ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΤΗΣ
ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

(ΑΝΑΤΥΠΩΣΙΣ)

ΥΠΟ
ΓΕΩΡΓΙΟΥ Ι. ΡΕΜΟΥΝΔΟΥ
ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΗΣ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ
ΕΝ ΤΩι ΕΘΝΙΚΩι ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΩι ΚΑΙ ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΩι

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

ΝΕΑ ΕΚΔΟΣΙΣ

ΑΘΗΝΑΙ

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ
ΓΕΩΡΓΙΟΥ Ι. ΚΟΡΦΙΑΤΗ
ΙΠΠΟΚΡΑΤΟΥΣ 2Α · ΤΗΛ. 617.561
ΑΘΗΝΑΙ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΤΗΣ
ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

(ΑΝΑΤΥΠΩΣΙΣ)

ΥΠΟ
ΓΕΩΡΓΙΟΥ Ι. ΡΕΜΟΥΝΔΟΥ
ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΗΣ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ
ΕΝ ΤΩι ΕΘΝΙΚΩι ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΩι ΚΑΙ ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΩι

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

ΝΕΑ ΕΚΔΟΣΙΣ

ΑΘΗΝΑΙ

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ
ΓΕΩΡΓΙΟΥ Ι. ΚΟΡΦΙΑΤΗ
ΙΠΠΟΚΡΑΤΟΥΣ 2α · ΤΗΛ. 617.561
ΑΘΗΝΑΙ

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τήν ὑπογραφήν τῶν κληρονόμων.

Β Ι Β Λ Ι Ο Ν Γ΄

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΑΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Ἀναγωγή συστήματος διαφορικῶν ἐξισώσεων

1. Ἐν τῷ πρώτῳ τόμῳ (σελ. 77) εἴδομεν, ὅτι πᾶσα διαφορική ἐξίσωσις οἱασδήποτε τάξεως ἀνάγεται διά βοηθητικῶν μεταβλητῶν εἰς σύστημα διαφορικῶν ἐξίσωσεων πρώτης τάξεως. Ἀντιστρόφως, πᾶν σύστημα διαφορικῶν ἐξισώσεων πρώτης τάξεως ἀνάγεται εὐκόλως εἰς μίαν διαφορικήν ἐξίσωσιν μετά μιᾶς μόνον ἀγνώστου συναρτήσεως.

Θεωρήσωμεν κατ᾽ἀρχάς σύστημα δύο ἐξισώσεων μετά δύο ἀγνώστων:

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x,y,z)$$

$$(1') \qquad \frac{dz}{dx} = \varphi(x,y,z)$$

Ἐκτελοῦντες ἐπί τῆς πρώτης ἐξισώσεως παραγωγήν ὡς πρός x εὑρίσκομεν

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx}$$

καί ἀντικαθιστῶντες κατόπιν τό $\frac{dz}{dx}$ διά τοῦ $\varphi(x,y,z)$, λαμβάνομεν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f_1\left(x,y,z,\frac{dy}{dx}\right) \qquad (2)$$

'Εάν δέ άπαλείψωμεν τό z μεταξύ τῶν ἐξισώσεων (1) καί (2) εὑρίσκομεν διαφορικήν ἐξίσωσιν:

$$F\ x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \qquad (3)$$

δευτέρας τάξεως μετά μιᾶς ἀγνώστου συναρτήσεως y , 'Εάν αὕτη λυθῇ καί εὑρεθῇ ἡ γενική λύσις $y = \sigma(x)$, ἥτις περιέχει καί αὐθαιρέτους σταθεράς, εὑρίσκεται ἄνευ νέας ὁλοκληρώσεως καί τοῦ συστήματος ἡ γενική λύσις, διότι διά τῆς ἀντικαταστάσεως $y = \sigma(x)$ ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται:

$$\sigma'(x) = f\left[x, \sigma(x), z\right]$$

ἐξ αὐτῆς δέ προσδιορίζεται ἀλγεβρικῶς τό z ὡς συνάρτησις τοῦ x.

Ὥστε ἡ ὁλοκλήρωσις τοῦ δοθέντος συστήματος ἀνάγεται εἰς τήν ὁλοκλήρωσιν τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (3).

Γεωμετρική σημασία. 'Εάν αἱ μεταβληταί x,y,z, παριστῶσι Καρτεσιανάς συντεταγμένας, ἡ λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος σημαίνει τήν εὕρεσιν πασῶν τῶν καμπύλων, ἐν αἷς τά διευθύνοντα συνημίτονα τῆς ἐφαπτομένης εἶναι ἀνάλογα τῶν 1, f(x,y,z), φ(x,y,z), διότι τό σύστημα δύναται νά γραφῇ καί ὡς ἑξῆς:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{f(x,y,z)} = \frac{dz}{\varphi(x,y,z)}$$

Σημ. Γνωρίζομεν ἐκ τοῦ πρώτου τόμου (σελ. 75-78), ὅτι ἡ γενική λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος περιέχει δύο αὐθαιρέτους σταθεράς.

Παράδειγμα: Ἔστω τό σύστημα:

$$\frac{dy}{dx} = x+y+2z \qquad \frac{dz}{dx} = x+z+2y$$

'Εκτελοῦντες παραγωγήν τῆς πρώτης ὡς πρός , εὑρίσκομεν:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 + \frac{dy}{dx} + 2\frac{dz}{dx}$$

καί ἀπαλείφοντες μεταξύ τῶν τριῶν τούτων ἐξισώσεων τά z καί $\frac{dz}{dx}$ εὑρίσκομεν:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 1 + x$$

Ἡ διαφορική αὔτη ἐξίσωσις εἶναι γραμμική ἔχουσα τήν μερικήν λύσιν $y = -\frac{x}{3} - \frac{1}{9}$ καί ἐπομένως ἡ γενική λύσις εἶναι

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x} - \frac{x}{3} - \frac{1}{9}$$

ἥτις εἰσαγομένη εἰς τήν ἐξίσωσιν:

$$\frac{dy}{dx} = x + y + 2z$$

δίδει καί τήν γενικήν τιμήν τῆς συναρτήσεως z , ἥτις εἶναι:

$$z = -C_1 e^{x} + C_2 e^{3x} - \frac{x}{3} - \frac{1}{9}$$

2. Θεωρήσωμεν ἤδη σύστημα ν ἐξισώσεων πρώτης τάξεως:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1 . y_2, \dots y_\nu) \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2 \dots y_\nu) \qquad (4) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dy_\nu}{dx} &= f_\nu(x, y_1 . y_2, \dots y_\nu) \end{aligned}$$

ὅπου x εἶναι ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητή καί $y_1, y_2, \dots, y_\nu$ αἱ ἄγνωστοι συναρτήσεις. Γνωρίζομεν ἐκ τοῦ πρώτου τόμου, ὅτι ἐάν τά δεύτερα μέλη εἶναι ὁλόμορφοι συναρτήσας ἐν τῇ περιοχῇ τῶν τιμῶν.

$$x = x_0, y_1 = C_1, y_2 = C_2, \dots; y_\nu = C_\nu$$

ὑπάρχει μία λύσις (καί μία μόνη), ἀποτελουμένη ἐκ συναρτήσεων: $y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), \dots y_\nu = \varphi\nu(x)$. ὁλομόρφων ἐν τῇ περιοχῇ τῆς τιμῆς $x = x_0$ καί λαμβανουσῶν διά τήν τιμήν ταύτην κατά σειράν τάς τιμάς $y_1 = c_1, y_2 = c_2, \dots, y_\nu = C\nu$. Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι ἡ γενική λύσις τοῦ συστήματος θά περιέχῃ ν αὐθαιρέτους σταθεράς $C_1; C_2, \dots C_\nu$, διότι ἀποδεικνύεται ὅτι, ἐκτός τῆς ὁλομόρφου λύσεως, δέν ὑπάρχει ἄλλη τοιαύτη, ὥστε ὅτα ν τό x τείνῃ πρός τήν τιμήν x_0, τά $y_1, y_2, \dots, y_\nu$ νά τείνωσιν ἀντιστοίχως πρός τάς τιμάς $C_1, C_2, \dots, C_\nu$: 'Εάν δηλαδή θεωρηθῇ ἡ ὁλόμορφος λύσις ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τάς ἀρχικάς συνθήκας ($x_0, C_1, C_2, \dots C_\nu$), ὅπου τά $C_1, C_2, \dots C_\nu$ εἶναι αὐθαίρεται σταθεραί, αὕτη καλεῖται γενική λύσις, διότι ἐξ αὐτῆς προκύπτει, δι' ἁρμοδίων τιμῶν τῶν αὐθαιρέτων σταθερῶν, πᾶσα λύσις ἀπαντῶσα εἰς ἀρχικάς τιμάς, ἐν τῇ περιοχῇ τῶν ὁποίων τά δεύτερα μέλη τοῦ συστήματος (4) εἶναι ὁλόμορφοι συναρτήσεις.

Διά τῆς μεθόδου τῆς ἐκτεθείσης ἐν τῷ προηγουμένῳ ἐδαφίῳ ἡ ὁλοκλήρωσις τοῦ συστήματος (4) ἀνάγεται εἰς τήν ὁλοκλήρωσιν μιᾶς μόνον διαφορικῆς ἐξισώσεως μετά μιᾶς ἀγνώστου συναρτήσεως. 'Εκτελοῦμεν παραγωγήν ὡς πρός x τῆς πρώτης (πχ) ἐξισώσεως ὅτε εὑρίσκομεν:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} y + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} y_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y} y^\nu$$

ἐάν δέ ἐν αὐτῇ ἀντικαταστήσωμεν τάς παραγώγους $y'_1, y'_2 \dots y'_\nu$ διά τῶν $f_1, f_2, \dots, f_\nu$ εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς.

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \sigma_1(x, y_1, y_2, \dots y_\nu)$$

'Εργαζόμενοι ὁμοίως ἐπ' αὐτῆς εὑρίσκομεν:

$$\frac{d^3y_1}{dx^2} = \sigma_2\,(x, y_1, y_2, \dots y_\nu)$$

καί οὕτω καθεξῆς προχωροῦντες, φθάνομεν εἰς:

$$\frac{d^\nu y}{dx^\nu} = \sigma_{\nu-1}(x, y_1, y_2 \dots y^\nu)$$

ἀπαλείφοντες δέ κατόπιν τά $y_2 y_3 \dots y_\nu$ μεταξύ τῆς πρώτης τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος καί τῶν διά τῆς παραγωγῆς εὑρεθεισῶν λαμβάνομεν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς.

$$F\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx^2} \dots \frac{d^\nu y_1}{dx^\nu}\right) = 0$$

'Εάν εὑρεθῇ ἡ γενική λύσις αὐτῆς $y_1 = \Sigma(C_1, C_2, \dots C_\nu)$ καί εἰσαχθῇ εἰς τάς ἐξισώσεις:

$$\frac{dy_1}{dy_\nu} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_\nu)$$

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \sigma_1(x,y_1,y_2\ldots\ldots y^\nu)$$

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = \sigma_2(x,y_1\, y_2\ldots\ldots y^\nu)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^{\nu-1}y_1}{dx^{\nu-1}} = \sigma_{\nu-2}(x,y_1,y_2,\ldots\ldots y_\nu)$$

γνώστων συναρτήσεων y_2, y_3,....., y_ν, αἵτινες οὕτω προσδιορίζονται ἄνευ νέας ολοκληρώσεως.

Σημ. Συμβαίνει ἐνίοτε ἡ ἄγνωστος συνάρτησις y_1, ἐξ ἧς ἀναχωροῦμεν, νά προσδιορίζεται διά διαφορικῆς ἐξισώσεως τάξεως μικροτέρας τοῦ ν, ἀλλά τότε ἀπαιτοῦνται νέαι ὁλοκληρώσεις διά τόν προσδιορισμόν τῶν λοιπῶν.

3. Ὀρθογώνιοι τροχιαί οἰκογενείας ἐπιφανειῶν. Ἔστω:

$$f(x,y,z) = \alpha \qquad (5)$$

ἡ ἐξίσωσις οἰκογενείας ἐπιφανειῶν μετά μιᾶς μεταβλητῆς παραμέτρου α, τήν ὁποίαν χάριν εὐκολίας θεωροῦμεν λελυμένην ὡς πρός τήν παράμετρον α. Ἐάν ἡ συνάρτησις $f(x,y,z)$ εἶναι μονότιμος, δι'ἑκάστου σημείου τοῦ διαστήματος διέρχεται προφανῶς μία ἐπιφάνεια τῆς οἰκογενείας. Ζητοῦμεν νά εὕρωμεν γραμμάς τεμνούσας κατ' ὀρθήν γωνίαν τάς ἐπιφανείας τῆς οἰκογενείας, δηλαδή τοιαύτας ὥστε ἡ ἐφαπτομένη εἰς ἕκαστον σημεῖον νά εἶναι κάθετος ἐπί τήν ἐπιφάνειαν τῆς οἰκογενείας τήν διερχομένην διά τοῦ σημείου τούτου.

Αἱ ἐξισώσεις ἐφαπτομένης γραμμῆς εἰς τι σημεῖον (x,y,z,) εἶναι:

$$\frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy} = \frac{Z-z}{dz}$$

αἱ δέ τῆς καθέτου ἐπί τήν ἐπιφάνειαν (5) εἰς τό αὐτό σημεῖον εἶναι:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

Πρέπει λοιπόν νά ἔχωμεν:

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

τό προκείμενον ἐπομένως πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τήν λύσιν συστήματος δύο διαφορικῶν ἐξισώσεων πρώτης τάξεως τῆς μορφῆς (1,1΄).

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α. Εὑρεῖν τάς ὀρθογωνίους τροχιάς τῶν παραβολοειδῶν.

$$\frac{xy}{z} - a = 0$$

Τό πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τήν λύσιν τοῦ διαφορικοῦ συστήματος.

$$\frac{dx}{\frac{y}{z}} = \frac{dy}{\frac{x}{z}} = \frac{dz}{-\frac{xy}{z^2}}$$

τό ὁποῖον γράφεται:

$$xdx + zdz = 0$$
$$ydy + zdz = 0$$

ἡ ὁλοκλήρωσις γίνεται ἀμέσως καί δίδει:

$$x^2 + z^2 = C_1, \quad y^2 + z^2 = C_2$$

δηλαδή αἱ ζητούμεναι τροχιαί εἶναι τομαί δύο κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν, ὧν ἡ μέν μία ἀνήκει εἰς οἰκογένειαν κυλίνδρων παραλλήλων τῷ ἄξονι Oy , ἡ δέ ἄλλη εἰς οἰκογένειαν κυλίνδρων παραλλήλων τῷ ἄξονι Ox.

Συστήματα γραμμικά.

4. Ὅπως μία ἐξίσωσις διαφορική οἱασδήποτε τάξεως ἀνάγεται εἰς σύστημα ἐξισώσεων πρώτης τάξεως, καθ'ὅμοιον τρόπον ἕν σύστημα οἱασδήποτε τάξεως ἀνάγεται διά τῆς χρήσεως βοηθητικῶν μεταβλητῶν εἰς σύστημα ἐξισώσεων πρώτης τάξεως.

Ἔστω:

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} + Ax + By + \Gamma z = 0 \\ &\frac{dy}{dt} + A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z = 0 \qquad (6) \\ &\frac{dz}{dt} + A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z = 0 \end{aligned}$$

ἕν σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων (πρώτου βαθμοῦ ὡς πρός τάς συναρτήσεις x, y, z καί τάς παραγώγους αὐτῶν) ὁμογενῶν. Κατά τό θεμελιῶδες θεώρημα τῆς ὑπάρξεως (τόμος Α΄ σελ. 80 - 81) αἱ λύσεις τοιούτου συστήματος ἀποτελοῦνται ἐκ συναρτήσεων ὁλομόρφων ἐν τῇ περιοχῇ παντός σημείου τοῦ ἐπιπέδου t, τό ὁποῖον εἶναι ὁμαλόν διά πάντας τούς συντελεστάς A, B, Γ, $A_1, B_1, \Gamma_1, A_2, B_2, \Gamma_2$, τῶν ὁποίων μόνον τ' ἀνώμαλα σημεῖα δύνανται νά εἶναι ἀνώμαλα διά τάς συναρτήσεις, ἐξ ὧν ἀποτελοῦνται αἱ λύσεις.

Ἡ εὕρεσις τῆς γενικῆς λύσεως τῶν γραμμικῶν συστημάτων γίνεται ὅπως καί εἰς τάς γραμμικάς μεμονωμένας ἐξισώσεις, ἐμάθομεν ἄλλως τε ὅτι εἰς τήν λύσιν αὐτῶν ἀνάγεται:

Ἐάν θεωρήσωμεν τρεῖς λύσεις:

$$(x_1 y_1 z_1),\ (x_2, y_2, z_2),\ (x_3, y_3 z_3),$$

αἱ τρεῖς συναντήσεις

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3,\ y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3,$$
$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3$$

ὅπου C_1, C_2, C_3 εἶναι αὐθαίρεται σταθεραί, ἀποτελοῦσιν ἐπίσης λύσιν, ἥτις θά εἶναι γενική, ἐάν δυνάμεθα νά διαθέσωμεν τάς σταθεράς C_1, C_2, C_3 οὕτως ὥστε διά τινα τιμήν $x = x_0$ αἱ συναρτήσεις x, y, z νά δύνανται νά λάβωσιν αὐθαιρέτους τιμάς ἐκ τῶν προτέρων δοθείσας. Διά νά συμβαίνῃ τοῦτο πρέπει νά μή εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν ἡ ὁρίζουσα

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

ὅτε τό σύστημα τῶν τριῶν λύσεων $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ λέγεται θεμελιῶδες.

Ἡ θεωρία αὕτη προφανῶς ἰσχύει γενικῶς διά πᾶν σύστημα ὁσωνδήποτε ἐξισώσεων γραμμικῶν ὁμογενῶν πρώτης τάξεως.

'Εάν θεωρήσωμεν σύστημα γραμμικόν μή όμογενές:

$$\frac{dx}{dt} + Ax + By + \Gamma z = \Delta$$
$$\frac{dy}{dt} + A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z = \Delta_1 \qquad (7)$$
$$\frac{dz}{dt} + A_2 x + B_2 v + \Gamma_2 z = \Delta_2$$

ή λύσις αύτοῦ ἀνάγεται εἰς τήν τοῦ ἀντιστοίχου ὁμογενοῦς, διότι ἐάν ἐφαρμόσωμεν τήν γνωστήν μέθοδον τῆς μεταβολῆς τῶν αὐθαιρέτων σταθερῶν τοῦ Lagrange ἐπί τῆς γενικῆς λύσεως:

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3, \quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$$
$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3$$

τοῦ ἀντιστοίχου ὁμογενοῦς, ἀναγόμεθα εἰς τό σύστημα.

$$x_1 \frac{dC_1}{dt} + x_2 \frac{dC_2}{dt} + x_3 \frac{dC_3}{dt} = \Delta$$
$$y_1 \frac{dC_1}{dt} + y_2 \frac{dC_2}{dt} \quad y_3 \frac{dC_3}{dt} = \Delta_1$$
$$z_1 \frac{dC_1}{dt} + z_2 \frac{dC_3}{dt} + z_3 \frac{dC_3}{dt} = \Delta_2$$

τό ὁποῖον λύεται ἀμέσως διά τετραγωνισμῶν (διά τῶν παραγουσῶν).

'Αποδεικνύεται ἐπίσης ὅπως καί εἰς τάς μεμονωμένας γραμμικάς ἐξισώσεις, ὅτι, ἐάν γνωρίζωμεν μίαν μερικήν λύσιν τοῦ συστήματος (7) x = X, y = Y, z = Z καί λάβωμεν τήν γενικήν λύσιν τοῦ ἀντιστοίχου ὁμογενοῦς, ή γενική λύσις τοῦ συστήματος (7) θά εἶναι:

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + X$$
$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + Y$$
$$z = c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 + Z$$

5. Συστήματα γραμμικά μετά σταθερῶν συντελεστῶν. Θεωρήσωμεν, π.χ. τό σύστημα.

$$\frac{dx}{dt} + \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = 0$$
$$\frac{dy}{dt} + \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = 0$$

$$\frac{dz}{dt} + \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = o$$

ἀποτελούμενον ἐκ τριῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων μετά σταθερῶν συντελεστῶν. Τοῦτο δύναται νά λυθῇ ὅπως καί αἱ μεμονωμέναι διαφορικαί ἐξισώσεις ἐάν ζητήσωμεν νά τό ἐπαληθεύσωμεν διά τριῶν συναρτήσεων τῆς μορφῆς:

$$x = \alpha e^{\rho},\ y = \beta e^{\rho},\ z = \gamma e^{\rho} \qquad (9')$$

ὅτε εὑρίσκομεν τάς σχέσεις:

$$\begin{aligned} (\alpha_1+\rho)\alpha+\beta_1\beta+\gamma_1\gamma &= o \\ \alpha_2\alpha+(\beta_2+\rho)\beta+\gamma_2\gamma &= o \\ \alpha_3\alpha+\beta_2\beta+(\gamma_3+\rho)\gamma &= o \end{aligned} \qquad (10)$$

αἵτινες ὀφείλουσι νά ἐπαληθεύωνται διά τιμάς τῶν α,β,γμή πάσας μηδενικάς. Πρός τοῦτο πρέπει καί ἀρκεῖ τό ρ νά εἶναι ῥίζα τῆς ἐξισώσεως:

$$Q(\rho) = \begin{vmatrix} \alpha_1+\rho & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2+\rho & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3+\rho \end{vmatrix} = o \qquad (11)$$

ἥτις λέγεται χαρακτηριστική, ὅτε τό σύστημα (10) δίδει τιμάς τῶν α,β,γ ὥστε εἰς πᾶσαν ῥίζαν τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως ἀντιστοιχεῖ μία τουλάχιστον λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος (9). Ἐάν αἱ ρίζαι ρ_1, ρ_2, ρ_3, τῆς ἐξισώσεως (11) εἶναι πᾶσαι ἁπλαῖ, ἔχομεν ἀμέσως τήν γενικήν λύσιν τοῦ συστήματος, διότι τρεῖς λύσεις τῆς μορφῆς (9΄)μέ τιμάς τοῦ ρ διαφόρους ἀλλήλων ἀποτελοῦσι πάντοτε θεμελιῶδες σύστημα λύσεων.

Ἐάν ἡ ἐξίσωσις (11) ἔχῃ ῥίζαν διπλήν ἀποδεικνύεται ὅτι εἰς αὐτήν ἀντιστοιχοῦσι δύο λύσεις τοῦ συστήματος, ἐάν τέλος ἡ χαρακτηριστική ἐξίσωσις ἔχῃ ῥίζαν τριπλῆν, αὕτη παρέχει τρεῖς λύσεις διαφόρους τοῦ συστήματος.

Ἡ θεωρία αὕτη ἐπεκτείνεται εἰς τήν γενικήν περίπτωσιν συστήματος ὁσωνδήποτε ἐξισώσεων πρώτης τάξεως γραμμικῶν ὁμογενῶν μετά σταθερῶν συντελεστῶν,παρατηροῦμεν δέ ὅτι δυνάμεθα ν'ἀποφύγωμεν αὐτήν ἀνάγοντες, κατά τόν γνωστόν τρόπον, τήν λύσιν τοῦ συστήματος εἰς τήν λύσιν μιᾶς γραμμικῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως μετά μιᾶς μόνον ἀγνώστου συναρτήσεως.

6. Ἀ σ κ ή σ ε ι ς.

Λῦσαι τά ἑξῆς συστήματα:

1) $\frac{dy}{dx} + 3y + z = 0 \quad \frac{dz}{dx} - y + z = 0$ A. $z = (C_1 + C_2x)e^{-2x}$, $y = (C_2 - C_1 - C_2x)e^{-2x}$

2) $\frac{dx}{dt} + 7x - y = 0 \quad \frac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0$ A. $x = e^{-6t}(C\sigma\upsilon\nu t + C_1\,\eta\mu\, t)$

$y = e^{-6t}\left((c+c_1)\sigma\upsilon\nu t + (c_1 - c)\,\eta\mu\, t\right)$

3) $\frac{dx}{dt} + 5x + y = e^t \quad \frac{dy}{dt} + 3y - x = e^{2t}$

A. $x = \frac{4}{25}e^t - \frac{1}{36}e^{2t} + (c + c_1t)e^{-4t}$

$y = \frac{1}{25}e^t + \frac{7}{36}e^{2t} - (c + c_1 + c_1t)e^{-4t}$

4) $\frac{dy}{dx} - y + z = \frac{3}{2}x^2$

$\frac{dz}{dx} + 4y + 2z = 1 + 4x$ A. $y = -\frac{x^2}{2} + ce^{2x} + c_1e^{-3x}$

$z = x^2 + x - ce^{2x} + 4c_1e^{-3x}$

5) $\frac{d^2x}{dt^2} + \mu^2 y = 0$ A. $x = e^{at}(C_1\sigma\upsilon\nu at + C_2\,\eta\mu at) + e^{at}(C_3\sigma\upsilon\nu at + C_4\eta\mu at)$

$\frac{d^2y}{dt^2} - \mu^2 x = 0$ $\quad y = e^{at}\left(\frac{1}{2}C_1\eta\mu at - \frac{1}{2}C_2\sigma\upsilon\nu at\right) + e^{-at}\left(\frac{1}{2}C_4\sigma\upsilon\nu at - \frac{1}{2}C_3\,\eta\mu at\right)$

ὅπου $a = \frac{\mu}{\sqrt{2}}$

6) $\frac{d^2x}{dt^2} - 3x - 4y + 3 = 0$ A. $x = -23 + e^t(c_1 + c_2t) + e^{-t}(c_3 + c_4t)$

$\frac{d^2y}{dt^2} + x + y + 5 = 0$ $\quad y = 18 + \frac{1}{2}e(c_2 - c_1 - c_2t) - \frac{1}{2}e^{-t}(c_3 + c_4 + c_4t)$

7) $\frac{dy}{dt} + 5x + y = 7e^t - 27$ A. $x = \frac{93}{17} - \frac{31}{26}et + e^{-4t}(c_1\sigma\upsilon\nu t + c_2\,\eta\mu t$

$\frac{dy}{dt} - 2x + 3y = 12 - 3e^t$ $\quad y = \frac{6}{17}\ \frac{2}{13}e^t\, e^{-4t}\left[(c_1 + c_2)\sigma\upsilon\nu t - (c_1 - c_2)\eta\mu\right.$

8) $\frac{dx}{dt} = y + z$ $\quad x = c_1 + c_2e^t$

$\frac{dy}{dt} = z + x$ A. $y = c_1 + c_2e^t + c_3e^{-t}$

$\frac{dz}{dt} = y-x \qquad z = -c_1 - c_3 e^{-t}$

9) $\frac{dx}{dt} + 2x+y = 7t - 9e^{t} \qquad x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-6t} - \frac{56}{9} + \frac{19t}{3} - \frac{29}{7} e^{t}$

A.

$\frac{dy}{dt} + 4x + 5y = 4e^{t} - 3t \qquad y = -c_1 e^{-t} + 4c_2 e^{-6t} + \frac{55}{9} - \frac{17t}{3} + \frac{22}{7} e^{t}$

I0) $\frac{dx}{dt} + 5x + y = 7e^{t} - 9e^{2t} \qquad x = (c_1 + c_2 t) e^{-4t} + \frac{31}{25} e^{t} - \frac{49}{36} e^{2t}$

A.

$\frac{dy}{dt} - x + 3y = 4e^{2t} - 3e^{t} \qquad y = (c_1 c_2 + c_2 t) e^{-4t} - \frac{11t}{25} + \frac{19}{36} e^{2t}$

II) $\frac{d^2x}{dt^2} + a^2 x = o \qquad x = c_1 \sigma\upsilon\nu\, at + c_2 \eta\mu\, at$

A.

$\frac{d^2y}{dt^2} - a^2 x = o \qquad y = c_3 + c_4 t - c1\, \sigma\upsilon\nu\, at - c_2 \eta\mu\, at$

I2) $\frac{d^2x}{dt^2} + 5x + y = \sigma\upsilon\nu\ 2t \qquad x = (c_1 + c_2 t)\sigma\upsilon\nu\ 2t + (c_3 + c_4 t)\eta\mu 2t + \frac{t^2}{32}\sigma\upsilon\nu 2$

A.

$\frac{d^2y}{dt^2} - x + 3y = o \qquad y = -\left[\frac{15}{16} + 9c_1 - 4c_4 + 9c_2 t + \frac{t^2}{32}\right]\sigma\upsilon\nu 2t + \left[4c_2 - 9c_3 - (9c_4 + \frac{t}{4})t\right]\eta\mu 2t$

13) $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = o$

A. $x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{t} + c_3 e^{\frac{t}{2}} \sigma\upsilon\nu\left(\frac{t}{2}\sqrt{7}\right) + c_4 e^{\frac{t}{2}} \eta\mu\left(\frac{t}{2}\sqrt{7}\right)$

$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2x = o$

τό y εὑρίσκεται κατόπιν διά τῆς πρώτης ἐξισώσεως

14) $\frac{dx}{dt} = u + ay$ ὅπου οἱ ἀριθμοί α, g, ω εἶναι σταθεροί

$\frac{dy}{dt} = v - ax \qquad x = B\eta\mu(\alpha t + B') + At\eta\mu(at + A') + \frac{g\eta\mu\omega}{\alpha^2}$

A

$\frac{dz}{dt} = w \qquad y = B\sigma\upsilon\nu(\alpha t + B') + At\ \sigma\upsilon\nu(\alpha t + A')$

$u = A\ \eta\mu(\alpha t + A')$

$w = -gt\sigma\upsilon\nu\omega + C_1$

$\frac{du}{dt} = -g\,\eta\mu\omega + av \qquad z = -\frac{gt^2}{2}\sigma\upsilon\nu\omega + C_1 t + C_2$

$\frac{\acute{a}}{dt} = -\alpha u \qquad v = A\sigma\upsilon\nu(\alpha t + A') + \frac{g\eta\mu\alpha}{\alpha}$

$\frac{dw}{dt} = g\sigma\upsilon\nu\omega$

I5) $\frac{dx}{dt} = -x + y - 2\alpha^2 t \qquad x = t^2 - at + Ce^{t} + C_1 e^{-2t}$

A.

$\frac{dy}{dt} = 2x - 2t^2 + 2(\alpha+1)t + 2\alpha^2 - \alpha + 2 \qquad y = t^2 + t(2\alpha^2 - \alpha + 2) - \alpha + 2Ce^{t} - C_1 e^{-2t}$

16) Προσδιόρισαι τήν ὁλοκληρωτικήν καμπύλην τοῦ προηγουμένου συστήματος τήν διερχομένην διά τοῦ σημείου $x=z=0$, $y=\alpha$· δεῖξαι ὅτι εἶναι παραβολή καί εὑρεῖν τήν ἐξίσωσιν τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς. Εὑρεῖν τήν περιβάλλουσαν τοῦ ἐπιπέδου τούτου, ὅταν τό α μεταβάλλεται.

17) Τοῦ συστήματος

$$\frac{dx}{dt}-y\sqrt{1-k^2}=0,\quad \frac{dy}{dt}+x\sqrt{1-K^2}+kz=0\quad \frac{dz}{dt}-ky=0$$

εὑρεῖν τρεῖς λύσεις $(x_1y_1z_1)$, $(x_2y_2z_2)$, $(x_3y_3z_3)$ τοιαύτας ὥστε διά $t=0$ νά εἶναι

$$\begin{array}{lll} x_1=\sqrt{1-k^2} & y_2=0 & x_3=-k \\ y_1=0 & y_2= & y_3=0 \\ z_1=k & z_2=0 & z_3=\sqrt{1-k^2} \end{array}$$

$$\text{A}\quad \begin{array}{lll} x_1=\sqrt{1-k^2}\,\sigma\upsilon\nu t & x_1=\sqrt{1-k^2}\,\eta\mu t & x_3=-k \\ y_1=\eta\mu t & y_2=\sigma\upsilon\nu t & y_3=0 \\ z_1=k\sigma\upsilon\nu t & z_2=k\eta\mu t & z_3=\sqrt{1-k^2} \end{array}$$

18) Δεῖξαι ὅτι, ἐάν θεωρήσωμεν δύο λύσεις $(x_1y_1z_1)$, $(x_2y_2z_2)$ τοῦ προηγουμένου συστήματος ἡ παράστασις $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ εἶναι σταθερά καί ὅτι ἀποτελοῦσι νέαν λύσιν αἱ τρεῖς συναρτήσεις.

$$x_3=y_1z_2-y_2z_1,\quad y_3=z_1x_2-z_2x_1,\quad z_3=x_1y_2-x_2y_1$$

19) Λῦσαι τό σύστημα:

$$\frac{dx}{dt}=2x+y-z\quad \frac{dy}{dt}=x+2y-z,\quad \frac{dz}{dt}=3x-3y-z$$

Α. Λαμβάνομεν

$$\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}=x-y \text{ ἐξ οὗ } x-y=ce^t$$

$$\frac{dz}{dt}+z=3(x-y)=3ce^t \text{ ἐξ οὗ } z=c_1e^{-t}+\frac{3}{2}ce^t$$

$$\frac{dx}{dt}-3x=y-x-z=-\frac{5}{2}ce^t-c_1e^{-t}$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ γενική λύσις:

$$x=c_2e^{3t}+\frac{5}{4}ce^t+\frac{c_1}{4}e^{-t}$$

$$y=c_2e^{3t}+\frac{c}{4}e^t+\frac{c_1}{4}e^{-t}$$

$$z=\frac{3}{2}ce^t+c_1e^{-t}$$

20) Λῦσαι τό σύστημα: $\frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} + x\sqrt{3} = \eta\mu\, t$

$$\frac{dz}{dt} - \frac{dx}{dt} + y\sqrt{3} = \eta\mu\, t$$

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + z\sqrt{3} = \eta\mu\, t$$

Διά τῆς προσθήκης κατά μέλη τῶν τριῶν καί τῆς ἀφαιρέσεως τῶν δύο τελευταίων ἐκτελοῦμεν ἀπαλοιφάς ἀγούσας εἰς τήν ἐξίσωσιν: $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$

ἥτις δίδει: $x = A\sigma\upsilon\nu\, t + B\eta\mu\, t$, τά δέ y καί z θά εὑρεθῶσιν ἐκ τῶν ἐξισώσεων:

$y - z = (B\sqrt{3} - 1)\sigma\upsilon\nu\, t - A\sqrt{3}\eta\mu t \quad y + z = -A\sigma\upsilon\nu\, t - (B - \sqrt{3})\,\eta\mu\, t.$

Ἡ γενική λύσις δύναται νά τεθῇ καί ὑπό τήν συμμετρικήν μορφήν:

$x = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - A\sqrt{3}\right)\eta\mu\, t + (B - \Gamma)\sigma\upsilon\nu t \quad y = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - B\sqrt{3}\right)\eta\mu t + (\Gamma - A)\sigma\upsilon\nu\, t$

$$z = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \Gamma\sqrt{3}\right)\eta\mu t + (A - B)\sigma\upsilon\nu t$$

ὅπου $\quad A + B + \Gamma = 0$

7. Π α ρ α τ ή ρ η σ ι ς. Ὑπάρχουσι συστήματα μή γραμμικά τά ὁποῖα γίνονται ἀμέσως γραμμικά διά τῆς χρήσεως βοηθητικῆς μεταβλητῆς. Τοιαῦτα εἶναι π.χ. ὅσα ἔχουσι τήν μορφήν:

$$\frac{dx}{A(x,y,z)} = \frac{dy}{B(x,y,z)} = \frac{dz}{\Gamma(x,y,z)} \qquad (12)$$

ὅπου $A(x,y,z)$, $B(x,y,z)$, $\Gamma(x,y,z)$ εἶναι πρωτοβάθμια πολυώνυμα ὡς πρός x,y,z.

Ἐάν, πράγματι, ἐξισώσωμεν μέ τό dt τούς λόγους (12), ὅπου t νέα βοηθητική μεταβλητή, τό δοθέν σύστημα μετατρέπεται εἰς τό ἑξῆς γραμμικόν:

$$\frac{dx}{dt} = A(x,y,z) \quad \frac{dy}{dt} = B(x,y,z) \quad \frac{dz}{dt} = \Gamma(x,y,z)$$

ὅπου τό t θεωρεῖται ὡς ἀνεξάρτητος μεταβλητή.

Ἡ χρῆσις τῆς βοηθητικῆς ταύτης μεταβλητῆς χρησιμεύει ἐνίοτε καί ὅταν αἱ συναρτήσεις $A(x,y,z)$, $B(x,y,z)$, $\Gamma(x,y,z)$ δέν εἶναι πρωτοβάθμια πολυώνυμα ὡς πρός x,y καί z.

Ἀσκήσεις

Λῦσαι τά ἑξῆς συστήματα:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{u} = \frac{du}{x} \quad \text{A.} \quad \begin{aligned} x &= Ae^{t}+Be^{-t}+C\text{συν}t \\ y &= Ae^{t}-Be^{-t}-C\text{ημ}t \\ z &= Ae^{t}+Be^{-t}-C\text{συν}t \\ u &= Ae^{t}-Be^{-t}+C\text{ημ}t \end{aligned}$$

(A,B,C εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί)

ἡ ἀπαλοιφή τοῦ t μεταξύ τῶν ἐξισώσεων τούτων δίδει τήν γενικήν λύσιν ἄνευ τῆς παραμέτρου t:

$$(x-z)^2 + (y-u)^2 = C_1 \qquad C_1 = 4C^2$$

$$(x+z)^2 - (y+u)^2 = C_2 \qquad \text{ὅπου:} \quad C_2 = 16AB$$

$$1(x+y+z+u) + \text{τοξεφ}\, y-u = C_2 \qquad C_3 = 1(4A)$$

2) $\frac{dx}{\alpha(y+z)} = \frac{dy}{\beta(z+x)} = \frac{dz}{\gamma(x+y)}$ A. $x = C_1 e^{\rho_1 t} + C_2 e^{\rho_2 t} + C_3 e^{\rho_3 t}$

ὅπου οἱ ἀριθμοί $\rho_1 \rho_2 \rho_3$ εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως:

$$\rho^3 - (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\rho - 2\alpha\beta\gamma = 0$$

τά δέ y καί z εὑρίσκονται κατόπιν διά τῶν ἐξισώσεων:

$$\alpha(y+z) = C_1\rho_1 e^{t} + C_2\rho_2 e^{\rho_2 t} + C_3\rho_3 e^{\rho_3 t}$$

$$\alpha(\beta z+\gamma y) - \alpha(\beta+\gamma)x = C_1\rho_1^2 e^{\rho_1 t} + C_2\rho_2^2 e^{\rho_2 t} + C_3\rho_3^2 e^{\rho_3 t}$$

ΠΡΩΤΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

8. Θεωρήσωμεν, χάριν εὐκολίας, σύστημα τριῶν ἐξισώσεων μετά τριῶν ἀγνώστων συναρτήσεων γεγραμμένον ὑπό τήν συμμετρικήν μορφήν:

$$\frac{dx}{A(x,y,z)} = \frac{dy}{B(x,y,z)} = \frac{dz}{\Gamma(x,y,z)} \qquad (13)$$

Καλοῦμεν πρώτην λύσιν τοῦ συστήματος πᾶσαν σχέσιν τῆς μορφῆς·

$$f(x,y,z) = C \qquad (14)$$

συνδέουσαν τάς μεταβλητάς x,y,z μετά μιᾶς σταθερᾶς C, ἥτις ἐπαληθεύεται ὑπό πάσης λύσεως προσδιοριζομένης ἐκ τοῦ θεμελιώδους θεωρήματος τῆς ὑπάρξεως, οἱωνδήποτε οὐσῶν τῶν ἀρχικῶν τιμῶν y_0, z_0 τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἴς τινα τιμήν x_0

(ἀρκεῖ, ἐννοεῖται, νά πληρῶνται αἱ συνθῆκαι αἱ ἀπαιτούμεναι ὑπό τοῦ θεωρήματος τῆς ὑπάρξεως.

Ζητήσωμεν τήν ἱκανήν καί ἀναγκαίαν συνθήκην ἵνα ἡ σχέσις (14) εἶναι πρώτη λύσις. Ἐάν τοῦτο συμβαίνῃ, ἡ συνάρτησις $f(x,y,z)$ μένει σταθερά δυνάμει τῶν ἐξισώσεων (13), δηλαδή, ἐάν ἐν τῇ συναρτήσει $f(x,y,z)$ ἀντικαταστήσωμεν τά x,y,z διά τῶν συντεταγμένων τοῦ τυχόντος σημείου ὁλοκληρωτικῆς καμπύλης ἐκπεφρασμένων συναρτήσει μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς t, τό ἐξαγόμενον θά εἶναι σταθερά ποσότης (ἀνεξάρτητος τοῦ t) καί ἑπομένως θά ἔχωμεν:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0 \qquad (15)$$

ἐπειδή ὅμως δυνάμεθα ν'ἀντικαταστήσωμεν, δυνάμει τῶν ἀναλογιῶν (13) τά dx, dy, dz, διά τῶν ἀναλόγων ποσῶν Α, Β, Γ, προκύπτει·

$$A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y} + \Gamma\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \qquad (16)$$

Ἀντιστρόφως, ἐάν ἡ συνάρτησις f εἶναι λύσις τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (16) καί ἀντικαταστήσωμεν ἐν αὐτῇ τά x,y,z διά τῶν συντεταγμένων τοῦ τυχόντος σημείου ὁλοκληρωτικῆς καμπύλης τοῦ συστήματος (13), ἐκπεφρασμένων διά τινος ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς t, θά προκύψῃ συνάρτησις τοῦ t, τῆς ὁποίας τό διαφορικόν θά εἶναι:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \partial\left(A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y} + \Gamma\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0$$

$$\partial = \frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{dz}{\Gamma}$$

διότι ἀφ'ἑνός μέν δυνάμεθα ν'ἀντικαταστήσωμεν τά dx, dy, dz διά τῶν ἀναλόγων ποσῶν Α,Β,Γ ἀφ'ἑτέρου δέ ἡ συνάρτησις f ἐπαληθεύει τήν ἐξίσωσιν (16).

