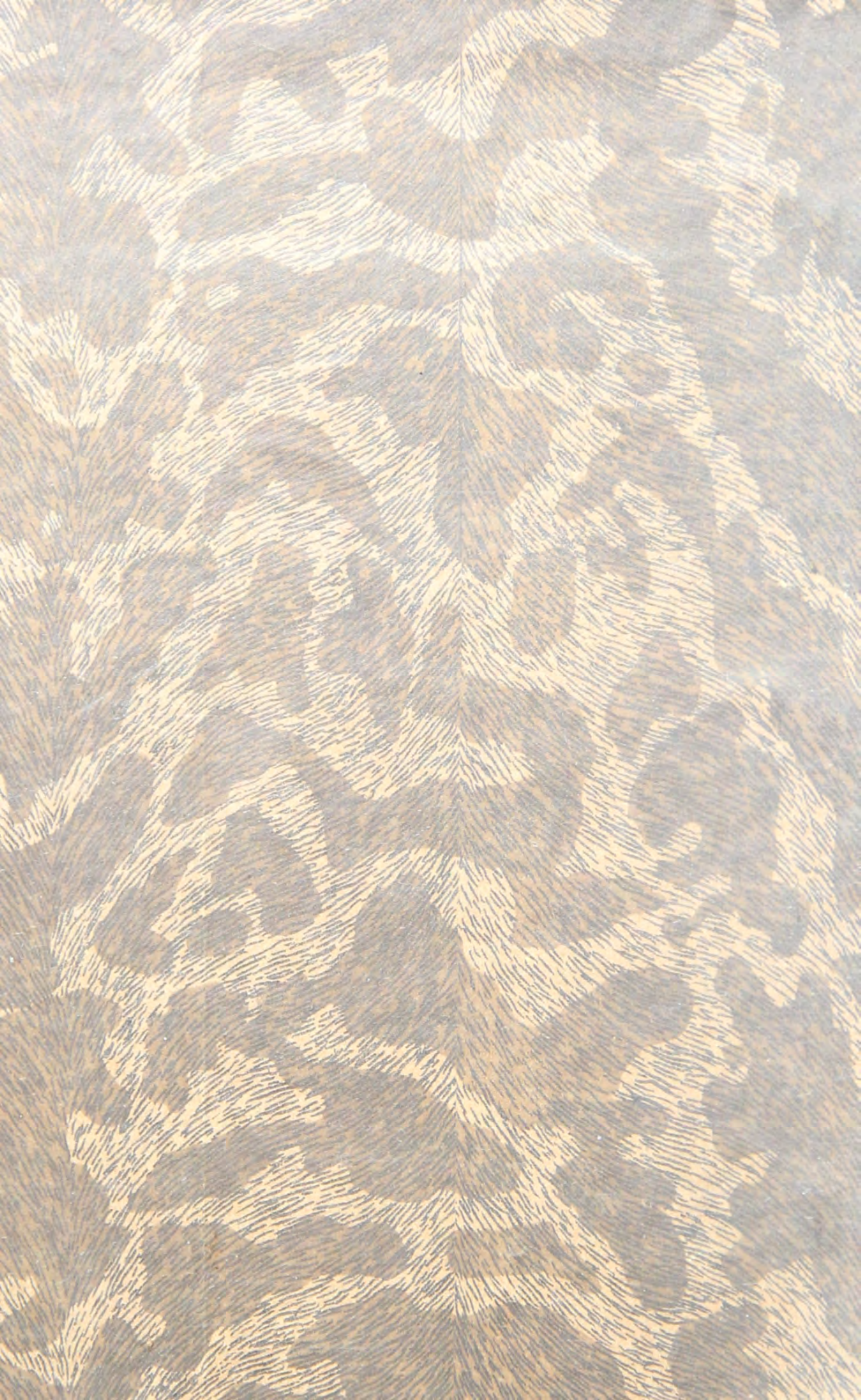


ΠΑΝΑΓΙΩΤΟΥ ΖΕΡΒΟΥ

[illegible]

ΑΦΡΟΔΙΣΙΑΚΟΣ ΛΟΙΜΟΣ

ΤΟΜΟΣ Α΄

[illegible]

[illegible]

ΠΑΝΑΓΙΩΤΟΥ ΖΕΡΒΟΥ
Τακτικοῦ καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΤΟΜΟΣ Α΄.

ΣΥΝΟΛΑ—ΟΡΙΑ—ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ—ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ,
ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ—ΑΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ—ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ
ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ ΠΑΡΑΣΚΕΥΑ ΛΕΩΝΗ
30—Ὁδὸς Περικλέους—30
1929

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι.

Ἀσύμμετροι ἀριθμοί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

Σύνολα

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

Θεωρία τῶν ὁρίων

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

Συναρτήσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

Ἀναλυτικαὶ ἐφαρμογαὶ τοῦ τύπου τοῦ *Taylor*

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

Γεωμετρικαὶ ἐκφράσεις καὶ ἐφαρμογαὶ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

Συναρτήσεις δύο πραγματικῶν μεταβλητῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX

Ἁπλᾶ ὁλοκληρώματα

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι.

Ἀόριστα ὁλοκληρώματα ῥητῶν συναρτήσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ.

Ὁλοκλήρωσις συναρτήσεων μὴ ῥητῶν ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III.

Διαφορικαὶ ἐξισώσεις

(Στοιχειώδεις μέθοδοι ὁλοκληρώσεως).

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

Σελ.	Στίχ.	Ἀντὶ	Γράφε
1	2 § 1	Γνωρίζωμεν	Γνωρίζομεν
10	3	$\alpha, \gamma_1, \gamma_2 \quad \alpha, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \cdots$	$\alpha, \gamma_1 \gamma_2 \quad \alpha, \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3, \cdots$
10	7	$\alpha, \gamma_1, \delta_2 \quad \alpha, \gamma_1, \gamma_2, \delta_3 \ldots$	$\alpha, \gamma_1 \delta_2 \quad \alpha, \gamma_1 \gamma_2 \delta_3 \ldots$
31	17	ἐσυμφωνήσαμεν	δὲν ἐσυμφωνήσαμεν
34	15	25	—
35	7 καὶ 12	$\varrho = 1, 2, 3..$	$\varrho = 0, 1, 2, 3, \ldots$
37	16	$\vert x \vert > M$	$x > M$
40	3	τὸ ἀριθμήσιμον σύνολον (ἢ καὶ τὴν ἀκολουθίαν)	τὴν ἀκολουθίαν
57	10 ἄσκ. 5	ὅριον	ὅρων
57	17	$y_1, y_2, y_2 \ldots$	$y_1, y_2, y_3, \ldots$
58	9	$= \bar{\ } + \bar{y}$	$= \bar{x} + \bar{y}$
58	17	ω	$\bar{\omega}$
69	19	$\omega_\nu = x_1 y_\nu$	$\omega_\nu = x_\nu y_\nu$
79	12	$\frac{1}{A_1} - \frac{1}{\nu+1}$	$\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_{\nu+1}}$
98	8	Σx_ν	Σy_ν
106	1	VI	IV
107	6 καὶ 8	$e^{-\frac{1}{x}}$	$e^{-\frac{1}{x^2}}$
114	12	$\frac{1}{\delta + \frac{1}{\delta_\nu}}$	$\frac{1}{\delta + \frac{1}{\delta . \nu}}$
117	21	$\varrho = 1\ 2, 3, \ldots$	$\varrho = 0, 1, 2, 3, \ldots$
125	προτελευταῖος	$\sqrt{1 - \text{συν}^2(x-\alpha)}$	$\sqrt{1 - \text{συν}^3(x-\alpha)}$
127	7	διὰ $x = 0,1$	διὰ $x = 0$, $x = 1$

Σελ.	Στίχ.	Ἀντὶ	Γράφε
130	14	$\lvert\sigma(x)-\sigma(\alpha)\rvert<M_1-\mu_1$	$\lvert\sigma(x)-\sigma(\alpha)\rvert\leq M_1-\mu_1$
133	20	$\sigma(\alpha)<0$	$\sigma(\alpha_3)<0$
149	24	$1+\frac{\nu}{2}$	$1+\frac{\nu-1}{\nu}$
150	19	(III)	(V)
151	10	$\sqrt{x^2}$	$\frac{\sqrt{x^2}}{x}$
154	14	$\sigma(x)$	$\sigma'(x)$
155	20 καὶ 27	Δ	Δx
163	11	$x_\mu{}^2$	$x^{2\mu}$
164	10	$(\ \mu)'$	$(x^\mu)'$
169	14	$(\lvert x\rvert<1)$	—
172	18	$\frac{\log^{\nu-2}x}{\lfloor\nu-2}\ldots+(\nu-1)^{\nu-1}\frac{\log x}{1}$	$\frac{\log^{\nu-2}x}{\lfloor\nu-2},\ldots+(-1)^{\nu-1}\log x$
177	11 καὶ 13	$_1+\vartheta\varepsilon$	$x_1+\vartheta\varepsilon$
»	28	ἴσως	ἴσας
178	29—30	ἐφόσον τὸ ε μένει πεπερασμένον	τοῦ ε μένοντος πεπερασμένου
182	16	$\beta=0$	$\beta=x$
191	προτελευταῖος	$=0$	$\neq 0$
195	10	$\frac{\varepsilon^3}{\lfloor 2}$	$\frac{\varepsilon^2}{\lfloor 2}$
»	11	$\frac{\varepsilon}{\lfloor \nu}$	$\frac{\varepsilon^\nu}{\lfloor \nu}$
201	12	ἐλήφθησαν	λαμβάνονται
203	14	e^ν	e^x
204	10	$o\varrho\frac{x-\eta\mu x}{x}=0$	$\underset{\infty}{o\varrho}\frac{x-\eta\mu x}{x}=1$
205	4	ε^{-x}	e^{-x}
206	τελευταῖος	$\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$	$\sigma(x)-\varphi(x)$
208	13	$=\frac{\alpha^2}{\beta^2}$	$=\frac{\alpha^3}{\beta^3}$
»	15	$\sqrt{(\alpha+x)(\beta-x)}$	$\sqrt{(\alpha-x)(\beta-x)}$
209	1	$o\varrho\left[\frac{\pi}{x(\varepsilon^{2\pi x}-1}+\frac{\pi x\quad 1}{2x^2}\right]=\frac{\pi^2}{2}$	$o\varrho\left[\frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1}-\frac{\pi x-1}{2x^2}\right]=\frac{\pi^2}{6}$
210	2	$2\eta\mu^3x$	$2\eta\mu'x$

Σελ.	Στίχ.	Ἀντὶ	Γράφε
»	7	$=\frac{1}{2}$	$=1$
211	17	$\sigma'(x)$	$\sigma''(x)$
212	17	$-\frac{\varepsilon^{\nu+1}}{\lfloor \nu+1}$	$\frac{\varepsilon^{\nu+1}}{\lfloor \nu+1}$
214	12	$y=0$	$y'=0$
»	13	$-\mu$	$-\mu x$
215	8	$\alpha_\nu{}^2$	$\alpha_\nu x^2$
»	24	$3\beta x^3$	$3\beta x^2$
221	10	$(1')$	$(2')$
223	6	$y'=-\frac{\beta^2 x}{\alpha x^2}$	$y'=-\frac{\beta^2 x}{\alpha^2 y}$
226	2	$<\beta_2$	$\leqq\beta_2$
»	4	$x=\alpha_2,\ x=\alpha_2$	$x=\alpha_1,\ x=\alpha_2$
227	15	τεῖναν	τεῖνον
229	26	$\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\nu, \ldots$	$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu, \ldots$
230	τελευταῖος	ἡ αἰώρησις δὲν θὰ ἦτο	δὲν θὰ εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ διαίρεσις εἰς ἄλλα ὀρθογώνια εἰς ἕκαστον τῶν ὁποίων ἡ αἰώρησις νὰ εἶναι
232	τελευταῖος	$dy=\frac{\partial y}{\partial z}\Delta y$	$d_y z=\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$
237	7	$y=$	$z=$
240	17,21,22,28	x_ν	$x_{\nu-1}$
»	17,18,21,22,28	$x_{\nu+1}$	x_ν
241	27	$(\alpha_\nu,\ x_{\nu+1})$	$(\alpha_{\nu-1}\ \ x_\nu)$
245	15	$\sum_{i=1}^{\nu}$	$\sum_{i=1}^{\nu-1}$
»	18	$(x_{\nu+1}-x_\nu)$	$(x_\nu-x_{\nu-1})$
»	19	$x_{\nu+1}=\beta$	$x_\nu=\beta$
246	25	(§ 207)	(§ 208)
251	14	$\Sigma\lambda_\nu \int_\alpha^\beta \sigma_\nu(x)dx$	$\Sigma\ \lambda_\nu \int_\alpha^\beta \sigma_\nu(x)dx$
264	23	(σελ. 108)	(σελ. 160)
268	3	$\int_\alpha^t$	$\int_\gamma^t$

Σελ.	Στίχ.	Ἀντὶ	Γράφε
271	12	(σελ. 229)	(σελ. 265)
274	1	$d\frac{^{\alpha x}}{\alpha}$	$d\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$
276	4	$-\int\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\int\frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}$
279	2	$\int\frac{dx}{\sqrt{x'+\alpha}}$	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}$

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

Σελ.	Στίχ.	Ἀντὶ	Γράφε
4	3	ἥ	ἢ
5	19	$\delta_{\nu-1}$	$\delta_{\nu-2}$
»	20	$\delta_{\nu-1}\varepsilon^{\nu-1}$	$\delta_{\nu-1}\varepsilon^{\nu-2}$
»	22	$(x-\varrho_2)^2$	$(x-\varrho_1)^2$
15	2	(14)	(15)
16	9	$(x-\varrho_1)^{\alpha 1}(x-\varrho_{\,})^{\alpha_2}$	$(x-\varrho_1)^{\alpha_1}(x-\varrho_2)^{\alpha_2}$
17	11	$\alpha\ \ 1$	$\alpha>1$
20	10	$x^{\,}-3\alpha x+2\alpha^2 x$	$x^3-3\alpha x^2+2\alpha^2 x$
21	τελευταῖος	τοξ εφ$\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{11}}$	τοξ εφ$\frac{5x+2}{\sqrt{11}}$
22	2	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{12}$
»	6	$5x-6$	$-(5x-4)$
27	13	18	14
»	18	$A(x)\Pi(x)+B(x)P(x)$	$A(x)P(x)+B(x)\Pi(x)$
29	7	x_2	x^2
32	6	(28)	(29)
42	5	y	y^2
44	2	ἐὰν	—
46	4	τιμὰς	τομὰς
»	21,23,25,27	$+2\beta$	-2β
47	10	$y=\sqrt{\gamma}$	$y_0=\sqrt{\gamma}$
49	τελευταῖος	ημ^{m+2}x συν^{n-9}x	ημ^{m-2}x συν^{n+2}x
55	3 ἀπὸ τοῦ τέλους	(§ 6)	(§ 16)
57	2	$\int x(\alpha+x)^{\frac{1}{3}}x\,dx$	$\int x(\alpha+x)^{\frac{1}{3}}dx$

Σελ.	Στίχ.	Ἀντὶ	Γράφε
64	10,23	(§ 18)	(§ 13)
66	1	$Y_0, Y_1, .. Y_{\lambda-2}$	$I_0, I_1, ... I_{\lambda-2}$
67	τελευταῖος	$\int \frac{(Bx+\Gamma)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$	$\int \frac{Bx+\Gamma}{(x-\alpha)^2+\beta^2} \frac{dx}{\sqrt{\Pi}}$
68	5	$\frac{\sqrt{T}}{(\gamma+\lambda)^\nu}$	$\frac{\sqrt{T}}{(\gamma y+\delta)^\nu}$
71	9	$4y^3-g_1y-g_3$	$4y^3-g_2y-g_3$
81	4	τοῦ τύπου (4)	τοῦ τύπου (1)
»	τελευταῖος	$(x^2+\alpha)$	$(x^2+\alpha)^2$
82	2	$x^2(\sqrt{x^2+\alpha}$	$x^2\sqrt{x^2+\alpha}$
84	8	καμπύλη	μία καμπύλη
»	19—20	πρὸς C	πρὸς x θεωρῶν τὸ y ὡς συνάρτησιν τοῦ x
85	25	$\varphi(c_1)$	$\sigma(c_1)$
87	10	(1	(18)
»	11	$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$	$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ (19)
»	19	μορφὴν (19)	μορφὴν (20) ἢ (19)
88	8	$\varphi(\upsilon)$	$\sigma(\upsilon)$
»	10	$\varphi(c)$	$\sigma(c)$
»	21	$\alpha x+\beta y+\gamma=X+\varrho, \lambda x+\mu y+\nu=Y+\sigma$	$x=X+\varrho, y=Y+\sigma$
»	23	Φ	F
89	13	(23)	(23′)
91	14—15	Λιγίνδρου	Λεγένδρου
92	23	$\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3-\lambda_1}$	$\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3-\lambda_2}$
95	2	$\int [1 ; \sigma(p)]dp$	$\int p[1 : \sigma(p)]dp$
»	8	$\sigma(y, \frac{1}{x'}, -\frac{x''}{(x')^2})=0$	$\sigma(y, \frac{1}{x'}, -\frac{x''}{(x')^3})=0$ ἐκ τῆς $\sigma(y,p,p\frac{dp}{dy})=0$
»	10	ω^3	ω'
96	3	καὶ εὑρίσκω τελικῶς	—
»	8	$\sigma=-\frac{d}{dx}\log(y_2y'-y)$	—

Σελ.	Στίχ.	Ἀντὶ	Γράφε
»	8	$\sigma(y_1 y' - y'y)$	$\sigma(y_1 y' - y'_1 y)$
97	6,14,15.16	X_1	$2X_1$
101	10	(§ 73)	(§ 74)
106	προτελευταῖος	$c'_7 y_1'' + c'_2 y_2''$	$c_1 y_1'' + c_2 y_2''$
107	6	y'	y_1'
»	9	$\frac{fy_{,}dx}{y_1' y_1 - y_2' y_1}$	$\frac{fy_2 dx}{y_1' y_2 - y_2' y_1}$
110	7	$y=$	$y=e^z$

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι.

ΑΣΥΜΜΕΤΡΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Κατὰ προσέγγισιν προσδιορισμὸς κλάσματος

1. Θεωρήσωμεν τυχόντα ῥητὸν ἀριθμὸν μὴ τρεπόμενον εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς· π. χ. τὸν $7\frac{8}{33}$. Γνωρίζωμεν ἐκ τῆς Θεωρητικῆς Ἀριθμητικῆς, ὅτι οὗτος τρέπεται εἰς τὸ ἁπλοῦν περιοδικὸν κλάσμα 7,242424...

Οἱ ἀριθμοί :

$$(\alpha) \qquad 7{,}2 \quad , \quad 7{,}24 \quad , \quad 7{,}242 \quad , \quad 7{,}2424, \ldots$$

εἶναι αἱ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, . . . τιμαὶ τοῦ $7\frac{8}{33}$ κατ᾿ ἔλλειψιν, καὶ αἱ τιμαί :

$$(\beta) \qquad 7{,}3 \quad , \quad 7{,}25 \quad , \quad 7{,}243 \quad , \quad 7{,}2425 \ldots$$

εἶναι αἱ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, . . . , τιμαὶ τοῦ $7\frac{8}{33}$ καθ᾿ ὑπεροχήν.

Παρατηροῦμεν ἤδη, ὅτι ἔχομεν δύο ἀκολουθίας (α) καὶ (β) μὲ τὰς ἑξῆς ἰδιότητας :

I) Οἱοσδήποτε ἀριθμὸς τῆς ἀκολουθίας (α) εἶναι μικρότερος οἱουδήποτε ἀριθμοῦ τῆς ἀκολουθίας (β),

II) Ἐὰν δοθῇ ἀριθμός τις θετικὸς ε, ὁσονδήποτε μικρός, δυνάμεθα πάντοτε νὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν τῆς ἀκολουθίας (β) καὶ ἀριθμὸν τῆς ἀκολουθίας (α) διαφέροντας ἀπ᾿ ἀλλήλων ὀλιγώτερον τοῦ ε.

Π. χ. Ἔστω ὅτι ἐδόθη ὡς ε ὁ ἀριθμὸς $\frac{2}{93}$· αὐτὸς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ $\frac{1}{100}$· ἀρκεῖ νὰ λάβω ἐκ τῆς ἀκολουθίας (α) τὸ 7,24 ἢ οἱονδήποτε ἑπόμενόν του καὶ ἐκ τῆς ἀκολουθίας (β) τὸ 7,243 ἢ οἱονδήποτε ἑπόμενόν του, ἵνα ἔχω δύο ἀριθμοὺς τῶν δύο ἀκολουθιῶν (α) καὶ (β) μὲ διαφορὰν μικροτέραν τοῦ $\frac{1}{100}$, ἐπομένως καὶ τοῦ ε.

Ὅπως ἐσχηματίσαμεν τὰς ἀκολουθίας (α) καὶ (β), οὕτω θὰ ἠδυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ἀκολουθίας, θεωροῦντες τιμὰς τοῦ $7\frac{8}{33}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{11}, \frac{1}{11^2}, \frac{1}{11^3}, \ldots$, ἢ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2}, \ldots, (\alpha > 1)$, ἢ καὶ γενικώτερον κατὰ προσέγγισιν $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \ldots$, ὅπου τὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \ldots$ εἶναι θετικὰ καὶ βαίνουν διαρκῶς ἐλαττούμενα, καθίστανται δὲ μικρότερα οἱασδήποτε μικρᾶς ποσότητος θετικῆς δοθείσης.

Ὁρισμὸς τῶν ἀσυμμέτρων δι' ἀνισοτήτων.

2. Θεωρήσωμεν πάλιν τὸν ῥητὸν ἀριθμὸν $7\frac{8}{33}$. Δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν ὅλους τοὺς ῥητοὺς ἀριθμοὺς χωρισμένους εἰς δύο τάξεις, Α καὶ Β, εἰς τρόπον, ὥστε εἰς τὴν πρώτην Α ν' ἀνήκωσιν ὅλοι οἱ ῥητοὶ οἱ μικρότεροι τοῦ $7\frac{8}{33}$, ὅπως καὶ αὐτὸς οὗτος ὁ $7\frac{8}{33}$, εἰς δὲ τὴν ἄλλην Β πάντες οἱ λοιποί, δηλ. οἱ μεγαλύτεροι τοῦ $7\frac{8}{33}$. Ὁ ἀριθμὸς $7\frac{8}{33}$, ὅστις εἶναι τὸ σύνορον τῶν δύο τάξεων, δύναται νὰ νοηθῇ ὡς ***σύμβολον*** αὐτοῦ τοῦ καταμερισμοῦ.

Θὰ ἠδυνάμεθα ὁμοίως νὰ νοήσωμεν τὸ σύνολον τῶν ῥητῶν ἀριθμῶν χωρισμένον εἰς δύο τάξεις Α καὶ Β τοιαύτας, ὥστε εἰς τὴν μίαν τάξιν Α ν' ἀνήκωσιν ὅλοι οἱ ῥητοὶ οἱ μικρότεροι τοῦ $7\frac{8}{33}$, εἰς δὲ τὴν ἄλλην ὁ $7\frac{8}{33}$ καὶ πάντες οἱ μεγαλύτεροι αὐτοῦ. Καὶ πάλιν ὁ $7\frac{8}{33}$ εἶναι τὸ σύμβολον τοῦ γενομένου καταμερισμοῦ.

Καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις παρατηροῦμεν, ὅτι ὑπάρχουν αἱ ἑξῆς ἰδιότητες :

I) Πᾶς ἀριθμὸς τῆς τάξεως Α εἶναι μικρότερος παντὸς ἀριθμοῦ τῆς τάξεως Β,

II) Δοθέντος ἀριθμοῦ ῥητοῦ θετικοῦ, ὁσονδήποτε μικροῦ ε, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν ἀπὸ τὴν τάξιν Β καὶ ἀριθμὸν ἀπὸ τὴν τάξιν Α τοιούτους, ὥστε ἡ διαφορά των νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ε.

Εἰς τὸ πρῶτον τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων ὁ $7\frac{8}{33}$ εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀπὸ ὅλους τῆς πρώτης τάξεως (ἀνήκων εἰς τὴν τάξιν), εἰς τὸ δεύτερον παράδειγμα ὁ $7\frac{8}{33}$ εἶναι ὁ μικρότερος ἀπὸ ὅλους τῆς δευτέρας τάξεως ἀνήκων εἰς τὴν τάξιν. Ὅπως εἰργάσθημεν μὲ τὸν $7\frac{8}{33}$, θὰ ἠδυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν καὶ μὲ οἱονδήποτε ἄλλον ῥητόν. Ὥστε διὰ πάντα ῥητὸν ἔχομεν ἕνα (καὶ ἕνα μόνον) τοιοῦτον χωρισμὸν τῶν ῥητῶν εἰς δύο τάξεις.

Πλὴν ὅμως τῶν καταμερισμῶν αὐτῶν δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν καὶ καταμερισμοὺς τῶν ῥητῶν ἀριθμῶν εἰς δύο τάξεις A καὶ B τοιαύτας, ὥστε οἱοσδήποτε ἀριθμὸς τῆς πρώτης νὰ εἶναι μικρότερος ἀπὸ οἱονδήποτε τῆς δευτέρας, χωρὶς ὅμως νὰ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν οὔτε ἐν τῇ πρώτῃ τάξει ἀριθμὸν μεγαλύτερον ἀπὸ ὅλους τοὺς ἄλλους (ἀνήκοντα εἰς τὴν τάξιν), οὔτε ἐν τῇ δευτέρᾳ ἀριθμὸν μικρότερον ἀπὸ ὅλους τοὺς ἄλλους. Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι πρόκειται νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\chi^2-5=0$, ζητοῦντες, διὰ τὴν σαφήνειαν, θετικὴν λύσιν. Οὐδεὶς ῥητὸς ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν [1]) Θεωροῦμεν ἤδη τὸ σύνολον τῶν θετικῶν ῥητῶν, οἵτινες ἐπαληθεύουσι τὴν $\chi^2-5>0$, καὶ τὸ σύνολον τῶν θετικῶν ῥητῶν, οἵτινες ἐπαληθεύουσι τὴν $\chi^2-5<0$· χωρίζομεν τοὺς ῥητοὺς εἰς δύο τάξεις A καὶ B, τοποθετοῦντες εἰς τὴν πρώτην τάξιν ὅλους τοὺς θετικοὺς ῥητούς, τῶν ὁποίων τὸ τετράγωνον εἶναι μικρότερον τοῦ 5, ὡς ἐπίσης τὸ μηδὲν καὶ ὅλους τοὺς ἀρνητικοὺς ῥητούς, εἰς δὲ τὴν δευτέραν ὅλους τοὺς θετικοὺς ῥητούς, τῶν ὁποίων τὸ τετράγωνον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 5. Προφανῶς πᾶς ῥητὸς ἀνήκει ἢ εἰς τὴν μίαν ἢ εἰς τὴν ἄλλην τάξιν, ἰσχύουν δὲ καὶ εἰς τὸν καταμερισμὸν αὐτὸν αἱ ἰδιότητες I καὶ II. Ὅπως ἀνωτέρω ὁ $7\frac{8}{33}$ ἐθεωρήθη ὡς σύμβολον τοῦ γενομένου καταμερισμοῦ, οὕτω καὶ ἐδῶ, ὅπου ὅμως δὲν ὑπάρχει μεγαλύτερος ῥητὸς τῆς τάξεως A, οὔτε μικρότερος ῥητὸς τῆς τάξεως B, θὰ λέγωμεν ὅτι ***σύμβολον*** τοῦ καταμερισμοῦ αὐτοῦ εἶναι ἀριθμός τις ***ἀσύμμετρος*** [2]), ἐπαληθεύων τὴν ἐξίσωσιν $x^2=5$· θὰ

---

[1]) Ἰδὲ Θεωρητικὴν Ἀριθμητικὴν Μαρίας Ζερβοῦ σελ. 140.

[2]) Ἡ δικαιολογία τῆς ἀντιστοιχίας τῶν νέων τούτων καταμερισμῶν πρὸς

νοῶμεν τουτέστιν, ὅτι ὁ ἀνωτέρω καταμερισμὸς ὁρίζει ***ἀσύμμετρον ἀριθμόν***, ὅστις ἐνταῦθα σημειοῦται διὰ τοῦ $\sqrt{5}$. Διὰ τοῦ συμβόλου τούτου νοοῦμεν ἐδῶ ἀριθμὸν μεγαλύτερον πάντων τῶν τῆς τάξεως Α καὶ μικρότερον πάντων τῶν τῆς τάξεως Β, ἤτοι θὰ νοῶμεν αὐτὸν παρεμβαλόμενον μεταξὺ τῶν δύο τάξεων.

3. Ἔστω γενικῶς ὅτι ἐχωρίσθησαν κατά τινα μέθοδον ὅλοι οἱ ῥητοὶ ἀριθμοὶ εἰς δύο τάξεις Α καὶ Β, τοιαύτας, ὥστε πᾶς ἀριθμὸς τῆς Α νὰ εἶναι μικρότερος παντὸς ἀριθμοῦ τῆς Β. Τότε τρεῖς περιπτώσεις δύνανται νὰ παρουσιασθῶσι :

Περίπτωσις I.

Ἡ τάξις Α νὰ περιέχῃ ἀριθμὸν τ μεγαλύτερον παντὸς ἄλλου, ἀνήκοντος εἰς αὐτήν.

Περίπτωσις II.

Ἡ τάξις Β νὰ περιέχῃ ἀριθμὸν τ μικρότερον ἀπὸ ὅλους τοὺς ἄλλους, τοὺς ἀνήκοντας εἰς αὐτήν.

Καὶ εἰς τὰς δύο ταύτας περιπτώσεις ὁ ἀριθμὸς τ δύναται νὰ νοηθῇ ὡς τὸ σύμβολον τοῦ καταμερισμοῦ καὶ λέγομεν ὅτι ὁ τ προσδιορίζει τὴν ***τομὴν*** (Α,Β) καὶ ὅτι ἡ ***τομὴ εἶναι ῥητή***.

Περίπτωσις III.

Δὲν ὑπάρχει οὔτε μεγαλύτερος εἰς τὴν τάξιν Α, οὔτε μικρότερος εἰς τὴν Β [1]· τότε λέγομεν ὅτι, ἡ ***τομὴ εἶναι ἀσύμμετρος***.

Ἔχομεν οὕτως ὅτι εἰς ἕκαστον καταμερισμὸν τῶν ῥητῶν εἰς δύο τάξεις Α καὶ Β, τοιαύτας ὥστε πᾶς ἀριθμὸς τῆς Α νὰ εἶναι μικρότερος παντὸς ἀριθμοῦ τῆς τάξεως Β, ἀντιστοιχεῖ, ἕνας (καὶ μόνον) ἀριθμὸς ῥητὸς ἢ ἀσύμμετρος, ὁ ὁποῖος χρησιμεύει ὡς σύμβολον τοῦ καταμερισμοῦ αὐτοῦ καὶ λέγεται ***τομὴ*** (Dedekind) [2].

ἀριθμούς, ἔγκειται εἰς τοῦτο· ὅτι, ἀφοῦ ὁρισθῶσιν αἱ πράξεις καὶ ἡ ἀνισότης ἐπ᾽ αὐτῶν, καθ᾽ ὃν τρόπον θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, ἐξακολουθοῦν ἰσχύουσαι ὅλαι, αἱ ἐπὶ τῶν ῥητῶν, θεμελιώδεις ἰδιότητες, ἐξ ὧν, ἀπορρέει ὁλόκληρος ἡ Ἀριθμητική. Ἰδιαιτέρως ἰσχύει, εἰς τὴν εὐρυτέραν ταύτην ἔννοιαν τοῦ ἀριθμοῦ, ἡ πρότασις τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ ἡ πρότασις, ὅτι μεταξὺ δύο ἀριθμῶν ὑπάρχει πάντοτε εἰς τοὐλάχιστον, καὶ συνεπῶς ὑπάρχουσιν ἄπειροι ῥητοὶ ἀριθμοί.

[1]) Εἶναι φανερόν, ὅτι ἀποκλείεται ἡ περίπτωσις, νὰ ὑπάρχῃ μεγαλείτερος ἀριθμὸς τ εἰς τὴν τάξιν Α καὶ μικρότερος λ εἰς τὴν Β· διότι, ἂν ὑπῆρχε τοιαύτη περίπτωσις, ὁ ἀριθμὸς $\frac{\tau+\lambda}{2}$ (ῥητὸς) θὰ ἐπλήρου τὴν σχέσιν $\tau < \frac{\tau+\lambda}{2} < \lambda$. καὶ ἐπομένως δὲν θ᾽ ἀνῆκε οὔτε εἰς τὴν τάξιν Α, οὔτε εἰς τὴν τάξιν Β, ὁπότε θὰ ὑπῆρχε ῥητὸς ἐκτὸς τῶν δύο τάξεων.

[2]) Ἡ καθαρῶς ἀριθμητικὴ ἔννοια τῆς τομῆς ὀφείλεται εἰς τὸν Dedekind.

Τὸ ἀντίστροφον εἶναι ἐπίσης ἀληθές, ἂν τοὺς καταμερισμοὺς τῶν δύο πρώτων περιπτώσεων θεωρήσωμεν ὡς ἕνα μόνον.

Ὁρισμὸς ἰσότητος καὶ ἀνισότητος τῶν ἀσυμμέτρων.

4. Ἔστωσαν δύο ἀσύμμετροι ξ, ξ' καὶ ἔστωσαν Α, Β αἱ τάξεις, αἱ ὁρίζουσαι τὴν τομὴν ξ καὶ Α', Β' αἱ τάξεις, αἱ ὁρίζουσαι τὴν τομὴν ξ'· ἔχομεν τρεῖς περιπτώσεις:

Περίπτωσις Ι.

Αἱ τάξεις Α καὶ Α' νὰ εἶναι αἱ αὐταί· τότε καὶ αἱ τάξεις Β καὶ Β' θὰ εἶναι αἱ αὐταί, οἱ δὲ ἀριθμοὶ ξ καὶ ξ' ὁρίζονται ἀπὸ τὴν αὐτὴν τομήν. Θὰ λέγωμεν τότε, ὅτι οἱ ἀσύμμετροι ξ καὶ ξ' εἶναι ἴσοι καὶ θὰ γράφωμεν $\xi=\xi'$.

Περίπτωσις ΙΙ.

Ὑπάρχει εἰς τὴν τάξιν Α' ἀριθμὸς μὴ ἀνήκων εἰς τὴν τάξιν Α, ἑπομένως ἀνήκων εἰς τὴν τάξιν Β, ἤτοι ὑπάρχει ῥητὸς ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ ξ', (συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω τεθέντα), ὁ ὁποῖος εἶναι καὶ μεγαλύτερος τοῦ ξ· θὰ λέγωμεν τότε ὅτι ξ' εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ξ καὶ θὰ γράφωμεν : $\xi'>\xi$.

Περίπτωσις ΙΙΙ.

Ὑπάρχει εἰς τὴν τάξιν Α ἀριθμὸς μὴ ἀνήκων εἰς τὴν Α', ἑπομένως ἀνήκων εἰς τὴν τάξιν Β', θὰ λέγωμεν τότε ὅτι ὁ ξ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ξ' καὶ θὰ γράφωμεν : $\xi>\xi'$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὁρισμῶν προκύπτει ὅτι :

1) Ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα $\xi=\xi'$ εἶναι ἡ ἑξῆς :

Πᾶς ῥητὸς μικρότερος τοῦ ἑνὸς τῶν ἀσυμμέτρων νὰ εἶναι καὶ μικρότερος τοῦ ἄλλου.

2) Ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα $\xi<\xi'$, εἶναι ἡ ἑξῆς :

Νὰ ὑπάρχῃ ῥητὸς ἀριθμός, μικρότερος τοῦ ἑνὸς ἀσυμμέτρου ξ' καὶ μεγαλύτερος τοῦ ἄλλου ξ.

Οἱ ῥητοὶ καὶ οἱ ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ λέγονται μὲ ἓν ὄνομα ***πραγματικοὶ*** ἀριθμοί.

Καταμερισμὸς ὅλων τῶν πραγματικῶν εἰς δύο τάξεις.

5. Εἴδομεν μὲ ἓν παράδειγμα ἀνωτέρω, ὅτι, ἐὰν περιορισθῶμεν

μόνον εἰς τοὺς ῥητοὺς ἀριθμούς, δὲν ἔχομεν πάντοτε τομὴν ἕνα ***ῥητὸν*** ἀριθμόν.

Ἤδη, ἐὰν θεωρήσωμεν, ὅτι, μὲ ἕνα οἱονδήποτε τρόπον, ἐχωρίσαμεν ***ὅλους τοὺς πραγματικοὺς*** ἀριθμοὺς εἰς δύο τάξεις Α καὶ Β, τοιαύτας, ὥστε πᾶς ἀριθμὸς τῆς Α νὰ εἶναι μικρότερος παντὸς τῆς Β[1] θὰ ὑπάρχῃ ***πάντοτε*** πραγματικὸς ἀριθμὸς λ, (δηλ. ῥητὸς ἢ ἀσύμμετρος) τοιοῦτος ὥστε πᾶς μικρότερος τοῦ λ νὰ ἀνήκῃ εἰς τὴν Α καὶ πᾶς μεγαλύτερος τοῦ λ ν' ἀνήκῃ εἰς τὴν Β δηλ. θὰ ὑπάρχῃ ἀριθμός τις πραγματικὸς λ, ὅστις θὰ ὁρίζῃ τὴν τομήν. Τοῦτο φαίνεται ὡς ἑξῆς :

Ἂς θεωρήσωμεν τοὺς ῥητοὺς τοὺς ἀνήκοντας εἰς τὴν τάξιν Α, οἵτινες ἀποτελοῦσι τάξιν τινὰ A_ϱ, καὶ τοὺς ῥητοὺς τοὺς ἀνήκοντας εἰς τὴν τάξιν Β, οἵτινες ἀποτελοῦσι τάξιν τινὰ B_ϱ· ἡ τάξις Α θὰ ἀποτελῆται ἀπὸ τὴν τάξιν A_ϱ καὶ τὴν τάξιν A_α (ἐὰν A_α καλέσωμεν τὴν τάξιν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν τῶν ἀνηκόντων εἰς τὴν Α)· ὁμοίως, ἡ Β θὰ ἀποτελῆται ἀπὸ τὴν B_ϱ καὶ τὴν B_α.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, αἱ τάξεις A_ϱ καὶ B_ϱ, ὁρίζουσι τομὴν ἕνα ἀριθμὸν ῥητὸν ἢ ἀσύμμετρον· ἂς τὸν καλέσωμεν λ· λέγω, ὅτι πᾶς μικρότερος τοῦ λ (ῥητὸς ἢ ἀσύμμετρος), ἀνήκει εἰς τὴν τάξιν Α καὶ πᾶς μεγαλύτερος τοῦ λ ἀνήκει εἰς τὴν τάξιν Β· καὶ τῷ ὄντι, πᾶς μικρότερος τοῦ λ θὰ εἶναι ἢ ῥητὸς ἢ ἀσύμμετρος καὶ ἐὰν εἶναι ῥητὸς θὰ ἀνήκῃ (συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τοῦ λ) εἰς τὴν τάξιν A_ϱ ἐὰν δὲ εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμός τις ξ, θὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τοῦ ξ καὶ λ ῥητὸς ἀριθμὸς καὶ ἑπομένως ἀπειρία ῥητῶν· ἔστω τοιοῦτός τις ῥητὸς ὁ κ· αὐτὸς θὰ εἶναι ῥητὸς μικρότερος τοῦ λ, ἑπομένως ἀνήκει εἰς τὴν τάξιν A_ϱ· ἄρα ὁ κ θὰ ἀνήκῃ καὶ εἰς τὴν τάξιν Α· καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι μικρότερος παντὸς ἀριθμοῦ τῆς τάξεως Β (συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τῶν τάξεων Α καὶ Β), ὥστε ἐὰν ὁ ξ ἀνῆκεν εἰς τὴν τάξιν Β θὰ εἴχομεν $\kappa<\xi$ ἐνῷ ὑπεθέσαμεν ὅτι $\kappa>\xi$· ἄρα ὁ ξ ἀνήκει εἰς τὴν τάξιν Α. Ὁμοίως φαίνεται ὅτι πᾶς μεγαλύτερος τοῦ λ ἀνήκει εἰς τὴν τάξιν Β, ὅθεν : ὁ λ, ὅστις εἶναι τομὴ τῶν τάξεων A_ϱ καὶ B_ϱ εἶναι καὶ τομὴ τῶν τάξεων Α καὶ Β.

Πράξεις ἐπὶ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἐν γένει.

6. Μὲ τὰ ἀνωτέρω περὶ τομῆς ἐκτεθέντα δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὰς πράξεις ἐπὶ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἐν γένει.

---

[1]) Ὑποθέτομεν πάντοτε ὅτι καὶ αἱ δύο τάξεις περιλαμβάνουν ἀριθμούς.

Πρόσθεσις. Ἔστωσαν λ καὶ λ' δύο πραγματικοὶ ἀριθμοί. Καλέσωμεν Α καὶ Β τὰς τάξεις τῶν ῥητῶν τὰς ὁριζούσας τὸν λ, καὶ Α′ καὶ Β′ τὰς τάξεις τῶν ῥητῶν τὰς ὁριζούσας τὸν λ', ἐὰν θεωρήσωμεν τέσσαρας οἱουσδήποτε ῥητοὺς ἀριθμούς, α, β, α', β', ἀνήκοντας εἰς τὰς τέσσαρας αὐτὰς τάξεις, ἐπαληθεύοντας δὲ τὰς σχέσεις

$$\alpha<\lambda<\beta \quad , \quad \alpha'<\lambda'<\beta'$$

θὰ ἔχωμεν $$\alpha+\alpha'<\beta+\beta'.$$

Ἂς νοήσωμεν ἤδη ὅλους τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς χωρισμένους εἰς δύο τάξεις Γ καὶ Δ, ὁριζομένας ὡς ἑξῆς· εἰς τὴν τάξιν Γ ἀνήκει πᾶς ἀριθμὸς μικρότερος ἀπὸ ἕνα οἱονδήποτε ἀριθμὸν τῆς μορφῆς $\beta+\beta'$, ἑπομένως εἰς τὴν τάξιν Γ ἀνήκουν καὶ πάντες οἱ ἀριθμοὶ τῆς μορφῆς $\alpha+\alpha'$, εἰς δὲ τὴν τάξιν Δ ἀνήκουν πάντες οἱ λοιποί, ἑπομένως εἰς τὴν Δ ἀνήκουν καὶ πάντες οἱ ἀριθμοὶ $\beta+\beta'$. Ἂς καλέσω λ'' τὸν ἀριθμόν, ὅστις εἶναι τὸ σύνορον ἢ ***ἡ τομὴ*** τῶν δύο τάξεων Γ καὶ Δ· αὐτὸς θὰ εἶναι, προφανῶς, μικρότερος παντὸς ἀριθμοῦ $\beta+\beta'$, (ἴσος μὲ ἀριθμόν τινα $\beta+\beta'$ δὲν δύναται νὰ εἶναι, διότι μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν τῆς μορφῆς $\beta+\beta'$ δὲν ὑπάρχει μικρότερος) καὶ μεγαλύτερος παντὸς ἀριθμοῦ $\alpha+\alpha'$ (ἴσος δὲν δύναται νὰ εἶναι, διότι δὲν ὑπάρχει μεγαλύτερος μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν $\alpha+\alpha'$). Εὑρήκαμεν οὕτω ἀριθμὸν λ'', μικρότερον παντὸς ἀριθμοῦ $\beta+\beta'$ καὶ μεγαλύτερον παντὸς ἀριθμοῦ $\alpha+\alpha'$. Δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εὕρωμεν καὶ ἄλλον ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος νὰ εἶναι μικρότερος παντὸς ἀριθμοῦ $\beta+\beta'$ καὶ μεγαλύτερος παντὸς ἀριθμοῦ $\alpha+\alpha'$. Τοῦτο φαίνεται καὶ ἀπ᾽ εὐθείας ὡς ἑξῆς· ἔστω ξ τοιοῦτος ἀριθμός, διάφορος τοῦ λ''· θὰ εἴχομεν μεταξὺ τῶν ξ καὶ λ'' ἀπείρους ῥητούς· ἔστωσαν ρ καὶ σ δύο ἐξ αὐτῶν· θὰ εἴχομεν καὶ διὰ τὸν ρ, ὅτι εἶναι μικρότερος παντὸς ἀριθμοῦ $\beta+\beta'$ καὶ μεγαλύτερος παντὸς ἀριθμοῦ $\alpha+\alpha'$, ὅπως, ἐπίσης καὶ διὰ τὸν σ. ἤτοι θὰ εἴχομεν:

$$\alpha+\alpha' <\rho<\sigma<\beta+\beta'$$

(ἐθέσαμεν $\rho<\sigma$). Καὶ ἑπομένως:

$$\sigma-\rho <(\beta+\beta')-(\alpha+\alpha')$$

$\sigma-\rho < (\beta'-\sigma)+$

ἀλλ᾽ ἡ διαφορὰ $\sigma-\rho$, θὰ ἦτο σταθερός τις ἀριθμὸς ε· ἐνῷ, ἀφ᾽ ἑτέρου, ἡ διαφορὰ $(\beta+\beta')-(\alpha+\alpha')$ γίνεται ὅσον θέλομεν μικρά, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τὰς διαφορὰς $\beta'-\alpha'$ καὶ $\beta-\alpha$ ἱκανῶς μικράς· ἑπομένως τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἀνισότητος θὰ γίνεται καὶ μικρότερον τοῦ ε. Ἑπομένως, δὲν θὰ ἴσχυεν ἡ ἀνωτέρω ἀνισότης διὰ πάντα τὰ συστήματα τῶν ἀριθμῶν $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$· τοῦτο εἶναι ἀδύνατον ἄρα ὁ ξ δὲν θὰ διαφέρῃ τοῦ λ''.

Τὸν ἀριθμὸν λ'' καλοῦμεν ***ἄθροισμα*** τῶν ἀριθμῶν λ καὶ λ' καὶ σημειοῦμεν : $\lambda''=\lambda+\lambda'$

Ἀφαίρεσις : Ἀποδεικνύεται εὐκόλως, ὅτι δοθέντων τῶν λ καὶ λ' εὑρίσκεται εἷς καὶ μόνος ἀριθμὸς δ, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν λ' δίδει τὸν λ σημειοῦμεν δὲ τότε $\delta=\lambda-\lambda'$

7. ***Πολλαπλασιασμός :*** Ἔστωσαν δύο τυχόντες θετικοὶ ἀριθμοὶ λ καὶ λ'. Καλέσωμεν Α καὶ Β τὰς τάξεις τῶν ῥητῶν τὰς ὁριζούσας τὸν λ, καὶ Α′ καὶ Β′ τὰς τάξεις τῶν ῥητῶν τὰς ὁριζούσας τὸν λ'.

Ἐὰν θεωρήσωμεν τέσσαρας θετικοὺς ῥητοὺς ἀριθμοὺς $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$, ἀνήκοντας εἰς τὰς τέσσαρας αὐτὰς τάξεις, ἐπαληθεύοντας δὲ τὰς ἀνισότητας

$$\alpha<\lambda<\beta \qquad \alpha'<\lambda'<\beta'$$

θὰ ἔχωμεν $\alpha\alpha'<\beta\beta'$.

Ἐργαζόμενοι ὅπως καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν, ἀποδεικνύομεν, ὅτι ὑπάρχει εἷς ἀριθμὸς θετικὸς καὶ εἷς μόνον, ὅστις θὰ εἶναι μικρότερος παντὸς γινομένου $\beta\beta'$ καὶ μεγαλύτερος παντὸς γινομένου $\alpha\alpha'$· τοῦτον καλοῦμεν γινόμενον τῶν ἀριθμῶν λ καὶ λ' καὶ ἐὰν τὸν καλέσωμεν λ'' σημειοῦμεν : $\lambda''=\lambda\lambda'$

Διὰ νὰ ἔχωμεν τὸ γινόμενον δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ὁ εἷς εἶναι ἀρνητικὸς ἢ καὶ ἀμφότεροι εἶναι ἀρνητικοί, λαμβάνομεν ὑπ' ὄψει καὶ τὸν κανόνα τῶν σημείων, ἤτοι :

$$(-\lambda)\lambda'=-(\lambda\lambda') \quad , \quad (-\lambda)(-\lambda')=\lambda\lambda' \quad , \quad \lambda(-\lambda')=-(\lambda\lambda')$$

8. ***Διαίρεσις :*** Εἰς ἕκαστον πραγματικὸν ῥητὸν ἀριθμὸν α, διάφορον τοῦ μηδενὸς ἀντιστοιχεῖ ἕνας πραγματικὸς ῥητὸς α' τοιοῦτος ὥστε : $\alpha.\alpha'=1$ τότε καλοῦμεν τὸν α' ἀντίστροφον τοῦ α, καὶ τὸν σημειοῦμεν : $\frac{1}{\alpha}$.

Θεωρήσωμεν ἤδη ἀσύμμετρον ἀριθμὸν θετικὸν λ· ζητοῦμεν ἀριθμὸν λ' τοιοῦτον ὥστε $\lambda\lambda'=1$. Ἂς καλέσωμεν Β τὴν τάξιν τῶν ῥητῶν τῶν μεγαλυτέρων τοῦ λ καὶ Α τὴν τάξιν τῶν θετικῶν ῥητῶν τῶν μικροτέρων τοῦ λ· οἱ ἀντίστροφοι τῶν ῥητῶν τῆς τάξεως Α θὰ ἀποτελέσουν τάξιν τινὰ Β′ καὶ οἱ ἀντίστροφοι τῶν ῥητῶν τῆς τάξεως Β, μετὰ τῶν ἀρνητικῶν ῥητῶν ἀριθμῶν καὶ τοῦ μηδενὸς θὰ ἀποτελέσουν τὴν τάξιν τῶν ἐπιλοίπων ῥητῶν Α′. Καὶ δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν ὅλους τοὺς ῥητοὺς χωρισμένους εἰς τὰς τάξεις Α′ καὶ Β′, θὰ ὁρίζεται οὕτω εἷς θετικὸς ἀσύμμετρος λ'· ***ἐξ ὁρισμοῦ*** ὁ λ' θὰ εἶναι τοιοῦτος ὥστε : $\lambda\lambda'=1$. Θὰ τὸν σημειοῦμεν δὲ καὶ διὰ τῶν : $1 : \lambda$ ἢ $\frac{1}{\lambda}$ καὶ θὰ τὸν καλοῦμεν ἀντίστροφον τοῦ λ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ὁρίζομεν τὸν ἀντίστροφον ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ· ἢ καὶ ἐὰν δοθῇ ἀριθμός τις $-\lambda$, ὅπου λ θετικός, ὁ ἀντίστροφος αὐτοῦ θὰ εἶναι $-\frac{1}{\lambda}$, ὅπου $\frac{1}{\lambda}$ εἶναι ὁ ἀντίστροφος τοῦ λ.

Ὁ ἀριθμὸς 0 δὲν ἔχει ἀντίστροφον.

Ἔστωσαν, ἤδη, δύο ἀριθμοὶ λ καὶ μ, (λ διάφορος τοῦ μηδενός). Ζητοῦμεν ἀριθμὸν χ τοιοῦτον ὥστε, $\lambda\chi=\mu$. Θεωροῦμεν τὸν κατὰ τὰ ἀνωτέρω ὁριζόμενον ἀριθμὸν $\frac{1}{\lambda}$· ὁ ἀριθμὸς $\mu \cdot \frac{1}{\lambda}$ πληροῖ τὴν ζητουμένην σχέσιν· τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν θεωρῶμεν ὡς πηλίκον τοῦ μ διὰ λ καὶ θὰ τὸν σημειοῦμεν : $\frac{\mu}{\lambda}$. Δυνάμεθα, κατὰ ταῦτα, νὰ γράψωμεν $\chi=\frac{\mu}{\lambda}$.

Παρατήρησις. Ἐθεωρήσαμεν (§ 2,3) ἕκαστον ῥητὸν ἢ ἀσύμμετρον ὡς τομὴν ὅλων τῶν ῥητῶν εἰς δύο τάξεις Α καὶ Β τοιαύτας ὥστε ἕκαστος ῥητὸς τῆς Α νὰ εἶναι μικρότερος παντὸς ῥητοῦ τῆς Β. Δὲν ἕπεται ἐξ αὐτοῦ ὅτι εἶνε *ἀπαραίτητον* νὰ ληφθοῦν ὑπ' ὄψει ὅλοι οἱ ῥητοὶ διὰ τὸν ὁρισμὸν ἑνὸς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ· ἀρκεῖ διὰ νὰ ὁρίσωμεν ἕνα πραγματικὸν ἀριθμὸν νὰ ληφθοῦν δύο μερικαὶ τάξεις ῥητῶν Π καὶ Ρ πληροῦσαι τὰς συνθήκας.

1) ἕκαστος ἀριθμὸς τῆς Π νὰ εἶναι μικρότερος παντὸς ἀριθμοῦ τῆς Ρ.

2) Νὰ μὴν ὑπάρχῃ μεγαλύτερος εἰς τὴν τάξιν Π καὶ μικρότερος εἰς τὴν τάξιν Ρ.

3) Νὰ εὑρίσκωνται πάντοτε ἀριθμὸς τῆς τάξεως Ρ καὶ ἀριθμὸς τῆς τάξεως Π ἔχοντες διαφορὰν μικροτέραν θετικοῦ ἀριθμοῦ ε, ὅσον δήποτε μικρὸς καὶ ἂν ὑποτεθῇ ὁ ε.

Π. χ. εἰς τὸ παράδειγμα τῆς § 1 αἱ δύο ἀκολουθίαι (α) καὶ (β) δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς τάξεις ἀριθμῶν ὁρίζουσαι τὸν $7\frac{8}{33}$, ὅστις ἀφ' ἑτέρου (ἰδὲ § 2) δυναται νὰ θεωρηθῇ καὶ ὡς ὁριζόμενος ἀπὸ δύο τάξεις Α καὶ Β ὅλων τῶν ῥητῶν. Ἀντιστρόφως. ([1]) ἔστω τυχοῦσα τομὴ ὅλων τῶν ῥητῶν (Α,Β) ὁρίζουσα ἕνα ἀριθμόν. Δυνάμεθα νὰ ἐξαγάγωμεν (ἀπὸ τὴν τάξιν Α) μίαν τάξιν ῥητῶν ἀριθμῶν Π καὶ (ἀπὸ τὴν τάξιν Β) μίαν τάξιν ῥητῶν Ρ πληρούσας τὰς ἀνωτέρω συνθήκας.

---

[1]) Ἰδὲ Stolz, Allgemeine Arithmetik.

Μερικὴ περίπτωσις. Ἔστω διὰ τὴν ἁπλούστευσιν τῆς γραφῆς τυχοῦσα ἀσύμμετρος τομή. Δυνάμεθα διὰ τὴν τάξιν Π νὰ λάβωμεν ἀκολουθίαν τῆς μορφῆς $\alpha \quad \alpha,\gamma_1 \quad \alpha,\gamma_1,\gamma_2 \quad \alpha,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3 \ldots$ ὅπου α θὰ εἶναι θετικὸς ἀκέραιος ἢ ο ἢ ἀρνητικὸς ἀκέραιος καὶ $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$, εἶναι ψηφία μεταξὺ 0 καὶ 9·

διὰ δὲ τὴν τάξιν Ρ ἀκολουθίαν τῆς μορφῆς

$$\alpha+1, \quad \alpha,\delta_1 \quad \alpha,\gamma_1,\delta_2 \quad \alpha,\gamma_1,\gamma_2,\delta_3 \ldots$$

ὅπου $\delta_\nu = \gamma_\nu + 1$.

Π. χ. διὰ τὸν ἀριθμὸν π ἔχομεν τὰς ἀκολουθίας

3,	3,1	3,14	3,1415 . . .
4,	3,2	3,15	3,1416 . . .

Ἀσκήσεις

Νὰ ἀποδειχθῶσιν αἱ ἑξῆς προτάσεις :

1) Ἔστω τομὴ (Α,Β) ὅλων τῶν ῥητῶν καὶ θετικός τις ῥητὸς ε· δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἕνα ἀριθμὸν τῆς τάξεως Α καὶ ἕνα τῆς τάξεως Β, ἔχοντας διαφορὰν ἴσην πρὸς τὸν ε.

2) Ἔστω τομὴ (Α,Β) ὁρίζουσα θετικὸν ἀριθμὸν καὶ ῥητός τις Κ μεγαλύτερος τῆς μονάδος· δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἕνα ἀριθμὸν τῆς τάξεως Α καὶ ἕνα τῆς τάξεως Β, ἔχοντας πηλίκον ἴσον πρὸς τὸν Κ.

3) Ἔστωσαν αἱ τάξεις τῶν ῥητῶν ἀριθμῶν Α καὶ Β, αἱ θεωρηθεῖσαι εἰς τὴν § 2 πρὸς ὁρισμὸν τοῦ $\sqrt{5}$. Δὲν ὑπάρχει μεταξὺ τῶν ῥητῶν τῆς τάξεως Α ῥητὸς μεγαλύτερος ὅλων τῶν ἄλλων ῥητῶν τῆς τάξεως Α, οὔτε μεταξὺ τῶν ῥητῶν τῆς τάξεως Β ῥητὸς μικρότερος ὅλων τῶν ἄλλων ῥητῶν τῆς Β.

4) Ἔστωσαν α καὶ β δύο ῥητοὶ ἀριθμοὶ καὶ ξ ἀσύμμετρος.

Ἐὰν $\alpha<\xi$ καὶ $\xi<\beta$, θὰ ἔχωμεν $\alpha<\beta$

Ἐὰν $\alpha<\beta$ καὶ $\beta<\xi$, θὰ ἔχωμεν $\alpha<\xi$

5) Ἔστωσαν α,β,γ τρεῖς πραγματικοὶ ἀριθμοί.

Ἐὰν $\alpha<\beta$ καὶ $\beta<\gamma$, θὰ ἔχωμεν $\alpha<\gamma$.

6) Μεταξὺ δύο οἱωνδήποτε ῥητῶν ὑπάρχει πάντοτε ῥητὸς καὶ ἐπομένως ἀπειρία ῥητῶν.

7) Μεταξὺ δύο οἱωνδήποτε πραγματικῶν ἀριθμῶν ὑπάρχει πάντοτε ῥητὸς καὶ ἐπομένως ἀπειρία ῥητῶν (ἐστηρίχθημεν ἐπὶ τῆς προτάσεως ταύτης εἰς τὴν § 5).

8) Μεταξὺ δύο οἱωνδήποτε ῥητῶν ὑπάρχει πάντοτε ἀσύμμετρος ἀριθμὸς καὶ ἐπομένως ἀπειρία ἀσυμμέτρων.

9) Ἐὰν καταμερίσωμεν ὅλους τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς εἰς δύο τάξεις Α καὶ Β, οὕτως ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ ἰδιότης Ι (§ 2) ὁρίζομεν ἕνα μόνον ῥητὸν ἢ ἀσύμμετρον (ἰδὲ συμπέρασμα § 2,5).

10) Μὲ τοὺς δοθέντας ὁρισμοὺς διατηρεῖται καὶ ἐπὶ τῶν ἀσυμμέτρων ἡ ἰδιότης τῆς ἀντιμεταθέσεως (ἢ ἀνταλλαγῆς), ἡ διαλυτικὴ ἰδιότης καὶ ἡ ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης· ἤτοι

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha$$
$$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$$
$$\alpha\beta=\beta\alpha$$
$$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$$
$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma.$$

11) Ἐὰν ὁ λ εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμὸς καὶ ὁ $\frac{1}{\lambda}$ (§ 8) θὰ εἶναι ἀσύμμετρος.

12) Ἐὰν α καὶ β εἶναι ῥητοὶ ἀριθμοὶ καὶ ἐὰν ὁ β εἶναι θετικὸς καὶ δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον ἡ παράστασις $(\alpha+\sqrt{\beta})^2$ δίδει ἀσύμμετρον ἀριθμόν.

13) Ἔστωσαν α καὶ β δύο ῥητοὶ ἀριθμοί, τοιοῦτοι ὥστε $\alpha^2>\beta$ καὶ $\alpha>0$.

Ἵνα ἡ παράστασις

$$\sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}}+\sqrt{\alpha-\sqrt{\beta}}$$

εἶναι ῥητὸς ἀριθμὸς πρέπει καὶ ἀρκεῖ οἱ ἀριθμοὶ $\alpha^2-\beta$ καὶ $\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta}}{2}$ νὰ εἶναι τετράγωνα ῥητῶν ἀριθμῶν.

Νὰ εὑρεθῇ

14) Ἡ συνθήκη, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ πληροῦν οἱ ῥητοὶ ἀριθμοὶ χ, ψ, ω, t, ἵνα ἡ παράστασις

$$\frac{\alpha\chi+\psi}{\alpha\omega+t}$$

εἶναι ῥητὸς ἀριθμὸς ὅταν ὁ α εἶναι ἀσύμμετρος.

15) Ἡ συνθήκη ἵνα ὁ ἀριθμὸς $\sqrt{\chi}+\sqrt{\psi}$ εἶναι ῥητὸς ὅταν διὰ τῶν χ καὶ ψ ἐκφράζωμεν ῥητοὺς θετικοὺς ἀριθμούς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ.

ΣΥΝΟΛΑ

Ὁρισμοὶ ἐπὶ τῶν συνόλων.

9. Ἀριθμοὶ σχηματίζουν ***σύνολον,*** ἐὰν ἔχουν κοινήν τινα ἰδιότητα, δυνάμει τῆς ὁποίας διακρίνομεν αὐτούς, Ἡ γενικὴ ἔννοια τοῦ σύνόλου εἶναι μία ἔννοια, διὰ τὴν ὁποίαν δὲν δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τέλειον ὁρισμόν. Ὡς παραδείγματα συνόλων ἀναφέρομεν τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων θετικῶν, τὸ σύνολον τῶν περιττῶν, τὸ σύνολον τῶν ἀρτίων, τὸ σύνολον τῶν ἀρνητικῶν, τὸ σύνολον τῶν ῥητῶν, τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν τῶν περιλαμβανομένων μεταξὺ 2 καὶ 3, τὸ σύνολον τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, τουτέστιν ἐκείνων οἱ ὁποῖοι εἶναι ῥίζαι ἐξισώσεως ἀλγεβρικῆς μὲ συντελεστὰς ἀκεραίους κ.ο.κ. Ἐννοεῖται, ὅτι ὅπως ἔχομεν σύνολον ἀριθμῶν, ἔχομεν σύνολον σημείων, σύνολον εὐθειῶν, ἐπιπέδων, κ.λ.π.

Τὰ σύνολα τῶν ἀριθμῶν κατωτέρω θὰ τὰ καλοῦμεν ἁπλῶς καὶ ***σύνολα.***

Πᾶς ἀριθμὸς ἑνὸς συνόλου λέγεται ἐπίσης ***στοιχεῖον*** αὐτοῦ.

Ἐὰν πᾶν στοιχεῖον ἑνὸς συνόλου A εἶναι καὶ στοιχεῖον ἑτέρου συνόλου B, θὰ λέγωμεν, ὅτι τὸ σύνολον A εἶναι ***μερικὸν*** σύνολον τοῦ B, θὰ σημειοῦμεν δὲ τοῦτο ὡς ἑξῆς ; $A \subset B$, π.χ. τὸ σύνολον τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι μερικὸν σύνολον τοῦ συνόλου τῶν θετικῶν ἀκεραίων.

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν δυνάμεθα νὰ λέγωμεν, ὅτι ἕκαστον σύνολον εἶναι μερικὸν σύνολον ἑαυτοῦ.

Θὰ λέγωμεν, ὅτι δύο σύνολα A καὶ B εἶναι ἴσα καὶ θὰ σημειοῦμεν $A=B$, ὅταν ταῦτα συνίστανται ἐκ τῶν αὐτῶν ἀκριβῶς στοιχείων· δηλ. ὅταν ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ συνόλου A ἀποτελεῖ στοιχεῖον τοῦ συνόλου B καὶ ἀντιστρόφως. Κατὰ ταῦτα, αἱ δύο σχέσεις $A \subset B$ καὶ $B \subset A$ ἰσοδυναμοῦν πρὸς τὴν μίαν $A=B$, ὅπως, ἀντιστρόφως, ἐκ τῆς τελευταίας συνάγονται αἱ δύο πρῶται.

10. ***Σύνολον περατωμένον ἄνωθεν***, ***κάτωθεν*** : Ἐὰν δι' ἓν σύνολον ἀριθμῶν ὑπάρχῃ ἀριθμὸς M μεγαλύτερος πάντων τῶν ἀριθμῶν τοῦ συνόλου; τότε λέγομεν, ὅτι τοῦτο εἶναι ***περατωμένον ἄνωθεν,*** ὁ

δὲ Μ λέγεται ***ἀνώτερον φράγμα*** (συμφώνως πρὸς ὁρισμὸν τὸν ὁποῖον δίδομεν εἰς τὴν § 11).

Π. χ. τὸ σύνολον τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν εἶναι περατωμένον ἄνωθεν, διότι οἱοσδήποτε θετικὸς ἀριθμός, ὅπως καὶ τὸ μηδέν, εἶναι μεγαλύτερος παντὸς ἀριθμοῦ τοῦ συνόλου, ὥστε πᾶς θετικὸς ἀριθμός ὅπως καὶ τὸ μηδέν, εἶναι ἀνώτερον φράγμα τοῦ συνόλου.

Ἀνωτέρω (§ 3) ἐθεωρήσαμεν καταμερισμοὺς τοῦ συνόλου τῶν ῥητῶν ἀριθμῶν εἰς δύο τάξεις Α καὶ Β, πρὸς ὁρισμὸν τομῆς (Dedekind). Ἐκεῖ τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν τῆς τάξεως Α εἶναι ***περατωμένον ἄνωθεν*** διότι πᾶς ἀριθμὸς ῥητὸς τῆς τάξεως Β εἶναι μεγαλύτερος παντὸς ἀριθμοῦ τῆς τάξεως Α.

Ἔστω σύνολον ἀριθμῶν· ἐὰν ὑπάρχῃ ἀριθμὸς μ μικρότερος ὅλων τῶν ἀριθμῶν τοῦ συνόλου, λέγομεν, ὅτι τοῦτο εἶναι ***περατωμένον κάτωθεν.***

Π. χ. τὸ σύνολον τῶν θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι περατωμένον κάτωθεν, ὅπως ἐπίσης τὰ σύνολα τῶν ἀριθμῶν τῶν τάξεων Β εἶναι σύνολα περατωμένα κάτωθεν.

Ἐὰν ἓν σύνολον εἶναι περατωμένον ἄνωθεν καὶ κάτωθεν, λέγομεν ὅτι εἶναι ***περατωμένον σύνολον :*** Τοιοῦτον, ἐπὶ παραδείγματι, εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν τῶν περιλαμβανομένων μεταξὺ 0 καὶ 1, ὅπως ἐπίσης τὸ σύνολον τῶν κλασματικῶν τῶν περιλαμβανομένων μεταξὺ 0 καὶ 1, τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ἡ ἀπόλυτος τιμὴ εἶναι μικροτέρα δοθέντος ἀριθμοῦ.

Εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν ἀριθμοὶ σχηματίζουσι σύνολον περατωμένον ἄνωθεν, οἱ ἀντίθετοι ἀριθμοὶ θὰ σχηματίζουν σύνολον περατωμένον κάτωθεν καὶ ἀντιστρόφως.

Π. χ. οἱ θετικοὶ ἀκέραιοι σχηματίζουν σύνολον περατωμένον κάτωθεν, οἱ ἀρνητικοὶ ἀκέραιοι σχηματίζουν σύνολον περατωμένον ἄνωθεν κ.ο.κ.

Ἐὰν ἓν σύνολον εἶναι περατωμένον ἄνωθεν, κάτωθεν ἢ ἁπλῶς περατωμένον, τότε καὶ πᾶν μερικὸν σύνολον αὐτοῦ ἔχει τὴν αὐτὴν ἰδιότητα.

11. Καλοῦμεν ***ἀνώτερον φράγμα*** ἑνὸς συνόλου Σ πάντα ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου δὲν ὑπάρχει μεγαλύτερος εἰς τὸ σύνολον Σ δηλ. ἀριθμός τις Μ, θὰ εἶναι ἀνώτερον φράγμα τοῦ συνόλου Σ, ἐὰν διὰ πάντα ἀριθμὸν χ τοῦ συνόλου, ἰσχύει ἡ ἀνισότης $\chi < M$, ἢ ἡ ἰσότης $\chi = M$. Π. χ. τοῦ συνόλου τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν ἀνώτερα φράγματα εἶναι

ὅλοι οἱ θετικοὶ καὶ τὸ μηδέν. Τοῦ συνόλου τῶν ἀριθμῶν τῆς ἀκολουθίας.

$$(A) \qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

ἀνώτερα φράγματα εἶναι ἡ μονὰς καὶ πᾶς μεγαλύτερος τῆς μονάδος.

Εἶναι προφανές, ὅτι ἐὰν ἀριθμός τις Μ εἶναι ἀνώτερον φράγμα, καὶ πᾶς μεγαλύτερος τοῦ Μ εἶναι ἀνώτερον φράγμα.

Κατώτερον φράγμα συνόλου Σ, καλοῦμεν πάντα ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου δὲν ὑπάρχει μικρότερος εἰς τὸ Σ. δηλ. ἀριθμός τις μ θὰ εἶναι ***κατώτερον φράγμα,*** ἐὰν διὰ πάντα ἀριθμὸν χ τοῦ συνόλου Σ ἰσχύει ἡ ἀνισότης $\chi > \mu$, ἢ ἡ ἰσότης $\chi = \mu$. π. χ. τοῦ συνόλου τῶν θετικῶν ἀριθμῶν κατώτερα φράγματα εἶναι τὸ μηδὲν καὶ πάντες οἱ ἀρνητικοί. Τοῦ συνόλου τῶν ἀριθμῶν τῆς ἀκολουθίας :

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}, \quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}, \ldots$$

κατώτερον φράγμα εἶναι ἡ μονὰς καὶ πάντες οἱ μικρότεροι τῆς μονάδος· τοῦ συνόλου τῶν ἀριθμῶν τῆς ἀκολουθίας (Α) κατώτερα φράγματα εἶναι τὸ μηδὲν καὶ ὅλοι οἱ ἀρνητικοὶ κ.ο.κ.

Ἔχομεν προφανῶς, ὅτι ἐὰν μ εἶναι κατώτερον φράγμα ἑνὸς συνόλου Σ καὶ πᾶς μικρότερος τοῦ μ εἶναι κατώτερον φράγμα τοῦ αὐτοῦ συνόλου Σ.

Θεωρήσωμεν καταμερισμόν τινα τοῦ συνόλου τῶν ῥητῶν εἰς δύο τάξεις Α καὶ Β, πρὸς ὁρισμὸν μιᾶς τομῆς (Dedekind)· ὁ ἀριθμὸς ὁ ἀντιστοιχῶν εἰς τὴν τομὴν ὡς καὶ πᾶς μεγαλύτερός του, εἶναι ἀνώτερα φράγματα τοῦ συνόλου τῶν ἀριθμῶν τῆς τάξεως Α, ἑπομένως καὶ ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ τῆς τάξεως Β εἶναι ἀνώτερα φράγματα τοῦ συνόλου τῶν ἀριθμῶν τῆς τάξεως Α.

Τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τῶν μεταξὺ 4 καὶ 5 ἔχει ἀνώτερον φράγμα τὸν 5 καὶ πάντα μεγαλύτερον τοῦ 5 καὶ κατώτερον φράγμα, τὸν 4 καὶ πάντα μικρότερον τοῦ 4 κ.ο.κ.

Θεώρημα τοῦ *Bolzano*.

12. Ἔστω περατωμένον ἄνωθεν σύνολόν τι Σ. Τὰ ἀνώτερα φράγματα τοῦ συνόλου Σ σχηματίζουσι σύνολόν τι Σ'· θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι, ***εἰς τὸ σύνολον Σ' ὑπάρχει ἀριθμὸς λ ἐλάχιστος*** δηλ. ὑπάρχει ἀριθμός τις λ πληρῶν τὰς ἑξῆς συνθήκας. ***1) ὁ λ εἶναι ἀριθμὸς τοῦ***

συνόλου Σ' καὶ 2) δὲν ὑπάρχει ἀριθμὸς τοῦ συνόλου Σ' μικρότερος τοῦ λ.

Ἀπόδειξις. Καταμερίζομεν καὶ πάλιν τοὺς ῥητοὺς ἀριθμοὺς εἰς δύο τάξεις Α καὶ Β, ὡς ἑξῆς: Ἡ τάξις Β περιέχει πάντας τοὺς ***ῥητοὺς*** τοῦ συνόλου Σ' ἡ δὲ τάξις Α πάντας τοὺς λοιποὺς ***ῥητούς***.

Εὔκολον εἶναι νὰ ἴδωμεν, ὅτι:

Ἕκαστος ῥητὸς τῆς τάξεως Α εἶναι μικρότερος ἀπὸ πάντα ῥητὸν τῆς τάξεως Β. Καὶ τῷ ὄντι, ἔστω α τυχὼν ῥητὸς τῆς τάξεως Α καὶ β τυχὼν ῥητὸς τῆς τάξεως Β· ὁ β ὡς ἀριθμὸς τοῦ συνόλου Σ', θὰ εἶναι ἓν ἀνώτερον φράγμα τοῦ Σ, ἑπομένως καὶ πᾶς μεγαλείτερός του, θὰ εἶναι ἓν ἀνώτερον φράγμα τοῦ Σ. Ἄρα, ἐὰν ὁ α ἦτο μεγαλείτερος τοῦ β, θὰ ἦτο καὶ αὐτὸς ἓν ἀνώτερον φράγμα τοῦ Σ, θὰ ἀνῆκεν ἑπομένως εἰς τὸ Σ'· ἀλλὰ πᾶς ῥητὸς τοῦ Σ' ἀνήκει εἰς τὴν τάξιν Β, ὥστε ὁ α, ὅστις εἶναι ἀριθμὸς τῆς τάξεως Α θὰ ἀνῆκε καὶ εἰς τὴν τάξιν Β. Τοῦτο εἶναι ἀδύνατον· ἄρα ὁ α δὲν εἶναι μεγαλείτερος τοῦ β, καὶ ἐπειδὴ διαφέρει τοῦ β, θὰ ἔχωμεν: $\alpha < \beta$.

Ἀφοῦ πᾶς ῥητὸς τῆς τάξεως Α εἶναι μικρότερος παντὸς ῥητοῦ τῆς τάξεως Β, οὐδεμία δὲ τῶν τάξεων Α καὶ Β εἶνε κενή, αἱ τάξεις Α καὶ Β ὁρίζουν (§ 3) μίαν τομήν, ἤτοι ὁρίζουν ἕνα ἀριθμὸν λ· αὐτὸς πληροῖ τὰς δύο ἀνωτέρω συνθήκας· ἤτοι:

α') ***Εἶναι ἀριθμὸς τοῦ συνόλου Σ'*** δηλ. εἶναι ἓν ἀνώτερον φράγμα τοῦ συνόλου (Σ) ἢ καὶ δὲν ὑπάρχει εἰς τὸ σύνολον Σ, ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ λ.

Διότι ἔστω τὸ ἐναντίον· δηλ. ἔστω, ὅτι ὑπῆρχεν ἀριθμός τις χ τοῦ συνόλου Σ μεγαλύτερος τοῦ λ· τότε μεταξὺ τῶν χ καὶ λ θὰ ὑπῆρχε ῥητός· ἔστω τοιοῦτος τις κ· θὰ εἴχομεν δηλ.:

$$\lambda < \kappa < \chi,$$

ὁπότε ὁ κ, ὡς ῥητὸς μεγαλύτερος τοῦ λ, θὰ ἀνῆκεν εἰς τὴν τάξιν Β· ἑπομένως θὰ ἀνῆκεν καὶ εἰς τὸ σύνολον Σ', ἤτοι θὰ ἦτο ἓν ἀνώτερον φράγμα τοῦ Σ· δὲν θὰ εἶχεν ἑπομένως μεγαλύτερόν του εἰς τὸ Σ· ἐνῷ, κατὰ τὰς ἀνωτέρω ἀνισότητας ὁ κ θὰ εἶχε μεγαλύτερόν του εἰς τὸ Σ τὸν ἀριθμὸν χ.

β') ***Δὲν ὑπάρχει ἀριθμὸς τοῦ συνόλου Σ' μικρότερος τοῦ λ.*** Ἔστω τὸ ἐναντίον, δηλ. ὅτι ὑπάρχει ἀριθμός τις μ τοῦ συνόλου Σ' μικρότερος τοῦ λ· τότε πᾶς ῥητὸς κ μεταξὺ τοῦ λ καὶ μ κείμενος, θὰ ἐπλήρου τὰς ἀνισότητας: $\mu < \kappa < \lambda$. Ἀλλὰ τότε, ἀφ' ἑνὸς ὁ κ, ὡς ῥητὸς μικρότερος τοῦ λ, θὰ ἀνῆκεν εἰς τὴν τάξιν Α, ἀφ' ἑτέρου ὁ κ, ὡς ῥητὸς μεγαλείτερος τοῦ μ, θὰ ἦτο ἓν ἀνώτερον φράγμα τοῦ Σ· (ἀφοῦ ὁ μ ὡς στοιχεῖον τοῦ Σ′ εἶναι ἀνώτερον φράγμα τοῦ Σ), θὰ ἀνῆκεν ἑπομένως εἰς τὸ Σ′· ὅθεν καὶ εἰς τὴν τάξιν Β τὴν περιλαμβάνουσαν τοὺς ῥητοὺς τοῦ Σ′. Ἐπειδὴ δέ, εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀνήκῃ ὁ κ εἰς τὴν τάξιν Α καὶ εἰς τὴν Β, ἕπεται ὅτι δὲν ὑπάρχει ἀριθμὸς τοῦ Σ′ μικρότερος τοῦ λ.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι ἐὰν ἕνα σύνολον Σ εἶναι περατωμένον κάτωθεν, τὸ σύνολον τῶν κατωτέρων αὐτοῦ φραγμάτων Σ″ θὰ ἔχῃ ἕνα ***μέγιστον***, δηλ. θὰ ὑπάρχῃ ἀριθμὸς λ πληρῶν τὰς δύο συνθήκας : 1) ***θὰ εἶναι ἀριθμὸς τοῦ συνόλου Σ″*** καὶ 2) ***δὲν θὰ ὑπάρχῃ εἰς τὸ Σ″ ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ λ.*** Τοῦτο πηγάζει καὶ ἀπ' εὐθείας ἐκ τοῦ προηγουμένου, ἐὰν ἀντὶ τοῦ συνόλου τῶν ἀριθμῶν Σ θεωρήσωμεν τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν τῶν ἀντιθέτων πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ Σ.

Ἀνώτερον πέρας. Κατώτερον πέρας. Αἰώρησις.

13. Ἔστω σύνολόν τι Σ περατωμένον ἄνωθεν· κατὰ τὰ ἀνωτέρω τὸ σύνολον τῶν ἀνωτέρων του φραγμάτων Σ′ θὰ ἔχῃ ἕνα ἐλάχιστον ἀριθμὸν Μ· αὐτὸν καλοῦμεν ***ἀνώτερον πέρας*** τοῦ συνόλου Σ δηλ. τὸ ἀνώτερον πέρας θὰ πληροῖ τὰς δύο προαναφερθείσας συνθήκας, ἤτοι·

1) ἀνήκει εἰς τὸ Σ′, τουτέστι θὰ εἶναι ἕνα ἀνώτερον φράγμα τοῦ Σ καὶ ἑπομένως δὲν θὰ ὑπάρχῃ ἀριθμὸς εἰς τὸ Σ μεγαλύτερός του.

2) Τὸ ἀνώτερον πέρας Μ εἶναι ἀριθμὸς ἐλάχιστος εἰς τὸ σύνολον Σ′, δηλ. δὲν ὑπάρχει ἀριθμὸς τοῦ συνόλου Σ′ μικρότερος τοῦ Μ ἢ καὶ δὲν ὑπάρχει ἀνώτερον φράγμα τοῦ συνόλου Σ μικρότερον τοῦ Μ· ἑπομένως ἕνας ἀριθμὸς Μ — ε, (ὅπου ε θετικὸς ὁσονδήποτε μικρὸς) δὲν δύναται νὰ εἶναι ἀνώτερον φράγμα· ἄρα θὰ ὑπάρχῃ ἀριθμὸς τοῦ συνόλου Σ μεγαλύτερος τοῦ Μ—ε.

Ὡς συμπέρασμα, ἐξάγομεν, ὅτι τὸ ***ἀνώτερον πέρας*** Μ ἑνὸς συνόλου Σ ἔχει τὰς ἑξῆς δύο ἰδιότητας, αἱ ὁποῖαι τὸ χαρακτηρίζουν.

1) ***Δὲν ὑπάρχει ἀριθμὸς τοῦ συνόλου Σ μεγαλύτερος τοῦ Μ*** καὶ

2) ***Παντὸς ἀριθμοῦ Μ—ε***, (ὅπου ε θετικὸς ὁσονδήποτε μικρός), ***ὑπάρχει μεγαλύτερος εἰς τὸ Σ.***

Π. χ. Ἔστω τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν :

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu, \ldots$$

ὅπου : $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$, ... $\alpha_\nu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots \frac{1}{2^\nu}$

Ἀνώτερον πέρας εἶναι ὁ ἀριθμὸς 1, ὅστις δὲν ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον.

Ἐὰν εἰς τὸ ἀνωτέρω σύνολον περιλάβωμεν καὶ τὴν μονάδα, τὸ νέον σύνολον θὰ περιλαμβάνῃ τὸ ἀνώτερον αὐτοῦ πέρας.

Ὁμοίως, ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ σύνολον πάντων τῶν ῥητῶν θετικῶν ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων τὸ τετράγωνον δὲν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 5, θὰ ἔχωμεν ἀνώτερον πέρας τὸν ἀσύμμετρον $\sqrt{5}$, ὅστις δὲν ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον· ἐνῷ τὸ σύνολον πάντων τῶν πραγματικῶν θετικῶν, τῶν ὁποίων τὸ τετράγωνον δὲν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 5, θὰ ἔχῃ ἀνώτερον πέρας τὸν ἀσύμμετρον $\sqrt{5}$, ὅστις ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον.

Ἔστω σύνολόν τι Σ περατωμένον κάτωθεν. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, τὸ σύνολον Σ′ τῶν κατωτέρων του φραγμάτων θὰ ἔχῃ ἕνα μέγιστον ἀριθμὸν μ· αὐτὸν καλοῦμεν κατώτερον πέρας τοῦ συνόλου Σ, δηλ. τὸ κατώτερον πέρας θὰ πληροῖ τὰς δύο ἀναφερθείσας συνθήκας, ἤτοι

1) ***ἀνήκει εἰς τὸ Σ′***, τουτέστι θὰ εἶναι κατώτερον φράγμα τοῦ Σ, καὶ ἑπομένως δὲν θὰ ὑπάρχῃ ἀριθμὸς εἰς τὸ Σ μικρότερός του.

2) ***Τὸ κατώτερον πέρας μ εἶναι ἀριθμὸς μέγιστος εἰς τὸ σύνολον Σ′*** δηλ. δὲν ὑπάρχει ἀριθμὸς τοῦ συνόλου Σ′ μεγαλύτερος τοῦ μ ἢ καί, δὲν ὑπάρχει κατώτερον φράγμα τοῦ συνόλου Σ μεγαλύτερον τοῦ μ· ἑπομένως ἕνας ἀριθμὸς $\mu+\varepsilon$ (ὅπου ε θετικὸς ὁσονδήποτε μικρὸς) δὲν δύναται νὰ εἶναι κατώτερον φράγμα· ἄρα θὰ ὑπάρχῃ ἀριθμὸς τοῦ συνόλου Σ μικρότερός του.

Ὡς συμπέρασμα ἐξάγομεν, ὅτι τὸ κατώτερον πέρας μ ἑνὸς συνόλου Σ ἔχει τὰς ἑξῆς δύο ἰδιότητας, αἱ ὁποῖαι τὸ χαρακτηρίζουν:

1) ***Δὲν ὑπάρχει ἀριθμὸς τοῦ συνόλου Σ μικρότερος τοῦ μ.***

2) ***Παντὸς ἀριθμοῦ $\mu+\varepsilon$*** (ὅπου ε θετικὸς ὁσονδήποτε μικρὸς) ***ὑπάρχει μικρότερος εἰς τὸ Σ.***

14. ***Παρατηρήσεις.*** Ἐὰν εἰς ἓν σύνολον Σ ὑπάρχῃ ἀριθμὸς Μ ***μέγιστος***, δηλ. τοιοῦτος, ὥστε νὰ μὴ ὑπάρχῃ μεγαλύτερός του εἰς τὸ Σ, τότε αὐτὸς εἶναι προφανῶς τὸ ἀνώτερον πέρας, καὶ λέγεται ***μέγιστον*** τοῦ συνόλου Σ. Ἐὰν εἰς ἓν σύνολον ὑπάρχῃ ἀριθμὸς ***ἐλάχιστος***, (δηλ. μηδενὸς ἀριθμοῦ τοῦ συνόλου μεγαλύτερος), τότε αὐτὸς εἶναι τὸ κατώτερον πέρας καὶ λέγεται ***ἐλάχιστον*** τοῦ συνόλου Σ. Ἀλλὰ προφανῶς, εἶναι δυνατόν, τὸ ἀνώτερον ἢ κατώτερον πέρας νὰ μὴ εἶναι καὶ ἀριθμὸς τοῦ συνόλου, ὅπως εἴδομεν ἄλλως τε καὶ εἰς τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα.

Κατὰ ταῦτα, τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν x, τῶν πληρούντων τὰς ἀνισότητας $0 \leq x \leq 1$, ἔχει κατώτερον πέρας τὸ μηδέν, ἀνώτερον πέρας τὸ 1, καί, ἐπειδὴ τὸ 0 εἶναι στοιχεῖον τοῦ συνόλου, λέγεται καὶ ἐλάχιστον τοῦ συνόλου· δι' ὅμοιον λόγον ἡ μονὰς λέγεται μέγιστον τοῦ συνόλου.

Τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν x, τῶν πληρούντων τὰς ἀνισότητας: $0 \leq x < 1$, ἔχει ἀνώτερον πέρας τὴν μονάδα, ἀλλὰ δὲν ἔχει μέγιστον, διότι δὲν εἶναι στοιχεῖον τοῦ συνόλου ἡ μονάς.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ὅταν ἓν σύνολον Σ εἶναι περατωμένον, θὰ ὑπάρχῃ ἀριθμός τις πεπερασμένος Μ, ὅστις θὰ εἶναι τὸ ἀνώτερον πέρας τοῦ συνόλου Σ καὶ ἀριθμός τις πεπερασμένος μ, ὅστις θὰ εἶναι τὸ κατώτερον πέρας τοῦ συνόλου. Οἱ δὲ δύο αὐτοὶ ἀριθμοὶ Μ καὶ μ θὰ ἔχουν τὰς ἑξῆς ἰδιότητας:

Τὸ σύνολον Σ δὲν θὰ περιέχῃ ἀριθμὸν μεγαλύτερον τοῦ Μ οὔτε μικρότερον τοῦ μ· ἀλλὰ θὰ περιέχῃ ἀσφαλῶς ἀριθμοὺς μεγαλυτέρους τοῦ $M-\varepsilon$ καὶ μικροτέρους τοῦ $\mu+\varepsilon$, ὁσονδήποτε μικρὸς καὶ ἂν ὑποτεθῇ ὁ θετικὸς ἀριθμὸς ε.

Ἡ διαφορὰ $M-\mu$ λέγεται ***αἰώρησις*** τοῦ συνόλου Σ. Ὅταν τὸ σύνολον Σ δὲν εἶναι περατωμένον ἄνωθεν, θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ ἀνώτερον πέρας Μ εἶναι τὸ $+\infty$ καί, ὅταν τὸ σύνολον Σ δὲν εἶναι περατωμένον κάτωθεν, θὰ λέγωμεν ὅτι κατώτερον πέρας μ εἶναι τὸ $-\infty$.

Σύνολα ἀριθμήσιμα καὶ μὴ ἀριθμήσιμα

15. Ἔστω τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν (δηλ. τῶν θετικῶν ἀκεραίων)

$$\Phi \qquad 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots$$

καὶ ἓν ἄλλο σύνολον ἀριθμῶν Σ. Τὸ σύνολον Σ λέγεται ***ἀριθμήσιμον***, ἐὰν εἶναι δυνατὸν νὰ νοηθοῦν τοποθετημένοι οἱ ἀριθμοὶ τοῦ συνόλου Σ οὕτως, ὥστε εἰς ἕκαστον τῶν ἀκεραίων 1, 2, 3, . . . νὰ ἀντιστοιχῇ ἕνας ἀριθμὸς τοῦ συνόλου Σ καὶ τἀνάπαλιν.

Ἤτοι, σύνολόν τι Σ εἶναι ἀριθμήσιμον, ἐὰν εἶναι δυνατὸν νὰ σχηματισθῇ ***τελεία*** ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου Σ καὶ τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου Φ, δηλ. εἰς ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ Σ νὰ ἀντιστοιχῇ ἕνα στοιχεῖον τοῦ Φ καὶ τανάπαλιν.

Εὐκόλως φαίνεται ὅτι, ἐὰν εἶναι δυνατὸν νὰ τοποθετηθῶσι τὰ στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου Σ οὕτως, ὥστε εἰς ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ Φ νὰ ἀντιστοιχῇ ὁμὰς στοιχείων τοῦ Σ καὶ τἀνάπαλιν, τὸ σύνολον Σ εἶναι ἀριθμήσιμον.

Π. χ. ἔστω τὸ σύνολον

$$\Sigma : \quad \alpha_{11}, \ \alpha_{12}, \ \alpha_{22}, \ldots \ \alpha_{\lambda\mu}, \ldots$$

ὅπου λ,μ λαμβάνουν ὅλας τὰς ἀκεραίας καὶ θετικὰς τιμάς.

Τὸ σύνολον τοῦτο εἶναι ἀριθμήσιμον.

Παρατηρῶ πρὸς τοῦτο ὅτι δύναμαι νὰ φαντασθῶ τοποθέτησιν τῶν ἀριθμῶν τοῦ συνόλου Σ ὡς ἑξῆς: Νὰ λάβω κατ' ἀρχὰς ὡς ἀντίστοιχον πρὸς τὸν ἀκέραιον 2 τὸν α_{11}, ὡς ἀντίστοιχον τοῦ ἀκεραίου 3 τὴν ὁμάδα: $\alpha_{12}\ \alpha_{21}$, ὅπου οἱ δεῖκται ἔχουν ἄθροισμα 3, ὡς ἀντίστοιχον τοῦ 4 τὴν ὁμάδα: $\alpha_{13}\ \alpha_{22}\ \alpha_{31}$, ὅπου οἱ δεῖκται ἔχουν ἄθροισμα 4 κ.ο.κ. καὶ γενικῶς ὡς ἀντίστοιχον πρὸς τὸν ἀκέραιον ν τὴν ὁμάδα τῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα ἔχουν δείκτας τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι ν.

$$\begin{array}{ccccccc|c} & & & \alpha_{11} & & & & (2) \\ & & \alpha_{12} & & \alpha_{21} & & & (3) \\ & \alpha_{13} & & \alpha_{22} & & \alpha_{31} & & (4) \\ \alpha_{14} & & \alpha_{23} & & \alpha_{32} & & \alpha_{41} & (5) \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \end{array}$$

Φαντάζομαι ἤδη τοποθετημένα εἰς μίαν γραμμὴν τὰ στοιχεῖα αὐτὰ οὕτως, ὥστε πρῶτον στοιχεῖον τῆς γραμμῆς νὰ εἶναι τὸ α_{11} δεύτερον καὶ τρίτον στοιχεῖον νὰ εἶναι τὰ στοιχεῖα τῆς ἀνωτέρω δευτέρας γραμμῆς (δηλ. τὰ α_{12}, α_{21})· τέταρτον, πέμπτον καὶ ἕκτον νὰ εἶναι τὰ στοιχεῖα τῆς ἀνωτέρω τρίτης γραμμῆς (δηλ. τὰ α_{13}, α_{22}, α_{31}) κ.ο.κ. Ἤτοι τὰ φαντάζομαι τοποθετημένα ὡς ἑξῆς

$$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{13}, \alpha_{22}, \alpha_{31}, \alpha_{14}, \alpha_{23}, \alpha_{32}, \alpha_{41} \ldots .$$

Ἐὰν ἤδη καλέσω τὸ πρῶτον β_1, τὸ δεύτερον β_2 τὸ τρίτον β_3 κ.ο.κ. θὰ ἔχω

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$$

ὁπότε διακρίνω τὴν τελείαν ἀντιστοιχίαν τῶν στοιχείων τοῦ Σ καὶ Φ.

Θὰ ἠδυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὰ ἀνωτέρω καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἔστωσαν τὰ ἀριθμήσιμα σύνολα:

$$\begin{array}{lllllll} \Sigma_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \cdot & \cdot \\ \Sigma_2 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma_3 & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Τὸ σύνολον τὸ ἔχον ὡς στοιχεῖα τὰ $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \ldots \Sigma_\nu, \ldots$ εἶναι προφανῶς ἀριθμήσιμον. Θεωρήσωμεν ἤδη τὸ σύνολον τὸ ἔχον ὡς στοιχεῖα τὰ στοιχεῖα τῶν συνόλων $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \ldots \Sigma_\nu, \ldots$ Λέγω ὅτι καὶ τοῦτο εἶναι ἀριθμήσιμον. Ἀρκεῖ νὰ φαντασθῶ τοποθετημένα εἰς τὴν αὐτὴν γραμμὴν τὰ στοιχεῖα τῶν συνόλων αὐτῶν γράφων μετὰ τὸ α_{11} τὰ στοιχεῖα τῶν διαγωνίων $\alpha_{12}\ \alpha_{21}$, $\alpha_{13}\ \alpha_{22}\ \alpha_{31}$, κ. ο. κ. ἤτοι οὕτως, ὥστε νὰ ἔχω

$$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{13}, \alpha_{22}, \alpha_{31}, \alpha_{14}, \alpha_{23}, \alpha_{32}, \alpha_{41}, \ldots\ldots$$

Ἐπιτυγχάνομεν οὕτω, ὅπως καὶ ἀνωτέρω εἴδομεν, τελείαν ἀντιστοιχίαν μεταξὺ τῶν στοιχείων τοῦ Φ καὶ τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου Σ τοῦ ἔχοντος ὡς στοιχεῖα τὰ στοιχεῖα τῶν $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \ldots \Sigma_\nu, \ldots$

Ἀποδεικνύεται οὕτω, ὅτι τὸ σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμήσιμον. Τοῦτο φαίνεται ἀμέσως, ἐὰν θέσωμεν εἰς τὰ ἀνωτέρω $\alpha_{\lambda\mu} = \frac{\lambda}{\mu}$.

Ἐννοεῖται ὅτι θεωροῦμεν ὡς κλάσματα διάφορα δύο κλάσματα $\frac{\lambda}{\mu}, \frac{\lambda'}{\mu'}$, ἐφόσον δὲν εἶναι $\mu = \mu'$ καὶ $\lambda = \lambda'$. Τουτέστιν ὡς διάφορα θὰ θεωροῦμεν καὶ δύο κλάσματα ἴσα μὲ ἀριθμητὰς καὶ παρονομαστὰς διαφόρους.

Ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν δὲν θεωροῦμεν ὡς διάφορα δύο τοιαῦτα κλάσματα (δηλ. δύο κλάσματα $\frac{\lambda}{\mu}$ καὶ $\frac{\lambda'}{\mu'}$ διὰ τὰ ὁποῖα ἔχομεν $\mu\lambda' - \mu'\lambda = 0$), θὰ ἔχωμεν, ὅτι τὸ σύνολον τῶν ρητῶν εἶναι ἀριθμήσιμον.

16. Ἔστω ἤδη τὸ σύνολον Σ τῶν ρητῶν καὶ ἀσυμμέτρων τῶν περιλαμβανομένων μεταξὺ 0 καὶ 1· ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ σύνολον τοῦτο Σ ***δὲν εἶναι ἀριθμήσιμον.*** Ὅταν ἀποσπᾶται ἀπὸ τὸ σύνολον Σ οἱαδήποτε ἀριθμήσιμος ἀπειρία στοιχείων, θὰ μένῃ πάντοτε ἀπειρία στοιχείων καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν ἐργαζώμεθα. Θὰ λέγωμεν τότε ὅτι τὸ σύνολον Σ ἔχει τὴν ***δύναμιν τοῦ συνεχοῦς.***

Τὸ σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν δὲν εἶναι ἀριθμήσιμον· λέγομεν καὶ δι' αὐτό, ὅτι ἔχει ***τὴν δύναμιν τοῦ συνεχοῦς.*** Ὥστε, ὅταν παρεμβάλωμεν μεταξὺ τῶν ρητῶν ἀριθμῶν τοὺς ἀσυμμέτρους, λαμβάνομεν σύνολον ***μὴ ἀριθμήσιμον***· ἔχομεν οὕτω τὸ συνεχὲς τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Θὰ ἠδυνάμεθα ἐπὶ τὸ ἁπλούστερον νὰ ὁρίσωμεν ὡς ἑξῆς τὴν συνέχειαν τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Λέγοντες ὅτι τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι ***συνεχὲς*** ἐννοοῦμεν ὅτι :

1) Μεταξὺ δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν α καὶ β εἶναι δυνατὸν πάντοτε νὰ παρεμβληθῇ ἀπειρία ἄλλων καὶ μάλιστα, δοθέντος ἀριθμοῦ θετικοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ ε, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν δι᾽ οἱονδήποτε ἀριθμὸν γ (μεταξὺ α καὶ β) ἄλλον μεταξὺ α καὶ β διαφέροντα τοῦ γ ὀλιγώτερον τοῦ ε. Καὶ :

2) Καθ᾽ ***οἱονδήποτε*** τρόπον καὶ ἂν νοήσωμεν, ὅτι κατεμερίσαμεν τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς εἰς δύο τάξεις Α καὶ Β τοιαύτας ὥστε πᾶς ἀριθμὸς τῆς Α νὰ εἶναι μικρότερος παντὸς ἀριθμοῦ τῆς Β, θὰ ἔχωμεν χώρισμα τῶν τάξεων τούτων ***ἕνα*** ἀριθμὸν τοῦ συνόλου μ· οὗτος θὰ εἶναι ὁ μεγαλύτερος τῶν ἀριθμῶν τῆς Α ἢ ὁ μικρότερος τῶν ἀριθμῶν τῆς Β. Πᾶς δὲ μικρότερος τοῦ μ θ᾽ ἀνήκῃ εἰς τὴν τάξιν Α καὶ πᾶς μεγαλύτερος τοῦ μ θ᾽ ἀνήκῃ εἰς τὴν τάξιν Β.

Οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ χρησιμεύουν διὰ νὰ ἐκφράσωμεν τὸ μέτρον ***συνεχῶν μεγεθῶν***· π. χ. μῆκος τόξου, ἐμβαδὸν ἐπιφανείας, ὄγκον στερεοῦ κλπ. Στηριζόμεθα προφανῶς ἐπὶ τοῦ ἀξιώματος ὅτι εἰς ἕκαστον μέγεθος ἀντιστοιχεῖ ἕνας ἀριθμὸς καὶ εἰς ἕκαστον ἀριθμὸν ἕνα μέγεθος.

Ἀσκήσεις.

Νὰ ἀποδειχθῶσιν αἱ προτάσεις.

1) Τὸ σύνολον τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμήσιμον.

2) Ἐὰν σύνολον Σ εἶναι ἀριθμήσιμον καὶ πᾶν ἄπειρον σύνολον σχηματιζόμενον ἀπὸ στοιχεῖα λαμβανόμενα ἀπὸ τὸ Σ θὰ εἶναι ἀριθμήσιμον· ἢ καί, ἀριθμήσιμον εἶναι τὸ σύνολον στοιχείων α_μ ὅπου ὁ μ λαμβάνει τιμὰς θετικὰς καὶ ἀκεραίας ἀπείρους τὸ πλῆθος, ἀλλ᾽ οὐχὶ πάσας τὰς θετικὰς καὶ ἀκεραίας.

3) Τὸ σύνολον τὸ ἔχον ὡς στοιχεῖα τὰ στοιχεῖα ἑνὸς ἀπείρου συνόλου ἀριθμησίμου καὶ ἑνὸς πεπερασμένου συνόλου εἶναι ἀριθμήσιμον.

4) Τὰ στοιχεῖα δύο ἢ τριῶν καὶ ἐν γένει πεπερασμένου ἀριθμοῦ συνόλων ἀριθμησίμων ἀποτελοῦν σύνολον ἀριθμήσιμον.

5) Τὸ σύνολον τῶν στοιχείων $\alpha_{\varkappa\lambda\mu}$, ὅπου $\varkappa$, λ, μ λαμβάνουν πάσας τὰς θετικὰς ἀκεραίας τιμάς, εἶναι ἀριθμήσιμον.

6) Τὸ σύνολον τῶν στοιχείων $\alpha_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_\mu}$, ὅπου οἱ δεῖκται $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_\mu$ λαμβάνουν πάσας τὰς θετικὰς ἀκεραίας τιμάς, εἶναι ἀριθμήσιμον.

Γεωμετρικαὶ ἐκφράσεις ἐπὶ τῶν συνόλων.

17. Ἐὰν συμφωνήσωμεν ἕκαστον πραγματικὸν ἀριθμὸν α νὰ καλοῦμεν ***σημεῖον α***, δυνάμεθα εἰς τοὺς προηγουμένους ὁρισμοὺς ἐπὶ τῶν συνόλων ν' ἀντικαταστήσωμεν τὴν φράσιν ***ἀριθμὸν τοῦ συνόλου*** μὲ τὴν φράσιν ***σημεῖον τοῦ συνόλου.***

Προφανῶς θέτομεν τὸν ὅρον αὐτὸν ὁρμώμενοι ἐκ τῆς ἀντιστοιχίας, ἡ ὁποία παραδεχόμεθα ὅτι ὑπάρχει μεταξὺ ἑνὸς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ καὶ ἑνὸς σημείου τοῦ ἄξονος τῶν x. Δηλαδὴ παραδεχόμεθα ὅτι δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τὴν ἑξῆς ἀντιστοιχίαν:

Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ἀπεριορίστου X'X, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν ἄξονα τῶν x, θεωροῦμεν δύο σημεῖα 0 καὶ Θ, εἰς τὰ ὁποῖα συμφωνοῦμεν ν' ἀντιστοιχοῦν οἱ ἀριθμοὶ 0 καὶ 1.

Θεωροῦμεν τουτέστι σημεῖόν τι 0 ὡς ἀρχήν, θετικὴν φορὰν ἐπὶ τῆς εὐθείας ὡρισμένην καὶ τμῆμά τι 0Θ ὡς μονάδα· εἰς πάντα ἄλλον πραγματικὸν ἀριθμὸν ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον x τοῦ ἄξονος X'X καὶ εἰς πᾶν σημεῖον τοῦ ἄξονος X'X θὰ ἀντιστοιχῇ ἕνας ἀριθμός (¹). Διὰ τοῦ αὐτοῦ γράμματος x δηλώνομεν ἓν σημεῖον τοῦ ἄξονος καὶ τὴν τετμημένην αὐτοῦ τοῦ σημείου.

Οὕτω, ὅσα ἐλέχθησαν προηγουμένως περὶ περατωμένου συνόλου ἄνωθεν, κάτωθεν, περὶ ἀνωτέρου πέρατος κ. τ. λ. δυνάμεθα νὰ τὰ διατυπώσωμεν μεταχειριζόμενοι γεωμετρικὰς ἐκφράσεις.

Κατὰ ταῦτα, τὰ σύνολα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, περὶ τῶν ὁποίων ἐδῶ πραγματευόμεθα, εἶναι σύνολα σημείων κειμένων ἐπὶ μιᾶς εὐθείας X'X καὶ λέγονται ***γραμμικὰ*** σύνολα. Καὶ συμφώνως πρὸς τοὺς ἀνωτέρω ὁρισμοὺς ἕνα γραμμικὸν σύνολον σημείων εἶναι περατωμένον ἄνωθεν, ἐὰν ὑπάρχῃ σημεῖόν τι α πρὸς τὰ δεξιὰ παντὸς σημείου τοῦ συνόλου· τότε καὶ πᾶν ἄλλο σημεῖον πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ α θὰ ἔχῃ τὴν ἰδιότητα νὰ εἶναι πρὸς τὰ δεξιὰ παντὸς σημείου τοῦ συνόλου· ὥστε θὰ ὑπάρχῃ τότε ἀπειρία σημείων ἐχόντων αὐτὴν τὴν ἰδιότητα.

Ὁμοίως λέγομεν ὅτι τὸ σύνολον θὰ εἶναι περατωμένον κάτωθεν, ἐὰν ὑπάρχῃ σημεῖόν τι α' πρὸς τὰ ἀριστερὰ παντὸς σημείου τοῦ συνόλου, ὁπότε καὶ πᾶν σημεῖον πρὰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ α' θὰ εἶναι πρὸς τὰ ἀριστερὰ παντὸς σημείου τοῦ συνόλου.

(¹) Δὲν ἀναφέρομεν ἐνταῦθα ποῖα ἀξιώματα ἀρκεῖ νὰ παραδεχθῇ τις, ἵνα ἔχῃ τὴν ἀντιστοιχίαν αὐτήν.

Ὥστε πάντα τὰ σημεῖα περατωμένου συνόλου εὑρίσκονται ἐπὶ τμήματος τοῦ ἄξονος X′X πεπερασμένου μήκους, δηλ. διὰ πᾶν περατωμένον σύνολον σημείων εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ ἀπειρία σημείων πρὸς τὰ δεξιὰ τῶν σημείων τοῦ συνόλου καὶ ἀπειρία πρὸς τ᾽ ἀριστερά.

Θεωρήσωμεν σύνολον σημείων περατωμένον ἄνωθεν· μεταξὺ τῶν σημείων α, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν ἰδιότητα νὰ εἶναι πρὸς τὰ δεξιὰ ὅλων τῶν σημείων τοῦ συνόλου, ὑπάρχει ἕνα, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐξ ὅλων αὐτῶν τὸ μᾶλλον πρὸς τ᾽ ἀριστερά· αὐτὸ εἶναι τὸ ἀνώτερον πέρας.

Ὁμοίως ἔχομεν δι᾽ ἓν σύνολον σημείων περατωμένον κάτωθεν, ὅτι μεταξὺ ὅλων τῶν σημείων α′, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν ἰδιότητα νὰ εἶναι πρὸς τ᾽ ἀριστερὰ ὅλων τῶν σημείων τοῦ συνόλου, ὑπάρχει ἕνα, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐξ ὅλων αὐτῶν τὸ μᾶλλον πρὸς τὰ δεξιά· τοῦτο λέγεται κατώτερον πέρας τοῦ συνόλου.

18. Ἔστωσαν δύο πραγματικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β· καλοῦμεν διάστημα αβ καὶ σημειοῦμεν διὰ τοῦ (α,β) τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν τῶν εὑρισκομένων μεταξὺ α καὶ β· πάντα τοιοῦτον ἀριθμὸν x καλοῦμεν ἐσωτερικὸν εἰς τὸ διάστημα, ἢ λέγομεν ὅτι τὸ διάστημα (α, β) περιέχει τὸν ἀριθμὸν x· καί, ἐὰν ὁ x πληροῖ τὴν ἀνισότητα $\alpha < x < \beta$ (ἐθέσαμεν $\alpha < \beta$) λέγομεν ὅτι εἶναι ἐσωτερικὸς ὑπὸ τὴν στενὴν (τῆς λέξεως) σημασίαν, ἐὰν ὅμως ὁ x δύναται νὰ συμπέσῃ μὲ ἓν ἐκ τῶν ἄκρων, λέγομεν ὅτι εἶναι ἐσωτερικὸς ὑπὸ τὴν εὐρεῖαν σημασίαν.

Τὸ διάστημα (α, β) λέγεται κλειστόν, ἐὰν περιλαμβάνῃ πᾶσαν τιμὴν x, διὰ τὴν ὁποίαν ἔχομεν $\alpha \leq x \leq \beta$. Λέγεται δὲ ἀνοικτόν, ἐὰν περιλαμβάνῃ πᾶσαν τιμὴν x, διὰ τὴν ὁποίαν ἔχομεν $\alpha \leq x < \beta$ ἢ $\alpha < x \leq \beta$ ἢ $\alpha < x < \beta$.

Ὁρικὰ σημεῖα.

19. Ἔστω ἓν γραμμικὸν σύνολον Σ καὶ ἀριθμός τις α ἀνήκων ἢ ὄχι εἰς τὸ σύνολον. Ἐὰν πᾶν διάστημα περιέχον τὸ α περιέχῃ ἓν τοὐλάχιστον σημεῖον τοῦ συνόλου διάφορον τοῦ α, θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ α εἶναι ***ὁρικὸν σημεῖον*** τοῦ συνόλου ἢ καὶ σημεῖον συμπυκνώσεως·(¹) τουτέστι θὰ εἶναι τὸ α ὁρικὸν σημεῖον ἐάν :
οἱοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ θετικὸς ἀριθμὸς ε, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν σημεῖον τοῦ συνόλου Σ διάφορον τοῦ α καὶ ἀπέχον ἀπὸ τοῦ α ὀλιγώτερον τοῦ ε.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι : ἐὰν α εἶναι ὁρικὸν σημεῖον, ὑπάρχει ἀπειρία

¹) Σημεῖα συμπυκνώσεως λέγονται τὰ ὁρικὰ σημεῖα τὰ ἔχοντα εἰς τὴν περιοχήν των ἀπειρίαν σημείων μὴ ἀριθμήσιμον.

σημείων τοῦ συνόλου εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ α, δηλ. ὑπάρχει πάντοτε ἀπειρία σημείων τοῦ συνόλου εἰς τὸ διάστημα $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$, ὅπου ε θετικὸς αὐθαίρετος. Διότι, ἔστω ὅτι ἓν διάστημα $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ περιεῖχε μόνον ϱ σημεῖα τοῦ συνόλου (ϱ— πεπερασμένος)· ἔστωσαν τὰ σημεῖα ταῦτα $x=\alpha_1, \alpha_2 \,.\,.\, \alpha_\varrho$· ἐὰν ἐλαμβάνομεν θετικόν τινα ἀριθμὸν δ μικρότερον ὅλων τῶν διαφορῶν

$$|\alpha-\alpha_1|, \quad |\alpha-\alpha_2|, \ldots \quad |\alpha-\alpha_\varrho|$$

εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ διάστημα $(\alpha-\delta \;\alpha+\delta)$ δὲν θὰ περιεῖχε σημεῖον τοῦ συνόλου· ἐπομένως δὲν θὰ ἦτο τὸ α ὁρικὸν σημεῖον τοῦ συνόλου.

Παραδείγματα. Τὸ σύνολον : $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots$ ἔχει ὁρικὸν σημεῖον τὸ μηδέν.

Τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων δὲν ἔχει ὁρικὸν σημεῖον.

Τὸ σύνολον :

$$\frac{1}{2}, \; 1+\frac{1}{2}, \; 2, \; 1+\frac{1}{3}, \; 2, \; \frac{1}{4}, \; 1+\frac{1}{4}, \; 2, \ldots\ldots$$

ἔχει ὁρικὰ σημεῖα τὸ μηδὲν καὶ τὴν μονάδα.

Οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ κλειστοῦ διαστήματος (α, β) σχηματίζουν σύνολον μὲ ὁρικὰ σημεῖα πάντα τὰ σημεῖα τοῦ διαστήματος.

Τὸ σύνολον τῶν ῥητῶν ἀριθμῶν, τῶν πληρούντων τὴν ἀνισότητα $\alpha<x<\beta$, ἔχει ὁρικὰ σημεῖα πάντα τὰ σημεῖα τοῦ κλειστοῦ διαστήματος (α, β), δηλ. πάντας τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ α ἕως β συμπεριλαμβανομένων καὶ τῶν α, β.

Τὸ σύνολον Σ' τῶν ὁρικῶν σημείων ἑνὸς συνόλου Σ λέγεται ***παράγωγον*** τοῦ Σ. Κατὰ ταῦτα, τὸ παράγωγον τοῦ συνόλου τῶν ῥητῶν x, τῶν πληρούντων τὴν ἀνισότητα $\alpha<x<\beta$, εἶναι τὸ κλειστὸν διάστημα (α, β). Διακρίνομεν οὕτω, ὅτι εἶναι δυνατὸν τὸ παράγωγον τοῦ Σ νὰ περιέχῃ σημεῖα μὴ ὑπάρχοντα εἰς τὸ Σ.

20. Σχετικῶς πρὸς τὴν ὕπαρξιν ὁρικῶν σημείων ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

Θεώρημα τοῦ Weierstrass—Bolzano. «Πᾶν περατωμένον σύνολον περιέχον ἀπειρίαν στοιχείων θὰ ἔχῃ τοὐλάχιστον ἓν ὁρικὸν σημεῖον».

Ἀπόδειξις. Ἀφοῦ τὸ σύνολον Σ εἶναι περατωμένον, θὰ ὑπάρχῃ διάστημα $\alpha\beta$, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ εὑρίσκωνται (θὰ εἶναι ἐσωτερικὰ) ἄπειρα σημεῖα y τοῦ συνόλου Σ· δηλ. οἱ ἀριθμοὶ y θὰ εἶναι ἀριθμοὶ τοῦ Σ

τοιοῦτοι, ὥστε δὲν θὰ ὑπάρχῃ τις ἐξ αὐτῶν ἐπαληθεύων τὴν ἀνισότητα $y<\alpha$ ἢ τὴν ἀνισότητα $y>\beta$· ἤτοι ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ y (τοῦ συνόλου Σ) θὰ εἶναι ἀπὸ ἐκείνους τοὺς ἀριθμοὺς x, οἱ ὁποῖοι πληροῦν τὰς σχέσεις.

$$\alpha \leq x \leq \beta$$

Παρατηρῶ ἤδη ὅτι θὰ ὑπάρχουν ἀριθμοὶ ω ἔχοντες τὴν ἑξῆς ἰδιότητα :

Δι' ἕκαστον ω ὑπάρχουν ἄπειροι ἀριθμοὶ y (τοῦ συνόλου Σ) μεγαλύτεροι τοῦ ω· ἕνας τοιοῦτος ω εἶναι ἐπὶ παραδείγματι ὁ α· οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ ω σχηματίζουν ἕνα σύνολον Σ_1· ὁ ἀριθμὸς β θὰ εἶναι προφανῶς ἓν ἀνώτερον φράγμα τοῦ συνόλου Σ_1· ἄρα (§ 12) τὸ σύνολον Σ_1 θὰ ἔχῃ ἀνώτερον πέρας ἀριθμόν τινα Γ. Λέγω ὅτι αὐτὸς ὁ Γ εἶναι ἓν ***ὁρικὸν σημεῖον*** τοῦ συνόλου Σ (ἢ καὶ ὁρικὸς ἀριθμὸς τοῦ συνόλου). Ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξω ὅτι εὑρίσκονται ἄπειρα σημεῖα τοῦ συνόλου Σ εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ Γ, δηλ. εἰς πᾶν διάστημα $(\Gamma-\varepsilon,\ \Gamma+\varepsilon)$.

Ἔστω ε θετικὸς ὁσονδήποτε μικρός· ἐπειδὴ ἀνώτερον πέρας τοῦ συνόλου Σ_1 εἶναι τὸ Γ, θὰ ὑπάρχῃ εἷς τουλάχιστον ἀριθμὸς ω τοῦ συνόλου Σ_1 μεγαλύτερος τοῦ $\Gamma-\varepsilon$· ἔστω εἷς τοιοῦτος ὁ ω_1 δηλ. $\omega_1>\Gamma-\varepsilon$· αὐτὸς ὅμως ὁ ω_1 (ὡς στοιχεῖον τοῦ Σ_1) θὰ ἔχῃ ἀπείρους μεγαλυτέρους του εἰς τὸ σύνολον Σ· ἑπομένως θὰ ὑπάρχουν ἄπειροι ἀριθμοὶ τοῦ συνόλου Σ, οἱ ὁποῖοι θὰ εἶναι μεγαλύτεροι τοῦ $\Gamma-\varepsilon$· ἂς καλέσω τοὺς τοιούτους y_1· δηλ. διὰ πάντα y_1 θὰ ἔχω $y_1>\Gamma-\varepsilon$.

Ἀπὸ αὐτοὺς τοὺς y_1 ὑπάρχουν ἄπειροι μικρότεροι τοῦ $\Gamma+\varepsilon$. Καὶ τῷ ὄντι, ἔστω τὸ ἐναντίον, ἔστω δηλ. ὅτι δὲν ὑπῆρχον ἄπειροι y_1 μικρότεροι τοῦ $\Gamma+\varepsilon$· τότε θὰ ὑπῆρχον ἄπειροι y_1 μεγαλύτεροι τοῦ $\Gamma+\varepsilon$, ὁπότε ὁ $\Gamma+\varepsilon$ θὰ εἶχεν ἀπείρους μεγαλυτέρους του εἰς τὸ σύνολον Σ· ἑπομένως θὰ ἦτο στοιχεῖον τοῦ συνόλου Σ_1· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον, διότι πᾶς ἀριθμὸς τοῦ συνόλου Σ_1 εἶναι μικρότερος τοῦ $\Gamma+\varepsilon$.

Ὥστε ἐκ τῶν y_1 ὑπάρχουν ἄπειροι μικρότεροι τοῦ $\Gamma+\varepsilon$· ἂς τοὺς καλέσωμεν y_2. Διὰ πάντα τοιοῦτον y_2 θὰ ἔχωμεν :

$$\Gamma-\varepsilon<y_2<\Gamma+\varepsilon.$$

Ὅθεν ἕπεται ὅτι εὑρίσκονται ἄπειρα σημεῖα τοῦ συνόλου Σ εἰς πᾶν διάστημα $(\Gamma-\varepsilon,\ \Gamma+\varepsilon)$, ὅπου ε θετικὸς ὁσονδήποτε μικρός.

21. ***Θεώρημα.*** Τὸ σύνολον τῶν ὁρικῶν ἀριθμῶν (ὁρικῶν σημείων) περατωμένου συνόλου Σ, ἤτοι τὸ παράγωγον σύνολον τοῦ Σ (§ 19), ἔχει

μέγιστον· δηλ. μεταξὺ τῶν ὁρικῶν ἀριθμῶν [1] τοῦ Σ ὑπάρχει εἷς μεγαλύτερος.

Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ παρατηρήσωμεν κατὰ τὴν προηγουμένην ἀπόδειξιν (§ 20) ὅτι δὲν ὑπάρχει ὁρικὸς ἀριθμὸς τοῦ συνόλου Σ μεγαλύτερος τοῦ Γ. Καὶ τῷ ὄντι, ἔστω ὅτι εἷς ἀριθμὸς Δ μεγαλύτερος τοῦ Γ ἦτο ὁρικὸς ἀριθμὸς τοῦ συνόλου Σ. Ἀφ᾽ ἑνὸς θὰ ἔχωμεν

$$\Gamma < \frac{\Gamma+\Delta}{2} < \Delta$$

καὶ ἀφ᾽ ἑτέρου ὁ $\frac{\Gamma+\Delta}{2}$ ὡς μικρότερος τοῦ ὁρικοῦ ἀριθμοῦ Δ θὰ ἔχῃ ἀπείρους ἀριθμοὺς μεγαλυτέρους ἑαυτοῦ εἰς τὸ σύνολον Σ (διότι εἰς τὸ διάστημα $\left(\frac{\Gamma+\Delta}{2}, \frac{3\Delta-\Gamma}{2}\right)$ θὰ ὑπάρχουν ἄπειροι ἀριθμοὶ τοῦ Σ)· ἑπομένως ὁ $\frac{\Gamma+\Delta}{2}$ θὰ εἶναι ἀριθμὸς τοῦ συνόλου Σ_1· ἀλλ᾽ ὁ Γ εἶναι ἀνώτερον πέρας τοῦ συνόλου Σ_1· ἑπομένως δὲν εἶνε δυνατὸν νὰ ὑπάρχῃ ἀριθμὸς τοῦ συνόλου Σ_1 μεγαλύτερος τοῦ Γ, ἐνῷ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἀνισότητα ἔπρεπε νὰ ἔχωμεν τοιοῦτον τὸν $\frac{\Gamma+\Delta}{2}$. ὥστε:

ὁ Γ εἶνε ὁ μεγαλύτερος ὁρικὸς ἀριθμὸς τοῦ συνόλου Σ.

Παρατηρήσεις. 1. Αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς Γ συμπίπτει μὲ τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος θὰ ὀνομασθῇ κατωτέρω «τὸ μεγαλύτερον ὅριον τοῦ συνόλου Σ».

2) Μεταξὺ τῶν ὁρικῶν ἀριθμῶν τοῦ Σ ὑπάρχει εἷς μικρότερος.

Ὁ ἐλάχιστος οὗτος ἀριθμὸς τοῦ παραγώγου συνόλου συμπίπτει μὲ τὸν ἀριθμόν, ὅστις θὰ ὀνομασθῇ κατωτέρω «τὸ μικρότερον ὅριον τοῦ συνόλου Σ».

3) Ὅταν ὁ μεγαλύτερος ὁρικὸς ἀριθμὸς ἑνὸς συνόλου Σ συμπίπτῃ μὲ τὸν μικρότερον ὁρικὸν ἀριθμὸν τοῦ αὐτοῦ συνόλου, θὰ ἔχῃ μόνον ἕνα ὁρικὸν ἀριθμὸν (ὁρικὸν σημεῖον) τὸ σύνολον Σ.

4) Σύνολον μὴ περατωμένον δυνατὸν νὰ περιέχῃ ἀπειρίαν σημείων καὶ ὅμως νὰ μὴ ἔχῃ ὁρικὸν σημεῖον, ὅπως π. χ. τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ἐὰν ὅμως ὑπάρχουν ἄπειρα σημεῖα τοῦ συνόλου εἰς διάστημα πεπερασμένον, θὰ ὑπάρχῃ ὁρικὸν σημεῖον.

---

[1] Κάμνομεν χρῆσιν ἐδῶ τοῦ ὅρου «ὁρικὸς ἀριθμὸς» ἀντὶ τοῦ ὅρου «ὁρικὸν σημεῖον».

Παράγωγα σύνολα. [1]

22. Ἔστω σύνολον Σ. Τὰ ὁρικά του σημεῖα σχηματίζουσιν ἓν σύνολον Σ^1.[2] Τοῦτο ἐκαλέσαμεν παράγωγον σύνολον τοῦ Σ. Τὰ ὁρικὰ σημεῖα τοῦ Σ^1 σχηματίζουσι σύνολόν τι Σ^2· τοῦτο εἶναι παράγωγον σύνολον τοῦ Σ^1, λέγεται δὲ ***παράγωγον σύνολον τοῦ Σ τάξεως δύο.*** Τὰ ὁρικὰ σημεῖα τοῦ Σ^2 σχηματίζουν σύνολόν τι Σ^3. Τοῦτο λέγεται ***παράγωγον σύνολον τοῦ Σ τάξεως τρία*** κ.ο.κ.

Παραδείγματα. α΄. Ἔστω τὸ σύνολον Σ τῶν σημείων

$$x = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{\nu}, \ldots$$

τὸ παράγωγον αὐτοῦ σύνολον Σ^1 ἀνάγεται εἰς τὸ σημεῖον $x=0$.

Ἔστω τὸ σύνολον τῶν σημείων

$$\Sigma \qquad 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{\nu}, \ldots$$

Πάλιν παράγωγον σύνολον θὰ εἶναι τὸ $x=0$.

Θεωρήσωμεν τὸ διάστημα $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ καὶ τὸ ἀντίστοιχον τμῆμα $M_1 M_2$ τοῦ ἄξονος $X'X$· ἐπὶ τοῦ τμήματος $M_1 M_2$ νοοῦμεν σημεῖα $M_{12}, M_{13}, \ldots$ τοιαῦτα, ὥστε $(M_1 M_{12}) = \frac{1}{2}(M_1 M_2)$, $(M_1 M_{13}) = \frac{1}{3}(M_1 M_2), \ldots$ Ἔστωσαν $\mu_{12}, \mu_{13}, \ldots$ αἱ τετμημέναι τῶν σημείων $M_{12}, M_{13}, \ldots$ Καλέσωμεν Σ_{11} τὸ σύνολον τῶν σημείων $x=1, \mu_{12}, \mu_{13}, \ldots$

Ἐάν, ὅπως εἰργάσθημεν μὲ τὸ διάστημα $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, ἐργασθῶμεν μὲ τὸ διάστημα $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, θὰ ἔχωμεν ἕτερον σύνολον Σ_{12} τῶν σημείων $x = \frac{1}{2}, \mu_{22}, \mu_{23}, \ldots$ κ.ο.κ.

Θεωρήσωμεν ἤδη τὸ σύνολον τῶν συνόλων $\Sigma_{11}, \Sigma_{12}, \Sigma_{13}, \ldots$ δηλ.

---

(1) Ἀναφέρομεν ἐδῶ τοὺς ὁρισμοὺς τοὺς δοθέντας ὑπὸ τοῦ Cantor.

(2) Τὸ Σ^1 δυνατὸν νὰ ἀνάγεται καὶ εἰς ἓν μόνον στοιχεῖον ἢ νὰ μὴ ἔχῃ καὶ κανὲν στοιχεῖον, ὁπότε λέγομεν ὅτι τὸ παράγωγον σύνολον Σ^2 εἶνε μηδέν.

τὸ σύνολον τὸ ἔχον ὡς στοιχεῖα τὰ στοιχεῖα τῶν συνόλων αὐτῶν· θὰ ἔχωμεν ἓν σύνολον E. Παράγωγον σύνολον τοῦ E θὰ εἶνε τὸ Σ καὶ παράγωγον σύνολον τοῦ E τάξεως δύο (ἢ καὶ δεύτερον παράγωγον τοῦ E) θὰ εἶνε τὸ $x = 0$.

β′) Ἂς ζητήσωμεν νὰ σχηματίσωμεν σύνολον Σ τοιοῦτον, ὥστε τὸ παράγωγον αὐτοῦ τάξεως δύο (Σ^2) νὰ περιέχῃ τὸ σημεῖον $\frac{1}{2}$. Πρέπει πρὸς τοῦτο τὸ Σ^1 νὰ περιέχῃ ἀπειρίαν σημείων ἐχόντων ὡς ὁρικὸν σημεῖον τὸ $\frac{1}{2}$. Τοιαῦτα ἐπὶ παραδείγματι εἶναι τὰ σημεῖα

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \ldots \frac{1}{2}+\frac{1}{2^\nu}, \ldots$$

καὶ ἑπομένως ἀρκεῖ τὸ Σ νὰ περιέχῃ ταῦτα ὡς ὁρικὰ σημεῖα· ὅθεν πρὸς σχηματισμὸν τοῦ Σ νοοῦμεν ἀπειρίαν σημείων ἐχόντων ὡς ὁρικὸν σημεῖον τὸ $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ · ἀπειρίαν ἐπίσης σημείων ἐχόντων ὡς ὁρικὸν τὸ $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$ κ.ο.κ. Θεωρήσωμεν πρὸς τοῦτο τὸ πρῶτον διάστημα $1, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}$. Τὸ σύνολον

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{8}, \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{16}, \ldots \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2^\nu}, \ldots$$

ἔχει ὡς ὁρικὸν σημεῖον τὸ $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$. Καθ' ὅμοιον τρόπον θεωρήσωμεν τὸ δεύτερον διάστημα $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)$ καὶ νοήσωμεν σημεῖα ἔχοντα ὡς πρὸς τὸ διάστημα αὐτὸ θέσιν ὁποίαν καὶ τὰ σημεῖα $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ ὡς πρὸς τὸ διάστημα $(0,1)$· θὰ ἔχωμεν οὕτω σύνολον σημείων ἐχόντων ὡς ὁρικὸν σημεῖον τὸ $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$. Ἐργαζόμεθα ὁμοίως καὶ διὰ τὰ ἄλλα διαστήματα. Τὸ σύνολον τῶν συνόλων αὐτῶν θὰ ἔχῃ δεύτερον παράγωγον περιέχον τὸ σημεῖον $\frac{1}{2}$. [1]

---

[1] Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ σημεῖα $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}, \ldots$ εἶναι ὁρικὰ σημεῖα τοῦ Σ.

γ') Ἔστω Σ τὸ σύνολον τῶν θετικῶν ῥητῶν τῶν μικροτέρων τῆς μονάδος. Πάντα τὰ σημεῖα τοῦ διαστήματος $(0,1)$ θὰ εἶναι ὁρικὰ σημεῖα τοῦ συνόλου Σ. Παρατηροῦμεν ὅτι ἐδῶ τὸ παράγωγον σύνολον Σ^1, (δηλ. τὸ διάστημα $(0,1)$) περιέχει καὶ τὰ στοιχεῖα τοῦ Σ καὶ ἀπειρίαν ἄλλων στοιχείων καὶ μάλιστα τὸ Σ^1 δὲν εἶναι ἀριθμήσιμον σύνολον, ἐνῷ τὸ Σ εἶναι ἀριθμήσιμον σύνολον. Τὸ παράγωγον σύνολον τοῦ Σ^1 εἶναι αὐτὸ τοῦτο τὸ Σ^1· ὥστε τὸ παράγωγον σύνολον τοῦ Σ τάξεως δύο θὰ εἶναι τὸ διάστημα $(0,1)$· τὸ παράγωγον σύνολον τάξεως τρία (Σ^3) θὰ εἶναι πάλιν τὸ διάστημα $(0,1)$ κ.ο.κ. Ὥστε τὸ δοθὲν σύνολον Σ θὰ ἔχῃ παράγωγα σύνολα πάσης τάξεως.

23. Τὸ σύνολον Σ λέγεται ***κλειστόν***, ἐὰν περιέχῃ ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ παραγώγου του Σ^1· τουτέστιν ἐὰν ὅλα τὰ ὁρικὰ σημεῖα τοῦ Σ εἶναι καὶ σημεῖα τοῦ Σ. Τὰ σημεῖα τοῦ Σ τὰ ὁποῖα δὲν εἶνε σημεῖα τοῦ Σ^1 λέγονται ***μεμονωμένα*** σημεῖα.

Τὸ σύνολον Σ λέγεται ***τέλειον***, ἐὰν συμπίπτῃ μὲ τὸ παράγωγόν του σύνολον Σ^1, δηλ.,

Τὸ σύνολον Σ λέγεται τέλειον, ὅταν εἶνε κλειστὸν χωρὶς μεμονωμένα σημεῖα.

Τὸ σύνολον Σ λέγεται ***πυκνὸν καθ' ἑαυτό***, ἐὰν ὅλα του τὰ σημεῖα εἶνε σημεῖα τοῦ παραγώγου του Σ^1· ἐάν, τουτέστι, εἶνε μερικὸν σύνολον τοῦ Σ^1.

Διὰ τοῦ Σ^ν ἂς σημειώσωμεν τὸ παράγωγον τοῦ Σ τάξεως ν καὶ ἂς θεωρήσωμεν τὴν ἀκολουθίαν

$$\Sigma^1,\quad \Sigma^2,\quad \Sigma^3, \ldots\quad \Sigma^\nu, \ldots$$

Αὕτη ἔχει τὰς δύο ἑπομένας ἰδιότητας:

1) Πᾶς ὅρος αὐτῆς εἶνε κλειστὸν σύνολον. Ἤτοι πᾶν παράγωγον σύνολον εἶνε κλειστὸν καὶ

2) Ἕκαστον τῶν παραγώγων συνόλων περιέχει ὅλα τὰ ἑπόμενά του.

Διὰ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἓν σύνολον Σ^1, τὸ ὁποῖον εἶναι παράγωγον ἄλλου συνόλου Σ, εἶναι κλειστόν, ἀρκεῖ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι πᾶν ὁρικὸν σημεῖον τοῦ Σ^1 περιέχεται εἰς τὸ Σ^1. (δηλ. εἶναι σημεῖον τοῦ Σ^1) ἢ καὶ ὅτι, ἐὰν α εἶναι τυχὸν ὁρικὸν σημεῖον τοῦ συνόλου Σ^1, θὰ εἶναι καὶ ὁρικὸν σημεῖον τοῦ συνόλου Σ ἢ καὶ ὅτι πᾶν διάστημα περιέχον τὸ α εἰς τὸ ἐσωτερικόν του περιέχει καὶ ἀπειρίαν σημείων τοῦ Σ· ἀλλὰ τοῦτο φαίνεται ὡς ἑξῆς· ἔστω τυχὸν διάστημα τὸ $(\alpha-\delta,\ \alpha+\delta)$. Εἰς αὐτὸ τὸ διάστημα θὰ ὑπάρχῃ ἀπειρία σημείων τοῦ Σ^1, διότι τὸ α ὑπετέθη ὁρικὸν σημεῖον τοῦ Σ^1· ἔστω ἕν τοιοῦτον σημεῖον (διάφορον τοῦ α) τὸ λ· ἐπειδὴ τὸ λ εἶναι σημεῖον τοῦ Σ^1, θὰ εἶναι ὁρικὸν σημεῖον τοῦ Σ· ἄρα εἰς πᾶν διάστημα (λ—ε, λ+ε) θὰ ὑπάρχῃ ἀπειρία σημείων τοῦ Σ· ἐπειδὴ δὲ ὁ θετικὸς ε δύναται νὰ ληφθῇ ὅσον θέλομεν μικρός, ἕπεται ὅτι δύναται νὰ ληφθῇ καὶ τοιοῦτος, ὥστε τὸ διάστημα (λ—ε, λ+ε) νὰ περιέχεται εἰς τὸ (α—δ, α+δ).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων καὶ ἐκ τῆς παρατηρήσεως τὴν ὁποίαν ἐκάμαμεν εἰς τὸ γ′ παράδειγμα (§ 22) συμπεραίνομεν ὅτι μὲ τὴν πρώτην παραγώγισιν ἑνὸς συνόλου Σ δυνατὸν νὰ εἰσαχθῶσι καὶ ἄλλα στοιχεῖα εἰς τὸ σύνολον, δυνατὸν δηλ. ν' αὐξηθῇ τὸ σύνολον, τοὐτέστι τὸ Σ^1 νὰ περιέχῃ τὰ στοιχεῖα τοῦ Σ καὶ ἄλλα μὴ ἀνήκοντα εἰς τὸ Σ, ἀλλὰ μὲ τὴν δευτέραν παραγώγισιν δυνατὸν ν' ἀφαιρεθῶσι στοιχεῖα ὄχι ὅμως νὰ προστεθῶσι· ἤτοι τὸ Σ^1 δυνατὸν νὰ περιέχῃ ἐκτὸς τῶν στοιχείων τοῦ Σ^2 καὶ ἄλλα προσέτι· δὲν εἶναι ὅμως δυνατὸν τὸ Σ^2 νὰ περιέχῃ στοιχεῖα μὴ περιεχόμενα εἰς τὸ Σ^1.

Διατεταγμένα σύνολα.

24. Ἔστω τὸ σύνολον Σ τῶν ῥητῶν ἀριθμῶν τῶν περιλαμβανομένων εἰς τὸ διάστημα 0,1· (δὲν θὰ θεωρήσωμεν ὡς στοιχεῖα διάφορα τοῦ συνόλου Σ δύο κλάσματα ἰσοδύναμα). Ἄς συμφωνήσωμεν νὰ τὰ ἐννοοῦμεν τοποθετημένα ὡς ἑξῆς :

$$\Sigma \quad 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6} \cdots$$

ὅπου μετὰ τοὺς 0,1 ἐγράψαμεν τὰ ἀνάγωγα κλάσματα, τὰ ἔχοντα παρονομαστὴν 2, 3, 4, . . , ν, . . . καὶ οὕτως, ὥστε ἀπὸ δύο ὁμώνυμα κλάσματα νὰ προηγῆται τὸ μικρότερον.

Τότε παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν δοθῶσι δύο τυχόντες ἀριθμοὶ α, β τοῦ συνόλου Σ, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ποῖος προηγεῖται εἰς τὴν τοποθέτησιν· παρατηροῦμεν δὲ ἐπίσης ὅτι, ἐὰν ἐκ τριῶν ἀριθμῶν α, β, γ τοῦ συνόλου Σ ὁ α προηγῆται τοῦ β καὶ ὁ β προηγῆται τοῦ γ, τότε καὶ ὁ α θὰ προηγῆται τοῦ γ. Λέγομεν διὰ ταῦτα ὅτι τὸ Σ εἶναι ***διατεταγμένον σύνολον.***

Ἔστω τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Ἐὰν συμφωνήσω νὰ θεωρῶ ὅτι ἐκ δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν προηγεῖται ὁ μικρότερος, θὰ ἔχω ***(κατόπιν αὐτῆς τῆς συμφωνίας)*** ὅτι τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι ***διατεταγμένον***· διότι τότε, ἐὰν δοθῶσιν οἱ δύο πραγματικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β, δύναμαι νὰ εἴπω ποῖος προηγεῖται· καὶ ἐὰν ἐκ τριῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν α, β, γ ὁ α προηγῆται τοῦ β καὶ ὁ β τοῦ γ, θὰ προηγῆται καὶ ὁ α τοῦ γ. Γενικῶς λέγομεν ὅτι ἓν σύνολον Σ εἶναι ***διατεταγμένον***, ἢ καὶ ἀκριβέστερον ***ἁπλῶς διατεταγμένον,*** ὅταν γίνεται συμφωνία ἐπιτρέπουσα νὰ νοῶμεν τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Σ τοποθετημένα εἰς τρόπον, ὥστε.

1) ἐὰν δοθῶσι δύο οἱαδήποτε στοιχεῖα τοῦ συνόλου α, β, νὰ δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ποῖον προηγεῖται εἰς τὴν τοποθέτησιν.

2) ἐὰν ἓν στοιχεῖον α τοῦ συνόλου προηγῆται ἑνὸς στοιχείου β καὶ τὸ β προηγῆται ἑνὸς στοιχείου γ, τότε τὸ α νὰ προηγῆται τοῦ γ· ἢ καὶ

λέγομεν ὅτι σύνολον Σ εἶναι ***διατεταγμένον,*** ὅταν ἔχωμεν κριτήριον, δυνάμει τοῦ ὁποίου διακρίνομεν ἐκ δύο αὐθαιρέτως δεδομένων στοιχείων α, β τοῦ συνόλου, ποῖον ἐκ τῶν δύο προηγεῖται τοῦ ἄλλου· ἀνωτέρω μετεχειρίσθημεν δύο διάφορα κριτήρια. Οὕτως εἰς τὸ πρῶτον τῶν προηγουμένων παραδειγμάτων ἐσυμφωνήσαμεν νὰ θεωρῶμεν τὸν μικρότερον ὡς προηγούμενον· π. χ. ὁ $\frac{1}{5}$ εἶναι μικρότερος τοῦ $\frac{2}{3}$ καὶ ὅμως ὁ $\frac{2}{3}$ προηγεῖται,

Ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον εἶναι ἀπαραίτητον εἰς τὴν συμφωνίαν μας εἶναι νὰ ἐπαληθεύεται τὸ ἑξῆς : ἐὰν ἐκ τριῶν στοιχείων α, β, γ τὸ α προηγῆται τοῦ β καὶ τὸ β τοῦ γ, νὰ προηγῆται τὸ α τοῦ γ.

Μερικὴ περίπτωσις διατεταγμένων συνόλων εἶναι τὰ ἀριθμήσιμα σύνολα, θεωρούμενα ὡς ἀκολουθίαι.

Ἔστω ἀριθμήσιμον σύνολον

$$x_1, \quad x_2, \ldots \quad x_\nu, \ldots$$

ἡ συμφωνία τὴν ὁποίαν ἐδῶ θέτομεν εἶναι ἡ ἑξῆς : ἐκ δύο στοιχείων χ_λ, χ_μ νὰ θεωροῦμεν ὡς προηγούμενον τὸ ἔχον μικρότερον δείκτην· ἤτοι νὰ θεωροῦμεν ὡς προηγούμενον τὸ χ_λ, ἐὰν $\lambda<\mu$· θὰ ἔχωμεν δὲ τότε ὅτι, ἐὰν ὁ χ_λ προηγῆται τοῦ χ_μ καὶ ὁ χ_μ τοῦ χ_ν, θὰ προηγῆται ὁ χ_λ καὶ τοῦ χ_ν, διότι ἐὰν $\lambda<\mu$ καὶ $\mu<\nu$, θὰ ἔχωμεν καὶ $\lambda<\nu$.

Σύνολα καλῶς διατεταγμένα. Μεταξὺ τῶν διατεταγμένων συνόλων διακρίνομεν τὰ ***καλῶς διατεταγμένα***.

Θὰ καλέσωμεν ἓν σύνολον Σ ***καλῶς διατεταγμένον***, ἐὰν ἔχῃ τὴν ἑξῆς ἰδιότητα : πᾶν σύνολον περιλαμβανόμενον εἰς τὸ Σ νὰ ἔχῃ στοιχεῖον ***ἀρχικόν***· δηλ. ἐὰν Σ_1 εἶναι ἓν οἱονδήποτε σύνολον περιλαμβανόμενον εἰς τὸ Σ, νὰ ὑπάρχῃ ἓν στοιχεῖον τοῦ Σ_1 προηγούμενον ὅλων τῶν ἄλλων στοιχείων τοῦ Σ_1. Π. χ. ἔστω τὸ σύνολον τῶν ρητῶν τῶν περιλαμβανομένων εἰς τὸ διάστημα (0,1) καὶ ἔστω ὡς κριτήριον τὸ ἑξῆς: ὁ μικρότερος νὰ θεωρῆται καὶ ὡς προηγούμενος· τὸ Σ τότε εἶναι διατεταγμένον· δὲν εἶναι ὅμως καλῶς διατεταγμένον· διότι ἂς λάβωμεν π. χ. τὸ σύνολον Σ' τῶν ρητῶν x τῶν πληρούντων τὰς ἀνισότητας

$$\frac{1}{3} < x < 1$$

Τὸ σύνολον Σ' περιλαμβάνεται προφανῶς εἰς τὸ Σ, μὲ τὴν τεθεῖσαν ὅμως συμφωνίαν δὲν ὑπάρχει στοιχεῖον τοῦ Σ' προηγούμενον ὅλων τῶν ἄλλων στοιχείων τοῦ Σ', ἤτοι δὲν ὑπάρχει ἀρχικὸν στοιχεῖον εἰς τὸ Σ'. Ὅθεν τὸ σύνολον Σ δὲν εἶναι σύνολον ***καλῶς διατεταγμένον.***

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθῇ ὁρικὸν σημεῖον τοῦ συνόλου τῶν ἀριθμῶν $\frac{\nu}{\nu^2+1}$, ὅπου ν λαμβάνει τὰς τιμὰς $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

2) Ν' ἀποδειχθῇ ἡ πρότασις τῆς 2ας παρατηρήσεως (§ 21).

3) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα ἓν σύνολον[1] Σ ἔχῃ πεπερασμένον πλῆθος σημείων, εἶναι ἡ ἑξῆς. Τὸ παράγωγον σύνολον Σ' νὰ εἶναι μηδέν· δηλ· νὰ μὴ ὑπάρχουν ὁρικὰ σημεῖα τοῦ Σ.

4) Πᾶν σύνολον ***κλειστὸν*** καὶ ***πυκνὸν καθ' ἑαυτὸ*** εἶνε τέλειον.

5) Ἐὰν σύνολον Σ εἶναι καλῶς διατεταγμένον καὶ πᾶν μερικὸν αὐτοῦ σύνολον θὰ εἶναι καλῶς διατεταγμένον, ὅταν ληφθῇ τὸ αὐτὸ κριτήριον.

6) Εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα τῆς § 22 ἐσχηματίσθη σύνολον Ε ἔχον ὡς παράγωγον δευτέρας τάξεως τὸ $x = 0$. Κατ' ἀνάλογον τρόπον νὰ σχηματισθῇ σύνολον ἔχον ὡς παράγωγον τάξεως τρία τὸ $x=0$.

7) Σύνολον μὴ περιέχον οὐδὲν τῶν ὁρικῶν του σημείων εἶναι ἀριθμήσιμον.

---

(1) Ἐὰν ἓν σύνολον δὲν εἶναι περατωμένον θεωροῦμεν ὅτι ἔχει ὁρικὸν σημεῖον τὸ ἐπ' ἄπειρον σημεῖον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

Ὅριον ἀκολουθίας.

25. Ἔστω ἡ ἀκολουθία

$$(\alpha) \qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \frac{1}{\nu}, \dots$$

Εἶναι προφανὲς ὅτι, ἐὰν δοθῇ ἀριθμός τις θετικὸς ε, ὁσονδήποτε μικρός, εὑρίσκεται πάντοτε ὅρος τῆς ἀκολουθίας τοιοῦτος, ὥστε ὅλοι οἱ ἑπόμενοί του (εἰς τὴν ἀκολουθίαν) νὰ εἶναι μικρότεροι τοῦ ε. Π. χ. ἔστω $\varepsilon = \frac{2}{12357}$· ἀρκεῖ νὰ λάβω ἐκ τῆς ἀκολουθίας (α) τὸν $\frac{1}{12357}$· οὗτος, ὡς καὶ πάντες οἱ ἑπόμενοί του τῆς ἀκολουθίας (α), θὰ εἶναι μικρότεροι τοῦ ε. Ἐννοεῖται ὅτι καὶ ἄλλους προηγουμένους τοῦ $\frac{1}{12357}$ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἔχοντας τὴν αὐτὴν ἰδιότητα, π.χ. τὸν $\frac{1}{6179}$. Οὗτος καὶ πάντες οἱ ἑπόμενοί του εἶναι μικρότεροι τοῦ ε. Τὸ ἐνδιαφέρον ὅμως ἡμᾶς εἶναι ἁπλῶς, ὅτι ὑπάρχει εἷς, τοῦ ὁποίου ***πάντες οἱ ἑπόμενοι εἶναι μικρότεροι τοῦ ε***, καὶ ὅτι τοῦτο συμβαίνει ***ὁσονδήποτε μικρὸς καὶ ἂν ὑποτεθῇ ὁ θετικὸς ε.*** Λέγομεν δι᾽ αὐτὸ ὅτι ἡ ἀκολουθία (α) ***ἔχει ὅριον τὸ μηδέν.***

Ἄσκησις. Ἂς σημειώσωμεν διὰ τοῦ Μ(ε) τὸν μεγαλύτερον ἐκ τῶν ὅρων τῆς ἀκολουθίας (α), οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὴν ἀναφερθεῖσαν ἰδιότητα· δηλ. πάντες οἱ ἑπόμενοι ἑνὸς τοιούτου ἀριθμοῦ εἶναι μικρότεροι τοῦ ε.

Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ $M\left(\frac{2}{12357}\right)$, $M\left(\frac{2}{12358}\right)$, $M\left(\frac{5}{106}\right)$. $\frac{1}{6179}$ $\frac{1}{617}$

Ἔστω ἀκόμη ἡ ἀκολουθία

$$(\alpha') \qquad 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots \frac{1}{2\nu-1}, -\frac{1}{2\nu}, \dots$$

Ἡ ἀκολουθία ἡ ἔχουσα ὡς ὅρους τὰς ἀπολύτους τιμὰς τῶν ὅρων τῆς (α′) εἶναι ἡ (α)· ἐπειδὴ ἡ (α) τείνει πρὸς τὸ μηδέν, θὰ λέγωμεν ὅτι καὶ ἡ (α′) τείνει πρὸς τὸ μηδέν.

Γενικῶς, ἔστω ἡ ἀκολουθία

$$(A) \qquad x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots$$

Θὰ λέγωμεν, ὅτι αὕτη ἔχει ὅριον τὸ μηδὲν (ἢ καὶ τείνει πρὸς τὸ μηδέν), ὅταν διὰ πάντα θετικὸν ἀριθμὸν ε ***ὁσονδήποτε μικρὸν*** εὑρίσκεται ὅρος τῆς ἀκολουθίας x_μ τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἔχωμεν

$$|x_{\mu+1}| < \varepsilon, \qquad |x_{\mu+2}| < \varepsilon, \ldots$$

ἤτοι νὰ ἔχωμεν

$$|x_{\mu+\varrho}| < \varepsilon$$

διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ ϱ θετικὴν καὶ ἀκεραίαν.

Τοῦτο διατυποῦμεν καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἡ ἀκολουθία (Α) ἔχει ὅριον τὸ μηδέν, ὅταν εἰς πάντα θετικὸν ε (ὁσονδήποτε μικρὸν) ἀντιστοιχῇ θετικὸς ἀκέραιος μ τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἔχωμεν $|x_\nu| < \varepsilon$ διὰ πᾶσαν θετικὴν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ ν μεγαλυτέραν τοῦ μ.

25. Ἔστω ἡ ἀκολουθία

$$(B) \qquad x_1, x_2, \ldots x_\nu, \ldots$$

Θὰ λέγωμεν, ὅτι ἡ ἀκολουθία (Β) ἔχει ὅριον σταθερόν τινα ἀριθμὸν α, ὅταν ἡ ἀκολουθία

$$(B') \qquad |x_1 - \alpha|, \ |x_2 - \alpha|, \ldots |x_\nu - \alpha|, \ldots$$

ἔχῃ ὅριον τὸ μηδέν. Ἤτοι:

Ἡ ἀκολουθία (Β) ἔχει ὅριον τὸν ἀριθμὸν α, ὅταν διὰ πάντα θετικὸν ἀριθμὸν ε ***ὁσονδήποτε μικρὸν*** εὑρίσκεται ὅρος x_μ τῆς ἀκολουθίας (Β) τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἔχωμεν

$$|x_{\mu+1} - \alpha| < \varepsilon, \qquad |x_{\mu+2} - \alpha| < \varepsilon, \ldots$$

ἤτοι νὰ ἔχωμεν

$$|x_{\mu+\varrho} - \alpha| < \varepsilon$$

διὰ $\varrho = 1, 2, 3, \ldots$

Π. χ. ἔστω ἡ ἀκολουθία

$$1,\quad 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2},\ldots$$

Ὅριον τῆς ἀκολουθίας ταύτης εἶνε ὁ 2. Καὶ τῷ ὄντι, ἔστω ὅτι δίδεται ὡς ε ὁ ἀριθμὸς $\frac{1}{10}$· εὑρίσκεται ἀμέσως ἀριθμὸς τῆς ἀκολουθίας διαφέρων ἀπὸ τοῦ 2 ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{10}$. Π. χ. εἷς τοιοῦτος εἶναι ὁ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$ δηλ. ὁ x_5 ἐπίσης δὲ καὶ ὅλοι οἱ ἑπόμενοί του· ἤτοι θὰ ἔχωμεν $|x_{5+\varrho}-2|<\frac{1}{10}$ $(\varrho=1,2,3,\ldots)$.

Ἔστω ὅτι δίδεται ὡς ε ὁ $\frac{1}{50}$· εἷς ὅρος τῆς ἀκολουθίας διαφέρων ἀπὸ τοῦ 2 ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{50}$ εἶναι ὁ

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$$

ἤτοι ὁ x_7 ἐπίσης δὲ καὶ ὅλοι οἱ ἑπόμενοί του· ἤτοι θὰ ἔχωμεν

$$|x_{7+\varrho}-2|<\frac{1}{50}\qquad(\varrho=1,2,3,\ldots)$$

$$\text{ἢ καὶ}\quad |x_\nu-2|<\frac{1}{50}\qquad \text{διὰ } \nu>6)$$

κ.ο.κ.

Ἀκολουθία τις λέγεται ***συγκλίνουσα***, ὅταν ἔχῃ ὅριον σταθερόν τινα ἀριθμὸν α.

Παραδείγματα. Ἡ ἀκολουθία

$$1-\frac{1}{2},\qquad 1-\frac{1}{3},\ldots 1-\frac{1}{\nu},\ldots$$

εἶναι συγκλίνουσα, διότι ἔχει ὅριον τὴν μονάδα· ἡ ἀκολουθία

$$\frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{3},\ldots\frac{1}{6}\left(1+(-1)^\nu\right),\ldots$$

δὲν εἶναι συγκλίνουσα.

26. Ὁ ὁρισμὸς τοῦ ***ὁρίου ἀκολουθίας*** δύναται νὰ διατυπωθῇ καὶ ὡς ἑξῆς :

Ἔστω ἡ ἀκολουθία

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_\nu,\ \ldots$$

Λέγομεν, ὅτι ἡ ἀκολουθία αὕτη ἔχει ὅριον τὸν σταθερὸν ἀριθμὸν α, (ἢ καὶ ὅτι ὁ ὅρος x_ν τείνει πρὸς τὸν α, ὅταν τὸ ν αὐξάνῃ ἀπεριορίστως) ἐὰν ἔχῃ τὴν ἑξῆς ἰδιότητα.

Διὰ πᾶν ζεῦγος ἀριθμῶν α', α'' πληρούντων τὰς ἀνισότητας

$$\alpha' < \alpha < \alpha''$$

νὰ ὑπάρχῃ ἀκέραιος μ τοιοῦτος, ὥστε διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ ἀκεραίου ν μεγαλυτέραν τοῦ μ νὰ ἔχωμεν

$$\alpha' < x_\nu < \alpha''$$ $-\alpha'' < -x_\nu < -\alpha'$

ἢ καὶ νὰ ὑπάρχῃ ἀκέραιος μ τοιοῦτος, ὥστε

$\alpha' - \alpha'' < x_\nu - \alpha < \alpha'' - \alpha$

$$\alpha' < x_{\mu+\rho} < \alpha''$$

$|x_\nu - \alpha| < \alpha'' - \alpha$

διὰ $\rho = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

ε

Ὅριον διατεταγμένου συνόλου.

27. Θεωρήσωμεν μεταβλητὴν x λαμβάνουσαν διαδοχικῶς ἀπειρίαν τιμῶν ἀριθμησίμου συνόλου Σ

$$\Sigma \qquad x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_\nu,\ x_{\nu+1}\ \ldots$$

Θὰ λέγωμεν, ὅτι ἡ μεταβλητὴ x ἔχει ὅριον σταθερόν τινα ἀριθμόν, (ἢ καὶ ὅτι ἡ μεταβλητὴ x τείνει πρὸς ἓν ὅριον α) ὅταν ἡ ἀκολουθία Σ ἔχῃ ὅριον τὸν ἀριθμὸν α.

Ἔστω ἤδη ὅτι αἱ διαδοχικαὶ τιμαὶ τοῦ x σχηματίζουν σύνολον ἄπειρον ἀριθμήσιμον ἢ μὴ ἀριθμήσιμον καὶ ὅτι δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν μίαν προηγουμένην τιμὴν ἀπὸ μίαν ἑπομένην καὶ ὅτι καμμία τιμὴ τοῦ x δὲν εἶναι τελευταία (§ 24)· θὰ λέγωμεν, ὅτι ὅριον τοῦ x εἶναι σταθερός τις ἀριθμὸς α, ἐάν, ὁσονδήποτε μικρὸς καὶ ἂν εἶναι δοθείς τις θετικὸς ἀριθμὸς ε, εὑρίσκεται ***πάντοτε*** τιμή τις x_0 τοῦ x τοιαύτη, ὥστε νὰ ἔχωμεν $\quad |x - \alpha| < \varepsilon$

διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x ἑπομένην εἰς τὸ x_0 ἢ καὶ θὰ λέγωμεν συντόμως([1]) ὅτι διατεταγμένον σύνολον Σ ἔχει ὅριον σταθερόν τινα ἀριθμὸν α ἢ τείνει πρὸς τὸ α, ἐὰν εἴμεθα βέβαιοι, ὅτι, δοθέντος ἀριθμοῦ θετικοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ ε, εὑρίσκεται (ἀντιστοίχως πρὸς τὸ ε) στοιχεῖον τ τοῦ συνόλου Σ τοιοῦτον, ὥστε διὰ πάντα τὰ στοιχεῖα x τοῦ συνόλου τὰ ἑπόμενα εἰς τὸ τ νὰ ἔχωμεν $|x-\alpha|<\varepsilon$ δηλ. $\alpha-\varepsilon<x<\alpha+\varepsilon$
Κατὰ ταῦτα θὰ ἔχωμεν ὅρ. $\Sigma=0$ ὅταν, δοθέντος θετικοῦ ε, ὁσονδήποτε μικροῦ, εὑρίσκεται πάντοτε στοιχεῖον τ τοῦ συνόλου Σ τοιοῦτον, ὥστε διὰ πᾶν στοιχεῖον x ἑπόμενον εἰς τὸ τ νὰ ἔχωμεν

$$|x|<\varepsilon \qquad \text{δηλ.} \quad -\varepsilon<x<\varepsilon$$

Θὰ λέγωμεν, ὅτι διατεταγμένον σύνολον (ἢ ἡ μεταβλητὴ x ἡ λαμβάνουσα διαδοχικῶς τὰς τιμὰς αὐτοῦ) τείνει πρὸς τὸ θετικὸν ἄπειρον ($+\infty$), ὅταν, δοθέντος ἀριθμοῦ M θετικοῦ ὁσονδήποτε μεγάλου, εὑρίσκεται πάντοτε στοιχεῖον τ τοῦ συνόλου Σ τοιοῦτον, ὥστε διὰ πᾶν στοιχεῖον x ἑπόμενον εἰς τὸ τ νὰ ἔχωμεν

$$|x|>M.$$

Λέγομεν ὅτι μία μεταβλητὴ x (λαμβάνουσα διαδοχικῶς τὰς τιμὰς ἑνὸς διατεταγμένου συνόλου) τείνει πρὸς τὸ ἀρνητικὸν ἄπειρον ($-\infty$), ἐὰν διὰ πάντα θετικὸν ἀριθμὸν M ὁσονδήποτε μεγάλον εὑρίσκεται πάντοτε τιμή τις $\varkappa$ τοῦ x (δηλ. στοιχεῖόν τι $\varkappa$ τοῦ συνόλου) τοιαύτη, ὥστε διὰ πᾶσαν τιμὴν x ἑπομένην εἰς τὸ $\varkappa$ νὰ ἔχωμεν

$$x<-M.$$

Ὅταν μία μεταβλητὴ x ἔχῃ ὅριον τὸ α ἢ τὸ $+\infty$ ἢ τὸ $-\infty$ σημειοῦμεν :

$$\text{ορ}x=\alpha, \quad \text{ορ}x=+\infty, \quad \text{ορ}x=-\infty \quad \text{ἢ καὶ}$$
$$x\mapsto\alpha, \quad x\mapsto+\infty, \quad x\mapsto-\infty$$

([1]) Πρόκειται πάντοτε περὶ ***μεταβλητῆς*** x διερχομένης διαδοχικῶς δι᾿ ἀπειρίας τιμῶν κατὰ νόμον τινὰ οἱονδήποτε οὕτως ὥστε δι᾿ ἑκάστην ληφθεῖσαν τιμὴν τοῦ x νὰ δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν τὰς προηγουμένας ἀπὸ τὰς ἑπομένας καὶ καμμία ἐκ τῶν τιμῶν τοῦ x νὰ μὴ εἶναι τελευταία.

