ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

[illegible]

[illegible]

[illegible]

ΥΠΟ

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Ι. ΡΕΜΟΥΝΔΟΥ

[illegible]

[illegible]

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΤΥΠΟΙΣ Π. Δ. ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ
[illegible]

ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΦΟΙΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΑΣΤΩΝ ΤΩΝ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ
ΚΑΘΩΣ ΚΑΙ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΥΠΟ

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Ι. ΡΕΜΟΥΝΔΟΥ

ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΗΣ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ ΕΝ ΤΩι ΕΘΝΙΚΩι
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΩι ΚΑΙ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΩι

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΤΥΠΟΙΣ Π. Δ. ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ
1922

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

Μεταθέσεις.

1. Καλοῦμεν ***μεταθέσεις*** ὁσωνδήποτε πραγμάτων τοὺς διαφόρους τρόπους καθ' οὓς δυνάμεθα νὰ παρατάξωμεν ταῦτα ἐπ' εὐθείας γραμμῆς τὸ ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου. Εἶνε προφανὲς ὅτι ἑνὸς πράγματος α ὑπάρχει μία μόνον μετάθεσις καὶ ὅτι δύω πραγμάτων α καὶ β ὑπάρχουσι δύω μεταθέσεις αἱ

$$\alpha\,\beta \qquad \text{καὶ} \qquad \beta\,\alpha \tag{1}$$

Ἵνα λάβωμεν τὰς μεταθέσεις τῶν τριῶν πραγμάτων α, β καὶ γ, ἀρκεῖ ἐν ἑκάστῃ τῶν μεταθέσεων (1) νὰ τεθῇ τὸ νέον πρᾶγμα γ εἰς ὅλας τὰς δυνατὰς θέσεις αἵτινες εἶνε προφανῶς τρεῖς, ὅτε ἔχομεν :

$$\begin{array}{ll} \alpha\beta\gamma & \beta\alpha\gamma \\ \alpha\gamma\beta & \beta\gamma\alpha \\ \gamma\alpha\beta & \gamma\beta\alpha \end{array} \tag{2}$$

Τῷ ὄντι, αἱ μεταθέσεις αὗται (2) εἶναι πρῶτον διάφοροι ἀλλήλων, διότι αἱ μὲν προκύψασαι ἐκ τῆς αὐτῆς μεταθέσεως (1) διαφέρουσι κατὰ τὴν θέσιν τοῦ νέου πράγματος (γ) αἱ δὲ προκύψασαι ἐκ διαφόρων (1) διαφέρουσι τοὐλάχιστον κατὰ τὴν θέσιν τῶν λοιπῶν· ἀφ' ἑτέρου, ὁ πίναξ (2) περιέχει πάσας τὰς μεταθέσεις τῶν πραγμάτων α, β καὶ γ, διότι, ἂν νοήσωμεν τὴν τυχοῦσαν ἐξ αὐτῶν, π. χ. τὴν β γ α, καὶ ἀποκόψωμεν τὸ νέον πρᾶγμα γ, θὰ μείνῃ μία ἐκ τῶν (1), κανόπιν τῆς ὁποίας ἐθέσαμεν τὸ γ εἰς ὅλας τὰς δυνατὰς θέσεις.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ M_ν τὸ πλῆθος τῶν μεταθέσεων τῶν ν πραγμάτων, ἔχομεν, κατὰ τὰ προηγούμενα, τοὺς τύπους: $M_1 = 1$, $M_2 = 2$, $M_3 = 6 = 1.2.3$.

Προχωροῦντες κατὰ τὸν ἐκτεθέντα τρόπον εὑρίσκομεν: $M_4 = 1.2.3.4$ καὶ γενικῶς :

$$M_\nu = 1.2.3\ \ldots\ (\nu - 1).\nu \tag{3}$$

Παρατηρητέον ὅτι ἐκ τοῦ τρόπου καθ' ὃν κατασκευάζονται αἱ μεταθέσεις τῶν ν πραγμάτων, ὅταν γνωρίζωμεν τὰς τῶν $\nu - 1$ πραγμάτων, ἕπεται ἀμέσως ὁ τύπος :

$$M_\nu = \nu . M_{\nu-1}$$

Ἐνίοτε τὸ πλῆθος τῶν μεταθέσεων τῶν ν πραγμάτων παρίσταται καὶ διὰ τοῦ συμβόλου $\nu\,!$

2. ***Κυκλικαὶ μεταθέσεις***. Ὅταν τὰ ἀντικείμενα παρατάσσωνται οὐχὶ ἐπ' εὐθείας γραμμῆς ἀλλὰ ἐπὶ περιφερείας κύκλου, τότε προκύπτουσι μεταθέσεις, ἃς θὰ καλέσωμεν κυκλικάς. Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ κυκλικαὶ μεταθέσεις δὲν δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς ἔχουσαι ὡρισμένην ἀρχὴν καὶ τέλος καὶ ὅτι ὡς ἀρχὴ δύναται νὰ ληφθῇ οἱονδήποτε ἐκ τῶν πραγμάτων. Διὰ τοῦτο, ἐὰν π. χ. θεωρήσωμεν τὰ πέντε πράγματα α β γ δ ε, αἱ εὐθύγραμμοι μεταθέσεις :

α β γ δ ε β γ δ ε α, γ δ ε α β, δ ε α β γ, ε α β γ δ

τρεπόμεναι εἰς κυκλικὰς συμπίπτουσι, καί, ἀντιστρόφως, ἑκάστη κυκλικὴ μετάθεσις τῶν πέντε πραγμάτων α, β, γ, δ, ε δίδει πέντε διαφόρους εὐθυγράμμους, ὅταν μεταβάλλωμεν τὴν ἀρχὴν αὐτῆς. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι τὸ πλῆθος τῶν κυκλικῶν μεταθέσεων πέντε πραγμάτων εἶνε πεντάκις μικρότερον τοῦ πλήθους τῶν εὐθυγράμμων μεταθέσεων, καὶ γενικῶς, ἐὰν παραστήσωμεν διὰ K_ν τὸ πλῆθος τῶν κυκλικῶν μεταθέσεων τῶν ν πραγμάτων, θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον :

$$K_\nu = \frac{M_\nu}{\nu} = 1.2.3.\ldots(\nu - 1) = M_{\nu-1}$$

Διατάξεις.

Θεωρήσωμεν μ πράγματα α_1, α_2, α_3, ... , α_μ καὶ καλέσωμεν ***διατάξεις*** τῶν μ πραγμάτων ἀνὰ ν ($\nu \leq \mu$) τοὺς διαφόρους τρόπους καθ' οὓς δυνάμεθα νὰ παρατάξωμεν κατ' εὐθεῖαν γραμμὴν ν ἐκ τῶν πραγμάτων τούτων· δηλαδὴ αἱ διατάξεις εἶναι πάλιν μεταθέσεις ἀλλὰ ὄχι ὅλων συγχρόνως τῶν θεωρουμένων πραγμάτων. Σημειωτέον ὅτι, κατὰ τὸν δοθέντα ὁρισμόν, αἱ διατάξεις τῶν μ πραγμάτων ἀνὰ μ συμπίπτουσι πρὸς τὰς μεταθέσεις τῶν μ πραγμάτων.

Παραστήσωμεν διὰ τοῦ συμβόλου $\Delta_\mu^{(\nu)}$ τὸ πλῆθος τῶν διατάξεων τῶν μ πραγμάτων ἀνὰ ν.

Εἶναι προφανὲς ὅτι ἕκαστον πρᾶγμα ἀποτελεῖ διάταξιν ἀνὰ ἓν καὶ ἑπομένως ἔχομεν:

$$\Delta_\mu^{(\nu)} = \mu$$

Διὰ νὰ λάβωμεν τὰς ἀνὰ δύω διατάξεις γράφομεν κατόπιν ἑκάστου πράγματος ἕκαστον τῶν λοιπῶν καὶ οὕτω λαμβάνομεν τὰς ἑξῆς διατάξεις:

$$\begin{array}{l} \alpha_1\,\alpha_2,\quad \alpha_1\,\alpha_3,\quad \alpha_1\,\alpha_4\,\ldots,\ \alpha_1\,\alpha_\mu \\ \alpha_2\,\alpha_1,\quad \alpha_2\,\alpha_3,\quad \alpha_3\,\alpha_4\,\ldots,\ \alpha_2\,\alpha_\mu \\ \alpha_3\,\alpha_1,\quad \alpha_3\,\alpha_2,\quad \alpha_3\,\alpha_4\,\ldots,\ \alpha_3\,\alpha_\mu \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_\mu\,\alpha_1,\quad \alpha_\mu\,\alpha_2,\quad \alpha_\mu\,\alpha_3,\ldots,\ \alpha_\mu\,\alpha_{\mu-1} \end{array} \qquad (4)$$

αἵτινες εἶναι διάφοροι ἀλλήλων, διότι αἱ μὲν προκύπτουσαι ἐκ τοῦ αὐτοῦ πράγματος διαφέρουσι κατὰ τὸ τελευταῖον αἱ δὲ προκύπτουσαι ἐκ διαφόρων διαφέρουσι τοὐλάχιστον κατὰ τὸ πρῶτον· ἀφ' ἑτέρου ἡ τυχοῦσα μετάθεσις, π. χ. ἡ $\alpha_7\,\alpha_3$, ὑπάρχει ἐν τῷ πίνακι (4), διότι, ἐὰν ἀποκοπῇ τὸ τελευταῖον πρᾶγμα α_3 προκύπτει τὸ α_7 κατόπιν τοῦ ὁποίου ἐτέθη ἕκαστον τῶν ὑπολοίπων μ-1.

Ὁ πίναξ (4) δεικνύει ὅτι ἔχομεν $\Delta_\mu^{(2)} = \mu(\mu-1)$.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ἔχοντες τὰς διατάξεις τῶν μ πραγμάτων ἀνὰ 2, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὰς ἀνὰ 3, καὶ γενικῶς, ἔχοντες τὰς διατάξεις ἀνὰ ν—1 δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὰς ἀνὰ ν, εὑρίσκομεν δὲ τὸν τύπον:

$$\Delta_\mu^{\nu)} = (\mu-\nu+1)\Delta^{(\nu-1)}_\mu$$

ὅστις ἐφαρμοζόμενος διαδοχικῶς διὰ ν=2,3,4,... δίδει τὰς ἰσότητας:

$$\Delta_\mu^{(2)} = (\mu-1)\Delta_\mu^{(1)},\ \Delta_\mu^{(3)} = (\mu-2)\Delta_\mu^{(2)},\ \Delta_\mu^{(4)} = (\mu-3)\Delta_\mu^{(3)},\ \ldots,$$

$$\Delta_\nu^{(\mu)} = (\mu-\nu+1)\Delta^{(\nu-1)}_\mu$$

αἵτινες πολλαπλασιαζόμεναι κατὰ μέλη παρέχουσι τὸν τύπον:

$$\Delta_\mu^{(\nu)} = \mu(\mu-1)\ (\mu-2)\ldots(\mu-\nu+1) \qquad (5)$$

τὸν δίδον α τὸ πλῆθος τῶν διατάξεων τῶν μ πραγμάτων ἀνὰ ν.

Παρατηρητέον ὅτι τοῦ τύπου τούτου τὸ δεύτερον μέλος εἶναι γινόμενον ν ἐφεξῆς ἀκεραίων ἀριθμῶν οἵτινες ἀρχόμενοι τοῦ μ βαίνουσιν ἐλαττούμενοι.

Συνδυασμοί.

4. Καλοῦμεν συνδυασμοὺς μ πραγμάτων $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\mu$ ἀνὰ ν $(\mu>\nu)$ τοὺς διαφόρους τρόπους καθ' οὓς δυνάμεθα ἐξ αὐτῶν νὰ λάβωμεν τὰ ν (χωρὶς νὰ γίνῃ οὐδεμία παράταξις).

Εἶνε προφανὲς ὅτι ἔχομεν μ συνδυασμοὺς ἀνὰ ἕν, διότι ἕκαστον πρᾶγμα ἀποτελεῖ ἕνα συνδυασμὸν ἀνὰ ἕν. Ἵνα κατασκευάσωμεν τοὺς ἀνὰ δύω συνδυασμοὺς τοποθετοῦμεν τὰ πράγματα κατά τινα τάξιν, π. χ. ἐκείνην ἣν ὁρίζουσιν οἱ δεῖκται, καὶ γράφομεν κατόπιν ἑκάστου πράγματος ἕκαστον τῶν ἑπομένων, ὅτε λαμβάνομεν τὰ ἐξαγόμενα

$$\begin{array}{rrrrr} \alpha_1\,\alpha_2, & \alpha_1\,\alpha_3, & \alpha_1\,\alpha_4 & \ldots, & \alpha_1\,\alpha_\mu \\ & \alpha_2\,\alpha_3, & \alpha_2\,\alpha_4 & \ldots, & \alpha_2\,\alpha_\mu \\ & & \alpha_3\,\alpha_4 & \ldots, & \alpha_3\,\alpha_\mu \\ & & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ & & & & \alpha_{\mu-1}\,\alpha_\mu \end{array} \qquad (5')$$

Οἱ συνδυασμοὶ οὗτοι διαφέρουσιν ἀλλήλων, διότι οἱ μὲν προκύψαντες ἐκ τοῦ αὐτοῦ πράγματος διαφέρουσι κατὰ τὸ τελευταῖον οἱ δὲ προκύψαντες ἐκ διαφόρων διαφέρουσι τοὐλάχιστον κατὰ τὸ πρῶτον· ἀφ' ἑτέρου, ὁ πίναξ (5′) περιέχει πάντας τοὺς ἀνὰ 2 συνδυασμούς, διότι ἂν νοήσωμεν τὸν τυχόντα, π. χ. τὸν $\alpha_3\,\alpha_7$, καὶ ἀποκόψωμεν τὸ α_7, μένει τὸ α_3 κατόπιν τοῦ ὁποίου ἐγράψαμεν ἕκαστον τῶν ἑπομένων.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐργαζόμενοι ἐπὶ τῶν ἀνὰ δύο συνδυασμῶν εὑρίσκομεν πάντας τοὺς ἀνὰ τρία καὶ ἕκαστον ἅπαξ καὶ οὕτω καθεξῆς.

5. ***Πλῆθος συνδυασμῶν.*** Καλέσωμεν διὰ τοῦ συμβόλου $\Sigma_\mu^{(\nu}$ τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν μ πραγμάτων ἀνὰ ν.

Ἐὰν εἰς τὰ πράγματα τ' ἀποτελοῦντα ἕνα συνδυασμὸν ἀνὰ ν ἐκτελέσωμεν πάσας τὰς δυνατὰς μεταθέσεις, ὧν τὸ πλῆθος εἶναι $M_\nu = 1.2.3\ldots\nu = \nu!$, ἐὰν δὲ τοῦτο γίνῃ εἰς ὅλους τοὺς συνδυασμοὺς ἀνὰ **ν**, θὰ προκύψωσι διατάξεις τῶν μ. πραγμάτων ἀνὰ ν· αἱ διατάξεια αὗται διαφέρουσιν ἀλλήλων, διότι αἱ μὲν προκύψασαι ἐκ τοῦ αὐτοῦ συνδυασμοῦ διαφέρουσι κατὰ τὴν τάξιν τῶν πραγμάτων, αἱ δὲ προκύψασαι ἐκ διαφόρων συνδυασμῶν διαφέρουσι κατὰ τὰ πράγματα· ἐλάβομεν ἀφ᾽ ἑτέρου πάσας τὰς διατάξεις ἀνὰ ν, διότι ἡ τυχοῦσα διάτοξις ἀνὰ ν ἐλήφθη ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ τοῦ ἔχοντος τὰ αὐτὰ πράγματα.

Αἱ κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον ληφθεῖσαι διατάξεις εἶνε $\Sigma_\mu^{(\nu)} M_\nu$ καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν τὴν ἰσότητα:

$$\Sigma_\mu^{(\nu)}.M_\nu = \Delta_\mu^{(\nu)} \tag{6}$$

διότι ἐλάβομεν πάσας τὰς ἀνὰ ν διατάξεις καὶ ἑκάστην ἅπαξ.

Ἐντεῦθεν προκύπτει ὁ τύπος:

$$\sum_\mu^{(\nu)} = \frac{\Delta_\mu^{(\nu)}}{M_\nu} = \frac{\mu\,(\mu-1)\,(\mu-2)\ldots(\mu-\nu+1)}{1\;2.3.\;.\nu} \tag{7}$$

Ἐὰν πολλαπλοσιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος τούτου ἐπὶ τὸ γινόμενον $1.2.3.\;(\mu-\nu)$, προκύπτει καὶ ὁ ἑξῆς τύπος:

$$\sum_\mu^{(\nu)} = \frac{1.2.3\ldots\mu}{(1.2.3\ldots\nu)\,[1.2.3\ldots\mu-\nu)]} = \frac{M_\mu}{M_\nu M_{\mu-\nu}} = \frac{\mu!}{\nu!\,(\mu-\nu)!} \tag{8}$$

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (8), ὅστις ἰσχύει διὰ πᾶσαν τιμὴν $\nu \leq \mu$, ἀντικαταστήσωμεν τὸ ν διὰ $\mu-\nu$, προκύπτει ὁ ἑξῆς:

$$\sum_\mu^{(\mu-\nu)} = \frac{M_\mu}{M_{\mu-\nu} M_\nu} \tag{9}$$

ὅστις παραβαλλόμενος πρὸς τὸν (8) δεικνύει ἀμέσως ὅτι *τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν μ πραγμάτων ἀνὰ ν ἰσοῦται πρὸς τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν μ πραγμάτων ἀνὰ μ—ν* δηλαδή:

$$\sum_\mu^{(\nu)} = \sum_\mu^{(\mu-\nu)} \tag{10}$$

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἀποδεικνύεται καὶ διὰ τοῦ ἑξῆς ἁπλουστάτου συλλογισμοῦ:

Ἐὰν θεωρήσωμεν ἕνα συνδυασμὸν ἀνὰ ν, τὰ μὴ ἐν αὐτῷ ὑπάρχοντα πράγματα, ὄντα $\mu-\nu$ τὸ πλῆθος, ἀποτελοῦσι ἕνα (μόνον) συνδυασμὸν ἀνὰ $\mu-\nu$· ὥστε εἰς ἕκαστον συνδυασμὸν ἀνὰ ν ἀντιστοιχεῖ εἷς μόνον συνδυασμὸς ἀνὰ $\mu-\nu$, καί, ἀντιστρόφως, εἰς ἕκαστον ἀνὰ $\mu-\nu$ ἀντιστοιχεῖ εἷς (μόνον) ἀνὰ ν· ἄρα τὸ πλῆθος τῶν ἀνὰ ν συνδυασμῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ἀνὰ $\mu-\nu$, διότι εἰς ἑκάστην μονάδα ἑκατέρου ἀντιστοιχεῖ μία (καὶ μία μόνη) μονὰς τοῦ ἑτέρου.

Σημείωσις ὁ τύπος (7) δύναται νὰ εὑρεθῇ καὶ ὡς ἑξῆς: Ἐπειδὴ ἕκαστος συνδυασμὸς περιέχει ν πράγματα, τὸ πλῆθος ὅλων τῶν γραμμάτων τῶν περιεχομένων εἰς τὸν πίνακα τῶν συνδυασμῶν θὰ εἶναι $\nu\Sigma_\mu^{(\nu)}$ καὶ ἑπομένως ἕκαστον τῶν μ θὰ εὑρίσκεται $\nu\,\Sigma_\mu^{(\nu)}:\mu$ φορὰς εἰς τὸν πίνακα. Ἀφ' ἑτέρου, οἱ συνδυασμοὶ οἱ περιέχοντες ἓν γράμμα (π. χ. τὸ α_1) εἶναι τόσοι ὅσοι οἱ συνδυασμοὶ τῶν $\mu-1$ ἄλλων ἀνὰ $\nu-1$, δηλαδὴ $\Sigma_{\mu-1}^{(\nu-1)}$ καί, ἐπειδὴ ἕκαστος περιέχει ἅπαξ τὸ θεωρηθὲν γράμμα διὰ τοῦτο τὸ α_1 εὑρίσκεται $\Sigma_{\mu-1}^{(\nu-1)}$ φορὰς ἐν τῷ πίνακι.

Ἐντεῦθεν συνάγεται ὅτι

$$\frac{\nu}{\mu}\sum_{\mu}^{(\nu)}=\sum_{\mu-1}^{(\nu-1)}$$

ἢ

$$\sum_{\mu}^{(\nu)}=\frac{\mu}{\nu}\sum_{\mu-1}^{(\nu-1)}$$

Θὰ ἔχωμεν ὁμοίως:

$$\sum_{\mu-1}^{(\nu-1)}=\frac{\mu-1}{\nu-1}\sum_{\mu-2}^{(\nu-2)}$$

$$\sum_{\mu-2}^{(\nu-2)}=\frac{\mu-2}{\nu-2}\sum_{\mu-3}^{(\nu-3)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{\mu-\nu+1}^{(1)}=\frac{\mu-\nu+1}{1}$$

Πολλαπλασιάζοντες τέλος κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας λαμβάνομεν τὸν γενικὸν τύπον (7).

Τύπος τοῦ διωνύμου (τοῦ Νεύτωνος).

6. Πρόκειται νὰ εὕρωμεν τύπον παρέχοντα τὸ ἀνάπτυγμα δυνάμεως $(\chi+\alpha)^{\mu}$ ὅπου ὁ ἐκθέτης μ ὑποτίθεται ἀκέραιος καὶ θετικός. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τὸ γινόμενον μ διωνύμων:

$$(x+\alpha_1)\ (x+\alpha_2)\ (x+\alpha_3)\ (x+\alpha_{\mu}) \qquad (11)$$

τοῦ ὁποίου δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν, διὰ τῆς θεωρίας τῶν συνδυασμῶν, πάντας τοὺς ὅρους, χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν.

Ἀναχωροῦμεν ἐκ τῆς παρατηρήσεως ὅτι ἕκαστος ὅρος τοῦ γινομένου (11) θὰ εἶναι γινόμενον μ παραγόντων εἰλημμένων ἐκ τῶν ἀριθμῶν $x, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{\mu}$.

Ὅρος μιοστοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς x εἶναι προφανῶς εἷς καὶ μόνος, ὁ x^{μ}. Πᾶς ὅρος βαθμοῦ $\mu-1$ ὡς πρὸς x θὰ εἶναι γινόμενον τοῦ $x^{\mu-1}$ ἐπὶ ἕνα τῶν ἀριθμῶν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{\mu}$ καὶ ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων βαθμοῦ μ-1 εἶναι: $(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_{\mu})x^{\mu-1}=S_1x^{\mu-1}$ ὅπου τὸ S_1 δηλοῖ τὸ ἄθροισμα $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_{\mu}$, δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν συνδυασμῶν τῶν μ ἀριθμῶν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\mu}$ ἀνὰ ἕνα. Θεωροῦντες ἤδη τοὺς ὅρους βαθμοῦ $\mu-2$ ὡς πρὸς x παρατηροῦμεν ὅτι ἕκαστος ἐξ αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσος πρὸς τὸ $x^{\mu-2}$ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ γινόμενον δύο ἐκ τῶν ἀριθμῶν

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{\mu} \qquad (12)$$

τὸ ὁποῖον, χάριν συντομίας, θὰ ὀνομάζωμεν συνδυασμὸν τῶν ἀριθμῶν (12) ἀνὰ δύω· ἀντιστρόφως, εἶναι προφανὲς ὅτι ἕκαστος συνδυασμὸς ἀνὰ δύο τῶν ἀριθμῶν (12) θὰ εἶναι πολλαπλασιαστὴς τοῦ $x^{\mu-2}$. Ἐὰν λοιπὸν ἀναχθῶσιν εἰς ἕνα πάντες οἱ ὅροι τοῦ βαθμοῦ $\mu-2$ θὰ προκύψῃ ὁ ἑξῆς:

$$(\Sigma\alpha_1\,\alpha_2)x^{\mu-2}=S_2\,x^{\mu-2}$$

ὅπου τὸ S_2 δηλοῖ τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἀνὰ δύω συνδυασμῶν τῶν ἀριθμῶν (12).

Ἐξακολουθοῦντες ὁμοίους συλλογισμοὺς καὶ διὰ τοὺς λοιποὺς ὅρους φθάνομεν εἰς τὸν τύπον:

$$(x+\alpha_1)\,(x+\alpha_2)\,(x+\alpha_3)\ldots(x+\alpha_{\mu})=x^{\mu}+S_1x^{\mu-1}+S_2x^{\mu-2}+$$
$$+S_3x^{\mu-3}+\ldots+S_{\nu}x^{\mu-\nu}+\ldots+S_{\mu-1}x+S_{\mu} \qquad (13)$$

ὅπου, γενικῶς, τὸ S_ν παριστᾷ τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἀνὰ ν συνδυασμῶν τῶν ἀριθμῶν (12).

Ἐὰν ὑποθέσωμεν: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_\mu = \alpha$, τὸ πρῶτον μέλος τῆς (13) γίνεται: $(x+\alpha)^\mu$, τὸ S_1 θὰ γίνῃ $\alpha.\Sigma_\mu^{(1)}$, τὸ S_2 θὰ γίνῃ $\alpha^2.\Sigma_\mu^{(2)}$ διότι ἕκαστος ὅρος τοῦ S_2 γίνεται α^2, τὸ S_3 θὰ γίνῃ $\alpha^3.\Sigma_\mu^{(3)}$ διότι ἕκαστος ὅρος τοῦ S_3 γίνεται α^3, καὶ γενικῶς τὸ S_ν θὰ γίνῃ $\alpha^\nu\,\Sigma_\mu^{(\nu)}$ διότι ἕκαστος αὐτοῦ ὅρος γίνεται α^ν, καὶ οὕτω καθεξῆς· οὕτω ἐκ τοῦ τύπου 13 ἕπεται ὁ ἑξῆς:

$$(x+\alpha)^\mu = x^\mu + \Sigma_\mu^{(1)}\alpha\, x^{\mu-1} + \Sigma_\mu^{(2)}\alpha^2 x^{\mu-2} + \ldots + \\ + \Sigma_\mu^{(\nu)}\alpha^\nu\, x^{\mu-\nu} + . \quad + \Sigma_\mu^{(\mu-1)}\alpha^{\mu-1}x + \alpha^\mu \qquad (14)$$

$$\text{ἢ } (x+\alpha)^\mu = x^\mu + \mu\alpha x^{\mu-1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\alpha^2 x^{\mu-2} + \ldots + \\ + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\nu+1)}{1.2.3\ldots\nu}\alpha^\nu\, x^{\mu-\nu} + \ldots + \alpha^\mu \qquad (15)$$

ὅστις καλεῖται *τύπος τοῦ διωνύμου* ἢ *τύπος τοῦ Νεύτωνος* καὶ παρέχει τὸ ἀνάπτυγμα δυνάμεως ἑνὸς διωνύμου $x+\alpha$ εἰς πολυώνυμον διατεταγμένον κατὰ τὰς τὰς δυνάμεις τῶν x καὶ α.

7. ***Ἰδιότητες τοῦ τύπου τοῦ Νεύτωνος.*** Ἐπειδὴ ἔχομεν, κατὰ προηγούμενον θεώρημα (ἐδάφ. 5),

$$\Sigma_\mu^{(1)} = \Sigma_\mu^{(\mu-1)},\ \Sigma_\mu^{(2)} = \Sigma_\mu^{(\mu-2)}, \ldots, \Sigma_\mu^{(\nu)} = \Sigma_\mu^{(\mu-\nu)}, \ldots$$

οἱ ὅροι τῶν ἀναπτυγμάτων (14) καὶ (15) οἱ ἐκ τῶν ἄκρων ἰσάκις ἀπέχοντες θὰ ἔχωσιν ἴσους συντελεστάς.

Τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος εἶναι $\mu+1$. Ἐὰν τὸ $\mu=2\nu$ εἶναι ἄρτιον, τὸ πλῆθος τῶν ὅρων θὰ εἶναι περιττὸν καὶ θὰ ὑπάρχῃ μεσαῖος ὅρος ἀντιστοιχῶν εἰς ἑαυτόν, τοῦ ὁποίου ὁ συντελεστὴς δὲν ἐπαναλαμβάνεται, θὰ εἶναι δὲ οὗτος ὁ $\Sigma_\mu^\nu \alpha^\nu x^\nu$· πάντες οἱ λοιποὶ συντελεσταὶ ἐπαναλαμβάνονται δίς.

Ἐὰν ὁ $\mu=2\nu+1$ εἶναι περιττός, τὸ πλῆθος τῶν ὅρων θὰ εἶναι ἄρτιον καὶ δὲν θὰ ὑπάρχῃ μεσαῖος, πάντων τῶν συντελεστῶν ἐπαναλαμβανομένων δίς. Ὅταν ὑπολογίσωμεν τοὺς συντελεστὰς μέχρι τοῦ ὅρου $\Sigma_\mu^{(\nu)}\alpha^\nu x^{\nu+1}$, κατόπιν ἐπαναλαμβάνονται οἱ αὐτοὶ συντελεσταὶ κατ᾿ ἀντίστροφον τάξιν.

Ἐκ τῆς προφανοῦς σχέσεως $\sum_{\mu}^{(\nu)} = \dfrac{\mu-\nu+1}{\nu} \sum_{\mu}^{(\nu-1)}$

ἕπεται ὅτι, *ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν συντελεστὴν ὅρου τινὸς ἐπὶ τὸν ἐκθέτην τοῦ x ἐν αὐτῷ καὶ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον διὰ τοῦ ἐκθέτου τοῦ α αὐξηθέντος κατὰ μονάδα, εὑρίσκομεν τὸν συντελεστὴν τοῦ ἑπομένου ὅρου.* Ὁ κανὼν οὗτος διευκολύνει τὸν ὑπολογισμὸν τῶν συντελεστῶν τοῦ ἀναπτύγματος, ὅστις γίνεται οὕτω ταχύτερον κατὰ τρόπον ἐπαγωγικόν.

Ἀσκήσεις.

1) Κατὰ πόσους τρόπους δύνανται 10 στρατιῶται νὰ παραταχθῶσιν κατ' εὐθεῖαν γραμμὴν καὶ κατὰ πόσους κυκλικῶς ;

2) Πόσοι εἶναι οἱ διψήφιοι ἀριθμοὶ οἱ μὴ ἔχοντες τὸ ψηφίον 0;

3) Πόσας εὐθείας δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ἑνοῦντες ἀνὰ δύω ν σημεῖα κείμενα ἐπὶ περιφερείας κύκλου; (γενικώτερον: ν σημεῖα, ὧν τρία οἱαδήποτε δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς).

4) Πόσα τμήματα εὐθείας μὲ ἀρχὴν καὶ τέλος λαμβάνομεν ἑνοῦντες ἀνὰ δύω ν δοθέντα σημεῖα; (πρόκειται περὶ τμημάτων ἐχόντων ἀρχὴν καὶ τέλος δύω ἐκ τῶν δοθέντων ν σημείων).

5) Εὑρεῖν τὸ πλῆθος τῶν διαγωνίων πολυγώνου ἔχοντος ν πλευράς.

6) Δεῖξαι, διὰ τῆς θεωρίας τῶν συνδυασμῶν, ὅτι τὸ γινόμενον ν ἐφεξῆς ἀκεραίων (θετικῶν) ἀριθμῶν εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ γινομένου $1.2.3 \ldots \nu$.

7) Δεῖξαι τὸν τύπον: $\sum_{\mu}^{(\nu)} = \sum_{\mu-1}^{(\nu-1)} + \sum_{\mu-1}^{(\nu)}$

α') δι' ὑπολογισμοῦ β') διὰ συλλογισμοῦ.

8) Δεῖξαι τὴν ἀλήθειαν τοῦ ἑξῆς τύπου:

$$\sum_{\mu}^{(\nu)} = \sum_{\mu-1}^{(\nu-1)} + \sum_{\mu-2}^{(\nu-1)} + \sum_{\mu-3}^{(\nu-1)} + \ldots + \sum_{\nu}^{(\nu-1)} + \sum_{\nu-1}^{(\nu-1)}$$

9) Δεῖξαι, διὰ τοῦ τύπου τοῦ διωνύμου, τὸ θεώρημα: $\sum_{\mu}^{(\nu)} = \sum_{\mu}^{(\mu-\nu)}$

10) Εὑρεῖν τὸ ἀνάπτυγμα τῶν ἑξῆς δυνάμεων:

$(x+\alpha)^4$, $(x+\alpha)^5$, $(x+\alpha)^6$, $(x+\alpha)^7$, $(x+\alpha)^8$, $(x+\alpha)^9$, $(x+\alpha)^{10}$,
$(x-\alpha)^4$, $(x-\alpha)^5$, $(x-\alpha)^6$, $(x-\alpha)^7$, $(x-\alpha)^8$, $(x-\alpha)^9$, $(x-\alpha)^{10}$.

11) Ἀναπτύξαι κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ x τὸ ἄθρ. $(x+\alpha)^\mu+(x-\alpha)^\mu$.
Ἀναπτύξαι ἐπίσης τὴν δύναμιν $\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^\mu$, ὅπου μ ἀριθμὸς ἀκέραιος καὶ θετικός.

12) Δεῖξαι τὴν ἀλήθειαν τοῦ τύπου :

$$\Sigma_\mu^{(1)}+\Sigma_\mu^{(2)}+\Sigma_\mu^{(3)}+\ldots+\Sigma_\mu^{(\mu)}=2^\mu-1$$

13) Δεῖξαι τὴν ἰσότητα :

$$\Sigma_\mu^{(1)}+\Sigma_\mu^{(3)}+\Sigma_\mu^{(5)}+\ldots=1+\Sigma_\mu^{(2)}+\Sigma_\mu^{(4)}+\Sigma_\mu^{(6)}+\ldots..$$

ἔνθα τὸ μὲν πρῶτον μέλος περιέχει πάντα τὰ πλήθη τῶν ἀνὰ περιττὸν ἀριθμὸν συνδυασμῶν τῶν μ πραγμάτων, τὸ δὲ δεύτερον μέλος πάντα τὰ $\Sigma_\mu^{(k)}$, ὅπου k εἶναι ἄρτιος ἀριθμός.

14) Ὑπολογίσαι τὸν λόγον $\Sigma_\mu^{(\nu)}:\Sigma_{\mu-1}^{(\nu-1)}$

15) Μεταξὺ τῶν συνδυασμῶν μ πραγμάτων ἀνὰ ν πόσοι εἶναι οἱ ἔχοντες ἓν ἐξ αὐτῶν (ὡρισμένον) ; πόσοι εἶναι οἱ ἔχοντες k ἐξ αὐτῶν (ὡρισμένα);

16) Ἐκ κληρωτίδος περιεχούσης τοὺς ἀριθμοὺς 1,2,3,...10 ἐξάγονται τυχαίως τρεῖς κλῆροι· πόσαι εἶναι ὅλαι αἱ δυναταὶ περιπτώσεις καὶ πόσαι εἶναι αἱ περιπτώσεις καθ' ἃς ἐξάγεται ὁ κλῆρος ὁ περιέχων τὸν ἀριθμὸν 1 ;

17) Δέκα πρόσωπα, διαθέτοντα δύω τραπέζας ὧν ἡ μέν πρώτη δέχεται 6 ἡ δὲ δευτέρα 4 πρόσωπα, πρόκειται νὰ γευματίσουν. Κατὰ πόσους τρόπους δύνανται νὰ τεθῶσι περὶ τὰς τραπέζας ταύτας;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

Στοιχειώδης θεωρία τῶν ὁριζουσῶν

1. ***Ορίζουσα δευτέρας τάξεως***. Πρόκειται περὶ ἑνὸς νέου ἀλγεβρικοῦ (ἢ ἀριθμητικοῦ) συμβόλου λίαν καταλλήλου εἰς πλεῖστα ζητήματα καὶ ἰδίως εἰς τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων, ὡς παρέχοντος εὐχέρειαν γραφῆς καὶ ἀπομνημονεύσεως προσέτι δὲ κομψότητα καὶ συντομίαν ἰς τοὺς τύπους.

Γνωρίζομεν ὅτι, ἐὰν $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$, τοῦτο ἔχει μίαν λύσιν μοναδικήν, τὴν ἑξῆς:

$$x = \frac{\gamma\beta' - \beta\gamma'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}, \qquad y = \frac{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'} \tag{1}$$

Οἱ τύποι οὗτοι γράφονται κομψότερον καὶ κατὰ τρόπον εὐμνημόνευτον ἐὰν πᾶσαν διαφορὰν τῆς μορφῆς $\alpha\beta' - \beta\alpha'$ παραστήσωμεν διὰ τοῦ συμβόλου $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$, ὅπερ λέγεται ***ὀρίζουσα*** καὶ ἀποτελεῖται ἀπὸ τοὺς τέσσαρας ἀριθμοὺς $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ γεγραμμένους εἰς δύω ὁριζοντίας καὶ δύω κατακορύφους εὐθείας· τῷ ὄντι, διὰ τῶν ὁριζουσῶν οἱ τύποι (1) γράφονται:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}} \qquad\qquad y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}} \tag{2}$$

Ἡ παράστασις αὕτη τῶν τιμῶν τῶν x καὶ y δὲν φαίνεται ἐνταῦθα συντομοτέρα τῆς (1), εἶναι μάλιστα πολυπλοκωτέρα ὑπὸ ἔποψιν τυπογραφικήν, ἀλλὰ εἶναι ἀσφαλῶς κομψοτέρα καὶ εὐχερεστέρα δι᾽ απομνημόνευσιν.

Ἡ ὁρίζουσα $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$ λέγεται ***δευτέρας τάξεως***, ὡς ἔχουσα δύω γραμμὰς ὁριζοντίας καὶ δύω κατακορύφους· χάριν συντομίας θὰ ὀνομάζωμεν τὰς μὲν ὁριζοντίας ἁπλῶς ***γραμμὰς*** τὰς δὲ κατακορύφους ***στήλας***. Οἱ ἀριθμοὶ $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ λέγονται στοιχεῖα τῆς ὁριζούσης, ἔχομεν δὲ

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha\beta' - \beta\alpha' \tag{4}$$

δηλαδή: **ἡ τιμὴ τῆς ὁριζούσης εὑρίσκεται ἐὰν ἀπὸ τὸ γινόμενον τῶν στοιχείων τῆς μιᾶς διαγωνίου ἀφαιρέσωμεν τὸ γινόμενον τῶν στοιχείων τῆς ἄλλης, τοῦ μειωτέου προκύπτοντος ἐκ τῆς διαγωνίου τῆς ἐκ τῶν ἄνω ἀριστερὰ πρὸς τὰ κάτω δεξιά. Ἐκ τοῦ τύπου (4) προκύπτουσιν ἀμέσως αἱ ἑξῆς ἰδιότητες:**

I. ***Ἡ τιμὴ τῆς ὁριζούσης δὲν βλάπτεται ἐὰν αἱ γραμμαὶ γίνωσι στῆλαι καὶ αἱ στῆλαι γραμμαί.***

II. ***Ἡ τιμὴ ὁριζούσης ἀλλάσσει σημεῖον (πολ/ζεται ἐπὶ — 1) ὅταν ἀντιμεταθέσωμεν δύω γραμμὰς ἢ δύω στήλας.***

III. ***Ἐὰν δύω γραμμαὶ ἢ δύο στῆλαι ὁριζούσης εἶναι αἱ αὐταί ἡ τιμὴ τῆς ὁριζούσης εἶναι μηδέν. Ἐπίσης καὶ ὅταν δύω γραμμαὶ ἢ δύω στῆλαι ἔχωσι στοιχεῖα ἀνάλογα.***

IV. ***Ἐὰν τὰ στοιχεῖα μιᾶς γραμμῆς ἢ μιᾶς στήλης πολ/σθῶσι ἐπί τινα ἀριθμὸν ρ ἡ τιμὴ τῆς ὁριζούσης πολ/ζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ρ.*** Ἡ αὐτὴ ἰδιότης ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν τὰ στοιχεῖα γραμμῆς ἢ στήλης ἔχωσι κοινόν τινα παράγοντα οὗτος δύναται νὰ τεθῇ ἐκτὸς τῆς ὁριζούσης ὅτε τὰ στοιχεῖα θ' ἀντικατασταθῶσι διὰ τῶν πηλίκων τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ κοινοῦ παράγοντος.

2. ***Ὁρίζουσαι τρίτης (μὲ τρεῖς γραμμὰς καὶ τρεῖς στήλας).*** Ἐὰν ἤδη θεωρήσωμεν τὸ σύστημα:

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1,\quad \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2,\quad \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = \delta_3 \qquad (5)$$

καὶ λύσωμεν τοῦτο κατὰ τὴν γνωστὴν μέθοδον τῆς στοιχ. Ἀλγέβρας εὑρίσκομεν διὰ τὸ x (π. χ.) τὴν ἑξῆς τιμήν:

$$x = \frac{\delta_1(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) + \delta_2(\gamma_1\beta_3 - \beta_1\gamma_3) + \delta_3(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)}{\alpha_1(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) + \alpha_2(\gamma_1\beta_3 - \beta_1\gamma_3) + \alpha_3(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)} \qquad (6)$$

Ἐάν, κατὰ συνθήκην, παραστήσωμεν διὰ τοῦ συμβόλου

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

ὅπερ καλεῖται **ὁρίζουσα τρίτης τάξεως** (ὡς ἔχουσα τρεῖς γραμμὰς καὶ τρεῖς στήλας), τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος (6), τότε καὶ ὁ ἀριθμητὴς θὰ παρασταθῇ ὑπὸ τῆς ὁριζούσης:

$$\begin{vmatrix} \delta_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \delta_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \delta_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

ἡ δὲ τιμὴ τοῦ x παρίσταται διὰ τοῦ πηλίκου τῶν δύω ὁριζουσῶν. Ἡ παράστασις αὕτη φέρει ἐνταῦθα ὄχι μόνον κομψότητα καὶ εὐκολίαν προφανῆ ἀπομνημονεύσεως ἀλλὰ καὶ συντομίαν γραφῆς, διότι ἕκαστος ὅρος τοῦ κλάσματος (6) περιέχει 15 γράμματα ἐνῷ ἡ ἀντίστοιχος ὁρίζουσα μόνον 9. Ὥστε, κατὰ τὸν δοθέντα ὁρισμόν, ἡ τιμὴ μιᾶς ὁριζούσης τρίτης τάξεως δίδεται ὑπὸ τοῦ ἑξῆς τύπου:

$$(7)\quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1(\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2)+\alpha_2(\gamma_1\beta_3-\beta_1\gamma_3)+\alpha_3(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)=$$

$$\alpha_1\begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_3\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

Τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος ταύτης λέγομεν ὅτι εἶναι τὸ ***ἀνάπτυγμα τῆς ὁριζούσης κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης στήλης*** ἐν αὐτῷ δέ, ὡς βλέπομεν, ἕκαστον στοιχεῖον τῆς πρώτης στήλης πολ/ζεται ἐπὶ ὁρίζουσαν μικροτέρας (δευτέρας) τάξεως, καλουμένην διὰ τοῦτο ***ἐλάσσονα***, τὴν προκύπτουσαν ἐκ τῆς δοθείσης δι᾿ ἀποκοπῆς τῆς γραμμῆς καὶ τῆς στήλης εἰς ἣν ἀνήκει τὸ στοιχεῖον τοῦτο· τὴν ἐλάσσονα ταύτην ὁρίζουσαν μετὰ τοῦ ἀντιστοίχου σημείου $+$ ἢ -1 καλοῦμεν ***συντελεστὴν*** τοῦ θεωρουμένου στοιχείου: Οὕτω τὸ στοιχεῖον α_1 ἔχει συντελεστὴν $\begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$ τὸ α_2 ἔχει συντελεστὴν $-\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$ καὶ τὸ α_3 ἔχει τὴν $\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$.

Γενικῶς, καλοῦμεν ***συντελεστὴν ἑνὸς τυχόντος στοιχείου τὴν ἐλάσσονα ὁρίζουσαν τὴν προκύπτουσαν ἐκ τῆς δοθείσης δι᾿ ἀποκοπῆς τῆς γραμμῆς καὶ τῆς στήλης εἰς ἣν ἀνήκει τοῦτο, πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ $+1$ ἢ -1 καθόσον εἶναι ἄρτιον ἢ περιττὸν τὸ ἄθροισμα τῆς τάξεως τῆς γραμμῆς καὶ τῆς στήλης εἰς ἣν ἀνήκει τὸ θεωρούμενον στοιχεῖον***. Ἐάν, π. χ , θεωρήσωμεν τὸ στοιχεῖον γ_2 ὅπερ ἀνήκει εἰς τὴν δευτέραν γραμμὴν καὶ τὴν τρίτην στήλην, συντελεστὴς αὐτοῦ εἶναι ἡ ὁρίζουσα 2ας τάξεως ἡ προκύπτουσα δι᾿ ἀποκοπῆς τῆς 2ας γραμμῆς καὶ τῆς 3ης στήλης πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ -1, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν τάξεων $2+3$ εἶναι περιττὸς ἀριθμός. Παρατηρητέον ὅτι εἰς δύω διαδοχικὰ στοιχεῖα ὁριζούσης ἀντιστοιχεῖ σημεῖον ἐναλλὰξ $+$ καὶ $-$:

3. ***Σπουδαία παρατήρησις***. Ἡ ἰσότης (7)), ἥτις δίδει τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ὁριζούσης κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης στήλης, δεικνύει ὅτι ἡ τιμὴ τῆς ὁριζούσης ἰσοῦται ***τῷ ἀθροίσματι τῶν στοιχείων τῆς***

στήλης πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ τοὺς ἀντιστοίχους συντελεστάς των. Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι αὐτὸ συμβαίνει ὄχι μόνον εἰς τὴν πρώτην στήλην ἀλλὰ καὶ εἰς πᾶσαν στήλην ἢ γραμμήν, δηλαδή: ***Ἐὰν τὰ στοιχεῖα τῆς τυχούσης γραμμῆς ἢ στήλης πολλαπλασιασθῶσι ἐπὶ τοὺς συντελεστὰς αὐτῶν καὶ προστεθῶσι τὰ γινόμενα ταῦτα, τὸ οὕτω εὑρισκόμενον ἄθροισμα εἶναι σταθερόν, δηλαδή: πάντοτε τὸ αὐτό, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ γραμμὴ καὶ ἡ στήλη, ἣν μετεχειρίσθημεν.*** Διὰ τοῦτο ἡ ὁρίζουσα δύναται ν' ἀναπτυχθῇ κατὰ τὰ στοιχεῖα οἱασδήποτε γραμμῆς ἢ στήλης, ἀναγομένη πάντοτε εἰς ὁριζούσας ἐλάσσονας ($2^{ας}$ τάξεως)· τὸ ἀνάπτυγμα, π. χ., κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης γραμμῆς εἶναι τὸ ἑξῆς:

$$(8)\quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \beta_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \gamma_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_1 (\beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2) - \beta_1 (\alpha_2 \gamma_3 - \alpha_3 \gamma_2) + \gamma_1 (\alpha_2 \beta_3 - \beta_2 \alpha_3)$$

Σημείωσις. Διὰ τῆς ἀναπτύξεως κατὰ τὰ στοιχεῖα γραμμῆς ἢ στήλης ἀποδεικνύεται ἀμέσως ὅτι πᾶσαι αἱ ἰδιότητες I, II, III καὶ IV τοῦ ἐδαφίου 1 ἰσχύουν καὶ δι' ὁριζούσας τρίτης τάξεως.

Κανὼν τοῦ *Sarrus*. Οὗτος παρέχει ἕνα πρακτικὸν τρόπον διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς τιμῆς μιᾶς ὁριζούσης τρίτης τάξεως $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$ τὸν ἑξῆς: Ἐπαναλαμβάνομεν ἢ πρὸς τὰ δεξιὰ τὰς δύο πρώτας στήλας ἢ πρὸς τὰ κάτω τὰς δύο πρώτας γραμμάς:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{matrix}$$

καὶ κατόπιν χαράσσομεν τὰς διαγωνίους καὶ τὰς πρὸς αὐτὰς παραλλήλους, ὅτε αἱ πρὸς τὴν μίαν διαγώνιον παράλληλοι μᾶς δίδουσι τοὺς τρεῖς ὅρους τῆς ὁριζούσης αἱ δὲ πρὸς τὴν ἄλλην (τὴν ἐκ τῶν ἄνω δεξιὰ πρὸς τὰ κάτω ἀριστερὰ) μᾶς δίδουσι τοὺς τρεῖς ἄλλους ὅρους μὲ ἠλλαγμένον σημεῖον, ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ τύπου (8) ὅστις δεικνύει ὅτι ἡ τιμὴ τῆς ὁριζούσης εἶναι πολυώνυμον ἀκέραιον ὡς πρὸς τὰ στοιχεῖα ἔχον 6 ὅρους.

Κανὼν διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς λύσεως τοῦ συστήματος (5). ***Ἐκ τῆς θεωρίας τοῦ προηγουμένου ἐδαφίου ἕπεται ὅτι ἡ τιμὴ ἑκάστου ἀγνώστου ἰσοῦται πρὸς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν μὲν τὴν ὀρίζουσαν*** $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$ ***καλουμένην ὁρίζουσαν τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων, ἀριθμητὴν δὲ τὴν ὁρίζουσαν τὴν προκύπτουσαν ἐκ τῆς Δ ἐὰν οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἀγνώστου τούτου ἀντικατασταθῶσιν ὑπὸ τῶν δευτέρων μελῶν $\delta_1 \delta_2 \delta_3$.***

4. ***Ἄλλαι ἰδιότητες τῶν ὁριζουσῶν.*** *V. Ἐὰν θεωρήσωμεν ὁρίζουσαν* : $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 + \alpha_1' + \alpha_1'' & \beta_1 + \beta_1' + \beta_1'' & \gamma_1 + \gamma_1' + \gamma_1'' \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$

ἐν τῇ ὁποίᾳ τὰ στοιχεῖα γραμμῆς ἢ στήλης (π. χ. τῆς πρώτης) εἶναι ἀθροίσματα προσθετέων (π. χ.) τριῶν, ἡ ὁρίζουσα Δ ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα τριῶν ἄλλων τῶν ἑξῆς :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1' & \beta_1' & \gamma_1' \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1'' & \beta_1'' & \gamma_1'' \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \qquad (9)$$

Ἀπόδειξις Ἡ ὁρίζουσα Δ ἀναπτυσσομένη κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης γραμμῆς δίδει:

(10) $\Delta = (\alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_1'')A + (\beta_1 + \beta_1 + \beta_1'')B + (\gamma_1 + \gamma_1 + \gamma_1'')\Gamma = (\alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 \Gamma) + (\alpha_1' A + \beta_1' B + \gamma_1' \Gamma) + (\alpha_1'' A + \beta_1'' B + \gamma_1'' \Gamma)$ ὅπου τὰ A, B, Γ παριστῶσι τοὺς συντελεστὰς τῶν στοιχείων τῆς πρώτης γραμμῆς οἵτινες προφανῶς εἶναι κοινοὶ διά τε τὴν ὁρίζουσαν Δ καὶ τὰς ὁριζούσας τοῦ τύπου (9), αἱ δὲ παρενθέσεις τοῦ δευτέρου μέλους τοῦ τύπου (10) εἶναι τ' ἀναπτύγματα κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης γραμμῆς κατὰ σειρὰν τῶν τριῶν ὁριζουσῶν (9)· οὕτω ἀπεδείχθη ἡ ἰδιότης.

Ἡ αὐτὴ ἰδιότης ἐκφράζεται καὶ ἀντιστρόφως ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν ἔχωμεν ὁριζούσας [ὅπως αἱ (9)] ἐχούσας πάσας τὰς γραμμὰς (ἢ στήλας) τὰς αὐτὰς ἐκτὸς μιᾶς, ἥτις ἔχει ἐν πάσαις τὴν αὐτὴν τάξιν, αἱ ὁρίζουσαι αὗται ἀθροίζονται ἐὰν ἀθροίσωμεν τ'

ἀντίστοιχα στοιχεῖα μόνον τῶν μὴ κοινῶν γραμμῶν, τὰς δὲ κοινὰς γράψωμεν ὡς ἔχουσι. Οὕτω τὸ ἄθροισμα τῶν ὁριζουσῶν (9) εἶναι ἡ ὁρίζουσα Δ

Ἰδιότης VI. Ἡ τιμὴ ὁριζούσης δὲν βλάπτεται, ἐὰν εἰς τὰ στοιχεῖα μιᾶς γραμμῆς προσθέσωμεν τὰ στοιχεῖα ἄλλης πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν λ (τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰς στήλας).

Θεωρήσωμεν, π. χ. τὴν ὁρίζουσαν $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$

ἥτις θὰ ἰσοῦται μὲ τήν : $\begin{vmatrix} \alpha_1+\lambda\alpha_2 & \beta_1+\lambda\beta_2 & \gamma_1+\lambda\gamma_2 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$

διότι αὕτη, κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα, ἀναλύεται εἰς τὰς ἑξῆς δύω:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_3 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda\alpha_2 & \lambda\beta_2 & \lambda\gamma_2 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

ὧν ἡ τελευταία εἶναι μηδὲν ὡς ἔχουσα δύω γραμμὰς μὲ στοιχεῖα ἀνάλογα. Ἐντεῦθεν ἕπεται τὸ ἑξῆς ***Πόρισμα***. *Ἡ τιμὴ ὁριζούσης δὲν βλάπτεται, ἐὰν εἰς τὰ στοιχεῖα μιᾶς γραμμῆς προσθέσωμαν (ἢ ἀφαιρέσωμεν ἀπ αὐτῶν) τὰ στοιχεῖα ἄλλης. Τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰς στήλας.*

Χάριν συντομίας, ἀντὶ νὰ λέγωμεν: ἀφαιροῦμεν ἢ προσθέτομεν τ' ἀντίστοιχα στοιχεῖα δύω γραμμῶν, θὰ λέγωμεν : ἀφαιροῦμεν ἢ προσθέτομεν δύω γραμμάς.

Ὁρίζουσαι ἀνωτέρας τάξεως

5) ἐὰν $16=4^2$ ἀριθμοὶ γραφῶσιν εἰς 4 γραμμὰς καὶ 4 στήλας κεκλεισμένας μεταξὺ δύω κατοκορύφων εὐθειῶν, τὸ σύμβολον τοῦτο καλεῖται ὁρίζουσα τετάρτης τάξεως καὶ γενικῶς : ἐὰν ν^2 ἀριθμοὶ γραφῶσιν εἰς ν γραμμὰς καὶ ν στήλας σχηματίζεται ὁρίζουσα **νιοστῆς** τάξεως. Τὰ στοιχεῖα ὁριζούσης 4ης τάξεως ἔχουσι ὡς συντελεστὰς ὁρι-

ζούσας τρίτης τάξεως, ὧν γνωρίζομεν τὴν τιμήν· καὶ γενικῶς: τὰ στοιχεῖα ὁριζούσης νιοστῆς τάξεως ἔχουσιν ὡς συντελεστὰς ὁριζούσας ν-1 τάξεως. Γνωρίζοντες λοιπὸν τὴν τιμὴν τῶν ὁριζουσῶν τρίτης τάξεως καὶ παρατηροῦντες ὅτι τὸ φαινόμενον τοῦ ἐδαφίου 3 ἰσχύει καὶ ἐνταῦθα ὁρίζομεν τὴν τιμὴν καὶ τῶν ὁριζουσῶν 4ης τάξεως ὡς ἀνάπτυγμα αὐτῶν κατὰ τὰ στοιχεῖα μιᾶς γραμμῆς ἢ μιᾶς στήλης. Κατόπιν διὰ τῶν ὁριζουσῶν 4ης τάξεως ὁρίζομεν τὰς 5ης τάξεως καὶ οὕτω καθεξῆς: διὰ τῆς ἐπαγωγικῆς μεθόδου προχωροῦντες ὁρίζομεν τὴν τιμὴν ὁριζούσης νιοστῆς τάξεως διὰ τῆς τιμῆς (ὑποτιθεμένης γνωστῆς) τῶν ὁριζουσῶν ν-1 τάξεως ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ φαινομένου (Σπουδ. παρατήρησις) τοῦ ἐδαφ. 3, ὅπερ ἄγει ἡμᾶς πάντοτε εἰς τήν ἀνάπτυξιν κατὰ τὰ στοιχεῖα μιᾶς γραμμῆς ἢ μιᾶς στήλης. Διὰ τῆς ἀναπτύξεως ταύτης τῆς ἀναγούσης μίαν ὁρίζουσαν εἰς ὁριζούσας κατωτέρας τάξεως ἐπεκτείνονται ἐπαγωγικῶς εἰς πᾶσαν ὁρίζουσαν αἱ ἰδιότητες τῶν ἐδαφίων 1 καὶ 4.

Παράδειγμα. Ὁρίζουσαι τοῦ Vandermonde.

Ἔστω ἡ ὁρίζουσα: $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^2 & \beta & 1 \\ \gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix}$ ἥτις, ὑπολογιζομένη εἴτε διὰ τοῦ κανόνος τοῦ Sarrus εἴτε δι' ἀναπτύξεως, ἔχει τιμήν: $\alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha - \beta\gamma^2 - \alpha\beta^2 - \gamma\alpha^2$ ἡ δὲ παράστασις αὕτη ἀναλύεται εἰς τὸ ἑξῆς γινόμενον: $\Delta = (\alpha-\beta)\ (\alpha-\gamma)\ (\beta-\gamma)$. Ἀλλὰ εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν ταχύτερον διὰ ἑξῆς τρόπου: Ἐὰν ἐν τῇ ὁριζούσῃ Δ ἀντικαταστήσωμεν τὸν α διὰ τοῦ β προκύπτει ὁρίζουσα ἔχουσα δύω γραμμὰς τὰς αὐτὰς καὶ ἑπομένως ἴση τῷ μηδενί· ἄρα, ἐπειδὴ μηδενίζεται διὰ $\alpha=\beta$, θὰ διαιρῆται διὰ τοῦ $\alpha-\beta$, δι' ὅμοιον λόγον θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τῶν $\alpha-\gamma$ καὶ $\beta-\gamma$, ἑπομένως καὶ διὰ τοῦ γινομένου $(\alpha-\beta)\ (\alpha-\gamma)\ (\beta-\gamma)$, κληθήτω δὲ K τὸ πηλῖκον, ὅτε θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα: $\Delta=(\alpha-\beta)\ (\alpha-\gamma)\ (\beta-\gamma)\ K$ (10)

Ἐπειδὴ ἡ ὁρίζουσα Δ καθὼς καὶ ὁ διαιρέτης $(\alpha-\beta)\ (\alpha-\gamma)\ (\beta-\gamma)$ εἶναι προφανῶς βαθμοῦ δευτέρου πρὸς ἕκαστον τῶν γραμμάτων α, β, καὶ γ, ἕπεται ὅτι τὸ πηλῖκον K θὰ εἶναι μεδενὸς βαθμοῦ καὶ ἑπομένως ἀριθμητικὸς συντελεστής. Τούτου τεθέντος, ἐὰν ἐξισώσωμεν τὸν ὅρον $\alpha^2\beta$ τῆς ὁριζούσης Δ μετὰ τοῦ ὁμοίου ὅρου $K\alpha^2\beta$ τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ταυτότητος (10), εὑρίσκομεν $K=I$ καὶ ἑπομένως:

$$\Delta=(\alpha-\beta)\ (\alpha-\gamma)\ (\beta-\gamma)$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον ὑπολογίζεται ὑπὸ μορφὴν γινομένου παραγόντων πρωτοβαθμίων ἡ τιμὴ τῆς ὁριζούσης:

$$\begin{vmatrix} \alpha^3 & \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^3 & \beta^2 & \beta & 1 \\ \gamma^3 & \gamma^2 & \gamma & 1 \\ \delta^3 & \delta^2 & \delta & 1 \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)\ (\alpha-\gamma)\ (\alpha-\delta)\ (\beta-\gamma)\ (\beta-\delta)\ (\gamma-\delta)$$

καὶ ἐν γένει πάσης ὁριζούσης τῆς αὐτῆς μορφῆς καὶ οἱασδήποτε τάξεως. Τοιαῦται ὑπάρχουσι προφανῶς πάσης τάξεως καὶ καλοῦνται ὁρίζουσαι τοῦ Vandermonde δίδουσι δὲ τόσους παράγοντας πρωτοβαθμίους ὅσοι εἶναι οἱ συνδυασμοὶ ἀνὰ δύω τῶν ν γραμμάτων (ἐὰν εἶναι νιοστῆς τάξεως).

