχουν τὴν ἰδίαν ἐφαπτομένην, εἶναι ***α΄ μὲν τάξεως*** (δηλ. μὲ ***πρώτας μόνον*** παραγώγους τῶν συντεταγμένων) προφανῶς μόνον ***τὰ συνημίτονα τῆς ἐφα-***

πτομένης : $\alpha = \frac{dx}{ds}$, $\beta = \frac{dy}{ds}$, $\gamma = \frac{dz}{ds}$· ***β' δὲ τάξεως*** μόνον ἕν : ἡ ***κάθετος*** καμπυλότης (κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ *Meusnier* : $\frac{\sigma\upsilon\nu\tilde{\omega}}{P} = \frac{1}{P_n}$).

33. ***Ἐφαπτομενικαὶ ἀναλλοίωτοι γ' τάξεως.***—Εἶναι δύο : 1) ***ἡ γεωδαισιακὴ στρέψις*** (καθὼς φαίνεται ἀπὸ τὸν τύπον (40))· 2) ***ἡ «ἀναλλοίωτος τοῦ*** *Laguerre*» (1870), πού την εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς.

Ἔχομεν προφανῶς :

$$d\left(\frac{\sigma\upsilon\nu\tilde{\omega}}{P}\right) \equiv d\left(\frac{1}{P_n}\right) = \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{1}{P_n}\right)du_1 + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{1}{P_n}\right)du_2 + \frac{\partial}{\partial \omega}\left(\frac{1}{P_n}\right)d\omega·$$

καὶ ἐπειδή, κατὰ τοὺς τύπους (37'): $d\omega = \frac{ds}{P_g} - \mathbf{r}_1 du_1 - \mathbf{r}_2 du_2$, θὰ εἶναι :

$$(\alpha)\quad d\left(\frac{1}{P_n}\right) - \frac{\partial}{\partial \omega}\left(\frac{1}{P_n}\right).\frac{ds}{P_g} =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{1}{P_n}\right) - \mathbf{r}_1\frac{\partial}{\partial \omega}\left(\frac{1}{P_n}\right)\right]du_1 + \left[\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{1}{P_n}\right) - \mathbf{r}_2\frac{\partial}{\partial \omega}\left(\frac{1}{P_n}\right)\right]du_2.$$

Εὑρήκαμεν ὅμως τὴν τιμὴν τῆς $\frac{\partial}{\partial \omega}\left(\frac{1}{P_n}\right)$ (ἐδ. 31)· ὥστε ὁ προηγούμενος τύπος λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$(\beta)\quad d\left(\frac{1}{P_n}\right) + \frac{2}{R_g}.\frac{ds}{P_g} = K ds,$$

ὅπου τὸ K εἶναι μία παράστασις ἀναλλοίωτος· καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν σχέσιν αὐτὴν ἐπὶ P_n , εὑρίσκομεν τέλος ***τὴν ἀναλλοίωτον τοῦ*** *Laguerre* :

$$(41)\quad -\frac{1}{P}.\frac{dP}{ds} + \varepsilon\varphi\tilde{\omega}\left(\frac{2}{R} - 3\frac{d\tilde{\omega}}{ds}\right) = \frac{K.P}{\sigma\upsilon\nu\tilde{\omega}} \equiv K.P_n \text{ (ἀναλλοίωτος).}$$

Σημείωσις α'.—Ἀπὸ τὸν τύπον (β) εὑρίσκομεν, ἂν τὸν λύσωμεν, τὴν γεωδαισιακὴν καμπυλότητα $\frac{1}{P_g}$ (τύπον ἀντίστοιχον πρὸς τὸν τοῦ *Minding*, ***Θεωρ. Ἐπιφ.*** σελ. 64).

Σημείωσις β'.—Αἱ δύο ἀναλλοίωτοι διὰ κάθε ἑπομένην τάξιν εὑρίσκονται εὐκολώτατα : ἂν ἔχωμεν μίαν ἀναλλοίωτον : $\Phi = K$ ***τῆς ν τάξεως*** (ὅπου $K = \sigma(u_1, u_2, \omega)$), θὰ εὕρωμεν :

$$d\Phi = \frac{\partial K}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial K}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial K}{\partial \omega}d\omega\cdot$$

ἐπομένως :

$$(42)\ \frac{d\Phi}{ds} - \frac{\partial K}{\partial \omega}\cdot\frac{1}{P_g} = \frac{\partial K}{\partial u_1}\cdot\frac{du_1}{ds} + \frac{\partial K}{\partial u_2}\cdot\frac{du_2}{ds} - \frac{\partial K}{\partial \omega}\left(r_1\frac{du_1}{ds} + r_2\frac{du_2}{ds}\right)\cdot$$

ἔχομεν δηλ. πάλιν σχέσιν τῆς προηγουμένης μορφῆς : $\Phi_1 = K_1$, ὅπου τὸ Φ_1 ἔχει παραγώγους μέχρι τῆς $\nu+1$ τάξεως, τὸ δὲ K_1 εἶναι$=\sigma_1(u_1, u_2, \omega)$. Ἡ μέθοδος αὐτή, ἐφαρμοζομένη εἰς τὰς δύο ἀναλλοιώτους τῆς $3^{ης}$ τάξεως, μᾶς δίδει δύο ἀναλλοιώτους τῆς $4^{ης}$ τάξεως· καὶ οὕτω καθεξῆς. (Προβλ. Θεωρ. Ἐπιφ. Ν. Χατζ., ἐδ. 68). Π. χ. ἀπὸ τὴν ἀναλλοίωτον : $\frac{1}{R_g}$ εὑρίσκεται ἡ ἑξῆς : (43) $\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{R_g}\right) - \frac{1}{P_g}\left(\frac{2}{P_n} - \frac{1}{P_1} - \frac{1}{P_2}\right) = K_1$.

ζ) Ἐγγυτάτη σφαῖρα τῆς τυχούσης καμπύλης.

34. ***Συντεταγμέναι τοῦ κέντρου της.*** — Ἂν ὀνομασθοῦν x_0, y_0, z_0, θὰ ἔχωμεν τὰς ἐξισώσεις :

$x_0\sigma\upsilon\nu\omega + y_0\eta\mu\omega = 0$ (καθετότης τῆς ἀκτῖνος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην (συνω, ημω, 0)),

$\eta\mu\tilde{\omega}(-x_0\eta\mu\omega + y_0\sigma\upsilon\nu\omega) + z_0\,\sigma\upsilon\nu\tilde{\omega} = P$ (προβολὴ τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας ἐπὶ τῆς α΄ καθέτου),

$\sigma\upsilon\nu\tilde{\omega}(x_0\eta\mu\omega - y_0\sigma\upsilon\nu\omega) + z_0\eta\mu\tilde{\omega} = -R\frac{dP}{ds} \equiv -\frac{dP}{d\tau}$ (προβολὴ τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας ἐπὶ τῆς δικαθέτου).

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς αἱ δύο πρῶται μᾶς λέγουν, ὅτι ***τὸ κέντρον τῆς σφαίρας κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος καμπυλότητος***· καὶ αἱ τρεῖς δὲ μαζὶ μᾶς δίδουν :

$$\frac{-x_0}{\eta\mu\omega} = \frac{y_0}{\sigma\upsilon\nu\omega} = P\eta\mu\tilde{\omega} + \frac{dP}{d\tau}\sigma\upsilon\nu\tilde{\omega}, \quad z_0 = P\sigma\upsilon\nu\tilde{\omega} - \frac{dP}{d\tau}\eta\mu\tilde{\omega}.$$

καὶ ἐπομένως :

$$x_0 = -\eta\mu\omega\left(P\eta\mu\tilde{\omega} + \frac{dP}{d\tau}\sigma\upsilon\nu\tilde{\omega}\right), \quad y_0 = \sigma\upsilon\nu\omega\left(P\eta\mu\tilde{\omega} + \frac{dP}{d\tau}\sigma\upsilon\nu\tilde{\omega}\right),$$

$$z_0 = P\sigma\upsilon\nu\tilde{\omega} - \frac{dP}{d\tau}\eta\mu\tilde{\omega}. \quad (44)$$

Ἡ δὲ ἐξίσωσις τῆς σφαίρας εὑρίσκεται εὔκολα καὶ εἶναι :

$$\Sigma X^2+2\left(P\eta\mu\tilde{\omega}-\frac{dP}{d\tau}\sigma\upsilon\nu\tilde{\omega}\right)\left(X\eta\mu\omega-Y\sigma\upsilon\nu\omega\right)-$$

$$-2Z\left(P\sigma\upsilon\nu\tilde{\omega}+\frac{dP}{d\tau}\eta\mu\tilde{\omega}\right)=0 \quad (45).$$

35. ***Κέντρα τῆς καθέτου καὶ τῆς γεωδαισιακῆς καμπυλότητος.*** —Αἱ τομαὶ τοῦ ἄξονος καμπυλότητος μὲ τὴν κάθετον καὶ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας καὶ μὲ τὴν α′ κάθετον μᾶς δίδουν :

1ον) Τὸ «κέντρον τῆς καθέτου καμπυλότητος» :

$$(45') \quad x_1=y_1=0, \quad z_1=\frac{P}{\sigma\upsilon\nu\tilde{\omega}}.$$

2ον) Τὸ «κέντρον τῆς γεωδαισιακῆς καμπυλότητος» :

$$(45'') \quad x_2=-\frac{P\eta\mu\omega}{\eta\mu\tilde{\omega}}, \quad y_2=\frac{P\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\tilde{\omega}}, \quad z_2=0.$$

3ον) Τὸ κέντρον καμπυλότητος: $x_3=-P\eta\mu\omega\eta\mu\tilde{\omega}$, $y_3=P\sigma\upsilon\nu\omega\eta\mu\tilde{\omega}$, $z_3=P\sigma\upsilon\nu\tilde{\omega}$ (45‴).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ′.

ΙΔΙΑΙΤΕΡΑΙ ΚΑΜΠΥΛΑΙ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ.

α′) Γραμμαὶ καμπυλότητος

36. ***Ἐξίσωσις τῶν γραμμῶν καμπυλότητος.***—Σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμόν των πρέπει νὰ ὑπάρχῃ ἐπὶ τοῦ ἄξ. Mz (τῆς καθέτου τῆς ἐπιφανείας) ἓν σημεῖον : $x=0$, $y=0$, $z=\delta$, ***ποὺ νὰ γράφῃ καμπύλην μὲ ἐφαπτομένην τὴν*** Mz (συνημίτονα 0,0,1)· πρέπει λοιπὸν νὰ εἶναι (τύπ. (8)) :

$$(\alpha) \quad \begin{cases} A_1du_1+A_2du_2+\delta(q_1du_1+q_2du_2)=0, \\ B_1du_1+B_2du_2-\delta(p_1du_1+p_2du_2)=0. \end{cases}$$

Αἱ δύο αὐταὶ ἐξισώσεις μᾶς ὁρίζουν τὸν γωνιακὸν συντελεστὴν $\frac{du_2}{du_1}$ καὶ τὴν ἀπόστασιν δ : ἡ ἀπαλοιφὴ τοῦ δ δίδει :

$$(p_1du_1+p_2du_2)(A_1du_1+A_2du_2)+(q_1du_1+q_2du_2)(B_1du_1+B_2du_2)=0,$$

$$\text{ἤ}:\quad (p_1du_1+p_2du_2)\text{συν}\omega+(q_1du_1+q_2du_2)\text{ημ}\omega=0 \quad (46)$$

ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ἐκφράζει τὴν β′ ***χαρακτηριστικὴν*** ἰδιότητα τῶν γραμμῶν καμπυλότητος, ὅτι δηλ. ***ἡ ἐφαπτομένη τῆς γραμμῆς καμπυλότητος εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν σφαιρικὴν ἀπεικόνισίν της*** (τύπ. 34) καὶ ἑπομένως (κατὰ τὸ ἐδ. 26, πόρισμα) : ***Αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος ἀποτελοῦν συζυγὲς δίκτυον (ὀρθογώνιον).***

Ἂν τώρα ἀπαλείψωμεν τὸν λόγον $\frac{du_2}{du_1}$, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ β′ βαθμοῦ :

$$\delta^2(p_1q_2-p_2q_1)+\delta(q_1B_2-q_2B_1+p_1A_2-p_2A_1)+A_1B_2-A_2B_1=0 \quad (47),$$

πού μας δίδει τὰς δύο ἀποστάσεις δ_1, δ_2. Ὅτι δὲ αἱ ἀποστάσεις αὐταὶ εἶναι αἱ δύο πρωτεύουσαι ἀκτῖνες P_1, P_2, φαίνεται ἀπὸ τὸ ὅτι :

$$\delta=\frac{P}{\text{συν}\tilde{\omega}}\ (\text{Θεωρ. ἐνειλιγμένων γραμμῶν})\ \text{καὶ}\ \frac{1}{P_n}=\frac{\text{συν}\tilde{\omega}}{P}$$

καὶ ἀπὸ τὸ ὅτι ἡ ἐξίσωσις (46), ποὺ δίδει τὰς διευθύνσεις τῶν δύο γραμμῶν καμπυλότητος, δίδει συγχρόνως καὶ τὰς ἄκρας τιμὰς τῆς καθέτου καμπυλότητος $\frac{1}{P_n}$ κατὰ τὸν α′ ἀπὸ τοὺς τύπους (37′) (διότι ἡ (46) εἶναι ἡ παράγωγος τῆς (37′) πρὸς τὸ ω).

37. ***Δευτέρα σημασία τῆς ἐξισώσεως (46).*** — Ἐκφράζει ἀκόμη ἡ ἐξίσωσις αὐτή, ὅτι ***ὁ στιγμιαῖος ἄξων ἑλικώσεως τοῦ κινητοῦ τριέδρου Mxyz καταντᾷ, κατὰ μῆκος τῶν γραμμῶν καμπυλότητος, ἁπλῶς ἄξων περιστροφῆς*** (τρίτη ***χαρακτηριστικὴ*** ἰδιότης τῶν γραμμῶν καμπυλότητος). Πραγματικῶς αἱ ἐξισώσεις (11′) τοῦ ἄξονος ἑλικώσεως, ***ὅταν ἀληθεύουν αἱ (α),*** μᾶς δίδουν :

$$\left\{\begin{aligned}
&A_1du_1+A_2du_2+(q_1du_1+q_2du_2)z-(r_1du_1+r_2du_2)y=0,\\
&B_1du_1+B_2du_2+(r_1du_1+r_2du_2)x-(p_1du_1+p_2du_2)z=0,\\
&\qquad\qquad (p_1du_1+p_2du_2)y-(q_1du_1+q_2du_2)x=0,
\end{aligned}\right.$$

δηλ. ἔχομεν ***ἁπλῆν περιστροφήν, ἀφοῦ ἡ ὀλίσθησις :***

$$g=(p_1u'_1+p_2u'_2)(A_1u'_1+A_2u'_2)+(q_1u'_1+q_2u'_2)(B_1u'_1+B_2u'_2)$$

εἶναι=0.

38. ***Τρίτη σημασία τῆς ἐξισώσεως (46).*** — Ἐπειδὴ εὑρήκαμεν (ἐδ. 31), ὅτι :

$$2\left[\sigma\upsilon\nu\omega(p_1u'_1+p_2u'_2)+\eta\mu\omega(q_1u'_1+q_2u'_2)\right]=\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{1}{P_n}\right),$$

βλέπομεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις (46) ἐκφράζει ἀκόμη, ὅτι : ***Αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος ἐφάπτονται τῶν πρωτευουσῶν τομῶν*** (τετάρτη ***χαρακτηριστικὴ*** ἰδιότης τῶν γραμμῶν καμπυλότητος).

β') Γραμμαὶ ἀσυμπτωτικαί.

39. ***Ἐξίσωσις τῶν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν.*** — Ἐπειδή, κατὰ τὸν ὁρισμόν των, ***αἱ ὄρθιαί των κάθετοι συμπίπτουν μὲ τὰς καθέτους τῆς ἐπιφανείας*** (καὶ ἐπομένως δι' αὐτάς : $\frac{1}{P_n}=0$), ἡ ἐξίσωσίς των θὰ εἶναι (τύπ. 37') :

$$(p_1du_1+p_2du_2)\eta\mu\omega-(q_1du_1+q_2du_2)\sigma\upsilon\nu\omega=0 \quad (48).$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ἐκφράζει καὶ τὴν β' ***χαρακτηριστικὴν*** ἰδιότητά των, ὅτι : ***Ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἀσυμπτωτικῆς γραμμῆς εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς σφαιρικῆς ἀπεικονίσεώς της*** (τύπ. 34). Ἂν δὲ ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ (48) γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$(48') \quad (p_1B_1-q_1A_1)du_1^2+(p_1B_2-q_1A_2+p_2B_1-q_2A_1)du_1du_2+$$
$$+(p_2B_2-q_2A_2)du_2^2=0,$$

μᾶς δεικνύει ἀμέσως, ἂν τὴν παραβάλωμεν μὲ τὴν ἐξίσ. (35'')[1], καὶ τὴν γ' ***χαρακτηριστικὴν*** ἰδιότητα, ὅτι : ***Ἡ συζυγὴς ἐφαπτομένη τῶν ἀσυμπτωτικῶν συμπίπτει μὲ τὴν ἐφαπτομένην των*** (καὶ ἀπὸ αὐτὸ ἕπεται καὶ πάλιν ἡ β' ἰδιότης, ἐδ. 26, πόρισμα).

γ') Γραμμαὶ γεωδαισιακαί.

40. ***Ἐξίσωσις τῶν γεωδαισιακῶν γραμμῶν.*** — Κατὰ τὸν ὁρισμόν των, ***ἡ πρώτη των κάθετος συμπίπτει μὲ τὴν κάθετον τῆς ἐπιφανείας,*** ἐπομένως δι' αὐτὰς εἶναι (τύπ. 37') :

$$d\omega+r_1du_1+r_2du_2=0 \quad (49).$$

δ') Γραμμαὶ σταθερᾶς κλίσεως.

41. ***Ἐξίσωσις τῶν γραμμῶν σταθερᾶς κλίσεως.*** — Ἂν διαιρέσωμεν τὰς ἐξισώσεις (37'), εὑρίσκομεν :

---

[1] Ὁ τελευταῖος ὅρος της πρέπει νὰ γραφῇ ὀρθῶς: $(p_2B_2-q_2A_2)du_2\delta u_2$.

$$\epsilon\varphi\tilde{\omega} = \frac{r_1 du_1 + r_2 du_2 + d\omega}{(p_1 du_1 + p_2 du_2)\eta\mu\omega - (q_1 du_1 + q_2 du_2)\sigma\upsilon\nu\omega}.$$

αἱ γραμμαί:

$$\frac{r_1 u'_1 + r_2 u'_2 + \omega'}{(p_1 u'_1 + p_2 u'_2)\eta\mu\omega - (q_1 u'_1 + q_2 u'_2)\sigma\upsilon\nu\omega} = \sigma\tau\alpha\vartheta. = c \quad (50)$$

λέγονται ***γραμμαὶ σταθερᾶς κλίσεως τῆς ἐπιφανείας*** Ἔχουν προφανῶς τὴν ἰδιότητα (κοινὴν μὲ τὰς ἀσυμπτωτικὰς καὶ τὰς γεωδαισιακάς): ***Νὰ εἶναι εἰς ὅλα τὰ σημεῖά των ἡ γεωδαισιακή των στρέψις ἴση μὲ τὴν ἀπόλυτον στρέψιν των*** καὶ περιλαμβάνουν ὡς ***ὁρικὰς*** περιπτώσεις τὰς γεωδαισιακὰς ($c=0$) καὶ τὰς ἀσυμπτωτικὰς ($c=\infty$).

ε΄) Γραμμαὶ τοῦ *De la Gournerie* (1855).

42. ***Ὁρισμός των.***—Λέγεται ***γραμμὴ τοῦ*** *De la Gournerie* ***(Ντελαγκουρνερὶ) μιᾶς ἐπιφανείας μία γραμμή, ὅταν εἰς κάθε σημεῖόν της ἡ κάθετος τομὴ μὲ τὴν ἰδίαν ἐφαπτομένην ἔχῃ ὑπερεπαφὴν μὲ μίαν περιφέρειαν.***

43. ***Ἐξίσωσίς των.***—Ἡ ἀναλλοίωσις (L) τοῦ Laguerre:

$\dfrac{d\left(\frac{1}{P_n}\right)}{ds} + \dfrac{2}{R_g}\cdot\dfrac{1}{P_g}$ διὰ τὴν κάθετον αὐτὴν τομὴν καταντᾷ: $\dfrac{d\left(\frac{1}{P_n}\right)}{ds}$. ἡ ζητουμένη λοιπὸν ἐξίσωσις εἶναι: (L)=0, ἤ, μὲ παραμετρικὰς γραμμὰς τὰς γραμμὰς καμπυλότητος: $q^2_1 \frac{\partial P_1}{\partial u_1} du^3_1 + 3q^2_1 \frac{\partial P_1}{\partial u_2} du^2_1 du_2 + 3p^2_2 \frac{\partial P_2}{\partial u_1} du_1 du^2_2 + p^2_2 \frac{\partial P_2}{\partial u_2} du^3_2 = 0$ (51). $P_1 = P_2$

(ἐξίσωσις τῆς α΄ τάξεως καὶ τοῦ γ΄ βαθμοῦ).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΣΘΗΚΑΙ

---

1) Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι: ***Τὸ μόνον*** ὀρθογώνιον συζυγὲς δίκτυον εἶναι τὸ τῶν γραμμῶν καμπυλότητος.

Νὰ εὑρεθῇ, ἂν εἶναι δυνατὸν μία γραμμὴ τῆς ἐπιφανείας νὰ εἶναι:

2) Καὶ γραμμὴ καμπυλότητος καὶ γεωδαισιακή.

3) Καὶ γραμμὴ καμπυλότητος καὶ ἀσυμπτωτική.

4) Καὶ γεωδαισιακὴ καὶ ἀσυμπτωτική.

5) Καὶ γραμμὴ καμπυλότητος καὶ γεωδαισιακὴ καὶ ἀσυμπτωτική.

6) Καὶ γραμμὴ σταθερᾶς κλίσεως καὶ γραμμὴ καμπυλότητος.

7) Καὶ γραμμὴ De la Gournerie καὶ γεωδαισιακή.

8) Καὶ γραμμὴ De la Gournerie καὶ ἀσυμπτωτική.

9) Καὶ γραμμὴ De la Gournerie καὶ γραμμὴ καμπυλότητος.

10) Ν' ἀποδειχθῇ, μὲ τὴν βοήθειαν τῆς θεωρίας τῶν ἐνειλιγμένων, ὅτι :

α΄) Ἂν δύο ἐπιφάνειαι κόπτωνται κατὰ μίαν κοινὴν γραμμὴν καμπυλότητος, κόπτονται κατὰ μῆκος αὐτῆς ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν.

β΄) (Τὸ ἀντίστροφον) : Ἂν δύο ἐπιφάνειαι κόπτωνται ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν καὶ ἡ τομή των εἶναι γραμμὴ καμπυλότητος τῆς μιᾶς, θὰ εἶναι καὶ τῆς ἄλλης.

Μερικὴ περίπτωσις (Θεωρήματα τοῦ *Johachimsthal* ***(Γιόαχιμσταλ)) : α΄) Ἂν ἡ τομὴ μιᾶς σφαίρας καὶ μιᾶς ἐπιφανείας εἶναι γραμμὴ καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας, ἡ σφαῖρα καὶ ἡ ἐπιφάνεια κόπτονται ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν.*** — β΄) (Τὸ ἀντίστροφον) : ***Ἂν σφαῖρα καὶ ἐπιφάνεια κόπτωνται ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν, ἡ τομή των εἶναι γραμμὴ καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας.***

Νὰ εὑρεθῇ, τί συμβαίνει, ἂν δύο ἐπιφάνειαι κόπτωνται :

11) Κατὰ ***κοινὴν*** γεωδαισιακὴν γραμμήν.

12) Κατὰ ***κοινὴν*** ἀσυμπτωτικὴν γραμμήν.

13) Κατὰ ***κοινὴν*** γραμμὴν σταθερᾶς κλίσεως.

14) Κατὰ ***κοινὴν*** γραμμὴν De la Gournerie.

15) Νὰ εὑρεθῇ ἡ μορφὴ τῶν ἐξισώσεων : (32), (33), (34), (35), (37΄), (40), (46), (47), (48), (49) καὶ (50) εἰς τὴν περίπτωσιν ***ὀρθογωνίου*** παραμετρικοῦ δικτύου μὲ τὰς τιμὰς (18) τῶν περιστροφῶν.

16) Εἰς τὰς ἐπιφανείας τοῦ β΄ βαθμοῦ αἱ γραμμαὶ de la Gournerie εἶναι αἱ ***εὐθύγραμμοι*** γενέτειραι καὶ αἱ γραμμαὶ ***σταθερᾶς καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας.***

17) Εἰς τὸ ἐλλειψοειδές : 1) ***Κατὰ μῆκος κάθε γραμμῆς καμπυλότητος ἡ ἀντίστοιχος πρωτεύουσα ἀκτὶς εἶναι ἀνάλογος τοῦ κύβου τῆς ἄλλης.*** 2) ***Αἱ γραμμαὶ σταθερᾶς καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας εἶναι αἱ «πολοδίαι» τοῦ*** *Poinsot* ***(Ποενσό),*** δηλ. ***ὁ τόπος τῶν σημείων, ὅπου ἡ ἀπόστασις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου ἀπὸ τὸ κέντρον εἶναι σταθερά.*** Καὶ 3) ***Αἱ πολοδίαι αὐταὶ εἶναι καὶ γραμμαὶ*** *De la Gournerie.*

18) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῶν γραμμῶν, ποὺ ἡ ἐγγυτάτη των σφαῖρα εἰς κάθε σημεῖον 1) ***ἐφάπτεται*** τῆς ἐπιφανείας, ἢ 2) ***εἶναι κάθετος*** πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν.

19) Νὰ εὑρεθῇ ***κινητικῶς*** ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος μιᾶς ἀσυμπτωτ. γραμμῆς, δηλ. ὁ τύπος τοῦ Bonnet (Θεωρ. Ἐπιφ. Ν. Χ., τύπος (56').

20—25) Νὰ εὑρεθῇ, ἂν εἶναι δυνατὸν μία γραμμὴ καμπυλότητος ἢ γεωδαισιακή, ἢ ἀσυμπτωτικὴ νὰ ἔχῃ καὶ μίαν ἀπὸ τὰς ἰδιότητας τῆς ἀσκήσεως 18.

26) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ σχέσεις μεταξὺ τῶν θεμελιωδῶν ποσῶν E, F, G, L, M, N τῆς θεωρίας τοῦ *Gauss* καὶ τῶν κινητικῶν ποσῶν (περιστροφῶν καὶ παραμετρικῶν ταχυτήτων) τῆς θεωρίας τοῦ *Darboux*.

27) Εἰς μίαν ***ἐπίπεδον*** γραμμὴν καμπυλότητος ἀντιστοιχεῖ ὡς σφαιρικὴ ἀπεικόνισις μία ***περιφέρεια***, ἐπὶ ἐπιπέδου ***παραλλήλου*** πρὸς τὸ τῆς γραμμῆς. Καὶ ἀντιστρόφως. (Πορίσματα τῶν θεωρημ. τοῦ *Johachimsthal*).

28) Νὰ δειχθῇ ἡ ἑξῆς γενίκευσις τῶν τύπων (18), ὅταν τὸ παραμετρικὸν δίκτυον εἶναι ***πλαγιογώνιον***. (Τὴν σημασίαν τῶν φ_1, φ_2, φ βλ. εἰς τὸ ἐδ. 44):

$$(52)\begin{cases} \dfrac{E_1}{P_{1n}}=p_1\eta\mu\varphi_1-q_1\sigma\upsilon\nu\varphi_1, \quad \dfrac{E_1}{P_{1g}}=\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u_1}+r_1, \quad \dfrac{E_1}{R_{1g}}= \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = -p_1\sigma\upsilon\nu\varphi_1-q_1\eta\mu\varphi_1, \\ \dfrac{E_2}{P_{2n}}=p_2\eta\mu\varphi_2-q_2\sigma\upsilon\nu\varphi_2, \quad \dfrac{E_2}{P_{2g}}=\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u_2}+r_2, \quad \dfrac{E_2}{R_{2g}}= \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = -p_2\sigma\upsilon\nu\varphi_2-q_2\eta\mu\varphi_2. \end{cases}$$

29) Ἂν τὰ ἓξ ποσὰ τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως ὀνομασθοῦν κατὰ σειράν: $-Q_1$, $R_1-\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1}$, $-P_1$ P_2, $R_2+\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_2}$, $-Q_2$, εὑρίσκομεν εὔκολα τὰς ἑξῆς τιμὰς τῶν περιστροφῶν:

$$(53)\begin{cases} p_1=P_1\sigma\upsilon\nu\varphi_1-Q_1\eta\mu\varphi_1,\ q_1=P_1\eta\mu\varphi_1+Q_1\sigma\upsilon\nu\varphi_1,\ r_1=R_1-\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u_1}. \\ p_2=P_2\eta\mu\varphi_2+Q_2\sigma\upsilon\nu\varphi_2,\ q_2=-P_2\sigma\upsilon\nu\varphi_2+Q_2\eta\mu\varphi_2,\ r_2=R_2-\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u_2}. \end{cases}$$

Καὶ ἂν αἱ τιμαὶ αὗται τεθοῦν εἰς τὰς 3 πρώτας ἐξισώσεις (17) καὶ τὰς (57), παράγεται τὸ ἑξῆς γενικώτερον, ἀλλὰ καὶ πολυπλοκώτερον σύστημα (ἰσοδύναμον πρὸς τὸ γενικὸν τοῦ *Codazzi*):

$$
(54)\left\{
\begin{aligned}
&E_1(P_2\sigma\upsilon\nu\varphi - Q_2\eta\mu\varphi) = E_2(P_1\eta\mu\varphi - Q_1\sigma\upsilon\nu\varphi),\\
&R_1 = -\frac{1}{E_2\eta\mu\varphi}\left(\frac{\partial E_1}{\partial u_2} - \frac{\partial E_2}{\partial u_1}\sigma\upsilon\nu\varphi\right),\ R_2 = \frac{1}{E_1\eta\mu\varphi}\left(\frac{\partial E_2}{\partial u_1} - \frac{\partial E_1}{\partial u_2}\sigma\upsilon\nu\varphi\right),\\
&\frac{\partial P_1}{\partial u_2} - Q_1R_2 = \eta\mu\varphi\left(\frac{\partial P_2}{\partial u_1} - R_1Q_2\right) + \sigma\upsilon\nu\varphi\left(\frac{\partial Q_2}{\partial u_1} + R_1P_2\right),\\
&\frac{\partial Q_1}{\partial u_2} + R_1P_2 = \eta\mu\varphi\left(\frac{\partial Q_2}{\partial u_1} + R_1P_2\right) - \sigma\upsilon\nu\varphi\left(\frac{\partial P_2}{\partial u_1} - R_1Q_2\right),\\
&\frac{\partial R_1}{\partial u_2} - \frac{\partial R_2}{\partial u_1} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_1\partial u_2} - \Big(P_1P_2 + Q_1Q_2\Big)\sigma\upsilon\nu\varphi + \Big(P_1Q_2 - P_2Q_1\Big)\eta\mu\varphi.
\end{aligned}
\right.
$$

(Ἀπὸ τὸ πολύπλοκον τῆς μορφῆς αὐτῆς βλέπομεν, ὅτι, ***μόνον ὅταν τὰ 6 στοιχεῖα τῆς ἐπιφανείας παριστάνουν περιστροφὰς καὶ προβολὰς παραμ. ταχυτήτων***, οἱ τύποι καταντοῦν ἁπλοῖ καὶ εὔχρηστοι: οἱ (17) τοῦτο ὅμως ***δὲν εἰμπορεῖ*** νὰ ὑποτεθῇ, ὅταν τὸ δίκτυον ***δὲν εἶναι*** ὀρθογώνιον).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ′.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ φ, φ_1 ΚΑΙ φ_2.—ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ LIOUVILLE.

α′) Τύποι ἀναφερόμενοι εἰς πλαγιογώνιον παραμετρικὸν δίκτυον.

Αἱ σχέσεις τοῦ *Gauss* καὶ αἱ τῶν *Mainardi—Codazzi*.

44. ***Ἔκφρασις τοῦ γραμμικοῦ στοιχείου.*** — Ἂν ὀνομάσωμεν φ τὴν γωνίαν τῶν δύο ***παραμετρικῶν*** ἐφαπτομένων, εἰμποροῦμεν νὰ γράψωμεν τὸ γραμμικὸν στοιχεῖον τῆς ἐπιφανείας (καθὼς φαίνεται ἀπὸ τὸ ***εὐθύγραμμον*** τρίγωνον μὲ πλευρὰς ds_1, ds_2 καὶ ds) ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$ds^2 = E_1{}^2du_1{}^2 + 2E_1E_2\sigma\upsilon\nu\varphi\, du_1du_2 + E_2{}^2du_2{}^2. \quad (55)$$

Διὰ νὰ ὁρισθῇ δὲ καὶ ἡ θέσις τῶν κινητῶν ἀξόνων Mx καὶ My ἐπὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου, ἀρκεῖ νὰ δοθῇ ἡ γωνία φ_1 τοῦ ἄξ. Mx μὲ τὴν ἐφαπτομένην τῆς παραμετρικῆς γραμμῆς $u_2 = c_2$, δηλ. μὲ τὸ ***παραμετρικὸν*** γραμμικὸν στοιχεῖον $E_1du_1 \equiv ds_1$· ἂν δὲ ἀκόμη ὀνομάσωμεν φ_2 τὴν γωνίαν τοῦ ἰδίου ἄξονος μὲ τὸ ἄλλο παραμετρικὸν γραμ. στοιπροθ. $A_1 u'_1 = E_1 u'_1$ συνφ, κ.τ.λ.

χεῖον $E_2 du_2 = ds_2$, θὰ ἔχωμεν : συν$(\varphi_2 - \varphi_1)$ = συνφ. Τότε θὰ εἶναι προφανῶς :

(56) $A_1 = E_1$συνφ_1, $B_1 = E_1$ημφ_1, $A_2 = E_2$συνφ_2, $B_2 = E_2$ημφ_2·

45. ***Θεμελιώδεις σχέσεις.*** — Ἀπὸ τὰς θεμελιώδεις σχέσεις (17) αἱ τρεῖς τελευταῖαι λαμβάνουν, ὕστερ' ἀπὸ ὀλίγας πράξεις, τὴν μορφήν :

$$(57)\left\{\begin{aligned} r_1 &= -\frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} - \frac{1}{E_2 \text{ημφ}}\left(\frac{\partial E_1}{\partial u_2} - \frac{\partial E_2}{\partial u_1}\text{συνφ}\right), \\ r_2 &= -\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} - \frac{1}{E_1 \text{ημφ}}\left(\frac{\partial E_2}{\partial u_1} - \frac{\partial E_1}{\partial u_2}\text{συνφ}\right), \\ E_1(p_2 \text{ημ}\varphi_1 - q_2 \text{συν}\varphi_1) &= E_2(p_1 \text{ημ}\varphi_2 - q_1 \text{συν}\varphi_2). \end{aligned}\right.$$

46. ***Σχέσεις μεταξὺ u'_1, u'_2 καὶ ω.*** — Οἱ τύποι (30) γίνονται τώρα :

$$(58)\left\{\begin{aligned} ds\,\text{συν}\omega &= E_1 \text{συν}\varphi_1 du_1 + E_2 \text{συν}\varphi_2 du_2, \\ ds\,\text{ημ}\omega &= E_1 \text{ημ}\varphi_1 du_1 + E_2 \text{ημ}\varphi_2 du_2 \cdot \end{aligned}\right.$$

καὶ ἑπομένως εἶναι καί :

$$E_1 u'_1 = \frac{\text{ημ}(\varphi_2 - \omega)}{\text{ημφ}}, \qquad E_2 u'_2 = \frac{\text{ημ}(\omega - \varphi_1)}{\text{ημφ}}. \qquad (59)$$

47. ***Γωνία δύο καμπύλων (μὲ γωνίας ω καὶ ω').*** — Αὐτὴ δίδεται ἀπὸ τοὺς τύπους :

$$(60)\left\{\begin{aligned} \text{συν}(\omega - \omega') &= \frac{E_1^2 du_1 \delta u_1 + E_1 E_2 \text{συνφ}(du_1 \delta u_2 + du_2 \delta u_1) + E_2^2 du_2 \delta u_2}{ds\delta s} \\ \text{ημ}(\omega - \omega') &= \frac{E_1 E_2 \text{ημφ}(du_2 \delta u_1 - du_1 \delta u_2)}{ds\delta s}, \end{aligned}\right.$$

ἀπὸ τοὺς ὁποίους βλέπομεν, ὅτι : ***Ἡ γωνία ω—ω' μένει ἀναλλοίωτος κατὰ τὴν κάμψιν τῆς ἐπιφανείας*** (ἀφοῦ ἐξαρτᾶται ***μόνον*** ἀπὸ τὸ γραμμικὸν στοιχεῖον (δηλ. ἀπὸ τὰ E_1, E_2 καὶ φ).

48. ***Συζυγεῖς διευθύνσεις καὶ ἀσυμπτωτικαὶ γραμμαί.*** — Αἱ σχέσεις (35'') καὶ (48') γίνονται τώρα :

$$(61)\quad \begin{aligned} &E_1(q_1 \text{συν}\varphi_1 - p_1 \text{ημ}\varphi_1)du_1\delta u_1 + E_1(q_2 \text{συν}\varphi_1 - p_2 \text{ημ}\varphi_1)du_2\delta u_1 + \\ &+ E_2(q_1 \text{συν}\varphi_2 - p_1 \text{ημ}\varphi_2)du_1\delta u_2 + E_2(q_2 \text{συν}\varphi_2 - p_2 \text{ημ}\varphi_2)du_2\delta u_2 = 0, \end{aligned}$$

$$(62)\left\{\begin{aligned} &E_1(q_1 \text{συν}\varphi_1 - p_1 \text{ημ}\varphi_1)\,du_1^2 + \\ &+ [E_1(q_2 \text{συν}\varphi_1 - p_2 \text{ημ}\varphi_1) + E_2(q_1 \text{συν}\varphi_2 - p_1 \text{ημ}\varphi_2)]du_1 du_2 + \\ &+ E_2(q_2 \text{συν}\varphi_2 - p_2 \text{ημ}\varphi_2)du_2^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

49. ***Γραμμαὶ καμπυλότητος.***— Αἱ ἐξισώσεις των (ἐδ. 36, (α)) γίνονται τώρα :

$$(63)\quad \begin{cases} E_1 συνφ_1 du_1 + E_2 συνφ_2 du_2 + (q_1 du_1 + q_2 du_2).\delta = 0, \\ E_1 ημφ_1 du_1 + E_2 ημφ_2 du_2 - (p_1 du_1 + p_2 du_2).\delta = 0. \end{cases}$$

καὶ ἐπομένως ἡ (46) λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$E_1(p_1 συνφ_1 + q_1 ημφ_1) du_1^2 + E_2(p_2 συνφ_2 + q_2 ημφ_2) du_2^2 + \\ + [E_1(p_2 συνφ_1 + q_2 ημφ_1) + E_2(p_1 συνφ_2 + q_1 ημφ_2)] du_1 du_2 = 0. \quad (64)$$

β') Τύπος τοῦ *Liouville.*

50. ***Τύπος τοῦ Liouville (Λιουβίλλ).***—Ἡ ἐξίσωσις (47), ποὺ δίδει τὰς πρωτευούσας ἀκτῖνας, θὰ γίνῃ τώρα :

$$\delta^2(p_1 q_2 - p_2 q_1) - \delta[E_1(p_2 συνφ_1 + q_2 ημφ_1) - E_2(p_1 συνφ_2 + q_1 ημφ_2)] + \\ + E_1 E_2 ημφ = 0 \quad (65)$$

θὰ ἔχωμεν λοιπόν :

$$(66)\quad \begin{cases} E_1 E_2 ημφ\left(\dfrac{1}{P_1} + \dfrac{1}{P_2}\right) = E_1(p_2 συνφ_1 + q_2 ημφ_1) - \\ \qquad\qquad - E_2(p_1 συνφ_2 + q_1 ημφ_2), \\ \text{καί :} \quad \dfrac{E_1 E_2 ημφ}{P_1 P_2} = p_1 q_2 - p_2 q_1. \end{cases}$$

καὶ ἂν εἰς τὸν β' τύπον θέσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ $p_1 q_2 - p_2 q_1$ ἀπὸ τὸν 3ον ἀπὸ τοὺς τύπους (17), εὑρίσκομεν :

$$\frac{E_1 E_2 ημφ}{P_1 P_2} = \frac{\partial r_1}{\partial u_2} - \frac{\partial r_2}{\partial u_1},$$

ἢ καί, κατὰ τὸν 1ον καὶ 2ον ἀπὸ τοὺς τύπους (57) :

$$\frac{E_1 E_2 ημφ}{P_1 P_2} = -\frac{\partial^2 φ}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{\partial}{\partial u_1}\left[\frac{\dfrac{\partial E_2}{\partial u_1} - \dfrac{\partial E_1}{\partial u_2} συνφ}{E_1 ημφ}\right] - \\ - \frac{\partial}{\partial u_2}\left[\frac{\dfrac{\partial E_1}{\partial u_2} - \dfrac{\partial E_2}{\partial u_1} συνφ}{E_2 ημφ}\right], \quad (67)$$

δηλ. ***τὸν «τύπον τοῦ Liouville»*** (Πρβλ. ***Θεωρ. Ἐπιφ. Ν. Χατζ., τύπ. (44 α΄΄)***, σελ. 95 κ. 105, ὅπου ἀντὶ κu, κv πρέπει νὰ γραφῇ γu, γv).

51. ***Θεώρημα «ὑπέροχον» τοῦ Gauss.***—Αὐτό, δηλ. ὅτι ἡ ***ὁλικὴ καμπυλότης*** $\frac{1}{P_1P_2}$ ***τῆς ἐπιφανείας μένει ἀναλλοίωτος κατὰ τὴν κάμψιν της***, φαίνεται ἀμέσως ἀπὸ τὸν τύπον τοῦ Liouville, ποὺ μᾶς δίδει τὸ $\frac{1}{P_1P_2}$ μὲ τὰ θεμελιώδη ποσὰ ***τῆς α΄ μόνον τάξεως*** (Πρβλ. ***Θεωρ. Ἐπιφ. Ν. Χατζ., ἐδ. 48***).

γ΄) Τύποι δι' ὀρθογώνιον παραμετρικὸν δίκτυον.

52. ***Ὀρθογώνιον παραμετρικὸν δίκτυον.***—Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἂν λάβωμεν ὡς ἄξονας Mx, My ***τὰς ἐφαπτομένας τῶν παραμετρικῶν γραμμῶν***, θὰ ἔχωμεν: $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\frac{\pi}{2}$ καὶ $\varphi=\frac{\pi}{2}$. καὶ οἱ προηγ. τύποι ***ἁπλοποιοῦνται πολύ***, καθὼς εἰς τὰ ἑπόμενα ἐδάφια κατὰ σειρὰν δεικνύομεν.

53. ***Θεμελιώδεις τύποι.***—Οἱ 3 πρῶτοι μένουν πάντοτε οἱ ἴδιοι, οἱ δὲ τρεῖς ἄλλοι γίνονται:

$$E_1q_2+E_2p_1=0,\quad \mathbf{r}_1=-\frac{1}{E_2}\cdot\frac{\partial E_1}{\partial u_2},\quad \mathbf{r}_2=\frac{1}{E_1}\cdot\frac{\partial E_2}{\partial u_1}\qquad (68)$$

καὶ συμπίπτουν (πλὴν τῆς γραφῆς) πρὸς τοὺς τῶν *Mainardi-Codazzi*.

54. ***Ἐκφράσεις τῶν ἀπειροστῶν μετατοπίσεων καὶ τῆς γωνίας ω:***

$$(69)\quad \left\{\begin{aligned} &dx+E_1du_1+(q_1du_1+q_2du_2)z-(r_1du_1+\mathbf{r}_2du_2)y,\\ &dy+E_2du_2+(r_1du_1+r_2du_2)x-(p_1du_1+p_2du_2)z,\\ &\qquad dz+(p_1du_1+p_2du_2)y-(q_1du_1+q_2du_2)x.\end{aligned}\right.$$

$$(70)\quad \sigma\upsilon\nu\omega=E_1u_1',\qquad \eta\mu\omega=E_2u_2'.$$

55. ***Ἐξισώσεις τῶν γραμμῶν καμπυλότητος:***

$$\left.\begin{aligned} &E_1du_1+\delta(q_1du_1+q_2du_2)=0,\qquad E_2du_2-\delta(p_1du_1+p_2du_2)=0,\\ &\text{καὶ}\quad E_1p_1du_1{}^2+E_2q_2du_2{}^2+(E_1p_2+E_2q_1)du_1du_2=0.\end{aligned}\right\}\ (71)$$

56. ***Ἐξίσωσις τῶν πρωτευουσῶν ἀκτίνων καὶ ἔκφρασις τῆς ὁλικῆς καμπυλότητος :***

$$\delta^2\left(\frac{\partial r_1}{\partial u_2}-\frac{\partial r_2}{\partial u_1}\right)-\delta\left(E_1p_2-E_2q_1\right)+E_1E_2=0. \quad (72)$$

$$\frac{E_1E_2}{P_1P_2}=\frac{\partial r_1}{\partial u_2}-\frac{\partial r_2}{\partial u_1}\equiv-\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{1}{E_1}\cdot\frac{\partial E_2}{\partial u_1}\right)-\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{1}{E_2}\cdot\frac{\partial E_1}{\partial u_2}\right). \quad (73)$$

57. ***Σχέσις συζυγῶν ἐφαπτομένων καὶ σχέσις ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν :***

$$E_1q_1du_1\delta u_1-E_2p_2du_2\delta u_2+E_1q_2du_1\delta u_2-E_2p_1du_2\delta u_1=0. \quad (74)$$

$$E_1q_1du_1{}^2-E_2p_2du_2{}^2+(E_1q_2-E_2p_1)du_1du_2=0. \quad (75)$$

δ΄) Τύποι μὲ παραμετρικὸν δίκτυον τὰς γραμμὰς καμπυλότητος.

