Ν. ΚΡΙΤΙΚΟΥ
ΟΜΟΤΙΜΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΤΟΥ Ε. Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΑΘΗΝΑ
1969

Ν. ΚΡΙΤΙΚΟΥ
ΟΜΟΤΙΜΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΤΟΥ Ε. Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΑΘΗΝΑ
1969

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τὸ 1939 εἶχα γράψει γιὰ τοὺς μαθητές μου στὸ Ε. Μ. Πολυτεχνεῖο, ὅσους εἶχαν ζωηρότερα θεωρητικὰ ἐνδιαφέροντα, μία πραγματεία 48 σελίδων μὲ τὸν τίτλο :

«Εἰσαγωγικὸν Κεφάλαιον εἰς τὰ Ἀνώτερα Μαθηματικά.
Οἱ Πραγματικοὶ Ἀριθμοί»

Κύριο περιεχόμενο τῆς πραγματείας, ποὺ ἀντίτυπά της ὑπάρχουν πάντα στὴ Βιβλιοθήκη τοῦ Ε.Μ.Π., εἶναι ἡ μεθοδικὴ ἀνάπτυξη, μὲ καθαρὰ ἀριθμητικὸ τρόπο, μὲ πληρότητα καὶ λογικὴ αὐστηρότητα, μιᾶς θεωρίας τῶν θετικῶν ἀσύμμετρων ἀριθμῶν βασισμένης ἀποκλειστικὰ στὸν ὁρισμό : Θετικὸς ἀσύμμετρος ἀριθμὸς εἶναι ἕνα ἀπειροψήφιο, ὄχι περιοδικὸ δεκαδικὸ μόρφωμα $\alpha, \psi_1 \ldots \psi_\nu \ldots$*, δηλαδὴ ἕνα κατασκεύασμα ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕναν ἀκέραιο ἀριθμὸ* $\alpha \geqslant 0$ *καὶ μίαν ἀτερμάτιστη, ὄχι περιοδικὴ ἀκολουθία* $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu \ldots$ *δεκαδικῶν ψηφίων. Στὴ συγγραφὴ τῆς πραγματείας μὲ εἶχε σπρώξει ἡ παρατήρηση ὅτι τὰ βιβλία μας τῆς Ἀριθμητικῆς καὶ τῆς Ἄλγεβρας (καὶ τὰ ξενόγλωσσα ἄλλωστε), ὅσα ἔδιναν τὸν παραπάνω ὁρισμὸ γιὰ τὸ θετικὸ ἀσύμμετρο ἀριθμό, παράλειπαν νὰ πραγματευθοῦν ἔπειτα, μὲ πληρότητα καὶ μαθηματικὴ αὐστηρότητα, τὰ θέματα τῆς μεγεθικῆς διάταξης καὶ τῶν τεσσάρων βασικῶν ἀριθμητικῶν πράξεων στὸ σύνολο ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ τοὺς ρητοὺς ἀριθμοὺς τοὺς* $\geqslant 0$ *καὶ ἀπὸ τοὺς θετικοὺς ἀσυμμέτρους. Ἔμενε ἔτσι ἕνα κενὸ γιὰ ὅσους θὰ ἐπιθυμοῦσαν νὰ ἔχουν μιὰν αὐστηρὴ θεωρητικὴ θεμελίωση τοῦ λογισμοῦ μὲ τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς βασισμένη στὸν παραπάνω ὁρισμὸ τῶν θετικῶν ἀσυμμέτρων· τὸ κενὸ αὐτὸ εἶχα ἐπιδιώξει νὰ συμπληρώσω μὲ τὴ μελέτη μου.*

Ἤδη παρατηρῶ πὼς τὸ ἀναλυτικὸ πρόγραμμα τῶν Μαθηματικῶν ποὺ ἰσχύει γιὰ τὴν 3η Γυμνασίου περιέχει ἀνάμεσα σ' ἄλλα θέματα καὶ τὰ ἀκόλουθα: «Ὕπαρξις ἀριθμοῦ μὲ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά. Ἀσύμμετροι ἀριθμοί. Ἐπέκτασις τῶν ἰδιοτήτων τῶν πράξεων τῶν ρητῶν ἀριθμῶν εἰς τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμούς. Τὸ σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ὡς ὑποσύνολον τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. » Φυσικὰ οὔτε ὁ χρόνος ποὺ ἡ διδασκαλία μπορεῖ νὰ διαθέση γιὰ τὰ παραπάνω θέματα στὴν 3η Γυμνασίου οὔτε ἡ μέση διανοητικὴ στάθμη τῶν μαθητῶν της καὶ τὰ ἐνδιαφέροντα τῶν περισσοτέρων *τους ἐπιτρέπουν μία πλήρη καὶ μαθηματικὰ αὐστηρὴ ἔκθεση. Ὅμως γιὰ τὸ δάσκαλο μιὰ τέτοια πραγμάτευση τῶν θεμάτων δὲν μπορεῖ παρὰ νὰ παρουσιάζη ἐνδιαφέρον, ὄχι μόνο γιὰ λόγους ἀτομικῆς ἐπιστημονικῆς περιέργειας ἀλλὰ καὶ γιὰ λόγους ἐπαγγελματικούς· γιατὶ ὁ δάσκαλος πρέπει νὰ μπορῇ ν᾽ ἀπαντᾷ σὲ σχετικὲς ἐρωτήσεις μαθητῶν ποὺ ἔχουν αὐξημένα μαθηματικὰ ἐνδιαφέροντα καὶ μεγαλύτερες ἱκανότητες γιὰ τὴ μαθηματικὴ ἐπιστήμη. Αὐτὸ μὲ παρακίνησε νὰ ξαναγράψω τὴν παλιά μου μελέτη, συμπληρώνοντάς την σὲ ἀρκετὰ σημεῖα καὶ ἐκσυγχρονίζοντας κάπως τὴ διατύπωσή της, καὶ νὰ τὴν κυκλοφορήσω εὐρύτερα γιὰ νὰ ἐξυπηρετήσω τοὺς σημερινοὺς καὶ αὐριανοὺς ἐκπαιδευτικούς μας.*

Ἰούνιος 1969.

Ν. Κριτικός.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Κεφάλαιο 1

Περιοδικὲς καὶ ἀπεριοδικὲς ἀκολουθίες

Κεφάλαιο 2

Δεκαδικὰ ἀναπτύγματα τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου Q_o^+

Κεφάλαιο 3

Τὸ σύνολο $\mathscr{G}$ τῶν ἀπόλυτων ἀριθμῶν

Κεφάλαιο 4

Προσδιορισμός τῶν δεκαδικῶν ἀναπτυγμάτων τῶν $\rho' + \rho''$, $\rho'\rho''$, $\rho' - \rho''$, ρ'/ρ'' ἀπό τά δεκαδικά ἀναπτύγματα τῶν ρητῶν ρ', $\rho'' \geqslant 0$.

Κεφάλαιο 5

Ὁρισμοί καί ἰδιότητες τῶν τεσσάρων βασικῶν πράξεων στό σύνολο $\mathscr{G}$ τῶν ἀπόλυτων ἀριθμῶν

---

* Τό ἐγκλεισμένο στήν ἀγκύλη εἶναι μιά ἄλλη ἔκφραση γιά ὅ,τι προηγεῖται.

Κεφάλαιο 6

Οἱ σχετικοὶ [πραγματικοὶ] ἀριθμοὶ

ΔΙΟΡΘΩΤΕΑ

(Παράκληση νὰ διορθωθοῦν προκαταβολικὰ)

σελ. 4 στίχ. 3 καὶ 4 ἀπὸ πάνω: ἀντὶ $\underbrace{1\,2 \ldots 2}_{\text{κ φορὲς}}$ νὰ γραφῆ $1\,\underbrace{2 \ldots 2}_{\text{κ φορὲς}}$

» 10 » 6 ἀπὸ κάτω: ἀντὶ ότε νὰ γραφῆ τότε

» 11 » 1 » πάνω: » ἀρκεῖ » » θὰ ἀρκοῦσε

» 12 » 11 » κάτω: » $\frac{\psi'_{k_l} - \psi''_{k_l}}{10^{k^l}}$ νὰ γραφῆ $\frac{|\psi'_{k_l} - \psi''_{k_l}|}{10^{k_l}}$

» 13 » 12 » » : » (ἑνὸς » » ἑνὸς (

» 15 » 11 » πάνω: » $\frac{\psi}{10^{(\nu+1)p}}$ » » $\frac{\psi_p}{10^{(\nu+1)p}}$

» 19 » 6 » » : μετὰ τό τότε νὰ προστεθῆ: γιὰ $\nu \in N_0$

» 22 » 1 » κάτω: νὰ γραφῆ πιὸ καθαρὰ $[A]_{k+1} + \frac{1}{10^{k+1}}$

» 25 » 2 » » : » » » » $\frac{\varphi}{10^{\nu}}$

» 26 » 5 » πάνω: ἀντὶ $\frac{1}{10^{\nu_k+1}}$ νὰ γραφῆ $\frac{1}{10^{\nu_{k+1}}}$

» 26 » 7 » » : » $\frac{1}{10^{\nu+k^l}} + \frac{k}{10^{\nu k+1}}$ νὰ γραφῆ $\frac{1}{10^{\nu_{k+1}}} + \frac{k}{10^{\nu_{k+1}}}$

» 26 » 7 » » : » $\frac{k}{10^{\nu_{k+1}}}$ νὰ γραφῆ $\frac{k}{10^{\nu_{k+1}}}$

» 27 » 3 » κάτω: » $[A_k]_o \leqslant [A_{k+1}]_o$ νὰ γραφῆ $[A_k]_o \geqslant [A_{k+1}]_o$

» 29 » 13 » » : νὰ γραφῆ πιὸ καθαρά:

$\psi_{k_{\nu+1}, \nu+1} = \psi_{k_{\nu+1}+1, \nu+1} = \psi_{k_{\nu+1}+2, \nu+1} = \cdots$

» 32 » 6 » » : ἀντὶ $\operatorname{Inf}_{\nu \geqq n} A_n$ νὰ γραφῆ $\operatorname{Inf}_{\nu \geqq n} A_\nu$

» 38 » 15 » » : » $\nu > 2$ » » $\nu \geqq 2$

» 41 » 1 » » : » $\tau_{m+k} \leqq$ » » $\tau_{m+k} <$

» 42 » 4 » » : » $\rho' > 0$ » » $\rho'' > 0$

» 46 » 9 » πάνω: μετὰ τὸ § 13 νὰ γραφῆ ἕνα κόμμα

» 71 » 5 » » : ἀντὶ $Z < Y$ » » $Z \leqq Y$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΚΑΙ ΑΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

§ 1. Τὶ προϋποθέτουμε γνωστό.

Μὲ $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ παριστάνουμε τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, μὲ $N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ τὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων $\geqslant 0$, μὲ Q_0^+ τὸ σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ποὺ εἶναι $\geqslant 0$. Ὑπενθυμίζουμε ὅτι ρητοὶ ἀριθμοὶ $\geqslant 0$ εἶναι οἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας τὶς ὁποῖες ὁρίζει στὸ σύνολο τῶν «κλασμάτων»

$$K = \{x \mid x = \frac{\mu}{\nu} \quad \text{ὅπου} \quad \mu \in N_0 \quad \text{καὶ} \quad \nu \in N\}$$

ἡ ἀκόλουθη σχέση ἰσοδυναμίας $\sim$:

$$\frac{\mu_1}{\nu_1} \sim \frac{\mu_2}{\nu_2} \quad \text{ὅταν καὶ μόνον ὅταν} \quad \mu_1\nu_2 = \mu_2\nu_1 .$$

Τὴ σχέση $\leqslant$ μεγεθικῆς διάταξης καὶ τὶς τέσσερις βασικὲς πράξεις : πρόσθεση, ἀφαίρεση, πολλαπλασιασμὸ καὶ διαίρεση στὰ σύνολα N, N_0, Q_0^+, μαζὶ μὲ τὶς κύριες ἰδιότητές τους, τὶς θεωροῦμε γνωστές. Ἐπίσης θεωροῦμε γνωστὸ ὅτι τὸ σύνολο τῶν ρητῶν ποὺ ἀντιπροσωπεύονται ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{1}$, ὅπου $\alpha \in N_0$, εἶναι «ἰσομορφικὸ» μὲ τὸ σύνολο N_0 καὶ ὡς πρὸς τὴ σχέση $\leqslant$ καὶ ὡς πρὸς τὶς τέσσερις βασικὲς πράξεις. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ὑπάρχει μιὰ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία, ἡ

$$N_0 \ni \alpha \leftrightarrow \text{ρητὸς } \rho_\alpha \text{ μὲ ἀντιπρόσωπο τὸ κλάσμα } \frac{\alpha}{1},$$

ποὺ ἔχει τὶς ἀκόλουθες ἰδιότητες : Γιὰ ὁποιαδήποτε $\alpha_1, \alpha_2 \in N_0$ ἔχουμε :

(1) $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \Rightarrow \rho_{\alpha_1} \leqslant \rho_{\alpha_2}$, (2) $\alpha_1 + \alpha_2 \leftrightarrow \rho_{\alpha_1} + \rho_{\alpha_2}$,

(3) $\alpha_1\alpha_2 \leftrightarrow \rho_{\alpha_1}\rho_{\alpha_2}$, (4) $\alpha_1 - \alpha_2 \leftrightarrow \rho_{\alpha_1} - \rho_{\alpha_2}$ μὲ $\alpha_1 \geqslant \alpha_2$,

(5) $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \leftrightarrow \frac{\rho_{\alpha_1}}{\rho_{\alpha_2}}$ μὲ $\alpha_2 \neq 0$.

Σημειώνουμε τέλος ὅτι, γιὰ συντομία, θὰ λέμε: ὁ ρητὸς $\frac{\mu}{\nu}$ ἀντί, ὅπως θὰ ἔπρεπε, ὁ ρητὸς ποὺ ἔχει ἀντιπρόσωπο τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$.

§ 2. Ἀκολουθία. Περιοδικὴ καὶ ἀπεριοδικὴ ἀκολουθία.

Οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ

$$1, 2, 3, \ldots, \nu, \nu+1, \ldots,$$

ὅταν θεσπίσουμε ὅτι ὁ ν προηγεῖται ἀπὸ τὸν $\nu+1$, ἀποτελοῦν μιὰ διαδοχὴ ἰδεατῶν πραγμάτων ἡ ὁποία ἔχει ἕνα πρῶτο στοιχεῖο, τὸ 1, κανένα ὅμως τελευταῖο. Τέτοιες «ἀτερμάτιστες» διαδοχὲς χρησιμοποιοῦμε πολὺ συχνὰ στὰ Μαθηματικά· θὰ τὶς καλοῦμε *ἀκολουθίες*. Μὲ μαθηματικότερη διατύπωση μποροῦμε νὰ λέμε ὅτι *ἀκολουθία* εἶναι μιὰ (μονοσήμαντη) συνάρτηση

$$f: \ N \to \Pi,$$

ποὺ ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τὸ σύνολο N καὶ τιμὲς μέσα σ' ἕνα σύνολο Π πραγμάτων π· θὰ τὴ σημειώνουμε ἀναπτυγμένα μὲ

$$\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\nu \ldots \qquad (\pi_\nu \in \Pi) \tag{2.1}$$

καὶ συμπτυγμένα μὲ

$$(\pi_\nu) \quad , \quad \nu \in N.$$

Π.χ. ἂν $\Pi = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, τότε ἡ (2.1) εἶναι μιὰ ἀκολουθία δεκαδικῶν ψηφίων, ὅπως λ.χ. ἡ

$$2, 6, 1, 8, 1, 1, 8, 1, \ldots, 1, 8, 1, \ldots \tag{2.2}$$

πού, σὰν συνάρτηση $f: N \to \Pi$, ὁρίζεται ἔτσι:

$$f(1) = 2 \quad , \quad f(2) = 6 \quad , \quad f(0+3k) = 1 \quad ,$$
$$f(1+3k) = 8 \quad , \quad f(2+3k) = 1 \quad \text{γιὰ} \quad k \in N_0 .$$

Ἡ ἀκολουθία (2.1) λέγεται *περιοδική*, ὅταν καὶ μόνον ὅταν κάποιο μονομελὲς $\overline{\pi}_{k_1}$ ἢ πολυμελὲς $\pi_{k_1} \ldots \pi_{k_1+p-1}$ κομμάτι της, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ $p \geqslant 1$, διαδοχικὰ ἂν $p > 1$, στοιχεῖα της, ἐπαναλαμβάνεται ἀτερμάτιστα ἀπὸ κάποια θέση τάξης $\nu = k_1$ μέσα στὴν ἀκολουθία καὶ ἔπειτα.

Τὸ κομμάτι $\overline{\pi_{k_1}}$ ἢ $\overline{\pi_{k_1} \ldots \pi_{k_1+p-1}}$ ποὺ ἐπαναλαμβάνεται, λέγεται *περίοδος* τῆς ἀκολουθίας.

Π.χ. ἡ ἀκολουθία (2.2) εἶναι περιοδικὴ μὲ περίοδο τὸ τριμελὲς κομμάτι της $\overline{181}$ ποὺ ἐπαναλαμβάνεται ἀτερμάτιστα ἀπὸ τὴν τρίτη θέση μέσα στὴν ἀκολουθία καὶ ἔπειτα.

Τυπικά, ὁ ὁρισμὸς τῆς περιοδικότητας δίνεται ἔτσι :

Μιὰ ἀκολουθία (π_ν), $\nu \in N$, εἶναι *περιοδική*, ὅταν καὶ μόνον ὅταν ὑπάρχουν δυὸ φυσικοὶ ἀριθμοὶ p καὶ k_1 τέτοιοι ὥστε νά ἔχουμε

$$\pi_{\nu+mp} = \pi_\nu \quad \text{γιὰ} \quad N \ni \nu \geqslant k_1 \quad \text{καὶ} \quad m \in N .$$

Εἶναι φανερὸ ὅτι, ἂν ἡ ἀκολουθία (2.1) ἔχη τὴν περίοδο $\overline{\pi_{k_1}}$ ἢ τὴν $\overline{\pi_{k_1} \ldots \pi_{k_1+p-1}}$, θὰ ἔχη περίοδο καὶ τὸ κομμάτι $\overline{\pi_k}$ ἤ, ἀντίστοιχα, τὸ $\overline{\pi_k \ldots \pi_{k+p-1}}$ μὲ $k \geqslant k_1$· ἐπίσης κάθε κομμάτι τῆς ἀκολουθίας ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ περισσότερα, ἔστω n μὲ $n > 1$, παρακείμενα παρόμοια κομμάτια θὰ εἶναι περίοδος τῆς ἀκολουθίας. Π.χ. ἡ ἀκολουθία (2.2) ἔχει περιόδους καὶ τὰ κομμάτια

$$\overline{811}\ ,\quad \overline{118}\ ,\quad \overline{811811}\ ,\quad \overline{118118118} \quad \text{κ.τ.λ.}$$

Ὀνομάζουμε *ἀρχικὴ περίοδο* τῆς ἀπὸ ὑπόθεση περιοδικῆς ἀκολουθίας (2.1) τὸ ὀλιγομελέστερο καὶ πρῶτο στὴ σειρὰ κομμάτι της τὸ ὁποῖο ἐπαναλαμβάνεται ἀτερμάτιστα. Π.χ. στὴν ἀκολουθία (2.2) ἀρχικὴ περίοδος εἶναι τὸ $\overline{181}$. Γενικά, σὲ μιὰν ἀκολουθία (2.1) ποὺ εἶναι περιοδική, ἀνάμεσα στὰ διάφορα κομμάτια της $\overline{\pi_{k'} \ldots \pi_{k'+p'-1}}$ ποὺ ἐπαναλαμβάνονται ἀτερμάτιστα, *ἀρχικὴ περίοδος* εἶναι ἐκεῖνο ποὺ ἔχει τὸ ἐλάχιστο $k'=k_1$ καὶ τὸ ἐλάχιστο $p'=p$. Ἑπομένως, ἂν τὸ « μῆκος » p τῆς ἀρχικῆς περιόδου εἶναι > 1, τότε τὰ p στοιχεῖα ποὺ τὴν ἀποτελοῦν δὲν μποροῦν νὰ ταυτίζωνται, νὰ εἶναι δηλαδὴ ἕνα καὶ τὸ ἴδιο πράγμα. Κατὰ συνέπεια, ἂν $p = 2$, τότε ἀπὸ τὴ θέση k_1 μέσα στὴν ἀκολουθία καὶ ἔπειτα δυὸ ὁποιαδήποτε διαδοχικὰ στοιχεῖα τῆς ἀκολουθίας θὰ διαφέρουν τὸ ἕνα ἀπὸ τὸ ἄλλο, καὶ ἂν $p > 2$, τότε τὸ πολὺ $p - 1$ διαδοχικὰ στοιχεῖα τάξης $\geqslant k_1$ θὰ μποροῦν νὰ ταυτίζωνται.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνουμε τὴν ἀκόλουθη ἱκανὴ (ὄχι καὶ ἀναγκαία) συνθήκη γιὰ νὰ εἶναι μιὰ ἀκολουθία *ἀπεριοδική*, δηλαδὴ ὄχι περιοδική :

*Μιὰ ἀκολουθία, ποὺ τὰ στοιχεῖα της δὲν ταυτίζονται ἀπὸ κάποια θέση μέσα στὴν ἀκολουθία καὶ ἔπειτα, εἶναι ἀπεριοδική, ὅταν περιέχη ὁμάδες ἀπὸ ν διαδοχικὰ ταυτιζόμενα στοιχεῖα μὲ ν μεγαλύτερο ἀπὸ κάθε δινόμενο θετικὸ ἀριθμὸ [μὲ ν αὐθαίρετα μεγάλο, ὅπως συνηθίζουμε νὰ λέμε]**.

*) *Σημ.* Τὸ ἐγκλεισμένο μέσα σὲ ἀγκύλη [ ] εἶναι μιὰ ἄλλη ἔκφραση γιὰ κεῖνο ποὺ προηγεῖται.

Π.χ. ἡ ἀκολουθία δεκαδικῶν ψηφίων (τὰ γράφουμε χωρὶς νὰ τὰ χωρίζουμε μὲ κόμματα)

$$121221222\ldots \underbrace{12\ldots 2}_{k\ \text{φορὲς}}\,\underbrace{12\ldots 22}_{k+1\ \text{φορὲς}}\ldots$$

εἶναι ἀπεριοδική, ἐπειδὴ περιέχει ὁμάδες ταυτιζόμενων διαδοχικῶν στοιχείων 2 τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος ν εἶναι ὅσο θέλουμε μεγάλο, ἀρκεῖ νὰ προχωρήσουμε μέσα στὴν ἀκολουθία ἀρκετὰ μακριά. Ἐπίσης ἡ ἀκολουθία δεκαδικῶν ψηφίων

$$123456789101112\ldots 99100101\ldots 1\underbrace{0\ldots 0}_{k\ \text{φορὲς}}\ldots 1\underbrace{0\ldots 00}_{k+1\ \text{φορὲς}}\ldots$$

εἶναι ἀπεριοδική, ἐπειδὴ περιέχει τὰ συγκροτήματα ψηφίων $1\underbrace{0\ldots 0}_{\nu\ \text{φορὲς}}$ μὲ αὐθαίρετα μεγάλο πλῆθος ν διαδοχικῶν μηδενικῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΔΕΚΑΔΙΚΑ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΑ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΟΥ Q_0^+

§ 3. Δεκαδικὸ ἀνάπτυγμα ρητοῦ $\rho \geqslant 0$.

Ἄς εἶναι ρ ἕνας ρητὸς ἀριθμὸς $\geqslant 0$ καὶ $\frac{m}{n}$ μὲ $m \in N_0$, $n \in N$. τὸ ἀνάγωγο κλάσμα ποὺ τὸν ἀντιπροσωπεύει· (θὰ σημειώνουμε τὴν ἀντιπροσώπευση αὐτὴ μὲ τὴ γραφὴ $\frac{m}{n} = \rho$ εἴτε $\rho = \frac{m}{n}$). Θεωροῦμε τὰ διαδοχικὰ ἀκέραια πολλαπλάσια τοῦ φυσικοῦ n:

$$0 \cdot n \quad , \quad 1 \cdot n \quad , \quad 2n \quad , \quad 3n \quad , \dots , \quad kn \quad , \quad (k+1)n \quad , \dots .$$

Ὁ ἀκέραιος m ἢ θὰ συμπίπτη μὲ ἕνα ἀπὸ τὰ πολλαπλάσια αὐτὰ ἢ θὰ περιέχεται ἀνάμεσα σὲ δυὸ διαδοχικά· μὲ ἄλλα λόγια, θὰ ὑπάρχη ἕνας ἀκέραιος $\alpha \in N_0$ τέτοιος ὥστε νὰ ἔχουμε

$$\alpha n \leqslant m < (\alpha+1)n .$$

Κατὰ συνέπεια θὰ ἰσχύη ἡ σχέση

$$m = \alpha n + \upsilon_1 \quad , \quad \text{μὲ} \quad \alpha \geqslant 0 \; , \; 0 \leqslant \upsilon_1 < n . \tag{3.1}$$

Ὅπως εἶναι γνωστό, ἡ σχέση αὐτὴ λέγεται *διαιρετικὴ ἰσότητα* μὲ διαιρέτη τὸ n καὶ διαιρετέο τὸ m· ὁ ἀκέραιος $\alpha \geqslant 0$ λέγεται *ἀκέραιο πηλίκο* τῆς διαίρεσης $\alpha : n$ (ἄλφα διὰ n) καὶ ὁ ἀκέραιος υ_1 *ὑπόλοιπο* τῆς διαίρεσης αὐτῆς (καὶ ὅταν ἀκόμη $\upsilon_1 = 0$).

Διαιροῦμε τώρα διὰ n τὸ δεκαπλάσιο $10\upsilon_1$ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου υ_1. Ἐπειδὴ $10\upsilon_1 < 10n$, τὸ ἀκέραιο πηλίκο τούτης τῆς διαίρεσης θὰ εἶναι ἕνας ἀκέραιος $\geqslant 0$ καὶ < 10, ἄρα ἕνα δεκαδικὸ ψηφίο ψ_1· ἂν παραστήσουμε μὲ υ_2 τὸ ἀντίστοιχο ὑπόλοιπο, θὰ ἔχουμε τὴ διαιρετικὴ ἰσότητα

$$10\upsilon_1 = \psi_1 n + \upsilon_2 \quad , \quad \text{μὲ} \quad 0 \leqslant \upsilon_2 < n .$$

Ὑποθέτοντας ὅτι προσδιορίσαμε ἤδη τὰ υ_k, ψ_k, ψ_{k+1} γιὰ κάποιο $k \in N$ ἔτσι, ὥστε νὰ εἶναι

$$0 \leqslant \upsilon_k < n \quad \text{καὶ} \quad 10\upsilon_k = \psi_k n + \upsilon_{k+1} \quad \text{μὲ} \quad 0 \leqslant \upsilon_{k+1} < n\,,$$

προχωροῦμε στὴ διαίρεση $10\upsilon_{k+1} : n$ καὶ πορίζόμαστε τὴν ἰσότητα

$$10\upsilon_{k+1} = \psi_{k+1} n + \upsilon_{k+2} \quad \text{μὲ} \quad 0 \leqslant \upsilon_{k+2} < n\,.$$

Ὁρίζουμε ἔτσι μὲ μαθηματικὴ ἐπαγωγὴ μιὰν ἀκολουθία διαιρετικῶν ἰσοτήτων

$$(3.2) \qquad 10\upsilon_k = \psi_k n + \upsilon_{k+1} \quad \text{μὲ} \quad 0 \leqslant \upsilon_{k+1} < n \quad , \quad k \in N\,,$$

οἱ ὁποῖες προσδιορίζουν μονότροπα μιὰν ἀκολουθία (ψ_k), $k \in N$, δεκαδικῶν ψηφίων γιὰ τὸ ρητὸ ἀριθμὸ ρ. Τὸ ζεῦγος ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸν ἀκέραιο α καὶ τὴν ἀκολουθία (ψ_k), $k \in N$, λέγεται *δεκαδικὸ ἀνάπτυγμα τοῦ ρ* καὶ θὰ σημειώνεται μὲ

$$\alpha\,,\psi_1\psi_2\psi_3\ldots \quad \text{εἴτε} \quad \alpha,\psi_1\ldots\psi_k\ldots\,.$$

Ἡ ἀντιστοίχισή του στὸ ρ θὰ σημειώνεται μὲ τὴν ἰσότητα:

$$\rho = \alpha,\psi_1\ldots\psi_k\ldots \quad \text{εἴτε} \quad \alpha,\psi_1\ldots\psi_k\ldots = \rho\,.$$

Θὰ καλοῦμε τὸ α *ἀκέραιο μέρος* τοῦ ἀναπτύγματος καὶ τὴν ἀκολουθία (ψ_k), $k \in N$, *ψηφιακὸ μέρος του.*

Μὲ $\alpha,\psi_1\ldots\psi_\nu$ θὰ σημειώνουμε κατὰ τὰ καθιερωμένα τὸ «δεκαδικὸ κλάσμα»

$$\frac{\alpha\cdot 10^\nu + \psi_1 10^{\nu-1} + \ldots + \psi_\nu}{10^\nu} = \alpha + \frac{\psi_1}{10} + \ldots + \frac{\psi_\nu}{10^\nu}$$

ποὺ θὰ καλοῦμε καὶ *ν-ψήφιο δεκαδικὸ ἀριθμό.*

Σχόλιο. *Τὸ δεκαδικὸ ἀνάπτυγμα τοῦ ρ μποροῦμε νὰ τὸ βροῦμε μὲ τὸν ἀλγόριθμο τῶν διαδοχικῶν διαιρέσεων ξεκινώντας καὶ ἀπὸ ἕναν ὄχι ἀνάγωγο ἀντιπρόσωπο* $\frac{m'}{n'}$ *τοῦ ρ.* Πραγματικά, ἐπειδὴ τὸ $\frac{m'}{n'}$ εἶναι κλάσμα ἰσοδύναμο μὲ τὸ ἀνάγωγο $\frac{m}{n}$, θὰ ὑπάρχη ἕνας φυσικὸς ἀριθμὸς p τέτοιος ὥστε νὰ εἶναι $m' = mp$ καὶ $n' = np$. Ἀπὸ τὶς (3.1) καὶ (3.2) συμπεραίνουμε τώρα τὶς σχέσεις

$$m' = mp = \alpha \cdot np + \upsilon_1 p = \alpha \cdot n' + \upsilon'_1 \quad \text{μὲ} \quad 0 \leqslant \upsilon'_1 = \upsilon_1 p < np = n',$$

$$10\upsilon'_k = 10\upsilon_k p = \psi_k \cdot np + \upsilon_{k+1} p = \psi_k \cdot n' + \upsilon'_{k+1} \quad \text{μὲ}$$
$$0 \leqslant \upsilon'_{k+1} < n' \quad , \quad k \in N \; ,$$

ποὺ ἀποδείχνουν τὸν παραπάνω ἰσχυρισμό μας.

Νά τώρα μερικὰ παραδείγματα δεκαδικῶν ἀναπτυγμάτων :

$$0 = 0{,}0 \ldots 0 \ldots \quad \Big| \quad 3 = \frac{3}{1} = 3{,}0 \ldots 0 \ldots \quad \Big| \quad \frac{37}{20} = 1{,}85000\ldots \quad \Big| \quad \frac{2}{7} = 0{,}285714285714\ldots$$

$$\frac{22}{15} = 1{,}4666\ldots \quad \Big| \quad \frac{20}{9} = 2{,}222\ldots \quad \Big| \quad \frac{1001}{999} = 1{,}002002\ldots .$$

Ὅπως βλέπουμε, τὸ ψηφιακὸ μέρος αὐτῶν τῶν ἀναπτυγμάτων εἶναι περιοδικό. Θ' ἀποδείξουμε ὅτι αὐτὸ ἀληθεύει γενικὰ γιὰ τὸ ἀνάπτυγμα κάθε ρητοῦ $\rho \geqslant 0$.

§ 4. Περιοδικότητα τοῦ δεκαδικοῦ ἀναπτύγματος ρητοῦ $\geqslant 0$.

Πρόταση 1. *Ἡ ἀκολουθία* (ψ_k), $\kappa \in N$, *τοῦ δεκαδικοῦ ἀναπτύγματος ἑνὸς ρητοῦ* $\rho \geqslant 0$, *ποὺ παριστάνεται ἀπὸ τὸ ἀνάγωγο κλάσμα* $\frac{m}{n}$, *εἶναι περιοδική. Ἂν ἡ ἀρχικὴ περίοδος εἶναι μονομελής, τότε θὰ εἶναι διαφορετικὴ ἀπὸ τὴν* $\overline{9}$.

Ἀπόδειξη. Τὰ ὑπόλοιπα υ_k τῶν διαιρέσεων ποὺ ἐκφράζονται μὲ τὶς ἰσότητες (3.1) καὶ (3.2), εἶναι ἀκέραιοι $\geqslant 0$ καὶ $\leqslant n - 1$. Ἑπομένως, ἀνάμεσα στὰ n πρῶτα ὑπόλοιπα

$$(4.1) \qquad \upsilon_1, \ldots, \upsilon_n$$

ἢ 1ο θὰ ὑπάρχη κάποιο $\upsilon_\mu = 0$, ὁπότε καὶ ὅλα τὰ ἑπόμενα υ_k μὲ $k > \mu$ θὰ εἶναι μηδενικά, ἢ 2ο κανένα τους δὲν θὰ εἶναι $= 0$, ὁπότε θὰ ἔχουμε ἀναγκαστικὰ $n \geqslant 3$, γιατὶ

$$n = 1 \Rightarrow \upsilon_1 = 0 \quad \text{καὶ} \quad n = 2 \Rightarrow (\upsilon_1 = 1 \;\; \text{καὶ} \;\; \upsilon_2 = 0).$$

Στὴν 1η περίπτωση : $\upsilon_k = 0$ γιά $k \geqslant \mu$, θὰ ἔχουμε

$$10\upsilon_k = 0 = \psi_k n + 0 \Rightarrow \psi_k = 0 \quad \text{γιὰ} \quad k \geqslant \mu \;\cdot$$

ἄρα ἡ ἀκολουθία (ψ_k), $k \in N$, θὰ εἶναι περιοδικὴ μὲ μονομελῆ ἀρχικὴ ἀρχικὴ περίοδο τὸ $\overline{0}$.

