ΝΕΙΛΟΥ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ
ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΕΝ ΤΩ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΩ ΑΘΗΝΩΝ
ΚΑΙ ΤΗ ΣΧΟΛΗ ΤΩΝ Ν. ΔΟΚΙΜΩΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΡΟΒΟΛΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Μετὰ 95 σχημάτων ἐν τῷ κειμένῳ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΤΥΠΟΙΣ ΕΚΔΟΤΙΚΗΣ (ΜΠΛΑΖΟΥΔΑΚΗ)
ΕΥΡΙΠΙΔΟΥ 3 - ΑΘΗΝΑΙ
1927

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εἰσαγωγή.

Κεφάλαιον Ι.

Περὶ προβολῆς καὶ τομῆς.

Κεφάλαιον ΙΙ.

Περὶ τῆς ἀρχῆς τοῦ δυασμοῦ.

Ἀναλυτικαὶ ἐφαρμογαὶ τῆς ἀρχῆς τοῦ δυασμοῦ.

Κεφάλαιον ΙΙΙ.

Περὶ προβολικῶν σχηματισμῶν πρώτης βαθμῖδος.

Ἀναλυτικαὶ σχέσεις προβολικῶν σχηματισμῶν.

Κεφάλαιον IV.

Περὶ ἐνελίξεως μεταξὺ σχηματισμῶν πρώτης βαθμῖδος

Κεφάλαιον V.

Περὶ προβολικῶν σχηματισμῶν δευτέρας βαθμῖδος.

Κεφάλαιον VI.

Περὶ τῶν καμπύλων καὶ κώνων δευτέρου βαθμοῦ.

Κεφάλαιον VII.

Μετρικαὶ ἰδιότητες καὶ ἀναλυτικαὶ σχέσεις καμπύλων β′ βαθμοῦ.

Κεφάλαιον VIII.

Περὶ τῶν εὐθειογενῶν ἐπιφανειῶν δευτέρου βαθμοῦ.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ν. Γεννηματᾶ, Ἀναλυτικὴ καὶ διανυσματικὴ Γεωμετρία, τεῦχος Α′ καὶ Β′.

Ι. Ν. Χατζιδάκη, Ἀναλυτικὴ Γεωμετρία.

Th. Reye, Die Geometrie der Lage, 4. Auflage.

B. Niewenglowski, Géométrie Analytique.

F. Enriques— H. Fleicher, Vorlesungen über Projektive Geometrie, 2. Auflage.

A. Schönflies, Einführung in die Analytische Geometrie.

A. Clebsch— F. Lindemann— A. Benoist, Leçons sur la Géométrie, t. I.

A. Clebsch.— F. Lindemann, Vorlesungen über Geometrie 2. Bd.. 1. Teil.

Salmon— Fiedler, Analytische Geometrie, 4 Auflage.

M. Simon, Analytische Geometrie der Ebene.

ΔΙΟΡΘΩΤΕΑ

Σελὶς	2	στίχος	16	τὸ *ἐν*	εἰς	*ἓν*
»	4	»	4	τὸ *θεμελειώδεις*	εἰς	*θεμελιώδεις*
»	74	»	25	τὸ Λ'	εἰς	Λ'_1
»	76	»	27	τὸ $(kk)'$	εἰς	(kk')
»	86	»	29	τὸ *ἁρμονικὸν*	εἰς	*προβολικὸν*
»	96	»	4	τὸ *διότι*	εἰς	*καὶ*
»	106	»	10	ἡ ἰσότης	εἰς	τὴν $\left(\frac{\eta+\eta'}{2}\right)^2 \pm \theta^2 - \eta\eta' = \left(\frac{\eta-\eta'}{2}\right) \pm \theta^2$
»	117	»	15	τὸ $\begin{pmatrix} AA' \\ A'AB' \end{pmatrix}$	εἰς	$\begin{pmatrix} AA'B \\ A'AB' \end{pmatrix}$
»	120	»	10	τὸ (§ 38,σελ.*80*)	εἰς	(§ 38,σελ.*88*)
»	123	»	14	τὸ BB	εἰς	BB'
»	138	»	3	τὸ ζεύγη ἀκτίνων	εἰς	ζεύγη *δεσμῶν* ἀκτίνων
»	142	»	33	τὸ **a**	εἰς	**a**′
»	144	»	11	τὸ OA′	εἰς	O′A′
»	154	»	10	τὸ 1	εἰς	—1.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΡΟΒΟΛΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

§ 1. Ἔργον τῆς προβολικῆς Γεωμετρίας.

Ἡ προβολικὴ καθαρὰ ἢ νέα συνθετικὴ Γεωμετρία, ἢ Γεωμετρία τῆς θέσεως, ἐρευνᾷ γεωμετρικὰ προβλήματα ἄνευ τῆς χρήσεως τῆς ἐννοίας τῆς μετρήσεως, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὴν Γεωμετρίαν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων ἐν τῇ ὁποίᾳ ἐγίνετο χρῆσις τοῦ μέτρου καὶ μετρικῶν ἰδιοτήτων ἐν γένει. Ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ τῆς θέσεως δὲν γίνεται λόγος π. χ. περὶ τοῦ μέσου εὐθυγράμμου τμήματος, περὶ ὀρθῆς γωνίας καὶ καθέτων εὐθειῶν, περὶ λόγων καὶ ἀναλογιῶν, περὶ ἐμβαδῶν ἐπιφανειῶν καὶ ὄγκων τῶν στερεῶν, καθὼς ἐπίσης περὶ ἐξισώσεων τῶν γραμμῶν καὶ ἐπιφανειῶν, τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται εἰς τὴν παλαιὰν καὶ τὴν ἀναλυτικὴν Γεωμετρίαν, προϋποθέτουν δὲ τὴν χρῆσιν τῆς μετρήσεως.

Γνωρίζομεν ἐν τούτοις, ἀφ᾽ ἑνὸς μέν, ὅτι ἡ χρῆσις τῆς Ἀλγέβρας ἐν τῇ ἐρεύνῃ γεωμετρικῶν προβλημάτων διευκολύνει ἐνίοτε τὴν λύσιν τούτων, ἀφ᾽ ἑτέρου δέ, ὅτι ἡ Γεωμετρία καθιστᾷ σαφεστέραν καὶ αἰσθητοτέραν τὴν λύσιν ἀλγεβρικῶν προβλημάτων. Ἐνῷ λοιπὸν ἡ σπουδὴ τῆς καθαρᾶς Γεωμετρίας συντελεῖ εἰς τὴν ἄσκησιν καὶ διαμόρφωσιν τῆς παραστατικῆς δυνάμεως, ἡ χρῆσις τῶν μετρικῶν ἰδιοτήτων, καὶ ἐν γένει τῶν ἀλγεβρικῶν τύπων ἐν αὐτῇ, συντελεῖ ἐνίοτε εἰς τὴν λεπτομερεστέραν διερεύνησιν προβλημάτων τινῶν, καὶ εἰς τὴν ἐξαγωγὴν γενικῶν τύπων, περιεχόντων τὴν γενικὴν περίπτωσιν αὐτῶν, ἐκ τῆς ὁποίας εὐκόλως ἐξάγομεν τὰς διαφόρους μερικὰς περιπτώσεις, παρὰ διὰ τῆς καθαρᾶς γεωμετρικῆς μεθόδου. Διὰ τοῦτο, ἐν τοῖς κατωτέρω θέλομεν μὲν ἐξετάσει γεωμετρικῶς τὰ διάφορα ζητήματα, ἐν τούτοις θὰ κάμωμεν χρῆσιν ἐνίοτε καὶ τῶν μετρικῶν ἰδιοτήτων ὡς καὶ τῶν ἀλγεβρικῶν τύπων. Καὶ διὰ μὲν τὴν γεωμετρικὴν ἔρευναν εἶνε ἐπαρκεῖς αἱ ἐκ τῆς στοιχειώδους Γεωμετρίας γνώσεις, διὰ δὲ τὴν ἀναλυτικὴν ἐξέτασιν ὑποτίθενται γνωστὰ τὰ στοιχεῖα τῆς ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας καὶ τῆς Τριγωνομετρίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι.

Περὶ προβολῆς καὶ τομῆς.

§ 2. Στοιχεῖα τῆς προβολικῆς Γεωμετρίας.

Τὸ σημεῖον, ἡ εὐθεῖα καὶ *τὸ ἐπίπεδον* εἶνε τὰ ἁπλᾶ θεμελιώδη στοιχεῖα τῆς προβολικῆς Γεωμετρίας. Τὴν εὐθεῖαν, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν καὶ *ἀκτῖνα*, καὶ τὸ ἐπίπεδον ὑποθέτομεν ἐκτεινόμενα εἰς ἄπειρον. Θὰ παριστάνωμεν συνήθως τὰ σημεῖα διὰ τῶν Α, Β, Γ,... τὰς ἀκτῖνας διὰ τῶν α, β, γ, ... τὰ δὲ ἐπίπεδα διὰ τῶν **a**, **b**, **c**, ...

Σύνολον σημείων, ἀκτίνων καὶ ἐπιπέδων καλεῖται *γεωμετρικὸν σχῆμα*. Ἁπλᾶ τινα σχήματα ἀποτελούμενα συνήθως ἐξ ὁμοειδῶν στοιχείων λέγονται *γεωμετρικοὶ σχηματισμοί*.

Ἐὰν παρατηροῦμεν ἀντικείμενόν τι, π. χ. ἓν οἰκοδόμημα, ἕκαστον τῶν ὁρατῶν αὐτοῦ σημείων ρίπτει μίαν ἀκτῖνα, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν *ἀκτῖνα προβάλλουσαν* τὸ σημεῖον ἢ *ὄψιν* αὐτοῦ. Ἡ ὄψις τοῦ ὁρατοῦ μέρους οἰκοδομήματος συνίσταται κατὰ ταῦτα ἐκ πολλῶν ἀκτίνων, ἐκ τῶν ὁποίων καθεμία προβάλλει ἓν ἢ περισσότερα σημεῖα αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ ὀφθαλμοῦ ἡμῶν.

Ἐὰν ὡρισμένα σημεῖα κεῖνται ἐπ᾿ εὐθείας, μὴ διερχομένης διὰ τοῦ ὀφθαλμοῦ ἡμῶν, τότε αἱ προβάλλουσαι αὐτὰ ἀκτῖνες κεῖνται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ ὀφθαλμοῦ καὶ τῆς ἐν λόγῳ εὐθείας· τυχοῦσα εὐθεῖα λοιπὸν προβάλλεται ἀπὸ τοῦ ὀφθαλμοῦ δι᾿ ἑνὸς ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν *προβάλλον ἐπίπεδον*, ἢ ὄψιν τῆς εὐθείας. Καθ᾿ ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι καμπύλη τις ἐν γένει προβάλλεται διὰ μιᾶς κωνικῆς ἐπιφανείας.

Ἐὰν τὴν ὄψιν τοῦ οἰκοδομήματος τμήσωμεν δι᾿ ἐπιπέδου, ὅτε ἑκάστη προβάλλουσα ἀκτὶς τέμνεται κατὰ ἓν σημεῖον, ἕκαστον δὲ προβάλλον ἐπίπεδον κατὰ μίαν εὐθεῖαν, λαμβάνομεν ἐν τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ ὡς *τομὴν ἢ ἴχνος* τῆς ὄψεως μίαν προοπτικὴν εἰκόνα, μίαν *προβολὴν* τοῦ οἰκοδομήματος, καὶ ἡ προβολὴ αὕτη πέμπει ἀκριβῶς τὴν αὐτὴν ὄψιν εἰς τὸν ὀφθαλμόν, καθὼς καὶ τὸ οἰκοδόμημα, ἐπομένως ἔχει αὕτη τὴν χαρακτηριστικὴν ἰδιότητα, νὰ παρέχῃ μίαν παράστασιν τοῦ οἰκοδομήματος. Αἱ φωτογραφίαι ἀντικειμένων τοῦ χώρου εἶνε κυρίως τοιαῦται προοπτικαὶ ἐπίπεδοι εἰκόνες τῶν ἀπεικονιζομένων ἀντικειμένων

Τὸ εἶδος τῆς προβολῆς ταύτης καλεῖται *κεντρικὴ προβολή*. Ἵνα ἐν τῇ κεντρικῇ προβολῇ αἱ προβάλλουσαι ἀκτῖνες εἶνε παράλληλοι, ἔχομεν ἀνάγκην νὰ δεχθῶμεν, ὅτι ὁ ὀφθαλμὸς ἡμῶν ἀπεμακρύνθη εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν.

Ὅτι διὰ τῆς μεθόδου τῆς προβολῆς καὶ τομῆς δι' ἁπλῆς ἐποπτείας δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ νὰ ἀποδείξωμεν σπουδαίας προτάσεις φαίνεται ἐξ ἑνὸς ἁπλοῦ παραδείγματος. Παράλληλοι εὐθεῖαι προβάλλονται ἀπὸ τοῦ ὀφθαλμοῦ δι' ἐπιπέδων, ἅτινα τέμνονται κατὰ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, δηλαδὴ κατὰ τὴν διὰ τοῦ ὀφθαλμοῦ ἀγομένην παράλληλον πρὸς τὰς θεωρουμένας εὐθείας. Ἂν δὲ τμήσωμεν δι' ἐπιπέδου τυχόντος τὰ προβάλλοντα τὰς εὐθείας ἐπίπεδα, αἱ τομαὶ αὐτῶν θὰ εἶνε εὐθεῖαι, 4) αἵτινες θὰ διέρχωνται δι' ἑνὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου (τοῦ ἴχνους αὐτοῦ καὶ τῆς εὐθείας τομῆς τῶν προβαλλόντων ἐπιπέδων). Ἑπομένως κατὰ τὴν προοπτικὴν παρατήρησιν ἑνὸς οἰκοδομήματος, ἢ ἄλλου τινὸς ἀντικειμένου, αἱ προβολαὶ παραλλήλων ἀκμῶν ἐπὶ ἐπιπέδου συγκλίνουν πᾶσαι πρὸς ἓν σημεῖον, τὸ καλούμενον *σημεῖον φυγῆς*· ἂν αἱ εὐθεῖαι εἶνε παράλληλοι μεταξύ των καὶ πρὸς τὸ τέμνον ἐπίπεδον, ἔχουν προβολὰς ἐπ' αὐτοῦ παραλλήλους· ἤτοι δὲν ἔχουν σημεῖον φυγῆς εἰς πεπερασμένην ἀπόστασιν. Π. χ. ἂν αἱ εὐθεῖαι εἶνε κατακόρυφοι καθὼς καὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ τέμνον τὰ προβάλλοντα ἐπίπεδα, πᾶσαι αἱ κατακόρυφοι εὐθεῖαι ἔχουν προβολὰς παραλλήλους.

Ἐν γένει, ἐὰν ἀντὶ τοῦ ὀφθαλμοῦ θεωρήσωμεν τυχὸν σημεῖον Ο καὶ ἀντὶ τοῦ ὡρισμένου ἀντικειμένου ἢ τοῦ οἰκοδομήματος τυχὸν σύστημα ἐκ σημείων καὶ εὐθειῶν τοῦ διαστήματος, τὸ σύστημα τοῦτο προβάλλεται ἀπὸ τοῦ Ο δι' ἑνὸς συστήματος ἀκτίνων καὶ ἐπιπέδων, δηλαδὴ ἕκαστον σημεῖον προβάλλεται διὰ μιᾶς ἀκτῖνος καὶ ἑκάστη εὐθεῖα, μὴ διερχομένη διὰ τοῦ Ο, δι' ἑνὸς ἐπιπέδου. Τὸ σημεῖον, διὰ τοῦ ὁποίου διέρχονται αἱ προβάλλουσαι εὐθεῖαι καὶ τὰ προβάλλοντα ἐπίπεδα, θεωρεῖται ὡς *φορεὺς* πασῶν τῶν ἀκτίνων καὶ τῶν ἐπιπέδων τούτων, ἅτινα ἐν συνόλῳ ἀποτελοῦν τὴν ὄψιν τοῦ συστήματος. Ἐὰν θεωρήσωμεν ἐν τῷ διαστήματι τυχὸν σύστημα ἐπιπέδων καὶ εὐθειῶν, ἐπίπεδον **a**, διάφορον τῶν θεωρουμένων, τέμνει τὸ σύστημα καθ' ἓν σύστημα εὐθειῶν καὶ σημείων· δηλαδὴ τέμνει ἕκαστον τῶν ἐπιπέδων κατὰ μίαν εὐθεῖαν καὶ ἑκάστην εὐθεῖαν καθ' ἓν σημεῖον. Τὸ ἐπίπεδον **a** θεωρεῖται οὕτω ὡς φορεὺς πασῶν τῶν εὐθειῶν τούτων καὶ τῶν σημείων, ἅτινα ἐν συνόλῳ ἀποτελοῦν τὴν τομὴν ἢ τὸ ἴχνος τοῦ συστήματος.

Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ προβάλωμεν ἀπό τινος ὡρισμένης εὐθείας, ὅτε σημεῖόν τι κείμενον ἐκτὸς τῆς δοθείσης εὐθείας, ἔστω τῆς γ, ὁρίζει μετ' αὐτῆς ἓν ἐπίπεδον, λέγομεν δὲ ὅτι τὸ σημεῖον προβάλλεται διὰ τοῦ ἐπιπέδου τούτου ἀπὸ τῆς γ. Ὁμοίως, πᾶν ἐπίπεδον, μὴ διερχόμενον διὰ τῆς γ, τέμνεται ὑπ' αὐτῆς εἰς ἓν σημεῖον. Κατὰ ταῦτα, ἡ εὐθεῖα θεωρεῖται οὕτω ὡς *φορεὺς* τῶν ἐπιπέδων, τῶν διερχομένων δι' αὐτῆς, πρὸς δὲ καὶ ὁ φορεὺς τῶν σημείων τῶν κειμένων ἐπ' αὐτῆς.

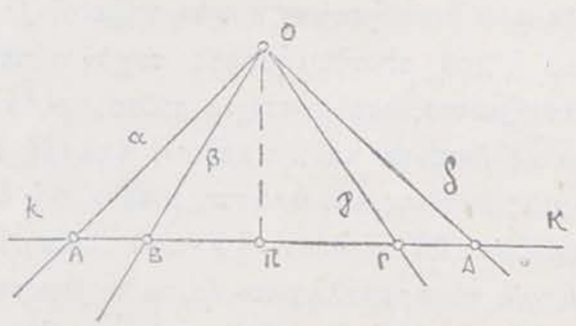
§ 3. Θεμελειώδεις γεωμετρικοὶ σχηματισμοί.

Τὸ σύνολον πάντων τῶν σημείων τῶν κειμένων ἐπί τινος εὐθείας καλεῖται *σειρὰ σημείων* ἢ *σημειοσειρά*, ἕκαστον δὲ σημεῖον τῆς εὐθείας καλεῖται *στοιχεῖον τῆς σημειοσειρᾶς*. Τὰ σημεῖα ταῦτα θεωροῦμεν στερῶς συνδεδεμένα πρὸς ἄλληλα εἰς τρόπον, ὥστε ἡ μεταξὺ αὐτῶν θέσις νὰ διατηρῆται ἀμετάβλητος καὶ ἐὰν ἡ εὐθεῖα, δηλαδὴ ὁ φορεὺς τῆς σειρᾶς, μετατοπισθῇ.

Καλεῖται *τμῆμα* εὐθείας ἓν μέρος αὐτῆς, περιοριζόμενον μεταξὺ δύο σημείων ταύτης.

Τὸ σύνολον πασῶν τῶν ἀκτίνων τῶν δι' ἑνὸς σημείου Ο διερχομένων καὶ ἐφ' ἑνὸς πιπέδου a κειμένων καλοῦμεν *ἐπίπεδον δέσμην ἀκτίνων*. Τὸ σημεῖον Ο τῆς τομῆς τῶν ἀκτίνων καλεῖται *κέντρον τῆς δέσμης*, ἑκάστη δὲ ἀκτὶς *στοιχεῖον τῆς δέσμης*.

Ὑποθέτομεν τὰς ἀκτῖνας τῆς δέσμης στερῶς συνδεδεμένας πρὸς ἀλλήλας, θεωροῦμεν δὲ ὡς φορέα αὐτῆς, τὴν ὁποίαν θὰ παριστάνωμεν διὰ τοῦ Ο(α,β,γ,δ,...), εἴτε τὸ κέντρον αὐτῆς Ο, εἴτε τὸ ἐπίπεδον ἐφ' οὗ κεῖνται αἱ ἀκτῖνες α, β, γ, δ,...



Τὸ σύνολον τῶν ἐπιπέδων τῶν διερχομένων διά τινος εὐθείας καλοῦμεν *ἀξονικὴν δέσμην ἐπιπέδων*, τὴν δὲ εὐθεῖαν δι' ἧς διέρχονται ταῦτα *ἄξονα τῆς δέσμης* ταύτης. Τὰ στοιχεῖα τῆς δέσμης ταύτης, δηλαδὴ τὰ ἐπίπεδα, θεωροῦμεν στερῶς πρὸς ἄλληλα συνδεδεμένα καὶ ἕκαστον ἐκτεινόμενον εἰς ἄπειρον καθ' ἁπάσας τὰς διευθύνσεις.

Τὴν σημειοσειράν, τὴν δέσμην ἀκτίνων καὶ τὴν δέσμην ἐπίπεδων θὰ χαρακτηρίζωμεν ὡς θεμελειώδεις *γεωμετρικοὺς σχηματισμοὺς πρώτης βαθμῖδος*, δύναται δὲ νὰ παραχθῇ ἕκαστος αὐτῶν ἔκ τινος τῶν δύο ἄλλων διὰ προβολῆς ἢ τομῆς. Πράγματι, σημειοσειρά τις, ἔστω ἡ Α, Β, Π, Γ, Δ... προβάλλεται ἀπό τινος σημείου Ο, κειμένου ἐκτὸς τοῦ φορέως αὐτῆς k, διὰ μιᾶς δέσμης ἀκτίνων α β,π,γ,δ,.., τῆς ὁποίας μία τομὴ εἶνε ἡ σημειοσειρὰ Α,Β,Π,Γ,Δ... Ἂν δέσμην τινα ἀκτίνων Ο(α,β,π,γ,δ,...)

τμήσωμεν δι' εὐθείας k, λαμβάνομεν μίαν σημειοσειρὰν Α,Β,Π,Γ,Δ,... ἔχουσαν φορέα τὴν εὐθεῖαν k. Οὕτω ἡ σημειοσειρὰ αὕτη δύναται νὰ θεωρῆται ὡς τομὴ τῆς δέσμης Ο (α,β,π,γ,δ,...).

Ἀξονική τις δέσμη ἐπιπέδων **a**,**b**,**c**,.... τέμνεται ὑπό τινος ἐπιπέδου, μὴ διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος αὐτῆς, κατὰ μίαν δέσμην ἀκτίνων α,β,γ,δ,... τῆς ὁποίας τὸ κέντρον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος.

Ἑκάστη ἐπίπεδος δέσμη ἀκτίνων προβάλλεται ἀπό τινος σημείου, μὴ κειμένου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς, διὰ μιᾶς ἀξονικῆς δέσμης ἐπιπέδων. Ἀξονική τις δέσμη ἐπιπέδων τέμνεται ὑπ' εὐθείας, μὴ κειμένης ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ μετὰ τοῦ ἄξονος αὐτῆς κατὰ μίαν σημειοσειράν, δηλαδὴ ἕκαστον τῶν ἐπιπέδων τέμνεται εἰς ἓν σημεῖον τῆς σειρᾶς, ἑκάστη δὲ σημειοσειρὰ προβάλλεται ἀπό τινος ἄξονος, μὴ κειμένου ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ μετ' αὐτῆς, διὰ μιᾶς δέσμης ἐπιπέδων. Ἕνεκα τῆς ἀνωτέρω σχέσεως, ἥτις ὑπάρχει μεταξὺ τῆς σημειοσειρᾶς, τῆς ἐπιπέδου δέσμης τῶν ἀκτίνων καὶ τῆς ἀξονικῆς δέσμης τῶν ἐπιπέδων χαρακτηρίζονται οἱ γεωμετρικοὶ οὗτοι σχηματισμοὶ ὡς πρώτης βαθμῖδος. 4

Ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω γεωμετρικῶν σχηματισμῶν ἔχομεν καὶ θεμελιώδεις γεωμετρικοὺς σχηματισμοὺς δευτέρας βαθμῖδος.

Οὗτοι εἶνε δύο, *τὸ ἐπίπεδον σύστημα ἢ πεδίον* καὶ ἡ *κεντρικὴ δέσμη*.

Τὸ σύνολον πάντων τῶν σημείων καὶ τῶν ἀκτίνων, ἅτινα περιέχονται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, καλοῦμεν *ἐπίπεδον σύστημα ἢ πεδίον*, τὸ δὲ ἐπίπεδον καλεῖται φορεὺς τοῦ πεδίου.

Τὸ σύνολον πασῶν τῶν ἀκτίνων καὶ τῶν ἐπιπέδων τῶν διερχομένων διά τινος σημείου τοῦ χώρου, καλεῖται κεντρικὴ δέσμη ἐν τῷ χώρῳ, ἢ ἁπλῶς *κεντρικὴ δέσμη*. Ἐν αὐτῇ περιέχονται ὡς στοιχεῖα ὄχι μόνον ἀκτῖνες καὶ ἐπίπεδα, ἀλλὰ καὶ ἄπειροι ἐπίπεδοι δέσμαι ἀκτίνων καὶ ἀξονικαὶ δέσμαι ἐπιπέδων.

Δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν ὅτι ἡ κεντρικὴ δέσμη παράγεται ἀπὸ πεδίον καὶ ἀντιστρόφως. Διότι ἂν προβάλλωμεν πεδίον τι **a** π. χ. ἀπό τινος σημείου Ο, μὴ κειμένου ἐπ' αὐτοῦ, ἕκαστον σημεῖον Ρ τοῦ **a** προβάλλεται διὰ μιᾶς ἀκτῖνος ΟΡ, καὶ ἑκάστη ἀκτὶς αὐτοῦ δι' ἑνὸς ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ Ο, προκύπτει δ' οὕτω μία κεντρικὴ δέσμη, ἥτις εἶνε ὄψις τοῦ **a**, τὸ δὲ πεδίον εἶνε τομὴ τῆς κεντρικῆς δέσμης. Ὁμοίως ἑκάστη σημειοσειρὰ τοῦ πεδίου προβάλλεται ἀπὸ τοῦ Ο διὰ μιᾶς δέσμης ἀκτίνων, διερχομένων διὰ τοῦ Ο, ἑκάστη ἐπίπεδος δέσμη ἀκτίνων τοῦ **a** διὰ μιᾶς ἀξονικῆς δέσμης ἐπιπέδων, ἑκάστη δὲ καμπύλη τοῦ **a** διὰ μιᾶς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς κεντρικῆς δέσμης.

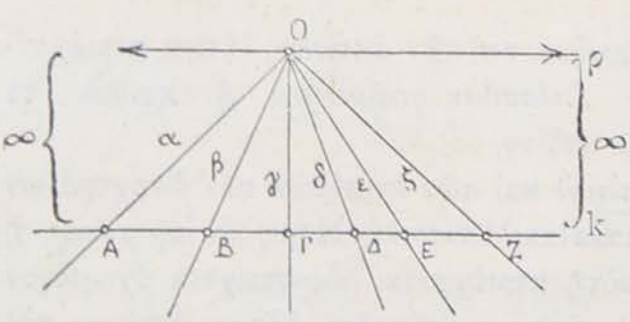
Κατὰ ταῦτα ἡ ὄψις σημειοσειρᾶς τινος, ἢ δέσμης ἐπιπέδων ἀκτίνων, ἢ καμπύλης τινὸς ἑνὸς πεδίου **a**, ὅταν προβάλλεται ἀπό τινος σημείου O, κειμένου ἐκτὸς αὐτοῦ, εἶνε ἀντιστοίχως δέσμη ἀκτίνων διερχομένων διὰ τοῦ O, ἢ ἀξονικὴ δέσμη ἐπιπέδων, ἢ κωνικὴ ἐπιφάνεια.

Ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω θεωρηθέντων γεωμετρικῶν σχηματισμῶν ὑπάρχει ἀκόμη εἷς θεμελιώδης γεωμετρικὸς σχηματισμὸς τρίτης βαθμῖδος, εἶνε δὲ οὗτος, *τὸ ἐν τῷ χώρῳ σύστημα* ἢ ὁ ἐπ' ἄπειρον ἐκτεινόμενος χῶρος μεθ' ἁπάντων αὐτοῦ τῶν σημείων ἀκτίνων καὶ ἐπιπέδων.

Τὸ ἐν τῷ χώρῳ σύστημα περιέχει ὡς στοιχεῖα ἀπείρους τὸ πλῆθος γεωμετρικοὺς σχηματισμοὺς τῆς πρώτης καὶ δευτέρας βαθμῖδος. Διότι ἕκαστον ἐπίπεδον τοῦ χώρου δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς φορεὺς ἑνὸς πεδίου, ἕκαστον σημεῖον ὡς τὸ κέντρον κεντρικῆς τινος δέσμης, ἑκάστη δ' εὐθεῖα ὡς φορεὺς σημειοσειρᾶς τινος καὶ ἐπὶ πλέον ὡς ἄξων ἀξονικῆς τινος δέσμης ἐπιπέδων ἐν τῷ θεωρουμένῳ χώρῳ.

§ 4. Στοιχεῖα καθ' ὑπόστασιν καὶ κατ' ἐκδοχήν.

Ἐὰν εὐθεῖά τις k κεῖται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ μετά τινος ἐπιπέδου δέσμης ἀκτίνων O (α, β, γ, δ,...), χωρὶς νὰ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς O, τέμνει αὐτὴν κατὰ μίαν σημειοσειρὰν A, B, Γ, Δ,.. ἤτοι ἑκάστη τῶν ἀκτίνων α,β,γ,δ... τῆς δέσμης τέμνεται ὑπὸ τῆς k ἀντιστοίχως εἰς ἓν σημεῖον A,B, Γ, Δ....



Ἐὰν ἀκτίς τις ρ τῆς δέσμης, στρεφομένη συνεχῶς περὶ τὸ O γράφῃ τὴν δέσμην κατά τινα φοράν, ἔστω τὴν α, β, γ,..., τότε τὸ ἴχνος αὐτῆς μετὰ τῆς k γράφει κατὰ τὴν φορὰν A, B, Γ.... τὴν σημειοσειρὰν A, B, Γ, Δ,.. Τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς ἀκτῖνος μετὰ τῆς k ἀναχωροῦν ἀπὸ τοῦ A καὶ διευθυνόμενον πρὸς τὸ B καὶ πέραν αὐτοῦ συνεχῶς, ἀπομακρύνεται βαθμηδὸν εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν καὶ ἐμφανίζεται πάλιν ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος τῆς k, ἐπανέρχεται δὲ τέλος εἰς τὴν ἀρχικὴν αὐτοῦ θέσιν A. Ἐν τῇ προβολικῇ Γεωμετρίᾳ δεχόμεθα ὅτι ἡ εὐθεῖα ρ ἔχει πάντοτε ἓν κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς παραλλήλου πρὸς αὐτὴν εὐθείας k καὶ τοῦτο θὰ καλοῦμεν εἰς τὸ ἄπειρον ἢ *κατ' ἐκδοχὴν σημεῖον* τῆς k καὶ τῆς ρ, πρὸς διάκρισιν τῶν συνήθων σημείων, τὰ ὁποῖα καλοῦμεν *καθ' ὑπόστασιν*. Οὕτω θὰ λέγωμεν ὅτι δύο εὐθεῖαι εἶνε παράλληλοι μεταξύ των, ἐὰν τὸ κοινὸν σημεῖον αὐτῶν εἶνε κατ᾿ ἐξοχὴν σημεῖον.

Κατὰ ταῦτα, δύο εὐθεῖαι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κείμεναι, ἔχουν πάντοτε ἓν κοινὸν σημεῖον εἰς πεπερασμένην ἢ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν, κεῖται δὲ τὸ κατ᾿ ἐξοχὴν σημεῖον εὐθείας εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν πρὸς τὸ ἓν ἢ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος αὐτῆς. Οὕτω ἡ εὐθεῖα ἐμφανίζεται ὡς γραμμὴ κλειστή, κλείουσα εἰς τὸ κατ᾿ ἐξοχὴν σημεῖον αὐτῆς.

Ἐπειδὴ μετὰ τὴν ὑπόθεσιν ταύτην ἔν τινι εὐθείᾳ δυνάμεθα ἀπό τινος σημείου νὰ μεταβῶμεν διὰ συνεχοῦς κινήσεως ἐπὶ τῆς εὐθείας εἰς πᾶν ἄλλο σημεῖον αὐτῆς, ἐὰν ἐν γένει διέλθωμεν διὰ τοῦ εἰς ἄπειρον σημείου ταύτης, ἔπεται ὅτι,

«μεταξὺ τεσσάρων σημείων μιᾶς σημειοσειρᾶς ὑπάρχουν μόνον δύο ζεύγη χωριζομένων σημείων, ὡς ἐπίσης, μεταξὺ τεσσάρων στοιχείων μιᾶς δέσμης. Κατὰ ταῦτα πᾶσαι αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι αἵτινες κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον, κείμενον εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν, καὶ διὰ τοῦτο αἱ τοιαῦται ἀκτῖνες θεωροῦνται ὡς δέσμη ἀκτίνων, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον εἶνε κατ᾿ ἐξοχὴν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν.

Τὴν τοιαύτην ἐπίπεδον δέσμην ἀκτίνων θὰ καλοῦμεν *ἐπίπεδον δέσμην παραλλήλων ἀκτίνων* ἢ ἁπλῶς *παράλληλον δέσμην*. Κατ᾿ ἀνάλογον τρόπον ὁρίζομεν τὴν δέσμην παραλλήλων ἀκτίνων ἐν τῷ χώρῳ τῶν τριῶν διαστάσεων καὶ ἐχουσῶν κοινὴν διεύθυνσιν.

Δεχόμεθα ὅτι τὰ εἰς ἄπειρον σημεῖα ἑνὸς ἐπιπέδου κεῖνται ἐπὶ μιᾶς γραμμῆς, ἡ δὲ γραμμὴ αὕτη θεωρεῖται ὡς εὐθεῖα· διότι ἑκάστη εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου τέμνει αὐτὴν καθ᾿ ἓν σημεῖον, εἰς τὸ εἰς ἄπειρον σημεῖον αὐτῆς, ἐνῷ καμπύλαι γραμμαὶ τέμνονται ἐν γένει ὑπό τινος εὐθείας εἰς περισσότερα τοῦ ἑνὸς σημεῖα. Καθὼς λέγομεν περὶ τῶν παραλλήλων ἀκτίνων, ὅτι ἔχουν τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, οὕτω θὰ λέγωμεν ὅτι τὰ παράλληλα ἐπίπεδα δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς δέσμη ἐπιπέδων, τῶν ὁποίων ὁ ἄξων εἶνε ἡ εἰς τὸ ἄπειρον κοινὴ εὐθεῖα αὐτῶν.

Θὰ δεχθῶμεν ὅτι, τὰ εἰς τὸ ἄπειρον σημεῖα καὶ αἱ εἰς τὸ ἄπειρον εὐθεῖαι τοῦ χώρου κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εἰς τὸ ἄπειρον ἐπιφανείας.

Ἡ ἐπιφάνεια αὕτη θὰ θεωρῆται ὡς ἐπίπεδος, ἐπειδὴ ὑπὸ μιᾶς ἑκάστης εὐθείας τέμνεται εἰς ἓν σημεῖον, ὑπὸ ἑκάστου δὲ ἐπιπέδου κατὰ μίαν εὐθεῖαν.

Τὸ εἰς ἄπειρον ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τῶν ἀντιστοίχων κέντρων τῶν παραλλήλων δεσμῶν ἀκτίνων, καὶ τῶν ἀντιστοίχων ἀξόνων τῶν παραλλήλων δεσμῶν ἐπιπέδων, ἐνῷ ἡ εἰς ἄπειρον εὐθεῖα ἐπιπέδου τινὸς διέρχεται διὰ τῶν κέντρων διαφόρων δεσμῶν παραλλήλων ἀκτίνων τῶν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου κειμένων.

Παρατήρησις. Εἶνε γνωστὸν ἐκ τῆς Ἀλγέβρας, ὅτι ἀλγεβρική τις ἐξίσωσις μ βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸ x

$$\varphi(x) = a_0 x^{\mu} + a_1 x^{\mu-1} \ldots + a_{\mu} = o$$

ἔχει μ ῥίζας πραγματικὰς ἢ φανταστικάς. Εἰς ἑκάστην τούτων ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον τοῦ ἄξονος τῶν x πραγματικὸν ἢ φανταστικόν, ἂν ἡ ἀντίστοιχος ῥίζα εἶνε πραγματικὴ ἢ φανταστική. Κατὰ ταῦτα ἡ ἐξίσωσις $\alpha x + \beta = o$

παριστάνει σημεῖόν τι τοῦ ἄξονος τῶν x, ἔχον τετμημένην ἴσην μὲ $-\frac{\beta}{\alpha}$.

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη παριστάνει τὸ εἰς ἄπειρον σημεῖον τῆς εὐθείας ταύτης, ἂν εἶνε $\alpha = o$, $\beta \neq o$.

Ἀσκήσεις.

1) Πότε ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = o$ παριστάνει ἓν σημεῖον καθ' ὑπόστασιν καὶ ἓν κατ' ἐκδοχήν;

2) Πότε ἡ ἐξίσωσις αὕτη παριστάνει δύο σημεῖα κατ' ἐκδοχήν;

3) Πότε ἡ ἐξίσωσις $A x + B y + \Gamma = o$ παριστάνει τὴν καθ ὑπόστασιν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου;

4) Τίς εἶνε ἡ ἐξίσωσις, ἡ ὁποία παριστάνει τὸ καθ' ὑπόστασιν ἐπίπεδον;

§ 5. Ἀξιώματα τῆς προβολικῆς Γεωμετρίας.