Αἱ ὁρίζουσαι αὗται εἶναι χρησιμώταται ὡς πλεῖστα ζητήματα ἡ δὲ τιμὴ αὐτῶν εἶναι ἀριθμὸς διάφορος τοῦ O εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq o_3 \neq \alpha_\nu$, διότι οὐδεὶς ἐκ τῶν παραγόντων, εἰς οὓς ἀναλύεται, εἶναι μηδέν.

Ἀσκήσεις.

1) Δεῖξαι ὅτι ἡ ὁρίζουσα $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix}$

εἶναι πολυώνυμον διαιρετὸν διὰ $\alpha+6+\gamma$ καὶ εὑρεῖν τὸ πηλῖκον.

2) Δεῖξαι ὅτι εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν x καὶ y ἡ τιμὴ τῆς ὁριζούσης:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 \end{vmatrix}$$

3) Δεῖξαι ὅτι εἶναι μηδὲν ἡ τιμὴ τῆς ὁριζούσης:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1-\beta_1 & \alpha_1-\beta_2 & \alpha_1-\beta_3 \\ \alpha_2-\beta_1 & \alpha_2-\beta_2 & \alpha_2-\beta_3 \\ \alpha_3-\beta_1 & \alpha_3-\beta_2 & \alpha_3-\beta_3 \end{vmatrix}$$

4) Εὑρεῖν τὴν τιμὴν τῶν ὁριζουσῶν:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1+\beta \end{vmatrix} \quad \text{καὶ} \quad \begin{vmatrix} 1+\alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\beta & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\gamma & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+\delta \end{vmatrix}$$

5) Ἐπίσης τῆς ὁριζούσης:

$$\begin{vmatrix} \text{συν}(\alpha-\beta) & \text{συν}(\beta-\gamma) & \text{συν}(\gamma-\alpha) \\ \text{συν}(\alpha+\beta) & \text{συν}(\beta+\gamma) & \text{συν}(\gamma+\alpha) \\ \text{ημ}(\alpha+\beta) & \text{ημ}(\beta+\gamma) & \text{ημ}(\gamma+\alpha) \end{vmatrix}$$

6) Λῦσαι τὴν ἐξίσωσιν: $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 5-x \\ x+4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$

7) Ὑπολογίσαι τὴν τιμὴν τῆς ὁριζούσης: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & 2 & 1 & x^2 \\ 1 & 3 & 3 & x^3 \end{vmatrix}$

καὶ δεῖξαι ὅτι εἶναι τέλειος κύβος· ἐπίσης τῆς ὁριζούσης:

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{συν}\,\gamma & \text{συν}\,\beta \\ \text{συν}\,\gamma & 1 & \text{συν}\,\alpha \\ \text{συν}\,\beta & \text{συν}\,\alpha & 1 \end{vmatrix}$$

8) Ὑπολογίσαι τὴν τιμὴν τῶν ἑξῆς ὁριζουσῶν:

$$\begin{vmatrix} o & \alpha & \beta & \gamma \\ -\alpha & o & \delta & \varepsilon \\ -\beta & -\delta & o & \zeta \\ -\gamma & -\varepsilon & -\zeta & o \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} o & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ -\alpha_1 & o & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ -\beta_1 & -\alpha_2 & o & \alpha_3 & \beta_3 \\ -\gamma_1 & -\beta_2 & -\alpha_3 & o & \alpha_4 \\ -\delta_1 & -\gamma_2 & -\beta_3 & -\alpha_4 & o \end{vmatrix}$$

Δεῖξαι ὅτι ἡ δευτέρα εἶναι μηδέν. Γενικεῦσαι τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο.

Αἱ ὁρίζουσαι αὗται ἔχουσι τὴν ἑξῆς μορφολογικὴν ἰδιότητα: *Τὰ στοιχεῖα τὰ συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν θετικὴν διαγώνιον εἶναι ἀντίθετοι ἀριθμοί.*

9) Δεῖξαι τὰς ἑξῆς ταυτότητας:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha\alpha'+\beta\beta' & \alpha\gamma'+\beta\delta' \\ \gamma\alpha'+\delta\beta' & \gamma\gamma'+\delta\delta' \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1A_1+\beta_1B_1+\gamma_1\Gamma_1 & \alpha_1A_2+\beta_1B_2+\gamma_1\Gamma_2 & \alpha_1A_3+\beta_1B_3+\gamma_1\Gamma_3 \\ \alpha_2A_1+\beta_2B_1+\gamma_2\Gamma_1 & \alpha_2A_2+\beta_2B_2+\gamma_2\Gamma_2 & \alpha_2A_3+\beta_2B_3+\gamma_2\Gamma_3 \\ \alpha_3A_1+\beta_3B_1+\gamma_3\Gamma_1 & \alpha_3A_2+\beta_3B_2+\gamma_3\Gamma_2 & \alpha_3A_3+\beta_3B_3+\gamma_3\Gamma_3 \end{vmatrix}$$

αἵτινες παρέχουσι τρόπον πολλαπλασιασμοῦ δύω ὁριζουσῶν δευτέρας ἢ τρίτης τάξεως, δίδουσαι κανόνα προφανῆ, ὅστις γενικεύεται ἐπεκτεινόμενος εἰς ὁριζούσας οἱασδήποτε τάξεως.

10. Ἐὰν καλέσωμεν ϑ μίαν ἐκ τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $x^2+x+1=0$ (δηλαδὴ μίαν ἐκ τῶν φανταστικῶν ῥιζῶν τοῦ 1), δεῖξαι τὴν ἑξῆς ἰσότητα:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix} = -(\alpha+\beta+\gamma)\,(\alpha+\beta\vartheta+\gamma\vartheta^2)\,(\alpha+\beta\vartheta^2+\gamma\vartheta)$$

Λύσις διὰ τῶν ὁριζουσῶν συστήματος ὁσωνδήποτε πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων

11. Θεωρήσωμεν π. χ. τὸ σύστημα:
$$\begin{aligned} \alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1z+\delta_1\varphi&=\varepsilon_1 \\ \alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2z+\delta_2\varphi&=\varepsilon_2 \\ \alpha_3x+\beta_3y+\gamma_3z+\delta_3\varphi&=\varepsilon_3 \\ \alpha_4x+\beta_4y+\gamma_4z+\delta_4\varphi&=\varepsilon_4 \end{aligned}$$

καὶ καλέσωμεν $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{vmatrix}$ τὴν ὁρίζουσαν τὴν ἀποτελουμένην ἀπὸ τοὺς συντελεστὰς τῶν ἀγνώστων. Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν πολ)σωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῶν ἐξισώσεων ἀντιστοίχως ἐπὶ τοὺς συντελεστὰς τῶν στοιχείων τῆ πρώτης στήλης τῆς Δ καὶ προσθέσωμεν κατὰ μέλη, ἀπαλείφονται διὰ μιᾶς πάντες οἱ ἄγνωστοι ἐκτὸς τοῦ x, διότι, ὡς φαίνεται ἀμέσως, ἐν τῇ προκυπτούσῃ ἐξισώσει ὁ μὲν x θὰ ἔχῃ ὡς συντελεστὴν τὴν ὁρίζουσαν Δ οἱ δὲ ἄλλοι ἄγνωστοι θὰ ἔχωσιν ὡς συντελεστὰς ὁριζούσας ἐχούσας δύω στήλας τὰς αὐτὰς (προκυπτούσας ἐκ τῆς Δ ἐὰν ἡ πρώτη στήλη ἀντικατασταθῇ δι᾽ ἄλλης)· Ἐὰν λοιπὸν $\Delta \neq o$ τότε ἔχομεν διὰ τὸν x μίαν μόνην τιμὴν εὑρισκομένην διὰ τοῦ πρακτικοῦ κανόνος ὃν εἴδομεν εἰς τὰ συστήματα ἐκ δύω ἢ τριῶν ἐξισώσεων, ὁμοίως δὲ καὶ διὰ τοὺς ἄλλους ἀγνώστους. ***Ὅταν λοιπὸν $\Delta \neq o$ τὸ σύστημα ἔχει μίαν λύσιν καὶ μίαν μόνην*** ὅταν ἡ ὁρίζουσα $\Delta = o$, ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ σύστημα ἢ ἔχει ἀπείρους λύσεις ἢ οὐδεμίαν (ἀδύνατον)·

Σύστημα ὁμογενές. Ἐὰν τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἐξισώσεων εἶναι μηδὲν τὸ σύστημα λέγεται ***ὁμογενὲς***, διότι πάντες οἱ ὅροι θὰ εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους. Τὰ ὁμογενῆ συστήματα δὲν παρουσιάζουσι τὴν περίπτωσιν τοῦ ἀδυνάτου διότι ἔχουσι πάντοτε τὴν προφανῆ λύσιν : $x=y=z=\varphi=o$, ἥν, χάριν συντομίας, θὰ καλέσωμεν ***μηδενικήν***.

Σύστημα ἔχον ἐξισώσεις περισσοτέρας ἢ ἀγνώστους.

Ἔστω τὸ

$$\begin{aligned} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 &= o \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 &= o \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \delta_3 &= o \\ \alpha_4 x + \beta_4 y + \gamma_4 z + \delta_4 &= o \end{aligned}$$

4 ἐξισώσεων μετὰ 3 ἀγνώστων x y z. Ἐπειδὴ εἶναι προφανὲς ὅτι, ἐν γένει, δὲν ὑπάρχουσι τιμαὶ τῶν ἀγνώστων ταυτοποιοῦσαι πάσας τὰς ἐξισώσεις, δι᾽ αὐτὸ θὰ ζητήσωμεν τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην ἵνα ὑπάρχωσι τοιαῦται τιμαί, δηλαδή : ἵνα ὑπάρχῃ κοινὴ λύσις.

Διὰ ν᾽ ἀναχθῇ τὸ ζήτημα τοῦτο εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ᾽ ἣν οἱ ἄγνωστοι εἶναι ἰσάριθμοι πρὸς τὰς ἐξισώσεις, εἰσάγομεν μίαν βοηθητικὴν ἄγνωστον ω θεωροῦντες τὸ σύστημα:

$$
(2) \qquad
\begin{aligned}
\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 \omega &= 0 \\
\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 \omega &= 0 \\
\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \delta_3 \omega &= 0 \\
\alpha_4 x + \beta_4 y + \gamma_4 z + \delta_4 \omega &= 0
\end{aligned}
$$

Εἶναι πρόδηλον ὅτι, ἵνα τὸ σύστημα (1) ἔχῃ λύσιν τινὰ (κοινὴν δι' ὅλας τὰς ἐξισώσεις), πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ σύστημα (2) νὰ ἔχῃ λύσιν ἐν τῇ ὁποίᾳ $\omega=1$, δηλαδὴ λύσιν διάφορον τῆς μηδενικῆς, ἥτις ὑπάρχει πάντοτε. Ἀλλά, ἵνα τὸ σύστημα τοῦτο (2) ἔχῃ καὶ ἄλλην λύσιν ἐκτὸς τῆς μηδενικῆς, ὅτε θὰ ἔχῃ ἀπείρους λύσεις, πρέπει νὰ εἶναι μηδὲν ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων, διότι, ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει, τὸ σύστημα θὰ εἶχε μίαν μόνην λύσιν τὴν μηδεδενικήν.

Ἔχομεν λοιπὸν τὸ ἑξῆς θεώρημα:

Θεώρημα. ***Ἵνα σύστημα (1) ἔχῃ λύσιν τινά, πρέπει νὰ εἶναι μηδὲν ἡ ὁρίζουσα ἡ ἀποτελουμένη ἐξ ὅλων τῶν συντελεστῶν, συμπεριλαμβανομένων καὶ τῶν σταθερῶν ὅρων. Συνήθως τοῦτο καὶ ἀρκεῖ, καλεῖται δὲ ἐξαγόμενον τῆς ἀπαλοιφῆς τῶν 3 ἀγνώστων*** x, y, z, ***μεταξὺ τῶν 4 ἐξισώσεων.***

Παρατήρησις. Εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν οἱ ἄγνωστοι εἶναι πλείονες τῶν ἐξισώσεων, τὸ σύστημα ἐπιδέχεται λύσεις ἀπείρους τὸ πλῆθος, διότι δυνάμεθα νὰ δώσωμεν αὐθαιρέτως τιμὰς εἰς τοὺς περισσεύοντας (πλεονάζοντας) ἀγνώστους.

Ἀσκήσεις. 1). Τῇ βοηθείᾳ τῶν τύπων: $\alpha=\beta$ συν $\Gamma+\gamma$ συν B, $\beta=\gamma$ συν $A+\alpha$ συν Γ, $\gamma=\alpha$ συν $B+\beta$ συν A εὑρεῖν σχέσιν μεταξὺ τῶν A, B καὶ Γ. 2). Ἀπαλεῖψαι τὰ α, β, γ μεταξὺ τῶν 4 ἐξισώσεων:

$$2E=\varrho(\alpha+\beta+\gamma)=\varrho_1(\beta+\gamma-\alpha)=\varrho_2(\gamma+\alpha-\beta)=\varrho_3(\alpha+\beta-\gamma).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

Ἀνισότητες καὶ ὅρια.

Περὶ ἀνισοτήτων.

1. ***Θὰ λέγωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς α εἶναι μεγαλείτερος τοῦ β ὅταν ἡ διαφορὰ α-β εἶναι θετικὸς ἀριθμός***, θὰ σημειοῦται δὲ τοῦτο διὰ τοῦ συμβόλου $\alpha > \beta$. Ὁ ὁρισμὸς οὗτος τῆς ἀνισότητος περιλαμβάνει καὶ τοὺς γνωστοὺς ὁρισμοὺς τῆς ἀνισότητος τῶν θετικῶν συμμέτρων ἀριθμῶν.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἕπονται αἱ ἑξῆς ἰδιότητες:

I. ***Πᾶς θετικὸς εἶναι μεγαλείτερος τοῦ μηδενός.***

II. ***Πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος τοῦ μιδενός.*** Ἔχομεν, π. χ, $-5 < 0$, διότι ἡ διαφορὰ $0-(-5)=5$ εἶναι θετικὸς ἀριθμός.

III. ***Ἐκ δύω ἀρνητικῶν ἀριθμῶν μεγαλείτερος εἶναι ὁ ἄνευ σημείου μικρότερος.*** Ἔχομε, π. χ, $-2 > -5$, διότι ἡ διαφορὰ $-2-(-5)=3$ εἶναι θετικὸς ἀριθμός.

IV. ***Ἡ φορὰ ἀνισότητος δὲν ἀλλάσει, ἐὰν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς ποοστεθῇ ὁ αὐτός ἀριθμός.***

Ἔστω ἡ ἀνισότης $\alpha > \beta$, λέγω ὅτι ἐξ αὐτῆς ἕπεται $\alpha+\mu > \beta+\mu$ τοῦ μ ὄντος οἱουδήποτε ἀριθμοῦ. Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ $\alpha > \beta$, ἡ διαφορὰ $\alpha-\beta > 0$· ἀλλ' ἔχομεν προφανῶς $\alpha-\beta=(\alpha+\mu)-(\beta+\mu)$ ὥστε $(\alpha+\mu)-(\beta+\mu) > o$, δηλαδὴ (κατὰ τὸν ὁρισμόν):

$$\alpha+\mu > \beta+\mu$$

V. *Ἐὰν προσθέσωμεν δύω ἀνισότητας κατὰ μέλη (τὸ μεγαλείτερον εἰς τὸ μεγαλύτερον καὶ τὸ μικρότερον εἰς τὸ μικρότερον), προκύπτει ἀνισότης τῆς αὐτῆς φορᾶς.*

Θεωρήσωμεν τὰς ἀνισότητας: $\alpha > \beta$ καὶ $\gamma > \delta$ (1)
θὰ δείξωμεν ὅτι ἐξ αὐτῶν ἕπεται: $\alpha+\gamma > \beta+\delta$
Τῷ ὄντι, ἐξ ὑποθέσεως θὰ ἔχωμεν: $\alpha-\beta > 0$ καὶ $\gamma-\delta > 0$
καὶ ἑπομένως $(\alpha-\beta)+(\gamma-\delta)=(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta) > 0$.
Ἐπειδὴ ὅμως ἡ διαφορὰ αὕτη εἶναι θετική, θὰ ἔχωμεν: $\alpha+\gamma > \beta+\delta$.

Παρατήρησις. Όταν ἀφαιρῶμεν δύω ἀνισότητας, π.χ. τὰς (1), κατὰ μέλη, δὲν προκύπτει πάντοτε ἀνισότης τῆς αὐτῆς φορᾶς, τοῦτο δὲ διότι ἐκ τῶν ἀνισοτήτων $\alpha-\beta>0$ καὶ $\gamma-\delta>0$ δὲν ἕπεται ὅτι ἡ διαφορὰ $(\alpha-\beta)-(\gamma-\delta)=(\alpha-\gamma)-(\beta-\delta)$ θὰ εἶναι πάντοτε θετική.

Παράδειγμα. Ἐκ τῶν ἀνισοτήτων $10>8$ καὶ $7>2$ ἀφαιρουμένων κατὰ μέλη προκύπτει ἡ $3>6$, ἥτις εἶναι ψευδής.

VI. *Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἀνισότητος ἐπὶ ἕνα ἀριθμὸν μ, ἡ φορὰ τῆς ἀνισότητος* ***διατηρεῖται μὲν ὅταν ὁ μ εἶναι θετικὸς ἀριθμός, ἀλλάσει δὲ ὅταν ὁ μ εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός***.

Ἀπόδειξις. Ἔστω $\alpha>\beta$, δηλαδὴ $\alpha-\beta>0$. Ἐὰν $\mu>0$, θὰ ἔχωμεν $(\alpha-\beta)\mu=\alpha\mu-\beta\mu>0$, δηλαδή: $\alpha\mu>\beta\mu$. Ἐὰν ὅμως $\mu<0$, θὰ ἔχωμεν $(\alpha-\beta)\mu=\alpha\mu-\beta\mu<0$, δηλαδή: $\alpha\mu<\beta\mu$.

VII. *Ἐὰν $\alpha>\beta$ καὶ $\beta>\gamma$, ἕπεται: $\alpha>\gamma$.* Ἡ ἀπόδειξις γίνεται ἀμέσως διὰ τῆς προσθήκης κατὰ μέλη.

VIII. ***Ἐὰν ἔχωμεν δύω ἀνισότητας, ὧν δύω διαγώνια μέλη εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, καὶ πολλαπλασιασωμεν αὐτὰς κατὰ μέλη· προκύπτει ἀνισότης τῆς αὐτῆς φορᾶς.***

Ἔστωσαν αἱ ἀνισότητες: $\alpha>\beta$ καὶ $\gamma>\delta$ καὶ ὑποτεθείσθω ὅτι τὰ δύω διαγώνια μέλη α καὶ δ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, λέγω ὅτι θὰ ἔχωμεν : $\alpha\gamma>\beta\delta$.

Τῷ ὄντι, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν θετικὸν ἀριθμὸν δ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς $\alpha>\beta$ προκύπτει
$$\alpha\delta>\beta\delta \qquad (2)$$
ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν $\alpha>0$ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς $\gamma>\delta$ προκύπτει ἡ ἀνισότης:
$$\alpha\gamma>\alpha\delta \qquad (3)$$
ἀλλὰ τότε, παραβάλλοντες τὰς (2) καὶ (3) καὶ στηριζόμενοι εἰς τὴν προηγουμένην ἰδιότητα λαμβάνομεν τὴν ἀποδεικτέαν: $\alpha\gamma>\beta\delta$.

VII. ***Ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη ἀνισότητος εἶναι θετικὰ καὶ ὑψωθῶσιν εἰς δύναμιν, ἡ φορὰ τῆς ἀνισότητος διατηρεῖται μὲν ὅταν ὁ ἐκθέτης εἶναι θετικός, ἀλλάσσει δὲ ὅταν ὁ ἐκθέτης εἶναι ἀρνητικός.***

Ἔστω $\alpha>\beta$ καὶ ὑπτεθείσθω $\alpha>0$ καὶ $\beta>0$, θ' ἀποδείξωμεν ὅτι:
$$\alpha^{\mu}>\beta^{\mu} \qquad \text{ἐὰν} \quad \mu>0 \qquad (4)$$
καὶ
$$\alpha^{\mu}<\beta^{\mu} \qquad \text{ἐὰν} \quad \mu<0 \qquad (5)$$

'Εὰν ἡ δοθεῖσα ἀνισότης $\alpha > \beta$ πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἑαυτὴν κατὰ μέλη θὰ προκύψῃ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἡ $\alpha^2 > \beta^2$, ἐὰν δὲ ταύτην πολλαπλασιάσωμεν πάλιν ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν, θὰ λάβωμεν τὴν $\alpha^3 > \beta^3$ ἥτις πολλαπλασιαζομένη ἐκ νέου ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν δίδει: $\alpha^4 > \beta^4$, καὶ οὕτω καθεξῆς· ἡ ἀνισότης (4) ἀπεδείχθη εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ὁ μ εἶναι ἀκέραιος.

Θεωρήσωμεν ἤδη τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ὁ $\mu = \frac{\nu}{k}$ εἶναι κλασματικός, πρόκειται νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἀνισότης:

$$\alpha^{\frac{\nu}{k}} > \beta^{\frac{\nu}{k}} \tag{6}$$

ἰσχύει διὰ τὰς θετικὰς τιμὰς τῶν δυνάμεων τούτων. Θὰ μεταχειρισθῶμεν τὴν μέθοδον τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς: 'Εὰν δὲν ἠλήθευεν ἡ (6) θὰ εἴχομεν:

ἢ $\alpha^{\frac{\nu}{k}} = \beta^{\frac{\nu}{k}}$, ἐξ ἧς $\alpha^\nu = \beta^\nu$, ἥτις εἶναι ἄτοπος, καθόσον τὸ ν εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός, ἢ $\alpha^{\frac{\nu}{k}} < \beta^{\frac{\nu}{k}}$ (7)

'Αλλά, ἐὰν ἠλήθευεν ἡ (7), ὑψοῦντες αὐτὴν εἰς τὴν k δύναμιν θὰ ἐλαμβάνομεν τὴν $\alpha^\nu < \beta^\nu$

ἥτις εἶναι ἄτοπος, καθόσον ἐκ τῆς δοθείσης ἀνισότητος, ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὴν ἤδη ἀποδειχθεῖσαν περίπτωσιν τοῦ ἀκεραίου ἐκθέτου προκύπτει ἡ $\alpha^\nu > \beta^\nu$

'Επειδὴ λοιπὸν ἡ ἰσότης $\alpha^{\frac{\nu}{k}} = \beta^{\frac{\nu}{k}}$ καὶ ἡ ἀνισότης $\alpha^{\frac{\nu}{k}} < \beta^{\frac{\nu}{k}}$ εἶναι ἀπαράδεκτοι, θὰ ἔχωμεν τὴν ἀνισότητα (6).

῾Υποτεθείσθω τέλος $\mu = -\vartheta < 0$. 'Επειδὴ $\vartheta > 0$, θὰ ἔχωμεν: $\alpha^\vartheta > \beta^\vartheta$ καὶ διαιροῦντες διὰ τοῦ γινομένου $\alpha^\vartheta \beta^\vartheta$ λαμβάνομεν:

$$\frac{1}{\beta^\vartheta} > \frac{1}{\alpha^\vartheta} \text{ δηλαδή: } \beta^{-\vartheta} > \alpha^{-\vartheta} \text{ δηλαδή: } \alpha^{\mu} < \beta^{\mu}$$

ἀπεδείχθη λοιπὸν καὶ τὸ δεύτερον μέρος τοῦ θεωρήματος.

Πόρισμα τοῦ VII. *'Εὰν ἀριθμός τις α εἶναι μεγαλείτερος τῆς μονάδος, πᾶσα δύναμις αὐτοῦ* α^μ *εἶναι μεγαλειτέρα μὲν τῆς μονάδος,* *ἐὰν $\mu>0$, μικροτέρα δὲ τῆς μονάδος, ἐὰν $\mu<0$. Τ' ἀντίστροφα συμβαίνουσιν ἐὰν ὁ α εἶναι θετικὸς καὶ μικρότερος τῆς μονάδος.*

Παραλείπομεν τὴν ἀπόδειξιν αὐτοῦ ὡς προφανῆ.

Παρατήρησις. Ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης ἕπεται ὅτι, ἐὰν $\alpha^{\mu}=1$, θὰ ἔχωμεν : ἢ $\mu=0$, $\alpha=1$, ἢ $\alpha=-1$.

VIII. Ἐὰν τὰ μέλη ανισότητος $\alpha>\beta$ εἶναι ὁμόσημα καὶ ἀντιστραφῶσιν, ἀντιστρέφει καὶ ἡ φορὰ αὐτῆς. Τῷ ὄντι, ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $\alpha\beta$, ὅστις ὑπετέθη θετικός, προκύπτει *):

$$\frac{1}{\beta}>\frac{1}{\alpha},\quad \text{δηλαδή}:\ \frac{1}{\alpha}<\frac{1}{\beta}.$$

2. Ὅταν ἀνισότης ἔχουσα γράμματα δὲν ἰσχύῃ διὰ πάσας τὰς τιμὰς αὐτῶν, τότε παρουσιάζεται τὸ πρόβλημα τῆς ἀναζητήσεως τῶν τιμῶν τῶν γραμμάτων, αἵτινες ἐπανηθεύουσι τὴν ἀνισότητα, ἡ δὲ πρᾶξις αὕτη καλεῖται *λύσις τῆς ἀνισότητος.*

Αἱ ἀνισότητες αἱ ἔχουσαι ἕνα ἄγνωστον καὶ οὖσαι πρωτοβάθμιοι ὡς πρὸς αὐτὸν λύονται ὅπως αἱ ἀντίστοιχοι πρωτοβάθμιοι ἐξισώσεις, δυνάμει τῶν ἰδιοτήτων τοῦ προηγουμένου ἐδαφίου.

3. ***Λύσις ἀνισότητος δευτέρου βαθμοῦ.*** Ἡ γενικὴ μορφὴ τοιαύτης ἀνισότητος μεθ' ἑνὸς ἀγνώστου εἶναι ἡ ἑξῆς:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma \gtrless 0$$

ἡ δὲ λύσις αὐτῆς ἀνάγεται εἰς τὸ πρόβλημα τῆς μελέτης τοῦ σημείου τοῦ τριωνύμου :

$$\tau=\alpha x^2+\beta x+\gamma \tag{9}$$

ὅταν τὸ x λαμβάνῃ πάσας τὰς πραγματικὰς τιμάς.

Διὰ τὸ πρόβλημα τοῦτο διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις :

α'.) Ἐὰν ἔχωμεν $\beta^2-4\alpha\gamma<0$, δηλαδὴ ἐὰν αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου εἶναι φανταστικαί, γράφομεν :

$$\tau=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2}\right]$$

ἢ

$$\frac{\tau}{\alpha}=\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2} \tag{10}$$

*) Καθ' ὅμοιον τρόπον δεικνύεται ὅτι, ἐὰν τὰ μέλη εἶναι ἑτερόσημα καὶ ἀντιστραφῶσι, διατηρεῖται ἡ φορὰ τῆς ἀνισότητος.

(i) $\boxed{\mu=0 \wedge \alpha\neq 0}$, (ii) $\boxed{\alpha=1}$, (iii) $\alpha\neq 1$ | $\alpha>1$, $0<\alpha<1$ $\alpha>0$

(iiia) $-\alpha>0$ $-\alpha>1$, $0<-\alpha<1$ (iv) $-\alpha=1 \Leftarrow \boxed{\alpha=-1}$ (iiia) ὁ δὲ τύπος αὐτός, τοῦ ὁποίου τὸ δεύτερον μέλος εἶναι θετικὸν πάντοτε (διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x) δεικνύει ὅτι πάντοτε τὸ τ εἶναι ὁμόσημον τῷ α.

β΄.) Ἐὰν ἔχωμεν: $\beta^2-4\alpha\gamma=0$, δηλαδή: αἱ ῥίζαι πραγματικαὶ καὶ ἴσαι, ὁ τύπος (10) γίνεται:

$$\frac{\tau}{\alpha}=\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$$

καὶ δεικνύει ὅτι καὶ πάλιν τὸ τ εἶναι πάντοτε ὁμόσημον τοῦ α.

γ΄.) Ἐὰν ἔχωμεν $\beta^2-4\alpha\gamma>0$, δηλαδή: αἱ ῥίζαι ρ καὶ ρ΄ εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, μεταχειριζόμεθα τὴν γνωστὴν ἀνάλυσιν:

$$\tau=\alpha(x-\varrho)\,(x-\varrho') \text{ ἢ } \frac{\tau}{\alpha}=(x-\varrho)\,(x-\varrho') \qquad (11)$$

ἡ δὲ ἰσότης αὕτη δεικνύει ἀμέσως ὅτι:

ἐὰν $x>\varrho'>\varrho$, θὰ ἔχωμεν: $(x-\varrho)\,(x-\varrho')>0$, δηλαδή: $\frac{\tau}{\alpha}>0$

ἐὰν $x<\varrho<\varrho'$, θὰ ἔχωμεν: $(x-\varrho)\,(x-\varrho')>0$, δηλαδή: $\frac{\tau}{\alpha}>0$

καὶ ἐὰν $\varrho<x<\varrho'$, θὰ ἔχωμεν: $(x-\varrho)\,(x-\varrho')<0$, δηλαδή: $\frac{\tau}{\alpha}<0$

Ἐντεῦθεν συνάγομεν τὸ ἑξῆς θεώρημα.

Θεώρημα. ***Τὸ τριώνυμον ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x, ἐκτὸς τῶν τιμῶν τῶν περιλαμβανομένων μεταξὺ τῶν ῥιζῶν, δι' ἃς ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ —α.***

Παρατήρησις. Ἐπειδὴ εἰς τὰς δύο πρώτας περιπτώσεις δὲν ὑπάρχουσι πραγματικαὶ τιμαὶ περιλαμβανόμεναι μεταξὺ τῶν ῥιζῶν, τὸ θεώρημα τοῦτο δύναται νὰ θεωρηθῇ γενικόν, ἀναφερόμενον καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις.

Ἀσκήσεις.

1. Δεῖξαι ὅτι, οἱωνδήποτε ὄντων εων ἀριθμῶν α καὶ β, θὰ ἔχωμεν: $\alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta$

2. Δεῖξαι ὅτι, ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι ὁμόσημοι, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\geq 2$$

$\alpha^2+\beta^2 \geq 2\alpha\beta$ κ.τ.λ.

3. Δεῖξαι ὅτι, οἱωνδήποτε ὄντων τῶν ἀριθμῶν α, β καὶ γ) θὰ ἔχωμεν: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$

4. Δεῖξαι ὅτι, ἐὰν οἱ α, β καὶ γ παριστῶσι τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τριγώνου, θὰ ἔχωμεν: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2<2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$

5. Δεῖξαι ὅτι, ἐὰν οἱ α καὶ β εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\alpha+\beta}{2}\geq\sqrt{\alpha\beta}$$

δηλαδη ἡ μέση ἀριθμητικὴ οὐδέποτε εἶναι μικροτέρα τῆς μέσης γεωμετρικῆς.

6. Λῦσαι τὰς ἀνισότητας: $\frac{x}{\alpha}-\frac{x}{\beta}>1$, $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}>1$, $x^2-5x+6>0$

$x^2-12x+32>0$, $x^2-13x+22<0$, $-x^2+6x-9>0$

7. Λῦσαι τὸ σύστημα τῶν ἀνισοτήτων: $5x^2-7x+1<0$ καὶ $x^2-9x+30<0$.

8) Δεῖξαι ὅτι ἡ δύναμις $(1+x)^\nu$, ὅπου $x>o$) εἶναι μεγαλειτέρα μὲν τοῦ $1+\nu x$ ὅταν $\nu>1$, μικροτέρα δὲ τοῦ $1+\nu x$ ὅταν τὸ $\nu<1$.

Περὶ ὁρίων

Ὁρισμοί.

4. Ὅταν ἡ τιμὴ μιᾶς ποσότητος διατηρῆται σταθερά, αὕτη λέγεται ***σταθερά***. ποσότης μὴ σταθερὰ λέγεται ***μεταβλητή***.

Ἀπόλυτος τιμὴ ἀριθμοῦ τινος α καλεῖται ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς θετικῶς λαμβανόμενος, σημειοῦται δὲ διὰ τοῦ συμβόλου $|\alpha|$, οὕτω:

$$|3|=3 \text{ καὶ } |-3|=3$$

Ἐκ τοῦ τρόπου, καθ' ὃν ἐκτελοῦνται αἱ ἀλγεβρικαὶ πράξεις, ἕπονται ἀμέσως αἱ ἑξῆς ἰδιότητες:

I. Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ ἀθροίσματος εἶναι μικροτέρα ἢ ἴση τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν προσθετέων.

II. Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ ἀθροίσματος δύω προσθετέων εἶναι μεγαλειτέρα ἢ ἴση τῆς διαφορᾶς τῶν ἀπολύτων τιμῶν αὐτῶν.

II. Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ γινομένου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων καὶ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ πηλίκου ἰσοῦται τῷ πηλίκῳ τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ διαιρετέου διὰ τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ διαιρέτου.

Θὰ λέγωμεν ὅτι μία μεταβλητὴ ποσότης x ἔχει ***ὅριον τὸ μηδέν, ὅταν ἡ ἀπόλυτος αὐτῆς τιμὴ δύναται νὰ γίνῃ καὶ νὰ μείνῃ μικροτέρα παντὸς ἀριθμοῦ δοθέντος ὁσονδήποτε μικροῦ***.

Αἱ ποσότητες αἱ ἔχουσαι ὅριον τὸ μηδὲν καλοῦνται συντόμως ἀπειροσταὶ ἢ ἀπειροστὰ (ποσά).

Ἐάν, π.χ. θεωρήσωμεν πολύγωνον κανονικὸν ἐκ **ν** πλευρῶν ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον ἀκτῖνος α καθὼς καὶ τὸ ἀντίστοιχον περιγεγραμμένον καὶ καλέσωμεν τ καὶ τ′ τὰς περιμέτρους αὐτῶν, ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι τὸ ν αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον, ἡ διαφορὰ $\tau' - \tau$ θὰ ἔχῃ ὅριον τὸ μηδέν, διότι ἡ Γεωμετρία ἀποδεικνύει ὅτι, δοθείσης εὐθείας ε ὁσονδήποτε μικρᾶς, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸ ν ἀρκετὰ μέγα ὥστε: $\tau' - \tau < \varepsilon$. Ἐνταῦθα ἡ ποσότης ν μετεβλήθη αὐθαιρέτως καὶ διὰ τοῦτο καλεῖται ἀνεξάρτητος μεταβλητή, ἐνῷ ἡ $\tau' - \tau$ καλεῖται ***ἐξηρτημένη μεταβλητή***, διότι μεταβάλλεται κατ' ἀνάγκην ὡς ἐξαρτωμένη ἐκ τοῦ ν· ἀφ' ἑτέρου, ἡ ἀκτὶς ἡ περιφέρεια καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου εἶναι ποσότητες ***σταθεραί***, ὡς μὴ ἐξαρτώμεναι ἐκ τοῦ ν.

Ἐὰν ἓν ἀπειροστὸν x λαμβάνῃ τὴν ἑξῆς ἀπέραντον σειρὰν τιμῶν:

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots, x_\nu, \ldots\ldots$$

τότε, δοθέντος ἀριθμοῦ ε ὁσονδήποτέ μικροῦ, θὰ ὑπάρχῃ ἀριθμός τις ἀκέραιος καὶ θετικὸς ν_1 τοιοῦτος ὥστε, διὰ $\nu > \nu_1$, νὰ ἔχωμεν τὴν ἀνισότητα:

$$|x_\nu| < \varepsilon$$

δηλαδή: ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ x_ν θὰ εἶναι ἀπό τινος τάξεως καὶ ἐφεξῆς, μικροτέρα τοῦ ε.

Θὰ λέγωμεν ὅτι μία μεταβλητὴ x ἔχει ὅριον τὴν σταθερὰν α, ὅταν

ἡ διαφορὰ $x-a$ ἔχει ὅριον τὸ μηδέν. Π. χ. Ὅταν χορδή κύκλου τείνει πρὸς τὸ μηδέν, τὸ ἀπόστημα αὐτῆς α ἔχει ὅριον τὴν ἀκτῖνα ρ, διότι ἡ διαφορὰ $\rho-a$ θὰ ἔχῃ ὅριον τὸ μηδέν.

Θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ x ἔχει ὅριον τὸ ἄπειρον (παριστώμενον διὰ τοῦ συμβόλου ∞), ὅταν ἡ ἀπόλυτος αὐτῆς τιμὴ ($|x|$) δύναται νὰ γίνῃ καὶ νὰ μείνῃ μεγαλειτέρα παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ M ὁσονδήποτε μεγάλου. Τοιαύτη εἶναι ἡ ποσότης ν τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ὅταν εἰς αὐτὴν δίδωμεν, π. χ, τὰς τιμὰς $4, 8, 16, 32, \ldots 2^{\mu} \ldots$

Ἐὰν ἡ τιμὴ τοῦ x ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς εἶναι θετική, θὰ λέγωμεν ὅτι ὅριον τοῦ x εἶναι τὸ θετικὸν ἄπειρον ($+\infty$), ἐὰν τοὐναντίον, ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς, ἡ ἀλγεβρική τιμὴ τοῦ x εἶναι ἀρνητική, τότε θὰ λέγωμεν ὅτι ὅριον τοῦ x εἶναι τὸ ἀρνητικὸν ἄπειρον ($-\infty$). Ἐὰν οὐδέτερον τούτων συμβαίνῃ, τότε εἶναι κυρίως ἡ ἀπόλυτος τιμὴ $|x|$ ἥτις ἔχει ὅριον, τὸ $+\infty$.

Θεωρήματα περὶ τῶν ἀπειροστῶν.

5. ***Θεώρημα I.*** *Τὸ γινόμενον ἀπειροστοῦ x ἐπὶ σταθερὰν ποσότητα k εἶναι ἐπίσης ἀπειροστόν.* Διότι δοθέντος ἀριθμοῦ ε ὁσονδήποτε μικροῦ, ἡ ἀνισότης:
$$|kx| < \varepsilon \tag{12}$$
θ' ἀληθεύσῃ ἀπὸ τινος καὶ ἐφεξῆς, καθόσον αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τήν: $|x| < \frac{\varepsilon}{|k|}$ ἥτις ἀληθεύει ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς, ἐπειδὴ τὸ ἀπειροστὸν x δύναται νὰ γίνῃ νὰ μείνῃ κατ' ἀπόλυτον τιμὴν μικρότερον παντὸς ἀριθμοῦ.

Θεώρημα II περὶ ἀθροίσματος ἀπειροστῶν. *Τὸ ἄθροισμα ἀπειροστῶν $x_1, x_2, x_3, \ldots x_\nu$, ὧν ὁ πλῆθος εἶναι πεπερασμένον (ἂς ὑποτεθῇ σταθερόν), εἶναι ἐπίσης ἀπειροστόν.*

Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ $|x_1+x_2+\ldots+x_\nu|$ δύναται νὰ γίνῃ καὶ νὰ μείνῃ μικροτέρα παντὸς ἀριθμοῦ ε. Τῷ ὄντι, ἐπειδή:
$$|x_1+x_2+\ldots x_\nu| \leq |x_1|+|x_2|+\ldots+|x_\nu|,$$
ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ τὸ δυνατὸν τῆς ἀνισότητος:
$$|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_\nu| < \varepsilon \tag{13}$$
ἥτις θ' ἀληθεύσῃ ὅταν ἀληθεύσωσιν αἱ ἑξῆς:

$$|x_1| < \frac{\varepsilon}{\nu} \quad |x_2| < \frac{\varepsilon}{\nu}, \ldots, |x_\nu| < \frac{\varepsilon}{\nu} \tag{14}$$

αἵτινες κατὰ μέλη προστιθέμεναι δίδουσι τὴν (13) καὶ αἵτινες ὄντως ἀληθεύουσιν ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς, καθόσον αἱ ποσότητες $x_1, x_2, x_3, \ldots x_\nu$ ὑπετέθησαν ἀπειροσταί.

Θεώρημα III περὶ γινομένου ἀπειροστῶν. *Το γινόμενον ἀπειροστῶν* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu$ *ὧν τὸ πλῆθος εἶναι πεπερασμένον, εἶναι ἐπίσης ἀπειροστόν.*

Διότι ἡ ἀνισότης: $|x_1 x_2 x_3 \ldots x_\nu| < \varepsilon$ (15)
θ' ἀληθεύσῃ ὅταν ἀληθεύσωσιν αἱ ἑξῆς:

$$|x_1| < \sqrt[\nu]{\varepsilon}, \quad |x_2| < \sqrt[\nu]{\varepsilon}, \quad |x_3| < \sqrt[\nu]{\varepsilon}, \ldots, \quad |x_\nu| < \sqrt[\nu]{\varepsilon}$$

αἵτινες κατὰ μέλη πολλαπλασιαζόμεναι δίδουσι τὴν (15) καὶ αἵτινες ἰσχύουσιν ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς, καθόσον αἱ $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ ὑπετέθησαν ἀπειροσταί.

Παρατήρησις. Ὅτι τὸ θεώρημα II δὲν ἰσχύει ὅταν τὸ πλῆθος τῶν προσθετέων τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον, περὶ τούτου πειθόμεθα ἐκ τοῦ ἑξῆς παραδείγματος: Ἐὰν ἡ 1 διαιρεθῇ εἰς ν ἴσα μέρη, θὰ ἔχωμεν τὴν ἰσότητα:

$$1 = \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu} + \cdots + \frac{1}{\nu}$$

ἐὰν δὲ ὅρ$\nu = \infty$, ἕκαστος προσθετέος θὰ εἶναι ἀπειροστόν, καθὼς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, ἐνῷ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν δὲν εἶναι ἀπειροστὸν ἀλλὰ εἶναι σταθερὸν καὶ ἰσοῦται τῇ μονάδι.

Γενικὰ θεωρήματα τῶν ὁρίων.

6. ***Θεώρημα.*** *Ἐὰν ποσότης* x *ἔχουσα ὅριον τὴν α πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ σταθερὰν* k, *καὶ τὸ ὅριον αὐτῆς θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὴν αὐτὴν σταθεράν.*

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ὅρ$x = \alpha$ θὰ ἔχωμεν ὅρ$(x - \alpha) = 0$ καὶ ὅρ$K(x - \alpha) = 0$, δηλαδή: ὅρ$(kx - k\alpha) = 0$, ἐξ οὗ: ὅρ$Kx = K\alpha$.

Θεώρημα περὶ ὁρίου ἀθροίσματος. *Τὸ ἄθροισμα ποσοτήτων ἐχουσῶν ὅρια ἔχει ἐπίσης ὅριον, τὸ ὁποῖον ἰσοῦται τὸ ἀθροίσματι τῶν ὁρίων τῶν προσθετέων.*

Ἔστωσαν, π. χ. ὅρ$x=\alpha$, ὅρ$y=\beta$ καὶ ὅρ $\omega=\gamma$, θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα $x+y+\omega$ ἔχει ὡς ὅριον τὸ $\alpha+\beta+\gamma$. Διότι, ἐξ ὑποθέσεως, αἱ ποσότητες $x-\alpha$, $y-\beta$ καὶ $\omega-\gamma$ θὰ εἶναι ἀπειροσταὶ καὶ ἑπομένως, κατὰ τὸ θεώρημα II, καὶ τὸ ἄθροισμὰ αὐτῶν:

$$(x-\alpha)+(y-\beta)+(\omega-\gamma)=(x+y+\omega)-(\alpha+\beta+\gamma)$$

θὰ εἶναι ἐπίσης ἀπειροστόν· ἄρα, ἡ ποσότης $x+y+\omega$ θὰ ἔχῃ ὅριον τὴν σταθερὰν $\alpha+\beta+\gamma$, δηλαδή:

$$\text{ὅρ}(x+y+\omega)=\text{ὅρ}x+\text{ὅρ}y+\text{ὅρ}\,\omega.$$

Θεώρημα περὶ ὁρίου γινομένου. *Τὸ γινόμενον ποσοτήτων ἐχουσῶν ὅρια ἔχει ἐπίσης ὅριον, ὅπερ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν ὁρίων τῶν παραγόντων.*

Θὰ θεωρήσωμεν κατ᾽ ἀρχὰς τὴν περίπτωσιν τῶν δύω παραγόντων: Ἔστω:

$$\text{ὅρ}x=\alpha \text{ καὶ } \text{ὅρ}y=\beta$$

θ᾽ ἀποδείξωμεν ὅτι ὅρ$(xy)=\alpha\beta$.

Θέσωμεν $x-\alpha=\varepsilon$ καὶ $y-\beta=\eta$, ὅπου αἱ ποσότητες ε καὶ η εἶναι ἐξ ὑποθέσεως ἀπειροσταί. Θὰ ἔχωμεν: $x=\alpha+\varepsilon$, $y=\beta+\eta$ καὶ ἑπομένως: $xy=\alpha\beta+\alpha\eta+\beta\varepsilon+\varepsilon\eta$

Ἐπειδὴ ὅμως, κατὰ προηγούμενα θεωρήματα, τὰ γινόμενα $\alpha\eta$, $\beta\varepsilon$ καὶ $\varepsilon\eta$ εἶναι ἀπειροστά, ἕπεται ὅτι ἡ διαφορὰ $xy-\alpha\beta$ ἔχει ὅριον τὸ μηδέν, δηλαδή: ὅρ $xy=\alpha\beta=$ὅρx ὅρy.

Ἡ περίπτωσις τῶν πολλῶν παραγόντων εὐκόλως ἀνάγεται κατὰ γνωστὸν τρόπον εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν δύω. Π. χ. τὸ γινόμενον $xy\omega=(xy).\,\omega$, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς γινόμενον δύω παραγόντων, συμπτυσσομένων τῶν δύω πρώτων, ὅτε θὰ ἔχωμεν:

$$\text{ὅρ}(xy\omega)=\text{ὅρ}(xy)\,\text{ὅρ}\,\omega=\text{ὅρ}x.\ \text{ὅρ}y.\ \text{ὅρ}\,\omega.$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἡ περίπτωσις τῶν τεσσάρων παραγόντων δύναται ν' ἀναχθῇ εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν τριῶν... καὶ οὕτω καθεξῆς.

Θεωρήματα ἀναφερόμενα εἰς τὸ ἄπειρον ὡς ὅριον

7. I. *Ἐὰν ἡ ποσότης x ἔχῃ ὅριον τὸ ∞, ἡ ἀντίστροφος $\frac{1}{x}$ ἔχει ὅριον τὸ 0.*

Διότι, δοθέντος ἀριθμοῦ τινος ε, ἡ ἀνισότης $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|} < \varepsilon$, ἥτις εἶναι παρφανῶς ἰσοδύναμος πρὸς τήν: $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$, θὰ ἀληθεύῃ ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς, διότι τοῦτο συμβαίνει εἰς τὴν τελευταίαν, καθόσον ἡ x, ἐξ ὑποθέσεως, τείνει εἰς τὸ ἄπειρον.

II. *Ἐὰν ὅρ $x = 0$, ἔχομεν ὅρ $\frac{1}{x} = \infty$.* Ἡ ἀπὸδειξις θὰ εἶναι ὁμοία τῇ προηγουμένῃ.

III. *Ἐὰν ποσότης x ἔχουσα ὅριον τὸ ∞ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ σταθερὰν k, τὸ γινόμενον ἔχει ἐπίσης ὅριον τὸ ∞.* Διότι δοθέντος ἀριθμοῦ M ὁσονδήποτε μεγάλου, ἡ $|kx|$ δύναται νὰ γίνῃ καὶ νὰ μείνῃ μεγαλειτέρα τοῦ M, καθόσον ἡ ἀνισότης $|kx| > M$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $|x| > \frac{M}{|k|}$, ἥτις ἀληθεύει ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς ἐπειδὴ ἡ x τείνει εἰς τὸ ἄπειρον.

IV. *Ἐὰν ὅρ$x = \infty$, θὰ ἔχωμεν καὶ ὅρ $(x+k) = \infty$, ὅπου τὸ k παριστᾷ σταθερὰν ποσότητα.* Διότι, ἵνα ἔχωμεν $|x+k| > M$, ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν:

$$|x| - |k| > M \tag{16}$$

διότι τὸ $|x+k| \geq |x| - |k|$. Ἀλλά, ἡ ἀνισότης (16) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $|x| > M + |k|$ ἥτις ἰσχύει ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς, διότι ὅρ $x = \infty$.

Θεωρήματα περὶ ὁρίου πηλίκου

8. Θ' ἀποδείξωμεν πρῶτον τὴν ἑξῆς **προκαταρκτικὴν πρότασιν:**

Λῆμμα. *Ἐὰν ποσότης x ἔχῃ ὅριον $\alpha \neq 0$, ἡ ἀντίστροφος $\frac{1}{x}$ ἔχει ὅριον τὸν ἀριθμὸν $\frac{1}{\alpha}$.*

Ἀπόδειξις. Ἐὰν καλέσωμεν $x-\alpha=\varepsilon$, ἡ ποσότης αὕτη ε θὰ εἶναι ἀπειροστὴ καὶ ἡ διαφορὰ $\frac{1}{x}-\frac{1}{\alpha}$ γράφεται:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha+\varepsilon}-\frac{1}{\alpha}=\frac{-\varepsilon}{\alpha(\alpha+\varepsilon)}=\frac{1}{-\alpha\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}+1\right)} \tag{17}$$

Ἀλλά, ἐπειδὴ ὅρ $\varepsilon=0$, θὰ ἔχωμεν:

$$\text{ὅρ}\frac{1}{\varepsilon}=\infty,\quad \text{ὅρ}\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}+1\right)=\infty \text{ καὶ ὅρ}\left[-\alpha\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}+1\right)\right]=\infty$$

καὶ ἑπομένως ἡ ποσότης (17) θὰ ἔχῃ ὅριον τὸ μηδέν. Ἐπειδὴ **λοιπόν:**

$$\text{ὅρ}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\alpha}\right)=0, \text{ ἕπεται ὅτι ὅρ}\frac{1}{x}=\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\text{ὅρ}\,x}.$$

Θεώρημα γενικόν. *Ἐὰν ὅρ$x=\alpha$ καὶ ὅρ$y=\beta\neq 0$, τὸ **πηλῖκον** $\frac{x}{y}$ ἔχει ἐπίσης ὅριον ὅπερ ἰσοῦται τῷ $\frac{\alpha}{\beta}$ (δηλαδή τῷ πηλίκῳ τῶν ὁρίων).*

Διότι: $\frac{x}{y}=x\cdot\frac{1}{y}$ καὶ ὅρ$\frac{x}{y}=$ὅρ$\left(x\cdot\frac{1}{y}\right)=$ὅρ$\,x\cdot$ὅρ$\frac{1}{y}=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$

καθόσον, κατὰ τὸ προηγούμενον λῆμμα, ἐπειδὴ ὅρ$y=\beta$ θὰ εἶναι:

$$\text{ὅρ}\frac{1}{y}=\frac{1}{\beta}.$$

Παρατήρησις. Ἐὰν ὅρ$x=0$ καὶ ὅρ$y=0$, τὰ μέχρι τοῦδε θεωρήματα οὐδὲν ὅριον δίδουσι διὰ τὸ πηλῖκον $\frac{x}{y}$. Μίαν τοιαύτην περίπτωσιν παρουσιάζει τὸ ἑξῆς θεώρημα, ἐν ᾧ τὸ ὅριον εὑρίσκεται δι' εἰδικῆς μεθόδου.

Θεώρημα περὶ ὅρ. $\frac{x}{\eta\mu x}$. ***Ἐὰν τόξον τι** x **ἔχῃ ὅριον τὸ μηδέν, ὁ λόγος** $\frac{x}{\eta\mu x}$ **ἔχει ὅριον τὴν μονάδα***. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν διακρίνομεν δύω περιπτώσεις:

α'.) Ὑποτεθείσθω ὅτι ἡ x εἶναι θετικὴ ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς· τότε, ἐπειδὴ τείνει εἰς τὸ μηδέν, θὰ ἔχωμεν, ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς, τὸν τύπον: $0 < x < 90^0$

καὶ ἑπομένως, κατὰ τὴν Τριγωνομετρίαν: $\eta\mu x < x < \varepsilon\varphi x$

ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν τὰ τρία μέλη διὰ $\eta\mu x > 0$, προκύπτει ὁ τύπος:

$$1 < \frac{x}{\eta\mu x} < \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \quad \text{ἢ} \quad 0 < \frac{x}{\eta\mu x} - 1 < \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - 1 \tag{18}$$

ἀλλά, ὅταν ὅρ$x=0$, ἔχομεν ὅρσυν$x=1$ καὶ ἑπομένως:

$$\text{ὅρ}\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - 1\right) = 0$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται: $\text{ὅρ}\left(\frac{x}{\eta\mu x} - 1\right) = 0$ δηλαδή: $\text{ὅρ}\frac{x}{\eta\mu x} = 1$

β'.) Ὑποτεθείσθω ἤδη ἤδη ὅτι ἡ x τείνει εἰς τὸ μηδὲν ἐξ ἀρνητικῶν τιμῶν. Ἐὰν τότε θέσωμεν $x = -y$, τὸ y θὰ τείνῃ εἰς τὸ μηδὲν ἐκ θετικῶν τιμῶν καὶ ἑπομένως, κατὰ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, θὰ ἔχωμεν: $\text{ὅρ}\frac{y}{\eta\mu y} = 1$

Ἀφ' ἑτέρου, ἔχομεν: $x = -y, \quad \eta\mu x = -\eta\mu y$

διαιροῦντες δὲ ταύτας κατὰ μέλη λαμβάνομεν $\frac{x}{\eta\mu x} = \frac{y}{\eta\mu y}$

ἐξ ἧς: $\text{ὅρ}\frac{x}{\eta\mu x} = \text{ὅρ}\frac{y}{\eta\mu y} = 1.$

Παρατήρησις. Ἡ περίπτωσις καθ' ἣν ἡ x δὲν διατηρεῖ, ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς, τὸ σημεῖον της, ἀνάγεται προφανῶς εἰς τὰς δύο προηγουμένας.

Θεωρήματα περὶ ὁρίου δυνάμεων

4. Θὰ προτάξωμεν τὸ ἑξῆς θεώρημα:

I. ***Ὅταν ὁ ἐκθέτης δυνάμεως αὐξάνῃ, ἡ δύναμις (ἡ θετικὴ αὐτῆς τιμὴ) αὐξάνει μὲν ἐὰν ἡ βάσις εἶναι μεγαλειτέρα τῆς μονάδος, ἐλαττοῦται δέ, ἐὰν ἡ βάσις (ὑποτιθεμένη θετικὴ) εἶναι μικροτέρα τῆς μονάδος.***

Ἔστω $\mu>\nu$ δηλαδὴ $\mu-\nu>0$. Τότε, ἐὰν μὲν $\alpha>1$, θὰ ἔχωμεν, κατὰ τὸ πόρισμα τοῦ θεωρήματος VII τῶν ἀνισοτήτων, τὸν τύπον:

$$\alpha^{\mu-\nu}>1 \text{ ἐξ οὗ } \frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}}>1, \text{ δηλαδή}: \alpha^{\mu}>\alpha^{\nu}$$

ἐὰν δὲ $\alpha<1$, θὰ ἔχωμεν $\alpha^{\mu-\nu}=\dfrac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}}<1$ ἐξ οὗ $\alpha^{\mu}<\alpha^{\nu}$

Βλέπω δηλαδὴ ὅτι εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν μεγαλειτέρα εἶναι ἡ δύναμις ἡ ἔχουσα μεγαλείτερον ἐκθέτην, ἐνῷ εἰς τὴν δευτέραν μεγαλειτέρα εἶναι ἡ ἔχουσα μικρότερον ἐκθέτην.

Δυνάμεις μὲ βάσιν μεταβλητήν. II. *Ὅταν ὅρ$x=\alpha$, ἡ δύναμις x^{μ} (ὅπου μ ὑποτίθεται ἀκέραιος) ἔχει ὅριον τὸν α^{μ}.*

α'.) Ἐὰν $\mu>0$, ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὡς ἑξῆς:

Ἐπειδὴ $x^{\mu}=x.x.x\ldots x$, θὰ ἔχωμεν:

$$\text{ὅρ}x^{\mu}=\text{ὅρ}x.\text{ὅρ}x.\text{ὅρ}x\ldots\text{ὅρ}x=\alpha.\alpha.\alpha\ldots\alpha=\alpha^{\mu}.$$

β'.) Ἐὰν $\mu<0$, θέτομεν $\mu=-m$ καὶ ἔχομεν: $x^{\mu}=x^{-m}=\dfrac{1}{x^{m}}$

καὶ ἑπομένως $\text{ὅρ}\,x^{\mu}=\dfrac{1}{\text{ὅρ}x^{m}}=\dfrac{1}{\alpha^{m}}=\alpha^{-m}=\alpha^{\mu}$

δηλαδὴ τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀνηγάγομεν εἰς τὴν προηγουμένην.

III. ***Ὅταν ὅρ$x=\infty$, ἡ δύναμις x^μ (ὅπου ὁ μ ὑποτίθεται ἀκέραιος) θὰ ἔχῃ ὅριον τὸ ∞ μὲν ἐὰν $\mu>O$, τὸ O δὲ ἐὰν $\mu<O$.***

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἡ ἑξῆς: Ὅταν $\mu\geq 1$ θὰ ἔχωμεν: $|x^\mu|\geq|x|$ καὶ ἑπομένως ὅρ $x^\mu=\infty$ ὅταν $\mu<1$, π. χ. $\mu=\frac{2}{5}$ τότε μεταχειριζόμεθα τὴν μέθοδον τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς ὡς ἑξῆς: Ἐὰν ἡ $\left|x^{\frac{2}{5}}\right|$ δὲν ἠδύνατο νὰ γίνῃ καὶ νὰ μείνῃ μεγαλειτέρα πάσης ποσότητος M τότε οὔτε ἡ $x^2=\left|x^{\frac{2}{5}}\right|^5$ δὲν θὰ ἠδύνατο, τοῦθ' ὅπερ ἄτοπον, διότι εἴδομεν ἤδη ὅτι ὅρ $x^2=\infty$.

Ὅταν $\mu<o$ θέτομεν: $\mu=-m$ ὅτε λαμβάνομεν $x^\mu=x^{-m}=\frac{1}{x^m}$ καὶ ἐπειδὴ ὅρ $x^m=\infty$ ἕπεται ὅτι ὅρ $x^\mu=0$.

Δυνάμεις μὲ ἐκθέτην μεταβλητόν. IV. ***Θεωρήσωμεν θετικόν τινα ἀριθμὸν α· Ἐὰν ὅρ $\mu=+\infty$, ἡ δύναμις α^μ ἔχει ὅριον τὸ ∞ μὲν ὅταν $\alpha>1$, τὸ μηδὲν δὲ ὅταν $\alpha<1$.***

α'.) Ἐὰν $\alpha>1$, θὰ ἔχωμεν $\alpha-1>0$· ἐὰν δὲ θέσωμεν:

$$\alpha-1=\vartheta,\quad \alpha=1+\vartheta,\quad \text{θὰ ἔχωμεν:}$$

$$\alpha^\mu=(1+\vartheta)^\mu=1+\mu\vartheta+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\vartheta^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}\vartheta^3+\ldots+\vartheta^\mu$$

ἐξ ἧς
$$\alpha^\mu>1+\mu\vartheta$$

ἐπειδὴ ὅμως, ὅταν ὅρ$\mu=+\infty$, ἡ $1+\mu\vartheta$ ἔχει ὡσαύτως ὅριον τὸ $+\infty$, ἕπεται ὅτι ὅρ $\alpha^\mu=+\infty$.