Σημ. Εἴδομεν ὅτι ἐάν ἡ σχέσις (14) εἶναι πρώτη λύσις τοῦ συστήματος (13), ἡ ἐξίσωσις (16) ἐπαληθεύεται ὑπό πάσης ὁλοκληρωτικῆς καμπύλης. Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι ἡ ἐξίσωσις αὕτη, ἥτις δέν περιέχει οὐδεμίαν ἐκ τῶν αὐθαιρέτων σταθερῶν τῆς γενικῆς λύσεως τοῦ συστήματος, θά εἶναι ταυτότης, διότι, κατά τό θεώρημα τῆς ὑπάρξεως, ὑπάρχει λύσις τοῦ συστήματος ἀντιστοιχοῦσα εἰς ἀρχικάς τιμάς οἱασδήποτε (x_0, y_0, z_0), ἀρκεῖ νά πληροῦται ἡ γνωστή συνθήκη τῆς ὁλομορφίας.

Ἀπεδείχθη, λοιπόν, τό ἑξῆς θεώρημα:

Θ ε ώ ρ η μ α. Ἵνα ἡ σχέσις (14) εἶναι πρώτη λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος πρέπει καί ἀρκεῖ ἡ συνάρτησις $f(x,y,z)$ νά εἶναι λύσις τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως:

$$F(u) = A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} + \Gamma\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \qquad (17)$$

9. Ἐάν ἔχωμεν ὁσασδήποτε λύσεις $u_1, u_2, \ldots\ldots u_\nu$ τῆς ἐξισώσεως ταύτης (17), πᾶσα συνάρτησις $V(u_1, u_2, \ldots\ldots u_\nu)$ τῶν $u_1, u_2, \ldots\ldots u_\nu$ εἶναι ἐπίσης λύσις τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως διότι ἔχομεν:

$$F(V) = A\left(\frac{\partial V}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x} + \ldots\ldots + \frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial V}{\partial u_1}\frac{\partial u}{\partial y} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial V}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial u_\nu}\frac{\partial u_\nu}{\partial y}\right) + \Gamma\left(\frac{\partial V}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial z} + \ldots + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial V}{\partial u_\nu}\frac{\partial u_\nu}{\partial z}\right) = \frac{\partial V}{\partial u_1}F(u_1) + \frac{\partial V}{\partial u_2}F(u_2) + \ldots + \frac{\partial F}{\partial u_\nu}F(u_\nu) = 0$$

Δυνάμεθα ὅμως νά δείξωμεν ὅτι, ἐάν γνωρίζωμεν δύο λύσεις u_1, u_2, τῆς ἐξισώσεως (17) πᾶσα ἄλλη λύσις u_3 εἶναι συνάρτησις τῶν u_1 καί u_2: τῷ ὄντι, ἐάν ἀπαλείψωμεν τά A, B, Γ μεταξύ τῶν τριῶν ἐξισώσεων:

$$F(u_1) = 0, \; F(u_2) = 0, \; F(u_3) = 0$$

προκύπτει ἡ σχέσις:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

ἥτις δεικνύει, ὡς γνωστόν, ὅτι τό u_3 εἶναι συνάρτησις τῶν u_1 καί u_2.

'Εάν ἔχωμεν δύο πρώτας λύσεις:

$$f_1(x,y,z) = c_1 \quad f_2(x,y,z) = c_2$$

τοιαύτας, ὥστε ἡ f_2 νά μή εἶναι συνάρτησις τῆς f_1, τότε λέγομεν ὅτι αἱ δύο αὗται πρῶται λύσεις εἶναι διακεκριμέναι ἀλλήλων. Εἶναι προφανές, ὅτι δύο διακεκριμέναι πρῶται λύσεις τοῦ συστήματος (13) δίδουσι τήν γενικήν λύσιν αὐτοῦ, διότι εἰς πᾶν σύστημα τιμῶν $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ ἀντιστοιχοῦσιν ὡρισμέναι τιμαί τῶν αὐθαιρέτων σταθερῶν c_1 καί c_2

10. 'Η θεωρία αὕτη τῶν πρώτων λύσεων (ἤ πρώτων ὁλοκληρωμάτων) ἐπεκτείνεται προφανῶς εἰς σύστημα ὁσωνδήποτε ἐξισώσεων, τό ὁποῖον ἔστω γεγραμμένον ὑπό τήν συμμετρικήν μορφήν:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots\ldots = \frac{dx_\nu}{X_\nu} \qquad (18)$$

ἵνα ἡ σχέσις: $f(x,x_1,x_2,\ldots\ldots,x \quad = 0$

εἶναι πρώτη λύσις πρέπει νά ἀρκεῖ ἡ συνάρτησις f νά εἶναι λύσις τῆς ἑξῆς ἐξισώσεως:

$$F(u) = X\frac{\partial u}{\partial x} + X_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots\ldots + X_\nu\frac{\partial u}{\partial x_\nu} = 0 \qquad (19)$$

Πᾶσαι αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως ταύτης (19) εἶναι συναρτήσεις ν μόνον λύσεων. 'Εάν ἔχωμεν ν πρώτας λύσεις:

$$\begin{aligned} &f_1(x,x_1,x_2,\ldots\ldots x_\nu) = c_1 \\ &f_2(x,x_1,x_2,\ldots\ldots x_\nu) = c_2 \qquad (20) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f_\nu(x,x_1 x_2,\ldots\ldots x_\nu) = c_\nu \end{aligned}$$

διακεκρειμένας, τό σύστημα αὐτῶν ἀποτελεῖ τήν γενικήν λύσιν τοῦ συστήματος (18). Λέγονται διακεκριμέναι αἱ πρῶται λύσεις (20), ὅταν οὐδεμία ἐκ τῶν συναρτήσεων $f_1, f_2, \ldots. f_\nu$ εἶναι συνάρτησις τῶν λοιπῶν ἤ τινων ἐξ αὐτῶν.

'Η γνῶσις μιᾶς πρώτης λύσεως: $f_1(x,x_1,x_2,\ldots\ldots x_\nu) = c_1$ ἁπλοποιεῖ τό πρόβλημα τῆς λύσεως τοῦ διαφορικοῦ συστήματος ἐλαττώνουσα κατά μίαν μονάδα τό πλῆθος τῶν ἀγνώστων συναρτήσεων. Τῷ ὄντι, ἐάν ἐκ τῆς σχέσεως:

$$f_1(x,x_1,x_2,\ldots,x_\nu) = c_1,$$

ἐξαχθῇ ἡ τιμή τοῦ x_ν, συναρτήσει τῶν ἄλλων $x,x_1,x_2,\ldots\ldots x_{\nu-1}$ καί τῆς σταθερᾶς C_1 καί εἰσαχθῇ εἰς τάς παραστάσεις $X,X_1X_2,\ldots, X_{\nu-1}$ καί παραστήσωμεν $\bar{X}, \bar{X}_1,\bar{X}_2,\ldots,\bar{X}_{\nu-1}$ τάς οὕτω προκυπτούσας νέας παραστάσεις, ἡ λύσις τοῦ δοθέντος διαφορικοῦ συστήματος ἀνάγεται εἰς τήν λύσιν τοῦ συστήματος.

$$\frac{dx}{\bar{X}} = \frac{dx_1}{\bar{X}_1} = \frac{dx_2}{\bar{X}_2} = \ldots = \frac{dx_{\nu-1}}{\bar{X}_{\nu-1}}$$

Ἡ συνάρτησις x_ν εὑρίσκεται τότε ἄνευ νέας ὁλοκληρώσεως. Γενικῶς, ἐάν γνωρίζωμεν μ πρώτας λύσεις ($\mu<\nu$):

$$\begin{aligned} f_1(x,x_1,x_2,\ldots,x_\nu) &= c_1 \\ f_2(x,x_1,x_2,\ldots,x_\nu) &= c_2 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \\ f_\mu(x,x_1,x_2,\ldots,x_\nu) &= c_\mu \end{aligned}$$

καί λάβωμεν ἐξ αὐτῶν τάς τιμάς τῶν $x_1,x_2,\ldots.x_\mu$ συναρτήσει τῶν $x,x_{\mu+1}\ldots\ldots x_\nu$ καί τῶν αὐθαιρέτων σταθερῶν $c_1,c_2,\ldots,c_\mu$, ἀρκεῖ νά εἰσαγάγωμεν ταύτας εἰς τάς παραστάσεις $X,X_{\mu+1},X_{\mu+2}\ldots.X_\nu$ ἵνα τό σύστημα (18) ἀναχθῇ εἰς τό σύστημα:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dx_{\mu+1}}{X_{\mu+1}} = \frac{dx_{\mu+2}}{X_{\mu+2}} = \ldots = \frac{dx_\nu}{X_\nu} \qquad (21)$$

ὅπου τό $\bar{X},\bar{X}_{\mu+1},\bar{X}_{\mu+2},\ldots \bar{X}_\nu$ σημαίνουσα τάς συναρτήσεις τάς προκυψάσας ἐκ τῶν $X,X_{\mu+1},X_{\mu+2},\ldots,X_\nu$ διά τῆς ἀπαλοιφῆς τῶν $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_\mu$. Τοῦ συστήματος (21) λυθέντος, αἱ τιμαί τῶν λοιπῶν ἀγνώστων συναρτήσεων $x_1, x_2,\ldots,x_\mu$ εὑρίσκονται ἄνευ νέων ὁλοκληρώσεων.

Ἡ γνῶσις λοιπόν μ πρώτων λύσεων ($\mu<\nu$) ἀνάγει τήν λύσιν τοῦ δοθέντος διαφορικοῦ συστήματος εἰς τήν λύσιν ἄλλου διαφορικοῦ συστήματος ἐκ ν-μ ἐξισώσεων μετά ν-μ ἀγνώστων συναρτήσεων: προάγει δηλαδή ἡμᾶς εἰς τήν λύσιν ἐλαττώνουσα τόν ἀριθμόν τῶν ἀγνώστων συναρτήσεων κατά μ μονάδας.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α: Ἔστω τό σύστημα:

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2 - y_3, \quad \frac{dy_2}{dx} = y_3 - y_1, \quad \frac{dy_3}{dx} = y_1 - y_2$$

Ἡ ἐξίσωσις: $y_1 + y_2 + y_3 = c$

εἶναι πρώτη λύσις τοῦ συστήματος, διότι:

$$\frac{d(y_1 + y_2 + y_3)}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} + \frac{dy_3}{dx} = y_2 - y_3 + y_3 - y_1 + y_1 - y_2 = 0$$

ἄλλην πρώτην λύσιν τοῦ συστήματος δίδει ἡ ἐξίσωσις

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = c_1$$

Ὁμοίως ἐπαληθεύομεν ὅτι καί ἡ ἐξίσωσις:

$$y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = C_2$$

εἶναι πρώτη λύσις τοῦ συστήματος, ἀλλά δέν εἶναι διακεκριμένην τῶν δύο πρώτων, διότι ἔχομεν:

$$y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = \frac{1}{2}\left[(y_1 + y_2 + y_3)^2 - (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)\right]$$

δηλαδή ἡ παράστασις $y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1$ εἶναι συνάρτησις τῶν ἄλλων $y_1 + y_2 + y_3$ καί $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ καί ἐπομένως καθίσταται διά τῶν λύσεων τοῦ συστήματος σταθερά ὅταν ἐκεῖναι καθίστανται σταθεραί.

Ἡ γνῶσις τῶν δύο πρώτων διακεκριμένων λύσεων

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &= c \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 &= c_1 \end{aligned} \qquad (22)$$

μᾶς ἐπιτρέπει νά ἐλαττώσωμεν κατά δύο μονάδας τόν ἀριθμόν τῶν ἀγνώστων συναρτήσεων. Πρός τοῦτο λύομεν τό σύστημα (22) γράφοντες αὐτό ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned} y_2^2 + y_3^2 &= c_1 - y_1^2 \\ y_2 + y_3 &= c - y_1 \end{aligned} \qquad (23)$$

ἐκ τῶν ἰσοτήτων τούτων συνάγομεν εὐκόλως:

$$y_2 - y_3 = \sqrt{2c_1 - c^2 + 2cy_1 - 3y_1^2} \qquad (24)$$

καί φέροντες τήν τιμήν ταύτην εἰς τήν πρώτην τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος λαμβάνομεν τήν ἐξίσωσιν:

$$\frac{dy_1}{dx} = \sqrt{2c_1 - c^2 + 2cy_1 - 3y_1^2}$$

ἥτις λύεται ἀμέσως χωριζομένων τῶν μεταβλητῶν. Εὑρεθέντος τοῦ y_1 συναρτήσει τοῦ x καί τριῶν αὐθαιρέτων σταθερῶν, θά εὕρωμεν κατόπιν τάς y_2 καί y_3 διά τῆς ἐξισώσεως (24) καί τῆς δευτέρας τῶν ἐξισώσεων (23).

Ἀσκήσεις

1) Λῦσαι τό σύστημα:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\alpha\frac{dz}{dx} - \alpha^2 y + 2\alpha^2 z = \beta$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} + 2\alpha\frac{dy}{dx} + 2\alpha^2 y - \alpha^2 z = \gamma x$$

A. Προσθέτοντες καί ἀφαιροῦντες κατά μέλη εὑρίσκομεν δύο πρώτας λύσεις, ἐξ ὧν προκύπτουσιν αἱ ἑξῆς τιμαί:

$$y = \frac{2\gamma x}{3\alpha^2} + \frac{\beta}{3\alpha^2} - \frac{10}{9\alpha^3}\gamma + c_1 e^{-\alpha x} + c_2 x e^{-\alpha x} + c_4 e^{3\alpha x}$$

$$z = \frac{\gamma x}{3\alpha^2} + \frac{2\beta}{3\alpha^2} - \frac{8\gamma}{9\alpha^3} + c_3 e^{-\alpha x} + c_2 x e^{-\alpha x} - c_4 e^{3\alpha x}$$

2) Λῦσαι τό σύστημα:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{u} = \frac{du}{x}$$

A. Εὑρίσκομεν τάς ἑξῆς πρώτας λύσεις:

$$(x+z)^2 + (y+u)^2 = c_1$$

$$(x-z)^2 + (y-u)^2 = c_2$$

$$l(x+y+zu) = c_3 + \text{τοξεφ}\,\frac{x-z}{y-u}$$

3) Λῦσαι τό σύστημα.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{y}{(y-x)^2} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{x}{(y-x)^2}$$

A. Εὑρίσκομεν τάς πρώτας λύσεις:

$$y^2 - x^2 = C_1 \quad (y-x)^2 = 2(C_2 - t)$$

ἐξ ὧν προκύπτουσιν αἱ τιμαί τῶν x καί y συναρτήσει τοῦ t

4) Λῦσαι τό σύστημα:

$$\frac{dx}{dt} + tx + t^2 y = 0 \qquad \frac{dy}{dt} + \alpha^2 t^2 x + ty = 0$$

A. Εὑρίσκομεν τάς πρώτας λύσεις:

$$y \pm \alpha x = C e^{-\frac{t^2}{2} \pm \frac{\alpha}{3} t^3}$$

5) Λῦσαι τό σύστημα
$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = t$$
$$t\frac{dx}{dt} - t\frac{dy}{dt} + x\frac{dz}{dt} = y$$
$$y\frac{dx}{dt} - y\frac{dy}{dt} - t\frac{dz}{dt} = o$$

Α. Εὑρίσκομεν πρῶτον τήν σχέσιν:
$$x^2 + y^2 - txy - tx + ty - t^2 = o$$
διά τῆς ὁποίας τό σύστημα ἀνάγεται εἰς ἄλλο ἐκ δύο ἐξισώσεων μετά δύο ἀγνώστων συναρτήσεων x καί z.

6) Λῦσαι τό σύστημα:
$$\frac{dx}{dt} + \frac{2}{t}(x-y) = 1 \qquad \frac{dy}{dt} + \frac{1}{t}(x+5y = t$$

Α. Πρῶται λύσεις:
$$x + y = \frac{1}{t^3}\left(c_1 + \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5}\right) \qquad x+2y = \frac{1}{t^4}\left(c_2 + \frac{t^5}{5} + \frac{t^6}{3}\right)$$

7.) Λῦσαι τό σύστημα:
$$\frac{dx}{dt} = \nu y - \mu z \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda z - \nu x \qquad \frac{dz}{dt} = \mu x - \lambda y$$

Α. Εὑρίσκομεν κατ'ἀρχάς τάς πρώτας λύσεις
$$\lambda x + \mu y + \nu z = A \qquad x^2 + y^2 + z^2 = B$$
τῇ βοηθείᾳ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν καί τό ἑξῆς:
$$\mu x - \lambda y = C_1 \text{συν}\rho t + C_2 \text{ημ}\rho t$$
$$\nu y - \mu z = C_1' \text{συν}\rho t + C_2' \text{ημ}\rho t \qquad \text{ὅπου} \quad \rho^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$$
τά $A, B, C_1, C_2, C_1', C_2'$ εἶναι σταθεραί συνδεόμεναι διά τῶν τριῶν σχέσεων, ἅς δίδει ἡ ταυτότης.
$$(x^2 + y^2 + z^2 (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - (\lambda x + \mu y + \nu z^2 =$$
$$= (\mu x - \lambda y)^2 + (\nu y - \mu z)^2 + (\lambda z - \nu x)^2$$

καί ἐπομένως αἱ τρεῖς ἐξ αὐτῶν θά εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί.

Π α ρ α τ ή ρ η σ ι ς: Δέν εἶναι δυνατόν νά δώσωμεν γενικόν κανόνα διά τήν εὕρεσιν πρώτων λύσεων. Παρατηρητέον μόνον, ὅτι τό πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τήν εὕρεσιν συνδυασμοῦ ὁλοκληρωσίμου τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος· δηλαδή, ἐάν δοθῇ τό σύστημα.

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \frac{dx_3}{X_3} = \dots = \frac{dx_\nu}{X_\nu}$$

δέον νά ζητηθῶσι ν παράγοντες $\mu_1\mu_2\mu_3,\dots,\mu_\nu$ τοιοῦτοι, ὥστε νά ἔχωμεν:

$$\mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 X_3 + \dots + \mu_\nu X_\nu = 0 \qquad (26)$$

καί ἡ παράστασις $\mu_1 dx_1 + \mu_2 dx_2 + \mu_3 dx_3 + \dots + \mu_\nu dx_\nu$ νά εἶναι τέλειον διαφορικόν: $d\varphi$. Διότι τότε ἐκ τοῦ συστήματος (25) λαμβάνομεν:

$$\frac{dx_\kappa}{X_\kappa} = \frac{\mu_1 dx_1 + \mu_2 dx_2 + \mu_3 dx_3 + \dots + \mu_\nu dx}{\mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 X_3 + \dots + \mu_\nu X_\nu} \qquad (\kappa = 1, 2, 3, \dots \nu$$

ἐντεῦθεν δέ προκύπτει ὅτι ἡ σχέσις (26) συνεπάγεται, διά τάς λύσεις τοῦ διαφορικοῦ συστήματος, τήν σχέσιν:

$$\mu_1 dx_1 + \mu_2 dx_2 + \mu_3 dx_3 + \dots + \mu_\nu dx_\nu = d\varphi - 0$$

καί, ἐπομένως, ἡ ἐξίσωσις $\varphi = C$ εἶναι πρώτη λύσις εὑρισκομένη δι'ὁλοκληρώσεως, ὅταν εἶναι γνωστοί οἱ παράγοντες $\mu_1\mu_2\mu_3\dots\mu_\nu$.

8. Λῦσαι τό σύστημα:

$$\frac{du}{dx} = \nu\omega, \quad \frac{d\nu}{dx} = \omega u, \quad \frac{d\omega}{dx} = u\nu$$

Εὑρίσκομεν τάς δύο πρώτας λύσεις $u^2 - \nu^2 = C_1$, $u^2 - \omega^2 = C_2$ καί δι'αὐτοῦ προκύπτει:

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{(u^2 - c_1)(u^2 - c_2)}$$

δηλαδή τά u, ν καί ω εἶναι ἐλλειπτικαί συναρτήσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕΤΑ ΜΕΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Θεώρημα ὑπάρξεως

11. Θεωρήσωμεν μίαν διαφορικήν ἐξίσωσιν πρώτης τάξεως μετά μερικῶν παραγώγων περιέχουσαν π.χ. τρεῖς ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς x, y, z καί τήν ἄγνωστον συνάρτησιν αὐτῶν u· ἔστω ἡ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sigma\left(x, y, z, u, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) \qquad (27)$$

τήν ὁποίαν ὑποθέτομεν λελυμένην πρός τήν παράγωγον $\frac{\partial u}{\partial x}$. Ἐάν χάριν συντομίας, θέσωμεν:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = q \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = r$$

ἡ ἐξίσωσις γράφεται:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sigma(x, y, z, u, q, r) \qquad (28)$$

θεωρήσωμεν ἕν σύστημα αὐθαιρέτων τιμῶν

$$x = x_o, \ y = y_o, \ z = z_o, \ u = u_o, q = q_o, r = r_o$$

ἐν τῇ περιοχῇ τῶν ὁποίων ἡ συνάρτησις $\sigma(x, y, z, u, q, r)$ εἶναι ὁλόμορφος καί θεωρήσμωεν ἐπίσης μίαν συνάρτησιν αὐθαίρετον $\varphi(y, z)$ ὁλόμορφον ἐν τῇ περιοχῇ τῶν τιμῶν y_o καί z_o καί τοιαύτην, ὥστε νά εἶναι:

$$\varphi(y_o, z_o) = u_o \qquad \frac{\partial\varphi(y_o, z_o)}{\partial y} = q_o \qquad \frac{\partial\varphi(y_o, z_o)}{\partial z} = r_o$$

Θά δείξωμεν ὅτι, ὑπό τάς συνθήκας ταύτας, ὑπάρχει λύσις u τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (27) ὁλόμορφος (ὁμαλή) ἐν τῇ περιοχῇ τῶν τιμῶν x_o, y_o, z_o, ἥτις διά $x = x_o$ ταὐτίζεται μετά τῆς δοθείσης αὐθαιρέτου συναρτήσεως $\varphi(y, z)$.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Μεταχειριζόμενοι τήν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν (27) καί τάς ἐξ αὐτῆς προκυπτούσας διά διαδοχικῶν διαφορίσεων δυνάμεθα νά ἐκφράσωμεν πάσας τάς μερικάς παραγώγους τῆς u διά τῶν x, y, z, u καί τῶν μερικῶν παραγώγων τῆς u λαμβανομένων μόνον ὡς πρός τάς μεταβλητάς y καί z.

Τοῦτο εἶναι προφανές διά τάς παραγώγους τῆς μορφῆς:

$$\frac{\partial^{1+\beta+\gamma} u}{\partial x (\partial y)^{\beta} (\partial z)^{\gamma}}$$

ἀφ'ἑτέρου, δυνάμει τῆς ἐξισώσεως (27), αἱ παράγωγοι τῆς μορφῆς:

$$\frac{\partial^{2+\beta+\gamma} u}{\partial x^{2} (\partial y)^{\beta} (\partial z)^{\gamma}}$$

ἐκφράζονται διά παραγώγων τῆς προηγουμένης μορφῆς καί διά παραγώγων τοῦ u λαμβανομένων μόνον ὡς πρός y καί z ·ὁμοίως αἱ παράγωγοι τῆς μορφῆς.

$$\frac{\partial^{3+\beta+\gamma} u}{\partial x^{3} \partial y^{\beta} \partial z^{\gamma}}$$

ἐκφράζονται διά παραγώγων τῶν προηγουμένων μορφῶν καί παραγώγων λαμβανομένων μόνον ὡς πρός τάς μεταβλητάς y καί z, καί οὕτω καθεξῆς.

Ποιοῦντες τούς μετασχηματισμούς

$$x - x_0 = x_1, \quad y - y_0 = y_1, \quad z - z_0 = z_1, \quad u - u_0 = u_1$$

δυνάμεθα νά ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ ἀρχικαί τιμαί τῶν x, y, z, u εἶναι ἴσαι τῷ μηδενί·ἐπίσης, ἔχοντες ὑπ'ὄψιν ὅτι δυνάμεθα νά ἐκτελέσωμεν τόν μετασχηματισμόν $u = \varphi(y,z) + u_1$, ἐπιτρέπεται, χωρίς νά μειώσωμεν τήν γενικότητα τοῦ ζητήματος, νά λάβωμεν ὡς αὐθαίρετον συνάρτησιν $\varphi(y,z)$ τό μηδέν.

Ἡ συνάρτησις $\sigma(x,y,z,u,q,r)$, οὖσα ἐξ ὑποθέσεως ὁλόμορφος ἐν τῇ περιοχῇ τῶν τιμῶν $x=0$, $y=0$, $z=0$, $u=0$, $q=0$, $r=0$, ἀναπτύσσεται εἰς σειράν τοῦ Μαλωρίνου κατά τάς δυνάμεις τῶν x, y, z, u, q, r τῶν ὁποίων οἱ συντελεσταί εἶναι μερικαί παράγωγοι τῆς σ ὡς πρός x, y, z, u, q, r συνοδευόμεναι ὑπό σταθερῶν παραγόντων θετικῶν. Εὐκόλως βλέπομεν, ὅτι διά διαδοχικῶν διαφορίσεων ἐκτελουμένων ἐπί τῆς δοθείσης διαφορικῆς ἐξισώσεως προσδιορίζονται ἐντελῶς αἱ τιμαί διά $x=0$, $y=0$, $z=0$ πασῶν τῶν παραγώγων τῆς ζητουμένης συναρτήσεως u ὡς πρός x, y καί z ἐκφραζόμεναι διά τῶν συντελεστῶν τοῦ ἀναπτύγματος τῆς συναρτήσεως $\sigma(x,y,z,u,q,r)$, ἐφ' ὧν ἐκτελεῖται μόνον πρόσθεσις καί πολλαπλασιασμός. Διά τῶν τιμῶν τούτων τῶν παραγώγων τοῦ u κατασκευάζεται σειρά τοῦ Μακλωρίνου κατά τάς δυνάμεις τῶν x, y καί z, θά δείξωμεν δέ ὅτι ἡ σειρά αὕτη εἶναι συγκλίνουσα μεταχειριζόμενοι συναρτήσεις ἀνωτέρας (Βλ. Τόμον πρῶτον, βιβλ. δεύτερον, ἐδάφ. 2).

'Εάν τό δεύτερον μέλος τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως περιέχη σταθερόν ὅρον α, δυνάμεθα νά ἐξαφανίσωμεν αὐτήν ποιοῦντες τόν μετασχηματισμόν: $u = \alpha x + w$ θά ὑποθέσωμεν, λοιπόν, ὅτι τοιοῦτος ὅρος δέν ὑπάρχει ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει.

'Αντικαθιστῶντες τό δεύτερον μέλος διά τῆς ἀνωτέρας συναρτήσεως
$$\frac{M}{\left(1-\frac{x+y+z+u}{r}\right)\left(1-\frac{\frac{\partial u}{\partial y}\ \frac{\partial u}{\partial z}}{}\right)} - M$$

λαμβάνομεν τήν διαφορικήν ἐξίσωσιν:
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{M}{\left(-\frac{x+y+z+u}{r}\right)\left(1-\frac{\frac{\partial u}{\partial y}\ \frac{\partial u}{\partial z}}{\rho}\right)} - M \qquad (29)$$

καί ἀρκεῖ νά δείξωμεν, ὅτι αὕτη κέκτηται λύσιν ὁλόμορφον ἐν τῇ περιοχῇ τῶν τιμῶν $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ καί μηδενιζομένην διά $x = 0$· δυνάμεθα μάλιστα ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει ταύτης ν'ἀντικαταστήσωμεν τό x διά τοῦ $\frac{x}{\alpha}$, ὅπου α ἀριθμός μικρότερος τῆς μονάδος, διότι οὕτω αὐξάνομεν τούς θετικούς συντελεστάς τοῦ δευτέρου μέλους· λαμβάνομεν οὕτω τήν ἐξίσωσιν:
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{M}{\left(1-\frac{\frac{x}{\alpha}+y+z+u}{r}\right)\left(1-\frac{\frac{\partial u}{\partial y}\ \frac{\partial u}{\partial z}}{\rho}\right)} - M \qquad (30)$$

τήν ὁποίαν θά ζητήσωμεν νά ἐπαληθεύσωμεν διά συναρτήσεως μιᾶς μόνης μεταβλητῆς: τῆς $\frac{x}{\alpha} + y + z$

'Εάν θέσωμεν: $\frac{x}{\alpha} + y + z = X$, θά έχωμεν:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dX}\cdot\frac{1}{\alpha} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{X} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{du}{X}$$

καί ή διαφορ. έξίσωσις (30) γίνεται:

$$\frac{1}{\alpha}\frac{du}{dX} = \frac{M}{1-\left(\frac{X+u}{r}\right)\left(1-\frac{2}{\rho}\frac{du}{dX}\right)} - M$$

$$\text{ή} \quad \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{2M}{\rho}\right)\frac{du}{dX} = \frac{2}{\alpha\rho}\left(\frac{du}{dX}\right)^2 + \frac{M}{1-\frac{X+u}{r}} - M \qquad (31)$$

Διά $X = u = 0$ ή έξίσωσις αύτη δίδει τιμάς τῆς παραγώγου $\frac{du}{dX}$ έξ ὧν ή μία εἶναι μηδέν· ὥστε ή έξίσωσις αύτη (31) κέκτηται λύσιν $u = f(X)$ όλόμορφον έν τῇ περιοχῇ τῆς τιμῆς $X = 0$ τοιαύτην ὥστε $f(0) = 0$ καί $f'(0) = 0$· έάν τό α ληφθῇ άρκετά μικρόν, ό συντελεστής $\frac{1}{\alpha} - \frac{2M}{\rho}$ γίνεται θετικός καί τότε, ώς εύκόλως βλέπομεν, ή εύρεθεῖσα λύσις $f(X)$ άναπτύσσεται εἰς σειράν τοῦ Μακλωρίνου, τῆς όποίας πάντες οἱ συντελεσταί εἶναι θετικοί άριθμοί. 'Εάν τό X άντικατασταθῇ ύπό τοῦ $\frac{x}{\alpha} + y + z$ προκύπτει σειρά συγκλίνουσα κατά τάς θετικάς καί άκεραίας δυνάμεις τῶν x, y, z, τῆς όποίας οἱ συντελεσταί εἶναι θετικοί καί ὄχι μικρότεροι τῶν άντιστοίχων συντελεστῶν τῆς σειρᾶς, ἥν δίδει ή διαφορική έξίσωσις (30), ὅταν θέλωμεν διά $x = 0$ τό u νά περιορίζηται εἰς ποσότητα σταθεράς ἴσην τῷ μηδενί.

'Η τελευταία λοιπόν αύτη σειρά εἶναι έπίσης συγκλίνουσα καί έπομένως εἶναι τοιαύτη καί ή σειρά τοῦ Μακλωρίνου ή παρεχομένη ύπό τῆς δοθείσης διαφορικῆς έξισώσεως, ὅταν τό u, διά $x = 0$, γίνεται σταθερά ποσότης ἴση τῷ μηδενί, προσδιορίζουσα οὕτω συνάρτησιν όλόμορφον έν τῇ περιοχῇ τῶν τιμῶν $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, καί έπαληθεύουσαν τήν δοθεῖσαν διαφορικήν έξίσωσιν. 'Απεδείχθη οὕτω τό έν τῇ άρχῇ τοῦ έδαφίου διατυπωθέν θεώρημα ύπάρξεως.

12. Καθ'ὅμοιον τρόπον άποδεικνύεται διά τῆς συγκριτικῆς

πάντοτε μεθόδου τό θεώρημα ὑπάρξεως διά μίαν διαφορικήν ἐξίσωσιν περιέχουσαν ὁσασδήποτε ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sigma\ x, x_1, x_2, \ldots x_\nu, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{x_\nu}$$

Τό θεώρημα διατυποῦται ὡς ἑξῆς:

Θέσωμεν $\frac{\partial u}{\partial x_1} = P_1, \frac{\partial u}{\partial x_2} = P_2, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_\nu} = P_\nu$

καί θεωρήσωμεν τιμάς

$x = \alpha,\ x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2 \ldots x_\nu = \alpha_\nu, u = u_0, P_1 = \beta_1, P_2 = \beta_2 \ldots, P_\nu = \beta_\nu$

ἐν τῇ περιοχῇ τῶν ὁποίων ἡ συνάρτησις

$$\sigma(x, x_1, x_2, \ldots x_\nu, u, P_1, P_2 \ldots, P_\nu)$$

εἶναι ὁλόμορφος, ἔστω δέ $\varphi(\chi_1, \chi_2, \ldots \chi_\nu)$ τυχοῦσα συνάρτησις ἐπαληθεύουσα τάς σχέσεις:

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\gamma) = u_0$$
$$\varphi x_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu) = \beta_1$$
$$\varphi x_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu) = \beta_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi x_\nu(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu) = \beta_\nu$$

καί ὁλόμορφος ἐν τῇ περιοχῇ τῶν τιμῶν

$$\chi_1 = \alpha_1, \chi_2 = \alpha_2, \ldots, \chi_\nu = \alpha_\nu$$

Ὑπάρχει λύσις $u = f(x, x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως, ἥτις διά $\chi = \alpha$ ταυτίζεται μετά τῆς $\varphi(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu)$, δηλαδή:

$$f(\alpha, x_1, x_2, \ldots, x_\nu) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$$

καί ἡ ὁποία εἶναι ὁλόμορφος ἐν τῇ περιοχῇ τῶν τιμῶν

$$\chi = \alpha,\ \chi_1 = \alpha_1,\ \chi_2 = \alpha_2, \ldots \chi_\nu = \alpha_\nu$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καί διά σύστημα διαφορικῶν ἐξισώσεων μετά μερικῶν παραγώγων:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \sigma_1, \frac{\partial u_2}{\partial x} = \sigma_2, \frac{\partial u_3}{\partial x} = \sigma_3, \ldots, \frac{\partial u_\mu}{\partial x} = \sigma_\mu$$

περιέχον τάς ν+1 ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς $x, x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ τάς μ ἀγνώστους συναρτήσεις $u_1, u_2, \ldots u_\mu$ καί μερικάς παραγώγους πρώτης τάξεως, τό έξῆς θεώρημα ύπάρξεως:

'Εάν θεωρήσωμεν τυχούσας τιμάς.

$\chi=\alpha,\ \chi_1=\alpha_1,\ \chi_2=\alpha_2,\ldots\chi_\nu=\alpha_\nu, u_1=\beta_1, u_2=\beta_2,\ldots,u_\mu=\beta_\mu\ldots.$ τῶν μεταβλητῶν $\chi,\chi_1,\chi_2,\ldots,\ \chi_\nu, u_1, u_2,\ldots u_\mu$ καί τῶν μερικῶν παραγώγων τῶν εὑρισκομένων ἐν τοῖς δευτέροις μέλεσιν,ἐν τῇ περιοχῇ τῶν ὁποίων ταῦτα νά εἶναι ὁλόμορφοι συναρτήσεις, θεωρήσωμεν δέ ὡσαύτως μ αὐθαιρέτους συναρτήσεις:

$\varphi_1(x_1x_2),\ldots,x_\nu),\varphi_2(x_1,x_2,\ldots,x_\nu),\ \varphi_3(x_1,x_2,\ldots,x_\nu)\ldots,\ldots\ldots,\varphi_\mu(\ _1,\ _2,\ldots,\ _\nu)$

ὁλόμορφος ἐν τῇ περιοχῇ τῶν τιμῶν $\chi_1=\alpha_1,\ \chi_2=\alpha_2,\ldots\chi_\nu=\alpha_\nu$ καί τοιαύτας ὥστε διά τάς τιμάς ταύτας αἱ μερικαί παράγωγοι τῆς πρώτης νά ἔχωσι τάς δοθείσας τιμάς τῶν ἀντιστοίχων παραγώγων τῆς u_1αἱ τῆς δευτέρας τάς δοθείσας τιμάς τῶνἀντιστοίχων παραγώγων τῆς u_2 καί οὕτω καθεξῆς, νά ἔχωμεν δέ ἐπίσης:

$$\varphi_1(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu)=\beta_1\ \varphi_2(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu)=\beta_2$$
$$\varphi_3(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu)=\beta_3\ldots\varphi_\mu(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu)=\beta_\mu$$

ὑπάρχει λύσις

$$u_1=f_1(x,x_1x_2,\ldots.x_\nu$$
$$u_2=f_2(x,x_1x_2,\ldots,x_\nu$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_\mu=f_\mu(x,x_1x_2,\ldots,x_\nu)$$

ἀποτελουμένη ἐκ συναρτήσεων ὁλομόρφων ἐν τῇ περιοχῇ τῶντιμῶν $\chi=\alpha,\ \chi_1=\alpha_1,\ \chi_2=\alpha_2,\ldots,\ \chi_\nu=\alpha_\nu$ καί τοιούτων, ὥστε νά ἔχωμεν ἐκ ταυτότητες:

$$f_1(\alpha,x_1,x_2,\ldots,x_\nu)=\varphi_1(x_1x_2,\ldots,x_\nu)$$
$$f_2(\alpha,x_1,x_2,\ldots,x_\nu)\quad\varphi_2(x_1,x_2,\ldots,x_\nu)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f\ (\alpha,x_1,x_2,\ldots,x_\nu)=\varphi_\mu(x_1,x_2,\ldots x_\nu)$$

Γεωμετρική σημασία τοῦ θεωρήματος ὑπάρξεως ἐν τῇ περιπτώσει δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν.

13. Θεωρήσωμεν διαφορικήν ἐξίσωσιν περιέχουσαν δύο ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς x καί y τήν ἄγνωστον συνάρτησιν αὐτῶν καί τάς μερικάς παραγώγους:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

Ἔστω:

$$\frac{\partial z}{x} = p = f(x, y, z, q)$$

λελυμένη ὡς πρός μίαν ἐκ τῶν παραγώγων. Ἐάν θεωρήσωμεν τά x, y, z ὡς συντεταγμένας τῶν σημείων τοῦ διαστήματος καί μίαν λύσιν $z = \sigma(x,y)$ τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως, ἡ ἐξίσωσις αὕτη παριστᾶ μίαν ἐπιφάνειαν, ἥτις καλεῖται ὁλοκληρωτική ἐπιφάνεια· λῦσαι ἑπομένως τήν διαφορικήν ἐξίσωσιν σημαίνει: εὑρεῖν πάσας τάς ὁλοκληρωτικάς ἐπιφανείας αὐτῆς. Κατά τό θεώρημα τῆς ὑπάρξεως τό ἀποδειχθέν ἐν τῷ προηγουμένῳ ἐδαφίῳ, ἐάν θεωρήσωμεν ἕν σημεῖον $(x_0\ y_0\ z_0)$ τοῦ διαστήματος καί μίαν κυλινδρικήν ἐπιφάνειαν τυχοῦσαν: $z = \varphi(y)$ διερχομένην διά τοῦ σημείου (x_0, y_0, z_0) καί ὑποτεθῇ ὅτι ἡ συνάρτησις $f(x,y,z,q)$ εἶναι ὁλόμορφος ἐν τῇ περιοχῇ τῶν τιμῶν.

$$x_0, y_0, z_0, q_0 = \varphi'(y_0),$$

ὑπάρχει ὁλοκληρωτική ἐπιφάνεια διερχομένη διά τῆς καμπύλης:

$$x = x_0 \qquad z = \varphi(y \qquad (32$$

διότι ὑπάρχει ὁλοκληρωτική ἐπιφάνεια $z = \sigma(x,y)$ τοιαύτη, ὥστε: $\sigma(x_0, y) = \varphi(y)$ δηλαδή ἡ τομή τῆς ὁλοκληρωτικῆς ταύτης ἐπιφανείας ὑπό τοῦ ἐπιπέδου $x = x_0$ νά συμπίπτῃ τῇ καμπύλῃ (32).

'Εξισώσεις πρώτης τάξεως γραμμικαί
ὡς πρός τάς παραγώγους

14. Εἴδομεν (ἐδαφ. 9 καί 10), ὅτι ἡ λύσις γραμμικῆς καί ὁμογενοῦς διαφορικῆς ἐξισώσεως πρώτης τάξεως μετά μερικῶν παραγώγων:

$$X_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial u}{\partial x_2} + X_3\frac{\partial u}{\partial x_3} + \ldots + X_\nu\frac{\partial u}{\partial x_\nu} = 0 \qquad (33$$

καί ἡ λύσις τοῦ συστήματος:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \frac{dx_3}{X_3} = \ldots = \frac{dx_\nu}{X_\nu}$$

εἶναι δύο προβλήματα ἰσοδύναμα. 'Εάν ἔχωμεν ν διακεκριμένας πρώτας λύσεις τοῦ συστήματος, π.χ. τάς

$$u_1 = c_1,\ u_2 = c_2,\ u_3 = c_3 \ldots\ u_\nu = c_\nu$$

ἡ γενική λύσις τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (33) εἶναι μία αὐθαίρετος συνάρτησις

$$f(u_1, u_2 . u_3, \ldots u_\nu)$$

τῶν ν τούτων πρώτων λύσεων.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

ἡ λύσις αὐτῆς ἀνάγεται εἰς τήν λύσιν τῆς ἐξισώσεως $dx = dy$ τῆς ὁποίας ἡ γενική λύσις εἶναι $y-x = c$ λαμβάνοντες, λοιπόν αὐθαίρετον συνάρτησιν τοῦ $y-x$ ἔχομεν τήν γενικήν λύσιν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, ἥτις θά εἶναι:

$$z = \varphi(x-y \qquad (34)$$

ὅπου φ παριστᾷ αὐθαίρετον συνάρτησιν. Γεωμετρικῶς ἡ γενική αὕτη λύσις παριστᾶ κυλινδρικάς ἐπιφανείας, ὧν αἱ γενέτειραι εἶναι παράλληλοι τῇ εὐθείᾳ $z = 0,\ x - y = 0$ (35)

Δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν τήν συνάρτησιν φ, οὕτως ὥστε ἡ ἐπιφάνεια (34) νά διέρχηται διά τυχούσης καμπύλης Γ, ἀρκεῖ πρός τοῦτο νά σχηματίσωμεν κυλινδρικήν ἐπιφάνειαν διερχομένην διά τῆς καμπύλης ταύτης (δηλαδή ἔχουσαν ταύτην ὡς ὁδηγόν) καί ἔχουσαν τάς γενετείρας αὐτῆς παραλλήλους πρός τήν εὐθεῖαν (35).