Μετὰ τὴν παραδοχὴν καὶ τῶν κατ' ἐκδοχὴν στοιχείων ἔχομεν τὰς ἑξῆς γενικὰς προτάσεις ἰσχυούσας καὶ διὰ (τοιαῦτα στοιχεῖα).

1) «*Δύο σημεῖα ὁρίζουν μίαν εὐθεῖαν, ἐφ' ἧς κεῖνται*».

2) «*Δύο ἐπίπεδα ὁρίζουν μίαν εὐθεῖαν διὰ τῆς ὁποίας διέρχονται*».

3) «*Τρία σημεῖα, μὴ κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ὁρίζουν ἓν ἐπίπεδον, ἐφ' οὗ κεῖνται*».

4) «*Τρία ἐπίπεδα, μὴ διερχόμενα διὰ τῆς εὐθείας, ὁρίζουν ἓν σημεῖον, κείμενον ἐπ' αὐτῶν*».

5) «*Ἓν σημεῖον καὶ μία εὐθεῖα, μὴ διερχομένη δι' αὐτοῦ, ὁρίζουν ἓν ἐπίπεδον, ἐφ' οὗ κεῖνται*».

6) «*Ἓν ἐπίπεδον καὶ μία εὐθεῖα, μὴ κειμένη ἐπ' αὐτοῦ, ὁρίζουν ἓν σημεῖον, κείμενον ἐπ' αὐτῶν*».

Αἱ προτάσεις αὗται, προκύπτουσαι ἀμέσως ἐκ τῆς ἐποπτείας, δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς ἀξιώματα τῆς προβολικῆς Γεωμετρίας.

Τὸ ὅτι εἰς τὰ ἀνωτέρω ἀξιώματα δὲν κάμνομεν διάκρισίν τινα μεταξὺ στοιχείων καθ' ὑπόστασιν καὶ κατ' ἐκδοχήν, ἔχει ὡς ἀκολουθίαν ὅτι αἱ ἐπ' αὐτῶν στηριζόμεναι προτάσεις ἰσχύουν γενικῶς, εἴτε τὰ εἰς ταύτας εἰσερχόμενα στοιχεῖα θεωροῦνται καθ' ὑπόστασιν εἴτε κατ' ἐκδοχήν. Ἡ ἰδιότης αὕτη ἰσχύει, ἂν δεχθῶμεν καὶ ἄλλα ἀξιώματα ἄνευ διακρίσεώς τινος μεταξὺ στοιχείων καθ' ὑπόστασιν καὶ κατ' ἐκδοχήν. Διὰ ταῦτα, ἐν τῇ προβολικῇ Γεωμετρίᾳ (στηριζομένη ἐπὶ τοιούτων ἀξιωμάτων) δυνάμεθα καὶ πρέπει νὰ θεωροῦμεν τὰ στοιχεῖα καθ' ὑπόστασιν καὶ κατ' ἐκδοχὴν ἄνευ διακρίσεως.

Πρὸς ἐφαρμογὴν ἀποδεικνύομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«Δύο εὐθεῖαι, κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἔχουν ἓν σημεῖον κοινόν».

Ἔστω ὅτι αἱ εὐθεῖαι λ καὶ ρ κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ **a**.

Διὰ τῶν λ καὶ ρ φέρομεν τὰ ἐπίπεδα **l** καὶ **r**, τὰ ὁποῖα εἶνε διάφορα τοῦ **a**. Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα ἔχουν μίαν εὐθεῖαν κοινήν, ἔστω τὴν η, ἥτις εἶνε διάφορος τῶν ρ καὶ λ. Ἡ εὐθεῖα η δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ **a**, καὶ διὰ τοῦτο ἔχει ἓν σημεῖον κοινὸν μετ' αὐτοῦ ἔστω τὸ O, τὸ ὁποῖον εἶνε κοινὸν σημεῖον καὶ τῶν ρ καὶ λ. Αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἔχουν οὕτω ἓν κοινὸν σημεῖον, οὐχὶ δὲ καὶ δύο, διότι τότε κατὰ τὸ ἀνωτέρω πρῶτον ἀξίωμα θὰ συμπίπτουν.

Ἡ ἀνωτέρω ἀπόδειξις στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἀξιωμάτων 1—6, ἄνευ διακρίσεως μεταξὺ στοιχείων καθ' ὑπόστασιν καὶ κατ' ἐκδοχὴν καὶ ἰσχύει ἄνευ ἐξαιρέσεώς τινος.

Μετὰ τὴν παραδοχὴν τῶν κατ' ἐκδοχὴν στοιχείων ἔχομεν καὶ τοὺς ἑξῆς γεωμετρικοὺς σχηματισμοὺς κατ' ἐκδοχήν.

1) Τὴν κατ' ἐκδοχὴν σημειοσειράν, ἤτοι τὴν κατ' ἐκδοχὴν εὐθεῖαν, τῆς ὁποίας πάντα τὰ στοιχεῖα εἶνε σημεῖα κατ' ἐκδοχὴν καὶ τόπος πασῶν τῶν διευθύνσεων τῶν περιεχομένων ἔν τινι θέσει.

2) Τὴν κατ' ἐκδοχὴν ἀξονικὴν δέσμην ἐπιπέδων, ἤτοι τὸ σύνολον τῶν ἀπείρων τὸ πλῆθος ἐπιπέδων, τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν θέσιν.

3) Τὴν κατ' ἐκδοχὴν ἐπίπεδον δέσμην ἀκτίνων, ἤτοι τὸ σύνολον τῶν ἀπείρων ἀκτίνων, αἵτινες ἔχουν μίαν ὡρισμένην διεύθυνσιν καὶ κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδου καθ' ὑπόστασιν.

4) Τὸ κατ' ἐκδοχὴν πεδίον, ἤτοι τὸ σύνολον τῶν ἀπείρων τὸ πλῆθος διευθύνσεων καὶ τῶν ἀπείρων τὸ πλῆθος θέσεων.

5) Τὴν κατ' ἐκδοχὴν κεντρικὴν δέσμην, ἤτοι τὸ σύνολον τῶν ἀπείρων εὐθειῶν καὶ τῶν ἀπείρων ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα εἶνε παράλληλα πρὸς μίαν ὡρισμένην εὐθεῖαν, δηλαδὴ ἔχουν μίαν διεύθυνσιν.

Ἐπὶ πλέον ἔχομεν τὰς ἑξῆς προτάσεις αἵτινες εἶνε ἄμεσοι ἀκολουθίαι τῶν ἀξιωμάτων 1—6.

I. Εἰς δοθέντα γεωμετρικὸν σχηματισμὸν τρίτης βαθμῖδος δύο θεμελιώδη στοιχεῖα ὁρίζουν ἕνα γεωμετρικὸν σχηματισμὸν πρώτης βαθμῖδος (περιεχόμενον εἰς τὸν δοθέντα τρίτης βαθμῖδος), εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκουν ταῦτα (ἀξιώματα 1—2).

II. Εἰς γεωμετρικὸν σχηματισμὸν τρίτης βαθμῖδος τρία θεμελιώδη στοιχεῖα, μὴ ἀνήκοντα εἰς ἕνα γεωμετρικὸν σχηματισμὸν τῆς πρώτης βαθμῖδος, ὁρίζουν ἕνα γεωμετρικὸν σχηματισμὸν τῆς δευτέρας βαθμῖδος (περιεχόμενον εἰς τὸν δοθέντα τῆς τρίτης βαθμῖδος), εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκουν ταῦτα (ἀξιώματα 3—4).

III. Εἰς γεωμετρικὸν σχηματισμὸν τρίτης βαθμῖδος ἓν θεμελιῶδες στοιχεῖον καὶ εἷς γεωμετρικὸς σχηματισμὸς πρώτης βαθμῖδος, μὴ κείμενα ἐπ' ἀλλήλων, ὁρίζουν ἕνα γεωμετρικὸν σχηματισμὸν δευτέρας βαθμῖδος, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκουν ταῦτα (ἀξιώματα 5—6).

§ 6. Θεμελιώδεις πράξεις τῆς προβολικῆς Γεωμετρίας.

Αἱ πράξεις διὰ τῶν ὁποίων εὑρίσκεται ἡ προβολὴ καὶ ἡ τομὴ ἑνὸς σχήματος καλοῦνται θεμελιώδεις πράξεις τῆς προβολικῆς Γεωμετρίας, θεωροῦνται δ' αὗται ἀντίστροφοι ἀλλλήλων, καὶ γίνονται κυρίως ὡς ἑξῆς.

1) Διὰ νὰ προβάλωμεν γεωμετικόν τι σχῆμα, παριστώμενον ὑπὸ τοῦ (Β, Γ,..., β, γ,...) ἀπό τινος σημείου Α, κειμένου ἐκτὸς τοῦ σχήματος καὶ *κέντρου προβολῆς* καλουμένου, φέρομεν ἀφ' ἑνὸς μὲν τὰς διὰ τοῦ Α καὶ τῶν Β, Γ,... διερχομένας ἀκτῖνας, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὰ ὑπὸ τοῦ Α καὶ τῶν εὐθειῶν β, γ,... ὁριζόμενα ἐπίπεδα. Οὕτω ἔχομεν τὸ προβάλλον σχῆμα, τὸ ὁποῖον παριστῶμεν διὰ τῶν Α (Β Γ,.., β, γ...).

2) Διὰ νὰ προβάλωμεν σχῆμά τι (Β, Γ,..) ἀπό τινος εὐθείας α, ἥτις κεῖται ἐκτὸς τοῦ σχήματος καὶ καλεῖται *ἄξων προβολῆς*, φέρομεν διὰ τῆς α καὶ τῶν σημείων Β, Γ,.. τὰ ἐπίπεδα (αΒ), (αΓ),.. Οὕτω ἔχομεν τὸ προβάλλον σχῆμα, τὸ ὁποῖον παριστῶμεν διὰ τοῦ α (Β,Γ,..).

3) Διὰ νὰ τμήσωμεν σχῆμά τι, παριστώμενον ὑπὸ τοῦ (β,γ,.., **b**,**c**,..) διά τινος ἐπιπέδου **a**, μὴ ἀνήκοντος εἰς τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον καλεῖται *τέμνον ἐπίπεδον*, εὑρίσκομεν τὰς τομὰς τοῦ **a** καὶ ἑκάστης τῶν εὐθειῶν β, γ,..., καθὼς καὶ τὰς εὐθείας τὰς ὁριζομένας ὑπὸ τοῦ **a** καὶ τῶν ἐπιπέδων **b**, **c**,... Οὕτω ἔχομεν τὸ σχῆμα τῆς τομῆς, τὸ ὁποῖον παριστάνομεν διὰ τοῦ **a**(β, γ,...**b**, **c**,...).

4) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τομὴν σχήματός τινος (**b**, **c**,..) ὑπό τινος εὐθείας α μὴ ἀνηκούσης εἰς τὸ σχῆμα, εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα (α**b**), (α**c**),...

τῶν τομῶν τῆς εὐθείας ταύτης καὶ ἑκάστου τῶν ἐπιπέδων **b**, **c**,.. Οὕτω ἔχομεν τὸ σχῆμα τῆς τομῆς, τὸ ὁποῖον παριστάνομεν διὰ τοῦ α(**b**,**c**,....)

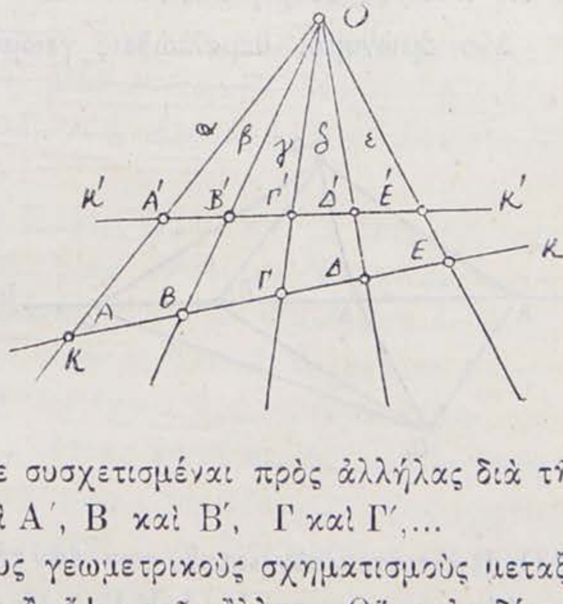
Λέγομεν ὅτι σχῆμά τι προβάλλομεν ἀπό τινος (ἐκτὸς αὐτοῦ κειμένου) σημείου Α ἐπί τινος ἐπιπέδου **a** (μὴ διερχομένου διὰ τοῦ Α), ἐὰν εὑρίσκωμεν τὴν προβολὴν αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ Α καὶ τοῦ προβάλλοντος σχήματος εὑρίσκομεν τὴν τομὴν μετὰ τοῦ **a**.

Διὰ τῆς προβολῆς καὶ τομῆς δύναταί τις ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἐκ δύο σχηματισμῶν πρώτης βαθμῖδος καὶ ἐκ τοῦ ἑνὸς ἐκ δύο σχηματισμῶν δευτέρας βαθμῖδος νὰ μεταβῇ εἰς τὸν ἄλλον. Πράγματι, ἐὰν προβάλωμεν σημειοσειρὰν ἀπό τινος κέντρου (κειμένου ἐκτὸς τοῦ φορέως αὐτῆς), λαμβάνομεν μίαν δέσμην ἀκτίνων, ἀντιστοιχοῦν δ' ἀνὰ μία τῶν προβαλλουσῶν ἀκτίνων πρὸς ἀνὰ ἓν τῶν προβαλλομένων σημείων. Ἐὰν τμήσωσωμεν ἀξονικήν τινα δέσμην ἐπιπέδων διά τινος ἐπιπέδου, μὴ διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος αὐτῆς, λαμβάνομεν μίαν ἐπίπεδον δέσμην ἀκτίνων ἀντιστοιχεῖ δ' ἑκάστη τῶν ἀκτίνων πρὸς ἓν τῶν ἐπιπέδων, καὶ ἀντιστρόφως.

§ 7. Συσχέτισις γεωμετρικῶν σχηματισμῶν.

Λέγομεν ὅτι δύο γεωμετρικοὶ σχηματισμοὶ συσχετίζονται πρὸς ἀλλήλους, ἐὰν εἰς ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ ἑνὸς ὁρίζεται ἓν ἀντίστοιχον τοῦ ἄλλου, καὶ ἀντιστρόφως· δύο δὲ οὕτως καθ' ἕνα μόνον τρόπον ἀντιστοιχοῦντα στοιχεῖα αὐτῶν λέγονται *ὁμόλογα ἢ ἀντίστοιχα*.

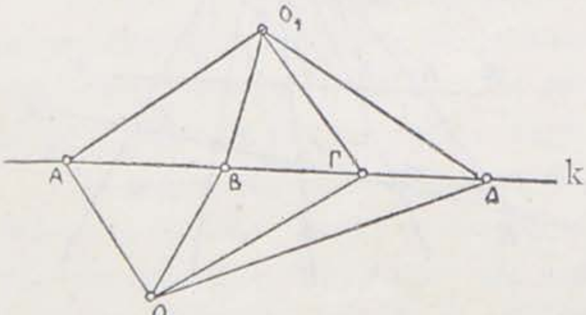
Εἶνε φανερὸν ὅτι, ἐὰν δύο θεμελιώδεις γεωμετρικοὶ σχηματισμοὶ συσχετίζωνται πρὸς τρίτον (ὅτε εἰς ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ τρίτου ἀντιστοιχεῖ ἀνὰ ἓν ἑκάστου τῶν δύο ἄλλων), συσχετίζονται καὶ μεταξύ των. Οὕτω π. χ. ἑκάστη τῶν σημειοσειρῶν k(Α, Β, Γ,..) καὶ k'(Α',Β',Γ'...) εἶνε συσχετισμένη πρὸς τὴν ἐπίπεδον δέσμην Ο (α,β,γ,...) διὰ τῆς ἀντιστοιχίας ἑκάστου τῶν στοιχείων αὐτῶν Α, Β, Γ,... καὶ Α',Β',Γ',... πρὸς τὰ α, β, γ,..



καὶ αἱ δύο δὲ σημειοσειραὶ θὰ εἶνε συσχετισμέναι πρὸς ἀλλήλας διὰ τῆς ἀντιστοιχίας τῶν στοιχείων Α καὶ Α', Β καὶ Β', Γ καὶ Γ',...

Συσχετίζομεν δύο ἑτερωνύμους γεωμετρικοὺς σχηματισμοὺς μεταξύ των, θεωροῦντες τὸν ἕνα ὡς τομὴν ἢ ὄψιν τοῦ ἄλλου. Οὕτω ἐν δέσμη ἀκτίνων Ο, κειμένη μετὰ μιᾶς σημειοσειρᾶς k ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἐνῷ ἡ k δὲν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Ο, ἔχομεν ὅτι εἰς ἑκάστην ἀκτῖνα τῆς δέσμης ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον τῆς σημειοσειρᾶς, εἰς δὲ τὴν παράλληλον πρὸς τὴν k ἀκτῖνα ρ τῆς Ο ἀντιστοιχεῖ τὸ εἰς ἄπειρον σημεῖον τῆς k. Ἐὰν πεδίον τι **a** θεωρηθῇ ὡς τομὴ κεντρικῆς τινος δέσμης Ο, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον κεῖται ἐκτὸς αὐτοῦ, τὸ **a** καὶ ἡ Ο συσχετίζονται οὕτω μεταξύ των, ὥστε εἰς ἕκαστον σημεῖον τοῦ **a** ἀντιστοιχεῖ ἡ δι᾿ αὐτοῦ διερχομένη ἀκτὶς τῆς Ο, καὶ εἰς ἑκάστην εὐθεῖαν τοῦ **a** τὸ δι᾿ αὐτῆς διερχόμενον ἐπίπεδον τῆς Ο. Εἰς τὸ παράλληλον τῷ **a** ἐπίπεδον τῆς Ο ἀντιστοιχεῖ οὕτω ἡ εἰς ἄπειρον ἀκτὶς τοῦ **a**, καὶ εἰς ἑκάστην ἀκτῖνα τοῦ Ο, κειμένην ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ ἀντιστοιχεῖ ἓν εἰς ἄπειρον σημεῖον τοῦ **a**. Εἰς ἑκάστην ἀξονικὴν δέσμην ἐπιπέδων τῆς Ο ἀντιστοιχεῖ ἡ τομὴ αὐτῆς ἐν τῷ **a**, ἤτοι μία δέσμη ἐν αὐτῷ, ἔχουσα κέντρον τὸ σημεῖον, καθ᾿ ὃ ὁ ἄξων τῆς ἀξονικῆς δέσμης τέμνει τὸ πεδίον, καὶ ἡ δέσμη αὕτη ἔχει τὸ κέντρον αὐτῆς εἰς τὸ ἄπειρον, ἐὰν ὁ ἄξων τῆς ἀξονικῆς δέσμης εἶνε παράλληλος τῷ **a**. Ἐὰν ἡ Ο εἶνε μία παράλληλος δέσμη ἐν τῷ χώρῳ, εἰς ἕκαστον σημεῖον, κείμενον εἰς πεπερασμένην ἀπόστασιν, ἐν τῷ **a** ἀντιστοιχεῖ μία ἀκτὶς τῆς Ο, κειμένη εἰς πεπερασμένην ἀπόστασιν, καὶ εἰς ἓν εἰς ἄπειρον στοιχεῖον τοῦ **a** ἓν εἰς ἄπειρον στοιχεῖον τῆς Ο. Ἐὰν τὸ **a** εἶνε τὸ εἰς ἄπειρον ἐπίπεδον καὶ τὸ Ο κεῖται εἰς πεπερασμένην ἀπόστασιν, τότε εἰς ἑκάστην ἀκτῖνα τῆς Ο ἀντιστοιχεῖ ἐν τῷ **a** τὸ ἀντίστοιχον αὐτῆς εἰς ἄπειρον σημεῖον· εἰς ἕκαστον ἐπίπεδον τῆς Ο ἡ εἰς ἄπειρον εὐθεῖα αὐτοῦ ἐν τῷ **a**· εἰς πᾶσαν δέσμην ἀκτίνων μία εἰς ἄπειρον σημειοσειρά· καὶ εἰς πᾶσαν ἀξονικὴν δέσμην μία εἰς ἄπειρον δέσμη ἀκτίνων.

Δύο ὁμώνυμοι θεμελιώδεις γεωμετρικοὶ σχηματισμοὶ δύνανται νὰ συσχετίζωνται μεταξύ των, θεωρούμενοι ὡς τομαὶ ἢ ὄψεις ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ αὐτοῦ τρίτου θεμελιώδους γεωμετρικοῦ σχηματισμοῦ. Οὕτω συσχετίζομεν δύο ἐπιπέδους δέσμας ἀκτίνων, ἐχούσας κέντρα τὰ O_1 καὶ O_2, καὶ ἐὰν θεωρήσωμεν ταύτας ὡς ὄψεις μιᾶς σημειοσειρᾶς k, δύο δὲ ἀκτῖνες αὐτῶν O_1A καὶ O_2A ἢ O_1B καὶ O_2B ἀντιστοιχοῦν μεταξύ των, ἐὰν τέμνωνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς k.



Δύο σημειοσειραὶ k (Α,Β,Γ, ...) καὶ k′ (Α′,Β′,Γ′,...), κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, συσχετίζονται, ἂν θεωρηθοῦν ὡς τομαὶ μιᾶς δέσμης ἀκτίνων

O (α, β, γ, ...), παρατηροῦμεν δ' ὅτι εἰς τὸ κατ' ἐξοχὴν σημεῖον τῆς μιᾶς ἀντιστοιχεῖ ἐν γένει ἓν σημεῖον καθ' ὑπόστασιν τῆς ἄλλης.

Δύο ἐπίπεδα πεδία συσχετίζονται εὐκόλως μεταξύ των, ἐὰν θεωρηθοῦν ὡς τομαὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς κεντρικῆς δέσμης.

Δύο κεντρικαὶ δέσμαι δύνανται νὰ συσχετισθοῦν μεταξύ των, ἐὰν θεωρηθοῦν ὡς ὄψεις ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ πεδίου. Ἐν τῇ συσχετίσει ταύτῃ ἑκάστη ἀκτὶς τῆς μιᾶς δέσμης τέμνει τὴν ἀντίστοιχον ἀκτῖνα τῆς ἄλλης καθ' ἓν σημεῖον τοῦ πεδίου, καὶ δύο ὁμόλογα ἐπίπεδα τῆς δέσμης ἔχουν μίαν κοινὴν εὐθεῖαν τοῦ πεδίου. Ὡς τοιαύτας δέσμας δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν π. χ. τὰς ὄψεις ἑνὸς τοπίου ἀπὸ δύο διαφόρων σημείων.

§ 8. Προοπτικὴ θέσις γεωμετρικῶν σχηματισμῶν.

Διὰ τῆς προβολῆς καὶ τομῆς δυνάμεθα, ὡς εἴδομεν, ἐξ ἑνὸς ἐκ δύο σχηματισμῶν πρώτης βαθμῖδος καὶ ἐξ ἑνὸς ἐκ δύο σχηματισμῶν δευτέρας βαθμῖδος νὰ μεταβῶμεν εἰς τὸν ἄλλον.

1) Διὰ τῆς προβολῆς μιᾶς σημειοσειρᾶς ἀπό τινος κέντρου (κειμένου ἐκτὸς τοῦ φορέως αὐτῆς) λαμβάνομεν μίαν ἐπίπεδον δέσμην ἀκτίνων. Αἱ προβάλλουσαι ἀκτῖνες θὰ εἶνε συσχετισμέναι πρὸς τὰ προβαλλόμενα σημεῖα, λέγομεν δὲ ὅτι ἡ σημειοσειρὰ αὕτη καὶ ἡ προκύπτουσα δέσμη σχετίζονται *προοπτικῶς πρὸς ἀλλήλας* ἢ ὅτι ἔχουν *προοπτικὴν θέσιν*.

2) Διὰ τῆς προβολῆς μιᾶς σημειοσειρᾶς ἀπό τινος ἄξονος (μὴ τέμνοντος τὸν φορέα αὐτῆς) λαμβάνομεν μίαν ἀξονικὴν δέσμην ἐπιπέδων, ἥτις λέγομεν ὅτι σχετίζεται *προοπτικῶς* πρὸς τὴν σημειοσειρὰν ἢ ἡ σημειοσειρὰ καὶ ἡ δέσμη ἔχουν *προοπτικὴν θέσιν* πρὸς ἀλλήλας.

3) Διὰ τῆς προβολῆς ἑνὸς πεδίου ἀπό τινος κέντρου (κειμένου ἐκτὸς τοῦ φορέως αὐτοῦ) λαμβάνομεν μίαν κεντρικὴν δέσμην, ἡ ὁποία σχετίζεται *προοπτικῶς* πρὸς τὸ πεδίον ἢ ἔχουν *προοπτικὴν θέσιν* μεταξύ των.

4) Διὰ τῆς τομῆς μιᾶς ἀξονικῆς δέσμης ἐπιπέδων δι' ἐπιπέδου (μὴ ἀνήκοντος εἰς τὴν δέσμην) λαμβάνομεν μίαν ἐπίπεδον δέσμην ἀκτίνων. Αἱ ἀκτῖνες ταύτης θὰ εἶνε συσχετισμέναι πρὸς τὰ τεμνόμενα ἐπίπεδα (τῆς πρώτης δέσμης) καὶ λέγομεν ὅτι οὕτω αἱ δύο αὗται δέσμαι σχετίζονται *προοπτικῶς* πρὸς ἀλλήλας ἢ ὅτι ἔχουν *προοπτικὴν θέσιν*.

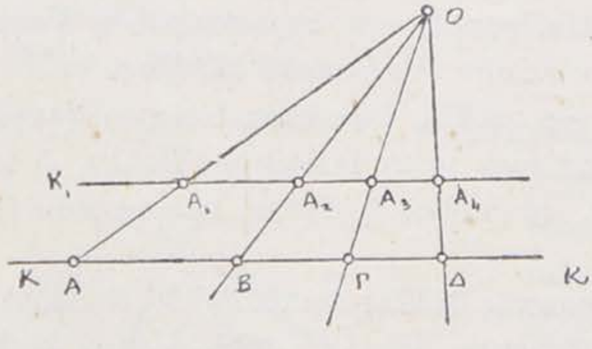
5) Διὰ τῆς τομῆς μιᾶς ἀξονικῆς δέσμης ἐπιπέδων δι' εὐθείας (μὴ τεμνούσης τὸν ἄξονα αὐτῆς) λαμβάνομεν μίαν σημειοσειράν, ἥτις σχετίζεται *προοπτικῶς* πρὸς τὴν ἀξονικὴν δέσμην ἢ ἡ δέσμη καὶ ἡ σημειοσειρὰ ἔχουν *προοπτικὴν θέσιν* πρὸς ἀλλήλας.

6) Διὰ τῆς τομῆς μιᾶς κεντρικῆς δέσμης δι' ἐπιπέδου (μὴ ἀνήκοντος εἰς αὐτὴν) λαμβάνομεν ἓν πεδίον, τὸ ὁποῖον σχετίζεται *προοπτικῶς* πρὸς τὴν δέσμην, ἢ ἡ κεντρικὴ δέσμη καὶ τὸ πεδίον ἔχουν *προοπτικὴν θέσιν* πρὸς ἄλληλα.

Ἐὰν πρόκειται περὶ σχήματος ἐπιπέδου (ἀποτελουμένου ἐξ εὐθειῶν) τέμνομεν αὐτὸ δι' ἐπιπέδου, μὴ συμπίπτοντος μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ σχήματος, καὶ λέγομεν ὅτι τέμνομεν τὸ σχῆμα διά τινος εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ (τῆς εὐθείας τομῆς τῶν ἐπιπέδων). Κατ' ἀνάλογον τρόπον, ἐὰν πρόκειται περὶ σχήματος ἀνήκοντος εἰς κεντρικὴν δέσμην (ἀποτελουμένου ἐξ εὐθειῶν), προβάλλομεν ἀπό τινος κέντρου (μὴ συμπίπτοντος μὲ τὸ κέντρον τῆς δέσμης) καὶ λέγομεν ὅτι προβάλλομεν τὸ σχῆμα ἀπό τινος εὐθείας τῆς δέσμης (τῆς συνδεούσης τὸν κέντρον τῆς προβολῆς μετὰ τοῦ κέντρου τῆς δέσμης).

Ἐὰν τμήσωμεν ἐπίπεδον δέσμην ἀκτίνων διά τινος εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου, μὴ ἀνηκούσης εἰς τὴν δέσμην, λαμβάνομεν μίαν σημειοσειράν, ἡ ὁποία σχετίζεται *προοπτικῶς* πρὸς τὴν δέσμην, ἢ ἡ δέσμη καὶ ἡ σημειοσειρὰ ἔχουν *προοπτικὴν θέσιν* πρὸς ἀλλήλας.

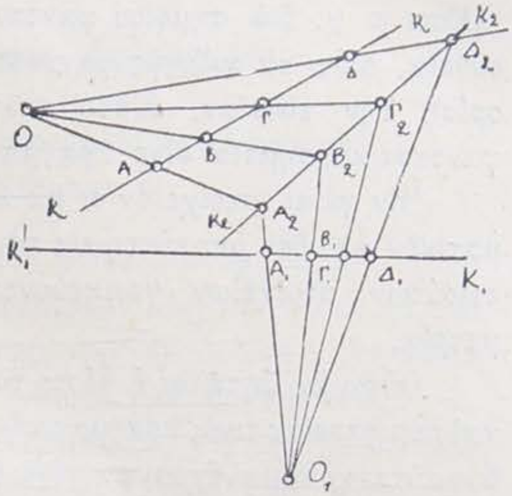
Ἐὰν προβάλωμεν ἐπίπεδον δέσμην ἀκτίνων, ἀνήκουσαν εἰς κεντρικὴν δέσμην, ἀπό τινος εὐθείας ταύτης, μὴ ἀνηκούσης εἰς τὴν δέσμην τῶν ἀκτίνων, λαμβάνομεν μίαν ἀξονικὴν δέσμην ἐπιπέδων, ἡ ὁποία σχετίζεται *προοπτικῶς* πρὸς τὴν ἐπίπεδον δέσμην ἢ ἔχουν *προοπτικὴν θέσιν* πρὸς ἀλλήλας.



Ἐν γένει, λέγομεν ὅτι δύο ἑτερώνυμοι θεμελιώδεις γεωμετρικοὶ σχηματισμοὶ ἔχουν *προοπτικὴν θέσιν* πρὸς ἀλλήλους, ἐὰν ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ ἑνὸς τούτων κεῖται ἐπὶ ἀντιστοίχου στοιχείου πρὸς αὐτὸ τοῦ ἄλλου σχηματισμοῦ. Οὕτω π. χ. σημειοσειρά τις καὶ ἐπίπεδος δέσμη ἀκτίνων, ἢ ἀξονικὴ δέσμη ἐπιπέδων καὶ ἐπίπεδος δέσμη ἀκτίνων, ἔχουν προοπτικὴν θέσιν, ἐὰν ὁ εἷς τῶν σχηματισμῶν τούτων εἶνε τομὴ ἢ ὄψις τοῦ ἄλλου.

Δύο ὁμώνυμοι θεμελιώδεις γεωμετρικοὶ σχηματισμοὶ ἔχουν *προοπτικὴν θέσιν*, ἐὰν εἶνε τομαὶ ἑνὸς ἄλλου σχηματισμοῦ. Π. χ. αἱ δύο σημειοσειραὶ k (A, B, Γ,...) καὶ $k_1(A_1, A_2, A_3,...)$, αἵτινες εἶνε τομαὶ τῆς ἐπιπέδου δέσμης ἀκτίνων O ἔχουν προοπτικὴν θέσιν πρὸς ἀλλήλας.

Ἐὰν δύο σχηματισμοὶ ἔχουν προοπτικὴν θέσιν πρὸς τρίτον, δὲν ἔχουν πάντοτε προοπτικὴν θέσιν πρὸς ἀλλήλους. Οὕτω π. χ. αἱ σημειοσειραὶ $k\,(A,B,\Gamma,\Delta,...)$ καὶ $k'_1\,(A_1,B_1,\Gamma_1,...)$ εἶνε ἑκάστη προοπτικὴ πρὸς τὴν $k_2(A_2,B_2,\Gamma_2,..)$, ἐπειδὴ αἱ $k(A,B,\Gamma,..)$ καὶ $k\,(A_2,B_2,\Gamma_2,..)$ εἶνε τομαὶ τῆς ἐπιπέδου δέσμης ἀκτίνων O, αἱ δὲ $k_1(A_1,B_1,\Gamma_1,...)$ καὶ αἱ $k_2(A_2,B_2,\Gamma_2,..)$ εἶνε ἐπίσης τομαὶ τῆς ἐπιπέδου δέσμης ἀκτίνων O_1, δὲν ἔχουν ὅμως αὗται πάντοτε προοπτικὴν θέσιν καὶ πρὸς ἀλλήλας.



§ 9. Περὶ φανταστικῶν στοιχείων.

Ἐὰν δεχθῶμεν ὅτι εἰς ἓν σύνολον τριῶν συντεταγμένων x, y, z, ἐνῷ μία ἢ περισσότεραι αὐτῶν εἶνε ποσότητες φανταστικαί, ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον, καὶ τοὐναντίον, θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ σημεῖον τοῦτο εἶνε φανταστικόν. Δύο φανταστικὰ σημεῖα λέγονται *φανταστικὰ συζυγῆ*, ἐὰν οἱ εἰς ταῦτα ἀντιστοιχοῦντες φανταστικοὶ ἀριθμοὶ εἶνε συζυγεῖς (ἤτοι διαφέρουν μόνον κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ i). Οὕτω π. χ. τὰ σημεῖα (o,i,i) καὶ $(o,-i,-i)$ ἐν τῷ χώρῳ τῶν τριῶν διαστάσεων λέγονται φανταστικὰ συζυγῆ, καθὼς καὶ τὰ $(i,2i)$ καὶ $(i,-2i)$ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ xoy.

Κατ᾽ ἀνάλογον τρόπον ὁρίζομεν φανταστικὴν εὐθεῖαν, ἐν τῷ ἐπιπέδῳ xoy, ἥτις παριστάνεται ὑπὸ ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x,y μὲ συντελεστὰς ἐν γένει φανταστικούς, ἢ φανταστικὸν ἐπίπεδον ἀντιστοιχοῦν εἰς ἐξίσωσιν τοῦ πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, y, z, μὲ συντελεστὰς ἐν γένει φανταστικούς, εἶνε δὲ τοῦτο ὁ τόπος πραγματικῶν ἢ καὶ φανταστικῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουν τὴν ἐν λόγῳ ἐξίσωσιν. Ὁμοίως θεωροῦμεν φανταστικὰς ἐπιφανείας οἱουδήποτε βαθμοῦ, ὁριζομένας διὰ τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν μὲ συντελεστὰς φανταστικοὺς ἐν γένει.

Ὡς εἶνε γνωστόν, διὰ νὰ ἐκφράσωμεν, ὅτι ἐπιφάνειά τις πραγματικὴ διέρχεται διὰ δοθέντος σημείου, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν σχέσιν τινά, συνδέουσαν τοὺς συντελεστὰς τῆς ἐξώσεως ταύτης. Ἀλλ᾽ ἐὰν τὸ σημεῖον εἶνε φανταστικόν, ἡ σχέσις αὕτη εἶνε ἰσοδύναμος πρὸς δύο ἄλλας, μὴ περιεχούσας ποσότητας φανταστικάς, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι τῶν ὁποίων τὰ σημεῖα ἔχουν συντεταγμένας ἐπαληθευούσας τὰς σχέσεις αὐτάς, διέρχονται ὄχι μόνον διὰ

F. M. M. $Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$ (ἐξ. ἐπιπ.)
$M(ai, bi, \gamma)$ $Aai + Bbi + \Gamma\gamma + \Delta = 0$
$\Gamma\gamma + \Delta + (Aa + Bb)i = 0$
$\Gamma\gamma + \Delta = 0$

τοῦ θεωρουμένου φανταστικοῦ σημείου, ἀλλὰ καὶ διὰ τοῦ συζυγοῦς αὐτοῦ. Ἀνάλογα παρατηροῦμεν προκειμένου περὶ γραμμῆς τινος πραγματικῆς. Οὕτω π. χ. διὰ σημείου φανταστικοῦ διέρχεται μία μόνον πραγματικὴ εὐθεῖα, διότι τὸ συζυγὲς φανταστικὸν σημεῖον τούτου ἀρκεῖ νὰ προσδιορίσῃ τὴν εὐθεῖαν. Κατὰ ταῦτα ἡ εὐθεῖα, ἥτις συνδέει δύο συζυγῆ φανταστικὰ σημεῖα εἶνε πραγματική.

Ἐν γένει, στοιχεῖόν τι θὰ καλῆται φανταστικόν, ἐὰν δὲν εἶνε πραγματικὸν καὶ δὲν ὑποπίπτῃ εἰς τὰς αἰσθήσεις ἡμῶν, διὰ τῆς χρήσεως δὲ τοιούτων στοιχείων γενικεύονται πλεῖσται προτάσεις ἐν τῇ Γεωμεμετρίᾳ.