Στὴ 2η περίπτωση ὅπου κανένα ἀπὸ τὰ ὑπόλοιπα (4.1) δὲν εἶναι ἴσο μὲ 0, δυὸ τουλάχιστο ἀπ' αὐτὰ θὰ εἶναι ἴσα μεταξύ τους, ἀφοῦ οἱ τιμὲς ποὺ μποροῦν νὰ πάρουν εἶναι οἱ $n - 1$ ἀκέραιοι $1, \dots, n-1$. Θὰ ὑπάρχουν λοιπὸν δυὸ ἀκέραιοι μ καὶ p τέτοιοι ὥστε νὰ εἶναι

$$1 \leqslant \mu < \mu + p \leqslant n \quad \text{καὶ} \quad \upsilon_\mu = \upsilon_{\mu+p}.$$

Ἰσχυρίζομαι πὼς οἱ ἀκολουθίες (υ_k) καὶ (ψ_k), $k \in N$, εἶναι περιοδικὲς ἀπὸ τὴ θέση $k = \mu$ καὶ ἔπειτα. Ἀρκεῖ γι' αὐτὸ νὰ δείξω ὅτι

$$(4.2) \qquad \upsilon_k = \upsilon_{k+p} \quad \text{καὶ} \quad \psi = \psi_{k+p} \quad \text{γιὰ} \quad k \geqslant \mu.$$

Σύμφωνα μὲ τὶς σχέσεις (3.2) ἔχουμε

$$\begin{aligned}\upsilon_\mu = \upsilon_{\mu+p} \Rightarrow 10\upsilon_\mu = 10\upsilon_{\mu+p} &\Rightarrow \psi_\mu n + \upsilon_{\mu+1} = \psi_{\mu+p} n + \upsilon_{\mu+1+p} \\ &\Rightarrow (\psi_\mu - \psi_{\mu+p})n + (\upsilon_{\mu+1} - \upsilon_{\mu+1+p}) = 0.\end{aligned}$$

Εἶναι ὅμως

$$|\psi_\mu - \psi_{\mu+p}|n = \text{ἀκέραιο πολλαπλάσιο τοῦ } n \text{ καὶ } |\upsilon_{\mu+1} - \upsilon_{\mu+1+p}| < n.$$

Ἄρα θὰ ἔχουμε

$$\psi_\mu - \psi_{\mu+p} = 0 \quad \text{καὶ} \quad \upsilon_{\mu+1} - \upsilon_{\mu+1+p} = 0.$$

Συλλογιζόμαστε τώρα ἐπαγωγικά: ἂς εἶναι, γιὰ κάποιο $k \geqslant \mu$, $\upsilon_k = \upsilon_{k+p}$. Θὰ εἶναι τότε $\psi_k = \psi_{k+p}$ καὶ $\upsilon_{k+1} = \upsilon_{k+1+p}$, γιατί, σύμφωνα μὲ τὶς (3.2), ἔχουμε:

$$\begin{aligned}\upsilon_k = \upsilon_{k+p} \Rightarrow 10\upsilon_k = 10\upsilon_{k+p} &\Rightarrow \psi_k n + \upsilon_{k+1} = \psi_{k+p} n + \upsilon_{k+1+p} \\ &\Rightarrow (\psi_k - \psi_{k+p})n + (\upsilon_{k+1} - \upsilon_{k+1+p}) = 0 \\ &\Rightarrow (\psi_k - \psi_{k+p} = 0 \text{ καὶ } \upsilon_{k+1} - \upsilon_{k+1+p} = 0).\end{aligned}$$

Ἀποδείξαμε ἔτσι μὲ μαθηματικὴ ἐπαγωγὴ ὅτι οἱ (4.2) ἀληθεύουν γιὰ κάθε $k \geqslant \mu$. Κατὰ συνέπεια, στὴν προκείμενη 2η περίπτωση τὸ κομμάτι $\psi_\mu \cdots \psi_{\mu+p-1}$ τῆς ἀκολουθίας (ψ_k), $k \in N$, εἶναι περίοδος τῆς ἀκολουθίας.

Ὑπολείπεται νὰ δείξουμε ὅτι τὰ p ψηφία $\psi_\mu, \dots, \psi_{\mu+p-1}$ δὲν μποροῦν νὰ εἶναι ὅλα ἴσα μὲ 9.

Καὶ ἀλήθεια, ἂν ἦσαν ὅλα ἴσα μὲ 9, θὰ εἴχαμε

$$\begin{aligned}10\upsilon_\mu &= 9n + \upsilon_{\mu+1} \\ &\dots\dots\dots\dots \\ 10\upsilon_{\mu+p-1} &= 9n + \upsilon_{\mu+p} = 9n + \upsilon_\mu.\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε τὰ μέλη αὐτῶν τῶν p ἰσοτήτων κατὰ σειρὰ μὲ 10^{p-1}, ..., 10^0 ἀντιστοίχως καὶ προσθέτουμε κατὰ μέλη τὶς ἰσότητες ποὺ προκύπτουν. Ἀφοῦ διαγράψουμε μερικοὺς ὅρους ποὺ ἐμφανίζονται καὶ στὰ δυὸ μέλη τοῦ ἀποτελέσματος, λαμβάνουμε

$$10^p \upsilon_\mu = (9 \cdot 10^{p-1} + \dots + 9 \cdot 10^0)n + \upsilon_\mu ,$$

ἄρα

$$(10^p - 1)\upsilon_\mu = (9 \cdot 10^{p-1} + \dots + 9 \cdot 10^0)n = (10^p - 1)n .$$

Θὰ ἔπρεπε λοιπὸν νὰ εἶναι $\upsilon_\mu = n$, πράγμα ποὺ ἀποκλείεται. Ἀποδείχτηκε λοιπὸν ὅτι ἡ ἀρχικὴ περίοδος τοῦ δεκαδικοῦ ἀναπτύγματος τοῦ ρητοῦ $\rho \geqslant 0$ δέν μπορεῖ νὰ εἶναι ἡ μονομελὴς $\overline{9}$.

§ 5. Σχέσεις ποὺ καθορίζουν τὸ δεκαδικὸ ἀνάπτυγμα ρητοῦ $\geqslant 0$.

Οἱ ἰσότητες (3.1) καὶ (3.2) γράφονται καὶ ἔτσι :

$$(5.1) \qquad \rho = \frac{m}{n} = \alpha + \frac{\upsilon_1}{n} , \quad \frac{10\upsilon_k}{n} = \psi_k + \frac{\upsilon_{k+1}}{n} \quad \text{γιὰ} \quad k \in N.$$

Ἑπομένως, ἂν θέσουμε

$$Y_k = \frac{\upsilon_k}{n} \quad \text{γιὰ} \quad k \in N ,$$

θὰ ἔχουμε

$$(5.2) \qquad \rho = \alpha + Y_1, \quad 10Y_k = \psi_k + Y_{k+1} \quad \text{μὲ} \quad 0 \leqslant Y_k < 1 \quad \text{γιὰ} \quad k \in N.$$

Ἀπὸ τὶς τελευταῖες σχέσεις ποριζόμαστε διαδοχικὰ :

$$\rho = \alpha + Y_1 , \quad \rho = \alpha + \frac{\psi_1}{10} + \frac{Y_2}{10} , \quad \rho = \alpha + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \frac{Y_3}{10^2} , \dots$$

καὶ μὲ μαθηματικὴ ἐπαγωγή :

$$(5.3) \qquad \rho = \alpha + \frac{\psi_1}{10} + \dots + \frac{\psi_k}{10^k} + \frac{Y_{k+1}}{10^k} = \alpha, \psi_1 \dots \psi_k + \frac{Y_{k+1}}{10^k} \quad \text{γιὰ} \quad k \in N.$$

Ὁ ἀριθμὸς Y_k $(k \in N)$ εἶναι ἕνας ρητὸς ποὺ ἔχει δεκαδικὸ ἀνάπτυγμα, ὅπως εὔκολα προκύπτει, τὸ

$$Y_k = 0, \psi_k \psi_{k+1} \psi_{k+2} \dots .$$

Ἀντίστροφα, ἄν ἕνας ρητὸς ρ΄ μπορῆ νὰ πάρη τὴ μορφή

$$(5.4)\qquad \rho' = \alpha' + \frac{\psi'_1}{10} + \dots + \frac{\psi'_k}{10^k} + \frac{Y'_{k+1}}{10^k},$$

ὅπου k κάποιος φυσικὸς ἀριθμός, α΄ ἀκέραιος $\geqslant 0$, $\psi_1', \dots, \psi'_k$ δεκαδικὰ ψηφία καὶ $0 \leqslant Y'_{k+1} < 1$, τότε τὸ δεκαδικὸ ἀνάπτυγμα τοῦ ρ΄ θὰ ἔχη ἀκέραιο μέρος τὸ α΄, τὰ πρῶτα k δεκαδικὰ ψηφία ἴσα ἀντιστοίχως μὲ $\psi'_1, \dots, \psi'_k$ καὶ τὰ ἑπόμενα ψηφία ἴσα ἀντιστοίχως μὲ τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ ἀναπτύγματος $0, \omega_1 \omega_2 \omega_3 \dots$ τοῦ Y'_{k+1}, ἤτοι θὰ εἶναι

$$\rho' = \alpha', \psi'_1 \dots \psi'_k \psi'_{k+1} \psi'_{k+2} \psi'_{k+3} \dots \quad \text{μὲ} \quad \psi'_{k+\nu} = \omega_\nu \quad \text{γιὰ} \quad \nu \in N.$$

Τέλος, ἀπὸ τὶς (5.2) καὶ (5.3) ἕπεται ὅτι

$$(5.5)\qquad \alpha \leqslant \rho < \alpha + \frac{1}{10} \quad \text{καὶ} \quad \alpha, \psi_1 \dots \psi_k \leqslant \rho < \alpha, \psi_1 \dots \psi_k + \frac{1}{10^k} \text{ γιὰ } k \in N.$$

Ἀντίστροφα, ἀπὸ τὶς (5.5) συνάγεται ὅτι ὁ ρητὸς ρ ἔχει δεκαδικὸ ἀνάπτυγμα τὸ $\alpha, \psi_1 \psi_2 \psi_3 \dots$.

§ 6. Θεώρημα γιὰ τὰ δεκαδικὰ ἀναπτύγματα δυὸ ἄνισων ρητῶν $\geqslant 0$.

Πρόταση 2. *Σὲ δυὸ ἄνισους ρητοὺς ἀριθμοὺς $\rho' \geqslant 0$ καὶ $\rho'' \geqslant 0$ ἀντιστοιχοῦν διαφορετικὰ δεκαδικὰ ἀναπτύγματα.*

Ἀπόδειξη. Ἂν τὸ συμπέρασμα δὲν ἀλήθευε καὶ εἴχαμε

$$\rho' = \alpha, \psi_1 \dots \psi_k \dots \quad , \quad \rho'' = \alpha, \psi_1 \dots \psi_k \dots ,$$

ότε, σύμφωνα μὲ τὶς (5.5), θὰ ἴσχυαν οἱ σχέσεις

$$\alpha, \psi_1 \dots \psi_k \leqslant \rho', \quad \rho'' < \alpha, \psi_1 \dots \psi_k + \frac{1}{10^k} \quad \text{γιὰ} \quad k \in N.$$

Ἄρα θὰ εἴχαμε

$$(6.1)\qquad |\rho' - \rho''| < \alpha, \psi_1 \dots \psi_k + \frac{1}{10^k} - \alpha, \psi_1 \dots \psi_k = \frac{1}{10^k} \text{ γιὰ κάθε } k \in N.$$

Ἀπὸ ἐδῶ ἕπεται ὅτι $|\rho' - \rho''| = 0$, ἤτοι $\rho' = \rho''$, γιατί, ἂν ἦταν $|\rho' - \rho''| > 0$, θὰ εἴχαμε $|\rho' - \rho''| = \dfrac{n_1}{n_2}$, ὅπου n_1 καὶ n_2 φυσικοὶ ἀριθμοί, καὶ ἑπομένως $|\rho'-\rho''| \geqslant \frac{1}{n_2}$. Κατὰ συνέπεια, ἀρκεῖ νὰ πάρουμε τὸ φυσικὸ ἀριθμὸ k_2 μεγαλύτερο ἀπὸ ἢ ἴσο μὲ τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων μὲ τὰ ὁποῖα γράφεται στὸ δεκαδικὸ σύστημα ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς n_2, γιὰ νὰ ἔχουμε

$$\frac{1}{10^{k_2}} < \frac{1}{n_2} \leqslant |\rho'-\rho''| \quad \text{σὲ ἀντίφαση πρὸς τὶς (6.1).}$$

Σχόλιο. Στὴν παραπάνω ἀπόδειξη χρησιμοποιεῖται ἔμμεσα ἡ ἀκόλουθη βοηθητικὴ πρόταση ποὺ θὰ μᾶς εἶναι χρήσιμη καὶ παρακάτω:

Βοηθητικὴ πρόταση. Ὁ ἀριθμὸς $\frac{1}{10^\nu}$, *ὅπου* $\nu \in N$, *εἶναι μικρότερος ἀπὸ κάθε δινόμενο θετικὸ ρητὸ ἀριθμὸ* ρ, *ὅταν ὁ* ν *εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ κατάλληλο φυσικὸ ἀριθμὸ* ν_ρ *(πού, φυσικά, ἐξαρτιέται ἀπὸ τὸ δινόμενο* ρ*):*

$$\frac{1}{10^\nu} < \rho \quad \textit{γιὰ} \quad \nu \in N \quad \textit{καὶ} \quad \nu > \nu_\rho .$$

Ἀπόδειξη. Ἂς εἶναι $\frac{\nu_1}{\nu_2}$ τὸ ἀνάγωγο κλάσμα ποὺ ἀντιπροσωπεύει τὸ ρ, ὅπου ἑπομένως ν_1, $\nu_2 \in N$. Ἔστω ν_ρ τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων μὲ τὰ ὁποῖα γράφεται στὸ δεκαδικὸ σύστημα ὁ ἀκέραιος ν_2· θὰ ἔχουμε τότε γιὰ $\nu \geqslant \nu_\rho$

$$\frac{1}{10^\nu} \leqslant \frac{1}{10^{\nu_\rho}} < \frac{1}{\nu_2} \leqslant \frac{\nu_1}{\nu_2} = \rho , \quad \text{ἄρα} \quad \frac{1}{10^\nu} < \rho \text{ γιὰ } \nu \geqslant \nu_\rho, \text{ ὅ.ἔ.δ.}$$

§ 7. Μεγεθικὴ διάταξη $<$ τῶν ρητῶν $\geqslant 0$ καὶ λεξικογραφικὴ διάταξη τοῦ συνόλου τῶν δεκαδικῶν ἀναπτυγμάτων τους.

Θέτουμε τώρα τὸ ἐρώτημα: *Πῶς ἐκδηλώνεται ἡ μεγεθικὴ σχέση μεταξὺ δυὸ ἄνισων ρητῶν ἀριθμῶν* ρ', $\rho'' \geqslant 0$ *στὰ δεκαδικά τους ἀναπτύγματα* $\rho' = \alpha', \psi_1' \psi_2' \ldots$ καὶ $\rho'' = \alpha'', \psi_1'' \psi_2'' \ldots$;

Σύμφωνα μὲ τὴν Πρόταση 2, τὰ δεκαδικὰ αὐτὰ ἀναπτύγματα θὰ διαφέρουν εἴτε ὡς πρὸς τὸ ἀκέραιο εἴτε ὡς πρὸς τὸ ψηφιακὸ μέρος τους. (Τὸ εἴτε ... εἴτε ... λαμβάνεται μὲ «ἐγκλειστικὴ» σημασία, δηλ. δὲν ἀποκλείουμε νὰ ἰσχύουν καὶ οἱ δυὸ ἰσχυρισμοὶ ποὺ συνδέουμε μὲ τοὺς δυὸ αὐτοὺς συνδέσμους. Γιὰ τὴν «ἀποκλειστικὴ» διάζευξη χρησιμοποιοῦμε τοὺς συνδέσμους ἢ ... ἢ ...).

1η περίπτωση : $\alpha' \neq \alpha''$. Σύμφωνα μὲ τὴν πρώτη σχέση (5.2) θὰ ἔχουμε

$$\rho' = \alpha' + Y'_1 \quad \text{καὶ} \quad \rho'' = \alpha'' + Y''_2 \quad \text{μὲ} \quad 0 \leqslant Y'_1 , Y'_2 < 1 ,$$

ἄρα

$$\rho' - \rho'' = (\alpha' - \alpha'') + (Y'_1 - Y''_2) \quad \text{μὲ} \quad |\alpha' - \alpha''| \geqslant 1 \quad \text{καὶ} \quad |Y'_1 - Y''_2| < 1.$$

Ἑπομένως, τὸ πρόσημο, sign $(\rho' - \rho'')$, τοῦ ὄχι μηδενικοῦ ρητοῦ ἀριθμοῦ $\rho' - \rho''$ εἶναι τὸ ἴδιο μὲ τὸ πρόσημο, sign $(\alpha' - \alpha'')$, τοῦ ὄχι μηδενικοῦ ἀκεραίου $\alpha' - \alpha''$. Κατὰ συνέπεια θὰ εἶναι

$$\rho' < \rho'' \quad \text{ἢ} \quad \rho'' < \rho' \quad \text{καθόσο} \quad \alpha' < \alpha'' \quad \text{ἢ} \quad \alpha'' < \alpha' .$$

2η περίπτωση : $\alpha' = \alpha''$. Ἡ ἀκολουθία (ψ'_k), $k \in N$, θὰ εἶναι τότε διαφορετικὴ ἀπὸ τὴν (ψ''_k), $k \in N$. Ἑπομένως, ἕνα τουλάχιστο ψηφίο ψ'_k θὰ διαφέρῃ ἀπὸ τὸ ὁμοτάξιό του ψ''_k. Ἄς εἶναι ψ'_{k_1} τὸ πρῶτο κατὰ σειρὰ ψ'_k ποὺ διαφέρει ἀπὸ τὸ ὁμοτάξιό του ψ''_{k_1}. Σύμφωνα μὲ τὴν ἀντίστοιχη ἰσότητα (5.3) θὰ ἔχουμε τότε :

$$\rho' - \rho'' = (\alpha', \psi'_1 \ldots \psi'_{k_1} - \alpha'', \psi''_1 \ldots \psi''_{k_1}) + \frac{1}{10^{k_1}} (Y'_{k_1+1} - Y''_{k_1+1}) ,$$

ὅπου

$$|\alpha' , \psi'_1 \ldots \psi'_{k_1} - \alpha'' , \psi''_1 \ldots \psi''_{k_1}| = \frac{\psi'_{k_1} - \psi''_{k_1}}{10^{k_1}} \geqslant \frac{1}{10^{k_1}}$$

καὶ

$$\frac{1}{10^{k_1}} |Y'_{k_1+1} - Y''_{k_1+1}| < \frac{1}{10^{k_1}} .$$

Κατὰ συνέπεια

$$\text{sign}\,(\rho' - \rho'') = \text{sign}\,(\alpha', \psi'_1 \ldots \psi'_{k_1} - \alpha'', \psi''_1 \ldots \psi''_{k_1}) = \text{sign}\,(\psi'_{k_1} - \psi''_{k_1}).$$

Ἄρα θὰ εἶναι

$$\rho' < \rho'' \quad \text{ἢ} \quad \rho'' < \rho' \quad \text{καθόσο} \quad \psi'_{k_1} < \psi''_{k_1} \quad \text{ἢ} \quad \psi''_{k_1} < \psi'_{k_1} .$$

Ἀποδείξαμε ἔτσι τὴν ἀκόλουθη

Πρόταση 3. *Ἡ σχέση διάταξης $<$ στὸ σύνολο Q_0^+ τῶν ρητῶν οἱ ὁποῖοι εἶναι $\geqslant 0$, συμπίπτει [συμφωνεῖ] μὲ τὴ λεγόμενη λεξικογραφικὴ διάταξη $\prec$ τοῦ συνόλου τῶν δεκαδικῶν ἀναπτυγμάτων τους. Σύμφωνα μὲ* *τούτη, ἀπὸ δυὸ διαφορετικὰ ἀναπτύγματα* $A' = \alpha', \psi_1' \psi_2' \ldots$ *καὶ* $A = \alpha'', \psi_1'' \psi_2'' \ldots$ *προηγεῖται ἐκεῖνο ποὺ ἔχει ἀκέραιο μέρος μικρότερο ἤ, σὲ περίπτωση ἴσων ἀκέραιων μερῶν, ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου τὸ πρῶτο στὴ σειρὰ δεκαδικὸ ψηφίο ποὺ διαφέρει ἀπὸ τὸ ὁμοτάξιο ψηφίο στὸ ἄλλο ἀνάπτυγμα, εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸ ὁμοτάξιο αὐτό· δηλαδὴ*

$A' \prec A''$ *ὅταν καὶ μόνον ὅταν ἢ ἀκέραιο μέρος τοῦ* A' $<$ *ἀκέραιου μέρους τοῦ* A'' *ἢ ἀκέραιο μέρος τοῦ* A' $=$ *ἀκέραιο μέρος τοῦ* A'' *καὶ πρῶτο διαφορετικὸ δεκαδικὸ ψηφίο τοῦ* A' $<$ *ἀπὸ τὸ ὁμοτάξιο ψηφίο τοῦ* A''.

Π.χ. $5,7\overline{8}\ldots \prec 6,7\overline{8}\ldots$ καὶ $5,79\overline{34}\ldots \prec 5,79\overline{680}\ldots$

ἀντίστοιχα πρὸς τὶς σχέσεις

$$\frac{521}{90} < \frac{611}{90} \quad \text{καὶ} \quad \frac{57355}{9900} < \frac{579101}{99900}$$

μεταξὺ τῶν ρητῶν ποὺ ἔχουν τὰ παραπάνω δεκαδικὰ ἀναπτύγματα.

§ 8. Θεώρημα γιὰ τὰ περιοδικὰ ἀπειροψήφια δεκαδικὰ μορφώματα.

Πρόταση 4. *Κάθε περιοδικὸ ἀπειροψήφιο δεκαδικὸ μόρφωμα* $\alpha, \psi_1 \ldots \psi_k \ldots$ *μὲ ἀρχικὴ περίοδο διαφορετικὴ ἀπὸ τὴ μονομελῆ* $\overline{9}$ *εἶναι δεκαδικὸ ἀνάπτυγμα (ἑνὸς καί, κατὰ τὴν Πρόταση 2, μόνο ἑνὸς) ρητοῦ ἀριθμοῦ* $\geqslant 0$.

Ἀπόδειξη. Ἄς εἶναι 1ο ἡ ἀρχικὴ περίοδος τοῦ δοσμένου ἀπειροψήφιου μορφώματος μονομελὴς καὶ ἴση μὲ $\overline{\psi}$, ὅπου $0 \leqslant \psi \leqslant 8$. Τὸ μόρφωμα θὰ ἔχῃ ἢ τὴ μορφὴ $\alpha, \overline{\psi}\ldots$ ἢ τὴν $\alpha, \psi_1 \ldots \psi_{\mu-1} \overline{\psi} \ldots$ μὲ $\mu \geqslant 2$, $\psi_{\mu-1} \neq \psi$. Στὴν 1η ὑποπερίπτωση τὸ μόρφωμα θὰ εἶναι δεκαδικὸ ἀνάπτυγμα τοῦ ρητοῦ

$$\alpha + \frac{\psi}{10-1} = \alpha + \frac{\psi}{9} = \frac{9\alpha + \psi}{9},$$

γιατί, ἂν ἐφαρμόσουμε τὸν ἀλγόριθμο τῶν διαδοχικῶν διαιρέσεων, θὰ λάβουμε:

$$9\alpha + \psi = \alpha \cdot 9 + \upsilon_1 \quad \text{μὲ} \quad \upsilon_1 = \psi$$

$$10\upsilon_1 = 10\psi = \psi \cdot 9 + \upsilon_2 \quad \text{μὲ} \quad \upsilon_2 = \psi = \upsilon_1 .$$

Ἄρα, σύμφωνα μὲ τοὺς §§ 3 καὶ 4, θὰ εἶναι

$$\frac{9\alpha + \psi}{9} = \alpha, \overline{\psi}\ldots$$

Εἰδικά, ὅταν $\alpha = 0$, θὰ ἔχουμε

$$\frac{\psi}{10-1} = \frac{\psi}{9} = 0,\overline{\psi}\ldots. \tag{8.1}$$

Στὴ 2η ὑποπερίπτωση θέτουμε

$$\rho = \alpha + \frac{\psi_1}{10} + \ldots + \frac{\psi_{\mu-1}}{10^{\mu-1}} + \frac{1}{10^{\mu-1}} \cdot \frac{\psi}{9}$$

καὶ συγκρίνουμε αὐτὸν τὸ ρητὸ ἀριθμὸ μὲ τὸν ἀριθμὸ ρ' τοῦ (5.4), ὅπου παίρνουμε τὸ $k = \mu - 1$ καὶ τὸ $Y'_{k+1} = \frac{\psi}{9}$. Ἀπὸ ὅ,τι εἴπαμε τότε καὶ ἀπὸ τὴν (8.1) ἕπεται ὅτι τὸ δεκαδικὸ ἀνάπτυγμα τοῦ ρ εἶναι τὸ $\alpha, \psi_1 \ldots \psi_{\mu-1}\overline{\psi}\ldots$.

Ἄς εἶναι 2ο ἡ ἀρχικὴ περίοδος $\overline{\psi_\mu \ldots \psi_{\mu+p-1}}$ τοῦ δοσμένου ἀπειροψήφιου μορφώματος p - μελὴς μὲ $p \geqslant 2$. Τὸ μόρφωμα θὰ ἔχῃ τὴ μορφὴ $\alpha, \overline{\psi_1 \ldots \psi_p}\ldots$, ὅταν $\mu=1$, καὶ τὴ μορφὴ $\alpha, \psi_1 \ldots \psi_{\mu-1}\overline{\psi_\mu \ldots \psi_{\mu+p-1}}\ldots$ μὲ $\psi_{\mu-1} \neq \psi_\mu$, ὅταν $\mu \geqslant 2$.

Στὴν ὑποπερίπτωση $\mu = 1$ θεωροῦμε τὸ ρητὸ ἀριθμὸ

$$\rho = \alpha + \frac{\psi_1 10^{p-1} + \ldots + \psi_p}{10^p - 1}, \quad \text{ὅπου} \quad 0 < \frac{\psi_1 10^{p-1} + \ldots + \psi_p}{10^p - 1} < 1,$$

γιατὶ τὰ ψηφία $\psi_1, \ldots, \psi_p$ δὲν ταυτίζονται ὅλα μὲ τὸ 0 οὔτε ὅλα μὲ τὸ 9. Παρατηροῦμε τώρα ὅτι

$$\frac{\psi_1 10^{p-1} + \ldots + \psi_p}{10^p - 1} = \frac{(\psi_1 10^{p-1} + \ldots + \psi_p)((10^p - 1) + 1)}{(10^p - 1)10^p}$$

$$= \frac{\psi_1 10^{p-1} + \ldots + \psi_p}{10^p} + \frac{1}{10^p} \cdot \frac{\psi_1 10^{p-1} + \ldots + \psi_p}{10^p - 1}$$

$$= \frac{\psi_1}{10} + \ldots + \frac{\psi_p}{10^p} + \frac{1}{10^p} \cdot \frac{\psi_1 10^{p-1} + \ldots + \psi_p}{10^p - 1}. \tag{8.2}$$

Ἄρα :

$$\rho = \alpha + \frac{\psi_1}{10} + \ldots + \frac{\psi_p}{10^p} + \frac{1}{10^p} \frac{\psi_1 10^{p-1} + \ldots + \psi_p}{10^p - 1}$$

$$= \alpha + \frac{\psi_1}{10} + \ldots + \frac{\psi_p}{10^p} + \frac{1}{10^p}\left(\frac{\psi_1}{10} + \ldots + \frac{\psi_p}{10^p} + \frac{\psi_1 10^{p-1} + \ldots + \psi_p}{10^p(10^p - 1)}\right)$$

$$= \alpha + \frac{\psi_1}{10} + \dots + \frac{\psi_p}{10^p} + \frac{\psi_1}{10^{p+1}} + \dots + \frac{\psi_p}{10^{2p}} + \frac{1}{10^{2p}} \cdot \frac{\psi_1 10^{p-1} + \dots + \psi_p}{10^p - 1} .$$

Ἐφαρμόζουμε τώρα μαθηματικὴ ἐπαγωγή: ἂς εἶναι γιὰ κάποιο $k \in N$

$$(8.3) \qquad \rho = \alpha + \frac{\psi_1}{10} + \dots + \frac{\psi_p}{10^p} + \dots + \frac{\psi_1}{10^{kp+1}} + \dots + \frac{\psi_p}{10^{(k+1)p}}$$

$$+ \frac{1}{10^{(k+1)p}} \frac{\psi_1 10^{p-1} + \dots + \psi_p}{10^p - 1} .$$

Χρησιμοποιώντας τὴν (8.2) βρίσκουμε:

$$\rho = \alpha + \frac{\psi_1}{10} + \dots + \frac{\psi_p}{10^p} + \dots + \frac{\psi_1}{10^{(k+1)p+1}} + \dots + \frac{\psi_p}{10^{(k+2)p}}$$

$$+ \frac{1}{10^{(k+2)p}} \frac{\psi_1 10^{p-1} + \dots + \psi_p}{10^p - 1} .$$

Ὥστε, ἂν γιὰ κάποιο $\nu = k \in N$ ἰσχύη ἡ (8.3), τότε ἡ σχέση ἡ ἀντίστοιχη στὸ $\nu = k + 1$ θὰ ἰσχύη κι αὐτή. Κατὰ τὴν ἀρχὴ τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς θὰ ἔχουμε λοιπὸν γιὰ κάθε $\nu \in N$:

$$\rho = \alpha + \frac{\psi_1}{10} + \dots + \frac{\psi_p}{10^p} + \dots + \frac{\psi_1}{10^{\nu p+1}} + \dots + \frac{\psi}{10^{(\nu+1p)}}$$

$$+ \frac{1}{10^{(\nu+1)p}} \frac{\psi_1 10^{p-1} + \dots + \psi_p}{10^p - 1} .$$

Σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμε στὸν § 5 γιὰ τὸν ρητὸ τοῦ (5.4), τὸ δεκαδικὸ ἀνάπτυγμα τοῦ ρ ἔχει λοιπὸν ἀκέραιο μέρος τὸ α καὶ τὰ $(\nu+1)p$ πρῶτα κατὰ σειρὰ δεκαδικὰ ψηφία ἴσα ἀντιστοίχως μὲ

$$\overbrace{\psi_1 \dots \psi_p \; \psi_1 \dots \psi_p \dots \psi_1 \dots \psi_p}^{\nu + 1 \text{ φορὲς τὸ κομμάτι } \overline{\psi_1 \dots \psi_p}} ,$$

κι αὐτὸ ἰσχύει γιὰ κάθε $\nu \in N$. Ἑπομένως τὸ δεκαδικὸ ἀνάπτυγμα τοῦ ρ ταυτίζεται μὲ τὸ δοσμένο μόρφωμα $\alpha, \overline{\psi_1 \dots \psi_p} \dots$.

Εἰδικά, ὅταν $\alpha = 0$, θὰ ἔχουμε:

$$(8.4) \qquad \frac{\psi_1 10^{p-1} + \dots + \psi_p}{10^p - 1} = 0, \overline{\psi_1 \dots \psi_p} \dots .$$

Θεωροῦμε τέλος τὴν ὑποπερίπτωση $\mu \geqslant 2$ γιὰ τὸ δοσμένο περιοδικὸ μόρφωμα ἤτοι, τὴν

$$(8.5) \qquad \alpha, \psi_1 \ldots \psi_{\mu-1}\, \overline{\psi_\mu \ldots \psi_{\mu+p-1}} \ldots \quad \text{μὲ} \quad \psi_{\mu-1} \neq \psi_\mu$$

Θέτουμε τώρα

$$(8.6) \qquad \rho = \alpha + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_{\mu-1}}{10^{\mu-1}} + \frac{1}{10^{\mu-1}} \frac{\psi_1 10^{p-1} + \ldots + \psi_p}{10^p - 1}.$$

Χρησιμοποιώντας πάλι ὅσα εἴπαμε στὸν § 5 γιὰ τὸν ρητὸ ρ΄ τοῦ (5.4) καθὼς καὶ τὸ παραπάνω ἀποτέλεσμα (8.4) συμπεραίνουμε ὅτι τὸ δεκαδικὸ ἀνάπτυγμα τοῦ ρ ταυτίζεται μὲ τὸ δοσμένο ἀπειροψήφιο μόρφωμα (8.5). Καὶ ἔτσι ἡ Πρόταση 4 ἀποδείχτηκε πλήρως.

Νὰ τώρα καὶ μερικὰ παραδείγματα ἐφαρμογῆς τῆς Πρότασης :

$0,\overline{4}\ldots = \frac{4}{9}$	$72,\overline{4}\ldots = \frac{72 \cdot 9 + 4}{9}$	$40,38\overline{4}\ldots = \frac{(40 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 8)9 + 4}{10^2 \cdot 9}$
$0,\overline{78}\ldots = \frac{78}{99}$	$2,\overline{78} = \frac{2 \cdot 99 + 78}{99}$	$6,035\overline{78}\ldots = \frac{(6 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 3.10 + 5)99 + 78}{10^3 \cdot 99}$
$0,\overline{499}\ldots = \frac{499}{999}$	$71,\overline{499}.. = \frac{71 \cdot 999 + 499}{999}$	$8,1\overline{499}\ldots = \frac{(8 \cdot 10 + 1)999 + 499}{10 \cdot 999}$

§ 9. Ἀντιστοιχία μεταξὺ ρητῶν $\geqslant 0$ καὶ περιοδικῶν ἀπειροψήφιων δεκαδικῶν μορφωμάτων μὲ ἀρχικὴ περίοδο $\neq 9$.

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα βγαίνει τὸ συμπέρασμα : *τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Q_0^+ τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ποὺ εἶναι $\geqslant 0$, μποροῦν νὰ ἀντιστοιχιστοῦν ἀμφιμονοσήμαντα πρὸς τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου τῶν περιοδικῶν ἀπειροψήφιων δεκαδικῶν μορφωμάτων μὲ ἀρχικὴ περίοδο διαφορετικὴ ἀπὸ τὴ μονομελῆ $\overline{9}$.*

Ἀποκτοῦμε ἔτσι μιὰ παράσταση τῶν ρητῶν ἀριθμῶν $\rho \geqslant 0$ ἡ ὁποία, σὲ σύγκριση μὲ τὴν κλασματικὴ $\frac{\mu}{\nu}$ μὲ $\mu \in N_0$ καὶ $\nu \in N$, ἔχει τὸ πλεονέκτημα 1ο νὰ εἶναι μονότροπα καθορισμένη ἀπὸ τὸ θεωρούμενο ρητὸ ἀριθμὸ καὶ 2ο νὰ ἐπιτρέπη ἀμέσως τὴ διαπίστωση ποιὸς ἀπὸ δυὸ διαφορετικοὺς ρητοὺς εἶναι ὁ μικρότερος. Ἀντίθετα, ἡ νέα αὐτὴ παράσταση μειονεκτεῖ, σὲ σύγκριση μὲ τὴν κλασματική, στὴν ἐκτέλεση τῶν τεσσάρων βασικῶν πράξεων τῆς Ἀριθμητικῆς. Πραγματικὰ ἡ ἐκτέλεση αὐτῶν τῶν πράξεων πάνω σὲ δυὸ ρητοὺς

$$\rho' = \frac{m'}{n'} \geqslant 0 \quad \text{καὶ} \quad \rho'' = \frac{m''}{n''} \geqslant 0$$

δὲν χρησιμοποιεῖ παρὰ μόνο πράξεις πρόσθεσης, ἀφαίρεσης καὶ πολλαπλασιασμοῦ πάνω στοὺς τέσσερις ἀκεραίους m', m'', n', n'' καὶ μᾶς δίνει τὰ ζητούμενα ἀποτελέσματα ἐπακριβῶς, ἐνῶ, κάνοντας χρήση τῶν δεκαδικῶν ἀναπτυγμάτων $\alpha, \psi_1 \ldots \psi_\nu \ldots = \rho'$ καὶ $\beta, \omega_1 \ldots \omega_\nu \ldots = \rho''$ τῶν ρ' καὶ ρ'', θά ἔχουμε νὰ ἐκτελέσουμε τὶς τέσσερις βασικὲς πράξεις πάνω σὲ πολυψήφια ἐν γένει ἀποκόμματα τῶν δεκαδικῶν ἀναπτυγμάτων καὶ τὰ ἀποτελέσματα ποὺ θὰ λάβουμε θά εἶναι μόνο προσεγγίσεις τῶν ἀκριβῶν ἐξαγομένων. Μολαταῦτα εἶναι θεωρητικὰ ἐνδιαφέρον καὶ χρήσιμο σὰν εἰσαγωγὴ στοὺς ὁρισμοὺς τῶν πράξεων πάνω στοὺς θετικοὺς ἀσύμμετρους ἀριθμοὺς νὰ ἐξετάσουμε πῶς προσδιορίζονται τὰ δεκαδικὰ ἀναπτύγματα τῶν $\rho' + \rho''$, $\rho'\rho''$, $\rho' - \rho''$ (μὲ $\rho' \geqslant \rho''$) καὶ $\frac{\rho'}{\rho''}$ (μὲ $\rho'' > 0$) ἀπὸ τὰ δεκαδικὰ ἀναπτύγματα τῶν ρ' καὶ ρ''. Γιὰ ν' ἀποφύγουμε ὅμως μεταγενέστερες ἐπαναλήψεις θὰ ἐκθέσουμε στὸ ἑπόμενο Κεφάλαιο πρῶτα μερικὲς γενικὲς ἰδιότητες τῶν ἀπειροψήφιων δεκαδικῶν μορφωμάτων A, τὰ ὁποῖα εἶναι ἢ ἀπεριοδικὰ ἢ περιοδικὰ μὲ ἀρχικὴ περίοδο διαφορετικὴ ἀπὸ τὴ μονομελῆ $\overline{9}$:

> $A = \alpha, \psi_1 \ldots \psi_\nu \ldots$ μὲ α ἀκέραιο $\geqslant 0$ καὶ (ψ_ν), $\nu \in N$, ἀκολουθία δεκαδικῶν ψηφίων ἀπεριοδικὴ ἢ περιοδικὴ μὲ ἀρχικὴ περίοδο διαφορετικὴ ἀπὸ τὴν $\overline{9}$.