Ὅρια ἀπροσδιοριστίας.

Τὸ μεγαλύτερον ὅριον καὶ τὸ μικρότερον ὅριον.

28. ***Τὸ μεγαλύτερον ὅριον ἀκολουθίας.***

Πρῶτος ὁρισμός: Ἔστω ἡ ἀκολουθία

$$\Sigma_1 \quad \frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ 1+\frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ 1+\frac{1}{7}, \dots \frac{1}{2\nu},\ 1+\frac{1}{2\nu+1}, \dots$$

Αὕτη εἶναι σύνολον περατωμένον ἄνωθεν, θὰ ἔχῃ δὲ ἀνώτερον πέρας α_1 τὸν ἀριθμὸν $1+\frac{1}{3}$.—Ἐὰν ἀπὸ τὸ Σ_1 διαγράψωμεν τὸν πρῶτον ὅρον, δηλ. τὸ $\frac{1}{2}$, θὰ ἔχωμεν τὸ σύνολον :

$$\Sigma_2 \quad 1+\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ 1+\frac{1}{5},\ \frac{1}{6}, \dots \frac{1}{2\nu},\ 1+\frac{1}{2\nu+1}, \dots$$

τούτου τὸ ἀνώτερον πέρας α_2 εἶναι ὁ ἀριθμὸς $1+\frac{1}{3}$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον σχηματίζομεν τὰ Σ_3, Σ_4, . . .

Θεωρήσωμεν ἤδη τὴν ἀκολουθίαν :

$$(\mathrm{T}) \qquad \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4, \dots \alpha_{2\nu-1},\ \alpha_{2\nu} \dots$$

$$\text{δηλ.}\quad 1+\frac{1}{3},\ 1+\frac{1}{3},\ 1+\frac{1}{5},\ 1+\frac{1}{5}, \dots 1+\frac{1}{2\nu+1},\ 1+\frac{1}{2\nu+1} \dots$$

Αὕτη ἔχει κατώτερον πέρας τὴν μονάδα. Τὸ κατώτερον αὐτὸ πέρας τῆς ἀκολουθίας (Τ) καλεῖται **τὸ μεγαλύτερον ὅριον τῆς ἀκολουθίας Σ_1.**

Ἔστω γενικῶς, ὅτι ἀνώτερον πέρας

τῆς ἀκολουθίας Σ_1:	$x_1, x_2, x_3, \dots x_\nu, x_{\nu+1}, \dots$	εἶναι ἀριθμός τις πεπερασμένος α_1
τῆς ἀκολουθίας Σ_2	$x_2, x_3, \dots x_\nu, x_{\nu+1}, \dots$	εἶναι τὸ α_2
τῆς ἀκολουθίας Σ_3	$x_3, \dots x_\nu, x_{\nu+1}, \dots$	εἶναι τὸ α_3
— — —	— — —	— —
τῆς ἀκολουθίας Σ_ν	$x_\nu, x_{\nu+1}, \dots$	εἶναι τὸ α_ν
— — —	— — —	— —

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν $x_1 > \alpha_2$, θὰ ἔχωμεν καὶ $\alpha_1 > \alpha_2$· ἐὰν δὲ

$\alpha_1 > x_1$

$x_1 \leq \alpha_2$, θὰ ἔχωμεν $\alpha_1 = \alpha_2$. ὥστε δὲν εἶναι δυνατὸν τὸ α_2 νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ α_1· τουτέστιν $\alpha_1 \geq \alpha_2$· ὁμοίως ἔχομεν $\alpha_2 \geq \alpha_3$ κ.ο.κ.

δηλ. $$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \ldots \geq \alpha_\nu \geq \alpha_{\nu+1} \geq \ldots$$

ὅθεν, κατόπιν τῆς ὑποθέσεως ὅτι α_1 εἶναι πεπερασμένος ἀριθμός, θὰ ἔχωμεν ὅτι τὰ ἀνώτερα πέρατα σχηματίζουν μίαν ἀκολουθίαν :

(T) $$\alpha_1\ ,\ \alpha_2\ ,\ \alpha_3\ ,\ \ldots\ \alpha_\nu\ ,\ \alpha_{\nu+1}\ ,\ \ldots$$

περατωμένην ἄνωθεν.

Ἔστω ὅτι ἡ ἀκολουθία (T) εἶναι καὶ περατωμένη κάτωθεν· θὰ ὑπάρχῃ τότε (§ 12) ἀριθμός τις A, ὅστις θὰ εἶναι τὸ κατώτερον πέρας τῆς ἀκολουθίας (T)· ὁ A θὰ λέγεται τὸ ***μεγαλύτερον ὅριον τῆς ἀκολουθίας*** Σ_1· σημειοῦμεν δὲ τοῦτο ὡς ἑξῆς :

$$\overline{\text{ορ}}\, x_\nu = A \text{ ἢ καὶ } \overline{x} = A$$

Ἤτοι : ὅταν λέγωμεν ***τὸ μεγαλύτερον ὅριον τῆς ἀκολουθίας*** Σ_1, ἐννοοῦμεν τὸ ***κατώτερον πέρας τῆς ἀκολουθίας (T).***

Κατὰ ταῦτα, ἵνα ὁ A εἶναι τὸ μεγαλύτερον ὅριον τῆς Σ_1, πρέπει καὶ ἀρκεῖ

1) νὰ μὴ ὑπάρχῃ ὅρος τῆς ἀκολουθίας (T) μικρότερος τοῦ A καὶ
2) νὰ ὑπάρχῃ διὰ πᾶσαν θετικὴν τιμὴν τοῦ ε ὁσονδήποτε μικρὰν εἷς τουλάχιστον ὅρος τῆς ἀκολουθίας (T) μικρότερος τοῦ $A+\varepsilon$.

ἤτοι 1) διὰ $\nu = 1, 2, 3 \ldots$ νὰ ἔχωμεν $\alpha_\nu \geq A$

καὶ 2) διὰ πᾶσαν θετικὴν τιμὴν τοῦ ε ὁσονδήποτε μικρὰν νὰ εὑρίσκεται μία τουλάχιστον τιμὴ τοῦ ν τοιαύτη, ὥστε $\alpha_\nu < A+\varepsilon$.

Παραδείγματα : Ἔστωσαν αἱ ἀκολουθίαι

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots \frac{\nu-1}{\nu}, \ldots$$

$$\frac{2}{3},\ 0,\ \frac{2}{3},\ \ldots\ \frac{1}{3}\left[1+(-1)^\nu\right], \ldots$$

Θὰ ἔχωμεν διὰ τὴν πρώτην $\overline{\text{ορ}}\, \mathbf{x}_\nu = 1$, διὰ τὴν δευτέραν $\overline{\text{ορ}}\, x_\nu = \frac{2}{3}$.

29. ***Δεύτερος ὁρισμός.*** Δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὸ μεγαλύτερον ὅριον τῆς ἀκολουθίας Σ_1 χωρὶς νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν ἀκολουθίαν

(Τ). Πρὸς εὐχερεστέραν κατανόησιν τοῦ δευτέρου αὐτοῦ ὁρισμοῦ ἂς λάβωμεν δύο παραδείγματα.

1) Θεωρήσωμεν τὸ ἀριθμήσιμον σύνολον (ἢ καὶ τὴν ἀκολουθίαν)

$$\Sigma_1 \quad \frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ 1+\frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ 1+\frac{1}{7},\ldots\ \frac{1}{2\nu},\ 1+\frac{1}{2\nu+1},\ldots$$

Πάντες οἱ πραγματικοὶ οἱ μεγαλύτεροι τοῦ $1+\frac{1}{3}$, ὅπως καὶ αὐτὸς οὗτος, δὲν ἔχουν κανένα μεγαλύτερον ἐν τῷ συνόλῳ, ἐνῷ πάντες οἱ ἄλλοι ὅροι τοῦ συνόλου εἶναι μικρότεροί των. Πάντες οἱ πραγματικοὶ οἱ μεταξὺ $1+\frac{1}{3}$ καὶ $1+\frac{1}{5}$ ἔχουν μεγαλυτέρους των ἐν τῷ συνόλῳ μόνον τὸν $1+\frac{1}{3}$, ἐνῷ πάντες οἱ ἀριθμοὶ τοῦ συνόλου οἱ πέραν τοῦ $1+\frac{1}{5}$ εἶναι μικρότεροι. Γενικῶς, πάντες οἱ πραγματικοὶ οἱ μεταξὺ τοῦ $1+\frac{1}{2\nu-1}$ καὶ $1+\frac{1}{2\nu+1}$ ἔχουν μεγαλυτέρους των ἐν τῷ συνόλῳ τοὺς $1+\frac{1}{3}$, $1+\frac{1}{5}\ldots 1+\frac{1}{2\nu-1}$, οἵτινες εἶναι πεπερασμένοι τὸ πλῆθος, ἐνῷ πάντες οἱ ἀπὸ τοῦ $1+\frac{1}{2\nu+1}$ καὶ πέραν εἶναι μικρότεροί των.

Θεωρήσωμεν ἤδη τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν αὐτῶν ἀριθμῶν, τῶν ἐχόντων δηλαδὴ τὴν ἑξῆς ἰδιότητα: ἕκαστος ἐξ αὐτῶν νὰ ἔχῃ πεπερασμένον πλῆθος μεγαλυτέρων του ἐν τῷ συνόλῳ, ἑπομένως ἀπό τινος τάξεως καὶ ἐφ᾽ ἑξῆς πάντες οἱ ἀριθμοὶ τοῦ συνόλου νὰ εἶναι μικρότεροί του· ἤτοι θὰ θεωρήσωμεν ἐδῶ πάντας τοὺς πραγματικοὺς τοὺς μεγαλυτέρους τοῦ $1+\frac{1}{3}$, πάντας τοὺς ἀπὸ $1+\frac{1}{3}$ ἕως $1+\frac{1}{5}$, πάντας τοὺς ἀπὸ $1+\frac{1}{5}$ ἕως $1+\frac{1}{7}$ κ. ο. κ.

Τὸ σύνολον αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν ἔχει κατώτερον πέρας προφανῶς τὴν μονάδα. Αὐτὸ θὰ εἶναι τὸ ***μεγαλύτερον ὅριον*** τοῦ Σ_1.

Ἔχει τουτέστι τὴν ἑξῆς ἰδιότητα: ἐὰν λάβωμεν τὸν $1+\varepsilon$, ὅπου ε θετικὸς ὁσονδήποτε μικρός, θὰ ἔχωμεν πάντοτε ***πεπερασμένον*** πλῆθος μεγαλυτέρων του ἐν τῷ συνόλῳ, ἑπομένως θὰ ἔχωμεν ὅτι ἀπό τινος στιγμῆς καὶ ἐφεξῆς οἱ ἀριθμοὶ τοῦ συνόλου θὰ ἐπαληθεύουν τὴν ἀνισότητα

$$x<1+\varepsilon.$$

Ἐνῷ, ἐὰν λάβωμεν τὸν ἀριθμὸν $1-\varepsilon$, θὰ ἔχωμεν ἀριθμοὺς μεγαλυτέρους του ἐν τῷ συνόλῳ **ἀπείρους** τὸ πλῆθος (ἂν καὶ δὲν ἔχωμεν μεγαλυτέρους του πάντας τοὺς ἀπό τινος τιμῆς τοῦ x καὶ ἐφεξῆς)· ἤτοι ἡ ἀνισότης

$$x>1-\varepsilon$$

ἐπαληθεύεται ἀπὸ ἀπειρίαν ἀριθμῶν τοῦ συνόλου.

Π. χ. Ἔστω $\varepsilon=\frac{1}{1000}$ ἤτοι $1+\varepsilon=1+\frac{1}{1000}$ · μεγαλύτεροί του ἐν τῷ συνόλῳ θὰ εἶναι οἱ $1+\frac{1}{3}$, $1+\frac{1}{5}$ . . . $1+\frac{1}{999}$. Πάντες οἱ ἄλλοι ἀριθμοὶ τοῦ Σ_1 θὰ εἶναι μικρότεροί του, ἑπομένως καὶ πάντες οἱ ἀριθμοὶ οἱ ἀπὸ τοῦ $1+\frac{1}{1001}$ καὶ πέραν· ἤτοι ἡ ἀνισότης

$$x<1+\frac{1}{1000}$$

ἐπαληθεύεται ἀπὸ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ x τὰς μετὰ τὸ $1+\frac{1}{999}$. Ἐνῷ ἡ ἀνισότης :

$$x>1-\frac{1}{1000}$$

$\left(\text{ἐννοεῖται ὅτι δὲν ἦτο ἀνάγκη νὰ λάβω πάλιν ὡς τιμὴν τοῦ ε τὸ } \frac{1}{1000}\right)$ ἐπαληθεύεται ἀπὸ ἀπειρίαν τιμῶν τοῦ συνόλου, ἂν καὶ δὲν ἐπαληθεύεται ἀπὸ πᾶσαν τιμὴν (τοῦ συνόλου) ἀπό τινος στιγμῆς καὶ ἐφεξῆς· καὶ τῷ ὄντι ἐπαληθεύεται αὕτη ἀπὸ τὰς τιμὰς $1+\frac{1}{3}$, $1+\frac{1}{5}$ . . . $1+\frac{1}{999}$, $1+\frac{1}{1001}$ . . . ἀλλὰ δὲν ἐπαληθεύεται καὶ ἀπὸ τὰς εὑρισκομένας μεταξὺ αὐτῶν· ἤτοι ἀπὸ τὰς $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ . . .

2) Ἔστω τὸ σύνολον.

$$
\Sigma_1 \quad
\begin{array}{l}
5,\ 3,\ -9,\ 2+\frac{1}{4},\ 2-\frac{1}{10},\ 1-\frac{1}{6^2},\ 1+\frac{1}{7^2} \\
\qquad\qquad 2+\frac{1}{8},\ 2-\frac{1}{18},\ 1-\frac{1}{10^2},\ 1+\frac{1}{11^2} \\
\qquad\qquad 2+\frac{1}{12},\ 2-\frac{1}{26},\ 1-\frac{1}{14^2},\ 1+\frac{1}{15^2} \\
\qquad\qquad 2+\frac{1}{16},\ 2-\frac{1}{34},\ 1-\frac{1}{18^2},\ 1+\frac{1}{19^2} \\
\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
2+\frac{1}{4\mu},\ 2-\frac{1}{2(4\mu+1)},\ 1-\frac{1}{(4\mu+2)^2},\ 1+\frac{1}{[4\mu+3)^2} \\
\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}
$$

Ὁ νόμος, μὲ τὸν ὁποῖον σχηματίζονται οἱ διάφοροι ἀριθμοὶ τοῦ συνόλου, εἶναι προφανῶς ὁ ἑξῆς. Ὁ τέταρτος, ὁ ὄγδοος, ὁ δωδέκατος καὶ γενικῶς ὁ κατέχων τὴν τάξιν 4μ θὰ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν $2+\frac{1}{4\mu}$ · ὁ πέμπτος, ὁ ἔνατος, ὁ δέκατος τρίτος καὶ γενικῶς ὁ κατέχων τὴν τάξιν $4\mu+1$ εἶναι ἴσος πρὸς $2-\frac{1}{2(4\mu+1)}$.

Ὁ ἕκτος, ὁ δέκατος καὶ γενικῶς ὁ κατέχων τὴν τάξιν $4\mu+2$ εἶναι ἴσος πρὸς

$$1-\frac{1}{(4\mu+2)^2}$$

Ὁ ἕβδομος, ὁ ἑνδέκατος καὶ γενικῶς ὁ κατέχων τὴν τάξιν $4\mu+3$ εἶναι ἴσος πρὸς

$$1+\frac{1}{(4\mu+3)^2}$$

Παρατηροῦμεν ἤδη ὅτι, ἂν δοθῇ ἀριθμός τις πραγματικὸς μεγαλύτερος τοῦ $2+\frac{1}{4}$ εἴτε αὐτὸς οὗτος ὁ $2+\frac{1}{4}$, θὰ ἔχῃ μεγαλυτέρους αὐτοῦ εἰς τὸ δοθὲν σύνολον μόνον τοὺς 5 καὶ 3, μικροτέρους δὲ αὐτοῦ ἐν τῷ συνόλῳ θὰ ἔχῃ προφανῶς πάντας τοὺς λοιπούς, οἵτινες εἶναι ἄπειροι τὸ πλῆθος. Ἐὰν δοθῇ οἱοσδήποτε ἀριθμὸς μεταξὺ τοῦ $2+\frac{1}{4}$ καὶ τοῦ $2+\frac{1}{8}$, θὰ ἔχῃ μεγαλυτέρους αὐτοῦ ἐν τῷ συνόλῳ μόνον τοὺς 5, 3 καὶ τὸν $2+\frac{1}{4}$, μικροτέρους δὲ αὐτοῦ ἐν τῷ συνόλῳ θὰ ἔχῃ προφανῶς πάντας τοὺς λοιπούς, οἵτινες εἶναι ἄπειροι τὸ πλῆθος· καὶ γενικῶς, ἐὰν λάβωμεν οἱονδήποτε ἀριθμὸν πραγματικὸν μεγαλύτερον τοῦ $2+\frac{1}{4\mu}$, θὰ ἔχῃ οὗτος μεγαλυτέρους του ἐν τῷ συνόλῳ πεπερασμένους τὸ πλῆθος, μικροτέρους του δὲ ἐν τῷ συνόλῳ θὰ ἔχῃ πάντας τοὺς λοιπούς, οἵτινες εἶναι ἄπειροι τὸ πλῆθος.

Ἐθεωρήσαμεν μέχρι τοῦδε πάντας τοὺς πραγματικοὺς τοὺς μεγαλυτέρους τοῦ $2+\frac{1}{4}$, ὅπως ἐπίσης πάντας τοὺς πραγματικοὺς τοὺς ἀπὸ $2+\frac{1}{4}$ ἕως $2+\frac{1}{8}$, πάντας τοὺς πραγματικοὺς τοὺς ἀπὸ $2+\frac{1}{8}$ ἕως $2+\frac{1}{12}$ κ.ο.κ. Ἕκαστος ἐξ αὐτῶν ἔχει τὴν ἑξῆς ἰδιότητα· οἱ μεγαλύτεροί του ἐν τῷ συνόλῳ εἶναι ***πεπερασμένοι*** τὸ πλῆθος, ἐνῷ μικρότεροί του εἶναι πάντες οἱ λοιποί, ὅπου περιλαμβάνονται καὶ ὅλοι οἱ κατόπιν του, οἵτινες εἶναι ἄπειροι τὸ πλῆθος· ἤτοι τὴν ἀνισότητα $x>2+\varepsilon$, ὅπου ε θετικός, ἐπαληθεύουν ἀριθμοὶ τοῦ συνόλου ***πεπερασμένοι*** τὸ πλῆθος.

Ἐὰν θεωρήσωμεν οἱονδήποτε ἄλλον πραγματικὸν ἀριθμὸν πλὴν αὐτῶν, δὲν θὰ ἔχῃ οὗτος αὐτὴν τὴν ἰδιότητα. Ἔστω π. χ. ὁ πέμπτος ὅρος τῆς ἀνωτέρω ἀκολουθίας, δηλ. ὁ $2-\frac{1}{10}$· ὑπάρχει ἀπειρία ἀριθμῶν μεγαλυτέρων του ἐν τῷ συνόλῳ:

$$5\ ,\ 3\ ,\ 2+\frac{1}{4}\ ,\ 2+\frac{1}{8}\ ,\ 2+\frac{1}{12}\ \ldots$$

Γενικώτερον ὁ $2-\varepsilon$ ἔχει προφανῶς ἀπείρους ἀριθμοὺς μεγαλυτέρους του ἐν τῷ συνόλῳ Σ_1· ἤτοι ἡ ἀνισότης $x>2-\varepsilon$ ἐπαληθεύεται ἀπὸ ἀπειρίαν τιμῶν τοῦ συνόλου· οὕτω π. χ. ἐπαληθεύεται ἀπὸ πάντας τοὺς ἀριθμοὺς τῆς μορφῆς $2+\frac{1}{4\mu}$, ἤτοι ἀπὸ πάντα ἀριθμὸν τοῦ συνόλου κατέχοντα τὴν τάξιν 4μ, οἱοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ θετικὸς ε.

Ὥστε : ἐὰν ε θετικός, θὰ ἔχωμεν ὅτι ἀπό τινος τιμῆς καὶ ἐφεξῆς οἱ ἀριθμοὶ τοῦ συνόλου θὰ ἐπαληθεύουν τὴν ἀνισότητα

$$x<2+\varepsilon$$

ἡ δὲ ἀνισότης

$$x>2-\varepsilon$$

θὰ ἐπαληθεύεται ἀπὸ ἀπειρίαν ἀριθμῶν τοῦ συνόλου. Λέγομεν δι' αὐτὸ ὅτι ὁ 2 εἶναι τὸ μεγαλύτερον ὅριον τῆς ἀκολουθίας Σ_1, ἢ καὶ

οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ οἱ ἀρχικῶς ληφθέντες, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὴν ρηθεῖσαν ἰδιότητα, ἀποτελοῦν ἓν σύνολον· τὸ κατώτερον πέρας τοῦ συνόλου τούτου εἶναι ὁ ἀριθμὸς 2· οὗτος εἶναι τὸ μεγαλύτερον ὅριον τοῦ Σ_1.

Ἔστω ἤδη γενικῶς ἡ ἀκολουθία

$$\Sigma_1 \qquad x_1, \; x_2, \; x_3, \; . \; . \; . \; x_\nu, \; x_{\nu+1}, \; . \; . \; .$$

περατωμένη ἄνωθεν· θὰ λέγωμεν ὅτι ἀριθμός τις Α εἶναι τὸ ***μεγαλύτερον ὅριον*** τῆς ἀκολουθίας Σ_1, ἐάν, ὁσονδήποτε μικρὸς καὶ ἂν εἶναι δοθείς τις θετικὸς ἀριθμὸς ε, εὑρίσκεται ὅρος τῆς ἀκολουθίας, τοῦ ὁποίου πάντες οἱ ἑπόμενοι νὰ εἶναι μικρότεροι τοῦ $A+\varepsilon$, ὑπάρχουν δ' ἀφ' ἑτέρου ἄπειροι ὅροι [1] τῆς ἀκολουθίας Σ_1 μεγαλύτεροι τοῦ $A-\varepsilon$.

Ταῦτα ἐκφράζομεν καὶ ὡς ἑξῆς :
ὁ Α εἶναι τὸ μεγαλύτερον ὅριον τῆς ἀκολουθίας Σ_1, ἐὰν διὰ πᾶσαν θετικὴν τιμὴν τοῦ ε ὁσονδήποτε μικρὰν

1) ὑπάρχῃ θετικὸς ἀκέραιος μ τοιοῦτος, ὥστε $x_{\mu+\varrho} < A+\varepsilon$ διὰ $\varrho = 0, 1, 2, 3, \ldots$

2) ὑπάρχουν ἄπειροι τιμαὶ τοῦ ν, δι' ἃς $x_\nu > A-\varepsilon$.

30. Ὅτι ὁ δεύτερος αὐτὸς ὁρισμὸς εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸν πρῶτον φαίνεται ἐκ τῶν δύο ἑπομένων θεωρημάτων.

Θεώρημα Ι. Ἐὰν ἀριθμός τις Α εἶναι τὸ κατώτερον πέρας τῆς ἀ-

---

[1] Θὰ θεωροῦμεν προφανῶς ὡς διαφόρους δύο ὅρους μιᾶς ἀκολουθίας, ὅταν ἔχουν οὗτοι διαφόρους δείκτας.

κολουθίας Τ (§ 28), θὰ ἔχωμεν ὅτι διὰ πᾶσαν θετικὴν τιμὴν τοῦ ε ὁσονδήποτε μικρὰν

α′) θὰ ὑπάρχῃ ἀκέραιος μ τοιοῦτος, ὥστε $x_{\mu+\varrho} < A+\varepsilon$ (1)

($\varrho=0,\ 1,2,3,\ldots$)

β′) θὰ ὑπάρχουν ἄπειροι τιμαὶ τοῦ ν, δι᾽ ἃς $x_\nu > A-\varepsilon$ (2).

Ἀπόδειξις. Ἔστω ε τυχὼν δοθεὶς θετικὸς ἀριθμός· ὑποθέτομεν ὅτι ὁ Α εἶναι κατώτερον πέρας τῆς (Τ)· ἑπομένως

α′) θὰ ὑπάρχῃ (§ 13) ὅρος τῆς ἀκολουθίας (Τ) μικρότερος τοῦ $A+\varepsilon$· ἔστω α_μ εἷς τοιοῦτος· θὰ ἔχωμεν

$$\alpha_\mu < A+\varepsilon \qquad (3)\cdot$$

ἀλλὰ ὁ α_μ εἶναι τὸ ἀνώτερον πέρας τῆς ἀκολουθίας

$$x_\mu,\ x_{\mu+1},\ x_{\mu+2},\ \ldots$$

ἑπομένως (§ 13) $x_{\mu+\varrho} \leqq \alpha_\mu$ (4) διὰ $\varrho=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

ὅθεν ἐκ τῶν (3) καὶ (4) ἐξάγομεν: ὅτι

(διὰ $\varrho=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$) $x_{\mu+\varrho} < A+\varepsilon$ (1)

β′) θὰ ἔχωμεν (§ 13) (διὰ $\nu=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$) $\alpha_\nu \geqq A$ (5)

ὁ α_ν εἶναι τὸ ἀνώτερον πέρας τῆς ἀκολουθίας

$\alpha_\nu - \varepsilon \geqq A - \varepsilon$

$$x_\nu,\ x_{\nu+1},\ x_{\nu+2},\ \ldots$$

ἑπομένως θὰ ὑπάρχῃ εἷς τουλάχιστον ὅρος ταύτης μεγαλύτερος τοῦ $\alpha_\nu-\varepsilon$· ἔστω εἷς τοιοῦτος ὁ $x_{\nu+\sigma_\nu}$ ἤτοι $x_{\nu+\sigma_\nu} > \alpha_\nu - \varepsilon$

δηλ. $x_{1+\sigma_1} > \alpha_1-\varepsilon,\quad x_{2+\sigma_2} > \alpha_2-\varepsilon,\quad x_{3+\sigma_3} > \alpha_3-\varepsilon,\ \ldots$

καὶ ἑπομένως δυνάμει τῆς σχέσεως (5) θὰ ἔχωμεν

$$x_{1+\sigma_1} > A-\varepsilon,\qquad x_{2+\sigma_2} > A-\varepsilon,\ \ldots, \qquad (6)$$

θεωρήσωμεν ἤδη τὴν ἀκολουθίαν τῶν δεικτῶν

$$1+\sigma_1,\quad 2+\sigma_2,\quad 3+\sigma_3,\ \ldots \qquad (7)$$

ὁ σ_1 εἶναι θετικὸς ἀκέραιος ἢ μηδέν, ὁ σ_2 ἐπίσης κ. ο. κ. ἄπειροι ὅροι τῆς ἀκολουθίας αὐτῆς θὰ εἶναι διάφοροι ἀλλήλων· [1] ἐπομένως καὶ ἄπειροι ὅροι τῆς ἀκολουθίας Σ_1, συμφώνως πρὸς τὰς ἀνισότητας (6), θὰ εἶναι μεγαλύτεροι τοῦ $A-\varepsilon$· ἤτοι
δι᾿ ἀπείρους τιμὰς τοῦ ν θὰ ἔχωμεν $\quad x_\nu > A-\varepsilon$.

Θεώρημα II. Ἔστω ὅτι ἀριθμός τις A ἔχει τὰς ἑξῆς ἰδιότητας:

Ὁσονδήποτε μικρὸς καὶ ἂν εἶναι δοθείς τις θετικὸς ἀριθμὸς ε,
1) ὑπάρχει θετικός τις ἀκέραιος μ τοιοῦτος, ὥστε (διὰ $\varrho=0, 1, 2, 3, ..$)

$$x_{\mu+\varrho} < A+\varepsilon \qquad (1)\cdot$$

2) ὑπάρχουν ἄπειροι τιμαὶ τοῦ ν, διὰ τὰς ὁποίας ἔχομεν $x_\nu > A-\varepsilon$(2). Λέγω ὅτι ὁ ἀριθμὸς οὗτος A θὰ εἶναι τὸ κατώτερον πέρας τῆς ἀκολουθίας (T).

Ἀπόδειξις. Δι᾿ ἑκάστην τιμὴν τοῦ ν, διὰ τὴν ὁποίαν ἰσχύει ἡ ἀνισότης (2), θὰ ἰσχύῃ (§ 13) καὶ ἡ ἀνισότης $\alpha_\nu > A-\varepsilon$· ἀλλ᾿ ἡ ἀνισότης (2) ἰσχύει ἐξ ὑποθέσεως δι᾿ ἀπείρους τιμὰς τοῦ ν· ἐπομένως θὰ ἰσχύῃ καὶ ἡ ἀνισότης $\alpha_\nu > A-\varepsilon$ (6′) δι᾿ ἀπείρους τιμὰς τοῦ ν· τότε ὅμως διὰ ***πᾶσαν*** τιμὴν τοῦ θετικοῦ ἀκεραίου ν πρέπει νὰ ἰσχύῃ ἡ ἀνισότης (6′)· διότι, ἐὰν εἴχομεν διὰ μίαν τιμὴν $\varkappa$ τοῦ ν $\alpha_\varkappa < A-\varepsilon$, θὰ εἴχομεν καὶ $\alpha_{\varkappa+\varrho} < A-\varepsilon$ διὰ $\varrho=1,2,3, \ldots$ ἐπειδὴ $\alpha_\varkappa \geqq \alpha_{\varkappa+1} \geqq \alpha_{\varkappa+2} > \ldots$(§28)· ἀλλὰ τότε ἡ ἀνισότης (6′) θὰ ἴσχυε διὰ $\varkappa-1$ τὸ πολὺ τιμὰς τοῦ ν καὶ ὄχι δι᾿ ἀπείρους, ὡς ἐλέχθη· ὥστε πάντες οἱ ὅροι τῆς (T) εἶναι μεγαλύτεροι τοῦ $A-\varepsilon$· ἤτοι τὸ $A-\varepsilon$ εἶναι κατώτερον φράγμα τῆς (T), καὶ ἐπομένως τὸ κατώτερον πέρας τῆς (T) θὰ εἶναι $\geqq A-\varepsilon$· καὶ ἐπειδὴ τοῦτο θὰ συμβαίνῃ διὰ πᾶσαν θετικὴν τιμὴν τοῦ ε ὁσονδήποτε μικράν, θὰ ἔχωμεν ὅτι τὸ κατώτερον πέρας τῆς (T) θὰ εἶναι $\geqq A$ [2].

$\tau+\tau_1 > \tau-1$ διότι $\tau_1 > 0$

---

[1]) Ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσω ὅτι παντὸς ὅρου τῆς (7) ὑπάρχει μεγαλύτερος μεταξὺ τῶν ἑπομένων του· καὶ τῷ ὄντι ἔστω τυχὼν ὅρος τῆς (7) ὁ $\mu+\sigma_\mu$· ἐὰν καλέσω τ τὸν ἀκέραιον $\mu+\sigma_\mu+1$, θὰ ἔχω $\mu+\sigma_\mu=\tau-1$· ἀλλ᾿ ἐκ τοῦ τρόπου καθ᾿ ὃν σχηματίζονται οἱ ὅροι τῆς (7) φαίνεται ἀμέσως ὅτι θὰ ὑπάρχῃ καὶ ὅρος $\tau+\sigma_\tau$ ὅστις προφανῶς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ $\tau-1$ δηλ. τοῦ $\mu+\sigma_\mu$.

[2]) Διότι, ἐὰν τὸ κατώτερον πέρας ἦτο $<A$, θὰ ἦτο ἴσον πρὸς $A-\vartheta$, ὅπου ϑ θετικός· ἀλλὰ τότε πᾶς ἀριθμὸς $A-\vartheta_1$, ὅπου ο $\vartheta_1 < \vartheta$, θὰ ἦτο μεγαλύτερος τοῦ $A-\vartheta$· ἐπομένως δὲν θὰ ἦτο κατώτερον φράγμα τῆς (T)· ἐνῷ εἴδομεν ὅτι διὰ πᾶσαν θετικὴν τιμὴν τοῦ ε εἶναι κατώτερον φράγμα ὁ $A-\varepsilon$.

 $\alpha_\nu \ngtr A+\theta$

Παρατηρῶ ἤδη ὅτι, ἐὰν τὸ κατώτερον πέρας ἦτο μεγαλύτερον τοῦ Α, θὰ ἦτο ἴσον πρὸς $A+\vartheta$, ὅπου ὁ ϑ θὰ ἦτο ὡρισμένος θετικὸς ἀριθμός· ἀλλὰ τότε πᾶς ὅρος τῆς (Τ) θὰ ἦτο $\geq A+\vartheta$ (§ 13). Ἔστω ε τυχὼν θετικὸς μικρότερος τοῦ ϑ· θὰ ὑπάρχῃ ὅρος τῆς ἀκολουθίας Σ_1 (§ 28) μεγαλύτερος τοῦ $\alpha_1-\varepsilon$ (§ 13)· ἂς καλέσω ἕνα τοιοῦτον ὅρον $x_{1(\varepsilon)}$· θὰ ὑπάρχῃ ἐπίσης ὅρος τῆς Σ_2 μεγαλύτερος τοῦ $\alpha_2-\varepsilon$, ἔστω ὁ $x_{2(\varepsilon)}$ κ. ο. κ. ἤτοι

$$x_{1(\varepsilon)}>\alpha_1-\varepsilon, \qquad x_{2(\varepsilon)}>\alpha_2-\varepsilon, \ldots .$$

$\alpha_1 > A+\theta$

$x_{1(\varepsilon)} > \alpha_1-\varepsilon \geq$

$x_{1(\varepsilon)} > A+\theta-\varepsilon \geq$

ὅθεν καὶ (θέτων $\vartheta-\varepsilon=\eta$)

$$x_{1(\varepsilon)}>A+\eta, \qquad x_{2(\varepsilon)}>A+\eta, \ldots \qquad \text{(K)}$$

$x_{(\varepsilon)} > A+\eta$

Ἐπειδὴ ὅμως $\eta>o$, θὰ ὑπάρχῃ ἐξ ὑποθέσεως ἀκέραιος μ τοιοῦτος, ὥστε
$$x_{\mu+\varrho} < A+\eta \quad \text{διὰ } \varrho=0,1,2,3, \ldots$$
ἀλλὰ μεταξὺ τῶν ἀνισοτήτων (Κ) θὰ ὑπάρχῃ προφανῶς καὶ ἡ ἀνισότης $x_{\mu(\varepsilon)}>A+\eta$.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ $x_{\mu(\varepsilon)}$ εἶναι ὅρος τῆς Σ_μ, θὰ εἶναι ἢ ὁ x_μ ἢ ἑπόμενός τις $x_{\mu+\sigma}$· ἄρα ὁ $x_{\mu(\varepsilon)}$ θὰ εἶναι ἴσος μέ τινα ἐκ τῶν $x_{\mu+\varrho}$· ἤτοι διὰ θετικήν τινα ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ ϱ θὰ εἴχομεν $x_{\mu+\varrho}>A+\eta$· ἀλλὰ τοῦτο ἀντιβαίνει πρὸς τὴν ὑπόθεσιν ὅτι διὰ $\varrho=0,1,2,3, \ldots$ ἔχομεν $x_{\mu+\varrho}<A+\eta$· ὅθεν ἕπεται ὅτι :

Τὸ κατώτερον πέρας τῆς (Τ) δὲν εἶναι $>A$· ἄρα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Α.

31. Ὑπεθέσαμεν εἰς ὅλα τὰ ἀνωτέρω ὅτι ἡ Σ_1 εἶναι περατωμένη ἄνωθεν καὶ ὅτι ἡ ἀντίστοιχος Τ εἶναι περατωμένη καὶ κάτωθεν.

Ἐὰν ἡ Σ_1 δὲν εἶναι περατωμένη ἄνωθεν, θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ μεγαλύτερον ὅριον θὰ εἶναι τὸ θετικὸν ἄπειρον καὶ θὰ σημειοῦμεν τοῦτο $\overline{\text{ορ}} x_\nu=\infty$· ἢ καὶ $\overline{x}=\infty$.

Ἐὰν ἡ Σ_1 εἶναι περατωμένη ἄνωθεν, ἀλλὰ ἡ ἀντίστοιχας Τ δὲν εἶναι περατωμένη κάτωθεν, θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ μεγαλύτερον ὅριον τῆς Σ_1 εἶναι τὸ ἀρνητικὸν ἄπειρον καὶ σημειοῦμεν τοῦτο : $\overline{\text{ορ}} x_\nu=-\infty$, ἢ καὶ $\overline{x}=-\infty$· εὔκολον εἶναι νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τότε, δοθέντος ἀριθμοῦ ὁσονδήποτε μεγάλου Μ, εὑρίσκεται ὅρος τῆς ἀκολουθίας x_μ τοιοῦτος, ὥστε :

$$x_{\mu+\varrho} < -M \quad \text{διὰ} \quad \varrho=1,2,3 \ldots$$

Καὶ τῷ ὄντι, ἀφοῦ ἡ T δὲν εἶναι περατωμένη κάτωθεν, θὰ ὑπάρχῃ ὅρος τῆς ἀκολουθίας T, ἔστω ὁ α_ν, τοιοῦτος, ὥστε αὐτὸς καὶ ὅλοι οἱ ἑπόμενοί του νὰ εἶναι μικρότεροι τοῦ $-M$· ἀλλὰ τὸ α_ν εἶναι ἀνώτερον πέρας τῆς ἀκολουθίας :

$$x_\nu\ ,\ x_{\nu+1}\ ,\ \ldots$$

ἑπομένως θὰ ὑπάρχῃ ὅρος τῆς ἀκολουθίας Σ_1 τοιοῦτος, ὥστε πάντες οἱ ἑπόμενοί του νὰ εἶναι μικρότεροι τοῦ $-M$.

Καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν ὑποτεθῇ, ὅτι ὁσονδήποτε μέγας καὶ ἂν εἶναι θετικός τις ἀριθμὸς M ὑπάρχει πάντοτε ὅρος x_μ τῆς ἀκολουθίας Σ_1 τοιοῦτος, ὥστε $x_{\mu+\varrho} < -M$ διὰ $\varrho=1,2,3,\ldots$ θὰ ὑπάρχῃ ὅρος τῆς T τοιοῦτος, ὥστε αὐτὸς καὶ πάντες οἱ ἑπόμενοί του νὰ εἶναι μικρότεροι τοῦ $-M$. Καὶ τῷ ὄντι ἀφοῦ $x_{\mu+\varrho} < -M$, ὁ ἀριθμὸς $-M$ θὰ εἶναι ἀνώτερον φράγμα τῆς ἀκολουθίας :

$$\Sigma_\mu \qquad x_\mu\ ,\ x_{\mu+1}\ ,\ x_{\mu+2}\ ,\ \ldots$$

Ἑπομένως τὸ ἀνώτερον πέρας α_μ θὰ εἶναι $\leq -M$· ὅθεν καὶ

$$\alpha_{\mu+1} \leq -M,\quad \alpha_{\mu+2} \leq -M,\ \ldots$$

διότι
$$\alpha_\mu \geq \alpha_{\mu+1} \geq \alpha_{\mu+2} > \cdots$$

Παραδείγματα. Ἔστωσαν αἱ ἀκολουθίαι

$$-1,\ 6,\ -3,\ 12,\ \ldots,\ \nu+(-1)^\nu 2\nu,\ \ldots$$
$$-1,\ -2,\ -3,\ \ldots,\ -\nu,\ \ldots$$
$$-3,\ -2,\ -9,\ -4,\ \ldots,\ -2\nu+(-1)^\nu\nu,\ \ldots$$

Διὰ τὴν πρώτην ἔχομεν $\overline{\text{ορ}}_{\nu=\infty} x_\nu = \infty$ καὶ διὰ τὰς ἄλλας δύο ἔχομεν $\overline{\text{ορ}}_{\nu=\infty} x_\nu = -\infty$.

32. ***Τὸ μικρότερον ὅριον ἀκολουθίας.—Πρῶτος ὁρισμός.*** Ἔστωσαν αἱ ἀκολουθίαι (§ 28)

$\Sigma_1,\ \Sigma_2,\ \ldots\ \Sigma_\nu,\ \ldots$ καὶ κατώτερα πέρατα αὐτῶν [1] τὰ $\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots\ \beta_\nu,\ \ldots$

---

[1]) Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ἀκολουθία Σ_1 εἶναι περατωμένη κάτωθεν.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἐὰν $x_1 < \beta_2$ θὰ ἔχωμεν $\beta_1 < \beta_2$· ἐὰν δὲ $x_1 \geq \beta_2$ θὰ ἔχωμεν $\beta_1 = \beta_2$· ἐπομένως δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι τὸ β_1 μεγαλύτερον τοῦ β_2· ὥστε $\beta_1 \leq \beta_2$, ὁμοίως ἔχομεν $\beta_2 \leq \beta_3$, $\beta_3 \leq \beta_4, \ldots \beta_\nu \leq \beta_{\nu+1}, \ldots$

Ἔστω ἤδη ὅτι ἡ ἀκολουθία

$$(P) \qquad \beta_1, \; \beta_2, \ldots \beta_\nu, \ldots$$

εἶναι περατωμένη ἄνωθεν· ἔστω Β τὸ ἀνώτερον πέρας τῆς ἀκολουθίας (Ρ)· ὁ Β θὰ εἶναι, ἐξ ὁρισμοῦ, ***τὸ μικρότερον ὅριον τῆς ἀκολουθίας Σ_1***.

Δεύτερος ὁρισμός. Ἔστω ἡ ἀκολουθία Σ_1 περατωμένη κάτωθεν· θὰ λέγωμεν ὅτι ἀριθμός τις Β εἶναι τὸ μικρότερον ὅριον τῆς ἀκολουθίας Σ_1, ἐάν, ὁσονδήποτε μικρὸς καὶ ἂν εἶναι δοθείς τις θετικὸς ἀριθμὸς ε, εὑρίσκεται πάντοτε ὅρος τῆς ἀκολουθίας Σ_1 τοιοῦτος ὥστε πάντες οἱ ἑπόμενοί του νὰ εἶναι μεγαλύτεροι τοῦ $B-\varepsilon$, ὑπάρχουν δ' ἀφ' ἑτέρου πάντοτε ἄπειροι ὅροι τῆς ἀκολουθίας Σ_1 μικρότεροι τοῦ $B+\varepsilon$. Ταῦτα ἐκφράζομεν καὶ ὡς ἑξῆς :

Ὁ Β εἶναι τὸ ***μικρότερον ὅριον*** τῆς ἀκολουθίας Σ_1 ἐὰν διὰ πᾶσαν θετικὴν τιμὴν τοῦ ε ὁσονδήποτε μικρὰν

1) ὑπάρχει θετικὸς ἀκέραιος μ τοιοῦτος ὥστε $x_{\mu+\varrho} > B-\varepsilon$ διὰ $\varrho = 1, 2, 3, \ldots$

2) ὑπάρχουν ἄπειροι τιμαὶ τοῦ ν δι' ἃς $x_\nu < B+\varepsilon$.

Παρατήρησις. Ὁ δεύτερος ὁρισμὸς τοῦ μικροτέρου ὁρίου ἀκολουθίας εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸν πρῶτον. Διὰ ν' ἀποδείξωμεν τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ἐργασθῶμεν κατὰ τρόπον ὅμοιον πρὸς ἐκεῖνον, δι' οὗ ἀπεδείξαμεν τὸ ἰσοδύναμον τῶν δύο ὁρισμῶν προκειμένου περὶ τοῦ μεγαλυτέρου ὁρίου (§ 30).

Κατὰ ταῦτα εἰς τὸ δεύτερον παράδειγμα (ἐκ τῶν ἀνωτέρω § 29) τὸ μικρότερον ὅριον εἶναι ἡ μονάς : διότι ἡ ἀνισότης $x > 1-\varepsilon$ ἐπαληθεύεται ἀπὸ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x ἐρχομένην κατόπιν τιμῆς τινος τοῦ x, ἡ δὲ ἀνισότης $x < 1+\varepsilon$ ἐπαληθεύετα ἀπὸ ἀπειρίαν τιμῶν, ἀλλ' οὐχὶ ἀπὸ πᾶσαν τιμὴν ἐρχομένην κατόπιν τιμῆς τινος τοῦ x· π. χ. ἔστω $\varepsilon = \frac{1}{100}$ ἡ ἀνισότης $x > 1 - \frac{1}{100}$ ἐπαληθεύεται ἀπὸ ὅλας τὰς τιμὰς τὰς ἐρχομένας κατόπιν τοῦ $1 - \frac{1}{100}$, ἐνῷ ἡ ἀνισότης $x < 1 + \frac{1}{100}$ ἐπαληθεύεται ἀπὸ ἀπειρίαν τιμῶν τοῦ x· ἀλλὰ δὲν ἔρχονται ὅλαι αὗται ἡ μία κατόπιν τῆς ἄλλης· εἶναι καὶ ἄλλαι τιμαὶ ἐν τῷ μεταξὺ ἀπὸ τὰς ὁποίας δὲν ἐπαληθεύεται· οὕτως ἐπαληθεύεται ἀπὸ τὰς

$$1-\frac{1}{6^2},\ 1-\frac{1}{10^2}\ldots 1+\frac{1}{11^2},\ 1+\frac{1}{15^2},\ldots$$

δὲν ἐπαληθεύεται ὅμως ἀπὸ τὰς

$$2+\frac{1}{4\mu},\ 2-\frac{1}{2(4\mu+1)}.$$

§ 33. Ὑπεθέσαμεν ἀνωτέρω (§ 32) ὅτι ἡ Σ_1 εἶναι περατωμένη κάτωθεν καὶ ὅτι ἡ ἀντίστοιχος ἀκολουθία (P) εἶναι περατωμένη ἄνωθεν. Ἐὰν ἡ Σ_1 δὲν εἶναι περατωμένη κάτωθεν, θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ μικρότερον ὅριον εἶναι τὸ ἀρνητικὸν ἄπειρον.

Ἐὰν ἡ Σ_1 εἶναι περατωμένη κάτωθεν, ἀλλὰ ἡ ἀντίστοιχος (P) δὲν εἶναι περατωμένη ἄνωθεν, θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ μικρότερον ὅριον τῆς Σ_1 εἶναι τὸ θετικὸν ἄπειρον· ἀποδεικνύεται δ' εὐκόλως ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην δοθέντος ἀριθμοῦ θετικοῦ ὁσονδήποτε μεγάλου M εὑρίσκεται ὅρος x_μ τῆς ἀκολουθίας Σ_1 τοιοῦτος, ὥστε

$$x_{\mu+\varrho}>M \qquad \text{διὰ } \varrho=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι, ὁσονδήποτε μέγας καὶ ἂν εἶναι δοθείς τις θετικὸς M, ὑπάρχει πάντοτε ὅρος x_μ τῆς ἀκολουθίας Σ_1 τοιοῦτος, ὥστε

$$x_{\mu+\varrho}>M \qquad \text{διὰ } \varrho=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

θὰ ὑπάρχῃ πάντοτε ὅρος τῆς ἀκολουθίας (P) τοιοῦτος, ὥστε αὐτὸς καὶ πάντες οἱ ἑπόμενοί του νὰ εἶναι μεγαλύτεροι τοῦ M.

Ὅτι τὸ μικρότερον ὅριον τῆς ἀκολουθίας Σ_1 εἶναι ἀριθμός τις B ἢ τὸ θετικὸν ἄπειρον ἢ τὸ ἀρνητικὸν ἄπειρον σημειοῦμεν ὡς ἑξῆς :

$$\underline{\underset{\nu=\infty}{\text{ορ}}}\,x_\nu=B \qquad \underline{\underset{\nu=\infty}{\text{ορ}}}\,x_\nu=+\infty \qquad \underline{\underset{\nu=\infty}{\text{ορ}}}\,x_\nu=-\infty$$

34. ***Παρατηρήσεις***. 1) Ἐὰν τὸ μεγαλύτερον (μικρότερον) ὅριον τῆς ἀκολουθίας Σ_1 εἶναι ἀριθμός τις A, τὸ μικρότερον (μεγαλύτερον) ὅριον τῆς ἀκολουθίας

$$\Sigma_{-1} \quad : \quad -x_1, \quad -x_2, \ldots -x_\nu, \ldots$$

θὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς —A.

Ἠδυνάμεθα ἐπομένως, ἀφοῦ δώσωμεν ὁρισμὸν τοῦ μεγαλυτέρου ὁρίου, νὰ λάβωμεν ὡς ὁρισμὸν τοῦ μικροτέρου ὁρίου τὸν ἑξῆς :

Ἐὰν —A εἶναι τὸ μεγαλύτερον ὅριον τῆς ἀκολουθίας

$$-x_1, \quad -x_2, \ldots -x_\nu, \ldots$$

τὸ μικρότερον ὅριον τῆς ἀκολουθίας Σ_1 εἶναι A.

2) Διὰ τὴν ὁμοιομορφίαν τῆς ἐκφωνήσεως τῶν ἀνωτέρω ὁρισμῶν καὶ προτάσεων θεωροῦμεν ὅτι εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἐπροσθέσαμεν καὶ δύο στοιχεῖα: τὸ $+\infty$ καὶ τὸ $-\infty$. Ἐξ ὁρισμοῦ ὁ ἀριθμὸς $+\infty$ εἶναι ἀνώτερος παντὸς πραγματικοῦ καὶ ὁ ἀριθμὸς $-\infty$ εἶναι κατώτερος παντὸς πραγματικοῦ. Ἀντιστοίχως λέγομεν ὅτι ἐπὶ τοῦ ἄξονος OX ἔχομεν τὸ σημεῖον $+\infty$ καὶ τὸ σημεῖον $-\infty$, τὰ ὁποῖα θεωροῦμεν ὡς διακεκριμένα ἀλλήλων.

3) Δυνατὸν μία ἀκολουθία Σ_1 νὰ εἶναι τοιαύτη, ὥστε ὁσονδήποτε μεγάλος καὶ ἂν εἶναι δοθείς τις θετικὸς ἀριθμὸς M νὰ εὑρίσκεται ὅρος x_μ τῆς ἀκολουθίας τοιοῦτος, ὥστε

$$x_{\mu+\rho} > M \quad \text{διὰ } \rho = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ὅπως π. χ. ἡ ἀκολουθία $\qquad 1, 2, 3, \ldots$

Δυνατὸν ὅμως νὰ εἶναι ἡ Σ_1 τοιαύτη, ὥστε νὰ ὑπάρχῃ ἀπειρία ὅρων μεγαλυτέρων τοῦ M, ἀλλὰ νὰ μὴ εὑρίσκεται ὅρος x_μ τοιοῦτος ὥστε $x_{\mu+\rho} > M$ διὰ ***πᾶσαν*** θετικὴν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ ρ· ὅπως π. χ. ἡ ἀκολουθία

$$1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots$$

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν τὸ $+\infty$ θὰ εἶναι τὸ ὅριον τῆς ἀκολουθίας Σ_1· ἐνῷ εἰς τὴν δευτέραν τὸ $+\infty$ θὰ εἶναι ἓν ἐκ τῶν ὁρίων τῆς Σ_1· θὰ εἶναι δὲ τὸ μεγαλύτερον ὅριον τῆς ἀκολουθίας.

Καθ᾽ ὅμοιον τρόπον ἔχομεν ὅτι δυνατὸν μία ἀκολουθία Σ_1 νὰ ἔχῃ ὅριον τὸ $-\infty$, δυνατὸν ὅμως καὶ τὸ $-\infty$ νὰ εἶναι ἓν ἐκ τῶν ὁρίων της· θὰ εἶναι τότε τὸ μικρότερον ὅριον τῆς Σ_1.

4) Δὲν ὑπάρχει ὅρος τῆς ἀκολουθίας Σ_1 μεγαλύτερος τοῦ ἀνωτέρου πέρατος αὐτῆς (§ 12). [1] Ἐνῷ δυνατὸν νὰ ὑπάρχουν ὅροι τῆς ἀκολουθίας Σ_1 μεγαλύτεροι τοῦ μεγαλυτέρου της ὁρίου.

35. ***Δὲν εἶναι δυνατὸν τὸ μικρότερον ὅριον ἀκολουθίας νὰ ὑπερβαίνῃ τὸ μεγαλύτερον αὐτῆς ὅριον.***

Τοῦτο φαίνεται εὐκόλως ἀπὸ τὸν πρῶτον ὁρισμόν· καὶ τῷ ὄντι θεωρήσωμεν τὰς διαφόρους δυνατὰς περιπτώσεις.

α′) Ἡ ἀκολουθία Σ_1 δὲν εἶναι περατωμένη ἄνωθεν· τότε τὸ μεγαλύτερον ὅριον εἶναι $+\infty$· καὶ ἡ πρότασις εἶναι προφανής.

β′) Ἡ ἀκολουθία Σ_1 δὲν εἶναι περατωμένη κάτωθεν· τότε τὸ μικρότερον ὅριον εἶναι $-\infty$· καὶ πάλιν ἡ πρότασις εἶναι προφανής.

γ′) Ἡ ἀκολουθία Σ_1 εἶναι περατωμένη ἄνωθεν, καὶ κάτωθεν: τότε θεωρήσωμεν τὰς ἀκολουθίας (Τ) καὶ (Ρ)· θὰ ἔχωμεν

$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \alpha_3 \geqq \ldots \qquad \text{καὶ } \beta_1 \leqq \beta_2 \leqq \beta_3 \leqq \ldots$$

ὁπόθεν ἐξάγεται ὅτι $\alpha_\mu > \beta_\nu$ εἴτε $\mu=\nu$, εἴτε $\mu<\nu$, εἴτε $\mu>\nu$· [διότι ἐὰν $\mu=\nu$ αἱ ἀκολουθίαι Σ_μ καὶ Σ_ν θὰ εἶναι αἱ αὐταὶ καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν $\alpha_\mu \geqq \beta_\nu$, ἐὰν $\mu<\nu$, θὰ ἔχωμεν $\alpha_\mu \geqq \alpha_\nu \geqq \beta_\nu$ καὶ ἐὰν τέλος $\mu>\nu$, θὰ ἔχωμεν $\alpha_\mu \geqq \beta_\mu \geqq \beta_\nu$] ἄρα καὶ $\alpha_\mu \geqq \beta_1$, $\beta_\mu \leqq \alpha_1$ διὰ πᾶσαν θετικὴν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ μ, ὅθεν ἡ (Τ) εἶναι περατωμένη κάτωθεν καὶ ἡ (Ρ) εἶναι περατωμένη ἄνωθεν· ἑπομένως τὸ μεγαλύτερον καὶ τὸ μικρότερον ὅριον τῆς Σ_1 θὰ εἶναι πεπερασμένοι ἀριθμοὶ Α καὶ Β· ὥστε διὰ πᾶσαν θετικὴν τιμὴν τοῦ ε θὰ ὑπάρχῃ μία τοὐλάχιστον τιμὴ τοῦ ν δι᾽ ἣν $\alpha_\nu \leqq A+\varepsilon$ καὶ μία τοὐλάχιστον τιμὴ τοῦ μ δι᾽ ἣν $\beta_\mu \geqq B-\varepsilon$· ὁπότε θὰ ἔχωμεν

$$(A+\varepsilon)-(B-\varepsilon) \geqq \alpha_\nu-\beta_\mu \cdot$$

---

[1] Λέγοντες ἀνώτερον πέρας ἀκολουθίας ἐννοοῦμεν τὸ ἀνώτερον πέρας τοῦ συνόλου, τὸ ὁποῖον σχηματίζουν οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας.

ἀλλὰ $\alpha_\nu - \beta_\mu \geqq 0$· ἐπομένως $A-B > -2\varepsilon$· ἐπειδὴ δὲ τοῦτο ἀληθεύει διὰ πᾶσαν θετικὴν τιμὴν τοῦ ε ὁσονδήποτε μικράν, θὰ ἔχωμεν

$$A-B \geqq 0 \qquad \text{δηλ.} \qquad A \geqq B.$$

36. ***Γενικὸς ὁρισμὸς τοῦ μεγαλυτέρου καὶ τοῦ μικροτέρου ὁρίου.*** Ἔστω γενικῶς ὅτι ἡ x λαμβάνει ***ἀπειρίαν διαδοχικῶν τιμῶν πεπερασμένων*** καὶ ὅτι τὸ σύνολον Σ τῶν τιμῶν αὐτῶν εἶναι περατωμένον ἄνωθεν. Ἂς λάβωμεν τυχόντα πραγματικὸν ἀριθμόν· ἢ θὰ ὑπάρχουν ἄπειροι μεγαλύτεροί του ἐν τῷ συνόλῳ Σ ἢ πεπερασμένοι τὸ πλῆθος μεγαλύτεροί του [περιλαμβάνεται καὶ ἡ περίπτωσις, δι' ἣν δὲν ὑπάρχει κανεὶς μεγαλύτερος ἐν τῷ συνόλῳ Σ]· οὕτως ἔχομεν(1) δύο τάξεις ἀριθμῶν. Θεωρήσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς τῆς δευτέρας τάξεως, δηλαδὴ θεωρήσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς ἐκείνους ὧν ἕκαστος ἔχει πεπερασμένον πλῆθος μεγαλυτέρων του ἐν τῷ συνόλῳ Σ· οἱ ἀριθμοὶ τῆς τάξεως αὐτῆς ἀποτελοῦν σύνολόν τι Ε· ἐὰν τὸ σύνολον τοῦτο Ε ἔχῃ κατώτερον πέρας ἀριθμόν τινα Α, οὗτος θὰ λέγεται ***τὸ μεγαλύτερον ὅριον*** τοῦ x καὶ σημειοῦται

$$\overline{\text{ορ}}\,x = A$$

ἢ καὶ ἁπλῶς
$$\overline{x} = A$$

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν (§ 13) πᾶς ἀριθμὸς $A+\varepsilon$ (ὅπου ε οἱοσδήποτε θετικὸς) θὰ ἔχῃ μεγαλυτέρους του ἐν τῷ συνόλῳ πεπερασμένους τὸ πλῆθος. Ἐὰν ἐξαιρέσωμεν αὐτοὺς ὅλους, οἱ ἄλλοι ἀριθμοὶ τοῦ συνόλου θὰ εἶναι μικρότεροί του· ἑπομένως ἡ ἀνισότης

$$x < A+\varepsilon \qquad (1)$$

(1) Ὑπάρχουν προφανῶς ἀριθμοὶ καὶ τῶν δύο τάξεων ὅταν τὸ Σ εἶναι περατωμένον καὶ ἕκαστος ἀριθμὸς τῆς δευτέρας τάξεως εἶναι μικρότερος ἀπὸ πάντα ἀριθμὸν τῆς πρώτης· διότι, ἐὰν ἀριθμός τις β ἔχῃ πεπερασμένους τὸ πλῆθος μεγαλυτέρους του ἐν τῷ συνόλῳ καὶ ἀριθμός τις α ἔχῃ ἀπείρους τὸ πλῆθος μεγαλυτέρους του ἐν τῷ συνόλῳ, θὰ ἔχωμεν $\beta > \alpha$ καθόσον, ἐὰν εἴχομεν $\beta \leqq \alpha$, πᾶς μεγαλύτερος τοῦ α θὰ ἦτο καὶ μεγαλύτερος τοῦ β, ὁπότε ἔπρεπε ὁ β νὰ ἔχῃ ἀπείρους μεγαλυτέρους ἐν τῷ συνόλῳ.

θὰ ἐπαληθεύεται διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x ἀπό τινος στιγμῆς καὶ ἐφεξῆς.

Ἐνῷ ἐὰν δοθῇ ὁ A—ε θὰ ἀνήκῃ (§ 13) οὗτος εἰς τὴν ἄλλην τάξιν· ἤτοι θὰ ἔχωμεν ἀπείρους μεγαλυτέρους του ἐν τῷ συνόλῳ Σ· ὥστε ἡ ἀνισότης

$$x > A - \varepsilon \qquad (2)$$

θὰ ἐπαληθεύεται ἀπὸ ἀπείρους τιμὰς τοῦ x.

Εἰς τὴν γενικὴν δὲ περίπτωσιν δυνάμεθα νὰ δώσωμεν τὸν ἑξῆς ὁρισμὸν διὰ τὸ μεγαλύτερον ὅριον.

Ἔστω μεταβλητή τις x λαμβάνουσα διαδοχικῶς ἀπειρίαν τιμῶν πεπερασμένων· θὰ λέγωμεν ὅτι ἀριθμός τις A εἶναι τὸ ***μεγαλύτερον ὅριον τοῦ*** x, ἐὰν εἴμεθα βέβαιοι, ὅτι δοθέντος ἀριθμοῦ θετικοῦ ε ὁσονδήποτε μικροῦ ἡ ἀνισότης (1) ἐπαληθεύεται διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x ἀπό τινος στιγμῆς καὶ ἐφεξῆς, ἡ δὲ ἀνισότης 2) ἐπαληθεύεται ἀπὸ ἀπείρους τιμὰς τοῦ x οὕτως, ὥστε ἀπὸ οἱασδήποτε στιγμῆς καὶ πέραν νὰ εὑρίσκωνται πάντοτε ***καὶ*** τιμαὶ τοῦ x ἐπαληθεύουσαι τὴν (2).

Ὁμοίως δίδεται ὁ ὁρισμὸς τοῦ μικροτέρου ὁρίου.

Ἔστω ὅτι μεταβλητή τις x λαμβάνει διαδοχικῶς ἀπειρίαν τιμῶν πεπερασμένων. Θὰ λέγωμεν ὅτι ἀριθμός τις α εἶναι τὸ ***μικρότερον ὅριον τοῦ*** x, ἐὰν εἴμεθα βέβαιοι ὅτι δοθέντος θετικοῦ ἀριθμοῦ ε ὁσονδήποτε μικροῦ ἡ ἀνισότης :

$$x > \alpha - \varepsilon \qquad (1')$$

ἐπαληθεύεται διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x ἀπό τινος στιγμῆς καὶ ἐφεξῆς, ἡ δὲ ἀνισότης :

$$x < \alpha + \varepsilon \qquad (2')$$

ἐπαληθεύεται ἀπὸ ἀπείρους τιμὰς τοῦ x οὕτως ὥστε ἀπὸ οἱασδήποτε στιγμῆς καὶ πέραν νὰ εὑρίσκωνται πάντοτε ***καὶ*** τιμαὶ τοῦ x ἐπαληθεύουσαι τὴν (2′)

σημειοῦται δὲ ὡς ἑξῆς

$$\underline{\text{ορ}\, x} = \alpha.$$

ἢ καὶ

$$\underline{x} = \alpha$$

Οἱ προηγούμενοι ὁρισμοὶ προφανῶς ἰσχύουν εἴτε ἀριθμήσιμον εἴναι τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τοῦ x, εἴτε μὴ ἀριθμήσιμον.

37. Ἐκ τῶν προηγουμένων εὐκόλως ἐξάγεται ὅτι ἠδυνάμεθα νὰ δώσωμεν καὶ τὸν ἑξῆς ὁρισμόν :

Τὸ μεγαλύτερον ὅριον περατωμένου συνόλου Σ περιέχοντος ἀπειρίαν στοιχείων εἶναι τὸ ἀνώτερον πέρας τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν, ὧν ἕκαστος ἔχει ἀπείρους ἀριθμοὺς μεγαλυτέρους του ἐν τῷ συνόλῳ Σ.

Ὅθεν (§ 20, 21) ***τὸ μεγαλύτερον ὅριον τοῦ Σ*** συμπίπτει μὲ τὸν ***μέγιστον ἀριθμὸν τοῦ παραγώγου Σ^1***.

Καὶ ἀπ᾽ εὐθείας δυνάμεθα νὰ ἴδωμεν ὅτι τὸ μεγαλύτερον ὅριον συνόλου τινὸς Σ συμπίπτει μὲ τὸν μέγιστον ἀριθμὸν Γ τοῦ παραγώγου συνόλου Σ^1, ἀρκεῖ τὸ δοθὲν σύνολον Σ νὰ εἶναι περατωμένον ἄνωθεν.

Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ δείξωμεν ὅτι

I) οἱ ἀριθμοὶ τοῦ συνόλου Σ οἱ μεγαλύτεροι τοῦ $\Gamma + \varepsilon$ (διὰ πᾶσαν θετικὴν τιμὴν τοῦ ε) εἶναι πεπερασμένοι τὸ πλῆθος (ἢ καὶ κανεὶς) καὶ

II) οἱ ἀριθμοὶ τοῦ Σ οἱ μεγαλύτεροι τοῦ $\Gamma - \varepsilon$ εἶναι ἄπειροι τὸ πλῆθος.

Ἀπόδειξις. I) Ἔστω ε τυχὼν θετικὸς ἀριθμός· θεωρήσωμεν τὸ σύνολον (E) τῶν ἀριθμῶν οἵτινες ἀνήκουν εἰς τὸ Σ καὶ εἶναι μεγαλύτεροι τοῦ $\Gamma + \varepsilon$· ἐπειδὴ τὸ Σ εἶναι περατωμένον ἄνωθεν, τὸ σύνολον (E) εἶναι περατωμένον· ἐὰν συνεπῶς τὸ σύνολον τοῦτο εἶχεν ἀπειρίαν στοιχείων, θὰ εἶχεν (§ 20) ὁρικὸν ἀριθμὸν Δ· ὁ ἀριθμὸς οὗτος προφανῶς θὰ ἦτο μεγαλύτερος τοῦ Γ, θὰ ἦτο δ᾽ ἀφ᾽ ἑτέρου καὶ ὁρικὸς ἀριθμὸς τοῦ Σ· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον· διότι ἐξ ὑποθέσεως ὁ Γ εἶναι ὁ μέγιστος τῶν ὁρικῶν ἀριθμῶν τοῦ Σ.

II) Ἐπειδὴ ὁ Γ εἶναι ὁρικὸς ἀριθμὸς τοῦ Σ, θὰ ἔχωμεν ὅτι εἰς τὸ διάστημα $(\Gamma - \varepsilon, \Gamma + \varepsilon)$ θὰ ὑπάρχουν ἄπειροι ἀριθμοὶ τοῦ Σ· ἄρα θὰ ὑπάρχῃ ἀπειρία ἀριθμῶν τοῦ Σ μεγαλυτέρων τοῦ $\Gamma - \varepsilon$.

Καθ᾽ ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι :

Τὸ μικρότερον ὅριον συνόλου Σ περατωμένου κάτωθεν εἶναι ὁ ἐλάχιστος ἀριθμὸς τοῦ παραγώγου Σ^1.

38. ***Ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη*** ἵνα μεταβλητή τις x ἔχῃ ὅριον πεπερασμένον καὶ ὡρισμένον ἀριθμὸν εἶναι ἡ ἑξῆς : τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τῆς x νὰ εἶναι περατωμένον καὶ νὰ ἔχωμεν

$$\overline{\text{ορ}}\,x = \underline{\text{ορ}}\,x$$

ἤτοι τὸ μεγαλύτερον ὅριον A νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ μικρότερον ὅριον α. Καὶ τῷ ὄντι ἔστω $A=\alpha$· τότε δοθέντος ἀριθμοῦ θετικοῦ ε, ὁσονδήποτε μικροῦ, θὰ ἔχωμεν ἀπό τινος τιμῆς x_0 τοῦ x καὶ ἐφεξῆς

$$x<A+\varepsilon$$

ὁμοίως ἀπό τινος τιμῆς x_1 τοῦ x καὶ ἐφεξῆς θὰ ἔχωμεν

$$x>\alpha-\varepsilon.$$

Ἔστω ὅτι ἡ x_1 ἔρχεται κατόπιν τῆς x_0 τότε ἀπὸ τῆς τιμῆς x_1 καὶ ἐφεξῆς θὰ ἔχωμεν

$$x<A+\varepsilon$$

καὶ

$$x>\alpha-\varepsilon$$

Ἐπειδὴ δὲ $A=\alpha$, θὰ ἔχωμεν ἀπὸ τῆς τιμῆς x_1 καὶ ἐφεξῆς

$$x<A+\varepsilon \quad \text{καὶ} \quad x>A-\varepsilon$$

καὶ ἐπομένως :

$$|x-A|<\varepsilon$$

ἤτοι τὸ A θὰ εἶναι ὅριον τοῦ x· ὥστε ἡ συνθήκη εἶναι ἐπαρκής.

Ἡ συνθήκη αὕτη εἶναι καὶ ἀναγκαία διότι ἐὰν $A\neq\alpha$, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν $\alpha+\varepsilon<A-\varepsilon$· θὰ ἔχωμεν δὲ ἀπὸ οἱασδήποτε τιμῆς καὶ πέραν ***καὶ*** τιμὰς τοῦ $x<\alpha+\varepsilon$ καὶ τιμὰς τοῦ $x>A-\varepsilon$· ἤτοι τὸ x θὰ αἰωρῆται ἀπὸ $\alpha+\varepsilon$ ἕως $A-\varepsilon$ ἀπεριορίστως, χωρὶς νὰ ἔχῃ ὡρισμένον ὅριον.

Ἀσκήσεις.

1) Ποῖα τὰ ὅρια τῶν ἀκολουθιῶν

$$x_\nu=\nu^2+2\nu, \quad x_\nu=\frac{\nu+(-1)^\nu}{\nu+2}, \quad x_\nu=\frac{-\nu^2-\nu}{5}. \quad (\nu=1,2,3,\ldots)$$

2) Ποῖα τὰ μεγαλύτερα καὶ τὰ μικρότερα ὅρια τῶν ἀκολουθιῶν

$$x_\nu=\frac{1}{\nu}, \quad x_\nu=\nu, \quad x_\nu=\frac{2+(-1)^\nu}{7} \quad (\nu=1,2,3,\ldots)$$

3) Ποῖα τὰ μεγαλύτερα καὶ ποῖα τὰ μικρότερα ὅρια τῶν ἀκολουθιῶν διὰ τὰς ὁποίας ἔχομεν

$$x_{2\nu-1}=\nu, \qquad x_{2\nu}=-\nu \qquad (\nu=1,2,3,\ldots)$$

$$x_{2\nu-1}=\frac{1}{\nu} \qquad x_{2\nu}=\nu \qquad (\nu=1,2,3,\ldots)$$

$$x_{2\nu-1}=1-\frac{1}{\nu}, \quad x_{2\nu}=-1+\frac{1}{\nu} \quad (\nu=1,2,3,\ldots)$$

4) Τὸ κατώτερον πέρας ἀκολουθίας δὲν ὑπερβαίνει ποτὲ τὸ μικρότερον ὅριον αὐτῆς καὶ τὸ ἀνώτερον πέρας ἀκολουθίας δὲν εἶναι ποτὲ μικρότερον τοῦ μεγαλυτέρου της ὁρίου.

5) Δὲν ἀλλάσσει τὸ μεγαλύτερον καὶ τὸ μικρότερον ὅριον ἀκολουθίας, ἐὰν διαγράψωμεν πεπερασμένον πλῆθος ὅριον.

6) Ἔστωσαν δύο ἀκολουθίαι

$$\begin{array}{ll} \Sigma & x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots \\ T & y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots \end{array}$$

Ἐὰν εὑρίσκεται δείκτης μ τοιοῦτος, ὥστε $x_{\mu+\rho} \geqq y_{\mu+\rho}$ διὰ $\rho=1,2,3,\ldots$ τότε $\overline{x} \geqq \overline{y}$ καὶ $\underline{x} \geqq \underline{y}$.

7) Ἔστω ὅτι ἀκολουθία τις

$$\begin{array}{ll} T & y_1,\ y_2,\ y_2,\ \ldots \\ \Sigma & x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots \end{array}$$

εἶναι μέρος ἄλλης ἀκολουθίας δηλ. ὅτι ἡ T προκύπτει ἀπὸ τὴν Σ· ὅταν λείψουν ἀπὸ τὴν Σ ὅροι (πεπερασμένοι τὸ πλῆθος ἢ ἄπειροι) θὰ ἔχωμεν· $\underline{x} \leqq \underline{y} \leqq \overline{y} \leqq \overline{x}$.

Ἐφαρμογαὶ τοῦ β' ὁρισμοῦ τοῦ μεγαλυτέρου καὶ μικροτέρου ὁρίου.

39) Ἔστωσαν αἱ ἀκολουθίαι

$$\begin{array}{ll} \Sigma_1 & x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots \\ \Sigma_2 & y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots \\ \Sigma_3 & \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \ldots \end{array}$$

ὅπου $\omega_\nu=x_\nu+y_\nu$ $(\nu=1,2,3,\ldots)$

α΄) Ἐὰν $\overline{x}=A$ καὶ $\overline{y}=B$, ὅπου A καὶ B πεπερασμένοι ἀριθμοί, θὰ ἔχωμεν ὅτι $\overline{\omega}\leqq A+B$. Καὶ τῷ ὄντι, ἔστω δ τυχὼν θετικὸς ἀριθμός· θὰ εὑρίσκεται ὅρος x_μ τῆς ἀκολουθίας Σ_1 ἀπὸ τοῦ ὁποίου καὶ πέραν πᾶς ὅρος τῆς Σ_1 εἶναι $\leqq A+\frac{\delta}{2}$, ὅπως ἐπίσης θὰ εὑρίσκεται ὅρος y_ν τῆς ἀκολουθίας Σ_2 ἀπὸ τοῦ ὁποίου καὶ πέραν πᾶς ὅρος τῆς Σ_2 εἶναι $\leqq B+\frac{\delta}{2}$· ἀλλὰ τότε διὰ πᾶσαν ἀκεραίαν τιμὴν ρ μεγαλυτέραν τῶν μ καὶ ν θὰ ἔχωμεν $\omega_\rho \leqq A+B+\delta$ ὅθεν $\overline{\omega}\leqq A+B$

β΄) Ἐὰν $\overline{x}=-\infty$ καὶ $\overline{y}<+\infty$ θὰ ἔχωμεν $\overline{\omega}=-\infty=x+y$.[1]

γ΄) Ἐὰν $\overline{x}=+\infty$ καὶ $\overline{y}>-\infty$ θὰ ἔχωμεν $\overline{\omega}=+\infty=\overline{x}+\overline{y}$.

δ΄) Ἐὰν $\overline{x}=A$ καὶ $\underline{y}=\beta$, ὅπου A,β πεπερασμένοι, θὰ ἔχωμεν $\overline{\omega}\geqq A+\beta$.

Καὶ τῷ ὄντι ἔστω δ τυχὼν θετικὸς ἀριθμός· θὰ ὑπάρχουν ἄπειροι ὅροι τῆς Σ_1 μεγαλύτεροι τοῦ $A-\frac{\delta}{2}$· ἐνῷ ἀφ' ἑτέρου θὰ εὑρίσκεται ὅρος τῆς Σ_2 ἀπὸ τοῦ ὁποίου καὶ πέραν πᾶς ὅρος τῆς Σ_2 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ $\beta-\frac{\delta}{2}$· ἄρα θὰ ὑπάρχουν ἄπειροι ὅροι τῆς Σ_3 μεγαλύτεροι τοῦ $A+\beta-\delta$· ὅθεν $\overline{\omega}\geqq A+\beta$.

ε΄) Ἐὰν $\overline{x}=+\infty$ καὶ $\underline{y}>-\infty$ θὰ ἔχωμεν $\omega=+\infty=\overline{x}+\underline{y}$.

40) Ἔστωσαν αἱ ἀκολουθίαι $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3,$ ὅπου οἱ x_ν, y_ν δὲν εἶναι ἀρνητικοὶ καὶ $\omega_\nu=x_\nu y_\nu$ $(\nu=1,2,3,\ldots)$

α΄) Ἐὰν $\overline{x}=A$, $\overline{y}=B$ (A,B πεπερασμένοι) θὰ ἔχωμεν $\overline{\omega}\leqq AB$.

Καὶ τῷ ὄντι ἐὰν δ εἶναι τυχὼν θετικός, θὰ εὑρίσκωνται δεῖκται μ καὶ ν τοιοῦτοι, ὥστε διὰ πάντα δείκτην $m>\mu$ καὶ διὰ πάντα δείκτην $\eta>\nu$ νὰ ἔχωμεν $x_m<A+\delta$ καὶ $y_\eta<B+\delta$ ὁπότε

---

[1]) Καὶ πράγματι ἔστω τυχὼν ἀριθμὸς δ καὶ ἕτερος τυχὼν ἀριθμὸς ε μεγαλύτερος τοῦ $\overline{y}$· θὰ εὑρίσκεται ὅρος τῆς ἀκολουθίας Σ_1 ἀπὸ τοῦ ὁποίου καὶ πέραν πᾶς ὅρος τῆς Σ_1 θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ $\delta-\varepsilon$· θὰ εὑρίσκεται ἐπίσης ὅρος τῆς Σ_2 ἀπὸ τοῦ ὁποίου καὶ πέραν πᾶς ὅρος τῆς Σ_2 εἶναι μικρότερος τοῦ ε· ἄρα θὰ εὑρίσκεται ὅρος τῆς Σ_3 ἀπὸ τοῦ ὁποίου καὶ πέραν πᾶς ὅρος τῆς Σ_3 εἶναι μικρότερος τοῦ $\delta-\varepsilon+\varepsilon$ ἤτοι τοῦ δ· ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ δ εἶναι ἀρνητικὸς οἱοσδήποτε· ὅθεν $\overline{\omega}=-\infty$.

διὰ πάντα δείκτην ϱ μεγαλύτερον τῶν μ καὶ ν θὰ ἔχωμεν $x_\varrho\ y_\varrho < (A+\delta)(B+\delta)$ ἢ ἀκόμη $x_\varrho\ y_\varrho < AB+\delta\ (A+B+\delta)$.

Ἔστω ε τυχὼν θετικός· δίδω εἰς τὸ δ τιμὴν τοιαύτην ὥστε $\delta(A+B+\delta)<\varepsilon$· [ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ λάβω τὸ δ ἴσον πρὸς τὸν μικρότερον ἐκ τῶν ἀριθμῶν $\frac{\varepsilon}{A+B+1}$ καὶ 1] Κατὰ ταῦτα εὑρίσκεται ὅρος τῆς ἀκολουθίας Σ_3 ἀπὸ τοῦ ὁποίου καὶ πέραν πᾶς ὅρος τῆς Σ_3 θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ $AB+\varepsilon$· καὶ ἑπομένως

$$\overline{\omega} \leq AB+\varepsilon \quad \text{ὅθεν} \quad \overline{\omega} \leq A.B$$

β′ Ἐὰν $\overline{x}=+\infty$ καὶ $\overline{y} \neq 0$ θὰ ἔχωμεν $\overline{\omega} = \overline{x}\ \overline{y} = +\infty$.

41) Ἔστωσαν αἱ ἀκολουθίαι Σ_1, Σ_2 ὅπου $x_\nu > o$ $y_\nu > o$ καὶ $x_\nu y_\nu = 1$ $(\nu=1,2,3,\ldots)$.

α′) Ἐὰν $\overline{x} = A$ πεπερασμένος $\neq o$ θὰ εἶναι $\overline{x}\underline{y}=1$.

Πρὸς ἀπόδειξιν αὐτοῦ παρατηροῦμεν ὅτι διὰ πάντα ἀριθμὸν δ πληροῦντα τὰς ἀνισότητας $o<\delta<\overline{x}$ ὑπάρχουν ἄπειροι ὅροι x_ν τῆς ἀκολουθίας Σ_1 διὰ τοὺς ὁποίους $x_\nu > \delta$· ἑπομένως δυνάμει τῆς $x_\nu y_\nu = 1$ ὑπάρχουν καὶ ἄπειροι ὅροι y_ν τῆς Σ_2 δι' οὓς $y_\nu < \frac{1}{\delta}$, ὅθεν $\underline{y} \leq \frac{1}{\delta}$ ἢ καὶ $\delta \leq \frac{1}{\underline{y}}$· ἀφ' ἑτέρου ἔστω τυχὼν ἀριθμὸς $K > \overline{x}$· ἀπό τινος τάξεως καὶ ἐφεξῆς πᾶς ὅρος τῆς Σ_1 θὰ εἶναι $<K$· ὅθεν ἀπό τινος τάξεως καὶ ἐφεξῆς πᾶς ὅρος τῆς Σ_2 θὰ εἶναι $>\frac{1}{K}$· ἑπομένως

$$\underline{y} \geq \frac{1}{K} \quad \text{ἢ καὶ} \quad K \geq \frac{1}{\underline{y}}$$

ὥστε ἔχομεν $\qquad \delta \leq \frac{1}{\underline{y}} \leq K$

ὅπου $\qquad o<\delta<\overline{x}<K \qquad$. ὅθεν ἐξάγομεν ὅτι $\overline{x} = \frac{1}{\underline{y}}$ [1].

---

[1] Καὶ πράγματι ἔστω $\overline{x} = \frac{1}{\underline{y}} + \varepsilon$, ὅπου $\varepsilon > o$· τότε θὰ ἠδυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὡς δ τυχόντα ἀριθμὸν περιλαμβανόμενον εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ διαστήματος $\left(\frac{1}{\underline{y}}, \overline{x}\right)$ ὁπότε δὲν θὰ ἴσχυεν ἡ σχέσις $\delta \leq \frac{1}{\underline{y}}$· ἔστω $\frac{1}{\underline{y}} = \overline{x}+\varepsilon$, ὅπου $\varepsilon > o$· τότε θὰ ἠδυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὡς K τυχόντα ἀριθμὸν περιλαμβανόμενον εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ διαστήματος $\left(\overline{x}, \frac{1}{\underline{y}}\right)$, ὁπότε δὲν θὰ ἴσχυεν ἡ σχέσις $\frac{1}{\underline{y}} \leq K$.

Ἄσκησις. Εἰς τὰ ἀνωτέρω (§§ 39, 40, 41) ὑπεθέσαμεν ὅτι πάντες οἱ x_ν, y_ν, εἶναι πεπερασμένοι· εἰς ποίας περιπτώσεις καὶ ὑπὸ ποίας συνθήκας ἡ συνθήκη αὐτὴ δὲν εἶναι ἀναγκαία;

Θεμελιῶδες κριτήριον (ὑπάρξεως ὁρίου) συγκλίσεως.

42) Θεωρήσωμεν μεταβλητὴν λαμβάνουσαν διαδοχικῶς τὰς τιμὰς ἀριθμησίμου συνόλου

$$\Sigma \qquad x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_\nu \ldots$$

Ζητῶ ἐὰν ἡ μεταβλητὴ x ἔχῃ ὅριον· δηλ. ἐὰν ὑπάρχῃ ἀριθμὸς πεπερασμένος καὶ ὡρισμένος ὅστις νὰ εἶναι ὅριον τῆς ἀκολουθίας Σ. Ἔστω ὅτι ὑπάρχει τοιοῦτον ὅριον α. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ὁρίου (§ 27) δοθέντος ἀριθμοῦ θετικοῦ ε ὁσονδήποτε μικροῦ θὰ εὑρίσκεται δείκτης μ τοιοῦτος, ὥστε $\quad |x_{\mu+\sigma} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\sigma=0,1,2,3,\ldots)$

Διὰ τὴν τυχοῦσαν λοιπὸν θετικὴν καὶ ἀκεραίαν τιμὴν ρ θὰ ἔχωμεν

$|x_{\mu+\rho} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$· ἔχομεν ἀφ᾽ ἑτέρου $\quad |x_\mu - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ ἢ καὶ

$|\alpha - x_\mu| < \frac{\varepsilon}{2}$· ἑπομένως $\quad |x_{\mu+\rho} - \alpha| + |\alpha - x_\mu| < \varepsilon$ ὅθεν καὶ

$$|x_{\mu+\rho} - x_\mu| < \varepsilon \qquad (\rho = 1,2,3,\ldots) \qquad (\Theta)$$

ἤτοι ἐὰν ὑπάρχῃ ὅριον τῆς Σ θὰ εὑρίσκεται δοθέντος θετικοῦ ε δείκτης μ (ὅστις προφανῶς ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν τιμὴν τοῦ ε) τοιοῦτος, ὥστε οἱ κατόπιν τοῦ x_μ ὅροι τῆς ἀκολουθίας νὰ διαφέρουν ὅλοι ἀπὸ τοῦ x_μ ὀλιγώτερον τοῦ ε (ἐννοοῦμεν πάντοτε τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τῆς διαφορᾶς). Ἔχομεν οὕτω τὴν ἀναγκαίαν συνθήκην, ἵνα ἡ Σ ἔχῃ ὅριον ἕνα πεπερασμένον ἀριθμόν.

Λέγω ὅτι ἡ συνθήκη αὕτη εἶναι καὶ ἀρκετή· ἔστω ὅτι πληροῦται, δηλ. ὅτι δοθέντος θετικοῦ ε ὁσονδήποτε μικροῦ εὑρίσκεται θετικὸς ἀκέραιος μ τοιοῦτος ὥστε νὰ πληροῦται ἡ (Θ)· ἐξ αὐτῆς ἕπεται

$$|x_{\mu+\rho}-x_\mu| + |x_\mu| < \varepsilon + |x_\mu| \qquad \text{ὅθεν καὶ}$$

$$|x_{\mu+\rho}| < |x_\mu| + \varepsilon \qquad (\rho=1,2,3,\ldots)$$

ἑπομένως ἡ ἀπόλυτος τιμὴ παντὸς ὅρου τῆς ἀκολουθίας Σ δὲν θὰ ὑπερβαίνῃ τὸν μεγαλύτερον ἐκ τῶν μ+1 ἀριθμῶν

$$|x_1|,\ |x_2|, \ldots |x_\mu|,\ |x_\mu| + \varepsilon$$

ἄρα ἡ ἀκολουθία Σ θὰ εἶναι περατωμένη· ἔστωσαν Α καὶ α τὸ μεγαλύτερον καὶ τὸ μικρότερον αὐτῆς ὅριον· θὰ ὑπάρχουν (§ 29) ἄπειροι ὅροι τῆς Σ μεγαλύτεροι τοῦ Α—ε· ἑπομένως καὶ πέραν τοῦ ὅρου x_μ, κατέχοντος ὡρισμένην τάξιν, θὰ εὑρίσκωνται ἄπειροι ὅροι τῆς ἀκολουθίας Σ μεγαλύτεροι τοῦ Α—ε· ἤτοι θὰ ἔχωμεν

$$A-\varepsilon < x_\nu$$

δι' ἀπείρους τιμὰς τοῦ ν μεγαλυτέρας τοῦ μ· ὁμοίως διακρίνομεν ὅτι ἔχομεν

$$\alpha+\varepsilon > x_\tau$$

δι' ἀπείρους τιμὰς τοῦ τ μεγαλυτέρας τοῦ μ.

ὅθεν $$A-\alpha-2\varepsilon < x_\nu - x_\tau \leqq |x_\nu - x_\tau|$$

δι' ἄπειρα συστήματα τιμῶν τῶν ν, τ μεγαλυτέρων τοῦ μ·

ἀλλ' ἀφοῦ ν>μ θὰ ἔχωμεν συμφώνως πρὸς τὴν ὑπόθεσιν

$|x_\nu - x_\mu| < \varepsilon$ καὶ $|x_\mu - x_\tau| < \varepsilon$· ἑπομένως $|x_\nu - x_\tau| < 2\varepsilon$ καὶ συνεπῶς ἡ προηγουμένη ἀνισότης δίδει Α—α<4ε· ἐπειδὴ δὲ τοῦτο θὰ ἰσχύῃ ὁσονδήποτε μικρὸς καὶ ἂν ὑποτεθῇ ὁ θετικὸς ε, θὰ εἶναι $A \leqq \alpha$· ἡ σχέσις ὅμως Α<α ἀποκλείεται (§ 35)· ἀπομένει ἑπομένως Α=α· ἤτοι (§ 38) ἡ Σ θὰ συγκλίνῃ.

Ἀπεδείχθη οὕτω τὸ θεώρημα :

Ἵνα ἡ ἀκολουθία Σ ἔχῃ ὅριον πεπερασμένον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ, ὁσονδήποτε μικρὸς καὶ ἂν εἶναι δοθείς τις θετικὸς ε, νὰ

δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν θετικὸν ἀκέραιον μ τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἔχωμεν

$$|x_{\mu+\rho}-x_\mu|<\varepsilon \qquad (\rho=1, 2, 3, \ldots) \qquad (\Theta)$$

43) ***Δευτέρα ἀπόδειξις τοῦ αὐτοῦ θεωρήματος.*** Θὰ ἀποδείξω ὅτι, ἵνα τὸ μεγαλύτερον καὶ τὸ μικρότερον ὅριον τῆς Σ εἶναι ἀριθμοὶ πεπερασμένοι καὶ ἴσοι (38), πρέπει καὶ ἀρκεῖ διὰ πάντα δοθέντα θετικὸν ε νὰ εὑρίσκεται θετικὸς ἀκέραιος μ τοιοῦτος ὥστε πάντες οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας

$$\Delta_\mu \qquad |x_{\mu+1}-x_\mu|, \ |x_{\mu+2}-x_\mu|, \ |x_{\mu+3}-x_\mu|, \ldots$$

νὰ εἶναι μικρότεροι τοῦ ε· ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, νὰ εὑρίσκεται μ τοιοῦτος, ὥστε $y_\mu \leqq \varepsilon$, ὅπου y_μ καλῶ τὸ ἀνώτερον πέρας τῆς Δ_μ.

Ἄς θεωρήσωμεν ἤδη τὴν ἀκολουθίαν

$$(\Pi) \qquad y_1, \ y_2, \ y_3, \ldots$$

ὅπου y_ν εἶναι τὸ ἀνώτερον πέρας τῆς

$$\Delta_\nu \qquad |x_{\nu+1}-x_\nu|, \quad |x_{\nu+2}-x_\nu|, \ldots$$

Παρατηρῶ ὅτι, ἐὰν εἶμαι βέβαιος ὅτι δοθέντος θετικοῦ ε ***ὁσονδήποτε μικροῦ*** εὑρίσκεται ὅρος y_μ τῆς ἀκολουθίας (Π) τοιοῦτος ὥστε $y_\mu \leqq \varepsilon$, θὰ εἶμαι βέβαιος καὶ ὅτι τὸ κατώτερον πέρας β_0 τῆς ἀκολουθίας (Π) θὰ εἶναι 0· καὶ ἀντιστρόφως.(1)

Κατὰ ταῦτα διὰ ν' ἀποδείξω τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἀρκεῖ ν' ἀποδείξω ὅτι·

«Ἵνα τὸ μεγαλύτερον καὶ τὸ μικρότερον ὅριον τῆς Σ εἶναι ἀριθμοὶ πεπερασμένοι καὶ ἴσοι, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ κατώτερον πέρας β_0 τῆς (Π) νὰ εἶναι ο.

Πρὸς τοῦτο παρατηρῶ ὅτι ὅταν $\overline{x}=+\infty$, δοθέντος θετικοῦ ἀριθμοῦ Μ ὁσονδήποτε μεγάλου θὰ εὑρίσκεται ὅρος x_ν τῆς ἀκολουθίας

---

(1) Καὶ τῷ ὄντι ἐὰν εἴχομεν $\beta_0=\vartheta>0$, δὲν θὰ ὑπῆρχεν ὅρος τῆς (Π) μικρότερος τοῦ ϑ· καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν $\beta_0=0$, θὰ ὑπάρχῃ πάντοτε ὅρος τῆς (Π) μικρότερος τοῦ ε.

Σ τοιοῦτος ὥστε $x_\nu > x_1 + M$ ἢ καὶ $| x_\nu - x_1 | > M$, ὁπότε $y_1 > M$· ἄρα $y_1 = +\infty$· ὁμοίως φαίνεται ὅτι καὶ $y_2 = +\infty$ κ.ο.κ.

Ὅταν $\underline{x} = -\infty$, δοθέντος ἀριθμοῦ M ὁσονδήποτε μεγάλου θὰ εὑρίσκεται ὅρος x_ν τοιοῦτος ὥστε $x_\nu < x_1 - M$ ἢ καὶ $| x_\nu - x_1 | > M$· ὅθεν $y_1 = +\infty$· ὁμοίως φαίνεται ὅτι τότε καὶ $y_2 = +\infty$, κ.ο.κ.

Ὅταν οὔτε τὸ $\overline{x}$ οὔτε τὸ $\underline{x}$ ἔχουν τιμὴν ἄπειρον θὰ ἔχω $\overline{x} = A$, $\underline{x} = \alpha$, ὅπου A καὶ α ἀριθμοὶ πεπερασμένοι· τότε (§ 29) οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας Σ οἱ μεγαλύτεροι τοῦ $A + \frac{\varepsilon}{2}$ θὰ εἶναι πεπερασμένοι τὸ πλῆθος ([2]) ὅπως ἐπίσης πεπερασμένοι τὸ πλῆθος θὰ εἶναι καὶ οἱ ὅροι τῆς Σ οἱ μικρότεροι τοῦ $\alpha - \frac{\varepsilon}{2}$· δύναμαι ἑπομένως νὰ εὕρω διάστημα (γ,δ) περιλαμβάνον τοὺς ὅρους τῆς ἀκολουθίας τοὺς μεγαλυτέρους τοῦ $A + \frac{\varepsilon}{2}$, τοὺς ὅρους τοὺς μικροτέρους τοῦ $\alpha - \frac{\varepsilon}{2}$ καὶ τὸ διάστημα $\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2},\ A + \frac{\varepsilon}{2}\right)$, ὁπότε τὸ διάστημα (γ,δ) θὰ περιέχῃ ὅλους τοὺς ὅρους τῆς ἀκολουθίας Σ· ἑπομένως πάντες οἱ ὅροι τῶν $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_\mu, \ldots$ θὰ εἶναι μικρότεροι τοῦ $| \delta - \gamma |$· ἤτοι τὸ $| \delta - \gamma |$ θὰ εἶναι ἀνώτερον φράγμα τῆς ἀκολουθίας Δ_1· ἄρα $y_1 \leq \delta - \gamma$· ἐπίσης $y_2 \leq \delta - \gamma$ κ.ο.κ. ὅθεν ἡ (Π) ἥτις εἶναι περατωμένη κάτωθεν, (διότι τὸ 0 εἶναι κατώτερον φράγμα τῆς (Π)), θὰ εἶναι καὶ περατωμένη ἄνωθεν· καὶ ἀφοῦ εἰς τὰ διαστήματα $\left(\gamma,\ \alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ καὶ $\left(A + \frac{\varepsilon}{2},\ \delta\right)$ περιλαμβάνονται πεπερασμένοι τὸ πλῆθος ὅροι τῆς Σ, ἕπεται ὅτι ἀπό τινος τάξεως καὶ ἐφεξῆς πάντες οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας θὰ περιέχωνται εἰς τὸ διάστημα $\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2},\ A + \frac{\varepsilon}{2}\right)$· ἤτοι θὰ ὑπάρχῃ δείκτης μ τοιοῦτος ὥστε διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ $\nu > \mu$ θὰ ἔχω

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < x_\nu < A + \frac{\varepsilon}{2}$$

ὥστε ἐὰν η εἶναι τυχοῦσα τιμὴ τοῦ ν μεγαλυτέρα τοῦ μ, θὰ ἔχω

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < x_{\eta+\varrho} < A + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\varrho = 1, 2, 3, \ldots)$$

([2]) Ἐννοεῖται ὅτι περιλαμβάνεται ἐνταῦθα καὶ ἡ περίπτωσις καθ' ἣν δὲν εἶναι κανεὶς ὅρος τῆς ἀκολουθίας μεγαλύτερος τοῦ $A + \frac{\varepsilon}{2}$.

Καὶ ἔχομεν ὅτι $x_{\eta+\varrho} < A + \frac{\varepsilon}{2}$ ἢ $x_{\eta+\varrho} >$

ἢ ἀκόμη $\quad |x_{\eta+\rho}-x_\eta| < (A-\alpha)+\varepsilon$

Ἑπομένως $\quad y_\eta \leq (A-\alpha)+\varepsilon$, ἐξ οὗ $\overline{y} \leq (A-\alpha)+\varepsilon$ καὶ

$\overline{y} \leq A-\alpha$· ἀλλ' ἀφ' ἑτέρου

$$0 \leq \beta_0 \leq \underline{y} \leq \overline{y} \qquad \text{ὅθεν}$$

$$0 \leq \beta_0 \leq \underline{y} \leq \overline{y} \leq A-\alpha.$$

Ἐὰν εἶναι ἐπομένως $A=\alpha$, θὰ ἔχω $\beta_0=0$.

Ἀντιστρόφως· ἔστω $\beta_0=0$· τότε θὰ εὑρίσκεται δείκτης ν τοιοῦτος

ὥστε $\quad y_\nu \leq \frac{\varepsilon}{2}$ $\quad$ δηλ. $|x_{\nu+\rho}-x_\nu| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ $(\rho=1,2,3,\ldots)$

ἤτοι
$$x_\nu-\frac{\varepsilon}{2} \leq x_{\nu+\rho} \leq x_\nu+\frac{\varepsilon}{2} \quad (\rho=0,1,2,3,\ldots)$$

ὅθεν οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας Σ οἱ μικρότεροι τοῦ $x_\nu-\frac{\varepsilon}{2}$, ὁμοῦ μὲ τοὺς ὅρους τῆς Σ τοὺς μεγαλυτέρους τοῦ $x_\nu+\frac{\varepsilon}{2}$ θὰ εἶναι κατὰ τὸ πλῆθος, τὸ πολύ, $\nu-1$· ἐπομένως θὰ εἶναι πεπερασμένοι τὸ πλῆθος· ἄρα τὸ μεγαλύτερον ὅριον A θὰ εἶναι ἀριθμὸς οὐχὶ μεγαλύτερος τοῦ $x_\nu+\frac{\varepsilon}{2}$ (§ 29) καὶ τὸ μικρότερον ὅριον α θὰ εἶναι ἀριθμὸς οὐχὶ μικρότερος τοῦ $x_\nu-\frac{\varepsilon}{2}$ (§ 30)· ἤτοι θὰ ἔχω

$$x_\nu-\frac{\varepsilon}{2} \leq \alpha \leq A \leq x_\nu+\frac{\varepsilon}{2}$$

ὅθεν $\quad A=\alpha.$

ὥστε θὰ ἔχω συγχρόνως $A=\alpha$ καὶ $\beta_0=0$· ἤτοι ὅταν ἡ Σ ἔχῃ ὅριον πεπερασμένον, ἡ (Π) θὰ ἔχῃ κατώτερον πέρας τὸ 0 καὶ ἀντιστρόφως.

44) Εἰς τὰ προηγούμενα (§ 42, 43) ὑπέθεσα ὅτι τὸ x λαμβάνει ἀπειρίαν διαδοχικῶν τιμῶν συνόλου ἀριθμησίμου.

Καὶ ἐὰν ὅμως δὲν εἶναι ἀριθμήσιμον τὸ σύνολον, θὰ ἔχω ὅτι :

Συνθήκη ἀναγκαία καὶ ἐπαρκής, ***ἵνα ἡ*** x ***ἔχῃ ὅριον πεπερασμένον καὶ ὡρισμένον, εἶναι ἡ ἑξῆς : Εἰς πάντα θετικὸν ἀριθμὸν ε, ὁσονδήποτε μικρόν,*** νὰ ***ἀντιστοιχῇ τιμὴ τοῦ*** x, ***ἥτις νὰ διαφέρῃ ἀπὸ ὅλας τὰς ἑπομένας ὀλιγώτερον τοῦ ε*** · ἢ ἀκριβέστερον : ***νὰ ἔχῃ διαφοράν, ἀπὸ ὅλας τὰς ἑπομένας της, ἀπολύτως μικροτέραν τοῦ ε.***

Ἡ συνθήκη εἶναι ἀναγκαία, διότι ἔστω : ορχ = α· θὰ ἔχω ὅτι ἀπό τινος τιμῆς τοῦ x καὶ ἐφεξῆς αἱ τιμαὶ τοῦ x θὰ πλησιάζουν ἀκαταπαύστως πρὸς τὸ α καὶ θὰ ἔρχεται στιγμὴ ἀπὸ τῆς ὁποίας καὶ πέραν αἱ τιμαὶ τοῦ x θὰ πλησιάζουν ὅσον θέλω πρὸς ἀλλήλας· καὶ ἐπομένως, θὰ εὑρίσκεται τιμὴ τοῦ x τοιαύτη, ὥστε αἱ κατόπιν νὰ διαφέρουν ἀπ' αὐτὴν ὀλιγώτερον τοῦ ε.

Ἡ συνθήκη εἶναι καὶ ἀρκετή.

Καὶ τῷ ὄντι, τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τοῦ x θὰ εἶναι προφανῶς περατωμένον.

Θὰ ἔχω δέ :

$$\overline{\text{ορ}\,x} = \underline{\text{ορ}\,x}$$

δηλαδή, τὸ μεγαλύτερον ὅριον Α θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μικρότερον α. Διότι ἐὰν α < Α θὰ ἔχω :

$$A - \alpha = 2\delta$$

ὅθεν,

$$A - \delta' > \alpha + \delta'$$

διὰ πᾶσαν τιμὴν δ′ μικροτέραν τοῦ δ.

Δι' ἀπειρίαν δὲ τιμῶν τοῦ x θὰ ἔχω :

$$(1) \qquad x > A - \delta'$$

ὅπως ἐπίσης δι' ἀπειρίαν τιμῶν τοῦ x θὰ ἔχω :

$$(2) \qquad x < \alpha + \delta'.$$

Ἂς θέσω

$$A - \alpha - 2\delta' = 2\varepsilon$$

$|x'-\beta| \leq \varepsilon$
$|x''-\beta| < \varepsilon$

Συμφώνως πρὸς τὴν ὑπόθεσιν, πρέπει νὰ ὑπάρχῃ τιμή τις τοῦ x διαφέρουσα ἀπὸ κάθε ἑπομένην τιμὴν τοῦ x, ὀλιγώτερον τοῦ ε.

Ἔστω, ὅτι μία τιμὴ τοιαύτη εἶναι ἡ β δηλ. ἔστω ὅτι ἡ β διαφέρει ἀπὸ κάθε ἑπομένην τιμὴν τοῦ x ὀλιγώτερον τοῦ ε.

Ἂς λάβω μίαν τιμὴν x′ πέραν τῆς β καὶ ἐπαληθεύουσαν τὴν (1) ἀνισότητα· [1] ἐπίσης μίαν τιμὴν x″ πέραν τῆς β καὶ ἐπαληθεύουσαν τὴν (2) ἀνισότητα· τότε θὰ ἔχω

$$x' > A-\delta' \quad \alpha+\delta' > x''$$

ὅθεν καί :

$$x'-x'' > A-\alpha-2\delta$$

ἤτοι

$x'-x'' = (x'-\beta)+(\beta-x'')$
$|x'-x''| \leq |x'-\beta|+|\beta-x''|$

$$x'-x'' > 2\varepsilon$$

ἀλλὰ

$$|x'-x''| \leqq |x'-\beta| + |\beta-x''|$$

Ὅθεν

$$|\beta-x'| + |\beta-x''| > 2\varepsilon$$

ἀλλὰ πρέπει προφανῶς πρὸς τοῦτο, εἷς τοὐλάχιστον ἐκ τῶν προσθετέων τῆς πρώτης ἀνισότητος νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ε.

Ἔστω λοιπὸν

$$|\beta-x'| > \varepsilon$$

Τότε ὅμως θὰ ἔχω ὅτι τὸ β δὲν διαφέρει ἀπὸ ὅλας τὰς ἑπομένας του τιμὰς ὀλιγώτερον τοῦ ε· ὅπερ ἀντιβαίνει πρὸς τὴν ἀρχικῶς τεθεῖσαν συνθήκην.

Ἄρα

$$A = \alpha,$$

ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι ὑπάρχει ὅριον.

Ἡ ἀνωτέρω ἀναφερομένη, ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα ὑπάρχῃ ὅριον πεπερασμένον λέγεται κριτήριον τοῦ Cauchy.

---

[1]) Ἰδὲ ὁρισμὸν μεγαλυτέρου καὶ μικροτέρου ὁρίου σελ. 54.

Παρατήρησις. Τὸ κριτήριον τοῦ Cauchy, προκειμένου περὶ ἀκολουθίας, δύναται ν' ἀπαγγελθῇ καὶ ὡς ἑξῆς :

Ἵνα ἡ ἀκολουθία Σ_1 συγκλίνῃ, πρέπει καὶ ἀρκεῖ διὰ πᾶσαν θετικὴν τιμὴν τοῦ ε ὁσονδήποτε μικρὰν νὰ εὑρίσκεται θετικὸς ἀκέραιος N τοιοῦτος, ὥστε διὰ πᾶν σύστημα ἀκεραίων μ καὶ ν μεγαλυτέρων τοῦ N νὰ ἔχωμεν

$$| x_\mu - x_\nu | < \varepsilon$$

ἢ καὶ νὰ εὑρίσκεται θετικὸς ἀκέραιος N τοιοῦτος, ὥστε διὰ πάντα ἀκέραιον $\nu > N$ καὶ δι' οἱονδήποτε θετικὸν ἀκέραιον ρ νὰ ἔχωμεν

$$| x_{\nu+\varrho} - x_\nu | < \varepsilon.$$

Καὶ τῷ ὄντι κατὰ τὰ προηγούμενα θὰ εὑρίσκεται ἀκέραιος N τοιοῦτος,

ὥστε $$| x_\mu - x_N | < \frac{\varepsilon}{2}$$

διὰ πᾶσαν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ $\mu > N$·

ἐπίσης $$| x_\nu - x_N | < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{διὰ } \nu > N$$

ὅθεν $$| x_\mu - x_\nu | < \varepsilon.$$

45. ***Μερικὴ περίπτωσις· κριτήριον συγκλίσεως διὰ τὰς μονοτόνους μεταβλητάς.***

Ἔστω ὅτι ἡ μεταβλητὴ x εἶναι μονότονος αὐξανομένη δηλ. ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ x βαίνουν αὐξανόμεναι (ἢ γενικώτερον μὴ ἐλαττούμεναι) καὶ ὅτι τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τοῦ x εἶναι περατωμένον ἄνωθεν (§ 10). τότε θὰ ὑπάρχῃ (§ 12) ἀριθμός τις πεπερασμένος A ὅστις εἶναι τὸ ἀνώτερον πέρας τοῦ συνόλου καὶ ἐπομένως (§ 13) δοθέντος θετικοῦ ε ὁσονδήποτε μικροῦ, θὰ ἔχω ἀπό τινος τιμῆς τοῦ x καὶ ἐφεξῆς $| x - A | < \varepsilon$· ὅθεν εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ x εἶναι μονότονος αὐξανομένη, ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα ὑπάρχῃ ὅριον τοῦ x (πεπερασμένον) εἶναι ἡ ἑξῆς :

Τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τοῦ x ***νὰ εἶναι περατωμένον*** (ὁπότε ὅριον εἶναι τὸ ἀνώτερον πέρας).

Ὁμοίως διακρίνομεν ὅτι, ἐὰν ἡ μεταβλητὴ x εἶναι ***μονότονος ἐ-***

λαττουμένη δηλ. ἐὰν αἱ τιμαὶ τοῦ x βαίνουν διαρκῶς ἐλαττούμεναι (ἢ γενικώτερον μὴ αὐξανόμεναι) ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα ὑπάρχῃ ὅριον (πεπερασμένον) τοῦ x εἶναι ἡ ἑξῆς :

Τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τοῦ x ***νὰ εἶναι περατωμένον*** (ὁπότε ὅριον εἶναι τὸ κατώτερον πέρας).

Ἔχοντες ἤδη ὑπ' ὄψει τοὺς ὁρισμοὺς (§ 27) δυνάμεθα νὰ λέγωμεν, ὅτι ***ἐὰν μεταβλητή τις*** x ***εἶναι μονότονος*** (ἤτοι μεταβάλλεται πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν) ***θὰ ἔχῃ ὅριον πεπερασμένον ἢ ἄπειρον.***

46. Ἐὰν αἱ διαδοχικαὶ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς x εἶναι οἱ διαδοχικοὶ ὅροι ἀκολουθίας

$$\Sigma : \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \ldots$$

θὰ εἶναι ἡ μεταβλητὴ x (ἢ καὶ ἡ ἀκολουθία Σ) μονότονος αὐξανομένη

ἐὰν $\qquad x_\nu \leq x_{\nu+1} \qquad (\nu=1,2,3, \ldots)$

θὰ ἔχῃ δὲ τότε ὅριον πεπερασμένον (τὸ ἀνώτερον πέρας) ἐὰν εἶναι περατωμένη ἄνωθεν, ὅριον δὲ τὸ $+\infty$ ἐὰν δὲν εἶναι περατωμένη ἄνωθεν. Ἡ προηγουμένη ἀπόδειξις ἐνταῦθα διατυποῦται καὶ ὡς ἑξῆς : Ἔστω Α (πεπερασμένος) τὸ ἀνώτερον πέρας τῆς Σ καὶ ε τυχὼν δοθεὶς θετικός· θὰ εἶναι (§ 12) δι' ὅλους τοὺς δείκτας ν $\quad x_\nu < A+\varepsilon$
θὰ εὑρίσκεται δ' ἀφ' ἑτέρου δείκτης μ τοιοῦτος, ὥστε $x_\mu > A-\varepsilon$,

ὁπότε καὶ $\qquad x_{\mu+\varrho} > A-\varepsilon \qquad (\varrho=1, 2, 3, \ldots)$

διότι $\qquad x_\mu \leq x_{\mu+1} \leq x_{\mu+2} \leq \cdots$

ὅθεν θὰ εὑρίσκεται δείκτης η τοιοῦτος, ὥστε

$$A-\varepsilon < x_{\eta+\varrho} < A+\varepsilon \qquad (\varrho=1, 2, 3, \ldots)$$

ἢ καὶ $\qquad |x_{\eta+\varrho}-A| < \varepsilon$· ὥστε ἡ ἀκολουθία Σ ἔχει ὅριον τὸ Α.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ἐὰν $x_\nu \geq x_{\nu+1}$ $\quad (\nu=1, 2, 3,..)$ καὶ ἐὰν ἡ Σ εἶναι περατωμένη κάτωθεν, θὰ εἶναι ἡ Σ συγκλίνουσα.

Ἰδιότητες ὁρίων

47. ***Ὅριον ἀθροίσματος, διαφορᾶς, γινομένου, πηλίκου.*** Ἔστωσαν αἱ ἄπειροι ἀκολουθίαι (ἔχουσαι ὅρους πεπερασμένους).

$\Sigma_1 \qquad x_1, x_2, x_3, \ldots$

$\Sigma_2 \qquad y_1, y_2, y_3, \ldots$

$\Sigma_3 \qquad \omega_1, \omega_2, \omega_3 \ldots$

A) Ἔστω $\omega_\nu = x_\nu + y_\nu$ $\quad (\nu=1, 2, 3, \ldots)$ καὶ x_ν, y_ν πεπερασμένοι.

Τότε ἐὰν αἱ Σ_1 καὶ Σ_2 εἶναι συγκλίνουσαι, θὰ εἶναι καὶ ἡ Σ_3 συγκλίνουσα· καὶ θὰ ἔχω $\quad \text{ορ}\,\omega_\nu = \text{ορ}\,x_\nu + \text{ορ}\,y_\nu \quad$ δι' $\text{ορ}\,\nu = \infty$

Τοῦτο φαίνεται ἀμέσως ἐὰν θεωρήσω τὰς σχέσεις (§ 39) [1]

$$\underline{x}+\underline{y} \leq \underline{\omega} \leq \overline{x}+\underline{y} \leq \overline{\omega} \leq \overline{x}+\overline{y}.$$

διότι ἐνταῦθα ἔχω $\underline{x}=\overline{x}$ καὶ $\underline{y}=\overline{y}$

ὅθεν $\qquad \underline{x}+\underline{y}=\overline{x}+\underline{y}=\overline{x}+\overline{y}=\underline{\omega}=\overline{\omega}$

B′) Ἔστω $\quad \omega_\nu = x_\nu - y_\nu$. θὰ ἔχω $\quad \text{ορ}\,\omega_\nu = \text{ορ}\,x_\nu - \text{ορ}\,y_\nu$ δι' $\text{ορ}\,\nu = \infty$

διότι τὸ μεγαλύτερον καὶ τὸ μικρότερον ὅριον τῆς ἀκολουθίας

$$-y_1, \ -y_2, \ -y_3, \ldots$$

εἶναι τὸ $\quad -\underline{y}$ καὶ τὸ $-\overline{y}$.

48. Γ′) Ἔστω $\qquad \omega_\nu = x_\nu y_\nu \qquad (\nu=1, 2, 3, \ldots)$

Τότε ἐὰν αἱ Σ_1 καὶ Σ_2 εἶναι συγκλίνουσαι, θὰ εἶναι καὶ ἡ Σ_3 συγ-

---

[1]) Εἰς τὴν § 39 παρελείφθη ἡ ἀπόδειξις τοῦ ὅτι $\underline{x}+\underline{y} \leq \underline{\omega}$ κ.τ.λ. ὡς ἀνάλογος πρὸς τὴν ἀπόδειξιν τὴν γενομένην διὰ τὰς λοιπὰς σχέσεις.

κλίνουσα καὶ θὰ ἔχω, ἐὰν α καὶ β καλέσω τὰ ὅρια τῶν δύο ἀκολουθιῶν, ὅτι $\underset{\nu=\infty}{\text{ορ}}\ \omega_\nu = \alpha\beta$.

Ἀπόδειξις. 1) Ὑποθέτω ὅτι $\alpha > o$, $\beta > o$· τότε ἀπό τινος τάξεως καὶ ἐφεξῆς οἱ ὅροι τῆς Σ_1 θὰ εἶναι θετικοί· [1] ὅπως ἐπίσης ἀπό τινος τάξεως καὶ ἐφεξῆς οἱ ὅροι τῆς Σ_2 θὰ εἶναι θετικοί· ἑπομένως θὰ εὑρίσκεται δείκτης μ τοιοῦτος, ὥστε

$$x_{\mu+\varrho} > o \quad \text{καὶ} \quad y_{\mu+\varrho} > o \qquad (\varrho = 1, 2, 3, \ldots)$$

Θεωρήσωμεν ἤδη τὰς ἀκολουθίας

$$\Sigma_{\mu_1} \qquad x_{\mu+1},\ x_{\mu+2}, \ldots$$

$$\Sigma_{\mu_2} \qquad y_{\mu+1},\ y_{\mu+2}, \ldots$$

Αὗται εἶναι μέρη τῶν ἀκολουθιῶν Σ_1, Σ_2· θὰ ἔχουν δὲ ὅρια τὰ α καὶ β· λέγω ὅτι ἡ ἀκολουθία

$$\Sigma_{\mu_3} \qquad \omega_{\mu+1} \quad \omega_{\mu+2}, \ldots \quad \text{ὅπου} \quad \omega_{\mu+\varrho} = x_{\mu+\varrho}\, y_{\mu+\varrho}$$

εἶναι συγκλίνουσα· ὅριον δὲ αὐτῆς εἶναι τὸ αβ· καὶ τῷ ὄντι, θὰ ἔχω (ἄσκ. 5 σελ. 57 καὶ § 40)

$\underline{x}\,\underline{y} \leq \underline{\omega} \leq \bar{\omega} \leq \bar{x}\bar{y}$

$$\bar{\omega} \leq \bar{x}\bar{y}, \qquad \underline{\omega} \geq \underline{x}\,\underline{y}\ [2] \qquad \text{καὶ} \qquad \underline{\omega} \leq \bar{\omega} \qquad (\S\ 35)$$

---

[1]) Διότι $\alpha = \underline{x}$· ἑπομένως παντὸς ἀριθμοῦ $\alpha - \varepsilon$ $(\varepsilon > o)$ ὅρους μικροτέρους εἰς τὴν Σ_1 θὰ ἔχω πεπερασμένους τὸ πλῆθος· ἄρα καὶ τοῦ $\alpha - \alpha$ ἤτοι τοῦ ο θὰ ἔχω μικροτέρους εἰς τὴν ἀκολουθίαν Σ_1 πεπερασμένους τὸ πλῆθος.

[2]) Διὰ ν' ἀποδείξω τοῦτο θεωρῶ τὰς ἀκολουθίας

$$\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots \frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}, \ldots \frac{1}{\omega_1}, \frac{1}{\omega_2} \ldots \text{ ὅπου } \omega_\nu = x_\nu y_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

Τὰ μεγαλύτερα ὅρια τῶν ἀκολουθιῶν τούτων θὰ εἶναι (§ 41) τὰ

$$\frac{1}{\underline{x}}, \frac{1}{\underline{y}}, \frac{1}{\underline{\omega}} \text{ ὥστε θὰ ἔχω } \frac{1}{\underline{\omega}} \leq \frac{1}{\underline{x}} \cdot \frac{1}{\underline{y}}.$$

ἀλλ' ἐνταῦθα $\overline{x}=\underline{x}=\alpha$ καὶ $\overline{y}=\underline{y}=\beta$· ὅθεν $\overline{\omega}=\underline{\omega}=\alpha\beta$.

2) Ἐὰν $\alpha<o$ καὶ $\beta>o$ θεωρῶ ἀντὶ τῆς Σ_1 τὴν $-x_1$, $-x_2$, . . . καὶ ἐργαζόμεθα ὅπως προηγουμένως.

3) Ἐὰν $\alpha<o$ καὶ $\beta<o$ θεωρῶ τὰς $-x_1$, $-x_2$,... καὶ $-y_1$, $-y_2$...

4) Ἐὰν $\alpha=o$ παρατηρῶ ὅτι εἰς τὴν ἀκολουθίαν Σ_1 ἀπό τινος τάξεως καὶ ἐφεξῆς οἱ ὅροι θὰ εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε $|x_\mu|<\frac{\varepsilon}{M}$, ὅπου M εἶναι τυχὸν ἀνώτερον φράγμα τῆς ἀκολουθίας τῆς ἐχούσης ὅρους τὰς ἀπολύτους τιμὰς τῶν ὅρων τῆς Σ_2 καὶ ε τυχὼν θετικός· ἀλλὰ τότε καὶ

$$|x_\mu y_\mu|<\varepsilon\text{· ὅθεν } \text{ορ}\omega_\nu=o.$$

Παρατήρησις. Εὐκόλως φαίνεται ὅτι τὸ ὅριον γινομένου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν ὁρίων καί εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου εἶναι ἄπειρον τὸ ὅριον τῆς Σ_1 ἢ τὸ ὅριον τῆς Σ_2 ἢ καὶ ἀμφότερα τὰ ὅρια, ὑποτιθεμένου πάντοτε ὅτι τὸ γινόμενον αβ δὲν εἶναι ἀπροσδιόριστον.

49. Δ') Ἔστω $\omega_\nu=\frac{x_\nu}{y_\nu}$ $(\nu=1, 2, 3, \ldots)$ $y_\nu\neq o$, ὅρια δὲ τῶν ἀκολουθιῶν Σ_1 καὶ Σ_2 δύο πεπερασμένοι ἀριθμοὶ α καὶ β ($\beta\neq o$)· θὰ ἔχω τότε $\underset{\nu=\infty}{\text{ορ}}\omega_\nu=\frac{\alpha}{\beta}$. Καὶ τῷ ὄντι· ἔστω $\beta>o$· ὁπότε οἱ ὅροι τῆς Σ_2 ἀπό τινος τάξεως καὶ ἐφεξῆς θὰ εἶναι θετικοί· θὰ εἶναι δὲ (§ 41)

$$\underset{\nu=\infty}{\text{ορ}}\frac{1}{y_\nu}=\frac{1}{\beta}\text{· ἑπομένως (§ 48) }\underset{\nu=\infty}{\text{ορ}}\omega_\nu=\frac{\alpha}{\beta}.$$

Εὐκόλως φαίνεται ὅτι τὸ ὅριον πηλίκου ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τῶν ὁρίων καὶ ὅταν ἓν (μόνον) ἐκ τῶν ὁρίων α καὶ β εἶναι ἄπειρον, διατηρουμένων τῶν λοιπῶν ὑποθέσεων.

50. Εἰς τὰς ἀνωτέρω ἀποδείξεις (§ 47—49) ἔγινε χρῆσις τῶν σχέσεων (§ 39, 40, 41) τῶν ἀναφερομένων εἰς τὰ μεγαλύτερα καὶ τὰ μικρότερα ὅρια. Αἱ ἀπ' εὐθείας ἀποδείξεις τῶν αὐτῶν προτάσεων (§ 47—49) δὲν παρουσιάζουν δυσκολίαν· ἐπεκτείνονται μάλιστα καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου θεωρῶ δύο μεταβλητὰς x καὶ y λαμβανούσας διαδοχικὰς τιμὰς συνόλων μὴ ἀριθμησίμων. Π. χ. ἔστω ὅτι ορ$x=\alpha$ καὶ ορ$y=\beta$, ὅπου $\beta\neq o$· θ' ἀποδείξω ὅτι ορ$\frac{x}{y}=\frac{\alpha}{\beta}$. Παρατηρῶ πρὸς τοῦτο ὅτι

(§ 27) δύναμαι νὰ γράψω $x=\alpha+\vartheta$ καὶ $y=\beta+\varkappa$, ὅπου $\text{ορ}\vartheta=0$, $\text{ορ}\varkappa=0$ ὁπότε $\frac{x}{y}-\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha+\vartheta}{\beta+\varkappa}-\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta\vartheta-\alpha\varkappa}{\beta(\beta+\varkappa)}$· ἀλλὰ τὰ ϑ καὶ $\varkappa$ δύνανται νὰ γίνουν ὅσον θέλομεν μικρά· ἑπομένως $\frac{\beta\vartheta-\alpha\varkappa}{\beta(\beta+\varkappa)}$ γίνεται ὅσον θέλομεν μικρόν· ὅθεν (§ 27) $\text{ορ}\frac{x}{y}=\frac{\alpha}{\beta}$.

51. ***Ὅριον μεταβλητῆς περιλαμβανομένης μεταξὺ ἄλλων μεταβλητῶν.*** Ἔστωσαν αἱ ἀκολουθίαι :

$$\Sigma_1 \qquad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \; . \; . \; .$$

$$\Sigma_2 \qquad y_1, \quad y_2, \quad y_3, \; . \; . \; .$$

$$\Sigma_3 \qquad \omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3, \; . \; . \; .$$

καὶ ὅτι $\text{ορ}x_\nu=\text{ορ}y_\nu=\alpha$ καὶ $x_\nu<\omega_\nu<y_\nu$ $\qquad(\nu=1,\ 2.\ 3,\ .\ .\ .)$
λέγω ὅτι $\text{ορ}\omega_\nu=\alpha$: Καὶ τῷ ὄντι ἔχω $x_\nu-\alpha<\omega_\nu-\alpha<y_\nu-\alpha$ καὶ $\text{ορ}(x_\nu-\alpha)=\text{ορ}(y_\nu-\alpha)=0$· ὅθεν $\text{ορ}(\omega_\nu-\alpha)=0$ ἢ καὶ $\text{ορ}\omega_\nu=\alpha$.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἀποδεικνύεται ἡ γενικωτέρα πρότασις :

Μεταβλητὴ περιλαμβανομένη διαρκῶς μεταξὺ δύο ἄλλων μεταβλητῶν ἐχουσῶν τὸ αὐτὸ ὅριον (πεπερασμένον ἢ ἄπειρον) τείνει πρὸς τὸ αὐτὸ ὅριον.

Ἐφαρμογαὶ τῶν προηγουμένων (§ 45—51).

52. ***Ἀπόδειξις τοῦ ὅτι ὑπάρχει ὅριον τοῦ*** $\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^\mu$, ὅταν $\text{ορ}\mu=\infty$.

Θεωρήσωμεν πρῶτον τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ μ τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον λαμβάνον θετικὰς καὶ ἀκεραίας τιμάς: 1, 2, 3, . . .
Εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ μ ἀντιστοιχεῖ μία τιμὴ τοῦ $y=\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^\mu$ οὕτω θὰ ἔχωμεν ὡς σύνολον τῶν τιμῶν τοῦ y τὸ ἑξῆς :

$$y_1=\left(1+\frac{1}{1}\right)^1,\ y_2=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\ y_3=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3,\ldots\ y_\mu=\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^\mu\ldots$$

Παρατηρῶ πρῶτον ὅτι :

$$y_1<y_2<y_3<\ldots<y_{\mu-1}<y_\mu<\ldots$$

ἤτοι ὅτι, ἡ μεταβλητὴ y βαίνει ***αὐξανομένη***.

Καὶ τῷ ὄντι, συμφώνως πρὸς τὸν τύπον τοῦ διωνύμου ἔχομεν :

$$\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)^{\mu-1} = 1+\frac{\mu-1}{1}\cdot\frac{1}{\mu-1}+\frac{(\mu-1)\,(\mu-2)}{1\,.\,2}\left(\frac{1}{\mu-1}\right)^2+\ldots$$

$$+\frac{(\mu-1)\,(\mu-2)\,.\,.\,.\,(\mu-\nu)}{1\,.\,2\,.\,.\,\nu}\left(\frac{1}{\mu-1}\right)^{\nu}+\ldots$$

$$=1+1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mu-1}\right)+\ldots$$

$$+\frac{1}{1\,.\,2\,..\,\nu\,.}\left(1-\frac{1}{\mu-1}\right)\left(1-\frac{2}{\mu-1}\right)\ldots\left(1-\frac{\nu-1}{\mu-1}\right)+\ldots$$

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu} = 1+1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mu}\right)+\ldots$$

$$\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,\nu}\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\left(1-\frac{2}{\mu}\right)\ldots\left(1-\frac{\nu-1}{\mu}\right)+\ldots$$

ἐξ οὗ διακρίνομεν ὅτι :

$$y_\mu > y_{\mu-1}.$$

Διότι, ἀφ᾽ ἑνὸς οἱ ὅροι τοῦ $y_{\mu-1}$ ἀπὸ τοῦ τρίτου καὶ πέραν εἶναι μικρότεροι τῶν ἀντιστοίχων ὅρων τοῦ y_μ, ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ οἱ ὅροι τοῦ y_μ εἶναι περισσότεροι τῶν ὅρων τοῦ $y_{\mu-1}$.

Λέγω ἤδη, ὅτι ἡ μεταβλητὴ y εἶναι ***πεpατωμένη***· ἀρκεῖ νὰ δείξω ὅτι ὑπάρχει ἀριθμός τις μεγαλύτερος ὅλων τῶν τιμῶν τοῦ συνόλου $y_1, y_2, \ldots y_\mu, \ldots$

Παρατηρῶ πρὸς τοῦτο ὅτι :

$$\frac{1}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,\nu} < \frac{1}{2^{\nu-1}}$$

καὶ ἑπομένως :

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}<1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{\nu-1}}+\dots+\frac{1}{2^{\mu}}<3$$

οἱουδήποτε θετικοῦ ἀκεραίου ὄντος τοῦ μ.

Ὥστε ἡ μεταβλητὴ y, βαίνει αὐξανομένη καὶ εἶναι περατωμένη, ἄρα συμφώνως πρὸς τὴν ἀνωτέρω πρότασιν (§ 45) ἔχει ὅριον πεπερασμένον.

Τοῦτο τὸ ὅριον καλοῦμεν ἀριθμὸν e. Εὑρίσκεται δὲ ὡς προσεγγίζουσα αὐτοῦ τιμή :

$$e=2,71828\ 1828\ 45\ 904\ 5\ 2353602874\ 713\,53\dots$$

Ὑπεθέσαμεν ἀνωτέρω ὅτι τὸ μ λαμβάνει θετικὰς καὶ ἀκεραίας τιμὰς 1, 2, 3, . . .

Θεωρήσωμεν ἤδη ὅτι τὸ μ τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον καθ᾽ οἱονδήποτε τρόπον· λέγω ὅτι πάλιν $\text{ορ}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}=e$

Ἔστω πρῶτον μ θετικός· τότε θὰ περιλαμβάνεται μεταξὺ δύο ἀκεραίων η καὶ $\eta+1$· θὰ ἔχωμεν προφανῶς

$$\left(1+\frac{1}{\eta+1}\right)^{\eta}<\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}<\left(1+\frac{1}{\eta}\right)^{\eta+1}$$

ἢ καὶ

$$\frac{\left(1+\frac{1}{\eta+1}\right)^{\eta+1}}{1+\frac{1}{\eta+1}}<\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}<\left(1+\frac{1}{\eta}\right)^{\eta}\left(1+\frac{1}{\eta}\right)$$

Ὅταν ὅμως τὸ μ τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον, θὰ τείνῃ προφανῶς καὶ τὸ η πρὸς τὸ ἄπειρον, ἀλλὰ τότε ὅριον τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἀνισότητος καὶ τοῦ τρίτου θὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς e, καὶ ἑπομένως ὁ $\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}$ περιλαμβάνεται μεταξὺ δύο ποσοτήτων ἐχουσῶν ὅριον τὸν e ὥστε :

$$\text{ορ}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}=e$$

ὑποθέσωμεν τέλος, ὅτι ὁ ἐκθέτης μ εἶναι ἀρνητικὸς καὶ τείνει πρὸς τὸ $-\infty$. Θέτομεν $-\mu = M$ ὅπου M θὰ εἶναι θετικός.

Παρατηροῦμεν ἤδη ὅτι :

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}=\left(1-\frac{1}{M}\right)^{-M}=\left(\frac{M-1}{M}\right)^{-M}=\left(\frac{M}{M-1}\right)^{M}=\left(\frac{M-1}{M-1}+\frac{1}{M-1}\right)^{M}=$$

$$\left(1+\frac{1}{M-1}\right)^{M}$$

Καὶ ἑπομένως, ἀρκεῖ νὰ ζητήσωμεν τὸ $\text{ορ}\left(1+\frac{1}{M-1}\right)^{M}$, ὅταν τὸ M τείνῃ πρὸς τὸ $+\infty$· τοῦτο ὅμως ἰσοῦται πρὸς

$$\left(1+\frac{1}{M-1}\right)^{M-1}\left(1+\frac{1}{M-1}\right)$$

ἀλλὰ ὅριον τοῦ πρώτου παράγοντος εἶναι ὁ e, ὅριον δὲ τοῦ δευτέρου εἶναι ἡ μονάς, ὥστε, $\text{ορ}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}$, ὅταν μ τείνῃ πρὸς τὸ $-\infty$, εἶναι ὁ ἀριθμὸς e.

53. ***Ὅριον ῥητῆς παραστάσεως.*** Ἔστω παράστασις $P(x,y,z,t,..)$ περιέχουσα μεταβλητάς τινας x, y, z. t,.. [1] καὶ ἔστω ὅτι αἱ μόναι πράξεις αἱ παρουσιαζόμεναι μεταξὺ τῶν μεταβλητῶν αὐτῶν εἶναι πρόσθεσις, ἀφαίρεσις, πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις.

Ἤτοι ὑπεθέσαμεν ὅτι, ἡ δοθεῖσα παράστασις εἶναι ῥητὴ παράστασις ὡς πρὸς x, y, z, t . . καὶ ὅτι ζητοῦμεν τὸ ὅριον αὐτῆς τῆς παρα στάσεως ὅταν :

$$\text{ορ}x = \alpha \quad \text{ορ}y = \beta, \quad \text{ορ}z = \gamma, \quad \text{ορ}t = \delta \;. \;.$$

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὅτι ὅριον τῆς παραστάσεως αὐτῆς θὰ εἶναι τό :

$$P\,(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta.\ .)$$

ἤτοι ὁ ἀριθμὸς τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν, ὅταν ***ἀντικαταστήσωμεν εἰς***

[1]) πεπερασμένας τὸ πλῆθος.

τὴν παράστασιν ἑκάστην μεταβλητὴν διὰ τοῦ ὁρίου της· (ὑποθέτω ὅτι ὁ παρονομαστὴς δὲν γίνεται μηδέν).

Π. χ. Ἔστω ἡ παράστασις :

$$\frac{Ax^2y+Byz^3+\Gamma}{\Delta xy^3+Ez^5+K}$$

καὶ ἔστω ὅτι $\quad \text{ορ}x=\alpha, \quad \text{ορ}y=\beta \quad \text{ορ}z=\gamma\cdot$

$$\text{τότε : } \quad \text{ορ}\frac{Ax^2y+Byz^3+\Gamma}{\Delta xy^3+Ez^5+K}=\frac{A\alpha^2\beta+B\beta\gamma^3+\Gamma}{\Delta\alpha\beta^3+E\gamma^5+K}$$

Διάβασις εἰς τὸ ὅριον.

54. ***Μέθοδος τῶν ὁρίων.*** Γενικῶς ἔστω ὅτι ἔχω σχέσιν μεταξὺ τῶν μεταβλητῶν x, y, z, t, . . ἰσχύουσαν δι᾿ ἀπειρίαν τιμῶν τῶν μεταβλητῶν καὶ ὅτι δυνάμει τῶν ἰδιοτήτων τῶν ὁρίων ἀντικαθιστῶ τὰς μεταβλητὰς διὰ τῶν ὁρίων των· λέγω τότε ὅτι ἐφήρμοσα ***τὴν μέθοδον τῶν ὁρίων***· ἡ δὲ πρᾶξις αὕτη ἥτις χαρακτηρίζει τὴν ***ἀπειροστικὴν ἀνάλυσιν*** λέγεται ***διάβασις εἰς τὸ ὅριον.***

55. ***Ἀπειροστὰ καὶ ἄπειρα.*** Ὅταν μεταβλητή τις ἔχῃ ὅριον τὸ μηδέν, λέγεται ***ἀπειροστὸν*** ([1]) (§ 25, 27).

Ἀντίθετοι τῶν ἀπειροστῶν εἶναι αἱ ***ἀπείρως μεγάλαι*** ποσότητες ἢ τὰ ***ἄπειρα***. Οὕτως ***ἄπειρον*** λέγεται ***μεταβλητὸς*** ἀριθμὸς ἔχων ὅριον τὸ $+\infty$ ἢ τὸ $-\infty$ (§ 27).

Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ ἀπειροστὰ καὶ τὰ ἄπειρα τὰ οὕτω ὁριζόμενα ἔχουσι ***δυναμικὸν*** χαρακτῆρα ([2]).

Ἡ ἐπιστήμη τῶν ἀπειροστῶν, τῶν ἀπείρων, τῶν σχέσεων τὰς ὁποίας

---

[1]) Πρέπει νὰ λαμβάνεται ὑπ᾿ ὄψιν ὅτι ***οὐδέποτε*** σταθερὰ ποσότης ὁσονδήποτε μικρὰ καὶ ἂν ὑποτεθῇ εἶναι ἀπειροστόν· ὅταν παριστάνωμεν ἀπειροστὸν μὲ τμῆμά τι γραμμῆς τὸ κάμνομεν, διότι δὲν δυνάμεθα νὰ σχεδιάσωμεν τμῆμα μεταβαλλόμενον τεῖνον νὰ ἐξαφανισθῇ, δυνάμεθα ὅμως νὰ νοῶμεν ὅτι πρόκειται περὶ τοιούττυ.

[2]) Τουτέστι θεωροῦμεν ὅτι τὸ ἄπειρον εἶναι ***μεταβλητὸς*** ἀριθμός, ***δυνάμενος*** νὰ ὑπερβῇ ἀπολύτως πάντα δοθέντα θετικόν (δυναμικὸν ἄπειρον) καὶ ὄχι ὅτι εἶναι ἀριθμὸς ἔχων ἤδη ὑπερβῇ πάντα πεπερασμένον ἀριθμὸν δηλ. ἀντίθετος τοῦ μηδενὸς (ἐνεστωτικὸν ἄπειρον).

Διὰ τὴν ἁπλοποίησιν τῆς ἐκφωνήσεως πολλῶν θεωρημάτων εἰς τὴν θεωρίαν τῶν συναρτήσεων μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς θεωροῦν καὶ ἐνεστωτικὸν ἄπειρον, ὅπως καὶ εἰς τὴν Γεωμετρίαν δι᾿ ὅμοιον λόγον (§ 34 παρατήρ. 2).

λαμβάνομεν μὲ τὴν διάβασιν ἀπὸ τοῦ πεπερασμένου εἰς τὸ ἄπειρον καὶ ἀντιστρόφως λέγεται ***ἀπειροστικὴ ἀνάλυσις.***

Σειραί.

56. Ἔστω ἡ (ἄπειρος) ἀκολουθία μὲ πεπερασμένους ὅρους

$\Sigma_1 \qquad x_1, \; x_2, \; x_3, \dots$

καὶ ἡ ἀκολουθία

$\Sigma \qquad \omega_1, \; \omega_2, \; \omega_3, \dots$

ὅπου $\qquad \omega_1 = x_1, \quad \omega_2 = x_1 + x_2, \quad \omega_3 = x_1 + x_2 + x_3, \dots$

Ἐὰν ἡ ἀκολουθία Σ ἔχῃ ὅριον ἕνα πεπερασμένον ἀριθμὸν α θὰ λέγω ὅτι ἡ (ἄπειρος) ***σειρὰ*** $x_1 + x_2 + \dots + x_\nu + \dots$ συγκλίνει καὶ ἔχει ὅριον τὸ α· σημειοῦται δὲ τοῦτο ὡς ἑξῆς.

$$\alpha = x_1 + x_2 + \dots + x_\nu + \dots \quad \text{ἢ καὶ} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu = \alpha.$$

Συμφώνως πρὸς τὸ κριτήριον τοῦ Cauchy (§ 42) ἵνα ***ἡ σειρὰ*** $x_1 + x_2 + \dots + x_\nu + \dots$ ***συγκλίνῃ πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁσονδήποτε μικρὸς καὶ ἂν εἶναι θετικός τις ε νὰ εὑρίσκεται θετικὸς ἀκέραιος μ τοιοῦτος***

ὥστε $\qquad |x_{\mu+1} + x_{\mu+2} + \dots + x_{\mu+\varrho}| < \varepsilon,$

διὰ πᾶσαν θετικὴν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ ρ.
ἢ καὶ (§ 44) ***νὰ εὑρίσκεται θετικὸς ἀκέραιος N*** τοιοῦτος, ***ὥστε διὰ πάντα θετικὸν ἀκέραιον*** $\nu \geq N$ νὰ ἔχω

$$|x_{\nu+1} + x_{\nu+2} + \dots + x_{\nu+\varrho}| < \varepsilon$$

διὰ πᾶσαν θετικὴν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ ρ.

57. Ἡ χρῆσις τοῦ κριτηρίου τοῦ Cauchy διὰ τὴν σύγκλισιν σειρᾶς δὲν εἶναι ἐν γένει πολὺ εὔκολος· πηγάζει ὅμως ἐξ αὐτοῦ ἡ μόνη, ἐν γένει, ἀναγκαία συνθήκη διὰ τὴν σύγκλισιν σειρᾶς· καὶ πράγματι ἐὰν θέσω εἰς τὴν τελευταίαν ἀνισότητα $\varrho = 1$ λαμβάνω $|x_{\nu+1}| < \varepsilon$ ὅ-

θεν : *Ἵνα ἡ σειρὰ* $x_1+x_2+\ldots$ *συγκλίνῃ, πρέπει νὰ ἔχω*

$$\underset{\nu=\infty}{\text{ορ}}\ x_\nu = 0.$$

Προφανὲς εἶναι ὅτι ἡ συνθήκη αὕτη δὲν εἶναι ἀρκετή· ἂς λάβω π. χ. $x_\nu=\frac{1}{\nu}$· ἐὰν ἦτο ἡ σειρὰ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ συγκλίνουσα, θὰ εὑρίσκετο κατὰ τὸ κριτήριον συγκλίσεως (§ 56) ἀκέραιος ν τοιοῦτος ὥστε

$$|x_{\nu+1}+\ldots+x_{\nu+\varrho}|<\frac{1}{2} \qquad \text{διὰ} \quad \varrho=1, 2, 3, \ldots$$

ἑπομένως καὶ

$$|x_{\nu+1}+\ldots+x_{\nu+\nu}|<\frac{1}{2} \quad \text{ἢ καὶ} \quad \frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}+\ldots+\frac{1}{2\nu}<\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2\nu}+\frac{1}{2\nu}+\ldots+\frac{1}{2\nu}<\frac{1}{2}$$

ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἄτοπον, διότι

$$\frac{1}{2\nu}+\frac{1}{2\nu}+\ldots+\frac{1}{2\nu}=\frac{1}{2}$$

ὅθεν ἡ δοθεῖσα σειρὰ δὲν εἶναι συγκλίνουσα.

58. Ἀπὸ τὸ κριτήριον διὰ τὴν σύγκλισιν ἀκολουθίας ἐξήχθη κριτήριον διὰ τὴν σύγκλισιν σειρᾶς (§ 56). Ἀντιστρόφως ἀπὸ τὸ κριτήριον συγκλίσεως σειρᾶς ἐξάγεται τοιοῦτον διὰ τὰς ἀκολουθίας· ἔστω ἡ τυχοῦσα ἀκολουθία Σ_1 ἵνα εἶναι συγκλίνουσα πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι συγκλίνουσα ἡ σειρὰ

$$x_1+(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\ldots+(x_\nu-x_{\nu-1})+(x_{\nu+1}-x_\nu)+\ldots$$

Τῆς προτάσεως ταύτης γίνεται συχνὴ χρῆσις.

59. Καθίσταται ἁπλούστερον τὸ κριτήριον (§ 56) ὅταν ὅλοι οἱ ὅροι τῆς σειρᾶς εἶναι θετικοί.

Τότε ἡ ἀκολουθία Σ θὰ εἶναι μονότονος αὐξανομένη, ὅθεν :

Ἵνα μία σειρὰ $x_1+x_2+\ldots$ ***μὲ ὅρους θετικοὺς εἶναι συγκλίνουσα, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ ἀκολουθία Σ νὰ εἶναι περατωμένη ἄνωθεν***, δηλ. νὰ ὑπάρχῃ σταθερὸς ἀριθμὸς μεγαλύτερος παντὸς ἀθροίσματος S_ν, ὅπου $S_\nu=x_1+x_2+\ldots+x_\nu$.

ω_ν

Ὅταν μία σειρὰ μὲ ὅρους θετικοὺς δὲν εἶναι συγκλίνουσα, θὰ εἶναι ἄπειρος ὡς πρὸς τὸ ὅριον ἤτοι ἡ ἀκολουθία Σ θὰ ἔχῃ ὅριον τὸ $+\infty$.

Παραδείγματα. 1) Ἡ σειρὰ $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots$ ἢ καὶ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu(\nu+1)}$

γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς $\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots$ ἑπομένως πᾶν ἄθροισμα S_ν ἰσοῦται πρὸς $1-\frac{1}{\nu+1}$· ὅθεν ἡ δοθεῖσα σειρὰ εἶναι συγκλίνουσα καὶ ὅριον αὐτῆς ἡ μονάς.

2) Γενικώτερον ἔστω ἡ σειρὰ

$$\frac{A_2-A_1}{A_1A_2}+\frac{A_3-A_2}{A_2A_3}+\ldots+\frac{A_{\nu+1}-A_\nu}{A_\nu A_{\nu+1}}+\ldots$$

ὅπου ἡ ἀκολουθία $A_1, A_2, \ldots$ εἶναι μονότονος αὐξανομένη ἔχουσα ὅριον τὸ ἄπειρον ($A_1>o$)· αὕτη γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\left(\frac{1}{A_1}-\frac{1}{A_2}\right)+\left(\frac{1}{A_2}-\frac{1}{A_3}\right)+\ldots$$

ἑπομένως πᾶν ἄθροισμα S_ν ἰσοῦται πρὸς $\frac{1}{A_1}-\frac{1}{A_{\nu+1}}$· ὅθεν αὕτη εἶναι συγκλίνουσα καὶ ἔχει ὅριον τὸ $\frac{1}{A_1}$. Π. χ. ἔστω $A_\nu=\nu^\rho$ ($\rho>o$) . . . ἡ ἀντίστοιχος σειρὰ $\Sigma\left[\frac{1}{\nu^\rho}-\frac{1}{(\nu+1)^\rho}\right]$ εἶναι συγκλίνουσα.

3) Ἡ σειρὰ $(A_2-A_1)+(A_3-A_2)+\ldots+(A_{\nu+1}-A_\nu)+\ldots$ ἥτις ἔχει ὅλους τοὺς ὅρους θετικοὺς δὲν εἶναι συγκλίνουσα· λέγομεν ὅτι εἶναι ***ἀποκλίνουσα***. Π.χ. ἔστω $A_\nu=\log\nu$· ἡ ἀντίστοιχος σειρὰ

$$\Sigma\left[\log(\nu+1)-\log\nu\right]=\Sigma\log\left(1+\frac{1}{\nu}\right)$$ εἶναι ἀποκλίνουσα.

Παρατήρησις. Εἶναι προφανὲς ὅτι στηριζόμενος ἐπὶ τῶν παραδειγμάτων 2 καὶ 3 δύναμαι νὰ σχηματίσω ὁσασδήποτε θέλω σειρὰς συγκλινούσας καὶ ἀποκλινούσας, καὶ ἀντιστρόφως· ἐὰν σειρά τις (1) $x_1+x_2+\ldots$ εἶναι ἀποκλίνουσα δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $A_1+(A_2-A_1)+(A_3-A_2)+\ldots$ ἐὰν δὲ εἶναι συγκλίνουσα ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\left(\frac{1}{A_1}-\frac{1}{A_2}\right)+\left(\frac{1}{A_2}-\frac{1}{A_3}\right)+\ldots$$

1) μὲ ὅρους θετικούς.

[ὅπου ἡ ἀκολουθία $A_1, A_2, \ldots$ εἶναι μὲ ὅρους θετικούς, μονότονος αὖξανομένη, ἔχει δὲ ὅριον τὸ ∞].

Ἀρκεῖ εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν νὰ λαμβάνεται $A_\nu = S_\nu$ εἰς δὲ τὴν δευτέραν $A_1 = \frac{1}{S}$. $A_{\nu+1} = \frac{1}{S-S_\nu}$ ($S_\nu = x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu$ καὶ S=ὅριον τῆς σειρᾶς).

59. Θεωρήσωμεν τὰς δύο σειρὰς

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_\mu + x_{\mu+1} + \ldots$$

$$x_{\mu+1} + x_{\mu+2} + \ldots$$

(ὅπου μ ὡρισμένος). Ἐὰν ἡ πρώτη εἶναι συγκλίνουσα θὰ εἶναι καὶ ἡ δευτέρα συγκλίνουσα, καὶ ἐὰν ἡ πρώτη δὲν εἶναι συγκλίνουσα, οὐδὲ ἡ δευτέρα θὰ εἶναι· διότι, ἐὰν διὰ τοῦ Σ_ν ἐκφράσω τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς πρώτης ἔχω (1) $\Sigma_{\mu+\varrho} - \Sigma_\mu = S_\varrho$, ὅπου S_ϱ =ἄθροισμα τῶν ϱ πρώτων ὅρων τῆς δευτέρας καὶ ἐπομένως ἐὰν ἡ πρώτη εἶναι συγκλίνουσα, θὰ ἔχω ὅτι $\underset{\varrho+\infty}{\text{ὅρ}}\, \Sigma_{\mu+\varrho} = \alpha$, ὅπου α σταθερὸς καὶ ἐπομένως τὸ S_ϱ διὰ $\varrho = \infty$ θὰ ἔχῃ ὅριον τὸν σταθερὸν $\alpha - \Sigma_\mu$ · λέγομεν τότε ὅτι τὸ ὁρS_ϱ εἶναι τὸ ***ὑπόλοιπον*** τῆς πρώτης σειρᾶς περιορισθείσης μέχρι τοῦ μυοστοῦ ὅρου. Ἐκ τῆς αὐτῆς ἰσότητος (1) ἐξάγω ὅτι ἐὰν ἡ πρώτη σειρὰ δὲν εἶναι συγκλίνουσα, οὐδὲ ἡ δευτέρα θὰ εἶναι τοιαύτη.

60. ***Σύγκρισις σειρῶν μὲ ὅρους μόνον θετικούς.*** Ἔστωσαν αἱ σειραὶ Σx_ν, Σy_ν [1] μὲ ὅρους μόνον θετικοὺς καὶ ἔστω ὅτι ἀπό τινος τιμῆς τοῦ ν καὶ πέραν ἔχω $x_\nu < y_\nu$ τότε ἐὰν ἡ Σy_ν εἶναι συγκλίνουσα θὰ εἶναι καὶ ἡ Σx_ν συγκλίνουσα· καὶ ἐὰν ἡ Σx_ν εἶναι ἀποκλίνουσα θὰ εἶναι ἀποκλίνουσα καὶ ἡ Σy_ν Καὶ τῷ ὄντι παρατηρῶ πρῶτον ὅτι δύναμαι νὰ ὑποθέσω ὅτι ἡ ἀνισότης $x_\nu < y_\nu$ ἰσχύει δι' ὅλας τὰς ἀκεραίας τιμὰς τοῦ ν· διότι ἐὰν ἴσχυε μόνον ἀπὸ τῶν ὅρων τῶν κατεχόντων τάξιν τινὰ $\mu+1$ καὶ πέραν, θεωρῶ τὰς σειρὰς αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἀπὸ τὰς προηγουμένας δι' ἀφαιρέσεως τῶν μ πρώτων ὅρων· δυνάμει τῆς προηγουμένης προτάσεως (§ 59) ἑκατέρα τῶν νέων σειρῶν θὰ εἶναι συγκλίνουσα ἢ ἀποκλίνουσα ἐφ' ὅσον ἡ ἀντίστοιχος ἐξ ἧς προέκυψε εἶναι συγκλίνουσα ἢ ἀποκλίνουσα· ἀλλ' ὅταν

$$x_\nu < y_\nu \text{ διὰ } \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

---

[1]) Γράφω Σx_ν ἀντὶ τοῦ $x_1 + x_2 + \ldots$

πᾶν ἄθροισμα $x_1+x_2+\ldots+x_\nu$ θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀντιστοίχου ἀθροίσματος $y_1+y_2+\ldots+y_\nu$. 1) Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ σειρὰ Σy_ν εἶναι συγκλίνουσα· θὰ εὑρίσκεται σταθερὸς ἀριθμὸς Λ ὑπερβαίνων πᾶν ἄθροισμα $y_1+y_2+\ldots+y_\nu$· ὑπερβαίνων ἐπομένως καὶ πᾶν ἄθροισμα $x_1+x_2\ldots+x_\nu$· ὅθεν καὶ (§ 59 σελ. 78) ἡ σειρὰ Σx_ν θὰ εἶναι συγκλίνουσα. 2) Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ σειρὰ Σx_ν εἶναι ἀποκλίνουσα· τότε δοθέντος θετικοῦ ἀριθμοῦ M ὁσονδήποτε μεγάλου θὰ εὑρίσκεται δείκτης ν τοιοῦτος, ὥστε $x_1+x_2+\ldots+x_\nu>M$· ὁπότε καὶ

$$y_1+y_2+\ldots+y_\nu>M$$

ὅθεν καὶ (§ 59 σελ. 78) ἡ σειρὰ Σy_ν θὰ εἶναι ἀποκλίνουσα.

61.—Ἔστωσαν αἱ σειραὶ Σx_ν, Σy_ν μὲ ὅρους μόνον θετικοὺς καὶ

α′) Ἔστω ὅτι ἀπό τινος τιμῆς τοῦ ν καὶ πέραν ἔχω $x_\nu : y_\nu=A$ ὅπου A σταθερὸς ἀριθμός· τότε ἢ θὰ εἶναι καὶ αἱ δύο δοθεῖσαι σειραὶ συγκλίνουσαι ἢ καὶ αἱ δύο ἀποκλίνουσαι. Πρὸς ἀπόδειξιν αὐτοῦ παρατηρῶ, ὅπως καὶ προηγουμένως, (§ 60) ὅτι δύναμαι νὰ παραδεχθῶ ὅτι ἡ ὑπόθεσίς μου (καθ' ἣν $x_\nu : y_\nu=A$) ἰσχύει δι' ὅλας τὰς ἀκεραίας τιμὰς τοῦ ν· καὶ ἐπομένως πᾶν ἄθροισμα $x_1+x_2+\ldots+x_\nu$ θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ $A.(y_1+y_2+\ldots+y_\nu)$· ὅθεν, ἐὰν ἡ σειρὰ Σy_ν συγκλίνῃ καὶ ἡ σειρὰ Σx_ν θὰ συγκλίνῃ καὶ ἐὰν ἡ σειρὰ Σy_ν ἀποκλίνῃ καὶ ἡ σειρὰ Σx_ν θὰ ἀποκλίνῃ.

β′) Ἔστω ὅτι ἀπό τινος τιμῆς τοῦ ν καὶ πέραν ἔχω $x_\nu : y_\nu=\alpha_\nu$ ὅπου οἱ ἀριθμοὶ α_ν εἶναι μικρότεροι σταθεροῦ τινος ἀριθμοῦ A. Τότε ἐὰν ἡ σειρὰ Σy_ν συγκλίνῃ καὶ ἡ σειρὰ Σx_ν θὰ συγκλίνῃ, διότι θὰ ἔχω ἀπό τινος τιμῆς τοῦ ν καὶ πέραν $x_\nu=\alpha_\nu y_\nu<Ay_\nu$· ἀλλ' ἡ σειρὰ ΣAy_ν συγκλίνει (α′) ἄρα (§ 60) καὶ ἡ Σx_ν συγκλίνει.

γ′) Ἔστω ὅτι ἀπό τινος τιμῆς τοῦ ν καὶ πέραν ἔχω $x_\nu : y_\nu=\alpha_\nu$, ὅπου οἱ ἀριθμοὶ α_ν εἶναι μεγαλύτεροι θετικοῦ τινος σταθεροῦ ἀριθμοῦ A· τότε ἐὰν ἡ Σy_ν ἀποκλίνῃ καὶ ἡ Σx_ν ἀποκλίνει· διότι

$$x_\nu=\alpha_\nu y_\nu>Ay_\nu$$

καὶ ἐπομένως ἡ σειρὰ Σx_ν θὰ ἔχῃ ἀπό τινος τιμῆς τοῦ ν καὶ πέραν ὅρους μεγαλυτέρους τῶν ἀντιστοίχων τῆς ΣAy_ν, ἡ ὁποία (α′) ἀποκλίνει· ὅθεν (§ 60) καὶ ἡ Σx_ν θὰ ἀποκλίνῃ.

δ′) Ἔστω ὅτι ορ $\dfrac{x_\nu}{y_\nu}=\alpha$ ὅπου α πεπερασμένος καὶ διάφορος τοῦ μηδενός· τότε ἢ ἀμφότεραι αἱ σειραὶ συγκλίνουν ἢ ἀμφότεραι ἀποκλίνουν. Καὶ τῷόντι ἔστωσαν α' καὶ α'' δύο θετικοὶ ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε $\alpha' < \alpha < \alpha''$· θὰ ἔχω (συμφώνως πρὸς τὴν ὑπόθεσιν) ἀπό τινος τιμῆς τοῦ ν καὶ πέραν $\alpha' < \frac{x_\nu}{y_\nu} < \alpha''$ (§ 26)· ἑπομένως ἐὰν ἡ Σy_ν συγκλίνῃ καὶ ἡ Σx_ν συγκλίνει (β')· ἐὰν δὲ ἡ Σy_ν ἀποκλίνῃ καὶ ἡ Σx_ν ἀποκλίνει (γ').

ε') Ἔστω ὅτι ἀπό τινος τιμῆς τοῦ ν καὶ πέραν ἔχω

$$\frac{x_\nu}{x_{\nu+1}} \geqq \frac{y_\nu}{y_{\nu+1}},$$

τότε ἐὰν ἡ σειρὰ Σy_ν συγκλίνῃ καὶ ἡ σειρὰ Σx_ν συγκλίνει καὶ ἐὰν ἡ Σx_ν ἀποκλίνῃ καὶ ἡ Σy_ν θὰ ἀποκλίνῃ.