Οὕτω ἂν ζητῆται ἡ θέσις τυχούσης πραγματικῆς εὐθείας $y=\lambda x+\beta$ καὶ περιφερείας τινὸς πραγματικῆς $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$ εὑρίσκομεν ὅτι αἱ δύο αὗται γραμμαὶ ἔχουν ἐν γένει δύο σημεῖα κοινά, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ εἶνε πραγματικὰ καὶ διάφορα ἀλλήλων, ἢ συμπίπτοντα εἰς ἕν, ἢ φανταστικὰ συζυγῆ, ἂν ἡ εὐθεῖα τέμνῃ ἢ ἐφάπτεται ἢ κεῖται ἐκτὸς τῆς περιφερείας (ἢ ἂν ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας ἀπὸ τῆς εὐθείας εἶνε μικροτέρα ἢ ἴση ἢ μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος ρ).

Καὶ γενικῶς ἂν ζητῆται ἡ θέσις τυχούσης πραγματικῆς εὐθείας, ἐχούσης ἐξίσωσιν $Ax+By+\Gamma=o$ ὡς πρὸς ἀλγεβρικὴν καμπύλην βαθμοῦ μ, ἔχουσαν ἐξίσωσιν $\varphi(xy,)=o$ καὶ κειμένην ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ μετ᾽ αὐτῆς, εὑρίσκομεν ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων.

$$Ax+By+\Gamma=o,\ \varphi(x,y)=o,$$

ὅτι αἱ δύο αὗται γραμμαὶ ἔχουν ἐν γένει μ κοινὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ εἶνε πραγματικὰ καὶ διάφορα ἀλλήλων, ἢ τινὰ τούτων νὰ συμπίπτουν μεταξύ των, ἢ καὶ ἄρτιον πλῆθος τούτων νὰ εἶνε φανταστικὰ καὶ ἀνὰ δύο συζυγῆ. Ἐν γένει ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν, προκειμένου περὶ καμπύλης τινὸς δευτέρου βαθμοῦ.

«*Καμπύλη τις δευτέρου βαθμοῦ ἔχει πάντοτε δύο κοινὰ σημεῖα μὲ εὐθεῖαν πραγματικήν, κειμένην ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῆς*». Τὰ σημεῖα ταῦτα εἶνε πραγματικὰ ἢ φανταστικὰ ἢ συμπίπτουν εἰς ἕν, ἂν ἡ εὐθεῖα τέμνει, ἢ ἐφάπτεται ἢ κεῖται ἐκτὸς τῆς καμπύλης. Ὁμοίως ἔχομεν ὅτι, «*δι᾽ ἑκάστου πραγματικοῦ σημείου τοῦ ἐπιπέδου καμπύλης τινὸς δευτέρου βαθμοῦ ἄγονται δύο ἐφαπτόμεναι τῆς καμπύλης*». Αἱ ἐφαπτόμεναι αὗται εἶνε φανταστικαί, ἢ πραγματικαὶ ἢ καὶ συμπίπτουν εἰς μίαν, ἂν τὸ σημεῖον κεῖται ἐντὸς τῆς καμπύλης ἢ ἐπ᾽ αὐτῆς ἢ ἐκτὸς αὐτῆς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ.

Περὶ τῆς ἀρχῆς τοῦ δυασμοῦ.

§ 10. Ἀρχὴ τοῦ δυασμοῦ, στοιχεῖα ἐναλλακτὰ καὶ προτάσεις δίδυμοι.

Ἡ σπουδὴ τῆς Γεωμετρίας τῆς θέσεως διευκολύνεται σπουδέως διὰ τῆς ἐφαρμογῆς μιᾶς ἀρχῆς, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν *ἀρχὴν τοῦ δυασμοῦ* ἢ *τῆς ἐναλλαγῆς**. Διὰ τῆς ἀρχῆς ταύτης, καθ' ἣν ὁρίζομεν ὡρισμένα τινὰ γεωμετρικὰ στοιχεῖα ὡς *ἐναλλακτὰ* μεταξύ των, δυνάμεθα νὰ χωρίσωμεν τὸ πλεῖστον τῆς θεωρίας τῆς Γεωμετρίας εἰς δύο ἡμίση εἰς τρόπον ὥστε, τὸ ἓν νὰ προκύπτῃ ἐκ τοῦ ἄλλου κυρίως διὰ μόνης τῆς ἐναλλαγῆς τῶν ἐναλλακτῶν στοιχείων, αἱ δὲ οὕτω ἀντίστοιχοι πρὸς ἀλλήλας προτάσεις λέγονται *δίδυμοι*.

Θεωροῦντες ἐπὶ παραδείγματι ἐν τῷ χώρῳ τῶν τριῶν διαστάσεων ὡς ἐναλλακτὰ στοιχεῖα μεταξύ των *τὸ σημεῖον καὶ τὸ ἐπίπεδον*, *τὴν σημειοσειρὰν* καὶ *τὴν ἀξονικὴν δέσμην ἐπιπέδων*, παρατηροῦμεν ὅτι ἐκ προτάσεώς τινος γεωμετρικῆς δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν μίαν ἄλλην, τὴν ὁποίαν θεωροῦμεν ἀντίστοιχον τῆς πρώτης, ἐὰν ἐν τῇ πρώτῃ ἐναλλάξωμεν μεταξύ των τὰς ἐκφράσεις *σημεῖον καὶ ἐπίπεδον*, *σημειοσειρὰ καὶ ἀξονικὴ δέσμη ἐπιπέδων*. Ἰδοὺ παραδείγματα τοιούτων διδύμων προτάσεων.

«Δύο σημεῖα Α, Β ὁρίζουν μίαν εὐθεῖαν (ΑΒ), τὴν συνδέουσαν αὐτά».	«Δύο ἐπίπεδα **a**, **b** ὁρίζουν μίαν εὐθεῖαν (**a b**) καθ' ἣν τέμνονται».
«Μία εὐθεῖα α καὶ ἓν σημεῖον Β (ἐκτὸς αὐτῆς κείμενον) ὁρίζουν ἓν ἐπίπεδον (α Β)».	«Μία εὐθεῖαι α καὶ ἓν ἐπίπεδον **b** (μὴ διερχόμενον δι' αὐτῆς) ὁρίζουν ἓν σημεῖον (α**b**), τὴν τομὴν αὐτῶν».
«Δύο εὐθεῖαι α, β, ἔχουσαι ἓν κοινὸν σημεῖον, κεῖνται ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου (αβ)».	«Δύο εὐθεῖαι α, β, κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἔχουν ἓν σημεῖον α β κοινόν»,
«Τρία σημεῖα Α, Β, Γ, μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, ὁρίζουν ἓν ἐπίπεδον (Α Β Γ)».	«Τρία ἐπίπεδα **a, b, c**, μὴ διερχόμενα διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας ὁρίζουν ἓν σημεῖον (**a b c**)».

* Ὁ Poncelet ἀναχωρῶν ἐκ τῆς θεωρίας τῶν πολικῶν διὰ τὰς κωνικὰς τομὰς ἔκαμε χρῆσιν τῆς ἀρχῆς ταύτης (1817-18), ὁ δὲ Gergonne ἐθεμελίωσε τὴν ἀρχὴν ἀνεξαρτήτως τῶν κωνικῶν τομῶν (1827).

Ἀσκήσεις.

Τῶν κάτωθι ἐναλλακτῶν προτάσεων νὰ εὑρεθοῦν καὶ δειχθοῦν αἱ ἀντίστοιχοι.

1) Ἐὰν δοθέντων τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνωνται, θὰ τέμωνται καὶ αἱ ΑΓ, ΒΔ καὶ αἱ ΑΔ, ΒΓ. Διότι τὰ τέσσαρα σημεῖα καὶ αἱ ἓξ αὗται εὐθεῖαι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

2) Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα δύο ἄλλας, μὴ κειμένας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ μετ' αὐτοῦ.

§ 11. Ἐφαρμογὴ τοῦ δυασμοῦ εἰς τὸν χῶρον τῶν τριῶν διαστάσεων.

Αἱ ἑπόμεναι καὶ ἔναντι ἀλλήλων κείμεναι προτάσεις εἶνε δίδυμοι, προκύπτει δ' ἑκάστη ἐκ τῆς ἔναντι αὐτῆς κυρίως δι' ἐναλλαγῆς τῶν στοιχείων σημείου καὶ ἐπιπέδου.

Τρικόρυφον.

Τρία σημεῖα, μὴ κείμενα ἐπὶ μιᾶς εὐθείας, ὁρίζουν ἓν *τρικόρυφον*, ἤτοι τὸ σχῆμα τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἐκ τῶν τριῶν σημείων *(κορυφῶν)*, ἐκ τῶν τριῶν εὐθειῶν *(πλευρῶν)*, τῶν ὁριζομένων ἐκ τῶν τριῶν σημείων ἀνὰ δύο λαμβανομένων, καὶ ἐκ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῶν τριῶν σημείων.

Τρίεδρον.

Τρία ἐπίπεδα, μὴ διερχόμενα διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας ὁρίζουν ἓν *τρίεδρον*, ἤτοι τὸ σχῆμα τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἐκ τῶν τριῶν ἐπιπέδων *(ἑδρῶν)*, ἐκ τῶν τριῶν εὐθειῶν *(ἀκμῶν)*, τῶν ὁριζομένων ἐκ τῶν τριῶν ἐπιπέδων ἀνὰ δύο λαμβανομένων, καὶ ἐκ τοῦ σημείου καθ' ὃ τέμνονται τὰ τρία ἐπίπεδα.

Δύο εὐθεῖαι, αἵτινες διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καὶ τέμνονται. Δύο εὐθεῖαι, μὴ τεμνόμεναι, δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, καὶ λέγομεν ὅτι *κεῖνται στρεβλῶς πρὸς ἀλλήλας*.

Δύο εὐθεῖαι, αἵτινες ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον, τέμνονται.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι κεῖνται στρεβλῶς πρὸς ἀλλήλας, ὑπάρχει μία εὐθεῖα, ἥτις διέρχεται διὰ σημείου, ἐκτὸς τῶν εὐθειῶν κειμένου, καὶ τέμνει ταύτας.

Πράγματι, ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶνε τομὴ τῶν ἐπιπέδων, ἅτινα προβάλλουν τὰς δοθείσας εὐθείας ἀπὸ τοῦ σημείου.

Δύο εὐθεῖαι, κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου τέμνονται.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι κεῖνται στρεβλῶς πρὸς ἀλλήλας, ὑπάρχει μία εὐθεῖα, κειμένη ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον δὲν διέρχεται διά τινος τῶν εὐθειῶν, ἥτις τέμνει τὰς δοθείσας.

Πράγματι, ἡ εὐθεῖα αὕτη συνδέει τὰ δύο σημεῖα καθ' ἃ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον τέμνεται ὑπὸ τῶν εὐθειῶν.

Ἐὰν δοθοῦν δύο εὐθεῖαι, κείμεναι στρεβλῶς πρὸς ἀλλήλας, ἓν σημεῖον τῆς μιᾶς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κέντρον ἐπιπέδου δέσμης ἀκτίνων, τεμνουσῶν τὰς δύο εὐθείας.

Πράγματι, πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι, αἱ διερχόμεναι διά τινος σημείου τῆς μιᾶς τῶν εὐθειῶν, τέμνουν τὴν εὐθεῖαν ταύτην· ἐκ τούτων ἐκεῖναι αἵτινες τέμνουν τὴν ἄλλην εὐθεῖαν κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῆς ἄλλης εὐθείας καὶ τοῦ σημείου.

Ἐὰν δοθοῦν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι, ὑπάρχει μία εὐθεῖα, διερχομένη διὰ ἑνὸς σημείου, μὴ κειμένου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν δύο εὐθειῶν, ἥτις τέμνει τὰς δοθείσας.

Αὕτη εἶνε ἡ εὐθεῖα, ἥτις προβάλλει ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τὴν τομὴν τῶν εὐθειῶν.

Ἐὰν δοθοῦν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι, ἓν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν, μὴ κοινὸν τούτων, εἶνε τὸ κέντρον ἐπιπέδου δέσμης ἀκτίνων, αἵτινες τέμνουν τὰς δύο εὐθείας, καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν εἶνε τὸ κέντρον μιᾶς κεντρικῆς δέσμης, τῆς ὁποίας αἱ ἀκτῖνες τέμνουν τὰς δοθείσας εὐθείας.

Ἐὰν περισσότεραι τῶν δύο εὐθειῶν τέμνωνται ἀνὰ δύο, χωρὶς νὰ διέρχωνται πᾶσαι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι α, β, γ....., αἵτινες τέμνονται ἀνὰ

Ἐὰν δοθοῦν δύο εὐθεῖαι, κείμεναι στρεβλῶς πρὸς ἀλλήλας, ὑπάρχει μία δέσμη ἀκτίνων, κειμένων ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῆς μιᾶς τούτων, αἵτινες τέμνουν αὐτάς.

Πράγματι, πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι, αἱ κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ μετὰ τῆς μιᾶς τῶν εὐθειῶν, τέμνουν τὴν εὐθεῖαν ταύτην· ἐκ τούτων αἱ τέμνουσαι τὴν ἄλλην εὐθεῖαν διέρχονται διὰ τῆς τομῆς τοῦ ἐπιπέδου καὶ τῆς ἄλλης εὐθείας.

Ἐὰν δοθοῦν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι, ὑπάρχει μία εὐθεῖα, κειμένη ἐπὶ ἐπιπέδου, ἐφ' οὗ δὲν κεῖται τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν, ἥτις τέμνει τὰς δοθείσας.

Αὕτη εἶνε ἡ εὐθεῖα, καθ' ἣν τὸ δοθὲν ἐπίπεδον τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τῶν δύο εὐθειῶν.

Ἐὰν δοθοῦν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι, ὑπάρχει ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου, διερχομένου διὰ τῆς τομῆς αὐτῶν καὶ μὴ περιέχοντος ταύτας, μία δέσμη ἐπίπεδος, τῆς ὁποίας αἱ ἀκτῖνες τέμνουν τὰς δύο εὐθείας, τὸ δὲ ἐπίπεδον τῶν δύο εὐθειῶν εἶνε φορεὺς ἑνὸς συστήματος εὐθειῶν, τεμνουσῶν τὰς δοθείσας.

Ἐὰν περισσότεραι τῶν δύο εὐθειῶν τέμνωνται ἀνὰ δύο, χωρὶς νὰ κεῖνται πᾶσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, διέρχονται πᾶσαι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι α, β, γ, ... αἵτινες τέμνονται ἀνὰ δύο, χωρὶς νὰ διέρχωνται πᾶσαι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Τοὐλάχιστον μία ἐξ αὐτῶν, ἔστω ἡ γ, δὲν διέρχεται διὰ τῆς τομῆς (αβ) τῆς α καὶ β, τέμνει δὲ ταύτας εἰς δύο διάφορα ἀλλήλων καὶ τοῦ (αβ) σημεῖα, ἔστω τὰ (αγ) καὶ (βγ). Ἑπομένως ἡ εὐθεῖα γ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν α καὶ β.

Πᾶσα ἄλλη εὐθεῖα τέμνουσα τὰς α, β, γ, ἔστω ἡ δ, δὲν διέρχεται συγχρόνως διὰ τῶν σημείων (αβ), (αγ) καὶ (βγ). Ἐὰν π. χ. δὲν διέρχεται διὰ τοῦ σημείου (αγ, πρέπει νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν α καὶ γ, ἤτοι καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν α καὶ β. Ἄρα πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

δύο χωρὶς νὰ κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ.

Τοὐλάχιστον μία ἐξ αὐτῶν, π. χ. ἡ γ δὲν κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, τῷ ὁριζομένῳ ὑπὸ τῶν α καὶ β, ἀλλὰ κεῖται μεθ' ἑκάστης τῶν α καὶ β εἰς δύο διάφορα ἐπίπεδα τὰ (γα) $\equiv$ **a**, (γβ) $\equiv$ **b**.

Ἑπομένως ἡ γ διέρχεται διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν δύο εὐθειῶν α καὶ β, τοῦ (αβ) $\equiv$ Ο. Πᾶσα ἄλλη εὐθεῖα, τέμνουσα τὰς α, β, γ, ἔστω ἡ δ, δὲν κεῖται συγχρόνως ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν α καὶ β καὶ τῶν **a** καὶ **b**. Ἐὰν π. χ. δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου **a**, θὰ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου (αγ) ἢ διὰ τοῦ σημείου (αβ). Ἄρα πᾶσαι αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι διέρχονται διὰ τοῦ σημείου Ο.

Ἐὰν περισσότεραι τῶν δύο εὐθειῶν τέμνωνται ἀνὰ δύο, ὑπάρχει ἀκόμη μία περίπτωσις ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω, καθ' ἣν αὗται κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καὶ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ἑπομένως ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν,

«*ἐὰν περισσότεραι τῶν δύο εὐθειῶν τέμνωνται ἀνὰ δύο, ἀνήκουν εἰς ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν γεωμετρικὸν σχηματισμὸν δευτέρας βαθμῖδος (εἰς μίαν κεντρικὴν δέσμην ἢ εἰς ἓν πεδίον) καὶ ἀνήκουν τότε μόνον εἰς δύο γεωμετρικοὺς σχηματισμοὺς δευτέρας βαθμῖδος (εἰς μίαν κεντρικὴν δέμσην καὶ εἰς ἓν πεδίον), ἐὰν ἀνήκουν εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ἐπίπεδον δέσμην.*

§ 12 Ἡ ἀρχὴ τοῦ δυασμοῦ διὰ γεωμετρικοὺς σχηματισμοὺς δευτέρας βαθμῖδος.

Ἐν τῷ πεδίῳ θεωροῦντες ὡς ἐναλλακτὰ στοιχεῖα τὸ σημεῖον καὶ τὴν εὐθεῖαν, τὴν σημειοσειρὰν καὶ τὴν ἐπίπεδον δέσμην ἀκτίνων, ἔχομεν τὰς ἑξῆς διδύμους προτάσεις.

Τρικόρυφον.

Τρία σημεῖα, μὴ κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ὁρίζουν ἓν *τρικόρυφον*, δηλαδὴ τὸ σχῆμα τὸ ἀποτελούμενον ἐκ τῶν τριῶν σημείων *(κορυφῶν)* καὶ ἐκ τῶν τριῶν εὐθειῶν *(πλευρῶν)*, αἵτινες συνδέουν τὰ σημεῖα, ἀνὰ δύο λαμβανόμενα.

Τρίπλευρον.

Τρεῖς εὐθεῖαι, μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ὁρίζουν ἓν *τρίπλευρον*, δηλαδὴ τὸ σχῆμα τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἐκ τῶν τριῶν εὐθειῶν *(πλευρῶν)* καὶ ἐκ τῶν τριῶν σημείων *(κορυφῶν)* καθ' ἃ τέμνονται αἱ εὐθεῖαι, ἀνὰ δύο λαμβανόμεναι.

Τὰ σχήματα *τρικόρυφον* καὶ *τρίπλευρον* εἶνε τὰ αὐτά, ὁριζόμενα μόνον κατὰ διαφόρους τρόπους.

Τετρακόρυφον.

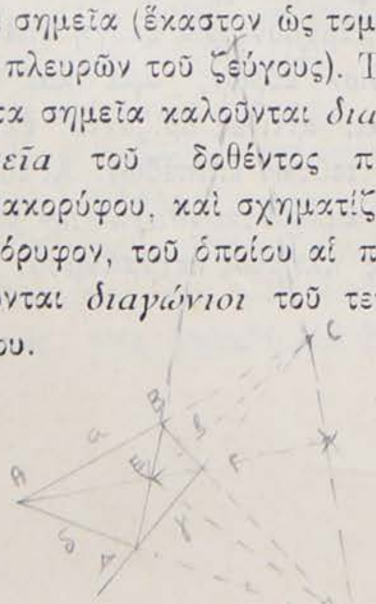
Τέσσαρα σημεῖα, ἀνὰ τρία τῶν ὁποίων δὲν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ὁρίζουν ἓν *πλῆρες (ἐπίπεδον) τετρακόρυφον*, δηλαδὴ τὸ σχῆμα τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἐκ τῶν τεσσάρων σημείων *(κορυφῶν)* καὶ ἐκ τῶν ἓξ εὐθειῶν *(πλευρῶν)*, αἵτινες συνδέουν τὰ σημεῖα, ἀνὰ δύο λαμβανόμενα.

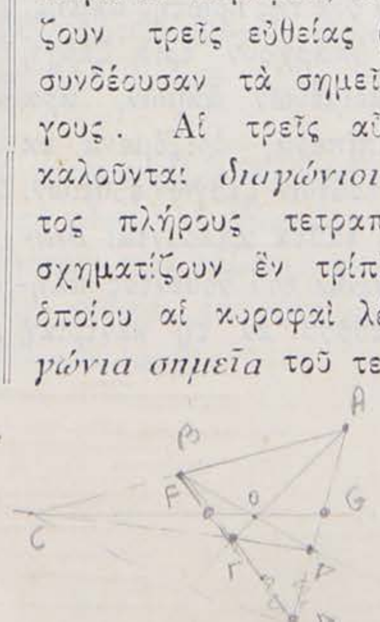
Δι' ἑκάστου σημείου διέρχονται τρεῖς πλευραὶ τοῦ τετρακορύφου· ἀπέναντι ἑκάστης πλευρᾶς κεῖται μία πλευρά, ἥτις ὁρίζεται ἐκ τῶν δύο κορυφῶν τῶν κειμένων ἐκτὸς τῆς πρώτης πλευρᾶς. Ἑπομένως ὑπάρχουν τρία ζεύγη ἀπέναντι κειμένων πλευρῶν, αἵτινες ὁρίζουν τρία σημεῖα (ἕκαστον ὡς τομὴν τῶν δύο πλευρῶν τοῦ ζεύγους). Τὰ τρία ταῦτα σημεῖα καλοῦνται *διαγώνια σημεῖα* τοῦ δοθέντος πλήρους τετρακορύφου, καὶ σχηματίζουν ἓν τρικόρυφον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ λέγονται *διαγώνιοι* τοῦ τετρακορύφου.

Τετράπλευρον.

Τέσσαρες εὐθεῖαι, ἀνὰ τρεῖς τῶν ὁποίων δὲν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ὁρίζουν ἓν πλῆρες *τετράπλευρον*, δηλαδὴ τὸ σχῆμα τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἐκ τῶν τεσσάρων εὐθειῶν *(πλευρῶν)* καὶ ἐκ τῶν ἓξ σημείων *(κορυφῶν)*, καθ' ἃ τέμνονται αἱ εὐθεῖαι, ἀνὰ δύο λαμβανόμεναι.

Ἐπὶ ἑκάστης πλευρᾶς κεῖνται τρεῖς κορυφαὶ τοῦ τετραπλεύρου· ἀπέναντι ἑκάστης κορυφῆς κεῖται μία κορυφή, ἥτις ὁρίζεται ἐκ τῶν δύο πλευρῶν, τῶν μὴ διερχομένων διὰ τῆς πρώτης κορυφῆς. Ἑπομένως ὑπάρχουν τρία ζεύγη ἀπέναντι κειμένων κορυφῶν, αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν τρεῖς εὐθείας (ἑκάστην ὡς συνδέουσαν τὰ σημεῖα ἑνὸς ζεύγους. Αἱ τρεῖς αὗται εὐθεῖαι καλοῦνται *διαγώνιοι* τοῦ δοθέντος πλήρους τετραπλεύρου, καὶ σχηματίζουν ἓν τρίπλευρον, ιοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ λέγονται *διαγώνια σημεῖα* τοῦ τετραπλεύρου.





Ἐν κεντρικῇ δέσμῃ θεωροῦντες ὡς ἐναλλακτὰ στοιχεῖα *τὴν εὐθεῖαν καὶ τὸ ἐπίπεδον, τὴν δέσμην ἀκτίνων καὶ τὴν δέσμην ἐπιπέδων*, ἔχομεν τὰς ἑξῆς διδύμους προτάσεις.

Τρίεδρον.

Τρία ἐπίπεδα, μὴ διερχόμενα διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ὁρίζουν ἓν *τρίεδρον*, δηλαδὴ τὸ σχῆμα τὸ ἀποτελούμενον ἐκ τῶν τριῶν ἐπιπέδων *(ἑδρῶν)* καὶ ἐκ τῶν τριῶν εὐθειῶν *(ἀκμῶν)*, καθ᾽ ἃς τέμνονται τὰ ἐπίπεδα, ἀνὰ δύο λαμβανόμενα.

Τρίακμον.

Τρεῖς εὐθεῖαι, μὴ κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ὁρίζουν ἓν *τρίακμον*, δηλαδὴ τὸ σχῆμα τὸ ἀποτελούμενον ἐκ τῶν τριῶν εὐθειῶν *(ἀκμῶν)* καὶ ἐκ τῶν τριῶν ἐπιπέδων *(ἑδρῶν)*, τὰ ὁποῖα ὁρίζουν αἱ εὐθεῖαι, ἀνὰ δύο λαμβανόμεναι.

Τὸ τρίεδρον καὶ τρίακμον εἶνε τὰ αὐτὰ σχήματα, ὁριζόμενα κατὰ διαφόρους τρόπους.

Τετράεδρον.

Τέσσαρα ἐπίπεδα, ἀνὰ τρία τῶν ὁποίων δὲν διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ὁρίζουν ἓν *πλῆρες τετράεδρον* ἐν κεντρικῇ δέσμῃ, δηλαδὴ τὸ σχῆμα τὸ σχηματιζόμενον ἐκ τῶν τεσσάρων ἐπιπέδων *(ἑδρῶν)* καὶ ἐκ τῶν ἓξ εὐθειῶν *(ἀκμῶν)*, καθ᾽ ἃς τέμνονται τὰ ἐπίπεδα, ἀνὰ δύο λαμβανόμενα.

$\frac{4\cdot 3}{2}=6$

Ἐπὶ ἑκάστου ἐπιπέδου κεῖνται τρεῖς ἀκμαί· ἀπέναντι ἑκάστης ἀκμῆς κεῖται μία ἀκμή, ἥτις ὁρίζεται ἐκ τῶν δύο ἑδρῶν, τῶν μὴ διερχομένων διὰ τῆς πρώτης ἀκμῆς. Ἑπομένως ὑπάρχουν τρία ζεύγη ἀπέναντι κειμένων ἀκμῶν, ἄρα καὶ τρία ἐπίπεδα, ὁριζόμενα ἐκ τῶν τριῶν τούτων ζευγῶν εὐθειῶν. Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα καλοῦνται *διαγώνια ἐπίπεδα* τοῦ δοθέντος πλήρους τετραέδρου ἐν τῇ κεντρικῇ δέσμῃ.

Τετράακμον.

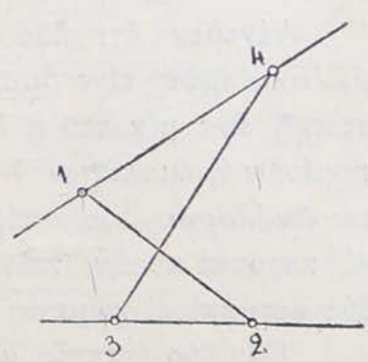
Τέσσαρες εὐθεῖαι, ἀνὰ τρεῖς τῶν ὁποίων δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ὁρίζουν ἓν *πλῆρες τετράακμον*, δηλαδὴ τὸ σχῆμα τὸ σχηματιζόμενον ἐκ τῶν τεσσάρων εὐθειῶν *(ἀκμῶν)* καὶ ἐκ τῶν ἓξ ἐπιπέδων *(ἑδρῶν)*, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ὑπὸ τῶν εὐθειῶν, ἀνὰ δύο λαμβανομένων.

Δι᾽ ἑκάστης εὐθείας διέρχονται τρεῖς ἕδραι· ἀπέναντι ἑκάστης ἕδρας κεῖται μία ἕδρα, ἥτις ὁρίζεται ἐκ τῶν δύο ἀκμῶν, τῶν μὴ κειμένων ἐπὶ τῆς πρώτης ἕδρας. Ἑπομένως ὑπάρχουν τρία ζεύγη ἀπέναντι κειμένων ἑδρῶν, ἄρα καὶ τρεῖς εὐθεῖαι, αἵτινες ὁρίζονται ἐκ τῶν τριῶν τούτων ἐπιπέδων. Αἱ εὐθεῖαι αὗται καλοῦνται *διαγώνιοι* τοῦ δοθέντος πλήρους τετραάκμου.

Παρατηρητέον ὅτι αἱ ἀνωτέρω προτάσεις, αἱ ἀναγροφόμεναι ἐν τῇ ἀριστερᾷ στήλῃ ἀφ' ἑνὸς καὶ ἐν τῇ δεξιᾷ ἀφ' ἑτέρου, εἶνε ἀνὰ δύο ἀντίστοιχοι διὰ τὸ ἐπίπεδον καὶ τὴν κεντρικὴν δέσμην· ἐπὶ πλέον, αἱ ἀναφερόμεναι εἰς τὸ ἐπίπεδον καὶ κείμεναι εἰς τὴν ἀριστερὰν (ἢ τὴν δεξιὰν) στήλην ἔχουν τὰς ἀντιστοίχους αὐτῶν ἀναφερομένας εἰς τὴν κεντρικὴν δέσμην καὶ κειμένας εἰς τὴν δεξιὰν (ἢ εἰς τὴν ἀριστερὰν) στήλην, δυνάμεθα δὲ ἐκ τῶν πρώτων νὰ εὕρωμεν τὰς ἀντιστοίχους αὐτῶν τῶν δευτέρων, διὰ τῆς προβολῆς τοῦ ἐπιπέδου ἢ διὰ τῆς τομῆς τῆς κεντρικῆς δέσμης.

§ 13. Ἁπλοῦν καὶ πλῆρες ν-κόρυφον, ν-πλευρον κλπ.

Τέσσαρα σημεῖα 1, 2, 3, 4, ἑνὸς ἐπιπέδου τῶν ὁποίων ἡ σειρὰ (1234) εἶνε ὡρισμένη, καὶ ἀνὰ τρία διαδοχικὰ δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ὁρίζουν ἓν *ἁπλοῦν ἐπίπεδον τετρακόρυφον*, δηλαδὴ τὸ σχῆμα τὸ σχηματιζόμενον ἐκ τῶν τεσσάρων σημείων *(κορυφῶν)* καὶ ἐκ τῶν τεσσάρων εὐθειῶν *(πλευρῶν)*, αἵτινες συνδέουν ἀνὰ δύο διαδοχικὰ σημεῖα (12, 23, 34, 41). Ὑπάρχουν δύο ζεύγη ἀπέναντι κειμένων κορυφῶν, μὴ κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς (1 καὶ 3, καὶ 2 καὶ 4), ὁρίζουν δ' αὗται δύο εὐθείας, αἵτινες καλοῦνται *διαγώνιοι* τοῦ ἁπλοῦ τετρακορύφου. Αἱ τέσσαρες πλευραὶ καὶ αἱ δύο διαγώνιοι ἑνὸς ἁπλοῦ τετρακορύφου εἶνε αἱ ἓξ πλευραὶ τοῦ πλήρους τετρακορύφου, τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῶν τεσσάρων σημείων, ἐὰν ἀνὰ τρία ἐξ αὐτῶν δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.



$\Delta_4^4 = 24$

Τέσσαρα σημεῖα 1, 2, 3, 4, δύνανται νὰ διαταχθοῦν μεταξύ των κατὰ 24 τρόπους, ἀντιστοιχοῦντας εἰς τὰς 24 μεταθέσεις τῶν τεσσάρων ἀντικειμένων, ἀλλὰ τέσσαρες μεταθέσεις (καθὼς αἱ 1234, 2341, 3412, 4123) καὶ αἱ ἀντίστροφοι τούτων δίδουν τὸ αὐτὸ ἁπλοῦν τετρακόρυφον. Ἑπομένως ὑπάρχουν $24 : 8 = 3$ ἁπλᾶ τετρακόρυφα, ἔχοντα τὰς αὐτὰς κορυφάς.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον πρὸς τὰ προηγούμενα δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν *τὸ πλῆρες ν-κόρυφον* καὶ *τὸ ἁπλοῦν ἐπίπεδον ν-κόρυφον*. Τὸ τελευταῖον τοῦτο ὁρίζεται διὰ ν σημείων, τῶν ὁποίων ἡ σειρὰ εἶνε ὡρισμένη, καὶ ἀνὰ τρία διαδοχικὰ δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ἔχει δὲ ν πλευράς, εἶνε δηλαδὴ καὶ ἓν ἁπλοῦν ν-πλευρον.

Ἀντιστοίχως πρὸς ταῦτα ἔχομεν τὰ ἑξῆς σχήματα. Ἐν μὲν τῷ ἐπιπέδῳ *τὸ πλῆρες καὶ τὸ ἁπλοῦν ν-πλευρον*, ἐν δὲ τῇ κεντρικῇ δέσμῃ *τὸ πλῆρες καὶ τὸ ἁπλοῦν ν-εδρον*, καὶ *τὸ πλῆρες καὶ τὸ ἁπλοῦν ν-ακμον* (τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶνε τὸ κέντρον τῆς δέσμης).

Παρατήρησις. Τὸ ἐν κεντρικῇ δέσμῃ πολύεδρον ἢ πολύακμον (ν-εδρον, ν-ακμον), εἴτε πλῆρες εἴτε ἁπλοῦν εἶνε, θεωρεῖται ἐνταῦθα διάφορον τοῦ ἐν τῇ στοιχειώδει Γεωμετρίᾳ θεωρουμένου.

Ἐνῷ ἐν τῇ στοιχειώδει Γεωμετρίᾳ φανταζόμεθα ὅτι αἱ ἕδραι καὶ αἱ ἀκμαὶ αὐτοῦ περατοῦνται εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ σχήματος, θεωροῦνται ἐνταῦθα ἐκτεινόμεναι εἰς ἄπειρον.

Παρατηρητέον ὅτι, «*δύο πολύεδρα ἐν κεντρικῇ δέσμῃ εἶνε ἴσα, ἐὰν αἱ ἕδραι αὐτῶν καὶ αἱ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζόμεναι γωνίαι εἶνε ἴσαι*», τὸ ὁποῖον δὲν ἀληθεύει πάντοτε προκειμένου περὶ τῶν σχημάτων τούτων ἐν τῇ στοιχειώδει Γεωμετρίᾳ θεωρουμένων· διότι δυνατὸν νὰ συμβῇ, ὥστε δύο οὕτω σχηματιζόμεναι πολύεδροι στερεαὶ γωνίαι νὰ μὴ εἶνε ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, ἀλλ' ἑκάστη νὰ εἶνε ἴση πρὸς τὴν συμμετρικὴν τῆς ἄλλης.

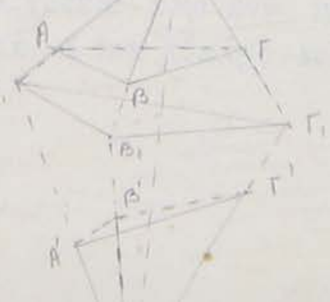
§ 14. Συσχέτισις ν-κορύφων, ν-πλεύρων, καὶ ν-έδρων, ν-άκμων πρὸς ἄλληλα.

Λέγομεν ὅτι δύο ἐπίπεδα ν-κόρυφα εἶνε *συσχετισμένα πρὸς ἄλληλα* ἢ ὅτι εἶνε *ὁμόλογα*, ἐὰν εἰς ἀνὰ μίαν κορυφὴν τοῦ ἑνὸς ἀντιστοιχῇ ἀνὰ μία τοῦ ἄλλου, καὶ ἀντιστρόφως. Δύο κορυφαὶ δύο συσχετισμένων ἢ ὁμολόγων ν-κορύφων, ἀντιστοιχοῦσαι πρὸς ἀλλήλας, λέγονται *ὁμόλογοι*. Δύο ν-κόρυφα π. χ. εἶνε συσχετισμένα πρὸς ἄλληλα, ἐὰν αἱ κορυφαὶ αὐτῶν κεῖνται ἐπὶ τῶν ἀκμῶν τοῦ αὐτοῦ ν-άκμου, ὅτε αἱ δύο κορυφαὶ αἱ κείμεναι ἐπὶ μιᾶς ἀκμῆς εἶνε ὁμόλογοι.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα ν-κόρυφα εἶνε συσχετισμένα πρὸς ἄλληλα ἢ ὁμόλογα, θὰ εἶνε συσχετισμέναι ὡς ὁμόλογοι καὶ αἱ πλευραὶ αὐτῶν, αἵτινες ὁρίζονται ἐκ ζευγῶν ἀντιστοιχουσῶν κορυφῶν αὐτῶν.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ὁρίζομεν τὴν συσχέτισιν τῶν ν-πλεύρων, καὶ τῶν ν-άκμων καὶ ν-έδρων ἐν κεντρικῇ δέσμῃ, καθὼς καὶ τῶν ν-κορύφων καὶ ν-έδρων ἐν τῷ χώρῳ τῶν τριῶν διαστάσεων.

Δύο τρικόρυφα δυνάμεθα νὰ συσχετίσωμεν πρὸς ἄλληλα κατὰ ἓξ τρόπους, καὶ ἐν γένει δύο ν-κόρυφα συσχετίζονται μεταξύ των κατὰ 1.2.3.... ν τρόπους.



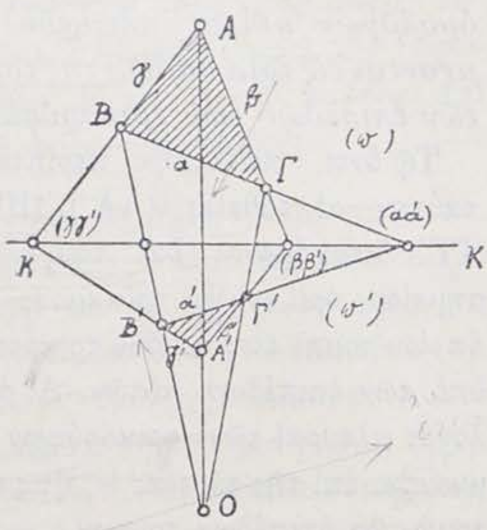
§ 15. Θεώρημα τοῦ Desargues*.