Τὸ σύνολο τῶν μορφωμάτων τούτων θὰ τὸ συμβολίσουμε μὲ $\mathscr{G}$. Ἐπειδὴ τὰ περιοδικὰ μορφώματα A εἶναι παραστάσεις τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου Q_0^+ τῶν ρητῶν ἀριθμῶν $\geqslant 0$, μποροῦμε νὰ θεωρήσουμε τὸ σύνολο Q_0^+ σὰν ὑποσύνολο γνήσιο τοῦ συνόλου $\mathscr{G}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ $\mathcal{G}$ ΤΩΝ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 10. Ἀπόλυτοι ἀριθμοί.

Τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου $\mathcal{G}$ εἶναι, ὅπως εἴπαμε στὸ τέλος τοῦ προηγούμενου παραγράφου, τὰ ἀπειροψήφια δεκαδικὰ μορφώματα

$$A = \alpha\,,\,\psi_1 \ldots \psi_\nu \ldots$$

ποὺ ἔχουν ἀκέραιο μέρος ἕναν ἀκέραιο $\alpha \geqslant 0$ καὶ ψηφιακὸ μέρος μιὰν ἀκολουθία (ψ_ν), $\nu \in N$, δεκαδικῶν ψηφίων ἀπεριοδικὴ ἢ περιοδικὴ μὲ ἀρχικὴ περίοδο $\neq 9$. Τὰ μορφώματα αὐτὰ θὰ τὰ καλοῦμε στὸ ἑξῆς καὶ *ἀπόλυτους ἀριθμούς*, γιατὶ δὲν θ' ἀργήσουμε νὰ ὁρίσουμε γι' αὐτὰ μεγεθικὴ διάταξη καθὼς καὶ τὶς τέσσερις βασικὲς ἀριθμητικὲς πράξεις.

§ 11. Ἀπόκομμα τάξης ν $(\nu \geqslant 0)$ στοιχείου τοῦ $\mathcal{G}$. Ἰδιότητες τῶν ἀποκομμάτων.

Εἰσάγουμε τὶς ἀκόλουθες ἔννοιες:
Ὀνομάζουμε *ἀπόκομμα τάξης* ν $(\nu \in N)$ τοῦ μορφώματος

$$A = \alpha\,,\,\psi_1 \ldots \psi_\nu \ldots$$

καὶ παριστάνουμε μὲ $[A]_\nu$ τὸ δεκαδικὸ κλάσμα [τὸ ν-ψήφιο δεκαδικὸ ἀριθμὸ] $\alpha\,,\,\psi_1 \ldots \psi_\nu$ καθὼς καὶ τὸ περιοδικὸ μόρφωμα $\alpha\,,\,\psi_1 \ldots \psi_\nu \overline{0} \ldots$ ποὺ εἶναι δεκαδικὸ ἀνάπτυγμα τοῦ ρητοῦ ὁ ὁποῖος ἀντιπροσωπεύεται ἀπὸ τὸ κλάσμα $\alpha\,,\,\psi_1 \ldots \psi_\nu$:

$$[A]_\nu = [\alpha\,,\,\psi_1 \ldots \psi_\nu \ldots]_\nu = \alpha\,,\,\psi_1 \ldots \psi_\nu = \alpha\,,\,\psi_1 \ldots \psi_\nu \overline{0} \ldots \text{ γιὰ } \nu \in N\,.$$

Μὲ $[A]_0$ παριστάνουμε τὸ ἀκέραιο μέρος α τοῦ A καθὼς καὶ τὸ περιοδικὸ μόρφωμα $\alpha\,,\,\overline{0} \ldots$ ποὺ εἶναι ἀνάπτυγμα τοῦ ρητοῦ $\dfrac{\alpha}{1}$:

$$[A]_0 = [\alpha\,,\,\psi_1 \ldots \psi_\nu \ldots]_0 = \alpha = \alpha\,,\,\overline{0} \ldots\,.$$

Ἀπὸ τοὺς παραπάνω ὁρισμοὺς τοῦ $[A]_\nu$, $\nu \in N_0$, ἕπονται ἀμέσως τὰ ἀκόλουθα :

I). Γιὰ δυὸ ὁποιαδήποτε στοιχεῖα A' καὶ A'' τοῦ $\mathscr{G}$ ἰσχύει ὅτι

$$(11.1) \qquad [A']_\nu < [A'']_\nu \Leftrightarrow [A']_\nu + \frac{1}{10^\nu} \leqslant [A'']_\nu, \quad \nu \in N_0 .$$

II). Ἂν ὁ ρητὸς $\rho \geqslant 0$ ἔχῃ δεκαδικὸ ἀνάπτυγμα τὸ (περιοδικὸ) μόρφωμα A, τότε

$$(11.2) \qquad [A]_\nu = [\rho]_\nu \leqslant \rho < [\rho]_\nu + \frac{1}{10^\nu} = [A]_\nu + \frac{1}{10^\nu} .$$

III). Ἂν ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι ρητοὶ $\geqslant 0$, τότε

$$(11.3) \qquad [\rho_1]_\nu + [\rho_2]_\nu \leqslant \rho_1 + \rho_2 < [\rho_1]_\nu + [\rho_2]_\nu + \frac{2}{10^\nu}, \quad \nu \in N_0 \cdot$$

ἑπομένως γιὰ $\nu \in N_0$ ἔχουμε :

$$(11.4) \qquad [\rho_1]_\nu + [\rho_2]_\nu \leqslant [\rho_1+\rho_2]_\nu \leqslant [\rho_1]_\nu + [\rho_2]_\nu + \frac{1}{10^\nu} .$$

§ 12. Μεγεθικὴ διάταξη τῶν στοιχείων τοῦ $\mathscr{G}$.

Ὅπως εἴδαμε στὸν § 7, ἡ σχέση διάταξης $<$ στὸ σύνολο Q_0^+ συμφωνεῖ μὲ τὴ λεξικογραφικὴ διάταξη τῶν δεκαδικῶν ἀναπτυγμάτων τῶν στοιχείων τοῦ Q_0^+. Αὐτὸ μᾶς ὁδηγεῖ στοὺς ἀκόλουθους ὁρισμοὺς ἰσότητας καὶ ἀνισότητας στὸ σύνολο $\mathscr{G}$, πού, ὅπως παρατηρήσαμε, εἶναι ἕνα ὑπερσύνολο τοῦ Q_0^+.

Ἂς εἶναι $A' = \alpha', \psi'_1 \dots \psi'_\nu \dots$ καὶ $A'' = \alpha'', \psi''_1 \dots \psi''_\nu \dots$ στοιχεῖα τοῦ $\mathscr{G}$. Ὁρίζουμε :

1) $A' = A''$, ὅταν καὶ μόνον ὅταν τὰ δυὸ μορφώματα A' καὶ A'' ταυτίζωνται.

Αὐτὸ ἰσοδυναμεῖ μὲ

$$A' = A'' \Leftrightarrow [A']_\nu = [A'']_\nu \text{ γιὰ κάθε } \nu \in N_0 .$$

Ἐννοεῖται ὅτι ἀρκεῖ νὰ εἶναι

$$[A']_\nu = [A'']_\nu \text{ γιὰ κάθε } \nu \geqslant \text{κάποιου φυσικοῦ ἀριθμοῦ } n ,$$

γιὰ νὰ ἔχουμε $A' = A''$, γιατὶ

$[A']_n = [A'']_n \Leftrightarrow \alpha', \psi'_1 \ldots \psi'_n = \alpha'', \psi''_1 \ldots \psi''_n \Rightarrow [A']_\nu = [A'']_\nu$ γιὰ $\nu = 0, \ldots, n-1$.

Ἐξάλλου θὰ εἶναι $A' \neq A''$ ὅταν καὶ μόνον ὅταν ὑπάρχῃ κάποιο $k \in N_0$ μὲ $[A']_k \neq [A'']_k$· θὰ ἔχουμε τότε καὶ $[A']_\nu \neq [A'']_\nu$ γιὰ κάθε $\nu \geqslant k$.

2) Ἄς εἶναι τώρα $A' \neq A''$. Θὰ ὑπάρχῃ τότε ἕνα ἐλάχιστο $k \in N_0$ τέτοιο ὥστε νὰ εἶναι $[A']_k \neq [A'']_k$. Τὰ $[A']_k$ καὶ $[A'']_k$ εἶναι ὅμως δεκαδικὰ κλάσματα μὲ παρονομαστὴ 10^k· ἄρα τὸ ἕνα ἀπὸ αὐτὰ θὰ εἶναι $<$ τοῦ ἄλλου. Ὁρίζουμε:

$$A' < A'' \text{ ἢ } A'' < A' \text{ καθόσο εἶναι } [A']_k < [A'']_k \text{ ἢ } [A'']_k < [A']_k .$$

Μὲ ἄλλη τυπικότερη διατύπωση ἔχουμε:

$$A' < A'' \Leftrightarrow \text{ἢ } [A']_0 < [A'']_0 \text{ ἢ } [A']_0 = [A'']_0 \text{ καὶ } [A]_1 < [A'']_1$$
$$\text{ἢ } [A']_\nu = [A'']_\nu \text{ γιὰ } \nu = 0, 1, \ldots, k-1 \text{ μὲ } k \geqslant 2 \text{ καὶ } [A']_k < [A'']_k .$$

Μὲ λόγια ἡ διατύπωση αὐτὴ ἐκφράζεται ἔτσι:

Εἶναι $A' < A''$, ὅταν καὶ μόνον ὅταν ἢ τὸ ἀκέραιο μέρος τοῦ A' εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸ ἀκέραιο μέρος τοῦ A'' ἤ, σὲ περίπτωση ἴσων ἀκέραιων μερῶν, τὸ πρῶτο κατὰ σειρὰ δεκαδικὸ ψηφίο ψ'_k τοῦ A' ποὺ διαφέρει ἀπὸ τὸ ὁμοτάξιό του ψ''_k τοῦ A'', εἶναι μικρότερο τούτου: $\psi'_k < \psi''_k$.

Σύμφωνα μὲ αὐτὸ τὸν ὁρισμό, ἂν $A' < A''$ καὶ $[A']_k < [A'']_k$, τότε καὶ $[A']_\nu < [A'']_\nu$ γιὰ κάθε $\nu \geqslant k$.

Ἡ σχέση $<$ ποὺ ὁρίσαμε στὸ σύνολο $\mathscr{G}$ καὶ ποὺ συμπίπτει μὲ τὴ λεγόμενη λεξικογραφικὴ διάταξη τῶν στοιχείων τοῦ $\mathscr{G}$, εἶναι σχέση *ὁλικῆς διάταξης μὲ στενὴ σημασία* [συντόμως: στενὴ σχέση ὁλικῆς διάταξης], γιατὶ εἶναι

1ο ἀσυμμετρική, δηλαδὴ $A' < A'' \Rightarrow$ ὄχι $A'' < A'$,

(Ἀπόδειξη: $A' < A'' \Rightarrow [A']_{k_1} < [A'']_{k_1}$ γιὰ κάποιο $k_1 \in N_0$. Ἂν ἦταν καὶ $A'' < A'$, τότε θὰ εἴχαμε καὶ $A'' < A' \Rightarrow [A'']_{k_2} < [A']_{k_2}$ μὲ $k_2 \in N_0$.

Ἔστω $m = \mathrm{Max}(k_1, k_2)$· τότε

$$A' < A'' \Rightarrow [A']_m < [A'']_m \quad \text{καὶ} \quad A'' < A' \Rightarrow [A'']_m < [A']_m ,$$

ἀλλὰ ἡ συναλήθευση τῶν $[A']_m < [A'']_m$ [καὶ $A'']_m < [A']_m$ εἶναι ἀδύνατη).

2ο μεταβατική : $(A' < A''$ καὶ $A'' < A''') \Rightarrow A' < A'''$,

(Ἀπόδειξη : Ἔχουμε : $A' < A'' \Rightarrow [A']_{k_1} < [A'']_{k_1}$ καὶ
$A'' < A''' \Rightarrow [A'']_{k_2} < [A''']_{k_2}$ μὲ $k_1 , k_2 \in N_0$. Ἔστω $m = Max(k_1, k_2)$ · τότε

$[A']_{k_1} < [A'']_{k_1} \Rightarrow [A']_m < [A'']_m$ καὶ $[A'']_{k_2} < [A''']_{k_2} \Rightarrow [A'']_m < [A''']_m$

καὶ κατὰ συνέπεια, λόγω τῆς μεταβατικότητας τῆς σχέσης $<$ στὸ σύνολο Q_0^+ :

$$(A' < A'' \text{ καὶ } A'' < A''') \Rightarrow ([A']_m < [A'']_m \text{ καὶ } [A'']_m < [A''']_m)$$

$$\Rightarrow [A']_m < [A''']_m \Rightarrow A' < A''') .$$

3ο συνοχικὴ [connexe] , δηλαδὴ ἀπὸ τὶς τρεῖς σχέσεις

$$A' = A'' \quad , \quad A' < A'' \quad , \quad A'' < A' \quad \text{γιὰ } A' , A'' \in \mathcal{G}$$

ἀληθεύει πάντα μιὰ καὶ μόνο μιά.
(Ὁ ἰσχυρισμὸς προκύπτει ἀμέσως ἀπὸ τοὺς ὁρισμούς).

Παρατήρηση. Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνουμε ὅτι τὸ στοιχεῖο $0,\overline{0}... = 0$ τοῦ $\mathcal{G}$ εἶναι μικρότερο κάθε ἄλλου στοιχείου τοῦ $\mathcal{G}$:

$$0 < \text{ κάθε } A \in \mathcal{G} \quad \text{μὲ} \quad A \neq 0 .$$

Εἰσάγουμε ἀκόμα στὸ σύνολο $\mathcal{G}$ τὴ σχέση $A' \leqslant A''$ μὲ τὸν ὁρισμό :

$$A' \leqslant A'' \Leftrightarrow A' < A'' \text{ ἢ } A' = A'' .$$

Ἡ $\leqslant$, ποὺ ἔτσι ὁρίσαμε, εἶναι σχέση *ὁλικῆς διάταξης στὸ $\mathcal{G}$ μὲ εὐρεία σημασία* [συντόμως : εὐρεία σχέση ὁλικῆς διάταξης], γιατὶ εἶναι

1ο ἀνακλαστική, ἤτοι $A \leqslant A$ γιὰ κάθε $A \in \mathcal{G}$,

2ο ἀντισυμμετρική, ἤτοι $(A' \leqslant A''$ καὶ $A'' \leqslant A') \Rightarrow A' = A''$,

3ο μεταβατική, ἤτοι $(A' \leqslant A''$ καὶ $A'' \leqslant A''') \Rightarrow A' \leqslant A'''$,

ὅπως εὔκολα βρίσκει κανεὶς χρησιμοποιώντας τὰ προηγούμενα καὶ τὴ συμμετρικότητα τῶν σχέσεων $A' = A''$ καὶ $A'' = A'''$.

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι ἰσχύουν καὶ οἱ συνεπαγωγές :

$$(12.1) \quad \begin{aligned} &(A' \leqslant A'' \text{ καὶ } A'' < A''') \Rightarrow A' < A''' , \\ &(A' < A'' \text{ καὶ } A'' \leqslant A''') \Rightarrow A' < A''' . \end{aligned}$$

Ὁρίζουμε τέλος ὅτι γιὰ $A', A'' \in \mathscr{G}$ εἶναι

$$A' > A'' \Leftrightarrow A'' < A' \quad \text{καὶ} \quad A' \geqslant A'' \Leftrightarrow A'' \leqslant A' .$$

§ 13. Ἰδιότητες τῶν στοιχείων τοῦ $\mathscr{G}$.

Θὰ διατυπώσουμε τώρα καὶ θ' ἀποδείξουμε μερικὲς χρήσιμες γιὰ τοὺς σκοπούς μας ἰδιότητες τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου $\mathscr{G}$.

Ἰδιότητα 1. *Γιὰ κάθε $A \in \mathscr{G}$ καὶ κάθε $\nu \in N_0$ εἶναι*

$$(13.1) \qquad [A]_\nu \leqslant A < [A]_\nu + \frac{1}{10^\nu},$$

ὅπου μὲ $[A]_\nu$ καὶ $[A]_\nu + \frac{1}{10^\nu}$ ἐννοοῦμε τὰ δεκαδικὰ ἀναπτύγματα τῶν ρητῶν $[A]_\nu$ καὶ $[A]_\nu + \frac{1}{10^\nu}$.

Ἀπόδειξη. Ἔστω $A = \alpha, \psi_1 \ldots \psi_\nu \ldots \in \mathscr{G}$. Σύμφωνα μὲ τοὺς ὁρισμοὺς ἔχουμε :

$$[A]_0 = \alpha, \overline{0} \ldots \leqslant \alpha, \psi_1 \psi_2 \ldots = A < (\alpha + 1), \overline{0} \ldots = [A] + \frac{1}{10^0}$$

$$[A]_1 = \alpha, \psi_1 \overline{0} \ldots \leqslant \alpha, \psi_1 \psi_2 \ldots = A \begin{cases} < \alpha, (\psi_1 + 1)\overline{0} \ldots = [A]_1 + \frac{1}{10^1}, & \text{ὅταν } \psi_1 \leqslant 8 \\ < (\alpha + 1), \overline{0} \ldots = [A]_1 + \frac{1}{10^1}, & \text{ὅταν } \psi_1 = 9. \end{cases}$$

Ἂς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι γιὰ κάποιο $k \geqslant 1$ εἶναι $[A]_k \leqslant A < [A]_k + \frac{1}{10^k}$.

Θὰ ἔχουμε τότε μὲ $\psi_{k+1} \leqslant 8$:

$$[A]_{k+1} = \alpha, \psi_1 \ldots \psi_{k+1} \overline{0} \ldots \leqslant \alpha, \psi_1 \ldots \psi_{k+1} \psi_{k+2} \ldots = A < \alpha, \psi_1 \ldots \psi_k (\psi_{k+1} + 1)\overline{0} \ldots$$

$$= [A]_{k+1} + \frac{1}{10^{k+1}}$$

καὶ μὲ $\psi_{k+1} = 9$:

$$[A]_{k+1} = \alpha, \psi_1 \ldots \psi_{k+1} \overline{0} \ldots \leqslant \alpha, \psi_1 \ldots \psi_{k+1} \psi_{k+2} \ldots = A < [A]_k + \frac{1}{10^k} = [A]_{k+1} + \frac{1}{10^{k+1}}.$$

Επομένως, ἂν ἡ ἀποδεικτέα σχέση (13.1) ἰσχύῃ γιὰ κάποιο $\nu = k$, θὰ ἰσχύῃ καὶ γιὰ $\nu = k + 1$. Μὲ μαθηματικὴ ἐπαγωγὴ ἕπεται λοιπὸν ὅτι τὸ ἀποδεικτέο ἀληθεύει γιὰ κάθε $\nu \in N_0$.

Σχόλιο. Ἂν τὸ $A \in \mathscr{G}$ εἶναι περιοδικὸ μόρφωμα, ἄρα δεκαδικὸ ἀνάπτυγμα ρητοῦ ἀριθμοῦ $\rho \geqslant 0$, τότε, σύμφωνα μὲ ὅσα ἀναπτύχτηκαν στὸν § 7, οἱ παραπάνω σχέσεις (13.1) μποροῦν νὰ θεωρηθοῦν καὶ σὰν μεγεθικὲς σχέσεις μεταξὺ ρητῶν ἀριθμῶν· ἔτσι ἑρμηνευμένες δὲν διαφέρουν, ὅπως εἶναι ἀμέσως φανερό, ἀπὸ τὶς σχέσεις (5.5), ὅταν πάρουμε σ' αὐτὲς τὸ k ἴσο μὲ ν.

Ἰδιότητα 2. *Γιὰ κάθε $A \in \mathscr{G}$ ἰσχύει ὅτι*

(13.2) $$[A]_0 \leqslant [A]_1 \leqslant \ldots \leqslant [A]_\nu \leqslant [A]_{\nu+1} \leqslant \ldots$$

(13.3) $$[A]_0 + \frac{1}{10^0} \geqslant [A]_1 + \frac{1}{10^1} \geqslant \ldots \geqslant [A]_\nu + \frac{1}{10^\nu} \geqslant [A]_{\nu+1} + \frac{1}{10^{\nu+1}} \geqslant \ldots .$$

Ἀπόδειξη. Οἱ σχέσεις αὐτὲς εἶναι σχεδὸν φανερές, ὅταν ἀντιληφτοῦμε τὸ $[A]_\nu$ σὰν δεκαδικὸ κλάσμα μὲ παρονομαστὴ 10^ν.
Πραγματικά, μὲ $A = \alpha, \psi_1 \ldots \psi_\nu \ldots$ ἔχουμε γιὰ $\nu \in N$:

$$[A]_0 = \alpha \leqslant \alpha + \frac{\psi_1}{10} = [A]_1$$

$$[A]_\nu = \alpha + \frac{\psi_1}{10} + \ldots + \frac{\psi_\nu}{10^\nu} \leqslant \alpha + \frac{\psi_1}{10} + \ldots + \frac{\psi_\nu}{10^\nu} + \frac{\psi_{\nu+1}}{10^{\nu+1}} = [A]_{\nu+1}$$

καθὼς καὶ

$$[A]_0 + \frac{1}{10^0} = \alpha + 1 \geqslant \alpha + \frac{\psi_1}{10} + \frac{1}{10} = [A]_1 + \frac{1}{10},$$

$$[A]_\nu + \frac{1}{10^\nu} = \alpha + \frac{\psi_1}{10} + \ldots + \frac{\psi_\nu}{10^\nu} + \frac{1}{10^\nu} \geqslant \alpha + \frac{\psi_1}{10} + \ldots + \frac{\psi_\nu}{10^\nu} + \frac{\psi_{\nu+1}}{10^{\nu+1}} + \frac{1}{10^{\nu+1}}$$

$$= [A]_{\nu+1} + \frac{1}{10^{\nu+1}}.$$

Σύμφωνα ὅμως μὲ τὸν § 7, ἡ μεγεθικὴ σχέση μεταξὺ δυὸ ρητῶν ἀριθμῶν $\geqslant 0$ συμπίπτει μὲ τὴ λεξικογραφικὴ διάταξη τῶν δεκαδικῶν ἀναπτυγμάτων τους· ἄρα οἱ σχέσεις (13.2) καὶ (13.3) μποροῦν νὰ θεωρηθοῦν καὶ σὰν μεγεθικὲς σχέσεις μεταξὺ τῶν δεκαδικῶν ἀναπτυγμάτων τῶν μελῶν τους, ἀναπτυγμάτων ποὺ εἶναι στοιχεῖα τοῦ συνόλου $\mathscr{G}$ κατὰ τοὺς ὁρισμοὺς τοῦ § 12.

Σχόλια. I). *Στὶς σχέσεις (13.3) τὸ σημάδι $\geqslant$ ἰσχύει ἄπειρες φορὲς μὲ τὴ στενὴ σημασία $>$.*

Ἀπόδειξη. Πραγματικὰ ἔχουμε:

$$[A]_\nu + \frac{1}{10^\nu} = [A]_{\nu+1} + \frac{1}{10^{\nu+1}} \Leftrightarrow \text{τὸ ψηφίο } \psi_{\nu+1}, \text{τάξης } \nu+1, \text{τοῦ A εἶναι } = 9.$$

Ἀλλὰ ἀπὸ ὑπόθεση τὸ A ἀνήκει στὸ $\mathscr{G}$ καὶ ἑπομένως ἔχει ἀπειράριθμα δεκαδικὰ ψηφία < 9. Ἑπομένως ἡ σχέση

$$[A]_\nu + \frac{1}{10^\nu} > [A]_{\nu+1} + \frac{1}{10^{\nu+1}}$$

ἀληθεύει γιὰ ἀπειράριθμες τιμὲς τοῦ ν.

Ἀντίθετα, στὶς σχέσεις (13.2) τὸ σημάδι $\leqslant$ μπορεῖ νὰ ἰσχύη μὲ τὴ σημασία τοῦ $=$ γιά ὅλα τὰ ν ποὺ εἶναι $\geqslant$ κάποιου φυσικοῦ ἀριθμοῦ n· πρέπει καὶ ἀρκεῖ γι' αὐτὸ νὰ εἶναι $\psi_\nu = 0$ γιὰ $\nu \geqslant n$, δηλαδὴ τὸ A νὰ εἶναι περιοδικὸ μόρφωμα μὲ περίοδο τὸ $\overline{0}$, ἄρα δεκαδικὸ ἀνάπτυγμα ἑνὸς ρητοῦ ποὺ ἀντιπροσωπεύεται καὶ ἀπὸ δεκαδικὰ κλάσματα $\frac{m}{10^\lambda}$ μὲ m ἀκέραιο $\geqslant 0$ καὶ λ ἐπίσης ἀκέραιο $\geqslant 0$. Ἂν τὸ τελευταῖο αὐτὸ δὲν συμβαίνη, τότε καὶ στὶς σχέσεις (13.2) τὸ σημάδι τῆς στενῆς ἀνισότητας $<$ ἰσχύει γιὰ ἀπειράριθμες τιμὲς τοῦ ν.

II) *Ἡ ἀκολουθία*

$[A]_\nu + \dfrac{\varphi}{10^\nu}$, $\nu \in N$, ὅπου $\mathscr{G} \ni A = \alpha, \psi_1 \ldots \psi_\nu \ldots$ καὶ φ φυσικὸς ἀριθμὸς $\geqslant 2$, εἶναι φθίνουσα μὲ στενὴ σημασία.

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε τὶς ἰσοδυναμίες:

$$[A]_{\nu+1} + \frac{\varphi}{10^{\nu+1}} < [A]_\nu + \frac{\varphi}{10^\nu} \Leftrightarrow [A]_{\nu+1} - [A]_\nu < \frac{10\varphi - \varphi}{10^{\nu+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\psi_{\nu+1}}{10^{\nu+1}} < \frac{9\varphi}{10^{\nu+1}} \Leftrightarrow \psi_{\nu+1} < 9\varphi .$$

Εἶναι ὅμως

$$0 \leqslant \psi_{\nu+1} \leqslant 9 \quad \text{καὶ} \quad 9\varphi \geqslant 9 \cdot 2 = 18, \quad \text{ἄρα} \quad \psi_{\nu+1} < 9\varphi, \text{ ὅ.ἔ.δ.}$$

Πόρισμα ἀπὸ τὴν Ἰδιότητα 2. *Γιὰ ὁποιαδήποτε* $m, n \in N_0$ *ἰσχύει ἡ σχέση*

$$(13.4) \qquad [A]_m < [A]_n + \frac{1}{10^n}\,.$$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε:

$$[A]_m \leqslant A < [A]_n + \frac{1}{10^n}\,, \quad \text{ἄρα (βλ. (12.1))} \quad [A]_m < [A]_n + \frac{1}{10^n}\,.$$

Ἰδιότητα 3. *Γιὰ ὁποιαδήποτε* A' *καὶ* $A'' \in \mathcal{G}$ *ἰσχύει ἡ ἰσοδυναμία*

$$A' < A'' \Leftrightarrow \text{ὑπάρχουν ἀπειράριθμα } n \in N \text{ μὲ } [A']_n + \frac{1}{10^n} < [A'']_n.$$

Ἀπόδειξη. Σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸ τοῦ $A' < A''$ ἔχουμε

$$A' < A'' \Leftrightarrow \text{ὑπάρχει } k \in N \text{ μὲ } [A']_k < [A'']_k\,.$$

Ἀλλὰ (βλ. § 11, I))

$$[A']_k < [A'']_k \Leftrightarrow [A']_k + \frac{1}{10^k} \leqslant [A'']_k\,.$$

Ἐξάλλου κατὰ τὴν Ἰδιότητα 2., Σχόλιο I, ὑπάρχουν ἀπειράριθμα $n \in N$, μὲ $n > k$ καὶ

$$[A']_n + \frac{1}{10^n} < [A']_k + \frac{1}{10^k}\,.$$

Ἄρα γι᾽ αὐτὰ τὰ n θὰ εἶναι

$$[A']_n + \frac{1}{10^n} < [A'']_k \leqslant [A'']_n \text{ καὶ ἑπομένως } [A']_n + \frac{1}{10^n} < [A'']_n.$$

Παρατηρήσεις. I). Ἀπὸ τὶς Ἰδιότητες 2. καὶ 3. ἕπεται ἀμέσως ὅτι

$$A' < A'' \Leftrightarrow \text{ὑπάρχει } m \in N \text{ μὲ } [A']_\nu + \frac{1}{10^\nu} < [A'']_\nu \text{ γιὰ } \nu \geqslant m\,.$$

II.) *Ἂς εἶναι* $\varphi \in N$ *καὶ* $A' < A''$. *Ὑπάρχει τότε φυσικὸς ἀριθμὸς* ν_φ

$$\text{μὲ } [A']_{\nu_\varphi} + \frac{\varphi}{10^{\nu_\varphi}} < [A'']_{\nu_\varphi}\,.$$

Ἀπόδειξη. Κατὰ τὴν Ἰδιότητα 3. τὸ ἀποδειχτέο ἰσχύει γιὰ $\varphi = 1$. Συλλογιζόμαστε τώρα ἐπαγωγικά : τὸ ἀποδειχτέο ἂς ἰσχύη γιὰ κάποιο $\varphi = k$, ἤτοι ἂς εἶναι

$$[A']_{\nu_k} + \frac{k}{10^{\nu_k}} < [A'']_{\nu_k}, \text{ ἄρα (βλ. § 11, I) } [A']_{\nu_k} + \frac{k+1}{10^{\nu_k}} \leqslant [A'']_{\nu_k}$$

Σύμφωνα μὲ τὸ Σχόλιο I) στὴν Ἰδιότητα 2., ὑπάρχει $\nu_{k+1} > \nu_k$ μὲ

$$[A']_{\nu_{k+1}} + \frac{1}{10^{\nu_{k+1}}} < [A']_{\nu_k} + \frac{1}{10^{\nu_k}} .$$

Ἑπομένως

$$[A']_{\nu_{k+1}} + \frac{1}{10^{\nu_k+1}} + \frac{k}{10^{\nu_k+1}} < [A']_{\nu_k} + \frac{1}{10^{\nu_k}} + \frac{k}{10^{\nu_k+1}}$$

$$< [A']_{\nu_k} + \frac{1+k}{10^{\nu_k}} \leqslant [A'']_{\nu_k} \leqslant [A'']_{\nu_{k+1}} .$$

Ὥστε, ἂν τὸ ἀποδειχτέο ἰσχύη γιὰ $\varphi = k$, θὰ ἰσχύη καὶ γιὰ $\varphi = k+1$. Κατὰ συνέπεια θὰ ἰσχύη γιὰ κάθε $\varphi \in N$.

Ἰδιότητα 4. *Ἰσχύει ἡ συνεπαγωγὴ*

(13.5) $$A' \leqslant A'' \Rightarrow [A']_\nu \leqslant [A'']_\nu \text{ γιὰ κάθε } \nu \in N_0 ,$$

καὶ ἡ

(13.6) $$([A']_\nu \leqslant [A'']_\nu \text{ γιὰ } \nu \geqslant k \text{ μὲ } k \in N_0) \Rightarrow A' \leqslant A'' .$$

Ἀπόδειξη. Ἂς εἶναι 1ο $A' \leqslant A''$. Ἂν τὸ συμπέρασμα τῆς συνεπαγωγῆς (13.5) δὲν ἀλήθευε, θὰ ὑπῆρχε κάποιο $n \in N_0$ μὲ $[A']_n \nleqslant [A'']_n$, ἄρα μὲ $[A'']_n < [A']_n$ καί, κατὰ συνέπεια (βλ. § 11, I)) μὲ

$$[A'']_n + \frac{1}{10^n} \leqslant [A']_n .$$

Ἑπομένως, σύμφωνα μὲ τὴν Ἰδιότητα 2., θὰ εἴχαμε

$$A'' < [A'']_n + \frac{1}{10^n} \leqslant [A']_n \leqslant A' , \quad \text{ἄρα } A'' < A' ,$$

σὲ ἀντίφαση πρὸς τὴν ὑπόθεση $A' \leqslant A''$.

Ἂς εἶναι 2ο $[A']_\nu \leqslant [A'']_\nu$ γιὰ $\nu \geqslant k$ μὲ $k \in N_0$. Ἂν τὸ συμπέρασμα $A' \leqslant A''$ τῆς συνεπαγωγῆς (13.6) δὲν ἀλήθευε, θὰ εἴχαμε $A'' < A'$. Κατὰ τὴν Ἰδιότητα 3. θὰ ὑπῆρχαν τότε $n \in N$ μὲ $n \geqslant k$ καὶ τέτοια ὥστε νὰ εἶναι

$$[A'']_n + \frac{1}{10^n} < [A']_n \ .$$

Κατὰ συνέπεια θὰ εἴχαμε γι' αὐτὰ τὰ n, ποὺ εἶναι $\geqslant k$,

$$\left([A'']_n < [A'']_n + \frac{1}{10^n} < [A']_n\right) \Rightarrow [A'']_n < [A']_n$$

ἀντίθετα πρὸς τὴν ὑπόθεση : $[A']_\nu \leqslant [A'']_\nu$ γιὰ $\nu \geqslant k$.

§ 14. Βασικὸ θεώρημα γιὰ τὶς καθοδικὲς [φθίνουσες] ἀκολουθίες στοιχείων τοῦ συνόλου $\mathcal{G}$.

Πρόταση 5. *Ἂς εἶναι*

(14.1) $$A_1 \geqslant A_2 \geqslant \ldots \geqslant A_\nu \geqslant A_{\nu+1} \geqslant \ldots .$$

μιὰ φθίνουσα [καθοδικὴ] μὲ εὐρεία σημασία ἀκολουθία στοιχείων τοῦ συνόλου $\mathcal{G}$. Ὑπάρχει τότε ἕνα καὶ μόνο ἕνα $A \in \mathcal{G}$ μὲ τὶς ἑξῆς δυὸ χαρακτηριστικὲς ἰδιότητες :

(I) $A \leqslant A_k$ *γιὰ κάθε* , $k \in N$.

(II) *Ἂν* $A' \in \mathcal{G}$ *καὶ* $A < A'$, *τότε ὑπάρχει* $m \in N$ *μὲ* $A_m < A'$.