Καὶ τῷόντι θὰ ὑπάρχῃ τότε δείκτης μ τοιοῦτος ὥστε

$$\frac{x_\mu}{y_\mu} \geqq \frac{x_{\mu+1}}{y_{\mu+1}} \geqq \frac{x_{\mu+2}}{y_{\mu+2}} \geqq \ldots$$

ἑπομένως, ἐὰν καλέσω λ τὸν ἀριθμὸν $\frac{x_\mu}{y_\mu}$, θὰ ἔχω

$$x_{\mu+1} \leqq \lambda y_{\mu+1}, \quad x_{\mu+2} \leqq \lambda y_{\mu+2}, \ldots,$$

ὅθεν (α') ἕπεται ἡ πρότασις (ε').

Παρατήρησις. Εἰς τὴν πρότασιν (ε') συγκρίνομεν τοὺς λόγους δύο διαδοχικῶν ὅρων δύο σειρῶν, ἐνῷ εἰς τὰς προηγουμένας προτάσεις συγκρίνομεν αὐτοὺς τούτους τοὺς ὅρους.

Εἰδικὰ κριτήρια συγκλίσεως καὶ ἀποκλίσεως σειρῶν μὲ ὅρους θετικούς.[1]. Ἀπὸ τὴν σύγκρισιν σειρῶν προκύπτουσιν διάφορα εἰδικὰ κριτήρια συγκλίσεως καὶ ἀποκλίσεως.

62. Ἄς λάβω $y_\nu = \frac{1}{\nu}$ καὶ ἄς ἐφαρμόσω τὴν πρότασιν (61, δ'). Θὰ ἔχω ὅτι: ἐὰν ορ $\frac{x_\nu}{\frac{1}{\nu}} = \alpha \; (\alpha \neq 0)$ ἡ σειρὰ Σx_ν θὰ εἶναι ἀποκλίνουσα· ἤτοι

Ἐὰν ορ $\nu x_\nu = \alpha \; (\alpha \neq 0)$ ***ἡ σειρὰ*** Σx_ν ***ἀποκλίνει.***

---

[1]) Ὑποθέτομεν πάντοτε εἰς τὰς παραγράφους 62—71 ὅτι θεωροῦμεν σειρὰς μὲ ὅρους θετικούς.

63. ***Κανὼν τοῦ Cauchy.*** Ἄς λάβω $y_\nu = \omega^\nu$, τουτέστιν ἂς θεωρήσω ὡς ὅρον συγκρίσεως τὴν γεωμετρικὴν πρόοδον, τῆς ὁποίας ὁ λόγος εἶναι ω.

Ἐὰν $\omega < 1$ ἡ σειρὰ Σy_ν θὰ εἶναι συγκλίνουσα· ἑπομένως πᾶσα σειρὰ Σx_ν, διὰ τὴν ὁποίαν ἔχομεν ἀπό τινος τιμῆς τοῦ ν καὶ πέραν

$$x_\nu < \omega^\nu, \text{ ἤτοι } \sqrt[\nu]{x_\nu} < \omega,$$

θὰ εἶναι συγκλίνουσα (§ 60)· ὅθεν τὸ κριτήριον συγκλίσεως:

Πᾶσα σειρὰ Σx_ν, διὰ τὴν ὁποίαν ἔχομεν ἀπό τινος τιμῆς τοῦ ν καὶ πέραν

$$\sqrt[\nu]{x_\nu} < \omega < 1,$$

εἶναι συγκλίνουσα.

Ἐὰν $\omega > 1$, ἡ σειρὰ Σy_ν θὰ εἶναι ἀποκλίνουσα· ἑπομένως ***πᾶσα σειρὰ Σx_ν, διὰ τὴν ὁποίαν ἔχομεν ἀπό τινος τιμῆς τοῦ ν καὶ πέραν***

$$\sqrt[\nu]{x_\nu} > \omega > 1,$$

εἶναι ἀποκλίνουσα.

Αἱ δύο αὗται προτάσεις ἀποτελοῦσι τὸν κανόνα τοῦ Cauchy· ἐντεῦθεν ἐξάγεται καὶ ὁ ἑξῆς κανών:

Ἐὰν εἰς μίαν σειρὰν Σx_ν ἡ $\sqrt[\nu]{x_\nu}$ τείνῃ πρὸς ὅριόν τι λ, ὅταν τὸ ν τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον, ἡ σειρὰ εἶναι συγκλίνουσα ἐὰν $\lambda < 1$, ἀποκλίνουσα ἐὰν $\lambda > 1$.

Καὶ τῷ ὄντι· ἔστω π. χ. $\lambda < 1$. Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ὁσονδήποτε μικρὸς καὶ ἂν ὑποτεθῇ θετικός τις ἀριθμὸς ε, θὰ εὑρίσκεται τιμή τις τοῦ ν, ἀπὸ τῆς ὁποίας καὶ πέραν ἡ $\sqrt[\nu]{x_\nu}$ θὰ περιλαμβάνεται εἰς τὸ διάστημα $(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$· ἀλλὰ ὡς ε δύναμαι νὰ λάβω ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ $1 - \lambda$· ὁπότε $\lambda + \varepsilon < 1$· θὰ ἔχω ἑπομένως, ὅτι ἀπό τινος τάξεως καὶ ἐφεξῆς ἡ $\sqrt[\nu]{x_\nu}$ θὰ μένῃ μικροτέρα ἀριθμοῦ μικροτέρου τῆς μονάδος.

$\left|\sqrt[\nu]{x_\nu} - \lambda\right| < \varepsilon < 1 - \lambda$ $\sqrt[\nu]{x_\nu} < \varepsilon < 1$

ἄρα ἡ σειρὰ θὰ εἶναι συγκλίνουσα· ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἐὰν $\lambda > 1$ ἡ σειρὰ εἶναι ἀποκλίνουσα.

Ἔστω ὅτι ἡ $\sqrt[\nu]{x_\nu}$ τείνει πρὸς τὴν μονάδα· δὲν δυνάμεθα ἐξ αὐτοῦ νὰ συμπεράνωμεν ἂν ἡ σειρὰ εἶναι συγκλίνουσα ἢ ἀποκλίνουσα· ἐὰν ὅμως ἡ $\sqrt[\nu]{x_\nu}$ τείνῃ πρὸς τὴν μονάδα, ἔχωμεν δ' ἀφ' ἑτέρου ἀπὸ τιμῆς τινος τοῦ ν καὶ ἐφεξῆς

$$\sqrt[\nu]{x_\nu} \geqq 1,$$

ἡ σειρὰ εἶναι ἀποκλίνουσα (§ 57).

64. ***Κανὼν τοῦ D'Alembert.*** Ἂς λάβω πάλιν $y_\nu = \omega^\nu$· ἔχω

$$\frac{y_\nu}{y_{\nu+1}} = \frac{1}{\omega}.$$

Ἐὰν $\omega < 1$ ἡ σειρὰ Σy_ν συγκλίνει· ἑπομένως (§ 61, ε') πᾶσα σειρὰ Σx_ν, διὰ τὴν ὁποίαν ἔχομεν ἀπό τινος τάξεως καὶ ἐφεξῆς,

$$\frac{x_\nu}{x_{\nu+1}} \geqq \frac{1}{\omega}$$

εἶναι συγκλίνουσα· ἤτοι

Πᾶσα σειρὰ Σx_ν, ***διὰ τὴν ὁποίαν ἔχομεν ἀπό τινος τιμῆς τοῦ ν καὶ πέραν***

$$\frac{x_{\nu+1}}{x_\nu} \leqq \omega < 1,$$

εἶναι συγκλίνουσα.

Ἐὰν $\omega > 1$, ἡ σειρὰ Σy_ν ἀποκλίνει· ἑπομένως (§ 61 ε') πᾶσα σειρὰ Σx_ν, διὰ τὴν ὁποίαν ἔχομεν ἀπό τινος τιμῆς τοῦ ν καὶ πέραν

$$\frac{x_\nu}{x_{\nu+1}} \leqq \frac{1}{\omega},$$

εἶναι ἀποκλίνουσα· ἤτοι

Πᾶσα σειρὰ Σx_ν, ***διὰ τὴν ὁποίαν ἔχομεν ἀπό τινος τιμῆς τοῦ ν καὶ πέραν***

$$\frac{x_{\nu+1}}{x_\nu} \geqq \omega > 1,$$

εἶναι ἀποκλίνουσα.

Τοῦτο, ἄλλως τε, εἶναι προφανὲς διότι οἱ ὅροι δὲν θὰ βαίνουν ἐλαττούμενοι ἀπεριορίστως.

Αἱ δύο αὗται προτάσεις ἀποτελοῦσι τὸν κανόνα τοῦ D'Alembert· ἐξάγεται δ' ἐντεῦθεν εὐκόλως καὶ ὁ ἑξῆς κανών :

Ἐὰν εἰς μίαν σειρὰν Σx_ν ***ὁ λόγος*** $\frac{x_{\nu+1}}{x_\nu}$ ***τείνῃ πρὸς ὅριόν τι*** λ, ***ὅταν τὸ ν τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον, ἡ σειρὰ εἶναι συγκλίνουσα ἐὰν*** $\lambda<1$ ***καὶ ἀποκλίνουσα ἐὰν*** $\lambda>1$.

Ἔστω ὅτι ὁ λόγος $\frac{x_{\nu+1}}{x_\nu}$ τείνει πρὸς τὴν μονάδα, ὅταν τὸ ν αὐξάνῃ ἀπεριορίστως· δὲν δυνάμεθα ἐξ αὐτοῦ νὰ συμπεράνωμεν ἂν ἡ σειρὰ εἶναι συγκλίνουσα ἢ ἀποκλίνουσα· ἂν ὅμως ἀπό τινος τιμῆς τοῦ ν καὶ πέραν ἔχωμεν $\frac{x_{\nu+1}}{x_\nu} \geqq 1$, ἡ σειρὰ εἶναι ἀποκλίνουσα, διότι τότε οἱ ὅροι δὲν βαίνουν ἀκαταπαύστως ἐλαττούμενοι.

65. ***Παρατηρήσεις.*** 1) Εἰς τὸ κριτήριον συγκλίσεως ἢ ἀποκλίσεως, τὸ διδόμενον ὑπὸ τοῦ κανόνος τοῦ Cauchy, παρουσιάζεται μόνον ὁ γενικὸς ὅρος (x_ν)· Τὰ τοιούτου εἴδους κριτήρια, ἤτοι ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα παρουσιάζεται εἷς μόνον ὅρος, λέγονται κριτήρια τοῦ πρώτου εἴδους. Εἰς τὸ κριτήριον τὸ διδόμενον ὑπὸ τοῦ κανόνος τοῦ d'Alembert παρουσιάζεται ὁ γενικὸς ὅρος x_ν καὶ ὁ ἑπόμενος τοῦ x_ν· τὰ τοιούτου εἴδους κριτήρια, ἤτοι ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα παρουσιάζονται δύο ὅροι, λέγονται κριτήρια τοῦ δευτέρου εἴδους κ.ο.κ.

2) ὅταν ὁ λόγος $\frac{x_{\nu+1}}{x_\nu}$ τείνῃ πρὸς ὅριόν τι $\lambda > o$ καὶ ἡ $\sqrt[\nu]{x_\nu}$ θὰ τείνῃ πρὸς τὸ αὐτὸ ὅριον. Καὶ πράγματι, ἔστω ορ $\frac{x_{\nu+1}}{x_\nu} = \lambda$· τότε, δοθέντος

θετικοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ $\varepsilon < \lambda$, θὰ εὑρίσκεται δείκτης μ τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἔχωμεν

$$\lambda-\varepsilon < \frac{x_{\mu+1}}{x_\mu} < \lambda+\varepsilon, \;.\;.\;.\quad \lambda-\varepsilon < \frac{x_{\mu+\varrho}}{x_{\mu+\varrho-1}} < \lambda+\varepsilon,$$

οἱοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ θετικὸς ἀκέραιος ϱ· πολλαπλασιάζω κατὰ μέλη καὶ λαμβάνω

$$(\lambda-\varepsilon)^\varrho < \frac{x_{\mu+\varrho}}{x_\mu} < (\lambda+\varepsilon)^\varrho,$$

ὅθεν καὶ (θέτων $\mu+\varrho=\nu$)

$$x_\mu^{\frac{1}{\nu}}(\lambda-\varepsilon)^{\frac{\varrho}{\nu}} < \sqrt[\nu]{x_\nu} < x_\mu^{\frac{1}{\nu}}(\lambda+\varepsilon)^{\frac{\varrho}{\nu}}$$

Ἐὰν ἤδη ὑποθέσω ὅτι ορ $\varrho=\infty$, θὰ ἔχω ορ $\frac{\varrho}{\nu} =$ ορ $\frac{\varrho}{\mu+\varrho} = 1$

$$\text{καὶ}\quad \text{ορ}\; x_\mu^{\frac{1}{\nu}} = 1\cdot$$

ἑπομένως ὁ εἷς τῶν ἄκρων ὅρων τῆς ἀνισότητος τείνει πρὸς τὸ $\lambda-\varepsilon$ καὶ ὁ ἕτερος πρὸς τὸ $\lambda+\varepsilon$· ἄρα ἐὰν λάβω π. χ. τὸν $\lambda-3\varepsilon$, ὅστις εἶναι μικρότερος τοῦ $\lambda-\varepsilon$ καὶ τὸν $\lambda+3\varepsilon$, ὅστις εἶναι μεγαλύτερος τοῦ $\lambda+\varepsilon$, θὰ εὑρίσκεται τιμὴ τοῦ ν, ἀπὸ τῆς ὁποίας καὶ πέραν θὰ ἔχω

$$\lambda-3\varepsilon < \sqrt[\nu]{x_\nu} < \lambda+3\varepsilon.$$

Ἐπειδὴ τὸ ε ἐλήφθη αὐθαιρέτως θὰ ἔχωμεν, ὅτι ορ $\sqrt[\nu]{x_\nu}=\lambda$· ὥστε, ὅταν ὑπάρχῃ ὅριον τοῦ $\frac{x_{\nu+1}}{x_\nu}$ θὰ ὑπάρχῃ καὶ ὅριον τῆς $\sqrt[\nu]{x_\nu}$ καὶ θὰ εἶναι μάλιστα τὸ αὐτό· παρατηρῶ ὅτι, ἡ ἀντίστροφος πρότασις δὲν ἀληθεύει· δηλ. ἐκ τοῦ ὅτι ὑπάρχει ὅριον τῆς $\sqrt[\nu]{x_\nu}$ δὲν ἕπεται ἀπαραιτήτως, ὅτι θὰ ὑπάρχῃ καὶ ὅριον τοῦ $\frac{x_{\nu+1}}{x_\nu}$.

Θεωρήσωμεν, π. χ., τὴν σειρὰν

$$\alpha,\ \alpha\beta,\ \alpha^2\beta,\ \alpha^2\beta^2,\ \alpha^3\beta^2, \alpha^3\beta^3, \ldots \alpha^\mu\beta^{\mu-1}, \alpha^\mu\beta^\mu, \ldots,$$

ὅπου α,β διάφοροι πρὸς ἀλλήλους· παρατηρῶ, ὅτι ὁ λόγος ἑνὸς ὅρου πρὸς τὸν προηγούμενον εἶναι ἐναλλὰξ β καὶ α, ἐνῷ

$$\text{ορ}\sqrt[\nu]{x_\nu} = \sqrt{\alpha\beta} \quad \text{δι' ορ } \nu=\infty.$$

66. ***Κανὼν τοῦ* Kummer**. Ἔστω ἀκολουθία τις θετικῶν ἀριθμῶν

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \ldots$$

Ἐὰν ἀπό τινος τιμῆς τοῦ ν καὶ πέραν ἔχωμεν

$$\alpha_\nu \frac{x_\nu}{x_{\nu+1}} - \alpha_{\nu+1} > \lambda,$$

ὅπου λ σταθερὸς θετικὸς ἀριθμός, ἡ σειρὰ Σx_ν ***εἶναι συγκλίνουσα.***

Καὶ τῷ ὄντι, δύναμαι τότε διὰ τὴν ἀπόδειξιν νὰ ὑποθέσω (§ 60), ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἀνισότης ἰσχύει διὰ ν=1, 2, 3, . . . μ, οἱουδήποτε θετικοῦ ἀκεραίου ὄντος τοῦ μ· ἤτοι, ὅτι ἔχω

$$\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 > \lambda x_2, \ \ldots \ \alpha_\mu x_\mu - \alpha_{\mu+1} x_{\mu+1} > \lambda x_{\mu+1},$$

ὁπότε προσθέτων κατὰ μέλη λαμβάνω

$$\lambda(x_2 + x_3 + \ldots + x_{\mu+1}) < \alpha_1 x_1 - \alpha_{\mu+1} x_{\mu+1} < \alpha_1 x_1 \cdot$$

ὅθεν τὸ ἄθροισμα $x_1+x_2+\ldots+x_{\mu+1}$ μένει μικρότερον τοῦ ὡρισμένου ἀριθμοῦ $\frac{\alpha_1 x_1}{\lambda}+x_1$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ μ· καὶ ἐπομένως (§ 59) ἡ σειρὰ Σx_ν εἶναι συγκλίνουσα.

Ἐὰν ἡ σειρὰ $\Sigma\frac{1}{\alpha_\nu}$ εἶναι ἀποκλίνουσα καὶ ἐὰν ἀπό τινος τιμῆς τοῦ ν καὶ πέραν

$$\alpha_\nu \frac{x_\nu}{x_{\nu+1}} - \alpha_{\nu+1} < 0,$$

ἡ σειρὰ Σx_ν ἀποκλίνει.

Διότι τότε θὰ ἔχωμεν

$$\alpha_\nu x_\nu < \alpha_{\nu+1} x_{\nu+1},$$

ἤτοι οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας

$$\alpha_1 x_1,\ \alpha_2 x_2,\ \ldots\ \alpha_\nu x_\nu,\ \ldots,$$

ἀπό τινος τάξεως καὶ ἐφεξῆς θὰ αὐξάνουν· θὰ εὑρίσκεται ἐπομένως σταθερός τις ἀριθμὸς β τοιοῦτος ὥστε $\alpha_\nu x_\nu > \beta$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ ν· ἢ $x_\nu > \frac{\beta}{\alpha_\nu}$· ἀλλ' ὑπεθέσαμεν ὅτι ἡ $\Sigma\frac{1}{\alpha_\nu}$ εἶναι ἀποκλίνουσα, ὅθεν (§ 61 γ΄) καὶ ἡ $\Sigma\frac{\beta}{\alpha_\nu}$ εἶναι ἀποκλίνουσα· ἄρα καὶ ἡ Σx_ν ἀποκλίνει (§ 60).

Σημείωσις. Ἡ πρότασις αὕτη δύναται προφανῶς νὰ διατυπωθῇ καὶ ὡς ἑξῆς: ἐάν, ἀπό τινος τιμῆς τοῦ ν καὶ ἐφεξῆς, ὁ λόγος $\frac{x_\nu}{x_{\nu+1}}$ εἶναι τοιοῦτος, ὥστε νὰ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{\alpha_{\nu+1}+\lambda}{\alpha_\nu}$, ὅπου λ, α_ν, $\alpha_{\nu+1}$, δηλοῦσι θετικοὺς ἀριθμοὺς ἡ σειρὰ εἶναι συγκλίνουσα.

67. ***Κανὼν τοῦ* Raabe.** — Ἄς θέσω $\alpha_\nu=\nu$· α΄) Ὁ κανὼν συγκλίσεως τοῦ Kummer δίδει ὅτι: ἐὰν ἀπό τινος τάξεως καὶ ἐφεξῆς

$$\nu \frac{x_\nu}{x_{\nu+1}} - (\nu+1) > \lambda,$$

$\frac{x_n}{x_{n+1}} > 1 + \frac{1+\lambda}{n}$

$\frac{x_n}{x_{n+1}} > 1 + \frac{k}{n}$

ὅπου λ σταθερός τις θετικός, ἡ σειρὰ Σx_ν συγκλίνει· ἡ ἀνισότης ὅμως αὕτη γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$(1) \qquad \frac{x_\nu}{x_{\nu+1}} > 1 + \frac{K}{\nu},$$

ὅπου $K > 1$· ὅθεν προκύπτει, ὅτι ***ἐὰν ἀπό τινος τιμῆς τοῦ ν καὶ πέραν ἰσχύει ἀνισότης τῆς μορφῆς (1) ἡ σειρὰ Σx_ν συγκλίνει.***

β') ὁ κανὼν ἀποκλίσεως δίδει ὅτι: ἐὰν ἀπό τινος τάξεως καὶ ἐφεξῆς ἔχω

$$\nu \frac{x_\nu}{x_{\nu+1}} - (\nu+1) < o,$$

ἡ Σx_ν ἀποκλίνει· τουτέστιν·

Ἐὰν ἀπό τινος τιμῆς τοῦ ν καὶ πέραν

$$(2) \qquad \frac{x_\nu}{x_{\nu+1}} < 1 + \frac{1}{\nu},$$

ἡ σειρὰ Σx_ν ἀποκλίνει.

Τοῦτο ἄλλως τε φαίνεται καὶ ἀπ' εὐθείας· διότι τότε θὰ ἔχω

$$\frac{x_{\nu+1}}{x_\nu} > \frac{1}{1+\frac{1}{\nu}} = \frac{\nu}{\nu+1}$$

καὶ ἐὰν θέσω $y_\nu = \frac{1}{\nu}$ θὰ εἶναι

$$\frac{x_{\nu+1}}{x_\nu} > \frac{y_{\nu+1}}{y_\nu},$$

ἀλλὰ ἡ Σy_ν εἶναι ἡ ἁρμονικὴ σειρά, ἥτις ἀποκλίνει· ἐπομένως (§61 ε') καὶ ἡ Σx_ν ἀποκλίνει.

68. Ὁ κανὼν τοῦ Raabe δύναται καὶ ἄλλως νὰ διατυπωθῇ· παρατηροῦμεν πρὸς τοῦτο, ὅτι ἐὰν θέσωμεν

$$(3) \qquad \frac{x_\nu - x_{\nu+1}}{x_{\nu+1}} = \alpha_\nu,$$

αἱ ἀνισότητες (1) καὶ (2) γράφονται

$$\nu\,\alpha_\nu > K \quad \text{καὶ} \quad \nu\alpha_\nu < 1$$

ἡ δὲ ἰσότης (3) ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν ἰσότητα

$$(3') \qquad \frac{x_{\nu+1}}{x_\nu} = \frac{1}{1+\alpha_\nu}.$$

ὅθεν τὸ προηγούμενον κριτήριον συγκλίσεως καὶ ἀποκλίσεως δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς :

Θέτομεν τὸν λόγον $\frac{x_{\nu+1}}{x_\nu}$ ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{1}{1+\alpha_\nu}$ καὶ θεωροῦμεν τὸ $\nu\alpha_\nu$.

Ἐὰν ἀπό τινος τιμῆς τοῦ ν καὶ πέραν ἔχωμεν $\nu\alpha_\nu > K > 1$ ***ἡ σειρὰ συγκλίνει· ἐὰν*** $\nu\alpha_\nu < 1$ ***ἡ σειρὰ ἀποκλίνει.***

Οὕτως ἐὰν ὁ λόγος $\frac{x_{\nu+1}}{x_\nu}$ τείνῃ πρὸς τὴν μονάδα, μένων μικρότερος τῆς μονάδος, θέτομεν τὸν λόγον αὐτὸν ὑπὸ τὴν μορφὴν (3') καὶ κάμνομεν χρῆσιν τοῦ ἀνωτέρω κριτηρίου.

69. ***Παρατήρησις.*** —Ἐκ τῶν προηγουμένων ἐξάγεται καὶ τὸ ἑξῆς

συμπέρασμα. Διὰ νὰ διακρίνω ἂν μία σειρὰ μὲ ὅρους θετικοὺς Σx_ν συγκλίνῃ ἢ ἀποκλίνῃ δύναμαι νὰ ἐργασθῶ καὶ οὕτω :

Ἀναπτύσσω τὸν λόγον $\dfrac{x_\nu}{x_{\nu+1}}$ κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ $\dfrac{1}{\nu}$, λαμβάνω δὲ τότε, ἐν γένει, ἀνάπτυγμα τῆς μορφῆς

$$\frac{x_\nu}{x_{\nu+1}}=A+\frac{B}{\nu}+\frac{\varepsilon}{\nu^2},$$

ὅπου τὸ ε μένει πεπερασμένον· ἤτοι μικρότερον ἀριθμοῦ τινος πεπερασμένου Γ.

Ἐὰν $A>1$, τότε ἀπό τινος τιμῆς τοῦ ν καὶ πέραν θὰ εἶναι $\dfrac{x_{\nu+1}}{x_\nu}$ μικρότερον ἀριθμοῦ μικροτέρου τῆς μονάδος· ἄρα ἡ Σx_ν συγκλίνει.

Ἐὰν $A=1$ καὶ $B>1$, τότε $\dfrac{x_\nu}{x_{\nu+1}}>1+\dfrac{K}{\nu}$, ὅπου $K>1$

καὶ ἡ σειρὰ συμφώνως πρὸς τὸν κανόνα (§ 67) συγκλίνει.

Ἐὰν $A=1$ καὶ $B<1$, τότε θεωροῦμεν τὴν ἰσότητα

$$\frac{x_\nu}{x_{\nu+1}}=1+\frac{1}{\nu}\left(B+\frac{\varepsilon}{\nu}\right),$$

ὅπου θὰ ὑπάρχῃ τιμή τις τοῦ ν, ἀπὸ τῆς ὁποίας καὶ πέραν θὰ εἶναι $B+\dfrac{\varepsilon}{\nu}<1$ καὶ ἑπομένως (§ 67) ἡ σειρὰ ἀποκλίνει.

70. ***Παραδείγματα.*** Ἔστω

1) $$x_\nu=\frac{1}{\nu+K}\quad (\text{K θετ. ἀκέραιος})\cdot$$

παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ σειρὰ $\Sigma\dfrac{1}{\nu+K}$ προκύπτει ἀπὸ τὴν ἁρμονικὴν σει-

$B+\frac{\varepsilon}{\nu}<1$ $\frac{1}{\nu}\left(B+\frac{\varepsilon}{\nu}\right)<\frac{1}{\nu}$

ϱὰν $\Sigma\,\dfrac{1}{\nu}$ ὅταν διαγραφῶσιν οἱ Κ πρῶτοι ὅροι· ἀλλ' ἡ ἁρμονικὴ σειρὰ εἶναι ἀποκλίνουσα· ἑπομένως (§ 59 σελ.80) καὶ ἡ $\Sigma\,\dfrac{1}{\nu+K}$ εἶναι ἀποκλίνουσα· ὅθεν (§ 60) καὶ ἡ $\Sigma\,\dfrac{1}{\nu+\beta}$, ὅπου $\beta>o$, εἶναι ἀποκλίνουσα· καὶ γενικώτερον ἡ $\Sigma\,\dfrac{1}{\alpha\nu+\beta}$ ὅπου $\alpha>o$ καὶ $\beta>o$ εἶναι ἀποκλίνουσα (§ 61).

2) $x_\nu=\dfrac{1}{2\nu+1}$, $\quad y_\nu=\dfrac{2\nu}{(2\nu-1)(2\nu+1)}$. τότε $x_\nu<y_\nu$·

ἀλλὰ ἡ $\Sigma\dfrac{1}{2\nu+1}$ κατὰ τὸ προηγούμενον παράδειγμα εἶναι ἀποκλίνουσα, ἑπομένως (§ 60) καὶ ἡ $\Sigma\dfrac{2\nu}{(2\nu-1)(2\nu+1)}$ εἶναι ἀποκλίνουσα.

3) $x_\nu=\dfrac{\alpha^\nu}{\underline{|\nu}}$, ὅπου $\alpha>o$ καὶ $\underline{|\nu}=1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,\nu$·

$$\text{τότε } o\varrho\frac{x_{\nu+1}}{x_\nu}=o\varrho\frac{\alpha}{\nu+1}=0\cdot$$

ἑπομένως ἡ σειρὰ $\Sigma\dfrac{\alpha^\nu}{\underline{|\nu}}$ εἶναι συγκλίνουσα (§ 64).

4) $x_\nu=\dfrac{\alpha^\nu}{\nu}$, ὅπου $\alpha>o$· τότε $o\varrho\dfrac{x_{\nu+1}}{x_\nu}=\alpha$·

ἑπομένως ἡ σειρὰ $\Sigma\dfrac{\alpha^\nu}{\nu}$ εἶναι συγκλίνουσα, ἐὰν $\alpha<1$· (§ 64).

5) $x_\nu=\dfrac{1}{\nu^2}$, $\quad y_\nu=\dfrac{1}{(\nu-1)\nu}$.

Τότε $x_\nu<y_\nu$. ἀλλὰ (σελ. 79 παρ.1) ἡ Σy_ν εἶναι συγκλίνουσα· ἑπομένως

(§ 60) ἡ $\Sigma\frac{1}{\nu^2}$ εἶναι συγκλίνουσα· ὅθεν (§ 60) καὶ ἡ $\Sigma\frac{1}{\nu^\varrho}$, ὅπου $\varrho > 2$ εἶναι συγκλίνουσα.

6) $$y_\nu = \frac{A_{\nu+1}-A_\nu}{A_{\nu+1}\, A_\nu^\varrho},$$

ὅπου $1>\varrho>0$, $A_{\nu+1}>A_\nu>0$ καὶ ορ $A_\nu=\infty$· λέγω, ὅτι ἡ σειρὰ Σy_ν εἶναι συγκλίνουσα. Καὶ τῷ ὄντι, παρατηρῶ πρῶτον, ὅτι

$$A^\varrho_{\nu+1} > A^\varrho_\nu \quad \text{καὶ ορ } A^\varrho_\nu = \infty\cdot$$

ἀφ᾽ ἑτέρου ἐὰν θέσω

$$x_\nu = \frac{A^\varrho_{\nu+1} - A^\varrho_\nu}{A^\varrho_{\nu+1}\cdot A^\varrho_\nu} \text{ θὰ ἔχω}$$

$$\frac{y_\nu}{x_\nu} = \frac{1-\omega}{1-\omega^\varrho}, \text{ ὅπου } \omega = \frac{A_\nu}{A_{\nu+1}}.$$

Ἔστω μ τυχὼν ἀκέραιος τοιοῦτος, ὥστε $\frac{1}{\mu} > \varrho$· τότε θὰ εἶναι

$$y_\nu : x_\nu < (1-\omega) : \left(1-\omega^{\frac{1}{\mu}}\right)$$

ἢ καὶ $$\frac{y_\nu}{x_\nu} < 1+\omega^{\frac{1}{\mu}}+\ldots+\omega^{\frac{\mu-1}{\mu}} < \mu, \text{ διότι } \omega<1\cdot$$

ἀλλ᾽ ἡ σειρὰ Σx_ν εἶναι συγκλίνουσα (σελ. 79, παράδ. 2)· ἐπομένως (§ 61, β΄) καὶ ἡ σειρὰ Σy_ν εἶναι συγκλίνουσα.

Ἐὰν ἤδη θέσω $A_\nu = \nu - 1$, λαμβάνω ὅτι ἡ σειρὰ $\Sigma \frac{1}{\nu(\nu-1)^\rho}$ συγκλίνει· ὅθεν (§ 60) καὶ ἡ σειρὰ $\Sigma \frac{1}{\nu^{1+\rho}}$ συγκλίνει· $(o < \rho < 1)$.

Λαμβάνων ἤδη ὑπ' ὄψιν καὶ τὴν προηγουμένως (παράδ. 5) ἀποδειχθεῖσαν πρότασιν συμπεραίνω, ὅτι ἡ σειρὰ $\Sigma \frac{1}{\nu^\alpha}$ ὅπου $\alpha > 1$ συγκλίνει.

71. ***Λογαριθμικὰ κριτήρια. Ἐάν, ἀπό τινος τιμῆς τοῦ ν καὶ πέραν, ὁ λόγος***

$$\frac{\lambda o \gamma \frac{1}{x_\nu}}{\lambda o \gamma\ \nu}$$

μένῃ μεγαλύτερος σταθεροῦ τινος ἀριθμοῦ Κ μεγαλυτέρου τῆς μονάδος, ἡ σειρὰ εἶναι συγκλίνουσα· ἐὰν ὁ αὐτὸς λόγος ἀπό τινος τιμῆς τοῦ ν καὶ πέρα μένῃ μικρότερος τῆς μονάδος, ἡ σειρὰ εἶναι ἀποκλίνουσα.

Καὶ πράγματι ἔστω 1) ὅτι

$$\lambda o \gamma \frac{1}{x_\nu} > K\ \lambda o \gamma\ \nu \cdot \qquad (K > 1)$$

τότε

$$x_\nu < \frac{1}{\nu^k},$$

ἑπομένως (§ 60, 70) ἡ Σx_ν συγκλίνει.

Ἔστω 2) ὅτι $$\lambda o \gamma \frac{1}{x_\nu} < \lambda o \gamma\ \nu$$

τότε $$x_\nu > \frac{1}{\nu}.$$

ἑπομένως (§ 60) ἡ Σx_ν ἀποκλίνει.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως ἕπεται ἀμέσως καὶ ὅτι· ἐὰν ὁ λόγος

$$\frac{\lambda o\gamma \frac{1}{x}}{\lambda o\gamma\, \nu}$$

τείνῃ πρὸς ὅριόν τι λ, ὅταν τὸ ν τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον, ἡ σειρὰ Σx_ν εἶναι συγκλίνουσα ἐὰν $\lambda > 1$ καὶ ἀποκλίνουσα ἐὰν $\lambda < 1$.

72. ***Σειραὶ ἀπολύτως συγκλίνουσαι.*** Ἔστω ἡ σειρὰ Σx_ν μὲ ὅρους θετικοὺς καὶ ἀρνητικούς· ἐὰν ἀπό τινος τιμῆς τοῦ ν καὶ πέραν οἱ ὅροι τῆς σειρᾶς εἶναι ὁμόσημοι τότε ἐπανερχόμεθα εἰς τὴν ἤδη ἐξετασθεῖσαν περίπτωσιν, καθ' ἣν πάντες οἱ ὅροι τῆς σειρᾶς εἶναι θετικοί· ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι τοῦτο δὲν συμβαίνει· δηλ. ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ σειρὰ ἔχει ἀπείρους ὅρους θετικοὺς καὶ ἀπείρους ὅρους ἀρνητικούς. Θὰ λέγω, ὅτι ἡ σειρὰ εἶναι ἀπολύτως συγκλίνουσα, ὅταν ἡ σειρὰ ἡ σχηματιζομένη μὲ τὰς ἀπολύτους τιμὰς τῶν ὅρων εἶναι συγκλίνουσα.

Ἐὰν ἡ σειρὰ Σx_ν εἶναι ἀπολύτως συγκλίνουσα, θὰ εἶναι συγκλίνουσα (§ 56).

$$\text{Διότι}\quad | x_\nu + x_{\nu+1} + \cdots + x_{\nu+\varrho} | \leq X_\nu + X_{\nu+1} + \cdots + X_{\nu+\varrho},$$

ἐὰν $X_\mu = | x_\mu |$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ μ· ἀλλὰ ἐὰν ἡ ΣX_ν εἶναι συγκλίνουσα τότε τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἀνισότητος δύναται νὰ γίνῃ μικρότερον οἱουδήποτε δεδομένου θετικοῦ ἀριθμοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ, ἀρκεῖ νὰ ληφθῇ τὸ ν ἀρκετὰ μέγα, τοῦ ϱ ὄντος θετικοῦ ἀκεραίου ληφθέντος αὐθαιρέτως· ἑπομένως καὶ τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀνισότητος δύναται νὰ γίνῃ μικρότερον οἱουδήποτε δοθέντος θετικοῦ· ἄρα (§ 56) ἡ σειρὰ Σx_ν συγκλίνει.

Ἡ ἀντίστροφος πρότασις δὲν ἰσχύει. Ἤτοι δυνατὸν μία σειρὰ νὰ εἶναι συγκλίνουσα χωρὶς νὰ εἶναι ἀπολύτως συγκλίνουσα.

Π. χ. ἡ σειρὰ

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2\nu} + \frac{1}{2\nu+1} \cdots$$

εἶναι συγκλίνουσα, ὅπως ἀμέσως κατωτέρω θὰ ἴδωμεν, ἀλλ' οὐχὶ ἀπολύτως συγκλίνουσα.

Αἱ σειραί, αἱ ὁποῖαι εἶναι συγκλίνουσαι, ἀλλ' οὐχὶ ἀπολύτως συγκλίνουσαι, καλοῦνται ἡμισυγκλίνουσαι.

73. ***Ἡμισυγκλίνουσαι σειραί.*** Ἔστω σειρὰ Σx_ν μὲ ὅρους ἐναλλὰξ θετικοὺς καὶ ἀρνητικούς.

Ἐὰν ἡ ἀπόλυτος τιμὴ ἑκάστου ὅρου εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ προηγουμένου, οἱ δὲ ὅροι ἐλαττοῦνται ἀπεριορίστως κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν ὅταν τὸ ν αὐξάνῃ ἀπεριορίστως, ἡ σειρὰ Σx_ν συγκλίνει, ἤτοι :

Ἐὰν τὸ $|x_\nu|$ ***ἐλαττοῦται, ὅταν ἐλαττοῦται τὸ*** $\frac{1}{\nu}$ ***καὶ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, ὅταν τὸ*** $\frac{1}{\nu}$ ***τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, ἡ σειρὰ συγκλίνει.***

Καὶ τῷ ὄντι, ἐὰν θέσω $|x_\nu| = X_\nu$ ἡ σειρὰ Σx_ν γράφεται

$$X_1 - X_2 + X_3 - X_4 \dots$$

$\Sigma_2 = X_1 - X_2$
$\Sigma_4 = X_1 - X_2 + X_3 - X_4 = \Sigma$
$\Sigma_6 = \Sigma_4 + X_5 - X_6$
ἐπειδὴ $X_1 > X_2 > X_3 >$
θὰ ἔχωμεν
$\Sigma_2 < \Sigma_4 < \Sigma_6$

ἂς ὑποθέσω ὅτι

$$X_1 > X_2 > X_3 \dots$$

θεωρήσω δὲ τὰ ἀθροίσματα ἀρτίου πλήθους ὅρων

$$\Sigma_2 = X_1 - X_2, \quad \Sigma_4 = X_1 - X_2 + X_3 - X_4, \dots$$

θὰ ἔχω, ὅτι

$$\Sigma_2 < \Sigma_4 < \Sigma_6 \dots < \Sigma_{2\nu} < \dots$$

ἤτοι, ὅτι τὸ $\Sigma_{2\nu}$ αὐξάνει ὅταν αὐξάνῃ τὸ 2ν.

Ἀφ᾽ ἑτέρου

$$\Sigma_{2\nu} = X_1 - (X_2 - X_3) \dots - (X_{2\nu-2} - X_{2\nu-1}) - X_{2\nu} < X_1$$

ὅθεν (§ 45) τὸ $\Sigma_{2\nu}$ ἔχει ὅριον, ὅταν τὸ ν τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον.

Θεωρήσωμεν ἤδη τὰ ἀθροίσματτα περιττοῦ πλήθους ὅρων

$$X_1, \; X_1 - X_2 + X_3, \; X_1 - X_2 + X_3 - X_4 + X_5, \dots$$

θὰ ἔχω, ὅτι τὸ $\Sigma_{2\nu+1}$ ἐλαττοῦται ὅταν αὐξάνῃ τὸ ν.

$\Sigma_1 = X_1$

Ἀφ᾿ ἑτέρου

$$\Sigma_{2\nu+1} = (X_1 - X_2) + (X_3 - X_4) + \dots + (X_{2\nu-1} - X_{2\nu}) + X_{2\nu+1} > \Sigma_2,$$

ὅθεν (§ 45) τὸ $\Sigma_{2\nu+1}$ ἔχει ὅριον ὅταν $\text{ορ}\nu = \infty$· ἀλλὰ

$$\Sigma_{2\nu+1} - \Sigma_{2\nu} = X_{2\nu+1}$$

καὶ ἑπομένως

$$\text{ορ}\,\Sigma_{2\nu+1} - \text{ορ}\,\Sigma_{2\nu} = \text{ορ}\,X_{2\nu+1} = 0,$$

ὅθεν

$$\text{ορ}\,\Sigma_{2\nu} = \text{ορ}\,\Sigma_{2\nu+1}$$

καὶ ἑπομένως ἡ σειρὰ Σx_ν συγκλίνει.

Π. χ. ἡ σειρὰ $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots$ εἶναι συγκλίνουσα διότι

$$\frac{1}{2\nu} > \frac{1}{2\nu+1} > \frac{1}{2\nu+2} \text{ καὶ } \text{ορ}\frac{1}{2\nu} = \text{ορ}\frac{1}{2\nu+1} = 0.$$

Ἐπειδὴ δὲ δὲν εἶναι ἀπολύτως συγκλίνουσα εἶναι ἡμισυγκλίνουσα.

74. ***Πᾶσα σειρὰ ἀπολύτως συγκλίνουσα ἔχει ἄθροισμα ἀνεξάρτητον τῆς τάξεως τῶν ὅρων.***

Α΄. περίπτωσις. Ἔστω ὅτι σειρά τις Σx_ν ἔχει ὅρους μόνον θετικοὺς καὶ ὅτι ἄλλη σειρὰ Σy_ν ἔχει τοὺς αὐτοὺς ὅρους μὲ τὴν Σx_ν ἀλλὰ κατ᾿ ἄλλην τάξιν· ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ Σx_ν συγκλίνει· παρατηροῦμεν, κατ᾿ ἀρχάς, ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχῃ ἡ Σx_ν ἀπειρίαν ἴσων ὅρων (διαφόρων τοῦ μηδενὸς) διότι ἄλλως ὁ νυοστὸς ὅρος δὲν θὰ ἔτεινε πρὸς τὸ μηδὲν καὶ ἡ Σx_ν δὲν θὰ ἦτο συγκλίνουσα· ὥστε καὶ ἡ Σy_ν δὲν ἔχει ἀπειρίαν ἴσων ὅρων. Κατὰ ταῦτα τὸ νὰ λέγωμεν, ὅτι αἱ δύο σειραὶ Σx_ν καὶ Σy_ν διαφέρουν μόνον κατὰ τὴν τάξιν τῶν ὅρων σημαίνει, ὅτι πᾶς ἀριθμὸς ὅστις παρουσιάζεται ὡς ὅρος τῆς Σx_ν παρουσιάζεται καὶ ὡς ὅρος τῆς Σy_ν καὶ τόσας φοράς, ὅσας παρουσιάζεται καὶ εἰς τὴν Σx_ν καὶ τἀνάπαλιν, πᾶς ἀριθμὸς ὅστις παρουσιάζεται ὡς ὅρος τῆς Σy_ν παρουσιάζεται καὶ ὡς ὅρος τῆς Σx_ν καὶ τόσας φορὰς ὅσας παρουσιάζεται εἰς τὴν Σy_ν. Ἤδη λέγω ὅτι ἡ Σy_ν θὰ εἶναι συγκλίνουσα καὶ θὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ ἄθροισμα μὲ τὴν Σx_ν.

Καὶ τῷ ὄντι, ἔστω A τὸ ἄθροισμα τῆς Σx_ν. καὶ A'_μ τὸ ἄθροισμα τῶν μ πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς Σy_ν · δύναμαι προφανῶς νὰ λάβω τὸ m ἀρκετὰ μέγα, οὕτως ὥστε οἱ μ πρῶτοι ὅροι τῆς Σy_ν νὰ περιλαμβάνωνται εἰς τοὺς m πρώτους ὅρους τῆς Σx_ν, ὁπότε θὰ ἔχω, καλῶν A_m τὸ ἄθροισμα τῶν m πρώτων ὅρων τῆς Σx_ν ,

$$A'_\mu \leqq A_m < A$$

ὅθεν ἐξάγω, ὅτι ἡ σειρὰ Σy_ν εἶναι συγκλίνουσα καὶ ὅτι ἔχει ἄθροισμα $B \leqq A$. Ἀφοῦ ἡ Σy_ν εἶναι συγκλίνουσα, δύναμαι, ἐργαζόμενος κατὰ τρόπον ὅμοιον πρὸς τὸν ἀνωτέρω, νὰ ἀποδείξω ὅτι καὶ

$$A \leqq B \quad \text{ἄρα } A = B$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἐὰν ἡ Σx_ν εἶναι ἀποκλίνουσα καὶ ἡ Σy_ν θὰ εἶναι ἀποκλίνουσα.

Β΄. Περίπτωσις. Ἔστω ὅτι σειρά τις Σx_ν ἔχει ὅρους θετικοὺς καὶ ἀρνητικοὺς καὶ ὅτι εἶναι ἀπολύτως συγκλίνουσα. Ἵνα ἀποδείξω ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτῆς εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς τάξεως τῶν ὅρων, ἀρκεῖ ν' ἀποδείξω ὅτι εἶναι ἴσον πρὸς τὴν διαφοράν, τὴν ἔχουσαν ὡς μειωτέον τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς τῆς σχηματιζομένης ὑπὸ τῶν θετικῶν ὅρων τῆς δοθείσης (ὅπερ κατ ἀνάγκην ὑπάρχει) καὶ ὡς ἀφαιρετέον τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ τῶν ἀρνητικῶν ὅρων.

Ἔστω $x'_\nu = |x_\nu|$. Παρατηρῶ ὅτι ἐξ ὑποθέσεως ἡ $\Sigma x'_\nu$ εἶναι μὲ ὅρους θετικοὺς καὶ συγκλίνουσα· ἑπομένως καὶ πᾶσα σειρά, ἡ ὁποία σχηματίζεται μετὰ τὴν ἐξάλειψιν ὁσωνδήποτε ὅρων ἀπ' αὐτῆς, θὰ εἶναι συγκλίνουσα· οὕτω βλέπομεν ὅτι οἱ θετικοὶ ὅροι τῆς Σx_ν ἀποτελοῦσι σειρὰν συγκλίνουσαν· ὅπως ἐπίσης καὶ οἱ ἀρνητικοί· καλέσωμεν A τὸ ἄθροισμα τῶν θετικῶν ὅρων καὶ $-B$ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀρνητικῶν. Ἂς θεωρήσω ν πρώτους ὅρους τῆς σειρᾶς Σx_ν· ἔστω α_ν τὸ ἄθροισμά των· μεταξὺ τῶν ν αὐτῶν ὅρων οἱ θετικοὶ θὰ δίδουν ἄθροισμά τι A_ν καὶ οἱ ἀρνητικοὶ ἄθροισμά τι $-B_\nu$ (ὑποθέτω ὅτι προσθέτω τοὺς θετικούς, ὅπως καὶ τοὺς ἀρνητικούς, κατὰ τὴν τάξιν καθ' ἣν εὑρίσκονται εἰς τὴν Σx_ν)· θὰ ἔχω προφανῶς $\alpha_\nu = A_\nu - B_\nu$· τοῦτο δὲ ὁσονδήποτε μέγας καὶ ἂν ληφθῇ ὁ ν·
ἀλλὰ τότε ἐπειδὴ

$$\text{ορ}A_\nu = A, \qquad \text{ορ}B_\nu = B \quad ,$$

θὰ ὑπάρχῃ ορ α_ν· θὰ εἶναι δὲ

$$\text{ορ}\alpha_\nu = A - B.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς τῆς σχηματιζομένης ἐκ τῶν θετικῶν ὅρων εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς τάξεως τῶν ὅρων ὅπως ἐπίσης καὶ τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς τῆς σχηματιζομένης ἐκ τῶν ἀρνητικῶν ὅρων, ἕπεται, ὅτι καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν ὑποτεθοῦν ὡς τοποθετημένοι οἱ ὅροι τῆς Σx_ν, θὰ προκύπτῃ πάντοτε ὡς ὅριον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς (ὅταν τὸ ν αὐξάνῃ ἀπεριορίστως) τὸ $A-B$.

75. Ἔστω σειρά τις Σx_ν μὲ ὅρους θετικούς, συγκλίνουσα καὶ

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \ldots$$

ἀριθμοὶ ἀπολύτως μικρότεροι θετικοῦ τινος ἀριθμοῦ A. Ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται ἀμέσως, ὅτι καὶ ἡ σειρὰ $\Sigma\alpha_\nu x_\nu$ θὰ εἶναι ἀπολύτως συγκλίνουσα.

Καὶ τῷ ὄντι (§ 61) ἡ σειρὰ $\Sigma \mid \alpha_\nu \gamma_\nu \mid$ θὰ εἶναι συγκλίνουσα.

Π. χ. ἡ σειρὰ

$$\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1} + \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\sigma\upsilon\nu\, \nu x}{\nu^2} + \ldots$$

εἶναι ἀπολύτως συγκλίνουσα.

76 Εἰς ἡμισυγκλίνουσαν σειρὰν δὲν ἰσχύει ἡ πρότασις (§ 74), καθ' ἣν ἡ ἀλλαγὴ τῆς τάξεως τῶν ὅρων δὲν μεταβάλλει τὸ ἄθροισμα.

Π. χ. θεωρήσωμεν τὴν σειρὰν

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

ἔχομεν ὡς ἄθροισμα αὐτῆς τὸ

$$\text{ορ}\sum_{\cancel{\nu=1}}^{\mu}\left(\frac{1}{2\nu+1} - \frac{1}{2\nu+2}\right)$$

$\nu = 0$

ὅταν ορ $\mu = \infty$.

Ἐὰν γράψωμεν τοὺς ὅρους αὐτῆς κατὰ τὴν ἑξῆς τάξιν:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots +$$

$$\frac{1}{2\nu+1} - \frac{1}{4\nu+2} - \frac{1}{4\nu+4} + \ldots$$

θὰ ἔχωμεν πάλιν, ὅτι εἶναι συγκλίνουσα ἡ σειρά· ἄθροισμα ὅμως αὐτῆς θὰ εἶναι τὸ

$$\text{ορ}\sum_{\nu=0}^{\mu}\left(\frac{1}{2\nu+1} - \frac{1}{4\nu+2} - \frac{1}{4\nu+4}\right)$$

ὅταν ορ$\mu = \infty$.

Ἀλλὰ

$$\frac{1}{2\nu+1}-\frac{1}{4\nu+2}-\frac{1}{4\nu+4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\nu+1}-\frac{1}{2\nu+2}\right).$$

ὥστε θὰ εὕρωμεν ὡς ἄθροισμα τὸ ἥμισυ τοῦ πρώτου ἀθροίσματος.

Ἀποδεικνύεται μάλιστα, ὅτι ἐὰν σειρά τις εἶναι ἡμισυγκλίνουσα καὶ ἐὰν δοθῇ τυχὼν ἀριθμὸς Α δυνάμεθα τροποποιοῦντες τὴν τάξιν τῶν ὅρων καταλλήλως νὰ λάβωμεν σειρὰν ἔχουσαν ὡς ἄθροισμα τὸν Α (λέγοντες ἄθροισμα τῆς σειρᾶς ἐννοοῦμεν πάντοτε τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ν πρώτων ὅρων).

Ἔστω

$$(1)\qquad \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\dots$$

ἡ σειρὰ ἡ σχηματιζομένη ἀπὸ τοὺς θετικοὺς ὅρους τῆς δοθείσης (λαμβανομένους καθ' ἣν τάξιν εἶναι εἰς τὴν δοθεῖσαν) καὶ

$$(2)\qquad -\beta_1-\beta_2-\beta_3-\dots$$

ἡ σειρὰ ἡ σχηματιζομένη ἀπὸ τοὺς ἀρνητικοὺς ὅρους τῆς δοθείσης. Ἐπειδὴ ἡ δοθεῖσα ὑπετέθη ἡμισυγκλίνουσα θὰ εἶναι αἱ σειραὶ (1) καὶ (2) ἀποκλίνουσαι (§ 75)· θὰ ἔχω δὲ προσέτι, ὅτι

$$o\varrho\alpha_\nu=o\varrho\beta_\nu=0 \quad \delta\iota'\ o\varrho\nu=\infty.$$

Λαμβάνω ἐκ τῆς (1) ἐξ ἀρχῆς τόσους ὅρους ὅσοι ἀκριβῶς χρειάζονται ἵνα ἔχω ἄθροισμα μεγαλύτερον τοῦ Α.

Ἔστω ὅτι $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{\nu_1}>A$ καὶ $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{\nu_1-1}\leqq A$

δηλ. ὅτι ἂν διαγράψω ἀπὸ τὸ πρῶτον μέλος τῆς πρώτης ἀνισότητος τὸν α_{ν_1}, ἔχω ἄθροισμα μικρότερον τοῦ Α ἢ ἴσον πρὸς αὐτό· εἰς τὸ Σ_{ν_1} (δηλ. εἰς τὸ $\alpha_1+\dots+\alpha_{\nu_1}$) προσθέτω τόσους ὅρους τῆς σειρᾶς

(2) ὅσοι ἀκριβῶς χρειάζονται ἵνα τὸ ἄθροισμα γίνῃ μικρότερον τοῦ Α· ἔστω ὅτι

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\nu_1}-\beta_1-\beta_2-\ldots-\beta_{\nu_2}<A$$

καὶ ὅτι ἂν ἀπὸ τὸ πρῶτον μέλος διαγράψω τὸν τελευταῖον $-\beta_{\nu_2}$ ἔχω ἄθροισμα $\geqq A$· ἐκφράζω τὴν προηγουμένην ἀνισότητα ὡς ἑξῆς

$$\Sigma_{\nu_1+\nu_2}<A$$

προσθέτω πάλιν τόσους ὅρους ἀπὸ τὴν σειρὰν (1), ἀρχόμενος ἀπὸ τοῦ πρώτου ἐναπομείναντος, ὅσοι ἀκριβῶς χρειάζονται ἵνα τὸ ἄθροισμα ὑπερβῇ τὸν Α κ.ο.κ. Θὰ ἔχω κατὰ ταῦτα

$$\Sigma_{\nu_1+\nu_2+\nu_3}>A,\quad \Sigma_{\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4}<A \text{ κ.τ.λ.}$$

ἤτοι ἡ διαφορὰ

$$\Sigma_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_\varrho}-A$$

θὰ γίνεται ἐναλλὰξ θετικὴ καὶ ἀρνητικὴ ἀλλάσσουσα ἀπειράκις σημεῖον· παρατηροῦμεν δὲ ὅτι θὰ εἶναι ἀπολύτως μικροτέρα τοῦ ὅρου τῆς δοθείσης σειρᾶς τοῦ ἔχοντος τάξιν ν_ϱ· καὶ ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως

$$\text{ορ}\alpha_\nu=\text{ορ}\beta_\nu=0$$

ἔχομεν, ὅτι ὅριον τῆς διαφορᾶς αὐτῆς θὰ εἶναι τὸ μηδέν· ἤτοι ἄθροισμα τῆς δοθείσης σειρᾶς θὰ εἶναι τὸ Α.

Ἀσκήσεις.

1) Ἡ σειρὰ

$$\alpha+\alpha(\alpha-1)+\alpha^2(\alpha-1)+\ldots+\alpha^{\nu+1}(\alpha-1)+\ldots$$

εἶναι συγκλίνουσα, ἐὰν $|\alpha|<1$· ἔχει δὲ τότε ἄθροισμα μηδέν· ἐὰν

$\alpha=1$ εἶναι ἐπίσης συγκλίνουσα καὶ ἔχει ἄθροισμα τὴν μονάδα· εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν εἶναι ἀποκλίνουσα (σελ. 79. παράδ. 3).

2) Ἡ σειρὰ $\Sigma\frac{1}{\nu(\nu+2)}$ εἶναι συγκλίνουσα ἔχουσα ἄθροισμα τὸν $\frac{3}{4}$.

3) Ἡ σειρὰ $\Sigma\frac{1}{\nu(\nu+k)}$, ὅπου k ἀκέραιος θετικὸς ἔχει ἄθροισμα τὸ

$$\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}\right).$$

4) Ἡ σειρὰ

$$\frac{2}{1.2.3}+\frac{2}{2.3.4}+\frac{2}{3.4.5}+\ldots$$

ἔχει ἄθροισμα τὸν $\frac{1}{2}$ (σελ. 79. Παρατ. 1,2).

5) Ἡ σειρὰ Σx_ν ὅπου

$$x_\nu=\frac{\beta+1}{(\alpha+\nu-1)(\alpha+\nu)\ldots(\alpha+\beta+\nu)}$$

καὶ α, β θετικοὶ ἀκέραιοι εἶναι συγκλίνουσα καὶ ἔχει ἄθροισμα ἴσον πρὸς

$$\frac{1}{(\alpha-1)\alpha\ldots(\alpha+\beta-1)}.$$

Ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι

$$x_\nu=y_\nu-y_{\nu+1},$$

ὅπου

$$y_\nu=\frac{1}{(\alpha+\nu-1)(\alpha+\nu)\ldots(\alpha+\beta+\nu-1)}$$

καὶ

$$x_0+x_1+x_2+\ldots+x_\nu=(y_0-y_1)+(y_1-y_2)+\ldots+$$

$$(y_\nu-y_{\nu+1})=y_0-y_{\nu+1}\quad.$$

Ἐὰν θέσω $\alpha=2$, $\beta=1$ λαμβάνω τὸ παράδειγμα τῆς ἀσκ. 4.

6) Ἐὰν ἀπό τινος τάξεως καὶ ἐφεξῆς τὸ γινόμενον $\nu^\alpha x_\nu$ περιλαμβάνηται μεταξὺ δύο σταθερῶν ἀριθμῶν, ἡ σειρὰ Σx_ν εἶναί συγκλίνουσα διὰ $\alpha>1$, ἀποκλίνουσα δὲ δι' $\alpha\leqq 1$.

7) $$\text{ορ}\ \sqrt[\nu]{1.2.3\ldots\nu}=\infty,\ \text{ὅταν ορ}\nu=\infty.$$

Διότι ἂς θεωρήσω τὴν σειρὰν Σx_ν, ὅπου $x_\nu=1.2.3\ldots\nu$, ὁ λόγος $\frac{x_{\nu+1}}{x_\nu}$ ἰσοῦται πρὸς τὸν $\nu+1$· ἄρα ἔχει ὅριον τὸ ἄπειρον διὰ ορ$\nu=\infty$· ὅθεν (§ 64) καὶ τὸ $\sqrt[\nu]{x_\nu}$ ἔχει ὅριον τὸ ἄπειρον.

8) ορ $\sqrt[\nu]{\nu}=1$, διότι ἐὰν θέσω $x_\nu=\nu$ ἔχω

$$\frac{x_{\nu+1}}{x_\nu}=\frac{\nu+1}{\nu}.$$

9) $$\text{ορ}\ \sqrt[\nu]{\text{λογ}\ \nu}=1.$$

10) Ἔστω σειρὰ Σx_ν μὲ ὅρους μόνον θετικοὺς καὶ ἔστω

$$\frac{x_{\nu+1}}{x_\nu}=1-\frac{\varrho}{\nu}+\frac{H_\nu}{\nu^{1+d}}$$

ὅπου $d>0$ καὶ $|H_\nu|<A$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ ν (ϱ καὶ A σταθεροὶ ἀριθμοί).

Ἡ σειρὰ αὕτη εἶναι συγκλίνουσα ἐὰν $\varrho > 1$ καὶ ἀποκλίνουσα ἐὰν $\varrho < 1$.

Καὶ τῷ ὄντι ἐὰν θέσω

$$\frac{x_{\nu+1}}{x_\nu} = \frac{1}{1+\alpha_\nu} \qquad (\S\ 68)$$

θὰ ἔχω ορ $\nu\alpha_\nu = \varrho$· ὅθεν (§ 68) ἕπεται ἡ πρότασις.

11) Ἔστω σειρὰ Σx_ν, διὰ τὴν ὁποίαν εἶναι

$$\frac{x_{\nu+1}}{x_\nu} = \frac{\nu^2+\alpha\nu+\alpha'}{\nu^2+\beta\nu+\beta'}$$

ὅπου τὰ α, β, α', β' εἶναι σταθεροὶ ἀριθμοί.

Ἐὰν $\beta > \alpha+1$ ἡ σειρὰ αὕτη εἶναι συγκλίνουσα. Διότι

$$\frac{x_{\nu+1}}{x_\nu} = 1 - \frac{\beta-\alpha}{\nu} + \frac{H_\nu}{\nu^2},$$

ὅπου

$$H_\nu = \frac{(\alpha'-\beta'-\alpha\beta+\beta^2)\nu^2-(\alpha\beta'-\beta\beta')\nu}{\nu^2+\beta\nu+\beta'}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Γενικὸς ὁρισμὸς τῆς συναρτήσεως (μιᾶς μεταβλητῆς).

77. Ἔστω σύνολόν τι Σ_1· ὑποθέσωμεν, ὅτι δυνάμει νόμου τινὸς εἰς ἕκαστον ἀριθμὸν x τοῦ συνόλου Σ_1 ἀντιστοιχεῖ ἀριθμός τις y· τὸ σύνολον τῶν τοιούτων ἀριθμῶν y ἀποτελεῖ συνάρτησιν ὡρισμένην εἰς τὸ σύνολον Σ_1· ἐκφράζομεν δ' αὐτὸ καὶ ὡς ἑξῆς : ἡ μεταβλητὴ y εἶναι συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς x ὡρισμένη εἰς τὸ σύνολον Σ_1.

Ὁ νόμος τῆς ἀντιστοιχίας δυνατὸν νὰ χαρακτηρίζεται μὲ πεπερασμένον ἀριθμὸν λέξεων, νὰ δίδεται ἐντελῶς, δυνατὸν ὅμως καὶ νὰ προσδιορίζεται ἁπλῶς τὸ ὅτι ὑπάρχει νόμος ἀντιστοιχίας μεταξὺ δύο μεταβλητῶν x καὶ y.

78. Ὁ νόμος τῆς ἀντιστοιχίας ὁρίζεται συνήθως δι' ἀναλυτικῆς ἐκφράσεως· δυνατὸν ἡ ἀναλυτικὴ ἔκφρασις νὰ εἶναι τοιαύτη, ὥστε διὰ τιμάς τινας τοῦ x (δηλ. διὰ στοιχεῖα τινα τοῦ Σ_1) νὰ μὴ ὁρίζωνται ἀντίστοιχοι ἀριθμοί· π. χ. ἔστω τὸ σύμβολον $\eta\mu\frac{1}{x}$ καὶ ἔστω Σ_1 τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν· παρατηρῶ, ὅτι εἰς πάντα ἀριθμὸν τοῦ Σ_1, ἐξαιρέσει τοῦ 0, ἀντιστοιχεῖ ἀριθμὸς ὁριζόμενος ἀπὸ τὸ $\eta\mu\frac{1}{x}$· εἰς τὴν τιμὴν $x=0$, (διὰ τὴν ὁποίαν δὲν μᾶς δίδει ἀντίστοιχον τιμὴν τὸ σύμβολον $\eta\mu\frac{1}{x}$), ἂς συμφωνήσω ν' ἀντιστοιχῇ εἷς σταθερὸς ἀριθμός· π.χ. ἔστω ὅτι ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ $y=0$· θὰ λέγω τότε ὅτι ἔχω συνάρτησιν ὡρισμένην εἰς τὸ σύνολον Σ_1 ὁριζομένην ἀπὸ τὸ $\eta\mu\frac{1}{x}$ διὰ $x \lessgtr 0$, ὁριζομένην δὲ ἀπὸ τὴν ἄνω συμφωνίαν διὰ $x=0$.

Τὰ αὐτὰ ἠδυνάμην νὰ εἴπω διὰ τὰ σύμβολα

$$e^{-\frac{1}{x}}, \quad e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \frac{x^2}{x}.$$

π. χ. διὰ τὸ σύμβολον $\frac{x^2}{x}$ παρατηρῶ, ὅτι διὰ $x=0$ δὲν ὁρίζεται ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ y (δηλ. τοῦ $\frac{x^2}{x}$)· ἂς συμφωνήσω εἰς τὴν τιμὴν $x=0$ ν' ἀντιστοιχῇ διὰ τὸ y ἔστω ἡ τιμὴ 7· θὰ λέγω τότε ὅτι ἔχω συνάρτησιν y ὁριζομένην διὰ $x \lessgtr 0$ ἀπὸ τὸ σύμβολον $\frac{x^2}{x}(=x)$ διὰ δὲ $x=0$ ὁριζομένην ἀπὸ τὴν συμφωνίαν, καθ' ἣν εἰς τὸ $x=0$ ἀντιστοιχεῖ τὸ $y=7$.

Ἔστω τὸ σύμβολον $e^{-\frac{1}{x}}$· παρατηρῶ, ὅτι ἂν συμφωνήσω διὰ $x=0$ νὰ ἔχω $y=0$ θὰ ἔχω συνάρτησιν y ὁριζομένην διὰ $x \lessgtr 0$ ἀπὸ τὴν $y=e^{-\frac{1}{x}}$ ὁριζομένην δὲ διὰ $x=0$ ἀπὸ τὴν ῥηθεῖσαν συμφωνίαν. Παρατηρῶ ὅμως ὅτι θὰ ἔχω τὰς αὐτὰς ἀντιστοιχούσας τιμὰς συμπεριλαμβανομένης καὶ τῆς $y=0$ (διὰ $x=0$), ἐὰν θεωρήσω τὴν ἑξῆς ἀναλυτικὴν ἔκφρασιν

$$(1) \qquad y = \text{ορ}\ e^{-\frac{\nu}{\nu x^2+1}} \quad \text{δι' ορ}\ \nu=\infty$$

ἤτοι ἡ αὐτὴ συνάρτησις παρίσταται καὶ μὲ μόνην τὴν ἔκφρασιν (1) χωρὶς καμμίαν συμφωνίαν.

79. Ὡς σύνολον Σ_1 (ἐφ' οὗ ὁρίζεται ἡ συνάρτησις) ἐθεώρησα εἰς τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν· εἶναι ὅμως προφανές, ὅτι δύναμαι νὰ θεωρήσω ὡς σύνολον Σ_1 καὶ ἓν ἄλλο οἱονδήποτε σύνολον ἀριθμῶν· π. χ. τὸ σύνολον τῶν ῥητῶν, τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν τῶν μεταξὺ δύο ἀριθμῶν α καὶ β ἤτοι τὸ διάστημα (α, β), τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων, τὸ σύνολον τῶν θετικῶν ἀκεραίων κ.τ.λ. Οὕτω εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν θεωροῦνται συνήθως συναρτήσεις ὁριζόμεναι εἰς τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν (δηλ. 1, 2, 3, . . .)· γράφομεν, ἐπὶ παραδείγματι, φ(ν) ὅπου τὸ ν λαμβάνει μόνον θετικὰς ἀκεραίας τιμάς.

Δυνατὸν ἐπίσης νὰ δίδεται συνάρτησις τοιαύτη, ὥστε εἰς ἓν σύνολον Σ_1 νὰ ὁρίζεται ἀπὸ ἓν σύμβολον σ(x), εἰς ἄλλο δὲ σύνολον Σ_2 νὰ ὁρίζεται ἀπὸ ἕτερον σύμβολον φ(x) ἢ ἀπὸ συμφωνίαν τινά· π. χ. ἔστω Σ_1 τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων καὶ Σ_2 τὸ σύνολον τὸ ἀποτελούμενον ἀπὸ τοὺς κλασματικοὺς καὶ ἀσυμμέτρους· δύναμαι νὰ θεωρήσω συνάρτησιν y ὁριζομένην ὡς ἑξῆς : εἰς πᾶσαν τιμὴν x τοῦ Σ_1 ν' ἀντιστοιχῇ τιμὴ τοῦ y διδομένη ἀπὸ τὴν σχέσιν $y=\frac{1}{x}$, εἰς πᾶσαν δὲ τιμὴν x τοῦ Σ_2 ν' ἀντιστοιχῇ ἡ τιμὴ $y=0$.

80. Πάντα τὰ ἀνωτέρω ἐλέχθησαν πρὸς ἐπεξήγησιν τοῦ γενικοῦ ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως, καθ' ὃν λέγομεν, ὅτι· ***τὸ* y *εἶναι συνάρτησις τοῦ* x*, ἐὰν εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ* x *ἀντιστοιχῇ μία τιμὴ τοῦ* y.**

81. Κατὰ ταῦτα ὁσάκις νοηθῇ μεταξὺ δύο μεταβλητῶν x καὶ y ἀντιστοιχία τοιαύτη, ὥστε ὅταν προσδιορίζηται ἡ μία μεταβλητὴ νὰ λαμβάνῃ ἡ ἄλλη ὡρισμένην τιμὴν θὰ λέγωμεν, ὅτι ἡ δευτέρα μεταβλητὴ εἶναι συνάρτησις τῆς πρώτης· π. χ. ἐὰν προσδιοριζομένης τῆς x λαμβάνῃ ἡ y ὡρισμένην τιμήν, λέγω, ὅτι ἡ y εἶναι συνάρτησις τῆς x· ἡ x δὲ λέγεται τότε ***ἀνεξάρτητος μεταβλητή·*** τουτέστιν ἐκ τῶν δύο μεταβλητῶν ἐκείνη, τὴν ὁποίαν προσδιορίζομεν αὐθαιρέτως λέγεται ἀνεξάρτητος μεταβλητή.

Παρατηρήσεις ὡς πρὸς τὰ σύμβολα τὰ ὁρίζοντα συναρτήσεις.

82. Ἔστω $y=\sigma(x)$. Δυνατὸν τὸ $\sigma(x)$ νὰ εἶναι τοιοῦτον, ὥστε διὰ μίαν τιμὴν τοῦ x νὰ προκύπτουν ἀπὸ τὴν ἰσότητα $y=\sigma(x)$ περισσότεραι τῆς μιᾶς τιμαὶ τοῦ y· π. χ. ἔστω τὸ σύμβολον $\sqrt{x}$ καὶ ἔστω Σ_1 τὸ σύνολον τῶν θετικῶν ἀριθμῶν· ἐὰν διὰ τοῦ $\sqrt{x}$ ἐννοῶ, ὅτι λαμβάνω ὄχι μόνον τὴν θετικὴν τετρ. ρίζαν τοῦ x, ἀλλὰ καὶ τὴν ἀρνητικήν, θὰ ἔχω καθαυτὸ δύο συναρτήσεις ὁριζομένας ἀπὸ τὴν $y=\sqrt{x}$. Ἐν τούτοις λέγω, ὅτι ἔχω μίαν συνάρτησιν μὲ δύο τιμάς, ἢ καί, πρὸς σαφεστέραν ἔκφρασιν, ἂς νοήσω μὲ τὸ σύμβολον $\sqrt{x}$ μόνον τὰς θετικὰς τετρ. ρίζας τοῦ x καὶ μὲ τὸ $-\sqrt{x}$ τὰς ἀρνητικάς· θὰ ἔχω τότε δύο συναρτήσεις ὁριζομένας ἀπὸ τὰς $y=\sqrt{x}$ καὶ $y=-\sqrt{x}$· τότε ἀντὶ νὰ λέγω, ὅτι ἔχω δύο συναρτήσεις, λέγω, ὅτι ἔχω δύο κλάδους μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς συναρτήσεως διδομένους ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $x=y^2$· ὥστε θὰ θεωρῶ καὶ τοὺς δύο κλάδους $y=\sqrt{x}$ καὶ $y=-\sqrt{x}$ ὡς ἀνήκοντας εἰς τὴν αὐτὴν συνάρτησιν, ἡ ὁποία θὰ λέγω, ὅτι ὁρίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $x=y^2$.

Ἂς δώσω, ἐπὶ παραδείγματι, εἰς τὸ x τυχοῦσαν τιμὴν 9· τότε τὸ y ἔχει δύο τιμὰς τὴν 3 καὶ τὴν -3· νοήσωμεν ὅτι ἡ x ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὴν τιμὴν 9· διὰ μίαν οἱανδήποτε τιμὴν τῆς x γειτονικὴν πρὸς τὸ 9, ἔστω τὴν $9+\varepsilon$ (ὑποτίθεται τὸ ε ἀπολύτως μικρόν), θὰ ἔχω δύο ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ y τὴν $3+\eta$ καί τὴν $-(3+\eta)$· ἐὰν ἐξ αὐτῶν ζητήσω τὴν γειτονικὴν πρὸς τὴν 3, θὰ λάβω μόνον ***μίαν*** ἀντίστοιχον τιμὴν διὰ τὸ y· τὴν $3+\eta$· τουτέστιν : ὅταν τὸ x ἀναχωρῇ ἀπὸ τοῦ 9 καὶ ζητήσω ν᾽ ἀναχωρῇ τὸ y ἀπὸ τῆς τιμῆς 3, θὰ ἔχω, ὅτι εἰς ἑκάστην τιμὴν 9+ε τῆς μεταβλητῆς x θ᾽ ἀντιστοιχῇ μόνον ***μία*** τιμὴ τῆς μεταβλητῆς y καὶ οὐχὶ δύο· ἤτοι κινεῖται τὸ y [δηλ. τὸ σημεῖον $M(x,y,)$] ἐπὶ τοῦ ἑνὸς κλάδου τῆς συναρτήσεως.

83· Γενικώτερον· ἔστω ὅτι μία σχέσις μεταξὺ τῶν x καὶ y δίδεται μὲ ἰσότητα τῆς μορφῆς

$$F(x,y)=0$$

καὶ ὅτι ὁρίζεται οὕτω τὸ y ὡς συνάρτησις τοῦ x μὲ πολλοὺς κλάδους· ἔστω ὅτι ζητῶ νὰ μελετήσω αὐτήν, ὅταν ἡ x ἀναχωρῇ ἀπό τινος τιμῆς x_0· ὅταν εἰς τὸ x δώσω τὴν τιμὴν x_0 θὰ ἔχω τιμάς τινας διὰ τὸ y ἐν γένει διακεκριμένας ἀπ᾽ ἀλλήλων· ἔστω y_0 μία ἐξ αὐτῶν· ὅταν λέγω, ὅτι θεωρῶ τὴν συνάρτησιν τὴν μὲ ἀρχικὰς τιμὰς τὰς x_0, y_0 ἐννοῶ, ὅτι ὅταν τὸ x ἀναχωρῇ ἀπὸ τὴν τιμὴν x_0 λαμβάνον τιμὰς ἀπὸ x_0 ἕως $x_0+\varepsilon$, ἐκ τῶν τιμῶν, τὰς ὁποίας θὰ λαμβάνῃ τὸ y δι᾽ ἑκάστην τιμὴν τοῦ x θὰ ἐκλέγω τὰς γειτονικὰς πρὸς τὴν y_0· ἤτοι θὰ λαμβάνω τιμὰς τοῦ ἑνὸς κλάδου τῆς συναρτήσεως· ὑποθέτω, ἐννοεῖται, ὅτι εἰς τὸ διάστημα ἀπὸ x_0 ἕως $x_0+\varepsilon$ δὲν ὑπάρχει τιμὴ τῆς x διὰ τὴν ὁποίαν μερικαὶ ἐκ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς y νὰ συμπίπτουν· ἤτοι δὲν συμβαίνει περισσότεροι κλάδοι τῆς συναρτήσεως νὰ συμπίπτουν διὰ τιμήν τινα τοῦ x λαμβάνοντες τὴν αὐτὴν τιμήν.

84. Ἡ y καλεῖται ***μονότιμος*** συνάρτησις τῆς x, ὅταν ἡ σχέσις ἡ συνδέουσα τὰ x, y εἶναι τοιαύτη, ὥστε διὰ μίαν τιμὴν τοῦ x νὰ προσδιορίζηται μόνον μία τιμὴ τοῦ y· π. χ. ἡ συνάρτησις

$$y=\alpha x^{\mu}+\beta x^{\nu}+\ldots+\lambda x^{\rho},$$

ὅπου οἱ ἐκθέται μ, ν . . . ρ εἶναι ἀκέραιοι, εἶναι μονότιμος συνάρτησις τῆς x.

Ἡ y καλεῖται ***πλειότιμος*** ἢ καὶ ***πολύδρομος*** συνάρτησις τῆς x, ὅταν ἡ σχέσις ἡ συνδέουσα τὰ x, y εἶναι τοιαύτη, ὥστε διὰ μίαν τιμὴν τοῦ x νὰ προσδιορίζωνται περισσότεραι τῆς μιᾶς τιμαὶ τοῦ y.

85. ***Πεπλεγμέναι συναρτήσεις.***—Ἔστω ὅτι ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν τιμῶν τῶν μεταβλητῶν x καὶ y ἐδόθη μὲ ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς:

$$F(x,y)=0.$$

Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις αὕτη δὲν εἶναι λελυμένη ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν y θὰ λέγωμεν, ὅτι ἡ συνάρτησις y εἶναι ***πεπλεγμένη.***

86. ***Ἀλγεβρικαὶ συναρτήσεις.*** Ἐὰν ἡ $F(x,y)=0$ γράφεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\alpha x^{\lambda} y^{\nu} + \beta x^{\pi} y^{\rho} + \dots + \kappa x^{\sigma} y^{\tau} = 0 \qquad (1)$$

(ὅπου οἱ ἐκθέται εἶναι θετικοὶ ἀκέραιοι ἢ καί τινες ἐξ αὐτῶν ἴσοι πρὸς τὸ μηδὲν) θὰ λέγωμεν, ὅτι τὸ y εἶναι ***ἀλγεβρικὴ*** συνάρτησις τοῦ x.

Π. χ. Ἔστω ὅτι ἡ σχέσις ἡ συνδέουσα τὰ x καὶ y δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως :

$$\alpha x y^5 + \beta x^2 y^3 + \gamma x^5 y^2 + \delta y + \lambda = 0.$$

Ἐὰν δώσω εἰς τὸ χ τυχοῦσαν τιμὴν διάφορον τοῦ μηδενός, διὰ νὰ εὕρω ἀντίστοιχον τιμὴν τοῦ y θὰ ἔχω πρὸς λύσιν ἐξίσωσιν πέμπτου βαθμοῦ ὡς πρὸς y· ἐπομένως δὲν δύναμαι, ἐν γένει, νὰ γράψω $y=\sigma(x)$, ὅπου εἰς τὸ $\sigma(x)$ νὰ ἐμφαίνωνται αἱ ἀλγεβρικαὶ πράξεις τὰς ὁποίας πρέπει νὰ κάμω διὰ νὰ εὑρίσκω τὴν τιμὴν τοῦ y τὴν ἀντίστοιχον εἰς τιμήν τινα τοῦ x. Δηλαδὴ δὲν δύναμαι νὰ γράψω $y=\sigma(x)$, ὅπου τὸ $\sigma(x)$ νὰ εἶναι ἀλγεβρικὴ ἔκφρασις.

Δύναμαι ὅμως, ἐννοεῖται, πάντοτε νὰ γράφω συμβολικῶς :

$$y=\sigma(x).$$

Μερικὴ περίπτωσις τῶν ἀλγεβρικῶν συναρτήσεων εἶναι αἱ ***ῥηταὶ συναρτήσεις.*** Ἐὰν τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος (1) εἶναι πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς y θὰ λέγω, ὅτι τὸ y εἶναι ***ῥητὴ*** συνάρτησις τοῦ x, διότι ἡ ἀνωτέρω σχέσις γράφεται καὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν $y=\frac{A(x)}{B(x)}$, ὅπου $A(x)$ καὶ $B(x)$ ἀκέραια πολυώνυμα ὡς πρὸς x. Πᾶσα ἀλγεβρικὴ συνάρτησις μὴ ***ῥητὴ*** καλεῖται ***ἄρρητος.***

Ὑπερβατικαὶ συναρτήσεις. Πᾶσα μὴ ἀλγεβρικὴ συνάρτησις καλεῖται ***ὑπερβατική***, π. χ. ἡ $y=\eta\mu x$.

87. ***Ἀντίστροφοι συναρτήσεις.*** Ἔστω συνάρτησις y ὁριζομένη ὑπὸ τῆς ἰσότητος $y=\sigma(x)$. Εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ x ἀντιστοιχεῖ μία τιμὴ τοῦ y (θεωρουμένου ἐννοεῖται ἑνὸς κλάδου).

Παρατηρῶ, ὅτι ἡ ἰσότης $y=\sigma(x)$, ἥτις δίδει τὸν νόμον τῆς ἀντιστοιχίας μεταξὺ τῶν x καὶ y, γράφεται καὶ $y-\sigma(x)=0$· δύναμαι ἐπομένως νὰ θεωρήσω καὶ τὸ x ὡς πεπλεγμένην συνάρτησιν τοῦ y, ἤτοι, ὅτι εἰς μίαν τιμὴν τοῦ y ἀντιστοιχεῖ μία τιμὴ τοῦ x. Δηλαδὴ ὁ ἴδιος νόμος ἀντιστοιχίας ὅστις δίδει εἰς μίαν τιμὴν τοῦ x ἀντίστοιχον τιμὴν διὰ τὸ y, δίδει καὶ εἰς μίαν τιμὴν τοῦ y ἀντίστοιχον τιμὴν διὰ τὸ x· ἤτοι δίδει καὶ τὸ x ὡς συνάρτησιν τοῦ y· αὐτὴ ἡ συνάρτησις καλεῖται ἀντίστροφος τῆς σ(x). π. χ. ἡ συνάρτησις $y=x^2$ ἔχει ὡς ἀντίστροφόν της τὴν συνάρτησιν $x=\sqrt{y}$, ἡ συνάρτησις $y=Ax^2+2Bx+\Gamma$ ἔχει ὡς ἀντίστροφον τὴν :

$$x=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-A\Gamma+Ay}}{A}.$$

Εἴπομεν, ὅτι ἡ $y=x^2$ καὶ ἡ $x=\sqrt{y}$ εἶναι ἀντίστροφοι συναρτήσεις· ἐὰν συμφωνήσω καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις τὴν συνάρτησιν νὰ τὴν ἐκφράζω διὰ τοῦ y, δύναμαι νὰ λέγω, ὅτι ἡ συνάρτησις $y=x^2$ καὶ ἡ $y=\sqrt{x}$, ἤτοι αἱ συναρτήσεις x^2 καὶ $\sqrt{x}$, εἶναι ***ἀντίστροφοι.*** Ὁμοίως ἀντίστροφοι εἶναι αἱ συναρτήσεις x^μ καὶ $x^{\frac{1}{\mu}}$, αἱ συναρτήσεις α^x καὶ $\lambda o\gamma_\alpha x$, αἱ συναρτήσεις ημ x καὶ τοξ ημx κ.ο.κ.

Συναρτήσεις πραγματικῆς μεταβλητῆς.

Ὁρισμοί.

88. Δυνατὸν συνάρτησίς τις σ(x) νὰ εἶναι τοιαύτη, ὥστε εἰς πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x νὰ ἀντιστοιχῇ μία πραγματικὴ τιμὴ διὰ τὸ y· ὅπως π. χ. ἡ συνάρτησις

$$y=7x^3-2x^2+6x-1$$

καὶ ἐν γένει y= ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x.

Δυνατὸν ὅμως ἐπίσης τὸ σ(x) νὰ εἶναι τοιοῦτον, ὥστε μόνον ὅταν τὸ x λαμβάνῃ τιμὰς περιλαμβανομένας μεταξὺ δύο ὡρισμένων πραγματικῶν ἀριθμῶν α καὶ β νὰ λαμβάνῃ τὸ y πραγματικὰς τιμάς, π. χ. ἡ συνάρτησις $y=\sqrt{(2-x)(x+3)}$ λαμβάνει πραγματικὰς τιμὰς μόνον ὅταν ἔχωμεν

$$-3\leq x\leq 2.$$

Ἐντεῦθεν διακρίνω, ὅτι διὰ νὰ μελετήσω μίαν συνάρτησιν y=σ(x) πρέπει πρῶτον νὰ ἴδω διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x ὑπάρχουν ἀντίστοιχοι τιμαὶ πραγματικαὶ τοῦ y· ἤτοι διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x ***ὁρίζεται*** τὸ y. Θὰ λέγω, ὅτι ἡ y εἶναι ***συνάρτησις ὡρισμένη εἰς τὸ διάστημα*** (α, β) ὅταν εἰς ἕκαστον ἀριθμὸν x ἀπὸ α ἕως β ἀντιστοιχῇ ἀριθμός τις διὰ τὸ y πραγματικός.

Ἐκάλεσα ἀνωτέρω διάστημα (α, β) τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἀπὸ α ἕως β ὅπου ($\alpha<\beta$). Ἡ διαφορὰ $\beta-\alpha$ λέγεται ***πλάτος*** τοῦ διαστήματος, οἱ δὲ ἀριθμοὶ α καὶ β καλοῦνται ***ὅρια*** ἢ ***σύνορα***

Ἐὰν διὰ τοῦ (Σ_1) ἐννοῶ τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν τῶν μεγαλυτέρων τοῦ α καὶ τῶν μικροτέρων τοῦ β, ἤτοι τῶν ἐσωτερικῶν τιμῶν τοῦ διαστήματος, θὰ ἔχω διάστημα ***ἀνοικτόν***·[1] ὅπως ἐπίσης θὰ ἔχω διάστημα ***ἀνοικτὸν*** ἐὰν πλὴν τῶν ἀνωτέρω τιμῶν τὸ (Σ_1) περιέχῃ καὶ ἕνα μόνον ἐκ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β, ἐνῷ ἐὰν περιέχῃ καὶ τοὺς δύο ἀριθμοὺς α καὶ β τὸ διάστημα θὰ λέγεται ***κλειστόν***, π. χ. ἐὰν τὸ x λαμβάνῃ πάσας τὰς τιμὰς τὰς ἐπαληθευούσας τὰς σχέσεις :

$$2 \leq x \leq 3$$

θὰ ἔχωμεν διάστημα ***κλειστόν***.

Ἐὰν τὸ x λαμβάνῃ πάσας τὰς τιμὰς τὰς ἐπαληθευούσας τὰς σχέσεις :

$$2 < x < 3$$

ἢ τὰς σχέσεις $\qquad 2 < x \leq 3$

ἢ τὰς σχέσεις $\qquad 2 \leq x < 3$

θὰ ἔχωμεν διάστημα ***ἀνοικτόν***.

Θεωρήσωμεν ἤδη συνάρτησιν $y=\sigma(x)$ ὡρισμένην ἐν τῷ διαστήματι (α, β)· δηλαδὴ ὑποθέσωμεν, ὅτι εἰς ἕκαστον ἀριθμὸν x μεταξὺ α καὶ β ἀντιστοιχεῖ ἀριθμός τις διὰ τὸ y πραγματικός.

Ἐὰν καλέσω (Σ_2) τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τὰς ὁποίας λαμβάνει τὸ y θὰ ἔχω, ὅτι εἰς ἕκαστον ἀριθμὸν τοῦ (Σ_1) [δηλαδὴ τοῦ διαστήματος (α, β) ἀντιστοιχῇ ἀριθμός τις τοῦ (Σ_2).

[1]) Ἐπαναλαμβάνονται ἐδῶ οἱ ὁρισμοὶ τῆς § 18 διὰ τὸ σύνολον Σ_1.

Ἐὰν τὸ (Σ_2) εἶναι περατωμένον σύνολον, ὁπότε τὸ y λέγεται ***περατωμένη συνάρτησις***, θὰ ὑπάρχῃ (§ 13) ἀριθμός τις M ὅστις θὰ εἶναι ***ἀνώτερον πέρας*** καὶ ἀριθμός τις μ ὅστις θὰ εἶναι ***κατώτερον πέρας*** τοῦ συνόλου (Σ_2). Οἱ ἀριθμοὶ M καὶ μ λέγονται ἐπίσης ***ἀνώτερον πέρας*** καὶ ***κατώτερον πέρας*** τῆς συναρτήσεως· ἡ δὲ διαφορὰ M—μ λέγεται ***αἰώρησις*** τῆς συναρτήσεως (§ 14) εἰς τὸ διάστημα (α, β).

Ἔστω ἤδη ὅτι τὸ διάστημα (α, β) ἐχώρισα εἰς μικρότερα διαστήματα (α, α_1) (α_1, α_2) . . . (α_ν, β). Ἐὰν καλέσω M_1, μ_1 τὸ ἀνώτερον καὶ κατώτερον πέρας εἰς τὸ διάστημα (α, α_1), M_2, μ_2 τὸ ἀνώτερον καὶ κατώτερον πέρας εἰς τὸ διάστημα (α_1, α_2) κ. ο. κ. θὰ ἔχω ὅτι:

1) Ἓν τοὐλάχιστον ἀπὸ τὰ $M_1, M_2 \ldots M_{\nu+1}$ θὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ M· ὅπως ἐπίσης ἓν τοὐλάχιστον ἀπὸ τὰ $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{\nu+1}$ θὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ μ.

2) Οὐδὲν τῶν $M_1, M_2, \ldots M_{\nu+1}$ θὰ ὑπερβαίνῃ τὸ M καὶ οὐδὲν τῶν $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{\nu+1}$ θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ μ.

3) Οὐδεμία τῶν αἰωρήσεων $M_1-\mu_1$, $M_2-\mu_2 \ldots M_{\nu+1}-\mu_{\nu+1}$ θὰ ὑπερβαίνῃ τὴν M—μ.

4) Τὸ ἄθροισμα τῶν αἰωρήσεων θὰ εἶναι τοὐλάχιστον ἴσον πρὸς M—μ.

Ἐὰν ἡ συνάρτησις y δὲν εἶναι περατωμένη εἰς τὸ διάστημα (α, β) θὰ λέγω ὅτι ἡ αἰώρησις τῆς y εἶναι ***ἄπειρος*** εἰς τὸ διάστημα τοῦτο

89. ***Παρατηρήσεις***. 1) Συνάρτησίς τις $y=\sigma(x)$ λέγεται ***πεπερασμένη*** εἰς τὸ διάστημα (α, β), ἐὰν εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ διαστήματος αὐτοῦ ἀντιστοιχῇ ***πεπερασμένη*** τιμὴ διὰ τὴν συνάρτησιν. Παρατηρῶ ὅτι δυνατὸν μία συνάρτησις $y=\sigma(x)$ νὰ εἶναι ***πεπερασμένη*** εἰς ἓν διάστημα (α, β) καὶ ὅμως νὰ μὴ εἶναι περατωμένη εἰς τὸ αὐτὸ διάστημα. Π. χ. Ἔστω ὅτι ἡ x λαμβάνει τὰς τιμὰς τοῦ διαστήματος (0, 1). Ἔστω δὲ ὅτι εἰς τὴν τιμὴν $x=0$, θέλω νὰ ἀντιστοιχῇ διὰ τὸ y ἡ τιμὴ 0, εἰς πᾶσαν δὲ ἄλλην τιμὴν τοῦ x ἐν τῷ διαστήματι (0, 1) ν' ἀντιστοιχῇ διὰ τὸ y τιμὴ διδομένη ὑπὸ τῆς σχέσεως $y=\frac{1}{x}$, ἤτοι διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ διαστήματος (0, 1) (πλὴν διὰ $x=0$) νὰ εὑρίσκωνται αἱ τιμαὶ τῆς y ἀπὸ τὴν σχέσιν $y=\frac{1}{x}$. Κατὰ ταῦτα τὸ σύνολον (Σ_2) θὰ περιέχῃ ἀφ' ἑνὸς τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν $\frac{1}{x}$ διὰ τὰς τιμὰς $0<x\leq 1$ καὶ ἀφ' ἑτέρου τὸν ἀριθμὸν 0, εἰς τὸν ὁποῖον κατὰ τὴν συμφωνίαν

μας (τὴν ὁρίζουσαν τὴν ἀντιστοιχίαν μεταξὺ τῶν x καὶ y) θὰ ἀντιστοιχῇ $y=0$· ἑπομένως ἡ συνάρτησις y, ὅπως ἔχει ὁρισθῇ, εἶναι πεπερασμένη εἰς τὸ διάστημα (0, 1) διότι δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ x ἔχει τιμὴν ***πεπερασμένην***· δὲν εἶναι ὅμως ***περατωμένη***, διότι ὁσονδήποτε μέγας καὶ ἂν ὑποτεθῇ δοθείς τις θετικὸς M δύναμαι πάντοτε νὰ δώσω εἰς τὸ x τιμήν τινα τοῦ διαστήματος $0<x\leq 1$ τοιαύτην, ὥστε $\frac{1}{x}>M$.

Ἔστω ἐπίσης ἡ συνάρτησις

$$y=\underset{\nu=+\infty}{\text{ορ}}\frac{\nu x}{\nu x^2+1}$$

εἴς τι διάστημα περιέχον τὸ σημεῖον $x=0$. Παρατηρῶ, ὅτι διὰ $x=0$ ἔχω $y=0$ καὶ διὰ $x=\delta$, ὅπου δ δοθεὶς ἀριθμός, ἔχω

$$y=\text{ορ}\frac{1}{\delta+\frac{1}{\delta\nu}}=\frac{1}{\delta},$$

ἤτοι εἰς πᾶν διάστημα περιέχον τὸ 0 ἡ y εἶναι πεπερασμένη· δὲν εἶναι ὅμως περατωμένη· διότι ἔστω M τυχὼν δοθεὶς θετικὸς ἀριθμός ὁσονδήποτε μέγας· δύναμαι νὰ εὕρω τιμὴν τοῦ x, δι' ἣν $y>M$· ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ λάβω

$$0<x<\frac{1}{M}.$$

2) Ἔστω συνάρτησις $y=\sigma(x)$ περατωμένη εἴς τι διάστημα (α, β) καὶ M, μ τὸ ἀνώτερον καὶ κατώτερον πέρας τῆς συναρτήσεως ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ. Δυνατὸν τὸ M νὰ εἶναι ἀριθμὸς μὴ ἀνήκων εἰς τὸ σύνολον (Σ_2) [1], ὅπως ἐπίσης καὶ τὸ μ. Ὅταν τὸ M περιέχεται εἰς τὸ σύνολον (Σ_2) θὰ εἶναι ἡ ***μεγίστη*** τιμὴ τῆς συναρτήσεως $y=\sigma(x)$, θὰ λέγεται δὲ ***μέγιστον*** (§ 14)· ὁμοίως τὸ μ θὰ λέγεται ***ἐλάχιστον*** ἐὰν περιέχεται εἰς τὸ (Σ_2)· δηλ. τὸ M θὰ λέγεται ***μέγιστον*** ἐὰν ὑπάρχῃ

---

[1] Καλῶ πάντοτε (Σ_2) τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τοῦ y.

τιμὴ τοῦ x ἐν τῷ διαστήματι (α, β), διὰ τὴν ὁποίαν τὸ $y = \sigma(x)$ λαμβάνει τὴν τιμὴν Μ καὶ τὸ μ θὰ λέγεται ***ἐλάχιστον*** ἐὰν ὑπάρχῃ τιμὴ τοῦ (α, β), δι' ἣν $y = \mu$· ἤτοι τὸ Μ θὰ εἶναι ***μέγιστον***, ἐὰν τὸ y φθάνῃ εἰς τὴν τιμὴν Μ· καὶ τὸ μ θὰ εἶναι ***ἐλάχιστον***, ἐὰν τὸ y φθάνῃ τὴν τιμὴν μ (§ 14).

90. Ἔστω σύνολόν τι πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ ὁρικόν τι αὐτοῦ σημεῖον α· ἔστω προσέτι ὅτι τὸ x ἀντικαθίσταται διαδοχικῶς, κατά τινα νόμον, μὲ ἀριθμοὺς τοῦ (Σ_1), μεταξὺ τῶν ὁποίων δὲν περιλαμβάνεται ὁ α καὶ ὅτι *πάντοτε* ὁσονδήποτε μικρὸς καὶ ἂν εἶναι θετικός τις δ εὑρίσκεται ἀριθμός τις ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀπὸ τοῦ ὁποίου καὶ πέραν

$$|x - \alpha| < \delta\cdot$$

τότε λέγομεν, ὅτι ἡ μεταβλητὴ x συγκλίνει πρὸς τὸ α καὶ σημειοῦμεν

$$\text{ορ}x = \alpha. \qquad (\S\ 27)$$

Ὅταν τὸ x συγκλίνῃ πρὸς τὸ α μένον μεγαλύτερον τοῦ α (δηλ. ἐκ τιμῶν μειζόνων) σημειοῦμεν

$$\text{ορ}x = \alpha + 0$$

καὶ τὸ α λέγεται ὅριον τοῦ x ἐκ δεξιῶν, ὅταν δὲ τὸ x συγκλίνῃ πρὸς τὸ α μένον μικρότερον τοῦ α (ἤτοι ἐκ τιμῶν ἐλασσόνων) σημειοῦμεν :

$$\text{ορ}x = \alpha - 0$$

καὶ τὸ α λέγεται ὅριον τοῦ x ἐξ ἀριστερῶν.

Περιοχὴ σημείου x κειμένου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν διαστήματος (α, β) καλεῖται τὸ σύνολον τῶν σημείων τῶν κειμένων ἐν διαστήματι

$$(x - \varepsilon,\ x + \varepsilon),$$

ὅπου τὸ ε εἶναι ἀριθμός τις θετικὸς αὐθαιρέτως ὁρισθείς, ὁσονδήποτε μικρός, ἐπαληθεύων ὅμως τὰς ἀνισότητας

$$\alpha < x - \varepsilon \quad \text{καὶ} \quad \beta > x + \varepsilon\cdot$$

ἤτοι ἀρκεῖ τὰ

$$x-\varepsilon \quad \text{καὶ} \quad x+\varepsilon$$

νὰ κεῖνται ἐντὸς τοῦ διαστήματος (α, β)· καὶ τότε ***ἡ περιοχὴ πρὸς τὰ δεξιὰ*** τοῦ x σχηματίζεται ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ διαστήματος

$$(x, \; x+\varepsilon)\cdot$$

ἡ περιοχὴ πρὸς τ' ἀριστερὰ τοῦ x σχηματίζεται ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ διαστήματος

$$(x, \; x-\varepsilon).$$

Τὸ α ἔχει περιοχὴν μόνον πρὸς τὰ δεξιά· τὸ β ἔχει περιοχὴν μόνον πρὸς τὰ ἀριστερά.

Ὅριον συναρτήσεως.

91. Ἔστω ὅτι μεταβλητή τις x λαμβάνει διαδοχικῶς τὰς τιμὰς ἀπείρου ἀκολουθίας

$$(\Sigma_1) \qquad x_1,\; x_2,\; x_3, \; \ldots \; x_\nu, \; \ldots$$

καὶ ὅτι ἑτέρα μεταβλητὴ y, ἥτις εἶναι συνάρτησις τῆς x λαμβάνει ἀντιστοίχως τὰς τιμὰς

$$(\Sigma_2) \qquad y_1,\; y_2,\; y_3, \; \ldots \; y_\nu, \; \ldots$$

Ἔστω προσέτι ὅτι ἡ x ἔχει ὅριον ἀριθμόν τινα· ***ἐὰν τύχῃ*** τότε τὸ y, ἤτοι ἡ ἀκολουθία (Σ_2) νὰ ἔχῃ ὅριον ἀριθμόν τινα β θὰ λέγωμεν, ὅτι τὸ β εἶναι ὅριον τοῦ y διὰ $x=\alpha$ σημειοῦται δὲ τοῦτο ὡς ἑξῆς :

$$\underset{x=\alpha}{\text{ορ}}\, y=\beta$$

Ἐὰν τὸ y τείνῃ πρὸς τὸ β τοῦ x τείνοντος πρὸς τὸ α ἐξ ἐλασσόνων τιμῶν τοῦ α (§ 90) θὰ σημειοῦμεν :

$$\underset{x=\alpha-0}{\text{ορ}}\, y=\beta$$

καὶ τὸ β θὰ λέγεται ὅριον τοῦ y ἐξ ἀριστερῶν.

Ἐὰν τὸ y τείνῃ πρὸς τὸ β τοῦ x τείνοντος πρὸς τὸ α ἐκ μειζόνων τιμῶν θὰ σημειοῦμεν

$$\underset{x=\alpha+0}{\text{ορ}}\, y=\beta$$

καὶ τὸ β θὰ λέγεται ὅριον τοῦ y ἐκ δεξιῶν.

92. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμόν, ***ἵνα ἡ συνάρτησις* y *ἔχῃ ὅριον πεπερασμένον ἀριθμὸν β*, *ὅταν ἡ* x *ἔχῃ ὅριον τὸ α*, *πρέπει καὶ ἀρκεῖ : Εἰς πάντα θετικὸν ἀριθμὸν* η *ν' ἀντιστοιχῇ ἀριθμὸς θετικὸς ε τοιοῦτος, ὥστε ὅταν***

$$|\, x-\alpha \,| < \varepsilon \qquad \text{νὰ ἔχωμεν} \qquad |\, y-\beta \,| < \eta.$$

Π. χ. ἔστω, χάριν σαφηνείας, ὅτι εἰς τὸ σύνολον (Σ_1) αἱ τιμαὶ εἶναι θετικαὶ καὶ βαίνουσιν ἐλαττούμεναι· ἵνα ἔχω ορ y=β πρέπει καὶ ἀρκεῖ συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τοῦ ὁρίου (§ 25), δοθέντος θετικοῦ ἀριθμοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ η, νὰ εὑρίσκεται ὅρος τις y_μ τῆς ἀκολουθίας (Σ_2) τοιοῦτος, ὥστε

$$|\, y_{\mu+\varrho}-\beta \,| < \eta \qquad \text{διὰ} \qquad \varrho=1,2,3,\ldots$$

Ἀλλ' ἡ τιμὴ $y_{\mu+\varrho}$ τοῦ (Σ_2) εἶναι ἀντίστοιχος τῆς τιμῆς $x_{\mu+\varrho}$ τοῦ (Σ_1) οἱ δὲ ἀριθμοὶ

$$(1) \quad |\, x_1-\alpha \,|, \quad |\, x_2-\alpha \,|, \ldots |\, x_\mu-\alpha \,|, \quad |\, x_{\mu+1}-\alpha \,| \ldots$$

ἔχουν ἀντιστοίχους τοὺς ἀριθμοὺς

$$(2) \qquad |y_1-\beta|, \quad |y_2-\beta|, \ldots |y_\mu-\beta|, \quad |y_{\mu+1}-\beta|, \ldots$$

Ἔστω ε τυχὼν θετικὸς ἀριθμὸς περιλαμβανόμενος μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν

$$|x_{\mu-1}-\alpha| \qquad \text{καὶ} \qquad |x_\mu-\alpha|$$

τότε, ἐπειδὴ οἱ ὅροι τῆς (1) βαίνουσιν ἐλαττούμενοι, ἵνα ἔχω ὅρον τῆς (1) μικρότερον τοῦ ε πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ λάβω ὅρον τινὰ ἀπὸ τοῦ $|x_\mu-\alpha|$ καὶ πέραν, ἐπομένως διὰ νὰ ἔχω ὅρον τῆς ἀκολουθίας (1) ἀντιστοιχοῦντα εἰς ὅρον τῆς ἀκολουθίας (2) εὑρισκόμενον πέραν τοῦ $|y_{\mu-1}-\beta|$ πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ λάβω ὅρον τῆς ἀκολουθίας (1) μικρότερον τοῦ ε· ὥστε ἐὰν ὑποθέσω ὅτι

$$|y_{\mu+\varrho}-\beta| < \eta \qquad (\varrho=1, 2, \ldots)$$

θὰ ἔχω, ὅτι ***ἀρκεῖ*** νὰ λάβω ὅρον τῆς ἀκολουθίας (1) μικρότερον τοῦ ε, ἵνα ἔχω ὅρον τῆς (2) μικρότερον τοῦ η.

Ὑπέθεσα εἰς τὰ ἀνωτέρω ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ (Σ_1) εἶναι θετικαὶ καὶ βαίνουσιν ἐλαττούμεναι· εὐκόλως φαίνεται, ὅτι καὶ ὅταν ἡ ἀκολουθία (Σ_1) τείνῃ ὁπωσδήποτε πρὸς τὸ α, διὰ νὰ ἔχω ὅτι ἡ ἀκολουθία (Σ_2) τείνει τότε πρὸς τὸ β πρέπει καὶ ἀρκεῖ εἰς πάντα θετικὸν ὁσονδήποτε μικρὸν η νὰ ἀντιστοιχῇ ἀριθμός τις ε τοιοῦτος, ὥστε ὅταν :

$$|x-\alpha| < \varepsilon \qquad \text{νὰ ἔχω} \qquad |y-\beta| < \eta.$$

Ὁμοίως φαίνεται καὶ ὅτι ἐὰν αἱ τιμαὶ τοῦ x δὲν βαίνουν ἐλαττούμεναι ἢ καὶ δὲν ἀποτελοῦν σύνολον ἀριθμήσιμον, ἵνα ἡ συνάρτησις y ἔχῃ ὅριον β, ὅταν ὁρx=α, πρέπει καὶ ἀρκεῖ δοθέντος οἱουδήποτε θετικοῦ η νὰ εὑρίσκεται θετικός τις ε τοιοῦτος, ὥστε ὅταν

$$|x-\alpha| < \varepsilon \qquad \text{νὰ ἔχω} \qquad |y-\beta| < \eta.$$

93. Ἐὰν ἤδη ληφθῶσιν ὑπ' ὄψιν τὰ περὶ τοῦ θεμελιώδους κριτηρίου (§ 42) εὐκόλως φαίνεται, ὅτι :

Ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα τὸ y ἔχῃ πεπερασμένον ὅριον, ὅταν τὸ x τείνῃ πρὸς τὸ α, εἶναι ἡ ἑξῆς : εἰς πάντα θετικὸν ἀριθμὸν η ν᾽ ἀντιστοιχῇ θετικός τις ε τοιοῦτος, ὥστε εἰς δύο τιμὰς x′ x″ τοῦ x, δι᾽ ἃς $|x'-x''|<\varepsilon$

νὰ ἀντιστοιχοῦν δύο τιμαὶ

$$y',\ y''\ \textit{τοῦ}\ y,\quad \textit{δι᾽ ἃς}\quad |y'-y''|<\eta.$$

94. Ἐὰν τοῦ x τείνοντος πρὸς τὸ α, τὸ y τείνῃ νὰ ὑπερβῇ πάντα θετικὸν ἀριθμόν, θὰ λέγω ὅτι ορy$=\infty$, ὅταν ορx$=\alpha$. Θὰ ἔχω προφανῶς εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν, ὅτι : εἰς πάντα θετικὸν ἀριθμὸν M ὁσονδήποτε μέγαν θὰ ἀντιστοιχῇ θετικὸς ε τοιοῦτος, ὥστε ὅταν

$$|x-\alpha|<\varepsilon \text{ νὰ ἔχω } y>M.$$

Ἀναλόγως θὰ λέγω, ὅτι ορy$=-\infty$ δι᾽ ὅριον x ἴσον μὲ α, ὅταν εἶμαι βέβαιος, ὅτι δοθέντος ἀριθμοῦ ὁσονδήποτε μεγάλου M δύναμαι νὰ εὕρω θετικὸν ε τοιοῦτον, ὥστε ὅταν

$$|x-\alpha|<\varepsilon \quad \text{νὰ ἔχω} \quad y<-M.$$

Λέγομεν ὅτι ορy$=\beta$ δι᾽ ορx$=\infty$ ὅταν, τοῦ x τείνοντος πρὸς τὸ ἄπειρον, τὸ y τείνει πρὸς ὡρισμένον ἀριθμὸν β· δηλαδὴ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δύναται τὸ y νὰ διαφέρῃ ὅσον θέλω ὀλίγον ἀπὸ τοῦ β, ἀρκεῖ νὰ ληφθῇ τὸ x ἀρκετὰ μέγα· ἤτοι : δοθέντος ἀριθμοῦ η ὁσονδήποτε μικροῦ, δύναται νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός τις θετικὸς M τοιοῦτος, ὥστε ὅταν $x>M$ νὰ ἔχω $|y-\beta|<\eta$.

Ἐὰν ἡ συνάρτησις σ(x) (ἔθεσα $y=\sigma(x)$) τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον, ὅταν τὸ x τείνῃ πρὸς τὸ α ἐκ τιμῶν μειζόνων, σημειῶ $\sigma(\alpha+0)=+\infty$ καὶ ὅταν ἐκ τιμῶν ἐλασσόνων, σημειῶ $\sigma(\alpha-0)=+\infty$· κατ᾽ ἀνάλογον τρόπον γράφω $\sigma(\alpha+0)=-\infty$, $\sigma(\alpha-0)=-\infty$ ὅταν τὸ σ(x) τείνῃ πρὸς τὸ $-\infty$, τοῦ x τείνοντος πρὸς τὸ α ἐκ τιμῶν μειζόνων ἢ ἐλασσόνων.

95. Παρατηρῶ ὅτι δυνατὸν τὰ σ(α), σ(α+0), σ(α−0) νὰ εἶναι διάφορα (§ 91)· τότε τέσσαρες εἶναι αἱ δυναταὶ περιπτώσεις.

1) Τὸ σ(α) δὲν εἶναι ὡρισμένον· π. χ. ἡ συνάρτησις

$$\sigma(x)=\underset{\nu=+\infty}{\text{ορ}}\frac{(x^{\nu}-x)^2}{x^{2\nu}-1}$$

διὰ x=1 δὲν εἶναι ὡρισμένη.

2) Τὸ σ(α) εἶναι ὡρισμένον, ἀλλὰ διάφορον τῶν σ(α+0) καὶ σ(α—0).

Π. χ. ἔστω

$$\sigma(x)=\underset{\nu=+\infty}{\text{ορ}}\left(\frac{x^{\nu}-1}{x^{\nu}+1}\right).$$

Διὰ x=1 ἔχω $\sigma(1)=0,\quad \sigma(1+0)=1,\quad \sigma(1-0)=-1.$

3) Τὸ σ(α) εἶναι ὡρισμένον καὶ ἴσον πρὸς τὸ σ(α+0)· π. χ. ἔστω

$$\sigma(x)=\underset{\nu=+\infty}{\text{ορ}}\left(\frac{\nu x^{\nu}-1}{\nu x^{\nu}+1}\right).$$

Διὰ x=1 ἔχω $\sigma(1)=\sigma(1+0)=1.$

4) Τὸ σ(α) εἶναι ὡρισμένον καὶ ἴσον πρὸς τὸ σ(α—0).

Π. χ. ἔστω

$$\sigma(x)=\underset{\nu=+\infty}{\text{ορ}}\left(\frac{x^{\nu}-\nu}{x^{\nu}+\nu}\right)\cdot \quad \text{διὰ} \quad x=1 \quad \text{ἔχω}$$

$$\sigma(1)=\sigma(1-0)=-1.$$

95. Ὁμοίως παρατηρῶ, ὅτι καὶ αἱ σχέσεις

$$\sigma(\alpha)=\infty \quad \text{καὶ} \quad \sigma(\alpha\pm 0)=\pm\infty$$

δὲν δηλοῦσι πάντοτε τὸ αὐτό.

Έστω π. χ. $\sigma(x)=\underset{\nu=+\infty}{\text{ορ}}\dfrac{1}{\nu x}$, Διὰ $x=0$.

ἔχω $\sigma(0)=\infty$, $\sigma(+0)=0$, $\sigma(-0)=0$.

Έστω ἐπίσης $\sigma(x)=\underset{\nu=+\infty}{\text{ορ}}\dfrac{\nu x}{\nu x^2+1}$. Διὰ $x=0$

ἔχω $\sigma(0)=0$, $\sigma(+0)=+\infty$, $\sigma(-0)=-\infty$.

97. Παρατηρῶ ἐπίσης, ὅτι αἱ σχέσεις

$$\sigma(\infty)=\beta, \qquad \underset{x=+\infty}{\text{ορ}}\sigma(x)=\beta, \qquad \underset{x=-\infty}{\text{ορ}}\sigma(x)=\beta$$

δὲν δηλοῦσι πάντοτε τὸ αὐτό. Έστω π. χ. ἡ συνάρτησις

$\sigma(x)=\underset{\nu=+\infty}{\text{ορ}}\dfrac{\nu}{\nu+x}$ ἔχω $\sigma(\infty)=0$, $\underset{x=+\infty}{\text{ορ}}\sigma(x)=1$, $\underset{x=-\infty}{\text{ορ}}\sigma(x)=1$

Έστω ἐπίσης ἡ συνάρτησις $\sigma(x)=\underset{\nu=+\infty}{\text{ορ}}\dfrac{x}{\nu}$ ἔχω

$$\sigma(\infty)=\infty, \qquad \underset{x=+\infty}{\text{ορ}}\sigma(x)=0, \qquad \underset{x=-\infty}{\text{ορ}}\sigma(x)=0$$

Συνεχὴς συνάρτησις.

98. Έστω συνάρτησις $y=\sigma(x)$ ὡρισμένη (§ 88) εἰς ἓν διάστημα $\alpha-\varepsilon, \ldots \alpha+\varepsilon$. Ἐὰν ἡ $\sigma(x)$ εἶναι περατωμένη εἰς αὐτὸ τὸ διάστημα, θὰ ὑπάρχῃ ἀνώτερον πέρας M καὶ κατώτερον πέρας μ τῆς

συναρτήσεως ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ καὶ θὰ ἔχω αἰώρησιν τῆς συναρτήσεως τὸ Μ—μ. Ἐὰν ὑποτεθῇ, ὅτι τὸ ε λαμβάνει ὁλονὲν μικροτέρας τιμὰς τεῖνον πρὸς τὸ μηδέν, θὰ ἔχω πάντοτε, ὅτι ἡ συνάρτησις θὰ μένῃ περατωμένη, ἡ δὲ αἰώρησις (§ 88) θὰ ἐλαττοῦται ἢ τοὐλάχιστον δὲν θὰ αὐξάνῃ.

Ἐὰν ἡ αἰώρησις αὐτὴ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, ὅταν τὸ ε τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, θὰ λέγω ὅτι ἡ συνάρτησις σ(x) ***εἶναι συνεχὴς διὰ*** x=α.

Ὑπέθεσα ὅτι εἰς τὸ διάστημα (α—ε, α+ε) ἡ συνάρτησις σ(x) εἶναι περατωμένη. Ἐὰν ἡ συνάρτησις σ(x) δὲν εἶναι περατωμένη εἰς αὐτὸ τὸ διάστημα, ὁσονδήποτε μικρὰν θετικὴν τιμὴν καὶ ἂν ἔχῃ τὸ ε, λέγω, ὅτι ἡ αἰώρησις τῆς συναρτήσεως εἶναι ἄπειρος διὰ τὴν τιμὴν α τοῦ x (§ 88).

Ἐὰν ἡ αἰώρησις Μ—μ τῆς συναρτήσεως σ(x), ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ διάστημα (α—ε, α+ε), ἔχει ὅριον διάφορον τοῦ μηδενός, ὅταν ορε=ο, ἡ συνάρτησις σ(x) λέγεται ***ἀσυνεχὴς*** εἰς τὸ σημεῖον α ἢ καὶ τὸ σημεῖον α λέγεται ***σημεῖον ἀσυνεχείας*** διὰ τὴν συνάρτησιν σ(x). [1]

Ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται, ὅτι ἵνα συνάρτησίς τις σ(x) εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον α πρέπει καὶ ἀρκεῖ ορ Μ=ορ μ (δι' ορ ε=ο) καὶ ἑπομένως (§ 90), ἵνα ἡ σ(x) εἶναι συνεχὴς διὰ τὴν τιμὴν α τοῦ x, πρέπει καὶ ἀρκεῖ σ(α+ε)=σ(α—ε)=σ(α)· ἤτοι: ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως διὰ x=α νὰ συμπίπτῃ μὲ ***τὸ ὅριον τῶν τιμῶν, τὰς ὁποίας λαμβάνει ἡ συνάρτησις εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ α***· καὶ δύναμαι νὰ εἴπω ὅτι : ἡ συνάρτησις σ(x) εἶναι συνεχὴς διὰ τὴν τιμὴν α τοῦ x, (ἢ καὶ εἰς τὸ σημεῖον α) ὅταν ***καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν τείνῃ τὸ*** x ***πρὸς τὸ α***, ἡ συνάρτησις σ(x) τείνῃ πρὸς τὸ σ(α)· δηλ. πρὸς τὴν τιμήν, τὴν ὁποίαν λαμβάνει ἡ συνάρτησις διὰ x=α.

Π. χ. αἱ συναρτήσεις $e^{\frac{1}{x}}$, $\frac{1}{x}$ ημ $\frac{1}{x}$ δὲν εἶναι συνεχεῖς διὰ x=0, ἤτοι τὸ σημεῖον α εἶναι σημεῖον ἀσυνεχείας (μεμονωμένον), οἱαδήποτε καὶ ἂν συμφωνήσωμεν νὰ εἶναι ἡ τιμὴ τούτων διὰ x=0.

Ὥστε, ἵνα ἡ συνάρτησις σ(x) εἶναι συνεχὴς πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ διαφορὰ σ(x)—σ(α) νὰ ἔχῃ ὅριον τὸ μηδέν, ***καθ' οἱονδήποτε τρόπον*** καὶ ἂν τείνῃ τὸ x—α εἰς τὸ 0, ἤτοι :

Δύναμαι νὰ λέγω, ὅτι ἡ συνάρτησις σ(x) εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ ση-

[1] Γενικῶς λεγεται ἀσυνεχὴς ἡ σ(x) ὅταν δὲν εἶναι συνεχής.

μεῖον α, ὅταν εἶμαι βέβαιος, ὅτι δοθέντος θετικοῦ ἀριθμοῦ η ὁσονδήποτε μικροῦ, δύναται νὰ προσδιορισθῇ θετικὸς ε τοιοῦτος, ὥστε

$$|\sigma(x)-\sigma(\alpha)|<\eta$$

διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x ἐπαληθεύουσαν τὴν ἀνισότητα

$$|x-\alpha|<\varepsilon.$$

Παρατήρησις. Ἔστω δ θετικὸς ἀριθμὸς πολὺ μικρός· καὶ ἔστω ὅτι τὸ η λαμβάνει ἀπειρίαν τιμῶν πολὺ μικρῶν, τῶν ὁποίων ἑκάστη ἔχει ἀπόλυτον τιμὴν μεγαλυτέραν τοῦ δ· τότε τὸ ε (ὅταν ἡ συνάρτησις εἶναι συνεχὴς διὰ $x=\alpha$) θὰ λαμβάνῃ πολὺ μικρὰς τιμάς, ἀλλὰ πάσας μεγαλυτέρας θετικοῦ τινος ἀριθμοῦ· ἑπομένως δὲν θὰ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν.

99. Γενικώτερον δύναμαι νὰ διατυπώσω τὰ ἀνωτέρω ὡς ἑξῆς: ἔστω, ὅτι μεταξὺ τῶν σημείων α—λ, β—λ· θεωρῶ τυχὸν διατεταγμένον σύνολον (Σ_1)[1]· εἰς τὸ σύνολον (Σ_1) ἀντιστοιχεῖ διατεταγμένον τι σύνολον (Σ_2) τῶν τιμῶν τοῦ $y=\sigma(x)$. Ἵνα ἡ συνάρτησις σ(x) εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον α πρέπει καὶ ἀρκεῖ διὰ πᾶν σύνολον (Σ_1) ληφθὲν ὡς ἀνωτέρω νὰ προκύπτῃ ἀντίστοιχον σύνολον (Σ_2) μὲ τὴν ἑξῆς ἰδιότητα· ὁσονδήποτε μικρὸς καὶ ἂν εἶναι δοθείς τις θετικὸς ἀριθμὸς η νὰ δύναμαι νὰ εὕρω πάντοτε θετικόν τινα ἀριθμὸν ε τοιοῦτον, ὥστε οἱανδήποτε τιμὴν (ἐκ τῶν τιμῶν τοῦ (Σ_1)) καὶ ἂν λάβῃ τὸ x περιλαμβανομένην εἰς τὸ διάστημα $(\alpha-\varepsilon,\ \alpha+\varepsilon)$ νὰ εἶναι τοιαύτη ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ y, ὥστε

$$|y-\sigma(\alpha)|<\eta \quad \text{ἢ καὶ} \quad |\sigma(x)-\sigma(\alpha)|<\eta$$

Κατὰ ταῦτα ἡ συνάρτησις σ(x) εἶναι συνεχής, ὅταν

$$\underset{x=\alpha}{\text{ορ}}\ \sigma(x)=\sigma(\alpha)$$

---

[1] Π. χ. τὸ σύνολον τῶν ῥητῶν τῶν περιλαμβανομένων εἰς τὸ διάστημα (α—λ, β—λ) τὸ θεωρούμενον μὲ τὴν συμφωνίαν, ἐκ δύο στοιχείων τὸ μικρότερον νὰ θεωρῆται προηγούμενον (§ 24).

Ὥστε ἡ σ(x) λέγομεν ὅτι εἶναι συνεχὴς διὰ $x=\alpha$, ***ὅταν εἰς πᾶν μερικὸν διατεταγμένον σύνολον τιμῶν τοῦ*** x, ***ἔχον ὅριον τὸ α*** (§ 27) ***ἀντιστοιχεῖ διατεταγμένον σύνολον τιμῶν τοῦ*** σ(x) ***ἔχον ὅριον τὸ*** σ(α)· ἑπομένως, ὅταν ἡ σ(x) εἶναι συνεχὴς διὰ $x=\alpha$, ἔχω ὅτι καὶ εἰς τὴν μερικὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τοῦ x εἶναι ἀκολουθία

$$x_1,\ x_2, \ldots x_\nu \ldots$$

ἔχουσα ὅριον τὸ α, τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τοῦ σ(x)

$$\sigma(x_1),\ \sigma(x_2), \ldots \sigma(x_\nu), \ldots$$

εἶναι ἀκολουθία ἔχουσα ὅριον τὸ σ(α).

100. Ἐθεώρησα εἰς τὰ προηγούμενα (§ 98) αἰώρησιν τῆς συναρτήσεως σ(x) εἰς τὸ διάστημα $(\alpha-\varepsilon,\ \alpha+\varepsilon)$. Δύναμαι προφανῶς νὰ θεωρήσω αἰώρησιν τῆς σ(x) μόνον εἰς τὸ διάστημα $(\alpha,\ \alpha+\varepsilon)$· ἐὰν ἡ αἰώρησις αὕτη τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, ὅταν $\text{ορ}\,\varepsilon=0$, λέγομεν ὅτι ἡ σ(x) εἶναι ***συνεχὴς πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ α***· ὁμοίως δύναμαι νὰ θεωρήσω μόνον τὸ διάστημα $(\alpha-\varepsilon,\ \alpha)$· ἐὰν εἰς τὸ διάστημα αὐτὸ ἡ αἰώρησις τῆς συναρτήσεως τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, ὅταν $\text{ορ}\,\varepsilon=0$, λέγομεν ὅτι ἡ σ(x) εἶναι ***συνεχὴς πρὸς τ' ἀριστερὰ τοῦ α***. Κατὰ ταῦτα, ἐὰν ἡ σ(x) εἶναι συνεχὴς καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ α καὶ πρὸς τ' ἀριστερὰ τοῦ α, θὰ εἶναι συνεχὴς διὰ τὴν τιμὴν α τοῦ x.

Σημεῖα ἀσυνεχείας.

101. Ἔστω $y=\sigma(x)$ συνάρτησις ὡρισμένη εἴς τι διάστημα· ἐὰν αὕτη δὲν εἶναι συνεχὴς εἴς τι σημεῖον α (ἐσωτερικὸν τοῦ διαστήματος αὐτοῦ) λέγεται ***ἀσυνεχὴς*** εἰς τὸ α ἢ καὶ λέγομεν, ὅτι τὸ α εἶναι ***σημεῖον ἀσυνεχείας*** (§ 98).

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ σ(x) μένει περατωμένη εἴς τι διάστημα περιέχον τὸ α. Συμφώνως πρὸς τ' ἀνωτέρω ἐὰν τὸ ὅριον τῆς αἰωρήσεως τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ διάστημα $(\alpha-\varepsilon,\ \alpha+\varepsilon)$ δι' $\text{ορ}\ \varepsilon=0$ εἶναι θετικὸν τὸ σημεῖον α θὰ εἶναι σημεῖον ἀσυνεχείας· ἡ αἰώρησις τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ σημεῖον α παριστᾷ τὸν βαθμὸν ἀσυνεχείας (τὸ πήδημα) τῆς συναρτήσεως εἰς αὐτὸ τὸ σημεῖον. Καὶ ἤδη

1) θὰ εἶναι τὸ α ***σημεῖον, ἀσυνεχείας τοῦ πρώτου εἴδους***, ἐὰν τὰ σ(α+0), σ(α—0) ὑπάρχωσι· δηλ. ἐὰν ἡ σ(x) ἔχει ὅριόν τι Α, ὅταν τὸ x τείνῃ πρὸς τὸ α ἐκ τιμῶν μεγαλυτέρων καὶ ἔχῃ ὅριον ἀριθμόν τινα Β, ὅταν τὸ x τείνῃ πρὸς τὸ α ἐκ τιμῶν μικροτέρων τοῦ α.

Ὑπάρχουσι δὲ προφανῶς δύο περιπτώσεις· ἡ

$$A=B \quad \text{ἢ} \quad A \text{ διάφορον τοῦ } B$$

Καὶ ἐὰν Α=Β διὰ νὰ εἶναι τὸ α σημεῖον ἀσυνεχείας πρέπει προφανῶς τὸ κοινὸν αὐτὸ ὅριον νὰ εἶναι διάφορον τοῦ σ(α). Ἐὰν ἑπομένως συμφωνήσω ἡ σ(x) νὰ ἔχῃ ὡς τιμὴν διὰ x=α οὐχὶ τὴν σ(α) ἀλλὰ τὴν Α τότε δὲν εἶναι πλέον τὸ α σημεῖον ἀσυνεχείας. Ἐάν ὅμως $A \neq B$ τότε οἱαδήποτε καὶ ἂν ληφθῇ ὡς τιμὴ τοῦ y διὰ x=α, θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην πάντοτε τὸ α σημεῖον ἀσυνεχείας.

Συνάρτησίς τις εἶναι ***κανονικὴ*** (ἢ καὶ τὸ σημεῖον ἀσυνεχείας τοῦ πρώτου εἴδους εἶναι ***κανονικὸν***) εἰς τὸ α, ὅταν ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ α ἰσοῦται πρὸς τὸν μέσον ὅρον τῶν δύο ὁρίων Α καὶ Β δηλ. ὅταν

$$\sigma(\alpha)=\frac{\sigma(\alpha+0)+\sigma(\alpha-0)}{2}.$$

2) Ἐὰν τὸ α εἶναι σημεῖον ἀσυνεχείας ***τοῦ δευτέρου εἴδους***, καὶ θεωρήσω τὸ ὅριον τῆς αἰωρήσεως τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ διάστημα (α, α+ε) καὶ τὸ ὅριον τῆς αἰωρήσεως εἰς τὸ (α—ε, α), τότε ἢ τὸ ὅριον τῆς αἰωρήσεως εἰς τὸ διάστημα (α, α+ε) ἢ τὸ ὅριον τῆς αἰωρήσεως εἰς τὸ διάστημα (α, α—ε) ἢ καὶ τὰ δύο θὰ εἶναι διάφορα τοῦ μηδενός. Ὥστε τὸ ἓν τοὐλάχιστον ἐκ τῶν σ(α+ε), σ(α—ε) δὲν θὰ τείνῃ πρὸς ὅριον, ὅταν ορ ε=0.

Παραδείγματα ἀσυνεχείας. 1) Ἡ συνάρτησις

$$\sigma(\ )=\frac{\sqrt{1-\text{συν}^2(x-\alpha)}}{x-\alpha}$$

παρουσιάζει εἰς τὸ α ἀσυνέχειαν τοῦ πρώτου εἴδους, διότι

$$\sigma(\alpha+0)=+\sqrt{\frac{3}{2}}, \qquad \sigma(\alpha-0)=-\sqrt{\frac{3}{2}}$$

2) ἡ συνάρτησις :

$$\sigma(x)=\eta\mu\frac{1}{x-\alpha}:\left(e^{\frac{1}{x-\alpha}}+1\right)$$

ἔχει τὸ α σημεῖον ἀσυνεχείας δευτέρου εἴδους, διότι τὸ σ(α+ε) τείνει πρὸς τὸ μηδὲν καὶ τὸ σ(α—ε) δὲν τείνει πρὸς ὅριον.

Ἡ συνάρτησις $y=\eta\mu\frac{1}{x}$ παρουσιάζει εἰς τὸ σημεῖον x=0 ἀσυνέχειαν τοῦ δευτέρου εἴδους· ὅταν τὸ x τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, τὸ y δὲν τείνει πρὸς ὅριον καὶ αἰωρεῖται ἀπειράκις μεταξὺ —1 καὶ +1· εἶναι ἐδῶ ἀσυνέχεια ἀπὸ τὰς καλουμένας ***οὐσιώδεις.***

102. Διακρίνομεν ἐπίσης συναρτήσεις ***σημειακῶς ἀσυνεχεῖς*** καὶ ***ὁλικῶς ἀσυνεχεῖς*** εἴς τι διάστημα (α. β).

Σημειακῶς ἀσυνεχεῖς εἶναι αἱ ἀσυνεχεῖς συναρτήσεις αἱ μένουσαι συνεχεῖς εἰς ***πυκνὸν*** (§ 23) σύνολον σημείων λαμβανόμενον ἐντὸς τοῦ (α, β)· τουτέστιν εἰς πᾶν διάστημα ἐντὸς τοῦ (α, β) ὑπάρχουσι σημεῖα, ὅπου εἶναι αὗται συνεχεῖς· κατὰ ταῦτα, διὰ πᾶσαν τοιαύτην συνάρτησιν, ἀληθεύει ὅτι : ἐὰν ληφθῇ τὸ τυχὸν μέρος τοῦ (α,β) καὶ θεωρηθῇ τὸ σύνολον τῶν αἰωρήσεων τῆς συναρτήσεως, τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς τὰ διάφορα σημεῖα τοῦ ληφθέντος μέρους, τὸ σύνολον (Α) θὰ ἔχῃ ἐλάχιστον (§ 14) ἴσον πρὸς τὸ μηδὲν (ἐννοεῖται ὅτι δὲν θὰ εἶναι ἡ αἰώρησις πάντοτε μηδέν, διότι ἄλλως ἡ συνάρτησις θὰ ἦτο συνεχής).

Ὁλικῶς ἀσυνεχὴς εἰς τὸ (α,β) εἶναι συνάρτησίς τις, ὅταν ἡ αἰώρησις αὐτῆς δὲν ἔχῃ εἰς πᾶν μέρος τοῦ (αβ) ὡς ἐλάχιστον τὸ μηδέν. [1]

Παραδείγματα. 1) Συνάρτησις, ἡ ὁποία εἰς πᾶν διάστημα ὁσονδήποτε μικρὸν εἶναι συνεχὴς δι' ἀπειρίαν σημείων χωρὶς νὰ εἶναι συνεχὴς εἰς κανὲν διάστημα, εἶναι καὶ ἡ ὁριζομένη ὡς ἑξῆς εἰς τὸ διάστημα (0,1)· ἔστω χ τυχοῦσα τιμὴ μεταξὺ 0 καὶ 1 καὶ ἔστω δεκαδικόν της ἀνάπτυγμα τό :

$$0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\ldots$$

(1) Ὑπάρχει τουτέστι πεπερασμένον τι διάστημα εἰς τὸ ὁποῖον ἡ σκνάρτησις δὲν ἔχει σημεῖον συνεχείας.

συμφωνῶ νὰ λαμβάνεται ὡς ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ y ἡ

$$0,\alpha_2\alpha_1\alpha_4\alpha_3\alpha_6\alpha_5 \ldots$$

Ἡ οὕτω ὁριζομένη συνάρτησις εἶναι συνεχὴς διὰ τὰς τιμὰς τοῦ x τὰς ἐχούσας δεκαδικὸν ἀνάπτυγμα μὲ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία καὶ ἀσυνεχὴς διὰ τὰς λοιπὰς τιμὰς τοῦ x.

2) Ἔστω τὸ διάστημα (0, 1) καὶ συνάρτησις ὁριζομένη ὡς ἑξῆς :

διὰ $x=0$, $x=1$ νὰ εἶναι $y=1$

» $x=\frac{1}{2}$ » » $y=\frac{1}{2}$

» $x=\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ » » $y=\frac{1}{4}$

» $x=\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$ » » $y=\frac{1}{8}$

. . . .

» $x=\frac{1}{2^\nu}, \frac{3}{2^\nu}, \ldots \frac{2^\nu-1}{2^\nu}$ » » $y=\frac{1}{2^\nu}$

. . . .

διὰ πᾶσαν δὲ ἄλλην τιμὴν τοῦ x νὰ εἶναι $y=0$· ἡ συνάρτησις αὕτη ἔχει σημεῖα ἀσυνεχείας εἰς πᾶν διάστημα περιεχόμενον εἰς τὸ (0, 1) καὶ εἶναι ***σημειακῶς ἀσυνεχής***· εἰς πᾶν σημεῖον $x \neq \frac{\lambda}{2^\nu}$, ὅπου ὁ ἀκέραιος λ δὲν διαιρεῖται διὰ 2, εἶναι ἡ συνάρτησις συνεχής.

3) Ἔστω συνάρτησις ὁριζομένη ὡς ἑξῆς : δι᾽ ὅλας τὰς ῥητὰς τιμὰς τοῦ x τὰς εὑρισκομένας εἰς τὸ διάστημα (0, 1) νὰ εἶναι $y=0$ καὶ διὰ πᾶσαν ἀσύμμετρον τιμὴν τοῦ αὐτοῦ διαστήματος νὰ εἶναι $y=1$. Ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι ὁλικῶς ἀσυνεχής.

Ἰδιότητες τῶν συνεχῶν συναρτήσεων.

103. Ἔστω συνάρτησις σ(x) συνεχὴς εἰς ἓν διάστημα (α, β) καὶ θετικός τις ἀριθμὸς η· θὰ δείξω, ὅτι δύναμαι νὰ χωρίσω τὸ διάστημα (α, β) εἰς τοιαῦτα μέρη, ὥστε εἰς ἕκαστον ἐκ τούτων ἡ αἰώρησις τῆς συναρτήσεως νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ η.

Τὴν ἰδιότητα αὐτὴν (δηλ. τὸ νὰ χωρίζεται ἓν διάστημα εἰς τοιαῦτα μέρη, ὥστε εἰς ἕκαστον ἐκ τούτων ἡ αἰώρησις τῆς συναρτήσεως νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ η) ἂς καλέσω (Α). Ἵνα ἀποδείξω ὅτι τὸ διάστημα (α, β) ἔχῃ τὴν ἰδιότητα (Α) ὑποθέτω πρὸς στιγμὴν τὸ ἐναντίον, ὅτι τοὐτέστι δὲν ἔχει τὴν ἰδιότητα (Α) δηλ. ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ διαίρεσις τοῦ διαστήματος (α, β) εἰς μέρη τοιαῦτα, ὥστε εἰς ἕκαστον ἐκ τούτων ἡ αἰώρησις τῆς συναρτήσεως νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ η· τότε, ἐὰν διαιρέσω τὸ διάστημα (α, β) εἰς δύο ἴσα διαστήματα

$$\left(\alpha,\ \frac{\alpha+\beta}{2}\right) \quad \left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \beta\right)$$

θὰ ἔχω ὅτι ἓν τοὐλάχιστον ἐξ αὐτῶν δὲν θὰ ἔχῃ τὴν ἰδιότητα (Α)(¹) ἂν κανὲν ἐξ αὐτῶν δὲν ἔχῃ τὴν ἰδιότητα (Α) λαμβάνω τὸ πρὸς τ' ἀριστερὰ διάστημα· ἄλλως λαμβάνω τὸ ***μὴ ἔχον*** τὴν ἰδιότητα (Α)· καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις τὸ λαμβανόμενον διάστημα σημειῶ διὰ τοῦ (α_1, β_1)· ἐὰν καὶ αὐτὸ τὸ διάστημα (α_1, β_1) ὑποδιαιρέσω εἰς δύο ἴσα μέρη θὰ ἔχω ὅτι ἓν τοὐλάχιστον ἐξ αὐτῶν δὲν θὰ ἔχῃ τὴν ἰδιότητα (Α). Ἐὰν κανὲν ἐξ αὐτῶν δὲν ἔχῃ τὴν ἰδιότητα (Α) ἐκλέγω τὸ πρὸς τ' ἀριστερά, ἄλλως λαμβάνω τὸ μὴ ἔχον τὴν ἰδιότητα (Α)· καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις τὸ λαμβανόμενον διάστημα σημειῶ διὰ τοῦ (α_2, β_2) Ὁμοίως δύναμαι τὸ νέον αὐτὸ διάστημα νὰ ὑποδιαιρέσω εἰς δύο ἴσα διαστήματα καὶ ἐὰν κανὲν ἐκ τούτων δὲν ἔχῃ τὴν ἰδιότητα (Α) λαμβάνω τὸ πρὸς τ' ἀριστερά· ἄλλως λαμβάνω τὸ μὴ ἔχον τὴν ἰδιότητα (Α)· τὸ λαμβανόμενον διάστημα σημειῶ διὰ τοῦ (α_3, β_3). Ἐξακολουθῶν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δύναμαι νὰ νοήσω ὅτι προκύπτει ἄπειρος ἀκολουθία διαστημάτων:

$$(\Delta) \qquad (\alpha_1, \beta_1),\ (\alpha_2, \beta_2),\ (\alpha_3, \beta_3), \ldots (\alpha_\nu, \beta_\nu) \ldots$$

(¹) Διότι ἐὰν ἕκαστον ἐκ τῶν δύο μερικῶν διαστημάτων εἶχε τὴν ἰδιότητα (Α) καὶ τὸ ὅλον διάστημα θὰ εἶχε προφανῶς τὴν ἰδιότητα (Α).

Ἂς θεωρήσω ἤδη τὰς ἀκολουθίας

$$(\Sigma_1) \qquad \alpha_1, \quad \alpha_2, \ldots \alpha_\nu, \ldots$$
$$(\Sigma_2) \qquad \beta_1, \quad \beta_2, \ldots \beta_\nu, \ldots$$

Παρατηρῶ, ὅτι ἐκ τοῦ τρόπου, καθ' ὃν ἐσχηματίσθησαν τὰ διάφορα διαστήματα, προκύπτει, ὅτι εἰς τὴν ἀκολουθίαν (Σ_1) οἱ ὅροι βαίνουν αὐξανόμενοι χωρὶς ποτὲ νὰ φθάσουν τὸ β (ἢ τοὐλάχιστον δὲν ἐλαττοῦνται)· ὅθεν (§ 45) ἡ ἀκολουθία (Σ_1) ἔχει ὅριον· ὁμοίως ἔχω, ὅτι ἡ (Σ_2) εἶναι μονότονος ἐλαττουμένη καὶ ὅτι οἱ ὅροι της μένουν μεγαλύτεροι τοῦ α· ἐπομένως ἡ (Σ_2) ἔχει ὅριον. Ἀλλὰ

$$\beta_\nu - \alpha_\nu = \frac{\beta - \alpha}{2^\nu}.$$

ὅθεν $\quad \text{ορ}(\beta_\nu - \alpha_\nu) = 0, \quad$ δι' $\text{ορ}\nu = \infty$ · $\quad$ ἢ καὶ $\quad \text{ορ}\alpha_\nu = \text{ορ}\beta_\nu$. Ἐὰν τὸ κοινὸν αὐτὸ ὅριον καλέσω γ θὰ ἔχω, ὅτι ὁ γ θὰ εἶναι ἢ ἀριθμός τις μεταξὺ α καὶ β ἢ α ἢ β. Ἐὰν ὁ γ εἶναι μεταξὺ α καὶ β δυνάμεθα προφανῶς νὰ εὕρωμεν διάστημα (α_ν, β_ν), [ἐκ τῶν διαστημάτων (Δ)], ὅσον θέλωμεν μικρόν, εἰς ὃ νὰ ἀνήκῃ ὁ γ· εἰς ὅλα ὅμως τὰ διαστήματα (Δ), ἐπομένως καὶ εἰς αὐτό, ἡ αἰώρησις τῆς συναρτήσεως δὲν εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, μικροτέρα τοῦ η· ἀλλὰ δύναμαι νὰ θεωρήσω, (συμφώνως πρὸς τὰ προηγούμενα) ὅτι τὸ $\beta_\nu - \alpha_\nu$ (τὸ περιέχον τὸ σημεῖον γ) τείνει πρὸς τὸ μηδέν· ἐξ αὐτοῦ ἕπεται ὅτι ἡ αἰώρησις τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ σημεῖον γ θὰ εἶναι οὐχὶ μικροτέρα τοῦ η καὶ ἐπομένως ἡ σ(x) δὲν θὰ εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ γ.

Ὑπέθεσα ὅτι τὸ γ εὑρίσκεται μεταξὺ α καὶ β· ἂς ὑποθέσω ἤδη ὅτι τὸ γ συμπίπτει μὲ τὸ α· θὰ ἔχω πάλιν, ὅτι εἰς τὸ διάστημα $(\alpha\, \beta_\nu)$, ὅπου τὸ β_ν πλησιάζει πρὸς τὸ α ὅσον θέλω, ἡ αἰώρησις δὲν εἶναι μικροτέρα τοῦ η· ὥστε καὶ εἰς τὸ α ἡ αἰώρησις θὰ εἶναι $\geqq$η· ἂς ὑποθέσω τέλος ὅτι γ=β· θὰ ἔχω πάλιν, ὅτι ἡ αἰώρησις εἰς τὸ β θὰ εἶναι $\geqq$ η [ἐννοεῖται ὅτι τότε ἡ αἰώρησις εἰς τὸ β θὰ θεωρηθῇ ὡς ὅριον αἰωρήσεων τῆς συναρτήσεως εἰς τμήματα λαμβανόμενα πρὸς τ' ἀριστερὰ τοῦ β]. Ὥστε καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις ἡ συνάρτησις δὲν θὰ ἦτο συνεχὴς εἰς τὸ γ καὶ ἐπομένως ἡ συνάρτησις δὲν θὰ ἦτο συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα (α,β). Ἀπεδείχθη οὕτω ἡ ἑξῆς πρότασις.

I. ***Ἐὰν συνάρτησίς τις*** σ(x) ***εἶναι συνεχὴς εἰς διάστημά τι*** (αβ) ***καὶ η τυχὼν δοθεὶς θετικὸς ἀριθμός, εἶναι δυνατὸν νὰ***

***διαιρεθῇ τὸ διάστημα** (α,β) **εἰς διαστήματα τοιαῦτα, ὥστε ἡ αἰώρησις τῆς συναρτήσεως** $\sigma(x)$ **εἰς ἕκαστον τῶν διαστημάτων τούτων νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ** η.*

104. Θὰ ἀποδείξω ἤδη ὅτι ἡ $\sigma(x)$, ἥτις ὑπετέθη συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα (α,β), εἶναι περατωμένη εἰς αὐτὸ τὸ διάστημα· πρὸς τοῦτο ἂς ὑποθέσω ὅτι ἐδόθη θετικός τις ἀριθμὸς η καὶ ὅτι διῄρεσα τὸ διάστημα (α,β) εἰς διαστήματα τοιαῦτα, (§ 103) ὥστε ἡ αἰώρησις τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$ εἰς ἕκαστον τῶν διαστημάτων αὐτῶν νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ η· ἔστωσαν τοιαῦτα διαστήματα τά :

$$(\alpha, x_1), \ (x_1, x_2), \ldots (x_{\mu-1}\ \beta).$$

Ἔστω κατ' ἀρχὰς x τυχοῦσα τιμὴ τοῦ διαστήματος (α, x_1)· ἐὰν καλέσω M_1 καὶ μ_1 τὸ ἀνώτερον καὶ κατώτερον πέρας τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ διάστημα (α, x_1) θὰ ἔχω

$$|\,\sigma(x)-\sigma(\alpha)\,| < M_1-\mu_1$$

[διότι ἢ $\sigma(x) \geqq \sigma(\alpha)$ ἢ $\sigma(\alpha)>\sigma(x)$· καὶ εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν παρατηρῶ, ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν τὸ $\sigma(x)$ νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ M_1, οὔτε τὸ $\sigma(\alpha)$ νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ μ_1· εἰς δὲ τὴν δευτέραν περίπτωσιν παρατηρῶ, ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν τὸ $\sigma(\alpha)$ νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ M_1 καὶ τὸ $\sigma(x)$ μικρότερον τοῦ μ_1]· ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως ἔχω $M_1-\mu_1<\eta$, ὥστε

$$|\,\sigma(x)-\sigma(\alpha)\,| < \eta$$

καὶ ἐπομένως

$$|\,\sigma(x)\,| < |\,\sigma(\alpha)\,| + \eta\cdot$$

ἀλλὰ καὶ ἡ τιμὴ x_1 ἀνήκει εἰς τὸ διάστημα (α, x_1) ὅθεν καὶ :

$$(1) \qquad |\,\sigma(x_1)\,| < |\,\sigma(\alpha)\,| + \eta$$

Ἔστω ἤδη x τυχοῦσα τιμὴ τοῦ διαστήματος (x_1, x_2) καὶ M_2, μ_2 τὸ ἀνώτερον καὶ κατώτερον πέρας τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ διάστημα (x_1, x_2). Θὰ ἔχω

$$|\,\sigma(x)-\sigma(x_1)\,| \leqq M_2-\mu_2<\eta\cdot$$

ἐπομένως

$$|\,\sigma(x)\,| < |\,\sigma(x_1)\,| + \eta\cdot$$

ὅθεν δυνάμει τῆς ἀνισότητος (1), λαμβάνω

$$|\,\sigma(x)\,| < |\,\sigma(\alpha)\,| + 2\eta\cdot$$

ἀλλὰ τὸ x_2 ἀνήκει εἰς τὸ διάστημα (x_1, x_2)· ὅθεν καί :

$$|\,\sigma(x_2)\,| < |\,\sigma(\alpha)\,| + 2\eta$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκω, ὅτι διὰ πᾶσαν τιμὴν x τοῦ διαστήματος (x_2, x_3) θὰ ἔχω

$$|\,\sigma(x)\,| < |\,\sigma(\alpha)\,| + 3\,\eta,$$

διὰ πᾶσαν τιμὴν x τοῦ διαστήματος (x_3, x_4) θὰ ἔχω

$$|\,\sigma(x)\,| < |\,\sigma(\alpha)\,| + 4\,\eta$$

καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς μέχρι τοῦ τελευταίου διαστήματος $(x_{\mu-1}, \beta)$, διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ ὁποίου θὰ ἔχω

$$|\,\sigma(x)\,| < |\,\sigma(\alpha)\,| + \mu\eta.$$

Κατὰ ταῦτα, δὲν θὰ ὑπάρχῃ τιμὴ x τοῦ διαστήματος (α, β), διὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς συναρτήσεως νὰ γίνεται μεγαλυτέρα τοῦ $|\,\sigma(\alpha)\,| + \mu\eta$ ἢ ἴση πρὸς αὐτό· ἄρα ἡ σ(x) εἶναι συνάρτησις ***περατωμένη*** ἐν τῷ διαστήματι (α, β). Ἀπεδείχθη οὕτω ἡ ἑξῆς πρότασις.

II. ***Πᾶσα συνάρτησις*** σ(x) ***συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα*** (α, β) ***εἶναι συνάρτησις περατωμένη εἰς αὐτὸ τὸ διάστημα.***

105.—Εἴδομεν ἀνωτέρω, (§ 14) ὅτι δυνατὸν τὸ ἀνώτερον πέρας περατωμένου συνόλου νὰ μὴ ἀνήκῃ εἰς τὸ σύνολον, ὅπως ἐπίσης δυνατὸν τὸ κατώτερον πέρας νὰ μὴ εἶναι ἀριθμὸς τοῦ συνόλου· ἀφ' ἑτέρου (§ 104) ἐὰν ἡ σ(x) εἶναι συνεχὴς εἰς διάστημά τι (α, β) τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τῆς σ(x) ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ θὰ εἶναι περατωμένον· προκύπτει ἤδη τὸ ζήτημα, ἐὰν τὸ ἀνώτερον καὶ κατώτερον πέρας τοῦ συνόλου τούτου, ἀποτελῶσι στοιχεῖα τοῦ ἰδίου συνόλου, ὁπότε (§ 14) τὸ ἀνώτερον πέρας θὰ λέγεται καὶ ***μέγιστον*** τῆς σ(x) ἐν τῷ διαστήματι (α, β), τὸ δὲ κατώτερον πέρας θὰ λέγεται καὶ ***ἐλάχιστον***· ἀποδεικνύεται ὅτι τοῦτο συμβαίνει· δηλαδὴ πᾶσα συνάρτησις σ(x), ἡ ὁποία εἶναι συνεχὴς εἰς ἓν διάστημα (α, β), φθάνει τὸ ἀνώτερον αὐτῆς πέρας (ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ) M, ὅπως ἐπίσης καὶ τὸ κατώτερον μ· ἤτοι, ὑπάρχει τιμὴ τοῦ x ἐν τῷ διαστήματι (α, β), δι' ἣν $\sigma(x) = M$ καὶ τιμὴ ἐν τῷ αὐτῷ διαστήματι, δι' ἣν $\sigma(x) = \mu$· ἔχει, τουτέστι, μέγιστον καὶ ἐλάχιστον ἡ συνάρτησις σ(x) ἐν τῷ διαστήματι (α, β).

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται τοῦτο διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Ἔστω ὅτι ἡ σ(x) δὲν φθάνει τὴν τιμὴν M, ὅταν τὸ x λαμβάνῃ τὰς τιμὰς τοῦ διαστήματος (α, β)· τότε τὸ $M - \sigma(x)$ θὰ εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός, διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x ἐν τῷ διαστήματι (α, β), θὰ εἶναι δὲ καὶ θετικὸν (διότι M εἶναι τὸ ἀνώτερον πέρας)· ἐπειδὴ δὲ ἡ σ(x) εἶναι συνεχὴς ἐν τῷ διαστήματι (α, β) θὰ ἔχω, ὅτι καὶ ἡ συνάρτησις

$$\frac{1}{M-\sigma(x)}$$

θὰ εἶναι συνεχὴς ἐν τῷ αὐτῷ διαστήματι· ἂς καλέσω αὐτὴν f(x).

Ἡ f(x) εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα (α, β)· ἐπομένως (§ 104) θὰ εἶναι περατωμένη· ἤτοι θὰ ὑπάρχῃ ἀριθμός τις θετικὸς A, τὸν ὁποῖον δὲν θὰ ὑπερβαίνῃ ἡ f(x)· ἤτοι πρέπει νὰ ἔχω διὰ πᾶσαν τιμὴν x τοῦ διαστήματος (α, β), ὅτι

$$\frac{1}{M-\sigma(x)}<A \quad \text{ἢ καὶ} \quad M-\sigma(x)>\frac{1}{A}\cdot$$

ὥστε διὰ πᾶσαν τιμὴν x ***τοῦ διαστήματος*** (α, β) θὰ ἔχω

$$M-\sigma(x)>\varepsilon\cdot$$

$\left(\text{ἐκάλεσα } \varepsilon \text{ τὸ } \frac{1}{A}\right)$ ἢ ἀκόμη $M-\varepsilon>\sigma(x)$. Ἀλλὰ τὸ M εἶναι ἀνώτερον πέρας τῆς σ(x) εἰς τὸ διάστημα (α, β)· ὅθεν (§ 13) θὰ ὑπάρχῃ τιμή τις x τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ διάστημα (α, β), δι' ἣν $M-\varepsilon<\sigma(x)$, δηλ. θὰ ἔχω τιμὰς τοῦ διαστήματος (α, β), δι' ἃς δὲν ἰσχύει ἡ $M-\varepsilon>\sigma(x)$.

Τὸ ἄτοπον προέκυψε διότι ὑπέθεσα, ὅτι δὲν ὑπάρχει τιμή τις x τοῦ διαστήματος (α, β), δι' ἣν $\sigma(x)-M=0$· ἄρα ὑπάρχει τιμὴ x τοῦ διαστήματος (α, β), δι' ἣν $\sigma(x)-M=0$ ἤτοι $\sigma(x)=M$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι ὑπάρχει τιμὴ x τοῦ διαστήματος (α, β), δι' ἣν $\sigma(x)=\mu$.

Ἤτοι :

III. ***Ἐὰν συνάρτησίς τις*** σ(x) ***εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα*** (α, β), ***θὰ ὑπάρχῃ τοὐλάχιστον μία τιμὴ τοῦ διαστήματος αὐτοῦ, δι' ἣν ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως εἶναι ἴση μὲ τὸ ἀνώτερον πέρας τῆς συναρτήσεως (εἰς τὸ διάστημα τοῦτο), ὅπως ἐπίσης καὶ τιμή, δι' ἣν γίνεται ἴση πρὸς τὸ κατώτερον πέρας.***

106.—Ἔστω ὅτι συνάρτησίς τις συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα (α, β) λαμβάνει ἑτεροσήμους τιμὰς διὰ x=α καὶ x=β· π. χ. ἔστω σ(α)<0 καὶ σ(β)>0· λέγω ὅτι θὰ ὑπάρχῃ τιμή τις x ἐν τῷ διαστήματι (α, β), δι' ἣν σ(x)=0

Χωρίζω, πρὸς τοῦτο τὸ διάστημα (α, β) εἰς δύο ἄλλα διαστήματα

(α, γ) (γ, β) καὶ παρατηρῶ, ὅτι ἢ θὰ εἶναι $\sigma(\gamma)=0$ καὶ τότε εὑρέθη τιμή, δι' ἣν μηδενίζεται τὸ $\sigma(x)$· ἢ θὰ εἶναι

$$\sigma(\gamma) \neq 0\cdot$$

τότε, ἐὰν $\sigma(\gamma)<0$ λαμβάνω τὸ διάστημα (γ, β), ὁπότε ἔχω $\sigma(\gamma)<0$ $\sigma(\beta)>0$. ἐὰν δὲ $\sigma(\gamma)>0$ λαμβάνω τὸ διάστημα (α, γ) ὁπότε ἔχω $\sigma(\alpha)<0$, $\sigma(\gamma)>0$· ὁτιδήποτε καὶ ἂν συμβαίνῃ καλῶ (α_1, β_1) τὸ λαμβανόμενον διάστημα [ἤτοι εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν α_1 καλῶ τὸ γ καὶ β_1 τὸ β, εἰς δὲ τὴν δευτέραν περίπτωσιν α_1 καλῶ τὸ α καὶ β_1 τὸ γ]· θὰ ἔχω $\sigma(\alpha_1)<0$ καὶ $\sigma(\beta_1)>0$. Χωρίζω πάλιν τὸ διάστημα (α_1, β_1) εἰς δύο ἄλλα (α_1, γ_1), (γ_1, β_1)· καὶ ἢ θὰ ἔχω $\sigma(\gamma_1)=0$, ὁπότε εὑρέθη τιμή, δι' ἣν $\sigma(x)=0$ ἢ τὸ $\sigma(\gamma_1)$ θὰ εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός. Τότε ἂν ἔχω $\sigma(\gamma_1)<0$ λαμβάνω τὸ διάστημα (γ_1, β_1), ὁπότε ἔχω $\sigma(\gamma_1)<0$ καὶ $\sigma(\beta_1)>0$· ἐὰν δὲ $\sigma(\gamma_1)>0$ λαμβάνω τὸ διάστημα(α_1, γ_1), ὁπότε ἔχω $\sigma(\alpha_1)<0$ καὶ $\sigma(\gamma_1)>0$. Ὅτι δήποτε συμβαίνει, τὸ λαμβανόμενον διάστημα καλῶ (α_2, β_2)· ἐπομένως θὰ ἔχω $\sigma(\alpha_2)<0$ καὶ $\sigma(\beta_2)>0$. Χωρίζω πάλιν τὸ διάστημα (α_2, β_2) εἰς δύο διαστήματα (α_2, γ_2) (γ_2, β_2) καὶ ἢ $\sigma(\gamma_2)=0$ ὁπότε εὑρέθη τιμή, δι' ἣν $\sigma(x)=0$ ἢ $\sigma(\gamma_2)$ διάφορον τοῦ 0· ὁπότε θὰ ἔχω διάστημα (α_3, β_3) τοιοῦτον, ὥστε $\sigma(\alpha)<0$ καὶ $\sigma(\beta_3)>0$· προχωρῶν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἢ θὰ εὕρω τιμήν, δι' ἣν $\sigma(x)=0$ ἢ θὰ ἔχω δύο ἀκολουθίας ἀριθμῶν

$$(\Gamma) \qquad \begin{array}{l} \alpha_1, \;\; \alpha_2, \;\; \alpha_3, \; . \; . \; . \; \alpha_\nu, \; . \; . \; . \\ \\ \beta_1, \;\; \beta_2, \;\; \beta_3, \; . \; . \; . \; \beta_\nu, \; . \; . \; . \end{array}$$

Εἰς τὴν πρώτην ἀκολουθίαν οἱ ἀριθμοὶ βαίνουν ἐν γένει αὐξανόμενοι, ἤτοι $(\alpha_{\nu+1} \geq \alpha_\nu)$ καὶ δὲν ὑπερβαίνουν τὸν ὡρισμένον ἀριθμὸν β, ἄρα ἔχουν ὅριον· εἰς δὲ τὴν δευτέραν βαίνουν ἐν γένει ἐλαττούμενοι, ἤτοι $(\beta_{\nu+1} \leq \beta_\nu)$, χωρὶς νὰ γίνονται ποτὲ μικρότεροι τοῦ α· ἄρα ἔχουν ὅριον· ἐπειδὴ δὲ $\text{ορ}(\beta_\nu - \alpha_\nu)=0$, θὰ ἔχουν αἱ ἀκολουθίαι αὗται κοινὸν ὅριον ἀριθμόν τινα τοῦ διαστήματος (α, β)· ἔστω οὗτος ὁ δ· ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις $\sigma(x)$ εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ δ, θὰ ἔχω, ὅτι (§ 98) καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν τείνῃ τὸ x πρὸς τὸ δ ἡ συνάρτησις θὰ τείνῃ πρὸς τὸ αὐτὸ ὅριον· ἤτοι

$$\text{δι' ορ } \nu=\infty \;\; \text{θὰ ἔχω} \;\; \text{ορ } \sigma(\alpha_\nu)=\text{ορ } \sigma(\beta_\nu)=\sigma(\delta).$$

Ἀλλὰ τὰ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ εἶναι τιμαὶ τοιαῦται, ὥστε

$$\sigma(\alpha_1) < 0, \quad \sigma(\alpha_2) < 0, \ldots \sigma(\alpha_\nu) < 0, \ldots$$

ἑπομένως τὸ ορ $\sigma(\alpha_\nu)$ θὰ ἔχῃ τιμὴν ἀρνητικὴν ἢ μηδέν. Τὰ δὲ $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\nu, \ldots$ εἶναι τιμαὶ τοιαῦται, ὥστε

$$\sigma(\beta_1) > 0, \quad \sigma(\beta_2) > 0, \ldots \sigma(\beta_\nu) > 0, \ldots$$

ἑπομένως τὸ ορ $\sigma(\beta_\nu)$ θὰ ἔχῃ τιμὴν θετικὴν ἢ μηδέν· ἀλλὰ

$$\text{ορ}\ \sigma(\alpha_\nu) = \text{ορ}\ \sigma(\beta_\nu)\cdot$$

ὅθεν τὸ ὅριον τοῦτο εἶναι μηδέν, ἤτοι $\sigma(\delta)=0$· ἀπεδείχθη οὕτω ἡ ἑξῆς πρότασις.