15. Θεωρήσωμεν ἤδη ἐξίσωσιν μετά μερικῶν παραγώγων γραμμικήν ὡς πρός τάς παραγώγους τῆς γενικῆς μορφῆς:

$$P_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + P_2\frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots\ldots + P_\nu \frac{\partial z}{\partial x_\nu} - R = o \quad (36$$

ὅπου οἱ συντελεσταί $P_1,P_2,\ldots,P_\nu,R$ δύναται νά περιέχωσι καί τήν συνάρτησιν z.

Δυνάμεθα τήν γενικήν ταύτην μορφήν ν'ἀναγάγωμεν εἰς τήν προηγουμένην (δηλαδή γραμμικήν καί ὁμογενῆ ὡς πρός τήν συνάρτησιν καί τάς παραγώγους αὐτῆς) μεταχειριζόμε - νοι τό ἑξῆς τέχνασμα: 'Αντί νά ζητήσωμεν ἀπ'εὐθείας λύσιν τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (36) θά ζητήσωμεν μίαν συνάρτησιν $V(z,x_1,x_2,\ldots,x_\nu)$ τοιαύτην, ὥστε ἡ πεπλεγμένη συνάρτησις $z=\sigma(x_1,x_2,\ldots,x_\nu)$ ἡ ὁριζομένη ἐκ τῆς ἐξισώσεως $V(z,x_1,x_2,\ldots,x_\nu)=0$ (37) νά εἶναι λύσις τῆς δοθείσης (36). Αἱ μερικαί παράγωγοι τῆς πεπλεγμένης συναρτήσεως δίδονται ὑπό τῶν τύπων:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}+\frac{\partial V}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_1}=o$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2}+\frac{\partial V}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_2}=o$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x_\nu}=o$$

ἐάν δέ τάς ἐντεῦθεν λαμβανομένας τιμάς τῶν $\frac{\partial z}{\partial x_1},\frac{\partial z}{\partial x_2},\ldots\frac{\partial z}{\partial x_\nu}$ εἰσαγάγωμεν εἰς τήν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν(36) λαμβάνομεν:

$$F(V)=P_1\frac{\partial V}{\partial x_1}+P_2\frac{\partial V}{\partial x_2}+\ldots+P_\nu\frac{\partial V}{\partial x_\nu}+R\frac{\partial V}{\partial z}=o \qquad (38)$$

ἐάν δέ εἰς τήν σχέσιν ταύτην ἀντικαταστήσωμεν τό z διά τῆς συναρτήσεως $\sigma(x_1,x_2,\ldots\ldots x_\nu)$, εὑρίσκομεν ἄλλην σχέσιν, ἥτις ἐκφράζει τήν ἱκανήν καί ἀναγκαίαν συνθήκην, ἵνα ἡ ἐκ τῆς ἐξισώσεως (37) ὁριζομένη συνάρτησις ἐπαληθεύῃ τήν διαφορικήν ἐξίσωσιν (36).

Γνωρίζομεν, ὅτι ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως (38) εἶναι ἰσοδύναμος πρός τήν τοῦ συστήματος:

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \dots = \frac{dx_\nu}{P_\nu} = \frac{dz}{R} \qquad (39$$

'Εάν, λοιπόν, θεωρήσωμεν ν πρώτας λύσεις διακεκριμένας.

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_\nu$$

τοῦ συστήματος τούτου καί τυχοῦσαν συνάρτησιν αὐτῶν

$$\varphi(u_1 u_2, \dots u_\nu),$$

θά ἔχωμεν τήν ταυτότητα $F(\varphi) = 0$

καί ἑπομένως ἡ συνάρτησις z τῶν ν μεταβλητῶν $x_1, x_2, \dots x_\nu$ ἡ προσδιοριζομένη ἐκ τῆς σχέσεως:

$$\varphi(u_1, u_2, \dots u_\nu) = 0 \qquad (40)$$

θά εἶναι λύσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως (36), Οἱ ἀνωτέρω ἐκτεθέντες συλλογισμοί δέν ἐπιτρέπουσι νά ἐξαγάγωμεν τό συμπέρασμα, ὅτι δέν ὑπάρχει ἐκτός αὐτῶν ἄλλη λύσις, διότι δέν εἶναι ἀνάγκη νά εἶναι ταυτότης ἡ ἰσότης (38), ἵνα ἡ ἐκ τῆς σχέσεως (37) ὁριζομένη συνάρτησις τῶν $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ εἶναι λύσις τῆς (36). 'Αποδεικνύεται ὅμως δι'ἄλλης ὁδοῦ ὅτι, ἐάν ἐξαιρέσωμεν λύσεις τινάς, ὧν τό σύνολον δέν ἐξαρτᾶται ἐξ αὐθαιρέτου σταθερᾶς, πᾶσαι αἱ λοιπαί ἐπαληθεύουσι σχέσιν τῆς μορφῆς (40)· διά τοῦτο λέγομεν, ὅτι ἡ σχέσις αὕτη παριστᾷ τήν γενικήν λύσιν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

16. Γεωμετρική παράστασις. 'Εν τῇ περιπτώσει ἐξισώσεως μετά τριῶν μεταβλητῶν:

$$P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} = R$$

ἡ ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσα μέθοδος εἶναι ἐπιδεκτική ἐνδιαφερούσης γεωμετρικῆς παραστάσεως.

'Εάν θέσωμεν: $\frac{\partial z}{\partial x} = p, \frac{\partial z}{\partial y} = q$

ἡ ἐξίσωσις γράφεται: $Pp + Qq = R \qquad (41)$

ἐάν δέ τά x, y, z παριστῶσι Καρτεσιανάς συντεταγμένας καί θεωρήσωμεν μίαν ὁλοκληρωτικήν ἐπιφάνειαν Ε, ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου αὐτῆς εἶναι:

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

ἡ δέ σχέσις (41) ἐκφράζει ὅτι τό ἐπίπεδον τοῦτο διέρχεται διά τῆς εὐθείας (Δ):

$$\frac{X-x}{P}=\frac{Y-y}{Q}=\frac{Z-z}{R} \qquad (42)$$

Τό πρόβλημα, λοιπόν, τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως(41) ἀνάγεται εἰς τήν εὕρεσιν ἐπιφανείας, τῆς ὁποίας τό ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς ἕκαστον σημεῖον (x,y,z) περιέχει τήν εὐθεῖαν (42) τήν διερχομένην διά τοῦ σημείου τούτου.

Χαρακτηριστικαί καμπύλαι

17. Κατά τήν γενικήν θεωρίαν (έδ. 15), ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως (41) ἀνάγεται εἰς τήν λύσιν τοῦ συστήματος:

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R} \qquad (43)$$

ἐάν δέ θεωρήσωμεν δύο πρώτας λύσεις $u(x,y,z)$ καί $v(x,y,z)$ τοῦ συστήματος τούτου, ἡ γενική λύσις αὐτοῦ εἶναι

$$u(x,y,z = \alpha \qquad v(x,y,z = \beta \qquad (44)$$

ὅπου α καί β εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί, ἡ δέ γενική λύσις τῆς ἐξισώσεως (41) εἶναι: $\varphi(u,v) = 0$ (45) ὅπου φ παριστᾶ αὐθαίρετον συνάρτησιν.

Αἱ καμπύλαι (44) καλοῦνται χαρακτηριστικαί,ἀποτελοῦσι δέ οἰκογένειαν μετά δύο παραμέτρων α καί β. αἱ καμπύλαι οὗται ἐφάπτονται τῆς εὐθείας (42) τῆς διερχομένης δι'ἑκάστου σημείου. Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις (45) προκύπτει δι'ἀπαλοιφῆς τῶν α καί β μεταξύ τῶν ἐξισώσεν (44) καί τῆς $\varphi(\alpha,\beta) = 0$, ἄρα, ἑκάστη ὁλοκληρωτική ἐπιφάνεια εἶναι γεωμετρικός τόπος μιᾶς οἰκογενείας χαρακτηριστικῶν καμπύλων ἐξαρτωμένης ἐκ μιᾶς παραμέτρου. 'Αντιστρόφως, ἐάν θεωρήσωμεν τυχοῦσαν οἰκογένειαν χαρακτηριστικῶν καμπύλων ὁριζομένην ὑπό μιᾶς σχέσεως $\sigma(\alpha,\beta) = 0$ ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν καμπύλων τούτων ἔχει ἐξίσωσιν: $(\sigma(u,v) = 0$ καί ἑπομένως, εἶναι ὁλοκληρωτική ἐπιφάνεια τῆς δοθείσης ἐξισώσεως (41).

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1ον. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις: $px + qy = \mu z$

Αἱ διαφορικαί ἐξισώσεις τῶν χαρακτηριστικῶν εἶναι

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{\mu z}$$

τοῦ δέ συστήματος τούτου εὑρίσκομεν τάς πρώτας λύσεις.

$$\frac{y}{x} = \alpha \, , \quad \frac{z}{x^{\mu}} = \beta$$

ἑπομένως, ἡ γενική λύσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι

$$z = x^{\mu} \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Ἐάν $\mu = 1$, αἱ ὁλοκληρωτικαί ἐπιφάνειαι εἶναι κῶνοι, ἔχοντες ὡς κορυφήν τήν ἀρχήν τῶν συντεταγμένων. Ἐάν $\mu = 0$, αἱ ὁλοκληρωτικαί ἐπιφάνειαι εἶναι κωνοειδεῖς.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 2ον. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις: $py - qx + \alpha = o$.

Τό διαφορικόν σύστημα τῶν χαρακτηριστικῶν εἶναι

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{-\alpha}$$

ἐξ οὗ εὑρίσκομεν:

$$xdx + ydy = o \quad dz - \alpha \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = o$$

καί αἱ χαρακτηριστικαί ὁρίζονται ὑπό τῶν ἐξισώσεων:

$$x^2 + y^2 = c_1$$

$$z - \alpha\, \text{τοξεφ} \frac{y}{x} = c_2$$

εἶναι δέ ἐν γένει ἕλικες βήματος $2\pi\alpha$· εἰς τήν μερικήν περίπτωσιν $\alpha = 0$, αἱ χαρακτηριστικαί καμπύλαι εἶναι κύκλοι καί αἱ ὁλοκληρωτικαί ἐπιφάνειαι εἶναι ἐκ περιστροφῆς περί τόν ἄξονα oz.

Π α ρ α τ ή ρ η σ ι ς. Δυνάμεθα νά διαθέσωμεν τήν αὐθαίρετον συνάρτησιν $\varphi(u,v)$, οὕτως ὥστε ἡ ὁλοκληρωτική ἐπιφάνεια νά διέρχηται διά δοθείσης καμπύλης, π.χ. τῆς ἐχούσης ἐξισώσεις:

$$\sigma(x,y,z) = o \qquad f(x,y,z) = o \tag{46}$$

Ἀρκεῖ πρός τοῦτο νά εὕρωμεν τόν γεωμετρικόν τόπον τῶν χαρακτηριστικῶν καμπύλων, αἵτινες συναντῶσι τήν καμπύλην (46)· πρός τοῦτο ἀπαλείφομεν τά x,y,z μεταξύ τῶν ἐξισώσεων (44) καί (46) ὅτε εὑρίσκομεν σχέσιν τινά: $\varphi_1(\alpha,\beta) = 0$. Ἡ ζητουμένη ὁλοκληρωτική ἐπιφάνεια θά ἔχῃ ἐξίσωσιν: $\varphi_1(u, v) = 0$.

Τό πρόβλημα ἔχει ἐν γένει μίαν μόνον λύσιν·ἐξαιρεῖται μόνον ἡ περίπτωσις, καθ'ἥν ἡ δοθεῖσα καμπύλη εἶναι χαρακτηριστική, ὅτε ἀρκεῖ νά εὕρωμεν τόν γεωμετρικόν τόπον τυχούσης οἰκογενείας χαρακτηριστικῶν καμπύλων ἐξαρτωμένης ἐκ μιᾶς παραμέτρου καί περιλαμβανούσης καί τήν δοθεῖσαν· ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ προφανῶς ἔχομεν ἀπείρους λύσεις.

Ἐξισώσεις μέ ὁλικά διαφορικά.

17. Θά θεωρήσωμεν τήν διαφορικήν ἐξίσωσιν:

$$dz = Adx + Bdy \tag{47}$$

ὅπου A καί B εἶναι δοθεῖσαι συναρτήσεις τῶν x, y, z, ἄγνωστος δέ συνάρτησις εἶναι ἡ z. Ἐν τῷ πρώτῳ τόμῳ(σελ. 27-30) ἐπραγματεύθημεν τήν περίπτωσιν, καθ'ἥν τά A καί B δέν ἐξαρτῶνται ἐκ τοῦ z καί εἴδομεν ὅτι διά νά ὑπάρχῃ λύσις πρέπει καί ἀρκεῖ ν'ἀληθεύῃ ἡ σχέσις

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι προφανῶς ἰσοδύναμος πρός τό σύστημα:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A(x,y,z)\quad \frac{\partial z}{\partial y} = B(x,y,z) \tag{47}$$

πρέπει, λοιπόν, νά εὕρωμεν τάς κοινάς λύσεις τῶν ἐξισώσεων τούτων. Πᾶσα κοινή λύσις αὐτῶν ἐπαληθεύει ὡσαύτως τάς ἰσότητας:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} B \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z} \cdot A$$

ἐπομένως καί τήν:

$$\frac{\partial A}{\partial y} + B\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial B}{\partial x} + A\frac{\partial B}{\partial z} \tag{48}$$

'Εάν ἡ σχέσις αὕτη δέν εἶναι ταὐτότης τότε αἱ λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, δηλαδή αἱ κοιναί λύσεις τῶν (47') δέν δύνανται νά εἶναι ἄλλαι παρά αἱ πεπλεγμέναι συναρτήσεις αἱ ὁριζόμεναι ὑπό τῆς σχέσεως ταύτης, τάς ὁποίας δοκιμάζομεν εὐκόλως ἵνα ἴδωμεν ἄν εἶναι κοιναί λύσεις τῶν δύο ἐξισώσεων (47'). 'Εάν λοιπόν θέλωμεν νά ὑπάρχῃ ὁλόκληρος οἰκογένεια κοινῶν λύσεων τῶν ἐξισώσεων τούτων ἐξαρτωμένη ἐξ αὐθαιρέτου σταθερᾶς ἀνάγκη εἶναι ἡ σχέσις(48) νά εἶναι ταυτότης, ὅτε ἡ δοθεῖσα διαφορική ἐξίσωσις:

$$dz = Adx + Bdy \tag{48'}$$

καλεῖται ἐντελῶς ὁλοκληρώσιμος (complètement intègrable).

'Υποθέτοντες τοῦτο θά ζητήσωμεν ὅλας τάς λύσεις τῆς ἐξισώσεως (48') ἀποδεικνύοντες συγχρόνως ὅτι ἡ ταὐτότης (48) εἶνε ἀρκετή διά νά ὑπάρχῃ οἰκογένεια τοιούτων λύσεων.

'Εάν ἀποβλέψωμεν κατ'ἀρχάς εἰς τήν πρώτην μόνον τῶν ἐξισώσεων (47') θεωροῦντες τό y ὡς παράμετρον καί ἐπομένως τήν ἐξίσωσιν ὡς συνήθη (ἄνευ μερικῶν παραγώγων) γνωρίζομεν ὅτι αὕτη ἔχει ἄπειρον πλῆθος λύσεων (θεώρημα ὑπάρξεως) $z=\sigma(x,y,C)$ ὅπου τό C θά εἶναι ποσότης σταθερά ὡς πρός τό x καί ἐπομένως συνάρτησις τοῦ y , ἔστω:

$$C = \varphi(y)$$

Πρέπει λοιπόν νά διαθέσωμεν τήν αὐθαίρετον ταύτην συνάρτησιν $\varphi(y)$, ἵνα ἡ $z=\sigma(x,y,\varphi(y))$ ἐπαληθεύῃ καί τήν δευτέραν ἐκ τῶν ἐξισώσεων (47'), δηλαδή ἵνα ἔχωμεν:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial y}+\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dy} = B\left[x,y,\sigma(x,y,\varphi)\right]$$

ἤ

$$\frac{d\varphi}{dy}=\frac{B\left[x,y,(x,y,\varphi)\right]-\frac{\partial\sigma}{\partial y}}{\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}}$$

Θά δείξωμεν ἤδη, ὅτι τό δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος ταύτης εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ x· ἀρκεῖ πρός τοῦτο νά ἐπαληθεύσωμεν ὅτι ἡ μερική αὐτοῦ παράγωγος ὡς πρός x:

$$\frac{1}{\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}\right)^2}\left|\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial x}-\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y}\right)-\left[B(x,y,\sigma)-\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right]\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varphi \partial x}\right. \quad (50)$$

εἶναι ἐκ ταὐτότητος μηδέν. Τῷ ὄντι ἔχομεν:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = A(xy,\sigma)$$

καί ἐξ αὐτῆς προκύπτει:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} = \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\varphi}$$

'Εάν δέ τάς τιμάς ταύτας τῶν

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}\ \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y}\ \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial \varphi}$$

εἰσαγάγωμεν εἰς τήν παράστασιν (50) εὑρίσκομεν:

$$\frac{1}{\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}}\ \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial \sigma}A - \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial \sigma}B = 0$$

ἡ τελευταία αὕτη παράστασις εἶναι μηδέν ἕνεκεν τῆς ταὐτότητος (48) (δηλαδή τῆς συνθήκης ὁλοκληρωσιμότητος. Βλέπομεν, λοιπόν, ὅτι τό δεύτερον μέλος τῆς (49) εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ x καί ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι τῆς μορφῆς:

$$\frac{d\varphi}{dy} = f(y,\varphi)$$

καί ἔχει γενικήν λύσιν $\varphi = F(y,C)$, ὅπου C εἶναι ποσότης ἐντελῶς σταθερά. 'Εάν, λοιπόν, ἐν τῇ συναρτήσει $z = \sigma(x,y,\varphi)$ ἀντικαταστήσωμεν τό φ διά $F(y,c)$, θά εὕρωμεν τήν γενικήν λύσιν τῆς δοθείσης διαφορικῆς ἐξισώσεως μέ ὁλικά διαφορικά, ἥτις καθώς εἴδομεν, ἐλύθη ἀναχθεῖσα εἰς δύο συνήθεις διαφορικάς ἐξισώσεις.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α ἔστω ἡ ἐξίσωσις:

$$dz = \frac{1+yz}{1+xy}dx + \frac{x(z-x)}{1+xy}dy \qquad (51)$$

ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος πρός τάς ἑξῆς δύο:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1+yz}{1+xy} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(z-x)}{1+xy} \qquad (52)$$

'Η συνθήκη τῆς ὁλοκληρωσιμότητος ἀληθεύει καί λύοντες τήν πρώτην ἐκ τῶν (52), θεωροῦντες τό y ὡς παράμετρον, εὑρίσκομεν:

$$z = -\frac{1}{y} + \varphi(y)(1+xy)$$

εἰσάγοντες δέ τήν τιμήν ταύτην εἰς τήν δευτέραν (52), εὑρίσκομεν:

$$\frac{d\varphi}{dy} + \frac{1}{y^2} = 0 \quad \text{ἐξ ἧς} \quad \varphi(y) = \frac{1}{y} + c$$

Ἐπομένως, ἡ γενική λύσις τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (51) εἶναι:

$$z = x + C(1+xy).$$

18. Γεωμετρική σημασία. Ἡ ἐξίσωσις $dz = A\,dx + B\,dy$ εἶναι ἰσοδύναμος πρός τάς δύο:

$$p = A(x,y,z) \quad \text{καί} \quad q = B(x,y,z)$$

Ἐάν τά x, y, z εἶναι Καρτεσιαναί συντεταγμέναι καί θεωρήσωμεν μίαν ὁλοκληρωτικήν ἐπιφάνειαν (S): $z = \sigma(x,y)$, ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου αὐτῆς εἰς τό τυχόν σημεῖον (x,y,z) εἶναι:

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

δηλαδή
$$Z - z = A(X - x) + B(Y - y) \tag{53}$$

Εἰς ἕκαστον, λοιπόν, σημεῖον (x,y,z) τοῦ διαστήματος ἀντιστοιχεῖ ἕν ἐπίπεδον (E), ἔχον τήν ἐξίσωσιν (53). Λῦσαι τήν δοθεῖσαν διαφορικήν ἐξίσωσιν σημαίνει εὑρεῖν πάσας τάς ἐπιφανείας, τῶν ὁποίων τό ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς ἕκαστον σημεῖον (x,y,z) συμπίπτει μετά τοῦ ἐπιπέδου(E) τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τό σημεῖον τοῦτο.

Περί τῆς ἐξισώσεως: $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$

19. Εἶναι ἐνδιαφέρον νά θεωρήσωμεν ὡσαύτως ἐξισώσεις μέ ὁλικά διαφορικά ὑπό τήν συμμετρικήν μορφήν:

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0 \tag{54}$$

τῆς ὁποίας λύσις θά καλῆται πᾶσα σχέσις $f(x,y,z) = 0$, ἥτις διαφοριζομένη δίδει ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον πρός τήν(54).

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἀνάγεται προφανῶς εἰς τήν μορφήν τοῦ ἐδαφίου (17΄):

$$dz = Adx + Bdy$$

ὅπου: $A = -\frac{P}{R}, \quad B = -\frac{Q}{R}$

ἡ δέ συνθήκη ὁλοκληρωσιμότητος λαμβάνει τήν συμμετρικήν μορφήν:

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0 \quad (55).$$

Ὁλοκληρωτικοί παράγοντες. Περί ὁλοκληρωτικῶν παραγόντων παραστάσεως $Pdx + Qdy$ ἐπραγματεύθημεν ἤδη ἐν τῷ πρώτῳ τόμῳ, δυνάμεθα δέ νά δείξωμεν, ὅτι ὑπάρχουσι πάντοτε τοιοῦτοι· τῷ ὄντι, κατά τό θεώρημα ὑπάρξεως, ὑπάρχει γενική λύσις: $\sigma(x,y) = c$ τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως $Pdx + Qdy = 0$. Θά ἔχωμεν, λοιπόν, τήν ἀναλογίαν:

$$\frac{\frac{\partial \sigma}{\partial x}}{P} = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial y}}{Q} = \mu$$

καί, ἐπομένως, ὁ λόγος οὗτος μ εἶναι ὁλοκληρωτικός παράγων διότι θά ἔχωμεν:

$$\mu(Pdx + Qdy) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}dx + \frac{\partial \sigma}{\partial y}dy = d\sigma(x,y)$$

Θά δείξωμεν ὅμως, ὅτι παράστασις ὁμοία μέ τρεῖς μεταβλητάς

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

δέν ἔχει πάντοτε ὁλοκληρωτικούς παράγοντας, διότι, διά νά ὑπάρχῃ ὁλοκληρωτικός παράγων μ πρέπει νά ἔχωμεν:

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \quad \frac{\partial(\mu P)}{\partial z} = \frac{\partial(\mu B)}{\partial x} \quad \frac{\partial(\mu Q)}{\partial z} = \frac{\partial(\mu R)}{\partial y}$$

ἐάν δέ πολλαπλασιάσωμεν τάς ἐξισώσεις ταύτας κατά σειράν ἐπί R,Q,P καί τάς οὕτω προκυπτούσας προσθέσωμεν κατά μέλη λαμβάνομεν τήν συνθήκην (55), ἡ ὁποία εἶναι, ἐπομένως ἀναγκαία διά τήν ὕπαρξιν ὁλοκληρωτικοῦ παράγοντος. Ἡ συνθήκη αὕτη εἶναι καί ἀρκετή, διότι, ἄν ἀληθεύῃ, γνωρίζομεν ἐκ τοῦ ἐδαφίου (17) ὅτι ὑπάρχει γενική λύσις: $F(x,y,z) = C$ τῆς ἐξισώσεως:

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

καί, ἐπομένως, θά ἔχωμεν:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{P}=\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{Q}=\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{R}=\mu$$

ἡ δέ συνάρτησις μ εἶναι προφανῶς ὁλοκληρωτικός παράγων τῆς παραστάσεως $Pdx + Qdy + Rdz$

Ἀποδεικνύεται εὐκόλως (Βλέπε: τόμον πρῶτον,σελ.36), ὅτι ὑπάρχουσιν ἄπειροι ὁλοκληρωτικοί παράγοντες διδόμενοι ὑπό τοῦ τύπου: $\mu\ \Sigma(F)$
τοῦ Σ παριστῶντος αὐθαίρετον συνάρτησιν.

Ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ συνθήκη (55) μένει ἀναλλοίωτος, ἐάν ἐκτελέσωμεν μετασχηματισμόν:

$$x = f_1(u,v,w) \qquad y = f_2(u,v,w) \qquad z = f_3(u,v,w)$$

ὅπου f_1, f_2, f_3 εἶναι συναρτήσεις τοιαῦται, ὥστε νά μή εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν ἡ ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial w} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial w} \end{vmatrix}$$

ἥτις καλεῖται παράγωγος τοῦ συστήματος (f_1, f_2, f_3) πρός τό σύστημα (u,v,w) ἤ διαφορική ορίζουσα (dèterminant fonctionnel ἤ Jacobien τῶν συναρτήσεων $f_1\ f_2\ f_3$)

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

Λῦσαι τάς ἑξῆς ἐξισώσεις μέ μερικάς παραγώγους:

1) $\alpha p+\beta q=\gamma$ Α: $f(\alpha z-\gamma x, \beta z-\gamma y) = 0$ κυλινδρικαί ἐπιφάνειαι.

2) $px + qy = z$ Α: $f\left(\frac{z}{x}, \frac{z}{y}\right) = 0$ κωνικαί ἐπιφάνειαι.

3) $py - qx = 0$ Α: $f(z, x^2+y^2) = 0$ αἱ ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνειαι περί τόν ἄξονα oz .

4) Προσδιορίσαι πάσας τάς έπιφανείας τάς έχούσας τήν έξῆς ἰδιότητα: ἐάν ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Μ τῆς ἐπιφανείας φέρωμεν τήν κάθετον ἐπ'αὐτήν καί καλέσωμεν Ν τόσημεῖον, εἰς ὅ αὔτη συναντᾷ τό ἐπίπεδον xOy, τό ἐμβαδόντοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος ὡς κορυφάς τήν ἀρχήν Ο τῶν συντεταγμένων, τό Ν καί προβολήν τοῦ Μ ἐπί τό ἐπίπεδον xOy, νά εἶναι ἀνάλογον πρός τήν τεμτημένην τοῦ σημείου Μ. (Οἱ ἄξονες ὑποτίθενται ἀρθογώνιοι).

Α. Ἡ διαφορική ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$qzx - pzy = 2kx,$$

ή δέ γενική λύσις αὐτῆς εἶναι:

$$f(x^2 + y^2,\ z^2 - 4ky) = 0$$

5. Ἐκ τῶν ἐπιφανειῶν τοῦ προηγουμένου προβλήματος εὑρεῖν ἐκείνην, ἥτις διέρχεται διά τοῦ ἄξονος Ο y.

Α. $16k^2(x^2 + y^2) - (z^2 - 4ky)^2 = 0$

6. Λῦσαι τήν διαφορικήν ἐξίσωσιν:

$$p\frac{\partial A}{\partial y} - q\frac{\partial A}{\partial x} = 0$$

ὅπου Α εἶναι δοθεῖσα συνάρτησις x καί y. Α. $z = f(A$

Π α ρ α τ ή ρ η σ ι ς. Τό πρῶτον μέλος τῆς διαφ. ἐξισώσεως εἶναι τό jacobien τῶν δύο συναρτήσεων Α καί z.

Λῦσαι τάς ἑξῆς διαφορικάς ἐξισώσεις:

7) $px + qy = 0$ Α. $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$ κωνοειδεῖς ἐπιφάνειαι (τό f αὐθαίρετος συνάρτησις):

8) $\alpha p + \beta q = 0$ Α. $z = f(\alpha y - \beta x)$ κυλινδρικαί ἐπιφάνειαι παράλληλοι πρός τήν εὐθεῖαν $z = 0$ $\alpha y = \beta x$

9) $x^2p + y^2q = z^2$ Α. $\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + f\left(\frac{y-x}{xy}\right)$

Δεῖξαι ὅτι ἡ ὁλοκληρωτική ἐπιφάνεια ἡ διερχομένη διά τῆς εὐθείας $x = 2y = 3z$ εἶναι ἡ

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{x} = 2\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$$

10) $2yzp - xzq + xy = 0$ Α. Ἡ γενική λύσις εἶναι

$$2z^2 + x^2 = f(x^2 + 2y^2)$$

ἡ ὁλοκληρωτική ἐπιφάνεια ἡ διερχομένη διά τῆς καμπύλης:

$$z = o \quad x^2 + y^2 = y$$

ἔχει ἐξίσωσιν: $y^2 - z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2$

11) Λῦσαι τήν ἐξίσωσιν: $(y + z)p + (x + z)q = y - x$. Προσδιορίσαι τήν ὁλοκληρωτικήν ἐπιφάνειαν τήν διερχομένην διάτοῦ κύκλου $y = o, \quad x^2 + z^2 = 1$

Α. Ἡ γενική λύσις εἶναι: $x^2 + z^2 - y^2 = f(y - x + z)$. Ἡ ὁλοκληρωτική ἐπιφάνεια ἡ διερχομένη διά τοῦ δοθέντος κύκλου εἶναι τό μονόχωνον ὑπερβολοειδές ἐκ περιστροφῆς:

$$x^2 + z^2 - y^2 = 1!$$

12) Λῦσαι τήν ἐξίσωσιν: $2yzp + xzq + 3xy = o$ καί εὑρεῖν ἰδιαιτέρως τήν ὁλοκλ. ἐπιφάνειαν τήν διερχομένην διά τοῦ κύκλου: $z = o, \; x^2 + y^2 - y = o$

Α. Γενική λύσις: $2z^2 + 3x^2 = f(2y^2 - x^2)$. Ἡ ὁλοκ. ἐπιφάνεια ἡ διερχομένη διά τοῦ δοθέντος κύκλου ἔχει ἐξίσωσιν:

$$3(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 3y^2 + z^2$$

13) Προσδιορίσαι τήν ὁλοκληρωτικήν ἐπιφάνειαν τῆς ἐξισώσεως:

$$xp - yq = z$$

τήν διερχομένην διά τῆς καμπύλης $x = y, \; z = x^3$. Εὑρεῖντάς ἀσυμπτωτικάς γραμμάς τῆς ἐπιφανείας ταύτης.

Α. $z = x^2 y$. Ἀσυμπτωτικαί γραμμαί

α΄) $x = c, \; z = c^2 y$ β΄) $xy^2 = c_1, \; z = x^2 y$

14) Λῦσαι τήν ἐξίσωσιν $2yp + 3x^2 q + 6x^2 y = o$

Α. Γενική λύσις: $z + y^2 = f(x^3 - y^2)$. Ἡ ὁλοκληρ. ἐπιφάνεια ἡ διερχομένη διά τῆς παραβολῆς:

$x = o, \; y^2 = 2z$ ἔχει ἐξίσωσιν $z = \frac{1}{2}(y^2 - 3x^3)$

15) Εὑρεῖν τήν λύσιν τῆς ἐξισώσεως:

$$z(x+z)p - y(y+z)q = o$$

ἥτις διά $x = 1$ γίνεται $z = \sqrt{y}$. Α $xy = z^2$

16) Λῦσαι τήν ἐξίσωσιν: $x^{\nu}p + y^{\nu}q = z^{\nu}$ ὅπου τό ν εἶναι ἀριθμός ἀκέραιος. Εὑρεῖν τήν ὁλοκληρωτικήν ἐπιφάνειαν τήν διερχομένην διά τῆς εὐθείας $z = 1, x = y\sqrt{2}$· τῆς ἐπιφανείας ταύτης προσδιορίσαι τάς γραμμάς καμπυλότητος ἐν τῇ περιπτώσει $\nu = -1$.

Α. Γενική λύσις: $z^{1-\nu} = x^{1-\nu} + f(x^{1-\nu} - y^{1-\nu})$

Ἡ ἐπιφάνεια ἡ διερχομένη διά τῆς δοθείσης εὐθείας ἔχει ἐξίσωσιν:

$$x^{1-\nu} - y^{1-\nu} = \left(1 - 2^{\frac{\nu-1}{2}}\right)(1 - z^{1-\nu} + x^{1-\nu})$$

εἰς δέ τήν περίπτωσιν $\nu = -1$ γίνεται τό ὑπερβολοειδές ἐκ περιστροφῆς: $z^2 = 1 - x^2 + 2y^2$

τοῦ ὁποίου γραμμαί καμπυλότητος εἶναι οἱ μεσημβρινοί καί οἱ παράλληλοι οἱ κείμενοι ἐν τοῖς ἐπιπέδοις: $z = cx$ καί $y = c_1$

17) Λῦσαι τήν ἐξίσωσιν:

$$2y(2\alpha - x)p + (x^2 + z^2 - y^2 - 4\alpha x)q + 2yz = 0$$

καί εὑρεῖν ἰδιαιτέρως τήν ὁλοκληρωτικήν ἐπιφάνειαν τήν διερχομένην διά τῆς καμπύλης: $x = 0,\ z(y^2 + z^2) = 8\alpha^3$

Α. $$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z} \quad f\left(\frac{x - 2\alpha}{z}\right) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 2\alpha\frac{(x - 2\alpha)^2}{z}$$

18) Λῦσαι τήν ἐξίσωσιν:

$$px + qy = \frac{z\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} - \alpha}$$

καί προσδιορίσαι ἰδιαιτέρως τήν ἐπιφάνειαν τήν διερχομένην διά τῆς καμπύλης:

$$x = 2z, \quad x^2 + y^2 = 4\alpha^2$$

Α. Αἱ διαφορικαί ἐξισώσεις τῶν χαρακτηριστικῶν εἶναι:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz\left(\sqrt{x^2 + y^2} - \alpha\right)}{z\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$$

Ἡ γενική λύσις εἶναι:

$$z = \left(\sqrt{x^2 + y^2} - \alpha\right)f\left(\frac{y}{x}\right)$$

ἡ δέ ὁλοκληρωτική ἐπιφάνεια ἡ διά τῆς δοθείσης καμπύλης διερχομένη ἔχει ἐξίσωσιν:

$$\alpha^2 x^2 = (z - x)^2 (x^2 + y^2)$$

19) Λῦσαι τήν ἐξίσωσιν: $py - qx = \alpha$

Α. Ἐάν θέσω: $x = \rho\sigma\upsilon\nu\theta$, $y = \rho\eta\mu\theta$, ἡ γενική λύσις τίθεται ὑπό τήν μορφήν: $z = -\alpha\theta + f(\rho)$

20) Λῦσαι τήν ἐξίσωσιν $2xzp + 2yzq = z^2 - x^2 - y^2$ καί εὑρεῖν ἰδιαιτέρως τήν ὁλοκληρωτικήν ἐπιφάνειαν τήν διερχομένην διά τῆς ὑπερβολῆς: $x = \alpha$, $z^2 - y^2 = \alpha^2$

Α. $x^2 + y^2 + z^2 = xf\left(\frac{y}{x}\right)$ $x^2 + y^2 + z^2 = 2\alpha\left(x + \frac{y^2}{x}\right)$

21) Τῆς ἐξισώσεως $p - q = \frac{4z}{x - y}$ προσδιορίσαι τάς ὁλοκληρωτικάς ἐπιφανείας, τῶν ὁποίων ἡ τρομή ὑπό τοῦ ἐπιπέδου $z = \beta$ νά εἶναι ἀσυμπτωτική γραμμή.

$$\text{Α. } z = (x - y)^2 \frac{c}{(x + y + c_1)^2}$$

ὅπου C καί C_1 εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί.

22) Τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως: $px + qy = 2z$ εὑρεῖ ν τήν ὁλοκληρωτικήν ἐπιφάνειαν τήν διερχομένην διά τῆς καμπύλης $y = 2x^3$, $z = y$, προσέτι δέ τάς ὀρθογωνίους τροχιάς τῶν προβολῶν ἐπί τό ἐπίπεδον xoy τῶν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν τῆς ἐπιφανείας ταύτης.

Α. $z^2 = 2x^3 y$ Ὀρθογώνιοι τροχιαί: $x^2 + (3 \pm 2\sqrt{3}\,)y^2 = c$

23) Τῆς ἐξισώσεως:

$$(y^2 - x^2 + 2xz)\, p + 2y(z - x)\, q = 0$$

εὑρεῖν τήν γενικήν λύσιν καί ἰδιαιτέρως τήν ὁλοκληρωτικήν ἐπιφάνειαν τήν διερχομένην διά τῆς ἐλλείψεως:

$$x = 0 \quad y^2 + 4z^2 = 4\alpha^2$$

Α. Ἐκ τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων τῶν χαρακτηριστικῶν προκύπτει:

$$z = c, \ \frac{dy}{y} = \frac{2(x-c)dx}{x^2 - 2xc - y^2} = \frac{2(x-c)dx + 2ydy}{x^2 - 2xc + y^2}, \ x^2 + y^2 - 2xz = c_1 y.$$

Γενική λύσις: $x^2 + y^2 - 2xz = 2yf(z)$. Αἱ ὁλοκληρωτικαί αὗται ἐπιφάνειαι παράγονται ὑπό κύκλου, τοῦ ὁποίου τό ἐπίπεδον μένει παράλληλον πρός τό ἐπίπεδον xoy, καί τοῦ ὁποίου τό κέντρον $x = z = c$, $y = f(z)$ γράφει καμπύλην έν τῷ ἐπιπέδῳ $x = z$.

Ἡ ὁλοκληρωτική ἐπιφάνεια ἡ διερχομένη διά τῆς δοθείσης ἐλλείψεως ἔχει ἐξίσωσιν:

$$(x^2 + y^2 - 2xz)^2 = 4y^2(\alpha^2 - z^2)$$

24) Τῆς ἐξισώσεως $xy^2p + x^2yq = z(x^2 + y^2$ προσδιορίσαι ὁλοκληρωτικήν ἐπιφάνειαν τῆς ὁποίας αἱ χαρακτηριστικαί καμπύλαι ν'ἀποτελῶσι τήν μίαν οἰκογένειαν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν αὐτῆς· εὑρεῖν ἐπίσης τήν δευτέραν οἰκογένειαν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν.

Α. Ἐκ τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων τῶν χαρακτηριστικῶν καμπύλων εὑρίσκομεν:

$$\frac{xdx - ydy}{o} = \frac{ydx + dy}{xy(x^2 + y^2)} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)}$$

$$\frac{d(xy)}{xy} = \frac{dz}{z}, \quad x^2 - y^2 = c, \quad z = c_1xy$$

Γενική λύσις: $z = xyf(x^2 - y^2)$. Αἱ ζητούμεναι ὁλοκληρωτικαί ἐπιφάνειαι ἔχουσιν ἐξίσωσιν: $z = \alpha xy(x^2 - y^2)$ ὅπου α αὐθαίρετος σταθερά, ἡ δευτέρα οἰκογένεια ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν ὁρίζεται ὑπό τῆς ἐξισώσεως: $xy = c_1$, ἥτις εἶναι ἐξίσωσις τῶν προβολῶν αὐτῶν ἐπί τό ἐπίπεδον xoy .

25) Τῆς ἐξισώσεως $2xyp + (y^2 - x^2)q = o$ εὑρεῖν ὁλοκληρωτικήν ἐπιφάνειαν διερχομένην διά τῆς παραβολῆς

$$y = o, \quad z^2 = 2\alpha x \qquad \text{Α.} \quad z^2 = 2\alpha\frac{x^2 + y^2}{x}$$

26) Μεταξύ τῶν ὁλοκληρωτικῶν ἐπιφανειῶν τῆς ἐξισώσεως:

$$px + qy = o$$

προσδιορίσαι ἐκείνας, αἵτινες ἐπαληθεύουσι καί τήν διαφορικήν ἐξίσωσιν:

$$p^2 + q^2 = \frac{\alpha^2}{x^2 + y^2}$$

καί εὑρεῖν τάς γραμμάς καμπυλότητος αὐτῶν.

Α. $z = \alpha$ τοξεφ $\frac{y}{x}$. Αἱ προβολαί τῶν γραμμῶν καμπυλότητος εἰς πολικάς συντεταγμένας ἔχουσιν ἐξίσωσιν:

$2\rho = Ce^{\theta} - \frac{\alpha^{2}}{c}e^{-\theta}$, ὅπου c αὐθαίρετος σταθερά.