Ἀπόδειξη. Ἔστω

$$A_k = \alpha_k \, , \psi_{k1} \psi_{k2} \cdots \psi_{k\nu} \cdots , \quad \kappa \in N \ .$$

Σύμφωνα μὲ τὴν Ἰδιότητα 4 τοῦ §13, ἀπὸ τὴν ὑπόθεση (14.1) τῆς πρότασης ἕπεται ὅτι

(14.2) $$\begin{cases} \alpha_k = [A_k]_o \leqslant [A_{k+1}]_o = \alpha_{k+1} \\ \alpha_k \, , \psi_{k1} \cdots \psi_{kn} = [A_k]_n \geqslant [A_{k+1}]_n = \alpha_{k+1} \, , \psi_{k+1\,,\,1} \cdots \psi_{k+1\,,\,n} \end{cases}$$

γιὰ κάθε $k \in N$ καὶ κάθε $n \in N$. Θεωροῦμε τὸν ἀριθμοπίνακα

$$
(14.3) \qquad
\begin{array}{ccccccc}
\alpha_1 & \psi_{11} & \psi_{12} & \dots & \psi_{1\nu} & \psi_{1,\nu+1} & \dots \\
\alpha_2 & \psi_{21} & \psi_{22} & \dots & \psi_{2\nu} & \psi_{2,\nu+1} & \dots \\
. & . & . & \dots & . & . & \dots \\
. & . & . & \dots & . & . & \dots \\
. & . & . & \dots & . & . & \dots \\
\alpha_k & \psi_{k1} & \psi_{k2} & \dots & \psi_{k\nu} & \psi_{k,\nu+1} & \dots \\
. & . & . & \dots & . & . & \dots \\
. & . & . & \dots & . & . & \dots \\
. & . & . & \dots & . & . & \dots
\end{array}
$$

Θά δείξουμε πρῶτα ὅτι τὰ στοιχεῖα κάθε στήλης του ἔχουν σταθερὴ τιμὴ ἀπὸ κάποια θέση μέσα στὴ στήλη καὶ ἔπειτα. Θεωροῦμε τὴν πρώτη στήλη (α_k), $k \in N$ · τὰ στοιχεῖα της εἶναι ἀκέραιοι $\geqslant 0$ γιὰ τοὺς ὁποίους, κατὰ τὴ (14.2) ἰσχύει ὅτι

$$\alpha_k \geqslant \alpha_{k+1} \quad , \quad \text{γιὰ} \quad k \in N \; .$$

Ἑπομένως οἱ ἀκέραιοι α_k δὲν μποροῦν παρὰ νὰ πάψουν νὰ μικραίνουν ἀπὸ κάποια θέση k_0 μέσα στὴ στήλη καὶ ἔπειτα :

$$\alpha_{k_o} = \alpha_{k_o+1} = \alpha_{k_o+2} = \alpha_{k_o+3} = \dots \; .$$

Θέτουμε $\alpha = \alpha_{k_o}$ καὶ ἔχουμε :

(14.4) $\alpha_k = \alpha_{k_o} = \alpha$ γιὰ $k \geqslant k_o$ καὶ $\alpha \leqslant [A_k]_o \leqslant A_k$ γιὰ κάθε $k \in N$.

Τὰ στοιχεῖα (ψ_{k1}), $k \in N$, τῆς 2ης στήλης εἶναι δεκαδικὰ ψηφία ποὺ φθίνουν μὲ εὐρεία σημασία ἀπὸ τὴ θέση k_0 μέσα στὴ στήλη καὶ ἔπειτα, γιατὶ

1ο $\quad \alpha_k, \psi_{k1} = [A_k]_1 \geqslant [A_{k+1}]_1 = \alpha_{k+1}, \psi_{k+1,1}$ κατὰ τὴ (14.2) μέ $n=1$

καὶ

2ο $\qquad \alpha_k = \alpha \quad$ γιὰ $\quad k \geqslant k_0$ ·

ἑπομένως θὰ εἶναι $\psi_{k1} \geqslant \psi_{k+1,1}$ γιὰ $k \geqslant k_0$. Κατὰ συνέπεια οἱ ἀριθμοὶ ψ_{k1} θὰ πὰψουν νὰ μικραίνουν ἀπὸ κάποια θέση $k_1 \geqslant k_0$ μέσα στὴ στήλη καὶ ἔπειτα :

$$\psi_{k_1,1} = \psi_{k_1+1,1} = \psi_{k_1+2,1} = \psi_{k_1+3,1} = \dots$$

Θέτουμε $\psi_1 = \psi_{k_1,1}$ καὶ ἔχουμε :

$[A_k]_1 = \alpha, \psi_1$ γιὰ $k \geqslant k_1$ καὶ $\alpha, \psi_1 \leqslant [A_k]_1 \leqslant A_k$ γιὰ κάθε $k \in N$.

Συλλογιζόμαστε τώρα ἐπαγωγικά. Ἄς ἔχουν ἤδη ὁριστῆ τὰ ψηφία $\psi_1, \dots, \psi_\nu$ ἔτσι, ὥστε νὰ εἶναι

$$(14.5) \qquad [A_k]_\nu = \alpha_k, \psi_{k1} \dots \psi_{k\nu} = \alpha, \psi_1 \dots \psi_\nu \quad \text{γιὰ} \quad k \geqslant k_\nu$$

καὶ

$$(14.6) \qquad \alpha, \psi_1 \dots \psi_\nu \leqslant [A_k]_\nu \leqslant A_k \quad \text{γιὰ κάθε} \quad k \in N .$$

Τὰ ψηφία $(\psi_{k,\nu+1})$, $k \in N$, τῆς στήλης τοῦ πίνακα (14.3) ἡ ὁποία ἔχει τάξη $\nu + 2$, φθίνουν μὲ εὐρεία σημασία ἀπὸ τὴ θέση k_ν μέσα στὴ στήλη καὶ ἔπειτα, γιατὶ

1ο $\alpha_k, \psi_{k1} \dots \psi_{k,\nu+1} = [A_k]_{\nu+1} \geqslant [A_{k+1}]_{\nu+1} = \alpha_{k+1}, \psi_{k+1,1} \dots \psi_{k+1,\nu} \psi_{k+1,\nu+1}$

κατὰ τὴ (14.2) μὲ $n = \nu + 1$ καὶ

2ο $$\alpha_k, \psi_{k1}, \dots \psi_{k\nu} = \alpha, \psi_1 \dots \psi_\nu \quad \text{γιὰ} \quad k \geqslant k_\nu$$

κατὰ τὴ (14.5). Ἑπομένως τὰ $\psi_{k,\nu+1}$ θὰ πάψουν νὰ μικραίνουν ἀπὸ κάποια θέση $k_{\nu+1} \geqslant k_\nu$ μέσα στὴ στήλη καὶ ἔπειτα:

$$\psi_{k_{\nu+1},\nu+1} = \psi_{k_{\nu+1}+1,\nu+1} = \psi_{k_{\nu+1}+2,\nu+1} = \dots$$

Θέτουμε

$$\psi_{\nu+1} = \psi_{k_{\nu+1},\nu+1} \qquad \text{καὶ ἔχουμε}$$

$$[A_k]_{\nu+1} = \alpha_k, \psi_{k1} \dots \psi_{k\nu} \psi_{k,\nu+1} = \alpha, \psi_1 \dots \psi_\nu \psi_{\nu+1} \quad \text{γιὰ} \quad k \geqslant k_{\nu+1}$$

καὶ

$$\alpha, \psi_1 \dots \psi_\nu \psi_{\nu+1} \leqslant [A_k]_{\nu+1} \leqslant A_k \quad \text{γιὰ κάθε} \quad k \in N .$$

Ὁρίζεται ἔτσι μὲ μαθηματικὴ ἐπαγωγὴ ἕνα ἀπειροψήφιο δεκαδικὸ μόρφωμα

$$\alpha, \psi_1 \dots \psi_\nu \psi_{\nu+1} \dots = A$$

γιὰ τὸ ὁποῖο σύμφωνα μὲ τὶς (14.4), (14.5), (14.6) ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$(14.7) \quad \begin{cases}]A]_0 = \alpha = [A_k]_0 \text{ γιὰ } k \geqslant k_0 \\ [A]_\nu = \alpha, \psi_1 \dots \psi_\nu = [A_k]_\nu = \alpha_k, \psi_{k1} \dots \psi_{k\nu} \text{ γιὰ κάθε } \nu \in N \text{ καὶ } k \geqslant k_\nu , \end{cases}$$

$$(14.8) \qquad [A]_\nu \leqslant [A_k]_\nu \leqslant A_k \quad \text{γιὰ κάθε} \quad k \in N \quad \text{καὶ κάθε} \quad \nu \in N_0 .$$

Μὲ λόγια αὐτὰ ἐκφράζονται ἔτσι :

Ἡ φθίνουσα μὲ εὐρεία σημασία ἀκολουθία

$$[A_1]_\nu \geqslant [A_2]_\nu \geqslant \ldots \geqslant [A_k]_\nu \geqslant [A_{k+1}]_\nu \geqslant \ldots ,$$

ὅπου $\nu \in N_0$, *ἔχει ἕνα ἐλάχιστο στοιχεῖο* $[A_{k_\nu}]_\nu$ *ἀπὸ τὸ ὁποῖο καὶ ἔπειτα παραμένει στάσιμη :*

$$[A_{k_\nu+\mu}]_\nu = [A_{k_\nu}]_\nu = \alpha , \psi_1 \ldots \psi_\nu \quad \text{γιὰ} \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Θὰ δείξουμε τώρα ὅτι τὸ μόρφωμα A ποὺ ὁρίσαμε παραπάνω δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι περιοδικὸ μὲ ἀρχικὴ περίοδο τὸ $\overline{9}$ καί, ἑπομένως, ὅτι ἀνήκει στὸ σύνολο $\mathscr{G}$. Καὶ ἀλήθεια, ἂν εἶχε τὴν περίοδο $\overline{9}$, θὰ ἦταν $\psi_\nu = 9$ γιὰ $\nu \geqslant$ κάποιου φυσικοῦ ἀριθμοῦ n. Ἀπὸ τὶς σχέσεις (14.7) ἔχουμε ὅμως γιὰ $k = k_n$:

$$[A]_n = \alpha , \psi_1 \ldots \psi_n = [A_{k_n}]_n = \alpha_{k_n} , \psi_{k_n 1} \ldots \psi_{k_n, n} \quad \text{ἄρα} \quad \psi_{k_n, n} = 9 .$$

Ἀπὸ τὶς σχέσεις (14.8) ἕπονται τώρα διαδοχικὰ τὰ ἑξῆς :

$$[A_{k_n}]_{n+1} = \alpha, \psi_1 \ldots \psi_n \psi_{k_n, n+1} \geqslant \alpha , \psi_1 \ldots \psi_n 9 \quad \text{ἄρα} \quad \psi_{k_n, n+1} = 9$$

$$[A_{k_n}]_{n+2} = \alpha , \psi_1 \ldots \psi_n 9 \psi_{k_n, n+2} \geqslant \alpha , \psi_1 \ldots \psi_n 99 \quad \text{ἄρα} \quad \psi_{k_n, n+2} = 9$$

$$[A_{k_n}]_{n+3} = \alpha , \psi_1 \ldots \psi_n 99 \psi_{k_n, n+3} \geqslant \alpha , \psi_1 \ldots \psi_n 999 \quad \text{ἄρα} \quad \psi_{k_n, n+3} = 9$$

καὶ μὲ μαθηματικὴ ἐπαγωγὴ

$$\psi_{k_n, n+\mu} = 9 \quad \text{γιὰ} \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Κατὰ συνέπεια τὸ μόρφωμα A_k θὰ ἦταν περιοδικὸ μὲ ἀρχικὴ περίοδο τὸ $\overline{9}$, πράγμα ποὺ ἀποκλείει ἡ ὑπόθεση $A_k \in \mathscr{G}$.

Προχωροῦμε τώρα στὴν ἀπόδειξη ὅτι ὁ ἀπόλυτος ἀριθμὸς A ἔχει τὴν ἰδιότητα (I). Ἀπὸ τὶς σχέσεις (14.8), ποὺ ἰσχύουν γιὰ κάθε $\nu \in N_0$, ἕπεται ὅτι

$$A \leqslant A_k , \quad \text{ὅποιο καὶ νὰ εἶναι τὸ θεωρούμενο} \quad k \in N .$$

Ἄρα ἡ ἰδιότητα (I) ἰσχύει.

Δείχνουμε δεύτερο ὅτι τὸ A ἔχει τὴν ἰδιότητα (II). Ἀπὸ τὴν ὑπόθεση $A < A'$ ἕπεται, κατὰ τὴν Ἰδιότητα 3. τοῦ § 13, ὅτι ὑπάρχει κάποιο $n \in N$ μὲ

$$[A]_n + \frac{1}{10^n} < [A']_n \leqslant A' \cdot$$

αὐτὸ συνεπάγεται τὴ σχέση

$$[A]_n + \frac{1}{10^n} < A' .$$

Κατὰ τὴ (14.7), μὲ $k = k_n$, ἔχουμε ὅμως $[A_{k_n}]_n = [A]_n$. Ἄρα

$$[A_{k_n}]_n + \frac{1}{10^n} < A'$$

Χρησιμοποιοῦμε τώρα τὴν Ἰδιότητα 1. τοῦ § 13 γιὰ νὰ συμπεράνουμε :

$$A_{k_n} < [A_{k_n}]_n + \frac{1}{10^n} < A' , \quad \text{ἄρα} \quad A_{k_n} < A' .$$

Ὑπάρχει λοιπὸν στοιχεῖο τῆς ἀκολουθίας (14.1) τὸ ὁποῖο εἶναι $< A'$, ὅ.ἔ.δ. Παρατηροῦμε μάλιστα ὅτι καὶ ὅλα τὰ στοιχεῖα τῆς ἀκολουθίας (A_ν), $\nu \in N$, ποὺ ἔρχονται μετὰ τὸ A_{k_n}, εἶναι $< A'$, γιατὶ ἡ ἀκολουθία (A_ν), $\nu \in N$, ὑποτέθηκε φθίνουσα μὲ εὐρεία σημασία.

Ἀπομένει νὰ δείξουμε ὅτι οἱ ἰδιότητες (I) καὶ (II) χαρακτηρίζουν τὸν ἀπόλυτο ἀριθμὸ A, δηλαδὴ ὅτι δυὸ στοιχεῖα A καὶ A* τοῦ συνόλου $\mathscr{G}$ ποὺ ἔχουν καὶ τὰ δυὸ τὶς ἰδιότητες (I) καὶ (II) εἶναι ἀναγκαστικὰ τὰ ἴδια: $A = A^*$.

Πραγματικά, ἂν αὐτὸ δὲν ἀλήθευε θὰ εἴχαμε ἢ $A < A^*$ ἢ $A^* < A$. Ἂν $A < A^*$, θὰ ὑπῆρχε κατὰ τὴν ἰδιότητα (II) τοῦ A κάποιο $A_{m_1} < A^*$, ἐνῶ κατὰ τὴν ἰδιότητα (I) τοῦ A^* ἔχουμε : $A^* \leqslant$ κάθε A_k, $k \in N$. Ὅμοια, ἡ σχέση $A^* < A$ ἀποκλείεται, γιατί, κατὰ τὴν ἰδιότητα (II) τοῦ A^*, ἔχει σὰν συνέπεια τὴν ὕπαρξη κάποιου $A_{m_2} < A$, ἐνῶ, σύμφωνα μὲ τὴν ἰδιότητα (I) τοῦ A^* ἔχουμε : $A \leqslant A_k$ γιὰ κάθε $k \in N$.

Ὁ ἀπόλυτος ἀριθμὸς A ποὺ ὁρίσαμε παραπάνω λέγεται *κάτω πέρας* [*Infimum*] τῆς ἀκολουθίας (A_ν), $\nu \in N$, καθὼς καὶ τοῦ συνόλου

$$\{ x \mid \text{ὑπάρχει } \nu \in N \text{ μὲ } A_\nu = x \} .$$

Τὸ κάτω πέρας αὐτὸ θὰ τὸ συμβολίζουμε μὲ

$$\operatorname*{Inf}_{\nu \in N} A_\nu .$$

Ἐννοεῖται ὅτι

$$\operatorname*{Inf}_{\nu \in N} A_\nu = \operatorname*{Inf}_{k \in N} A_k = \operatorname*{Inf}_{\lambda \in N} A_\lambda \quad \text{κτλ.}$$

Πόρισμα 1. *Τὸ κάτω πέρας A τῆς καθοδικῆς ἀκολουθίας (A_k), $\kappa \in N$, εἶναι τὸ ἴδιο μὲ τὸ κάτω πέρας κάθε ὑπακολουθίας της*

$$A_{\nu_1}, A_{\nu_2}, \ldots, A_{\nu_k}, A_{\nu_{k+1}}, \ldots \quad \text{ὅπου} \quad \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_{k+1} \ldots .$$

Ἀπόδειξη. Ἡ ὑπακολουθία (A_{ν_k}), $k \in N$, εἶναι καθοδικὴ (μὲ εὐρεία σημασία):

$$A_{\nu_k} \geqslant A_{\nu_{k+1}} \quad , \quad k \in N \quad ,$$

ἀφοῦ $\nu_{k+1} > \nu_k$. Ἄρα ὑπάρχει τὸ $\operatorname*{Inf}_{k \in N} A_{\nu_k} = A'$. Ἂν ἡ ἀποδεικτέα ἰσότητα $A = A'$ δὲν ἀλήθευε, θὰ ἦταν ἢ $A < A'$ ἢ $A' < A$. Ἡ ὑπόθεση $A < A'$ συνεπάγεται, κατὰ τὴν ἰδιότητα (II) τοῦ $A = \operatorname*{Inf}_{\nu \in N} A_\nu$, τὴν ὕπαρξη κάποιου $A_m < A'$. Ἑπομένως γιὰ τὰ ν_k τὰ $\geqslant m$ θὰ εἴχαμε

$$A_{\nu_k} \leqslant A_m < A' \quad ,$$

ἐνῶ, κατὰ τὴν ἰδιότητα (I) τοῦ $A' = \operatorname*{Inf}_{k \in N} A_{\nu_k}$, θὰ ἔπρεπε νὰ εἶναι $A' \leqslant$ κάθε A_{ν_k}, $k \in N$.

Ὅμοια, ἡ ὑπόθεση $A' < A$ συνεπάγεται, κατὰ τὴν ἰδιότητα (II) τοῦ κάτω πέρατος $A' = \operatorname*{Inf}_{k \in N} A_{\nu_k}$, τὴν ὕπαρξη κάποιου $A_{\nu_m} < A$, ἐνῶ, κατὰ τὴν ἰδιότητα (I) τοῦ $A = \operatorname*{Inf}_{\nu \in N} A_\nu$, εἶναι $A \leqslant$ κάθε A_ν, $\nu \in N$. Μετὰ τὸν ἀποκλεισμὸ τῶν $A < A'$ καὶ $A' < A$ δὲν ἀπομένει παρὰ τὸ ἀποδεικτέο $A = A'$.

Σχόλιο. Εἰδικὰ λοιπὸν ἰσχύει ὅτι

$$\operatorname*{Inf}_{\nu \in N} A_\nu = \operatorname*{Inf}_{\nu \geqslant n} A_n \text{, ὅπου } n \text{ κάποιος φυσικὸς ἀριθμός.}$$

Πόρισμα 2. *Ἂν B_1 καὶ B_2 εἶναι στοιχεῖα τοῦ συνόλου $\mathscr{G}$ καὶ γιὰ τὰ A_ν τῆς ἀκολουθίας (14.1) ἰσχύη ὅτι*

$$B_1 \leqslant A_\nu \leqslant B_2 \ , \quad \nu \in N \ ,$$

τότε

$$B_1 \leqslant \operatorname*{Inf}_{\nu \in N} A_\nu = A \leqslant B_2 \ .$$

᾿Απόδειξη. Σύμφωνα μὲ τὴν ἰδιότητα (I) τοῦ κάτω πέρατος $A = \operatorname{Inf}_{\nu \in N} A_\nu$, ἰσχύει πρῶτον ὅτι $A \leqslant A_\nu$, $\nu \in N$ · εἶναι ὅμως κατὰ τὴν ὑπόθεση τοῦ πορίσματος $A_\nu \leqslant B_2$, ἄρα $A \leqslant B_2$, ὅ.ἔ.δ. Δεύτερο, ἂν τὸ ἀποδειχτέο $B_1 \leqq A$ δὲν ἀλήθευε, θὰ εἴχαμε $A < B_1$ καί, κατὰ τὴν ἰδιότητα (I) τοῦ κάτω πέρατος A, θὰ ὑπῆρχε κάποιο A_m μὲ $A_m < B_1$, σὲ ἀντίφαση πρὸς τὴν ὑπόθεση: $B_1 \leqslant A_\nu$ γιὰ πᾶν $\nu \in N$.

§ 15. Μερικὰ θεωρήματα σχετικὰ μὲ τὰ κάτω πέρατα

Γιὰ τὰ παρακάτω θὰ μᾶς εἶναι χρήσιμη ἡ

Πρόταση 6. *᾿Ανάμεσα σὲ δυὸ ἄνισα στοιχεῖα $A = \alpha, \psi_1 \ldots \psi_\nu \ldots$ καὶ $B = \beta, \omega_1 \ldots \omega_\nu \ldots$ τοῦ συνόλου $\mathscr{G}$ βρίσκονται ὅσα θέλουμε περιοδικὰ καὶ ὅσα θέλουμε ἀπεριοδικὰ στοιχεῖα τοῦ $\mathscr{G}$.*

᾿Απόδειξη. Ἂς εἶναι $A < B$. Εἶναι φανερὸ ὅτι ἀρκεῖ νὰ δείξουμε πὼς ὑπάρχει ἕνα τουλάχιστο περιοδικὸ μόρφωμα $\Gamma \in A$ καὶ ἕνα τουλάχιστο ἀπεριοδικὸ $\Delta \in A$, γιὰ τὰ ὁποῖα νὰ ἰσχύη $A < \Gamma < B$, $A < \Delta < B$. Κατὰ τὴν ᾿Ιδιότητα 3. τοῦ § 13, ὑπάρχει φυσικὸς ἀριθμὸς n τέτοιος ὥστε

$$[A]_n + \frac{1}{10^n} < [B]_n\,, \quad \text{ἄρα} \quad [A]_n + \frac{2}{10^n} \leqslant B_n \leqslant B\,.$$

Τὸ δεκαδικὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $[B]_n$ εἶναι τὸ $\beta, \omega_1 \ldots \omega_n \overline{0} \ldots$. Τὸ δεκαδικὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $[A]_n + \dfrac{1}{10^n}$ ἄς εἶναι τὸ $\alpha^*, \psi_1^* \ldots \psi_n^* \overline{0} \ldots$ · (στὴν περίπτωση $\psi_n \leqslant 8$ ἔχουμε φυσικὰ $\alpha^*, \psi_1^* \ldots \psi_n^* \overline{0} \ldots = \alpha, \psi_1 \ldots (\psi_n + 1)\overline{0} \ldots$). Τὸ μόρφωμα

$$\Gamma = \alpha^*, \psi_1^* \ldots \psi_n^* 1\overline{0} \cdots = [A]_n + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{n+1}}$$

εἶναι περιοδικὸ μὲ ἀρχικὴ περίοδο τὸ $\overline{0}$ ποὺ διαφέρει ἀπὸ τὸ $\overline{9}$, ἄρα εἶναι $\Gamma \in \mathscr{G}$ · Γιὰ τὸ Γ αὐτὸ ἰσχύουν τὰ ἑξῆς:

$$\Gamma > [A]_n + \frac{1}{10^n} \Rightarrow \Gamma > A \text{ καὶ } \left(\Gamma < [A]_n + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^n} = [A]_n + \frac{2}{10^n} \leqslant B\right) \Rightarrow \Gamma < B\,.$$

῾Επομένως $A < \Gamma < B$, ὅπως ἐπιδιώκαμε.

Τὸ μόρφωμα

$$\Delta = \overset{*}{\alpha},\overset{*}{\psi_1}\ldots\overset{*}{\psi_n}\,10100\ldots\underbrace{\overline{10\ldots}}_{}\!\!\overset{\kappa\ \text{φορὲς}}{}\ \overset{\kappa+1\ \text{φορὲς}}{\overline{0\,10\ldots00}}\ldots$$

εἶναι ἀπεριοδικό, ἄρα $\Delta \in \mathscr{G}$ · γιὰ τὸ Δ αὐτὸ ἰσχύουν τὰ ἑξῆς :

$$\left(\Delta > \overset{*}{\alpha},\overset{*}{\psi_1}\ldots\overset{*}{\psi_n}\,\overline{0}\ldots = [A]_n + \frac{1}{10^n}\right) \Rightarrow \Delta > A$$

καὶ

$$\left(\Delta<\overset{*}{\alpha},\overset{*}{\psi_1}\ldots\overset{*}{\psi_n}\,2\,\overline{0}\ldots = \overset{*}{\alpha},\overset{*}{\psi_1}\ldots\overset{*}{\psi_n} + \frac{2}{10^{n+1}} = [A]_n + \frac{1}{10^n} + \frac{2}{10^{n+1}}\right.$$

$$\left. < [A]_n + \frac{2}{10^n} \leqslant B\right) \Rightarrow \Delta < B \,.$$

Ἑπομένως $A < \Delta < B$, ὅπως ἐπιδιώκαμε.

Πόρισμα. *Ἄς εἶναι φ ἕνας ὁποιοσδήποτε ὁρισμένος φυσικὸς ἀριθμὸς καὶ $A \in \mathscr{G}$. Θὰ εἶναι τότε*

$$\operatorname*{Inf}_{\nu\in N}\left([A]_\nu + \frac{\varphi}{10^\nu}\right) = A \,.$$

Ἀπόδειξη. Ἡ ἀκολουθία $[A]_\nu + \frac{\varphi}{10^\nu}$, $\nu \in N$, εἶναι καθοδικὴ (μὲ εὐρεία σημασία ἂν $\varphi = 1$, μὲ στενὴ ἂν $\varphi \geqslant 2$, σύμφωνα μὲ τὴν Ἰδιότητα 2 , Σχόλιο II , τοῦ § 13). Ἄρα ὑπάρχει τὸ

$$\operatorname*{Inf}_{\nu\in N}\left([A]_\nu + \frac{\varphi}{10^\nu}\right) = A' \,.$$

Λέγω ὅτι $A' = A$. Ἀλλοιώτικα θὰ εἴχαμε ἢ $A' < A$ ἢ $A < A'$. Ἡ ὑπόθεση $A' < A$ ἀποκλείεται, γιατί, κατὰ τὴν ἰδιότητα (II) τοῦ κάτω πέρατος A', ἔχουμε :

$$A' < A \Rightarrow \text{ὑπάρχει}\,[A]_m + \frac{\varphi}{10^m} < A, \text{ ἐνῶ εἶναι } A < [A]_m + \frac{1}{10^m} \leqslant [A]_m + \frac{\varphi}{10^m} \,.$$

Ἐξάλλου, ἂν εἴχαμε $A < A'$, θὰ ὑπῆρχαν ρητοὶ ἀριθμοὶ ρ_1 , ρ_2 τέτοιοι ὥστε νὰ εἶναι

$$[A]_\nu \leqslant A < \rho_1 < \rho_2 < A' = \operatorname*{Inf}_{\nu \in N}\left([A]_\nu + \frac{\varphi}{10^\nu}\right) \leqslant [A]_\nu + \frac{\varphi}{10^\nu}$$

γιὰ κάθε $\nu \in N$, ἄρα

$$0 < \rho_2 - \rho_1 < \frac{\varphi}{10^\nu}, \quad \nu \in N .$$

Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπο σύμφωνα μὲ τὸ Σχόλιο τοῦ § 6.

Πρόταση 7. *Ἂς εἶναι (σ_ν), $\nu \in N$, μιὰ φθίνουσα μὲ εὐρεία σημασία ἀκολουθία ρητῶν ἀριθμῶν $\geqslant 0$ καὶ (ρ_ν), $\nu \in N$, μιὰ ἀκολουθία ρητῶν $\geqslant 0$ καὶ ἂς ἰσχύη ὅτι*

$$0 \leqslant \sigma_\nu - \rho_\nu \leqslant \frac{\varphi}{10^\nu} \text{ ὅπου } \varphi \text{ ἕνας ὁρισμένος φυσικὸς ἀριθμὸς καὶ } \nu \in N.$$

Ἂν γιὰ κάποιο μόρφωμα $A \in \mathscr{G}$ ἀληθεύουν οἱ σχέσεις

$$\rho_\nu \leqslant A \leqslant \sigma_\nu, \quad \nu \in N, \tag{15.1}$$

τότε θὰ εἶναι

$$\operatorname*{Inf}_{\nu \in N} \sigma_\nu = A .$$

Ἀπόδειξη. Ὅπως παρατηρήσαμε ἤδη, οἱ ρητοί, $\geqslant 0$, ἀριθμοὶ εἶναι, μὲ τὰ δεκαδικὰ ἀναπτύγματά τους, στοιχεῖα τοῦ $\mathscr{G}$· ἄρα γιὰ τὴν καθοδικὴ ἀκολουθία (σ_ν), $\nu \in N$, ὑπάρχει τὸ κάτω πέρας $A^* = \operatorname*{Inf}_{\nu \in N} \sigma_\nu$. Ἂν ἦταν $A^* \neq A$, θὰ εἴχαμε ἢ $A < A^*$ ἢ $A^* < A$.

Ἂς εἶναι πρῶτο $A < A^*$· θὰ ὑπάρχουν τότε (Πρόταση 6) δυὸ περιοδικὰ μορφώματα Π_1 καὶ Π_2, στοιχεῖα τοῦ $\mathscr{G}$, τέτοια ὥστε νὰ ἔχουμε

$$A < \Pi_1 < \Pi_2 < A^* .$$

Τὰ Π_1 καὶ Π_2 εἶναι δεκαδικὰ ἀναπτύγματα δυὸ ρητῶν ἀριθμῶν > 0, ἔστω τῶν τ_1 καὶ τ_2 ἀντίστοιχα. Γιὰ τοὺς ρητοὺς αὐτούς, λόγω τῆς ὑπόθεσης (15.1) καὶ τῆς ἰδιότητας (I) τοῦ κάτω πέρατος A^*, θὰ ἰσχύουν οἱ σχέσεις

$$\rho_\nu \leqslant A < \tau_1 < \tau_2 < A^* = \operatorname*{Inf}_{\nu \in N} \sigma_\nu \leqslant \sigma_\nu, \quad \nu \in N,$$

ἤτοι οἱ

$$\rho_\nu < \tau_1 < \tau_2 < \sigma_\nu, \quad \text{ἄρα} \quad 0 < \tau_2 - \tau_1 < \sigma_\nu - \rho_\nu \leqslant \frac{\varphi}{10^\nu}, \text{ γιὰ κάθε } \nu \in N .$$

Τὸ τελευταῖο συμπέρασμα εἶναι ἄτοπο, σύμφωνα μὲ τὸ Σχόλιο τοῦ § 6. Ἄς εἶναι δεύτερο $A^* < A$. Σύμφωνα μὲ τὴν ἰδιότητα (ΙΙ) τοῦ κάτω πέρατος $A^* = \operatorname{Inf}_{\nu\in N} \sigma_\nu$, ὑπάρχει τότε $m \in N$ μὲ $\sigma_m < A$ ἐνῶ, κατὰ τὴν ὑπόθεση τῆς Πρότασής μας, ἰσχύει ὅτι

$$A \leqslant \sigma_\nu \quad \text{γιὰ κάθε} \quad \nu \in N .$$

Κατὰ συνέπεια, ἔχουμε $A = A^*$, ὅ.ἔ.δ.

Σχόλιο. Ἀπὸ τὴν ὑπόθεση

$$\rho_\nu \leqslant A \leqslant \sigma_\nu \quad , \quad \text{γιὰ} \quad \nu \in N \quad ,$$

ἕπεται ὅτι (βλ. Ἰδιότητα 4. τοῦ § 13)

$$[\rho_\nu]_k \leqslant [A]_k \leqslant [\sigma_\nu]_k \quad , \quad \text{γιὰ} \quad k \in N .$$

Κατὰ συνέπεια, ἂν γιὰ κάποιο $\nu_1 \in N$ καὶ κάποιο $k_1 \in N$ ἰσχύη ὅτι

$$[\rho_{\nu_1}]_{k_1} = [\sigma_{\nu_1}]_{k_1} \quad ,$$

τότε θὰ εἶναι καὶ

$$[A]_{k_1} = [\rho_{\nu_1}]_{k_1} = [\sigma_{\nu_1}]_{k_1} .$$

Μὲ λόγια αὐτὸ ἐκφράζεται ἔτσι: *Ἂν τὰ δεκαδικὰ ἀναπτύγματα τῶν σ_{ν_1} καὶ ρ_{ν_1} ἔχουν τὸ ἴδιο ἀκέραιο μέρος a καὶ τὰ ἴδια ἀντιστοίχως κ_1 πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία $\psi_1, \ldots, \psi_{k_1}$, τότε τὸ μόρφωμα A ἔχει κι αὐτὸ γιὰ ἀκέραιο μέρος τὸ a καὶ τὰ $\psi_1, \ldots, \psi_{k_1}$ γιὰ πρῶτα κατὰ σειρὰ δεκαδικὰ ψηφία.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΩΝ ΤΩΝ $\rho'+\rho''$, $\rho'\rho''$, ρ'-ρ'', ρ'/ρ'' ΑΠΟ ΤΑ ΔΕΚΑΔΙΚΑ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΑ ΤΩΝ ρ', ρ''

§ 16. Δεκαδικὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $\rho' + \rho''$.

Ἄς εἶναι ρ', ρ'' ρητοὶ ἀριθμοὶ $\geqslant 0$. Σύμφωνα μὲ τὴν (11.3) ἔχουμε:

$$[\rho']_\nu + [\rho'']_\nu \leqslant \rho' + \rho'' < [\rho']_\nu + [\rho'']_\nu + \frac{2}{10^\nu} \quad , \quad \nu \in N .$$

Οἱ ρητοὶ ἀριθμοὶ

$$\sigma_\nu = [\rho']_\nu + [\rho'']_\nu + \frac{2}{10^\nu} \quad , \quad \nu \in N ,$$

ἀποτελοῦν, σύμφωνα μὲ τὴν Ἰδιότητα 2. τοῦ § 13, μιὰ φθίνουσα ἀκολουθία (μὲ εὐρεία σημασία) ρητῶν ἀριθμῶν > 0. Ἐπιπλέον, ἂν θέσουμε

$$\tau_\nu = [\rho']_\nu + [\rho'']_\nu \quad , \quad \nu \in N ,$$

θὰ ἔχουμε

$$\tau_\nu \leqslant \rho' + \rho'' < \sigma_\nu \quad \text{μὲ} \quad 0 < \sigma_\nu - \tau_\nu = \frac{2}{10^\nu} \quad , \quad \nu \in N.$$

Ἑπομένως μποροῦμε νὰ ἐφαρμόσουμε τὴν Πρόταση 7 μὲ $\varphi = 2$· θὰ λάβουμε:

$$\rho' + \rho'' = \operatorname*{Inf}_{\kappa \in N} ([\rho']_k + [\rho'']_k + 2/10^k) .$$

Ὥστε, σύμφωνα μὲ ὅσα εἴδαμε στὸν § 14, τὸ ἀκέραιο μέρος καὶ τὰ ν πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ $\rho' + \rho''$ μᾶς παρέχονται ἀπὸ τὸ ἀπόκομμα

$$[\,[\rho']_k + [\rho'']_k + 2/10^k]_\nu$$

τάξης ν τοῦ ρητοῦ $[\rho']_k + [\rho'']_k + 2/10^k$, ἀρκεῖ τὸ k νὰ εἶναι ἀρκετὰ μεγάλο γιὰ νὰ πάρῃ τὸ νιοστὸ αὐτὸ ἀπόκομμα τὴ σταθερὴ τιμὴ τὴν ὁποία ἀποκτᾶ τελικά, ὅταν τὸ k αὐξάνῃ ἀπεριόριστα. Τὸ πόσο μεγάλος ἀρκεῖ νὰ εἶναι ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς k γιὰ νὰ συμβαίνῃ τὸ παραπάνω, δὲν μπορεῖ νὰ καθοριστῇ κατὰ γενικὸ τρόπο, γιατὶ τὸ πράγμα ἐξαρτιέται ἀπὸ τὰ δεκαδικὰ ἀναπτύγματα τῶν ρ΄ καὶ ρ΄΄ ποὺ θεωροῦμε. Ἐκεῖνα ποὺ μπορεῖ κανεὶς νὰ ἰσχυριστῇ γενικά, μὲ βάση τὸ τελευταῖο Σχόλιο τοῦ § 15, εἶναι τὰ ἑξῆς :

Παρατήρηση 1. Ἂν τὸ ἀκέραιο μέρος καὶ τὰ ν πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ $\sigma_k = [\rho']_k + [\rho'']_k + 2/10^k$, γιὰ κάποιο $k \in \nu$, συμπίπτουν μὲ τὸ ἀκέραιο μέρος καὶ τὰ ν πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ $\tau_k = [\rho']_k + [\rho'']_k$, τότε τὸ κοινὸ αὐτὸ ἀκέραιο μέρος καὶ τὰ κοινὰ αὐτὰ ν πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία τῶν ἀναπτυγμάτων τῶν σ_k καὶ τ_k εἶναι τὰ ζητούμενα ἀντίστοιχα στοιχεῖα τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ $\rho' + \rho''$.