IV. ***Ἐὰν** $\sigma(x)$ **εἶναι συνεχὴς συνάρτησις εἴς τι διάστημα** (α, β) **καὶ ἐὰν τὰ** $\sigma(\alpha)$ **καὶ** $\sigma(\beta)$ **εἶναι ἑτερόσημα, ὑπάρχει μία τοὐλάχιστον τιμὴ μεταξὺ α καὶ β, δι' ἣν** $\sigma(x)=0$· **ἤτοι θὰ ὑπάρχῃ μία τοὐλάχιστον ῥίζα μεταξὺ α καὶ β τῆς ἐξισώσεως** $\sigma(x)=0$.*

Παρατήρησις. Ὁ τρόπος, καθ' ὃν ἔγεινεν ἡ ἀπόδειξις, δεικνύει, ὅτι δυνατὸν νὰ σχηματίζωνται πολλαὶ διπλαῖ ἀκολουθίαι ὅπως αἱ (Γ)· ἑπομένως δὲν ἀποκλείεται νὰ ὑπάρχουν καὶ ἄλλαι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\sigma(x)=0$ ἐν τῷ διαστήματι (α, β).

107.—Ἔστω συνάρτησις $\sigma(x)$ συνεχὴς εἰς διάστημά τι (α, β) καὶ τυχὼν ἀριθμὸς Α, περιλαμβανόμενος μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν $\sigma(\alpha)$ καὶ $\sigma(\beta)$. Παρατηρῶ ὅτι ἡ συνάρτησις $\sigma(x)-A$ θὰ εἶναι καὶ αὐτὴ συνεχὴς εἰς τὸ (α, β) καὶ ὅτι θὰ λαμβάνῃ τιμὰς ἑτεροσήμους διὰ $x=\alpha$ καὶ $x=\beta$· ἑπομένως (§ 106) θὰ ὑπάρχῃ μία τοὐλάχιστον τιμὴ τοῦ x μεταξὺ α καὶ β, διὰ τὴν ὁποίαν θὰ εἶναι $\sigma(x)-A=0$ ἢ $\sigma(x)=A$· ὅθεν :

V.—***Ἐὰν ἡ** $\sigma(x)$ **εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα** (α, β) **λαμβάνει αὕτη τοὐλάχιστον ἅπαξ πᾶσαν τιμὴν περιλαμβανομένην μεταξὺ** $\sigma(\alpha)$ **καὶ** $\sigma(\beta)$.*

108. — Ἐὰν γ καὶ δ εἶναι ἀριθμοὶ περιλαμβανόμενοι μεταξὺ α καὶ β θὰ εἶναι προφανῶς ἡ $\sigma(x)$ συνεχὴς καὶ εἰς τὸ διάστημα (γ, δ) [ἀφοῦ ὑπετέθη συνεχὴς εἰς τὸ (α, β)]· ὥστε ἡ $\sigma(x)$ λαμβάνει τοὐλάχιστον ἅπαξ πᾶσαν τιμὴν περιλαμβανομένην μεταξὺ $\sigma(\gamma)$ καὶ $\sigma(\delta)$· δηλ. ἐὰν θέσω·

$$\sigma(\gamma)=\Gamma \quad \text{καὶ} \quad \sigma(\delta)=\Delta$$

ἔχω, ὅτι ἡ $\sigma(x)$ λαμβάνει πᾶσαν τιμὴν μεταξὺ Γ καὶ Δ· ἤτοι : μία συνάρτησις συνεχὴς εἰς διάστημά τι (α, β) καὶ λαμβάνουσα ἐν τῷ μεταξὺ δύο τιμὰς Γ καὶ Δ θὰ λαμβάνῃ καὶ πᾶσαν τιμὴν ἐνδιάμεσον.

Ἐὰν ἤδη ληφθῇ ὑπ᾽ ὄψιν, (§ 105) ὅτι ὑπάρχει τιμή τις τοῦ x ἐν τῷ διαστήματι (α, β), δι᾽ ἣν

$$\sigma(x)=M$$

καὶ τιμή τις, δι᾽ ἣν $\sigma(x)=\mu$ (ὅπου M καὶ μ τὸ ἀνώτερον καὶ κατώτερον πέρας τῆς σ(x) εἰς τὸ διάστημα (α, β), προκύπτει ὅτι:

Πᾶσα συνάρτησις συνεχὴς εἰς διάστημά τι (α, β) ***διέρχεται τοὐλάχιστον μίαν φορὰν ἀπὸ πᾶσαν τιμὴν περιλαμβανομένην μεταξὺ M καὶ μ.***

109.—Εἶναι προφανές, ὅτι δὲν δύναμαι νὰ προβῶ εἰς τὰ προηγούμενα συμπεράσματα, ἐὰν ἡ σ(x) δὲν εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα (α,β). Π. χ. ἔστω ἡ συνάρτησις τοῦ 1ου παραδείγματος τῆς § 102, θεωρουμένη εἰς τὸ διάστημα

$$0{,}01 \leq x \leq 0{,}1\cdot$$

ἀνώτερον πέρας M τῆς συναρτήσεως (εἰς τὸ διάστημα αὐτὸ) εἶναι τὸ 0,91 καὶ κατώτερον μ, τὸ 0,01· ὑπάρχει τιμὴ (τοῦ διαστήματος τούτου) δι᾽ ἣν $y=\mu$· (διότι διὰ $x=0{,}1$ εἶναι $y=0{,}01$) δὲν ὑπάρχει δὲ τιμή, δι᾽ ἣν $y=M$· ὅπως ἐπίσης δὲν ὑπάρχει τιμή, δι᾽ ἣν τὸ y νὰ λαμβάνῃ τὴν τιμὴν 0,11, ἥτις περιλαμβάνεται μεταξὺ M καὶ μ, ἢ τὴν τιμὴν 0,21 κ λ π.

110.—***Ὁμαλὴ συνέχεια.*** Κατὰ τὰ προηγούμενα (§ 103) ἐὰν συνάρτησίς τις σ(x) εἶναι συνεχὴς εἰς διάστημά τι (α,β) καὶ ἐὰν δοθῇ θετικός τις ἀριθμὸς θ ***οἱοσδήποτε***, δύναμαι νὰ χωρίσω τὸ διάστημα (α,β) εἰς διαστήματα τοιαῦτα, ὥστε εἰς ἕκαστον ἐκ τούτων ἡ αἰώρησις τῆς σ(x) νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ θ· ἔστω λοιπὸν ὅτι διῄρεσα τὸ διάστημα (α,β) κατά τινα τρόπον εἰς μέρη τοιαῦτα καὶ ὅτι τὸ μικρότερον (ἢ μηδενὸς μεγαλύτερον) ἐξ αὐτῶν τῶν διαστημάτων ἔχει πλάτος τι λ· ***δὲν ἕπεται***, ὅτι ἐάν, κατὰ τρόπον τινά, διαιρέσωμεν τὸ διάστημα (α,β) εἰς διαστήματα πλάτους μικροτέρου τοῦ λ, ἡ αἰώρησις εἰς ἕκαστον τούτων θὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ θ· θὰ ἀποδείξω ἤδη, ὅτι δύναμαι νὰ εὕρω ἀριθμὸν τοιοῦτον, ὥστε εἰς πᾶν διάστημα πλάτους μικροτέρου του ἡ αἰώρησις νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ θ.

Θεωρῶ πρὸς τοῦτο διαίρεσίν τινα τοῦ διαστήματος (α,β) εἰς διαστήματα :

$$(\alpha, x_1), \quad (x_1, x_2), \ldots \quad (x_{\nu-1}, \beta)$$

τοιαύτην, ὥστε εἰς ἕκαστον ἐκ τούτων ἡ αἰώρησις τῆς συναρτήσεως νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ $\frac{\vartheta}{2}$· ἔστω ε τὸ πλάτος τοῦ μικροτέρου ἐξ αὐτῶν τῶν διαστημάτων καὶ ἔστω ὅτι διήρεσα τὸ διάστημα (α, β) ***καθ' οἱονδήποτε τρόπον*** εἰς διαστήματα πλάτους μικροτέρου τοῦ ε· ἔστωσαν τοιαῦτα τά:

$$(\alpha, x'_1), \quad (x'_1, x'_2) \ldots \quad (x'_{\rho-1}, \beta)$$

λέγω, ὅτι εἰς ἕκαστον ἐκ τούτων τῶν διαστημάτων ἡ αἰώρησις, τῆς συναρτήσεως εἶναι μικροτέρα τοῦ ϑ.

Καὶ τῷ ὄντι ἔστω τυχὸν ἐξ αὐτῶν π. χ. τὸ (x'_1, x'_2)· ἐπειδὴ τὸ (α, x'_1) εἶναι μικρότερον τοῦ ε καὶ τὸ (α, x_1) δὲν εἶναι μικρότερον τοῦ ε, θὰ εἶναι τὸ (α, x'_1) μικρότερον τοῦ (α, x_1) καὶ ἑπομένως τὸ x'_1 εἶναι μεταξὺ τῶν α καὶ x_1, ἀφ' ἑτέρου τὸ (α, x'_2) θὰ ἔχῃ πλάτος μικρότερον τοῦ 2ε [διότι τὰ (α, x'_1) καὶ (x'_1, x'_2) ἔχουν ἕκαστον πλάτος μικρότερον τοῦ ε] καὶ τὸ (α, x_2) ἔχει πλάτος τοὐλάχιστον ἴσον πρὸς τὸ 2ε· ἑπομένως τὸ x'_2 θὰ εὑρεθῇ ἐντὸς τοῦ διαστήματος (α, x_2)· καὶ ἐὰν μὲν εὑρεθῇ τὸ x'_2 εἰς τὸ διάστημα (α, x_1) θὰ περιέχεται τὸ (x'_1, x'_2) εἰς τὸ (α, x_1)· ὅθεν καὶ ἡ αἰώρησις τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ (x'_1, x'_2) θὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ $\frac{\vartheta}{2}$, ἑπομένως καὶ τοῦ ϑ· ἐὰν δὲ τὸ x'_2 εὑρεθῇ εἰς τὸ (x_1, x_2) ἡ αἰώρησις τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ (x'_1, x'_2) δὲν θὰ εἶναι (§ 88) μεγαλυτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν αἰωρήσεων εἰς τὰ διαστήματα (α, x_1) καὶ (x_1, x_2), ἑπομένως θὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ $\frac{\vartheta}{2}+\frac{\vartheta}{2}$, ἤτοι τοῦ ϑ· ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ αἰώρησις τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ διάστημα (x'_2, x'_3) θὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ϑ κ. ο. κ· ὅθεν ἕπεται ἡ πρότασις:

VI.— ***Ἐὰν συνάρτησίς τις*** $\sigma(x)$ ***εἶναι συνεχὴς εἰς διάστημά τι*** (α, β) ***καὶ ἐὰν δοθῇ θετικός τις ἀριθμὸς ϑ, εἶναι δυνατὸν πάντοτε νὰ εὑρεθῇ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς ε τοιοῦτος, ὥστε καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν διαιρεθῇ τὸ (α, β) εἰς διαστήματα πλάτους μικροτέρου τοῦ ε νὰ εἶναι εἰς ἕκαστον τῶν διαστημάτων τούτων ἡ αἰώρησις μικροτέρα τοῦ ϑ.***

Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι ἐὰν γ καὶ x εἶναι δύο τιμαὶ τοῦ διαστήματος (α, β) πληροῦσαι τὴν ἀνισότητα $|x-\gamma|<\varepsilon$, θὰ εἶναι ἡ αἰώρησις τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ διάστημα (γ, x) μικροτέρα τοῦ θ· ἐπομένως καὶ τὸ $|\sigma(x)-\sigma(\gamma)|$ (ὡς μὴ ὑπερβαῖνον τὴν αἰώρησιν) θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ θ· ὁ προσδιορισμὸς δὲ τοῦ ε εἶναι κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἀνεξάρτητος τοῦ γ [δηλ. τῆς ἀρχῆς τοῦ διαστήματος (γ, x)] ἐξαρτᾶται δὲ μόνον ἐκ τοῦ θ.

Ὥστε, ὅταν συνάρτησίς τις σ(x) εἶναι συνεχὴς εἰς διάστημά τι (α, β), εἰς πάντα θετικὸν ἀριθμὸν θ ἀντιστοιχεῖ θετικὸς ἀριθμὸς ε τοιοῦτος, ὥστε ὅταν γ καὶ x εἶναι δύο ***τυχοῦσαι*** τιμαὶ τοῦ διαστήματος (α, β) πληροῦσαι τὴν ἀνισότητα $|x-\gamma|<\varepsilon$ νὰ εἶναι καὶ

$$|\sigma(x)-\sigma(\gamma)|<\vartheta.$$

Ἡ πρότασις αὕτη ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς.

Πᾶσα συνάρτησις συνεχὴς εἰς διάστημά τι (α, β) [1] εἶναι ***ὁμαλῶς συνεχὴς*** εἰς τὸ αὐτὸ διάστημα.

Παρατηρήσεις. — 1. Εἰς τὰ προηγούμενα ὑπετέθη κλειστὸν τὸ διάστημα (α, β). Π.χ. ἡ πρότασις III (σελ. 132) δὲν ἀποδεικνύεται ἐὰν θεωρήσω τὸ ἀνοικτὸν διάστημα

$$\alpha<x\leq\beta\cdot$$

ἂς θεωρήσω ἐπὶ παραδείγματι τὴν συνάρτησιν $1-x$ εἰς τὸ διάστημα,

$$0<x\leq 1\cdot$$

ἀνώτερον πέρας τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως εἶναι ἡ μονάς· παρατηρῶ ὅτι δὲν ὑπάρχει τιμὴ τοῦ διαστήματος, δι' ἣν ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως νὰ εἶναι ἡ μονάς.

2.—Ὁ ὁρισμὸς τῆς συνεχοῦς συναρτήσεως ἐπεκτείνεται καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν μὴ περατωμένων διαστημάτων, ὁποῖα εἶναι τὰ

$$(-\infty,\ \alpha),\qquad (\alpha,+\infty),\qquad (-\infty,+\infty).$$

Ἤτοι ἔστω συνάρτησις σ(x) ὡρισμένη διὰ πᾶσαν τιμὴν διαστήματός τινος Δ. Θὰ λέγωμεν, ὅτι ἡ σ(x) εἶναι συνεχὴς διὰ τιμήν τινα α τοῦ Δ, ἐάν, διὰ πᾶσαν ἀκολουθίαν ἀριθμῶν (τοῦ Δ) $x_1, x_2, \ldots x_\nu, \ldots$ τείνουσαν πρὸς τὸ α ἔχωμεν, $\text{ορ}\,\sigma(x_\nu)=\sigma(\alpha)$· δηλ. ἡ σ(x) εἶναι συνεχὴς διὰ $x=\alpha$, ὅταν ***καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν τείνῃ τὸ x πρὸς τὸ α,*** (λαμβάνον πάντοτε τιμὰς τοῦ διαστήματος Δ) ἡ συνάρτησις τείνῃ πρὸς τὸ αὐτὸ ὅριον σ(α).—Λέγομεν, ὅτι

---

[1] Ὑποτίθεται, ἐννοεῖται, κλειστὸν τὸ διάστημα (α, β).

ἡ σ(x) εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ Δ ὅταν εἶναι συνεχὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ Δ· π. χ. ἡ συνάρτησις —x εἶναι ὡρισμένη εἰς τὸ διάστημα

$$-\infty < x < +\infty$$

(ἤτοι διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν) εἶναι δὲ καὶ συνεχὴς εἰς τὸ αὐτὸ διάστημα· διότι ἔστω τυχὼν πραγματικὸς ἀριθμὸς γ· ἐὰν θεωρήσω ***τυχοῦσαν*** ἀκολουθίαν πραγματικῶν ἀριθμῶν $x_1, x_2, \ldots x_\nu, \ldots$ ἔχουσαν ὅριον τὸ γ, ἡ ἀκολουθία τῶν ἀριθμῶν

$$-x_1, -x_2, \ldots -x_\nu \ldots$$

θὰ ἔχῃ ὅριον τὸ —γ καὶ ἑπομένως, $\text{ορ}(-x_\nu) = -\text{ορ}x_\nu$ ἤτοι, θέτων $-x = \sigma(x)$ ἔχω $\text{ορ}\ \sigma(x_\nu) = \sigma(\text{ορ}x_\nu) = \sigma(\gamma)$.

Συνάρτησις μὲ ῥητὸν ὅρισμα.

112. Ὅρισμα καλεῖται ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ x· ἔστω συνάρτησις ***ῥητοῦ*** ὁρίσματος· ἤτοι ἔστω, ὅτι ἡ συνάρτησις σ(x) εἶναι ὡρισμένη διὰ πᾶσαν ***ῥητὴν*** τιμὴν τοῦ διαστήματος (α, β). Καλῶ (Σ_1) τὸ σύνολον αὐτό, δηλ. τὸ σύνολον τῶν ῥητῶν ἀριθμῶν τοῦ διαστήματος (α, β)· θὰ λέγω, ὅτι ἡ σ(x) εἶναι συνεχὴς διὰ τὸν τυχόντα ῥητὸν x′ τοῦ (Σ_1), ὅταν εἰς πάντα θετικὸν ἀριθμὸν θ, ὁσονδήποτε μικρόν, ἀντιστοιχεῖ θετικὸς ἀριθμὸς ε τοιοῦτος, ὥστε νὰ εἶναι $|\sigma(x)-\sigma(x')| < \theta$ διὰ πᾶσαν τιμὴν x τοῦ συνόλου (Σ_1), διὰ τὴν ὁποίαν ἔχω $|x-x'| < \varepsilon$.

Ἀναλόγως ἐπεκτείνεται καὶ ἡ ἔννοια τῆς ὁμαλῆς συνεχείας· οὕτω θὰ λέγω, ὅτι ἡ σ(x) εἶναι ὁμαλῶς συνεχὴς εἰς τὸ (Σ_1) ἐὰν εἰς πάντα θετικὸν ἀριθμὸν θ, ἀντιστοιχεῖ θετικὸς ε τοιοῦτος, ὥστε διὰ ***πᾶν*** ζεῦγος ἀριθμῶν x′, x″ τοῦ συνόλου (Σ_1) πληρούντων τὴν ἀνισότητα

$$|x'-x''| < \varepsilon, \quad \text{νὰ ἔχω} \quad |\sigma(x')-\sigma(x'')| < \theta.$$

Προφανὲς εἶναι, ὅτι ἐὰν τοῦτο συμβαίνῃ διὰ πᾶσαν θετικὴν ῥητὴν τιμὴν τοῦ θ, θὰ συμβαίνῃ καὶ διὰ πᾶσαν ἀσύμμετρον θετικὴν τιμὴν τοῦ θ.

113. ***Ἐπέκτασις συναρτήσεων ῥητοῦ ὁρίσματος.***—Ἔστω ἤδη, ὅτι συνάρτησίς τις σ(x) εἶναι ὡρισμένη διὰ πᾶσαν ***ῥητὴν*** τιμὴν τοῦ

διαστήματος (α, β) καὶ ὅτι εἶναι ὁμαλῶς συνεχὴς εἰς τὸ ***σύνολον τῶν ῥητῶν αὐτῶν τιμῶν***· λέγω ὅτι ὑπάρχει συνάρτησις f(x), ἡ ὁποία

1) Διὰ πᾶσαν ῥητὴν τιμὴν τοῦ (α, β) λαμβάνει τὴν αὐτὴν τιμήν, τὴν ὁποίαν λαμβάνει καὶ ἡ σ(x),

2) εἶναι ὡρισμένη δι' ὅλας τὰς τιμὰς (ῥητὰς καὶ ἀσυμμέτρους τοῦ (α, β),

3) εἶναι συνεχὴς εἰς ὁλόκληρον τὸ διάστημα (α, β)· ἤτοι εἶναι συνεχὴς διὰ πᾶσαν τιμήν, εἴτε ῥητήν, εἴτε μή, τοῦ διαστήματος (α, β).

Καὶ τῷ ὄντι, ἔστω τυχοῦσα τιμὴ τοῦ (α, β) σύμμετρος ἢ ἀσύμμετρος· δύναμαι νὰ εὕρω ἀκολουθίαν ῥητῶν ἀριθμῶν τοῦ διαστήματος (α, β)

$$(1) \qquad x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_\nu\ \ldots$$

ἔχουσαν ὅριον τὸ γ· ἐξ ὑποθέσεως ἡ σ(x) εἶναι ὡρισμένη διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς ἀκολουθίας (1)· ὑπάρχει ἑπομένως ἡ ἀκολουθία

$$(2) \qquad \sigma(x_1),\quad \sigma(x_2),\quad \sigma(x_3),\ \ldots\ \sigma(x_\nu),\ \ldots$$

Αὕτη ἔχει ὅριον· διὰ νὰ δείξω τοῦτο ἀρκεῖ συμφώνως πρὸς τὸ κριτήριον τοῦ Caychy νὰ δείξω, ὅτι δοθέντος οἱουδήποτε θετικοῦ θ, ὁσονδήποτε μικροῦ, εὑρίσκεται ὅρος τῆς (2) διαφέρων ἀπὸ ἑκάστου τῶν ἑπομένων ὀλιγώτερον τοῦ θ· ἀλλὰ ἡ σ(x) ὑπετέθη ὁμαλῶς συνεχὴς διὰ πᾶσαν ῥητὴν τιμὴν τοῦ (α, β)· ἑπομένως εὑρίσκεται ἀριθμὸς ε τοιοῦτος, ὥστε διὰ δύο τυχούσας ῥητὰς τιμὰς τοῦ (α,β), x′ καὶ x″, πληρούσας τὴν ἀνισότητα

$$|\, x'-x'' \,| < \varepsilon, \qquad \text{νὰ ἔχω} \qquad |\, \sigma(x')-\sigma(x'') \,| < \vartheta\cdot$$

ἀφ' ἑτέρου ὅμως ἡ ἀκολουθία (1) ἔχει ὅριον· θὰ εὑρίσκεται ἑπομένως ὅρος αὐτῆς x_μ τοιοῦτος, ὥστε

$$|\, x_{\mu+\rho} - x_\mu \,| < \varepsilon$$

διὰ (ρ=1, 2, 3, . . .), ὁπότε θὰ εἶναι καὶ

$$|\, \sigma(x_{\mu+\rho}) - \sigma(x_\mu) \,| < \vartheta.$$

Ὥστε ἡ (2) ἔχει ὅριον· καλῶ αὐτὸ Γ.—Ἔστω, ὅτι ἀντὶ τῆς ἀκολουθίας

(1) λαμβάνω ἄλλην ἀκολουθίαν ῥητῶν ἀριθμῶν τοῦ (α, β) ἔχουσαν ὅριον πάλιν τὸν γ, τὴν

$$(3) \qquad \omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3, \ldots \omega_\nu, \ldots$$

Θεωρῶ τὴν ἀκολουθίαν (4) $\quad \sigma(\omega_1), \quad \sigma(\omega_2), \quad \sigma(\omega_3), \ldots \sigma(\omega_\nu), \ldots$

θὰ ἔχῃ αὕτη ὅριόν τι Γ'· θὰ εἶναι $\Gamma = \Gamma'$. Διότι ἐὰν θεωρήσω τὴν ἀκολουθίαν

$$(5) \qquad \sigma(\omega_1)-\sigma(x_1), \qquad \sigma(\omega_2)-\sigma(x_2), \ldots \sigma(\omega_\nu)-\sigma(x_\nu), \ldots$$

θὰ ἔχω, ὅτι διά πάντα θετικὸν ϑ, εὑρίσκεται ὅρος τῆς (5) τοιοῦτος, ὥστε πάντες οἱ ἑπόμενοί του νὰ εἶναι ἀπολύτως μικρότεροι τοῦ ϑ· καὶ πράγματι, ἔστω τυχὼν θετικὸς ϑ· θὰ εὑρίσκεται θετικὸς ε τοιοῦτος, ὥστε διὰ $|\omega - x| < \varepsilon$ (ω καὶ x τυχόντες ῥητοὶ τοῦ (α, β) νὰ ἔχω

$$|\sigma(\omega)-\sigma(x)| < \vartheta\cdot$$

ἀφ' ἑτέρου ὅμως ἡ ἀκολουθία

$$\omega_1 - x_1, \quad \omega_2 - x_2, \ldots \quad \omega_\nu - x_\nu, \ldots$$

ἔχει ὅριον τὸ μηδέν, εὑρίσκεται ἑπομένως δείκτης μ τοιοῦτος, ὥστε

$$|\omega_{\mu+\varrho} - x_{\mu+\varrho}| < \varepsilon, \qquad (\varrho = 1, 2, 3, \ldots,$$

ἐξ οὗ καὶ

$$|\sigma(\omega_{\mu+\varrho}) - \sigma(x_{\mu+\varrho})| < \vartheta.$$

Ὥστε $\Gamma = \Gamma'$· ἤτοι, οἱασδήποτε ἀκολουθίας ὅριον καὶ ἂν θεωρηθῇ τὸ γ, θὰ ἔχω πάντοτε τὸ αὐτὸ ὅριον διὰ τὴν ἀντίστοιχον ἀκολουθίαν τῶν τιμῶν τῆς $\sigma(x)$ καὶ ἂν μὲν τὸ ν εἶναι ῥητός, τὸ Γ θὰ συμπίπτῃ προφανῶς μὲ τὴν ὡρισμένην ἐξ ὑποθέσεως τιμὴν $\sigma(\gamma)$· ἐὰν δὲ τὸ γ εἶναι ἀσύμμετρος θὰ ἔχω διὰ τὸ Γ μίαν ὡρισμένην τιμήν· δύναμαι οὕτω νὰ νοήσω συνάρτησιν $f(x)$, ἥτις εἶναι ὡρισμένη διὰ πᾶσαν ῥητὴν καὶ διὰ πᾶσαν ἀσύμμετρον τιμὴν τοῦ διαστήματος (α, β) καὶ ἡ ὁποία διὰ πᾶσαν ῥητὴν τιμὴν τοῦ (α, β) λαμβάνει τὴν τιμήν, τὴν ὁποίαν λαμβάνει καὶ ἡ $\sigma(x)$. Εὐκόλως ἐπίσης φαίνεται ὅτι, ἡ $f(x)$ εἶναι συνεχὴς διὰ τὴν τυχοῦσαν τιμὴν τοῦ x ἐν τῷ διαστήματι (α, β) εἴτε ῥητήν, εἴτε ἀσύμμετρον.

Ἡ συνάρτησις f(x) καλεῖται ***ἐπέκτασις*** τῆς σ(x)· ἡ μέθοδος δέ, δι' ἧς προσδιορίζεται ἡ ἐπέκτασις, καλεῖται ***ἀρχὴ ἐπεκτάσεως***.

Θὰ ἐφαρμόσω τὴν ἀρχὴν ἐπεκτάσεως διὰ νὰ ὁρίσω εἰς τὸ διάστημα (α, β) συναρτήσεις, αἵτινες ἔχουν ὁρισθῇ διὰ τὰς ῥητὰς τιμὰς τοῦ (α, β). Διὰ τὴν ἐφαρμογὴν αὐτήν, θὰ γίνῃ χρῆσις μερικῶν προτάσεων ἀναφερομένων εἰς τὰς αὐξούσας καὶ ἐλαττουμένας συναρτήσεις.

Αὔξουσα ἢ ἐλαττουμένη συνάρτησις

114.—Συνάρτησίς τις, ὡρισμένη εἰς ἓν σύνολον (Σ_1), καλεῖται ***σταθερῶς αὔξουσα,*** ἐὰν ἡ ἀνισότης $x' < x''$ (ὅπου x', x'' τιμαὶ τοῦ Σ_1) συνεπάγεται τὴν ἀνισότητα $\sigma(x') < \sigma(x'')$ καλεῖται δὲ ***σταθερῶς ἐλαττουμένη,*** ἐὰν ἡ ἀνισότης $x' < x''$ συνεπάγεται τὴν ἀνισότητα $\sigma(x') > \sigma(x'')$· ἢ καὶ καλεῖται σταθερῶς αὔξουσα ἢ σταθερῶς ἐλαττουμένη καθόσον ὁ λόγος $\frac{\sigma(x'')-\sigma(x')}{x''-x'}$ εἶναι θετικὸς ἢ ἀρνητικός· π.χ. ἡ συνάρτησις αx εἰς τὸ διάστημα $(-\infty, +\infty)$ εἶναι αὔξουσα [1] ἐὰν $\alpha > o$ καὶ ἐλαττουμένη ἐὰν $\alpha < o$· ἡ συνάρτησις $\frac{1}{x}$ εἶναι ἐλαττουμένη εἰς τὸ διάστημα $(1 \ldots +\infty)$.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ ἕπεται, ὅτι ἐὰν ἡ σ(x) εἶναι αὔξουσα ἡ —σ(x) εἶναι ἐλαττουμένη καὶ οὕτω εἰς ἑκάστην ἰδιότητα τῶν αὐξουσῶν συναρτήσεων ἀντιστοιχεῖ ἰδιότης τῶν ἐλαττουμένων.

115.—Ἔστω ἤδη συνάρτησις σ(x) προσδιωρισμένη διὰ τὰς ῥητὰς τιμὰς ἑνὸς διαστήματος (α,β), ὁμαλῶς συνεχὴς εἰς τὸ αὐτὸ σύνολον καὶ αὔξουσα· λέγω ὅτι ἡ ***ἐπέκτασις αὐτῆς*** (§ 113) f(x) ***θὰ εἶναι αὔξουσα εἰς τὸ διάστημα*** (α, β)· ἤτοι ἂν x' καὶ x'' εἶναι δύο ***οἱαιδήποτε*** τιμαὶ τοῦ (α, β) πληροῦσαι τὴν ἀνισότητα $x' < x''$ θὰ εἶναι $f(x') < f(x'')$· καὶ τῷ ὄντι, παρατηρῶ ὅτι δύναμαι νὰ νοήσω δύο ἀκολουθίας ῥητῶν ἀριθμῶν τοῦ (α, β)

$$(1) \quad x_1', x_2', \ldots x_\nu', \ldots$$
$$(2) \quad x_1'', x_2'', \ldots x_\nu'' \ldots$$

---

[1] Ἐννοοῦμεν «σταθερῶς αὔξουσα».

τῶν ὁποίων ἡ πρώτη νὰ ἔχῃ ὅριον τὸ x' ἀπὸ μειζόνων τιμῶν, ἡ δὲ δευτέρα νὰ ἔχῃ ὅριον τὸ x'' ἐξ ἐλασσόνων τιμῶν.

Κατὰ ταῦτα εἶναι $x_1'>x_2'>\ldots>x_\nu'\ldots>x'$ καὶ

$$x_1''<x_2''<\ldots<x_\nu''\ldots<x''.$$

Δύναμαι πρὸς τούτοις νὰ θεωρήσω ὡς πρῶτον ὅρον τῆς ἀκολουθίας (1) ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ x''_1, ἤτοι, ὅτι $x'_1<x''_1$· ἐπειδὴ ἡ $\sigma(x)$ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως αὔξουσα θὰ ἔχω

$$(3)\qquad \sigma(x_1')<\sigma(x_1'')$$

$$\sigma(x_1')>\sigma(x_2')>\ldots>\sigma(x_\nu')>\ldots$$

$$\text{καὶ}\quad \sigma(x_1'')<\sigma(x_2'')<\ldots<\sigma(x_\nu'')<\ldots$$

ὅθεν καὶ (ἕνεκα τῆς (3)) ορ $\sigma(x'_\nu)<$ ορ$\sigma(x''_\nu)$ ἤτοι $f(x')<f(x'')$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ ὅτι ἐὰν ἡ $\sigma(x)$ εἶναι ἐλαττουμένη εἰς τὸ σύνολον τῶν ῥητῶν τιμῶν τοῦ (α, β) ἡ $f(x)$ θὰ εἶναι ἐλαττουμένη εἰς τὸ (α, β).

116.—Διὰ νὰ ἐφαρμόσω τὴν ἰδιότητα (§ 115) εἰς τὰς ἀντιστρόφους συναρτήσεις συνδυάζω αὐτὴν μὲ τὴν πρότασιν III. Κατὰ ταύτην θὰ ὑπάρχῃ τιμὴ x τοῦ διαστήματος (α, β), δι᾿ ἣν $f(x)=M$ καὶ τιμὴ x δι᾿ ἣν $f(x)=\mu$. Ἐὰν ἡ $f(x)$ ὑποτεθῇ αὔξουσα, προφανῶς θὰ εἶναι $f(\alpha)=\mu$ καὶ $f(\beta)=M$. Ἐὰν δὲ λ εἶναι ἀριθμός τις μεταξὺ μ καὶ M θὰ ὑπάρχῃ μία μόνον τιμή, δι᾿ ἣν $f(x)=\lambda$, διότι ἂν ὑπῆρχον δύο τοιαῦται x' καὶ x'', θὰ ἦτο $f(x')=f(x'')=\lambda$· ἀλλὰ τὰ x' καὶ x'' εἶναι ἄνισα καὶ ἐὰν $x'>x''$, θὰ ἦτο $f(x')>f(x'')$· ἐὰν δὲ $x'<x''$ θὰ ἦτο $f(x')<f(x'')$.

Ὑπέθεσα τὸ διάστημα (α, β) περατωμένον· καὶ ἂν ὅμως ὑποθέσω τὸ (α, β) μὴ περατωμένον, ὅπως π.χ. τὸ $(\alpha,\ldots+\infty)$ θὰ ἔχω, ὅταν ἡ συνάρτησις εἶναι αὔξουσα, κατώτερον πέρας μ τῆς συναρτήσεως τὸ $f(\alpha)$· τὸ ἀνώτερον δὲ πέρας M (εἴτε πεπερασμένην τιμὴν ἔχει εἴτε ἄπειρον) δὲν θὰ τὸ φθάνει ἡ συνάρτησις· ἐὰν ὅμως τὸ x λαμβάνει διαδοχικῶς τὰς τιμὰς ἀκολουθίας τεινούσης πρὸς τὸ $+\infty$, ἡ $f(x)$ τείνει πρὸς τὸ M. Π.χ. δι᾿ ορ$x=+\infty$. ἡ $\frac{1}{x}$ τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ἡ αx τείνει πρὸς τὸ $+\infty$ (ὅταν $\alpha>0$). Ἐὰν διάστημα εἶναι τὸ $(-\infty,\ldots+\infty)$ ἡ συνάρτησις δὲν φθάνει τὸ ἀνώτερον οὔτε τὸ κατώτερον πέρας. Ὑπέθεσα ἀνωτέρω, ὅτι ἡ $f(x)$ εἶναι αὔξουσα· ἀνάλογα δύναμαι νὰ εἴπω καὶ ἐὰν ἡ $f(x)$ εἶναι ἐλαττουμένη.

117.—Ἔστω συνάρτησις $f(x)$ αὔξουσα, εἰς περατωμένον τι διάστημα

(α, β) λαμβάνουσα ἅπαξ (εἰς τὸ διάστημα (α, β)) ***πᾶσαν*** τιμὴν τοῦ διαστήματος (μ, M) [1]· λέγω ὅτι ἡ ***αὔξουσα αὕτη συνάρτησις*** $f(x)$ ***εἶναι συνεχὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ*** (α, β).

Καὶ τωόντι, ἔστω γ τυχὼν ἀριθμὸς μεταξὺ α καὶ β θὰ ἔχω (§ 116) $f(\gamma)=\lambda$, ὅπου $\mu<\lambda<M$· θεωρῶ θετικόν τινα ἀριθμὸν η, ὁσονδήποτε μικρὰν τοιοῦτον, ὥστε οἱ ἀριθμοὶ $\lambda-\eta$ καὶ $\lambda+\eta$ νὰ περιέχωνται εἰς τὸ διάστημα (μ, M)· θὰ ὑπάρχουν δύο τιμαὶ x_1 καὶ x_2 τοῦ (α, β) τοιαῦται ὥστε $f(x_1)=\lambda-\eta$ καὶ $f(x_2)=\lambda+\eta$· ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις ὑπετέθη αὔξουσα, θὰ εἶναι $x_1<\gamma<x_2$· θὰ εἶναι δ' ἐπίσης $f(\gamma)-f(x)<\eta$, διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x μεταξὺ x_1 καὶ γ καὶ $f(x)-f(\gamma)<\eta$, διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x μεταξὺ γ καὶ x_2· ὥστε, ἐὰν καλέσω ε τὸν μικρότερον τῶν ἀριθμῶν $\gamma-x_1$ καὶ $x_2-\gamma$, θὰ ἔχω ὅτι διὰ $|x-\gamma|<\varepsilon$, εἶναι $|f(x)-f(\gamma)|<\eta$· ἤτοι, ὅτι ἡ συνάρτησις $f(x)$ εἶναι συνεχής.

Ὁμοία προφανῶς πρότασις ἰσχύει καὶ ὅταν ἡ $f(x)$ εἶναι ἐλαττουμένη.

Ἀντίστροφοι συναρτήσεις.

118.—Ἔστω συνάρτησις $\sigma(x)$ αὔξουσα [2]) καὶ συνεχὴς εἰς ἓν διάστημα περατωμένον ἢ ὄχι· ἐὰν καλέσω Σ_1 τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τοῦ x καὶ Σ_2 τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$, θὰ ἔχω, συμφώνως πρὸς τὰ προηγούμενα, ὅτι, εἰς ἑκάστην τιμὴν x τοῦ Σ_1 ἀντιστοιχεῖ μία μόνον τιμὴ y τοῦ Σ_2 καὶ εἰς ἑκάστην τιμὴν y τοῦ Σ_2 ἀντιστοιχεῖ μία μόνον τιμὴ x τοῦ Σ_1· ἤτοι ἂν ὑποθέσω ὅτι δίδω εἰς τὸ y ***αὐθαιρέτως*** τιμήν τινα τοῦ Σ_2 θὰ ἀντιστοιχῇ διὰ τὸ x μία μόνον τιμὴ τοῦ Σ_1· ἤτοι θεωρῶν τὸ x ὡς συνάρτησιν τοῦ y θὰ ἔχω δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ y μίαν τοῦ x· ἔστω $x=\varphi(y)$· ἡ $\varphi(y)$ λέγεται ***ἀντίστροφος συνάρτησις*** τῆς $\sigma(x)$.

119.—Ἔστω τὸ διάστημα (α,β) περατωμένον· θὰ δείξω, ὅτι ἡ $\varphi(y)$ ἔχει τὰς ἑξῆς ἰδιότητας :

1) ***εἶναι αὔξουσα·*** ἤτοι πᾶσα ἀνισότης $y'<y''$ (y', y'' ὑποτίθενται τιμαὶ τοῦ Σ_2) συνεπάγεται τὴν ἀνισότητα $\varphi(y')<\varphi(y'')$· καὶ πράγματι, εἰς μίαν τιμὴν y' τοῦ Σ_2 ἀντιστοιχεῖ μία μόνον τιμὴ τοῦ Σ_1 καὶ ἀντι-

(1) Διὰ τοῦ μ καὶ M παριστάνω, ὅπως συνήθως, τὸ κατώτερον καὶ ἀνώτερον πέρας τῆς $f(x)$.

(2) Ὅπως ἐργάζομαι μὲ αὔξουσαν συνάρτησιν δύναμαι νὰ ἐργασθῶ μὲ ἐλαττουμένην καὶ νὰ ἀποδείξω ὁμοίας προτάσεις.

στρόφως (§ 118)· ὥστε ἐὰν θέσω $\varphi(y')=x'$ καὶ $\varphi(y'')=x''$ θὰ ἔχω $x'<x''$ διότι διὰ νὰ εἶναι $x'=x''$ ἢ $x'>x''$ ἔπρεπε νὰ εἶναι $y'=y''$ ἢ $y'>y''$

2) ἡ $\varphi(y)$ εἶναι ***συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα*** (μ, M)· διότι ἡ $\varphi(y)$ λαμβάνει ἅπαξ πᾶσαν τιμὴν τοῦ διαστήματος (α, β)· ὥστε ἐφαρμόζεται ἡ πρότασις (§ 117)· ἄρα ἡ $\varphi(y)$ εἶναι συνεχὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ (μ, M).

Εὐκόλως ἐπεκτείνονται τὰ ἀνωτέρω καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν τὸ διάστημά (α, β) δὲν εἶναι περατωμένον.

120. ***Ὁρισμοὶ τῶν συναρτήσεων*** $\sqrt[\mu]{x}$, x^{ν}, α^{x}, $\mathrm{Log}\, x$ εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν τὸ x λαμβάνει καὶ ἀσυμμέτρους τιμάς.

1) Θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν $y=x^{\mu}$ ὅπου μ θετικὸς ἀκέραιος ἀριθμός. Αὕτη εἶναι συνεχὴς καὶ αὔξουσα εἰς τὸ διάστημα $(0,+\infty)$.

Ἐνταῦθα (Σ_1) εἶναι τὸ $(0\ldots+\infty)$ ἀλλὰ καὶ (Σ_2) εἶναι τὸ $(0\ldots+\infty)$ διότι ὅταν $x=0$, $y=0$ καὶ ὅταν x τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον τὸ y τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον.

Θεωρήσωμεν τὴν ἀντίστροφόν της $x=\sqrt[\mu]{y}$· κατὰ τὰ προηγούμενα θὰ εἶναι καὶ αὐτὴ αὔξουσα καὶ συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα (Σ_2) θὰ ἰσοῦται δὲ πρὸς τὸ 0, ὅταν $y=0$ καὶ θὰ τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον, ὅταν y τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον· ἐδῶ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ θεωρεῖται τὸ y καὶ συνάρτησις τὸ x· ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὰ γράμματα, καλοῦντες πάλιν x τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν καὶ y τὴν συνάρτησιν, θὰ γράψωμεν $y=\sqrt[\mu]{x}$ καὶ θὰ ἔχωμεν, ὅτι ἡ $\sqrt[\mu]{x}$ εἶναι αὔξουσα καὶ συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα $(0\ldots+\infty)$· ἐντεῦθεν προκύπτει, ὅτι καὶ ἡ συνάρτησις

$$y=x^{\nu} \qquad \left(\text{ὅπου } \nu=\frac{\lambda}{\mu} \text{ καὶ } \lambda, \mu \text{ θετικοὶ ἀκέραιοι}\right)$$

ἤτοι ἡ $y=\sqrt[\mu]{x^{\lambda}}$ θὰ εἶναι συνεχὴς καὶ αὔξουσα εἰς τὸ αὐτὸ διάστημα $(0\ldots+\infty)$.

Ἐὰν δὲ λ, μ ἑτερόσημοι, θὰ ἔχωμεν :

$$y=\frac{1}{x^{-\nu}}, \qquad \text{ὅπου } -\nu=-\frac{\lambda}{\mu}>0$$

θὰ ἔχωμεν οὕτω συνάρτησιν συνεχῆ καὶ ἐλαττουμένην.

Θὰ ζητήσωμεν ἤδη νὰ ὁρίσωμεν τὴν ἐκθετικὴν συνάρτησιν $y=\alpha^{x}$.

121. Ἔστω πρῶτον ὅτι τὸ σύνολον (Σ_1) εἶναι τὸ σύνολον τῶν ῥητῶν.

Ἐὰν τὸ x ἔχῃ τυχοῦσαν κλασματικὴν τιμὴν $\frac{\lambda}{\varrho}$ θὰ ἔχωμεν

$$\alpha^{x} = \sqrt[\varrho]{\alpha^{\lambda}}$$

ὥστε εἰς πᾶσαν ῥητὴν τιμὴν τοῦ x θὰ ἔχωμεν τιμὴν ἀντίστοιχον τοῦ y ὡρισμένην, ὁπότε ἡ $y = \alpha^x$ εἶναι ὡρισμένη εἰς τὸ σύνολον (Σ_1) τῶν ῥητῶν ἀριθμῶν, ὅπως ἐπίσης διὰ τὸ αὐτὸ σύνολον ἔχομεν ὅτι, ὅταν τὸ x τείνῃ πρὸς τὸ 0, ἤτοι ἡ x λαμβάνῃ ***ῥητὰς*** τιμὰς τεινούσας πρὸς τὸ μηδὲν καὶ ἡ α^x τοῦ ***ῥητοῦ*** ὁρίσματος x τείνει πρὸς τὴν μονάδα. Εἶναι δὲ (εἰς τὸ αὐτὸ πάντοτε σύνολον τῶν ῥητῶν) ***αὔξουσα*** ἡ α^x ἐὰν $\alpha > 1$· καὶ ἐλαττουμένη ἂν $\alpha < 1$, εἶναι πρὸς τούτοις ***ὁμαλῶς συνεχὴς*** εἰς πᾶν διάστημα περατωμένον (γ, δ) ὅπου θεωροῦμεν ὅτι τὸ x λαμβάνει ῥητὰς τιμάς· καὶ τῷ ὄντι ἔστω τυχὼν ἀριθμὸς θ· θὰ ὑπάρχῃ ε τοιοῦτος, ὥστε ὅταν $x' - x < \varepsilon$ καὶ $x' > x$ [ὅπου x, x′ εἶναι ῥητοὶ ἀριθμοὶ τοῦ (γ,δ)] νὰ ἔχωμεν $\alpha^{x'} - \alpha^{x} < \vartheta$· ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ ἔχωμεν :

$$\alpha^{x}(\alpha^{x'-x} - 1) < \vartheta \qquad \text{ἢ καὶ}$$

$$\alpha^{x'-x} - 1 < \frac{\vartheta}{\alpha^{x}}.$$

ἀλλὰ τὸ α^x περιλαμβάνεται προφανῶς μεταξὺ τοῦ α^γ καὶ α^δ· ἐπομένως ἂν ἀριθμός τις m εἶναι μεγαλύτερος τοῦ α^γ καὶ α^δ θὰ εἶναι μεγαλύτερος καὶ τοῦ α^x.

Καλέσωμεν ϑ_1 τὸ $\frac{\vartheta}{m}$, ὅπου m τυχὼν ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ α^γ καὶ α^δ. Ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις τοῦ ῥητοῦ ὁρίσματος α^x τείνει πρὸς τὴν μονάδα, ὅταν τὸ x τείνῃ μὲ ῥητὰς τιμὰς πρὸς τὸ μηδέν, ἔχομεν, ὅτι ὑπάρχει θετικὸς ἀριθμὸς ε τοιοῦτος, ὥστε ὅταν $x' - x < \varepsilon$

$\alpha^{x'-x} - 1 < \vartheta_1$, ὁπότε καὶ (κατὰ τὰ προηγούμενα) $\alpha^{x'} - \alpha^{x} < \vartheta$, ὥστε ἡ συνάρτησις τοῦ ῥητοῦ ὁρίσματος x εἰς τὸ περατωμένον διάστημα (γ, δ) εἶναι ***ὁμαλῶς συνεχής***.

Ἑπομένως δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν ***τὴν ἀρχὴν τῆς ἐπεκτάσεως***· ἤτοι δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν τὴν συνάρτησιν φ(x), ἥτις 1) εἶναι ὡρισμένη εἰς τὸ διάστημα (γ, δ) διὰ πάσας τὰς ῥητὰς καὶ ***ἀσυμμέτρους*** τιμάς, 2) λαμβάνει δι' ἑκάστην ῥητὴν τιμὴν τοῦ (γ, δ) τὴν τιμήν, τὴν ὁποίαν λαμβάνει καὶ ἡ συνάρτησις $α^x$ τοῦ ***ῥητοῦ ὁρίσματος*** x, 3) εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ (γ, δ) διὰ πᾶσαν τιμὴν καὶ 4) εἶναι αὔξουσα ἂν $α>1$ καὶ ἐλαττουμένη ἐὰν $α<1$.

Τὰ ἀνωτέρω προφανῶς ἰσχύουν καὶ ὅταν τὸ περατωμένον διάστημα (γ, δ) ἀντικαταστήσωμεν μὲ τὸ μὴ περατωμένον σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Οὕτως ἡ συνάρτησις $α^x$ διὰ πᾶσαν ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τιμὴν τοῦ x ὡρίσθη ὡς ἐπέκτασις τῆς συναρτήσεως $α^x$ τοῦ ῥητοῦ ὁρίσματος.

122. Ἄς ἐφαρμόσωμεν ἤδη τὰ ἀνωτέρω ἀποδειχθέντα διὰ τὰς ἀντιστρόφους συναρτήσεις, εἰς τὴν συνάρτησιν $y=α^x$· αὕτη ὡς εἴδομεν εἶναι ὡρισμένη εἰς τὸ διάστημα $(-\infty\ .\ .\ .+\infty)$ καὶ αὔξουσα ἐὰν $α>1$ καὶ ἐλαττουμένη ἂν $α<1$ εἶναι δὲ καὶ συνεχής.

Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι τὸ $(Σ_1)$ ἐνταῦθα εἶναι τὸ διάστημα $(-\infty\ .\ .\ .+\infty)$· ἐὰν θεωρήσωμεν ἤδη τὴν ἀντίστροφον συνάρτησιν $x=φ(y)$ θὰ ἔχωμεν κατὰ τὰ προηγούμενα, ὅτι αὕτη εἶναι συνεχὴς εἰς πᾶν διάστημα (γ, δ), ὅπου $γ>0$ καὶ $δ>0$, εἶναι δὲ αὔξουσα ἐὰν $α>1$ καὶ τείνει πρὸς τὸ $-\infty$ ὅταν τὸ y τείνῃ πρὸς τὸ μηδὲν καὶ πρὸς τὸ $+\infty$ ὅταν τὸ y τείνῃ πρὸς τὸ $+\infty$.

Ἐμελετήσαμεν τὴν συνάρτησιν $x=φ(y)$ θεωροῦντες τὸ y ὡς ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν καὶ τὸ x ὡς συνάρτησιν αὐτῆς.

Ἐὰν θέλωμεν πάλιν x νὰ ὀνομάσωμεν τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν καὶ y τὴν συνάρτησιν, θὰ ἔχωμεν $y=φ(x)$. [Ἡ σχέσις αὕτη ἰσοδυναμεῖ προφανῶς μὲ τὴν $x=α^y$]. Τὴν συνάρτησιν αὐτὴν φ(x) καλοῦμεν λογάριθμον τοῦ x ὡς πρὸς βάσιν α καὶ σημειοῦμεν $λογ_α\, x$.

Ἐὰν ὡς α θεωρήσωμεν τὸν ἀριθμὸν e λαμβάνομεν ὡς ἐκθετικὴν συνάρτησιν τὴν $y=e^x$ καὶ ἀντίστροφον αὐτῆς τὴν $x=λογ_e\, y$ ἢ καὶ ἐναλλάσσοντες τὰ γράμματα ἔχομεν : $y=λογ_e\, x$· τοῦτο σημειώνομεν ἁπλῶς $y=lx$.

Τοὺς τοιούτους λογαρίθμους καλοῦμεν Νεπερειανοὺς ἢ καὶ φυσικοὺς λογαρίθμους, διότι παρουσιάζονται, οὕτως εἰπεῖν, ἀφ' ἑαυτῶν εἰς τὴν θεωρίαν.

Ἐὰν y εἶναι ὁ λογάριθμος ἑνὸς ἀριθμοῦ x ὡς πρὸς βάσιν α, καὶ ω εἶναι ὁ φυσικὸς λογάριθμος τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ x θὰ ἔχωμεν :

$$\alpha^y = e^\omega .$$

Ὅθεν λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ὡς πρὸς βάσιν α ἔχομεν :

$$y = \omega \lambda o\gamma_\alpha e$$

ἢ καὶ

$$\frac{1}{\lambda o\gamma_\alpha e} \cdot y = \omega$$

π. χ. ἐὰν $\alpha = 10$ ἔχομεν :

$$\lambda o\gamma_{10} e = 0{,}434294481903$$

$$\frac{1}{\lambda o\gamma_{10} e} = 2{,}302585092994 \ldots$$

καὶ

$$\lambda o\gamma_{10} x = lx \; \lambda o\gamma_{10} e, \qquad \text{ὅθεν}$$

$$\frac{1}{\lambda o\gamma_{10} e} \cdot \lambda o\gamma_{10} x = lx.$$

123. ***Κυκλικαὶ ἢ τριγωνομετρικαὶ συναρτήσεις καὶ ἀντίστροφοι αὐτῶν.***

Καλοῦμεν κυκλικὰς ἢ τριγωνομετρικὰς συναρτήσεις τὰς ἑξῆς :

$$(1) \qquad \eta\mu x, \quad \sigma\upsilon\nu x, \quad \varepsilon\varphi x, \quad \sigma\varphi x$$

καὶ ἐκείνας, αἵτινες προκύπτουν διὰ συνδυασμῶν αὐτῶν· ἀλλὰ καὶ ἀπὸ αὐτὰς τὰς (1) ἀρκεῖ νὰ ὁρίσωμεν μίαν· αἱ ἄλλαι ὁρίζονται δι᾽ αὐτῆς.

Ἀντίστροφοι αὐτῶν εἶναι αἱ

$$y = \tau o\xi \; \eta\mu x, \quad y = \tau o\xi \; \sigma\upsilon\nu x, \quad y = \tau o\xi \; \varepsilon\varphi x, \quad y = \tau o\xi \; \sigma\varphi x.$$

Ἡ $y = \tau o\xi \; \eta\mu x$ γράφεται καὶ $x = \eta\mu y$· ὁπότε $x = \eta\mu(y + 2K\pi)$ καὶ $x = \eta\mu(K\pi - y)$ διὰ πᾶσαν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ K· ἑπομένως δι᾽ ἑκάστην τιμὴν τοῦ x προκύπτουσιν ἄπειροι τιμαὶ διὰ τὸ y ἀπὸ τὸν πρῶτον τύπον καὶ ἄπειροι τιμαὶ ἀπὸ τὸν δεύτερον· ἐὰν ἀπὸ αὐτὰς ἐκλέξω μόνον τὴν τιμὴν τὴν περιλαμβανομένην εἰς τὸ διάστημα $-\frac{\pi}{2}, \ldots + \frac{\pi}{2}$ θὰ ἔχω, ὅτι εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ x ἀντιστοιχεῖ μόνον μία τιμὴ τοῦ τοξ ημx. Αἱ τιμαὶ αὗται τοῦ τοξ ημx αἱ περιλαμβανόμεναι εἰς τὸ διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, + \frac{\pi}{2}\right)$ καλοῦνται ***πρωτεύουσαι τιμαὶ τοῦ*** τοξ ημx. Θὰ ἔχω οὕτω ὡς σύνολον (Σ_1) τῶν τιμῶν τοῦ x

τὸ διάστημα $(-1,+1)$, ὡς σύνολον δὲ (Σ_2) τῶν τιμῶν τοῦ τοξ ημx τὸ διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ ἡ δὲ συνάρτησις y=τοξ ημx θὰ εἶναι μονότιμος, συνεχὴς καὶ αὔξουσα, διότι ὅταν τὸ x αὐξάνῃ εἰς τὸ διάστημα $(-1,+1)$ καὶ τὸ y αὐξάνει εἰς τὸ διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$. Ἐὰν θεωρήσω ὡς (Σ_2) τὸ διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, ἡ συνάρτησις y=τοξ ημx θὰ εἶναι μονότιμος ἐλαττουμένη· ἐὰν ὡς (Σ_2) θεωρῶ τὸ $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$, ἡ συνάρτησις εἶναι μονότιμος καὶ αὔξουσα κ.ο.κ. Ἐννοεῖται ὅτι ἀρκεῖ νὰ θεωρήσω τὸν πρωτεύοντα κλάδον τῆς συναρτήσεως· ἤτοι ἔστω ὅτι ἔχομεν τὴν συνάρτησιν y=τοξ ημx μὲ (Σ_2) τὸ διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$· τότε πᾶς ἄλλος κλάδος θὰ δίδεται ὑπὸ τῶν y=τοξ ημx+2Kπ καὶ y=(π—τοξ ημx)+2Kπ, ὅπου ἐννοοῦμεν, ὅτι τὸ τοξ ημx λαμβάνει μόνον πρωτευούσας τιμάς· θὰ ἔχω οὕτω δι᾽ ἑκάστην ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ K ἕνα κλάδον τῆς συναρτήσεως ὁριζόμενον ἐκ τοῦ πρώτου τύπου καὶ ἕνα κλάδον ὁριζόμενον ἐκ τοῦ δευτέρου.

Ἡ συνάρτησις y=τοξ συνx γράφεται καὶ x=συνy=ημ$\left(\frac{\pi}{2}-y\right)$, ὅθεν καὶ $\frac{\pi}{2}$ —y=τοξ ημx ἢ καὶ y=$\frac{\pi}{2}$ —τοξ ημx· δηλ. τοξ συνx=$\frac{\pi}{2}$ — τοξ ημx· καλοῦνται πρωτεύουσαι τιμαὶ τοῦ τοξ συνx, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι (δυνάμει τῆς ἰσότητος ταύτης) εἰς πρωτευούσας τιμὰς τοῦ τοξ ημx. Ἡ συνάρτησις y=τοξ συνx, ὅπου τὸ τοξ συνx λαμβάνει μόνον πρωτευούσας τιμάς, εἶναι μονότιμος καὶ συνεχής· δίδει δὲ τὸν πρωτεύοντα κλάδον τῆς συναρτήσεως· πάντες οἱ ἄλλοι κλάδοι δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων

$$y=2K\pi + \text{τοξ συν}x, \quad y=2K\pi - \text{τοξ συν}x,$$

ὅπου τὸ τοξ συνx λαμβάνει μόνον πρωτευούσας τιμάς.

Διὰ τὴν συνάρτησιν τοξ εφx παρατηρῶ, ὅτι ἐὰν ὡς (Σ_2) ληφθῇ τὸ διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, θὰ ἔχω ὡς (Σ_1) τὸ διάστημα $(-\infty, +\infty)$ πρωτεύων κλάδος τῆς συναρτήσεως εἶναι ὁ κλάδος, δι᾽ ὃν αἱ τιμαὶ τοῦ y λαμβάνονται εἰς τὸ διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$· πάντες δὲ οἱ ἄλλοι κλάδοι τῆς συναρτήσεως θὰ δίδωνται ὑπὸ τοῦ τύπου

$y=$ τοξ εφ$x+K\pi$. Δι' ἑκάστην ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ K ἔχομεν ἕνα κλάδον. Ἡ συνάρτησις $y=$ τοξ σφx γράφεται καὶ $y=\frac{\pi}{2}-$ τοξ εφx· καλοῦνται πρωτεύουσαι τιμαὶ τῆς συναρτήσεως τοξ σφx αἱ ἀντιστοιχοῦσαι (δυνάμει τῆς ἰσότητος ταύτης) εἰς πρωτευούσας τιμὰς τοῦ τοξ εφx.

Ἀσκήσεις.

1) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x εἶναι πραγματικὴ ἡ συνάρτησις $y=\sqrt{x^2+8x+33}$;

2) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x εἶναι πραγματικὴ ἡ συνάρτησις y, ἡ ὁριζομένη ἐκ τῆς ἐξισώσεως $Ax^2+2Bxy+\Gamma y^2+2\Delta x+2Ey+Z=0$;

3) Ἔστω συνάρτησις ὁριζομένη ἐν τῷ διαστήματι $\left(0, \frac{1}{\pi}\right)$ ὡς ἑξῆς: διὰ $x=0$ νὰ εἶναι $y=0$, διὰ πᾶσαν δὲ ἄλλην τιμὴν τοῦ x νὰ εἶναι $y=$ ημ$\frac{1}{x}$. Ποία ἡ αἰώρησις τῆς συναρτήσεως εἰς αὐτὸ τὸ διάστημα;

4) Ἔστω ἡ ἑξῆς ἀντιστοιχία· εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ x ν' ἀντιστοιχῇ ὡς τιμὴ τοῦ y μόνον τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ x· οὕτω δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x, δι' ἃς $0\leq x<1$ θὰ εἶναι $y=0$, δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x, δι' ἃς $1\leq x<2$, θὰ εἶναι $y=1$, κ.ο.κ. Ἔστω $y=A(x)$ ἡ συνάρτησις αὕτη· ἡ $A(x)$ δὲν εἶναι συνεχὴς διὰ τὴν τυχοῦσαν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ x, π. χ. διὰ $x=2$· καὶ τῷ ὄντι, διὰ νὰ εἶναι συνεχὴς ἔπρεπε καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν τείνῃ τὸ x πρὸς τὸ 2, ἡ y νὰ τείνῃ πρὸς τὸ $A(2)$, ἤτοι πρὸς τὸ 2. Ἂς θεωρήσω ὅτι τὸ x τείνει πρὸς τὸ 2 λαμβάνον τὰς τιμὰς

$$1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{2}{3},\ 1+\frac{3}{4},\ \ldots\ 1+\frac{\nu-1}{\nu},\ \ldots,$$

δι' ἑκάστην ἐξ αὐτῶν τῶν τιμῶν ἔχω $y=1$, ἑπομένως καὶ

$$\text{ορ}\, y=\text{ορ}\, A(x)=1, \quad \text{ἐνῷ}\quad A(\text{ορ}\, x)=A(2)=2.$$

5) Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=x-A(x)$, ὅπου $A(x)$ ὁρίζεται ὡς ἀνωτέρω· α) δὲν θὰ εἶναι συνεχὴς διὰ τυχοῦσαν θετικὴν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ x β) εἶναι συνεχὴς διὰ πᾶσαν θετικὴν τιμὴν τοῦ x, μὴ ἀκεραίαν γ) διὰ πᾶν διάστημα[1] περιέχον ἕνα ἀκέραιον τὸ ἀνώτερον πέρας τῆς

[1] θετικῶν τιμῶν.

συναρτήσεως ταύτης εἶναι τὸ 1 καὶ κατώτερον πέρας εἶναι τὸ 0· ὑπάρχει δὲ εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν τιμὴ τοῦ διαστήματος, δι᾽ ἣν ἡ συνάρτησις γίνεται ἴση μὲ τὸ κατώτερον πέρας, ἐνῷ δὲν ὑπάρχει τιμὴ τοῦ διαστήματος, δι᾽ ἣν $x=1$.

6) Διὰ τοῦ $A(\sigma(x))$ θὰ συμβολίζεται τὸ ἑξῆς: Δι᾽ ἑκάστην τιμὴν x_0 τοῦ x τὸ $\sigma(x)$ λαμβάνει τὴν τιμὴν $\sigma(x_0)$· τῆς τιμῆς ταύτης τὸ ἀκέραιον μέρος θὰ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ $A(\sigma(x_0))$· ἤτοι $A(\sigma(x_0))=$ ἀκέραιον μέρος τῆς $\sigma(x_0)$. Κατὰ ταῦτα ἡ συνάρτησις $A\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ διὰ $x=0$ ἰσοῦται πρὸς τὴν μονάδα, διὰ πᾶσαν δὲ ἄλλην τιμὴν τοῦ x ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν. Ἂς θεωρήσω ἤδη τὴν συνάρτησιν $y=\eta\mu\frac{\pi}{x+A(\omega)}$, ὅπου $\omega=\frac{1}{1+x^2}$· διὰ $x=0$ θὰ ἔχω $y=\eta\mu\pi$, διὰ πᾶσαν δὲ ἄλλην τιμὴν τοῦ x θὰ εἶναι $y=\eta\mu\frac{\pi}{x}$. Ἡ συνάρτησις αὕτη δὲν εἶναι συνεχὴς διὰ $x=0$ ἂν καὶ διὰ πᾶν διάστημα ἀπὸ $-\varepsilon$ ἕως $+\varepsilon$ λαμβάνη πάσας τὰς τιμὰς ἀπὸ -1 ἕως $+1$ (καὶ μάλιστα ἀπειράκις) χωρὶς νὰ κάμνη κανὲν πήδημα εἰς αὐτὸ τὸ διάστημα.

Τὸ παράδειγμα τοῦτο δεικνύει, ὅτι δυνατὸν μία συνάρτησις εἰς ἓν διάστημα (x_1, x_2) νὰ διαβαίνῃ ἀπὸ τῆς τιμῆς y_1 εἰς τὴν τιμὴν y_2, λαμβάνουσα πάσας τὰς ἐνδιαμέσους τιμὰς καὶ ὅμως νὰ μὴ εἶναι συνεχής, ἤτοι δὲν ἀληθεύει τὸ ἀντίστροφον τῆς (III) προτάσεως.

7) Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ αὐτὴ συνάρτησις (ἄσκ. 6) εἶναι συνεχὴς διὰ $x>0$ καὶ διὰ $x<0$, ἀλλὰ δὲν εἶναι ὁμαλῶς συνεχὴς διὰ τιμὰς ἀπείρως γειτονικὰς τῆς τιμῆς $x=0$.

8) Ἐὰν ἡ $y=\sigma(x)$ εἶναι συνεχὴς διὰ $x=\alpha$ καὶ ἐὰν ἡ $f(y)$ εἶναι συνεχὴς διὰ $y=\sigma(\alpha)$, ἡ συνάρτησις $f(\sigma(x))$ τῆς μεταβλητῆς x εἶναι συνεχὴς διὰ $x=\alpha$.

9) Ἔστω συνάρτησις $y=\sigma(x)$ ὁριζομένη μὲ τὴν ἑξῆς συμφωνίαν· ὅταν τὸ x λαμβάνῃ τυχοῦσαν ῥητὴν τιμὴν $\pm\frac{\rho}{\nu}$ (ρ, ν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους), τιμὴ τοῦ y νὰ εἶναι τὸ $\frac{1}{\nu}$, ὅταν δὲ τὸ x λαμβάνῃ ἀσυμμέτρους τιμὰς τὸ y νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν· νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ $\sigma(x)$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x ἔχει αἰώρησιν ἴσην πρὸς τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τῆς συναρτήσεως.

10) Νὰ ὑπολογισθῶσι τὰ $\sigma(1-0)$, $\sigma(1+0)$, $\sigma(1)$

α) ἐὰν $\sigma(x)=x\,o\rho\frac{x^\nu-\nu}{x^\nu+\nu}$, β) ἐὰν $\sigma(x)=x\,o\rho\frac{\nu x^\nu-1}{\nu x^\nu+1}$ $\qquad$ ($o\rho$ $\nu=\infty$)

11) Νὰ ὑπολογισθῶσι τὰ σ(ο), σ(+ο), σ(—ο)

α) ἐὰν $\sigma(x) = \text{ορ} \frac{1}{(1+x^2)^{\nu}}$ β) ἐὰν $\sigma(x) = \text{ορ} \frac{\nu x^2}{\nu x^2+1}$ (ορ $\nu = \infty$).

12) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ συνάρτησις ημ $\frac{1}{x}$ εἶναι συνεχὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν μεταξὺ 0 καὶ 1· δὲν εἶναι ὅμως ὁμαλῶς συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα (0, 1).

13) Ν' ἀποδειχθῇ τὸ θεώρημα τοῦ Cauchy (σελ. 67), ὑποτιθεμένης γνωστῆς τῆς προτάσεως τοῦ Weierstrass—Bolzano, (§ 20) χωρὶς νὰ χρησιμοποιηθῇ ἀπ' εὐθείας ἡ ἔννοια τοῦ μεγαλυτέρου ὁρίου (σελὶς 65—66).

14) Ἔστω συνάρτησις ὁριζομένη ὡς ἑξῆς. Διὰ $x \gtrless 0$, $y = \frac{\sqrt{x^2}}{\ }$ καὶ διὰ x=0, y=0. Ποία ἡ αἰώρησις τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ 0 καὶ ποία εἰς τὰ διαστήματα (—1, 0) καὶ (0, +1).

15) Ἔστω ἡ συνάρτησις ἡ θεωρηθεῖσα εἰς τὸ 4ον παράδειγμα (σελ. 126). Νὰ δειχθῇ, ὅτι αὕτη δὲν λαμβάνει ποτὲ τιμὴν περιλαμβανομένην μεταξὺ 0,01 καὶ 0,10 ἢ μεταξὺ 0,11 καὶ 0,20 ἢ μεταξὺ 0,31 καὶ 0,40 κ.ο.κ.

16) Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ συνάρτησις α^x (α θετικὸς) εἶναι ἡ μόνη ***συνεχὴς*** συνάρτησις, ἥτις ἔχει τὴν ἰδιότητα τὴν ἐκφραζομένην ὑπὸ τῆς ἰσότητος

$$\sigma(x)\sigma(y) = \sigma(x+y)$$

[Ἀποδεικνύεται κατ' ἀρχὰς διὰ τὰς θετικὰς ἀκεραίας τιμὰς τοῦ x, ἔπειτα διὰ τὰς θετικὰς ῥητὰς καὶ τέλος διὰ τὰς ἀσυμμέτρους].

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V.

Παράγωγοι καὶ Διαφορικά.

124. Ἔστω συνάρτησις $y = \sigma(x)$ μονότιμος καὶ πεπερασμένη εἰς ἓν διάστημα (x_0, X). Ἔστω α μία τιμὴ τοῦ διαστήματος καὶ ε ἀριθμὸς θετικὸς πολὺ μικρός. Θεωρῶ τὰς τρεῖς τιμὰς τοῦ διαστήματος $\alpha - \varepsilon$, α, $\alpha + \varepsilon$ καὶ τὰς τρεῖς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς συναρτήσεως $\sigma(\alpha-\varepsilon)$, $\sigma(\alpha)$, $\sigma(\alpha+\varepsilon)$. Ἐὰν ἡ $\sigma(x)$ εἶναι συνεχὴς διὰ $x = \alpha$ καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ πρὸς τ' ἀριστερὰ θὰ ἔχω, δι' ορ$\varepsilon = 0$, ὅτι

$$\text{ορ}[\sigma(\alpha+\varepsilon) - \sigma(\alpha)] = 0 \text{ καὶ } \text{ορ}[\sigma(\alpha-\varepsilon) - \sigma(\alpha)] = 0.$$

Θεωρῶ τοὺς λόγους $\dfrac{\sigma(\alpha+\varepsilon)-\sigma(\alpha)}{\varepsilon}$ καὶ $\dfrac{\sigma(\alpha-\varepsilon)-\sigma(\alpha)}{-\varepsilon}$· θὰ εἶναι οὗτοι συναρτήσεις τῶν α καὶ ε· ἐὰν καλέσω τὸν πρῶτον $\varphi(\alpha, +\varepsilon)$, θὰ καλέσω τὸν δεύτερον $\varphi(\alpha, -\varepsilon)$. Ἐάν, ***καθ' οἱονδήποτε τρόπον*** καὶ ἂν τείνῃ τὸ θετικὸν ε πρὸς τὸ μηδέν, τὸ $\varphi(\alpha, +\varepsilon)$ ἔχῃ ὅριον πεπερασμένον ἢ ἔχῃ ὅριον τὸ $+\infty$ ἢ τὸ $-\infty$, θὰ λέγωμεν, ὅτι ἡ $\sigma(x)$ ἔχει παράγωγον πρὸς τὰ δεξιά, ἥτις θὰ εἶναι τὸ ὅριον αὐτό. Κατὰ ταῦτα τὸ

$$\text{ορ}\,\frac{\sigma(\alpha+\varepsilon)-\sigma(\alpha)}{\varepsilon}$$

καλεῖται ***παράγωγος τοῦ*** $\sigma(x)$ ***πρὸς τὰ δεξιά***· σημειοῦται δὲ καὶ ὡς ἑξῆς: $\varphi(\alpha, +0)$· ἐάν, καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν τείνῃ τὸ θετικὸν ε πρὸς τὸ μηδέν, τὸ $\varphi(\alpha, -\varepsilon)$ ἔχῃ ὅριον ὡρισμένον καὶ πεπερασμένον ἢ τὸ $+\infty$, ἢ τὸ $-\infty$ θὰ λέγωμεν, ὅτι ἡ $\sigma(x)$ ἔχει παράγωγον πρὸς τ' ἀριστερά, ἥτις θὰ εἶναι τὸ ὅριον αὐτό. Κατὰ ταῦτα τὸ

$$\text{ορ}\,\frac{\sigma(\alpha-\varepsilon)-\sigma(\alpha)}{-\varepsilon}$$

καλεῖται ***παράγωγος τοῦ*** $\sigma(x)$ ***πρὸς τ' ἀριστερά***· σημειοῦται δὲ καὶ ὡς ἑξῆς: $\varphi(\alpha, -0)$. Ἐὰν ὑπάρχουν καὶ τὰ δύο αὐτὰ ὅρια δηλ. ἐὰν ὑπάρχῃ παράγωγος πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ παράγωγος πρὸς τ' ἀριστερὰ καὶ ἐὰν εἶναι ἴσαι, ἤτοι ἐὰν $\varphi(\alpha, +0) = \varphi(\alpha, -0)$· θὰ λέγεται ἁπλῶς τὸ κοινὸν αὐτὸ ὅριον ***παράγωγος*** τῆς $\sigma(x)$ διὰ $x = \alpha$. Ἤτοι

Ἐάν, ***τοῦ ε ὑποτιθεμένου πάντοτε θετικοῦ***, ***ἔχωμεν*** (δι' ορ $\varepsilon = 0$)

$$ορ\frac{σ(α+ε)-σ(α)}{ε}=ορ\frac{σ(α-ε)-σ(α)}{-ε}=K,$$

όπου K ***πεπερασμένος ἀριθμὸς ἢ καὶ*** $+\infty$ ***ἢ*** $-\infty$, ***θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ*** σ(x) ***ἔχει μίαν μόνον παράγωγον διὰ*** x=α, ***ἥτις εἶναι τὸ*** K. Κατὰ ταῦτα, ἵνα ἡ σ(x) ἔχῃ μίαν μόνον παράγωγον διὰ x=α, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ***καθ' οἱονδήποτε τρόπον*** καὶ ἂν τείνῃ τὸ x πρὸς τὸ α, ἐκ τιμῶν μείζονων καὶ καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν τείνῃ τὸ x πρὸς τὸ α, ἐκ τιμῶν ἐλασσόνων, ὁ λόγος $\frac{σ(x)-σ(α)}{x-α}$ νὰ τείνῃ ***πρὸς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ὅριον.***

Ὅταν ἀναφέρω κατωτέρω, ὅτι ἡ σ(x) ἔχει παράγωγον διὰ x=α, θὰ ἐννοῶ, ὅτι ἔχει μίαν μόνον παράγωγον διὰ x=α καὶ θὰ τὴν σημειῶ διὰ τοῦ σ'(α).

125. Θὰ δώσω ἤδη παραδείγματα, ὅπου ἡ συνάρτησις δὲν ἔχει παράγωγον ἢ ἔχει παράγωγον ἄπειρον.

1) Θὰ ζητήσω τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως $y=x\,ημ\frac{1}{x}$ διὰ x=0. Θὰ θεωρήσω πρὸς τοῦτο (συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν) τὸ $ορημ\frac{1}{ε}$ δι' ορ ε=0. Παρατηρῶ ὅμως, ὅτι δὲν ἔχω ἐδῶ ὅριον ἀνεξάρτητον τοῦ τρόπου, καθ' ὃν τὸ ε τείνει πρὸς τὸ μηδέν. Ἐὰν π.χ. τὸ ε τείνῃ πρὸς τὸ 0 διερχόμενον ἀπὸ τὰς τιμὰς τῆς ἀκολουθίας

$$(1)\qquad \frac{1}{2Kπ},\ \frac{1}{2(K+1)π},\ \dots\ \frac{1}{2νπ},\ \dots$$

(K ἀκέραιος) δύναμαι νὰ λέγω, ὅτι τὸ $ημ\frac{1}{ε}$ ἔχει ὅριον τὸ μηδέν· ἐὰν τὸ ε τείνῃ πρὸς τὸ 0, διερχόμενον ἀπὸ τὰς τιμὰς

$$\frac{1}{\frac{π}{2}+2Kπ},\ \frac{1}{\frac{π}{2}+(2K+1)π},\ \dots\ \frac{1}{\frac{π}{2}+2νπ},\ \dots$$

δύναμαι νὰ λέγω, ὅτι τὸ $ημ\frac{1}{ε}$ ἔχει ὅριον τὴν μονάδα, ἐπομένως ἡ δοθεῖσα συνάρτησις δὲν ἔχει παράγωγον διὰ x=0.

2) Ἔστω ἡ συνάρτησις $σ(x)=x\left[e^{\frac{1}{x}}:\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)\right]$· ζητῶ ἐὰν ἔχῃ παράγωγον διὰ x=0. Ἔχω προφανῶς, θέτων $\frac{1}{ε}=ω$,

$$ορ\frac{σ(α+ε)-σ(α)}{ε}=ορ\frac{e^{ω}}{1+e^{ω}}=ορ\left[1:\left(\frac{1}{e^{ω}}+1\right)\right]=1,$$

ἤτοι ἡ $σ(x)$ ἔχει παράγωγον πρὸς τὰ δεξιὰ τὴν μονάδα, διὰ $x=0$· ἔχω ἐπίσης

$$ορ\frac{σ(α-ε)-σ(α)}{-ε}=ορ\left[e^{-ω}:\left(1+e^{-ω}\right)\right]=0,$$

ἤτοι ἡ $σ(x)$ ἔχει παράγωγον πρὸς τ' ἀριστερά τὸ μηδέν, ἥτις ἐπομένως δὲν συμπίπτει μὲ τὴν παράγωγον πρὸς τὰ δεξιά· ὥστε ἡ $σ(x)$ δὲν ἔχει παράγωγον διὰ $x=0$.

3) Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=x^{\frac{4}{5}}$· Ζητῶ τὴν παράγωγον διὰ $x=0$· ἔχω $ορ\frac{σ(α+ε)-σ(α)}{ε}=ορ\frac{ε^{\frac{4}{5}}}{ε}=+\infty$.

126. ***Παραγωγίσιμος*** καλεῖται μία συνάρτησις εἰς ἓν διάστημα (x_0, X), ὅταν ἔχῃ δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ διαστήματος μίαν μόνον παράγωγον, (ἡ ὁποία δύναται νὰ εἶναι πεπερασμένη ἢ $+\infty$ ἢ $-\infty$)· διὰ τὴν τιμὴν x_0 ἀρκεῖ νὰ ἔχῃ παράγωγον πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ διὰ τὴν X ἀρκεῖ νὰ ἔχῃ παράγωγον πρὸς τ' ἀριστερά. Ἐκφράζομεν δὲ τότε διὰ τοῦ $σ(x)$ τὴν συνάρτησιν, ἥτις δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ διαστήματος λαμβάνει τὴν ***ἀντίστοιχον*** τιμὴν τῆς παραγώγου.

Ἔστω ὅτι μία συνάρτησις ἔχει παράγωγον διὰ μίαν τιμὴν $α$ τοῦ x καὶ ἔστω, ὅτι ἡ παράγωγος αὐτῆς εἶναι ***πεπερασμένος*** ἀριθμός· θὰ εἶναι τότε

$$ορ\frac{σ(α+ε)-σ(α)}{ε}=ορ\frac{σ(α-ε)-σ(α)}{-ε}=K, \quad (K\text{—πεπερασμένος})$$

ὅθεν $$\frac{σ(α+ε)-σ(α)}{ε}=K+ϑ,\ \frac{σ(α-ε)-σ(α)}{-ε}=K+η \quad \begin{pmatrix} ορϑ=0 \\ ορη=0 \end{pmatrix}$$

ἐπομένως $$σ(α+ε)-σ(α)=εK+εϑ$$
$$σ(α-ε)-σ(α)=-εK-εη$$

Ἐντεῦθεν φαίνεται ἀμέσως, ὅτι ἡ συνάρτησις $σ(x)$ εἶναι συνεχὴς διὰ $x=α$ καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ πρὸς τ' ἀριστερά· ὥστε πᾶσα συνάρτησις $σ(x)$ ἔχουσα ***πεπερασμένην*** παράγωγον διὰ $x=α$ εἶναι συνεχὴς δι' αὐτὴν τὴν τιμήν.

Παρατηρήσεις. 1) Δυνατὸν διὰ $x=\alpha$ ἡ $\sigma(x)$ νὰ ἔχῃ μίαν μόνην παράγωγον τὸ $+\infty$ ἢ τὸ $-\infty$ δηλ. $\sigma'(\alpha)=+\infty$ ἢ $\sigma'(\alpha)=-\infty$ καὶ ὅμως ἡ $\sigma(x)$ νὰ μὴ εἶναι συνεχὴς διὰ $x=\alpha$.

2) Γενικώτερον ἀποδεικνύεται, ὅτι ἐὰν μία συνάρτησις $\sigma(x)$ ἔχῃ διὰ $x=\alpha$ παράγωγον πρὸς τὰ δεξιὰ ***πεπερασμένην*** καὶ παράγωγον πρὸς τ' ἀριστερὰ ***πεπερασμένην***, θὰ εἶναι συνεχὴς διὰ $x=\alpha$.

3) Ἀπὸ τὰ προηγούμενα παραδείγματα (§ 125) φαίνεται, ὅτι μία συνάρτησις δυνατὸν νὰ εἶναι συνεχὴς καὶ ὅμως νὰ μὴ ἔχῃ παράγωγον πεπερασμένην ἢ νὰ ἔχῃ παράγωγον ἄπειρον· π.χ. ἡ συνάρτησις $y=x\ \eta\mu\ \frac{1}{x}$ δὲν ἔχει παράγωγον διὰ $x=0$, ἐνῷ εἶναι συνεχὴς διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν (διότι ὅταν ορ$x=0$ εἶναι καὶ ορ$y=0$)· ὅμοια ἀληθεύουν καὶ διὰ τὰ δύο ἄλλα παραδείγματα.

4) Ὑπάρχουν συνεχεῖς συναρτήσεις, αἵτινες διὰ πάσας τὰς ῥητὰς τιμὰς τοῦ x δὲν ἔχουσι παράγωγον· ὅπως ἐπίσης ὑπάρχουν πολλαὶ συνεχεῖς συναρτήσεις αἵτινες δὲν εἶναι παραγωγίσιμοι δι' οὐδεμίαν τιμὴν τοῦ x· ὑπάρχουν μάλιστα γενικοὶ τύποι τοιούτων συναρτήσεων.

Συμβολισμοὶ χρήσιμοι διὰ τὰς παραγωγίσεις.

127. Ἔστω συνάρτησις $\sigma(x)$ καὶ ἔστω ὅτι εἰς μίαν τιμὴν x δίδω αὐθαίρετον αὔξησιν θετικὴν ἢ ἀρνητικήν· καλῶ αὐτὴν Δx, τὴν δὲ ἀντίστοιχον αὔξησιν τῆς συναρτήσεως, ἤτοι τὴν $\sigma(x+\Delta x)-\sigma(x)$ καλῶ $\Delta\sigma(x)$ ἢ καὶ Δy, ἐὰν διὰ τῆς y παραστήσω τὸ $\sigma(x)$· θὰ ἔχω κατὰ τὰ προηγούμενα

$$\text{ορ}\,\frac{\Delta\sigma(x)}{\Delta x}=\sigma'(x) \quad \text{ἢ καὶ} \quad \text{ορ}\,\frac{\Delta y}{\Delta x}=\sigma'(x).$$

Διαφορίσιμος θὰ λέγεται ἡ συνάρτησις $\sigma(x)$ διὰ τὴν τιμὴν x, ἐὰν εἶναι πεπερασμένη καὶ ὡρισμένη εἰς ἓν διάστημα (ὁσονδήποτε μικρὸν) περιέχον τὸ x καὶ ἐὰν ἡ διαφορὰ $\sigma(x+\Delta x)-\sigma(x)$ δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $K\,\Delta x+\eta\Delta x$, ὅπου τὸ K δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ Δx, εἶναι δὲ πεπερασμένος καὶ ὡρισμένος ἀριθμὸς διὰ τὴν δοθεῖσαν τιμὴν τοῦ x, ἐνῷ τὸ η ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ Δx, καὶ μάλιστα τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ὅταν τὸ Δx τείνῃ ***πρὸς τὸ μηδέν***· ἤτοι τὸ η εἶναι ἀπειροστόν, ὅταν τὸ Δx εἶναι ἀπειροστόν· ὥστε, ὅταν ἡ $\sigma(x)$ εἶναι διαφορίσιμος διά τινα τιμὴν x, θὰ ἔχω

$$\Delta\sigma(x)=K\Delta x+\eta\Delta x \quad \text{ἢ} \quad \frac{\Delta\sigma(x)}{\Delta x}=K+\eta,$$

ὅθεν $ο\varrho \dfrac{\Delta\sigma(x)}{\Delta x}=K$· ἤτοι τὸ K θὰ εἶναι ἡ παράγωγος τοῦ $\sigma(x)$· ὥστε:

Ὅταν ἡ συνάρτησις εἶναι διαφορίσιμος διὰ μίαν τιμὴν x, ***θὰ ἔχῃ παράγωγον πεπερασμένην καὶ ὡρισμένην.***

Καὶ ἀντιστρόφως· ὅταν ἡ συνάρτησις ἔχῃ παράγωγον πεπερασμένην καὶ ὡρισμένην θὰ εἶναι διαφορίσιμος· διότι ἔστω ὅτι $\sigma'(x)=K$· θὰ ἔχω $ο\varrho\dfrac{\Delta\sigma(x)}{x}=K$ ἢ $\dfrac{\Delta\sigma(x)}{\Delta x}=K+\eta$, ὅπου $ο\varrho\eta=0$, ὅταν $ο\varrho\Delta x=0$·

$$\text{ὅθεν} \quad \Delta\sigma(x)=K\Delta x+\eta\Delta x\cdot \quad \text{ἄρα}:$$

Ἵνα μία συνάρτησις εἶναι διαφορίσιμος διὰ τιμήν τινα x, ***πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχῃ παράγωγον πεπερασμένην καὶ ὡρισμένην δι' αὐτὴν τὴν τιμὴν*** x.

128. Ἔστω λοιπὸν ὅτι ἡ $\sigma(x)$ εἶναι διαφορίσιμος καὶ ὅτι ἔχω ἑπομένως

$$\Delta\sigma(x)=K.\Delta x+\eta.\Delta x.$$

Τὸ $K.\Delta x$ τουτέστιν ὁ πρῶτος ὅρος τῆς ἰσότητος ταύτης, καλεῖται **διαφορικὸν** τοῦ $\sigma(x)$ καὶ σημειοῦται: $d\sigma(x)$ [ἢ καὶ dy ἐὰν θέσω $y=\sigma(x)$] δηλ. $d\sigma(x)=K.\Delta x$ ὅθεν

$$\Delta\sigma(x)=d\sigma(x)+\eta\Delta x.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ K εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον παρίσταται συμβολικῶς καὶ διὰ τοῦ $\sigma'(x)$, δύναμαι νὰ γράψω:

$$(1) \qquad \Delta\sigma(x)=\sigma'(x).\Delta x+\eta\Delta x$$

$$\text{καὶ } (2) \qquad d\sigma(x)=\sigma'(x).\Delta x$$

$$(3) \qquad \frac{d\sigma(x)}{\Delta x}=\sigma'(x).$$

Τὸ Δx δύναμαι ν' ἀντικαταστήσω μὲ τὸ dx· καὶ τῷ ὄντι, ἐὰν ὡς συνάρτησιν $\sigma(x)$ θεωρήσω τὴν x τότε διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x θὰ ἔχω $\sigma'(x)=1$, ὁ δὲ τύπος (3) θὰ δίδῃ $\dfrac{dx}{\Delta x}=1$ ἢ $dx=\Delta x$· τουτέστι τὸ διαφορικὸν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x συμπίπτει πρὸς τὴν αὐθαίρετον ἐν γένει διαφορὰν τῆς μεταβλητῆς ταύτης.

Κατὰ ταῦτα οἱ τύποι (2) καὶ (3) γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς:

(2′) $d\sigma(x)=\sigma'(x)dx$ ἢ καὶ $dy=\sigma'(x)\,dx$

(3′) $\frac{d\sigma(x)}{dx}=\sigma'(x)$ ἢ καὶ (4) $\frac{dy}{dx}=\sigma'(x)$.

Ἤτοι: ***Τὸ διαφορικὸν συναρτήσεως εἶναι τὸ γινόμενον τῆς παραγώγου αὐτῆς ἐπὶ τὸ διαφορικὸν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς. Ἡ παράγωγος συναρτήσεως ἐκφράζεται ὡς λόγος τοῦ διαφορικοῦ τῆς συναρτήσεως πρὸς τὸ διαφορικὸν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.***

Οἱ τύποι (2) καὶ (3) δὲν διαφέρουσι τῶν τύπων (2′) καὶ (3′). Γράφω ἁπλῶς ἀντὶ Δx τὸ dx, ἐφόσον ὅμως θεωρῶ τὸ x ὡς ἀνεξάρτητον μεταβλητήν· διότι ἐὰν θεωρήσω, ὅτι καὶ τὸ x εἶναι συνάρτησις ἄλλης μεταβλητῆς, τότε τὸ Δx δὲν συμπίπτει μὲ τὸ dx καὶ ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω οἱ τύποι (2′) καὶ (3′) ἐφαρμόζονται καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἐνῶ οἱ τύποι (2) καὶ (3) δὲν ἐφαρμόζονται.

Διαδοχικαὶ παράγωγοι καὶ διαδοχικὰ διαφορικά.

129. Ἔστω ὅτι μία συνάρτησις $y=\sigma(x)$ μονότιμος εἰς ἓν διάστημα (x_0, X) ἔχει παράγωγον εἰς αὐτὸ τὸ διάστημα· θὰ εἶναι, ἐν γένει, ἡ παράγωγος αὕτη συνάρτησις τοῦ x· τὴν ἐκφραζομεν, ὡς εἴδομεν, διὰ τοῦ $\sigma'(x)$ ἢ καὶ διὰ τοῦ y'. Τὴν σημειοῦμεν ἐπίσης διὰ τοῦ $D\sigma(x)$ ἢ $D_x\,\sigma(x)$.

Ἔστω ὅτι ἡ $\sigma'(x)$ ἔχει καὶ αὐτὴ διὰ μίαν τιμὴν α τοῦ διαστήματος (x_0, X) παράγωγον· τὴν παράγωγον αὐτὴν καλοῦμεν δευτέραν παράγωγον τῆς $\sigma(x)$, διὰ $x=\alpha$ καὶ τὴν σημειοῦμεν ὡς ἑξῆς: $\sigma''(\alpha)$. Ἔστω ὅτι διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ διαστήματος (x_0, X) ἔχει παράγωγον ἡ $\sigma'(x)$· ἡ παράγωγος αὕτη θὰ εἶναι συνάρτησις τοῦ x καὶ σημειοῦται διὰ τοῦ $\sigma''(x)$, εἴτε διὰ τοῦ y'', εἴτε διὰ τοῦ $D^2\sigma(x)$ ἢ καὶ D^2y. Καθ᾽ ὅμοιον τρόπον προχωρῶν καλῶ τὴν παράγωγον τῆς $\sigma''(x)$, τρίτην παράγωγον τῆς $\sigma(x)$ καὶ τὴν σημειῶ διὰ $\sigma'''(x)$, εἴτε διὰ τοῦ y''' εἴτε διὰ $D^3\sigma(x)$ ἢ D^3y καὶ γενικῶς καλῶ νιοστὴν παράγωγον ἢ παράγωγον τάξεως ν τὴν παράγωγον τῆς παραγώγου τάξεως $\nu-1$· τὴν σημειῶ διὰ τοῦ $\sigma^{(\nu)}(x)$ ἢ καὶ $y^{(\nu)}$ ἢ $D^{\nu}\sigma(x)$ ἢ $D^{\nu}y$.

Ὅπως ἐθεώρησα ἀνωτέρω παράγωγον (μιᾶς συναρτήσεως) πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ παράγωγον πρὸς τὰ ἀριστερά, οὕτω καὶ διὰ τὰς διαδοχικὰς παραγώγους μιᾶς συναρτήσεως διὰ $x=\alpha$ δύναμαι νὰ ὁρίσω διαδοχικὰς παραγώγους πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ διαδοχικὰς πρὸς τ' ἀριστερά, θεωρῶν, τιμὰς τῆς αὐξήσεως θετικὰς ἢ μόνον ἀρνητικάς.

Καλῶ ***διαφορικὸν δευτέρας τάξεως*** τῆς συναρτήσεως $y=\sigma(x)$, διὰ τὴν τιμὴν x, τὸ γινόμενον τῆς δευτέρας παραγώγου $\sigma''(x)$ ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῆς αὐθαιρέτου ποσότητος dx· σημειοῦται δὲ τοῦτο διὰ τοῦ d^2y· οὕτως ἔχω $d^2y=\sigma''(x)dx^2$· καθ' ὅμοιον τρόπον διαφορικὸν τρίτης τάξεως καλεῖται τὸ γινόμενον τοῦ $\sigma'''(x)$ ἐπὶ dx^3 καὶ σημειοῦται: $d^3y=\sigma'''(x)\,dx^3$ καὶ γενικῶς διαφορικὸν ν τάξεως τῆς συναρτήσεως $y=\sigma(x)$, διὰ τὴν τιμὴν x, λέγεται τὸ γινόμενον τῆς $\sigma^{(\nu)}(x)$ ἐπὶ τὴν νιοστὴν δύναμιν τῆς αὐθαιρέτου, ἐν γένει, ποσότητος dx, ἤτοι σημειῶν αὐτὸ διὰ τοῦ $d^\nu y$, θὰ ἔχω:

$$(1) \qquad d^\nu y=\sigma^{(\nu)}(x)\,dx^\nu.$$

Καὶ ὅπως ἡ σχέσις $dy=\sigma'(x)dx$ ἀντικατεστάθη μὲ τὴν συμβολικὴν σχέσιν $\frac{dy}{dx}=\sigma'(x)$ τὸ δὲ $\frac{dy}{dx}$ γράφεται συμβολικῶς ἀντὶ τοῦ $\text{ορ}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, οὕτω καὶ ἡ σχέσις (1) δύναται ν' ἀντικατασταθῇ μὲ τὴν συμβολικὴν σχέσιν:

$$\frac{d^\nu y}{dx^\nu}=\sigma^{(\nu)}(x) \quad \text{ἢ καί:} \quad \frac{d^\nu y}{dx^\nu}=y^{(\nu)}.$$

Κανόνες χρήσιμοι διὰ τὴν παραγώγισιν καὶ διαφόρισιν.

130. Κατὰ τὰ προηγούμενα εἰς ἕκαστον κανόνα πρὸς ὑπολογισμὸν παραγώγου ἀντιστοιχεῖ κανὼν πρὸς ὑπολογισμὸν διαφορικοῦ. Δι' αὐτὸ θ' ἀρκοῦμαι κατωτέρω ν' ἀποδεικνύω τοὺς κανόνας μόνον ὅσον ἀφορᾷ τὴν παραγώγισιν.

Παράγωγος σταθερᾶς Ἔστω ὅτι ἡ $\sigma(x)$ ἀνάγεται εἰς σταθεράν· θὰ ἔχω διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ ε, $\sigma(x+\varepsilon)=\sigma(x)=\alpha$ καὶ ἑπομένως $\frac{\sigma(x+\varepsilon)-\sigma(x)}{\varepsilon}=\frac{0}{\varepsilon}=0$, ὅθεν $\sigma'(x)=\text{ορ}0=0$· ***ἤτοι ἡ παράγωγος σταθερᾶς εἶναι μηδέν.***

Παράγωγος ἀθροίσματος: Ἔστω ὅτι ἡ συνάρτησις $\sigma(x)$ εἶναι ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα δύο συναρτήσεων $\varphi(x)$ καὶ $f(x)$

$$(1) \qquad \sigma(x)=\varphi(x)+f(x)\cdot$$

δίδων εἰς τὸ x αὔξησιν Δx θὰ ἔχω :

$$\sigma(x+\Delta x)=\varphi(x+\Delta x)+f(x+\Delta x) \qquad \text{καὶ}$$

$$\sigma(x+\Delta x)-\sigma(x) \quad \text{ἢ καὶ} \quad \Delta\sigma(x)=\Delta\varphi(x)+\Delta f(x)$$

ὅθεν :

$$\frac{\Delta\sigma(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}+\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Ἀλλὰ τὸ ὅριον ἀθροίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὁρίων καὶ ἑπομένως, ὑποθέτων ὅτι αἱ φ(x) καὶ f(x) ἔχουν παράγωγον πεπερασμένην λαμβάνω (δι᾽ ὅριον Δx=0)

$$\text{ορ}\,\frac{\Delta\sigma(x)}{\Delta x}=\text{ορ}\,\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}+\text{ορ}\,\frac{\Delta f(x)}{\Delta x},$$

ἤτοι

$$(2) \qquad \sigma'(x)=\varphi'(x)+f'(x)$$

$$\text{ἢ} \qquad D\sigma(x)=D\varphi(x)+Df(x).$$

Ὅθεν (πολλαπλασιάζων ἐπὶ dx) λαμβάνω :

$$(3) \qquad d\sigma(x)=d\varphi(x)+df(x).$$

Ἤτοι ἡ παράγωγος (τὸ διαφορικὸν) ἀθροίσματος δύο συναρτήσεων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν παραγώγων (τῶν διαφορικῶν) τῶν συναρτήσεων τούτων.

Ἐὰν γράψω ἀντὶ τοῦ σ(x) τὸ y, ἀντὶ τοῦ φ(x) τὸ u καὶ ἀντὶ τοῦ f(x) τὸ υ, θὰ ἔχω τὰς ἰσότητας (1), (2), (3) ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$(1') \qquad y=u+\upsilon$$

$$(2') \qquad y'=u'+\upsilon'$$

$$(3') \qquad dy=du+d\upsilon.$$

Προφανὲς εἶναι, ὅτι ἡ ἀνωτέρω πρότασις ἐπεκτείνεται καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ᾽ ἣν :

$$\sigma(x)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\varphi_3(x)+\ldots+\varphi_\nu(x),$$

ὅπου ν πεπερασμένος :

Παράγωγος γινομένου : Ἔστω ὅτι ἡ συνάρτησις σ(x) εἶναι γινόμενον δύο συναρτήσεων **φ(x)** καὶ **f(x)** :

$$\sigma(x)=\varphi(x).f(x)$$

Δίδων εἰς τὸ x αὔξησίν τινα Δx λαμβάνω

$$\sigma(x+\Delta x)=\varphi(x+\Delta x).f(x+\Delta x) \qquad \text{καί :}$$

$$\frac{\Delta\sigma(x)}{\Delta x}=\frac{\varphi(x+\Delta x)f(x+\Delta x)-\varphi(x)f(x)}{\Delta x}.$$

Προσθέτων καὶ ἀφαιρῶν εἰς τὸν ἀριθμητὴν τοῦ δευτέρου μέλους τὸ $\varphi(x+\Delta x)f(x)$ λαμβάνω :

$$\frac{\Delta\sigma(x)}{\Delta x}=\frac{\varphi(x+\Delta x)[f(x+\Delta x)-f(x)]+f(x)[\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)]}{\Delta x},$$

ὅθεν καὶ $\dfrac{\Delta\sigma(x)}{\Delta x}=\varphi(x+\Delta x)\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+f(x)\,\dfrac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}.$

Ἐπειδὴ ὑποθέτω, ὅτι αἱ $\varphi(x)$ καὶ $f(x)$ ἔχουν παράγωγον πεπερασμένην, θὰ εἶναι αἱ $\varphi(x)$ καὶ $f(x)$ συνεχεῖς καὶ θὰ ἔχω

$$\text{ορ}\,\varphi(x+\Delta x)=\varphi(x) \text{ καὶ ορ } f(x+\Delta x)=f(x), \text{ δι' ορ } \Delta x=0,$$

ὅθεν $$\text{ορ}\frac{\Delta\sigma(x)}{\Delta x}=\varphi(x)\text{ορ}\,\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}+f(x)\text{ορ}\,\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}$$

ἢ : $$\sigma'(x)=\varphi(x)f'(x)+f(x)\varphi'(x)$$

ἢ καὶ : $$D\sigma(x)=\varphi(x)Df(x)+f(x)D\varphi(x)$$

καὶ $$d\sigma(x)=\varphi(x)df(x)+f(x)d\varphi(x).$$

Ἤτοι :

Ἵνα εὕρωμεν τὴν παράγωγον (τὸ διαφορικὸν) γινομένου δύο συναρτήσεων ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν δεύτερον παράγοντα ἐπὶ τὴν παράγωγον (τὸ διαφορικὸν) τοῦ πρώτου καὶ τὸν πρῶτον παράγοντα ἐπὶ τὴν παράγωγον (τὸ διαφορικὸν) τοῦ δευτέρου καὶ νὰ προσθέσωμεν.

Θὰ ἠδυνάμεθα νὰ γράψωμεν ἁπλούστερον τὰ προηγούμενα, ἐὰν ἀντὶ τοῦ $\sigma(x)$ ἐγράφομεν τὸ y, ἀντὶ τοῦ $\varphi(x)$ τὸ u καὶ ἀντὶ τοῦ $f(x)$

τὸ υ. Τότε τὴν ἀνωτέρω ἀπόδειξιν δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς :

$$y=u\,.\,\upsilon \qquad y+\Delta y=(u+\Delta u)\,(\upsilon+\Delta\upsilon)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=(\upsilon+\Delta\upsilon)\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\,\frac{\Delta\upsilon}{\Delta x}$$

καὶ $$\text{ορ}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\upsilon\,\text{ορ}\,\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\,\text{ορ}\,\frac{\Delta\upsilon}{\Delta x}.$$

Ὅθεν

$$(1) \qquad y'=\upsilon u'+u\upsilon'$$

καὶ $$dy=\upsilon du+u d\upsilon.$$

Λογαριθμικὴ παράγωγος. Τὸ πηλίκον τῆς παραγώγου μιᾶς συναρτήσεως δι' αὐτῆς τῆς συναρτήσεως καλεῖται ***λογαριθμικὴ παράγωγος*** τῆς συναρτήσεως.

Ἐὰν διαιρέσω ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) διὰ uυ λαμβάνω :

$$\frac{y'}{u\upsilon}=\frac{u'}{u}+\frac{\upsilon'}{\upsilon} \qquad \text{ἢ}$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{u'}{u}+\frac{\upsilon'}{\upsilon}.$$

Ὅθεν ἐὰν μία συνάρτησις εἶναι γινόμενον δύο ἄλλων συναρτήσεων ἡ ***λογαριθμικὴ παράγωγος*** τῆς συναρτήσεως ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν λογαριθμικῶν παραγώγων τῶν δύο ἄλλων.

Εὐκόλως ἐπεκτείνονται τ' ἀνωτέρω ἐξαγόμενα καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν μία συνάρτησις y εἶναι γινόμενον πλειοτέρων συναρτήσεων τοῦ X.

Ἔστω :

$$y=\varphi_1(X)\varphi_2(X)\varphi_3(X)\;.\;.\;.\;\varphi_\nu(X)$$

(ὅπου ν ἀριθμὸς πεπερασμένος)· θὰ ἔχω

$$y'=\varphi'_1\varphi_2\varphi_3\cdots\varphi_\nu+\varphi_1\varphi'_2\varphi_3\cdots\varphi_\nu+\;.\;.\;.\;+\varphi_1\varphi_2\varphi_3\cdots\varphi'_\nu$$

$$dy=\varphi_2\varphi_3\cdots\varphi_\nu d\varphi_1+\varphi_1\varphi_3\cdots\varphi_\nu d\varphi_2+\;.\;.\;.\;+\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_{\nu-1}d\varphi_\nu$$

καὶ $$\frac{y'}{y}=\frac{\varphi'_1}{\varphi_1}+\frac{\varphi'_2}{\varphi_2}+\;.\;.\;+\frac{\varphi'_\nu}{\varphi_\nu}.$$

Μερικαὶ περιπτώσεις : 1) Ἐὰν $y=\alpha\varphi(x)$, (ὅπου α σταθερὸν) θὰ ἔχω : $y'=\alpha\varphi'(x)$ ἢ $Dy=\alpha D\varphi(x)$ καὶ $dy=\alpha d\varphi(x)$.

Ἤτοι: *ἡ παράγωγος (τὸ διαφορικὸν) γινομένου συναρτήσεως ἐπὶ σταθερὰν ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς σταθερᾶς ἐπὶ τὴν παράγωγον (τὸ διαφορικὸν) τῆς συναρτήσεως·* δηλαδὴ τὸν ταθερὸν παράγοντα δυνάμεθα νὰ τὸν θέσωμεν ἐκτὸς τοῦ συμβόλου τῆς παραγωγίσεως (διαφορίσεως).

2) Ἐὰν $y=x^{\nu}$ (ὅπου ν θετικὸς ἀκέραιος) θὰ ἔχω, ἐφαρμόζων τὸν κανόνα εὑρέσεως παραγώγου (διαφορικοῦ) γινομένου,

(2) $y'=\nu x^{\nu-1}$ ἢ καὶ $Dx^{\nu}=\nu x^{\nu-1}$ ἢ $\frac{d}{dx}(x^{\nu})=\nu x^{\nu-1}$

καὶ (3) $dy=\nu x^{\nu-1}dx$ ἢ καὶ $d(x^{\nu})=\nu x^{\nu-1}dx$.

Ἐφαρμόζων τὰ προηγούμενα εὑρίσκω εὐκόλως τὴν παράγωγον (τὸ διαφορικὸν) ἀκεραίου πολυωνύμου. Κατὰ ταῦτα· ἐὰν

$$\varphi(x)=\alpha_0 x^{\mu}+\alpha_1 x^{\mu-1}+\alpha_2 x^{\mu-2}+\ldots+\alpha_{\mu-1}x+\alpha_{\mu}$$

θὰ ἔχω

$$\varphi'(x)=D\varphi(x)=\mu\alpha_0 x^{\mu-1}+(\mu-1)\alpha_1 x^{\mu-2}+(\mu-2)\alpha_2 x^{\mu-3}+..+\alpha_{\mu-1}$$

$$\text{καὶ}\quad d\varphi(x)=[\mu\alpha_0 x^{\mu-1}+(\mu-1)\alpha_1 x^{\mu-2}+\ldots+\alpha_{\mu-1}]dx.$$

Παράγωγος πηλίκου: Ἔστω $y=\frac{u}{\upsilon}$, ὅπου $u=\sigma(x)$, $\upsilon=\varphi(x)$· ἐὰν δώσω εἰς τὸ x αὔξησίν τινα Δx θὰ ἔχω

$$y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{\upsilon+\Delta\upsilon},\quad \Delta y=\frac{u+\Delta u}{\upsilon+\Delta\upsilon}-\frac{u}{\upsilon}=\frac{\upsilon\Delta u-u\Delta\upsilon}{(\upsilon+\Delta\upsilon)\upsilon}$$

$$\text{καὶ}\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\upsilon\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta\upsilon}{\Delta x}}{(\upsilon+\Delta\upsilon)\upsilon}.$$

Ὑποθέτω ὅτι αἱ συναρτήσεις u καὶ υ ἔχουν παραγώγους πεπερασμένας καὶ ὅτι τὸ $\upsilon\neq 0$ διὰ τὴν θεωρουμένην τιμὴν τοῦ x.

Ἐπειδὴ ὅριον πηλίκου ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τῶν ὁρίων, (§ 49) θὰ ἔχω:

$$\text{ορ}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\upsilon\,\text{ορ}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\,\text{ορ}\frac{\Delta\upsilon}{\Delta x}}{\upsilon.\text{ορ}(\upsilon+\Delta\upsilon)}.$$

Ὅθεν $y'=\frac{\upsilon u'-u\upsilon'}{\upsilon^2}$ (διότι $\text{ορ}(\upsilon+\Delta\upsilon)=\upsilon$, ἐπειδὴ ἡ υ εἶναι συνεχής) καὶ $dy=\frac{\upsilon du-u d\upsilon}{\upsilon^2}$.

Ἤτοι: ***Ἵνα εὕρω τὴν παράγωγον (τὸ διαφορικὸν) πηλίκου πολλαπλασιάζω τὸν παρονομαστὴν ἐπὶ τὴν παράγωγον (τὸ διαφορικὸν) τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ τὴν παράγωγον (τὸ διαφορικὸν) τοῦ παρονομαστοῦ καὶ ἀφαιρῶ· τὴν δὲ διαφορὰν διαιρῶ διὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ παρονομαστοῦ.***

Μερικὴ περίπτωσις: Ἐὰν $y=\frac{\alpha}{\upsilon}$, ὅπου α σταθερὸς καὶ τὸ υ συνάρτησις τοῦ x, θὰ ἔχω ἐφαρμόζων τὰ ἀνωτέρω:

$$y'=-\alpha\frac{\upsilon'}{\upsilon^2} \quad \text{ἢ} \quad y'=-\alpha\frac{D\upsilon}{\upsilon^2} \quad \text{καὶ} \quad dy=-\alpha\frac{d\upsilon}{\upsilon^2}\cdot$$

ἐὰν $\alpha=1$ καὶ $\upsilon=x^\mu$ (ὅπου μ θετικὸς ἀκέραιος) ἔχω

$$y=\frac{1}{x^\mu} \quad \text{καὶ} \quad y'=-\frac{(x^\mu)'}{x^{2\mu}}$$

$$\text{ἢ καί: } Dx^{-\mu}=D\frac{1}{x^\mu}=-\frac{Dx^\mu}{x^{2\mu}}=-\frac{\mu x^{\mu-1}}{x^{\mu^2}}=-\mu x^{-\mu-1}$$

$$\text{καὶ} \quad dx^{-\mu}=-\mu x^{-\mu-1}dx\cdot$$

ἐὰν θέσω $-\mu=\nu$ λαμβάνω: $Dx^\nu=\nu x^{\nu-1}$, $dx^\nu=\nu x^{\nu-1}dx$, ἤτοι οἱ τύποι (2) καὶ (3) ἰσχύουν καὶ ὅταν ὁ ἐκθέτης ν εἶναι ἀκέραιος ἀρνητικός.

131. — ***Παράγωγοι ἀντιστρόφων συναρτήσεων.*** — Ἔστω (4) $y=\sigma(x)$ συνάρτησις συνεχὴς καὶ διαρκῶς αὔξουσα ἢ ἐλαττουμένη εἰς ἓν διάστημα (§ 114)· θὰ ὑπάρχῃ συνάρτησις (5) $x=\varphi(y)$ ἀντίστροφος τῆς δοθείσης καλῶς προσδιωρισμένη εἰς διάστημά τι καὶ συνεχὴς εἰς αὐτό· ἔστω πρὸς τούτοις ὅτι μία ἐκ τῶν συναρτήσεων σ(x) καὶ φ(y) ἔχει παράγωγον διάφορον τοῦ μηδενὸς πεπερασμένην· π.χ. ἔστω ὅτι ὑπάρχει ἡ σ′(x) καὶ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός. Ἐὰν Δx καὶ Δy εἶναι δύο ἀντίστοιχοι αὐξήσεις ἔχω

$$(6) \quad \frac{\Delta x}{\Delta y}=1:\frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ καὶ } \Delta y=\sigma(x+\Delta x)-\sigma(x),\ \Delta x=\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)$$

ἢ καὶ $\frac{\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)}{\Delta y}=1:\frac{\sigma(x+\Delta x)-\sigma(x)}{\Delta x}\cdot$ ὅθεν λαμβάνων τὰ ὅρια ἔχω (7) $D_y\,\varphi=1:D_x\,\sigma$ ἢ καὶ $\varphi'(y)=1:\sigma'(x)$·

ὅπου x καὶ y εἶναι δύο τιμαὶ ἀντίστοιχοι, ἐπαληθεύουσαι ἐπομένως τὰς (4) καὶ (5)· ὅθεν ***τὸ γινόμενον τῆς παραγώγου μιᾶς συναρτήσεως ἐπὶ τὴν παράγωγον τῆς ἀντιστρόφου πρὸς ταύτην συναρτήσεως ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα***· ὥστε, ἐὰν ἔχω μίαν συνάρτησιν $y=\sigma(x)$ καὶ ζητῶ τὴν παράγωγον τῆς ἀντιστρόφου της $x=\varphi(y)$ διὰ μίαν τιμὴν τοῦ y, ἀρκεῖ νὰ εὕρω τὴν παράγωγον τῆς $\sigma(x)$ διὰ τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν x καὶ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ νὰ λάβω τὸν ἀντίστροφον. Παράδειγμα· ἔστω ἡ συνάρτησις (4′) $y=x^{\mu}$ (μ, ἀκέραιος) εἰς τὸ διάστημα $(0, +\infty)$· ἀντίστροφος αὐτῆς εἶναι ἡ $x=y^{\frac{1}{\mu}}$ καὶ ἐπομένως $(y^{\frac{1}{\mu}})'=1:(x^{\mu})'$ ἢ $(y^{\frac{1}{\mu}})'=1:\mu x^{\mu-1}=\frac{1}{\mu}y^{\frac{1}{\mu}-1}$· ἐὰν ἐναλλάξω τὰ γράμματα x καὶ y καὶ θέσω $\frac{1}{\mu}=\nu$ λαμβάνω, ὅτι οἱ τύποι (2) καὶ (3) ἰσχύουν καὶ ὅταν $\nu=\frac{1}{\mu}$ (μ ἀκέραιος),

$$\text{π. χ.}\quad (\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}},\qquad d\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx.$$

132.—***Συνάρτησις συναρτήσεως· παράγωγος αὐτῆς.*** Ἔστω ὅτι συνάρτησίς τις $\sigma(x)$ εἶναι διαφορίσιμος εἰς διάστημά τι (α, β) (δηλ. διαφορίσιμος διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ διαστήματος) καὶ ὅτι τὸ σύνολον τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς $\sigma(x)$ εἶναι διάστημά τι (γ, δ)· ἔστω ἀφ᾽ ἑτέρου συνάρτησίς τις $\varphi(\sigma)$ ἡ ὁποία, ὅταν θεωρήσωμεν τὸ σ ὡς ἀνεξάρτητον μεταβλητήν, νὰ εἶναι διαφορίσιμος εἰς τὸ διάστημα (γ, δ)· ἐὰν λάβω ὑπ᾽ ὄψιν καὶ τὰς δύο συναρτήσεις παρατηρῶ ὅτι εἰς μίαν τιμὴν τοῦ x [ἐν τῷ διαστήματι (α, β)] ἀντιστοιχεῖ τιμή τις διὰ τὸ $\sigma(x)$ [ἐν τῷ διαστήματι (γ, δ)]· ἐὰν λάβω αὐτὴν ὡς τιμὴν τοῦ σ θὰ ἔχω ἀντίστοιχόν τινα τιμὴν διὰ τὸ $\varphi(\sigma)$· καὶ οὕτω ἡ τιμὴ τοῦ $\varphi(\sigma)$, θὰ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς τιμῆς τοῦ x· ἤτοι τὸ $\varphi(\sigma)$ θὰ εἶναι συνάρτησίς τις $f(x)$· τοῦτέστιν ἀντὶ τοῦ νὰ θεωρῶ τὴν συνάρτησιν $\varphi(\sigma)$ μὲ ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν τὸ σ εἰς τὸ διάστημα (γ, δ) δύναμαι νὰ θεωρῶ τὴν συνάρτησιν $f(x)$ εἰς τὸ διάστημα (α, β)· ἤτοι $\varphi(\sigma)=\varphi(\sigma(x))=f(x)$. Ἡ $\varphi(\sigma(x))$ καλεῖται τότε ***συνάρτησις συναρτήσεως τοῦ*** x· π.χ. ἔστω $\sigma(x)=1-x^2$ καὶ $\varphi(\sigma)=\sqrt{\sigma}$ θὰ εἶναι $f(x)=\sqrt{1-x^2}$· ἐὰν θεωρήσω ὡς διάστημα (α,β) τὸ $(-1, +1)$ θὰ ἔχω ὡς διάστημα (γ, δ) τὸ (0, 1)· ὑποθέτω ἤδη ὅτι γνωρίζω τὸ $\varphi'(\sigma)$ (θεωρουμένης τῆς σ ὡς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς) καὶ τὸ σ′(x) καὶ ζητῶ τὴν παράγωγον τῆς f(x)· παρατηρῶ ὅτι (§ 128) $\Delta\varphi = \varphi'(\sigma)\,\Delta\sigma + \eta\Delta\sigma$ καὶ $\Delta\sigma = \sigma'(x)\Delta x + \vartheta\Delta x$, ὅπου τὰ η καὶ ϑ εἶναι ἀπειροστὰ (§ 55) ὅταν τὰ Δσ καὶ Δx εἶναι ἀπειροστά· ἑπομένως

$$\Delta f = \varphi'(\sigma)\sigma'(x)\Delta x + (\eta\sigma'(x) + \vartheta\varphi'(\sigma))\Delta x + \eta\vartheta\,\Delta\sigma\,\Delta x$$

ὅθεν (8) $f'(x) = \text{ορ}\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \varphi'(\sigma)\,\sigma'(x)$· ἤτοι:

ἡ παράγωγος τῆς f(x) ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς παραγώγου τῆς φ(σ) (ὡς πρὸς σ) ἐπὶ τὴν παράγωγον τῆς σ(x).

Ἡ (8) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{d\sigma}\,\frac{d\sigma}{dx} \text{ ἢ καὶ } D_x\,\varphi = D_\sigma\,\varphi . D_x\,\sigma \text{ ἢ } \varphi'_x = \varphi'_\sigma . \sigma'_x$$

δίδει δ᾽ ἐπίσης ἡ (8) τὴν (9) $d\varphi = \varphi'(\sigma)d\sigma$.

Εἶναι ἀξιοπαρατήρητον ὅτι ***ὁ τύπος*** (9) ***ἰσχύει εἴτε τὸ σ θεωρηθῇ ὡς ἀνεξάρτητος μεταβλητή, εἴτε ὡς συνάρτησις ἄλλης μεταβλητῆς.***

Ὑπέθεσα διὰ τὸν τύπον (8) ὅτι αἱ παράγωγοι φ′(σ) καὶ σ′(x) εἶναι πεπερασμέναι· ἐὰν τοῦτο δὲν συμβαίνῃ, ὁ κανὼν δὲν ἐφαρμόζεται· δὲν ἕπεται ὅμως ἀπαραιτήτως ἐξ αὐτοῦ ὅτι ἡ f(x) δὲν ἔχει παράγωγον.

Ἔστω ἤδη $y = \varphi(\omega)$, $\omega = \sigma(z)$, $z = F(x)$· Εὐκόλως ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται: $D_x y = D_\omega y . D_z\,\omega . D_x z$ ἢ καὶ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{d\omega}\cdot\dfrac{d\omega}{dz}\cdot\dfrac{dz}{dx}$,

ἐπεκτείνονται δὲ προφανῶς τὰ ἀνωτέρω καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ᾽ ἣν $y = \varphi_1(\omega)$, $\omega = \varphi_2(z)$, $z = \varphi_3(t)$, $t = \varphi_4(x)$· θὰ εἶναι τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\omega}\,\frac{d\omega}{dz}\,\frac{dz}{dt}\,\frac{dt}{dx}, \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Ἐφαρμογαὶ καὶ εὕρεσις παραγώγων.

133.—Ἔστω $y = x^{\frac{\rho}{\mu}}$, ὅπου ρ,μ ἀκέραιοι· παρατηρῶ ὅτι ἐὰν θέσω $\omega = x^{\frac{1}{\mu}}$ θὰ ἔχω $y = \omega^{\rho}$· θεωρῶ οὕτω τὸ y ὡς συνάρτησιν συναρτήσεως· ἐφαρμόζων τὰ προαποδειχθέντα λαμβάνω $y_x = \rho\omega^{\rho-1}\omega'$·

ἔχων ἤδη ὑπ' ὄψιν ὅτι $\omega' = \frac{1}{\mu} x^{\frac{1}{\mu}-1}$ εὐκόλως εὑρίσκω, ὅτι

$y'_x = \left(x^{\frac{\rho}{\mu}}\right)' = \frac{\rho}{\mu} x^{\frac{\rho}{\mu}-1}$ ·ὥστε καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν $\nu = \frac{\rho}{\mu}$

ἔχω ὅτι $(x^{\nu})' = \nu x^{\nu-1}$.

134. Ἔστω ἡ συνάρτησις $y = e^x$. Συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τῆς παραγώγου ἔχω :

$$(1) \qquad (e^x)' = De^x = \underset{\text{ορ}\Delta x=0}{\text{ορ}} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \underset{\text{ορ}\Delta x=0}{\text{ορ}} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

Θέτω $e^{\Delta x} - 1 = \alpha$, θὰ ἔχω $\text{ορ}\alpha = 0$, ὅταν $\text{ορ}\Delta x = 0$

καὶ $e^{\Delta x} = 1 + \alpha$ ἢ $\Delta x = \log(1+\alpha)$

[ὅπου διὰ τοῦ log (ἢ καὶ ἁπλῶς διὰ τοῦ l σημειῶ τὸν Νεπέρειον λογάριθμον]. Ἀντικαθιστῶν εἰς τὸν τύπον (1) λαμβάνω :

$$De^x = \text{ορ}\frac{e^x \alpha}{\log(1+\alpha)} = e^x\ \text{ορ}\frac{\alpha}{\log(1+\alpha)} = e^x \text{ορ}\frac{1}{\frac{1}{\alpha}\log(1+\alpha)}.$$

Ἐὰν θέσω $\frac{1}{\alpha} = \mu$ θὰ ἔχω $\alpha = \frac{1}{\mu}$ καὶ $\text{ορ}\ \mu = \infty$, ὅταν $\text{ορ}\alpha = 0$· ἑπομένως :

$$(e^x)' = De^x = e^x \frac{1}{\log\ \text{ορ}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}} = e^x\ (\S\ 52) \text{ καὶ } de^x = e^x dx.$$

Ἤτοι ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως e^x εἶναι ἡ ἰδία συνάρτησις e^x, ἑπομένως καὶ δευτέρα παράγωγος, τρίτη, . . . νυοστὴ παράγωγος τῆς e^x θὰ εἶναι ἡ ἰδία συνάρτησις e^x δηλ.

$$\frac{d^{(\nu)} e^x}{dx^\nu} = D^{(\nu)} e^x = e^x.$$

135.—Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=\alpha^x$. Δύναμαι νὰ γράψω $y=e^{x\log\alpha}$ ἢ καὶ $y=e^{\omega}$, ὅπου $\omega=x\log\alpha$· θεωρῶ οὕτω τὸ y ὡς συνάρτησιν συναρτήσεως τοῦ x· ἐφαρμόζων τὸν σχετικὸν κανόνα λαμβάνω

$$y'_x=D_x y=D_\omega e^{\omega}\,.\,D_x(x\log\alpha)=e^{\omega}\log\alpha=\alpha^x\log\alpha\cdot$$

$$\text{ὥστε } (\alpha^x)'=D\alpha^x=\alpha^x\log\alpha \text{ καὶ } d\alpha^x=\alpha^x\log\alpha\, dx$$

136.—Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=\lambda o\gamma_\alpha x$. Ἡ συνάρτησις αὕτη ἔχει ἀντίστροφον τὴν $x=\alpha^y$· ἐφαρμόζων τὸν σχετικὸν τύπον λαμβάνω

$$y'_x\,.\,x'_y=1 \quad \text{ἢ} \quad D_x\lambda o\gamma_\alpha x\,.\,D_y\,\alpha^y=1 \quad \text{ὅθεν}$$

$$D_x\lambda o\gamma_\alpha x=\frac{1}{\alpha^y\log\alpha}=\frac{1}{x\log\alpha}.$$

Μερικὴ περίπτωσις· ἔστω $y=\log x$· δηλ. ἔστω $\alpha=e$· θὰ εἶναι τότε

$$(\log x)'=D\log x=\frac{1}{x} \text{ καὶ } d\log x=\frac{1}{x}dx.$$

137.—Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=x^\nu$, ὅπου ν οἱοσδήποτε ἀριθμός· δύναμαι προφανῶς νὰ γράψω $x^\nu=e^{\nu\log x}$

$$\text{ὅθεν}: (x^\nu)'=\frac{\nu}{x}e^{\nu\log x}=\nu x^{\nu-1}.$$

Παρατηρῶ ὅτι εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα φθάνω καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἔστω $y=x^\nu$ ὅπου ὁ ἐκθέτης ν εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμός· ἐὰν θεωρήσω ἀκολουθίαν ῥητῶν ἀριθμῶν $\nu_1, \nu_2, \ldots$ ἔχουσαν ὅριον τὸ ν θὰ εἶναι τὸ y (§ 112—120) ὅριον τῆς ἀκολουθίας x^{ν_1}, $x^{\nu_2}, \ldots$ καὶ ἡ παράγωγος τοῦ x^ν θὰ εἶναι ὅριον τῆς ἀκολουθίας $(x^{\nu_1})'$, $(x^{\nu_2})', \ldots$ ὅθεν ἐξάγεται (§ 133) ὅτι καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ὁ ν εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμὸς ἰσχύει ὅτι $(x^\nu)'=\nu x^{\nu-1}$.

138. ***Παράγωγοι τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων,***
1) $y=\eta\mu x$· ἔχω:

$$y'=D\eta\mu x=\text{ορ}\frac{\eta\mu(x+\Delta x)-\eta\mu x}{\Delta x}=\text{ορ}\frac{2\eta\mu\frac{\Delta x}{2}\sigma\upsilon\nu(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}=$$

$$=\text{ορ}\frac{\eta\mu\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\text{ορ}\ \sigma\upsilon\nu(x+\frac{\Delta x}{2})=\sigma\upsilon\nu x$$

ἤτοι: $$(\eta\mu x)'=D\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x.$$

2) $y=\sigma\upsilon\nu x$· τοῦτο γράφεται $y=\eta\mu(\frac{\pi}{2}-x)$ ἢ καὶ $y=\eta\mu\,\omega$, ὅπου $\omega=\frac{\pi}{2}-x$· ὅθεν $D_x y=D_\omega y\ D_x\omega=\sigma\upsilon\nu\omega.(-1)=-\sigma\upsilon\nu\omega=-\eta\mu x$
ἤτοι: $(\sigma\upsilon\nu x)'=D\sigma\upsilon\nu x=-\eta\mu x$

3) $y=\varepsilon\varphi x$· ἔχω:

$$y'=\left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x-(\sigma\upsilon\nu x)'\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\ \text{ἢ καὶ}\ (\varepsilon\varphi x)'=D\varepsilon\varphi x=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

καί: $$d\varepsilon\varphi x=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$$

4) $y=\sigma\varphi x$ ἔχω

$$(\sigma\varphi x)'=D\sigma\varphi x=D\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=\frac{\eta\mu x D\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x D\eta\mu x}{\eta\mu^2 x}$$

ἤτοι $$(\sigma\varphi x)'=D\sigma\varphi x=-\frac{1}{\eta\mu^2 x}\ \text{καὶ}\ d\sigma\varphi x=-\frac{1}{\eta\mu^2 x}dx.$$

139.—***Παράγωγοι τῶν ἀντιστρόφων τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων.*** 1) $y=\text{τοξ}\eta\mu x$· ἡ συνάρτησις αὐτὴ εἶναι ἀντίστροφος τῆς $x=\eta\mu y$· ὅθεν, ἐφαρμόζων τὰ περὶ εὑρέσεως παραγώγων ἀντιστρόφων συναρτήσεων λαμβάνω $(\text{τοξ}\eta\mu x)'_x.(\eta\mu y)'_y=1$

$$\text{ἢ } D\text{τοξημ}x = (\text{τοξημ}x)' = \frac{1}{\text{συν}y} = \frac{1}{\sqrt{1-\text{ημ}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

καί: $$d\text{τοξημ}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

2) $y = \text{τοξσυν}x$. Ἀντίστροφος αὐτῆς εἶναι ἡ $x = \text{συν}y$ καὶ ἑπομένως:

$$D\ \text{τοξσυν}x = (\text{τοξσυν}x)' = -\frac{1}{\text{ημ}y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\text{συν}^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

καὶ $$d\text{τοξσυν}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

3) $y = \text{τοξεφ}x$. Ἀντίστροφος αὐτῆς εἶναι ἡ $x = \text{εφ}y$ καὶ ἑπομένως:

$$D\ \text{τοξεφ}x = (\text{τοξεφ}x)' = \frac{1}{\dfrac{1}{\text{συν}^2 y}} = \text{συν}^2 y = \frac{1}{1+\text{εφ}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

καί : $$d\text{τοξεφ}x = \frac{1}{1+x^2}dx.$$

4) $y = \text{τοξσφ}x$. Ἀντίστροφος αὐτῆς εἶναι ἡ $x = \text{σφ}\ y$ καὶ ἑπομένως:

$$D\ \text{τοξσφ}x = (\text{τοξσφ}x)' = -\frac{1}{\dfrac{1}{\text{ημ}^2 y}} = -\frac{1}{1+\text{σφ}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

καί : $$d\text{τοξσφ} = -\frac{1}{1+x^2}dx.$$

Παρατηρῶ ὅτι, τὸ ἄθροισμα τῶν παραγώγων τῶν συναρτήσεων τοξεφx καὶ τοξσφx εἶναι ο· τοῦτο καὶ ἀπ' εὐθείας ἐξάγεται ἐκ τῆς σχέσεως $\text{τοξεφ}x + \text{τοξσφ}x = \frac{\pi}{2}$ $(\,|x| < 1)$. (Θεωρῶ τὰς πρωτευούσας τιμὰς τῶν τόξων (§ 123)).

140.—Οἱ εὑρεθέντες τύποι (§ 133—139) ἰσχύουν (§ 132) καὶ ὅταν ἀντικατασταθῇ τὸ x μὲ οἱανδήποτε συνάρτησιν τοῦ x· π. χ. ἐὰν εἰς τὸν τύπον $dx^\nu = \nu\ x^{\nu-1}dx$ θέσω ἀντὶ τοῦ x συνάρτησιν $\varphi(x)$ θὰ ἔχω $$d[\varphi(x)]^\nu = \nu\,[\varphi(x)]^{\nu-1}d\varphi(x).$$

141.—***Παραδείγματα εὑρέσεως παραγώγων καὶ διαφορικῶν.***
1) $y = \sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}$ θέτω $\omega = \alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$ ὁπότε $y = \sqrt{\omega}$· ἑπομένως

$$y_x' = D_x y = D_\omega y.\ D_x\omega = \frac{1}{2\sqrt{\omega}}2(\alpha x + \beta) = \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}}$$

$$\text{καὶ } d\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}=\frac{\alpha x+\beta}{\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}}\,dx.$$

2) $y=\log \eta\mu x$· θέτω $\eta\mu x=\omega$ ὁπότε $y=\log\omega$

$$D_x y=\frac{1}{\omega}\,\sigma\upsilon\nu x=\sigma\varphi x \quad \text{καὶ} \quad d\log\eta\mu x=\sigma\varphi x\,.\,dx$$

3) $y=\log(x+\sqrt{x^2-1})$ θέτω $x+\sqrt{x^2-1}=\omega$ ὁπότε : $y=\log\omega$·

ἐπομένως $$D_x y=\frac{1}{\omega}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\text{καὶ} \quad d\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}.$$

4) $y=\log(x+\sqrt{\alpha^2+x^2})$· θέτω $x+\sqrt{\alpha^2+x^2}=\omega$ ὁπότε :

$y=\log\omega$· ἐπομένως $D_x y=\frac{1}{\omega}\left(1+\frac{x}{\sqrt{\alpha^2+x^2}}\right)$

$$\text{καὶ } d\log\left(x+\sqrt{\alpha^2+x^2}\right)=\frac{dx}{\sqrt{\alpha^2+x^2}}.$$

5) $y=\log\frac{\alpha+\beta\varepsilon\varphi x}{\alpha-\beta\varepsilon\varphi x}$· δύναμαι νὰ γράψω : $y=\log\omega$

$$\text{ὅπου} \quad \omega=\frac{\alpha+z}{\alpha-z} \text{ καὶ } z=\beta\varepsilon\varphi x.$$

$$y'_x=y'_\omega\,.\,\omega'_z\,.\,z'_x \quad \text{ἢ} \quad D_x y=D_\omega y\,.\,D_z\omega\,.\,D_x z.$$

ὅθεν $y'_x=D_x y=\frac{1}{\omega}\cdot\frac{2\alpha}{(\alpha-z)^2}\cdot\frac{\beta}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

$$y'_x=\frac{\alpha-z}{\alpha+z}\cdot\frac{2\alpha}{(\alpha-z)^2}\cdot\frac{\beta}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2\varepsilon\varphi^2 x}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\, x}=\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2 x-\beta^2\eta\mu^2 x}$$

$$\text{καὶ} \quad d\log\frac{\alpha+\beta\varepsilon\varphi x}{\alpha-\beta\varepsilon\varphi x}=\frac{2\alpha\beta dx}{\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2 x-\beta^2\eta\mu^2 x}.$$

6) $y=\varphi(\sigma)$, ὅπου τὸ σ εἶναι συνάρτησις τοῦ x· ἔχω (§ 130, 132)

$\frac{dy}{dx}=\varphi'\sigma'$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\varphi''\sigma'^2+\varphi'\sigma''$, $\frac{d^3y}{dx^3}=\varphi'''\sigma'^3+3\varphi''\sigma'\sigma''+\varphi'\sigma'''$ κ.ο.κ.

Ἀσκήσεις.

1) Δίδεται ὅτι μία συνάρτησις διὰ $x=0$ λαμβάνῃ τὴν τιμὴν 0 διὰ πᾶσαν δὲ ἄλλην τιμὴν τοῦ x λαμβάνει τιμὴν προσδιοριζομένην ἐκ τῆς σχέσεως: $y = x \text{ τοξ εφ} \frac{1}{x}$.
Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ συνάρτησις αὕτη διὰ $x=0$ ἔχῃ παράγωγον πρὸς τὰ δεξιὰ τὸ $\frac{\pi}{2}$ καὶ πρὸς τἀριστερὰ τὸ $-\frac{\pi}{2}$.

2) Δίδεται ὅτι μία συνάρτησις διὰ $x=0$ λαμβάνῃ τὴν τιμὴν 0 καὶ ὅτι διὰ πᾶσαν ἄλλην τιμὴν τοῦ x λαμβάνῃ τὰς τιμὰς τὰς διδομένας ὑπὸ τῆς ἰσότητος:
$$y = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}.$$
Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος ἡ πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ ἡ πρὸς τἀριστερὰ διὰ $x=0$.

3) Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῶν συναρτήσεων $\eta\mu(\nu \text{ τοξ } \eta\mu x)$, $\text{τοξ εφ}\left(\frac{x+\alpha}{1-\alpha x}\right) - \text{τοξ εφ}\, x$, $\text{τοξ συν}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) - 3 \text{ τοξ εφ}\, x$.

4) Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῶν συναρτήσεων:
α) $e^{\text{τοξ ημ}\, x}$, β) $\log[\beta + x + \sqrt{\alpha + 2\beta x + x^2}]$, γ) $x \text{ τοξ εφ} x - \frac{1}{2} \text{εφ}(1+x^2)$.

5) Ἐκ τῆς ταυτότητος: $1 + x + x^2 + \ldots + x^{\nu+1} = \frac{1-x^{\nu+2}}{1-x}$ νὰ ἐξαχθῇ ἡ ταυτότης $\frac{1-(\nu+2)x^{\nu+1}+(\nu+1)x^{\nu+2}}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (\nu+1)x^{\nu}$

6) Νὰ δειχθῇ ὅτι:
$$\eta\mu x + 2\eta\mu 2x + \ldots + \nu\eta\mu\nu x = \frac{(\nu+1)\eta\mu\, \nu x - \nu\eta\mu(\nu+1)x}{4\, \eta\mu^2 \frac{x}{2}}.$$
Ἀρκεῖ νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ἡ ταυτότης
$$\frac{1}{2} + \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu 2x + \ldots + \sigma\upsilon\nu\, \nu x = \frac{\eta\mu \frac{2\nu+1}{2} x}{2\, \eta\mu \frac{x}{2}}.$$

7) Ἔστωσαν αἱ ὑπερβολικαὶ συναρτήσεις
$$\frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

ἡ πρώτη ἐξ αὐτῶν λέγεται ὑπερβολικὸν ἡμίτονον καὶ σημειοῦται διὰ τοῦ $\mathrm{sh}\,x$, ἡ δευτέρα ὑπερβολικὸν συνημίτονον καὶ σημειοῦται διὰ τοῦ $\mathrm{ch}\,x$ καὶ ἡ τρίτη ὑπερβολικὴ ἐφαπτομένη καὶ σημειοῦται διὰ τοῦ $\mathrm{th}\,x$.

Νὰ δειχθῇ ὅτι ἐὰν διὰ τοῦ $\arg\ \mathrm{sh}x$ παραστήσω τὴν συνάρτησιν τὴν ἀντίστροφον τῆς $\mathrm{sh}x$, . . . ἔχω

$$\arg\ \mathrm{sh}x=\log(x+\sqrt{1+x^2})\ .$$

$$\arg\ \mathrm{ch}\,x=\log(x+\sqrt{x^2-1})$$

$$\text{καὶ}\ \arg\ \mathrm{th}\,x=\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot$$

καὶ νὰ εὑρεθῶσιν αἱ παράγωγοι (τὰ διαφορικὰ) τῶν συναρτήσεων :

$$\mathrm{sh}\,x,\ \mathrm{ch}\,x,\ \mathrm{th}\,x.$$

8) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι (τὰ διαφορικὰ) τῶν συναρτήσεων :

$$\arg\ \mathrm{sh}\,x,\ \arg\ \mathrm{th}\,x.$$

9) Νὰ δειχθῇ ὅτι: $d\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{dx}{1-x^2}$, $d\log\sigma\upsilon\nu x=-\varepsilon\varphi x dx$

$$d\log\varepsilon\varphi\frac{x}{2}=\frac{dx}{\eta\mu x},\ d\log\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{dx}{\sigma\upsilon\nu x},$$

$$d\tau o\xi\eta\mu\ \frac{x}{\alpha}=\frac{dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}},\ d\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{x}{\alpha}=\frac{\alpha dx}{\alpha^2+x^2},$$

$$d\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{\beta}{\alpha}\varepsilon\varphi\,x\right)=\frac{\alpha\beta dx}{\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2x+\beta^2\eta\mu^2x}.$$

10) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι (τὰ διαφορικὰ) τῶν συναρτήσεων

$$x\left[\frac{\log^{\nu}x}{\underline{|\nu}}-\frac{\log^{\nu-1}x}{\underline{|\nu-1}}+\frac{\log^{\nu-2}x}{\underline{|\nu-2}}-\ldots+(\nu-1)^{\nu-1}\frac{\log x}{1}+(-1)^{\nu}\right],$$

(διὰ $\underline{|\nu}$ σημειῶ τὸ $1.2.3.\,.\,.\,\nu.$),

$$\frac{x}{2}(\eta\mu\log x+\sigma\upsilon\nu\log x).$$ σνLx = συνlo

11) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δευτέρα, τρίτη κ. τ. λ. παράγωγος τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου :

$$\sigma(x)=\alpha_0\ x^{\mu}+\alpha_1\ x^{\mu-1}+\alpha_2\ x^{\mu-2}+\ .\ .\ .\ +\alpha_{\mu-1}+\alpha_{\mu}\ \cdot$$

12) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἐὰν $\sigma(x)$ εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον βαθμοῦ μ ἔχομεν :

$$\sigma(x+\varepsilon)=\sigma(x)+\frac{\varepsilon}{1}\sigma'(x)+\frac{\varepsilon^2}{\underline{|2}}\sigma''(x)+\frac{\varepsilon^3}{\underline{|3}}\sigma'''(x)+\ldots+\frac{\varepsilon^\mu}{\underline{|\mu}}\sigma^{(\mu)}(x)$$

13) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι (τὰ διαφορικὰ) τῶν συναρτήσεων: $\log(\log x)$, [τοῦτο σημειοῦται καὶ $\log_2 x$], $\log(\log_2 x)$ [ἢ καὶ $\log_3 x$] κ.ο.κ.

14) Νὰ εὑρεθοῦν ἡ δευτέρα, ἡ τρίτη, τετάρτη . . . νυοστὴ παράγωγος τῶν συναρτήσεων: $\eta\mu^2 x$, $\sigma\upsilon\nu^2 x$, $\eta\mu^3 x$ καὶ $\sigma\upsilon\nu^3$

15) Ἔστω $y=\sigma(x).f(x)$. Νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$y^{(\nu)}=\sigma^{(\nu)}f+\alpha_1\sigma^{(\nu-1)}f'+\alpha_2\sigma^{(\nu-2)}f''+\ldots+\sigma f^{(\nu)},$$

ὅπου τὰ α_1, α_2, . . . εἶναι οἱ ἀντίστοιχοι συντελεσταὶ τῆς νυοστῆς δυνάμεως τοῦ διωνύμου.

Γενικαὶ ἰδιότητες τῶν παραγώγων.

142.—Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=\sigma(x)$ καὶ ἔστω ὅτι διὰ μίαν τιμὴν τοῦ x ἡ τιμὴ τῆς παραγώγου εἶναι πεπερασμένη καὶ διάφορος τοῦ μηδενός.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς παραγώγου

$$\sigma'(x)=\text{ορ}\frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (\text{ορ } \Delta x=0)$$

ἐπομένως: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\sigma'(x)+\lambda$ (ὅπου $\text{ορ}\lambda=0$, ὅταν $\text{ορ } \Delta x=0$).

Ἕπεται ἐντεῦθεν ***ὅτι διὰ τιμὰς τοῦ*** $|\Delta x|$ ***πολὺ μικρὰς*** τὸ σημεῖον τοῦ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ θὰ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ σημεῖον τῆς $\sigma'(x)$. Ἤτοι:

1) Ἐὰν ἡ $\sigma'(x)$ εἶναι θετικὴ διὰ τὴν τιμὴν x καὶ ὁ λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ θὰ εἶναι θετικὸς διὰ τιμὰς τοῦ $|\Delta x|$ πολὺ μικρὰς καὶ ἐπομένως ὅταν $\Delta x>0$ θὰ ἔχωμεν $\Delta y>0$ καὶ ὅταν $\Delta x<0$ θὰ ἔχωμεν $\Delta y<0$.

Καλοῦμεν τότε αὔξουσαν τὴν συνάρτησιν $\sigma(x)$ διὰ τὴν τιμὴν x. Παρατηροῦμεν δὲ τότε ὅτι διὰ τιμὰς μεγαλυτέρας τοῦ x πολὺ πλησίον τοῦ x ἡ συνάρτησις θὰ λαμβάνῃ τιμὰς μεγαλυτέρας ἐκείνης, ἣν ἐλάμβανε διὰ τὴν τιμὴν x καὶ διὰ τιμὰς μικροτέρας τοῦ x πολὺ πλησίον τοῦ x θὰ λαμβάνῃ ἡ συνάρτησις τιμὰς μικροτέρας.

2) Ἐὰν ἡ $\sigma'(x)$ εἶναι ἀρνητικὴ διὰ τὴν τιμὴν x, θὰ ἔχωμεν (διὰ τιμὰς πολὺ μικρὰς τοῦ Δx) $\frac{\Delta y}{\Delta x}<0$ καὶ ἐπομένως ὅταν $\Delta x>0$ θὰ ἔχωμεν

$\Delta y<0$ καὶ ὅταν $\Delta x<0$ θὰ ἔχωμεν $\Delta y>0$. Καλοῦμεν τότε ἐλαττουμένην τὴν συνάρτησιν σ(x) διὰ τὴν τιμὴν x.

Παρατηροῦμεν δὲ τότε ὅτι διὰ τιμὰς μικροτέρας τοῦ x (πολὺ πλησίον τοῦ x) ἡ συνάρτησις θὰ λαμβάνῃ τιμὰς μεγαλυτέρας τῆς τιμῆς, τὴν ὁποίαν ἐλάμβανε διὰ x καὶ διὰ τιμὰς μεγαλυτέρας τοῦ x (πολὺ πλησίον τοῦ x) ἡ συνάρτησις θὰ λαμβάνῃ τιμὰς μικροτέρας.

Ὅθεν καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις, δηλαδὴ εἴτε θετικὴ εἶναι ἡ παράγωγος διὰ τὴν τιμὴν x εἴτε ἀρνητική, ***ἡ συνάρτησις θὰ λαμβάνῃ ἑκατέρωθεν μεγαλυτέρας καὶ μικροτέρας τιμὰς ἐκείνης, τὴν ὁποίαν λαμβάνει διὰ τὴν τιμὴν x***. Ἑπομένως ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως διὰ τὴν τιμὴν x δὲν θὰ εἶναι οὔτε ἡ μεγαλυτέρα τῶν τιμῶν τὰς ὁποίας λαμβάνῃ εἰς τὰ πέριξ τοῦ x, οὔτε ἡ μικροτέρα.

143.—***Θεώρημα τοῦ Rolle.*** Ἔστω ὅτι μία συνάρτησις y=σ(x) εἶναι συνεχὴς εἰς ἓν διάστημα (α, β) καὶ ὅτι δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ διαστήματος (α, β) ἔχει μίαν μόνον παράγωγον· ὑποθέσωμεν δὲ προσέτι ὅτι σ(α)=0 καὶ σ(β)=0· λέγω ὅτι τότε ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως θὰ μηδενίζεται διὰ μίαν τοὐλάχιστον τιμὴν μεταξὺ α καὶ β. Πρὸς ἀπόδειξιν αὐτοῦ παρατηροῦμεν ὅτι, ἀφοῦ ἡ συνάρτησις εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα (α, β) θὰ ὑπάρχῃ τιμὴ τοῦ x ἐν τῷ διαστήματι (α, β), δι' ἣν θὰ λαμβάνῃ ἡ συνάρτησις, τιμὴν Μ μεγαλυτέραν πασῶν τῶν ἄλλων (ἢ μηδεμιᾶς μικροτέραν), ὅπως ἐπίσης θὰ ὑπάρχῃ τιμή τις τοῦ x ἐν τῷ αὐτῷ διαστήματι, δι' ἣν θὰ λαμβάνῃ τιμὴν μ μικροτέραν πασῶν τῶν ἄλλων (ἢ μηδεμιᾶς μεγαλυτέραν (§ 68)).

Ἐὰν Μ=μ τότε ἡ μεγαλητέρα τιμὴ τῆς συναρτήσεως θὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν μικροτέραν καὶ ἐπομένως θὰ ἔχῃ ἡ σ(x) τὴν αὐτὴν τιμὴν εἰς ὅλον τὸ διάστημα (α, β) δηλαδὴ τὴν τιμὴν μηδὲν διότι σ(α)=0 καὶ ἐπομένως ἡ παράγωγος διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x ἐν τῷ διαστήματι (α, β) θὰ ἔχῃ τιμὴν μηδέν.

Ἐὰν ἤδη Μ>μ τότε πάντως ὁ εἷς τοὐλάχιστον ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς Μ καὶ μ θὰ διαφέρῃ τοῦ μηδενός. Ἔστω Μ διάφορον τοῦ μηδενός· κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ ὑπάρχῃ τιμή τις γ τοῦ x ἐν τῷ διαστήματι (α, β) δι' ἣν σ(γ)=Μ· λέγω ὅτι διὰ τὴν τιμὴν αὐτὴν γ ἡ παράγωγος ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν, διότι ἐὰν τὸ σ'(γ) ἦτο θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν θὰ εἴχομεν κατὰ τὰ προηγούμενα (§ 142) ὅτι ἡ σ(γ) δὲν θὰ ἦτο ἡ μεγαλυτέρα τιμὴ τὴν ὁποίαν λαμβάνει ἡ συνάρτησις ὅταν εἰς τὸ x δώσωμεν τὴν τιμὴν γ καὶ τιμὰς ἑκατέρωθεν τοῦ γ καὶ πολὺ πλησίον αὐτοῦ· ὥστε σ'(γ)=0· ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ἐὰν μ διάφορον τοῦ μηδενὸς θὰ ἔχωμεν σ'(δ)=0, ἐὰν καλέσωμεν δ τὴν τιμὴν τοῦ x, δι' ἣν σ(δ)=μ.

Ὅθεν ἐὰν μία συνάρτησις, 1) εἶναι συνεχὴς εἰς ἓν διάστημα (α, β), 2) ἔχῃ δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ x μίαν παράγωγον, καὶ 3) λαμβάνῃ τὴν τιμὴν μηδὲν διὰ $x=\alpha$ καὶ $x=\beta$, τότε θὰ ὑπάρχῃ μία τοὐλάχιστον τιμὴ μεταξὺ (α, β) διὰ τὴν ὁποίαν ἡ παράγωγος θὰ λαμβάνῃ τὴν τιμὴν μηδέν.

Παρατήρησις: Εἰς τὴν δευτέραν τῶν ἀνωτέρω ὑποθέσεων δυνάμεθα νὰ μὴ περιλάβωμεν τὰς ἄκρας τιμὰς α, β δηλαδὴ ἀρκεῖ νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ $\sigma(x)$ ἔχῃ μίαν παράγωγον διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x μεταξὺ α καὶ β περιλαμβανομένην.

144 —Ἔστω ἤδη ὅτι μία συνάρτησις $\sigma(x)$ εἶναι συνεχὴς ἐν τῷ διαστήματι (α, β), ἔχει μίαν μόνον παράγωγον δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ x ἐν αὐτῷ καὶ λαμβάνει τὴν αὐτὴν τιμὴν διὰ $x=\alpha$ καὶ $x=\beta$· καλέσωμεν Α τὴν τιμὴν αὐτήν· τότε ἡ συνάρτησις $\sigma(x)-A$ θὰ μηδενίζεται διὰ $x=\alpha$ καὶ $x=\beta$ καὶ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα θὰ ὑπάρχῃ τιμή τις γ ἐν τῷ διαστήματι (α, β), δι' ἣν ἡ παράγωγος τῆς $\sigma(x)-A$ εἶναι μηδέν ἤτοι $\sigma'(\gamma)=0$. Ὥστε τὸ προηγούμενον θεώρημα ἰσχύει καὶ ἐὰν ἡ $\sigma(x)$ δὲν μηδενίζεται διὰ $x=\alpha$ καὶ $x=\beta$ ἀλλὰ λαμβάνῃ ἁπλῶς τὴν αὐτὴν τιμήν.

145.—***Θεώρημα τῶν πεπερασμένων αὐξήσεων***. Ἔστωσαν δύο συναρτήσεις $\sigma(x)$ καὶ $\varphi(x)$ συνεχεῖς εἰς τὸ διάστημα (α, β)· καὶ ἔστω ὅτι ἔχουσιν ἑκατέρα παράγωγον ὡρισμένην καὶ πεπερασμένην δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ x μεταξὺ α καὶ β περιεχομένην.

Θεωρήσωμεν μίαν συνάρτησιν τῆς μορφῆς:

(1) $A\sigma(x)+B\varphi(x)+1$ (ὅπου Α καὶ Β σταθεροὶ ἀριθμοὶ)

Ζητῶ νὰ ἐφαρμόσω εἰς αὐτὴν τὸ θεώρημα τοῦ Rolle· παρατηρῶ πρὸς τοῦτο ὅτι δύναμαι προφανῶς νὰ προσδιορίσω τοὺς σταθεροὺς ἀριθμοὺς Α καὶ Β οὕτως, ὥστε:

$$(2)\qquad \begin{cases} A\sigma(\alpha)+B\varphi(\alpha)+1=0 \\ A\sigma(\beta)+B\varphi(\beta)+1=0 \end{cases}$$

ὁπότε ἡ συνάρτησις (1) θὰ μηδενίζεται διὰ $x=\alpha$ καὶ $x=\beta$· ἀλλὰ τότε συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον θεώρημα θὰ μηδενίζεται ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως (1) διὰ μίαν τιμὴν τοῦ x μεταξὺ α καὶ β· ἔστω αὕτη ἡ γ· ὁπότε θὰ ἔχωμεν

$$(3)\qquad A\sigma'(\gamma)+B\varphi'(\gamma)=0,$$

ὅπου Α καὶ Β ἔχουσι τὰς τιμὰς τὰς ἐξαγομένας ἐκ τῆς (2) ἤτοι :

$$A=\frac{\begin{vmatrix}\varphi(\alpha) & 1\\ \varphi(\beta) & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\sigma(\alpha) & \varphi(\alpha)\\ \sigma(\beta) & \varphi(\beta)\end{vmatrix}} \qquad B=\frac{\begin{vmatrix}1 & \sigma(\alpha)\\ 1 & \sigma(\beta)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\sigma(\alpha) & \varphi(\alpha)\\ \sigma(\beta) & \varphi(\beta)\end{vmatrix}}$$

ὅθεν ἡ (3) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$[\varphi(\alpha)-\varphi(\beta)]\sigma'(\gamma)+[\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)]\varphi'(\gamma)=0.$$

Οὕτω ἔχομεν τὸν τύπον :

$$(4) \qquad \frac{\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)}{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)}=\frac{\sigma'(\gamma)}{\varphi'(\gamma)}.$$

Ἵνα ἰσχύῃ ὁ τύπος (4) πρέπει προφανῶς νὰ ὑποθέσωμεν, ὅτι αἱ παράγωγοι $\sigma'(\gamma)$ καὶ $\varphi'(\gamma)$ δὲν εἶναι ἀμφότεραι ἴσαι πρὸς τὸ μηδὲν καὶ ὅτι $\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)\neq 0$· ὅθεν προκύπτει τὸ θεώρημα: Ἐὰν 1) δύο συναρτήσεις $\sigma(x)$ καὶ $\varphi(x)$ εἶναι συνεχεῖς εἰς τὸ διάστημα (α, β)· 2) ἔχουν παράγωγον πεπερασμένην καὶ ὡρισμένην διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x περιλαμβανομένην μεταξὺ α καὶ β, 3) αἱ δύο παράγωγοι $\sigma'(x)$ καὶ $\varphi'(x)$ δὲν μηδενίζονται διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν τοῦ x τοῦ διαστήματος (α, β) καὶ 4) τὸ $\varphi(\beta)$ εἶναι διάφορον τοῦ $\varphi(\alpha)$, θὰ ἔχω τὸν τύπον (4), ὅπου $\alpha<\gamma<\beta$.

146.—Μερικὴ περίπτωσις. Ἔστω ὅτι ὡς συνάρτησιν $\varphi(x)$ λαμβάνω τὸ x, τότε ὁ τύπος (4) γίνεται

$$(4') \qquad \frac{\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)}{\beta-\alpha}=\sigma'(\gamma).$$

Ὅθεν τὸ θεώρημα :

Ἐὰν μία συνάρτησις $\sigma(x)$ εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα (α, β) καὶ ἔχῃ μίαν παράγωγον διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x μεταξὺ α καὶ β θὰ ἔχω τὴν ἰσότητα :

$$(5) \qquad \sigma(\beta)-\sigma(\alpha)=(\beta-\alpha)\sigma'(\gamma),$$

ἥτις ἐκφράζει τὴν σχέσιν μεταξὺ τῆς αὐξήσεως τῆς συναρτήσεως καὶ τῆς αὐξήσεως τῆς μεταβλητῆς x. Ὁ τύπος (5) λέγεται τύπος ***τῶν πεπερασμένων αὐξήσεων.***

Ἐὰν θέσω $\beta-\alpha=\varepsilon$ θὰ εἶναι $\beta=\alpha+\varepsilon$, ὁ δὲ τύπος (5) θὰ λάβῃ τὴν μορφὴν (5′)

$$(5') \qquad \sigma(\alpha+\varepsilon)-\sigma(\alpha)=\varepsilon\sigma'(\gamma),$$

ὅπου γ ἀριθμὸς μεταξὺ α καὶ $\alpha+\varepsilon$· ἑπομένως $\gamma=\alpha+\vartheta\varepsilon$ $(0<\vartheta<1)$ ὅθεν ὁ τύπος τῶν πεπερασμένων αὐξήσεων γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$(6) \qquad \sigma(\alpha+\varepsilon)-\sigma(\alpha)=\varepsilon\sigma'(\alpha+\vartheta\varepsilon).$$

Παρατηρήσεις. 1) Εἰς τὴν προηγουμένην ἀπόδειξιν (§ 145) ὑπέθεσα ὅτι $\sigma(\alpha)\ \varphi(\beta)-\varphi(\alpha)\ \sigma(\beta) \neq 0$· ἐὰν τοῦτο ἰσοῦται τῷ μηδενὶ ἀρκεῖ νὰ λάβω ἀντὶ τῆς συναρτήσεως (1) τὴν $[\varphi(\alpha)-\varphi(\beta)]\ \sigma(x)+[\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)]\ \varphi(x)$ ἵνα φθάσω εἰς τὰ αὐτὰ συμπεράσματα. 2) Ὁ ἀριθμὸς ϑ τοῦ τύπου (6) εἶναι ἄγνωστος· ἀπέδειξα μόνον ὅτι ὑπάρχει εἷς τοιοῦτος ἀριθμὸς ϑ πληρῶν τὴν ἰσότητα (6), περιλαμβανόμενος μεταξὺ 0 καὶ 1.