27) Εὑρεῖν πάσας τάς ὁλοκληρωτικάς ἐπιφανείας τῆς ἐξισώσεως:

$$z = px + qy + \alpha\frac{y}{x}$$

καί ἰδιαιτέρως τήν διερχομένην διά τῆς καμπύλης:

$$z = 0,\quad x^3 + y^3 + 3\alpha xy = 0$$

A. Γενική: $z - \alpha\frac{y}{x} = xf\left(\frac{y}{x}\right)$, μερική: $z = \alpha\frac{y}{x} + \frac{x^3 + y^3}{3x^2}$

28) Λῦσαι τήν ἐξίσωσιν μέ ὁλικά διαφορικά:

$$(y^2 + yz + z^2)\,dx + (z^2 + zx + x^2)\,dy + (x^2 + xy + y^2)\,dz = 0.$$

A. Ἡ συνθήκη ὁλοκληρωσιμότης

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0$$

ἀληθεύει ἐνταῦθα, διότι δίδει:

$$(y^2 + yz + z^2)(z - y) + (z^2 + zx + x^2)(x - z) + \\ + (x^2 + xy + y^2)(y - x) = 0 \qquad (1)$$

δηλαδή τήν ταυτότητα:

$$z^3 - y^3 + x^3 - z^3 + y^3 - x^3 = 0$$

Πρός λύσιν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, μεταχειριζόμεθα τήν γραμμικήν καί ὁμογενῆ:

$$(z-y)\frac{\partial u}{\partial x} + (x-z)\frac{\partial u}{\partial y} + (y-x)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

ἥτις λύεται διά τοῦ συστήματος

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}$$

δι'οὗ εὑρίσκομεν εὐκόλως τάς δύο λύσεις

$$u_1 = x + y + z \quad \text{καί} \quad u_2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Ἐάν μεταξύ τῶν ἐξισώσεων

$$(z-y)\frac{\partial u_1}{\partial x} + (x-z)\frac{\partial u_1}{\partial y} + (y-x)\frac{\partial u_1}{\partial z} = 0$$

$$(z-y)\frac{\partial u_2}{\partial x} + (x-z)\frac{\partial u_2}{\partial y} + (y-x)\frac{\partial u_2}{\partial z} = 0$$

καί τῆς (1) ἀπαλείψωμεν τά $z-y$, $x-z$, $y-x$ προκύπτει:

$$\begin{vmatrix} \frac{u_1}{x} & \frac{u_1}{y} & \frac{u_1}{z} \\ \frac{u_2}{x} & \frac{u_2}{y} & \frac{u_2}{z} \\ y^2+yz+z^2 & z^2+zx+x^2 & x^2+xy+y^2 \end{vmatrix} = 0$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι τό

$$y^2+yz+z^2 = \lambda_1 \frac{u_1}{x} + \lambda_2 \frac{u_2}{x}$$

$$z^2+zx+x^2 = \lambda_1 \frac{u_1}{y} + \lambda_2 \frac{u_2}{y}$$

$$x^2+xy+y^2 = \lambda_1 \frac{u_1}{z} + \lambda_2 \frac{u_2}{z}$$

κέκτηται κοινήν λύσιν ὡς πρός λ_1 καί λ_2, ἥτις εἶναι:

$$\lambda_1 = x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx = \frac{u_1^2+u_2}{2}$$

$$\lambda_2 = -\frac{x+y+z}{2} = -\frac{u_1}{2}$$

Ἀφ' ἑτέρου δυνάμει τῶν σχέσεων (2) ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται:

$$\lambda_1 du_1 + \lambda_2 du_2 = 0$$

δηλαδή $\quad (u_1^2+u_2\ du_1 - u_1\ du_2 = 0$

ἤ $\quad du_1 = \dfrac{u_1du_2 - u_2du_1}{u_1^2} = d\left(\dfrac{u_2}{u_1}\right)$

καί επομένως ἡ γενική λύ ις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι:

$$u_1 - \frac{u_2}{u_1} = C \text{ δηλαδή: } \frac{xy+yz+zx}{x+y+z} = C$$

Ἡ μέθοδος, ἥν ἐφαρμόσαμεν ἐνταῦθα, ὀφείλεται εἰς τόν J. Bertrand καί εἶναι χρήσιμος ἐν γένει ὅταν πρόκειται περί ἐξισώσεως συμμετρικῆς ὡς πρός x, y, z.

29) Δεῖξαι ὅτι, ἐάν δοθῇ μία οἰκογένεια καμπύλων ἐξαρτωμένη ἐκ δύο παραμέτρων (cougruence)

$$u(x,y,z) = \alpha \quad v(x,y,z) = \beta$$

ὑπάρχει πάντοτε διαφορική ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $Pp+Qq = R$ ἔχουσα ὡς οἰκογένειαν χαρακτηριστικῶν καμπύλων τήν δοθεῖσαν.

30) Δοθείσης οἰκογενείας ἐπιφανειῶν: $f(x,y,z) = C$ ἐξαρτωμένης ἐκ μιᾶς παραμέτρου C καί τοιαύτης ὥστε δι' ἑκάστου σημείου τοῦ διαστήματος (ἤ μέρους τοῦ διαστήματος)

νά διέρχηται μία (καί μόνη) ἐπιφάνεια τῆς οἰκογενείας, εὑρεῖν ἐπιφάνειαν $z = \varphi(x,y)$ τέμνουσαν ὀρθογωνίως τάς ἐπιφανείας τῆς δοθείσης οἰκογενείας τάς διερχομένας δι'ἑκάστου σημείου αὐτῆς. Δηλαδή ζητεῖται νά εὕρωμεν τάς ὀρθογωνίους τροχιάς τῶν ἐπιφανειῶν τῆς δοθείσης οἰκογενείας.

Δεῖξαι ὅτι τό πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τήν λύσιν διαφορικῆς ἐξισώσεως μετά μερικῶν παραγώγων πρώτης τάξεως γραμμικῆς ὡς πρός τάς παραγώγους, τῆς ὁποίας αἱ χαρακτηριστικαί καμπύλαι ἔχουσιν εἰς ἕκαστον σημεῖον ὡς ἐφαπτομένην τήν κάθετον τῆς δι'αὐτοῦ διερχομένης ἐπιφανείας τῆς οἰκογενείας.

31) Λῦσαι τήν ἐξίσωσιν μέ ὁλικά διαφορικά.

$$(y-z)(3yz-x^2)dx+2x(x^2+z^2)dy-2x(x^2+y^2)dz = 0$$

A. $$z = \frac{xy\sqrt{x} - ax^2}{x\sqrt{x} + cy}$$

32) Δεῖξαι ὅτι εἰς τήν διαφορικήν ἐξίσωσιν:

$$(yz + \alpha^2)\frac{dx}{x} + (xz + \alpha^2)\frac{dy}{y} - (x + y)\,dz = 0$$

ἐπαληθεύεται ἡ συνθήκη ὁλοκληρωσιμότητος καί λῦσαι αὐτήν.

A. Ἐκτός τῆς κανονικῆς ὁδοῦ, ἡ ἐξίσωσις λύεται εὐκόλως διά τοῦ ὁλοκληρωτ. παράγοντος $-\frac{1}{xy}$. Τῷ ὄντι, αὕτη γράφεται:

$$\alpha^2\frac{d(xy)}{xy} - xyz\,d\frac{x + y}{xy} - (x + y)\,dz = 0$$

καί διά τοῦ ὁλοκλ. παράγοντος λαμβάνει τήν μορφήν.

$$\alpha^2\frac{d(xy)}{x^2y^2} - d\left(z\frac{x + y}{xy}\right) = 0$$

ἐξ ἧς προκύπτει ἡ γενική λύσις:

$$z = \frac{cxy - \alpha^2}{x+y}$$

Γενική μορφή τῶν ὁλοκληρωτικῶν παραγόντων.

$$\lambda = \frac{1}{xy}\varphi\left(\frac{\alpha^2}{xy} + z\frac{x + y}{xy}\right)$$

'Εξισώσεις οίαιδήποτε πρώτης τάξεως μετά τριών μεταβλητών

20. Μέθοδος τοῦ Cauchy . Χαρακτηριστικαί.Θεωρήσωμεν ἤδη διαφορικήν ἐξίσωσιν:

$$f(x,y,z,p,q) = 0 \qquad (1)$$

πρώτης τάξεως τυχούσης μορφῆς μετά δύο μόνον ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν x καί y , καί μίαν ὁλοκληρωτικήν ἐπιφάνειαν E. 'Επειδή οἱ συντελεσταί τῆς ἐξισώσεως τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς E εἰς τό σημεῖον (x,y,z) συνδέονται διά τῆς σχέσεως (1) ἔπεται ὅτι τά ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα εἰς τό σημεῖον (x ,y, z) πασῶν τῶν ὁλοκληρωτικῶν ἐπιφανειῶν ἐξαρτῶνται ἐκ μιᾶς παραμέτρου καί ἔχουσι περιβάλλουσαν ἕνα κῶνον.

'Η ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἶναι:

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y) \qquad (2)$$

τοῦτο δέ μεταβάλλεται οὕτως, ὥστε: αἱ παράμετροι p καί q νά συνδέωνται διά τῆς ἐξισώσεως (1). διά τοῦτο ἡ περιβάλλουσα δίδεται ὑπό τῶν ἐξισώσεων (1) καί (2) καί τῶν

$$(X - x) + (Y - y)q_p = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\, q_p = 0$$

ἤ ὑπό τῆς ἐξισώσεως (1) καί τῶν:

$$Z-z = p(X-x) + q(Y-y) \quad (X - x)\frac{\partial f}{\partial q} - (Y-y)\frac{\partial f}{\partial p} = 0 \qquad (3)$$

Αἱ ἐξισώσεις αὗται (3) παριστῶσι τάς γενετείρας τῆς περιβαλλούσης ἐπιφανείας, ἥτις προφανῶς εἶναι κῶνος (K) ἔχων κορυφήν τό δοθεν σημεῖον (x ,y, z). Ὅταν ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι γραμμική ὡς πρός p καί q , ὁ κῶνος K περιορίζεται εἰς εὐθεῖαν γραμμήν, ἥν ἐκαλέσαμεν Δ (ἐδάφ. 16).

'Η ὁλοκλ. ἐπιφάνεια E ἐφάπτεται εἰς ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἀντιστοίχου κώνου K κατά μίαν γενέτειραν Γ. 'Εάν θέσωμεν:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = P, \quad \frac{\partial f}{\partial q} = Q$$

αἱ ἐξισώσεις (3) τῶν γενετειρῶν Γ δύνανται νά γραφῶσι:

$$\frac{X-x}{P} = \frac{Y-y}{Q} = \frac{Z-z}{Pp+Qq} \qquad (4)$$

'Επί τῆς ἐπιφανείας Ε ἔχομεν:

$$dp = rdx + sdy \qquad dq = sdx + tdy \qquad (5)$$

ἐπειδή δέ ἡ Ε εἶναι ὁλοκληρωτική, διαφορίζοντες τήν ἐξίσωσιν (1) ὡς πρός x καί y λαμβάνομεν:

$$X + pZ + Pr + Qs = o \qquad Y + qZ + Ps + Qt = o \qquad (6)$$

ὅπου $X = \frac{\partial f}{\partial x} \quad Y = \frac{\partial f}{\partial y} \quad Z = \frac{\partial f}{\partial z}$

Καλοῦμεν χαρακτηριστικήν πᾶσα καμπύλην C τῆς ἐπιφανείας Ε, ἥτις εἰς ἕκαστον σημεῖον αὐτῆς ἐφάπτεται τῆς ἀντιστοίχου γενετείρας Γ. Κατά τόν ὁρισμόν τοῦτον αἱ χαρακτηριστικαί ἐπαληθεύουσι τάς ἐξισώσεις:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \lambda \qquad (7)$$

ἐάν δέ τάς τιμάς: $dx = \lambda P$, $dy = \lambda Q$ εἰσαγάγωμεν εἰς τάς ἰσότητας (5) λαμβάνομεν:

$$dp = \lambda(Pr + Qs) \qquad dq = \lambda(Ps + Qt) \qquad (8)$$

'Αφ'ἑτέρου αἱ ἐξισώσεις (6) δίδουσι:

$$Pr + Qs = -(X + pZ) \qquad Ps + Qt = -(Y + qZ),$$

ὅθεν προκύπτουσι:

$$dp = -\lambda(X + pZ) \qquad dq = -\lambda(Y + qZ)$$

$$\lambda = -\frac{dp}{X+pZ} = -\frac{dq}{Y+qZ} \qquad (9)$$

συνδυάζοντες δέ τόν τύπον τοῦτον (9) μετά τοῦ (7) λαμβάνομεν τό σύστημα.

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp+Qq} = \frac{-dp}{X+pZ} \quad \frac{-dq}{Y+qZ} \qquad (10)$$

τό ὁποῖον εἶναι ἐντελῶς ἀνεξάρτητον τῆς θεωρηθείσης ὁλοκληρωτικῆς ἐπιφανείας.

Κατά τό θεώρημα ὑπάρξεως, ἐάν δοθῶσι τιμαί.

$$x = x_o, \; y = y_o, \; z = z_o, \; p = p_o, \; q = q_o$$

πληροῦσαι τήν γνωστήν συνθήκην τῆς ὁλομορφίας, τό σύστημα (10) ἔχει λύσιν τοιαύτην, ὥστε διά $x = x_o$ νά εἶναι:

$$y = y_o, \; z = z_o, \; p = p_o, \; q = q_o$$

ἐπειδή δέ τό x_o δύναται νά θεωρηθῇ ὡς δοθείς ἀριθμός καί οἱ x_o, y_o, z_o, p_o, q_o δέον νά συνδέωνται διά τῆς σχέσεως:

$$f(x_o, y_o, z_o, p_o, q_o) = o$$

ἕπεται ὅτι αἱ χαρακτηριστικαί καμπύλαι ἐξαρτῶνται ἐκτριῶν παραμέτρων αὐθαιρέτων.

Ἔστω: $y = \varphi_1(x, x_o, y_o, z_o, p_o, q_o) \quad z = \varphi_2(x, x_o, y_o, z_o, p_o, q_o)$

$p = \varphi_3(x, x_o, y_o, z_o, p_o, q_o) \quad q = \varphi_4(x, x_o, y_o, z_o, p_o, q_o)$

ἡ λύσις τοῦ συστήματος (10) ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τάς ἀρχικάς συνθήκας (x_o, y_o, z_o, p_o, q_o)· αἱ δύο πρῶται ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων (11) εἶναι αἱ τῆς χαρακτηριστικῆς καί πᾶσα ὁλοκληρωτική ἐπιφάνεια προκύπτει ἐξ αὐτῶν, ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ x_o, y_o, z_o, p_o, q_o, εἶναι συναρτήσεις μιᾶς βοηθητικῆς μεταβλητῆς t τοιαῦται, ὥστε νά ἔχωμεν:

$$f(x_o, y_o, z_o, p_o, q_o) = o \qquad \frac{dz_o}{dt} = p_o\frac{dx_o}{dt} + q_o\frac{dy_o}{dt} \qquad (12)$$

ἀποδεικνύεται δέ ὅτι αἱ δύο αὗται συνθῆκαι εἶναι ἀρκεταί, ἵνα αἱ συναρτήσεις αὗται $x_o(t), y_o(t), z_o(t), p_o(t), q_o(t)$ εἰσαγόμεναι εἰς τάς δύο πρώτας ἐξισώσεις (11) δώσωσιν ὁλοκληρωτικήν ἐπιφάνειαν· τήν ἀπόδειξιν ταύτην παραλείπομεν χάριν συντομίας.

Αἱ σχέσεις (12) ἐπαληθεύονται προφανῶς, ἐάν θέσωμεν· $x_o = \alpha, y_o = \beta, z_o = \gamma$ ὅπου α, β, γ εἶναι τρεῖς σταθεραί οἱαιδήποτε, καί τά p_o καί q_o συναρτήσεις τοῦ t ἐπαληθεύσουσαι τήν σχέσιν:

$$f(\alpha, \beta, \gamma, p_o, q_o) = o$$

Ἐάν τό γ. π.χ. ληφθῇ ὡς ἀριθμητική σταθερά, θά ἔχω οἰκογένειαν χαρακτηριστικῶν καμπύλων ἐξαρτωμένην ἐκ δύο παραμέτρων α καί β, διά δέ τῆς ἀπαλοιφῆς τοῦ t μεταξύ τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων (11) θά προκύψη ὁλοκληρωτική ἐπιφάνεια ἐξαρτωμένη ἐκ δύο παραμέτρῶν α καί β. Μία τοιαύτη λύσις καλεῖται πλήρης ἤ πλῆρες ὁλοκλήρωμα.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α: Ἔστω ἡ ἐξίσωσις: $pq - xy = o$

ἔχομεν: $X = -y, \ Y = -x, \ Z = o, \ P = q, \ Q = p.$

καί ἐπομένως αἱ διαφορικαί ἐξισώσεις τῶν χαρακτηριστικῶν εἶναι:

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{y} = \frac{dq}{x}$$

$$\frac{pdx}{pq} = \frac{qdy}{pq} = \frac{dz}{2pq} = \frac{xdp}{xy} = \frac{ydq}{xy}$$

καί ἄν λάβωμεν ὑπ'ὄψιν τήν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν $pq = xy$, τό διαφορικόν σύστημα τῶν χαρακτηριστικῶν γράφεται:

$$pdx = qdy = \frac{dz}{2} = xdp = ydq \tag{13}$$

ἐντεῦθεν λαμβάνομεν τούς ὁλοκληρωσίμους συνδυασμούς:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}, \quad \frac{dq}{q} = \frac{dy}{y}, \quad dz = \frac{p}{x} 2xdx = \frac{q}{y} 2ydy \tag{14}$$

Ἐάν ζητήσωμεν τήν ὁλοκληρωτικήν ἐπιφάνειαν τήν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τ'ἀρχικά δεδομένα (x_o, y_o, z_o, p_o, q_o) αἱ δύο πρῶται ἐξισώσεις (14) ὁλοκληρούμεναι δίδουσι

$$\frac{p}{p_o} = \frac{x}{x_o} \qquad \frac{q}{q_o} = \frac{y}{y_o}$$

αἱ δύο ἄλλαι (14) γίνονται:

$$dz = \frac{p_o}{x_o} 2xdx = \frac{q_o}{x_o} 2ydy$$

ὁλοκληρούμεναι δίδουσι:

$$z - z_o = \frac{p_o}{x_o}(x^2 - x_o^2) = \frac{q_o}{y_o}(y^2 - y_o^2)$$

Διά νά εὕρωμεν τήν λύσιν, ἥτις διά $x = x_o$ γίνεται $\varphi(y)$, θά θέσωμεν, κατά τήν γενικήν μέθοδον, $y_o = t$, $z_o = \varphi(t)$, ὅτε αἱ συνθῆκαι (12) δίδουσι:

$$q_o = \varphi'(t), \quad p_o = \frac{x_o t}{\varphi'(t)}$$

καί ἡ ζητουμένη λύσις δίδεται ὑπό τῶν δύο ἐξισώσεων:

$$z - \varphi(t) = \frac{t}{\varphi'(t)}(x^2 - x_o^2) = \frac{\varphi'(t)}{t}(y^2 - t^2)$$

αἵτινες προσδιορίζουσι τά z καί t συναρτήσει τῶν x, y ἡ ἀπαλοιφή τοῦ t μεταξύ τῶν ἐξισώσεων τούτων θά δώσῃ τήν ἐξίσωσιν τῆς ζητουμένης ὁλοκληρωτικῆς ἐπιφανείας:

Θεώρημα τοῦ Lagrange

21. Θεωρήσωμεν ἐκ νέου τήν διαφορικήν ἐξίσωσιν:

$$f(x, y, z, p, q) = o \tag{15}$$

ὁ Lagrange ἀπέδειξε τό ἑξῆς θεώρημα:

Θεώρημα τοῦ Lagrange. Ἐάν γνωρίζωμεν οἰκογένειαν λύσεων ἐξαρτωμένην ἐκ δύο αὐθαιρέτων παραμέτρων (δηλαδή μίαν λύσιν): $V(x,y,z,\alpha,\beta) = o$ (16)
ἐξ αὐτῆς δύνανται νά προκύψωσι πᾶσαι αἱ λοιπαί λύσεις διά διαφορίσεων καί ἀπαλοιφῶν.

Ἀπόδειξις: Αἱ μερικαί παράγωγοι p καί q τῶν συναρτήσεων τῶν ὁριζομένων ὑπό τῆς σχέσεως (16) δίδονται ὑπό τῶν ἐξισώσεων:
$$\frac{\partial V}{\partial x} + q\frac{\partial V}{\partial z} = o \quad \frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} = o \qquad (17)$$
ἐξ ὑποθέσεως δέ ἡ συνάρτησις z ἡ ὁριζομένη ὑπό τῆς σχέσεως (16) ἐπαληθεύει τήν ἐξίσωσιν (15), οἱωνδήποτε ὄντων τῶν α καί β· ἄρα ἡ ἀπαλοιφή τῶν παραμέτρων α καί β μεταξύ τῶν ἐξισώσεων (16) καί (17) θά δώση ὡς ἐξαγόμενον τήν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν (15) καί μόνον αὐτήν.

Λέγω ἤδη ὅτι ἡ ἐξίσωσις (15) ἐκφράζει ἐπίσης τήν ἱκανήν καί ἀναγκαίαν συνθήκην, ἵνα αἱ τρεῖς ἐξισώσεις(16) καί (17) ἐπαληθεύωνται ὑπό τριῶν συναρτήσεων z, α, β τῶν δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν x καί y, τῶν p καί q παριστώντων τάς μερικάς παραγώγους τῆς z. Τῷ ὄντι, ἐάν αἱ ἐξισώσεις (16) καί (17) ἐπαληθεύωνται ὑπό τριῶν συναρτήσεων $z = \varphi(x,y)$ $\alpha = A(x,y)$, $\beta = B(x,y)$, ἡ δοθεῖσα (15), ἥτις εἶναι συνέπεια τῶν (16) καί (17), θά ἐπαληθεύεται ὑπό τῆς $z = \varphi(x,y)$· ἀντιστρόφως, ἐάν $z = \varphi(x,y)$ εἶναι μία λύσις τῆς (15) καί ἀντικαταστήσωμεν εἰς τάς (16) καί (17) τό z διά $\varphi(x,y)$ καί τά p καί q διά τῶν $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, θά προκύψωσιν ἐξισώσεις συμβιβάσιμοι, δίδουσαι δύο συναρτήσεις:
$$\alpha = A(y,x) \quad \beta = B(x,y)$$
τοιαύτας, ὥστε αἱ τρεῖς συναρτήσεις $z = \varphi(x,y)$, $\alpha = A(x,y)$, $\beta = B(x,y)$ νά ἐπαληθεύσωσι τό σύστημα τῶν τριῶν ἐξισώσεων (16) καί (17).

'Εντεῦθεν ἕπεται ὅτι ἡ λύσις τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (15) ἀνάγεται εἰς τό ἑξῆς πρόβλημα:

Εὑρεῖν τρεῖς συναρτήσεις z, α, β τῶν δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν x καί y ἐπαληθευούσας τάς τρεῖς ἐξισώσεις (16) καί (17).

Τό πρόβλημα τοῦτο λύεται εὐκόλως, διότι ἐάν διαφορίσωμεν ὡς πρός x καί y τήν σχέσιν (16) θεωροῦντες τώρα τά z, , β ὡς συναρτήσεις τῶν x καί y, λαμβάνομεν:

$$\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial y} = 0$$

ἐάν δέ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν καί τάς ἐξισώσεις (17), αἱ σχέσεις αὗται γίνονται:

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial \beta}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial y} = 0 \qquad (18)$$

καί τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων (16) καί (17) εἶναι ἰσοδύναμον πρός τό σύστημα τῶν (16) καί (18), τό ὁποῖον θά παραστήσωμεν διά τοῦ (S).

Βλέπομεν ἀμέσως, ὅτι τό σύστημα (S) ἐπαληθεύεται, ἐάν τά α καί β εἶναι σταθεραί ποσότητες, τό δέ z ἡ συνάρτησις, ἡ ὁριζομένη ὑπό τῆς σχέσεως (16), οὕτω δέ προκύπτει τό πλῆρες ὁλοκλήρωμα.

Παρατηροῦμεν ἐπίσης, ὅτι αἱ ἐξισώσεις (18) εἶναι γραμμικαί καί ὁμογενεῖς ὡς πρός $\frac{\partial V}{\partial \alpha}, \frac{\partial V}{\partial \beta}$ καί διά τοῦτο τό σύστημα (S) ἐπαληθεύεται ἐάν θέσωμεν:

$$V = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \beta} = 0 \qquad (19)$$

αἱ δέ ἐξισώσεις αὗται προσδιορίζουσιν ἐν γένει τρεῖς συναρτήσεις $z = \varphi_1(x,y)$, $\alpha = A_1(x,y)$, $\beta = B_1(x,y)$ ἐκ τῶν ὁποίων ἡ $z = \varphi_1(x,y)$ εἶναι λύσις τῆς δοθείσης διαφορικῆς ἐξισώσεως (15) μή ἐξαρτωμένη ἐξ αὐθαιρέτου σταθερᾶς· ἡ λύσις αὕτη καλεῖται ἰδιάζουσα.

'Εάν αἱ $\frac{\partial V}{\partial \alpha}$ καί $\frac{\partial V}{\partial \beta}$ δέν εἶναι συγχρόνως μηδέν, αἱ ἐξισώσεις (18) δίδουσι:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \alpha}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta}{\partial x} & \frac{\partial \beta}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

τοὐθ'ὅπερ σημαίνει ὅτι δέον νά ὑπάρχῃ μεταξύ τῶν α καί β σχέσις ἀνεξάρτητος τῶν x καί y. 'Εάν ὑπάρχωσι δύο τοιαῦται σχέσεις, τά α καί β θά ἦσαν σταθεραί ποσότητες καί θά εἴχομεν τήν πλήρη λύσιν ἐάν δέ ὑπάρχῃ μία μόνον σχέσις μεταξύ α καί β, τότε μία τοὐλάχιστον ἐκ τῶν α καί β δέν θά εἶναι σταθερά ποσότης, π.χ. ἡ α, ἔστω δέ β = σ(α) ἡ σχέσις αὕτη. Θά ἔχωμεν:

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \sigma'(\alpha)\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial y} = \sigma'(\alpha)\frac{\partial \alpha}{\partial y}$$

καί αἱ ἐξισώσεις (18) γίνονται:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}\left[\frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \beta}\,\sigma'(\alpha)\right] = 0 \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y}\left[\frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \beta}\,\sigma'(\alpha)\right] = 0$$

ἀνάγονται δέ εἰς μίαν μόνην, διότι ἡ α δέν εἶναι σταθερά ποσότης. 'Επομένως, τό σύστημα (S) εἶναι ἰσοδύναμον πρός τό:

$$V(x,y,z\alpha,\beta) = 0, \quad \beta = \sigma(\alpha), \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \beta}\,\sigma'(\alpha) = 0 \quad (20)$$

Τό σύστημα τοῦτο προσδιορίζει τρεῖς συναρτήσεις:

$$z = F(x,y), \quad \alpha = A(x,y). \quad \beta = B(x,y)$$

ἐκ τῶνὁποίων ἡ πρώτη, ἥτις ἐξαρτᾶται προφανῶς ἐκ τῆς αὐθαιρέτου συναρτήσεως φ(α), εἶναι λύσις τῆς δοθείσης διαφορικῆς ἐξισώσεως καί θά ὀνομασθῇ γενική λύσις.

'Η ἀπαλοιφή τῶν α καί β μεταξύ τῶν ἐξισώσεων (20) δέν δύναταιἐν γένει νά γίνῃ ἐφ'ὅσον δέν γίνεται ἐκλογή τῆς αὐθαιρέτου συναρτήσεως φ(α), δυνάμεθα ὅμως ν' ἀρκεσθῶμεν εἰς τάς δύο ἐξισώσεις:

$$V(x,y,z,\alpha,\sigma(\alpha)) = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \sigma(\alpha)}\,\sigma'(\alpha) = 0 \qquad (21)$$

αἵτινες ἐκφράζουσι τάς δύο συντεταγμένας τῶν σημείων πάσης ὁλοκληρωτικῆς ἐπιφανείας διά τῆς ἄλλης καί τῆς παραμέτρου α.

Σημείωσις. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀπαλοιφή τοῦ α μεταξύ τῶν ἐξισώσεω (21) παρέχει ἀκριβῶς τήν περιβάλλουσαν τῆς οἰκογενείας τῶν ἐπιφανειῶν:

$$V\left[x,y,z,\alpha,\sigma(\alpha)\right] = 0$$

ἥτις προκύπτει ἐκ τῆς πλήρους λύσεως (16), ἐάν τό β ἀντικατασθῇ ὑπό αὐθαιρέτου συναρτήσεως τοῦ α. Οὕτω λαμβάνεται ἡ γενική λύσις τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (15), ἡ δέ ἰδιάζουσα εἶναι ἐπίσης περιβάλλουσα πασῶν τῶν ἐπιφανειῶν τῆς πλήρους λύσεως, ὅταν αἱ παράμετροι α καί β μεταβάλλωνται καθ'ὅλους τούς δυνατούς τρόπους.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις:

$$z = px + qy + \varphi(p,q)$$

ἧς ἡ μορφή εἶναι γενίκευσις τῆς τῶν ἐξισώσεων τοῦ Clairaut (Τόμος Α΄ σελ. 10).

Εὐκόλως βλέπομεν ὅτι ἔχει τήν πλήρη λύσιν·

$$z = \alpha x + \beta y + \varphi(\alpha,\beta)$$

ὅπου α καί β εἶναι αὐθαίρετοι παράμετροι· τό πλῆρες τοῦτο ὁλοκλήρωμα ἀποτελεῖται ἀπό ἐπίπεδα περιβάλλοντα ἐπιφάνειαν μή ἀναπτυκτήν, ἥτις εἶναι ἡ ἰδιάζουσα λύσις τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως. Διά νά λάβωμεν τήν γενικήν λύσιν, θεωροῦμεν μίαν αὐθαίρετον σχέσιν β = σ(α) καί ζητοῦμεν τήν περιβάλλουσαν τῶν ἐπιπέδων:

$$z = \alpha x + y\sigma(\alpha) + \varphi\left[\alpha,\sigma(\alpha)\right] = 0$$

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

1) Λῦσαι τήν ἐξίσωσιν: $q = f(p)$

ἥτις ἔχει τήν πλήρη λύσιν:

$$z = \alpha x + yf(\alpha) + \beta$$

Α. Γενική λύσις:

$$z = \alpha x + yf(\alpha) + \sigma(\alpha) \qquad 0 = x + yf'(\alpha) + \sigma'(\alpha).$$

Ἰδιάζουσα λύσις δέν ὑπάρχει:

2) Λῦσαι τήν ἐξίσωσιν:

$$z = px + qy + pq$$

Α. Πλήρης λύσις:

$z = \alpha x + \beta y + \alpha\beta$. Ἰδιάζουσα $z + xy = 0$

Γενική λύσις: ἡ περιβάλλουσα τῶν ἐπιπέδων:

$$z = \alpha x + y\sigma(\alpha) + \alpha\sigma(\alpha)$$

3) Δοθείσης τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως:

$$(z - px - qy)^2 + \frac{q}{y\,z} = 0$$

εὑρεῖν πλήρη λύσιν ἀποτελουμένην ἐξ ἐπιφανειῶν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἐχουσῶν ὡς ἄξονας τούς ἄξονας συντεταγμένων, καί ἐξ αὐτῆς τήν γενικήν λύσιν.

Α. Πλήρης λύσις:

$$z^2 = \alpha x^2 - \beta^2 y^2 + \beta$$

Γενική λύσις: ἡ περιβάλουσα τῶν ἐπιφανειῶν:

$$z^2 = x^2\sigma(\beta) - \beta^2 y^2 + \beta$$

4) Τῆς προηγουμένης διαφορικῆς ἐξισώσεως εὑρεῖν ὁλοκληρωτικήν ἐπιφάνειαν διερχομένην διά τῆς καμπύλης:

$$x^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

Α. $4y^2(z^2 - 3x^2) = (1 - 4x^2)^2$

5) Εὑρεῖν τήν λύσιν τῆς ἐξισώσεως: $p^2 - q^2 = 2z$ ἥτις διά $x = 0$ γίνεται $(1+y)^2$ Α. Αἱ ἐξισώσεις τῶν χαρακτηριστικῶν εἶναι:

$$p = x + \alpha, \quad q = \beta p, \quad y = \gamma - q, \quad 2z = p^2 - q^2$$

αἱ δέ ζητούμεναι ἐπιφάνειαι εἶναι:

$$z = \left(1 + y \pm x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2$$

6) Λῦσαι τήν ἐξίσωσιν:

$$p^2 - 2pq + 2q^2 = 4z$$

Α. Ἐξισώσεις τῶν χαρακτηριστικῶν:

$$x\left(1 - \frac{q_0}{\sqrt{4z_0 - q_0^2}}\right) + y = y_0$$

$$z = \frac{z_0}{4z_0 - q_0^2}\left(2x + \sqrt{4z_0 - q_0^2}\right)^2$$

Γενική λύσις:

$$y = t+x\left[\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{4\varphi(t) - (\varphi'(t))^2}}\right] \qquad z = (t)\left[\frac{2x}{\sqrt{4\varphi(t) - (\varphi'(t))^2}}+1\right]^2$$

7) Τῆς προηγουμένης διαφ. ἐξισώσεως εὑρεῖν τήν ὁλοκληρ. ἐπιφάνειαν τήν διερχομένην διά τῆς παραβολῆς:

$$x = o, \quad 2z = y^2 \quad A. \ 2z = y^2 \qquad 2z = (y+2x)^2$$

8) Λῦσαι τήν ἐξίσωσιν:

$$z = px + qy + p^3$$

Α. Ἡ γενική λύσις εἶναι ἡ περιβάλλουσα τῶν ἐπιφανειῶν:

$$z = \alpha x + y\,\sigma(\alpha) + \alpha^3$$

καί διέρχεται διά τῆς καμπύλης

$$y = o, \ 4x^3 + 27z^2 = o$$

9) Λῦσαι τήν ἐξίσωσιν: $pq = x + y$

Γενική λύσις:

$$z = \alpha(x-y) + \frac{2}{3}(\alpha^2 + x + y)^{\frac{3}{2}} + \varphi(\alpha)$$

$$x - y + 2\alpha\sqrt{\alpha^2+x+y} + \varphi'(\alpha) = 0$$

10) Λῦσαι τήν ἐξίσωσιν:

$$2z - px + qy + q^2 = o$$

Α. Αἱ χαρακτηριστικαί παρίστανται ὑπό τῶν ἐξισώσεων:

$$(2y + q_o x^3)x = 2y_o + q_o$$

$$2z = (2z_o + q_o y_o + q_o^2)x^2 - q_o x^3 y - q_o^2 x^6$$

11) Λῦσαι τήν ἐξίσωσιν: $p^2 + q^2 = z^2$

Α. Γενική λύσις:

$$y = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,1\,\frac{z}{\varphi(t)} + t, \quad x = \sqrt{1-\frac{\varphi'^2(t)}{\varphi^2(t)}}\,1\,\frac{z}{\varphi(t)}$$

12) Εὑρεῖν ἐπιφάνειαν διερχομένην διά τῆς παραβολῆς

$$x = o, \quad z^2 = 2ay\sqrt{2}$$

καί ἐπαληθεύουσαν τήν ἐξίσωσιν:

$$p^2 + q^2 = \frac{3\alpha^2}{z^2}. \ A. \qquad z^2 = 2\alpha x + 2\alpha y\sqrt{2}$$

13) Τῆς ἐξισώσεως $z\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \alpha$ εὑρεῖν πλήρη λύσιν καί τήν ἰδιάζουσαν λύσιν.

Α. πλήρης: $\alpha^2 = z^2 + (x\,\sigma\upsilon\nu\, c + y\,\eta\mu c - c_1)^2$. Ἰδιάζουσα: $z = \pm\alpha$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΤΟΥ LAPLACE

Μεταξύ τῶν ἐξισώσεων μέ μερικάς παραγώγους ἀνωτέρας τάξεως μεγίστην σπουδαιότητα κέκτηται ἔν τε τῇ καθαρᾷ καί ἐφηρμοσμένῃ Μαθηματικῇ ἡ λεγομένη ἐξίσωσις τοῦ Laplace. Θά ἐκθέσωμεν ἐν τῷ κεφαλαίῳ τούτῳ ὀλίγα περί αὐτῆς καί περί τῶν ὁλοκληρωμάτων ἐπιφανείας, τοῦ τύπου τοῦ Green, καί τινα ἄλλα συνδεόμενα μετά τῆς ἐξισώσεως τοῦ Laplace. Ἐφαρμόζομεν τέλος ταῦτα εἰς τήν Θεωρίαν τῆς ἕλξεως καί τοῦ Δυναμικοῦ, ἔνθα φαίνεται ἡ θεμελιώδης σπουδαιότης τῆς ἐξισώσεως τοῦ Laplace.

Ὁλοκληρώματα ἐπιφανείας

22. Ἐάν θεωρήσωμεν ἐπιφάνειάν τινα Σ περιοριζομένην ὑπό μιᾶς ἤ πολλῶν γραμμῶν, δυνάμεθα νά διακρίνωμεν ἐπ' αὐτῆς δύο πλευράς διαφόρους κατά τόν ἑξῆς τρόπον:

Ἕκαστον σημεῖον τῆς ἐπιφανείας θά χαρακτηρισθῇ δι' ὡρισμένης διευθύνσεως τῆς εἰς τό σημεῖον τοῦτο καθέτου ἐπί τήν ἐπιφάνειαν: δηλάδή ἕκαστον γεωμετρικόν σημεῖον Μ τῆς ἐπιφανείας θά χωρισθῇ εἰς δύο σημεῖα M_1 καί M_2, ὧν τό μέν ἕν ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν μίαν διεύθυνσιν τῆς καθέτου τό δέ ἕτερον εἰς τήν ἀντίθετον διεύθυνσιν. Τά δύο σημεῖα M_1 καί M_2 γεωμετρικῶς συμπίπτουσι. Ὅταν τό σημεῖον Μ κινῆται ἐπί τῆς ἐπιφανείας ἡ διεύθυνσις τῆς καθέτου διά τά σημεῖα M_1 καί M_2 συνεχῶς μεταβαλλομένη θά εἶναι ἄνευ ἀμφιβολίας καθωρισμένη δι' ἑκάστην θέσιν τῶν σημείων M_1 καί M_2.

Τά σημεῖα M_1 ἀποτελοῦσι τήν μίαν πλευράν τῆς ἐπιφανείας τά δέ σημεῖα M_2 τήν ἑτέραν.

Ἐάν θεωρήσωμεν π.χ. τήν περίπτωσιν καθ'ἥν ἡ ἐπιφάνεια Σ τέμνεται τό πολύ εἰς ἕν σημεῖον ὑπό τῶν εὐθειῶν τῶν παραλλήλων τῷ ἄξονι τῶν z , δυνάμεθα νά διακρίνωμεν δύο πλευράς αὐτῆς τοιαύτας ὥστε τά σημεῖα τῆς μιᾶς πλευρᾶς ν'ἀντιστοιχῶσιν εἰς τάς διευθύνσεις τῆς καθέτου τάς σχηματιζούσας ὀξεῖαν γωνίαν μετά τοῦ ἄξονος τῶν z τά δέ σημεῖα τῆς ἄλλης ν'ἀντιστοιχῶσιν εἰς διευθύνσεις τῆς καθέτου σχηματιζούσας ἀμβλεῖαν γωνίαν μετά τοῦ ἄξονοςτῶν z : δηλαδή τήν κάθετον διαιροῦμεν εἰς δύο ἡμικαθέτους,ἐξ ὧν ἡ μία ἀνήκει εἰς τήν μίαν πλευράν καί ἡ ἄλλη εἰς τήν ἄλλην.

Θεωρήσωμεν ἤδη μίαν συνάρτησιν $\Gamma(x,y,z)$ καί μίαν ἐπιφάνειαν Σ περιοριζομένην ὑπό μιᾶς καμπύλης Λ καί τεμνομένης εἰς ἕν τό πολύ σημεῖον ὑπό τῶν εὐθειῶν τῶν παραλλήλων τῷ ἄξονι τῶν z .

Ἔστω $z = f(x,y)$ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας καί ἄς θεωρήσωμεν τ'ὀλοκλήρωμα:

$$\iint \Gamma(x,y,z)\, \text{συν}\, \gamma d\sigma \qquad (1)$$

ἐκτεινόμενον ἐν τῷ τόπῳ τοῦ ἐπιπέδου xy τῷ περιοριζομένῳ ὑπό τῆς προβολῆς λιτῆς καμπύλης Λ, ὅπου παριστᾶ τήν γωνίαν τῆς ἡμικαθέτου τοῦ ἀναλυτικοῦ σημείου (x,y,z) μετά τοῦ ἄξονος τῶν z , $d\sigma$ παριστᾷ τό στοιχεῖον τῆς ἐπιφανείας Σ τό δέ z ἔχει ἀντικατασταθῆ ὑπό τοῦ $f(x,y)$.

Ἐάν θεωρήσωμεν τήν πλευράν τῆς ἐπιφανείας Σ τήν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς ὀξεῖαν γωνίαν γ τ'ὀλοκλήρωμα συμπίπτει τῷ συνήθει ὀλοκληρώματι

$$\iint \Gamma(x,y,z)dxdy$$

Ἀλλά τ'ὀλοκλήρωμα (1) ἔχει ἔννοιαν ὡρισμένην καί ὅταν τό σημεῖον (x,y,z) ἀνήκῃ εἰς τήν πλευράν ἐφ'ἧς ἡ γωνία γ εἶναι ἀμβλεῖα. Γενικῶς, λέγομεν ὅτι τ' ὁλοκλήρωμα (1) εἶναι εἰλημμένον ἐπί τῆς ἐπιφανείας Σ ἤ ἐπί τῆς μιᾶς πλευρᾶς ἤ ἐπί τῆς ἄλλης.