Παρατήρηση 2. Σύμφωνα μὲ τὴ σχέση (11.4), εἶναι

$$[\rho']_\nu + [\rho'']_\nu \leqslant [\rho' + \rho'']_\nu \leqslant [\rho']_\nu + [\rho'']_\nu + 1/10^\nu \cdot$$

ἐπομένως, ἂν γιὰ κάποιο $\nu > 2$, τὸ νιοστὸ δεκαδικὸ ψηφίο τοῦ ν - ψήφιου δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ $[\rho']_\nu + [\rho'']_\nu$ εἶναι $\leqslant 8$, τότε τὸ ἀκέραιο μέρος καὶ τὰ $\nu - 1$ πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία τοῦ $[\rho']_\nu + [\rho'']_\nu$ θὰ συμπίπτουν μὲ τὰ ζητούμενα ἀντίστοιχα στοιχεῖα τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ $\rho' + \rho''$. Πραγματικά, ἡ πρόσθεση τοῦ $1/10^\nu$ σ᾽ ἕνα ν - ψήφιο δεκαδικὸ ἀριθμὸ $\alpha, \psi_1 \ldots \psi_{\nu-1}\psi_\nu$ μὲ $\psi_\nu \leqslant 8$ ἀφήνει ἀναλλοίωτα καὶ τὸ ἀκέραιο μέρος α καὶ τὰ προηγούμενα τοῦ ψ_ν $\nu-1$ δεκαδικὰ ψηφία $\psi_1, \ldots, \psi_{\nu-1}$.

Παραθέτουμε δυὸ παραδείγματα :

1ο. Ἂς εἶναι $\rho' = \dfrac{41952}{9900} = 4{,}23\overline{75}\ldots$ καὶ $\rho'' = \dfrac{3558}{3330} = 1{,}0\overline{684}\ldots$

Ὑπολογίζουμε τὰ πρῶτα στοιχεῖα τῶν ἀκολουθιῶν

$$([\rho']_\nu + [\rho'']_\nu) \quad \text{καὶ} \quad ([\rho']_\nu + [\rho'']_\nu + 2/10^\nu), \quad \nu \in N :$$

(τ_ν) : 5,2 | 5,29 | 5,305 | 5,3059 | 5,30603 | 5,306043 | 5,3060441 | ...

(σ_ν) : 5,4 | 5,31 | 5,307 | 5,3061 | 5,30605 | 5,306045 | 5,3060443 | ... .

Τὰ τρίτα στοιχεῖα τῶν δύο αὐτῶν ἀκολουθιῶν συμφωνοῦν μέχρι καὶ τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοστῶν· ἄρα $[\rho' + \rho'']_2 = 5{,}30$. Τὰ πέμπτα στοιχεῖα τῶν ἴδιων ἀκολουθιῶν συμφωνοῦν μέχρι καὶ τοῦ ψηφίου τῶν δεκάκις χιλιοστῶν· ἄρα $[\rho' + \rho'']_4 = 5{,}3060$.—Τὸ ἕκτο δεκαδικὸ ψηφίο τοῦ $\tau_6 = 5{,}306043$ εἶναι τὸ 3 ποὺ εἶναι $\leqslant 8$· ἄρα $[\rho' + \rho'']_5 = 5{,}30604$. Τὸ ἕβδομο δεκαδικὸ ψηφίο τοῦ $\tau_7 = 5{,}3060441$ εἶναι τὸ 1 ποὺ εἶναι $\leqslant 8$· ἄρα $[\rho' + \rho'']_6 = 5{,}306044$, κ.ο.κ.

2ο Ἄς εἶναι $\rho' = \dfrac{23}{99} = 0{,}\overline{23}\ldots$ καὶ $\rho'' = \dfrac{9868}{990} = 9{,}9\overline{67}\ldots$.

Ὑπολογίζουμε τὰ πρῶτα στοιχεῖα τῶν ἀκολουθιῶν (τ_ν) καὶ (σ_ν), $\nu \in \mathrm{N}$:

(τ_ν): 10,1 | 10,19 | 10,199 | 10,1999 | 10,19999 | 10,199999 | . . . .

(σ_ν): 10,3 | 10,21 | 10,201 | 10,2001 | 10,20001 | 10,200001 | . . . .

Σ' αὐτὸ τὸ παράδειγμα τὸ $\tau_\nu = [\rho']_\nu + [\rho'']_\nu$ δὲν ἔχει, γιὰ καμιὰ τιμὴ τοῦ $\nu \in \mathrm{N}$, δεκαδικὰ ψηφία ἴσα πρὸς τὰ ὁμοτάξια ψηφία τοῦ $\sigma_\nu = [\rho']_\nu + [\rho'']_\nu + 2/10^\nu$. Ἐπίσης κανένα δεκαδικὸ ψηφίο τάξης $\geqslant 2$ τοῦ τ_ν μὲ $\nu \geqslant 2$ δὲν εἶναι $\leqslant 8$. Ἑπομένως καμιὰ ἀπὸ τὶς δυὸ παραπάνω παρατηρήσεις 1) καὶ 2) δὲν εἶναι ἐφαρμόσιμη σ' αὐτὸ τὸ παράδειγμα. Εἶναι ὅμως φανερὸ ὅτι τὸ νιοστὸ ἀπόκομμα $[\sigma_k]_\nu$ τοῦ $\sigma_k = [\rho']_k + [\rho'']_k + 2/10^k$ διατηρεῖ σταθερὰ τὴν τιμὴ

$$10{,}2\overbrace{0\ldots0}^{\nu\text{-}1\,\text{φορές}}, \quad \text{γιὰ } \nu \geqslant 2,$$

ὅταν $k \geqslant \nu + 1$. Ἄρα, κατὰ τὴν Πρόταση 5 τοῦ § 14, εἶναι

$$[\rho' + \rho'']_\nu = 10{,}2\overbrace{0\ldots0}^{\nu\text{-}1\,\text{φορές}}.$$

Αὐτὸ ἐπαληθεύεται μὲ τὴ διαπίστωση ὅτι

$$\rho' + \rho'' = \frac{23}{99} + \frac{9868}{990} = \frac{102}{10} = 10{,}2\overline{0}\ldots .$$

§ 17. Δεκαδικὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $\rho' \cdot \rho''$.

Ἄς εἶναι $\alpha, \psi_1 \ldots \psi_\nu \ldots$ καὶ $\beta, \omega_1 \ldots \omega_\nu \ldots$ τὰ δεκαδικὰ ἀναπτύγματα τῶν ρ' καὶ $\rho'' \geqslant 0$. Ἀπὸ τὶς σχέσεις

$[\rho']_\nu \leqslant \rho' < [\rho']_\nu + 1/10^\nu$ καὶ $[\rho'']_\nu \leqslant \rho'' < [\rho'']_\nu + 1/10^\nu$, $\nu \in \mathrm{N}$, πορiζόμαστε μὲ πολλαπλασιασμὸ κατὰ μέλη

$$[\rho'_\nu][\rho'']_\nu \leqslant \rho'\rho'' < ([\rho']_\nu + 1/10^\nu)([\rho'']_\nu + 1/10^\nu)$$

$$= [\rho']_\nu[\rho'']_\nu + \frac{1}{10^\nu}([\rho']_\nu + [\rho'']_\nu + 1/10^\nu)$$

$$\leqslant [\rho']_\nu[\rho'']_\nu + \frac{1}{10^\nu}([\rho']_0 + [\rho'']_0 + 2/10^0)$$

$$= [\rho']_\nu[\rho'']_\nu + \frac{1}{10^\nu}(\alpha+\beta+2)\,.$$

Ἐπομένως, ἂν θέσουμε

$$\tau_\nu = [\rho']_\nu[\rho'']_\nu \qquad \text{καὶ} \qquad \sigma_\nu = ([\rho']_\nu + 1/10^\nu)([\rho'']_\nu + 1/10^\nu),\ \nu \in N\,,$$

θὰ ἔχουμε

$$\tau_\nu \leqslant \rho'\rho'' < \sigma_\nu \quad \text{μὲ} \quad 0 < \sigma_\nu - \tau_\nu < \frac{\alpha+\beta+2}{10^\nu}\,, \qquad \nu \in N\,.$$

Κατὰ τὴν Ἰδιότητα 2. τοῦ § 13, ἡ ἀκολουθία (σ_ν), $\nu \in N$, εἶναι φθίνουσα μὲ εὐρεία σημασία· ἑπομένως μποροῦμε νὰ ἐφαρμόσουμε τὴν Πρόταση 7 μὲ $\varphi = \alpha + \beta + 2$ καὶ νὰ συμπεράνουμε:

$$\rho'\rho'' = \operatorname*{Inf}_{\nu\in N} \sigma_\nu = \operatorname*{Inf}_{\nu\in N}\left([\rho']_\nu + \frac{1}{10^\nu}\right)\left([\rho'']_\nu + \frac{1}{10^\nu}\right).$$

Ἄρα τὸ ἀκέραιο μέρος καὶ τὰ ν πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ $\rho'\rho''$ μᾶς παρέχονται ἀπὸ τὸ νιοστὸ ἀπόκομμα $[\sigma_k]_\nu$ τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ ρητοῦ

$$\sigma_k = ([\rho']_k) + 1/10^k)([\rho'']_k + 1/10^k)\,,$$

ἀρκεῖ τὸ k νὰ εἶναι ἀρκετὰ μεγάλο γιὰ νὰ πάρῃ τοῦτο τὸ ἀπόκομμα τὴ σταθερὴ τιμὴ τὴν ὁποία ἀποκτᾶ τελικά, ὅταν τὸ k αὐξάνῃ ἀπεριόριστα. Τὸ πόσο μεγάλος ἀρκεῖ νὰ εἶναι ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς k γιὰ νὰ συμβαίνῃ τὸ παραπάνω, δὲν μπορεῖ νὰ καθοριστῇ κατὰ τρόπο γενικό, γιατὶ τὸ πράγμα ἐξαρτιέται ἀπὸ τὰ δεκαδικὰ ἀναπτύγματα τῶν ρ' καὶ ρ''. Πάντως ἡ παρατήρηση 1) ποὺ κάμαμε στὸν § 16 ἰσχύει καὶ ἐδῶ, δηλαδή:

Ἂν $[\tau_k]_\nu = [\sigma_k]_\nu$ γιὰ κάποιο $k \geqslant \nu$, τότε $[\rho'\rho'']_\nu = [\tau_k]_\nu$.

Ὅμοια μπορεῖ ἡ Παρατήρηση 2) τοῦ § 16 νὰ ἐπεκταθῆ ἐδῶ ὡσεξῆς : Ὅπως εἴδαμε, ἔχουμε

$$\tau_k = [\rho']_k [\rho'']_k \leqslant \rho'\rho'' < [\rho']_k [\rho'']_k + \frac{\alpha + \beta + 2}{10^k}, \quad k \in N .$$

Εἶναι ὅμως

$$\frac{\alpha + \beta + 2}{10^k} \leqslant \frac{1}{10^\nu} \text{ γιὰ } k \text{ ἀρκετὰ μεγάλο, ἔστω γιὰ } k \geqslant k_\nu .$$

Ἄρα, γιὰ $k \geqslant k_\nu \geqslant \nu$, ἂν τὸ νιοστὸ δεκαδικὸ ψηφίο τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ τ_k εἶναι $\leqslant 8$, τότε

$$[\rho'\rho'']_{\nu-1} = \big[[\rho']_k [\rho'']_k \big]_{\nu-1} .$$

§ 18. Διαφορὰ $\rho' - \rho''$ (μὲ $\rho' \geqslant \rho''$).

Γιὰ τὴ διαφορὰ $\rho' - \rho''$, ὅταν $\rho' > \rho''$, θεωροῦμε τὴν ἀκολουθία

(18.1) $$\sigma_\nu = [\rho']_\nu + 1/10^\nu - [\rho'']_\nu \quad , \quad \nu \in N ,$$

ὅπου τὸ σ_ν, σύμφωνα μὲ τὴν Ἰδιότητα 2. τοῦ § 13, ἔχει μειωτέο ποὺ φθίνει καὶ ἀφαιρετέο ποὺ αὐξάνει μὲ εὐρεία σημασία. Ἄρα ἡ ἀκολουθία αὐτὴ εἶναι φθίνουσα (μὲ εὐρεία σημασία) καί, κατὰ τὴν Πρόταση 5, ἔχει ἕνα κάτω πέρας $\operatorname{Inf}_{\nu \in N} \sigma_\nu$. Λέγω ὅτι $\operatorname{Inf}_{\nu \in N} \sigma_\nu = \rho' - \rho''$. Πραγματικά, σύμφωνα μὲ τὴν Ἰδιότητα 3., Παρατήρηση Ι) τοῦ § 13, ὑπάρχει ἕνας φυσικὸς ἀριθμὸς m τέτοιος ὥστε νὰ ἔχουμε

$$[\rho'']_\nu + \frac{1}{10^\nu} < [\rho']_\nu \quad \text{γιὰ} \quad \nu \geqslant m .$$

Ἑπομένως ἔχουμε

(18.2) $$\tau_{m+k} = [\rho']_{m+k} - ([\rho'']_{m+k} + 1/10^{m+k}) > 0 \quad , \quad k \in N .$$

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι, σύμφωνα μὲ τὴν ἰδιότητα 1. τοῦ § 13, εἶναι

$$\tau_{m+k} \leqslant \rho' - \rho'' < [\rho']_{m+k} + \frac{1}{10^{m+k}} - [\rho'']_{m+k} = \sigma_{m+k} \ , \quad k \in N .$$

Ἐξάλλου ἔχουμε, μὲ χρήση τῶν (18.1) καὶ (18.2), γιὰ $k \in N$:

$$0<\sigma_{m+k}-\tau_{m+k}=[\rho']_{m+k}+\frac{1}{10^{m+k}}-[\rho'']_{m+k}-[\rho']_{m+k}+[\rho'']_{m+k}+\frac{1}{10^{m+k}}=\frac{2}{10^{m+k}} .$$

Ἑπομένως μποροῦμε νὰ ἐφαρμόσουμε τὴν Πρόταση 7 μὲ $\varphi = 2$ καθὼς καὶ τὸ Πόρισμα 1 τῆς Πρότασης 5 τοῦ § 14 γιὰ νὰ συμπεράνουμε ὅτι

$$\rho' - \rho'' = \operatorname*{Inf}_{\kappa \in N} \sigma_{m+k} = \operatorname*{Inf}_{\nu \in N} \sigma_\nu \quad , \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Στὴν περίπτωση $\rho' = \rho''$ ἡ ἀκολουθία (18.1) ταυτίζεται μὲ τὴν

$$(\sigma_\nu) = \frac{1}{10^\nu} \quad , \nu \in N .$$

Σύμφωνα τώρα μὲ τὸ Πόρισμα τοῦ § 15, ὅταν σ᾽ αὐτὸ λάβουμε $A = 0,\overline{0}\ldots = 0$ καὶ $\varphi = 1$, ἔχουμε

$$\operatorname*{Inf}_{\nu \in N} \sigma_\nu = \operatorname*{Inf}_{\nu \in N} \frac{1}{10^\nu} = 0 \quad .$$

Ἄρα ἐξακολουθεῖ νὰ ἰσχύη ὅτι

$$\rho' - \rho'' = 0 = \operatorname*{Inf}_{\nu \in N} ([\rho']_\nu + 1/10^\nu - [\rho'']_\nu) .$$

Κατὰ συνέπεια, τὸ ἀκέραιο μέρος καὶ τὰ ν πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία τῆς διαφορᾶς $\rho' - \rho''$ μᾶς δίνονται ἀπὸ τὸ νιοστὸ ἀπόκομμα

$$[\sigma_k]_\nu = \left[[\rho']_k + \frac{1}{10^k} - [\rho'']_k \right]_\nu$$

τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ ρητοῦ ἀριθμοῦ σ_k, ἀρκεῖ τὸ k νὰ παρθῆ ἀρκετὰ μεγάλο, σύμφωνα μὲ ὅσα εἴδαμε στὸν § 14. Ὅμοιες παρατηρήσεις μὲ τὶς ὑπ᾽ ἀριθμ. 1) καὶ 2) ποὺ κάμαμε στὸν § 16 μποροῦν νὰ γίνουν καὶ ἐδῶ.

§ 19. Πηλίκο ρ'/ρ'' (μὲ $\rho' > 0$).

Γιὰ τὸ πηλίκο $\rho'/\rho'' = \frac{\rho'}{\rho''}$, ὅπου $\rho' = \alpha, \psi_1 \ldots \psi_\nu \ldots$ καὶ $\rho'' = \beta, \omega_1 \ldots \omega_\nu \ldots > 0$, παρατηροῦμε πρῶτα ὅτι εἶναι

$$[\rho'']_\nu \geqslant 1/10^n > 0 \quad \text{γιὰ} \quad \nu \geqslant \text{κάποιου} \quad n \in N .$$

Μποροῦμε ἐπομένως νὰ μορφώσουμε τὴν ἀκολουθία

$$\sigma_{n+k} = \frac{[\rho']_{n+k} + 1/10^{n+k}}{[\rho'']_{n+k}} \quad , \quad k \in N ,$$

ποὺ εἶναι, σύμφωνα μὲ τὴν Ἰδιότητα 2., § 13, φθίνουσα (μ.ε.σ.). Λέγω ὅτι

$$\frac{\rho'}{\rho''} = \operatorname*{Inf}_{\kappa \in N} \sigma_{n+k} .$$

Γιὰ νὰ τὸ ἀποδείξω παραβάλλω τὸ σ_{n+k} μὲ τὸ ρητὸ

$$\tau_{n+k} = \frac{[\rho']_{n+k}}{[\rho'']_{n+k} + 1/10^{n+k}}$$

Ἔχουμε :

$$0 < \sigma_{n+k} - \tau_{n+k} = \frac{([\rho']_{n+k} + [\rho'']_{n+k} + 1/10^{n+k}) 1/10^{n+k}}{[\rho'']_{n+k} \cdot ([\rho'']_{n+k} + 1/10^{n+k})}$$

$$\leqslant \frac{1}{10^{n+k}} \cdot \frac{\alpha + \beta + 2}{1/10^n \cdot 1/10^n} = \frac{10^{2n}(\alpha+\beta+2)}{10^{n+k}} .$$

Ἐξάλλου εἶναι

$$\tau_{n+k} \leqslant \frac{\rho'}{\rho''} \leqslant \sigma_{n+k} \quad , \quad k \in N .$$

Ἄρα μποροῦμε νὰ ἐφαρμόσουμε τὴν Πρόταση 7 μὲ $\varphi = 10^{2n}(\alpha+\beta+2)$ καὶ νὰ συμπεράνουμε τὸ ἀποδειχτέο

$$\frac{\rho'}{\rho''} = \operatorname*{Inf}_{\kappa \in N} \sigma_{n+k} = \operatorname*{Inf}_{\nu \in N} \sigma_\nu .$$

Κατὰ συνέπεια, τὸ ἀκέραιο μέρος καὶ τὰ ν πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ ρ'/ρ'' μᾶς δίνονται ἀπὸ τὸ ἀπόκομμα τάξης ν τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ ρητοῦ

$$\sigma_{n+k} = \frac{[\rho']_{n+k} + 1/10^{n+k}}{[\rho'']_{n+k}} ,$$

ἀρκεῖ τὸ k νὰ παρθῆ ἀρκετὰ μεγάλο γιὰ νὰ ἔχη τὸ ἀπόκομμα τοῦτο τὴ σταθερὴ τιμὴ πού, σύμφωνα μὲ τὴν Πρόταση 5, ἀποκτᾶ τελικά, ὅταν τὸ k αὐξάνη ἀπεριόριστα.

Παρατηρήσεις τέλος ὅμοιες μὲ ἐκεῖνες ποὺ κάμαμε στὸν § 17 μποροῦν νὰ γίνουν καὶ ἐδῶ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ $\mathscr{G}$ ΤΩΝ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 20. Πρόσθεση ἀπόλυτων ἀριθμῶν.

Ἄς εἶναι $A = \alpha, \psi_1 \dots \psi_\nu \dots$ καὶ $B = \beta, \omega_1 \dots \omega_\nu \dots$ στοιχεῖα τοῦ συνόλου $\mathscr{G}$. Μορφώνουμε τὴν ἀκολουθία

$$\sigma_\nu = [A]_\nu + [B]_\nu + \frac{2}{10^\nu}, \quad \nu \in N .$$

Σύμφωνα μὲ τὴν Ἰδιότητα 2. τοῦ § 13, ἡ ἀκολουθία αὐτὴ εἶναι φθίνουσα μὲ εὐρεία σημασία. Ἄρα ἔχει, κατὰ τὴν Πρόταση 5, ἕνα κάτω πέρας $\operatorname{Inf}_{\nu \in N} \sigma_\nu$ ποὺ εἶναι στοιχεῖο τοῦ $\mathscr{G}$. Ὁρίζουμε λοιπὸν (ἐπεκτείνοντας αὐτὸ ποὺ διαπιστώσαμε στὸν § 16 γιὰ τὰ ρητὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου $\mathscr{G}$):

(20.1) $\text{ἄθροισμα τοῦ } A \text{ μὲ τὸ } B = A + B = \operatorname{Inf}_{\nu \in N} \sigma_\nu = \operatorname{Inf}_{\nu \in N} ([A]_\nu + [B]_\nu + 2/10^\nu)$

Διαπιστώνουμε ἀμέσως τὰ ἑξῆς:

I) Ἄν A καὶ B εἶναι περιοδικὰ μορφώματα ἀπὸ τὸ $\mathscr{G}$, δηλ. μορφώματα μὲ ἀρχικὴ περίοδο διαφορετικὴ ἀπὸ τὴν $\overline{9}$, τότε θὰ εἶναι τὰ A καὶ B δεκαδικὰ ἀναπτύγματα δυὸ ρητῶν ἀριθμῶν $\rho' \geqslant 0$ καὶ $\rho'' \geqslant 0$ ἀντιστοίχως, καὶ τὸ μόρφωμα $A + B$ ποὺ ὁρίσαμε μὲ τὴν (20.1) θὰ εἶναι δεκαδικὸ ἀνάπτυγμα τοῦ ἀθροίσματος $\rho' + \rho''$.

II) Γιὰ $m, n \in N$ ἰσχύει ὅτι

(20.2) $[A]_m + [B]_m \leqslant A + B = \operatorname{Inf}_{\nu \in N}([A]_\nu + [B]_\nu + 2/10^\nu) < [A]_n + [B]_n + 2/10^\nu.$

Ἀπόδειξη. Κατὰ τὸ πόρισμα ἀπὸ τὴν ἰδιότητα 2. τοῦ § 13 εἶναι

$$[A]_m + [B]_m < [A]_n + [B]_n + 2/10^n .$$

Εἶναι ὅμως γιὰ $\nu \geqslant n$

$$[A]_m + [B]_m < [A]_\nu + [B]_\nu + 2/10^\nu \leqslant [A]_n + [B]_n + 2/10^n .$$

Ἄρα κατὰ τὸ Πόρισμα 2 τοῦ § 14 θὰ εἶναι

$$[A]_m + [B]_m \leqslant \operatorname*{Inf}_{\nu>n} ([A]_\nu + [B]_\nu + 2/10^\nu) = A + B \leqslant [A]_n + [B]_n + 2/10^n$$

καί, ἐπειδὴ (βλ. Σχόλιο στὸ Πόρισμα 1 τοῦ § 14)

$$\operatorname*{Inf}_{\nu>n} ([A]_\nu + [B]_\nu + 2/10^\nu) = \operatorname*{Inf}_{\nu\in N} ([A]_\nu + [B]_\nu + 2/10^\nu) ,$$

θὰ ἔχουμε

$$(20.3)\ [A]_m + [B]_m \leqslant \operatorname*{Inf}_{\nu\in N} ([A]_\nu+[B]_\nu + 2/10^\nu) = A+B \leqslant [A]_n + [B]_n +2/10^n.$$

Ἀλλὰ σύμφωνα μὲ τὸ Σχόλιο Ι) στὴν Ἰδιότητα 2. τοῦ § 13 γιὰ τὴ φθίνουσα μ. ε. σ. ἀκολουθία $([A]_\nu + [B]_\nu + 2/10^\nu)$, $\nu \in N$, ἰσχύει ἄπειρες φορὲς ἡ ἀνισότητα

$$[A]_{\nu+1} + [B]_{\nu+1} + 2/10^{\nu+1} < [A]_\nu + [B]_\nu + 2/10^\nu .$$

Κατὰ συνέπεια, στὴ σχέση (20.3) μποροῦμε τὴν εὐρεία ἀνισότητα

$$A + B \leqslant [A]_n + [B]_n + 2/10^n$$

νὰ τὴν ἀντικαταστήσουμε μὲ τὴ στενὴ

$$A + B < [A]_n + [B]_n + 2/10^n \quad , \text{ ὅ. ἔ. δ.}$$

§ 21. Ἀντιμεταθετικὴ ἰδιότητα τῆς πρόσθεσης: $A + B = B + A$.

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε, σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμό ,

$$A + B = \operatorname*{Inf}_{\nu\in N}([A]_\nu + [B]_\nu + 2/10^\nu) \text{ καὶ } B + A = \operatorname*{Inf}_{\nu\in N}([B]_\nu + [A]_\nu + 2/10^\nu) .$$

Γιὰ τοὺς ρητοὺς $[A]_\nu + [B]_\nu + 2/10^\nu$ καὶ $[B]_\nu + [A]_\nu + 2/10^\nu$ ἰσχύει ὅμως ὅτι

$$[A]_\nu + [B]_\nu + 2/10^\nu = [B]_\nu + [A]_\nu + 2/10^\nu .$$

Ἑπομένως θὰ εἶναι καὶ $A + B = B + A$.

§ 22. Μονοτονικὴ ἰδιότητα τῆς πρόσθεσης : $A < B \Rightarrow A + \Gamma < B + \Gamma$.

Ἀπόδειξη. Σύμφωνα μὲ τὴν Ἰδιότητα 3. τοῦ § 13, ἂν $A < B$, τότε ὑπάρχει φυσικὸς ἀριθμὸς n τέτοιος ὥστε νὰ εἶναι

$$[A]_n + \frac{1}{10^n} < [B]_n \text{ ἄρα καὶ } [A]_n + \frac{2}{10^n} \leqslant [B]_n$$

Ἑπομένως :

$$[A]_n + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{n+1}} < [A]_n + \frac{2}{10^n} \leqslant [B]_n \leqslant [B]_{n+1}$$

Εἶναι ὅμως κατὰ τὴν Ἰδιότητα 2., § 13 ,

$$[A]_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}} \leqslant [A]_n + \frac{1}{10^n} ,$$

ἄρα

$$[A]_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+1}} \leqslant [A]_n + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{n+1}} < [B]_{n+1} .$$

Κατὰ τὴ μονοτονικὴ ἰδιότητα τῆς πρόσθεσης στὸ σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ἡ τελευταία σχέση συνεπάγεται τὴν

$$[A]_n + \frac{2}{10^{n+1}} + [\Gamma]_{n+1} < [B]_{n+1} + [\Gamma]_{n+1} .$$

Ἐξάλλου, σύμφωνα μὲ τὴν παραπάνω διαπίστωση (20.2), ἔχουμε :

$$A + \Gamma < [A]_{n+1} + [\Gamma]_{n+1} + \frac{2}{10^{n+1}} \quad \text{καὶ} \quad [B]_{n+1} + [\Gamma]_{n+1} \leqslant B + \Gamma .$$

Κατὰ συνέπεια, λόγω τῆς μεταβατικότητας τῆς σχέσης $<$, θὰ ἔχουμε :

$$A + \Gamma < [A]_{n+1} + [\Gamma]_{n+1} + \frac{2}{10^{n+1}} < [B]_{n+1} + [\Gamma]_{n+1} \leqslant B + \Gamma, \text{ ἤτοι } A + \Gamma < B + \Gamma.$$

Πόρισμα. Ἂν $A, B, \Gamma, \Delta \in \mathscr{G}$, $A \leqslant B$ καὶ $\Gamma < \Delta$, τότε $A + \Gamma < B + \Delta$.

Ἀπόδειξη . $\Gamma < \Delta \Rightarrow A + \Gamma < A + \Delta$ καὶ $A \leqslant B \Rightarrow A + \Delta \leqslant B + \Delta$.

Ἄρα

$(A \leqslant B$ καὶ $\Gamma < \Delta) \Rightarrow A + \Gamma < A + \Delta \leqslant B + \Delta \Rightarrow A + \Gamma < B + \Delta$, ὅ.ἔ.δ.

§ 23. Προσεταιριστικὴ ἰδιότητα τῆς πρόσθεσης : $A + (B+\Gamma) = (A+B)+\Gamma$.

Ἀπόδειξη. Σύμφωνα μὲ τὴ διαπίστωση II), § 20 καὶ μὲ τὴν Ἰδιότητα 1. § 13, ἔχουμε :

$$\left.\begin{array}{r} [A]_\nu + [B]_\nu \leqslant A + B < [A]_\nu + [B]_\nu + 2/10^\nu \\ [\Gamma]_\nu \leqslant \Gamma < [\Gamma]_\nu + 1/10^\nu \end{array}\right| \quad , \quad \nu \in N\,.$$

Χρησιμοποιώντας τὴ μονοτονικὴ ἰδιότητα τῆς πρόσθεσης συμπεραίνουμε ἀπὸ τὰ παραπάνω ὅτι

$$[A]_\nu + [B]_\nu + [\Gamma]_\nu \leqslant (A+B) + \Gamma < [A]_\nu + [B]_\nu + [\Gamma]_\nu + 3/10^\nu, \quad \nu \in N.$$

Ἐφαρμόζουμε τώρα τὴν Πρόταση 7 μὲ $\rho_\nu = [A]_\nu + [B]_\nu + [\Gamma]_\nu$ καὶ $\sigma_\nu = [A]_\nu + [B]_\nu + [\Gamma]_\nu + 3/10^\nu$ καὶ λαμβάνουμε :

$$(23.1) \qquad (A+B) + \Gamma = \operatorname*{Inf}_{\nu\in N}\left([A]_\nu + [B]_\nu + [\Gamma]_\nu + \frac{3}{10^\nu}\right).$$

Μὲ ὅμοιο τρόπο βρίσκουμε :

$$\left.\begin{array}{r} [A]_\nu \leqslant A < [A]_\nu + 1/10^\nu \\ [B]_\nu + [\Gamma]_\nu \leqslant (B+\Gamma) < [B]_\nu + [\Gamma]_\nu + \dfrac{2}{10^\nu} \end{array}\right| \quad , \quad \nu \in N\,,$$

ἄρα

$$[A]_\nu + [B]_\nu + [\Gamma]_\nu \leqslant A + (B+\Gamma) < [A]_\nu + [B]_\nu + [\Gamma]_\nu + 3/10^\nu, \quad \nu \in N\,.$$

Ἑπομένως, κατὰ τὴν Πρόταση 7 καὶ λόγω τῆς (23.1) θὰ εἶναι

$$A + (B+\Gamma) = \operatorname*{Inf}_{\nu\in N}([A]_\nu + [B]_\nu + [\Gamma]_\nu + 3/10^\nu) = (A+B) + \Gamma\,, \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

§ 24. Τὸ μόρφωμα $0,\overline{0}\ldots = 0$ εἶναι οὐδέτερο στοιχεῖο γιὰ τὴν πράξη τῆς πρόσθεσης στὸ σύνολο $\mathscr{G}$.

Ἀπόδειξη. Ἄς εἶναι $A \in \mathscr{G}$. Κατὰ τὸν ὁρισμὸ (20.1) τοῦ ἀθροίσματος ἔχουμε

$$A + 0 = \operatorname*{Inf}_{\nu \in N}\left([A]_\nu + [0]_\nu + \frac{2}{10^\nu}\right) = \operatorname*{Inf}_{\nu \in N}\left([A]_\nu + \frac{2}{10^\nu}\right) .$$

Κατὰ τὸ Πόρισμα τοῦ § 15 εἶναι ὅμως

$$\operatorname*{Inf}_{\nu \in N} ([A]_\nu + 2/10^\nu) = A .$$

Ἄρα

$$A + 0 = A, \quad \text{γιὰ κάθε} \quad A \in \mathscr{G}, \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

§ 25. Ἰδιότητα τῆς διαγραφῆς στὴν πρόσθεση : $A + B = \Gamma + B \Rightarrow A = \Gamma$

Ἀπόδειξη. Ἄν ἦταν $A \neq \Gamma$, θὰ εἴχαμε ἢ $A < \Gamma$ ἢ $\Gamma < A$. Ἰσχύουν ὅμως, σύμφωνα μὲ τὴ μονοτονικὴ ἰδιότητα (§ 22), οἱ ἀντίστοιχες συνεπαγωγές :

$$A < \Gamma \Rightarrow A + B < \Gamma + B \quad \text{καὶ} \quad \Gamma < A \Rightarrow \Gamma + B < A + B ,$$

ποὺ τὰ συμπεράσματά τους $A + B < \Gamma + B$ καὶ $\Gamma + B < A + B$ ἀντιφάσκουν πρὸς τὴν ὑπόθεση $A + B = \Gamma + B$. Ἄρα $A = \Gamma$.

Τὸ συμπέρασμα ἀπὸ τὰ παραπάνω, § § 20 - 25, εἶναι ὅτι ἡ πρόσθεση ποὺ ὁρίσαμε στὸ σύνολο $\mathscr{G}$ ἔχει ὅλες τὶς κύριες ἰδιότητες τῆς πρόσθεσης στὸ σύνολο Q_o^+, ἑπομένως καὶ ὅλες τὶς συνέπειές τους.

§ 26. Πολλαπλασιασμός ἀπόλυτων ἀριθμῶν.

Ἄς εἶναι $A = \alpha, \psi_1 \dots \psi_\nu \dots$ καὶ $B = \beta, \omega_1 \dots \omega_\nu \dots$ στοιχεῖα τοῦ $\mathscr{G}$. Θεωροῦμε τὴν ἀκολουθία

$$\sigma_\nu = \big(([A]_\nu + 1/10^\nu)\ ([B]_\nu + 1/10^\nu)\big) , \quad \nu \in N$$

κατὰ τὴν Ἰδιότητα 2., § 13, ἡ ἀκολουθία αὐτὴ εἶναι φθίνουσα μ.ε.σ., ἄρα ὑπάρχει τὸ κάτω πέρας $\operatorname*{Inf}_{\nu \in N} \sigma_\nu \in \mathscr{G}$. Ὁρίζουμε :

(26.1) $\quad$ γινόμενο τοῦ A μὲ τὸ B $= AB = \operatorname*{Inf}_{\nu \in N} \big(([A]_\nu + 1/10^\nu)([B]_\nu + 1/10^\nu)\big)$.

Διαπιστώνουμε ἀμέσως τὰ ἑξῆς :

I) Ἄν τὰ A καὶ B εἶναι περιοδικὰ μορφώματα ἀπὸ τὸ $\mathscr{G}$, ὁπότε θὰ εἶναι δεκαδικὰ ἀναπτύγματα ρητῶν ἀριθμῶν $\rho' \geqslant 0$ καὶ $\rho'' \geqslant 0$ ἀντιστοίχως, τότε, σύμφωνα μὲ τὸν § 17, τὸ μόρφωμα AB ποὺ ὁρίσαμε εἶναι τὸ δεκαδικὸ ἀνάπτυγμα τοῦ ρητοῦ ἀριθμοῦ ρ΄ρ΄΄.