«Ἐὰν δύο τρίπλευρα, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν κοινὸν στοιχεῖον (πλευρὰν ἢ κορυφὴν) καὶ κεῖνται ἐπὶ διαφόρων ἐπιπέδων, εἶνε οὕτω συσχετισμένα μεταξύ των, ὥστε αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ αὐτῶν νὰ τέμνωνται (ὁρίζουσαι οὕτω τρία σημεῖα τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων των), αἱ εὐθεῖαι, αἵτινες συνδέουν τὰς ὁμολόγους αὐτῶν κορυφὰς διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου».

Τῷ ὄντι, ἂν τὰ τρίπλευρα α β γ καὶ α′β′γ′ κεῖνται ἐπὶ τῶν διαφόρων ἐπιπέδων (π) καὶ (π′) καὶ εἶνε οὕτω συσχετισμένα, ὥστε αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ αὐτῶν α καὶ α′, αἱ β καὶ β′, καὶ αἱ γ καὶ γ′ νὰ τέμνωνται ἐπὶ τῆς εὐθείας k τῶν (π) καὶ (π′), αἱ εὐθεῖαι, αἵτινες συνδέουν τὰς ὁμολόγους κορυφὰς Α καὶ Α′, Β καὶ Β′, Γ καὶ Γ′ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Διότι αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ α καὶ α′, β καὶ β′, γ καὶ γ′, τεμνόμεναι ἀνὰ δύο κατὰ σειράν, ὁρίζουν τὰ τρία ἐπίπεδα ἑνὸς τριέδρου, τοῦ ὁποίου τομαὶ εἶνε τὰ δύο τρίπλευρα. Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα τέμνονται, ἔστω εἰς τὸ σημεῖον Ο, εἶνε δὲ τοῦτο ἡ κορυφὴ τοῦ τριέδρου, καὶ διέρχονται δι᾽ αὐτοῦ αἱ ἀκμαὶ τούτου· ἤτοι αἱ εὐθεῖαι (ΑΑ′), (ΒΒ′), (ΓΓ′) τέμνονται εἰς τὸ Ο.

«Ἐὰν δύο τρίακμα, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν κοινὸν στοιχεῖον (ἀκμὴν ἢ ἕδραν) καὶ κεῖνται ἐπὶ διαφόρων κεντρικῶν δεσμῶν, εἶνε οὕτω συσχετισμένα μεταξύ των, ὥστε αἱ ὁμόλογοι ἀκμαὶ αὐτῶν νὰ τέμνωνται (ὁρίζουσαι οὕτω τρία ἐπίπεδα διερχόμενα διὰ τῆς εὐθείας τῶν κορυφῶν των), αἱ τομαὶ τῶν ὁμολόγων ἑδρῶν αὐτῶν κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου».

Πράγματι, τὰ τρία ζεύγη τῶν ὁμολόγων καὶ τεμνομένων ἀκμῶν



ὁρίζουν τὰς τρεῖς κορυφὰς ἑνὸς τρικορύφου, τοῦ ὁποίου τὰ δύο τρίακμα εἶνε τὰ προβάλλοντα σχήματα· αἱ τομαὶ τῶν ὁμολόγων ἑδρῶν τούτων εἶνε αἱ πλευραὶ τοῦ τρικορύφου.

(*) Ὁ Desargues ἐγεννήθη ἐν Lyon τὸ 1593 καὶ ἀπέθανε τὸ 1662, τὸ δὲ θεώρημα αὐτοῦ ἔλαβεν ὁ Poncelet ὡς βάσιν τῆς θεωρίας αὐτοῦ τῶν ὁμολόγων σχημάτων.

Ἡ ἀπόδειξις δὲν ἰσχύει, ἂν μία πλευρὰ ἑνὸς τῶν τριπλεύρων κεῖται ἐπὶ τῆς τομῆς τῶν δύο ἐπιπέδων τῶν τριπλεύρων, ἂν καὶ ἡ πρότασις προφανῶς ἰσχύει.

Ἡ ἀπόδειξις δὲν ἰσχύει, ἐὰν μία ἀκμὴ ἑνὸς τῶν τριάκμων κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς συνδεούσης τὰς δύο κορυφὰς τῶν τριάκμων, ἂν καὶ ἡ πρότασις προφανῶς ἰσχύει.

Ἀντιστρόφως.

«Ἐὰν δύο τρικόρυφα, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν κοινὸν στοιχεῖον (κορυφὴν ἢ πλευρὰν) καὶ κεῖνται ἐπὶ διαφόρων ἐπιπέδων, εἶνε οὕτω συσχετισμένα μεταξύ των, ὥστε αἱ εὐθεῖαι αἵτινες συνδέουν τὰς ὁμολόγους αὐτῶν κορυφὰς νὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὰ ζεύγη τῶν ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν τέμνονται εἰς τρία σημεῖα τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων τῶν τρικορύφων».

Τῷ ὄντι, κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην αἱ εὐθεῖαι (AA′), (BB′), (ΓΓ′) διερχόμεναι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ὁρίζουν ἓν τρίακμον, τοῦ ὁποίου τομαὶ εἶνε τὰ δύο τρικόρυφα ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν. Αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν τρικορύφων τέμνονται ἐπὶ τῆς εὐθείας k, ἥτις εἶνε τομὴ τῶν ἐπιπέδων τούτων.

Ἡ ἀπόδειξις δὲν ἰσχύει, ἐνῷ ἀληθεύει ἡ πρότασις, ὅταν τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν, αἵτινες συνδέουν τὰς ὁμολόγους κορυφὰς τῶν τρικορύφων συμπίπτῃ μὲ μίαν τῶν κορυφῶν.

Δύο τρικόρυφα (ἢ τρίπλευρα), ἔχοντα τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα, ἂν εἶνε δηλαδὴ τομαὶ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ τριάκμου (ἢ τριέδρου), λέ-

«Ἐὰν δύο τρίεδρα, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν κοινὸν στοιχεῖον (ἕδραν ἢ ἀκμὴν) καὶ κεῖνται ἐπὶ διαφόρων κεντρικῶν δεσμῶν, εἶνε οὕτω συσχετισμένα μεταξύ των, ὥστε αἱ τομαὶ τῶν ὁμολόγων αὐτῶν ἑδρῶν νὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, αἱ ὁμόλογοι ἀκμαὶ αὐτῶν τέμνονται καὶ ὁρίζουν τρία ἐπίπεδα, διερχόμενα διὰ τῆς εὐθείας τῶν κορυφῶν τῶν τριέδρων».

Πράγματι, ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὰ δύο τρίεδρα εἶνε προβάλλοντα σχήματα τοῦ τριπλεύρου, τὸ ὁποῖον ὁρίζουν αἱ τομαὶ τῶν ὁμολόγων ἑδρῶν τῶν τριέδρων.

Ἡ ἀπόδειξις δὲν ἰσχύει, ἐνῷ ἀληθεύει ἡ πρότασις, ὅταν τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν τομῶν τῶν ὁμολόγων ἑδρῶν τῶν τριέδρων συμπίπτῃ μὲ μίαν τῶν ἑδρῶν.

Δύο τρίεδρα (ἢ τρίακμα), ἔχοντα τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα, ἂν εἶνε δηλαδὴ προβάλλοντα σχήματα ἢ ὄψεις ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ τριπλεύρου (ἢ γονται *προοπτικά* ἢ ὅτι *ἔχουν προοπτικὴν θέσιν πρὸς ἄλληλα*, καλοῦνται δὲ καὶ *ὁμόλογα*.

τρικορύφου), λέγονται *προοπτικὰ* ἢ ὅτι *ἔχουν προοπτικὴν θέσιν πρὸς ἄλληλα*, καλοῦνται δὲ καὶ *ὁμόλογα*.

Αἱ κατωτέρω προτάσεις ἀποδεικνύονται τῇ βοηθείᾳ τῶν προηγουμένων καὶ εἶνε δίδυμοι ἐν τῷ χώρῳ τῶν τριῶν διαστάσεων, προκύπτουσαι ἡ μία ἐκ τῆς ἄλλης δι' ἐναλλαγῆς τῶν στοιχείων σημείου καὶ ἐπιπέδου.

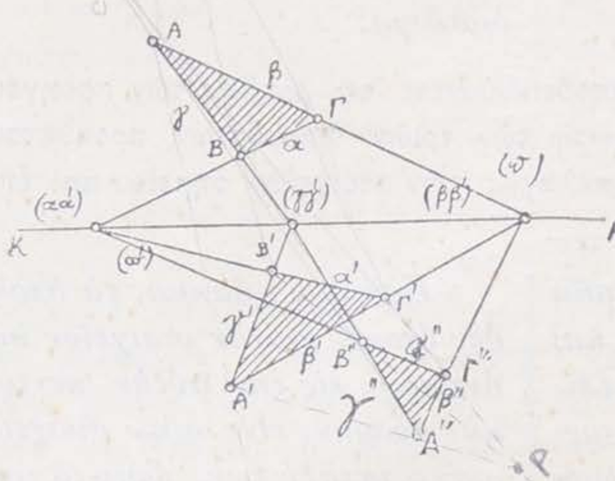
«*Ἐὰν δύο τρίπλευρα τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν κοινὸν στοιχεῖον καὶ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, εἶνε οὕτω συσχετισμένα μεταξύ των, ὥστε αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ αὐτῶν νὰ ὁρίζουν τρία σημεῖα, κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰς ὁμολόγους αὐτῶν κορυφὰς διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου*».

«*Ἐὰν δύο τρίακμα, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν κοινὸν στοιχεῖον καὶ ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν κεντρικὴν δέσμην, εἶνε οὕτω συσχετισμένα μεταξύ των, ὥστε τὰ τρία ζεύγη τῶν ὁμολόγων ἀκμῶν αὐτῶν νὰ ὁρίζουν τρία ἐπίπεδα, διερχόμενα διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας, αἱ τρεῖς τομαὶ τῶν ὁμολόγων ἑδρῶν αὐτῶν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου*».

Ἀποδεικνύομεν τὴν ἀνωτέρω ἀριστερὰ ἀναγραφομένην πρότασιν, ἐκ τῆς ἀποδείξεως δὲ ταύτης προκύπτει εὐκόλως καὶ ἡ τῆς ἀντιστοίχου πρὸς αὐτὴν δεξιὰ ἀναγραφομένης. Ἔστω ὅτι τὰ τρίπλευρα $\alpha\beta\gamma$ καὶ $\alpha'\beta'\gamma'$, μὴ ἔχοντα κοινὸν στοιχεῖον καὶ κείμενα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (π), εἶνε οὕτω συσχετισμένα μεταξύ των, ὥστε αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ αὐτῶν α καὶ α', β καὶ β', γ καὶ γ' νὰ τέμνωνται εἰς τὰ σημεῖα $(\alpha\alpha')$, $(\beta\beta')$, $(\gamma\gamma')$, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας k τοῦ ἐπιπέδου τούτων, ἥτις δὲν συμπίπτει μὲ πλευράν τινα τῶν τριπλεύρων οὔτε διέρχεται διά τινος τῶν κορυφῶν αὐτῶν (ἐπειδὴ τὰ τρίπλευρα δὲν ἔχουν κοινὸν στοιχεῖον).

Θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι (AA'), (BB'), $(\Gamma\Gamma')$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Διὰ τῆς εὐθείας k φέρομεν ἐπίπεδον (π') διάφορον τοῦ (π) καὶ προβάλλομεν τὸ τρίπλευρον $\alpha'\beta'\gamma'$ ἀπό τινος σημείου P, κειμένου ἐκτὸς τῶν (π) καὶ (π'), ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (π'). Οὕτω λαμβάνομεν ἓν τρίπλευρον $\alpha''\beta''\gamma''$ μὲ κορυφὰς A'', B'', Γ'', ἔχον προοπτικὴν θέσιν πρὸς τὸ $\alpha'\beta'\gamma'$. Τὰ ζεύγη τῶν πλευρῶν α καὶ α'', β καὶ β'', γ καὶ γ'' τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα $(\alpha\alpha')$, $(\beta\beta')$, $(\gamma\gamma')$ τῆς εὐθείας k, τομῆς τῶν (π) καὶ (π'). Ἑπομένως τὰ τρίπλευρα $\alpha\beta\gamma$ καὶ $\alpha''\beta''\gamma''$, μὴ ἔχοντα κοινὸν στοιχεῖον καὶ μὴ κείμενα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ εἶνε οὕτω συσχετισμένα μεταξύ των, ὥστε τὰ ζεύγη τῶν ὁμολόγων πλευρῶν α καὶ α′, β καὶ β′, γ καὶ γ′ νὰ τέμνωνται εἰς τὰ σημεῖα (αα′), (ββ′), (γγ′) τῆς εὐθείας k· ἄρα αἱ εὐθεῖαι (ΑΑ″), (ΒΒ″), (ΓΓ″) διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ἔστω τοῦ Ο′. Προβάλλομεν τώρα τὰ τρικόρυφα ΑΒΓ καὶ Α″Β″Γ″ ἀπὸ τοῦ σημείου Ρ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (π). Οὕτω ἔχομεν τὰ τρικόρυφα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ καὶ αἱ εὐθεῖαι (ΑΑ′), (ΒΒ′), (ΓΓ′), αἵτινες εἶνε προβολαὶ τῶν (ΑΑ″), (ΒΒ″), (ΓΓ″) διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο, τὸ ὁποῖον εἶνε προβολὴ τοῦ Ο′ ἐπὶ τοῦ (π) ἀπὸ τοῦ σημείου Ρ.



Κατ᾽ ἀνάλογον τρόπον ἀποδεικνύομεν καὶ τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«*Ἐὰν δύο τρικόρυφα, μὴ ἔχοντα κοινὸν στοιχεῖον καὶ κείμενα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, εἶνε οὕτω συσχετισμένα μεταξύ των, ὥστε αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰς ὁμολόγους κορυφὰς αὐτῶν νὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὰ ζεύγη τῶν ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν τέμνονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας*».

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προτάσεων περὶ τρικορύφων (καὶ τριπλεύρων) ἔχομεν τὴν ἑξῆς γενικωτέραν. «*Ὅταν δύο τρικόρυφα (ἢ τρίπλευρα), τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν κοινὸν στοιχεῖον καὶ κεῖνται ἢ καὶ μὴ ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου, εἶνε συσχετισμένα μεταξύ των, ἂν μὲν τὰ ζεύγη τῶν ὁμολόγων πλευρῶν αὐτῶν τέμνωνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰς ὁμολόγους αὐτῶν κορυφὰς διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου· ἂν δὲ αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰς ὁμολόγους αὐτῶν κορυφὰς διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, αἱ ὁμόλογοι πλευραί των τέμνονται εἰς τρία σημεῖα, κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας*».

Παρατήρησις. Ἐὰν δύο τρικόρυφα ἑνὸς ἐπιπέδου, μὴ ἔχοντα κοινὸν στοιχεῖον, εἶνε συσχετισμένα μεταξύ των καὶ τὰ ζεύγη τῶν ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν εἶνε παράλληλα, αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰς ὁμολόγους κορυφάς των τέμνονται εἰς σημεῖον καθ᾽ ὑπόστασιν ἢ εἶνε παράλληλοι.

Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰς ὁμολόγους κορυφὰς τῶν τρικορύφων εἶνε παράλληλοι, αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ αὐτῶν ἢ τέμνονται εἰς τρία σημεῖα καθ᾽ ὑπόστασιν, κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἢ δύο ἐκ τῶν ζευγῶν τούτων τέμνονται εἰς δύο καθ᾽ ὑπόστασιν σημεῖα, ἡ δὲ εὐθεῖα ἥτις συνδέει ταῦτα, εἶνε παράλληλος πρὸς τὸ τρίτον ζεῦγος τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, ἢ τὰ ζεύγη τῶν ὁμολόγων πλευρῶν εἶνε ζεύγη παραλλήλων εὐθειῶν.

Κατ᾽ ἀναλογίαν πρὸς τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν τὰ ἑξῆς ἐν τῇ κεντρικῇ δέσμῃ.

«Ὅταν δύο τρίεδρα (ἢ τρίακμα), τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν κοινὸν στοιχεῖον καὶ ἀνήκουν ἢ καὶ μὴ εἰς τὴν αὐτὴν κεντρικὴν δέσμην, εἶνε συσχετισμένα μεταξύ των, ἂν μὲν τὰ ζεύγη τῶν ὁμολόγων ἀκμῶν αὐτῶν κεῖνται ἐπὶ τριῶν ἐπιπέδων, διερχομένων διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας αἱ τομαὶ τῶν ὁμολόγων ἑδρῶν αὐτῶν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· ἂν δὲ αἱ τομαὶ τῶν ὁμολόγων ἑδρῶν αὐτῶν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τὰ ζεύγη τῶν ὁμολόγων ἀκμῶν αὐτῶν κεῖνται ἐπὶ τριῶν ἐπιπέδων, διερχομένων διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας».

§ 16. Περὶ τῶν ὁμολόγων τετρακορύφων καὶ τετραπλεύρων.

Ἐν τῷ χώρῳ τῶν τριῶν διαστάσεων ἔχομεν τὰς ἑξῆς διδύμους προτάσεις.

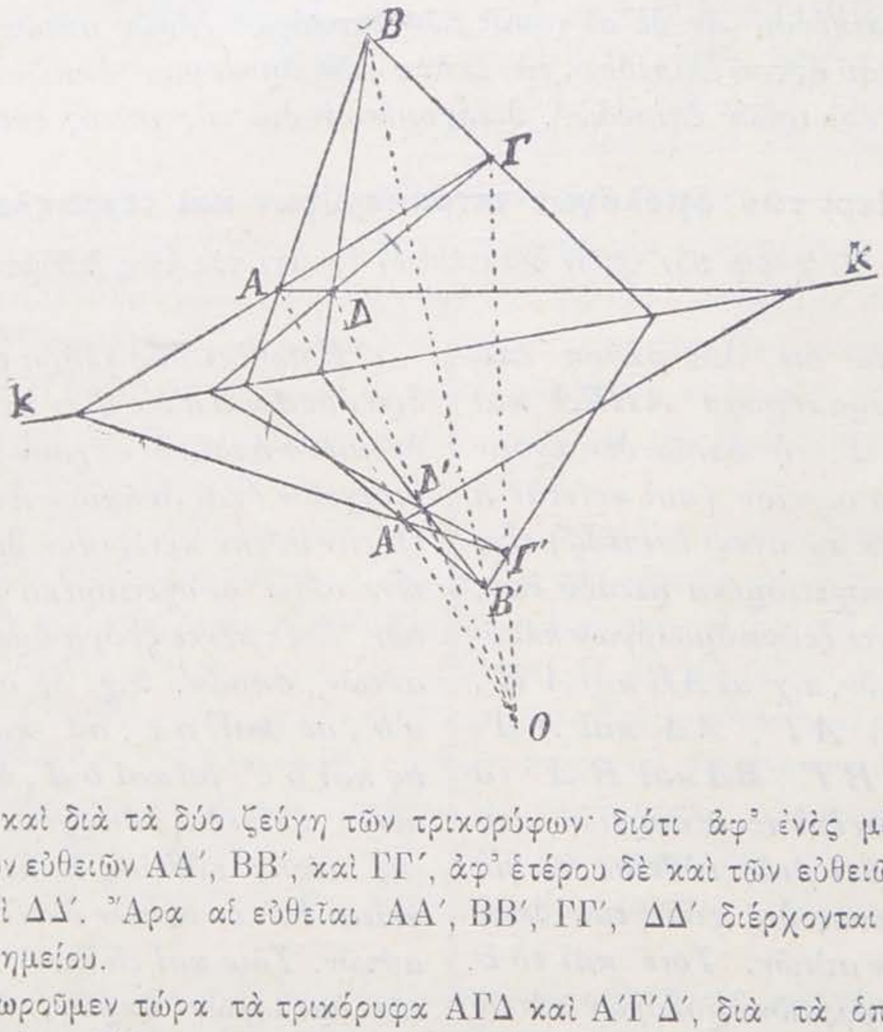
«Ἔστω ὅτι δύο πλήρη ἐπίπεδα τετρακόρυφα ΑΒΓΔ καὶ Α'Β'Γ'Δ', τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν κοινὸν στοιχεῖον (καὶ κεῖνται ἢ καὶ μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ) εἶνε οὕτω συσχετισμένα μεταξύ των, ὥστε πέντε ζεύγη ὁμολόγων πλευρῶν αὐτῶν, π.χ. αἱ ΑΒ καὶ Α'Β', ΑΓ καὶ Α'Γ', ΑΔ καὶ Α'Δ', ΒΓ καὶ Β'Γ', ΒΔ καὶ Β'Δ νὰ τέμνωνται ἐπὶ πέντε σημείων, κειμένων ἐπὶ μιᾶς εὐθείας k, μὴ διερχομένης διά τινος τῶν ὀκτὼ κορυφῶν αὐτῶν. Τότε καὶ τὸ ἕκτον ζεῦγος τῶν ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν, ἤτο αἱ ΓΔ καὶ Γ'Δ' τέμνονται ἐπὶ τῆς εὐθείας k, καὶ αἱ εὐθεῖαι, αἱ συνδέουσαι τὰς ὁμολόγους κορυφὰς τῶν τετρακορύφων, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου».

«Ἔστω ὅτι δύο πλήρη τετράεδρα abcd καὶ a'b'c'd' ἐν κεντρικῇ δέσμῃ τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν κοινὸν στοιχεῖον (καὶ ἀνήκουν ἢ καὶ μὴ εἰς τὴν αὐτὴν κεντρικὴν δέσμην) εἶνε οὕτω συσχετισμένα μεταξύ των, ὥστε πέντε ζεύγη ὁμολόγων αὐτῶν ἀκμῶν, π.χ. αἱ ab καὶ a'b', ac καὶ a'c', ad καὶ a'd', bc καὶ b'c', bd καὶ b'd', ὁρίζουν πέντε ἐπίπεδα, διερχόμενα διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας k, ἥτις δὲν κεῖται ἐπί τινος τῶν ὀκτὼ ἑδρῶν αὐτῶν. Τότε καὶ τὸ ἕκτον ζεῦγος τῶν ὁμολόγων ἀκμῶν, ἤτοι αἱ cd καὶ c'd', ὁρίζει ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς εὐθείας k, καὶ αἱ τομαὶ τῶν ὁμολόγων ἑδρῶν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου».

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δύο προτάσεων ἀποδεικνύομεν τὴν πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἀναγραφομένην.

Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τὰ ζεύγη τῶν τρικορύφων ΑΒΓ, Α΄Β΄Γ΄ καὶ ΑΒΔ, Α΄Β΄Δ΄, τὰ ὁποῖα περιέχουν πέντε ζεύγη πλευρῶν τῶν δύο τετρακορύφων (ἐξαιρουμένων τῶν ΓΔ καὶ Γ΄Δ΄).

Τὰ δύο τρικόρυφα ἑκάστου τῶν ἐν λόγῳ ζευγῶν εἶνε οὕτω συσχετισμένα μεταξύ των, ὥστε τὰ ζεύγη τῶν ὁμολόγων πλευρῶν αὐτῶν τέμνονται εἰς σημεῖα τῆς εὐθείας k. Ἐπομένως, αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰς ὁμολόγους αὐτῶν κορυφὰς διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶνε



τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰ δύο ζεύγη τῶν τρικορύφων· διότι ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν εἶνε τομὴ τῶν εὐθειῶν ΑΑ΄, ΒΒ΄, καὶ ΓΓ΄, ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ καὶ τῶν εὐθειῶν ΑΑ΄, ΒΒ΄, καὶ ΔΔ΄. Ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄, ΔΔ΄ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Θεωροῦμεν τώρα τὰ τρικόρυφα ΑΓΔ καὶ Α΄Γ΄Δ΄, διὰ τὰ ὁποῖα αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰς ὁμολόγους κορυφὰς αὐτῶν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Ἕπεται ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΓΔ καὶ Γ΄Δ΄ τέμνονται ἐπὶ τῆς εὐθείας k, τὴν ὁποίαν ὁρίζουν αἱ τομαὶ τῶν ΑΓ, Α΄Γ΄ καὶ ΑΔ, Α΄Δ΄.

Ἡ ἀπόδειξις τῆς δεξιὰ ἀνωτέρω ἀναγραφομένης προτάσεως προκύπτει εὐκόλως διὰ τῆς ἐναλλαγῆς τῶν ἐναλλακτῶν στοιχείων ἐν τῷ χώρῳ τῶν τριῶν διαστάσεων.

Πρὸς τὰς ἀνωτέρω προτάσεις ἔχομεν τὰς ἑξῆς ἀντιστοίχους ἐν τῷ πεδίῳ καὶ ἐν κεντρικῇ δέσμῃ, τῶν ὁποίων ἡ ἀπόδειξις γίνεται εὐκόλως διὰ τῆς ἐναλλαγῆς τῶν ἐναλλακτῶν στοιχείων.

«*Ἔστω ὅτι δύο πλήρη τετράπλευρα ἑνὸς ἐπιπέδου, μὴ ἔχοντα κοινὸν στοιχεῖον, εἶνε οὕτω συσχετισμένα μεταξύ των, ὥστε πέντε ζεύγη ὁμολόγων κορυφῶν αὐτῶν ὁρίζουν πέντε εὐθείας, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, μὴ συμπίπτοντος μέ τινα τῶν ὀκτὼ κορυφῶν. Τότε καὶ τὸ ἕκτον ζεῦγος τῶν ὁμολόγων αὐτῶν κορυφῶν ὁρίζει μίαν εὐθεῖαν, διερχομένην διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, καὶ τὰ τέσσαρα ζεύγη τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τέμνονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας*».

«*Ἔστω ὅτι δύο πλήρη τετράακμα (ἐν κεντρικῇ δέσμῃ), μὴ ἔχοντα κοινὸν στοιχεῖον, εἶνε οὕτω συσχετισμένα μεταξύ των, ὥστε πέντε ζεύγη ὁμολόγων αὐτῶν ἑδρῶν ὁρίζουν πέντε εὐθείας, κειμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, μὴ διερχομένου διά τινος τῶν ὀκτὼ αὐτῶν ἀκμῶν. Τότε καὶ τὸ ἕκτον ζεῦγος τῶν ὁμολόγων αὐτῶν ἑδρῶν ὁρίζει μίαν εὐθεῖαν, κειμένην ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου, καὶ τὰ τέσσαρα ζεύγη τῶν ὁμολόγων αὐτῶν ἀκμῶν ὁρίζουν τέσσαρα ἐπίπεδα, διερχόμενα διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας*».

Ἀναλυτικαὶ ἐφαρμογαὶ τῆς ἀρχῆς τοῦ δυασμοῦ.

§ 17. Γραμμικαὶ συντεταγμέναι ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

Καθὼς σημεῖόν τι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου xoy κείμενον, ὁρίζεται διὰ δύο μεγεθῶν ἢ διὰ δύο ἀριθμῶν (τῶν συντεταγμένων αὐτοῦ), ἀνεξαρτήτων ἀπ᾽ ἀλλήλων, οὕτω προκειμένου περὶ εὐθείας τινός, κειμένης ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ, δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι αὕτη ὁρίζεται ἐκ τῶν συντεταγμένων αὐτῆς ἐπὶ τὴν ἀρχὴν O τῶν ἀξόνων ox, oy, αἵτινες καλοῦνται *γραμμικαὶ συντεταγμέναι* ταύτης.

Ὅταν δοθῇ μία μόνη ἐξίσωσις μεταξὺ τῶν συντεταγμένων ἑνὸς σημείου, δύναται τοῦτο νὰ λάβῃ ἀπείρους θέσεις, καὶ γράφει ἐν γένει καμπύλην τινά. Καθ᾽ ὅμοιον τρόπον, ἂν δοθῇ μία μόνη ἐξίσωσις μεταξὺ τῶν στοιχείων, διὰ τῶν ὁποίων προσδιορίζεται μία εὐθεῖα, ὑπάρχουν ἄπειροι εὐθεῖαι τῶν ὁποίων τὰ στοιχεῖα δι᾽ ὧν αὗται προσδιορίζονται ἐπαληθεύουν αὐτήν. Θὰ θεωροῦμεν τὴν καμπύλην, τῆς ὁποίας ἐφάπτονται αἱ εὐθεῖαι αὗται ἑκάστη εἰς ἀντίστοιχον αὐτῆς σημεῖον, ὡς γεωμετρικὸν τόπον τῶν ἐπαφῶν αὐτῶν.

Οὕτω δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν καμπύλην τινὰ παραγομένην κατὰ δύο διαφόρους τρόπους· 1) ὡς γραφομένην ὑπό τινος σημείου, λαμβάνοντος ἀπείρους θέσεις· 2) ὡς περιβάλλουσαν τῶν ἀπείρων θέσεων μιᾶς εὐθείας. Δύο εὐθεῖαι τοῦ συστήματος τούτου ἀπείρως πλησίον ἀλλήλων κείμεναι (δύο ἐφαπτόμεναι τῆς καμπύλης) τέμνονται οὕτω ἐπὶ τῆς καμπύλης, εἰς τρόπον ὥστε, ἡ καμπύλη παράγεται ὑπὸ τῆς σειρᾶς τῶν διαδοχικῶν τομῶν τῶν γειτονικῶν ἐφαπτομένων αὐτῆς. Ἀντιστρόφως· ἡ ἐφαπτομένη μιᾶς καμπύλης ὁρίζεται ὡς εὐθεῖα συνδέουσα δύο σημεῖα τῆς καμπύλης, κείμενα εἰς ἀπειροστὴν ἀπόστασιν ἀπ' ἀλλήλων. Διὰ νὰ παραστήσωμεν ἀναλυτικῶς τὸν τρόπον τοῦτον τῆς γενέσεως γραμμῆς τινος, ἤτοι διὰ νὰ παραστήσωμεν διὰ μιᾶς ἐξισώσεως μίαν καμπύλην, θεωρουμένην ὡς περιβάλλουσαν τῶν ἐφαπτομένων αὐτῆς, πρέπει νὰ θεωρήσωμεν ὡς μεταβλητὰ τὰ δύο στοιχεῖα διὰ τῶν ὁποίων προσδιορίζεται ἡ εὐθεῖα, ὡς τοῦτο γίνεται διὰ τὰς συνταγμένας x καὶ y ἑνὸς σημείου, καὶ θὰ καλοῦμεν ταῦτα *συντεταγμένας τῆς εὐθείας**, κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὰς συντεταγμένας ἑνὸς σημείου. Μία ἐξίσωσις μεταξὺ τῶν συντεταγμένων σημείου παριστάνει ἐν γένει καμπύλην, ὡς γεωμετρικὸν τόπον τῶν σημείων αὐτῆς. Μία ἐξίσωσις μεταξὺ τῶν συντεταγμένων εὐθείας παριστάνει καμπύλην ὡς περιβάλλουσαν τῶν ἐφαπτομένων αὐτῆς.

Ἂν ἡ ἐξίσωσις εὐθείας τινός εἶνε

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$$

θέτομεν $$u=-\frac{1}{\alpha},\quad v=-\frac{1}{\beta}$$

καὶ καλοῦμεν τὰς ποσότητας ταύτας u, v συντεταγμένας τῆς εὐθείας, ὅτε ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$ux+vy+1=0.$$

Ἂν μὲν ἐν τῇ ἐξισώσει ταύτῃ θεωρήσωμεν ὡς μεταβλητὰς τὰς x, y, καὶ ὡς σταθερὰς τὰς u, v, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν μιᾶς εὐθείας· ἂν δὲ θεωρήσωμεν τὰς u, v, ὡς μεταβλητὰς καὶ τὰς x, y ὡς σταθεράς, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν ἑνὸς σημείου. Τῷ ὄντι, ἂν ὑποθέσωμεν δεδομένα τὰ u, v, ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων πάντων τῶν σημείων τῆς εὐθείας, τῆς ἐχούσης συντεταγμένας u, v. Ἀντιστρόφως, ἂν ὑποθέσωμεν δεδομένα τὰ x, y καὶ θεωρήσωμεν ὡς μεταβλητὰς τὰς u, v ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων πασῶν τῶν εὐ-

---

* Πρῶτος ὁ Plücker μετεχειρίσθη τὰς συντεταγμένας τῆς εὐθείας (Journal de Crelle, t. V, 1829, καὶ Analytisch-geometrische Entwicklungen, t. II, 1831). Ἐν Γαλλίᾳ ἀνεπτύχθησαν αἱ αὐταὶ ἰδέαι σχεδὸν συγχρόνως ὑπὸ τοῦ Chasles (Aperçu historique sur l' origine et le développement des méthodes en Géométrie, 1837).

θειῶν, τῶν διερχομένων διὰ τοῦ σημείου x, y. Οὕτω ἡ μὲν εὐθεῖα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς γεωμετρικὸς τόπος ἑνὸς σημείου διαγράφοντος αὐτήν, τὸ δὲ σημεῖον ὡς περιβάλλουσα εὐθειῶν, αἵτινες προκύπτουν διὰ τῆς στροφῆς μιᾶς εὐθείας περὶ τὸ σημεῖον τοῦτο (ἐν τῷ ἐπιπέδῳ xy).

§18. Δίδυμοι προτάσεις διὰ σημεῖα καὶ εὐθείας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

Ἐκ τῶν προηγουμένων φαίνεται ὅτι δὲν δυνάμεθα νὰ παραγάγωμεν εὐθεῖάν τινα διὰ τῆς κινήσεως εὐθείας, οὐδὲ σημεῖόν τι διὰ τῆς κινήσεως σημείου, πρὸς δὲ ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις παριστάνει εὐθεῖαν μέν, ἂν εἶνε τὰ x, y, μεταβλητὰ καὶ τὰ u, v σταθερά, σημεῖον δέ, ἂν εἶνε τὰ u, v μεταβλητὰ καὶ τὰ x, y σταθερά.

Ἡ ἐξίσωσις $ux+vy+1=0$ εἶνε συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὰ u, v καὶ τὰ x, y· ἤτοι δὲν μεταβάλλεται, ἂν τὰ u, v ἀντικατασταθοῦν ἀντιστοίχως ὑπὸ τῶν x, y, τὰ δὲ x, y ὑπὸ τῶν u καὶ v καὶ ἐπὶ τῆς ἰδιότητος ταύτης στηρίζεται ἡ ἀρχὴ τοῦ δυασμοῦ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, διὰ τὸ ὁποῖον τὰ ἐναλλακτὰ στοιχεῖα εἶνε τὸ σημεῖον καὶ ἡ εὐθεῖα. Οὕτω ἔχομεν τὰς ἑξῆς δυδύμους προτάσεις.

«Μία ἐξίσωσις γραμμικὴ ὡς πρὸς συντεταγμένας x, y παριστάνει μίαν εὐθεῖαν γραμμήν».

Ἡ γενικὴ ἐξίσωσις

$$Ax + By + \Gamma = 0$$

παριστάνει εὐθεῖαν γραμμὴν εἰς σημειακὰς συντεταγμένας, ἤτοι τὴν ἔχουσαν συντεταγμένας

$$u = \frac{A}{\Gamma},\quad v = \frac{B}{\Gamma}.$$

Δοθέντων τῶν σημείων

$$(x_1, y_1),\quad (x_2, y_2),$$

ἔχομεν ὡς ἐξίσωσιν τῆς συνδεούσης ταῦτα εὐθείας, τὴν

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Αἱ ἐξισώσεις

$$A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 = 0$$
$$A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 = 0$$

«Μία ἐξίσωσις γραμμικὴ ὡς πρὸς συντεταγμένας u, v παριστάνει ἓν σημεῖον».

Ἡ γενικὴ ἐξίσωσις

$$Au + Bv + \Gamma = 0$$

παριστάνει ἓν σημεῖον εἰς γραμμικὰς συντεταγμένας, ἤτοι τὸ ἔχον συντεταγμένας

$$x = \frac{A}{\Gamma},\quad y = \frac{B}{\Gamma}.$$

Δοθεισῶν δύο εὐθειῶν

$$(u_1, v_1),\quad (u_2, v_2)$$

ἔχομεν ὡς ἐξίσωσιν τοῦ σημείου καθ' ὃ τέμνονται αὗται, τὴν

$$\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Αἱ ἐξισώσεις

$$A_1 u + B_1 v + \Gamma_1 = 0$$
$$A_2 u + B_2 v + \Gamma_2 = 0$$

παριστάνουν τότε μόνον τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, ἂν εἶνε

$A_1 : B_1 : \Gamma_1 = A_2 : B_2 : \Gamma_2$.

Ἐὰν δὲ παριστάνουν διαφόρους εὐθείας, ἡ τομὴ αὐτῶν ἔχει συντεταγμένας

$$x' : y' : 1 = \begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \Gamma_1 & A_1 \\ \Gamma_2 & A_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις τριῶν εὐθειῶν εἰς σημειακὰς συντεταγμένας

$$A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 = 0$$
$$A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 = 0$$
$$A_3 x + B_3 y + \Gamma_3 = 0.$$

Ἐὰν αὗται διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου (x', y'), θὰ ἔχωμεν

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} = 0,$$

εἶνε δὲ ἡ συνθήκη αὕτη ἀναγκαία καὶ ἐπαρκής. Ὁμοίως

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

εἶνε ἡ συνθήκη, ἵνα τὰ σημεῖα (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

Ἤτοι ἂν τὰ x, y εἶνε μεταβλητά, ἡ ἀνωτέρω εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας τῆς διερχομένης διὰ τῶν σημείων (x_1, y_1), (x_2, y_2).