β'.) Ἡ προηγουμένη ἀπόδειξις ὑποθέτει ὅτι τὸ μ λαμβάνει μόνον ἀκεραίας τιμάς. Ἐὰν τὸ μ λαμβάνῃ καὶ κλασματικὰς τιμὰς καὶ παραστήσωμεν διὰ m τὸν μέγιστον ἀκέραιον, ὅστις χωρεῖ εἰς τὸ μ, θὰ ἔχωμεν:

$$\text{ὅρ } m=+\infty \quad \alpha^\mu>\alpha^m \tag{19}$$

καὶ ἐπειδή, κατὰ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, ὅρ $\alpha^m = \infty$, θὰ ἔχωμεν ὡσαύτως, χάρις εἰς τὴν ἀνισότητα (19) : ὅρ $\alpha^\mu = +\infty$.

γ'.) Ἐὰν $\alpha < 1$, θέσωμεν $\frac{1}{\alpha} = \alpha_1$. Θὰ ἔχωμεν :

$$\alpha = \frac{1}{\alpha_1}, \quad \alpha^\mu = \frac{1}{\alpha_1{}^\mu} \text{ καί, ἐπειδὴ } \alpha_1 > 1, \text{ θὰ εἶναι}$$

$$\text{ὅρ } \alpha_1{}^\mu = \infty, \text{ ἄρα ὅρ } \alpha^\mu = 0.$$

V. ***Δοθέντος θετικοῦ τινος ἀριθμοῦ α, ἐὰν ὅρ $\mu = -\infty$, ἡ δύναμις α^μ ἔχει ὅριον τὸ μηδὲν μὲν ὅταν $\alpha > 1$, τὸ ἄπειρον δὲ ὅταν $\alpha < 1$***·

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀνάγεται ἀμέσως εἰς τὸ προηγούμενον, ἐὰν θέσωμεν : $-\mu = m$, ὅτε ἔχομεν : $\alpha^\mu = \alpha^{-m} = \frac{1}{\alpha^m}$ παρατηροῦντες ὅτι, ὅταν ὅρ $\mu = -\infty$, τότε ὅρ $m = +\infty$

VI. *Ἐὰν ὅρ $x = 0$, ἡ δύναμις α^x ἔχει ὅριον τὴν μονάδα (οἱουδήποτε ὄντος τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ α).*

Πρὸς ἀπόδειξιν διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις :

α'.) — Ἔστω $\alpha > 1$ καὶ $x > 0$, δηλαδὴ τὸ x τείνει εἰς τὸ μηδὲν ἐκ θετικων τιμῶν· ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι, δοθέντος ἀριθμοῦ τινος ε ὁσονδήποτε μικροῦ, ἡ διαφορὰ $\alpha^x - 1$, ἥτις εἶναι θετική, δύναται νὰ γίνῃ καὶ νὰ μείνῃ μικροτέρα τοῦ ε. Ἀλλὰ ἡ ἀνισότης $\alpha^x - 1 < \varepsilon$ θὰ ἀληθεύσῃ ὅταν ἔχωμεν : $\alpha^x < 1 + \varepsilon$, δηλαδή : $\alpha < (1+\varepsilon)^{\frac{1}{x}}$ (20)

Ἡ τελευταία αὕτη ἀνισότης εἶναι δυνατή, διότι ὅρ $\frac{1}{x} = +\infty$ καὶ ἑπομένως, κατὰ τὸ θεώρημα IV, ἡ δύναμις $(1+\varepsilon)^{\frac{1}{x}}$ ἔχει ὅριον τὸ ἄπειρον.

β') Ἔστω $\alpha > 1$ καὶ $x < 0$, δηλαδὴ τὸ x τείνει εἰς τὸ μηδὲν ἐξ ἀρνητικῶν τιμῶν. Ἐὰν θέσωμεν $-x = y$, θὰ ἔχωμεν :

$$\alpha^x = \alpha^{-y} = \frac{1}{\alpha^y} \quad \text{καὶ ὅρ } \alpha^x = \frac{1}{\text{ὅρ } \alpha^y} = \frac{1}{1} = 1$$

διότι κατὰ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν : ὅρ $\alpha^y = 1$.

γ') Ἐὰν $\alpha < 1$, ἀναγόμεθα εὐκόλως εἰς τὰς προηγουμένας περιπτώσεις διὰ γνωστῆς μεθόδου.

Ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ

10. Ὁ σκοπὸς τοῦ βιβλίου τούτου, ὅπερ προώρισται νὰ ἐξυπηρετήσῃ πάντας, δὲν ἐπιτρέπει νὰ ἐκθέσωμεν τὴν διὰ τῶν coupures ἀνωτέραν θεωρίαν τῶν ἀσυμμέτρων· θὰ περιορισθῶμεν εἰς θεωρίαν μᾶλλον προσιτὴν εἰς τοὺς πολλούς:

Μέτρησις Ὅταν μιὰ εὐθεῖα Ε μετρηθῇ διὰ μιᾶς μονάδος Δ, τότε, ὡς γνωστόν, ἐὰν μὲν αἱ εὐθεῖαι Ε καὶ Δ εἶναι σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος ἢ κλασματικός, ἐὰν ὅμως εἶναι ἀσύμμετροι πρὸς ἀλλήλας [ὅπως, π.χ. ἡ διαγώνιος καὶ ἡ πλευρὰ τετραγώνου], ἡ μέτρησις δὲν ἔχει τέλος καὶ δίδει ὡς ἐξαγόμενον ἓν ἄθροισμα:

$$\varrho + \frac{\varrho_1}{10} + \frac{\varrho_2}{10^2} + \frac{\varrho_3}{10^3} + - + \frac{\varrho_\nu}{10^\nu} + \dots\dots$$

ἀπείρων δεκαδικῶν μονάδων, ὅπερ δικαιούμεθα, ὡς ἐξαγόμενον μετρήσεως, νὰ θεωρήσωμεν ὡς ἀριθμόν. Ἐὰν τὰ δεκαδικὰ ψηφία εἶναι περιοδικά, τότε, ὡς γνωστόν, ὁ ἀριθμὸς οὗτος δὲν εἶναι νέος διότι ἰσοῦται πρὸς ἓν κοινὸν κλάσμα, ἐὰν ὅμως τὰ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία δὲν ἔχουσι περιοδικότητα, τότε πρόκειται περὶ νέου ἀριθμοῦ εἰσαγομένου εἰς τὴν Ἄλγεβραν. Οἱ νέοι οὗτοι ἀριθμοὶ καλοῦνται ***ἀσύμμετροι*** ἢ ***ἄρρητοι***.

Ὅριον σημείου. Ἐφ' ἑνὸς ἄξονος Οx θεωρήσωμεν ἓν σημεῖον μεταβλητὸν (κινητὸν) Μ καὶ ἓν ἀκίνητον Α. θὰ λέγωμεν ὅτι ***τὸ Μ ἔχει ὅριον τὸ Α ὅταν ἡ ἀπόστασις ΜΑ δύναται νὰ γίνῃ καὶ νὰ μείνῃ μικροτέρα πάσας δοθείσης εὐθείας ε ὁσονδήποτε μικρᾶς***.

Θεώρημα ***Ὅταν ἓν σημεῖον Μ ἄξονος Οx κινεῖται ἐπ' αὐτοῦ πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, π.χ. πρὸς τὰ δεξιά, χωρὶς νὰ δύναται νὰ περάσῃ (τεθῇ δεξιὰ) ἓν σημεῖον Α, τότε τὸ Μ ἔχει***

ὅριον ἓν σημεῖον Λ (ὅπερ προφανῶς δὲν δύναται νὰ κεῖται πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ Α).

Καίτοι δυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν τοῦτο (διὰ τῆς θεωρίας τῶν συνόλων) ἐν τούτοις θὰ παραλείψωμεν ἐνταῦθα τὴν ἀπόδειξιν, τοσοῦτον μᾶλλον καθ' ὅσον εἶναι προφανὴς ἡ ἀλήθεια τῆς προτάσεως ταύτης ἣν δέχονται ὡς ***ἀξίωμα*** διάσημοι συγγραφεῖς [E. Goursat. Cours d'Analyse, tome I, p. 2].

Ἐκ τῆς προηγουμένης προτάσεως ἕπονται ἀμέσως τὰ ἑξῆς κριτήρια ***ὑπάρξεως ὁρίου***.

Κανόνες ὑπάρξεως ὁρίου.

Α'. ***Ἐὰν μεταβλητὴ ποσότης*** x ***διαρκῶς αὐξάνουσα (ἢ οὐδέποτε ἐλατουμένη) δὲν ὑπερβαίνῃ ἀριθμόν τινα α, θὰ ἔχῃ ὅριον ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ α.***

Β'.) ***Ἐὰν ἡ*** x ***διαρκῶς ἐλαττουμένη (ἢ οὐδέποτε αὐξανομένη) δὲν γίνεται μικροτέρα ἀριθμοῦ τινος α, θὰ ἔχῃ ὅριον ἴσον ἢ μεγαλείτερον τοῦ α.***

Ἀμφότερα εἶναι ἄμεσαι συνέπειαι τοῦ ἀξιώματος, διότι ὁ ἀριθμὸς x δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τετμημένη ἑνὸς κινητοῦ σημείου Μ ὁ δὲ ἀριθμὸς α ὡς τετμημένη ἑνὸς σταθεροῦ σημείου Α.

Οἱ δύω οὗτοι κανόνες εἶναι πολύτιμοι προκειμένου νὰ βεβαιωθῶμεν περὶ τῆς ὑπάρξεως ὁρίου μεταβλητῆς ποσότητος, διότι ἐν γένει τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι δυσκολώτατον καθὼς καὶ ἡ εὕρεσις τοῦ ὁρίου.

Ἐφαρμογαί 1) Πᾶν ἄθροισμα τῆς μορφῆς:

$$\varrho + \frac{\varrho_1}{10} + \frac{\varrho_2}{10^2} + - + \frac{\varrho_\nu}{10^\nu} + - - . \quad (\alpha)$$

εἶναι ὅριον τοῦ συμμέτρου μεταβλητοῦ ἀριθμοῦ:

$$x_\nu = \varrho + \frac{\varrho_1}{10} + \frac{\varrho_2}{10^2} + - + \frac{\varrho_\nu}{10^\nu}$$

τοῦ ἔχοντος ν δεκαδικὰ ψηφία. Τῷ ὄντι, ἡ ποσότης x_ν οὐδέποτε ἐλαττοῦται καὶ δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸν ἀκέραιον $\varrho + 1$, ἑπομένως κατὰ τὸν κανόνα Α΄., ἔχει ὅριον ὅπερ εἶναι τὸ ἄθροισμα (α) παριστῶν τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως μιᾶς εὐθείας καὶ ἑπομένως ἕνα ἀριθμόν.

2) Ἐὰν εἰς περιφέρειαν κύκλου θεωρήσωμεν δύω πολύγωνα κανονικὰ ἀντιστοιχοῦντα τὸ ἓν ἐγγεγραμμένον καὶ τὸ ἕτερον περιγεγραμμένον, ἔχοντα πλῆθος πλευρῶν 2^{ν} καὶ παραστήσωμεν διὰ P_{ν} τὴν περίμετρον τοῦ ἐγγεγράμμένου καὶ διὰ q_{ν} τὴν τοῦ περιγεγραμμένου, παρατηροῦμεν ὅτι, τοῦ ν αὐξάνοντος ἐπ᾽ ἄπειρον, ἡ P_{ν} διαρκῶς αὐξάνει, δὲν ὑπερβαίνει ὅμως τὴν περίμετρον τοῦ τυχόντος ἐκ τῶν περιγεγραμμένων πολυγώνων καὶ ἑπομένως, κατὰ τὸ θεώρημα Ι, ἔχει ὅριον. Ὁμαίως; τοῦ ν αὐξάνοντος ἐπ᾽ ἄπειρον, τὸ q_{ν} διαρκῶς ἐλαττοῦται καὶ οὐδέποτε γίνεται μικρότερον τῆς περιμέτρου τοῦ τυχόντος ἐγγεγραμμένου πολυγώνου· ἄρα, κατὰ τὸ θεώρημα ΙΙ, ἔχει ὅριον· ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι $ὅρ P_{\nu} = ὅρ\, q_{\nu}$ τὸ δὲ κοινὸν τοῦτο ὅριον καλεῖται μῆκος τῆς περιφερείας.

Ὁρισμὸς δυνάμεων ἐχουσῶν ἐκθέτην ἀσύμμετρον

11. Εἰς τὰ στοιχεῖα τῆς Ἀλγέβρας ὁρίζονται αἱ δυνὰμεις αἱ ἔχουσαι ἐκθέτην σύμμετρον, δηλαδὴ ἀκέραιον ἢ κλασματικὸν (θετικὸν ἢ ἀρνητικόν)· ἤδη διὰ τῆς ἐννοίας τοῦ ὁρίου θὰ ὁρίσωμεν καὶ δυνάμεις τὰς ἐχούσος ἐκθέτην:

$$x = \varrho + \frac{\varrho_1}{10} + \frac{\varrho_2}{10^2} + \frac{\varrho_3}{10^3} + \dots + \frac{\varrho_{\nu}}{10^{\nu}} + \dots \tag{26}$$

ἀσύμμετρον, ὃν θὰ ὑποθέσω γεγραμμένον ὑπὸ δεκαδικὴν μορφὴν (26).

Θεωρήσωμεν θετικὸν τινὰ ἀριθμὸν α καὶ διακρίνωμεν τρεῖς περιπτώσεις:

α΄. περίπτωσις. Ἔστω $\alpha > 1$ καὶ $x > 0$. Ἐὰν θέσωμεν:

$$x_{\nu} = \varrho + \frac{\varrho_1}{10} + \frac{\varrho_2}{10^2} + \dots + \frac{\varrho_{\nu}}{10^{\nu}}$$

ἡ δύναμις $\alpha^{x_{\nu}}$ ἔχει γνωστὴν ὡρισμένην ἔννοιαν διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ ν (λαμβάνω πάντοτε τὴν θετικὴν τιμὴν τῆς $\alpha^{x_{\nu}}$), διότι ὁ ἐκθέτης

x_ν εἶναι σύμμετρος. Ἐπειδή, τοῦ ν αὐξάνοντος ἐπ' ἄπειρον, τὸ x_ν διαρκῶς αὐξάνει καὶ οὐδέποτε ὑπερβαίνει τὸν $\varrho+1$, διὰ τοῦτο ἡ δύναμις α^{x_ν}, κατὰ τὴν ἰδιότητα 1 τοῦ ἐδαφίου 9, διαρκῶς αὐξάνει καὶ οὐδέποτε ὑπερβαίνει τὴν $\alpha^{\varrho+1}$ καὶ ἐπομένως, κατὰ τὸν θεμελιώδη κανόνα Α'. τοῦ προηγουμένου ἐδαφίου, θὰ ἔχῃ ὅριον ἴσον ἢ μικρότερον τῆς $\alpha^{\varrho+1}$.

β' περίπτωσις. Ἔστω $\alpha>1$ καὶ $x<0$. Ἐὰν θέσωμεν : $x=-y$, θὰ ἔχωμεν: $x_\nu=-y_\nu$ καί, ἐπειδὴ ἡ δύναμις α^{y_ν} ἔχει ὅριον (κατὰ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν), ἡ $\alpha^{x_\nu}=\alpha^{-y_\nu}=\dfrac{1}{\alpha^{y_\nu}}$ θὰ ἔχῃ ὅριον.

γ'. περίπτωσις. Ἔστω $\alpha<1$. Ἐὰν θέσωμεν $\dfrac{1}{\alpha}=\alpha_1$, θὰ ἔχωμεν $\alpha_1>1$ καί, κατὰ τὰς προηγουμένας περιπτώσεις, ἡ δύναμις $\alpha_1{}^{x_\nu}$ θὰ ἔχῃ ὅριον, ὅταν τὸ ν αὐξάνῃ ἐπ' ἄπειρον· ἄρα, καὶ ἡ δύναμις: $\alpha^{x_\nu}=\dfrac{1}{\alpha_1{}^{x_\nu}}$ θὰ ἔχῃ ὅριον.

Τὸ ὅριον τοῦτο τῆς α^{x_ν}, τὸ ὁποῖον ὑπάρχει εἰς πᾶσαν περίπτωσιν, θεωροῦμεν ὡς τὴν δύναμιν α^x, δηλαδὴ ἡ δύναμις α^x ὁρίζεται ὡς ὅριον τῆς α^{x_ν}, ὅταν τὸ ν αὐξάνῃ ἐπ' ἄπειρον.

Θεώρημα περὶ τῆς α^x ἐὰν ἡ σύμμετρος μεταβλητὴ x ἔχῃ ὅριον λ. Λέγω ὅτι ὅρ$\alpha^x=\alpha^\lambda$

α'. περίπτωσις. Ἐὰν λ= σύμμετρος, θέτω: $\chi-\lambda=\varepsilon$ καὶ ἔχω: $\alpha^x=\alpha^\lambda.\alpha^\varepsilon$, ὅπου ὅρ$\alpha^\varepsilon=1$

β'. περίπτωσις. Ἐὰν λ=ἀσύμμετρος, ἐπειδὴ ὅρ $\lambda_\nu=\lambda$, θὰ ἔχωμεν ὅρ $(x-\lambda_\nu)=0$ καὶ τότε γράφω : $\alpha^x=\alpha^{\lambda\nu+x-\lambda\nu}=\alpha^{\lambda\nu}\,\alpha^{x-\lambda\nu}$, ἐπειδὴ δὲ ἡ δευτέρα δύναμις ἔχει ὅριον τὴν μονάδα ἕπεται ὅτι ὅρ $\alpha^x=$ ὅρ $\alpha^{\lambda_\nu}=\alpha^\lambda$ (κατὰ τὸν ὁρισμόν).

Διατήρησις τῶν ἰδιοτήτων τῶν δυνάμεων. Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ γνωστὴ θεμελιώδης ἰδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ διατηρεῖται καὶ εἰς τὰς νέας δυνάμεις τὰς ἐχούσας ἀσύμμετρον ἐκθέτην. Θὰ δείξωμεν ὅτι $\alpha^x\alpha^y=\alpha^{x+y}$ ὅπου καὶ x καὶ y εἶνε ἀσύμμετροι ἀριθμοί. Τῷ ὄντι, κατὰ τὸν δοθέντα ὁρισμόν, θὰ ἔχωμεν:

$$\alpha^x=\text{ὅρ }\alpha^{x_\nu},\quad \alpha^y=\text{ὅρ }\alpha^{y_\nu}\ \text{ καὶ }\ \alpha^x\,\alpha^y=\text{ὅρ }\alpha^{x_\nu+y_\nu}$$

ἀλλά, ἐὰν θέσωμεν $x+y=\omega$ καὶ καλέσωμεν ω_ν τὸν σύμμετρον ἀριθμὸν τὸν ἀπαρτιζόμενον ἐκ τοῦ ἀκεραίου μέρους καὶ τῶν ν πρώτων δεκαδικῶν ψηφίων τοῦ ω, θὰ ἔχωμεν:
ἀφ' ἑνὸς μέν: ὅρ $x_\nu=x$, ὅρ $y_\nu=y$ καὶ ὅρ $\omega_\nu=\omega$
ἀφ' ἑτέρου δέ: $\omega=x+y=$ ὅρ $x_\nu+$ ὅρ $y_\nu=$ ὅρ $(x_\nu+y_\nu)$
καὶ ἑπομένως αἱ σύμμετροι ποσότητες $x_\nu+y_\nu$ καὶ ω_ν, ὡς ἔχουσαι τὸ αὐτὸ ὅριον, θὰ διαφέρωσι κατὰ ποσότητα δ_ν ἀπειροστήν. Θὰ ἔχωμεν λοιπόν.

$$x_\nu+y_\nu=\omega_\nu+\delta_\nu,\quad \alpha^{x_\nu+y_\nu}=\alpha^{\omega_\nu+\delta_\nu}=\alpha^{\omega_\nu}\,\alpha^{\delta_\nu}$$

καὶ συνεπῶς:

$$\alpha^x\,\alpha^y=\text{ὅρ }\alpha^{x_\nu+y_\nu}=\text{ὅρ }\alpha^{\omega_\nu}\ \text{ὅρ }\alpha^{\delta_\nu}=\text{ὅρ }\alpha^{\omega_\nu}=\alpha^\omega=\alpha^{x+y}$$

καθόσον ἡ δύναμις α^{δ_ν}, ἧς ὁ ἐκθέτης εἶναι σύμμετρος ἀπειροστός, ἔχει ὅριον τὴν μονάδα.

Ἡ διατήρησις τῆς θεμελιώδους ἰδιότητος ἀπεδείχθη.

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ὁ εἷς μόνον ἐκ τῶν ἐκθετῶν x καὶ y εἶναι ἀσύμμετρος. Ἡ διατήρησις τῆς ἰδιότητος ταύτης συνεπάγεται τὴν διατήρησιν καὶ τῶν λοιπῶν στοιχειωδῶν ἰδιοτήτων τῶν δυνάμεων καθὼς καὶ ἐκείνων, αἵτινες ἀπεδείχθησαν εἰς τὰ προηγούμενα ἐδάφια τοῦ βιβλίου τούτου. Συνεπάγεται ἐπίσης τὴν ἐπέκτασιν τοῦ θεωρήματος περὶ ὅρ α^x καὶ ὅταν ὁ x εἶναι ἀσύμμετρος μεταβλητή.

Ἀσκήσεις

1) Εὑρεῖν τὸ ὅριον τῆς $\frac{\varepsilon\varphi x}{x}$, ὅταν ὅρ $x=0$ καὶ τὸ ὅριον τῆς $\frac{\eta\mu(kx)}{x}$, ὅπου k εἶναι σταθερὰ ποσότης.

2) Ὅταν ὅρ $x=0$, ποῖον ὅριον ἔχει ἡ $\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$;

3) Ὅταν ὅρ $x=0$, ποῖον ὅριον ἔχει ἡ x^μ, ὅπου μ σταθερὸς ἀριθμὸς οἱοσδήποτε:

4) Ὅταν ὅρ $x = \infty$, ποῖον ὅριον ἔχουσιν αἱ ποσότητες:

$$\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta},\qquad \frac{\alpha x^2+\beta x+\varepsilon}{\gamma x+\delta},\qquad \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x^2+\delta x+\varepsilon},\ \text{ὅπου } \alpha \neq 0 \text{ καὶ } \gamma \neq 0.$$

5) Γενικῶς, ὅταν ὅρ $x = \infty$, ποῖον ὅριον ἔχει ἡ ποσότης $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ὅπου τὰ $P(x)$ καὶ $Q(x)$ εἶναι πολυώνυμα βαθμοῦ τὸ μὲν πρῶτον μ τὸ δὲ δεύτερον ν; Εἰς ποίαν περίπτωσιν τὸ ὅριον εἶναι μηδὲν εἰς ποίαν εἶναι ἄπειρον καὶ εἰς ποίαν εἶναι ἀριθμὸς διάφορος τοῦ μηδενὸς (ὅριον πεπερασμένον διάφορον τοῦ μηδενός) ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

Ὁ ἀριθμὸς e καὶ οἱ λογάριθμοι

Περὶ σειρῶν

12. ***Ὁρισμοί***. *Ἀπέραντος ἀκολουθία ἀριθμῶν ὑποκειμένη εἴς τινα νόμον καλεῖται σειρά.*

Σειρὰ εἶναι ἡ: $1\ 3\ 5\ 7 \ldots 1+2(\nu-1), \ldots$

καὶ ἐν γένει πᾶσα πρόοδος ἀριθμητικὴ ἔχουσα ἄπειρον πλῆθος ὅρων.

καθὼς καὶ ἡ: $1, 2, 4, 8, 16, \ldots 2^\nu, \ldots$

καὶ ἐν γένει πᾶσα πρόοδος γεωμετρικὴ ἔχουσα ἄπειρον πλῆθος ὅρων.

Οἱ ἀριθμοὶ οἱ ἀποτελοῦντες τὴν σειρὰν καλοῦνται **ὅροι** αὐτῆς, ὑπάρχει δὲ νόμος δι' οὗ ἕκαστος ὅρος ὁρίζεται ἐκ τῆς τάξεως αὐτοῦ. Σειρὰ εἶναι, π. χ., καὶ ἡ ἑξῆς:

$$\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}, \ldots\ldots, \frac{1}{\nu}, \ldots\ldots$$

Οἱ ὅροι τῶν σειρῶν συνήθως νοοῦνται προστιθέμενοι.

Ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν τυχοῦσαν σειράν:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_\nu \ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

καὶ καλέσωμεν:

$$k_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots + \alpha_\nu$$

τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων αὐτῆς, ***ἡ σειρὰ λέγεται συγκλίνουσα, ὅταν τὸ k_ν ἔχῃ ὅριον πεπερασμένον, τοῦ ν αὐξάνοντος ἐπ᾽ ἄπειρον.***

Αἱ μὴ συγκλίνουσαι σειραὶ κ λοῦνται ***ἀποκλίνουσαι***· ἑπομένως, μία σειρὰ θὰ εἶναι ἀποκλίνουσα ὅταν τὸ k_ν ἢ δὲν ἔχῃ ὅριον ἢ ἔχῃ ὅριον ∞.

Παραδείγματα. Ἐὰν θεωρήσωμεν πρόοδον ἀριθμητικήν, ἧ ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι α καὶ ὁ λόγος λ, θὰ ἔχωμεν:

$$k_\nu = \frac{\nu\,[2\alpha + (\nu\text{-}\iota)\lambda]}{2}$$

βλέπομεν δὲ ἀμέσως ὅτι ὅρ $k_\nu = \infty$, ὅταν τὸ ν αὐξάνῃ ἐπ᾽ ἄπειρον. ἄρα αἱ ἀριθμητικαὶ πρόοδοι αἱ ἔχουσαιἄπειρον πλῆθος ὅρων εἶναι σειραὶ ἀποκλίνουσαι.

Ἐὰν θεωρήσωμεν πρόοδον γεωμετρικήν, ἧς ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι α καὶ ὁ λόγος λ, θὰ ἔχωμεν:

$$k_\nu = \frac{\alpha(1-\lambda^\nu)}{1-\lambda} = \frac{\alpha}{1-\lambda} - \frac{\alpha\lambda^\nu}{1-\lambda} \qquad (2)$$

θὰ διακρίνωμεν δτ τέσσαρας περιπτώσεις: α΄) ἐὰν $|\lambda| > 1$, θὰ ἔχωμεν: ὅρ $\lambda^\nu = \infty$ καὶ ἑπομένως: ὅρ $k^\nu = \infty$ ἤτοι ἡ πρόοδος θὰ εἶναι σειρὰ ἀποκλίνουσα β΄) ἐὰν $|\lambda| < 1$, θὰ ἔχωμεν ὅρ $\lambda^\nu = 0$ καὶ ὅρ $\frac{\alpha\lambda^\nu}{1-\lambda} = 0$ καὶ ἑπομένως: ὅρ $k_\nu = \frac{\alpha}{1-\lambda}$, δηλαδή: ***Αἱ φθίνουσαιγεωμετρικαὶπρόοδοι αἱ ἔχουσαι ἀπείρους ὅρους εἶναι σειραὶ συγκλινουσαι τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ὅρων αὐτῶν δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου*** $\boldsymbol{\frac{\alpha}{1-\lambda}}$ γ΄) ἐὰν $\lambda = 1$, ὁ τύπος (2) δὲν χρησιμεύει, ἀλλὰ τότε πάντες **οἱ ὅροι εἶναι ἴσοι καὶ ἡ πρόοδος εἶναι προφανῶς ἀποκλίνουσα. δ΄.) Ἐὰν $\lambda = -1$, τότε ὅταν μὲν τὸ ν εἶναι ἄρτιον ἔχομεν $k_\nu = 0$**

ὅταν δὲ τὸ ν εἶναι περιττὸν ἔχομεν $k_\nu = \alpha$ καὶ ἑπομένως τὸ k_ν οὐδὲν ὅριον θὰ ἔχῃ· ἄρα ἡ σειρὰ θὰ εἶναι ἀποκλίνουσα.

Μία σειρὰ λέγεται ἀπολύτως συγκλίνουσα, ὅταν αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ τῶν ὅρων αὐτῆς ἀποτελῶσι σειρὰν συγκλίνουσαν.

Θεωρήματα περὶ τῶν σειρῶν.

Θεώρημα Ι. Σειρὰ ἀπολύτως συγκλίνουσα εἶναι καὶ καθ' ἑαυτὴν συγκλίνουσα· τὸ ἀντίστροφον ὅμως δὲν ἀληθεύει.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν σειρὰν (1) καὶ τὴν σειρὰν τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν ὅρων.

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| + \ldots\ldots + |\alpha_\nu| + \ldots\ldots \qquad (3)$$

καὶ καλέσωμεν K_ν τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς (1), Θ_ν τὸ ἄθροισμα τῶν θετικῶν ὅρων τοῦ K_ν καὶ $-A_\nu$ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀρνητικῶν ὅρων τοῦ K_ν καὶ τέλος Σ_ν τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς (3), θὰ ἔχωμεν προφανῶς τὰς σχέσεις:

$$K_\nu = \Theta_\nu - A_\nu\,, \quad \Sigma_\nu = \Theta_\nu + A_\nu$$

καί, ἐὰν ἡ σειρὰ (3) εἶναι συγκλίνουσα, θὰ ὑπάρχῃ ὅρ $\Sigma_\nu = \alpha$ καὶ ἐπειδὴ οἱ ὅροι τῆς (3) εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, θὰ ἔχωμεν πάντοτε:

$$\Sigma_\nu < \alpha \qquad \text{καὶ συνεπῶς:} \quad \Theta_\nu < \alpha \quad A_\nu < \alpha$$

τότε ὅμως αἱ ποσότητες Θ_ν καὶ A_ν ὡς διαρκῶς αὐξάνουσαι μετὰ τοῦ ν καὶ οὐδέποτε ὑπερβαίνουσαι τὸν α θὰ ἔχωσιν ὅριον πεπερασμένον ἔστω:

$$\text{ὅρ}\ \Theta_\nu = \Theta \ \text{καὶ ὅρ}\ A_\nu = A$$

καὶ ἑπομένως θὰ ὑπάρχῃ:

$$\text{ὅρ}\ K_\nu = \text{ὅρ}\ \Theta_\nu - \text{ὅρ}\ A_\nu = \Theta - A$$

ἤτοι καὶ ἡ σειρὰ (1) θὰ εἶναι συγκλίνουσα.

Τὸ ἀντίστροφον δὲν ἀληθεύει, διότι εἶναι δυνατὸν ἡ διαφορὰ $\Theta_\nu - A_\nu$ νὰ ἔχῃ ὅριον πεπερασμένον χωρὶς οἱ ποσότητες Θ_ν καὶ A_ν νὰ τείνωσι πρὸς τοιοῦτον ὅριον.

14. Περὶ τῆς θεωρίας τῶν σειρῶν πραγματεύεται ἐν ἐκτάσει ἡ Ἀνάλυσις, εἰς ἣν κυρίως ἀνήκει τὸ θέμα τοῦτο, διὰ τοῦτο θὰ ἐκθέ-

σωμεν ἐνταῦθα ὀλίγα ἀναφερόμενα μόνον εἰς σειράς, ὧν οἱ ὅροι εἶναι πάντες θετικοί.

Θεώρημα ΙΙ. *Ἐὰν οἱ ὅροι μιᾶς σειρᾶς*

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_\nu+\ldots \qquad (4)$$

ὑποτιθέμενοι πάντες θετικοί, δὲν ὑπερβαίνωσι τοὺς ἀντιστοίχους ὅρους ἄλλης σειρᾶς:

$$\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots\beta_\nu+\ldots \qquad (5)$$

συγκλινούσης, ἡ πρώτη σειρὰ θὰ εἶναι ἐπίσης συγκλίνουσα καὶ θὰ ἔχῃ ἄθροισμα ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῆς δευτέρας (5).

Διότι, ἐξ ὑποθέσεως, ἔχω:

$$\alpha_1\leqq\beta_1,\ \alpha_2\leqq\beta_2,\ \alpha_3\leqq\beta_3,\ \alpha_\nu\leqq\beta_\nu$$

καὶ ἑπομένως: $$A_\nu\leqq B_\nu \qquad (5)$$

ὅπου τὸ μὲν A_ν δηλοῖ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς πρώτης σειρᾶς (4) τὸ δὲ B_ν τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς δευτέρας σειρᾶς (5). Ἐπειδὴ ὅμως ἡ τελευταία αὕτη ὑπετέθη συγκλίνουσα, θὰ ὑπάρχῃ ὅρ $B_\nu=B$ καὶ, ἐπειδὴ ἡ B_ν καὶ ἡ A_ν βαίνουσιν αὐξανόμεναι, θὰ ἔχωμεν:

$B_\nu<B$ καὶ ἑπομένως [χάρις εἰς τὸν τύπον (5)]: $A_\nu<B$

ἀλλὰ τότε ἡ ποσότης A_ν διαρκῶς αὐξάνουσα καὶ οὐδέποτε ὑπερβαίνουσα τὸν B θὰ ἔχῃ ὅριον πεπερασμένον ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ B. Τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη

Θεώρημα ΙΙΙ. ***Ἐὰν οἱ ὅροι μιᾶς σειρᾶς (4) εἶναι μεγαλείτεροι ἢ ἴσοι τῶν ἀντιστοίχων ὅρων ἄλλης (5) ἀποκλινούσης (ἐχούσης πάντας τοὺς ὅρους αὐτῆς θετικούς), ἡ πρώτη θὰ εἶναι ἐπίσης ἀποκλίνουσα.***

Διότι ἐὰν ἡ πρώτη (4) ἦτο συγκλίνουσα, τότε, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, καὶ ἡ δευτέρα (5) θὰ ἦτο ἐπίσης συγκλίνουσα, τουθ' ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν ἡμῶν.

Περὶ τοῦ ἀριθμοῦ e

15. Θεωρήσωμεν τὴν σειράν:

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots+\frac{1}{1.2.3.4\ldots\nu}+\ldots(6)$$

ἥτις εἶναι συγκλίνουσα, διότι οἱ ὅροι αὐτῆς εἶναι ἀντιστοίχως μικρότεροι τῶν ὅρων τῆς ἑξῆς:

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^\nu}+\ldots \qquad (7)$$

ἥτις, ἐὰν ἐξαιρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος, εἶναι πρόοδος γεωμετρικὴ φθίνουσα ἔχουσα ἄθροισμα $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}=2$· ἐὰν λοιπὸν ληφθῇ καὶ ὁ πρῶτος ὅρος ἡ σειρὰ (7) ἔχει ἄθροισμα ὅρων $=3$ καὶ ἑπομένως ἡ (6) εἶναι ἐπίσης συγκλίνουσα καὶ ἔχει ἄθροισμα μικρότερον ἢ ἴσον τῷ 3, παριστᾷ λοιπὸν ἀριθμόν, ὅστις σημειοῦται διὰ τοῦ γράμματος e· ὥστε ἔχομεν:

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots\nu}+\ldots \qquad (8)$$

Ἐπειδὴ οἱ τρεῖς πρῶτοι ὅροι ἔχουσιν ἄθροισμα $=2{,}50$, ἕπεται ὅτι ὁ $e>2{,}50$.

Ἐὰν καλέσωμεν k_ν τὸ ἄθροισμα τῶν $\nu+1$ πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς (8) καὶ υ_ν τὸ ἄθροισμα τῶν ὑπολοίπων ὅρων, θὰ ἔχωμεν:

$$e=k_\nu+\upsilon_\nu$$

$$k_\nu=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.\ 2}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots.\nu},$$

$$\upsilon_\nu=\frac{1}{1.2.3\ldots\nu(\nu+1)}+\frac{1}{(\nu+2)!}+\ldots \qquad (9)$$

Ὁ τελευταῖος τύπος γράφεται:

$$\upsilon_\nu=\frac{1}{1.2.3\ldots\nu}\left[\frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}+\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}+\ldots\right] \qquad 10$$

οἱ δὲ ὅροι τῆς ἐν παρενθέσει σειρᾶς δὲν ὑπερβαίνουσι τοὺς ἀντιστοίχους τῆς σειρᾶς: $\dfrac{1}{\nu+1}+\dfrac{1}{(\nu+1)^2}+\dfrac{1}{(\nu+1)^3}+\ldots\ldots$ ἥτις εἶναι συγκλίνουσα ὡς γεωμετρικὴ πρόοδος φθίνουσα ἔχουσα ἄθροισμα

$$\frac{1}{\nu+1}:\left(1-\frac{1}{\nu+1}\right)=\frac{1}{\nu+1}:\frac{\nu}{\nu+1}=\frac{1}{\nu}$$

ἄρα ἡ ἐν παρενθέσει σειρὰ (10) ἔχει ἄθροισμα $\leqq \frac{1}{\nu}$ καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν:

$$\upsilon_\nu \leqq \frac{1}{\nu} \cdot \frac{1}{1.2.3\ldots\nu}, \qquad K_\nu < e \leqq K_\nu + \frac{1}{\nu}\,\frac{1}{1.2.3\ldots\nu} \qquad (12)$$

Ὁ τύπος οὗτος ἐφαρμοζόμενος διὰ $\nu=2$ δίδει: $2{,}50 < e < 2{,}50 + \frac{1}{4}$ δηλαδὴ ὁ e περιλαμβάνεται μεταξὺ 2,50 καὶ 2,75· ἐν γένει, δίδοντες εἰς τὸ ν τιμὰς μεγαλειτέρας, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν e, τῇ βοηθείᾳ τοῦ τύπου (12), μὲ προσέγγισιν ὁσονδήποτε μεγάλην.

Θεωρήματα περὶ τοῦ ἀριθμοῦ e.

16. ***Θεώρημα Ι. Ὁ ἀριθμὸς e εἶνε ἀσύμμετρος.***

Ἀπεδείχθη ἐν τῷ προηγουμένῳ ἐδαφίῳ ὅτι ὁ e δὲν εἶναι ἀκέραιος, ὡς περιλαμβανόμενος μεταξὺ τῶν 2,50 καὶ 2,75, ὅτι δὲ οὔτε κλασματικὸς εἶναι ἀποδεικνύεται διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς. Ὑποτεθείσθω ὅτι $e=\frac{\mu}{\rho}$, ὅπου μ καὶ ρ εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί, καὶ ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον (12) διὰ $\nu=\rho$, ὅτε λαμβάνομεν:

$$K\rho < \frac{\mu}{\rho} < K\rho + \frac{1}{\rho}\,\frac{1}{\rho!}$$

ἐὰν δὲ τὰ τρία μέλη τοῦ τύπου τούτου πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $\rho! = 1.2.3\ldots\rho$ προκύπτει ὁ τύπος:

$$\alpha < \mu.1.2.3\ldots(\rho-1) \leqq \alpha + \frac{1}{\rho} \quad \text{ἐξ οὗ} \quad 0 < \mu(\rho-1)'. - \alpha \leqq \frac{1}{\rho}$$

ὅστις δεικνύει ὅτι ὁ ἀκέραιος θετικὸς $\mu(\rho-1)!-\alpha$ δὲν ὑπερβαίνει τὸν ἀριθμὸν $\frac{1}{\rho}$ ὄντα μικρότερον τῆς μονάδος, τοῦθ' ὅπερ εἶναι προφανῶς ἄτοπον· Ὥστε οὔτε κλασματικὸς εἶναι ὁ ἀριθμὸς e καὶ ἑπομένως εἶνε ἀσύμμετρος.

Θεώρημα ΙΙ. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς μ τείνῃ ὁπωσδήποτε εἰς τὸ

ἄπειρον, ἡ δύναμις $\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}$ ***ἔχει ὅριον τὸν ἀριθμὸν*** e. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις.

α΄ περίπτωσις. Ὑποτεθείσθω ὅτι ἡ μεταβλητὴ μ λαμβάνει τιμὰς μόνον ἀκεραίας καὶ θετικάς. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἀναπτύσσομεν τὴν δύναμιν $\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}$ κατὰ τὸν τύπον τοῦ διωνύμου, ὅτε λαμβάνομεν :

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}=1+\mu\frac{1}{\mu}+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\frac{1}{\mu^2}+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}\frac{1}{\mu^3}+\dots$$
$$+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-\nu+1)}{\nu'.}\frac{1}{\mu^{\nu}}+\dots+\frac{1}{\mu^{\mu}} \tag{13}$$

ὅπου ν ἀριθμὸς ἀκέραιος καὶ θετικὸς μικρότερος τοῦ μ ἀλλὰ *οἱοσδήποτε*.

Ὁ τύπος (13) δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}=1+\frac{1}{1}+\frac{1-\frac{1}{\mu}}{1.2}+\frac{\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\left(1-\frac{2}{\mu}\right)}{1.2.3}+ \tag{14}$$
$$+\frac{\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\left(1-\frac{2}{\mu}\right)\left(1-\frac{3}{\mu}\right)}{1.2.3.4}+\dots+\frac{\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\left(1-\frac{2}{\mu}\right)\dots\left(1-\frac{\nu-1}{\mu}\right)}{1.2.3.4\dots\nu}+\dots$$

καί, ἐὰν καλέσωμεν k_ν τὸ ἄθροισμα τῶν $\nu+1$ πρώτων ὅρων καὶ υ_ν τὸ ἄθροισμα τῶν ὑπολοίπων ὅρων, θὰ ἔχωμεν :

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}=k_\nu+\upsilon_\nu \tag{14}$$

$$\upsilon_\nu=\frac{\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\left(1-\frac{2}{\mu}\right)\dots\left(1-\frac{\nu-1}{\mu}\right)}{1.2.3..\nu}\left[\frac{1-\frac{\nu}{\mu}}{\nu+1}+\frac{\left(1-\frac{\nu}{\mu}\right)\left(1-\frac{\nu+1}{\mu}\right)}{(\nu+1)(\nu+2)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\left(1-\frac{\nu}{\mu}\right)\left(1-\frac{\nu+1}{\mu}\right)\left(1-\frac{\nu+2}{\mu}\right)}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}+\dots\right] \tag{15}$$

Ἐὰν εἰς τὸ ν δώσωμεν κατ' ἀρχὰς τιμήν τινα σταθερὰν καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι μόνον τὸ μ τείνει εἰς τὸ ἄπειρον, δυνάμεθα εἰς τὸ ἄθροισμα K_ν νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα περὶ ὁρίου ἀθροίσματος (καθόσον τὸ πλῆθος τῶν προσθετέων εἶναι πεπερασμένον) καὶ εὑρίσκομεν ὡς ὅριον τοῦ k_ν τὸ ἄθροισμα:

$$\Sigma_\nu = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2\,3\ldots\ldots\nu}$$

ἐὰν ὅμως κατόπιν ὑποθέσωμεν ὅτι καὶ τὸ ν τείνει εἰς τὸ ἄπειρον, τὸ ὅρ Σ_ν εἶνε προφανῶς ὁ ἀριθμὸς e καὶ ἑπομένως ἔχομεν:

$$\text{ὅρ}\ k_\nu = e \qquad \left[\text{ὅταν}\ \begin{matrix}\text{ὅρ}\ \mu = +\infty \\ \text{ὅρ}\ \nu = +\infty\end{matrix}\right] \tag{16}$$

Προκειμένου ἤδη περὶ τῆς ποσότητος υ_ν, παρατηροῦμεν ὅτι οἱ ὅροι τῆς ἐν παρενθέσει σειρᾶς (15) εἶναι μικρότεροι τῶν ἀντιστοίχων τῆς σειρᾶς:

$$\frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{(\nu+1)^2} + \frac{1}{(\nu+1)^3} + \ldots\ldots$$

ἥτις εἶναι συγκλίνουσα ὡς φθίνουσα γεωμετρικὴ πρόοδος ἔχουσα ἄθροισμα $\frac{1}{\nu}$· ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι ἐν παρενθέσει σειρὰ (15) ἔχει ἄθροισμα $\leq \frac{1}{\nu}$ καὶ ἑπομένως ὁ τύπος (15) μᾶς δίδει:

$$\upsilon_\nu \leq \frac{\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\left(1-\frac{2}{\mu}\right)\ldots\left(1-\frac{\nu-1}{\mu}\right)}{1.2.3\ldots\nu}\,\frac{1}{\nu} < \frac{1}{\nu}\,\frac{1}{1.2\,3\ldots\nu} \tag{17}$$

Ὅταν λοιπὸν τὸ μ καὶ τό ν (ὅπερ δύναται νὰ παρακολουθῇ τὸν μ) τείνωσιν εἰς τὸ ἄπειρον ἡ ποσότης υ_ν θὰ ἔχει ὅριον τὸ μηδέν, διότι ἡ $\frac{1}{\nu}\,\frac{1}{1.2.3\ldots\nu}$ θὰ εἶναι προφανῶς ἀπειροστή. καὶ ἑπομένως, ἐπειδὴ ὅρ. $k_\nu = e$ καὶ ὅρ. $\upsilon_\nu = 0$, ἕπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα:

$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu} = k_\nu + \upsilon_\nu$ θὰ ἔχῃ ὅριον τὸ ἀριθμὸν e.

Σημείωσις. Μετεχειρίσθημεν κατὰ βούλησιν τὸν βοηθητικὸν ἀκέραιον ν, διότι ἡ τιμὴ τῆς δυνάμεως $\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}$ δὲν ἐξαρτᾶται ἐξ αὐτοῦ.

Περίπτωσις β'. Ὑποθέσωμεν ὅτι ὅρ. $\mu = \infty$, ἀλλὰ ὁ μ λαμβάνει καὶ κλασματικὰς τιμάς, καὶ καλέσωμεν ρ τὸν μέγιστον ἀκέραιον ὅστις χωρεῖ εἰς τὸ μ, ὅτε θὰ ἔχωμεν:

$$\varrho \leqq \mu < \varrho + 1 \qquad \frac{1}{\varrho} \geqq \frac{1}{\mu} > \frac{1}{\varrho+1} \text{ καὶ } 1+\frac{1}{\varrho} \geqq 1+\frac{1}{\mu} > 1+\frac{1}{\varrho+1}$$

καὶ ἑπομένως: $$\left(1+\frac{1}{\varrho}\right)^{\mu} \geqq \left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu} > \left(1+\frac{1}{\varrho+1}\right)^{\mu}$$

αἱ δὲ ἀνισότητες αὗται ἐνισχύονται ἐὰν τὸν ἐκθέτην τοῦ πρώτου μέλους ἀντικαταστήσωμεν διὰ $\varrho+1$ τὸν δὲ τοῦ τρίτου διὰ ρ, ὅτι λαμβάνομεν:

$$\left(1+\frac{1}{\varrho}\right)^{\varrho+1} > \left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu} > \left(1+\frac{1}{\varrho+1}\right)^{\varrho} \qquad (18)$$

Ἀλλ' ἔχομεν: $\left(1+\frac{1}{\varrho}\right)^{\varrho+1} = \left(1+\frac{1}{\varrho}\right)^{\varrho}\left(1+\frac{1}{\varrho}\right)$ καὶ ἑπομένως, ὅταν τὸ ρ παρακολουθοῦν τὸ μ τείνῃ εἰς τὸ $+\infty$, θὰ ἔχωμεν:

ὅρ $\left(1+\frac{1}{\varrho}\right)^{\varrho+1} =$ ὅρ $\left(1+\frac{1}{\varrho}\right)^{\varrho}$ ὅρ $\left(1+\frac{1}{\varrho}\right) = e.1 = e$ διότι, κατὰ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, εἶναι ὅρ $\left(1+\frac{1}{\varrho}\right)^{\varrho} = e$

Ἐπίσης τὸ τρίτον μέλος τοῦ τύπου (18) ἔχει ὅριον τὸν e, διότι ἔχομεν:

$$\left(1+\frac{1}{\varrho+1}\right)^{\varrho}=\left(1+\frac{1}{\varrho+1}\right)^{\varrho+1}:\left(1+\frac{1}{\varrho+1}\right) \text{ καὶ ἑπομένως :}$$

$$ὅρ\left(1+\frac{1}{\varrho+1}\right)^{\varrho}=ὅρ\left(1+\frac{1}{\varrho+1}\right)^{\varrho+1}:ὅρ\left(1+\frac{1}{\varrho+1}\right)=e:1=e$$

διότι, κατὰ τὴν περίπ ωσιν α΄, ἔχομεν ὅρ $\left(1+\frac{1}{\varrho+1}\right)^{\varrho+1}=e$,

προσέτι δὲ ὅρ $\left(1+\frac{1}{\varrho+1}\right)=1$

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὰ ἄκρα μέλη τοῦ τύπου (18) ἔχουσιν κοινὸν ὅριον τὸν e, ἕπεται ὅτι καὶ τοῦ μεσαίου μέλους $\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}$ τὸ ὅριον εἶναι ὁ e

Περίπτωσις γ΄. Ὑποτεθείσθω ὅτι ὅρ. $\mu=-\infty$ καὶ ἂς θέσωμεν $\mu=-m$, ὅτε θὰ ἔχωμεν :

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}=\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}=\left(\frac{m-1}{m}\right)^{-m}=\left(\frac{m}{m-1}\right)^{m}=$$

$$=\left(\frac{m-1+1}{m-1}\right)^{m}=\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m}=\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)$$

καὶ ἑπομένως: ὅρ $\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}=ὅρ\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}ὅρ\left(1+\frac{1}{m-1}\right)=e.1=e$

διότι, ἐπειδὴ τὸ $m-1$ τείνει εἰς τὸ $+\infty$, κατὰ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, ἔχομεν:

$$ὅρ\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}=e, \text{ προσέτι δὲ εἶναι } ὅρ\left(1+\frac{1}{m-1}\right)=1$$

Σημείωσις. Ἡ περίπτωσις, καθ᾽ ἣν τὸ μ δὲν διατηρεῖ τὸ σημεῖον του ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς, ἀνάγεται εἰς τὰς τπεῖς προηγουμένας

Πόρισμα. ὅρ $\left(1+\frac{x}{\mu}\right)^{\mu}=e^{x}$. Διότι, ἐὰν θέσωμεν $\frac{x}{\mu}=\frac{1}{m}$, θὰ ἔχωμεν $\left(1+\frac{x}{\mu}\right)^{\mu}=\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mx}=\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{x}$

Ἀνάπτυγμα τοῦ e^x εἰς σειράν. Ὅπως ἐδείχθη ὅτι ὅρ $\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{m}=e$ ὁμοίως δεικνύεται ὅτι:

ὅρ $\left(1+\frac{x}{\mu}\right)^{\mu}=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{12}+\frac{x^3}{123}\ldots$ — ἀφ' ἑτέρου ὅμως, κατὰ τὸ πόρισμα, τὸ αὐτὸ ὅριον ἰσοῦται μὲ e^x· συνάγομεν λοιπὸν τὸ ἀνάπτυγμα $e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{12}+\frac{x^3}{123}+\ldots+\frac{x^\nu}{\nu!}+\ldots$

Περὶ λογαρίθμων

17. ***Ὁρισμός.*** ***Ἐὰν $\alpha^x=y$, θὰ λέγωμεν ὅτι ὁ x εἶναι λογάριθμος τοῦ y ὡς πρὸς βάσιν α καὶ παρίσταται τοῦτο ὡς ἑξῆς: λογ$_\alpha y=x$. Δηλαδή: λογάριθμος ἀριθμοῦ τινος y ὡς πρὸς βάσιν α καλεῖται ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως εἰς ἣν δέον νὰ ὑψωθῇ ἡ βάσις α διὰ νὰ προκύψῃ ὁ ἀριθμὸς y.*** Π. χ., ἐπειδή: $2^3=8$, $3^4=81$ $4^{\frac{1}{2}}=2$, $4^{-1}=\frac{1}{4}$ διὰ τοῦτο ἔχομεν : λογ$_2 8=3$, λογ$_3 81=4$, λογ$_4 2=\frac{1}{2}$, λογ$_4 \frac{1}{4}=-1$

Ἐπειδὴ ἡ βάσις α εἶναι τυχὼν ἀριθμός, διὰ τοῦτο ἔχομεν ἄπειρα λογαριθμικὰ συστήματα.

Ἡ ἰσότης $\alpha^0=1$ λέγει ὅτι τὸ μηδὲν εἶναι λογάριθμος τῆς μονάδος 1 ὡς πρὸς οἱανδήποτε βάσιν, ἐὰν δὲ $\alpha \neq 1$, τότε ἡ ἰσότης $\alpha^x=1$ εἶναι δυνατὴ μόνον διὰ $x=0$, συμφώνως πρὸς τὸ πόρισμα τῆς ἰδιότητος

VII τῶν ἀνισοτήτων καὶ ἑπομένως ***ἡ μονὰς ἔχει λογάριθμον μόνον τὸ μηδέν***.

Εἷς μόνος πραγματικὸς λογάριθμος. Λέγω ὅτι ὁ τυχὼν ἀριθμὸς y δὲν δύναται νὰ ἔχῃ λογαρίθμους περισσοτέρους τοῦ ἑνὸς ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν βάσιν $\alpha \neq 1$, διότι, ἐὰν εἶχεν δύω λογαρίθμους x_1 καὶ x_2, θὰ εἴχομεν: $\alpha^{x_1}=y$ καὶ $\alpha^{x_2}=y$

ἑπομένως: $\alpha^{x_1}=\alpha^{x_2}$, $\alpha^{x_2-x_1}=1$

ἀφ' ἑτέρου ὅμως, καθὼς εἴδομεν ἀνωτέρω, ἡ μονὰς 1 ἔχει λογάριθμον μόνον τὸ μηδέν· καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι: $x_2-x_1=0$ ἐξ οὗ $x_1=x_2$.

Παρατηρήσεις. Ἡ ἰσότης $\alpha^x=y$, συμφώνως πρὸς τὰς γνωστὰς ἰδιότητας τῶν δυνάμεων καὶ ἀνισοτήτων, ὁδηγεῖ εἰς τὰ ἑξῆς συμπεράσματα:

α'.) Ἐὰν $\alpha>1$, τοῦ x αὐξάνοντος τὸ y αὐξάνει καὶ τἀνάπαλιν, δηλαδή: Ὅταν ὁ ἀριθμὸς αὐξάνῃ, αὐξάνει καὶ ὁ λογάριθμός του καὶ ἀντιστρόφως. Ὅταν $x>0$, ἔχομεν $y>1$ καὶ ὅταν $x<0$ ἔχομεν $y<1$, δηλαδὴ οἱ μεγαλείτεροι τῆς μονάδος ἀριθμοὶ ἔχουσι λογάριθμον θετικὸν καὶ οἱ μικρότεροι τῆς μονάδος ἔχουσι λογάριθμον ἀρνητικόν.

β'.) Ἐὰν $\alpha<1$, τοῦ x αὐξάνοντος τοῦ y ἐλαττοῦται. Ὅταν $x>0$ ἔχομεν $y<1$ καὶ ὅταν $x<0$ ἔχομεν $y>1$ καὶ ἐν γένει συμβαίνουσι τ' ἀντίστροφα τῶν προηγουμένων.

γ'.) Ἐὰν $y=\alpha$ θὰ ἔχωμεν $x=1$ δηλαδὴ ***ἐν παντὶ λογαριθμικῷ συστήματι ἡ βάσις ἔχει λογάριθμον τὴν μονάδα***.

Ἐπειδὴ ἡ βάσις α δύναται νὰ εἶναι οἱοσδήποτε θετικὸς ἀριθμός, ἔχομεν ἄπειρα λογαριθμικὰ συστήματα ἀναλόγως τῆς βάσεως ἣν ἐκλέγομεν. Μεταξὺ αὐτῶν πρωτεύουσιν ὡς χρησιμώτερα τὰ ἔχοντα βάσιν τὸν 10 καὶ τὸν ἀριθμὸν e, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ μὲν πρῶτον καλούμενον *δεκαδικὸν* χρησιμοποιεῖται κυρίως εἰς τοὺς πρακτικοὺς λογισμούς, τὸ δὲ δεύτερον καλούμενον *Νεπέρειον* ἢ φυσικὸν χρησιμοποιεῖται κυρίως εἰς τὰς θεωρητικὰς μελέτας.

Ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων

18. I. ***Ὁ λογάριθμος γινομένου ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν λογαρίθμων τῶν παραγόντων καὶ ὁ λογάριθμος πηλίκου ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τῶν λογαρίθμων τῶν ὅρων αὐτοῦ***.

Ἔστω: $\lambda o\gamma_\alpha y_1 = x_1$ καὶ $\lambda o\gamma_\alpha y_2 = x_2$. Θὰ ἔχωμεν, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ λογαρίθμου, τὰς ἰσότητας: $\alpha^{x_1} = y_1$ καὶ $\alpha^{x_2} = y_2$, αἵτινες πολλαπλασιαζόμεναι καὶ διαιρούμεναι κατὰ μέλη δίδουσι τὰς:

$\alpha^{x_1 + x_2} = y_1 y_2$ καὶ $\alpha^{x_1 - x_2} = \dfrac{y_1}{y_2}$ ἐξ ὧν ἡ μὲν πρώτη δεικνύει ὅτι

$\lambda o\gamma_\alpha (y_1 y_2) = x_1 + x_2 = \lambda o\gamma_\alpha y_1 + \lambda o\gamma_\alpha y_2$ ἡ δὲ δευτέρα ὅτι

$$\lambda o\gamma_\alpha \frac{y_1}{y_2} = x_1 - x_2 = \lambda o\gamma_\alpha v_1 - \lambda o\gamma_\alpha y_2.$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον δεικνύεται καὶ διὰ περισσοτέρους παράγοντας ἡ ἰδιότης περὶ λογαρίθμου γινομένου.

II. ***Ὁ λογάριθμος δυνάμεως ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ ἐκθέτου αὐτῆς ἐπὶ τὸν λογάριθμον τῆς βάσεως τῆς δυνάμεως.***

Θεωρήσωμεν τὴν δύναμιν y^μ, λέγω ὅτι $\lambda o\gamma_\alpha y^\mu = \mu . \lambda o\gamma_\alpha y$
Ἔστω $\lambda o\gamma_\alpha y = x$· τότε θὰ ἔχωμεν τὴν ἰσότητα: $\alpha^x = y$ καὶ ὑψοῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς εἰς τὴν δύναμιν μ λαμβάνομεν τὴν $\alpha^{\mu x} = y^\mu$ ἥτις δεικνύει ὅτι ὁ λογάριθμος τῆς y^μ ὡς πρὸς βάσιν α ἰσοῦται τῷ $\mu x = \mu \lambda o\gamma_\alpha y$.

Σχέσις μεταξὺ τῶν λογαρίθμων ἑνὸς ἀριθμοῦ ὡς πρὸς δύω διαφόρους βάσεις. Ἔστω x ὁ λογάριθμος τοῦ y ὡς πρὸ βάσιν α, ὅτε θὰ ἔχωμεν τὴν ἰσότητα: $\alpha^x = y$ καὶ λαμβάνοντες τὸν λογάριθμον ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ὡς πρὸς τὴν ἄλλην βάσιν β ἔχομεν τήν:

$$x \lambda o\gamma_\beta \alpha = \lambda o\gamma_\beta y \quad \text{δηλαδή:} \quad \lambda o\gamma_\alpha y \lambda o\gamma_\beta \alpha = \lambda o\gamma_\beta y \tag{21}$$

ἥτις λέγει ὅτι ***ὁ $\lambda o\gamma_\alpha y$ πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν λογάριθμον τῆς παλαιᾶς βάσεως ὡς πρὸς τὴν νέαν δίδει τὸν λογάριθμον τοῦ y ὡς πρὸς τὴν νέαν βάσιν β.***

Συνήθως τοὺς δεκαδικοὺς λογαρίθμους παριστῶμεν ἄνευ δείκτου τοὺς δὲ νεπερείους διὰ λατινικῶν στοιχείων log. Ἐὰν λοιπὸν ἐν τῇ σχέσει (21) λάβωμεν α=10 καὶ β=e εὑρίσκομεν τήν:

$$\lambda o\gamma\, y \log 10 = \log y \tag{22}$$

ἥτις ἐφαρμοζομένη διὰ $y=e$ δίδει τήν: $\lambda o\gamma\, e \log 10=\log e=1$

ἐξ ἧς: $\log 10=\dfrac{1}{\lambda o\gamma\, e}$ ἡ δὲ τιμὴ αὕτη εἰσαγομένη εἰς τὴν σχέσιν

(22) παρέχει τήν: $\log y=\lambda o\gamma y : \lambda o\gamma\, e$

ἥτις δίδει τὸν νεπέρειον λογάριθμον ἀριθμοῦ τινος y, ὅταν εἶναι γνωστὸς ὁ δεκαδικὸς αὐτοῦ λογάριθμος.