58. ***Ἐξίσωσις τῶν γραμμῶν καμπυλότητος.—Τύποι*** *Mainardi-Codazzi.*—Θὰ εἶναι τότε : $du_1du_2=0$, ἑπομένως (τύπ. 66) :

$$p_1=q_2=0. \quad (76)$$

Οἱ δὲ τύποι τῶν *Mainardi—Codazzi* γίνονται :

$$r_1=-\frac{1}{E_2}\cdot\frac{\partial E_1}{\partial u_2},\quad r_2=\frac{1}{E_1}\cdot\frac{\partial E_2}{\partial u_1},\quad \frac{\partial p_2}{\partial u_1}=-q_1r_2,\quad \frac{\partial q_1}{\partial u_2}=r_1p_2,$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial u_2}-\frac{\partial r_2}{\partial u_1}=-p_2q_1. \quad (77)$$

Ἔχουν δηλ. μηδενισθῆ τότε 6 ἀπὸ τὰς 12 μεταφορὰς καὶ περιστροφὰς τοῦ κινητοῦ τριέδρου (T), τὸ ὁποῖον τώρα, ***ποὺ ἔχει ἄξ. τῶν x καὶ y τὰς πρωτευούσας ἐφαπτομένας,*** λέγεται «***πρωτεῦον τρίεδρον***» τῆς ἐπιφανείας. Ἔχομεν δηλ. τώρα :

$$\Gamma_1=0,\quad \Gamma_2=0,\quad A_2=0,\quad B_1=0,\quad p_1=0,\quad q_2=0.$$

59. ***Περιορισμὸς τῆς ἐκφράσεως τοῦ γραμμικοῦ στοιχείου εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν.***—Ἂν ἀπὸ τὰς 5 ἐξισώσεις (77) ἀπαλείψωμεν τὰς ***4 μόνον τώρα*** περιστροφάς : p_2, q_1, r_1, r_2, θὰ παραχθῇ μία ***διαφορικὴ σχέσις*** μεταξὺ τῶν E_1 καὶ E_2· ***δὲν εἰμποροῦμεν λοιπὸν νὰ ἐκλέξωμεν αὐθαιρέτως τὴν ἔκφρασιν τοῦ γραμμικοῦ στοιχείου***

μιᾶς ἐπιφανείας, ὅταν παραμετρικαὶ γραμμαί της εἶναι αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος.

60. ***Πρωτεύουσαι ἀκτῖνες καὶ ὁλικὴ καμπυλότης*** :

$$P_1 = -\frac{E_1}{q_1},\quad P_2 = \frac{E_2}{p_2}.\ (78)\ \text{καὶ}:\ K = \frac{1}{P_1P_2} = -\frac{q_1p_2}{E_1E_2}.\ (79)$$

61. ***Γραμμικὸν στοιχεῖον τῆς ἐπιφανείας καὶ τῆς σφαιρικῆς ἀπεικονίσεώς της*** : $ds^2 = P_1^2q_1^2du_1^2 + P_2^2p_2^2du_2^2$. (80)

$$d\sigma^2 = q_1^2du_1^2 + p_2^2du_2^2.\quad (81)$$

Εἶναι δηλ. ἡ γωνία τῶν ἀπεικονίσεων τῶν γραμμῶν καμπυλότητος ὀρθή. (Φανερὸν καὶ ἀπὸ τὴν παραλληλίαν τῆς γραμμῆς καμπυλότητος πρὸς τὴν ἀπεικόνισίν της (ἐδ. 36).

62. ***Ἐξίσωσις τῶν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν*** :

$$(82)\quad E_1q_1du_1^2 = E_2p_2du_2^2,$$

ἢ καί: $\dfrac{\text{συν}^2\omega}{P_1} + \dfrac{\text{ημ}^2\omega}{P_2} = 0$ (πρβλ. ***Θεωρ. Ἐπιφ. Ν. Χατζ.***, σ. 37, Σημ.)˙

63. ***Περιορισμὸς τῶν ἐκφράσεων τῶν P_1 καὶ P_2.***—Ἂν εἰς τὰς σχέσεις (77) θέσωμεν τὰς τιμὰς τῶν E_1, E_2 μὲ τὰ P_1, P_2 (78), εὑρίσκομεν :

$$\frac{\partial P_1}{\partial u_2} = \frac{1}{q_1}\cdot\frac{\partial q_1}{\partial u_2}(P_2 - P_1),\quad \frac{\partial P_2}{\partial u_1} = -\frac{1}{p_2}\cdot\frac{\partial p_2}{\partial u_1}(P_2 - P_1).\quad (83)$$

Ἐπειδὴ δὲ ἀπὸ τὰς ἰδίας σχέσεις (77) παράγεται ἡ ἑξῆς :

$$\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{1}{p_2}\cdot\frac{\partial q_1}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{1}{q_1}\cdot\frac{\partial p_2}{\partial u_1}\right) + q_1p_2 = 0,\quad (84)$$

δηλ. ***μία διαφορικὴ σχέσις μεταξὺ τῶν p_2 καὶ q_1***, συνάγομεν, ὅτι : ***Εἶναι ἀδύνατον τώρα νὰ λάβωμεν ὡς P_1 καὶ P_2 δύο τυχούσας συναρτήσεις τῶν u_1 καὶ u_2.***

64. ***Ἀπειροσταὶ μετατοπίσεις.***—Αὐταὶ τώρα γίνονται :

$$(85)\left\{\begin{array}{l} dx + E_1du_1 + q_1zdu_1 - (r_1du_1 + r_2du_2)y,\\ dy + E_2du_2 + (r_1du_1 + r_2du_2)x - p_2zdu_2,\\ dz + p_2ydu_2 - q_1xdu_1. \end{array}\right.$$

ε΄) Αἱ μηδενικαὶ γραμμαὶ ὡς παραμετρικὸν δίκτυον.

65. ***Μηδενικαὶ γραμμαί***.—Τὸ ds^2 **δὲν εἰμπορεῖ** προφανῶς νὰ λάβῃ τὴν μορφὴν Fdu_1du_2 διὰ **πραγματικὰς** συντεταγμένας καὶ **πραγματικὰς** παραμέτρους (διότι τὰ A_1, B_1, A_2, B_2, ἑπομένως καὶ τὰ E_1, E_2, δὲν εἰμποροῦν νὰ μηδενισθοῦν συγχρόνως ὅλα παρὰ διὰ $x=c_1$, $y=c_2$, $z=c_3$, δηλ. δι᾿ ἓν **σημεῖον** ὡς ἐπιφάνειαν). Διὰ **φανταστικὰς** ὅμως παραμέτρους **εἰμπορεῖ** τὸ γραμμικὸν στοιχεῖον νὰ λάβῃ τὴν μορφήν: $Fdu_1du_2 = 4\lambda^2 du_1du_2$ (86). Τότε αἱ παραμετρικαὶ γραμμαὶ $u_1=c_1$ καὶ $u_2=c_2$ εἶναι **φανταστικαὶ** καὶ λέγονται **«μηδενικαὶ»** (διότι $ds_1=ds_2=0$). (Πρβλ. ***Θεωρ. Ἐπιφ. Ν. Χατζ., ἐδ. 18***). Λαμβάνομεν τότε ὡς ἄξ. τῶν x τὴν ἐφαπτομένην τῆς γραμμῆς $u-v=c_1$ καὶ τῶν y τὴν (κάθετον πρὸς τὴν προηγουμένην) ἐφαπτομένην τῆς $u+v=c_2$. Τότε: $\quad A_1 - A_2 = 0,\ B_1 + B_2 = 0$ (87)
καὶ ἐπειδή:

$$ds^2 = 4\lambda^2 du_1du_2 = (A_1du_1 + A_2du_2)^2 + (B_1du_1 + B_2du_2)^2 = $$
$$= A_1^2(du_1 + du_2)^2 + B_1^2(du_1 - du_2)^2,$$

θὰ εἶναι: $\quad A_1^2 + B_1^2 = 0,\quad A_1^2 - B_1^2 = 2\lambda^2.$ (88).

Εἰμποροῦμεν λοιπὸν νὰ λάβωμεν:

$A_1 = \lambda,\quad B_1 = -\lambda i$ τότε δὲ θὰ εἶναι καί: $A_2 = \lambda,\quad B_2 = +\lambda i.$ (89)

66. ***Ἐξισώσεις τῶν Mainardi—Codazzi***.—Αἱ 3 πρῶται μένουν αἱ γενικαί, αἱ δὲ τρεῖς ἄλλαι γίνονται τότε:

$$p_1 + p_2 = i(q_2 - q_1),\qquad \mathbf{r}_1 = -i\frac{\partial \log\lambda}{\partial u_1},\qquad \mathbf{r}_2 = +i\frac{\partial \log\lambda}{\partial u_2}. \quad (90)$$

67. ***Ἀπειροσταὶ μετατοπίσεις***.—

$$(91)\begin{cases} dx + \lambda(du_1 + du_2) + (q_1du_1 + q_2du_2)z - (\mathbf{r}_1du_1 + \mathbf{r}_2du_2)y, \\ dy + i\lambda(du_2 - du_1) + (\mathbf{r}_1du_1 + \mathbf{r}_2du_2)x - (p_1du_1 + p_2du_2)z, \\ dz \qquad\qquad + (p_1du_1 + p_2du_2)y - (q_1du_1 + q_2du_2)x. \end{cases}$$

68. ***Ἀσυμπτωτικαὶ γραμμαί***.—

$(q_1 + ip_1)du_1^2 + (q_2 - ip_2)du_2^2 + (ip_2 - ip_1 + q_1 + q_2)du_1du_2 = 0$ (92).

69. ***Πρωτεύουσαι ἀκτῖνες***.— (93)

$$\varrho^2(p_1q_2 - p_2q_1) - \lambda\varrho(p_2 - p_1 - iq_1 - iq_2) + 2i\lambda^2 = 0,\qquad \frac{1}{P_1P_2} = -\frac{1}{\lambda^2}\cdot\frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial u_1 \partial u_2}.$$

70. ***Γραμμαὶ καμπυλότ***.—$du_1^2(p_1 - iq_1) + du_2^2(p_2 + iq_2) = 0.$ (94)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΕΝΕΙΛΙΓΜΕΝΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

α΄) Ἐξισώσεις καὶ στοιχειώδεις ἰδιότητές της.

71. ***Ἐνειλιγμένη ἐπιφάνεια (E$_1$) μιᾶς δοθείσης ἐπιφανείας (E) λέγεται ἡ δίχωνος ἐπιφάνεια τῶν πρωτευόντων κέντρων καμπυλότητος τῆς (E)*** (ποὺ λέγεται ***ἐξειλιγμένη*** τῆς (E$_1$)).—Αἱ ἐξισώσεις της (πρὸς τοὺς ἀκινήτους ἄξονας) εἶναι:

(95) $x_k = x + lP_k, \quad y_k = y + mP_k, \quad z_k = z + nP_k \quad (k=1,2).$

Ὡς παραμετρικὸν δὲ δίκτυον ἐπὶ τῆς (E) λαμβάνομεν τὸ ὀρθογώνιον δίκτυον τῶν γραμμῶν καμπυλότητος.

72. ***Στοιχειώδεις ἰδιότητες*** — Ἀπὸ τὰς γνωστάς μας ἰδιότητας ***(N. Χατζιδάκη, Σμήνη καὶ Συμπλέγματα, σελ. 47—50)*** συνάγομεν ἀμέσως, ὅτι:

1) ***Κατὰ τὴν ἀντιστοίχησιν τῶν δύο χωνῶν (X$_1$) καὶ (X$_2$) αἱ γεωδαισιακαὶ γραμμαὶ (γ$_2$) τῆς χώνης (X$_2$) (αἱ ἀντίστοιχοι τῆς σειρᾶς τῶν γραμμῶν καμπυλότητος, ποὺ παράγει τὴν (X$_2$)) ἔχουν ἀντιστοίχους εἰς τὴν χώνην (X$_1$) τὰς συζυγεῖς (σ$_1$) τῶν γεωδαισιακῶν (γ$_1$) τῆς (X$_1$)*** (τῶν ἀντιστοίχων τῆς ἄλλης σειρᾶς τῶν γραμμῶν καμπυλότητος)· ***ὁμοίως δὲ αἱ (γ$_1$) τῆς (X$_1$) ἔχουν ἀντιστοίχους τὰς συζυγεῖς (σ$_2$) τῶν (γ$_2$) τῆς (X$_2$)***.

2) Ὅταν διατρέχωμεν μίαν γραμμὴν καμπυλότητος τῆς σειρᾶς (Γ$_1$), δύο ***ἀπείρως γειτονικὰ*** ἐπίπεδα κάθετα πρὸς τὴν γραμμὴν αὐτὴν ἐφάπτονται τῆς χώνης (X$_1$) καὶ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς κεῖνται ἐπὶ τῆς γεωδαισιακῆς (γ$_1$), ποὺ περνᾷ ἀπὸ τὸ M$_1$. Ἔχουν λοιπὸν τὰ δύο ἐπίπεδα ὡς τομὴν τὴν εἰς τὸ M$_1$ ἐφαπτομένην τῆς γραμμῆς (σ$_1$), ποὺ περνᾷ ἀπὸ τὸ M$_1$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ τομὴ αὐτὴ εἶναι προφανῶς ***ὁ ἄξων καμπυλότητος*** τῆς γραμμῆς καμπυλότητος (Γ$_1$) εἰς τὸ M, ἑπομένως ***κάθετος πρὸς τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον τῆς (Γ$_1$) εἰς τὸ M***, ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ ἡ ἐφαπτομένη τῆς (γ$_1$) εἶναι ***ἡ κάθετος τῆς (E) εἰς τὸ M***, συνάγομεν, ὅτι:

Ἡ γωνία τῶν δύο γραμμῶν (σ$_k$) καὶ (γ$_k$), ποὺ κόπτονται εἰς ἓν σημεῖον M$_k$ μιᾶς ἀπὸ τὰς δύο χώνας, εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν, ποὺ σχηματίζουν, εἰς τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον M τῆς (E), τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον τῆς οἰκείας γραμμῆς καμπυλότητος καὶ τὸ ἐφα-

πτόμενον τῆς (Ε). Ἡ δὲ ἐφαπτομένη τῆς (σ_κ) εἶναι ὁ ἄξων καμπυλότητος τῆς γραμμῆς αὐτῆς καμπυλότητος.

β') Χώνη (X_1).

73. ***Θεμελιώδη κινητικὰ ποσά της.*** — Ἂν θεωρήσωμεν εἰς τὰ δύο ἀντίστοιχα σημεῖα M_1 τῆς (X_1) καὶ M_2 τῆς (X_2) ἀνὰ ἓν τρίεδρον παράλληλον πρὸς τὸ τρίεδρον (Τ) τῆς ἐξειλιγμένης (Ε) εἰς τὸ Μ, τὰ (T_1) καὶ (T_2), ***θὰ ἔχουν καὶ αὐτὰ προφανῶς τὰς ἰδίας περιστροφὰς καὶ καθενὸς μία ἕδρα ἐφάπτεται τῆς ἐπιφανείας, ποὺ γράφει ἡ κορυφή του.***

Ἂς λάβωμεν πρῶτα τὸ (T_1). Τὸ σημεῖον (M_1) ἔχει συντεταγμένας πρὸς τὸ (Τ) : $0, 0, P_1$· ὥστε ἡ ***μετατόπισίς*** του θὰ ἔχῃ προβολὰς ἐπὶ τῶν ἀξόνων τοῦ (Τ), ἢ καὶ τοῦ (T_1), κατὰ τοὺς τύπους (α) τῆς σελ. 25 (ὅπου τώρα : $A_2=B_1=0$) :

$$(A_1+q_1P_1)du_1, \quad (B_2-p_2P_1)du_2, \quad dP_1$$

(διότι τῶν γραμμῶν καμπυλότητος αἱ γεωδαισιακαὶ στρέψεις εἶναι $=0$· καὶ ἑπομένως, ἀφοῦ εἶναι καὶ παραμετρικαί, θὰ εἶναι $q_2=0$ καὶ $p_1=0$, πρβλ. καὶ ἐδ. 58) ἤ, ἂν θέσωμεν τὰς τιμὰς τῶν A_1, B_2 (τύπ. 18) :

$$0, \ p_2(P_2-P_1)du_2, \quad dP_1.$$

Αἱ 6 λοιπὸν «***μεταφοραὶ***» (δηλ. αἱ προβολαὶ τῶν παραμετρικῶν «ταχυτήτων» τῆς ἀρχῆς M_1 τοῦ (T_1)) : A'_1, B'_1, Γ'_1, A'_2, B'_2, Γ'_2 εἶναι:

$$(96)\ A'_1=0,\ B'_1=0, \Gamma'_1=\frac{\partial P_1}{\partial u_1}, \quad A'_2=0,\ B'_2=p_2(P_2-P_1),\ \Gamma'_2=\frac{\partial P_1}{\partial u_2}.$$

Ἀφ' ἑτέρου αἱ περιστροφαὶ τοῦ (T_1) εἶναι προφανῶς αἱ τοῦ (Τ), δηλ. $\qquad p_1=0,\ q_1,\ r_1$· $\quad p_2,\ q_2=0,\ r_2$· $\quad$ (97).

74. ***Τύποι διὰ τὴν χώνην (X_1).*** — Ὡς πρὸς τοὺς τύπους, ποὺ ἀναφέρονται εἰς τὴν χώνην (X_1), παρατηροῦμεν, ὅτι ἰσχύουν καὶ δι' αὐτὴν οἱ γενικοὶ τύποι διὰ κάθε ἐπιφάνειαν· πρέπει ὅμως νὰ γίνῃ ἡ ἑξῆς ἀναγκαία ἀλλαγή : ***νὰ τραποῦν κυκλικῶς καὶ αἱ μεταφοραὶ καὶ αἱ περιστροφαί· δηλ. νὰ μετατραποῦν τὰ ὀνόματα τῶν ἀξόνων x,y,z κυκλικῶς εἰς y, z καὶ x.*** Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τότε τὴν ἑξῆς σειρὰν ἐξαγομένων.

75. ***Γωνία ω_1 μιᾶς καμπύλης τῆς (X_1) μὲ τὸν ἄξ. y τοῦ (T_1), ἢ τοῦ (Τ).*** — Θὰ ἔχωμεν τώρα (ἐδ. 23) :

$$(98)\quad ds_1 . \sigma\upsilon\nu\omega_1 = B'_1 du_1 + B'_2 du_2 = p_2(P_2 - P_1) du_2,$$

$$ds_1 . \eta\mu\omega_1 = \Gamma'_1 du_1 + \Gamma'_2 du_2 = dP_1 \text{ καὶ } ds_1^2 = dP_1^2 + p_2^2 (P_2 - P_1)^2 . du_2^2.$$

76. ***Κάθετος καμπυλότης μιᾶς καμπύλης τῆς (X₁)***.—Κατὰ τὸ ἐδ. 28 θὰ εἶναι :

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\tilde{\omega}_1}{\varrho_1} ds_1 = \eta\mu\omega_1 (q_1 du_1 + q_2 du_2) - \sigma\upsilon\nu\omega_1 (r_1 du_1 + r_2 du_2),$$

(99)

$$\delta\eta\lambda.\ (\text{τύπος } 83):\ \frac{\sigma\upsilon\nu\tilde{\omega}_1}{\varrho_1} ds^2_1 = \frac{q_1}{r_1}\left(\frac{\partial P_1}{\partial u_1} r_1 du_1^2 - \frac{\partial P_1}{\partial u_2} r_2 du_2^2 \right).$$

Καὶ ἑπομένως ἡ ***ἐξίσωσις τῶν ἀσυμπτωτικῶν*** θὰ εἶναι :

$$(100)\qquad r_1 \frac{\partial P_1}{\partial u_1} du_1^2 = r_2 \frac{\partial P_1}{\partial u_2} du_2^2.$$

(Στερεῖται τοῦ ὅρου μὲ $du_1 du_2$· καὶ ***ἔπρεπε*** νὰ στερεῖται, ἀφοῦ αἱ παραμετρικαὶ γραμμαὶ εἶναι συζυγεῖς). — Σχέσις μεταξὺ δύο ***συζυγῶν*** διευθύνσεων :

$$(101)\qquad r_1 \frac{\partial P_1}{\partial u_1} du_1 \delta u_1 = r_2 \frac{\partial P_1}{\partial u_2} du_2 \delta u_2.$$

77. ***Γραμμαὶ καμπυλότητος τῆς (X₁)***.—Θὰ ἔχωμεν (ἐδ. 36, ἐξισ. (α)) διὰ τὴν P′ τῆς (X₁) τὰς ἐξισώσεις :

$$p_2(P_2 - P_1) du_2 + P'(r_1 du_1 + r_2 du_2) = 0, \quad dP - P' q_1 du_1 = 0.$$

Ἡ ἀπαλοιφὴ τοῦ λόγου $\frac{du_1}{du_2}$ μᾶς δίδει τὴν ἐξίσωσιν τῶν πρωτευουσῶν ἀκτίνων P_1', P_2' τῆς (X₁) : (102)

$$q_1 r_2 P'^2 - \left[r_2 \frac{\partial P_1}{\partial u_1} - r_1 \frac{\partial P_1}{\partial u_2} + q_1 p_2 (P_1 - P_2) \right] . P' - \frac{\partial P_1}{\partial u_1} p_2 (P_2 - P_1) = 0.$$

Γινόμενον τῶν δύο ἀκτίνων : $P_1' P_2' = -(P_1 - P_2)^2 . \dfrac{\frac{\partial P_1}{\partial u_1}}{\frac{\partial P_2}{\partial u_1}}$. (103)

Ἡ δὲ ἀπαλοιφὴ τοῦ P′ μᾶς δίδει τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν τῶν γραμμῶν καμπυλότητος :

$$(104)\qquad p_2 q_1 (P_1 - P_2) du_1 du_2 = dP_1 (r_1 du_1 + r_2 du_2),\ \delta\eta\lambda.$$

$$r_1 \frac{\partial P_1}{\partial u_1} du_1^2 + r_2 \frac{\partial P_1}{\partial u_2} du_2^2 + \left[r_1 \frac{\partial P_1}{\partial u_2} + r_2 \frac{\partial P_1}{\partial u_1} + q_1 p_2 (P_2 - P_1) \right] du_1 du_2 = 0.$$

γ') Χώνη (X_2).

78. ***«Μεταφοραί» τῆς χώνης (X_2).***—Διὰ τὸ τρίεδρον (T_2) τῆς (X_2) θὰ εὕρωμεν ὁμοίως : (105)

$$A_1''=q_1(P_2-P_1),\ B_1''=0,\ \Gamma_1''=\frac{\partial P_2}{\partial u_1}\cdot\ A_2''=0,\ B_2''=0,\ \Gamma_2''=\frac{\partial P_2}{\partial u_2}.$$

Οἱ δὲ τύποι τῆς χώνης αὐτῆς θὰ εὑρεθοῦν προφανῶς, ἂν γίνῃ ***διπλῆ*** κυκλικὴ τροπὴ τῶν ἀξόνων, δηλ. ἂν τραποῦν οἱ ἄξονες x,y,z τοῦ (T) εἰς τοὺς z,x,y. Θὰ εὕρωμεν τότε τοὺς ἑξῆς τύπους τῆς (X_2):

79. 1) ***Γωνία ω_2 τοῦ ἄξ. z μὲ τὴν ἐφαπτομένην μιᾶς καμπύλης τῆς (X_2)*** :

$$\left.\begin{aligned} ds_2\,\text{συν}\omega_2=dP_2,\quad & ds_2\,\text{ημ}\omega_2=q_1(P_2-P_1)du_1,\\ ds_2^2=dP_2^2&+q_1^2(P_2-P_1)^2du_1^2. \end{aligned}\right\}(106)$$

2) ***Κάθετος καμπυλότης μιᾶς καμπύλης τῆς (X_2)*** :

$$\left.\begin{aligned} &ds_2\frac{\text{συν}\tilde{\omega}_2}{\varrho_2}=\text{ημ}\omega_2(r_1du_1+r_2du_2)-\text{συν}\omega_2p_2du_2,\\ &\text{ἢ (τύπος 83)}: ds_2^2\frac{\cos\tilde{\omega}_2}{\varrho_2}=\frac{p_2}{r_2}\left(r_1\frac{\partial P_2}{\partial u_1}du_1^2-r_2\frac{\partial P_2}{\partial u_2}du_2^2\right). \end{aligned}\right\}(107)$$

3) ***Διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν ἀσυμπτωτικῶν*** :

(108) $r_1\frac{\partial P_2}{\partial u_1}du_1^2=r_2\frac{\partial P_2}{\partial u_2}du_2^2$.—***Σχέσις συζυγῶν διευθύνσεων*** :

$$(109)\qquad r_1\frac{\partial P_2}{\partial u_1}du_1\delta u_1=r_2\frac{\partial P_2}{\partial u_2}du_2\delta u_2.$$

4) ***Γραμμαὶ καμπυλότητος τῆς (X_2).*** Ἔχομεν :

$$dP_2+P''p_2du_2=0,\qquad \left|\ q_1(P_2-P_1)du_1-P''(r_1du_1+r_2du_2)=0.\right.$$

$\left(P''_{(1,2)}\right.$ αἱ ἀκτῖνες τῆς $\left.(X_2)\right)$· καὶ ἑπομένως διαφορικὴ ἐξίσωσίς των :

$$(110)\quad dP_2(r_1du_1+r_2du_2)+q_1p_2(P_2-P_1)du_1du_2=0,$$

ἢ καί : (110')

$$r_1\frac{\partial P_2}{\partial u_1}du_1^2+r_2\frac{\partial P_2}{\partial u_2}du_2^2+\left[r_1\frac{\partial P_2}{\partial u_2}+r_2\frac{\partial P_2}{\partial u_1}+q_1p_2(P_2-P_1)\right]du_1du_2=0.$$

5) ***Ἐξίσωσις τῶν πρωτευουσῶν ἀκτίνων P''*** : (111)

$$r_1p_2P''^2-\left[r_2\frac{\partial P_2}{\partial u_1}-r_1\frac{\partial P_2}{\partial u_2}+q_1p_2(P_2-P_1)\right]P''-q_1(P_2-P_1)\frac{\partial P_2}{\partial u_2}=0.$$

6) ***Γινόμενον τῶν δύο ἀκτίνων:*** $P_1''.P_2'' = -(P_1 - P_2)^2 \dfrac{\dfrac{\partial P_2}{\partial u_2}}{\dfrac{\partial P_1}{\partial u_2}}$ (112).

δ') Πορίσματα τῶν προηγουμένων τύπων.

80. ***Ἐπαφαὶ δύο ἐπιφανειῶν καὶ ἀντίστοιχος ἐπαφὴ τῶν ἐνειλιγμένων των.***—Τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα εἰς δύο ἀντίστοιχα σημεῖα M_1 καὶ M_2 τῶν δύο χωνῶν (καθὼς καὶ τὰ ἴδια τὰ σημεῖα αὐτά) ἐξαρτῶνται ἀποκλειστικῶς ἀπὸ τὰ ***στοιχεῖα β' τάξεως*** τῆς (Ε). Ὥστε : ***Τὰ στοιχεῖα τῆς νοστῆς τάξεως τῶν δύο χωνῶν τῆς ἐνειλιγμένης εἰς δύο σημεῖα M_1, M_2 ἐξαρτῶνται ἀποκλειστικῶς ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τῆς ἐπιφανείας (Ε) εἰς τὸ Μ ἕως τὴν τάξιν ν+1.***

Δηλ. ***Ἂν δύο ἐπιφάνειαι ἔχουν εἰς ἓν σημεῖον Μ ἐπαφὴν τῆς τάξεως ν, αἱ δύο χῶναι τῶν ἐνειλιγμένων των θὰ ἔχουν, εἰς τ' ἀντίστοιχα σημεῖα, ἐπαφὴν τῆς τάξεως ν—1.*** Καὶ τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει : ***Ἂν δύο ἐπιφάνειαι ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον Μ καὶ αἱ ἐνειλιγμέναι των ἔχουν εἰς τ' ἀντίστοιχα σημεῖα M_1, M_2 ἐπαφὰς τάξεως ν, αἱ ἀρχικαὶ ἐπιφάνειαι ἔχουν εἰς τὸ Μ ἐπαφὴν τῆς ν+1 τάξεως.***

81. ***Σχέσεις μεταξὺ τῶν ὁμοταγῶν στοιχείων τῶν δύο χωνῶν τῆς ἐνειλιγμένης.*** —Αἱ συνθῆκαι τῆς ἐπαφῆς τάξεως μ γενικῶς δύο ἐπιφανειῶν εἶναι :
$\frac{(\mu+1)(\mu+2)}{2}$· ἑπομένως, ἂν μὲν ἐκφράσωμεν ἀπευθείας τὴν ἐπαφὴν τάξεως ν τῶν δύο ἐπιφανειῶν, θὰ ἔχωμεν $\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}$ ἐξισώσεις· ἂν δὲ ἐκφράσωμεν τὴν ἐπαφὴν τάξεως ν—1 τῶν δύο χωνῶν τῶν ἐνειλιγμένων των, θὰ ἔχωμεν $2\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ ἐξισώσεις. Καὶ ἐπειδὴ ὁ β' αὐτὸς ἀριθμὸς εἶναι, ἀπὸ τὴν τιμὴν 3 τοῦ ν καὶ πέραν, μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν α', συνάγομεν, ὅτι : ***Θὰ ὑπάρχουν κατ' ἀνάγκην σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων τῆς ἰδίας τάξεως τῶν δύο χωνῶν τῆς ἐνει-***

λιγμένης(1). Διὰ $\nu = 3$, αἱ σχέσεις αὗται λαμβάνουν ἁπλῆν ***γεωμετρικὴν*** μορφήν, ἂν θεωρήσωμεν τὸ «***παραβολοειδὲς τῶν ὀκτὼ εὐθειῶν*** » ***τῶν*** *Mannheim* ***καὶ*** *Ribaucour*.

ε΄) Παραβολοειδὲς τῶν *Mannheim—Ribaucour*.

82. ***Ἐξίσωσις τοῦ παραβολοειδοῦς.*** — Ἂς θεωρήσωμεν ἓν τρίεδρον (T') μὲ ἀρχὴν τὸ τυχὸν σημεῖον M' $(0, 0, z')$ τῆς καθέτου τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ M καὶ παράλληλον πρὸς τὸ ἀρχικὸν τρίεδρον (T) τῆς ἐπιφανείας. Καθόσον ὑποθέσωμεν τὸ $z'(\equiv MM')$ ἴσον κατὰ σειρὰν πρὸς 0, P_1, P_2, ἐπανευρίσκομεν τὰ τρία τρίεδρα (T), (T_1), (T_2). Ὅταν τώρα τὸ (T), ἑπομένως καὶ τὸ (T'), ὑποστῇ μίαν ἀπειροστὴν μετατόπισιν, ἡ κίνησις πρὸς τὸ (T) κάθε σημείου στερεῶς μὲ τὸ (T') συνδεομένου θὰ εἶναι ἁπλῶς μία μεταφορὰ dz' παράλληλος πρὸς τὸν ἄξ. Mz. Ἡ ***ἀπόλυτος*** λοιπὸν μετατόπισις κάθε σημείου $\Pi(x, y, z)$ στερεῶς μὲ τὸ (T') συνδεομένου θὰ ἔχῃ προβολάς :

$$A_1du_1+q_1zdu_1-(r_1du_1+r_2du_2)y=q_1(z-P_1)du_1-y(r_1du_1+r_2du_2),$$
$$B_2du_2+(r_1du_1+r_2du_2)x-p_2zdu_2=-p_2(z-P_2)du_2+x(r_1du_1+r_2du_2),$$
$$dz'+p_2ydu_2-q_1xdu_1.$$

Διὰ νὰ καταντήσῃ ἑπομένως ἡ κίνησις τοῦ τριέδρου (T') ***ἁπλῆ περιστροφή***, πρέπει ὁ στιγμιαῖος ἄξων ***ἑλικώσεως*** νὰ γίνῃ ἄ-

---

(1) Εἰς τὸ συμπέρασμα αὐτὸ φθάνομεν καὶ μὲ τὴν Διαφορικὴν Γεωμετρίαν, ὡς ἑξῆς. Ἂς εὕρωμεν τὴν δευτέραν χώνην (X_2), ὅταν ὑποθέσωμεν γνωστὴν τὴν πρώτην (X_1)· ἂν $z=\varphi(x, y)$, $z'=\varphi_1(x', y')$ εἶναι αἱ ἐξισώσεις τῶν δύο χωνῶν καὶ συντεταγμέναι δύο ἀντιστοίχων σημείων των αἱ (x, y, z) καὶ (x', y', z'), αἱ δύο χῶναι θὰ συνδέωνται μὲ τὰς προφανεῖς σχέσεις :
(α) $pp'+qq'+1=0$, $z-z'=p(x-x')+q(y-y')$, $z-z'=p'(x-x')+q'(y-y')$,

$$\text{ὅπου : } p\equiv\frac{\partial z}{\partial x}, \quad q\equiv\frac{\partial z}{\partial y}, \quad p'\equiv\frac{\partial z'}{\partial x'}, \quad q'\equiv\frac{\partial z'}{\partial y'}.$$

Ἂν τώρα μεταξὺ τῶν τριῶν αὐτῶν ἐξισώσεων ἀπαλείψωμεν τὰ x καὶ y, θὰ εὕρωμεν μίαν ἐξίσωσιν *εἰς μερικὰς παραγώγους τῆς α΄ τάξεως*, ποὺ θὰ ὁρίσῃ, κατὰ τὸ δυνατόν, τὴν β΄ χώνην.

Ἂν δὲ διαφορίσωμεν τὰς σχέσεις (α) μίαν φοράν, θὰ εὕρωμεν *δύο* σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων β΄ τάξεως τῶν δύο χωνῶν· κ. οὖ. καθ.

πλῶς ἄξων ***περιστροφῆς***· δηλ. νὰ ὑπάρχῃ μία εὐθεῖα γραμμή, ποὺ τὰ σημεῖά της νὰ εἶναι ἀκίνητα, καὶ ποὺ θὰ ἔχῃ ἑπομένως τὰς ἐξισώσεις :

$$(113)\quad \begin{cases} q_1(z-P_1)du_1 - y(r_1du_1+r_2du_2)=0, \\ p_2(z-P_2)du_2 - x(r_1du_1+r_2du_2)=0, \\ dz'+p_2ydu_2-q_1xdu_1=0. \end{cases}$$

Αἱ ἴδιαι δὲ αὐταὶ σχέσεις (113) ὁρίζουν προφανῶς ὅλας τὰς ἀπειροστὰς μετατοπίσεις τοῦ τριέδρου (T), ποὺ ἀποτελοῦνται ***ἀπὸ μίαν μεταφορὰν παράλληλον πρὸς τὴν κάθετον*** Mz ***καὶ ἀπὸ μίαν ἁπλῆν περιστροφήν.***

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (113) ἡ τρίτη ὁρίζει τὴν μεταφορὰν αὐτήν· αἱ δὲ δύο πρῶται τὸν ἄξονα τῆς περιστροφῆς, ποὺ ὑπάρχει ***εἰς κάθε μετατόπισιν.*** Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν μεταφορὰν dz' ἡ δίεδρος γωνία τῶν πρωτευόντων ἐπιπέδων xz καὶ yz ***ἁπλῶς ὀλισθαίνει ἐφ' ἑαυτῆς,*** αἱ δύο πρῶται ἐξισώσεις ἀπὸ τὰς (113) ὁρίζουν τοὺς ἄξονας τῶν περιστροφῶν, ***κατὰ τὰς ὁποίας ἡ δίεδρος γωνία τῶν πρωτευόντων ἐπιπέδων μεταβαίνει ἀπὸ μιᾶς θέσεως εἰς τὴν ἀπείρως γειτονικήν της.***

Ὁ τόπος τῶν ἀξόνων ὅλων αὐτῶν τῶν περιστροφῶν θὰ εὑρεθῇ, ἂν ἀπαλειφθῇ ὁ λόγος $\frac{du_1}{du_2}$ μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν ἐξισώσεων· εἶναι λοιπὸν τὸ παραβολοειδές :

$$(114)\qquad \frac{r_1y}{q_1(z-P_1)}+\frac{r_2x}{p_2(z-P_2)}=1.$$

83. Ἂς ἴδωμεν τώρα τὰς ὀκτὼ γενετείρας του, ποὺ τὰς εὕρηκε πρῶτος ὁ Mannheim ***(C. R. des S. de l'Ac. des Sciences, 1872 καὶ 1877).***

Ἔχομεν πρῶτα τὰς δύο εὐθείας : $y=0$, $z=P_1$ καὶ $x=0$, $z=P_2$,(α) δηλ. ***τὰς καθέτους πρὸς τὰς δύο χώνας*** (X_1), (X_2), ποὺ ἀνήκουν ***εἰς τὸ ἴδιον σύστημα*** γενετειρῶν τοῦ παραβολοειδοῦς, ἐκεῖνο, ποὺ ***δὲν*** ἀποτελεῖται ἀπὸ τοὺς ἄξονας τῶν περιστροφῶν.

Αἱ ἓξ ἄλλαι εὐθεῖαι εἶναι ἄξονες περιστροφῆς καὶ κόπτουν λοιπὸν ὅλαι τὰς δύο εὐθείας (α)· εὑρίσκονται δέ, ***ἂν τὸ τρίεδρον (T') συμπέσῃ μὲ τὸ (T) ἢ μὲ τὸ*** (T_1) ***ἢ μὲ τὸ*** (T_2).

Όταν κινούμεθα ἐπὶ μιᾶς γραμμῆς καμπυλότητος τῆς (E), τὸ τρίεδρον T εἰμπορεῖ, καθὼς γνωρίζομεν, νὰ μεταβῇ εἰς τὴν ἀπείρως γειτονικὴν θέσιν του διὰ μιᾶς περιστροφῆς, ποὺ γίνεται τώρα πέριξ τοῦ ἄξονος καμπυλότητος τῆς γραμμῆς αὐτῆς. Ὥστε αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ M_1, M_2 τῶν καμπύλων (σ_1), (σ_2) ἀνήκουν εἰς τὰς γενετείρας τοῦ παραβολοειδοῦς.

Ἂν τώρα ὑποθέσωμεν $z' = P_1$, τὸ (T') συμπίπτει μὲ τὸ (T_1)· αἱ μετατοπίσεις τοῦ M, διὰ τὰς ὁποίας τὸ (T_1) ὑφίσταται ἁπλῶς περιστροφήν, γίνονται κατὰ μῆκος μιᾶς γραμμῆς καμπυλότητος τῆς χώνης (X_1)· ὁ ἄξων τῆς περιστροφῆς αὐτῆς κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ καθέτου πρὸς τὴν γραμμὴν αὐτὴν καμπυλότητος καὶ περνᾷ ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχον πρωτεῦον κέντρον· θὰ συναντᾷ λοιπὸν κατ᾽ ἀνάγκην τὴν κάθετον τῆς χώνης (X_2). Ὥστε:

Ἂν ἐπὶ μιᾶς ἀπὸ τὰς δύο χώνας λάβωμεν μίαν γραμμὴν καμπυλότητος (Γκ), τὸ κάθετον πρὸς αὐτὴν ἐπίπεδον θὰ κόπτῃ τὴν κάθετον τῆς ἄλλης χώνης εἰς ἓν σημεῖον· καὶ ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνώνουσα τὸ σημεῖον αὐτὸ μὲ τὸ πρωτεῦον κέντρον τῆς πρώτης χώνης τὸ ἀντίστοιχον τῆς (Γκ) θὰ εἶναι μία γενέτειρα τοῦ παραβολοειδοῦς.

Οὕτως εὑρίσκομεν 4 ἀκόμη γενετείρας τοῦ παραβολοειδοῦς· ἑπομένως ἔχομεν τὸ ὅλον, ὁμοῦ μὲ τὰς 4 προηγουμένας (τὰς 2 καθέτους τῶν δύο χωνῶν καὶ τὰς 2 ἐφαπτομένας τῶν (σ_1) καὶ (σ_2)) 8 γενετείρας.

84. Μένει νὰ ἴδωμεν, πῶς μὲ τὸ παραβολοειδὲς αὐτὸ εἰμποροῦμεν νὰ ἐκφράσωμεν ***γεωμετρικῶς*** τὰς δύο σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων β΄ τάξεως τῶν δύο χωνῶν εἰς τ᾽ ἀντίστοιχα σημεῖα. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι γνωρίζομεν καὶ τῶν δύο χωνῶν τὰς πρωτευούσας διευθύνσεις καὶ τὰ πρωτεύοντα κέντρα· τότε εἶναι πάντοτε δυνατὸν νὰ κατασκευάσωμεν τὰς τέσσαρας τελευταῖον εὑρεθείσας γενετείρας τοῦ παραβολοειδοῦς· ἀλλά, κατὰ τὴν γνωστὴν ἰδιότητα τοῦ παραβολοειδοῦς, ***αὐταὶ θὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς ἓν ἐπίπεδον.*** Ἡ παραλληλία λοιπὸν αὐτὴ ἐκφράζει γεωμετρικῶς τὰς ζητουμένας σχέσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΣΘΗΚΑΙ

---

1) Ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰς ἐξισώσεις (113) κατὰ σειρὰν ἐπὶ p_2du_2, $-q_1du_1$, $r_1du_1+r_2du_2$ καὶ τὰς προσθέσωμεν, εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν:

$$(115)\qquad p_2q_1(P_2-P_1)du_1du_2+dz'(r_1du_1+r_2du_2)=0.$$

Νὰ δειχθοῦν ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν τὰ ἑξῆς θεωρήματα τοῦ *Ribaucour*:

α΄) ***Ἂν εἰς μίαν σειρὰν γραμμῶν καμπυλότητος τῆς μιᾶς χώνης ἀντιστοιχῇ μία σειρὰ γραμμῶν καμπυλότητος τῆς ἄλλης, ἡ διαφορὰ $P_2 - P_1$ θὰ εἶναι σταθερὰ κατὰ μῆκος κάθε τοιαύτης γραμμῆς.***

β΄) ***Ἀναγκαία καὶ ἀρκετὴ συνθήκη, διὰ ν' ἀντιστοιχοῦν τὰ δύο δίκτυα τῶν γραμμῶν καμπυλότητος τῶν δύο χωνῶν τῆς ἐνειλιγμένης μιᾶς ἐπιφανείας (Ε), εἶναι νὰ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρωτευουσῶν ἀκτίνων τῆς (Ε) σταθερά.***

2) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ δύο αὐταὶ προτάσεις καὶ ἀπὸ τὰς διαφορικὰς ἐξισώσεις τῶν γραμμῶν καμπυλότητος τῶν δύο χωνῶν (τύποι 104 καὶ 110).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ϛ΄.

ΓΕΝΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΕΝΟΣ ΖΕΥΓΟΥΣ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΚΕΙΜΕΝΩΝ ΕΠΙ ΕΝΟΣ ΖΕΥΓΟΥΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ[1]

α΄) Ζεῦγος ἐπιφανειῶν.

85. ***Ἀντιστοίχησις ἐπιφανειῶν.***—Ἡ ***ἀντιστοίχησις*** δύο ἐπιφανειῶν :

$$X = \Sigma(U_1, U_2),\quad Y = \Phi(U_1, U_2),\quad Z = F(U_1, U_2) \text{ καί :}$$

$$x = \sigma(u_1, u_2),\quad y = \varphi(u_1, u_2),\quad z = f(u_1, u_2)$$

σημεῖον πρὸς σημεῖον εἰμπορεῖ νὰ γίνῃ εἴτε κατὰ ἕνα ὁποιονδήποτε ***γεωμετρικὸν*** τρόπον, εἴτε ***ἀναλυτικῶς,*** ἂν θέσωμεν :

$$U_1 = \alpha_1 u_1 + \beta_1 u_2 + \gamma_1,\quad U_2 = \alpha_2 u_1 + \beta_2 u_2 + \gamma_2,$$

ἤ, ἀκόμη ἁπλούστερα : $U_1 = u_1$, $U_2 = u_2$. Ἔχομεν τότε ἓν «***ζεῦγος***» ***ἐπιφανειῶν***. Εἰς κάθε σημεῖον Μ τῆς μιᾶς ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον M_1 τῆς ἄλλης (ἂν αἱ συναρτήσεις Σ, ..., f εἶναι μονότιμοι).