147.—Ἔστω ὅτι ἡ συνάρτησις $\sigma(x)$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ διαστήματος (α, β) ἔχει παράγωγον ἴσην τῷ μηδενί· τότε ἐὰν x_1 καὶ $x_1+\varepsilon$ εἶναι δύο τυχοῦσαι τιμαὶ τοῦ διαστήματος (α, β) ἔχω: (§ 146)

$$\sigma(x_1+\varepsilon)-\sigma(x_1)=\varepsilon\ \sigma'(x_1+\vartheta\varepsilon)=0$$

[διότι ὑπέθεσα ὅτι διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ (α, β) ἡ παράγωγος εἶναι μηδέν· ἑπομένως καὶ διὰ τὴν τιμὴν $x_1+\vartheta\varepsilon$ θὰ εἶναι μηδέν]· ὅθεν $\sigma(x_1+\varepsilon)=\sigma(x_1)$· ἄρα:

Ἐὰν μία συνάρτησις $\sigma(x)$ ἔχῃ παράγωγον ἴσην πρὸς τὸ μηδὲν διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ διαστήματος (α, β) θὰ διατηρῇ τὴν αὐτὴν τιμὴν εἰς ὅλον τὸ διάστημα (α, β)· ἤτοι θὰ ἀνάγεται εἰς σταθερὰν εἰς αὐτὸ τὸ διάστημα.

148.—Ἔστω ὅτι, δι᾽ ἑκάστην τιμὴν τοῦ διαστήματος (α, β) ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀντίστοιχον παράγωγον ἄλλης συναρτήσεως $\varphi(x)$, θὰ ἔχω τότε ὅτι, δι᾽ ἑκάστην τιμὴν τοῦ διαστήματος (α, β) ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)-\varphi(x)$ θὰ εἶναι μηδέν· ἑπομένως συμφώνως πρὸς τὰ προηγούμενα ἡ συνάρτησις $\sigma(x)-\varphi(x)$, θὰ ἀνάγεται εἰς σταθερὰν εἰς τὸ διάστημα (α, β). Ἤτοι ἂν καλέσω τὴν σταθερὰν αὐτὴν c θὰ ἔχω δι᾽ ὅλον τὸ διάστημα (α, β) ὅτι $\sigma(x)-\varphi(x)=c$. Ἤτοι: ***Ἂν δύο συναρτήσεις $\sigma(x)$ καὶ $\varphi(x)$ ἔχωσιν εἰς ὅλον τὸ διάστημα (α, β) παραγώγους πεπερασμένας καὶ ἴσας θὰ διαφέρωσι κατὰ τὴν αὐτὴν σταθερὰν τιμὴν εἰς ὅλον τὸ διάστημα.***

149.—Ἔστω ἤδη ὅτι ἡ παράγωγος τῆς $\sigma(x)$ δὲν εἶναι μηδὲν εἰς ὅλον τὸ διάστημα (α, β) [1] καὶ ὅτι δὲν λαμβάνει ἀρνητικὴν τιμὴν εἰς τὸ διάστημα· τότε θὰ ἔχω διὰ πᾶσαν τιμὴν x τοῦ διαστήματος (α, β) [2]

(1) Δὲν ἀποκλείεται νὰ εἶναι μηδὲν ἡ παράγωγος διὰ τιμάς τινας τοῦ διαστήματος ἢ εἰς μέρη τοῦ διαστήματος.

(2) Ὑποθέτω $\alpha < \beta$

(7) $\sigma(\beta)-\sigma(x)=(\beta-x)\sigma'(x+\vartheta\varepsilon)$ $\quad \varepsilon=\beta-x, \quad 0<\vartheta<1$
καὶ 8) $\sigma(x)-\sigma(\alpha)=(x-\alpha)\sigma'(\alpha+\lambda\eta)$ $\quad \eta=x-\alpha, \quad 0<\lambda<1$
ὅθεν (9) $\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)=(\beta-x)\sigma'(x+\vartheta\varepsilon)+(x-\alpha)\sigma'(\alpha+\lambda\eta)$

Παρατηρῶ ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχω διὰ τιμήν τινα τοῦ x $\sigma'(x+\vartheta\varepsilon)=\sigma'(\alpha+\lambda\eta)=0$· διότι ἐὰν τοῦτο συνέβαινε διὰ μίαν τιμὴν τοῦ x θὰ εἴχομεν $\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)=0$· ἐπειδὴ ὅμως τὸ $\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)$ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ x θὰ εἴχομεν διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x $\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)=0$ καὶ ἑπομένως τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος (9) θὰ ἦτο ἴσον τῷ μηδενὶ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x· ἀλλὰ $\beta-x>0$ καὶ $x-\alpha>0$· ἐπειδὴ δὲ ἐξ ὑποθέσεως, $\sigma'(x+\vartheta\varepsilon)\geq 0$ καὶ $\sigma'(x+\lambda\eta)\geq 0$ ἔπεται ὅτι θὰ ἦτο κατ' ἀνάγκην: $\sigma'(x+\vartheta\varepsilon)=0$ καὶ $\varphi'(x+\lambda\eta)=0$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x· ἀλλὰ τότε θὰ εἴχομεν κατὰ τοὺς τύπους (7,8) διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x $\sigma(\beta)=\sigma(x)=\sigma(\alpha)$ ἤτοι ἡ $\sigma(x)$ θὰ ἦτο σταθερὰ εἰς τὸ διάστημα (α, β), ἐξ οὗ θὰ προέκυπτεν ὅτι διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x $\sigma'(x)=0$· ἀλλὰ τοῦτο ἀντιβαίνει πρὸς τὴν ὑπόθεσιν· ὅθεν τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος (9) εἶναι θετικὸν καὶ ἑπομένως καὶ τὸ πρῶτον μέλος θὰ εἶναι θετικὸν ἤτοι $\sigma(\beta)>\sigma(\alpha)$. Ὥστε: ***Ἐὰν ἡ παράγωγος $\sigma'(x)$ εἶναι θετικὴ ἢ μηδὲν εἰς τὸ διάστημα (α, β) χωρὶς νὰ εἶναι μηδὲν διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x τοῦ διαστήματος (α, β)***, ἡ συνάρτησις $\sigma(x)$ αὐξάνει ὅταν τὸ x μεταβαίνει ἀπὸ τοῦ α εἰς τὸ β τουτέστι $\sigma(\beta)>\sigma(\alpha)$, ἐὰν $\beta>\alpha$. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι, ἐὰν ἡ παράγωγος εἶναι ἀρνητικὴ ἢ μηδὲν εἰς τὸ διάστημα (α, β) χωρὶς νὰ εἶναι μηδὲν διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ διαστήματος (α, β) ἡ συνάρτησις ἐλαττοῦται· τουτέστι $\sigma(\beta)<\sigma(\alpha)$ ὅταν $\beta>\alpha$.

150.—Ἔστω ὅτι ἡ παράγωγος συναρτήσεώς τινος $\sigma(x)$ εἶναι πεþρατωμένη εἰς ἓν διάστημα (α, β), δηλ. ὅτι $|\sigma'(x)|<K$, ὅπου K εἶναι σταθερὸς θετικὸς ἀριθμός· ἕπεται ἐκ τοῦ τύπου τῶν πεπερ. αὐξήσεων ὅτι, ἐὰν x καὶ $x+\varepsilon$ εἶναι δύο τυχοῦσαι τιμαὶ τοῦ (α, β), ἔχωμεν τὴν ἀνισότητα (10) $|\sigma(x+\varepsilon)-\sigma(x)|<K\varepsilon$

ἥτις λέγεται συνθήκη τοῦ Lipschitz· φαίνεται ἐκ ταύτης ὅτι, ἐφόσον τὸ ε μένει πεπερασμένον ἡ αὔξησις τῆς συναρτήσεως μένει πεπερασμένη· ἔστω ἤδη τυχοῦσα πεπερασμένη τιμὴ $\sigma(x)$ εἰς τὸ διάστημα (α, β) καὶ ἔστω ὅτι τὸ $\sigma(x+\varepsilon)$ τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον, ὅταν τὸ ε τείνῃ πρὸς ἀριθμόν τινα δ (οὕτως ὥστε τὸ $x+\delta$ νὰ εἶναι τιμὴ τοῦ διαστήματος (α, β))· τότε ἡ συνθήκη (10) δὲν ἐπαληθεύει ὅταν τὸ K ὑποτεθῇ πεπερασμένον· ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι εἶναι ἀδύνατον τότε νὰ διατηρῇ πεπερασμένην τιμὴν ἡ παράγωγος.

Τύπος τοῦ *Taylor*.

151.—Ἔστω κατ᾽ ἀρχὰς ἀκέραιον πολυώνυμον

$$\sigma(x) = \alpha_0\, x^{\mu} + \alpha_1 x^{\mu-1} + \ldots + \alpha_{\mu-1} x + \alpha_{\mu}$$

εὐκόλως φαίνεται ὅτι

$$(1)\quad \sigma(x+\varepsilon) = \sigma(x) + \frac{\varepsilon}{1}\sigma'(x) + \frac{\varepsilon^2}{\underline{|2}}\sigma''(x) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\varepsilon^{\mu-1}}{\underline{|\mu-1}}\sigma^{\mu-1}(x) + \frac{\varepsilon^{\mu}}{\underline{|\mu}}\sigma^{(\mu)}(x)$$

ὥστε ἐὰν τὸ x ἀντικαταστήσω μὲ ἀριθμόν τινα ὡρισμένον α θὰ ἔχω:

$$(1')\quad \sigma(\alpha+\varepsilon) = \sigma(\alpha) + \frac{\varepsilon}{1}\sigma'(\alpha) + \frac{\varepsilon^2}{\underline{|2}}\sigma''(\alpha) + \ldots + \frac{\varepsilon^{\mu}}{\underline{|\mu}}\sigma^{(\mu)}(\alpha)$$

ὁ τύπος οὗτος δι᾽ ἑκάστην τιμὴν τοῦ ε δίδει μίαν τιμὴν τοῦ σ(α+ε).

152. Θεωρῶ ἤδη τυχοῦσαν συνάρτησιν σ(x) ***ἡ ὁποία νὰ μὴ εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον***· τότε δὲν δύναμαι ἐν γένει νὰ ἐφαρμόσω τὸν τύπον (1΄), ὁσονδήποτε μέγας καὶ ἂν ὑποτεθῇ ὁ θετικὸς ἀκέραιος μ.

Πρόκειται ἤδη περὶ τοῦ ἑξῆς ζητήματος. Ἄς σχηματίσω ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον ὡς πρὸς ε τῆς μορφῆς:

$$\Pi_\nu(\varepsilon) = \sigma(\alpha) + \frac{\varepsilon}{1}\sigma'(\alpha) + \frac{\varepsilon^2}{\underline{|2}}\sigma''(\alpha) + \ldots + \frac{\varepsilon^{\nu}}{\underline{|\nu}}\sigma^{(\nu)}(\alpha)$$

καὶ ἄς καλέσω αὐτὸ Π_ν (ε)· ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι ἡ σ(x) εἶναι μονότιμος, καὶ ὅτι αἱ σ΄(α), σ΄΄(α) . . . $\sigma^{(\nu)}(\alpha)$ εἶναι ἀριθμοὶ πεπερασμένοι καὶ ὡρισμένοι, ἡ διαφορὰ σ(α+ε)—Π_ν (ε) θὰ εἶναι προφανῶς δι᾽ ἑκάστην τιμὴν τοῦ ε ὡρισμένη. Τὴν διαφορὰν αὐτὴν ἥτις εἶναι συνάρτησις τοῦ ε ζητῶ νὰ ἐκφράσω καὶ ὑπὸ ἄλλην μορφὴν ὁμοιάζουσαν μὲ τὴν μορφὴν τοῦ τελευταίου ὅρου τοῦ Π_ν .

[Παρατηρῶ ὅτι αἱ συναρτήσεις (τοῦ ε) σ(α+ε) καὶ Π_ν (ε) ἔχουν διὰ τὴν τιμὴν $\varepsilon=0$ ἴσας τὰς παραγώγους (ὡς πρὸς ε) πρώτης, δευτέρας.. νυοστῆς τάξεως]. Τὴν διαφορὰν ταύτην ἂς καλέσω $f(\varepsilon)$ καὶ ἂς ἐκφράσω διὰ τοῦ ρ ἕνα ἀριθμὸν θετικὸν καὶ ἀκέραιον· ἐὰν θέσω:

$$\frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon^{\varrho}} = F(\varepsilon) \qquad \text{θὰ ἔχω :}$$

$$(2)\quad \sigma(\alpha+\varepsilon)-\sigma(\alpha)-\frac{\varepsilon}{1}\sigma'(\alpha)-\frac{\varepsilon^2}{\underline{|2}}\sigma''(\alpha)-\ldots-\frac{\varepsilon^{\nu}}{\underline{|\nu}}\sigma^{(\nu)}(\alpha)-\varepsilon^{\varrho}F(\varepsilon)=0$$

Δι᾽ ἑκάστην τιμὴν τοῦ ε (ὑποτίθεται ὅτι εἶναι ὡρισμένος ὁ θετικὸς ἀκέραιος ρ) θὰ εἶναι προφανῶς ὡρισμένος ἀριθμὸς τὸ $F(\varepsilon)$· ἐπομένως θὰ εἶναι ὡρισμένος καὶ ὅταν θέσω ὅπου ε τὸ $\beta-\alpha$· δηλαδὴ τὸ $F(\beta-\alpha)$ θὰ εἶναι ὡρισμένος τις ἀριθμὸς Κ· θὰ εἶναι τουτέστι Κ ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁριζόμενος ἐκ τῆς ἰσότητος:

$$(3)\quad \sigma(\beta)-\sigma(\alpha)-\frac{\beta-\alpha}{1}\sigma'(\alpha)-\frac{(\beta-\alpha)^2}{\underline{|2}}\sigma''(\alpha)\ldots$$
$$\ldots-\frac{(\beta-\alpha)^{\nu}}{\underline{|\nu}}\sigma^{(\nu)}(\alpha)-(\beta-\alpha)^{\varrho}K=0.$$

Ἔστω ἤδη ὅτι ἡ $\sigma(x)$ ὡς καὶ αἱ παράγωγοι αὐτῆς $\sigma'(x)$, $\sigma''(x)\ldots$ $\ldots\sigma^{(\nu)}(x)$ εἶναι συνεχεῖς εἰς διάστημά τι (α, β) καὶ ὅτι ἡ $\sigma(x)$ ἔχει παράγωγον τάξεως $\nu+1$ ὡρισμένην δι᾽ ἑκάστην τιμὴν τοῦ διαστήματος (α, β)· [δυνατὸν ἡ $\sigma^{(\nu+1)}(x)$ νὰ μὴν εἶναι καὶ συνεχής].

Θεωρῶ ἤδη τὴν συνάρτησιν:

$$\sigma(\beta)-\sigma(x)-\frac{(\beta-x)}{1}\sigma'(x)\ldots\frac{(\beta-x)^{\nu}}{\underline{|\nu}}\sigma^{(\nu)}(x)-(\beta-x)^{\varrho}K.$$

ὅπου Κ ὁ ὡρισμένος ἀριθμὸς ὁ ὑπὸ τῆς (3) ὁριζόμενος· ἂς καλέσω $\varphi(x)$ τὴν συνάρτησιν αὐτήν· θὰ ἔχω προφανῶς $\varphi(\beta)=0$ καὶ $\varphi(\alpha)=0$· [διότι τὸ Κ ὡρίσθη ἀκριβῶς ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ ἰσότης (3)]· ἐπομένως ἡ $\varphi'(x)$, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Rolle, θὰ μηδενίζεται διὰ τιμήν τινα γ μεταξὺ α καὶ β κειμένην· ἤτοι θὰ ἔχω: $\varphi'(\gamma)=0$ ἢ καί: $\varphi'[\alpha+\vartheta(\beta-\alpha)]=0$ ὅπου $(0<\vartheta<1)$. Ἀλλά:

$$\varphi'(x) = -\frac{(\beta-x)^{\nu}}{\underline{|\nu}}\sigma^{(\nu+1)}(x) + \varrho(\beta-x)^{\varrho-1}K \quad \text{ἑπομένως}$$

$$-\frac{[\beta-\alpha-\vartheta(\beta-\alpha)]^{\nu}}{\underline{|\nu}}\sigma^{\nu+1}[\alpha+\vartheta(\beta-\alpha)] + \varrho[\beta-\alpha-\vartheta(\beta-\alpha)]^{\varrho-1}K = 0.$$

$$\text{ἤ} \quad \frac{\dfrac{(1-\vartheta)^{\nu}(\beta-\alpha)^{\nu}}{\underline{|\nu}}\sigma^{(\nu+1)}[\alpha+\vartheta(\beta-\alpha)]}{\varrho(1-\vartheta)^{\varrho-1}(\beta-\alpha)^{\varrho-1}} = K$$

$$\text{ἤ :} \qquad K = \frac{1}{\varrho\underline{|\nu}}(1-\vartheta)^{\nu-\varrho+1}(\beta-\alpha)^{\nu-\varrho+1}\sigma^{(\nu+1)}[\alpha+\vartheta(\beta-\alpha)]\cdot$$

ἔχων ἤδη ὑπ' ὄψιν ὅτι $\alpha+\varepsilon=\beta$ καὶ $K=F(\varepsilon)=F(\beta-\alpha)$ λαμβάνω ἐκ τοῦ τύπου (2) :

$$(4) \quad \sigma(\beta) = \sigma(\alpha) + \frac{\beta-\alpha}{1}\sigma'(\alpha) + \frac{(\beta-\alpha)^2}{\underline{|2}}\sigma''(\sigma)\dots$$

$$\dots + \frac{(\beta-\alpha)^{\nu}}{\underline{|\nu}}\sigma^{(\nu)}(\alpha) + U_{\nu}$$

$$\text{ὅπου :} \qquad U_{\nu} = \frac{(\beta-\alpha)^{\nu+1}(1-\vartheta)^{\nu-\varrho+1}}{\varrho\underline{|\nu}}\sigma^{(\nu+1)}[\alpha+\vartheta(\beta-\alpha)]\cdot$$

ὁ τύπος (4) λέγεται ***τύπος τοῦ Taylor***, τὸ δὲ U_{ν} λέγεται ***συμπληρωματικὸς ὅρος*** ἢ καὶ ***ὑπόλοιπον***.

Ὑπέθεσα ἀνωτέρω ὅτι ὁ ϱ ἔχει τιμὴν ὡρισμένην θετικὴν καὶ ἀκεραίαν. Ἐὰν ὑποθέσω ὅτι ὡς ϱ λαμβάνω τὴν ἀκεραίαν τιμὴν $\nu+1$, τὸ U_{ν} λαμβάνει τὴν μορφὴν τοῦ ὑπολοίπου τὴν δοθεῖσαν ὑπὸ τοῦ Lagrange :

$$U_{\nu} = \frac{(\beta-\alpha)^{\nu+1}}{\underline{|\nu+1}}\sigma^{(\nu+1)}[\alpha+\vartheta(\beta-\alpha)]$$

Ἐὰν ὑποθέσω ὅτι ὡς ϱ λαμβάνω τὴν ἀκεραίαν μονάδα θὰ ἔχω τὴν μορφὴν τοῦ ὑπολοίπου τὴν δοθεῖσαν ὑπὸ τοῦ Cauchy :

$$U_\nu=\frac{(\beta-\alpha)^{\nu+1}(1-\vartheta)^\nu}{|\underline{\nu}}.\sigma^{(\nu+1)}[\alpha+\vartheta(\beta-\alpha)]$$

153.—***Παρατηρήσεις:*** 1) Ἐὰν θέσω $\beta-\alpha=x$ ὁ τύπος τοῦ Taylor γράφεται:

$$(5)\quad \sigma(\alpha+x)=\sigma(\alpha)+\frac{x}{1}\sigma'(\alpha)+\frac{x^2}{|\underline{2}}\sigma''(\alpha)+\ldots+\frac{x^\nu}{|\underline{\nu}}\sigma^{(\nu)}(\alpha)+U_\nu$$

ὅπου:
$$U_\nu=\frac{x^{\nu+1}(1-\vartheta)^{\nu-\varrho+1}}{\varrho|\underline{\nu}}\sigma^{(\nu+1)}(\alpha+\vartheta x).$$

Ἐὰν θέσω $\varrho=\nu+1$ ὁ συμπληρωματικὸς ὅρος γράφεται:

$$U_\nu=\frac{x^{\nu+1}}{|\underline{\nu+1}}\sigma^{(\nu+1)}(\alpha+\vartheta x)$$

Ἐὰν δὲ θέσω $\varrho=1$ λαμβάνω τὸν συμπληρωματικὸν ὅρον ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$U_\nu=\frac{x^{\nu+1}(1-\vartheta)^\nu}{|\underline{\nu}}\sigma^{(\nu+1)}(\alpha+\vartheta x).$$

2) Ἐὰν ὑπάρχῃ ἀριθμὸς M τοιοῦτος ὥστε νὰ ἔχω: $|\sigma^{(\nu+1)}(\omega)|<M$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ ω ἐν τῷ διαστήματι $(\alpha,\ \alpha+x)$ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ συμπληρωματικοῦ ὅρου θὰ μένῃ μικροτέρα τοῦ $M\dfrac{|x^{\nu+1}|}{|\underline{\nu+1}}$, (ὅπως φαίνεται ἐκ τῆς μορφῆς τοῦ ὑπολοίπου τοῦ Lagrange).

154.—Μερικὴ περίπτωσις τοῦ τύπου τοῦ Taylor ***εἶναι ὁ τύπος τοῦ*** *Maclaurin:* Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (4) θέσω $\alpha=0$ καὶ $\beta=x$ θὰ ἔχω τὸν τύπον:

$$(4')\quad \sigma(x)=\sigma(0)+\frac{x}{1}\sigma'(0)+\frac{x^2}{|\underline{2}}\sigma''(0)+\ldots+\frac{x^\nu}{|\underline{\nu}}\sigma^{(\nu)}(0)+U_\nu$$

ὅπου:
$$U_\nu=\frac{x^{\nu+1}(1-\vartheta)^{\nu-\varrho+1}}{\varrho|\underline{\nu}}\sigma^{(\nu+1)}(\vartheta x)$$

Ἐὰν θέσω: $\varrho=\nu+1$ τὸ U_ν λαμβάνει τὴν μερικὴν μορφὴν τοῦ ὑπολοίπου τοῦ Lagrange:

$$U_2 = \frac{x^{\nu+1}}{|\underline{\nu+1}} \sigma^{(\nu+1)}(\vartheta x)$$

ἂν δὲ θέσω $\varrho=1$ τὸ U, λαμβάνει τὴν μερικὴν μορφὴν τοῦ ὑπολοίπου τοῦ Cauchy.

$$U_\nu = \frac{x^{\nu+1}(1-\vartheta)^\nu}{|\underline{\nu}} \sigma^{(\nu+1)}(\vartheta x).$$

Σειρὰ τοῦ *Taylor.*

155.—Ἔστω ὅτι ἡ συνάρτησις σ(x) ἔχει παραγώγους πάσης τάξεως καὶ ὅτι εἶναι αὗται πάντοτε πεπερασμέναι εἰς τὸ διάστημα ἀπὸ α ἕως α+x· δύναμαι κατὰ τὰ προηγούμενα νὰ ἐφαρμόσω τὸν τύπον τοῦ Taylor διὰ οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ δείκτου ν.

Ἂς θεωρήσω ἤδη τὴν σειρὰν μὲ ἀπείρους ὅρους:

$$(\Sigma) \qquad \sigma(\alpha) + \frac{x}{1}\sigma'(\alpha) + \frac{x^2}{|\underline{2}}\sigma''(\alpha) + \frac{x^3}{|\underline{3}}\sigma'''(\alpha) + \ldots$$

καὶ ἂς ζητήσω ἐὰν εἶναι συγκλίνουσα καὶ τὴν τιμὴν αὐτῆς.

Παρατηρῶ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς ταύτης (ὅπου ν θετικὸς καὶ ἀκέραιος) θὰ διαφέρῃ ἀπὸ τοῦ σ(α+x) κατὰ τὴν ποσότητα:

$$U_\nu = \frac{x^{\nu+1}}{|\underline{\nu+1}} \sigma^{(\nu+1)}(\alpha+\vartheta x)$$

[ἢ ὑπὸ ἄλλην μορφήν:

$$U = \frac{x^{\nu+1}(1-\vartheta)^\nu}{|\underline{\nu}} \sigma^{\nu+1}(\alpha+\vartheta x)]$$

δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ ν θὰ ἔχω καὶ ἄλλο U_ν (τὸ x ὑποτίθεται σταθερόν). Φαντασθῶμεν ἤδη ὅτι τὸ ν λαμβάνει τιμὰς ἀκεραίας ὁλονὲν αὐξανομένας τεινούσας πρὸς τὸ ἄπειρον,· τότε, ἐὰν ***τὸ U_ν τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν***, ἡ διαφορὰ $\sigma(\alpha+x)-\Pi_\nu(x)$ (ὅπου διὰ $\Pi_\nu(x)$ σημειῶ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων) τείνει πρὸς τὸ μηδὲν καί ἐπομένως ὅταν τὸ ν τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον τό : $\Pi_\nu(x)$ τείνει νὰ γίνῃ σειρὰ ἥτις θὰ ἔχῃ ὅριον τὸ $\sigma(\alpha+x)$· θὰ ἔχω τουτέστι :

$$\sigma(\alpha+x)=\text{ορ}\left[\sigma(\alpha)+\frac{x}{1}\sigma'(\alpha)+\ldots\frac{x^\nu}{\underline{|\nu}}\sigma^{(\nu)}(\alpha)\right]$$

ἤτοι ἐὰν ὁ ***συμπληρωματικὸς ὅρος τείνῃ πρὸς τὸ μηδὲν ὅταν τὸ ν τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον, ἡ σειρὰ (Σ) εἶναι συγκλίνουσα*** καὶ ἔχει ὅριον τὸ $\sigma(\alpha+x)$· ὅθεν τότε δύναμαι νὰ γράψω :

$$(1)\quad \sigma(\alpha+x)=\sigma(\alpha)+\frac{x}{1}\sigma'(\alpha)+\frac{x^2}{\underline{|2}}\sigma''(\alpha)+\ldots+\frac{x^\nu}{\underline{|\nu}}\sigma^{(\nu)}(\alpha)+\ldots$$

ἔχω οὕτω τὴν σειρὰν τοῦ Taylor.

Ἐὰν εἰς τὴν (1) θέσω $\alpha=0$ ἔχω :

$$(1')\quad \sigma(x)=\sigma(0)+\frac{x}{1}\sigma'(0)+\frac{x^2}{\underline{|2}}\sigma''(0)+\ldots+\frac{x^\nu}{\underline{|\nu}}\sigma^{(\nu)}(0)+\ldots$$

Παρατηρῶ ὅτι δυνατὸν τὸ β′ μέλος τῆς (1′) νὰ εἶναι σειρὰ συγκλίνουσα καὶ ὅμως νὰ μὴ ἔχῃ ἄθροισμα τὸ $\sigma(x)$.

10. Μία μτρικὴ περίπτωσις ὅπου ἔχομεν ορ $U_\nu=0$ (ὅταν τὸ ν τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον) εἶναι ἡ ἑξῆς : Ἔστω ὅτι ἡ ἀπόλυτος τιμὴ παραγώγου τάξεως οἱασδήποτε μένει κατωτέρα σταθεροῦ ἀριθμοῦ Μ· ὅταν τὸ x λαμβάνῃ τιμὰς ἐν τῷ διαστήματι $(\alpha, \alpha+\varepsilon)$· τότε

$$|U_\nu| < M\frac{|x|^{\nu+1}}{\underline{|\nu+1}}$$

Ἀλλὰ ἡ σειρά :

$$\frac{|x|}{1}+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{|x^3|}{\underline{|3}}+\ldots+\frac{|x^\mu|}{\underline{|\mu}}+\ldots$$

εἶναι συγκλίνουσα, ἐπομένως ὅριον τοῦ μυοστοῦ ὅρου εἶναι τὸ μηδὲν ἄρα καὶ τό : $\dfrac{|x|^{\nu+1}}{\underline{|\nu+1}}$ τείνει πρὸς τὸ μηδὲν (ὅταν ορ$\nu=\infty$) ὅθεν ορ $U_\nu=0$.

Παρατήρησις : Δὲν εἶναι εὔκολον συνήθως νὰ διακρίνωμεν ἂν τὸ U_ν ἔχῃ ὅριον τὸ μηδέν, ὅταν τὸ ν τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον· τὸ U_ν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ποσότητα ϑ τὴν ὑποίαν δὲν γνωρίζομεν· γνωρίζομεν μόνον ὅτι αὕτη περιλαμβάνεται μεταξὺ 0 καὶ 1.

156. ***Παραδείγματα ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου τοῦ*** *Maclaurin.*
1) ***Ἐκθετικὴ συνάρτησις*** e^x. Ἐὰν θέσω $\sigma(x)=e^x$ θὰ ἔχω :

$$\sigma^{(\mu)}(x)=e^x \text{ διὰ } \mu= 1, 2, 3, \ldots$$

Ἑπομένως $\sigma^{(\mu)}(0)=e^0=1$· ὅθεν ἐφαρμόζων τὸν τύπον τοῦ Maclaurin λαμβάνω :

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{\underline{|x}}+\ldots\frac{x^\nu}{\underline{|\nu}}+\frac{x^{\nu+1}}{\underline{|\nu+1}}e^{\vartheta x}$$

ὅπου $[0<\vartheta<1)$, [ἐλήφθη ὑπ᾽ ὄψιν ἡ μορφὴ τοῦ ὑπολοίπου τοῦ Lagrange].

Ὁ συμπληρωματικὸς ὅρος ἐνταῦθα εἶναι ὁ $\frac{x^{\nu+1}}{\underline{|\nu+1}}e^{\vartheta x}$· ἀλλὰ τὸ $e^{\vartheta x}$ δι᾽ οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ ϑ καὶ τοῦ x εἶναι πάντοτε πεπερασμένον (διὰ πεπερασμένην τιμὴν τοῦ x)· ἐπειδὴ δέ, ὡς προηγουμένως παρετηρήσαμεν, $\text{ορ}\frac{x^{\nu+1}}{\underline{|\nu+1}}=0$ ἕπεται ὅτι ορ $U_\nu=0$ καὶ ἑπομένως :

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\ldots+\frac{x^\nu}{\underline{|\nu}}+\ldots$$

2) Ἐκθετικὴ συνάρτησις α^x. Ἐπειδὴ $\alpha=e^{\log\alpha}$ ἡ α^x γράφεται οὕτω : $e^{x\log\alpha}$· ὅθεν ἀρκεῖ εἰς τοὺς προηγουμένως εὑρεθέντας τύπους νὰ θέσω ὅπου x τὸ x log α ἵνα εὕρω τὸν ἀντίστοιχον τύπον καὶ τὴν ἀντίστοιχον σειρὰν τοῦ Taylor· κατὰ ταῦτα θὰ ἔχω

$$\alpha^x=e^{x\log\alpha}=1+\frac{x\log\alpha}{1}+\frac{(x\log\alpha)^2}{\underline{|2}}+\ldots+\frac{(x\log\alpha)^\nu}{\underline{|\nu}}+$$

$$+\frac{(x\log\alpha)^{\nu+1}}{\underline{|\nu+1}}e^{\vartheta x\log a}.$$

(Ἀντὶ τοῦ $e^{\vartheta x\log a}$ δύναμαι προφανῶς νὰ γράψω $\alpha^{\vartheta x}$).

3) Ἔστω $y=\log(1+x)$· ἔχω :

$$y'=\frac{1}{1+x}\ ,\ y''=-\frac{1}{(1+x)^2}\ ,\ y'''=\frac{2}{(1+x)^3}$$

$$y^{(4)}=-\frac{2\,.\,3}{(1+x)^4}\ \ldots\ y^{(\nu)}=(-1)^{\nu-1}\frac{|\underline{\nu-1}}{(1+x)^{\nu}}$$

Ἐφαρμόζω τὸν τύπον τοῦ Maclaurin καὶ λαμβάνω :

$$\log(1+x)=\log(1+0)+x\frac{1}{(1+0)}-\frac{x^2}{|\underline{2}}\frac{1}{(1+0)^2}+\frac{x}{|\underline{3}}\frac{}{(1+0)^3}\ \cdots$$

$$\cdots\frac{x^{\nu}}{|\underline{\nu}}(-1)^{\nu-1}\frac{|\underline{\nu-1}}{(1+0)^{\nu}}+\frac{x^{\nu+1}}{|\underline{\nu+1}}(-1)^{\nu}\frac{|\underline{\nu}}{(1+\vartheta x)^{\nu+1}}$$

ἢ καί :

$$\log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{\nu-1}\frac{x^{\nu}}{\nu}+(-1)^{\nu}\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\left(\frac{1}{1+\vartheta x}\right)^{\nu+1}$$

ἔλαβον ἐδῶ τὴν μορφὴν τοῦ ὑπολοίπου τοῦ Lagrange.

Ἐὰν λάβω τὸ ὑπόλοιπον τοῦ Cauchy ἔχω :

$$U_{\nu}=(-1)^{\nu}\frac{x^{\nu+1}(1-\vartheta)^{\nu}}{(1+\vartheta x)^{\nu+1}}=(-1)^{\nu}\frac{x^{\nu+1}}{1+\vartheta x}\left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)^{\nu}.$$

ὑποθέτω εἰς τοὺς ἀνωτέρω τύπους $x>-1$.

Ἔστω $|x|<1$. τότε ἐὰν $x>0$ τὸ $\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}$ θὰ εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος· ἐὰν δὲ x ἀρνητικόν, παρατηρῶ ὅτι $\vartheta>\vartheta\,|x|$ διότι $|x|<1$ καὶ ἑπομένως $1-\vartheta<1-\vartheta\,|x|$ ἢ καὶ $1-\vartheta<1+\vartheta x$ ὥστε καὶ πάλιν τὸ $\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}$ θὰ εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος.

Ὅθεν διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x μεταξὺ -1 καὶ $+1$ θὰ ἔχω ὅτι τὸ $\left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)^{\nu}$ μένει μικρότερον δεδομένου ἀριθμοῦ· ἀφ' ἑτέρου τὸ $\frac{1}{1+\vartheta x}$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x μεταξὺ 0 καὶ 1 μένει μικρότερον τῆς μονάδος καὶ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x μεταξὺ 0 καὶ -1 μένει μικρότερον τοῦ $\frac{1}{1-|x|}$, τὸ δὲ $x^{\nu+1}$ διὰ $|x|<1$ τείνει πρὸς τὸ μηδὲν ὅταν τὸ ν τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον, ὥστε ὁ συμπληρωματικὸς ὅρος τείνει πρὸς τὸ μηδὲν ὅταν τὸ ν τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον καὶ ἑπομένως διὰ $|x|<1$ ἡ συνάρτησις $\log(1+x)$ ἀναπτύσσεται εἰς σειρὰν συγκλίνουσαν :

$|x|<1$ $\vartheta|x|<\vartheta$ $1-\vartheta|x|>1-\vartheta$

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$$

Ἡ σειρὰ αὕτη καλεῖται ***λογαριθμικὴ σειρά.***

Ἔστω $x=+1$ παρατηρῶ ὅτι ἐὰν λάβω τὸ ὑπόλοιπον τοῦ Lagrange ἔχω:

$$U_\nu=(-1)^\nu\frac{1}{\nu+1}\cdot\frac{1}{(1+\vartheta)^{\nu+1}}$$

καὶ ἑπομένως ὁ συμπληρωματικὸς ὅρος τείνει πρὸς τὸ μηδέν. Ὅθεν:

$$\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$$

4) Ἔστω ἤδη ἡ συνάρτησις $\sigma(x)=(1+x)^\mu$ · ἔχω:

$$\sigma'(x)=\mu(1+x)^{\mu-1}$$

$$\sigma''(x)=\mu(\mu-1)\,(1+x)^{\mu-2}$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$\sigma^{(\nu)}(x)=\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-\nu+1)(1+x)^{\mu-\nu}$$

Ἑπομένως: $\sigma(0)=1,\ \sigma'(0)=\mu,\ \sigma''(0)=\mu(\mu-1)\dots$

$$\dots\sigma^{(\nu)}(0)=\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-\nu+1)$$

Ἀναπτύσσων ἤδη κατὰ τὸν τύπον τοῦ Maclaurin λαμβάνω:

$$(1+x)^\mu=1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu-1)}{\underline{|2}}x^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{\underline{|3}}x^3+\dots$$

$$+\frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-\nu+1)}{\underline{|\nu}}x^\nu+U_\nu,$$

ὅπου $$U_\nu=\frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-\nu)}{\underline{|\nu+1}}x^{\nu+1}(1+\vartheta x)^{\mu-\nu-1},$$

ἐὰν λάβω τὴν μορφὴν τοῦ ὑπολοίπου τοῦ Lagrange, καί:

$$U_\nu=\frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-\nu)}{\underline{|\nu}}x^{\nu+1}(1-\vartheta)^\nu(1+\vartheta x)^{\mu-\nu-1},$$

ἐὰν λάβω τὴν μορφὴν τοῦ ὑπολοίπου τοῦ Cauchy.

α) Ἐὰν ὁ μ εἶναι θετικὸς ἀκέραιος λαμβάνω $\nu=\mu$ ὁπότε $\mu-\nu=0$ καὶ $U_\nu=0$ διότι $\sigma^{(\nu+1)}(x)=0$· προκύπτει δὲ τότε ὁ γνωστὸς τύπος τοῦ διωνύμου τοῦ Νεύτωνος.

β) Ἔστω ὅτι ὁ μ δὲν εἶναι ἀκέραιος θετικός. Θεωρήσωμεν τὴν ἔκφρασιν :

$$\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu)}{\lfloor\nu+1}x^{\nu+1}\cdot$$

αὕτη δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ ὡς γενικὸς ὅρος τῆς σειρᾶς :

$$(\Sigma)\qquad \mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{\lfloor 2}x^2+\ldots+\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu+1)}{\lfloor\nu}x^\nu+ \\ +\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu)}{\lfloor\nu+1}x^{\nu+1}+\ldots$$

Ὁ λόγος τοῦ νυοστοῦ πρώτου ὅρου πρὸς τὸν προηγούμενον εἶναι: $\frac{\mu-\nu}{\nu+1}x$ ἢ καὶ $-\left(1-\frac{\mu+1}{\nu+1}\right)x$. Ὅθεν ὅταν τὸ ν τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ λόγου αὐτοῦ τείνει πρὸς τὸ $|x|$. Ὥστε ὅταν $|x|<1$ ἡ σειρὰ εἶναι συγκλίνουσα.

Διὰ νὰ ἴδωμεν ἂν ἡ σειρὰ αὐτὴ παριστᾷ τὸ $(1+x)^\mu$ πρέπει νὰ ἴδωμεν ἂν ορ$U_\nu=0$.

1) Ἔστω x θετικὸς μικρότερος τῆς μονάδος. Ἐὰν λάβω τὴν μορφὴν τοῦ ὑπολοίπου τοῦ Lagrange ἔχω :

$$U_\nu=\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu)}{\lfloor\nu+1}x^{\nu+1}(1+\vartheta x)^\mu\,\frac{1}{(1+\vartheta x)^{\nu+1}}\cdot$$

παρατηρῶ ὅτι ὁ παράγων $\frac{1}{(1+\vartheta x)^{\nu+1}}$ εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ ν καὶ τείνει πρὸς τὸ μηδὲν ὅταν ορ$\nu=\infty$. Ὁ παράγων $(1+\vartheta x)^\mu$ εἶναι πεπερασμένος, (μεταξὺ 1 καὶ $(1+x)^\mu$, ὁ δὲ παράγων $\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu)}{\lfloor\nu+1}x^{\nu+1}$ εἶναι ὅρος τῆς σειρᾶς (Σ), ἡ ὁποία ἀπεδείξαμεν ὅτι διὰ $|x|<1$ συγκλίνει· ἄρα ἔχει ὅριον τὸ μηδέν· ὥστε ορ$U_\nu=0$.

2) Ἔστω x ἀρνητικὸς ($|x| < 1$)· λαμβάνων τὴν μορφὴν τοῦ ὑπολοίπου τοῦ Cauchy ἔχω :

$$U_\nu = \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu)}{\underline{|\nu}} x^{\nu+1}(1+\vartheta x)^{\mu-1}\left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)^\nu .$$

Παρατηρῶ ὅτι $1-\vartheta < 1+\vartheta x$ διότι τὸ x ὑποτίθεται ἀρνητικὸς ἀπολύτως μικρότερος τῆς μονάδος· ὅθεν ὁ παράγων $\left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)^\nu$ εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ ν καὶ τείνει πρὸς τὸ μηδὲν ὅταν $\text{ορ}\nu = \infty$· ὁ παράγων $(1+\vartheta x)^{\mu-1}$ εἶναι πεπερασμένος καὶ τέλος ὁ παράγων $\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu)}{\underline{|\nu}} x^{\nu+1}$ εἶναι ὅρος σειρᾶς συγκλινούσης, τῆς σειρᾶς, ἥτις προκύπτει ἐκ τῆς (Σ) ὅταν ὡς παρονομαστὴν τοῦ δευτέρου ὅρου θέσωμεν τὸ 1 ὡς παρονομαστὴν τοῦ τρίτου ὅρου τὸ $\underline{|2}$ κ. ο. κ. ἑπομένως τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ὅθεν $\text{ορ}U_\nu = 0$. Ὥστε ὅταν $|x| < 1$ ἔχομεν πάντοτε : $\text{ορ}U_\nu = 0$ καὶ ἑπομένως ἡ σειρὰ (Σ) παριστᾷ τότε τὴν συνάρτησιν $(1+x)^\mu$.

5) Ἔστω ἡ συνάρτησις $\sigma(x) = \eta\mu x$:

ἐπειδὴ $$\sigma^{(\nu)}(x) = \eta\mu\left(x + \nu\frac{\pi}{2}\right)$$

ἔχω : $\sigma(0)=0,\ \sigma'(0)=1,\ \sigma''(0)=0,\ \sigma'''(0)=-1,\ \sigma^{(4)}(x)=0,$

$$\sigma^{(5)}(0)=1,\ \sigma^{(6)}(0)=0,\ \sigma^{(7)}(0)=-1\ \ldots,$$

ἤτοι διὰ $x=0$ αἱ τιμαὶ τῆς σ(x) καὶ τῶν διαδοχικῶν παραγώγων θὰ σχηματίζουν περιοδικὴν σειρὰν μὲ τέσσαρας ὅρους τοὺς 0, 1, 0, —1· ἐὰν δὲ θέσω $\nu = 2K$ θὰ ἔχω :

$$\sigma^{(2K+1)}(\vartheta x) = \eta\mu\left[\vartheta x + (2K+1)\frac{\pi}{2}\right] = (-1)^K \,\sigma\upsilon\nu\, \vartheta x$$

καὶ ἑπομένως δύναμαι νὰ γράψω :

$$\eta\mu\, x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{\underline{|3}} + \frac{x^5}{\underline{|5}} - \ldots + (-1)^{K-1}\frac{x^{2K-1}}{\underline{|2K-1}} + U_\nu,$$

ὅπου : $$U_\nu = (-1)^K \frac{x^{2K+1}}{\underline{|2K+1}} \sigma\upsilon\nu\vartheta \mathbf{x}.$$

Παρατηρῶ ὅτι $|\,\sigma\upsilon\nu\vartheta x\,| < 1$ καὶ $\text{ορ}\dfrac{x^{2K+1}}{\underline{|2K+1}} = 0$, ὅταν ορ $K = \infty$.

(διότι ὁ $\dfrac{x^{\varrho}}{\underline{|\varrho}}$ εἶναι ὅρος σειρᾶς συγκλινούσης, τῆς e^{x}), ἑπομένως $\text{ορ}U_{\nu} = 0$ δύναμαι ὅθεν ν' ἀναπτύξω τὸ ημx εἰς σειρὰν διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x καὶ ἔχω :

$$\eta\mu x = \frac{x}{1} - \frac{x^{3}}{\underline{|3}} + \frac{x^{5}}{\underline{|5}} - \ldots (-1)\frac{x^{2K+1}}{\underline{|2K+1}} + \ldots$$

6) Ἔστω ἡ συνάρτησις σ(x)=συνx· ἔχω :

$$\sigma^{(\nu)}(x) = \sigma\upsilon\nu\left(x + \nu\frac{\pi}{2}\right) \text{ καὶ } \sigma(0) = 1,\ \sigma'(0) = 0,$$

$$\sigma''(0) = -1,\ \sigma'''(0) = 0,\ \sigma^{(4)}(x) = 1, \text{ κ. ο. κ.}$$

ἤτοι ἡ συνάρτησις καὶ αἱ διαδοχικαὶ αὐτῆς παράγωγοι διὰ x=0 σχηματίζουν περιοδικὴν σειρὰν μὲ τέσσαρας ὅρους 1, 0, —1, 0· ἔχω δὲ θέτων $\nu = 2K - 1$:

$$\sigma\upsilon\nu^{(\nu+1)}(\vartheta x) = \sigma\upsilon\nu^{(2K)}(\vartheta x) = \sigma\upsilon\nu\left(\vartheta x + 2K\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{K}\,\sigma\upsilon\nu\vartheta x,$$

ἑπομένως δύναμαι νὰ γράψω :

$$\sigma\upsilon\nu x = 1 - \frac{x^{2}}{\underline{|2}} + \frac{x^{4}}{\underline{|4}} - \ldots + (-1)^{K-1}\frac{x^{2K-2}}{\underline{|2K-2}} +$$
$$+ (-1)^{K}\frac{x^{2K}}{\underline{|2K}}\,\sigma\upsilon\nu\vartheta x,$$

φαίνεται δ' ὅπως καὶ προηγουμένως ὅτι $\text{ορ}U_{\nu} = 0$· ὅθεν :

$$\sigma\upsilon\nu x = 1 - \frac{x^{2}}{\underline{|2}} + \frac{x^{4}}{\underline{|4}} - \ldots + (-1)^{K}\frac{x^{2K}}{\underline{|2K}} \ldots$$

Ἀπειροστά.

159. Ἔστω ἀκολουθία τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\nu, \ldots$ ἔχουσα ὅριον τὸ μηδέν· μεταβλητή τις ε λαμβάνουσα διαδοχικῶς τὰς τιμὰς τῆς ἀκολουθίας αὐτῆς εἶναι κατὰ τὸν δοθέντα ὁρισμὸν (§ 55) ἀπειροστόν. Ἔστω ἕτερον ἀπει-

ροστὸν η λαμβάνον διαδοχικῶς τὰς τιμὰς ἑτέρας ἀκολουθίας η_1, η_2, . . . η_ν, . . . Ἐὰν μεταξὺ τῶν πρώτων τιμῶν καὶ τῶν δευτέρων δὲν ὑπάρχῃ οὐδεμία συσχέτισις τότε λέγομεν ὅτι τὰ ε καὶ η εἶναι ἀνεξάρτητα ἀπ' ἀλλήλων· ἐνῷ ἐὰν ὑπάρχῃ σχέσις μεταξύ των τοιαύτη, ὥστε ὁσάκις γνωρίζω τιμήν τινα τοῦ ἑνὸς ε_ν νὰ δύναμαι νὰ ἐξάγω τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τοῦ ἄλλου η, τότε λέγομεν, ὅτι τὸ ἀπειροστὸν η ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ἀπειροστοῦ ε.

160. Γενικώτερον ἔστω ὅτι τὸ ε εἶναι ἀπειροστὸν (§ 55) καὶ ὅτι $\eta=\sigma(\varepsilon)$. Τὸ $\sigma(\varepsilon)$ παραδεχόμεθα ὅτι εἶναι συνάρτησις τοῦ ε, ἡ ὁποία τείνει πρὸς τὸ μηδὲν ὅταν τὸ ε τείνει πρὸς τὸ μηδὲν καθ' οἱονδήποτε τρόπον. Τὸ $\sigma(\varepsilon)$ ὅπως καὶ τὸ ε, ἐξ ὑποθέσεως, τείνουν πρὸς τὸ μηδέν, ὁ λόγος ὅμως αὐτῶν (ὅστις θὰ ἐλάμβανε ἐὰν ἐπεριοριζόμεθα εἰς τὴν ἀρχικὴν παράστασιν (§ 159) διαδοχικῶς τὰ τιμάς: $\frac{\eta_1}{\varepsilon_1}$, $\frac{\eta_2}{\varepsilon_2}$ ... $\frac{\eta_\nu}{\varepsilon_\nu}$...), θὰ εἶναι ἐν γένει μεταβλητὴ ποσότης, ἥτις δυνατὸν νὰ μὴ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν. Καὶ ἂν ὁ λόγος αὐτῶν ἔχῃ ὅριον σταθερὸν ἀριθμὸν διάφορον τοῦ 0, τότε λέγομεν ὅτι τὰ η καὶ ε εἶναι ἀπειροστὰ τῆς αὐτῆς τάξεως. Ἐὰν ὁ λόγος αὐτῶν ἔχῃ ὅριον τὸ μηδὲν τότε λέγομεν, ὅτι τὸ η εἶναι ἀπειροστὸν ἀνωτέρας τάξεως ἀπὸ τὸ ε. Ἂν δὲ ὁ λόγος αὐτῶν ἔχῃ ὅριον τὸ ἄπειρον λέγομεν ὅτι νὸ η εἶναι ἀπειροστὸν κατωτέρας τάξεως ἀπὸ τὸ ε.

Π.χ. ἔστω ὅτι μεταβλητή τις ποσότης ε τείνει πρὸς τὸ μηδέν, τότε καὶ τὸ ημ ε θὰ εἶναι μεταβλητὴ ποσότης τείνουσα πρὸς τὸ μηδέν, ἤτοι τὸ ε καὶ τὸ ημε εἶναι συγχρόνως ἀπειροστά. Ὁ λόγος ὅμως αὐτῶν $\frac{\eta\mu\varepsilon}{\varepsilon}$ δὲν εἶναι ἀπειροστόν, διότι $\text{ορ}\frac{\eta\mu\varepsilon}{\varepsilon}=1$, ἤτοι τὸ ὅριον εἶναι σταθερὸς ἀριθμὸς διάφορος τοῦ 0, ἐπομένως τὸ ημε καὶ τὸ ε εἶναι ἀπειροστὰ τῆς αὐτῆς τάξεως.

Ἐὰν ἔχω ἐπὶ πλέον, ὅτι ὁ σταθερὸς αὐτὸς ἀριθμὸς εἶναι ἡ μονάς, τ' ἀπειροστὰ ταῦτα καλοῦνται ἰσοδύναμα ὅπως π. χ. ἐν τῷ προκειμένῳ παραδείγματι ἔχω ὅτι τὰ ε καὶ ημ ε εἶναι ἰσοδύναμα ἀπειροστά.

Ὅθεν δύο ἀπειροστὰ λέγονται ***ἰσοδύναμα*** ὅταν ὁ λόγος αὐτῶν ἔχει ὅριον τὴν μονάδα.

Ἐὰν θεωρήσω οὐχὶ τὸ ημε ἀλλὰ τὸ 1—συνε θὰ ἔχω πάλιν ἀπειροστόν, ἀλλ' ὁ λόγος $\frac{1-\sigma\upsilon\nu\varepsilon}{\varepsilon}$ δὲν ἔχει ὅριον σταθερὸν ἀριθμὸν $\neq 0$, ἀλλὰ τὸ μηδέν.

Διότι :

$$1-\sigma\upsilon\nu\varepsilon=2\eta\mu^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \qquad \text{ὅθεν :}$$

$$\frac{1-\sigma\upsilon\nu\varepsilon}{\varepsilon}=\frac{\eta\mu^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\frac{\varepsilon}{2}}=\frac{\eta\mu\frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}}\eta\mu\frac{\varepsilon}{2}$$

καὶ ἑπομένως $\quad \text{ορ}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\varepsilon}{\varepsilon}=1\text{ορ}\eta\mu\dfrac{\varepsilon}{2}=0.$

Καὶ ἄλλως τοῦτο ἐφαίνετο, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσω, ὅτι κατὰ τὸν τύπον τοῦ Taylor ἔχω

$$\sigma\upsilon\nu\varepsilon=1-\frac{\varepsilon^2}{\underline{|2}}+\frac{\varepsilon^4}{\underline{|4}}\cdots$$

Παρατηρητέον ὅτι ὁ τύπος τοῦ Taylor χρησιμεύει πολλάκις δι' ἀναπτύγματα ἀπειροστῶν.

Παρατηροῦμεν ἤδη ὅτι ἐνῶ ὁ λόγος $\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\varepsilon}{\varepsilon}$ ἔχει ὅριον τὸ μηδὲν ὁ λόγος $\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\varepsilon}{\varepsilon^2}$ ἔχει ὅριον τὸ $\dfrac{1}{2}$, ἤτοι σταθερὸν ἀριθμὸν διάφορον τοῦ 0. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι τὸ $1-\sigma\upsilon\nu\varepsilon$ εἶναι ἀπειροστὸν δευτέρας τάξεως ὡς πρὸς ε.

Γενικῶς· ἐὰν ἔχωμεν δύο ἀπειροστὰ η καὶ ε ἐξαρτώμενα ἀπ' ἀλλήλων, ἤτοι $\eta=\sigma(\varepsilon)$, θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ η εἶναι ἀπειροστὸν τάξεως μ ὡς πρὸς τὸ ε ἐὰν ὅριον τοῦ λόγου $\dfrac{\eta}{\varepsilon^\mu}$ εἶναι σταθερός τις ἀριθμὸς διάφορος τοῦ μηδενός· ἤτοι ἐὰν ἔχωμεν : $\text{ορ}\dfrac{\eta}{\varepsilon^\mu}=A$ (ὅπου A σταθερός τις ἀριθμὸς διάφορος τοῦ μηδενός).Ἐκ τοῦ ὅτι: $\text{ορ}\dfrac{\eta}{\varepsilon^\mu}=A$, ἕπεται ὅτι :

$$\text{ορ}\left(\frac{\eta}{\varepsilon^\mu}-A\right)=0\cdot$$

ἤτοι $\dfrac{\eta}{\varepsilon^\mu}-A=\vartheta$ (ὅπου θ ἀπειροστὸν) ἢ καὶ $\dfrac{\eta}{\varepsilon^\mu}=A+\vartheta$ ἢ ἀκόμη

$\eta=A\varepsilon^\mu+\vartheta\varepsilon^\mu$.

Τὰ ἀνωτέρω ἠδυνάμην νὰ ἐκφράσω καὶ ὡς ἑξῆς.

Ὅταν θεωρήσω τὸ ε ὡς ***πρωτεῦον*** ἀπειροστόν, τὸ η θὰ εἶναι ἀπειροστὸν τάξεως μ, ἐὰν ορ $\frac{\eta}{\varepsilon^\mu}=A$ ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, ἐὰν $\eta=A\varepsilon^\mu+\vartheta\varepsilon^\mu$ (ὅπου ορ$\vartheta=0$).

Τὸ $A\varepsilon^\mu$ καλεῖται πρωτεῦον μέρος ἢ πρωτεύουσα τιμὴ τοῦ ἀπειροστοῦ η.

161. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὁρισμῶν ἕπονται ἀμέσως διάφοροι προτάσεις διὰ τὰ ἀπειροστά. Οὕτως ἔχομεν ὅτι ἡ πρωτεύουσα τιμὴ ἀθροίσματος πεπερασμένου πλήθους ἀπειροστῶν ἰσοῦται ἐν γένει πρὸς τὴν πρωτεύουσαν τιμὴν τοῦ ἀθροίσματος τῶν πρωτευουσῶν τιμῶν τῶν ἀπειροστῶν, ὅπως ἐπίσης καὶ ἡ πρωτεύουσα τιμὴ γινομένου πεπερασμένου πλήθους ἀπειροστῶν ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν πρωτευουσῶν τιμῶν..π.χ. Ἔστω ὅτι τὸ η_1 εἶναι ἀπειροστὸν μ τάξεως (θεωρουμένου τοῦ ε ὡς πρωτεύοντος ἀπειροστοῦ) ὁπότε θὰ ἔχωμεν $\eta_1=A\varepsilon^\mu+\vartheta_1\varepsilon^\mu$. καὶ ὅτι η_2 εἶναι ν τάξεως ἀπειροστόν, ὁπότε θὰ ἔχωμεν $\eta_2=B\varepsilon^\nu+\vartheta_2\varepsilon^\nu$ ὅπου Α καὶ Β σταθεροὶ ἀριθμοὶ διάφοροι τοῦ τοῦ 0· τὰ δὲ ϑ_1 καὶ ϑ_2 ἀπειροστά. Τότε:

$$\eta_1+\eta_2=A\varepsilon^\mu+B\varepsilon^\nu+\vartheta_1\varepsilon^\mu+\vartheta_2\varepsilon^\nu$$

ἐξ οὗ φαίνεται ὅτι ἐν γένει πρωτεύουσα τιμὴ τοῦ $\eta_1+\eta_2$ θὰ εἶναι ἡ πρωτεύουσα τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν πρωτευουσῶν τιμῶν ἤτοι τοῦ ἀθροίσματος $A\varepsilon^\mu+B\varepsilon^\nu$.

Παρατηρητέον ὅμως ὅτι δυνατὸν εἰς ἐξαιρετικὰς περιπτώσεις νὰ συμβαίνῃ, ὥστε ἡ πρωτεύουσα τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος νὰ μὴ εἶναι ἡ πρωτεύουσα τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν πρωτευουσῶν τιμῶν.

Τοῦτο π. χ. συμβαίνει ἐὰν

$$\eta_1=A\varepsilon^\mu+\vartheta_1\varepsilon^\mu,\quad \eta_2=-A\varepsilon^\mu+\vartheta_2\varepsilon^\mu,\quad \eta_3=B\varepsilon^\nu+\vartheta_3\varepsilon^\nu$$

ὅπου $\nu>\mu$ καὶ $(\vartheta_1+\vartheta_2)\varepsilon^\mu=\Gamma\varepsilon^\nu+\vartheta_4\varepsilon^\nu$ ὁπότε θὰ εἶναι

$$\eta_1+\eta_2+\eta_3=B\varepsilon^\nu+\vartheta_1\varepsilon^\mu+\vartheta_2\varepsilon^\mu+\vartheta_3\varepsilon^\nu=(B+\Gamma)\varepsilon^\nu+(\vartheta_3+\vartheta_4)\varepsilon^\nu$$

ἐπομένως πρωτεύουσα τιμὴ δὲν θὰ εἶναι τὸ $B\varepsilon^\nu$.

Π. χ. τὸ ἀπειροστὸν $\eta\mu\varepsilon-\varepsilon+\varepsilon^3$ ἔχει ὡς πρωτεύουσαν τιμὴν οὐχὶ τὴν πρωτεύουσαν τιμὴν τοῦ ἀθροίσματος τῶν πρωτευουσῶν τιμῶν, ἡ ὁποία εἶναι ἐδῶ $\varepsilon-\varepsilon+\varepsilon^3$ ἤτοι τὸ ε^3, ἀλλὰ τὸ $\frac{5\varepsilon^3}{6}$ διότι :

$$ημε=\frac{ε}{1}-\frac{ε^3}{1.2.3}+\frac{ε^5}{1.2.3.4.5}-\dots$$

ὡς πρὸς τὸ γινόμενον προφανῶς δὲν ὑπάρχει ἐξαίρεσις, διότι δεν ἀλληλοεξουδετεροῦνται πρωτεύουσαι τιμαὶ ἀπειροστῶν.

162,—Ἄλλη θεμελιώδης πρότασις εἶναι καὶ ἡ ἑξῆς.

Ὁ λόγος δύο ἀπειροστῶν τῆς αὐτῆς τάξεως ἔχει ὡς ὅριον τὸ πηλίκον τῶν πρωτευουσῶν τιμῶν.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου θεωρήσωμεν δύο ἀπειροστὰ η καὶ η′ τάξεως μ· ἔστω $η=Αε^μ+θε^μ$, $η'=Α'ε^μ+θ'ε^μ$ ὅπου Α, Α′ σταθεροὶ ἀριθμοὶ διάφοροι τοῦ μηδενὸς καὶ θ, θ′ ἀπειροστά.

θὰ εἶναι : $\frac{η'}{η}=\frac{(Α'+θ')ε^λ}{(Α+θ)ε^λ}=\frac{Α'+θ'}{Α+θ}$ ὅθεν $ορ\frac{η'}{η}=\frac{Α'}{Α}$

163.—Ὁμοίως φαίνεται ὅτι καὶ τὸ ὅριον τοῦ λόγου δύο ἀπειροστῶν δὲν ἀλλάσσει, ὅταν ἀντικαταστήσω ἕκαστον ἐξ αὐτῶν μὲ ἀπειροστὸν ἰσοδύναμον, τουτέστι μὲ ἀπειροστὸν τοῦ ὁποίου ὁ λόγος πρὸς τὸ ἀντίστοιχον ἀπειροστὸν ἔχει ὅριον τὴν μονάδα.

Ἵνα ἀποδείξω τὴν τελευταίαν πρότασιν, θεωρῶ δύο ἀπειροστὰ η καὶ ε καὶ δύο ἰσοδύναμα πρὸς αὐτὰ τὰ η′ καὶ ε′. Λέγω ὅτι $ορ\frac{η}{ε}=ορ\frac{η'}{ε'}$. Τοῦτο φαίνεται ἐὰν παρατηρήσω ὅτι

$ορ\frac{η}{η'}=1$ καὶ $ὅρ\frac{ε}{ε'}=1$ ὁπότε

$$\frac{η}{η'}=1+θ \quad καὶ \quad \frac{ε}{ε'}=1+λ$$

ὅπου θ κοὶ λ ἀπειροστά· καὶ ἑπομένως

$$η=η'+η'θ \quad καὶ \quad ε=ε'+ε'λ$$

ὅθεν

$$\frac{η}{ε}=\frac{η'(1+θ)}{ε'(1+λ)}$$

ἐὰν δὲ λάβω τὰ ὅρια, θὰ ἔχω

$$ορ\frac{η}{ε}=ορ\frac{η'}{ε'}\ ορ\frac{1+θ}{1+λ} \quad ἢ καὶ \quad ορ\frac{η}{ε}=ορ\frac{η'}{ε}$$

διότι ὁ ἕτερος παράγων εἶναι ἡ μονάς :

Τοῦτο τὸ θεώρημα εἶναι θεμελιῶδες διὰ τὸν διαφορικὸν λογισμόν.

Παρατήρησις. Ἀποτελεῖ οὐσιῶδες πρόβλημα ὁ προσδιορισμὸς τῶν πρωτευουσῶν τιμῶν τῶν ἀπειροστῶν, ὅπως ἐπίσης καὶ τὸ ν' ἀναπτύξωμεν ἓν ἀπειροστὸν εἰς σειρὰν κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ πρωτεύοντος ἀπειροστοῦ. Τούτων μεγίστη γίνεται χρῆσις καὶ εἰς τὰς ἐφαρμογὰς τῶν μαθηματικῶν.

Ἀσκήσεις

1) Ἔστω ὅτι ἀναπτύσσεται μία συνάρτησις εἰς τὰ πέριξ τοῦ α κατὰ τὸν τύπον τοῦ Taylor δηλ. ἔστω·

$$\sigma(\alpha+\varepsilon)=\sigma(\alpha)+\varepsilon\sigma'(\alpha)+\frac{\varepsilon^2}{\underline{|2}}\sigma''(\alpha)+\dots$$

$$\dots+\frac{\varepsilon^\nu}{\underline{|\nu}}\sigma^{(\nu)}(\alpha)+\frac{\varepsilon^{\nu+1}}{\underline{|\nu+1}}\sigma^{(\nu+1)}(\alpha+\vartheta\varepsilon)$$

τότε ἐὰν ἡ παράγωγος τάξεως $(\nu+1)$ εἶναι περατωμένη, θὰ ἔχωμεν:

$$\sigma(\alpha+\varepsilon)=A_0+A_1\varepsilon+A_2\varepsilon^2+\dots+A_\nu\varepsilon^\nu+M\varepsilon^{\nu+1} \qquad (1)$$

$$\text{ὅπου} \qquad A_0=\sigma(\alpha) \text{ καὶ } A_K=\frac{\sigma^{(K)}(\alpha)}{\underline{|K}}\cdot$$

καὶ τὸ M εἶναι ἀριθμὸς ἐξαρτώμενος ἐκ τοῦ ε, δὲν τείνει δὲ πρὸς τὸ ἄπειρον, ὅταν τὸ ε τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ καὶ δεύτερον ἀνάπτυγμα τοῦ $\sigma(\alpha+\varepsilon)$ κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ ε τῆς μορφῆς (1). Καὶ τῷ ὄντι, ἔστω ὅτι ὑπάρχει ἓν τοιοῦτον ἀνάπτυγμα π.χ. τό:

$$\alpha_0+\alpha_1\varepsilon+\dots+\alpha_\nu\varepsilon^\nu+\mu\varepsilon^{\nu+1} \qquad \text{τότε}$$

τοῦτο καὶ τὸ (1) θὰ δίδωσιν ἴσους ἀριθμούς, ἐὰν ὑποθέσω ὅτι ορ$\varepsilon=0$· ὅθεν λαμβάνω: $A_0=\alpha_0$· ἐπομένως:

$$A_1\varepsilon+\dots+M\varepsilon^{\nu+1}=\alpha_1\varepsilon+\dots+\mu\varepsilon^{\nu+1}$$

$$\text{ὅθεν καί: } A_1+A_2\varepsilon+\dots+M_1\varepsilon^\nu=\alpha_1\dots+\mu\varepsilon^\nu\cdot$$

ἐὰν ἤδη ὑποθέσω πάλιν ὅτι ορ$\varepsilon=0$ λαμβάνω: $A_1=\alpha_1$ κ.ο.κ.

2) Ἔστω $y=\sigma(\omega)$ ὅπου $\omega=e^x$, τότε $\Delta\omega=e^{x+\Delta x}-e^x=$ $=e^x(\Delta x+\frac{\Delta x^2}{\underline{|2}}+\frac{\Delta x^3}{\underline{|3}}+\ldots)$. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ συντελεστὴς τοῦ Δx^ν εἰς τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $\sigma(\omega+\Delta\omega)-\sigma(\omega)$ κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ x θὰ εἶναι ὁ :

$$\frac{1}{\underline{|\nu}}\sum_{K=1}^{K=\nu}\frac{A_K}{\underline{|K}}\,e^{Kx}\,\sigma^{(K)}(\omega)$$

ὅπου $\quad A_K=K^\nu-K(K-1)^\nu+\frac{K(K-1)}{\underline{|2}}(K-2)^\nu-\ldots$

ὁ συντελεστὴς οὗτος πολλαπλασιαζμενος ἐπὶ $\underline{|\nu}$ θὰ δώσῃ τὴν παράγωγον τάξεως ν τοῦ $\sigma(e^x)$ ἤτοι τὸ $D^\nu\sigma(e^x)$.

Ἀπ. Ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσω ὅτι :

$$\sigma(\omega+\Delta\omega)-\sigma(\omega)=\frac{\sigma'(\omega)}{1}\Delta\omega+\frac{\sigma''(\omega)}{\underline{|2}}\Delta\omega^2+\ldots$$

καὶ ὅτι μόνον εἰς τοὺς ν πρώτους ὅρους τοῦ δευτέρου μέλους (ὅπου τὸ Δω ἀντικατεστάθη ὑπὸ τοῦ ἴσου του) θὰ ζητήσω ὅρους περιέχοντας τὸ Δx^ν διότι τὰ $\Delta\omega^{\nu+1}\ldots$ δὲν θὰ ἔχουν ὅριον τοιοῦτον (μὲ Δx^ν).

3) Καθ' ὅμοιον τρόπον νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$D^\nu e^{\alpha x^2}=e^{\alpha x^2}\Big((2x)^\nu\alpha^\nu+\frac{\nu(\nu-1)}{1}(2x)^{\nu-2}\alpha^{\nu-1}+$$
$$+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{\underline{|2}}(2x)^{\nu-4}\alpha^{\nu-2}+\ldots\Big).$$

4) Ν' ἀναπτυχθῇ ἡ συνάρτησις $\log(1-\varkappa)$.

5) Ν' ἀναπτυχθῇ τὸ τοξ εφ x εἰς σειρὰν (συγκλίνουσαν) ὡς πρὸς x.

6) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\sigma\left(\frac{x}{1+x}\right)=\sigma(x)-\frac{x^2}{1+x}\sigma'(x)+\ldots$$

$$+\frac{(-1)^{\nu}x^{2\nu}}{(1+x)^{\nu}}\frac{\sigma^{(\nu)}(x)}{|\underline{\nu}}+\frac{(-1)^{\nu+1}x^{2\nu+2}}{(1+x)^{\nu+1}}\frac{\sigma^{(\nu+1)}\left(\frac{x+\vartheta x^{2}}{1+x}\right)}{|\underline{\nu+1}}$$

7) Ν' ἀναπτυχθῇ τὸ $\sigma\upsilon\nu^{3}x$ εἰς σειρὰν συγκλίνουσαν.

Ἀπ. Ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι : $4\,\sigma\upsilon\nu^{3}x=\sigma\upsilon\nu\,3x+3\sigma\upsilon\nu x$.

8) Ἔστωσαν δύο σειραὶ συγκλίνουσαι :

$$y=\alpha_0+\alpha_1 x+\ldots+\alpha_\nu x^\nu+\ldots$$

$$\log y=\beta_0+\beta_1 x+\ldots+\beta_\nu x^\nu+\ldots$$

Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\nu\alpha_\nu=\beta_1\alpha_{\nu-1}+2\beta_2\alpha_{\nu-2}+\ldots+\nu\beta_\nu\alpha_0.$$

9) Τίνος τάξεως ἀπειροστὸν εἶναι τὸ ημε—ε καὶ ποία ἡ πρωτεύουσα αὐτοῦ τιμή; (θεωρεῖται τὸ ε πρωτεῦον ἀπειροστόν).

10) Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρωτεύουσα τιμὴ τῶν ἀπειροστῶν

$$\eta\mu\,2\varepsilon,\qquad \sqrt{1+\varepsilon}-1,\quad 1-\sigma\upsilon\nu\,\varepsilon-\frac{1}{2}\eta\mu^{2}\varepsilon,\quad \sqrt{\varepsilon}-\sqrt{\eta\mu\varepsilon}\,.$$

11) Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρωτεύουσα τιμὴ τοῦ ἀπειροστοῦ $e^{\varepsilon}-1$:

12) » » » » » » $1-\sigma\upsilon\nu^{3}\varepsilon$.

13) Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἐὰν η_1 εἶναι ἀπειροστὸν τάξεως μ καὶ η_2 ἀπειροστὸν τάξεως ν $(\mu>\nu)$, ὁ λόγος $\eta_1 : \eta_2$ θὰ εἶναι ἀπειροστὸν ἔχον ὡς πρωτεύουσαν τιμὴν τὸ πηλίκον τῶν πρωτευουσῶν τιμῶν.

14) Ποῖον τὸ ὅριον τοῦ λόγου $\frac{\varepsilon\varphi\,2\,\varepsilon}{\eta\mu\,2\,\varepsilon}$, ὅταν ορ $\varepsilon=0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΤΟΥ TAYLOR

Ἀπροσδιόριστοι ἐκφράσεις· ἀληθεῖς τιμαὶ αὐτῶν.

164.—Δυνατὸν μία ἀναλυτικὴ ἔκφρασις νὰ παρουσιάζηται ὑπὸ τὴν τὴν μορφὴν, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 0^{∞} κ.λ.π. π.χ. ἡ συνάρτησις $\frac{\eta\mu x}{x}$ διὰ $x=0$ δίδει $\frac{0}{0}$· αὕτη οὕτω παρουσιαζομένη δὲν ἔχει οὐδεμίαν ἔννοιαν· ἐὰν ὅμως νοήσω τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαστὴν ὡς ὅρια, δηλ. ὅτι τὸ x τείνει πρὸς τὸ μηδὲν καὶ τὸ ημX τείνει πρὸς τὸ μηδέν, τότε δὲν ἕπεται ὅτι ὁ λόγος αὐτῶν δὲν τείνει πρὸς ὅριον· ἔχω τότε προφανῶς λόγον δύο ἀπειροστῶν· γενικῶς· ἐὰν μία συνάρτησις σ(x) διὰ $x=\alpha$ γίνεται ἀπροσδιόριστος, δυνατόν, ***ὅταν τὸ X τείνῃ πρὸς*** τὸ **α**, τὸ σ(X) νὰ τείνῃ πρὸς ὡρισμένον ἀριθμόν, ὅστις τότε θὰ λέγεται ***ἀληθὴς τιμὴ*** τῆς σ(x) διὰ $x=\alpha$. Πρέπει προφανῶς νὰ διακρίνωμεν τὴν περίπτωσιν, καθ᾽ ἣν τὸ X τείνει ὁπωσδήποτε πρὸς τὸ α, ἀπὸ τὰς περιπτώσεις καθ᾽ ἃς τείνει ἐκ τιμῶν ἐλασσόνων πρὸς τὸ α ἢ τιμῶν μειζόνων πρὸς τὸ α· π. χ, Ὅταν $\sigma(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$, τότε ὁπωσδήποτε καὶ ἂν τείνῃ τὸ x πρὸς τὸ α, ὁ λόγος $\frac{\eta\mu x}{x}$ τείνει πρὸς τὴν μονάδα. Ἐνῷ ἐὰν $\sigma(x)=x\log x$ τότε ὅταν τὸ x τείνῃ πρὸς τὸ μηδὲν ἐκ θετικῶν τιμῶν, θὰ ἔχωμεν ὅριον τοῦ xlog x τὸ μηδέν· δι᾽ ἀρνητικὰς ὅμως τιμὰς τοῦ X ἡ συνάρτησις δὲν ὑπάρχει. Ὁμοίως παρατηρῶ ὅτι :

Ἡ συνάρτησις $\eta\mu\frac{1}{x}$ γίνεται ἀπροσδιόριστος διὰ $x=0$· ἀλλὰ καὶ ***ὅταν τὸ X τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν***, μένει αὕτη ἀπροσδιόριστος· ἤτοι ἡ ἀληθὴς τιμὴ εἶναι ἀπροσδιόριστος, διότι τὸ $\eta\mu\frac{1}{x}$ δὲν τείνει πρὸς κανὲν ὅριον, ὅταν τὸ X τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν.

165,—Ἂς ἐξετάσω τὴν περίπτωσιν καθ᾽ ἣν διὰ $x=\alpha$ ἡ συνάρτησις παρουσιάζεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{0}{0}$, ἤτοι ἔστω ὅτι ἡ συνάρτησις παρουσιάζεται ὡς κλάσμα $\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$, ὅπου $\sigma(\alpha)=0$, $\varphi(\alpha)=0$. Ὑποθέτω ὅτι αἱ συναρτήσεις σ(x) καὶ φ(x) εἶναι συνεχεῖς διὰ x=α καὶ ἔχουν παράγωγον ὡρισμένην εἰς τὰ πέριξ τοῦ α.

Ἐφαρμόζων τὸν γενικώτερον τύπον τῶν πεπερασμένων αὐξήσεων (4. σελ. 176) λαμβάνω :

$$\frac{\sigma(\alpha+\varepsilon)}{\varphi(\alpha+\varepsilon)}=\frac{\sigma'(\alpha+\vartheta\varepsilon)}{\varphi'(\alpha+\vartheta\varepsilon)}$$

Βλέπω ἐντεῦθεν ὅτι ἐὰν ὁ λόγος $\frac{\sigma'(x)}{\varphi'(x)}$ τείνῃ πρὸς ὅριόν τι, ὅταν τὸ x τείνῃ πρὸς τὸ α, ὁ λόγος $\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$ τείνει πρὸς τὸ αὐτὸ ὅριον (Κανὼν τοῦ de l'Hospital).

166. ***Γενικώτερος κανών.*** Ἔστω ὅτι αἱ συναρτήσεις σ(x) καὶ φ(x) ἀναπτύσσονται κατὰ τὸν τύπον τοῦ Taylor εἰς τὰ πέριξ τοῦ α. Ὁ λόγος $\frac{\sigma(\alpha+\varepsilon)}{\varphi(\alpha+\varepsilon)}$ εἶναι ὁ λόγος δύο ἀπειροστῶν (διότι ὑποθέτω ὅτι $\sigma(\alpha)=\varphi(\alpha)=0$ καὶ ὅτι αἱ συναρτήσεις σ(x) καὶ φ(x) εἶναι συνεχεῖς διὰ x=α). Ἐπομένως ἵνα εὕρω τὸν λόγον αὐτῶν, ἀρκεῖ νὰ εὕρω τὸ ὅριον τοῦ λόγου τῶν πρωτευόντων ἀπειροστῶν. Διὰ νὰ εὕρω δὲ τὰ πρωτεύοντα ἀπειροστὰ τοῦ σ(α+ε) καὶ φ(α+ε) ἀρκεῖ ν' ἀναπτύξω αὐτὰ κατὰ τὸν τύπον τοῦ Taylor.

Ἐὰν ὑποθέσω ὅτι: $\sigma'(\alpha)=0$, $\sigma''(\alpha)=0 \ldots \sigma^{(\mu-1)}(\alpha)=0$ $\sigma^{(\mu)}(\alpha)\neq 0$ καὶ $\varphi'(\alpha)=0$, $\varphi''(\alpha)=0\ldots$ $\varphi^{(\lambda-1)}(\alpha)=0$, $\varphi^{\lambda}(\alpha)\neq 0$ δηλαδὴ ὅτι ἡ πρώτη μὴ μηδενιζομένη παράγωγος τῆς σ(x) διὰ x=α εἶναι τάξεως μ καὶ ἡ πρώτη μὴ μηδενιζομένη παράγωγος τῆς φ(x) εἶναι τάξεως λ, θὰ ἔχω : (¹)

$$\frac{\sigma(\alpha+\varepsilon)}{\varphi(\alpha+\varepsilon)}=\varepsilon^{\mu-\lambda}\frac{\underline{|\mu}}{\underline{|\lambda}}\,\frac{\sigma^{(\mu)}(\alpha)+\delta_1}{\varphi^{(\lambda)}(\alpha)+\delta_2}$$

ὅπου δ_1 καὶ δ_2 εἶναι ἀπειροστά.

Ὁ ἀνωτέρω τύπος δεικνύει ὅτι, ἐὰν $\mu<\lambda$ καὶ ορε=0, ὁ λόγος : $\frac{\sigma(\alpha+\varepsilon)}{\varphi(\alpha+\varepsilon)}$ τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον. Ἐὰν $\mu>\lambda$ ὁ λόγος αὐτὸς τείνει πρὸς τὸ μηδὲν καὶ ἐὰν $\mu=\lambda$ ὁ λόγος τείνει πρὸς ὅριον πεπερασμέ-

---

(¹) Ὑποθέτομεν ἐννοεῖται ὅτι ὑπάρχουν αἱ παράγωγοι $\sigma^{(\mu)}(\alpha)$ καὶ $\varphi^{(\lambda)}(\alpha)$.

νον, τὸ $\frac{\sigma'(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}$ · ὥστε ἐὰν αἱ πρῶται μὴ μηδενιζόμεναι παράγωγοι διὰ $x=\alpha$ εἶναι τῆς αὐτῆς τάξεως ν, ὁ λόγος ἔχει ὡς ὅριον τὸ

$$\frac{\sigma^{(\nu)}(\alpha)}{\varphi^{(\nu)}(\alpha)}, \text{ Ὅθεν τότε : } \text{ορ}, \frac{\sigma(\alpha+\varepsilon)}{\varphi(\alpha+\varepsilon)}=\frac{\sigma^{(\nu)}(\alpha)}{\varphi^{(\nu)}(\alpha)}.$$

167. Τὰ ἀνωτέρω ἰσχύουν καὶ ἐὰν θεωρήσωμεν συναρτήσεις ἐχούσας παραγώγους τάξεως ν διαφόρους πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ πρὸς τὰ ἀριστερά· δηλαδὴ τότε, ἂν θεωρήσω $\varepsilon>0$, ἀρκεῖ νὰ λάβω τὰς παραγώγους πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ ἐὰν $\varepsilon<0$ νὰ λάβω τὰς παραγώγους πρὸς τὰ ἀριστερά.

Παρατήρησις. Εἰς τὰ προηγούμενα ὑπέθεσα ὅτι τὸ α δὲν εἶναι ἄπειρον· καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ὅμως καθ' ἣν $\alpha=+\infty$ ἢ $\alpha=-\infty$ πληροῦνται δὲ αἱ ἀναφερθεῖσαι συνθῆκαι ὡς πρὸς τὰς $\sigma(x)$, $\varphi(x)$, $\sigma'(x)$ καὶ $\varphi'(x)$, παρατηρῶ ὅτι δύναμαι νὰ γράψω :

$$\underset{\text{ορ}x=+\infty}{\text{ορ}}\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}=\underset{\text{ορ}x=0}{\text{ορ}}\frac{\sigma\left(\frac{1}{x}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{x}\right)}=\underset{\text{ορ}x=0}{\text{ορ}}\frac{-\frac{1}{x^2}\,\sigma'\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}\,\varphi'\left(\frac{1}{x}\right)}=\underset{\text{ορ}x=\infty}{\text{ορ}}\frac{\sigma'(x)}{\varphi'(x)}.$$

168.—Ἂς ἐξετασθῇ ἡ περίπτωσις καθ' ἣν διὰ $x=\alpha$ ἡ συνάρτησις παρουσιάζεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{\infty}{\infty}$.

Ἔστω δηλ. ὅτι διὰ $x=\alpha$ τὸ κλάσμα $\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$ λαμβάνει τὴν μορφὴν $\frac{\infty}{\infty}$. Ἔστω ὅτι ὑπάρχουν αἱ $\sigma'(x)$ καὶ $\varphi'(x)$, ὅτι εἶναι πεπερασμέναι καὶ ὅτι δὲν μηδενίζονται συγχρόνως εἰς τὰ πέριξ τοῦ α. Ἂς δώσω εἰς τὸ x δύο τιμὰς x_0, x_1 ἀρκετὰ πλησίον τοῦ α καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ α ἀμφοτέρας ἢ πρὸς τὰ ἀριστερά, τοιαύτας δὲ ὥστε αἱ δύο παράγωγοι $\sigma'(x)$ καὶ $\varphi'(x)$ νὰ εἶναι ὡρισμέναι εἰς τὸ διάστημα $(x_0 \cdot x_1)$ καὶ νὰ ***μὴ ἔχουν ρίζαν κοινὴν εἰς τὸ αὐτὸ διάστημα***. Ἐφαρμόζων τὸν τύπον τῶν πεπερασμένων αὐξήσεων (4, σελ. 176) λαμβάνω :

$$\frac{\sigma(x_1)-\sigma(x_0)}{\varphi(x_1)-\varphi(x_0)}=\frac{\sigma'(\xi)}{\varphi'(\xi)} \qquad \text{ἢ καὶ}$$

$$\frac{\dfrac{\sigma(x_1)-\sigma(x_0)}{\sigma(x_1)}}{\dfrac{\varphi(x_1)-\varphi(x_0)}{\varphi(x_1)}}\cdot\frac{\sigma(x_1)}{\varphi(x_1)}=\frac{\sigma(x_1)}{\varphi(x_1)}\cdot\frac{1-\dfrac{\sigma(x_0)}{\sigma(x_1)}}{1-\dfrac{\varphi(x_0)}{\varphi(x_1)}}=\frac{\sigma'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

Ὅθεν :

$$(1) \qquad \frac{\sigma(x_1)}{\varphi(x_1)} = \frac{\sigma'(\xi)}{\varphi'(\xi)} \cdot \frac{1-\dfrac{\varphi(x_0)}{\varphi(x_1)}}{1-\dfrac{\sigma(x_0)}{\sigma(x_1)}}.$$

Ἔστω ὅτι ὁ λόγος $\frac{\sigma'(x)}{\varphi'(x)}$ ἔχει διὰ $x=\alpha$ ὅριον πεπερασμένον λ· τότε παρατηρῶ ὅτι δύναμαι λαμβάνων τὸ x_0 καὶ x_1 ἀρκετὰ πλησίον τοῦ α νὰ ἔχω : 1) διαφορὰν μεταξὺ τοῦ λ καὶ τοῦ $\frac{\sigma'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$ μικροτέραν τοῦ ε (ὅπου ε ἀριθμὸς θετικὸς ὁσονδήποτε μικρὸς καὶ 2) διαφορὰν μεταξὺ τῆς μονάδος καὶ τοῦ $\dfrac{1-\dfrac{\varphi(x_0)}{\varphi(x_1)}}{1-\dfrac{\sigma(x_0)}{\sigma(x_1)}}$ μικροτέραν τοῦ δ (ὅπου δ θετικὸς ὁσονδήποτε μικρός). Καὶ τῷ ὄντι ἀφ᾽ οὗ $\text{ορ}\frac{\sigma'(x)}{\varphi'(x)}=\lambda$ δι᾽ ορ $x=\alpha$, ἕπεται ὅτι δύναμαι νὰ εὕρω ἀριθμὸν θετικὸν μικρὸν θ τοιοῦτον, ὥστε διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x μεταξὺ τοῦ α καὶ α—θ νὰ ἔχω :

$$\left| \frac{\sigma'(x)}{\varphi'(x)} - \lambda \right| < \varepsilon$$

[Ὑπέθεσα ὅτι τὰ x_0, x_1 ἐλήφθησαν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ α· ἐὰν τὰ λάβω πρὸ τὰ δεξιὰ θὰ θεωρήσω τὸ διάστημα $(\alpha, \alpha+\theta)$]· ἀρκεῖ ἐπομένως τότε νὰ λάβω τὰ x_0 καὶ x_1 ἐν τῷ διαστήματι $(\alpha, \alpha-\theta)$ ὥστε νὰ εἶμαι βέβαιος ὅτι καὶ τὸ ξ εἶναι ἐν τῷ αὐτῷ διαστήματι καὶ ἐπομένως ὅτι ἔχω :

$$\left| \frac{\sigma'(\xi)}{\varphi'(\xi)} - \lambda \right| < \varepsilon.$$

Ἔστω λοιπὸν ὅτι ἐλήφθησαν τὰ x_0 καί x_1 ἐν τῷ διαστήματι $(\alpha, \alpha-\theta)$ Ἐὰν ἤδη ἀφήσω τὸ x_0 σταθερὸν καὶ θεωρήσω τὸ x_1 μεταβλητὸν καὶ τεῖνον πρὸς τὸ α, τότε τὸ $\frac{\sigma(x_0)}{\sigma(x_1)}$ τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ὅπως ἐπίσης καὶ τὸ $\frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x_1)}$ διότι τὸ $\sigma(x_0)$ καὶ $\varphi(x_0)$ εἶναι σταθερὰ ἐν᾽ ᾧ τὸ $\sigma(x_1)$ καὶ τὸ $\varphi(x_1)$ τείνουν πρὸς τὸ ἄπειρον. Ἑπομένως τὸ κλάσμα:

$$\frac{1-\dfrac{\sigma(x_0)}{\sigma(x_1)}}{1-\dfrac{\varphi(x_0)}{\varphi(x_1)}}$$ τείνει πρὸς τὴν μονάδα· [δηλαδὴ ἡ διαφορὰ ἀπὸ τῆς μονάδος γίνεται $<\delta$ ὅπου δ θετικὸς ὁσονδήποτε μικρός].

Ὥστε ὅταν τὸ x τείνῃ πρὸς τὸ α, ὁ λόγος $\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$ τείνει πρὸς τὸ ὅριον τοῦ $\frac{\sigma'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$ ἤτοι πρὸς τὸ λ (διότι ὡς εἴδομεν ἡ διαφορά :

$$\left|\frac{\sigma'(\xi)}{\varphi'(\xi)}-\lambda\right|$$ γίνεται μικροτέρα παντὸς δοθέντος θετικοῦ ἀριθμοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ).

Ἐὰν ὑποθέσω ὅτι ὁ λόγος τῶν παραγώγων τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον, ἀποδεικνύεται ὁμοίως ὅτι ὁ λόγος $\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$ γίνεται ὅσον θέλομεν μέγας, ἀρκεῖ ὁ λόγος $\frac{\sigma'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$ νὰ γίνῃ ἀρκετὰ μέγας. Ὥστε ἔχομεν γενικῶς ὅτι ὅταν $\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$ λαμβάνῃ τὴν μορφὴν $\frac{\infty}{\infty}$ θὰ εἶναι $\text{ορ}\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}=\frac{\sigma'(x)}{\varphi'(x)}$.

169.—Ὅπως διὰ τὴν μορφὴν $\frac{0}{0}$ οὕτω καὶ διὰ τὴν μορφὴν $\frac{\infty}{\infty}$ δύναμαι νὰ παρατηρήσω ὅτι, ὅταν ορ $x=\infty$ ὁ κανὼν τοῦ L'Hospital ἐφαρμόζεται ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσω ὅτι :

$$\underset{x=\infty}{\text{ορ}}\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}=\underset{x=0}{\text{ορ}}\frac{\sigma\left(\frac{1}{x}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Ἄς θεωρήσω π.χ. τὴν συνάρτησιν $\frac{e^x}{x^\nu}$ ὅπου $\nu>0$ καὶ ἄς ζητήσω τὸ ὅριον αὐτῆς διὰ ορ $x=\infty$. Λαμβάνω τὸν λόγον τῶν πρώτων παραγώγων : $\frac{e^x}{\nu x^{\nu-1}}$. Ἐὰν $\nu>1$ ὁ λόγος αὐτὸς λαμβάνει πάλιν τὴν ἀπροσδιόριστον μορφὴν $\frac{\infty}{\infty}$. Λαμβάνω τὸν λόγον τῶν δευτέρων παραγώγων : $\dfrac{e^x}{\nu(\nu-1)x^{\nu-2}}$. Ἐὰν $\nu>2$ πάλιν θὰ ἔχω ἀπροσδιόριστον μορφήν, τὴν $\frac{\infty}{\infty}$· προχωρῶ εἰς τὰς τρίτης τάξεως παραγώγους κ.ο.κ. Ἐὰν ὁ ν εἶναι ἀκέραιος ὁ λόγος τῶν νυοστῶν παραγώγων θὰ εἶναι $\dfrac{e^x}{\underline{|\nu}}$ ὅστις γίνεται ∞ διὰ $x=\infty$. Ἐὰν ὁ ν δὲν εἶναι ἀκέραιος, λαμβάνω τὸν λόγον τῶν παραγώγων τάξεως ρ, ὅπου ρ ἀκέραιος ὁ ἀμέσως μεγαλύτερος τοῦ ν· ὁ λόγος οὗτος εἶναι :

$$\frac{e^x}{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-\rho+1)x^{\nu-\rho}}$$

Ἐπειδὴ τὸ $\nu<\rho$ ὁ ἐκθέτης τοῦ x εἰς τὸν παρονομαστὴν εἶναι ἀρνητικὸς καὶ ἑπομένως διὰ ορ $x=\infty$ θὰ ἔχω ὅριον τοῦ λόγου αὐτοῦ τὸ ∞. ἐπειδὴ δὲ ὁσονδήποτε μέγας καὶ ἂν εἶναι ὁ θετικὸς ν ἀληθεύει ὅτι ὁ λόγος $\dfrac{e^x}{x^\nu}$ τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον, ὅταν τὸ x τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον λέγομεν ὅτι ἡ ἡ ἀπειρία τοῦ e^x εἶναι τάξεως ἀνωτέρας ἀπὸ τὴν τοῦ x^ν ὅπου ν οἱοσδήποτε θετικὸς ἀριθμὸς ἢ καὶ ὅτι ἡ τάξις ἀπειρίας τοῦ e^ν εἶναι μεγαλυτέρα οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ν.

170.—Ἂς θεωρήσω ὁμοίως τὴν συνάρτητιν : $\dfrac{\log x}{x^\nu}$ ὅπου $\nu>0$· ὁ λόγος αὐτὸς λαμβάνει τὴν ἀπροσδιόριστον μορφὴν $\frac{\infty}{\infty}$ διὰ ορ$x=\infty$.

Ὁ λόγος τῶν παραγώγων εἶναι :

$$\frac{\frac{1}{x}}{\nu x^{\nu-1}}=\frac{1}{\nu x^\nu}.$$

οὗτος τείνει πρὸς τὸ μηδὲν δι' ορ$x=\infty$· ὅθεν ὁσονδήποτε μικρὸς καὶ ἂν εἶναι ὁ ν (ἀρκεῖ νὰ εἶναι θετικός), τὸ ἄπειρον τῆς συναρτήσεως log x εἶναι πάντοτε τάξεως κατωτέρας ἀπὸ τὸ ἄπειρον τοῦ x^ν. Ὅθεν τὸ ἄπειρον τῆς συναρτήσεως log x εἶναι ἄπειρον τάξεως μικροτέρας τοῦ ν, ὅπου ν οἱοσδήποτε θετικὸς ὁσονδήοοτε μικρός.

171ι — ***Παρατηρήσεις*** : I) Εἴδομεν ἀνωτέρω (§ 150) ὅτι ἐὰν μία συνάρτησις σ(x) τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον ὅταν τὸ x τείνῃ εἰς μίαν πεπερασμένην τιμὴν α, εἶναι ἀδύνατον ἡ σ′(x) νὰ διατηρῇ πεπερασμένην τιμήν, ὅταν τὸ x τείνῃ πρὸς τὸ α. Ὥστε δυνατὸν ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ ἀνωτέρω κανόνος διὰ τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ὁ λόγος $\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$ λαμβάνει τὴν μορφὴν $\frac{\infty}{\infty}$ νὰ δίδῃ ἐξαγόμενον ἀπατηλόν, οὐχ' ἧττον ὁ λόγος τῶν παραγώγων δυνατὸν νὰ δίδῃ μὲ κατάλληλον μετασχηματισμὸν τὴν ζητουμένην ἀληθῆ τιμήν.

II) Δυνατὸν νὰ ἔχῃ ὅριον ὁ λόγος $\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$, ὁ δὲ λόγος $\frac{\sigma'(x)}{\varphi'(x)}$ νὰ μὴ ἔχῃ τοιοῦτον: π. χ. ορ $\frac{x - \eta\mu\, x}{x} = 0$, ἐνῷ $\frac{1 - \sigma\upsilon\nu\, x}{1}$ διὰ $x = \infty$ εἶναι ἀπροσδιόριστον.

Ἄς θεωρήσω ἐπίσης τὴν συνάρτησιν $\frac{x + \sigma\upsilon\nu x}{x - \eta\mu x}$, αὕτη διὰ $x = \infty$ λαμβάνει τὴν ἀπροσδιόριστον μορφὴν $\frac{\infty}{\infty}$· παρατηρῶ ὅτι ὁ λόγος τῶν παραγώγων δηλαδὴ ἡ συνάρτησις $\frac{1 - \eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$ δὲν τείνει πρὸς κανὲν ὅριον διὰ ορ$x = \infty$. Ὥστε δὲν ἐφαρμόζεται ὁ κανὼν τοῦ l'Hôspital· ἀπ' εὐθείας ὅμως δύναμαι νὰ εὕρω τὸ ζητούμενον ὅριον, διότι ἡ δοθεῖσα συνάρτησις γράφεται $\dfrac{1 + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}}{1 - \frac{\eta\mu x}{x}}$, ἥτις δι' ορ$x = \infty$ ἔχει ὅριον τὴν μονάδα.

Ὁμοίως θεωρήσωμεν τὸ κλάσμα $\dfrac{x^2 \eta\mu \frac{1}{x}}{\log(1+x)}$, τοῦτο διὰ $x = 0$ λαμβάνει τὴν μορφὴν $\frac{0}{0}$· ὁ λόγος τῶν παραγώγων εἶναι :

$\dfrac{2x\,\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}}{1:(1+x)}$, ὅστις δι' ορ$x$ 0 δὲν τείνει πρὸς κανὲν ὅριον, ἐνῷ τὸ ἀρχικῶς δοθὲν κλάσμα γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$\frac{x}{\log(1+x)}\, x\, \eta\mu\frac{1}{x}$ ἐξ οὗ φαίνεται ὅτι ἔχει ὅριον τὸ μηδὲν διὰ ορ$x = 0$ διότι :

$$\text{ορ}\frac{x}{\log(1+x)}=1.$$

III) Δυνατὸν ὁ λόγος τῶν παραγώγων νὰ ἔχῃ ὅριον, ὁ δὲ λόγος τῶν συναρτήσεων νὰ μὴ ἔχῃ ὅριον, π. χ. ἔστω ὁ λόγος

$$\frac{e^{-2x}(\text{συν}x+2\text{ημ}x)}{e^{-x}\,(\text{συν}x+\text{ημ}x]}=e^{-x},\ \frac{1+2\text{εφ}x}{1+\text{εφ}x}.$$

Δι' ὅριον $x=\infty$ ἔχω ἐκ τοῦ πρώτου κλάσματος τὴν μορφὴν $\frac{0}{0}$ ἐνῷ εἰς τὸ δεύτερον μέλος ὁ e^{-x} ἔχει ὅριον τὸ μηδέν, ἀλλὰ ὁ λόγος $\frac{1+2\text{εφ}x}{1+\text{εφ}x}$ μεταβάλλεται ἀπεριορίστως ἀπὸ $+\infty$ ἕως $-\infty$, ὥστε πάντοτε προκύπτει ἀληθὴς τιμὴ ἀπροσδιόριστος. Θεωρήσωμεν τὸν λόγον τῶν παραγώγων $\frac{-5e^{-2x}\text{ημ}x}{-2e^{-x}\text{ημ}x}$ αὐτὸς εἶναι ἴσος μὲ $\frac{5}{2}e^{-x}$ ἔχει δὲ ὅριον τὸ μηδὲν δι' ορ$x=\infty$. Δὲν δύναμαι ὅμως ἐνταῦθα νὰ ἐφαρμόσω τὸν κανόνα τοῦ l'Hospital, διότι αἱ δύο παράγωγοι ἔχουσι κοινὸν παράγοντα τὸ ημx καὶ ἑπομένως μηδενίζονται (συγχρόνως) ἀπειράκις, ὅταν τὸ x τείνῃ πρὸς τὸ ∞, ἤτοι δὲν πληροῦται ἡ ὑπόθεσις ὅτι αἱ δύο συναρτήσεις δὲν μηδενίζονται συγχρόνως.

172.—***Ἀπροσδιόριστος μορφὴ*** $0\,.\,\infty$. Ἔστω ὅτι : $y=\sigma(x)\cdot\varphi(x)$ ὅπου διὰ ορ $x=\alpha$ ἔχω ορ$\sigma(x)=0$, ορ$\varphi(x)=\infty$· τότε τὸ y λαμβάνει διὰ $y=\alpha$ τὴν ἀπροσδιόριστον μορφήν : $0\,.\,\infty$· ἀλλὰ $y=\frac{\sigma(x)}{1:\varphi(x)}$ ἤτοι λαμβάνω διὰ $x=\alpha$ καὶ τὴν ἀπροσδιόριστον μορφὴν $\frac{0}{0}$, ὁπότε δύναμαι νὰ ἐφαρμόσω τὰ προηγουμένως ἀποδειχθέντα.

Ἔστω π.χ. $y=x^{\nu}\,(\log x)^{\mu}$ $\nu>0$ $\mu>0$· ὑποθέτω ὅτι τὸ μ εἶναι τοιοῦτος ἀριθμός, ὥστε τὸ y νὰ λαμβάνῃ διὰ $x=+0$ τὴν ἀπροσδιόριστον μορφὴν $0\,.\,\infty$.

Αὕτη γράφεται : $\frac{(\log x)^{\mu}}{x^{-\nu}}$ ὅθεν λαμβάνω διὰ $x=0$ καὶ τὴν ἀπροσδιόριστον μορφὴν $\frac{\infty}{\infty}$. Ἐφαρμόζων τὸν κανόνα τοῦ l'Hospital λαμβάνω :

$$\text{ορ}y = \text{ορ}\frac{\mu(\log x)^{\mu-1}\dfrac{1}{x}}{-\nu x^{-\nu-1}} = -\frac{\mu}{\nu}\,\text{ορ}x^{\nu}\,(\log x)^{\mu-1} =$$

$$= -\frac{\mu}{\nu}\,\text{ορ}x^{\nu}\,(\log x)^{\mu-1} \text{ δι' ορ}x = +0.$$

Ἐὰν μ εἶναι ἀκέραιος ἐφαρμόζων κατ' ἐπανάληψιν τὸν ἄνω κανόνα λαμβάνω :

$$\underset{x=+\infty}{\text{ορ}}\,y = (-1)^{\mu}\,\frac{\mu(\mu-1),\,.\,.1}{\nu^{\mu}}\underset{x=+0}{\text{ορ}}\,x^{\nu} = 0.$$

Ἐὰν ὁ μ δὲν εἶναι ἀκέραιος, θὰ περιλαμβάνεται μεταξὺ δύο ἀκεραίων ρ καὶ ρ+1, ὥστε ἐφαρμόζων ρ+1 φορὰς τὸν κανόνα λαμβάνω :

$$\text{ορ}y = (-1)^{\rho+1}\,\frac{\mu(\mu-1)\,.\,.\,.\,(\mu-\rho)}{\nu^{\rho+1}}\underset{x=+0}{\text{ορ}}\,x^{\nu}\,(\log x)^{\mu-\rho-1}$$

ἀλλά : $$x^{\nu}\,(\log x)^{\mu-\rho-1} = \frac{x^{\nu}}{(\log x)^{\rho+1-\mu}} \quad \text{ὅπου } \rho+1>\mu$$

ἑπομένως ὅριον αὐτοῦ διὰ ορ$x=+0$ θὰ εἶναι τὸ μηδέν, ἄρα ορ$y=0$ δι' ορ$x=+0$.

173.—***Ἀπροσδιόριστος μορφὴ*** $\infty-\infty$. Ἔστω συνάρτησις τῆς μορφῆς : $y=\sigma(x)-\varphi(x)$ ὅπου διὰ ορ$x=\alpha$ ἔχομεν ορ$\sigma(x)=\infty$ ορ$\varphi(X=)\infty$. Δύναμαι ν' ἀναγάγω τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἔχω ἀπροσδιόριστον μορφὴν $\frac{0}{0}$. Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ θεωρήσω τὸ $\sigma(x)$ ὡς πηλίκον : $\frac{\sigma_1(x)}{\sigma_2(x)}$ ὅπου δι' ορ$x=\alpha$ νὰ εἶναι : ορ$\sigma_2(x)=0$ καὶ ορ$\sigma_1(x)\pm 0$ καὶ τὸ $\varphi(x)$ ὡς πηλῖκον $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2'x)}$ ὅπου $\underset{x=\alpha}{\text{ορ}}\,\varphi_2(x)=0$ καὶ $\underset{x=\alpha}{\text{ορ}}\,\varphi_1(x)\pm 0$.

θὰ ἔχω τότε :

$$\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)} = \frac{\sigma_1(x)\varphi_2(x)-\varphi_1(x)\sigma_2(x)}{\sigma_2(x)\varphi_2(x)}.$$

Παρατηρῶ ὅτι τὸ δεύτερον μέλος λαμβάνει τὴν μορφήν: $\frac{0}{0}$

π.χ. Ἔστω $y=\frac{1}{\eta\mu^2 x}-\frac{1}{x^2}$ διὰ $x=0$ λαμβάνω τὴν μορφήν: $\infty-\infty$· παρατηρῶ ὅτι διὰ $\text{ορ}x=0$ τὸ $\text{ορ}y$ ἰσοῦται μὲ $\text{ορ}\frac{x^2-\eta\mu^2 x}{x^2\eta\mu^2 x}$· ἐφαρμόζων τὸν κανόνα τοῦ L' Hospital λαμβάνω:

$$\text{ορ}y=\text{ορ}\frac{2x-\eta\mu 2x}{2x\eta\mu^2 x+x^2\eta\mu 2x}=\text{ορ}\frac{2-2\sigma\upsilon\nu 2x}{2\eta\mu^2 x+4x\eta\mu 2x+2x^2\sigma\upsilon\nu 2x}=$$

$$=\text{ορ}\frac{4\eta\mu 2x}{6\eta\mu 2x+12x\sigma\upsilon\nu 2x-4x^2\eta\mu 2x}=$$

$$=\text{ορ}\left(\frac{8\sigma\upsilon\nu 2x}{24\sigma\upsilon\nu 2x-32x\eta\mu 2x-8x^2\sigma\upsilon\nu 2x}\right)=\frac{8}{24}\cdot=\frac{1}{3}$$

Παρατήρησις: Ἠδυνάμην ἐπίσης τὴν συνάρτησιν $\sigma(x)-\varphi(x)$ νὰ τὴν γράψω ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$\log e^{\sigma(x)}-\log e^{\varphi(x)}=\log\frac{e^{\sigma(x)}}{e^{\varphi(x)}}=\log\frac{e^{-\varphi(x)}}{e^{-\sigma(x)}}$$

καὶ τότε παρατηρῶ ὅτι ὅταν διὰ $x=\alpha$ ἡ $\sigma(x)-\varphi(x)$ λαμβάνει τὴν μορφὴν $\infty-\infty$ ἡ $\frac{e^{-\varphi(x)}}{e^{-\sigma(x)}}$ λαμβάνει τὴν μορφὴν $\frac{0}{0}$.

174. Ἀπροσδιόριστος μορφὴ 0^0. Ἔστω συνάρτησις τῆς μορφῆς $\sigma(x)^{\varphi(x)}$ ὅπου διὰ $x=\alpha$ ἔχω $\sigma(x)=0$· $\varphi(x)=0$ ἤτοι λαμβάνω τὴν μορφὴν 0^0. Παρατηρῶ ὅτι: $\log\sigma(x)^{\varphi(x)}=\varphi(x)\log\sigma(x)$ αὕτη διὰ $x=\alpha$ λαμβάνει τὴν μορφὴν $0.\infty$ τὴν ὁποίαν ἤδη ἐπραγματεύθην.

Ἂς ζητήσω ἐπὶ παραδείγματι 1) τὸ $\text{ορ}x^x$ δι' $\text{ορ}x=0$·

ἔχω: $$\log x^x=x\log x=\frac{\log x}{1:x}.$$

Θεωρῶ τὸν λόγον τῶν παραγώγων καὶ ἔχω:

$$\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-x \quad \text{ὥστε} \quad \underset{x-+0}{\text{oρ}}\log x^x=0 \qquad \text{ὅθεν} \quad \underset{x=+0}{\text{oρ}}x^x=1.$$

175. ***Απροσδιόριστοι μορφαὶ*** 1^∞, ∞^0. Ἔστω ἤδη ἡ περίπτωσις καθ' ἣν διὰ $x=\alpha$ ἡ συνάρτησις παρουσιάζεται ὑπὸ τὴν μορφὴν 1^∞ δηλ. ἔστω: $y=\sigma(x)^{\varphi(x)}$ ὅπου $\sigma(\alpha)=1$, τὸ δὲ $\varphi(x)$ δίδει ἄπειρον διὰ $x=\alpha$.

Παρατηρῶ πάλιν ὅτι:

$$\log\sigma(x)^{\varphi(x)}=\varphi(x)\,.\,\log\sigma(x)$$

ἀλλὰ τοῦτο διὰ $x=\alpha$ λαμβάνει τὴν μορφὴν $0.\infty$

Ἀνάλογα θὰ ἠδυνάμην νὰ παρατηρήσω διὰ τὴν $\sigma(x)^{\varphi(x)}$, ὅταν διὰ $x=\alpha$ τὸ $\sigma(x)$ δίδῃ ἄπειρον καὶ τὸ $\varphi(x)$ δίδῃ μηδέν.

Ἀσκήσεις.

(1) Νὰ δειχθῇ ὅτι δι' ορ$x=0$ ἔχωμεν:

$$\text{oρ}\frac{x-\eta\mu x}{x^3}=\frac{1}{6}\,,\quad \text{oρ}\frac{x-\text{τοξ εφ}\,x}{1-\sigma\upsilon\nu x}=0.$$

$$\text{oρ}\frac{e^x-e^{\eta\mu x}}{x-\eta\mu x}=1\,,\quad \text{oρ}\frac{\varepsilon\varphi(\alpha x)-\alpha x}{\varepsilon\varphi(\beta x)-\beta x}=\frac{\alpha^3}{\beta^3}.$$

$$\text{oρ}\frac{x-\eta\mu x}{\varepsilon\varphi x-x}=\frac{1}{2}\,,\quad \text{oρ}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\eta\mu x}=2.$$

2) Νὰ δειχθῇ ὅτι: $\underset{\text{oρ}x=+\infty}{\text{oρ}}\left[\sqrt{(\alpha+x)(\beta+x)}-\sqrt{(\alpha+x)(\beta-x)}\right]=\alpha+\beta.$

3) Νὰ δειχθῇ ὅτι δι- ορ$x=0$ ἔχομεν:

$$\text{oρ}\frac{(\alpha+x)^x-\alpha^x}{x^2}=\frac{1}{\alpha}\,,\quad \text{oρ}\frac{\log(1+x+x^2)+\log(1-x+x^2)}{x(e^x-1)}=1$$

$$\text{oρ}\left(\frac{1}{x^2}-\sigma\varphi^2 x\right)=\frac{2}{3}\,,\quad \text{oρ}\left[\frac{1}{x(1+x)}-\frac{\log(1+x)}{x^2}\right]=-\frac{1}{2}$$

$$\text{oρ}\,\sigma\upsilon\nu(\lambda x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{-\lambda^2}{2}}\,,\quad \text{oρ}(1+\alpha\,\varepsilon\varphi\,x)^{\frac{1}{x}}=e^{\alpha}$$

$$\text{καί}: \quad \text{ορ}\left[-\frac{\pi}{x(\varepsilon^{2\pi x}-1)}+\frac{\pi x}{2x^2}\frac{1}{}\right]=\frac{\pi^2}{2}$$

4) Νὰ δειχθῇ ὅτι διὰ $\text{ορ}x=+\infty$ ἔχω

$$\text{ορ}\left[x-x^2\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{1}{2}.$$

(Ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν $y=\frac{1}{x}$)

$$\text{ορ}\, x^\nu e^{-\alpha x}=0 \cdot (\nu \text{ καὶ } \alpha \text{ θετικοί}) \quad \text{ορ}\,(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$$

$$\text{ορ}\left(\frac{2}{\pi}\,\text{τοξ εφ}\,x\right)^x=e^{-\frac{2}{\pi}},\quad \text{ορ}\left(\frac{\pi}{2}-\text{τοξεφ}\,x\right)^{\frac{1}{x}}=1,\quad \text{ορ}\frac{x^3}{x-\text{ημ}x}=+\infty.$$

5) Καθ' ὅμοιον τρόπον νὰ εὑρεθῇ τό:

$$\text{ορ}\,\log(2+3\,e^x)\,.\,\log\left(1+\frac{1}{x}\right),\ \text{δι' ορ}x.=+\infty.$$

6) Νὰ εὑρεθῶσι δι' $\text{ορ}x=\infty$ τά:

$$\text{ορ}\frac{\log\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)},\quad \text{ορ}\,x\left(\alpha^{1:x}-1\right).$$

7) Νὰ εὑρεθῇ δι' ὅριον $x=0$ τό: $\text{ορ}\frac{\text{εφ}\,\pi x-\pi x}{2x^3\text{εφ}\pi x}$ Παρατηροῦμεν ὅτι γράφεται ἡ δοθεῖσα παράστασις ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$\frac{\text{εφ}\,\pi x-\pi x}{2\pi x^3}\cdot\frac{\pi x}{\text{εφ}\pi x}.$$

8) Νὰ εὑρεθῶσι, δι' $\text{ορ}\,x=\alpha$ τό: $\text{ορ}\frac{\alpha^\nu-x^\nu}{\log(\alpha^\nu)-\log(x^\nu)}$, καὶ δι' $\text{ορ}x=0$ τὸ $\text{ορ}\left(\frac{1}{x}\right)^{\text{εφ}x}$.

9) Νὰ εὑρεθῇ τὸ $\text{ορ}\dfrac{e^x(xe^x+x-2e^x+2)}{(e^x-1)^3}$ δι' ορx=0, ἐπίσης

τὸ : $\text{ορ}\dfrac{2\eta\mu^2x+\eta\mu x-1}{2\eta\mu^3x-3\eta\mu x+1}$ δι' ορ $x=\dfrac{\pi}{6}$.

10) Νὰ εὑρεθῇ τὸ $\text{ορ}\dfrac{lx}{x}$ δι' ορx$=\infty$.

11) Νὰ εὑρεθῇ τὸ $\text{ορ}\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\log(1+x)}\right]$ δι' ορx=0.

12) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι δι' ορ$x=\dfrac{\pi}{2}$ ἔχομεν :

$$\text{ορ}\frac{1-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}=1 \quad , \quad \text{ορ}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\varepsilon\varphi x=-1$$

$$\text{ορ}(\varepsilon\varphi x-1)\left(1-\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}, \quad \text{ορ}\,(\varepsilon\varphi x)^{\sigma\upsilon\nu x}=1.$$

13) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι δι' ορ$x=\dfrac{\pi}{4}$ ἔχομεν :

$$\text{ορ}\varepsilon\varphi 2x\,\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{1}{2} \quad , \quad \text{ορ}(\varepsilon\varphi x)^{\varepsilon\varphi 2x}=\frac{1}{e}.$$

Μέγιστα καὶ ἐλάχιστα συναρτήσεως μιᾶς μεταβλητῆς.

176. Ἔστω $y=\sigma(x)$ συνάρτησις συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα (α,β). Ἐὰν διὰ μίαν τιμὴν γ τοῦ διαστήματος αὐτοῦ ἡ συνάρτησις σ(x) λαμβάνῃ τιμὴν μεγαλυτέραν ἀπὸ πᾶσαν ἄλλην τιμὴν τὴν ὁποίαν λαμβάνει πέριξ τοῦ γ θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ σ(γ) εἶναι ἓν ***μέγιστον*** τῆς συναρτήσεως σ(x) ἐν τῷ διαστήματι (α, β) ἢ καὶ ὅτι ἡ σ(x) διέρχεται διὰ μεγίστου διὰ x=γ· ἤτοι τὸ σ(γ) εἶναι ***μέγιστον***, ὅταν δύναμαι νὰ εὕρω θετικὸν ἀριθμὸν λ ἀρκετὰ μικρὸν τοιοῦτον, ὥστε διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ ε θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν ἀπολύτως μικροτέραν τοῦ λ νὰ ἔχω $\sigma(\gamma+\varepsilon)-\sigma(\gamma)<0$, ἤτοι ἡ $\sigma(\gamma+\varepsilon)-\sigma(\gamma)$ νὰ διατηρῇ τὸ ἀρνητικὸν

σημεῖον, ὅταν τὸ $\gamma+\varepsilon$ λαμβάνῃ τὰς τιμὰς τοῦ διαστήματος: $\gamma-\lambda, \ldots \gamma+\lambda$. Καθ' ὅμοιον τρόπον θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ $\sigma(\gamma)$ εἶναι ἐλάχιστον ἐὰν $\sigma(\gamma+\varepsilon)-\sigma(\gamma)>0$, ὅταν $|\varepsilon|<\lambda$ (λ θετικὸς ὁσονδήποτε μικρός).

177. Ἔστω ἤδη ὅτι μία συνάρτησις $\sigma(x)$ εἶναι συνεχὴς εἰς ἓν διάστημα α,β καὶ ὅτι ἔχει παράγωγον πεπερασμένην δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ διαστήματος αὐτοῦ. Ζητοῦμεν διὰ ποίας τιμὰς τοῦ διαστήματος αὐτοῦ θὰ γίνεται ἡ $\sigma(x)$ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον.

Παρατηρῶ ὅτι:

1) Ἀναγκαία συνθήκη ἵνα διὰ τιμήν τινα γ τοῦ διαστήματος ἡ συνάρτησις γίνεται μέγιστον ἢ ἐλάχιστον εἶναι: ***νὰ μηδενίζεται ἡ παράγωγος διὰ*** $x=\gamma$, ἤτοι $\sigma'(\gamma)=0$ διότι, ἐὰν τὸ $\sigma'(\gamma)$ ἦτο διάφορον τοῦ μηδενός, ἡ τιμὴ $\sigma(\gamma)$ δὲν θὰ ἦτο ἡ μεγαλυτέρα τῶν τιμῶν τὰς ὁποίας λαμβάνει ἡ συνάρτησις $\sigma(x)$ εἰς τὰ πέριξ τοῦ γ, οὔτε ἡ μικροτέρα (§ 142).

2) Ἐὰν $\sigma'(\gamma)=0$ θὰ ἔχω $\sigma(\gamma+\varepsilon)-\sigma(\gamma)=\frac{\varepsilon^2}{\underline{|2}}\sigma''(\gamma+\theta\varepsilon)$· ἀλλὰ ἡ $\sigma'(x)$ ὑποτίθεται συνεχής, ἄρα $\sigma''(\gamma+\theta\varepsilon)=\sigma''(\gamma)+\lambda$ ὅπου τὸ λ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, ὅταν τὸ ε τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν· ὅθεν καί:

$$\sigma(\gamma+\varepsilon)-\sigma(\gamma)=\frac{\varepsilon^2}{\underline{|2}}\,[\sigma''(\gamma)+\lambda]$$

καὶ ἑπομένως διὰ τιμὰς τοῦ ε ἀπολύτως πολὺ μικρὰς τὸ λ θὰ εἶναι κατ(ἀπόλυτον τιμὴν μικρότερον τοῦ $|\sigma''(\gamma)|$· ἢ καί, δύναμαι νὰ εὕρω ἀριθμὸν θετικὸν ρ ἀρκετὰ μικρὸν τοιοῦτον, ὥστε ὅταν $-\rho<\varepsilon<\rho$ νὰ ***ἔχω*** $|\lambda|<|\sigma''(\gamma)|$, ***ὁπότε τὸ*** $\sigma''(\gamma)+\lambda$ ***θὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον τοῦ*** $\sigma''(\gamma)$. Ἑπομένως ἡ διαφορὰ $\sigma(\gamma+\varepsilon)-\sigma(\gamma)$ θὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον τοῦ $\sigma''(\gamma)$, ***ὅταν τὸ*** $\gamma+\varepsilon$ ***εὑρίσκεται ἐν τῷ διαστήματι*** $(\gamma-\rho\ldots\gamma+\rho$ καὶ ἑπομένως τὸ $\sigma(\gamma)$ θὰ εἶναι ***μέγιστον*** ἐὰν $\sigma''(\gamma)<0$, θὰ εἶναι δὲ ἐλάχιστον ἐὰν $\sigma''(\gamma)>0$.

Ἐὰν ὅμως εἶναι ὄχι μόνον $\sigma'(\gamma)=0$ ἀλλὰ καὶ $\sigma''(\gamma)=0$ τότε ἐφαρμόζων τὸν τύπον τοῦ Taylor δύναμαι νὰ γράψω:

$$\sigma(\gamma+\varepsilon)-\sigma(\gamma)=\frac{\varepsilon^3}{\underline{|3}}\,\sigma^{(3)}(\gamma+\theta\varepsilon)$$

ἢ καί, (ἐπειδὴ ἡ $\sigma'''(x)$ ὑποτίθεται συνεχής)

$$\sigma(\gamma+\varepsilon)-\sigma(\gamma)=\frac{\varepsilon^3}{\underline{|3}}\,[\sigma^{(3)}(\gamma)+\lambda]\cdot$$

ὅπου τὸ λ εἶναι ἀπειροστόν, ὅταν τὸ ε εἶναι ἀπειροστὸν καὶ ἐπομένως θὰ δύναμαι νὰ εὕρω θετικὸν ἀριθμὸν ϱ ἀρκετὰ μικρὸν τοιοῦτον, ὥστε ὅταν $-\varrho<\varepsilon<\varrho$ νὰ ἔχω : $|\lambda| < |\sigma^{(3)}(\gamma)|$ ὁπότε τὸ $\sigma^{(3)}(\gamma)+\lambda$ θὰ λαμβάνῃ τὸ σημεῖον τοῦ $\sigma^{(3)}(\gamma)$ καὶ ἐπομένως ἡ διαφορὰ $\sigma(\gamma+\varepsilon)-\sigma(\gamma)$ διὰ πᾶσαν θετικὴν τιμὴν τοῦ ε μικροτέραν τοῦ ϱ θὰ εἶναι ὁμόσημος πρὸς τὴν $\sigma^{(3)}(\gamma)$ καὶ διὰ πᾶσαν ἀρνητικὴν τιμὴν τοῦ ε ἀπολύτως μικροτέραν τοῦ ϱ θὰ εἶναι ἑτερόσημος πρὸς τὴν $\sigma^{(3)}(\gamma)$· ἄρα ἡ $\sigma(\gamma)$ δὲν θὰ εἶναι τότε οὔτε μέγιστον οὔτε ἐλάχιστον.

178. Ὑποθέτω ἤδη γενικῶς ὅτι :

$\sigma'(\gamma)=0$, $\sigma''(\gamma)=0$, $\sigma'''(\gamma)=0 \ldots \sigma^{(\nu)}(\gamma)=0$ καὶ ὅτι τὸ $\sigma^{(\nu+1)}(\gamma)$ διαφέρει τοῦ 0· δηλ. ὑποθέτω ὅτι πᾶσαι αἱ διαδοχικαὶ παράγωγοι μέχρι τῆς νυοστῆς τάξεως ἰσοῦνται πρὸς τὸ μηδὲν διὰ $x=\gamma$ καὶ ὅτι ἡ πρώτη μὴ μηδενιζομένη εἶναι τάξεως $(\nu+1)$· θὰ ἔχω τότε.

$$\sigma(\gamma+\varepsilon)-\sigma(\gamma)=+\frac{\varepsilon^{\nu+1}}{\underline{|\nu+1}}\,\sigma^{\nu+1}(\gamma+\theta\varepsilon)$$

ἢ καί, ἐπειδὴ ἡ $\sigma^{(\nu+1)}(x)$ ὑποτίθεται συνεχὴς ἔχω :

$$\sigma(\gamma+\varepsilon)-\sigma(\gamma)=\frac{\varepsilon^{\nu+1}}{\underline{|\nu+1}}\left[\sigma^{(\nu+1)}(\gamma)+\lambda\right]$$

ὅπου λ εἶναι ἀπειροστὸν σὺν τῷ ε.

Ἔστω ϱ θετικὸς ἀριθμὸς ἀρκετὰ μικρὸς τοιοῦτος ὥστε ὅταν $-\varrho<\varepsilon<\varrho$ νὰ εἶναι : $|\lambda| < |\sigma^{(\nu+1)}(\gamma)|$, ὁπότε τὸ $\sigma^{(\nu+1)}(\gamma)+\lambda$ ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ $\sigma^{(\nu+1)}(\gamma)$ καὶ ἐπομένως ἡ διαφορὰ $\sigma(\gamma+\varepsilon)-\sigma(\gamma)$ διὰ τὰς τιμὰς τοῦ ε ἀπὸ $-\varrho$ ἕως $+\varrho$ θὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον τοῦ

$\varepsilon^{\nu+1}\sigma^{(\nu+1)}(\gamma)$· ὅθεν φαίνεται ὅτι, ἐὰν τὸ $\nu+1$ εἶναι περιττός, ἡ διαφορὰ θ' ἀλλάσσῃ σημεῖον ὅταν τὸ x διέρχεται διὰ τοῦ γ ὁπότε τὸ $\sigma(\gamma)$ δὲν θὰ εἶναι οὔτε μέγιστον οὔτε ἐλάχιστον, διὰ $x=\gamma$, ἐὰν δὲ τὸ $\nu+1$ εἶναι ἄρτιος ἡ διαφορὰ δὲν θ' ἀλλάσῃ σημεῖον, ὁπότε τὸ $\sigma(\gamma)$ θὰ εἶναι ἢ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον, μέγιστον ἐὰν $\sigma^{(\nu+1)}(\gamma)<0$ καὶ ἐλάχιστον ἐὰν $\sigma^{(\nu+1)}(\gamma)>0$. Ὅθεν :

Ἵνα ἡ συνάρτησις διὰ $x=\gamma$ εἶναι μέγιστον ἢ ἐλάχιστον πρέπει καὶ ἀρκεῖ : ἡ πρώτη παράγωγος νὰ εἶναι μηδὲν διὰ $x=\gamma$, ἡ δὲ πρώτη μὴ μηδενιζομένη παράγωγος διὰ $x=\gamma$ νὰ εἶναι τάξεως ἀρτίας.

179.—*Παρατήρησις.* Εἰς τὰ προηγούμενα ὑπέθεσα ὅτι ἡ παράγωγος $\sigma'(x)$ ὑπάρχει εἰς τὸ διάστημα (α, β) καὶ εἶναι πεπερασμένη· καὶ ἐὰν ὅμως ὑποθέσω ὅτι διὰ μίαν τιμὴν γ ἡ παράγωγος δὲν εἶναι προσδιωρισμένη εἰς τὰ πέριξ τοῦ γ δύναμαι νὰ παρατηρήσω ὅτι, ἐὰν ἡ παράγωγος $\sigma'(x)$ εἰς τὰ πέριξ τοῦ γ διὰ $x<\gamma$ εἶναι διαρκῶς ἀρνητικὴ καὶ διὰ $x>\gamma$ διαρκῶς θετικὴ τὸ $\sigma(x)$ ἐλαττοῦται ὅταν τὸ x ἀπὸ τοῦ $\gamma-\varepsilon$ μεταβαίνει εἰς τὸ γ καὶ ἔπειτα αὐξάνει, ἤτοι τὸ $\sigma(\gamma)$ εἶναι ἐλάχιστον. Ἐὰν διὰ $x<\gamma$ ἡ παράγωγος εἶναι θετικὴ καὶ διὰ $x>\gamma$ ἀρνητικὴ τὸ $\sigma(\gamma)$ θὰ εἶναι μέγιστον.

Δὲν θὰ εἶναι δὲ τὸ $\sigma(\gamma)$ οὔτε μέγιστον οὔτε ἐλάχιστον ἐὰν ἡ παράγωγος δὲν ἀλλάσσει σημεῖον ὅταν τὸ x διέρχεται διὰ τοῦ γ,

Παραδείγματα.

180. Δίδεται ἡ συνάρτησις $y=x^x$ καὶ ζητοῦνται τιμαὶ τοῦ x δι' ἃς αὕτη γίνεται μέγιστον ἢ ἐλάχιστον.

Ἡ πρώτη παράγωγος εἶναι $x^x(\log x+1)$· ὁ παράγων x^x δὲν μηδενίζεται διὰ πεπερασμένην τιμὴν τοῦ x· ἀπομένει νὰ ζητήσω ρίζας τοῦ $\log x+1$· θέτων $\log x+1=0$ λαμβάνω $\log x=-1$ ἢ $e^{\log x}=e^{-1}$ ἢ $x=\frac{1}{e}$. Διὰ νὰ ἴδω ἂν ἡ τιμὴ αὕτη $\frac{1}{e}$ καθιστᾷ τὸ x^x μέγιστον ἢ ἐλάχιστον θὰ θεωρήσω τὴν παράγωγον δευτέρας τάξεως :

$$y''=x^x(\log x+1)^2+x^{x-1}.$$

Παρατηρῶ ὅτι διὰ $x=\frac{1}{e}$ τὸ y'' εἶναι θετικόν· ἄρα ἡ x^x διὰ $x=\frac{1}{e}$ γίνεται ἐλάχιστον· ἤτοι τὸ $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ εἶναι ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως x^x.

181. Νὰ διαιρεθῇ ἀριθμός τις α εἰς δύο μέρη τοιαῦτα ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν νὰ εἶναι μέγιστον. Ἐὰν x καλέσω τὸ ἓν μέρος, τὸ ἄλλο θὰ εἶναι $\alpha-x$· ζητεῖται τὸ γινόμενον $y=x(\alpha-x)$ νὰ εἶναι μέγιστον· ἔχομεν : $y'=\alpha-2x$, $y''=-2$
ἡ πρώτη παράγωγος μηδενίζεται διὰ $x=\frac{\alpha}{2}$, ἡ δευτέρα παράγωγος εἶναι ἀρνητική· ἄρα διὰ $x=\frac{\alpha}{2}$ τὸ y γίνεται μέγιστον.

Ἔστω γενικῶς $y=(\alpha-x)^{\mu}x^{\nu}$ ὅπου α θετικὸς καὶ μ, ν θετικοὶ ἀκέραιοι· θέτω $y'=0$ ἤτοι $-\mu(\alpha-x)^{\mu-1}x^{\nu}+\nu(\alpha-x)^{\mu}x^{\nu-1}=0$ ἢ καί :

$$(\alpha-x)^{\mu-1}x^{\nu-1}[\nu(\alpha-x)-\mu x]=0$$

αἱ ῥίζαι ἑπομένως τῆς $y'=0$ εἶναι :

$$\alpha \quad , \quad 0 \quad , \quad \text{καὶ} \quad \frac{\alpha\nu}{\mu+\nu},$$

Ἡ δευτέρα παράγωγος εἶναι

$(\alpha-x)^{\mu-2}x^{\nu-2}(\alpha\nu-(\mu+\nu)x)[\alpha(\nu-1)-(\mu+\nu-2)x]-(\mu+\nu)x^{\nu-1}(\alpha-x)^{\mu-1}$
αὐτὴ μηδενίζεται διὰ $x=0$, $x=\alpha$· λαμβάνει δὲ ἀρνητικὴν τιμὴν διὰ $x=\frac{\alpha\nu}{\mu+\nu}$· ὥστε διὰ $x=\frac{\alpha\nu}{\mu+\nu}$ ἡ δοθεῖσα συνάρτησις y λαμβάνει μίαν μεγίστην τιμήν, ἤτοι γίνεται μέγιστον. Διὰ τὴν ἄλλην ῥίζαν τῆς παραγώγου $x=0$ θὰ ἀντικαταστήσω τὸ x μὲ τὸ μηδὲν εἰς τὰς διαδοχικὰς παραγώγους μέχρις οὗ εὕρω μίαν μὴ μηδενιζομένην διὰ $x=0$· ὁμοίως ἐργάζομαι καὶ διὰ $x=\alpha$. Παρατηρῶ ὅτι ἐκ τῶν διαδοχικῶν παραγώγων ἡ πρώτη μὴ μηδενιζομένη διὰ $x=0$ θὰ εἶναι τάξεως ν καὶ διὰ

$x=\alpha$ θὰ εἶναι τάξεως μ· ἑπομένως ἐὰν τὸ ν εἶναι ἄρτιον ***θὰ ἔχω διὰ*** $x=0$ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον, ἐὰν δὲ εἶναι περιττὸν δὲν θὰ ἔχω οὔτε μέγιστον οὔτε ἐλάχιστον : ὁμοίως ἐὰν μ εἶναι περιττὸς δὲν θὰ ἔχω οὔτε μέγιστον οὔτε ἐλάχιστον διὰ $x=\alpha$ καὶ ἐὰν εἶναι ἄρτιος θὰ ἔχω μέγιστον ἢ ἐλάχιστον.

182. Ἔστω: $y=\alpha_0 x^{\mu}+\alpha_1 x^{\mu+1}+\alpha_2 x^{\mu+2}+\ldots=x^{\mu}(\alpha_0+\alpha_1 x+\ldots)$ ὅπου μ ἀκέραιος μεγαλύτερος τῆς μονάδος· θὰ ἔχω :

$$y^{(\mu)}=1.2\ldots\mu\alpha_0+2.3\ldots(\mu+1)\alpha_1 x+3.4\ldots(\mu+2)\alpha_2 x^2+\ldots$$

ἡ πρώτη παράγωγος, ἡ δευτέρα . . . μέχρι τάξεως $\mu-1$ μηδενίζονται διὰ $x=0$ ἄρα, ἐὰν μ εἶναι ἄρτιος, ἡ συνάρτησις ἡ ὁποία διὰ $x=0$ ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδὲν θὰ εἶναι μέγιστον ἐὰν $\alpha_0<0$ καὶ ἐλάχιστον ἂν $\alpha_0>0$.

Ἀσκήσεις.

Νὰ εὑρεθῇ μέγιστον καὶ ἐλάχιστον τῶν συναρτήσεων.

1) $y=\alpha\sigma\upsilon\nu x+\beta\eta\mu x$

2) $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$, 3) $\dfrac{\log x}{x^{\nu}}$ 4) $\alpha x^{\nu}+\beta x^{-\mu}$, 5) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$

3) $y=e^{x}+e^{-x}$.

4) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ συνάρτησις $4\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu 2x$ λαμβάνει τιμὴν μεγίστην ἢ ἐλαχίστην διὰ τὰς τιμὰς τοῦ x δι' ἃς καὶ τὸ συνx γίνεται μέγιστον ἢ ἐλάχιστον.

5) Νὰ εὑρεθῇ μέγιστον καὶ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως

$$\frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{\lambda x^2+2\mu x+\nu}$$

6) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ μέγιστον καὶ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως $\alpha x^3+3\beta x^2+3\gamma x+\delta$ εἶναι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως :

$$\alpha^2 y^2-2(\alpha^2\delta-3\alpha\beta\gamma+2\beta^3)y+\alpha^2\delta^2+4\alpha\gamma^3+4\beta^3\delta-3\beta^2\gamma^2-6\alpha\beta\gamma\delta=0.$$

7) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τῆς συναρτήσεως : $x^2+2x\sqrt{\alpha^2-x^2}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

Γεωμετρικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως.

183. -Ἐὰν συμφωνήσω ἕκαστον πραγματικὸν ἀριθμὸν α νὰ καλῶ *σημεῖον α* δύναμαι εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον νἀντικαταστήσω τὴν φράσιν ***διὰ τὴν τιμὴν α τοῦ*** x· ὡς καὶ τὴν φράσιν ***διὰ*** x=α μὲ τὴν φράσιν ***εἰς τὸ σημεῖον α***.

Προφανῶς θέτω τὸν ὅρον αὐτὸν ὁρμώμενος ἐκ τῆς ἀντιστοιχίας ἡ ὁποία παραδέχομαι ὅτι ὑπάρχει μεταξὺ ἑνὸς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ καὶ ἑνὸς σημείου τοῦ ἄξονος τῶν x. Δηλαδὴ παραδέχομαι ὅτι δύναμαι νὰ ἔχω τὴν ἑξῆς ἀντιστοιχίαν.

Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ἀπεριορίστου (X′X) τὴν ὁποίαν καλῶ ἄξονα τῶν x θεωρῶ δύο σημεῖα O καὶ *Θ* εἰς τὰ ὁποῖα συμφωνῶ νἀντιστοιχοῦν οἱ ἀριθμοὶ 0 καὶ 1· ἢ καὶ θεωρῶ σημεῖον τι O ὡς ἀρχήν, θετικὴν φορὰν ἐπὶ τῆς εὐθείας ὡρισμένην καὶ τμῆμα τι OΘ ὡς μονάδα· εἰς πάντα ἄλλον πραγματικὸν ἀριθμὸν θὰ ἀντιστοιχῇ ἓν σημεῖον τοῦ ἄξονος X′X καὶ εἰς πᾶν σημεῖον τοῦ ἄξονος X′X θὰ ἀντιστοιχῇ εἷς ἀριθμὸς [1]· ἡ μεταβολὴ τοῦ x παρίσταται γεωμετρικῶς διὰ τῆς μετατοπίσεως σημείου ἐπὶ τοῦ ἄξονος X′X. Ὅπως ἐκάλεσα σημεῖον ἕνα πραγματικὸν ἀριθμὸν x οὕτω δύναμαι νὰ καλέσω σημεῖον καὶ ἓν σύστημα δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν x καὶ y. Καὶ εἰς τοῦτο πάλιν δίδει ἀφορμὴν ἡ γεωμετρικὴ παράστασις σημείου ἐπὶ ἐπιπέδου. Παραδέχομαι τουτέστιν ὅτι δύναμαι νὰ ἔχω τὴν ἑξῆς ἀντιστοιχίαν.

Ὅπως ἐθεώρησα ἀντιστοιχίαν μεταξὺ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν σημείων τοῦ ἄξονος X′X θεωρῶ ἀντιστοιχίαν μεταξὺ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν σημείων τοῦ ἄξονος Y′Y. Συμφωνῶ

---

[1] Δὲν ἀναφέρωμεν ἐνταῦθα ποῖα ἀξιώματα ἀρκεῖ νὰ παραδεχθῇ τις ἵνα ἔχῃ τὴν ἀντιστοιχίαν αὐτήν.

δὲ ὁ ἀριθμὸς 0 καὶ διὰ τοὺς δύο ἄξονας νὰ ἀντιστοιχῇ εἰς τὴν κοινὴν τομὴν αὐτῶν. Ἐὰν ἐργασθῶ, ὅπως εἰς τὴν ἀναλυτικὴν γεωμετρίαν, θὰ ἔχω ὅτι εἰς ἕκαστον ζεῦγος δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἀντιστρόφως εἰς ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχεῖ ἓν ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Ἔστω ἤδη μία (μονότιμος διὰ τὸ ἁπλούστερον) συνάρτησις $y=\sigma(x)$· εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ x ἀντιστοιχεῖ μία τιμὴ τοῦ y καὶ ἑπομένως δι᾽ ἑκάστην τιμὴν τοῦ x ἔχω ἓν ζεῦγος ἀριθμῶν x, y, ἢ, μὲ γεωμετρικὴν ἔκφρασιν, εἰς ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἄξονος $X'X$ ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου· εἰς τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τὰς ὁποίας δύναται νὰ λάβῃ τὸ x θὰ ἀντιστοιχῇ τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τὰς ὁποίας δύναται νὰ λάβῃ τὸ y καὶ ἑπομένως καὶ τὸ σύνολον τῶν τιμῶν x,y τῶν ἐπαληθευουσῶν τὴν σχέσιν $y=\sigma(x)$. Εἰς τὸ σύνολον τῶν τιμῶν αὐτῶν x,y ἀντιστοιχεῖ σύνολον σημείων τοῦ ἐπιπέδου· τὸ σύνολον αὐτὸ καλῶ γραμμὴν ἢ καμπύλην ἔχουσαν ἐξίσωσιν τὴν $y=\sigma(x)$.

Θεωρῶ δὲ τὴν καμπύλην αὐτὴν ***ὡς γεωμετρικὴν παράστασιν τῆς συναρτήσεως*** $\sigma(x)$.

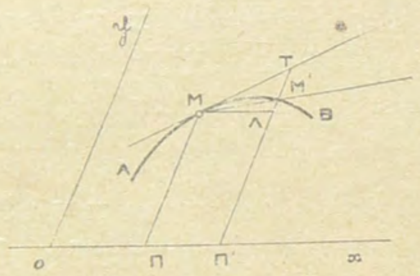
Κατὰ ταῦτα ***καμπύλη*** $y=\sigma(x)$ εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι x,y ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν $y=\sigma(x)$.

Ἐὰν τὸ x δὲν λαμβάνῃ πᾶσαν δυνατὴν τιμὴν ἀλλὰ μεταβάλλεται μόνον ἀπὸ α ἕως β (λαμβάνει τουτέστι διαδοχικῶς τὰς τιμὰς τοῦ διαστήματος (α, β)) τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον (x, y) θὰ γράψῃ ἀντίστοιχον τόξον καμπύλης περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῶν παραλλήλων $x=\alpha$, $x=\beta$ τὸ ὁποῖον θὰ παριστᾷ γραφικῶς τὸ βάδισμα τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$.

Γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῆς παραγώγου.

184. Εἰς τὴν ἀναλυτικὴν ἔννοιαν τῆς παραγώγου (σελ. 152) ἀντιστοιχεῖ γεωμετρικὴ τοιαύτη καὶ ὡς θὰ ἴδωμεν ἵνα προσδιορισθῇ ἐφαπτομένη καμπύλης εἰς ἓν σημεῖον αὐτῆς προσδιορίζεται ἡ τιμὴ τῆς παραγώγου μιᾶς συναρτήσεως διὰ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τιμὴν τοῦ x. Καὶ μάλιστα, τὸ πρόβλημα αὐτὸ καθ᾽ ὃ ἐζητεῖτο νὰ κατασκευασθῇ ἐφαπτομένη δοθείσης καμπύλης ὡδήγησεν εἰς τὸ νὰ θεωρηθοῦν λόγοι ἀπειροστῶν καὶ νὰ ὁρισθῇ ἡ παράγωγος.

Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=\sigma(x)$ συνεχὴς εἰς διάστημα (α, β)· ὅταν τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ α ἕως β τὸ σημεῖον M(x,y) θὰ γράψη τόξον τι καμπύλης AMB· ἔστω ἓν ἄλλο σημεῖον M′ τοῦ τόξου AMB· ἐὰν καλέσω $x+\Delta x$ καὶ $y+\Delta y$ τὰς συντεταγμένας αὐτοῦ θὰ ἔχω $y+\Delta y=\sigma(x+\Delta x)$· ἡ δὲ τέμνουσα MM′ θὰ ἔχῃ συντελεστὴν κατευθύνσεως τὸν $\frac{\Lambda M'}{M\Lambda}$, δηλαδὴ τὸ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ἤτοι τὸ $\frac{\sigma(x+\Delta x)-\sigma(x)}{\Delta x}$.



Ἐὰν ἤδη ὑποθέσω ὅτι τὸ σημεῖον τῆς καμπύλης M′ πλησιάζῃ πρὸς τὸ M ἡ τέμνουσα MM′ διερχομένη διὰ τοῦ M θὰ ἀλλάσῃ ἐν γένει κατεύθυνσιν· θὰ ὁρίζεται δ' ἑκάστοτε ἡ κατεύθυνσις αὐτῆς ὑπὸ τοῦ ἀντιστοίχου γωνιακοῦ συντελεστοῦ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$· δηλαδὴ τὸ Δx θὰ μεταβάλλῃται (ὅταν τὸ M′ ἀλλάσσῃ θέσιν ἐπὶ τῆς καμπύλης, ἡ ὁποία ὑποτίθεται ὅτι δὲν εἶναι εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y) ὁ δὲ λόγος :

$$\frac{\sigma(x+\Delta x)-\sigma(x)}{\Delta x}$$

θὰ δίδῃ τὸν συντελεστὴν κατευθύνσεως τῆς τεμνούσης MM′. Ἐὰν ὑποτεθῇ ἤδη ὅτι τὸ M′ πλησιάζει ***ἀπεριορίστως*** πρὸς τὸ M θὰ ἔχω ὅτι τὸ Δx τείνει πρὸς τὸ μηδέν· ἐὰν δὲ ὁ ἀνωτέρω λόγος ἔχῃ ὅριον, ἤτοι ἐὰν ἡ σ(x) ἔχῃ παράγωγον (διὰ τὴν τιμὴν x) θὰ ἔχω ὅτι ἡ τέμνουσα MM′ τείνει νὰ λάβῃ τὴν θέσιν μιᾶς εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ M καὶ ἐχούσης συντελεστὴν κατευθύνσεως τὸ σ′(x)· ἡ εὐθεῖα αὕτη θὰ εἶναι ἡ ***ὁρικὴ θέσις τῆς τεμνούσης MM′***.

Ἡ ὁρικὴ αὕτη εὐθεῖα λέγεται ***ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης*** $y=\sigma(x)$ ***εἰς τὸ σημεῖον*** (x,y)· ὅθεν προκύπτει ἡ ἑξῆς γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῆς παραγώγου.

«Ἡ παράγωγος μιᾶς συναρτήσεως σ(x) διὰ μίαν τιμὴν x ἰσοῦται μὲ τὸν συντελεστὴν κατευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης $y=\sigma(x)$ εἰς τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον (x, y)».

Ἐξίσωσις ἐφαπτομένης, ἐξίσωσις καθέτου.

185 — Ἐὰν καλέσω X, Y τὰς συντεταγμένας τοῦ τυχόντος σημείου τῆς ἐφαπτομένης θὰ ἔχω κατὰ τἀνωτέρω ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης τὴν

$$(1) \qquad Y-y=\sigma'(x)(X-x)$$

ἢ καὶ

$$(1') \qquad Y-y=\frac{dy}{dx}\,(X-x)$$

τὴν ὁποίαν γράφω (συμβολικῶς) καὶ ὡς ἑξῆς

$$(1'') \qquad \frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}$$

Κάθετος ἐπὶ καμπύλην εἰς ἓν σημεῖον αὐτῆς $M(x,y)$ καλεῖται ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ἀντίστοιχον ἐφαπτομένην. Ἐὰν οἱ ἄξονες ὑποτεθῶσιν ὀρθογώνιοι θὰ ἔχω ὅτι : $\lambda\lambda'=-1$

ὅπου λ — συντελεστὴς κατευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης καὶ

λ' — συντελεστὴς κατευθύνσεως τῆς καθέτου· ἤτοι :

$$\sigma'(x)\,.\,\lambda'=-1 \quad \text{ἢ} \quad \lambda'=-\frac{1}{\sigma'(x)}$$

καὶ ἐπομένως ἡ ἐξίσωσις τῆς καθέτου θὰ εἶναι, ἐὰν καλέσω X, Y τὰς συντεταγμένας τοῦ τυχόντος σημείου αὐτῆς,

$$(2) \quad Y-y=-\frac{1}{\sigma'(x)}\,(X-x) \quad \text{ἢ} \quad X-x+\sigma'(x)\,(Y-y)=0$$

$$(2') \qquad \text{ἢ καὶ } X-x+\frac{dy}{dx}(Y-y)=0$$

ἢ ἀκόμη

$$(2'') \qquad (X-x)dx+(Y-y)dy=0$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὐκόλως εὑρίσκεται ἡ ἐξίσωσις τῆς καθέτου εἰς πλαγιογωνίους ἄξονας.

186.—***Παρατηρήσεις :*** 1) Εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας ὅτι, ὅταν ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως (ὁ γωνιακὸς συντελεστὴς) εἶναι μηδέν, ἡ εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x, ὅταν δὲ ὁ γωνιακὸς συντελεστὴς εἶναι ἄπειρος, ἡ εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y· ὅθεν : ὅταν ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $y=\sigma(x)$ εἶναι μηδέν, ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x καὶ ὅταν ἡ παράγωγος εἶναι ἄπειρος, ἡ ἐφαπτομένη εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y· ὡς ἐπίσης ὅταν, ἡ ἐφαπτομένη εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x ἡ παράγωγος εἶναι μηδέν.

2) Ἐὰν ἡ καμπύλη $y=\sigma(x)$ ἔχῃ διὰ μίαν τιμὴν $x=\alpha$, δύο παραγώγους, μίαν πρὸς τὰ δεξιά, καὶ μίαν πρὸς τ' ἀριστερά, ἡ καμπύλη θὰ ἔχῃ δύο ἐφαπτομένας εἰς τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον, δηλ. θὰ ἔχωμεν δύο κλάδους τῆς καμπύλης μὲ διαφόρους ἐφαπτομένας.

187.—***Παραμετρικὴ παράστασις καμπύλης εἰς τὸ διάστημα καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον.***

Ἔστωσαν τρεῖς συναρτήσεις συνεχεῖς μιᾶς μεταβλητῆς t, αἱ : $\sigma(t)$, $\varphi(t)$, $f(t)$, ἐὰν θέσω (1) $x=\sigma(t)$ $y=\varphi(t)$ $z=f(t)$ θὰ ἔχω δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ t τιμὰς διὰ τὰ x, y, z.

Ἐὰν θεωρήσω αὐτὰς ὡς συντεταγμένας σημείου, θὰ ἔχω ὅτι : Εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ t ἀντιστοιχεῖ σημεῖον. Τὸ σύνολον τῶν σημείων αὐτῶν, (ὅταν μεταβάλλεται τὸ t) κάμνει συνεχῆ καμπύλην ἢ ἁπλῶς καμπύλην· λέγομεν δὲ τότε ὅτι, αἱ ἐξισώσεις (1) ὁρίζουσι τὴν καμπύλην συναρτήσει μεταβλητῆς παραμέτρου ἢ καὶ ὅτι, δίδουσι παραμετρικὴν παράστασιν τῆς καμπύλης.

Ἀρκεῖ προφανῶς νὰ ἔχω $f(t)=0$ ἵνα ἡ καμπύλη (1) εἶναι ἐπίπεδος· θὰ κεῖται δὲ τότε ἡ καμπύλη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ xoy.

Ζητήσωμεν ἤδη, τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης (1) εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον M. Ἔστω t ἡ τιμὴ τῆς παραμέτρου εἰς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ τὸ M δηλ. ἡ τιμὴ ἡ ὁποία ἀντικαθιστωμένη εἰς τὰς ἐξισώσεις (1), δίδει ὡς x, y, z τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου M. Ἐὰν δώσω εἰς τὴν παράμετρον ἄλλην τιμὴν $t+\Delta t$, θὰ ἔχω ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1), ἄλλο σημεῖον τῆς καμπύλης M'· ἡ τέμνουσα MM' θὰ ἔχῃ ἐξισώσεις τάς :

$$\frac{X-\sigma(t)}{\sigma(t+\Delta t)-\sigma(t)}=\frac{Y-\varphi(t)}{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}=\frac{z-f(t)}{f(t+\Delta t)-f(t)}$$

Ἐὰν διαιρέσω τοὺς παρονομαστὰς διὰ Δt, καὶ νοήσω ἀκολούθως ὅτι τὸ Δt τείνῃ πρὸς τὸ μηδὲν θὰ ἔχω λαμβάνων τὰ ὅρια :

$$(2) \qquad \frac{X-\sigma(t)}{\sigma'(t)} = \frac{Y-\varphi(t)}{\varphi'(t)} = \frac{z-f(t)}{f'(t)}$$

(ὑπετέθη ὅτι ὑπάρχουν αἱ παράγωγοι)· ἤτοι :

Ἡ τέμνουσα ΜΜ′ θὰ τείνῃ νὰ λάβῃ τὴν θέσιν τῆς εὐθείας (2) ὅταν τὸ Μ′ τείνῃ νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Μ, ἢ καί, ἡ εὐθεῖα (2) εἶναι ἡ ὁρικὴ θέσις τῆς τεμνούσης ΜΜ′, ὥστε ἡ εὐθεῖα (2) εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη.

Αἱ ἐξισώσεις (2) γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$(1') \qquad \frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'}$$

188.—***Παράδειγμα*** : Ἔστω ὅτι δίδεται ἡ στερεὰ ἕλιξ ἥτις ἔχει ἐξισώσεις

$$x=\alpha\sigma\upsilon\nu t \quad , \quad y=\alpha\eta\mu t \qquad z=\alpha kt$$

καὶ ζητεῖται ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον $M(x, y, z)$, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τιμὴν t τῆς παραμέτρου· κατὰ τὸν τύπον (2′) αἱ ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης θὰ εἶναι :

$$\frac{X-\alpha\sigma\upsilon\nu t}{-\alpha\eta\mu t} = \frac{Y-\alpha\eta\mu t}{\alpha\sigma\upsilon\nu t} = \frac{Z-\alpha kt}{\alpha k}$$

ἢ καὶ

$$\frac{X-x}{-y} = \frac{Y-y}{x} = \frac{Z-z}{\alpha k}$$

189.—***Μερικὴ περίπτωσις*** : Ἔστω $f(t)=0$· θὰ ἔχω τότε ἐπίπεδον καμπύλην (ἐν τῷ ἐπιπέδῳ xoy) ἔχουσαν ἐξισώσεις τὰς

$$(3) \qquad x=\sigma(t) \qquad y=\varphi(t)$$

ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης θὰ εἶναι :

$$\frac{X-\sigma(t)}{\sigma'(t)}=\frac{Y-\varphi(t)}{\varphi'(t)} \quad \text{ἢ} \quad \frac{X-x}{x'}=\frac{\Psi-y}{y'}$$

[ὅπου δὲν εἶναι ἀπαραιτήτως τὸ x ἀνεξάρτητος μεταβλητή]· συμβολικῶς δέ :

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}.$$

Ἡ ἐξίσωσις τῆς καθέτου (ὀρθογώνιοι ἄξονες) θὰ εἶναι :

$$(X-x)x'+(Y-y)y'=0$$

ἢ καί : $$(X-x)\,dx+(Y-y)dy=0.$$

Παρατηρήσεις : 1) Ἐὰν εἰς τὰς ἐξισώσεις (3) τὸ t γίνῃ ἴσον μὲ τὸ x θὰ ἔχωμεν : $y=\varphi(x)$.

2) Ἐὰν μία κομπύλη δοθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν (3) ἀρκεῖ ν' ἀπαλείψω τὸ t διὰ νὰ ἔχω τὴν καμπύλην ὑπὸ τὴν μορφήν : $y=\varphi(x)$.

190.—***Παραδείγματα*** : 1) Ζητήσωμεν τὴν ἐφαπτομένην καὶ τὴν κάθετον τῆς ἐλλείψεως τῆς ἐχούσης ἐξίσωσιν :

(1) $$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

ἢ : $$y=\pm\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}$$

Παρατηρῶ ὅτι : ἡ $y=\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}$ ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων τῶν σημείων τῆς ἡμιελλείψεως A B A′

ἡ δὲ $y=-\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}$ ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων τῆς ἡμιελλείψεως AB′A′. Διὰ πᾶν σημεῖον τῆς ABA′ ἔχω

$$y'=-\frac{\beta x}{\alpha\sqrt{\alpha^2-x^2}}=-\frac{\beta^2 x}{\alpha^2\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}}=-\frac{\beta^2 x}{\alpha^2 y}$$

καὶ διὰ πᾶν σημεῖον τῆς ΑΒ′Α′ ἔχω :

$$y' = -\frac{\beta}{\alpha}\frac{(-x)}{\sqrt{\alpha^2-x^2}} = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}\frac{x}{\left(-\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{\alpha^2-x^2}\right)} = -\frac{\beta^2 x}{\alpha^2 y}$$

[ἠδυνάμην ἐννοεῖται καὶ ἀπ᾽ εὐθείας ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) νὰ ἐξαγάγω τὸ y′ θεωρῶν τὸ y ὡς συνάρτησιν τοῦ x·

καὶ τῷ ὄντι $$\frac{yy'}{\beta^2} + \frac{x}{\alpha^2} = 0$$

ὅθεν $$y' = -\frac{\beta^2 x}{\alpha^2 y}\Big].$$

Ἑπομένως διὰ πᾶν σημεῖον M(x,y) τῆς ἐλλείψεως ἔχω ὡς ἐξίσωσιν ἐφαπτομένης τὴν ἑξῆς :

$$Y - y = -\frac{\beta^2 x}{\alpha^2 y}(X - x)$$

ἢ καί :

$$\frac{xX}{\alpha^2} + \frac{yY}{\beta^2} = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}$$

ὅθεν δυνάμει τῆς ἐξισώσεως τῆς ἐλλείψεως (1) ἔχω ὡς ἐξίσωσιν ἐφαπτομένης τῆς ἐλλείψεως εἰς τὸ σημεῖον (x, y) τὴν

$$\frac{xX}{\alpha^2} + \frac{yY}{\beta^2} = 1.$$

Ἡ ἐξίσωσις τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἔλλειψιν εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον M(x.y) θὰ εἶναι :

$$\frac{\alpha^2 X}{x} - \frac{\beta^2 Y}{y} = \gamma^2.$$

191.—***Πολικαὶ συντεταγμέναι.*** Ἔστω ὅτι ἀντὶ τῶν εὐθυγράμ-

-μων συντεταγμένων x,y παντὸς σημείου τῆς καμπύλης. θεωρῶ τὰς πολικὰς αὐτοῦ συντεταγμένας ρ, θ· τουτέστι θεωρῶ τὸ ρ ὡς συνάρτησιν τοῦ θ ἢ τὰ ρ καὶ θ ὡς συναρτήσεις μιᾶς παραμέτρου t· ὁρίζεται οὕτω μία καμπύλη· δύναμαι ταύτην τὴν καμπύλην νὰ τὴν γράψω μὲ μίαν σχέσιν τῆς μορφῆς: $\sigma(\rho,\vartheta)=0$. Ἔστω ὅτι, λύεται ἡ ἐξίσωσις αὕτη ὡς πρὸς ρ καὶ ὅτι ἔχω τὴν μορφήν: $\rho=\varphi(\vartheta)$. Ἵνα εὕρω τότε τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης MT ἀρκεῖ νὰ λάβω ὑπ' ὄψιν τὴν ἑξῆς πρότασιν εὐκόλως ἀποδεικνυομένην.: ἡ συνεφαπτομένη τῆς γωνίας OMT ἰσοῦται πρὸς τὸ $\frac{\rho'}{\rho}$ δηλ. πρὸς τὸ $\frac{\varphi'(\vartheta)}{\varphi(\vartheta)}$.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ σημεῖα τῆς ἐλλείψεως τὰ ὁποῖα εἶναι πόδες τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων ἐξ ἑνὸς σημείου $M_0(x_0,y_0)$, ἐπὶ τὴν ἔλλειψιν $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-1=0$· ἀποδεικνύεται ὅτι οἱ πόδες οὗτοι συμπίπτουν μὲ τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς ὑπερβολῆς: $(\alpha^2-\beta^2)xy+\beta^2y_0x-\alpha^2x_0y=0$ (ὑπερβολὴ τοῦ Ἀπολλωνίου)· ὅμοιον ζήτημα διὰ τὴν ὑπερβολὴν καὶ παραβολήν.

2) Νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἐφαπτομένη, καὶ ἡ κάθετος τής ὑπερβολῆς τῆς ἀναφερομένης εἰς τὰς ἀσυμπτώτους της $xy=K^2$,

3) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἐφαπτόμεναι τῆς καμπύλης: $y=x(x-\alpha)^2$ εἰς τὰ σημεῖα τὰ ὁποῖα εἶναι τομαὶ τῆς καμπύλης αὐτῆς καὶ τῆς εὐθείας: $y=\lambda^2x$.

4) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης τῆς ἐχούσης ἐξίσωσιν: $\alpha+\rho\vartheta=0$.

4) Τίνα σχέσιν ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ἡ γωνία τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τὴν πολικὴν ἀκτῖνα καὶ ἡ πολικὴ γωνία ἐὰν ἡ καμπύλη ἔχῃ ἐξίσωσιν: $\rho^\mu=\alpha\eta\mu(\mu\vartheta)$, ὅπου α καὶ μ σταθεροὶ ἀριθμοί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΔΥΟ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Ὁρισμοί.

192.—Ὅπως (§ 183) πάντα πραγματικὸν ἀριθμὸν α ἐκάλεσα ***σημεῖον*** α οὕτω καὶ πᾶν ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν α, β καλῶ ***σημεῖον*** (α, β). Ἔστω ἤδη σύνολον τοιούτων σημείων τὸ Σ καὶ ἔστω ὅτι δυνάμει νόμου τινὸς εἰς ἕκαστον σημεῖον (x, y) τοῦ συνόλου Σ ἀντιστοιχεῖ ἀριθμός τις z· τὸ σύνολον τῶν τοιούτων ἀριθμῶν z ἀποτελεῖ συνάρτησιν ὡρισμένην εἰς τὸ σύνολον Σ· ἐκφράζεται δὲ αὐτὸ καὶ ὡς ἑξῆς: ἡ μεταβλητὴ z εἶναι συνάρτησις τῶν πραγματικῶν μεταβλητῶν x, y ὡρισμένη εἰς τὸ σύνολον Σ· ἂς παρασταθῇ τοῦτο διὰ τοῦ $z=\sigma(x, y)$.

Παρατηρῶ ὅτι χρησιμοποιῶν γεωμετρικὴν ἔκφρασιν δύναμαι νὰ λέγω ὅτι τὸ σύνολον Σ εἶναι σύνολον σημείων τοῦ ἐπιπέδου XOY· ἔχομεν καὶ εἰς τὰ τοιαῦτα σύνολα (δηλ. εἰς τὰ σύνολα σημείων ἐπιπέδου) ὁρισμοὺς ὁρικοῦ σημείου, παραγώγου συνόλου, τελείου συνόλου κ.ο.κ. οὕτω ***ὁρικὸν σημεῖον*** συνόλου Σ λέγεται πᾶν σημεῖον Μ τοιοῦτον ὥστε εἰς πάντα κύκλον μὲ κέντρον τὸ Μ νὰ ὑπάρχῃ σημεῖον τοῦ συνόλου διάφορον τοῦ Μ. Τὸ Μ δυνατὸν καὶ νὰ μὴ ἀνήκῃ εἰς τὸ σύνολον. Πᾶν σημεῖον τοῦ Σ, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι ὁρικόν, εἶναι ***μεμονωμένον σημεῖον***. Καλεῖται ***παράγωγον σύνολον*** ἑνὸς συνόλου Σ καὶ παρίσταται διὰ τοῦ Σ′ τὸ σύνολον πάντων τῶν ὁρικῶν σημείων τοῦ Σ.

Κλειστὸν σύνολον λέγεται πᾶν σύνολον περιέχον ὅλα τὰ ὁρικά του σημεῖα· π. χ. πᾶν παράγωγον σύνολον εἶναι κλειστόν· ἐὰν ἓν κλειστὸν σύνολον Σ δὲν περιέχῃ μεμονωμένον σημεῖον πάντα τὰ σημεῖα αὐτοῦ ἀνήκουσιν εἰς τὸ παράγωγόν του Σ′· τότε εἶναι ***τέλειον*** σύνολον· συμπίπτει δὲ μὲ τὸ παράγωγον αὐτοῦ· π. χ. τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι εἶναι ῥητοὶ ἀριθμοὶ δὲν εἶναι κλειστὸν διότι τὸ παράγωγον αὐτοῦ περιέχει ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου· οὔτε περιέχει μεμονωμένον σημεῖον. Ἐὰν εἰς πᾶν σύστημα πραγματικῶν ἀριθμῶν x, y ἀντιστοιχῇ (δυνάμει τεθέντος νόμου τινὸς ἀντιστοιχίας) εἷς πραγματικὸς ἀριθμὸς διὰ τὸ $z=\sigma(x, y)$ θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις $z=\sigma(x, y)$ ὁρίζεται ἐφ' ὁλοκλήρου τοῦ ἐπιπέδου XOY.

Ἐὰν μία συνάρτησις z ὁρίζεται διὰ πᾶν σημεῖον (x, y) τοιοῦτον ὥστε $\alpha_1 \leq x \leq \alpha_2$, $\beta_1 \leq y < \beta_2$ τότε ἡ z εἶναι ὡρισμένη εἰς τὸν τόπον T, ὅπου T εἶναι τὸ ὀρθογώνιον τὸ σχηματιζόμενον, ὅταν φέρω τὰς εὐθείας $x=\alpha_1$, $x=\alpha_2$, $y=\beta_1$, $y=\beta_2$.

Ὁμοίως, ἐὰν εἰς πᾶν σύστημα πραγματικῶν ἀριθμῶν x, y πληρούντων τὴν σχέσιν $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 \leq \varrho^2$ ἀντιστοιχῇ μία τιμὴ τοῦ z λέγομεν ὅτι ἡ z εἶναι ὡρισμένη εἰς τὸν κύκλον

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta^2)=\varrho^2 \qquad (1)$$

ἢ καὶ ὅτι ἡ z εἶναι ὡρισμένη εἰς τὸν τόπον T, ὅπου τόπος T εἶναι ὁ κύκλος (1)· τότε ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου εἶναι τὸ ***σύνορον*** τοῦ τόπου T. Γενικῶς· ἔστω μέρος τι T τοῦ ἐπιπέδου XOY· ἐὰν εἰς ἕκαστον σημεῖον M(x, y) τοῦ T ἀντιστοιχῇ μία τιμὴ διὰ τὸ z λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις z εἶναι ὡρισμένη εἰς τὸν ***τόπον*** T. Δυνατὸν ὁ τόπος T νὰ σχηματίζεται ἀπὸ τὸ ἐσωτερικὸν μέρος τοῦ ἐπιπέδου XOY τὸ περατούμενπν ὑπὸ μιᾶς κλειστῆς γραμμῆς K· τότε ἡ K λέγεται ἐπίσης ***σύνορον τοῦ τόπου*** T· ἐὰν ἡ συνάρτησις z ὁρίζεται εἰς πᾶν ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ τόπου T καὶ εἰς πᾶν σημεῖον τοῦ συνόρου T τότε λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις z ὁρίζεται εἰς τὸν ***κλειστὸν τόπον*** T.[1].

Ἀνάλογα δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ἐὰν ὁ τόπος T σχηματίζεται ἀπὸ τὸ ἐσωτερικὸν μέρος τοῦ ἐπιπέδου XOY τὸ περατούμενον ἀπὸ πολλὰς κλειστὰς καμπύλας, μίαν ἐξωτερικὴν καμπύλην K καὶ μίαν ἢ πλειοτέρας ἐσωτερικὰς καμπύλας K′, K″, K‴. . . ὁπότε αἱ K, K′, K″, K‴... σχηματίζουν τὸ σύνορον τοῦ τόπου T.

193.—Ἔστω σύνολον T σημείων τοῦ ἐπιπέδου XOY πληροῦν τὴν ἑξῆς συνθήκην. Ἐὰν M καὶ N εἶναι τυχόντα σημεῖα τοῦ συνόλου αὐτοῦ ὑπάρχει συνεχὴς γραμμὴ συνδέουσα αὐτὰ τῆς ὁποίας πᾶν σημεῖον, πλὴν ἴσως τῶν ἄκρων M καὶ N, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κέντρον κύκλου μὲ ἀκτῖνα διάφορον τοῦ μηδενός, καὶ μὲ ὅλα του τὰ σημεῖα ἀνήκοντα εἰς τὸ σύνολον. Καλεῖται τότε τὸ T ***συνεχὴς τόπος μὲ***

---

[1] Λεπτομερέστερον· τὸ *σύνορον* συνόλου τινὸς Σ σχηματίζεται ἀπὸ τὰ *σημεῖα συνόρου* τοῦ Σ· λέγεται δὲ *σημεῖον συνόρου* τοῦ Σ πᾶν σημεῖον M ἔχον τὴν ἑξῆς ἰδιότητα· εἰς πάντα κύκλον μὲ κέντρον τὸ M, ὁσονδήποτε μικρόν, ὑπάρχουν σημεῖα τοῦ Σ καὶ σημεῖα μὴ ἐνήκοντα εἰς Σ. *Τόπος ἀνοικτὸς* λέγεται πᾶν σύνολον τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ σημεῖα εἶναι ἐσωτερικά, *ἐσωτερικὸν* δὲ σημεῖον λέγεται σημεῖον τι M ἐὰν δύναται νὰ εὑρεθῇ κύκλος μὲ κέντρον τὸ M καὶ ἀκτῖνα ἀρκετὰ μικρὰν τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ σημεῖα νὰ ἀνήκουν εἰς τὸ σύνολον· ὁ ἀνοικτὸς τόπος Σ καὶ τὸ σύνορον τοῦ Σ ἀποτελοῦν *κλειστὸν* τόπον.

δύο διαστάσεις· λέγεται δ' ἐνίοτε ἐπίσης ***συνεκτικὸς*** τόπος ἢ καὶ τόπος ***ἑνὸς μόνον περιεχομένου.***

Λέγομεν ὅτι μία συνάρτησις $z=\sigma(x, y)$ εἶναι περατωμένη εἰς τόπον τινὰ Τ, ἐὰν αἱ τιμαὶ τοῦ z αἱ ἀντίστοιχοι εἰς τὰ σημεῖα τοῦ τόπου Τ ἀποτελοῦσι περατωμένον σύνολον. Ἐὰν Μ καὶ μ εἶναι τὸ ἀνώτερον καὶ κατώτερον πέρας τούτου τοῦ συνόλου ἡ διαφορὰ Μ—μ καλεῖται ***αἰώρησις τῆς συναρτήσεως*** z εἰς τὸν τόπον Τ.

194.—***Συνέχεια συναρτήσεως*** $z=\sigma(x, y)$. Ἔστω ἐσωτερικόν τι σημεῖον τοῦ τόπου Τ, τὸ (α, β)· καὶ ἓν ὀρθογώνιον περιλαμβανόμενον εἰς τὸν τόπον Τ, (ἐν ᾧ εἶναι ὡρισμένη ἡ συνάρτησις z) καὶ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν εὐθειῶν $x=\alpha+\varepsilon$, $x=\alpha-\varepsilon$, $y=\beta+\eta$, $y=\beta-\eta$· θὰ ἔχῃ αἰώρησίν τινα ἡ συνάρτησις εἰς αὐτὸ τὸ ὀρθογώνιον (διότι ὑποτίθεται περατωμένη εἰς τόπον περιλαμβάνοντα τὸ ὀρθογώνιον)· ἂς ὑποθέσω ἤδη ὅτι τὰ ε καὶ η τείνουν πρὸς τὸ μηδέν, τότε ἐὰν ἡ αἰώρησις τῆς συναρτήσεως (εἰς τὸ ὁλονὲν σμικρυνόμενον ὀρθογώνιον καὶ τεῖναν νὰ περιορισθῇ εἰς τὸ σημεῖον (α, β)) τείνῃ πρὸς τὸ μηδὲν λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις $z=\sigma(x, y)$ εἶναι ***συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον (α, β)***· εἶναι προφανὲς ὅτι ἀντὶ τοῦ ὀρθογωνίου δύναμαι νὰ θεωρήσω τετράγωνον καὶ δύναμαι ἐπίσης νὰ εἴπω ὅτι ἡ συνάρτησις z εἶναι ***συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον*** (α, β) ἐὰν δοθέντος θετικοῦ ἀριθμοῦ θ ὁσονδήποτε μικροῦ εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθῇ θετικὸς ἀριθμὸς ε τοιοῦτος ὥστε νὰ εἶναι

$$(1) \qquad | \sigma(\alpha+\varepsilon, \beta+\varepsilon)-\sigma(\alpha, \beta) | < \vartheta$$

διὰ πᾶν σύστημα τιμῶν x, y πληροῦν τὰς ἀνισότητας $|x| < \varepsilon$, $|y| < \varepsilon$. Ἐὰν ἤδη νοήσω τυχοῦσαν συνεχῆ καμπύλην καταλήγουσαν εἰς τὸ σημεῖον (α, β) θὰ ὑπάρχῃ πάντως μέρος τι τῆς καμπύλης ἐσωτερικὸν εἰς τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον κέντρον τὸ σημεῖον (α, β) καὶ πλευρὰν 2ε· διὰ πᾶν σημεῖον (x, y) τοῦ μέρους αὐτοῦ θὰ ἰσχύῃ ὅτι

$$| \sigma(x, y)-\sigma(\alpha, \beta) | < \vartheta\cdot$$

καὶ ἔχωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις $\sigma(x, y)$ εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον (α, β) ἐὰν ἔχῃ τὴν ἑξῆς ἰδιότητα: ὅταν τὸ σημεῖον (x, y) τυχούσης συνεχοῦς καμπύλης ληγούσης εἰς τὸ (α, β) τείνῃ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ (α, β) ἡ συνάρτησις $\sigma(x, y)$ τείνει νὰ λάβῃ τὴν τιμὴν $\sigma(\alpha, \beta)$ ἢ καὶ ἡ συνάρτησις $\sigma(x, y)$ εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον (α,β) ἐάν τὸ $\sigma(x,y)$

ἔχῃ ὅριον τὸ σ(α, β), ὅταν τὰ $|x-\alpha|$ καὶ $|y-\beta|$ τείνουν καθ' οἱονδήποτε τρόπον πρὸς τὸ μηδέν.

Λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις σ(x, y) εἶναι ***συνεχὴς εἰς σημεῖον τι M τοῦ συνόρου***, ἐὰν τοῦ σημείου M′ ὄντος σημείου τοῦ τόπου T γειτονικοῦ πρὸς τὸ M ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ M′ τείνῃ πρὸς τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ M, ὅταν ἡ ἀπόστασις MM′ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν.

Ἡ συνάρτησις σ(x, y) εἶναι ***συνεχὴς εἰς τόπον τινὰ*** T ἐὰν εἶναι συνεχὴς εἰς πᾶν ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ τόπου καὶ εἰς πᾶν σημεῖον τοῦ συνόρου του.

Ἐὰν δώσω εἰς τὸ y σταθερὰν τιμὴν ἡ σ(x, y) γίνεται συνάρτησις μόνον τοῦ x· Ἐὰν ἡ οὕτω θεωρουμένη συνάρτησις εἶναι συνεχὴς ὡς πρὸς x, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ δοθεῖσα σταθερὰ τιμὴ εἰς τὸ y, θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ σ(x, y) εἶναι ***συνεχὴς ὡς πρὸς x***· καθ' ὅμοιον τρόπον ὁρίζεται ἡ συνέχεια ὡς πρὸς y.

Παρατηρῶ ὅτι ἵνα μία συνάρτησις σ(x, y) εἶναι συνεχὴς εἰς τόπον τινὰ T δὲν ἀρκεῖ νὰ εἶναι συνεχὴς ὡς πρὸς x καὶ συνεχὴς ὡς πρὸς y. Π. χ. ἔστω συνάρτησις σ(x, y) ὁριζομένη ὡς ἑξῆς: εἰς τὴν ἀρχὴν λαμβάνει τὴν τιμὴν 0 καὶ εἰς πᾶν ἄλλο σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου λαμβάνει τιμὴν ὁριζομένην ἐκ τῆς ἰσότητος $z=\frac{xy}{x^2+y^2}$. Ἡ οὕτω ὁριζομένη συνάρτησις εἶναι ***συνεχὴς ὡς πρὸς x*** διὰ πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, ὅπως ἐπίσης εἶναι ***συνεχὴς ὡς πρὸς y*** διὰ πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου· δὲν εἶναι ὅμως συνεχὴς εἰς τὴν ἀρχήν, ὅπως φαίνεται εὐκόλως ἐὰν θεωρήσω εὐθεῖαν τινὰ $y=\lambda x$ καὶ ὑποθέσω ὅτι σημεῖον τι M κινεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης τεῖνον νὰ πλησιάσῃ πρὸς τὴν ἀρχήν· τότε ἡ δοθεῖσα συνάρτησις τείνει πρὸς τὸ $\frac{\lambda}{1+\lambda^2}$ τὸ ὁποῖον εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός, ἐνῷ ἵνα εἶναι συνεχὴς ἔπρεπε νὰ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, ὅπερ εἶναι (ἐξ ὁρισμοῦ) ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως εἰς τὴν ἀρχήν.

Ἰδιότητες τῶν συνεχῶν συναρτήσεων.

195.—Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω δοθεῖσαν ἔννοιαν τῆς συνεχείας συναρτήσεως δύο μεταβλητῶν ἐξάγονται διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς θεωρήματα ἀνάλογα πρὸς τὰ ἀποδειχθέντα διὰ τὰς συναρτήσεις μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς (σελ. 128 καὶ πέραν).

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τούτων βοηθητικὸν θεώρημα εἶναι καὶ τὸ ἑξῆς:

I. ***Ἐὰν συνάρτησίς τις σ(x,y) δὲν εἶναι περατωμένη εἰς περα-***

τωμένον [1] ***τόπον Τ, εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθῇ σημεῖον (ξ, η) ἀνῆκον εἰς τὸν τόπον Τ καὶ ἔχον τὴν ἰδιότητα νὰ δύναται νὰ ληφθῇ μέρος τοῦ Τ περιέχον ὡς ἐσωτερικὸν τὸ σημεῖον (ξ η), ὁσοδήποτε θέλωμεν μικρόν, ἐν ᾧ ἡ σ(x,y) νὰ μὴ εἶναι περατωμένη· ἑπομένως ἡ σ(xy) εἶναι ἀσυνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον (ξ,η).***

Καὶ τῷ ὄντι· ἔστω κατ' ἀρχὰς ὅτι εἶναι ὀρθογώνιον ὁ τόπος Τ· φέρω τὰς εὐθείας τὰς ἑνούσας τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν· διαιρεῖται τότε ὁ Τ εἰς 4 ἴσα ὀρθογώνια, εἰς ἓν τοὐλάχιστον τῶν ὁποίων θὰ εἶναι συμφώνως πρὸς τὴν ὑπόθεσίν μας ἡ συνάρτησις μὴ περατωμένη. Ἐὰν τοιαῦτα ὀρθογώνια ὅπου ἡ συνάρτησις δὲν εἶναι περατωμένη εἶναι πλείονα τοῦ ἑνὸς ἂς λάβω τὸ πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ κάτω ὀρθογώνιον· ἐὰν εἰς τοῦτο ἡ συνάρτησις εἶναι περατωμένη ἂς λάβω τὸ πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ ἄνω καὶ ἂν καὶ εἰς τοῦτο εἶναι περατωμένη λαμβάνω τὸ πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ κάτω: [2] ἔστω T_1 τὸ λαμβανόμενον. Διαιρῶ τοῦτο καθ' ὅμοιον τρόπον εἰς 4 ἴσα ὀρθογώνια, εἰς ἓν τοὐλάχιστον τῶν ὁποίων ἡ συνάρτησις δὲν θὰ εἶναι περατωμένη· ἐὰν τοιαῦτα ὀρθογώνια εἶναι πλείονα τοῦ ἑνὸς ἂς λάβω τὸ πρὸς τ' ἀριστερὰ καὶ κάτω ἐὰν εἰς τοῦτο ἡ συνάρτησις εἶναι περατωμένη ἂς λάβω τὸ πρὸς τ' ἀριστερὰ καὶ ἄνω καὶ ἂν εἰς τοῦτο εἶναι περατωμένη λαμβάνω τὸ πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ κάτω κ.λ.π. Ἔστω T_2 τὸ λαμβανόμενον. Διαιρῶ τοῦτο πάλιν εἰς τέσσαρα κ.ο.κ. Δύναμαι οὕτω νὰ νοήσω ἀπεριόριστον σειρὰν ὀρθογωνίων $T, T_1, T_2, T_3, .. T_\nu ..$ τῶν ὁποίων αἱ δύο διαστάσεις τείνουν πρὸς τὸ μηδὲν καὶ ὅπου ἡ συνάρτησις δὲν εἶναι περατωμένη. Ἐὰν καλέσω (α_ν, β_ν) τὸ διάστημα τῶν τετμημένων τοῦ T_ν καὶ (γ_ν, δ_ν) τὸ διάστημα τῶν τεταγμένων του θὰ ἔχω ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ ἔχει ὅριον ἀριθμόν τινα ξ καὶ ἡ ἀκολουθία $\beta_1\ \beta_2 \ldots \beta_\nu \ldots$ ἔχει ὅριον ἀριθμόν τινα η· τὸ δὲ σημεῖον (ξ, η) θὰ εἶναι ἐσωτερικὸν εἰς ὅλα τὰ ὀρθογώνια T_1, $T_2, \ldots T_\nu, \ldots$ ἑπομένως θὰ εἶναι ἐσωτερικὸν καὶ εἰς μέρος ἀνῆκον εἰς τὸ Τ, ὅσον θέλωμεν μικρόν.

Ὑπετέθη ὅτι ὁ Τ εἶναι ὀρθογώνιον· ἐὰν τοῦτο δὲν συμβαίνῃ ἀρκεῖ προφανῶς νὰ περιγράψω περὶ τὸ Τ ὀρθογώνιον Τ′ καὶ νὰ θεωρήσω ἀντὶ τῆς συναρτήσεως σ(x,y) τὴν συνάρτησιν $\sigma_1(x,y)$, ἥτις διὰ πᾶν σημεῖον τοῦ Τ λαμβάνει τὴν αὐτὴν τιμὴν μὲ τὴν σ(x,y), διὰ πᾶν δὲ σημεῖον

---

[1] περατωμένος λέγεται προφανῶς τόπος τις Τ, ἐὰν ὑπάρχουν δύο πεπερασμένοι θετικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β τοιοῦτοι ὥστε διὰ πᾶν σημεῖον (x,y) τοῦ τόπου νὰ ἔχωμεν $|x| < \alpha$, $|y| < \beta$.

[2] Ἐὰν δὲ καὶ εἰς τοῦτο εἶναι περατωμένη λαμβάνω τὸ πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ ἄνω.

ἐξωτερικὸν τοῦ Τ καὶ ἐσωτερικὸν τοῦ Τ′ λαμβάνει τὴν τιμὴν 0. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω προσδιορίζεται σημεῖον τι (ξ, η) εἰς ὃ ἡ συνάρτησις σ(x,y) εἶναι ἀσυνεχής· τὸ σημεῖον τοῦτο θὰ ἀνήκῃ εἰς τὸν τόπον Τ· θὰ εἶναι δὲ ἀσυνεχὴς εἰς αὐτὸ ἡ συνάρτησις σ(x,y).

II. ***Πᾶσα συνεχὴς συνάρτησις εἰς ἕνα περατωμένον τόπον Τ εἶναι περατωμένη·*** καὶ τῷ ὄντι ἐὰν δὲν ἦτο περατωμένη ἔπρεπε συμφώνως πρὸς τὸ Ι θεώρημα νὰ ὑπάρχῃ σημεῖον τι (ξ, η) τοῦ τόπου Τ εἰς ὃ ἡ συνάρτησις νὰ μὴ εἶναι συνεχής.

III. ***Ἐὰν συνάρτησίς τις σ(x,y) εἶναι συνεχὴς εἰς ἕνα περατωμένον τόπον Τ θὰ ὑπάρχῃ τοὐλάχιστον ἓν σημεῖον τοῦ τόπου Τ, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ συνάρτησις γίνεται ἴση μὲ τὸ ἀνώτερον πέρας τῆς συναρτήσεως*** (εἰς τὸ Τ)· ***ὅπως ἐπίσης καὶ τιμὴ δι' ἣν γίνεται ἴση πρὸς τὸ κατώτερον πέρας.*** (§ 105. σελ. 132).

IV. ***Ἐὰν συνάρτησίς τις εἶναι συνεχὴς εἰς ἕνα περατωμένον συνεκτικὸν τόπον Τ καὶ ἐὰν εἶναι θετικὴ εἴς σημεῖον τι τοῦ Τ καὶ ἀρνητικὴ εἰς ἄλλο σημεῖον τοῦ Τ θὰ ὑπάρχῃ σημεῖον τοῦ Τ εἰς ὃ θὰ λαμβάνῃ τὴν τιμὴν μηδέν.*** (§ 107 σελ. 134).

Ἐκ τῶν δύο τελευταίων θεωρημάτων ἕπεται ὅτι πᾶσα συνεχὴς συνάρτησις εἰς περατωμένον συνεκτικὸν τόπον λαμβάνει πᾶσαν τιμὴν περιλαμβανομένην μεταξὺ τοῦ ἀνωτέρου καὶ κατωτέρου πέρατος καὶ μάλιστα εἰς ἀπειρίαν σημείων τοῦ τόπου Τ. Καὶ τῳόντι ἂς συνδέσω τὰ δύο σημεῖα τοῦ τόπου Τ εἰς ἃ ἡ συνάρτησις γίνεται ἴση μὲ τὸ ἀνώτερον καὶ κατώτερον πέρας διὰ τυχούσης συνεχοῦς γραμμῆς ἐσωτερικῆς εἰς τὸν τόπον Τ καὶ ἂς θεωρήσω τὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως κατὰ μῆκος τῆς γραμμῆς ταύτης· ἐὰν λ εἶναι τυχὼν ἀριθμὸς περιλαμβανόμενος μεταξὺ τῶν Μ καὶ μ θὰ ὑπάρχῃ σημεῖον τι τῆς ἀχθείσης γραμμῆς εἰς ὃ ἡ συνάρτησις γίνεται λ. (§ 108 σελ. 135).

V. ***Ἔστω σ(x,y) συνεχὴς συνάρτησις εἰς τόπον τινὰ Τ καὶ ἔστω ε τυχὼν θετικὸς ἀριθμός· θὰ εὑρίσκεται θετικὸς ἀριθμὸς δ τοιοῦτος ὥστε ἡ αἰώρησις τῆς σ(x,y) νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ε εἰς πᾶν μέρος τοῦ Τ ἔχον διάμετρον μικροτέραν τοῦ δ.***

Ἔστω ὅτι ὁ τόπος Τ εἶναι ὀρθογώνιον· λέγω πρῶτον ὅτι δύναμαι νὰ διαιρέσω τὸν τόπον Τ εἰς ἄλλα ὀρθογώνια, εἰς ἕκαστον τῶν ὁποίων ἡ αἰώρησις νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ $\frac{\varepsilon}{2}$· καὶ τῳόντι, ἂς ὑποθέσω τὸ ἐναντίον· τότε ἐὰν νοήσω ὑποδιαιρούμενον τὸ δοθὲν ὀρθογώνιον εἰς τέσσαρα ἴσα ὀρθογώνια, ὅπως καὶ εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ Ι θεωρήματος, τότε εἰς ἓν τοὐλάχιστον ἐξ αὐτῶν ἡ αἰώρησις δὲν θὰ ~~ἦτο~~ μικροτέρα τοῦ $\frac{\varepsilon}{2}$. Ἐὰν καὶ τοῦτο τὸ ὀρθογώνιον ὑποδιαιρέσω καὶ συνεχίσω τὴν μέθοδον τῆς ὑποδιαιρέσεως τὴν χρησιμοποιηθεῖσαν εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ I θεωρήματος θὰ ἔχω ἀπεριόριστον ἀκολουθίαν ὀρθογωνίων T_1, T_2,.. T_ν,... ὧν αἱ διαστάσεις τείνουν πρὸς τὸ μηδὲν καὶ εἰς ἕκαστον τῶν ὁποίων ἡ αἰώρησις δὲν θὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ $\frac{\varepsilon}{2}$ καὶ ἐπειδὴ τὰ T_1, T_2,.. T_ν,... ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον (ξ, η), ἡ συνάρτησις $\sigma(x,y)$ θὰ εἶναι ἀσυνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον (ξ, η), ὅπερ ἀνήκει εἰς τὸν τόπον T· ἀλλὰ τοῦτο ἀντιβαίνει πρὸς τὴν ὑπόθεσιν· ἄρα ὑποδιαιρεῖται ὁ τόπος T εἰς ὀρθογώνια εἰς ἕκαστον τῶν ὁποίων ἡ αἰώρησις εἶναι μικροτέρα τοῦ $\frac{\varepsilon}{2}$.

Δύναμαι λοιπὸν νὰ ὑποθέσω ὅτι διῃρέθη ὁ δοθεὶς τόπος T εἰς ὀρθογώνια, εἰς ἕκαστον τῶν ὁποίων ἡ αἰώρησις εἶναι μικροτέρα τοῦ $\frac{\varepsilon}{2}$. Δύο τυχόντα ἐξ αὐτῶν τῶν ὀρθογωνίων μὴ συνεχόμενα θὰ ἔχωσιν ἀπόστασιν τινά· τοιούτων ἀποστάσεων θὰ ὑπάρχῃ ἐλαχίστη· ἂς καλέσω αὐτὴν δ· ἐὰν ἤδη θεωρήσω τυχὸν μέρος τοῦ ἐπιπέδου ω ἔχον διάμετρον μικροτέραν τοῦ δ θὰ ἔχω ὅτι ἡ αἰώρησις εἰς τὸ ω θὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ε· διότι τὸ ω, ὡς ἔχον διάμετρον μικροτέραν τῆς ἐλαχίστης ἀποστάσεως δύο ὀρθογωνίων μὴ συνεχομένων, θὰ χωρῇ κατ' ἀνάγκην εἰς δύο συνεχόμενα ὀρθογώνια· ἄρα ἡ αἰώρησις εἰς τὸν τόπον ω θὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν αἰωρήσεων εἰς τὰ δύο ὀρθογώνια· καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ $\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$ ἤτοι τοῦ ε.

Ὑπετέθη εἰς τὴν ἀνωτέρω ἀπόδειξιν ὅτι ὁ τόπος T εἶναι ὀρθογώνιον. Εὐκόλως ἐπεκτείνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ ὅταν ὑποτεθῇ ὅτι δὲν εἶναι ὀρθογώνιον ὁ T.

195. Ἕπεται ἀμέσως ἐκ τοῦ V θεωρήματος ὅτι :

VI. ***Ἐὰν $\sigma(x,y)$ εἶναι συνεχὴς συνάρτησις εἰς περατωμένον τόπον*** T καὶ ε ***τυχὼν δοθεὶς θετικὸς ἀριθμὸς δύναμαι νὰ διαιρέσω τὸν τόπον T εἰς μικροτέρους τόπους τοιούτους, ὥστε ἐὰν λάβω δύο τυχόντα σημεῖα*** (x,y) (x',y') ἑνὸς οἱουδήποτε ἐξ αὐτῶν τῶν τόπων νὰ ἔχω πάντοτε

$$|\sigma(x',y')-\sigma(x,y)|<\varepsilon.$$

Παράγωγοι. Διαφορικά.

196. Ἔστω $z=\sigma(x,y)$ συνάρτησις δύο πραγματικῶν μεταβλητῶν x καὶ y ὡρισμένη καὶ συνεχὴς εἰς τόπον τινὰ T. Ἐὰν ἀντικαταστήσω

τὸ y διὰ σταθερᾶς τινος τιμῆς $\bar{y}$ θὰ ἔχω συνάρτησιν μιᾶς μεταβλητῆς, τὴν $\sigma(x,\bar{y})$· γεωμετρικῶς ἐκφράζω τοῦτο λέγων ὅτι τὸ σημεῖον (x,y) κινεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας $y=\bar{y}$, ἥτις εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x· ἔστω $\bar{x}$ τυχοῦσα τιμὴ τοῦ x καὶ ε αὔξησις διδομένη εἰς τὴν τιμὴν ταύτην· ἐὰν ὑπάρχῃ ὅριον τοῦ λόγου $\frac{\sigma(\bar{x}+\varepsilon,\bar{y})-\sigma(\bar{x},\bar{y})}{\varepsilon}$ ὅταν ορ $\varepsilon=o$ θὰ εἶναι τοῦτο ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $\sigma(x,\bar{y})$ διὰ τὴν τιμὴν $x=\bar{x}$· θὰ λέγεται δὲ τότε τὸ ὅριον τοῦτο ***μερικὴ παράγωγος*** τοῦ z ὡς πρὸς x εἰς τὸ σημεῖον $(\bar{x}, \bar{y})$.

Ἐὰν εἰς πᾶν σημεῖον τοῦ τόπου T ὑπάρχῃ μερικὴ παράγωγος τοῦ z ὡς πρὸς x θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις z εἶναι ***παραγωγίσιμος ὡς πρὸς x*** εἰς τὸν τόπον T. Θὰ εἶναι τότε ἐν γένει ἡ μερικὴ παράγωγος τῆς z ὡς πρὸς x μία συνάρτησις τῶν x καὶ y ὡρισμένη εἰς τὸν τόπον T.

Ὁμοίως λέγομεν ***μερικὴν παράγωγον*** τοῦ z ὡς πρὸς y εἰς τὸ σημεῖον $(\bar{x}, \bar{y})$ τὸ ὅριον τοῦ λόγου $\frac{\sigma(\bar{x},\bar{y}+\eta)-\sigma(\bar{x},\bar{y})}{\eta}$, ὅταν ορ $\eta=o$. Ἐὰν τοιοῦτον ὅριον ὑπάρχῃ διὰ πᾶν σημεῖον (x,y) τοῦ τόπου T τότε λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις z εἶναι παραγωγίσιμος ὡς πρὸς y εἰς τὸν τόπον T· ἡ δὲ μερικὴ παράγωγος ὡς πρὸς y εἶναι μία συνάρτησις τῶν x,y ὡρισμένη εἰς τὸν τόπον T.

Ἡ μερικὴ παράγωγος τῆς $z=\sigma(x,y)$ ὡς πρὸς x σημειοῦται:

$$\sigma'_x(x,y) \text{ ἢ } D_x\,\sigma(x,y) \text{ ἢ } D_x\,z \text{ ἢ } \frac{\partial\sigma(x,y)}{\partial y} \text{ ἢ } \frac{\partial z}{\partial y},$$

ἡ δὲ μερικὴ παράγωγος τῆς αὐτῆς συναρτήσεως ὡς πρὸς y σημειοῦται

$$\sigma'_y(x,y) \text{ ἢ } D_y\sigma(x,y) \text{ ἢ } D_y z \text{ ἢ } \frac{\partial\sigma(x,y)}{\partial y} \text{ ἢ } \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Μερικὸν διαφορικὸν συναρτήσεως z ὡς πρὸς x καλεῖται τὸ γινόμενον τῆς μερικῆς παραγώγου ὡς πρὸς x ἐπὶ τὴν αὐθαίρετον αὔξησιν τῆς x, τὴν ὁποίαν παριστάνομεν διὰ τοῦ Δx· σημειοῦται δὲ τοῦτο ὡς ἑξῆς· $d_x z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x$· ἀναλόγως ὁρίζεται τὸ μερικὸν διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως z ὡς πρὸς y καὶ σημειοῦται

$$dy=\frac{\partial y}{\partial z}\Delta y.$$

197. ***Τύπος πεπερασμένων αὐξήσεων.*** Ἔστωσαν δύο πραγματικοὶ ἀριθμοὶ x, y καὶ δύο ἄλλοι τοιοῦτοι ε καὶ η· ἔχω προφανῶς $\sigma(x+\varepsilon,y+\eta)-\sigma(x,y)=\sigma(x+\varepsilon,y+\eta)-\sigma(x,y+\eta)+\sigma(x,y+\eta)-\sigma(x,y)$·
ἀλλὰ (§ 146) $\sigma(x+\varepsilon,\ y+\eta)-\sigma(x,\ y+\eta)=\varepsilon\,\sigma'_x\,(x+\vartheta\varepsilon,\ y+\eta)$
καὶ $\sigma(x,\ y+\eta)-\sigma(x,\ y)=\eta\,\sigma'_y\,(x.\ y+\vartheta'\eta)$, ὅπου ϑ καὶ ϑ' εἶναι δύο ἀριθμοὶ ἁρμοδίως ἐκλελεγμένοι, περιλαμβανόμενοι μεταξὺ 0 καὶ 1· ἑπομένως ἔχω

$$\Delta z=\sigma(x+\varepsilon,y+\eta)-\sigma(x,y)=\varepsilon\sigma'_x\,(x+\vartheta\varepsilon.y+\eta)+\eta.\sigma'_y\,(x,y+\vartheta'\eta)\ (K).$$

198.—***Παράγωγος συνθέτου συναρτήσεως.***—Ἔστω $z=\sigma(x,\ y)$, ὅπου τὰ x καὶ y εἶναι συναρτήσεις μιᾶς ἄλλης μεταβλητῆς t· ἡ $\sigma(x,\ y)$ καλεῖται τότε ***σύνθετος συνάρτησις τοῦ*** t· ἔστω $x=\varphi(t)$ καὶ $y=f(t)$· εἰς μίαν τιμὴν t ἀντιστοιχοῦσι δύο τιμαὶ x καὶ y καὶ εἰς μίαν τιμὴν $t+\Delta t$ ἀντιστοιχοῦν δύο τιμαὶ $x+\Delta x$, $y+\Delta y$· ἐὰν ἐφαρμόσω τὸν τύπον (K) καὶ διαιρέσω διὰ Δt λαμβάνω

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=\sigma'_x\,(x+\vartheta.\Delta x,\ y+\Delta y).\frac{\Delta x}{\Delta t}+\sigma'_y\,(x,\ y+\vartheta'.\Delta y)\,\frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Ὑποθέτω ἤδη ὅτι τὸ Δt τείνει πρὸς τὸ μηδὲν ἐπίσης ὅτι αἱ $\varphi(t)$ καὶ $f(t)$ εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις τοῦ t καὶ ὅτι αἱ μερικαὶ παράγωγοι $\sigma'_x\,(x\ y)$, $\sigma'_y\,(x,\ y)$ εἶναι συνεχεῖς ὡς πρὸς x καὶ y· θὰ ἔχω ὅτι

$$\text{ορ}\Delta x=\text{ορ}\Delta y=0 \text{ καὶ ὅτι}$$

$$\text{ορ}\ \sigma'_x\,(x+\vartheta\Delta x,\ y+\Delta y)=\sigma'_x\,(x,y) \text{ καὶ ορ } \sigma'_y\,(x,y+\vartheta'\Delta y)=\sigma'_y\,(x,y)\cdot$$

$$\text{ἑπομένως } \frac{dz}{dt}=\sigma'_x\,(x,\ y)\,\frac{dx}{dt}+\sigma'_y\,(x,\ y)\frac{dy}{dt}$$

ἢ καὶ (K′) $\qquad z'_t=\sigma'_x\,(x,\ y)\ x'+\sigma'_y\,(x,y)\,.\,y'$

Ἡ σχέσις (K′) δίδει τὸν κανόνα εὑρέσεως παραγώγου συνθέτου συναρτήσεως δύο μεταβλητῶν.

Παρατήρησις. Οἱ κανόνες πρὸς εὕρεσιν παραγώγου ὡς πρὸς t ἀθροίσματος δύο συναρτήσεων τοῦ t, παραγώγου γινομένου ἢ πηλίκου δύο συναρτήσεων τοῦ t δύνανται νὰ ἐξαχθῶσιν ὡς μερικαὶ περιπτώσεις τοῦ (K′).

199. Ὅπως ἐθεώρησα συνάρτησιν δύο μεταβλητῶν x καὶ y δύναμαι νὰ θεωρήσω συνάρτησιν u τριῶν μεταβλητῶν x, y, z· ἤτοι δύναμαι νὰ νοήσω ὅτι εἰς ἕκαστον σύστημα τριῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν x, y, z ἀντιστοιχεῖ μία τιμὴ διὰ τὸ u· γενικεύονται ἐπίσης

οἱ προηγούμενοι ὁρισμοί. Θὰ περιορισθῶ ἐδῶ εἰς τὸ θεώρημα τὸ ἀφορῶν τὴν παράγωγον συνθέτου συναρτήσεως.

Ἔστω $u=\sigma(x, y, z)$, ὅπου τὰ x, y, z εἶναι συναρτήσεις μιᾶς ἄλλης μεταβλητῆς t· καλεῖται τότε πάλιν ἡ $\sigma(x, y, z)$ ***σύνθετος συνάρτησις τοῦ*** t· ἐὰν λάβω ὑπ' ὄψιν ὅτι μερικὴ παράγωγος τοῦ u ὡς πρὸς x καλεῖται τὸ ὅριον τοῦ λόγου $\frac{\sigma(x+\varepsilon, y, z)-\sigma(x, y, z)}{\varepsilon}$, ὅταν ορ $\varepsilon=0$ κ.τ.λ. θὰ ἔχω τὸν ἑξῆς τύπον πρὸς εὕρεσιν τῆς παραγώγου τῆς συνθέτου συναρτήσεως $\sigma(x, y, z)$ ὡς πρὸς t.

$$\sigma'_t=\sigma'_x \cdot x'_t+\sigma'_y \cdot y'_t+\sigma'_z \cdot z'_t \cdot$$

ἢ καὶ

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial\sigma}{\partial x}\,\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\sigma}{\partial y}\,\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\sigma}{\partial z}\,\frac{dz}{dt}\cdot$$

200.—Δι' ἐφαρμογὴν τῶν προηγουμένων (§ 199) ἂς ζητήσω τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως $y=x^x$· Δύναμαι νὰ θέσω $y=u^v$, ὅπου $u=x$, $v=x$· ὁπότε θεωρῶ τὴν συνάρτησιν y ὡς σύνθετον συνάρτησιν τοῦ x· συμφώνως πρὸς τὸν κανόνα τῆς εὑρέσεως παραγώγου συνθέτου συναρτήσεως θὰ ἔχω (1).

$$y'_x=\sigma'_u \cdot u'_x+\sigma'_v \cdot v'_x, \quad \text{ὅπου } \sigma=u^v.$$

ἀλλὰ ἡ παράγωγος τοῦ u^v ὡς πρὸς u εἶναι vu^{v-1} ἡ δὲ παράγωγος τοῦ u^v ὡς πρὸς v εἶναι $u^v \log u$· ἀλλὰ $u=x$, $v=x$, ὅθεν εὑρίσκω

$$y'_x=x^x+x^x \log x=x^x(1+\log x).$$

201.—Ἔστω ὅτι ἐδόθη συνάρτησις $z=\sigma(x, y)$ εἰς τόπον τινὰ Τ· θὰ λέγεται αὕτη ***παραγωγίσιμος*** (2) εἰς τὸν τόπον Τ, ἐὰν εἶναι παραγωγίσιμος χωριστὰ ὡς πρὸς x (§ 126) καὶ χωριστὰ ὡς πρὸς y.

Ἔστω συνάρτησις $\sigma(x, y)$ καὶ ἔστω ὅτι εἰς ἓν σύστημα τιμῶν x, y δίδω αὐθαιρέτους αὐξήσεις Δx καὶ Δy· θὰ λέγεται ***διαφορίσιμος*** ἡ συνάρτησις $\sigma(x, y)$ εἰς τὸ σημεῖον (x, y) ἐὰν αὕτη εἶναι ὡρισμένη εἰς περιοχὴν τοῦ σημείου καὶ ἐὰν ἡ διαφορὰ $\sigma(x+\Delta x, y+\Delta y)-\sigma(x, y)$, τὴν ὁποίαν καλῶ Δz, δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$(1) \qquad \Delta z=(A\Delta x+B\Delta y)+\varepsilon\Delta x+\varepsilon'\Delta y$$

---

(1) Εἶναι προφανὲς ὅτι τὰ γράμματα z, x, y, t τοῦ τύπου (2) θὰ ἀντικατασταθῶσι διὰ τῶν γραμμάτων y, u, v, x.

(2) Παράβαλε ὁρισμοὺς σελ. 154-156.

ὅπου τὰ Α καὶ Β εἶναι ἀνεξάρτητα τῶν Δx καὶ Δy καὶ τὰ ε, ε′ εἶναι ἀπειροστά, ὅταν τὰ Δx καὶ Δy εἶναι ἀπειροστά· τότε τὸ

$$A\Delta x + B\Delta y$$

καλεῖται ***ὁλικὸν διαφορικὸν*** τῆς συναρτήσεως z καὶ σημειοῦται : dz.

Πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ Α ἂς θέσω $\Delta y = 0$ θὰ προκύπτῃ τότε ἐκ τῆς (1)

$$(2) \qquad \text{ὅτι } \text{ορ}\frac{\Delta z}{\Delta x} = A\cdot \quad \text{ἤτοι } z'_x = A \quad \text{ἢ καὶ } \frac{\partial z}{\partial x} = A\cdot$$

ὁμοίως εὑρίσκω θέτων $\Delta x = 0$ ὅτι

$$(3) \qquad z'_y = B \quad \text{ἢ καὶ } \frac{\partial z}{\partial y} = B\cdot$$

ὅθεν τὸ ***ὁλικὸν διαφορικὸν*** τῆς συναρτήσεως $z = \sigma(x, y)$ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μερικῶν διαφορικῶν δηλ. τῶν $\sigma'_x \Delta x$ καὶ $\sigma'_y \Delta y$ ἤτοι

$$(4) \qquad dz = \sigma'_x \Delta x + \sigma'_y \Delta y = d_x \sigma + d_y \sigma.$$

Ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις $z = x$ εἶναι διαφορίσιμος καὶ ἰσχύει δι᾽ αὐτὴν ὁ τύπος (4) ἔχω $dx = \Delta x$· ὁμοίως ἐὰν θέσω εἰς τὸν (4) $z = y$ λαμβάνω $dy = \Delta y$ ὅθεν ὁ τύπος (4) διὰ πᾶσαν διαφορίσιμον συνάρτησιν γράφεται

$$(5) \qquad dz = \sigma'_x dx + \sigma'_y dy\cdot$$

ἐξ οὗ καὶ ἀμέσως φαίνεται·

$$d_x z = d_x \sigma = \sigma'_x dx \quad \text{καὶ} \quad d_y z = d_y \sigma = \sigma'_y dy.$$

Παρατήρησις. Ὁ τύπος (5) ἰσχύει καὶ ὅταν τὰ x καὶ y δὲν εἶναι ἀνεξάρτητοι μεταβληταί, ἀλλ᾽ εἶναι συναρτήσεις ἄλλων μεταβλητῶν.

202.—***Παράγωγος πεπλεγμένης συναρτήσεως.*** Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$(1) \qquad F(x, y) = 0$$

ορίζουσα τὸ y ὡς πεπλεγμένην συνάρτησιν τοῦ x. (§ 85) [1]. Εἰς τὸν δεύτερον τόμον θ' ἀποδειχθῇ γενικὸν θεώρημα ἐξ οὗ προκύπτει καὶ ἡ ἑξῆς πρότασις:

Ἔστω ὅτι διὰ σημεῖον τι (α, β) ἔχω $F(\alpha, \beta)=0$ καὶ ὅτι δύναμαι νὰ εὕρω δύο θετικοὺς ἀριθμοὺς ε καὶ η τοιούτους ὥστε εἰς τὸ ἐσωτερικὸν καὶ ἐπὶ τῆς περιμέτρου τοῦ ὀρθογωνίου T τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῶν ἀνισοτήτων·

$$\alpha-\varepsilon \leq x \leq \alpha+\varepsilon, \quad \beta-\eta \leq y \leq \beta+\eta,$$

νὰ ἔχω ὅτι 1) ἡ συνάρτησις $F(x, y)$ εἶναι συνεχὴς καὶ 2) ὑπάρχει μερικὴ παράγωγος F'_y, ἡ ὁποία εἶναι συνεχὴς καὶ δὲν μηδενίζεται· τότε ὑπάρχει συνάρτησις $y=\sigma(x)$ καὶ μία μόνη ἱκανοποιοῦσα εἰς τὴν σχέσιν (1) συνεχὴς διὰ τὴν τιμὴν $x=\alpha$ καὶ τοιαύτη ὥστε $\sigma(\alpha)=\beta$.

Ζητῶ ἤδη νὰ εὕρω τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως ταύτης εἰς τὸ σημεῖον (α, β) ἀπ' εὐθείας ἐκ τῆς (1), χωρὶς τουτέστι νὰ εὑρεθῇ ἡ $\sigma(x)$.

Ἔστω ὅτι εἰς αὔξησιν τινὰ δx τῆς μεταβλητῆς x ἀντιστοιχεῖ αὔξησίς τις τῆς συναρτήσεως δy· ἐπειδὴ [2] τὸ σημεῖον $(\alpha+\delta x, \beta+\delta y)$ θὰ εἶναι σημεῖον τῆς $F(x, y)=0$ θὰ ἔχω $F(\alpha+\delta x, \beta+\delta y)=0$· ἔχω ἐπίσης $F(\alpha, \beta)=0$· ὅθεν $F(\alpha+\delta x, \beta+\delta y)-F(\alpha, \beta)=0$. Ἀλλ' ἀφ' ἑτέρου τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος ταύτης ἰσοῦται πρὸς

$$F'_x(\alpha, \beta)\,\delta x+F'_y(\alpha, \beta)\,\delta y+\vartheta$$

ὅπου τὸ ϑ εἶναι ἀπειροστὸν ἀνωτέρας τάξεως ἢ τὸ δx (διότι ἡ $F(x, y)$ εἶναι συνάρτησις διαφορίσιμος εἰς τὸ σημεῖον (α, β))· ἔχω ἐπομένως:

$$F'_x(\alpha, \beta)\delta x+F'_y(\alpha, \beta)\,\delta y+\vartheta=0 \qquad \text{ὅθεν}$$

$$\frac{\delta y}{\delta x}=-\frac{F'_x(\alpha, \beta)}{F'_y(\alpha, \beta)}-\frac{\vartheta}{F'_y(\alpha, \beta)\,\delta x}.$$

ὅταν ὅμως τὸ δx τείνῃ πρὸς τὸ μηδὲν ὁ λόγος $\vartheta : \delta x$ τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ἐξ οὗ:

---

[1] Ἡ αὐτὴ ἐξίσωσις ὁρίζει προφανῶς τὸ x ὡς συνάρτησιν τοῦ y.

[2] Ὑποθέτω ὅτι τὸ σημεῖον $(\alpha+\delta x, \beta+\delta y)$ εἶναι σημεῖον τῆς περιοχῆς εἰς τὴν ὁποίαν ὑπάρχει ἡ συνάρτησις $y=\sigma(x)$.

$$y'_x = \text{ορ}\frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{F'_x(\alpha, \beta)}{F'_y(\alpha, \beta)}.$$

τουτέστιν ἡ παράγωγος τῆς πεπλεγμένης συναρτήσεως ἰσοῦται πρὸς τὸ πηλίκον τῶν δύο μερικῶν παραγώγων ληφθὲν μετὰ τοῦ ἀντιθέτου σημείου· διαιρετέος εἶναι τὸ F'_x.

Ἀσκήσεις

1) Δίδεται συνάρτησις $z=\sigma(x, y)$ ἡ ὁποία εἰς τὸ σημεῖον $(0, 0)$ λαμβάνει τὴν τιμὴν 0· διὰ πᾶν δὲ ἄλλο σημεῖον (x, y) λαμβάνει τιμὴν ὁριζομένην ἐκ τῆς σχέσεως $y=\frac{x^2y-xy^2}{x^2+y^2}$. Ζητοῦνται αἱ τιμαὶ z'_x, z'_y εἰς τὴν ἀρχήν.

2) Ἔστω ὅτι ἡ $z=\sigma(x, y)$ εἶναι ὁμογενὴς ν βαθμοῦ· δηλ. ἔστω ὅτι ἔχω ἐκ ταὐτότητος $\sigma(Kx, Ky)=K^{\nu}\sigma(x, y)$ οἱουδήποτε ὄντος τοῦ K. Νὰ δεχθῆ ὅτι:

$$\sigma'_{kx}(Kx, Ky)=K^{\nu-1}\sigma'_x(x, y) \qquad \text{καὶ ὅτι}$$

$$x.\sigma'_x(x, y)+y.\sigma'_y(x, y)=\nu.\sigma(x, y).$$

3) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ μερικαὶ παράγωγοι ὡς πρὸς x καὶ y τῶν συναρτήσεων πx^2y, e^{xy}, τοξ εφ $\frac{y}{x}$, $\log$ εφ $\frac{y}{x}$ $\sigma(\alpha x+\beta y+\gamma)$ $\sigma(\alpha\eta\mu x+\beta\sigma\upsilon\nu y+\gamma\log x+\delta)$, $\frac{1}{yx}$ $\sigma\left(\frac{\alpha+x}{\beta+y}\right)$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

4) Νὰ δειχθῆ ὅτι ἐκ τῆς σχέσεως $z=\frac{\sqrt{X}\ \sqrt{Y}}{x-y}$, ὅπου

$X=\alpha x^2+2\beta x+\gamma$, $Y=\alpha y^2+2\beta y+\gamma$ ἕπεται ἡ σχέσις

$$\frac{2dz}{\alpha-z^2}=\frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{dy}{\sqrt{Y}}.$$

5) Νὰ εὑρεθῆ ἡ y'_x ὅταν $y=u^{v}$, ὅπου $u=\sigma(x)$ καὶ $v=\varphi(x)$.

6) Νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ y'_x, y''_x, ὅταν 1) $\alpha\sigma\upsilon\nu^2x+\beta\sigma\upsilon\nu^2y=0$.

$$2)\ \sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}-\sqrt{\alpha y^2+2\beta y+\gamma}=c(x-y)$$

$$3)\ y=1+xe^y \qquad 4)\ y\,\text{τοξ εφ}\,x-y^2+x^2=0.$$

7) Νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ y'_x, y''_x, ... τῆς συναρτήσεως y τοῦ x τῆς ὁριζομένης ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$\log\sqrt{x^2+y^2}=\text{τοξ εφ}\frac{y}{x}.$$

8) Νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ y'_x, y''_x, . . . τῆς συναρτήσεως y τοῦ x τῆς ὁριζομένης ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$y^3-3y\,\text{τοξ ημ}\,x+x^3=0.$$

9) Σύνολον σημείων ἑκάστου τῶν ὁποίων μία τοὐλάχιστον συντεταγμένη ε:ναι ρητὴ δὲν εἶναι κλειστόν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΧ.

ΑΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Ὡρισμένα ὁλοκληρώματα

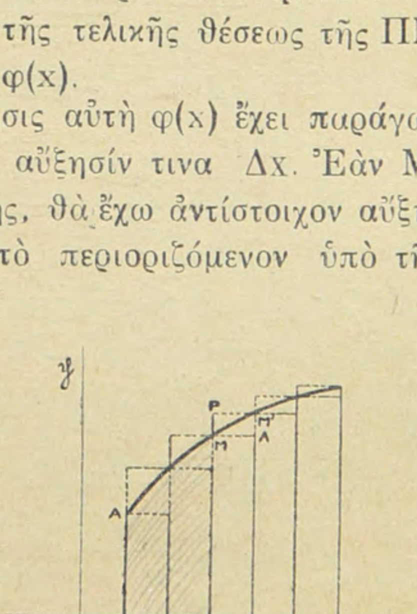
204. Ἔστω ἡ $y=\sigma(x)$ συνάρτησις συνεχὴς εἴς τι διάστημα (α, β). Ζητήσωμεν ἐὰν ὑπάρχῃ συνάρτησις $\varphi(x)$ ἔχουσα τὴν ἑξῆς ἰδιότητα· «ἡ παράγωγος αὐτῆς $\varphi'(x)$ νὰ λαμβάνῃ δι᾿ ἑκάστην τιμὴν τοῦ διαστήματος (α, β) τὴν τιμὴν τὴν ὁποίαν λαμβάνει ἡ $\sigma(x)$»· ἤτοι διὰ τὰς τιμὰς τοῦ (α, β) ἡ παράγωγος $\varphi'(x)$ νὰ εἶναι $\sigma(x)$.

Ἀποδεικνύεται ὅτι ὑπάρχει τοιαύτη συνάρτησις. Ἡ ἀπόδειξις εἰς τὴν ὁποίαν ἠρκοῦντο οἱ παλαιότεροι καὶ ἡ ὁποία σήμερον δὲν δύναται νὰ θεωρηθῇ ἱκανοποιητική, ὠθεῖ ὅμως εἰς τὴν καθαρῶς ἀναλυτικὴν ἀπόδειξιν, εἶναι ἡ ἑξῆς :

Κατασκευάσωμεν μίαν καμπύλην $y=\sigma(x)$. Ἔστω Α τὸ σημεῖον $(\alpha, \sigma(\alpha))$ καὶ Μ, τὸ σημεῖον $(x, \sigma(x)$. Τὸ ἐμβαδὸν τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ τῶν τεταγμένων ΘΑ, ΠΜ, θεωρῶ ὡς συνάρτησιν τοῦ x. ἤτοι ὑποθέτων τὴν ΘΑ σταθερὰν καὶ τὴν ΠΜ κινητὴν θεωρῶ τὸ ἐμβαδὸν ἐξαρτώμενον ἐκ τῆς τελικῆς θέσεως τῆς ΠΜ ἑπομένως ἐκ τοῦ (ΟΠ). Καλέσωμεν αὐτὸ $\varphi(x)$.

Πρόκειται ν᾿ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ συνάρτησις αὐτὴ $\varphi(x)$ ἔχει παράγωγον τὴν $\sigma(x)$. Δίδω πρὸς τοῦτο εἰς τὸ x αὔξησίν τινα Δx. Ἐὰν Μ′ εἶναι τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον τῆς καμπύλης, θὰ ἔχω ἀντίστοιχον αὔξησιν τοῦ ἐμβαδοῦ, τὸ ἐμβαδὸν ΠΜΜ′Π′ τὸ περιοριζόμενον ὑπὸ τῆς καμπύλης ΜΜ′ καὶ τῶν ΠΜ, Π′Μ′, ΠΠ′.

Παρατηρῶ ἤδη ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦτο περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου ΠΜΛΠ′ καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου ΠΡΜ′Π′, ἤτοι μεταξὺ τοῦ $y.\Delta x$ καὶ τοῦ $(y+\Delta y)\Delta x$· ἑπομένως θὰ εἶναι $(y+\vartheta.\Delta y)\Delta x$ ὅπου $0<\vartheta<1$· ὥστε $\Delta\varphi(x)=(y+\vartheta.\Delta y)\Delta x$



α, σ(α)

x, σ(x)

ἢ καὶ $\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}=y+\vartheta\Delta y.$

ὅθεν $\quad$ $\text{ορ}\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}=y$ $\quad$ ἤτοι $\frac{d\varphi}{dx}=\sigma(x).$

Ὡς πρὸς τὸν τρόπον τῆς ἀνωτέρω ἀποδείξεως παρατηρῶ ὅτι κάμνω λόγον περὶ ἐμβαδοῦ χωρὶς νὰ δώσω ὁρισμὸν εἰς τὸ ἐμβαδόν· τοιοῦτος ὁρισμὸς δίδεται ἀφοῦ σχηματισθῇ ἀπ᾽ εὐθείας ἀναλυτικῶς ἡ ἔννοια τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος· παρατηρῶ ἐπίσης ὅτι ἐθεώρησα γραφικὴν κατασκευὴν καμπύλης $y=\sigma(x)$ χωρὶς νὰ λάβω ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι ἡ κατασκευὴ αὕτη προϋποθέτει τὴν πλήρωσιν συνθηκῶν τινων, τῶν ὁποίων μία εἶναι καὶ ἡ συνέχεια εἰς διάστημά τι· ὑπάρχουσι μάλιστα καὶ συνεχεῖς συναρτήσεις δι᾽ ἃς δὲν ὑπάρχει διάστημα εἰς τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι αὗται αὔξουσαι ἢ ἐλαττούμεναι· αἱ τοιαῦται συναρτήσεις εἶναι ἀδύνατον γραφικῶς νὰ παρασταθῶσι.

205. ***Ἀναλυτικὸς ὁρισμὸς τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος.***— Ἔστω $\sigma(x)$ περατωμένη συνάρτησις συνεχὴς ἢ ἀσυνεχὴς εἰς τὸ διάστημα (α, β), ὅπου $\alpha<\beta$· ἂς θεωρήσω διαίρεσιν τινὰ τοῦ διαστήματος (α, β) εἰς ν διαστήματα

$$(x_0, x_1), \quad (x_1, x_2), \ldots \quad (x_\nu, x_{\nu+1}) \qquad (\Delta_\nu)$$

(ἔθεσα χάριν συμμετρίας $\alpha=x_0$, $\beta=x_{\nu+1}$)· καλῶ M_i τὸ ἀνώτερον πέρας καὶ μ_i τὸ κατώτερον πέρας τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$ εἰς τὸ διάστημα (x_i, x_{i+1}) καὶ σχηματίζω τὰ ἑξῆς ἀθροίσματα

$$S=M_0(x_1-x_0)+M_1\,.\,(x_2-x_1)+\ldots+M_\nu\,.\,(x_{\nu+1}-x_\nu)$$
$$s=\mu_0(x_1-x_0)+\mu_1(x_2-x_1)+\ldots+\mu_\nu\,.\,(x_{\nu+1}-x_\nu)\text{·}$$

ἔχω προφανῶς $S>s$· (θὰ ἦτο $S=s$, ἐὰν ἡ $\sigma(x)$ ἦτο σταθερὰ εἰς τὸ διάστημα (α, β).

Ἐὰν M καὶ μ εἶναι τὸ ἀνώτερον καὶ κατώτερον πέρας τῆς $\sigma(x)$ εἰς τὸ διάστημα (α, β) θὰ ἔχω προφανῶς ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν τὸ S νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ

$$\mu(x_1-x_0)+\mu(x_2-x_1)+\ldots+\mu(x_{\nu+1}-x_\nu)=\mu(\beta-\alpha)$$

οὔτε τὸ s νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $M\,.\,(\beta-\alpha)$.

Εἰς ἕκαστον τρόπον διαιρέσεως τοῦ διαστήματος (α, β) θὰ ἀντιστοιχῇ ἄθροισμά τι S (σχηματιζόμενον κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον) καὶ ἄθροισμά τι s.

Δύναμαι οὕτω νὰ νοήσω σύνολον (Γ) τοῦ ὁποίου ἕκαστον στοιχεῖον εἶναι ἓν ἄθροισμα τοιοῦτον S· ἐπειδὴ δὲ δὲν ὑπάρχει S μικρότερον τοῦ μ(β—α), τὸ σύνολον (Γ) θὰ ἔχῃ κατώτερον πέρας· καλῶ τοῦτο I. Καθ' ὅμοιον τρόπον διακρίνω ὅτι καὶ τὸ σύνολον τῶν s θὰ ἔχῃ ἀνώτερον πέρας· καλῶ τοῦτο I′. Θ' ἀποδείξω ἤδη τὸ ἑξῆς **θεώρημα τοῦ** ***Darboux***.

Τὸ ἄθροισμα S ***τείνει πρὸς τὸ I καὶ τὸ*** s ***πρὸς τὸ τὸ I′, ὅταν ὁ ἀριθμὸς ν τῶν μερικῶν διαστημάτων αὐξάνεται ἀπεριορίστως, οὕτως ὥστε τὸ δ νὰ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν·*** [δ καλῶ τὸ μεγαλύτερον (ἢ μηδενὸς μικρότερον) τῶν μερικῶν διαστημάτων ἑκάστης διαιρέσεως· π. χ. τὸ δ διὰ τὴν διαίρεσιν (Δ_ν) εἶναι ἡ μεγαλυτέρα τῶν διαφορῶν $x_{i+1}-x_i$.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου κάμνω τὰς ἑξῆς παρατηρήσεις.

1) Δύναμαι διὰ τὴν ἀπόδειξιν νὰ ὑποθέσω ὅτι τὸ κατώτερον πέρας μ τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ διάστημα (α, β) εἶναι θετικόν· διότι ἐὰν $\mu<o$ θεωρῶ ἀντὶ τῆς σ(x) τὴν σ(x)+C· τότε τοῦ συνόλου τοῦ ἔχοντος ὡς στοιχεῖα τὰ νέα ἀθροίσματα θὰ εἶναι προφανῶς I+C (β—α) τὸ κατώτερον πέρας· καὶ ὅταν ἀποδείξω ὅτι ὅριον τοῦ S+C (β—α) εἶναι τὸ I+C (β—α), ἔχω καὶ ὅτι ορS=I.

2) Ἔστω τυχοῦσα διαίρεσις Δ_ν καὶ ἔστω ὅτι ἕκαστον διάστημα (x_i, x_{i+1}) διαιρῶ εἰς δύο, παρεμβάλλων μεταξὺ τῶν σημείων διαιρέσεως x_i, x_{i+1} νέον σημεῖον διαιρέσεως τὸ α_i. θὰ ἔχω τοιουτοτρόπως νέαν διαίρεσιν τὴν

$$(\Delta)\quad (x_0,\ \alpha_0),\ (\alpha_0,\ x_1),\ (x_1,\ \alpha_1),\ (\alpha_1,\ x_2),\ \ldots$$
$$(x_i,\ \alpha_i),\ (\alpha_i,\ x_{i+1}),\ \ldots,\ (\alpha_\nu,\ x_{\nu+1})$$

Ἔστω M_i' τὸ ἀνώτερον πέρας τῆς σ(x) εἰς τὸ διάστημα (x_i, α_i) καὶ M_i'' τὸ ἀνώτερον πέρας εἰς τὸ (α_i, x_{i+1})· παρατηρῶ ὅτι τὸ M_i ὡς ἀνώτερον πέρας εἰς ὁλόκληρον τὸ διάστημα (x_i, x_{i+1}) θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ μεγαλύτερον ἐκ τῶν M_i', M_i''· ἑπομένως

$$(\alpha_i-x_i)\,M_i'+(x_{i+1}-\alpha_i)M''_i \leq (\alpha_i-x_i)M_i+(x_{i+1}-\alpha_i)\,M_i$$
$$\leq (x_{i+1}-x_i)M_i$$

ὅθεν τὸ ἄθροισμα S τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν διαίρεσιν Δ θὰ εἶναι μικρότερον (ἢ ἴσον) τοῦ ἀθροίσματος τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν διαίρ. Δ_ν.

3) Κάμνω ἤδη ὑπόθεσιν ἐπιτρεπομένην συμφώνως πρὸς τὴν πρώτην παρατήρησιν ὅτι τὸ κατώτερον πέρας μ εἶναι θετικόν· ὁπότε θὰ εἶναι προφανῶς θετικὸν καὶ πᾶν ἀνώτερον πέρας τῆς $\sigma(x)$ εἰς οἱονδήποτε διαστημα μιᾶς διαιρέσεως (α, β)· ἐπομένως θὰ εἶναι καὶ $M_i > 0$.

Ἐὰν λάβω ἤδη τυχοῦσαν διαίρεσιν τὴν (Δ_ν) καὶ θεωρήσω μερικὰ διαστήματα περιεχόμενα εἰς τὰ τῆς (Δ_ν)· π.χ. ἐὰν θεωρήσω τὰ διαστήματα·

$$(\beta_0, \beta'_0), (\beta_1, \beta'_1), \ldots (\beta_i, \beta'_i), \ldots (\beta_\nu, \beta'_\nu) \quad \text{ὅπου}$$
$$x_0 < \beta_0 < \beta'_0 < x_1 < \beta_1 < \beta'_1 < x_2 \ldots x_i < \beta_i < \beta'_i < x_{i+1}, \ldots$$

καὶ σχηματίσω τὸ ἄθροισμα S_1

$$(\beta'_0 - \beta_0)B_0 + (\beta'_1 - \beta_1)B_1 + \ldots (\beta'_\nu - \beta_\nu)B_\nu$$

ὅπου B_i εἶναι τὸ ἀνώτερον πέρας τῆς $\sigma(x)$ εἰς τὸ διάστημα (β_i, β'_i) θὰ ἔχω ὅτι $S_1 < S$ διότι ἕκαστος ὅρος τοῦ S εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἀντιστοίχου ὅρου τοῦ S_1, π. χ. ὁ $(x_1 - x_0) M_0$ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ $(\beta'_0 - \beta_0)B_0$ διότι $M_0 \geq B_0$ καὶ $x_1 - x_0 > \beta'_0 - \beta_0 > 0$. Ὁμοίως φαίνεται ὅτι καὶ ἐὰν θεωρήσω εἰς ἕκαστον τῶν διαστημάτων τῆς (Δ_ν) περισσότερα τοῦ ἑνὸς ἐσωτερικὰ διαστήματα καὶ σχηματίσω τὸ ἀντίστοιχον S_1 θὰ ἔχω πάλιν $S_1 < S$.

Διὰ ν' ἀποδείξω ἤδη τὸ θεώρημα, παρατηρῶ πρῶτον ὅτι ἀρκεῖ ν' ἀποδείξω ὅτι δοθέντος ἀριθμοῦ θετικοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ η δύναται νὰ προσδιορισθῇ θετικὸς ἀριθμὸς ε τοιοῦτος, ὥστε ὅταν διαιρέσω τὸ (α, β) εἰς διαστήματα τῶν ὁποίων τὸ μεγαλύτερον νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ε νὰ ἔχω ὡς ἀντίστοιχον ἄθροισμα S ποσότητα μικροτέραν τοῦ $I + \eta$· παρατηρῶ ὅτι ἐξ ὁρισμοῦ τὸ I εἶναι τὸ κατώτερον πέρας τῶν ἀθροισμάτων S· ἐπομένως θὰ ὑπάρχῃ (§ 13) τοιοῦτόν τι ἄθροισμα μικρότερον τοῦ $I + \frac{\eta}{2}$· ἤτοι θὰ ὑπάρχῃ διαίρεσις εἰς τὴν ὁποίαν θὰ ἀντιστοιχῇ ἄθροισμα μικρότερον τοῦ $I + \frac{\eta}{2}$· ἔστω μία τοιαύτη διαίρεσις ἡ $(\Delta\nu)$ καὶ ἔστω θ τὸ πλάτος τοῦ μικροτέρου διαστήματος· ἔστω ὅτι διαιρῶ τὸ διάστημα (α, β) εἰς διαστήματα πλάτους μικροτέρου τοῦ λθ, ὅπου $0 < \lambda < 1$ δηλ. ἔστω ὅτι θεωρῶ αὔξουσαν ἀκολουθίαν ἀριθμῶν

$$\alpha = y_0 < y_1 < y_2 \ldots, < y_\varrho = \beta$$

εἰς τὴν ὁποίαν ἡ μεγαλυτέρα τῶν διαφορῶν $y_1 - y_0$, $y_2 - y_1$, . . . νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ λϑ· εἰς τὴν διαίρεσιν αὐτὴν ϑ' ἀντιστοιχῇ ἄϑροισμά τι S· ϑὰ δείξω ὅτι δύναμαι νὰ προσδιορίσω τὸ λ οὕτως ὥστε εἰς τὴν ***τυχοῦσαν*** διαίρεσιν μὲ διαστήματα μικρότερα τοῦ λϑ νὰ ἀντιστοιχῇ ἄϑροισμα S μικρότερον τοῦ I+η. Διὰ νὰ εὕρω πῶς πρέπει νὰ προσδιορίσω τὸ λ, ἂς ὑποϑέσω πρὸς στιγμὴν ὅτι ἔδωκα εἰς τὸ λ ***τυχοῦσαν*** ϑετικὴν τιμὴν μικροτέραν τῆς μονάδος καὶ ὅτι ἐσχημάτισα διαίρεσιν (Δϱ) μὲ διαστήματα πλάτους μικροτέρου τοῦ λϑ.

π. χ. τὴν $(y_0, y_1), (y_1, y_2) \ldots (y_{\varrho-1}, y_\varrho)$.

Ἐπειδὴ $y_1 - y_0 < x_1 - x_0$ τὸ y_1 ϑὰ εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ διαστήματος (x_0, x_1)· (διότι $x_0 = y_0 = \alpha$). Τὸ y_2 ἢ ϑὰ εἶναι σημεῖον τοῦ διαστήματος (x_0, x_1) ἢ ϑὰ εἶναι σημεῖον τοῦ διαστήματος (x_1, x_2) διότι $y_2 - y_1 < x_2 - x_1$ τὸ y_3 ϑὰ ἀνήκῃ ἢ εἰς τὸ διάστημα (x_0, x_1)[1] ἢ εἰς τὸ διάστημα (x_1, x_2) ἢ εἰς τὸ διάστημα (x_2, x_3) διότι $y_3 - y_2 < x_3 - x_2$, κ.ο.κ. διακρίνω οὕτω ὅτι τὸ τυχὸν διάστημα (y_{i+1}, y_i) ἢ ϑὰ περιέχεται εἰς ἓν ἐκ τῶν διαστημάτων τῆς διαιρέσεως (Δν) ἢ ϑὰ περιέχεται εἰς διάστημα σχηματιζόμενον ἐκ δύο διαδοχικῶν διαστημάτων τῆς Δν· ἑπομένως τὸ ἀντίστοιχον εἰς τὴν διαίρεσιν (Δϱ) ἄϑροισμα S, τὸ ὁποῖον καλῶ πρὸ διάκρισιν S_1 ϑὰ εἶναι ἄϑροισμα δύο ἀϑροισμάτων· τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν ϑὰ σχηματίζεται, ὅταν προσϑέσωμεν τὰ γινόμενα, τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰ διαστήματα ὧν ἕκαστον εἶναι ἐσωτερικὸν εἰς ἓν διάστημα τῆς (Δ_ν) ἂς τὸ καλέσω S_1'· τὸ δὲ ἕτερον ϑὰ σχηματίζεται ὅταν προσϑέσω τὰ γινόμενα τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς διάστημά τι ὧν ἕκαστον δὲν εἶναι ἐσωτερικὸν εἰς ἓν διάστημα τῆς (Δν), ἀλλὰ εἰς δύο διαδοχικά· ἂς τὸ καλέσω S'_2· τὸ S'_1 συμφώνως πρὸς τὴν 3 παρατήρησιν ϑὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀϑροίσματος τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν Δν. τὸ ὁποῖον ἐδῶ σημειῶ διὰ τοῦ S· ἤτοι ϑὰ ἔχω $S_1' < S$· ὡς πρὸς τὸ S'_2 παρατηρῶ ὅτι τὸ πλῆϑος τῶν προσϑετέων ἐξ ὧν σχηματίζεται

---

[1]) Ὁπότε καὶ τὸ y_2 ϑὰ ἀνῆκεν εἰς τὸ (x_0, x_1).

δὲν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $\nu-1$ (διότι τὰ μερικὰ διαστήματα τῆς $(\Delta\nu)$ εἶναι ν τὸ πλῆθος· καὶ ἐπομένως τὰ διαστήματα τῆς $(\Delta\varrho)$ ὧν ἕκαστον μετέχει δύο διαδοχικῶν διαστημάτων τῆς $(\Delta\nu)$ εἶναι τὸ πολὺ $\nu-1$· ἀφ' ἑτέρου ἕκαστος ἐξ αὐτῶν τῶν προσθετέων εἶναι μικρότερος τοῦ γινομένου $M\cdot\lambda\vartheta$ ὅθεν $S'_2<(\nu-1)M\,\lambda\,\vartheta$ (P).

Ταῦτα ἰσχύουν οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ δοθεῖσα τιμὴ εἰς τὸ λ· ἀρκεῖ νὰ εἶναι $0<\lambda<1$.

Θέλω ὅμως ἡ δοθεῖσα τιμὴ εἰς τὸ λ νὰ εἶναι τοιαύτη ὥστε νὰ ἔχω $S'_1+S'_2<I+\eta$· (A)
καὶ ἐπειδὴ οἱανδήποτε θετικὴν τιμὴν μικροτέραν τῆς μονάδος καὶ ἂν ἔχῃ τὸ λ, θὰ ἔχω $S'_1<I+\frac{\eta}{2}$ ἕπεται ὅτι διὰ νὰ ἰσχύῃ ἡ ἀνισότης (A) ἀρκεῖ νὰ ἔχω $S'_2<\frac{\eta}{2}$· ἐπομένως δυνάμει τῆς (P) ἀρκεῖ νὰ ἔχω $(\nu-1)M\,\lambda\vartheta<\frac{\eta}{2}$ ἤτοι ἀρκεῖ νὰ ἔχω

$$\lambda<\frac{\eta}{2(\nu-1)M\,\vartheta}.$$

Ὅθεν ἀπεδείχθη ὅτι ἀρκεῖ νὰ διαιρέσω τὸ διάστημα (α,β) εἰς διαστήματα τῶν ὁποίων τὸ μεγαλύτερον νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{\eta}{2(\nu-1)M}$, ἵνα τὸ ἀντίστοιχον ἄθροισμα S εἶναι μικρότερον τοῦ $I+\eta$, ὁσονδήποτε μικρὸς καὶ ἂν εἶναι ὁ δοθεὶς θετικὸς η, ἄρα ὅρ $S=I$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ ὅτι ορs$=I'$,

206. Δίδω ἤδη τὸν ὁρισμὸν τοῦ Riemann.

Ὁλοκληρώσιμος συνάρτησις. Ὁρισμὸς τοῦ Riemann [1]. Ἡ συνάρτησις $\sigma(x)$ λέγεται ***ὁλοκληρώσιμος***, ἐὰν $I=I'$, ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, ὅταν ἡ διαφορὰ $S-s$ τείνῃ πρὸς τὸ μηδὲν τοῦ δ ($\delta=$ πλάτος τοῦ μεγαλυτέρου τῶν διαστημάτων ἑκάστης διαιρέσεως) τείνοντος πρὸς τὸ μηδέν.

Ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα. Ἔστω συνάρτησις $\sigma(x)$ ὁλοκληρώσιμος εἰς τὸ διάστημα (α,β)· δηλ. ἔστω ὅτι $I=I'$ τότε τὸ I (εἴτε τὸ I') λέ-

---

(1) Ὑπάρχει γενικώτερος ὁρισμὸς δοθεὶς ὑπὸ τοῦ Lebesgue.

γεται ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$ εἰς τὸ διάστημα (α, β) καὶ σημειοῦται :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sigma(x)\, dx.$$

Τὸ α λέγεται ***κατώτερον*** ὅριον τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος καὶ τὸ β ἀνώτερον ὅριον.

207. ***Πᾶσα συνεχὴς συνάρτησις εἰς τὸ διάστημα (α, β) εἶναι ὁλοκληρώσιμος.*** Καὶ τῳόντι μία συνάρτησις $\sigma(x)$ συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα (α, β) θὰ εἶναι (§ 110) ὁμαλῶς συνεχής· ἤτοι δοθέντος θετικοῦ τινος ἀριθμοῦ η ὁσονδήποτε μικροῦ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀριθμόν τινα δ τοιοῦτον ὥστε εἰς ἕκαστον διάστημα $<\delta$ ἡ αἰώρησις τῆς συναρτήσεως νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ η· ἔστω ὅτι διηρέθη τὸ (α, β) εἰς τοιαῦτα διαστήματα μικρότερα τοῦ δ.
π. χ. ἔστω ἡ (Δ_ν) μία τοιαύτη διαίρεσις καὶ ἔστω ὅτι σχηματίζω τὰ ἀντίστοιχα S καὶ s· θὰ ἔχω

$$S-s=\sum_{i=1}^{\nu} (M_i-\mu_i)(x_{i+1}-x_i)\cdot$$

ἐπειδὴ ὅμως $M_i-\mu_i$ εἶναι ἡ αἰώρησις τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ διάστημα (x_i, x_{i+1}) καὶ ἐπειδὴ ὅλαι αἱ αἰωρήσεις εἶναι μικρότεραι τοῦ η

θὰ ἔχω $\quad S-s<\eta\,[(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\ldots+(x_{\nu+1}-x_\nu)]$

ἢ καὶ $\quad S-s<\eta(\beta-\alpha) \qquad$ (διότι $x_0=\alpha, \quad x_{\nu+1}=\beta$)

ἀλλὰ τὸ η δύναται νὰ ὑποτεθῇ ὅσον θέλω μικρὸν

ἄρα $\quad \text{ορ}(S-s)=0 \quad$ ἢ καὶ $\text{ορ}S=\text{ορ}s$ ἢ $I=I'$.

Παρατήρησις. Ἐὰν ἀναχωρήσω ἀπὸ τὴν κοινὴν ἔννοιαν τοῦ ἐμβαδοῦ καὶ ἀπὸ τὴν κοινὴν ἔννοιαν τῆς καμπύλης παρατηρῶ ὅτι τὸ ἀνωτέρω βάδισμα πρὸς ἀναλυτικὸν ὁρισμὸν τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος ὁμοιάζει μὲ τὸ βάδισμα δι' οὗ ὁρίζεται γεωμετρικῶς τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα ὡς ἐμβαδὸν μικτογράμμου χωρίου, ὅπου χωρίζομεν τὸ μικτόγραμμον χωρίον διὰ παραλλήλων πρὸς τὴν τεταγμένην εἰς ἄλλα μικρότερα τοιαῦτα· ἕκαστον τούτων περιλαμβάνεται μεταξὺ δύο ὀρθογωνίων κ.λ.π. ὅπως π. χ. τὸ ΜΠΠ'Μ' (σχῆμα σελ. 239) περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν ὀρθογωνίων ΠΠ'ΛΜ καὶ ΠΠ'Μ'Ρ· ἐὰν θέσω (ΟΠ)$=x_i$ καὶ (ΟΠ')$=x_{i+1}$ καὶ συμφώνως πρὸς τὸ σχῆμα θεωρήσω ἐλαχίστην τεταγμένην εἰς τὸ διάστημα ΠΠ' τὴν ΠΜ καὶ μεγίστην τὴν Π'Μ' θὰ ἔχω (ΠΠ'ΛΜ)$=(x_{i+1}-x_i)\,\mu_i$ καὶ (ΠΠ'Μ'Ρ)$=(x_{i+1}-x_i)M_i$ ἤτοι ἕνα ὅρον τοῦ ἀθροίσματος s (σελ. 240) καὶ ἕνα ὅρον τοῦ ἀθροίσματος S ἤτοι τὸ s ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν ὀρθογωνίων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸ μικτόγραμμον χωρίον τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὸ ἐμβαδόν, τὸ δὲ S ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν περιγεγραμμένων ὀρθογωνίων εἰς τὸ μικτόγραμμον χωρίον τὸ ὁποῖον θὰ ἔχῃ, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ διαίρεσις, ἐμβαδὸν περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῶν δύο ἀθροισμάτων κ.λ.π.

208. Διὰ νὰ δώσω τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος ἀνεχώρησα ἀπὸ τὴν ὑπόθεσιν $\alpha<\beta$. Ἔστω ἤδη ὅτι $\alpha>\beta$· δύναμαι πάλιν νὰ ἐργασθῶ ὅπως καὶ προηγουμένως (§ 205) καὶ νὰ δώσω τὸν αὐτὸν ὁρισμὸν εἰς τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα

$\int_\alpha^\beta \sigma(x)\,dx$. ἀρκεῖ μόνον νὰ λαμβάνω ὡς $x_1, x_2, \ldots x_\nu$ ἀριθμοὺς

τοιούτους ὥστε $\alpha>x_1>x_2\ldots,>x_\nu>\beta$ καὶ νὰ λαμβάνω, ἐννοεῖται, τὰς ἐκεῖ ἀνισότητας (§ 205) ἀντιστρόφως· ἤτοι :

***Ὁ ὁρισμὸς* (§ 206) *ἐπεκτείνεται καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν* $\alpha>\beta$.**

209. Ἔστω ἤδη ὅτι ἐργαζόμεθα ὅπως καὶ εἰς τὰς §, 205, § 207 διὰ νὰ ὁρίσωμεν τὸ

$\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx$ καὶ τὸ $\int_\beta^\alpha \sigma(x)dx$ φροντίζοντες ὅμως ὅπως εἰς ἑκάστην

διαίρεσιν διὰ τὸ πρῶτον ἀντιστοιχεῖ διαίρεσις διὰ τὸ δεύτερον μὲ τὰ αὐτὰ σημεῖα διαιρέσεως· π.χ. εἰς τυχοῦσαν διαίρεσιν $\alpha, x_1, x_2, \ldots x_\nu, \beta$ γενομένην διὰ τὸ πρῶτον λαμβάνεται ἡ διαίρεσις $\beta, x_\nu, \ldots x_2, x_1, \alpha$ διὰ τὸ δεύτερον· τότε εἰς τυχὸν ἄθροισμα (διὰ τὸ πρῶτον) $(x_1-\alpha)\mu_0+(x_2-x_1)\mu_1+\ldots+(\beta-x_\nu)\mu_\nu$ θὰ ἀντιστοιχῇ διὰ τὸ δεύτερον τὸ ἄθροισμα

$$(x_\nu - \beta)\mu_\nu + \ldots + (x_1 - x_2)\mu_1 + (\alpha - x_1)\mu_1$$

ὅπερ προφανῶς εἶναι ἀντίθετον τοῦ πρώτου· ὅμοια προφανῶς θὰ ἔχω καὶ ἐὰν ἀντικαταστήσω τὰ μ_i διὰ τῶν M_i· ὅθεν εὐκόλως ἐξάγεται διὰ τῆς διαβάσεως εἰς τὸ ὅριον ὅτι

$$(\mathrm{K}) \qquad \int_\alpha^\beta \sigma(x)dx = -\int_\beta^\alpha \sigma(x)dx.$$

210. Ἔστω ὅτι ἡ $\sigma(x)$ εἶναι ὁλοκληρώσιμος εἰς τὸ διάστημα (α,β) δηλ. ὅτι $I = I'$· ἔστω δὲ ὅτι ἀντὶ τῶν ἀθροισμάτων τῆς § 205 θεωρῶ ἀθροίσματα τῆς μορφῆς

$$S_m = \sigma(z_0)(x_1 - x_0) + \sigma(z_1)(x_2 - x_1) + \ldots + \sigma(z_\nu)(x_{\nu+1} - x_\nu)$$

ὅπου $x_i < z_i < x_{i+1}$· θὰ ἔχω τότε προφανῶς

$$S \geqq S_m \geqq s$$

ὅθεν

$$I \geqq o\varrho S_m \geqq I'$$

ἀλλὰ

$$I = I' \text{ ἐπομένως } o\varrho S_m = I = \int_\alpha^\beta \sigma(x)dx$$

ἤτοι τὸ $\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx$ ἰσοῦται πρὸς τὸ ὅριον τοῦ S_m, ὅταν τὸ πλάτος τῶν διαστημάτων (x_i, x_{i+1}) τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, ἄρα ὁ δοθεὶς ὁρισμὸς (§ 205, 206) λαμβάνει καὶ τὴν ἑξῆς μορφήν:

Καλεῖται ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα τῆς $\sigma(x)$ ἀπὸ α ἕως β καὶ σημειοῦται διὰ τοῦ

$$\int_\alpha^\beta \sigma(x)\,dx$$

τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος

$$(x_1-\alpha)\sigma(z_1)+(x_2-x_1)\sigma(z_2)+\ldots+(\beta-x_\varrho)\sigma(z_{\varrho+1})$$

ὅπου ὡς $z_1, z_2, \ldots z_{\varrho+1}$, ***λαμβάνονται οἱοιδήποτε ἀριθμοὶ τῶν διαστημάτων*** $(\alpha, x_1), (x_1, x_2), \ldots$ ***αἱ δὲ ὑποδιαιρέσεις*** (¹) ***γίνονται κατὰ νόμον αὐθαίρετον, ὑπὸ μόνον τὸν περιορισμὸν τὰ διαστήματα νὰ τείνουν πρὸς τὸ μηδέν.***

Παράδειγμα. Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=x^\mu$ ὅπου μ τυχὼν ἀριθμὸς διάφορος τῆς ἀρνητικῆς μονάδος. Θὰ ζητήσωμεν τὸ $\int_\alpha^\beta x^\mu\, dx$ ὅπου $\beta>\alpha>0$. Κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν οἱονδήποτε νόμον ὑποδιαιρέσεως τοῦ διαστήματος α, β καὶ ὅτι λαμβάνομεν οἱανδήποτε τιμὴν τῆς συναρτήσεως δι' ἕκαστον διάστημα. Δυνάμεθα ἐπομένως νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ὑποδιαιροῦμεν τὸ διάστημα α, β εἰς τρόπον ὥστε νὰ παρεμβάλωμεν 1, 2, ... ν—1 . . . μέσους γεωμετρικοὺς μεταξὺ τῶν α, β· δύναμαι ἐπομένως νὰ νοήσω ὡς ὑποδιαίρεσιν ἐκείνην τὴν ὁποίαν λαμβάνω, ὅταν θεωρήσω ὡς ἀριθμοὺς χωρίζοντας τὰ ν διαστήματα τούς:

$$\alpha,\ \alpha(1+\omega),\ \alpha(1+\omega)^2,\ \alpha(1+\omega)^3,\ \ldots\ \alpha(1+\omega)^{\nu-1},\ \beta$$

ὅπου ὁ ω εἶναι τοιοῦτος ὥστε $\alpha(1+\omega)^\nu=\beta$· ὅπως ἐπίσης δύναμαι νὰ ὑποθέσω ὅτι ὡς $z_1, z_2, z_3 \ldots z_\nu$ λαμβάνω τοὺς ἀριθμοὺς α, $\alpha(1+\omega)$, $\alpha(1+\omega)^2 \ldots$ θὰ ἔχω τότε ὅτι

$$\begin{aligned}\Sigma_\nu=&(\alpha(1+\omega)-\alpha)\alpha^\mu+(\alpha(1+\omega)^2-\alpha(1+\omega))\alpha^\mu(1+\omega)^\mu+\\&+[\alpha(1+\omega)^3-\alpha(1+\omega)^2]\alpha^\mu(1+\omega)^{2\mu}+\ldots\ldots\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+[\alpha(1+\omega)^7-\alpha(1+\omega)^{7-1}]\,\alpha^\mu(1+\omega)^{(7-1)\mu}+\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+[\alpha(1+\omega)^\nu-\alpha(1+\omega)^{\nu-1}]\alpha^\mu(1+\omega)^{(\nu-1)\mu}\end{aligned}$$

(¹) Ἐννοεῖται ὅτι ἐὰν $\alpha<\beta$ λαμβάνεται $\alpha<x_1<x_2\ldots<x_\varrho<\beta$, ἐὰν δὲ $\alpha>\beta$ λαμάνεται $\alpha>x_1>x_2\ldots>x_\varrho>\beta$

ἢ καὶ

$$\Sigma_\nu = \alpha^{\mu+1}\omega[1+(1+\omega)^{\mu+1}+(1+\omega)^{2(\mu+1)}+\dots$$
$$\dots+(1+\omega)^{(\gamma-1)(\mu+1)}+\dots+(1+\omega)^{(\nu-1)(\mu+1)}]=$$

$$=\alpha^{\mu+1}\omega\frac{(1+\omega)^{\nu(\mu+1)}-1}{(1+\omega)^{\mu+1}-1}$$

ὅθεν λαμβάνων ὑπ᾿ ὄψιν ὅτι $\alpha(1+\omega)^\nu=\beta$ ἔχω:

$$\Sigma_\nu=(\beta^{\mu+1}-\alpha^{\mu+1})\frac{\omega}{(1+\omega)^{\mu+1}-1}$$

Παρατηρῶ ἤδη ὅτι ὅταν τὰ διαστήματα τείνουν πρὸς τὸ μηδέν, ὁ ἀκέραιος ν τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον καὶ ὁ ω τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ὁπότε ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος $\frac{\omega}{(1+\omega)^{\mu+1}-1}$ τείνουν πρὸς τὸ μηδέν· λαμβάνων τότε τὰς παραγώγους πρὸς ω (§ 165) ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαστοῦ εὑρίσκω ὡς ὅριον τοῦ κλάσματος τὸ $\frac{1}{\mu+1}$ ὅθεν:

$$\text{ορ}\Sigma\nu=\frac{\beta^{\mu+1}-\alpha^{\mu+1}}{\mu+1}$$

ἤτοι

$$\int_\alpha^\beta x^\mu\,dx=\frac{\beta^{\mu+1}-\alpha^{\mu+1}}{\mu+1}.$$

Ἰδιότητες τῶν ὡρισμένων ὁλοκληρωμάτων.

211. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος (§ 210) ἕπεται ἡ ταὐτότης

$$(1)\qquad \int_\alpha^\gamma \sigma(x)dx+\int_\gamma^\beta \sigma(x)dx=\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx.$$

Καὶ τῷ ὄντι, ἔστω κατ᾿ ἀρχὰς ὅτι τὸ γ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν α καὶ β· ἐπειδὴ (§ 210) καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν νοηθῇ ὅτι γίνονται αἱ ὑποδιαιρέσεις τοῦ διαστήματος (α, β) ἔχω πάντοτε τὸ αὐτὸ ὅριον $\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx$, δύναμαι νὰ νοήσω ὅτι τὸ ὑποδιαιρῶ τοιουτοτρόπως ὥστε πάντοτε τὸ γ νὰ εἶναι σημεῖον ὑποδιαιρέσεως δηλ. ἔστω ὅτι οἱ ἀριθμοὶ α, x_1, x_2, . . . x_ν, β ὁρίζουν μίαν οἱανδήποτε ὑποδιαίρεσιν· ὑποθέτω ὅτι πάντως τὸ γ θὰ εἶναι ἀριθμός τις ἐξ αὐτῶν· ἀλλὰ τότε καθίσταται προφανὴς ἡ ταὐτότης (1).

Ἔστω ἤδη ὅτι δὲν περιλαμβάνεται τὸ γ μεταξὺ τῶν α καὶ β. π. χ. ἔστω α<β<γ· ἔχω κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν

$$\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx + \int_\beta^\gamma \sigma(x)dx = \int_\alpha^\gamma \sigma(x)dx$$

ἀλλὰ (§ 209) $\int_\beta^\gamma \sigma(x)dx = -\int_\gamma^\beta \sigma(x)dx$· ὅθεν καὶ πάλιν

$$\int_\alpha^\beta = \int_\alpha^\gamma + \int_\gamma^\beta .$$

β') Ἐκ τοῦ τύπου (Κ) τῆς § 209 ἕπεται ἡ ταὐτότης

$$\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx + \int_\beta^\alpha \sigma(x)d\ \ = 0.$$

γ') Ἐκ τῶν δύο τούτων ἰδιοτήτων (α', β') ἕπεται ὅτι

$$\int_\alpha^\gamma \sigma(x)dx + \int_\gamma^\beta \sigma(x)dx + \int_\beta^\alpha \sigma(x)dx = 0$$

ἤτοι ἔχομεν καὶ ἐδῶ πρότασιν ἀνάλογον μὲ τὴν πρότασιν τῆς Ἀναλ. Γεωμετρίας, τὴν ἐκφραζομένην διὰ τῆς ἰσότητος $(\alpha\beta)+(\beta\gamma)+(\gamma\alpha)=0$ ἡ ὁποία ἀληθεύει οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ σχετικὴ πρὸς ἄλληλα θέσις τῶν α, β, γ κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος.

δ') Ἐὰν τὴν ὑπὸ τὸ σύμβολον τῆς ὁλοκληρώσεως συνάρτησιν σ(x) ἀντικαταστήσω μὲ τὸ kσ(x), ὅπου k σταθερὰ ποσότης, θὰ ἔχω :

$$\int_{\alpha}^{\beta} k\,\sigma(x)dx = k\int_{\alpha}^{\beta} \sigma(x)dx.$$

Ἤτοι ἂν πολλαπλασιασθῇ ἡ ὑπὸ τὸ ὁλοκλήρωμα συνάρτησις ἐπὶ σταθερὸν ἀριθμὸν πολλαπλασιάζεται τὸ ὁλοκλήρωμα ἐπὶ τὸν αὐτὸν σταθερὸν ἀριθμόν.

Δηλαδὴ πᾶς σταθερὸς παράγων ὑπὸ τὸ σύμβολον τῆς ὁλοκληρώσεως δύναται νὰ τεθῇ ὡς παράγων ἐκτὸς τοῦ συμβόλου τῆς ὁλοκληρώσεως.

ε′) Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος ἕπεται ὅτι:

$\int_{\alpha}^{\beta} [\sigma(x)+\varphi(x)]\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} \sigma(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)dx$· ὑποθέτομεν ὅτι $\sigma(x)$ καὶ $\varphi(x)$ εἶναι συναρτήσεις συνεχεῖς εἰς τὸ πεπερασμένον διάστημα (α, β). Καὶ γενικῶς ἐὰν $\sigma_1(x)$, $\sigma_2(x)\ldots\sigma_\varrho(x)$ εἶναι συναρτήσεις συνεχεῖς εἰς τὸ διάστημα (α, β) καὶ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots \lambda_\varrho$ ἀριθμοὶ σταθεροί, θὰ ἔχωμεν:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \Sigma\lambda_\nu\sigma_\nu(x)dx = \Sigma\lambda_\nu \int_{\alpha}^{\beta} \sigma_\nu(x)dx \qquad (\nu=1,2,\ldots\varrho).$$

στ′) Ἔστωσαν δύο συναρτήσεις $\sigma(x)$ καὶ $\varphi(x)$ τοιαῦται ὥστε διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ διαστήματος (α, β) νὰ εἶναι $\varphi(x)<\sigma(x)$ καὶ ἔστω $\alpha<\beta$· ἐξ ὁρισμοῦ ἔχω (§ 210).

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sigma(x)dx = o\varrho[(x_1-\alpha)\sigma(z_1)+(x_2-x_1)\sigma(z_2)+\ldots$$
$$+(x_\nu-x_{\nu-1})\sigma(z_\nu)+\ldots+(\beta-x_\varrho)\,\sigma(z_{\varrho+1})]$$

(ὅπου βεβαίως τὸ ρ αὐξάνει ἀπὸ ὑποδιαιρέσεως εἰς ὑποδιαίρεσιν, ὡς ἐπίσης ἀλλάσουν καὶ τὰ $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$).

Δύναμαι ἐπίσης νὰ θεωρήσω ὅτι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)dx = o\varrho[(x_1-\alpha)\,\varphi(z_1)+(x_2-x_1)\,\varphi(z_2)+\ldots$$
$$+(x_\nu-x_{\nu-1})\,\varphi(z_\nu)+\ldots+(\beta-x_\varrho)\,\varphi(z_{\varrho+1})]$$

συμφώνως πρὸς τὴν γενομένην ὑπόθεσιν ἔχω

$$\varphi(z_1)<\sigma(z_1)\ ,\ \varphi(z_2)<\sigma(z_2)\ ,\ \ldots\ \varphi(z_\nu)<\sigma(z_\nu)\ \ldots$$

αἱ δὲ διαφοραὶ $x_1-\alpha$, $x_2-x_1\ldots x_\nu-x_{\nu-1}$ εἶναι πᾶσαι θετικαὶ (διότι $\alpha<\beta$) ἄρα :

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx < \int_\alpha^\beta \sigma(x)dx\ .$$

Ἐὰν ὑποθέσω $\alpha>\beta$, θὰ ἔχω :

$$\int_\beta^\alpha \varphi(x)dx< \int_\beta^\alpha \sigma(x)dx \quad \text{καὶ} \quad -\int_\beta^\alpha \varphi(x)dx> -\int_\beta^\alpha \sigma(x)dx$$

ὅθεν :

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx> \int_\alpha^\beta \sigma(x)dx\ .$$

Θεώρημα μέσης τιμῆς.

212. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω (§ 205) δι' ἕκαστον S ἔχω $S\leq(\beta-\alpha)M$, ἑπομένως καί : $\quad o\varrho S\leq(\beta-\alpha)M$

ὅθεν $$\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx \leq (\beta-\alpha)M$$

ὁμοίως δι' ἕκαστον s ἔχω $s\geq(\beta-\alpha)\mu$ ἑπομένως

$$\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx \geq(\beta-\alpha)\mu$$

ἤτοι :

$$(\beta-\alpha)\,\mu \leq \int_\alpha^\beta \sigma(x)dx \leq (\beta-\alpha)M \qquad (\text{ὑποθέτω } \alpha<\beta)$$

ὅθεν :

$$(2) \qquad \int_{\alpha}^{\beta} \sigma(x)dx = (\beta-\alpha)m$$

ὅπου m θὰ εἶναι ἐν γένει ἀριθμός τις μεταξὺ μ καὶ Μ.

Ἐπειδὴ ὅμως μ καὶ Μ εἶναι τιμαὶ τὰς ὁποίας λαμβάνει ἡ σ(x) εἰς τὸ διάστημα (α, β) καὶ $\mu < m < M$ θὰ ὑπάρχῃ τιμή τις τοῦ x ἐν τῷ διαστήματι (α, β) δι' ἣν ἡ συνάρτησις θὰ λαμβάνῃ τὴν τιμὴν m (§ 107) διότι ἡ σ(x) ὑπετέθη συνεχής. Ἔστω τοιαύτη τιμὴ τοῦ x ἡ z δηλαδὴ σ(z)=m ὁπότε ὁ τύπος (2) δίδει :

$$(3) \qquad \int_{\alpha}^{\beta} \sigma(x)dx = (\beta-\alpha)\sigma(z).$$

Ὅθεν ἔχομεν ὅτι ***τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα:*** $\int_{\alpha}^{\beta} \sigma(x)dx$ ***ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ πλάτους τοῦ ὁλοκληρώματος*** [1] ***ἐπὶ τιμὴν τὴν ὁποίαν λαμβάνει ἡ ὑπὸ τὸ ὁλοκλήρωμα συνάρτησις διὰ τιμήν τινα τοῦ x περιλαμβανομένην μεταξὺ α καὶ β.***

213. ***Γενίκευσις τοῦ θεωρήματος τῆς μέσης τιμῆς.*** Ἔστω συνάρτησις συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα (α, β) καὶ φ(x) συνάρτησις συνεχὴς καὶ θετικὴ εἰς τὸ διάστημα (α, β) (δηλαδὴ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ διαστήματος (α, β) λαμβάνουσα θετικὴν τιμήν).

Ἐὰν καλέσω Μ καὶ Ε τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον τῆς σ(x) εἰς τὸ διάστημα (α, β), ἔχω

$$M \,.\, \varphi(x) \geq \sigma(x)\varphi(x) \geq E\, \varphi(x)$$

ὅθεν :

$$M(x_1-\alpha)\, \varphi(z_1) \geq (x_1-\alpha)\, \sigma(z_1)\, \varphi(z_1) \geq E(x_1-\alpha)\, \varphi(z_1)$$
$$M(x_2-x_1)\, \varphi(z_2) \geq (x_2-x_1)\, \sigma(z_2)\, \varphi(z_2) \geq E(x_2-x_1)\, \varphi(z_2)$$

. . . .

---

[1] Πλάτος τοῦ ὁλοκληρώματος καλῶ τὴν διαφορὰν τῶν ὁρίων ἤτοι τὸ β—α.

καὶ ἑπομένως εἰς οἱανδήποτε ὑποδιαίρεσιν καὶ ἂν σταματήσω, θὰ ἔχω :

$$M\Sigma(x_\nu - x_{\nu-1})\,\varphi(z_\nu) \geq \Sigma(x_\nu - x_{\nu-1})\,\sigma(z_\nu)\,\varphi(z_\nu) \geq E\Sigma(x_\nu - x_{\nu-1})\,\varphi(z_\nu).$$

ὅθεν καὶ εἰς τὸ ὅριον θὰ ἔχω :

$$M \,.\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx \geq \int_\alpha^\beta \sigma(x)\,\varphi(x)\,dx \geq E \int_\alpha^\beta \varphi(x)dx\,.$$

(Ὑποθέτω κυρίως ὅτι τὸ M δὲν εἶναι μικρότερον μηδεμιᾶς τῶν τιμῶν τῆς $\sigma(x)$ ἐν τῷ διαστήματι (α, β) καὶ τὸ E δὲν εἶναι μεγαλύτερον μηδεμιᾶς τῶν τιμῶν τῆς $\sigma(x)$ ἐν τῷ αὐτῷ διαστήματι).

Ἄρα :

$$(4) \qquad \int_\alpha^\beta \sigma(x)\,\varphi(x)\,dx = m \int_\alpha^\beta \varphi(x)dx$$

ὅπου m εἶναι ἀριθμός τις μεταξὺ E καὶ M.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ συνάρτησις $\sigma(x)$ εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα (α,β), θὰ ὑπάρχῃ τιμή τις z τοῦ x ἐν τῷ διαστήματι (α,β) δι' ἣν $\sigma(z)=m$ ὅθεν :

$$(5) \qquad \int_\alpha^\beta \sigma(x)\,\varphi(x)dx=\sigma(z)\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx.$$

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῶν τύπων (4) (5) ὑπέθεσα ὅτι ἡ $\varphi(x)$ εἶναι θετικὴ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ διαστήματος (α,β). Προφανὲς εἶναι ὅτι ἐξ ἴσου ἀποδεικνύονται οἱ τύποι οὗτοι καὶ διὰ τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ $\varphi(x)$ μένει διαρκῶς ἀρνητικὴ ἐν τῷ διαστήματι (α,β).

Οἱ τύποι (4) (5) ἀποτελοῦν τὴν ἐπέκτασιν τοῦ ἀρχικοῦ θεωρήματος τῆς μέσης τιμῆς.

Καὶ πράγματι : Ἐὰν εἰς τοὺς τύπους (4) (5) θέσω $\varphi(x)=1$ λαμβάνω τοὺς ἤδη εὑρεθέντας τύπους (2) (3)

$$\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx=m.(\beta-\alpha), \qquad \int_\alpha^\beta \sigma(x)dx=\sigma(z)\,(\beta-\alpha).$$

Τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα θεωρούμενον ὡς συνάρτησις τοῦ ἀνωτέρου του ὁρίου.

214.—Ἔστω συνάρτησις $\sigma(x)$ συνεχὴς εἰς τὸ κλειστὸν διάστημα (α,β) καὶ y τυχοῦσα τιμὴ τοῦ διαστήματος αὐτοῦ.

Τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα $\int_\alpha^y \sigma(x)dx$ θὰ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ληφθείσης τιμῆς y· θὰ εἶναι ἑπομένως συνάρτησις τοῦ y· ἂς τὴν καλέσωμεν $\varphi(y)$· ἐὰν ἀντὶ τῆς ληφθείσης τιμῆς y λάβωμεν τὴν $y+\varepsilon$ θὰ ἔχωμεν ἄλλο ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα :

$$\int_y^{y+\varepsilon} \sigma(x)dx\cdot \text{ τοῦτο θὰ εἶναι } \varphi(y+\varepsilon),$$

Θὰ εἶναι δέ : $\varphi(y+\varepsilon)-\varphi(y)=\int_\alpha^{y+\varepsilon}\sigma(x)dx-\int_\alpha^y \sigma(x)dx=$

$$=\int_\alpha^y \sigma(x)\,dx+\int_y^{y+\varepsilon}\sigma(x)dx-\int_\alpha^y \sigma(x)dx$$

Ὅθεν :

$$\varphi(y+\varepsilon)-\varphi(y)=\int_y^{y+\varepsilon}\sigma(x)dx$$

ἀλλὰ συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς θὰ εἶναι :

$$\int_y^{y+\varepsilon}\sigma(x)dx=\varepsilon\sigma(z) \quad (\text{ὅπου } z \text{ ἀριθμός τις μεταξὺ } y \text{ καὶ } y+\varepsilon).$$

Ὅθεν : (6) $\qquad \varphi(y+\varepsilon)-\varphi(y)=\varepsilon\sigma(z).$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ $\sigma(z)$ εἶναι πεπερασμένον διότι τὸ $|\sigma(x)|$ ἐν τῷ διαστήματι (α,β) δὲν γίνεται ἄπειρον.

Προκύπτει ὡς συμπέρασμα ἐκ τῆς ἰσότητος (6) ὅτι ἡ $\varphi(y)$ εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τοῦ y καὶ ὅτι $\text{ορ}\,\frac{\varphi(y+\varepsilon)-\varphi(y)}{\varepsilon}=\sigma(y)$ δι' $\text{ορ}\,\varepsilon=0$·

ἤτοι ὅτι $\varphi'(y) = \sigma(y)$. Ἀπεδείχθη ἐπομένως ὅτι τὸ $\int_{\alpha}^{y} \sigma(x)dx$ εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τοῦ y ἔχουσα παράγωγον τὸ σ(y)· ἐπομένως ***ἡ παράγωγος ὡρισμένου ὁλοκληρώματος ὡς πρὸς τὸ ἀνώτερον αὐτοῦ ὅριον y εἶναι ἴση πρὸς τὴν τιμὴν τὴν ὁποίαν λαμβάνει ἡ ὑπὸ τὸ ὁλοκλήρωμα συνάρτησις, ὅταν τὸ x ἀντικατασταθῇ μὲ τὸ y.***

(Ὑποτίθεται ἡ συνάρτησις σ(x) συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα (α,y)].

215. Παρατηρῶ ἤδη τὰ ἑξῆς :

Ἔστω ἡ σ(t) συνάρτησις συνεχής, εἰς τὸ διάστημα (α, β)· δι' ἑκάστην τιμὴν x τοῦ διαστήματος (α, β) ἡ σ(t) θὰ λαμβάνῃ τὴν τιμὴν σ(x).

Ζητῶ ἐὰν ὑπάρχῃ συνάρτησις ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ παράγωγον λαμβάνουσαν δι' ἑκάστην τιμὴν x τῆς μεταβλητῆς τὴν τιμὴν σ(x). Ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσω ὅτι ἡ συνάρτησις σ(t) θὰ εἶναι συνεχὴς διὰ πᾶν διάστημα α . . . x (ἀφοῦ x εἶναι τιμὴ τοῦ διαστήματος (α, β)) ἄρα ὑπάρχει ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα τῆς σ(t) ἀπὸ α ἕως x, δηλαδὴ τὸ $\int_{\alpha}^{x} \sigma(t)dt$· θὰ εἶναι δὲ τοῦτο, ὅπως προαπεδείχθη, συνάρτησις τοῦ ἀνωτέρου ὁρίου x ἥτις θὰ ἔχῃ παράγωγον ὡς πρὸς x τὸ σ(x).

Ἀπεδείχθη ἐπομένως ὅτι, ἐὰν μία συνάρτησις εἶναι συνεχής, ὑπάρχει συνάρτησις φ(x) ἔχουσα αὐτὴν παράγωγον· τὸ ἀντίστροφον δὲν ἀληθεύει διότι ὑπάρχουν συναρτήσεις συνεχεῖς μὴ ἔχουσαι παράγωγον.

216. ***Παρατηρήσεις*** : 1) Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος φαίνεται ἀμέσως ὅτι :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sigma(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \sigma(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sigma(y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} \sigma(\omega)d\omega = \ldots$$

δηλαδὴ ὅτι τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα εἶναι συνάρτησις τῶν ὁρίων α, β καὶ τῶν παραμέτρων αἱ ὁποῖαι δυνατὸν νὰ ὑπάρχωσιν εἰς τὴν σ(x), ἀλλὰ δὲν εἶναι συνάρτησις τοῦ γράμματος x τὸ ὁποῖον παρουσιάζεται ὑπὸ τὸ σύμβολον τῆς ὁλοκληρώσεως.

Καὶ τῷ ὄντι

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sigma(x)dx = \text{ορ}\left[\Sigma(x_1-\alpha)\sigma(z_1)+(x_2-x_1)\,\sigma(z_2)+\ldots+(\beta-x_{\nu-1})\sigma(z_\nu)\right]$$

προφανὲς δὲ εἶναι ὅτι : Ἐὰν ἀντὶ τοῦ $\int_{\alpha}^{\beta} \sigma(x)dx$ θεωρήσω τὸ

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sigma(y)dy$$

θὰ ἔχωμεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ

$$\alpha,\ x_1,\ x_2, \ldots\ x_{\prime} \ldots\ \beta$$

οἱ ὁποῖοι ἀφεώρων τὸ γράμμα x θὰ ἀφορῶσι τὸ γράμμα y κ.ο.κ. ὅπως π. χ. ἐὰν ἔχωμεν ἓν ἄθροισμα τῆς μορφῆς

$$1^3+2^3+\ldots\ldots+100^3$$

τοῦτο δύναται νὰ γραφῇ

$$\sum_{x=1}^{x=100} x^3 \quad \text{ἢ καὶ} \quad \sum_{y=1}^{y=100} y^3 \quad \text{ἢ καὶ} \quad \sum_{\omega=1}^{\omega=100} \omega^3$$

παρατηρῶ ὅτι τὸ ἄθροισμα ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ 1 καὶ τὸ 100 καὶ δὲν ἀλλάσσει ἐὰν τὸ γράμμα x γίνῃ y ἢ ω.

Ἐπίσης τό :

$$1+\lambda \quad 2^3+\lambda \quad 3^3+\lambda \ldots\ldots 100^3+\lambda$$

σημειοῦται οὕτω :

$$\sum_{x=1}^{x=100} (x^3+\lambda) \quad \text{ἢ καὶ} \quad \sum_{y=1}^{y=100} (y^3+\lambda) \quad \text{ἢ καὶ} \quad \sum_{\omega=1}^{\omega=100} (\omega^3+\lambda) \quad \text{κ.ο.κ.}$$

ὥστε τὸ ἄθροισμα ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰ ὅρια 1 καὶ 100 καὶ ἀπὸ τὴν παράμετρον λ, δὲν ἀλλάσσει δὲ ἐὰν τὸ x γίνῃ y ἢ ω.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἓν ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sigma(x)dx \quad \text{ἢ} \quad \int_{\alpha}^{\beta} \sigma(x,\ \lambda)dx$$

θὰ εἶναι συνάρτησις τῶν ὁρίων (α, β) καὶ τῆς παραμέτρου ἢ τῶν παραμέτρων, ἐὰν περιείχοντο τοιαῦται εἰς τὸ σ(**x**) ἀλλὰ δὲν θὰ εἶναι συνάρτησις τοῦ γράμματος x.

Δι' αὐτὸ καὶ ὅταν γράφωμεν

$$\int_{\alpha}^{x} \sigma(x)dx$$

δὲν πρέπει νὰ συγχέωμεν τὸ x τὸ ὁποῖον εἶναι εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἀνωτέρου ὁρίου μὲ τὸ γράμμα x τὸ ὑπὸ τὸ σύμβολον τῆς ὁλοκληρώσεως· διότι ὡς εἴδομεν :

$$\int_{\alpha}^{x} \sigma(x)dx = \int_{\alpha}^{x} \sigma(y)dy = \int_{\alpha}^{x} \sigma(\omega)d\omega$$

Ὑπολογισμὸς τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος.

217. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω τὸ

$$\int_{\alpha}^{x} \sigma(t)dt$$

εἶναι συνάρτησις τῶν α, x καὶ ἂν θέσω :

$$\int_{\alpha}^{x} \sigma(t)dt = \varphi(\alpha,\ x)$$

θὰ ἔχω (§ 214) ὅτι παράγωγος τοῦ φ(α, x) ὡς πρὸς x εἶναι τὸ σ(x).

Ἔστω ἤδη ὅτι δὲν γνωρίζω τὴν φ(α, x) καὶ ὅτι κατώρθωσα μὲ τρόπον οἱονδήποτε νὰ εὕρω μίαν συνάρτησιν τοῦ x ἔχουσαν παράγωγον τὴν σ(x)· ἔστω μία τοιαύτη συνάρτησις ἡ f(x)· δηλ ἔστω ὅτι

$$f'(x) = \sigma(x) \quad \text{ἢ καὶ} \quad Df(x) = \sigma(x)$$

τότε πᾶσα ἄλλη συνάρτησις ἔχουσα παράγωγον τὴν σ(x) θὰ διαφέρῃ τῆς f(x) κατὰ ποσότητα σταθερὰν (§ 148). ἤτοι πᾶσαι αἱ συναρτήσεις αἱ ἔχουσαι παράγωγον τὴν σ(x) θὰ εἶναι τῆς μορφῆς f(x)+C δηλ. Ἐὰν μία συνάρτησις ἔχῃ παράγωγον τὴν σ(x) θὰ εἶναι αὕτη τῆς μορφῆς f(x)+C, ὅπου τὸ C εἶναι σταθερὰ αὐθαίρετος· ἑπομένως καὶ ἡ ζητουμένη φ(α, x) θὰ εἶναι f(x)+C_1 ὅπου τὸ C_1 θὰ εἶναι ὡρισμένος τις ἀριθμός.

Πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ τοῦ C_1 παρατηρῶ ὅτι ἀφοῦ εἰς τὴν ἰσότητα:

$$(7) \qquad \varphi(\alpha, x)=f(x)+C_1$$

τὸ C_1 δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ x θὰ ἔχω τὸ αὐτὸ C_1 καὶ ἐὰν ὅπου x θέσω α ἤτοι:

$$(8) \qquad \varphi(\alpha, \alpha)=f(\alpha)+C_1$$

ἀλλά

$$\varphi(\alpha, x)=\int_{\alpha}^{x}\sigma(t)dt$$

ἐπομένως:

$$\varphi(\alpha, \alpha)=\int_{\alpha}^{\alpha}\sigma(t)dt=0$$

ὅθεν ἡ ἰσότης (8) δίδει:

$$f(\alpha)+C_1=0 \qquad \text{ἢ} \quad C_1=-f(\alpha)$$

καὶ ἐπομένως ἔχω ἐκ τῆς ἰσότητος (7):

$$\varphi(\alpha, x)=f(x)-f(\alpha)$$

δηλαδή:

$$\int_{\alpha}^{x}\sigma(t)dt=f(x)-f(\alpha)$$

ἢ καί, ἐὰν γραφῇ ἀντὶ τοῦ x τὸ β,

$$\int_{\alpha}^{\beta}\sigma(t)dt=f(\beta)-f(\alpha)$$

ὥστε ἔχω

$$(9) \qquad \int_{\alpha}^{\beta}\sigma(x)dx=f(\beta)-f(\alpha)$$

τὸ $f(\beta)-f(\alpha)$ γράφεται καὶ $\Big[f(x)\Big]_{\alpha}^{\beta}$. ὁ τύπος οὗτος εἶναι θεμελιώδης διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ὡρισμένων ὁλοκληρωμάτων. Συμφώνως πρὸς αὐτὸν ***ἵνα ὑπολογίσω τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα***

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sigma(x)\,dx$$

ἀρκεῖ νὰ εὕρω μίαν συνάρτησιν ἔχουσαν παράγωγον τὴν σ(x)· ***ἐὰν ἀντικαταστήσω τότε τὸ*** *x* ***διὰ τοῦ β καὶ α καὶ ἀφαιρέσω θὰ ἔχω τὴν τιμὴν τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος***: Ὥστε:

Τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sigma(x)dx,$$

ὅπου ἡ σ(x) εἶναι συνάρτησις συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα (α, β) εἶναι ἴσον πρὸς τὴν αὔξησιν μιᾶς συνεχοῦς συναρτήσεως f(x) ἐχούσης παράγωγον τὸ σ(x), τὴν ἐπερχομένην ὅταν τὸ x ἀπὸ τοῦ α διαβῇ ἕως τὸ β.

218.—Παρατηροῦμεν ὅτι κατὰ ταῦτα διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sigma(x)dx$$

ἀρκεῖ ἡ εὕρεσις συναρτήσεως ἐχούσης παράγωγον τὴν σ(x). Δι' αὐτὸ μία τοιαύτη συνάρτησις f(x) λέγεται καὶ ***ἀόριστον ὁλοκλήρωμα*** ἢ καὶ ὁλοκλήρωμα τοῦ σ(x)dx ἢ καὶ (συντομίας ἕνεκεν) ὁλοκλήρωμα τοῦ σ(x)· σημειοῦται δὲ τοῦτο ὡς ἑξῆς:

$$(10) \qquad \int \sigma(x)dx = f(x)$$

λέγεται ἐπίσης ἡ f(x) καὶ ***παράγουσα τοῦ*** σ(x) ἢ καὶ ***ἀρχικὴ συνάρτησις*** τοῦ σ(x). Ἢ ἀκριβέστερον ἀκόμη διὰ τοῦ

$$\int \sigma(x)dx$$

παριστάνομεν τὴν f(x)+c (ὅπου c αὐθαίρετος σταθερά). Αὔτη δὲ ἡ f(x)+c λέγεται ἀόριστον ὁλοκλήρωμα τοῦ σ(x)dx ἢ γενικὸν ὁλοκλήρωμα διότι περιέχει πᾶν ὁλοκλήρωμα τοῦ σ(x)dx. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sigma(x)dx$$

δὲν θὰ γράψω τὴν C, διότι κατὰ τὸν προηγούμενον κανόνα ἀρκεῖ νὰ λάβω μίαν οἱανδήποτε συνάρτησιν ἔχουσαν παράγωγον τὴν σ(x) νὰ θέσω κατόπιν ὅπου x τὰ α καὶ β καὶ νὰ ἀφαιρέσω διὰ νὰ εὕρω μὲ τί ἰσοῦται τὸ

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sigma(x)dx.$$

219.—***Παρατήρησις***: Ἀφοῦ ἡ ἰσότης (10) ἐξ ὁρισμοῦ δηλοῖ ὅτι παράγωγος τοῦ f(x) εἶναι ἡ σ(x) ἕπεται ὅτι:

$$D\int \sigma(x)dx = \sigma(x)$$

ἢ καί:

$$\frac{d}{dx}\int \sigma(x)dx = \sigma(x)$$

ἢ καί:

$$\int \frac{df(x)}{dx}dx = f(x) + c$$

ἤ: (11) $$\int df(x) = f(x) + c.$$

Ἀπέδειξα προηγουμένως (σελ. 219) ὅτι τὸ

$$\int_{\alpha}^{x} \sigma(t)dt$$

εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τοῦ x ἢ καὶ ὅτι τὸ

$$\int_{\alpha}^{y} \sigma(x)dx$$

εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τοῦ y· ἑπομένως ἐὰν καλέσω f(x) μίαν παράγουσαν τοῦ σ(x) θὰ ἔχω:

$$\int_{\alpha}^{y} \sigma(x)dx = f(y) - f(\alpha)$$

ἢ καί:

$$(9) \qquad \int_{\alpha}^{\beta} \sigma(x)dx = f(\beta) - f(\alpha)$$

ὅπου ἡ f(y)—f(α) εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τοῦ y καὶ ὅταν τὸ y μεταβάλλεται ἀπὸ α ἕως β, ἡ f(y) μεταβάλλεται κατὰ τρόπον συνεχῆ ἀπὸ f(α) ἕως f(β)· ἑπομένως ἐὰν τύχῃ ἡ f(y) νὰ εἶναι συνάρτησις λαμβάνουσα τιμὰς περισσοτέρας τῆς μιᾶς διὰ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν τιμὴν τοῦ y εὔκολον εἶναι νὰ διακρίνω ποίαν ἀπὸ τὰς τιμὰς τὰς ὁποίας λαμβάνει ἡ συνάρτησις διὰ y=β θὰ θεωρήσω ὡς f(β): ἐξαρτᾶται προφανῶς αὕτη ἀπὸ τὴν τιμὴν τὴν ὁποίαν θὰ λάβω ὡς f(α)· θὰ λάβω προφανῶς τότε ὡς f(β) ἐκείνην τὴν τιμὴν τῆς f(y) πρὸς τὴν ὁποίαν ἔρχεται ἡ f(y) ἀναχωροῦσα ἐκ τῆς f(α) μεταβαλλομένη συνεχῶς ὅταν τὸ x ἀπὸ τοῦ α μεταβάλλεται βαῖνον πρὸς τὸ β.

Παραδείγματα : 1) Ἔστω: $\sigma(x) = \frac{1}{1+x^2}$· ἤτοι ἂς θεωρήσω τό:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{1+x^2}$$

συνάρτησις ἔχουσα παράγωγον τὴν $\frac{1}{1+x^2}$ εἶναι ἡ τοξ·εφx, ὡς ἐπίσης καὶ πᾶσα ἄλλη περιλαμβανομένη εἰς τὸν τύπον: τοξ.εφx+C· ἂς λάβω ὡς ἀρχικὴν τὴν τοξεφ.x· ὁ τύπος (9) δίδει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{1+x^2} = \text{τοξ εφ}\beta - \text{τοξ εφ}\alpha$$

παρατηρῶ ὅτι τὸ πρῶτον μέλος εἶναι (συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος) ὡρισμένον, ἐνῷ διὰ τὸ δεύτερον μέλος παρατηρῶ ὅτι εἶναι ἄπειρα τόξα ἔχοντα ἐφαπτομένην τὸ α· ὡς ἐπίσης ἄπειρα τόξα ἔχοντα ἐφαπτομένην τὸ β καὶ ἑπομένως ἡ διαφορὰ τοξεφβ—τοξεφα δέχεται ἀπείρους προσδιορισμούς. Διὰ νὰ ἰσοῦται ὅμως αὕτη πρὸς τὸν ὡρισμένον ἀριθμὸν τὸν διδόμενον ὑπὸ τοῦ

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{1+x^2}$$

πρέπει συμφώνως πρὸς τὰ προηγούμενα, ὅταν δώσω εἰς τὸ τοξεφα μίαν ἐκ τῶν ἀπείρων τιμῶν τὰς ὁποίας λαμβάνει διὰ $x=\alpha$, νὰ ἐκλέξω διὰ τὸ τοξ εφβ τιμὴν τοιαύτην ὥστε ὅταν τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ α συνεχῶς ἕως β τὸ τοξ.εφ.x μεταβαλλόμενον συνεχῶς νὰ βαίνῃ ἀπὸ τῆς ληφθείσης τιμῆς διὰ τὸ τοξεφα εἰς τὴν τιμὴν τ ὴν ὁποίαν ἔχω ἐκλέξει διὰ τὸ τοξεφβ π. χ. ἐὰν ἐκ τῶν ἀπείρων τιμῶν τὰς ὁποίας λαμβάνει τὸ τόξον τὸ ἔχον ἐφαπτομένην τὸ α ἐκλέξω τὴν περιλαμβανομένην εἰς τὸ διάστημα $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$, ***διὰ τὸ τοξεφβ θὰ ἐκλέξω*** (ἐκ τῶν ἀπείρων τιμῶν τὰς ὁποίας λαμβάνει) τὴν περιλαμβανομένην εἰς τὸ διάστημα:

$$-\frac{\pi}{2},\ +\frac{\pi}{2}\cdot$$

διότι ὅταν τὸ x μεταβάλλεται κατὰ τρόπον συνεχῆ ἀπὸ 0 ἕως ∞ καὶ ἀπὸ 0 ἕως $-\infty$ τὸ τοξεφx μεταβάλλεται κατὰ τρόπον συνεχῆ ἀπὸ 0 ἕως $\frac{\pi}{2}$ καὶ ἀπὸ 0 ἕως $-\frac{\pi}{2}\cdot$ ἔχω τουτέστιν ἕνα κλάδον τῆς συναρτήσεως $y=$τοξεφx· διὰ μίαν δὲ οἱανδήποτε πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x τὸ τοξεφx θὰ ἔχῃ μόνον μίαν τιμὴν περιλαμβανομένην μεταξὺ $-\frac{\pi}{2}$ καὶ $\frac{\pi}{2}\cdot$ ἑπομένως θὰ ἔχω μίαν διὰ τὸ τοξεφα, ὅπως ἐπίσης μίαν διὰ τὸ τοξεφβ, τοιαύτας δὲ ὥστε τὸ τοξεφx ἀναχωροῦν ἀπὸ τῆς ληφθείσης τιμῆς διὰ τὸ τοξεφα νὰ ἔρχεται πρὸς τὴν ληφθεῖσαν τιμὴν διὰ τὸ τοξεφβ, ὅταν τὸ x μεταβάλλεται συνεχῶς ἀπὸ α βαῖνον πρὸς τὸ β.

2) Ἔστω:

$$\sigma(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ἤτοι ἄς θεωρήσω τὸ

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

παρατηρῶ ὅτι τὰ α καὶ β πρέπει νὰ περιλαμβάνωνται μεταξὺ —1 καὶ 1 διότι ὅταν $|x|<1$ τότε μόνον τὸ $1-x^2$ εἶναι θετικὸς ἀριθμός.

Ἀφ' ἑτέρου συνάρτησις ἔχουσα παράγωγον τὴν

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(ἤτοι ἀόριστον ὁλοκλήρωμα αὐτῆς) εἶναι ἡ τοξημx· ἀλλὰ διὰ μίαν τιμὴν τοῦ x ἔχω ἀπείρους τιμὰς τοῦ τοξημx ἢ καὶ ἡ καμπύλη y=τοξημx ἔχει ἀπείρους κλάδους· ἐὰν λάβω ἐκεῖνον ὅστις διὰ x=0 δίδει y=0 νοήσω δὲ μεταβαλλόμενον τὸ x ἀπὸ —1 ἕως +1 τὸ y δι' αὐτὸν τὸν κλάδον θὰ μεταβάλλεται ἀπὸ $-\frac{\pi}{2}$ ἕως $\frac{\pi}{2}$.

Ἂς θεωρήσω ἤδη τὸν τύπον

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\text{τοξημ}\beta-\text{τοξημ}\alpha$$

ὅπου α καὶ β δύο ὡρισμένοι ἀριθμοὶ περιλαμβανόμενοι μεταξὺ —1 καὶ 1· ὁ τύπος αὐτὸς ἰσχύει, ἐὰν θεωρῶ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ τοξημα καὶ ταξημβ ἀντιπροσωπεύουν τεταγμένας σημείων ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ κλάδου τῆς καμπύλης y=τοξημx· π. χ. ἐὰν λάβω τὸν ῥηθέντα ἀρχικὸν κλάδον, ὡς ἀριθμοὶ τοξημα καὶ τοξημβ δέον νὰ ἐκλεχθῶσιν οἱ περιλαμνόμενοι μεταξὺ $-\frac{\pi}{2}$ καὶ $+\frac{\pi}{2}$.

3) Ἀναλόγους παρατηρήσεις θὰ ἠδυνάμην νὰ κάμω καὶ διὰ τὰς λοιπὰς ἀντιστρόφους τῶν κυκλικῶν συναρτήσεις.

Μέθοδοι ὁλοκληρώσεων.

220.—***Κατὰ παράγοντας ὁλοκλήρωσις.*** Ἂς θεωρήσω δύο συναρτήσεις σ(x) καὶ φ(x) συνεχεῖς εἰς τὸ διάστημα (α, β)· θὰ ἔχω (σελ. 108)

$$D\left[\sigma(x).\varphi(x)\right]=\sigma(x)D\varphi(x)+\varphi(x)D\sigma(x)$$

ὅθεν καί :

$$\int_\alpha^\beta D\Big[\sigma(x).\varphi(x)\Big]dx=\int_\alpha^\beta \sigma(x)\, D\varphi(x)dx+\int_\alpha^\beta \varphi(x)\, D\sigma(x)dx$$

ἑπομένως :

$$\Big[\sigma(x).\,\varphi(x)\Big]_\alpha^\beta=\int_\alpha^\beta \sigma(x)\, D\varphi(x)dx+\int_\alpha^\beta \varphi(x)\, D\sigma(x)dx$$

ἐξ οὗ :

$$(12)\qquad \int_\alpha^\beta \sigma(x)\, D\varphi(x)dx=\Big[\sigma(x).\,\varphi(x)\Big]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta \varphi(x)D\sigma(x)dx.$$

ὁ τύπος οὗτος δίδει τὸν κανόνα ***διὰ τὴν κατὰ παράγοντας ὁλοκλήρωσιν***.

Ἐὰν θέσω $\sigma(x)=u, \varphi(x)=v$ καὶ λάβω ὑπ' ὄψιν ὅτι :

$$D\sigma(x)dx=d\sigma(x)$$

καί :

$$D\varphi(x)dx=d\varphi(x)$$

θὰ ἔχω τὸν τύπον (12) ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$(13)\qquad \int_\alpha^\beta udv=\Big[u.\ v\Big]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta vdu$$

ὅπου α καὶ β εἶναι τὰ ὅρια τοῦ x τοῦ ὁποίου συναρτήσεις εἶναι τὰ u καὶ v.

Παράδειγμα : Ἔστω τὸ

$$\int_0^1 xe^x\, dx\cdot$$

ἐὰν παρατηρήσω ὅτι $De^x=e^x$ δύναμαι νὰ γράψω τοῦτο καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\int_0^1 xDe^x\, dx\cdot$$

ἐφαρμόζων ἤδη τὸν ἀνωτέρω τύπον λαμβάνω :

$$\int_0^1 x D e^x dx = \Big[x e^x \Big]_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot 1 dx =$$

$$= e - \int_0^1 e^x dx = e - (e - e^0) = 1.$$

221.—***Ὁλοκλήρωσις δι' ἀντικαταστάσεως*** ἢ καὶ ***ἀλλαγὴ τῶν μεταβλητῶν.***

Ἄς θεωρήσω ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα:

$$\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx$$

καὶ ἂς θέσω $x=f(t)$· ζητῶ τὸ νέον ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα τὸ ὁποῖον θὰ προκύψῃ ὅταν θεωρήσω ὡς ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν τὸ t· ἔστω ὅτι $f(\gamma)=\alpha$ καὶ $f(\delta)=\beta$ δηλ. ὅτι εἰς τὰς τιμὰς γ καὶ δ τοῦ t ἀντιστοιχοῦσιν αἱ τιμαὶ α καὶ β τοῦ x.

Ὑποθέτω ὅτι ἡ συνάρτησις $f(t)$:

1) εἶναι συνεχὴς καὶ προσδιωρισμένη εἰς τὸ διάστημα (γ, δ),

2) ἔχῃ παράγωγον $f'(t)$ συνεχῆ εἰς τὸ διάστημα (γ, δ), καί:

3) ὅταν τὸ t μεταβάλλεται ἀπὸ γ ἕως δ τὸ x (δηλ. τὸ $f(t)$) μεταβάλλεται πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν ἀπὸ α ἕως β· τουτέστιν ἡ $f'(t)$ διατηρεῖ τὸ αὐτὸ σημεῖον εἰς τὸ διάστημα (γ, δ).

Ἄς ὑποδιαιρέσω τὸ διάστημα (γ, δ) εἰς ἄλλα μικρότερα:

$$(\gamma, t_1), (t_1, t_2), (t_2, t_3), \ldots (t_{\mu-1}, t_\mu), \ldots (t_\rho, \delta).$$

Ὅταν τὸ t μεταβάλληται ἀπὸ γ ἕως δ διερχόμενον ἀπὰ τὰς διαδοχικὰς τιμάς:

$$\gamma, t_1, t_2, t_3, \ldots t_{\mu-1}, t_\mu, \ldots t_\rho, \delta$$

τὸ x δηλ. τὸ $f(t)$ θὰ μεταβάλλεται ἀπὸ τοῦ α ἕως β πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν συμφώνως πρὸς τὴν τρίτην ὑπόθεσιν καὶ ἑπομένως ἐὰν καλέσω: $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{\mu-1}, x_\mu, \ldots x_\rho$ τὰς τιμὰς τοῦ x (τοῦ $f(t)$) τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς τὰς τιμάς: $t_1, t_2 \ldots$ τοῦ t θὰ ἔχω ὅτι αἱ τιμαί:

$$\alpha,\ x_1,\ x_2, \ldots x_{\mu-1},\ x_\mu \ldots x_\varrho\ ,\ \beta$$

θὰ βαίνουν αὐξανόμεναι ἂν $\alpha<\beta$ καὶ ἐλαττούμεναι ἐὰν $\alpha>\beta$.

Ἐφαρμόζων τὸ θεώρημα τῶν πεπερασμένων αὐξήσεων λαμβάνω:

$$x_\mu - x_{\mu-1} = f(t_\mu) - f(t_{\mu-1}) = (t_\mu - t_{\mu-1})\, f'(\vartheta_\mu)$$

ὅπου ϑ_μ ἀριθμός τις μεταξὺ $t_{\mu-1}$ καὶ t_μ. Παρατηρῶ ἤδη ὅτι εἰς τὴν τιμὴν ϑ_μ τοῦ t θὰ ἀντιστοιχῇ τιμή τις ξ_μ τοῦ x τοιαύτη ὥστε: $\xi_\mu = f(\vartheta_\mu)$· ἐπειδὴ δὲ τὸ ϑ_μ περιλαμβάνεται μεταξὺ $t_{\mu-1}$ καὶ t_μ πρέπει καὶ τὸ ξ_μ νὰ περιλαμβάνηται μεταξὺ $x_{\mu-1}$ καὶ x_μ διότι ἄλλως δὲν θὰ ἐπληροῦτο ἡ 3η ὑπόθεσις.

Σχηματίζω ἤδη τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων:

$$\sigma(\xi_1)\,(x_1-\alpha)+\sigma(\xi_2)\,(x_2-x_1)+\sigma(\xi_3)\,(x_3-x_2)+\ldots$$
$$\ldots+\sigma(\xi_\mu)\,(x_\mu - x_{\mu-1})+\ldots$$

τοῦτο δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\sigma(f(\vartheta_1))\,(t_1-\gamma)\,f'(\vartheta_1)+\sigma(f(\vartheta_2))\,(t_2-t_1)\,f'(\vartheta_2)+\ldots$$
$$\ldots+\sigma(f(\vartheta_\mu))\,(t_\mu - t_{\mu-1})\,f'(\vartheta_\mu)+\ldots$$

ἢ καί:
$$\Sigma\sigma(f(\vartheta_\mu))\,f'(\vartheta_\mu)\,(t_\mu - t_{\mu-1})\cdot$$

ὅταν αἱ διαφοραὶ $t_\mu - t_{\mu-1}$ τείνουν πρὸς τὸ μηδὲν καὶ αἱ διαφοραὶ $x_\mu - x_{\mu-1}$ τείνουν πρὸς τὸ μηδέν, συμφώνως πρὸς τὴν 1ην ὑπόθεσιν.

Ἀφ' ἑτέρου ἡ $f'(t)$ ὑπετέθη συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα $(\gamma,\ \delta)$ ὥστε θὰ ἔχω τὴν συνάρτησιν $\sigma(f(t))\,f'(t)$ συνεχῆ εἰς τὸ διάστημα $(\gamma,\ \delta)$ καὶ ἑπομένως θὰ ὑπάρχῃ ὅριον τοῦ ἀνωτέρω ἀθροίσματος τό:

$$\int_\gamma^\delta \sigma(f(t))\,f'(t)dt$$

ὅθεν:

$$(14)\qquad \int_\alpha^\beta \sigma(x)dx = \int_\gamma^\delta \sigma(f(t))\,f'(t)dt\cdot$$

ἡ ἰσότης (14) εἶναι ὁ τύπος τῆς ***ὁλοκληρώσεως δι' ἀντικαταστάσεως*** ἢ καὶ τύπος ***ἀλλαγῆς τῆς μεταβλητῆς***.

Ὁ τύπος (14) ἀποδεικνύεται καὶ ἀπ' εὐθείας ὡς ἑξῆς: Ἄς θεωρήσω τὰς συναρτήσεις τοῦ t :

$$(15) \qquad \int_{f(\gamma)}^{f(t)} \sigma(x)dx \text{ καὶ } \int_{\alpha}^{t} \sigma(f(t))\, f'(t)dt$$

καὶ ἄς ζητήσω τὰς παραγώγους τῶν δύο τούτων συναρτήσεων τοῦ t· τῆς δευτέρας ἡ παράγωγος εἶναι $\sigma(f(t))\, f'(t)$

Διὰ τὴν παράγωγον τῆς πρώτης παρατηρῶ ὅτι αὕτη δηλ. ἡ:

$$\int_{f(\gamma)}^{f(t)} \sigma(x)dx$$

εἶναι συνάρτησις τοῦ ἀνωτέρου ὁρίου f(t)· δύναται ἑπομένως νὰ θεωρηθῇ ὡς συνάρτησις συναρτήσεως τοῦ t· θέτω $f(t)=\omega$ καὶ ἔχω:

$$\int_{f(\gamma)}^{\omega} \sigma(x)dx\cdot$$

ἡ παράγωγος αὐτῆς ὡς πρὸς ω θὰ εἶναι: σ(ω)· ταύτην θὰ πολλαπλασιάσω ἐπὶ τὴν παράγωγον τῆς ω ὡς πρὸς t δηλ. ἐπὶ f′(t)· ὥστε τελικῶς εὑρίσκω ὡς παράγωγον τῆς πρώτης συναρτήσεως τήν: $\sigma(\omega).f'(t)$ δηλ. τήν: $\sigma(f(t))\, f'(t)$· ὅθεν αἱ δύο συναρτήσεις (15) τοῦ t ἔχουσι τὴν αὐτὴν παράγωγον. Ἐὰν ἑπομένως διαφέρουν θὰ διαφέρουν κατὰ σταθεράν. παρατηρῶ ὅμως ὅτι διὰ $t=\gamma$ γίνονται ἀμφότεραι ἴσαι πρὸς τὸ μηδέν· ἄρα αἱ συναρτήσεις (15) εἶναι ἴσαι καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ἴσαι καὶ ὅταν $t=\delta$ ὁπότε θὰ ἔχω τὸν τύπον (14).

222.—***Παρατηρήσεις*** : 1) Ἡ τρίτη ἐκ τῶν γινομένων ὑποθέσεων δὲν εἶναι ὁπαραίτητος· π. χ. ἔστω λ τιμή τις μεταξὺ γ καὶ δ καὶ ἔστω ὅτι ὅταν τὸ t μεταβάλλεται βαῖνον ἀπὸ τοῦ γ πρὸς τὸ λ ἡ f(t) βαίνει διαρκῶς αὐξανομένη ἐκ τοῦ α πρός τινα τιμὴν ρ μεγαλυτέραν τοῦ β καὶ ὅταν τὸ t μεταβάλλεται ἀπὸ τοῦ λ ἕως τὸ δ ἡ f(t) βαίνει διαρκῶς ἐλαττουμένη ἀπὸ τοῦ ρ πρὸς τὸ β. Ἐὰν ὑποθέσω ὅτι ἡ σ(x) εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα (α, ρ) δύναμαι νὰ ἐφαρμόσω τὸν τύπον (14) καὶ ἑπομένως δύναμαι νὰ γράψω:

$$\int_{\alpha}^{\rho} \sigma(x)dx = \int_{\gamma}^{\lambda} \sigma(f(t))\, f'(t)dt$$

Ὁμοίως :

$$\int_{\varrho}^{\beta}\sigma(x)dx=\int_{\lambda}^{\delta}\sigma(f(t))\ f'(t)dt$$

ὁπότε δυνάμει τῆς ἰσότητος (§ 211, α′) προκύπτει ἐὰν προσθέσω κατὰ μέλη :

$$\int_{\alpha}^{\beta}\sigma(x)dx=\int_{\gamma}^{\delta}\sigma(f(t))\ f'(t)dt.$$

2) Κατὰ τὴν ἐφαρμογήν τῆς μεθόδου τῆς ὁλοκληρώσεως δι' ἀντικαταστάσεως πρέπει νὰ προσέξω ἐὰν ἡ $x=f(t)$ δίδῃ δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ x περιλαμβανομένην μεταξὺ α καὶ β μίαν τοὐλάχιστον τιμὴν τοῦ t μεταξὺ γ καὶ δ καὶ πρέπει εἰς μίαν τιμὴν τοῦ t νὰ μὴν ἔχω πολλαπλᾶς τιμὰς τοῦ x· ὅπως ἐπίσης πρέπει νὰ προσέξω ἐὰν εἰς μίαν τιμὴν τοῦ t ἔχω πολλαπλᾶς τιμὰς τοῦ $f'(t)$. Ἐὰν π. χ. θεωρήσω τὸ $\int_{-1}^{+1}dx$ ἔχω προφανῶς $\int_{-1}^{+1}dx=2$· ἂς ζητήσω νὰ ἐφαρμόσω τὸν τύπον (14) λαμβάνων $x=t^{\frac{5}{2}}$. Παρατηρῶ ὅτι ἡ $f(t)$ εἶναι συνεχὴς ὅπως καὶ ἡ $f'(t)=\frac{5}{2}t^{\frac{3}{2}}$· ἤτοι πληροῦνται αἱ ὑποθέσεις (1) καὶ (2) (§ 221)· διὰ νὰ εὕρω τὰ γ, δ δηλ. τὰς τιμὰς τοῦ t τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς τὰς τιμὰς α καὶ β τοῦ x παρατηρῶ ὅτι $\alpha=-1$ $\beta=+1$ καὶ ἑπομένως δυνάμει τῆς $x=t^{\frac{5}{2}}$ θὰ ἔχω :

$$\gamma=\sqrt[5]{(-1)^2}=1 \text{ καὶ } \delta=\sqrt[5]{1^2}=1$$

ὅθεν ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ τύπου (15) θὰ ἔδιδεν :

$$\int_{-1}^{+1}dx=\int_{1}^{1}\frac{5}{2}t^{\frac{3}{2}}dt=0$$

ἤτοι ἐξαγόμενον ἐσφαλμένον.

Τὸ ἄτοπον προκύπτει διότι τὸ x δηλ. τὸ $t^{\frac{5}{2}}$ λαμβάνει διπλᾶς τιμὰς $\pm\sqrt{t^4}$ διὰ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν τιμὴν τοῦ t. Δι᾿ αὐτὸ ἐὰν θέλω νὰ ἐφαρμόσω τὸν τύπον (14) πρέπει νὰ χωρίσω τὸ διάστημα -1 $+1$ εἰς τὰ διαστήματα $(-1, 0)$ καὶ $(0, +1)$ καὶ νὰ λάβω εἰς μὲν τὸ διάστημα $(-1, 0)$ τύπον μετασχηματισμοῦ τὸν $x=-\sqrt{t^4}$ ὁπότε εἰς τὰς τιμὰς $x=-1, 0$ ἀντιστοιχοῦν αἱ τιμαὶ 1, 0 τοῦ t, εἰς δὲ τὸ διάστημα $(0, 1)$ νὰ λάβω ὡς τύπον μετασχηματισμοῦ τὸν $x=\sqrt{t^4}$ ὁπότε εἰς τὰς τιμὰς $x=0, 1$ ἀντιστοιχοῦν αἱ τιμαὶ 0, 1.

3) Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι :

$$\int_{f(\gamma)}^{f(t)} \sigma(x)dx = \int_{\gamma}^{t} \sigma[f(t)]\, f'(t)dt$$

ἢ καί :

$$(16) \qquad \int_{\alpha}^{x} \sigma(x)dx = \int_{\gamma}^{t} \sigma[f(t)]\, f'(t)dt$$

Τὸ πρῶτον μέλος εἶναι μία συνάρτησις P(x) ἔχουσα παράγωγον τὸ σ(x), τὸ δὲ δεύτερον εἶναι συνάρτησις F(t) ἔχουσα παράγωγον τὴν $\sigma(f(t))\, f'(t)$· ὁ δὲ τύπος (16) δεικνύει ὅτι διὰ νὰ εὕρω συνάρτησιν P(x) ἔχουσαν παράγωγον τὸ σ(x) ἀρκεῖ νὰ ἀντικαταστήσω εἰς τὴν ὑπὸ τὸ σύμβολον τῆς ὁλοκληρώσεως παράστασιν τὸ x διὰ τοῦ f(t) καὶ ἑπομένως τὸ dx διὰ τοῦ $f'(t)dt$ καὶ νὰ εὕρω συνάρτησιν F(t), δηλαδὴ συνάρτησιν ἔχουσαν παράγωγον $\sigma(f(t))\, f'(t)$. Ἀντικαθιστῶν εἰς τὸ F(t) τὸ t συναρτήσει τοῦ X θὰ ἔχω μίαν συνάρτησιν P(x).

Δύναμαι ἑπομένως νὰ γράψω :

$$(17) \qquad \int \sigma(x)dx = \int \sigma(f(t))\, f'(t)dt$$

ὁ τύπος οὗτος τῆς ἀλλαγῆς μεταβλητῆς εἰς τὰ ἀόριστα ὁλοκληρώματα δύναται νὰ ἐξαχθῇ καὶ ἀπὸ τὸν κανόνα εὑρέσεως παραγώγου συναρτήσεως ἑτέρας συναρτήσεως.

Παραδείγματα.

222.—1) Ἔστω τό :

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^5 x\, \sigma\upsilon\nu x\, dx$$

P(x) = F(t)

ἐὰν θέσω ημx=t θὰ ἔχω συνxdx=dt

ἀφ' ἑτέρου εἰς τὴν τιμὴν x=0 θ' ἀντιστοιχῇ t=0 καὶ εἰς τὴν τιμὴν $x=\frac{\pi}{2}$ θ' ἀντιστοιχῇ t=1· ἑπομένως:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^5 x\,\sigma\upsilon\nu x dx = \int_0^1 t^5 dt = \left[\frac{t^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

διότι:
$$\int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C.$$

2) Ἔστω τὸ

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$$

ἐὰν θέσω x=ημt θὰ ἔχω $\sqrt{1-x^2}$ =συνt καὶ dx=συνtdt· εἰς δὲ τὰς τιμὰς x=0, x=1 θ' ἀντιστοιχοῦν t=0, $t=\frac{\pi}{2}$ ἑπομένως:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^2 t dt.$$

Πρὸς εὕρεσιν ἤδη τοῦ ἀορίστου ὁλοκληρώματος $\int \sigma\upsilon\nu^2 t dt$ παρατηρῶ ὅτι ἡ κατὰ παράγοντας ὁλοκλήρωσις (σελ. 229) ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τὰ ἀόριστα ὁλοκληρώματα: Καὶ τῷ ὄντι ἐκ τοῦ τύπου d(u v)= =udv+vdu ἐξάγω:

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu$$

ἢ
$$uv = \int udv + \int vdu$$
ὅθεν:

$$(18) \qquad \int udv = uv - \int vdu$$

τὸν τύπον τοῦτον ἐφαρμόζω διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀορίστου ὁλοκληρώματος $\int \sigma\upsilon\nu^2 t dt$ λαμβάνων

$$\int \sigma\upsilon\nu^2 t dt = \int \sigma\upsilon\nu t . \sigma\upsilon\nu t dt = \int \sigma\upsilon\nu t . d\eta\mu t$$

ὁ τύπος (18) δίδει ($u = \sigma\upsilon\nu t$, $v = \eta\mu t$)

$$\int \sigma\upsilon\nu t d\eta\mu t = \sigma\upsilon\nu t \, . \, \eta\mu t - \int \eta\mu t(-\eta\mu t) dt$$

ἤ :

$$\int \sigma\upsilon\nu^2 t dt = \sigma\upsilon\nu t . \eta\mu t + \int \eta\mu^2 t dt = \sigma\upsilon\nu t \eta\mu t + \int (1 - \sigma\upsilon\nu^2 t) dt$$

ἢ καὶ $\displaystyle \int \sigma\upsilon\nu^2 t dt = \sigma\upsilon\nu t \eta\mu t + \int dt - \int \sigma\upsilon\nu^2 t dt$ ὅθεν

$$2 \int \sigma\upsilon\nu^2 t dt = \sigma\upsilon\nu t \eta\mu t + t$$

ἢ $$\int \sigma\upsilon\nu^2 t dt = \frac{t + \eta\mu t \sigma\upsilon\nu t}{2}$$

καὶ ἑπομένως

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^2 t dt = \left[\frac{t + \eta\mu t \sigma\upsilon\nu t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

3) Ἔστω τὸ ἀόριστον ὁλοκλήρωμα :

$$\int (\alpha x + \beta) \sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}\, dx.$$

Πρὸς προσδιορισμὸν αὐτοῦ ἐφαρμόζω τὸν τύπον (18)· θέτων $\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = t$ καὶ ἑπομένως $(2\alpha x + 2\beta) dx = dt$ λαμβάνω

$$\int (\alpha x + \beta) \sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}\, dx = \frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{2}} dt$$

ἀλλὰ $\displaystyle \frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} (\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)^{\frac{3}{2}} + C.$

4) Ἔστω τὸ ἀόριστον ὁλοκλήρωμα :

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}dx$$

θέτοντες καὶ ἐδῶ $\alpha x^2+2\beta x+\gamma=t$ λαμβάνομεν :

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}$$

ἀλλὰ $\int \frac{dt}{t}=\log t+C=\log(\alpha x^2+2\beta x+\gamma)+C.$

Προσδιορισμὸς ἀρχικῶν τινων συναρτήσεων.

(δηλ. παραγουσῶν ἢ ἀορίστων ὁλοκληρωμάτων)

223.—Ὁ τύπος $dx^{\mu+1}=(\mu+1)x^\mu\,dx$ ὁ ὁποῖος γράφεται καὶ

$d\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}=x^\mu\,dx$ δίδει : (1) $\int x^\mu\,dx=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C$

ὁ τύπος $d\sigma\upsilon\nu x=-\eta\mu x dx$ ὁ ὁποῖος γράφεται καὶ $d(-\sigma\upsilon\nu x)=\eta\mu x dx$

δίδει : (2) $\int \eta\mu x dx=-\sigma\upsilon\nu x+C$

ὁ τύπος $d\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x dx$ δίδει : (3) $\int \sigma\upsilon\nu x dx=\eta\mu x+C$

ὁ τύπος $d\varepsilon\varphi x=\frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ δίδει : (4) $\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\varepsilon\varphi x+C$

ὁ τύπος $d\log x=\frac{dx}{x}$ δίδει : (5) $\int \frac{dx}{x}=\log x+C$

ὁ τύπος $de^{\alpha x}=\alpha e^{\alpha x}dx$ ἢ $d\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}=e^{\alpha x}dx$ δίδει:

$$(6) \qquad \int e^{\alpha x}dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}+C$$

ὁ τύπος $d\alpha^x=\alpha^x \log\alpha dx$ ἢ καὶ $d\frac{\alpha^x}{\log\alpha}=\alpha^x dx$ δίδει:

$$(7) \qquad \int \alpha^x dx=\frac{\alpha^x}{\log\alpha}+C$$

ὁ τύπος $d\text{τοξημ}x=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ δίδει: (8) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\text{τοξημ}x+C$

ὁ τύπος $d\text{τοξεφ}x=\frac{dx}{1+x^2}$ δίδει (9) $\int\frac{dx}{1+x^2}=\text{τοξεφ}x+C$

ὁ τύπος $d\sqrt{\sigma(x)}=\frac{\sigma'(x)}{2\sqrt{\sigma(x)}}dx$ δίδει: (10) $\int\frac{\sigma'(x)}{\sqrt{\sigma(x)}}dx=2\sqrt{\sigma(x)}+C$

ὁ τύπος $d\log\sigma(x)=\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}dx$ δίδει (11) $\int\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}dx=\log\sigma(x)+C.$

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ δειχθῇ ὅτι: $\int_0^{\alpha}\sigma(x)dx+\int_{-\alpha}^{0}\sigma(x)dx=\int_{-\alpha}^{+\alpha}\sigma(x)dx$

2) Νὰ δειχθῇ διὰ τοῦ θεωρήματος τῆς μέσης τιμῆς ὅτι τὸ $\int_{\alpha}^{\beta}\sigma(x)dx$ τείνει πρὸς τὸ μηδὲν ὅταν τὸ β τείνει πρὸς τὸ α.

3) Ἔστω ὅτι διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x τοῦ διαστήματος (α, β) ἔχομεν

$$\sigma(x)<\varphi(x)<f(x)$$

καὶ ὅτι αἱ συναρτήσεις σ(x), φ(x), f(x), εἶναι συνεχεῖς εἰς τὸ διάστημ (α, β) θὰ ἔχωμεν :

$$\int_{\alpha}^{\beta}\sigma(x)dx<\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(x)dx<\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx \text{ ἐὰν } \alpha<\beta$$

καί :
$$\int_{\alpha}^{\beta}\sigma(x)dx>\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(x)dx>\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx \text{ ἐὰν } \alpha>\beta$$

4) Ἔστω ὅτι συνάρτησίς τις σ(x) εἶναι τοιαύτη ὥστε $\sigma(x)=-\sigma(-x)$ ὅπως π. χ. ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον μὲ περιττὰς μόνον δυνάμεις τοῦ x. Νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha}\sigma(x)dx=0.$$

5) Ἔστω ὅτι συνάρτησίς τις σ(x) εἶναι τοιαύτη ὥστε $\sigma(x)=\sigma(-x)$ ὅπως π. χ. ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον μὲ ἀρτίας μόνον δυνάμεις τοῦ x νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha}\sigma(x)dx=2\int_{0}^{\alpha}\sigma(x)\,dx.$$

Ἐφαρμόζοντες τὴν κατὰ παράγοντας ὁλοκλήρωσιν, ἢ τὴν δι' ἀντικαταστάσεως, ἢ τὴν διὰ συνδυασμοῦ καὶ τῶν δύο εὑρίσκομεν διάφορα ἀόριστα ὁλοκληρώματα. Π. χ.