19. ***Δεκαδ. λογάριθμοι*** Δοθέντος ἀριθμοῦ θετικοῦ καὶ μεγαλειτέρου τῆς μονάδος καλοῦμεν *θέμα* αὐτοῦ τὸ πλῆθος τῶν ἀκεραίων αὐτοῦ ψηφίων ἠλαττωμένον κατὰ μονάδα. Οὕτω ἔχομεν:

$$\theta\varepsilon\mu\ 3=0,\ \theta\varepsilon\mu\ 35=1,\ \theta\varepsilon\mu\ 382=2,\ \theta\varepsilon\mu\ 382{,}549=2$$

Θὰ δείξωμεν ἤδη τὸ ἑξῆς θεώρημα:

Θεώρημα. ***Ὁ δεκαδικὸς λογάριθμος ἀριθμοῦ μεγαλειτέρου τῆς μονάδος γραφόμενος ὑπὸ δεκαδικὴν μορφὴν ἔχει ἀκέραιον μέρος ἴσον τῷ θέματι τοῦ ἀριθμοῦ.***

Ἔστω $x=\lambda o\gamma_{10} y=\lambda o\gamma y$, ὅτε θὰ ἔχωμεν: $10^x=y$

Ἐὰν καλέσωμεν ϱ τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ x, θὰ ἔχωμεν τὴν

ἰσότητα: $\varrho \leq x < \varrho+1$ ἐξ ἧς προκύπτει ἡ

$$10^\varrho \leq 10^x < 10^{\varrho+1} \quad \text{δηλαδή:} \quad 10^\varrho \leq y < 10^{\varrho+1} \qquad (23)$$

Ἐπειδὴ ὁ 10^ϱ ἔχει $\varrho+1$ ψηφία ἕπεται ὅτι ὁ y, ὅστις εἶναι μεγαλείτερος ἢ ἴσος, θὰ ἔχῃ ἀκέραια ψηφία ὄχι ὀλιγώτερα τῶν $\varrho+1$· ἀφ' ἑτέρου, ἐπειδὴ ὁ $10^{\varrho+1}$ ἔχει $\varrho+2$ ψηφία εἶναι δὲ ὁ μικρότερος ἐκ τῶν ἀριθμῶν τῶν ἐχόντων $\varrho+2$ ἀκέραια ψηφία, ἕπεται ὅτι ὁ y ὅστις εἶναι μικρότερος τοῦ $10^{\varrho+1}$, θὰ ἔχῃ ἀκέραια ψηφία ὀλιγώτερα τῶν $\varrho+2$. Ἀγόμεθα λοιπὸν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι τὸ πλῆθος μ τῶν ἀκεραίων ψηφίων τοῦ y ἰσοῦται τῷ $\varrho+1$ καὶ ἔχομεν:

$$\mu=\varrho+1 \quad \text{δηλαδὴ} \quad \varrho=\mu-1=\theta\varepsilon\mu\ y.$$

Τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη. Καθ' ὅμοιον τρόπον δεικνύεται ὅτι ὁ λογ y ἔχει τόσα δέκατα ἐν συνόλῳ ὅσον εἶναι τὸ θέμα τοῦ y^{10}, τόσα ἑκατοστὰ ἐν συνόλῳ ὅσον εἶναι τὸ θέμα τοῦ y^{100} καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἀσκήσεις.

1) Δεῖξαι ὅτι ὁ νιοστὸς ὅρος σειρᾶς συγκλινούσης τείνει εἰς τὸ μηδέν, ὅταν τὸ ν τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον.

2) Δεῖξαι ὅτι, ἐὰν μία σειρὰ συγκλίνῃ, τὸ γινόμενον τῶν ν πρώτων ὅρων αὐτῆς ἔχει ὅριον τὸ μηδέν, τοῦ ν τείνοντος εἰς τὸ ἄπειρον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

Περὶ συναρτήσεων

1. ***Ὁρισμοί.*** Ὅταν ἡ τιμὴ (ἢ αἱ τιμαὶ) μιᾶς μεταβλητῆς ποσότητος y ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν τιμῶν ἄλλων μεταβλητῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ οὕτως ὥστε ἡ τιμὴ τῆς y νὰ ὁρίζηται ἐκ τῶν τιμῶν τῶν διδομένων εἰς τὰς $x_1, x_2, \ldots x_\nu$, τότε ἡ y λέγεται ***συνάρτησις*** τῶν $x_1, x_2 \ldots x_\nu$. Πρὸς παράστασιν τῶν συναρτήσεων μεταχειριζόμεθα συνήθως τὰ γράμματα σ, φ, f, ψ, ω...., π. χ.: $y = \sigma(x_1, x_2, x_3, \ldots x_\nu)$.

Τὰ ἐμβαδὸν Ε κύκλου ἀκτῖνος ρ εἶναι συνάρτησις τοῦ ρ, διότι ἔχομεν: $E = \pi\rho^2$· ἐπίσης ὁ ὄγκος V κυλίνδρου ἀκτῖνος βάσεως x καὶ ὕψους y εἶναι συνάρτησις τῶν x καὶ y, διότι ἔχομεν: $V = \pi x^2 y$.

Ὅταν ἡ ἐξάρτησις τῆς y ἀπὸ τῶν μεταβλητῶν $x_1, x_2, x_3, \ldots x_\nu$ ὁρίζεται ὑπὸ ἐξισώσεως, ἧς τὰ δύο μέλη εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα ὡς πρὸς $y, x_1, x_2, x_3, \ldots x_\nu$, τότε λέγομεν ὅτι τὸ y εἶναι ἀλγεβρικὴ συνάρτησις τῶν $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu$. Αἱ συναρτήσεις αἱ μὴ ἀλγεβρικαὶ καλοῦνται ***ὑπερβατικαί,*** τοιαῦται π. χ., εἶναι αἱ $y = \eta\mu x$, $y = \sigma\upsilon\nu x$, $y = \log x$, $y = \varepsilon\varphi x$.

Ὅταν μία ἀλγεβρικὴ συνάρτησις δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν πηλίκου δύω ἀκεραίων πολυωνύμων ὡς πρὸς τὰς $x_1, x_2, \ldots x_\nu$ τότε λέγεται ***ῥητή,*** τοῦτο δὲ συμβαίνει ὅταν ἡ ἐξίσωσις ἡ συνδέουσα τὴν y καὶ τὰς ἄλλας μεταβλητὰς εἶναι πρωτοβάθμιος ὡς πρὸς y.

2. ***Ἡ ἔννοια τῆς συνεχείας.*** Ἔστω μία συνάρτησις $y = \sigma(x)$·

Θεωρήσωμεν τὴν μεταβλητὴν x μεταβαλλομένην ἐν τῷ διαστήματι τῷ περιλαμβανομένῳ μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν α καὶ 6 (ἀπὸ α ἕως 6), τὸ ὁποῖον θὰ παριστῶμεν διὰ τοῦ συμβόλου (α. ...β), καὶ δύω τυχούσας τιμὰς x_1 καὶ x_2 τοῦ διαστήματυς τούτου.

Θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις σ(x) εἶναι συνεχὴς ἐν τῷ θεωρηθέντι διαστήματι ὅταν τῆς διαφορᾶς x_2-x_1, τεινούσης πρὸς τὸ μηδὲν (χωρὶς αἱ τιμαὶ αὗται νὰ ἐξέλθωσι τοῦ διαστήματος), ἡ διαφορὰ $\sigma(x_1)-\sigma(x_2)$ ἔχῃ ἐπίσης ὅριον τὸ μηδέν. Δηλαδή: ὅταν αἱ x_1 καὶ x_2 τείνωσι νὰ συμπέσωσι καὶ αἱ σ (x_1) καὶ σ (x_2) τείνουσιν ἐπίσης νὰ συμπέσωσι.

Θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις σ (x) εἶναι συνεχὴς ἐν τῇ περιοχῇ σταθερᾶς τινος τιμῆς x_0 (ἀριθμοῦ), ὅταν, τῆς διαφορᾶς $x-x_0$ τεινούσης πρὸς τὸ μηδέν, ἡ διαφορὰ $\sigma(x)-\sigma(x_0)$ ἔχει ἐπίσης ὅριον τὸ μηδέν, δηλαδή: ἡ μεταβλητὴ ποσότης σ(x) ἔχῃ ὅριον, ὅπερ εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\sigma(x_0)=\sigma$ (ὅρx).

Ἐν ἄλλοις λόγοις, ἡ συνέχεια τῆς συναρτήσεως ἐν τῇ περιοχῇ τιμῆς τινος x_0 ἐκφράζει τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν σονθήκην ἵνα, ὅταν ἡ x τείνῃ καθ' οἱονδήποτε τρόπον πρὸς τὴν x_0, ἡ σ(x) ἔχῃ ὅριον πεπερασμένον τὸν ἀριθμὸν $\sigma(x_0)=\sigma$(ὅρ x), δηλαδή:

$$\text{ὅρ } \sigma(x)=\sigma(\text{ὅρ } x)$$

Παρατηρήσεις. Εἶναι προφανὲς ὅτι μία συνάρτησις σ(x) συνεχὴς ἔν τινι διαστήματι εἶναι τοιαύτη καὶ ἐν τῇ περιοχῇ πάσης τιμῆς **τοῦ** διαστήματος τούτου.

Ἐὰν θεωρήσωμεν τυχοῦσαν τιμὴν τῆς x καὶ κατόπιν νέαν τιμὴν αὐτῆς x_1, ἡ διαφορὰ x_1-x καλεῖται *αὔξησις τοῦ x* καὶ παρίσταται συνήθως διὰ τοῦ συμβόλου Δx· ὥστε ἡ νέα τιμὴ εἶναι $x_1=x+\Delta x$. Εἰς τὴν τιμὴν x ἀντιστοιχεῖ ἡ σ(x) τῆς συναρτήσεως· ἐὰν ἀπὸ τῆς νέας τιμῆς $\sigma(x+\Delta x)$ ἀφαιρέσωμεν τὴν ἀρχικὴν σ(x), ἡ προκύπτουσα διαφορὰ $\sigma(x+\Delta x)-\sigma(x)$ καλεῖται αὔξησις τῆς σ(x) ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν αὔξησιν Δx τῆς x καὶ παρίσταται ἐπίσης διὰ τοῦ συμβόλου $\Delta y=\Delta\sigma(x)$. Συμφώνως πρὸς τὸν δοθέντα ἀριθμὸν τῆς συνεχείας, ***ἵνα ἡ συνάρτησις $y=\sigma(x)$ εἶναι συνεχὴς ἐν τῇ περιοχῇ τῆς ἀρ-***

χικῆς τιμῆς x, πρέπει καὶ ἀρκεῖ, ὅταν ἡ αὔξησις Δx τείνῃ καθ' οἱονδήποτε τρόπον εἰς τὸ μηδέν, ἡ ἀντίστοιχος αὔξησις Δy νὰ ἔχῃ ἐπίσης ὅριον τὸ μηδέν.

Ὅταν ἡ συνάρτησις δὲν εἶναι συνεχὴς ἔν τινι διαστήματι ἢ ἐν τῇ περιοχῇ τιμῆς τινος, τότε λέγεται *ἀσυνεχής*.

3. ***Παραδείγματα συνεχείας.*** α'.) Ἡ συνάρτησις $y=x^2$ εἶναι συνεχὴς ἐν τῇ περιοχῇ πάσης τιμῆς διότι ἔχομεν:

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2$$

ἐξ ἧς φαίνεται ὅτι, ὅταν ἡ Δx τείνῃ εἰς τὸ μηδέν, καὶ ἡ Δy ἔχει ἐπίσης ὅριον τὸ μηδέν. Ὁμοίως δεικνύεται ὅτι εἶναι συνεχὴς ἐν παντὶ διαστήματι μήκους πεπερασμένου.

β') Ἐὰν θεωρήσωμεν δύω ἄξονας ὀρθογωνίους Ox καὶ Oy καὶ μίαν γραμμὴν συνεχῆ [μὴ παρουσιάζουσαν διακοπὴν] τοῦ ἐπιπέδου καὶ ὑποτεθῇ ὅτι τοῦ τόξου αὐτῆς τ τοῦ περιλαμβανομένου μεταξὺ τῶν εὐθειῶν $x=\alpha$ καὶ $x=\beta$ οὐδὲν μέρος εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν y, παρατηροῦμεν ἀμέσως ὅτι ἐπὶ τῆς θεωρηθείσης γραμμῆς ἡ τεταγμένη y εἶναι συνάρτησις τῆς τετμημένης x συνεχὴς ἐν τῷ διαστήματι $(\alpha\ldots\beta)$· τῷ ὄντι, ἐὰν θεωρήσωμεν δύω σημεῖα M_1 (x_1, y_1) καὶ M_2 (x_2, y_2) τοῦ τόξου τ, ἡ διαφορὰ y_2-y_1 ἔχει ὅριον τὸ μηδὲν ὅταν ἡ x_2-x_1 τείνῃ εἰς τὸ μηδέν.

Παραδείγματα ἀσυνεχείας. *α')* Ἐὰν μία γραμμὴ τοῦ ἐπιπέδου τεμνομένη εἰς ἓν τὸ πολὺ σημεῖον ὑπὸ τῶν παρ λλήλων πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y παρουσιάζῃ διακοπὴν μεταξὺ τῶν σημείων $M_1(x_0 y_1)$ καὶ M_2 $(x_0 y_2)$ ἢ τὸ τμῆμα αὐτῆς τὸ μεταξὺ τῶν σημείων τούτων περιλαμβανόμενον εἶναι εὐθεῖα παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν y, ἡ ἐπὶ τῆς γραμμῆς ταύτης ὁριζομένη συνάρτησις $y=\sigma(x)$ εἶναι ἀσυνεχὴς ἐν τῇ περιοχῇ τῆς τιμῆς x_0, διότι, ὅταν τὸ x τείνῃ εἰς τὴν x_0 ἐκ τιμῶν ἐλασσόνων ἔχομεν ὅρ $y=y_1$, ὅταν δὲ ἡ x τείνῃ εἰς x_0 ἐκ τιμῶν μειζόνων, ἔχομεν ὅρ $y=y_2$ *.

---

* Ὑποτίθεται ὅτι πρόκειται περὶ γραμμῆς ὁριζούσης μίαν μόνον συνάρτησιν τοῦ x δηλαδὴ τοιαύτης ὥστε εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ x ν' ἀντιστοιχῇ ἓν (ἢ κανὲν) σημεῖον τῆς καμπύλης.

β'.) Ἡ συνάρτησις $y=\alpha^{\frac{1}{x}}$, ὅπου ἔστω $\alpha>1$, εἶναι ἀσυνεχὴς ἐν τῇ περιοχῇ τῆς τιμῆς $x=0$, διότι ὅταν ἡ x τείνῃ εἰς τὸ μηδὲν ἐκ τιμῶν θετικῶν ἔχομεν: ὅρ $\frac{1}{x}=+\infty$ καὶ ὅρ $\alpha^{\frac{1}{x}}=+\infty$ ἐνῷ, ὅταν ἡ x τείνῃ εἰς τὸ μηδὲν ἐκ τιμῶν ἀρνητικῶν, ἔχομεν: ὅρ $\frac{1}{x}=-\infty$ καὶ ὅρ $\alpha^{\frac{1}{x}}=0$.

Ἐπειδὴ λοιπόν, τοῦ x τείνοντος εἰς τὸ μηδέν, ἡ y δὲν ἔχει ὅριον (ἀνεξάρτητον τοῦ τρόπου, καθ' ὃν ἡ x τείνει εἰς τὸ μηδέν), διὰ τοῦτο ἡ συνάρτησις παρουσιάζει ἀσυνέχειαν εἰς τὴν τιμὴν $x=0$.

γ'.) Ἡ συνάρτησις $y=$εφx δὲν εἶναι συνεχὴς ἐν τῇ περιοχῇ τῆς τιμῆς $x=\frac{\pi}{2}$, διότι διὰ τὴν τιμὴν ταύτην γίνεται ἄπειρος καὶ δή, ὅταν τὸ x τείνῃ εἰς τὴν $\frac{\pi}{2}$ ἐκ τιμῶν ἐλασσόνων ἔχομεν ὅρ εφ$x=+\infty$, ὅταν δὲ τὸ x τείνῃ εἰς τὴν $\frac{\pi}{2}$ ἐκ τιμῶν μειζόνων, ἔχομεν: ὅρ εφ$x=-\infty$· διὰ τοῦτο ἡ $x=\frac{\pi}{2}$ εἶναι τιμὴ ἀσυνεχείας, ἐκεῖ ἡ ἐφαπτομένη μεταπίπτει ἀποτόμως ἐκ τῆς τιμῆς $+\infty$ πρὸς τὴν τιμὴν $-\infty$.

4. ***Θεμελιῶδες θεώρημα τῶν συνεχῶν συναρτήσεων.*** ***Ὅταν μία συνάρτησις $y=\sigma(x)$ συνεχὴς ἔν τινι διαστήματι Δ λαμβάνῃ τιμὰς ἑτεροσήμους διὰ δύω τιμὰς $x=\alpha$ καὶ $x=\beta$ τοῦ διαστήματος τούτου, ἡ συνάρτησις αὕτη μηδενίζεται διὰ μίαν τοὐλάχιστον τιμὴν τῆς x περιλαμβανομένην μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β.***

Ὁ σκοπὸς τοῦ βιβλίου τούτου ἐπιτρέπει νὰ παραλείψωμεν τὴν ἀλγεβρικὴν ἀπόδειξιν αὐτοῦ τοσοῦτον μᾶλλον καθόσον α'.) Ἐκ τῆς συνήθους ἐννοίας τῆς συνεχείας ἕπεται ὅτι δὲν δυνάμεθα νὰ μεταβῶμεν ἐκ θετικῶν τιμῶν εἰς ἀρνητικὰς χωρὶς νὰ περάσωμεν ἀπὸ τὸ μηδέν. β'.) Γεωμετρικῶς φαίνεται σαφέστατα ἐὰν τὰ x καὶ y θεωρηθῶσιν ὡς Καρτεσιαναὶ συντεταγμέναι διότι δὲν δυνάμεθα νὰ μεταβῶμεν ἀπὸ σημείου $A[\alpha,\sigma(\alpha)]$ κειμένου ἄνωθεν τοῦ ἄξονος Ox εἰς σημεῖον $B[\beta,\sigma(\beta)]$ κείμενον κάτωθεν τοῦ ἄξονος Ox χωρὶς νὰ συναντήσωμεν τοὐλάχιστον ἅπαξ τὸν ἄξονα τοῦτον.

7. ***Θεώρημα ὑπάρξεως ῥίζης θετικοῦ ἀριθμοῦ. Πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς ϑ ἔχει μίαν νιοστὴν ῥίζαν πραγματικὴν καὶ θετικήν, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ἀκεραίου καὶ θετικοῦ δείκτου ν.***

$\sqrt[\nu]{\theta}$

Ἀπόδειξις. Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ὑπάρχει τιμὴ τοῦ x πραγματικὴ μηδενίζουσα τὴν συνάρτησιν $\sigma(x)=x^\nu-\vartheta$. Τῷ ὄντι, ὅταν ἡ x τείνῃ εἰς τὸ μηδέν, ἔχομεν ὅρ $x^\nu=0$ καί, ὅταν ἡ x τείνῃ εἰς τὸ $+\infty$, ἔχομεν ὅρ $x^\nu=+\infty$· ἑπομένως θὰ ὑπάρχωσι δύω ἀριθμοὶ θετικοὶ α καὶ β τοιοῦτοι ὥστε : $\alpha^\nu<\vartheta<\beta^\nu$

ἀλλὰ τότε ἡ συνάρτησις $x^\nu-\vartheta$, ἥτις εἶναι συνεχὴς ἐν παντὶ διαστήματι, διὰ $x=\alpha$ καὶ $x=\beta$ λαμβάνει τιμὰς ἑτεροσήμους καὶ ἑπομένως, κατὰ τὴν θεμελιώδη ἰδιότητα τῶν συνεχῶν συναρτήσεων, θὰ μηδενίζεται διά τινα τιμὴν $x=\gamma$ περιλαμβανομένην μεταξὺ α καὶ β, ἤτοι θὰ ἔχωμεν: $\gamma^\nu-\vartheta=0$ καὶ ἑπομένως $\gamma^\nu=\vartheta$.

Περὶ παραγώγων

5. ***Ὁρισμός.*** Θεωρήσωμεν τυχοῦσαν συνάρτησιν $y=\sigma(x)$ καὶ ***τὸν λόγον*** $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\sigma(x+\Delta x)-\sigma(x)}{\Delta x}$ ***τῆς αὐξήσεως τῆς συναρτήσεως πρὸς τὴν αὔξησιν τῆς x. Ἐάν, τοῦ Δx τείνοντος πρὸς τὸ μηδέν, ὁ λόγος οὗτος ἔχῃ ὅριον, τὸ ὅριον τοῦτο καλεῖται παράγωγος τῆς συναρτήσεως $y=\sigma(x)$ εἰς τὴν θεωρηθεῖσαν τιμὴν τῆς x καὶ παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου $y'=\sigma'(x)$***, δηλαδὴ δι' ἑνὸς τόνου τιθεμένου ἄνωθεν τοῦ γράμματος τοῦ παριστῶντος τὴν συνάρτησιν.

Παρατήρησις. Ἵνα ὑπάρχῃ παράγωγος πεπερασμένη πρέπει ἡ **Δy** νὰ εἶναι ἀπειροστή, ὅταν ὅρ $\Delta x=0$, δηλαδὴ πρέπει ἡ συνάρτησις νὰ εἶναι συνεχὴς ἐν τῇ περιοχῇ τῆς θεωρηθείσης τιμῆς x.

Παράγωγος σταθερᾶς. Ἐὰν ἡ y εἶναι ποσότης σταθερά, δηλαδή : ἀνεξάρτητος τῆς x, τότε θὰ ἔχωμεν πάντοτε $\Delta y=0$ καὶ ἑπομένως $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0$· ἄρα ***ἡ παράγωγος σταθερᾶς ποσότητος εἶναι μηδέν.***

Θεώρημα. Ὅταν μία συνάρτησις $y=\varphi(x)$ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ σταθερὰν k, ἡ παράγωγος αὐτῆς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ k. Διότι, ἐὰν θέσωμεν $ky=\omega$, θὰ ἔχωμεν: $\Delta\omega=k(y+\Delta y)-ky=k\Delta y$

καὶ ἑπομένως: $$\frac{\Delta\omega}{\Delta x}=k\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{καὶ } \text{ὅρ}\frac{\Delta\omega}{\Delta x}=k\ \text{ὅρ}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

δηλαδή: $$\omega'=ky' \quad \text{ἢ} \quad (ky)'=ky'$$

Λοιπόν, οἱ σταθεροὶ παράγοντες μένουσι ἀμετάβλητοι κατὰ τὴν παραγωγήν:

Παράγωγος δυνάμεως $y=x^{\mu}$, ὅπου ὁ μ ἀκέραιος καὶ θετικός. Θὰ ἔχωμεν προφανῶς:

$$\Delta y=(x+\Delta x)^{\mu}-x^{\mu}=\mu x^{\mu-1}\Delta x+$$
$$+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^{\mu-2}(\Delta x)^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^{\mu-3}(\Delta x)^3+\ldots+(\Delta x)^{\mu} \qquad (5)$$

ἐξ ἧς προκύπτει: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\mu x^{\mu-1}+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^{\mu-2}(\Delta x)+\ldots\ldots+(\Delta x)^{\mu-1}$ καὶ

ἑπομένως, ὅταν ὅρ $\Delta x=0$, λαμβάνομεν:

$$\text{ὅρ}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'=(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1} \qquad (6)$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον δεικνύεται ὁ γενικώτερος τύπος: $(\omega^{\mu})'=\mu\omega^{\mu-1}\omega'$ ὅπου τὸ ω δηλοῖ τυχοῦσαν συνάρτησιν τῆς x. Ἐκ τοῦ τύπου (6) ἕπεται: $(x)'=1$

Παραδείγματα $(x^2)'=2x \qquad (x^5)'=5x^4, \qquad (x^9)'=9x^8$

Παρατήρησις Ὁ τύπος (5) ἀποδεικνύει ἐπίσης τὴν συνέχειαν τῆς συναρτήσεως x^{μ} ἐν τῇ περιοχῇ πάσης τιμῆς καὶ ἐν παντὶ διαστήματι πεπερασμένῳ.

6. *Παράγωγος ἀθροίσματος.* ***Θεώρημα. Ἡ παράγωγος ἀθροίσματος ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν παραγώγων τῶν προσθετέων ὅταν τὸ πλῆθος αὐτῶν εἶναι πεπερασμένον.***

Θεωρήσωμεν π.χ., τὸ ἄθροισμα: $y=\varphi+\omega+f$, ὅπου τὰ φ, ω καὶ f παριστῶσι συναρτήσεις τῆς x ἐχούσας παράγωγον. Θὰ ἔχωμεν προφανῶς τὸν τύπον:

$$\Delta y=(\varphi+\Delta\varphi+\omega+\Delta\omega+f+\Delta f)-(\varphi+\omega+f)=\Delta\varphi+\Delta\omega+\Delta f$$

ὅστις δεικνύει ὅτι ἡ συνέχεια τῶν συναρτήσεων φ, ω καὶ f συνεπάγεται ἐπίσης τὴν συνέχειαν τοῦ ἀθροίσματος y καὶ ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει: $\text{ὅρ}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\text{ὅρ}\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta x}+\text{ὅρ}\dfrac{\Delta\omega}{\Delta x}+\text{ὅρ}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ δηλαδή: $y'=\varphi'+\omega'+f'$.

Παράγωγος γινομένου. *Ἡ παράγωγος τοῦ γινομένου* $y=\varphi\omega$ *δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου*: $(\varphi\omega)'=\varphi\omega'+\omega\varphi'$.

Διότι ἔχομεν: $\Delta y=(\varphi+\Delta\varphi)(\omega+\Delta\omega)-\varphi\omega=\varphi\omega+\varphi\Delta\omega+\omega\Delta\varphi+$ $+\Delta\varphi.\Delta\omega-\varphi\omega=\varphi\Delta\omega+\omega\Delta\varphi+\Delta\varphi\Delta\omega$, ἐκ δὲ τοῦ τύπου τούτου, τοῦ δεικνύοντος ἀμέσως ὅτι ἡ συνέχεια τῶν συναρτήσεων φ καὶ ω συνεπάγεται τὴν συνέχειαν τοῦ γινομένου αὐτῶν y, προκύπτει ὁ ἑξῆς:

$$\text{ὅρ}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\varphi\ \text{ὅρ}\frac{\Delta\omega}{\Delta x}+\omega\ \text{ὅρ}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}+\ \text{ὅρ}\ \Delta\varphi\ \text{ὅρ}\frac{\Delta\omega}{\Delta x}$$

δηλαδή: $y'=\varphi\omega'+\omega\varphi'$ (ὅταν ὅρ $\Delta x=0$), διότι, ἕνεκεν τῆς συνεχείας τῆς φ, ἔχομεν ὅρ $\Delta\varphi=0$.

ΜΑΘΗΜΑΤΑ
ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΦΟΙΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΑΣΤΩΝ ΤΩΝ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ ΚΑΘΩΣ
ΚΑΙ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΥΠΟ

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Ι. ΡΕΜΟΥΝΔΟΥ

ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ
ΕΝ ΤΩ ΕΘΝΙΚΩ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΩ ΚΑΙ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΩ

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΑΘΗΝΑΙ
ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ Μ. ΔΕΛΗ
Ι - ΜΙΛΤΙΑΔΟΥ - Ι
1926

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τὸ δεύτερον τοῦτο μέρος τῆς ἀνωτέρας ἀλγέβρας εἶνε μὲν συνέχεια τοῦ ἤδη ἐκδοθέντος πρώτου μέρους αὐτῆς, ὑποθέτει ὅμως γνωστὰ ὅσα ἐκ τῆς ἀναλύσεως εἶνε ἐν αὐτῇ χρήσιμα, π. χ. τὸ θεώρημα τοῦ Rolle, τὸν τύπον τοῦ Taylor κτλ., τοῦτο δὲ διότι, ὡς καὶ ἐν τῷ πρώτῳ μέρει, δὲν ἠθέλησα νὰ δώσω εἰς τὸ βιβλίον ἄλλον χαρακτῆρα ἐκτὸς τοῦ καθαρῶς ἀλγεβρικοῦ. Θὰ ἠδυνάμην βεβαίως, ὡς συνήθως γίνεται, νὰ ἐπιβαρύνω τὸ πρῶτον βιβλίον μὲ στοιχεῖα Διαφορικοῦ Λογισμοῦ, ἀλλά, ἐπειδὴ ὁ Διαφορικὸς Λογισμὸς ἔχει ἐκδοθῇ ἀπὸ τοῦ ἔτους 1917, ἐθεώρησα ματαίαν τὴν ἐπανάληψιν τῶν γνώσεων τούτων εἰς βιβλίον καθαρῶς ἀλγεβρικόν, οἱ δὲ διδασκόμενοι τὸν σπουδαῖον τοῦτον κλάδον τῆς Ἀλγέβρας ὀφείλουσι νὰ προτάξωσι τὴν σπουδὴν στοιχείων Διαφορικοῦ Λογισμοῦ ἔχοντες ὡς βάσιν τὸ βιβλίον μου.

Τὸ δεύτερον τοῦτο μέρος τῆς ἀνωτέρας ἀλγέβρας περιέχει τὰ σπουδαιότερα τῆς ἀλγεβρικῆς θεωρίας τῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων, καθὼς καὶ τὰ σχετικὰ πρὸς αὐτὴν ἀλγεβρικὰ θέματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

V

ΠΕΡΙ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. Εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς στοιχ. Ἀλγέβρας ὅτι διὰ νὰ ὑπάρχῃ ῥίζα τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἰσαχθῇ νέος ἀριθμὸς i, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον νὰ ἰσῶται τῷ -1, καὶ ὁ ὁποῖος καλεῖται φανταστικὴ μονάς. Ὁ νέος οὗτος ἀριθμὸς ὀφείλει νὰ ὑπακούῃ εἰς τοὺς νόμους τῆς Ἀριθμητικῆς, εἰς οὓς ὑπόκεινται οἱ παλαιοὶ ἀριθμοὶ οἵτινες καλοῦνται ***πραγματικοί***, γίνεται δὲ δεκτὸς διότι οὐδένα τῶν νόμων τούτων καταστρέφει.

Τὸ γινόμενον τοῦ i ἐπὶ πραγματικὸν ἀριθμὸν β καλεῖται καθαρὸς φανταστικὸς ἀριθμὸς ἢ ἁπλῶς ***φανταστικός***, τὸ δὲ ἄθροισμα ἑνὸς πραγματικοῦ α καὶ ἑνὸς φανταστικοῦ ἀριθμοῦ βi καλεῖται ***μιγὰς*** ἀριθμός. Οὗτος γίνεται πραγματικὸς ἐὰν $\beta=0$ καὶ καθαρὸς φανταστικὸς ἐὰν $\alpha=0$.

Γεωμετρικὴ παράστασις. Ἐὰν θεωρήσωμεν δύο ἄξονας ὀρθογωνίους OX καὶ OY, κατὰ συνθήκην, ὁ ἀριθμὸς $\alpha+\beta i$ παριστᾶ τὸ σημεῖον M (α, β) τὸ ἔχον τετμημένην α καὶ τεταγμένην β, καθὼς καὶ τὸ τμῆμα (διάνυσμα) OM τὸ ἔχον προβολὰς α καὶ β.

Κατὰ ταῦτα οἱ πραγματικοὶ θετικοὶ ἀριθμοὶ παριστῶσι τὰ σημεῖα τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονος τῶν χ, οἱ πραγματικοὶ ἀρνητικοὶ τὰ σημεῖα τοῦ ἀρνητικοῦ ἡμιάξονος τῶν χ, οἱ καθαρῶς φανταστικοὶ τὰ τοῦ ἄξονος τῶν ψ καὶ τέλος οἱ μιγάδες τὰ λοιπὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου.

Τριγωνομετρικὴ μορφή. Ὁ ἀριθμὸς ὁ μετρῶν τὸ τμῆμα (διάνυσμα) OM τὸ ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ $\alpha+\beta i$ παριστώμενον καλεῖται μέτρον τοῦ $\alpha+\beta i$ καὶ παρίσταται συνήθως διὰ τοῦ γράμματος ϱ, ἔχομεν δὲ προφανῶς τὴν σχέσιν :

$$\varrho^2=\alpha^2+\beta^2 \text{ καὶ } \varrho=+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

Τὸ μέτρον θεωρεῖται πάντοτε θετικὸς ἀριθμὸς καὶ παρίσταται ἐπίσης διὰ τοῦ συμβόλου $[\alpha+\beta i]$.

Μία οἱαδήποτε ἐκ τῶν γωνιῶν XOM, ἃς σχηματίζει ἡ θετικὴ φορὰ τοῦ ἄξονος τῶν χ μετὰ τῆς πολικῆς ἀκτῖνος OM, θεωρουμένης θετικῆς, καλεῖται ὅρισμα τοῦ ἀριθμοῦ $\alpha+\beta i$ καὶ παρίσταται συνήθως διὰ τῶν γραμμάτων ϑ ἢ φ.

Παρατηρητέον ὅτι τὸ μέτρον καὶ τὸ ὅρισμα τοῦ ἀριθμοῦ $\alpha+\beta i$ ἰσοῦνται μὲ τὰς πολικὰς συντεταγμένας (πολικὴν ἀκτῖνα καὶ πολικὴν γωνίαν) τοῦ σημείου M (α, β) τοῦ παριστωμένου ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, ἔχομεν δέ, ὡς γνωστόν, τὰς σχέσεις : $\alpha=\varrho\,\sigma\upsilon\nu\vartheta$ καὶ $\beta=\varrho\,\eta\mu\vartheta$, ἕνεκα τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς $\alpha+\beta i$ γράφεται : $\boldsymbol{\alpha+\beta i=\varrho\,(\sigma\upsilon\nu\vartheta+i\,\eta\mu\vartheta)}$.

Αὕτη λέγεται τριγωνομετρικὴ μορφὴ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἔχοντος μέτρον ϱ καὶ ὅρισμα ϑ. Παρατηρητέον ὅτι πάντα τὰ ὁρίσματα ἑνὸς ἀριθμοῦ ὡς διαφέροντα ἀλλήλων κατὰ πολλαπλάσιον τῶν 4 ὀρθῶν ἔχουσι τὸ αὐτὸ ἡμίτονον καὶ τὸ αὐτὸ συνημίτονον.

ΙΔΙΟΤΗΣ I, **Ἵνα ἀριθμός τις $\alpha+\beta i$ εἶναι μηδὲν πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν $\alpha=0$ $\beta=0$.** Διότι ἐὰν $\beta\neq0$, ἡ ἰσότης $\alpha+\beta i=0$ θὰ ἔδιδε : $i=-\frac{\alpha}{\beta}$ τοῦθ' ὅπερ ἄτοπον, διότι ὁ i δὲν δύναται νὰ εἶναι ἴσος πρὸς πραγματικὸν ἀριθμόν. Ὥστε ἡ ἰσότης : $\alpha+\beta i=0$ συνεπάγεται $\beta=0$ καὶ ἀκολούθως $\alpha=0$.

II. Ἐκ τῆς προηγουμένης ἰδιότητος ἕπεται ἀμέσως ἡ ἑξῆς : **Ἵνα**

δύο ἀριθμοὶ $\alpha+\beta\iota$ καὶ $\gamma+\delta\iota$ εἶναι ἴσοι πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι ἴσα χωριστὰ καὶ τὰ πραγματικὰ μέρη ($\alpha=\gamma$) καὶ οἱ συντελεσταὶ τοῦ ι ($\beta=\delta$).

III. Δύο ἀριθμοὶ ρ (συνθ $+$ ι ημθ) καὶ ρ′ (συνθ′ $+$ ι ημθ′) γεγραμμένοι ὑπὸ τὴν τριγωνομετρικὴν μορφὴν, διὰ νὰ εἶνε ἴσοι πρέπει καὶ ἀρκεῖ, κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα, νὰ παριστῶσι τὸ αὐτὸ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, διὰ νὰ συμβαίνῃ δὲ τοῦτο πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὰ μὲν μέτρα αὐτῶν νὰ εἶνε ἴσα τὰ δὲ ὁρίσματα αὐτῶν νὰ διαφέρωσιν (ἂν διαφέρωσι) κατὰ πολλαπλάσιον 4 ὀρθῶν.

ΣΥΖΥΓΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ. Δύο ἀριθμοὶ $\alpha+\beta i$ καὶ $\alpha-\beta i$ ἔχοντες τὸ αὐτὸ πραγματικὸν μέρος τὰ δὲ φανταστικὰ μέρη ἀντίθετα καλοῦνται συζυγεῖς. Τὸ ἄθροισμά των εἶνε πραγματικὸν τὸ δὲ γινόμενον εἶνε $\alpha^2+\beta^2$, δηλ. ἀριθμὸς πραγματικὸς καὶ θετικός· ἔχουσι προφανῶς τὸ αὐτὸ μέτρον.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ. ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ. Ἐὰν θεωρήσωμεν δύο ἀριθμοὺς $\alpha+\beta i$ καὶ $\alpha'+\beta' i$ παριστῶντας τὰ σημεῖα Μ(α, β) καὶ Μ′ (α′, β′) τὸ ἄθροισμά των εἶνε $\alpha+\alpha'+i(\beta+\beta')$ καὶ παριστᾷ τὸ σημεῖον $\Sigma(\alpha+\alpha', \beta+\beta')$ καθὼς καὶ τὸ διάνυσμα ΟΣ, ὅπερ προφανῶς εἶνε γεωμετρικὸν ἄθροισμα τῶν τμημάτων ΟΜ καὶ ΟΜ′, ἅτινα παριστῶσιν οἱ δοθέντες ἀριθμοί. Ἐπειδὴ δὲ ἔχομεν : $[\alpha+\beta i]=(OM)$, $[\alpha'+\beta' i]=(OM')$ καὶ $[(\alpha+\alpha')+i(\beta+\beta')]=(O\Sigma)$ ἕπεται ὅτι : ***τὸ μέτρον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν εἶνε μικρότερον μὲν ἢ ἴσον τοῦ ἀθροίσματος τῶν μέτρων αὐτῶν μεγαλείτερον δὲ ἢ ἴσον τῆς διαφορᾶς τῶν μέτρων αὐτῶν.***

Τὸ πρῶτον ἰσχύει προφανῶς καὶ δι' ἄθροισμα ὁσωνδήποτε προσθετέων.

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ἐπίσης καὶ τὸ ἑξῆς σπουδαῖον συμπέρασμα. **Ὅταν εἴς τινα ἀριθμὸν $z=\chi+\iota\psi$ προστεθῇ ὁ ἄλλος ὁ $\omega=\alpha+\beta\iota$, τὸ σημεῖον Μ τὸ παριστώμενον ὑπὸ τοῦ z μεταφέρεται κατὰ διάνυσμα ἴσον, παράλληλον, ἰσόμηκες καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς τῷ δανύσματι ΟΑ, ὅπερ παριστᾷ ὁ προστεθεὶς ἀριθμὸς ω.** Καί, **ἀντιστρόφως, ὅταν σημεῖόν τι** Μ **μεταφέρεται ἐπὶ ἀνύσματος** ΜΜ′ **(ὁμορρόπως ἴσου) πρός τι ἄνυσμα ΟΛ (α, β), εἰς τὸν ἀριθμὸν** z **τὸν παριστῶντα τὸ** Μ **προστίθεται ὁ ἀριθμός $\alpha+\beta\iota$ ὁ παριστῶν τὸ ἄνοισμα ΟΑ (ἢ τὸ σημεῖον Α).**

Συνελόντι εἰπεῖν, ἡ προσθήκη δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν γεωμετρικὴν ἄθροισιν τῶν τμημάτων (διανυσμάτων) τῶν παριστωμένων ὑπ' αὐτῶν. >>

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ. Ἡ ἀφαίρεσις τοῦ ἀριθμοῦ $z'=\alpha+\beta i$ ἀπὸ τοῦ $z'=\alpha'+i\beta'$ ἀνάγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν $z'+(-z)=\alpha'-\alpha+i(\beta'-\beta)$, ἔχει δὲ μέτρον τὸν ἀριθμὸν $\sqrt{(\alpha'-\alpha)^2+(\beta'-\beta)^2}$. Ἐντεῦθεν συνάγομεν ὅτι: ***ἡ διαφορὰ $z'-z$ δύο ἀριθμῶν ἔχει μέτρον ὅπερ ἰσοῦται τῇ ἀποστάσει τῶν σημείων M' καὶ M' τῶν ὑπ' αὐτῶν παριστωμένων.***

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ. Ἐὰν θεωρήσωμεν ἐκ νέου τοὺς ἀριθμοὺς $z=\alpha+\beta i$ καὶ $z'=\alpha'+\beta i$, ἔχομεν προφανῶς:

$$zz'=\alpha\alpha'-\beta\beta'+i(\alpha\beta'+\beta\alpha')$$

Ἐὰν εἶνε γεγραμμένοι ὑπὸ τριγωνομετρικὴν μορφήν:

$$z=\varrho(\sigma\upsilon\nu\vartheta+i\eta\mu\vartheta) \qquad z'=\varrho'(\sigma\upsilon\nu\vartheta+i\eta\mu\vartheta')$$

ἔχομεν:

$$zz'=\varrho\varrho'[(\sigma\upsilon\nu\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta'-\eta\mu\vartheta\eta\mu\vartheta)+i(\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta'+\eta\mu\vartheta'\sigma\upsilon\nu\vartheta)]=$$
$$=\varrho\varrho'[\sigma\upsilon\nu(\vartheta+\vartheta')+i\eta\mu(\vartheta+\vartheta')].$$

δηλαδή: **τὸ γινόμενον ἔχει μέτρον μὲν τὸ γινόμενον τῶν μέτρων τῶν παραγόντων, ὅρισμα δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὁρισμάτων.**

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἐπεκτείνεται προφανῶς καὶ εἰς γινόμενον ὁσωνδήποτε παραγόντων, δηλαδὴ ἔχομεν:

$$\varrho_1(\sigma\upsilon\nu\vartheta_1+i\eta\mu\vartheta_1)\varrho_2(\sigma\upsilon\nu\vartheta_2+i\eta\mu\vartheta_2)\ldots\varrho_\nu(\sigma\upsilon\nu\vartheta_\nu+i\eta\mu\vartheta_\nu)=$$
$$=\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_\nu[\sigma\upsilon\nu(\vartheta_1+\vartheta_2+\ldots+\vartheta_\nu)+i\eta\mu(\vartheta_1+\vartheta_2+\ldots\vartheta_\nu)] \quad (1)$$

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ. Ἔχομεν:

$$\frac{z}{z'}=\frac{\alpha+\beta i}{\alpha'+\beta' i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\alpha'-\beta' i)}{(\alpha'+\beta' i)(\alpha'-\beta' i)}=\frac{\alpha\alpha'+\beta\beta'+i(\beta\alpha'-\alpha\beta')}{(\alpha')^2+(\beta')^2}$$

Ἐὰν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶναι γεγραμμένοι ὑπὸ τριγωνομετρικὴν μορφὴν καὶ καλέσωμεν $z_1=r(\sigma\upsilon\nu\varphi+i\eta\mu\varphi)$ τὸ πηλῖκον αὐτῶν, θὰ ἔχωμεν, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως: $zz'=z$, ἐξ ἧς ἕπεται ἀμέσως:

$$r\varrho'=\varrho \qquad \text{καὶ} \qquad \varphi+\vartheta'=\varphi$$

ἐξ οὗ

$$r=\frac{\varrho}{\varrho'} \qquad \text{καὶ} \qquad \varphi=\vartheta-\vartheta'$$

δηλαδή: **τὸ πηλῖκον δύο ἀριθμῶν ἔχει μέτρον μὲν τὸ πηλῖκον τῶν μέτρων ὅρισμα δὲ τὴν διαφορὰν τῶν ὁρισμάτων.**

Ὕψωσις εἰς δύναμιν, τύπος τοῦ Moivre. Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (1) ὑποθέσωμεν $\varrho_1=\varrho_2=\varrho_3=\ldots=\varrho_\nu$ καὶ $\vartheta_1=\vartheta_2=\vartheta_3=\ldots=\vartheta_\nu$, προκύπτει ὁ ἑξῆς:

$$[\varrho(\sigma\upsilon\nu\vartheta+i\eta\mu\vartheta)]^{\nu}=\varrho^{\nu}[\sigma\upsilon\nu(\nu\vartheta)+i\eta\mu(\nu\vartheta)$$

ὅστις λέγεται τύπος τοῦ Moivre καὶ δεικνύει ὅτι: ***διὰ νὰ ὑψωθῇ ἀριθμός τις εἰς τὴν νιοστὴν δύναμιν, ἀρκεῖ τὸ μὲν μέτρον αὐτοῦ νὰ ὑψωθῇ εἰς τὴν δύναμιν ταύτην τὸ δὲ ὅρισμα νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ν.***

ΕΞΑΓΩΓΗ ΡΙΖΗΣ. Θὰ ζητήσωμεν ἀριθμὸν $r(\sigma\upsilon\nu\varphi+i\eta\mu\varphi)$ ὅστις νὰ εἶναι νιοστὴ ῥίζα δοθέντος ἀριθμοῦ $\varrho(\sigma\upsilon\nu\vartheta+i\eta\mu\vartheta)$. Πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν τὴν ἰσότητα:

$$[r(\sigma\upsilon\nu\varphi+i\eta\mu\varphi)]^{\nu}=r^{\nu}[\sigma\upsilon\nu(\nu\varphi)+i\eta\mu(\nu\varphi)]=\varrho(\sigma\upsilon\nu\vartheta+i\eta\mu\vartheta)$$

ἐξ ἧς προκύπτουσιν αἱ:

$$r^{\nu}=\varrho \quad \text{καὶ} \quad \nu\varphi=\vartheta+2K\pi \quad (K \text{ ἀκέραιος ἀριθμὸς})$$

δηλαδή:

$$r=\sqrt[\nu]{\varrho} \qquad \text{καὶ} \qquad \varphi=\frac{\Theta+2K\pi}{\nu}$$

Ἡ θετικὴ $\sqrt[\nu]{\varrho}$ ὑπάρχει κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδαφίου (7). (Α'. μέρος, σελ. 64). ***Ὁ τύπος λοιπὸν ὁ παρέχων τὰς νιοστὰς ῥίζας τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ : $\varrho(\sigma\upsilon\nu\vartheta+i\eta\mu\vartheta)$ εἶναι ὁ ἑξῆς:***

$$(2) \quad \sqrt[\nu]{\varrho}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\vartheta+2K\pi}{\nu}+i\eta\mu\frac{\vartheta+2K\pi}{\nu}\right]$$

ὅπου τὸ Κ δύναται νὰ λάβῃ οἱανδήποτε ἀκεραίαν τιμὴν

Παρατηρῶ ἤδη ὅτι, ὅταν ὁ Κ εἶναι θετικὸς καὶ ὄχι μικρότερος τοῦ ν, τὸ ὅρισμα $\frac{\vartheta+2K\pi}{\nu}$ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὅρισμα, ὅπερ παρέχει τιμὴ τοῦ Κ θετικὴ καὶ μικροτέρα τοῦ ν, διότι, τότε, ἐὰν τὸ Κ διαιρεθῇ διὰ ν καὶ καλέσωμεν κ καὶ υ τὸ πηλῖκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον, θὰ ἔχωμεν: $K=\nu\kappa+\upsilon$, ὅπου $o<\upsilon<\nu$, καὶ ἑπομένως:

$$\frac{\vartheta+2K\pi}{\nu}=\frac{\vartheta+2\pi(\nu\kappa+\upsilon)}{\nu}=\frac{\vartheta+2\pi\upsilon}{\nu}+2\pi\kappa$$

καὶ ἑπομένως τὸ ὅρισμα $\frac{\vartheta+2K\pi}{\nu}$ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $\frac{\vartheta+2\pi\upsilon}{\nu}$ ὡς διαφέροντα κατὰ πολλαπλάσιον περιφερείας (4 ὀρθῶν), καὶ ἑπομένως ἔχοντα τοὺς αὐτοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς.

Ἐὰν $K<O$, ὑπάρχει πολλαπλάσιον νλ τοῦ ν τοιοῦτον ὥστε ὁ $K+\nu\lambda=\upsilon$ νὰ εἶναι θετικὸς καὶ μικρότερος τοῦ ν· ἀντικαθιστῶντες λοιπὸν τὸ Κ διὰ τοῦ $\upsilon-\nu\lambda$ εὑρίσκομεν πάλιν ὅτι τὸ ὅρισμα $\frac{\vartheta+2\kappa\pi}{\nu}$ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $\frac{\vartheta+2\pi\upsilon}{\nu}$. Φθάνομεν λοιπὸν εἰς τὸ

συμπέρασμα ὅτι: **εὑρίσκομεν πάσας τὰς νιοστὰς ῥίζας τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ἐὰν εἰς τὸ Κ δώσωμεν μόνον τὰς τιμὰς 0, 1, 2, 3,. . ., ν—1.**

Αἱ ν αὗται τιμαὶ τοῦ Κ δίδουσι ῥίζας πάντοτε ἀνίσους, διότι, ἐὰν θεωρήσωμεν δύο τιμὰς K_1 καὶ K_2 θετικὰς καὶ μικροτέρας τοῦ ν, τ' ἀντίστοιχα ὀρίσματα ἔχουσι διαφοράν :

$$\frac{(K_2-K_1)2\pi}{\nu} < 2\pi$$

διότι ἡ διαφορὰ K_2-K_1, ὑποτιθεμένη θετική, εἶνε μικροτέρα τοῦ ν. Ἔχομεν λοιπὸν τὸ ἑξῆς θεώρημα :

Θεώρημα. **Πᾶς ἀριθμὸς ρ (συνθ+ιημθ) ἔχει ν νιοστὰς ῥίζας ἀνίσους πραγματικὰς ἢ φανταστικὰς παρεχομένας ὑπὸ τοῦ τύπου (2), ἐὰν τὸ Κ λάβῃ τὰς τιμὰς 0, 1, 2, 3,...., ν—1...**

Παρατήρησις. Αἱ ν ῥίζαι ἔχουσι τὸ αὐτὸ μέτρον, τὰ δὲ ὀρίσματα αὐτῶν ἀποτελοῦσι πρόοδον ἀριθμητικὴν ἔχουσαν λόγον $\frac{2\pi}{\nu}$, καὶ διὰ τοῦτο αἱ ν ῥίζαι παριστῶσι σημεῖα κείμενα ἐπὶ περιφερείας κύκλου καὶ τὰ ὁποῖα εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ πολυγώνου ἐκ ν πλευρῶν.

Ἀσκήσεις.

1) Ποίαν ἰδιότητα ἔχουσι τὰ σημεῖα τὰ παριστώμενα ὑπὸ δύο συζυγῶν ἀριθμῶν χ+iψ καὶ χ—iψ.

2) Δεῖξαι δι' ὑπολογισμοῦ ὅτι τὸ μέτρον ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν εἶναι μικρότερον μὲν ἢ ἴσον τοῦ ἀθροίσματος τῶν μέτρων τῶν ἀριθμῶν, μεγαλείτερον δὲ ἢ ἴσον τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.

3) Δεῖξαι γεωμετρικῶς ὅτι τὸ μέτρον διαφορᾶς $z'-z$ ἰσοῦται τῇ ἀποστάσει (ΜΜ′) τῶν σημείων τῶν παριστωμένων ὑπὸ τῶν ἀριθμῶν z καὶ z′.

4) Δεῖξαι ὅτι ἵνα οἱ ἀριθμοὶ z καὶ z′ παριστῶσι σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας γραμμῆς μετὰ τῆς ἀρχῆς 0 τῶν συντεταγμένων πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ λόγος z′ : z αὐτῶν νὰ ἦναι πραγματικὸς ἀριθμός.

5) Ἐὰν θέσωμεν $\chi-i\psi=\bar{z}$, ἐκφρᾶσαι διὰ τῶν ἀριθμῶν τούτων z καὶ $\bar{z}$ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ κύκλου τοῦ ἔχοντος κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων καὶ ἀκτῖνα ρ. (λ. $z\bar{z}=\rho^2$).

6) Ἐὰν θεωρήσωμεν δύο ἀριθμοὺς $z=\chi+i\psi$ καὶ $z_0=\chi_0+i\psi_0$, ἐν οἷς οἱ συντελεσταὶ ψ, ψ_0 τοῦ i εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, καὶ παραστήσωμεν

διὰ $\bar{z}$ καὶ $\bar{z}_0$ τοὺς συζυγεῖς τῶν z καὶ z_0, δεῖξαι ὅτι τὸ μέτρον τοῦ ἀριθμοῦ $\dfrac{z-z_0}{\bar{z}-\bar{z}_0}$ εἶνε μικρότερον τῆς μονάδος.

7) Ποῖον ὅρισμα ἔχουσιν οἱ πραγματικοὶ θετικοὶ ἀριθμοί, ποῖον οἱ πραγματικοὶ ἀρνητικοί, ποῖον οἱ καθαροὶ φανταστικοὶ (ἄνευ πραγματικοῦ μέρους) καὶ ποῖον οἱ ἀριθμοὶ τῆς μορφῆς $\alpha + \alpha i$;

8) Γράψαι τὸν τύπον, ὅστις δίδει τὰς νιοστὰς ῥίζας τῆς θετικῆς μονάδος 1 καὶ δεῖξαι ὅτι μία ἐξ αὐτῶν (ἥτις διὰ τοῦτο καλεῖται ***ἀρχικὴ ῥίζα)*** ὑψουμένη εἰς τάς δυνάμεις τὰς ἐχούσας ἐκθέτην 1, 2, 3,... ν δίδει πάσας τὰς ῥίζας.

9) Γράψαι τὸν τύπον τὸν δίδοντα τὰς νιοστὰς ῥίζας τῆς ἀρνητικῆς μονάδος -1.

10) Εὑρεῖν τὰς κυβικὰς, τὰς τετάρτας, τὰς ἕκτας καὶ τὰς δωδεκάτας ῥίζας τῶν μονάδων $+1$ καὶ -1.

11) Δεῖξαι ὅτι αἱ νιοσταὶ ῥίζαι ἑνὸς ἀριθμοῦ προκύπτουσιν ἐκ μιᾶς ἐξ αὐτῶν πολλαπλασιαζομένης διαδοχικῶς ἐπὶ τὰς νιοστὰς ῥίζας τῆς θετικῆς μονάδος 1.

12) Ὅταν ἀριθμός τις ἀντιστραφῇ, τί γίνεται τὸ μέτρον καὶ τὸ ὅρισμα αὐτοῦ;

13) Ἐκφρᾶσαι συναρτήσει τῶν ημθ καὶ συνθ τὰ ημ(3θ), συν(3θ), ημ(4θ), συν(4θ), ημ(5θ), συν(5θ) καὶ ἐν γένει τὰ ημ(μθ), συν(νθ), ὅπου μ καὶ ν ἀκέραιοι ἀριθμοί.

14) Ἐκφρᾶσαι τὰ $\text{συν}^3\theta$, $\text{συν}^4\theta$, $\text{συν}^5\theta$, $\text{συν}^6\theta$,... καὶ ἐν γένει μίαν δύναμιν $\text{συν}^\mu\theta$ διὰ συνημιτόνων πολλαπλασίων τοῦ θ.

15) Κατασκευᾶσαι γεωμετρικῶς τὸ σημεῖον τὸ παριστώμενον ὑπὸ τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν ἐχόντων ἀντιστοίχως μέτρα ρ, ρ΄ καὶ ὁρίσματα θ καὶ θ΄.

16) Ὅταν ἀριθμός τις $z = \text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta$ πολλαπλασιασθῇ ἐπί τινα ἄλλον $\text{συν}\beta + i\,\text{ημ}\beta$, ποίαν μετακίνησιν ὑφίσταται τὸ σημεῖον Μ τὸ ὑπὸ τοῦ z παριστώμενον;

17) Δεῖξαι ὅτι ὁ τύπος τοῦ Moivre ἰσχύει καὶ ὅταν ὁ ἀκέραιος ν εἶνε ἀρνητικὸς ἀριθμός.

18) Δεῖξαι ὅτι ἵνα οἱ ἀριθμοὶ z_0, z_1 καὶ z_2 παριστῶσι σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι πραγματικὸς ἀριθμὸς ὁ λόγος $\dfrac{z_1 - z_0}{z_2 - z_1}$.

19) Δεῖξαι ὅτι τῆς εὐθείας τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου z_1 καὶ

παραλλήλου πρὸς διάνυσμα παριστώμενον ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ ω πᾶν σημεῖον ζ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου : $z = z_1 + \lambda\omega$, ὅπου τὸ λ εἶνε πραγματικὸς ἀριθμός.

Ἀλγεβρικὴ παράστασις τῶν διανυσμάτων ἐν τῷ χώρῳ.

Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι ἓν διάνυσμα (ἢ ἄνυσμα) τοῦ ἐπιπέδου χοψ παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ :

$$\chi + i\psi$$

τοῦ ὁποίου τὸ μὲν πραγματικὸν μέρος χ παριστᾶ ἓν διάνυσμα κείμενον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν χ τὸ δὲ φανταστικὸν μέρος iψ ἓν διάνυσμα κείμενον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ψ. Βλέπομεν δηλ. ὅτι ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πᾶν διάνυσμα παρίσταται διὰ δύο διανυσμάτων 1 καὶ i μήκους ἴσου τῇ μονάδι καὶ καθέτων πρὸς ἄλληλα καὶ δύο ἀριθμῶν χ καὶ ψ.

Ἐπειδὴ πᾶν διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου εἶναι γεωμετρικὸν ἄθροισμα δύο ἄλλων κειμένων ἐπὶ δύο εὐθείας τεμνομένας τυχούσας, ἕπεται ὅτι πᾶν διάνυσμα δύναται γενικώτερον νὰ ἐκφρασθῇ διὰ δύο διανυσμάτων τυχόντων α καὶ β μὴ παραλλήλων καὶ δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν χ καὶ ψ, τοῦθ' ὅπερ δίδει διὰ τὸ δοθὲν διάνυσμα τὴν παράστασιν :

$$\alpha\chi + \beta\psi$$

Τοιαύτην παράστασιν ἔχομεν καὶ ἐν τῷ χώρῳ. Διάνυσμα Δ ἐν τῷ χώρῳ δύναται ν' ἀναλυθῇ (ὡς γεωμετρικὸν ἄθροισμα) εἰς τρία ἄλλα κείμενα ἐπὶ τρεῖς ἄξονας τυχόντας ὀρθογωνίους ἢ πλαγιογωνίους οχ, οψ, οz. Ἐὰν ἐπὶ τῶν ἀξόνων τούτων ἐκλέξωμεν τρία διανύσματα τυχόντα καὶ τὰ παραστήσωμεν διὰ τῶν συμβόλων α, β, γ, τότε αἱ προβολαὶ τοῦ διανύσματος Δ θὰ παρασταθῶσι διὰ χα, ψβ, zγ ὅπου τὰ χ, ψ καὶ z εἶνε ἀντιστοίχως οἱ λόγοι τῶν προβολῶν πρὸς τὰ διανύσματα α, β, γ· τῷ ὄντι, εἶνε προφανὲς ὅτι τὸ ἀλγεβρικὸν σύμβολον τὸ παριστῶν ἓν διάνυσμα ὀφείλει νὰ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μήκους αὐτοῦ, τῆς διευθύνσεως καὶ τῆς φορᾶς αὐτοῦ καὶ ἐπομένως δύο διανύσματα ἰσομήκη, παράλληλα καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς δέον νὰ παρίστανται ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ συμβόλου, προσέτι δέ, ἐὰν ἓν διάνυσμα παρίσταται διὰ τοῦ α, πᾶν ἄλλο παράλληλον καὶ ἔχον λόγον χ πρὸς αὐτὸ δὲν νὰ παρίσταται ὑπὸ συμβόλου δεικνύοντος μόνον τὴν μεταβολὴν τοῦ μήκους καὶ τῆς φορᾶς. Ἐπειδὴ τὸ Δ εἶνε ἄθροισμα τῶν διανυσμάτων χα, ψβ, zγ διὰ τοῦτο θὰ παρασταθῇ ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ :

$$\chi\alpha + \psi\beta + z\gamma$$

Συνήθως τὰ διανύσματα α, β, γ, ἅτινα λαμβάνονται ὡς βάσεις, ἐκ-λέγονται ὀρθογώνια καὶ μήκους ἴσου τῇ μονάδι καὶ τότε λέγονται **δια-νυσματικαὶ μονάδες** παρασταθεῖσαι ὑπὸ τοῦ Hamilton διὰ τῶν συμβόλων i, j, K. Δυνάμει τοῦ συμβολισμοῦ τούτου πᾶν διάνυσμα Δ παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου :

$$\chi i + \psi j + zK$$

ἐξαρτωμένου ἐκ τριῶν διανυσματικῶν μονάδων καὶ τριῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν χ, ψ, z.