86. ***Παραγωγὴ ἐπιφανείας ἀπὸ ἄλλην.***—Συνήθως μᾶς δίδεται μία ἐπιφάνεια (Ε) («***ἀρχικὴ***») καὶ εἷς ***γεωμετρικὸς*** τρόπος κατασκευῆς

---

[1] *N. Hatzidakis, Sur quelques formules de géométrie cinématique (C. R. du Congrès International de Strasbourg, 1920).*

ἀπὸ αὐτὴν μιᾶς νέας ἐπιφανείας (E_1), ***σημεῖον πρὸς σημεῖον***· ἑπομένως μία ***ὡρισμένη γεωμετρικὴ ἀντιστοίχησις*** ἑνὸς νέου σημείου M_1 τοῦ χώρου εἰς κάθε σημεῖον M τῆς ἀρχικῆς ἐπιφανείας· ὁ γεωμ. τόπος τοῦ M_1 εἶναι τότε μία νέα ἐπιφάνεια («***παρηγμένη***» τῆς ἀρχικῆς), πού, μαζὶ μὲ τὴν πρώτην, ἀποτελοῦν ἓν ***ζεῦγος***. Ἡ δυσκολία δὲ τῆς παραγωγῆς τῆς μιᾶς ἐπιφανείας ἀπὸ τὴν ἄλλην δὲν εἶναι συνήθως ἡ ἰδία καὶ διὰ τὰς δύο ἐπιφανείας· π.χ. ἀπὸ μίαν ἐπιφάνειαν (Ε) παράγεται ***μόνον μὲ διαφορίσεις*** ἡ ἐνειλιγμένη της (E_1)· ἐνῷ, ἀντιστρόφως, ἡ παραγωγὴ τῆς «***ἐξειλιγμένης***» (Ε) ἀπὸ τὴν (E_1) ἀπαιτεῖ ***ὁλοκληρώσεις***. Ἄλλα παραδείγματα ζευγῶν ἐπιφανειῶν εἶναι καὶ τὰ ἑξῆς: 1) Μία ἐπιφάνεια (Ε) καὶ ἡ ***σφαιρικὴ*** ἐπιφάνεια (E_2), ποὺ ὁρίζει ***τὴν ὁλικήν της καμπυλότητα (Ν. Χατζ. Θεωρ. Ἐπιφ.*** σ. 52).

2) Μία ἐπιφάνεια εὐθειογενὴς (Ε) καὶ ὁ ***διευθύνων κῶνός*** της (E_1) (***Σμήνη καὶ Συμπλ. Ν. Χατζ.***, σ. 24)· κτλ.

β΄) Τύποι ἑνὸς ζεύγους ἀντιστοίχων καμπύλων.

87. ***Τύποι συνδέοντες τὰ σχετικὰ στοιχεῖα ἑνὸς ζεύγους καμπύλων.***—Ἂν (Κ) καὶ (K_1) εἶναι δύο ἀντίστοιχοι καμπύλαι ἑνὸς ζεύγους ἐπιφανειῶν [(Ε), (E_1)], (ποὺ ἀντιστοιχοῦν δηλ. εἰς τὴν ἰδίαν σχέσιν $u_2 = \varrho(u_1)$), αἱ κάθετοι ΜΚ, M_1K_1 τῶν δύο ἐπιφανειῶν εἰς τ᾽ ἀντίστοιχα σημεῖα Μ καὶ M_1 τῶν δύο αὐτῶν καμπύλων ἔχουν μίαν κοινὴν κάθετον διεύθυνσιν· ἂς φέρωμεν λοιπὸν ἀπὸ τὰ Μ καὶ M_1 δύο παραλλήλους πρὸς τὴν διεύθυνσιν αὐτήν, τὰς ΜΧ καὶ M_1X_1· προφανῶς θὰ κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων τῶν δύο ἐπιφανειῶν. Ἂς γράψωμεν ἀκόμη καὶ τὰς εὐθείας ΜΣ, $M_1\Sigma_1$, καθέτους ἀντιστοίχως πρὸς τὰ ἐπίπεδα (ΜΧ, ΜΚ) καὶ (M_1X_1, M_1K_1). Αἱ στιγμιαῖαι περιστροφαὶ P, Q, R καὶ P_1, Q_1, R_1 τῶν δύο τριέδρων (ΜΧ, ΜΚ, ΜΣ) καὶ $(M_1X_1, M_1K_1, M_1\Sigma_1)$ θὰ συνδέωνται, ἐπειδὴ ἡ ΜΧ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν M_1X_1, μὲ τὰς σχέσεις:

$$(\alpha)\quad P_1 = P + \frac{d\Theta}{dt},\quad Q_1 = Q\,\text{συν}\Theta + R\,\text{ημ}\Theta,\quad R_1 = -Q\,\text{ημ}\Theta + R\,\text{συν}\Theta$$

$$[\Theta \equiv \text{γων.}\ (MK,\ M_1K_1)].$$

(Τὴν φορὰν τῆς γωνίας Θ (καθὼς καὶ τῶν ἑπομένων γωνιῶν ω, ω_1, ϑ, ϑ_1) ἐκλέγομεν οὕτως, ὥστε νὰ μὴ ἔχωμεν ἐπαμφοτερίζον σημεῖον $\pm$).

Ἂν θεωρήσωμεν τώρα καὶ τὰ δύο τρίεδρα (ΜΧ, ΜΚ, ΜΣ), (ΜΕ,ΜΚ,ΜΡ, μὲ περιστροφὰς p', q', r'), ὅπου ΜΡ εἶναι ἡ κοινὴ κάθετος τῆς ΜΕ (ἐφαπτομένης τῆς (Κ) εἰς τὸ Μ) καὶ τῆς ΜΚ, θὰ ἔχωμεν

$$(\beta)\quad P = p'\,\text{συν}\omega + r'\,\text{ημ}\omega,\quad Q = q' + \frac{d\omega}{dt},\quad R = -p'\,\text{ημ}\omega + r\,\text{συν}\omega$$

$$[\omega \equiv \text{γων. }(MX,\ ME)].$$

Ὁμοίως δὲ τὰ τρίεδρα $(M_1X_1, M_1K_1, M_1\Sigma_1)$ καὶ (M_1E_1, M_1K_1, M_1P_1) μὲ περιστροφὰς p_1', q_1', r_1') μᾶς δίδουν :

$$(\beta_1)\quad P_1 = p_1'\,\text{συν}\omega_1 + r_1'\,\text{ημ}\omega_1,\quad Q_1 = q_1' + \frac{d\omega_1}{dt}, R_1 = -p_1'\,\text{ημ}\omega_1 + r_1'\,\text{συν}\omega_1$$

$$[\omega_1 \equiv \text{γων. }(M_1X_1,\ M_1E_1)].$$

Τέλος ἡ μὲν σύγκρισις τοῦ τριέδρου (ΜΕ,ΜΚ,ΜΡ) μὲ τὸ (ΜΕ,ΜΠ, ΜΔ), τὸ ***πρωτεῦον*** δηλ. τῆς καμπύλης Κ, μὲ περιστροφάς p, $q \equiv 0$, r, μᾶς δίδει τὰς σχέσεις :

$$(\gamma)\quad p' = p + \frac{d\vartheta}{dt},\quad q' = q\,\text{συν}\vartheta + r\,\text{ημ}\vartheta \equiv r\,\text{ημ}\vartheta,$$

$$r' = -q\,\text{ημ}\vartheta + r\,\text{συν}\vartheta \equiv r\,\text{συν}\vartheta\ [\vartheta \equiv \text{γων. }(MK,M\Pi)]$$

ἡ δὲ σύγκρισις τοῦ (M_1E_1, M_1K_1, M_1P_1) μὲ τὸ ***πρωτεῦον*** $(M_1E_1, M_1\Pi_1, M_1\Delta_1)$ τῆς καμπύλης (K_1), μὲ περιστροφάς : p_1, $q_1 = 0$, r_1, μᾶς δίδει ὁμοίως :

$$(\gamma_1)\quad p_1' = p_1 + \frac{d\vartheta_1}{dt},\quad q_1' = q_1\,\text{συν}\vartheta_1 + r_1\,\text{ημ}\vartheta_1 = r_1\,\text{ημ}\vartheta_1.$$

$$r_1' = -q_1\,\text{ημ}\vartheta_1 + r_1\,\text{συν}\vartheta_1 = r_1\,\text{συν}\vartheta_1\quad [\vartheta_1 \equiv \text{γων. }(M_1K_1, M_1\Pi_1)].$$

Αἱ τελευταῖαι ὅμως σχέσεις (γ) καὶ (γ_1) γράφονται καὶ συντομώτερα, ὡς ἑξῆς :

$$p' = -\frac{d\tau_g}{dt},\quad q' = \frac{d\sigma_g}{dt},\quad r' = \frac{d\sigma_n}{dt}$$

$$\text{καί : } p_1' = -\frac{d\tau_{1g}}{dt},\quad q_1' = \frac{d\sigma_{1g}}{dt},\quad r_1' = \frac{d\sigma_{1n}}{dt},$$

ὅπου $d\tau_g$, $d\sigma_g$, $d\sigma_n$ εἶναι ***ἡ γωνία τῆς γεωδαισιακῆς στρέψεως*** καὶ ***αἱ γωνίαι τῆς γεωδαισιακῆς καὶ τῆς καθέτου συνεπαφῆς*** τῆς καμπύλης (Κ) ὡς πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν (Ε) καὶ $d\tau_{1g}$, $d\sigma_{1g}$, $d\sigma_{1n}$ τὰ ὁμώνυμα στοιχεῖα τῆς (K_1) ὡς πρὸς τὴν (E_1).

Ἂν τώρα μεταξὺ τῶν 15 ἐξισώσεων : (α), (β), (β_1), (γ), (γ_1) ἀπαλείψωμεν τὰς 12 βοηθητικὰς περιστροφάς :
P, Q, R· P_1, Q_1, R_1· p', q', r'· p'_1, q_1', r_1', θὰ εὕρωμεν τὰς τρεῖς σχέσεις :

$$(116)\begin{cases} -d\tau_{1g}\sigma\upsilon\nu\omega_1+d\sigma_{1n}\eta\mu\omega_1=-d\tau_g\,\sigma\upsilon\nu\omega+d\sigma_n\,\eta\mu\omega+d\Theta, \\ d\sigma_{1g}+d\omega_1=(d\sigma_g+d\omega)\sigma\upsilon\nu\Theta+(d\tau_g\,\eta\mu\omega+d\sigma_n\,\sigma\upsilon\nu\omega)\eta\mu\Theta, \\ d\tau_{1g}\eta\mu\omega_1+d\sigma_{1n}\sigma\upsilon\nu\omega_1=-(d\sigma_g+d\omega)\eta\mu\Theta+(d\tau_g\,\eta\mu\omega+ \\ \qquad\qquad +d\sigma_n\,\sigma\upsilon\nu\omega)\sigma\upsilon\nu\Theta. \end{cases}$$

Οἱ 3 αὐτοὶ γενικοὶ τύποι συνδέουν τὰ 6 στοιχεῖα τῶν δύο καμπύλων τὰ σχετικὰ πρὸς τὰς ἐπιφανείας, πού τας περιέχουν, δηλ. τὰ: $d\sigma_n$, $d\sigma_g$, $d\tau_g$· $d\sigma_{1n}$, $d\sigma_{1g}$, $d\tau_{1g}$, ***πρὸς τὰ τρία στοιχεῖα :*** ω, ω_1, Θ, ***ποὺ ὁρίζουν τὴν ἀμοιβαίαν θέσιν τῶν δύο καμπύλων.***

88. ***Ἀπόλυτα στοιχεῖα καὶ γωνία Θ.***— Τ' ***ἀπόλυτα*** στοιχεῖα τῆς μιᾶς ἀπὸ τὰς καμπύλας, μᾶς τα δίδουν προφανῶς οἱ τύποι :

$$(117)\quad d\sigma_1=\sqrt{d\sigma_{1n}^2+d\sigma_{1g}^2},\qquad d\tau_1=d\tau_{1g}+d\vartheta_1\cdot$$

ἐπίσης εὑρίσκομεν καὶ τὴν εφΘ συναρτήσει τῶν $d\sigma_n, \ldots, d\tau_{1g}$, ω, ω_1 :
(118) εφΘ=

$$=\frac{(d\tau_g\eta\mu\omega+d\sigma_n\sigma\upsilon\nu\omega)(d\sigma_{1g}+d\omega_1)-(d\tau_{1g}\eta\mu\omega_1+d\sigma_{1n}\sigma\upsilon\nu\omega_1)(d\sigma_g+d\omega)}{(d\tau_g\eta\mu\omega+d\sigma_n\sigma\upsilon\nu\omega)(d\tau_{1g}\eta\mu\omega_1+d\sigma_{1n}\sigma\upsilon\nu\omega_1)+(d\sigma_g+d\omega)(d\sigma_{1g}+d\omega_1)}\cdot$$

89. ***Ἀναλλοίωτοι.***—Ἂν φέρωμεν δύο εὐθείας παραλλήλους ΜΥ, M_1Y_1, καθέτους πρὸς τὰς ΜΧ, M_1X_1, θὰ ἔχωμεν πάντοτε (ἂν ὁρισθῇ καταλλήλως ἡ φορὰ τῶν γωνιῶν): $\Theta=\Phi-\Phi_1$, ὅπου : $\Phi\equiv$γων. (ΜΚ, ΜΥ), $\Phi_1\equiv$γων. (M_1K_1, M_1Y_1). Αἱ σχέσεις τότε (116) λαμβάνουν τὴν μορφήν :

$$(119)\begin{cases} -d\tau_{1g}\sigma\upsilon\nu\omega_1+d\sigma_{1n}\eta\mu\omega_1+d\Phi_1=-d\tau_g\sigma\upsilon\nu\omega+d\sigma_n\eta\mu\omega+d\Phi, \\ (d\sigma_{1g}+d\omega_1)\sigma\upsilon\nu\Phi_1+(d\tau_{1g}\eta\mu\omega_1+d\sigma_{1n}\sigma\upsilon\nu\omega_1)\eta\mu\Phi_1= \\ \qquad=(d\sigma_g+d\omega)\sigma\upsilon\nu\Phi+(d\tau_g\eta\mu\omega+d\sigma_n\eta\mu\omega)\eta\mu\Phi, \\ -(d\sigma_{1g}+d\omega_1)\eta\mu\Phi_1+(d\tau_{1g}\eta\mu\omega_1+d\sigma_{1n}\sigma\upsilon\nu\omega_1)\sigma\upsilon\nu\Phi_1= \\ \qquad=-(d\sigma_g+d\omega)\eta\mu\Phi+(d\tau_g\eta\mu\omega+d\sigma_n\sigma\upsilon\nu\omega)\sigma\upsilon\nu\Phi. \end{cases}$$

Ἔχομεν οὕτω ***τρεῖς «ἀναλλοιώτους»***, δηλ. ***τρεῖς παραστάσεις, ποὺ ἔχουν ἴσας τιμὰς εἰς τ' ἀντίστοιχα σημεῖα τῶν δύο καμπύλων.*** Μίαν ***τετάρτην*** ἀναλλοίωτον μᾶς παρέχουν ἀκόμη οἱ τύποι (116) :

$$(120)\quad (d\sigma_{1g}+d\omega_1)^2+(d\tau_{1g}\eta\mu\omega_1+d\sigma_{1n}\sigma\upsilon\nu\omega_1)^2= \\ =(d\sigma_g+d\omega)^2+(d\tau_g\eta\mu\omega+d\sigma_n\sigma\upsilon\nu\omega)^2.$$

Παρατήρησις.—Τὴν ὕπαρξιν τῶν ἀναλλοιώτων (119) τὴν ἐξηγοῦμεν ἀμέσως ***κινητικῶς*** : ***εἶναι αἱ περιστροφαὶ τῶν δύο παραλλήλων τριέδρων*** : (MX,MY,MZ), (M_1X_1,M_1Y_1,M_1Z_1), ὅπου MZ, M_1Z_1 εἶναι αἱ κάθετοι πρὸς τὰ ἐπίπεδα (MX, MY) καὶ (M_1X_1,M_1Y_1). Ὡς πρὸς δὲ τὴν $4^{ην}$ ἀναλλοίωτον (120), αὐτὴ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς περιστροφάς : $\sqrt{Q_1^2+R_1^2}$ καὶ $\sqrt{Q^2+R^2}$, ***ποὺ πρέπει πραγματικῶς νὰ εἶναι ἴσαι.***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΣΘΗΚΑΙ

1) Νὰ εὑρεθοῦν ἀπὸ τοὺς γενικοὺς τύπους (116), ὡς ***μερικὴ*** περίπτωσις, οἱ **τύποι** τοῦ ζεύγους καμπύλων τοῦ χώρου (τύπ. (102‴), σ. 89 τοῦ τόμ. Α').

2) Νὰ ἐφαρμοσθοῦν οἱ γενικοὶ τύποι (116) εἰς τὸ ζεῦγος μιᾶς ἐπιφανείας καὶ τῆς ἐνειλιγμένης της.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'.

ΚΑΜΨΙΣ ΤΩΝ ΕΥΘΕΙΟΓΕΝΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

Πρόκειται ἐδῶ νὰ ἐξετάσωμεν τὸ ***ἰδιαίτερον*** ἐκεῖνο εἶδος κάμψεως τῶν εὐθειογενῶν ἐπιφανειῶν, ποὺ ἡ ἐπιφάνεια ***μένει πάντοτε εὐθειογενής*** (¹).

α') Τύποι τῶν εὐθειογενῶν ἐπιφανειῶν.

90. ***Διάφοροι μορφαὶ τοῦ*** dS^2.—Αἱ ἐξισώσεις μιᾶς εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας εἶναι :

$$X=x+A\omega, \quad Y=y+B\omega, \quad Z=z+\Gamma\omega\cdot$$

τὸ δὲ γραμμικὸν στοιχεῖόν της ἔχει τὴν μορφήν :

$$(121)\quad dS^2=\left[1+\omega^2\left(\frac{d\Sigma}{ds}\right)^2+2\omega\frac{d\Sigma}{ds}\Sigma\Xi\alpha\right]ds^2+d\omega^2.$$

(¹) Τὸν ***γενικὸν*** ὁρισμὸν τῆς κάμψεως μιᾶς ***τυχούσης*** ἐπιφανείας βλέπε εἰς τὴν ***Θεωρίαν τῶν Ἐπιφανειῶν Ν. Χατζιδάκη***, ἐδ. 48.

Ἡ ἔκφρασις ὅμως αὐτὴ τοῦ dS^2 ἁπλοποιεῖται, ἂν λάβωμεν τὴν ὀρθογώνιον τροχιὰν τῶν γενετειρῶν, τὴν διερχομένην ἀπὸ τὸ κεντρικὸν σημεῖον· καὶ γίνεται τότε :

$$(122)\quad dS^2 = \left[1+\omega_1^2\left(\frac{d\Sigma}{ds}\right)^2\right] ds^2 + d\omega_1^2$$

(Ν. Χατζ., Σμήνη καὶ Συμπλέγματα, σελ. 33).

Καὶ μίαν ἄλλην ὅμως μορφὴν εἰμποροῦμεν νὰ δώσωμεν εἰς τὸ dS^2, ἄν, ἀντὶ νὰ λάβωμεν $u \equiv s$, λάβωμεν: $u \equiv \Sigma$ (τὸ τόξον δηλ. τῆς α′ σφαιρικῆς δεικτρίας τῆς γενετείρας). Θὰ ἔχωμεν τότε :

$$(123)\quad dS^2 = \left[\Sigma x_\Sigma^2 + \omega_1^2\right].d\Sigma^2 + d\omega_1^2.$$

Τέλος εἰμποροῦμεν νὰ θέσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (123) ἀντὶ τοῦ ω_1 τό : $\delta-\delta_1$ (ὅπου δ καὶ δ_1 εἶναι αἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων Μ καὶ Κ (τοῦ κεντρικοῦ) ἀπὸ τὸ τυχὸν σημεῖον Λ τῆς γενετείρας)· τότε ἔχομεν τὸν γενικώτερον τύπον :

$$(124)\quad dS^2 = \left[(\delta-\delta_1)^2+\varepsilon^2\right] d\Sigma^2 + d\delta^2 \quad \left(\varepsilon^2 \equiv \Sigma x_\Sigma^2\right).$$

91. ***Ὑπολογισμὸς τῶν περιστροφῶν τῆς ἐπιφανείας.***— Ἂς λάβωμεν τὸ dS^2 ὑπὸ τὴν μορφὴν (124)· τότε (σύμφωνα μὲ τοὺς τύπους (70) τῆς σελ. 45) θὰ ἔχωμεν :

$$(125)\quad dS\,\text{συν}\omega = d\delta, \quad dS\,\text{ημ}\omega = \sqrt{(\delta-\delta_1)^2+\varepsilon^2}\,.d\Sigma.$$

($\omega \equiv$ γων. τῆς τυχ. καμπύλης μὲ τὴν γενέτειραν).

Ἐπίσης δὲ ἔχομεν καί :

$$(126)\quad \text{εφ}\psi = \frac{\delta-\delta_1}{\varepsilon}, \quad \text{συν}\psi = \frac{\varepsilon}{\sqrt{(\delta-\delta_1)^2+\varepsilon^2}}$$

($\psi \equiv$ γωνία ἐφαπτ. ἐπιπέδων εἰς τὰ σημ. Μ καὶ Κ)·

$$\text{ἑπομένως :}\quad \text{συν}\omega = \frac{d\delta}{dS}, \quad \text{ημ}\omega = \frac{\varepsilon d\Sigma}{\text{συν}\psi dS}. \quad (127)$$

Ἂς ἐκφράσωμεν τώρα, ὅτι αἱ παραμετρικαὶ γραμμαὶ $\Sigma = c$ εἶναι εὐθεῖαι, δηλ. ***ἀσυμπτωτικαί***· θὰ ἔχωμεν τότε (σελ. 46, τύπ. (75)) : $q_1 = 0$· καὶ οἱ θεμελιώδεις τύποι τοῦ ἐδ. 53 γίνονται :

$$(128)\quad q_2\,\text{συν}\psi + \varepsilon p_1 = 0, \quad \mathbf{r}_1 = 0, \quad \mathbf{r}_2 = \text{ημ}\psi,$$

$u_1 = \Sigma$
$u_1 = (\delta -$

$$\frac{\partial p_1}{\partial \Sigma} - \frac{\partial p_2}{\partial \delta} = 0, \quad \frac{\partial q_2}{\partial \delta} = p_1 r_2, \quad \frac{\partial r_2}{\partial \delta} = -p_1 q_2 = \frac{1}{\varepsilon}\,\sigma\upsilon\nu^3\psi.$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις αὐτὰς εὑρίσκομεν : $q_2^2 = \sigma\upsilon\nu^2\psi$[1]. (129) Αἱ δύο τιμαὶ τοῦ συνψ μᾶς δίδουν μίαν ἐπιφάνειαν καὶ τὴν συμμετρικήν της· θὰ λάβωμεν : $q_2 = -\sigma\upsilon\nu\psi$ (1)· τότε θὰ εὕρωμεν :

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial\psi}{\partial\delta} = \frac{1}{\varepsilon}\sigma\upsilon\nu^2\psi, \quad q_1 = 0, \quad r_1 = 0 \\ p_2 &= \frac{\partial\psi}{\partial\Sigma} + f(\Sigma), \quad q_2 = -\sigma\upsilon\nu\psi, \quad r_2 = \eta\mu\psi, \end{aligned}\right\} \quad (130)$$

ὅπου $f(\Sigma)$ εἶναι τυχοῦσα συνάρτησις τοῦ Σ. Ἀφοῦ λοιπὸν ἔχομεν τὰς περιστροφάς, ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ὡρισμένη ***κατὰ τὸ σχῆμα***· πρὸς ***ἐντελῆ*** εὕρεσίν της ὅμως πρέπει νὰ ὁλοκληρώσωμεν τὰ γραμμικὰ συστήματα διαφορικῶν ἐξισώσεων, ποὺ ὁρίζουν τὰ 9 διευθύνοντα συνημίτονα τῶν ἀξόνων τοῦ τριέδρου (Τ).

92. ***Ὑπολογισμὸς τῶν συνημιτόνων.—α΄) Ἂς εὕρωμεν πρῶτα τὰς μερικὰς παραγώγους τῶν Α,Β,Γ*** : Ἔχομεν διὰ τὰς παραγώγους πρὸς τὸ δ :

$$\frac{\partial A}{\partial\delta} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial\delta} = 0, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial\delta} = 0. \quad (131)$$

Διὰ δὲ τὰς πρὸς τὸ Σ ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις :

$$\Sigma A\frac{\partial A}{\partial\Sigma} = 0, \quad \Sigma\alpha\frac{\partial A}{\partial\Sigma} = \eta\mu\psi, \quad \Sigma l\frac{\partial A}{\partial\Sigma} = \sigma\upsilon\nu\psi, \quad \text{ποὺ μᾶς δίδουν :}$$

$$\frac{\partial A}{\partial\Sigma} = \alpha\eta\mu\psi + l\sigma\upsilon\nu\psi, \quad \frac{\partial B}{\partial\Sigma} = \beta\eta\mu\psi + m\sigma\upsilon\nu\psi, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial\Sigma} = \gamma\eta\mu\psi + n\sigma\upsilon\nu\psi. \quad (132).$$

β΄) Μερικαὶ παράγωγοι τῶν α,β,γ (τῶν συνημ. τῆς ἐφαπτ. τῆς ὀρθογ. τροχιᾶς).—Ἔχομεν πρῶτα τὰς ἐξισώσεις :

$$\Sigma\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial\delta} = 0, \quad \Sigma A\frac{\partial\alpha}{\partial\delta} = -\Sigma\alpha\frac{\partial A}{\partial\delta} = 0, \quad \Sigma l\frac{\partial\alpha}{\partial\delta} = p_1 = \frac{\partial\psi}{\partial\delta}.$$

ἑπομένως :
$$\frac{\partial\alpha}{\partial\delta} = l\frac{\partial\psi}{\partial\delta}, \quad \frac{\partial\beta}{\partial\delta} = m\frac{\partial\psi}{\partial\delta}, \quad \frac{\partial\gamma}{\partial\delta} = n\frac{\partial\psi}{\partial\delta}. \quad (133)$$

Ὁμοίως ἔχομεν :

---

[1] Ἡ τιμὴ αὐτὴ τοῦ q_2 εὑρίσκεται καὶ ἀπ' εὐθείας ἀπὸ τὴν γενικὴν τιμὴν τοῦ q_2 :

$q_2 = \Sigma\alpha_1\frac{\partial\alpha_3}{\partial u_2}$ διότι τώρα : $q_2 = \Sigma A\frac{\partial l}{\partial\Sigma} = -\Sigma l\frac{dA}{d\Sigma} = -\Sigma l\Xi = -\Sigma l l_1 = -\sigma\upsilon\nu\psi.$

$$\Sigma A\frac{\partial\alpha}{\partial\Sigma}=-\Sigma\alpha\frac{\partial A}{\partial\Sigma}=-\Sigma\alpha\Xi=-\eta\mu\psi,\quad \Sigma\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial\Sigma}=0.$$

$$\Sigma l\frac{\partial\alpha}{\partial\Sigma}=p_2=-\frac{\partial\psi}{\partial\Sigma}+f(\Sigma)\cdot$$

ἑπομένως : (134)

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\Sigma}=-A\eta\mu\psi+l\left(\frac{\partial\psi}{\partial\Sigma}+f(\Sigma)\right),\quad \frac{\partial\beta}{\partial\Sigma}=-B\eta\mu\psi+m\left(\frac{\partial\psi}{\partial\Sigma}+f(\Sigma)\right)\cdot$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\Sigma}=-\Gamma\eta\mu\psi+n\left(\frac{\partial\psi}{\partial\Sigma}+f(\Sigma)\right).$$

γ') Μερικαὶ παράγωγοι τῶν l, m, n. — Ἔχομεν τώρα :

$$\Sigma A\frac{\partial l}{\partial\delta}=q_1=0,\quad \Sigma\alpha\frac{\partial l}{\partial\delta}=-\Sigma l\frac{\partial\alpha}{\partial\delta}=-p_1=\frac{\partial\psi}{\partial\delta},\ \Sigma l\frac{\partial l}{\partial\delta}=0\cdot$$

λοιπόν : $\dfrac{\partial l}{\partial\delta}=-\alpha\dfrac{\partial\psi}{\partial\delta},\quad \dfrac{\partial m}{\partial\delta}=-\beta\dfrac{\partial\psi}{\partial\delta},\quad \dfrac{\partial n}{\partial\delta}=-\gamma\dfrac{\partial\psi}{\partial\delta}.$ (135)

Τέλος ἔχομεν :

$$\Sigma A\frac{\partial l}{\partial\Sigma}=-\Sigma l\frac{\partial A}{\partial\Sigma}=-\Sigma l\Xi=-\sigma\upsilon\nu\psi,\quad \Sigma\alpha\frac{\partial l}{\partial\Sigma}=-\left(\frac{\partial\psi}{\partial\Sigma}+f(\Sigma)\right).$$

$$\Sigma l\frac{\partial l}{\partial\Sigma}=0\cdot$$

ὥστε : (136)

$$\frac{\partial l}{\partial\Sigma}=-A\sigma\upsilon\nu\psi-\alpha\left(\frac{\partial\psi}{\partial\Sigma}+f(\Sigma)\right),$$

$$\frac{\partial m}{\partial\Sigma}=-B\sigma\upsilon\nu\psi-\beta\left(\frac{\partial\psi}{\partial\Sigma}+f(\Sigma)\right),\quad \frac{\partial n}{\partial\Sigma}=-\Gamma\sigma\upsilon\nu\psi-\gamma\left(\frac{\partial\psi}{\partial\Sigma}+f(\Sigma)\right).$$

δ') Ὑπολογισμὸς τῆς f. — Τὰ προηγούμενα συστήματα διαφορικῶν ἐξισώσεων ἀνάγονται εἰς δύο μόνον, τῆς μορφῆς :

(137) $\dfrac{\partial\Omega_1}{\partial\delta}=0,\quad \dfrac{\partial\Omega_2}{\partial\delta}=\Omega_3\dfrac{\partial\psi}{\partial\delta},\quad \dfrac{\partial\Omega_3}{\partial\delta}=-\Omega_2\dfrac{\partial\psi}{\partial\delta}$ καί :

$$\frac{\partial\Omega_1}{\partial\Sigma}=\Omega_2\eta\mu\psi+\Omega_3\sigma\upsilon\nu\psi,\quad \frac{\partial\Omega_2}{\partial\Sigma}=-\Omega_1\eta\mu\psi+\Omega_3\left(\frac{\partial\psi}{\partial\Sigma}+f(\Sigma)\right),\ (138)$$

$$\frac{\partial\Omega_3}{\partial\Sigma}=-\Omega_1\sigma\upsilon\nu\psi-\Omega_2\left(\frac{\partial\psi}{\partial\Sigma}+f(\Sigma)\right)[\Omega_1=A,B,\Gamma\cdot\Omega_2=\alpha,\beta,\gamma\cdot\Omega_3=l,m,n].$$

ε') Ὑπολογισμὸς τῶν συνημιτόνων καὶ τῆς f.

Ἡ ὁλοκλήρωσις τοῦ πρώτου συστήματος μᾶς δίδει ἀμέσως :

(139) $\Omega_1=f_1,\quad \Omega_2=f_2\sigma\upsilon\nu\psi+f_3\eta\mu\psi,\quad \Omega_3=-f_2\eta\mu\psi+f_3\sigma\upsilon\nu\psi,$

ὅπου τὰ f_1, f_2, f_3 εἶναι συναρτήσεις τοῦ Σ. Ἡ εἰσαγωγὴ δὲ τῶν τιμῶν αὐτῶν τῶν $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ εἰς τὸ β′ σύστημα δίδει:

(140) $f'_1 = f_3,\ f'_2 = ff_3,\ f'_3 = -ff_2 - f_1$, καὶ ἑπομένως καὶ τὰ f_1, f_2, f_3·

Ἔχομεν λοιπὸν: (141) $f_3 = f'_1,\ f_2 = -\dfrac{f_1 + f_1''}{f}$ καὶ τὸ f_1 ὁρίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν: $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 1$,

δηλ. τὴν: (142) $f_1^2 + f'^2_1 + \dfrac{(f_1 + f_1'')^2}{f^2} = 1$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ f εἶναι αὐθαίρετον, λαμβάνομεν αὐθαιρέτως τὸ f_1 καὶ τότε ἡ (142) μᾶς δίδει τὸ f. Ἔχοντες τότε μίαν ***μερικὴν*** λύσιν τῶν συστημάτων (137) καὶ (138) εὑρίσκομεν τὴν ***γενικὴν*** μ᾽ ἕνα τετραγωνισμόν.

93. ***Γεωμετρικὴ σημασία τῆς*** *f*.—Ἀπὸ ἓν σταθερὸν σημεῖον Ο φέρομεν παραλλήλους πρὸς τοὺς ἄξονας τοῦ τριέδρου (T) τοῦ σημείου M· ὁ ἄξων OX τοῦ νέου αὐτοῦ τριέδρου (T_1) θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν γενέτειραν τοῦ M καὶ ὁ γεωμετρικὸς λοιπὸν τόπος αὐτοῦ θὰ εἶναι ὁ ὁδηγῶν κῶνος τῆς ἐπιφανείας. Ἂν τώρα τὸ M ἀπομακρυνθῇ εἰς τὸ ἄπειρον ἐπὶ τῆς γενετείρας, τὸ ἐπίπεδον xy τοῦ (T_1) θὰ γίνῃ τὸ ἐφαπτόμενον τοῦ κώνου· τότε $\psi = \dfrac{\pi}{2}$ καὶ αἱ περιστροφαὶ τοῦ (T_1), δηλ. καὶ τοῦ (T), θὰ γίνουν: $p_1 = q_1 = r_1 = 0$· $p_2 = f,\ q_2 = 0,\ r_2 = 1$. Αἱ δὲ προβολαί, ἐπὶ τῶν ἀξόνων τοῦ (T_1), τῆς ἀπειροστῆς μετατοπίσεως τοῦ σημείου: $x_1 = 0,\ y_1 = 0,\ z_1 = 1$ θὰ εἶναι (τύπ. 1, σελ. 8):

$$0, \quad -fd\Sigma, \quad 0.$$

Εἶναι λοιπὸν τὸ $fd\Sigma$ ***ἡ γωνία δύο ἀπείρως γειτονικῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων τοῦ ὁδηγοῦντος κώνου*** δηλ. ***Τὸ*** *f* ***εἶναι ἡ γεωδαισιακὴ καμπυλότης (ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν) τῆς τομῆς τοῦ κώνου μὲ τὴν ὁμόκεντρον σφαῖραν, ποὺ ἔχει ἀκτῖνα 1. (Ν. Χατζ. Θεωρ. Ἐπιφανειῶν, ἐδ. 55).***

Ἐπειδὴ δὲ τὸ Σ εἶναι τὸ τόξον τῆς τομῆς αὐτῆς (τῆς α′ σφαιρικῆς δεικτρίας τῆς γενετείρας, (***Ν. Χατζ. Σμήνη καὶ Συμπλ., ἐδ. 20***), τὸ δὲ f εἶναι ***αὐθαίρετος*** συνάρτησις τοῦ Σ, συνάγομεν, ὅτι ***καὶ ὁ ὁδηγῶν κῶνος εἶναι αὐθαίρετος***. (Διὰ f=c ἔχομεν κῶνον ***ἐκ περιστροφῆς***· διὰ δὲ f=0, ὁ κῶνος καταντᾷ ἐπίπεδον).

94. ***Θεώρημα τοῦ*** *Paul Serret*. — Οἱ τύποι (37′) καὶ (40) τῆς

καθέτου καὶ τῆς γεωδαισιακῆς καμπυλότητος καὶ τῆς γεωδαισιακῆς στρέψεως γίνονται τώρα :

$$(143)\quad \begin{cases} \eta\mu\tilde{\omega}\,.\,\dfrac{ds}{\varrho}=d\omega+\eta\mu\psi d\Sigma, \\ \sigma\upsilon\nu\tilde{\omega}\,.\,\dfrac{ds}{\varrho}=(d\psi+fd\Sigma)\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\psi\sigma\upsilon\nu\omega d\Sigma, \\ \dfrac{ds}{r}-d\tilde{\omega}=\sigma\upsilon\nu\psi\eta\mu\omega d\Sigma-(d\psi+fd\Sigma)\sigma\upsilon\nu\omega. \end{cases}$$

Ἡ ἐξίσωσις λοιπὸν τῶν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν γίνεται :

$$(d\psi+fd\Sigma)\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\psi\sigma\upsilon\nu\omega d\Sigma=0,$$

ἤ, ἂν θέσωμεν τὰς τιμὰς τῶν ψ καὶ ω :

$$(144)\quad 2\varepsilon\frac{d\delta}{d\Sigma}+\delta_1\varepsilon'-\varepsilon\delta_1'-\varepsilon'\delta+f[(\delta-\delta_1)^2+\varepsilon^2]=0,$$

δηλ. ἐξίσωσις τοῦ *Riccati*. Συνάγομεν ἑπομένως τὸ ἑξῆς θεώρημα τοῦ P. Serret (1860) :

Ὁ ἀναρμονικὸς λόγος τῶν σημείων, ὅπου τέσσαρες ἀσυμπτωτικαὶ κόπτουν τὴν ἰδίαν γενέτειραν, μένει σταθερός, ὅταν ἡ γενέτειρα μεταβάλλεται.

Ἡ γνῶσις δὲ ***μιᾶς μόνης*** ἀσυμπτωτικῆς μᾶς δίδει ὅλας τὰς ἄλλας μὲ τετραγωνισμούς. Εἰς τὴν μερικὴν περίπτωσιν, ποὺ ὁ κῶνος καταντᾷ ἐπίπεδον (δηλ. ποὺ f=0), μία ἀσυμπτωτικὴ ἀπομακρύνεται εἰς τὸ ἄπειρον καὶ ἡ ἐξίσωσις (144) γίνεται ***γραμμική***.

β΄) Κάμψις τῶν εὐθειογενῶν ἐπιφανειῶν.

95. ***Θεώρημα τῶν Beltrami καὶ Bonnet.***—Ἐπειδὴ εἰμποροῦμεν πάντοτε νὰ ἐκλέξωμεν τὸ f οὕτως, ὥστε ἡ ἐξίσωσις (144) νὰ ἐπιδέχεται μίαν ***τυχοῦσαν*** λύσιν ***ἀπὸ πρὶν δοθεῖσαν*** : $\delta=\varphi(\Sigma)$, βλέπομεν, ὅτι :

Εἰμποροῦμεν πάντοτε νὰ κάμψωμεν μίαν στρεβλὴν ἐπιφάνειαν οὕτως, ὥστε μία τυχοῦσα δοθεῖσα γραμμή της νὰ γίνῃ ἀσυμπτωτική.

(Ἡ εὕρεσις ὅμως τῆς ἐπιφανείας ἀπαιτεῖ τὴν ὁλοκλήρωσιν μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ *Riccati*, ποὺ θὰ μᾶς δώσῃ τὰ συνημίτονα τοῦ τριέδρου (T)).

96. ***Μερικαὶ περιπτώσεις.***—1η) Ἂν ἡ δοθεῖσα γραμμὴ εἶναι ***γεωδαισιακή***, θὰ γίνῃ ***εὐθεῖα***.

2α) Ἂν ἡ δοθεῖσα γραμμὴ εἶναι ὀρθογώνιος τροχιὰ τῶν γενετειρῶν, εὑρίσκομεν τὸ ἑπόμενον ***θεώρημα τοῦ*** *Bour* : ***Ὑπάρχει πάντοτε μία κάμψις τῆς στρεβλῆς ἐπιφανείας τοιαύτη, ὥστε αἱ γενέτειραί της νὰ γίνωνται αἱ πρῶται κάθετοι μιᾶς τυχούσης ἀπὸ τὰς ὀρθογωνίους τροχιάς των.***

[Διὰ νὰ εἶναι δὲ αἱ γενέτειραι πρῶται κάθετοι ***δύο συγχρόνως*** καμπύλων τῆς ἐπιφανείας, πρέπει, καθὼς ἀπέδειξεν ὁ Bour, τὰ δ_1 καὶ ε νὰ ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν : (145) $(\delta_1-c_1)^2+(\varepsilon-c_2)^2=c_3^2$ (ὅπου : c_1, c_2, c_3 σταθ.)].

97. ***Γραμμαὶ καμπυλότητος***. — Ἐπαληθεύουν αὐταὶ τώρα τὰς ἐξισώσεις :

$$(146)\quad d\delta-P\,\sigma\upsilon\nu\psi\, d\Sigma=0,\qquad \varepsilon d\Sigma-P\,\sigma\upsilon\nu\psi(d\psi+f d\Sigma)=0\cdot$$

ἡ ἀπαλοιφὴ λοιπὸν τοῦ P μᾶς δίδει τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσίν των :

$$d\delta(d\psi+f d\Sigma)-\varepsilon d\Sigma^2=0\cdot\qquad(147)$$

ἡ δὲ ἀπαλοιφὴ τοῦ $\frac{d\delta}{d\Sigma}$ δίδει :

$$P^2\sigma\upsilon\nu^4\psi+P\varepsilon\,\sigma\upsilon\nu\psi\left(f+\frac{\partial\psi}{d\Sigma}\right)-\varepsilon^2=0\quad(148),$$

τὴν ἐξίσωσιν δηλ. τῶν πρωτευουσῶν ἀκτίνων. Εἶναι λοιπόν :

$$P_1P_2=-\frac{\varepsilon^2}{\sigma\upsilon\nu^4\psi}=-\left[\frac{(\delta-\delta_1)^2+\varepsilon^2}{\varepsilon}\right]^2\quad(149).$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν δὲ αὐτὴν βλέπομεν, ὅτι : ***Ἡ καμπυλότης τῆς ἐπιφανείας εἶναι μεγίστη (ἀπολύτως) εἰς τὸ κεντρικὸν σημεῖον.*** (Παρβλ. ***Σμήνη καὶ Συμπλ. Ν. Χατζιδάκη, σελ. 33, τύπ. 28)***).

Ἂν τώρα εἰς τὴν προηγουμένην ἐξίσωσιν τῶν γραμμῶν καμπυλότητος θέσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ψ, εὑρίσκομεν :

$$(147')\quad \varepsilon d\delta(d\delta-d\delta_1)-(\delta-\delta_1)d\delta d\varepsilon+[(\delta-\delta_1)^2+\varepsilon^2](f d\delta d\Sigma-\varepsilon d\Sigma^2)=0\cdot$$

εἰμποροῦμεν λοιπὸν πάντοτε νὰ ὁρίσωμεν τὸ f οὕτως, ὥστε ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις νὰ ἐπιδέχεται μίαν ***ἀπὸ πρὶν δοθεῖσαν*** μερικὴν λύσιν : $\delta=\varphi(\Sigma)$ (ἀρκεῖ ὅμως νὰ μὴ εἶναι $\varphi(\Sigma)=$σταθ.)· ὥστε :

Θεώρημα. — ***Εἰμποροῦμεν πάντοτε νὰ κάμψωμεν μίαν στρεβλὴν ἐπιφάνειαν οὕτως, ὥστε μία τυχοῦσα γραμμή της νὰ γίνῃ γραμμὴ καμπυλότητος, ἀρκεῖ ἡ δοθεῖσα γραμμὴ νὰ μὴ εἶναι μία γενέτειρα ἢ μία ὀρθογώνιος τροχιὰ τῶν γενετειρῶν.***

98. ***Θεώρημα τοῦ** Lelieuvre (1888).—**Αἱ μόναι εὐθειογενεῖς ἐπιφάνειαι, ποὺ αἱ γραμμαὶ καμπυλότητός των τῆς μιᾶς σειρᾶς εἶναι «ἰσαπεχεῖς», εἶναι ὅσαι ἔχουν στρεβλότητα σταθερὰν καὶ ὡς λαιμὸν μίαν γραμμὴν καμπυλότητός των.***

Ἰσαπεχεῖς λέγονται αἱ γραμμαί, ὅταν ἀνὰ δύο ἀποκόπτουν ἴσα μήκη ἐπὶ ὅλων τῶν γενετειρῶν.

Ἀπόδειξις. Ἡ ἐξίσωσις μιᾶς σειρᾶς ἰσαπεχῶν γραμμῶν εἶναι προφανῶς : $\delta=\sigma(\Sigma)+c$ ($c\equiv$σταθ.)· διὰ τὴν τιμὴν δὲ αὐτὴν τοῦ δ ἡ ἐξίσωσις (147′) μᾶς δίδει (ἀπὸ τὸν μηδενισμὸν τῶν συντελεστῶν τῶν διαφόρων δυνάμεων τοῦ c) :

$$\sigma'(\Sigma).f(\Sigma)-\varepsilon=0, \qquad \varepsilon'=0, \qquad \sigma'(\Sigma)=\delta_1{}'$$

ἑπομένως : $$\sigma(\Sigma)=\delta_1, \qquad \varepsilon'=0, \qquad f(\Sigma)\delta_1{}'=\varepsilon.$$

Αἱ σχέσεις αὐταὶ μᾶς λέγουν, ὅτι : ***ὁ λαιμὸς τῆς ἐπιφανείας ($\delta=\delta_1$) εἶναι γραμμὴ καμπυλότητός της καὶ ὅτι ἡ στρεβλότης της ε εἶναι σταθερά*** · ἐπειδὴ δὲ πρέπει νὰ εἶναι καὶ δ_1 μεταβλητόν, ***πρέπει ἀκόμη ὁ λαιμὸς νὰ μὴ εἶναι ὀρθογώνιος τροχιὰ τῶν γενετειρῶν*** (δηλ. ***ἡ ἐπιφάνεια νὰ μὴ εἶναι δικαθετική, Σμήνη καὶ Συμπλ. ἐδ. 27)***.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΣΘΗΚΑΙ

---

1) Νὰ δειχθῇ τὸ ***θεώρημα τῶν τριῶν ἰδιοτήτων*** τοῦ *Bonnet* ***(Σμ. κ. Συμπλ. ἐδ. 26) κινητικῶς.***

2) Νὰ δειχθῇ ***κινητικῶς*** ἡ 1η Ἄσκησις ἀπὸ τὰ ***Σμ. κ. Συμπλ., σελ. 56.***

3) Νὰ δειχθῇ, ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ θεωρήματος τοῦ *Lelieuvre* ἡ β′ σειρὰ τῶν γραμμῶν καμπυλότητος διαιρεῖ ***ὁμογραφικῶς*** τὰς γενετείρας.