παριστάνουν τότε μόνον τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἂν εἶνε

$A_1 : B_1 : \Gamma_1 = A_2 : B_2 : \Gamma_2$.

Ἐὰν δὲ παριστάνουν διάφορα σημεῖα, ἡ συνδέουσα αὐτὰ εὐθεῖα ἔχει συντεταγμένας

$$u' : v' : 1 = \begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \Gamma_1 & A_1 \\ \Gamma_2 & A_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις τριῶν σημείων εἰς γραμμικὰς συντεταγμένας

$$A_1 u + B_1 v + \Gamma_1 = 0$$
$$A_2 u + B_2 v + \Gamma_2 = 0$$
$$A_3 u + B_3 v + \Gamma_3 = 0.$$

Ἐὰν ταῦτα κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας (u', v'), θὰ εἶνε

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} = 0,$$

εἶνε δὲ συνθήκη αὕτη ἀναγκαία καὶ ἐπαρκής. Ὁμοίως

$$\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

εἶνε ἡ συνθήκη, ἵνα αἱ εὐθεῖαι (u, v), (u_1, v_1), (u_2, v_2) διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἤτοι, ἂν τὰ u, v εἶνε μεταβλητά, ἡ ἀνωτέρω εἶνε ἡ ἐξίσωσις τοῦ σημείου, καθ' ὃ τέμνονται αἱ εὐθεῖαι (u_1, v_1), (u_2, v_2).

Ἐὰν $A_1 u + B_1 v + \Gamma_1 = 0$, $A_2 u + B_2 v + \Gamma_2 = 0$ (1)
εἶνε αἱ ἐξισώσεις δύο διαφόρων σημείων, καὶ (u', v') ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας αἱ συντεταγμέναι u', v' ἐπαληθεύουν τὰς δύο ταύτας ἐξισώσεις, θὰ διέρχεται αὔτη καὶ διὰ τῶν δύο σημείων (1). Σχηματίζομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$A_1 u + B_1 v + \Gamma_1 + \lambda (A_2 u + B_2 v + \Gamma_2) = 0,$$

ἥτις θὰ παριστάνῃ ἓν σημεῖον, θὰ κεῖται δὲ τοῦτο ἐπὶ τῆς εὐθείας (u', v'), ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις αὔτη εἶνε πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς u, v καὶ ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῶν u', v'.

Ἐὰν τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν γράψωμεν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$(A_1 + \lambda A_2) u + (B_1 + \lambda B_2) v + \Gamma_1 + \lambda \Gamma_2 = 0$$

καὶ παραστήσωμεν διὰ (ξ, η) τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου τὸ ὁποῖον παριστάνει, θὰ εἶνε

$$\xi = \frac{A_1 + \lambda A_2}{\Gamma_1 + \lambda \Gamma_2}, \qquad \eta = \frac{B_1 + \lambda B_2}{\Gamma_1 + \lambda \Gamma_2}.$$

Ἐὰν τώρα $M_1 (x_1, y_1)$, $M_2 (x_2, y_2)$ εἶνε τὰ σημεῖα, τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰς ἐξισώσεις (1), θὰ ἔχωμεν

$$x_1 = \frac{A_1}{\Gamma_1}, \quad y_1 = \frac{B_1}{\Gamma_1}, \quad x_2 = \frac{A_2}{\Gamma_2}, \quad y_2 = \frac{B_2}{\Gamma_2},$$

καὶ οὕτω εὑρίσκομεν

$$\xi = \frac{A_1/\Gamma_1 + \lambda . A_2/\Gamma_2 . \Gamma_2/\Gamma_1}{1 + \lambda \Gamma_2/\Gamma_1} = \frac{x_1 - \mu x_2}{1-\mu},$$

ἐνῷ ἐτέθη $\mu = -\lambda . \Gamma_2/\Gamma_1$.

$$\eta = \frac{B_1/\Gamma_1 + \lambda . B_2/\Gamma_2 . \Gamma_2/\Gamma_1}{1 + \lambda . \Gamma_2/\Gamma_1} = \frac{y_1 - \mu y_2}{1-\mu}.$$

Διὰ τῶν τύπων τούτων ἑρμηνεύεται ἡ γεωμετρικὴ σημασία τοῦ λ καὶ ἡ θέσις τοῦ σημείου (ξ, η). Τὸ σημεῖον τοῦτο διαιρεῖ τὸ ἄνυσμα $M_1 M_2$ εἰς δύο μερη, ἔχοντα λόγον μ, ἐπειδὴ δὲ τὰ Γ_1, Γ_2 εἶνε σταθερά, δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι τὸ λ εἶνε ἀνάλογον τοῦ μ. Ἀνάλογα δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν ἐὰν θεωρήσωμεν τὰς ἐξισώσεις δύο εὐθειῶν

$$A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 = 0, \quad A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 = 0.$$

Οὕτω εὑρίσκομεν

$$u = \frac{u_1 - \mu u_2}{1-\mu}, \quad v = \frac{v_1 - \mu v_2}{1-\mu}, \quad \mu = -\lambda . \Gamma_2/\Gamma_1.$$

Ἐὰν τὴν ἐξίσωσιν

$$A u + B v + \Gamma = 0$$

θέσωμεν ὑπὸ τὴν μορφὴν $Q(u, v) = 0$,
παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν $Q_1(u, v) = 0$, $Q_2(u, v) = 0$, $Q_3(u, v) = 0$,

εἶνε αἱ ἐξισώσεις τριῶν διαφόρων σημείων, θὰ κεῖνται ταῦτα τότε καὶ μόνον ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἐὰν ὑπάρχουν τρεῖς παράγοντες $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ διάφοροι τοῦ μηδενός, τοιοῦτοι ὥστε νὰ ἔχωμεν ἐκ ταυτότητος

$$\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \lambda_3 Q_3 \equiv 0.$$

§ 19. Ἀναλυτικὴ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τοῦ Desargues (περὶ τῶν ὁμολόγων τριγώνων).

Ἔστωσαν α, β, γ καὶ α′, β′, γ′ αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ δύο τριγώνων ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, τὰ ὁποῖα εἶνε οὕτω συσχετισμένα, ὥστε τὰ σημεῖα τῶν τομῶν τῶν ζευγῶν τῶν ὁμολόγων τούτων πλευρῶν α καὶ α′, β καὶ β′, γ καὶ γ′ νὰ κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας. Τότε αἱ εὐθεῖαι, αἱ συνδέουσαι τὰς ὁμολόγους κορυφὰς τῶν τριγώνων διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Διότι ἂν $H_1=0,\ H_2=0,\ H_3=0,\ H'_1=0,\ H'_2=0,\ H'_3=0$

εἶνε αἱ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν, προφανῶς δυνάμεθα νὰ προσδιορήσωμεν οὕτω τοὺς συντελεστὰς αὐτῶν, ὥστε νὰ ἀληθεύουν αἱ ταυτότητες,

$$\overset{a)}{H_1 + H_1'} \equiv \overset{b)}{H_2 + H_2'} \equiv \overset{c)}{H_3 + H_3'} \equiv P.$$

Ἐὰν ἐκλέξωμεν αὐθαιρέτως τὰ H_1, H_2, H_3, ἀπαιτεῖται τότε διὰ τὰ H_1', H_2', H_3' εἷς κατάλληλος παράγων ἀναλογίας, θὰ εἶνε δὲ P ἡ κοινὴ τιμὴ τῶν τριῶν ἐκ ταυτότητος ἴσων ἀθροισμάτων. Οὕτω ἡ ἐξίσωσις

$$P=0$$

παριστάνει τὴν εὐθεῖαν, ἐπὶ τῆς ὁποίας τέμνονται τὰ ζεύγη τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τῶν τριγώνων. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ταυτότητος ἔπεται ὅτι εἶνε

$$\overset{a'}{H_2 - H_3} \equiv \overset{b'}{H_3' - H_2'}$$
$$H_3 - H_1 \equiv H_1' - H_3'$$
$$H_1 - H_2 \equiv H_2' - H_1',$$

οὕτω δ᾽ ἀπεδείχθη ἡ πρότασις· διότι δι᾽ ἑκάστην τῶν ταυτοτήτων τούτων τὰ μέλη αὐτῆς τιθέμενα ἴσα μὲ μηδέν, παριστάνουν τὰς ἐξισώσεις εὐθειῶν, συνδεουσῶν δύο ὁμολόγους κορυφὰς τῶν τριγώνων. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξισώσεων εἶνε ἐκ ταυτότητος ἴσον μὲ μηδέν, ἔπεται ὅτι αἱ τρεῖς εὐθεῖαι, τὰς ὁποίας παριστάνουν, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον καλεῖται *κέντρον προοπτικότητος* τῶν τριγώνων, ἡ δὲ εὐθεῖα $P=0$ *ἄξων τῆς προοπτικότητος αὐτῶν*.

§ 20. Περὶ τῶν ἐξισώσεων γραμμῶν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

Ἡ ἀπόστασις R (ἀπολύτως θεωρουμένη) ἑνὸς σημείου (x, y) ἀπὸ δοθείσης εὐθείας (u, v) δίδεται (εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους) ὑπὸ τοῦ τύπου

$$R = \frac{u\,x + v\,y + 1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \qquad (1)$$

ἡ δὲ γωνία τὴν ὁποίαν ὁρίζουν δύο εὐθεῖαι (u_1, v_1) καὶ (u_2, v_2) δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\text{τοξ. συν.}\ \frac{u_1 u_2 + v_1 v_2}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}\ \sqrt{u_2^2 + v_2^3}}.$$

Ἡ συνθήκη τῆς παραλλίας τῶν δύο εὐθειῶν (u_1, v_1) καὶ (u_2, v_2) εἶνε

$$u_1 v_2 - u_2 v_1 = 0,$$

τῆς δὲ καθετότητος αὐτῶν εἶνε

$$u_1 u_2 + v_1 v_2 = 0.$$

Ἡ ἀνωτέρω ἔκφρασις τῆς ἀποστάσεως R τοῦ σημείου (x, y) ἀπὸ τῆς εὐθείας (u, v) δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς παράδειγμα τῆς παραστάσεως μιᾶς καμπύλης ὡς περιβαλλούσης τῶν ἐφαπτομένων αὐτῆς, ἐὰν θεωρήσωμεν ἐν τῇ (1) τὰ μὲν x, y καὶ R ὡς σταθερά, τὰ δὲ u, v ὡς μεταβλητά. Ἡ ἐξίσωσις (1) ἐκφράζει οὕτω τὴν συνθήκην, ἵνα ἡ μεταβλητὴ εὐθεῖα γραμμὴ (u, v) κεῖται εἰς ἀπόστασιν σταθερὰν R ἀπὸ τοῦ ὡρισμένου σημείου (x, y). Τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν τούτων περιβάλλει, ὡς εἶνε γνωστόν, μίαν περιφέρειαν κύκλου, ἔχουσαν ἀκτῖνα R καὶ κέντρον τὸ σημεῖον (x, y). Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ α, β τὰς συντεταγμένας τοῦ κέντρου, ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου εἰς συντεταγμένας γραμμικάς, ἤτοι ἡ συνθήκη εἰς τὴν ὁποίαν ὑπόκεινται πᾶσαι αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῆς, εἶνε

$$(\alpha\,u + \beta\,v + 1)^2 = R^2\,(u^2 + v^2),$$

ἐνῷ ἡ ἐξίσωσις τῆς αὐτῆς περιφερείας εἰς σημειακὰς συντεταγμένας εἶνε

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2.$$

Ἐν γένει, καμπύλη τις δύναται νὰ παριστάνεται ἀναλυτικῶς κατὰ δύο τρόπους. 1) θὰ ἔχῃ εἰς σημειακὰς συντεταγμένας ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς

$$f(x, y) = 0\cdot$$

2) θὰ ἔχῃ εἰς γραμμικὰς συντεταγμένας ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς

$$\varphi(u, v) = 0.$$

Αἱ δύο αὗται ἐξισώσεις εἶνε ἐν γένει διάφοροι ἀλλήλων ὡς πρὸς τὴν μορφὴν καὶ τὸν βαθμὸν ἑκάστης τούτων. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι, δυνάμεθα νὰ κάμωμεν διπλῆν διάταξιν τῶν ἀλγεβρικῶν καμπύλων· τὴν μὲν μίαν ὡς πρὸς τὸν βαθμὸν τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν εἰς σημειακὰς συντεταγμένας, τὴν δὲ ἄλλην ὡς πρὸς τὸν βαθμὸν τῶν ἐξισώσεων τούτων εἰς γραμμικὰς συντεταγμένας. Διὰ ταῦτα, Τὸν μέγιστον ἐκθέτην, τὸν ὁποῖον ἔχουν αἱ μεταβληταὶ x, y ἐν τῇ ἐξισώσει γραμμῆς τινος εἰς σημειακὰς συντεταγμένας, καλοῦμεν *βαθμὸν* τῆς γραμμῆς.

«Αἱ γραμμαὶ πρώτου βαθμοῦ εἶνε εὐθεῖαι».

«Γραμμή τις πρώτου βαθμοῦ δὲν δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς γραμμὴ τάξεως· ἡ εὐθεῖα γραμμὴ παριστάνεται εἰς σημειακὰς μὲν ἀντεταγμένας ὑπὸ μιᾶς ἐξισώσεως, εἰς γραμμικὰς δὲ συντεταγμένας ὑπὸ δύο ἐξισώσεων».

Τὸν μέγιστον ἐκθέτην, τὸν ὁποῖον ἔχουν αἱ μεταβληταὶ u, v ἐν τῇ ἐξισώσει γραμμῆς τινος εἰς γραμμικὰς συντεταγμένας, καλοῦμεν *τάξιν* τῆς γραμμῆς.

«Αἱ γραμμαὶ πρώτης τάξεως εἶνε σημεῖα».

«Γραμμή τις πρώτης τάξεως δὲν δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς γραμμὴ βαθμοῦ· τὸ σημεῖον παριστάνεται εἰς γραμμικὰς μὲν συντεταγμένας ὑπὸ μιᾶς ἐξισώσεως, εἰς σημειακὰς δὲ συντεταγμένας ὑπὸ δύο ἐξισώσεων».

§ 21. Ἀναλυτικὴ παράστασις σημειοσειρᾶς καὶ ἐπιπέδου δέσμης ἀκτίνων.

Ἂν M_1 (x_1, y_1), M_2 (x_2, y_2) εἶνε αἱ συντεταγμέναι δύο σημείων τοῦ φορέως μιᾶς σημειοσειρᾶς, αἱ συντεταγμέναι (x, y) ἑνὸς σημείου M αὐτῆς δίδονται ὑπὸ τῶν

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \qquad (1)$$

ἂν τεθῇ $(M_1 M) : (M M_2) = k_2 : k_1 = \lambda$. Αἱ ἐξισώσεις αὗται παριστάνουν τὰς συντεταγμένας ἑνὸς σημείου τῆς θεωρουμένης σημειοσειρᾶς, ἐκφράζονται δὲ διὰ τῶν συντεταγμένων δύο στοιχείων αὐτῆς καὶ τῆς παραμέτρου λ. Αὕτη εἶνε ἡ γενικὴ ἀναλυτικὴ παράστασις τῆς εὐθείας, θεωρουμένης ὡς φορέως μιᾶς σημειοσειρᾶς.

Κατ᾽ ἀνάλογον τρόπον ἐργαζόμενοι εἰς γραμμικὰς συντεταγμένας, εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε

$$u = \frac{u_1 + \lambda u_2}{1 + \lambda}, \qquad v = \frac{v_1 + \lambda v_2}{1 + \lambda} \qquad (1)^*$$

ἂν (u_1, v_1), (u_2, v_2) εἶνε αἱ συντεταγμέναι δύο ἀκτίνων, ἀνηκουσῶν εἰς τὴν αὐτὴν ἐπίπεδον δέσμην ἀκτίνων. Αἱ ἐξισώσεις αὗται παριστάνουν τὰς συντεταγμένας μιᾶς ἀκτῖνος τῆς δέσμης, ἐκφράζονται δὲ διὰ τῶν συντεταγμένων δύο στοιχείων αὐτῆς καὶ τῆς παραμέτρου λ. Αὕτη εἶνε ἡ γενικὴ ἀναλυτικὴ παράστασις τοῦ σημείου, θεωρουμένου ὡς κέντρου (φορέως) μιᾶς ἐπιπέδου δέσμης ἀκτίνων.

Αἱ ἀνωτέρω ἐξισώσεις δίδουν τὴν παράστασιν τῶν συντεταγμένων ἑνὸς οἱουδήποτε στοιχείου μιᾶς σημειοσειρᾶς καὶ μιᾶς ἐπιπέδου δέσμης ἀκτίνων διὰ τῶν συντεταγμένων δύο ὡρισμένων στοιχείων ἀντιστοίχως. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν ἑνὸς τυχόντος στοιχείου ἑκάστου τῶν γεωμετρικῶν τούτων σχηματισμῶν, πρέπει νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὰς ἀνωτέρω τιμὰς τῶν συντεταγμένων εἰς τὴν ἐξίσωσιν

$$u\,x + v\,y + 1 = 0,$$

ὅτε εὑρίσκομεν,

διὰ σημεῖον τῆς σημειοσειρᾶς	δι' ἀκτῖνα ἐπιπέδου δέσμης ἀκτίνων
$(u x_1 + v y_1 + 1)$	$(u_1 x + v_1 y + 1)$
$+ \lambda\,(u\,x_2 + v\,y_2 + 1) = 0$	$+ \lambda\,(u_2\,x + v_2\,y + 1) = 0.$

Ἤτοι· «*διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως τοῦ κινητοῦ στοιχείου σημειοσειρᾶς ἢ ἐπιπέδου δέσμης ἀκτίνων, πολλαπλασιάζομεν τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως τοῦ ἑνὸς τῶν δύο σταθερῶν στοιχείων ἐπὶ παράμετρόν τινα καὶ προσθέτομεν εἰς τὸ γινόμενον τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως τοῦ ἄλλου σταθεροῦ στοιχείου*».

Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ δύο σταθερὰ στοιχεῖα τοῦ φορέως ἔχουν ἐξισώσεις τῆς μορφῆς

$A_1\,x + B_1\,y + \Gamma_1 = 0$	$A_1\,u + B_1\,v + \Gamma_1 = 0$
$A_2\,x + B_2\,y + \Gamma_2 = 0$	$A_2\,u + B_2\,v + \Gamma_2 = 0,$

αἱ ἐξισώσεις

$$(A_1\,x + B_1\,y + \Gamma_1) + \mu\,(A_2\,x + B_2\,y + \Gamma_2) = 0 \qquad (2)$$

$$(A_1\,u + B_1\,v + \Gamma_1) + \mu\,(A_2\,u + B_2\,v + \Gamma_2) = 0 \qquad (2)^*$$

παριστάνουν ἓν τυχὸν στοιχεῖον τῆς δέσμης ἢ τῆς σημειοσειρᾶς, μόνον δ' ἡ σημασία τῆς παραμέτρου μ εἶνε διάφορος. Διότι ἂν θέσωμεν

$$\mu = \lambda.\ \Gamma_1/\Gamma_2$$

εὑρίσκομεν τὰς προηγουμένας μορφάς.

Ἐὰν θεωρήσωμεν τυχοῦσαν θέσιν τῆς κινητῆς ἀκτῖνος τῆς δέσμης, ἔστω τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὰς συντεταγμένας (u, v), καὶ ἀπὸ τυχόντος σημείου (x, y) ταύτης φέρωμεν καθέτους εὐθείας ἐπὶ τὰς σταθερὰς ἀκτῖνας (u_1, v_1), (u_2, v_2), παραστήσωμεν δὲ διὰ R_1 καὶ R_2 τὰς ἀποστάσεις τοῦ σημείου ἀπὸ τῶν ἀκτίνων, ὁ μὲν λόγος $R_1 : R_2$ θὰ εἶνε ὁ αὐτὸς διὰ πάντα τὰ σημεῖα τῆς ἀκτῖνος (u, v), ἡ δὲ παράμετρος λ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων δὲν διαφέρει τοῦ λόγου τούτου, εἰμὴ μόνον κατὰ σταθερὸν παράγοντα. Πράγματι, ἔχομεν ὡς εἴδομεν (§ 20) ὅτι.

$(u_1 x + v_1 y + 1) + \lambda (u_2 x + v_2 y + 1) = 0$ εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς
(συντεταγμένων) ἡ διερχομένη διὰ τοῦ Ο κ.λ.π.

$$R_1 = \frac{u_1 x + v_1 y + 1}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}, \qquad R_2 = \frac{u_2 x + v_2 y + 1}{\sqrt{u_2^2 + v_2^2}},$$

ἡ δὲ ἐξίσωσις τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς

$$u x + v y + 1 = 0$$

μετασχηματίζεται εἰς τὴν

$$R_1 \sqrt{u_1^2 + v_1^2} + \lambda R_2 \sqrt{u_2^2 + v_2^2} = 0$$

ἤτοι ἔχομεν

$$\lambda = - \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}{\sqrt{u_2^2 + v_2^2}}.$$

Ἡ τιμὴ τοῦ λ μεταβάλλεται κατ' ἀνάλογον τρόπον πρὸς τὴν μεταβολὴν τῆς παραμέτρου, ἥτις εἰσέρχεται εἰς τοὺς τύπους (1) τῶν συντεταγμένων τυχόντος σημείου σημειοσειρᾶς, εἰς ἑκάστην δ' ἀκτῖνα ἀντιστοιχεῖ μία μόνη τιμὴ τοῦ λ, καὶ ἀντιστρόφως. Ἂν λάβωμεν τὰ R_1, R_2 ὡς θετικὰ διὰ μίαν ἀκτῖνα, κειμένην ἐντὸς τῆς μιᾶς τῶν γωνιῶν τῶν δύο σταθερῶν ἀκτίνων τῆς δέσμης, τρέπονται καὶ τὰ δύο εἰς ἀρνητικά, ὅταν πρόκειται διὰ σημεῖα κείμενα ἐντὸς τῆς κατὰ κορυφὴν γωνίας τῆς προηγουμένης, ἐνῷ διὰ σημεῖα κείμενα ἐντὸς τῶν δύο ἄλλων κατὰ κορυφὴν πρὸς ἀλλήλας γωνιῶν τὰ R_1, R_2 εἶνε ἑτερόσημα. Τὸ λ ἔχει τιμὴν μηδὲν διὰ τὴν μίαν ἐκ τῶν δύο σταθερῶν ἀκτίνων καὶ ἄπειρον διὰ τὴν ἄλλην, διὰ δὲ τὰς ἄλλας ἀκτῖνας, τὰς περιεχομένας μεταξὺ τῶν ὁρίων τούτων λαμβάνει τιμὰς περιεχομένας μεταξὺ τοῦ 0 καὶ $+\infty$ καὶ $-\infty$. Ἡ μόνη διαφορὰ ἐν συγκρίσει πρὸς τὴν μεταβολὴν τῆς παραμέτρου, τῆς ἀντιστιχούσης εἰς τὴν σημειοσειράν, εἶνε ὅτι, ἐν τῇ περιπτώσει τῆς δέσμης δὲν ἔχομεν στοιχεῖον κατ' ἐκδοχήν, ὡς ἐν τῇ σημειοσειρᾷ.

Ἐὰν πρὸς συντομίαν τεθῇ

$$H \equiv A x + B y + \Gamma \qquad \Big\| \qquad Q \equiv A u + B v + \Gamma,$$

θὰ ἔχωμεν,

ὡς ἐξισώσεις δύο εὐθειῶν τὰς	ὡς ἐξισώσεις δύο σημείων τὰς
$H_1 = 0, \quad H_2 = 0,$	$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0,$
καὶ ὡς ἐξίσωσιν μιᾶς ἀκτῖνος διερχομένης διὰ τῆς τομῆς αὐτῶν τὴν	καὶ ὡς ἐξίσωσιν ἑνὸς σημείου κειμένου ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς συνδεούσης αὐτὰ τὴν
$H_1 + \lambda H_2 = 0.$	$Q_1 + \lambda Q_2 = 0.$

§ 22. Ἐξισώσεις σημείων, ἐπιπέδων καὶ εὐθειῶν ἐν τῷ χώρῳ τῶν τριῶν διαστάσεων.

Ὡς εἶνε γνωστόν, μία γραμμικὴ ἐξίσωσις, ὡς πρὸς τὰς μεταβλητὰς x,y,z, παριστάνει ἓν ἐπίπεδον. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἐν τῇ ἐξισώσει

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}-1=0$$

θέτομεν $\quad u=-\frac{1}{\alpha},\ v=-\frac{1}{\beta},\ w=-\frac{1}{\gamma},$

ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις τοῦ ἐπιπέδου τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$ux+vy+wz+1=0 \qquad (1)$$

Τὰ u,v,w, τὰ ὁποῖα μεταβάλλονται μετὰ τῶν συντεταγμένων τοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ τὴν ἀρχήν, λέγονται *συντεταγμέναι τοῦ ἐπιπέδου, ἢ ἐπιπεδικαὶ συντεταγμέναι*, ἐνῷ τὰ x,y,z καλοῦνται *συντεταγμέναι τοῦ σημείου ἢ σημειακαὶ συντεταγμέναι*. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) παρατηροῦμεν ὅτι, τὸ σημεῖον x,y,z κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου u,v,w, καὶ ὅτι τὸ ἐπίπεδον u,v,w διέρχεται διὰ τοῦ σημείου x,y,z. Ἑπομένως, ἂν δοθοῦν τὰ u,v,w, ἡ ἐξίσωσις (1) ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων πάντων τῶν σημείων x,y,z τοῦ ἐπιπέδου, τοῦ ἔχοντος συντεταγμένας u,v,w. Ἀντιστρόφως· ἂν δοθοῦν τὰ x,y,z καὶ ὑποθέσωμεν μεταβλητὰ τὰ u,v,w, ἡ (1) ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων πάντων τῶν ἐπιπέδων, τῶν διερχομένων διὰ τοῦ σημείου x,y,z. Οὕτω ἡ ἐξίσωσις (1) εἶνε ἡ ἐξίσωσις τοῦ σημείου x,y,z εἰς *ἐπιπεδικὰς συντεταγμένας*, ἡ αὐτὴ δ' εἶνε καὶ ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐπιπέδου u,v,w εἰς *σημειακὰς συντεταγμένας*. Ἡ ἐξίσωσις (1) εἶνε συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὰς σημειακὰς καὶ ἐπιπεδικὰς συντεταγμένας (δηλαδὴ δὲν μεταβάλλεται ἂν ἀντὶ τῶν x,y,z θέσωμεν τὰ u,v,w, καὶ ἀντιστρόφως). Ἐπὶ τῆς ἰδιότητος δὲ ταύτης στηρίζεται ἡ ἀρχὴ τοῦ δυασμοῦ*, προκειμένου περὶ τοῦ χώρου τῶν τριῶν διαστάσεων, ἐνῷ ὡς ἐναλλακτὰ στοιχεῖα θεωροῦμεν τὸ σημεῖον καὶ τὸ ἐπίπεδον.

Διὰ τῆς ἐναλλαγῆς τῶν στοιχείων τούτων ἔχομεν εὐκόλως τὰς ἑξῆς διδύμους προτάσεις.

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐπιπέδου (u,v,w) εἶνε $ux+vy+wz+1=0$	Ἡ ἐξίσωσις τοῦ σημείου x,y,z εἶνε $ux+vy+wz+1=0$.
Ἡ ἐξίσωσις $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$ (2)	Ἡ ἐξίσωσις $Au+Bv+\Gamma w+\Delta=0$ (2)*

* Διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῶν ἐπιπεδικῶν συνταγμένων ἐθεμελιώθη ἡ ἀρχὴ τοῦ δυασμοῦ διὰ τὸν χῶρον τῶν τριῶν δυαστάσεων ὑπὸ τοῦ Plücker (Zournal de Crelle, Bd. 5, 1830).

παριστάνει ἓν ἐπίπεδον, ἔχον συντεταγμένας

$$u = \frac{A}{\Delta}, v = \frac{B}{\Delta}, w = \frac{\Gamma}{\Delta}.$$

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐπιπέδου, τοῦ διερχομένου διὰ τριῶν σημείων M_i (x_i, y_i, z_i), $i = 1,2,3$, μὴ κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας εἶνε

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

προκύπτει δ' αὕτη ἐκ τῶν τεσσάρων ἐξισώσεων

$$u x + v y + w z + 1 = 0$$
$$u x_i + v y_i + w z_i + 1 = 0$$

δι' ἀπολοιφῆς τῶν u, v, w.

Αἱ ἐξισώσεις

$$\left.\begin{aligned} u_1 x + v_1 y + w_1 z + 1 = 0 \\ u_2 x + v_2 y + w_2 z + 1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

ἐπαληθεύονται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων πάντων τῶν σημείων, τῶν κειμένων καὶ ἐπὶ τῶν δύο ἐπιπέδων (u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2)· ἤτοι τῶν ἐπὶ τῆς τομῆς αὐτῶν, ἄρα παριστάνουν αὗται τὴν εὐθεῖαν ταύτην.

παριστάνει ἓν σημεῖον, ἔχον συντεταγμένας

$$x = \frac{A}{\Delta}, y = \frac{B}{\Delta}, z = \frac{\Gamma}{\Delta}.$$

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ σημείου καθ' ὃ τέμνονται τρία ἐπίπεδα (u_i, v^i, w^i), $i = 1, 2, 3$ μὴ διερχόμενα διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας εἶνε

$$\begin{vmatrix} u & v & w & 1 \\ u_1 & v_1 & w_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)^*$$

προκύπτει δ' αὕτη ἐκ τῶν τεσσάρων ἐξισώσεων

$$u x + v y + w z + 1 = 0$$
$$u^i x + u_i y + w_i z + 1 = 0$$

δι' ἀναλοιφῆς τῶν x, y, z.

Αἱ ἐξισώσεις

$$\left.\begin{aligned} u x_1 + v y_1 + w z_1 + 1 = 0 \\ u x_2 + v y_2 + w z_2 + 1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (4)^*$$

ἐπαληθεύονται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων πάντων τῶν ἐπιπέδων, τῶν διερχομένων καὶ διὰ τῶν δύο σημείων (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)· ἤτοι τῶν διερχομένων διὰ τῆς εὐθείας τῆς ὁριζομένης ὑπὸ τῶν σημείων τούτων, ἄρα παριστάνουν τὴν εὐθεῖαν ταύτην.

Ἐπομένως εἰς τὴν εὐθεῖαν, τὴν συνδέουσαν δύο σημεῖα, ἀντιστοιχεῖ ἡ τομὴ δύο ἐπιπέδων· δηλαδὴ «*ἡ εὐθεῖα ἀντιστοιχεῖ πρὸς ἑαυτὴν κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ δυασμοῦ*» καὶ δύναται νὰ παριστάνεται ἢ ὑπὸ δύο ἐξισώσεων γραμμικῶν εἰς σημειακὰς συντεταγμένας, ἢ ὑπὸ δύο τοιούτων εἰς ἐπιπεδικὰς συντεταγμένας. Οὕτω ἡ εὐθεῖα ἔχει ἰδιάζουσαν θέσιν ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ τοῦ χώρου τῶν τριῶν διαστάσεων· δηλαδὴ παρὰ τὸ σημεῖον καὶ τὸ ἐπίπεδον, τὰ ὁποῖα εἶνε ἀντίστοιχα ἐναλλακτὰ στοιχεῖα, ἡ εὐθεῖα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς αὐτοτελὲς στοιχεῖον, ἀντιστοιχοῦν ἑαυτῇ.

§ 23. Ἐξισώσεις καμπύλων γραμμῶν καὶ ἐπιφανειῶν.

Μία εὐθεῖα κεῖται, ὡς εἶνε γνωστόν, ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου, ἂν δύο σημεῖα αὐτῆς κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου· διέρχεται δ᾽αὕτη δι᾽ἑνὸς σημείου, ἂν δύο ἐπίπεδα διερχόμενα δι αὐτῆς περιέχουν τὸ σημεῖον.

Εἰς τὰς εὐθείας τὰς κειμένας ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου *(πεδίον εὐθειῶν)* ἀντιστοιχοῦν αἱ δι᾽ ἑνὸς σημείου διερχόμεναι εὐθεῖαι *(κεντρικὴ δέσμη ἀκτίνων)*. Κατὰ ταῦτα, ἐπειδὴ εἰς τὰ σημεῖα ἑνὸς ἐπιπέδου ἀντιστοιχοῦν τὰ δι᾽ ἑνὸς σημείου διερχόμενα ἐπίπεδα, δυνάμεθα διὰ τῆς ἀρχῆς τοῦ δυασμοῦ ἐξ ἑκάστης προτάσεως ἀφορώσης εἰς σημεῖα καὶ εὐθείας γραμμάς, κειμένας ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου, νὰ εὕρωμεν μίαν ἄλλην πρότασιν ἀφορῶσαν εἰς ἐπίπεδα καὶ εὐθείας, διερχομένας δι᾽ ἑνὸς σημείου. Οὕτω εἰς τὰς ἐφαπτομένας ἐπιπέδου τινὸς καμπύλης k ἀντιστοιχοῦν αἱ γενέτειραι (δηλαδὴ αἱ παράπλευροι εὐθεῖαι) μιᾶς κωνικῆς ἐπιφανείας K. Διότι, μία συνεχὴς ἀκολουθία ἐξ ἀπείρων εὐθειῶν (δηλαδὴ ἐξαρτωμένη ἐκ μιᾶς παραμέτρου) καὶ διερχομένων δι᾽ ἑνὸς σημείου, σχηματίζει τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν μιᾶς κωνικῆς ἐπιφανείας. Εἰς τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης k ἀντιστοιχοῦν τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας K. Διότι, σημεῖόν τι τῆς k ὁρίζεται ὡς τομὴ δύο ἀπείρως γειτονικῶν ἐφαπτομένων αὐτῆς· ἑπομένως εἰς τοῦτο ἀντιστοιχεῖ τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἀχθῇ διὰ δύο ἀπείρως γειτονικῶν γενετειρῶν τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας K, δηλαδὴ ἓν ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς K. Ἑπομένως, δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ἰδιότητας τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἐπιπέδων καμπύλων.

Καθὼς γνωρίζομεν, ἐξίσωσίς τις εἰς σημειακὰς συντεταγμένας x, y, z παριστάνει ἐν γένει ἐπιφάνειαν. Προκειμένου νὰ ἴδωμεν τί παριστάνει ἐν γένει μία ἐξίσωσις εἰς ἐπιπεδικὰς συντεταγμένας u, v, w παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς.

Διὰ τυχόντος σημείου M τῆς ἐπιφάνειας $\varphi(x, y, z) = 0$ δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἄπειρα ἐπίπεδα, ἕκαστον δὲ τούτων τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν κατὰ μίαν ἐπίπεδον καμπύλην. Ἑκάστη τῶν καμπύλων τούτων ἔχει εἰς τὸ σημεῖον M ἐν γένει μίαν ὡρισμένην ἐφαπτομένην. «*Πᾶσαι αἱ τοιαῦται ἐφαπτόμεναι εἰς τὸ M κεῖνται ἐφ᾽ ἑνὸς ἐπιπέδου* **p**, *καὶ σχηματίζουν οὕτω μίαν ἐπί-*

Διὰ τυχόντος σημείου ἑνὸς ἐπιπέδου **p**, τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουν μίαν ἐξίσωσιν $\Phi(u, v, w) = 0$, διέρχονται ἄπειρα ἐπίπεδα, ἅτινα ἐπαληθεύουν τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν, καὶ τὰ ὁποῖα, ὡς μία συνεχὴς ἀκολουθία ἐξ ἀπείρων ἐπιπέδων περιβάλλουν μίαν κωνικὴν ἐπιφάνειαν. Μία γενέτειρα ἑκάστης τοιαύτης κωνικῆς ἐπιφανείας κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου **p**.

πεδον δέσμην ἀκτίνων». Ἐν ἐναντίᾳ δηλαδὴ περιπτώσει θὰ ἐσχημάτιζον μίαν κωνικὴν ἐπιφάνειαν· ἐπὶ ἑκάστου τῶν ἐπιπέδων τῶν διερχομένων διὰ τοῦ M θὰ ἔκειντο οὕτω περισσότεραι τῆς μιᾶς τῶν θεωρουμένων ἐφαπτομένων, τὸ ὁποῖον εἶνε ἐν γένει ἀδύνατον (διότι τοῦτο σημβαίνει μόνον εἰς ἀνώμαλα σημεῖα τῆς ἐπιφανείας). Αἱ εἰς τὸ σημεῖον M ἐφαπτόμεναι εἶνε αἱ εὐθεῖαι, αἵτινες συνδέουν τὸ M μὲ ἀνὰ ἓν σημεῖον ἀπείρως γειτονικὸν τῆς ἐπιφανείας $\varphi(x, y, z) = 0$.

Φανταζόμεθα τώρα καθ' ὅμοιον τρόπον τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον **p**′ εἰς ἓν σημεῖον M′ ἀπείρως γειτονικὸν τοῦ M. Τὰ ἐπίπεδα **p** καὶ **p**′ τέμνονται οὕτω κατὰ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ M, ἥτις συνδέει τὰ M καὶ M′. Ἄρα, αἱ ἐφαπτόμεναι τῆς ἐπιφανείας $\varphi(x, y, z) = 0$ εἶνε ὄχι μόνον εὐθεῖαι συνδέουσαι ἀπείρως γειτονικὰ πρὸς ἄλληλα σημεῖα, ἀλλὰ καὶ τομαὶ τῶν ἀντιστοιχούντων ἀπείρως γειτονικῶν ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα περιβάλλουν τὴν ὑπὸ τοῦ σημείου γενωμένην ἐπιφάνειαν $\varphi(x, y, z) = 0$.