II) Σύμφωνα μὲ τὶς ἰδιότητες τοῦ κάτω πέρατος (βλ. § 14) ἰσχύει μὲ $m, n \in N$ ὅτι

$$(26.2)\quad [A]_m[B]_m \leqslant AB \leqslant ([A]_n + 1/10^n)([B]_n + 1/10^n) < [A]_n[B]_n + \frac{\alpha+\beta+2}{10^n}.$$

III) Ἂν $B = 0,\bar{0}\ldots = 0$, τότε κατὰ τὴν (26.2) θὰ ἔχουμε μὲ $m=n$:

$$0 = [A]_m \cdot [0]_m \leqslant A\cdot 0 < [A]_m \cdot [0]_m + \frac{\alpha+0+2}{10^m} = 0 + \frac{\alpha+2}{10^m} = \frac{\alpha+2}{10^m}.$$

Σύμφωνα μὲ τὴν Πρόταση 7 καὶ τὸ Πόρισμα τοῦ § 15 θὰ εἶναι λοιπὸν

$$A\cdot 0 = \operatorname*{Inf}_{m\in N} \frac{\alpha+2}{10^m} = 0\,, \quad \text{ἤτοι } A\cdot 0 = 0 \quad \text{γιὰ κάθε } A \in \mathcal{G}.$$

Θ' ἀποδείξουμε τώρα ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς στὸ σύνολο $\mathcal{G}$, ὅπως τὸν ὁρίσαμε, ἔχει τὶς βασικὲς ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στὸ σύνολο Q_o^+.

§ 27. Ἀντιμεταθετικὴ ἰδιότητα: $AB = BA$ γιὰ $A, B \in \mathcal{G}$.

Αὐτὸ εἶναι ἄμεση συνέπεια ἀφενὸς τοῦ ὁρισμοῦ ποὺ δόθηκε γιὰ τὸ γινόμενο καὶ ἀφετέρου τοῦ γεγονότος ὅτι γιὰ τὸ γινόμενο τῶν ρητῶν

$$[A]_\nu + \frac{1}{10^\nu} \quad \text{καὶ} \quad [B]_\nu + \frac{1}{10^\nu}$$

ἰσχύει ἡ ἀντιμεταθετικὴ ἰδιότητα

$$([A]_\nu + 1/10^\nu)([B]_\nu + 1/10^\nu) = ([B]_\nu + 1/10^\nu)([A]_\nu + 1/10^\nu).$$

§ 28. Μονοτονικὴ ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ: Ἂν $A, B, \Gamma \in \mathcal{G}$, τότε $(A > 0 \text{ καὶ } B < \Gamma) \Rightarrow AB < A\Gamma$.

Ἀπόδειξη. Ἐπειδή, κατὰ τὶς ἰδιότητες τοῦ κάτω πέρατος (§ 14-15), εἶναι

$$AB \leqslant ([A]_\nu + 1/10^\nu)([B]_\nu + 1/10^\nu) \quad \text{καὶ} \quad [A]_\nu[\Gamma]_\nu \leqslant A\Gamma\,, \quad \nu \in N,$$

ἀρκεῖ γιὰ τὴν ἀλήθεια τοῦ ἀποδεικτέου $AB < A\Gamma$ νὰ δείξουμε ὅτι ὑπάρχει κάποιο $m \in N$ μὲ

$$([A]_m + 1/10^m)([B]_m + 1/10^m) < ([A]_m \cdot [\Gamma]_m) \quad ,$$

ἤτοι μὲ

$$(28.1) \qquad [A]_m[B]_m + \frac{1}{10^m}([A]_m + [B]_m + 1/10^m) < [A]_m [\Gamma]_m \; .$$

Γιὰ τὸ σκοπὸ αὐτὸ ἐκμεταλλευόμαστε τὴν ὑπόθεση $A > 0$ · αὐτὴ ἔχει γιὰ συνέπεια τὴν ὕπαρξη κάποιου ὁρισμένου φυσικοῦ ἀριθμοῦ n μὲ τὴν ἰδιότητα

$$[A]_m \geqslant \frac{1}{10^n} > 0 \qquad \text{γιὰ} \qquad N \ni m \geqslant n \; .$$

Ἄρα, γιὰ $m \geqslant n$, ἡ (28.1) εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴν

$$(28.2) \qquad [B]_m + \frac{[A]_m + [B]_m + 1/10^m}{10^m \cdot [A]_m} < [\Gamma]_m$$

ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴν (28.1), ὅταν διαιρέσουμε τὰ δυὸ μέλη της μὲ τὸ θετικὸ ρητὸ ἀριθμὸ $[A]_m$.

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι

$$\frac{[A]_m + [B]_m + 1/10^m}{10^m \cdot [A]_m} < \frac{\alpha + \beta + 2}{10^m \cdot 1/10^n} = \frac{(\alpha+\beta+2)10^n}{10^m} \; .$$

Ἄρα γιὰ τὴν ἀλήθεια τῆς (28.2) ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι ὑπάρχει κάποιος φυσικὸς ἀριθμὸς $m > n$ τέτοιος ὥστε

$$[B]_m + \frac{(\alpha+\beta+2) \cdot 10^n}{10^m} \leqslant [\Gamma]_m \; .$$

Τὸ τελευταῖο αὐτὸ ὅμως εἶναι συνέπεια τῆς ὑπόθεσης $B < \Gamma$, σύμφωνα μὲ τὴν Παρατήρηση II στὴν Ἰδιότητα 3., § 13.

Συνέπειες. I) Ἂν $A, B, \Gamma, \Delta \in \mathscr{G}$, $0 < A \leqslant B$ καὶ $\Gamma < \Delta$, τότε $A\Gamma < B\Delta$.

Ἀπόδειξη . Ἐπειδὴ A καὶ Δ εἶναι > 0, ἔχουμε:

$$A\Gamma < A\Delta \qquad \text{καὶ} \qquad A\Delta \leqslant B\Delta \; , \qquad \text{ἄρα} \qquad A\Gamma < B\Delta \; .$$

II) $(0 < A$ καὶ $0 < B) \Rightarrow 0 < AB$.

Πραγματικά, $0<A$ καὶ $0<B \Rightarrow 0 \cdot B < A \cdot B$, ἀλλὰ $0 \cdot B = 0$, ἄρα $0 < AB$.

III) $AB = 0 \Rightarrow$ εἴτε $A = 0$ εἴτε $B = 0$.
Πραγματικά, κατὰ τὴ **II)**, $(A > 0$ καὶ $B > 0) \Rightarrow AB > 0$.

IV) $(A, B, \Gamma \in \mathscr{G}$, $\Gamma \neq 0$ καὶ $A\Gamma = B\Gamma) \Rightarrow A = B$.
Πραγματικά, ἂν ἦταν $A \neq B$, θὰ εἴχαμε (μονοτονικὴ ἰδιότητα) $A\Gamma \neq B\Gamma$.

§ 29. Προσεταιριστικὴ ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στὸ $\mathscr{G}$:
$(AB)\Gamma = A(B\Gamma)$ γιὰ $A, B, \Gamma \in \mathscr{G}$.

Ἀπόδειξη. Ἔστω $A = \alpha, \psi_1 \dots \psi_\nu \dots$, $B = \beta, \omega_1 \dots \omega_\nu \dots$, $\Gamma = \gamma, \chi_1 \dots \chi_\nu \dots$. Τὸ ἀποδειχτέο ἀληθεύει, σύμφωνα μὲ τὴ διαπίστωση III), § 26, ὅταν $\Gamma = 0$. Ἄς εἶναι λοιπὸν $\Gamma > 0$. Σύμφωνα μὲ τὶς ἰδιότητες τοῦ κάτω πέρατος καὶ τὴν Ἰδιότητα 1., § 13, ἔχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} [A]_\nu [B]_\nu \leqslant AB \leqslant ([A]_\nu + 1/10^\nu)([B]_\nu + 1/10^\nu) \\ [\Gamma]_\nu \leqslant \Gamma < [\Gamma]_\nu + 1/10^\nu \end{array}\right\}, \quad \nu \in N .$$

Ἑπομένως, σύμφωνα μὲ τὴ μονοτονικὴ ἰδιότητα καὶ τὶς συνέπειές της, ἰσχύει τὸ ἑξῆς:

$$\rho_\nu = [A]_\nu [B]_\nu [\Gamma]_\nu \leqslant (AB)\Gamma < ([A]_\nu + 1/10^\nu)([B]_\nu + 1/10^\nu)([\Gamma]_\nu + 1/10^\nu) = \sigma_\nu$$

ὅπου (σ_ν), $\nu \in N$, εἶναι μιὰ φθίνουσα μὲ εὐρεία σημασία ἀκολουθία ρητῶν > 0. Ἐξάλλου εἶναι

$$0 < \sigma_\nu - \rho_\nu = \frac{1}{10^\nu}\Big([A]_\nu[B]_\nu + [A]_\nu[\Gamma]_\nu + [B]_\nu[\Gamma]_\nu + \frac{1}{10^\nu}([A]_\nu + [B]_\nu + [\Gamma]_\nu + \frac{1}{10^\nu})\Big)$$

$$< \frac{1}{10^\nu}\Big((\alpha+1)(\beta+1) + (\alpha+1)(\gamma+1) + (\beta+1)(\gamma+1) + \frac{1}{10^\nu}(\alpha+\beta+\gamma+3+1)\Big)$$

$$< \frac{1}{10^\nu}\Big((\alpha+1)(\beta+1) + (\alpha+1)(\gamma+1) + (\beta+1)(\gamma+1) + \alpha+\beta+\gamma+4\Big)$$

$$= \frac{\varphi}{10^\nu} \text{ μὲ } \varphi = (\alpha+1)(\beta+1) + (\alpha+1)(\gamma+1) + (\beta+1)(\gamma+1) + \alpha+\beta+\gamma+4 .$$

Μποροῦμε λοιπὸν νὰ ἐφαρμόσουμε τὴν Πρόταση 7 καὶ νὰ συμπεράνουμε:

$$(AB)\cdot\Gamma = \operatorname*{Inf}_{\nu \in N} \sigma_\nu = \operatorname*{Inf}_{\nu \in N}\Big([A]_\nu + \frac{1}{10^\nu}\Big)\Big([B]_\nu + \frac{1}{10^\nu}\Big)\Big([\Gamma]_\nu + \frac{1}{10^\nu}\Big) .$$

Μὲ ὅμοιο τρόπο βρίσκουμε

$$A \cdot (B\Gamma) = \operatorname*{Inf}_{\nu \in N} \sigma_\nu ,$$

ἄρα

$$(AB)\Gamma = A(B\Gamma) , \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

§ 30. Ἐπιμεριστικὴ ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεση στὸ σύνολο $\mathscr{G}$:

$$(A+B)\Gamma = A\Gamma + B\Gamma \quad , \text{ γιὰ } \quad A, B, \Gamma \in \mathscr{G} .$$

Ἀπόδειξη. Τὸ ἀποδειχτέο ἀληθεύει φανερά, ὅταν $\Gamma = 0$. Ἄς εἶναι λοιπὸν $\Gamma > 0$. Ἔχουμε (βλ. § 20, II) :

$$[A]_\nu + [B]_\nu \leqslant A + B < [A]_\nu + [B]_\nu + \frac{2}{10^\nu} , \quad \nu \in N ,$$

καὶ (βλ. § 13)

$$[\Gamma]_\nu \leqslant \Gamma < [\Gamma]_\nu + 1/10^\nu \quad , \quad \nu \in N .$$

Ἑπομένως, κατὰ τὴ μονοτονικὴ ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ θὰ εἶναι

$$\rho_\nu = ([A]_\nu + [B]_\nu)[\Gamma]_\nu \leqslant (A+B)\Gamma < ([A]_\nu + [B]_\nu + 2/10^\nu)([\Gamma]_\nu + 1/10^\nu) = \sigma_\nu$$

ὅπου (σ_ν), $\nu \in N$, εἶναι μιὰ μ. ε. σ. φθίνουσα ἀκολουθία ρητῶν > 0. Ἐπιπλέον ἔχουμε :

$$0 < \sigma_\nu - \rho_\nu = \frac{1}{10^\nu}\left([A]_\nu + [B]_\nu + 2\left([\Gamma]_\nu + 1/10^\nu\right)\right) < \frac{\alpha+1+\beta+1+2(\gamma+1)}{10^\nu}$$

ἤτοι

$$0 < \sigma_\nu - \rho_\nu < \frac{\varphi}{10^\nu} \quad \text{μὲ} \quad \varphi = \alpha + \beta + 2\gamma + 4 .$$

Μποροῦμε λοιπὸν νὰ ἐφαρμόσουμε τὴν Πρόταση 7 καὶ νὰ συμπεράνουμε ὅτι

$$(30.1) \qquad (A+B)\Gamma = \operatorname*{Inf}_{\nu \in N} \sigma_\nu = \operatorname*{Inf}_{\nu \in N} \left([A]_\nu + [B]_\nu + 2/10^\nu\right)\left([\Gamma]_\nu + 1/10^\nu\right) .$$

Μὲ ὅμοιο τρόπο βρίσκουμε

$$[A]_\nu [\Gamma]_\nu \leqslant A\Gamma < ([A]_\nu + 1/10^\nu)([\Gamma]_\nu + 1/10^\nu)$$

$$[B]_\nu[\Gamma]_\nu \leqslant B\Gamma < ([B]_\nu + 1/10^\nu)([\Gamma]_\nu + 1/10^\nu)$$

Ἄρα, σύμφωνα μὲ τὴ μονοτονικὴ ἰδιότητα τῆς πρόσθεσης στὸ σύνολο $\mathcal{G}$ καὶ τὴν ἐπιμεριστικὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεση στὸ Q_0^+ :

$$\rho_\nu = [A]_\nu[\Gamma]_\nu + [B]_\nu[\Gamma]_\nu \leqslant A\Gamma + B\Gamma < \{([A]_\nu + 1/10^\nu) + ([B]_\nu + 1/10^\nu)\}([\Gamma]_\nu + 1/10^\nu)$$

$$= \sigma_\nu \, .$$

Κατὰ συνέπεια :

$$A\Gamma + B\Gamma = \operatorname*{Inf}_{\nu\in N} \sigma_\nu$$

καί, λόγω τῆς (30.1) :

$$A\Gamma + B\Gamma = (A+B)\Gamma \qquad , \qquad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

§ 31. Τὸ μόρφωμα $1,\overline{0}\ldots = 1$ εἶναι οὐδέτερο στοιχεῖο γιὰ τὴν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στὸ σύνολο $\mathcal{G}$: $1 \cdot A = A$ γιὰ κάθε $A \in \mathcal{G}$.

Ἀπόδειξη. Σύμφωνα μὲ ὅσα εἴδαμε, ἔχουμε γιὰ $\nu \in N$:

$$\rho_\nu = [1]_\nu[A]_\nu = [A]_\nu \leqslant 1 \cdot A \leqslant \left(1 + \frac{1}{10^\nu}\right)\left([A]_\nu + \frac{1}{10^\nu}\right)$$

$$= [A]_\nu + \frac{1}{10^\nu}\left([A]_\nu + 1 + \frac{1}{10^\nu}\right) < [A]_\nu + \frac{\alpha + 2}{10^\nu} = \sigma_\nu \, .$$

Ἡ ἀκολουθία (σ_ν), $\nu \in N$, εἶναι ὅμως φθίνουσα, σύμφωνα μὲ τὸ Σχόλιο II, στὴν Ἰδιότητα 2., § 13. Ἐξάλλου ἔχουμε :

$$0 < \sigma_\nu - \rho_\nu = \frac{\alpha + 2}{10^\nu} \quad , \quad \nu \in N \, .$$

Ἑπομένως, κατὰ τὴν Πρόταση 7, εἶναι

$$1 \cdot A = \operatorname*{Inf}_{\nu\in N} \left([A]_\nu + \frac{\alpha + 2}{10^\nu}\right) \, .$$

Ἀλλὰ κατὰ τὸ Πόρισμα τοῦ § 15 εἶναι

$$\operatorname*{Inf}_{\nu\in N}\left([A]_\nu + \frac{\alpha + 2}{10^\nu}\right) = A \quad ,$$

ἐπομένως

$$1 \cdot A = A \quad \text{γιὰ κάθε} \quad A \in \mathcal{G}\,, \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

§ 32. Ἀφαίρεση στὸ σύνολο $\mathcal{G}$ τῶν ἀπόλυτων ἀριθμῶν.

Ἄς εἶναι $A, B \in \mathcal{G}$ καὶ $A \geqq B$. Μορφώνουμε τὴν ἀκολουθία ρητῶν > 0:

$$\sigma_\nu = [A]_\nu + \frac{1}{10^\nu} - [B]_\nu \quad , \quad \nu \in N \,\cdot$$

εἶναι φθίνουσα μ. ε. σ., σύμφωνα μὲ τὴν Ἰδιότητα 2., § 13 · ἄρα, κατὰ τὴν Πρόταση 5, ὑπάρχει τὸ $\operatorname{Inf}_{\nu\in N} \sigma_\nu \in \mathcal{G}$. Ὁρίζουμε:

$$\text{(32.1)} \qquad \text{διαφορὰ } A \text{ μεῖον } B = A - B = \operatorname*{Inf}_{\nu \in N} \left([A]_\nu + 1/10^\nu) - [B]_\nu \right).$$

Διαπιστώνουμε ἀμέσως τὰ ἑξῆς:

I) Ἄν A καὶ B εἶναι περιοδικὰ μορφώματα ἀπὸ τὸ $\mathcal{G}$, ὁπότε θὰ εἶναι δεκαδικὰ ἀναπτύγματα δυὸ ρητῶν ἀριθμῶν ρ' καὶ ρ'' μὲ $\rho' \geqq \rho'' \geqq 0$, τότε τὸ μόρφωμα $A - B$ ποὺ ὁρίσαμε, θὰ εἶναι, κατὰ τὸν § 18, δεκαδικὸ ἀνάπτυγμα τοῦ ρητοῦ $\rho' - \rho''$.

II) Ἄν $A = B$, τότε

$$A - B = \operatorname*{Inf}_{\nu\in N} ([A]_\nu + 1/10^\nu - [A]_\nu) = \operatorname*{Inf}_{\nu \in N} \left(\bar{0} + \frac{1}{10^\nu} \right) = 0,\bar{0}\ldots = 0\,.$$

III) Σύμφωνα μὲ τὴν ἰδιότητα (I) τοῦ κάτω πέρατος εἶναι

$$A - B \leqq [A]_\nu + 1/10^\nu - [B]_\nu \quad , \quad \nu \in N\,.$$

Ἰσχύει μάλιστα ὅτι

$$\text{(32.2)} \qquad A - B < [A]_\nu + 1/10^\nu - [B]_\nu\,.$$

Πραγματικά, γιὰ κάθε δοσμένο $\nu \in N$ ὑπάρχει $n_\nu \in N$ μὲ $n_\nu > \nu$ καὶ τέτοιο ὥστε (βλ. Ἰδιότητα 2., Σχόλιο I, § 13)

$$[A]_{n_\nu} + 1/10^{n_\nu} < [A]_\nu + 1/10^\nu\,.$$

Ἐξάλλου εἶναι $[B]_\nu \leqslant [B]_{n_\nu}$ · ἄρα θὰ ἔχουμε:

$$(32.2') \qquad A - B \leqslant [A]_{n_\nu} + 1/10^{n_\nu} - B_{n_\nu} < [A]_\nu + 1/10^\nu - B_\nu \quad , \quad \nu \in N .$$

IV). Ἄς εἶναι τώρα $A > B$ · ὑπάρχει τότε (Παρατήρηση I στὴν Ἰδιότητα 3., § 13) κάποιος φυσικὸς ἀριθμὸς m μὲ

$$[A]_\mu > [B]_\mu + 1/10^\mu \quad \text{γιὰ} \quad \mu \geqslant m .$$

Ἑπομένως, μὲ $k \in N$ θὰ εἶναι (Πόρισμα ἀπὸ τὴν Ἰδιότητα 2, § 13):

$$0 < [A]_{m+k} - ([B]_{m+k} + 1/10^{m+k}) < [A]_\nu + 1/10^\nu - [B]_\nu \text{ γιὰ κάθε } \nu \in N .$$

Ἄρα, σύμφωνα μὲ τὸ Πόρισμα 2 τοῦ § 14, θὰ ἔχουμε:

$$0 < [A]_{m+k} - \left([B]_{m+k} + 1/10^{m+k}\right) \leqslant \operatorname*{Inf}_{\nu\in N} ([A]_\nu + 1/10^\nu - [B]_\nu) = A - B .$$

Αὐτὴ ἡ σχέση σὲ συνδυασμὸ μὲ τὴν (32.2') συνεπάγεται γιὰ $k \in N$ τὴν

$$(32.3) \quad 0<[A]_{m+k}-([B]_{m+k}+1/10^{m+k}) \leqslant A-B<[A]_{m+k}+1/10^{m+k}-[B]_{m+k} ,$$

V). Μποροῦμε τώρα ν' ἀποδείξουμε ὅτι μὲ $A, B \in \mathcal{G}$ καὶ $A \geqslant B$ εἶναι

$$(32.4) \qquad B + (A-B) = (A-B) + B = A .$$

Αὐτὸ εἶναι φανερὸ ὅταν $A = B$, ἐπειδὴ τότε, ὅπως εἴδαμε, $A - B = 0$ καὶ τὸ 0 εἶναι οὐδέτερο στοιχεῖο γιὰ τὴν πρόσθεση. Ἄς εἶναι λοιπὸν $A > B$. Μὲ $\nu \in N$ ἔχουμε ἀπὸ τὴ μιὰ μεριὰ σύμφωνα μὲ τὴν (32.3):

$$0 < [A]_{m+\nu} - \left([B]_{m+\nu} + \frac{1}{10^{m+\nu}} \right) \leqslant A - B < [A]_{m+\nu} + 1/10^{m+\nu} - [B]_{m+\nu}$$

καὶ ἀπὸ τὴν ἄλλη, κατὰ τὴν Ἰδιότητα I), § 13:

$$0 \leqslant [B]_{m+\nu} \leqslant B < [B]_{m+\nu} + 1/10^{m+\nu} .$$

Τὶς δυὸ αὐτὲς σχέσεις μποροῦμε νὰ τὶς προσθέσουμε κατὰ μέλη, σύμφωνα μὲ τὴ μονοτονικὴ ἰδιότητα τῆς πρόσθεσης · θὰ λάβουμε:

$$0 < [A]_{m+\nu} - 1/10^{m+\nu} \leqslant (A-B) + B < [A]_{m+\nu} + 2/10^{m+\nu}, \quad \nu \in N .$$

Ἐφαρμόζουμε τώρα τὴν Πρόταση 7 μὲ

$$\rho_\nu = [A]_{m+\nu} - 1/10^{m+\nu}, \quad \sigma_\nu = [A]_{m+\nu} + \frac{2}{10^{m+\nu}} \quad \text{καὶ} \quad \varphi = \sigma_\nu - \rho_\nu = 3.$$

Λαμβάνουμε (χρησιμοποιώντας καὶ τὸ Πόρισμα 1, § 14, καθὼς καὶ τὸ Πόρισμα τοῦ § 15):

$$(A-B) + B = \operatorname*{Inf}_{\nu \in N} ([A]_{m+\nu} + 2/10^{m+\nu}) = \operatorname*{Inf}_{\kappa \in N} \left([A]_k + \frac{2}{10^k}\right) = A\,, \text{ ὅ.ἔ.δ.}$$

VI) Ὁ πολλαπλασιασμὸς στὸ $\mathcal{G}$ εἶναι ἐπιμεριστικὸς καὶ ὡς πρὸς τὴν ἀφαίρεση:

$$(A-B)\Gamma = A\Gamma - B\Gamma\,.$$

Ἀπόδειξη. Ἀπὸ τὴν ὑπόθεση $A \geqslant B$ ἕπεται ὅτι $A\Gamma \geqslant B\Gamma$ (βλέπε § 28). Ἄρα ἡ ὕπαρξη τῆς διαφορᾶς $A - B$ συνεπάγεται τὴν ὕπαρξη τῆς διαφορᾶς $A\Gamma - B\Gamma$. Ἂν τὸ ἀποδειχτέο δὲν ἀλήθευε καὶ εἴχαμε

$$(A-B)\Gamma \neq A\Gamma - B\Gamma\,,$$

θὰ ἦταν καὶ

$$(A-B)\Gamma + B\Gamma \neq (A\Gamma - B\Gamma) + B\Gamma = A\Gamma\,.$$

Ἀλλὰ εἶναι (βλ. § 30)

$$(A-B)\Gamma + B\Gamma = ((A-B) + B)\Gamma = A\Gamma\,.$$

Ὥστε θὰ φτάναμε στὸ ἄτοπο $A\Gamma \neq A\Gamma$. Ἑπομένως τὸ ἀποδειχτέο ἰσχύει. Ἀπὸ τὰ παραπάνω ἕπεται πὼς ἡ ἀφαίρεση στὸ σύνολο $\mathcal{G}$ ἔχει ὅλες τὶς ἰδιότητες ποὺ ξέρουμε ὅτι ἰσχύουν γιὰ τὴν ἀφαίρεση στὸ σύνολο Q_o^+. Π. χ. ἰσχύουν τὰ ἀκόλουθα ποὺ θὰ μᾶς εἶναι χρήσιμα παρακάτω.

(1) Γιὰ $X, Y, Z \in \mathcal{G}$ καὶ $Y \geqslant X$ εἶναι $(Y-X) + Z = (Y+Z) - X$.

Πραγματικά, $Y \geqslant X \Rightarrow Y+Z \geqslant X$, ἄρα ὑπάρχει ἡ διαφορὰ $(Y+Z)-X$. Ἄς εἶναι $A = (Y-X) + Z$ καὶ $(Y+Z) - X = B$. Θὰ εἶναι τότε: $A + X = (Z+(Y-X))+X = Z+((Y-X)+X) = Z+Y$ καὶ $B+X = Y+Z$. Ἄρα $A + X = B + X$ καί, μὲ διαγραφὴ τοῦ X, $A = B$, ὅ.ἔ.δ.

(2) Γιὰ $X, Y, Z \in \mathcal{G}$, $Y \geqslant Z$ καὶ $X \geqslant Y-Z$ εἶναι $X-(Y-Z)=(X+Z)-Y$.

Πραγματικά, $X \geqslant Y-Z \Rightarrow X+Z \geqslant (Y-Z)+Z=Y$, ἄρα ὑπάρχει ἡ $(X+Z)-Y$.

Θέτουμε $A=X-(Y-Z)$ καὶ $B=(X+Z)-Y$, ὁπότε $X=A+(Y-Z)$ καὶ $B+Y=X+Z$. Ἔχουμε: $B+(Y-Z)=(B+Y)-Z=(X+Z)-Z=X$. Ἄρα: $A+(Y-Z)=B+(Y-Z)$ καί, μὲ διαγραφὴ τοῦ $Y-Z$, $A=B$, ὅ.ἔ.δ.

(3) Γιὰ $X, Y, Z \in \mathcal{G}$ καὶ $X \geqslant Y + Z$ εἶναι $X - (Y+Z) = (X-Y)-Z$.

Πραγματικά, $X \geqslant Y + Z \Rightarrow X \geqslant Y$, ἄρα ὑπάρχει ἡ διαφορὰ $X—Y$. Λέγω ὅτι $(X—Y) \geqslant Z$ · καὶ ἀλήθεια, ἂν ἦταν $(X—Y) < Z$ θὰ εἴχαμε $(X—Y) + Y < Z + Y$, ἤτοι $X < Y + Z$ σὲ ἀντίφαση πρὸς τὴν ὑπόθεση $X \geqslant Y + Z$. Ὥστε ὑπάρχει καὶ ἡ διαφορὰ $(X—Y) — Z$. Θέτουμε $A = X — (Y+Z)$ καὶ $B = (X—Y) — Z$. Θὰ εἶναι τότε:

$$\begin{aligned} A + (Y+Z) = X \quad \text{καὶ} \quad B + (Y+Z) &= ((X—Y)—Z) + (Z+Y) \\ &= \{((X—Y)—Z) + Z\} + Y = \{X—Y\} + Y = X . \end{aligned}$$

Ἄρα $A + (Y+Z) = B + (Y+Z)$ καί, μὲ διαγραφὴ τοῦ $Y + Z$, $A=B$, ὅ. ἔ. δ.

§ 33. Διαίρεση στὸ σύνολο $\mathscr{G}$.

Ἂς εἶναι $A = \alpha, \psi_1 \ldots \psi_\nu \ldots \in \mathscr{G}$ καὶ $\mathscr{G} \ni B = \beta, \omega_1 \ldots \omega_\nu \ldots \neq 0$. Ἡ ὑπόθεση $B \neq 0$ συνεπάγεται τὴν ὕπαρξη κάποιου φυσικοῦ ἀριθμοῦ n μὲ τὴν ἰδιότητα

$$(33.1) \qquad [B]_\nu \geqslant \frac{1}{10^n} > 0 \quad \text{γιὰ} \quad \nu \geqslant n .$$

Κατὰ συνέπεια μποροῦμε νὰ μορφώσουμε τὴν ἀκολουθία ρητῶν > 0

$$\sigma_k = \frac{[A]_{n+k} + 1/10^{n+k}}{[B]_{n+k}} , \quad k \in N .$$

Ἡ ἀκολουθία αὐτὴ εἶναι φθίνουσα μ. ε. σ., ἐπειδὴ ὁ αριθμητὴς φθίνει καὶ ὁ παρονομαστὴς αὐξάνει μ. ε. σ., ὅταν ὁ k αὐξάνῃ. Ἑπομένως ὑπάρχει τὸ

$$\operatorname*{Inf}_{\kappa \in N} \sigma_k \in \mathscr{G} .$$

Ὁρίζουμε:

$$(33.2) \qquad \text{πηλίκο τοῦ } A \text{ διὰ } B = \frac{A}{B} = \operatorname*{Inf}_{\kappa \in N} \frac{[A]_{n+k} + 1/10^{n+k}}{[B]_{n+k}} .$$

Διαπιστώνουμε πρῶτα τὰ ἑξῆς:

I) Ἂν τὰ A καὶ B εἶναι περιοδικὰ μορφώματα ἀπὸ τὸ σύνολο $\mathscr{G}$, ἄρα δεκαδικὰ ἀναπτύγματα ρητῶν ἀριθμῶν $\rho' \geqslant 0$ καὶ $\rho'' > 0$ ἀντίστοιχα, τότε τὸ μόρφωμα $\frac{A}{B}$ ποὺ ὁρίσαμε εἶναι, σύμφωνα μὲ τὸν § 19, δεκαδικὸ ἀνάπτυγμα τοῦ ρητοῦ $\frac{\rho'}{\rho''}$.

II) Σύμφωνα μὲ τὴν ἰδιότητα (I) τοῦ κάτω πέρατος (βλ. Πρόταση 5) ἔχουμε γιὰ κάθε $\nu \in N$

$$\frac{A}{B} \leqslant \frac{[A]_{n+\nu} + 1/10^{n+\nu}}{[B]_{n+\nu}} \quad \text{καὶ μάλιστα} \quad \frac{A}{B} < \frac{[A]_{n+\nu} + 1/10^{n+\nu}}{[B]_{n+\nu}}$$

ἐπειδή, ὅπως ξέρουμε, εἶναι

$$[A]_{\nu+1} + 1/10^{\nu+1} < [A]_\nu + 1/10^\nu$$

γιὰ ἀπειράριθμες τιμὲς τοῦ ν.
Ἀπὸ μιὰν ἄλλη μεριὰ ἔχουμε μὲ $m \in N$

$$\frac{[A]_m}{[B]_m + 1/10^m} < \frac{[A]_\nu + 1/10^\nu}{[B]_\nu} \qquad \text{γιὰ κάθε} \quad \nu \geqslant n .$$

Ἄρα κατὰ τὸ Πόρισμα II τῆς Πρότασης 5 εἶναι

$$\frac{[A]_m}{[B]_m + 1/10^m} \leqslant \operatorname*{Inf}_{\nu \geqslant n} \frac{[A]_\nu + 1/10^\nu}{[B]_\nu} = \frac{A}{B} \qquad \text{γιὰ } m \in N .$$

Κατὰ συνέπεια ἰσχύει ἡ σχέση

$$(33.3) \qquad \frac{[A]_{n+\nu}}{[B]_{n+\nu} + 1/10^{n+\nu}} \leqslant \frac{A}{B} < \frac{[A]_{n+\nu} + 1/10^{n+\nu}}{[B]_{n+\nu}} \qquad \text{γιὰ κάθε} \quad \nu \in N .$$

III) Μὲ βάση τὴν τελευταία σχέση (33.3) μποροῦμε νὰ δείξουμε τώρα ὅτι

$$(33.4) \qquad \frac{A}{B} \cdot B = A .$$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε :

$$\left.\begin{array}{ll} & \dfrac{[A]_{n+\nu}}{[B]_{n+\nu} + 1/10^{n+\nu}} \leqslant \dfrac{A}{B} < \dfrac{[A]_{n+\nu} + 1/10^{n+\nu}}{[B]_{n+\nu}} \\ \text{καὶ} & [B]_{n+\nu} \leqslant B < [B]_{n+\nu} + \dfrac{1}{10^{n+\nu}} \end{array}\right| \quad \nu \in N .$$

Πολλαπλασιάζουμε κατὰ μέλη τὶς δυὸ αὐτὲς σχέσεις καί, σύμφωνα μὲ τὴ μονοτονικὴ ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ποριζόμαστε :

$$(33.5)\ \sigma_\nu = \frac{[A]_{n+\nu}\,[B]_{n+\nu}}{[B]_{n+\nu} + 1/10^{n+\nu}} \leqslant \frac{A}{B} \cdot B < \frac{([A]_{n+\nu} + 1/10^{n+\nu})([B]_{n+\nu} + 1/10^{n+\nu})}{[B]_{n+\nu}} = \tau_\nu$$

Ἡ ἀκολουθία (τ_ν), $\nu \in N$, ρητῶν ἀριθμῶν > 0, εἶναι φθίνουσα μ. ε. σ., ἄρα ὑπάρχει τὸ $\operatorname*{Inf}_{\nu \in N} \tau_\nu \in \mathscr{G}$. Ἀποτιμοῦμε τώρα τὴ διαφορὰ $\tau_\nu - \sigma_\nu$. Εἶναι

$$0 < \tau_\nu - \sigma_\nu = \frac{-[A]_{n+\nu}[B]^2_{n+\nu} + ([A]_{n+\nu} + 1/10^{n+\nu})([B]_{n+\nu} + 1/10^{n+\nu})^2}{([B]_{n+\nu} + 1/10^{n+\nu})[B]_{n+\nu}},$$

ἄρα λόγω τῆς (33.1)

$$\tau_\nu - \sigma_\nu < \frac{10^{2n}}{10^{n+\nu}} \left\{ [B]^2_{n+\nu} + 2[A]_{n+\nu}[B]_{n+\nu} + 2\frac{[B]_{n+\nu}}{10^{n+\nu}} + \frac{[A]_{n+\nu}}{10^{n+\nu}} + \frac{1}{10^{2(n+\nu)}} \right\}$$

$$< \frac{10^{2n}}{10^{n+\nu}} \left((\beta+1)^2 + 2(\alpha+1)(\beta+1) + 2(\beta+1) + (\alpha+1) + 1 \right)$$

$$= \frac{\varphi}{10^\nu} \quad \text{μὲ } \varphi = 10^n\left((\beta+1)^2 + 2(\alpha+1)(\beta+1) + 2(\beta+1) + \alpha + 2 \right).$$

Ἔχουμε λοιπὸν

$$\sigma_\nu \leqslant \frac{A}{B} \cdot B < \tau_\nu \quad \text{μὲ} \quad 0 < \tau_\nu - \sigma_\nu < \frac{\varphi}{10^\nu}, \quad \nu \in N.$$

Ἑπομένως, χρησιμοποιώντας τὴν Πρόταση 7 μποροῦμε νὰ συμπεράνουμε:

$$\frac{A}{B} \cdot B = \operatorname*{Inf}_{\nu \in N} \tau_\nu . \tag{33.6}$$

Ἀπὸ μιὰν ἄλλη μεριὰ λόγω τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ σ_ν καὶ τοῦ τ_ν εἶναι

$$\sigma_\nu < [A]_{n+\nu} \leqslant A < [A]_{n+\nu} + \frac{1}{10^{n+\nu}} < \tau_\nu$$

καὶ ἑπομένως

$$\sigma_\nu < A < \tau_\nu, \quad \nu \in N.$$

Κατὰ συνέπεια, ἐφαρμόζοντας καὶ ἐδῶ τὴν Πρόταση 7, ἔχουμε

$$A = \operatorname*{Inf}_{\nu \in N} \tau_\nu . \tag{33.7}$$

Συγκρίνοντας τὴν (33.6) μὲ τὴν (33.7) βρίσκουμε:

$$\frac{A}{B} \cdot B = A, \quad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

Παρατήρηση. Ἂν $A, B, \Delta \in \mathscr{G}$, $B \neq 0$ καὶ $A = \Delta B$, τότε $\Delta = \dfrac{A}{B}$.