4) Νὰ δειχθῇ τὸ ἑξῆς θεώρημα τοῦ *Beltrami (1865)* : ***Ὑπάρχουν πάντοτε δύο εὐθειογενεῖς ἐπιφάνειαι ἐφαρμόσιμοι διὰ κάμψεως ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης, μὲ ἀντιστοίχους γενετείρας παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους.***

Ἀπόδειξις. Ἂν αἱ ἐξισώσεις μιᾶς εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας εἶναι: $X=x+A\omega$ κτλ., τὸ γραμμικόν στοιχεῖόν της εἰμπορεῖ νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς: (150) $ds^2=d\omega^2+2\Delta du\delta\omega+(Z\omega^2+2H\omega+\Theta)du^2$, ὅπου :

$$\Delta\equiv\Sigma A\frac{dx}{du},\quad Z\equiv\Sigma\left(\frac{dA}{du}\right)^2,\quad H\equiv\Sigma\frac{dA}{du}.\frac{dx}{du},\quad \Theta\equiv\Sigma\left(\frac{dx}{du}\right)^2. \quad (151)$$

Λέγω τώρα, ὅτι : ***Ὑπάρχουν ἄπειροι εὐθειογενεῖς ἐπιφάνειαι, ποὺ ἔχουν ὡς γραμμικὸν στοιχεῖον τὸ*** (150), ***ἀπὸ πρὶν αὐθαιρέτως δοθέν.*** Πραγματικῶς, αἱ 4 ἐξισώσεις (151) καὶ ἡ $\Sigma A^2=1$ ἀποτελοῦν ***ὑποσύστημα*** μὲ 6 ἀγνώστους συναρτήσεις : A,B,Γ,x,y,z (ἀφοῦ τὸ γραμ. στοιχεῖον, δηλ. τὰ Δ,Z,H,Θ, μᾶς ἔχουν δοθῇ). Καὶ πρῶτα διὰ τὰ A,B,Γ ἔχομεν: $\Sigma A^2=1$, $\Sigma\left(\frac{dA}{du}\right)^2=Z$· ἂν λοιπὸν λάβωμεν $B=\varphi(A)$ (δηλ. ***τυχοῦσαν*** συνάρτησιν τοῦ A), θὰ εὕρωμεν, ἀπὸ τὴν $\Sigma A^2=1$, τὸ Γ ὡς συνάρτησιν τοῦ A· καὶ ἀπὸ τὴν $\Sigma\left(\frac{dA}{du}\right)^2=Z$ θὰ ὁρίσωμεν τὸ A ὡς συνάρτησιν τοῦ u (μὲ ἕνα τετραγωνισμόν). Ἐπειδὴ δὲ τὰ A,B,Γ εἶναι καὶ ***αἱ συντεταγμέναι τῆς σφαιρικῆς ἀπεικονίσεως τῆς γενετείρας,*** ἡ δὲ συνάρτησις $\varphi(A)$ εἶναι ***τυχοῦσα,*** βλέπομεν, ὅτι : ***Τὸ πρόβλημα : Νὰ ὁρισθῇ ἡ σφαιρικὴ καμπύλη, ποὺ ἔχει ὡς τόξον δοθεῖσαν συνάρτησιν τοῦ u, εἶναι ἀόριστον,*** δηλ. ὅτι :

Ὁ ὁδηγῶν κῶνος τῆς εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας εἶναι τυχών. Ἂν τώρα ὑποθέσωμεν γνωστὰ τὰ A,B,Γ, αἱ τρεῖς ἄλλαι ἐξισώσεις :

$$Ax'+By'+\Gamma z'=\Delta,\quad A'x'+B'y'+\Gamma'z'=H,\quad x'^2+y'^2+z'^2=\Theta$$

θὰ μᾶς ὁρίσουν τὰ x,y,z. Ἡ λύσις των δὲ γίνεται ὡς ἑξῆς: Ἂν θέσωμεν : (α) $\begin{vmatrix} A & B & \Gamma \\ A' & B' & \Gamma' \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}\equiv\Omega$, εὑρίσκομεν :

$$(\beta)\quad \Omega^2=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \Delta \\ 0 & Z & H \\ \Delta & H & \Theta \end{vmatrix}=Z\Theta-H^2-Z\Delta^2\cdot$$

τὸ α'-βάθμιον τότε σύστημα :

$$\Sigma A x' = \Delta, \quad \Sigma A' x' = H, \quad \begin{vmatrix} A & B & \Gamma \\ A' & B' & \Gamma' \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \Omega \text{ ὁρίζει τὰ } x', y', z' :$$

$$(152) \quad x' = \Delta A + \frac{H}{Z} A' + \frac{\Omega}{Z}(B\Gamma' - \Gamma B'),$$

$$y' = \Delta B + \frac{H}{Z} B' + \frac{\Omega}{Z}(\Gamma A' - A\Gamma'), \quad z' = \Delta\Gamma + \frac{H}{Z}\Gamma' + \frac{\Omega}{Z}(AB' - BA')$$

καὶ ἑπομένως τὰ x,y,z προσδιορίζονται μὲ τετραγωνισμούς.

(Εἶναι δὲ εὔκολον νὰ δειχθῇ, ὅτι οἱ προηγούμενοι τύποι (152) δίδουν ***ὅλας*** τὰς εὐθειογενεῖς ἐπιφανείας, ποὺ ἔχουν τὸ ***δοθὲν*** γραμμικὸν στοιχεῖον καὶ ὅτι ὁ ὁδηγῶν κῶνος μένει πραγματικῶς ***αὐθαίρετος***).

Ἐπειδὴ τώρα αἱ ἐξισώσεις (152) περιέχουν τὸ Ω, πού, ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (β), ἔχει δύο τιμάς: $\pm\sqrt{Z\Theta - H^2 - Z\Delta^2}$, συνάγομεν τὴν ἀλήθειαν τοῦ προηγ. θεωρήματος τοῦ *Beltrami*.

5) ***Παράδειγμα εἰς τὸ θεώρημα τοῦ*** *Beltrami*.—Τὸ ***ἐκ περιστροφῆς μονόχωνον ὑπερβολοειδές :***

$$\frac{x^2+y^2}{\alpha^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1, \text{ ἤ, εἰς παραμετρικὰς ἐξισώσεις : } (153)$$

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{\omega}{\Phi}\,\text{συν}u + \text{ημ}u, \quad \frac{y}{\alpha} = \frac{\omega}{\Phi}\,\text{ημ}u - \text{συν}u, \quad \frac{z}{\gamma} = \frac{\omega}{\Phi} \quad (\Phi = \sqrt{\alpha^2+\gamma^2}),$$

ἔχει :
$$ds^2 = d\omega^2 + 2\frac{\alpha^2}{\Phi}\,d\omega\,du + \frac{\alpha^2}{\Phi^2}(\omega^2 + \Phi^2)du^2.$$

Εἶναι λοιπὸν τώρα : $\Delta = \frac{\alpha^2}{\Phi}, \quad Z = \frac{\alpha^2}{\Phi^2}, \quad H = 0, \quad \Theta = \alpha^2$

καὶ ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν ἡ ἐφαρμόσιμος ἐπὶ τοῦ ὑπερβολοειδοῦς μὲ παραλληλισμὸν τῶν γενετειρῶν ἔχει τὰς ἐξισώσεις :

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{\omega}{\Phi}\,\text{συν}u + \frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha^2+\gamma^2}\,\text{ημ}u, \quad \frac{y}{\alpha} = \frac{\omega}{\Phi}\,\text{ημ}u - \frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha^2+\gamma^2}\,\text{συν}u,$$

$$z = \frac{\gamma}{\Phi}\omega + 2\frac{\alpha^2\gamma}{\Phi^2}u \quad (154)$$

εἶναι ἑπομένως ἓν ***ἑλικοειδές*** καὶ μία ἕλιξ του ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν λαιμὸν τοῦ ὑπερβολοειδοῦς.

6) Αἱ δύο εὐθειογενεῖς ἐπιφάνειαι τοῦ θεωρήματος τοῦ *Beltrami* (Ἄσκ. 4η) εἶναι μὲν ἐφαρμόσιμοι ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης, ἐν τούτοις ***δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ παραχθῇ ἡ μία ἀπὸ τὴν ἄλλην μὲ συνεχῆ κάμψιν.***

Ἀπόδειξις. Ἡ ***στρεβλότης*** σ μιᾶς εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας ἔχει σημεῖον $\pm$· πραγματικῶς, ἂν ὁρίσωμεν τὴν θετικὴν φορὰν ΚΜ ἐπὶ τῆς γενετείρας, τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον κατὰ τὴν διαδρομὴν ΚΜ θὰ στρέφεται πέριξ τῆς γενετείρας εἴτε κατὰ τὴν ***θετικὴν*** φορὰν εἴτε κατὰ τὴν ***ἀντίθετον***· ἐπειδὴ δὲ ἡ στρεβλότης ***εἶναι ἀντίστροφος καὶ ἀντίθετος μὲ τὸν γων. συντελεστὴν*** τῆς ἐξισώσεως τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου (ὅταν ληφθῇ ὡς ἐπίπεδον τῶν xz, θεώρημα τοῦ *Chasles*, ***Σμήνη καὶ Συμπλ. Ν. Χατζ., ἐδ. 30***)[1], θὰ ἔχῃ καὶ αὐτὴ σημεῖον τὸ ἀντίθετον τοῦ τῆς εφΨ, δηλ. $-$ ἢ $+$. Καὶ ἂν μὲν μᾶς δοθῇ ***μόνον*** τὸ γραμμικὸν στοιχεῖον ds, τὸ σημεῖον τοῦ σ δὲν εἰμπορεῖ νὰ ὁρισθῇ, διότι περιέχει τὸ ds, ἓν ριζικόν)· ἂν ὅμως μᾶς δοθοῦν αἱ ἐξισώσεις : $X = x_1 + A\omega$ κτλ. τὸ σημεῖον τοῦ σ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν ἔκφρασίν του : $-\frac{x_u}{B_u}$· ***ἀλλάσσει δὲ σημεῖον, ἂν ἡ φορὰ τῆς στροφῆς τοῦ ἐπιπέδου, δηλ. τῆς γωνίας ψ, ἀλλάξῃ***· καὶ ἀντιστρόφως, ***ἂν τὸ σ εἰς δύο ἐπιφανείας ἔχῃ, ἐπὶ τῶν ἀντιστοίχων γενετειρῶν, τιμὰς ἴσας καὶ ἀντιθέτους, αἱ γωνίαι στροφῆς τῶν δύο ἐπιπέδων θὰ ἔχουν ἀντίθετον φοράν.*** Αὐτὸ ὅμως ἀκριβῶς συμβαίνει εἰς τὰς δύο ἐπιφανείας τοῦ θεωρήματος τοῦ *Beltrami,* διότι αἱ δύο στρεβλότητες εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι : $+\frac{\Omega du^2}{d\Sigma^2}$ καὶ $-\frac{\Omega du^2}{d\Sigma^2}$. Εἶναι ὅμως φανερόν, ὅτι ὅταν μία εὐθειογ. ἐπιφάνεια κάμπτεται ***συνεχῶς,*** τὸ σημεῖον τοῦ σ ***δὲν εἰμπο-***

---

[1] Ἡ γεν. ἔκφρασις τῆς στρεβλότητος (***Σμ. καὶ Συμπλ. Ν. Χατζ.*** σελ. 31) : $\sigma = o\rho\left[\frac{\| \Delta x_1 A\ \Delta A \|}{\Delta\Omega\Delta\Sigma}\right] = o\rho\frac{\| \Delta x_1 A\ \Delta A \|}{(\Delta\Sigma)^2}$, ἂν ληφθοῦν οἱ ἄξονες, ὅπως εἰς τὸ θεώρημα τοῦ *Chasles*, θὰ καταντήσῃ : $o\rho\left[\frac{-\Delta x_1 \Delta B}{(\Delta B)^2}\right]$, διότι τότε : $A=0$, $B=0$, $\Gamma=1$, $dA=0$·, $\delta\Gamma=0$· δηλ. $\sigma = -\frac{dx_1}{dB} = -\frac{x_{1u}}{B_u}$.

ρεῖ ν᾽ ἀλλάξη. Ἡ πρότασίς μας λοιπὸν ἀπεδείχθη. ***Προσθήκη*** : Κατὰ τὴν διαδρομὴν δύο παραλλήλων γενετειρῶν τῶν δύο ἐπιφανειῶν ἀπὸ 2 ἀντίστοιχα σημεῖα, τὰ ἐφαπτόμ. ἐπίπεδα στρέφονται κατὰ ***ἴσας*** γωνίας, ἀλλὰ ***κατὰ φορὰς ἀντιθέτους*** (***Παράλληλα*** δὲ εἶναι μόνον εἰς τὰ κεντρικὰ καὶ εἰς τὰ ἐπ᾽ ἄπειρον σημεῖα).

7) ***Εἰμποροῦμεν νὰ κάμψωμεν μίαν εὐθειογενῆ ἐπιφάνειαν οὕτως, ὥστε μία τυχοῦσα δοθεῖσα γραμμή της νὰ γίνῃ ἐπίπεδος ; (Beltrami).***

Ἂν τὴν λάβωμεν ὡς γραμμὴν $\omega=0$ καὶ τὸ ἐπίπεδόν της ὡς ἐπίπ. τῶν yz, θὰ εἶναι : $x_u=0$, δηλ. (τύπ. 152) :

$$Z\Delta A+HA'+\Omega(B\Gamma'-\Gamma B')=0$$

ἀλλὰ : $B\Gamma'-\Gamma B'=\sqrt{(B^2+\Gamma^2)(B'^2+\Gamma'^2)-(BB'+\Gamma\Gamma')^2}=$
$$=\sqrt{(Z-A'^2)(1-A^2)-A^2A'^2}$$

ἑπομένως ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος :

$$Z\Delta A+HA'=\Omega\sqrt{Z(1-A^2)-A_1'^2} \quad (155)$$

περιέχει ***μόνον*** τὸ A· τὰ B, Γ δίδονται κατόπιν ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις :

$$\Sigma A^2=1, \quad \frac{B\Gamma'-\Gamma B'}{B^2+\Gamma^2}=\frac{\sqrt{Z(1-A^2)-A'^2}}{1-A^2} \quad \text{(τετραγωνισμός)}.$$

Ἡ (155) ὁλοκληρώνεται μὲ τετραγωνισμόν, ***ὅταν ἡ δοθεῖσα γραμμὴ εἶναι ὀρθογώνιος τροχιὰ τῶν γενετειρῶν*** · διότι τότε : $\Delta=0$ καὶ ἑπομέ·νως :

$$\frac{A'}{\sqrt{1-A^2}}=\frac{\Omega\sqrt{Z}}{\sqrt{H^2+\Omega^2}} \quad (155').$$ Ἄλλως ἡ ἐξίσωσις εἶναι τοῦ τύπου :

$$\Pi y^2+2Pyy'+\Sigma y'^2=1.$$

(Π,P,Σ συναρτήσεις τοῦ x) καὶ ἀνάγεται εἰς μίαν ἀπὸ τὰς μορφάς : $y^2+y'^2=\sigma(x)$ ἢ $y'=a+by+cy^2+fy^3$, (a, b, c, f συναρτήσεις τοῦ x).

8) ***Εἰμπορεῖ μία εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια νὰ καμφθῇ οὕτως, ὥστε μία τυχοῦσα δοθεῖσα καμπύλη της νὰ γίνῃ εὐθεῖα ; (Beltrami).***

Ἡ δοθεῖσα καμπύλη θὰ εἶναι προφανῶς ***γεωδαισιακή*** · ἂν τὴν λάβωμεν πάλιν ὡς $\omega=0$ καὶ τὴν παραγομένην εὐθεῖαν ὡς ἄξονα τῶν z, θὰ εἶναι : $x_u = y_u = 0$· ὥστε : $\Delta = \Gamma\frac{dz}{du}$, $H = \frac{d\Gamma}{du}\cdot\frac{dz}{du}$, $\Theta = \left(\frac{dz}{du}\right)^2$,

ἑπομένως : $\frac{dz}{du} = \sqrt{\Theta}$, $\Gamma = \frac{\Delta}{\sqrt{\Theta}}$, $\Gamma' = \frac{H}{\sqrt{\Theta}}$.

ἔχομεν λοιπὸν τὴν συνθήκην : (156) $\frac{H}{\sqrt{\Theta}} = \left(\frac{\Delta}{\sqrt{\Theta}}\right)'$· ἀπὸ τὸ Γ εὑρίσκομεν ἔπειτα τὰ A,B μὲ τὰς ἐξισώσεις :

$$A^2 + B^2 = 1 - \Gamma^2, \quad A'^2 + B'^2 = Z - \Gamma'^2$$

$\Big($τετραγωνισμός, διότι : $\frac{AB' - BA'}{A^2 + B^2} = \frac{\sqrt{Z(1-\Gamma^2) - \Gamma'^2}}{1 - \Gamma^2}\Big)$.

9) ***Εἶναι δυνατὴ κάμψις τῆς εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας, ποὺ νὰ τρέπη μίαν καμπύλην της εἰς γραμμὴν φαινομένης περιοχῆς (ligne d'ombre) πρὸς ἓν σμῆνος παραλλήλων ἀκτίνων ; (Beltrami*** τετραγωνισμοί***).***

10) Κατὰ τὸ θεώρημα τῶν 3 ἰδιοτήτων τοῦ *Bonnet* ***(Σμήνη καὶ Συμπλ. Ν. Χατζ., σελ. 28)***, ἂν ὁ λαιμὸς εἶναι γεωδαισιακή, κόπτει τὰς γενετείρας ὑπὸ σταθ. γωνίαν· καὶ ἀντιστρόφως. Ἐπειδὴ δὲ διὰ τὸν λαιμὸν εἶναι : $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\delta_1'}{\sqrt{\delta_1'^2 + \varepsilon^2}}$, $\eta\mu\omega = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\delta_1'^2 + \varepsilon^2}}$, θὰ ἔχ. τὴν σχέσιν : (157) $\varepsilon = \delta'_1 \varepsilon\varphi\omega$, ὅπου ω=σταθ. Ἂν τώρα ὑποθέσωμεν καὶ ε=σταθ. εὑρίσκομεν, ὁλοκληρώνοντες τὴν προηγουμένην σχέσιν : $\delta_1 = \varepsilon \Sigma \sigma\varphi\omega + \varepsilon_0$ (157')· ἐξαλείφεται ὅμως ἡ σταθ. ε_0, ἂν ἐκλέξωμεν ***καταλλήλως*** τὴν ὀρθογώνιον τροχιὰν $\delta = 0$· τότε :

$$(158) \quad ds^2 = d\delta^2 + [(\delta - \varepsilon\Sigma\sigma\varphi\omega)^2 + \varepsilon^2] d\Sigma^2,$$

μὲ δύο σταθ. τὰς ω καὶ ε. Ἀποδεικνύεται ὅμως (Darboux, Surf. III, ἐδ. 691-3), ὅτι : ***Αἱ μόναι εὐθειογενεῖς ἐπιφάνειαι αἱ ἐφαρμόσιμοι ἐπὶ ἐπιφανειῶν ἐκ περιστροφῆς μὲ ἀντιστοίχησιν τῶν γενετειρῶν εἶναι ὅσαι ἔχουν γραμμικὸν στοιχεῖον μὲ μίαν ἀπὸ τὰς ἑξῆς 4 μορφάς :***

(α) $ds^2 = du_1^2 + u_1 du_2^2$, $\quad ds^2 = du_1^2 + (u_1^2 + \alpha^2) du_2^2$,

$ds^2 = du_1^2 + [(u_1 + \alpha u_2)^2 + \beta^2] du_2^2$, $\quad ds^2 = du_1^2 + (u_1 + \alpha u_2) du_2^2$, ὅπου παραμετρικαὶ γραμμαὶ εἶναι αἱ γενέτειραι καὶ αἱ ὀρθογώνιοι τροχιαί των. Ἑπομένως εἰς τὸ παρὸν πρόβλημά μας βλέπομεν, ὅτι ἡ μορφὴ (158) τοῦ ds^2 ὑπάγεται εἰς τὴν $3^{\eta\nu}$ τῶν προηγουμένων μορφῶν καὶ ***ἡ ἐπιφάνειά μας λοιπὸν εἶναι ἐφαρμόσιμος ἐπὶ ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς***. Καὶ ἂν μὲν $\omega=\frac{\pi}{2}$ (***δικαθετικὴ*** ἐπιφάνεια), τὸ ds^2 γίνεται: (158') $ds^2=d\delta^2+(\delta^2+\varepsilon^2)d\Sigma^2$ (β' μορφὴ) καὶ ***ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἐφαρμόσιμος ἐπὶ ἑνὸς ἁλυσσοειδοῦς***(¹)· ἂν δὲ $\omega \gtrless \frac{\pi}{2}$, ***ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἐφαρμόσιμος ἐπὶ ἑνὸς ὑπερβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς μονοχώνου***. Διότι μεταξὺ τῶν ἀντιστοίχων ἐπιφανειῶν ἐκ περιστροφῆς τοῦ προβλ. περιλαμβάνονται καὶ τὰ ἐκ περιστροφῆς μονόχωνα ὑπερβολοειδῆ· καὶ εἰς ***κάθε*** τιμὴν τοῦ $\omega \gtrless \frac{\pi}{2}$ καὶ ***κάθε*** τιμὴν τοῦ ε ἀντιστοιχεῖ ***πάντοτε*** ἓν ***ὡρισμένον*** ὑπερβολοειδές· διότι, ἂν α εἶναι ὁ πραγματικὸς καὶ β ὁ φανταστικὸς ἄξων ἑνὸς ὑπερβολοειδοῦς, τὸ ω καὶ ἡ στρεβλότης ε ἔχουν τὰς τιμάς: $\omega=\text{τοξεφ}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$, $\varepsilon=\beta$. Ἐν ***μερικὸν*** παράδειγμα τοιούτων ἐπιφανειῶν ἀποτελοῦν ***τὰ στρεβλὰ ἑλικοειδῆ, ποὺ αἱ γενέτειραί των κόπτουν τὸν λαιμόν των ὑπὸ γωνίαν*** $\gtrless \frac{\pi}{2}$ (δηλ. ποὺ ***δὲν*** ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὰς δικαθέτους μιᾶς ἕλικος).—

Προσθήκη.

Εἰς τὰς 4 μορφὰς (α) περιλαμβάνονται: α') εἰς τὴν $1^{\eta\nu}$: αἱ ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνειαι μὲ μεσημβρινόν: $z=\frac{1}{\mu}\int\sqrt{\varrho^2-\mu^2}d\varrho$, ὅπου ϱ ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὸν ἄξονα καὶ z ἡ ἀπόστασις ἀπὸ ἐπίπεδον κάθετον πρὸς τὸν ἄξονα. Παράγονται μὲ τὴν περιστροφὴν τῆς ἐνειλιγμένης τῆς ἁλυσσοειδοῦς πέριξ τῆς βάσεως τῆς ἁλυσσοειδοῦς· β') εἰς τὴν $2^{\alpha\nu}$: τὸ

(¹) Διότι ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἁλυσσοειδοῦς εἶναι: $\varrho=\frac{\alpha}{2}\left(e^{\frac{z}{\alpha}}+e^{-\frac{z}{\alpha}}\right)$· καὶ ἐπειδὴ γενικῶς: $d\varrho\sqrt{1+f'^2}=du_1$ (ὅταν γεν. $z=f(\varrho)$), τώρα θὰ εἶναι: $u_1=\sqrt{\varrho^2-\alpha^2}$ καί: $ds^2=du_1{}^2+(u_1{}^2+\alpha^2)du_2{}^2$.

ἁλυσσοειδές· γ') εἰς τὴν $3^{ην}$: τὰ ἐκ περιστροφῆς ἐλλειψοειδῆ καὶ ὑπερβολοειδῆ· δ') εἰς τὴν $4^{ην}$: τὸ ἐκ περιστροφῆς παραβολοειδές.

(Ἡ $1^{η}$ καὶ ἡ $4^{η}$ μορφὴ ἀντιστοιχοῦν εἰς εὐθειογενεῖς ἐπιφανείας μὲ **φανταστικὰς** γενετείρας).

11) Ἂς ἀναφέρωμεν ἀκόμη ***χωρὶς ἀπόδειξιν*** καὶ τὴν ἑξῆς πρότασιν : ***Ὅταν δύο εὐθειογενεῖς ἐπιφάνειαι εἶναι ἐφαρμόσιμοι ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης χωρὶς σύμπτωσιν τῶν γενετειρῶν των, εἶναι καὶ αἱ δύο ἐφαρμόσιμοι ἐπὶ μιᾶς καὶ τῆς ἰδίας ἐπιφανείας τοῦ β' βαθμοῦ οὕτως, ὥστε αἱ γενέτειραί των ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰ δύο συστήματα γενετειρῶν τῆς β'-βαθμίου ἐπιφανείας, ἀντιστοίχως.***

12) Οἱ γεν. τύποι (143), διὰ ῶ=0, ψ=0, μᾶς δίδουν τὰς τιμὰς τῶν ἀκτίνων τοῦ λαιμοῦ :

$$\frac{1}{P}=\frac{f.\eta\mu^2\omega+\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega}{\varepsilon}, \quad \frac{1}{R}=\frac{\eta\mu^2\omega-f.\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega}{\varepsilon}$$

ὥστε : (159) $$\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{P}+\frac{\eta\mu\omega}{R}=\frac{\eta\mu\omega}{\varepsilon} \quad \text{(καμπύλη } \mathit{Bertrand}\text{).}$$

Λοιπόν : α') ἂν $\omega \gtrless \frac{\pi}{2}$ *(Laguerre, 1871)* : ***Ὅταν ἓν ἐκ περιστροφῆς μονόχωνον ὑπερβολοειδὲς κάμπτεται, ὁ λαιμός του μετασχηματίζεται εἰς καμπύλην τοῦ*** *Bertrand*.—β') Νὰ διατυπωθῇ ἡ μερικὴ περίπτωσις, ὅπου $\omega=\frac{\pi}{2}$.

13) Ἀντιστροφὴ τοῦ θεωρήματος τοῦ *Laguerre (Bioche, 1888)* : ***Ὅταν μᾶς δοθῇ μία καμπύλη τοῦ*** *Bertrand*, ***κατασκευάζομεν ἀπὸ αὐτὴν μίαν εὐθειογενῆ ἐπιφάνειαν ἐφαρμόσιμον εἰς ἓν μονόχωνον ὑπερβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς, ἂν φέρωμεν ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης παραλλήλους πρὸς τὰς δικαθέτους τῆς ἄλλης καμπύλης τοῦ*** *Bertrand*, ***ποὺ ἔχει τὰς ἰδίας πρώτας καθέτους μὲ τὴν πρώτην. (Κιν. Ἀπειρ. Γεωμ. Ν. Χατζ. Τόμ. Α'***, ἐδ. 41).

14) ***Πρόβλημα τῶν*** *Beltrami-Dini* (1865) : ***Εἰς ποίας εὐθειογενεῖς ἐπιφανείας αἱ δύο πρωτεύουσαι ἀκτῖνες καμπυλότητος P_1, P_2 εἶναι συναρτήσεις ἡ μία τῆς ἄλλης ;***—Ἂν θέσωμεν συντόμως :

$$h = \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2}, \quad k = \frac{1}{\sqrt{-P_1 P_2}}, \text{ θὰ ἔχωμεν :}$$

$$h = \frac{\sigma\upsilon\nu\psi}{\varepsilon}\left(f + \frac{\partial\psi}{\partial\Sigma}\right) = \frac{f.\sigma\upsilon\nu\psi}{\varepsilon} - \frac{\delta_1'\sigma\upsilon\nu^3\psi}{\varepsilon^2} - \frac{\varepsilon'.\eta\mu\psi\sigma\upsilon\nu^2\psi}{\varepsilon^2}, \quad k = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\psi}{\varepsilon}.$$

ἀπαλείφοντες δὲ τὸ ψ, εὑρίσκομεν:

$$(160) \quad \varepsilon h = (f - \delta_1' k)\sqrt{\varepsilon k} - \varepsilon' k\sqrt{1-\varepsilon k},$$

σχέσιν, ποὺ ἰσχύει κατὰ μῆκος μιᾶς γενετείρας καὶ ***ποὺ πρέπει τώρα νὰ εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ Σ*** · ἂν ὅμως ἀναπτύξωμεν τὸ h κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ $\sqrt{k}$, εὑρίσκομεν ὡς πρώτους συντελεστάς :

$$\frac{f}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \frac{-\varepsilon'}{\varepsilon}, \quad \frac{-\delta'_1}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \frac{\varepsilon'}{2}.$$

καὶ ἐπειδὴ πρέπει νὰ εἶναι σταθεροί, θὰ εἶναι σταθερὰ καὶ τὰ δ'_1, ε, f· τότε ὅμως ἡ σχέσις (160) γίνεται: $h\sqrt{\varepsilon} = (f - \delta'_1 k)\sqrt{k}$ (160′)· καὶ ἐπειδὴ δ_1', ε σταθερά, αἱ ζητούμεναι ἐπιφάνειαι ἀνήκουν εἰς τὰς τῆς $12^{ης}$ ἀσκήσεως. Ἀλλά, ἀφοῦ καὶ f σταθερόν, οἱ τύποι τῆς $12^{ης}$ ἀσκ. μᾶς δίδουν καὶ τὰ $\frac{1}{P}$, $\frac{1}{R}$ τοῦ λαιμοῦ σταθερά· ***εἶναι λοιπὸν ὁ λαιμὸς κυκλικὴ στερεὰ ἕλιξ*** · καὶ ἑπομένως : ***Αἱ ζητούμεναι ἐπιφάνειαι εἶναι μόνον τὰ ἑλικοειδῆ καὶ τὸ ἐκ περιστροφῆς μονόχωνον ὑπερβολοειδές.***

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η΄.

ΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΙ ΤΟΥ WEINGARTEN

α΄) Θεωρήματα περὶ τῶν ἐπιφανειῶν τοῦ *Weingarten*.

99. ***Ἐπιφάνειαι τοῦ*** *Weingarten*.—Εἰς μίαν ***τυχοῦσαν*** ἐπιφάνειαν αἱ δύο πρωτεύουσαι ἀκτῖνες P_1, P_2 εἶναι ἐν γένει ***ἀνεξάρτητοι ἡ μία ἀπὸ τὴν ἄλλην***(¹). Δυνατὸν ὅμως εἶναι εἰς μίαν ἐπιφάνειαν νὰ

(¹) Κατὰ μῆκος ὅμως ***κάθε καμπύλης*** τῆς ἐπιφανείας εἶναι προφανῶς ἡ μία ἀκτὶς συνάρτησις τῆς ἄλλης· διότι εἶναι : $P_1 = \varrho_1(u_1, u_2)$, $P_2 = \varrho_2(u_1, u_2)$

συμβαίνη νὰ εἶναι ***ἡ μία ἀκτὶς συνάρτησις τῆς ἄλλης,*** δηλ. νὰ ἰσχύῃ ***ἀπὸ ταυτότητα, εἰς ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας,*** μία σχέσις τῆς μορφῆς : $W(P_1,P_2)=0$· αἱ ἐπιφάνειαι, ποὺ ἐπαληθεύουν μίαν ***τυχοῦσαν*** τοιαύτην σχέσιν, λέγονται ***ἐπιφάνειαι τοῦ Weingarten*** (Βάϊνγκάρτεν, 1862), ἤ, συντομώτερα, ἐπιφάνειαι W.

Ἐπιφανειῶν W ὑπάρχουν προφανῶς ἄπειρα εἴδη, ἀναλόγως τοῦ εἴδους τῆς συναρτήσεως $W(P_1,P_2)$. Αἱ ἁπλούστεραι εἶναι αἱ ἐπιφάνειαι ***σταθερᾶς μέσης καμπυλότητος :*** $\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_2}=c$ καὶ αἱ ἐπιφάνειαι ***σταθερᾶς ὁλικῆς καμπυλότητος:*** $\frac{1}{P_1P_2}=c$.

100. ***Θεώρημα 1ον (τοῦ Halphen (Ἀλφέν), 1876).—Εἰς τὰς ἐπιφανείας W καὶ μόνον εἰς αὐτὰς τὸ γινόμενον τῶν τεσσάρων πρωτευουσῶν ἀκτίνων :*** P_1', P_2', P_1'', P_2'' ***τῶν δύο χωνῶν τῶν ἐνειλιγμένων των εἰς τ᾽ ἀντίστοιχα πρωτεύοντα κέντρα*** M_1, M_2 ***εἶναι ἴσον μὲ τὴν τετάρτην δύναμιν τῆς ἀποστάσεώς των*** M_1M_2· δηλ. : (161) $P_1'P_2'P_1''P_2''=(P_1-P_2)^4$.

Ἀπόδειξις. Αὐτὸ φαίνεται ἀμέσως ἀπὸ τοὺς τύπους (103) καὶ (112): τὸ γινόμενόν των δίδει :

$$P_1'P_2'P_1''P_2''-(P_1-P_2)^4=(P_1-P_2)^4.\frac{\frac{\partial P_1}{\partial u_1}.\frac{\partial P_2}{\partial u_2}-\frac{\partial P_1}{\partial u_2}.\frac{\partial P_2}{\partial u_1}}{\frac{\partial P_1}{\partial u_2}.\frac{\partial P_2}{\partial u_1}}.$$

ἂν λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἐπιφάνεια W, θὰ εἶναι ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος τοῦ β′ μέλους $=0$· διότι, διὰ νὰ εἶναι δύο συναρτήσεις τῶν u_1, u_2 ***ἐξηρτημέναι ἡ μία ἀπὸ τὴν ἄλλην, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ παράγωγος τοῦ συστήματός των,*** δηλ. ἡ ***(Γιακομπιανὴ)*** ὁρίζουσα :

$$\frac{\partial P_1}{\partial u_1}.\frac{\partial P_2}{\partial u_2}-\frac{\partial P_1}{\partial u_2}.\frac{\partial P_2}{\partial u_1},$$

νὰ εἶναι ἀπὸ ταυτότητα$=0$. ***(Ἰ. Ν. Χατζιδάκη, Διαφ. Λογισμός,***

καὶ ἐπειδὴ ἐπὶ τῆς γραμμῆς εἶναι $u_2=\sigma(u_1)$, ἡ ἀπαλοιφὴ τῶν u_1,u_2 μεταξὺ τῶν 3 αὐτῶν ἐξισώσεων θά μας δώσῃ μίαν σχέσιν : $f(P_1,P_2)=0$. Ἡ σχέσις ὅμως αὐτὴ *μεταβάλλεται* ἐν γένει προφανῶς ἀπὸ καμπύλην εἰς καμπύλην τῆς ἐπιφανείας· ἂν τύχῃ νὰ εἶναι ἡ *ἰδία* δι᾽ ὅλας τὰς καμπύλας τῆς ἐπιφανείας, *τότε* ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἐπιφάνεια W.

Τόμ. Α', ἐδ. 185).

Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν : $P_1'P_2'P_1''P_2''=(P_1-P_2)^4$.

Πόρισμα α'.—Αἱ δύο χῶναι τῆς ἐνειλιγμένης μιᾶς ἐπιφανείας W εἶναι εἰς τ' ἀντίστοιχα σημεῖά των M_1, M_2 ἢ καὶ αἱ δύο κυρταί, ἢ καὶ αἱ δύο κοιλόκυρτοι.

Πόρισμα β'.—Ἂν αἱ δύο χῶναι τῆς ἐνειλιγμένης μιᾶς ἐπιφανείας W ἔχουν καὶ αἱ δύο σταθερὰν ὁλ. καμπυλότητα, ἡ ἐξίσωσις $W(P_1, P_2)=0$ ***τῆς ἐξειλιγμένης των εἶναι τῆς μορφῆς:*** $P_1-P_2=$***σταθ.*** Καὶ ἀντιστρόφως : Κάθε ἐπιφανείας W, ποὺ ἔχει $P_1-P_2=$σταθ.$\equiv\alpha$, καί αἱ δύο χῶναι τῆς ἐνειλιγμένης ἔχουν καμπυλότητας ὁλικὰς σταθερὰς καὶ ἴσας μὲ $-\frac{1}{\alpha^2}$. Αὐτὸ φαίνεται ἀμέσως ἀπὸ τοὺς τύπους (103) καὶ (112). Ἀπὸ τὴν β' αὐτὴν πρότασιν βλέπομεν καὶ ὅτι : ***ἂν τὸ γινόμενον τῶν ὁλ. καμπυλοτήτων τῶν 2 χωνῶν εἶναι σταθερόν, θὰ εἶναι χωριστὰ ἡ ὁλ. καμπυλότης κάθε χώνης σταθερά.***

101. ***Θεώρημα 2ον (τοῦ Lie). Αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος κάθε ἐπιφανείας W εἰμποροῦν πάντοτε νὰ εὑρεθοῦν μὲ ἁπλοῦς τετραγωνισμούς.***

Ἀπόδειξις τοῦ *Darboux*.

Ὅταν μᾶς δοθῇ μία ἐπιφάνεια τοῦ Βάϊνγκάρτεν, γνωρίζομεν τὰς δύο χώνας τῆς ἐνειλιγμένης της· κατὰ ἓν θεώρημα δὲ (τὸ ὁποῖον θ' ἀποδείξωμεν κατόπιν) αἱ δύο αὐταὶ χῶναι ***εἶναι ἐφαρμόσιμοι καὶ ἡ μία καὶ ἡ ἄλλη ἐπὶ ἐπιφανειῶν ἐκ περιστροφῆς.*** Ἀλλὰ κατ' ἄλλο θεώρημα (ποὺ δέν το ἀποδεικνύομεν ἐδῶ) ***ὅταν μία δοθεῖσα ἐπιφάνεια εἶναι ἐφαρμόσιμος εἰς μίαν ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνειαν, εἰμποροῦμεν πάντοτε, μόνον μὲ τετραγωνισμούς,*** νὰ προσδιορίσωμεν τὰς γεωδαισιακάς της ἐκείνας, ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τοὺς μεσημβρινοὺς τῆς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας (ὁσάκις τοὐλάχιστον ἡ δοθεῖσα ἐπιφάνεια δὲν ἔχει ὁλικὴν καμπυλότητα σταθεράν). Ἀφ' ἑτέρου αἱ γεωδαισιακαὶ αὐταὶ τῶν δύο χωνῶν (X_1) καὶ (X_2) ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς γραμμὰς καμπυλότητος τῆς ἐξειλιγμένης των, δηλ. τῆς ἐπιφανείας W (Σμήνη καὶ Συμπλέγματα Ν. Χατζιδάκη, ἐδ. 62). Τὸ θεώρημα λοιπὸν τοῦ *Lie* ἀπεδείχθη. — Τοῦ ἰδίου θεωρήματος ἄλλην, ἀναλυτικήν, ἀπόδειξιν, ἔδωσεν ὁ Weingarten, τὴν ὁποίαν ὅμως, χάριν συντομίας, τὴν παραλείπομεν.

102. ***Μορφὴ τοῦ γραμμικοῦ στοιχείου τῆς σφαίρας τοῦ Gauss διὰ τὰς ἐπιφανείας W.***—Εἴδομεν (ἐδ. 63 καὶ 61), ὅτι, ὅταν παραμετρικὸν δίκτυον εἶναι τὸ τῶν γραμμῶν καμπυλότητος, ἔχομεν :

$$(\alpha)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial P_1}{\partial u_2}=\dfrac{1}{q_1}.\dfrac{\partial q_1}{\partial u_2}(P_2-P_1), \qquad \dfrac{\partial P_2}{\partial u_1}=-\dfrac{1}{p_2}.\dfrac{\partial p_2}{\partial u_1}(P_2-P_1), \\ \dfrac{\partial}{\partial u_2}\left(\dfrac{1}{p_2}.\dfrac{\partial q_1}{\partial u_2}\right)+\dfrac{\partial}{\partial u_1}\left(\dfrac{1}{q_1}.\dfrac{\partial p_2}{\partial u_1}\right)+q_1p_2=0 \text{ (1)} \end{cases}$$

καί : $$(\beta)\qquad d\sigma^2=q_1^2du_1^2+p_2^2du_2^2.$$

Ἂν τώρα τὸ P_2 εἶναι συνάρτησις τοῦ P_1, αἱ δύο πρῶται ἐξισώσεις (α) μᾶς δίδουν :

$$(162)\quad q_1=U_1e^{\int\frac{dP_1}{P_2-P_1}}\quad p_2=U_2e^{-\int\frac{dP_2}{P_2-P_1}}\left[U_1\equiv\varrho_1(u_1),\ U_2=\varrho_2(u_2)\right],$$

ἀλλὰ ἡ ἐξίσωσις (β) μᾶς λέγει, ὅτι μὲ κατάλληλον ἐκλογὴν τῶν παραμέτρων τῶν γραμμῶν καμπυλότητος, αἱ U_1, U_2 εἰμποροῦν νὰ γίνουν $=1$. Τότε θὰ εἶναι :

$$(163)\qquad q_1=e^{\int\frac{dP_1}{P_2-P_1}}\ ,\qquad p_2=e^{-\int\frac{dP_2}{P_2-P_1}}.$$

Καὶ ἂν θέσωμεν : $P_1=\varphi(k)$, $P_2=\varphi(k)-k\varphi'(k)$ (164) (k βοηθ. μεταβλητή), εὑρίσκομεν :

$$(165)\ q_1=\frac{1}{k},\ p_2=\frac{1}{\varphi'(k)}\ \text{καί}: \ E_1=-\frac{\varphi(k)}{k},\ E_2=\frac{\varphi(k)-k\varphi'(k)}{\varphi'(k)}\ (166).$$

---

(1) Ἡ τρίτη ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς ἐπαληθεύεται προφανῶς διὰ *κάθε* ὀρθογώνιον δίκτυον ἐπὶ τῆς σφαίρας τοῦ *Gauss*, διότι ἐκφράζει, ὅτι ἡ καμπυλότης τῆς σφαίρας αὐτῆς εἶναι $=1$ (ἐδ. 56, τύπ. 73).

Ἂν δὲ ἡ σχέσις μεταξὺ P_1, P_2 ἔχῃ δοθῇ ***ἀπὸ πρίν***, τὰ k καὶ φ(k) ὁρίζονται ἀπὸ τὰς σχέσεις :

$$(167)\quad k = e^{\int \frac{dP_1}{P_1 - P_2}}, \qquad \varphi(k) = P_1.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ τιμὴ τοῦ k πρέπει νὰ ἐπαληθεύῃ καὶ τὴν τρίτην σχέσιν (α), θὰ ἔχωμεν :

$$(168)\qquad \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{k\varphi''}{\varphi'^2}\frac{\partial k}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{\varphi'}{k^2}\frac{\partial k}{\partial u_2}\right) - \frac{1}{k\varphi'} = 0\cdot$$

καὶ ἀπὸ ἐδῶ θὰ εὑρεθῇ τὸ k ὡς συνάρτησις τῶν u_1, u_2.

Ἡ σχέσις ὅμως αὐτὴ (168) ἐκφράζει, καθὼς εἴπομεν ὅτι ἡ σφαῖρα τοῦ Gauss ἔχει καμπυλότητα $=1$ τῆς δὲ σφαίρας αὐτῆς τὸ γραμμικὸν στοιχεῖον εἶναι τώρα :

$$(169)\qquad d\sigma^2 = \frac{1}{k^2} du_1^2 + \frac{1}{\varphi'^2(k)} du_2^2\cdot \qquad \text{ὥστε :}$$

103. ***Θεώρημα 3ον (τοῦ Weingarten)*** : ***Ἡ εὕρεσις τῶν ἐπιφανειῶν W ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν σφαιρικῶν ὀρθογωνίων παραμετρικῶν συστημάτων, τὰ ὁποῖα δίδουν εἰς τὸ γραμμικὸν στοιχεῖον τῆς σφαίρας τὴν μορφήν*** :

$$d\sigma^2 = \frac{1}{k^2} du_1^2 + \frac{1}{\varphi'^2(k)} du_2^2, \text{ ἢ καὶ : } d\sigma^2 = k_1 du_1^2 + f(k_1) du_2^2.$$

Καὶ τὸ ἀντίστροφον προφανῶς ἀληθεύει :

Ἅμα εὑρεθῇ ἡ μορφὴ (167) τοῦ dσ, τὸ φ(k) ὁρίζεται (πλὴν μιᾶς αὐθαιρέτου σταθερᾶς) καὶ ἑπομένως οἱ τύποι (164) καὶ (166) θὰ μᾶς δώσουν ἓν γένος παραλλήλων ἐπιφανειῶν W.

Ἔχομεν ὅμως δύο περιπτώσεις : ἢ γνωρίζομεν τὰ συνημίτονα l, m, n τῆς καθέτου τῆς ζητουμένης ἐπιφανείας ὡς συναρτήσεις τῶν u_1, u_2, ἢ γνωρίζομεν μόνον τὰ p_2, q_1.

Εἰς τὴν α′ περίπτωσιν οἱ τύποι τοῦ *Rodrigues* μᾶς δίδουν τὴν ἐπιφάνειαν μὲ τοὺς τετραγωνισμούς :

$$(170)\quad x = -\int\left(P_1\frac{\partial l}{\partial u_1}du_1 + P_2\frac{\partial l}{\partial u_2}du_2\right),$$

$$y = -\int\left(P_1\frac{\partial m}{\partial u_1}du_1 + P_2\frac{\partial m}{\partial u_2}du_2\right),\quad z = -\int\left(P_1\frac{\partial n}{\partial u_1}du_1 + P_2\frac{\partial n}{\partial u_2}du_2\right).$$

Εἰς τὴν β', ἡ εὕρεσις τῶν l, m, n θ' ἀπαιτήσῃ καὶ τὴν ὁλοκλήρωσιν μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ *Riccati*.