Τά ὁλοκληρώματα ἐπιφανείας γράφονται καί ὑπό τήν μορφήν (2) καί ἔχομεν οὕτω μίαν γενίκευσιν τῆς ἐννοίας τοῦ διπλοῦ ὁλοκληρώματος συνισταμένην εἰς τό ὅτι τό dxdy δύναται νά εἶναι ἀρνητικόν.

Καθ'ὅμοιον τρόπον ὁρίζομεν τά ὁλοκληρώματα ἐπιφανείας:

$$\iint A(x,y,z)\sigma\upsilon\nu\alpha\, d\sigma \quad \iint B(x,y,z)\sigma\upsilon\nu\beta\, d\sigma$$

ἐκτεινόμενα ἐφ'ὡρισμένης πλευρᾶς αὐτῆς. Τό ἄθροισμα:

$$\iint A(x,y,z)\sigma\upsilon\nu\alpha\, d\sigma + \iint B(x,y,z)\sigma\upsilon\nu\beta\, d\sigma + \iint \Gamma(x,y,z)\sigma\upsilon\nu\gamma\, d\sigma =$$

$$= \iint (A\sigma\upsilon\nu\alpha + B\sigma\upsilon\nu\beta + \Gamma\sigma\upsilon\nu\gamma)\, d\sigma$$

γραφόμενον καί ὑπό τήν μορφήν

$$\iint A\,dydz + B\,dzdx + \Gamma\,dxdy$$

εἶναι ἐπίσης ὁλοκλήρωμα ἐπιφανείας μεγάλης χρησιμότητος.

Τύπος τοῦ Green

Ἔστωσαν Α,Β καί Γ τρεῖς συναρτήσεις τῶν συντεταγμένων x,y, z καί εἷς ὄγκος V περιοριζόμενος ὑπό τῆς ἐπιφανείας Σ ὑποθέσωμεν ταύτας συνεχεῖς καθώς καί τάς πρώτας αὐτῶν παραγώγους καί θεωρήσωμεν τό τριπλοῦν ὁλοκλήρωμα:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right) dxdydz \qquad (3)$$

ἐν τῷ ὄγκῳ V, τ'ὁποῖον ἀναλύεται εἰς τά ἑξῆς:

$$\iiint_V \frac{\partial A}{\partial x}\, dxdydz, \quad \iiint_V \frac{\partial B}{\partial y}\, dxdydz \quad \iiint_V \frac{\partial \Gamma}{\partial z}\, dxdydz \qquad (4)$$

Ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια Σ τέμνεται εἰς δύο τό πολύ σημεῖα ὑπό τῶν εὐθειῶν τῶν παραλλήλων τῷ ἄξονι τῶν x καί καλέσωμεν x_1 καί x_2 τά σημεῖα τομῆς αὐτῆς ὑπό τῆς τυχούσης ἐκ τῶν εὐθειῶν τούτων, ἔχομεν:

$$\iiint_V \frac{A}{x} dxdydz = \iint_T \left[A(x_2,y,z) - A(x_1,y,z) \right] dydz \quad (5)$$

τοῦ διπλοῦ τούτου ὁλοκληρώματος ἐκτεινομένου ἐν τῷ τόπῳ τοῦ ἐπιπέδου yz, ὅστις εἶναι προβολή τῆς ἐπιφανείας.Τ' ὁλοκλήρωμα τοῦτο ἰσοῦται τῷ ὁλοκληρώματι ἐπιφανείας:

$$\iint A(x,y,z\; dy\, dz = \iint A(x,y,z\; \text{συνγ}\; d\sigma$$

εἰλημμένῳ ἐπί τῆς ἐξωτερικῆς πλευρᾶς τῆς ἐπιφανείας Σ,δηλαδή τό γ εἶναι ἡ γωνία, ἥν σχηματίζει μετά τοῦ ἄξονοςτῶν x ἡ ἐξωτερική ἡμικάθετος. Τῷ ὄντι, ἡ ἐπιφάνεια Σ δύναται νά διαιρεθῇ εἰς δύο τμήματα Σ_1 καί Σ_2 τοιαῦτα, ὥστε ἡ ἐξωτερική ἡμικάθετος νά σχηματίζῃ ὀξεῖαν μέν γωνίαν εἰς τά σημεῖα τοῦ Σ, καί ἀμβλεῖαν εἰς τά σημεῖα τοῦ Σ_1,ἔστω δέ ὅτι ἡ τετμημένη x_1 ἀνήκει εἰς τό τμῆμα Σ_1 καί ἡ τετμημένη x_2 εἰς τό τμῆμα Σ_2. Θά ἔχωμεν τότε:

$$\iint_\Sigma A(x,y,z)\text{συνγ}d\sigma = \iint_{\Sigma_2} A(x,y,z)\text{συνγ}d\sigma +$$

$$+\iint_{\Sigma_1} A(x,y,z)\text{συνγ}d\sigma = \iint A(x_2,y,z)dydz -$$

$$- \iint A(x_1,y,z)dydz = \iint \left[A(x_2,y,z) - A(x_1,y,z)\right] dydz$$

τοῦ τελευταίου τούτου ὁλοκληρώματος ἐκτεινομένου ἐπί τῆς προβολῆς τῆς ἐπιφανείας Σ ἐπί τό ἐπίπεδον yz. Ἡ παρουσία τοῦ σημείου ὀφείλεται εἰς τό ὅτι ἐπί τοῦ τήματος Σ_1ἔχομεν τήν ἰσότητα:

$$\text{συν}\;\gamma\; d\sigma = -dydz$$

Ἀπεδείχθη, λοιπόν, ἡ ἰσότης:

$$\iiint_V \frac{A}{x}\, dx\, dy\, dz = \iint_\Sigma A\; dydz$$

Καθ'ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν:

$$\iiint_V \frac{B}{y}\, dx\, dy\, dz = \iint_\Sigma B\; dx\, dz$$

$$\iiint_V \frac{\Gamma}{x}\, dx\, dy\, dz = \iint_\Sigma \Gamma\; dy\, dx$$

Ἐκ τῶν τριῶν δέ τούτων τύπων ἕπεται ὁ ἑξῆς μεγίστης σπουδαιότητος:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma}{\partial z}\right) dxdydz =$$

$$= \iint_\Sigma \left(A\, dydz + Bdzdx + \Gamma dxdy\right) \qquad (6)$$

ὅπου τό μέν τριπλοῦν ὁλοκλήρωμα ἐκτείνεται ἐπί τοῦ ὄγκου V, τό δέ διπλοῦν ἐπί τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τῆς περιοριζούσης τόν ὄγκον V.

Διά τοῦ τύπου τούτου δυνάμεθα νά εὕρωμεν τήν ἱκανήν καί ἀναγκαίαν συνθήκην, ἵνα ἕν ὁλοκλήρωμα ἐπιφανείας ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῆς γραμμῆς τῆς περιοριζούσης τήν ἐπιφάνειαν τῆς ὁλοκληρώσεως· τό πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τήν εὕρεσιν τῆς ἱκανῆς καί ἀναγκαίας συνθήκης ἵνα τό ὁλοκλήρωμα:

$$\iint_\Sigma (Adydz + Bdzdx + \Gamma dxdy)$$

ἐπί πάσης κλειστῆς ἐπιφανείας εἶναι μηδέν. Ἡ συνθήκη, ὡς δεικνύει ὁ τύπος (6), εἶναι ἡ ἑξῆς:

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma}{\partial z} = 0 \qquad (7)$$

Ἐάν ἐν τῷ τύπῳ (6) θέσωμεν: $A = x$, $B = y$ καί $\Gamma = z$ προκύπτει:

$$\iiint_V dxdydz = \frac{1}{3} \iint_\Sigma xdydz + ydzdx + zdxdy$$

ὁ δέ τύπος οὗτος ἐκφράζει τόν ὄγκον τόν περιοριζόμενον ὑπό κλειστῆς ἐπιφανείας διά διπλοῦ ὁλοκληρώματος ἐκτεινομένου ἐπί τῆς ἐπιφανείας ταύτης.

Διά τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ αὐτοῦ τύπου (6) θά εὕρωμεν ἕτερον περίφημον τύπον γνωστόν ὡς θεώρημα τοῦ Green

Θεωρήσωμεν τό τριπλοῦν ὁλοκλήρωμα:

$$\Lambda = \iiint \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right) dxdydz \qquad (8)$$

ἕν τινι τόπῳ T περιοριζομένῳ ὑπό κλειστῆς ἐπιφανείας Σ, ὅπου τά U καί V παριστῶσι συναρτήσεις συνεχεῖς ἐν τῷ τόπῳ T.

Ἔχομεν:

$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)-U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(U\frac{\partial V}{\partial y}\right)-U\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \qquad (9)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(U\frac{\partial V}{\partial z}\right)-U\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Ἐάν θέσωμεν:

$$\Delta V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

προσθέσομεν κατά μέλη τάς ἰσότητας (9) καί κατόπιν ὁλοκληρώσωμεν ἐν τῷ τόπῳ T λαμβάνομεν τόν τύπον:

$$\Lambda=\iiint_T\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(U\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(U\frac{\partial V}{\partial z}\right)\right]dxdydz-$$

$$-\iiint_T U\Delta V\,dxdydz \qquad (10)$$

ὁ ὁποῖος δυνάμει τοῦ τύπου (6), γράφεται καί ὡς ἑξῆς:

$$\Lambda=\iint_\Sigma U\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\text{συν}\,\alpha+\frac{\partial V}{\partial y}\,\text{συν}\,\beta+\frac{\partial V}{\partial z}\,\text{συν}\,\gamma\right)d\sigma-$$

$$-\iiint_T U\Delta V dxdydz \qquad (11)$$

ὅπου α,β,γ σημαίνουσι τάς γωνίας τῆς ἐξωτερικῆς καθέτου ἐπί τήν ἐπιφάνειαν Σ μετά τῶν ἀξόνων. Ὁ τελευταῖος οὗτος τύπος γράφεται συντομώτερον, ἐάν εἰσαχθῇ ἡ ἔννοια τῆς παραγώγου καθ'ὡρισμένην διεύθυνσιν: Καλοῦμεν παράγωγον μιᾶς συναρτήσεως $V(x,y,z)$ εἴς τι σημεῖον $A(x,y,z)$ κατά τήν διεύθυνσιν An τό ὅριον τοῦ λόγου τῆς αὐξήσεως τῆς συναρτήσεως, ὅταν μεταβαίνωμεν ἐκ τοῦ σημείου A εἰς ἄλλο γειτονικόν A_1 ἐπί τῆς διευθύνσεως An, πρός τήν θετικήν ἀπόστασιν $AA_1 = dn$, ἥν ὑποθέτομεν ἀπειροστήν· ἡ παράγωγος αὕτη παρίσταται διά τοῦ συμβόλου $\frac{dV}{dn}$, ἀποδεικνύεται δέ διά τοῦ συνήθους τρόπου ὅτι ἔχομεν:

$$\frac{dV}{dn}=\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dn}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dn}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dn}=\frac{\partial V}{\partial x}\text{συν}\,\alpha+\frac{\partial V}{\partial y}\text{συν}\,\beta+\frac{\partial V}{\partial z}\text{συν}\gamma \qquad (12)$$

Ἐάν ὑποτεθῇ ὅτι ἡ θεωρηθεῖσα διεύθυνσις εἶναι ἡ τῆς ἐξωτερικῆς καθέτου ἐπί τήν ἐπιφάνειαν Σ, ὁ τύπος (11) γράφεται συντόμως ὡς ἑξῆς:

$$\Lambda=\iint_\Sigma U\frac{dU}{dn}\,d\quad-\iiint_T U\quad V\quad dxdydz \qquad (13)$$

ἐπειδή δέ δι'ἀντιμεταθέσεως τῶν U καί V τ'ὁλοκλήρωμα Λ δέν βλάπτεται, ἔχομεν καί τόν ἑξῆς τύπον:

$$\Lambda = \iint_\Sigma V\frac{dU}{dn}\,d\sigma - \iiint_T V\Delta U\,dx\,dy\,dz \qquad (14)$$

'Εάν ἀφαιρέσωμεν κατά μέλη τάς ἰσότητας (13) καί(14) προκύπτει ὁ τύπος:

$$\iint_\Sigma \left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right) d\sigma - \iiint_T (U\Delta V - V\Delta U)dxdydz = o$$

'Εάν εἰσαχθῇ ἡ παράγωγος ἐπί τῆς ἐσωτερικῆς καθέτου, ἀλάσσει σημεῖον ὁ πρῶτος ὅρος καί προκύπτει ὁ τύπος:

$$\iint_\Sigma \left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right) d\sigma + \iiint_T (U\Delta V - V\Delta U)dxdydz = o \qquad (15)$$

ὀνομαζόμενος τύπος τοῦ Green, ὅστις ἀληθεύει ὁσαιδήποτε καί ἄν εἶναι αἱ περιορίζουσαι τόν τύπον T ἐπιφάνειαι.

'Εξίσωσις τοῦ Laplace

24) 'Η διαφορική ἐξίσωσις:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = o$$

καλεῖται ἐξίσωσις τοῦ Laplace καί ἔχει μεγίστην σπουδαιότητα εἰς πλείστας θεωρίας τῆς Μαθηματικῆς καθαρᾶς τε καί ἐφηρμοσμένης· θά μελετήσωμεν ἐνταῦθα τάς κυριωτέρας τῶν συναρτήσεων, αἵτινες ἐπαληθεύουσι τήν ἐξίσωσιν τοῦ Laplace.

'Εάν καλέσωμεν U καί V δύο συναρτήσεις τοιαύτας καί ἐφαρμόσωμεν τόν τύπον (15) τοῦ Green λαμβάνομεν:

$$\iint_\Sigma \left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right) d\sigma = o \qquad (16)$$

ἐάν δέ ληφθῇ U = 1 προκύπτει:

$$\iint_\Sigma \frac{dV}{dn}\,d = o \qquad (17)$$

δηλαδή τ'ὁλοκλήρωμα τοῦτο ἐκτεινόμενον ἐπί πάσης κλειστῆς ἐπιφανείας εἶναι μηδέν, ὅταν ἡ συνάρτησις V ἐπαληθεύῃ τήν ἐξίσωσιν τοῦ Laplace.

'Εάν θέσωμεν:

$$r = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2} \tag{18}$$

ὅπου α,β καί γ εἶναι τρεῖς τυχόντες σταθεροί ἀριθμοί,ἡ συνάρτησις $\frac{1}{r}$ ἐπαληθεύει τήν ἐξίσωσιν τοῦ Laplace.'Εάν καλέσωμεν Λ(α,β,γ) τό σημεῖον τό ἔχον τάς συντεταγμένας α,β,γ καί M(x,y,z) τό σημεῖον τό ἔχον συντεταγμένας x ,y , z καί dn τό ἀπειροστόν στοιχεῖον κατά μίαν διεύθυνσιν Mn , θά ἔχωμεν:

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dn}$$

$$r\frac{dr}{dn} = (x-\alpha)\frac{dx}{dn} + (y-\beta)\frac{dy}{dn} + (z-\gamma)\frac{dz}{dn}$$

$$\frac{dr}{dn} = \frac{x-\alpha}{r}\frac{dx}{dn} + \frac{y-\beta}{r}\frac{dy}{dn} + \frac{z-\gamma}{r}\frac{dz}{dn} \tag{19}$$

ἐντεῦθεν ἕπεται:

$$\frac{dr}{dn} - \sigma\upsilon\nu\,(r,n) = -r^2\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}$$

ὅπου τό σύμβολον (r,n) παριστᾷ τήν γωνίαν τήν σχηματιζομένην ὑπό τῆς διευθύνσεως $\overline{MA}$ μετά τῆς διευθύνσεως $\overline{Mn}$,ἐκ δέ τοῦ τελευταίου τύπου προκύπτει:

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} = \frac{\sigma\upsilon\nu(r,n)}{r^2}$$

'Εάν θεωρήσωμεν μίαν λύσιν V τῆς ἐξισώσεως τοῦ Laplace συνεχῆ ἐν τῷ τόπῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπό μιᾶς ἤ περισσοτέρων ἐπιφανειῶν S, δέν δυνάμεθα νά ἐφαρμόσωμεν τόν τύπον (16) εἰς τάς δύο συναρτήσεις V καί $\frac{1}{r}$ ἐν τῷ τόπῳ αὐτῷ Τεἰς τήν περίπτωσιν, καθ'ἥν τό σημεῖον Α (α,β,γ) κεῖται ἐντός τοῦ τόπου Τ, διότι τότε ἡ συνάρτησις $\frac{1}{r}$ δέν εἶναι συνεχής ἐν αὐτῷ. Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην γράφομεν σφαῖραν Σ μέ κέντρον Α καί ἀφαρμόζομεν τόν τύπον (16) ἐν τῷ τόπῳ T_1,ὅστις εὑρίσκεται ἐντός τοῦ ἀρχικοῦ Τ καί ἐκτός τῆς σφαίραςΣ, ὅτε λαμβάνομεν:

$$\iint_S \left(\frac{1}{r}\,\frac{dV}{dn} - V\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right)d\sigma +$$

$$+ \quad \iint_\Sigma \left(\frac{1}{r}\,\frac{dV}{dn} - V\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}\right)d\sigma = 0$$

ὅπου τό μέν πρῶτον ὁλοκλήρωμα εἶναι ἐπί τῶν ἐσωτερικῶν ἐπιφανειῶν τῶν περιοριζουσῶν τόν δοθέντα τόπον T (δηλαδήαἱ παράγωγοι λαμβάνονται ἐπί τῆς ἐσωτερικῆς ἡμικαθέτου),τό δέ δεύτερον ὁλοκλήρωμα εἶναι ἐπί τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Ἐάν ἐν τῷ τύπῳ τούτῳ εἰσαχθῇ τ' ὁλοκλήρωμα ἐπί τῆς ἐσωτερικῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, προκύπτει:

$$\iint_S \left[\frac{1}{r}\,\frac{dV}{dn} - V\,\frac{d\,\frac{1}{r}}{dn}\right]d\sigma =$$

$$= \iint_\Sigma \left[\frac{1}{r}\,\frac{dV}{dn} - V\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}\right]d\sigma \qquad (20)$$

τ'ὁλοκλήρωμα τοῦ δευτέρου μέλους, τό ὁποῖον εἶναι βεβαίως ἀνεξάρτητον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας ἀναλύεται εἰς τά ἑξῆς δύο: $\iint_\Sigma \frac{1}{r}\,\frac{dV}{dn}\,d\sigma - \iint_\Sigma V\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}d\sigma$

ἐκ τῶν ὁποίων τό πρῶτον γράφεται:

$$\frac{1}{r}\iint_\Sigma \frac{dV}{dn}\,d\sigma$$

διότι ἐπί τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας τό r εἶναι σταθερά ποσότης ἀφ'ἑτέρου ὅμως, καθώς ἐμάθομεν, εἶναι:

$$\iint_\Sigma \frac{dV}{dn}\,d\sigma = 0$$

Ὥστε τό δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος (20) γίνεται:

$$-\iint_\Sigma V\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}\,d\sigma =$$

$$= -\frac{1}{r^2}\iint_\Sigma V\,\text{συν}(r,n)\,d\sigma = -\frac{1}{r^2}\iint_\Sigma V d\sigma$$

διότι ἐπί τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἔχομεν συν(r,n)=1, καθόσον ἡ γωνία (r,n) εἶναι μηδέν. Ἐάν καλέσωμεν μ καί ε τό μέγιστον καί τό ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως V ἐπί τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, γνωρίζομεν ὅτι ἔχομεν:

$$\varepsilon . 4\pi r^2 < \iint_\Sigma V d\sigma < \mu . 4\pi r^2$$

'Εντεῦθεν ἐξάγομεν:

$$-4\pi\varepsilon > -\frac{1}{r^2}\iint_\Sigma V d\sigma > -4\pi\mu$$

ὅταν ὅμως ἡ αὐθαίρετος ἀκτίς τείνῃ εἰς τό μηδέν, αἱ τιμαί μ καί ε τείνουσιν, ἕνεκεν τῆς συνεχείας, πρός τήν τιμήν V(α, β,γ) καί ἑπομένως ἔχομεν:

$$-\frac{1}{r^2}\iint_\Sigma V d\sigma = -4\pi V(\alpha,\beta,\gamma)$$

'Επειδή λοιπόν τό δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος (20)ἔχει τιμήν $-4\pi V(\alpha,\beta,\gamma)$, ἡ ἰσότης αὕτη λαμβάνει τήν μορφήν:

$$V(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left(V \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} - \frac{1}{r}\frac{dV}{dn}\right) d\sigma \qquad (21)$$

ὁ σπουδαιότατος δέ οὗτος τύπος δίδει τήν τιμήν τῆς συναρτήσεως V εἴς τι σημεῖον A(α,β,γ) κείμενον ἐντός τοῦ τόπου T συναρτήσει τῶν τιμῶν, ἅς λαμβάνουσιν ἐπί τῆς περιοριζούσης ἐπιφανείας S ἡ V καί ἡ παράγωγος $\frac{dV}{dn}$.

Θεωρήσωμεν ἤδη τήν περίπτωσιν, καθ'ἥν τό σημεῖον A κεῖται ἐκτός τοῦ τόπου T ἡ δέ συνάρτησις V ἐπαληθεύει τήν ἐξίσωσιν τοῦ Laplace ἐκτός τοῦ αὐτοῦ τόπου· εἶναι ἀνάγκη ἐνταῦθα νά ὑποθέσωμεν ὅτι ὑπάρχει σταθερός τις ἀριθμός K τοιοῦτος, ὥστε νά ἔχωμεν:

$$(22) \quad |V| < \frac{K}{\rho}\,\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right| < \frac{K}{\rho^2},\ \left|\frac{\partial V}{\partial y}\right| < \frac{K}{\rho^2},\ \left|\frac{\partial V}{\partial z}\right| < \frac{K}{\rho^2} \quad (x^2+y^2+z^2=\rho^2)$$

διά πολύ μεγάλας τιμάς τοῦ ρ, ὅπερ ρ παριστᾶ τήν πολικήν ἀκτῖνα τοῦ σημείου (x,y,z).

Ἄς γράψωμεν σφαῖραν Σ′ μέ κέντρον τήν ἀρχήν τῶν συντεταγμένων καί ἀκτῖνα πολύ μεγάλην, οὕτως ὥστε τό σημεῖον A νά εὑρίσκεται μεταξύ τῆς ἐπιφανείας S καί τῆς σφαίρας Σ′ καί ἄς ἀφαρμόσωμεν τόν τύπον τοῦ Green[ὑπό τήν μορφήν(16)] εἰς τάς συναρτήσεις V καί $\frac{1}{r}$ καί ἐν τῷ τόπῳ T_2 τῷ περιλαμβανομένῳ μεταξύ τῶν ἐπιφανειῶν S, Σ καί Σ΄καί κατόπιν ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἀκτίς r τείνει εἰς τό μηδέν τότε προκύπτει ὁ τύπος:

$$V(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left(V\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{dV}{dn}\right)d\sigma +$$

$$+ \frac{1}{4}\iint_{\Sigma^1}\left(V\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{dV}{dn}\right)d\sigma$$

τό δεύτερον ὁλοκλήρωμα, τό ὁποῖον εἶναι προφανῶς ἀνεξάρτητον τῆς ἀκτῖνος ρ τῆς σφαίρας Σ; γράφεται καί ὡς ἑξῆς:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[V\frac{\sigma\upsilon\nu(r,n)}{r2} - \frac{1}{r}\frac{dV}{dn}\right]\rho^2\eta\mu\theta d\theta d\phi \qquad (23)$$

ἐάν μεταχειρισθῶμεν τάς πολικάς συντεταγμένας ρ,θ,φ ἐπί τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας Σ. Ὅταν ἡ ἀκτίς ρ τείνει εἰς τό ἄπειρον, ὁ λόγος $\frac{\rho}{r}$ τείνει εἰς τήν μονάδα ἡ συνάρτησις V τείνει εἰς τό μηδέν καί ἡ τιμή τῆς παραγώγου $\frac{dV}{dn}$ εἶναι κατ'ἀπόλυτον τιμήν μικροτέρα τοῦ $\frac{3K}{\rho^2}$ διά μεγάλας τιμάς τοῦ ρ: τοῦτο προκύπτει ἐκ τῆς ἰσότητος·

$$\frac{dV}{dn} = \frac{\partial V}{\partial x}\sigma\upsilon\nu\alpha + \frac{\partial V}{\partial y}\sigma\upsilon\nu\beta + \frac{\partial V}{\partial z}\sigma\upsilon\nu\gamma$$

καί ἐκ τῶν ἀνισοτήτων (22). Συμπεραίνομεν, λοιπόν, εὐκόλως ὅτι, τοῦ ρ αὐξανομένου ἐπ'ἄπειρον, τ'ὁλοκλήρωμα (23) τείνει εἰς τό μηδέν καί ἐπειδή ἀφ'ἑτέρου δέν ἀξαρτᾶται ἐκ τοῦ ρ, ἕπεται ὅτι εἶναι ἀκριβῶς ἴσον τῷ μηδενί· προκύπτει, λοιπόν, καί πάλιν ὁ τύπος:

$$V(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left(V\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{dV}{dn}\right)d\sigma$$

ὅπου ὅμως αἱ παράγωγοι δέον νά λαμβάνωνται ἐπί τῆς ἐξωτερικῆς ἡμικαθέτου ἐπί τήν ἐπιφάνειαν S.

25. Ἐφαρμογαί τοῦ θεμελιώδους τύπου. Ἐάν ἡ ἐπιφάνεια S εἶναι σφαιρική, ἔχουσα κέντρον τό σημεῖον $\mu(\alpha,\beta,\gamma)$καί ἀκτῖνα R καί ἐφαρμόσωμεν τόν θεμελιώδη τύπον (21) προκύ-

πτει, ὡς ὑπελογίσαμεν ἀνωτέρω, ὁ ἑξῆς:

$$V(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_S V d\sigma \qquad (24)$$

Στηριζόμενοι ἐπί τοῦ τύπου τούτου θ'ἀποδείξωμεν τό ἑξῆς θεώρημα:

Θεώρημα: Μία συνάρτησις $V(x,y,z)$ συνεχής ἐν τῇ περιοχῇ σημείου τινος (α,β,γ) καί ἐπαληθεύουσα τήν ἐξίσωσιν τοῦ Laplace δέν δύναται νά ἔχῃ εἰς τό σημεῖον τοῦτο οὔτε μέγιστον, οὔτε ἐλάχιστον.

Ὑποτεθείσθω, τῷ ὄντι, ὅτι ἡ τιμή $V(\alpha,\beta,\gamma)$ εἶναι μέγιστον· τότε, ἐάν λάβωμεν τήν ἀκτῖνα R τῆς σφαίρας ἀρκετά μικράν θά ἔχωμεν ἐπί τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς τήν ἀνισότητα:

$V(x,y,z) < V(\alpha,\beta,\gamma)$ καί ἐπομένως: $\iint_S V d\sigma < V(\alpha,\beta,\gamma) \iint_S d\sigma$

δηλαδή

$$\frac{1}{4\pi R^2} \iint_S V d\sigma < \frac{1}{4\pi R^2} V(\alpha,\beta,\gamma) 4\pi R^2$$

ἤ

$$\frac{1}{4\pi R^2} \iint_S V d\sigma < V(\alpha,\beta,\gamma)$$

τοῦτο δέ ἀντιβαίνει εἰς τήν ἰσότητα (24)

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι οὔτε ἐλάχιστον δύναται νά εἶναι ἡ τιμή $V(\alpha,\beta,\gamma)$.

Τοῦ θεωρήματος τούτου ἄμεσον πόρισμα εἶναι τό ἑξῆς:

Π ό ρ ι σ μ α. Εἶναι ἀδύνατον νά ὑπάρχωσι δύο συναρτήσεις ἐπαληθεύουσαι τήν ἐξίσωσιν τοῦ Laplace, συνεχεῖς καθώς καί αἱ μερικαί αὐτῶν παράγωγοι πρώτης καί δευτέρας τάξεως εἰς τό ἐσωτερικόν ἐπιφανείας ἐπί τῆς ὁποίας λαμβάνουσι τάς αὐτάς τιμάς.

Ὑποτεθείσθω, τῷ ὄντι, ὅτι ὑπάρχουσι δύο τοιαῦται συναρτήσεις V_1 καί V_2· τότε ἡ διαφορά αὐτῶν, ἥτις ἐπαληθεύει ὡσαύτως τήν ἐξίσωσιν τοῦ Laplace, μηδενιζομένη ἐπί τῆς ἐπιφανείας ἤ θά ἔχῃ ἐντός αὐτῆς μέγιστον ἤ ἐλάχιστον, τουθ'ὅπερ εἶναι ἀδύνατον κατά τό προηγούμενον θεώρημα, ἤ θά εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν, ὁπότε αἱ δύο συναρτήσεις V_1 καί V_2 συμπίπτουσι.

Δυνάμεθα ὁμοίως νά δείξωμεν ὅτι δύο συναρτήσεις V_1 καί V_2 ἐπαληθεύουσαι τήν ἐξίσωσιν τοῦ Laplace, συνεχεῖς ἐκτός κλειστῆς ἐπιφανείας S καί τείνουσαι εἰς τό μηδέν ὅταν τό σημεῖον (x,y,z) ἀπομακρύνεται ἐπ'ἄπειρον, συμπίπτουσιν ἐάν λαμβάνωσιν τάς αὐτάς τιμάς ἐπί τῆς ἐπιφανείας S.

Κατά ταῦτα, ἐάν δοθῶσιν ἡμῖν τιμαί ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τά σημεῖα τῆς ἐπιφανείας S (μία πρός ἕν) μία μόνον λύσις τῆς ἐξισώσεως τοῦ Laplace συνεχής ἐντός τῆς S καί λαμβάνουσα ἐπί τῆς ἐπιφανείας ταύτης τάς δοθείσας τιμάς δύναται νά ὑπάρχῃ· ἀλλά ὑπάρχει ἡ λύσις αὕτη; καί πῶς δύναται νά προσδιορισθῇ; Τό περίφημον τοῦτο πρόβλημα, τό ὁποῖον εἶναι γνωστόν ὡς πρόβλημα ἤ ἀρχή τοῦ Dirichlet δέν θά ἐξετάσωμεν ἐνταῦθα.

Ἕλξις καί Δυναμικόν

26. Θά ἐφαρμόσωμεν τάς ἀνωτέρω ἐκτεθείσας θεωρίας περί τῶν πολλαπλῶν ὁλοκληρωμάτων εἴς τινα θεμελιώδη προβλήματα τῆς ἕλξεως καί τοῦ Δυναμικοῦ.

Θεωρήσωμεν σῶμά τι, τό ὁποῖον ἕλκει σημεῖόν τι ἔχον συντεταγμένας x,y, z καί τοῦ ὁποίου ἡ πυκνότης δ εἰς ἕκαστον σημεῖον (α,β,γ) εἶναι συνάρτησις συνεχής τῶν συντεταγμένων αὐτοῦ. Ἐάν καλέσωμεν dv τόν στοιχειώδη ὄγκον, ἡ στοιχειώδης μᾶζα θά εἶναι d καί ἡ στοιχειώδης ἕλξις, ἥν τό σημεῖον (α,β,γ) ἐπιφέρει ἐπί τοῦ σημείου (x,y,z) εἶναι:

$$\frac{\delta dv}{r2} \quad \text{ὅπου} \quad r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2$$

κατά τόν νόμον τοῦ Νεύτωνος, αἱ δέ προβολαί αὐτῆς ἐπί τούς ἄξονας εἶναι:

$$\frac{(\alpha-x)\delta d\nu}{r^3}, \quad \frac{(\beta-y)\delta d\nu}{r^3}, \quad \frac{(\gamma-z)\delta d\nu}{r^3}$$

'Εάν, λοιπόν, καλέσωμεν X,Y,Z τάς ἐπί τούς ἄξονας προβολάς τῆς ὁλικῆς τοῦ σώματος ἕλξεως θά ἔχωμεν τούς τύπους :

$$X = \iiint \frac{(\alpha-x)\delta d\nu}{r^3}, \quad Y = \iiint \frac{(\beta-y)\delta d\nu}{r^3}$$

$$Z = \iiint \frac{(\gamma-z)\delta d\nu}{r^3}$$

ὅπου τά ὁλοκληρώματα ἐκτείνονται ἐφ' ὅλης τῆς ἑλκυούσης μάζης.

Θά δείξωμεν ὅτι αἱ συνιστῶσαι X,Y,Z εἶναι μερικαί παράγωγοι ὡς πρός x ,y , z τῆς συναρτήσεως.

$$P(x,y,z) = \iiint \frac{\delta d\nu}{r}$$

ἥτις καλεῖται δυναμικόν, τοῦ ὁλοκληρώματος ἐκτεινομένου ἐπί τοῦ τόπου τοῦ κατεχομένου ὑπό τῆς ἑλκυούσης μάζης.

'Η ἀπόδειξις γίνεται ἀμέσως εἰς τήν περίπτωσιν, καθ' ἥν τό ἑλκυόμενον σημεῖον κεῖται ἐκτός τῆς ἑλκυούσης μάζης, διότι τότε ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτησις εἶναι συνεχής ἐν τῷ τόπῳ τῆς ὁλοκληρώσεως καί τάς παραγώγους τοῦ ὁλοκληρώματος ὡς πρός xy καί z εὑρίσκομεν ἐφαρμόζοντες τά γνωστά περί τῆς ὡς πρός παράμετρον διαφορίσεως.

Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην δυνάμεθα ἐπίσης εὐκόλως νά δείξωμεν ὅτι τό δυναμικόν P ἐπαληθεύει τήν ἐξίσωσιν τοῦ Laplace καί ὅτι, ἐάν τό σημεῖον (x ,y ,z) ἀπομακρύνεται ἐπ' ἄπειρον, τό δυναμικόν P καί αἱ παράγωγοι $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial z}$ τείνουσιν εἰς τό μηδέν καί ὅτι εἶναι ἀπειροστά τό μέν P τῆς ' τάξεως $\frac{1}{\rho}$, αἱ δέ παράγωγοι ἐν γένει τῆς τάξεως $\frac{1}{\rho^2}$, ὅπου ρ παριστᾷ τήν πολικήν ἀκτῖνα τοῦ σημείου (x.y.z).

Πρός τοῦτο γράφομεν:

$$P = \frac{1}{\rho}\iiint \frac{\rho}{r}\,\delta d\alpha d\beta d\gamma$$

καί παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδή ὁ λόγος $\frac{\rho}{r}$ τείνει πρός τήν μονάδα, τό γινόμενον Pρ τείνει πρός τό ὁλοκλήρωμα $\iiint \delta d\alpha d\beta d\gamma =$ M δηλαδή πρός τόν ἀριθμόν τόν παριστῶντα τήν ἑλκύουσαν μᾶζαν, ὥστε τό δυναμικόν P τείνει εἰς τό μηδέν ὡς τό ἀπειροστόν $\frac{M}{\rho}$

Λάβωμεν ἤδη τό

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \iiint \frac{(\alpha - x)\delta d\alpha d\beta d\gamma}{r^3} =$$

$$\frac{1}{\rho^2} \iiint \frac{\alpha - x}{r}\left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \delta d\alpha d\beta d\gamma$$

καί παρατηρήσωμεν ὅτι τό μέν $\frac{\rho}{r}$ τείνει πρός τήν μονάδα τόδέ $\frac{\alpha - x}{r}$ εἶναι μικρότερον πάντοτε τῆς μονάδος, ἐάν δέ τό σημεῖον (x,y,z) ἀπομακρυνθῇ εἰς τό ἄπειρον κατά τήν διεύθυνσιν τήν σχηματίζουσαν τάς γωνίας a,b,c, τό ἀπειροστόν $\frac{\alpha - x}{r}\frac{\rho}{r}^2$ δdαdβdγ εἶναι ἰσοδύναμον τῷ -δdαdβdγσυνα καί ἐπομένως θά ἔχωμεν:

$$\text{ὅρ}\left(\rho^2 \frac{P}{x}\right) = -M\text{συν}a$$

ὅπου M εἶναι ἡ ἑλκύουσα μᾶζα.

Ὁμοίως (1) εὑρίσκομεν:

$$\text{ὅρ}\left(\rho^2 \frac{\partial P}{\partial y}\right) = -M\text{συν}b, \quad \text{ὅρ}\left(\rho^2 \frac{\partial P}{\partial z}\right) = -M\text{συν}c$$

Ἐάν ὑπολογίσωμεν τάς δευτέρας παραγώγους τοῦ δυναμικοῦ εὑρίσκομεν:

(1) Ἐκ τῶν τύπων τούτων συνάγομεν ὅτι ἡ $\frac{\partial P}{\partial x}$ εἶναι ἀπειροστόν ἀνωτέρας τάξεως τοῦ $\frac{1}{\rho^2}$ μόνον εἰς τήν περίπτωσιν, καθ'ἥν ἡ θεωρουμένη διεύθυνσις εἶναι τοιαύτη, ὥστε νά ἔχωμεν συνa=o. Οὐδέποτε ὅμως αἱ μερικαί παράγωγοι $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}$ εἶναι ἀπειροστά κατωτέρας τάξεως τοῦ $\frac{1}{\rho^2}$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \iiint \left[-\frac{1}{r^3} + \frac{3(\alpha-x)^2}{r^3}\right] \delta d\nu,$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \iiint \left[-\frac{1}{r^3} + \frac{3(\beta-y)^2}{r^3}\right] \delta d\nu$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \iiint \left[-\frac{1}{r^3} + \frac{3(\gamma-z)^2}{r}\right] \delta d\nu$$

ἐκ δὲ τῆς προσθήκης αὐτῶν κατά μέλη εὑρίσκομεν:

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0$$

δηλαδή: τό δυναμικόν ἐπαληθεύει τήν ἐξίσωσιν τοῦ Laplace εἰς τήν περίπτωσιν, καθ'ἥν τό σημεῖον (x,y,z) κεῖται ἐκτός τῆς ἑλκυούσης μάζης.

27. Ἐξετάσωμεν ἤδη τήν περίπτωσιν, καθ'ἥν τό σημεῖον (x,y,z) κεῖται ἐντός τῆς ἑλκυούσης μάζης. Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην αἱ ἀνωτέρω ἐκτελεσθεῖσαι πράξεις δέν εἶναι νόμιμοι, ἐν τούτοις διά τῆς χρήσεως τῶν πολικῶν συντεταγμένων βεβαιούμεθα ὅτι αἱ ποσότητες P,X,Y,Z, ἔχουσιν ὡρισμένην ἔννοιαν. Θά δείξωμεν ἤδη ὅτι καί πάλιν ἔχομεν τάς ἰσότητας:

$$X = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial P}{\partial z}$$

Θεωρήσωμεν μικρόν τινα τόπον, T_1 περί τό σημεῖον (x,y,z) διαιροῦντα τήν ἑλκύουσαν μᾶζαν M εἰς δύο ἑτέρας M_1 καί M_2 (ἡ M_1 ἀντιστοιχεῖ εἰς τόν τόπον T_1) καί καλέσωμεν P_1 καί P_2 τ'ἀντίστοιχα δυναμικά, $X_1Y_1Z_1$ καί $X_2Y_2Z_2$ τάς ἀντιστοιχούσας συνιστώσας τῆς ἑλκυούσης δυνάμεως· θά ἔχωμεν προφανῶς·

$$P = P_1+P_2, \quad X = X_1+X_2, \quad Y = Y_1+Y_2, \quad Z=Z_1+Z_2$$

θεωρήσωμεν ἐπίσης δεύτερον σημεῖον $A'(x+\Delta x, y, z)$ κείμενον ἐν τῷ τόπῳ T_1 καί καλέσωμεν P_1', P_2' καί P' τά ὡς πρός τό σημεῖον τοῦτο δυναμικά τῶν μαζῶν M_1, M_2 καί τῆς ὁλικῆς M_1 ὅτε θά ἔχωμεν προφανῶς:

$$\frac{P'-P}{\Delta x} = \frac{P_1'-P_1}{\Delta x} + \frac{P_2'-P_2}{\Delta x}$$

ὁ λόγος $\frac{P_2'-P_2}{\Delta x}$ ἔχει ὅριον τό X_2, ὅταν τό Δx τείνῃ εἰς τό μηδέν, διότι τά σημεῖα $A(x, y, z)$ καί $A'(X+\Delta x, y, z)$ κεῖνται ἐκτός τῆς μάζης M_2. Πρός ἐξέτασιν δέ τοῦ λόγου $\frac{P_1'-P_1}{\Delta x}$ ἄς καλέσωμεν τήν ἀπόστασιν τοῦ τυχόντος σημείου τῆς μάζης M_1 ἀπό τοῦ σημείου A' ὅτε ἔχομεν:

$$P_1 = \iiint \frac{\delta d\nu}{r}, \quad P_1' = \iiint \frac{\delta d\nu}{r'}$$

$$\frac{P_1'-P_1}{\Delta x} = \iiint \frac{\delta d\nu}{\Delta x}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)$$

παρατηροῦμεν ὅτι $\quad \Delta x \; \left| > \right| r' - r \Big|$

ἐξ οὗ $\quad \left|\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)\right| < \frac{1}{r r'} \quad \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2}\right]$

'Εντεῦθεν λαμβάνομεν:

$$\left|\frac{P_1'-P_1}{\Delta x}\right| < \frac{1}{2}\iiint \frac{\delta d\nu}{r^2} + \frac{1}{2}\iiint \frac{\delta d\nu}{(r')^2}$$

ἀλλά: $\quad \iiint \frac{\delta d\nu}{r^2} = \iiint \delta \eta\mu\theta \, d r d\theta d\varphi$

ὅπου θ καί φ εἶναι αἱ πολικαί συντεταγμέναι, διότι ἔχομεν:

$$\alpha = x + r\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\varphi \qquad \beta = y + r\,\eta\mu\theta\eta\mu\varphi, \quad \gamma - z = r\,\sigma\upsilon\nu\theta$$

ἐξ οὗ $\quad d\nu = r^2 \eta\mu\theta \, dr d\theta d\varphi$

'Εάν καλέσωμεν δ_1 ἕν ἀνώτερον ὅριον τῆς πυκνότητος περί τό σημεῖον A καί μ τήν μεγίστην ἐκ τῶν ἀποστάσεων τοῦ A ἀπό τῶν σημείων τῆς ἐπιφανείας τῆς περιοριζούσης τόν τόπον T_1, εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι:

$$\iiint \delta\eta\mu\theta d r d\theta d\psi < 4\pi\delta_1\mu$$

ἤ

$$\iiint \frac{\delta dv}{r^2} 4\pi\delta_1\mu$$

ὅμοιον τύπον εὑρίσκομεν καί διά τό $\iiint \frac{\delta dv}{(r')^2}$ καί τέλος προκύπτει:

$$\left|\frac{P_1' - P_1}{\Delta x}\right| < 4\pi\delta_1 m$$

ὅπου τό m δεικνύει τήν μέγίστην χορδήν τῆς ἐπιφανείας τῆς περιοριζούσης τόν τόπον T_1. Ὅταν, λοιπόν ὁ τόπος T_1 τείνῃ εἰς τό μηδέν κατά πάσας τάς διαστάσεις ὁ λόγος $\frac{P_1'-P_1}{\Delta x}$ τείνει εἰς τό μηδέν καί τό X_2 εἰς τό X καί ἐπομένως ἔχομεν:

$$\text{ὅρ}\frac{P'-P}{\Delta x} = \frac{\partial P}{\partial x} = X$$

ὁμοίως δεικνύομεν ὅτι ἰσχύουσι καί οἱ λοιποί δύο τύποι:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = Z$$

ὅταν τό σημεῖον (x,y,z) εἶναι ἐσωτερικόν.

Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι τό δυναμικόν P καί αἱ πρῶται αὐτοῦ παράγωγοι εἶναι συναρτήσεις συνεχεῖς διά πᾶσαν τιμήν τῶν x,y,z ἀλλά θά ἴδωμεν ὅτι δέν συμβαίνει τό αὐτό καί εἰς τάς δευτέρας παραγώγους.

Αἱ δεύτεραι παράγωγοι τοῦ P εἶναι προφανῶς συνεχεῖς συναρτήσεις ἐκτός τῆς ἑλκυούσης μάζης [δηλαδή ὅταν τό σημεῖον (x,y,z) κεῖται ἐκτός] , θά δείξωμεν ὅτι εἶναι συνεχεῖς καί ἐντός τῆς ἑλκυούσης μάζης.

Καθώς ἐδείξαμεν ἐν τῇ προηγουμένῃ παραγράφῳ ἡ διαφόρισις τοῦ δυναμικοῦ ὡς πρός x,y, z γίνεται καί ἐντός τῆς ἑλκυούσης μάζης διά τῆς συνήθους μεθόδου τῆς διαφορίσεως ὁλοκληρώματος ὡς πρός παράμετρον καί ἐπομένως ἔχομεν:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \iiint \frac{\alpha - x}{r^3} \delta d\alpha d\beta d\gamma =$$
$$= \iiint \delta \frac{\partial\left(-\frac{1}{r}\right)}{\partial \alpha} d\alpha d\beta d\gamma$$

Διαιρέσωμεν τήν ἑλκύουσαν μᾶζαν M εἰς δύο μέρη, ἐξ ὧν τό ἕν M_1 περιέχει τό σημεῖον (x,y,z) καί δέν ἔχει οὐδέν κοινόν σημεῖον μετά τῆς ἐπιφανείας Σ τῆς περιοριζούσης τήν μᾶζαν M, τό δέ ἕτερον M_2 ἀποτελεῖται ἐκ τῆς ὑπολοίπου μάζης καί καλέσωμεν P_1 καί P_2 τ'ἀντίστοιχα δυναμικά. 'Επειδή τό P_2 καί πᾶσαι αἱ παράγωγοι αὐτοῦ εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις, θ'ἀσχοληθῶμεν μόνον περί τοῦ P_1.

'Υποθέσωμεν, ὅτι ἡ πυκνότης δ ἔχει μερικάς παραγώγους πρώτης τάξεως ὡς πρός α,β,γ ἐν τῷ ἐσωτερικῷ τῆς ἑλκυούσης μάζης (διά τήν ἐπιφάνειαν Σ οὐδεμίαν ὑπόθεσιν ποιοῦμεν), ὅτε διά τῆς κατά παράγοντας ὁλοκληρώσεως εὑρίσκομεν:

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} = \iint \frac{\delta}{r} \sigma\upsilon\nu\, a\, d\sigma + \iiint \frac{1}{r} \frac{\partial \delta}{\partial \alpha} d\alpha d\beta d\gamma \qquad (25)$$

ὅπου τό a σημαίνει τήν γωνίαν τῆς ἐσωτερικῆς καθέτου μετά τοῦ ἄξονος τῶν α, τό διπλοῦν ὁλοκλήρωμα ἐκτείνεται ἐπί τῆς ἐπιφανείας Σ_1 τῆς περικλειούσης τήν μᾶζαν M_1 καί τό τριπλοῦν ἐν τῷ τόπῳ T_1 τῆς αὐτῆς μάζης. 'Επειδή τό τριπλοῦν τοῦτο ὁλοκλήρωμα εἶναι προφανῶς δυναμικόν μάζης, τῆς ὁποίας ἡ πυκνότης εἶναι $\frac{\partial \delta}{\partial \alpha}$, ἔχει μερικάς παραγώγους πρώτης τάξεως καί ἑπομένως ὑπάρχει ἡ δευτέρα παράγωγος $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$ καί εἶναι συνεχής εἰς τό ἐσωτερικόν τῆς ἑλκυούσης μάζης, ὁμοίως δέ καί αἱ παράγωγοι $\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}$. Θά ἴδωμεν ὅμως κατωτέρω, ὅτι αἱ δεύτεραι παράγωγοι τοῦ δυναμικοῦ δέν εἶναι συνεχεῖς ἐπί τῆς ἐπιφανείας τῆς περιοριζούσης τήν ἑλκύουσαν μᾶζαν M.

28. Τύπος τοῦ Poisson. Ἐμάθομεν ὅτι διά πᾶν σημεῖον κείμενον ἐκτός τῆς ἑλκυούσης μάζης ἔχομεν $\Delta P = 0$. πρόκειται ἤδη νά ὑπολογίσωμεν τό ΔP διά σημεῖον κείμενον ἐντός τῆς ἑλκυούσης μάζης.

Θεωρήσωμεν καί πάλιν τήν ἐν τῇ προηγουμένῃ παραγράφῳ διαίρεσιν τοῦ δυναμικοῦ P εἰς τά δύο P_1 καί P_2 ἔχομεν: $\Delta P = \Delta P_1$ διότι $\Delta P_2 = 0$ ἐπειδή τό σημεῖον (x,y,z) κεῖται ἐκτός τῆς ἑλκυούσης μάζης M_2.

Ἐκ τοῦ τύπου (25) προκύπτει:

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} = \iint_{\Sigma_1} \delta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \sigma\upsilon\nu a\, d\sigma + \iiint_{T_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial \delta}{\partial \alpha} d\alpha\, d\beta\, d\gamma$$

ἤ

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} = -\iint_{\Sigma_1} \delta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \alpha} \sigma\upsilon\nu a\, d\sigma -$$

$$- \iiint_{T_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \alpha} \frac{\partial \delta}{\partial \alpha} d\alpha\, d\beta\, d\gamma \qquad (26)$$

καθόσον:
$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \alpha}$$

ἐάν δέ προσθέσωμεν κατά μέλη τόν τύπον (26) καί τούς ἄλλους δύο ὁμοίους αὐτῷ λαμβάνομεν:

$$\Delta P_1 = - \quad \delta \frac{d \frac{1}{r}}{dn} d\sigma -$$

$$- \iiint \left(\frac{\partial \delta}{\partial \alpha} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \delta}{\partial \beta} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \beta} + \frac{\partial \delta}{\partial \gamma} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \gamma} \right) d\alpha\, d\beta\, d\gamma \qquad (27)$$

ἔχοντες ὑπ'ὄψιν ὅτι

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \alpha} \sigma\upsilon\nu\, a + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \beta} \sigma\upsilon\nu\, b + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \gamma} \sigma\upsilon\nu\, c = \frac{d \frac{1}{r}}{dn}$$

Θεωρήσωμεν ἤδη τόν τόπον τόν περιλαμβανόμενον ὑπό τῆς ἐπιφανείας Σ_1 (τῆς μή περιεχούσης οὐδέν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας Σ) καί τινος μικρᾶς σφαίρας σ ἐχούσης κέντρον τό σημεῖον (x, y, z) καί ἐφαρμόσωμεν ἐν τῷ τόπῳ τούτῳ καί ἐπί τοῦ τριπλοῦ ὁλοκληρώματος (27) τόν τύπον (14) (ἐσωτερική ἐπιφάνεια) τό σχετικόν πρός τόν τύπον τοῦ Green, ὅτε λαμβάνομεν:

$$\iiint\left(\frac{\partial\delta}{\partial\alpha}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\alpha}+\frac{\partial\delta}{\partial\beta}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\beta}+\frac{\partial\delta}{\partial\gamma}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\gamma}\right)d\alpha d\beta d\gamma = -$$

$$-\iint_{\Sigma_1}\delta\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma-\iint_{\sigma}\delta\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d \qquad (28)$$

διότι ἡ συνάρτησις $\frac{1}{r}$ ἐπαληθεύει τήν ἔξωσιν τοῦ Laplace ἔχομεν δείξη ἀλλαχοῦ ὅτι:

$$\text{ὅρ}\iint\delta\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma= -4\pi\delta(x,y,z) \qquad (29)$$

ὅταν ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας σ τείνῃ πρός τό μηδέν, Ἐκ τῶν τύπων (27), (28) καί (29) ἕπεται:

$$\Delta P_1 = -4\pi\delta \quad \text{ἤ} \quad \Delta P = -4\pi\delta \qquad (30)$$

ὅπου δ'εἶναι ἡ τιμή τῆς πυκνότητος εἰς τό ἑλκυόμενον σημεῖον (x,y,z). Ὁ τύπος οὗτος (30) λέγεται τύπος τοῦ Poisson. .

29) Ἀσυνέχεια τῶν δευτέρων παραγώγων. Ὁ τύπος τοῦ Poisson δεικνύει ὅτι ἐν γένει, αἱ δεύτεραι παράγωγοι τοῦ δυναμικοῦ πάσχουσιν ἀσυνέχειαν ὅταν διερχώμεθα διά τῆς ἐπιφανείας τῆς χωριζούσης τήν ἑλκύουσαν μᾶζαν ἀπό τοῦ ἐξωτερικοῦ διαστήματος, διότι τό ΔV μεταβαίνει ἀποτόμως ἐκ τῆς τιμῆς μηδέν πρός τήν τιμήν -4πδ.

Εὔκολον εἶναι νά γίνῃ ἐπαλήθευσις τούτου εἰς τήν περίπτωσιν καθ'ἥν ἡ ἑλκύουσα μᾶζα εἶναι σφαίρα ὁμογενής τῆς ὁποίας ἔστω δ ἡ πυκνότης καί ρ ἡ ἀκτίς· εὑρίσκεται ὅτι τό δυναμικόν P ἔχει διά μέν τά ἐσωτερικά σημεῖα τήν τιμήν:

$$P(x,y,z) = 2\pi\delta\left(\rho^2-\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right) \qquad (31)$$

διά δέ τά έξωτερικά σημεῖα τήν τιμήν:

$$P(x,y,z) = \frac{\frac{4}{3}\pi\rho^3\delta}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad (32)$$

'Ο τελευταῖος τύπος δεικνύει ὅτι διά τά ἐξωτερικά σημεῖα ἡ τιμή τοῦ δυναμικοῦ εἶναι τοιαύτη, ὡσεί ὁλόκληρος ἡ ἑλκύουσα μᾶζα ἦτο συγκεντρωμένη εἰς τό κέντρον τῆς σφαίρας. 'Επαληθεύομεν ἀμέσως ὅτι αἱ παραστάσεις (31) καί (32) καίαί πρῶται αὐτῶν παράγωγοι λαμβάνουσιν ἀντιστοίχως τήν αὐτήν τιμήν ἐπί τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ἀλλά δέν συμβαίνει τό αὐτό καί διά τάς δευτέρας παραγώγους αὐτῶν.

30. Αἱ ἰδιότητες τοῦ δυναμικοῦ εἶναι ἱκαναί συνθῆκαι. Καθ' ἅ ἐδείξαμεν ἀνωτέρω, τό δυναμικόν P(x,y,z) εἶναι συνάρτησις ἔχουσα τάς ἑξῆς ἰδιότητας: 1) εἶναι συνεχής ἐν ὅλῳ τῷ διαστήματι καθώς καί αἱ πρῶται αὐτῆς παράγωγοι 2) αἱ δεύτεραι παράγωγοι εἶναι συνεχεῖς ἐκτός καί ἐντός τῆς ἑλκυούσης μάζης, πάσχουσιν ὅμως ἀσυνέχειαν ἐπί τῆς ἐπιφανείας τῆς χωριζούσης τήν ἑλκύουσαν μᾶζαν ἀπό τοῦ ἐκτός διαστήματος. 3) Τό δυναμικόν ἐπαληθεύει ἐκτός μέν τήν ἐξίσωσιν $\Delta P = 0$ ἐντός δέ τήν: $\Delta P = -4\pi\delta$. 4) Τείνει πρός τό μηδέν ὅταν τό σημεῖον(x, y, z) ἀπομακρύνεται ἐπ'ἄπειρον καθ'οἱονδήποτε τρόπον. 'Αποδεικνύεται, ὅτι αἱ ἰδιότητες αὗται εἶναι συνθῆκαι ὄχι μόνον ἀναγκαῖαι ἀλλά καί ἱκαναί: 'Εάν δηλαδή θεωρήσωμεν ὄγκον τινά V καί μίαν συνάρτησιν P(x,y,z) ἔχουσαν πάσας τάς ἀνωτέρω ἐκτεθείσας ἰδιότητας, τοῦ δ παριστῶντος δοθεῖσαν συνάρτησιν τῶν (x,y,z) ἐν τῷ ἐσωτερικῷ τοῦ ὄγκου V, ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ συνάρτησις P παριστᾷ ἀναγκαίως τό δυναμικόν τό προερχόμενον ἐκ τῆς ἕλξεως ἐπί τοῦ σημείου (x,y,z) ὕλης πληρούσης τόν ὄγκον V, ὅπου τήν πυκνότητα εἰς ἕκαστον σημεῖον καθορίζει ἡ συνάρτησις δ (x,y,z).

Τό θεώρημα τοῦτο ἐφαρμόσας ὁ διάσημος μαθηματικός Dirichlet εἰς τήν περίπτωσιν, καθ'ἥν ἡ ἑλκύουσα μᾶζα ἔχει σχῆμα ἐλλειψοειδοῦς, τοῦ ὁποίου ἡ ἐξίσωσις ἔστω:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

εὗρεν ὅτι τό δυναμικόν δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$P = \pi\alpha\beta\gamma\delta \int_0^\infty \frac{1 - \frac{x^2}{\alpha^2+\lambda} - \frac{y^2}{\beta^2+\lambda} - \frac{z^2}{\gamma^2+\lambda}}{\sqrt{(\alpha^2+\lambda)(\beta^2+\lambda)(\gamma^2+\lambda)}} d\lambda$$

ἐπί τῇ ὑποθέσει ὅτι ἡ πληροῦσα τόν ὄγκον ὕλη εἶναι ὁμογενής πυκνότητος (σταθερᾶς) δ.

Ἕλξις στρώματος

31. Θεωρήσωμεν κλειστήν τινα ἐπιφάνειαν Σ καί ἑτέραν Σ΄πολύ πλησίον τῆς πρώτης καί λάβωμεν ἕν στοιχεῖον $d\sigma$ ἐπί τῆς ἐπιφανείας Σ ἐάν εἰς τό τυχόν σημεῖον τοῦ στοιχείου τούτου φέρομεν τήν κάθετον ἐπί τήν ἐπιφάνειαν Σ καί καλέσωμεν ε τό μῆκος τοῦ τμήματος αὐτῆς τοῦ περιλαμβανομένου μεταξύ τῶν δύο ἐπιφανειῶν, ὁ κύλινδρος ὁ ἔχων βάσιν τό $d\sigma$ καί ὕψος ε θά ἔχῃ ὄγκον $\varepsilon d\sigma$ καί μᾶζαν $\varepsilon\rho d\sigma$, ὅπου ρ παριστᾷ τήν πυκνότητα τῆς ὕλης τῆς πληρούσης τόν στοιχειώδη τοῦτον ὄγκον. Θέσωμεν $\varepsilon\rho = \delta$ καί ὑποθέσωμεν ὅτι, ὅταν ἡ ἐπιφάνεια Σ΄τείνῃ νά συμπέσῃ μετά τῆς Σ, ἡ ποσότης αὕτη δ τείνει πρός ὡρισμένον ὅριον δι' ἕκαστον σημεῖον τῆς ἐπιφανείας Σ τοιουτοτρόπως ἡ ὕλη ἡ πληροῦσα τό μεταξύ τῶν δύο ἐπιφανειῶν διάστημα τείνει νά συγκεντρωθῇ ἐπί τῆς ἐπιφανείας Σ μέ τήν πυκνότητα δ, ἥτις λέγεται πυκνότης κατ'ἐπιφάνειαν (densitè superficielle) καί οὕτω ἀποτελεῖται τό λεγόμενον στρῶμμα κατ' ἐπιφάνειαν.

Τό δυναμικόν τό ἀντιστοιχοῦν εἰς τήν ἕλξιν τοιούτου στρώμματος δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$P = \iint \frac{\delta d\sigma}{r}$$

τοῦ διπλοῦ ὁλοκληρώματος ἐκτεινομένου ἐπί τῆς ἐπιφανείας Σ, εἶναι δέ προφανῶς συνεχής συνάρτησις καθώς καί αἱ πρῶται αὐτοῦ μερικαί παράγωγοι, ὅταν τό ἑλκυόμενον σημεῖον (x,y,z) δέν εὑρίσκεται ἐπί τῆς ἐπιφανείας,ἔχομεν δέ πάλιν:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = Z$$

Δυνάμεθα δέ νά δείξωμεν, ὅτι ἔχει ἐπίσης ὡρισμένην σημασίαν καί ὅταν τό σημεῖον (x,y,z) εὑρίσκεται ἐπί τῆς ἐπιφανείας καί εἶναι συνεχής συνάρτησις, ὅταν διέρχηται δι' αὐτῆς.

Τῷ ὄντι, ἄς θεωρήσωμεν ἐπί τῆς ἐπιφανείας Σ μικράν καμπύλην κλειστήν c καί ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁ πούς K τῆς καθέτου τῆς ἐκ τοῦ σημείου $A(x,y,z)$ ἐπί τήν ἐπιφάνειαν καταβιβαζομένης πίπτει ἐντός τῆς καμπύλης C. Ἐάν λάβωμεν ὡς ἀρχήν συντεταγμένων τόν πόδαν K ὡς ἄξονα τῶν z τήν KA καί τούς δύο ἄλλους ἄξονας ὀρθογωνίους ἐπί τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς τό K, τό δυναμικόν θά εἶναι:

$$\iint \frac{\delta\, dxdy \sqrt{1 + p^2 + q^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}}$$

ὅπου $KA = h, \ \frac{\partial z}{\partial x} = p, \frac{\partial z}{\partial y} = q$

Ἐπειδή, βεβαίως, μᾶς ἐνδιαφέρει μόνον τό δυναμικόν τ'ὀφειλόμενον εἰς τήν ἕλξιν τοῦ τμήματος τοῦ περιοριζομένου ὑπό τῆς καμπύλης C, τό προηγούμενον ὁλοκλήρωμα ἔχει τόπον τήν προβολήν τοῦ τμήματος τούτου ἐπί τό ἐπίπεδον τῶν xy , εἶναι δέ μικρότερον τοῦ

$$\iint \frac{\delta \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

ἐάν μεταχειρισθῶμεν πολικάς συντεταγμένας R καί Θ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ (xy), τό τελευταῖον τοῦτο ὁλοκλήρωμα γράφεται:

$$\iint \varepsilon dRd\Theta\ \sqrt{1+p^2+q^2}$$

ἐκ τῆς μορφῆς δέ ταύτης βλέπομεν ὅτι εἶναι ἀπειροστόν, ὅταν τό χωρίον τό περικλειόμενον ὑπό τῆς καμπύλης (c) τείνῃ πρός τό μηδέν, τοθ'ὅπερ ἀποδεικνύει ὅτι τό δυναμικόν παύει νά εἶναι συνεχής συνάρτησις, ὅταν τό ἑλκυόμενον σημεῖον διαπερᾷ τήν ἐπιφάνειαν.

Αἱ μερικαί ὅμως παράγωγοι αὐτοῦ παύουσιν ἔχουσαι ἔννοιαν, ὅταν τό σημεῖον (x,y,z) εὑρίσκεται ἐπί τῆς ἐπιφανείας.

32. Τύπος τοῦ Gauss . Ἐάν ἐφαρμόσωμεν τόν τύπον τοῦ Green λαμβάνοντες V = P καί ὑποθέτοντες τήν ἑτέραν συνάρτησιν U σταθεράν, προκύπτει ὁ τύπος:

$$\iint \frac{dP}{dn}\,d\sigma = \iiint \Delta P\,dxdydz \qquad (33)$$

ἐπειδή ὅμως εἶναι ἀνάγκη αἱ δεύτεραι παράγωγοι τοῦ δυναμικοῦ νά εἶναι συνεχεῖς, ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς ὁλοκληρώσεως κεῖται ὁλόκληρος ἐντός τῆς ἑλκυούσης μάζης ὅτε $\Delta P = -4\pi\delta$ καί ὁ τύπος (33) γίνεται:

$$\iint \frac{dP}{dn}\,d\sigma = -4\pi \iiint \delta\,dxdydz$$

ἤ

$$\iint \frac{dP}{dn}\,d\sigma = -4\pi M \qquad (34)$$

ὅπου M εἶναι ἡ ἑλκύουσα μᾶζα ἡ περιεχομένη ἐντός τῆς ἐπιφανείας τῆς ὁλοκληρώσεως S.

Δυνάμεθα δέ εὐκόλως νά δείξωμεν ὅτι ὁ τύπος οὗτος, ὅστις εὑρέθη ὑπό τοῦ Gauss, εἶναι γενικός. Ὑποτεθείσθω κατ'ἀρχάς, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια S ἐγκλείει μέν τόπον κείμενον ἐντός τῆς ἑλκυούσης μάζης, ἔχει ὅμως κοινά μέρη μετά τῆς ἐπιφανείας Σ τῆς περιοριζούσης τήν ἑλκύουσαν μᾶζαν· ἕνεκεν τῆς συνεχείας τῆς παραγώγου $\frac{dP}{dn}$ δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν τά κοινά μέρη δι'ἐπιφανείας ἐσωτερικῆς ἀπείρως γειτονικῆς καί ἑπομένως ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἐξακολουθεῖ νά ἰσχύῃ ὁ τύπος (34). Δι'ὁμοίου συλλογισμοῦ ἀποδεικνύομεν τήν ἰσχύν τοῦ αὐτοῦ τύπου εἰς τήν περίπτωσιν καθ'ἥν ἐπιφάνεια S ἔχει ἐξωτερικά μέρη καί τέμνει τήν ἐπιφάνειαν Σ.Τέλος εἰς τήν περίπτωσιν, καθ'ἥν ἡ ἐπιφάνεια τῆς ὁλοκληρώσεως S κεῖται ὁλόκληρος ἐκτός τῆς ἑλκυούσης μάζης, ἡ ἰσχύς τοῦ τύπου (34) εἶναι προφανής, διότι ἔχομεν M = 0.

$$\iint \frac{dP}{dn}\, d\sigma = 0$$

33) 'Επιφάνεια σταθεροῦ δυναμικοῦ. Θεωρήσωμεν μίαν ἐπιφάνειαν S καί ἐπ'αὐτῆς στρῶμα ὕλης, ὑποθέτοντες τήν ἐπιφάνειαν τοιαύτην, ὥστε ἡ ἕλξις τοῦ στρώματος ἐπί παντός ἐσωτερικοῦ σημείου νά εἶναι μηδενική· τότε τό δυναμικόν τ'ὀφειλόμενον εἰς τήν ἕλξιν ταύτην, θά εἶναι σταθερά ποσότης διά τάς ἐντός σημεῖα καί ἑπομένως θά ἔχῃ σταθεράν τιμήν(C) καί ἐπί τῆς ἐπιφανείας S, ἡ ὁποία διά τοῦτο καλεῖται ἐπιφάνεια σταθεροῦ δυναιμικοῦ (surface de niveau).

'Εκτός τῆς ἐπιφανείας S, τό δυναμικόν θά ἔχῃ μεταβλητήν τιμήν τείνουσαν πρός τό μηδέν ὅταν τό σημεῖον (x,y z) ἀπο μακρύνεται ἐπ'ἄπειρον. Θεωρήσωμεν καί ἑτέραν ἐπιφάνειαν σταθεροῦ δυναμικοῦ S΄ἀπείρως γειτονικήν τῆς S καί ἐπί τῆς S ἕν στοιχεῖον dσ καί νοήσωμεν ἐκ τῆς περιμέτρου τοῦ στοιχείου τούτου ἀγομένας γραμμάς καθέτους ἐπί τάς ἐπιφανείας S καί S΄(αἵτινες εἶναι παράλληλοι) σχηματίζεται οὕτω εἶδος κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, ἥτις μετά τῶν S καί S΄ περιορίζει ἕνα κυλινδρικόν τόπον T ἐπί τοῦ ὁποίου ἐφαρμόζω τόν ἐν τῇ προηγουμένῃ παραγράφῳ εὑρεθέντα τύπον τοῦ Gauss.

$$\iint \frac{dP}{dn}\, d\sigma = -4\pi M \tag{35}$$

'Η ἰσότης:
$$\frac{dP}{dn} = \frac{\partial P}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{dz}{dn}$$
δεικνύει ὅτι ἡ παράγωγος $\frac{dP}{dn}$ εἶναι μηδέν ἐπί τῆς πλευρικῆς

ἐπιφανείας τοῦ κυλινδρικοῦ τόπου T καθόσον αἱ παράγωγοι $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}$ εἶναι ἀνάλογοι πρός τά διευθύνοντα συνημίτονα τῆς καθέτου τῶν ἐπιφανειῶν σταθεροῦ δυναμικοῦ αἱ δέ γενέτειραι εἶναι κάθετοι ἐπί τάς ἐπιφανείας ταύτας, ἐπίσης εἶναι μηδέν τό στοιχεῖον τοῦ ὁλοκληρώματος (35) τό ἀντιστοιχοῦν εἰς τό ἐπί τῆς ἀρχικῆς ἐπιφανείας S τμῆμα.

Ἑπομένως, ὁ τύπος (35) γίνεται:

$$\frac{dP}{dn}d\sigma' = -4\pi M \quad \text{ἤ} \quad \frac{dP}{dn}d\sigma' = -4\pi\delta d\sigma ,$$

ὅταν δέ ἡ ἐπιφάνεια S΄τείνη πρός τήν ἐπιφάνειαν S ὁ λόγος $\frac{d\sigma'}{d\sigma}$ τείνει πρός τήν μονάδα καί προκύπτει ὁ θεμελιώδης τύπος:

$$\delta = -\frac{1}{4\pi}\frac{dP}{dn}$$

Θεωρήσωμεν τέλος οἰκογένειαν ἐπιφανειῶν $V(x,y,z) = C$ σταθερά ποσότης καί ἡ συνάρτησις V ἐπαληθεύει τήν ἐξίσωσιν τοῦ Laplace ἐκτός τόπου τινός T καί μηδενίζεται ὡς ἕν δυναμικόν, καθῶς καί αἱ μερικαί αὐτῆς παράγωγοι ὅταν τό σημεῖον (x,y,z) ἀπομακρύνεται ἐπ'ἄπειρον ὑποθέτομεν ἐπίσης ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι αὗται εἶναι κλεισταί περιβάλλουσαι τόν τόπον T διά τάς τιμάς τοῦ C τάς μικροτέρας ἀριθμοῦ τινος C_1.

Θεωρήσωμεν τήν τυχοῦσαν ἐκ τῶν ἐπιφανειῶν τούτων καί ἐπ'αὐτῆς στρῶμα ὕλης πυκνότητος ὁριζομένης ὑπό τοῦ τύπου:

$$\delta = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dn}$$

Ἔστω A(x, y, z) σημεῖον κείμενον ἐντός τῆς ἐπιφανείας· ἐάν ὁ τύπος τοῦ Green ἐφαρμοσθῇ ἐν τῷ τόπῳ τῷ ἀπεράντῳ τῷ ἐκτός τοῦ τόπου T, προκύπτει:

$$\iint\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dn} - V\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right)d\sigma = 0$$

$$\iint \frac{1}{r}\frac{dV}{dn} = C \iint \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma = -C4\pi$$

διότι ἐπί τῆς ἐπιφανείας ἡ συνάρτησις V ἔχει σταθεράν τιμήν C, τό δέ ὁλοκλήρωμα.

$$\iint V \frac{d\frac{1}{r}}{dn} = -4\pi . C$$

[ὑπελογίσθη ὅταν ἀπεδείχθη ὁ τύπος (21) εἰς τό περί τῆς ἐξισώσεως τοῦ Laplace κεφάλαιον]· ἔχομεν, λοιπόν:

$$C = -\frac{1}{4\pi}\iint \frac{1}{r}\frac{dV}{dn} d\sigma = \iint \frac{\delta d\sigma}{r} \qquad (37)$$

ἀντικαθιστῶντες τό $\frac{dV}{dn}$ διά τοῦ $-4\pi\delta$ δυνάμει τοῦ τύπου(36).

Ὁ τελευταῖος τύπος δεικνύει ὅτι τό δυναμικόν τό προερχόμενον ἐκ τῆς ἕλξεως τοῦ θεωρουμένου κατ'ἐπιφάνειαν στρώματος ἐπί οἱουδήποτε ἐσωτερικοῦ σημείου ἴσοῦται τῇ σταθερᾷ ποσότητι C.

Ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι τό σημεῖον A(x,y,z) κεῖται ἐκτός τῆς ἐπιφανείας καί ἐφαρμόσωμεν τόν τύπον (21) τόν ἐκ τοῦ τύπου τοῦ G ἀπορρέοντα ὅτε λαμβάνομεν:

$$V_A = -\frac{1}{4\pi}\iint \left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dn} - V\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right) d\sigma = -\frac{1}{4\pi}\iint \frac{1}{r}\frac{V}{dn}$$ διότι ἤδη

τό $\iint \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma$ εἶναι μηδέν, καθόσον ἡ συνάρτησις $\frac{1}{r}$ εἶναι τώρα συνεχής ἐν τῷ τόπῳ T τῷ ἐγκλειομένῳ ὑπό τῆς ἐπιφανείας. Ἀντικαθιστῶντες καί πάλιν τό $\frac{dV}{dn}$ διά τοῦ $-4\pi\delta$ λαμβάνομεν.

$$V_A = \iint \frac{\delta d\sigma}{r}$$

τουθ'ὅπερ δεικνύει ὅτι τό δυναμικόν εἰς τό σημεῖον A ἰσοῦται τῇ τιμῇ τῆς συναρτήσεως ταύτης εἰς τό σημεῖον τοῦτο. Συνάγομεν λοιπόν τό συμπέρασμα ὅτι:

Ἡ ἕλξις τοῦ θεωρουμένου κατ'ἐπιφάνειαν στρώματος ἐπί παντός ἐσωτερικοῦ σημείου εἶναι μηδέν καί ὅτι διά τά ἐξωτερικά σημεῖα αἱ ἐπιφάνειαι τῆς οἰκογενείας εἶναι αἱ ἐπιφάνειαι σταθεροῦ δυναμικοῦ.

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ΄

ΑΝΩΜΑΛΙΑΙ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Θεώρημα ὑπάρξεως πεπλεγμένων συναρτήσεων

1. Θεωρήσωμεν τήν ἐξίσωσιν:

$$x = y + \sigma(y) = y + \beta_2 y^2 + \beta_3 y^3 + \dots + \beta_n y^n + \dots \dots \dots (1)$$

ἔνθα ἡ συνάρτησις σ(y) ὑποτίθεται ὁλόμορφος ἐν τῇ περιοχῇ τῆς τιμῆς $y = 0$, τό δέ ἀνάπτυγμα αὐτῆς δέν ἔχει ὅρον βαθμοῦ μηδενός καί πρώτου. Θ'ἀποδείξωμεν τό ἑξῆς θεώρημα:

"Ἡ ἐξίσωσις (1) ὁρίζει συνάρτησιν $y = \varphi(x)$ μηδενιζομένην διά $x = 0$ καί ὁλόμορφον ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ σημείου $x = 0$".

Ἀπόδειξις: Διά τῆς ἐξισώσεως (1), ἥν γράφομεν ὑπό τήν μορφήν β $y = x - \sigma(y)$ προσδιορίζεται σειρά τοῦ Taylor ἐπαληθεύουσα τυπικῶς αὐτήν καί ἐπομένως δυνάμεθα νά μεταχειρισθῶμεν καί ἐνταῦθα τήν μέθοδον τῶν ἀνωτέρων συναρτήσεων διά νά βεβαιώσωμεν τήν σύγκλισιν τῆς σειρᾶς ταύτης ἔν τινι κύκλῳ ἔχοντι κέντρον τό $x = 0$.

Ἐάν, λοιπόν, ἡ συνάρτησις σ(y) εἶναι ὁλόμορφος ἐν κύκλῳ ἔχοντι ἀκτῖνα ρ καί καλέσωμεν M τό μέγιστον μέτρον αὐτῆς ἐπί τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου τούτου, ἀντικαθιστῶμεν τήν $-\sigma(y)$ διά τῆς ἀνωτέρας συναρτήσεως.

$$\frac{M}{1-\frac{y}{\rho}} - M\left(1 + \frac{y}{\rho}\right)$$

ὅτε προκύπτει ἡ ἐξίσωσις:

$$y = x + \frac{M}{1-\frac{y}{\rho}} - M\left(1 + \frac{y}{\rho}\right)$$

ἀρκεῖ δέ νά δειχθῇ, ὅτι αὕτη ἔχει λύσιν μηδενιζομένην διά $x=0$ καί ὁλόμορφον ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ σημείου τούτου· τοῦτο δέ πράγματι συμβαίνει, διότι ἡ ἐξίσωσις (2) λυομένη ὡς πρός y δίδει:

$$y=\frac{\rho(x+\rho)\pm\rho\sqrt{x^2-2(\rho+2M)x+\rho^2}}{2(M+\rho)}$$

βλέπομεν δέ ὅτι τά μόνα ἀνώμαλα σημεῖα (ἐκτός τοῦ ἐπ' ἄπειρον) τῶν λύσεων τούτων εἶναι αἱ ῥίζαι τοῦ ὑπορρίζου, αἵτινες εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός. Τό θεώρημα ἀπεδείχθη.

Θεώρημα ὑπάρξεως εἰς τήν περίπτωσιν,
καθ'ἥν ὁ διαφορικός συντελεστής γίνεται ἄπειρος.

2. Θεωρήσωμεν τήν διαφορικήν ἐξίσωσιν.

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

περί τῆς ὁποίας θά δείξωμεν τό ἑξῆς θεώρημα:

"Ἐάν ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ γίνεται ἄπειρος διά δύο τιμάς $x=\alpha$ καί $y=\beta$, ἡ δέ ἀντίστροφος αὐτῆς $\frac{1}{f(x,y)}$ εἶναι ὁλόμορφος ἐν τῇ περιοχῇ τῶν τιμῶν τούτων, ὑπάρχει μία λύσις τῆς ἐξισώσεως (μία μόνη) λαμβάνουσα διά $x=\alpha$ τήν τιμήν $y=\beta$, διά τήν ὁποίαν τό σημεῖον $x=\alpha$ εἶναι ἀλγεβρικόν κριτικόν σημεῖον".

Ἀπόδειξις. Ἐάν ἀντιστρέψωμεν ἀμφότερα τά μέλη τῆς (3) προκύπτει ἡ ἐξίσωσις:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x,y)}=f_1(x,y) \tag{4}$$

ἐπί τῆς ὁποίας δυνάμεθα νά ἐφαρμόσωμεν τό θεώρημα ὑπάρξεως τοῦ Cauchy (τόμος Α΄ Βιβλ. Β΄σελ. 75), διότι ἡ $f_1(x,y)$ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως ὁλόμορφος διά $x=\alpha$ καί $y=\beta$. Ἑπομένως, θά ὑπάρχῃ λύσις:

$$x=\varphi(y)=\alpha+A_\nu(y-\beta)^\nu+A_{\nu+1}(y-\beta)^{\nu+1}+\dots\quad\left[\nu\geq 2, A_\nu\pm 0\right] \tag{5}$$

τῆς (4) ὁλόμορφος εἰς τό σημεῖον $y=\beta$ λαμβάνουσα διά $y=\beta$ τήν τιμήν $x=\alpha$, τῆς ὁποίας τό ἀνάπτυγμα τοῦ Taylor δέν ἔχει ὅρον πρωτοβάθμιον ὡς πρός $y-\beta$, καθόσον ἡ τιμή τῆς $f_1(x,y)$ καί ἑπομένως τῆς $\frac{dx}{dy}$ διά $x=\alpha$ καί $y=\beta$ εἶναι μηδέν.

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου (5) ἕπεται:

$$(x-\alpha)^{\frac{1}{\nu}} = (y-\beta)\sqrt[\nu]{A_\nu + A_{\nu+1}(y-\beta) + A_{\nu+2}(y-\beta)^2 + \dots\dots\dots} \quad (6)$$

$$\text{ἤ} \quad \frac{x-\alpha}{A_\nu}^{\frac{1}{\nu}} = (y-\beta)\sqrt[\nu]{1 + \frac{A_{\nu+1}}{A_\nu}(y-\beta) + \frac{A_{\nu+2}}{A_\nu}(y-\beta)^2 + \dots\dots}$$

$$= (y-\beta)\sqrt[\nu]{\sigma(y-\beta)} \quad (7)$$

παρατηροῦμεν δέ ὅτι ὁ τυχών κλάδος τῆς συναρτήσεως $\sqrt[\nu]{\sigma(y-\beta)}$ εἶναι ὁλόμορφος ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ σημείου β, διότι τό ὑπόρριζον $\sigma(y-\beta)$ δέν μηδενίζεται διά $y=\beta$. 'Εάν θεωρήσωμεν, π.χ. τόν κλάδον τῆς ῥίζης ὅστις διά $y=\beta$ λαμβάνει τήν τιμήν 1, οὗτος ἀναπτύσσεται εἰς σειράν:

$$\sqrt[\nu]{\sigma(y-\beta)} = 1 + B_1(y-\beta) + B_2(y-\beta)^2 + \dots.$$

ὁ δέ τύπος (7) γράφεται:

$$\left(\frac{x-\alpha}{A_\nu}\right)^{\frac{1}{\nu}} = (y-\beta) + B_1(y-\beta)^2 + B_2(y-\beta)^3 + \dots\dots\dots \quad (8)$$

ἐάν δέ θεσωμεν:

$$\left(\frac{x-\alpha}{A_\nu}\right)^{\frac{1}{\nu}} = z, \; y-\beta = u;$$

θά ἔχωμεν:

$$z = u + B_1 u^2 + B_2 u^3 + \dots \quad (9)$$

ὅτε, κατά τό θεώρημα τοῦ προηγουμένου ἐδαφίου, ἡ ἐξίσωσις αὕτη ὁρίζει μίαν συνάρτησιν:

$$u = \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \gamma_3 z^3 + \dots. = q(z) \quad (10)$$

ὁλόμορφον ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ σημείου $z=0$ καί μηδενιζομένην διά $z=0$.

'Εάν ἐπανέλθωμεν εἰς τάς μεταβλητάς x καί y, λαμβάνομεν τόν τύπον:

$$y-\beta = q\left[\sqrt[\nu]{\frac{x-\alpha}{A_\nu}}\right] = \gamma_1\left(\frac{x-\alpha}{A_\nu}\right)^{\frac{1}{\nu}} + \gamma_2\left(\frac{x-\alpha}{A_\nu}\right)^{\frac{2}{\nu}} + \dots$$

ὅστις παρέχει λύσιν τῆς δοθείσης διαφορικῆς ἐξισώσεως (3) τῆς ὁποίας τό σημεῖον $x=\alpha$ εἶναι προφανῶς ἀνώμαλον κριτικόν, καί ἥτις διά $x=\alpha$ λαμβάνει τήν τιμήν $y=\beta$.

ὅστις παρέχει λύσιν τῆς δοθείσης διαφορικῆς ἐξισώσεως (3), τῆς ὁποίας τό σημεῖον $x = \alpha$ εἶναι προφανῶς ἀνώμαλον κριτικόν, καί ἥτις διά $x = \alpha$ λαμβάνει τήν τιμήν $y = \beta$.

'Επειδή ἡ ἐξίσωσις (4) ἔχει μίαν μόνην λύσιν, ἀπαντῶσαν εἰς τ'ἀρχικά δεδομένα (α, β), ἕπεται ὅτι καί ἡ δοθεῖσα μίαν μόνην λύσιν ἔχει, ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τ'αὐτά ἀρχικά δεδομένα.