Πηλῖκον δύο διανυσμάτων. Ἐὰν ἔχωμεν δύο διανύσματα Δ καὶ Δ΄ μὴ παράλληλα (π. χ. ΟΑ καὶ ΟΑ΄) ἡ μετάβασις ἐκ τοῦ Δ εἰς τὸ Δ΄ ἐπιτυγχάνεται διὰ τῶν ἑξῆς δύο πράξεων ά) διὰ τῆς μεταβολῆς τοῦ μήκους Δ, οὕτως ὥστε νὰ γίνῃ ἰσόμηκες πρὸς τὸ Δ΄, δηλ. διὰ τοῦ πολ]μοῦ τοῦ μήκους τοῦ Δ ἐπὶ ἕνα πραγματικὸν ἀριθμόν. Ὁ παράγων ὁ ἐκφράζων τὴν πρᾶξιν ταύτην καλεῖται **τένων** (t e n s e u r) καὶ παρίσταται διὰ τοῦ Τ β΄) διὰ στροφῆς τοῦ Δ περὶ τὸ Ο οὕτως ὥστε νὰ συμπέσῃ μὲ τὸ Δ΄ ὁ παράγων ὁ ἐκφράζων τὴν στροφὴν ταύτην καλεῖται **στροφεὺς** (v e r s e u r) παρίσταται διά τοῦ Υ και ἐξαρτᾶται ἀπὸ τρεῖς γωνίας, ἐκ τῶν ὁποίων αἱ δύο εἶναι αἱ ὁρίζουσαι τὸ ἐπίπεδον ΑΟΑ΄ ἐν τῷ ὁποίῳ γίνεται ἡ περιστροφὴ ἡ δὲ τρίτη εἶνε ἡ γωνία τῆς περιστροφῆς ΑΟΑ΄.

Τὸ σύνολον τῶν πράξεων τούτων, δι' ὧν τὸ Δ΄ παράγεται ἐκ τοῦ Δ, καλεῖται πηλῖκον τοῦ Δ΄ διὰ Δ ἢ q u a t e r n i o n, διότι ἐξαρτᾶται ἐκ τεσσάρων διακεκριμένων ἀριθμῶν (τῶν 3 γωνιῶν καὶ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ τῆς μεταβολῆς τοῦ μήκους). Ἐὰν παρασταθῇ διὰ φ θὰ ἔχωμεν :

$$\Delta' = \varphi . \Delta .$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

Α΄. Γενικαὶ ἰδιότητες τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων.

1. ***Ρίζα*** ἑνὸς πολυωνύμου $\sigma(\chi)$ καλεῖται πᾶσα τιμὴ $\chi=\alpha$ μηδενίζουσα αὐτό, δηλ. τοιαύτη ὥστε νὰ ἔχωμεν $\sigma(\alpha)=0$· γνωρίζομεν ὅτι τότε τὸ $\sigma(\chi)$ εἶνε διαιρετὸν διὰ τοῦ $\chi-\alpha$, εἶνε ὅμως δυνατὸν νὰ διαιρῆται διὰ δυνάμεως $(\chi-\alpha)^{\kappa}$ ἐχούσης ἐκθέτην Κ μεγαλείτερον τῆς μονάδος, ἂν δὲ ἔχωμεν :

$$\sigma(\chi)=(\chi-\alpha)^{\kappa}\varphi(\chi) \qquad (1)$$

[ὅπου $\varphi(\chi)$ εἶνε ἐπίσης ἀκέραιον πολυώνυμον καὶ $\varphi(\alpha)\neq 0$] θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ τιμὴ $\chi=\alpha$ εἶνε ῥίζα τοῦ πολυωνύμου $\sigma(\chi)$ **βαθμοῦ πολλαπλότητος Κ**. Ἐὰν $K=1$, ἡ ῥίζα λέγεται ἁπλῆ, ἐὰν $K>1$ ἡ ῥίζα λέγεται πολλαπλῆ, τὸ δὲ πολυώνυμον $\varphi(\chi)$ δὲν περιέχει πλέον τὴν ῥίζαν α.

Θεώρημα τοῦ D' 'Alembert. **Πᾶν πολυώνυμον $\sigma(\chi)$ ἔχει μίαν τοὐλάχιστον ῥίζαν τῆς μορφῆς $\alpha+\beta\iota$ πραγματικὴν ἢ φανταστικήν**. Παραλείπομεν ἐνταῦθα τὴν ἀπόδειξιν αὐτοῦ ἀφ' ἑνὸς μὲν διότι ἡ ἀλγεβρικὴ τοιαύτη εἶνε πολύπλοκος, ἀφ' ἑτέρου δὲ διότι ὑπάρχουσιν ἀποδείξεις ἁπλαῖ διδασκόμεναι ἐν τῷ ὁλοκληρωτικῷ λογισμῷ καὶ τῇ θεωρίᾳ τῶν συναρτήσεων.

Πόρισμα Ι. Ἀνάλυσις πολυωνύμου εἰς γινόμενον παραγόντων πρώτου βαθμοῦ. Κατὰ προηγούμενον θεώρημα, τὸ πολυώνυμον $\sigma(\chi)$ ἔχει μίαν τοὐλάχιστον ῥίζαν $\chi=\alpha_1$ καὶ ἐπομένως : $\sigma(\chi)=(\chi-\alpha_1)\,\sigma_1(\chi)$· ἐπίσης τὸ $\sigma_1(\chi)$ θὰ ἔχῃ μίαν τοὐλάχιστον ῥίζαν $\chi=\alpha_2$ καὶ ἐπομέμως : $\sigma_1(\chi)=(\chi-\alpha_2)\sigma_2(\chi)$ κ. ο. κ. Ἐὰν μ εἶνε ὁ βαθμὸς τοῦ $\sigma(\chi)$, ὁ τοῦ $\sigma_1(\chi)$ θὰ εἶναι $\mu-1$, ὁ τοῦ $\sigma_2(\chi)$ θὰ εἶναι $\mu-2$ κλπ., τὸ $\sigma_{\mu-1}(\chi)$ θὰ εἶναι βαθμοῦ πρώτου καὶ τέλος τὸ $\sigma_\mu(\chi)$ θὰ εἶνε βαθμοῦ μηδενὸς δηλ. σταθερὰ ποσότης Α, θὰ ἔχωμεν δὲ τὰς ταὐτότητας: $\sigma(\chi)=(\chi-\alpha_1)\ \sigma_1(\chi)$, $\sigma_1(\chi)=(\chi-\alpha_2)\sigma_2(\chi)\ldots\ \sigma_{\mu-1}(\chi)=(\chi-\alpha_\mu)\,A$, αἵτινες πολλαπλασιαζόμεναι κατὰ μέλη δίδουσι: $\sigma(\chi)=A(\chi-\alpha_1)(\chi-\alpha_2)\ldots(\chi-\alpha_{\mu-1})\,(\chi-\alpha_\mu)$· ἐὰν θέσωμεν $\sigma(\chi)=A_0\chi^\mu+A_1\chi^{\mu-1}+\ldots+A_{\mu-1}\chi+A_\mu$, θὰ ἔχωμεν προφανῶς $A=A_0$, καὶ ἐπομένως τὴν ταὐτότητα.

$$\sigma(\chi)=A_0(\chi-\alpha_1)(\chi-\alpha_2)\ldots(\chi-\alpha_\mu) \qquad (2)$$

ἥτις παρέχει ἀνάλυσιν τοῦ πολυωνύμου $\sigma(\chi)$ εἰς γινόμενον μ παραγόντων πρωτοβαθμίων καὶ τὴν ἑξῆς ἰδιότητα :

Πᾶν πολυώνυμον μ βαθμοῦ ἔχει μ ρίζας ἴσας ἢ ἀνίσους, δηλ. τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν πολλαπλότητος πασῶν τῶν ριζῶν εἶνε ἴσον πρὸς τὸν βαθμὸν μ τοῦ πολυωνύμου. Ἐὰν τὸ πολυώνυμον $\sigma(\chi)$ ἔχῃ τὴν ρίζαν α_1 βαθμοῦ πολλαπλότητος K_1, τὴν ρίζαν α_2 βαθμοῦ πολλαπλότητος K_2. . . τέλος τὴν α_ν βαθμοῦ πολλαπλότητος K_ν, θὰ ἔχωμεν : $K_1+K_2+\ldots+K_\nu=\mu$ καὶ ἡ ἀνάλυσις τίθεται ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$\sigma(\chi)=A_0(\chi-\alpha_1)^{K_1}(\chi-\alpha_2)^{K_2}\ldots(\chi-\alpha_\nu)^{K_\nu} \qquad (3)$$

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν ἔχωμεν τὴν ἀνάλυσιν (3) καὶ ὑποτεθῇ $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \ldots \neq \alpha_\nu$, τὸ πολυώνυμον $\sigma(\chi)$ ἔχει προφανῶς τὴν ρίζαν α_1 βαθμοῦ πολλλαπλότητος K_1 τὴν α_2 βαθμοῦ πολ)τος K_2 κ. ο. κ. Ἐντεῦθεν συνάγομεν ὅτι, ἐπειδὴ πᾶν πολυώνυμον $\sigma(\chi)$ ἔχει ἀναγκαίως ὡρισμένας ρίζας μὲ ὡρισμένον βαθμὸν πολλαπλότητος, καθ᾽οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν γίνῃ ἡ ἀνάλυσις τοῦ πολυωνύμου εἰς παράγοντας πρώτου βαθμοῦ, εὑρίσκεται πάντοτε τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον, δηλ. μία μόνη ἀνάλυσις εἶνε δυνατή.

Πόρισμα II. Ἐὰν πολυώνυμον ἔχῃ ρίζας περισσοτέρας τοῦ βαθμοῦ του, τότε εἶνε ἐκ ταυτότητος μηδέν.

Ἡ πρότασις αὐτὴ εἶνε ἄμεσος συνέπεια τῆς προηγουμένης.

Πόρισμα III. Ἐὰν δύο πολυώνυμα $\sigma(\chi)$ καὶ $\varphi(\chi)$ γίνωνται ἴσα διὰ τιμὰς τοῦ χ περισσοτέρας τοῦ βαθμοῦ ἀμφοτέρων, τότε εἶνε ἐκ ταυτότητος ἴσα, δηλ. ἔχουν τοὺς αὐτοὺς συντελεστάς. Διότι τὸ πολυώνυμον $\sigma(\chi)-\varphi(\chi)$ θὰ ἔχῃ ρίζας περισσοτέρας τοῦ βαθμοῦ του καὶ ἄρα θὰ εἶνε ἐκ ταυτότητος μηδέν.

2. Ἡ παράγωγος ἑνὸς πολυωνύμου : $\sigma(\chi)=A_0\chi^\mu+A_1\chi^{\mu-1}+A_2\chi^{\mu-2}+\ldots+A_{\mu-1}\chi+A_\mu$ εἶνε προφανῶς ἡ ἑξῆς : $\sigma'(\chi)=\mu A_0\chi^{\mu-1}+(\mu-1)A_1\chi^{\mu-2}+(\mu-2)A_2\chi^{\mu-3}+\ldots+A_{\mu-1}$ καὶ εἶνε βαθμοῦ $\mu-1$ (κατὰ μονάδα μικροτέρου), ἔχει δὲ τὴν ἑξῆς ἰδιότητα :

Ἐὰν τὸ πολυώνυμον $\sigma(\chi)$ ἔχῃ τὴν ρίζαν $\chi=\alpha$ πολλαπλῆν βαθμοῦ πολ)τητος K, ἡ παράγωγός του $\sigma'(\chi)$ θὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν ρίζαν μὲ βαθμὸν πολ)τος $K-1$. Ἐὰν $K=1$, ἡ παράγωγος $\sigma'(\chi)$ δὲν θὰ ἔχῃ ρίζαν τὸ α (διότι ὁ βαθμὸς πολλαπλότητος γίνεται μηδέν).

Ἀπόδειξις. Θὰ ἔχωμεν $\sigma(\chi)=(\chi-\alpha)^K\varphi(\chi)$ ὅπου $\varphi(\alpha)\neq 0$ ἐφαρμόζοντες δὲ τὸν κανόνα παραγωγίσεως γινομένου, λαμβάνομεν :

$$\sigma'(\chi)=K(\chi-\alpha)^{K-1}\varphi(\chi)+(\chi-\alpha)^K\varphi'(\chi)=$$

$$=(\chi-\alpha)^{K-1}\,[K\varphi(\chi)+(\chi-\alpha)\,\varphi'(\chi)]$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ παράστασις τῆς τελευταίας παρενθέσεως δὲν μηδενίζεται διὰ $\chi=\alpha$ συνάγομεν ὅτι ἡ α εἶνε ρίζα βαθμοῦ πολ)τος $K-1$ διὰ τὴν $\sigma'(\chi)$.

Βλέπομεν συγχρόνως ὅτι αἱ πολλαπλαῖ ρίζαι εἶνε καὶ τῆς παραγώγου ρίζαι, ἐν ᾧ αἱ ἁπλαῖ δὲν εἶναι ρίζαι τῆς παραγώγου.

3. **Σχέσεις μεταξὺ τῶν ριζῶν καὶ τῶν συντελεστῶν ἑνὸς πολυωνύμου** : $\sigma(\chi)=A_0\chi^\mu+A_1\chi^{\mu-1}+\ldots+A_{\mu-1}\chi+A_\mu$. Τοιαύτας σχέσεις γνωρίζομεν ἤδη διὰ δευτεροβάθμια πολυώνυμα, προκειμένου δὲ νὰ εὕρωμεν τοιαύτας καὶ διὰ τυχὸν πολυώνυμον $\sigma(\chi)$ καλοῦμεν τὰς ρίζας αὐτοῦ : $\varrho_1, \varrho_2 \ldots \varrho_\mu$, ὅτε ἔχομεν : $\sigma(\chi)=A_0(\chi-\varrho_1)(\chi-\varrho_2)\ldots(\chi-\varrho_\mu)$, ἐφαρμόζοντες δὲ εἰς τὸ γινόμενον τοῦτο τὸν τύπον (13) τῆς σελ. 9 τοῦ πρώτου μέρους τῆς ἀλγέβρας ἐξ οὗ προέκυψεν ὁ τύπος τοῦ διωνύμου τοῦ Νεύτωνος καί, καλοῦντες $\Sigma_1=\Sigma\varrho_1$ τὸ ἄθροισμα τῶν ριζῶν $\Sigma_2=\Sigma\varrho_1\varrho_2$ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ριζῶν ἀνὰ δύο $\Sigma_3=\Sigma\varrho_1\varrho_2\varrho_3$ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ριζῶν ἀνὰ τρεῖς καὶ γενικῶς $\Sigma_\nu=\Sigma\varrho_1\varrho_1\ldots\varrho_\nu$ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ριζῶν ἀνὰ ν, λαμβάνομεν τὴν ταυτότητα.

$$(\chi-\varrho_1)(\chi-\varrho_2)\ldots(\chi-\varrho_\nu)=\chi^\mu-\Sigma_1\chi^{\mu-1}+\Sigma_2\chi^{\mu-2}-\Sigma_3\chi^{\mu-3}+\ldots+(-1)^\nu\chi^{\mu-\nu}+\ldots+(-1)^\mu\Sigma_\mu$$

καὶ ἑπομένως τήν:

$$\sigma(\chi)=A_0\chi^\mu+A_1\chi^{\mu-1}+\ldots+A_\nu\chi^{\mu-\nu}+\ldots+A_\mu=$$
$$=A_0[\chi^\mu-\Sigma_1\chi^{\mu-1}+\Sigma_2\chi^{\mu-2}-\ldots+(-1)^\nu\Sigma_\nu\chi^{\mu-\nu}+\ldots+(-1)^\mu\Sigma_\mu]$$

ἐξ ἧς, ἐξισοῦντες τοὺς συντελεστὰς τῶν ὁμοίων ὅρων, λαμβάνομεν:

$$A_1=-A_0\Sigma_1,\quad A_2=A_0\Sigma_2,\ \ldots,\ A_\nu=(-1)^\nu A_0\Sigma_\nu,\ldots,A_\mu=(-1)^\mu A_0\Sigma_\mu$$

ἐκ τούτων δὲ τὰς σχέσεις:

$$\Sigma_1=-\frac{A_1}{A_0},\quad \Sigma_2=\frac{A_2}{A_0},\ldots\quad \Sigma_\nu=(-1)^\nu\frac{A_\nu}{A_0},\quad\ldots\quad \Sigma_\mu=(-1)^\mu\frac{A_\mu}{A_0}$$

αἵτινες παρέχουσι τὸν ἑξῆς κανόνα:

Τὸ ἄθροισμα $\Sigma_\nu=\Sigma\rho_1\rho_2\ldots\rho_\nu$ τῶν γινομένων τῶν ριζῶν ἀνὰ ν ἑνὸς πολυωνύμου $\sigma(\chi)$ ἰσοῦται τῷ συντελεστῇ A_ν τῆς δυνάμεως $\chi^{\mu-\nu}$ διαιρεθέντι διὰ τοῦ πρώτου συντελεστοῦ A_0 καὶ πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ $(-1)^\nu$.

Παραδείγματα. Διὰ τὸ πολυώνυμον $\alpha\chi^3+\beta\chi^2+\gamma\chi+\delta$ ἔχομεν:

$$\Sigma_1=-\frac{\beta}{\alpha},\quad \Sigma_2=\frac{\gamma}{\alpha},\quad \Sigma_3=-\frac{\delta}{\alpha},$$

διὰ τὸ $\chi^3+p\chi+q=0$ ἔχομεν $\Sigma_1=o$, $\Sigma_2=p$, $\Sigma_3=-q$.

4. ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΟΙΝΟΣ ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ. Ἐὰν τὸ πολυώνυμον $\sigma(\chi)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ $\varphi(\chi)$, τότε λέγεται ***διαιρετὸν*** δι' αὐτοῦ

ἢ πολλαπλάσιον αὐτοῦ, τὸ δὲ $\varphi(\chi)$ λέγεται διαιρέτης τοῦ $\sigma(\chi)$. Ἀποδεικνύεται εὐκόλως, ὡς καὶ ἐν τῇ ἀριθμητικῇ, ὅτι ἐὰν τὸ $\varphi(\chi)$ διαιρῇ ὅσαδήποτε πολυώνυμα $\sigma_1(\chi), \ldots, \sigma_\nu(\chi)$, ὅτε καλεῖται κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν, διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν. Ἐπίσης, ἐὰν τὸ $\varphi(\chi)$ διαιρῇ τὸ $\sigma(\chi)$, θὰ διαιρῇ καὶ πᾶν πολλαπλάσιον αὐτοῦ, ἐπὶ πλέον, ἐὰν τὸ πολυώνυμον $\varphi(\chi)$ διαιρῇ τὰ $\sigma_1(\chi)$, $\sigma_2(\chi)$ θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν. Εἶναι προφανὲς ὅτι πᾶν πολυώνυμον $\sigma(\chi)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ μιᾶς σταθερᾶς Κ καὶ ὅτι ἂν τὸ $\varphi(\chi)$ εἶναι διαιρέτης τοῦ $\sigma(\chi)$ καὶ τὸ γινόμενον $K\varphi(\chi)$, ὅπου Κ σταθερὰ ποσότης, εἶνε ἐπίσης διαιρέτης τοῦ $\sigma(\chi)$. Ἐκ τῶν κοινῶν διαιρετῶν ὁσωνδήποτε πολυωνύμων $\sigma_1(\chi), \sigma_2(\chi), \ldots \sigma_\nu(\chi)$ ὁ ἔχων τὸν μέγιστον βαθμὸν καλεῖται ***μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν*** εἶναι δὲ προφανὲς ὅτι οὗτος εἶνε ὡρισμένος κατὰ προσέγγισιν σταθεροῦ παράγοντος, διότι ἂν $M(\chi)$ εἶνε μέγιστος κοινὸς διαιρέτης, τότε καὶ τὸ γινόμενον $KM(\chi)$ εἶνε ἐπίσης μέγιστος κοινὸς διαιρέτης, οἱασδήποτε οὔσης τῆς σταθερᾶς Κ.

Θεώρημα Ι. Ἐάν, δοθέντων ὁσωνδήποτε πολυωνύμων τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν, λ.χ. τὸ $\varphi(\chi)$, διαιρῇ πάντα τὰ λοιπά, τοῦτο εἶνε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν.

Διότι ἀφ' ἑνὸς μὲν εἶνε κοινὸς διαιρέτης ἀφ' ἑτέρου δὲ δὲν δύναται νὰ ὑπάρχῃ ἄλλος μεγαλειτέρου βαθμοῦ, διότι δὲν θὰ διαιρῇ τὸ $\varphi(\chi)$.

Θεώρημα ΙΙ. Οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν πολυωνύμων $\sigma_1(\chi)$ καὶ $\sigma_2(\chi)$ δὲν βλάπτονται, ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὸ $\sigma_1(\chi)$ διὰ τοῦ ὑπολοίπου $\sigma_3(\chi)$ τῆς διαιρέσεως τοῦ $\sigma_1(\chi)$ διὰ $\sigma_2(\chi)$. δηλ. αἱ δύο σειραί: $\sigma_1(\chi)$, $\sigma_2(\chi)$ καὶ $\sigma_3(\chi)$, $\sigma_2(\chi)$ ἔχουν τοὺς αὐτοὺς κ. διαιρέτας.

Ἀπόδειξις Θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν: $\sigma_1(\chi) = \sigma_2(\chi)\pi(\chi) + \sigma_3(\chi)$ ἢ $\sigma_1(\chi) - \sigma_2(\chi)\pi(\chi) = \sigma_3(\chi)$ ὅπου $\pi(\chi)$ τὸ πηλῖκον τῆς διαιρέσεως. Διὰ τῶν σχέσεων τούτων βλέπομεν ὅτι πᾶς κ. δ. τῆς πρώτης σειρᾶς ὡς διαιρῶν τὸ $\sigma_1(\chi)$ καὶ τὸ $\sigma_2(\chi)\pi(\chi)$ [ὡς πολλαπλάσιον τοῦ $\sigma_2(\chi)$] θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν $\sigma_3(\chi)$ καὶ ἑπομένως θὰ εἶνε καὶ τῆς δευτέρας σειρᾶς κοινὸς διαιρέτης. Καὶ τὸ ἀντίστροφον ὁμοίως ἀποδεικνύεται.

5. **Κανὼν τῆς εὑρέσεως τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου.** Καὶ πάλιν, δυνάμει τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν τὸ $\sigma_2(\chi)$ διὰ τοῦ ὑπολοίπου $\sigma_4(\chi)$ τῆς διαιρέσεώς του διὰ τοῦ $\sigma_3(\chi)$, ὅτε λαμβάνομεν τὰ πολυώνυμα $\sigma_3(\chi)$, $\sigma_4(\chi)$ ἔχοντα τοὺς αὐτοὺς κοινοὺς διαιρέτας μὲ τὰ δοθέντα πολυώνυμα, κ.ο.κ. Ἐπειδὴ διὰ τῶν διαδοχικῶν τούτων διαιρέσεων ὁ βαθμὸς τῶν πολυωνύμων $\sigma_1(\chi)$, $\sigma_2(\chi)$...

βαίνει διαρκῶς ἐλαττούμενος, θὰ φθάσωμεν ἐπὶ τέλους εἰς ἓν ὑπόλοιπον $\sigma_\nu(\chi)=K(\sigma\tau\alpha\vartheta)$ ὅτε, κατὰ τὸ θεώρημα I, ἐὰν μὲν τὸ $K=0$, ὁ διαιρέτης τῆς τελευταίας διαιρέσεως θὰ εἶνε ὁ μ. κ. δ. τῶν δοθέντων πολυωνύμων $\sigma_1(\chi)$ καὶ $\sigma_2(\chi)$, ἐὰν δὲ $K\neq 0$, τὸ K θὰ εἶνε μ. κ. δ.

Εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην περίπτωσιν ὁ μ. κ. δ. εἶνε μηδενὸς βαθμοῦ, τὰ δὲ δοθέντα πολυώνυμα $\sigma_1(\chi)$ καὶ $\sigma_2(\chi)$ καλοῦνται ***πρῶτα πρὸς ἄλληλα*** διότι, ἐκτὸς τῶν σταθερῶν ποσοτήτων, δὲν ἔχουν ἄλλον κ. διαιρέτην. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς :

	$\pi_1(\chi)$	$\pi_2(\chi)$		$\sigma_{\nu-3}(\chi)$	
$\sigma_1(\chi)$	$\sigma_2(\chi)$	$\sigma_3(\chi)$		$\sigma_{\nu-2}(\chi)$	$\sigma_{\nu-1}(\chi)$
$\sigma_3(\chi)$	$\sigma_4(\chi)$	$\sigma_5(\chi)$		K	

Κατ' ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκεται ὁ μ. κ. δ. ὁσωνδήποτε πολυωνύμων.

6. Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης πολυωνύμων ἀναλελυμένων εἰς τοὺς πρωτοβαθμίους αὐτῶν παράγοντας. Οὗτος σχηματίζεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰς ἐλαχίστας δυνάμεις τῶν κοινῶν γόντων, ἀποδεικνύεται δὲ τοῦτο ὅπως καὶ ἐν τῇ ἀριθμητικῇ.

Παράδειγμα. Τῶν πολυωνύμων $\sigma(\chi)=(\chi-\alpha)^4(\chi-\beta)^2(\chi-\gamma)$ καὶ $\varphi(\chi)=(\chi-\alpha)^3(\chi-\beta)$ μ. κ. δ. εἶνε τὸ $M(\chi)=(\chi-\alpha)^3(\chi-\beta)$. Πράγματι, ἀφ' ἑνὸς μὲν τοῦτο εἶνε κ. δ, ἀφ' ἑτέρου δὲ παύει νὰ εἶνε τοιοῦτος ἂν ἐπιχειρήσωμεν ν' αὐξήσωμεν καθ' οἱονδήποτε τρόπον τὸν βαθμόν του.

Ἐφαρμογή. Τοῦ πολυωνύμου : $\sigma(\chi)=(\chi-\alpha_1)^{K_1}(\chi-\alpha_2)^{K_2}\cdots(\chi-\alpha_\nu)^{K_\nu}$ ὅπου $K_1+K_2+\cdots+K_\nu=$ τῷ βαθμῷ μ τοῦ πολυωνύμου, ἡ παράγωγος: $\sigma'(\chi)=(\chi-\alpha_1)^{K_1-1}(\chi-\alpha_2)^{K_2-1}\cdots(\chi-\alpha_\nu)^{K_\nu-1}\varphi(\chi)$ ἔχει, ὡς γνωστὸν, τοὺς παράγοντας $(\chi-\alpha_1)^{K_1-1}$, $(\chi-\alpha_2)^{K_2-1}$, $\cdots(\chi-\alpha_\nu)^{K_\nu-1}$ καὶ ἄλλους ἴσως μὴ κοινοὺς μετὰ τοῦ δοθέντος πολυωνύμου καὶ ἐπομένως, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ὁ μ. κ. δ. τῶν $\sigma(\chi)$ καὶ $\sigma'(\chi)$ θὰ εἶναι: $M(\chi)=(\chi-\alpha_1)^{K_1-1}(\chi-\alpha_2)^{K_2-1}\cdots(\chi-\alpha_\nu)^{K_\nu-1}$. Συνάγομεν λοιπὸν τὸ ἑξῆς θεώρημα :

Θεώρημα III. **Ὁ μ. κ. δ. πολυωνύμου ἀναλελυμένου εἰς τοὺς πρωτοβαθμίους αὐτοῦ παράγοντας καὶ τῆς παραγώγου αὐτοῦ εὑρίσκεται ἐκ τοῦ δοθέντος πολυωνύμου, ἐὰν**

$\sigma'(x)=K_1(x-a_1)^{K_1-1}[(x-a_2)^{K_2}\cdots(x-a_\nu)^{K_\nu}]+K_2(x-a_2)^{K_2-1}(x-a_1)^{K_1}\cdots$
$+K_\nu(x-a_\nu)^{K_\nu-1}(x-a_1)^{K-1}$
$=(x-a_1)^{K-1}(x-a_2)^{K-1}[$

ἐλαττώσωμεν κατὰ μονάδα τὸν ἐκθέτην πάντων τῶν παραγόντων αὐτοῦ.

Ἐὰν $K_1=K_2=\ldots=K_\nu=1$, θὰ ἔχωμεν προφανῶς $M(\chi)=1$, ἂν ὅμως οἱ ἐκθέται δὲν εἶνε πάντες ἴσοι τῇ μονάδι, ὁ μ. κ. δ. $M(\chi)$ δὲν εἶναι σταθερὰ ποσότης. Ὅθεν ἕπεται:

Ἵνα ἓν πολυώνυμον ἔχῃ πολλαπλᾶς ρίζας πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτοῦ καὶ τῆς παραγώγου του νὰ μὴν εἶνε σταθερὰ ποσότης.

Γενικῶς. **Ἵνα δύο πολυώνυμα $\sigma(\chi)$ καὶ $\varphi(\chi)$ ἔχωσι κοινήν τινὰ ρίζαν πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν νὰ μὴν εἶναι σταθερὰ ποσότης. Διότι οὗτος περιέχει τὰς κοινὰς ρίζας καὶ μόνον αὐτάς.**

Παράδειγμα. Εὑρεῖν τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην, ἵνα ἔχῃ ρίζαν πολλαπλῆν τὸ πολυώνυμον $\chi^3+p\chi+q$. Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν τὴν παράγωγον $3\chi^2+p$ καὶ ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις, δι' ὧν εὑρίσκεται ὁ μ.κ.δ. τοῦ πολυωνύμου $\chi^3+p\chi+q$ καὶ τῆς παραγώγου $3\chi^2+p$, μηδενίζοντες δὲ τὸ πρῶτον εὑρισκόμενον σταθερὸν ὑπόλοιπον, εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην συνθήκην, ἥτις εἶνε: $\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=0$

7. **Ἀναγωγὴ ἑνὸς πολυωνύμου μὲ πολαπλᾶς ρίζας εἰς πολυώνυμα βαθμοῦ μικροτέρου καὶ ἄνευ πολλαπλῶν ριζῶν**

Τοῦ πολυωνύμου $X=\sigma(\chi)$ ἔστωσαν $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots$ αἱ ἁπλαῖ ρίζαι, α_2 $\beta_2, \gamma_2, \ldots$ αἱ διπλαῖ, ... τέλος $\alpha_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu, \ldots$ αἱ ν βαθμοῦ πολλαπλότητος, ὅτε τὸ πολυώνυμον X ἀναλύεται ὡς ἑξῆς:

$$X=[(\chi-\alpha_1)(\chi-\beta_1)\ldots][(\chi-\alpha_2)(\chi-\beta_2)\ldots]^2\ldots[(\chi-\alpha_\nu)(\chi-\beta_\nu)\ldots]^\nu$$

$$\text{δηλ. } X=X_1X_2^2X_3^3\ldots X_\nu^\nu \qquad (4)$$

ὅπου: $X_1=(\chi-\alpha_1)(\chi-\beta_1)\ldots$, $X_2=(\chi-\alpha_2(\chi-\beta_2)\ldots$, ..., $X_\nu=(\chi-\alpha_\nu)(\chi-\beta_\nu)\ldots$ εἶνε πολυώνυμα ἔχοντα μόνον ἁπλᾶς ρίζας· ἐκ τούτων τὸ X_1 ἔχει μόνον τὰς ἁπλᾶς τοῦ δοθέντος πολυωνύμου, τὸ X_2 ἔχει ἁπλᾶς ρίζας πάσας τὰς διπλᾶς τοῦ δοθέντος κ.ο.κ. Εὑρίσκομεν τὸ μ.κ.δ. τοῦ X καὶ τῆς παραγώγου του, ὅστις εἶνε:

$M_1=X_2X_3^2\ldots X_\nu^{\nu-1}$ κατόπιν τὸν μ. κ. δ. M_2 τοῦ M_1 καὶ τῆς παραγώγου του, ὅστις θὰ εἶνε: $M_2=X_3X_4^2\ldots X_\nu^{\nu-2}$ κ.ο.κ., τέλος φθάνομεν εἰς τὸ πολυώνυμον $M_{\nu-1}=X_\nu$. Διαιροῦντες κατόπιν ἕκαστον τῶν πολυωνύμων: $X, M_1, M_2, \ldots, M_{\nu-1}$ διὰ τοῦ ἑπομένου εὑρίσκομεν τὰ ἑξῆς:

$$K_1 = X_1 X_2 \ldots X_\nu$$
$$K_2 = X_2 X_3 \ldots X_\nu$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$K_\nu = M_{\nu-1} = X_\nu$$

Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν πάλιν ἕκαστον τῶν πολυωνύμων $K_1, K_2 \ldots K_\nu$ διὰ τοῦ ἑπομένου αὐτοῦ, ἔχομεν:

$$\frac{K_1}{K_2} = X_1, \quad \frac{K_2}{K_3} = X_2, \quad \frac{K_3}{K_4} = X_3, \ldots, K_\nu = X_\nu$$

δηλ. τὰ πολυώνυμα $X_1, X_2, \ldots X_\nu$, τὰ ὁποῖα ἔχουν μόνον ἁπλᾶς ῥίζας. Λοιπὸν ἐὰν πολυώνυμον X κέκτηται πολλαπλᾶς ῥίζας, τὸ σύμπτωμα τοῦτο εἶνε πλεονέκτημα, διότι ἡ εὕρεσις τῶν ῥιζῶν αὐτοῦ, δηλ. ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως $X=0$ ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων; $X_1=0$, $X_2=0$, $X_3=0, \ldots, X_\nu=0$, αἵτινες εἶνε βαθμοῦ μικροτέρου ἢ ἡ δοθεῖσα $X=0$, Ἐπὶ τῆς ἰδιότητος ταύτης στηρίζεται μέθοδος λύσεως τῶν ἐξισώσεων, καλουμένη **μέθοδος τῶν πολλαπλῶν ῥιζῶν.**

Ἀσκήσεις,

1) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως: $\chi^3 + p\chi + q$, $(-2p)$.

2) Τὴν συνθήκην ἵνα τὸ πολυώνυμον $\chi^\nu + p\chi + q$ ἔχῃ πολλαπλῆν ῥίζαν. $\left[\left(\frac{p}{\nu}\right)^\nu + (-1)^{\nu-1}\left(\frac{q}{\nu-1}\right)^{\nu-1} = 0\right]$

3) Τὴν συνθήκην ἵνα ἡ ἐξίσωσις $\chi^3 + \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ ἔχῃ δύο ῥίζας ἀντιθέτους $(\gamma = \alpha\beta)$.

4) Ὁμοίως ἵνα αἱ ῥίζαι αὐτῆς ἀποτελῶσι πρόοδον ἀριθμητικὴν ἢ γεωμετρικήν. $\left[2\alpha^3 - 9\alpha\beta + 27\gamma = 0, \quad \gamma = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3\right]$

5) Τὴν συνθήκην ἵνα τῆς $\chi^3 + \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ μία ῥίζα ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων. $[\alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma = 0]$.

6) Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, οὗτινος πλευραὶ εἶνε αἱ τρεῖς ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως: $\chi^3 + 2p\chi^2 + q\chi + r = 0$. $\left[(p^2q - p^4 - pr)^{\frac{1}{2}}\right]$

7) Ὁρίσαι τὸ p οὕτως ὥστε αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως: $\chi^3 - 8\chi^2 - 6\chi - p = 0$ ν' ἀποτελῶσι πρόοδον ἀριθμητικὴν ἢ γεωμετρικὴν καὶ λῦσαι αὐτήν.

8) Ὁρίσαι τὸ p ὥστε τῆς $3\chi^4+p\chi^3+2\chi^2+12\chi=8$ αἱ δύο ῥίζαι νὰ ἔχωσι γινόμενον 4.

9) Δεῖξαι ὅτι τὸ πολυώνυμον $(\chi-1)^{2\nu}-\chi^{2\nu}+2\chi-1$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $2\chi^3-3\chi^2+\chi$.

10) Ὁμοίως τὸ $\chi^{2\nu}-\nu^2\chi^{\nu+1}+2(\nu^2-1)\chi^\nu+\nu^2\chi^{\nu-1}+1$ διὰ τοῦ $(\chi-1)^4$.

11) Δεῖξαι ὅτι, ὅταν $\nu=6K\pm1$, τὸ πολυώνυμον $(\chi+1)^\nu-\chi^\nu-1$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $\chi^2+\chi+1$.

12) Συνθήκη ἵνα αἱ ῥίζαι ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4, τῆς ἐξισώσεως $\chi^4+\alpha\chi^3+\beta\chi^2+\gamma\chi+\delta=0$ συνδέωνται διὰ τῆς σχέσεως:

$$\varrho_1+\varrho_2=\varrho_3+\varrho_4. \qquad \left[\gamma=\frac{\alpha}{2}\left(\beta-\frac{\alpha^2}{4}\right)\right]$$

13) Δεῖξαι ὅτι αἱ ῥίζαι τῆς διωνύμου ἐξισώσεως $\alpha\chi^\mu+\beta=0$ εἶνε ἁπλαῖ (ἀρκεῖ νὰ εἶνε $\beta\neq0$).

14) Δεῖξαι ὅτι τὸ πολυώνυμον $(\chi+1)^{6\mu+1}-\chi^{6\mu+1}-1$ εἶνε διαιρετὸν διὰ $(\chi^2+\chi+1)^2$,

15) Πότε τὸ $\chi^p+\alpha\chi^{p-q}\psi^q+\beta\chi^{p-2q}\psi^{2q}+\gamma\chi^{p-3q}\psi^{3q}+\psi^p$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $(\chi+\psi)^3$

16) Ὁμοίως τὸ $\chi^p+m\chi^{p-q}\psi^q+m\chi^{p-2q}\psi^{2q}+\psi^p$ διὰ τοῦ $(\chi+\psi)^2$.

17) Ὁρίσαι τὸ p ὥστε τῆς $\chi^4-2\chi^2+p\chi+3=0$ δύο ῥίζαι νὰ ἔχωσι γινόμενον 1 [$p^2=24$].

18. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ ν τὸ πολυώνυμον $\chi^{3\nu}-\chi^{2\nu}+\chi^\nu-1$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $\chi^3-\chi^2+\chi-1$. [ὁ ν δὲν πρέπει νὰ εἶνε τῆς μορφῆς $2+4K$].

19. Εὑρεῖν τὴν συνθήκην ἵνα ἡ $\chi^4+4\alpha\chi+3\beta=0$ ἔχῃ μίαν ῥίζαν διπλῆν. [$\alpha^4=\beta^3$].

20. Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τετραπλεύρου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον καὶ τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως: $\chi^4-2\alpha\chi^3+\beta\chi^2-\gamma\chi+\delta=0$. $[\delta-\alpha\gamma+\beta\alpha^2-\alpha^4]^{\frac{1}{2}}$.

21. Τὴν συνθήκην ἵνα αἱ ῥίζαι ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 τῆς ἐξισώσεως: $A_0\chi^4+4A_1\chi^3+6A_2\chi^2+4A_3\chi+A_4=0$ συνδέωνται διὰ τῆς σχέσεως: $(\varrho_1+\varrho_2)(\varrho_3+\varrho_4)=2(\varrho_1\varrho_2+\varrho_3\varrho_4)$.

240

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix} = 0$$

22. Λῦσαι διὰ τῆς μεθόδου τῶν πολλαπλῶν ῥιζῶν*, τὰς ἐξισώσεις: $\chi^5-4\chi^3+2\chi^2+3\chi-2=0$, $\chi^5-2\chi^4-8\chi^3+16\chi^2+16\chi-32=0$ $[(\chi-1)^3(\chi+1)(\chi+2)]$, $\chi^6-15\chi^4-14\chi^3+36\chi^2+24\chi-32=0$ $[(\chi-1)^2(\chi+2)^3(\chi-4)]$, $\chi^7-2\chi^5-\chi^4+\chi^3+2\chi^2-1=0$ $\chi^6+6\chi^5+3\chi^4+12\chi^3+3\chi^2+6\chi+1=0$ [$\pm i$ διπλαῖ, $-3+2\sqrt{2}$ ἁπλαῖ]. Τῆς προτελευταίας ἡ ἀνάλυσις εἶναι: $(\chi-1)^3(\chi+1)^2(\chi^2+\chi+1)$.

Β'. Ἰδιότητες τῶν πολυωνύμων, ὧν οἱ συντελεσταὶ εἶνε πάντες πραγματικοὶ

8. **Ἰδιότης Ι. Διὰ τιμὰς τοῦ χ ἀπολύτως πολὺ μεγάλας πᾶν πολυώνυμον $\sigma(\chi)=A_0\chi^\mu+A_1\chi^{\mu-1}+\ldots+A_{\mu-1}\chi+A_\mu$ ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ πρώτου ὅρου.**

Ἀπόδειξις. Γράφομεν: $\sigma(\chi)=A_0\chi^\mu\left[1+\frac{A_1}{A_0}\frac{1}{\chi}+\frac{A_2}{A_0}\frac{1}{\chi^2}+\ldots+\frac{A_{\mu-1}}{A_0}\frac{1}{\chi^{\mu-1}}+\frac{A_\mu}{A_0}\frac{1}{\chi^\mu}\right]$ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν τὸ χ τείνῃ ὁπωσδήποτε εἰς τὸ ∞, ἡ παρένθεσις ἔχει ὅριον τὴν μονάδα καὶ ἑπομένως, ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς, δηλ. διὰ τιμὰς τοῦ χ ἀπολύτως ἀρκετὰ μεγάλας, ἡ παρένθεσις θὰ εἶνε ἀριθμὸς θετικὸς καὶ ἄρα τὸ πολυώνυμον σ(χ) θὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον τοῦ $A_0\chi^\mu$. Ὁ αὐτὸς τύπος δεικνύει ὅτι τὸ πολυώνυμον τείνει εἰς τὸ ∞ ὅταν ὁ $\chi=\infty$.

Πόρισμα. Πᾶν πολυώνυμον περιττοῦ βαθμοῦ ἔχει μίαν τοὐλάχιστον πραγματικὴν ῥίζαν, πᾶν δὲ πολυώνυμον ἀρτίου βαθμοῦ ἔχει δύο τοὐλάχιστον πραγματικὰς ῥίζας (μίαν θετικὴν καὶ μίαν ἀρνητικὴν) ὅταν οἱ ἄκροι συντελεσταὶ εἶνε ἑτερόσημοι.

Ἀπόδειξις. Διότι, ἂν μ περιττὸς, διὰ $\chi=-\infty \quad 0 \quad +\infty$
τὸ $A_0\chi^\mu$ ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ $\quad -A_0 \quad A_\mu \quad +A_0$
καὶ ἑπομένως, ἂν A_0 καὶ A_μ εἶνε ἑτερόσημοι, ἡ συνάρτησις $\psi=\sigma(\chi)$, ὡς λαμβάνουσα διὰ $\chi=0$ καὶ $\chi=\infty$ τιμὰς ἑτεροσήμους, κατὰ τὸ θεμελιῶδες θεώρημα τῶν συνεχῶν συναρτήσεων, θὰ ἔχῃ μίαν τοὐλάχιστον ῥίζαν μεταξὺ $0 \ldots \infty$ δηλ. θετικήν, ἐὰν δὲ τὰ A_0 καὶ A_μ εἶνε ὁμόσημα, ἡ συνάρτησις σ(χ) λαμβάνει τιμὰς ἑτεροσήμους διὰ $\chi=-\infty$ καὶ $\chi=0$ καὶ ἑπομένως θὰ ἔχῃ μίαν τοὐλάχιστον ῥίζαν περιλαμβανομένην μεταξὺ $-\infty \ldots 0$ δηλ. ἀρνητικήν.

Ἐὰν μ ἄρτιος, διὰ $\chi=-\infty \quad 0 \quad +\infty$

*) Ἢ καὶ ἄλλης ἁπλουστέρας.

τὸ $A_0\chi^\mu$ ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ : $A_0 \quad A_\mu \quad A_0$ καὶ ἐπομένως, ἂν οἱ συντελεσταὶ A_0, A_μ εἶνε ἑτερόσημοι, ἡ συνάρτησις $\psi=\sigma(\chi)$, λαμβάνει διὰ $\chi=-\infty$ καὶ $\chi=0$ τιμὰς ἑτεροσήμους, ἐπίσης δὲ διὰ $\chi=0$ καὶ $\chi=\infty$, καὶ ἐπομένως ἔχει μίαν τοὐλάχιστον ῥίζαν μεταξὺ $-\infty$ καὶ 0 καὶ μίαν τοὐλάχιστον μεταξὺ 0 καὶ $+\infty$· ὅθεν ἕπεται τὸ ἑξῆς σπουδαῖον συμπέρασμα: **Ὅταν οἱ ἄκροι συντελεσταὶ εἶνε ἑτερόσημοι τὸ πολυώνυμον ἔχει μίαν τοὐλάχιστον πραγματικὴν ῥίζαν καὶ θετικήν.**

Ἰδιότης II. Γενίκευσις **τοῦ θεμελιώδους θεωρήματος τῶν συνεχῶν συναρτήσεων.** (Μέρος Α΄. Σελ. 76).

Τὸ πλῆθος ν τῶν πραγματικῶν ῥιζῶν ἑνὸς πολυωνύμου $\psi=\sigma(\chi)$ τῶν περιεχομένων μεταξὺ δύο ἀριθμῶν α καὶ β εἶνε ἄρτιον (δυνατὸν καὶ μηδὲν) μὲν ἂν αἱ τιμαὶ σ(α) καὶ σ(β) εἶναι ὁμόσημοι, περιττὸν δὲ ἂν αἱ αὐταὶ τιμαὶ εἶνε ἑτερόσημοι.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν καλέσωμεν $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_\nu$ τὰς ῥίζας ταύτας θὰ ἔχωμεν: $\sigma(\chi)=(\chi-\varrho_1)(\chi-\varrho_2)\ldots(\chi-\varrho_\nu)\varphi(\chi)$, ὅπου τὸ πολυώνυμον $\varphi(\chi)$ δὲν ἔχει οὐδεμίαν ῥίζαν πραγματικὴν περιλαμβανομένην μεταξὺ τῶν α καὶ β, θὰ ἔχωμεν δέ :

$$\sigma(\alpha)=(\alpha-\varrho_1)(\alpha-\varrho_2)\ldots(\alpha-\varrho_\nu)\varphi(\alpha)$$

$$\sigma(\beta)=(\beta-\varrho_1)(\beta-\varrho_2)\ldots(\beta-\varrho_\nu)\varphi(\beta)$$

$$\sigma(\alpha)\sigma(\beta)=(\alpha-\varrho_1)(\alpha-\varrho_2)\ldots(\alpha-\varrho_\nu)(\beta-\varrho_1)(\beta-\varrho_2)\ldots(\beta-\varrho_\nu)\varphi(\alpha)\varphi(\beta) \quad (5)$$

ἂν δὲ ὑποτεθῇ $\alpha<\beta$, οἱ παράγοντες $\alpha-\varrho_1$, $\alpha-\varrho_2, \ldots, \alpha-\varrho_\nu$ θὰ εἶνε ἀρνητικοὶ ἐνῷ οἱ $\beta-\varrho_1$, $\beta-\varrho_2, \ldots \beta-\varrho_\nu$ θὰ εἶνε θετικοί, τὸ δὲ γινόμενον $\varphi(\alpha)\varphi(\beta)$ θὰ εἶνε θετικόν, διότι, ἐὰν αἱ τιμαὶ φ(α) ἦσαν ἑτερόσημοι, θὰ ὑπῆρχε πραγματικὴ ῥίζα τοῦ $\varphi(\chi)$ περιλαμβανομένη μεταξὺ τῶν α καὶ β. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος (5) ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ $(-1)^\nu$· ἂν λοιπὸν $\sigma(\alpha)\sigma(\beta)>0$ θὰ ἔχωμεν $(-1)^\nu>0$ δηλ. ν ἄρτιον, ἂν δὲ $\sigma(\alpha)\sigma(\beta)<0$ θὰ εἶναι $(-1)^\nu<0$ δηλ. ν=περιττὸν ὅ. ἔ. δ.

Σημείωσις. Ἐννοεῖται ὅτι εἰς τὸ πλῆθος ν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν καὶ ὁ βαθμὸς πολλαπλότητος τῶν ῥιζῶν.

9. **Ἰδιότης III. Ἐὰν ἓν πολυώνυμον $\psi=\sigma(\chi)$ ἔχῃ ῥίζαν φανταστικὴν $\alpha+\beta i$ θὰ ἔχῃ καὶ τὴν συζυγῆ αὐτῆς $\alpha-\beta i$.**
Ἐὰν ὑποθέσωμεν : $\sigma(\alpha+\beta i)=A+Bi$ καλοῦντες A τὸ πραγματικὸν μέρος τοῦ ἀριθμοῦ $\sigma(\alpha+\beta i)$ καὶ Bi τὸ φανταστικόν, θὰ ἔχωμεν προφανῶς

$\sigma(\alpha-\beta i)=A-Bi$*, καὶ ἑπομένως, ἂν ἡ τιμὴ $\chi=\alpha+\beta i$ εἶναι ρίζα, θὰ εἶνε $\sigma(\alpha+\beta i)=A+Bi=0$ δηλ. $A=0$, $B=0$, ἀλλὰ τότε θὰ εἶνε μηδὲν καὶ ὁ $A-Bi=\sigma(\alpha-\beta i)$, δηλ. καὶ ὁ ἀριθμὸς $\alpha-\beta i$ θὰ εἶνε ἐπίσης ρίζα τοῦ πολυωνύμου.

Ἰδιότης IV. ***Ἐὰν ἓν πολυώνυμον $\psi=\sigma(\chi)$ ἔχῃ ρίζαν φανταστικὴν $\alpha+\beta i$ μὲ βαθμὸν πολ)τος K, θὰ ἔχῃ καὶ τὴν συζυγῆ αὐτῆς $\alpha-\beta i$ μὲ τὸν αὐτὸν βαθμὸν πολ)τητος.*** Ἔστω λ ὁ βαθμὸς πολ)τητος τῆς $\alpha-\beta i$· τότε τὸ πολυώνυμον $\sigma(\chi)$ θὰ περιέχῃ τοὺς παράγοντας : $(\chi-\alpha-\beta i)^{\kappa}$ καὶ $(\chi-\alpha+\beta i)^{\lambda}$ καὶ θὰ ἔχωμεν :

$$\sigma(\chi)=(\chi-\alpha-\beta i)^{\kappa}(\chi-\alpha+\beta i)^{\lambda}\varphi(\chi)$$

ὅπου τὸ $\varphi(\chi)$ δὲν περιέχει οὐδεμίαν τῶν ριζῶν $\alpha+\beta i$ καὶ $\alpha-\beta i$. Ἂν ἦτο $\lambda\neq K$ π. χ. $\lambda<K$, θὰ ἠδυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$\sigma(\chi)=(\chi-\alpha-\beta i)^{\lambda}(\chi-\alpha-\beta i)^{\kappa-\lambda}(\chi-\alpha+\beta i)^{\lambda}\varphi(\chi) \text{ ἢ}$$

$$\sigma(\chi)=(\chi-\alpha-\beta i)^{\kappa-\lambda}[(\chi-\alpha-\beta i)(\chi-\alpha+\beta i)]^{\lambda}\varphi(\chi)$$

δηλ. $\sigma(\chi)=(\chi-\alpha-\beta i)^{\kappa-\lambda}[(\chi-\alpha)^2+\beta^2]^{\lambda}\varphi(\chi)$ Ὅθεν

$$\frac{\sigma(\chi)}{[(\chi-\alpha)^2+\beta^2]^{\lambda}}=(\chi-\alpha-\beta i)^{\kappa-\lambda}\varphi(\chi)$$

δηλ. τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον $\frac{\sigma(\chi)}{[(\chi-\alpha)^2+\beta^2]^{\lambda}}$ ὅπερ ἔχει πραγματικοὺς συντελεστάς, θὰ εἶχε τὴν φανταστικὴν ρίζαν $\alpha+\beta i$ χωρὶς νὰ ἔχῃ τὴν συζυγῆ αὐτῆς $\alpha-\beta i$, ὅπερ ἄτοπον, κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα· ἀνάγκη λοιπὸν νὰ δεχθῶμεν $K=\lambda$. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ αὐτὴ ἰδιότης ἀποδεικνύεται καὶ διά τῆς παραγώγου λ τάξεως ἡ ὁποία θά ἔχῃ τὴν ρίζαν $\alpha+\beta i$ χωρὶς νά ἔχῃ τὴν συζυγῆ $\alpha-\beta i$.

Σημείωσις. Ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τούτων ἕπεται ὅτι τὸ πλῆθος τῶν φανταστικῶν ριζῶν ἑνὸς πολυωνύμου μὲ πραγματικοὺς συντελεστὰς εἶνε ἢ 0 ἢ ἄρτιος ἀριθμός.

Ἀσκήσεις.

1. Πόσας τοὐλάχιστον πραγματικὰς ρίζας θετικὰς ἢ ἀρνητικὰς δίδουσιν αἱ τιμαὶ $\chi=0$, ∞, $-\infty$ διὰ τὰς ἐξισώσεις : $\chi^3-5\chi^2+4\chi-7=0$, $\chi^3-5\chi^2-4\chi+7=0$, $\chi^4-5\chi^3-7\chi^2+3\chi-2=0$;

2. Εὑρεῖν τὰς κοινὰς ρίζας τῶν πολυωνύμων :

$\chi^4-3\chi^3+3\chi^2-3\chi+2=0$, $2\chi^3-5\chi^2+\chi+2=0$ [1, 2].

3. Ὁμοίως τὰς κοινὰς ρίζας τῶν πολυωνύμων :

$4\chi^5-25\chi^3+10\chi^2+21\chi-10=0$, $2\chi^3+5\chi^2+\chi-2=0$ $\left[\frac{1}{2}, -1\right]$

*) Διότι οἱ συντελεσταὶ τοῦ $\sigma(\chi)$ ὑπετέθησαν πραγματικοί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΠΛΗΘΟΣ ΚΑΙ ΟΡΙΑ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΡΙΖΩΝ

Ι. Ἐφαρμογὴ τοῦ θεωρήματος τοῦ Rolle.

1. Ποιούμενοι χρῆσιν τοῦ θεωρήματος τοῦ Rolle θὰ δείξωμεν ὅτι, ὅταν γνωρίζωμεν πάσας τὰς πραγματικὰς ῥίζας τῆς παραγώγου ἑνὸς πολυωνύμου $\psi = \sigma(\chi)$, δυνάμεθα ἀκριβῶς νὰ προσδιορίσωμεν τὸ πλῆθος τῶν πραγματικῶν ῥιζῶν αὐτοῦ. Ἔστωσαν: $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$, αἱ πραγματικαὶ ῥίζαι τῆς παραγώγου $\sigma'(\chi)$ γεγραμμέναι κατὰ τάξιν μεγέθους αὔξοντος, θεωρήσωμεν δὲ τὴν ἑξῆς σειρὰν τιμῶν τοῦ χ: $-\infty, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu, +\infty$ (1), αἵτινες ὁρίζουσι $\nu+1$ διαστήματα· ἐν ἑκάστῳ διαστήματι περιοριζομένῳ ὑπὸ δύο διαδοχικῶν ῥιζῶν τῆς παραγώγου (π. χ. ἐν τῷ $\beta_1 \ldots \beta_2$) τὸ πολυώνυμον δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ῥίζας περισσοτέρας τῆς μιᾶς, διότι ἂν εἶχε δύο α_1 καὶ α_2, ἡ παράγωγος $\sigma'(\chi)$ θὰ εἶχε μίαν τοὐλάχιστον β'_1 περιλαμβανομένην μεταξὺ τῶν α_1 καὶ α_2, καὶ συνεπῶς μεταξὺ τῶν β_1 καὶ β_2, τοῦθ' ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὴν διαδοχικότητα τῶν ῥιζῶν β_1 καὶ β_2. Δι' ὅμοιον λόγον, ἐν τοῖς ἄκροις διαστήμασιν $-\infty \ldots \beta_1$ καὶ $\beta_\nu \ldots +\infty$ θὰ ὑπάρχῃ ἡ μία ῥίζα ἢ οὐδεμία. Συνάγομεν λοιπὸν ὅτι: ἂν θεωρήσωμεν δύο τυχούσας διαδοχικὰς τιμάς, π. χ. τὰς β_1 καὶ β_2 τῆς σειρᾶς (1), ὅταν μὲν αἱ τιμαὶ $\sigma(\beta_1)$ καὶ $\sigma(\beta_2)$ εἶνε ὁμόσημοι, δὲν ὑπάρχει οὐδεμία ῥίζα μεταξὺ τῶν β_1 καὶ β_2, ὅταν δὲ ἑτερόσημοι, θὰ ὑπάρχῃ μία μόνη ῥίζα μεταξὺ τῶν β_1 καὶ β_2. Ὅθεν: **Τόσαι εἶναι αἱ πραγματικαὶ ῥίζαι τοῦ πολυωνύμου $\sigma(\chi)$ ὅσα τὰ διαστήματα (1) τὰ περιέχοντα ῥίζαν, δηλ. ὅσαι εἶναι αἱ παραλλαγαὶ σημείου, ἃς παρουσιάζει ἡ ἀκολουθία** $\sigma(-\infty), \sigma(\beta_1), \sigma(\beta_2), \ldots, \sigma(\beta_\nu), \sigma(+\infty)$ (2).

2. **Ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα πᾶσαι αἱ ῥίζαι εἶνε πραγματικαί.** Πρὸς τοῦτο πρέπει καὶ ἀρκεῖ καὶ συμβαίνωσι τὰ ἑξῆς δύο. α΄) τὸ πλῆθος $\nu+1$ τῶν διαστημάτων (1), ὅπερ δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸν βαθμὸν μ τοῦ πολυωνύμου, νὰ ἰσοῦται ἀκριβῶς μὲ τὸν βαθμὸν μ δηλ. $\nu = \mu - 1$. β΄) ἕκαστον τῶν διαστημάτων τούτων νὰ περιέχῃ μίαν ῥίζαν δηλ. αἱ τιμαὶ (2) νὰ εἶνε ἐναλλὰξ θετικαὶ καὶ ἀρνητικαί.

Παράδειγμα I. Λάβωμεν τὸ πολυώνυμον $\psi=\chi^3+p\chi+q$, τοῦ ὁποίου ἡ παράγωγος $\psi'=3\chi^2+p$ ἔχει ῥίζας : $\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$, αἵτινες πρέπει νὰ εἶναι πραγματικαὶ δηλ. πρέπει $p<0$· ἀνάγκη ἤδη νὰ θεωρήσωμεν τὰς τιμάς : $\sigma(-\infty)=-\infty$, $\sigma\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)=-\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\frac{2p}{3}+q$,

$$\sigma\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)=\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\frac{2p}{3}+q, \quad \sigma(+\infty)=+\infty,$$

αἵτινες ὀφείλουσι ἐναλλὰξ νὰ εἶνε θετικαὶ καὶ ἀρνητικαί· πρέπει λοιπὸν νὰ ἔχωμεν τὰς ἀνισότητας : $p<0$, $-\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}+q>0$,

$q+\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}<0$, καὶ ἂν μὲν $q>0$ ἡ δευτέρα ἀνισότης ἀληθεύει ἀφ' ἑαυτῆς, ἡ δὲ τρίτη γραφομένη $q<-\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}$ καὶ ὑψουμένη εἰς τὸ τετράγωνον δίδει : $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$, ἂν δὲ $q<0$ ἡ τρίτη ἀληθεύει ἀφ' ἑαυτῆς, ἡ δὲ δευτέρα γραφομένη $-\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}>-q$ καὶ τετραγωνιζομένη δίδει ἐπίσης τὴν ἀνισότητα : $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$· αὕτη περιέχει καὶ τὴν $p<0$ καὶ διὰ τοῦτο μόνη αὐτὴ ἐκφράζει τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην ἵνα τὸ πολυώνυμον $\chi^3+p\chi+q$ ἔχῃ πάσας τὰς ῥίζας αὐτοῦ πραγματικάς.