6) $\int \log x\, dx = x \log x - \int x \frac{dx}{x} = x(\log x - 1) + c.$

7) $\int \text{εφ}x\, dx = \int \frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}dx = -\int \frac{d\,\text{συν}x}{\text{συν}x} = -\log \text{συν}x + c.$

8) $\int(\alpha+\beta x)^{\mu}\,dx$ ὅπου μ θετικὸς ἀκέραιος· ἢ ἀναπτύσσωμεν τὸ $(\alpha+\beta x)^{\mu}$ ἢ θέτομεν $\alpha x+\beta=t$ καὶ εὑρίσκομεν τελικῶς

$$\int(\alpha+\beta x)^{\mu}\,dx=\frac{(\alpha+\beta x)^{\mu+1}}{\beta(\mu+1)}+c.$$

9) $$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=-\int\frac{-2xdx}{2\sqrt{1-x^2}}=-\int\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$-\int d\sqrt{1-x^2}=-\sqrt{1-x^2}+c.$$

10) $$\int \text{τοξημ}x\,dx=x\,\text{τοξ ημ}x-\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=x\,\text{τοξημ}x+\sqrt{1-x^2}+c.$$

11) $\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}$ Ἐὰν θέσωμεν $x=\alpha t$ λαμβάνομεν $\int\frac{\alpha dt}{\alpha\sqrt{1-t^2}}=$

$=\text{τοξημ}t+c$ ὅθεν $\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}=\text{τοξημ}\frac{x}{\alpha}+c.$

12) $$\int\text{τοξ εφ}x\,dx=x\,\text{τοξ εφ}x-\int\frac{xdx}{1+x^2}=x\,\text{τοξ εφ}x-\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=$$

$$=x\,\text{τοξ εφ}x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)+c.$$

13) $$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx=\int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$\text{τοξ ημ}x-\sqrt{1-x^2}+c.$

14) $\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ἀλλὰ

$-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int x\,\frac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\int x\,d\sqrt{1-x^2}=x\sqrt{1-x^2}-\int\sqrt{1-x^2}\,dx$ καὶ

ἑπομένως :

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+x\sqrt{1-x^2}-\int\sqrt{1-x^2}\,dx$$ ὅθεν :

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(\text{τοξημ}x+x\sqrt{1-x^2}\right)+c,$$

15) $\int\sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx$· ἐργαζόμενοι ὅπως καὶ εἰς τὸ προηγούμενον εὑρίσκομεν : $\int\sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(\alpha^2\text{τοξημ}\,\frac{x}{\alpha}+x\sqrt{\alpha^2-x^2}\right)+c.$

16) $\int\sqrt{1+x^2}\,dx$· ἐὰν θέσωμεν $x+\sqrt{1+x^2}=t$ θὰ ἔχωμεν

$\sqrt{1+x^2}=t-x$ καὶ $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=dt-dx$ ἢ $\frac{x}{t-x}dx+dx=dt$ ἢ $dx=\frac{t-x}{t}dt$

ἀλλὰ $x=\frac{t^2-1}{2t}$ ὅθεν: $\int\sqrt{1+x^2}\,dx=\int\frac{(t^2+1)}{2t^2}\,\frac{(t^2+1)}{2t}dt=$

$$\int\frac{(t^2+1)^2}{4t^3}dt=\frac{t^2}{8}+\frac{1}{2}\log t-\frac{1}{8t^2}+c$$ καὶ ἑπομένως

$$\int\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+x^2}+\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]+c.$$

τοῦτο δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+x^2} - \log(\sqrt{1+x^2}-x)\right] + c.$$

17) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ παρατηροῦμεν ὅτι: $\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx =$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}$$ ὅθεν

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \sqrt{1+x^2}\,dx - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}$$ ἀλλὰ $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int x\,d(\sqrt{1+x^2})$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}\,dx$$ ὅθεν $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = 2\int \sqrt{1+x^2}\,dx - x\sqrt{1+x^2}$

ἢ $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log(x+\sqrt{1+x^2}) + c.$

18) $\int \frac{dx}{x^2-\alpha^2}$ παρατηροῦμεν ὅτι $\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{x+\alpha} = \frac{2\alpha}{x^2-\alpha^2}$

ὅθεν :

$$\int \frac{dx}{x^2-\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha}\int \frac{dx}{x-\alpha} - \frac{1}{2\alpha}\int \frac{dx}{x+\alpha} = \frac{1}{2\alpha}\int \frac{d(x-\alpha)}{x-\alpha} - \frac{1}{2\alpha}\int \frac{d(x+\alpha)}{x+\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\log(x-\alpha) - \frac{1}{2\alpha}\log(x+\alpha) + c$$ ὅθεν :

$$\int \frac{dx}{x^2-\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha}\log\left(\frac{x-\alpha}{x+\alpha}\right) + c.$$

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}$ θέτομεν $x=\alpha t$ καὶ εὑρίσκομεν :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \log \left[\frac{(x^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}} + x}{\alpha} \right] + c.$$

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι.

ΑΟΡΙΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ὁλοκλήρωσις ῥητῆς ἀκεραίας συναρτήσεως

1. Γνωρίζομεν ὅτι ὑπολογίζομεν ἀμέσως ἓν ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα : $\int_{\alpha}^{\beta} \sigma(x)\,dx$, ὅταν ἔχωμεν συνάρτησιν, τῆς ὁποίας ἡ παράγωγος εἶναι τὸ $\sigma(x)$, ἤτοι ὅταν προσδιορίσωμεν τὸ ἀόριστον ὁλοκλήρωμα: $\int \sigma(x)\,dx$.

Θὰ ἐξετάσωμεν ἤδη περιπτώσεις τινὰς εὑρέσεως ἀορίστου ὁλοκληρώματος.

Ὑποθέσωμεν πρῶτον ὅτι ἡ συνάρτησις εἶναι ῥητὴ ἀκεραία. Ἤτοι ἔστω τό :

$$\int (\alpha_0 x^{\mu} + \alpha_1 x^{\mu-1} + \ldots + \alpha_{\mu-1} x + \alpha_{\mu})\,dx$$

τοῦτο προφανῶς ἰσοῦται πρὸς τό :

$$\int \alpha_0 x^{\mu} dx + \int \alpha_1 x^{\mu-1} dx + \ldots + \int \alpha_{\mu-1} x dx + \int \alpha_{\mu} . dx =$$

$$= \alpha_0 \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + \alpha_1 . \frac{x^{\mu}}{\mu} + \ldots + \alpha_{\mu-1} \frac{x^2}{2} + \alpha_{\mu} x + C.$$

Ἀναγωγὴ ὁλοκληρώσεως ρητῶν συναρτήσεων μὴ ἀκεραίων

2. Ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι ἡ ρητὴ συνάρτησις δὲν εἶναι ἀκεραία· δηλ. ἔστω τό: $\int \frac{A(x)}{B(x)}\,dx$, ὅπου $A(x)$ καὶ $B(x)$ εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα. Ἐὰν ὁ βαθμὸς τοῦ $A(x)$ εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν βαθμὸν τοῦ $B(x)$, διαιροῦμεν τὸ πρῶτον διὰ τοῦ δευτέρου καὶ λαμβάνομεν:

$$A(x) = B(x)\ \Pi(x) + Y(x)$$

ὅπου τὸ $Y(x)$ εἶναι βαθμοῦ μικροτέρου ἢ τὸ $B(x)$.

Ὅθεν:
$$\frac{A(x)}{B(x)} = \Pi(x) + \frac{Y(x)}{B(x)}$$

καί:
$$\int \frac{A(x)}{B(x)}\,dx = \int \Pi(x)\,dx + \int \frac{Y(x)}{B(x)}\,dx.$$

Διὰ τὸ πρῶτον ὁλοκλήρωμα τοῦ δευτέρου μέλους ἐργαζόμεθα ὅπως ἀνωτέρω. Ὡς πρὸς τὸ δεύτερον, παρατηροῦμεν ὅτι δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ἀνάγωγον τὸ κλάσμα $\frac{Y(x)}{B(x)}$, διότι, ἂν δὲν εἶναι, δυνάμεθα νὰ τὸ καταστήσωμεν τοιοῦτον, διαιροῦντες ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους διὰ τοῦ μ.κ.δ. αὐτῶν. Ὡς γνωστὸν δέ, ἡ εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου γίνεται κατὰ τρόπον ἀνάλογον πρὸς ἐκεῖνον, μὲ τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν τὸν μ.κ.δ. δύο ἀριθμῶν καὶ δὲν ὑπάρχει πρὸς τοῦτο ἀνάγκη ν' ἀναλύσωμεν εἰς παράγοντας οὔτε τὸν ἀριθμητὴν οὔτε τὸν παρονομαστήν.

Ἔστω ὅτι προέκυψεν οὕτω ἐκ τοῦ κλάσματος $\frac{Y(x)}{B(x)}$ ἀνάγωγον κλάσμα τὸ $\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$. Θὰ ἔχωμεν κατὰ ταῦτα νὰ προσδιορίσωμεν τό: $\int \frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}dx$.
Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, θὰ ἔχωμεν ὅτι ὁ βαθμὸς τοῦ $\sigma(x)$ εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν βαθμὸν τοῦ $\varphi(x)$, καὶ ὅτι τὰ $\sigma(x)$ καὶ $\varphi(x)$ δὲν ἔχουν κοινὴν ρίζαν.

Ἔστω $$\sigma(x) = \alpha_0 x^{\mu} + \alpha_1 x^{\mu-1} + \ldots + \alpha_{\mu}$$

καὶ $$\varphi(x) = \beta_0 x^{\nu} + \beta_1 x^{\nu-1} + \ldots + \beta_{\nu}$$

ἢ καὶ $$\varphi(x) = x^{\nu} + \beta_1 x^{\nu-1} + \ldots + \beta_{\nu}$$

Ὑπεθέσαμεν συντελεστὴν τοῦ x^{ν} τὴν μονάδα· ἐὰν δὲν ἦτο ἡ μονάς, ἠδυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x^{ν}.

Πρὸς προσδιορισμὸν ἤδη τοῦ $\int \frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}\,dx$ ἀναλύομεν τὸ $\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$ εἰς ἁπλᾶ κλάσματα, ἤτοι ἀντικαθιστῶμεν τὸ $\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$ μὲ ἄθροισμα κλασμάτων ἐχόντων παρονομαστὰς τῆς μορφῆς $(x-\lambda)$ ἢ $(x-\lambda)^{\kappa}$.

Ἀνάλυσις ῥητῶν κλασμάτων εἰς ἁπλᾶ.

3. ***Περίπτωσις α΄). Ὅλαι αἱ ῥίζαι τοῦ παρονομαστοῦ εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι.***

Ἔστω : $\varphi(x) = (x-\varrho_1)(x-\varrho_2)(x-\varrho_3)\ldots(x-\varrho_{\nu})$.

Εὐκόλως φαίνεται ὅτι ὑπάρχουν σταθεροὶ ἀριθμοὶ A_1, A_2, $A_3 \ldots A_{\nu}$ τοιοῦτοι, ὥστε νὰ ἔχωμεν ἐκ ταυτότητος :

$$\frac{\sigma(x)}{(x-\varrho_1)(x-\varrho_2)\ldots(x-\varrho_{\nu})} = \frac{A_1}{x-\varrho_1} + \frac{A_2}{x-\varrho_2} + \ldots + \frac{A_{\nu}}{x-\varrho_{\nu}} \quad (1)$$

Ἀρκεῖ προφανῶς νὰ δείξωμεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τοὺς συντελεστάς : A_1, A_2, $A_3 \ldots A_{\nu}$ οὕτως, ὥστε νὰ ἔχωμεν :

$$\sigma(x) = A_1(x-\varrho_2)\ldots(x-\varrho_{\nu}) +$$
$$+ A_2(x-\varrho_1)(x-\varrho_3)\ldots(x-\varrho_{\nu}) + \ldots + A_{\nu}(x-\varrho_1)\ldots(x-\varrho_{\nu-1}). \quad (2)$$

Μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων εἰς τὸ δεύτερον μέλος θὰ προκύψῃ πολυώνυμον τῆς μορφῆς : $\Pi_1 x^{\nu-1} + \ldots \Pi_{\nu-1} x + \Pi_{\nu}$, ὅπου τὰ Π_1, $\Pi_2 \ldots \Pi_{\nu}$ θὰ εἶναι συναρτήσεις τῶν A_1, $A_2 \ldots A_{\nu}$, ϱ_1, $\varrho_2 \ldots \varrho_{\nu}$.

Παρατηροῦμεν ὅτι, διὰ νὰ ὑπάρχῃ ἡ ταυτότης (2), πρέπει καὶ ἀρκεῖ οἱ συντελεσταὶ τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ x νὰ εἶναι ἴσοι.

Ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν ὅτι ὁ ἀκέραιος $\mu<\nu$, ἑπομένως θὰ εἶναι ἡ $\nu=\mu+1$ ἢ $\nu>\mu+1$· ὅθεν ἢ $\nu-1=\mu$ ἢ $\nu-1>\mu$. ὅθεν, ἐξισοῦντες τὸν συντελεστὴν ἑκάστης δυνάμεως τοῦ x εἰς τὸ δεύτερον μέλος μὲ τὸν ἀντίστοιχον συντελεστὴν εἰς τὸ πρῶτον, (ὁ ὁποῖος δύναται νὰ εἶναι καὶ μηδέν), λαμβάνομεν ν ἐξισώσεις ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους $A_1, A_2 \ldots A_\nu$. Αἱ ἐξισώσεις αὗται θὰ εἶναι γραμμικαὶ (πρωτοβάθμιοι ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους), ὅπως, εὐκόλως φαίνεται ἀπὸ τὸ δεύτερον μέλος τῆς (2). Λύοντες ταύτας, εὑρίσκομεν τὰς ζητουμένας τιμὰς διὰ τὰ $A_1, A_2 \ldots A_\nu$, ἤτοι σταθεροὺς ἀριθμοὺς τοιούτους, ὥστε νὰ πληροῦται ἡ (2) καὶ ἑπομένως καὶ ἡ (1).

Ἡ μέθοδος αὕτη καλεῖται μέθοδος τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν.

Δευτέρα μέθοδος, μὲ τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τοὺς αὐτοὺς συντελεστάς, στηρίζεται, ἐπὶ τῆς ἑξῆς παρατηρήσεως: Ἂν εἰς τὴν ταυτότητα (2) θέσωμεν $x=\varrho_1$ λαμβάνομεν:

$$\sigma(\varrho_1)=A_1\,(\varrho_1-\varrho_2)\,(\varrho_1-\varrho_3)\ldots(\varrho_1-\varrho_\nu) \qquad (3)$$

ἀφ' ἑτέρου: $\varphi'(x)=(x-\varrho_2)(x-\varrho_3)\ldots(x-\varrho_\nu)+(x-\varrho_1)(x-\varrho_3)\ldots(x-\varrho_\nu)+$
$\ldots+(x-\varrho_1)\,(x-\varrho_2)\ldots(x-\varrho_{\nu-1})$

καὶ ἑπομένως ἡ (3) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\sigma(\varrho_1)=A_1\varphi'(\varrho_1) \qquad \text{ὅθεν} \qquad A_1=\frac{\sigma(\varrho_1)}{\varphi'(\varrho_1)}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν:

$$A_2=\frac{\sigma(\varrho_2)}{\varphi'(\varrho_2)}, \qquad A_3=\frac{\sigma(\varrho_3)}{\varphi'(\varrho_3)}, \quad \ldots \ldots \quad A_\nu=\frac{\sigma(\varrho_\nu)}{\varphi'(\varrho_\nu)}$$

Ἤτοι διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὸν σταθερὸν ἀριθμὸν A_i ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰ $\sigma(x)$ καὶ $\varphi'(x)$ τὸ x διὰ τοῦ ϱ_i καὶ διαιροῦμεν.

Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν καὶ ὡς ἑξῆς: Πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ $(x-\varrho_1)$ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ταυτότητος (1) λαμβάνομεν:

$$\frac{\sigma(x)\;(x-\varrho_1)}{\varphi(x)}=A_1+\frac{A_2(x-\varrho_1)}{x-\varrho_2}+\ldots\ldots+\frac{A_\nu(x-\varrho_1)}{x-\varrho_\nu}$$

Ὑποθέτοντες ἤδη, ὅτι τὸ x τείνει πρὸς τὸ ϱ_1, θὰ ἔχωμεν: ὅρ $\frac{\sigma(x)\ (x-\varrho_1)}{\varphi(x)}=A_1$. ὅθεν ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα τοῦ L'Hôpital λαμβάνομεν: $\frac{\sigma(\varrho_1)}{\varphi'(\varrho_1)}=A_1$. Ὁμοίως ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν:

$$\frac{\sigma(\varrho i)}{\varphi'(\varrho i)} = A i \qquad (i=1,\ 2,\ 3\ .\ .\ .\ \nu) \qquad (4)$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας τῶν Ai εἰς τὴν (1) λαμβάνομεν

$$\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}=\frac{\sigma(\varrho_1)}{\varphi'(\varrho_1)}\ \frac{1}{(x-\varrho_1)}+\frac{\sigma(\varrho_2)}{\varphi'(\varrho_2)}\ \frac{1}{(x-\varrho_2)}+\ldots\ldots+\frac{\sigma(\varrho_\nu)}{\varphi'(\varrho_\nu)}\ \frac{1}{(x-\varrho_\nu)}.$$

4. Δυνάμεθα ἀκόμη νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν ἑξῆς μέθοδον πρὸς προσδιορισμὸν τῶν A_1, A_2. . . . A_ν. Θέτομεν: $x-\varrho_1=\varepsilon$ ἢ $x=\varrho_1+\varepsilon$. Τότε τὸ $\sigma(\varrho_1+\varepsilon)$ θὰ εἶναι πολυώνυμον βαθμοῦ μ ὡς πρὸς ε· τὸ δὲ $\varphi(\varrho_1+\varepsilon)$ θὰ εἶναι βαθμοῦ ν καὶ δὲν θὰ ἔχῃ ὅρον ἀνεξάρτητον τοῦ ε, διότι πρέπει διὰ τὴν τιμὴν ε=ο νὰ γίνεται μηδέν, ἀφοῦ $\varphi(\varrho_1)=o$. Ἔστω λοιπόν:

$$\begin{aligned}\sigma(\varrho_1+\varepsilon) &= \lambda_0+\lambda_1\varepsilon+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ +\lambda_\mu\varepsilon^\mu\\ \varphi(\varrho_1+\varepsilon) &= \mu_1\varepsilon+\mu_2\varepsilon^2+\ .\ .\ .\ .\ .\ +\mu_\nu\varepsilon^\nu\end{aligned} \qquad (5)$$

τότε

$$\frac{\sigma(\varrho_1+\varepsilon)}{\varphi(\varrho_1+\varepsilon)}=\frac{1}{\varepsilon}\ \frac{\lambda_0+\lambda_1\varepsilon+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ +\lambda_\mu\varepsilon^\mu}{\mu_1+\mu_2\varepsilon+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ +\mu_\nu\varepsilon^{\nu-1}}$$

Διαιρῶ τὸ $\lambda_0+\lambda_1\varepsilon+\ldots+\lambda_\mu\varepsilon^\mu$ διὰ τοῦ $\mu_1+\mu_2\varepsilon\ldots\mu_\nu\varepsilon^{\nu-1}$ καὶ σταματῶ εἰς τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου· θὰ ἔχω πηλίκον τὸ $\frac{\lambda_0}{\mu_1}$ καὶ ὑπόλοιπον τῆς μορφῆς: $\delta_0\varepsilon+\delta_1\varepsilon^2+\ .\ .\ .\ +\ \delta_{\nu-1}\varepsilon^{\nu-1}$. Ὅθεν

$$\frac{\sigma(\varrho_1+\varepsilon)}{\varphi(\varrho_1+\varepsilon)}=\frac{1}{\varepsilon}\ \frac{\lambda_0}{\mu_1}+\frac{\delta_0+\delta_1\varepsilon+\delta_2\varepsilon^2+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \delta_{\nu-1}\ \varepsilon^{\nu-1}}{\mu_1+\mu_2\varepsilon+\mu_3\varepsilon^2+\ .\ .\ .\ .\ .\ +\mu_\nu\varepsilon^{\nu-1}}$$

ἢ ἀκόμη, θέτοντες: $\varrho_1+\varepsilon=x$ καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψει τὴν (5) λαμβάνομεν

$$\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lambda_0}{\mu_1}\ \frac{1}{x-\varrho_1}+\frac{\delta_0+\delta_1(x-\varrho_1)+\delta_2(x-\varrho_2)^2+\ .\ .\ .\ .\ .\ .}{(x-\varrho_2)\ (x-\varrho_3)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (x-\varrho_\nu)}$$

Εἰς τὸ δεύτερον μέλος ὁ παρονομαστὴς τοῦ δευτέρου προσθετέου δὲν ἔχει ρίζαν πλέον τὸ ϱ_1· ὥστε ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος τοῦ ἔχοντος παρονομαστὴν τὸ $x-\varrho_1$ εἶναι ὁ $\frac{\lambda_0}{\mu_1}$· ἤτοι : $\frac{\lambda_0}{\mu_1}=A_1$.

Ἐὰν ἐθέτομεν $x=\varrho_2+\varepsilon$ καὶ εἰργαζόμεθα κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον, θὰ ἐπροσδιορίζαμεν τὸ A_2· κ.ο.κ.

Τὴν ἀνωτέρω μέθοδον ἠδυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς :

Θέτομεν $x=\varrho_1+\varepsilon$. Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον τοῦ Taylor λαμβάνομεν :

$$\sigma(\varrho_1+\varepsilon)=\sigma(\varrho_1)+\varepsilon\,\sigma'(\varrho_1)+\frac{\varepsilon}{\underline{|2}}\,\sigma''(\varrho_1)+\ldots$$

$\varphi(\varrho_1)$

$$\varphi(\varrho_1+\varepsilon)=\varepsilon\varphi'(\varrho_1)+\frac{\varepsilon^2}{\underline{|2}}\,\varphi''(\varrho_1)+\ldots$$

Διαιροῦντες τὸ $\sigma(\varrho_1+\varepsilon)$ διὰ τοῦ $\varphi(\varrho_1+\varepsilon)$ λαμβάνομεν ὡς πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου τὸ $\frac{\sigma(\varrho_1)}{\varphi'(\varrho_1)}$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\sigma(\varrho_1+\varepsilon)}{\varphi(\varrho_1+\varepsilon)}=\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\sigma(\varrho_1)}{\varphi'(\varrho_1)}+\frac{\delta_0+\delta_1\varepsilon+\ldots\ldots}{\varphi'(\varrho_1)+\frac{\varepsilon}{\underline{|2}}\,\varphi''(\varrho_1)+}$$

ἢ καὶ θέτοντες $\varrho_1+\varepsilon=x$

$$\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}=\frac{1}{x-\varrho_1}\,\frac{\sigma(\varrho_1)}{\varphi'(\varrho_1)}+\frac{\delta_0+\delta_1\varepsilon+\ldots\ldots\ldots\ldots}{\varphi'(\varrho_1)+\frac{x-\varrho_1}{\underline{|2}}\,\varphi''(\varrho_1)+\ldots\ldots}$$

Ὅθεν $A_1=\frac{\sigma(\varrho_1)}{\varphi'(\varrho_1)}$· ὁμοίως εὑρίσκεται :

$$A_i=\frac{\sigma(\varrho_i)}{\varphi'(\varrho_i)}$$

5. ***Περίπτωσις β΄). Αἱ ρίζαι τοῦ πολυωνύμου*** $\varphi(x)$ ***εἶναι ὅλαι πραγματικαί, ἀλλ' οὐχὶ καὶ ὅλαι ἄνισοι.***

Π. χ. ἔστω : $\varphi(x)=(x-\varrho_1)^\alpha\,(x-\varrho_2)^\beta\,(x-\varrho_3)^\gamma\ldots(x-\varrho_\kappa)^\tau$

1) Διὰ τὴν ἀνάλυσιν τοῦ $\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$ εἰς ἁπλᾶ κλάσματα θὰ ἐφαρμόσωμεν καὶ ἐδῶ μέθοδον ἀνάλογον πρὸς τὴν προηγουμένην (§ 4).

Θέτομεν $x=\varrho_1+\varepsilon$. Ἐὰν καλέσωμεν $\varphi_1(x)$ τὸ $(x-\varrho_2)^{\beta}(x-\varrho_3)^{\gamma}\dots$ θὰ ἔχωμεν : $\varphi(\varrho_1+\varepsilon)=\varepsilon^{\alpha}\varphi_1(\varrho_1+\varepsilon)$,
ὅπου $\varphi_1(\varrho_1+\varepsilon)$ θὰ εἶναι πολυώνυμον ὡς πρὸς ε ἔχον ὅρον ἀνεξάρτητον τοῦ ε, (διότι τὸ $\varphi_1(\varrho_1+\varepsilon)$ δὲν θὰ μηδενίζεται διὰ $\varepsilon=0$, ἀφοῦ τὸ ϱ_1 δὲν εἶναι ρίζα τοῦ $\varphi_1(x)$.

Ὥστε : $\varphi_1(\varrho_1+\varepsilon)=\mu_0+\mu_1\varepsilon+\mu_2\varepsilon^2+\dots \qquad (\mu_0\neq 0)$

καί : $\sigma(\varrho_1+\varepsilon)=\lambda_0+\lambda_1\varepsilon+\lambda_2\varepsilon^2+\dots$

Διαιροῦμεν τό : $\lambda_0+\lambda_1\varepsilon+\lambda_2\varepsilon^2+\dots$ διὰ τοῦ : $\mu_0+\mu_1\varepsilon+\mu_2\varepsilon^2+\dots$

Προχωροῦμεν εἰς τὸ πηλίκον μέχρι τοῦ ὅρου τοῦ ἔχοντος τὸ $\varepsilon^{\alpha-1}$, ἔστω πηλίκον τό :

$$A_0+A_1\varepsilon+A_2\varepsilon^2+\dots+A_{\alpha-1}\varepsilon^{\alpha-1}$$

καὶ ὑπόλοιπον τό :

$$K_1\varepsilon^{\alpha}+K_2\varepsilon^{\alpha+1}+\dots$$

Θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\sigma(\varrho_1+\varepsilon)}{\varphi(\varrho_1+\varepsilon)}=\frac{A_0}{\varepsilon^{\alpha}}+\frac{A_1}{\varepsilon^{\alpha-1}}+\dots+\frac{A_{\alpha-1}}{\varepsilon}+\frac{K_1\varepsilon^{\alpha}+K_2\varepsilon^{\alpha+1}+\dots\dots}{\varepsilon^{\alpha}\varphi_1(\varrho_1+\varepsilon)}$$

ἢ ἀκόμη :

$$\frac{\sigma(\varrho_1+\varepsilon)}{\varphi(\varrho_1+\varepsilon)}=\frac{A_0}{\varepsilon^{\alpha}}+\frac{A_1}{\varepsilon^{\alpha-1}}+\dots\dots+\frac{A_{\alpha-1}}{\varepsilon}+\frac{K_1+K_2\varepsilon+\dots}{\varphi_1(\varrho_1+\varepsilon)}$$

ἢ καί : ἐὰν θέσωμεν : $\varrho_1+\varepsilon=x$.

$$\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}=\frac{A_0}{(x-\varrho_1)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(x-\varrho_1)^{\alpha-1}}+\dots\dots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-\varrho_1}+\frac{Y_1(x)}{\varphi_1(x)} \qquad (6)$$

ὅπου $\frac{Y_1(x)}{\varphi_1(x)}$ εἶναι ρητὸν κλάσμα μὲ ἀριθμητὴν βαθμοῦ μικροτέρου ἀπὸ τὸν βαθμὸν τοῦ παρονομαστοῦ $\varphi_1(x)$, ὅστις ἰσοῦται πρὸς τό : $(x-\varrho_2)^{\beta}(x-\varrho_3)^{\gamma}\dots$

Ἂν ἀντικαταστήσωμεν πάλιν εἰς τὸ $\frac{Y_1(x)}{\varphi_1(x)}$ τὸ x διὰ τοῦ $\varrho_2+\varepsilon$ καὶ ἐργασθῶμεν, ὅπως ἀνωτέρω, θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{Y_1(x)}{\varphi_1(x)}=\frac{B_0}{(x-\varrho_2)^{\beta}}+\frac{B_1}{(x-\varrho_2)^{\beta-1}}+\frac{B_2}{(x-\varrho_2)^{\beta-2}}+\dots+\frac{B_{\beta-1}}{x-\varrho_2}+\frac{Y_2(x)}{\varphi_2(x)}$$

ὅπου τὰ B_0 $B_1 \ldots \ldots B_{\delta-1}$ εἶναι σταθεροὶ ἀριθμοί, τὸ δὲ $Y_2(x)$ εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον βαθμοῦ μικροτέρου ἀπὸ τὸν βαθμὸν τοῦ $\varphi_2(x)$ μὲ ρίζας διαφόρους τῶν ριζῶν τοῦ παρονομαστοῦ

$$\varphi_2(x) = (x-\varrho_3)^\gamma\,(x-\varrho_4)^\delta \ldots$$

Ἐργαζόμεθα ὁμοίως μὲ τὸ $\frac{Y_2(x)}{\varphi_2(x)}$ κ,ο.κ.

Προχωροῦντες οὕτω, φθάνομεν εἰς τὴν τελευταίαν ρίζαν τοῦ παρονομαστοῦ. Θὰ ἔχωμεν τελικῶς

$$\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_0}{(x-\varrho_1)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-\varrho_1)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-\varrho_1} +$$
$$+ \frac{B_0}{(x-\varrho_2)^\delta} + \frac{B_1}{(x-\varrho_2)^{\delta-1}} + \ldots + \frac{B_{\delta-1}}{x-\varrho_2} + \frac{\Gamma_0}{(x-\varrho_3)^\gamma} + \ldots \tag{7}$$

2) Ἄλλη μέθοδος διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τοὺς συντελεστὰς A_0, $A_1, \ldots$ τῆς ταυτότητος (6) εἶναι ἡ ἑξῆς :

Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (6) ἐπὶ $(x-\varrho_1)^\alpha$ καὶ λαμβάνομεν :

$$\frac{\sigma(x)(x-\varrho_1)^\alpha}{\varphi(x)} = A_0 + A_1(x-\varrho_1) + A_2(x-\varrho_1)^2 + A_3(x-\varrho_1)^3 + \ldots +$$
$$+ A_{\alpha-1}(x-\varrho_1)^{\alpha-1} + \frac{Y_1(x)(x-\varrho_1)^\alpha}{\varphi_1(x)}.$$

Ἐὰν ἤδη καλέσωμεν $\Pi(x)$ τὸ $\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}(x-\varrho_1)^\alpha$ καὶ θέσωμεν $x-\varrho_1=\varepsilon$, θὰ ἔχωμεν :

$$\Pi(\varrho_1+\varepsilon) = A_0 + A_1\varepsilon + A_2\varepsilon^2 + \ldots \quad + A_{\alpha-1}\varepsilon^{\alpha-1} + \frac{Y_1(\varrho_1+\varepsilon)\,\varepsilon^\alpha}{\varphi_1(\varrho_1+\varepsilon)}$$

Τὸ $\varphi_1(\varrho_1+\varepsilon)$ δὲν ἔχει ὡς παράγοντα τὸ ε (ἐπειδὴ $\varphi_1(\varrho_1) \neq o$) καὶ ἑπομένως τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $\frac{Y_1(\varrho_1+\varepsilon)}{\varphi_1(\varrho_1+\varepsilon)}\varepsilon^\alpha$ κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ ε θὰ ἀρχίζῃ ἀπὸ ὅρον περιέχοντα ὡς παράγοντα τὸ ε^α· ὅθεν οἱ ὅροι τοῦ $A_0 + A_1\varepsilon + \ldots + A_{\alpha-1}\varepsilon^{\alpha-1}$ θὰ συμπίπτουν μὲ τοὺς α πρώτους ὅρους, τοὺς ὁποίους θὰ δίδῃ τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ Taylor διὰ τὴν συνάρτησιν $\Pi(\varrho_1+\varepsilon)$.

Κατὰ ταῦτα :

$$A_0 = \Pi(\varrho_1),\ A_1 = \Pi'(\varrho_1),\ A_2 = \frac{\Pi''(\varrho_1)}{\underline{|2}},\ \ldots$$

3) Δυνάμεθα καὶ ἀπ' εὐθείας νὰ δείξωμεν ὅτι ὑπάρχει ταυτότης τῆς μορφῆς :

$$\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_0}{(x-\varrho_1)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-\varrho_1)^{\alpha-1}} + \ .\ .\ .\ + \frac{A_{\alpha-1}}{x-\varrho_1} + \frac{Y_1(x)}{\varphi_1(x)} \qquad (6)$$

ὅπου $Y_1(x)$ εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον καὶ $\varphi_1(x) = (x-\varrho_2)^{\beta}(x-\varrho_3)^{\gamma}\ldots$
Καὶ τῷ ὄντι ἀντὶ τῆς (6) δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τήν :

$$\sigma(x) = \left[A_0 + A_1(x-\varrho_1) + \ldots + A_{\alpha-1}(x-\varrho_1)^{\alpha-1}\right]\varphi_1(x) + Y_1(x)(x-\varrho_1)^{\alpha}$$

ἤ, θέτοντες : $x - \varrho_1 = \varepsilon$,

$$\sigma(\varrho_1+\varepsilon) = \left[A_0 + A_1\varepsilon + \ldots A_{\alpha-1}\varepsilon^{\alpha-1}\right]\varphi_1(\varrho_1+\varepsilon) + Y_1(\varrho_1+\varepsilon)\varepsilon^{\alpha} \qquad (8)$$

Ἀναπτύσσοντες ἀφ' ἑτέρου κατὰ τὸν τύπον τοῦ Taylor ἔχομεν :

$$\sigma(\varrho_1+\varepsilon) = \sigma(\varrho_1) + \sigma'(\varrho_1)\varepsilon + \frac{\sigma''(\varrho_1)}{\underline{|2}}\varepsilon^2 + \ .\ .\ ,\ + \frac{\sigma^{(\alpha)}(\varrho_1)}{\underline{|\alpha}}\varepsilon^{\alpha} + \ .\ .\ .$$

$$\varphi(\varrho_1+\varepsilon) = \varphi(\varrho_1) + \varphi'(\varrho_1)\varepsilon + \ldots + \frac{\varphi^{(\alpha-1)}(\varrho_1)}{\underline{|\alpha-1}}\varepsilon^{\alpha-1} + \frac{\varphi^{(\alpha)}(\varrho_1)}{\underline{|\alpha}}\varepsilon^{\alpha} + \frac{\varphi^{(\alpha+1)}(\varrho_1)}{\underline{|\alpha+1}}\varepsilon^{\alpha+1} +$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ ϱ_1 εἶναι ρίζα τοῦ $\varphi(x)$ μὲ βαθμὸν πολλαπλότητος α θὰ ἔχωμεν ;

$$\varphi(\varrho_1) = \varphi'(\varrho_1) = \ .\ .\ . = \varphi^{(\alpha-1)}(\varrho_1) = 0\cdot$$

ὅθεν :
$$\varphi(\varrho_1+\varepsilon) = \frac{\varphi^{(\alpha)}(\varrho_1)}{\underline{|\alpha}}\varepsilon^{\alpha} + \frac{\varphi^{(\alpha+1)}(\varrho_1)}{\underline{|\alpha+1}}\varepsilon^{\alpha+1} + \ .\ .\ .\ .$$

$$\varphi_1(\varrho_1+\varepsilon) = \frac{\varphi^{(\alpha)}(\varrho_1)}{\underline{|\alpha}} + \frac{\varphi^{(\alpha+1)}(\varrho_1)}{\underline{|\alpha+1}}\varepsilon + \ .\ .\ .$$

καί :

$$Y_1(\varrho_1+\varepsilon)=Y_1(\varrho_1)+Y'_1(\varrho_1)\varepsilon+\dots$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (8) λαμβάνομεν :

$$\sigma(\varrho_1)+\sigma'(\varrho_1)\varepsilon+\dots+\frac{\sigma^{(\alpha)}(\varrho_1)}{\alpha!}\varepsilon^{\alpha}+\dots=[A_0+\dots+A_{\alpha-1}\varepsilon^{\alpha-1}]\left(\frac{\varphi^{(\alpha)}(\varrho_1)}{\alpha!}+\dots\right)$$

$$+\left((Y_1(\varrho_1)+Y_1(\varrho_1)\varepsilon+\dots\right)\varepsilon^{\alpha}$$

Ἐξισοῦμεν τοὺς συντελεστὰς τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ ε μέχρι τῆς $\varepsilon^{\alpha-1}$ καὶ λαμβάνομεν

$$\sigma(\varrho_1)=A_0\frac{\varphi^{(\alpha)}(\varrho_1)}{\alpha!}$$

$$\sigma'(\varrho_1)=A_0\frac{\varphi^{(\alpha+1)}(\varrho_1)}{(\alpha+1)!}+A_1\frac{\varphi^{(\alpha)}(\varrho_1)}{\alpha!}$$

$$\frac{\sigma''(\varrho_1)}{2!}=A_0\frac{\varphi^{(\alpha+2)}(\varrho_1)}{(\alpha+2)!}+A_1\frac{\varphi^{(\alpha+1)}(\varrho_1)}{(\alpha+1)!}+A_2\frac{\varphi^{(\alpha)}(\varrho_1)}{\alpha!} \qquad (9)$$

. . . .

$$\frac{\sigma^{(\alpha-1)}(\varrho_1)}{(\alpha-1)!}=A_0\frac{\varphi^{(2\alpha-1)}(\varrho_1)}{(2\alpha-1)!}+A_1\frac{\varphi^{(2\alpha-2)}(\varrho_1)}{(2\alpha-2)!}+\dots\dots+A_{\alpha-1}\frac{\varphi^{(\alpha)}(\varrho_1)}{\alpha!}$$

Αἱ ἐξισώσεις αὗται ὁρίζουν τοὺς συντελεστὰς A_0, A_1, $A_2 \dots A_{\alpha-1}$. Ἐὰν ἤδη ἐξισώσωμεν τοὺς συντελεστὰς τῶν ε^{α}, $\varepsilon^{\alpha+1}$, ... ὁρίζομεν τὰ $Y_1(\varrho_1)$, $Y'(\varrho_1)$,... καὶ τελικῶς τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον $Y_1(x)$.

6. Λέγω ἤδη ὅτι μόνον μία ἀνάλυσις τῆς μορφῆς (6) γίνεται. Ἔστω ὅτι ἐργαζόμενοι κατά τινα τρόπον εὑρήκαμεν

$$\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}=\frac{K_0}{(x-\varrho_1)^{\lambda}}+\frac{K_1}{(x-\varrho_1)^{\lambda-1}}+\dots\dots+\frac{K_{\lambda-1}}{x-\varrho_1}+\frac{\Pi(x)}{P(x)} \qquad (10)$$

ὅπου λ θετικὸς καὶ ἀκέραιος καὶ $P(x)$ ἀκέραιον πολυώνυμον μὴ περιέχον τὴν ρίζαν ϱ_1. Θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι :

$$\lambda=\alpha \text{ καὶ } K_0=A_0,\ K_1=A_1 \ldots .\ K_{\lambda-1}=A_{\alpha-1}$$

καὶ ὅτι τὸ κλάσμα $\dfrac{\Pi(x)}{P(x)}$ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ $\dfrac{Y_1 x}{\varphi_1(x)}$.

Καὶ πράγματι ἔστω $\lambda>\alpha$· ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος (10) ἐπὶ $(x-\varrho_1)^{\lambda-1}$ εὑρίσκομεν :

$$\frac{\sigma(x)\,(x-\varrho_1)^{\lambda-1}}{\varphi_1(x)\,(x-\varrho_1)^{\alpha}}=\frac{K_0}{x-\varrho_1}+K_1+K_2(x-\varrho_1)+\ldots+K_{\lambda-1}(x-\varrho_1)^{\lambda-2}+.$$

$$+\frac{\Pi(x)\,(x-\varrho_1)^{\lambda-1}}{P(x)} \qquad (11)$$

Ἐπειδὴ ὑπεθέσαμεν $\lambda>\alpha$, θὰ ἔχωμεν ὅτι ὁ α δὲν ὑπερβαίνει τὸν $\lambda-1$· ὅθεν τὸ πρῶτον μέλος ἁπλοποιούμενον θὰ δίδῃ κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς δὲν θὰ περιέχῃ τὸν παράγοντα $x-\varrho_1$· ἀλλὰ τότε τὸ πρῶτον μέλος διὰ $x=\varrho_1$ λαμβάνει πεπερασμένην τιμήν, ἐνῷ τὸ δεύτερον μέλος γίνεται ἄπειρον· ὅθεν ἡ ταυτότης (10) θὰ εἶναι ἀδύνατος.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι, καὶ ἐὰν $\lambda<\alpha$, πάλιν εἶναι ἀδύνατος ἡ (10)· ἄρα $\lambda=\alpha$. Ἀλλὰ τότε αἱ (6) καὶ (10) θὰ δίδουν τὴν ταυτότητα.

$$\frac{A_0}{(x-\varrho_1)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(x-\varrho_1)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-\varrho_1}+\frac{Y_1(x)}{\varphi_1(x)}=\frac{K_0}{(x-\varrho_1)^{\alpha}}+\frac{K_1}{(x-\varrho_1)^{\alpha-1}}+$$

$$+\ldots\ldots+\frac{K^{\alpha-1}}{x-\varrho_1}+\frac{\Pi(x)}{P(x)}$$

Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς ἐπὶ $(x-\varrho_1)^{\alpha}$ καὶ λαμβάνομεν :

$$A_0+A_1(x-\varrho_1)+\ldots+A^{\alpha-1}(x-\varrho_1)^{\alpha-1}+\frac{Y\,(x)(x-\varrho_1)^{\alpha}}{\varphi_1(x)}=$$

$$=K_0+K_1(x-\varrho_1)+\ldots+K_{\alpha-1}(x-\varrho_1)^{\alpha-1}+\frac{(\Pi x)\,(x-\varrho_1)^{\alpha}}{P(x)}.$$

Θέτοντες ἤδη $x=\varrho_1$, εὑρίσκομεν : $K_0=A_0$

ὅθεν καὶ

$$A_1(x-\varrho_1)+\ldots=K_1(x-\varrho_1)+\ldots\ldots$$

Διαιροῦντες διὰ $x-\varrho_1$ καὶ θέτοντες πάλιν $x=\varrho_1$ λαμβάνομεν: $K_1=A_1$· οὕτω προχωροῦντες θὰ εὕρωμεν κατὰ σειράν:

$$K_2=A_2\ \ldots\ K_{\alpha-1}=A_{\alpha-1}$$

καὶ τέλος: $$\frac{\Pi(x)}{P(x)}=\frac{Y_1(x)}{\varphi_1(x)}$$

Διὰ νὰ ἐπεκτείνωμεν τὰ ἀνωτέρω ἐργαζόμεθα μὲ τὸ κλάσμα $\frac{Y_1(x)}{\varphi_1(x)}$ καὶ μὲ τὴν ρίζαν ϱ_2, ὅπως εἰργάσθημεν μὲ τὸ κλάσμα $\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$ καὶ τὴν ρίζαν ϱ_1· θὰ εὕρωμεν τότε

$$\frac{Y_1(x)}{\varphi_1(x)}=\frac{B_0}{(x-\varrho_2)^{\beta}}+\frac{B_1}{(x-\varrho_2)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{B_{\beta-1}}{x-\varrho_2}+\frac{Y_2(x)}{\varphi_2(x)}$$

ὅπου τὸ $\varphi_2(x)$ δὲν περιέχει τὰς ρίζας ϱ_1 καί ϱ_2.

Προχωροῦντες κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον εὑρίσκομεν τελικῶς:

$$\begin{aligned}\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}=&\frac{A_0}{(x-\varrho_1)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(x-\varrho_1)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-\varrho_1}+\\ &+\frac{B_0}{(x-\varrho_2)^{\beta}}+\frac{B_1}{(x-\varrho_2)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{B_{\beta-1}}{x-\varrho_2}+\ldots \qquad (12)\\ &+\frac{T_0}{(x-\varrho_\varkappa)^{\tau}}+\frac{T_1}{(x-\varrho_\varkappa)^{\tau-1}}+\ldots+\frac{T_{\tau-1}}{x-\varrho_\varkappa}+\\ &+\frac{Y_\varkappa(x)}{\varphi_\varkappa(x)}.\end{aligned}$$

Παρατηροῦμεν ἤδη ὅτι τὸ $\varphi_\varkappa(x)$ θὰ εἶναι ἡ μονάς, διότι προέκυψε διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ $\varphi(x)$ διὰ $(x-\varrho_1)^{\alpha}(x-\varrho_2)^{\beta}\ldots(x-\varrho_\varkappa)^{\tau}$

ὥστε $$\frac{Y_\varkappa(x)}{\varphi_\varkappa(x)}=Y_\varkappa(x)$$

Θὰ δείξωμεν τέλος ὅτι τὸ πολυώνυμον αὐτὸ $Y_\varkappa(x)$ δέον νὰ εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.

Πράγματι, διότι ἂν εἰς τὴν ἰσότητα (12) τὸ x τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον, τὸ ὅριον τοῦ πρώτου μέλους θὰ εἶναι μηδέν, ἐπειδὴ ὁ ἀριθμητὴς εἶναι βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ παρονομαστοῦ.

Προφανῶς δὲ καὶ τὰ κλάσματα :

$$\frac{A_0}{(x-\varrho_1)^\alpha}, \ldots, \frac{T_{\tau-1}}{x-\varrho_\varkappa}$$

διὰ ὅρx=∞ ἔχουν ὅριον τὸ μηδέν· ὅθεν πρέπει καί : ὅρ. $Y_\varkappa(x)=0$·

Ἀλλ' αὐτὸ συμβαίνει μόνον, ὅταν $Y_\varkappa(x)$ εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν, διότι ἐὰν τὸ $Y_\varkappa(x)$ ἦτο ἀκέραιον πολυώνυμον, θὰ εἶχεν ὅριον τὸ ἄπειρον διὰ ὅρx=∞.

7. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ἡ γενικὴ θεμελιώδης πρότασις :

Ἐὰν σ(x) καὶ φ(x) εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα καὶ ἐὰν τὸ σ(x) εἶναι βαθμοῦ μικροτέρου ἀπὸ τὸν τοῦ φ(x), ἔχομεν διά :

$$\varphi(x)=(x-\varrho_1)^\alpha (x-\varrho_2)^\beta \ldots (x-\varrho_\varkappa)^\tau$$

ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$, ***ἀναλύεται κατὰ ἕνα μόνον τρόπον εἰς ἄθροισμα τῆς μορφῆς, τὴν ὁποίαν λαμβάνει τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος*** (12), ***ὅταν διαγραφῇ τὸ*** $\frac{Y_\varkappa(x)}{\varphi_\varkappa(x)}$.

8. **Περίπτωσις γ΄). Ὁ παρονομαστὴς ἔχει καὶ φανταστικὰς ῥίζας.** Τὸ φ(x) εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον μὲ πραγματικοὺς συντελεστάς· ἐπομένως ἐὰν ἔχῃ ῥίζαν τῆς μορφῆς λ+μi βαθμοῦ πολλαπλότητος α, θὰ ἔχῃ ῥίζαν καὶ τὴν συζυγῆ αὐτῆς λ—μi μὲ τὸν αὐτὸν βαθμὸν πολλαπλότητος. Εὐκόλως ἤδη φαίνεται, ὅτι αἱ ἀνωτέρω μέθοδοι ἐφαρμόζονται καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν φανταστικῶν ῥιζῶν.

Ἤτοι, ἐὰν θέσωμεν $\lambda+\mu i=\varrho_1$ καὶ $\lambda-\mu i=\varrho_2$ καὶ ὑποθέσωμεν α τὸν ἀντίστοιχον βαθμὸν πολλαπλότητος, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}=\frac{A_0}{(x-\varrho_1)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-\varrho_1)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-\varrho_1}+$$

$$+\frac{B_0}{(x-\varrho_2)^\alpha}+\frac{B_1}{(x-\varrho_2)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{B_{\alpha-1}}{x-\varrho_2}+\ldots$$

Ἀλλὰ ἐκ τοῦ τρόπου (§ 3) καθ' ὃν προσδιορίζονται οἱ ἀριθμοὶ

$A_\varkappa$ καὶ $B_\varkappa$, προκύπτει ὅτι οἱ A_0, B_0 εἶναι συζυγεῖς ἀριθμοί, καθὼς ἐπίσης οἱ A_1, B_1, οἱ A_2, B_2 κ.ο.κ.

Κατὰ ταῦτα, ἐὰν $A_{\alpha-1}=p+qi$, θὰ εἶναι καὶ $B_{\alpha-1}=p-qi$· τὸ δὲ ἄθροισμα : $\frac{A_{\alpha-1}}{x-\varrho_1}+\frac{B_{\alpha-1}}{x-\varrho_2}$ θὰ ἰσοῦται πρός :

$$\frac{p+qi}{x-\lambda-\mu i}+\frac{p-qi}{x-\lambda+\mu i}=\frac{2px-2p\lambda-2q\mu}{(x-\lambda)^2+\mu^2}$$

ἤτοι μὲ κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς εἶναι τῆς μορφῆς $\Gamma x+\Delta$, ὅπου Γ, Δ πραγματικοὶ ἀριθμοί·

Ἐπίσης ἀποδεικνύεται καὶ ὅτι τὸ ἄθροισμα $\frac{A_{\alpha-2}}{(x-\varrho_1)^2}+\frac{B_{\alpha-2}}{(x-\varrho_2)^2}$, θὰ ἰσοῦται πρὸς ἄθροισμα κλασμάτων τῆς μορφῆς :

$$\frac{\Gamma_1 x+\Delta_1}{[(x-\lambda)^2+\mu^2]^2}+\frac{\Gamma_2 x+\Delta_2}{(x-\lambda)^2+\mu^2},$$

ὅπου Γ_1, Δ_1, Γ_2, Δ_2 πραγματικοὶ ἀριθμοὶ κ.ο.κ.

Δυνάμεθα ὅμως καὶ ἀπ' εὐθείας νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι ἡ ἀνάλυσις τοῦ $\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$ εἰς ἁπλᾶ κλάσματα θὰ δίδῃ ὡς κλάσματα ἀντίστοιχα πρὸς τὰς ῥίζας $\lambda+\mu i$ καὶ $\lambda-\mu i$ βαθμοῦ πολλαπλότητος α κλάσματα τῆς μορφῆς

$$\frac{\Lambda_1 x+M_1}{[(x-\lambda)^2+\mu^2]^\alpha}+\frac{\Lambda_2 x+M_2}{[(x-\lambda)^2+\mu^2]^{\alpha-1}}+\dots+\frac{\Lambda_\alpha x+M_\alpha}{(x-\lambda)^2+\mu^2}$$

Πρὸς ἀπόδειξιν αὐτοῦ, ἂς ζητήσωμεν νὰ προσδιορίσωμεν δύο σταθεροὺς ἀριθμοὺς Λ_1 καὶ M_1 τοιούτους, ὥστε ἡ διαφορά :

$$\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}-\frac{\Lambda_1 x+M_1}{[(x-\lambda)^2+\mu^2]^\alpha} \qquad (13)$$

νὰ ἰσοῦται πρὸς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν τὸ $\varphi_1(x)\ [(x-\lambda)^2+\mu^2]^{\alpha-1}$

ὅπου $\qquad \varphi_1(x)=\varphi(x) : [(x-\lambda)^2+\mu^2]^\alpha \qquad (14)$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ διαφορὰ (13) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\frac{\sigma(x)-\varphi_1(x)\,[\Lambda_1 x+M_1]}{\varphi_1(x)\,[\,(x-\lambda)^2+\mu^2]^{\varkappa}} \qquad (15) \qquad (14)$$

Ἑπομένως διὰ τὸ ζητούμενον ἀρκεῖ ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος (15) νὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ $(x-\lambda)^2+\mu^2$, δηλ. νὰ ἔχῃ ρίζας τὰς $\lambda+\mu i$ καὶ $\lambda-\mu i$, ἤτοι ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν :

$$\begin{aligned}&\sigma(\lambda+\mu i)-\varphi_1(\lambda+\mu i)\,.\,[\Lambda_1.(\lambda+\mu i)+M_1]=0\\&\sigma(\lambda-\mu i)-\varphi_1(\lambda-\mu i)\,.\,[\Lambda_1.(\lambda-\mu i)+M_1]=0\end{aligned} \qquad (16)$$

Ἐξ αὐτῶν ὁρίζονται οἱ Λ_1 καὶ M_1.

Εὐκόλως φαίνεται ὅτι αἱ οὕτω ὁριζόμεναι τιμαὶ τῶν Λ_1 καὶ M_1 εἶναι πραγματικαὶ καὶ πεπερασμέναι.

Λύομεν πρὸς τοῦτο τὰς ἐξισώσεις (17) ὡς πρὸς Λ_1 καὶ M_1 καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἐὰν θέσωμεν

$$\sigma(\lambda+\mu i)=\alpha+\beta i \text{ καὶ } \varphi_1(\lambda+\mu i)=\gamma+\delta\iota$$

θὰ ἔχωμεν

$$\sigma(\lambda-\mu i)=\alpha-\beta i \text{ καὶ } \varphi_1(\lambda-\mu i)=\gamma-\delta i$$

Ὅθεν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος τοῦ δίδοντος τὴν τιμὴν τοῦ Λ_1 θὰ εἶναι $i\Gamma$ ὅπου τὸ Γ θὰ εἶναι πραγματικὸς ἀριθμός. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι καὶ ὁ παρονομαστὴς θὰ ἰσοῦται πρὸς $i\Delta$, ὅπου Δ πραγματικὸς ἀριθμός· ὅθεν $\Lambda_1=\frac{\Gamma}{\Delta}$ = πραγματικός. Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι καὶ ὁ M_1 θὰ εἶναι ἐπίσης πραγματικός.

Εὑρίσκονται λοιπὸν δύο πραγματικοὶ ἀριθμοὶ Λ_1, M_1 τοιοῦτοι, ὥστε ἡ διαφορὰ (14) νὰ ἰσοῦται πρὸς κλάσμα τῆς μορφῆς $\frac{\Pi(x)}{\varphi_1(x)}$, ὅπου $\Pi(x)$ ἀκέραιον πολυώνυμον καὶ $\varphi_1(x)$ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (14).

Ἔχομεν οὕτω

$$\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}=\frac{\Lambda_1 x+M_1}{[\,(x-\lambda)^2+\mu^2\,]^{\varkappa}}+\frac{\Pi(x)}{\varphi_1(x)}.$$

Ἐργαζόμεθα ἤδη μὲ τὸ $\frac{\Pi(x)}{\varphi_1(x)}$, ὅπως εἰργάσθημεν μὲ τὸ $\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$ καὶ εὑρίσκομεν:

$$\frac{\Pi(x)}{\varphi_1(x)}=\frac{\Lambda_2 x+M_2}{[(x-\lambda)^2+\mu^2]^{\alpha-1}}+\frac{\Pi_1(x)}{\varphi_2(x)}$$, ὅπου Λ_2, M_2 πραγματικοὶ κ.ο.κ.

9. Λαμβάνοντες ἤδη ὑπ' ὄψει τὰ ἀποδειχθέντα ἀνωτέρω διὰ τὰς διαφόρους περιπτώσεις καταλήγομεν εἰς τὴν ἑξῆς γενικὴν πρότασιν.

Πᾶσα ῥητὴ συνάρτησις τῆς μορφῆς $\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$, ***τῆς ὁποίας οἱ ὅροι εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα μὲ σταθεροὺς συντελεστάς,*** καὶ τῆς ὁποίας ***ὁ παρονομαστὴς ἔχει πολλαπλᾶς ῥίζας*** πραγματικὰς καὶ φανταστικὰς δηλ. εἶναι τῆς μορφῆς.

$$\varphi(x)=(x-\varrho_1)^{\alpha_1}(x-\varrho_2)^{\alpha_2}\dots(x-\varrho_\nu)^{\alpha_\nu}(x^2+\pi_1x+\varkappa_1)^{\varepsilon_1}\dots(x^2+\pi_\mu x+\varkappa_\mu)^{\varepsilon_\mu}$$

ἀναλύεται πάντοτε εἰς ἁπλᾶ κλάσματα τῆς μορφῆς:

$$\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}=\frac{A_{11}}{x-\varrho_1}+\frac{A_{12}}{(x-\varrho_1)^2}+\dots+\frac{A_{1\alpha_1}}{(x-\varrho_1)^{\alpha_1}}+$$

$$+\frac{A_{21}}{x-\varrho_2}+\frac{A_{22}}{(x-\varrho_2)^2}+\dots+\frac{A_{2\alpha_2}}{(x-\varrho_2)^{\alpha_2}}+$$

$$+\frac{B_{11}x+\Gamma_{11}}{x^2+\pi_1x+\varkappa_1}+\frac{B_{12}x+\Gamma_{12}}{(x^2+\pi_1x+\varkappa_1)^2}+\dots+\frac{B_{1\varepsilon_1}x+\Gamma_{1\varepsilon_1}}{(x^2+\pi_1x+\varkappa_1)^{\varepsilon_1}}+$$

$$+\frac{B_{21}x+\Gamma_{21}}{x^2+\pi_2x+\varkappa_2}+\frac{B_{22}x+\Gamma_{22}}{(x^2+\pi_2x+\varkappa_2)^2}+\dots \qquad (17)$$

ὅπου $A_{11}, A_{12}, \dots A_{1\alpha_1}, A_{21} \dots, B_{11}, \dots B_{1\varepsilon_1}, \dots \Gamma_{11} \dots \Gamma_{1\varepsilon_1}$ κ.τ.λ. εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοὶ σταθεροί.

9. Προφανὲς εἶναι ὅτι τὴν μέθοδον τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν καὶ εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν. Ἀναχωροῦμεν πρὸς τοῦτο ἐκ τῆς ἄνω προτάσεως, δηλ. ἐκ τοῦ δεδομένου ὅτι ὑπάρχει ἓν ἀνάπτυγμα τῆς ἀνωτέρω μορφῆς καὶ ἓν μόνον διὰ τὸ $\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$. Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (17) ἐπὶ $\varphi(x)$ καὶ ἐξισοῦντες τοὺς συντελεστὰς τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ x εὑρίσκομεν σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων, τοῦ ὁποίου ἡ λύσις θὰ μᾶς δώσῃ τοὺς συντελεστὰς $A_{11}, \dots, B_{11}, \dots, \Gamma_{11} \dots$ κ.τ.λ.

Ὁλοκλήρωσις ῥητοῦ κλάσματος.

10. ***Ὁλοκλήρωσις τοῦ ῥητοῦ κλάσματος $\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$, ὅπου $\sigma(x)$ καὶ $\varphi(x)$ πρῶτα πρὸς ἄλληλα καὶ $\sigma(x)$ βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ $\varphi(x)$.***

Τὸ κλάσμα τοῦτο ἀναλύεται, ὅταν γνωρίζωμεν τὰς ῥίζας τοῦ παρονομαστοῦ εἰς ἁπλᾶ κλάσματα τῆς μορφῆς

$$\frac{A}{(x-\varrho)^{\alpha}} \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{Bx+\Gamma}{(x^2+\pi x+\varkappa)^{\nu}}$$

ὅπου αἱ ῥίζαι τοῦ $x^2+\pi x+\varkappa$ εἶναι φανταστικαί.

Θὰ ὁλοκληρώσωμεν ἕκαστον ἐξ αὐτῶν τῶν κλασμάτων.

1) Ἔστω $\alpha=1$. ἔχομεν:

$$\int \frac{A}{x-\varrho}\,dx = A\int \frac{d(x-\varrho)}{x-\varrho} = A \log(x-\varrho) + C.$$

2) Ἔστω $\alpha > 1$. ἔχομεν

$$\int \frac{A}{(x-\varrho)^{\alpha}}dx = A\int \frac{d(x-\varrho)}{(x-\varrho)^{\alpha}} = A\frac{(x-\varrho)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}+C = \frac{A}{1-\alpha}\,\frac{1}{(x-\varrho)^{\alpha-1}}+C$$

3) Ἔστω $\nu=1$ καὶ $\lambda+\mu i$, $\lambda-\mu i$ αἱ ῥίζαι τοῦ παρονομαστοῦ· ἔχομεν:

$$\int \frac{Bx+\Gamma}{x^2+\pi x+\varkappa}dx = \int \frac{Bx+\Gamma}{(x-\lambda)^2+\mu^2}\,dx =$$

$$= \int \frac{B(x-\lambda)+(\Gamma+B\lambda)}{(x-\lambda)^2+\mu^2}dx = B\int \frac{(x-\lambda)dx}{(x-\lambda)^2+\mu^2} + (\Gamma+B\lambda)\int \frac{dx}{(x-\lambda)^2+\mu^2}$$

ὑπολογίζομεν πρῶτον τό :

$$B\int\frac{(x-\lambda)\,dx}{(x-\lambda)^2+\mu^2}$$

θέτομεν $x-\lambda=\omega$, ὁπότε $dx=d\omega$.

$$B\int\frac{\omega d\omega}{\omega^2+\mu^2}=\frac{B}{2}\int\frac{d(\omega^2+\mu^2)}{\omega^2+\mu^2}=\frac{B}{2}\log(\omega^2+\mu^2)=\frac{B}{2}\log\left[(x-\lambda)^2+\mu^2\right].$$

Ὑπολογίζομεν ἤδη τὸ δεύτερον ὁλοκλήρωμα :

$$\int\frac{dx}{(x-\lambda)^2+\mu^2}=\int\frac{d(x-\lambda)}{(x-\lambda)^2+\mu^2}=\frac{1}{\mu}\text{ τοξ εφ }\frac{x-\lambda}{\mu}.$$

ὥστε τελικῶς ἔχομεν :

$$\int\frac{Bx+\Gamma}{x^2+\pi x+\varkappa}dx=\frac{B}{2}\log\left[(x-\lambda)^2+\mu^2\right]+\frac{\Gamma+B\lambda}{\mu}\text{ τοξ εφ }\frac{x-\lambda}{\mu}+C.$$

4) Θεωρήσωμεν τέλος τὸ $\int\frac{Bx+\Gamma}{(x^2+\pi x+\varkappa)^\nu}dx$, ὅπου ν ἀκέραιος >1

Γράφοντες : $Bx+\Gamma=B(x-\lambda)+\Gamma+B\lambda$ καὶ θέτοντες $x-\lambda=\omega$

λαμβάνομεν :

$$\int\frac{Bx+\Gamma}{(x^2+\pi x+\varkappa)^\nu}dx=B\int\frac{\omega d\omega}{(\omega^2+\mu^2)^\nu}+(\Gamma+B\lambda)\int\frac{d\omega}{(\omega^2+\mu^2)^\nu}=$$

$$=\frac{B}{2}\int\frac{d(\omega^2+\mu^2)}{(\omega^2+\mu^2)^\nu}+(\Gamma+B\lambda)\int\frac{d\omega}{(\omega^2+\mu^2)^\nu}$$

ὑπολογίζομεν ἕκαστον ἐκ τῶν δύο ὁλοκληρωμάτων χωριστά :

$$\frac{B}{2}\int\frac{d(\omega^2+\mu^2)}{(\omega^2+\mu^2)^\nu}=-\frac{B}{2}\,\frac{1}{\nu-1}\,\frac{1}{(\omega^2+\mu^2)^{\nu-1}}=-\frac{B}{2}\,\frac{1}{\nu-1}\,\frac{1}{[(x-\lambda)^2+\mu^2]^{\nu-1}}$$

Διὰ τὸ $\int \frac{d\omega}{(\omega^2+\mu^2)^\nu}$ κάμνομεν τὴν ἀντικατάστασιν $\omega=\mu t$ καὶ εὑρίσκομεν :

$$\int \frac{d\omega}{(\omega^2+\mu^2)^\nu} = \int \frac{\mu \,.\, dt}{(\mu^2 t^2+\mu^2)^\nu} = \int \frac{\mu \,.\, dt}{\mu^{2\nu}(t^2+1)^\nu} = \frac{1}{\mu^{2\nu-1}} \int \frac{dt}{(t^2+1)^\nu}$$

ἢ καὶ θέτοντες $I_\lambda = \int \frac{dt}{(t^2+1)^\lambda}$ λαμβάνομεν

$$I_\nu = \int \frac{dt}{(t^2+1)^\nu} = \int \frac{(t^2+1-t^2)dt}{(t^2+1)^\nu} = \int \frac{dt}{(t^2+1)^{\nu-1}} - \int \frac{t^2dt}{(t^2+1)^\nu}$$

ἤτοι :

$$I_\nu = I_{\nu-1} - \int \frac{t^2dt}{(t^2+1)^\nu} \qquad (\alpha)$$

ἀλλά :

$$\int \frac{t^2dt}{(t^2+1)^\nu} = \frac{1}{2} \int t \frac{d(t^2+1)}{(t^2+1)^\nu} = \frac{1}{2} \int t.d\left[-\frac{1}{\nu-1}\frac{1}{(t^2+1)^{\nu-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{t}{\nu-1}\frac{1}{(t^2+1)^{\nu-1}} + \frac{1}{\nu-1}\int \frac{dt}{(t^2+1)^{\nu-1}}\right] =$$

$$= -\frac{t}{2(\nu-1)(t^2+1)^{\nu-1}} + \frac{1}{2(\nu-1)} I_{\nu-1}$$

ὅθεν ὁ τύπος (α) δίδει

$$I_\nu = \frac{2\nu-3}{2\nu-2} I_{\nu-1} + \frac{t}{(2\nu-2)(t^2+1)^{\nu-1}}$$

ἐφαρμόζοντες διαδοχικῶς τὸν τύπον αὐτὸν διὰ $\nu=2, 3, \ldots$

λαμβάνομεν $I_2 = \frac{1}{2} I_1 + \frac{t}{2(t^2+1)}$, $I_3 = \frac{3}{4} I_2 + \frac{t}{4(t^2+1)^2}$, ...

ἔχοντες δὲ ὑπ᾿ ὄψει, ὅτι $I_1 =$ τοξ εφ t, λαμβάνομεν τελικῶς

$$I = \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,..\, (2\nu-3)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,..\, (2\nu-2)} \text{ τοξ εφ } t + \frac{f(t)}{(t^2+1)^{\nu-1}}$$

ὅπου f(t) ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ t.

Ἀσκήσεις.

Πρώτη περίπτωσις.

1) $$\int \frac{(x^2+6x+5)dx}{x^2-6x+5} = x + \log \frac{(x-5)^{15}}{(x-1)^3} + C$$

2) $$\int \frac{x^4 dx}{x^4-5x^2+4} = x - \frac{1}{6} \log \left[\left(\frac{x-1}{x+1} \right) \left(\frac{x+2}{x-2} \right)^8 \right] + C$$

3) $$\int \frac{(5x^2+3\alpha x+9\alpha^2)dx}{x^3-3\alpha x+2\alpha^2 x} = \log \left[\frac{x^{\frac{9}{2}} (x-2\alpha)^{\frac{35}{2}}}{(x-\alpha)^{17}} \right] + C$$

4) $$\int \frac{x^3 dx}{x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta} = x + \frac{1}{\alpha-\beta} \left[\beta^2 \log(x+\beta) - \alpha^2 \log(x+\alpha) \right] + C$$

5) $$\int \frac{(9x^2-14x+1)dx}{x^3-2x^2-x+2} = \log \left[(x+1)^4 (x-1)^2 (x-2)^3 \right] + C$$

6) $$\int \frac{\alpha(7x^2-28\alpha x+24\alpha^2)}{x^3-7\alpha x^2+14\alpha^2 x-8\alpha^3} dx = \alpha \log \left[C(x-\alpha)(x-2\alpha)^2(x-4\alpha)^4 \right]$$

Δευτέρα περίπτωσις.

1) $$\int \frac{x^3dx}{(4-2x)^3} = -\frac{x^3-4x^2-8x+20}{8(x-2)^2} - \frac{3}{4}\log(x-2)+C$$

2) $$\int \frac{(x^2-2)dx}{(x-1)^4} = -\frac{3x^2-3x-1}{3(x-1)^3}+C$$

3) $$\int \frac{(x^3+3x^2+3x+2)dx}{x^4+x^3} = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \log\frac{x^2}{x+1} + C$$

4) $$\int \frac{(x^2+1)^2\,dx}{(x-1)^6} = -\frac{15x^4-30x^3+40x^2-20x+7}{15(x-1)^5} + C$$

5) $$\int \frac{3x^3+10x^2-x)dx}{x^4-2x^2+1} = -\frac{5x+1}{x^2-1} + \log\frac{(x-1)^4}{x+1} + C$$

6) $$\int \frac{(x^2+\alpha x+\alpha)dx}{(x-1)^3\,(x+2)^2} = \frac{2-2\alpha-3x}{6(x-1)^2\,(x+2)} + C$$

7) $$\int \frac{(x^4-5x^3-30x^2-36x)dx}{(x+1)^3\,(x^2-4)} = \frac{1-x}{(x+1)^2} + 2\log\frac{x+2}{x-2} +$$

$$+\log(x+1)+C$$

8) $$\int \frac{dx}{x^3(1-x^2)^2\,(1+x)} = \frac{3x^2-x-1}{2x^2\,(1-x)} + \frac{1}{4}\log\frac{x^8}{(1-x)^7(1+x)} + C$$

Τρίτη περίπτωσις :

1) $$\int \frac{dx}{5x^2+4x+3} = \frac{1}{\sqrt{11}}\ \text{τοξ εφ}\ \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{11}} + C$$

2) $\int \frac{27\,x^6\,dx}{3x^2+2} = \frac{9}{5}x^5 - 2x^3 + 4x - \frac{4}{3}\sqrt{6}\ \text{τοξ εφ}\, x\sqrt{\frac{3}{2}} + C$

3) $\int \frac{(7x+9)dx}{4x^2-16x+52} = \frac{7}{8}\log\left[\frac{(x-2)^2}{9}+1\right] + \frac{23}{12}\text{τοξ εφ}\frac{x-2}{3} + C$

4) $\int \frac{(x^5+1)dx}{x^6+x^4} = \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{3x^2}\right) + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \text{τοξ εφ}x + C$

5) $\int \frac{(3x^4+4)dx}{12x^2(x^2+1)^3} = -\frac{57x^4+103x^2+32}{96x(x^2+1)^2} - \frac{19}{32}\ \text{τοξ εφ}x + C$

6) $\int \frac{(2x^2-1)dx}{x^3-2x^2+x-2} = \frac{1}{10}\log\left[(x^2+1)^3(x-2)^{14}\right] + \frac{6}{5}\text{τοξ εφ}x + C$

7) $\int \frac{(3x^2+x-2)dx}{(x-1)^3(x^2+1)} = \frac{5x-6}{2(x-1)^2} + \frac{3}{4}\log\frac{x^2+1}{(x-1)^2} - \text{τοξ εφ}x + C$

8) $\int \frac{dx}{x^2(x^4-1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{4}\log\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{2}\ \text{τοξ εφ}x + C$

9) $\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = -\frac{1}{3}\frac{x}{x^3-1} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\text{τοξ εφ}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} +$

$$+\frac{1}{9}\log\left(\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}\right) + C$$

10) $\int \frac{x^2dx}{(x+\alpha)^2(x^2+\alpha^2)} = \frac{1}{2\alpha}\left[\log\frac{\sqrt{x^2+\alpha^2}}{x+\alpha} - \frac{\alpha}{x+\alpha}\right] + C$

11) $\int \frac{(x^2-x+1)dx}{(x^2+x+1)^3} = \frac{4x^3+6x^2+7x+4}{3(x^2+x+1)^2} + \frac{8\sqrt{3}}{9}\text{τοξ εφ}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$

Γενικαὶ μέθοδοι ἀναγωγῆς.

11.—*Ἄμεσος εὕρεσις τοῦ ῥητοῦ μέρους τοῦ ὁλοκληρώματος.*

Ἔστω τὸ $\int \frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}\, dx$, ὅπου ὑποτίθεται, ὅπως καὶ προηγουμένως (§ 8), ὅτι τὸ $\sigma(x)$ εἶναι βαθμοῦ μικροτέρου ἢ τὸ $\varphi(x)$ καὶ ὅτι τὰ $\sigma(x)$ καὶ $\varphi(x)$ εἶναι πολυώνυμα πρῶτα πρὸς ἄλληλα· ἐκ τῶν προηγουμένων (§ 8) ἐξάγεται ὅτι ἡ ἀνάλυσις ῥητῆς συναρτήσεως θὰ δώσῃ ἐν γένει

α΄) κλάσματα τῆς μορφῆς $\frac{A}{x-\rho}$

β΄) » » » $\frac{A}{(x-\rho)^{\alpha}}$ $(\alpha > 1)$

γ΄) » » » $\frac{Ax+B}{x^2+\pi x+\kappa}$ $(\pi^2-4\kappa < 0)$

δ΄) » » » $\frac{Ax+B}{(x^2+\pi x+\kappa)^{\beta}}$ $(\beta > 1)$.

Τὰ ὁλοκληρώματα τῶν κλασμάτων τῆς α΄ καὶ γ΄ τάξεως θὰ δώσουν λογαρίθμους καὶ τόξα ἐφαπτομένης· τὰ ὁλοκληρώματα τῆς β΄ τάξεως θὰ δώσουν ῥητὴν συνάρτησιν τῆς μορφῆς

$$\frac{f(x)}{(x-\rho_1)^{\alpha_1-1}\,(x-\rho_2)^{\alpha_2-1}\cdots} \tag{18}$$

ὅπου $f(x)$ εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον βαθμοῦ μικροτέρου ἢ ὁ παρονομαστής. Τὰ ὁλοκληρώματα τέλος τῆς δ΄ τάξεως θὰ δώσουν λογαρίθμους, τόξα ἐφαπτομένης, καὶ ὅρους, οἵτινες θὰ ἔχουν ὡς ἄθροισμα ῥητὴν συνάρτησιν

$$\frac{F(x)}{(x^2+\pi_1 x+\kappa_1)^{\beta_1-1}\cdots} \tag{19}$$

ὅπου $F(x)$ θὰ εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον βαθμοῦ μικροτέρου ἢ ὁ παρονομαστής. Ἐὰν ἤδη ἀθροίσωμεν τὰ κλάσματα (18) καὶ (19), θὰ προκύψῃ ρητὴ συνάρτησις:

$$\frac{\Lambda(x)}{\Pi(x)} \qquad (20)$$

ὅπου $\Pi(x)=(x-\varrho_1)^{\alpha_1-1}(x-\varrho_2)^{\alpha_2-1}\ldots\ldots(x^2+\pi_1x+\varkappa_1)^{\beta_1-1}\ldots$

καὶ $\Lambda(x)$ εἶναι πολυώνυμον βαθμοῦ μικροτέρου ἢ τὸ $\Pi(x)$.

Ἡ συνάρτησις (20) θὰ ἀποτελῇ τὸ ρητὸν μέρος τοῦ ἀρχικοῦ ὁλοκληρώματος.

Ὡς πρὸς τοὺς ἐπιλοίπους ὅρους τοῦ ὁλοκληρώματος παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν παραγωγίσωμεν αὐτοὺς καὶ ἀθροίσωμεν, θὰ ἔχωμεν ὡς ἄθροισμα συνάρτησιν τῆς μορφῆς $\frac{M(x)}{P(x)}$, ὅπου

$$P(x)=(x-\varrho_1)(x-\varrho_2)\ldots(x^2+\pi_1x+\varkappa_1)(x^2+\pi_2x+\varkappa_2)\ldots$$

καὶ $M(x)$ εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον βαθμοῦ μικροτέρου ἢ τὸ $P(x)$.

Ὥστε θὰ ἔχωμεν:

$$\int\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}\,dx=\frac{\Lambda(x)}{\Pi(x)}+\int\frac{M(x)dx}{P(x)} \qquad (21)$$

Παρατηροῦμεν ἐνταῦθα, ὅτι τὸ $\Pi(x)$ εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν πολυωνύμων $\varphi(x)$ καὶ $\varphi'(x)$, τὸ δὲ $P(x)$ εἶναι τὸ πηλίκον $\varphi(x):\Pi(x)$· ὅθεν διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν $\Pi(x)$ καὶ $P(x)$ δὲν ὑπάρχει ἀνάγκη νὰ ἀναλυθῇ τὸ $\varphi(x)$ εἰς παράγοντας· ἀρκοῦν αἱ τέσσαρες στοιχειώδεις πράξεις. Πρὸς προσδιορισμὸν ἤδη τῶν $\Lambda(x)$ καὶ $M(x)$ παραγωγίζομεν τὴν ἰσότητα (21), ὁπότε λαμβάνομεν πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ $\varphi(x)$ καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψει ὅτι $\varphi(x)=\Pi.P$

$$\sigma(x)=\Lambda'P-\frac{\Pi'P}{\Pi}\Lambda+M\Pi. \qquad (22)$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ δεύτερος ὅρος τοῦ δευτέρου μέλους εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον, διότι τὸ $\Pi'P$ περιέχει τοὺς παράγοντας τοῦ Π, ὅπως φαίνεται ἐκ τοῦ τρόπου, καθ' ὃν ἐσχηματίσθη τὸ Π καὶ τὸ Ρ. Ἐὰν m εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ριζῶν τοῦ φ(x) τῶν διαφόρων πρὸς ἀλλήλας (δηλ. ὁ βαθμὸς τοῦ Ρ) ὁ βαθμὸς τοῦ Π θὰ εἶναι ν—m, θὰ ἔχωμεν δὲ ὡς ἀνώτερα ὅρια τῶν βαθμῶν τοῦ πρώτου, δευτέρου καὶ τρίτου ὅρου τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (22) τοὺς ν—2, ν—2, ν—1· ὅθεν θέτοντες $\Lambda=\gamma_0 x^{\nu-m-1}+\ldots$ $M=\delta_0 x^{m-1}+\ldots$ καὶ ἐξισοῦντες τοὺς συντελεστὰς τῶν ἴσων δυνάμεων τῆς (22) λαμβάνομεν ν γραμμικὰς ἐξισώσεις ὡς πρὸς τοὺς ν προσδιοριστέους συντελεστὰς $\gamma_0, \gamma_1 \ldots \delta_0, \delta_1, \ldots$

Ὡς συμπέρασμα προκύπτει 1) ὅτι ἄνευ ἀναλύσεως τοῦ παρονομαστοῦ φ(x) εὑρίσκομεν τὸ ρητὸν μέρος τοῦ ὁλοκληρώματος καὶ 2) ὅτι ἀνάγεται οὕτω ἡ ὁλοκλήρωσις εἰς ὁλοκλήρωσιν ρητῆς συναρτήσεως ἐχούσης ὡς παρονομαστὴν πολυώνυμον μὲ ἁπλᾶς ρίζας.

Παρατήρησις. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξάγεται ὅτι, ἵνα τὸ ὁλοκλήρωμα ρητῆς συναρτήσεως εἶναι ρητὴ συνάρτησις τοῦ x πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν

$$M(x)=0$$

Ἐξάγεται ἐπίσης ὅτι τὸ ρητὸν μέρος τοῦ ὁλοκληρώματος εἶναι ρητὸν καὶ ὡς πρὸς τοὺς συντελεστὰς τῶν σ(x) καὶ φ(x).

Παράδειγμα. Ἔστω $\dfrac{\sigma(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{16x^4-37x^3+31x^2+36x-34}{x^5-x^4-3x^3+17x^2-26x+12}$

Ὁ μ.κ.δ. τῶν φ(x) καὶ φ′(x) εἶναι x—1· ἤτοι $\Pi(x)=x-1$. $P(x)=\varphi(x):\Pi(x)=x^4-3x^2+14x-12$· ἐπειδὴ τὸ Λ(x) θὰ εἶναι βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ Π(x), θὰ εἶναι σταθερὸς ἀριθμός· θέτομεν $\Lambda(x)=\gamma_0$ καὶ $M(x)=\delta_0 x^3+\delta_1 x^2+\delta_2 x+\delta_3$· ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ταὐτότητα (22) καὶ ἐξισοῦντες τοὺς συντελεστὰς λαμβάνομεν

$$\gamma_0=-1,\ \delta_0=16,\ \delta_1=-22,\ \delta_2=8\ \delta_3=46.$$

Ἔχομεν οὕτω

$$M(x)=16x^3-22\,x^2+8\,x+46$$

12. ***Ἀνάλυσις ρητῆς συναρτήσεως εἰς ἄλλας.*** Ἔστω

$$\varphi(x)=A(x)\,.\,B(x)$$

ὅπου τὰ $A(x)$ καὶ $B(x)$ εἶναι πολυώνυμα πρῶτα πρὸς ἄλληλα· λέγω ὅτι εὑρίσκονται δύο πολυώνυμα $\Pi(x)$ καὶ $P(x)$ τοιαῦτα, ὥστε ;

$$\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}=\frac{\Pi(x)}{A(x)}+\frac{P(x)}{B(x)} \qquad (23)$$

ὅπου οἱ βαθμοὶ τῶν ἀριθμητῶν εἶναι μικρότεροι τῶν βαθμῶν τῶν ἀντιστοίχων παρονομαστῶν· τοῦτο φαίνεται ἀμέσως ἐκ τοῦ τύπου (17). Καὶ τῷ ὄντι, διὰ νὰ εἶναι τὰ πολυώνυμα $A(x)$ καὶ $B(x)$ πρῶτα πρὸς ἄλληλα, πρέπει τὸ γινόμενον μερικῶν ἐκ τῶν παραγόντων [τοῦ $\varphi(x)$] $(x-\varrho_1)^{\alpha_1}$, $(x-\varrho_2)^{\alpha_2}$ . . . $(x^2+\pi_1x+\kappa_1)^{\beta_1}$ . . . νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ $A(x)$, τό δὲ γινόμενον τῶν ἐπιλοίπων νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ $B(x)$ οὕτως, ὥστε νὰ μὴ ἔχωσι κοινὴν ρίζαν τὰ $A(x)$ καὶ $B(x)$.

Ἔστω ἐπὶ παραδείγματι:

$$A(x)=(x-\varrho_1)^{\alpha_1}(x^2+\pi_1x+\kappa_1)^{\beta_1}$$

ὁπότε $$B(x)=(x-\varrho_2)^{\alpha_2}(x-\varrho_3)^{\alpha_3}\ldots(x^2+\pi_2x+\kappa_2)^{\beta_2}\ldots$$

Θεωρήσωμεν τότε τὸν τύπον (17)· ἐὰν ἀθροίσωμεν τὰ κλάσματα τοῦ δευτέρου μέλους τὰ ἔχοντα παρονομαστάς

$$x-\varrho_1, (x-\varrho_1)^2, \ldots (x-\varrho_1)^{\alpha_1}, \quad x^2+\pi_1x+\kappa_1,\ (x^2+\pi_1x+\kappa_1)^2 \ldots (x^2+\pi_1x+\kappa_1)^{\beta_1}$$

θὰ ἔχωμεν κλάσμα μὲ παρονομαστὴν τὸ $A(x)$ καὶ ἀριθμητὴν πολυώνυμόν τι $\Pi(x)$ βαθμοῦ τὸ πολὺ $\alpha_1+2\beta_1-1$ ἢ καὶ $r-1$, ἐὰν r καλέσωμεν τὸν βαθμὸν τοῦ $A(x)$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι, ἐὰν ἀθροίσωμεν τὰ ἐπίλοιπα κλάσματα τοῦ δευτέρου μέλους, θὰ ἔχωμεν κλάσμα μὲ παρονομαστὴν $B(x)$ καὶ ἀριθμητὴν πολυώνυμόν τι $P(x)$ βαθμοῦ τὸ πολὺ $s-1$, ἐὰν s εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ $B(x)$.

13. Δυνάμεθα καὶ ἀπ' εὐθείας νὰ δείξωμεν τὸ δυνατὸν τῆς ἀναλύσεως (23) καὶ νὰ προσδιορίσωμεν τὰ $\Pi(x)$ καὶ $P(x)$.

Θέτομεν πρὸς τοῦτο :

$$\Pi(x)=\gamma_1 x^{r-1}+\gamma_2 x^{r-2}+\ldots+\gamma_r$$
$$P(x)=\delta_1 x^{s-1}+\delta_2 x^{s-2}+\ldots\delta_s$$

καὶ ζητοῦμεν νὰ προσδιορίσωμεν τοὺς συντελεστὰς γ_1, γ_2, ... γ_r, δ_1, δ_2 ... δ_s οὕτως, ὥστε νὰ ἔχωμεν ἐκ ταυτότητος :

$$\sigma(x)=B(x)\Pi(x)+A(x)P(x),$$

Πρὸς τοῦτο μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων ἐξισοῦμεν τοὺς συντελεστὰς τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ x. Θὰ ἔχωμεν οὕτω ἐξισώσεις γραμμικὰς ὡς πρὸς τὰ γ_1, γ_2, ... γ_r, δ_1, δ_2 ... δ_s· θὰ προσδιορίζωνται δὲ ἐξ αὐτῶν οἱ συντελεσταὶ οὗτοι, διότι, ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς θεωρίας τῆς ἀπαλοιφῆς εἰς τὴν ἄλγεβραν, ἡ συναρμόζουσα τῶν πολυωνύμων A(x) καὶ B(x) εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, ἐπειδὴ τὰ A(x) καὶ B(x) ἐξ ὑποθέσεως δὲν ἔχουν κοινὴν ρίζαν.

18. Καὶ ἄλλος στοιχειώδης τρόπος ἀποδείξεως τῆς ἀνωτέρω προτάσεως εἶναι ὁ ἑξῆς·

Ἔστωσαν πολυώνυμα A(x) καὶ B(x) πρῶτα πρὸς ἄλληλα καὶ τυχὸν δοθὲν ἀκέραιον πολυώνυμον σ(x)· εὑρίσκονται δύο ἄλλα πολυώνυμα Π(x) καὶ P(x) τοιαῦτα, ὥστε·

$$A(x)\Pi(x)+B(x)P(x)=\sigma(x).$$

Καὶ τῷ ὄντι, ἔστω ὅτι ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις πρὸς εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. τῶν A καὶ B· θὰ ἔχωμεν :

$$A=B\Pi+Y$$
$$B=Y\Pi_1+Y_1$$
$$Y=Y_1\Pi_2+Y_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

καὶ τέλος $$Y_{\nu-2}=Y_{\nu-1}\Pi_\nu+Y_\nu$$

ὅπου Y_ν θὰ εἶναι σταθερός τις ἀριθμὸς C ὅθεν $$Y = A - B\Pi$$

$$Y_1 = B - Y\Pi_1 = B - (A - B\Pi)\Pi_1 = -A\Pi_1 + B(1 + \Pi\Pi_1) \qquad (24)$$
$$Y_2 = Y - Y_1\Pi_2 = \ldots\ldots \text{ κ.ο.κ.}$$

παρατηροῦμεν ἤδη ὅτι τὰ δεύτερα μέλη τῶν (24) εἶναι συναρτήσεις γραμμικαὶ καὶ ὁμογενεῖς ὡς πρὸς A καὶ B καὶ ὅτι θὰ ἔχωμεν τελικῶς

$$C = A\Lambda + BM$$

ὅπου Λ καὶ M θὰ εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα ὡς πρὸς x.

Ἐὰν ἤδη πολλαπλασιάσω ἐπὶ σ(x) καὶ διαιρέσω διὰ C θὰ ἔχω

$$\sigma(x) = A\,\frac{\sigma(x)\Lambda}{C} + B\,\frac{\sigma(x)M}{C}$$

θέτων $$\frac{\sigma(x)\Lambda}{C} = P \text{ καὶ } \frac{\sigma(x)M}{C} = \Pi$$

λαμβάνω $$\sigma(x) = AP + B\Pi$$

ὅθεν $$\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)} = \frac{\Pi}{A} + \frac{P}{B} \quad \text{διότι}$$

$$\varphi(x) = AB$$

Γενικῶς ἔστω : $\dfrac{\sigma(x)}{\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_\nu}$, ὅπου θέτω συντομίας ἕνεκεν φ_1 ἀντὶ $\varphi_1(x)$ κ.ο.κ. καὶ ὅπου τὰ $\varphi_1\ \varphi_2\ \ldots\ \varphi_\nu$ εἶναι πρῶτα πρὸς ἄλληλα ἀνὰ δύο· θὰ ἔχω

$$\frac{\sigma(x)}{\varphi_1\cdot\varphi_2\cdot\ldots\varphi_\nu} = \frac{\sigma_1}{\varphi_1} + \frac{\sigma_2}{\varphi_2} + \ldots + \frac{\sigma_\nu}{\varphi_\nu}$$

15. ***Γενικὸς τύπος ἀναγωγῆς.***

Ἔστω : $\varphi(x) = (x-\alpha_1)(x-\beta_1)\ldots(x-\alpha_2)^2(x-\beta_2)^2\ldots(x-\alpha_3)^3\ldots$
$\ldots(x-\alpha_\nu)^\nu\ldots(x^2+\pi_1\ \ +\kappa_1)\ldots(x^2+\pi_2 x+\kappa_2)^2\ldots(x^2+\pi_\mu x+\kappa_\mu)^\mu\ldots$

Τὸ γινόμενον $(x-\alpha_1)(x-\beta_1)\ldots(x^2+\pi_1 x+\kappa_1)\ldots$ θὰ καλέσω X_1

ἤτοι X_1 εἶναι τὸ γινόμενον τῶν πρωτοβαθμίων παραγόντων τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τὰς ἁπλᾶς ρίζας τοῦ φ(x).

Ὁμοίως τὸ γινόμενον $(x-\alpha_2)(x-\beta_2)\ldots(x^2+\pi_2+\kappa_2)\ldots$ θὰ καλέσω X_2 ἤτοι διὰ τοῦ X_2 παριστῶ τὸ γινόμενον τῶν πρωτοβαθμίων παραγόντων τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τὰς διπλᾶς ρίζας λαμβανομένου ἑκάστου μὲ ἐκθέτην τὴν μονάδα· ὁμοίως τὸ γινόμενον $(x-\alpha_3)(x-\beta_3)\ldots(x^2+\pi_3 x+\kappa_3)\ldots$ θὰ καλέσω X_3 ἤτοι διὰ τοῦ X_3 παριστῶ τὸ γινόμενον τῶν πρωτοβαθμίων παραγόντων τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τὰς τριπλᾶς ρίζας τοῦ φ(x) λαμβανομένου ἑκάστου μὲ ἐκθέτην τὴν μονάδα κ. ο. κ. [1].

ὥστε $$\varphi(x)=X_1 X_2^2 X_3^3 \ldots X_\nu^\nu$$

ὁ δὲ μ.κ.δ. τῶν φ(x) καὶ φ'(x) εἶναι $X_2 X_3^2 \ldots X_\nu^{\nu-1}$ καὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ φ(x) διὰ τοῦ μ. κ. δ. θὰ εἶναι

$$X_1 X_2 X_3 \ldots X_\nu.$$

Ἐπειδὴ τὰ $X_1, X_2, \ldots X_\nu$ εἶναι πρῶτα πρὸς ἄλληλα ἀνὰ δύο, θὰ ἔχωμεν ὅτι καὶ τὰ $X_1, X_2^2, \ldots X_\nu^\nu$ θὰ εἶναι πρῶτα πρὸς ἄλληλα ἀνὰ δύο· ὅθεν κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν ἀναλύεται τὸ $\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$ ὡς ἑξῆς:

$$\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}=\frac{\Pi_1}{X_1}+\frac{\Pi_2}{X_2^2}+\frac{\Pi_3}{X_3^3}+\ldots+\frac{\Pi_\nu}{X_\nu^\nu} \qquad (25)$$

Θεωρήσωμεν ἤδη τὸ $\int\frac{\sigma(x)\,f(x)}{\varphi(x)}dx$, ὅπου f(x) εἶναι τυχοῦσα συ-

---

[1]) Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὰ $X_1, X^2, \ldots X_\nu$ δὲν ἔχομεν ἀνάγκην νὰ εὕρωμεν τὰς ρίζας τοῦ φ(x)· ἀρκοῦν ὅπως γνωρίζομεν ἐκ τῆς ἀλγέβρας αἱ τέσσαρες πράξεις.

νάρτησις τοῦ x· τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο ἀνάγεται δυνάμει τοῦ τύπου (25) εἰς ἄθροισμα ὁλοκληρωμάτων τῆς μορφῆς $\int \frac{\Pi f(x)}{X^{\varkappa}_{\varkappa}} dx$ ἢ καὶ (παραλείποντες τὸν δείκτην κ δι' ἁπλοποίησιν τῆς γραφῆς)

$$\int \frac{\Pi f(x)}{X^{\varkappa}} dx \qquad (26)$$

Ἐπειδὴ τὰ X καὶ X′ εἶναι πρῶτα πρὸς ἄλληλα, εὑρίσκονται δύο ἄλλα ἀκέραια πολυώνυμα A καὶ B τοιαῦτα, ὥστε

$$AX+BX'=\Pi$$

ὁπότε τὸ ὁλοκλήρωμα (26) ἀντικαθίσταται ὑπὸ τοῦ ἀθροίσματος

$$\int \frac{A\,f}{X^{\varkappa-1}} dx + \int \frac{BfX'}{X^{\varkappa}} dx$$

Παρατηροῦντες ὅτι τὸ $\frac{X'}{X^{\varkappa}}$ εἶναι παράγωγος τοῦ $\frac{1}{1-\varkappa} \frac{1}{X^{\varkappa-1}}$ καὶ ὁλοκληροῦντες τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ ἀθροίσματος κατὰ παράγοντας λαμβάνομεν

$$\int \frac{\Pi f(x)}{X^{\varkappa}} dx = \frac{1}{1-\varkappa} \frac{Bf}{X^{\varkappa-1}} + \int \frac{(\varkappa-1)\,Af+(Bf)'}{(\varkappa-1)\,X^{\varkappa-1}} \qquad (27)$$

ἔχομεν οὕτω γενικὸν τύπον ἀναγωγῆς τοῦ ὁλοκληρώματος (26). [1]

16. Ἐφαρμόζομεν τὰ ἀνωτέρω εἰς τὴν περίπτωσιν $f=e^{\alpha x}$, ὁ τύπος ἀναγωγῆς θὰ δώσῃ

$$\int \frac{\Pi e^{\alpha x}}{X^{\varkappa}} dx = \frac{1}{1-\varkappa} \frac{Be^{\alpha x}}{X^{\varkappa-1}} + \int e^{\alpha x} \frac{((\varkappa-1)\,A+B'+\alpha B)}{(\varkappa-1)\,X^{\varkappa-1}} dx$$

---

[1] Εἶναι προφανὲς ὅτι ἀπὸ τὴν μορφὴν τῆς συναρτήσεως f ἐξαρτᾶται τὸ νὰ εἶναι τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ β′ μέλους ἁπλούστερον τοῦ α′

διὰ τοῦ τύπου τούτου ἀνάγεται τὸ ἀρχικὸν ὁλοκλήρωμα εἰς ἄλλο τῆς αὐτῆς μορφῆς μὲ ἐκθέτην τοῦ X τὸν κ—1. Τοῦτο πάλιν καθ' ὅμοιον τρόπον ἀνάγεται εἰς ἄλλο τῆς αὐτῆς μορφῆς μὲ ἐκθέτην τοῦ X τὸν κ—2· οὕτω προχωροῦντες φθάνομεν εἰς ὁλοκλήρωμα τῆς μορφῆς $\int \frac{\Gamma e^{\alpha x}}{X} dx$ ὅπου τὸ $\frac{\Gamma}{X}$ εἶναι ρητὴ συνάρτησις μὲ παρονομαστὴν X, ὅστις ἔχει ὅλας του τὰς ρίζας ἁπλᾶς· ἑπομένως ἀνάγεται τελικῶς τὸ ὁλοκλήρωμα εἰς ἄθροισμα ὁλοκληρωμάτων τῆς μορφῆς

$$\int \frac{\gamma_\tau e^{\alpha x}}{x-\varrho_\tau} dx \qquad (28)$$

ὅπου τὰ γ_τ εἶναι σταθεραὶ ποσότητες.

Ἔστω ϱ_τ πραγματικός· ἐὰν θέσωμεν $y=e^{\alpha(x-\varrho_\tau)}$ τὸ ὁλοκλήρωμα (28) μετασχηματίζεται (παραλειπομένου σταθεροῦ παράγοντος) εἰς τὸ

$$\int \frac{dy}{\log y}.$$

Τοῦτο εἶναι ὑπερβατικὴ συνάρτησις καὶ καλεῖται ***λογαριθμικὸν ὁλοκλήρωμα.***

17. Θεωρήσωμεν ἤδη τὸ

$$\int e^{\alpha x}\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)} dx$$

ὅπου τὸ $\sigma(x)$ εἶναι βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ ν, καὶ ν ἐκαλέσαμεν τὸν βαθμὸν τοῦ $\varphi(x)$. Ἡ ἐφαρμογὴ τῆς ἀνωτέρω μεθόδου θὰ δώσῃ τὴν ἰσότητα

$$\int e^{\alpha x}\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}dx = e^{\alpha x}\frac{\Lambda(x)}{\Pi(x)}+\int e^{\alpha x}\frac{M(x)}{P(x)}dx \tag{29}$$

ὅπου $\Pi(x)$ εἶναι ὁ μ.κ.δ. τῶν πολυωνύμων $\varphi(x)$ καὶ $\varphi'(x)$· καὶ $P(x)$ εἶναι τὸ πηλίκον $\varphi(x) : \Pi(x)$. Διὰ νὰ εὕρωμεν ἑπομένως τὰ πολυώνυμα Π καὶ P, δὲν ἔχομεν ἀνάγκην νὰ εὕρωμεν τὰς ρίζας τοῦ $\varphi(x)$· λέγω ἤδη, ὅτι καὶ τὰ πολυώνυμα $\Lambda(x)$ καὶ $M(x)$ προσδιορίζονται μὲ ρητὰς πράξεις. Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου παραγωγίζω τὴν (28) καὶ πολλαπλασιάζω ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ $e^{-\alpha x}\varphi(x)$, ὁπότε λαμβάνω :

$$\sigma(x)=\alpha\Lambda P+\Lambda' P-\Lambda\frac{\Pi' P}{\Pi}+M\Pi. \tag{30}$$

Ἔστω m ὁ βαθμὸς τοῦ $P(x)$ (δηλ. ὁ ἀριθμὸς τῶν ριζῶν τοῦ $\varphi(x)$ τῶν διαφόρων πρὸς ἀλλήλας)· δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ M εἶναι βαθμοῦ τὸ πολὺ $m-1$, ἤτοι ὅτι τὸ $M(x)$ ἔχει τὸ πολὺ m συντελεστὰς προσδιοριστέους. Ζητήσωμεν ἤδη πόσους τὸ πολὺ συντελεστὰς θὰ ἔχῃ τὸ Λ· πρὸς τοῦτο ζητοῦμεν ἀνώτερον ὅριον τοῦ βαθμοῦ τοῦ Λ· ἔστω λ ὁ βαθμὸς τοῦ Λ τότε ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (30) εἶναι βαθμοῦ $\lambda+m$, ὁ δεύτερος ὅρος ἔχει βαθμὸν τὸ $\lambda+m-1$, ὁ τρίτος ὅρος εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον (διότι τὸ $\Pi' P$ περιέχει τοὺς παράγοντας τοῦ Π) βαθμοῦ $\lambda+m-1$ καὶ ὁ τέταρτος ὅρος εἶναι τὸ πολὺ βαθμοῦ $\nu-1$· ἐπειδὴ δὲ ὁ βαθμὸς τοῦ $\sigma(x)$ δὲν ὑπερβαίνει τὸ $\nu-1$, ἕπεται ὅτι πρέπει τὸ $\lambda+m$ νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὸ $\nu-1$· ὥστε $\lambda+m\leq\nu-1$ ἢ καὶ $\lambda\leq\nu-m-1$. Εὑρήκαμεν οὕτω ἀνώτερον ὅριον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν συντελεστῶν τοῦ Λ·
θέτομεν $\Lambda=\gamma_0 x^{\nu-m-1}+\gamma_1 x^{\nu-m-2}\dots$ καὶ $M=\delta_0 x^{m-1}+\dots$ ἔχομεν οὕτω νὰ προσδιορίσωμεν τοὺς συντελεστὰς $\gamma_0, \gamma_1, \dots \delta_0, \delta_1, \dots$ οἵτινες εἶναι ἐν ὅλῳ ν τὸ πλῆθος· ἐφαρμόζοντες τὴν μέθοδον τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν θὰ ἔχωμεν ἐξισώσεις γραμμικὰς τόσας ὅσοι εἶναι οἱ ἄγνωστοι συντελεσταί· ὅθεν οὗτοι προσδιορίζονται.

Εἰς τὴν μερικὴν περίπτωσιν· καθ' ἣν $\alpha=0$ ἐπανερχόμεθα μὲ ἀναλόγους παρατηρήσεις εἰς τὴν ἀρχικῶς (§ 11) ἐκτεθεῖσαν μέθοδον πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ ρητοῦ μέρους τοῦ ὁλοκληρώματος ρητῆς συναρτήσεως.

Ἀσκήσεις.

1) $$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\log\frac{x^2}{x^2+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+1} + C.$$

Αἱ πράξεις πρὸς εὕρεσιν τοῦ δευτέρου μέλους καθίστανται ἁπλούστεραι, ἐὰν θέσω $x^2=t$ καὶ μετασχηματίσω.

Γενικώτερον ἔστω

$$\int P(x^\nu)\frac{dx}{x},$$

ὅπου $P(x^\nu)$ εἶναι ρητὴ συνάρτησις τοῦ x^ν· ἐὰν θέσω $x^\nu=t$ θὰ προκύψῃ ἁπλούστερον διʼ ὑπολογισμὸν ὁλοκλήρωμα.

2) Νὰ εὑρεθῇ ἀπʼ εὐθείας (§ 11) τὸ ρητὸν μέρος τῶν ὁλοκληρωμάτων

$$\int \frac{(\alpha x+\beta)dx}{(x^2+\pi x+\varkappa)^2}, \quad \int \frac{dx}{(1+x^\nu)^2}$$

3) Νὰ ἁπλοποιηθῇ ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ

$$\int \frac{x^k\,dx}{(x^2\pm 1)^\nu} \quad \text{ὅπου } k \text{— θετικὸς ἀκέραιος.}$$

Ἐὰν k— περιττός, θέτω $x^2=t$· ἐὰν k— ἄρτιος, παρατηρῶ ὅτι

$$\frac{2x\,dx}{(x^2\pm 1)^\nu} = d\left[\frac{1}{1-\nu}\;\frac{1}{(x^2\pm 1)^{\nu-1}}\right]$$

καὶ κάμνω ἀναγωγὴν ἐφαρμόζων τὴν κατὰ παράγοντας ὁλοκλήρωσιν.

4) Νὰ ἁπλοποιηθῇ ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ

$$\int \frac{A(x)\,dx}{(x^2-1)^\nu},$$

ὅπου $A(x)$ εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον· δύναμαι νὰ ἐφαρμόσω τὴν μέθοδον τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως· δύναμαι ὅμως καὶ νὰ θέσω

$$x=\frac{t+1}{t-1}.$$

5) $$\int \frac{\alpha\sigma'(x)}{\sigma(x)}dx = \log\left[C(\sigma(x))^\alpha\right]$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΗ ΡΗΤΩΝ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΝ

Ἐφαρμογὴ μεθόδων ἀντικαταστάσεως.

18. *Ὁλοκληρώματα τῆς μορφῆς*

$$\int P(\etaμx,\ συνx)dx.$$ (1)

Ἐὰν θέσω $εφ\frac{x}{2}=t$ θὰ ἔχω $x=2\,τοξ\,εφ\,t$, $ημx=\frac{2t}{1+t^2}$, $συνx=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$· ὅθεν τὸ δοθὲν ὁλοκλήρωμα ἀνάγεται εἰς ἄλλο ὁλοκλήρωμα ρητῆς συναρτήσεως τοῦ t.

19. Δύναμαι ὅμως νὰ ἐπιτύχω ἀναγωγὴν εἰς ὁλοκλήρωμα ρητῆς συναρτήσεως χρησιμοποιῶν καὶ ἄλλους μετασχηματισμοὺς (2)· ἔστω ὅτι

α) ἡ $P(ημx,\ συνx)$ εἶναι ἀρτία ὡς πρὸς ημx καὶ συνx (ἢ καὶ δέχεται περίοδον τὸ π) δηλ. δὲν μεταβάλλεται, ὅταν τὰ ημx καὶ συνx ἀντικατασταθοῦν διὰ τῶν $-ημx$ καὶ $-συνx$· τουτέστι

$$P(-ημx,\ -συνx)\ [\text{ἢ καὶ } P(ημ(x+π),\ συν(x+π))\ ]=P(ημx,\ συνx)$$

Παρατηρῶ τότε ὅτι

$$P(ημx,\ συνx)=P(συνx\ εφx,\ συνx)=P(-συνx\ εφx,\ -συνx)$$

ὅθεν ἡ $P(συνx\ εφx,\ συνx)$ θὰ εἶναι συνάρτησις τῆς εφx καὶ τοῦ συνx μὴ περιέχουσα περιττὰς δυνάμεις τοῦ συνx (ἀφοῦ δὲν ἀλλάσσει, ὅταν ἀντικαταστήσω τὸ συνx διὰ τοῦ $-συνx$)· ἀλλὰ $συν^2x=\frac{1}{1+εφ^2x}$ ἐπομένως ἐὰν θέσω $εφx=t$ θὰ ἔχω $συν^2x=\frac{1}{1+t^2}$ καὶ $dx=\frac{dt}{1+t^2}$

---

(1) Διὰ τοῦ $P(ημx,\ συνx)$ ἐννοῶ ρητὴν συνάρτησιν τῶν ημx, συνx καὶ γενικῶς εἰς τὸ II κεφάλαιον διὰ τοῦ $P(α,\ β,\ γ,..)$ θὰ ἐννοῶ ρητὴν συνάρτησιν ὡς πρὸς α, β, γ,.. οἱαιδήποτε συναρτήσεις τοῦ x καὶ ἂν εἶναι τὰ α, β, γ,..

(2) Λαμβάνεται προφανῶς ὑπ' ὄψιν (ὅταν τοῦτο ἀποβαίνῃ χρήσιμον) ἡ σχέσις $ημ^2x+συν^2x=1$.

ὥστε τὸ δοθὲν ὁλοκλήρωμα θὰ ἀνάγεται εἰς ὁλοκλήρωμα ῥητῆς συναρτήσεως τοῦ t.

β') ἡ P(ημx, συνx) εἶναι περιττὴ συνάρτησις τοῦ συνημιτόνου· δηλ.

$$P(\eta\mu x,\ -\sigma\upsilon\nu x)\ [\text{ἢ καὶ } P(\eta\mu(\pi-x),\ \sigma\upsilon\nu(\pi-x))] = -P(\eta\mu x,\ \sigma\upsilon\nu x)$$

τότε $\int P dx = \int \frac{P}{\sigma\upsilon\nu x}\,\sigma\upsilon\nu x\, dx$,(¹) ὅπου ἡ $\frac{P}{\sigma\upsilon\nu x}$

θὰ εἶναι παράστασις μὴ περιέχουσα περιττὰς δυνάμεις τοῦ συνx (διότι δὲν πρέπει νὰ ἀλλάσσῃ ἐξ ὑποθέσεως, ὅταν τὸ συνx ἀντικαθίσταται διὰ τοῦ —συνx). Ἑπομένως ἐὰν θέσω ημx=t θὰ ἔχω ὁλοκλήρωμα ῥητῆς συναρτήσεως τοῦ t.

γ') ἡ P(ημx, συνx) εἶναι περιττὴ συνάρτησις τοῦ ημx δηλ.

$$P(-\eta\mu x,\ \sigma\upsilon\nu x)\ [\text{ἢ καὶ } P(\eta\mu(2\pi-x),\ \sigma\upsilon\nu(2\pi-x))] = -P(\eta\mu x,\ \sigma\upsilon\nu x)$$

τότε $\int P dx = \int \frac{P}{\eta\mu x}\,\eta\mu x\, dx$, ὅπου ἡ $\frac{P}{\eta\mu x}$ δὲν θὰ περιέχῃ περιττὰς δυνάμεις τοῦ ημx· ἑπομένως ἐὰν θέσω συνx=t θὰ προκύψῃ ὁλοκλήρωμα ῥητῆς συναρτήσεως τοῦ t.

Παρατήρησις. Δύναμαι πάντοτε νὰ γράψω

$$2P = [P + P(-\eta\mu x,\ -\sigma\upsilon\nu x)] - [P(-\eta\mu x,\ -\sigma\upsilon\nu x) - P(-\eta\mu x,\ \sigma\upsilon\nu x)] - [P(-\eta\mu x,\ \sigma\upsilon\nu x) - P].$$

Ἡ πρώτη ἐν ἀγκύλαις παράστασις εἶναι ἀρτία συνάρτησις τῶν ημx καὶ συνx, ἡ δευτέρα εἶναι περιττὴ συνάρτησις τοῦ συνx καὶ ἡ τρίτη εἶναι περιττὴ συνάρτησις τοῦ ημx.

Ἂν καλέσω αὐτὰς A, B, Γ παρατηρῶ ὅτι τὰ

$$\int A dx \qquad \int B dx, \qquad \int \Gamma dx$$

ἀνάγονται εἰς ῥητὰ ὁλοκληρώματα μὲ τοὺς μετασχηματισμοὺς εφx=t, ημx=t, συνx=t.

(¹) Γράφω P ἀντὶ τοῦ P(ημx, συνx).

Ὥστε δύναμαι, οἱαδήποτε ῥητὴ συνάρτησις τῶν ημx, συνx καὶ ἂν εἶναι ἡ P, νὰ ἀποφύγω τὸν μετασχηματισμὸν $\varepsilon\varphi\frac{x}{2}=t$.

20. ***Παραδείγματα.***

$$\int\frac{dx}{\eta\mu x}\cdot\quad \text{θέτω}\quad \varepsilon\varphi\frac{x}{2}=t\cdot\ \text{ἔχω}$$

$$\int\frac{2dt}{1+t^2}\,\frac{1+t^2}{2t}\,dt=\int\frac{dt}{t}=\log t\cdot\ \text{ὅθεν}\ \int\frac{dx}{\eta\mu x}=\log\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right)+C$$

Ἐὰν ἀντικαταστήσω τὸ x διὰ τοῦ $\frac{\pi}{2}-x$ λαμβάνω

$$\int\frac{dx}{\sigma\upsilon\nu x}=-\log\ \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C.$$

2) $\int\frac{dx}{\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x}$ · Ἡ P ἐπειδὴ δὲν ἀλλάσσει, ὅταν ἀντὶ τοῦ x γράψω $x+\pi$, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀρτία συνάρτησις τῶν ημx καὶ συνx· θέτω $\varepsilon\varphi x=t$ καὶ λαμβάνω

$$\int\frac{dt}{t}=\mathrm{Log}\ t+C=\log\varepsilon\varphi x+C.$$

3) $$\int\frac{dx}{\alpha\ \eta\mu^2 x+2\ \beta\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x+\gamma\ \sigma\upsilon\nu^2 x}\cdot$$

Δὲν ἀλλάσσει καὶ ἐδῶ ἡ P ὅταν ἀντικαταστήσω τὰ ημx καὶ συνx διὰ τῶν —ημx καὶ —συνx· θέτω πάλιν $\varepsilon\varphi x=t$, ὁπότε προκύπτει τὸ

$$\int\frac{dt}{\alpha t^2+2\beta t+\gamma}$$

π. χ. ἔστω $\alpha=-1$, $\beta=0$, $\gamma=1$· προκύπτει τότε ὅτι

$$\int\frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x-\eta\mu^2 x}=\frac{1}{2}\log\frac{1+\varepsilon\varphi x}{1-\varepsilon\varphi x}$$

4) $\int \frac{dx}{\varepsilon\varphi x}$. Ἡ P δύναται νὰ θεωρηθῇ περιττὴ συνάρτησις τοῦ συνx, εἴτε περιττὴ τοῦ ημx, εἴτε ἀρτία τῶν ημx καὶ συνx· διὸ θέτω ημx = t, ἢ συνx = t ἢ εφx = t· εὑρίσκω οὕτω

$$\int \frac{dx}{\varepsilon\varphi x} = \log \eta\mu x + C.$$

Ὁμοίως εὑρίσκω $\int \varepsilon\varphi x \, dx = - \mathrm{Log}\ \sigma\upsilon\nu x + C$

$$\int \frac{dx}{\varepsilon\varphi^3 x}, = - \frac{1}{2} \quad \frac{1}{\eta\mu^2 x} - \log \eta\mu x + C.$$

5) $\int P(\varepsilon\varphi x)\, dx$. Δύναμαι εἰς πᾶσαν περίπτωσιν νὰ τὴν θεωρήσω ὡς ἀρτίαν συνάρτησιν τῶν ημx καὶ συνx καὶ νὰ θέσω εφx = t.

Π. χ. Εὑρίσκω οὕτω

$$\int \frac{dx}{\alpha + \beta\, \varepsilon\varphi x} = \frac{\alpha x}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \log (\alpha\ \sigma\upsilon\nu x + \beta\ \eta\mu x) + C.$$

6) $\int \frac{dx}{\alpha + \beta\ \sigma\upsilon\nu x}$. (α καὶ β διάφορα τοῦ μηδενός).

Ἡ P δὲν εἶναι ἀρτία συνάρτησις τῶν ημx καὶ συνx, οὔτε περιττὴ συνάρτησις τοῦ συνx, οὔτε περιττὴ τοῦ ημx· θέτω $\varepsilon\varphi \frac{x}{2} = t$

ὁπότε προκύπτει τὸ $\int \frac{2dt}{(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)t^2}$. Ὑποθέτω $\alpha > o$. (Ἐὰν $\alpha < o$ θεωρῶ τὸ $\int \frac{dx}{-\alpha - \beta\ \sigma\upsilon\nu x}$ ὁπότε $-\alpha > o$). Διακρίνω τότε τρεῖς περιπτώσεις·

Α′) $\alpha+\beta>o,\quad \alpha-\beta>o$
Β′) $\alpha+\beta>o,\quad \alpha-\beta<o$
Γ′) $\alpha+\beta<o,\quad \alpha-\beta>o$.[1]

Εἰς τὴν Α′ περίπτωσιν θέτω $\alpha+\beta=k^2$, $\alpha-\beta=\lambda^2$, εἰς τὴν

Β′ θέτω $\alpha+\beta=k^2$, $\alpha-\beta=-\lambda^2$ καὶ εἰς τὴν
Γ′ $\alpha+\beta=-k^2$, $\alpha-\beta=\lambda^2$ $(k>o,\quad \lambda>o)$.

Εὑρίσκω δὲ οὕτω διὰ τὸ ζητούμενον ὁλοκλήρωμα εἰς τὴν Α′ περίπτωσιν

$$\frac{2}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\ \text{τοξ εφ}\left(\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\ \text{εφ}\ \frac{x}{2}\right)+C$$

Εἰς τὴν Β′ περίπτωσιν

$$\frac{1}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}\log\frac{\beta+\alpha\ \text{συν}x+\sqrt{\beta^2-\alpha^2}\ \text{ημ}x}{\alpha+\beta\ \text{συν}x}+C$$

καὶ εἰς τὴν Γ′ εὑρίσκομεν εὐκόλως τὸ ἐξαγόμενον ἐργαζόμενοι ὅπως καὶ εἰς τὴν Β′ περίπτωσιν.

21. ***Ὁλοκληρώματα τοῦ τύπου*** $\int P(\text{ημ}\ \alpha x,\ \text{συν}\ \beta x)\,dx$, ὅπου α καὶ β σύμμετροι ἀριθμοί.

1) Ἐὰν α καὶ β εἶναι ἀκέραιοι, ἐκφράζω τὰ ημαx καὶ συνβx συναρτήσει τῶν ημx καὶ συνx· ἐπανέρχομαι οὕτω εἰς τὰ προηγούμενα (§ 20).

2) Ἐὰν $\alpha=\frac{\lambda}{\nu}$ καὶ $\beta=\frac{\mu}{\nu}$ ὅπου λ, μ, ν ἀκέραιοι, θέτω $x=\nu t$· μετατρέπεται οὕτω τὸ προκείμενον ὁλοκλήρωμα εἰς τὸ

$$\nu\int P(\text{ημ}\ \lambda t,\ \text{συν}\ \mu t)\,dt.$$

22. ***Παρατήρησις.*** Ἐνίοτε χρησιμεύει καὶ ἐργασία ἀντίστροφος

---

(1) Τετάρτη περίπτωσις ἀποκλείεται διότι $\alpha>o$.

τῆς προηγουμένης (§ 18—21)· τοῦτέστι συμφέρει νὰ μετατρέπωμεν ρητὴν συνάρτησιν τοῦ x εἰς ρητὴν συνάρτησιν τῶν ημ t, συν t, εφ t, σφt.

Π. χ. Θεωρήσωμεν τὸ

$$\int \frac{\Pi(x)}{(1+x^2)^\nu}\, dx,$$

ὅπου Π(x) εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ 2ν—1. Διὰ τὸν εὔκολον ὑπολογισμὸν τοῦ ὁλοκληρώματος τούτου θέτω $x = \varepsilon\varphi t$· ὁπότε $dx = \frac{dt}{\sigma\upsilon\nu^2 t}$ καὶ $\frac{1}{1+x^2} = \sigma\upsilon\nu^2 t$· τότε λαμβάνω

ὁλοκλήρωμα τῆς μορφῆς $\int A(\eta\mu t, \sigma\upsilon\nu t)dt$,

ὅπου A εἶναι ἀκέραιον πολυόνυμον ὡς πρὸς ημt, συν t.

Ὡς πρὸς τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ὁλοκληρωμάτων τῆς μορφῆς $\int \sigma\upsilon\nu^\mu x \;\; \eta\mu^\nu x \;\; dx$ (μ, ν θετικοὶ ἀκέραιοι) παρατηροῦμεν ὅτι δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὰ $\sigma\upsilon\nu^\nu x$ καὶ $\eta\mu^\nu x$ διὰ παραστάσεων περιεχουσῶν ἁπλᾶ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα τόξων πολλαπλασίων τοῦ x. Π. χ. $\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{2}(1+\sigma\upsilon\nu 2x)$, $\eta\mu^2 x = \frac{1}{2}(1-\sigma\upsilon\nu 2x)$,

$$2^{\nu-1}\sigma\upsilon\nu^\nu x = \sigma\upsilon\nu(\nu x) + \nu\,\sigma\upsilon\nu(\nu-2)x + \Sigma^2_\nu\,\sigma\upsilon\nu(\nu-4)x + \Sigma^3_\nu\,\sigma\upsilon\nu(\nu-6)x + \ldots$$

$$\text{ὅπου } \Sigma^\mu_\nu = \frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-\mu+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,\mu}.$$

Ἔστω ἀκόμη τὸ $\int \frac{\Pi(x, y, \omega)}{y\,.\,\omega}\, dx$, ὅπου Π ἀκέραιον πολυώνυμον ὡς πρὸς x, y, ω καὶ $y = \sqrt{1-x}$, $\omega = \sqrt{1+x}$. Θέτω $x = \sigma\upsilon\nu t$, ὁπότε $y\omega = \eta\mu t$, $dx = -\eta\mu t dt = -y\omega dt$, $y = \sqrt{2}\;\eta\mu\frac{t}{2}$,

$$\omega = \sqrt{2}\;\sigma\upsilon\nu\frac{t}{2} \text{ καὶ } \sigma\upsilon\nu t = \sigma\upsilon\nu^2\frac{t}{2} - \eta\mu^2\frac{t}{2}.$$

προκύπτει οὕτω ὁλοκλήρωμα τῆς μορφῆς $\int A(\eta\mu z,\ \sigma\upsilon\nu z)dz$, ὅπου $z = \frac{t}{2}$ καὶ A ἀκέραιον πολυώνυμον ὡς πρὸς ημz καὶ συνz.

23. ***Ὁλοκληρώματα τοῦ τύπου***

$$\int P\left[x, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^{\lambda}, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^{\mu}, \ldots\right] dx$$

ὅπου $\lambda = \frac{\rho}{\nu}$, $\mu = \frac{\sigma}{\nu}$, . . καὶ ρ, σ, ν, . . . ἀκέραιοι

Θέτω $\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = t^{\nu}$, ὁπότε $dx = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma t^{\nu} - \alpha)^2}\, \nu t^{\nu - 1} dt$·

προκύπτει τότε ὁλοκλήρωμα ῥητῆς συναρτήσεως τοῦ t.

Π. χ. εὑρίσκομεν οὕτω

$1 + u = t^6$
$\sqrt[6]{1+u} = t$

$$\int \frac{1 - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}\, dx = \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} - \frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}} + C.$$

24. ***Ὁλοκληρώματα διωνύμων διαφορικῶν***, τουτέστιν ὁλοκληρώματα τοῦ τύπου

$$\int x^{m}(\alpha + \beta x^{n})^{p}\, dx,$$

ὅπου οἱ ἐκθέται m, n, p εἶναι σύμμετροι ἀριθμοὶ καὶ τὰ α, β εἶναι σταθεροὶ ἀριθμοὶ διάφοροι τοῦ μηδενός.

Τὰ τοιαῦτα ὁλοκληρώματα ἀνάγονται εἰς ὁλοκληρώματα ῥητῶν συναρτήσεων καὶ ἑπομένως ἐκφράζονται συναρτήσει ἀλγεβρικῶν συναρτήσεων, λογαριθμικῶν καὶ τριγωνομετρικῶν εἰς τὰς ἑξῆς περιπτώσεις (¹).

(¹) **Καὶ μόνον εἰς ταύτας** ὅπως ἀπέδειξεν ὁ Tchebicheff· ἰδὲ Journal de **Liouville. T. XVIII, 1853.**

α΄) Ὅταν τὸ p εἶναι ἀκέραιος. Καὶ τωόντι ἐὰν τὸ p εἶναι θετικόν, ἀναπτύσσω τὸ $(\alpha+\beta x^n)^p$ κατὰ τὸν τύπον τοῦ διωνύμου, ἐὰν δὲ τὸ p εἶναι ἀρνητικὸν ἀναπτύσσω τὸ $(\alpha+\beta x^n)^{-p}$· ἔχω τότε ἄθροισμα ὁλοκληρωμάτων τῆς μορφῆς $\int P(\overset{m}{x}, \overset{n}{x})\,dx$ ὅπου m, n εἶναι σύμμετροι ἀριθμοί· ἐὰν ρ δηλοῖ κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν (τῶν κλασμάτων m, n) ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν $x=t^{\varrho}$, ἵνα προκύψῃ ὁλοκλήρωμα ρητῆς συναρτήσεως τοῦ t.

β΄) Ὅταν $\frac{m+1}{n}$ εἶναι ἀκέραιος. Καὶ τωόντι ἂς θέσω $x^n=t$· προκύπτει τότε τὸ

$\frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(\alpha+\beta t)^p\,dt$· ἔστω $p=\frac{\mu}{\nu}$, ὅπου οἱ μ, ν εἶναι ἀκέραιοι· θέτω $(\alpha+\beta t)^{\frac{1}{\nu}}=\omega$ ἢ καὶ $t=\frac{\omega^{\nu}-\alpha}{\beta}$· ὁπότε ὁ μετασχηματισμὸς δίδει

$$\frac{\nu}{n\beta}\int\left(\frac{\omega^{\nu}-\alpha}{\beta}\right)^{\varrho}\omega^{\lambda}\,d\omega,$$

ὅπου ὁ ρ ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀκέραιον $\frac{m+1}{n}-1$ καὶ ὁ λ μὲ τὸν ἀκέραιον $\mu+\nu-1$.

γ΄) Ὅταν ὁ $\frac{m+1}{n}+p$ εἶναι ἀκέραιος· καὶ τωόντι ἂς καλέσω λ τὸν ἀκέραιον αὐτὸν καὶ ἂς θέσω πάλιν $x^n=t$· παρατηρῶ ὅτι

$$t^{\frac{m+1}{n}}(\alpha+\beta t)^p = t^{\lambda}\left(\frac{\alpha+\beta t}{t}\right)^p.$$

ὅθεν θὰ ἔχω πρὸς ὁλοκλήρωσιν τὸ

$$\int t^{\lambda-1}\left(\frac{\alpha+\beta t}{t}\right)^p dt\cdot$$

τοῦτο ὅμως εὐκόλως ὁλοκληροῦται· διότι ἐὰν $p=\frac{\varrho}{\sigma}$ ἀρκεῖ νὰ θέσω·

$$\frac{\alpha+\beta t}{t}=\omega^{\sigma}.$$

25. ***Ὁλοκληρώματα τοῦ τύπου***

$$\int P(x,\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma})\,dx\ :$$

Ἔστωσαν λ, μ αἱ δύο ῥίζαι τοῦ y, ὅπου $y=\alpha x^2+2\beta x+\gamma$· διακρίνομεν δύο περιπτώσεις πρὸς ἐξέτασιν·

α′) λ, μ πραγματικοὶ καὶ ἄνισοι· τότε

$$y=\sqrt{\alpha(x-\lambda)\,(x-\mu)}=(x-\mu)\sqrt{\frac{\alpha(x-\lambda)}{x-\mu}}$$

ἐπομένως συμφώνως πρὸς τὰ προηγούμενα (§ 23) ἀρκεῖ νὰ θέσω·

$$\frac{\alpha(x-\lambda)}{x-\mu}=t^2\,. \qquad (1)$$

Ὁ μετασχηματισμὸς οὗτος δὲν εἰσάγει φανταστικὰ εἴτε θετικὸς εἶναι ὁ α, εἴτε ἀρνητικός.

Ἐὰν $\alpha>o$ δύναμαι νὰ λάβω ὡς τύπον μετασχηματισμοῦ καὶ τὸν ἑξῆς.

$$\alpha x^2+2\beta x+\gamma=(t\pm x\sqrt{\alpha})^2 \qquad (2)$$

ἀποφεύγονται οὕτω πάλιν τὰ φανταστικά· διότι θὰ ἔχω

$$2\beta x+\gamma=\pm 2xt\sqrt{\alpha}+t^2 \text{ καὶ } 2\beta dx=\pm 2t\sqrt{\alpha}\,dx+2(t\pm x\sqrt{\alpha})dt$$

ἐκφράζονται ἐπομένως τὰ x, dx, y μὲ ῥητὰς συναρτήσεις τοῦ t ἐχούσας μόνον πραγματικοὺς συντελεστάς, διότι ἡ $\sqrt{\alpha}$ εἶναι πραγματικός).

Ἐὰν $\alpha<o$ καὶ $\gamma>o$ θέτω $x=\frac{1}{\omega}$ ὁπότε τὸ προτεθὲν ὁλοκλήρωμα μετατρέπεται εἰς τὸ

$$-\int P\left(\frac{1}{\omega},\ \frac{1}{\omega}\sqrt{\alpha+2\beta\omega+\gamma\omega^2}\right)\frac{d\omega}{\omega^2}$$

ὅπου πάλιν ἐφαρμόζω μετασχηματισμὸν ἀνάλογον πρὸς τὸν (2)

δηλ. θέτω $\gamma\omega^2+2\beta\omega+\alpha=(t\pm\omega\sqrt{\gamma})^2$ (2').

Δύναμαι προφανῶς ἀντὶ τῶν δύο ἀλλεπαλλήλων αὐτῶν μετασχηματισμῶν νὰ θέσω ἀπ' εὐθείας

$$\frac{\gamma}{x^2}+\frac{2\beta}{x}+\alpha=\left(t\pm\frac{1}{x}\sqrt{\gamma}\right)^2$$

ἢ καὶ

$$\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}=tx\pm\sqrt{\gamma} \qquad (3)$$

β') λ, μ φανταστικοί· τότε $y=\sqrt{\alpha[(x-\lambda)^2+\mu^2]}$ ἐπομένως διὰ νὰ μὴ παρουσιάζωνται φανταστικὰ πρέπει $\alpha>o$· ἔστω λοιπὸν $\alpha>o$· δύναμαι τότε νὰ ἐφαρμόσω τὸν μετασχηματισμὸν (2).

Παραδείγματα. 1) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2\beta x+\gamma}}$ θέτω $2\beta x+\gamma=t^2-2xt$

ὅθεν $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2\beta x+\gamma}}=\mathrm{Log}(\beta+x+\sqrt{x^2+2\beta x+\gamma})+C.$

2) $\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+2\beta x+\gamma}}$. Παρατηρῶ ὅτι

$$-x^2+2\beta x+\gamma=-(x-\beta)^2+(\gamma+\beta^2).$$

Ἐὰν αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικαί, ἔχω $\gamma+\beta^2>o$ ὁπότε δύναμαι νὰ γράψω $\gamma+\beta^2=k^2$ ὅπου k πραγματικός· θέτω τότε $x-\beta=kt$ καὶ λαμβάνω τὸ

$$\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\text{τοξ ημ}\,t+C$$

3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}}$· θέτω $x = \frac{1}{\omega}$, ὁπότε προκύπτει τὸ

$$-\int \frac{d\omega}{\sqrt{\alpha + 2\beta\omega + \gamma\omega^2}}\cdot \text{ ἐὰν}$$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}}$. Ἐὰν $\alpha > o$, δύναμαι νὰ ἀναγάγω τοῦτο εἰς ὁλοκλήρωμα ὅμοιον πρὸς τὸ τοῦ 1ου παραδείγματος· ἀρκεῖ νὰ θέσω $x\sqrt{\alpha} = \omega$.

Ἐὰν $\alpha < o$ δύναμαι νὰ τὸ ἀναγάγω εἰς ὁλοκλήρωμα ὅμοιον πρὸς τὸ τοῦ 2ου παραδείγματος· ἀρκεῖ νὰ θέσω $x\sqrt{-\alpha}, = \omega$· ὅθεν

$$\alpha x^2 = -\omega^2.$$

5) $\int \frac{dx}{(x-\varrho)\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}}$. Τοῦτο δύναμαι νὰ ἀναγάγω εἰς ὁλοκλήρωμα τῆς προηγουμένης μορφῆς· ἀρκεῖ νὰ θέσω $x - \varrho = \frac{1}{t}$.

26. ***Ὁλοκληρώματα ῥητολύτων συναρτήσεων.*** Τὰ ἀνωτέρω (§ 25) λεχθέντα διὰ τὸ $\int P(x, y)dx$,

$$\text{ὅπου} \quad y = \sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma} \qquad (4)$$

δύνανται νὰ διατυπωθῶσι καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἂς θεωρήσω τὸν μετασχηματισμὸν (1)· οὗτος γράφεται:

$$x = \frac{\alpha\lambda - t^2\mu}{\alpha - t^2} \qquad (5).$$

Ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ x εἰσαγομένη εἰς τὴν ἐξίσωσιν (4) δίδει

$$y = \alpha\frac{\lambda-\mu}{\alpha - t^2}t\cdot \qquad (6)$$

ὥστε ἡ ἐξίσωσις (4) δύναται ν' ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων (5, 6), τῶν ὁποίων τὰ δεύτερα μέλη εἶναι ῥηταὶ συναρτήσεις τοῦ t· ὅθεν καὶ τὸ

$$\int P(x, y)dx,$$

ὅταν ἀντικατασταθοῦν τὰ x, y, dx διὰ τῶν ἴσων των, θὰ μετατραπῇ εἰς ὁλοκλήρωμα ρητῆς συναρτήσεως τοῦ t.

Ἐὰν ἀντὶ τοῦ (1) θεωρήσω τὸν μετασχηματισμὸν (2) θὰ ἔχω πάλιν δύο ἐξισώσεις $x=\sigma(t)$ καὶ $y=\varphi(t)$, διαφερούσας τῶν ἐξισώσεων (5, 6), ***ρητὰς ὅμως ὡς πρὸς*** t, αἵτινες θὰ δύνανται πάλιν ν᾽ ἀντικαταστήσωσι τὴν (4) καὶ νὰ μετατρέψωσι τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int P(x, y)\,dx$$

εἰς ἄλλο ὁλοκλήρωμα ρητῆς συναρτήσεως τοῦ t· ἀνάλογα ἠδυνάμην νὰ εἴπω καὶ διὰ τὸν μετασχηματισμὸν (3)· ὥστε καὶ οἱ τρεῖς μετασχηματισμοὶ (1, 2, 3) δίδουν ὁλοκλήρωμα ρητῆς συναρτήσεως τοῦ t διότι δυνάμει τῆς (4) δίδουν διὰ τὸ y ρητὴν συνάρτησιν τοῦ t.

27. ***Γενικῶς.*** Ἔστω τὸ

$$\int P(x, y)\,dx \qquad (7)$$

ὑποθέτω ὅτι τὸ y εἶναι συνάρτησις τοῦ x ὁριζομένη ἐκ μιᾶς ἐξισώσεως

$$f(x, y)=o \qquad (8)$$

ὅπου $f(x, y)$ εἶναι ρητὴ συνάρτησις ὡς πρὸς x καὶ y· ἔστω ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῶσι δύο ***ρηταὶ*** ὡς πρὸς t συναρτήσεις $\sigma(t)$ καὶ $\varphi(t)$ τοιαῦται ὥστε αἱ ἐξισώσεις

$$x=\sigma(t), \quad y=\varphi(t)$$

νὰ δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς ἐξισώσεις τῆς καμπύλης (8) τουτέστι νὰ ἀντικαταστήσωσι τὴν (8)· τότε ἡ καμπύλη (8) λέγεται ***μονόφορος*** ἡ δὲ ἐκ τῆς ἐξισώσεως (8) ὁριζομένη συνάρτησις y λέγεται ***ρητόλυτος*** συνάρτησις· εἶναι δὲ προφανὲς ὅτι τότε, ἐὰν ἀντικαταστήσω εἰς τὸ (7) τὰ x, y, dx διὰ τῶν ἴσων των, θὰ προκύψῃ ὁλοκλήρωμα ρητῆς συναρτήσεως τοῦ t, διότι θὰ ἔχω

$$\int P(\sigma(t), \varphi(t))\ \sigma'(t)\,dt.$$

Παραδείγματα. 1) Αἱ κωνικαὶ τομαὶ εἶναι κατὰ τὰ προηγούμενα μονόφοροι καμπύλαι· ἢ καί, ἡ συνάρτησις y ἡ ὁριζομένη ἐκ τῆς ἐξισώσεως (4) εἶναι ῥητόλυτος.

Οἱ δὲ μετασχηματισμοὶ (1) (2) (3) δύνανται νὰ προκύψουν ἀπὸ γενικὴν μέθοδον διὰ τὰς κωνικὰς τιμάς· τοῦτο φαίνεται ἀμέσως ἐκ τῶν κατωτέρω.

Ζητῶ μίαν συνάρτησιν $F(x, y, t)$ ῥητὴν ὡς πρὸς x, y, t τοιαύτην, ὥστε ἡ ἐξίσωσις (4) καὶ ἡ $F=o$ ν᾽ ἀποτελοῦν σύστημα δυνάμενον ν᾽ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ δύο ἐξισώσεων $x=\sigma(t)$ καὶ $y=\varphi(t)$, ὅπου $\sigma(t)$ καὶ $\varphi(t)$ νὰ εἶναι ῥηταὶ συναρτήσεις τοῦ t.

Μία τοιαύτη συνάρτησις $F(x, y, t)$ προσδιορίζεται καὶ ὡς ἑξῆς· ἔστω $M(x_0, y_0)$ τυχὸν σημεῖον τῆς κωνικῆς τομῆς (4). Λαμβάνω ὡς

$$F(x, y, t) \quad \text{τὴν} \quad y-y_0-t(x-x_0)$$

(δηλ. προσδιορίζω τὴν F οὕτως, ὥστε ἡ $F=o$ νὰ παριστᾷ τὴν δέσμην τῶν εὐθειῶν τῶν διερχομένων διὰ τοῦ M)· λέγω ὅτι ἡ (4) καὶ ἡ

$$y-y_0-t(x-x_0)=o \qquad (9)$$

ὁρίζουν τὰ x καὶ y διὰ ῥητῶν συναρτήσεων τοῦ t.

Καὶ τῷ ὄντι ἡ ἀπαλοιφὴ τοῦ y θὰ δώσῃ ἐξίσωσιν δευτεροβάθμιον ὡς πρὸς x, τῆς ὁποίας ὅμως τὸ πρῶτον μέλος θὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-x_0$.

Διότι ἡ (4) γράφεται

$$(y^2-y_0^2)-\alpha(x^2-x_0^2)+2\beta(x-x_0)=o \qquad (4')$$

ἥτις δυνάμει τῆς (9) γράφεται

$$\Big[\left[(y+y_0)t-\alpha(x+x_0)\right]+2\beta\Big](x-x_0)=o \qquad (4')$$

ἢ καὶ

$$\Big[(2y_0+t(x-x_0))\,t-\alpha(x+x_0)+2\beta\Big](x-x_0)=o\cdot$$

ὅθεν θὰ ἔχω τὴν ἐξίσωσιν (9) καὶ τὴν ἐξίσωσιν

$$\Big[2y_0+t\;(x-x_0)\Big]t-\alpha(x+x_0)+2\beta=o$$

αἱ ἐξισώσεις αὗται ὁρίζουν τὰ x καὶ y διὰ ῥητῶν συναρτήσεων τοῦ t.

Π. χ. ἔστω

$$x_0 = \mu, \quad \text{καὶ} \quad y_0 = o \qquad (\lambda, \mu \text{ ῥίζαι τοῦ } \alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\cdot$$

ὡς (9) θὰ ἔχω τότε τὴν

$$y = t\,(x - \mu)$$

καὶ ἡ (4) γίνεται

$$t^2 (x - \mu)^2 = \alpha (x - \lambda)\,(x - \mu)\cdot$$

ὅθεν $$\frac{x - \lambda}{x - \mu} = \frac{t^2}{\alpha}$$

δηλ. προκύπτει ὁ μετασχηματισμὸς (1)

ἔστω $x_0 = o, \quad y = \sqrt{\gamma}\cdot$

ὡς (9) θὰ ἔχω τότε τὴν

$$y - \sqrt{\gamma} = tx. \qquad (\text{ἰδὲ μετασχηματισμὸν } (3))$$

2) Ἔστω ὅτι τὸ y εἶναι συνάρτησις τοῦ x ὁριζομένη ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$x^3 + y^3 - 3\alpha xy = o \qquad (\text{φύλλον τοῦ Καρτεσίου})$$

Ἐὰν θέσω $y = tx$ λαμβάνω

$$x = \frac{3\alpha t}{1 + t^3}, \qquad y = \frac{3\alpha t^2}{1 + t^3}$$

ὅθεν τὸ y εἶναι ῥητόλυτος συνάρτησις τοῦ x.

3) Ἂς θεωρήσω τέλος τὸν λημνίσκον

$$(x^2 + y^2)^2 = \alpha^2 (x^2 - y^2)$$

ἐὰν θέσω $y = \lambda x$ (ὅπου τὸ λ εἶναι συνάρτησις τοῦ t) λαμβάνω

$$x = \frac{\pm\alpha\sqrt{1-\lambda^2}}{1+\lambda^2}.$$

Ἵνα ἔχω διὰ τὸ x ῥητὴν συνάρτησιν τοῦ t ἀρκεῖ ἡ συνάρτησις λ νὰ προσδιορισθῇ οὕτως, ὥστε

$$\sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}} = \frac{\alpha}{t}, \quad \text{ὁπότε}$$

$$\lambda = \frac{t^2-\alpha^2}{t^2+\alpha^2} \quad \text{καὶ} \quad x = \frac{\alpha^2 t(t^2+\alpha^2)}{t^4+\alpha^4}, \qquad y = \frac{\alpha^2 t(t^2-\alpha^2)}{t^4+\alpha^4}$$

Τύποι ἀναγωγῆς.

28. Ἔστω τὸ

$$\int \eta\mu^m x \ \sigma\upsilon\nu^n x \ dx.$$

παρατηρῶ ὅτι τὸ $\eta\mu^m x \ \sigma\upsilon\nu x \ dx$ εἶναι διαφορικὸν τοῦ $\frac{\eta\mu^{m+1} x}{m+1}$ καὶ ὁλοκληρώνω κατὰ παράγοντας, ὁπότε λαμβάνω

$$\int \eta\mu^m x \,\sigma\upsilon\nu^n x dx = \frac{\eta\mu^{m+1} x \ \sigma\upsilon\nu^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \eta\mu^{m+2} x \ \sigma\upsilon\nu^{n-2} x dx$$

Μὲ ἀναλόγους παρατηρήσεις εὑρίσκομεν

$$\int \eta\mu^m x \ \sigma\upsilon\nu^n \ x dx = -\frac{\eta\mu^{m-1} x \ \sigma\upsilon\nu^{n+1} x}{n+1} +$$

$$+\frac{m-1}{n+1}\int \eta\mu^{m-2} x \ \sigma\upsilon\nu^{n+2} x \ dx \qquad (10)$$

Ἐὰν εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (10) δηλ. εἰς τὸ

$$\int \eta\mu^{m-2} x \; \sigma\upsilon\nu^{n+2} x \; dx$$

ἀντικαταστήσω τὸ $\sigma\upsilon\nu^{n+2}x$ διὰ τοῦ $\sigma\upsilon\nu^{n} x\,(1-\eta\mu^2 x)$ λαμβάνω·

$$I_{m,n} = -\,\eta\mu^{m-1} x \, \frac{\sigma\upsilon\nu^{n+1} x}{n+1} +$$

$$+\frac{m-1}{n+1}\int \eta\mu^{m-2} x \; \sigma\upsilon\nu^{n} x \; dx - \frac{m-1}{n+1} I_{m,n},$$

ὅπου $\qquad I_{m,n} = \int \eta\mu^{m} x \; \sigma\upsilon\nu^{n} x \; dx\cdot$

ὅθεν $$I_{m,n} = -\frac{\eta\mu^{m-1} x \; \sigma\upsilon\nu^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}. \qquad (11)$$

Ἔχω οὕτω τύπον, δι' οὗ ἡ εὕρεσις τοῦ $I_{m,n}$ ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν ἄλλου ὁλοκληρώματος τῆς αὐτῆς μορφῆς μὲ ἐκθέτην τοῦ μὲν συνx τὸν αὐτόν, τοῦ δὲ ημx μικρότερον κατὰ δύο μονάδας.

Ὁμοίως ἐργαζόμενος μὲ τὸν πρῶτον τύπον εὑρίσκω

$$I_{m,n} = \frac{\eta\mu^{m+1} x \; \sigma\upsilon\nu^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}, \qquad (12)$$

ἐδῶ ὁ ἐκθέτης τοῦ συνx εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα ἐλαττοῦται κατὰ δύο μονάδας.

Ἐὰν λύσω τὸν τύπον (11) ὡς πρὸς $I_{m-2,n}$ καὶ θέσω κατόπιν ὅπου m τὸ m+2 λαμβάνω

$$I_{m,n} = \frac{\eta\mu^{m+1} x \, \sigma\upsilon\nu^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} I_{m+2,n} \,. \qquad (11')$$

Ἐὰν λύσω τὸν τύπον (12) ὡς πρὸς $I_{m,n-2}$ καὶ θέσω κατόπιν ὅπου n τὸ $n+2$ λαμβάνω

$$I_{m,n} = -\frac{\eta\mu^{m+1} x \, \sigma\upsilon\nu^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} I_{m,n+2} \qquad (12')$$

1) Ἔστω $m=2\rho$, ὅπου ρ ἀκέραιος θετικὸς καὶ $m-2\lambda \neq -n$ διὰ $\lambda=0,1,2,\dots \rho$.

Τότε τὸ δοθὲν ὁλοκλήρωμα δι᾽ ἀλλεπαλλήλου ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (11) ἀνάγεται εἰς ὁλοκλήρωμα τῆς μορφῆς

$$\int \sigma\upsilon\nu^{n} x \, dx.$$

Τοῦτο πάλιν, ἐὰν μὲν τὸ n εἶναι θετικὸς ἀκέραιος, ἀνάγεται δι᾽ ἀλλεπαλλήλου ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (12) εἰς τὸ

$$\int dx \quad \text{ἢ εἰς τὸ} \quad \int \sigma\upsilon\nu \, x \, dx,$$

ἐὰν δὲ τὸ n εἶναι ἀρνητικὸς ἀκέραιος, διάφορος τῆς ἀρνητικῆς μονάδος, ἀνάγεται δι᾽ ἀλλεπαλλήλου ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (12′) εἰς τὸ

$$\int dx \quad \text{ἢ εἰς τὸ} \quad \int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu x}.$$

Ὡς πρὸς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν παρουσιάζεται ὁλοκλήρωμα τῆς μορφῆς

$$\int \eta\mu^{2k} x\, \sigma\upsilon\nu^{-2k} x\, dx,$$

ὅπου k θετικὸς ἀκέραιος παρατηρῶ, ὅτι τοῦτο ἀνάγεται δι' ἀλληπαλλήλου ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (12′) εἰς ὁλοκλήρωμα τῆς μορφῆς

$$\int \eta\mu^{2k} x\, dx\cdot$$

καὶ τοῦτο διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (11) εἰς τὸ

$$\int dx.$$

2) Ἔστω $m=2\varrho+1$, ὅπου ϱ ἀκέραιος θετικὸς καὶ $m-2\lambda \neq -n$ διὰ $\lambda=0,1,2,\ldots \varrho$.

Τότε τὸ δοθὲν ὁλοκλήρωμα δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (11) ἀνάγεται εἰς τὸ

$$\int \eta\mu x\, \sigma\upsilon\nu^{n} x\, dx,$$

ὅπερ ὁλοκληροῦται εὐκόλως δι' ἀντικαταστάσεως.

Ὡς πρὸς τὰ ὁλοκληρώματα τῆς μορφῆς

$$\int \eta\mu^{2k+1} x\, \sigma\upsilon\nu^{-(2k+1)} x\, dx$$

(ὅπου k θετ. ἀκέραιος) παρατηρῶ, ὅτι ταῦτα ἀνάγονται διὰ τοῦ τύπου (12′) εἰς ὁλοκληρώματα τῆς μορφῆς

$$\int \eta\mu^{2k+1} x \ \sigma\upsilon\nu^{-1} x \ dx,$$

καὶ τοῦτο πάλιν διὰ τοῦ τύπου (11) ἀνάγεται εἰς τὸ

$$\int \varepsilon\varphi x \ dx.$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἐργαζόμεθα εἰς τὰς περιπτώσεις, καθ' ἃς $m = -2\varrho$ καὶ $m = -2\varrho - 1$, ὅπου ϱ θετικὸς ἀκέραιος.

Ὅθεν ὅταν οἱ ἐκθέται m καὶ n εἶναι ἀκέραιοι δυνάμεθα καταλλήλως ἐφαρμόζοντες τοὺς τύπους (11, 12, 11', 12') νὰ ἀναγάγωμεν τὸ $I_{m,n}$ εἰς ἄλλα προσδιοριζόμενα εὐκόλως.

29. Ἔστω τὸ

$$\int A(x) \ e^{\alpha x} dx,$$

ὅπου A(x) εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον· ὁλοκληρόνω κατὰ παράγοντας καὶ λαμβάνω τὸν τύπον ἀναγωγῆς

$$\int A(x) \ e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} A(x) e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha} \int A'(x) e^{\alpha x} dx.$$

Ἐὰν μ εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ A(x), μ—1 θὰ εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ A'(x).

Ἐὰν εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ δευτέρου μέλους ἐφαρμόσω τὸν αὐτὸν τύπον θὰ παρουσιασθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int A''(x) \ e^{\alpha x} dx ,$$

ὅπου τὸ $A''(x)$ εἶναι βαθμοῦ $\mu-2$ κ.ο.κ., εὑρίσκομεν οὕτω

$$\int A(\ )e^{\alpha x}dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\left[A(x) - \frac{A'(x)}{\alpha} + \frac{A''(x)}{\alpha^2} - \dots\right].$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον προσδιορίζονται τὰ ὁλοκληρώματα τῆς μορφῆς

$$\int A(x)\ \eta\mu\ \alpha x\ dx, \qquad \int A(x)\ \sigma\upsilon\nu\ \alpha x\ dx.$$

30. Ἔστωσαν τὰ

$$\int e^{\alpha x}\eta\mu\ \beta x\ dx, \qquad \int e^{\alpha x}\sigma\upsilon\nu\ \beta x\ d\varkappa$$

Καλέσωμεν A τὸ πρῶτον καὶ B τὸ δεύτερον· ὁλοκληροῦμεν ἀμφότερα κατὰ παράγοντας καὶ εὑρίσκομεν

$$A = -\frac{e^{\alpha x}\ \sigma\upsilon\nu\beta x}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta}B$$

$$B = \frac{e^{\alpha x}\ \eta\mu\ \beta x}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}A.$$

Λύω τὰς ἰσότητας ταύτας ὡς πρὸς A καὶ B λαμβάνω

$$A = e^{\alpha x}\frac{\alpha\eta\mu\beta x - \beta\ \sigma\upsilon\nu\beta x}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$B = e^{\alpha x} \frac{\alpha\ \sigma\upsilon\nu\beta x + \beta\ \eta\mu\beta x}{\alpha^2+\beta^2}$$

31. Ἔστω τὸ

$$\int x^{\mu} (\log x)^{\nu}\ dx,$$

ὅπου ν εἶναι θετικὸς ἀκέραιος.

Ὁλοκληρόνω κατὰ παράγοντας θεωρῶν τὸ $x^{\mu}dx$ ὡς διαφορικὸν τοῦ $\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}$ καὶ λαμβάνω, ὅτι τὸ δοθὲν ὁλοκλήρωμα ἰσοῦται πρὸς

$$\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} (\log x)^{\nu} - \frac{\nu}{\mu+1} \int x^{\mu} (\log x)^{\nu-1} dx. \qquad (\mu \neq -1)$$

Οὕτω ἀνήχθη τὸ δοθὲν ὁλοκλήρωμα εἰς ἄλλο τῆς αὐτῆς μορφῆς μὲ ἐκθέτην τοῦ x μικρότερον κατὰ μονάδα· προχωρῶν καθ' ὅμοιον τρόπον προσδιορίζω εὐκόλως τὸ δοθὲν ὁλοκλήρωμα.

32. Ἔστω τὸ

$$\int \frac{A(x)}{B(x)} e^{\alpha x}\ dx,$$

ὅπου τὰ A(x) καὶ B(x) εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ x.

Παρατηρῶ, ὅτι ὅταν ἀναλύσω τὸ κλάσμα $\frac{A(x)}{B(x)}$ εἰς ἁπλᾶ θὰ προκύψωσιν ὁλοκληρώματα τῆς μορφῆς

$$\int x^{\mu} e^{\alpha x} \qquad \text{(ἰδὲ § 29)}$$

καὶ ὁλοκληρώματα τῆς μορφῆς

$$\int \frac{e^{\alpha x}}{(x-\varrho)^{\nu}}\, dx = J_{\nu}\,.$$

Θεωρῶν τὸ $\frac{1}{(x-\varrho)^{\nu}}dx$ ὡς διαφορικὸν τοῦ $-\frac{1}{\nu-1}\frac{1}{(x-\varrho)^{\nu-1}}$, ὁλοκληρόνω κατὰ παράγοντας καὶ ἔχω

$$J_{\nu} = -\frac{1}{\nu-1}\frac{e^{\alpha x}}{(x-\varrho)^{\nu-1}} + \frac{\alpha}{\nu-1} J_{\nu-1}\,.$$

Ἡ ἀλλεπάλληλος ἐφαρμογὴ τοῦ τύπου τούτου ὁδηγεῖ εἰς τὸ

$$J_1 = \int \frac{e^{\alpha x}}{x-\varrho}\, dx.$$

Ἐὰν εἰς τοῦτο ἀλλάξω τὴν μεταβλητήν, θέτων $x-\varrho = \frac{t}{\alpha}$, λαμβάνω

$$J_1 = e^{\alpha\varrho}\int \frac{e^{t}}{t}\, dt.$$

Τοῦτο πάλιν ἀνάγεται, ἐὰν θέσω $e^{t} = \omega$, εἰς τὸ

$$\int \frac{d\omega}{\log\omega},$$

ὅπερ καλεῖται ***λογαριθμικὸν ὁλοκλήρωμα.*** (§ 6)

33. Ἔστω

$$\varphi(p,q) = \int (\alpha+\beta x)^{p}\, x^{q}\, dx.$$

Γίνεται (§ 24) ἐδῶ ἡ ὁλοκλήρωσις μὲ τὰς συνήθεις συναρτήσεις (ἀλγεβρικάς, τριγωνομετρικὰς καὶ κυκλικὰς) μόνον ὅταν εἶναι ἀκέραιος εἷς τοὐλάχιστον ἐκ τῶν p, q, p+q. Ἐὰν τοῦτο δὲν συμβαίνῃ δύναμαι ν' ἀναγάγω τὸ $\varphi(p,q)$ εἰς ἄλλο ὁλοκλήρωμα $\varphi(\lambda,\mu)$, ὅπου τὸ λ νὰ εἶναι μεγαλύτερον ἢ μικρότερον τοῦ p καθ' ὁσασδήποτε μονάδας θέλω, ὅπως ἐπίσης καὶ τὸ μ νὰ εἶναι μεγαλύτερον ἢ μικρότερον τοῦ q καθ' ὁσασδήποτε μονάδας θέλω.

Τοῦτο φαίνεται ἐκ τῶν ἑξῆς δύο τύπων :

$$\alpha\, \varphi(p,q) = -\frac{(\alpha+\beta x)^{p+1}\, x^{q+1}}{p+1} + \frac{p+q+2}{p+1}\varphi(p+1,q) \qquad (13)$$

$$\alpha\, \varphi(p,q) = \frac{(\alpha+\beta x)^{p+1}\, x^{q+1}}{q+1} - \beta\frac{p+q+2}{q+1}\varphi(p,q+1), \qquad (14)$$

Παρατηρῶ πρὸς τοῦτο ὅτι

$$\alpha\varphi(p,q)+\beta\, \varphi(p,q+1)=\varphi(p+1,q)$$

καὶ ὁλοκληρόνω κατὰ παράγοντας τὸ $\varphi(p+1,q)$ ἢ τὸ $\varphi(p.q+1)$.

Διὰ τοῦ τύπου (13) τὸ $\varphi(p,q)$ ἀνάγεται εἰς τὸ $\varphi(p+1,\ q)$· ἐὰν δὲ τὸν τύπον (13) λύσω ὡς πρὸς $\varphi(p+1,q)$ καὶ ἀντικαταστήσω τὸ p διὰ τοῦ p—1 θὰ προκύψῃ τύπος, δι' οὗ τὸ $\varphi(p,q)$ ἀνάγεται εἰς τὸ $\varphi(p-1,q)$. Ἀνάλογα δύναμαι νὰ εἴπω διὰ τὸν τύπον (14) ὡς πρὸς τὸ q.

Κατὰ ταῦτα ὅταν δὲν εἶναι ἀκέραιος οὐδεὶς ἐκ τῶν p,q, p+q δύναμαι νὰ ἀναγάγω τὸ $\varphi(p,q)$ εἰς ἄλλο ὁλοκλήρωμα τῆς αὐτῆς μορφῆς $\varphi(\lambda,\mu)$, ὅπου τὰ λ, μ νὰ εἶναι ἀριθμοὶ μεταξὺ 0 καὶ 1. Ἐπειδὴ τότε τὸ $\varphi(\lambda,\mu)$ δὲν ἀνάγεται πλέον διὰ τῶν τύπων αὐτῶν εἰς ἄλλο ὁλοκλήρωμα τῆς αὐτῆς μορφῆς $\varphi(\varrho,\sigma)$, ὅπου ρ,σ νὰ εἶναι ἀμφότερα θετικὰ μικρότερα τῆς μονάδος καὶ ἐπειδὴ δὲν ἰσοῦται μὲ στοιχειώδη συνάρτησιν (δηλ. συνάρτησιν προκύπτουσαν μὲ συνδυασμόν τινα συνήθων συναρτήσεων) θεωρῶ τὸ $\varphi(\lambda,\mu)$ ὡς νέαν ὑπερβατικὴν συνάρτησιν.

Ἀσκήσεις.

1) $$\int x(\alpha+x)^{\frac{1}{3}}x\,dx = \frac{3(\alpha+x)^{\frac{4}{3}}}{4}\left(\frac{4x-3\alpha}{7}\right)+C.$$

2) $$\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}} = 2\ \text{τοξ εφ}(1+x)^{\frac{1}{2}}+C.$$

3) $$\int \frac{(1+x^2)dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}{1-x^2}+C.$$

Ἵνα τὸ δοθὲν ὁλοκλήρωμα ἀναχθῇ εἰς ὁλοκλήρωμα ῥητῆς συναρτήσεως ἀρκεῖ νὰ θέσω $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2$ καὶ νὰ ἀντικαταστήσω.

4) Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκεται τὸ

$$\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}dx.$$

5) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-4x-1}} = \text{τοξσυν}\frac{2x+1}{x\,2\sqrt{2}}+C.$$

6) $$\int \frac{dx}{(\text{ημ}\,x\ \text{συν}\,x)^2} = -\,2\text{σφ}2x+C.$$

7) $$\int \frac{(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{\mu}{\nu}}}{\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{\nu}{\mu}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{\mu}{\nu}}+C.$$

8) $$\int x^\nu e^x dx = e^x\left[x^\nu - \nu x^{\nu-1} + \nu(\nu-1)x^{\nu-2} - \dots\right]+C,$$

9) $$\int \frac{dx}{\eta\mu^3 x\,\sigma\upsilon\nu x} = -\frac{1}{2\,\eta\mu^2 x} + \log\,\varepsilon\varphi\,x + C.$$

10) $$\int \frac{x^2\,dx}{(\alpha+\beta x)^{\frac{1}{3}}} = 3(\alpha+\beta x)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{x^2}{8\beta} - \frac{3}{20}\,\frac{\alpha x}{\beta^2} + \frac{9}{40}\,\frac{\alpha^2}{\beta^3}\right) + C.$$

11) $$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{3x}\left(\frac{1}{x^2}+2\right) + C.$$

12) $$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}} = \log\left[\frac{3+x-2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}\right] + C.$$

13) $$\int \frac{dx}{(\alpha+\beta\,\sigma\upsilon\nu\,x)^2} = \frac{-\beta\,\eta\mu\,x}{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha+\beta\,\sigma\upsilon\nu\,x)} + \frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}\int \frac{dx}{\alpha+\beta\,\sigma\upsilon\nu x}.$$

14) $$\int e^{\alpha x}\,\eta\mu^2 x\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha(\alpha^3+4)}\left(\alpha^2\,\eta\mu^2 x - 2\alpha\,\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x + 2\right) + C.$$

15) $$\int \eta\mu^{\nu-1} x\,\sigma\upsilon\nu(\nu+1)x\,dx = \frac{\eta\mu^\nu x\,\sigma\upsilon\nu\,\nu x}{\nu} + C.$$

16) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int y\,dx,$$

ὅπου τὸ y εἶναι συνάρτησις τοῦ x ὁριζομένη ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$y(x^2+y^2) = \alpha(y^2-x^2).$$

17) Οἱ τύποι ἀναγωγῆς διωνύμου (§ 33) δύνανται προφανῶς νὰ

χρησιμοποιηθῶσι καὶ ὅταν εἷς ἐκ τῶν p, q, p+q εἶναι ἀκέραιος, ἐξαιρέσει ὅμως τῶν περιπτώσεων, καθ' ἃς οἱ παρονομασταὶ p+1, q+1, p+q+1 ἰσοῦνται πρὸς τὸ μηδέν.