*«Πᾶσαι αἱ οὕτω ἐπὶ τοῦ **p** κατασκευαζόμεναι γενέτειραι διέρχονται δι' ἑνὸς σημείου M, καὶ σχηματίζουν οὕτω μίαν ἐπίπεδον δέσμην ἀκτίνων».* Ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει θὰ περιέβαλλον μίαν ἐπίπεδον καμπύλην. Δι' ἑκάστου σημείου κειμένου ἐπὶ τοῦ **p** θὰ διήρχοντο οὕτω περισσότεραι τῆς μιᾶς γενέτειραι, τὸ ὁποῖον εἶνε ἐν γένει ἀδύνατον (διότι τοῦτο συμβαίνει μόνον εἰς ἀνώμαλα ἐπίπεδα)· Αἱ ἐπὶ τοῦ **p** κείμεναι γενέτειραι εἶνε αἱ τομαὶ τοῦ p μετὰ τοῦ ἀπείρως γειτονικοῦ πρὸς αὐτὸ ἐπιπέδου, τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν $\Phi(u,v,w) = 0$.

Φανταζόμεθα τώρα ἓν σημεῖον M′, καθ' ὅμοιον τρόπον ἀντιστοιχοῦν εἰς ἓν ἐπίπεδον **p**′ ἀπείρως γειτονικὸν τοῦ **p**. Ἡ τομὴ τῶν δύο ἐπιπέδων εἶνε οὕτω ἡ εὐθεῖα, ἥτις συνδέει τὰ M καὶ M′. Αἱ εὐθεῖαι, αἱ κατασκευαζόμεναι οὕτω ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων, τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουν τὴν $\Phi(u, v, w) = 0$, εἶνε ὄχι μόνον τομαὶ ἀπείρως γειτονικῶν ἐπιπέδων, ἀλλὰ καὶ συνδέουν ἀντίστοιχα ἀπείρως γειτονικὰ σημεῖα, σχηματίζοντα μίαν ἐπιφάνειαν, περιβαλλομένην ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων, τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν $\Phi(u, v, w) = 0$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι εἰς ἕκαστον ἐπίπεδον, τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι (u,v,w) ἐπαληθεύουν μίαν ἐξίσωσιν $\Phi(u,v,w) = 0$, ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον, κείμενον ἐπ' αὐτοῦ, ἡ δὲ σχέσις μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τοῦ ἐπιπέδου εἶνε ἀκριβῶς ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν σχέσιν ἑνὸς σημείου τῆς ἐπιφανείας φ(x,y,z)=0 καὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου ταύτης εἰς αὐτό. Οὕτω, «*μία ἐπιφάνεια δύναται ἐν γένει νὰ παριστάνεται εἴτε ὑπὸ μιᾶς ἐξισώσεως εἰς σημειακὰς συντεταγμένας, εἴτε ὑπὸ μιᾶς ἐξισώσεως εἰς ἐπιπεδικὰς συντεταγμένας*». Ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιπτώσει παρουσιάζεται ἡ ἐπιφάνεια ὡς τόπος τῶν σημείων αὐτῆς, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ ὡς περιβάλλουσα τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων αὐτῆς. Παρατηρητέον ὅτι εἰς μίαν ἐπιφάνειαν φ(x,y,z) =0 ἀντιστοιχεῖ συμφώνως πρὸς τὴν ἀρχὴν τοῦ δυασμοῦ μία ἄλλη ἐπιφάνεια Φ(u,v,w)=0, ἐν γένει διάφορος αὐτῆς *.

Ἡ ἀνωτέρω πρότασις περὶ τῆς παραστάσεως μιᾶς ἐπιφανείας ὑπόκειται καὶ εἰς ἐξαιρέσεις. Ὑπάρχουν δηλαδὴ ἐπιφάνειαι, αἵτινες δὲν δύνανται νὰ παρασταθοῦν ὑπὸ μιᾶς ἐξισώσεως εἰς ἐπιπεδικὰς συντεταγμένας. Ἓν τοιοῦτον παράδειγμα εἶνε ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια. Διότι μία τοιαύτη ἐπιφάνεια σχηματίζεται ἐκ διττῶς ἀπείρων σημείων, ἔχει ὅμως μόνον ἄπειρα ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα, ἐπειδὴ εἰς πάντα τὰ σημεῖα μιᾶς γενετείρας ἀντιστοιχεῖ τὸ αὐτὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον αὐτῆς. Ἑπομένως δὲν δύναται νὰ παρασταθῇ μία κωνικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ μιᾶς ἐξισώσεως εἰς ἐπιπεδικὰς συντεταγμένας, ἥτις ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων διττῶς ἀπείρων ἐπιπέδων. Τὰ ἀντίστοιχα τούτων παρατηροῦμεν καὶ διὰ μίαν ἐπίπεδον καμπύλην. Αὕτη ἀποτελεῖται ἐξ ἀπείρων σημείων, ἀλλ᾽ ἔχει διττῶς ἄπειρα ἐπίπεδα διερχόμενα δι᾽ ἐφαπτομένων αὐτῆς. Διότι εἰς τὰ σημεῖα μιᾶς γενετείρας κωνικῆς ἐπιφανείας ἀντιστοιχοῦν τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διέρχονται διὰ μιᾶς ἐφαπτομένης ἐπιπέδου τινὸς καμπύλης· ἐπειδὴ ἐφαπτόμεναι τῆς καμπύλης ὡς εὐθεῖαι συνδέουσαι (ἀπείρως γειτονικὰ σημεῖα) καὶ γενέτειραι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας (ὡς τομαὶ ἀπείρως γειτονικῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων) ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἀλλήλας, συμφώνως πρὸς τὴν ἀρχὴν τοῦ δυασμοῦ. Κατὰ ταῦτα, ἐπίπεδός τις καμπύλη δὲν δύναται νὰ παρασταθῇ ὑπὸ μιᾶς ἐξισώσεως εἰς σημειακὰς συντεταγμένας, ἀλλὰ δύναται νὰ παρασταθῇ ὑπὸ μιᾶς ἐξισώσεως εἰς ἐπιπεδικὰς συντεταγμένας.

Καθ᾽ ὅμοιον τρόπον ἔχομεν τὰς ἐξαιρετικὰς περιπτώσεις, προκειμένου περὶ μιᾶς ἐπιφανείας, ὅταν συμβαίνῃ ὥστε, ἄπειρα σημεῖα τῆς ἐπιφανείας νὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον, ὁπότε ἡ ἐπιφάνεια ἔχει μόνον ἄπειρα ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα. Πάντα τὰ σημεῖα, τὰ ἔχοντα τὴν ἰδιότητα ταύτην, πρέπει νὰ σχηματίζουν μίαν ἐπίπεδον καμπύλην, κειμένην ἐπὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου, καὶ ἀκριβῶς μίαν εὐθεῖαν γραμμήν.

---

* Ὁ τρόπος οὗτος τῆς ἀντιστοιχίας δύο ἐπιφανειῶν παρετηρήθη τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ G. Monge (1808).

Διότι ἡ καμπύλη αὕτη πρέπει νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἀπείρως γειτονικοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου. Αἱ ἐπιφάνειαι, περὶ τῶν ὁποίων πρόκειται, περιέχουν οὕτω ἄπειρον πλῆθος εὐθειῶν, καὶ ἀποτελοῦν ἓν ὡρισμένον εἶδος «*εὐθειογενῶν ἐπιφανειῶν*» αἵτινες λέγονται *ἀναπτυκταὶ ἐπιφάνειαι**. Αὗται διακρίνονται ἀπὸ ἄλλας *εὐθειογενεῖς μὴ ἀναπτυκτὰς ἐπιφανείας*, κατὰ τοῦτο ὅτι, δύο ἀπείρως γειτονικαὶ εὐθεῖαι αὐτῶν (ὡς κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς ἐπιφανείας) τέμνονται, τὸ ὁποῖον δὲν συμβαίνει π.χ. διὰ τὰς εὐθειογενεῖς ἐπιφανείας τοῦ β′ βαθμοῦ. Εἰς ἕκαστον ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον μιᾶς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας ἀντιστοιχεῖ οὕτω ἓν ἐπ᾽ αὐτοῦ κείμενον σημεῖον· δηλαδὴ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν δύο ἐπ᾽ αὐτοῦ κειμένων γενετειρῶν τῆς ἐπιφανείας (ἀπείρως γειτονικῶν). Τὰ ἄπειρα ταῦτα σημεῖα σχηματίζουν μίαν καμπύλην, καὶ αἱ γενέτειραι τῆς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας εἶνε (ὡς συνδέουσαι δύο σημεῖα ἀπείρως γειτονικὰ) αἱ ἐφαπτόμεναι τῆς γραμμῆς ταύτης.

«*Στρεβλή τις (μὴ ἐπίπεδος) καμπύλη δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς γεωμετρικὸς σχηματισμός, ὅστις κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ δυασμοῦ ἀντιστοιχεῖ πρὸς μίαν ἀναπτυκτὴν ἐπιφάνειαν*».

Τῷ ὄντι, εἰς μίαν συνεχῆ ἀκολουθίαν ἐξ ἀπείρων τὸ πλῆθος ἐπιπέδων ἀντιστοιχεῖ μία συνεχὴς ἀκολουθία ἐξ ἀπείρων τὸ πλῆθος σημείων, ἑπομένως μία καμπύλη. Εἰς τὰς τομὰς δύο διαδοχικῶν ἐπιπέδων (γενετειρῶν τῆς ἀναπτικῆς ἐπιφανείας) ἀντιστοιχοῦν αἱ εὐθεῖαι, αἱ συνδέουσαι δύο διαδοχικὰ σημεῖα, ἑπομένως αἱ ἐφαπτόμεναι τῆς καμπύλης. Εἰς τὰ σημεῖα τῆς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας (δηλαδὴ εἰς τὰ σημεῖα τῶν γενετειρῶν αὐτῆς) ἀντιστοιχοῦν τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ ἀχθοῦν διὰ τῶν ἐφαπτομένων τῆς καμπύλης. Πάντα τὰ διττῶς ἄπειρα τοιαῦτα ἐπίπεδα ἔχουν συντεταγμένας ἐπαληθευούσας μίαν ἐξίσωσιν

$$\Phi\,(u,\ v,\ w) = 0.$$

Ἑπομένως, «*στρεβλή τις (μὴ ἐπίπεδος) καμπύλη δύναται νὰ παριστάνεται ὑπὸ μιᾶς ἐξισώσεως τῆς ἀνωτέρω μορφῆς εἰς ἐπιπεδικὰς συντεταγμένας*».

Ἐν τούτοις ἡ οὕτω πρὸς μίαν καμπύλην κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ δυασμοῦ ἀντιστοιχοῦσα ἀναπτυκτὴ ἐπιφάνεια δὲν εἶνε ἐν γένει ἐκείνη, ἥτις σχηματίζεται ἐκ τῶν ἐφαπτομένων τῆς καμπύλης. Τοῦτο δύναται νὰ συμβῇ μόνον διὰ ὡρισμένας καμπύλας.

---

* Καλοῦνται οὕτω διότι δύνανται νὰ ἀναπτυχθοῦν ἐπὶ ἐπιπέδου χωρὶς νὰ τεντωθοῦν, ἡ δ᾽ εὕρεσις αὐτῶν ὀφείλεται εἰς τὸν Euler (1771). Κατὰ τὸν Monge δύνανται αὗται νὰ χαρακτηρισθοῦν ὑπὸ μιᾶς διαφορικῆς ἐξισώσεως μὲ μερικὰς παραγώγους.

Παρατηρητέον ὅτι, ἐκ μὲν τῆς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας προκύπτει μία κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἐὰν πᾶσαι αἱ γενέτειραι διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ἐκ δὲ τῆς καμπύλης προκύπτει μία ἐπίπεδος τοιαύτη, ἐὰν πᾶσαι αἱ ἐφαπτόμεναι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

§ 24 Δίδυμα στοιχεῖα καὶ σχήματα ἐν τῷ χώρῳ τῶν τριῶν διαστάσεων.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω σχηματίζομεν τὴν ἑξῆς ἀντιστοιχίαν μεταξὺ στοιχείων καὶ σχημάτων ἐν τῷ χώρῳ τῶν τριῶν διαστάσεων.

Σημεῖον. Εὐθεῖα γραμμή.

Σημειοσειρά.

Ἀκτὶς (ἡ εὐθεῖα *ὡς φορεὺς* τῶν στοιχείων σημειοσειρᾶς θεωρουμένη).

Πεδίον ἐκ σημείων (ἤτοι πάντα τὰ σημεῖα ἐπιπέδου).

Δέσμη ἀκτίνων (κειμένων ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καὶ διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου διερχομένων).

Κεντρικὴ δέσμη ἀκτίνων (διερχομένων διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου).

Κωνικὴ ἐπιφάνεια.

Γενέτειρα μιᾶς κωνικῆς ἐπιφανείας.

Ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον μιᾶς κωνικῆς ἐπιφανείας.

Σημεῖον μιᾶς κωνικῆς ἐπιφανείας.

Ἐπιφάνεια ὡς τόπος σημείων.

Ἐφαπτομένη τῆς ἐπιφανείας.

Ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας.

Στρεβλὴ καμπύλη (μὴ ἐπίπεδος).

Ἐπίπεδον διὰ ἐφαπτομένης μιᾶς στρεβλῆς καμπύλης.

Ἐπίπεδον. Εὐθεῖα γραμμή.

Ἀξονικὴ δέσμη ἐπιπέδων.

Ἄξων (ἀξονικῆς δέσμης ἐπιπέδων, ὡς περιβάλλουσα τούτων).

Κεντρικὴ δέσμη ἐπιπέδων (διερχομένων διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τοῦ κέντρου τῆς δέσμης).

Δέσμη ἀκτίνων (διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου διερχομένων καὶ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κειμένων).

Ἀκτῖνες ἐν πεδίῳ (σύνολον εὐθειῶν κειμένων ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου).

Ἐπίπεδος καμπύλη.

Ἐφαπτομένη μιᾶς ἐπιπέδου καμπύλης.

Σημεῖον μιᾶς ἐπιπέδου καμπύλης.

Ἐπίπεδον διὰ μιᾶς ἐφαπτομένης μιᾶς ἐπιπέδου καμπύλης.

Ἐπιφάνεια ὡς περιβάλλουσα ἐπιπέδων.

Ἐφαπτομένη τῆς ἐπιφανείας.

Σημεῖον τῆς ἐπιφανείας.

Ἀναπτυκτὴ ἐπιφάνεια.

Σημεῖον μιᾶς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας (δηλαδὴ σημεῖον ἐπὶ μιᾶς γενετείρας).

Ἐφαπτομένη στρεβλῆς καμπύλης.

Σημεῖον μιᾶς στρεβλῆς καμπύλης.

Εὐθεῖα τέμνουσα μίαν καμπύλην (δηλαδὴ εὐθεῖα διερχομένη διά τινος σημείου αὐτῆς).

Γενέτειρα μιᾶς ἀναπτυκῆς ἐπιφανείας.

Ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον μιᾶς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας.

Ἐφαπτομένη μιᾶς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας (δηλαδὴ εὐθεῖα ἐπί τινος ἐπιπέδου ταύτης).

Ἐὰν α, β, γ εἶνε αἱ ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι τοῦ κέντρου σφαίρας, ἐχούσης ἀκτῖνα μήκους ρ, ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς εἶνε, ὡς γνωστόν,

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = \rho^2.$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς σφαίρας ταύτης εἰς ἐπιπεδικὰς συντεταγμένας, παρατηροῦμεν ὅτι ἂν u, v, w εἶνε αἱ συντεταγμέναι ἑνὸς ἐπιπέδου, ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ρ ἀπὸ τοῦ σημείου α, β, γ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\rho = \frac{\alpha u + \beta v + \gamma w + 1}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$$

(ἂν θεωρήσωμεν τὸ θετικὸν σημεῖον τοῦ ριζικοῦ).

Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τῆς σφαίρας εἰς ἐπιπεδικὰς συντεταγμένας εἶνε

$$\rho^2(u^2 + v^2 + w^2) = (\alpha u + \beta v + \gamma w + 1)^2.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ σφαῖρα εἶνε ἐπιφάνεια ὄχι μόνον δευτέρου βαθμοῦ ἀλλὰ καὶ δευτέρας τάξεως. Ἐννοοῦμεν δὲ καὶ ἐνταῦθα (κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὰ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ) βαθμὸν μὲν μιᾶς ἐπιφανείας τὸν βαθμὸν τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἰς σημειακὰς συντεταγμένας, τάξιν δ' αὐτῆς τὸν βαθμὸν τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἰς ἐπιπεδικὰς συντεταγμένας.

Ἐὰν τὸ κέντρον τῆς θεωρουμένης σφαίρας εἶνε ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων, ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς θὰ εἶνε

$$\rho^2(u^2 + v^2 + \overset{2}{w})^2 = 1$$

Πάντα τὰ ἐπίπεδα τὰ ἐφαπτόμενα τῆς σφαίρας, τὰ ὁποῖα εἶνε παράλληλα πρὸς τὸν ἄξονα τῶν z ἐπαληθεύουν ἐπὶ πλέον τὴν ἐξίσωσιν $w = 0$. Ἑπομένως αἱ ἐξισώσεις

$$\rho^2 (u^2 + v^2) = 1, \quad w = 0$$

θὰ ἐπαληθεύωνται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων πάντων τῶν ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα ἐφάπτονται τῆς σφαίρας κατὰ τὴν καμπύλην, καθ' ἣν τέμνεται αὕτη ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου xy, καὶ εἶνε παράλληλα πρὸς τὸν ἄξονα τῶν z. Ἐὰν τὸ w εἶνε οἱονδήποτε, ἡ ἐξίσωσις

$w = -\frac{1}{\gamma}$ $\gamma \to \infty$ $w = 0$

$$\rho^2(u^2 + v^2) = 1$$

θὰ παριστάνῃ περιφέρειαν κύκλου εἰς ἐπιπεδικὰς συντεταγμένας, ἥτις κεῖται ἐπὶ τοῦ τοῦ ἐπιπέδου xy, καὶ τῆς ὁποίας τὸ κέντρον εἶνε ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων, ἡ δὲ ἀκτὶς εἶνε ἴση μὲ ρ.

§ 25. Ἀναλυτικὴ παράστασις σημειοσειρᾶς καὶ ἀξονικῆς δέσμης.

Κατ᾽ ἀναλογίαν πρὸς τὴν ἐν πεδίῳ ὑπάρχουσαν ἀντιστοιχίαν μεταξὺ σημειοσειρᾶς καὶ ἐπιπέδου δέσμης ἀκτίνων ἔχομεν καὶ ἐν τῷ χώρῳ τῶν τριῶν διαστάσεων τὴν ἀντιστοιχίαν σημειοσειρᾶς καὶ ἀξονικῆς δέσμης ἐπιπέδων. Ἐν τούτοις, προκειμένου μὲν περὶ τῆς θεωρίας τῆς ἀφορώσης εἰς μίαν σημειοσειρὰν εἶνε ἀδιάφορον τὸ ἂν θεωρῇ τις αὐτὴν ἐπί τινος ἐπιπέδου ἢ ὁπουδήποτε ἐν τῷ χώρῳ τῶν τριῶν διαστάσεων, προκειμένου δὲ περὶ μιᾶς ἀξονικῆς δέσμης ἐπιπέδων, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ πραγματεία περὶ αὐτῶν εἶνε ἐντελῶς ἀνάλογος πρὸς τὴν τῆς ἐπιπέδου δέσμης ἀκτίνων.

Ἔστωσαν,

$$H_1 \equiv A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1 = 0$$
$$H_2 \equiv A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2 = 0$$

αἱ ἐξισώσεις δύο ἐπιπέδων.

Διὰ τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων τούτων διέρχεται καὶ πᾶν ἐπίπεδον, τοῦ ὁποίου ἡ ἐξίσωσις εἶνε τῆς μορφῆς

$$H_1 + \lambda\, H_2 = 0 \qquad (1)$$

ἐνῷ τὸ λ παριστάνει παράμετρόν τινα.

«*Ἡ ἐξίσωσις αὕτη παριστάνει πάντα τὰ ἐπίπεδα τῆς ἀξονικῆς δέσμης, τὰ διερχόμενα διὰ τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων* $H_1 = 0$, $H_2 = 0$».

Πράγματι, ἐπίπεδόν τι τῆς δέσμης ταύτης εἶνε ὡρισμένον, ἐὰν δοθῇ σημεῖόν τι αὐτοῦ ἐκτὸς τοῦ ἄξονος κείμενον, διὰ τοῦ ὁποίου διέρχεται. Ἐὰν M′ (x′,y′,z′) εἶνε τὸ σημεῖον τοῦτο καὶ θέσωμεν

$$H_1' \equiv A_1x' + B_1y' + \Gamma z_1' + \Delta_1,$$
$$H_2' \equiv A_2x' + B_2y' + \Gamma_2z' + \Delta_2,$$

Ἔστωσαν,

$$Q_1 \equiv A_1u + B_1v + \Gamma_1w + \Delta_1 = 0$$
$$Q_2 \equiv A_2u + B_2v + \Gamma_2w + \Delta_2 = 0$$

αἱ ἐξισώσεις δύο σημείων.

Ἐπὶ τῆς εὐθείας, τῆς συνδεούσης τὰ δύο σημεῖα, κεῖται πᾶν σημεῖον, ἔχον ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς,

$$Q_1 + \lambda\, Q_2 = 0 \qquad (1)^*$$

ἐνῷ τὸ λ παριστάνει παράμετρόν τινα.

«*Ἡ ἐξίσωσις αὕτη παριστάνει πάντα τὰ σημεῖα τῆς σημειοσειρᾶς, τῆς ὁποίας ὁ φορεὺς διέρχεται διὰ τῶν σημείων* $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$».

Πράγματι, ἓν σημεῖον τῆς σημειοσειρᾶς ταύτης εἶνε ὡρισμένον, ἐὰν δοθῇ ἐπίπεδόν τι διερχόμενον δι᾽ αὐτοῦ, οὐχὶ ὅμως καὶ διὰ τοῦ φορέως τῆς σημειοσειρᾶς. Ἐὰν (u′,v′,w′) εἶνε αἱ συντεταγμέναι τοῦ ἐπιπέδου τούτου, καὶ θέσωμεν

$$Q_1' \equiv A_1u' + B_1v' + \Gamma_1w' + \Delta_1$$
$$Q_2' \equiv A_2u' + B_2v' + \Gamma_2w' + \Delta_2$$

τὸ ἐπίπεδον (1) θὰ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τούτου, ἂν εἶνε

$$H_1' + \lambda\, H_2' = 0 \qquad (2)$$

ἐκ τῆς ὁποίας προσδιορίζεται τὸ λ.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι, δι' ἑκάστου σημείου τοῦ χώρου διέρχεται ἓν ἐπίπεδον τῆς δέσμης (1).

Ἐὰν φαντασθῶμεν τὰς ἀποστάσεις R_1, R_2 τοῦ σημείου (x', y', z') ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων

$$H_1 = 0,\ H_2 = 0,$$

θὰ ἔχωμεν

$$R_1 = \frac{A_1 x' + B_1 y' + \Gamma_1 z' + \Delta_1}{\sqrt{A^2_1 + B^2_1 + \Gamma^2_1}}$$

$$R_2 = \frac{A_2 x' + B_2 y' + \Gamma_2 z' + \Delta_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + \Gamma_2^2}}$$

(ἂν περιορισθῶμεν εἰς τὸ θετικὸν σημεῖον τοῦ ῥιζικοῦ), καὶ οὕτω εὑρίσκομεν

$$\lambda = -\frac{H_1'}{H_2'} = -\frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + \Gamma_1^2}}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + \Gamma_2^2}}$$

$$\text{ἢ } \lambda = \mu \frac{R_1}{R_2}, \qquad (3)$$

ἂν μ παριστάνῃ σταθερὰν ποσότητα ἀνεξάρτητον τῶν x', y', z'.

Οὕτω ἡ παράμετρος λ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον σταθερᾶς ἐπὶ τὸ πηλίκον τῶν ἀποστάσεων ἑνὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου, τοῦ παριστανομένου ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$H_1 + \lambda\, H_2 = 0 \qquad (1)$$

ἀπὸ τῶν δύο ἐπιπέδων $H_1 = 0, H_2 = 0$, τὰ ὁποῖα ὁρίζουν τὸν ἄξονα τῆς δέσμης. Τὸ πηλίκον τοῦτο εἶνε ἀνε-

τὸ σημεῖον (1)* θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου, ἂν εἶνε

$$Q_1' + \lambda\, Q_2' = 0, \qquad (2)^*$$

ἐκ τῆς ὁποίας προσδιορίζεται τὸ λ.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι, ἐφ' ἑκάστου ἐπιπέδου ὑπάρχει ἓν σημεῖον, παριστώμενον ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως (1)*.

Ἐὰν φαντασθῶμεν τὰς ἀποστάσεις R_1, R_2 τῶν σημείων $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου, τοῦ ἔχοντος συντεταγμένας (u', v', w'), θὰ ἔχωμεν

$$R_1 = \frac{A_1 u' + B_1 v' + \Gamma_1 w' + \Delta_1}{\Delta_1 \sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}}$$

$$R_2 = \frac{A_2 u' + B_2 v' + \Gamma_2 w' + \Delta_2}{\Delta_2 \sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}}$$

(ἂν περιορισθῶμεν εἰς τὸ θετικὸν σημεῖον τοῦ ῥιζικοῦ), καὶ οὕτω εὑρίσκομεν

$$\lambda = -\frac{Q_1'}{Q_2'} = -\frac{R_1}{R_2}\,\frac{\Delta_1}{\Delta_2},$$

$$\text{ἢ } \lambda = \mu \frac{R_1}{R_2} \qquad (3)^*$$

ἂν μ παριστάνῃ σταθερὰν ποσότητα ἀνεξάρτητον τῶν u', v', w'.

Οὕτω ἡ παράμετρος λ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον σταθερᾶς ἐπὶ τὸν λόγον τῶν ἀποστάσεων ἑνὸς ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ σημείου τοῦ παριστωμένου ὑπὸ τῆς ἐ ισώσεως

$$Q_1 + \lambda\, Q_2 = 0, \qquad (1)^*$$

ἀπὸ τῶν δύο σημείων $Q_1 = 0, Q_2 = 0$, τὰ ὁποῖα ὁρίζουν τὸν φορέα τῆς σημειοσειρᾶς. Τὸ πηλίκον τοῦτο εἶνε ξάρτητον τῆς θέσεως τοῦ σημείου x', y', z' ἐν τῷ ἐπιπέδῳ (1) ὡς εὐκόλως δεικνύεται τοῦτο γεωμετρικῶς, καὶ διὰ τοῦτο θεωροῦμεν αὐτὸ ὡς τὸν λόγον τῶν ἀποστάσεων τοῦ ἐπιπέδου (1) ἀπὸ τῶν δύο ἐπιπέδων τῶν ὁριζόντων τὸν ἄξονα τῆς δέσμης.

Εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ λόγου τῶν ἀποστάσεων ἢ τῆς παραμέτρου ἀντιστοιχεῖ ἓν ἐπίπεδον τῆς δέσμης. Διὰ $R_1=0$ ἢ $\lambda=0$ ἔχομεν τὸ ἐπίπεδον $H_1=0$, καὶ διὰ $R_2=0$ ἢ $\lambda=\infty$ τὸ ἐπίπεδον $H_2=0$. Ὅταν μὲν τὸ λ λαμβάνῃ πραγματικὰς τὰς τιμὰς ἀπὸ 0 μέχρι τοῦ $+\infty$, τὸ ἐπίπεδον (1) διαγράφει τὸ ἓν μέρος τοῦ χώρου, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν δύο ἐπιπέδων τῶν τεμνομένων κατὰ τὸν ἄξονα τῆς δέσμης. Ὅταν δὲ λαμβάνῃ τιμὰς πραγματικὰς ἀπὸ $-\infty$ μέχρι 0, τὸ (1) διαγράφει τὸ ἄλλο μέρος τοῦ χώρου.

Αἱ συντεταγμέναι τοῦ ἐπιπέδου τοῦ παριστανομένου ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως (1) εἶνε

$$u = \frac{A_1 + \lambda A_2}{\Delta_1 + \lambda \Delta_2}$$

$$v = \frac{B_1 + \lambda B_2}{\Delta_1 + \lambda \Delta_2}$$

$$w = \frac{\Gamma_1 + \lambda \Gamma_2}{\Delta_1 + \lambda \Delta_2}$$

ἀνεξάρτητον τοῦ πῶς θὰ ἀχθῇ τὸ ἐπίπεδον (u', v', w') διὰ τοῦ σημείου (1), ὡς δεικνύεται τοῦτο γεωμετρικῶς, καὶ διὰ τοῦτο θεωροῦμεν αὐτὸ ὡς τὸν λόγον τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου (1)* ἀπὸ τῶν δύο σημείων, τῶν ὁριζόντων τὸν φορέα τῆς σημειοσειρᾶς.

Εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ λόγου τῶν ἀποστάσεων ἢ τῆς παραμέτρου λ ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον τῆς σημειοσειρᾶς. Διὰ $R_1=0$ ἢ $\lambda=0$ ἔχομεν τὸ σημεῖον $Q_1=0$, καὶ διὰ $R_2=0$ ἢ $\lambda=\infty$ τὸ σημεῖον $Q_2=0$. Ὑποθέτοντες ὅτι αἱ ἀποστάσεις R_1 καὶ R_2 διὰ σημεῖόν τι, κείμενον μεταξὺ τῶν $Q_1=0$ καὶ $Q_2=0$ ἐπὶ τῆς σημειοσειρᾶς, εἶνε θετικαί, καὶ τὸ λ θετικόν, τότε τὸ σημεῖον (1)* θὰ κεῖται μεταξὺ τῶν σημείων, τῶν ὁριζόντων τὸν φορέα τῆς σημειοσειρᾶς καὶ ἐπ' αὐτῆς. Ἐὰν δὲ εἶνε τὸ λ ἀρνητικόν, τὸ σημεῖον (1)* θὰ κεῖται μὲν ἐπὶ τοῦ φορέως τούτου, ἀλλ' ἐκτὸς τοῦ τμήματος τοῦ κειμένου μεταξὺ τῶν σημείων, τῶν ὁριζόντων τὸν φορέα τῆς σημειοσειρᾶς.

Αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου, τοῦ παριστανομένου ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως (1)* εἶνε

$$x = \frac{A_1 + \lambda A_2}{\Delta_1 + \lambda \Delta_2}$$

$$y = \frac{B_1 + \lambda B_2}{\Delta_1 + \lambda \Delta_2}$$

$$z = \frac{\Gamma_1 + \lambda \Gamma_2}{\Delta_1 + \lambda \Delta_2}$$

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ (u_1, v_1, w_1) καὶ (u_2, v_2, w_2) τὰς συντεταγμένας τῶν ἐπιπέδων $H_1=0$ καὶ $H_2=0$, αἱ συντεταγμέναι τοῦ κινητοῦ ἐπιπέδου (1) εἶνε

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{u_1 + \mu u_2}{1+\mu} \\ v &= \frac{v_1 + \mu v_2}{1+\mu} \\ w &= \frac{w_1 + \mu w_2}{1+\mu} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

ὅπου εἶνε τὸ $\mu = \lambda \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}$ καὶ παριστάνει μίαν νέαν παράμετρον, εἶνε δὲ πάλιν καθὼς καὶ ἐν τῷ (3)

$$\mu = \mu' \frac{R_1}{R_2} \qquad (5)$$

ἐὰν τὸ μ΄ παριστάνῃ μίαν ποσότητα σταθεράν.

«*Αἱ ἐξισώσεις (4) δίδουν μίαν παραμετρικὴν παράστασιν τῆς ἀξονικῆς δέσμης ἐπιπέδων, ἤτοι τῶν συντεταγμένων ἑνὸς οἱουδήποτε ἐπιπέδου τῆς δέσμης, ἐκπεφρασμένων διὰ μιᾶς παραμέτρου καὶ τῶν συντεταγμένων δύο σταθερῶν ἐπιπέδων τῆς δέσμης*».

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ (x_1, y_1, z_1) καὶ (x_2, y_2, z_2) τὰς συντεταγμένας τῶν σημείων $Q_1=0$ καὶ $Q_2=0$, αἱ συντεταγμέναι τοῦ κινητοῦ σημείου $(1)^*$ εἶνε

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \mu x_2}{1+\mu} \\ y &= \frac{y_1 + \mu y_2}{1+\mu} \\ z &= \frac{z_1 + \mu z_2}{1+\mu}, \end{aligned}\right\} \quad (4)^*$$

ὅπου εἶνε τὸ $\mu = \lambda \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}$ καὶ παριστάνει μίαν νέαν παράμετρον, εἶνε δὲ καθὼς ἐν τῷ $(3)^*$

$$\mu = \mu' \frac{R_1}{R_2} \qquad (5)^*$$

ἐὰν τὸ μ΄ παριστάνῃ μίαν ποσότητα σταθεράν.

«*Αἱ ἐξισώσεις (4)* δίδουν μίαν παραμετρικὴν παράστασιν τῆς σημειοσειρᾶς (θεωρουμένης ἐν τῷ χώρῳ τῶν τριῶν διαστάσεων καὶ ὁριζομένης διὰ δύο σημείων αὐτῆς), ἤτοι τῶν συντεταγμένων ἑνὸς οἱουδήποτε σημείου τῆς σημειοσειρᾶς, ἐκπεφρασμένων διὰ μιᾶς παραμέτρου καὶ τῶν συντεταγμένων δύο σταθερῶν σημείων αὐτῆς*».

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔχομεν ὅτι,

«*πάντα τὰ ἐπίπεδα*

$$H_1 + \lambda H_2 = 0$$

ἀποτελοῦν μίαν ἀξονικὴν δέσμην ἐπιπέδων μὲ ∞ ἐπίπεδα, ἕκαστον τῶν ὁποίων διέρχεται διὰ τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων $H_1=0$, $H_2=0$».

«*πάντα τὰ σημεῖα*

$$Q_1 + \lambda Q_2 = 0$$

ἀποτελοῦν μίαν σημειοσειρὰν μὲ ∞ σημεῖα, ἕκαστον τῶν ὁποίων κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας, τὴν ὁποίαν ὁρίζουν τὰ σημεῖα $Q_1=0$, $Q_2=0$».

Ἐπὶ πλέον παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς.

Πάντα τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα παριστάνει ἡ ἐξίσωσις

$$H_1 + \lambda_2 H_2 + \lambda_3 H_3 = 0$$

ἐνῷ τὰ H_1, H_2, H_3 εἶνε πολυώνυμα πρωτοβάθμια ὡς πρὸς x, y, z καὶ τὰ λ_2, λ_3 παριστάνουν παραμέτρους, σχηματίζουν μίαν κεντρικὴν δέσμην ἀπὸ ∞^2 ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διέρχονται διὰ τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων (κέντρου τῆς δέσμης)

$$H_1 = 0,\ H_2 = 0,\ H_3 = 0.$$

Τρία διάφορα ἐπίπεδα

$$H_1 = 0,\ H_2 = 0,\ H_3 = 0,$$

διέρχονται τότε μόνον διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἐὰν διὰ τρεῖς πεπερασμένους ἀριθμούς, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (καὶ διαφόρους τοῦ μηδενὸς) ἔχωμεν τὴν ταυτότητα

$$\lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 + \lambda_3 H_3 \equiv 0.$$

Πάντα τὰ σημεῖα τὰ ὁποῖα παριστάνει ἡ ἐξίσωσις

$$Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \lambda_3 Q_3 = 0$$

ἐνῶ τὰ Q_1, Q_2, Q_3 εἶνε πρωτοβάθμια πολυώνυμα ὡς πρὸς u, v, w καὶ τὰ λ_2, λ_3 παριστάνουν παραμέτρους, σχηματίζουν ἓν πεδίον ἀπὸ ∞^2 σημεῖα, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῶν σημείων

$$Q_1 = 0,\ Q_2 = 0,\ Q_3 = 0.$$

Τρία διάφορα σημεῖα

$$Q_1 = 0,\ Q_2 = 0,\ Q_3 = 0$$

κεῖνται τότε μόνον ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἐὰν διὰ τρεῖς πεπερασμένους ἀριθμοὺς $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (καὶ διαφόρους τοῦ μηδενὸς) ἔχωμεν τὴν ταὐτότητα

$$\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \lambda_3 Q_3 \equiv 0.$$

Συμφώνως πρὸς τὴν ἀρχὴν τοῦ δυασμοῦ ἔχομεν καὶ τὴν ἑξῆς ἀντιστοιχίαν κανονικῶν στερεῶν σωμάτων. Εἰς τὸ *τετράεδρον* ἀντιστοιχεῖ *τὸ τετρακόρυφον*· εἰς *τὸ ὀκτάεδρον* (ἔχον 8 ἕδρας, 6 κορυφὰς καὶ 12 ἀκμὰς) ἀντιστοιχεῖ *τὸ ὀκτακόρυφον* (ἔχον 6 ἕδρας, 8 κορυφὰς καὶ 12 ἀκμάς)· εἰς *τὸ εἰκοσάεδρον* (ἔχον 20 ἕδρας, 12 κορυφὰς καὶ 30 ἀκμὰς) ἀντιστοιχεῖ *τὸ εἰκοσακόρυφον* (ἔχον 12 ἕδρας, 20 κορυφὰς καὶ 30 ἀκμάς).

Ἄσκησις.