104. ***1η μερικὴ μορφὴ τοῦ γραμμικοῦ στοιχείου τῆς σφαίρας.*** — Ἂν εἶναι : $d\sigma^2 = du_2^2 + k_2^2 du_1^2$ (καὶ τότε αἱ γραμμαὶ u_1=σταθ. εἶναι γεωδαισιακαί, δηλ. μέγιστοι κύκλοι) ***(Θεωρ. Ἐπιφ. Ν. Χατζ., ἐδ. 56)***, θὰ ἔχωμεν :

$$\left.\begin{aligned} &\varphi'(k)=1,\ k_2^2=\frac{1}{k^2},\ \text{δηλ.}\ \varphi(k)=k+\alpha,\ k_2=\frac{1}{k},\\ &P_1=\frac{1}{k_2}+\alpha,\ P_2=\alpha\ (\alpha=\text{σταθ.}) \end{aligned}\right\}(171)\cdot$$

δηλ. ἔχομεν μίαν ***σωληνοειδῆ*** ἐπιφάνειαν (Διαφ. Λογ. Ι. Ν.Χατζ., Β', σελ. 213). Θὰ εἶναι δὲ (ἐδ. 60) : $q_1=k_2$, $p_2=1$, $E_1=-1-\alpha k_2$, $E_2=\alpha$. καὶ ἐπειδὴ εἶναι καί : $k_2=U(u_1)\text{συν}u_2+V(u_1)\text{ημ}u_2$(¹), ἔχομεν ὅλα τὰ στοιχεῖα διὰ τὴν σπουδὴν τῆς ἐπιφανείας.

105. ***2α μερικὴ μορφὴ τοῦ γραμμικοῦ στοιχείου.*** — Ἂν τὸ

(¹) Ἂν γενικῶς ἡ ἐπιφάνεια ἔχῃ *σταθερὰν* καμπυλότητα K, θὰ ἔχωμεν : $-\frac{1}{k_2}\cdot\frac{\partial^2 k}{\partial u_2^2}$=σταθ.=K. Λοιπόν, ἂν 1) K=0, θὰ εἶναι : (α) $k=U(u_1)u_2+V(u_1)$. Ἂν 2)K=θετ.$=\frac{1}{\alpha^2}$, θὰ εἶναι: (β) $k=U(u_1)\text{ημ}\left(\frac{u_2}{\alpha}\right)+V(u_1)\text{συν}\left(\frac{u_2}{\alpha}\right)$. Καὶ ἂν 3) K=ἀρνητ.$=-\frac{1}{\alpha^2}$, θὰ εἶναι :

$$(\gamma)\quad k=\frac{U(u_1)}{2}\left(e^{\frac{u_2}{\alpha}}-e^{-\frac{u_2}{\alpha}}\right)+\frac{V(u_1)}{2}\left(e^{\frac{u_2}{\alpha}}+e^{-\frac{u_2}{\alpha}}\right).$$

Τώρα ἔχομεν σφαῖραν μὲ K=1, ὥστε ἰσχύει ὁ τύπος (β) μὲ α=1.

γραμμικὸν στοιχεῖον τῆς σφαίρας τὸ θέσωμεν ὑπὸ τὴν μορφήν:
(172) $d\sigma^2=\lambda^2(du_1{}^2+du_2{}^2)$ (**«ἰσοθερμικὸν»** σύστημα παραμέτρων), θὰ εἶναι: $\lambda^2=\frac{1}{k^2}=\frac{1}{\varphi'^2(k)}$, $\varphi'(k)=k$· ὥστε: $\varphi(k)=\frac{k^2}{2}$ (ἡ σταθ. τῆς ὁλοκληρώσεως θὰ ἔδιδεν ἁπλῶς μίαν ἐπιφάνειαν παράλληλον τῆς ζητουμένης)· λοιπόν:

$$P_1=\frac{k^2}{2},\ q_1=\frac{1}{k},\ E_1=-\frac{k}{2}\cdot\ P_2=-\frac{k^2}{2},\ p_2=\frac{1}{k},\ E_2=-\frac{k}{2}. \quad (173)$$

καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἑπομένως εἶναι ***ἐλαχίστης ἐκτάσεως***, ἀφοῦ $P_1+P_2=0$. Ἀποτελοῦν λοιπὸν αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν, καθὼς καὶ αἱ σφαιρικαὶ ἀπεικονίσεις των, ***ἰσοθερμικὰ*** συστήματα. Τὰς ἐξισώσεις των εἰμποροῦμεν νά τας εὕρωμεν μὲ τοὺς τύπους (170).

106. ***3η μερικὴ μορφὴ τοῦ γραμμικοῦ στοιχείου.***—Εἶναι γνωστόν, ὅτι, ἂν λάβωμεν ὡς καμπυλ. συντεταγμένας ἑνὸς σημείου τῆς ἐπιφανείας τὰς ***γεωδαισιακάς*** του ἀποστάσεις $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, ἀπὸ δύο διαφόρους καμπύλας, θὰ ἔχωμεν:

$$(174)\quad ds^2=\frac{d\bar{u}_1{}^2+d\bar{u}_2{}^2+2\,\sigma\upsilon\nu\omega\, d\bar{u}_1 d\bar{u}_2}{\eta\mu^2\omega}$$ [2] (καὶ ***ἀντιστρόφως***).

Ἂν δὲ θέσωμεν καί: $u_1=\frac{\bar{u}_1+\bar{u}_2}{2}$, $u_2=\frac{\bar{u}_1-\bar{u}_2}{2}$, θὰ εὕρωμεν:

$$ds^2=\frac{du_1{}^2}{\eta\mu^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}+\frac{du_2{}^2}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}. \quad (175)$$

([2]) Ὁ τύπος αὐτὸς εὑρίσκεται εὔκολα καὶ ὡς ἑξῆς *(Weingarten)*: Ἀφοῦ τὸ $\bar{u}_1$ εἶναι ἡ γεωδ. ἀπόστασις ἀπὸ μίαν καμπύλην (Γ), θὰ ἔχωμεν (Θεωρ. Ἐπιφ. Ν. Χατζ., σελ. 56): $ds^2=d\bar{u}_1{}^2+\varphi^2 d\bar{u}_2{}^2$· ὥστε ἡ διαφορά:

$$ds^2-d\bar{u}_1{}^2=(E-1)d\bar{u}_1{}^2+2F d\bar{u}_1 d\bar{u}_2+G d\bar{u}_2{}^2$$

θὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον· θὰ εἶναι ἑπομ: $F^2=G(E-1)$· ἐπίσης ὅμως θὰ ἔχωμεν δι' ὅμοιον λόγον καί: $F^2=E(G-1)$· ἑπομ. θὰ εἶναι: $E=G$, $F=\sqrt{E(E-1)}$· λοιπὸν θὰ ἔχωμεν: $ds^2=E(d\bar{u}_1{}^2+d\bar{u}^2{}_2)+2\sqrt{E(E-1)}\,d\bar{u}_1 d\bar{u}_2$·

καὶ ἐπειδὴ $\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{F}{\sqrt{EG}}=\sqrt{\frac{E-1}{E}}$, θὰ εἶναι $E=\frac{1}{\eta\mu^2\omega}$ καί:

$$ds^2=\frac{d\bar{u}_1{}^2+d\bar{u}_2{}^2+2\,\sigma\upsilon\nu\omega\, d\bar{u}_1 d\bar{u}_2}{\eta\mu\ \omega}.$$

Ἂν τώρα ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον αὐτὸν εἰς τὴν σφαῖραν ($ds \equiv d\sigma$) καὶ τὸν συγκρίνωμεν μὲ τόν:
$d\sigma^2 = \frac{1}{k^2}du_1^2 + \frac{1}{\varphi'(k)^2}du_2^2$, βλέπομεν, ὅτι εἰμποροῦμεν νὰ θέσωμεν:

$$k = \eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad \varphi'(k) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega}{2}\right), \text{ ἑπομένως :}$$

$\varphi'(k)dk = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\omega}{2}\right)d\omega, \quad \varphi(k) = \frac{\omega + \eta\mu\omega}{4}$. εἶναι λοιπὸν (κατὰ τοὺς γενικοὺς τύπους):

$$P_1 = \frac{\omega + \eta\mu\omega}{4}, \; P_2 = \frac{\omega - \eta\mu\omega}{4}, \; p_2 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega}{2}\right)}, \; q_1 = \frac{1}{\eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right)},$$

$$E_1 = -\frac{\omega + \eta\mu\omega}{4\eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right)}, \quad E_2 = \frac{\omega - \eta\mu\omega}{4\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega}{2}\right)}.$$

ἡ ἀπαλοιφὴ δὲ τοῦ ω μεταξὺ τῶν τιμῶν τῶν P_1, P_2 μᾶς δίδει:

$$(176) \quad 2P_1 - 2P_2 = \eta\mu(2P_1 + 2P_2):$$

***Ἡ ὑπερβατικὴ λοιπὸν αὐτὴ σχέσις μεταξὺ τῆς διαφορᾶς καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων ὁρίζει τὸ νέον εἶδος ἐπιφανειῶν τοῦ** Weingarten.*

Σημείωσις. Ἂν ἐκφράσωμεν, ὅτι τὸ γραμμ. στοιχεῖον (175) εἶναι τὸ τῆς σφαίρας μὲ ἀκτῖνα 1, δηλ. ὅτι ἡ ὁλ. καμπυλότης της εἶναι $= 1$, εὑρίσκομεν τὴν εἰς μερικὰς παραγώγους ἐξίσωσιν:

$$(177) \quad \frac{\partial}{\partial u_1}\left[\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{\partial\omega}{\partial u_1}\right] - \frac{\partial}{\partial u_2}\left[\sigma\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{\partial\omega}{\partial u_2}\right] + \frac{4}{\eta\mu\omega} = 0,$$

τῆς ὁποίας εὑρήκαμεν λοιπὸν τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα μὲ τοὺς προηγ. τύπους.

107. ***Ἰδιότης τῶν χωνῶν τῆς ἐνειλιγμένης κάθε ἐπιφανείας W.***— Ἀπὸ τὰς ἐξισ. τῶν δύο χωνῶν τῆς ἐνειλιγμένης κάθε ἐπιφανείας εὑρίσκομεν γενικῶς (πρβλ. ***Σμ. κ. Συμπλ. Ν. Χατζ. σελ. 49***) διὰ τὴν α′ χώνην: $dx_1 = (P_1 - P_2)\frac{\partial l}{\partial u_2}du_2 + l\,dP_1$ κτλ. ἑπομένως:

$$\left.\begin{aligned} ds_1^2 &= p_2^2(P_1 - P_2)^2 du_2^2 + dP_1^2. \\ \text{ἐπίσης διὰ τὴν } \beta' : \quad ds_2^2 &= q_1^2(P_1 - P_2)^2 du_1^2 + dP_2^2. \end{aligned}\right\}(178)$$

(Ἀπὸ τοὺς τύπους αὐτοὺς εὑρίσκονται ἀμέσως καὶ τὰ θεωρήμ. 62 κ. 63, ***Σμ. κ. Συμπλ.***).

Ἂν τώρα ἐφαρμόσωμεν τοὺς τύπους αὐτοὺς εἰς τὰς ἐπιφανείας W, δηλ.

ἂν θέσωμεν ἀντὶ p_2, q_1, P_1, P_2 τὰς τιμάς των: $p_2=\frac{1}{\varphi'(k)}$, $q_1=\frac{1}{k}$, $P_1=\varphi(k)$, $P_2=\varphi(k)-k\varphi'(k)$, εὑρίσκομεν:

(179) $ds_1^2=k^2du_2^2+\varphi'^2(k)dk^2$, $ds_2^2=\varphi'^2(k)du_1^2+k^2\varphi''^2(k)dk^2$ δηλ.

(Θεώρημα τοῦ** Weingarten**)** : **Καὶ αἱ δύο χῶναι τῆς ἐνειλιγμένας ὅλων τῶν ἐπιφανειῶν W μὲ τὴν ἰδίαν σχέσιν μεταξὺ P_1, P_2 εἶναι ἐφαρμόσιμοι ἐπὶ ἐπιφανειῶν ἐκ περιστροφῆς μὲ γραμμικὰ στοιχεῖα ἐξαρτώμενα μόνον ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν καὶ ἑπομένως τὰ ἴδια δι᾽ ὅλας τὰς θεωρηθείσας ἐπιφανείας.

Ἀληθεύει καὶ ἡ ἀντίστροφος πρότασις, ἀλλὰ παραλείπομεν τὴν ἀπόδειξίν της.

108. ***Μερικὴ περίπτωσις.*** Ὅταν τὸ γραμ. στοιχεῖον τῆς ἐπιφανείας (ἀναφερόμενον εἰς ἓν γένος **γεωδαισιακῶν** καὶ τὰς ***ὀρθογ.*** τροχιάς των) εἶναι τῆς μορφῆς : (180) $ds_1^2=du_1^2+f^2(u_1)du_2^2$, ἔχομεν τὰς ἐπιφανείας τὰς ἐφαρμοσίμους ἐπὶ ἐπιφανειῶν ἐκ περιστροφῆς· τότε δὲ εἶναι τὰ P_1, P_2 συναρτήσεις τοῦ u_1 ***μόνον,*** δηλ. συναρτήσεις τὸ ἓν τοῦ ἄλλου· ἡ δὲ μεταξύ των σχέσις θὰ μείνῃ ἡ ἰδία κατὰ τὴν κάμψιν τῆς ἐπιφανείας. Ὥστε :

Ἂν μία ἐπιφάνεια (E_1) εἶναι ἐφαρμόσιμος ἐπὶ μιᾶς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς (Π_1), αἱ ἐφαπτόμεναι τῆς σειρᾶς ἐκείνης τῶν γεωδαισιακῶν τῆς (E_1) τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τοὺς μεσημβρινοὺς τῆς (Π_1) εἶναι κάθετοι πρὸς ἓν γένος παραλλήλων ἐπιφανειῶν W, ἡ δὲ σχέσις μεταξὺ τῶν P_1, P_2 κάθε ἐπιφανείας τοῦ γένους αὐτοῦ μένει ἡ ἰδία καθ᾽ ὅλας τὰς δυνατὰς κάμψεις τῆς (E_1).

(Εἶναι δὲ εὔκολον νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια, ποὺ ἔχει :

$$(181)\qquad ds_2^2=\left[\frac{f\cdot\dfrac{d^2f}{du_1^2}}{\left(\dfrac{df}{du_1}\right)^2}\right]du_1^2+\frac{dw^2}{\left(\dfrac{df}{du_1}\right)^2},$$

εἶναι ἐπίσης ἐφαρμόσιμος ἐπὶ μιᾶς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς καὶ ἀποτελεῖ τὴν β′ χώνην τῶν W).

109. ***Θεώρημα τοῦ** Ribaucour* (1872).—***Διὰ ν᾽ ἀντιστοιχοῦν αἱ ἀσυμπτωτικαὶ γραμμαὶ τῆς μιᾶς χώνης (X_1) τῆς ἐνειλιγμένης μιᾶς ἐπιφανείας (E) εἰς τὰς ἀσυμπτωτικὰς τῆς ἄλλης χώνης (X_2) (δηλ. διὰ ν᾽ ἀντιστοιχῇ εἰς κάθε συζυγὲς δίκτυον τῆς (X_1) συζυγὲς***

πάλιν δίκτυον τῆς (X_2)), πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ (E) νὰ εἶναι ἐπιφάνεια W.

Ἀπόδειξις.—Αὐτὸ φαίνεται ἀμέσως, ἂν παραβάλωμεν τὰς ἐξισώσεις τῶν ἀσυμπτωτικῶν τῆς (X_1) καὶ τῆς (X_2) (τύπ. 100 καὶ 108), ποὺ εἶναι φανερόν, ὅτι τότε καὶ μόνον τότε συμπίπτουν, ὅταν :

$$\frac{\partial P_1}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial P_2}{\partial u_2}=\frac{\partial P_1}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial P_2}{\partial u_1}.\ (^1)$$

Τὸ ὅτι ***μία μόνον*** συνθήκη χρειάζεται, διὰ ν' ἀντιστοιχοῦν αἱ ***δύο*** σειραὶ τῶν ἀσυμπτωτικῶν, ἐξηγεῖται ἀπὸ τὴν γνωστήν μας ἰδιότητα κάθε χώνης τῆς ἐνειλιγμένης : ***ν' ἀντιστοιχῇ εἰς τὸ παραμετρικὸν δίκτυον τῶν γραμμῶν καμπυλότητος τῆς ἐξειλιγμένης ἓν συζυγὲς δίκτυον γραμμῶν τῆς χώνης (Σμήνη καὶ Συμπλέγ. Ν. Χατζ. ἐδ.*** 62***)***.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΣΘΗΚΑΙ

1—6) Ἂν θεωρήσωμεν μίαν ἐπιφάνειαν (E), τὰς δύο χώνας τῆς ἐνειλιγμένης της (X_1), (X_2) καὶ τὴν σφαῖραν (Σ), ἐπὶ τῆς ὁποίας ἀπεικονίζονται αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος τῆς (E), νὰ δειχθῇ, ὅτι αἱ ἀσυμπτωτικαὶ τῶν δύο χωνῶν ἀντιστοιχοῦν :

α΄) Εἰς τὰς ***μηδενικὰς*** γραμμὰς ***τῆς σφαίρας,*** ὅταν ἡ (E) ἢ εἶναι ἐπιφάνεια ***ἐλαχίστης ἐκτάσεως*** ἢ ἔχῃ : $P_1+P_2=$***σταθ.***

β΄) Εἰς τὰς ***μηδενικὰς*** γραμμὰς ***τῆς (E),*** ὅταν ἡ (E) ἔχῃ ***μέσην καμπυλότητα σταθεράν.***

γ΄) Εἰς τὰς ***ἀσυμπτωτικὰς τῆς (E)***, ὅταν ἡ (E) ἔχῃ ***ὁλικὴν καμπυλότητα σταθεράν***.

δ΄) Εἰς ***ὀρθογώνιον*** δίκτυον τῆς ***σφαίρας,*** ὅταν ἡ (E) ἔχῃ : $P_1-P_2=$σταθ.

ε΄) Εἰς ὀρθογώνιον δίκτυον τῆς (E), ὅταν ἡ (E) ἔχῃ : $\frac{1}{P_1}-\frac{1}{P_2}=$σταθ.

---

(1) Τί γίνεται, ὅταν r_1 ἢ r_2 εἶναι $=0$;

ς΄) Εἰς ***συζυγὲς*** δίκτυον τῆς (E), ὅταν ἡ (E) ἔχῃ : $\frac{P_1}{P_2}=$ σταθ.

7) Δια τὴν κλάσιν ἐκείνην τῶν ἐπιφανειῶν W, ποὺ ἀνεκάλυψεν ὁ Weingarten (ἐδ. 106), ἔχομεν :

$$k=\eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right),\quad \varphi'(k)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega}{2}\right),\quad \varphi''(k)=-\,\varepsilon\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)\cdot$$

ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τῶν ἀσυμπτωτικῶν τῶν δύο χωνῶν τῆς ἐπιφανείας: $\varphi'^3du_1{}^2+k^3\varphi''du_2{}^2=0$(1) γίνεται τώρα : $du_1{}^2=\varepsilon\varphi^4\left(\frac{\omega}{2}\right)du_2{}^2\cdot$ (182)· καὶ ἐπειδὴ τώρα τὸ γραμ. στοιχεῖον τῆς σφαίρας (Σ) (τύτ. 169) εἶναι:

$$(183)\quad d\sigma^2=\frac{du_1{}^2}{\eta\mu^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}+\frac{du_2{}^2}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}=$$

$$=\left[d(u_1\pm u_2)\right]^2+\sigma\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\left[du_1\mp\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}\right)du_2\right]^2,$$

βλέπομεν, ὅτι : ***Αἱ ἀσυμπτωτικαὶ μιᾶς τυχούσης ἀπὸ τὰς χώνας ἀντιστοιχοῦν ἐπὶ τῆς σφαίρας (Σ) εἰς τὰς γεωδαισιακάς, ποὺ εἶναι αἱ ὀρθογώνιαι τροχιαὶ τῶν δύο σειρῶν παραλλήλων καμπύλων :*** $u_1+u_2=c_1$, $u_1-u_2=c_2$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ κάθετος τῆς σφαίρας εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἀντίστοιχον κάθετον τῆς (E), συνάγομεν, ὅτι : ***Εἰς κάθε χώνην ὑπάρχει μία σειρὰ γεωδαισιακῶν τοιαύτη, ὥστε αἱ ἐφαπτόμεναί των, εἰς ὅλα τὰ σημεῖα, ὅπου κόπτουν μίαν τυχοῦσαν ἀσυμπτωτικήν, εἶναι παράλληλοι πρὸς ἓν σταθερὸν ἐπίπεδον, ποὺ μεταβάλλεται ἐν γένει ἀπὸ μίαν ἀσυμπτωτικὴν εἰς ἄλλην.***

8—10) Νὰ ἐφαρμοσθῇ ὁ γενικὸς τύπος (169) εἰς τὰς περιπτώσεις : α΄) τῶν ***σωληνοειδῶν*** ἐπιφανειῶν (ἐδ. 104).

Ἔχ. τώρα $\varphi(k)=k+\alpha$· διὰ δὲ τὰς χώνας τῆς ἐνειλιγμένης (184) : $ds_1{}^2=k^2du_2{}^2+dk^2$, $ds_2{}^2=du_1{}^2$· ἡ α΄ εἶναι ***ἀναπτυκτὴ*** ἐπιφ., ἡ β΄ ***ἐκφυλίζεται εἰς καμπύλην.***—β΄) τῶν ἐπιφαν. ***ἐλαχ. ἐκτάσεως.***

Ἔχ. τότε : $\varphi(k)=\frac{k^2}{2}$, $ds_1{}^2=k^2(du_2{}^2+dk^2)$, $ds_2{}^2=k^2(du_1{}^2+dk^2)$(185): αἱ δύο χῶναι εἶναι ***ἐφαρμόσιμοι ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης.*** Αἱ ἐκ περι-

(1) Αὐτὴν τὴν μορφὴν λαμβάνουν διὰ τὰς ἐπιφανείας W αἱ γενικαὶ ἐξισώσεις τῶν ἀσυμπτωτικῶν τῶν χωνῶν, τύπ. (100) καὶ (108).

στροφῆς ἐπιφ., ποὺ ἐπιδέχονται τὸ προηγ. γραμ. στοιχεῖον, εἶναι αἱ παραγόμεναι ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τῆς ἐνειλιγμένης τῆς ἁλυσσοειδοῦς πέριξ τῆς βάσεώς της, διότι ***ἡ μόνη*** ἐκ περιστρ. ἐπιφάνεια ἐλαχ. ἐκτάσεως εἶναι τὸ **ἁλυσσοειδές,** (ἀφοῦ ἡ ἁλυσσοειδὴς εἶναι ἡ μόνη καμπύλη, ποὺ ἔχει ἀκτῖνα καμπυλότητος ἴσην καὶ μὲ ἀντίθετον σημεῖον μὲ τὴν ἐπικάθετόν της).—γ′) τῶν ἐπιφανειῶν: $2P_1-2P_2=\eta\mu(2P_1+2P_2)$ τοῦ *Weingarten*. Ἔχ. δι' αὐτάς: $k=\eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right)$, $dk=\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega}{2}\right)d\omega$, $\varphi'(k)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega}{2}\right)$, $\varphi''(k)=-\varepsilon\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)$· ὥστε: $ds_1^2=k^2du_2^2+(1-k^2)dk^2$, $ds_2^2=(1-k^2)du_1^2+\frac{k^4dk^2}{1-k^2}$ (186)· καὶ ἐπειδὴ τὰ ds_1^2, ds_2^2 αὐτὰ ἐναλλάσσονται, ἂν ἐναλλαχθοῦν τὰ k καὶ $\sqrt{1-k^2}$, αἱ δύο χῶναι εἶναι ***ἐφαρμόσιμοι ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης***· ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ θεωρήσωμεν **τὴν α′**, ποὺ εἶναι ἐφαρμόσιμος ἐπὶ τῆς ἐκ περιστρ. ἐπιφανείας: (187) $\delta=\mu k$, $z=\int\sqrt{1-k^2-\mu^2}dk$ (δ ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὸν ἄξονα τῶν z)· ἂν δὲ λάβ. $\mu=1$, ἔχ. τὸ ***φανταστικὸν*** παραβολοειδές: (188) $z=i\frac{\delta^2}{2}$. Διὰ νὰ ἔχωμεν ἓν ***πραγματικόν,*** ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν εἰς τὸν τύπον: $ds^2=\frac{du_1^2}{\eta\mu^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}+\frac{du_2^2}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}$ ἀντὶ τοῦ u_2 τὸ $u_2 i$, ἀντὶ $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega}{2}\right)$ τὸ ki (δηλ. νὰ σημαίνῃ τὸ $\bar{u}_1$ (ἐδάφ. 106) τὴν γεωδ. ἀπόστ. ἀπὸ μίαν ***φανταστικὴν*** καμπύλην καὶ $\bar{u}_2$ νὰ εἶναι ἡ ***συζυγὴς*** τῆς $\bar{u}_1$ μιγαδ. συνάρτησις· τότε u_1 εἶναι ***πραγματικὸν*** καὶ u_2 καθαρῶς ***φανταστικόν***). Θὰ εὕρωμεν τότε: γραμ. στοιχ. σφαίρας: (189) $ds^2=\frac{du_1^2}{k^2+1}+\frac{du_2^2}{k^2}$, ἤ, μὲ ἐναλλαγὴν τῶν u_1, u_2: $ds^2=\frac{du_1^2}{k^2}+\frac{du_2^2}{k^2+1}$· δηλ. τότε $\varphi'(k)\equiv\sqrt{k^2+1}$, ὥστε: (190) $ds_1^2=k^2du_2^2+(k^2+1)dk^2$, γραμ. στοιχ. τῶν ἐκ περιστρ. ἐπιφανειῶν: (191) $\delta=\mu k$, $z=\int\sqrt{k^2+1-\mu^2}dk$· καὶ διὰ $\mu=1$, ἔχομεν πλέον τὸ ***πραγματικὸν*** παραβολοειδές: $z=\frac{\delta^2}{2}$ (192).

11—12) Ὁ Darboux εἰς τὸ βιβλίον του *«Surfaces»* (τόμ. 3ος) ἀποδεικνύει καὶ τὰ ἑξῆς δύο θεωρήματα:

α′) Ἂν θεωρήσωμεν δύο τυχούσας καμπύλας τοῦ χώρου: (K_1) καὶ (K_2) καὶ κατασκευάσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν (E), ποὺ εἶναι ὁ τόπος τῶν μέσων M τῶν χορδῶν, ποὺ ἑνώνουν ἓν τυχὸν σημεῖον Π_1 τῆς (K_1) μὲ ἓν τυχὸν σημεῖον Π_2 τῆς (K_2) καὶ φέρωμεν ἔπειτα

μίαν παράλληλον (δ) πρὸς τὴν τομὴν τῶν δύο ἐγγυτάτων ἐπιπέδων τῶν (K_1), (K_2) εἰς τὰ Π_1, Π_2, ἡ εὐθεῖα αὐτὴ (δ) ἐφάπτεται δύο ἐπιφανειῶν (X_1), (X_2) εἰς δύο σημεῖα M_1, M_2, τοιαῦτα, ὥστε τὸ μέσον τοῦ ἀνύσματος M_1M_2 νὰ εἶναι τὸ M, νὰ εἶναι δέ ; $(M_1M_2)=\sqrt{-r_1r_2}\,\eta\mu\omega$, ὅπου r_1, r_2 εἶναι αἱ ἀκτῖνες στρέψεως τῶν δύο καμπύλων εἰς τὰ Π_1, Π_2 καὶ ω ἡ γωνία τῶν δύο ἐγγυτάτων ἐπιπέδων ἐκεῖ.—Αἱ ἀσυμπτωτικαὶ τῶν (X_1), (X_2) ἀντιστοιχοῦν αἱ μὲν πρὸς τὰς δὲ καὶ αἱ ἴδιαι ἀντιστοιχοῦν ἐπὶ τῆς (E) εἰς τὰς συζυγεῖς γραμμάς, ποὺ παράγονται, ἂν ἓν ἀπὸ τὰ σημεῖα Π_1, Π_2 μείνῃ ἀκίνητον καὶ τὸ ἄλλο διατρέξῃ τὴν καμπύλην, ἐπὶ τῆς ὁποίας εὑρίσκεται.

β') (Μερικὴ περίπτωσις τοῦ α') Ἂν αἱ γραμμαὶ (K_1), (K_2) ἔχουν στρέψεις σταθεράς, ἴσας καὶ ἑτεροσήμους : $\frac{1}{r}$, $-\frac{1}{r}$, ἡ εὐθεῖα (δ) τοῦ α' θεωρήματος θὰ μένῃ διαρκῶς κάθετος πρὸς μίαν ἐπιφάνειαν W τοῦ εἴδους τοῦ ἀνακαλυφθέντος ἀπὸ τὸν Weingarten· *αἱ δὲ δύο ἐπιφάνειαι (X_1), (X_2), ποὺ θ' ἀποτελοῦν τὰς δύο χώνας τῆς ἐνειλιγμένης τῆς W, θὰ εἶναι ἐφαρμόσιμοι ἐπὶ τοῦ παραβολοειδοῦς μὲ παράμετρον* $2ri$. *Ἡ δὲ κατασκευὴ αὐτὴ δίδει ὅλας τὰς ἐπιφανείας τὰς ἐφαρμοσίμους ἐπὶ τοῦ ἐκ περιστροφῆς παραβολοειδοῦς.*

(Τῶν θεωρημάτων αὐτῶν τὰς μακρὰς ἀποδείξεις τὰς παραλείπομεν ἐδῶ).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ'.

ΑΙ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΙ ΣΤΑΘΕΡΑΣ ΟΛΙΚΗΣ Ἢ ΣΤΑΘΕΡΑΣ ΜΕΣΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΟΣ

Α') Αἱ ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνειαι ὁλικῆς σταθερᾶς καμπυλότητος.

110. ***Διαίρεσίς των εἰς 3 κατηγορίας.*** — Καθ' ὅσον εἶναι : $\frac{1}{P_1P_2}>0$ ἢ $=0$ ἢ <0, διακρίνομεν **τρεῖς** κατηγορίας ἐπιφανειῶν ὁλικῆς **σταθερᾶς** καμπυλότητος : α') Τὰς ἐπιφανείας **θετικῆς** σταθ. καμπυλότητος : $\frac{1}{P_1P_2}=k>0$· β') Τὰς ἐπιφανείας **μηδενικῆς** καμπυλότητος :

$\frac{1}{P_1P_2}=0$· καὶ γ΄) Τὰς ἐπιφανείας **ἀρνητικῆς** σταθ. καμπυλότητος: $\frac{1}{P_1P_2}=k<0$.

111. ***Ἐπιφάνειαι ἐκ περιστροφῆς μὲ σταθ. ὁλ. καμπυλότητα θετικήν.*** — Μίαν τοιαύτην ἔχομεν ἤδη γνωστήν: τὴν ***σφαῖραν***· προφανῶς ἡ ὁλ. καμπυλότης της εἶναι ἴση μὲ $\frac{1}{\alpha^2}$, ἂν α εἶναι ἡ ἀκτίς της. Ὑπάρχουν ὅμως καὶ ἄλλαι ἐπιφάνειαι ἐκ περιστροφῆς μὲ θετ. σταθ. ὁλ. καμπυλότητα· διὰ νὰ τὰς εὕρωμεν, στηριζόμεθα εἰς τὴν γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανειῶν ***(Θεωρ. Ἐπιφαν. Ν. Χατζ., σελ. 34)***, ὅτι τὸ μὲν P_1 εἶναι ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τοῦ μεσημβρινοῦ, τὸ δὲ P_2 τὸ τμῆμα ΜΛ τῆς καθέτου ἀπὸ τὸ Μ ἕως τὸν ἄξ. περιστροφῆς· διὰ νὰ εἶναι λοιπὸν $\frac{1}{P_1P_2}$ ***σταθερὸν καὶ θετικόν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι ἡ καμπυλότης τοῦ μεσημβρινοῦ ἀνάλογος τοῦ τμήματος ΜΛ καὶ ὁ συντελεστὴς τῆς ἀναλογίας θετικός.*** Πρέπει λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὰς ἐπιπέδους καμπύλας, ποὺ ἔχουν αὐτὴν τὴν ἰδιότητα· αὐταὶ θὰ εἶναι οἱ ***μεσημβρινοὶ*** τῶν ζητουμένων ἐπιφανειῶν.

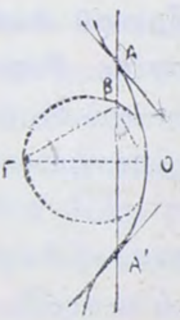
112. ***Εὕρεσις τῶν καμπύλων μὲ τὴν προηγ. ἰδιότητα.*** — Ἂν ἡ ἐπιφάνεια ἔχῃ ***θετικὴν*** καμπυλότητα, δηλ. εἶναι ***κυρτή,*** ὁ μεσημβρινὸς θὰ στρέφῃ τὰ ***κοῖλά*** του πρὸς τὸν ἄξονα τῆς περιστροφῆς· ἂν δὲ ϱ εἶναι ἡ ἀκτίς του, θὰ ἔχωμεν: $\frac{1}{\varrho}=(\text{ΜΛ})k^2$, δηλ. $\varrho.(\text{ΜΛ})=\frac{1}{k^2}=\lambda^2$· ἀλλὰ $(\text{ΜΛ})=\frac{\text{ΜΚ}}{\sigma\upsilon\nu\omega}=-\frac{\delta}{\sigma\upsilon\nu\varphi}$, ὅπου δ ἡ ἀπόστασις ΚΜ τοῦ ἄξ. περιστροφῆς ἀπὸ τὸ Μ καὶ φ (=π—ω) ἡ γωνία τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ Μ μὲ τὸν ἄξ. περιστροφῆς. Ἑπομ. $\delta=-\lambda^2\frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{\varrho}$ (193)· ἔχομεν δὲ ἀκόμη: $\eta\mu\varphi=\frac{d\delta}{ds}$, $\sigma\upsilon\nu\varphi d\varphi=d\left(\frac{d\delta}{ds}\right)$ καί: $\sigma\upsilon\nu\varphi\frac{d\varphi}{ds}=\frac{d^2\delta}{ds^2}$, ἢ καί: $\frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{\varrho}=\frac{d^2\delta}{ds^2}$· ὥστε: $\delta=-\lambda^2\frac{d^2\delta}{ds^2}$ (194). Τὸ ***γενικὸν*** ὁλοκλήρωμα τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι (Βλ. π. χ. *Sturm, Analyse, II,* ***ἐδ.*** *584*): $\delta=A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{s}{\lambda}\right)+B\eta\mu\left(\frac{s}{\lambda}\right)$· ἂν δὲ ὁρίσωμεν ἡ τιμὴ τοῦ s εἰς τὴν τομὴν τῆς καμπύλης μὲ τὸν ἄξ. περιστροφῆς νὰ εἶναι $=\frac{\lambda\pi}{2}$, θὰ εἶναι

$B=0$ καὶ ἑπομ. $\delta = A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{s}{\lambda}\right) \equiv \alpha\lambda\sigma\upsilon\nu\left(\frac{s}{\lambda}\right)$ (195), ὅπου α ***αὐθαίρετος*** σταθερά, ποὺ εἰμποροῦμεν νὰ τὴν ὑποθέσωμεν πάντοτε θετικήν. Τότε θὰ ἔχωμεν καί : $\eta\mu\varphi = \frac{d\delta}{ds} = -\alpha\eta\mu\left(\frac{s}{\lambda}\right)$. ***Ἔχ. λοιπὸν τὰς τρεῖς σχέσεις :***

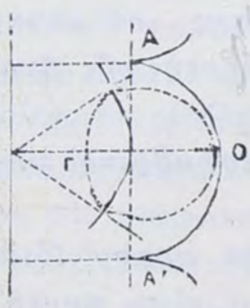
$$\delta = \alpha\lambda\sigma\upsilon\nu\left(\frac{s}{\lambda}\right), \quad \eta\mu\varphi = -\alpha\eta\mu\left(\frac{s}{\lambda}\right), \quad \varrho = -\lambda^2\frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{\delta}. \quad (196)$$

Διερεύνησις. Ἀπὸ τοὺς τύπους αὐτοὺς εἰμποροῦμεν τώρα νὰ διερευνήσωμεν τὴν καμπύλην : Εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ τόξου $s=0$ ἔχ. $\varphi=0$, $\delta=\alpha\lambda$, $\varrho=-\frac{\lambda}{\alpha}$· ἡ καμπύλη λοιπὸν ἐκκινεῖ ἀπὸ τὸ 0 πρὸς τ' ἄνω καὶ πρὸς τὰ κάτω καὶ ἔχει ἐκεῖ ἐφαπτομένην παράλληλον τοῦ ἄξ. περιστροφῆς· πλησιάζει δὲ ὁλονὲν πρὸς τὸν ἄξ. περιστρ., καθ' ὅσον τὸ s αὐξάνει. Διακρίνονται τώρα 3 περιπτώσεις :

1η) Ἂν τὸ $\alpha<1$, τὸ s φθάνει ἕως τὴν τιμὴν $\pm\lambda\frac{\pi}{2}$, ὅπου $\eta\mu\varphi=\mp\alpha$, $\delta=0$, $\varrho=\infty$, δηλ. ἡ καμπύλη διαπερᾷ τὸν ἄξ. περιστρ. καὶ ἡ τομὴ εἶναι *σημ. καμπῆς* (σχ. 3α)· ὥστε ὁ ἄξ. περιστρ. διαιρεῖ τὴν καμπύλην εἰς ἄπειρα ἴσα τόξα, μήκους $\lambda\pi$, τὸ καθὲν ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἔχει τὰ ἄκρα του ἐπὶ τοῦ ἄξ. περιστρ. εἰς δύο σημεῖα καμπῆς· αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ σημεῖα αὐτὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς χορδὰς μήκους λ, ποὺ ἑνώνουν τὸ 0 μὲ τὰς τομὰς τοῦ ἄξ. περιστρ. καὶ τῆς περιφερείας μὲ διάμετρον τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος εἰς τὸ 0, τὴν $-\frac{\lambda}{\alpha}$.—



(Σχ. 3α)



(Σχ. 3β)

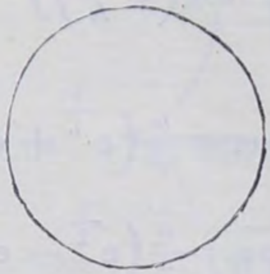
2α)Ἂν τὸ $\alpha>1$, τὸ s δὲν φθάνει τὴν τιμὴν $\pm\lambda.\frac{\pi}{2}$ (διότι $|\,\eta\mu\varphi\,|\leq 1$) ὅταν τὸ $\eta\mu\left(\frac{s}{\lambda}\right)$ γίνῃ $\pm\frac{1}{\alpha}$, τὸ φ γινεται $\mp\frac{\pi}{2}$, τὸ $\varrho=0$ καὶ τὸ $\delta=\lambda\sqrt{\alpha^2-1}$· ἔχομεν λοιπὸν (σχ. 3β) ἄπειρα ἴσα τόξα, μὲ ἄκρα διὰ τὸ καθὲν δύο ***σημεῖα ἀνακάμψεως τοῦ α' εἴδους*** (***«λογχοειδῆ»*** σημεῖα)· κεῖνται δὲ ὅλα τὰ λογχοειδῆ αὐτὰ σημεῖα ἐπὶ μιᾶς παραλλήλου τοῦ ἄξ. περιστρ. 3η) Ἂν τὸ $\alpha=1$, ἔχομεν ὡς καμπύλην τὴν περιφέρειαν. Ἂν τέλος θέσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν : $\varrho=-\frac{\lambda^2}{\delta}\sigma\upsilon\nu\varphi$ τὰς τιμὰς τῶν φ καὶ δ, εὑρίσκομεν τὴν ἀκτῖνα ϱ συναρτήσει τοῦ

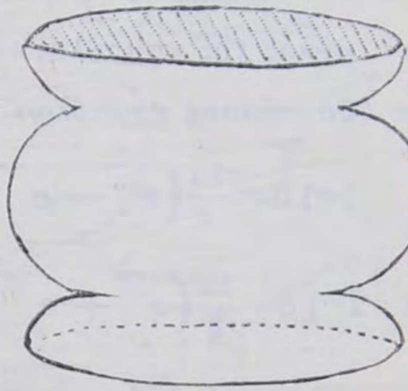
$$s : \varrho = \frac{\lambda}{\alpha}\sqrt{1+(1-\alpha^2)\epsilon\varphi^2\left(\frac{s}{\lambda}\right)}.$$

113. ***Τὰ τρία εἴδη ἐπιφανειῶν ἐκ περιστροφῆς μὲ σταθερὰν ὁλ. καμπυλότητα θετικήν.***—Σύμφωνα μὲ τὴν προηγ. διερεύνησιν

τοῦ μεσημβρινοῦ των, αἱ ἐπιφάνειαι αὐταὶ εἶναι τριῶν εἰδῶν ἢ ***τύπων*** : α′) Αἱ ἐπιφάνειαι τοῦ σχήμ. 4α, ποὺ εἰμποροῦμεν νὰ τὰς ὀνομάσωμεν ***ἀτρακτοειδεῖς*** *(atractoïdes)*(¹). β′) Αἱ τοῦ σχήμ. 4β, δηλ. αἱ ***σφαιρικαί*** καὶ γ′) Αἱ τοῦ σχήμ. 4γ, ποὺ εἰμποροῦμεν νὰ τὰς λέγωμεν ***σπονδυλοειδεῖς*** *(spondyloïdes)* (¹).


(A)
(Σχ. 4α)


(B)
(Σχ. 4β)


(Γ)
(Σχ. 4γ)

114. ***Ἐπιφάνειαι ἐκ περιστροφῆς μὲ μηδενικὴν ὁλικὴν καμπυλότητα.***—Ἐπειδὴ γενικῶς αἱ ***ἀναπτυκταὶ*** ἐπιφάνειαι ***καὶ μόνον αὐταὶ*** ἔχουν μίαν τοὐλάχιστον πρωτεύουσαν ἀκτῖνά των ***ἄπειρον*** (βλ. ***Ἰ. Ν. Χατζιδάκη, Διαφ. Λογ , Β′, σελ. 211—2),*** ἑπομένως ὁλικὴν καμπυλότητα $=0$, συμπεραίνομεν, ὅτι : ***Αἱ ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνειαι μὲ μηδενικὴν ὁλικὴν καμπυλότητα εἶναι αἱ ἐκ περιστροφῆς κυλινδρικαὶ ἢ κωνικαί.***

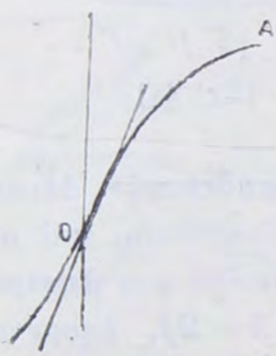
115. ***Μεσημβρινοὶ τῶν ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανειῶν μὲ σταθ. ὁλ. καμπυλότητα ἀρνητικήν.***—Διὰ νὰ εἶναι τώρα $\frac{1}{P_1P_2}$ ***σταθερὸν*** καὶ ***ἀρνητικόν, πρέπει ἡ καμπυλότης τοῦ μεσημβρινοῦ νὰ εἶναι ἀνάλογος τοῦ τμήματος ΜΛ τῆς καθέτου ἀπὸ τὸ Μ μέχρι τοῦ ἄξ. περιστροφῆς καὶ ὁ συντελεστὴς τῆς ἀναλογίας ἀρνητικός.*** Πρέπει λοιπὸν νὰ ἴδωμεν, ποῖαι ἐπίπεδοι καμπύλαι ἔχουν τὴν ἰδιότητα αὐτήν. Θὰ ἔχωμεν πάλιν, ὅπως εἰς τὸ ἐδ. 112 (μὲ ***ἀλλαγὴν*** ὅμως τοῦ σημείου) : $\varrho(\text{ΜΛ})=-\lambda^2$, ἢ καί : $\text{ΚΜ}=\delta=\lambda^2.\frac{\text{συνφ}}{\varrho}$ (197) καὶ

(¹) Ὀνομασία ἰδική μου.