Π α ρ α τ ή ρ η σ ι ς. Διά νά ἰσχύῃ τό ἀποδειχθέν τοῦτο θεώρημα πρέπει ἡ συνάρτησις $f(y,\alpha)$ νά μή εἶναι ἄπειρος διά πᾶσαν τιμήν τοῦ y, διότι τότε ἡ ἐξίσωσις (4) θά ἔχῃ λύσιν $x = \alpha$, ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει τό y ὡς συνάρτησις τοῦ x.

Περίπτωσις, καθ'ἥν ὁ διαφορικός συντελεστής γίνεται ἀπροσδιόριστος

3. Θεωρήσωμεν καί πάλιν τήν διαφορικήν ἐξίσωσιν:

$$\frac{dy}{dx} = f(xy) \qquad (11)$$

καί ὑποθέσωμεν ὅτι διά τάς τιμάς $x = \alpha$ καί $y = \beta$ ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ λαμβάνει τήν ἀπροσδιόριστον μορφήν $\frac{0}{0}$. Ἡ περίπτωσις αὕτη εἶναι ἐντελῶς ἀνώμαλος, διότι ἡ συγκριτική μέθοδος τοῦ Cauchy δέν εἶναι ἐν γένει ἐφαρμόσιμος εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην καί ἡ ἔρευνα τῶν λύσεων ἀποτελεῖ πρόβλημα δυσχερές, τοῦ ὁποίου ἡ γενική μελέτη ὑπερβαίνει τά ὅρια τοῦ παρόντος συγγράμματος.

Θά περιορισθῶμεν μόνον εἰς μίαν μερικήν μορφήν μελετηθεῖσαν ὑπό τῶν μαθηματικῶν Briot et Bouquet (1856), εἰς τήν ὁποίαν ἄλλως τε ἀνάγονται πολλαί ἄλλαι περιπτώσεις, πρόκειται περί τῆς μορφῆς:

$$xy - \beta y = \sigma(x,y) = \alpha_{10}x + \alpha_{20}x^2 + \alpha_{11}xy + \alpha_{02}y^2 + \dots \qquad (12)$$

τῆς ὁποίας τό δεύτερον μέλος εἶναι ὁλόμορφος συνάρτησις ἐν τῇ περιοχῇ τῶν τιμῶν $x = 0$, $y = 0$.

'Ενταῦθα ὁ διαφορικός συντελεστής λαμβάνει διά $x = 0$

καί y = o τήν ἀπροσδιόριστον μορφήν $\frac{0}{0}$. Ἐάν ὑπάρχη λύσις: $y = \gamma_1 x_2 + \gamma_2 x^2 + \ldots + \gamma_\nu x^\nu + \ldots$ (13)

τῆς ἐξισώσεως (12) ὁλόμορφος εἰς τό σημεῖον $x = 0$ καί μηδενιζομένη διά $x = o$ καί ἀντικαταστήσωμεν τό y διά τῆς σειρᾶς (13) ἐν τῇ ἐξισώσει (12), ὁ συντελεστής τοῦ x^ν ἐν μέν τῷ πρώτῳ μέλει τῆς οὕτω προκυπτούσης ἰσότητος θά εἶναι $(\nu-\beta)\gamma_\nu$, ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει ἕν πολυώνυμον.

$$P_\nu(\alpha_{10}, \alpha_{20}, \ldots, \alpha_{o\nu}, c_1, c_2, \ldots, c_{\nu-1}) \quad (14)$$

ἐάν δέ ἐξισώσωμεν τούς συντελεστάς τούτους, προκύπτει ἡ ἰσότης: $(\nu-\beta)\gamma_\nu = P_\nu(\alpha_{10}, \alpha_{20}, \ldots, \alpha_{o\nu}, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{\nu-1})$ (15).

τοῦ δέ πολτωνύμου P_ν οἱ ἀριθμητικοί συντελεσταί εἶναι ἀκέραιοι θετικοί ἀριθμοί. Διά τῶν ἰσοτήτων τούτων δυνάμεθα νά ὑπολογίσωμεν διαδοχικῶς πάντας τούς συντελεστάς $c_1, c_2, c_3, \ldots$, ἀρκεῖ τό β νά μή εἶναι ἀριθμός ἀκέραιος καί θετικός. θά δείξωμεν ἤδη ὅτι ἡ οὕτω προσδιορισθεῖσα σειρά(13) εἶναι συγκλίνουσα ἕν τινι κύκλῳ ἔχοντι ὡς κέντρον τό σημεῖον $x \doteq 0$. Ὅταν ὁ ἀκέραιος ν αὐξάνῃ ἐπ' ἄπειρον, ὁ ἀριθμός $\frac{1}{\nu-\beta}$ εἶναι πάντοτε πεπερασμένος καί τείνει πρός τό μηδέν, ἐπομένως τό μέτρον αὐτοῦ ἔχει ἕν μέγιστον $\frac{1}{B}$.

$$\left|\frac{1}{\nu-\beta}\right| < \frac{1}{B}$$

δυνάμεθα λοιπόν νά θεωρήσωμεν τήν βοηθητικήν ἐξίσωσιν:

$$BY = F(x, Y) = A_{10}x + A_{20}x^2 + A_{01}xY + A_{02}Y^2 + \ldots\ldots$$

ἐξ ἧς θά προκύψῃ σειρά:

$$Y = \Gamma_1 x + \Gamma_2 x^2 + \ldots + \Gamma_\nu x^\nu + \ldots$$

τῆς ὁποίας οἱ συντελεσταί θά συνδέωνται διά τῶν σχέσεων:

$$B\Gamma_\nu = P_\nu(A_{10}, A_{20}, A_{11}, A02, \ldots A_{o\nu}, \Gamma 1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_{1-\nu})$$

Ἐπειδή (1) ἔχομεν: $|\alpha_{\kappa\lambda}| \leq A_{\kappa\lambda}$ $\left|\frac{1}{\nu-\beta}\right| \leq \frac{1}{B}$

(1) Διότι ἡ συνάρτησις F(x,Y) ὑποτίθεται ἀνωτέρα τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἐξισώσεως (12).

ἕπονται διαδοχικῶς αἱ ἀνισότητες

$$|\gamma_1| < \Gamma_1, \ |\gamma_2| < \Gamma_2, \dots \ |\gamma_\nu| < \Gamma_\nu$$

καί ἑπομένως, ἐάν ἡ σειρά (16) εἶναι συγκλίνουσα ἔν τινι κύκλῳ, θά ἔχῃ καί ἡ σειρά (13) κύκλον τινα συγκλίσεως διάφορον τοῦ μηδενός.

Δυνάμεθα νά λάβωμεν:

$$F(x,Y) = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{\rho}\right)\left(1-\frac{Y}{\rho}\right)} - M - M\frac{Y}{\rho}$$

ἐάν ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ εἶναι ὁλόμορφος ἐν τοῖς κύκλοις:

$$|x| \leq \rho \quad |y| \leq \rho$$

τό δέ M δηλοῖ τό μέγιστον μέτρον αὐτῆς ἐπί τῶν περιφερειῶν τῶν κύκλων τούτων: ὅτε ἔχομεν τήν βοηθητικήν ἐξίσωσιν.

$$BY = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{\rho}\right)\left(1-\frac{Y}{\rho}\right)} - M - M\frac{Y}{\rho}$$

τῆς ὁποίας ἀμφότεραι αἱ ῥίζαι εἶναι συναρτήσεις ὁλόμορφοι ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ σημείου $x = 0$ καί ἑπομένως ἡ σειρά (16) θά ἔχῃ κύκλον συγκλίσεως μέ ἀκτῖνα μεγαλειτέραν τοῦ μηδενός.

'Απεδείχθη λοιπόν τό ἑξῆς θεώρημα.

"'Εάν ὁ συντελεστής β δέν εἶναι ἀριθμός ἀκέραιος καί θετικός, ὑπάρχει μία λύσις τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (12) μηδενιζομένη διά $x = 0$ καί ὁλόμορφος ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ σημείου τούτου".

Περί ἰδιαζουσῶν λύσεων

4. Θεωρήσωμεν μίαν διαφορικήν ἐξίσωσιν:

$$f(x,y,y') = 0 \tag{17}$$

τῆς ὁποίας τό πρῶτον μέλος $f(x,y,y')$ εἶναι πολυώνυμον ἀνάγωγον ὡς πρός $x, y,$ καί y' καί βαθμοῦ μ ὡς πρός y'; θεωρήσωμεν δέ καί δύο τιμάς $x = x_0$ καί $y = y_0$ τοιαύτας, ὥστε αἱ μ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$f(x_0, y_0, y') = 0 \qquad (18)$$

νά εἶναι πεπερασμέναι καί διακεκριμέναι. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ αἱ μ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (17) θά εἶναι συναρτήσεις τοῦ x καί y ὁλόμορφοι ἐν τῇ περιοχῇ τῶν τιμῶν $x = x_0$ καί $y = y_0$ καί ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις (17) παρέχει μ' ἄλλας:

$$y'_1 = \sigma_1(x,y_1),\ y'_2 = \sigma_2(x,y_2),\ y'_3 = \sigma_3(x,y_3),\ldots y'_\mu = \sigma_\mu(x,y_\mu)$$

τῶν ὁποίων τά δεύτερα μέλη εἶναι ὁλόμορφοι συναρτήσεις ἐν τῇ περιοχῇ τῶν τιμῶν

$$(x = x_0,\ y_1 = y_0)\ (x = x_0,\ y_2 = y_0),\ldots(x=x_0, y_\mu = y_0)$$

καί ἐπί τῶν ὁποίων δυνάμεθα νά ἐφαρμόσωμεν τό θεμελιῶδες θεώρημα τοῦ Cauchy θά ὑπάρχωσι λοιπόν μ λύσεις:

$$y_1 = \varphi_1(x),\ y_2 = \varphi_2(x),\quad y_3 = \varphi_3(x),\ldots y_\mu = \varphi_\mu(x)$$

λαμβάνουσαι διά $x = x_0$ τήν τιμήν y_0 καί ὁλόμορφοι ἐν τῇ πριοχῇ τοῦ σημείου x_0.

Ὑποτεθείσθω ἤδη, ὅτι ἡ ἐξίσωσις (18) ἔχει ρίζας πολλαπλᾶς, ὡς πρός y΄, ὅτε αἱ τιμαί $x=x_0$ καί $y = y_0$ ἐπαληθεύουσι τήν ἐξίσωσιν

$$R(x,y) = 0 \qquad (19)$$

ἥτις προκύπτει, δι'ἀπαλοιφῆς τοῦ y΄ μεταξύ τῶν ἐξισώσεων:

$$f(x,y,y') = 0 \quad \frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'} = 0 \qquad (20)$$

Ἡ ἐξίσωσις (19) προσδιορίζει μίαν συνάρτησιν $y = \varepsilon(x)$ ἐάν ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι λύσις τῆς δοθείσης διαφορικῆς ἐξισώσεως (17), αὕτη καλεῖται ἰδιάζουσα, διότι διαφεύγει ἐντελῶς τό θεμελιῶδες θεώρημα τοῦ Cauchy μή δυνάμενον νά ἐφαρμοσθῇ οὔτε ἀμέσως, οὔτε ἐμμέσως, οἱασδήποτε ἀρχικάς τιμάς καί ἄν λάβωμεν, διά τοῦτο ἡ ἰδιάζουσα λύσις δέν δύναται νά προκύψῃ ἐκ τῆς γενικῆς δι' οὐδεμίαν τιμήν τῆς αὐθαιρέτου σταθερᾶς.

'Εάν τά x καί y παριστῶσι συντεταγμένας εὐθυγράμμους, διά νά εἶναι μία καμπύλη ὁλοκληρωτική πρέπει καί ἀρκεῖ αἱ συντεταγμέναι παντός σημείου αὐτῆς καί ὁ ἀντίστοιχος συντελεστής κατευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης νά ἐπαληθεύωσι τήν διαφορικήν ἐξίσωσιν.

'Αποδεικνύεται ὅτι διά παντός σημείου τῆς ὁλοκληρωτικῆς καμπύλης τῆς παριστώσης τήν ἰδιάζουσαν λύσιν διέρχεται μία ὁλοκληρωτική καμπύλη ἀνήκουσα εἰς οἰκογένειαν τοιούτων ἐξαρτωμένην ἐξ αὐθαιρέτου σταθερᾶς: δηλαδή μία καμπύλη τῆς γενικῆς λύσεως ἔχουσα δέ τήν αὐτήν ἐφαπτομένην μετά τῆς καμπύλης τῆς ἰδιαζούσης λύσεως.

'Η ἰδιάζουσα λύσις εἶναι λοιπόν ἐν γένει ἡ περιβάλλουσα τῶν καμπύλων τῆς γενικῆς λύσεως.

Τό ἀντίστροφον εἶναι προφανές: δηλαδή ἡ περιβάλλουσα τῶν καμπύλων τῆς γενικῆς λύσεως εἶναι ὡσαύτως λύσις τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως, διότι δι'ἑκάστου σημείου τῆς περιβαλλούσης διέρχεται μία τῶν περιβαλλομένων (ἥτις εἶναι ὁλοκληρωτική), ἔχουσα τήν αὐτήν ἐφαπτομένην μετά τῆς περιβαλλούσης.

Δυνάμεθα νά δείξωμεν ὅτι ἡ περιβάλλουσα ἐπαληθεύει ὄντως τήν ἐξίσωσιν (19). Διότι, ἐάν θεωρήσωμεν τυχόν σημεῖον M τῆς περιβαλλούσης καί ἕν γειτονικόν M'κείμενον ἐκτός τῆς περιβαλλούσης ἀλλά πολύ πλησίον αὐτῆς, διά τοῦ σημείου M' διέρχονται δύο τοὐλάχιστον ὁλοκληρωτικαί καμπύλαι πολύ γειτονικαί μέ ἐφαπτομένας ἐλάχιστον διαφερούσας· ὅταν τό M' τείνῃ νά συμπέσῃ τῷ M αἱ δύο ἐφαπτόμεναι τείνουσι νά συμπέσωσι καί ἑπομένως εἰς τό σημεῖον M τῆς περιβαλλούσης ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις.

$$f(x,y,y')=0$$

θά ἔχῃ μίαν τοὐλάχιστον ῥίζαν πολλαπλῆν ὡς πρός y'. ἄρα αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου Μ ἐπαληθεύουσι τό ἐξαγόμενον τῆς ἀπαλοιφῆς τοῦ y΄μεταξύ τῶν ἐξισώσεων:

$$f(x,y,y')=o \qquad \frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'}=o$$

Παρατηρητέον ὅτι ἡ ἰδιάζουσα λύσις, ὅταν ὑπάρχῃ, εὑρίσκεται ἀμέσως ἐκ τῆς δοθείσης διαφορικῆς ἐξισώσεως διά μιᾶς διαφορίσεως καί μιᾶς ἀπαλοιφῆς.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α. 1ον. Θεωρήσωμεν τήν ἐξίσωσιν τοῦ Εὐλήρου (ὅρα: Τόμον Α΄ σελ. 38).

$$Xdy^2+Ydx^2=o \quad ἤ \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{Y}{X}=o \tag{21}$$

ὅπου Χ καί Υ εἶναι πολυώνυμα τετάρτου βαθμοῦ, τό μέν πρῶτον ὡς πρός x, τό δέ δεύτερον ὡς πρός y ἔχοντα τούς αὐτούς συντελεστάς.

Αἱ δύο τιμαί τῆς παραγώγου $\frac{dy}{dx}$ συμπίπτουσιν ὅταν ἔχωμεν ἤ Χ = ο ἤ Υ = ο· αἱ δύο αὗται ἐξισώσεις.

$$X=o \quad καί \quad Y=o \tag{22}$$

παριστῶσιν ἡ μέν πρώτη τέσσαρας εὐθείας παραλλήλους τῷ ἄξονι τῶν y, ἡ δέ δευτέρα τέσσαρας εὐθείας παραλλήλους τῷ ἄξονι τῶν x· εἰς ὅλα τά σημεῖα ἑκάστης τῶν εὐθειῶν τούτων αἱ δύο τιμαί τῆς παραγώγου $\frac{dy}{dx}$ αἱ διδόμεναι ὑπό τῆς ἐξισώσεως (21) δέν εἶναι ἐν γένει ὁλόμορφοι συναρτήσεις ἐν τῇ περιοχῇ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν x καί y καί διά τοῦτο, ἐάν αἱ εὐθεῖαι (22) εἶναι ὁλοκληρωτικαί καμπύλαι, θά εἶναι ἰδιάζουσαι λύσεις. Εἶναι δέ τῷ ὄντι ὁλοκληρωτικαί αἱ ὀκτώ αὗται εὐθεῖαι, διότι, ἐάν καλέσωμεν α μίαν ρίζαν τῶν πολυωνύμων Χ ἤ Υ, διά x = α, θά ἔχωμεν dx = ο καί Χ = ο διά δέ y = α θά ἔχωμεν: dy = ο καί Υ = ο· ἀποτελοῦσιν αἱ 8 αὗται εὐθεῖαι τήν περιβάλλουσαν τῶν καμπύλων τῆς γενικῆς λύσεως:

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 2ον. Ἔστω ἡ διαφορική ἐξίσωσις:

$$(y')^2+2xy'-y=o$$

Διαφορίζοντες ὡς πρός y΄ λαμβάνομεν: $y' = -x$ ἐκτελοῦντες δέ τήν ἀπαλοιφήν τοῦ y΄ εὑρίσκομεν τήν παραβολήν·

$$y + x^2 = 0$$

ἥτις εἶναι ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων εἰς τά ὁποῖα συμπίπτουσιν αἱ δύο τιμαί τῆς παραγώγου y΄. Ἀλλά βλέπομεν εὐκόλως ὅτι ἡ παραβολή αὕτη δέν εἶναι ὁλοκληρωτική καμπύλη καί διά τοῦτο ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις δέν ἔχει ἰδιάζουσαν λύσιν. Ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι ἡ παραβολή εἶναι γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων ἀνακάμψεως τῶν ὁλοκληρωτικῶν καμπύλων τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως, ἥτις, οὖσα τῆς μορφῆς τοῦ Lagrange (Βλ. Τόμον Α΄ σελ. 12), λύεται κατά τόν ἐν τῷ πρώτῳ τόμῳ ἐκτεθέντα τρόπον καί δίδει:

$$x = \frac{c}{p^2} - \frac{2p}{3}; \quad y = \frac{2c}{p} - \frac{p^2}{3} \tag{23}$$

ἔχομεν δέ $\frac{dx}{dp} = \frac{dy}{dp} = 0$ διά τάς τιμάς τάς ἐπαληθευούσας τήν

$$p^3 + 3c = 0 \tag{24}$$

Ὥστε ἑκάστη τῶν ὁλοκληρωτικῶν καμπύλων ἔχει τρία σημεῖα ἀνακάμψεως, ὁ δέ γεωμετρικός αὐτῶν τόπος εὑρίσκεται δι'ἀπαλοιφῆς τῶν p καί c μεταξύ τῶν ἐξισώσεων (23)καί (24), ἥτις μᾶς δίδει τήν παραβολήν

$$y + x^2 = 0$$

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

Ἐξετάσαι ἐάν ὑπάρχωσιν ἰδιάζουσαι λύσεις τῶν ἑξῆς διαφορικῶν ἐξισώσεων:

1) $$xy^2(y')^2 - y^3y' + \alpha^2 x = 0$$

2) $$(y')^2 + \left(x + \frac{x^3}{2}\right)y - (1+x^2)\, y - \frac{x^4}{16} = 0$$

ΠΡΩΤΟΝ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΤΟΜΟΥ

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

Γενικά Θεωρήματα

Ἀκέραιαι περιοδικαί συναρτήσεις

1. Μία συνάρτησις $f(z)$ λέγεται περιοδική, ὅταν ὑπάρχῃ ἀριθμός τις ω πραγματικός ἤ φανταστικός τοιοῦτος ὥστε, διά πᾶσαν τιμήν τοῦ z, νά ἔχωμεν: $f(z+\omega) = f(z)$ ὁ ἀριθμός οὗτος ω καλεῖται περίοδος τῆς συναρτήσεως $f(z)$.

Θά δείξωμεν πρῶτον τό ἑξῆς θεώρημα:

Θ ε ώ ρ η μ α I. Πᾶσα ἀκεραία περιοδική συνάρτησις ἔχουσα περίοδον τό ω ἀναπτύσσεται εἰς σειράν βαίνουσαν κατά τάς ἀκεραίας, θετικάς καί ἀρνητικάς δυνάμεις τοῦ $u = e^{\frac{2\pi z i}{\omega}}$, συγκλίνουσαν διά πᾶσαν πεπερασμένην τιμήν τοῦ z.

Μία συνάρτησις $f(z)$ λέγεται ἀκεραία, ὅταν παρίσταται ὑπό σειρᾶς τοῦ Μακλωρίνου ἐχούσης ἀκτῖνα συγκλίσεως ἄπειρον, δηλαδή ὅταν εἶναι ὁλόμορφος ἐν παντί τόπῳ τοῦ ἐπιπέδου z.

Ἐπί τῆς εὐθείας (Ε) τῆς ἑνούσης τήν ἀρχήν τῶν συντεταγμένων μετά τοῦ σημείου ω τοῦ ἐπιπέδου z λάβωμεν τά σημεῖα τά παριστώμενα ὑπό τῶν ἀριθμῶν $\omega, 2\omega, 3\omega, \ldots, \pi\omega, \ldots$ καί $-\omega, -2\omega, -3\omega, \ldots, -\pi\omega, \ldots$, καί διά τῶν σημείων τούτων ἄς φέρωμεν εὐθείας παραλλήλους πρός τυχοῦσαν διεύθυνσιν διάφορον τῆς $O\omega$, ὅτε τό ἐπίπεδον z διαιρεῖται εἰς ἄπειρον πλῆθος ταινιῶν ἴσου πλάτους.

Αἱ ταινίαι αὗται δύνανται νά ὀνομασθῶσι ταινίαι περιόδου, διότι ἐν ἑκάστῃ ἐξ αὐτῶν ἡ συνάρτησις λαμβάνει πάσας τάς τιμάς αὐτῆς: τῷ ὄντι, ὅταν τό σημεῖον z διαγράφῃ τήν πρώτην ταινίαν τά σημεῖα $z+\omega$, $z+2\omega$, $z+3\omega$,........ $z+n\omega$,... καί $z-\omega$, $z-2\omega$, $z-3\omega$,..., $z-n\omega$,... διαγράφουσι πάσας τάς λοιπάς, καί ἐπομένως αἱ ἐν τῇ πρώτῃ ταινίᾳ τιμαί τῆς συναρτήσεως ἐπαναλαμβάνονται καί ἐν ταῖς λοιπαῖς.

Θεωρήσωμεν δύο εὐθείας AA΄ καί BB΄ παραλλήλους πρός τήν Oω καί ὀνομάσωμεν T τήν ἀπειρομήκη ταινίαν (ἥτις δέν εἶναι ταινία περιόδου) τήν περιλαμβανομένην μεταξύ τῶν εὐθειῶν AA΄καί BB΄, θέσωμεν δέ: $u = e^{\frac{2\pi zi}{\omega}}$

Ἐάν $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ εἶναι ἕν σημεῖον τῆς εὐθείας AA΄, πᾶν ἄλλο σημεῖον z τῆς εὐθείας ταύτης δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$z = \alpha + \lambda\omega \quad \text{ἤ} \quad z = \alpha_1 + i\alpha_2 + \lambda\omega$$

ὅπου τό λ παριστᾶ τόν λόγον τοῦ τμήματος αz πρός τό τμῆμα Oω, διαγράφει δέ τό z ὁλόκληρον τήν εὐθεῖαν AA΄ ὅταν τό λ λαμβάνῃ πάσας τάς πραγματικάς ἀπό τοῦ $-\infty$ μέχρι τοῦ $+\infty$.

Ἔχομεν λοιπόν:

$$u = e^{\frac{2\pi i(\alpha+\lambda\omega)}{\omega}} = e^{2\pi\lambda i} e^{\frac{2\pi\alpha i}{\omega}}$$

καί βλέπομεν ὅτι, ὅταν τό z διαγράφῃ τήν εὐθεῖαν AA΄, τό $|u|$ μένει σταθερόν καί τό σημεῖον u γράφει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ u περιφέρειαν κύκλου ἔχοντος ὡς κέντρον τήν ἀρχήν τῶν συντεταγμένων. Δι'ὅμοιον λόγον, ὅταν τό σημεῖον z διαγράφῃ τήν εὐθεῖαν BB΄, τό σημεῖον u γράφει ἑτέραν περιφέρειαν ὁμόκεντρον τῆς προηγουμένης, καί ἐπομένως, ὅταν τό σημεῖον z διαγράφῃ ὁλόκληρον τήν ταινίαν T, τό u διαγράφει τόν κυκλικόν δακτύλιον Δ τόν περικλειόμενον ὑπό τῶν δύο περιφερειῶν.

Εἰς ἑκάστην τιμήν τοῦ u ἀντιστοιχοῦσιν ἄπειροι τιμαί τοῦ $z=\frac{\omega}{2\pi i}\,1u$

ἀποτελοῦσαι πρόοδον ἀριθμητικήν μέ λόγον ω, αἵτινες δίδουσι μίαν μόνην τιμήν τῆς συναρτήσεως f(z) ἕνεκεν τῆς περιοδικότητος αὐτῆς· ἀφ'ἑτέρου δέ πάντες οἱ κλάδοι τῆς συναρτήσεως $z=\frac{\omega}{2\pi i}\,1u$ εἶναι ὁλόμορφοι ἐν τῷ δακτυλίῳ Δ. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι ἡ συνάρτησις:

$$\varphi(u) = f\left(\frac{\omega}{2\pi i}\,1u\right)$$

εἶναι ὡσαύτως ὁλόμορφος ἐν τῷ αὐτῷ δακτυλίῳ Δ, διότι ἡ δοθεῖσα f(z) ὑπετέθη ἀκεραία.

Δυνάμεθα λοιπόν νά ἐφαρμόσωμεν ἐπί τῆς συναρτήσεως φ(u) τό θεώρημα τοῦ Laurent ὅτε ἔχομεν τόν τύπον:

$$\varphi(u) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu u^\nu$$

ἐάν δέ ἐπανέλθωμεν εἰς τήν ἀρχικήν μεταβλητήν z λαμβάνομεν τόν τύπον:

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_\nu e^{\frac{2\nu\pi z i}{\omega}} \qquad (1)$$

Ἐπειδή ἡ συνάρτησις f(z) ὑπετέθη ὁλόμορφος ἐν παντί τῷ ἐπιπέδῳ z, αἱ εὐθεῖαι AA′ καί BB′ αἱ τήν ταινίαν T περιορίζουσαι δύνανται ν'ἀπομακρυνθῶσιν ἀπείρως ἀλλήλων καί ἐπομένως ἡ σειρά (1) θά εἶναι συγκλίνουσα διά πᾶσαν πεπερασμένην τιμήν τοῦ z. Οὕτω ἀπεδείχθη τό θεώρημα.

2. Ὁ Jacobi ἀπέδειξεν ὅτι μία συνάρτησις μονότιμος δέν δύναται νά ἔχῃ περισσοτέρας τῶν δύο διακεκριμένων πε-

ριόδων. Ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τούτου ὑπερβαίνει τά ὅρια τοῦ παρόντος συγγράμμάτος. Δύο περίοδοι λέγονται διακεκριμέναι, ὅταν δέν εἶνε πολλαπλάσια μιᾶς καί τῆς αὐτῆς περιόδου, ἀποδεικνύεται δέ ὅτι μία μονότιμος συνάρτησις δέν δύναται νά ἔχῃ δύο περιόδους, ὧν ὁ λόγος νά εἶναι πραγματικός ἀριθμός.

Συναρτήσεις δίς περιοδικαί.

3. Θεωρήσωμεν μίαν συνάρτησιν μονότιμον $f(z)$, ἔχουσαν δύο περιόδους διακεκριμένας 2ω καί $2\omega'$, ὧν ὁ λόγος εἶναι ἀναγκαίως φανταστικός καί ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ συντελεστής τοῦ i εν τῷ λόγῳ $\frac{\omega'}{\omega}$ εἶναι θετικός. Ἐάν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ σημειώσωμεν τά σημεῖα 2ω, 4ω, 6ω,...., $\mu\omega$,...., καθώς καί τά σημεῖα $2\omega'$, $4\omega'$, $6\omega'$,...., $\mu'\omega'$ καί ἀχθῶσιν ἐκ μέν τῶν σημείων $\mu\omega$ (μ θετικόν ἤ ἀρνητικόν) εὐθεῖαι παράλληλοι πρός τήν διεύθυνσιν $O\omega'$ ἐκ τῶν δέ τῶν σημείων $\mu'\omega'$(μ' θετικόν ἤ ἀρνητικόν) εὐθεῖαι παράλληλοι πρός τήν διεύθυνσιν $O\omega$, τό ἐπίπεδον διαιρεῖται εἰς δίκτυον παραλληλογράμμων ἴσων, ἅτινα καλοῦνται παραλληλόγραμμα τῶν περιόδων. Αἱ κορυφαί τῶν παραλληλογράμμων τούτων παρίστανται ὑπό ἀριθμῶν τῆς μορφῆς

$$2w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega'.$$

Ἐπειδή ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν:

$$f(z+2\omega) = f(z), f(z+2\omega') = f(z)$$

θά ἔχωμεν ἐπίσης:

$$f(z+2\mu\omega+2\mu'\omega') = f(z)$$

δηλαδή ὁ ἀριθμός $2\mu\omega+2\mu'\omega'$ εἶναι ὡσαύτως περίοδος, οἱωνδήποτε ὄντων τῶν ἀκεραίων μ καί μ'. ἀλλά πᾶσαι αἱ ἄπειροι αὗται περίοδοι προκύπτουν ἐκ τῶν 2ω καί $2\omega'$ μή οὖσαι διακεκριμέναι αὐτῶν.

Ὅταν τό σημεῖον z διαγράφῃ τό παραλληλόγραμμον τό ἔχον τάς κορυφάς:

$$o, 2\omega, 2\omega', 2\omega + 2\omega'$$

τό σημεῖον $z+2w$ θά διαγράφῃ τό παραλληλόγραμμον τό ἔχον τάς κορυφάς:

$$2w, 2w+2\omega, 2w+2\omega', 2w+2\omega+2\omega',$$

ἕνεκεν δέ τῆς περιοδικότητος ἡ συνάρτησις $f(z)$ θά λάβῃ τάς αὐτάς τιμάς ἐν τοῖς παραλληλογράμμοις τούτοις· ἐπειδή δέ τό δεύτερον παραλληλόγραμμον τῶν περιόδων εἶναι οἱονδήποτε, ἕπεται ὅτι αἱ τιμαί τῆς συναρτήσεως ἐν τῷ παραλληλογράμμῳ ἐπαναλαμβάνονται ἀκριβῶς αἱ αὐταί καί ἐν ἑκάστῳ τῶν λοιπῶν. Διά τοῦτο τά παραλληλόγραμμα ταῦτα καλοῦνται τῶν περιόδων. Ἐπειδή εἰς τήν χάραξιν τοῦ δικτύου τῶν παραλληλογράμμων ἠδυνάμεθα νά λάβωμεν ὡς ἀφετηρίαν ἀντί τῆς ἀρχῆς ἄλλον τι σημεῖον τυχόν, ἕπεται ὅτι πᾶν παραλληλόγραμμον ἔχον ὡς κορυφάς τά σημεῖα:

$$z_o, z_o + 2\omega, z_o + 2\omega', z_o + 2\omega + 2\omega'$$

ὅπου z_o εἶναι τυχόν, δύναται νά ὀνομασθῇ παραλληλόγραμμον τῶν περιόδων· θά δείξωμεν νῦν τό ἑξῆς θεώρημα:

ΘεώρημαII. Ἐάν μία ἀκεραία συνάρτησις $f(z)$ εἶναι δίς περιοδική, ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι σταθερά ποσότης.

Ἐάν τῷ ὄντι θεωρήσωμεν ἕν παραλληλόγραμμον P τῶν περιόδων, ἡ συνάρτησις $f(z)$ εἶναι ὁλόμορφος ἐν αὐτῷ καί τό μέτρον αὐτῆς θά μένῃ ἐν τῷ παραλληλογράμμῳ P, μικρότερον σταθεροῦ τινος ἀριθμοῦ M. Ἕνεκεν ὅμως τῆς περιοδικότητος τό $|f(z)|$ θά εἶναι μικρότερον τοῦ M ἐν παντί τῷ ἐπιπέδῳ z, ἀλλά τότε, κατά γνωστόν θεώρημα τοῦ Liouville, ἡ συνάρτησις $f(z)$ εἶναι σταθερά ποσότης.

Ἐλλειπτικαί συναρτήσεις

4. Γενικαί ἰδιότητες. Ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, ἔ-

πεται ὅτι πᾶσα δίς περιοδική συνάρτησις, ἐάν δέν εἶναι σταθερά ποσότητος, ἔχει ἀνώμαλα σημεῖα ἐν πεπερασμένη ἀποστάσει. Αἱ δίς περιοδικαί συναρτήσεις, ὧν τά ἐν πεπερασμένη ἀποστάσει ἀνώμαλα σημεῖα εἶναι μόνον πόλοι, καλοῦνται ἐλλειπτικαί· εἶναι δέ προφανές ὅτι ὅλα τά παραλληλόγραμμα τῶν περιόδων περιέχουσι τόν αὐτόν ἀριθμόν πόλων, ὅστις καλεῖται τάξις τῆς ἐλλειπτικῆς συναρτήσεως, λαμβανομένου, ἐννοεῖται, ὑπ'ὄψιν τοῦ βαθμοῦ πολλαπλότητος ἑκάστου πόλου. Πρός ἀποφυγήν ἀσαφείας περί τόν ὁρισμόν τῆς τάξεως δυνάμεθα νά ἐκτελέσωμεν μετάθεσιν τοῦ δικτύου τῶν παραλληλογράμμων τοῦ καλύπτοντος τό ἐπίπεδον z οὕτως ὥστε νά μή ὑπάρχῃ οὐδείς πόλος ἐπί τῆς περιμέτρου αὐτῶν, γίνεται δέ χρῆσις τῆς μεταθέσεως ταύτης, ὅταν πρόκειται νά ὁλοκληρώσωμεν ἐλλειπτικήν συνάρτησιν ἐπί τῆς περιμέτρου ἑνός παραλληλογράμμου τῶν περιόδων.

Θεώρημα III. Τό ἄθροισμα τῶν ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων ἐλλειπτικῆς συναρτήσεως τῶν σχετικῶν πρός τούς πόλους αὐτῆς τούς κειμένους ἐν ἑνί παραλληλογράμμῳ τῶν περιόδων, εἶναι μηδέν.

Ἔστω γ (ΑΒΓΔΑ) ἡ περίμετρος ἑνός παραλληλογράμμου τῶν περιόδων τῆς ἐλλειπτικῆς συναρτήσεως $f(z)$ ἐχούσης τάς περιόδους 2ω καί $2\omega'$. Τό ἄθροισμα τῶν ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων τῆς $f(z)$ ὡς πρός τούς πόλους αὐτῆς τούς κειμένους ἐν τῷ παραλληλογράμμῳ εἶναι ἴσον τῷ

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{AB} f(z)dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{B\Gamma} f(z)dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma\Delta} f(z)dz+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Delta A} f(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{AB} f(z)dz-\int_{\Delta\Gamma} f(z)dz\right]+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{B\Gamma} f(z)dz-\int_{A\Delta} f(z)dz\right]$$

ἀλλ'ἔχομεν:

$$\int_{AB} f(z)dz=\int_{\Delta\Gamma} f(z)dz \quad \text{καί} \quad \int_{B\Gamma} f(z)dz=\int_{A\Delta} f(z)dz$$

διότι ἡ συνάρτησις f(z) λαμβάνει, ἕνεκεν τῆς περιοδικότητος, τήν αὐτήν σειράν τιμῶν ἐπί τῶν πλευρῶν ΑΒ καί ΔΓ καθώς καί ἐπί τῶν πλευρῶν ΒΓ καί ΑΔ.

Θά ἔχωμεν, λοιπόν:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου ἔπεται, ὅτι μία ἐλλειπτική συνάρτησις δέν δύναται νά ἔχῃ ἕνα μόνον πόλον ἁπλοῦν (πρώτου βαθμοῦ πολλαπλότητος) ἐν ἑκάστῳ παραλληλογράμμῳ τῶν περιόδων καί ἐπομένως θά εἶναι τοὐλάχιστον δευτέρας τάξεως.

Θεώρημα IV. Τό πλῆθος τῶν ῥιζῶν ἐλλειπτικῆς συναρτήσεως τῶν περιεχομένων ἔν τινι παραλληλογράμμῳ τῶν περιόδων ἰσοῦται τῇ τάξει τῆς συναρτήσεως ταύτης. Καλοῦμεν ῥίζαν μιᾶς συναρτήσεως f(z) πᾶσαν τιμήν τοῦ z μηδενίζουσαν τήν συνάρτησιν.

Ἔστω ἡ ἐλλειπτική συνάρτησις f(z) καί θεωρήσωμεν τήν $\varphi(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}$, ἥτις εἶναι ἐπίσης ἐλλειπτική. Γνωρίζομεν ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων τῆς φ(z) ἔν τινι τόπῳ Τ ἰσοῦται τῷ ἀριθμῷ τῶν ῥιζῶν τῆς f(z) τῶν κειμένων ἐν τῷ τόπῳ Τ ἐλαττωθέντι κατά τόν ἀριθμόν (πλῆθος) τῶν πόλων τῆς f(z) τῶν κειμένων ἐν τῷ αὐτῷ τόπῳ Τ. Ἐάν ἐφαρμόσωμεν τοῦτο ἔν τινι παραλληλογράμμῳ τῶν περιόδων, ἐπειδή, κατά τό προηγούμενον θεώρημα, τό ἄθροισμα τῶν ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων τῆς φ(z) ἐν τῷ παραλληλογράμμῳ τούτῳ εἶναι μηδέν, ἔπεται ὅτι τό πλῆθος τῶν ῥιζῶν τῆς f(z) τῶν περιεχομένων ἐν τῷ παραλληλογράμμῳ καί τό πλῆθος τῶν πόλων αὐτῆς τῶν περιεχομένων ἐν τῷ αὐτῷ παραλληλογράμμῳ εἶναι ἀριθμοί ἴσοι.

Τό θεώρημα τοῦτο IV ἰσχύει καί διά τό πλῆθος τῶν ῥιζῶν τῆς συναρτήσεως $f(z)=C$, ὅπου C οἱοσδήποτε σταθερός ἀριθμός, διότι αἱ συναρτήσεις $f(z)=C$ καί $f(z)$ἔχουσι,προφανῶς, τούς αὐτούς πόλους καί ἑπομένως τό πλῆθος τῶν ἔντινι παραλληλογράμμῳ τῶν περιόδων ῥιζῶν τῆς $f(z)=C$ ἰσοῦται τῇ τάξει αὐτῆς, ἥτις εἶναι ἴση τῇ τάξει $f(z)$.

Θεώρημα V. Μεταξύ δύο ἐλλειπτικῶν συναρτήσεων, ἐχουσῶν τάς αὐτάς περιόδους, ὑπάρχει πάντοτε σχέσις ἀλγεβρική.

Ἔστωσαν δύο συναρτήσεις ἐλλειπτικαί $f_1(z)$ καί $f_2(z)$, ἔχουσαι τάς αὐτάς περιόδους 2ω καί $2\omega'$ καί ἔστωσαν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu$ οἱ πόλοι ἀμφοτέρων οἱ κείμενοι ἔν τινι παραλληλογράμμῳ τῶν περιόδων (οἵτινες δύνανται νά εἶναι κοινοί καί μή), καλέσωμεν δέ ἐν γένει m_κ τόν μέγιστον ἐκ τῶν δύο βαθμῶν πολλαπλότητος τοῦ πόλου α_κ ὡς πρός τάς δύο συναρτήσεις $f_1(z)$ καί $f_2(z)$.

Ἐάν θεωρήσωμεν ἕν πολυώνυμον $P(x,y)$[1], θά προκύψῃ νέα ἐλλειπτική συνάρτησις:

$$\varphi(z) = P\left[f_1(z),\, f_2(z)\right],$$

τῆς ὁποίας τό α_κ θά εἶναι πόλος βαθμοῦ πολλαπλότητος οὐχί μείζονος τοῦ $\mu m_\kappa = n_\kappa$ καί ἑπομένως θά ἔχωμεν:

$$\varphi(z) = \frac{A n_\kappa}{(z-\alpha_\kappa)^{n_\kappa}} + \frac{A n_{\kappa-1}}{(z-\alpha_\kappa)^{n_{\kappa-1}}} + \ldots\ldots + \frac{A_1}{z-\alpha_\kappa} + \sigma_\kappa(z)$$

ὅπου $\sigma_\kappa(z)$ παριστᾷ συνάρτησιν ὁλόμορφον ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ σημείου $z=\alpha_\kappa$.

Ἐάν μηδενίσωμεν τούς συντελεστάς $A_1 A_2, \ldots, A_\kappa$ ἔχομεν $n_\kappa = \mu m_\kappa$ σχέσεις μεταξύ τῶν συντελεστῶν τοῦ πολυωνύμου $P(x,y)$, ἐάν δέ πράξωμεν τό αὐτό εἰς ὅλους τούς πόλους $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ θά προκύψωσιν σχέσεις (Σ) μεταξύ τῶν συντελεστῶν τοῦ

(1) Βαθμοῦ μ.