Πραγματικά, $\quad (A = \Delta B$ καὶ $A = \frac{A}{B} \cdot B) \Rightarrow \Delta B = \frac{A}{B} \cdot B$.

Κατὰ τὴ συνέπεια IV τῆς μονοτονικῆς ἰδιότητας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι ὅμως

$$\Delta B = \frac{A}{B} \cdot B \Rightarrow \Delta = \frac{A}{B} , \quad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τοῦ πηλίκου $\frac{A}{B}$, τὴ σχέση $\frac{A}{B} \cdot B = A$ καὶ τὶς ἰδιότητες τῆς μεγεθικῆς διάταξης καθὼς καὶ τῶν τριῶν ἄλλων πράξεων ποὺ ὁρίσαμε στὸ σύνολο $\mathcal{G}$ ἕπεται ὅτι γιὰ τὴ διαίρεση στὸ $\mathcal{G}$ ἰσχύουν οἱ γνωστὲς ἰδιότητες αὐτῆς τῆς πράξης στὸ σύνολο Q_o^+ .

Π.χ. μὲ $A=0$ καὶ $B \neq 0$ εἶναι $\frac{0}{B} = 0$, γιατὶ κατὰ τὸν ὁρισμὸ καὶ τὴν (33.3) ἔχουμε (ἀφοῦ $B > 0 \Rightarrow [B]_k \geqslant \frac{1}{10^n}$ γιὰ $k \geqslant$ κάποιου $n \in N$):

$$0 \leqslant \frac{0}{B} < \frac{0 + 1/10^{n+\nu}}{[B]_{n+\nu}} \leqslant \frac{10^n}{10^{n+\nu}} = \frac{1}{10^\nu} , \quad \nu \in N .$$

Ἑπομένως, σύμφωνα μὲ τὴν Πρόταση 7 καὶ τὸ Πόρισμα τοῦ § 15,

$$\frac{0}{B} = \inf_{\nu \in N} \frac{1}{10^\nu} = 0 .$$

Τὸ ἴδιο ἀποδείχνεται καὶ μὲ ἀπαγωγὴ στὸ ἄτοπο τῆς ὑπόθεσης $\frac{0}{B} \neq 0$.

Πραγματικά, $\quad \left(\frac{0}{B} \neq 0 \text{ καὶ } B \neq 0\right) \Rightarrow \frac{0}{B} \cdot B \neq 0$,

ἐνῶ ἔπρεπε νὰ ἔχουμε $\frac{0}{B} \cdot B = 0$, σύμφωνα μὲ τὴν (33.4).

Ἐπίσης :

$$\text{ἂν } A, B, \Gamma \in \mathcal{G} \text{ καὶ } B, \Gamma \neq 0 , \text{ τότε } \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{A}{B} .$$

Πραγματικά , $(B \neq 0$ καὶ $\Gamma \neq 0) \Rightarrow B\Gamma \neq 0$. Ἄρα μποροῦμε νὰ μορφώσουμε τὸ πηλίκο $\frac{A\Gamma}{B\Gamma}$. Ἂν τὸ παραστήσουμε μὲ Δ, θὰ ἔχουμε

$$A \cdot \Gamma = \Delta \cdot B\Gamma = \Delta B \cdot \Gamma .$$

Ἀπὸ τὴ σχέση $A \cdot \Gamma = \Delta B \cdot \Gamma$, ἕπεται, κατὰ τὸ Πόρισμα IV τῆς μονοτονικῆς ἰδιότητας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἡ σχέση $A = \Delta B$ καὶ ἀπὸ αὐτήν, κατὰ τὴν παρατήρηση τῆς σελ. 60 ἡ σχέση

$$\Delta = \frac{A}{B} \quad , \text{ ὅ. ἔ. δ.}$$

Θὰ χρησιμοποιήσουμε τέλος τὰ παραπάνω καὶ τὶς ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στὸ $\mathscr{G}$ γιὰ ν' ἀποδείξουμε ὅτι, μὲ $B \neq 0$, εἶναι

$$\frac{A}{B} = A \cdot \frac{1}{B} .$$

Ἀπόδειξη. Ἀφοῦ $B \neq 0$, ὑπάρχει ὄχι μόνο τὸ πηλίκο $\frac{A}{B} \in \mathscr{G}$ ἀλλὰ καὶ τὸ $\frac{1}{B} \in \mathscr{G}$. Ἐξάλλου ἔχουμε

$$\frac{A}{B} \cdot B = A \quad \text{καὶ} \quad \left(A \cdot \frac{1}{B}\right) \cdot B = A \cdot \left(\frac{1}{B} \cdot B\right) = A \cdot 1 = A .$$

Κατὰ συνέπεια εἶναι

$$\frac{A}{B} \cdot B = \left(A \cdot \frac{1}{B}\right) \cdot B$$

καί, σύμφωνα μὲ τὴ συνέπεια IV) τῆς μονοτονικῆς ἰδιότητας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (§ 28),

$$\frac{A}{B} = A \cdot \frac{1}{B} \quad , \text{ ὅ. ἔ. δ.}$$

Ἀποδείχτηκε λοιπὸν ὅτι διαίρεση διὰ $B \neq 0$, ἰσοδυναμεῖ μὲ πολλαπλασιασμὸ ἐπὶ $1/B$, τὸν «ἀντίστροφο» τοῦ B.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΟΙ ΣΧΕΤΙΚΟΙ [ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ] ΑΡΙΘΜΟΙ

§ 34. Συμπληρωματικὰ γιὰ τοὺς ἀπόλυτους ἀριθούς. Τὸ σύνολο R τῶν σχετικῶν [πραγματικῶν] ἀριθμῶν.

Οἱ ἀριθμοὶ ποὺ τὴ βασικὴ θεωρία τους ἐκθέσαμε στὸ προηγούμενο Κεφάλαιο ὀνομάστηκαν ἀπόλυτοι γιὰ νὰ διακρίνωνται ἀπὸ τοὺς *σχετικοὺς ἀριθμοὺς* ποὺ θὰ μελετήσουμε μὲ συντομία σ' αὐτὸ τὸ τελευταῖο Κεφάλαιο τῆς πραγματείας μας. Οἱ σχετικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται καὶ *πραγματικοὶ ἀριθμοὶ* γιά διάκριση ἀπό τοὺς *φανταστικοὺς ἀριθμοὺς* ποὺ εἰσάγονται μετέπειτα στὰ Μαθηματικά. Συμπληρώνουμε τὴν ὀνοματολογία ἀναφορικὰ μὲ τοὺς ἀπόλυτους ἀριθμοὺς ὡσεξῆς :

Θὰ καλοῦμε τὰ περιοδικὰ μορφώματα ἀπὸ τὸ σύνολο $\mathscr{G}$ *σύμμετρους ἀπόλυτους ἀριθμοὺς* καὶ τὰ ἀπεριοδικὰ μορφώματα *ἀσύμμετρους ἀπόλυτους ἀριθμούς*. Ὅπως εἴδαμε, μεταξὺ τῶν ρητῶν ἀριθμῶν $\rho \geqq 0$ καὶ τῶν σύμμετρων ἀπόλυτων ἀριθμῶν A_σ ὑπάρχει μιὰ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία

$$\rho \leftrightarrow A_\sigma(\rho)$$

πού, ὅπως συνηθίζουμε νὰ λέμε, διατηρεῖ τὴ μεγεθικὴ σχέση μεταξὺ στοιχείων τοῦ καθενὸς ἐκ τῶν δύο συνόλων, τῶν $\rho \geqq 0$ ἀντιστοίχως τῶν A_σ, καθὼς καὶ τὰ ἀποτελέσματα τῶν τεσσάρων βασικῶν πράξεων · αὐτὸ σημαίνει ὅτι

$$\text{(1)} \qquad \rho_1 < \rho_2 \Rightarrow A_\sigma(\rho_1) < A_\sigma(\rho_2) \quad ,$$

$$\text{(2)} \qquad \rho_1 + \rho_2 = \rho_3 \Rightarrow A_\sigma(\rho_1) + A_\sigma(\rho_2) = A_\sigma(\rho_3) \quad ,$$

$$\text{(3)} \qquad (\rho_1 \geqq \rho_2 \text{ καὶ } \rho_1 - \rho_2 = \rho_3) \Rightarrow A_\sigma(\rho_1) - A_\sigma(\rho_2) = A_\sigma(\rho_3) \quad ,$$

$$\text{(4)} \qquad \rho_1\rho_2 = \rho_3 \Rightarrow A_\sigma(\rho_1)\, A_\sigma(\rho_2) = A_\sigma(\rho_3) \quad ,$$

$$\text{(5)} \qquad \left(\rho_2 > 0 \text{ καὶ } \frac{\rho_1}{\rho_2} = \rho_3\right) \Rightarrow \frac{A_\sigma(\rho_1)}{A_\sigma(\rho_2)} = A_\sigma(\rho_3) \quad .$$

Ἔτσι τὰ δυὸ σύνολα $\{x \mid x$ ρητὸς ἀριθμὸς $\geqslant 0\}$ καὶ $\{x \mid x$ περιοδικὸ μόρφωμα $\in \mathscr{G}\}$ εἶναι *ἰσομορφικὰ* τὸ ἕνα τοῦ ἄλλου ὡς πρὸς τὴ μεγεθικὴ διάταξη τῶν στοιχείων τους καὶ ὡς πρὸς τὶς τέσσερις βασικὲς πράξεις.

Τοὺς ἀπόλυτους ἀριθμοὺς A τοὺς $\neq 0$, ἤτοι ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου $\mathscr{G}$ ἐκτὸς ἀπὸ τὸ 0, θὰ τοὺς καλοῦμε στὸ ἑξῆς καὶ *θετικοὺς ἀριθμούς*, παριστάνοντάς τους καὶ μὲ $+A$· μὲ ἄλλα λόγια θέτουμε

$$+A = A\,, \quad \text{γιὰ} \quad A \in \mathscr{G} \neq 0\,.$$

Γιὰ κάθε $+A$ εἰσάγουμε τώρα ἕναν ἀντίστοιχο « συμμετρικὸ » ἀριθμό, τὸν $-A$, ποὺ θὰ καλοῦμε *ἀρνητικὸ ἀριθμό*. Τὸ 0 συμφωνοῦμε νὰ τὸ παριστάνουμε καὶ μὲ $+0$ εἴτε -0, χωρὶς γι' αὐτὸ νὰ τὸ ὑπάγουμε στὸ σύνολο τῶν θετικῶν ἢ στὸ σύνολο τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν. *Οἱ θετικοὶ ἀριθμοί, τὸ 0 καὶ οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν τὸ σύνολο R τῶν σχετικῶν [πραγματικῶν] ἀριθμῶν*· (R εἶναι τὸ ἀρχικὸ γράμμα τῆς λατινικῆς λέξης realis ποὺ σημαίνει πραγματικός). Τὰ στοιχεῖα τοῦ R θὰ τὰ σημειώνουμε παρακάτω καὶ μὲ μικρὰ ἑλληνικὰ ἢ λατινικὰ γράμματα, τὰ στοιχεῖα τοῦ $\mathscr{G}$ μὲ κεφαλαῖα ἑλληνικά, ὅπως κάμαμε καὶ ἕως τώρα.

Ἐννοεῖται ὅτι γιὰ νὰ δικαιολογηθῆ ἡ ὀνομασία « ἀριθμοὶ » τὴν ὁποία δίνουμε στὰ στοιχεῖα τοῦ R, τὰ ὁποῖα πρὸς τὸ παρὸν εἶναι ἁπλῶς ἀριθμητικὰ σημάδια, πρέπει νὰ ὁρίσουμε στὸ R τὶς σχέσεις ἰσότητας καὶ ἀνισότητας καθὼς καὶ τὶς τέσσερις βασικὲς ἀριθμητικὲς πράξεις. Αὐτὸ γίνεται μὲ τέτοιο τρόπο ὥστε 1ο τὰ ἐξαγόμενα τῶν νέων ὁρισμῶν, ὅταν τοὺς ἐφαρμόζουμε στὸ 0 καὶ στοὺς θετικοὺς ἀριθμούς, ποὺ ταυτίζονται μὲ τοὺς ἀπόλυτους ἀριθμούς, νὰ μὴ διαφέρουν ἀπὸ τὰ ἐξαγόμενα τῶν ὁρισμῶν ποὺ δόθηκαν γιὰ τοὺς ἀπόλυτους ἀριθμοὺς καὶ 2ο οἱ βασικές ἰδιότητες τῆς μεγεθικῆς διάταξης καὶ τῶν τεσσάρων βασικῶν πράξεων νὰ διατηροῦνται [νὰ ἐξακολουθοῦν νὰ ἰσχύουν] καὶ στὸ ὑπὸ κατασκευὴ εὐρύτερο ἀριθμητικὸ σύστημα. Ἡ ἀπαίτηση αὐτὴ λέγεται *ἀρχὴ τῆς ἐμμονῆς [ἀρχὴ τῆς μονιμότητας*, principe de permanence].

§ 35. Μεγεθικὴ διάταξη στὸ σύνολο R.

Γιὰ νὰ εὐκολύνουμε τὴ διατύπωση, εἰσάγουμε πρῶτα τὴν ἀκόλουθη ἔννοια.

Ἂν A εἶναι ἕνας ἀπόλυτος ἀριθμὸς $\neq 0$, καλοῦμε ἀπόλυτη τιμὴ τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν $+A$ καὶ $-A$ τὸν ἀπόλυτο ἀριθμὸ A ἀπὸ τὸν ὁποῖο παράγονται τὰ στοιχεῖα $+A$ καὶ $-A$ τοῦ R μὲ πρόταξη τοῦ « προσήμου » $+$ (σὺν) καὶ $-$ (πλὴν) ἀντίστοιχα. Ἀπόλυτη τιμὴ τοῦ 0, ἑπομένως καὶ τῶν $+0$, -0, ὁρίζουμε τὸ 0. Ἡ ἀπόλυτη τιμὴ ἑνὸς στοιχείου $\alpha \in R$ σημειώνεται μὲ $|\alpha|$. Ἔτσι ἔχουμε:

$$|+A| = |-A| = A \qquad \text{καὶ} \qquad |+0| = |-0| = |0| = 0 .$$

Ἐπειδὴ θέσαμε $+A = A$ γιὰ $\mathcal{G} \ni A \neq 0$, θὰ εἶναι φυσικὰ καὶ

$$|+A| = |-A| = +A .$$

Ἕνας σχετικὸς ἀριθμὸς α εἶναι ἴσος μὲ ἕνα σχετικὸ ἀριθμὸ β, $\alpha = \beta$, ὅταν καὶ μόνον ὅταν

1ο $$|\alpha| = |\beta|$$

καὶ 2ο, στὴν περίπτωση $|\alpha| \neq 0$, τὸ πρόσημο τοῦ α εἶναι τὸ ἴδιο μὲ τό πρόσημο τοῦ β: $\operatorname{sign}\alpha = \operatorname{sign}\beta$.
Οἱ ἀριθμοὶ $+0$, -0, 0 εἶναι ἀπὸ ὁρισμὸ ἴσοι μεταξύ τους:

$$+0 = -0 = 0 .$$

Ὅπως προκύπτει ἀμέσως ἀπὸ τὸν παραπάνω ὁρισμό, γιὰ τὴν ἰσότητα στὸ σύνολο R ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες τρεῖς ἰδιότητες:

I) $\alpha = \alpha$ γιὰ κάθε $\alpha \in R$ (ἀνακλαστικότητα).

II) $\alpha = \beta \Rightarrow \beta = \alpha$ γιὰ $\alpha, \beta \in R$ (συμμετρικότητα),

III) $(\alpha = \beta$ καὶ $\beta = \gamma) \Rightarrow \alpha = \gamma$ γιὰ $\alpha, \beta, \gamma \in R$ (μεταβατικότητα).

Ἡ μεγεθικὴ σχέση $<$ (μικρότερο) μεταξὺ στοιχείων τοῦ R ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

Ἕνας ἀρνητικὸς ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος ἀπὸ κάθε ἀρνητικὸ ἀριθμὸ ποὺ ἔχει μικρότερη ἀπόλυτη τιμή, εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸ 0 καὶ μικρότερος ἀπὸ κάθε θετικὸ ἀριθμό:

x ἀρνητικὸς ἀριθμὸς $< y$ ὅταν καὶ μόνον ὅταν ἢ y ἀρνητικὸς μὲ

$|y| < |x|$ *ἢ* $y = 0$ *ἢ* y *θετικὸς ἀριθμός.*

Τὸ 0 εἶναι μικρότερο ἀπὸ κάθε θετικὸ ἀριθμό:

$$0 < y \quad \text{γιὰ κάθε } y \text{ θετικό} .$$

Ἕνας θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος ἀπὸ κάθε θετικὸ ποὺ ἔχει μεγαλύτερη ἀπόλυτη τιμή:

x θετικὸς $< y$ ὅταν καὶ μόνον ὅταν y θετικὸς καὶ $|x| < |y|$.

Μὲ βάση αὐτοὺς τοὺς ὁρισμοὺς ἀποδείχνεται εὔκολα ὅτι ἡ σχέση $<$ εἶναι σχέση ὁλικῆς διάταξης μὲ στενὴ σημασία στὸ σύνολο R · μὲ ἄλλα λόγια, ἂν $\alpha, \beta, \gamma \in R$, τότε

(1) $\alpha < \beta \Rightarrow \beta \nless \alpha$, (2) $(\alpha < \beta$ καὶ $\beta < \gamma) \Rightarrow \alpha < \gamma$,

καὶ (3) ἀπὸ τὶς τρεῖς σχέσεις

$$\alpha < \beta \quad , \quad \alpha = \beta \quad , \quad \beta < \alpha$$

ἰσχύει πάντα (δηλ. γιὰ κάθε δυάδα στοιχείων ἀπὸ τὸ R) μιὰ καὶ μόνο μιά.

Ἐκτὸς ἀπὸ τὴ σχέση $<$ εἰσάγουμε καὶ τὶς σχέσεις $\leqslant$, $>$, $\geqslant$ μὲ τοὺς ἀκόλουθους ὁρισμούς :

1) $\alpha \leqslant \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$ ἢ $\alpha = \beta$

2) $\alpha > \beta \Leftrightarrow \beta < \alpha$

3) $\alpha \geqslant \beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$ ἢ $\alpha = \beta$.

Τέλος, θὰ μᾶς εἶναι χρήσιμες καὶ οἱ ἀκόλουθες ἔννοιες καὶ ὀνομασίες : Καλοῦμε *ἀντίθετο* τοῦ σχετικοῦ ἀριθμοῦ x, ὅταν $x \neq 0$, τὸν σχετικὸ ἀριθμὸ x' ποὺ ἔχει τὴν ἴδια ἀπόλυτη τιμὴ μὲ τὸν x ἀλλὰ διαφορετικὸ πρόσημο :

$0 \neq |x'| = |x|$ καὶ $\operatorname{sign} x \neq \operatorname{sign} x'$, ὅταν $x \neq 0$.

Ἀντίθετο τοῦ 0 ὁρίζουμε τὸ ἴδιο τὸ 0.

Ἔχουμε, ὅπως εἶναι φανερό, τὴ σχέση

$$(x')' = x \quad \text{γιὰ κάθε} \quad x \in R .$$

Ὁμόσημους καλοῦμε δυὸ σχετικοὺς ἀριθμοὺς x καὶ y, ὅταν καὶ μόνον ὅταν εἶναι συγχρόνως $x \geqslant 0$ καὶ $y \geqslant 0$ ἢ συγχρόνως $x \leqslant 0$ καὶ $y \leqslant 0$.

Ἑτερόσημοι [ὄχι ὁμόσημοι] θὰ λέγωνται ἑπομένως δυὸ σχετικοὶ ἀριθμοὶ x καὶ y , ὅταν καὶ μόνον ὅταν εἶναι

$$\text{ἢ} \quad x > 0 \ \text{καὶ} \ y < 0 \quad \text{ἢ} \quad x < 0 \ \text{καὶ} \ y > 0 .$$

Ἀπὸ τὰ παραπάνω προκύπτει εὔκολα ἡ ἀλήθεια τοῦ ἑξῆς θεωρήματος :

Θεώρημα. $(\alpha, \beta \in R$ *καὶ* $\alpha < \beta) \Leftrightarrow \alpha' > \beta' \Leftrightarrow \beta' < \alpha'$.

Ἀπόδειξη. Ἐφαρμόζουμε ἁπλῶς τοὺς ὁρισμοὺς πού δόθηκαν γιὰ τὶς σχέσεις $<$ καὶ $>$, διακρίνοντας τὶς ἀκόλουθες τρεῖς, μόνες δυνατές, περιπτώσεις :

(I) $\alpha < \beta < 0$, (II) $\alpha \leqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ καὶ $\alpha < \beta$, (III) $0 < \alpha < \beta$.

§ 36. Πρόσθεση στὸ σύνολο R.

Ἂς εἶναι $\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$ $(\nu \geqslant 2)$ δυὸ ἢ περισσότερα στοιχεῖα τοῦ R. Καλοῦμε *ἄθροισμα*

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_\nu$$

τῶν $\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$ τὸ στοιχεῖο τοῦ R ποὺ ὁρίζεται μονότροπα ὡσεξῆς :

Ἂν ἀνάμεσα στοὺς « προσθετέους » $\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$ ὑπάρχουν δυὸ ἢ περισσότεροι $\geqslant 0$, τότε προσθέτουμε τὶς ἀπόλυτες τιμὲς αὐτῶν καὶ καλοῦμε Θ τὸ ἄθροισμα ποὺ προκύπτει · ἂν ὑπάρχη ἕνας μόνος προσθετέος $\geqslant 0$, ὁ α_p $(1 \leqslant p \leqslant \nu)$, τότε θέτουμε $\Theta = |\alpha_p|$ · τέλος, ἂν καὶ οἱ ν προσθετέοι εἶναι < 0, τότε θέτουμε $\Theta = 0$. Ὅμοια, ἂν ἀνάμεσα στοὺς $\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$ ὑπάρχουν δυὸ ἢ περισσότεροι < 0, τότε προσθέτουμε τὶς ἀπόλυτες τιμὲς αὐτῶν καὶ καλοῦμε A τὸ ἄθροισμα ποὺ προκύπτει · ἂν ὑπάρχη ἕνας μόνο προσθετέος < 0, ὁ α_n $(1 \leqslant n \leqslant \nu)$, τότε θέτουμε $\mathrm{A} = |\alpha_n|$. τέλος, ἂν καὶ οἱ ν προσθετέοι εἶναι $\geqslant 0$, τότε θέτουμε $\mathrm{A} = 0$.

Ἀπὸ τοὺς δυὸ ἀπόλυτους ἀριθμοὺς Θ καὶ A ποὺ ὁρίσαμε, ὁ ἕνας, ποὺ συμβολίζεται μὲ $\mathrm{Max}(\Theta, \mathrm{A})$, θὰ εἶναι $\geqslant$ ἀπὸ τὸν ἄλλο, ποὺ συμβολίζεται μὲ $\mathrm{Min}(\Theta, \mathrm{A})$. Ἔστω Δ ἡ διαφορά :

$$\Delta = \big(\mathrm{Max}(\Theta, \mathrm{A}) - \mathrm{Min}(\Theta, \mathrm{A})\big) \in \mathscr{G}.$$

Θέτουμε

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_\nu = +\Delta \text{ ἢ } -\Delta \text{ καθόσο εἶναι } \Theta \geqslant \mathrm{A} \text{ ἢ } \Theta < \mathrm{A}.$$

Ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς ἔχει τὶς ἀκόλουθες ἄμεσες συνέπειες :

I) Τὸ ἄθροισμα σχετικῶν ἀριθμῶν $\geqslant 0$ εἶναι σχετικὸς ἀριθμὸς $\geqslant 0$. Ἂν ἕνας τουλάχιστο ἀπὸ αὐτοὺς τοὺς προσθετέους εἶναι > 0, τότε καὶ τὸ ἄθροισμα εἶναι > 0.

II) Τὸ ἄθροισμα σχετικῶν ἀριθμῶν $\leqslant 0$ εἶναι σχετικὸς ἀριθμὸς $\leqslant 0$. Ἂν ἕνας τουλάχιστο ἀπὸ αὐτοὺς τοὺς προσθετέους εἶναι < 0, τότε καὶ τὸ ἄθροισμα εἶναι < 0.

III) Τὸ 0 εἶναι οὐδέτερο στοιχεῖο γιὰ τὴν πράξη τῆς πρόσθεσης στὸ σύνολο R :

$$\alpha + 0 = 0 \quad \text{καὶ} \quad 0 + \alpha = 0 \quad \text{γιὰ κάθε} \quad \alpha \in R\,.$$

Κατὰ συνέπεια, οἱ μηδενικοὶ προσθετέοι σ᾽ ἕνα ἄθροισμα μποροῦν νὰ παραλείπωνται.

IV) Σ᾽ ἕνα ἄθροισμα μποροῦμε νὰ « συμπτύξουμε » δυὸ ἢ περισσότερους ὁμόσημους προσθετέους, δηλ. νὰ τοὺς ἀντικαταστήσουμε μὲ τὸ ἄθροισμά τους. Ἀντίστροφα, ἕναν προσθετέο μποροῦμε νὰ τὸν ἀντικαταστήσουμε μὲ δυὸ ἢ περισσότερους ὁμόσημους μὲ αὐτὸν ἀριθμοὺς ποὺ τὸν ἔχουν γιὰ ἄθροισμα. (Παρακάτω θὰ δείξουμε ὅτι καὶ ἡ σύμπτυξη ἑτερόσημων προσθετέων σ᾽ ἕνα ἄθροισμα δὲν ἀλλοιώνει τὸ ὁλικὸ ἄθροισμα).

V) Τὸ ἄθροισμα $x + x'$ δυὸ ἀντίθετων ἀριθμῶν x καὶ x' εἶναι $= 0$. Ἀντίστροφα, ἂν $\alpha, \beta \in R$ καὶ $\alpha + \beta = 0$, τότε οἱ α καὶ β εἶναι ἀντίθετοι ὁ ἕνας τοῦ ἄλλου : $\alpha = \beta'$ καὶ $\alpha' = \beta$.

VI) Τὸ ἄθροισμα $\alpha_1 + \ldots + \alpha_\nu$ δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἡ σειρὰ τῶν προσθετέων μεταβληθῆ. Εἰδικὰ ἔχουμε $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ γιὰ $\alpha, \beta \in R$. Αὐτὴ ἡ συνέπεια προκύπτει, ἐπειδή, κατὰ τὸν ὁρισμό, ἡ σειρὰ τῶν προσθετέων δὲν ἐπηρεάζει τὴν τιμὴ τῶν ἀπόλυτων ἀριθμῶν Θ καὶ Α ἀπὸ τοὺς ὁποίους καὶ μόνο ἐξαρτιέται τὸ ἄθροισμα.

VII) Ὁ ἀντίθετος τοῦ ἀθροίσματος $(\alpha_1 + \ldots + \alpha_\nu)$ σχετικὸς ἀριθμὸς ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα $(\alpha_1' + \ldots + \alpha_\nu')$ τῶν ἀντιθέτων τῶν προσθετέων :

$$(36.1) \qquad (\alpha_1 + \ldots + \alpha_\nu)' = \alpha_1' + \ldots + \alpha_\nu'\,.$$

Καὶ ἀλήθεια, ἂν στὸ ἄθροισμα $\alpha_1 + \ldots + \alpha_\nu$ ἀντιστοιχοῦν, σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμό, ἀπόλυτοι ἀριθμοὶ Θ, Α καὶ Δ, τότε στὸ ἄθροισμα $\alpha_1' + \ldots + \alpha_\nu'$ θὰ ἀντιστοιχοῦν οἱ ἀπόλυτοι ἀριθμοὶ

$$\Theta' = A \quad , \quad A' = \Theta \quad \text{καὶ} \quad \Delta' = \Delta\,.$$

Ἑπομένως εἶναι

$$\Theta' \geqq A' \ \text{ἢ}\ \Theta' \leqq A' \quad \text{καθόσο εἶναι} \quad \Theta \leqq A \ \text{ἢ}\ \Theta \geqq A\,.$$

Κατὰ συνέπεια :

$\alpha_\nu' + \ldots + \alpha_\nu' = +\Delta' = +\Delta$ ἢ $= -\Delta' = -\Delta$ καθόσο $\alpha_1 + \ldots + \alpha_\nu = -\Delta$ ἢ $+\Delta$.

Αὐτὸ ἀποδείχνει τὸν ἰσχυρισμὸ (36.1).

VIII) Θ' ἀποδείξουμε τώρα ὅτι ἰσχύει γενικά ἡ ἰδιότητα

(36.2) $\quad x + y + z = (x+y) + z$ γιὰ ὁποιαδήποτε $x, y, z \in R$.

'Απόδειξη. Τὸ ἀποδειχτέο ἰσχύει στὴν περίπτωση ὁμόσημων προσθετέων x, y, σύμφωνα μὲ τὴ συνέπεια IV). Ἄς εἶναι λοιπὸν οἱ x, y ἑτερόσημοι, ἤτοι ἢ $x < 0$ καὶ $y > 0$ ἢ $x > 0$ καὶ $y < 0$. Ἡ 2η περίπτωση ἀνάγεται στὴν πρώτη μὲ ἐναλλαγὴ τῶν x καὶ y βάσει τῆς συνέπειας VI).

Μὲ $x < 0$, $y > 0$ τὸ z μπορεῖ νὰ εἶναι ἢ 0 ἢ > 0 ἢ < 0.

Στὴν ὑποπερίπτωση $z = 0$ ἡ ἀλήθεια τῆς (36.2) εἶναι ἀμέσως φανερή, γιατὶ κατά τὴν III)

$$x + y + 0 = x + y = (x+y) + 0 .$$

Στὴν ὑποπερίπτωση

$$x = -X < 0 \quad , \quad y = +Y > 0 \quad , \quad z = +Z > 0$$

ἔχουμε ἀπὸ τὴ μιὰ μεριὰ

$$(36.3) \quad x + y + z = \begin{cases} (Y+Z)-X & \text{ὅταν } \ Y + Z \geqslant X \\ -(X-(Y+Z)) & \text{ὅταν } \ X \geqslant Y + Z , \end{cases}$$

καὶ ἀπὸ τὴν ἄλλη

$$(36.4) \quad (x+y)+z = \begin{cases} (Y-X)+Z \text{ ὅταν } Y \geqslant X \text{ ὁπότε καὶ } Y + Z \geqslant X \\ Z-(X-Y) \text{ ὅταν } X \geqslant Y \text{ καὶ } Z \geqslant X-Y \text{ ὁπότε } Y+Z \geqslant X \\ -((X-Y)-Z) \text{ ὅταν } X \geqslant Y \text{ καὶ } X-Y \geqslant Z \text{ ὁπότε } X \geqslant Y+Z. \end{cases}$$

Παραβάλλοντας τὶς (36.4) μὲ τὶς (36.3) βρίσκουμε μὲ χρήση τῶν **(1)**, **(2)** καὶ **(3)** τοῦ § 32, τὸ ἀποδειχτέο (36.2) στὴν προκείμενη ὑποπερίπτωση. Ἡ ὑπολειπόμενη ὑποπερίπτωση $x < 0$, $y > 0$, $z < 0$ ἀνάγεται στὴν προηγούμενη μὲ ἐναλλαγὴ τῶν x καὶ y καὶ μὲ θεώρηση τῶν $x^* = y' < 0$, $y^* = x' > 0$ καὶ $z^* = z' > 0$. Γιὰ τοὺς x^*, y^*, z^* ἰσχύει, κατὰ τὴν ὑποπερίπτωση ποὺ πραγματευτήκαμε παραπάνω :

$$x^* + y^* + z^* = (x^*+y^*) + z^* ,$$

ἤτοι, μὲ χρήση τῆς VI ,

$$x' + y' + z' = (x'+y') + z' \cdot$$

ἐπομένως, σύμφωνα μὲ τὴν VII,

$$x+y+z = (x'+y'+z')' = ((x'+y')+z')' = (x'+y')' + z = (x+y)+z, \text{ ὅ.ἔ.δ.}$$

Σχόλιο. Ἀπὸ τὰ παραπάνω ἀπορρέει ὅτι τὸ ἄθροισμα ν προσθετέων ($\nu > 2$) στὸ R μποροῦμε νὰ τὸ βροῦμε ἐκτελώντας $\nu - 1$ ἐπάλληλες προσθέσεις ἑνὸς μόνο στοιχείου τοῦ R κάθε φορά. Π.χ.

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = (((\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_3) + \alpha_4) + \alpha_5 \ .$$

IX) Μποροῦμε τώρα ν' ἀποδείξουμε τὴν ἰσχὺ τῆς προσεταιριστικῆς ἰδιότητας: $(\alpha+\beta) + \gamma = \alpha + (\beta+\gamma)$ γιὰ $\alpha, \beta, \gamma \in R$.

Πραγματικά, σύμφωνα μὲ τὴν VIII καί τὴν VI ἔχουμε:

$$(\alpha+\beta) + \gamma = \alpha + \beta + \gamma = \beta + \gamma + \alpha = (\beta+\gamma) + \alpha = \alpha + (\beta+\gamma) \ .$$

X) Ἰσχύει ἡ ἰδιότητα τῆς διαγραφῆς: γιὰ $\alpha, \beta, \gamma \in R$ ἔχουμε:

$$\alpha + \gamma = \beta + \gamma \Rightarrow \alpha = \beta \cdot$$

Καὶ ἀλήθεια, ἀπὸ τήν $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ μὲ πρόσθεση τοῦ γ', ἀντιθέτου τοῦ γ, καὶ στὰ δυὸ μέλη τῆς $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$, ἀπορρέει ὅτι

$$\alpha+\gamma+\gamma' = \beta+\gamma+\gamma' \Rightarrow \alpha+(\gamma+\gamma') = \beta+(\gamma+\gamma') \Rightarrow \alpha+0 = \beta+0 \Rightarrow \alpha=\beta.$$

XI) Ἰσχύει γιὰ τὴν πρόσθεση στὸ R ἡ μονοτονικὴ ἰδιότητα:

$x < y \Rightarrow x + z < y + z$ γιὰ ὁποιαδήποτε $x, y, z \in R$.

Ἀπόδειξη. Διακρίνουμε τὶς ἀκόλουθες, μόνες δυνατές, τρεῖς περιπτώσεις:

$$(1)\ \ 0 \leqslant x < y \ , \quad (2)\ \ x < 0 < y \ , \quad (3)\ \ x < y \leqslant 0 \ .$$

(1) Ἄς εἶναι $x = +X$, $y = +Y$, ὁπότε $0 \leqslant X < Y$. Τὸ z μπορεῖ νὰ εἶναι ἢ $\geqslant 0$, ἢ < 0 μὲ $|z| \leqslant X$, ἢ < 0 μὲ $X < |z| \leqslant Y$, ἢ < 0 μὲ $|z| > Y$.