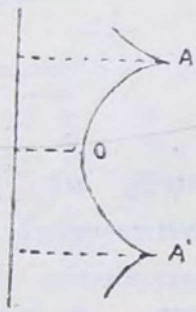
τέλος : $\delta=\lambda^2 \cdot \frac{d^2\delta}{ds^2}$ (198). Τῆς διαφορ. αὐτῆς ἐξισώσεως τὸ γεν. ὁλοκλήρωμα εἶναι τώρα : $\delta=Ae^{\frac{s}{\lambda}}+Be^{-\frac{s}{\lambda}}$ (Βλ. π. χ. *Sturm, Analyse*, II, **σελ. 110**). α') Ἄς ὑποθέσωμεν πρῶτα τὰ A καὶ $B \gtrless 0$. τότε, μὲ ***κατάλληλον*** ἐκλογὴν τῆς ἀρχῆς, εἰμποροῦμεν νὰ κάμωμεν τὰ A, B ἴσα ***ἀπολύτως*** (ἀρκεῖ νὰ μεταθέσωμεν τὴν ἀρχὴν τοῦ τόξου κατὰ μῆκος τῆς καμπύλης κατά: $\frac{\lambda}{2}.\log\left(\mp\frac{B}{A}\right)$)· ἔχομεν λοιπὸν τότε ***δύο τύπους*** καμπύλων :

$$1^{ov})\ \delta=\frac{\lambda\alpha}{2}\left(e^{\frac{s}{\lambda}}-e^{-\frac{s}{\lambda}}\right),\quad \eta\mu\varphi=\frac{\alpha}{2}\left(e^{\frac{s}{\lambda}}+e^{-\frac{s}{\lambda}}\right) \quad (199)$$

$$\text{καί : } 2^{ov})\ \delta=\frac{\lambda\alpha}{2}\left(e^{\frac{s}{\lambda}}+e^{-\frac{s}{\lambda}}\right),\quad \eta\mu\varphi=\frac{\alpha}{2}\left(e^{\frac{s}{\lambda}}-e^{-\frac{s}{\lambda}}\right). \quad (200)$$



(Σχ. 5α)



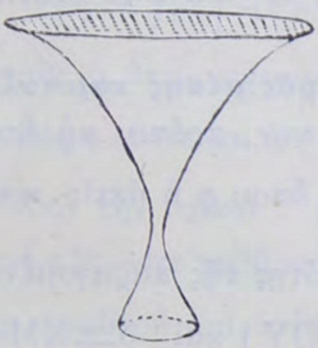
(Σχ. 5β)

Διερεύνησις. Διὰ $s=0$ αἱ καμπύλαι τοῦ α' εἴδους (σχ. 5α) ἔχουν τὴν ἀρχήν των ἐπὶ τοῦ ἄξ. περιστροφῆς, εἰς σημεῖον καμπῆς, ἐνῷ αἱ τοῦ β' (σχ. 5β) ἔχουν τὴν ἀρχήν των ἔξω τοῦ ἄξ. περιστροφῆς, ἀλλὰ εἰς τὸ πλησιέστατονπρὸς αὐτὴν σημεῖον: $\delta=\lambda\alpha$. Ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὴν ἀρχὴν ***τῶν πρώτων*** κάμνει μὲ τὸν ἄξονα περιστρ. γωνίαν μὲ ἡμίτονον α (ὥστε πρέπει νὰ εἶναι $\alpha<1$), ἐνῷ ***τῶν δευτέρων*** εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξ. περιστροφῆς. ***Καμιᾶς δὲ τῶν δευτέρων τὸ s δὲν γίνεται ἄπειρον*** (διότι $|\eta\mu\varphi|\leq 1$)· ὥστε s φθάνει μόνον ἕως $s=\lambda\log\left(\frac{1\pm\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}\right)$[1]· τότε $\delta=\lambda\sqrt{1+\alpha^2}$, $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$, $\varrho=0$· ἔχ. δηλ. ἐκεῖ ***σημεῖον ἀνακάμψεως (λογχοειδές)***, ὅπου ἡ ἐφαπτομένη εἶναι κάθετος πρὸς τὸν ἄξ. περιστροφῆς. Ὅλα τέλος τὰ λογχοειδῆ αὐτὰ σημεῖα εὑρίσκονται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξ. περιστροφῆς εἰς ἀπόστασιν $\lambda\sqrt{1+\alpha^2}$.

β') Ἄν A ἢ $B=0$, ἡ καμπύλη εἶναι ἡ ***ἕλκουσα (Γεν. Θεωρ. Καμπύλων Ν. Χατζ., ἐδ. 15)***· διότι εὔκολα ἀποδεικνύεται, ὅτι δι' αὐτὴν εἶναι : $\delta=Ae^{\pm\frac{s}{\lambda}}$ (201). (Παράβ. ***Γ. Θ. Καμπ., ἐδ. 65***).

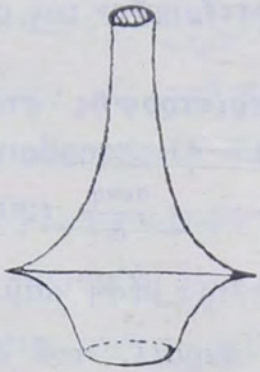
[1] Οἱ τύποι διὰ τὰ s καὶ q ($\equiv\delta$) τῆς σελ. 29 τοῦ Cesàro ἔχουν ἐσφαλμένως τὸ $\pm$ *ἐντὸς* τῆς ῥίζης.

116. ***Τὰ τρία εἴδη ἐπιφανειῶν ἐκ περιστροφῆς μὲ σταθερὰν ὁλ. καμπυλότητα ἀρνητικήν.*** — Σύμφωνα μὲ τὴν προηγ. διερεύνησιν τοῦ μεσημβρινοῦ των, αἱ ἐπιφάνειαι αὐταὶ εἶναι τριῶν εἰδῶν ἢ ***τύπων*** : α΄) Αἱ ἐπιφάνειαι τοῦ σχήμ. 6α, ποὺ ἠμποροῦμεν νά τας ὀνομάσωμεν ***χωνοειδεῖς*** *(chonoïdes)*(¹), β΄) Αἱ τοῦ σχήμ. 6β : αἱ ***ἑλκουσοειδεῖς*** ἢ ***ψευδοσφαιρικαὶ*** *(pseudosphériques)*· καὶ γ΄) Αἱ τοῦ σχήμ. 6γ, ποὺ θὰ τὰς λέγωμεν ***τροχαλιοειδεῖς*** *(trochalioïdes)*(¹).



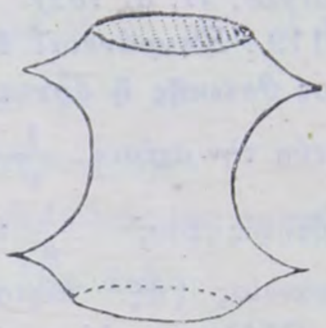
(A)

(Σχ. 6α)



(B)

(Σχ. 6β)



(Γ)

(Σχ. 6γ)

Β΄) Αἱ ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνειαι μέσης σταθερᾶς καμπυλότητος.

117. ***Διάκρισίς των εἰς 3 κατηγορίας.*** — Καθόσον ἔχομεν : $\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_2}>0$ ἢ $=0$ ἢ <0, διακρίνομεν τρεῖς κατηγορίας ἐπιφανειῶν ἐκ περιστροφῆς μέσης σταθερᾶς καμπυλότητος : α΄) Τὰς ἐπιφανείας ***θετικῆς*** σταθερᾶς μέσης καμπυλότητος· β΄) Τὰς ἐπιφανείας ***μηδενικῆς*** μέσης καμπυλότητος· καὶ γ΄) Τὰς ἐπιφανείας ***ἀρνητικῆς*** σταθερᾶς μέσης καμπυλότητος.

118. ***Ἐπιφάνειαι ἐκ περιστροφῆς μηδενικῆς μέσης καμπυλότητος.*** Τοιαύτη ἐπιφάνεια ***(ἐλαχίστης ἐκτάσεως)*** εἶναι μόνον τὸ

(¹) Ὀνομασίαι ἰδικαί μου, πλὴν τῆς *«ψευδοσφαιρική»*. *«Ψευδόσφαιρα»* ὠνομάσθη, ἐπειδὴ εἶναι ὁ *ἐνδιάμεσος* τύπος τῶν δύο ἄλλων, καθὼς ἡ σφαῖρα εἶναι ὁ ἐνδιάμεσος τῶν δύο ἄλλων ἀντιστοίχων.

«***ἁλυσσοειδές***», δηλ. ἡ ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνεια μὲ μεσημβρινὸν τὴν ***ἁλυσσοειδῆ*** καὶ ἄξ. περιστρ. τὴν βάσιν της. Αὐτὸ εἶναι συνέπεια τῆς χαρακτηριστικῆς ἰδιότητος τῆς ἁλυσσοειδοῦς νὰ εἶναι ἡ ἀκτὶς καμπυλότητός της εἰς τὸ τυχ. σημ. Μ ἴση μὲ τὴν ἐπικάθετον, ἀλλὰ νὰ κεῖνται τὰ δύο αὐτὰ μήκη ***ἑκατέρωθεν*** τοῦ σημ. Μ (Βλ. π.χ. *Sturm, Analyse, II, σ. 102).*

119. ***Ἐπιφάνειαι ἐκ περιστροφῆς σταθερᾶς μέσης καμπυλότητος θετικῆς ἢ ἀρνητικῆς.***—Ὁ μεσημβρινός των πρέπει νὰ ἐπαληθεύῃ τὴν σχέσιν : $\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\alpha}=\pm\frac{\text{συνφ}}{\delta}$ (202), ὅπου ϱ ἡ ἀκτὶς καμπυλότητός του, $\frac{1}{\alpha}$ ἡ σταθερὰ μέση καμπυλότης τῆς παραγομένης ἐπιφανείας (ἄξ. περιστρ. παράλλ. τοῦ ἄξ. ΟΥ) καὶ $\delta\equiv KM=$ $=-(M\Lambda)\text{συνφ}$. Αἱ καμπύλαι ὅμως, ποὺ ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν αὐτήν, εἶναι αἱ λεγόμεναι ***καμπύλαι τοῦ*** *Delaunay*, δηλ. αἱ ***κυλισιγενεῖς*** καμπύλαι, ***ποὺ παράγουν αἱ ἑστίαι μιᾶς κωνικῆς κατὰ τὴν κύλισίν της ἐπὶ μιᾶς εὐθείας.*** Διὰ νὰ τὸ ἀποδείξωμεν αὐτό, μᾶς χρειάζονται τὰ ἑξῆς :

120. ***α') Τύποι τῶν κωνικῶν τομῶν.*** — Οἱ θεμελ. τύποι τοῦ *Darboux* ***(Κιν. Ἀπ. Γεωμ. Ν. Χατζ., Τόμ. Α', τύπ. 25')*** διὰ τὰς ***ἐπιπέδους*** καμπύλας γίνονται : $v_x=1-\frac{y}{\varrho}$, $v_y=\frac{x}{\varrho}$,$(v_z=0)$· καὶ ἂν λάβ. πολικὰς συντεταγμένας $\mathbf{r}$, ϑ, θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{dr}{ds}=\text{συν}\vartheta,\qquad \frac{d\vartheta}{ds}=\frac{1}{\varrho}-\frac{\text{ημ}\vartheta}{r}\qquad(203).$$

Ἂς λάβωμεν τώρα μίαν ***ἔλλειψιν*** μὲ τὰς δύο ἑστίας Ε, Ε'· ἂν θεωρήσωμεν τὰς πολικὰς συντεταγμ. τῶν δύο ἑστιῶν : $\mathbf{r}$, ϑ καὶ $\mathbf{r}'$, ϑ', πρὸς τὸ ***πρωτ. τρίεδρον*** τοῦ τυχ. σημ. Μ τῆς ἐλλείψεως, θὰ εἶναι :

$$\frac{d\vartheta}{ds}=\frac{1}{\varrho}-\frac{\text{ημ}\vartheta}{r},\qquad \frac{d\vartheta'}{ds}=\frac{1}{\varrho}-\frac{\text{ημ}\vartheta'}{r'}.$$

ἑπομ. καί : (204) $\frac{2}{\varrho}=\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)\text{ημ}\vartheta$ (διότι : $\vartheta+\vartheta'=\pi$)·

καὶ ἂν ἀπὸ τὴν τομὴν Ν τῆς καθέτου καὶ τῆς ΕΕ' φέρωμεν κάθετον πρὸς τὴν κάθετον ἕως εἰς τὰς ἑστιακὰς ἀκτῖνας, τὴν ΗΝΘ, θὰ ἔχ : διὰ τὴν $MH=M\Theta\equiv r_1$: $\frac{2}{r_1}=\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}$ (205)· ὥστε : $\varrho=\frac{r_1}{\text{ημ}\vartheta}$ (206)· ἡ ἀκτὶς λοιπὸν καμπυλότ. MC κατασκευάζεται, ***ἂν φέρωμεν ἀπὸ τὸ H τὴν κάθετον πρὸς τὴν ἑστιακὴν ἀκτῖνα μέχρι τῆς τομῆς της C μὲ τὴν κάθετον.*** Ἐπειδὴ δὲ $\mathbf{r}+\mathbf{r}'=2\alpha$, ἔχ. (207) $\alpha=\frac{\alpha r}{2\alpha-r'}=\frac{r^2}{2r-\varrho\eta\mu\vartheta}\left(\right.$ διότι $\left.r'=\frac{\alpha\varrho\eta\mu\vartheta}{r}\right)$. $\Big[$Ἡ παράστασις $\frac{r^2}{2r-\varrho\eta\mu\vartheta}$ ἀποδεικνύεται, ὅτι εἶναι ***γενικῶς*** ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς ***ποδικῆς*** τοῦ M ὡς πρὸς τὸ E, ποὺ ***τώρα*** εἶναι λοιπὸν μία ***περιφέρεια*** ἀκτῖνος $\alpha\Big]$.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν : $(EE')^2=4\gamma^2=r^2+r'^2+2rr'\sigma\upsilon\nu(2\vartheta)=$ $=(\mathbf{r}+\mathbf{r}')^2-4\mathbf{r}\mathbf{r}'\eta\mu^2\vartheta=4(\alpha^2-\alpha\varrho\eta\mu^3\vartheta)$ βλέπομεν, ὅτι ἡ ἔκφρασις $\boldsymbol{\alpha\varrho\eta\mu^3\vartheta}$ εἶναι σταθερὰ καὶ $=\beta^2$, ὥστε : $\varrho=\frac{\beta^2}{\alpha\eta\mu^3\vartheta}$ (208). Ἔχ. ἀκόμη :

$$2\frac{d\vartheta}{ds}=\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r}\right)\eta\mu\vartheta=\frac{r-r'}{\alpha\varrho}\ (209)\cdot\ \text{ἑπομ}:\ \mathbf{r}=\alpha\left(1+\varrho\frac{d\vartheta}{ds}\right),$$

$$\mathbf{r}'=\alpha\left(1-\varrho\frac{d\vartheta}{ds}\right)(209)\cdot$$ πολλαπλασιάζοντες δὲ εὑρίσκομεν :

$$\frac{\varrho}{\alpha}\eta\mu\vartheta=1-\varrho^2\left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)^2,\ \text{ὥστε}:\ s=\int\frac{\varrho d\vartheta}{\sqrt{1-\frac{\varrho}{\alpha}\eta\mu\vartheta}}\ (210).$$

(Διὰ τὴν ***ὑπερβολὴν*** ἔχ. $\mathbf{r}-\mathbf{r}'=2\alpha$, $\vartheta+\vartheta'=2\pi$ κτλ. ὁμοίως· τὴν γων. τῶν ἑστ. ἀποστάσεων διχοτομεῖ τώρα ἡ ***ἐφαπτομένη***· αἱ ἄλλαι ἰδιότητες μένουν ἀμετάβλητοι).

121. ***Τόπος τῶν ἑστιῶν.***—Θὰ ἐξετάσωμεν τώρα τὰς ***κυλισιγενεῖς*** καμπύλας, ***ποὺ παράγουν αἱ ἑστίαι μιᾶς διεστίου κωνικῆς, ὅταν κυλίεται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας.*** Αἱ ἐπίπεδοι αὗται γραμμαὶ λέγονται, καθὼς ἤδη εἴπομεν, ***καμπύλαι τοῦ*** *Delaunay*. Θὰ δείξωμεν λοιπόν, ὅτι ***αὗται*** εἶναι οἱ μεσημβρινοὶ τῶν ζητουμένων ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανειῶν μὲ σταθερὰν ***μέσην*** καμπυλότητα, δηλ. ὅτι ***αὗται*** καὶ ***μόνον αὗται*** ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν : $\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\alpha}=\pm\frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{\delta}$.

122. ***β΄) Γενικοὶ τύποι τῶν κυλισιγενῶν καμπύλων.***—Ἂν τώρα θεωρήσωμεν ἓν σημεῖον Π ***στερεῶς*** συνδεόμενον μὲ τὴν ***κυλιομένην*** K καὶ ἔχον συντεταγμένας x, y πρὸς κινητοὺς ἄξονας τὴν ἐφαπτομένην καὶ τὴν κάθετον τοῦ σημείου ἐπαφῆς τῶν δύο καμπύλων, αἱ προβολαὶ τῆς ταχύτητός του ἐπὶ τῶν ἀξόνων αὐτῶν θὰ εἶναι ***γενι-***

κῶς ***(Κιν. Γεωμ. Ν. Χατζ., τύπ. 25′)*** : (α) $\frac{dx}{ds} \equiv v_x = 1 - \frac{y}{\varrho}$,
$\frac{dy}{ds} \equiv v_y = \frac{x}{\varrho}$ (ϱ ἡ ἀκτὶς τῆς (Κ) καὶ ds≡dt τὸ τόξον της)· ἂν δὲ θεωρήσωμεν τοὺς ἰδίους κινητοὺς ἄξονας ὡς διατρέχοντας τὴν βάσιν (Β), τὰ x, y θὰ εἶναι μεταβλητὰ κατὰ τὴν κίνησιν αὐτὴν καὶ θὰ ἔχωμεν (κατὰ τὸν ***τύπ. 25 τοῦ Α′ Τόμου***), ἐπειδὴ τώρα ἡ θετ. φορὰ τοῦ ἄξ. τῶν x εἶναι ***ἀντίθετος*** τῆς τοῦ προηγουμένου (καθὼς φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα):

$$(v_x) = \left(1 \mp \frac{y}{\varrho_0}\right) - \frac{dx}{ds_0},\quad (v_y) = -\frac{x}{\varrho_0} \pm \frac{dy}{ds_0},$$

ἢ καὶ (ἐπειδὴ $ds_0 = ds$) :

$$(\beta)\quad (v_x) = \left(1 \mp \frac{y}{\varrho_0}\right) - \frac{dx}{ds},\quad (v_y) = -\frac{x}{\varrho_0} \pm \frac{dy}{ds},$$

ὅπου ϱ_0 ἡ ἀκτὶς τῆς (Β)· θὰ ἔχ. τὸ ἐπάνω σημ. εἰς τὰ διπλᾶ σημεῖα, ἂν ἡ κύλισις εἶναι ***ἐσωτερικὴ*** (τότε τὰ δύο y ***ὁμόσημα***), τὸ κάτω δέ, ἂν ***ἐξωτερικὴ*** (τὰ δύο y ***ἑτερόσημα***). Αἱ (β) ὅμως γράφονται, ἕνεκα τῶν (α), καὶ ὡς ἑξῆς :

$$(v_x) = y\left(\frac{1}{\varrho} \mp \frac{1}{\varrho_0}\right),\quad (v_y) = \pm x\left(\frac{1}{\varrho} \mp \frac{1}{\varrho_0}\right),$$

ἤ, συντομώτερα :

$$(211)\quad v_x = \frac{y}{P},\quad v_y = \frac{\pm x}{P}\quad \left(\frac{1}{P} \equiv \frac{1}{\varrho} \mp \frac{1}{\varrho_0}\right).$$

Ἀπὸ τὰς δύο αὐτὰς ἐξισώσεις εὑρίσκ. : $\frac{ds_1}{ds} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{P} = \frac{r}{P}$ (r ἡ πολ. συντεταγμ.), ὥστε : (212) $s_1 = \int \frac{r}{P} ds$ (s_1 τὸ τόξον τῆς κυλισιγενοῦς).

Ἔχ. ἀκόμη : $\frac{v}{\varrho_1} = \frac{1}{\varrho_0} + \frac{d\omega}{ds_0}$ (ἀπὸ τὸν μεσαῖον τῶν τύπ. (102″) τοῦ Α′ Τόμου: $\frac{ds_1}{P_{1g}} = \frac{ds}{P_g} + d\omega$, διότι τώρα : $\frac{1}{P_{1g}} = \frac{1}{\varrho_1}$, $\frac{1}{P_g} = \frac{1}{\varrho}$)· ἀλλά : $ds_0 = ds$ καί : $d\omega = \mp d\vartheta$ (διότι ἡ διαίρεσις τῶν (211) δίδει : $\omega = \frac{\pi}{2} \mp \vartheta$)· λοιπόν:

$$\frac{d\omega}{ds} = \mp \frac{d\vartheta}{ds_0} = \mp\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{\eta\mu\vartheta}{r}\right) \text{ καὶ ἑπομ : } \frac{v}{\varrho_1} = \mp\left(\frac{1}{P} - \frac{\eta\mu\vartheta}{r}\right)$$

καὶ τέλος (213) : $\dfrac{1}{\varrho_1} = \mp\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{Py}{r^3}\right)\left(\text{διότι } v = \dfrac{ds_1}{ds} = \dfrac{r}{P}\right)$.

123 (γ΄). ***Ἐφαρμογὴ τῶν προηγ. τύπων εἰς τὰς καμπύλας τοῦ*** *Delaunay*.—Εὑρήκαμεν διὰ τὰς κωνικὰς (ἐδ. 120) τοὺς τύπους : $r(2\alpha - r) = \alpha\varrho\ \eta\mu\vartheta$, $\alpha\varrho\eta\mu^3\vartheta = \beta^2$· ὁ γενικὸς τύπος λοιπὸν (ἐδ. 122) : $\dfrac{1}{\varrho_1} = \left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{Py}{r^3}\right)$ (μὲ τὸ $+$ τώρα) γίνεται :

$$\frac{1}{\varrho_1} = \left(\frac{1}{r} - \frac{\varrho y}{r^3}\right) = \left(\frac{1}{r} - \frac{\varrho\eta\mu\vartheta}{r^2}\right) = \left(\frac{1}{r} - \frac{2\alpha - r}{\alpha r}\right) = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{r}\right)\cdot$$

ὁ τύπος αὐτὸς : (214) $\dfrac{1}{\varrho_1} = \dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{1}{r}$, ἂν γραφῇ: $\dfrac{1}{\varrho_1} - \dfrac{1}{\alpha} = -\dfrac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{\delta}$,

δεικνύει, ὅτι πραγματικῶς αἱ καμπύλαι τοῦ *Delaunay* εἶναι οἱ μεσημβρινοὶ τῶν ζητουμένων ἐπιφανειῶν. Διὰ νὰ τὰς διερευνήσωμεν ὅμως, χρειάζεται ἀκόμη νὰ εὕρωμεν τὴν σχέσιν, ποὺ συνδέει τὸ τόξον των s_1 καὶ τὴν ἀκτῖνά των ϱ_1 (δηλ. τὴν ***συμφυᾶ*** ἐξίσωσίν των). Εὕρομεν ἤδη (ἐδ. 122): $ds_1 = \dfrac{r}{P} ds$· ὁ γενικὸς αὐτὸς τύπος ***τώρα*** καταντᾷ :

$ds_1 = \dfrac{r}{\varrho} ds\left(\text{διότι } \dfrac{1}{\varrho_0} = 0\right)\cdot$ ἀλλὰ (ἐδ. 120) : $ds = \dfrac{\varrho d\vartheta}{\sqrt{1 - \dfrac{\varrho}{\alpha}\eta\mu\vartheta}}$,

ὥστε : $ds_1 = \dfrac{r d\vartheta}{\sqrt{1 - \dfrac{\varrho}{\alpha}\eta\mu\vartheta}} = \dfrac{\alpha r d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2 - \alpha\varrho\eta\mu\vartheta}}\cdot$ ἀλλά : $\alpha\varrho\eta\mu\vartheta = r(2\alpha - r)$· καὶ

ἐπειδὴ ἀπὸ τὸν τύπον : $\dfrac{1}{\varrho_1} = \dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{1}{r}$ εὑρίσκομεν :

$$r = \frac{\alpha\varrho_1}{\varrho_1 - \alpha}, \quad 2\alpha - r = \alpha \cdot \frac{\varrho_1 - 2\alpha}{\varrho_1 - \alpha} \quad (215),$$

θὰ εἶναι : $\alpha\varrho\eta\mu\vartheta = \dfrac{\alpha^2\varrho_1(\varrho_1 - 2\alpha)}{(\varrho_1 - \alpha)^2}$ ἑπομένως :

$$ds_1 = \frac{(\varrho_1 - \alpha) r d\vartheta}{\sqrt{(\varrho_1 - \alpha)^2 - \varrho_1(\varrho_1 - 2\alpha)}} = \frac{1}{\alpha}(\varrho_1 - \alpha) r d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{\alpha}(\varrho_1 - \alpha)\left(\frac{\alpha\varrho_1}{\varrho_1 - \alpha}\right) d\vartheta = \varrho_1 d\vartheta \quad (216).$$

Μένει νὰ ἐκφράσωμεν τὸ $d\vartheta$ μὲ τὸ $d\varrho_1$· ἔχομεν ἀπὸ τὰς σχέσεις: $r(2\alpha-r)=\alpha\varrho\eta\mu\vartheta$, $\alpha\varrho\eta\mu^3\vartheta=\beta^2$, ἂν ἀπαλείψωμεν τὸ ϱ:

$$\frac{r(2\alpha-r)}{\alpha\eta\mu\vartheta}=\frac{\beta^2}{\alpha\eta\mu^3\vartheta} \text{ ἑπομ: } \eta\mu^2\vartheta=\frac{\beta^2}{r(2\alpha-r)}=\frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot\frac{(\varrho_1-\alpha)^2}{\varrho_1(\varrho_1-2\alpha)} \text{ καί:}$$

$$2\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta d\vartheta=\frac{\beta^2}{\alpha^2}d\left[\frac{(\varrho_1-\alpha)^2}{\varrho_1(\varrho_1-2\alpha)}\right]=$$

$$=\frac{2\beta^2}{\alpha^2}\cdot\frac{-(\varrho_1-\alpha)\alpha^2 d\varrho_1}{\varrho_1^2(\varrho_1-2\alpha)^2}=\frac{2\beta^2(\alpha-\varrho_1)d\varrho_1}{\varrho_1^2(\varrho_1-2\alpha)^2}.$$

ἢ καί:

$$\frac{\beta}{\alpha}\cdot\sqrt{\frac{\varrho_1-\alpha}{\varrho_1(\varrho_1-2\alpha)}}\sqrt{1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot\frac{(\varrho_1-\alpha)^2}{\varrho_1(\varrho_1-2\alpha)}}.d\vartheta=\frac{\beta^2(\alpha-\varrho_1)}{\varrho_1^2(\varrho_1-2\alpha)^2}.d\varrho_1,$$

ἢ καί:

$$\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{(\varrho_1-\alpha)}{\varrho_1(\varrho_1-2\alpha)}\cdot\frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha^2.\varrho_1(\varrho_1-2\alpha)-\beta^2(\varrho_1-\alpha)^2}.d\vartheta=\frac{\beta^2(\alpha-\varrho_1)}{\varrho_1^2(\varrho_1-2\alpha)^2}.d\varrho_1,$$

ἢ ἀκόμη: $\sqrt{\alpha^2\varrho_1(\varrho_1-2\alpha)-\beta^2(\varrho_1-\alpha)^2}.d\vartheta=\dfrac{-\alpha^2\beta}{\varrho_1(\varrho_1-2\alpha)}d\varrho_1$·

καὶ ἂν τὴν τιμὴν τοῦ $d\vartheta$, πού μας δίδει ἡ σχέσις αὐτή, τὴν θέσωμεν εἰς τὸν τύπον: $ds_1=\varrho_1 d\vartheta$, εὑρίσκομεν:

$$(217)\quad ds_1=\frac{\alpha^2\beta}{(\varrho_1-2\alpha)\sqrt{\alpha^2\varrho_1(\varrho_1-2\alpha)-\beta^2(\varrho_1-\alpha)^2}}.d\varrho_1$$

(ὅπου παρελείψαμεν τὸ — ἕνεκα τῆς τετρ. ῥίζης)· ἡ σχέσις δὲ αὐτὴ γράφεται καὶ συντομώτερα:

$$(218)\quad ds_1=\frac{\alpha\beta}{(\varrho_1-2\alpha)\sqrt{k^2(\varrho_1-\alpha)^2-\alpha^2}}.d\varrho_1 \quad (k \text{ ἡ ἐκκεντρότης}).\text{(}^1\text{)}$$

Ὁλοκληρώνοντες(²) τέλος καὶ ἀντιστρέφοντες τὴν συνάρτησιν εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην ἐξίσωσιν:

(¹) Ἡ ἀπόδειξις, ποὺ δίδω ἐδῶ, τοῦ τύπου αὐτοῦ εἶναι πολὺ ἁπλουστέρα τῆς τοῦ *Cesàro, Geometria Intrinseca*, σελ. 70, ποὺ χρειάζεται νὰ εὕρῃ καὶ τὴν συμφυᾶ ἐξίσωσιν τῆς κωνικῆς.

(²) Ἡ ὁλοκλήρωσις θὰ γίνῃ κατὰ τὴν μέθοδον τῆς ὁλοκληρώσεως *ῥητῆς* συναρτήσεως τῶν x καὶ $\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$.

$$\varrho_1 = \alpha \frac{1+k^2-2k\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{s_1}{\alpha}\right)}{k\left(k-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{s_1}{\alpha}\right)\right)} \quad (219).$$

Εἶναι δὲ αἱ καμπύλαι αὗται δύο εἰδῶν, καθόσον $k<1$ (κύλισις ***ἐλλείψεως***) ἢ $k>1$ (κύλισις ***ὑπερβολῆς***)· τὰς πρώτας τὰς λέγομεν (Lindelöff) καὶ ***ἐλλειπτικὰς*** ἁλυσσοειδεῖς, τὰς δευτέρας, ***ὑπερβολικὰς*** ἁλυσσοειδεῖς· διότι ἡ ἐνδιάμεσος περίπτωσις $k=1$ δίδει τὴν ἁλυσσοειδῆ (ὡς κυλισιγενῆ ἀπὸ τὴν ἑστίαν τῆς παραβολῆς· αὐτὸ φαίνεται ἀμέσως ἀπὸ τὴν σχέσιν : (α) $\frac{1}{\varrho_1}=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{r}$, πού, διὰ $\alpha=\infty$, δίδει $\varrho_1=-r$, τὴν ***χαρακτηριστικὴν*** ἰδιότητα τῆς ἁλυσσοειδοῦς.—Ἂν εἰς τὸν τύπον (α) αὐξήσωμεν τὰ ϱ_1, r κατὰ α, εὑρίσκ. : $r\varrho_1=\alpha^2$ (220), δηλ. τὰς καμπύλας τοῦ ἐδ. 112. Γενικῶς τὸ τόξον τῶν ***παραλλήλων*** πρὸς τὰς καμπύλας τοῦ *Delaunay* δίδει ὁ τύπος :

$$(221) \quad s_2=\int \frac{\alpha\beta}{(\varrho_2+c)(\varrho_2+c-2\alpha)\sqrt{k'(\varrho_2+c-\alpha)^2-\alpha^2}}\cdot\varrho_2 d\varrho_2, \text{(1)}$$

ποὺ διὰ $c=\alpha$ δίδει τὸν τύπον τοῦ ἐδ. 112 :

$$\varrho_2=\frac{\alpha}{k}\sqrt{1+(1-k^2)\varepsilon\varphi^2\left(\frac{s_2}{\alpha}\right)} \quad (222).$$

Ὥστε καμπύλαι ἐπαληθεύουσαι τὴν σχέσιν : $\frac{1}{\varrho_2}=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{r}$ εἶναι ***μόνον*** αἱ τοῦ *Delaunay*. Διὰ δὲ $c=2\alpha$ ἐπανευρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ s_1 τῆς ἀρχ. καμπύλης, δηλ. ***Κάθε καμπύλη τοῦ*** *Delaunay* ***εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν ἄλλην ἴσην της.***

124. *Διερεύνησις τῶν καμπύλων τοῦ Delaunay.*—Ἀπὸ τοὺς εὑρεθέντας τύπους :

---

(1) **Διότι γενικώτερα δύο *παράλληλοι* καμπύλαι, δηλ. δύο *ἐξειλιγμέναι* τῆς ἰδίας καμπύλης, ἔχουν προφανῶς :** $\varrho_2=\varrho_1-c$, $s_2=s_1-c\varphi$· **καὶ ἂν :** $s_1=\int f(\varrho_1)d\varrho_1$, **θὰ ἔχωμεν :**

$$s_2=\int f(\varrho_1)d\varrho_1-c\int\frac{f(\varrho_1)}{\varrho_1}d\varrho_1=\int f(\varrho_1)\left[1-\frac{c}{\varrho_1}\right]d\varrho_1=\int\frac{f(\varrho_2+c)}{(\varrho_2+c)}\varrho_2 d\varrho_2.$$

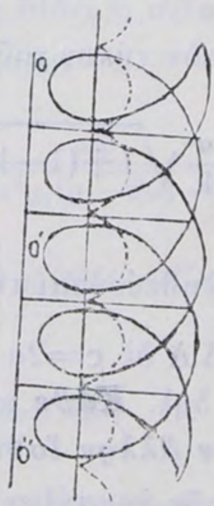
$r(2\alpha-r)=\alpha\rho\eta\mu\vartheta$, $\alpha\rho\eta\mu^{2}\vartheta=\beta^2$, $\dfrac{1}{\varrho_1}=\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{r}$, $\varrho_1=\alpha\dfrac{1+k^2-2k\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{s_1}{\alpha}\right)}{k\left(k-\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{s_1}{\alpha}\right)\right)}$

εὑρίσκομεν :

$$\sigma\varphi\vartheta=\frac{k\eta\mu\left(\dfrac{s_1}{\alpha}\right)}{1-k\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{s_1}{\alpha}\right)},\qquad y=\alpha\sqrt{1+k^2-2k\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{s_1}{\alpha}\right)}\quad(223)$$

(μὲ τὴν ρίζαν πάντοτε θετικήν).

Ἡ ἐφαπτομένη γίνεται παράλληλος πρὸς τὸν ἄξ. περιστρ., ὅταν $\sigma\varphi\vartheta=0$, δηλ. ὅταν $s_1=0$, $\pm\pi\alpha$, $\pm 2\pi\alpha,\ldots$ Τοῦτο συμβαίνει λοιπὸν ἐπὶ δύο παραλλήλων πρὸς τὸν ἄξ. περιστρ., μεταξὺ τῶν ὁποίων περιλαμβάνεται ὅλη ἡ καμπύλη, ἀφοῦ, κατὰ τὸν προηγ. τύπον διὰ τὸ y, τὸ y γίνεται μέγιστον ἢ ἐλάχιστον διὰ $\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{s_1}{\alpha}\right)=\mp 1$: μεγίστη τιμὴ εἶναι ἡ $(1+k)\alpha$, ἐλαχίστη ἡ $(1-k)\alpha$, ἂν $k<1$: καὶ ἡ $(k-1)\alpha$, ἂν $k>1$. Εἰς τὴν σειρὰν τῶν πρώτων σημείων ἔχομεν τότε : $\varrho_1=\alpha\left(1-\dfrac{1}{k}\right)$ (θετ. ἢ ἀρνητ.), εἰς τὴν τῶν δευτέρων ἔχ. : $\varrho_1=\alpha\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$, πάντοτε θετικόν. Ὥστε : 1) (σχ. 7α) *μόνον* διὰ $k<1$ ἀλλάσσει ἡ καμπυλότης



Σχ. 7α. Σχ. 7β.

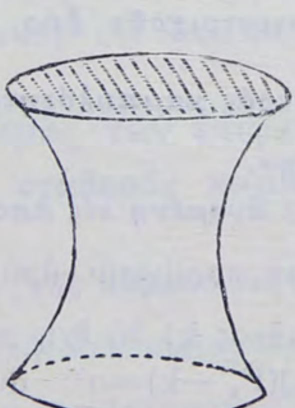
σημεῖον, ὅταν δηλ. τὸ ϱ_1 γίνεται ἄπειρον, εἰς τὴν θέσιν : $\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{s_1}{\alpha}\right)=k$· τότε τὸ συνϑ φθάνει τὴν μεγίστην τιμὴν k καὶ τὸ y γίνεται $=\alpha\sqrt{1-k^2}$. Ἡ καμπύλη λοιπὸν ἔχει ἄπειρα σημεῖα καμπῆς εἰς ἀπόστασιν $\alpha\sqrt{1-k^2}$ ἀπὸ τὸν ἄξονα καὶ αἱ κάθετοι εἰς αὐτὰ κόπτουν τὸν ἄξονα εἰς σημεῖα ἀποστάσεως α (καθὼς φαίνεται καὶ ἀπὸ τὴν σχέσιν : $\dfrac{1}{\varrho_1}=\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{r}$, ποὺ δίδει $r=\alpha$ διὰ $\varrho_1=\infty$.

Εἶναι ἀκόμη φανερόν, ὅτι κάθε κάθετος εἰς σημ. καμπῆς ἔχει τὴν ἰδίαν ἰδιότητα καὶ δι' ὅλας τὰς παραλλήλους πρὸς τὴν καμπύλην· ἑπομ. τὰ σημεῖα τομῆς τῶν καθέτων αὐτῶν μὲ τὸν ἄξονα εἶναι τὰ σημεῖα καμπῆς τῆς καμπύλης : $\varrho=\frac{\alpha}{k}\sqrt{1+(1-k^2)\varepsilon\varphi^2\left(\frac{s}{\alpha}\right)}$, ποὺ εἶναι παράλληλος (καθὼς εἴδομεν) καὶ πρὸς τὴν θεωρουμένην καμπύλην καὶ πρὸς μίαν ἄλλην ἴσην καμπύλην([1]). — 2) (σχ. 7β). Ὅταν $k>1$, τὸ σχῆμα τῆς καμπύλης διαφέρει πολύ : τότε ϱ_1 πάντοτε θετικὸν καὶ ἡ σφθ εἰμπορεῖ νὰ αὐξήσῃ εἰς ἄπειρον· δηλ. ἡ καμπύλη δὲν ἔχει σημεῖα καμπῆς καὶ ἡ ἐφαπτομένη γίνεται κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξ. περιστρ. διὰ $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{s_1}{\alpha}\right)=\frac{1}{k}$· τότε δὲ $y=\alpha\sqrt{k^2-1}$. Λοιπὸν ἡ παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα περιστρ. εἰς ἀπόστασιν $\alpha\sqrt{k^2-1}$ συναντᾷ ὀρθογωνίως τὴν καμπύλην εἰς ἄπειρα σημεῖα· καὶ ἐπὶ τῆς παραλλήλου αὐτῆς πίπτουν τὰ ἄπειρα σημεῖα *ἀνακάμψεως* τῆς καμπύλης (223) : $\varrho=\frac{\alpha}{k}\sqrt{1+(1-k^2)\varepsilon\varphi^2\left(\frac{s}{\alpha}\right)}$, μιᾶς ἀπὸ τὰς παραλλήλους πρὸς τὴν θεωρουμένην καμπύλην.

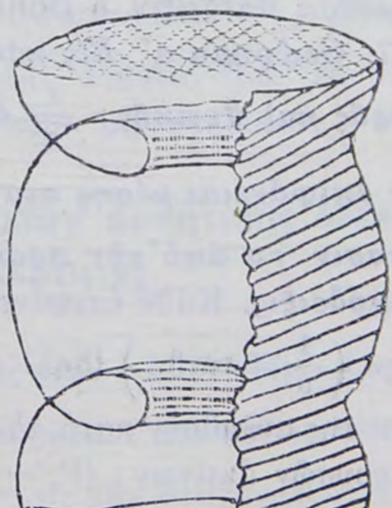
125. ***Τὰ τρία εἴδη τῶν ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανειῶν μὲ σταθερὰν μέσην καμπυλότητα.*** — Μετὰ τὴν προηγ. διερεύνησιν τῶν καμπύλων τοῦ Delaunay εἶναι φανερόν, ὅτι αἱ ζητούμεναι ἐπιφάνειαι εἶναι τριῶν εἰδῶν ἢ ***τύπων*** :

α') Αἱ ἐπιφάνειαι τοῦ σχ. 8α, ποὺ λέγονται ***κυματοειδεῖς*** *(ondu-*

(A) Σχ 8α



(B) Σχ. 8β



(Γ) Σχ. 8γ

loïdes). β') Αἱ τοῦ σχ. 8β, δηλ. τὰ ***ἁλυσσοειδῆ*** *(caténoïdes)* καὶ γ') αἱ τοῦ σχ. 8γ, ποὺ λέγονται ***κομβοειδεῖς*** *(nodoïdes)*.

([1]) Τὸ ὅτι αἱ δύο καμπύλαι εἶναι παράλληλοι καὶ ἴσαι, τὸ ἐξηγοῦμεν εὔκολα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι΄.

ΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΙ ΣΤΑΘΕΡΑΣ ΟΛΙΚΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΟΣ

α΄) Τὰ δύο θεωρήματα τοῦ *Bonnet.*

126. ***Ἐπιφάνειαι σταθερᾶς ὁλικῆς ἢ μέσης καμπυλότητος.*** — Αἱ ***ἁπλούστεραι*** ἐπιφάνειαι W εἶναι αἱ ἐπιφάνειαι ***σταθερᾶς ὁλικῆς καμπυλότητος*** $\left(\frac{1}{P_1P_2}=\text{σταθ.}\right)$ καὶ αἱ ἐπιφάνειαι ***σταθερᾶς μέσης καμπυλότητος*** $\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_2}\right)=\text{σταθ.}\right)$. ***Μερικὴ*** περίπτωσις τῶν πρώτων εἶναι αἱ ***ἀναπτυκταὶ*** ἐπιφάνειαι $\left(\frac{1}{P_1P_2}=0\right)$· τῶν δευτέρων, αἱ ἐπιφάνειαι ***ἐλαχίστης ἐκτάσεως*** $\left(\frac{1}{P_2}=-\frac{1}{P_1}\right)$.

Αἱ ἐπιφάνειαι μὲ ***ὁλικὴν*** καμπυλότητα σταθερὰν ἔχουν ἰδιαιτέραν σπουδαιότητα εἰς τὴν ***Γεωμετρίαν***· αἱ δὲ μὲ ***μέσην*** καμπυλότητα σταθεράν, εἰς τὴν ***Μαθηματικὴν Φυσικήν.***

Ἡ δυσκολία τῆς εὑρέσεως τῶν πρώτων ἢ τῶν δευτέρων εἶναι ***ἡ ἰδία,*** καθὼς ἀπέδειξεν ὁ Bonnet (1853) μὲ τὰ ἑξῆς δύο θεωρήματα.

127. ***Θεώρημα α΄. Εἰς κάθε ἐπιφάνειαν ὁλικῆς καμπυλότητος σταθερᾶς καὶ θετικῆς*** : $\frac{1}{\alpha^2}$ ***ἀντιστοιχοῦν δύο παράλληλοι πρὸς αὐτὴν ἐπιφάνειαι μέσης σταθερᾶς καμπυλότητος*** $\pm\frac{1}{2\alpha}$ ***καὶ εἰς ἀπόστασιν*** $\pm\alpha$ ***ἀπὸ τὴν πρώτην.***

Ἀπόδειξις. Κάθε ἐπιφάνεια ***ἀγομένη εἰς ἀπόστασιν*** k ἀπὸ τὴν πρώτην $\left(\frac{1}{\alpha^2}=\text{σταθ.}\right)$ (δηλ. ποὺ παράγεται ἀπὸ τὴν πρώτην, ἂν αἱ κάθετοί της αὐξηθοῦν κατὰ τὸ μῆκος k) θὰ ἔχῃ προφανῶς γινόμενον πρωτευουσῶν ἀκτίνων : $(P_1'-k)(P_2'-k)=\alpha^2$· ἂν λοιπὸν λάβωμεν : $k^2=\alpha^2$, $k=\pm\alpha$, θὰ ἔχωμεν : $\frac{1}{P_1'}+\frac{1}{P_2'}=\frac{1}{k}=\pm\frac{1}{\alpha}$ (224).

ἂν θεωρήσωμεν δύο ἴσας ἐλλείψεις, ποὺ κυλίονται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας, μένουσαι συμμετρικαὶ πρὸς αὐτήν· μία ἑστία τῆς μιᾶς ἐλλείψεως καὶ ἡ ἀντικειμένη τῆς ἄλλης εὑρίσκονται πάντοτε *ἐπ' εὐθείας* μὲ τὸ σημ. ἐπαφῆς (κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῆς ἐλλείψεως) καὶ παράγουν λοιπὸν δύο καμπύλας τοῦ *Delaunay* ἴσας καὶ παραλλήλους.

128. ***Θεώρημα β′ (ἀντίστροφον τοῦ α′). Εἰς κάθε ἐπιφάνειαν μέσης σταθερᾶς καμπυλότητος $\frac{1}{2\alpha}$ ($\lessgtr 0$) ἀντιστοιχοῦν δύο παράλληλοι πρὸς αὐτὴν ἐπιφάνειαι: μία μὲ ὁλικὴν σταθερὰν καὶ θετικὴν καμπυλότητα $\frac{1}{\alpha^2}$ καὶ μία μὲ μέσην σταθερὰν καμπυλότητα ἴσην ἀπολύτως πρὸς τὴν τῆς ἀρχικῆς.***

Ἀπόδειξις. Κάθε ἐπιφάνεια ***ἀγομένη εἰς ἀπόστασιν*** k ἀπὸ τὴν δοθεῖσαν θὰ ἔχῃ ἄθροισμα πρωτευουσῶν καμπυλοτήτων: $\frac{1}{P_1'-k}+\frac{1}{P_2'-k}=\frac{1}{\alpha}$· ἂν λοιπὸν λάβωμεν πρῶτα $k=-\alpha$, θὰ εὕρωμεν: $\frac{1}{P_1'P_2'}=\frac{1}{\alpha^2}$ (225), δηλ. τὴν ***πρώτην*** παράλληλον ἐπιφάνειαν, ποὺ ἔχει ***ὁλικὴν*** σταθερὰν καὶ θετικὴν καμπυλότητα $\frac{1}{\alpha^2}$· ἂν δὲ λάβωμεν: $k=-2\alpha$, θὰ εὕρωμεν: $\frac{1}{P_1'}+\frac{1}{P_2'}=-\frac{1}{\alpha}$ (226), δηλ. τὴν ***δευτέραν*** παράλληλον ἐπιφάνειαν, ποὺ ἔχει ***μέσην*** καμπυλότητα σταθεράν: $-\frac{1}{2\alpha}$.