Ἐπὶ τινος εὐθείας k λάβετε τρία σημεῖα ἔστω τὰ 1, 3, 5, καὶ ἐπὶ ἄλλης k′ τρία ἄλλα, ἔστω τὰ 2, 4, 6, τὰ ὁποῖα οὕτω ὁρίζουν τὸ ἁπλοῦν ἑξακόρυφον 1234561. Δείξατε ὅτι, αἱ τομαὶ τῶν τριῶν ζευγῶν τῶν εὐθειῶν (12, 45), (23,56), (34, 61) κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ἂν $H=0$, $H'=0$ $A=0$ εἶνε αἱ ἐξισώσεις τῶν k, k′ καὶ (12), δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὰ H καὶ H′ οὕτως, ὥστε αἱ ἐξισώσεις τῶν (23) καὶ (61) νὰ εἶνε $A+H'=0$, $A+H=0$, αἱ δι' ἐξισώσεις τῶν (34) καὶ (56) θὰ εἶνε $A+H'+\beta H=0$, $A+H+\beta' H'=0$. Διὰ τὴν (45) ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις $A+\beta H+\gamma H'=0$, $A+\beta' H'+\gamma' H=0$· ἄρα θὰ εἶνε $\beta'=\gamma$, $\gamma'=\beta$. Θέτομεν τὴν ἐξίσωσιν εὐθείας διαφόρου τῶν k,k′ καὶ (12) ὑπὸ τὴν μορφὴν $A+\lambda H+\mu H'=0$. Ὁρίζομεν τὰ λ καὶ μ, ὥστε αὕτη νὰ διέρχεται διὰ τῆς τομῆς τῶν (23), (45) καὶ (34), (61)· πρέπει λοιπὸν διὰ νὰ ἐπαληθεύεται ἡ $A+\lambda H+\mu H'=0$ καὶ αἱ ἐξισώσεις τῶν (23) καὶ (45), καθὼς καὶ αἱ τῶν (34), (61), νὰ ἔχωμεν $\lambda(1-\beta')+\mu=1$· $\lambda+\mu(1-\beta)=1$, ἐξ' ἧς ἕπεται $\lambda\beta'-\mu\beta=0$. Ἤτοι ἐπὶ τῆς εὐθείας $A+\lambda H+\mu H'=0$ κεῖται ἡ τομὴ τῶν (12) καὶ (45).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III.

Περὶ προβολικῶν σχηματισμῶν πρώτης βαθμῖδος.

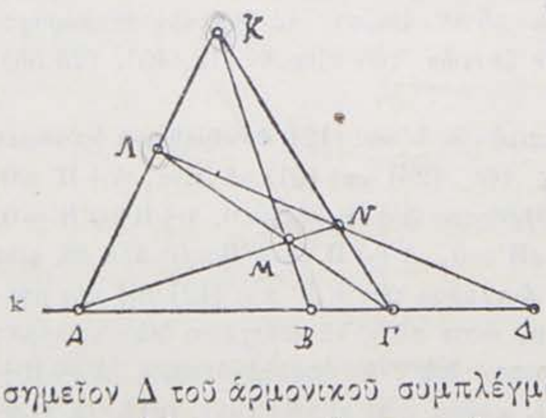
§ 26. Ἁρμονικὰ συμπλέγματα ἐκ τεσσάρων σημείων ἢ ἐπιπέδων.

Μία τετρὰς σημείων Α, Β, Γ, Δ εὐθείας τινὸς k λέγεται *ἁρμονικὴ* καὶ τὰ σημεῖα ταῦτα *ἁρμονικὰ* ἢ ὅτι ἀποτελοῦν ἁρμονικὸν σύμπλεγμα παριστανόμενον διὰ τοῦ (ΑΒΓΔ), ἐὰν ὑπάρχῃ ἓν πλῆρες τετρακόρυφον ΚΛΜΝ, κείμενον ἐπὶ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῆς εὐθείας καὶ ἔχον τὰς κορυφὰς αὐτοῦ ἐκτὸς ταύτης τοιοῦτον,ὥστε δύο πλευραὶ τούτου νὰ διέρχωνται διὰ τοῦ Α, δύο ἄλλαι διὰ τοῦ Γ, ἀνὰ μία δὲ τῶν δύο ἄλλων διὰ τοῦ Β καὶ Δ ἀντιστοίχως.

Δοθέντων τριῶν σημείων Α, Β, Γ μιᾶς εὐθείας k, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἐπ' αὐτῆς ἓν ἁρμονικὸν σύμπλεγμα (ΑΒΓΔ) ἐκ σημείων.

Πράγματι, ἂν ἐπὶ τυχόντος ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῆς k, φέρωμεν τρεῖς εὐθείας (διαφόρους τῆς k) σχηματιζούσας ἓν τρίπλευρον μὲ κορυφὰς τὰ σημεῖα Κ, Λ, Μ, ἐνῷ αἱ πλευραὶ τούτου αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν Μ, Λ, Κ διέρχονται διὰ τῶν Α, Β καὶ Γ, εὕρωμεν δ' ἀκολούθως τὴν τομὴν Ν τῶν εὐθειῶν Κ Γ καὶ Α Μ, ἔχομεν ἓν πλῆρες τετρακόρυφον Κ Λ Μ Ν. Τούτου αἱ δύο πλευραί, αἱ Κ Λ καὶ Ν Μ διέρχονται διὰ τοῦ σημείου Α, δύο ἄλλαι, αἱ Λ Μ καὶ Κ Ν, διὰ τοῦ Γ, ἡ Κ Μ διὰ τοῦ Β, καὶ ἡ τετάρτη αὐτοῦ πλευρὰ Λ Ν τέμνει τὴν k εἰς ἓν σημεῖον, ἔστω τὸ Δ. Οὕτω τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ εἶνε ἁρμονικά.

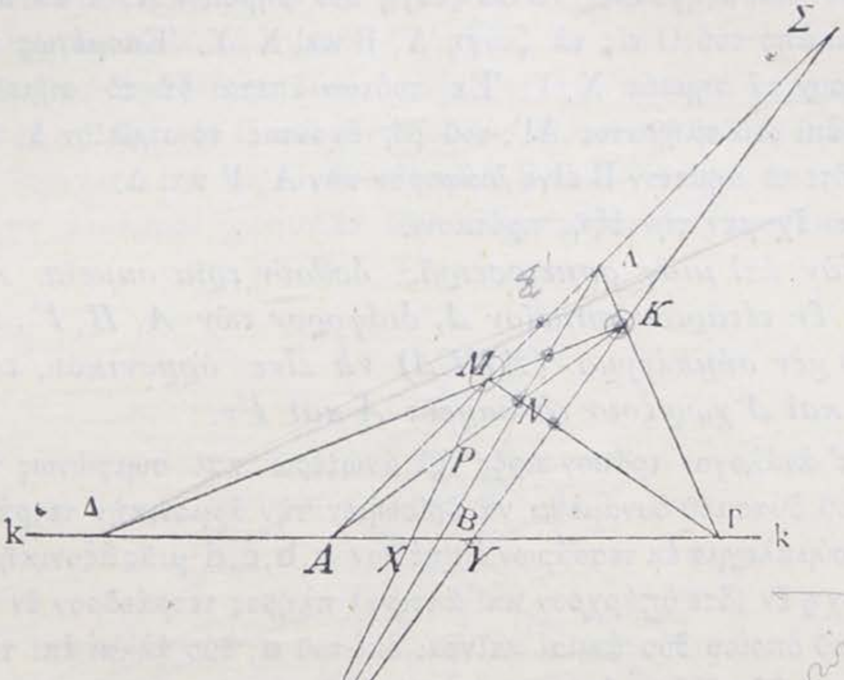
Παρατηρητέον ὅτι δυνάμεθα, ὡς προκύπτει ἐκ τῆς ἀνωτέρω κατασκευῆς, νὰ κατασκευάσωμεν κατ' ἀπείρους τρόπους τοιαῦτα πλήρη τετρακόρυφα ΚΛΜΝ, τῶν ὁποίων δύο πλευραὶ διέρχονται διὰ τοῦ Α, δύο ἄλλαι διὰ τοῦ Γ καὶ μία ἀκόμη διὰ τοῦ Β. Ἐν τούτοις πάντα τὰ οὕτω κατασκευαζόμενα πλήρη τετρακόρυφα ὁρίζουν ἓν καὶ μόνον τέταρτον



σημεῖον Δ τοῦ ἁρμονικοῦ συμπλέγματος τῶν Α, Β, Γ, Δ. Διότι πάντα τὰ τοιαῦτα πλήρη τετρακόρυφα, κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἢ μή, δύνανται νὰ συσχετισθοῦν οὕτω μεταξύ των, ὥστε διὰ δύο τυχόντα τούτων τὰ πέντε ζεύγη τῶν ὁμολόγων πλευρῶν αὐτῶν νὰ τέμνωνται εἰς τὰ σημεῖα Α, Β καὶ Γ τῆς εὐθείας k. Ἀλλ᾽ οὕτω καὶ τὸ ἕκτον ζεῦγος τῶν πλευρῶν αὐτῶν τέμνεται ἐπὶ τῆς k καὶ ὁρίζεται τὸ σημεῖον Δ καθ᾽ ἕνα μόνον τρόπον.

Ἐὰν τρία σημεῖα Α, Β, Γ μιᾶς εὐθείας k δίδωνται κατὰ τὴν σειρὰν ταύτην ἐπ᾽ αὐτῆς, ὑπάρχει ἓν μόνον σημεῖον Δ, ἀποτελοῦν μετ᾽ αὐτῶν ἁρμονικὸν σύμπλεγμα σημείων (Α Β Γ Δ)· τὸ σημεῖον τοῦτο Δ λέγεται καὶ *τέταρτον ἁρμονικὸν* σημεῖον τῶν Α, Β, Γ.

Θὰ δείξωμεν τώρα ὅτι, δοθέντων τριῶν σημείων μιᾶς εὐθείας k, ἔστω τῶν Α,Γ,Δ τοῦ ἁρμονικοῦ συμπλέγματος (ΑΒΓΔ), τὸ σημεῖον Β εἶνε πράγματι ἓν τέταρτον σημεῖον, διάφορον τῶν Α,Γ,Δ τῆς εὐθείας k, προσέτι δὲ ὅτι τὸ σημεῖον Β μετὰ τοῦ Δ χωρίζουν τὰ σημεῖα Α καὶ Γ ἀπ᾽ ἀλλήλων.



Ἔστω ΚΛΜΝ ἓν τῶν πλήρων τετρακορύφων τῆς ἁρμονικῆς τετράδος ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ΛΜ καὶ ΚΝ διέρχονται διὰ τοῦ Α, αἱ ΜΝ καὶ ΛΚ διὰ τοῦ Γ, ἡ ΛΝ διὰ τοῦ Β καὶ ἡ ΜΚ διὰ τοῦ Δ. Ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΛ λαμβάνομεν ἓν σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον μετὰ τοῦ Μ νὰ χωρίζῃ τὰ Α καὶ Λ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΔΣ (τὴν ὁποίαν ὁρίζουν τὰ σημεῖα Δ καὶ Σ) νὰ μὴ διέρχεται διὰ τοῦ ἁπλοῦ τετρακορύφου ΚΛΜΝ. Εὑρίσκομεν τὴν τομὴν τῶν εὐθειῶν ΛΝ καὶ ΣΚ, ἔστω δ᾽ αὐτὴ Ο. Ἔστωσαν Χ, Β καὶ Υ αἱ προβολαὶ τῶν σημείων Μ, Λ καὶ Σ ἐπὶ τῆς εὐθείας k ἀπὸ τοῦ Ο, πρὸς δὲ ἔστω Ρ ἡ προβολὴ τοῦ Μ ἐπὶ τῆς Ν Κ ἀπὸ τοῦ Ο. Παρατηροῦμεν τώρα, ὅτι τὰ χωριζόμενα ζεύγη σημείων Α, Λ καὶ Μ, Σ προβάλλονται ἀπὸ τοῦ σημείου Κ ἐπὶ τῆς εὐθείας k εἰς τὰ ζεύγη Α, Γ καὶ Δ, Υ. Ἑπομένως καὶ τὰ ζεύγη ταῦτα τῶν σημείων χωρίζονται ἀπ' ἀλλήλων. Ἐπίσης εὑρίσκομεν ὅτι καὶ τὰ ζεύγη τῶν σημείων Α, Γ καὶ Χ, Δ, πρέπει νὰ χωρίζωνται. Διότι προκύπτουν ἐκ τῶν Α, Λ καὶ Μ, Σ διὰ δύο διαδοχικῶν προβολῶν (διὰ μιᾶς μὲν ἀπὸ τοῦ Ο, διὰ τῆς ὁποίας ἐκ τῶν Α, Λ καὶ Μ, Σ λαμβάνομεν τὰ Α, Ν, καὶ Ρ, Κ, δι' ἄλλης δὲ ἀπὸ τοῦ σημείου Μ, διὰ τῆς ὁποίας ἐκ τῶν Α,Ν καὶ Ρ,Κ λαμβάνομεν τὰ Α,Γ καὶ Χ,Δ). Ἀλλὰ γνωρίζομεν οὕτω, ὅτι τὰ δύο σημεῖα Χ καὶ Υ κεῖνται ἐπὶ τοῦ τμήματος ΑΓ, τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει τὸ σημεῖον Δ. Θὰ δείξωμεν ὅτι καὶ τὸ σημεῖον Β κεῖται ἐπὶ τοῦ τμήματος τούτου, καὶ μάλιστα μεταξὺ τῶν σημείων Χ καὶ Υ. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι τὰ ζεύγη τῶν σημείων Α, Λ καὶ Μ, Σ προβάλλονται ἀπὸ τοῦ Ο εἰς τὰ ζεύγη Α, Β καὶ Χ, Υ. Ἑπομένως τὰ Α καὶ Β χωρίζουν τὰ σημεῖα Χ, Υ. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον Β εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ τμήματος ΑΓ, τοῦ μὴ ἔχοντος τὸ σημεῖον Δ, καὶ οὕτω ἐδείχθη ὅτι τὸ σημεῖον Β εἶνε διάφορον τῶν Α, Γ καὶ Δ.

Οὕτω ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«*Ἐὰν ἐπὶ μιᾶς σημειοσειρᾶς δοθοῦν τρία σημεῖα Α, Β, Γ, ὑπάρχει ἓν τέταρτον σημεῖον Δ, διάφορον τῶν Α, Β, Γ, τοιοῦτον ὥστε, τὸ μὲν σύμπλεγμα (ΑΒΓΔ) νὰ εἶνε ἁρμονικόν, τὰ δὲ σημεῖα Β καὶ Δ χωρίζουν τὰ σημεῖα Α καὶ Γ*».

Κατ' ἀνάλογον τρόπον πρὸς τὰ ἀνωτέρω καὶ συμφώνως πρὸς τὴν ἀρχὴν τοῦ δυασμοῦ δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὴν ἁρμονικὴν τετράδα ἢ ἁρμονικὸν σύμπλεγμα ἐκ τεσσάρων ἐπιπέδων **a**, **b**, **c**, **d** μιᾶς ἀξονικῆς δέσμης, ἐὰν ὑπάρχῃ ἓν (ὅτε ὑπάρχουν καὶ ἄπειρα) πλῆρες τετράεδρον ἐν κεντρικῇ δέσμῃ, τοῦ ὁποίου δύο ἀκμαὶ κεῖνται ἐπὶ τοῦ **a**, δύο ἄλλαι ἐπὶ τοῦ **c**, καὶ ἀνὰ μία τῶν δύο ἄλλων ἐπὶ τοῦ **b** καὶ **d** ἀντιστοίχως.

Ὁμοίως, ὡς ἀνωτέρω, ἀποδεικνύομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

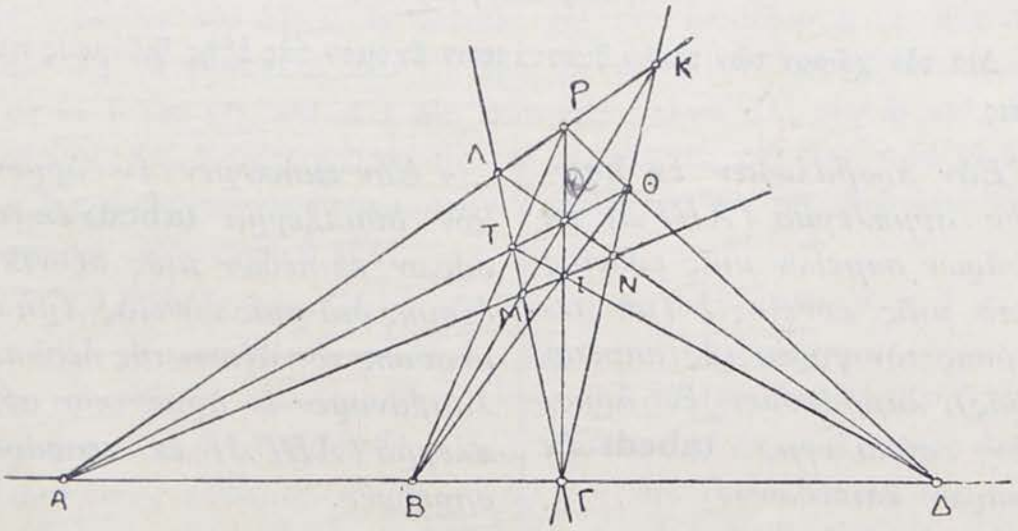
«*Ἐὰν δοθοῦν τρία ἐπίπεδα* **a**, **b**, **c** *μιᾶς κεντρικῆς δέσμης, ὑπάρχει ἓν τέταρτον ἐπίπεδον αὐτῆς* **d**, *τὸ ὁποῖον μετὰ τῶν δοθέντων ἀποτελεῖ ἁρμονικὸν σύμπλεγμα ἐπιπέδων, καὶ τὸ ὁποῖον μετὰ τοῦ* **b** *χωρίζουν τὰ* **a** *καὶ* **c**».

Ἐὰν τέσσαρα σημεῖα Α,Β,Γ,Δ (ἢ τέσσαρα ἐπίπεδα **a**,**b**,**c**,**d**) ἀποτελοῦν ἁρμονικὸν σύμπλεγμα, δυνάμεθα νὰ ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν στοιχείων Α καὶ Γ (ἢ τῶν **a** καὶ **c**) ἢ καὶ τῶν Β καὶ Δ (ἢ καὶ τῶν **b** καὶ **d**). Διότι διὰ μὲν τῶν Α καὶ Γ (ἢ ἐπὶ τῶν **a** καὶ **c**) διέρχονται (ἢ κεῖνται) δύο πλευραὶ (ἢ δύο ἀκμαὶ) τοῦ θεωρουμένου πλήρους τετρακορύφου (ἢ τετραέδρου), διὰ δὲ τῶν Β καὶ Δ (ἢ ἐπὶ καὶ τῶν **b** καὶ **d**) διέρχεται (ἢ κεῖται) ἀνὰ μία τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν (ἢ ἀκμῶν) τοῦ τετρακορύφου (ἢ τετραέδρου) καὶ μετὰ τὴν ἐναλλαγὴν τῶν στοιχείων τούτων Α καὶ Γ (ἢ **a** καὶ **c**) ἢ καὶ τῶν Β καὶ Δ (ἢ τῶν **b** καὶ **d**) μεταξύ των. Ἐπομένως,

«Ἐὰν ἡ τετρὰς (ΑΒΓΔ) εἶνε ἁρμονική, θὰ εἶνε ἁρμονικαὶ καὶ αἱ (ΓΒΑΔ), (ΑΔΓΒ) καὶ (ΓΔΑΒ)».

Θὰ δείξωμεν τώρα ὅτι καὶ αἱ τετράδες τῶν σημείων (ΒΓΔΑ), (ΔΑΒΓ), (ΔΓΒΑ) καὶ (ΒΑΔΓ) εἶνε ἐπίσης ἁρμονικαί, ἐὰν ἡ (ΑΒΓΔ) εἶνε ἁρμονική.

Πράγματι ἔστω ὅτι τὰ Α,Β,Γ,Δ εἶνε ἁρμονικὰ καὶ ΚΛΜΝ τὸ πλῆρες τετρακόρυφον, τοῦ ὁποίου δύο πλευραὶ διέρχονται διὰ τοῦ Α, δύο διὰ τοῦ Γ, καὶ ἀνὰ μία διὰ τῶν Β καὶ Δ ἀντιστοίχως. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΤΘ, τὴν συνδέουσαν τὸ σημεῖον Α μὲ τὴν τομὴν τῶν εὐθειῶν ΚΒ καὶ ΔΛ, καὶ κατ' ἀνάλογον τρόπον τὴν ΓΙΡ. Οὕτω ἔχομεν ἓν πλῆρες τετρακόρυφον μὲ κορυφὰς αὐτοῦ τὰ σημεῖα Ρ,Λ,Τ ἀφ' ἑνὸς καὶ τὴν τομὴν τῶν εὐθειῶν ΚΒ καὶ ΔΛ ἀφ' ἑτέρου. Τούτου δύο ἀπέναντι πλευραὶ διέρχονται διὰ τοῦ Α, δύο ἄλλαι διὰ τοῦ Γ, καὶ μία τῶν δύο ἄλλων διὰ τοῦ Δ· ἄρα καὶ ἡ εὐθεῖα ΡΤ διέρχεται διὰ τοῦ Β, ἐπειδὴ τὰ Α,Β,Γ,Δ εἶνε ἁρμονικά, ἐξ ὑποθέσεως. Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐκ τῶν πλήρων τετρακορύφων τῶν ἐχόν-



των τρεῖς μὲν κορυφὰς τὰ σημεῖα Τ,Μ,Ι τὸ ἕν, Ι,Ν,Θ τὸ ἄλλο, καὶ Ρ,Κ,Θ τὸ τρίτον, τετάρτην δὲ κορυφὴν τὴν τομὴν τῶν εὐθειῶν ΚΒ καὶ ΔΛ, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΤΙ διέρχεται διὰ τοῦ Δ, ἡ ΘΙ διέρχεται διὰ τοῦ Β, καὶ ἡ ΡΘ διὰ τοῦ Δ. Ἀλλ' οὕτω ἔχομεν τὸ πλῆρες τετρακόρυφον, τὸ ἔχον κορυφὰς τὰ σημεῖα Ρ,Τ,Ι,Θ, καὶ τοῦ ὁποίου δύο πλευραὶ διέρχονται διὰ τοῦ σημείου Β, δύο ἄλλαι διὰ τοῦ Δ, ἀνὰ μία δὲ τῶν ἄλλων διὰ τῶν Α καὶ Β ἀντιστοίχως. Ἄρα ἡ τετρὰς τῶν σημείων Β,Γ,Δ,Α εἶνε ἁρμονική. Δι' ἐναλλαγῆς τῶν Β,Δ καὶ Γ,Α ἔχομεν ὅτι καὶ τὰ συμπλέγματα (ΔΓΒΑ), (ΒΑΔΓ), καὶ (ΔΑΒΓ) εἶνε ἐπίσης ἁρμονικά. Οὕτω ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«*Ἐὰν ἐπ' εὐθείας (ἢ ἐπὶ ἀξονικῆς δέσμης) τέσσαρα σημεῖα (ἢ τέσσαρα ἐπίπεδα) Α,Β,Γ,Δ ἀποτελοῦν ἁρμονικὸν σύμπλεγμα, τότε καὶ τὰ συμπλέγματα (ΓΒΑΔ), (ΑΔΓΒ), (ΓΔΑΒ), (ΒΓΔΑ), (ΔΓΒΑ), (ΒΑΔΓ), (ΔΑΒΓ) εἶνε ἐπίσης ἁρμονικά*».

Αἱ ἄλλαι 16 τετράδες, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς ἄλλας μεταθέσεις τῶν στοιχείων Α,Β,Γ,Δ δὲν εἶνε ἁρμονικαί. Π. χ. ἡ τετρὰς ΑΔΒΓ δὲν εἶνε ἁρμονική, διότι ἐν αὐτῇ τὰ σημεῖα Α,Β καὶ Δ,Γ δὲν χωρίζονται ἀπ' ἀλλήλων τὰ μὲν διὰ τῶν δέ.

Οὕτω ἡ ἰδιότης τοῦ νὰ εἶνε μία τετρὰς Α,Β,Γ,Δ ἁρμονικὴ δύναται νὰ ἐκφρασθῇ διὰ τοῦ ὅτι τὰ σημεῖα Α,Γ καὶ τὰ Β,Δ (ἢ τὰ Γ,Α καὶ Δ,Β) χωρίζονται τὰ μὲν διὰ τῶν δέ, καὶ λέγομεν τότε ὅτι ταῦτα χωρίζονται ἁρμονικῶς, καλοῦνται δὲ τὰ Α,Γ καὶ Β,Δ *ἁρμονικὰ συζυγῆ σημεῖα.*

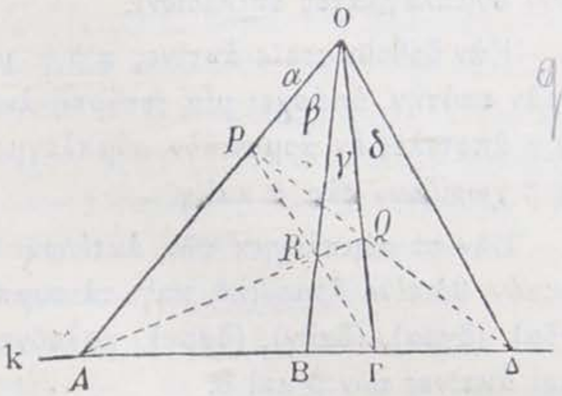
§ 27. Ἁρμονικὰ συμπλέγματα ἐκ τεσσάρων ἀκτίνων μιᾶς δέσμης.

Διὰ τὸν χῶρον τῶν τριῶν διαστάσεων ἔχομεν τὰς ἑξῆς διδύμους προτάσεις.

«*Ἐὰν προβάλωμεν ἓν ἁρμονικὸν σύμπλεγμα (ΑΒΓΔ) ἐκ τεσσάρων σημείων μιᾶς εὐθείας* k *ἀπὸ μιᾶς εὐθείας* ξ *(μὴ τεμνούσης τὸν φορέα τῆς σημειοσειρᾶς), λαμβάνομεν ἓν ἁρμονικὸν σύμπλεγμα* **(abcd)** *ἐκ τεσσάρων ἐπιπέδων*».	«*Ἐὰν τμήσωμεν ἓν ἁρμονικὸν σύμπλεγμα* **(abcd)** *ἐκ τεσσάρων ἐπιπέδων μιᾶς ἀξονικῆς δέσμης διὰ μιᾶς εὐθείας (μὴ τεμνούσης τὸν ἄξονα τῆς δέσμης), λαμβάνομεν ἓν ἁρμονικὸν σύμπλεγμα (ΑΒΓΔ) ἐκ τεσσάρων σημείων*».

Ἀποδεικνύομεν μόνον τὴν ἀριστερὰ ἀναγραφομένην πρότασιν καὶ ἐξ αὐτῆς συνάγομεν τὴν ἀπόδειξιν καὶ τῆς ἀντιστοίχου αὐτῆς πρὸς τὰ δεξιά.

Πρὸς τοῦτο, τέμνομεν τὸ σύμπλεγμα **(abcd)** τῶν ἐπιπέδων δι' ἑνὸς ἐπιπέδου, διερχομένου διὰ τοῦ φορέως k τῆς σημειοσειρᾶς. Τοῦτο τέμνει τὸν ἄξονα ξ τῆς ἀξονικῆς δέσμης, ἔστω εἰς τὸ σημεῖον Ο, τὰ δὲ ἐπίπεδα κατὰ εὐθείας α, β, γ, δ, αἵτινες εἶνε ἀκτῖνες ἐπιπέδου δέσμης, ἐχούσης κέντρον τὸ O καὶ ἡ ὁποία ἔχει προοπτικὴν θέσιν πρὸς τὴν σημειοσειρὰν k (Α, Β, Γ, Δ, ..). Ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος β λαμβάνομεν ἓν σημεῖον R (κείμενον ἐκτὸς τῆς k) καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας A R καὶ Γ R, αἵτινες τέμνουν τὰς ἀκτῖνας α καὶ γ ἔστω εἰς τὰ σημεῖα P καὶ Q ἀντιστοίχως. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα P Q διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Δ, ἐπειδὴ τὸ P Q R O εἶνε πλῆρες τετρακόρυφον, ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ ἁρμονικὸν σύμπλεγμα (ΑΒΓΔ). Θεωροῦμεν τώρα τὸ πλῆρες τετράπλευρον, τὸ ἔχον πλευρὰς τὰς εὐθείας A R Q, Γ R P, Δ Q P, καὶ k.



Ἐκ τῶν κορυφῶν τούτου αἱ A καὶ P κεῖνται ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος α, αἱ Γ καὶ Q ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος γ, αἱ δὲ R καὶ Δ ἐπὶ τῶν β καὶ δ ἀντιστοίχως. Ἑπομένως, ἂν προβάλωμεν τὸ πλῆρες τετράπλευρον ἀπό τινος σημείου τοῦ ἄξονος ξ τῆς ἀξονικῆς δέσμης, θὰ ἔχωμεν ἓν πλῆρες τετράεδρον, τοῦ ὁποίου δύο ἀκμαὶ θὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου **a** (αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰ σημεῖα A καὶ P), δύο ἄλλαι ἐπὶ τοῦ **c** (αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰ Γ και Q), καὶ ἀνὰ μία τῶν δύο ἄλλων ἐπὶ τῶν **b** καὶ **d** ἀντιστοίχως (αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰ σημεῖα R καὶ Δ). Ἄρα τὰ ἐπίπεδα **a**,**b**,**c**,**d** ἀποτελοῦν ἓν ἁρμονικὸν σύμπλεγμα. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δύο προτάσεων προκύπτει ἡ ἑξῆς.

«*Ἐὰν ἓν σύμπλεγμα ἐκ τεσσάρων ἀκτίνων α, β, γ, δ μιᾶς ἐπιπέδου δέσμης τμηθῇ κατὰ ἓν ἁρμονικὸν σύμπλεγμα σημείων ὑπό τινος εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς (μὴ διερχομένης διὰ τοῦ κέντρου ταύτης), ἢ ἂν προβληθῇ δ' ἑνὸς ἁρμονικοῦ συμπλέγματος ἐπιπέδων ἀπό τινος εὐθείας, διερχομένης μὲν διὰ τοῦ κέντρου τῆς δέσμης, ἀλλὰ κειμένης ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς, τότε τὸ σύμπλεγμα θὰ προβάλλεται δι' ἁρμονικοῦ συμπλέγματος ἐπιπέδων ἀπὸ πάσης εὐθείας, διερχομένης διὰ τοῦ κέντρου τῆς δέσμης, ἀλλὰ μὴ ἀνηκούσης εἰς αὐτήν, καὶ θὰ τέμνεται κατὰ ἁρμονικὸν σύμπλεγμα σημείων ὑπὸ πάσης εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου τῆς δέσμης, μὴ διερχομένης διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς.*

Λέγομεν ὅτι τέσσαρες ἀκτῖνες α,β,γ,δ μιᾶς ἐπιπέδου δέσμης ἀποτελοῦν *ἁρμονικὸν σύμπλεγμα ἀκτίνων* (αβγδ), ἐὰν πληροῦν τὴν ανωτέρω συνθήκην (ήτοι ἂν τέμνωνται ὑπὸ τυχούσης εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου τῆς δέσμης, μὴ διερχομένης διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς, κατὰ ἁρμονικὸν σύμπλεγμα σημείων, ἢ ἂν προβάλλωνται ἀπό τινος εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς, ἀλλὰ μὴ κειμένης ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ταύτης, διὰ ἁρμονικοῦ συμπλέγματος ἐπιπέδων).

Ἐὰν δοθοῦν τρεῖς ἀκτῖνες α,β,γ μιᾶς ἐπιπέδου δέσμης κατὰ τὴν σειρὰν ταύτην, ὑπάρχει μία τετάρτη ἀκτὶς δ τῆς δέσμης, ἥτις μετὰ τῶν α,β,γ ἀποτελεῖ ἓν ἁρμονικὸν σύμπλεγμα ἀκτίνων (αβγδ), αὕτη δὲ μετὰ τῆς β χωρίζουν τὰς α καὶ γ.

Ἐὰν τὸ σύμπλεγμα τῶν ἀκτίνων (αβγδ) ἐπιπέδου δέσμης εἶνε ἁρμονικόν, θὰ εἶνε ἁρμονικὰ καὶ τὰ συμπλέγματα (γβαδ), (αδγβ), (γδαβ), (βγδα), (δγβα), (βαδγ), (δαβγ), καλοῦνται δὲ αἱ α καὶ γ συζυγεῖς ἁρμονικαὶ ἀκτῖνες τῶν β καὶ δ.

Ἐπειδὴ ἓν ἁρμονικὸν σύμπλεγμα ἀκτίνων ἐπιπέδου δέσμης δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τομὴ ἑνὸς ἁρμονικοῦ συμπλέγματος ἐπιπέδων ἀξονικῆς δέσμης, ἢ ὡς προβολὴ ἑνὸς ἁρμονικοῦ συμπλέγματος σημείων, ἔχομεν τὰς ἑξῆς διδύμους προτάσεις.

«Ἐὰν ἓν σύμπλεγμα ἐκ τεσσάρων ἀκτίνων (αβγδ) ἐπιπέδου δέσμης εἶνε ἁρμονικόν, ὑπάρχουν ἄπειρα τετράπλευρα (ὁρίζοντα τὸ ἁρμονικὸν σύμπλεγμα), τῶν ὁποίων δύο κορυφαὶ κεῖνται ἐπὶ τῆς α, δύο ἄλλαι ἐπὶ τῆς γ, καὶ ἀνὰ ~~δύο~~ μία τῶν δύο ἄλλων ἐπὶ τῆς β καὶ δ. Ἀντιστρόφως· ἐὰν ὑπάρχῃ ἓν τοιοῦτον τετράπλευρον, τὸ σύμπλεγμα (αβγδ) εἶνε ἁρμονικόν, καὶ παντὸς ἄλλου τετραπλεύρου, τοῦ ὁποίου δύο κορυφαὶ κεῖνται ἐπὶ τῆς α, δύο ἄλλαι ἐπὶ τῆς γ καὶ μία ἐπὶ τῆς β, ἡ τετάρτη κορυφὴ κεῖται ἐπὶ τῆς δ».

«Ἐὰν ἓν σύμπλεγμα ἐκ τεσσάρων ἀκτίνων (αβγδ) μιᾶς δέσμης εἶνε ἁρμονικόν, ὑπάρχουν ἄπειρα τετράακμα (ὁρίζοντα τὸ ἁρμονικὸν σύμπλεγμα), τῶν ὁποίων δύο ἕδραι διέρχονται διὰ τῆς α, δύο ἄλλαι διὰ τῆς γ, καὶ ἀνὰ μία τῶν δύο ἄλλων διὰ τῆς β καὶ δ. Ἀντιστρόφως· ἐὰν ὑπάρχῃ ἓν τοιοῦτον τετράακμον, τὸ σύμπλεγμα (αβγδ) εἶνε ἁρμονικόν, καὶ παντὸς ἄλλου τετραάκμου, τοῦ ὁποίου δύο ἕδραι διέρχονται διὰ τῆς α, δύο ἄλλαι διὰ τῆς γ, καὶ μία διὰ τῆς β, ἡ τετάρτη ἕδρα διέρχεται διὰ τῆς δ».

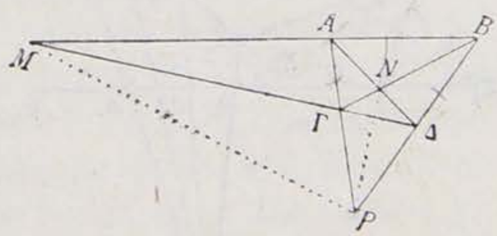
Ἡ ἀπόδειξις τοῦ πρώτου μέρους τῆς ἀριστερὰ ἀναγραφομένης προτάσεως προκύπτει ἀμέσως ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἑνὸς ἁρμονικοῦ συμπλέγματος ἀκτίνων ἐπιπέδου δέσμης, θεωρουμένης ὡς τομῆς ἑνὸς συμπλέγματος ἁρμονικῶν ἐπιπέδων, ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν τομὴν τοῦ τετραέδρου ἐν τῇ κεντρικῇ δέσμῃ, τοῦ ὁρίζοντος τὸ ἁρμονικὸν σύμπλεγμα τῶν ἐπιπέδων. Τὸ δεύτερον μέρος τῆς αὐτῆς προτάσεως προκύπτει εἴτε ἂν προβάλωμεν ἓν τῶν τετραπλεύρων, τῶν ὁριζόντων τὸ ἁρμονικὸν σύμπλεγμα τῶν ἀκτίνων, ἢ ἐὰν ἀκολουθήσωμεν πορείαν ἀνάλογον πρὸς τὴν ἀντίστοιχον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, καθ' ἣν δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἓν τοιοῦτον τετράπλευρον, ἐὰν δοθῇ ἓν τετρακύρυφον, ὁρίζον ἓν ἁρμονικὸν σύμπλεγμα, τὸ ὁποῖον εἶνε τομὴ τοῦ ἁρμονικοῦ συμπλέγματος τῶν ἀκτίνων. Ἐκ τῆς ὑπάρξεως ἑνὸς τοιούτου τετραπλεύρου, ὁρίζοντος τὸ ἁρμονικὸν σύμπλεγμα, ἕπεται ἡ ὕπαρξις ἀπείρων τοιούτων, ἐὰν ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν ἀντίστοιχον αὐτῆς πρότασιν συμφώνως πρὸς τὴν ἀρχὴν τοῦ δυασμοῦ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι, αἱ ἰδιότητες ἑνὸς ἁρμονικοῦ συμπλέγματος ἀκτίνων ἐπιπέδου δέσμης εἶνε ἀντίστοιχοι εἰς μὲν τὸ ἐπίπεδον, ἑνὸς ἁρμονικοῦ συμπλέγματος σημείων, εἰς δὲ τὴν κεντρικὴν δέσμην ἑνὸς ἁρμονικοῦ συμπλέγματος ἐπιπέδων. Κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ δυασμοῦ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἢ ἐν τῇ κεντρικῇ δέσμῃ θὰ ἔχωμεν ἓν ἁρμονικὸν σύμπλεγμα ἀκτίνων, ἐὰν δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἓν τετράπλευρον ἢ τετράακμον, ὁρίζον τὸ σύμπλεγμα.