Παράδειγμα II. Λάβωμεν τὸ πλῆρες τριτοβάθμιον πολυώνυμον: $\psi=\chi^3+\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ ἢ τὴν ἀντίστοιχον ἐξίσωσιν $\chi^3+\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ (3) ἐν τῇ ὁποίᾳ ἐξαφανίζεται ὁ δευτεροβάθμιος ὅρος διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως $\chi=\psi-\frac{\alpha}{3}$, ἥτις ἑπομένως μετασχηματίζει τὴν ἐξίσωσιν (3) εἰς ἄλλην ἐλλιπῆ : $\chi^3+p\chi+q=0$ (4) τῆς προηγουμένης μορφῆς. Εἶνε προφανὲς ὅτι αἱ δύο ἐξισώσεις (3), (4) ἔχουσι τὸ αὐτὸ πλῆθος πραγματικῶν ῥιζῶν καὶ ἑπομένως ἀγόμεθα εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα, ἀλλ' ἀπ' εὐθείας δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν θεωρίαν εἰς τὸ πλῆρες πολυώνυμον $\chi^3+\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$, διότι ἡ παράγωγος αὐτοῦ εἶνε δευτεροβάθμιος καὶ ἑπομένως αἱ ῥίζαι αὐτοῦ προσδιορίζονται εὐκόλως διὰ τῆς στοιχειώδους 'Αλγέβρας.

3. **'Απαλοιφὴ τοῦ δευτέρου ὅρου $A_1\chi^{\mu-1}$ εἰς πᾶσαν ἐξίσωσιν : $\chi^\mu+A_1\chi^{\mu-1}+\ldots+A_{\mu-1}\chi+A_\mu=0$.** Ζητήσωμεν νὰ ἐπιτύχωμεν τοῦτο διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως $\chi=\Psi+K$, ὁρίζοντες καταλλή-

λως τὸν Κ. Ἀντικαθιστῶντες λαμβάνομεν : $(\Psi+K)^\mu+A_1(\Psi+K)^{\mu-1}+\ldots=\Psi^\mu+(A_1+\mu K)\Psi^{\mu-1}+\ldots+A_\mu=0$, καὶ ἑπομένως, ἵνα ἀπαλειφθῇ ὁ ὅρος $\mu-1$ βαθμοῦ, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν: $A_1+\mu K=0$ δηλ. $K=-\frac{A_1}{\mu}$. Λοιπὸν διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως $\chi=\Psi-\frac{A_1}{\mu}$ προκύπτει μετεσχηματισμένη ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $\Psi^\mu+B_2\Psi^{\mu-2}+B_3\Psi^{\mu-3}+\ldots+A_\mu=0$ δηλ. ἐλλιπὴς ἔχουσα πραγματικὰς ῥίζας ἰσαρίθμους πρὸς τὰς τῆς δοθείσης.

4. **Ἐφαρμογὴ εἰς τὴν γενικὴν ἐξίσωσιν τετάρτου βαθμοῦ $\chi^4+\alpha\chi^3+\beta\chi^2+\gamma\chi+\delta=0$.** Διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως $\chi=\Psi-\frac{\alpha}{4}$ ἡ μελέτη τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἀνάγεται εἰς τὴν τῆς ἐλλιποῦς $\psi^4+B\psi^2+\Gamma\psi+\Delta=0$, αὕτη δὲ διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως $\psi=\frac{1}{\omega}$ ἀνάγεται εἰς τὴν $\Delta\omega^4+\Gamma\omega^3+B\omega^2+1=0$, ἀλλ' ἡ παράγωγος τοῦ νέου τούτου πολυωνύμου εἶνε $4\Delta\omega^3+3\Gamma\omega^2+2B\omega=\omega(4\Delta\omega^2+3\Gamma\omega+2B)$ καὶ ἔχει ῥίζας τὴν $\omega=0$ καὶ τὰς τοῦ δευτεροβαθμίου πολυωνύμου $4\Delta\omega^2+3\Gamma\omega+2B$. Δυνάμεθα λοιπόν, διὰ τοῦ θεωρήματος τοῦ Rolle, νὰ εὕρωμεν τὸ πλῆθος τῶν πραγματικῶν ῥιζῶν τοῦ πολυωνύμου : $\Delta\omega^4+\Gamma\omega^3+B\omega^2+1$ ἑπομένως καὶ τοῦ δοθέντος.

Σημείωσις. Διὰ τῆς μεθόδου τοῦ ἐδαφίου 1 ἐπιτυγχάνεται ὁ λεγόμενος **χωρισμὸς τῶν ῥιζῶν**, δηλ. εὑρίσκονται διαστήματα, ἐν οἷς δὲν ὑπάρχει ἢ μία ῥίζα τοῦ πολυωνύμου.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ χωρισθῶσιν αἱ ῥίζαι τῶν ἑπομένων ἐξισώσεων :
$\chi^3+12\chi^2+21\chi+15=0$, $\chi^4-4\alpha\chi^3+27\beta=0$, $\chi^4-2\chi^3+2\chi^2+1=0$, $2\chi^4-4\chi^3+3\chi^2-5\chi-2=0$, $\chi^3+5\chi-2=0$, $\chi^3-6\chi+4=0$, $\chi^3-6\chi+6=0$

2) Δεῖξαι ὅτι εἶνε δυνατὸν διὰ τοῦ θεωρήματος τοῦ Rolle νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν πραγματικῶν ῥιζῶν τῶν ἐξισώσεων : $\chi^\mu+A\chi^\nu+B=0$, $\chi^\mu+A\chi^{\mu-\nu}+B\chi^{\mu-2\nu}+\Gamma=0$.

3) Χωρίσαι τὰς ῥίζας τῶν ἐξισώσεων: $16\chi^3-24\alpha\chi^2+9\alpha^2\chi+\alpha\beta^2=0$, $\chi^5-20\chi+\alpha=0$.

4) Δεῖξαι ὅτι ἄγουσιν εἰς ἐξίσωσιν τρίτου βαθμοῦ τὰ ἑπόμενα δύο προβλήματα : α') Νὰ τμηθῇ ἡμισφαίριον δι' ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει εἰς δύο μέρη ἔχοντα ἴσους ὄγκους· καὶ β') Ἐκ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας καὶ τοῦ ὄγκου ὀρθοῦ κυλίνδρου εὑρεῖν τὸ ὕψος καὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεώς του.

5) Ἂν ἡ ἐξίσωσις $\varphi(\chi)=0$ ἔχῃ ν ῥίζας πραγματικάς, ἡ $\sigma(\chi)=\varphi'(\chi)$ θὰ ἔχῃ τοὐλάχιστον $\nu-1$ πραγματικὰς ῥίζας. $(\varphi(\chi)=A_0\chi^\mu+A_1\chi^{\mu-1}+\ldots+A_{\mu-1}\chi+A_\mu)$

II. Τὸ θεώρημα τοῦ Καρτεσίου.

5) **Ὁρισμοί.** Δύο διαδοχικοὶ ὅροι πολυωνύμου λέγομεν ὅτι παρουσιάζουσι **τήρησιν** μὲν ὅταν οἱ συντελεσταὶ αὐτῶν εἶνε ὁμόσημοι, **παραλλαγὴν** δὲ ὅταν οἱ συντελεσταὶ εἶνε ἑτερόσημοι. Εἶνε προφανὲς ὅτι μεταξὺ δύο ὁμοσήμων ὅρων περιέχεται ἄρτιον πλῆθος παραλλαγῶν, μεταξὺ δὲ δύο ἑτεροσήμων περιλαμβάνεται περιττὸν πλῆθος, διότι περιττὸν πλῆθος παραλλαγῶν ἀλλάσσει τὸ σημεῖον, ἐνῷ ἄρτιον πλῆθος ἐπαναφέρει τὸ σημεῖον τὸ ἀρχικόν. Πᾶν πολυώνυμον μὴ παρουσιάζον καμμίαν παραλλαγὴν θὰ ὀνομασθῇ ***μονόσημον***.

Βοηθητικὴ πρότασις. Πᾶν μονόσημον πολυώνυμον $\vartheta_\mu\chi^\mu+\vartheta_{\mu-1}\chi^{\mu-1}+\ldots+\vartheta_\nu\chi^\nu$ πολ]μενον ἐπὶ διώνυμον $\chi-\vartheta$, ὅπου ϑ θετικὸς ἀριθμός, δίδει ἓν γινόμενον $\vartheta_\mu\chi^{\mu+1}+\ldots-\vartheta\vartheta_\nu\chi^\nu$, οὗτινος ὁ πρῶτος συντελεστὴς εἶναι ϑ_μ, ὁ δὲ τελευταῖος εἶνε ἑτερόσημος τοῦ ϑ_μ (ὑποτιθεμένου ὅτι τὸ πολυώνυμον εἶνε διατετάγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ χ). **Ὥστε τὸ γινόμενον ἑνὸς μονοσήμου πολυωνύμου ἐπὶ διώνυμον $\chi-\vartheta$ παρουσιάζει πάντοτε περιττὸν πλῆθος παραλλαγῶν.**

6. **Λῆμμα τοῦ Καρτεσίου. Ἐὰν ἓν πολυώνυμον $\psi=\sigma(\chi)$ πολ]θῇ ἐπὶ διώνυμον $\chi-\vartheta$ (ὅπου $\vartheta>0$) τὸ πλῆθος τῶν παραλλαγῶν αὐτοῦ αὐξάνει κατὰ περιττὸν ἀριθμόν.**

Ἀπόδειξις. Ἐὰν τὸ πολυώνυμον παρουσιάζῃ ν παραλλαγὰς καὶ εἶνε διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ χ, θὰ γράφεται ὡς ἑξῆς: $\sigma(\chi)=P_1-P_2+P_3-P_4+\ldots+P_\nu+P_{\nu+1}$ (ὅπου P_1, $P_2,\ldots,P_{\nu+1}$ δηλοῦσιν ἢ μονώνυμα ἢ πολυώνυμα μονόσημα μὲ συντελεστὰς πάντας θετικούς) θὰ ἔχωμεν δέ: $\sigma(\chi)(\chi-\vartheta)=P_1(\chi-\vartheta)-P_2(\chi-\vartheta)+\ldots+P_\nu(\chi-\vartheta)+P_{\nu+1}(\chi-\vartheta)$· ἀλλά, κατὰ τὴν βοηθητικὴν πρότασιν, ἕκαστον τῶν γινομένων $(\chi-\vartheta)P_1, -(\chi-\vartheta)P_2, \ldots +(\chi-\vartheta)P_\nu, +(\chi-\vartheta)P_{\nu+1}$ περιέχει περιττὸν πλῆθος παραλαγῶν, προσέτι δὲ ὁ τελευταῖος ὅρος ἑκάστου τῶν γινομένων τούτων εἶναι βαθμοῦ ἴσου ἢ ἀνωτέρου τοῦ βαθμοῦ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ ἑπομένου γινομένου. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι τὰ διαδοχικὰ ταῦτα γινόμενα συνδέονται διὰ τηρήσεως καὶ οὐχὶ παραλλαγῆς καὶ ἑπομένως τὸ ὁλικὸν πλῆθος τῶν παραλλαγῶν τοῦ γινομένου $\sigma(\chi)(\chi-\vartheta)$ θὰ εἶνε τῆς μορφῆς:

$P_1(\chi-\vartheta)$
$P_1(\chi-\vartheta)$

$(2\lambda_1+1)+(2\lambda_2+1)+\ldots+(2\lambda_\nu+1)+(2\lambda_{\nu+1}+1)=\nu+1+2(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{\nu+1})=\nu+(2K+1)$ ὅ. ἔ. δ.

Θεώρημα τοῦ Καρτεσίου. Τὸ πλῆθος τῶν θετικῶν ῥιζῶν ἑνὸς πολυωνύμου σ(χ) εἶνε ἢ ἴσον τῷ ἀριθμῷ τῶν παραλλαγῶν αὐτοῦ ἢ εἶνε μικρότερον αὐτοῦ κατ' ἄρτιον ἀριθμόν.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν καλέσωμεν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ τὰς θετικὰς ῥίζας αὐτοῦ, θὰ ἔχωμεν: $\sigma(\chi)=(\chi-\alpha_1)(\chi-\alpha_2)\ldots(\chi-\alpha_\nu)\varphi(\chi)$ ὅπου τὸ πολυώνυμον φ(χ), ὡς μὴ ἔχον οὐδεμίαν θετικὴν ῥίζαν, θὰ ἔχῃ τοὺς ἄκρους συντελεστὰς ὁμοσήμους καὶ ἑπομένως ἄρτιον πλῆθας παραλλαγῶν 2ρ· ὅταν τὸ φ(χ) πολ]θῇ ἐπὶ $\chi-\alpha_1$, τὸ πλῆθος 2ρ τῶν παραλλαγῶν αὐτοῦ θ' αὐξηθῇ κατὰ περιττὸν ἀριθμὸν $2K_1+1$, ὅταν δὲ τὸ εὑρεθὲν ἐξαγόμενον πολ]θῇ ἐπὶ $\chi-\alpha_2$ τὸ πλῆθος $2\rho+(2K_1+1)$ θ' αὐξηθῇ πάλιν κατὰ περιττὸν ἀριθμὸν κ.ο.κ., τὸ πλῆθος p τῶν παραλλαγῶν τοῦ σ(χ) θὰ ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι: $p=2\rho+(2K_1+1)+(2K_2+1)+\ldots+(2K_\nu+1)=2(\rho+K_1+K_2+\ldots+K_\nu)+\nu=\nu+$ἀρτ, ὅ. ἔ. δ. Π. χ. τὸ πολυώνυμον $\chi^5-3\chi^4-5\chi^3+2\chi^2-\chi+1$ ἔχει 4 παραλλαγὰς καὶ ἑπομένως θετικὰς ῥίζας ἢ 4 ἢ 2 ἢ καμμίαν.

Ἀνώτερον ὅριον τοῦ πλήθους τῶν ἀρνητικῶν ῥιζῶν. Τὸ ὡς ἄνω θεώρημα τοῦ Καρτεσίου παρέχει ἀνώτερον ὅριον τοῦ πλήθους τῶν θετικῶν ῥιζῶν. Διὰ νὰ εὕρωμεν τοιοῦτον διὰ τὰς ἀρνητικὰς ῥίζας, μετασχηματίζομεν τὸ πολυώνυμον σ(χ) ἀντικαθιστῶντες τὸ χ διὰ τοῦ —χ, ὅτε προκύπτει τὸ $\sigma(-\chi)=\sigma_1(\chi)$· ἐπειδὴ δὲ διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως ταύτης αἱ θετικαὶ ῥίζαι γίνονται ἀρνητικαὶ καὶ αἱ ἀρνητικαὶ γίνονται θετικαί, ἕπεται ὅτι τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν ῥιζῶν τοῦ σ(χ) ἰσοῦται πρὸς τὸ πλῆθος τῶν θετικῶν τοῦ μετασχηματισμένου $\sigma_1(\chi)$, ὧν ἑπομένως ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν ἀνώτερον ὅριον· ὥστε ἡ περίπτωσις τῶν ἀρνητικῶν ῥιζῶν ἀνάγεται εἰς τὴν τῶν θετικῶν.

7. **Πλῆρες πολυώνυμον.** Ὅταν τὸ σ(χ) εἶνε πλῆρες πολυώνυμον δηλ. περιέχῃ πάσας τὰς δυνάμεις τοῦ χ ἀπὸ τῆς χ^0 μέχρι χ^μ (ὥστε νὰ μὴν ὑπάρχωσιν κενά), τὸ πλῆθος p τῶν παραλλαγῶν καὶ τὸ πλῆθος τ τῶν τηρήσεων ἀθροιζόμενα συναποτελοῦσι προφανῶς τὸν βαθμὸν τοῦ πολυωνύμου, ἐπειδὴ δὲ διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως τοῦ χ εἰς —χ αἱ τηρήσεις γίνονται παραλλαγαὶ καὶ τἀνάπαλιν (καθ' ὅσον οἱ ὅροι ἐναλλὰξ ἀλλάσσουν σημεῖον), ἕπεται ὅτι, ἂν καλέσωμεν p′ τὸ πλῆθος τῶν παραλλαγῶν τοῦ μετασχηματισμένου πολυωνύμου, ἔχομεν $p+p'=\mu$.

8. **Πολυώνυμον μὴ πλῆρες.** Ἂν θελήσωμεν νὰ συμπληρώσω-

μεν τὰ κενά, ἅτινα παρουσιάζει πολυώνυμον μὴ πλῆρες διὰ τῆς παρεμβολῆς ἄλλων ὅρων, τὸ πλῆθος τῶν παραλλαγῶν αὐτοῦ αὐξάνει κατ' ἄρτιον ἀριθμόν, διότι ἡ παρεμβολὴ ἑνὸς νέου ὅρου μεταξὺ δύο ὁμοσήμων ἢ δὲν προσθέτει οὐδεμίαν παραλλαγήν, ἢ προσθέτει δύο τοιαύτας, ἡ δὲ παρεμβολὴ ἑνὸς νέου ὅρου μεταξὺ δύο ἑτεροσήμων οὐδεμίαν προσθέτει παραλλαγὴν διότι ἀντικαθιστᾷ τὴν ὑπάρχουσαν δι' ἄλλης, λ. χ. ἡ παρεμβολὴ τοῦ + μεταξὺ + καὶ — δίδει ++—, ἡ δὲ παρεμβολὴ τοῦ — δίδει +——, ἡ παρεμβολὴ τοῦ + μεταξὺ + καὶ + οὐδὲν προσθέτει ἡ δὲ παρεμβολὴ τοῦ — μεταξὺ + καὶ + προσθέτει δύο νέας παραλλαγάς. Ἐὰν λοιπὸν συμπληρώσωμεν ὅλα τὰ κενά, τὸ προκῦπτον πλῆρες πολυώνυμον θὰ ἔχῃ πλῆθος παραλλαγῶν $p+2h$ τὸ δὲ μετεσχηματισμένον αὐτοῦ θὰ ἔχῃ πλῆθος πλῆθος παραλλαγῶν $p'+2h'$, ὅπου h καὶ h' εἶνε ἀριθμοὶ ἀκέραιοι καὶ θετικοί· ἀλλὰ τότε κατὰ τὸ ἐδάφιον (7) θὰ ἔχωμεν:

$p+2h+p'+2h=\mu$ καὶ ἑπομένως $p+p'=\mu-2\rho$ (5), ὅπου ρ ἀκέραιος καὶ θετικός. Συνάγομεν λοιπὸν τὸ ἑξῆς θεώρημα :

Τὸ ἄθροισμα $p+p'$ τοῦ πλήθους τῶν παραλλαγῶν δοθέντος πολυωνύμου καὶ τοῦ μετεσχηματισμένου αὐτοῦ εἶνε ἢ ἴσον τῷ βαθμῷ μ τοῦ πολυωνύμου ἢ μικρότερον αὐτοῦ κατ' ἄρτιον.

9. Ἐὰν καλέσωμεν ϑ τὸ πλῆθος τῶν θετικῶν ῥιζῶν τοῦ πολυωνύμου $\sigma(\chi)$ καὶ ϑ' τὸ τῶν ἀρνητικῶν, θὰ ἔχωμεν, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Καρτεσίου, τοὺς τύπους : $p=\vartheta+2\lambda$, $p'=\vartheta'+2\lambda'$ (ὅπου λ,λ' ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ) ἀντικαθιστῶντες δὲ εἰς τὸν τύπον (5) λαμβάνομεν :

$$\vartheta+2\lambda+\vartheta'+2\lambda'=\mu-2\rho \text{ ἢ } \vartheta+\vartheta'+2(\lambda+\lambda'+\rho)=\mu \quad (6)$$

Ἐὰν ἤδη ὑποθέσωμεν ὅτι πᾶσαι αἱ ῥίζαι τοῦ πολυωνύμου εἶνε πραγματικαὶ θὰ ἔχωμεν : $\vartheta+\vartheta'=\mu$, καὶ ἑπομένως ὁ τύπος (6) δίδει τὴν ἰσότητα $\lambda+\lambda'+\rho=0$, ἥτις συνεπάγεται τὰς τρεῖς $\lambda=0$, $\lambda'=0$, $\vartheta=0$· ἐντεῦθεν ἕπεται τὸ ἑξῆς θεώρημα :

Ὅταν πᾶσαι αἱ ῥίζαι ἑνὸς πολυωνύμου εἶνε πραγματικαί, τὸ πλῆθος τῶν θετικῶν ῥιζῶν αὐτοῦ ἰσοῦται ἀκριβῶς πρὸς τὸ πλῆθος τῶν παραλλαγῶν αὐτοῦ. τὸ δὲ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν ῥιζῶν ἰσοῦται ἀκριβῶς πρὸς τὸ πλῆθος τῶν παραλλαγῶν τοῦ μετασχηματισμένου πολυωνύμου.

Ἀσκήσεις.

Νὰ ἐφαρμοσθῇ τὸ θεώρημα τοῦ Καρτεσίου εἰς τὰ ἑπόμενα πολυώνυμα : $\chi^5+4\chi^3-5$, $\chi^5-4\chi^4-2\chi^3+\chi^2+3\chi-8$, $\chi^4-3\chi^3+4\chi-1$, $\chi^6+2\chi^2+\chi-3$, $\chi^7-5\chi^3+8\chi^2-4\chi+6$, $\chi^5-15\chi^4-14\chi^3+36\chi^2+24\chi$.

2) Ὅμοιον ζήτημα διὰ τὴν ἐξίσωσιν $\chi^3+p\chi+q=0$.

3) Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν πολυώνυμον $A_0\chi^\mu+A_1\chi^{\mu-1}+\ldots+A_\mu$ εἶνε πλῆρες καὶ παρουσιάζῃ μόνον παραλλαγάς, ἔχει πάσας αὐτοῦ τὰς πραγματικὰς ῥίζας θετικάς.

III. Τὸ θεώρημα τοῦ Sturm.

10. Τὸ θεώρημα τοῦ Sturm παρέχει ἀκριβῶς τὸ πλῆθος τῶν πραγματικῶν ῥιζῶν ἑνὸς πολυωνύμου τῶν περιεχομένων μεταξὺ δύο ἀριθμῶν α καὶ β, στηρίζεται δ' ἐπὶ τοῦ ἑξῆς λήμματος : **Ἐὰν θεωρήσωμεν πραγματικὴν ῥίζαν $\chi=\alpha$ ἑνὸς πολυωνύμου $\sigma(\chi)$, τοῦτο ὀλίγον πρὸ τῆς ῥίζης εἶνε ἑτερόσημον πρὸς τὴν παράγωγον $\sigma'(\chi)$ ὀλίγον δὲ μετὰ τὴν ῥίζαν εἶνε ὁμόσημον πρὸς αὐτήν.**

Ἀπόδειξις. Θεωρήσωμεν ἓν διάστημα $(\alpha-\varepsilon\ldots\alpha\ldots\alpha+\varepsilon)$, ἐν τῷ ὁποίῳ ἡ παράγωγος νὰ μὴ ἔχῃ ἄλλην ῥίζαν ἐκτὸς ἴσως τῆς $\chi=\alpha$. Ἐν τῷ πρὸ τῆς α διαστήματι, ἂν μὲν ἡ παράγωγος εἶνε θετική, ἡ συνάρτησις εἶνε αὔξουσα καὶ ἐπειδὴ μηδενίζεται διὰ $\chi=\alpha$, ἕπεται ὅτι ἐν τῷ διαστήματι $\alpha-\varepsilon\ldots\alpha$ εἶνε ἀρνητική· ἐὰν δὲ ἡ παράγωγος εἶνε ἀρνητική, ἡ συνάρτησις εἶνε φθίνουσα καὶ ἐπειδὴ μηδενίζεται διὰ $\chi=\alpha$ ἕπεται ὅτι εἶνε θετικὴ ἐν τῷ αὐτῷ διαστήματι· βλέπομεν δηλ. ὅτι ἐν αὐτῷ ἡ συνάρτησις εἶνε πάντοτε ἑτερόσημος πρὸς τὴν παράγωγον. Ὁμοίως δεικνύεται ὅτι ἐν τῷ μετὰ τὴν ῥίζαν διαστήματι $\alpha\ldots\alpha+\varepsilon$ ἡ συνάρτησις καὶ ἡ παράγωγος εἶνε ὁμόσημοι.

Τὰ πολυώνυμα τοῦ Sturm. Ἂν τὸ δοθὲν πολυώνυμον X διαιρεθῇ διὰ τῆς παραγώγου αὐτοῦ X_1 καὶ καλέσωμεν Q_1 τὸ πηλῖκον καὶ $-X_2$ τὸ ὑπόλοιπον, κατόπιν δὲ τὸ X_1 διαιρεθῇ διὰ X_2 καὶ καλέσωμεν Q_2 τὸ πηλῖκον καὶ $-X_3$ τὸ ὑπόλοιπον κ.ο.κ., θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις :

$$X=X_1Q_1-X_2$$
$$X_1=X_2Q_2-X_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_{\nu-1}=X_\nu Q_\nu-X_{\nu+1} \qquad (7)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_{K-2}=X_{K-1}Q_{K-1}-X_K$$

παρατηροῦμεν δὲ ὅτι αἱ διαιρέσεις αὗται εἶνε ἐκεῖναι, δι' ὧν εὑρίσκεται ὁ μ. κ. δ. τῶν πολυωνύμων X καὶ X_1, ὅστις ἔστω X_K. Τὰ πολυώνυμα: X, X_1, X_2, X_3, ..., $X_{\nu-1}$, X_ν, $X_{\nu+1}$, ..., X_κ, καλοῦνται πολυώνυμα τοῦ Sturm.

Τὸ Θεώρημα τοῦ Sturm διατυποῦται ὡς ἑξῆς: **Τὸ πλῆθος τῶν πραγματικῶν ῥιζῶν τοῦ πολυωνύμου X τῶν περιλαμβανομένων μεταξὺ δύο δοθέντων ἀριθμῶν α καὶ β ἰσοῦται πρὸς τὸ πλῆθος τῶν παραλλαγῶν, αἵτινες ἀπόλλυνται ἐν τῇ σειρᾷ τῶν πολυωνύμων τοῦ** Sturm, **ὅταν μεταβαίνωμεν ἀπὸ τῆς τιμῆς $\chi=\alpha$ εἰς τὴν τιμὴν $\chi=\beta$, (ἐὰν $\alpha<\beta$)**, δηλ. ἡ σειρὰ τῶν ἀριθμῶν $X(\alpha)$, $X_1(\alpha)$, $X_2(\alpha)$, ..., $X_\nu(\alpha)$, ...$X_\kappa(\alpha)$ παρουσιάζει πλείονας παραλλαγὰς ἢ ἡ σειρά: $X(\beta)$, $X_1(\beta)$, ..., $X_\nu(\beta)$, ..$X_\kappa(\beta)$ τὸ δὲ πλῆθος τῶν ἐπὶ πλέον τούτων παραλλαγῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ πλῆθος τῶν πραγματικῶν ῥιζῶν τοῦ πολυωνύμου X τῶν περιλαμβανομένων μεταξὺ α καὶ β. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν ἔχομεν δύο περιπτώσεις:

α΄. περίπτωσις. Ὑποτεθείσθω ὅτι τὸ δοθὲν πολυώνυμον X δὲν ἔχει πολλαπλᾶς ῥίζας, ὅτε τὸ X_κ θὰ εἶνε σταθερὰ ποσότης διάφορος τοῦ μηδενὸς διότι τὰ X καὶ X_1 δὲν ἔχουσι καμμίαν κοινὴν ῥίζαν. Ὅταν λοιπὸν τὸ χ μεταβαλλόμενον (αὐξανόμενον) μεταβαίνῃ ἀπὸ τῆς τιμῆς α εἰς τὴν β, ἵνα ἐπέλθῃ μεταβολὴ εἰς τὰς παραλλαγὰς τῶν πολυωνύμων τοῦ Sturm πρέπει ἓν τοὐλάχιστον ἐξ αὐτῶν ν' ἀλλάξῃ σημεῖον καὶ ἐπομένως νὰ μηδενισθῇ πρότερον· δέον λοιπὸν νὰ ἐξετάσωμεν τί συμβαίνει ὅταν μηδενίζεται ἓν τοὐλάχιστον πολυώνυμον τοῦ Sturm.

Ὅταν τὸ X μηδενίζεται χάνεται μία τοὐλάχιστον παραλλαγή, διότι, κατὰ τὸ λῆμμα, τὰ X καὶ X_1 εἶνε ἑτερόσημα πρὸ τῆς ῥίζης, ἐνῷ μετὰ τὴν ῥίζαν γίνονται ὁμόσημα. Ὅταν ἄλλο πολυώνυμον τοῦ Sturm μηδενίζηται, θὰ δείξωμεν ὅτι δὲν χάνεται οὐδεμία παραλλαγή. Παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι, ὅταν μηδενίζηται ἓν ἐξ αὐτῶν λ. χ. τὸ X_ν, δὲν εἶναι δυνατὸν συγχρόνως (διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν τοῦ χ) νὰ μηδενίζεται καὶ ἓν ἐκ τῶν γειτονικῶν, διότι ἂν ἐμηδενίζετο καὶ τὸ $X_{\nu-1}$ π. χ., αἱ σχέσεις (7) δεικνύουσιν ἀμέσως ὅτι, διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν τοῦ χ θὰ ἐμηδενίζοντο ὅλα τὰ πολυώνυμα τοῦ Sturm, τοῦθ' ὅπερ ἀδύνατον, διότι τὸ X_κ εἶνε σταθερὰ ποσότης διάφορος τοῦ μηδενός, ἐπίσης δὲ τὸ X καὶ ἡ παράγωγος X_1 δὲν δύνανται νὰ μηδενισθῶσι συγχρόνως. Ὅταν λοιπὸν τὸ X_ν διά τινα τιμὴν $\chi=\rho$ μηδενισθῇ καὶ ἀλλάξῃ σημεῖον, τὰ ἑκατέρωθεν πολυώνυμα $X_{\nu-1}$ καὶ $X_{\nu+1}$ δὲν μηδενίζονται διὰ $\chi=\rho$, καὶ ἔχομεν $X_{\nu-1}=-X_{\nu+1}$, δηλ. διὰ $\chi=\rho$ καὶ τὰς γειτονικὰς τιμὰς τὰ πολυώνυμα ταῦτα εἶναι ἑτερόσημα καὶ ἐπομένως ἡ ἀλλαγὴ τοῦ σημείου τοῦ X_ν οὐδόλως βλάπτει τὸ πλῆθος τῶν παραλλαγῶν, ἃς παρουσιάζουσι τὰ $X_{\nu-1}$, X_ν, $X_{\nu+1}$. Συνάγομεν λοιπὸν ὅτι, ὅταν τὸ πρῶτον πολυώνυμον X μηδενίζηται, ἀπόλλυται μία παραλλαγή, καὶ ἀντιστρόφως, ὅταν ἀπόλλυται μία παραλλαγή, κατ' ἀνάγκην μηδενίζεται τὸ X. Ἄρα, τοσάκις μηδενίζεται τὸ X μεταξὺ τῶν α καὶ β ὅσαι παραλλαγαὶ ἀπόλλυνται, ὅταν τὸ χ συνεχῶς αὐξάνῃ ἀπὸ τῆς $\chi=\alpha$ μέχρι τῆς $\chi=\beta$.

β΄. περίπτωσις. Ἐὰν τὸ δοθὲν πολυώνυμον X ἔχῃ καὶ πολλαπλᾶς ῥίζας, ὅτε τὰ X καὶ X_1 δὲν θὰ εἶνε πρῶτα πρὸς ἄλληλα, διὰ νὰ κάμωμεν τὴν ἀπόδειξιν, διαιροῦμεν πάντα τὰ πολυώνυμα τοῦ Sturm διὰ τοῦ μ. κ. δ. X_K καὶ καλοῦμεν :

$$\frac{X}{X_K}=Y,\ \frac{X_1}{X_K}=Y_1\ \frac{X_2}{X_K}=Y_2, \ldots, \frac{X_\nu}{X_K}=Y_\nu, \ldots, \frac{X_K}{X_K}=1.$$

Τὰ νέα πολυώνυμα $Y, Y_1, Y_2, \ldots, Y_\nu, \ldots, 1$, συνδέονται προφανῶς διὰ σχέσεων τῆς μορφῆς (7), διότι ἂν διαιρέσωμεν διὰ X_K ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς σχέσεως : $X_{\nu-1}=Q_\nu X_\nu-X_{\nu+1}$ προκύπτει : $Y_{\nu-1}=Q_\nu Y_\nu-Y_{\nu+1}$, καὶ ἑπομένως τὰ νέα πολυώνυμα ἔχουσιν ὅλας τὰς ἰδιότητας τῆς προηγουμένης περιπτώσεως, καθ' ὅσον τὸ τελευταῖον εἶνε πάλιν σταθερὰ διάφορος τοῦ μηδενός. Ὥστε τὸ πλῆθος τῶν πραγματικῶν ῥιζῶν τοῦ πολυωνύμου Y ἰσοῦται τῷ πλήθει τῶν παραλλαγῶν, αἵτινες χάνονται ἐν τῇ σειρᾷ :

$$(8)\quad Y, Y_1, Y_2, \ldots, Y_\nu, \ldots, 1$$

παρατηρῶ ὅμως ὅτι ἡ σειρὰ αὕτη δύναται ν' ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τῆς σειρᾶς τοῦ Sturm :

$$(9)\quad X, X_1, \ldots, X_\nu, \ldots, X_K$$

διότι τὰ πολυώνυμα ταῦτα εἶνε ἀνάλογα τῶν πολυωνύμων (8) καὶ ἑπομένως ἑκάστοτε αἱ σειραὶ (8) καὶ (9) παρουσιάζουσι τὸ αὐτὸ πλῆθος παραλλαγῶν· ἀφ' ἑτέρου, ὡς γνωστόν, ὁ μ. κ. δ. X_K περιέχει μόνον τὰς πολλαπλᾶς ῥίζας τοῦ X μὲ βαθμὸν πολ)τητος κατὰ μονάδα μικρότερον καὶ ἄρα τὸ πηλῖκον $Y=\frac{X}{X_K}$ θὰ ἔχῃ πάσας τὰς ῥίζας τοῦ δοθέντος πολυωνύμοου ἀλλ' ὡς ἁπλᾶς. Τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη λοιπὸν μὲ τὴν παρατήρησιν ὅμως ὅτι τὸ θεώρημα τοῦ Sturm παρέχει τὸ πλῆθος τῶν πραγματικῶν ῥιζῶν θεωρουμένων ὡς ἁπλῶν, δηλ. δὲν λαμβάνει ὑπ' ὄψιν τὸν β. π. τῶν ῥιζῶν.

Ἂν θέλωμεν τὸ πλῆθος πασῶν τῶν πραγματικῶν ῥιζῶν δηλ. τῶν περιλαμβανομένων μεταξὺ $-\infty$ καὶ $+\infty$, δέον νὰ λάβωμεν : $\alpha=-\infty$

καὶ $\beta=+\infty$, δηλ. τὸ α νὰ εἶνε ἀριθμὸς ἀρνητικὸς ἀπεριορίστως μέγας κατ' ἀπόλυτον τιμὴν τὸ δὲ β νὰ εἶνε ἀριθμὸς θετικὸς ἐπίσης ἀπεριορίστως μέγας.

11, **Ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα πᾶσαι αἱ ῥίζαι ὦσιν πραγματικαί.** Ἐὰν τὸ δοθὲν πολυώνυμον X εἶνε βαθμοῦ μ ἡ παράγωγος X_1 θὰ εἶνε βαθμοῦ μ—1, τὸ X_2 θὰ εἶνε τὸ πολὺ μ—2, ...καὶ τέλος τὸ X_μ θὰ εἶνε βαθμοῦ 0, ἄρα τὰ πολυώνυμα τοῦ Sturm εἶνε τὸ πολὺ μ+1 καὶ ἑπομένως δὲν δύνανται νὰ παρουσιάσουν περισσοτέρας τῶν μ παραλλαγῶν. Λοιπόν, ἵνα πᾶσαι αἱ ῥίζαι ὦσι πραγματικαί, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ν' ἀπολεσθῶσι μ παραλλαγαὶ ὅταν μεταβαίνωμεν ἀπὸ τῆς τιμῆς $\chi=-\infty$ εἰς τὴν τιμὴν $\chi=\infty$, καὶ ἄρα πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ συμβαίνωσι τὰ ἑξῆς :

α΄) διὰ $\chi=-\infty$ ἡ σειρὰ τοῦ Sturm νὰ ἔχῃ μ παραλλαγάς, τοῦθ' ὅπερ εἶνε δυνατὸν μόνον ὅταν αὕτη εἶνε πλήρης, δηλ. ὅταν ὁ βαθμὸς τῶν πολυωνύμων μεταβάλλεται συνεχῶς, χωρὶς κενά, ἀπὸ μ μέχρι 0.

β΄) Ἵνα δὲ πράγματι ἔχῃ μ παραλλαγὰς διὰ $\chi=-\infty$ πρέπει καὶ ἀρκεῖ οἱ πρῶτοι συντελεσταὶ τῶν πολυωνύμων νὰ εἶνε πάντες ὁμόσημοι, διότι διὰ $\chi=-\infty$ τὰ πολυώνυμα ἔχουσιν ὡς γνωστόν, τὸ σημεῖον τοῦ πρώτου ὅρου τὸ ὁποῖον θὰ εἶνε τότε ἐναλλὰξ θετικὸν καὶ ἀρνητικόν· ἀφ' ἑτέρου διὰ $\chi=+\infty$ ἅπαντες οἱ πρῶτοι ὅροι θὰ εἶνε ὁμόσημοι καὶ ἑπομένως χάνονται πᾶσαι αἱ παραλλαγαί, αἵτινες ὑπῆρχον διὰ $\chi=-\infty$.

Παράδειγμα. Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τ' ἀνωτέρω εἰς τὸ πολυώνυμον: $X=\chi^3+p\chi+q$, λαμβάνομεν τὴν ἑξῆς σειρὰν πολυωνύμων τοῦ Sturm:

$$X=\chi^3+p\chi+q$$
$$X_1=3\chi^2+p$$
$$X_2=-2p\chi-3q$$
$$X_3=-\frac{27q^2+4p^3}{4p^2}$$

ἥτις ὡς βλέπομεν εἶνε πλήρης· ἐπειδὴ ὁ πρῶτος συντελεστὴς τοῦ X εἶνε θετικός, αὐτὸ πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ συμβαίνῃ καὶ εἰς τὰ ἄλλα πολυώνυμα, καὶ ἑπομένως ἔχομεν τὰς συνθήκας : $p<0$, καὶ $27q^2+4p^3<0$, ἐξ ὧν ἡ δευτέρα γραφομένη καὶ ὡς ἑξῆς : $\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2<0$ περιλαμβάνει καὶ τὴν πρώτην· εἶνε ἀκριβῶς ἡ εὑρεθεῖσα καὶ διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τοῦ Rolle.

Ἀσκήσεις.

1. Πόσας ῥίζας πραγματικὰς θετικὰς καὶ ἀρνητικὰς ἔχει ἡ ἐξίσωσις: $\chi^5-3\chi^3+\chi^2-8\chi-10=0$ (τρεῖς, ὧν δύο θετικαὶ καὶ μία ἀρνητική).

2. Ὅμοιον ζήτημα καὶ διὰ τήν: $\chi^5-5\chi^3+10\chi^2-15\chi+16=0$ (μίαν ἀρνητικήν).

3. Ὁμοίως διὰ τὴν ἐξίσωσιν: $\chi^6+3\chi^4-4\chi^3+6\chi^2+12\chi-18=0$ (μίαν ἀρνητικὴν καὶ μίαν θετικήν).

4. Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις $\chi^3+p\chi+q=0$ ἔχει πάσας τὰς ῥίζας της πραγματικάς, αὗται, ὅταν μὲν $q>0$, εἶνε δύο θετικαὶ καὶ μία ἀρνητική, ὅταν δὲ $q<0$, εἶνε μία θετικὴ καὶ δύο ἀρνητικαί.

5. Δεῖξαι ὅτι ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^3+3\beta\chi^2+3\gamma\chi+\delta=0$ εἶνε πᾶσαι πραγματικαὶ εἶνε ἡ ἑξῆς:

$$[\alpha(\beta\gamma-\alpha\delta)-2\beta(\beta^2-\alpha\gamma)]^2-4(\beta^2-\alpha\gamma)^3<0$$

6. Ἐφαρμόσαι τὸ θεώρημα τοῦ Sturm εἰς τὴν διτετράγωνον ἐξίσωσιν: $\alpha\chi^4+\beta\chi^2+\gamma=0$.

7. Ὁμοίως εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi^m+p\chi+q=0$.

8. Νὰ ἐφαρμοσθῇ τὸ θεώρημα τοῦ Sturm εἰς τὴν ἐξίσωσιν:

$$\chi^5+5\varrho\chi^3+5\varrho\chi^2+q=0.$$

9. Ὅμοιον ζήτημα διὰ τὴν ἐξίσωσιν:

$$10\chi^4-5\chi^3-76\chi^4+58\chi-33=0.$$

Τὸ παράδειγμα τοῦτο ἐθεώρησεν ὁ Sturm·

IV. Ὅρια τῶν πραγματικῶν ῥιζῶν

12. **Ἀνώτερον ὅριον τῶν ῥιζῶν** καλεῖται ἀριθμός τις m μεγαλείτερος πασῶν τῶν ῥιζῶν τοῦ πολυωνύμου. Διὰ τὴν εὕρεσιν τοιούτου ἀριθμοῦ ἔχομεν τὸ ἑξῆς λῆμμα: **Ὅταν ἓν πολυώνυμον $\sigma(\chi)=A_0\chi^\mu+A_1\chi^{\mu-1}+A_2\chi^{\mu-2}+\ldots-A_\nu\chi^{\mu-\nu}-A_{\nu+1}\chi^{\mu-\nu-1}-\ldots$ διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ χ καὶ ἔχον θετικὸν τὸν πρῶτον συντελεστήν, παρουσιάζῃ μίαν μόνην παραλλαγὴν καὶ γίνεται θετικὸν διά τινα τιμὴν $\chi=\theta$, τὸ πολυώνυμον αὐξάνει σὺν τῷ χ ἀπὸ τῆς τιμῆς ταύτης καὶ ἐπομένως ἡ τιμὴ θ θὰ εἶνε ἀνώτερον ὅριον τῶν ῥιζῶν.**

Διότι, ἔχομεν:

$$\sigma(\chi)=\chi^{\mu-\nu}[(A_0\chi^\nu+A_1\chi^{\nu-1}+A_2\chi^{\nu-2}+\ldots)-(A_\nu+A_{\nu+1}\frac{1}{\chi}+\ldots)]$$

$$\text{ἢ καὶ} \quad \sigma(\chi)=\chi^{\mu-\nu}\left[\varphi(\chi)-f\left(\frac{1}{\chi}\right)\right]$$

καὶ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ μὲν $\varphi(\chi)$ εἶνε θετικὸν διὰ πᾶσαν θετικὴν τιμὴν τοῦ χ καὶ αὐξάνει σὺν τῷ χ, τὸ δὲ $f\left(\frac{1}{\chi}\right)$ εἶνε ἐπίσης θετικὸν διὰ πᾶσαν θετικὴν τιμὴν τοῦ χ καὶ ἐλαττοῦται τοῦ χ αὐξάνοντος· ἂν λοιπὸν διὰ $\chi=\theta$ τὸ πολυώνυμον $\sigma(\chi)$ λαμβάνει τιμὴν θετικὴν p, διὰ $\chi>\theta$ θὰ ἔχωμεν $\sigma(\chi)>p$ καὶ ἄρα τὸ $\sigma(\chi)$ δὲν δύναται νὰ μηδενίζηται διὰ $\chi>\theta$· ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι τὸ θ εἶνε ἀνώτερον ὅριον τῶν ῥιζῶν.

Θεώρημα Α΄. Ἐὰν καλέσωμεν N τὴν μεγίστην ἐκ τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν ἀρνητικῶν συντελεστῶν δοθέντος πολυωνύμου: $\sigma(\chi)=\chi^{\mu}+A_1\chi^{\mu-1}+\ldots+A_\nu\chi^{\mu-\nu}+A_{\nu+1}\chi^{\mu-\nu-1}+\ldots+A_\mu$ καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι A_ν εἶνε ὁ πρῶτος ἀρνητικὸς συντελεστής, ὁ ἀριθμὸς $1+\sqrt[\nu]{N}$ εἶνε ἀνώτερον ὅριον τῶν πραγματικῶν ῥιζῶν τοῦ πολυωνύμου.

Ἀπόδειξις. Ἂν προσθέσωμεν καὶ ἀφαιρέσωμεν τοὺς ὅρους: $N\chi^{\mu-\nu}$, $N\chi^{\mu-\nu-1}$, $\ldots N\chi$, N, λαμβάνομεν: $\sigma(\chi)=\chi^{\mu}-N(\chi^{\mu-\nu}+\chi^{\mu-\nu-1}+\ldots+\chi^2+\chi+1)+A_1\chi^{\mu-1}+A_2\chi^{\mu-2}+\ldots+A_{\nu-1}\chi^{\mu-\nu+1}+(A_\nu+N)\chi^{\mu-\nu}+(A_{\nu+1}+N)\chi^{\mu-\nu-1}+\ldots+A_\mu+N$. δηλ. $\sigma(\chi)=\varphi(\chi)+f(\chi)$ ὅπου $\varphi(\chi)=\chi^{\mu}-N(\chi^{\mu-\nu}+\ldots+\chi^2+\chi+1)$· ἐκ τῶν δύο τούτων πολυωνύμων $\varphi(\chi)$ καὶ $f(\chi)$ τὸ μὲν δεύτερον, ὡς ἔχον πάντας τοὺς συντελεστὰς θετικούς, εἶνε θετικὸν διὰ πᾶσαν θετικὴν τιμὴν τοῦ χ καὶ αὐξάνει σὺν τῷ $\chi>0$, τὸ δὲ πρῶτον παρουσιάζει μόνον μίαν παραλλαγὴν καὶ ἀρχίζει ἀπὸ θετικὸν συντελεστήν. Ἐὰν λοιπόν, κατὰ τὸ λῆμμα, εὑρεθῇ θετικὴ τιμὴ $\chi=\theta$, καθιστῶσα θετικὸν τὸ $\varphi(\chi)$, αὕτη θὰ εἶνε προφανῶς ἀνώτερον ὅριον. Πρὸς εὕρεσιν ταύτης παρατηρῶ ὅτι: $\chi^{\mu-\nu}+\chi^{\mu-\nu-1}+\ldots+\chi^2+\chi+1=\frac{\chi^{\mu-\nu+1}-1}{\chi-1}$ καὶ ἐπομένως: $\varphi(\chi)=\chi^{\mu}-N$

$$\frac{\chi^{\mu-\nu+1}-1}{\chi-1}=\frac{\chi^{\mu}(\chi-1)-N\chi^{\mu-\nu+1}+N}{\chi-1}=\frac{\chi^{\mu-\nu+1}[\chi^{\nu-1}(\chi-1)-N]+N}{\chi-1}$$

ἂν δὲ ζητῶμεν τιμὴν τοῦ $\chi>1$, θὰ ἔχωμεν $\chi-1>0$ καὶ ἄρα ὁ μὲν παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος θὰ εἶνε θετικός, ὁ δὲ ἀριθμητὴς θὰ εἶνε τοιοῦτος ἄν: $\chi^{\nu-1}(\chi-1)-N>0$, καὶ ἐπειδὴ $\chi>\chi-1$ καὶ ἄρα: $\chi^{\nu-1}(\chi-1)-N>(\chi-1)^{\nu}-N$, ἀρκεῖ νὰ γείνῃ θετικὸς ὁ ἀριθμὸς $(\chi-1)^{\nu}-N$. Τοῦτο συμβαίνει ἂν $(\chi-1)^{\nu}>N$, δηλ. διὰ τὴν τιμὴν $\chi=1+\sqrt[\nu]{N}$, ἥτις διὰ τοῦτο εἶνε ἀνώτερον ὅριον τῶν πραγματικῶν ῥιζῶν. ὅ ἔ.δ.

Παράδειγμα. Εἰς τὸ πολυώνυμον $\chi^4+5\chi^3-2\chi^2+7\chi-9$ ἔχομεν $N=9$ καὶ $\nu=2$, διότι ν εἶνε πάντοτε ἡ διαφορὰ τοῦ βαθμοῦ τοῦ πρώτου ἀρνητικοῦ συντελεστοῦ ἀπὸ τοῦ βαθμοῦ τοῦ πολυωνύμου· ἄρα ὁ ἀριθμὸς $1+\sqrt{9}=4$ εἶνε ἀνώτερον ὅριον τῶν πραγματικῶν ῥιζῶν.

Μέθοδος τοῦ Νεύτωνος. Θεώρημα Β΄. Ἐὰν ἀριθμός τις $\chi=\alpha$ καθιστᾷ θετικὸν ἓν πολυώνυμον $\sigma(\chi)$ καὶ πάσας τὰς παραγώγους αὐτοῦ, οὗτος εἶνε ἀνώτερον τῶν ῥιζῶν. Διότι, κατὰ τὸν τύπον τοῦ Taylor, ἐὰν μ εἶνε ὁ βαθμὸς τοῦ πολυωνύμου, θὰ ἔχωμεν: $\sigma(\alpha+\varepsilon)=\sigma(\alpha)+\frac{\varepsilon}{1}\sigma'(\alpha)+\frac{\varepsilon^2}{1.2}\sigma''(\alpha)+\frac{\varepsilon^3}{3!}\sigma'''(\alpha)+\ldots+\frac{\varepsilon^\mu}{\mu!}\sigma^{\mu}(\alpha)$

ἂν λοιπὸν ἔχωμεν $\sigma(\alpha)>0$ $\sigma'(\alpha)>0,\ldots,$ $\sigma^{(\mu)}(\alpha)>0$ προσέτι δὲ $\varepsilon>0$ δηλ. $\alpha+\varepsilon>\alpha$, ὁ προηγούμενος τύπος δεικνύει ὅτι $\sigma(\alpha+\varepsilon)>0$ καὶ ἑπομένως οὐδεὶς ἀριθμὸς μεγαλείτερος ἢ ἴσος τοῦ α δύναται νὰ μηδενίζῃ τὸ πολυώνυμον, ἄρα ὁ α θὰ εἶνε ἀνώτερον ὅριον τῶν ῥιζῶν. Ἐὰν π.χ. θεωρήσωμεν τὸ πολυώνυμον $\sigma(\chi)=\chi^4+5\chi^3-2\chi^2+7\chi-9$, ἔχομεν: $\sigma'(\chi)=4\chi^3+15\chi^2-4\chi+7$, $\sigma''(\chi)=12\chi^2+30\chi-4$, $\sigma'''(\chi)=24\chi+30$, $\sigma^{(4)}(\chi)=24$, παρατηροῦμεν δὲ ὅτι αἱ $\sigma'''(\chi)$ καὶ $\sigma^{(4)}(\chi)$ εἶνε θετικαὶ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ θετικήν, ἡ $\sigma''(\chi)$ γίνεται θετικὴ διὰ $\chi=1$, ἥτις καὶ τὰ $\sigma'(\chi)$, $\sigma(\chi)$ καθιστᾷ θετικά· ἄρα ἡ τιμὴ $\chi=1$ εἶνε ἀνώτερον ὅριον τῶν ῥιζῶν. Οὕτω διὰ τῆς μεθόδου τοῦ Νεύτωνος ἔχομεν καλλίτερον ὅριον διὰ τὸ θεωρηθὲν πολυώνυμον.

Τρίτη μέθοδος. Αὕτη συνίσταται εἰς τὴν ἀνάλυσιν τοῦ δοθέντος πολυωνύμου εἰς ἄλλα παρουσιάζοντα μίαν μόνον παραλλαγὴν καὶ ἐπιδεκτικὰ ἐφαρμογῆς τοῦ λήμματος, π.χ. τὸ $\sigma(\chi)=\chi^4+5\chi^3-2\chi^2+7\chi-9=(\chi^4+5\chi^3-2\chi^2)+(7\chi-9)$, ὅπερ θεωρῶ ὡς ἄθροισμα τῶν πολυωνύμων $\chi^4+5\chi^3-2\chi^2$ καὶ $7\chi-9$, εἰς τὰ ὁποῖα, ὡς παρουσιάζοντα μίαν μόνην παραλλαγὴν καὶ ἔχοντα θετικὸν τὸν πρῶτον συντελεστήν, ἐφαρμόζω τὸ λῆμμα· παρατηρῶ ὅτι τὸ πρῶτον γίνεται θετικὸν διὰ $\chi=1$ τὸ δὲ δεύτερον διὰ $\chi=2$, ἄρα ὁ 2 εἶνε ἀνώτερον ὅριον τῶν ῥιζῶν.

13. **Κατώτερον ὅριον τῶν ῥιζῶν** καλεῖται ὁ ἀριθμός τις μικρότερος πασῶν τῶν ῥιζῶν· ἡ εὕρεσις τοιούτου ὁρίου ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως $\chi=-\psi$, διότι, ὅταν $\psi<m$, θὰ εἶνε $\chi=-\psi>-m$ ἄρα, ἂν εὕρωμεν ἀνώτερον ὅριον d τῶν ῥιζῶν τοῦ μετεσχηματισμένου πολυωνύμου $\sigma(-\psi)=\sigma_1(\psi)$, τότε τὸ $-m$ θὰ εἶνε κατώτερον ὅριον τῶν ῥιζῶν τοῦ δοθέντος πολυωνύμου.

14. **Κατώτερον ὅριον τῶν θετικῶν ῥιζῶν.** Τοιοῦτον εὑρίσκε-

ται διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ $\chi=\frac{1}{\psi}$, διότι, ὅταν $0<\psi<m$, θὰ $\chi=\frac{1}{\psi}>\frac{1}{m}$· ἂν λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς m εἶνε ἀνώτερον ὅριον τῶν θετικῶν ῥιζῶν τῆς μετεσχηματισμένης ἐξισώσεως, ὁ ἀριθμὸς $\frac{1}{m}$ θὰ εἶνε κατώτερον ὅριον τῶν θετικῶν ῥιζῶν τῆς δοθείσης· βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ἡ εὕρεσις κατωτέρου ὁρίου τῶν θετικῶν ῥιζῶν ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν ἀνωτέρου ὁρίου τῆς διὰ τῆς ἀνωτέρω ἀντικαταστάσεως μετεσχηματισμένης ἐξισώσεως.

Ἀσκήσεις.

1. Εὑρεῖν ἀνώτερον καὶ κατώτερον ὅριον τῶν ῥιζῶντῶν ἑξῆς πολυωνύμων $\chi^7+4\chi^6-10\chi^5-13\chi^4+7\chi^3+12\chi^2-9$ [5, —13 Α΄. Μέθοδος], $\chi^6-2\chi^5+4\chi^4-10\chi^3+5\chi^2-10\chi-6$, $\chi^6-2\chi^5+4\chi^4-10\chi^3+5\chi^2-10\chi-6$ [5 καὶ —2 Α΄. Μέθοδος.]

$\chi^4-6\chi^3+2\chi^2-20\chi-15=0$ [Ἀνώτ. ὅριον 11, τρίτη Μέθοδος].

$\chi^3+3\chi^2-17\chi+5=0$ [3 καὶ $\frac{1}{4}$, τρίτη Μέθοδος].

$\chi^5+\chi^4-\chi^3+\chi-10000$ [101 Ἀν. ὅριον, Α΄. Μέθοδος].

2. Δεῖξαι ὅτι τὸ πολυώνυμον $\chi^4-\chi+1$ ἔχει πάσας αὐτοῦ τὰς ῥίζας φανταστικάς. [Κοινὸν ἀνώτερον καὶ κατώτερον ὅριον τῶν θετικῶν ῥιζῶν. Τρίτη μέθοδος].

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΛΥΣΙΣ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕΘ' ΕΝΟΣ ΑΓΝΩΣΤΟΥ

I. Ἀλγεβρικὴ λύσις ἐξισώσεων τρίτου καὶ τετάρτου βαθμοῦ.

1. **Ἐξίσωσις τρίτου βαθμοῦ.** Εἴδομεν ὅτι ἡ γενικὴ ἐξίσωσις τρίτου βαθμοῦ $\chi^3+\beta\chi^2+\gamma\chi+\delta=0$ ἀπαλλάσσεται τοῦ δευτεροβαθμίου ὅρου διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως $\chi=\psi-\frac{\beta}{3}$, διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ περιορισθῶμεν εἰς ἐξισώσεις τῆς μορφῆς: $\chi^3+p\chi+q=0$ (1)

Πρώτη μέθοδος. Ἐκτελέσωμεν τὴν ἀντικατάστασιν $\chi=\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}$ καὶ ζητήσωμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὰ ὑπόρριζα u καὶ v οὕτως ὥστε τὸ ἄθροισμα μιᾶς κυβικῆς ῥίζης τοῦ u καὶ μιᾶς κυβικῆς ῥίζης τοῦ υ νὰ εἶνε ῥίζα τῆς ἐξισώσεως (1)· ἀντικαθιστῶντες λαμβάνομεν:

$u+\upsilon+3\sqrt[3]{u\upsilon}(\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{\upsilon})+p(\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{\upsilon})+q=0$ ἢ

$u+\upsilon+q+(\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{\upsilon})(3\sqrt[3]{u\upsilon}+p)=0$, ἥτις ἐπαληθεύεται, ἐὰν ἔχωμεν $u+\upsilon+q=0$ καὶ $3\sqrt[3]{u\upsilon}+p=0$, δηλ. τὰς σχέσεις $u+\upsilon=-q$ καὶ $u\upsilon=-\frac{p^3}{27}$ (2), συνοδευομένας ἀπὸ τὸν περιορισμόν· $\sqrt[3]{u\upsilon}=-\frac{p}{3}$ (3)

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (2) προκύπτει ὅτι τὰ u, υ ἀρκεῖ νὰ εἶνε ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως: $\omega^2+q\omega-\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$ δηλ.

$u=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ καὶ $\upsilon=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ καὶ ἑπομένως, ἂν θέσωμεν: $r=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$ καὶ λάβωμεν ὑπ' ὄψει ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ῥιζῶν $\sqrt[3]{u}$, $\sqrt[3]{\upsilon}$ ὀφείλει νὰ ἰσοῦται πρὸς $-\frac{p}{3}$, συμπεραίνομεν ὅτι οἱ ἀριθμοί: $\chi=r-\frac{p}{3r}$, ὅπου r ἡ τυχοῦσα κυβικὴ ῥίζα τοῦ $-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$, εἶνε ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως (1)· ἐπειδὴ ἡ r ἔχει τρεῖς τιμὰς ἀνίσους, διὰ τοῦτο ὁ τύπος $\chi=r-\frac{p}{3r}$ (4) δίδει τὰς τρεῖς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως (1) διότι, ἂν μὲν αἱ τρεῖς τιμαὶ τοῦ τύπου (4) εἶνε ἄνισοι αὗται εἶνε βεβαίως αἱ ζητούμεναι τρεῖς ῥίζαι, ἂν δὲ τὰ p καὶ q, συνεχῶς μεταβαλλόμενα, λαμβάνωσι τοιαύτας τιμὰς ὥστε τινὲς ἐκ τῶν (4) νὰ ταὐτίζωνται, τοῦτο σημαίνει ὅτι μία ἐκ τῶν ῥιζῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶνε πολλαπλῆ.