Παρατήρησις. Τὸ α′ θεώρημα ἰσχύει, καὶ ἂν ἡ δοθεῖσα ἐπιφάνεια ἔχῃ ***ἀρνητικὴν*** ὁλικὴν καμπυλότητα σταθεράν: $-\frac{1}{\alpha^2}$· μόνον ὅτι αἱ δύο παράλληλοι πρὸς αὐτὴν ἐπιφάνειαι ἄγονται τότε εἰς ἀποστάσεις $\pm\alpha i$, ***φανταστικάς***· καὶ ἑπομένως εἶναι ***φανταστικαί.***

β′) Προσδιορισμὸς τῶν ἐπιφανειῶν ἀρνητικῆς ὁλικῆς σταθερᾶς καμπυλότητος.

129. ***Ἀναγωγὴ τῆς καμπυλότητος εἰς -1.*** — Τὴν ἀρνητικὴν καμπυλότητα $-\frac{1}{\alpha^2}$ τῆς ἐπιφανείας εἰμποροῦμεν πάντοτε μὲ ἕνα πραγματικὸν ***ὁμοιόθετον*** μετασχηματισμὸν νὰ τὴν ἀναγάγωμεν εἰς -1, δηλ. νὰ γίνῃ $P_1P_2=-1$.

130. ***Διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν.***—Ἂς ἐφαρμόσωμεν τοὺς τύπους τοῦ ἐδ. 102.

Γράφομεν: $P_1=\varphi(k)=-\sigma\varphi\omega$, $P_2=\varphi(k)-k\varphi'(k)=\varepsilon\varphi\omega$ (227), (ὅπου ω μία βοηθητικὴ μεταβλητή)·

ἑπομένως: $k\varphi'(k) = -\frac{1}{\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega}, \quad \varphi'(k)dk = -\frac{d\omega}{\eta\mu^2\omega}$ (227′)·

συνεπῶς: $\frac{dk}{k} = -\sigma\varphi\omega d\omega, \; k = \frac{1}{\eta\mu\omega}, \quad \varphi'(k) = -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ (227″)·

κατὰ τοὺς τύπους λοιπὸν (165) θὰ ἔχωμεν: $q_1 = \eta\mu\omega$, $p_2 = -\sigma\upsilon\nu\omega$· λαμβάνομεν ὅμως, πρὸς ἁπλοποίησιν $q_1 = \eta\mu\omega$, $p_2 = \sigma\upsilon\nu\omega$ (ποὺ προφανῶς ἐπιτρέπεται, ἐδ. 102). Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τότε:

$$(228) \quad \begin{cases} q_1 = \eta\mu\omega, & P_1 = -\sigma\varphi\omega, \quad E_1 = \sigma\upsilon\nu\omega, \quad r_1 = \frac{\partial\omega}{\partial u_2} \\ p_2 = \sigma\upsilon\nu\omega, & P_2 = \varepsilon\varphi\omega, \quad E_2 = \eta\mu\omega, \quad r_2 = \frac{\partial\omega}{\partial u_1}, \end{cases}$$

σύμφωνα πρὸς τοὺς τύπ. τῶν ἐδαφ. 58—63, ἀπὸ τοὺς ὁποίους ὁ (84) θὰ γίνῃ τώρα: $$(229) \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial u_1^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial u_2^2} = \eta\mu\omega\,\sigma\upsilon\nu\omega$$

ἢ καί: $$\frac{\partial^2\Omega}{\partial u_1^2} - \frac{\partial^2\Omega}{\partial u_2^2} = \eta\mu\Omega, \quad (\Omega \equiv 2\omega) \quad (230),$$

δηλ. ἐξίσωσις ***εἰς μερικὰς παραγώγους β′ τάξεως*** πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ ω. Ἡ ***πλήρης*** ὅμως εὕρεσις τῆς ἐπιφανείας ἀπαιτεῖ καὶ τὴν ὁλοκλήρωσιν τῶν ἐξισώσεων τοῦ Riccati διὰ τὰ 9 συνημίτονα, (¹) ποὺ λαμβάνουν, ἂν θέσωμεν: $\sigma \equiv e^{i\vartheta}$, τὴν μορφήν:

$$(231) \quad \begin{cases} \frac{\partial\vartheta}{\partial u_1} + \frac{\partial\omega}{\partial u_2} = -i\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\vartheta, \\ \frac{\partial\vartheta}{\partial u_2} + \frac{\partial\omega}{\partial u_1} = i\,\sigma\upsilon\nu\omega\eta\mu\vartheta. \end{cases}$$

Ὡς πρὸς δὲ τὴν ἐξίσωσιν μὲ τὸ Ω, παρατηροῦμεν, ὅτι εἰμπορεῖ ν᾽ ἁπλοποιηθῇ περισσότερον· διότι ἡ ἐξίσωσις τῶν ἀσυμπτωτικῶν: $E_1q_1du_1^2 = E_2p_2du_2^2$ γίνεται τώρα: $du_1^2 = du_2^2$· ἑπομένως ἔχουν χωριστὰ τὰς ἐξισώσεις: $u_1 + u_2 = c_1$, $u_1 - u_2 = c_2$· καὶ ἂν θέσωμεν $u_1 + u_2 = 2U_1$, $u_1 - u_2 = 2U_2$ καί, ἀντὶ τῶν παραμέτρων τῶν γραμμῶν καμπυλότητος, θέσωμεν τὰς τῶν ἀσυμπτωτικῶν, θὰ ἔχωμεν: $u_1 = U_1 + U_2$, $u_2 = U_1 - U_2$· τότε τὰ γραμμ. στοιχεῖα τῆς ἐπιφανείας καὶ τῆς σφαίρας τοῦ Gauss γίνονται:

(¹) Ἂν θέσ. $\alpha = \frac{1-xy}{x-y}$, $\beta = i\cdot\frac{1+xy}{x-y}$, $\gamma = \frac{x+y}{x-y}$, αἱ ἐξισώσεις τῶν συνημιτόνων δίδουν: $$\frac{\partial\sigma}{\partial u_1} = -ir_1\sigma + \frac{q_1 - ip_1}{2} + \frac{q_1 + ip_1}{2}\sigma^2,$$
$$\frac{\partial\sigma}{\partial u_2} = -ir_2\sigma + \; + \frac{q_2 - ip_2}{2} + \frac{q_2 + ip_2}{2}\sigma^2 \quad (\sigma \equiv x, y).$$

$$(232)\begin{cases} ds^2=\text{συν}^2\omega du_1{}^2+\text{ημ}^2\omega du_2{}^2=dU_1{}^2+2\text{συν}(2\omega)dU_1dU_2+dU_2{}^2, \\ d\sigma^2=\text{ημ}^2\omega du_1{}^2+\text{συν}^2\omega du_2{}^2=dU_1{}^2-2\text{συν}(2\omega)dU_1dU_2+dU_2{}^2, \end{cases}$$

καὶ ἡ ἐξίσωσις τοῦ ω λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$(233)\quad \frac{\partial^2\omega}{\partial U_1\partial U_2}=\text{ημωσυνω} \quad \text{ἢ καί :} \quad \frac{\partial^2\Omega}{\partial U_1\partial U_2}=\text{ημ}\Omega \quad (233').$$

(Τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν τὴν εὑρίσκομεν καὶ **ἀπευθείας,** ἂν ἐκφράσωμεν, ὅτι ἔχομεν γραμ. στοιχεῖον ἐπιφανείας μὲ ὁλικὴν καμπυλότητα=—1).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΣΘΗΚΑΙ

1) Νὰ εὑρεθῇ, τί ἐπιφάνειαι W παράγονται, ἂν εἰς τὸ β′ θεώρημα τοῦ Bonnet (ἐδ. 124) ὑποθέσωμεν α′) $k=a$, β′) $k=2a$.

2—4) ***Γεωμετρικαὶ ἰδιότητες τῶν ἐπιφανειῶν ἀρνητ. σταθ. ὁλ. καμπυλότητος*** (συνέπειαι τῶν σχέσεων τῶν προηγ. ἐδαφίων) :

α′) Ἂν τὰ u_1, u_2 αὐξήσουν κατὰ ἴσας αὐξήσεις, ἡ ἐπιφάνεια, καθὼς καὶ ἡ σφαῖρα τοῦ Gauss, διαιροῦνται εἰς ὀρθογώνια μὲ ἴσας διαγωνίους, αἱ ὁποῖαι ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας εἶναι αἱ ἀσυμπτωτικαὶ ἐφαπτόμεναι.

β′) Ἂν τὰ U_1, U_2 αὐξήσουν κατὰ ἴσας αὐξήσεις, ἡ ἐπιφάνεια διαιρεῖται ἀπὸ τὰς ἀσυμπτωτικάς της εἰς ῥόμβους μὲ τὴν ἰδίαν ὅλους πλευράν.

Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἴδιον συμβαίνει καὶ διὰ τὴν σφαῖραν τοῦ Gauss, ***ἡ γνῶσις τῶν ἀσυμπτωτικῶν τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν προσδιορίζει ἐπὶ τῆς σφαίρας καὶ ἑπομένως καὶ ἐπὶ κάθε ἄλλης ἐπιφανείας μὲ θετικὴν σταθ. ὁλ. καμπυλότητα, δύο σειρὰς γραμμῶν, ποὺ διαιροῦν τὴν ἐπιφάνειαν εἰς ῥόμβους μὲ τὴν ἰδίαν πλευράν.***

γ′) Ἂς θεωρήσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καμπυλογράμμου παραλληλογράμμου (Π), ποὺ ἀποτελοῦν 4 ἀσυμπτωτικαί, δηλ. τό :

$$\iint\limits_{(\Pi)} \text{ημ}\Omega\, dU_1 dU_2\cdot$$

αὐτὸ (κατὰ τὴν ἐξίσ. (233′)) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\iint \frac{\partial^2\Omega}{\partial U_1\partial U_2} dU_1 dU_2\cdot$$

εἶναι ἑπομένως ἴσον μὲ Α+Β+Γ+Δ—2π, ὅπου Α, Β, Γ, Δ εἶναι αἱ γωνίαι τοῦ παραλληλογράμμου· καὶ ἐπειδὴ πρέπει τὸ ἐμβαδὸν νὰ εἶναι **θετικόν**, βλέπομεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα $A+B+\Gamma+\Delta$ εἶναι $>2\pi$. (Ἂν τὸ παραλληλόγραμμον κατεσκευάζετο ἀπὸ **γεωδαισιακάς**, τὸ ἐμβαδὸν θὰ ἦτο : $2\pi-(A+B+\Gamma+\Delta)$ ([1])).

5) ***Αἱ ἀσυμπτωτικαὶ κάθε ἐπιφανείας μὲ ὁλικὴν καμπυλότητα $=-1$ εὑρίσκονται μόνον μὲ τετραγωνισμούς.***

Διότι αἱ ἐξισώσεις :

$$ds^2=\sigma\upsilon\nu^2\omega du_1^2+\eta\mu^2\omega du_2^2 \text{ καὶ } \Theta\equiv\left(d\tilde{\omega}-\frac{ds}{r}\right)ds=du_1du_2$$

μᾶς δίδουν : $$(234)\quad ds^2\pm2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega\Theta=(\sigma\upsilon\nu\omega du_1\pm\eta\mu\omega du_2)^2\cdot$$

ἂν δὲ ἐκφράσωμεν, ὅτι τὸ $ds^2+\lambda\Theta$ εἶναι τέλειον τετράγωνον, εὑρίσκομεν μίαν ἐξίσωσιν τοῦ β′ βαθμοῦ εἰς λ μὲ ρίζας $\pm\eta\mu(2\omega)$· ὥστε :

$$(235)\quad \begin{cases} 2\sigma\upsilon\nu\omega du_1=\sqrt{ds^2+\Theta\eta\mu(2\omega)}+\sqrt{ds^2-\Theta\eta\mu(2\omega)}, \\ 2\eta\mu\omega du_2=\sqrt{ds^2+\Theta\eta\mu(2\omega)}-\sqrt{ds^2-\Theta\eta\mu(2\omega)}. \end{cases}$$

καὶ ἀπὸ τὰς ἐξισ. αὐτὰς εὑρίσκονται τὰ du_1, du_2, (ἀπολύτως)· ἑπομένως καὶ τὰ dU_1, dU_2 :

$$(236)\quad dU_1=\frac{1}{2}(du_1+du_2), \qquad dU_2=\frac{1}{2}(du_1-du_2)\cdot$$

ὁρίζονται λοιπὸν καὶ τὰ U_1, U_2, καθὼς καὶ τὰ u_1, u_2, κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς σταθεροῦ προσθετέου.

6) Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἀπὸ μίαν λύσιν : $\omega=\varphi(U_1, U_2)$ τῆς ἐξισώσεως (233′) παράγεται ἡ γενικωτέρα :

$$(237)\quad \omega=\varphi\left(mU_1, \frac{U_2}{m}\right),$$ ὅπου m ἡ τυχοῦσα σταθερά. ***(Μετασχηματισμὸς τοῦ Lie (Λή))***.

Καὶ ἑπομένως, ὅτι : Ἀπὸ πᾶσαν λύσιν : $\omega=\psi(u_1, u_2)$ παράγεται ἡ γενικωτέρα :

$$(238)\quad \omega=\psi\left(\frac{u_1+u_2\eta\mu h}{\sigma\upsilon\nu h}, \frac{u_2+u_1\eta\mu h}{\sigma\upsilon\nu h}\right),$$ ὅπου h τυχοῦσα σταθερά.

7—8) ***Θεωρήματα τοῦ Bonnet*** :

α′) Αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος κάθε ἐπιφανείας μὲ σταθερὰν μέσην καμπυλότητα ἀποτελοῦν ἰσοθερμικὸν δίκτυον.

β′) Αἱ μηδενικαὶ γραμμαὶ κάθε ἐπιφανείας μὲ μέσην σταθερὰν καμπυλότητα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς ἀσυμπτωτικὰς τῆς παραλ-

---

([1]) Βλ. Darboux, Surfaces, III, σελ. 127.

λήλου της ἐπιφανείας, ποὺ ἔχει ὁλικὴν σταθερὰν καμπυλότητα.

Ἀπόδειξις. Ἡ ἐπιφάνεια ἡ παράλληλος πρὸς τὴν δοθεῖσαν ἐπιφάνειαν σταθ. ὁλ. καμπυλότητος $=-1$, ἡ ἀγομένη εἰς ἀπόστασιν λ, θὰ ἔχῃ ἀκτῖνας πρωτευούσας:

$$(239)\quad P_1'=\lambda-\sigma\varphi\omega,\quad P_2'=\lambda+\varepsilon\varphi\omega\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ τὰ p_2, q_1 μένουν τὰ ἴδια, τὸ γραμ. στοιχεῖον τῆς νέας ἐπιφανείας θὰ γίνῃ:

$$(240)\quad ds^2=(\sigma\upsilon\nu\omega-\lambda\eta\mu\omega)^2du_1{}^2+(\eta\mu\omega+\lambda\sigma\upsilon\nu\omega)^2du_2{}^2.$$

καὶ ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν P_1', P_2' θὰ εἶναι:

$$P_1'P_2'-\lambda(P_1'+P_2')+\lambda^2+1=0\quad (241)\cdot(^1)$$

διὰ νὰ γίνῃ λοιπὸν ἡ μέση καμπυλότης της σταθερά, πρέπει νὰ λάβωμεν $\lambda=\pm i$· ἂν π.χ. $\lambda=-i$, θὰ εἶναι:

$$(242)\quad ds^2=e^{2i\omega}(du_1{}^2-du_2{}^2)\cdot$$

καὶ ἑπομένως τὰ δύο θεωρήματα α′ καὶ β′ ἀληθεύουν.

Πόρισμα τοῦ β′ θεωρήματος: Ἂν ἡ ἐπιφάνεια σταθ. μέσης καμπυλότητος εἶναι πραγματική, εἶναι κατ᾽ ἀνάγκην παράλληλος πρὸς μίαν ἐπιφάνειαν θετικῆς σταθ. ὁλικῆς καμπυλότητος.

9) ***Ἐφαρμογὴ τοῦ μετασχηματισμοῦ τοῦ*** *Lie* ***(Ἄσκ. 6η) εἰς τὰς ἐπιφανείας μέσης σταθ. καμπυλότητος.***— Ἂν εἰσαγάγωμεν τὰ U_1, U_2, τὸ γραμ. στοιχεῖον: $ds^2=e^{2i\omega}(du_1{}^2-du_2{}^2)$ γίνεται:

$$ds^2=4e^{2i\omega}dU_1dU_2\quad (243).$$

Ἂν τώρα ἔχωμεν μίαν λύσιν: $\omega=\varphi(U_1, U_2)$, εὑρίσκομεν νέαν, ἂν θέσωμεν: $\omega_1=\varphi\left(mU_1, \frac{U_2}{m}\right)\cdot$ θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι: ***Αἱ δύο ἐπιφάνειαι αἱ ἀντίστοιχοι πρὸς τὰς τιμὰς αὐτὰς ω καὶ ω_1 εἶναι ἐφαρμόσιμοι ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης· καὶ ἔχουν εἰς τ᾽ ἀντίστοιχα σημεῖα τὰς ἰδίας πρωτευούσας ἀκτῖνας.***

Ἀπόδειξις. Ἂν τὰ γραμ. στοιχεῖά των εἶναι: $ds=4e^{2i\omega}.dU_1dU_2$, $ds_1{}^2=4e^{2i\omega_1}.dU_1dU_2$ καὶ θεωρήσωμεν ὡς ἀντίστοιχον τοῦ σημείου (U_1, U_2) τῆς α′ τὸ $\left(U_1'\equiv\frac{U_1}{m},\ U_2'\equiv mU_2\right)$ τῆς β′, θὰ εἶναι ἐκεῖ:

---

(1) Ἡ σχέσις αὐτὴ μᾶς λέγει, ὅτι τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς *ἡ μέση καὶ ἡ ὁλικὴ καμπυλότης συνδέονται μὲ μίαν ἐξίσωσιν α′ βαθμοῦ, τῆς μορφῆς:*

$$A\left(\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_2}\right)+B\frac{1}{P_1P_2}+\Gamma=0.$$

(Ἂν $A=0$, ἔχ. *ὁλικὴν* καμπυλότ. σταθ.· ἂν $B=0$, *μέσην* καμπυλότ. σταθεράν).

$\omega_1=\omega$ καὶ $dU_1'dU_2'=dU_1dU_2$· ἑπομένως καί: $ds^2=ds_1^2$· εἶναι δὲ καὶ αἱ ἀντίστοιχοι ἀκτῖνες ἴσαι ($P_1=P_1'$, $P_2=P_2'$), διότι ἐξαρτῶνται μόνον ἀπὸ τὴν τιμὴν τοῦ ω.

Λοιπόν: ***Θεώρημα τοῦ Bonnet. Κάθε ἐπιφάνεια μέσης σταθ. καμπυλότητος εἶναι ἐφαρμόσιμος ἐπὶ ἀπείρων ἐπιφανειῶν τῆς ἰδίας μέσης καμπυλότητος· καὶ αἱ πρωτεύουσαι ἀκτῖνες εἰς τ' ἀντίστοιχα σημεῖα μένουν ἀναλλοίωτοι δι' ὅλας τὰς ἐπιφανείας.***

Ἡ πλήρης ὅμως εὕρεσις τῶν ἐπιφανειῶν τούτων ἀπαιτεῖ τὴν ὁλοκλήρωσιν τοῦ συστήματος (231).

Πόρισμα. Ἂν κατασκευάσωμεν ἐπὶ τοῦ χάρτου τὴν ***ἀπεικόνισιν*** τῆς δοθείσης ἐπιφανείας οὕτως, ὥστε ***αἱ γραμμαὶ καμπυλότητός της ν' ἀπεικονίζωνται κατὰ τὰς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου τὰς παραλλήλους πρὸς τοὺς ἄξονας, αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος ὅλων τῶν ἄλλων ἀντιστοίχων ἐπιφανειῶν θ' ἀπεικονίζωνται κατὰ δύο σειρὰς παραλλήλων εὐθειῶν μὲ γωνίας σταθερὰς α καὶ*** $\alpha+\frac{\pi}{2}$ ***μὲ τοὺς ἄξονας.***

10) Ἡ σπουδὴ τῶν ἐπιφανειῶν ***θετικῆς*** σταθ. ὁλ. καμπυλότητος ἀνάγεται εὐκόλως εἰς τὴν τῶν ***ἀρνητικῆς,*** ὡς ἑξῆς:

Μ' ἕνα ***ὁμοιόθετον*** μετασχηματισμόν, ***λόγου ὁμοιότητος i,*** ἀλλάσσει τὸ σημεῖον τοῦ ds^2, αἱ δὲ πρωτ. ἀκτῖνες γίνονται:

(244) $P_1=-i\,\sigma\varphi\omega$, $P_2=i\,\varepsilon\varphi\omega$· ἐπίσης τὰ ds, dσ γίνονται: $ds^2=-\sigma\upsilon\nu^2\omega du_1^2-\eta\mu^2\omega du_2^2$, $d\sigma^2=\eta\mu^2\omega du_1^2+\sigma\upsilon\nu^2\omega du_2^2$ (245)· θὰ γίνουν δὲ αἱ ἀκτῖνες ***πραγματικαί***, ἂν ὅπου ω θέσωμεν: $-\omega' i$ (ω′ πραγμ.)· τότε ἀπὸ τὸ $d\sigma^2$ βλέπομεν, ὅτι πρέπει ἀντὶ u_1 νὰ θέσωμεν $u_1'i$· ***τότε δὲ ἔχ. τοὺς ἑξῆς τύπους διὰ τὴν σπουδὴν τῶν ἐπιφανειῶν θετ. σταθ. ὁλ. καμπυλότητος:***

$$(246)\quad \left|\begin{aligned}
&P_1=\frac{e^{\omega'}+e^{-\omega'}}{e^{\omega'}-e^{-\omega'}},\quad P_2=\frac{e^{\omega'}-e^{-\omega'}}{e^{\omega'}+e^{-\omega'}},\\
&ds^2=\frac{1}{4}\left(e^{\omega'}+e^{-\omega'}\right)^2du_1'^2+\frac{1}{4}\left(e^{\omega'}-e^{-\omega'}\right)^2du_2^2,\\
&d\sigma^2=\frac{1}{4}\left(e^{\omega'}-e^{-\omega'}\right)^2du_1'^2+\frac{1}{4}\left(e^{\omega'}+e^{-\omega'}\right)^2du_2^2,\\
&\frac{\partial^2\omega'}{\partial u_1'^2}+\frac{\partial^2\omega'}{\partial u_2^2}=\frac{1}{4}\left(e^{-2\omega'}-e^{2\omega'}\right).
\end{aligned}\right.$$

Αἱ δὲ παράλληλοι πρὸς αὐτὰς ἐπιφάνειαι μὲ ***μέσην*** καμπυλότητα σταθερὰν θὰ ἔχουν τὸ γραμ. στοιχεῖον :

$$(247)\quad ds^2 = e^{\mp 2\omega'}(du_1'^2 + du_2^2).$$

Ἂν : $\omega' = \varphi(u_1, u_2)$ εἶναι μία λύσις τῆς τελευταίας ἀπὸ τὰς ἐξισ. (246), ὅλαι αἱ πραγματικαὶ ἐπιφάνειαι μὲ σταθ. μέσην καμπυλότητα (τοῦ Bonnet), ποὺ ἐφαρμόζουν ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης μὲ ἀναλλοιώτους τὰς πρωτ. ἀκτῖνάς των, θ' ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς τιμὰς τοῦ ω', ποὺ περιλαμβάνει ἡ γενικὴ ἔκφρασις : $\omega' = \varphi(u_1 \text{συν}\alpha - u_2 \text{ημ}\alpha,\ u_1 \text{ημ}\alpha + u_2 \text{συν}\alpha)$, ὅπου α πραγματικὴ σταθερά.

11) Τὸ ἴδιον εἰμποροῦμεν νὰ τὸ κάμωμεν καὶ μὲ τοὺς τύπους τοῦ Weingarten, ἂν θέσωμεν : $\varphi(k) = \sqrt{k^2 + \alpha^2}$ διὰ τὰς ἐπιφανείας μὲ ***θετ.*** ὁλ. καμπυλότητα : $\frac{1}{\alpha^2}$ καί : $\varphi(k) = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$ διὰ τὰς μὲ ἀρνητ. : $-\frac{1}{\alpha^2}$.

Τὸ β′ θεώρημα τοῦ Weingarten (ἐδ. 107) δίδει τώρα διὰ τὴν α′ χώνην τῆς ἐνειλιγμένης τῆς ἐπιφ. ***ἀρνητ.*** καμπυλότητος :

$$ds^2 = d\varphi^2 + k^2 du_2^2 \quad \text{ἤ} : \quad ds^2 = d\varphi^2 + (\varphi^2 + \alpha^2) du_2^2 \quad (248)\cdot$$

ἡ δὲ σύγκρισις τοῦ τύπου τούτου πρὸς τοὺς τῆς σελ. 74, ὑποσημ. μᾶς δίδει τὸ θεώρημα : ***Αἱ δύο χῶναι τῆς ἐνειλιγμένης κάθε ἐπιφανείας μὲ ἀρνητικὴν σταθερὰν ὁλ. καμπυλότητα εἶναι ἐφαρμόσιμοι ἐπὶ ἑνὸς καὶ τοῦ ἰδίου ἁλυσσοειδοῦς ἢ ἐπὶ ἑνὸς καὶ τοῦ ἰδίου ἑλικοειδοῦς ἐλαχίστης ἐκτάσεως.***

Ὥστε : ***Ἂν γνωρίζομεν μίαν ἐπιφάνειαν σταθ. ὁλ. καμπυλότητος, προσδιορίζομεν δύο ἐπιφανείας ἐφαρμοσίμους ἐπὶ τοῦ ἁλυσσοειδοῦς*** καὶ ἀντιστρόφως : ***Κάθε μὴ εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια ἐφαρμόσιμος ἐπὶ τοῦ ἑλικοειδοῦς ἐλαχ. ἐκτάσεως θὰ μᾶς δώσῃ, μόνον μὲ τετραγωνισμούς, μίαν ἐπιφάνειαν ἀρνητ. σταθ. καμπυλότητος.***

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΑ′.

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΤΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΣΤΑΘΕΡΑΣ ΟΛΙΚΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΟΣ

α′) Λήμματα ἀπὸ τὰ προηγ. κεφάλαια.

131. 1ον) ***Τὸ γραμ. στοιχεῖον κάθε ἐπιφανείας μὲ ἀρνητ. σταθ. ὁλ. καμπυλότητα εἰμπορεῖ κατ' ἀπείρους τρόπους ν' ἀναχθῇ εἰς***

τὴν μορφήν : **(α)** $ds^2=\alpha^2(du_1^2+e^{2u_1}du_2^2)$, δηλ. εἰς τὴν μορφὴν τοῦ στοιχείου τῆς ***ψευδοσφαίρας*** (¹). Ἂν λοιπὸν γνωρίζωμεν τὰς γεωδαισιακὰς τῆς ἐπιφανείας, ἀνάγομεν, χωρὶς τετραγωνισμούς, τὸ γραμ. στοιχεῖόν της εἰς τὴν μορφὴν (α)· μένει δὲ (καθὼς εὔκολα φαίνεται) ***ἡ ἰδία*** μορφὴ τοῦ γραμ. στοιχείου καὶ διὰ πᾶν ἄλλο σύστημα παραμέτρων U_1, U_2 ὁριζόμενον ἀπὸ τὰς σχέσεις :

$$e^{-U_1}=\frac{e^{-u_1}}{e^{-2u_1}+(u_2-A)^2},\quad U_2=\frac{u_2-A}{e^{-2u_1}+(u_2-A)^2}\text{(A τυχ. σταθ).}\tag{249}$$

ἤ, ἂν θέσωμεν :

$$u_2=x,\quad e^{-u_1}=y,\quad U_2=x_1,\quad e^{-U_1}=y_1,$$

$$x_1=\frac{x-A}{(x-A)^2+y^2},\quad y_1=\frac{y}{(x-A)^2+y^2}.\tag{249'}$$

132. 2ον) ***Αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν γεωδαισιακῶν μὲ τὴν παράμετρον u_2 μιᾶς ἐπιφανείας (X_1) ἐφάπτονται καὶ μιᾶς ἄλλης ἐπιφανείας (X_2), ποὺ εἶναι ὁ τόπος τῶν κέντρων γεωδαισιακῆς καμπυλότητος τῶν γραμμῶν u_1=σταθ.· εἶναι δὲ κάθετοι καὶ πρὸς μίαν τρίτην ἐπιφάνειαν (E), ποὺ θὰ ἔχῃ ἑπομένως ὡς χώνας τῆς ἐνειλιγμένης της τὰς (X_1), (X_2).*** Ἂν λοιπὸν M_1, M_2 καὶ M εἶναι τὰ 3 ἀντίστοιχα ἐπ' εὐθείας σημεῖα τῶν (X_1),(X_2) καὶ (E), θὰ εἶναι : $M_1M_2=\alpha$, $M_1M=\alpha u_1$· καὶ ἂν αἱ συντεταγμ. τοῦ M_1 πρὸς ἀκινήτους ἄξονας εἶναι x_1,y_1,z_1, αἱ τοῦ M_2 καὶ τοῦ M θὰ εἶναι ἀντιστοίχως :

$$\text{(250)}\quad\left\{\begin{aligned}&x_2=x_1-\frac{\partial x_1}{\partial u_1},\quad y_2=y_1-\frac{\partial y_1}{\partial u_1},\quad z_2=z_1-\frac{\partial z_1}{\partial u_1}\ \text{καί :}\\&x=x_1-u_1\frac{\partial x_1}{\partial u_1},\quad y=y_1-u_1\frac{\partial y_1}{\partial u_1},\quad z=z_1-u_1\frac{\partial z_1}{\partial u_1}.\end{aligned}\right.$$

ἂν δὲ θέσωμεν (ἐδ. 108): $e^{u_1}(q_1du_1+q_2du_2)=dU_2$ (ὅπου q_1, q_2 αἱ περιστροφαὶ τοῦ τριέδρου (T_1) τῆς (X_1) εἰς τὸ M_1), θὰ ἔχωμεν :

(β) $ds_2^2=\alpha^2(du_1^2+e^{-2u_1}dU_2^2)$· θὰ ἔχῃ λοιπὸν καὶ ἡ (X_2), καθὼς καὶ ἡ (X_1), σταθερὰν ὁλ. καμπυλότητα $=-\frac{1}{\alpha^2}$· ἡ ἐπιφάνεια τέλος (E) εἶναι ἐπιφάνεια W· διότι αἱ δύο ἀκτῖνές της εἶναι : $P_1=M_1M$

(¹) Δι' αὐτὴν εἶναι: $ds^2=\alpha^2(\sigma\varphi^2\varphi d\varphi+\eta\mu^2\varphi du_2)$· ἔπειτα θέτομεν: $\sigma\varphi\varphi d\varphi=du_1$.

καὶ $P_2=M_2M$· καὶ ἑπομ. $(M_1M)-(M_2M)=\alpha u_1-\alpha(u_1-1)=\alpha$· ὥστε: $P_1-P_2=\alpha$. ***(Παράβ. ἐδ. 100, πόρ. β').***

133. 3ον. Κατὰ τὰς προτάσεις τῆς σελ. 56 ("Ασκ. 1η, β') καὶ τοῦ ἐδ. 109 αἱ δύο χῶναι (X_1) καὶ (X_2) ἀντιστοιχοῦν οὕτως, ***ὥστε καὶ αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος καὶ αἱ ἀσυμπτωτικαὶ εἶναι ὁμόλογοι.***

β') Μετασχηματισμὸς τοῦ *Bianchi*.

134. ***Μετασχηματισμὸς τοῦ*** *Bianchi* ***(1879).*** — "Αν γνωρίζωμεν μίαν ἐπιφάνειαν (X_1) μὲ ὁλ. καμπυλότητα $-\frac{1}{\alpha^2}$ καὶ τὰς γεωδαισιακάς της καὶ γράψωμεν τὸ γραμ. στοιχεῖόν της ὑπὸ τὴν μορφὴν (α) (σελ. 110), αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν γεωδαισιακῶν μὲ τὴν παράμετρον u_2 θὰ εἶναι (λῆμμα 2ον) ἐφαπτόμεναι καὶ μιᾶς δευτέρας ἐπιφανείας (X_2). ποὺ ὁρίζεται ***χωρὶς καμίαν ὁλοκλήρωσιν,*** ἀπὸ τοὺς τύπους (250). Ἡ δὲ (X_2) θὰ ἔχῃ ***τὴν ἰδίαν*** σταθ. ὁλ. καμπυλότητα $-\frac{1}{\alpha^2}$· ***εἰμποροῦμεν λοιπὸν ἀπὸ μίαν ἐπιφάνειαν (X_1) μὲ ὁλ. καμπυλότητα σταθ. $-\frac{1}{\alpha^2}$ καὶ μὲ γνωστὰς γεωδαισιακάς, νὰ παραγάγωμεν ἓν γένος ἐπιφανειῶν (X_2), ἐξαρτώμενον ἀπὸ μίαν αὐθαίρετον παράμετρον. "Αν δὲ γνωρίζωμεν καὶ τὰς γεωδαισιακὰς τῶν (X_2), εἰμποροῦμεν πάλιν ἀπὸ αὐτὰς νὰ εὕρωμεν ὁμοίως ἓν σμῆνος ἐπιφανειῶν (X_3) κτλ.*** Ἡ μέθοδος αὐτὴ ἀποτελεῖ τὸν ***μετασχηματισμὸν τοῦ*** *Bianchi*.

135. ***Θεώρημα τοῦ*** *Lie*. — ***Ἡ εὕρεσις τῶν γεωδαισιακῶν ὅλων αὐτῶν τῶν ἐπιφανειῶν (X_2), (X_3) κτλ. ἀνάγεται ἁπλῶς εἰς τετραγωνισμούς.***

Ἀπόδειξις. Ἀρκεῖ προφανῶς ν' ἀποδειχθῇ ἡ πρότασις διὰ τὰς (X_2), θεωρουμένας ὡς παραγομένας ἀπὸ τὴν (X_1). "Αν τὸ γραμ. στοιχεῖον τῆς (X_1) ἔχῃ ἀναχθῆ εἰς τὴν μορφὴν (α), σελ. 110, τότε τῆς (X_2), ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τοὺς τύπους (250), εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ds_2 διὰ τῶν u_1, u_2, du_1, du_2. Ἀλλὰ τὸ ds_2 αὐτὸ πρέπει ν' ἀνάγεται εἰς τὴν μορφὴν (β), σελ. 110, δηλ. θὰ εἶναι : $dU_2=\frac{e^{2u_1}}{\alpha}\sqrt{ds_2{}^2-\alpha^2du_1{}^2}$· ἡ δὲ ἀπαλοιφὴ τοῦ ds_2 μεταξὺ τοῦ τύπου τούτου καὶ τῆς προηγ. τιμῆς τοῦ ds_2, θὰ μᾶς δώση : $dU_2 = Hdu_1 + Tdu_2$· καὶ ἑπομένως τὸ U_2 δίδεται μ' ἕνα τετραγωνισμόν· καὶ οὕτω τὸ γραμ. στοιχεῖον τῆς (X_2) ἀνάγεται εἰς τὴν μορφὴν (α) ἢ (β) (ἂν ἀλλαχθῇ τὸ σημεῖον τοῦ u_1). Ἑπομένως, κατὰ τὰ προηγούμενα, ὅλαι αἱ γεωδαισιακαὶ τῶν (X_2) εὑρίσκονται **χωρὶς καμίαν νέαν ὁλοκλήρωσιν**.

γ') Μετασχηματισμὸς τοῦ *Ribaucour*. (*ἰσοδύναμος πρὸς τὸν τοῦ Bianchi*).

136. ***Θεώρημα τοῦ** Ribaucour*. — 9 ἔτη πρὸ τοῦ *Bianchi*, τὸ 1870, ὁ *Ribaucour* εἶχεν ἤδη ἀποδείξει τὸ ἑξῆς θεώρημα, ἀπὸ τὸ ὁποῖον εὐκόλως παράγεται, καθὼς θὰ ἴδωμεν, ὁ μετασχηματισμὸς τοῦ *Bianchi*.

Θεώρημα. — ***Ἂν γραφῇ, ἐπὶ κάθε ἐφαπτομένου ἐπιπέδου μιᾶς ἐπιφανείας (E) μὲ σταθερὰν ὁλ. καμπυλότητα : $-\frac{1}{a^2}$, ἡ περιφέρεια, ποὺ ἔχει κέντρον τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς καὶ ἀκτῖνα α, τὸ σμῆνος τῶν περιφερειῶν αὐτῶν εἶναι κάθετον πρὸς ἓν γένος ἐπιφανειῶν (E_1), ποὺ ἔχουν ἐπίσης ὁλ. καμπυλότητα σταθερὰν καὶ ἴσην μὲ τὴν τῆς (E)***.

Ἀπόδειξις (γεωμετρική). α') Ἂς θεωρήσωμεν μίαν **σφαῖραν**, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον νὰ διατρέχῃ μίαν καμπύλην καὶ ἡ ἀκτὶς νὰ εἶναι μία δοθεῖσα συνάρτησις τῆς θέσεως τοῦ κέντρου ἐπὶ τῆς καμπύλης. Αἱ διάφοροι θέσεις της θὰ ἔχουν **περιβάλλουσαν** καὶ αἱ **ὁρικαὶ** γραμμαὶ θὰ εἶναι **περιφέρειαι**· καὶ εἰς κάθε θέσιν ἡ ἀπόστασις δ τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἀντιστοίχου περιφερείας ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας θὰ δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον : (251) $\delta = -P.\frac{dP}{ds}$, ὅπου P ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας Ἀπὸ τὸν τύπον αὐτὸν βλέπομεν, ὅτι : ***Τὸ ἐπίπεδον τῆς ἐπαφῆς δὲν θ' ἀλλάξῃ, ἂν τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος αὐξήσῃ κατὰ σταθερὸν μῆκος***.

β') Ἂς θεωρήσωμεν τώρα μίαν τυχοῦσαν ἐπιφάνειαν (E) καὶ ἂς εἶναι (K) μία ἀπὸ τὰς γραμμὰς καμπυλότητός της. Τ' ἀντίστοιχα εἰς τὴν (K) πρωτεύοντα κέντρα τῆς (E) ἀποτελοῦν μίαν γραμμὴν (Γ), ποὺ θὰ εἶναι **ἐνειλιγμένη** τῆς (K) καὶ συγχρόνως **γεωδαισιακὴ** γραμμὴ τῆς χώνης (τῆς ἐνειλιγμένης), πού την περιέχει. ***(Σμήνη καὶ Συμπλ. Ν.Χατζ , ἐδ. 62)***. Ἂν λοιπὸν μία σφαῖρα μεταβλητὴ (Σ) μὲ κέντρον ἓν σημεῖον μ τῆς (Γ) ἐφάπτεται τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον Μ τῆς

(K), τὸ ἐπίπεδον τῆς ἐπαφῆς τῆς σφαίρας αὐτῆς μὲ τὴν περιβάλλουσάν της θὰ εἶναι τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας (E) εἰς τὸ M. Αὐτὸ εἶναι ἰδιότης τῆς ἐξειλιγμένης, φαίνεται ὅμως καὶ ἀπὸ τὸν τύπον : $\delta = -P\frac{dP}{ds}$. Ἂν λοιπὸν αὐξήσωμεν κατὰ τὴν σταθερὰν α^2 τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τῆς (Σ), θὰ εὕρωμεν μίαν νέαν σφαῖραν (Σ'), ποὺ θὰ κόψῃ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς τὸ M κατὰ μίαν περιφέρειαν (Π) ἀκτῖνος α καὶ ἡ περιβάλλουσα τῆς (Σ') θὰ εἶναι, κατὰ τὴν προηγ. πρότασιν (α'), ὁ τόπος τῶν διαδοχικῶν θέσεων τῆς περιφερείας (Π). Ὥστε :

Αἱ περιφέρειαι (Π) μὲ σταθερὰν ἀκτῖνα α, ποὺ γράφονται ἐπὶ τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων μιᾶς ἐπιφανείας (E) μὲ κέντρα τ' ἀντίστοιχα σημεῖα ἐπαφῆς, εἰμποροῦν νὰ κατανεμηθοῦν κατὰ δύο διαφόρους τρόπους εἰς τὰς περιβαλλούσας σφαιρικῶν ἐπιφανειῶν : ὅλαι αἱ περιφέρειαι, ποὺ ἔχουν τὰ κέντρα των ἐπὶ τῆς ἰδίας γραμμῆς καμπυλότητος (K), παράγουν μίαν περιβάλλουσαν σφαιρικῶν ἐπιφανειῶν· καὶ αἱ κάθετοι πρὸς τὴν περιβάλλουσαν αὐτὴν εἰς ὅλα τὰ σημεῖα μιᾶς ἀπὸ τὰς περιφερείας συνέρχονται εἰς τὸ ἀντίστοιχον κέντρον καμπυλότητος.

γ') Ἂς λάβωμεν μίαν ἀπὸ τὰς περιφερείας αὐτάς, τὴν (Π), μὲ κέντρον τὸ M. Αὐτὴ ἀνήκει καὶ εἰς τὴν περιβάλλουσαν τῶν σφαιρικῶν ἐπιφανειῶν, ποὺ δίδει ἡ μία γραμμὴ καμπυλότητος, ποὺ περνᾷ ἀπὸ τὸ M, καὶ εἰς τὴν ἄλλην περιβάλλουσαν, ποὺ δίδει ἡ ἄλλη γραμμὴ καμπυλότητος ἀπὸ τὸ M. Αἱ κάθετοι πρὸς τὰς περιβαλλούσας αὐτὰς εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον (M_1) τῆς (Π) εἶναι αἱ M_1K_1, M_1K_2, ποὺ ἑνώνουν τὸ M_1 μὲ τὰ πρωτεύοντα κέντρα K_1, K_2.

δ') Ἂν τώρα ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια ἔχει σταθερὰν ὁλ. καμπυλότητα : $-\frac{1}{\alpha^2}$, τὸ M θὰ κεῖται μεταξὺ τῶν K_1, K_2 καὶ θὰ ἔχωμεν : $(MM_1)^2 = (MK_2).(MK_1)$. Ὥστε : ***Αἱ εὐθεῖαι M_1K_2, M_1K_1 θὰ εἶναι κάθετοι μεταξύ των***, δηλ. ***Αἱ δύο περιβάλλουσαι τῶν σφαιρικῶν ἐπιφανειῶν, ποὺ περιέχουν τὴν περιφέρειαν (Π), κόπτονται ὀρθογωνίως καὶ ἡ (Π) εἶναι κοινή των γραμμὴ καμπυλότητος. Κατὰ γνωστὸν ἑπομένως θεώρημα*** (1), ***ἐπειδὴ αἱ δύο αὐταὶ σειραὶ τῶν περιβαλλουσῶν ἐπιφανειῶν κόπτονται***

(1) Αὐτὸ εἶναι ἄμεσον πόρισμα τῆς γεωμετρ. ἑρμηνείας τῆς συνθήκης τοῦ *Beltrami* (*Σμήνη κ. Συμπλ.* ἐδ. 19).

ὀρθογωνίως καὶ κατὰ κοινὴν γραμμὴν καμπυλότητος, ὑπάρχει μία τρίτη σειρὰ ἐπιφανειῶν, ποὺ ἀποτελεῖ μὲ αὐτὰς ἓν τρισορθογώνιον σύστημα. Ὑπάρχει δηλ. ἓν γένος ἐπιφανειῶν (E_1), ποὺ κόπτει ὀρθογωνίως τὰ δύο πρῶτα καὶ ἑπομένως καὶ τὰς περιφερείας (Π).

ε΄) Μένει ἀκόμη νὰ δείξωμεν, ὅτι ***καὶ αἱ ἐπιφάνειαι (E_1) ἔχουν τὴν ὁλ. καμπυλότητά των σταθερὰν καὶ ἴσην μὲ*** $-\frac{1}{\alpha^2}$. Ἂν M_1 εἶναι ἡ τομὴ μιᾶς ἀπὸ αὐτὰς καὶ τῆς περιφερείας (Π), ἡ εὐθεῖα MM_1 θὰ εἶναι κάθετος μιᾶς ἐπιφανείας W, ποὺ θὰ ἔχῃ: $P_2 - P_1 = \alpha$. Ἑπομένως, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδ. 100, πόρ. β΄, αἱ δύο χῶναι (E) καὶ (E_1) τῆς ἐνειλιγμένης τῆς W αὐτῆς θὰ ἔχουν ὁλ. καμπυλότητα σταθερὰν καὶ ἴσην μὲ $-\frac{1}{\alpha^2}$. — ***Τὸ θεώρημα λοιπὸν τοῦ*** *Ribaucour* ***ἀπεδείχθη ἐντελῶς.***

137. Μὲ τὸ θεώρημα αὐτὸ τοῦ *Ribaucour* ἐπανευρίσκομεν ἀμέσως τὸν μετασχηματισμὸν τοῦ *Bianchi*. Πραγματικῶς, ***αἱ ἐπιφάνειαι (E_1) τοῦ θεωρήματος αὐτοῦ δὲν εἶναι ἄλλαι παρὰ αἱ ἐπιφάνειαι (X_2) τοῦ μετασχηματισμοῦ τοῦ*** *Bianchi*· διότι εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ περιφέρεια (Π) μὲ κέντρον τὸ M καὶ ἀκτῖνα τὴν $MM_1 = \alpha$ ἐπὶ τοῦ ἐφαπτ. ἐπιπέδου τῆς (E), θὰ εἶναι κάθετος εἰς τὸ M_1 πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν (X_2). — [Πλὴν τούτου : ***Ὅλαι αἱ ἐπιφάνειαι (E_1) αἱ κάθετοι πρὸς τὰς περιφερείας (Π) ἀποτελοῦν τὴν μίαν σειρὰν ἑνὸς τρισορθογωνίου συστήματος ἐπιφανειῶν.*** (Τὴν ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως αὐτῆς τοῦ Ribaucour τὴν παραλείπομεν)].