πολυωνύμου $P(x,y)$ τῶν ὁποίων τό πλῆθος θά εἶναι:

$$\mu(m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_\nu) = \mu N.$$

Εἰς τάς σχέσεις ταύτας δέν λαμβάνει προφανῶς μέρος ὁ σταθερός συντελεστής τοῦ πολυωνύμου $P(x,y)$ ὑποτιθεμένου πλήρους, τό δέ πλῆθος τῶν λοιπῶν συντελεστῶν αὐτοῦ εἶναι $\frac{\mu(\mu+3)}{2}$. δυνάμεθα ἑπομένως νά ἐκλέξωμεν τό μ ἀρκετά μέγα, οὕτως ὥστε νά ἔχωμεν τήν ἀνισότητα:

$$\mu(\mu+3) > 2\mu N$$

διότι ἡ ποσότης $\mu(\mu+3) - 2\mu N$ τείνει εἰς τό ἄπειρον μετά τοῦ μ, τότε δέ αἱ σχέσεις (Σ) θά εἶναι ὀλιγώτεροι τῶν ἐν αὐταῖς συντελεστῶν τοῦ πολυωνύμου $P(x,y)$.

Συνάγομεν λοιπόν ὅτι τοῦ μ ὄντος ἀρκετά μεγάλου δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν τιμάς (μή πάσας μηδενικάς) τῶν συντελεστῶν τοῦ $P(x,y)$ ἐπαληθευούσας πάσας τάς σχέσεις ταύτας (Σ), δηλαδή τοιαύτας, ὥστε ἡ συνάρτησις $\varphi(z)$ νά μή ἔχῃ οὐδένα πόλον ἐν τοῖς παραλληλογράμμοις τῶν περιόδων· τότε ὅμως ἡ συνάρτησις $\varphi(z)$ οὖσα ἀκεραία καί δίς περιοδική θά εἶναι, κατά τό θεώρημα II, σταθερά ποσότης C καί ἑπομένως αἱ δύο δοθεῖσα ἐλλειπτικαί συναρτήσεις $f_1(z)$ καί $f_2(z)$ θά ἐπαληθεύωσι τήν ἀλγεβρικήν ἐξίσωσιν:

$$P(x,y) = C.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ σ, ζ, p,

3. Ἡ συνάρτησις σ (u). Ἐφαρμόζοντες τήν γνωστήν θεωρίαν τοῦ Weierstrass, θά κατασκευάσωμεν συνάρτησιν ἀκεραίαν (δηλαδή ὁμαλήν εἰς ὅλα τά ἐν πεπερασμένῃ ἀποστάσει σημεῖα) $\sigma(u)$ ἔχουσαν ὡς ῥίζας ὅλα τά σημεῖα:

$$2w = 2m\omega + 2n\omega' \quad \begin{pmatrix} m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{pmatrix}$$

ὅπου ω καί ω' εἶναι δύο ἀριθμοί δοθέντες, τῶν ὁποίων ὁ λόγος εἶναι φανταστικός, τά δέ m καί n λαμβάνουσιν πᾶν σύστημα ἀκεραίων τιμῶν.

Κατά τήν θεωρίαν τοῦ Weierstrass, δέον πρῶτον νά ἐξετάσωμεν διά ποίας τιμάς τοῦ μ συγκλίνει ἡ σειρά.

$$\sum{}' \frac{1}{|w|^{\mu}} = \sum{}' \frac{1}{|m\omega + n\omega'|^{\mu}} \quad \begin{bmatrix} m = -\infty \ldots\ldots + \infty \\ n = -\infty \ldots\ldots + \infty \end{bmatrix} \qquad (1)$$

ἐν τῇ ὁποίᾳ δέν ἐλήφθη ὁ συνδυασμός $m = o$, $n = o$. [Διά τοῦτο, κατ'ἐπικρατήσασαν συνήθειαν, ἐτονίσαμεν τό Σ]. Θεωρήσωμεν τό τρίγωνον τό ἔχον κορυφάς τά σημεῖα $u = o$, $u = m\omega$ καί $u = m\omega + n\omega'$, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραί ἔχουσι μήκη:

$$|m\omega|, \quad |n\omega'|, \quad |m\omega + n\omega'|$$

Ἐάν καλέσωμεν θ τήν γωνίαν τήν σχηματιζομένην ὑπό τῶν διευθύνσεων $O\omega$ καί $O\omega'$ καί ἐφαρμόσωμεν ἐν τῷ τριγώνῳ στοιχειῶδες θεώρημα τῆς τριγωνομετρίας θά ἔχωμεν:

$$|m\omega + n\omega'|^2 = m^2|\omega|^2 + n^2|\omega'|^2 + 2mn|\omega\omega'|\,\text{συν}\theta \quad [o < \theta < \pi]$$

Ἐάν, χάριν εὐκολίας, θέσωμεν:

$$|\omega| = \alpha \quad \text{καί} \quad |\omega'| = \beta.$$

Ὁ τύπος οὗτος γράφεται:

$$|m\omega + n\omega'|^2 = m^2\alpha^2 + n^2\beta^2 \pm 2mn\alpha\beta\,\text{συν}\varphi \qquad (2)$$

ὅπου $\varphi = \theta$ ἐάν $\theta < \frac{\pi}{2}$ καί $\varphi = \pi - \theta$ ἐάν $\theta > \frac{\pi}{2}$, θά ἔχωμεν δέ $o = $ συν$\varphi < 1$ διότι τά σημεῖα σ, ω, ω' δέν κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς. Ὁ τύπος (2) γράφεται:

$$|m\omega + n\omega'|^2 = (m^2\alpha^2 - m^2\alpha^2 \text{συν}\varphi + n^2\beta^2 - n^2\beta^2\text{συν}\varphi +$$

$$+ (m^2\alpha^2 + n^2\beta^2 \pm 2mn\alpha\beta)\text{συν}\varphi$$

ἤ $|m\omega + n\omega'|^2 = (1 - \text{συν}\varphi)(m^2\alpha^2 + n^2\beta^2) + (m\alpha \pm n\beta)^2\text{συν}\varphi.$

Ἐντεῦθεν ἕπεται:

$$|m\omega + n\omega'|^2 \geq (1-\text{συν}\varphi)(m^2\alpha^2 + n^2\beta^2) \geq \alpha^2(1-\text{συν}\varphi)(m^2+n^2)$$

ἐάν ὑποτεθῇ $\beta \geq \alpha$. Θά ἔχωμεν λοιπόν:

$$\frac{1}{|m\omega + n\omega'|^\mu} \leq \frac{1}{(\sqrt{2})^\mu \alpha^\mu \eta\mu^\mu \frac{\varphi}{2}} \left(\frac{1}{m^2 + n^2}\right)^{\frac{\mu}{2}}$$

καί ἑπομένως, ὅταν ἡ σειρά $\sum' \left(\frac{1}{m^2 + n^2}\right)^{\frac{\mu}{2}}$ εἶναι συγκλίνουσα, θά εἶναι τοιαύτη καί ἡ σειρά (1).

Ἀλλά εἶναι γνωστόν ὅτι ἡ σειρά:

$$\sum' \left(\frac{1}{m^2 + n^2}\right)^{\frac{\mu}{2}} \qquad (3)$$

συγκλίνει ὅταν $\frac{\mu}{2} > 1$ καί ἑπομένως διά τήν τιμήν $\mu = 3$. Ἄρα, κατά τήν θεωρίαν τοῦ Weierstrass, τό γινόμενον:

$$\sigma(u) = u\,\Pi'\left(1 - \frac{u}{2w}\right) e^{\frac{u}{2w} + \frac{u^2}{8w^2}}$$

τό ἔχον ἀπείρους παράγοντας καί ἐν τῷ ὁποίῳ τό w λαμβάνει πάσας τάς τιμάς τοῦ τύπου $w = m\omega + n\omega'$ (ἐξαιρέσει τοῦ συνδυασμοῦ $m = o$, $n = o$) συγκλίνει διά πᾶσαν πεπερασμένην τιμήν τοῦ u καί παριστᾶ ἀκεραίαν συνάρτησιν παριστωμένην γενικῶς ὑφ' ὅλων τῶν μαθηματικῶν διά τοῦ ἑλληνικοῦ γράμματος σ. Καί πάλιν ὁ τόνος τοῦ Π' σημαίνει τόν ἀποκλεισμόν τοῦ συνδυασμοῦ $m = o$, $n = o$.

'Εάν καλύψωμεν τό ἐπίπεδον u διά τοῦ δικτύου τῶν παραλληλογράμμων τῶν κατασκευαζομένων διά τῶν ἀριθμῶν 2ω καί 2ω', βλέπομεν ὅτι ἡ συνάρτησις σ(u) ἔχει μόνον τάς ῥίζας $u = 2w = 2m\omega + 2n\omega'$, δηλαδή ἔχει μίαν μόνον ῥίζαν ἐν ἑκάστῳ παραλληλογράμμῳ.

'Επειδή τά m καί n λαμβάνουσι πάσας τάς ἀκεραίας τιμάς ἀπό τοῦ $-\infty$ μέχρι τοῦ $+\infty$, ἕπεται ὅτι τό γινόμενον Π' τοῦ τύπου (4) δέν βλάπτεται ἐάν μεταβάλωμεν τό σημεῖον τῶν m καί n ἀλλά τότε προκύπτει:

$$\sigma(u) = u\Pi'\left(1 + \frac{u}{2w}\right)e^{-\frac{u}{2w}+\frac{u^2}{8w^2}}$$

ἐάν δέ ἀντικαταστήσωμεν τό u διά τοῦ $-u$ προκύπτει ὁ τύπος:

$$\sigma(-u) = -u\Pi'\left(1 - \frac{u}{2w}\right)e^{\frac{u}{2w}+\frac{u^2}{8w^2}} = -\sigma(u)$$

ὁ ὁποῖος δεικνύει ὅτι ἡ συνάρτησις σ(-u) εἶναι περιττή(*) ὅπως καί τό ημu, δηλαδή ἀλλάσσει σημεῖον μετά τοῦ u. 'Η συνάρτησις σ(u) ἀντιστοιχεῖ (εἶναι ἀνάλογος) πρός τήν τριγωνομετρικήν ημu.
'Εκ τοῦ τύπου (4) ἕπεται ἐπίσης ὅτι ὁ λόγος $\frac{\sigma(u)}{u}$ ἔχει ὅριον τήν μονάδα 1 ὅταν τό u τείνει πρός τό μηδέν.

6. 'Η συνάρτησις ζ(u). 'Η λογαριθμική παράγωγος $\frac{dl\sigma(u)}{du} = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$ εἶναι νέα συνάρτησις παριστωμένη ἐφ'ὅλων τῶν μαθηματικῶν διά τοῦ ἑλληνικοῦ γράμματος ζ.

"Εχομεν:

$$l\sigma(u) = lu + \sum\left[l\left(1 - \frac{u}{2w}\right) + \frac{u}{2w} + \frac{u^2}{8w^2}\right]$$

καί ἑπομένως:

$$\zeta(u) = \left[l\sigma(u)\right]' = \frac{1}{u} + \sum'\left(\frac{1}{u-2w} + \frac{1}{2w} + \frac{u}{4w^2}\right)$$

(*)Γενικῶς μία συνάρτησις ( ) λέγεται περιττή μέν ἐάν ἔχωμεν πάντοτε: (-.) = - ( ), ἀρτία δέ ἐάν ἔχωμεν πάντοτε; (-) = ( ).

'Η συνάρτησις αὕτη $\zeta(u)$ εἶναι ἀνάλογος πρός τήν τριγωνομετρικήν $\sigma\varphi u$ ἥτις ἐπίσης ἰσοῦται τῇ λογαριθμικῇ παραγώγῳ τῆς $\eta\mu u$, ἔχει δέ πόλους ἁπλοῦς τά σημεῖα $u = 2m\omega + 2n\omega'$ μέ ὁλοκληρωτικόν ὑπόλοιπον ἴσον τῇ μονάδι.

'Επειδή ἡ συνάρτησις $\sigma(u)$ εἶναι περιττή, ἡ παράγωγος $\sigma'(u)$ εἶναι ἀρτία (δηλαδή δέν μεταβάλλεται ἐάν τό u ἀντικατασταθῇ διά τοῦ $-u$) καί ἑπομένως ἡ $\zeta(u) = \dfrac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$ εἶναι περιττή.

Σημ. 'Επεκράτησεν ἡ συνήθεια αἱ συναρτήσεις σ καί ζ, καθώς καί ἐκείνη, ἥτις θά ὁρισθῇ κατωτέρω, νά παρίστανται, κατ'ἀναλογίαν πρός τάς τριγωνομετρικάς, ἄνευ παρενθέσεως, δηλαδή γράφουσιν: σu, ζu, τοῦτο δέ θά πράξωμεν ἐν τοῖς ἑπομένοις.

7. 'Η συνάρτησις pu. 'Η συνάρτησις

$$-\frac{d\zeta u}{du} = -\frac{d^2 l\sigma u}{du^2} = pu$$

παρίσταται γενικῶς ὑφ'ὅλων τῶν μαθηματικῶν διά τοῦ γράμματος p, θά ἔχωμεν δέ:

$$pu = -\zeta' u = \frac{1}{u^2} + \sum\left(\frac{1}{(u-2w)^2} - \frac{1}{4w^2}\right)$$

'Η συνάρτησις αὕτη, ἥτις εἶναι προφανῶς ἀρτία, ἔχει διπλοῦς πόλους (δηλαδή δευτέρου βαθμοῦ πολλαπλότητος) τά σημεῖα $u = o,\ u = 2w = 2m\omega + 2n\omega'$

τό δέ πρωτεῦον μέρος διά τόν πόλον $2w$ εἶναι $\dfrac{1}{(u-2w)^2}$ καί ἑπομένως τό ἀντίστοιχον ὁλοκληρωτικόν ὑπόλοιπον εἶναι μηδέν.

'Η συνάρτησις pu ἀντιστοιχεῖ πρός τήν τριγωνομετρικήν τοιαύτην:

$$\frac{1}{\eta\mu^2 u} = -\frac{d^2 l\eta\mu u}{du^2}$$

'Η συνάρτησις $p(u-\alpha)$, ὅπου α εἶναι σταθερός ἀριθμός ἔχει τούς διπλούς πόλους $\alpha + 2m\omega + 2n\omega'$.

Περιοδικότης τῆς συναρτήσεως pu . Ἔχομεν προφανῶς τόν τύπον:

$$p(u+2\omega) - pu = \frac{1}{(u+2\omega)^2} - \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(u+2\omega-2w)^2} - \frac{1}{(u-2w)^2}\right]$$

$$\text{ἤ } p(u+2\omega) - pu = \sum\left[\frac{1}{[u-2(m-1)\omega-2n\omega]^2} - \frac{1}{(u-2m\omega-2n\omega')^2}\right]$$

τοῦ ἀθροίσματος τούτου ἀναφερομένου εἰς πάσας ἀνεξαιρέτως τάς τιμάς τῶν m καί n, εἶναι δέ προφανές ὅτι οἱ ὅροι τοῦ ἀθροίσματος τούτου ἐξουδετεροῦσιν ἀλλήλους ἀνά δύο καί ἑπομένως θά εἶναι μηδέν· ὥστε θά ἔχωμεν:

$$p(u+2\omega) - pu = o \quad \text{ἤ } p(u+2\omega) = pu \qquad (5)$$

ὁμοίως δεικνύομεν ὅτι:

$$p(u+2\omega') = pu \qquad (6)$$

καί ἑπομένως ἡ συνάρτησις pu εἶναι δίς περιοδική, ἔχουσα τάς περιόδους 2ω καί $2\omega'$.

Ἐάν ὁλοκληρώσωμεν τάς δύο σχέσεις (5) καί (6) λαμβάνομεν:

$$\zeta(u+2\omega) = \zeta u + 2\eta, \quad \zeta(u+2\omega') = \zeta u + 2\eta' \qquad (7)$$

ὅπου η καί η' εἶναι αἱ σταθεραί τῆς ὁλοκληρώσεως, αἵτινες προσδιορίζονται ἐάν δώσωμεν εἰς τό u τάς τιμάς $u = -\omega$ καί $u = -\omega'$· οὕτω εὑρίσκομεν:

$$\eta = \zeta(\omega) \text{ καί } \eta' = \zeta(\omega').$$

Ἐάν ὁλοκληρώσωμεν τάς (7) εὑρίσκομεν:

$$l\sigma(u+2\omega) = l\sigma u + 2\eta u + lk$$
$$l\sigma(u+2\omega') = l\sigma u + 2\eta' u + lk'$$

ἐντεῦθεν δέ:

$$\sigma(u+2\omega) = ke^{2\eta u}\sigma u \qquad \sigma(u+2\omega') = k'e^{2\eta' u}\sigma u \qquad (8)$$

Ἐάν ἐφαρμόσωμεν τάς σχέσεις ταύτας (8) εἰς τάς τιμάς $u = -\omega$ καί $u = -\omega'$ προσδιορίζομεν τάς τιμάς $k = -e^{2\eta\omega}$, $k' = -e^{2\eta\omega'}$ τῶν σταθερῶν k καί k'· ἑπομένως αἱ σχέσεις (8) γίνονται:

$$\sigma(u+2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)}\sigma(u) \qquad \sigma(u+2\omega') = -e^{2\eta'(u+\omega')}\sigma(u)$$

Ἡ συνάρτησις $\wp u$ εἶναι προφανῶς ἐλλειπτική καθώς καί πᾶσαι αἱ παράγωγοι αὐτῆς, ἐνῷ αἱ σu καί ζu δέν εἶναι ἐλλειπτικαί.

Παράστασις τῶν ἐλλειπτικῶν συναρτήσεων διά τῆς συναρτήσεως ζ.

8. Θεωρήσωμεν τυχοῦσαν ἐλλειπτικήν συνάρτησιν $f(u)$ καί ἔστωσαν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ οἱ πόλοι αὐτῆς οἱ εὑρισκόμενοι ἐν ἑνί παραλληλογράμμῳ τῶν περιόδων, ἔστω δέ:

$$\frac{A_{\varkappa 1}}{u-\alpha_\varkappa} + \frac{A_{\varkappa 2}}{(u-\alpha_\varkappa)^2} + \ldots\ldots + \frac{A_{\varkappa m_\varkappa}}{(z-\alpha_\varkappa)^{m_\varkappa}}$$

τό πρωτεῦον μέρος τῆς $f(u)$ ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ πόλου $\alpha_\varkappa$. Ἡ διαφορά:

$$f(u) - \sum \Big[A_{\varkappa 1}\zeta(u-\alpha_\varkappa) - A_{\varkappa 2}\zeta'(u-\alpha_\varkappa) + \quad (\varkappa = 1,2,3,\ldots,\nu)$$
$$+ \frac{(-1)^{m_\varkappa - 1} A_{\varkappa m_\varkappa}}{1.2.3\ldots(m_\varkappa - 1)} \zeta^{(m_\varkappa - 1)}(u-\alpha_\varkappa) \Big]$$

εἶναι περιοδική καί ὁλόμορφος ἐν παντί τῷ ἐπιπέδῳ: τῷ ὄντι, ἐάν αὐξήσωμεν τό u κατά 2ω, ἡ συνάρτησις αὕτη αὐξάνει κατά τό $-2\eta\Sigma A_{\varkappa 1}$, τό ὁποῖον εἶναι μηδέν, διότι τό $\Sigma A_{\varkappa 1}$ εἶναι ἄθροισμα τῶν ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων δίς περιοδικῆς συναρτήσεως ἔν τινι παραλληλογράμμῳ τῶν περιόδων. Ἡ διαφορά (9) εἶναι λοιπόν σταθερά ποσότης τοῦθ' ὅπερ δίδει τήν ζητουμένην παράστασιν τῆς $f(u)$ διά τῆς συναρτήσεως ζ καί τῶν παραγώγων αὐτῆς, ἥτις ὀφείλεται εἰς τόν Hermite.

Παράστασις τῶν ἐλλειπτικῶν συναρτήσεων διά τῶν $\wp u$ καί $\wp' u$.

9. Ἔστω $f(u)$ μία περιττή ἐλλειπτική συνάρτησις καί w μία ἡμιπερίοδος αὐτοῦ, τότε θά ἔχωμεν:

$$f(w) = -f(-w) \text{ καί } f(w) = f(-w+2w) = f(-w)$$

καί ἐπομένως ὁ ἀριθμός w θά εἶναι ἤ ρίζα ἤ πόλος τῆς συναρτήσεως, ἀποδεικνύεται δέ εὐκόλως διά τῶν παραγώγων, ὅτι ὁ βαθμός πολλαπλότητος τῆς ρίζης ταύτης ἤ τοῦ πόλου τούτου θά εἶναι περιττός· τοὐναντίον, ἐάν ἡ $f(u)$ εἶναι ἀρτία, ἔχουσα ρίζαν ἤ πόλον τήν ἡμιπερίοδον w, ὁ βαθμός πολλαπλότητος τῆς ρίζης ταύτης ἤ τοῦ πόλου τούτου θά εἶναι ἄρτιος. Αἱ ἰδιότητες αὗται ἰσχύουσι, προφανῶς, καί διά τάς περιόδους.

Τούτων τεθέντων, θεωρήσωμεν κατ'ἀρχάς μίαν ἀρτίαν ἐλλειπτικήν συνάρτησιν $f(u)$. Αἱ ρίζαι αὐτῆς αἵτινες δέν εἶναι περίοδοι, εἶναι ἀνά δύο ἀντίθετοι καί ἐπομένως δυνάμεθα νά εὕρωμεν ν ρίζας $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ τοιαύτας, ὥστε πᾶσαι αἱ ἄλλαι, αἵτινες δέν εἶναι περίοδοι, νά εἶναι τῆς μορφῆς: $\pm\alpha_1 + 2w$, $\pm\alpha_2 + 2w, \ldots \pm\alpha_\nu + 2w$.

'Εν τῇ σειρᾷ $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_\nu$ ἑκάστην ρίζαν ἐπαναλαμβάνομεν τοσάκις, ὅσος εἶναι ὁ βαθμός πολλαπλότητος· ἐάν μία ρίζα τῆς σειρᾶς ταύτης εἶναι ἡμιπερίοδος βαθμοῦ πολλαπλότητος 2μ (ὁ βαθμός εἶναι κατ'ἀνάγκην ἄρτιος), λαμβάνομεν ταύτην μ φοράς ἐν τῇ σειρᾷ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$.

Τούτων τεθεντων, σχηματίζομεν τό γινόμενον.

$$(pu - p\alpha_1)(pu - p\alpha_2) \ldots (pu - p\alpha_\nu)$$

τό ὁποῖον ἔχει τάς αὐτάς ρίζας μετά τῆς δοθείσης συναρτήσεως καί μετά τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ πολλαπλότητος, ἐξαιρουμένης τῆς περιπτώσεως καθ'ἥν $f(o) = 0$· σχηματίζομεν ἐπίσης τό γινόμενον $(pu - p\beta_1)(pu - p\beta_2) \ldots (pu - p\beta_\eta)$ ἔχον ὡς ρίζας τούς πόλους τῆς $f(u)$, οἵτινες δέν εἶναι περίοδοι, μετά τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ πολλαπλότητος. 'Εξαιροῦμεν πάντοτε τάς περιόδους, διότι δι'αὐτάς γίνεται ἄπειρος ἡ συνάρτησις p.

'Εάν θέσωμεν:

$$\varphi(u) = \frac{(pu-p\alpha_1)(pu-p\alpha_2)\dots(pu-p\alpha_\nu)}{(pu-p\beta_1)(pu-p\beta_2)\dots(pu-p\beta_\eta)}$$

τό πηλῖκον $\frac{f(u)}{\varphi(u)}$ εἶναι προφανῶς ἐλλειπτική συνάρτησις, ἔχουσα τιμήν πεπερασμένην καί διάφορον τοῦ μηδενός διά πᾶσαν τιμήν τοῦ u, ἥτις δέν εἶναι περίοδος· ἀφ' ἑτέρου τά σημεῖα τῶν περιόδων θά εἶναι ἤ πάντα πόλοι ἤ πάντα ῥίζαι τῆς συναρτήσεως ταύτης.

$$q(u) = \frac{f(u)}{\varphi(u)}$$

'Εντεῦθεν ἕπεται, ὅτι μία ἐκ τῶν συναρτήσεων $q(u)$ ἤ $\frac{1}{q(u)}$ θά στερῆται πόλων καί ἑπομένως θά εἶναι σταθερά ποσότης. Θά ἔχωμεν λοιπόν:

$$\frac{f(u)}{\varphi(u)} = c \quad ἤ \quad f(u) = c\frac{(pu-p\alpha_1)(pu-p\alpha_2)\dots(pu-p\alpha_\nu)}{(pu-p\beta_1)(pu-p\beta_2)\dots(pu-p\beta_\eta)}$$

καί προκύπτει τό συμπέρασμα, ὅτι πᾶσα ἀρτία ἐλλειπτική συνάρτησις εἶναι ῥητή συνάρτησις τοῦ pu.

Θεωρήσωμεν ἤδη περιττήν ἐλλειπτικήν συνάρτησιν $f_1(u)$ καί παρατηρήσωμεν ὅτι τό πηλῖκον $\frac{f_1(u)}{p'u}$ θά εἶναι ἐλλειπτική συνάρτησις ἀρτία καί ἑπομένως ῥητή συνάρτησις τοῦ pu.

'Εάν θεωρήσωμεν, τέλος τυχοῦσαν ἐλλειπτικήν συνάρτησιν $F(u)$ αὕτη εἶναι ἄθροισμα μιᾶς ἀρτίας καί μιᾶς περιττῆς, διότι ἔχομεν:

$$F(u) = \frac{F(u)+F(-u)}{2} + \frac{F(u)-F(-u)}{2}$$

καί ἑπομένως, κατά τά προηγούμενα, δίδεται ὑπό τήν μορφήν:

$$F(u) = R(pu) + p'u\,R_1(pu)$$

ὅπου R καί R_1 παριστῶσι ῥητάς συναρτήσεις.

'Αλγεβρική σχέσις μεταξύ pu καί $p'u$

10. Γνωρίζομεν ὅτι

$$pu = \frac{1}{u^2} + \sum\left[\frac{1}{(u-2w)^2} - \frac{1}{4w^2}\right] = \frac{1}{u^2} + Q(u)$$

καί, ἐπειδή ἡ συνάρτησις Q(u) εἶναι προφανῶς ἀρτία καί ὁμαλή εἰς τό σημεῖον u_0 εἰς ὅ μηδενίζεται, ἀναπτύσσεται εἰς σειράν τῆς μορφῆς:

$$Q(u) = \frac{g_2}{20}u^2 + \frac{g_3}{28}u^4 + \ldots\ldots$$

ἐν τῇ ὁποίᾳ μεταχειριζόμεθα τἀγράμματα g_2, g_3, ὧν ἐποιήσατο χρῆσιν ὁ Weierstrass, καί τά ὁποῖα ἐγένοντο σήμερον κοινῆς χρήσεως. Πρός ὑπολογισμόν τῶν g_2 καί g_3 ἀναπτύσσομεν τό $\frac{1}{(u-2w)^3}$ κατά τάς δυνάμεις τοῦ u, ὅτε λαμβάνομεν:

$$\frac{1}{(u-2w)^2} = \frac{1}{4w^2} + \frac{2u}{8w^3} + \frac{3u^2}{16w^4} + \frac{4u^3}{32w^5} + \ldots$$

Ἔχομεν λοιπόν:

$$Q(u) = \frac{u}{4}{\sum}'\frac{1}{w^3} + \frac{3u^2}{16}{\sum}'\frac{1}{w^4} + \frac{u^3}{8}{\sum}'\frac{1}{w^3} + \ldots$$

καί ἐπειδή ἡ ποσότης: ${\sum}'\frac{1}{w^\mu}$ εἶναι προφανῶς μηδέν, ὅταν τό μ εἶναι περιττόν, προκύπτει:

$$Q(u) = 3u^2{\sum}'\frac{1}{(2w)^4} + 5u^4{\sum}'\frac{1}{(2w)^5} + \ldots$$

καί ἑπομένως θά εἶναι:

$$\frac{g_2}{20} = 3{\sum}'\frac{1}{(2w)^4}, \quad \frac{g_3}{28} = 5{\sum}'\frac{1}{(2w)^6}$$

ἔχομεν λοιπόν:

$$pu = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20}u^2 + \frac{g_3}{28}u^4 + \ldots\ldots \qquad (10)$$

καί ἑπομένως:

$$p^2u = \frac{1}{u^4} + \frac{g_2}{10} + \frac{g_3}{14}u^2 + \ldots\ldots$$

Ἡ ἐλλειπτική συνάρτησις p^2u ἐν τῷ παραλληλογράμμῳ τῶν περιόδων τῷ περιέχοντι τό σημεῖον μ = ο ἔχει μόνον τόν πόλον u = ο τετάρτου βαθμοῦ πολλαπλότητος μέ πρωτεῦον μέρος τό $\frac{1}{u^4}$, ἐκφραζομένη λοιπόν διά τῆς συναρτήσεως ζ καί τῶν παραγώγων αὐτῆς δίδει:

$$p^2u = \Delta o + \frac{4}{6}\zeta'''(u) = \Delta_o + \frac{1}{6}p''u \qquad (11)$$

Δυνάμεθα καί ἀπ'εὐθείας νά εὕρωμεν τόν τύπον τοῦτον, διότι ἐκ τοῦ (10) λαμβάνομεν:

$$p'u = -\frac{2}{u^3} + \frac{g_2}{10}u + \frac{g_3}{7}u^3 + \ldots$$

$$p''u = \frac{6}{u^4} + \frac{g_2}{10} + \frac{3g_3}{7}u^2 + \ldots \qquad (12)$$

βλέπομεν δέ ὅτι ἡ $p^2u - \frac{1}{6}p''u$ εἶναι ὁμαλή συνάρτησις εἰς τό σημεῖον $u = o$ καί ἐπομένως, κατά τό θεώρημα II, εἶναι σταθερά ποσότης.

'Εάν ὁ τύπος (11) ἐφαρμοσθῇ εἰς τήν τιμήν $u = o$, προσδιορίζεται ἡ τιμή $\Delta_o = \frac{g_2}{12}$ τῆς σταθερᾶς Δ_o καί ἐπομένως προκύπτει ὁ τύπος:

$$p^2u = \frac{1}{6}p''u + \frac{g_2}{12}$$

ἐάν δέ πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τά μέλη αὐτοῦ ἐπί $p'u$ καί ὁλοκληρώσωμεν, λαμβάνομεν:

$$(p')^2 = 4p^3 - g_2\,p + C \qquad (13)$$

διά νά προσδιορίσωμεν δέ τήν σταθεράν C, ἀντικαθιστῶμεν τό διά τοῦ ἀναπτύγματος (10) καί τό p διά τοῦ πρώτου τῶν ἀναπτυγμάτων (12), ὅτε ἐξαφανίζονται οἱ ὅροι οἱ περιέχοντες τό $\frac{1}{u}$, δίδοντες δέ κατόπιν τήν τιμήν $u = o$ εὑρίσκομεν $C = -g_3$ καί ἐπομένως ἡ ἐξίσωσις (13) γίνεται:

$$(p')^2 = 4p^3 - g_2p - g_3 \qquad (14)$$

'Εάν θέσωμεν: $pu = x$ ἡ ἐξίσωσις αὕτη γράφεται:

$$du = \frac{dx}{\pm\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}$$

ἐκ ταύτης δέ λαμβάνομεν:

$$u = \pm\int_x^{o} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}$$

διότι διά $u = o$ ἔχομεν $x = \infty$ · βλέπομεν ὅτι ἡ ἐλλειπτική συνάρτησις $x = pu$ λαμβάνεται δι' ἀντιστροφῆς ἑνός ἐλλειπτικοῦ ὁλοκληρώματος.

'Α σ κ ή σ ε ι ς

1) Δεῖξαι τόν τύπον:

$$pu - p\nu = -\frac{\sigma(u+\nu)\sigma(u-\nu)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 \nu}$$

2) Δεῖξαι τόν τύπον:

$$\frac{p'u}{pu - p\nu} = \zeta(u+\nu) + \zeta(u-\nu) - 2\zeta u$$

3) Δεῖξαι τόν τύπον:

$$\zeta(u+\nu) - \zeta u - \zeta\nu = \frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'\nu}{pu - p\nu}$$

4) Δεῖξαι τόν τύπον:

$$p(u+\nu) + pu + p\nu = \frac{1}{4}\left(\frac{p'u - p'\nu}{pu - p\nu}\right)^2$$

5) Δεῖξαι τόν τύπον:

$$p(2u) = \frac{\left(p^2u + \frac{g_2}{4}\right)^2 + 2g_3\,pu}{4p^3u - g_2pu - g_3}$$

6) 'Αναλῦσαι εἰς ἁπλᾶ στοιχεῖα (δηλαδή ἐκφράσαι διά τῶν P, P′, P″,...) τάς p^3u καί p^4u.

ΔΕΥΤΕΡΟΝ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

"Εν πρόβλημα τοῦ Λογισμοῦ τῶν μεταβολῶν

Θεωρήσωμεν μίαν συνάρτησιν $f(x,y,y')$, ὅπου x καί y εἶναι πραγματικαί μεταβληταί παριστῶσαι π.χ. Καρτεσιανάς συντεταγμένας, ὑποτεθείσθω δέ ὅτι ἡ συνάρτησις αὕτη καθώς καί αἱ μερικαί αὐτῆς παράγωγοι μέχρι τῆς τρίτης τάξεως εἶναι συνεχεῖς, ὅταν τό σημεῖον (x,y) εὑρίσκεται ἔν τινι τόπῳ Τ τό δέ y' ἔχη τιμήν πεπερασμένην.

Θεωρήσωμεν ἐπίσης δύο σημεῖα $A(x_1x_1)$, $B(x_2y_2)$ τοῦ τόπου Τ, καί πάσας τάς γραμμάς τάς ἐπιζευγνυούσας τά δύο ταῦτα σημεῖα καί κειμένας ἐν τῷ τόπῳ Τ, καλέσωμεν δέ g τήν οἰκογένειαν, ἥν ἀποτελοῦσιν αἱ γραμμαί αὗται. Θά θέσωμεν ἤδη τό ἑξῆς πρόβλημα:

'Εάν ὑπάρχῃ γραμμή τις Γ_1 τῆς οἰκογενείας g τοιαύτη ὥστε τ'ὁλοκλήρωμα

$$\int_{\Gamma_1} f(x,y,y')\,dx$$

νά ἔχῃ τιμήν μείζονα ἤ ἐλάσσονα τῆς τιμῆς, ἥν θά ἐλάμβανε διά πᾶσαν ἄλλην γραμμήν Γ τῆς οἰκογενείας g, εὑρεῖν συνθήκην ἀναγκαίαν, ἥν ὀφείλει νά πληροῖ ἡ γραμμή αὕτη Γ_1. Προφανές εἶναι ὅτι δυνάμεθα νά περιορισθῶμεν μόνον εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ ἐλαχίστου, εἰς ἥν ἀνάγεται ἡ τοῦ μεγίστου διά μετατροπῆς τῆς f εἰς $-f$.

"Εστω $y = \varphi(x)$ ἡ ἐξίσωσις τῆς γραμμῆς Γ_1 καί θεωρήσωμεν ὅλας τάς γραμμάς τῆς οἰκογενείας g τάς ἐχούσας ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς:

$$Y = \varphi(x) + \alpha q(x) \tag{2}$$

ὅπου $q(x)$ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως συνάρτησις συνεχής ἐν τῷ διαστήματι (x_1, x_2) μηδενιζομένη διά $x = x_1$ $x = x_2$, προσέτι δέ ἔχει παράγωγον συνεχῆ ἐν τῷ αὐτῷ διαστήματι.'Εξ ὑποθέσεως, τ'ὁλοκλήρωμα:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')dx \qquad (3)$$

ἐπί τῆς γραμμῆς (2), τό ὁποῖον εἶναι προφανῶς συνάρτησις τῆς παραμέτρου α, γίνεται ἐλάχιστον διά τήν τιμήν α = ο.

'Εάν λοιπόν θέσωμεν:

$$\lambda(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f\left[x, \varphi(x) + \alpha q(x), \varphi'(x) + \alpha q'(x)\right] dx \qquad (4)$$

ὅπου q(x) εἶναι ὡρισμένη συνάρτησις, ἔχουσα τάς ἀνωτέρωἐκτεθείσας ἰδιότητας, θά ἔχωμεν:

$$\lambda'(\alpha) = o \quad \lambda'(\alpha) \ o$$

συμφώνως πρός τήν γνωστήν θεωρίαν τοῦ μεγίστου καί ἐλαχίστου.

'Εφαρμόζοντες τόν κανόνα τῆς διαφορίσεως ὁλοκληρώματος ὡς πρός παράμετρον εὑρίσκομεν:

$$\lambda'(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} q(x) + \frac{\partial f}{\partial y} q'(x)\right] dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{f}{y} q(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} q'(x)dx \qquad (5)$$

ἐάν δέ γίνῃ χρῆσις τῆς κατά παράγοντας ὁλοκληρώσεως εἰς τό δεύτερον, λαμβάνομεν:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} q'(x)dx = \left[q(x) \frac{\partial f}{\partial y}\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} q(x) \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) dx \quad (6)$$

'Ο πρῶτος ὅρος τοῦ δευτέρου μέλους εἶναι μηδέν,διότι ἡ συνάρτησις q(x) μηδενίζεται εἰς ἀμφότερα τά ὅρια προκύπτει λοιπόν:

$$\lambda'(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} q(x) \frac{\partial f}{\partial y} dx - \int_{x_1}^{x_2} q(x) \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} q(x) \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] dx \qquad (7)$$

—

πρέπει δέ τ'ὁλοκλήρωμα τοῦτο νά εἶναι μηδέν δι'ὅλας τάς δυνατάς μορφάς τῆς συναρτήσεως $q(x)$. Διά νά συμβαίνη τοῦτο, δέον ὁ ἐντός τῆς ὁλοκληρώσεως συντελεστής τοῦ $q(x)$ νά εἶναι μηδέν ἐν τῷ διαστήματι (x_1, x_2)· πρός ἀπόδειξιν τούτου, ὑποτεθείσθω τό ἐναντίον, ἔστω δέ x_0 τιμή τοῦ διαστήματος τούτου, διά τήν ὁποίαν ἡ παράστασις:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \tag{8}$$

εἶναι θετική· τότε θά ὑπῆρχεν ἕτερον διάστημα (ξ_1, ξ_2) ἀποτελοῦν μέρος τοῦ πρώτου:

$$x_1 < \xi_1 < x_0 < \xi_2 < x_2$$

ἐν τῷ ὁποίῳ ἡ παράστασις (8) θά ἔχῃ τιμήν θετικήν, θά ἠδυνάμεθα δέ νά ἐκλέξωμεν τήν συνάρτησιν $q(x)$ οὕτως ὥστε τ'ὁλοκλήρωμα (7) νά μή εἶναι μηδέν. 'Εάν, τῷ ὄντι, ἐκλέξωμεν τήν συνάρτησιν $q(x)$ οὕτως ὥστε νά ἔχῃ τάς ἑξῆς ἰδιότητας: ἐν μέν τοῖς διαστήμασι (x_1, ξ_1) καί (ξ_2, x_2) νά εἶναι μηδέν, ἐν δέ τῷ διαστήματι (ξ_1, ξ_2) νά ἔχωμεν

$$q(x) = (x-\xi_1)^2 \, (x-\xi_2)^2,$$

προκύπτει συνάρτησις προφανῶς συνεχής καί τοιαύτη ὥστε τ'ὁλοκλήρωμα (7) νά μή εἶναι μηδέν.

Συνάγομεν λοιπόν τό συμπέρασμα: ἵνα τό ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα

$$\int_\Gamma f(x, y, y')dx$$

γίνεται ἐλάχιστον ἐπί τῆς γραμμῆς $y = \varphi(x)$ πρέπει ἡ συνάρτησις αὕτη $y = \varphi(x)$ νά ἐπαληθεύῃ τήν διαφορικήν ἐξίσωσιν:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

ἤ τήν ἰσοδύναμον:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Τήν ἀναγκαίαν ταύτην συνθήκην εὗρεν πρῶτος ὁ Euler.

'Η γενική λύσις τῆς διαφορ. ἐξισώσεως (9) περιέχει δύο αὐθαιρέτους σταθεράς C καί C_1 τάς ὁποίας ὀφείλομεν νά προσδιορίσωμεν οὕτως ὥστε νά ἔχωμεν γραμμήν διερχομένην διά τῶν δοθέντων σημείων Α καί Β.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α. Ἡ ἀναζήτησις τῆς βραχιστοχρόνου διά τήν βαρύτητα γραμμῆς μεταξύ δύο σημείων Α καί Β ἄγει εἰς τήν ἐξίσωσιν:

$$\sqrt{2g}\,t = \int_{(A)}^{(B)} \frac{ds}{\sqrt{z}},$$ ὅπου εἶναι ὁ χρόνος (Βλ. Θεωρ. Μηχανικήν Ν. Χατζιδάκη, σελ. 152 .

Ἵνα λοιπόν ὁ χρόνος εἶναι ἐλάχιστος, δέον νά ἰσχύῃ ἡ συνθήκη:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dz}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right) = 0,$$ ὅπου $f(x, z) = \frac{1}{\sqrt{z}}\sqrt{1+(x')^2}$, διότι τό $\int_A^B \frac{ds}{\sqrt{z}}$ δύναται νά γραφῇ ὡς ἑξῆς:

$$\int_A^B \frac{\sqrt{1+(x')^2}}{\sqrt{z}}\,dz \qquad \text{ὅπου} \qquad x' = \frac{dx}{dz}$$

Θά ἔχωμεν λοιπόν:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{x'}{\sqrt{z}\sqrt{1+(x')^2}} = \frac{x'\,dz}{\sqrt{z}\sqrt{dx^2+dz^2}} = \frac{dx}{\sqrt{z}\,ds}$$

καί ἐπομένως ἡ συνθήκη γίνεται:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{dx}{\sqrt{z}\,ds}\right) = 0 \quad \text{ἤ} \quad d\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\frac{dx}{ds}\right) = 0$$

ἡ διαφορική αὕτη ἐξίσωσις λυομένη δίδει καμπύλην κυκλοειδῆ.