Παράδειγμα. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\chi^3-3\chi-1=0$· ἔχομεν $p=-3$, $q=-1$, $\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}=-\frac{3}{4}$ καὶ ἑπομένως $-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}}$

$=\sigma\upsilon\nu 60^\circ+i\eta\mu 60^\circ$ ἡ δὲ $r=\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu 60^\circ+i\eta\mu 60^\circ}=\sigma\upsilon\nu\frac{60^\circ+K.360^\circ}{3}+$ $+i\eta\mu\frac{60^\circ+K.360^\circ}{3}$ ἔχει τὰς ἑξῆς τιμάς: $r=\sigma\upsilon\nu 20^\circ+i\eta\mu 20^\circ$, $r=\sigma\upsilon\nu 140^\circ+i\eta\mu 140^\circ$, $r=\sigma\upsilon\nu 260^\circ+i\eta\mu 260^\circ$ ὁ τύπος (4) γίνεται ἐνταῦθα $\chi=r+\frac{1}{r}$, καὶ δίδει $\chi=2\sigma\upsilon\nu 20^\circ$, $\chi=2\sigma\upsilon\nu 140^\circ=-2\sigma\upsilon\nu 40^\circ$,

$\chi=-2$ημ$10°$, ἂς ὑπολογίζομεν διὰ τῶν λογαρίθμων.

Δευτέρα μέθοδος. Αὕτη στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἐκ τῆς ἀνωτέρας Ἀλγέβρας (σελ. 22, ἄσκησις 10) γνωστῆς ταυτότητος:

$$\chi^3+\psi^3+z^3-3\chi\psi z=(\chi+\psi+z)(\chi+\vartheta_1\psi+\vartheta^2_1 z)(\chi+\vartheta_2\psi+\vartheta^2_2 z)$$

ὅπου ϑ_1 ϑ_2 εἶνε αἱ φανταστικαὶ κυβικαὶ ῥίζαι τῆς μονάδος. Ἀρκεῖ νὰ προσδιορισθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ ψ καὶ z οὕτως ὥστε νὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις: $3\psi z=-p$ καὶ $\psi^3+z^3=q$, ἐξ ὧν προκύπτει ὅτι τὰ ψ^3 καὶ z^3 εἶνε αἱ ῥίζαι τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως $\omega^2-q\omega=\frac{p^3}{27}$.

Τρίτη μέθοδος (τριγωνομετρική). Γνωρίζομεν ἐκ τῆς τριγωνομετρίας ὅτι, οἱασδήποτε οὔσης τῆς γωνίας φ, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$\eta\mu 3\varphi=3\eta\mu\varphi-4\eta\mu^3\varphi \text{ ἢ } \eta\mu^3\varphi-\frac{3}{4}\eta\mu\varphi+\frac{1}{4}\eta\mu 3\varphi=0 \quad (4')$$

δι' ἧς, δοθέντος τοῦ ημ3φ, ζητεῖται τὸ ημφ. Ἐκτελέσωμεν ἤδη ἐπὶ τῆς (1) τὴν ἀντικατάστασιν $\chi=K\psi$, δι' ἧς αὕτη γίνεται:

$\psi^3+\frac{p}{K^2}\psi+\frac{q}{K^3}=0$ (4″), καὶ ζητήσωμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὰς ποσότητας K καὶ ημ3φ οὕτως ὥστε ἡ ἐξίσωσις (4′) ἐν ᾗ ἄγνωστον θεωρεῖται τὸ ημφ, καὶ ἡ ἐξίσωσις (4″) νὰ ἔχωσι τοὺς αὐτοὺς συντελεστάς. Πρὸς τοῦτο πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν:

$$\frac{p}{K^2}=-\frac{3}{4} \text{ καὶ } \frac{q}{K^3}=\frac{1}{4}\eta\mu 3\varphi \text{ ἢ } K^2=-\frac{4}{3}p \text{ καὶ } \eta\mu 3\varphi=\frac{4q}{K^3} \quad (\tau)$$

Οἱ τύποι οὗτοι δεικνύουσιν ὅτι, ἐὰν οἱ p καὶ q εἶνε πραγματικοί, πρέπει $p<0$, διότι, ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει, ὁ K θὰ εἶνε καθαρῶς φανταστικὸς καὶ ἡ τιμὴ τοῦ ημ3φ θὰ εἶνε φανταστική. Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν: $K=\sqrt{-\frac{4}{3}p}$ καὶ $\eta\mu 3\varphi=4q.\sqrt{-\frac{27}{64p^3}}$ (τ′). Τῇ βοηθείᾳ τοῦ τελευταίου τούτου τύπου προσδιορίζονται ὅλαι αἱ τιμαὶ τῆς γωνίας 3φ, δι' αὐτῶν δὲ καὶ ὅλαι αἱ τιμαὶ τῆς φ, ὧν τὰ ἡμίτονα δίδουν τὰς ῥίζας τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, διότι αὕτη, δυνάμει τῶν ἰσοτήτων (τ), συμπίπτει μετὰ τῆς (4″) ἐὰν τεθῇ $\psi=\eta\mu\varphi$. Ὁ τύπος (τ′) δεικνύει ὅτι ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ δευτέρου μέλους αὐτοῦ δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὴν μονάδα δηλ. $16q^2\left(-\frac{27}{64p^3}\right)<1$, ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι: $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$ δηλ. ἡ τριγωνομετρικὴ λύσις ἐφαρμόζεται* εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν πᾶσαι αἱ ῥίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶνε πραγματικαί.

Ἐξίσωσις τετάρτου βαθμοῦ. Τὴν γενικὴν μορφὴν αὐτῆς γρά-

* Ἐφόσον δὲν ἔχομεν ὑπ' ὄψιν τὴν μιγαδικὴν ἀνωτέραν Τριγωνομετρίαν τῆς Θεωρίας τῶν συναρτήσεων.

φομεν ὡς ἑξῆς : $\chi^4+4\alpha\chi^3+6\beta\chi^2+4\delta\chi+\varepsilon=0$ (5)· πρὸς λύσιν ταύτης θὰ προσπαθήσωμεν νὰ ἐκτελέσωμεν ἀνάλυσιν τοῦ πρώτου μέλους εἰς γινόμενον δύο δευτεροβαθμίων παραγόντων ὁρμώμενοι ἐκ τῆς παρατηρήσεως ὅτι οἱ δύο πρῶτοι ὅροι συμπίπτουσι μὲ τοὺς δύο πρώτους ὅρους τοῦ τετραγώνου :

(6) $(\chi^2+2\alpha\chi+\lambda)^2=\chi^4+4\alpha\chi^3+4\alpha^2\chi^2+2\lambda\chi^2+4\alpha\lambda\chi+\lambda^2$ ὅπου τὸ λ θὰ ὁρισθῇ καταλλήλως. Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν : $\chi^4+4\alpha\chi^3=(\chi^2+2\alpha\chi+\lambda)^2-4\alpha^2\chi^2-2\lambda\chi^2-4\alpha\lambda\chi-\lambda^2$, ὅθεν ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (5) λαμβάνομεν :

(7) $(\chi^2+2\alpha\chi+\lambda)^2-2(\lambda+2\alpha^2-3\beta)\chi^2-4(\alpha\lambda-\delta)\chi-(\lambda^2-\varepsilon)=0$ ἢ

$$(\chi^2+2\alpha\chi+\lambda)^2-(\mathrm{A}\chi^2+\mathrm{B}\chi+\Gamma)=0$$

ὅπου $\mathrm{A}=2(\lambda+2\alpha^2-3\beta)$, $\mathrm{B}=4(\alpha\lambda-\delta)$, $\Gamma=\lambda^2-\varepsilon$

Παρατηροῦμεν ἤδη ὅτι ἡ ἐξίσωσις (7) θ' ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον δύο πρωτοβαθμίων παραγόντων, ἐὰν τὸ λ εἶνε δυνατὸν νὰ προσδιορισθῇ οὕτως ὥστε τὸ τριώνυμον $\mathrm{A}\chi^2+\mathrm{B}\chi+\Gamma$ νὰ γείνῃ τέλειον τετράγωνον, διότι τότε τὸ πρῶτον μέλος τῆς (7) γίνεται διαφορὰ δύο τετραγώνων. Ἀλλ' εἶνε γνωστὸν ὅτι τὸ τριώνυμον $\mathrm{A}\chi^2+\mathrm{B}\chi+\Gamma$ γίνεται τέλειον τετράγωνον ὅταν ἡ διακρίνουσα $\mathrm{B}^2-4\mathrm{A}\Gamma=16(\alpha\lambda-\delta)^2-8(\lambda+2\alpha^2-3\beta)(\lambda^2-\varepsilon)=8[2(\alpha\lambda-\delta)^2-(\lambda+2\alpha^2-3\beta)(\lambda^2-\varepsilon)]$ εἶνε μηδέν. Ἐὰν λοιπὸν τὸ λ εἶνε ῥίζα τῆς τριτοβαθμίου ἐξισώσεως (8) $2(\alpha\lambda-\delta)^2-(\lambda+2\alpha^2-3\beta)(\lambda^2-\varepsilon)=0$, ἥτις λύεται δι' ἀλγεβρικοῦ τύπου, καθὼς ἐμάθομεν ἐν τῷ προηγουμένῳ ἐδαφίῳ, θὰ ἔχωμεν :

$$\mathrm{A}\chi^2+\mathrm{B}\chi+\Gamma=\mathrm{A}\left(\chi+\frac{\mathrm{B}}{2\mathrm{A}}\right)^2=\left[\sqrt{\mathrm{A}}\left(\chi+\frac{\mathrm{B}}{2\mathrm{A}}\right)\right]^2$$

Ἡ ἐξίσωσις (7) γράφεται :

$$(9)\qquad \left[\chi^2+2\alpha\chi+\lambda+\sqrt{\mathrm{A}}\left(\chi+\frac{\mathrm{B}}{2\mathrm{A}}\right)\right]\left[\chi^2+2\alpha\chi+\lambda-\sqrt{\mathrm{A}}\left(\chi+\frac{\mathrm{B}}{2\mathrm{A}}\right)\right]=0$$

Ὥστε ἡ λύσις τῆς τεταρτοβαθμίου ἐξισώσεως ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῆς τριτοβαθμίου ἐξισώσεως (8), ἣν ἐπαληθεύει τὸ λ καὶ τῶν δύο δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων, εἰς ἃς ἀναλύεται ἡ (9).

Σημείωσις. Ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις (8) ἔχει τρεῖς ῥίζας καὶ ἐπειδὴ εἰς ἑκάστην ἐκ τῶν τριῶν τούτων τιμῶν τοῦ λ ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένη ἀνάλυσις τῆς μορφῆς (9), ἕπεται ὅτι κατὰ τρεῖς διαφόρους τρόπους δυνάμεθα ν' ἀναλύσωμεν ἓν πολυώνυμον τετάρτου βαθμοῦ εἰς γινόμενον δύο δευτεροβαθμίων παραγόντων, τοῦθ' ὅπερ ἄλλως τε ἦτο ἐκ τῶν προτέρων προφανές, διότι, ἐὰν καλέσωμεν $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$ τὰς ῥίζας αὐτοῦ, ἔχομεν τὰς ἑξῆς τρεῖς ἀναλύσεις :

$$[(\chi-\varrho_1)(\chi-\varrho_2)][(\chi-\varrho_3)(\chi-\varrho_4)],\ [(\chi-\varrho_1)(\chi-\varrho_3)][(\chi-\varrho_2)(\chi-\varrho_4)],$$
$$[(\chi-\varrho_1)(\chi-\varrho_4)][(\chi-\varrho_2)(\chi-\varrho_3)].$$

II. Ἀριθμητικὴ λύσις τῶν ἐξισώσεων

3. Ἀποδεικνύεται ὅτι μία ἐξίσωσις βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ τετάρτου, ἧς οἱ συντελεσταὶ εἶνε ἀνεξάρτητοι ἀλλήλων, δὲν δύναται νὰ λυθῇ ἀλγεβρικῶς, δηλ. δὲν ὑπάρχει ἀλγεβρικὸς τύπος ἐκφραζόμενος διὰ τῶν συντελεστῶν καὶ διὰ τῶν γνωστῶν ἀλγεβρικῶν συμβόλων, ὅστις νὰ παρέχῃ πάσας τὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἐκτελοῦμεν τὴν λεγομένην ἀριθμητικὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως, περὶ ἧς θὰ ἴδωμεν εἰς τὰ ἑπόμενα.

4. **Α΄. Εὕρεσις τῶν ἀκεραίων ῥιζῶν**. ***Πρώτη ἰδιότης τῶν ἀκεραίων ῥιζῶν μιᾶς ἐξισώσεως***. $\sigma(\chi)=A_0\chi^{\mu}+A_1\chi^{\mu-1}+A_2\chi^{\mu-2}+\ldots+A_{\mu-1}\chi+A_{\mu}=0$ (10) ***ἧς οἱ συντελεσταὶ δύνανται νὰ ὑποτεθῶσ πάντες ἀκέραιοι, διότι καθίστανται τοιοῦτοι διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς τῶν παρανομαστῶν***. Ἐὰν θεωρήσωμεν μίαν ἀκεραίαν ῥίζαν $\chi=\alpha$, θὰ ἔχωμεν τὴν ἰσότητα :

$$A_0\alpha^{\mu}+A_1\alpha^{\mu-1}+\ldots+A_{\mu-1}\alpha=-A_{\mu} \qquad (11)$$

ἥτις δεικνύει ὅτι ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς α, ὡς διαιρῶν τὸ πρῶτον μέλος, α διαιρῇ καὶ τὸν A_{μ}. Ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα :

Πᾶσα ἀκεραία ῥίζα εἶνε διαιρέτης τοῦ τελευταίου συντελεστοῦ A_{μ}. Ἡ αὐτὴ ἰδιότης ἀποδεικνύεται καὶ διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου σ(χ) διὰ χ—α, ἥτις δέον νὰ δώσῃ ὑπόλοιπον $\upsilon=0$, καὶ τῆς ὁποίας τὸ πηλῖκον :$B_0\chi^{\mu-1}+B_1\chi^{\mu-2}+\ldots+B_{\mu-2}\chi+B_{\mu-1}$ (12) ἔχει συντελεστὰς εὑρισκομένους διὰ τῶν ἑξῆς σχέσεων :

$B_0=A_0$, $B_1=B_0\alpha+A_1$, $B_2=B_1\alpha+A_2, \ldots, B_{\mu-1}=B_{\mu-2}\alpha+A_{\mu-1}$, $\upsilon=B_{\mu-1}\alpha+A_{\mu}=0$, αἵτινες δεικνύουσιν ὅτι ***ἕκαστος συντελεστὴς τοῦ πηλίκου προκύπτει ἐκ τοῦ προηγουμένου ἐὰν οὗτος πολ)θῇ ἐπὶα καὶ εἰς τὸ γινόμενον προστεθῇ ὁ ἀντίστοιχος συντελεστὴς τοῦ διαιρετέου σ(χ)***. Ἐπειδὴ τὸ ὑπόλοιπον $\upsilon=0$, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν $B_{\mu-1}=-\frac{A_{\mu}}{\alpha}$, ἥτις δεικνύει ὅτι ὁ α εἶνε διαιρέτης τοῦ A_{μ}, καθ' ὅσον ὁ συντελεστὴς $B_{\mu-1}$ εἶνε ἀκέραιος ἀριθμός.

5. ***Γενίκευσις τῆς προηγουμένης ἰδιότητος***. Εἶνε προφανὲς ὅτι ἂν τὸ δοθὲν πολυώνυμον σ(χ) διαταχθῇ κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις

$(x-a)(B_0x^{\mu-1}+\ldots+B_{\mu-1})+\upsilon=A_0x^{\mu}+\ldots+A_{\mu}$

$-aB_{\mu-1}+\upsilon=A_{\mu}$

τοῦ χ καὶ διαιρεθῇ διὰ τοῦ α—χ θὰ δώσῃ πηλίκον ἀντίθετον τοῦ προηγουμένου καὶ ἑπομένως μὲ συντελεστὰς πάντας ἀκεραίους, ὑπόλοιπον δὲ 0. Ἐκτελουμένης τῆς διαιρέσεως, οἱ συντελεσταὶ τοῦ πηλίκου: $B_{\mu-1}+B_{\mu-2}\chi+B_{\mu-3}\chi^2+\dots+B_0\chi^{\mu-1}$ συνδέονται διὰ τῶν ἑξῆς σχέσεων: $B_{\mu-1}=\frac{A_\mu}{\alpha}$, $B_{\mu-2}=\frac{B_{\mu-1}+A_{\mu-1}}{\alpha}$, $\dots$, $B_0=\frac{B_1+A_1}{\alpha}$

$B_0+A_0=\upsilon=0$ (11΄), αἵτινες δεικνύουσιν ὅτι ὁ ἀριθμὸς α, διὰ νὰ εἶναι ῥίζα. πρέπει νὰ διαιρῇ πάντας τοὺς ἀριθμητὰς A_μ, $B_{\mu-1}+A_{\mu-1}$, $B_{\mu-2}+B_{\mu-2}$, ... προσέτι δὲ νὰ ἔχωμεν $B_0=-A_0$. Συνάγομεν λοιπὸν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα:

Ἰδιότης II. Ἵνα ἀριθμός τις α εἶνε ῥίζα τοῦ πολυωνύμου σ(χ) ὀφείλει νὰ διαιρῇ ὄχι μόνον τὸν τελευταῖον συντελεστὴν A_μ ἀλλὰ προσέτι νὰ εἶνε τοιοῦτος ὥστε ἡ διαίρεσις $A_\mu+A_{\mu-1}\chi+\dots+A_0\chi^\mu:(\alpha-\chi)$ ἐκτελουμένη νὰ δίδῃ πηλίκον μὲ συντελεστὰς πάντας ἀκεραίους ὑπόλοιπον δὲ μηδέν.

6. Ἐὰν καλέσωμεν φ(χ) τὸ πηλίκον σ(χ):(χ—α) θὰ ἔχωμεν τὴν ταὐτότητα: σ(χ)=(χ—α)(φ(χ), ἥτις ἐφαρμοζομένη διὰ χ=1 καὶ χ=—1 δίδει τὰς ἰσότητας: σ(1)=—(α—1)φ(1) καὶ σ(—1)= —(α+1)φ(—1), αἵτινες, ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ φ(1) καὶ φ(—1) εἶνε ἀκέραιοι, δεικνύουσι τὴν ἑξῆς ἰδιότητα: **Ἰδιότης III. Ἵνα ὁ ἀριθμὸς α εἶνε ῥίζα τοῦ πολυωνύμου σ(χ) πρέπει τὸ μὲν α—1 νὰ διαιρῇ τὸ σ(1) τὸ δὲ α+1 τὸν ἀριθμὸν σ(—1).**

Τρόπος εὑρέσεως τῶν ἀκεραίων ῥιζῶν. Θεωρήσωμεν ὡς παράδειγμα τὴν ἐξίσωσιν: $\sigma(\chi)=\chi^6-\chi^5-6\chi^4-\chi^2+\chi+6=0$ (12). Δοκιμάζομεν πρῶτον τὰς τιμὰς χ=1 καὶ χ=—1 καὶ εὑρίσκομεν σ(1)=0 καὶ σ(—1)=0. Ἐκτελοῦντες κατόπιν τὴν διαίρεσιν σ(χ):(χ—1) εὑρίσκομεν πηλίκον $\chi^5-6\chi^3-6\chi^2-7\chi-6$ ὅπερ δὲν ἔχει πλέον τὴν ῥίζαν χ=1 καὶ ὅπερ διαιροῦμεν διὰ χ+1· εὑρίσκομεν πηλίκον τὸ $\chi^4-\chi^3-5\chi^2-\chi-6=\sigma_1(\chi)$ (13). Ἐπειδὴ τοῦτο δὲν ἔχει πλέον ῥίζαν —1 προβαίνομεν εἰς τὴν ἀναζήτησιν τῶν λοιπῶν ῥιζῶν θεωροῦντες πάντας τοὺς διαιρέτας τοῦ συντελεστοῦ —6, οἵτινες εἶναι οἱ ±2, ±3, ±6 καὶ τῶν ὁποίων ἡ δοκιμασία, ἂν εἶναι πράγματι ῥίζαι, γίνεται κυρίως διὰ τῆς ἰδιότητος II, ἥτις παρέχει ἀμέσως καὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως διὰ χ—α ἐὰν α εἶνε ῥίζα. Πρὸς τοῦτο ὅμως ὠφελεῖ πολλάκις ἡ εὕρεσις ἀνωτέρου καὶ κατωτέρου ὁρίου τῶν ῥιζῶν· ἐφαρμόζοντες π. χ.

τὸν τύπον $1+\sqrt[\nu]{N}$ εὑρίσκομεν ὡς κατώτερον ὅριον τὸ -4 καὶ ἐπομένως ὁ διαιρέτης -6 ἀπορρίπτεται ἀπὸ τοῦδε. Ἐπίσης ἂν αἱ τιμαὶ $\sigma(1)$ καὶ $\sigma(-1)$ δὲν ἦσαν μηδέν, ἡ ἐφαρμογὴ τῆς ἰδιότητος III ἐπιτρέπει πολλάκις τὴν σωρηδὸν ἀπόρριψιν πολλῶν διαιρετῶν· προσέτι δέ, γνωρίζοντες τὸ πλῆθος ἢ ἀνώτερον ὅριον, δυνάμει τῶν θεωρημάτων τῶν προηγουμένων κεφαλαίων, δυνάμεθα ἐνίοτε ν' ἀπαλλασσώμεθα τῆς δοκιμασίας πολλῶν διαιρετῶν τοῦ τελευταίου συντελεστοῦ A_μ. Ἐξακολουθήσωμεν ἤδη τὸ προκείμενον παράδειγμα. Ἐφαρμόζοντες τὴν ἰδιότητα II ἀπορρίπτομεν τὸν διαιρέτην 2 διότι ἡ διαίρεσις $\sigma_1(\chi):(2-\chi)$ δίδει πηλῖκον, τοῦ ὁποίου οἱ συντελεσταὶ δὲν εἶνε πάντες ἀκέραιοι. Δοκιμάσωμεν ἤδη τὸ -2. Ἡ διαίρεσις $\sigma_1(\chi):(-2-\chi)$ δίδει πηλῖκον $3-\chi+3\chi^2-\chi^3$ μὲ συντελεστὰς πάντας ἀκεραίους καὶ ὑπόλοιπον 0. Ἡ τιμὴ λοιπὸν $\chi=-2$ εἶνε ῥίζα, ἡ δὲ διαίρεσις $\sigma_1(\chi):(\chi+2)$ δίδει πηλῖκον $\sigma_2(\chi)=\chi^3-3\chi^2+\chi-3$, ὅπερ δὲν ἔχει πλέον τὴν ῥίζαν $\chi=-2$ διότι ὁ ἀριθμὸς οὗτος δὲν διαιρεῖ τὸν τελευταῖον συντελεστὴν τοῦ $\sigma_2(\chi)$. Μένουσιν ἤδη πρὸς δοκιμὴν οἱ διαιρέται τοῦ -3 δηλ. οἱ ± 3. Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν κατὰ τὸν κανόνα πάντοτε τὸν προκύπτοντα ἐκ τῶν σχέσεων (11′) τῆς ἰδιότητος II εὑρίσκομεν πηλῖκον τοῦ $\sigma_2(\chi):3-\chi$ τὸ $-1-\chi^2$ καὶ ὑπόλοιπον μηδέν. Ὥστε ἡ τιμὴ $\chi=3$ εἶνε ῥίζα καὶ ἔχομεν: $\sigma_2(\chi)=(\chi-3)(\chi^2+1)$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ χ^2+1 ἔχει ῥίζας $\pm i$, ἡ ἐξίσωσις ἡ δοθεῖσα ἐλύθη τελείως καὶ ἔχει τὰς ῥίζας $+1$, -1, -2, $+3$, $+i$, $-i$, τὸ δὲ δοθὲν πολυώνυμον ἀναλύεται ὡς ἑξῆς:

$$\chi^6-\chi^5-6\chi^4-\chi^2+\chi+6=(\chi-1)(\chi+1)(\chi+2)(\chi-3)(\chi-i)(\chi+i).$$

8. Β′. Εὕρεσις τῶν κλασματικῶν ῥιζῶν. I. Ἰδιότης. Ἐὰν τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\chi=\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ῥίζα μιᾶς ἐξισώσεως $\sigma(\chi)=A_0\chi^\mu+\ldots+A_\mu$, ὁ μὲν ἀριθμητὴς διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν τελευταῖον συντελεστὴν A_μ ὁ δὲ παρανομαστὴς τό πρῶτον A_0. Διότι θὰ ἔχωμεν: $A_0\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\mu+A_1\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu-1}$ $+\ldots+A_{\mu-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+A_\mu=0$ καὶ ἐπομένως τὴν ἰσότητα:

$$(14)\qquad A_0\alpha^\mu+A_1\alpha^{\mu-1}\beta+A_2\alpha^{\mu-2}\beta^2+\ldots+A_{\mu-1}\alpha\beta^{\mu-1}+A_\mu\beta^\mu=0$$

ἥτις δεικνύει ὅτι τὸ α διαιρεῖ τὸ γινόμενον $A_\mu\beta^\mu$, ἐπειδὴ ὅμως εἶνε πρῶτος πρὸς τὸν β^μ (καθόσον τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ ὑπετέθη ἀνάγωγον) ἕπεται, κατὰ τὸ γνωστὸν Εὐκλείδειον θεώρημα τῆς Ἀριθμητικῆς, ὅτι διαιρεῖ τὸν ἕτερον παράγοντα A_μ. Ἐπίσης ἡ ἰσότης (14) δεικνύει ὅτι ὁ β θὰ διαιρῇ τὸ γινόμενον $A_0\alpha^\mu$ καί, ἐπειδὴ εἶνε πρῶτος πρὸς τὸν παράγοντα α^μ, ἕπεται ὅτι θὰ διαιρῇ τὸν ἕτερον παράγοντα A_0.

Πόρισμα. Ἂν $A_0=1$, τὸ πολυώνυμον σ(χ) δὲν ἔχει κλασματικὰς ῥίζας διότι ἂν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ῥίζα, ὁ παρανομαστὴς β ὀφείλει νὰ εἶναι διαιρέτης τοῦ $A_0=1$ καὶ ἑπομένως νὰ εἶναι ἢ $+1$ ἢ -1 δηλ. ὁ ἀριθμὸς $\frac{\alpha}{\beta}$ θὰ εἶναι ἀκέραιος.

9. **Τρόπος εὑρέσεως τῶν κλασματικῶν ῥιζῶν**, ὀφειλόμενος εἰς τὴν προηγουμένην ἰδιότητα, ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει ὅτι πᾶσα κλασματικὴ ῥίζα $\frac{\alpha}{\beta}$ πολ)μένη ἐπὶ τὸν πρῶτον συντελεστὴν A_0 γίνεται $\frac{\alpha}{\beta}A_0$· δηλ. ἀκέραιος ἀριθμός, καθ' ὅσον ὁ β εἶνε διαιρέτης τοῦ A_0· ἄρα, ἂν ἐκτελεσθῇ ἡ ἀντικατάστασις $\chi=\frac{\psi}{A_0}$, αἱ μὲν ἀκέραιαι ῥίζαι μένουσιν ἀκέραιαι αἱ δὲ κλασματικαὶ μετατρέπονται εἰς ἀκεραίας. Ἡ νέα πρὸς ψ ἐξίσωσις ἔχει πάσας τὰς ῥίζας αὐτῆς ἀκεραίας, αἵτινες εὑρίσκονται, καθ' ὃν τρόπον ἐμάθομεν, διαιρούμεναι δὲ δι' A_0 δίδουσι τὰς ζητουμένας κλασματικὰς ῥίζας τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. Παρατηρητέον ὅτι ἡ ἀναγωγὴ τῶν κλασματικῶν ῥιζῶν εἰς ἀκεραίας δύναται νὰ γίνῃ δι' ἀντικαταστάσεως $K\chi=\psi$ (ὅπου τὸ $K<A_0$)· πρὸς τοῦτο ἐκτελοῦντες τὴν ἀντικατάστασιν ταύτην παρατηροῦμεν διὰ ποίας τιμὰς τοῦ K εἶνε δυνατὸν ὁ μὲν πρῶτος συντελεστὴς τῆς νέας ὡς πρὸς ψ ἐξισώσεως νὰ ἰσοῦται πρὸς 1, οἱ δὲ λοιποὶ νὰ εἶνε ἀκέραιοι· ἡ τιμὴ $K=A_0$ πάντοτε εἶνε κατάλληλος, ἐνίοτε δ' εὑρίσκεται τιμὴ τοῦ $K<A_0$.

Παράδειγμα. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις : $2\chi^4+\chi^3-10\chi^2-2\chi+12=0$ (15) ἧς εὑρίσκομεν κατ' ἀρχὰς τὴν ἀκεραίαν ῥίζαν $\chi=-2$ καὶ πηλίκον διαιρέσεως διὰ $\chi+2$ τὸ πολυώνυμον $2\chi^3-3\chi^2-4\chi+6$, ἄρα τὴν ἐξίσωσιν : $2\chi^3-3\chi^2-4\chi+6=0$ (16), ἥτις δὲν ἔχει πλέον ἀκεραίας ῥίζας· ἐκτελοῦντες ἐπ' αὐτῆς τὴν ἀντικατάστασιν $\chi=\frac{\psi}{2}$ ἀγόμεθα εἰς τὴν ἐξίσωσιν: $\psi^3-3\psi^2-8\psi+24=0$ (17). Κατὰ τὴν ἰδιότητα τῆς § 8, ἂν θεωρήσωμεν μίαν κλασματικὴν ρίζαν $\frac{\alpha}{\beta}$ τῆς (15), τὸ α θὰ εἶνε εἷς ἐκ τῶν ἀριθμῶν 1,2,3 ,6,12, —1, —3, —6, —12,τὸ δὲ β θὰ εἶνε εἷς ἐκ τῶν 2, —2 ἵνα δὲ εἶνε πράγματι κλάσμα τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ πρέπει νὰ λάβωμεν μόνον τὰς τιμὰς $\alpha=1,3,-1,-3$· ὥστε αἱ ζητούμεναι κλασματικαὶ ρίζαι εἶνε μεταξὺ τῶν $\pm\frac{1}{2}$ καὶ $\pm\frac{3}{2}$ καὶ ἐπομένως θὰ δοκιμάσωμεν μόνον τὰς ἀκεραίας $+1,+3$ ἂν εἶνε ρίζαι τῆς (17), τοιαύτη δὲ εἶνε μόνον ἡ $+3$, ἣν διαιροῦντες διὰ 2 εὑρίσκομεν τὴν ρίζαν $\frac{3}{2}$ τῆς (16), διαιροῦντες τέλος τὸ πολυώνυμον (17) διὰ $\psi-3$ εὑρίσκομεν πηλῖκον ψ^2-8, ὅπερ προφανῶς ἔχει ρίζας $\pm2\sqrt{2}$ καὶ ἐπομένως ἡ (16) ἔχει τὰς $\pm\sqrt{2}$· ἡ δοθεῖσα λοιπὸν ἐξίσωσις ἐλύθη καὶ ἔχει ρίζας $-1, \frac{3}{2}, \pm\sqrt{2}$, ὅθεν $2\chi^4+\chi^3-10\chi^2-2\chi+12=(\chi+2)(2\chi-3)(\chi-\sqrt{2})(\chi+\sqrt{2})$.

10. **Δευτέρα ἰδιότης τῶν κλασματικῶν ῥιζῶν. Ἂν τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ῥίζα τῆς ἐξισώσεως $\sigma(\chi)=A_0\chi^\mu+A_1\chi^{\mu-1}+\ldots+A_{\mu-1}\chi+A_\mu=0$, τὸ πηλῖκον τῆς διαιρέσεως $\sigma(\chi)$: $\left(\chi-\frac{\alpha}{\beta}\right)$ εἶνε πολυώνυμον ἔχον πάντας τοὺς συντελεστὰς ἀκεραίους.**

Ἀπόδειξις. Ἂν ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος διαίρεσις ἐκτελεσθῇ πρῶτον διὰ διατάξεως κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ χ εὑρίσκομεν πηλῖκον :

$$(18) \qquad B_0\chi^{\mu-1}+B_1\chi^{\mu-2}+\ldots.$$

ὅπου $B_0=A_0$, $B_1=B_0\frac{\alpha}{\beta}+A_1$, $B_2=B_1\frac{\alpha}{\beta}+A_2,\ldots$, τοῦ ὁποίου δηλ. οἱ συντελεσταὶ εἶνε κλάσματα μὲ παρονομαστὴν δύναμίν τινα τοῦ β, δεύτερον δὲ διὰ διατάξεως κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ χ εὑρίσκομεν τὸ αὐτὸ πηλῖκον ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$(19) \qquad -\Gamma_{\mu-1}-\Gamma_{\mu-2}-\ldots-\Gamma_0\chi^{\mu-1}$$

ὅπου $\Gamma_{\mu-1}=A_\mu\frac{\beta}{\alpha}$, $\Gamma_{\mu-2}=(\Gamma_{\mu-1}+A_{\mu-1})\frac{\beta}{\alpha},\ldots$, $\Gamma_0=(\Gamma_1+A_1)\frac{\beta}{\alpha}$ δηλ. μὲ συντελεστὰς κλασματικούς, ὧν οἱ παρανομασταὶ εἶνε δυνάμεις τοῦ α· ἀλλὰ τὰ δύο πηλῖκα (18), (19) πρέπει νὰ εἶνε τὰ αὐτὰ καὶ ἄρα θὰ ἔχωσιν ἴσους τοὺς ἀντιστοίχους συντελεστάς, οἱ ὁποῖοι διὰ τοῦτο θὰ

$-\Gamma_1=-\Gamma_0\frac{\alpha}{\beta}+A_1$

$\Gamma_0=\frac{\alpha}{\beta}(A_1+\Gamma_1)$

$\frac{Q_1}{R_1} \frac{a^2}{b^2} = \frac{Q}{R} \frac{b^2}{a^2} = \frac{3}{7}$

εἶνε ἀκέραιοι διότι, ἂν ἦσαν κλάσματα, θὰ ἦσαν ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ ἀνάγωγον κλάσμα, καὶ ἐπομένως οἱ παρανομασταὶ αὐτῶν, οἵτινες εἶναι δυνάμεις τῶν α καὶ β, θὰ εἶναι πολλαπλάσια τοῦ παρανομαστοῦ τοῦ ἀναγώγου κλάσματος. Ἀλλὰ τοῦτο εἶνε ἄτοπον, διότι, ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ αἱ δυνάμεις αὐτῶν θὰ εἶνε ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Σημείωσις. Ἡ δευτέρα αὕτη ἰδιότης παρέχει νέον τρόπον δοκιμασίας τῶν κλασματικῶν ῥιζῶν, διότι δὲν ἔχομεν παρὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν $\sigma(\chi):\left(\chi-\frac{\alpha}{\beta}\right)$ ὅτε ἡ ἐμφάνισις ἑνὸς κλασματικοῦ συντελεστοῦ εἰς τὸ εὑρισκόμενον πηλῖκον ἀρκεῖ ν' ἀπορρίψῃ τὸ δοκιμαζόμενον κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1. Λῦσαι τὰς ἐξισώσεις $\chi^3-3\chi+1=0$ [$\chi=-2\eta\mu 70^0$, $\chi=2\eta\mu 50^0$, $\chi=2\eta\mu 10^0$], $\chi^3+6\chi^2+9\chi+4=0$ [Ἀπ: $-1, -1, -4$], $\chi^4+6\chi^2+9\chi+2=0$, $2\chi^3-3\chi^2-12\chi+2=0$, $\chi^5-6\chi^4-5\chi^3+58\chi^3-144=0$, $2\chi^3-12\chi^2+13\chi-15=0$ $\left(5, \frac{1\pm i\sqrt{5}}{2}\right)$, $2\chi^4+\chi^3-10\chi^2-2\chi+12=0$ $\left(-2, \frac{3}{2} \pm\sqrt{2}\right)$

III. Λογισμὸς τῶν ἀσυμμέτρων ῥιζῶν.

Ὑποτεθείσθω ὅτι μία ἀσύμμετρος ῥίζα $\chi=\rho$ ἀπεχωρίσθη τῶν λοιπῶν εὑρεθέντος ἑνὸς διαστήματος $\alpha\ldots\beta$, ἐντὸς τοῦ ὁποίου ὑπάρχει μόνον ἡ ῥίζα $\chi=\rho$. ὅτε αἱ τιμαὶ $\sigma(\alpha)$ καὶ $\sigma(\beta)$ εἶναι ἑτερόσημοι. Ἂν θέσωμεν $\psi=\sigma(\chi)$ καὶ τὰ χ, ψ θεωρηθῶσιν ὡς συν]μέναι Καρτεσιαναί, ἡ ἐξίσωσις $\psi=\sigma(\chi)$ παριστᾷ μίαν καμπύλην, ἧς τὰ σημεῖα $[\alpha, \sigma(\alpha)]$ καὶ $[\beta, \sigma(\beta)]$ κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ ἄξονος τῶν χ ἡ δὲ ζητουμένη ῥίζα $\chi=\rho$ εἶνε ἡ τετμημένη (ΟΡ) τοῦ σημείου τομῆς τῆς καμπύλης μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν χ.

12. **Πρώτη μέθοδος.** Μία πρώτη ἰδέα συνίσταται εἰς τὸ νὰ διαιρέσωμεν τὸ διάστημα $\alpha\ldots\beta$ εἰς μικρότερα ἴσα μέρη, 10 λ. χ., διὰ τῶν ἀριθμῶν: $\alpha, \alpha+\frac{\delta}{10}, \alpha+\frac{2\delta}{10}, \ldots, \alpha+\frac{9\delta}{10}, \beta$ ὅπου $\delta=\beta-\alpha$ καὶ νὰ εὕρωμεν εἰς ποῖον ἐκ τῶν 10 τούτων διαστημάτων ἔχομεν παραλλαγὴν τοῦ σημείου τοῦ πολυωνύμου καὶ ἑπομένως εὑρίσκεται ἡ ζητουμένη ῥίζα ρ. Ἡ μέθοδος αὕτη εἶνε κυρίως πρακτικὴ ὅταν οἱ ἀριθμοὶ

α, β εἶνε διαδοχικοὶ ἀκέραιοι, διότι οὕτω εὑρίσκομεν ἓν δεκαδικὸν ψηφίον ἔτι, ἀλλ' ἡ μέθοδος αὕτη εἶνε λίαν ἐπίπονος.

13. **Δευτέρα μέθοδος· ἡ τῶν ἀναλόγων ποσῶν ἢ τῆς ἀντικαταστάσεως τῆς καμπύλης διὰ τῆς χορδῆς ΑΒ.** Διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως ταύτης εὐκολύνεται ὁ λογισμὸς τῆς ῥίζης ρ, διότι ἡ χορδὴ ΑΒ ἔχει ἐξίσωσιν πρωτοβάθμιον ὡς πρὸς χ, ψ, τήν:

$$(20) \qquad \psi-\sigma(\alpha)=\frac{\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)}{\beta-\alpha}(\chi-\alpha)$$

ὡς διερχομένη διὰ τῶν δύο σημείων $A[\alpha, \sigma(\alpha)]$, $B[\beta, \sigma(\beta)]$· ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην (20) τὸ ψ διὰ τοῦ 0 εὑρίσκομεν τὴν τετμημένην $\chi=\alpha-\sigma(\alpha)\dfrac{\beta-\alpha}{\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)}$ τοῦ σημείου R τομῆς τῆς χορδῆς καὶ τοῦ οχ. Ὅταν ἡ καμπύλη στρέφῃ τὰ κοῖλα πρὸς τὰ κάτω λαμβάνομεν ὡς ἀφετηρίαν τὸ ἄνωσημεῖον $[\alpha,\sigma(\alpha)]$διότι τότε τὸ σημεῖον R κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Ρ καὶ ἑπομένως ἔχομεν πραγματικὴν προσέγγισιν. Ὅταν ὅμως ἡ καμπύλη στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω, λαμβάνομεν ὡς ἀφετηρίαν τὸ κάτωσημεῖον $[\beta,\sigma(\beta)]$διότι τότε μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τοῦ Ρ κεῖται τὸ R δηλ. λαμβάνομεν τότε τὴν ἐξίσωσιν τῆς χορδῆς ὑπὸ τὴν μορφὴν $\psi-\sigma(\beta)=\dfrac{\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)}{\beta-\alpha}(\chi-\beta)$. Ὅσον ἀφορᾷ τὸ κοῖλον τῆς καμπύλης, περὶ αὐτοῦ μᾶς πληροφορεῖ, ὡς γνωστὸν ἐκ τοῦ Διαφ. Λογισμοῦ, ἡ δευτέρα παράγωγος $\sigma''(\chi)$· ἂν $\sigma''(\chi)>0$ ἐν τῷ διαστήματι $\alpha\ldots\beta$, ἡ καμπύλη στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω, ἂν δ' ἔχωμεν $\sigma''(\chi)<0$ ἡ καμπύλη στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ κάτω.

14. **Τρίτη μέθοδος (τοῦ Νεύτωνος).** Αὕτη συνίσταται εἰς τὴν ἀντικατάστασιν τῆς καμπύλης ἢ διὰ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ Α ἢ διὰ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ Β, ἐκλεγομένης ἐκείνης ἐκ τῶν δύο ἥτις συναντᾷ τὴν καμπύλην εἴς τι σημεῖον Τ κείμενον μεταξὺ τῆς προβολῆς τοῦ σημείου ἁφῆς καὶ τοῦ Ρ, διότι οὕτω ἔχομεν ἀσφαλῆ προσέγγισιν καθ' ὅσον τὸ Τ εἶνε πλησιέστερον πρὸς τὸ Ρ ἢ ἡ προβολὴ τοῦ σημείου ἁφῆς. Παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν ἡ καμπύλη στρέφῃ τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω δηλ. $\psi''>0$ προτιμῶμεν νὰ λαμβάνωμεν ὡς ἀφετηρίαν τὸ ἄνωθεν σημεῖον, δηλ. τὸ ἔχον τεταγμένην $\psi>0$, ὅταν δὲ πρὸς τὰ κάτω τὸ ἔχον τεταγμένην $\psi<0$· ἂν λοιπὸν μεταξὺ τῶν τιμῶν α καὶ β δὲν ὑπάρχῃ σημεῖον καμπῆς, ὅτε μεταξὺ τῶν Α καὶ Β δὲν ἔχομεν μεταβολὴν τοῦ κοίλου καὶ τοῦ κυρτοῦ, ἐκ τῶν ἄκρων τοῦ διαστήματος $\alpha\ldots\beta$ προτιμῶμεν ἐκεῖνο, εἰς ὃ ἡ συνάρτησις $\psi=\sigma(\chi)$ καὶ ἡ δευτέρα παράγωγος $\psi''=\sigma''(\chi)$ εἶνε ὁμόσημοι. Θεωρήσωμεν τὴν πε-

ρίπτωσιν, καθ' ἣν θὰ ζητήσωμεν τὴν τετμημένην ι τοῦ σημείου Τ, εἰς ὃ ἡ εἰς τὸ Β ἐφαπτομένη, ἥτις ἔχει ἐξίσωσιν $\psi-\sigma(\beta)=\sigma'(\beta)(\chi-\beta)$ (21) συναντᾷ τὸν ἄξονα τοῦ χ. Θέτοντες ἐν τῇ ἐξισώσει ταύτῃ $\psi=0$ καὶ λύοντες πρὸς χ λαμβάνομεν :

$$(21') \qquad \chi=\beta-\frac{\sigma(\beta)}{\sigma'(\beta)}=\beta_1,$$

ἥτις εἶνε ἡ τετμημένη τοῦ Τ καὶ παρέχει τὴν προσεγγίζουσαν τιμὴν ὅταν εἰς τὴν ἀρχικὴν τιμὴν β προστίθεται διὰ τῆς μεθόδου ταύτης ὁ ἀριθμὸς $-\frac{\sigma(\beta)}{\sigma'(\beta)}$. Ἂν εἰς τὴν β_1 ἐφαρμόσωμεν τὴν αὐτὴν μέθοδον εὑρίσκομεν νέαν μᾶλλον προσεγγίζουσαν τιμὴν $\beta_2=\beta_1-\frac{\sigma(\beta_1)}{\sigma'(\beta_1)}$ κ.ο.κ. ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι ἡ γενικὴ τιμὴ $\beta_\nu=\beta_{\nu-1}-\frac{\sigma(\beta_{\nu-1})}{\sigma'(\beta_{\nu-1})}$ ἔχει ὅριον τὴν ζητουμένην ῥίζαν.

Σημείωσις. Ὁ τύπος (21) ὑποθέτει ὅτι $\sigma'(\beta)\neq 0$ δηλ. ὅτι ἡ τιμὴ $\chi=\beta$ δὲν εἶνε ῥίζα τῆς παραγώγου.

Ἐφαρμογαί. Ὑπολογίσαι τὰς ἀσυμμέτρους ῥίζας τῶν ἑπομένων ἐξισώσεων : $\chi^4+3\chi^2-8\chi=1$, $2\chi^3-15\chi^2+24\chi=3$,

$\chi^4+4\chi^2-6\chi+2=0$, $\chi^5+\chi^3-4\chi^2=2$, $4\chi^3-6\chi^2-7\chi+2=0$,

$\chi^8-12\chi^2+3=0$, $2\chi^4-7\chi^3+2\chi^2+25\chi=112$,

$\chi^3+3\chi^2-17\chi+50$, $\chi^4-5\chi^3-7\chi^2+15\chi+3=8$

3. Εὑρεῖν τὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως : $\frac{1}{\chi+1}+\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\chi-1}=1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΑΠΑΛΟΙΦΗ ΚΑΙ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ

I. Συμμετρικαὶ συναρτήσεις

15. **Λογαριθμικὴ παράγωγος.** Ἐὰν θεωρήσωμεν δύο συναρτήσεις ψ_1, ψ_2 τοῦ χ ἐχούσας παράγωγον, γνωρίζομεν ὅτι ἡ παράγωγος τοῦ γινομένου $\psi=\psi_1\psi_2$ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου : $\psi'=\psi_1\psi_2'+\psi_2\psi_1'$ ὅθεν ἔχομεν :

$$(22) \qquad \frac{\psi'}{\psi}=\frac{\psi_1'}{\psi_1}+\frac{\psi_2'}{\psi_2}$$

ἂν δὲ καλέσωμεν λογαριθμικὴν παράγωγον τὸ πηλίκον τῆς παραγώγου διὰ τῆς συναρτήσεως, ἔχομεν : **ἡ λογαριθμικὴ παράγωγος γινομένου ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν λογαριθμικῶν παραγώγων τῶν παραγόντων**· ἡ ἰσότης (22) ἀποδεικνύει τὸν κανόνα διὰ τὴν περίπτωσιν δύο παραγόντων, ἐπεκτείνεται ὅμως καὶ εἰς γινόμενον ὁσωνδήποτε παραγόντων.

16. **Ὁρισμός· Μία συνάρτησις $f(\chi,\psi,z\ldots)$ λέγεται συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὰ γράμματα $\chi,\psi,z,\ldots$ ὅταν δὲν βλάπτεται διὰ τῆς ὁπωσδήποτε ἀντιμεταθέσεως τῶν γραμμάτων τούτων** λ. χ. ἡ $f(\chi,\psi)$ εἶνε συμμετρικὴ ὡς πρὸς χ,ψ, ἂν ἔχωμεν $f(\chi,\psi)=f(\psi,\chi)$· ἡ δὲ $f(\chi,\psi,z)$ ἂν $f(\chi,\psi,z)=f(\chi,z,\psi)=f(z,\chi,\psi)=f(\psi,z,\chi)=f(\psi,\chi,z)=$ $=f(z,\psi,\chi)$.

Θεώρημα. **Ἂν τὸ πολυώνυμον $f(\chi,\psi)=\Sigma A_{\mu\nu}\chi^{\mu}\psi^{\nu}$ εἶνε συμμετρικὸν ὡς πρὸς χ,ψ, θὰ ἔχωμεν $A_{\mu\nu}=A_{\nu\mu}$ δηλ. οἱ ὅροι οἱ ἔχοντες τοὺς αὐτοὺς ἐκθέτας ἀλλὰ κατὰ διάφορον τάξιν ἔχουσι τὸν αὐτὸν συντελεστήν.**

Ἀπόδειξις. Διότι θὰ ἔχωμεν $f(\psi,\chi)=\Sigma A_{\mu\nu}\psi^{\mu}\chi^{\nu}$ καὶ ἐπομένως $f(\psi,\chi)=\Sigma A_{\nu\mu}\chi^{\mu}\psi^{\nu}$· ἂν δὲ τὰ πολυώνυμα διαταχθῶσι κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ χ, καὶ ἐξισωθῶσιν οἱ συντελεσταὶ τοῦ χ^{μ} λαμβάνομεν : $\Sigma' A_{\mu\nu}\psi^{\nu}=\Sigma' A_{\nu\mu}\psi^{\nu}$, ἐπειδὴ δὲ τὰ πολυώνυμα ταῦτα εἶνε ἐκ ταυτότητος ἴσα, προκύπτει : $A_{\mu\nu}=A_{\nu\mu}$. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι ἡ γενικὴ μορφὴ πολυωνύμου συμμετρικοῦ πρὸς χ,ψ πρώτου βαθμοῦ εἶνε : $\alpha(\chi+\psi)+\beta$, δευτέρου : $\alpha(\chi^2+\psi^2)+\beta\chi\psi+\gamma(\chi+\psi)+\delta$ κτλ. Ἡ ἰδιότης αὕτη ἐπεκτείνεται καὶ εἰς συναρτήσεις περισσοτέρων μεταβλητῶν.

17. **Συμμετρικαὶ συναρτήσεις τῶν ῥιζῶν μιᾶς ἐξισώσεως:**

(23) $\sigma(\chi)=\chi^{\mu}+\alpha_1\chi^{\mu-1}+\alpha_2\chi^{\mu-2}+\ldots+\alpha_{\mu-1}\chi+\alpha_{\mu}$.

Αἱ ἁπλούστεραι ἐξ αὐτῶν εἶνε : $\Sigma\chi_1=\chi_1+\chi_2+\ldots+\chi_{\mu}=-\alpha_1$ $\Sigma\chi_1\chi_2=\alpha_2$, $\Sigma\chi_1\chi_2\chi_3=-\alpha_3,\ldots$, $\Sigma\chi_1\chi_2\ldots\chi_{\nu}=(-1)^{\nu}\alpha_{\nu},\ldots$ αἱ θεωρηθεῖσαι ἤδη εἰς τὸ δεύτερον κεφάλαιον τοῦ βιβλίου τούτου. Ἤδη θὰ θεωρήσωμεν τὰ ἀθροίσματα τῶν ὁμοίων δυνάμεων τῶν ῥιζῶν :

(24) $S_2=\Sigma\chi^2_1=\chi_1^2+\chi^2_2+\ldots+\chi^2_\mu$, $\quad S_3=\Sigma_1\chi^3_1=\chi^3_1+\ldots+\chi^3_\mu, \ldots$
$S_\nu=\Sigma\chi^\nu_1=\chi^\nu_1+\ldots+\chi^\nu_\mu$.

18. **Λογισμὸς τῶν $S_1, S_2, \ldots, S_{\mu-1}$.** Πρὸς τοῦτο λαμάνομεν τὴν λογαριθμικὴν παράγωγον ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος: $\sigma(\chi)=(\chi-\chi_1)(\chi-\chi_2)\ldots(\chi-\chi_\mu)$, ὅτε προκύπτει:

$$\sigma'(\chi)=\frac{\sigma(\chi)}{\chi-\chi_1}+\frac{\sigma(\chi)}{\chi-\chi_2}+\ldots+\frac{\sigma(\chi)}{\chi-\chi_\mu}\cdot \text{ ἀλλ' ἀφ' ἑτέρου:}$$

$$\frac{\sigma(\chi)}{\chi-\chi_1}=\chi^{\mu-1}+(\chi_1+\alpha_1)\chi^{\mu-2}+(\chi^2_1+\alpha_1\chi_1+\alpha_2)\chi^{\mu-3}+\ldots$$
$$+\ldots+(\chi_1^\nu+\alpha_1\chi_1^{\nu-1}+\ldots+\alpha_{\nu-1}\chi_1+\alpha_\nu)\chi^{\mu-\nu-1}+\ldots$$

(25) $$\frac{\sigma(\chi)}{\chi-\chi_2}=\chi^{\mu-1}+(\chi_2+\alpha_1)\chi^{\mu-2}+(\chi^2_2+\alpha_1\chi_2+\alpha_2)\chi^{\mu-3}+\ldots$$
$$+\ldots+(\chi_2^\nu+\alpha_1\chi_2^{\nu-1}+\ldots+\alpha_{\nu-1}\chi_2+\alpha_\nu)\chi^{\mu-\nu-1}+\ldots$$

. . . .

$$\frac{\sigma(\chi)}{\chi-\chi_\mu}=\chi^{\mu-1}+(\chi_\mu+\alpha_1)\chi^{\mu-2}+(\chi^2_\mu+\alpha_1\chi_\mu+\alpha_2)\chi^{\mu-3}+\ldots$$
$$+\ldots+(\chi_\mu^\nu+\alpha_1\chi_\mu^{\nu-1}+\ldots+\alpha_{\nu-1}\chi_\mu+\alpha_\nu)\chi^{\mu-\nu-1}+\ldots$$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη λαμβάνομεν:

(26) $$\sigma'(\chi)=\mu\chi^{\mu-1}+(S_1+\mu\alpha_1)\chi^{\mu-2}+(S_2+\alpha_1S_1+\mu\alpha_2)\chi^{\mu-3}+$$
$$+\ldots+(S_\nu+\alpha_1S_{\nu-1}+\ldots+\alpha_{\nu-1}S_1+\mu\alpha_\nu)\chi^{\mu-\nu-1}+\ldots$$

ἐπειδὴ δέ: $\sigma'(\chi)=\mu\chi^{\mu-1}+(\mu-1)\alpha_1\chi^{\mu-2}+\ldots+(\mu-\nu)\alpha_\nu\chi^{\mu-\nu-1}+\ldots$

ἐξ αὐτῆς καὶ ἐκ τῆς (26) λαμβάνομεν τὰς σχέσεις:

$$S_1+\alpha_1=0$$
$$S_2+\alpha_1S_1+2\alpha_2=0$$
$$\ldots\ldots$$
(27) $$S_\nu+\alpha_1S_{\nu-1}+\alpha_2S_{\nu-2}+\ldots+\alpha_{\nu-1}S_1+\nu\alpha_\nu=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_{\mu-1}+\alpha_1S_{\mu-2}+\ldots+(\mu-1)\alpha_{\mu-1}=0$$

δι' ὧν προσδιορίζομεν ἐπαγωγικῶς τὰς συναρτήσεις

$$S_1, S_2, \ldots, S_\nu, \ldots, S_{\mu-1}$$

19. **Λογισμὸς τῶν $S_\mu\ S_{\mu+1}\ S_{\mu+2}\ldots$ δηλ. τῶν S_ν ὅπου $\nu\geq\mu$.** Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας $\sigma(\chi_1)=0$, $\sigma(\chi_2)=0, \ldots$, $\sigma(\chi_\mu)=0$, αἵτινες ἐκφράζουσιν ὅτι τὰ $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\mu$ εἶναι ῥίζαι τῆς ἐξι-

σώσεως, λαμβάνομεν: $S_\mu + \alpha_1 S_{\mu-1} + \ldots + \alpha_{\mu-1} S_1 + \mu\alpha_\mu = 0$, δι' ἧς ὑπολογίζεται ἀμέσως τὸ S_μ, καθ' ὅσον τὰ S_1, $S_2, \ldots, S_{\mu-1}$ εἶναι γνωστά. Ἐπίσης διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν ἰσοτήτων: $\chi_1\sigma(\chi_1)=0$ $\chi_2\sigma(\chi_2)=0, \ldots, \chi_\mu\sigma(\chi_\mu)=0$ ἔχομεν: $S_{\mu+1} + \alpha_1 S_\mu + \ldots + \alpha_\mu S_1 = 0$, ὅθεν λαμβάνομεν τὸ $S_{\mu+1}$ κ. ο. κ.

20. **Λογισμὸς τῆς συναρτήσεως $\Sigma\chi^\alpha_1\chi^\beta_2$**, ἥτις εἶνε ἄθροισμα πάντων τῶν γινομένων δύο δυνάμεων ῥιζῶν ἐχουσῶν ἐκθέτας α, β καὶ ἥτις εἶνε προφανῶς συμμετρικὴ συνάρτησις τῶς ῥιζῶν:

$\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\mu$. Πρὸς τοῦτο πολ)μεν τ ὰς ἰσότητας $S_\alpha = \Sigma\chi^\alpha_1$, $S_\beta = \Sigma\chi^\beta_1$, ὅτε λαμβάνομεν τὴν σχέσιν : $S_\alpha S_\beta = \Sigma\chi^\alpha_1\chi^\beta_2 + \Sigma\chi_1^{\alpha+\beta}$ δηλ. τὴν $S_\alpha S_\beta = \Sigma\chi^\alpha_1\chi^\beta_2 + S_{\alpha+\beta}$ ἤτοι:

$$(28) \qquad \Sigma\chi^\alpha_1\chi^\beta_2 = S_\alpha S_\beta - S_{\alpha+\beta}$$

ὅθεν ὑπολογίζεται ἡ ζητουμένη συνάρτησις διότι τὰ S_α, S_β, $S_{\alpha+\beta}$ ἤδη εἶνε γνωστά. Ἂν εἰς τὸν τύπον (28) ὑποθέσωμεν $\alpha=\beta$ οἱ ὅροι τοῦ πρώτου μέλους οἱ ἔχοντες τὰς αὐτὰς ῥίζας συμπίπτουσι καὶ ἑπομένως προκύπτει ἡ σχέσις : $2\Sigma\chi^\alpha_1\chi^\alpha_2 = S_\alpha^2 - S_{2\alpha}$, ὅθεν προκύπτει ἡ τιμή : $\Sigma\chi^\alpha_1\chi^\alpha_2 = \frac{1}{2}\left(S_\alpha^2 - S_{2\alpha}\right)$.

21. **Λογισμὸς συναρτήσεως $\Sigma\chi^\alpha_1\chi^\beta_2\chi^\gamma_3$**, ἥτις εἶνε ἄθροισμα πάντων τῶν γινομένων τριῶν δυνάμεων ῥιζῶν ἐχουσῶν ἐκθέτας α,β,γ. Πρὸς τοῦτο πολ)μεν κατὰ μέλη τὴν ἰσότητα (28) καὶ τὴν $\Sigma\chi^\gamma_1 = S_\gamma$, ὅτε προκύπτει ἡ ἰσότης :

$$(29) \; \Sigma\chi^\alpha_1\chi^\beta_2\chi^\gamma_3 + \Sigma\chi_1^{\alpha+\gamma}\chi^\beta_2 + \Sigma\chi^\alpha_1\chi_2^{\beta+\gamma} = S_\alpha S_\beta S_\gamma - S_{\alpha+\beta} S_\gamma$$

ἀφ' ἑτέρου, κατὰ τὸ ἐδάφιον 20, ἔχομεν : $\Sigma\chi_1^{\alpha+\gamma}\chi^\beta_2 = S_{\alpha+\gamma}S_\beta - S_{\alpha+\beta+\gamma}$, $\Sigma\chi^\alpha_1\chi_2^{\beta+\gamma} = S_\alpha S_{\beta+\gamma} - S_{\alpha+\beta+\gamma}$, ὅθεν ἡ (29) γίνεται :

$$(30) \; \Sigma\chi^\alpha_1\chi^\beta_2\chi^\gamma_3 = S_\alpha S_\beta S_\gamma - S_{\alpha+\beta}S_\gamma - S_{\beta+\gamma}S_\alpha - S_{\gamma+\alpha}S_\beta + 2S_{\alpha+\beta+\gamma}$$

ἂν $\alpha=\beta$, οἱ ὅροι τοῦ πρώτου μέλους ἀνὰ δύο συμπίπτουσι καὶ ἔχομεν : $2\Sigma\chi^\alpha_1\chi^\alpha_2\chi^\gamma_3 = S_\alpha^2 S_\gamma - S_{2\alpha}S_\gamma - 2S_{\alpha+\gamma}S_\alpha + 2S_{2\alpha+\gamma}$ ἂν δὲ $\alpha=\beta=\gamma$, οἱ ὅροι τοῦ α΄ μέλους τῆς (30) συμπίπτουσιν ἀνὰ ἕξ καὶ ἔχομεν ἑπομένως τὸν τύπον :

$$6\Sigma\chi^{\alpha}_{1}\chi^{\alpha}_{2}\chi^{\alpha}_{3}=S^{3}_{\alpha}=S_{\alpha}^{3}-3S_{\alpha}S_{2\alpha}+2S_{3\alpha}$$

Ἐξακολουθοῦντες κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ὑπολογίζομεν ὑπὸ μορφὴν ἀκεραίου πολυωνύμου ὡς πρὸς τοὺς συντελεστὰς τῆς ἐξισώσεως πᾶν πολυώνυμον ἀκέραιον, συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὰς ῥίζας καὶ περιέχον τοὺς αὐτοὺς ἐκθέτας ἐν ἑκάστῳ ὅρῳ, ἐπειδὴ δέ, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδ. 16, πᾶν συμμετρικὸν πολυώνυμον εἶναι ἄθροισμα ἄλλων ἐχόντων τὴν ὡς ἄνω ἰδιότητα τῶν ἐκθετῶν, ἕπεται ὅτι ἡ ἐν λόγῳ παράστασις διὰ τῶν συντελεστῶν εἶναι δυνατὴ διὰ πᾶν πολυώνυμον συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὰς ῥίζας $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\mu$. Ἀφ' ἑτέρου πᾶσα συνάρτησις ῥητὴ καὶ συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὰς ῥίζας εἶνε πηλῖκον δύο ἀκεραίων πολυωνύμων συμμετρικῶν πρὸς ταύτας καὶ ἑπομένως ἔχομεν τὸ ἑξῆς θεώρημα :

Πᾶσα συνάρτησις τῶν ῥιζῶν μιᾶς ἐξισώσεως : $\chi^{\mu}+\alpha_1\chi^{\mu-1}+\ldots+\alpha_\mu=0$ ῥητὴ καὶ συμμετρικὴ ὡς πρὸς αὐτὰς δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ῥητῶς συναρτήσει τῶν συντελεστῶν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\mu$.