Πῶς εἰς τὰς ἐξαιρετικὰς αὐτὰς περιπτώσεις δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τοὺς ἰδίους τύπους ;

Ἐλλειπτικὰ καὶ ὑπερελλειπτικὰ ὁλοκληρώματα.

34. Ἔστω ὁλοκλήρωμα τῆς μορφῆς

$$\int P(x, \sqrt{\Pi})\, dx, \qquad (1)$$

ὅπου τὸ $P(x, \sqrt{\Pi})$ εἶναι ῥητὴ συνάρτησις τῶν x καὶ $\sqrt{\Pi}$, τὸ δὲ Π εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x.

Ἐὰν ὁ βαθμὸς τοῦ Π εἶναι 3 ἢ 4 τὸ (1) λέγεται ***ἐλλειπτικὸν ὁλοκλήρωμα***· ἐὰν δὲ ὁ βαθμὸς τοῦ Π εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 4, τὸ (1) λέγεται ***ὑπερελλειπτικὸν*** ὁλοκλήρωμα.

Εἶναι προφανές, ὅτι δύναμαι πάντοτε νὰ ὑποθέσω ὅτι τὸ Π ἔχει μόνον ἁπλᾶς ῥίζας· διότι ἐὰν τὸ Π εἶχε ῥίζαν τινὰ α πολλαπλῆν θὰ ἦτο αὕτη βαθμοῦ πολλαπλότητος ἀρτίου ἢ περιττοῦ· καὶ ἐὰν ἦτο ἀρτίου, ἔστω 2ν, τότε τὸ Π θὰ ἦτο τῆς μορφῆς $(x-\alpha)^{2\nu}T$, ὅπου τὸ T θὰ εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον μὴ περιέχον τὴν ῥίζαν α καὶ ἑπομένως

$$\sqrt{\Pi} = (x-\alpha)^{\nu}\sqrt{T},$$

ἐὰν δὲ ὁ βαθμὸς πολλαπλότητος τῆς ῥίζης α ἦτο 2ν+1, θὰ ἦτο $\Pi=(x-\alpha)^{2\nu+1}T$ καὶ ἑπομένως·

$$\sqrt{\Pi}=(x-\alpha)^{\nu}\sqrt{(x-\alpha)T}\,.$$

Ὥστε ἀπομένει τελικῶς ὑπὸ τὴν ῥίζαν ἀκέραιον πολυώνυμον, τὸ ὁποῖον ἢ δὲν ἔχει ῥίζαν τὸ α ἢ τὸ ἔχει ὡς ἁπλῆν ῥίζαν.

Ἔστω λοιπὸν ὁλοκλήρωμα τῆς μορφῆς (1), ὅπου τὸ Π ἔχει μόνον ἁπλᾶς ῥίζας. Θὰ δείξω, ὅτι πᾶν τοιοῦτον ὁλοκλήρωμα ἀναλύεται εἰς ἀλγεβρικὸν μέρος καὶ λογαριθμικὸν καὶ εἰς ἀριθμόν τινα εἰδικῶν ὁλοκληρωμάτων, τὰ ὁποῖα θεωρῶ ὡς νέας ὑπερβατικὰς συναρτήσεις, καθόσον δὲν δύναμαι νὰ ἐκφράσω αὐτὰς συνδυάζων στοιχειώδεις συναρτήσεις· τοὐτέστι θὰ δείξω, ὅτι πᾶν ὁλοκλήρωμα τῆς μορφῆς (1) ***ἀνάγεται*** εἰς ἀριθμόν τινα τῶν εἰδικῶν αὐτῶν ὁλοκληρωμάτων.

35) ***Ἀνάλυσις εἰς στοιχεῖα.*** Τὸ $P(x,\sqrt{\Pi})$ εἶναι, ἐν γένει, πηλίκον δύο ἀκεραίων πολυωνύμων ὡς πρὸς x καὶ $\sqrt{\Pi}$· ἀλλὰ $(\sqrt{\Pi})^{2\nu}=\Pi^\nu$ καὶ $(\sqrt{\Pi})^{2\nu+1}=\Pi^\nu\sqrt{\Pi}$. Ἑπομένως πᾶσα ἀρτία δύναμις τοῦ $\sqrt{\Pi}$ ἰσοῦται πρὸς ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x· πᾶσα δὲ περιττὴ ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον ἀκεραίου πολυωνύμου ἐπὶ $\sqrt{\Pi}$· ὅθεν γράφεται τὸ $P(x,\sqrt{\Pi})$ καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\frac{A+B\sqrt{\Pi}}{\Gamma+\Delta\sqrt{\Pi}},$$

ὅπου τὰ A,B,Γ,Δ εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ x.

Ἐὰν ἤδη πολλαπλασιάσω ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἐπὶ $\Gamma-\Delta\sqrt{\Pi}$ λαμβάνω κλάσμα τῆς μορφῆς

$$\frac{E+Z\sqrt{\Pi}}{H}=\frac{E}{H}+\frac{Z\Pi}{H}\frac{1}{\sqrt{\Pi}},$$

ὅπου τὰ E,Z,H εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα.

Οὕτω τὸ ὁλοκλήρωμα (1) ἰσοῦται πρὸς τὸ

$$(1') \qquad \int\frac{E}{H}dx+\int\frac{K}{H}\frac{dx}{\sqrt{\Pi}} \qquad (K=Z\Pi)$$

Τὸ πρῶτον ὁλοκλήρωμα τοῦ (1′) εἶναι ὁλοκλήρωμα ρητῆς συναρτήσεως· ἑπομένως εὑρίσκεται κατὰ τὰ ἤδη γνωστά· ὡς πρὸς τὸ δεύτερον ὁλοκλήρωμα παρατηρῶ, ὅτι διαιρῶν τὸ K διὰ τοῦ H λαμβάνω ἐν γένει

$$\frac{K}{H}=\Lambda+\frac{\sigma}{\varphi},$$

ὅπου τὰ Λ,σ,φ εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα, τὸ δὲ σ εἶναι βαθμοῦ μικροτέρου ἢ τὸ φ· ἀλλὰ (§ 15)

$$\frac{\sigma}{\varphi}=\frac{\Pi_1}{X_1}+\frac{\Pi_2}{X_2^2}+\ldots+\frac{\Pi_\nu}{X_\nu^\nu},$$

ὅθεν, ἐὰν $\Lambda=\alpha_0+\alpha_1 x+\ldots+\alpha_\mu x^\mu$, θὰ σύγκειται τὸ δεύτερον ὁλοκλήρωμα τοῦ (1′) ἀπὸ δύο ἀθροίσματα, τῶν ὁποίων τὸ ἓν εἶναι ἄθροισμα ὁλοκληρωμάτων τῆς μορφῆς

$$\int \alpha_m \frac{x^m\,dx}{\sqrt{\Pi}} \qquad (m=0,1,2,\ldots\mu)$$

καὶ τὸ ἄλλο εἶναι ἄθροισμα ὁλοκληρωμάτων τῆς μορφῆς

$$\int \frac{\Pi_\varrho}{X_\varrho^\varrho}\frac{dx}{\sqrt{\Pi}} \qquad (\varrho=1,2,3,\ldots\nu)$$

Προκύπτουσιν οὕτω πρὸς ἐξέτασιν δύο εἴδη ὁλοκληρωμάτων, τὰ ἑξῆς :

α′) $$I_m=\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{\Pi}} \qquad (m=0,1,2,\ldots\mu) \quad \text{καὶ}$$

β′) $$K_\varrho=\int\frac{A}{X^\varrho}\frac{dx}{\sqrt{\Pi}} \qquad (\varrho=1,2,3,\ldots\nu).$$

(Ἔθεσα πρὸς ἁπλούστευσιν τῆς γραφῆς $\Pi_\varrho=A$ καὶ $X_\varrho=X$).

36. ***Ἀναγωγὴ τῶν ὁλοκληρωμάτων I_m*** (δηλ. τῶν ἀκεραίων στοιχείων). Ἔστω λ ὁ βαθμὸς τοῦ Π· δηλ. ἔστω

$$\Pi=\beta_0 x^\lambda+\beta_1 x^{\lambda-1}+\ldots+\beta_\lambda.$$

Θ' ἀποδείξω, ὅτι τὰ $I_{\lambda-1}, I_\lambda, I_{\lambda+1},\ldots$ ***ἐκφράζονται διὰ τῶν***

$$I_0, I_1, \ldots I_{\lambda-2},$$

ἤτοι, ὅτι δύναται νὰ γίνῃ ἀναγωγὴ τοιαύτη τοῦ I_m, ***ὥστε ὁ ἐκθέτης*** m ***νὰ εἶναι τὸ πολὺ ἴσος πρὸς τὸν*** $\lambda-2$.

Πρὸς τοῦτο παρατηρῶ, ὅτι

$$(x^m\sqrt{\Pi})' = \frac{2mx^{m-1}\Pi+x^m\Pi'}{2\sqrt{\Pi}}. \qquad (2)$$

ἀλλ' ὁ ἀριθμητὴς τοῦ β' μέλους ἰσοῦται πρὸς τὸ

$$(2m+\lambda)\beta_0 x^{m+\lambda-1}+\gamma_1 x^{m+\lambda-2}+\ldots,$$

ὅπου τὰ $\gamma_1, \ldots$ εἶναι σταθεροὶ συντελεσταί·
ἑπομένως ἡ ὁλοκλήρωσις τῆς (2) δίδει

$$x^m\sqrt{\Pi}=\frac{1}{2}\int\frac{(2m+\lambda)\beta_0 x^{m+\lambda-1}\,dx}{\sqrt{\Pi}}+\frac{1}{2}\int\frac{\gamma_1 x^{m+\lambda-2}\,dx}{\sqrt{\Pi}}+\ldots$$

ἢ καί, $$x^m\sqrt{\Pi}=\frac{1}{2}(2m+\lambda)\beta_0 I_{m+\lambda-1}+\frac{1}{2}\gamma_1 I_{m+\lambda-2}+\ldots \qquad (3)$$

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (3) θέσω $m=0$ προκύπτει τύπος, δι' οὗ δύναμαι νὰ ἐκφράσω τὸ $I_{\lambda-1}$ διὰ τῶν
$$I_0, I_1, \ldots I_{\lambda-2}.$$
Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (3) θέσω $m=1$ προκύπτει τύπος, δι' οὗ δύναμαι νὰ ἐκφράσω τὸ I_λ διὰ τῶν $I_0, I_1, \ldots I_{\lambda-1}$· ἀλλὰ τὸ $I_{\lambda-1}$ ἐκφράζεται διὰ τῶν $I_0, I_1, \ldots I_{\lambda-2}$· ἑπομένως καὶ τὸ I_λ ἐκφράζεται διὰ τῶν $I_0, I_1, \ldots I_{\lambda-2}$· ὁμοίως, ἐὰν θέσω εἰς τὸν (3) $m=2$, ἐκφράζω τὸ $I_{\lambda+1}$ διὰ τῶν $I_0, \ldots I_{\lambda-2}$ κ.ο.κ.

37. ***Ἀναγωγὴ τῶν ὁλοκληρωμάτων*** K_ρ. Διακρίνω ἐνταῦθα δύο περιπτώσεις.

α') Τὰ πολυώνυμα X καὶ Π εἶναι πρῶτα πρὸς ἄλληλα.

Τότε ἐπειδὴ τὰ X καὶ X' εἶναι πρῶτα πρὸς ἄλληλα θὰ ἔχω ὅτι καὶ τὰ πολυώνυμα X^ρ καὶ $X'\Pi$ θὰ εἶναι πρῶτα πρὸς ἄλληλα· ὅθεν (§ 18) θὰ εὑρίσκονται δύο ἀκέραια πολυώνυμα α καὶ β τοιαῦτα, ὥστε

X = (x-a)(x-b)(x-c) . . . (x-u)

$$\alpha X^{\varrho}+\beta X'\Pi=\Lambda$$ ὅθεν

$$K_{\varrho}=\int\frac{\alpha dx}{\sqrt{\Pi}}+\int\frac{\beta X'\sqrt{\Pi}}{X^{\varrho}}dx. \qquad (4)$$

Επειδὴ τὸ α εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x, ὁ πρῶτος προσθετέος τοῦ δευτέρου μέλους τοῦ (4) εἶναι ἄθροισμα ὅρων, ὧν ἕκαστος εἶναι γινόμενον σταθεροῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ ὁλοκλήρωμά τι I_m.

Ὡς πρὸς τὸν δεύτερον προσθετέον παρατηρῶ ὅτι τὸ

$$\frac{X'}{X^{\varrho}}dx \text{ εἶναι διαφορικὸν τοῦ } \frac{X^{-\varrho+1}}{1-\varrho}. \qquad (\varrho \neq 1).$$

ὁλοκληρῶ κατὰ παράγοντας καὶ λαμβάνω

$$\int\frac{\beta X'\sqrt{\Pi}}{X^{\varrho}}dx=\frac{-\beta\sqrt{\Pi}}{(\varrho-1)X^{\varrho-1}}+\frac{1}{\varrho-1}\int\frac{2\beta'\Pi+\beta\Pi'}{2X^{\varrho-1}\sqrt{\Pi}}dx. \qquad (5)$$

Τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ α′ μέλους γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\int\frac{\beta X'\Pi}{X^{\varrho}\sqrt{\Pi}}dx,$$

ὅθεν τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο εἶναι τῆς αὐτῆς μορφῆς μὲ τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ β′ μέλους μὲ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι οἱ ἐκθέται τοῦ X εἰς τὰ δύο ὁλοκληρώματα διαφέρουν κατὰ μονάδα· ὥστε ὁ τύπος (5) εἶναι τύπος ἀναγωγῆς· οὕτω δύναμαι, ἐὰν $\varrho>1$, νὰ φθάσω δι᾽ ἀναγωγῆς εἰς ὁλοκλήρωμα τῆς αὐτῆς μορφῆς μὲ ἐκθέτην τοῦ X τὴν μονάδα·

Ὥστε τελικῶς λαμβάνω

$$K_{\varrho}=\frac{\Lambda\sqrt{\Pi}}{X^{\varrho-1}}+\int\frac{Mdx}{\sqrt{\Pi}}+\int\frac{Ndx}{X\sqrt{\Pi}},$$

ὅπου τὰ Λ, M, N εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ x.

Εἶναι προφανὲς ὅτι δύναμαι πάντοτε νὰ θεωρήσω. ὅτι τὸ N εἶναι βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ X.

β′) Τὰ πολυώνυμα X καὶ Π δὲν εἶναι πρῶτα πρὸς ἄλληλα.

Ἔστω Δ ὁ μ.κ.δ. αὐτῶν καὶ $\frac{X}{\Delta}=Y$, $\frac{\Pi}{\Delta}=R$. Τότε τὰ Y καὶ R εἶναι πολυώνυμα πρῶτα πρὸς ἄλληλα· παρατηρῶ ἐπίσης, ὅτι ἐὰν τὰ Δ καὶ Y εἶχον κοινήν τινα ρίζαν αὕτη θὰ ἦτο τοὐλάχιστον διπλῆ ρίζα τοῦ X, διότι $X=\Delta Y$· ἀλλὰ τὸ X ἔχει μόνον ἁπλᾶς ρίζας· ἄρα τὰ Δ καὶ Y εἶναι πρῶτα πρὸς ἄλληλα· δι᾽ ὅμοιον λόγον καὶ τὰ Δ,R εἶναι πρῶτα πρὸς ἄλληλα. Ἀφοῦ τὰ Δ^ρ καὶ Y^ρ εἶναι πρῶτα πρὸς ἄλληλα δύναμαι νὰ εὕρω (§ 18) δύο πολυώνυμα α καὶ β τοιαῦτα, ὥστε

$$\alpha\Delta^\rho+\beta Y^\rho=A$$ ὅθεν

$$K_\rho=\int\frac{\alpha\,dx}{Y^\rho\sqrt{\Pi}}+\int\frac{\beta\,dx}{\Delta^\rho\sqrt{\Pi}} \tag{6}$$

Ἐπειδὴ τὸ Y εἶναι πρῶτον πρὸς τὸ Δ καὶ πρῶτον πρὸς τὸ R θὰ εἶναι πρῶτον καὶ πρὸς τὸ Δ . R ἤτοι πρὸς τὸ Π· ἄρα ὁ πρῶτος προσθετέος τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (6) εἶναι ὁλοκλήρωμα ὅμοιον πρὸς τὸ μελετηθὲν εἰς τὴν α′ περίπτωσιν· διὰ τὸν δεύτερον προσθετέον θὰ δείξω, ὅτι ***οὗτος ἐκφράζεται διὰ τῶν ὁλοκληρωμάτων***

$$I_0, I_1, \ldots I_{\lambda-2}.$$

Πρὸς τοῦτο παρατηρῶ, ὅτι τὸ Δ ἔχει ρίζας μόνον ἁπλᾶς (διότι καὶ τὸ X, τοῦ ὁποίου εἶναι διαιρέτης ὁ Δ, ἔχει ρίζας ἁπλᾶς)· ἑπομένως τὸ Δ εἶναι πρῶτον πρὸς τὸ Δ′· εἶναι ἀφ᾽ ἑτέρου πρῶτον καὶ πρὸς τὸ R, ἄρα θὰ εἶναι πρῶτον καὶ πρὸς τὸ Δ′R· ἑπομένως καὶ τὸ Δ^ρ θὰ εἶναι πρῶτον πρὸς τὸ Δ′R. Εὑρίσκονται ἑπομένως (§ 18) δύο πολυώνυμα γ καὶ δ τοιαῦτα, ὥστε $\gamma\Delta^\rho+\delta\Delta' R=\beta$· ὅθεν

$$\int\frac{\beta dx}{\Delta^\rho\sqrt{\Pi}}=\int\frac{\gamma dx}{\sqrt{\Pi}}+\int\frac{\delta\Delta' R}{\Delta^\rho\sqrt{\Pi}}dx \tag{7}$$

Ἐπειδὴ $\Pi=\Delta R$ θὰ ἔχω

$\sqrt{\Pi}=\sqrt{\Delta}\sqrt{R}$
$\Delta^\rho\sqrt{\Pi}=\Delta^{\rho+\frac{1}{2}}\sqrt{R}$

$$\Delta^{\rho}\sqrt{\Pi}=\Delta^{\rho+\frac{1}{2}}\sqrt{R}$$

καὶ ἐπομένως ὁ δεύτερος προσθετέος τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (7) γράφεται, ἐὰν θέσω $\rho+\frac{1}{2}=\tau$,

$$\int\delta\sqrt{R}\,\frac{\Delta'}{\Delta^{\tau}}dx, \qquad (8)$$

Παρατηρῶν ἤδη ὅτι $\frac{\Delta'}{\Delta^{\tau}}\,dx = d\left(\frac{1}{1-\tau}\,\frac{1}{\Delta^{\tau-1}}\right)$, ὁλοκληρόνω κατὰ παράγοντας τὸ (8) καὶ ἀντικαθιστῶ εἰς τὸν (7) ἀφοῦ λάβω ὑπ' ὄψιν ὅτι $\tau=\rho+\frac{1}{2}$ καὶ $R\Delta=\Pi$· θὰ προκύψῃ τότε ὁ τύπος

$$\int\frac{\beta dx}{\Delta^{\rho}\sqrt{\Pi}}=\int\frac{\gamma\, dx}{\sqrt{\Pi}}+\frac{\delta\sqrt{R}}{(1-\tau)\Delta^{\tau-1}}-\frac{1}{2(1-\tau)}\int\frac{2\delta' R+\delta R'}{\Delta^{\rho-1}\sqrt{\Pi}}. \qquad (9)$$

Ἀλλὰ τὸ δεύτερον ὁλοκλήρωμα τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (9) εἶναι τῆς αὐτῆς μορφῆς μὲ τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ πρώτου μέλους καὶ ἔχει ὡς ἐκθέτην τοῦ Δ τὸ $\rho-1$· ὅθεν ὁ τύπος (9) εἶναι τύπος ἀναγωγῆς καὶ διὰ τῆς ἀλλεπαλλήλου ἐφαρμογῆς αὐτοῦ δύναμαι νὰ φθάσω εἰς ὁλοκλήρωμα τῆς αὐτῆς μορφῆς, ὅπου ὁ παρονομαστὴς (τοῦ ὑπὸ τὸ ὁλοκλήρωμα κλάσματος) νὰ εἶναι $\sqrt{\Pi}$· ἀφ' ἑτέρου

$$\frac{\sqrt{R}}{\Delta^{\tau-1}}=\frac{\sqrt{\Pi}}{\Delta^{\rho}},$$

ὅθεν τελικῶς προκύπτει

$$\int\frac{\beta dx}{\Delta^{\rho}\sqrt{\Pi}}=\frac{H\sqrt{\Pi}}{\Delta^{\rho}}+\int\frac{T dx}{\sqrt{\Pi}},$$

ὅπου τὰ H καὶ T εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ x· ἀλλὰ τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ δευτέρου μέλους συμφώνως πρὸς τὰ προηγούμενα ἐκφράζεται διὰ τῶν $Y_0, Y_1 \ldots Y_{\lambda-2}$· ἐπομένως οὕτω ἐκφράζεται καὶ τὸ πρῶτον ὁλοκλήρωμα.

Φθάνω λοιπὸν εἰς τὸ ἑξῆς συμπέρασμα :

38. ***Πᾶν ὁλοκλήρωμα τῆς μορφῆς (1) ἀνάγεται εἰς ἄθροισμα ὁλοκληρωμάτων τῆς μορφῆς***

$$I_m = \int \frac{x^m dx}{\sqrt{\Pi}} \qquad (10)$$

καὶ τῆς μορφῆς

$$\int \frac{Y dx}{X\sqrt{\Pi}}, \qquad (11)$$

ὅπου τὸ m ***δὲν ὑπερβαίνει τὸ $\lambda-2$, τὸ Y εἶναι βαθμοῦ μικροτέρου ἢ τὸ X, τὸ δὲ X ἔχει μόνον ἁπλᾶς ῥίζας καὶ εἶναι πρῶτον πρὸς τὸ Π· ἀρκοῦσι δὲ διὰ τὴν ἀναγωγὴν ταύτην μόνον προσθέσεις, πολλαπλασιασμοὶ καὶ διαιρέσεις πολυωνύμων.***

Ἔστωσαν γνωσταὶ αἱ ῥίζαι τοῦ X· τότε τὸ $\frac{Y}{X}$ (§ 3.8) ἀναλύεται εἰς ἁπλᾶ κλάσματα τῆς μορφῆς $\frac{A}{x-\varrho}$ (τὸ ϱ δυνατὸν νὰ εἶναι καὶ φανταστικὴ ῥίζα τοῦ X)· ἐπομένως τὰ ὁλοκληρώματα (11) ἀνάγονται εἰς ὁλοκληρώματα τῆς μορφῆς

$$J_1 = \int \frac{dx}{(x-\varrho)\sqrt{\Pi}}. \qquad (12)$$

Δύναμαι ἐπομένως νὰ θεωρήσω, ὅτι τὰ ὑπερελλειπτικὰ ὁλοκληρώματα (ὅπως ἐπίσης καὶ τὰ ἐλλειπτικὰ) τὰ ἐξαρτώμενα ἀπὸ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀκεραίου πολυωνύμου βαθμοῦ λ, ἀνάγονται εἰς $\lambda-1$ ὁλοκληρώματα $I_0, I_1, I_2, \ldots I_{\lambda-2}$ καὶ εἰς ὁλοκληρώματα τῆς μορφῆς

(12), ὅπου τὸ ϱ δὲν εἶναι ϱίζα τοῦ Π. ([1]).

Ἐὰν τυχὸν συμβῇ κατόπιν ἀναγωγῶν νὰ πϱοκύπτῃ τελικὸν ἐξαγόμενον μὴ πεϱιέχον τὰ I_m καὶ J_1, τότε τὸ ὁλοκλήϱωμα (1) θὰ ἐκφϱάζεται μὲ στοιχειώδεις συναϱτήσεις καὶ θὰ λέγεται ***ψευδοϋπεϱελλειπτικὸν*** ($\lambda>4$) ***ἢ ψευδοελλειπτικὸν*** ὁλοκλήϱωμα.

39. ***Ἀναγωγὴ τοῦ Π δι' ἀλλαγῆς τῆς ἀνεξαϱτήτου μεταβλητῆς.*** Ἂς ζητήσω νὰ μετασχηματίσω τὸ ὁλοκλήϱωμα (1) εἰς ἄλλο ἁπλούστεϱον· φυσικὸν εἶναι νὰ ζητηθῇ μήπως ἐπέϱχεται ἁπλοποίησις μὲ τὸν ἁπλούστεϱον τῶν μετασχηματισμῶν δηλ. τὸν ὁμογϱαφικόν· ἤτοι θέτω

$$x=\frac{\alpha y+\beta}{\gamma y+\delta} \tag{13}$$

ὁπότε
$$dx=(\alpha\delta-\beta\gamma)\frac{dy}{(\gamma y+\delta)^2}.$$

Παϱατηϱῶ ὅτι τότε τὸ πολυώνυμον Π, τοῦ ὁποίου ὁ βαθμὸς ὑπετέθη λ, μετασχηματίζεται εἰς τὸ κλάσμα

$$\frac{T(\alpha,\beta,\gamma,\delta,y)}{(\gamma y+\delta)^{\lambda}},$$

ὅπου τὸ T εἶναι ἀκέϱαιον πολυώνυμον ὡς πϱὸς y βαθμοῦ λ, ἔχον συντελεστὰς ἐξαϱτωμένους ἐκ τῶν α, β, γ, δ καὶ τῶν συντελεστῶν τοῦ

([1]) Δύναμαι, ἐννοεῖται, ἐὰν τὸ X ἔχῃ φανταστικὰς ϱίζας, ἵνα ἀποφύγω τὴν παϱουσίαν τῶν φανταστικῶν, νὰ ἀναλύσω τὸ $\frac{Y}{X}$ εἰς ἄθϱοισμα κλασμάτων τῆς μοϱφῆς $\frac{A}{x-\varrho}$ καὶ $\frac{Bx+\Gamma}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$, ὅπου τὰ ϱ, α, β, Α, Β, Γ νὰ εἶναι πϱαγματικοὶ ἀϱιθμοὶ καὶ νὰ ἔχω τότε ἀφ' ἑνὸς ὁλοκληϱώματα τῆς μοϱφῆς (12), ὅπου ϱ μόνον πϱαγματικοὶ καὶ ἀφ' ἑτέϱου ὁλοκληϱώματα τῆς μοϱφῆς

$$\int\frac{(Bx+\Gamma)dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]\sqrt{\Pi}}$$

Π. Εἶναι προφανές, ὅτι εἰς τὰς λ ρίζας τοῦ Π ἀντιστοιχοῦσι λ ρίζαι τοῦ Τ· πρόκειται δὲ νὰ προσδιορίσω τὰ α, β, γ, δ οὕτως, ὥστε τὸ μετεσχηματισμένον ὁλοκλήρωμα νὰ εἶναι ἁπλούστερον τοῦ δοθέντος.

Ἔστω πρῶτον, ὅτι τὸ Π εἶναι ἀρτίου βαθμοῦ· δηλ. $\lambda=2\nu$· τότε

$$\sqrt{\Pi}=\frac{\sqrt{T}}{(\gamma y+\delta)^{\nu}}.$$

καὶ δύναμαι νὰ προσδιορίσω τὰ α, β, γ, δ οὕτως, ὥστε τὸ Τ νὰ εἶναι βαθμοῦ $2\nu-1$· ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο ὁ συντελεστὴς τοῦ $y^{2\nu}$ νὰ γίνῃ μηδέν· δηλ. μία τῶν μετεσχηματισμένων ριζῶν νὰ γίνῃ ∞· ἤτοι ὁ μετασχηματισμὸς (13) νὰ εἶναι τοιοῦτος, ὥστε εἰς μίαν ρίζαν τοῦ Π νὰ ἀντιστοιχῇ τὸ ∞ διὰ τὸ y. Π. χ. ἔστω ρ μία ρίζα τοῦ Π· θέλω νὰ εἶναι τοιοῦτος ὁ μετασχηματισμὸς (13), ὥστε διὰ $x=\rho$ νὰ ἔχω $y=\infty$· πρὸς τοῦτο γράφω τὸν (13) ὡς ἑξῆς :

$$y=\frac{\beta-\delta x}{\gamma x-\alpha}$$

καὶ παρατηρῶ, ὅτι ἀρκεῖ νὰ ἔχω $\gamma\rho-\alpha=0$ καὶ $\beta-\delta\rho\neq 0$· ἀρκεῖ ἑπομένως νὰ λάβω $\gamma=1$, $\alpha=\rho$, $\beta=1$, $\delta=0$· ἤτοι νὰ θεωρήσω ὡς τύπον μετασχηματισμοῦ τὸν ἑξῆς :

$$x=\frac{\rho y+1}{y} = \rho+\frac{1}{y} \tag{14}$$

ὥστε, *ὅταν τὸ Π εἶναι ἀρτίου βαθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ μετασχηματίσω τὸ ὁλοκλήρωμα (1) διὰ τοῦ τύπου (14), ἵνα λάβω ὁλοκλήρωμα τῆς αὐτῆς μορφῆς μὲ ἐκθέτην τοῦ ὑπορρίζου κατὰ μονάδα μικρότερον.*

40.—Ἔστω ἤδη ὅτι τὸ Π εἶναι περιττοῦ βαθμοῦ ($\lambda=2\nu-1$)· φαίνεται ἀμέσως ἐκ τῶν προηγουμένων, ὅτι ὑπάρχει μετασχηματισμὸς (13) δι᾿ οὗ λαμβάνω μετεσχηματισμένον ὁλοκλήρωμα μὲ ὑπόρριζον βαθμοῦ κατὰ μονάδα μεγαλυτέρου δηλ. 2ν· ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ θεωρήσω τὸ δοθὲν πολυώνυμον Π ὡς πολυώνυμον βαθμοῦ 2ν μὲ μίαν ρίζαν τὸ ∞ καὶ νὰ ἐκλέξω τὰ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ οὕτως, ὥστε διὰ $x=\infty$ νὰ ἔχω $y=r$, ὅπου r νὰ εἶναι τυχὼν δοθεὶς ἀριθμὸς πεπερασμένος, ὅστις θὰ χρησιμεύσῃ ὡς μία ρίζα τοῦ πολυωνύμου εἰς ὃ μετασχηματίζεται τὸ Π· δηλ. θέλω νὰ ἔχω

$$\gamma r+\delta=o, \quad \alpha r+\beta \neq o.$$

$x = \frac{\alpha y+\beta}{\gamma y+\delta}$

Π. χ. ἐὰν λάβω $r=o$, προκύπτει ὅτι ἀρκεῖ νὰ ἔχω

$$\delta=o, \quad \beta \text{ διάφορον τοῦ μηδενὸς}$$

ὁπότε ὁ μετασχηματισμὸς (13) γίνεται

$$x=\frac{\alpha y+\beta}{\gamma y} \tag{13'}$$

καὶ ἐὰν θέσω $\beta=1, \gamma=1,$ γίνεται

$$x=\alpha+\frac{1}{y}. \tag{15}$$

$x = \alpha + \frac{1}{y}$ $\frac{1}{y} = 0$

(Τὸ α πρέπει νὰ μὴ εἶναι ρίζα τοῦ Π, διότι ἄλλως εἰς τὴν ρίζαν α τοῦ Π θὰ ἀντεστοίχει ρίζα τοῦ μετεσχηματισμένου ἴση πρὸς τὸ ∞).

Ὥστε ἐὰν τὸ Π εἶναι περιττοῦ βαθμοῦ δύναμαι διὰ τοῦ τύ που (15) νὰ μετασχηματίσω τὸ (1) εἰς ἄλλο τῆς αὐτῆς μορφῆς μὲ βαθμὸν τοῦ ὑπορρίζου ηὐξημένον κατὰ μονάδα.

Παρατηρῶ ὅτι οἱ τύποι (14) καὶ (15) εἶναι οἱ αὐτοί, μὲ μόνην τὴν διαφοράν, ὅτι εἰς τὸν τύπον (14) τὸ ρ εἶναι ρίζα τοῦ Π, ἐνῷ εἰς τὸν τύπον (15) τὸ α δὲν εἶναι ρίζα τοῦ Π.

41. Αἱ δύο προηγούμεναι προτάσεις (§ 39, 40) ἠδύναντο καὶ ἀπ᾽ εὐθείας ν᾽ ἀποδειχθῶσι. Π. χ. ἵνα ἀποδείξω, ὅτι ὁ μετασχηματισμὸς (15) ἀναβιβάζει τὸν βαθμὸν τοῦ ὑπορρίζου κατὰ μονάδα, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσω, ὅτι

$$\Pi\left(\alpha+\frac{1}{y}\right)=\Pi(\alpha)+\Pi'(\alpha).\frac{1}{y}+\ldots+$$

$$+\frac{\Pi^{2\nu-1}(\alpha)}{\underline{|2\nu-1}}\;\frac{1}{y^{2\nu-1}}=\frac{\Pi_1(y)}{y^{2\nu}},$$

ὅπου τὸ $\Pi_1(y)$ εἶναι βαθμοῦ 2ν· καὶ ἐπομένως

$$\sqrt{\Pi}=\frac{\sqrt{\Pi_1}}{y^{\nu}}.$$

ὅθεν καὶ πᾶν ὁλοκλήρωμα ρητῆς συναρτήσεως τῶν x καὶ $\sqrt{\Pi}$ μετασχηματίζεται εἰς ὁλοκλήρωμα ρητῆς συναρτήσεως τῶν x καὶ $\sqrt{\Pi_1}$.

42. ***Ἐλλειπτικὰ ὁλοκληρώματα.***—Ἂς θεωρήσω ἤδη τὴν μερικὴν περίπτωσιν, καθ᾽ ἣν $\lambda=4$· κατὰ τὰ ἀνωτέρω (§ 39,40) πᾶν τοιοῦτον ἐλλειπτικὸν ὁλοκλήρωμα μετασχηματίζεται εἰς ἄλλο, ἐν ᾧ τὸ ὑπόρριζον εἶναι τρίτου βαθμοῦ· ἤτοι μετασχηματίζεται εἰς ὁλοκλήρωμα ἐκφραζόμενον (§ 38) διὰ τῶν τριῶν νέων συναρτήσεων

$$I_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{\Pi}}, \quad I_1 = \int \frac{xdx}{\sqrt{\Pi}}, \quad J_1 = \int \frac{dx}{(x-\varrho)\sqrt{\Pi}}.$$

Ἐξ αὐτῶν τὸ I_0 καλεῖται ***ἐλλειπτικὸν ὁλοκλήρωμα τοῦ πρώτου εἴδους***, τὸ I_1 ***τοῦ δευτέρου εἴδους*** καὶ τὸ J_1 ***τοῦ τρίτου εἴδους***.

43.—Ἔστω $\Pi = \alpha_0 x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3$· ἐὰν θέσω $x = y + \delta$ ὁ συντελεστὴς τοῦ y^2 (εἰς τὸ μετεσχηματισμένον) θὰ εἶναι $3\alpha_0\delta + \alpha_1$· ἑπομένως ἐὰν ὡς δ λάβω τὸ $-\dfrac{\alpha_1}{3\alpha_0}$ θὰ προκύψῃ ὡς μετεσχηματισμένον τοῦ Π πολυώνυμον τῆς μορφῆς $\beta_0 y^3 + \beta_2 y + \beta_3$, τὸ ὁποῖον γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\frac{\beta_0}{4}\left(4y^3 - g_2 y - g_3\right)\cdot$$

ἀρκεῖ προφανῶς πρὸς τοῦτο νὰ θέσω

$$\frac{4\beta_2}{\beta_0} = -g_2, \quad \frac{4\beta_3}{\beta_0} = -g_3.$$

Κατὰ ταῦτα τὸ I_0 ἀνάγεται εἰς τὴν κανονικὴν ***μορφὴν τοῦ Weierstrass***

$$\int \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}. \tag{16}$$

44. ***Μετασχηματισμὸς δίδων εἰς τὸ ὑπόρριζον διτετράγωνον μορφήν.*** Δύναμαι νὰ προσδιορίσω τὰ α, β, γ, δ τοῦ ὁμογραφικοῦ μετασχηματισμοῦ (13) οὕτως, ὥστε δοθὲν ἐλλειπτικὸν ὁλοκλήρωμα ἔχον ὡς ὑπόρριζον πολυώνυμον τετάρτου βαθμοῦ νὰ μετασχηματισθῇ

εἰς ἄλλο ἐλλειπτικὸν ὁλοκλήρωμα ἔχον ὡς ὑπόρριζον πολυώνυμον διτετραγώνου μορφῆς.

Παρατηρῶ πρῶτον, ὅτι ὁ μετασχηματισμὸς (13) μετασχηματίζει τὸ Π εἰς ρητὴν συνάρτησιν τῆς μορφῆς

$$\frac{T}{(\gamma y+\delta)^4},$$

ὅπου τὸ T εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον τετάρτου βαθμοῦ· καὶ ὅτι

$$dx=(\alpha\delta-\beta\gamma)\frac{dy}{(\gamma y+\delta)^2}\cdot$$

ὅθεν εἰς τὸ μετεσχηματισμένον ὁλοκλήρωμα θὰ παρουσιάζεται ὡς ριζικὸν τὸ $\sqrt{T}$.

Ζητῶ ἤδη τὸ Γ νὰ ἔχῃ ρίζας r_1, r_2, r_3, r_4 τοιαύτας, ὥστε

$$r_1+r_2+r_3+r_4=0,$$

$S_m=(-1)^m\frac{A_m}{A_0}$

$S_m=$

$$r_1\,r_3\,r_4+r_2\,r_3\,r_4+r_3\,r_1\,r_2+r_4\,r_1\,r_2=0$$

$r_3r_4(r_1+r_2)+r_1r_2(r_3+r_4)=0$

(διότι τότε θὰ ἰσοῦνται πρὸς τὸ μηδὲν οἱ συντελεσταὶ τῶν y^3 καὶ y)· ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο προφανῶς νὰ ἔχω

$$r_1+r_2=0,\qquad r_3+r_4=0\cdot \tag{17}$$

ἀλλ' ἐὰν καλέσω ϱ_i $(i=1,2,3,4)$ τὰς ρίζας τοῦ Π, θὰ ἔχω

$$\varrho_i=\frac{\alpha r_i+\beta}{\gamma r_i+\delta}\quad\text{ἢ καὶ}\quad r_i=\frac{\beta-\delta\varrho_i}{\gamma\varrho_i-\alpha} \tag{18}$$

ὅθεν, ἐὰν θέσω $\frac{\beta}{\delta}=\lambda$, $\frac{\alpha}{\gamma}=\mu$, αἱ συνθῆκαι (17) γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς : [1]

$$\frac{\varrho_1-\lambda}{\varrho_1-\mu}+\frac{\varrho_2-\lambda}{\varrho_2-\mu}=0,\qquad \frac{\varrho_3-\lambda}{\varrho_3-\mu}+\frac{\varrho_4-\lambda}{\varrho_4-\mu}=0 \qquad (17')$$

ἢ καὶ

$$\begin{aligned} &2\lambda\mu-(\varrho_1+\varrho_2)(\lambda+\mu)+2\varrho_1\varrho_2=0 \\ &2\lambda\mu-(\varrho_3+\varrho_4)(\lambda+\mu)+2\varrho_3\varrho_4=0 \end{aligned} \qquad (19)$$

ὅθεν τὰ ζητούμενα λ καὶ μ θὰ εἶναι ῥίζαι τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως

$$A\omega^2+2B\omega+\Gamma=0, \qquad (20)$$

ὅπου

$$A=\varrho_1+\varrho_2-\varrho_3-\varrho_4,\quad B=\varrho_3\varrho_4-\varrho_1\varrho_2,\quad \Gamma=\varrho_1\varrho_2(\varrho_3+\varrho_4)-\varrho_3\varrho_4(\varrho_1+\varrho_2).$$

Ἵνα δὲ τὰ λ καὶ μ εἶναι ***διάφορα*** καὶ ***πραγματικὰ*** πρέπει καὶ ἀρκεῖ $B^2-A\Gamma>0$, ἤ, ὅπως εὐκόλως φαίνεται,

$$(\varrho_1-\varrho_3)(\varrho_1-\varrho_4)(\varrho_2-\varrho_3)(\varrho_2-\varrho_4)>0. \qquad (21)$$

Ὥστε ὅταν πληροῦται ἡ συνθήκη (21) εὑρίσκεται μετασχηματι-

---

[1] Σημ. Ἠδυνάμην νὰ εὕρω τὰς (17′) καὶ ἐὰν παρετήρουν, ὅτι διὰ νὰ εἶναι $r_1+r_2=0$ πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὰ r_1 καὶ r_2 νὰ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς $y=0$· τουτέστι νὰ σχηματίζωσιν ἁρμονικὴν διαίρεσιν μὲ τὰ $y=0$ καὶ $y=\infty$· ἀλλ' εἰς τὰ r_1, 0, r_2, ∞ ἀντιστοιχοῦσι διὰ τὸ **x**, δυνάμει τοῦ μετασχηματισμοῦ (13) τὰ ϱ_1, λ, ϱ_2, μ· ἐπομένως καὶ ταῦτα θὰ σχηματίζουν (ἐπὶ τῆς εὐθείας ἐφ' ἧς κινεῖται τὸ x) ἁρμονικὴν διαίρεσιν (διότι ὁ μετασχηματισμὸς (13) εἶναι ὁμογραφικὸς) καὶ ἀντιστρόφως· ὅθεν ἔχω τὴν πρώτην ἰσότητα τῶν (17′)· τὰ αὐτὰ δύναμαι προφανῶς νὰ εἴπω καὶ διὰ τὰ r_3, r_4.

σμὸς (13) δι' οὗ προκύπτει ὡς Τ πολυώνυμον διτετραγώνου μορφῆς· ἀλλὰ δύναμαι πάντοτε, οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον Π, ν' ἀντικαταστήσω τὰ ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 μὲ τὰς τέσσαρας ῥίζας τοῦ Π κατὰ τρόπον, ὥστε νὰ πληροῦται ἡ (21).

Καὶ τῷ ὄντι, ἐὰν αἱ τέσσαρες ῥίζαι τοῦ Π εἶναι πραγματικαί, ἀρκεῖ νὰ λάβω ὡς ϱ_1 τὴν μικροτέραν, ὡς ϱ_2 τὴν ἀμέσως ἑπομένην κατὰ τάξιν μεγέθους κ.ο.κ. οὕτως, ὥστε $\varrho_1<\varrho_2<\varrho_3<\varrho_4$, ὁπότε προφανῶς πληροῦται ἡ (21), διότι θὰ εἶναι οἱ τέσσαρες παράγοντες τοῦ πρώτου μέλους ἀρνητικοί. (¹) Ἐὰν αἱ δύο μόνον ῥίζαι τοῦ Π εἶναι πραγματικαὶ λαμβάνω αὐτὰς ὡς ϱ_1, ϱ_2· τότε αἱ ϱ_3, ϱ_4 θὰ εἶναι συζυγεῖς φανταστικαί· ἑπομένως καὶ οἱ $\varrho_1-\varrho_3$, $\varrho_1-\varrho_4$ θὰ εἶναι συζυγεῖς, ὅπως ἐπίσης καὶ οἱ $\varrho_2-\varrho_3$, $\varrho_2-\varrho_4$· ἀλλὰ τὸ γινόμενον δύο συζυγῶν εἶναι θετικὸς πραγματικός· ὅθεν πληροῦται ἡ (21). Ἐάν, τέλος, καὶ αἱ τέσσαρες ῥίζαι τοῦ Π εἶναι φανταστικαὶ θὰ εἶναι ἀνὰ δύο συζυγεῖς· λαμβάνω τότε ὡς ϱ_1, ϱ_2 δύο συζυγεῖς καὶ ὡς ϱ_3, ϱ_4 τὰς ἐπιλοίπους δύο συζυγεῖς· θὰ εἶναι πάλιν οἱ παράγοντες $\varrho_1-\varrho_3$, $\varrho_2-\varrho_4$ συζυγεῖς καὶ ἑπομένως τὸ γινόμενον αὐτῶν θὰ εἶναι θετικὸς πραγματικός, ὅπως ἐπίσης καὶ τὸ γινόμενον $(\varrho_2-\varrho_3)$ $(\varrho_1-\varrho_4)$ θὰ εἶναι θετικόν· οὕτω δὲ πάλιν θὰ πληροῦται ἡ (21).

Ὥστε οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὸ Π(²) εὑρίσκονται δύο πραγματικοὶ ἀριθμοὶ λ,μ καὶ ἑπομένως πραγματικοὶ ἀριθμοὶ α,β,γ,δ τοιοῦτοι, ὥστε διὰ τοῦ τύπου (13) νὰ προκύπτῃ πολυώνυμον Τ ἔχον διτετράγωνον μορφήν· δηλ. ἀφοῦ εὑρεθῶσι τὰ λ καὶ μ ἐκ τῆς ἐξισώσεως (20) προσδιορίζω τὰ α,β,γ,δ οὕτως, ὥστε

$$\frac{\beta}{\delta}=\lambda,\ \frac{\alpha}{\gamma}=\mu$$

ὁπότε ὁ μετασχηματισμὸς (13) θὰ εἶναι ὁ ζητούμενος· π. χ. ἂν λάβω

(¹) Ἠδυνάμην ἐπίσης νὰ λάβω ὡς ϱ_1 καὶ ϱ_2 τὰς δύο μεγαλυτέρας, ὁπότε καὶ οἱ τέσσαρες παράγοντες τοῦ πρώτου μέλους θὰ ἦσαν θετικοί.

(²) Ἐννοεῖται ὅτι δὲν ἔχει ἴσας ῥίζας τὸ Π διότι καὶ δύο μόνον ῥίζας ἐὰν εἶχεν ἴσας θὰ ἐλάμβανε τὸ $\sqrt{\Pi}$ τὴν μορφὴν $(x-\varrho)\sqrt{\Pi_1}$, ὅπου Π_1 θὰ ἦτο δευτεροβάθμιον πολυώνυμον.

$$\delta = -1, \quad \gamma = 1, \quad \text{θὰ ἔχω} \quad \beta = -\lambda, \quad \alpha = \mu\cdot$$

ἤτοι ὁ μετασχηματισμὸς

$$x = \frac{\mu y - \lambda}{y - 1}$$

θὰ δίδῃ ὡς T πολυώνυμον διτετραγώνου μορφῆς· ἂν λάβω

$$\delta = 1, \quad \gamma = 1 \quad \text{θὰ ἔχω} \quad \beta = \lambda, \quad \alpha = \mu\cdot$$

ἤτοι ὁ μετασχηματισμὸς

$$x = \frac{\mu y + \lambda}{y + 1}$$

κατορθώνει τὸ αὐτό.

45. ***Παρατήρησις***. Ἵνα τὰ λ, μ ἔχωσι πεπερασμένας τιμὰς πρέπει $A \neq 0$.

Ἐὰν ὅμως $A = 0$, ἤτοι ἐὰν $\varrho_1 + \varrho_2 = \varrho_3 + \varrho_4$, ἡ μία τῶν ριζῶν τῆς (20) γίνεται ἄπειρος, ἡ δὲ ἄλλη ἰσοῦται πρὸς τὸ

$\Gamma = (\rho_1 + \rho_2)(\rho_1\rho_2 - \rho_3$

$$-\frac{\Gamma}{2B} = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}.$$

ἂν καλέσω αὐτὴν

$$\left(\text{δηλ. τὴν } \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}\right)$$

διὰ τοῦ λ θὰ εἶναι $\mu = \infty$.

[Ὅπως ἄλλως τε φαίνονται ταῦτα καὶ ἐκ τῶν συνθηκῶν (19), αἵτινες γράφονται

$$
\left.
\begin{aligned}
&2\lambda-(\varrho_1+\varrho_2)\left(\frac{\lambda}{\mu}+1\right)+\frac{2}{\mu}\varrho_1\varrho_2=0\\
&2\lambda-(\varrho_3+\varrho_4)\left(\frac{\lambda}{\mu}+1\right)+\frac{2}{\mu}\varrho_3\varrho_4=0
\end{aligned}
\right\} \qquad (22)
$$

Καὶ τῷ ὄντι ἔστω $\varrho_1+\varrho_2=\varrho_3+\varrho_4$· τότε εἶναι ἀδύνατον νὰ ἐπαληθεύωνται αἱ (22) μὲ πεπερασμένας τιμὰς τῶν λ,μ διότι ἄλλως θὰ ἦτο $\varrho_1\varrho_2=\varrho_3\varrho_4$, ὅπερ ἀντιβαίνει πρὸς τὴν ὑπόθεσιν, καθ' ἣν τὸ Π ἔχει μόνον ἁπλᾶς ῥίζας· ἐνῷ, ἐὰν λάβω $\frac{1}{\mu}=0$, (ἤτοι $\mu=\infty$) εὑρίσκεται πεπερασμένη τιμὴ τοῦ λ ἐπαληθεύουσα τὰς (22)].

Ἐντεῦθεν ἄγομαι εἰς τὸ νὰ ζητήσω ὁμογραφικὸν τύπον μετασχηματισμοῦ (13) τοιοῦτον, ὥστε

$$\frac{1}{\mu}=0, \qquad \lambda=\frac{\varrho_1+\varrho_2}{2}.$$

Παρατηρῶ πρὸς τοῦτο, ὅτι ἐκάλεσα μ τὸ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ἤτοι $\frac{1}{\mu}$ τὸ $\frac{\gamma}{\alpha}$· διὰ νὰ ἔχω λοιπὸν $\frac{1}{\mu}=0$ πρέπει νὰ ἔχω $\gamma=0$ (α πεπερασμένον)· ὁπότε ὁ τύπος μετασχηματισμοῦ (13) γίνεται

$$x=\frac{\alpha y+\beta}{\delta}, \qquad \text{ἤτοι :}$$

ὁ τύπος $\qquad x=ky+\lambda \qquad \left(\frac{\alpha}{\delta}=k\right) \qquad (23)$

διὰ πᾶσαν σταθερὰν τιμὴν τοῦ k μετασχηματίζει τὸ Π εἰς πολυώνυμον διτετραγώνου μορφῆς· οὕτω θέτων $k=1$ λαμβάνω ὡς τύπον μετασχηματισμοῦ τὸν

$$x=y+\lambda \qquad \left(\lambda=\frac{\varrho_1+\varrho_2}{2}\right) \qquad (24)$$

Καὶ ἀπ' εὐθείας ἠδυνάμην νὰ δείξω, ὅτι εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν ὁ (24) μετασχηματίζει τὸ Π εἰς ἄλλο πολυώνυμον διτετραγώνου μορφῆς. Καὶ τῷ ὄντι ἐκ τοῦ ὅτι

$$\lambda = \frac{\varrho_1+\varrho_2}{2} = \frac{\varrho_3+\varrho_4}{2} \qquad \text{ἐξάγω}$$

$$(\varrho_1-\lambda)+(\varrho_2-\lambda)=0, \qquad (\varrho_3-\lambda)+(\varrho_4-\lambda)=0 \qquad (25)$$

ἀφ' ἑτέρου ὁ τύπος (24) δίδει $r_i = \varrho_i - \lambda$ (r_i = ρίζα τοῦ μετεσχηματισμένου), ὅθεν

$$r_1+r_2+r_3+r_4=0, \qquad (\text{δυνάμει τῶν } (25))$$

ἤτοι ὁ συντελεστὴς τοῦ y^3 εἶναι 0· ὁμοίως ἔχω

$$r_1r_2r_3+r_1r_2r_4+r_3r_4r_1+r_3r_4r_2=r_1r_2(r_3+r_4)+r_3r_4(r_1+r_2)=0$$

(δυνάμει τῶν 25), ἤτοι ὁ συντελεστὴς τοῦ y εἶναι μηδέν.

46. Εὐκόλως ἤδη διακρίνω καὶ τὰ ἑξῆς: Ἵνα μετασχηματίσω ἐλλειπτικὸν ὁλοκλήρωμα, ἐν ᾧ τὸ ὑπόρριζον Π εἶναι πολυώνυμον τετάρτου βαθμοῦ εἰς ἄλλο ἐλλειπτικὸν μὲ ὑπόρριζον διτετραγώνου μορφῆς, ἀναλύω τὸ Π εἰς γινόμενον δύο δευτεροβαθμίων παραγόντων μὲ πραγματικοὺς συντελεστάς· ἤτοι τὸ θέτω ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\Pi=(\alpha_1x^2+2\beta_1x+\gamma_1)\,(\alpha_2x^2+2\beta_2x+\gamma_2) \qquad (26)$$

Τοῦτο εἶναι πάντοτε δυνατόν· ἐὰν τὸ Π ἔχῃ ρίζας φανταστικάς, προφανῶς αἱ συζυγεῖς φανταστικαὶ θὰ εἶναι ρίζαι τοῦ ἑνὸς παράγοντος· διὰ τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν πᾶσαι αἱ ρίζαι τοῦ Π εἶναι πραγματικαὶ ὑποθέτω, ὅτι ἡ ἀνάλυσις ἔγινεν οὕτως, ὥστε αἱ δύο μεγαλύτεραι νὰ εἶναι ρίζαι τοῦ ἑνὸς παράγοντος· π. χ. ἐὰν $\varrho_1<\varrho_2<\varrho_3<\varrho_4$ ὑποθέτω, ὅτι ἀνέλυσα τὸ Π οὕτως, ὥστε τὸ

$$\alpha_1x^2+2\beta_1x+\gamma_1 \text{ νὰ ἔχῃ ρίζας τὰ } \varrho_1, \varrho_2 \text{ ἢ τὰ } \varrho_3, \varrho_4.$$

Καλῶν δι᾽ ὅλας τὰς περιπτώσεις ϱ_1, ϱ_2 τὰς ῥίζας τοῦ πρώτου παράγοντος, ἔχω προφανῶς

$$\frac{\varrho_1+\varrho_2}{2}=-\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \quad \frac{\varrho_3+\varrho_4}{2}=-\frac{\beta_2}{\alpha_2}, \quad \varrho_1\varrho_2=\frac{\gamma_1}{\alpha_1}, \quad \varrho_3\varrho_4=\frac{\gamma_2}{\alpha_2}.$$

ἐπομένως αἱ συνθῆκαι (19) γράφονται

$$\begin{aligned} &\alpha_1\lambda\mu+\beta_1(\lambda+\mu)+\gamma_1=0 \\ &\alpha_2\lambda\mu+\beta_2(\lambda+\mu)+\gamma_2=0 \end{aligned} \tag{27}$$

καὶ τὰ προηγούμενα συμπεράσματα (§ 44,45) διατυποῦνται καὶ ὡς ἑξῆς.

1) Ἐὰν τὸ $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1$ εἶναι διάφορον τοῦ μηδενὸς ὁ μετασχηματισμὸς

$$x=\frac{\mu y+\lambda}{y+1},$$

ὅπου τὰ λ, μ ὁρίζονται ἐκ τῶν (27) θὰ δώσῃ ἐλλ. ὁλοκλήρωμα μὲ ὑπόρριζον διτετραγώνου μορφῆς.

2) Ἐὰν $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1=0$, ὁ μετασχηματισμὸς

$$x=y-\frac{\beta_1}{\alpha_1}$$

θὰ δώσῃ ἐλλ. ὁλοκλήρωμα μὲ ὑπόρριζον διτετραγώνου μορφῆς.

47. Ἐκ τῶν προηγουμένων λοιπὸν (§ 44, 45) συνάγεται, ὅτι πᾶν ἐλλειπτικὸν ὁλοκλήρωμα ἀνάγεται εἰς ὁλοκλήρωμα τῆς μορφῆς

$$\int\frac{F(y)}{\sqrt{T}}dy,$$

ὅπου F(y) εἶναι ῥητὴ συνάρτησις τοῦ y καὶ

$$T=A_0y^4+A_1y^2+A_2.$$

ἑπομένως ἀνάγεται τοῦτο εἰς τὰ ὁλοκληρώματα

$$\int \frac{dy}{\sqrt{T}}, \quad \int \frac{y\,dy}{\sqrt{T}}, \quad \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{T}}, \quad \int \frac{dy}{(y-\varrho)\sqrt{T}}, \qquad (28)$$

ἐξ ὧν ὅμως τὸ δεύτερον εἶναι ψευδοελλειπτικόν, διότι ἀνάγεται εἰς στοιχειῶδες διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ $y^2 = \omega$.

Τὸ ὁλοκλήρωμα

$$u = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{A_0 y^4 + A_1 y^2 + A_2}}$$

εἶναι τὸ ἐλλειπτικὸν ὁλοκλήρωμα τοῦ πρώτου εἴδους· ἐάν, ἀντιστρόφως, θεωρηθῇ τὸ y ὡς συνάρτησις τοῦ u, θὰ εἶναι τὸ y ***ἐλλειπτικὴ συνάρτησις τοῦ*** **u.** Τὸ τρίτον τῶν ὁλοκληρωμάτων (28) λέγεται καὶ ὁλοκλήρωμα τοῦ δευτέρου εἴδους τοῦ Legendre· ὡς πρὸς τὸ τέταρτον παρατηρῶ, ὅτι δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\int \frac{(y+\varrho)\,dy}{(y^2-\varrho^2)\sqrt{T}}$$

$$\int \frac{y\,dy}{(y^2-\varrho^2)\sqrt{T}} + \varrho \int \frac{dy}{(y^2-\varrho^2)\sqrt{T}}.$$

Ὁ πρῶτος προσθετέος εἶναι ψευδοελλειπτικὸν ὁλοκλήρωμα· τὸ β΄ ὁλοκλήρωμα τὸ ὁποῖον γράφεται καὶ

$$\int \frac{dy}{(y^2+\nu)\sqrt{T}}$$

λέγεται καὶ ὁλοκλήρωμα τοῦ τρίτου εἴδους τοῦ Legendre.

48. ***Κανονικὴ μορφὴ τοῦ*** Legendre. 1η περίπτωσις· τὸ T ἔχει πάσας του τὰς ρίζας πραγματικάς· δύναμαι τότε νὰ τὸ γράψω ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$T = A_0\,(m^2 - y^2)\,(n^2 - y^2), \quad \text{ὅπου } m > 0,\ n > 0 \text{ καὶ } m < n.$$

Θέτων ἤδη

$y = m\omega$ καὶ $\varepsilon = +1$ ἐὰν $A_0 > 0$, $\varepsilon = -1$ ἐὰν $A_0 < 0$,

λαμβάνω

$$\sqrt{T} = \sqrt{\varepsilon A_0}\,\sqrt{\varepsilon m^2 n^2 (1-\omega^2)(1-k^2\omega^2)}\cdot$$

ὅθεν προκύπτει ὁ κανονικὸς τύπος τοῦ Legendre, καθ' ὃν ἔχω ὑπόρριζον τὸ

$k = \frac{m}{n} < 1$

$$\varepsilon(1-\omega^2)(1-k^2\omega^2), \quad \text{ὅπου} \quad k < 1.$$

$m < n$

2α περίπτωσις· τὸ T ἔχει δύο ρίζας φανταστικὰς καὶ δύο πραγματικάς· δύναμαι τότε νὰ τὸ γράψω ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$A_0(y^2 - m^2)(y^2 + n^2).$$

ἐὰν $A_0 > 0$, θέτω $y^2 - m^2 = y^2\omega^2$ καὶ προκύπτει εὐκόλως, ὅτι

$$\frac{dy}{\sqrt{T}} = \frac{k}{n\sqrt{A_0}}\,\frac{d\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)(1-k^2\omega^2)}}\left(k^2 = \frac{n^2}{m^2+n^2} < 1\right).$$

Ἐὰν $A_0 < 0$, θέτω $y^2 - m^2 = -m^2\omega^2$, ὁπότε

$$\frac{dy}{\sqrt{T}} = \frac{-k}{m\sqrt{-A_0}}\,\frac{d\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)(1-k^2\omega^2)}}\left(k^2 = \frac{m^2}{m^2+n^2} < 1\right).$$

3η περίπτωσις. Τὸ T ἔχει πάσας τὰς ρίζας του φανταστικάς· ἤτοι

$$T = A_0(y^2 + m^2)(y^2 + n^2)$$

ἑπομένως, ἐὰν $A_0 < 0$ τὸ T θὰ εἶναι διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ y ἀρνητικόν· θέτων τότε $A_0 = -B_0$ ἔχω

$$\sqrt{T} = i\,\sqrt{B_0(y^2+m^2)(y^2+n^2)}$$

$y^2 - m^2 = y^2\omega^2$

Ἐὰν $A_0>0$ θέτω $y^2=\frac{m^2\omega^2}{1-\omega^2}$ (ὑποθέτω $m<n$) καὶ λαμβάνω

$$\frac{dy}{\sqrt{T}}=\frac{1}{n\sqrt{A_0}}\cdot\frac{d\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)(1-K^2\omega^2)}}\quad\left(K^2=\frac{n^2-m^2}{n^2}<1\right)$$

Ἀσκήσεις.

Ἔστω 1) ὁλοκλήρωμα τοῦ τύπου (4) (§ 34), ὅπου ὅμως τὸ Π νὰ εἶναι πολυώνυμον δευτέρου βαθμοῦ· νὰ ἐφαρμοσθῶσι θεωρίαι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἐκτεθείσας εἰς τὰς παραγράφους 37, 38.

2) $$I_0=\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}}.$$

Νὰ ἐφαρμοσθῇ ὁ ὁ μετασχηματισμὸς $x=y-\frac{\beta}{\alpha}$ (§ 45, 46).

Ἐὰν $\alpha>0$ εὑρίσκεται $$I_0=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\log\left(y+\sqrt{y^2+M}\right)$$

ἐὰν $\alpha<0$ εὑρίσκεται $I_0=\frac{1}{\sqrt{-\alpha}}$ τοξ ημ $\frac{y}{\sqrt{-M}}$ ὅπου $M=\frac{\alpha\gamma-\beta^2}{\alpha^2}$
(Παράβαλε § 25).

3) $$I_1=\int\frac{dx}{(x-\varrho)\sqrt{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}}.$$

Νὰ ἐφαρμοσθῇ θεωρία ἀνάλογος τῆς θεωρίας τῆς § 39· εὑρίσκεται ὁ σχετικὸς μετασχηματισμὸς τῆς § 25.

4) $$I=\int(\sqrt{x^2+\alpha})^3\,dx.$$

Νὰ ἐφαρμοσθῇ μέθοδος ἀναγωγῆς ἀνάλογος πρὸς τὴν μέθοδον τῶν § 36, 37. Παρατηρῶ ὅτι,

$$I=\int\frac{(x^2+\alpha)}{\sqrt{x^2+\alpha}}dx=I_4+2\alpha I_2+\alpha^2 I_0$$

καὶ ὅτι $\qquad (x^3\sqrt{x^3+\alpha}\,)' = \dfrac{3x^2(x^2+\alpha)+x^4}{\sqrt{x^2+\alpha}}$

ὅθεν $\quad 4I_4+3\alpha I_2=x^2\sqrt{x^2+\alpha}$. Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκω $2I_2+\alpha I_0=\sqrt{x^2+\alpha}$ καὶ λαμβάνω τελικῶς

$$4I=x^3\Pi+\frac{5}{2}\alpha x\Pi+\frac{3}{2}\alpha^2\log(x+\Pi)$$

$$4I=x^3\sqrt{\Pi}+\frac{5}{2}\alpha x\sqrt{\Pi}+\frac{3}{2}\alpha^2\log(x+\sqrt{\Pi}) \qquad \Pi=x^2+\alpha$$

5) Ἔστω ἡ ἔλλειψις $x=\alpha$ συν φ, $y=\beta$ ημ φ· νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ γενικὴ ἔκφρασις τοῦ μήκους τόξου αὐτῆς ἄγει εἰς ἐλλειπτικὸν ὁλοκλήρωμα (ἐξ οὗ καὶ ἐδόθη τὸ ὄνομα ***ἐλλειπτικόν***).

Ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσω ὅτι $ds=\alpha\sqrt{1-\gamma^2\text{συν}^2\varphi}\,d\varphi$, ὅπου $\gamma^2=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}$ καὶ νὰ θέσω συνφ$=\omega$, ὁπότε θὰ εὕρω

$$s=\alpha\int\frac{1-\gamma^2\omega^2}{\sqrt{(1-\omega^2)(1-\gamma^2\omega^2)}}d\omega$$

6) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ μῆκος τοῦ τόξου τοῦ λημνίσκου (σελ. 47) ἐκφράζεται μὲ ἐλλειπτικὸν ὁλοκλήρωμα τοῦ πρώτου εἴδους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

(Στοιχειώδεις μέθοδοι ὁλοκληρώσεως)

Ὁρισμοί.

49. ***Διαφορικὴ ἐξίσωσις πρώτης τάξεως*** λέγεται πᾶσα σχέσις τῆς μορφῆς

$$\sigma(x, y, y')=0 \quad \text{ἢ} \quad \text{καὶ } \sigma\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0 \qquad (1)$$

ὅπου τὸ y νοεῖται ὡς ἄγνωστος συνάρτησις τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x καὶ τὸ y′ ὡς παράγωγος ταύτης τῆς συναρτήσεως.

Διαφορικὴ ἐξίσωσις δευτέρας τάξεωςλέγεται πᾶσα σχέσις τῆς μορφῆς $\sigma(x, y, y', y'')=0$ (2) κ.ο.κ.

Λέγομεν ὅτι ἡ $y=\varphi(x)$ εἶναι ***λύσις*** (ἢ καὶ ὁλοκλήρωμα) τῆς ἐξισώσεως (1) ἐὰν ἀντικαθιστῶντες εἰς αὐτὴν τὸ y διὰ τοῦ $\varphi(x)$ καὶ τὸ y′ ῥιὰ τοῦ $\varphi'(x)$ λαμβάνωμεν ταυτότητα· ὁμοίως λέγομεν ὅτι ἡ $y=\varphi(x)$ εἶναι ***λύσις*** τῆς (2) ἐὰν ἡ ἰσότης ($\sigma(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x))=0$ εἶναι ταὐτότης κ.ο.κ.

Τὸ πρόβλημα τὸ τιθέμενον ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως (1) διατυποῦται γεωμετρικῶς ὡς ἑξῆς: ***Δίδεται νόμος καθ᾿ ὃν εἰς ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχεῖ μία*** (ἐνίοτε καὶ περισσότεραι) ***εὐθεῖα δι᾿ αὐτοῦ διερχομένη καὶ ζητεῖται καμπύλη ἔχουσα εἰς ἕκαστον σημεῖον αὐτῆς ὡς ἐφαπτομένην τὴν ἀντίστοιχον εὐθεῖαν.***

Διαφορικὴ ἐξίσωσις δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $\frac{dy}{dx}=f(x)$ (1′) τῆς ὁποίας ἡ γενικὴ λύσις θὰ δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$y=\int f(x)dx+C \quad (3) \quad \text{ὅπου διὰ τοῦ} \int f(x)dx$$

ἐννοοῦμεν συνάρτησιν τινὰ $\varphi(x)$ ἔχουσαν παράγωγον τὴν $f(x)$, δηλ. μίαν μερικὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως (1′), οὕτω δι᾿ ἑκάστην ἀριθμητικὴν τιμὴν τῆς C λαμβάνω ἐκ τῆς ἐξισώσεως (3) καὶ μίαν λύσιν (ἓν ὁλοκλήρωμα) τῆς (1')· ἡ γενικὴ λύσις (3) λέγεται καὶ ***γενικὸν ὁλοκλήρωμα***.

Θὰ ἀποδειχθῇ εἰς τὸν δεύτερον τόμον ὅτι ἐν γένει ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις (1) δέχεται γενικὸν ὁλοκλήρωμα τῆς μορφῆς $\varphi(x, y, C)=0$ (3') ὅπου C εἶναι αὐθαίρετος σταθερά· δηλ. θ' ἀποδειχθῇ ἀκριβῶς ὅτι οἱονδήποτε σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἂν δοθῇ θὰ ὑπάρχῃ (ἐν γένει) καμπύλη δι' αὐτοῦ διερχομένη, ἥτις εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος.

50. ***Σχηματισμὸς διαφορικῆς ἐξισώσεως*** πρώτης **τάξεως**. Ἔστω ὅτι δίδεται τυχοῦσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $\varphi(x, y, C)=0$ (3') καὶ ὅτι αὕτη λυομένη ὡς πρὸς C δίδει $\varphi(x, y)=C$. (4). Ἐὰν περαγωγίσω θεωρῶν τὸ y ὡς συνάρτησιν τοῦ x λαμβάνω τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν

$$\varphi_x+\varphi_y \cdot y' = 0 \qquad (5)$$

Γενικὸν ὁλοκλήρωμα τῆς ἐξισώσεως (5) εἶναι ἡ (4) (ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό), ἡ (3'). Ἀντιστρόφως· ἔστω ὅτι κατωρθώθη νὰ τεθῇ δοθεῖσα διαφορικὴ ἐξίσωσις ὑπὸ τὴν μορφὴν (5)· τότε τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα αὐτῆς παρέχεται ἀμέσως ἀπὸ τὴν (4). Ὑπετέθη ὅτι ἡ (3') λύεται ὡς πρὸς C· ἐὰν τοῦτο δὲν εἶναι δυνατόν, παραγωγίζω τὴν (3') ὡς πρὸς C καὶ ἀπαλείφω τὸ C μεταξὺ τῆς (3') καὶ τῆς προκυψάσης· θὰ ἔχω οὕτω διαφορικὴν ἐξίσωσιν τῆς ὁποίας γενικὸν ὁλοκπλήρωμα θὰ εἶναι ἡ (3'). Π. χ. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις τῶν ὁμοεστίων κωνικῶν

p. 262

$$\frac{x^2}{\alpha^2+c}+\frac{y^2}{\beta^2+c}=1.$$

Ἐὰν ἐφαρμόσω τὰ προηγούμενα λαμβάνω ὡς διαφορικὴν ἐξίσωσιν αὐτῶν τῶν κωνικῶν τὴν

$$y'^2+\frac{x^2-y^2-\alpha+\beta}{xy}y'-1=0.$$

Μετασχηματισμοὶ τῆς ἐξισώσεως (1)

51 α') ***Σημειακὸς μετασχηματισμός***· ἔστωσαν τύποι μετασχηματισμοῦ οἱ $x=f(X, Y)$. $y=\varphi(X, Y)$. (6)

Δυνάμει αὐτῶν ἡ δοθεῖσα διαφορικὴ ἐξίσωσις (1) μετασχηματίζεται εἰς ἄλλην ὅπου τὸ y′ δίδει ἡ

$$\varphi_X + Y'\varphi_Y = y' \; [\, f_X + Y'f_Y \,] \qquad (7)$$

52. β′) ***Μετασχηματισμὸς ἐπαφῆς.*** Οὕτω καλεῖται μετασχηματισμὸς τῆς μορφῆς $x = f(X, Y, Y')$ $y = \varphi(X, Y, Y')$ (8)

ὅπου ὅμως αἱ συναρτήσεις f καὶ φ εἶναι τοιαῦται ὥστε

$$f_{Y'}\,(\varphi_X + \varphi_Y Y') = \varphi_{Y'}\,(f_X + f_Y Y') \qquad (9)$$

Ὁ σημειακὸς μετασχηματισμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μερικὴ περίπτωσις μετασχηματισμοῦ ἐπαφῆς· ἄλλη μερικὴ περίπτωσις εἶναι ὁ καλούμενος μετασχηματισμὸς τοῦ Λεγένδρου· δηλ. ὁ μετασχηματισμὸς καθ᾽ ὃν

$$x = Y', \qquad y = XY' - Y \qquad \text{ὁπότε καὶ} \qquad y' = X \qquad (10)$$

Μὲ τὸν μετασχηματισμὸε τοῦ Λεγένδρου ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις μετατρέπεται εἰς τὴν $\sigma(Y', XY' - Y, X) = 0.$ (11)

53. γ′) ***Μετασχηματισμὸς διὰ παραγωγίσεως.*** Ἔστω π. χ. ἡ ***ἐξίσωσις τοῦ*** *Clairaut*: $y = xy' + \sigma(y').$ (12)

Ἐὰν παραγωγίσω καὶ θέσω $y' = p$ λαμβάνω $p'(x + \sigma'(p)) = 0.$ (13)

Παρατηρῶ ἐδῶ ὅτι ἐκ τῆς (13) δὲν ἕπεται ἀπαραιτήτως ἡ (12) διότι ἡ (13) ἕπεται καὶ ἐκ τῆς $y = xy' + \sigma(y') + c$ (c - σταθερὸν) διὰ παραγωγίσεως· δι᾽ αὐτὸ εὑρίσκω πρῶτον τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα τῆς (13) καὶ λαμβάνω κατόπιν ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι ζητῶ τοῦτο νὰ εἶναι καὶ γενικὸν ὁλοκλήρωμα τῆς (12)· οὕτω διὰ νὰ ἰσχύῃ ἡ (13) ἀρκεῖ ἢ $p' = 0$ (14) ἢ $x + \sigma'(p) = 0$ (15)· ἐκ τῆς (14) ἕπεται $p = c_1$ καὶ $y = c_1x + c_2$· ἵνα τὸ γενικὸν αὐτὸ ὁλοκλήρωμα εἶναι καὶ γενικὸν ὁλοκλήρωμα τῆς (12) πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἐπαληθεύῃ αὐτήν· ὅθεν $c_2 = \varphi(c_1)$· ἤτοι ἡ $y = c_1x + \varphi(c_1)$ (16) εἶναι τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα τῆς (12). Ἂς θεωρήσω ἤδη τὴν (15) $x + \sigma'(p) = 0$. Ἐὰν μεταξὺ αὐτῆς καὶ τῆς ἐξισώσεως (12) $y = xp + \sigma(p)$ ἀπαλείψω τὸ p λαμβάνω μίαν μόνην καμπύλην $y = f(x)$ ἥτις θὰ εἶναι λύσις τῆς (12)· παρατηρῶ δὲ ὅτι δὲν ὑπάρχει τιμὴ τῆς c δι᾽ ἣν ἡ γενικὴ λύσις νὰ δίδῃ τὴν λύσιν ταύτην, ἥτις διὰ τοῦτο καλεῖται ***ἰδιά-***

ζουσα λύσις· εἶναι δὲ ὡς ἀμέσως φαίνεται περιβάλλουσα τῶν εὐθειῶν (16)· ὥστε ***ἡ γενικὴ λύσις τῆς ἐξισώσεως τοῦ Clairaut σύγκειται ἀπὸ τὰς ἐφαπτομένας τῆς καμπύλης, ἣν παριστᾷ ἡ ἰδιάζουσα λύσις.***

Καὶ τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει· δηλ. ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν ἐφαπτομένων μιᾶς καμπύλης ἄγει εἰς ἐξίσωσιν τοῦ Clairaut. Καὶ τῳόντι, ἔστω $Y=\lambda X+\mu$ ἡ ἐξίσωσις τῶν ἐφαπτομένων καμπύλης τινὸς $y=\sigma(x)$· θὰ ἔχω προφανῶς $\sigma(x)=\lambda x+\mu$ καὶ $\sigma'(x)=\lambda$· ὅθεν ἀπαλείφων τὸ x λαμβάνω σχέσιν τῆς μορφῆς $\mu=\varphi(\lambda)$, ὁπότε ἡ γενικὴ ἐξίσωσις τῶν ἐφαπτομένων γράφεται $Y=\lambda X+\varphi(\lambda)$. Παραγωγίζων ταύτην ὡς πρὸς X καὶ ἀπαλείφων τὸ λ λαμβάνω τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν $Y=XY'+\varphi(Y')$ ἥτις εἶναι ἐξίσωσις τοῦ Clairaut.

Ἀναγωγὴ ὁλοκληρώσεως εἰς τετραγωνισμούς.

54.—Ὀλίγαι εἶναι εἶναι αἱ περιπτώσεις καθ᾿ ἃς ἡ ὁλοκλήρωσις διαφορικῆς ἐξισώσεως ἀνάγεται εἰς τετραγωνισμούς· ἐφαρμόζεται δὲ εἰς αὐτὰς μέθοδος ἡ ὁποία κατὰ βάθος συνίσταται εἰς τὸ νὰ ἀνάγεται ἡ δοθεῖσα διαφορικὴ ἐξίσωσις εἰς τὴν μορφὴν ((5)).

55 —I. ***Ἐξισώσεις μὲ χωρισμένας μεταβλητάς.*** Ἔστω ὅτι δοθεῖσα διαφορικὴ ἐξίσωσις γράφεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\varphi(x)}{\sigma(y)} \qquad (A)$$

θὰ ἔχω τότε ὅτι $\sigma(y)dy=\varphi(x)dx$· ὥστε ἐὰν παράγουσαι τῶν $\sigma(y)$ καὶ $\varphi(x)$ εἶναι αἱ $F(y)$ καὶ $P(x)$ θὰ δίδῃ τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα ἡ ἐξίσωσις $F(y)=P(x)+c$.

Εἰς ἐξίσωσιν μὲ χωρισμένας μεταβλητὰς ἀνάγεται προφανῶς πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $\sigma(x,y')=0$· αὕτη λυομένη ὡς πρὸς y' δίδει $y'=f(x)$· ὅθεν τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα εἶναι $y=F(x)+c$ [ὅπου $F'(x)=f(x)$]. Ἔστωσαν δύο καμπύλαι ἀντιστοιχοῦσαι εἰς δύο τυχούσας τιμὰς c_1, c_2 τῆς c· παρατηρῶ ὅτι λαμβάνω ἐκ τῆς μιᾶς τὴν ἄλλην ἐὰν ἐφαρμόσω μεταφορὰν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y· καὶ ***ἀντιστρόφως***· ἐὰν αἱ λύσεις δοθείσης διαφορικῆς ἐξισώσεως ἔχωσι τὴν ἰδιότητα ταύτην (δηλ. ἐκ μιᾶς μερικῆς λύσεως νὰ ἐξάγωνται αἱ λοιπαὶ διὰ μεταφορᾶς παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y) τότε ἡ δοθεῖσα διαφορικὴ ἐξίσωσις εἶναι τῆς μορφῆς (A)· ἄλλως τε εἶναι προφανὲς ὅτι πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς (A) καὶ μόνον ἔχει τὴν ἰδιότητα νὰ μὴ ἀλλάσση ὅταν θέσω $y=Y+\beta$ (ὅπου β σταθερὸν) ἤτοι ***δέχεται*** αὐτὸν τὸν μετασχηματισμόν.

56—II. ***Ὁμογενεῖς διαφορικαὶ ἐξισώσεις.*** Οὕτω καλοῦνται αἱ ἐξισώσεις τοῦ τύπου

$$\frac{dy}{dx}=\sigma\left(\frac{y}{x}\right). \qquad \text{(B)}$$

Ἐὰν λάβω ὡς τύπον μετασχηματισμοῦ τὸν $y=\upsilon x$ ἔχω $dy=\upsilon dx+xd\upsilon$ ὅθεν ἡ ἐξίσωσις (B) γράφεται: $\upsilon+x\frac{d\upsilon}{dx}=\sigma(\upsilon)$· ἢ καὶ

$$\frac{d\upsilon}{\sigma(\upsilon)-\upsilon}=\frac{dx}{x} \qquad (17)$$ ἐξ οὗ

$$\int\frac{d\upsilon}{\sigma(\upsilon)-\upsilon}=\log\frac{x}{c} \text{ ἢ καὶ } \varphi(\upsilon)=\log\frac{x}{c} \qquad (18)$$

καὶ ἐπομένως γενικὴ λύσις τῆς (B) εἶναι ἡ $\log\left(\frac{x}{c}\right)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ (19)

$$\text{ἢ ἀκόμη } x=ce^{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)} \text{ ἢ } x=c.F\left(\frac{y}{x}\right) \quad (20)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη παριστᾷ καμπύλας αἵτινες εἶναι ὁμοιόθετοι πρὸς ἀλλήλας ὡς πρὸς τὴν ἀρχήν· ἡ ἰδιότης αὕτη χαρακτηρίζει τὰς ὁμογενεῖς ἐξισώσεις (B)· διότι πᾶσα διαφορικὴ ἐξίσωσις (πρώτης τάξεως) τῆς ὁποίας τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα παριστᾷ καμπύλας ὁμοιοθέτους πρὸς ἀλλήλας ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν λαμβάνει τὴν μορφὴν (B) ὅπως φαίνεται ἀμέσως ἐὰν παρατηρήσω ὅτι αἱ ἐξισώσεις τῶν τοιούτων καμπύλων λαμβάνουν τὴν μορφὴν (19)· ἐπομένως διαφοριζόμεναι δίδουν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς (B)· ἄλλως τε καὶ γεωμετρικῶς φαίνεται τοῦτο· ἔστω ὅτι ἔχω καμπύλας ὁμοιοθέτους πρὸς ἀλλήλας ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν καὶ φέρω ἐκ τῆς ἀρχῆς τυχοῦσαν εὐθεῖαν τέμνουσαν τὰς ῥηθείσας καμπύλας· αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα τομῆς θὰ εἶναι παράλληλοι· ἤτοι ὁ γωνιακὸς συντελεστὴς αὐτῶν $\frac{dy}{dx}$ θὰ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ $\frac{y}{x}$.

57.—***Παρατηρήσεις.*** α') Ἡ ὁμογενὴς ἐξίσωσις (B) δέχεται τὸν μετασχηματισμὸν $x=\lambda X$, $y=\lambda Y$ διότι οὗτος ἐφαρμοζόμενος εἰς τὴν (B) δὲν μεταβάλλει αὐτήν.

β′) Ὁ τύπος (18) δεικνύει ὅτι δὲν ἐπιτρέπεται νὰ δοθῶσιν εἰς τὸ c ἀρνητικαὶ τιμαί· ὅθεν φαίνεται ὅτι εἰς τὴν αὐθαίρετον c, τὴν παρουσιαζομένην εἰς τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα συμβαίνει ἐνίοτε νὰ μὴ ἐπιτρέπεται νὰ δώσωμεν οἱανδήποτε πραγματικὴν τιμήν.

γ′) Διὰ νὰ ἔχω τὴν γενικὴν λύσιν (20) ὑποθέτω ὅτι ὁ παρονομαστὴς $\varphi(\upsilon)-\upsilon$ δὲν εἶναι μηδέν· ἐὰν $\varphi(\upsilon)=\upsilon$ τότε εἶναι κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (17) $\upsilon=c$ ἢ $y=cx$ ὅθεν αἱ εὐθεῖαι αὗται (ὅπου τὸ c εἶναι ρίζα τῆς $\varphi(c)-c=0$) ἀποτελοῦν ***ἰδιάζουσαν*** λύσιν τῆς (B), ὡς μὴ διδόμεναι ἀπὸ τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα.

58. III ***Ἐξισώσεις ἀναγόμεναι εἰς ὁμογενεῖς.*** Δυνατὸν ἐξίσωσίς τις νὰ μὴ εἶναι ὁμογενής, ἀλλὰ νὰ ἀνάγεται εἰς τοιαύτην δι᾽ ἁπλῆς ἀντικαταστάσεως ἢ διὰ γενικωτέρου σημειακοῦ μετασχηματισμοῦ· π.χ. ἡ ἐξίσωσις $x-y^2+2y^3\frac{dy}{dx}=0$ ἀνάγεται εἰς ὁμογενῆ ἐὰν θέσω $y^2=\omega$. ἔστω ἐπίσης ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{\alpha x+\beta y+\gamma}{\lambda x+\mu y+\nu}\right) \quad (\alpha,\beta,\gamma,\lambda,\mu,\nu-\text{σταθ.}) \qquad (21)$$

Παρατηρῶ ὅτι ἐὰν ἦτο $\gamma=0$ καὶ $\nu=0$ ἡ (21) θὰ ἦτο ὁμογενής· ἐπομένως ἀρκεῖ νὰ μετασχηματίσω τὴν (21) εἰς ἄλλην τῆς αὐτῆς μορφῆς, ὅπου νὰ λείπουν οἱ σταθεροὶ ὅροι ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστήν· πρὸς τοῦτο θέτω $\alpha x+\beta y+\gamma=X+\rho$, $\lambda x+\mu y+\nu=Y+\sigma$ (ὅπου ρ, σ σταθ.) ὁπότε λαμβάνω ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς

$$\frac{dY}{dX}=\Phi\left(\frac{\alpha X+\beta Y+\alpha\rho+\beta\sigma+\gamma}{\lambda X+\mu Y+\lambda\rho+\mu\sigma+\nu}\right).$$

προσδιορίζω τότε τὰ ρ, σ οὕτως ὥστε $\alpha\rho+\beta\sigma+\gamma=0$, $\lambda\rho+\mu\sigma+\nu=0$· ὑποθέτω ἐννοεῖται ὅτι $\alpha\mu-\beta\lambda$ δὲν εἶναι μηδέν. Ἐὰν $\alpha\mu-\beta\lambda=0$ (22) ἀλλάσσω μόνον τὴν ἄγνωστον συνάρτησιν διατηρῶν τὴν μεταβλητὴν X· θέτω $\alpha x+\beta y+\gamma=Y$ καὶ λαμβάνω $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\beta}\left(\frac{dY}{dx}-\alpha\right)$ ἀφ᾽ ἑτέρου λόγῳ τῆς ὑποθέσεως (22) ἔχω $\lambda x+\mu y=\frac{\lambda}{\alpha}(Y-\gamma)$· τὰς τιμὰς ταύτας τῶν y′ καὶ $\lambda x+\mu y$ εἰσάγω εἰς τὴν (21) ὁπότε προκύπτει ἐξίσωσις μὲ χωρισμένας μεταβλητάς.

59.—***Γραμμικαὶ ἐξισώσεις***· αὗται εἶναι τῆς μορφῆς

$$\frac{dy}{dx}+\sigma(x).y=\varphi(x) \qquad (\Gamma)$$

Ἔστω πρῶτον ἡ γραμμικὴ ἐξίσωσις ***ἄνευ δευτέρου μέλους***· δηλ. ἡ

$$\frac{dy}{dx}+\sigma.y=0 \qquad (\text{γράφω } \sigma \text{ ἀντὶ τοῦ } \sigma(x)\,) \qquad (\Gamma')$$

Αὕτη δὲν ἀλλάσσει ἐὰν ἀντὶ y θέσω cy· γενικὸν δὲ αὐτῆς ὁλοκλήρωμα ὡς εὐκόλως φαίνεται εἶναι τὸ

$$y=cf(x) \text{ ὅπου } f(x)=e^{-\int \sigma dx} \qquad (23)$$

Ἔστω ἤδη ὅτι γνωρίζω μερικήν τινα λύσιν y_1 (y_1=συνάρτ. τοῦ x) τῆς ἐξισώσεως (Γ)· θὰ ἔχω $\frac{dy_1}{dx}+\sigma.y_1=\varphi$ ἡ δὲ (Γ) θὰ γράφεται καὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{d(y-y_1)}{dx}+\sigma.(y-y_1)=0$· ὅθεν πᾶσα λύσις y τῆς (Γ) θὰ εἶναι τοιαύτη ὥστε τὸ $y-y_1$ νὰ εἶναι λύσις τῆς ἐξισώσεως ἄνευ δευτέρου μέλους (Γ')· καὶ ἑπομένως ἡ γενικὴ λύσις τῆς (Γ) θὰ εἶναι $y=y_1+cf(x)$ (23). Ἐὰν γνωρίζω καὶ ἄλλην μερικὴν λύσιν y_2 τῆς (Γ) τότε ἡ y_2-y_1 θὰ εἶναι μερικὴ λύσις τῆς (Γ') καὶ ἑπομένως τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα τῆς (Γ) θὰ γράφεται $\quad y=y_1+c(y_2-y_1) \quad$ (24) ὥστε ὅταν γνωρίζω δύο μερικὰς λύσεις τῆς (Γ) εὑρίσκω ἀμέσως τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα χωρὶς κανένα τετραγωνισμόν.

Ἔστω ἤδη ὅτι δὲν γνωρίζω μερικὴν λύσιν τῆς (Γ)· παρατηρῶ ὅτι ἡ (24) γράφεται: $\frac{y}{f(x)}=\frac{y_1}{f(x)}+c$ (24') ἐξ οὗ διακρίνω ὅτι ἐὰν μετασχηματίσω τὴν (Γ) θέτων $\frac{y}{f(x)}=\omega$ θὰ προκύψῃ ἐξίσωσις ὡς πρὸς ω τῆς ὁποίας τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα θὰ εἶναι $\omega=\frac{y_1}{f(x)}+c$ τὸ νὰ παρουσιάζεται ὅμως εἰς τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα ἡ αὐθαίρετος c ὡς προσθετέος σημαίνει ὅτι προκύπτει τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα ἀπὸ τὴν διαφορικὴν ἐξίσπσιν δι' ἑνὸς τετραγωνιαμοῦ· δηλ. ὅτι εἰς τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν (τὴν μετασχηματισμένην) εἶναι χωρισμέναι αἱ μεταβληταί· ὅθεν συμπεραίνω ὅτι ἵνα λύσω τὴν ἐξίσωσιν (Γ) ἀρκεῖ νὰ θέσω $y=f(x).\omega$ καὶ νὰ μετασχηματίσω τὴν (Γ).

Ἐπαλήθευσις· θέτω $y=f.\omega$ (γράφω f ἀντὶ $f(x)$.)· τότε ἡ (Γ) μετασχηματίζεται εἰς τὴν $f\frac{d\omega}{dx}+\omega\left(\frac{df}{dx}+\sigma f\right)=\varphi$· ἐξ ὑποθέσεως ὅμως ἡ f ἐπαληθεύει τὴν (Γ΄) ἑπομένως ἡ μετασχηματισμένη τῆς (Γ) γράφεται

$$f d\omega=\varphi dx\text{· ὅθεν } \omega=\int\frac{\varphi}{f}dx+c \text{ καὶ } y=f\cdot\left(\int\frac{\varphi}{f}d\ +c\right) \qquad (25).$$

Οὕτω ἡ (25) δίδει τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα τῆς (Γ) ὅπου τὸ f δίδεται ὑπὸ τῆς (23).

60. ***Παρατηρήσεις***. 1) Ἡ ἐφαρμοσθεῖσα μέθοδος εἶναι κατ' οὐσίαν ἡ ἑξῆς: Εὑρίσκω τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα τῆς ἐξισώσεως (Γ΄). δηλ. τὸ $y=cf$· κατόπιν τὴν σταθερὰν c ἀντικαθιστῶ μὲ συνάρτησίν τινα ω τοῦ x καὶ προσδιορίζω τὸ ω οὕτως ὥστε ἡ ωf νὰ ἐπαληθεύῃ τὴν (Γ)· ὁπότε τὸ $y=\omega f$ δίδει τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα τῆς ἐξισώσεως (Γ).

2) Τὸ ἀνωτέρω εὑρεθὲν γενικὸν ὁλοκλήρωμα τῆς γραμμικῆς ἐξισώσεως (Γ) εἶναι τῆς μορφῆς $y_1+cf(x)$ ἤτοι εἶναι γραμμικὴ συνάρτησις τῆς αὐθαιρέτου σταθερᾶς c· καὶ τὸ ἀντίστροφον εὐκόλως φαίνεται· δηλ. ὅτι αἱ καμπύλαι τῆς μορφῆς $y=\lambda(x)+c\varphi(x)$ (ὅπου c—αὐθαίρετος σταθερὰ) ἐπαληθεύουσι τὴν αὐτὴν ***γραμμικὴν*** διαφορικὴν ἐξίσωσιν. Γεωμετρικῶς ἑρμηνεύεται τοῦτο ὡς ἑξῆς: Αἱ καμπύλαι αἱ ἐπαληθεύουσαι δοθεῖσαν γραμμικὴν ἐξίσωσιν ἔχουσι τὴν ἑξῆς χαρακτηριστικὴν ἰδιότητα. Ἔστω παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα οY τέμνουσα τὰς καμπύλας ταύτας· αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν καμπύλων εἰς τὰ σημεῖα τομῆς διέρχονται δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι εἶναι συναρτήσεις τοῦ x· καὶ ἀντιστρόφως· πᾶσαι αἱ καμπύλαι αἱ ἔχουσαι τὴν ἰδιότητα ταύτην ἐπαληθεύουσι μίαν γραμμικὴν ἐξίσωσιν.

61.—Ἐξισώσεις τοῦ Bernoulli.—Αὗται εἶναι τῆς μορφῆς

$$\frac{dy}{dx}+\sigma(x).y+\varphi(x).y^{\nu}=0 \qquad (\Delta)$$

ἀνάγονται δὲ εἰς γραμμικάς· ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ διαιρέσω διὰ y^{ν} καὶ νὰ θέσω $y^{1-\nu}=\omega$ ὁπότε λαμβάνω $-\frac{1}{\nu-1}\frac{d\omega}{dx}+\sigma\omega+\varphi=0$.

62.— Ἐξισώσεις τοῦ Lagrange. Αὗται εἶναι τῆς μορφῆς

$$y+x\sigma(y')+\varphi(y')=0 \qquad (E)$$

ἤτοι εἶναι γραμμικαὶ ὡς πρὸς x καὶ y. Μερικὴ περίπτωσις αὐτῶν εἶναι αἱ ἐξισώσεις τοῦ Clairaut (§ 53). Παραγωγίζων καὶ ἐδῶ λαμβάνω θέτων $y'=p$ $\quad p+\sigma(p)+[x\sigma'(p)+\varphi'(p)]\frac{dp}{dx}=0$·

$$\text{ἢ καὶ } [p+\sigma(p)]\frac{dx}{dp}+x\sigma'(p)+\varphi'(p)=0.$$

Οὕτω ἐὰν θεωρήσω τὸ x ὡς συνάρτησιν τοῦ p ἔχω γραμμικὴν ἐξίσωσιν, ἥτις ὁλοκληρουμένη δίδει τὸ x ὡς συνάρτησιν τοῦ p· ὅθεν δυνάμει τῆς (E) ἐκφράζεται καὶ τὸ y συναρτήσει τοῦ p, ἤτοι αἱ συντεταγμέναι τῶν ὁλοκληρωτικῶν καμπύλων (δηλ. τῶν καμπύλων αἵτινες δίδουν ὁλοκληρώματα τῆς δοθείσης διαφ. ἐξισώσεως) ἐκφράζονται συναρτήσει τοῦ γωνιακοῦ συντελεστοῦ τῆς ἐφαπτομένης καὶ εὐκόλως φαίνεται ὅτι ἐξαρτῶνται γραμμικῆς ἀπὸ τὴν σταθερὰν c. Εἰς τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα φθάνω καὶ ἐὰν ἐφαρμόσω εἰς τὴν ἐξίσωσιν (E) τὸν μετασχηματισμὸν τοῦ Λιγίνδρου (§ 52). Καὶ τῳόντι ἂν θέσω $x=Y'$, $y=XY'-Y$ ἡ ἐξίσωσις (E) ἀνάγεται εἰς γραμμικήν.

63.— ***Ἐξισώσεις τοῦ** Riccati*. Αὗται εἶναι τῆς μορφῆς

$$\frac{dy}{dx}+\sigma(x)y^2+\varphi(x)y+f(x)=0 \qquad (Z)$$

Τὸ γενικὸν αὐτῆς ὁλοκλήρωμα δὲν εὑρίσκεται μὲ τετραγωνισμούς. Ἐὰν ὅμως γνωρίζω μίαν μερικὴν λύσιν y_1 τῆς (Z) εὑρίσκω τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα μὲ τετραγωνισμούς· καὶ τῳόντι ἀρκεῖ νὰ θέσω $y=y_1+\omega$ καὶ νὰ μετασχηματίσω, ὁπότε λαμβάνω

$$\frac{d\omega}{dx}+\left(\frac{dy_1}{dx}+\sigma y_1^2+\varphi y_1+f\right)+\varphi\omega+2\sigma y_1\omega+\sigma\omega^2=0\cdot$$

τὸ ἐν παρενθέσει ὅμως εἶναι μηδὲν διότι τὸ y_1 εἶναι λύσις τῆς (Z) ὅθεν προκύπτει

$$\frac{d\omega}{dx}+(\varphi+2\sigma y_2)\omega+\sigma\omega^2=0,$$

ἤτοι ἐξίσωσις τοῦ Bernoulli ἀναγομένη εἰς γραμμικήν, ὅταν τεθῇ $\omega = \frac{1}{z}$. ὥστε ἤρκει καὶ ἀπ' εὐθείας νὰ θέσω $y = y_1 + \frac{1}{z}$ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (Z) ἵνα λάβω γραμμικὴν ἐξίσωσιν· κατὰ ταῦτα ὅταν γνωρίζω μίαν μερικὴν λύσιν (ἓν μερικὸν ὁλοκλήρωμα) τῆς ἐξισώσεως τοῦ Riccati ἀρκοῦσι δύο τετραγωνισμοὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ γενικοῦ ὁλοκληρώματος. Παρατηρῶ προσέτι ὅτι ἡ προκύπτουσα γραμμικὴ ἐξίσωσις ὡς πρὸς z θὰ ἔχῃ γενικὸν ὁλοκλήρωμα (§ 59) τῆς μορφῆς $A\lambda + B$ ὅπου τὰ A καὶ B εἶναι συναρτήσεις τοῦ x, τὸ δὲ λ εἶναι αὐθαίρετος σταθερά· ἑπομένως θὰ ἔχω

$$y = y_1 + \frac{1}{A\lambda + B} = \frac{Ay_1\lambda + By_1 + 1}{A\lambda + B} = \frac{\Gamma\lambda + \Delta}{A\lambda + B} \qquad (26)$$

ὅπου καὶ τὰ Γ,Δ εἶναι συναρτήσεις τοῦ x. Παρουσιάζεται οὕτω τὸ y ὑπὸ μορφὴν κλάσματος μὲ ὅρους πρωτοβάθμια διώνυμα ὡς πρὸς λ· ἤτοι τὸ y εἶναι (ὅταν τὸ x εἶναι δεδομένον) ὁμογραφικὴ συνάρτησις τῆς αὐθαιρέτου σταθερᾶς· καὶ τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει· τουτέστιν ὅταν τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα διαφορικῆς ἐξισώσεως εἶναι τῆς μορφῆς αὐτῆς ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις εἶναι τῆς μορφῆς (Z)· τοῦτο φαίνεται εὐκόλως ἐὰν σχηματίσω διαφορικὴν ἐξίσωσιν ἔχουσαν λύσιν αὐτῆς τῆς μορφῆς (§ 51).

64. Ἀπὸ τὴν μορφὴν (26) φαίνεται καὶ ὅτι ***ὁ ἀναρμονικὸς λόγος τέσσάρων λύσεων τῆς ἐξισώσεως τοῦ*** *Riccati* ***εἶναι*** ἀνεξάρτητος τοῦ x. Καὶ τωόντι ἐὰν y_1, y_2, y_3, y_4 εἶναι λύσεις τῆς (Z) θὰ ἔχω $y = \frac{\Gamma\lambda_i + \Delta}{A\lambda_i + B}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$: ὁπόθεν προκύπτει

$$\frac{y_4 - y_1}{y_4 - y_2} : \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_2} : \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_1}$$

ἑπομένως ὁ ἀναρμονικὸς λόγος τῶν y_i εἶναι σταθερός ἐξαρτώμενος ἐκ τῶν τεσσάρων σταθερῶν τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς τὰς τέσσαρας λύσεις· ἕπεται ἐξ αὐτοῦ ὅτι ἐὰν γνωρίζω τρεῖς λύσεις y_1, y_2, y_3 πᾶσα ἄλλη θὰ προκύπτῃ ἀπὸ τὴν ἰσότητα $\frac{y - y_1}{y - y_2} : \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda - \lambda_2} : \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2}$ (27)

ἀφοῦ ἀντικαταστήσω μὲ ἁρμοδίαν ἀριθμητικὴν τιμὴν τὸ λ· καὶ ἀντιστρόφως· ἐὰν ἀντικαταστήσω τὸ λ μὲ τὴν τυχοῦσαν ἀριθμητικὴν τιμὴν ἢ καὶ (ὅπερ καταλήγει εἰς τὸ αὐτὸ) ἐὰν θέσω ὡς δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος (27) τυχόντα σταθερὸν c θὰ ὁρίζηται ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης τὸ y ὡς συνάρτησις τοῦ x, ἥτις θὰ εἶναι λύσις τῆς (Z)· ὅθεν τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα τῆς (Z) θὰ δίδεται ἀπὸ τὴν (27) ἐὰν ἀντικαταστήσω τὸ δεύτερον μέλος μὲ τὴν αὐθαίρετον c.

65.—Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ γενικοῦ ὁλοκληρώματος τῆς (Z) ὅταν δὲν εἶναι γνωστὴ μερική τις λύσις δὲν ἀρκοῦσιν τετραγωνισμοί· ἡ ὁλοκλήρωσις τῆς (Z) εἰσάγει ἐν γένει νέας συναρτήσεις. Μίαν μερικὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ ὁλοκλήρωσις ἐπιτυγχάνεται διὰ τετραγωνισμῶν δίδει ἡ ἐξίσωσις $y'+y^2=\alpha x^{\mu}$· τὰ α, μ εἶναι σταθερὰ καὶ $\mu=\frac{-4K}{2K+1}$ ἢ $\mu=\frac{-4K}{2K-1}$ ὅπου τὸ K εἶναι ἀκέραιος.

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν θέτω $x^{\mu+1}=t$, $(\mu+1)y\omega=\alpha$ καὶ λαμβάνω ὡς μετασχηματισμένην τῆς δοθείσης τὴν $\omega'+\omega^2=[\alpha:(\mu+1)^2]t^{\nu}$, ὅπου $\nu=-\frac{4K}{2K-1}$ ἐὰν ἤδη λάβω νέας μεταβλητὰς φ καὶ z τοιαύτης ὥστε $\varphi=1:t$, $z=t-\omega t^2$ θὰ ἔχω $z'+z^2=\frac{\alpha}{(\mu+1)^2}\varphi^{\rho}$ ὅπου $\rho=\frac{-4(K-1)}{2(K-1)+1}$ Προχωρῶν καθ' ὅμοιον τρόπον φθάνω προφανῶς εἰς ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $Y'+Y^2=A$, ὅπου A σταθερόν.

Ἀσκήσεις.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ γενικὴ λύσις τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων

1) $\alpha y^{\nu}+(\beta x^{\mu}+\gamma)y'=0$

2) $y'=(\alpha x+\beta y)^{\mu}$ (ἀρκεῖ νὰ θέσω $\alpha x+\beta y=\omega$)

3) $y'=\sigma(\alpha x+\beta y)$

4) $\sigma\varphi x\sigma\varphi y-y'=0$

5) $xyy'-y^2=(x-y)^2e^{-\frac{y}{x}}$

6) $y^{\nu-1}(\alpha y'-y)=x$ $\left(\nu y^{\nu}=Ce^{\frac{\nu x}{\alpha}}-\nu x-\alpha\right)$

7) $xdy^2-2ydydx-xdx^2=0$ $(x^2-2cy-c^2=0)$.

8) $(x^2+\alpha^2)(y^2+\beta^2)+(x^2-\alpha^2)(y^2-\beta^2)y'=0$

9) $(x^2-1)\,y'+x\,(1-y-x^2)=0$ $\quad(y=x^2-1+c\sqrt{x^2-1}$

10) $y'-y\varepsilon\varphi x+1=0$

11) $2xyy'+x^2-y^2+1=0$ $\quad(x^2+y^2-2cx=1)$

12) $y'+y\varepsilon\varphi x-y^2=0$

13) $3(1-x^2)y'-(3\lambda y^3+x)y=0$ $\quad(3y^3\,(\lambda x+c\sqrt{1-x^2}\,)+1=0)$

14) $y=2xy'+y'^2$

15) $xy'^2-2yy'+x=0$

16) $x+yy'=3\alpha y'(y'^2+1)^{-1}$

17) $x^2y'+2x^2y^2+xy-2=0$
(μερικαὶ λύσεις εἶναι καὶ αἱ $y=\pm x^{-1}$)

18) $(1-x^3)y'=y^2-x^2y-2x$ $\quad(\,(c-x)y=(1-cx^2)\,)$

19) $xyy'^2+(x^2-y^2)y'-xy=0$

20) Ποίαν συνθήκην πρέπει νὰ ἱκανοποιῶσιν οἱ συντελεσταὶ α,β,γ μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ Riccati τῆς μορφῆς $y'+\alpha y^2+\beta y+\gamma=0$ ἵνα ὑπάρχωσι δύο μερικαὶ λύσεις y_1, y_2 τοιαῦται ὥστε $y_1y_2=y_1+y_2$
[ἐὰν θέσω $\varphi=2\gamma:(2\alpha+\beta+\gamma)$ ἡ συνθήκη αὕτη εἶναι :

$$\varphi'+\alpha\varphi^2+(2\beta+\gamma)\varphi=0].$$

Διαφορικαὶ ἐξισώσεις δευτέρας τάξεως.

66. ***Μερικαὶ μορφαὶ ἐξισώσεων.*** Ἔστω

α) $y''=\sigma(y)$· πολλαπλασιάζων ἐπὶ $2y'$ καὶ θέτων $y'=p$ λαμβάνω

$$d(p)^2=2\sigma(y)dy\cdot \quad \text{ὅθεν} \quad p^2=2\int\sigma(y)dy+c$$

β) $y''=\sigma(y')$· θέτω $y'=p$· καὶ ἔχω $dp=\sigma(p)dx$ (1) ὅθεν $x=\int\frac{dp}{\sigma(p)}$ ἵνα προχωρήσω εἰς τὴν λύσιν θὰ εὕρω τὸ ὁλοκλήρωμα καὶ θὰ λύσω τὴν προκύπτουσαν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς p· δύναμαι ὅμως καὶ (χωρὶς νὰ λύσω ὡς πρὸς p) νὰ θεωρήσω τὸ p ὡς παράμετρον ὁπότε ἵνα ἐκφράσω καὶ τὸ y συναρτήσει τοῦ p ἀντικαθιστῶ εἰς τὴν $\frac{dy}{dp}=\frac{dy}{dx}\ \frac{dx}{dp}$

τὸ $\frac{dx}{dp}$ λαμβάνων ὑπ' ὄψιν τὴν (1), τὸ δὲ $\frac{dy}{dx}$ ἀντικαθιστῶ διὰ τοῦ p· καὶ ἔχω οὕτω ὁλοκληρόνων $y=\int[1:\sigma(p)]dp$

γ) $\sigma(x, y', y'')=0$ θέτω $y'=p$ καὶ ἔχω τὴν ἐξίσωσιν πρώτης τάξεως $\sigma(x, p, p')=0$

δ) $\sigma(y, y', y'')=0$· θέτω $y'=p$ καὶ θεωρῶ τὸ p ὡς νέαν ἄγνωστον συνάρτησιν τοῦ y· ἔχω $y''=p\frac{dp}{dy}$ καὶ ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\sigma(y,p,p\frac{dp}{dy})=0$.

Ἠδυνάμην προφανῶς νὰ θεωρήσω καὶ τὸ x ὡς συνάρτησιν τοῦ y ὁπότε θὰ προέκυπτεν εὐκόλως ἡ ἐξίσωσις $\sigma(y,\frac{1}{x'}, \frac{-x''}{(x')^2})=0$.

ε') $\sigma(x,\frac{y'}{y}, \frac{y''}{y})=0$. (1') Ἐὰν θέσω $y'=\omega y$ (2) μετασχηματίζεται ἡ δοθεῖσα εἰς τὴν $\sigma(x, \omega, \omega^2+\omega')=0$· (3) οὕτω, αἱ (3) καὶ (2) ἀντικαθιστῶσι τὴν (1').

στ') $y''=\sigma(x)$· Εὑρίσκω ἀμέσως $y'=\int\sigma(x)dx+c$· ἂς θέσω $\int\sigma(x)dx=\varphi(x)$· θὰ ἔχω $y=\int\varphi(x)dx+cx+c_1$· τοῦτο παρίσταται συμβολικῶς ὡς ἑξῆς: $y=\int dx\int\sigma(x)dx+cx+c_1$

67.—***Γραμμικαὶ ἐξισώσεις***. Αὗται εἶναι τῆς μορφῆς

$$y''+\sigma y'+\varphi y=f \qquad (4)$$

ὅπου τὰ σ, φ, f εἶναι συναρτήσεις τοῦ x. Ἂς ὑποθέσω ἤδη (ὅπως εἰς τὰς γραμμικὰς ἐξισώσεις πρώτης τάξεως § 59) ὅτι γνωρίζω μερικήν τινα λύσιν y_1 τῆς ἐξισώσεως ἄνευ δευτέρου μέλους

$$y''+\sigma y'+\varphi y=0 \quad (5) \quad \text{ἤτοι ἔστω } y''_1+\sigma y'_1+\varphi y_1=0 \quad (5')$$

μετασχηματίζω τὴν (4) λαμβάνων ὡς τύπον μετασχηματισμοῦ τὸν $y=y_1\omega$ (6)· προκύπτει τότε ἡ ἐξίσωσις

$$y_1\omega''+(2y'_1+\sigma y_1)\omega'=f \qquad (7)$$

ἥτις εἶναι τῆς μορφῆς γ' (§ 66). Π.χ. ἔστω ἡ ἐξίσωσις $y''-x^2y'+Xy=x^{\nu+1}$· ἡ ἀντίστοιχος ἐξίσωσις ἄνευ δευτέρου μέλους ἔχει μερικὴν λύσιν τὴν $y=x^{\nu}$ θέτω $y=x\omega$ καὶ μετασχηματίζω τὴν δοθεῖσαν· τότε λαμβάνω $\omega''+(\frac{2}{x}-x^2)\omega'=x^{\nu}$ · αὕτη (§ 66, γ') ἀνάγεται εἰς ἐξίσωσιν πρώτης τάξεως, καὶ εὑρίσκω τελικῶς

68.—Καὶ κατ᾽ ἄλλον τρόπον δύναμαι νὰ ἀναγάγω τὴν ἐξίσωσιν (4) εἰς διαφορικὴν ἐξίσωσιν πρώτης τάξεως, ὅταν ἐννοεῖται γνωρίζω μίαν μερικὴν λύσιν y_1 τῆς (5). Ἀπαλείφω πρὸς τοῦτο ἐκ τῶν (4) καὶ (5') τὸ φ ὁπότε εὑρίσκω

$$y_1y''-yy''_1+\sigma(y_1y'-y'y)=0 \text{ ἢ } \sigma=-\frac{d}{dx}\log(y_2y'-y)$$

$$y_1y''-y_1''y+\sigma(y'y_1-y'_1y)=0 \text{ ὅθεν } -\sigma=\frac{d}{dx}\log(y_1y'-y'_1y)\cdot$$

ἐπομένως: $y_1y'-y'_1y=ce^{-\int\sigma dx}$ (8).

69. Ὅπως εἰς τὰς γραμμικὰς ἐξισώσεις πρώτης τάξεως (§ 59) οὕτω καὶ ἐδῶ ἰσχύει ὅτι : τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα τῆς (4) εἶναι ἄθροισμα μιᾶς μερικῆς λύσεως τῆς (4) καὶ τοῦ γενικοῦ ὁλοκληρώματος (τῆς γεν. λύσεως) τῆς (5). Καὶ τωόντι ἔστω y_1 μία μερικὴ λύσις τῆς (4)· θὰ εἶναι τότε ἐκ ταὐτότητος $y''_1+\sigma y'_1+\varphi y_1=f$ (4')· ὥστε πᾶσα ἄλλη λύσις y τῆς ἐξισώσεως (4) ὡς ἐπαληθεύουσα τὴν (4) θὰ ἐπαληθεύῃ καὶ τὴν ἐξίσωσιν $(y-y_1)''+\sigma(y-y_1)'+\varphi(y-y_1)=0$ (9) ἥτις προκύπτει ὅταν ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς (4) καὶ (4')· ἤτοι ἡ $y-y_1$ θὰ εἶναι λύσις τῆς (5)· ὥστε ἐὰν διὰ τοῦ y ἐκφράσω τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα τῆς (4) θὰ ἔχω ὅτι ἡ $y-y_1$ δίδει τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα τῆς (5) ὅθεν ἕπεται ἡ ἀνωτέρω πρότασις.

70. Τὴν ἐξίσωσιν (4) δύναμαι ν᾽ ἀναγάγω εἰς ἄλλην γραμμικὴν δευτέρας τάξεως, μὴ περιέχουσαν παράγωγον (τῆς ἀγνώστου συναρτήσεως) πρώτης τάξεως. Θέτω πρὸς τοῦτο $y=u.\upsilon$· τότε ἡ (4) γίνεται

$$u\upsilon''+(2u'+\sigma u)\upsilon'+(u''+\sigma u'+\varphi u)\upsilon=f \quad (10)$$

Ἵνα μὴ περιέχεται υ' ἀρκεῖ προφανῶς ὁ συντελεστὴς τοῦ υ' νὰ γίνῃ μηδέν· ἤτοι ἀρκεῖ νὰ προσδιορίσω τὴν συνάρτησιν u οὕτως ὥστε $2u'+\sigma u=0$. (11)

71. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις ἄνευ δευτέρου μέλους (5) καὶ y_1 τυχοῦσα μερικὴ λύσις αὐτῆς, τότε καὶ τὸ c_1y_1, ὅπου $c_1=$ αὐθαίρετος σταθερά, θὰ εἶναι λύσις τῆς (5) διότι $(c_1y_1)'=c_1y_1'$ καὶ $(c_1y_1)''=c_1y_1''$

Ἡ ἐξίσωσις (4) γράφεται προφανῶς καὶ ὑπὸ τὴν συμμετρικωτέραν μορφήν: $X_0y''+2X_1y'+X_2y=X$ (12)
ὅπου τὰ X_0, X_1, X_2, X θεωροῦνται δεδομέναι συναρτήσεις τοῦ x.)

Παριστῶ χάριν συντομίας τῆς γραφῆς τὸ πρῶτον μέλος τῆς (12) διὰ τοῦ $F(y)$, ἤ, διὰ τὴν ἀκρίβειαν, ἐννοῶ ὡς $F(y)$ τὸ $X_0y''(x)+X_1y'(x)+X_2y(x)$, ἤτοι ἐννοῶ τὸ ἐκ τοῦ πρώτου μέλους τῆς (12) ὅταν ἀντικαταστήσω τὸ y μὲ οἱανδήποτε συνάρτησιν τοῦ x καὶ τὰ y', y'' μὲ τὰς παραγώγους τῆς συναρτήσεως ταύτης. Παρατηρῶ τότε, ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης ἕπεται ἐκ τῆς ἰδιότητος

$$\text{(I)} \qquad F(cy)=cF(y).$$

72. Εὐκόλως ἐπίσης φαίνεται ὅτι ἔχω

$$F(u+v)=F(u)+F(v)$$

διότι

$$\begin{aligned} F(u+v)&=X_0(u+v)''+X_1(u+v)'+X_2(u+v)= \\ &=X_0(u''+v'')+X_1(u'+v')+X_2(u+v)= \\ &=X_0u''+X_1u'+X_2u+X_0v''+X_1v'+X_2v=F(u)+F(v) \end{aligned}$$

καὶ γενικῶς

$$\text{(II)} \quad F(u+v+w+\ldots+\omega)=F(u)+F(v)+F(w)+\ldots+F(\omega).$$

Ἰσχύει ὁμοίως ὅτι:

$$\text{(III)} \quad F(uy)=uF(y)+2u'(X_0y'+X_1y)+u''X_0y\cdot$$

διότι

$$\begin{aligned} F(uy)&=X_0(uy''+2u'y'+u''y)+2X_1(uy'+u'y)+X_2uy= \\ &=u(X_0y''+2X_1y'+X_2y)+2u'(X_0y'+X_1y)+u''X_0y. \end{aligned}$$

73.—Θὰ δώσω ἤδη ὁρισμὸν τοῦ γενικοῦ ὁλοκληρώματος διαφορικῆς ἐξισώσεως δευτέρας τάξεως προκειμένου νὰ χρησιμοποιήσω αὐτὸν κατωτέρω.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις τῆς μορφῆς

$$\text{(E)} \qquad y''=\sigma(x,\ y,\ y').$$

Εἰς τὸν II τόμον θὰ ἀποδειχθῇ τὸ ἑξῆς θεώρημα:

Ἔστωσαν τρεῖς σταθεροὶ ἀριθμοί· ἄς παραστήσω αὐτοὺς διὰ τῶν x_0, y_0, y_0' ὑπάρχει [1] εἰς διάστημά τι περὶ τὸ x_0 ἐν γένει μία συνάρτησις $y=\varphi(x)$ καὶ μία μόνη ἐπαληθεύουσα τὴν (E) καὶ τοιαύτη ὥστε

$$(A) \qquad \varphi(x_0)=y_0, \quad \Big[\varphi'(x)\Big]_{x_0}=y'_0.$$

[Αἱ σχέσεις (A) καλοῦνται ***ἀρχικαὶ συνθῆκαι***]

ἢ μὲ γεωμετρικὴν ἔκφρασιν:

Ἐὰν ἐπὶ τῆς εὐθείας $x=x_0$ ληφθῇ τυχὸν σημεῖον M καὶ τυχοῦσα δι' αὐτοῦ εὐθεῖα MΓ ὑπάρχει μία καὶ μόνη ὁλοκληρωτικὴ καμπύλη τῆς (E) διερχομένη διὰ τοῦ M καὶ ἔχουσα ἐφαπτομένην τὴν MT.

Κατὰ ταῦτα ὑπάρχουσιν ἄπειροι ὁλοκληρωτικαὶ καμπύλαι τῆς (E) καὶ ἵνα ὁρίζηται μία οἱαδήποτε ἐξ αὐτῶν (K), ἀρκεῖ ἐν γένει νὰ δίδεται: 1) τὸ σημεῖον M_0 εἰς ὃ θέλω νὰ τέμνῃ ἡ (K) τὴν εὐθεῖαν $x=x_0$ καὶ 2) ἡ ἐφαπτομένη τῆς (K) εἰς τὸ M_0, ἤτοι τὰ y_0 καὶ y'_0. Δύναμαι, ἐννοεῖται, ἀντὶ τῆς εὐθείας $x=x_0$ νὰ θεωρήσω ἄλλην εὐθεῖαν $x=x_1$ ἤτοι δύναμαι νὰ εἴπω ὅτι ἵνα ὁρισθῇ ἡ ὁλοκληρωτικὴ καμπύλη (K) ἀρκεῖ νὰ δοθῶσι 1) τὸ σημεῖον M_1 εἰς ὃ ἡ (K) τέμνει τὴν εὐθεῖαν $x=x_1$ καὶ 2) ἡ ἐφαπτομένη τῆς (K) εἰς τὸ M_1· ἤτοι ἀρκεῖ νὰ δοθῶσιν δύο ἀριθμοὶ ὧν ὁ πρῶτος θὰ εἶναι ἡ τεταγμένη τοῦ M_1 καὶ ὁ δεύτερος θὰ εἶναι ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης τῆς (K) εἰς τὸ M_1· ὥστε ἀρχικαὶ συνθῆκαι ὁρίζουσαι ἑκάστην ὁλοκληρωτικὴν καμπύλην, λαμβάνονται αἱ συνθῆκαι καθ' ἃς δίδονται 1) τὸ σημεῖον εἰς ὃ τέμνεται ἡ $x=x_0$ καὶ 2) ἡ δι' αὐτοῦ ἐφαπτομένη· ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ οἱ παρασταθέντες μὲ τα y_0, y'_0. Ὥστε ὅταν αὐθαιρέτως ληφθῇ 1) ἓν σημεῖον M ἐπὶ τῆς εὐθείας $x=x_0$ καὶ 2) εὐθεῖα τις MT διὰ τοῦ M διερχομένη, ὁρίζεται μία καὶ μόνη ὁλοκληρωτικὴ καμπύλη διερχομένη διὰ τοῦ M καὶ ἔχουσα ἐφαπτομένην τὴν MT.

Οὕτω διακρίνω ὅτι δύο εἶναι αἱ αὐθαίρετοι σταθεραὶ ἀπὸ τὸν προσδιορισμὸν τῶν ὁποίων θὰ ἐξαρτᾶται ὁ προσδιορισμὸς τῆς ὁλοκληρωτικῆς καμπύλης ἢ καὶ ὅτι ὑπάρχει μία καὶ μόνον μία συνάρτησις $y=f(x, c_1, c_2)$ ἐπαληθεύουσα τὴν (E) καὶ ἔχουσα c_1, c_2 τοιαῦτα ὥστε

(1) Ὑποτίθεται ὅτι ἡ συνάρτησις σ πληροῖ ὅρους τινὰς ὁμαλότητος, ὅπως θὰ ἴδωμεν εἰς τὸν II τόμον.

$$f(x_0, c_1, c_2)=y_0, \quad \Big[f'(x, c_1, c_2)\Big]_{x_0}=y'_0.$$

Ἑπομένως ὅταν δοθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ y_0, y'_0, ὁρίζονται τὰ c_1, c_2 καὶ ὁρίζεται πλήρως ἡ ὁλοκληρωτικὴ καμπύλη. Ἐντεῦθεν ἀγόμεθα εἰς τὸν ἑξῆς ὁρισμὸν τοῦ γενικοῦ ὁλοκληρώματος· λέγομεν ὅτι τύπος τις

$$\text{(B)} \qquad y=f(x, c_1, c_2)$$

εἶναι τὸ ***γενικὸν ὁλοκλήρωμα*** τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (E) ἐάν, οἱοιδήποτε ἀριθμοὶ καὶ ἂν εἶναι οἱ c_1, c_2 ὁρίζῃ οὗτος λύσιν τῆς (E) καὶ ἐὰν προσέτι οἱοιδήποτε ἀριθμοὶ καὶ ἂν εἶναι οἱ y_0, y'_0 δυνάμεθα πάντοτε νὰ προσδιορίσωμεν τὰ c_1, c_2 οὕτως ὥστε

$$f(x_0, c_1, c_2)=y_0, \quad \Big[f', (x, c_1, c_2)\Big]_{x_0}=y'_0$$

74.—Στηριζόμενος ἤδη ἐπὶ τοῦ προηγουμένου γενικοῦ θεωρήματος δύναμαι νὰ ἀποδείξω τὸ ἑξῆς θεώρημα :
Ἐὰν $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x)$ ***εἶναι δύο μερικαὶ λύσεις τῆς ἐξισώσεως*** (¹)

$$F(y)=0 \qquad (13)$$

καὶ ἐὰν ὁ λόγος αὐτῶν δὲν εἶναι σταθερὸς (²) ***πᾶσαι αἱ ἄλλαι λύσεις τῆς θεωρουμένης ἐξισώσεως θὰ περιέχωνται εἰς τὴν***

$$y=c_1y_1+c_2y_2 \qquad (14)$$

ἤτοι : ἐὰν δοθῇ τυχοῦσα ἄλλη λύσις $y=\lambda(x)$ θὰ ὑπάρχουν πάντοτε δύο ἀριθμοὶ (c_1), (c_2), οἵτινες ἀντικαθιστῶντες τὰ c_1, c_2 θὰ δίδουν

$$(c_1)\, y_1+(c_2)\, y_2=\lambda(x).$$

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου παρατηρῶ ὅτι συμφώνως πρὸς τοὺς τύπους (II) καὶ (I) ἔχω·

(¹) Ἐξαιρέσει ἐννοεῖται τῆς λύσεως $y=0$.
(²) Εἰς κανὲν διάστημα.

$$F(c_1y_1+c_2y_2)=F(c_1y_1)+F(c_2y_2)=c_1F(y_1)+c_2F(y_2)$$

καὶ ἐπειδὴ τὰ y_1, y_2 ὑπετέθησαν λύσεις τῆς ἐξισώσεως (13) εἶναι:

$$F(y_1)=F(y_2)=0. \text{ Ὅθεν καὶ } F(c_1y_1+c_2y_2)=0\cdot$$

ἤτοι ἡ (14) εἶναι λύσις τῆς ἐξισώσεως (13). Λέγω ἤδη ὅτι ἡ (14) δίδει τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα τῆς (13): καὶ τῷ ὄντι ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ δείξω ὅτι ἡ τυχοῦσα λύσις τῆς (13) λαμβάνει τὴν μορφὴν (14). Ἔστω $y=\varphi(x)$ μία λύσις τῆς (13)· ἂς θεωρήσω διάστημά τι (α, β) εἰς τὸ ὁποῖον νὰ μὴ μηδενίζεται (¹) ἡ y_1 καὶ ἔστω ***τυχοῦσα*** τιμὴ τοῦ διαστήματος αὐτοῦ ἡ x_0· ἂς θέσω

$$\varphi(x_0)=y_0, \qquad \Big[\varphi'(x)\Big]_{x_0}=y'_0.$$

Κατὰ τὰ προηγούμενα (§ 72) δὲν θὰ ὑπάρχῃ ἄλλη ὁλοκληρωτικὴ καμπύλη [πλὴν τῆς $y=\varphi(x)$] διερχομένη διὰ τοῦ σημείου (x_0, y_0) καὶ ἔχουσα ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ τὴν αὐτὴν μὲ τὴν ἐφαπτομένην τῆς $y=\varphi(x)$. Ἑπομένως ἀρκεῖ νὰ δείξω ὅτι δύναμαι νὰ προσδιορίσω τὰ c_1, c_2 οὕτως ὥστε ἡ ἀντίστοιχος (14) νὰ διέρχηται διὰ τοῦ σημείου (x_0, y_0) καὶ νὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην.

Ἤτοι ἀρκεῖ νὰ δύναμαι νὰ προσδιορίσω τὰ c_1, c_2, οὕτως ὥστε

$$c_1(y_1)_0+c_2(y_2)_0=y_0$$
$$c_1(y'_1)_0+c_2(y'_2)_0=y'_0$$

ὅπου $(y_1)_0$ ἐννοῶ τὴν τιμὴν τοῦ y_1 διὰ $x=x_0$ κ. ο. κ· ὅθεν ἀρκεῖ νὰ εἶναι:

$$(\Delta) \qquad \Big[y_1\, y'_2-y'_1\, y_2\Big]_{x_0}\neq 0\cdot$$

δηλ. ἀρκεῖ νὰ μὴν εἶναι τὸ x_0 ῥίζα τῆς συναρτήσεως $y_1\, y'_2-y'_1\, y_2$ παρατηρῶ ὅμως ὅτι ἡ τιμὴ x_0 ἐξ ἧς ἀνεχώρησα ὡρίσθη ***αὐθαιρέτως*** εἰς τὸ διάστημα (α, β)· ἐπομένως ἀρκεῖ διὰ τὸν σκοπόν μου νὰ δείξω ὅτι: ὑπάρχει τιμὴ x_0 εἰς τὸ διάστημα (α, β) δι' ἣν πληροῦται ἡ ἀνι-

(¹) Τοιοῦτον διάστημα ὑπάρχει διότι ἡ y_1 ὑποτίθεται συνεχής.

σότης (Δ)˙ ἀλλὰ τοῦτο συμβαίνει διότι ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει θὰ εἴχομεν ὅτι ἡ $\frac{y_1 y_2'-y'_1 y_2}{y_1^2}$, ἤτοι ἡ παράγωγος τοῦ $\frac{y_2}{y_1}$ θὰ ἦτο μηδὲν *οἱανδήποτε* τιμὴν τοῦ διαστήματος (α,β) καὶ ἂν ἔχῃ τὸ x_0 ἑπομένως τὸ $\frac{y_2}{y_1}$ θὰ ἦτο σταθερὸς ἀριθμὸς εἰς τὸ διάστημα (α, β)˙ τοῦτο ὅμως ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

75.—***Γραμμικαὶ ἐξισώσεις μὲ σταθεροὺς συντελεστάς.***

Ἔστω ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις

$$F(y)=A_0y''+2A_1y'+A_2y=0 \qquad (15)$$

ὅπου τὰ A_0, A_1, A_2 εἶναι σταθεροὶ ἀριθμοί.

Ἵνα εὕρω τὴν γενικὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως (15) ἀρκεῖ (§ 73) νὰ εὕρω δύο μερικὰς αὐτῆς λύσεις˙ ἀλλὰ τοιαῦται εὐκόλως εὑρίσκονται.

Ἂς θέσω $y=e^{\varrho x}$ (ϱ=σταθερόν), τότε τὸ πρῶτον μέλος τῆς (15) γίνεται $(A_0\varrho^2+2A_1\varrho+A_2)e^{\varrho x}$

Ἵνα ἔχω ἑπομένως μερικὴν λύσιν τῆς (15) ἀρκεῖ νὰ προσδιορίσω τὸ ϱ οὕτως ὥστε τὸ πολυώνυμον $\varphi(\varrho)=A_0\varrho^2+2A_1\varrho+A_2$ νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν˙ τὸ $\varphi(\varrho)$ καλεῖται ***χαρακτηριστικὸν πολυώνυμον*** τοῦ $F(y)$ καὶ ἡ ἐξίσωσις $\varphi(\varrho)=0$ καλεῖται ***χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις τῆς*** (15). Ἔστω ὅτι

1) αἱ ῥίζαι ϱ_1, ϱ_2 τῆς χαρακτηριστικῆς εἶναι πραγματικαὶ ἄνισοι˙ Τότε ἡ $y_1=e^{\varrho_1 x}$ καὶ ἡ $y_2=e^{\varrho_2 x}$ εἶναι μερικαὶ λύσεις τῆς (15) καὶ ὁ λόγος $\frac{y_2}{y_1}$ δὲν εἶναι σταθερός, διότι ἰσοῦται πρὸς $e^{(\varrho_1-\varrho_2)x}$ ὅθεν (§ 74) θὰ εἶναι γενικὸν ὁλοκλήρωμα τὸ

$$y=c_1e^{\varrho_1 x}+c_2e^{\varrho_2 x}$$

2) ἡ χαρακτηριστικὴ ἔχει διπλῆν ῥίζαν˙ ἔστω αὕτη ϱ˙ μία μερικὴ λύσις εἶναι προφανῶς ἡ $y_1=e^{\varrho x}$ ˙ πρὸς εὕρεσιν δευτέρας μερικῆς λύσεως ἀλλάσσω τὴν μεταβλητὴν θέτων $y=\omega y_1=\omega e^{\varrho x}$. Λαμβάνω τότε δυνάμει τοῦ τύπου (III) (§ 71).

$$F(y)=F(\omega y_1)=\omega F(y_1)+2\omega'(A_0y'_1+A_1y_1)+\omega''A_0y_1$$

ἀλλὰ $F(y_1)=0$ καὶ

$$A_0 y_1' + A_1 y_1 = e^{\rho x}(A_0\rho + A_1) = \frac{1}{2} e^{\rho x} \varphi'(\rho) = 0$$

διότι τὸ ρ εἶναι διπλῆ ρίζα τῆς πολυωνύμου $\varphi(\rho)$· ὅθεν ἡ ἐξίσωσις (15) μετασχηματίζεται εἰς τὴν $e^{\rho x}\,\omega''=0$.

Λύσις ταύτης προφανῶς εἶναι καὶ ἡ $\omega=x$ ὅθεν μία μερικὴ λύσις τῆς δεδομένης εἶναι ἡ $y_2=xe^{\rho x}$ · ὥστε τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα τῆς (15) εἶναι $y=c_1y_1+c_2y_2=[c_1+c_2x]e^{\rho x}$.

Τοῦτο ἄλλωςτε ἠδυνάμην καὶ ἀπ᾽ εὐθείας νὰ συμπεράνω ἐκ τῆς ἐξισώσεως $e^{\rho x}\,\omega''=0$, ἥτις ἔχει γενικὸν ὁλοκλήρωμα τὸ $\omega=c_2x+c_1$ ὅθεν $y=e^{\rho x}\omega=(c_2x+c_1)e^{\rho x}$.

3) Αἱ ρίζαι τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως εἶναι φανταστικαὶ ἔστω $\rho_1=\alpha+\beta i$, $\rho_2=\alpha-\beta i$· τότε ἐὰν εἰς τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα $y=c_1e^{\rho_1 x}+c_2e^{\rho_2 x}$, θέσω $c_1=c_2=\frac{1}{2}$ λαμβάνω τὸ μερικὸν ὁλοκλήρωμα $y=e^{\alpha x}\dfrac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2}$ ἤτοι $y=e^{\alpha x}\,\sigma\upsilon\nu\beta x$

ἐὰν θέσω $c_1=-c_2=\frac{1}{2i}$ λαμβάνω $y=e^{\alpha x}\,\eta\mu\beta x$

καὶ ἐπειδὴ ὁ λόγος τῶν δύο αὐτῶν μερικῶν ὁλοκληρωμάτων, ὅστις εἶναι εφβx, δὲν εἶναι σταθερός, δύναμαι νὰ θεωρήσω ὡς γενικὸν ὁλοκλήρωμα τό :

$$y=e^{\alpha x}\,(c_1\sigma\upsilon\nu\beta x+c_2\eta\mu\beta x)$$

ὅπερ ἔχει πραγματικὴν μορφήν.

76.—Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$F(y)=X \qquad (12)$$

καὶ y_1 τυχοῦσα μερικὴ λύσις· ἤτοι ἔστω

$$F(y_1)=X \qquad (16)$$

θέτω τότε εἰς τὴν (12) ὅπου y τὸ $y_1+\omega$ καὶ λαμβάνω :

$$F(y_1+\omega)=X \qquad \text{ἢ καὶ} \qquad F(y_1)+F(\omega)=X$$

ὅθεν δυνάμει τῆς (16) προκύπτει $F(\omega)=0. \qquad (17)$

Ἑπομένως ἀρκεῖ νὰ εὕρω γενικὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως (17) ἵνα ἔχω τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα τῆς (12) διότι $y=y_1+\omega$.

Ἐντεῦθεν ἕπεται τὸ ἑξῆς θεώρημα.

Ἵνα εὕρω γενικὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως (12) ἀρκεῖ εἰς τυχοῦσαν μερικὴν λύσιν αὐτῆς νὰ προσθέσω τὴν γενικὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως $F(y)=0$(¹). Τοῦτο ἄλλως τε εἶναι μερικὴ περίπτωσις προτάσεως ἀποδειχθείσης ἀνωτέρω.

77.—Κατὰ τὰ προηγούμενα (§ 75, 76) ἵνα εὕρω τὴν γενικὴν λύσιν μιᾶς γραμμικῆς ἐξισώσεως τῆς μορφῆς

$$A_0y''+2A_1y'+A_2y=X \qquad (12')$$

ὅπου τὰ A_0, A_1, A_2 εἶναι σταθεροὶ ἀριθμοὶ ἀρκεῖ νὰ εὕρω μίαν οἱανδήποτε μερικὴν λύσιν αὐτῆς. Ὑπάρχουν πολλαὶ μερικαὶ περιπτώσεις εἰς τὰς ὁποίας εὑρίσκεται εὐκόλως τοιαύτη μερικὴ λύσις. Οὕτω 1) ἔστω ὅτι

$$X=\alpha_0x^\mu+\alpha_1x^{\mu-1}+\ldots+\alpha_\mu$$

ὅπου μ θετικὸς ἀκέραιος· τότε θέτω

$$y=\lambda_0x^\mu+\lambda_1x^{\mu-1}+\ldots+\lambda_\mu$$

καὶ ζητῶ νὰ προσδιορίσω διὰ τῆς μεθόδου τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν τὰ $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_\mu$ οὕτως ὥστε νὰ ἐπαληθεύεται ἡ (12'). Εὐκόλως εὑρίσκω ὅτι τοῦτο κατορθοῦται, ἐὰν $A_2 \neq 0$.

Ἐὰν $A_2=0$ καὶ $A_1 \neq 0$ θέτω $y=\lambda_0x^{\mu+1}+\lambda_1x^\mu+\ldots+\lambda_{\mu+1}$ καὶ ἐργάζομαι ὁμοίως. Ἐὰν τέλος $A_2=0$, $A_1=0$ τότε θέτω

$$y=\lambda_0x^{\mu+2}+\lambda_1x^{\mu+1}+\ldots+\lambda_{\mu+2}$$

καὶ ἐργάζομαι ὁμοίως.

(¹) Εἶναι προφανὲς ὅτι δὲν διαφέρει ἡ $F(y)=0$ τῆς $F(\omega)=0$, εἰμὴ κατὰ τὸ ὅτι εἰς τὴν πρώτην ἐξ αὐτῶν σημειῶ τὴν ἄγνωστον συνάρτησιν διὰ τοῦ y, ἐνῶ εἰς τὴν δευτέραν τὴν σημειῶ διὰ τοῦ ω.

$y' = e^{ax}(a\lambda + \lambda')$
$y'' = e^{ax}(a^2\lambda + 2a\lambda' + \lambda'')$

2) Ἔστω ὅτι $X = Ae^{ax}$· θέτω τότε $y = \lambda e^{ax}$ καὶ ζητῶ νὰ προσδιορίσω τὸ λ οὕτως ὥστε νὰ ἐπαληθεύεται ἡ (12')· ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ ἔχω

$$\lambda(A_0 a^2 + 2A_1 a + A_2) = A$$

ὅθεν προσδιορίζεται τὸ λ ἐφόσον τὸ $A_0 a^2 + 2A_1 a + A_2$ [δηλ. τὸ χαρακτηριστικὸν πολυώνυμον $\varphi(a)$ τοῦ $F(y)$ (§ 77)] δὲν εἶναι μηδέν. Ἐὰν ὅμως $\varphi(a) = 0$, θέτω $y = \lambda x e^{ax}$ καὶ ζητῶ πάλιν νὰ προσδιορίσω τὸ λ οὕτως ὥστε νὰ ἐπαληθεύεται ἡ (12') ὁπότε εὑρίσκω ὅτι πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ λάβω $\lambda = \dfrac{A}{\varphi'(a)}$. Ἐὰν τέλος $\varphi(a) = 0$, $\varphi'(a)$ $0 =$ θέτω: $y = \lambda x^2 e^{ax}$ ὁπότε εὑρίσκω $\lambda = \dfrac{A}{\varphi''(a)}$.

Οὕτως εὑρίσκω ἓν μερικὸν ὁλοκλήρωμα ὅταν $\varphi(a) \neq 0$, τὸ ἑξῆς: $\dfrac{Ae^{ax}}{\varphi(a)}$ · ὅταν $\varphi(a) = 0$ καὶ $\varphi'(a) \neq 0$, εὑρίσκω τὸ $\dfrac{Axe^{ax}}{\varphi'(a)}$ καὶ ὅταν $\varphi(a) = 0, \varphi'(a) = 0$ εὑρίσεω τὸ $\dfrac{Ax^2e^{ax}}{\varphi''(a)}$.

3) Ἔστω ἤδη ὅτι $F(y) = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_\nu$ (18)

ὅπου τὰ X_i εἶναι τυχοῦσαι συναρτήσεις τοῦ x καὶ ἔστω ὅτι ἔχωμεν μερικήν τινα λύσιν y_1 τῆς $F(y) = X_1$, μερικήν τινα λύσιν y_2 τῆς $F(y) = X_2$ κ. ο. κ. Ἐπειδὴ $F(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_\nu) = F(y_1) + F(y_2) + \ldots + F(y_\nu) = X_1 + X_2 + \ldots + X_\nu$. θὰ ἔχω ὅτι ἡ $y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_\nu$ εἶναι λύσις τῆς (18).

78.—Ἐφαρμόζων ἐπίσης τὰ προηγούμενα εὑρίσκω εὐκόλως μερικὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως (12') εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ X εἶναι ἄθροισμα πολυωνύμων καὶ ὅρων τῆς μορφῆς Ae^{ax}· ὁμοίως εὑρίσκω εὐκόλως μερικὴν λύσιν τῆς (12') καὶ ὅταν τὸ X εἶναι ἄθροισμα ὅρων τῆς μορφῆς $A\sigma\upsilon\nu ax + B\eta\mu ax$ διότι:

$$A\sigma\upsilon\nu ax + B\eta\mu ax = \frac{A - Bi}{2} e^{iax} + \frac{A + Bi}{2} e^{-iax},$$

ἐπομένως ἀνάγεται ἡ περίπτωσις αὕτη εἰς τὰς δύο τελευταίας.

Οὕτως ἐὰν ἔχω $X = A\sigma\upsilon\nu ax + B\eta\mu ax$ ἀρκεῖ νὰ εὕρω

1) μερικὴν λύσιν τῆς $F(y)=\frac{A-Bi}{2}.e^{iax}$ (19)

καὶ 2) μερικὴν λύσιν τῆς $F(y)=\frac{A+Bi}{2}\ e^{-iax}$. (20)

Παρατηρῶ μάλιστα ὅτι ἐὰν ἔχω μερικήν τινα λύσιν τῆς πρώτης $y=u+iv$ θὰ ἔχω ἀμέσως καὶ μερικὴν λύσιν τῆς δευτέρας, τὴν $y=u-iv$· ἑπομένως θὰ ἔχω καὶ μερικὴν λύσιν τῆς $F(y)=X$, τὴν $y=2u$ ἐξ οὗ συμπεραίνω ὅτι διὰ νὰ ἔχω μερικὴν λύσιν τῆς $F(y)=X$, ἀρκεῖ νὰ λάβω τὸ διπλάσιον τοῦ πραγματικοῦ μέρους τῆς πρώτης λύσεως.

Ἔστω ἤδη 1) ὅτι τὸ ia δὲν εἶναι ρίζα τῆς χαρακτηριστικῆς διὰ τὴν $F(y)=0$ ἐξισώσεως· τότε συμφώνως πρὸς τὰ προηγούμενα δύναμαι νὰ προσδιορίσω δύο πραγματικοὺς λ καὶ μ τοιούτους ὥστε ἡ ἐξίσωσις (19) νὰ ἔχῃ μερικὴν λύσιν τὴν $y=\frac{1}{2}(\lambda-\mu i)\ e^{iax}$, ὁπότε θὰ εἶναι μερικὴ λύσις τῆς (20) ἡ $y=\frac{1}{2}(\lambda+\mu i)\ e^{-iax}$ καὶ ἑπομένως λύσις τῆς $F(y)=A\sigma\upsilon\nu\ ax+B\eta\mu x$ (21) ἡ $y=\lambda\sigma\upsilon\nu ax+\mu\eta\mu ax$.

2) ὅτι τὸ ia εἶναι ρίζα τῆς χαρακτηριστικῆς· τότε θὰ ὑπάρχῃ μερικὴ λύσις διὰ τὴν (21) τῆς μορφῆς

$$y=x\left[\frac{1}{2}(\lambda-\mu i)\ e^{iax}+\frac{1}{2}(\lambda+\mu i)\ e^{-iax}\right]=x(\lambda\sigma\upsilon\nu ax+\mu\eta\mu ax)$$

Διὰ νὰ διακρίνω ἐὰν τὸ ia εἶναι ρίζα τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως ζητῶ ἐὰν τὸ συναx καὶ ημαx εἶναι μερικαὶ λύσεις τῆς $F(y)=0$· διότι ὅταν τὸ ia εἶναι ρίζα τῆς χαρακτηριστικῆς θὰ εἶναι καὶ τὸ —ia ρίζα αὐτῆς καὶ θὰ ἔχω ὅτι λύσεις τῆς $F(y)=0$ θὰ εἶναι καὶ αἱ e^{iax}, e^{-iax}, $\frac{1}{2}e^{iax}+\frac{1}{2}e^{-iax}=\sigma\upsilon\nu ax$, $\frac{1}{2i}e^{-iax}-\frac{1}{2i}e^{-iax}=\eta\mu ax$ καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν ἡ $F(y)=0$ ἔχῃ ὡς λύσεις τὰς $y=\sigma\upsilon\nu ax$ καὶ $y=\eta\mu ax$ θὰ ἔχῃ ὡς λύσιν καὶ τὴν $y=\sigma\upsilon\nu ax+i\eta\mu ax=e^{iax}$ ἤτοι ἡ ia θὰ εἶναι ρίζα τῆς χαρακτηριστικῆς.

Κατὰ ταῦτα ἵνα εὕρω μερικὴν λύσιν τῆς (12′) εἰς τὴν περίπτωσιν καθ᾽ ἣν τὸ X εἶναι τῆς μορφῆς $A\sigma\upsilon\nu ax+B\eta\mu ax$ δύναμαι νὰ διακρίνω δύο περιπτώσεις.

1) Ὅταν τὸ $y=X$ δὲν εἶναι ὁλοκλήρωμα τῆς $F(y)=0$· τότε ἀρκεῖ

νὰ θέσω $y=\lambda\sigma\upsilon\nu\alpha x+\mu\eta\mu\alpha x$ (ὅθεν προσδιορίζονται τὰ y', y'') εἰς τὴν (21) καὶ νὰ ἐξισώσω τοὺς συντελεστὰς τοῦ συναx εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη ὅπως καὶ τοὺς συντελεστὰς τοῦ ημαx· ὁπότε θὰ ἔχω δύο σχέσεις ἐξ ὧν ὁρίζονται τὰ λ, μ.

2) Ὅταν τὸ $y=X$ εἶναι ὁλοκλήρωμα τῆς $F(y)=0$ τότε θέτω $y=X(\lambda\sigma\upsilon\nu\alpha x+\mu\eta\mu\alpha x)$ καὶ προσδιορίζω κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὰ λ καὶ μ ἵνα τοῦτο εἶναι μερικὸν ὁλοκλήρωμα τῆς (12′).

79.—***Παράδειγμα.*** Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $y''+y=\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu 2x$. Ἵνα εὕρω μερικὸν ὁλοκλήρωμα ζητῶ τοιοῦτον διὰ τὴν ἐξίσωσιν $y''+y=\sigma\upsilon\nu x$ καὶ διὰ τὴν ἐξίσωσιν $y''+y=\eta\mu 2x$.

Διὰ τὴν πρώτην παρατηρῶ ὅτι τὸ $y=\sigma\upsilon\nu x$ εἶναι ὁλοκλήρωμα τῆς $y''+y=0$· διὸ συμφώνως πρὸς τὰ προηγούμενα θέτω $y=x(\lambda\sigma\upsilon\nu x+\mu\eta\mu x)$ καὶ προσδιορίζω (κατὰ τὸν ὑποδειχθέντα τρόπον τὰ λ, μ εὑρίσκω οὕτω $\lambda=0$, $\mu=\frac{1}{2}$ καὶ ἑπομένως $y=\frac{x\eta\mu x}{2}$.

Διὰ τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν θέτω $y=\lambda\eta\mu 2x+\mu\sigma\upsilon\nu 2x$ καὶ εὑρίσκω ὡς μερικὸν ὁλοκλήρωμα τὸ $y=-\frac{\eta\mu 2x}{3}$.

Ἀφ' ἑτέρου ἵνα εὕρω τὴν γενικὴν λύσιν τῆς $y''+y=0$ παρατηρῶ ὅτι αἱ ῥίζαι τῆς χαρακτηριστικῆς $\varrho^2+1=0$ εἶναι $\varrho=\pm i$ καὶ ἔχω ὡς γενικὴν λύσιν τὴν $y=c_1\sigma\upsilon\nu x+c_2\eta\mu x$. Ὅθεν (§ 75) γενικὴ λύσις τῆς ἀρχικῆς ἐξισώσεως εἶναι ἡ

$$y=\frac{1}{2}x\eta\mu x-\frac{1}{3}\eta\mu 2x+c_1\sigma\tau\nu x+c_2\eta\mu x.$$

80.—***Μέθοδος μεταβολῆς τῶν αὐθαιρέτων σταθερῶν διὰ τὴν γενικὴν λύσιν τῆς γραμμικῆς ἐξισώσεως*** (4).—Ἔστωσαν y_1, y_2 δύο μερικαὶ λύσεις τῆς (5) τοιαῦται ὥστε $y_1y'_2-y_2y'_1\neq 0$· ζητῶ νὰ προσδιορίσω δύο συναρτήσεις $c_1(x)$, $c_2(x)$ οὕτως ὥστε ἡ

$$y=c_1(x)y_1+c_2(x)y_2 \qquad (22)$$

νὰ εἶναι λύσις τῆς (4). Πρέπει πρὸς τοῦτο προφανῶς νὰ ἔχω

$$c''_1y_1+c''_2y_2+2c'_1y'_1+2c'_2y'_2+c'_1y''_1+c'_2y''_2+\sigma c'_1y_1+\sigma c'_2y_2+$$
$$+\sigma c_1y'_1+\sigma c_2y'_2+\varphi c_1y_1+\varphi c_2y_2=f.$$

ἐπειδὴ τὰ y_1 καὶ y_2 εἶναι λύσεις τῆς (5) θὰ ἔχω

$$c_1y''_1+c_1\sigma y_1'+c_1\varphi y_1+c_2y''_2+c_2\sigma y'_2+c_2\varphi y_2=0.$$

Παρατηρῶ ἀφ' ἑτέρου ὅτι ἐὰν εἶχον $c'_1y_1+c'_2y_2=0$ (23)

θὰ εἶχον ἐπίσης $c''_1y_1+c''_2y_2+c'_1y'_1+c_2'y'_2=0$· ὁπότε θὰ ἀπέμενε τελικῶς νὰ ἔχω

$$c'_1y'+c'_2y'_2=f \qquad (24)$$

ἤτοι διὰ νὰ εἶναι ἡ (22) λύσις τῆς (4) ἀρκεῖ νὰ προσδιορίσω τὰ $c_1(x)$ καὶ $c_2(x)$ οὕτως ὥστε νὰ πληρῶνται αἱ συνθῆκαι (23) (24). ὅθεν

$$c_1(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{f.\,y_2dx}{y'_1y_1-y_2'y_1}+K_1$$

$$c_2(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{fy_1dx}{y'_2y_1-y'_1y_2}+K_2$$

ὅπου τὰ K_1, K_2, εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί.

Ἀσκήσεις.

Νὰ λυθῶσιν αἱ ἑξῆς διαφορικαὶ ἐξισώσεις.

1) $2yy''-y'^2+2=0$

2) $y''=K(y'^2+1)^{\frac{3}{2}}$

3) $y'=y''(x+y'')$

4) $yy''(y'-1)+y'(y'^2+1)=0$

5) $y'^2-yy''=\mu(y'^2+\alpha^2y''^2)^{\frac{1}{2}}$

6) $x^3y''=(xy'-y)^2$

7) $y'y''(1+y'^2)=y''^2(3y'^2-1)$

8) $yy''+y'(y'^2+1)^{\frac{1}{2}}=0$.

9) $Kyy''+2(1-K)y'^2(y'^2+1)=0$.

Νὰ εὑρεθῶσι προσέτι ἀριθμητικαὶ τιμαὶ τοῦ K δι' ἃς εὑρίσκεται τὸ τελικῶς προκῦπτον ἀόριστον ὁλοκλήρωμα.

10) $(x+\alpha)y''+xy'^2=y'$

11) $y''+y'+y=e^{2x}$

12) $y''+3y'+2y=\frac{x}{(x+1)^2}$

13) $y''+y'+y=\eta\mu 2x$

14) $y''+4y'+4y=4(x+1)$

15) $y''+4y=x\eta\mu^2 x$

16) $y''+y=x^2$

17) $y''+\alpha^2 y=\sigma\upsilon\nu\beta x$

18) $y''+2y'+2y=1+2e^x\ \sigma\upsilon\nu x$

19) $x^2y''+xy'-y=0$

20) $y''(x^2+y^2)-2(y'^2+1)(xy'-y)=0$

21) $y''+2\alpha y'+\beta y=x^\mu$

22) $yy''-y'^2=y^2\log y$

23) $x^2y''+xy'-y=x^\mu$

24) $(\alpha+\beta x)^2y''+K(\alpha+\beta x)y'+\Lambda y=0$

25) $x^2y''+3xy'+y=\frac{1}{(1-x)^2}$

26) $(x-1)y''-xy'+y=(x-1)^2e^{2x}$

27) Νὰ εὑρεθῇ τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα τῆς ἐξισώσεως

$$(1+x^2)y''+2xy'-6x^2-2=0$$

τῆς ὁποίας μία μερικὴ λύσις εἶναι ἡ $y=x^2$

28) Νὰ ὁλοκληρωθῇ ὁμοίως ἡ ἐξίσωσις

$$x(1-x)y''+\left(\frac{3}{2}-2x\right)y'-\frac{y}{4}=0.$$

γνωστοῦ ὄντος ὅτι προσδιορίζεται ἀριθμός τις ν τοιοῦτος ὥστε ἡ $y=x^{\nu}$ νὰ εἶναι μερικὴ λύσις.

29) Ποία σχέσις πρέπει νὰ συνδέῃ τὰ $c_1(x)$, $c_2(x)$ ἵνα ἡ ἐξίσωσις $y''+c_1y'+c_2y=0$ ἔχῃ δύο μερικὰ ὁλοκληρώματα y_1, y_2 γραμμικῶς μὲν ἀνεξάρτητα συνδεόμενα δὲ διὰ τῆς σχέσεως $y_1y_2=1$.

30) Νὰ εὑρεθῇ τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως

$$xy''-y'-ax^3y=0$$

31) Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν $c_1(x)$ καὶ $c_2(x)$ ἵνα ἡ ἐξίσωσις $y''+c_1y'+c_2y=0$ ἔχῃ δύο μερικὰ ὁλοκληρώματα y_1, y_2 συνδεόμενα διὰ τῆς σχέσεως $y_2=xy_1$.

32) Νὰ μετασχηματισθῇ ἡ ἐξίσωσις $y''+ay'+\beta y=0$ λαμβανομένου ὡς τύπου μετασχηματισμοῦ τοῦ $\frac{y'}{y}=\omega$.

33) Νὰ προσδιορισθῇ ἡ $\omega(x)$ οὕτως ὥστε ἡ ἐξίσωσις

$$y''+2y'+\omega y=0$$

νὰ ἔχῃ δύο λύσεις y_1 καὶ y_2 συνδεομένας διὰ τῆς σχέσεως $y_2=e^x\,y_1$. Νὰ εὑρεθῇ γενικὴ λύσις.

Μερικαὶ περιπτώσεις διαφορικῶν ἐξισώσεων ν τάξεως.

1) Ἔστω ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $f(x,y^{(\lambda)}, y^{(\lambda+1)}, \dots y^{(\nu)})=0$ δηλ. ἔστω ὅτι ἐλλείπουσι τὰ y, y', y'', $\dots$ $y^{(\lambda-1)}$ τότε ἀρκεῖ προφανῶς νὰ θέσω $y^{(\lambda)}=\omega$ ἵνα λάβω διαφορικὴν ἐξίσωσιτ $\nu-\lambda$ τάξεως ὡς πρὸς ω· ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι ὁρίζεται τὸ ω θὰ ἔχω τότε δι᾽ ἑνὸς τετραγωνισμοῦ τὸ $y^{(\lambda-1)}$ διότι $y^{(\lambda-1)}=\int\omega dx$· ἐπίσης ἐκ τοῦ $y^{(\lambda-1)}$ ὁρίζεται δι᾽ ἑνὸς τετραγωνισμοῦ τὸ $y^{(\lambda-2)}$ διότι $y^{(\lambda-2)}=\int y^{(\lambda-1)}dx$ κ.ο.κ.

2) Ἔστω ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $f(y, y', \ldots y^{(\nu)})=0$· θέτω τότε $y'=p$ καὶ λαμβάνω διαφορικὴν ἐξίσωσιν $\nu-1$ τάξεως ὡς πρὸς p.

3) Ἔστω διαφορικὴ ἐξίσωσις ὁμογενὴς ὡς πρὸς τὸ y καὶ τὰς παραγώγους αὐτῆς, τότε δύναται νὰ τεθῇ ἡ ἐξίσωσις αὕτη ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\sigma\left[x, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y} \ldots \frac{y^{(\nu)}}{y}\right]=0$$

ἐξ οὗ φαίνεται ὅτι ἀρκεῖ νὰ τεθῇ $\frac{y'}{y}=\omega$ ἤτοι $\log y=\int \omega dx$ ἢ καὶ

$y=e^z$ ὅπου $z=\int \omega dx$ ἵνα προκύψῃ διαφορικὴ ἐξίσωσις $\nu-1$ τάξεως ὡς πρὸς ω.

Παρατήρησις. Αἱ ἐκτεθεῖσαι εἰς τὰ προηγούμενα θεωρίαι αἱ ἀφορῶσαι γραμμικὰς ἐξισώσεις δευτέρας τάξεως μὲ σταθεροὺς συντελεστὰς ὅπως ἐπίσης καὶ ἡ μέθοδος τῆς μεταβολῆς τῶν αὐθαιρέτων σταθερῶν κ. λ. π. ἐπεκτείνωνται καὶ εἰς τὰς γραμμικὰς ἐξισώσεις ν τάξεως. Θὰ ἐξετασθῇ λεπτομερῶς ὁ τρόπος τῆς ἐπεκτάσεως ταύτης εἰς τὸν δεύτερον τόμον τοῦ παρόντος ἔργου.