α) Ἄς εἶναι $z = +Z \geqslant 0$. Ἔχουμε τότε

$$x + z = X + Z \quad \text{καὶ} \quad y + z = Y + Z \ .$$

Ἐπειδὴ στὸ σύνολο $\mathscr{G}$ $X < Y \Leftrightarrow X + Z < Y + Z$, συμπεραίνουμε ὅτι

$$x + z < y + z \ , \quad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

β) Ἄς εἶναι $z = -Z$ μὲ $Z \leqslant X < Y$. Ἔχουμε τότε

$$x + z = X - Z \quad \text{καὶ} \quad y + z = Y - Z \ .$$

Ἐπειδή, ὅπως εὔκολα προκύπτει, $X - Z < Y - Z \Leftrightarrow X < Y$, συμπεραίνουμε ὅτι

$$x + z < y + z \ , \ \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

γ) Ἄς εἶναι $z = -Z$ μὲ $0 \leqslant X < Z < Y$. Ἔχουμε τότε

$$x + z = -(Z - X) < 0 \quad \text{καὶ} \quad y + z = Y - Z \geqslant 0 \ ,$$

ἑπομένως

$$x + z < y + z \ , \ \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

δ) Ἄς εἶναι $z = -Z$ μὲ $0 \leqslant X < Y < Z$. Ἔχουμε τότε

$$x + z = -(Z - X) < 0 \quad \text{καὶ} \quad y + z = -(Z - Y) < 0 \ .$$

Ἐπειδή, ὅπως εὔκολα προκύπτει, $Z - X > Z - Y$ καὶ $|x + z| = Z - X$, $|y + z| = Z - Y$, συμπεραίνουμε ὅτι

$$x + z < y + z \ , \ \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

Σχόλιο. Εἰδικὰ γιὰ $x = 0$ καὶ $0 < y$ ἔχουμε:

$0 + z < y + z$, ἄρα $0 < y \Rightarrow z < y + z$ γιὰ κάθε $z \in R$.

Ἀπὸ τὴν τελευταία συνεπαγωγὴ συμπεραίνουμε τὴν ἀκόλουθη:

$$x < 0 \Rightarrow x + z < z \ \text{ γιὰ κάθε } \ z \in R \ .$$

Πραγματικά, $x < 0 \Rightarrow x' > 0$ καὶ ἑπομένως

$$z' < x' + z' \ \text{ γιὰ κάθε } \ z' \in R \ ,$$

ἄρα, σύμφωνα μὲ τὸ θεώρημα τοῦ § 35 καὶ τὴ συνέπεια VII,

$$x + z < z \ \text{ γιὰ κάθε } \ z \in R \ .$$

(2). Ἄς εἶναι $x < 0 < y$. Σύμφωνα μὲ τὸ προηγούμενο Σχόλιο ἔχουμε:

$$x < 0 \Rightarrow x + z < z \quad \text{καὶ} \quad 0 < y \Rightarrow z < y + z \ \cdot$$

ἑπομένως:

$$x + z < z < y + z \,, \quad \text{ἄρα} \quad x + z < y + z \,, \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

(3) Ἄς εἶναι $x < y \leqslant 0$. Θὰ εἶναι τότε $0 \leqslant y' < x'$, ἄρα, κατὰ τὴν (1), $y' + z' < x' + z'$ γιὰ κάθε $z' \in R$. Ἑπομένως: $(x'+z')' < (y'+z')'$ κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ § 35, ἤτοι (βλ. VII)

$$x + z < y + z \quad , \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

XII) Ἀπὸ τὰ παραπάνω συνάγονται εὔκολα τὰ ἑξῆς γιὰ $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha < \beta\\ \gamma < \delta\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha+\gamma < \beta+\delta \,, \quad \left.\begin{array}{l}\alpha < \beta\\ \gamma \leqslant \delta\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha+\gamma < \beta+\delta \,, \quad \left.\begin{array}{l}\alpha \leqslant \beta\\ \gamma \leqslant \delta\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha+\gamma \leqslant \beta+\delta \,.$$

§ 37. Ἀφαίρεση στὸ σύνολο R.

Θεωροῦμε στό σύνολο R τὴν ἐξίσωση $\alpha + x = \beta$ μὲ ἄγνωστο τὸ x. Λέγω ὅτι ἔχει μιὰ καὶ μόνο μιὰ λύση, τὴ $x = \beta + \alpha'$, ὅπου α' ὁ ἀντίθετος τοῦ α.
Πραγματικά, ἂν ὁ σχετικὸς ἀριθμὸς x εἶναι λύση της, θὰ ἰσχύη ὅτι

$$\alpha' + \alpha + x = \alpha' + \beta \quad \text{ἤτοι} \quad 0 + x = x = \alpha' + \beta = \beta + \alpha'.$$

Ἀντίστροφα, ἂν μέσα στὴν ἐξίσωση θέσουμε $x = \beta + \alpha'$, θὰ λάβουμε:

$$\alpha + (\beta+\alpha') = \alpha + (\alpha'+\beta) = (\alpha+\alpha') + \beta = 0 + \beta = \beta \,.$$

Ὥστε ὁ σχετικὸς ἀριθμὸς $x = \beta + \alpha'$ ἱκανοποιεῖ τὴν ἐξίσωση καὶ εἶναι ὁ μόνος ποὺ πράττει τοῦτο.

Τὴ λύση τῆς ἐξίσωσης $\alpha + x = \beta$ τὴν παριστάνουμε μὲ τὸ σύμβολο

$\beta - \alpha$ (ποὺ διαβάζουμε: βῆτα μεῖον ἄλφα)

καὶ τὴν καλοῦμε *διαφορὰ* τοῦ β ὡς πρὸς τὸ α. Ἔχουμε λοιπὸν

$$\alpha + (\beta-\alpha) = (\beta-\alpha) + \alpha = \alpha \,.$$

Τὴ διμελῆ πράξη, ποὺ στὸ ζεῦγος (β, α) ἀντιστοιχίζει τὴ διαφορὰ $\beta - \alpha$, τὴν καλοῦμε *ἀφαίρεση τοῦ α ἀπὸ τὸ β*. Κατὰ τὸν ὁρισμὸ τῆς διαφορᾶς εἶναι

$$\beta - \alpha = \beta + \alpha' \quad \text{καὶ} \quad \beta + \alpha = \beta - \alpha' \;\cdot$$

στὸ σύνολο R λοιπόν, ὄχι μόνο κάθε ἀφαίρεση ἀριθμοῦ εἶναι δυνατὴ καὶ ἀνάγεται σὲ μιὰ πρόσθεση ἀριθμοῦ, ἀλλὰ καὶ κάθε πρόσθεση ἀριθμοῦ ἰσοδυναμεῖ μὲ μιὰν ἀφαίρεση ἀριθμοῦ.

Συμφωνοῦμε τώρα ν' ἀντικαταστήσουμε μὲ τὸ σύμβολο $-x$ τὸ σύμβολο x' ποὺ χρησιμοποιήσαμε ὡς ἐδῶ γιὰ νὰ παριστάνουμε τὸν ἀντίθετο τοῦ σχετικοῦ ἀριθμοῦ x. Μποροῦμε ὕστερα ἀπὸ αὐτὴ τὴ σύμβαση νὰ ἑρμηνεύσουμε τὴ γραφὴ [τὴν παράσταση] $\beta - \alpha$ ὄχι μόνο σὰν διαφορὰ τοῦ β ὡς πρὸς α ἀλλὰ καὶ σὰν ἁπλοποιημένη γραφὴ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ β μὲ τὸ $-\alpha$, γιατὶ

$$\beta - \alpha = \beta + \alpha' = \beta + (-\alpha) .$$

Ὅμοια μποροῦμε τὴ γραφὴ $\beta + \alpha$ νὰ τὴν ἑρμηνεύσουμε καὶ σὰν διαφορὰ τοῦ β ὡς πρὸς τὸ $-\alpha$, γιατὶ

$$\beta + \alpha = \beta - \alpha' = \beta - (-\alpha) .$$

Ἡ ἴδια σύμβαση μᾶς ἐπιτρέπει νὰ δώσουμε νόημα καὶ στὴ γραφὴ $-\alpha + \beta$, τὸ ἀκόλουθο :

$$-\alpha + \beta = \alpha' + \beta = \beta + \alpha' = \beta - \alpha .$$

Σχόλιο. Στὸ σύνολο $\mathscr{G}$ τῶν ἀπόλυτων ἀριθμῶν μιὰ ἀφαίρεση $B - A$ εἶναι δυνατὴ ὅταν καὶ μόνον ὅταν $B \geqq A$. Ἑπομένως καὶ μιὰ διαδοχὴ ἐπάλληλων πράξεων πρόσθεσης καὶ ἀφαίρεσης, ὅπως π.χ. ἡ

$$A - B - \Gamma + \Delta - E = (((A - B) - \Gamma) + \Delta) - E ,$$

εἶναι δυνατή, ὅταν καὶ μόνον ὅταν ἡ καθεμιὰ ἀπὸ τὶς διαδοχικὲς ἐπάλληλες πράξεις εἶναι ἐκτελέσιμη· στὸ παράδειγμα μας π.χ. ὅταν καὶ μόνον ὅταν

$$A \geqq B \quad , \quad (A - B) \geqq \Gamma \quad , \quad ((A - B) - \Gamma) + \Delta \geqq E .$$

Στὸ σύνολο R δὲν ὑπάρχει, κατὰ τὰ προηγούμενα, κανένας τέτοιος περιορισμός· μιὰ γραφή, ὅπως π.χ. ἡ

$$(37.1) \qquad \alpha - \beta - \gamma + \delta - \varepsilon = (((\alpha - \beta) - \gamma) + \delta) - \varepsilon \quad \text{μὲ} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in R ,$$

παριστάνει πάντα ἕναν ὁρισμένο σχετικὸ ἀριθμό. Τὸν ἴδιο ἀριθμό παριστάνει, ὕστερα ἀπὸ τὴν παραπάνω σύμβασή μας, καὶ ἡ γραφὴ

$$\alpha + (-\beta) + (-\gamma) + \delta + (-\varepsilon)$$

καθὼς καὶ οἱ γραφὲς

$$(37.2) \qquad -\beta + \alpha - \gamma - \varepsilon + \delta , \quad -\varepsilon + \delta - \gamma - \beta + \alpha , \quad -\gamma - \beta - \varepsilon + \delta + \alpha \quad \text{κτλ.}$$

ἑρμηνευμένες κατὰ τὴ σύμβασή μας σὰν ἀθροίσματα σχετικῶν ἀριθμῶν:

$$(-\beta)+\alpha+(-\gamma)+(-\varepsilon)+\delta\,,\ (-\varepsilon)+\delta+(-\gamma)+(-\beta)+\alpha,$$
$$(-\gamma)+(-\beta)+(-\varepsilon)+\delta+\alpha \quad \text{κτλ.}$$

Πραγματικά, ἡ μεταβολὴ τῆς σειρᾶς τῶν προσθετέων σ᾽ ἕνα ἄθροισμα δὲν ἀλλοιώνει τὸ ἄθροισμα. Αὐτὰ δικαιολογοῦν τὴν ὀνομασία *ἀλγεβρικὸ ἄθροισμα* ἡ ὁποία δίνεται σὲ παραστάσεις τῆς μορφῆς (37.1) ἢ (37.2).

Παρατηροῦμε τέλος ὅτι ἡ γραφὴ

$$-\alpha+\beta+\gamma-\delta+\varepsilon$$

παριστάνει τὸν ἀντίθετο τοῦ ἀριθμοῦ ποὺ παριστάνει ἡ (37.1), γιατί, σύμφωνα μὲ τὴν συνέπεια VII τοῦ προηγουμένου §, ἔχουμε:

$$(\alpha+(-\beta)+(-\gamma)+\delta+(-\varepsilon))'=(-\alpha)+\beta+\gamma+(-\delta)+\varepsilon=-\alpha+\beta+\gamma-\delta+\varepsilon\,.$$

Ἑπομένως γιὰ τὴν ἀφαίρεση τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος (37.1) ἀπὸ ἕνα σχετικὸ ἀριθμὸ ζ ἰσχύει τὸ ἑξῆς:

$$\zeta-(\alpha-\beta-\gamma+\delta-\varepsilon)=\zeta+(\alpha-\beta-\gamma+\delta-\varepsilon)'=\zeta-\alpha+\beta+\gamma-\delta+\varepsilon\,.$$

Ἀπὸ τὰ παραπάνω προκύπτουν οἱ γνωστοὶ κανόνες γιὰ τὴν πρόσθεση καὶ τὴν ἀφαίρεση ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος ἐγκλεισμένου σὲ μιὰ παρένθεση.

Θὰ διατυπώσουμε τώρα δυὸ συνέπειες ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τῆς διαφορᾶς καὶ ἀπὸ τὶς ἰδιότητες τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν τὶς ὁποῖες γνωρίσαμε ἤδη.

I) *Γιὰ $\alpha,\beta\in R$ ἰσχύει ἡ ἰσοδυναμία:* $\alpha<\beta \Leftrightarrow (\beta-\alpha)>0$.

Ἀπόδειξη. 1ο ἰσχύει ὅτι $\alpha<\beta \Rightarrow (\beta-\alpha)>0$, γιατί, κατὰ τὴ συνέπεια XI τοῦ § 36, ἔχουμε:

$(\beta-\alpha)\leqslant 0 \Rightarrow \alpha+(\beta-\alpha)\leqslant\alpha+0 \Rightarrow \beta\leqslant\alpha$ ἀντιφατικὰ πρὸς τὴν ὑπόθεση $\alpha<\beta$.

2ο ἰσχύει ὅτι $(\beta-\alpha)>0 \Rightarrow \alpha<\beta$, γιατὶ κατὰ τὴν XI τοῦ § 36 ἔχουμε:

$$\alpha\geqslant\beta \Rightarrow \alpha+(-\alpha)\geqslant\beta+(-\alpha) \Rightarrow 0\geqslant\beta-\alpha\ ,$$

ἀντίθετα πρὸς τὴν ὑπόθεση $0<(\beta-\alpha)$.

II) *Γιὰ $\alpha,\beta,\gamma\in R$ εἶναι* $(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)=\alpha-\beta$.

Ἀπόδειξη. Καὶ ἀλήθεια ἔχουμε:

$$(\beta+\gamma)+(\alpha-\beta)=\beta+\gamma+\alpha+(-\beta)=\beta+(-\beta)+\alpha+\gamma=0+(\alpha+\gamma)=\alpha+\gamma\,.$$

§ 38. Πολλαπλασιασμὸς στὸ R .

Καλοῦμε *γινόμενο* τῶν ν σχετικῶν ἀριθμῶν $\alpha_1, \cdots, \alpha_\nu$ $(\nu \geqslant 2)$ καὶ παριστάνουμε μὲ $\alpha_1 \cdots \alpha_\nu$ τὸν σχετικὸ ἀριθμὸ ποὺ ἔχει ἀπόλυτη τιμὴ τὸ γινόμενο $|\alpha_1| \cdots |\alpha_\nu|$ τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τῶν «παραγόντων» $\alpha_1, \cdots, \alpha_\nu$ καὶ πρόσημο τὸ $+$ ἢ τὸ $-$ καθόσο τὸ πλῆθος τῶν παραγόντων ποὺ εἶναι < 0 εἶναι ἀριθμὸς ἄρτιος ἢ περιττός. (Ὑπενθυμίζουμε ὅτι ὁ ἀριθμὸς 0 εἶναι ἄρτιος). Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ αὐτὸ ἕπονται ἀμέσως τὰ ἑξῆς :

I) Τὸ γινόμενο $\alpha_1 \cdots \alpha_\nu$ μηδενίζεται ὅταν καὶ μόνον ὅταν ἕνας τουλάχιστο ἀπὸ τοὺς παράγοντες εἶναι $= 0$. Στὴν περίπτωση αὐτή, ἐννοεῖται, τὸ πρόσημο $+$ ἢ $-$ γιὰ τὸ γινόμενο μπορεῖ νὰ παραλείπεται σύμφωνα μὲ τὴ σύμβασή μας : $+0 = -0 = 0$.

II) Τὸ γινόμενο δυὸ ὁμόσημων ἀριθμῶν εἶναι $\geqslant 0$, τὸ γινόμενο δυὸ ἑτερόσημων εἶναι < 0.

III) Γιὰ τὸ γινόμενο ἰσχύει ἡ ἀντιμεταθετικὴ ἰδιότητα. Π.χ.

$$\alpha_1\alpha_2 = \alpha_2\alpha_1\,.$$

IV) Σ' ἕνα γινόμενο μποροῦμε δυὸ ἢ περισσότερους παράγοντες νὰ τοὺς συμπτύξουμε, δηλ. νὰ τοὺς ἀντικαταστήσουμε μὲ τὸ γινόμενό τους· ἑπομένως ἕνας παράγοντας μπορεῖ ν' ἀντικατασταθῆ μὲ δυὸ ἢ περισσότερους ποὺ τὸν ἔχουν γιὰ γινόμενο.

Ἀπόδειξη. Ἡ σύμπτυξη δὲν μεταβάλλει τὴν ἀπόλυτη τιμὴ τοῦ γινομένου $\alpha_1 \cdots \alpha_\nu$, ἐπειδὴ σ' ἕνα γινόμενο ἀπόλυτων ἀριθμῶν ἡ σύμπτυξη δὲν ἀλλοιώνει τὸ γινόμενο· (αὐτὸ προκύπτει ἀπὸ τὴν προσεταιριστικὴ ἰδιότητα, § 29, τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στὸ σύνολο $\mathcal{G}$). Ἐξάλλου, ἂν οἱ ἀρνητικοὶ παράγοντες τοῦ γινομένου ποὺ θεωροῦμε εἶναι m κατὰ τὸ πλῆθος καὶ ἂν ἀνάμεσα στοὺς παράγοντες ποὺ συμπτύσσουμε n εἶναι ἀρνητικοί, ὅπου φυσικὰ $0 \leqslant n \leqslant m$, τότε τὸ πρόσημο τοῦ γινομένου μετὰ τὴ σύμπτυξη εἶναι τὸ ἴδιο μὲ τὸ πρόσημο τοῦ $(-1)^{m-n} \cdot (-1)^n = (-1)^m$, ἄρα τὸ ἴδιο μὲ τὸ πρόσημο τοῦ γινομένου $\alpha_1 \cdots \alpha_\nu$ πρὶν ἀπὸ τὴ σύμπτυξη .

V) Γιὰ τὸ γινόμενο σχετικῶν ἀριθμῶν ἰσχύει ἡ προσεταιριστικὴ ἰδιότητα $(\alpha_1\alpha_2)\,.\,\alpha_3 = \alpha_1(\alpha_2\alpha_3)$.
Πραγματικὰ $(\alpha_1\alpha_2)\cdot\alpha_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \alpha_1\cdot(\alpha_2\alpha_3)$ κατὰ τὴν προηγούμενη συνέπεια .

VI) Ὁ πολλαπλασιασμὸς στὸ R εἶναι ἐπιμεριστικὸς ὡς πρὸς τὴν πρόσθεση καὶ τὴν ἀφαίρεση :

$$(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma \quad \text{καὶ} \quad (\alpha-\beta)\gamma = \alpha\gamma - \beta\gamma \,.$$

Ἀπόδειξη. Ἀρκεῖ φυσικὰ ν' ἀποδείξουμε τὸ πρῶτο, γιατὶ $\alpha - \beta = \alpha + \beta'$ καὶ ἑπομένως $(\alpha-\beta)\gamma = (\alpha+\beta')\gamma = \alpha\gamma + \beta'\gamma = \alpha\gamma + (-\beta\gamma) = \alpha\gamma - \beta\gamma$. Ἡ ἰσχὺς τοῦ ἀποδεικτέου $(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$ εἶναι φανερή, ὅταν ἕνας τουλάχιστο ἀπὸ τοὺς σχετικοὺς ἀριθμοὺς α, β, γ εἶναι $= 0$. Π. χ. $(0+\beta)\gamma = \beta\gamma = 0 + \beta\gamma = 0 \cdot \gamma + \beta\gamma$. Ἄς εἶναι λοιπὸν $\alpha\beta\gamma \neq 0$, δηλαδή, σύμφωνα μὲ τὴν I), $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$. Παρατηροῦμε πρῶτα ὅτι

$$(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma \Rightarrow (\alpha'+\beta')\gamma' = \alpha'\gamma' + \beta'\gamma' \,,$$

γιατὶ ἡ ἀλλαγὴ τοῦ προσήμου καὶ τῶν δυὸ παραγόντων ἑνὸς γινομένου δὲν ἀλλοιώνει τὸ γινόμενο. Κατὰ συνέπεια, ἀπὸ τὶς ἀκόλουθες ὀκτώ, μόνες δυνατὲς κατανομὲς τῶν προσήμων + καὶ — στοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς α, β, γ :

α	β	γ	α	β	γ
+	+	+	—	—	—
+	+	—	—	—	+
+	—	+	—	+	—
+	—	—	—	+	+

ἀρκεῖ γιὰ τὸ σκοπό μας νὰ θεωρήσουμε μόνο τὶς τέσσερις τῆς στήλης ἀριστερά.

(1). Εἶναι τότε

$$\alpha = +A \,,\quad \beta = +B \,,\quad \gamma = +\Gamma \,,\quad \alpha+\beta = A + B \,,$$
$$(\alpha+\beta)\gamma = (A+B)\Gamma \,,\quad \alpha\gamma = A\Gamma \,,\quad \beta\gamma = B\Gamma \,.$$

Γιὰ τὰ στοιχεῖα A, B, Γ τοῦ συνόλου $\mathcal{G}$ ἰσχύει, ὅπως εἴδαμε στὸν § 30, ἡ ἐπιμεριστικὴ ἰδιότητα $(A+B)\Gamma = A\Gamma + B\Gamma$. Ἑπομένως εἶναι καὶ

$$(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma \,,\quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

(2). Εἶναι τότε

$$\alpha = +A \,,\quad \beta = +B \,,\quad \gamma = -\Gamma \,,\quad \alpha+\beta = A + B$$
$$(\alpha+\beta)\gamma = -(A+B)\Gamma \,,\quad \alpha\gamma = -A\Gamma \,,\quad \beta\gamma = -B\Gamma \,.$$

Ἔχουμε ὅμως

$-(\mathrm{A}+\mathrm{B})\Gamma = -(\mathrm{A}\Gamma+\mathrm{B}\Gamma)$ καὶ $\alpha\gamma + \beta\gamma = -(-\alpha\gamma-\beta\gamma) = -(\mathrm{A}\Gamma+\mathrm{B}\Gamma)$.

Ἄρα

$$(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma \quad , \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

(3). Εἶναι τότε $\alpha = +\mathrm{A}$, $\beta = -\mathrm{B}$, $\gamma = +\Gamma$, $\alpha\gamma = \mathrm{A}\Gamma$, $\beta\gamma = -\mathrm{B}\Gamma$ καὶ

$$(38.1) \quad \alpha+\beta = \begin{cases} \mathrm{A}-\mathrm{B} \text{ ὅταν } \mathrm{A}\geqslant\mathrm{B} \\ -(\mathrm{B}-\mathrm{A}) \text{ ὅταν } \mathrm{A}<\mathrm{B} \end{cases}, \quad (\alpha+\beta)\gamma = \begin{cases} (\mathrm{A}-\mathrm{B})\Gamma \text{ ὅταν } \mathrm{A}\geqslant\mathrm{B} \\ -(\mathrm{B}-\mathrm{A})\Gamma \text{ὅταν } \mathrm{A}<\mathrm{B} \end{cases}$$

Ἔχουμε ὅμως

$$\alpha\gamma + \beta\gamma = \begin{cases} \mathrm{A}\Gamma-\mathrm{B}\Gamma = (\mathrm{A}-\mathrm{B})\Gamma & \text{ὅταν } \mathrm{A}\Gamma \geqslant \mathrm{B}\Gamma \Leftrightarrow \mathrm{A} \geqslant \mathrm{B} \\ -(\mathrm{B}\Gamma-\mathrm{A}\Gamma) = -(\mathrm{B}-\mathrm{A})\Gamma & \text{ὅταν } \mathrm{B}\Gamma > \mathrm{A}\Gamma \Leftrightarrow \mathrm{B} > \mathrm{A}\,. \end{cases}$$

Μιὰ ἁπλὴ παραβολὴ τῆς σχέσης αὐτῆς μέ τὴ δεύτερη ἀπὸ τὶς σχέσεις (38.1) δείχνει ὅτι $(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$, ὅ.ἔ.δ.

(4). Εἶναι τότε

$$\alpha = +\mathrm{A} \quad , \quad \beta = -\mathrm{B} \quad , \quad \gamma = -\Gamma, \alpha + \beta = \begin{cases} \mathrm{A} - \mathrm{B} \text{ ὅταν } \mathrm{A} > \mathrm{B} \\ -(\mathrm{B}-\mathrm{A}) \text{ ὅταν } \mathrm{A} \leqslant \mathrm{B} \end{cases}$$

$$\alpha\gamma = -\mathrm{A}\Gamma \quad , \quad \beta\gamma = \mathrm{B}\Gamma \quad ,$$

$$(\alpha+\beta)\gamma = \begin{cases} -(\mathrm{A}-\mathrm{B})\Gamma & \text{ὅταν } \mathrm{A} > \mathrm{B} \\ (\mathrm{B}-\mathrm{A})\Gamma & \text{ὅταν } \mathrm{A} \leqslant \mathrm{B} \end{cases},$$

$$\alpha\gamma + \beta\gamma = \begin{cases} \mathrm{B}\Gamma - \mathrm{A}\Gamma = (\mathrm{B}-\mathrm{A})\Gamma & \text{ὅταν } \mathrm{A} \leqslant \mathrm{B} \\ -(\mathrm{A}\Gamma-\mathrm{B}\Gamma) = -(\mathrm{A}-\mathrm{B})\Gamma & \text{ὅταν } \mathrm{A} > \mathrm{B}\,. \end{cases}$$

Παραβάλλοντας τὰ τελευταῖα ἀποτελέσματα συμπεραίνουμε ὅτι

$$(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma \,, \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

VII) Γιὰ τὸν πολλαπλασιασμὸ στὸ R ἰσχύει ἡ μονοτονικὴ ἰδιότητα:

$$(\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{R}\,,\ \alpha < \beta \text{ καὶ } \gamma > 0) \Rightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma\,.$$

Ἀπόδειξη. Σύμφωνα μὲ τὴν I) τοῦ § 37 ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι $\beta\gamma - \alpha\gamma > 0$. Κατὰ τὴν ἐπιμεριστικὴ ἰδιότητα εἶναι ὅμως $\beta\gamma - \alpha\gamma = (\beta-\alpha)\gamma$. Καὶ ἐπειδή, κατὰ τὴν I) τοῦ § 37, ἡ ὑπόθεση $\alpha < \beta$ ἔχει γιὰ συνέπεια τὴ σχέση $\beta - \alpha > 0$, θὰ εἶναι

$$((\beta - \alpha) > 0\,,\ \gamma > 0) \Rightarrow (\beta - \alpha)\gamma > 0\,,$$

ἄρα καὶ $$\beta\gamma - \alpha\gamma > 0\,,\quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

VII) $$(\alpha, \beta, \gamma \in R\,,\ \alpha < \beta \text{ καὶ } \gamma < 0) \Rightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma\,.$$

Ἀπόδειξη. Εἶναι $\alpha\gamma - \beta\gamma = (\alpha - \beta)\gamma$, ὅπου $\alpha - \beta < 0$ καὶ $\gamma < 0$ ἄρα $(\alpha - \beta)\gamma > 0$, καὶ ἑπομένως $\alpha\gamma - \beta\gamma > 0$, πράγμα ποὺ συνεπάγεται τὸ ἀποδειχτέο $\alpha\gamma > \beta\gamma$ (κατὰ τὴν I) τοῦ § 37).

IX) Ὁ ἀριθμὸς 1 εἶναι οὐδέτερο στοιχεῖο γιὰ τὸν πολλαπλασιασμὸ στὸ R :

$$1 \cdot \alpha = \alpha \quad \text{γιὰ κάθε} \quad \alpha \in R\,.$$

Ἀπόδειξη. Πραγματικὰ εἶναι $|1 \cdot \alpha| = 1 \cdot |\alpha| = |\alpha|$ καὶ $\operatorname{sign}(1 \cdot \alpha) = \operatorname{sign} \alpha$, ὅταν $\alpha \neq 0$ · Γιὰ $\alpha = 0$ εἶναι $1 \cdot 0 = 0$. Ὥστε, γιὰ κάθε $\alpha \in R$, $1 \cdot \alpha = \alpha$.

§ 39. Διαίρεση στὸ R.

Θεωροῦμε στὸ σύνολο R τὴν ἐξίσωση $\alpha x = \beta$, ὅπου $\alpha \neq 0$ καὶ x ὁ ἄγνωστος. Ἂν $\beta = 0$, τότε ἡ ἐξίσωση ἔχει στὸ R μιὰ καὶ μόνο μιὰ λύση, τὴ $x = 0$, σύμφωνα μὲ τὴν I) τοῦ § 38. Ἂς εἶναι λοιπὸν $\beta \neq 0$. Ἂν ὁ ἀριθμὸς $x \in R$ εἶναι λύση τῆς ἐξίσωσης, τότε πρέπει νὰ ἔχουμε $|x| \neq 0$ καθὼς καὶ

$$|\alpha|\,|x| = |\beta|\quad,\quad \operatorname{sign} x = \operatorname{sign} \alpha\beta\,.$$

Ὥστε ἡ λύση x πρέπει νὰ ἔχη ἀπόλυτη τιμὴ $\dfrac{|\beta|}{|\alpha|}$ καὶ πρόσημο τὸ + ἢ —, καθόσο οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι ὁμόσημοι ἢ ἑτερόσημοι.

Ἀντίστροφα, ἂν συμφωνήσουμε νὰ παραστήσουμε μὲ $\dfrac{\beta}{\alpha} = \beta/\alpha$ τὸν ἐντελῶς ὁρισμένο σχετικὸ ἀριθμὸ ποὺ ἔχει ἀπόλυτη τιμὴ $\dfrac{|\beta|}{|\alpha|}$ καὶ πρόσημο τὸ + ἢ τὸ — καθόσο $\alpha\beta > 0$ ἢ $\alpha\beta < 0$, τότε, σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸ ποὺ δώσαμε γιὰ τὸ γινόμενο δυὸ σχετικῶν ἀριθμῶν, θὰ εἶναι

$$\alpha \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \alpha = \beta\,.$$

Ὥστε ἡ ἐξίσωση $\alpha x = \beta$, μὲ $\alpha \neq 0$, ἔχει, καὶ στὴν περίπτωση $\beta = 0$ καὶ στὴν περίπτωση $\beta \neq 0$, μιὰ καὶ μόνο μιὰ λύση · τὴν ὀνομάζουμε *πηλίκο τοῦ β διὰ α* καὶ τὴν παριστάνουμε μὲ β/α (ὄχι μόνον ὅταν $\beta \neq 0$ ἀλλὰ καὶ ὅταν $\beta = 0$, δηλ. θέτουμε $0/\alpha = 0$). Ἡ πράξη ποὺ στὸ ζεῦγος (β, α) μὲ $\alpha \neq 0$ ἀντιστοιχίζει τὸν ἀριθμὸ β/α λέγεται *διαίρεση τοῦ β διὰ α*.

Διαίρεση μὲ «διαιρέτη» $\alpha = 0$ δὲν εἰσάγουμε, γιατί, στὴν περίπτωση ποὺ εἶναι $\beta \neq 0$, ἡ ἐξίσωση $0 \cdot x = \beta$ δὲν ἔχει λύση στὸ R καί, στὴν περίπτωση $\beta = 0$, ἡ ἐξίσωση $0 \cdot x = 0$ δὲν καθορίζει τὴν τιμὴ τοῦ ἀγνώστου, ἀλλὰ ἐπαληθεύεται ἀπὸ κάθε σχετικὸ ἀριθμὸ x.

Ἀπὸ τὸν παραπάνω ὁρισμὸ ἕπονται εὔκολα οἱ κύριες ἰδιότητες τῆς διαίρεσης στὸ σύνολο R. Ἀναφέρουμε παρακάτω τὶς ἀκόλουθες:

I) Τὸ πηλίκο β/α εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς ὅταν οἱ «ὅροι» β καὶ α τῆς διαίρεσης εἶναι καὶ οἱ δυὸ θετικοὶ ἢ καὶ οἱ δυὸ ἀρνητικοί, εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ὅταν οἱ δυὸ ὅροι τῆς διαίρεσης εἶναι ἑτερόσημοι (ὁπότε καὶ $\beta\alpha < 0$).

II) Ἀπὸ τὴ σχέση $\alpha x = \beta$, μὲ $\alpha \neq 0$, ποὺ ἱκανοποιεῖ ὁ σχετικὸς ἀριθμὸς $x_1 = \dfrac{\beta}{\alpha}$, ἕπεται ὅτι

$$\alpha x_1 \cdot \gamma = \alpha\gamma \cdot x_1 = \beta\gamma \quad \text{γιὰ κάθε } \gamma \neq 0 \text{ ὁπότε καὶ } \alpha\gamma \neq 0 .$$

Ἄρα

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha\gamma} = \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{γιὰ κάθε } \gamma \in R \text{ μὲ } \gamma \neq 0 .$$

III) Γιὰ $\alpha \neq 0$ ἰσχύει ὅτι $\dfrac{\beta}{\alpha} = \beta \cdot \dfrac{1}{\alpha}$, ἤτοι διαίρεση διὰ α ἰσοδυναμεῖ μὲ πολλαπλασιασμὸ ἐπὶ $\dfrac{1}{\alpha}$, τὸν «ἀντίστροφο» τοῦ α.

Πραγματικά, ἔχουμε

$$\left|\beta \cdot \frac{1}{\alpha}\right| = |\beta| \cdot \left|\frac{1}{\alpha}\right| = |\beta| \cdot \frac{1}{|\alpha|} = \frac{|\beta|}{|\alpha|}$$

καί, ὅταν $\beta \neq 0$, τότε

$$\operatorname{sign}\frac{\beta}{\alpha} = \operatorname{sign}\left(\beta \cdot \frac{1}{\alpha}\right) = \begin{cases} + & \text{ὅταν } \alpha\beta > 0 \\ - & \text{ὅταν } \alpha\beta < 0 . \end{cases}$$

Ἄρα $\dfrac{\beta}{\alpha} = \beta \cdot \dfrac{1}{\alpha}$, ὅταν $\beta \neq 0$.

Γιὰ $\beta = 0$ ἡ σχέση $\dfrac{\beta}{\alpha} = \beta \cdot \dfrac{1}{\alpha}$ εἶναι ἀληθής, ἐπειδὴ κατὰ τὰ προηγούμενα $\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{0}{\alpha} = 0$ καὶ $\beta \cdot \dfrac{1}{\alpha} = 0 \cdot \dfrac{1}{\alpha} = 0$.

IV) Ἡ διαίρεση εἶναι ἐπιμεριστικὴ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεση καὶ ὡς πρὸς τὴν ἀφαίρεση, ἤτοι μὲ $\gamma \neq 0$

$$\frac{\alpha + \beta}{\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\alpha - \beta}{\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} .$$

Αὐτὸ συνάγεται ἀμέσως ἀπὸ τὴν III) καὶ τὴν ἐπιμεριστικὴ ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεση καὶ τὴν ἀφαίρεση. Πραγματικὰ εἶναι

$$\frac{\alpha + \beta}{\gamma} = (\alpha + \beta)\frac{1}{\gamma} = \alpha \cdot \frac{1}{\gamma} + \beta \cdot \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma}$$

καὶ γιὰ ὅμοιους λόγους

$$\frac{\alpha - \beta}{\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} .$$