δ΄) Μετασχηματισμὸς τοῦ *Bäcklund*.(¹)

138. ***Γενίκευσις τοῦ μετασχηματισμοῦ τοῦ*** *Bianchi*. — Ἂς γράψωμεν ἐπὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς τὸ τυχ. σημεῖον M μιᾶς ἐπιφανείας (E) μὲ σταθερὰν ὁλ. καμπυλότητα μίαν περιφέρειαν (Π) μὲ κέντρον τὸ M καὶ μὲ σταθ. ἀκτῖνα μ. Αἱ σχετικαὶ συντεταγμ. τοῦ τυχ. σημείου M_1 τῆς (Π) θὰ εἶναι : $\mu\sigma\upsilon\nu\vartheta$, $\mu\eta\mu\vartheta$, 0· καὶ αἱ προβολαὶ

(¹) *A.V. Bäcklund, Om ytor med konstant negativ krökning (Lunds Universitets Aarsskrift, 1883)* (εἰς σουηδικὴν γλῶσσαν = ***Περὶ τῶν ἐπιφανειῶν μὲ σταθερὰν ἀρνητικὴν καμπυλότητα, Ἐπετηρὶς τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Λοὺνδ, 1883).***

τῆς μετατοπίσεώς του ἐπὶ τῶν ἀξόνων τοῦ τριέδρου (T) τοῦ σημ. M θὰ εἶναι :

$$(252)\quad \begin{cases} \sigma\upsilon\nu\omega du_1 - \mu\eta\mu\vartheta\left(d\vartheta + \dfrac{\partial\omega}{\partial u_2}du_1 + \dfrac{\partial\omega}{\partial u_1}du_2\right), \\ \eta\mu\omega\, du_2 + \mu\,\sigma\upsilon\nu\vartheta\left(d\vartheta + \dfrac{\partial\omega}{\partial u_2}du_1 + \dfrac{\partial\omega}{\partial u_1}du_2\right), \\ \mu(\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\omega du_2 - \eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\vartheta du_1). \end{cases}$$

Εἰς τὸν μετασχηματισμὸν τοῦ *Bianchi* τὸ M_1 θέλομεν νὰ γράφῃ μίαν ἐπιφάνειαν (E_1) ***ἐφαπτομένην τῆς*** MM_1 καὶ συγχρόνως τὰ δύο ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα εἰς τὰ M, M_1 τῶν (E), (E_1) ***νὰ εἶναι κάθετα τὸ ἓν πρὸς τὸ ἄλλο.*** Ἂς ἐξετάσωμεν τώρα τὴν ***γενικωτέραν*** περίπτωσιν, ποὺ ἡ γωνία τῶν δύο αὐτῶν ἐπιπέδων ***εἶναι μὲν σταθερά, ἀλλὰ τυχοῦσα.*** Ἂν τότε προβάλωμεν τὴν μετατόπισιν τοῦ M_1 ἐπὶ τῆς MM_1 καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου MM_2 πρὸς τὴν MM_1 τῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπ. xy, θὰ ἔχωμεν διὰ τὰς τρεῖς προβολάς της ἐπὶ τῆς MM_1, τῆς MM_2 καὶ τοῦ ἄξ. Mz :

$$(253)\quad \begin{cases} \sigma\upsilon\nu\vartheta\sigma\upsilon\nu\omega du_1 + \eta\mu\vartheta\eta\mu\omega du_2, \\ -\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\omega du_1 + \eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\vartheta du_2 + \mu\left(d\vartheta + \dfrac{\partial\omega}{\partial u_1}du_2 + \dfrac{\partial\omega}{\partial u_2}du_1\right), \\ \mu(\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\omega du_2 - \eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\vartheta du_1). \end{cases}$$

Ἂν τώρα θέλωμεν ἡ ἐπιφάνεια (E_1) νὰ ἐφάπτεται τῆς MM_1, θὰ ἔχωμεν προφανῶς τὰς δύο ***συνθήκας*** :

$$(254)\quad \begin{cases} -\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\omega du_1 + \eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\vartheta du_2 + \mu\left(d\vartheta + \dfrac{\partial\omega}{\partial u_1}du_2 + \dfrac{\partial\omega}{\partial u_2}du_1\right) = 0, \\ \mu(\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\omega du_2 - \eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\vartheta du_1) = 0, \end{cases}$$

ποὺ ἀνάγονται εἰς τὴν ἑξῆς (ἂν ἀπαλείψωμεν τὸν λόγον $\dfrac{du_2}{du_1}$) :

$$(255)\quad \begin{cases} \left[\mu\left(\dfrac{\partial\vartheta}{\partial u_1} + \dfrac{\partial\omega}{\partial u_2}\right) - \eta\mu\vartheta\,\sigma\upsilon\nu\omega\right]\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\omega + \\ \qquad + \left[\mu\left(\dfrac{\partial\vartheta}{\partial u_2} + \dfrac{\partial\omega}{\partial u_1}\right) + \eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\vartheta\right]\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\vartheta = 0\cdot \end{cases}$$

αὐτὴ δὲ πάλιν ἀνάγεται εἰς τὰς δύο :

$$(256)\quad \begin{cases} \mu\left(\dfrac{\partial\vartheta}{\partial u_1}+\dfrac{\partial\omega}{\partial u_2}\right)=\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\omega-\lambda\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\vartheta, \\ \mu\left(\dfrac{\partial\vartheta}{\partial u_2}+\dfrac{\partial\omega}{\partial u_1}\right)=-\eta\mu\omega\sigma\nu\nu\vartheta+\lambda\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\omega, \end{cases}$$

ὅπου τὸ λ μία ***βοηθητικὴ*** μεταβλητή. Αἱ προβολαὶ τότε (253) τοῦ M_1 γίνονται :

$$(257)\quad \eta\mu\omega\eta\mu\vartheta du_2+\sigma\upsilon\nu\omega\sigma\upsilon\nu\vartheta du_1,\quad \lambda(\sigma\upsilon\nu\omega\eta\mu\vartheta du_2-\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\vartheta du_1),$$
$$\mu(\sigma\upsilon\nu\omega\eta\mu\vartheta du_2-\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\vartheta du_1)\cdot$$

εἶναι δέ : $\frac{\lambda}{\mu}=\sigma\varphi\chi$, ὅπου χ ἡ γωνία τοῦ ἐπιπ. xy μὲ τὸ ἐφαπτόμ. εἰς τὸ M_1 τῆς (E_1)· καὶ ἐπειδὴ θέλομεν νὰ εἶναι τὸ χ σταθερόν, θὰ εἶναι καὶ τὸ λ σταθερόν. Εἰσάγοντες ὅμως εἰς τὸ σύστ. (256) τὰς παραμέτρους U_1, U_2 (ἀντὶ τῶν u_1, u_2) θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα :

$$(258)\quad \frac{\partial\vartheta}{\partial U_1}+\frac{\partial\omega}{\partial U_1}=\frac{1+\lambda}{\mu}\eta\mu(\vartheta-\omega),\qquad \frac{\partial\vartheta}{\partial U_2}-\frac{\partial\omega}{\partial U_2}=\frac{1-\lambda}{\mu}\eta\mu(\vartheta+\omega).$$

Εἶναι δὲ εὔκολον νὰ δειχθῇ,(1) ὅτι τὰ λ καὶ μ συνδέονται μὲ τὴν

---

(1) Τὸ σύστημα αὐτὸ εἶναι τῆς μορφῆς : $\frac{\partial\vartheta}{\partial U_1}+\frac{\partial\omega}{\partial U_1}=a\eta\mu(\vartheta-\omega)$, $\frac{\partial\vartheta}{\partial U_2}-\frac{\partial\omega}{\partial U_2}=b\eta\mu(\vartheta+\omega)$ ἀπὸ αὐτὸ εὑρίσκομεν: $\frac{\partial^2(\vartheta+\omega)}{\partial U_1\partial U_2}=ab\sigma\upsilon\nu(\vartheta-\omega)\eta\mu(\vartheta+\omega)$, $\frac{\partial^2(\vartheta-\omega)}{\partial U_1\partial U_2}=ab\sigma\upsilon\nu(\vartheta+\omega)\eta\mu(\vartheta-\omega)$· ἑπομένως :

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial U_1\partial U_2}=ab\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta,\qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial U_1\partial U_2}=ab\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega\cdot$$

εἶναι λοιπὸν τὰ ϑ καὶ ω μερικαὶ λύσεις τῆς ἐξισώσεως: $\frac{\partial^2\Omega}{\partial U_1\partial U_2}=ab\eta\mu\Omega\sigma\upsilon\nu\Omega$· ἡ δὲ ἐξίσωσις αὐτὴ συμπίπτει μὲ τήν : $\frac{\partial^2\omega}{\partial u_1^2}-\frac{\partial^2\omega}{\partial u_2^2}=\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega$ (σελ. 104), ἂν ὑποθέσωμεν : $ab=1$. Ἡ σχέσις τώρα αὐτὴ διὰ τὴν εἰς τὸ κείμενον ἐξίσωσιν, ἐπειδὴ δι' αὐτήν : $a=\frac{1+\lambda}{\mu}$, $b=\frac{1-\lambda}{\mu}$, καταντᾷ : $\lambda^2+\mu^2=1$. Τὸ σύστημα μὲ τὰ a, b φαίνεται γενικώτερον ἀπὸ τὸ χωρὶς αὐτά· ἀνάγεται ὅμως εἰς τὸ τελευταῖον, ἂν θέσωμεν : $aU_1=U_1'$, $bU_2=U_2'$, δηλ. *ἂν κάμωμεν τὸν μετασχηματισμὸν τοῦ Lie* (ἕνεκα τῆς σχέσεως : $ab=1$).

σχέσιν : $\lambda^2+\mu^2=1$, πού ορίζει τὸ λ μὲ τὸ μ. Ἡ σχέσις αὐτὴ δίδει τὸ γραμ. στοιχεῖον τῆς (E_1) ὑπὸ τὴν μορφήν : $ds_1^2=\sigma\upsilon\nu^2\vartheta du_1^2+\eta\mu^2\vartheta du_2^2$. Καὶ ἐπειδὴ ὁ τύπος αὐτὸς εἶναι τῆς ἰδίας μορφῆς μὲ τὸν τύπον τῆς περιπτώσεως τῆς καθετότητος τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων τῶν (E) καὶ (E_1), φερόμεθα εἰς τὴν σκέψιν, ὅτι καὶ τώρα αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος θ' ἀντιστοιχοῦν ἐπὶ τῶν (E) καὶ (E_1). Αὐτὸ ἀποδεικνύεται γεωμετρικῶς ὡς ἑξῆς.

139. ***Γεωμετρικὴ ἀπόδειξις τῆς προηγ. προτάσεως.***—Ἂς θεωρήσωμεν τὸ τρίεδρον $(T')(Mz, MM_1, MM_2)$ καὶ τὸ ἀντίστοιχον $(T_1')(M_1z_1, M_1M, M_1M_3)$, ὅπου M_1z_1 ἡ κάθετος τῆς (E_1) εἰς τὸ M_1 καὶ M_1M_3 ἡ ***κοινὴ κάθετος*** τῶν M_1z_1, M_1M. Τὰ δύο αὐτὰ τρίεδρα εἶναι προφανῶς στερεῶς συνδεδεμένα μεταξύ των· ***ἔχουν λοιπὸν κοινὰς τὰς ἀπειροστὰς κινήσεις, ποὺ καταντοῦν ἁπλαῖ περιστροφαί.*** Τὸ α' ὅμως ἔχει τὸ ἐπίπ. του xy ἐφαπτόμενον τῆς (E) εἰς τὸ M· ἡ ἀπειροστή του λοιπὸν μετατόπισις θὰ εἶναι ἁπλῆ περιστροφή, μόνον ὅταν ἡ κορυφή του γράψῃ μίαν γραμμὴν καμπυλότητος τῆς (E)· ἑπομ. τότε καὶ τοῦ β' ἡ μετατόπισις θὰ εἶναι ἁπλῆ περιστροφὴ καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ κορυφή του M_1 θὰ γράψῃ καὶ αὐτὴ μίαν γραμμὴν καμπυλότητος τῆς (E_1). Καὶ ἀντιστρόφως. Ὥστε πραγματικῶς ***αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος ἀντιστοιχοῦν ἐπὶ τῶν (E), (E₁)*** (Ἀπόδειξιν τοῦ ἰδίου μὲ τοὺς τύπους βλέπε εἰς τὰς ***Ἀσκήσεις).***

140. ***Σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν ἐπιφανειῶν (E) καὶ (E₁)***—Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα, ὅτι τὸ M γράφει μίαν γραμμὴν καμπυλότητος τῆς (E)· ὁ ἀντίστοιχος στιγμ. ἄξων περιστροφῆς τοῦ (T') περνᾷ ἀπὸ τὸ ἀντίστ. κέντρον καμπυλότητος K καὶ κεῖται ἐπὶ τοῦ πρωτ. ἐπιπέδου τοῦ καθέτου πρὸς τὴν γραμμὴν αὐτὴν καμπυλότητος, δηλ. τοῦ ἐφαπτομένου εἰς τὸ K τῆς χώνης (K) τῆς ἐνειλιγμένης τῆς (E). Ἑπομένως, ἀφοῦ τὸ (T_1') κινεῖται, ὅπως καὶ τὸ (T_1), ὁ στιγμ. ἄξων περιστροφῆς θὰ περάσῃ καὶ ἀπὸ τὸ κέντρον καμπυλότητος (K_1) τῆς (E_1), τὸ ἀντίστοιχον πρὸς τὴν γραμμὴν καμπυλότητος, ποὺ γράφει τὸ M_1, καὶ θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἐφαπτομένου εἰς τὸ K_1 τῆς χώνης (K_1) τῆς ἐνειλιγμένης (E_1). Ἔχομεν λοιπὸν τὰς ἑξῆς γεωμετρικὰς σχέσεις τῶν δύο ἐπιφανειῶν (E) καὶ (E_1):

Ἂν K καὶ K' εἶναι τὰ πρωτεύοντα κέντρα καμπυλότητος τῆς (E) εἰς τὸ M, K_1 καὶ K_1' τ' ἀντίστοιχα κέντρα τῆς (E_1) εἰς τὸ M_1, τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα εἰς τὰ K, K', K_1, K_1' τῶν 4 χωνῶν

τῶν ἐνειλιγμένων, ποὺ γράφουν τὰ σημεῖα αὐτά, εἶναι ἀντιστοίχως τὰ ἐπίπεδα : $KK'K_1$, $KK'K_1'$, $KK_1'K_1$, $K'K_1K_1'$. Δηλ.

Τὰ πρωτεύοντα ἐπίπεδα καθεμιᾶς ἀπὸ τὰς δύο ἐπιφανείας περνοῦν ἀπὸ τὰ πρωτεύοντα κέντρα καμπυλότητος τῆς ἄλλης. Τὸ τετράπλευρον $KK'K_1'K_1$ ἔχει τὴν ἰδιότητα κάθε πλευρά του νὰ ἐφάπτεται τῶν ἐπιφανειῶν, ποὺ γράφουν τὰ δύο ἄκρα της.

Τὰς ἰδίας σχέσεις εἰμποροῦμεν νὰ τὰς ἐκφράσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς : ***Τὰ σμήνη, ποὺ παράγουν αἱ εὐθεῖαι KK_1 ἢ $K'K_1'$, ἔχουν ἑστιακὰς ἐπιφανείας τὰς κώνας (K), (K_1) τὸ πρῶτον σμῆνος καὶ τὰς κώνας (K'), (K_1') τὸ δεύτερον.***

141. ***Ὁ μετασχηματισμὸς τοῦ** Bäcklund **εἶναι συνδυασμὸς τῶν τοῦ** Lie **καὶ τοῦ** Bianchi.*—Πραγματικῶς, ἡ μὲν α' συνθήκη (τὸ νὰ εἶναι ἡ MM_1 ***κοινὴ ἐφαπτομένη*** τῶν δύο ἐπιφανειῶν) ὑπάρχει καὶ εἰς τὸν μετασχηματισμὸν τοῦ Bianchi, ἡ δὲ β', ἡ ***γενικευμένη*** τώρα, εἶναι νὰ σχηματίζουν τὰ δύο ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα ***σταθεράν,*** ἀλλὰ ***τυχοῦσαν*** γωνίαν. Εἶναι ὅμως προφανές, ὅτι, ἂν ἐφαρμόσωμεν εἰς τὴν (E) πρῶτα τὸν μετασχηματισμὸν τοῦ Bianchi, ὅπου ἡ γωνία τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων εἶναι ***ὀρθή,*** κατόπιν δὲ τὸν τοῦ Lie (σελ. 116, ὑποσημ.), ἐπανευρίσκομεν τὸν μετασχηματισμὸν τοῦ Bäcklund.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΣΘΗΚΑΙ

---

1) ***Ἀπόδειξις μὲ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ θεωρήμ. τοῦ ἐδ.*** 138.— Τὰ συνημίτ. l,m,n, πρὸς τοὺς ἄξονας τοῦ τριέδρου (T), τῆς καθέτου τῆς (E_1) εὑρίσκονται ὡς ἑξῆς. Αἱ προβ. τῆς μετατοπίσεως τοῦ M_1 ἐπὶ τῶν ἀξ. τοῦ (T) εἶναι :

$$(259)\left\{\begin{array}{l}\text{συν}\vartheta(\text{συν}\omega\,\text{συν}\vartheta+\lambda\,\text{ημ}\omega\,\text{ημ}\vartheta)du_1+\text{ημ}\vartheta(\text{ημ}\omega\,\text{συν}\vartheta-\lambda\,\text{συν}\omega\,\text{ημ}\vartheta)du_2,\\ \text{συν}\vartheta(\text{συν}\omega\,\text{ημ}\vartheta-\lambda\,\text{ημ}\omega\,\text{συν}\vartheta)du_1+\text{ημ}\vartheta(\text{ημ}\omega\,\text{ημ}\vartheta+\lambda\,\text{συν}\omega\,\text{συν}\vartheta)du_2,\\ -\mu\,\text{ημ}\omega\,\text{συν}\vartheta\,du_1+\mu\,\text{συν}\omega\,\text{ημ}\vartheta\,du_2\cdot\quad\text{ἑπομένως εἶναι :}\end{array}\right.$$

$$l(\text{συν}\omega\,\text{συν}\vartheta+\lambda\,\text{ημ}\omega\,\text{ημ}\vartheta)+m(\text{συν}\omega\,\text{ημ}\vartheta-\lambda\,\text{ημ}\omega\,\text{συν}\vartheta)-n\mu\,\text{ημ}\omega=0,$$

$$l(\text{ημ}\omega\,\text{συν}\vartheta-\lambda\,\text{συν}\omega\,\text{ημ}\vartheta)+m(\text{ημ}\omega\,\text{ημ}\vartheta+\lambda\,\text{συν}\omega\,\text{συν}\vartheta)+n\mu\,\text{συν}\omega=0\cdot$$

δηλ. $$l\,\text{συν}\vartheta+m\,\text{ημ}\vartheta=0,\quad l\lambda\,\text{ημ}\vartheta-m\lambda\,\text{συν}\vartheta-n\mu=0\cdot\quad(260)$$

ὥστε : $$l=\mu\,\text{ημ}\vartheta,\quad m=-\mu\,\text{συν}\vartheta,\quad n=\lambda.\quad(261)$$

Αἱ συντεταγμ. λοιπὸν ἑνὸς σημ. Π ἐπὶ τῆς καθέτου τῆς (E_1) θὰ εἶναι $(M_1\Pi \equiv \rho)$: $x=\mu(\sigma\upsilon\nu\vartheta+\rho\eta\mu\vartheta)$, $y=\mu(\eta\mu\vartheta-\rho\sigma\upsilon\nu\vartheta)$, $z=\lambda\rho$· ἂν τώρα ρ σταθ., τὸ Π θὰ γράψῃ μίαν ἐπιφ. (E_1') παράλληλον πρὸς τὴν (E_1), τῆς ὁποίας τὸ γραμ. στοιχεῖον θὰ εἶναι :

$$ds^2=(\eta\mu\vartheta-\rho\sigma\upsilon\nu\vartheta)^2du_1^2+(\sigma\upsilon\nu\vartheta+\rho\eta\mu\vartheta)^2du_2^2 \cdot \quad (262)$$

διότι αἱ προβ. τῆς μετατοπίσεως τοῦ Π εἶναι :

$$\left.\begin{array}{l}(\sigma\upsilon\nu\omega\sigma\upsilon\nu\vartheta+\lambda\eta\mu\omega\eta\mu\vartheta)(\sigma\upsilon\nu\vartheta+\rho\eta\mu\vartheta)du_1+\\ \qquad+(\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\vartheta-\lambda\sigma\upsilon\nu\omega\eta\mu\vartheta)(\eta\mu\vartheta-\rho\sigma\upsilon\nu\vartheta)du_2,\\ (\sigma\upsilon\nu\omega\eta\mu\vartheta-\lambda\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\vartheta)(\sigma\upsilon\nu\vartheta+\rho\eta\mu\vartheta)du_1+\\ \qquad+(\eta\mu\omega\eta\mu\vartheta+\lambda\sigma\upsilon\nu\omega\sigma\upsilon\nu\vartheta)(\eta\mu\vartheta-\rho\sigma\upsilon\nu\vartheta)du_2,\\ \quad-\mu(\sigma\upsilon\nu\vartheta+\rho\eta\mu\vartheta)\eta\mu\omega du_1+\mu(\eta\mu\vartheta-\rho\sigma\upsilon\nu\vartheta)\sigma\upsilon\nu\omega du.\end{array}\right\}(263)$$

Εἶναι λοιπὸν τὰ u_1, u_2 αἱ παράμετροι τῶν γραμμῶν καμπυλότητος τῆς (E_1) καὶ ὅλων τῶν (E'_1), διότι αἱ $u_1=c_1$, $u_2=c_2$ ἀποτελοῦν ***ὀρθογ.*** δίκτυον καὶ ἐπὶ τῆς (E_1) καὶ ἐπὶ τῶν (E_1')· ἀλλὰ τὸ ***μόνον*** ὀρθογώνιον δίκτυον, ποὺ μένει ***ὀρθογώνιον*** καὶ εἰς τὰς ***παραλλήλους*** ἐπιφανείας, εἶναι τὸ ***τῶν γραμμῶν καμπυλότητος***. (Ἡ ἀπόδειξις εὔκολος).

2) ***Τὸ γενικὸν πρόβλημα τοῦ*** *Bäcklund*[1].—Μᾶς δίδονται δύο τυχ. ἐπιφάνειαι (ε) καὶ (Ε). ***Εἶναι δυνατὸν νὰ δοθῇ ἀντιστοίχησίς των σημείου πρὸς σημεῖον : τοῦ $\mu(x,y,z)$ πρὸς τὸ $M(X,Y,Z)$ τοιαύτη, ὥστε τέσσαρες ἀπὸ πρὶν δοθεῖσαι σχέσεις :***

$$(264) \quad F_k\,(x,y,z,p,q,X,Y,Z,P,Q)=0 \quad (k=1,2,3,4),\ \text{ὅπου :}$$

$$p\equiv\frac{\partial z}{\partial x},\quad q\equiv\frac{\partial z}{\partial y},\quad P\equiv\frac{\partial Z}{\partial X},\quad Q\equiv\frac{\partial Z}{\partial Y},$$

νὰ ἐπαληθεύωνται ἀπὸ ταυτότητα ;

α΄) Εἶναι εὔκολον νὰ δείξωμεν, ὅτι : ***Ἂν ἡ μία ἐπιφάνεια ἔχῃ δοθῆ, τὸ πρόβλημα εἶναι (ἐν γένει) ἀδύνατον***. Πραγματικῶς, ἂν Z= δοθ. συνάρτ. τῶν X,Y, ἡ ἀπαλοιφὴ τῶν X,Y μεταξὺ τῶν 4 προηγ. ἐξισ. θά μας δώσῃ (ἐν γένει) ***2*** ἐξισ. εἰς μερικὰς παραγώγους διὰ τὸ z, ποὺ δὲν θὰ ἔχουν κατ᾽ ἀνάγκην ***κοινὸν*** ὁλοκλήρωμα.

β΄) Τὸ σύστημα τῶν ἐξισ. $F_k=0$ περιέχει λοιπὸν 4 ***ἀγνώστους*** συναρτήσεις τῶν x,y τάς : z,X,Y,Z· μάλιστα καὶ αἱ παράγ. P,Q

(1) *Mathematische Annalen*, 1880 καὶ 1882.

εἰμποροῦν νὰ ἐκφρασθοῦν μὲ τὰς $\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial y}, \frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial y}$.
Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ σύστημα τῶν 4 ἐξισ. $F_k = 0$ περιέχει 4 ἀγνώστους (τὰς z,X,Y,Z) εἶναι ***ἐν γένει ὡρισμένον***· ἑπομ. τὸ z, ὡς συνάρτησις τῶν x,y, θὰ ἐπαληθεύῃ μίαν ἢ πολλὰς ἐξισ. εἰς μερικὰς παραγώγους.

γ′) Ἂς εὕρωμεν τὰς ἐξισώσεις αὐτάς. Διαφορίζοντες τὰς ἐξισώσεις $F_k = 0$ καὶ θέτοντες εἰς ἀγκύλας τὰς ***ὁλικὰς*** μερικὰς παραγώγους τῶν F_k πρὸς x,y :

$$\left[\frac{\partial F_k}{\partial x}\right] \equiv \frac{\partial F_k}{\partial x} + \frac{\partial F_k}{\partial z} p + \frac{\partial F_k}{\partial p} r + \frac{\partial F_k}{\partial q} s, \quad \left(r \equiv \frac{\partial p}{\partial x}, s \equiv \frac{\partial q}{\partial x} \equiv \frac{\partial p}{\partial y},\right.$$

$$\left[\frac{\partial F_k}{\partial y}\right] \equiv \frac{\partial F_k}{\partial y} + \frac{\partial F_k}{\partial z} q + \frac{\partial F_k}{\partial p} s + \frac{\partial F_k}{\partial q} t \quad \left. t \equiv \frac{\partial q}{\partial y}\right),$$

θὰ εὕρωμεν σχέσεις τῆς μορφῆς :

$$\left[\frac{\partial F_k}{\partial x}\right] dx + \left[\frac{\partial F_k}{\partial y}\right] dy + \left[\frac{\partial F_k}{\partial X} + \frac{\partial F_k}{\partial Z} P\right] dX +$$

$$(265) \qquad + \left[\frac{\partial F_k}{\partial Y} + \frac{\partial F_k}{\partial Z} Q\right] dY + \frac{\partial F_k}{\partial P} dP + \frac{\partial F_k}{\partial Q} dQ = 0\cdot$$

ποὺ μᾶς δίδουν τὰ dx, dy, dP, dQ ὡς γραμ. συναρτήσεις τῶν dX,dY :

$$\begin{aligned} E dP &= A dX + B dY, \\ E dQ &= \Gamma dX + \Delta dY \end{aligned} \qquad \text{(ὅπου : } A, B, \Gamma, \Delta, E \text{ γραμ. συναρτήσεις τῶν : } r, s, t,\ rt - s^2)\cdot$$

Ἐπειδὴ ὅμως πρέπει τὰ P, Q νὰ εἶναι παράγωγοι ***τῆς ἰδίας*** συναρτήσεως, ***θὰ ἔχωμεν : B=Γ,*** ἤ, μετὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν B, Γ :

$$(266) \qquad \begin{aligned} &\left\| \left[\frac{\partial F_k}{\partial x}\right] \left[\frac{\partial F_k}{\partial y}\right] \frac{\partial F_k}{\partial Q} \quad \frac{\partial F_k}{\partial Y} + \frac{\partial F_k}{\partial Z} Q \right\| + \\ &+ \left\| \left[\frac{\partial F_k}{\partial x}\right] \left[\frac{\partial F_k}{\partial y}\right] \frac{\partial F_k}{\partial P} \quad \frac{\partial F_k}{\partial X} + \frac{\partial F_k}{\partial Z} P \right\| = 0, \end{aligned}$$

ὅπου αἱ διπλαῖ ἀγκύλαι παριστάνουν τὰς ὁριζούσας τοῦ 4^{ου} βαθμοῦ, ποὺ παράγονται, ἂν γράψωμεν 4 γραμμὰς ὁριζοντίας μὲ τὰς τιμὰς 1,2,3,4 τοῦ k.

Τῆς σχέσεως αὐτῆς τὸ ἀνάπτυγμα ἔδωσεν ὁ *Bäcklund* ὑπὸ τὴν ***συντομογραφημένην*** μορφήν :

$$(266') \quad (1,2)[F_3,F_4]+(1,3)[F_4,F_2]+(1,4)[F_2,F_3]+(3,4)[F_1,F_2]+$$
$$+(4,2)[F_1,F_3]+(2,3)[F_1,F_4]=0,$$

ὅπου γενικῶς :

$$(k,l)\equiv\frac{d(F_k,F_l)}{d(x,y)},\quad \left[F_k,F_l\right]\equiv\frac{\partial(F_k,F_l)}{\partial(X,P)}+P\frac{\partial(F_k,F_l)}{\partial(Z,P)}+$$
$$+\frac{\partial(F_k,F_l)}{\partial(Y,Q)}+Q\frac{\partial(F_k,F_l)}{\partial(Z,Q)}.$$

δ') ***Δύο περιπτώσεις εἶναι τώρα δυναταί*** : 1η) Ἂν ἡ προηγ. ἐξίσ. τοῦ *Bäcklund* μαζὶ μὲ τὰς $F_k=0$ ***ὁρίζῃ τὰ*** X,Y,Z,P,Q ***ὡς συναρτήσεις τῶν*** x,y,z,p,q,r,s,t, ἐκφράζοντες, ὅτι αἱ τιμαὶ αὐταὶ ἐπαληθεύουν ***ἀπὸ ταὐτότητα*** τὴν σχέσιν : $dZ=PdX+QdY$, θὰ εὕρωμεν ἐν γένει διὰ τὸ z ***δύο ἐξισ. εἰς μερικὰς παραγώγους τῆς γ' τάξεως***. Κάθε ὁλοκλήρωμα αὐτῶν θά μας δώσῃ μίαν ἐπιφάνειαν (E) ***μὲ ἀντίστοιχον μίαν μόνον ἄλλην (E')***.—2α) Ἂν ἡ ἀπαλοιφή, μεταξὺ τῶν ἐξισ. $F_k=0$ καὶ τῆς τοῦ *Bäcklund*, τῶν X,Y,P,Q μᾶς δώσῃ σχέσιν ***χωρὶς τὸ Z***, θὰ ἔχωμεν διὰ τὸ z ***μίαν ἐξίσ. τῆς β' τάξεως μόνον***, γραμμικὴν πρὸς τὰ r,s,t, $rt-s^2$. Τότε εἰς ἓν ὁλοκλήρωμα αὐτῆς, δηλ. εἰς μίαν ἐπιφάνειαν (E), θ' ἀντιστοιχῇ ***ἓν ὁλόκληρον γένος ἐπιφανειῶν (E')***. Πραγματικῶς, ἂν θέσωμεν τὰς τιμὰς τῶν P,Q,X,Y εἰς τήν : $dZ=PdX+QdY$, θὰ εὕρωμεν μίαν ἐξίσωσιν ***εἰς ὁλικὰ διάφορικά*** : $dZ=\Pi(x,y,Z)dx+\Sigma(x,y,Z)dy$, ***ποὺ θὰ εἶναι ὁλοκληρώσιμος*** καὶ θὰ μᾶς δώσῃ τὸ Z ***μὲ μίαν αὐθαίρετον σταθεράν***.

3) ***Μερικὴ περίπτωσις τοῦ προβλ. τοῦ*** *Bäcklund*.— Ὡς μερ. περίπτωσιν τοῦ προηγ. συστήματός του ἐθεώρησεν ὁ *Bäcklund* τὴν ἑξῆς μορφὴν τῶν ἐξισώσεων $F_k=0$:

$$(267)\begin{cases} F_1 \equiv \Sigma(x-X)^2 - a^2 = 0, \quad F_2 \equiv z - Z - p(x-X) - q(y-Y) = 0, \\ F_3 \equiv z - Z - P(x-X) - Q(y-Y) = 0, \\ F_4 \equiv 1 + pP + qQ - b\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot\sqrt{1+P^2+Q^2} = 0. \end{cases}$$

Ἡ γεωμετρ. σχέσις τῶν δύο ἐπιφανειῶν εἶναι τότε ἡ ἑξῆς: ***Τὰ σημ. M,M′ ἀπέχουν σταθ. ἀπόστασιν*** a ***καὶ τὰ ἐφαπτόμ. ἐπίπεδα εἰς τὰ M,M′ περνοῦν ἀπὸ τὴν MM′ καὶ σχηματίζουν σταθερὰν γωνίαν***. Ἐχ. δηλ. τὴν περίπτωσιν τοῦ ἐδ. 138.—Ἡ ἐξίσωσις τώρα ἡ ἀντίστοιχος τῆς γενικῆς (266′), ὑπολογιζομένη, ***μᾶς δίδει τὴν ὁλ. καμπυλότητα τῆς (E′) σταθεράν***· ἐπειδὴ δὲ αἱ σχέσεις (267) εἶναι ***συμμετρικαὶ*** πρὸς τὰ στοιχεῖα τῶν δύο ἐπιφανειῶν, ***θὰ εἶναι καὶ τῆς (E) ἡ ὁλ. καμπυλότης σταθερά***· ὥστε: ***ἡ μερικὴ αὐτὴ περίπτωσις τοῦ προβλ. τοῦ Bäcklund δὲν εἱμπορεῖ νὰ ὑπάρξῃ παρὰ μόνον μεταξὺ ἐπιφανειῶν ὁλ. σταθερᾶς καμπυλότητος.***

4) ***Γενικωτέρα περίπτωσις τοῦ*** *Darboux*.—Ἂν ἔχωμεν:

$$(268)\begin{cases} F_1 \equiv \Sigma(x-X)^2 - a^2 = 0, \qquad (a, b, b', c \text{ σταθεραί}) \\ F_2 \equiv Z - z - p(X-x) - q(Y-y) - ba\sqrt{1+p^2+q^2} = 0, \\ F_3 \equiv Z - z - P(X-x) - Q(Y-y) - b'a\sqrt{1+P^2+Q^2} = 0, \\ F_4 \equiv 1 + pP + qQ - c\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot\sqrt{1+P^2+Q^2} = 0, \end{cases}$$

ἡ σχέσις τῶν δύο ἐπιφανειῶν εἶναι ***γενικωτέρα*** ἀπὸ τὴν προηγ., ἡ ἑξῆς: ***τὰ δύο ἐφαπτόμ. ἐπίπεδα εἰς τὰ M,M′ καὶ ἡ εὐθεῖα MM′ ἀποτελοῦν στερεὸν σύστημα· αἱ σταθ.*** b,b′ ***εἶναι τὰ ἡμίτονα τῶν γωνιῶν τῶν δύο ἐφαπτομ. ἐπιπέδων μὲ τὴν MM′ καὶ*** c ***τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας τῶν δύο ἐφαπτ. ἐπιπέδων***. (Διὰ $b = b' = 0$ ἐπανευρίσκεται ἡ περίπτωσις τοῦ *Bäcklund*).—Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν εὐκολώτερα τὴν συνθήκην (266′), ἐκλέγομεν τοὺς ἄξονας οὕτως, ὥστε νὰ ἔχωμεν εἰς τὸ σημ. M τῆς (E): $p = q = s = 0$· καὶ τότε θὰ εἶναι εἰς τὸ M: $P_1 = \frac{1}{r}$, $P_2 = \frac{1}{t}$ ***(Θεωρ. Ἐπιφ. N. Χατζ., ἐδ. 30, «συνοδεῦον» τρίεδρον)***. Τότε θὰ εὕρωμεν:

$$a^2(1 - b'^2)rt - (r + t)a(b - b'c) + 1 - c^2 = 0,$$

δηλ. $(1-c^2)P_1P_2-(P_1+P_2)a(b-b'c)+a^2(1-b'^2)=0$ (269),

ἢ καί : $(1-c^2)-a(b-b'c)\left(\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_2}\right)+a^2(1-b'^2)\frac{1}{P_1P_2}=0$, (269′)

σχέσιν δηλ. γραμμικὴν μεταξὺ τῆς μέσης καὶ τῆς ὁλικῆς καμπυλότητος.

Ἐδῶ ἔχομεν τὴν β′ περίπτωσιν τῆς $2^{ας}$ ἀσκ., ὅπου τὸ z ἐπαληθεύει ***μόνον β′ τάξεως ἐξίσωσιν.*** Ἂν τώρα ἡ προηγ. σχέσις εἶναι ταὐτότης, θὰ ἔχ. $c=\pm 1$, $b=\pm b'$, $b'^2=1$, δηλ. ἡ ΜΜ′ θὰ εἶναι ***κοινὴ κάθετος*** τῶν ***παραλλήλων*** ἐπιφανειῶν (Ε), (Ε′)· περίπτ. γνωστή.

Ἂν αὐτὸ δὲν συμβαίνῃ, ἡ (Ε) εἶναι ἐπιφάνεια W, μὲ σχέσιν μεταξὺ P_1, P_2 τὴν προηγουμένην (269). Ἕνεκα δὲ τῆς συμμετρίας καὶ ἡ (Ε′) θὰ εἶναι ἐπιφάνεια W μὲ σχέσιν ὁμοίας μορφῆς :

$$(1-c^2)P_1'P_2'-(P_1'+P_2')a(b'-bc)+a^2(1-b^2)=0, \quad (270)$$

ἢ καί : $(1-c^2)-a(b'-bc)\left(\frac{1}{P_1'}+\frac{1}{P_2'}\right)+a^2(1-b^2)\frac{1}{P_1'P_2'}=0.$ (270′)

Τὰ ἐξαγόμενα ὅμως αὐτὰ δὲν ἔχουν τόσην ***γενικότητα,*** ὅσην θὰ ἐνόμιζε κανείς, διότι ἡ προηγ. σχέσις μεταξὺ τῶν (Ε) καὶ (Ε′) θὰ ἰσχύῃ καὶ μεταξὺ δύο ὁποιωνδήποτε ἐπιφανειῶν ἀντιστοίχως παραλλήλων πρὸς τὰς (Ε), (Ε′), δηλ. καὶ αὐτῶν τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα καὶ ἡ εὐθεῖα τῶν ἀντιστ. σημείων ἐπαφῆς θ᾽ ἀποτελοῦν πάλιν στερεὸν σύστημα. Ἂν λοιπόν : $1^{ον}$) $c^2-1\gtrless 0$, θέτομεν ἀντὶ τῶν (Ε), (Ε′) τὰς παραλλήλους των, διὰ τὰς ὁποίας αἱ προηγ. σχέσεις στεροῦνται τῶν β′ ὅρων (πρᾶγμα πάντοτε δυνατόν, ἐδ. 127, 128)· τότε θὰ ἔχωμεν δι᾽ αὐτάς : $b-b'c=0$, $b'-bc=0$, ὥστε καί : $b=b'=0$, δηλ. τὴν μερικὴν περίπτωσιν τοῦ *Bäcklund.*

Ἂν $2^{ον}$) $c^2=1$, θὰ ἔχ. δύο ἐπιφανείας μὲ σταθερὸν ἄθροισμα τῶν πρωτ. ἀκτίνων. Ἂν θέσωμεν, ἀντ᾽ αὐτῶν, τὰς παραλλήλους των ἐπιφανείας τῆς ἐλαχίστης ἐκτάσεως, θὰ ἔχωμεν : $b=-b'c=\pm 1$· ἡ σχέσις ὅμως αὐτὴ ποτὲ δὲν ὑπάρχει μεταξὺ ***πραγματικῶν*** ἐπιφανειῶν.

Συμπέρασμα τῆς περιπτώσεως τοῦ *Darboux* : ***Ἂν δύο μὴ παράλληλοι ἐπιφάνειαι ἀντιστοιχοῦν σημεῖον πρὸς σημεῖον οὕτως, ὥστε τὰ δύο ἐφαπτόμενα ἐπίπεδά των εἰς τ᾽ ἀντίστοιχα***

σημεῖα καὶ ἡ εὐθεῖα τῶν σημείων ἐπαφῆς ν' ἀποτελοῦν στερεὸν σύστημα, ὑπάρχει διὰ καθεμίαν μία γραμμικὴ σχέσις μεταξὺ τῆς μέσης καὶ τῆς ὁλικῆς καμπυλότητος καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο παράλληλοι ἢ πρὸς ἐπιφανείας ἐλαχίστης ἐκτάσεως ἢ πρὸς ἐπιφανείας μὲ ὁλικὰς καμπυλότητας σταθερὰς καὶ ἴσας.

5) Ν' ἀποδειχθῇ ***ἀπευθείας,*** ὅτι αἱ παράλληλοι μιᾶς ἐπιφανείας μὲ σχέσιν α΄ βαθμοῦ μεταξὺ τῆς μέσης καὶ τῆς ὁλικῆς καμπυλότητος ἐπαληθεύουν ὅλαι σχέσιν ὁμοίας μορφῆς.

ΤΕΛΟΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1) *Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces.*

2) *Cesàro, Lezioni di Geometria Intrinseca.*

3) *Bianchi, Lezioni di Geometria Differenziale.*

4) ***Ν. Χατζιδάκη, Θεωρία Ἐπιφανειῶν.***

4) ***Ν. Χατζιδάκη, Κινητικῆς Γεωμετρίας Τόμος Α΄.***

ΔΙΟΡΘΩΤΕΑ

Σελ. 17 στίχ. 3 ἀπὸ κάτω ἀντὶ q, r γράφε q_1, r_1

» 18 » 1 ἀπὸ ἐπάνω » q r » q_1, r_1

» 21 » 7 ἀπὸ κάτω » u » u_1

» 22 » 6 » » » Pg » P_1g

» 24 » 1 ἀπὸ ἐπάνω » N_1 N_2 » $N_1 -- N_2$

» 30 » 7 » » » $Py-1$ » $Py-1z$

» 30 » 18 » » » $p_2B_2-\ldots$» $du_2\delta u$ γράφε $(p_2B_2-q_2A_2)du_2\delta u_2$

» 30 » 23 Ν' ἀφαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τοῦ ἐδαφίου.

» 30 » 23 Νὰ διαγραφῇ ὁ ἀριθμὸς 27 τοῦ ἐδαφ. τοῦ πορίσματος.

» 30 » 25 Νὰ τεθῇ ἀριθμὸς τοῦ τύπου ὁ (36).

» 30 » 2 ἀπὸ κάτω, νὰ διορθωθῇ τὸ ἐδ. 26 εἰς ἐδ. 27.

» 31 » 8 » » Νὰ διορθωθῇ ὁ ἀριθμὸς τοῦ τύπου (36) εἰς (37α).

» 32 » 7 » » ἀντὶ V_2 γράφε V_z .

» 38 ὑποσημ. νὰ τεθῇ ἡ ἐλλείπουσα παρένθεσις πρὸ τοῦ $p_2B_2-q_2A_2$).

» 76 στίχ. 6 ἀπὸ κάτω, ν' ἀφαιρεθῇ τὸ : α΄).

» 105 » 10 ἀπὸ ἐπάνω ἀντὶ ἐδ. 124 γράφε ἐδ. 128.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1) *Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces*
2) *Cesàro, Lezioni di Geometria Intrinseca.*
3) *Bianchi, Lezioni di Geometria Differenziale.*
4) *Ν. Χατζιδάκη, Θεωρία Ἐπιφανειῶν*
5) *Ν. Χατζιδάκη, Κινηματικῆς Γεωμετρίας Τόμος Α΄.*

ΔΙΟΡΘΩΤΕΑ

Σελ. 17 στιχ. 3 ἀπὸ κάτω ἀντὶ $q_1 F$ γράφε q_1, F_1
» 18 » 1 ἀπὸ ἄνωθεν » $q F$ » $q_1 F_1$
» 19 » 3 ἀπὸ κάτω » ε » ε_1
» 22 » 4 » » » Pg » $P_1 g$
» 26 » 1 ἀπὸ ἄνωθεν » N, N_1 » $N - N_1$
» 65 » 1 » » » $P\gamma - l$ » $P\gamma - lr$
» 70 » 16 » » » [illegible] γράφε [illegible]
» 76 » 28 ν' ἀντιγραφῇ ὁ ἀριθμὸς τοῦ θεωρήματος.
» 80 » 23 νὰ ἀντιγραφῇ ὁ ἀριθμὸς 27 τοῦ [illegible] τοῦ πορίσματος
» 85 » 27 [illegible] τοῦ τύπου 9 (96).
» 90 » 2 ἀπὸ κάτω τὰ [illegible] τὰ 25, 26 εἰς 25, 27
» 91 » 8 » » νὰ διορθωθῇ ὁ ἀριθμὸς τοῦ τύπου (26) εἰς (27)
» 96 » 7 » » ἀντὶ V_1 γράφε V.
» 98 ὑποσημ. νὰ γίνῃ ἡ [illegible] πρὸ τοῦ [illegible]
» 101 στιχ. 5 [illegible]
» 105 » 10 [illegible] 12, 13 γράφε 13, 14