Ἀσκήσεις.

1) Ὑπολογῖσαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^4-7\chi^3+2\chi^2+25\chi=112$ τὰ $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, \Sigma\chi_1\chi^2_2, \Sigma\chi_1\chi^3_2, \Sigma\chi_1\chi^2_2\chi^3_3, \Sigma\chi_1{}^2\chi^2_2$.

2) Ἂν καλέσωμεν $\chi_1\chi_2\chi_3\chi_4$ τὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως : $\chi^4+\alpha\chi^3+\beta\chi^2+\gamma\chi+\delta=0$ καὶ θέσωμεν $A=\chi_1\chi_2+\chi_3\chi_4$, $B=\chi_1\chi_3+\chi_2\chi_4$, $\Gamma=\chi_1\chi_4+\chi_2\chi_3$, ἐκφράσαι διὰ τῶν συντελεστῶν τὰς συμμετρικὰς συναρτήσεις : $A^2+B^2+\Gamma^2$, $AB+A\Gamma+B\Gamma$, καὶ $AB\Gamma$.

II. Τὸ πρόβλημα τῆς ἀπαλοιφῆς

22. Ἡ ἔννοια τῆς ἀπαλοιφῆς τοῦ χ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων $\varphi(\chi)=0$ καὶ $f(\chi)=0$ βαθμῶν μ καὶ ν συνίσταται εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς ἱκανῆς καὶ ἀναγκαίας συνθήκης, ἵνα αὗται ἔχωσι κοινήν τινα ῥίζαν, ἥτις καλεῖται καὶ ἐξαγόμενον τῆς ἀπαλοιφῆς τοῦ χ μεταξὺ τῶν δύο ἐξισώσεων.

23. **Ἀπαλοιφὴ διὰ τῶν συμμετρικῶν συναρτήσεων.** Ἂν καλέσωμεν $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\mu$ τὰς ῥίζας τοῦ $\varphi(\chi)$ καὶ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$ τὰς τοῦ $f(\chi)$, προφανῶς τὴν ζητουμένην συνθήκην ἐκφράζουσιν αἱ ἑπόμεναι σχέσεις :

$$(31)\quad \varphi(\xi_1)\cdot\varphi(\xi_2)\ldots\varphi(\xi_\nu)=0$$

$$(32)\quad f(\chi_1)\cdot f(\chi_2)\ldots f(\chi_\mu)=0$$

Ἐκ τούτων ἡ πρώτη εἶνε ἤδη ἐκπεφρασμένη διὰ τῶν συντελεστῶν τοῦ $\varphi(\chi)$ καὶ τῶν ῥιζῶν τοῦ $f(\chi)$, ἐπειδὴ ὅμως εἶνε προφανῶς συμμετρικὴ συνάρτησις τῶν ῥιζῶν τῆς $f(\chi)$ δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ῥητῶς καὶ διὰ τῶν συντελεστῶν αὐτοῦ. Δι' ὅμοιον λόγον καὶ ἡ δευτέρα σχέσις (32) ἐκφράζεται ῥητῶς διὰ τῶν συντελεστῶν τοῦ $\varphi(\chi)$. Αἱ σχέσεις λοιπὸν αὗται ἐκφραζόμεναι ῥητῶς διὰ τῶν συντελεστῶν τῶν δοθέντων πολυωνύμων παρέχουσι τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀπαλοιφῆς. Εὐνόητον εἶναι ὅτι ὀφείλουσι νὰ εἶνε ἰσοδύναμοι. Τῷ ὄντι ἂν θέσωμεν $\varphi(\chi)=\alpha_0\chi^{\mu}+$ $+\alpha_1\chi^{\mu-1}+\ldots+\alpha_{\mu}$, $f(\chi)=\beta_0\chi^{\nu}+\beta_1\chi^{\nu-1}+\ldots+\beta_{\nu}$, θὰ ἔχωμεν:

$\varphi(\chi)=\alpha_0(\chi-\chi_1)(\chi-\chi_2)\ldots(\chi-\chi_\mu)$, $f(\chi)=\beta_0(\chi-\xi_1)\ldots(\chi-\xi_\nu)$ τὰ δὲ γινόμενα: $\dfrac{\varphi(\xi_1)\varphi(\xi_2)\ldots\varphi(\xi_\nu)}{\alpha_0^{\nu}}$ καὶ $\dfrac{f(\chi_1)f(\chi_2)\ldots f(\chi_\mu)}{\beta_0^{\mu}}$ ἰσοῦνται ἀπολύτως μὲ τὸ ἑξῆς γινόμενον $[(\chi_1-\xi_1)\ldots(\chi_1-\xi_\nu)][(\chi_2-\xi_1)\ldots(\chi_2-\xi_\nu)]\ldots$ $[(\chi_\mu-\xi_1)\ldots(\chi_\mu-\xi_\nu)]$.

Παράδειγμα. Ἡ ἀπαλοιφὴ τοῦ χ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων $\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, $\chi^3+p\chi+q=0$ δίδει ὡς ἐξαγόμενον: $(\chi^3_1+p\chi_1+q)(\chi^3_2+p\chi_2+q)=0$ ὅπου χ_1,χ_2 εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, δηλ. $(\chi_1\chi_2)^3+$ $+p\chi_1\chi_2(\chi^2_1+\chi^2_2)+q(\chi^3_1+\chi^3_2)+p^2\chi_1\chi_2+pq(\chi_1+\chi_2)+q^2=0$. (33)

ἀλλὰ $\chi_1\chi_2=\gamma$, $\chi_1+\chi_2=-\beta$, $\chi^2_1+\chi^2_2=\beta^2-2\gamma=S_2$, $\chi^3_1+\chi^3_2=$ $S_3=-\beta S_2-\gamma S_1=-\beta^3+2\beta\gamma+\beta\gamma=3\beta\gamma-\beta^3$ καὶ ἑπομένως τὸ ἐξαγόμενον (33) τῆς ἀπαλοιφῆς γίνεται:

$$p^2\gamma-pq\beta+q^2+p\gamma(\beta^2-2\gamma)+q\beta(3\gamma-\beta^2)+\gamma^3=0$$

24. **Μέθοδος τοῦ** Sylvester. Οὗτος ἤχθη εἰς τὴν μέθοδον ταύτην παρατηρήσας ὅτι, ἂν ὑπάρχῃ κοινὴ ῥίζα $\chi=\varrho$, αὕτη θ' ἀληθεύῃ καὶ τὰς ἐξισώσεις:

(34) $\varphi(\chi)=0$, $\chi\varphi(\chi)=0,\ldots\chi^{\nu-1}\varphi(\chi)=0$, $f(\chi)=0$, $\chi f(\chi)=0,\ldots,$ $\chi^{\mu-1}f(\chi)=0$.

αἵτινες εἶνε $\mu+\nu$ τὸ πλῆθος καὶ περιέχουσι τὰς δυνάμεις: χ, χ^2 $\ldots\chi^{\mu+\nu-1}$, ἂν αὗται θεωρηθῶσιν ὡς $\mu+\nu-1$ διακεκριμμένοι ἄγνωστοι, τὸ σύστημα θὰ εἶνε γραμμικὸν ὡς πρὸς αὐτοὺς καὶ ἐπειδὴ δέχεται μίαν λύσιν ἐξ ὑποθέσεως $\chi=\varrho$, $\chi^2=\varrho^2,\ldots,\chi^{\mu+\nu-1}=\varrho^{\mu+\nu-1}$ ἕπεται ὅτι ἡ ὁρίζουσα Δ πάντων τῶν συντελεστῶν αὐτῶν θὰ εἶνε μηδέν. Ἡ ὁρίζουσα αὕτη καλεῖται **ὁρίζουσα τοῦ** Sylvester καὶ εἶνε ἡ ἑξῆς:

$$\Delta=\left|\begin{array}{l} \alpha_0\ \alpha_1\ \alpha_2\ \dots\ \alpha_\mu\ 0\ 0\ \dots\ 0 \\ 0\ \alpha_0\ \alpha_1\ \dots\dots\ \alpha_\mu\ 0\ \dots\ 0 \\ 0\ 0\ \alpha_0\ \alpha_1\ \dots\dots\ \alpha_\mu\ \dots\ 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0\ 0\ \dots\ 0\ \alpha_1\ \alpha_2\ \dots\dots\ \alpha_\mu \\ \beta_0\ \beta_1\ \beta_2\ \dots\ \beta_\nu\ 0\ 0\ \dots\ 0 \\ 0\ \beta_0\ \beta_1\ \beta_2\ \dots\ \beta_\nu\ 0\ \dots\ 0 \\ 0\ 0\ \beta_0\ \beta_1\ \beta_2\ \dots\ \beta_\nu\ \dots\ 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0\ 0\ 0\ \dots\ 0\ \beta_0\ \beta_1\ \beta_2\ \dots\ \beta_\nu \end{array}\right|$$

ἔχουσα ν γραμμὰς τῶν α καὶ μ τῶν β, δηλ. ἐν συνόλῳ $\mu+\nu$ γραμμὰς καὶ $\mu+\nu$ στήλας.

25. Θ' ἀποδείξω ὅτι, ἂν $\Delta=0$, ὑπάρχει μία τοὐλάχιστον κοινὴ ῥίζα. Πρὸς τοῦτο πολ)μεν τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης στήλης ἐπὶ $\chi^{\mu+\nu-1}$, τῆς δευτέρας ἐπὶ $\chi^{\mu+\nu-2}$, ... προσθέτομεν δὲ πάντα ταῦτα εἰς τὰ στοιχεῖα τῆς τελευταίας στήλης, ἅτινα γίνονται: $\chi^{\nu-1}\varphi(\chi)$, $\chi^{\nu-2}\varphi(\chi)$, ..., $\varphi(\chi)$, $\chi^{\mu-1}f(\chi)$, $\chi^{\mu-2}f(\chi)$, ... $f(\chi)$. Ἡ νέα ὁρίζουσα ἀναπτυσσομένη κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς τελευταίας στήλης γίνεται: $A_0\varphi(\chi)+A_1\chi\varphi(\chi)+A_2\chi^2\varphi(\chi)+\dots+A_{\nu-1}\chi^{\nu-1}\varphi(\chi)+B_0f(\chi)+$ $+B_1\chi f(\chi)+B_2\chi^2f(\chi)+\dots+B_{\mu-1}\chi^{\mu-1}f(\chi)=\varphi(\chi)f_{\nu-1}(\chi)+f(\chi)\varphi_{\mu-1}(\chi)$ ὅπου οἱ συντελεσταὶ A_κ, B_κ εἶνε ἀριθμοὶ σταθεροί. Ὅθεν θὰ ἔχωμεν προφανῶς τὴν ταυτότητα:

$$\varphi(\chi)f_{\nu-1}(\chi)+f(\chi)\varphi_{\mu-1}(\chi)=\Delta. \tag{34}$$

ἥτις ἀποδεικνύει ἀμέσως ὅτι, ἂν ὑπάρχῃ κοινὴ ῥίζα τῶν $\varphi(\chi)$ καὶ $f(\chi)$, τὸ δεύτερον μέρος Δ εἶνε μηδέν. Ἀντιστρόφως, ἂν $\Delta=0$, θὰ ἔχωμεν: $\varphi(\chi)f_{\nu-1}(\chi)+f(\chi)\varphi_{\mu-1}(\chi)=0$ καὶ τότε αἱ ῥίζαι τοῦ $\varphi(\chi)$ θὰ μηδενίζωσι τὸ γινόμενον $f(\chi)\varphi_{\mu-1}(\chi)$ ἄρα ἢ μία τοὐλάχιστον ἐξ αὐτῶν θὰ μηδενίζῃ καὶ τὸ $f(\chi)$, ὅτε θὰ ἔχωμεν κοινὴν ῥίζαν ἢ πᾶσαι θὰ μηδενίζουσι τὸ $\varphi_{\mu-1}(\chi)$, ὅπερ ὡς ἔχον ῥίζας περισσοτέρας τοῦ βαθμοῦ του θὰ εἶνε ἐκ ταυτότητος μηδέν. Ὁμοίως αἱ ν ῥίζαι τοῦ $f(\chi)$ θὰ μηδενίζωσι τὸ γινόμενον $\varphi(\chi)f_{\nu-1}(\chi)$ καὶ ἄρα ἢ μία τοὐλάχιστον ἐξ αὐτῶν θὰ μηδενίζῃ καὶ τὸ $\varphi(\chi)$ ὅτε θὰ ἔχωμεν κοινὴν ῥίζαν ἢ πᾶσαι θὰ μηδενίζωσι τὸ $f_{\nu-1}(\chi)$, ὅπερ θὰ εἶνε ἐκ ταὐτότητος μηδέν. Λοιπὸν ἢ θὰ ὑπάρχῃ κοινὴ ῥίζα ἢ τὰ δύο πολυώνυμα $\varphi_{\mu-1}(\chi)$ καὶ $f_{\nu-1}(\chi)$ θὰ εἶνε ἀναγκαίως ἐκ ταὐτότητος μηδέν. Ἀλλὰ τὸ δεύτερον εἶνε ἀπαράδεκτον, διότι ἂν ζητήσωμεν νὰ ὁρίσωμεν δύο πολυώνυμα $\varphi_{\mu-1}=A_0+A_1\chi+ +\ldots+A_{\mu-1}\chi^{\mu-1}$, $f_{\nu-1}=B_0+B_1\chi+\ldots+B_{\nu-1}\chi^{\nu-1}$ βαθμοῦ $\mu-1$ καὶ $\nu-1$ ὥστε νὰ ὑπάρχῃ ἐκ ταὐτότητος ἡ σχέσις :

$$\varphi(\chi)f_{\nu-1}(\chi)+f(\chi)\varphi_{\mu-1}(\chi)=(\alpha_0\chi^{\mu}+\alpha_1\chi^{\mu-1}+\ldots+\alpha_{\mu})(B_0+B_1\chi+\ldots+$$
$$+B_{\nu-1}\chi^{\nu-1})+(\beta_0\chi^{\nu}+\beta_1\chi^{\nu-1}+\ldots+\beta_{\nu})(A_0+A_1\chi+\ldots+$$
$$+A_{\mu-1}\chi^{\mu-1})=0$$

τότε, διατάσσοντες αὐτὴν κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ χ καὶ μηδενίζοντες τοὺς συντελεστὰς πασῶν τῶν δυνάμεων τοῦ χ, εὑρίσκομεν ἓν σύστημα $\mu+\nu$ ἐξισώσεων μετὰ $\mu+\nu$ ἀγνώστων: A_0, A_1, $\ldots$, $A_{\mu-1}$, B_0, B_1, $\ldots$, $B_{\nu-1}$ ὁμογενὲς ὡς πρὸς αὐτούς, τοῦ ὁποίου ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων εἶνε κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἡ Δ, ἥτις εἶνε μηδέν. Λοιπὸν τὸ σύστημα ἔχει καὶ ἄλλας λύσεις ἐκτὸς τῆς μηδενικῆς $B_0=B_1=\ldots=A_0=A_1=\ldots=0$, συνάγομεν λοιπὸν τὸ ἑξῆς θεώρημα :

Ἵνα αἱ δύο ἐξισώσεις ἔχωσι κοινὴν λύσιν πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ ἀντίστοιχος ὁρίζουσα τοῦ Sylvester νὰ εἶνε μηδέν, προσέτι δὲ ἵνα τὰ πολυώνυμα $\varphi(\chi)$ καὶ $f(\chi)$ ὦσι πρῶτα πρὸς ἄλληλα πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε δυνατὴ μία σχέσις τῆς μορφῆς (34), ἔνθα Δ ἀριθμὸς σταθερὸς διάφορος τοῦ μηδενός.

Παράδειγμα. Διὰ τὰς ἐξισώσεις $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, $\chi^3+p\chi+q=0$, τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀπαλοιφῆς εἶναι :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p & q \end{vmatrix}=0$$

26. **Ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα τὰ πολυώνυμα φ(χ) f(χ) ἔχωσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην βαθμοῦ Κ.** Ἐὰν τὰ φ(χ) καὶ f(χ) ἔχωσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην $M_K(\chi)$ βαθμοῦ Κ, τὰ πηλῖκα $\varphi(\chi):M_K(\chi)$, $f(\chi):M_K(\chi)$ θὰ εἶνε πρῶτα πρὸς ἄλληλα, ἄρα θὰ εἶνε δυνατὴ μία ταὐτότης τῆς μορφῆς : $\frac{\varphi(\chi)}{M_K(\chi)}f_{\nu-K-1}(\chi)+\frac{f(\chi)}{M_K(\chi)}\varphi_{\mu-K-1}(\chi)$ $=1$. δηλ. (25) $\varphi(\chi)f_{\nu-K-1}(\chi)+f(\chi)\varphi_{\mu-K-1}(\chi)=M_K(\chi)$·

ἔνθα τὰ $f_{\nu-K-1}(\chi)$, $\varphi_{\mu-K-1}(\chi)$ θὰ εἶνε βαθμοῦ $\nu-K-1$, $\mu-K-1$

Ὥστε θὰ εἶνε δυνατὴ ταὐτότης τῆς μορφῆς :

$$(36) \qquad \varphi(\chi)f_{\nu-\varrho-1}(\chi)+f(\chi)\varphi_{\mu-\varrho-1}(\chi)=M_\varrho(\chi)$$

διὰ $\varrho=K$ καὶ ἀδύνατος διὰ $\varrho<K$, διότι τότε ὁ $M_K(\chi)$ ὡς διαιρῶν τὸ πρῶτον μέλος, θὰ διήρει καὶ τὸ δεύτερον $M_\varrho(\chi)$ ὅπερ ἄτοπον. Ἀντιστρόφως, ἂν ταὐτότης τῆς μορφῆς (36) εἶνε δυνατὴ διὰ $\varrho=K$, ἀδύνατος μὲ διὰ $\varrho<K$, ὁ Μ.Κ.Δ. θὰ εἶνε βαθμοῦ Κ, ὡς εὐκόλως δεικνύεται. Λοιπὸν συνάγομεν :

Ἵνα ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν φ(χ) καὶ f(χ) εἶνε βαθμοῦ Κ πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ ταυτότης (36) νὰ εἶνε δυνατὴ διὰ ρ=Κ καὶ ἀδύνατος διὰ ρ<Κ.

Ζητήματα πρὸς Ἄσκησιν.

Εὑρεῖν τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀπαλοιφῆς τοῦ χ μεταξὺ τῶν ἑπομένων ἐξισώσεων:

1) $\alpha_0\chi^2+\alpha_1\chi+\alpha_2=0$, $\beta_0\chi^2+\beta_1\chi+\beta_2=0$

[Απ. $(\alpha_0\beta_2-\beta_0\alpha_2)^2=(\alpha_0\beta_1-\beta_0\alpha_1)(\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2)$]

2) $\alpha_0\chi^3+\alpha_2\chi^2+\alpha_2\chi+\alpha_3=0$, $\beta_0\chi^3+\beta_1\chi^2+\beta_2\chi+\beta_3=0$.

3) $\chi^3+\alpha\chi+\beta=0$, $\beta\chi^3+\alpha\chi^2+1=0$

['Απ. $(\alpha+\beta+1)(\alpha-\beta+1)(\alpha-\beta^2-1)^2=0$.

4) Ἀπαλεῖψαι τὰ χ, ψ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων: $\chi+\psi=\alpha$, $\chi^2+\psi^2=\beta$ $\chi^3+\psi^3=\gamma$. ['Απ. $2\gamma=3\alpha\beta-\alpha^3$].

5) Δεῖξαι ὅτι αἱ ἐξισώσεις: $\chi^4-13\chi^2+36=0$, $\chi^3+\chi^2-4\chi-4=0$ ἔχουσι κοινὰς ῥίζας.

6) Εὑρεῖν τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην ἵνα ἡ ἐξίσωσις $\chi^5+\alpha\chi^3+\beta=0$ ἔχῃ μίαν ῥίζαν διπλῆν καὶ ὑπολογῖσαι ταύτην.

[Ἀπ. πρέπει: $4.3^3\alpha^5+5^5\beta^2=0$, ἡ δὲ ῥίζα εἶνε: $\pm\sqrt{-\frac{3\alpha}{5}}$]

Περὶ μετασχηματισμοῦ τῶν ἐξισώσεων.

27. Μετασχηματίσαι τὴν ἐξίσωσιν $\sigma(\chi)=0$ διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ $\psi=\frac{f(\chi)}{\varphi(\chi)}$ σημαίνει: εὑρεῖν ἐξίσωσιν ἔχουσαν ῥίζας τὰς διαφόρους τιμάς $\psi_1=\frac{f(\chi_1)}{\varphi(\chi_1)}$, $\psi_2=\frac{f(\chi_2)}{\varphi(\chi_2)}, \ldots, \psi_\mu=\frac{f(\chi_\mu)}{\varphi(\chi_\mu)}$ (37) τοῦ ψ τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς τὰς μ ῥίζας τῆς δοθείσης ἐξισώσεως $\sigma(\chi)=0$. Ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις θὰ εἶνε:

$$\left[\psi-\frac{f(\chi_1)}{\varphi(\chi_1)}\right]\left[\psi-\frac{f(\chi_2)}{\varphi(\chi_2)}\right]\ldots\left[\psi-\frac{f(\chi_\mu)}{\varphi(\chi_\mu)}\right]=0 \quad \text{ἢ}$$

$$(38) \qquad [\psi\varphi(\chi_1)-f(\chi_1)][\psi\varphi(\chi_2)-f(\chi_2)]\ldots[\psi\varphi(\chi_\mu)-f(\chi_\mu)]=0,$$

ἐκφράζει δὲ προφανῶς τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀπαλοιφῆς τοῦ χ μεταξὺ τῶν δύο ἐξισώσεων: $\sigma(\chi)=0$, $\psi\varphi(\chi)-f(\chi)=0$ (39)

Ἂν τὰ πολυώνυμα $\sigma(\chi)$ καὶ $\varphi(\chi)$ δὲν ἔχουσι καμμίαν κοινὴν ῥίζαν, αἱ τιμαὶ (37) εἶναι πᾶσαι πεπερασμέναι καὶ ἡ μετεσχηματισμένη ἐξίσωσις εἶνε ἐπίσης βαθμοῦ μ, ἂν ὅμως, τοῦ κλάσματος $\psi=\frac{f(\chi)}{\varphi(\chi)}$, ὑποτιθεμένου ἀναγώγου, τὰ πολυώνυμα $\varphi(\chi)$ καὶ $f(\chi)$ ἔχωσι κοινὰς ῥίζας $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_K$ ἡ ἐξίσωσις (38) γίνεται:

$$\left[\psi\varphi(\chi_{K+1})-f(\chi_{K+1})\right]\left[\psi\varphi(\chi_{K+2})-f(\chi_{K+2})\right]\ldots$$
$$\left[\psi\varphi(\chi_\mu)-f(\chi_\mu)\right]=0$$

δηλ. βαθμοῦ μ—Κ, τῶν λοιπῶν ῥιζῶν ἐξαφανισθεισῶν εἰς τὸ ἄπειρον.

Εὐνόητον ὅτι ἐνταῦθα ὑποθέτομεν μόνον ῥητοὺς μετασχηματισμοὺς δηλ. τὰ $\varphi(\chi)$ ἀκέραια πολυώνυμα.

Θεώρημα 1. Ἂν τὰ $\sigma(\chi)$ καὶ $\varphi(\chi)$ εἶνε πρῶτα πρὸς ἄλληλα, ὁ ῥητὸς μετασχηματισμὸς $\psi=\frac{f(\chi)}{\varphi(\chi)}$ εἶνε ἰσοδύναμος πρὸς ἀκέραιον μετασχηματισμόν. Τῷ ὄντι, θὰ ὑπάρχωσι πολυώνυμα $\sigma_1(\chi)$ καὶ $\varphi_1(\chi)$ τοιαῦτα ὥστε νὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα: $\sigma(\chi)\varphi_1(\chi)+\varphi(\chi)\sigma_1(\chi)=1$. Ἂν δὲ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $\sigma_1(\chi)$ ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\psi=\frac{f(\chi)}{\varphi(\chi)}$, λαμβάνομεν :

$\psi=\frac{f(\chi)\cdot\sigma_1(\chi)}{\varphi(\chi)\cdot\sigma_1(\chi)}=\frac{f(\chi)\sigma_1(\chi)}{1-\sigma(\chi)\varphi_1(\chi)}$ καὶ ἑπομένως, διὰ τὰς ρίζας $\chi_1,\chi_2\ldots\chi_\mu$ τοῦ $\sigma(\chi)$, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν : $\psi=f(\chi)\sigma_1(\chi)$ καὶ ἑπομένως ὁ ρητὸς μετασχηματισμός : $\psi=\frac{f(\chi)}{\varphi(\chi)}$ θὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν δύναμιν, ἣν ἔχει καὶ ὁ ἀκέραιος μετασχηματισμὸς $\psi=f(\chi)\sigma_1(\chi)$.

Θεώρημα II. Ἂν ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις $\sigma(\chi)=0$ εἶνε βαθμοῦ μ, τὸ πολυώνυμον $\psi=M(\chi)$ τοῦ μετασχηματισμοῦ δύναται νὰ ὑποτεθῇ τὸ πολὺ βαθμοῦ $\mu-1$. Τοῦτο εἶνε προφανὲς διότι αἱ δυνάμεις τοῦ χ αἱ ἀνώτεραι τῆς $\chi^{\mu-1}$ ἕνεκα τῆς ἐξισώσεως $\sigma(\chi)=0$, δύνανται ν' ἀντικατασταθῶσιν ὑπὸ πολυωνύμων βαθμοῦ τὸ πολὺ $\mu-1$.

28. **Ἀντίστροφος** λέγεται ἐξίσωσις $\sigma(\chi)=0$, ὅταν πᾶσα ρίζα αὐτῆς συνοδεύεται καὶ ἀπὸ τὴν ἀντίστροφόν της, ἥτις εἶνε ἐπίσης ρίζα, διὰ τοῦτο δέ, ὅταν τὸ χ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τοῦ $\frac{1}{\chi}$, προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος πρὸς τὴν δοθεῖσαν. Οἱ μόνοι ἀριθμοί, οἵτινες συμπίπτουσι μὲ τοὺς ἀντιστρόφους των εἶνε οἱ $+1$ καὶ -1, ὅταν δὲ εἶνε ρίζαι, βεβαιούμεθα περὶ τούτου ἀμέσως καὶ διὰ διαιρέσεως ἀπαλασσόμεθα αὐτῶν, ὅτε τὸ πηλῖκον θὰ εἶνε προφανῶς ἀρτίου βαθμοῦ διότι πᾶσα ἄλλη ρίζα συνοδεύεται καὶ ἀπὸ τὴν ἀντίστροφόν της. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ περιορισθῶμεν εἰς ἀντίστροφον ἐξίσωσιν ἀρτίου βαθμοῦ ἐστερημένην τῶν ριζῶν ±1, μορφῆς:

$$(40)\qquad \alpha_0\chi^\mu+\alpha_1\chi^{\mu-1}+\ldots+\alpha_{\mu-1}\chi+\alpha_\mu=0.$$

ἥτις, ἂν ἀντὶ χ τεθῇ $\frac{1}{\chi}$, γίνεται $\alpha_0+\alpha_1\chi+\ldots+\alpha_{\mu-1}\chi^{\mu-1}+$ $+\alpha_\mu\chi^\mu=0$, ὀφείλουσα νὰ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν προηγουμένην ἑπομένως θὰ ἔχωμεν : $\frac{\alpha_0}{\alpha_\mu}=\frac{\alpha_1}{\alpha_{\mu-1}}=\frac{\alpha_2}{\alpha_{\mu-2}}=\ldots=\frac{\alpha_\mu}{\alpha_0}$, ἐξ ὧν $\left(\frac{\alpha_\mu}{\alpha_0}\right)^2=1$ καὶ ἑπομένως $\frac{\alpha_\mu}{\alpha_0}=\pm1$. Ἀλλὰ τὸ μεῖον ἀπορρίπτεται διότι τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν, ὅπερ προφανῶς εἶνε θετικόν, εἶνε $\frac{\alpha_\mu}{\alpha_0}$.

Λοιπὸν θὰ ἔχωμεν: $\frac{\alpha_0}{\alpha_\mu}=\frac{\alpha_1}{\alpha_{\mu-1}}=\frac{\alpha_2}{\alpha_{\mu-2}}=\ldots=1$ δηλ. **οἱ ὅροι οἱ ἰσάκις ἀπέχοντες τῶν ἄκρων θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν συντελεστήν.**

Ὑποβιβασμὸς τοῦ βαθμοῦ κατὰ τὸ ἥμισυ διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ $\psi=\chi+\frac{1}{\chi}$. Ἂν θέσωμεν $\mu=2\nu$ καὶ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὸ προηγούμενον συμπέρασμα, ἡ ἀντίστροφος ἐξίσωσις (40) γράφεται:

$$\alpha_0\chi^{2\nu}+\alpha_1\chi^{2\nu-1}+\ldots+\alpha_{\nu+1}\chi^{\nu+1}+\alpha_\nu\chi^\nu+\alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1}$$
$$+\ldots+\alpha_1\chi+\alpha_0=0$$

ἂν δὲ διαιρέσωμεν τὰ δύο μέλη διὰ χ^ν ἔχομεν: $\alpha_0\chi^\nu+\alpha_1\chi^{\nu-1}+\ldots+$ $+\alpha_{\nu-1}\chi+\alpha_\nu+\alpha_{\nu-1}\frac{1}{\chi}+\ldots+\alpha_0\frac{1}{\chi^\nu}=0$ ἥτις γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\alpha_0(\chi^\nu+\frac{1}{\chi^\nu})+\alpha_1(\chi^{\nu-1}+\frac{1}{\chi^{\nu-1}})+\ldots+\alpha_{\nu-1}(\chi+\frac{1}{\chi})+\alpha_\nu=0 \qquad (41)$$

ἂν δὲ ἐκτελεσθῇ ἡ ἀντικατάστασις $\psi=\chi+\frac{1}{\chi}$, θὰ ἔχωμεν $\chi^2+\frac{1}{\chi^2}=\psi^2-2$, $\chi^3+\frac{1}{\chi^3}=\psi^3-3\psi$, ..., καὶ γενικῶς τὴν σχέσιν:

$$(\chi^{K-1}+\frac{1}{\chi^{K-1}})(\chi+\frac{1}{\chi})=(\chi^K+\frac{1}{\chi^K})+(\chi^{K-2}+\frac{1}{\chi^{K-2}}),$$

ἥτις ἐπιτρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν βαθμηδὸν συναρτήσει τοῦ ψ τὰς παραστάσεις τῆς μορφῆς $\chi^K+\frac{1}{\chi^K}$· βλέπομεν δὲ ὅτι ἡ ἐκτελεσθεῖσα ἀντικατάστασις $\psi=\chi+\frac{1}{\chi}$ μετασχηματίζει τὸν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν (40) εἰς ἄλλην βαθμοῦ ἡμίσεως.

III. Τὸ πρόβλημα τῆς παρεμβολῆς.

30. Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐν τῇ ἁπλουστάτῃ αὐτοῦ μορφῇ συνίσταται εἰς τὸ ἑξῆς: Προσδιορίσαι πολυώνυμον βαθμοῦ μ $\psi=\alpha_0\chi^\mu+$ $+\alpha_1\chi^{\mu-1}+\ldots+\alpha_{\mu-1}\chi+\alpha_\mu$ λαμβᾶνον δεδομένας τιμὰς ψ_0, ψ_1, ..., ψ_μ διὰ $\mu+1$ διαφόρους τιμὰς χ_0, χ_1, ..., χ_μ τοῦ χ. Ἄγνωστοι εἶνε οἱ $\mu+1$ συντελεσταὶ α_0, α_1, ..., α_μ τὰ δὲ $\mu+1$ ἐπιτάγματα ἐκφράζονται διὰ τῶν ἐξισώσεων·

$$(42)\ \alpha_0\chi_0^\mu+\ldots+\alpha_{\mu-1}\chi_0+\alpha_\mu=\psi_0,\ \alpha_0\chi_1^\mu+\ldots+\alpha_{\mu-1}\chi_1+\alpha_\mu=\psi_1,$$
$$\ldots,\ \alpha_0\chi_\mu^\mu+\ldots+\alpha_\mu=\psi_\mu$$

Ἐπειδὴ ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων ἐν τῷ συστήματι εἶνε: $\left|\chi_i^\mu\ \chi_i^{\mu-1}\ \ldots\ \chi_i\ 1\right|\neq 0$ ($i=0, 1, \ldots \mu$), δηλ. ὁρίζουσα τοῦ

Vandermonde, τὸ σύστημα (42) ἐπιδέχεται μίαν μόνην λύσιν, ἥτις εἶνε τῆς μορφῆς :

$$
(43)\qquad
\begin{aligned}
\alpha_0 &= A_{00}\psi_0 + A_{01}\psi_1 + \dots + A_{0\mu}\psi_\mu \\
\alpha_1 &= A_{10}\psi_0 + A_{11}\psi_1 + \dots + A_{1\mu}\psi_\mu \\
&\dots\dots\dots\dots \\
\alpha_\mu &= A_{\mu 0}\psi_0 + A_{\mu 1}\psi_2 + \dots + A_{\mu\mu}\psi_\mu .
\end{aligned}
$$

ὅπου οἱ συντελεσταὶ $A_{\kappa\lambda}$ εἶνε σταθεροὶ ἀριθμοί. Ἂν τὰς τιμὰς ταύτας (43) εἰσαγάγωμεν εἰς τὸ προσδιοριστέον πολυώνυμον $\psi = \alpha_0 \chi^\mu + \dots + \alpha_{\mu-1}\chi + \alpha_\mu$, προκύπτει: (44) $\psi = P_0(\chi)\psi_0 + P_1(\chi)\psi_1 + \dots + P_\mu(\chi)\psi_\mu$

ὅπου τὰ $P_0(\chi), P_1(\chi), \dots, P_\mu(\chi)$ εἶνε ἀκέραια πολυώνυμα βαθμοῦ μ. Τὸ πολυώνυμον (44) λαμβάνει διὰ

$\chi = \chi_0$ τιμὴν ψ_0 ἂν $P_0(\chi_0) = 1$, $P_1(\chi_0) = 0$, … $P_\mu(\chi_0) = 0$

$\chi = \chi_1$ » ψ_1 » $P_0(\chi_1) = 0$, $P_1(\chi_1) = 1$, …, $P_\mu(\chi_1) = 0$

$\chi = \chi_\mu$ » ψ_μ » $P_0(\chi_\mu) = 0$, $P_1(\chi_\mu) = 0$, …, $P_\mu(\chi_\mu) = 1$

Λαμβάνομεν τὴν μοναδικὴν λοιπὸν λύσιν τοῦ προβλήματος ἂν τὰ πολυώνυμα P ὑπόκεινται εἰς τὰς ἀνωτέρω συνθήκας· ἀλλὰ τότε τὸ $P_0(\chi)$, ὡς ἔχον τὰς ῥίζας $\chi = \chi_1, \chi = \chi_2, \dots, \chi = \chi_\mu$ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς:

$P_0(\chi) = A_0(\chi - \chi_1)(\chi - \chi_2)\dots(\chi - \chi_\mu)$, καὶ ἐπειδὴ διὰ $\chi = \chi_0$ τὸ $P_0(\chi_0) = 1$,

προκύπτει: $1 = A_0(\chi_0 - \chi_1)(\chi_0 - \chi_2)\dots(\chi_0 - \chi_\mu)$ δηλ. $A_0 = \dfrac{1}{(\chi_0 - \chi_1)\dots(\chi_0 - \chi_\mu)}$

ἑπομένως προσδιωρίσθη τελείως τὸ πολ)μον $P_0(\chi) = \dfrac{(\chi - \chi_1)\dots(\chi - \chi_\mu)}{(\chi_0 - \chi_1)\dots(\chi_0 - \chi_\mu)}$

Ὁμοίως λαμβάνομεν καὶ $P_1(\chi) = \dfrac{(\chi - \chi_0)\dots(\chi - \chi_\mu)}{(\chi_1 - \chi_0)\dots(\chi_1 - \chi_\mu)}, \dots,$

$P_\mu(\chi) = \dfrac{(\chi - \chi_0)\dots(\chi - \chi_{\mu-1})}{(\chi_\mu - \chi_0)\dots(\chi_\mu - \chi_{\mu-1})}$ καὶ ἑπομένως τὸν τύπον :

$$
(45)\quad \psi = \psi_0 \frac{(\chi - \chi_1)(\chi - \chi_2)\dots(\chi - \chi_\mu)}{(\chi_0 - \chi_1)(\chi_0 - \chi_2)\dots(\chi_0 - \chi_\mu)} + \psi_1 \frac{(\chi - \chi_0)(\chi - \chi_2)\dots(\chi - \chi_\mu)}{(\chi_1 - \chi_0)\dots(\chi_2 - \chi_\mu)} + \dots + \psi_\mu \frac{(\chi - \chi_0)(\chi - \chi_1)\dots(\chi - \chi_{\mu-1})}{(\chi_\mu - \chi_0)(\chi_\mu - \chi_1)\dots(\chi_\mu - \chi_{\mu-1})}
$$

ὅστις λύει τὸ τεθὲν πρόβλημα καὶ καλεῖται **τύπος τοῦ** Langrange

(παρεμβολῆς). Ἂν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (45) διὰ $\varphi(\chi)=(\chi-\chi_0)(\chi-\chi_1)\ldots(\chi-\chi_\mu)$ λαμβάνομεν

$$\frac{\psi}{\varphi(\chi)}=\frac{\sigma(\chi)}{\varphi(\chi)}=\frac{1}{\chi-\chi_0}\cdot\frac{\psi_0}{(\chi_0-\chi_1)\ldots(\chi_0-\chi_\mu)}+\frac{1}{\chi-\chi_1}\cdot\frac{\psi_1}{(\chi_1-\chi_0)(\chi_1-\chi_2)\ldots(\chi_1-\chi_\mu)}$$

$$+\ldots+\frac{1}{\chi-\chi_\mu}\cdot\frac{\psi_\mu}{(\chi_\mu-\chi_0)(\chi_\mu-\chi_1)\ldots(\chi_\mu-\chi_{\mu-1})}$$

Ὁ τύπος οὗτος ἀναλύει τὴν τυχοῦσαν ρητὴν συνάρτησιν εἰς ἁπλᾶ κλάσματα τῆς μορφῆς $\frac{K_0}{\chi-\chi_0}, \frac{K_1}{\chi-\chi_1}, \ldots, \frac{K_\mu}{\chi-\chi_\mu}$, λίαν χρήσιμος εἰς τὸν Ὁλοκληρωτικὸν Λογισμόν.

Ἀσκήσεις

1. Δεῖξαι ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\chi^3-5\chi^2+6\chi-1=0$ διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ $\psi=\chi^2-4\chi+4$ μένει **ἀναλλοίωτος**,

2. Δεῖξαι ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\chi^3+p\chi+q=0$ διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ $\psi=\frac{\chi+\alpha}{\chi+\beta}$ ἀνάγεται εἰς ἐξίσωσιν μορφῆς $A\psi^3=B$ ἔνθα: $\alpha+\beta=\frac{3p}{q}$, $\alpha\beta=-\frac{p}{3}$.

3. Δεῖξαι ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi^4+\beta\chi^3+\gamma\chi^2+\beta\chi+\alpha=0$ διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ $\chi=\frac{1+\psi}{1-\psi}$ ἀνάγεται εἰς διτετράγωνον ἐξίσωσιν.

4. Λῦσαι τὰς ἐξισώσεις.

$$\chi^4-3\chi^3+4\chi^2-3\chi+1=0,\quad \frac{1+\chi^4}{(1+\chi)^4}=\frac{1}{2}.$$

$$\chi^5-4\chi^4+3\chi^3+3\chi^2-4\chi+1=0$$

τήν : $2\chi^5-3\chi^4-5\chi^3+5\chi^2+3\chi-2=0[-1,-1,+1,2,\frac{1}{2}$

$$12\chi^5-8\chi^4-45\chi^3+45\chi^2+8\chi-12=0$$

9. Εὑρεῖν πολυώνυμον, ὅπερ λαμβάνει διὰ $\chi=0,1,2,3$ τὰς τιμὰς $0,1,4,27$ $\psi=\chi[3\chi^2-8\chi+6]$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

I. Περὶ διαφορῶν. 1. Δοθείσης τῆς σειρᾶς τῶν ἀριθμῶν : ψ_0, $\psi_1, \ldots \psi_\mu$ (1), ἂν ἕκαστος ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ἑπομένου, προκύπτουν αἱ λεγόμεναι **πρῶται διαφοραὶ** αὐτῶν σημειούμεναι οὕτω : $\psi_1 - \psi_0 = \Delta\psi_0, \ldots, \psi_\mu - \psi_{\mu-1} = \Delta\psi_{\mu-1}$. Ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν σειράν : $\Delta\psi_0$, $\Delta\psi_1, \ldots, \Delta\psi_{\mu-1}$ (2), αἱ πρῶται διαφοραὶ τῶν διαφορῶν (2) καλοῦνται **δεύτεραι διαφοραὶ** τῶν δοθέντων ἀριθμῶν (1) καὶ σημειοῦνται ὡς ἑξῆς : $\Delta\psi_1 - \Delta\psi_0 = \Delta^2\psi_0, \ldots \Delta\psi_{\mu-1} - \Delta\psi_{\mu-2} = \Delta^2\psi_{\mu-2}$ κ. ο. κ. θὰ ἔχωμεν τὰς τρίτας διαφοράς, καὶ γενικῶς τὰς νιοστὰς διαφοράς. λ. χ. διὰ τῶν ἀριθμῶν $\psi_0, \psi_1, \ldots \psi_5$ σχηματίζομεν τὰς ἑξῆς διαφοράς :

(3)

ψ_0	$\Delta\psi_0$	$\Delta^2\psi_0$	$\Delta^3\psi_0$	$\Delta^4\psi_0$	$\Delta^5\psi_0$
ψ_1	$\Delta\psi_1$	$\Delta^2\psi_1$	$\Delta^3\psi_1$	$\Delta^4\psi_1$	
$\vdots$	$\vdots$	$\Delta^2\psi_2$	$\Delta^3\psi_2$		
ψ_5	$\Delta\psi_4$	$\Delta^2\psi_3$			

Πρόβλημα 1. Ἐκφράσαι τὸν γενικὸν ὅρον ψ_ν τῆς σειρᾶς (1) συναρτήσει τοῦ πρώτου ὅρου ψ_0 καὶ τῶν διαδοχικῶν αὐτοῦ διαφορῶν. Ἔχομεν $\psi_1 = \psi_0 + \Delta\psi_0$ $\Delta\psi_1 = \Delta\psi_0 + \Delta^2\psi_0$ ὅθεν $\psi_2 = \psi_1 + \Delta\psi_1 = \psi_0 + 2\Delta\psi_0 + \Delta^2\psi_0$ ὅθεν $\Delta\psi_2 = \Delta\psi_0 + 2\Delta^2\psi_0 + \Delta^3\psi_0$· εἰσάγοντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὸν τύπον: $\psi_3 = \psi_2 + \Delta\psi_2$ λαμβάνομεν $\psi_3 = \psi_0 + 3\Delta\psi_0 + 3\Delta^2\psi_0 + \Delta^3\psi_0$ (5). Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ τύποι (4), (5) ἔχουσιν ἀκριβῶς τοὺς συντελεστὰς τοῦ διωνύμου τοῦ Νεύτωνος διὰ δυνάμεις $(\chi+\alpha)^2$, $(\chi+\alpha)^3, \ldots$ Τοῦτο ἐπιτρέπει νὰ εἰκάσωμεν ὅτι θὰ ἰσχύῃ ὁ ἑξῆς τύπος·

(6) $$\psi_\nu = \psi_0 + \Sigma^{(1)}_\nu \Delta\psi_0 + \Sigma^{(2)}_\nu \Delta^2\psi_0 + \ldots + \Sigma^\mu_\nu \Delta^\mu\psi_0 + \ldots + \Delta^\nu\psi_0$$

ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι, ἐὰν ἀληθεύῃ διά τινα τιμὴν $\nu = \varrho$ θ'ἀληθεύῃ καὶ διὰ τὴν ἑπομένην $\nu = \varrho + 1$. Ἐὰν ἔχωμεν:

$\psi_\varrho = \psi_0 + \Sigma^{(1)}_\varrho \Delta\psi_0 + \ldots + \Delta^\rho_\rho \psi_0$ (7) καὶ λάβωμεν τὴν διαφορὰν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν, προκύπτει $\Delta\psi_\varrho = \Delta\psi_0 + \Sigma^{(1)}_\varrho \Delta^2\psi_0 + \ldots + \Delta^{\varrho+1}\psi_0$ (8)

προσθέτοντες δὲ κατὰ μέλη τὰς (7) καὶ (8) λαμβάνομεν $\psi_\varrho + \Delta\psi_\varrho =$

$$\psi_{\varrho+1} = \psi_0 + \Delta\psi_0 \left[1 + \Sigma^1_\varrho\right] + \Delta^2\psi_0 \left[\Sigma^{(1)}_\varrho + \Sigma^2_\varrho\right] + \ldots + \Delta^{\varrho+1}\psi_0$$ δηλ.

(9) $$\psi_{\varrho+1} = \psi_0 + \Sigma^{1}_{\varrho+1} \Delta\psi_0 + \Sigma^{(2)}_{\varrho+1} \Delta^2\psi_0 + \ldots + \Delta^{\varrho+1}\psi_0$$

καθ' ὅσον κατὰ τὸν γενικὸν τύπον $\Sigma^{(\nu)}_{\mu}=\Sigma^{(\nu-1)}_{\mu-1}+\Sigma^{(\nu)}_{\mu-1}$ θὰ ἔχωμεν $1+\Sigma^{(1)}_{\varrho}=\Sigma^{(1)}_{\varrho+1}$ κλπ. Ὁ τύπος ὅμως (9) εἶνε ὁ ἀποδεικτέος διὰ $\nu=\varrho+1$.

Πρόβλημα 2ον. Ἐκφράσαι τὴν $\Delta^{\nu}\psi_0$ συναρτήσει τῶν δοθέντων ἀριθμῶν. Εὐκόλως λύεται τὸ πρόβλημα τοῦτο κατ' ἀνάλογον τρόπον καὶ εὑρίσκεται:

$$(10)\qquad \Delta^{\nu}\psi_0=\psi_{\nu}-\frac{\nu}{1}\psi_{\nu-1}+\frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\psi_{\nu-2}-\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3}\psi_{\nu-3}+\ldots\pm\psi_0.$$

Ὁ τύπος (6) συμβολικῶς γράφεται: $\psi_{\nu}=\left(1+\Delta\right)^{\nu}\psi_0$, ὁ δὲ (10): $\Delta^{\nu}\psi_0=\left(\psi-1\right)^{\nu}$.

2 **Διαφοραὶ ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου βαθμοῦ μ.** Ἂν θεωρήσωμεν δύο τιμὰς χ καὶ χ+h ἡ διαφορὰ τῶν ἀντιστοιχουσῶντιμῶν κατὰ τὸν τύπον τοῦ Taylor εἶνε: $\sigma(\chi+h)-\sigma(\chi)=h\sigma'(\chi)+\frac{h^2}{1.2}\sigma''(\chi)+\ldots+\frac{h^{\mu}}{\mu!}\sigma^{(\mu)}(\chi)$ καὶ ἑπομένως εἶνε μ—1 βαθμοῦ ὡς πρὸς χ. Ἂν λοιπὸν θεωρήσωμεν μ+1 τιμὰς χ_0, $\chi_1=\chi_0+h$, $\chi_2=\chi_1+h,\ldots,$ $\chi_{\mu}=\chi_{\mu-1}+h$, ἀποτελούσας πρόοδον ἀριθμητικήν, αἱ ἀντίστοιχοι τιμαί: $\psi_0=\sigma(\chi_0),\ldots,\psi_{\mu}=\sigma(\chi_{\mu})$ ἔχουσι πρώτας διαφοράς: $\Delta\sigma(\chi_0)$ $\Delta\sigma(\chi_1),\ldots,\Delta\sigma(\chi_{\mu-1})$, αἵτινες εἶνε μ—1 βαθμοῦ ὡς πρὸς χ_0, $\chi_1,\ldots,$ $\chi_{\mu-1}$. Δι' ὅμοιον λόγον αἱ δεύτεραι διαφοραὶ $\Delta^2\sigma(\chi_0),\ldots,\Delta^2\sigma(\chi_{\mu-2})$ θὰ εἶνε μ—2 βαθμοῦ κ. ο. κ. αἱ διαφοραὶ $\Delta^{\mu-1}\sigma(\chi_0)$, $\Delta^{\mu-1}\sigma(\chi_1)$ θὰ εἶνε πρώτου βαθμοῦ καὶ τέλος ἡ διαφορὰ $\Delta^{\mu}\sigma(\chi_0)$ σταθερὰ ὡς χ δηλ. θὰ ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τοῦ h· ἂν $\sigma(\chi)=A_0\chi^{\mu}+\ldots+A_{\mu}$ εὐκόλως ὑπολογίζεται ὅτι $\Delta^{\mu}\sigma(\chi)=\mu!A_0h^{\mu}$. Τῷ ὄντι, ἐν τῷ ἀναπτύγματι τῆς διαφορᾶς $\sigma(\chi+h)-\sigma(\chi)$ ὁ ἀνωτάτου βαθμοῦ ὡς πρὸς χ ὅρος εἶνε $\mu A_0h\chi^{\mu-1}$, ἐξ οὗ συνάγεται ὅτι: **ὁ πρῶτος ὅρος τῆς διαφορᾶς ἑνὸς πολυωνύμου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ h ἐπὶ τὴν**

πρώτην παράγωγον τοῦ πρώτου ὅρου. Ἐφαρμόζοντες τοῦτο ἐπανειλημμένως εὑρίσκομεν ὅτι τῆς δευτέρας διαφορᾶς $\Delta^2\sigma(\chi)$ ὁ πρῶτος ὅρος θὰ εἶνε γινόμενον τοῦ h ἐπὶ τὴν παράγωνον τοῦ $\mu A_0 h\chi^{\mu-1}$

δηλ. $\mu(\mu-1)A_0h^2\chi^{\mu-2}$κ.. ο κ. ὁ πρῶτος ὅρος τῆς Δ^μ $\sigma(\chi)$ θὰ εἶνε γινόμενον τοῦ h ἐπὶ τὴν παράγωγον τοῦ $\mu!A_0h^{\mu-1}\chi$ δηλ.$\mu!A_0h^\mu$

Ἐπειδὴ ἀφ' ἑτέρου ἡ $\Delta^\mu\sigma(\chi)$ εἶνε σταθερὰ ποσότης συνάγομεν ὅτι:

$\Delta^\mu\sigma(\chi)=\mu!A_0h^\mu$ ὅ. ἔ. δ. Ἂν λοιπὸν αἱ δοθεῖσαι τιμαὶ τοῦ χ ἀποτελῶσι πρόοδον ἀριθμητικὴν μὲ ἀπείρους ὅρους ὅλαι αἱ μιοσταὶ διαφοραὶ $\Delta^\mu\sigma(\chi)$ θὰ εἶνε ἴσαι καὶ ἑπομένως πᾶσαι αἱ $\Delta^{\mu+1}\sigma(\chi)$ ὡς καὶ ὅλαι αἱ διαφοραὶ ἀνωτέρας τάξεως θὰ εἶνε μηδενικαί. Ἡ ἰδιότης αὐτὴ εἶναι λίαν χρήσιμος διότι, ἔχοντες τὰς τιμὰς $\psi_0=\sigma(\chi_0),\ldots,\psi_\mu=\sigma(\chi_\mu)$ καὶ κασκευάζοντες δι' αὐτῶν τὰς διαφορὰς μέχρι τῆς Δ^μ ψ_0 παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ πᾶσαι αἱ μιοσταὶ διαφοραὶ εἶνε ἴσαι, ἐκ τῶν $\Delta^{\mu-1}\psi_1$ καὶ $\Delta^\mu\psi_1$ εὑρίσκομεν τήν: $\Delta^{\mu-1}\psi_2=\Delta^{\mu-1}\psi_1+\Delta^\mu\psi_1$, ὁμοίως ἐκ τῶν $\Delta^{\mu-1}\psi_2$, $\Delta^\mu\psi_2$ τὴν $\Delta^{\mu-1}\psi_3$ κ. ο. κ. εὑρίσκομεν πάσας τὰς διαφορὰς τῆς $\mu-1$ τάξεως. Δι' αὐτῶν εὑρίσκομεν ὁμοίως πάσας τὰς $\mu-2$ τάξεως κ. ο. κ. εὑρίσκομεν πάσας τὰς πρώτας διαφορὰς καὶ δι' αὐτῶν πάσας τὰς τιμὰς τοῦ πολυωνύμου ψ τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς τὰς τιμὰς $\chi_{\mu+1}$, $\chi_{\mu+2}$,...τοῦ χ,

Ἐφαρμογή. Ἔστω τὸ πολυώνυμον: $\chi^4-\chi^3+2\chi^2-\chi+1=\psi$· δίδοντες εἰς τὸ χ τὴν σειρὰν τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν -1, $0, +1, +2$ λαμβάνομεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ ψ: 6, 1, 2, 15 καὶ ἐκ τούτων τὰς τιμὰς τῶν διαφορῶν του μέχρι τρίτης τάξεως· ἡ τετάρτη διαφορὰ εἶνε σταθερὰ καὶ κατὰ τὸν τύπον $\mu!A_0h^\mu$ ἴση μὲ 24 ($A_0=1$, $h=1$)· δυνάμεθα λοιπὸν νὰ εὕρωμεν, καὶ τὰς τιμὰς ψ διὰ $\chi=3$, 4,...ὡς καὶ διὰ $\chi=-2$, -3, -4. Τὴν διάταξιν δεικνύει ὁ παραπλεύρως πίναξ.

−2	35	−29	24	−18	24
χ	ψ	$\Delta\psi$	$\Delta^2\psi$	$\Delta^3\psi$	$\Delta^4\psi$
−1	6	−5	6	6	24
0	1	1	12	30	24
1	2	13	42	[illegible]	24
2	15	55	:		:
3	70	:			
4	:				

Υπάρχει καὶ σχετικὸς τύπος καλούμενος **τύπος παρεμβολῆς τοῦ Νεύτωνος** ὅστις εἶνε ὁ ἑξῆς : (A)

$$(11)\ \psi=\psi_0+\frac{\chi-\chi_0}{h}\frac{\Delta\psi_0}{1}+\frac{\chi-\chi_0}{h}\left(\frac{\chi-\chi_0}{h}-1\right)\frac{\Delta^2\psi_0}{1.2}+\ldots+\frac{\chi-\chi_0}{h}\left(\frac{\chi-\chi_0}{h}-1\right)\ldots\left(\frac{\chi-\chi_0}{h}-\mu+1\right)\frac{\Delta_\mu\psi_0}{\mu!}$$

ὅστις παρέχει αὐτὸ τοῦτο τὸ πολυώνυμον $\psi=\sigma(\chi)$ δηλ. τὴν τιμὴν αὐτοῦ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ. Ὁ τύπος οὗτος (11) εἶνε ἄμεσος συνέπεια τοῦ τύπου (6) διότι, ἐὰν π.χ. $\chi=\chi_\nu$ τότε θὰ ἔχωμεν $\psi=\psi_\nu$ καὶ $\chi=\chi_0+\nu h$ [διότι ὁ ὅρος χ_ν εἶνε τάξεως $\nu+1$] καὶ ἑπομένως $\nu=\frac{\chi-\chi_0}{h}$. Ἐὰν λοιπὸν εἰς τὸν τύπον (6) ἀντικαταστήσωμεν τὸ ν διὰ τοῦ $\frac{\chi-\chi_0}{h}$ προκύπτει ὁ τύπος τοῦ Νεύτωνος (11) περατούμενος μὲ ὅρον περιέχοντα τὴν $\Delta^\nu\psi_0$. Ἀλλὰ ἐὰν μὲν $\nu<\mu$, τότε δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν καὶ τοὺς ὁμοίους ὅρους τοὺς ἔχοντας διαφορὰν $\Delta^\kappa\psi_0$ ἀνωτέραν μέχρι τῆς μιοστῆς, καθόσον οἱ συντελεσταὶ αὐτῶν εἶνε μηδὲν ὡς περιέχοντες τὸν παράγοντα $\nu-\nu$, ἐὰν δὲ $\nu>\mu$ τότε δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν τοὺς ὅρους τοὺς περιέχοντας διαφορὰν τάξεως μεγαλειτέρας τοῦ μ, διότι αὗται, καθὼς εἴδομεν, εἶνε μηδέν. Ὥστε ὁ τύπος παρεμβολῆς τοῦ Νεύτωνος περατοῦται πάντοτε εἰς τὸν ὅρον μιοστῆς δυνάμεως (μ: ὁ βαθμός), οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶνε ἡ τιμὴ τοῦ χ [ἴση ἐννοεῖται μὲ ἕνα ὅρον τῆς προόδου].

Παρατήρησις. Ἂν αἱ τιμαὶ μιᾶς συναρτήσεως $\psi=\varphi(\chi)$ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τιμὰς τοῦ χ ἰσοδιαφόρους ἔχωσιν μιοστὰς διαφορὰς $\Delta_\mu\psi$ ἴσας* ἢ σχεδὸν ἴσας (διαφερούσας πολὺ ὀλίγον) καὶ θέλωμεν νὰ ἐξομοιώσωμεν τὴν $\varphi(\chi)$ πρὸς ἀκέραιον πολυώνυμον $P(\chi)$, τοῦτο δύναται νὰ ληφθῇ βαθμοῦ **μιοστοῦ**, προσδιορίζεται δὲ τότε ἀμέσως διὰ τῶν μεθόδων παρεμβολῆς, καὶ θὰ εἶναι πολυώνυμον **προσεγγίσεως τῆς δοθείσης συναρτήσεως**. Ἡ σπουδαιότης τῆς παρατηρήσεως ταύτης εἶναι προφανὴς προκειμένου περὶ προσδιορισμοῦ συναρτήσεως δι᾽ τιμῶν αὐτῆς ἃς ἔδωκεν ἡ παρατήρησις.

*) Ἡ $\Delta^\mu\psi$ παρουσιάζει τιμὴν σταθερὰν διάφορον τοῦ μηδενός.

ΤΕΛΟΣ