Αἱ ἑπόμεναι πρατάσεις εἶνε δίδυμοι ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

«Εἰς πλῆρες τετρακόρυφον δύο ἀπέναντι κείμεναι πλευραὶ εἶνε συζυγεῖς ἁρμονικαὶ πρὸς τὰς δύο διαγωνίους, τὰς διερχομένας διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου αὐτῶν».

«Εἰς πλῆρες τετράπλευρον δύο ἀπένταντι κείμεναι κορυφαὶ εἶνε συζυγεῖς ἁρμονικαὶ πρὸς τὰ δύο διαγώνια σημεῖα, τὰ κείμενα ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς συνδεούσης αὐτά».



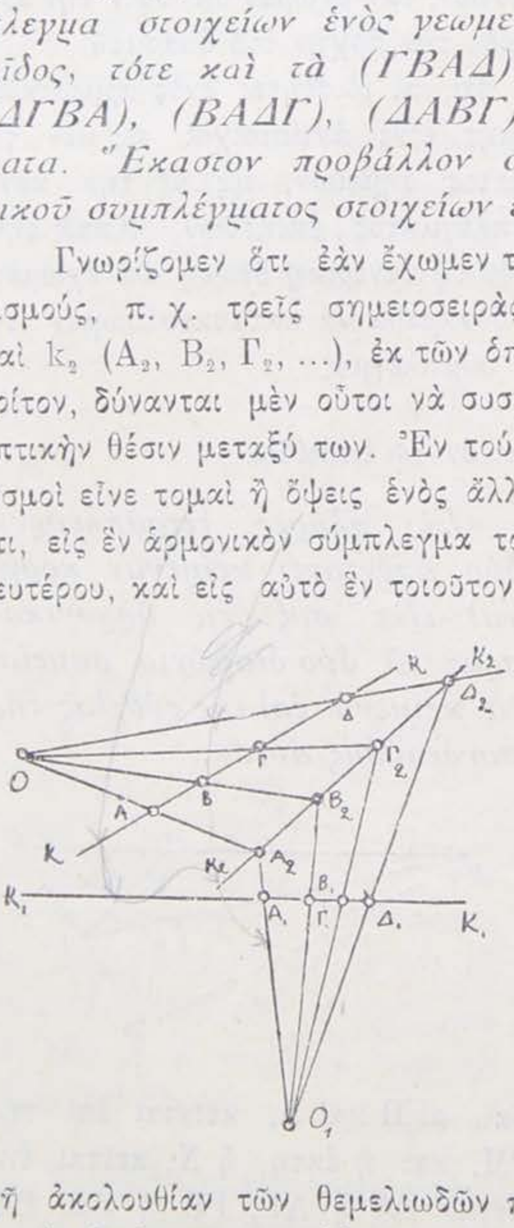
Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς ἀνωτέρω πρὸς τἀριστερὰ προτάσεως, παρατηροῦμεν ὅτι αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ, ΑΔ καὶ ΒΓ (τοῦ παρακειμένου σχήματος) ὁρίζουν ἓν πλῆρες τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου δύο κορυφαί, αἱ Α καὶ Γ κεῖνται ἐπὶ τῆς ΑΓ, δύο ἄλλαι, αἱ Β καὶ Δ, κεῖνται ἐπὶ τῆς ΒΔ, μία ἄλλη, ἡ Μ, κεῖται ἐπὶ τῆς ΡΜ, καὶ ἡ ἕκτη, ἡ Ν, κεῖται ἐπὶ τῆς Ρ Ν. Ἑπομένως, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ΡΑ ἢ ΑΓ, ΡΒ ἢ ΒΔ, ΡΜ καὶ Ρ Ν ἀποτελοῦν ἁρμονικὸν σύμπλεγμα.

§ 28. Εὕρεσις ἁρμονικῶν συμπλεγμάτων διὰ προβολῆς καὶ τομῆς.

Ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τῶν ἁρμονικῶν συμπλεγμάτων ἰσχύει γενικῶς διὰ τοὺς γεωμετρικοὺς σχηματισμοὺς πρώτης βαθμῖδος· ἤτοι ἔχομεν τὴν ἑξῆς γενικὴν πρότασιν.

«*Ἐὰν δοθοῦν καθ' ὡρισμένην τάξιν τρία στοιχεῖα ἑνὸς γεωμετρικοῦ σχηματισμοῦ πρώτης βαθμῖδος, ὑπάρχει ἓν τέταρτον ἁρμονικὸν στοιχεῖον. Τὰ ζεύγη τῶν συζυγῶν ἁρμονικῶν στοιχείων χωρίζουν ἄλληλα. Ἐὰν (ΑΒΓΔ) εἶνε ἓν ἁρμονικὸν σύμπλεγμα στοιχείων ἑνὸς γεωμετρικοῦ σχηματισμοῦ πρώτης βαθμῖδος, τότε καὶ τὰ (ΓΒΑΔ), (ΑΔΓΒ), (ΓΔΑΒ), (ΒΓΔΑ), (ΔΓΒΑ), (ΒΑΔΓ), (ΔΑΒΓ) εἶνε ἐπίσης ἁρμονικὰ συμπλέγματα. Ἕκαστον προβάλλον σχῆμα ἢ ἑκάστη τομὴ ἑνὸς ἁρμονικοῦ συμπλέγματος στοιχείων εἶνε ἓν ἁρμονικὸν σύμπλεγμα*».

Γνωρίζομεν ὅτι ἐὰν ἔχωμεν τρεῖς γεωμετρικοὺς ὁμωνύμους σχηματισμούς, π. χ. τρεῖς σημειοσειρὰς k (Α, Β, Γ, ...), k_1 ($Α_1$, $Β_1$, $Γ_1$, ...) καὶ k_2 ($Α_2$, $Β_2$, $Γ_2$, ...), ἐκ τῶν ὁποίων οἱ δύο εἶνε προοπτικοὶ πρὸς τὸν τρίτον, δύνανται μὲν οὗτοι νὰ συσχετισθοῦν χωρὶς νὰ ἔχουν καὶ προοπτικὴν θέσιν μεταξύ των. Ἐν τούτοις, ἐπειδὴ ἀνὰ δύο τοιοῦτοι σχηματισμοὶ εἶνε τομαὶ ἢ ὄψεις ἑνὸς ἄλλου γεωμετρικοῦ σχηματισμοῦ, ἕπεται ὅτι, εἰς ἓν ἁρμονικὸν σύμπλεγμα τοῦ πρώτου ἀντιστοιχεῖ ἓν τοιοῦτον τοῦ δευτέρου, καὶ εἰς αὐτὸ ἓν τοιοῦτον τοῦ τρίτου. Ἐν γένει, ἔστω ὅτι ἔχομεν ($ν+1$) τοιούτους γεωμετρικοὺς σχηματισμούς, π. χ. τὰς σημειοσειρὰς k, k_1, k_2, $k_ν$, αἵτινες εἶνε διατεταγμέναι κατά τινα τάξιν, ὥστε ἑκάστη ἐξ αὐτῶν νὰ ἔχῃ προοπτικὴν θέσιν πρὸς τὴν προηγουμένην καὶ ἑπομένην αὐτῆς. Μεταξὺ τῆς πρώτης k καὶ τῆς τελευταίας $k_ν$ θὰ ἔχωμεν τοιαύτην σχέσιν, ὥστε εἰς ἕκαστον στοιχεῖον τῆς k θὰ ἀντιστοιχῇ ἓν τῆς $k_ν$, καὶ ἀντιστρόφως· ἡ σχέσις δ' αὕτη εὑρίσκεται, ἂν παρατηρήσωμεν ὅτι θὰ ἔχωμεν μίαν συνεχῆ ἀκολουθίαν τῶν θεμελιωδῶν πράξεων (τῆς προβολῆς καὶ τομῆς). Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ λέγωμεν ὅτι, μεταβαίνομεν ἐκ τοῦ πρώτου σχημα-



τισμοῦ εἰς τὸν τελευταῖον διά τινος πεπερασμένου ἀριθμοῦ προβολῶν καὶ τομῶν, ἢ ὅτι αἱ σημειοσειραὶ k καὶ k_ν συσχετίζονται πρὸς ἀλλήλας διὰ διαδοχικῶν προβολῶν καὶ τομῶν, διὰ τῶν ὁποίων ἀπὸ ἑκάστου σχηματισμοῦ μεταβαίνομεν εἰς τὸν ἑπόμενον αὐτοῦ προοπτικὸν ἐν τῇ δοθείσῃ τάξει, καὶ οὕτως εἶνε δυνατὸν νὰ εὕρωμεν εἰς ἕκαστον στοιχεῖον τῆς k τὸ ἀντίστοιχον αὐτῆς τῆς k_ν. Αἱ τοιαῦται προβολαὶ καὶ τομαὶ εἶνε αἱ αὐταὶ διὰ πάντα τὰ στοιχεῖα τοῦ πρώτου σχηματισμοῦ (δηλαδὴ προβάλλονται ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ κέντρου ἢ ἄξονος, ἢ εἶνε τομὴ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἢ ἐπιπέδου). Ἐὰν τὰς προβολὰς καὶ τομὰς ταύτας παρακολουθήσωμεν κατ᾽ ἀντίστροφον τάξιν, φθάνομεν ἐκ τοῦ τελευταίου εἰς τὸν πρῶτον· δηλαδὴ εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν τῶν δύο ἄκρων σχηματισμῶν κατ᾽ ἀντίστροφον τάξιν, ἰσχύουν δ᾽ αἱ ἰδιότητες αὗται καὶ ἐὰν οἱ δύο οὗτοι σχηματισμοὶ κεῖνται ἐπ᾽ ἀλλήλων. Ἐπειδὴ ἕκαστον προβάλλον σχῆμα ἢ ἑκάστη τομὴ ἑνὸς ἁρμονικοῦ συμπλέγματος στοιχείων γεωμετρικοῦ σχηματισμοῦ πρώτης βαθμῖδος εἶνε ἐπίσης ἓν ἁρμονικὸν σύμπλεγμα, ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«Ἐὰν δύο γεωμετρικοὶ σχηματισμοὶ πρώτης βαθμῖδος εἶνε συσχετισμένοι μεταξύ των διὰ προβολῶν καὶ τομῶν, εἰς ἕκασ ον ἁρμονικὸν σύμλεγμα ἐκ τεσσάρων στοιχείων τοῦ ἑνὸς ἀντιστοιχεῖ ἓν ἁρμονικὸν σύμπλεγμα ἐκ τεσσάρων (ὁμολόγων) στοιχείων τοῦ ἄλλου».

Ἡ ἀνωτέρω ἐκτιθεμένη συσχέτισις δύο γεωμετρικῶν σχηματισμῶν καθ᾽ ἥν, ἐὰν τις ἀναχωρήσῃ ἀπό τινος στοιχείου τοῦ πρώτου σχηματισμοῦ, εὑρίσκει ἓν ἀντίστοιχον τοῦ ἄλλου, καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν ἀναχωρήσῃ τις ἀπό τινος στοιχείου τοῦ δευτέρου σχηματισμοῦ, εὑρίσκει ἓν ἀντίστοιχον αὐτοῦ τοῦ πρώτου σχηματισμοῦ, λέγεται *σχέσις ἀντιστρεπτὴ καθ᾽ ἕνα τρόπον μεταξὺ* τῶν δύο σχηματισμῶν, δύναται δὲ νὰ ὑπάρχῃ τοιαύτη σχέσις μεταξὺ δύο σχηματισμῶν, καὶ ἂν οὗτοι ἔχουν τὸν αὐτὸν φορέα. Οὕτω π.χ., ἂν ἔχωμεν δύο σημειοσειράς, κειμένας ἐπὶ τῶν φορέων k καὶ k′, ὑποθέσωμεν δ᾽ ὅτι ὁ k κινεῖται καὶ συμπίπτει μὲ τὸν k′, εἶνε δὲ τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τῶν σημειοσειρῶν τὰ A καὶ A′, B καὶ B′,....., καὶ μετὰ τὴν σύμπτωσιν τῶν φορέων k καὶ k′ θὰ ἐξακολουθῇ ὑφισταμένη ἡ προηγουμένως ὑπάρχουσα σχέσις μεταξὺ τῶν στοιχείων τούτων τῶν δύο σημειοσειρῶν, κειμένων πλέον ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ φορέως. Οὕτω π.χ., ἂν θεωρήσωμεν τοὺς δύο φορεῖς k καὶ k′ ὡς ἄξονας τῶν τετμημένων x καὶ y, λάβωμεν δ᾽ ὡρισμένα σημεῖα ἐπ᾽ αὐτῶν ὡς ἀρχὴν τῆς μετρήσεως ἐφ᾽ ἑκάστου, ὁρίσωμεν δὲ καὶ τὰς θετικὰς φορὰς ἐπ᾽ αὐτῶν, παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τῆς σχέσεως $y = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, ἐνῷ εἶνε $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$, αἱ εὐθεῖαι k καὶ k′ σχετίζονται πρὸς ἀλλήλας οὕτως, ὥστε εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς k, ἀντιστοιχοῦν εἰς τιμήν τινα τοῦ x, ἔχομεν ἓν σημεῖον τῆς k′, ὁριζόμενον ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως. Καὶ ἀντιστρόφως· εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς k′, ἀντιστοιχοῦν εἰς τιμήν τινα τοῦ y, ἔχομεν ἓν σημεῖον τῆς k, ὁριζόμενον ἐκ τῆς σχέσεως $x = \frac{\beta - \delta y}{\gamma y - \alpha}$. Οὕτω ἡ σχέσις τῶν σημείων τῶν δύο τούτων εὐθειῶν εἶνε ἀντιστρεπτὴ καθ' ἕνα τρόπον, ἐνῶ δὲν συμβαίνει τοῦτο, ἐὰν ἡ ἀντιστοιχία τῶν σημείων αὐτῶν ὁρίζεται π.χ. ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $y = x^2$. Διότι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀντιστοιχεῖ μὲν εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ x μία θετικὴ τοῦ y, ἀλλ' εἰς μίαν θετικὴν τιμὴν τοῦ y ἀντιστοιχοῦν δύο ἀντίθετοι τιμαὶ τοῦ x, αἱ $\pm\sqrt{y}$. Ἤτοι ἡ οὕτως ὁριζομένη ἀντιστοιχία τῶν σημείων τῶν δύο τούτων εὐθειῶν δὲν εἶνε ἀντιστρεπτὴ καθ' ἕνα τρόπον.

Ἐὰν φαντασθῶμεν ἀνὰ ἓν κινητὸν ἐπὶ τῶν φορέων k καὶ k′ δύο σημειοσειρῶν, κινούμενα συγχρόνως πρὸς ὡρισμένην φοράν, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς ἀντίστοιχα σημεῖα αὐτῶν, ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς θέσεις τῶν κινητῶν σημείων κατά τινα στιγμήν. Οὕτω θὰ ἔχωμεν μίαν σχέσιν καθ' ἕνα τρόπον ἀντιστρεπτὴν μεταξὺ τῶν σημείων τῶν δύο φορέων, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ κινητὰ διαγράφουν ὁλοκλήρους τὰς δύο εὐθείας k καὶ k′ εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον. Ἡ οὕτω θεωρηθεῖσα ἀντιστοιχία δύναται νὰ ἐπεκταθῇ προφανῶς καὶ εἰς σχηματισμοὺς τῆς δευτέρας ἢ καὶ τῆς τρίτης βαθμῖδος.

Ἡ ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσα σχέσις μεταξὺ δύο σημειοσειρῶν π. χ., θεωρεῖται ἀποτελουμένη ἐκ δύο μερῶν· 1) ἐκ τῆς σχέσεως τῆς σημειοσειρᾶς k πρὸς τὴν k′ (καθ' ἣν ἕκαστον στοιχεῖον τῆς k ἔχει ἓν ἀντίστοιχον τῆς k′)· καὶ 2) ἐκ τῆς σχέσεως τῆς σημειοσειρᾶς k′ πρὸς τὴν k (καθ' ἣν εἰς ἕκαστον στοιχεῖον τῆς k′ ἀντιστοιχεῖ ἓν τῆς k). Ἡ δευτέρα τούτων λέγεται ἀντίστροφος τῆς πρώτης, καὶ ἂν ἡ πρώτη σημειωθῇ διὰ τοῦ συμβόλου π ἡ δευτέρα παριστάνεται διὰ τοῦ π^{-1}.

Ἐὰν τρεῖς γεωμετρικοὶ σχηματισμοὶ k, k,′ k″ συσχετίζωνται, ὥστε νὰ ὑπάρχῃ μία ἀντιστρεπτὴ καθ' ἕνα τρόπον σχέσις μεταξὺ τοῦ k καὶ k′, καθὼς καὶ μεταξὺ τοῦ k′ καὶ k″, τότε ὑπάρχει καὶ μία τοιαύτη μεταξὺ τῶν k καὶ k″, καθ' ἣν ἀντίστοιχα στοιχεῖα εἶνε τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὸ αὐτὸ πάντοτε στοιχεῖον τοῦ k′. Ἡ οὕτως εὑρισκομένη σχέσις μεταξὺ τῶν k καὶ k″ λέγεται *γινόμενον* τῶν σχέσεων τῶν k καὶ k′ καὶ τῶν k′ καὶ k″, ἐὰν δὲ αἱ δύο αὗται παρασταθοῦν διὰ τῶν π καὶ τ, τὸ γινόμενον δ' αὐτῶν διὰ ω, γράφομεν συνήθως $\omega = \tau\,\pi$, ἡ δ' ἀντίστροφος σχέσις (μεταξὺ τῶν k″ καὶ k) σημειώνεται τότε οὕτω $\omega^{-1} = \pi^{-1}\tau^{-1}$, Ἐν γένει, ἐὰν ἔχωμεν ν γεωμετρικοὺς σχηματισμοὺς (τῆς αὐτῆς βαθμῖδος) $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$ καὶ ὑπάρχουν $\nu-1$ σχέσεις ἀντιστρεπταὶ καθ' ἕνα τρόπον μεταξύ των, αἱ $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{\nu-1}$, μεταξὺ τοῦ k_1 καὶ k_2, τοῦ k_2 καὶ $k_3, \ldots$, τοῦ $k_{\nu-1}$ καὶ k_ν, τὸ γινόμενον αὐτῶν ω παριστάνεται ὡς ἑξῆς

$$\omega = \pi_{\nu-1} \ldots \pi_3 \pi_2 \pi_1$$

καὶ ἐκφράζει τὴν προκύπτουσαν οὕτω σχέσιν μεταξὺ τῶν k_1 καὶ k_ν, ὁρίζομεν δὲ ταύτην διὰ τῶν ἑξῆς μερικῶν γινομένων

$$\pi_3 \pi_2 \pi_1 = \pi_3 (\pi_2 \pi_1)$$

$$\pi_4 \pi_3 \pi_2 \pi_1 = \pi_4 (\pi_3 (\pi_2 \pi_1)) \text{ κ.λ.π.}$$

Παρατηρητέον ὅτι μεταξὺ τῶν γινομένων τούτων *δὲν ἰσχύει ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως* τῶν παραγόντων. Ἤτοι ἐν γένει δὲν ἔχομεν

$$\pi_2 \pi_1 = \pi_1 \pi_2.$$

Τοὐναντίον, μεταξὺ τῶν παραγόντων γινομένου σχέσεων ἀντιστρεπτῶν καθ' ἕνα τρόπον ἰσχύει ὁ νόμος, ὅστις ἐκφράζεται διὰ τῆς ἰσότητος

$$\pi_{\nu-1} \ldots \pi_3 \pi_2 \pi_1 = \pi_{\nu-1} \ldots (\pi_3 \pi_2) \pi_1.$$

Ἡ σχέσις μεταξὺ δύο γεωμετρικῶν σχηματισμῶν, κειμένων ἐπ' ἀλλήλων, καθ' ἣν ἕκαστον στοιχεῖον ἀντιστοιχεῖ πρὸς ἑαυτό, καλεῖται *ταυτότης*, σημειώνεται δ' αὕτη ὡς ἑξῆς

$$\pi^{-1} \pi \equiv 1.$$

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, «*τὸ γινόμενον δύο προοπτικοτήτων δὲν εἶνε ἐν γένει μία προοπτικότης, ἀλλὰ τὸ γινόμενον δύο γινομένων ἐκ προοπτικοτήτων εἶνε πάλιν γινόμενον προοπτικοτήτων*».

§ 29. Ἀξίωμα τῆς συνεχείας (τοῦ Dedekind).

Ἐκ τῆς ἐποπτείας, δεχόμενοι τὴν ἔννοιαν τῆς συνεχείας τοῦ διαστήματος, ἔχομεν τὰς ἑξῆς ἰδιότητας.

1) Ἐὰν ἐπὶ τμήματος εὐθείας κινοῦνται δύο σημεῖα, διαγράφοντα τὸ τμῆμα κατ' ἀντιθέτους φοράς, συναντῶνται ταῦτα εἰς ἓν σημεῖον. Ἐὰν δύο κινητὰ διαγράφουν μίαν εὐθεῖαν κατ' ἀντιθέτους φοράς, ἀναχωροῦντα ἐκ διαφόρων σημείων, συναντῶνται εἰς δύο σημεῖα, τὰ ὁποῖα εἰς ἑκάστην στιγμὴν χωρίζονται ὑπὸ τῶν ἐν λόγῳ κινουμένων σημείων.

2) Ἐὰν ἐπὶ τμήματος εὐθείας κινοῦνται δύο σημεῖα Α καὶ Β πρὸς τὴν αὐτὴν φοράν, καὶ τὸ Α κατά τινα στιγμὴν προηγεῖται τοῦ Β, κατ' ἄλλην δὲ ἕπεται τοῦ Β, ὑπάρχει ἐν τῷ μεταξὺ μία στιγμή, καθ' ἣν συναντῶνται τὰ δύο σημεῖα.

Ἀνάλογα παρατηροῦμεν καὶ δι᾽ ἄλλους σχηματισμοὺς τῆς πρώτης βαθμῖδος.

Ἐπὶ ἑνὸς τμήματος ΑΒ ἑνὸς σχηματισμοῦ πρώτης βαθμῖδος ἓν στοιχεῖον Γ ὁρίζει δύο τμήματα ΑΓ καὶ ΓΒ· ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ στοιχεῖον Γ ὡς ἀνῆκον μόνον εἰς ἓν τῶν τμημάτων τούτων, ἔχομεν μίαν διαίρεσιν τοῦ ΑΒ, ἔχουσαν τὰς ἑξῆς ἰδιότητας.

α′) Ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ τμήματος ΑΒ ἀνήκει εἰς ἓν τῶν δύο μερῶν.

β′) Τὸ στοιχεῖον Α ἀνήκει εἰς ἓν τῶν μερῶν, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν πρῶτον μέρος, καὶ τὸ στοιχεῖον Β εἰς τὸ ἄλλο. Τὸ στοιχεῖον Γ δύναται νὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τοῦ πρώτου καὶ ἐπὶ τοῦ δευτέρου, ἐὰν ὁρισθῇ τοῦτο ἐκ τῶν προτέρων.

γ′) Ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ πρώτου προηγεῖται ἑκάστου στοιχείου τοῦ δευτέρου.

Διὰ τὴν γενικότητα δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν καὶ τὴν περίπτωσιν καθ᾽ ἣν τὸ στοιχεῖον Γ συμπίπτει μὲ τὸ Α ἢ μὲ τὸ Β, ἐὰν ἓν τῶν δύο μερῶν ἀποτελῆται ἐκ τοῦ στοιχείου Α ἢ Β τοῦ τμήματος, τὸ δὲ ἄλλο μέρος ἐκ πάντων τῶν λοιπῶν στοιχείων αὐτοῦ.

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων δεχόμεθα τὸ ἑξῆς *ἀξίωμα τῆς συνεχείας*, ὀφειλόμενον εἰς τὸν Dedekind.

«*Ἐὰν ἓν τμῆμα ΑΒ ἑνὸς γεωμετρικοῦ σχηματισμοῦ πρώτης βαθμῖδος διαιρεθῇ εἰς δύο μέρη εἰς τρόπον ὥστε· α′) ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ ΑΒ νὰ ἀνήκῃ εἰς ἓν τῶν μερῶν· β′) τὸ στοιχεῖον Α νὰ ἀνήκῃ εἰς τὸ πρῶτον καὶ τὸ Β εἰς τὸ δεύτερον μέρος· γ′) ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ πρώτου νὰ προηγῆται τοῦ δευτέρου· τότε ὑπάρχει ἓν στοιχεῖον Γ τοῦ τμήματος ΑΒ (τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἀνήκῃ εἰς τὸ πρῶτον ἢ εἰς τὸ δεύτερον μέρος), ἔχον τὴν ἰδιότητα ὅτι· ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ ΑΒ, προηγούμενον τοῦ Γ, ἀνήκει εἰς τὸ πρῶτον μέρος, καὶ ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ ΑΒ, ἑπόμενον τοῦ Γ, ἀνήκει εἰς τὸ δεύτερον μέρος τῆς διαιρέσεως*».

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι, τὸ ἀνωτέρω ἀξίωμα ἀνταποκρίνεται εἰς τὴν πρώτην τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων, τῶν ἐκ τῆς ἐποπτείας συναγομένων. Τῷ ὄντι, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὰ δύο μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται τὸ ΑΒ, ὡς διατεταγμένα κατ᾽ ἀντίθετον φοράν, καὶ νὰ ὁρίσωμεν, ὅτι ταῦτα διαγράφονται διὰ τῆς κινήσεως δύο σημείων ἀντιθέτως πρὸς ἄλληλα. Τὸ κινητὸν θὰ θεωρῆται ἐνταῦθα ὡς ἀνῆκον καὶ εἰς τὰ δύο μέρη, ἀλλὰ καὶ δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν ὅτι ἀνήκει μόνον εἰς τὸ ἕν, ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τοῦ ἄλλου μεμονωμένως. Παρατηρητέον ὅτι ἀρκεῖ νὰ δεχθῶμεν τὸ ἀνωτέρω ἀξίωμα διὰ τὴν εὐθεῖαν, διότι ἀκολούθως συνάγεται τοῦτο καὶ διὰ τοὺς ἄλλους γεωμετρικοὺς σχηματισμοὺς τῆς πρώτης βαθμῖδος, μὲ τὴν βοήθειαν τῶν θεμελιωδῶν πράξεων τῆς προβολικῆς Γεωμετρίας. Ἀρκεῖ ἐπίσης νὰ δεχθῶμεν τὴν ὕπαρξιν ἑνὸς στοιχείου Γ, ἔχοντος τὴν ἐν λόγῳ ἰδιότητα· διότι ἀποδεικνύομεν τότε, ὅτι τοῦτο εἶνε καὶ τὸ μόνον.

§ 30. Προβολικότης μεταξὺ δύο σχηματισμῶν.

Λέγομεν ὅτι, δύο γεωμετρικοὶ σχηματισμοὶ πρώτης βαθμῖδος εἶνε *προβολικοὶ ἢ ἔχουν προβολικὴν συγγένειαν*, ἐὰν εἶνε οὕτως συσχετισμένοι, ὥστε εἰς ἕκαστον ἁρμονικὸν σύμπλεγμα τοῦ ἑνὸς νὰ ἀντιστοιχῇ ἓν ἁρμονικὸν σύμπλεγμα τοῦ ἄλλου.

Καλοῦμεν *προβολικότητα* δύο γεωμετρικῶν σχηματισμῶν τῆς πρώτης βαθμῖδος τὴν ἀντιστρεπτὴν σχέσιν καθ' ἕνα τρόπον μεταξὺ αὐτῶν, καθ' ἣν διατηροῦνται τὰ ἁρμονικὰ συμπλέγματα αὐτῶν. Τὴν μὲν προβολικὴν σχέσιν μεταξὺ δύο σχηματισμῶν k καὶ k' σημειώνομεν διὰ τοῦ συμβόλου $\overline{\wedge}$ (τὸ ὁποῖον καλεῖται σύμβολον τῆς προβολικότητος) ὡς ἑξῆς·

$$k \; \overline{\wedge} \; k'$$

τὴν δὲ προοπτικὴν αὐτῶν σχέσιν διὰ τοῦ συμβόλου $\overline{\overline{\wedge}}$. Ἤτοι ἂν k καὶ k' εἶνε προοπτικοί, σημειοῦμεν τὴν σχέσιν ταύτην οὕτω

$$k \; \overline{\overline{\wedge}} \; k'.$$

Ἑπομένως ἔχομεν τὰς ἑξῆς ἰδιότητας.

«*Δύο γεωμετρικοὶ σχηματισμοί, οἵτινες εἶνε συσχετισμένοι πρὸς ἀλλήλους διὰ προβολῶν καὶ τομῶν, εἶνε προβολικοί. Ἐν τούτοις τὸ ἀντίστροφον δὲν εἶνε ἐν γένει ἀληθές· ὅτι δηλαδὴ ἑκάστη προβολικότης, δύναται νὰ κατασκευασθῇ διὰ προβολῶν καὶ τομῶν*».

«*Δύο γεωμετρικοὶ σχηματισμοί, προβολικοὶ πρὸς τρίτον, εἶνε καὶ μεταξύ των προβολικοί· ἤτοι τὸ γινόμενον δύο προβολικοτήτων εἶνε προβολικότης*».

Π. χ. ἂν εἶνε $k \; \overline{\wedge} \; k'$ καὶ $k' \; \overline{\wedge} \; k''$ θὰ εἶνε καὶ $k \; \overline{\wedge} \; k''$.

Ἐὰν (ΑΒΓΔΕ....) εἶνε ἓν σύμπλεγμα ἐκ στοιχείων ἑνὸς σχηματισμοῦ k πρώτης βαθμῖδος καὶ (Α'Β'Γ'Δ'Ε'....) ἓν σύμπλεγμα ἐκ στοιχείων ἄλλου σχηματισμοῦ k' τῆς αὐτῆς βαθμῖδος, θὰ λέγωνται οἱ δύο σχηματισμοὶ προβολικοὶ καὶ θὰ σημειώνεται τοῦτο διὰ τοῦ

$$\mathrm{AB\Gamma\Delta E}\ldots \; \overline{\wedge} \; \mathrm{A'B'\Gamma'\Delta'E'}\ldots,$$

ἐὰν μεταξὺ τῶν k καὶ k′ ὑπάρχῃ μία προβολικότης, ἐν τῇ ὁποίᾳ τὰ ζεύγη τῶν στοιχείων

ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′, ΔΔ′, ΕΕ′,....

ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἄλληλα. Ἐὰν συμβαίνῃ τοῦτο, θὰ ἔχωμεν καὶ

$$ΑΒΓΔ \;\barwedge\; Α'Β'Γ'Δ'$$

$$ΑΒΓΕ \;\barwedge\; Α'Β'Γ'Ε'$$

$$ΒΓΔΕ \;\barwedge\; Β'Γ'Δ'Ε'$$

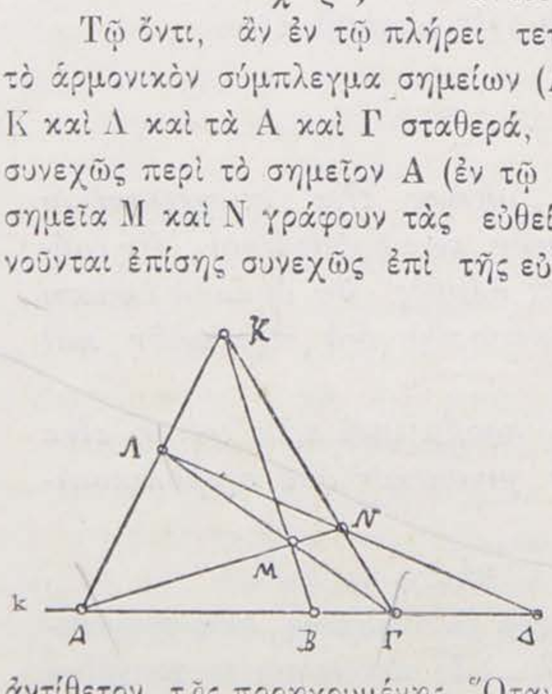
ἢ καὶ $ΔΓΒΑ \;\barwedge\; Δ'Γ'Β'Α'$ κλπ.

§ 31. Θεμελιώδης ἰδιότης προβολικῶν σχηματισμῶν.

«Ἐὰν δύο θεμελιώδεις γεωμετρικοὶ σχηματισμοὶ πρώτης βαθμῖδος εἶνε προβολικοί, εἰς πᾶσαν συνεχῆ ἀκολουθίαν στοιχείων τοῦ πρώτου ἀντιστοιχεῖ μία συνεχὴς ἀκολουθία στοιχείων τοῦ δευτέρου».

Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως ταύτης ἀποδεικνύομεν πρῶτον ὅτι, *«ἂν ἓν ζεῦγος σημείων Α καὶ Γ σημειοσειρᾶς χωρίζῃ ἀντιστοίχως ἁρμονικῶς δύο ἄλλα ζεύγη σημείων Β καὶ Δ καὶ Β′ καὶ Δ′, τὰ Β καὶ Δ δὲν χωρίζονται ἀντιστοίχως ὑπὸ τῶν* ***Β′ καὶ Δ′****»*.

Τῷ ὄντι, ἂν ἐν τῷ πλήρει τετρακορύφῳ ΚΛΜΝ, τὸ ὁποῖον ὁρίζει τὸ ἁρμονικὸν σύμπλεγμα σημείων (ΑΒΓΔ), θεωρήσωμεν τὰ μὲν σημεῖα Κ καὶ Λ καὶ τὰ Α καὶ Γ σταθερά, τὴν δὲ εὐθεῖαν Μ Ν στρεφομένην συνεχῶς περὶ τὸ σημεῖον Α (ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ τετρακορύφου), τὰ μὲν σημεῖα Μ καὶ Ν γράφουν τὰς εὐθείας ΓΛ καὶ ΓΚ, τὰ δὲ Β καὶ Δ κινοῦνται ἐπίσης συνεχῶς ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΓ, λαμβάνοντα νέας θέσεις,



ἔστω τὰς Β′ καὶ Δ′, χωριζόμενα πάντοτε ἀντιστοίχως ἁρμονικῶς ὑπὸ τῶν Α καὶ Γ εἰς πάσας τὰς θέσεις αὐτῶν. Ταῦτα κινοῦνται πάντοτε κατ᾽ ἀντιθέτους φοράς, καὶ διευθύνεται τὸ μὲν Β πρὸς τὸ Α ἢ τὸ Γ (κατὰ τὴν φορὰν ΒΑ ἢ ΒΓ), τὸ δὲ Δ πάλιν πρὸς τὸ Α ἢ Γ κατὰ τὴν φορὰν ΔΑ ἢ ΔΓ) ἀλλὰ τὴν ἀντίθετον τῆς προηγουμένης. Ὅταν ἡ ΜΝ στρεφομένη κατὰ τὴν ἀντίθετον φορὰν τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου, διευθύνεται πρὸς τὴν ΛΑ, τὸ μὲν σημεῖον Β διευθύνεται πρὸς τὸ Α κατὰ τὴν φορὰν ΒΑ, τὸ δὲ Δ ἐπίσης πρὸς τὸ Α κατὰ τὴν φορὰν ΔΑ, ἀλλὰ τὴν ἀντίθετον τῆς προηγουμένης. Ὅταν ἡ ΜΝ, στρεφομένη κατὰ τὴν φορὰν τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου, διευθύνεται πρὸς τὴν ΑΓ, τὰ Β καὶ Δ διευθύνονται ἀντιθέτως πρὸς τὸ Γ. Ὅταν μὲν ἡ στρεφομένη εὐθεῖα συμπέσῃ μὲ τὴν ΔΑ τὰ Β καὶ Δ κινούμενα συμπίπτουν μετὰ τοῦ σημείου Α (ἐρχόμενα πρὸς αὐτὸ ἐξ ἀντιθέτων φορῶν)· ὅταν δὲ ἡ στρεφομένη εὐθεῖα συμπέσῃ μετὰ τῆς ΑΓ, τὰ Β καὶ Δ κινούμενα συμπίπτουν μετὰ τοῦ Γ (ἐρχόμενα πρὸς αὐτὸ ἐξ ἀντιθέτων φορῶν), καὶ δὲνδύνανται ταῦτα νὰ κινοῦνται πότε κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ πότε κατὰ τὴν ἀντίθετον, ἐπειδὴ εἰς καμμίαν θέσιν τοῦ Β ἢ τοῦ Δ δὲν ἀντιστοιχοῦν περισσότεραι τῆς μιᾶς θέσεως τοῦ Δ ἢ τοῦ Β. 18

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι,

«δύο ζεύγη σημείων Β, Δ καὶ Β′, Δ′ (σημειοσειρᾶς), χωριζόμενα ἀντιστοίχως, δὲν δύνανται νὰ χωρίζωνται καὶ τὰ δύο ἁρμονικῶς δι' ἑνὸς τρίτου ζεύγους». b)

Διότι, ἂν π. χ. ἓν ἄλλο ζεῦγος σημείων Α, Γ ἐχώριζεν ἁρμονικῶς τὰ Β καὶ Δ καὶ τὰ Β′ καὶ Δ′, ἤτοι ἂν τὰ συμπλέγματα (ΑΒΓΔ), (ΑΒ′Γ′Δ′) ἦσαν ἁρμονικά, τὸ ζεῦγος Β′, Δ′ δὲν θὰ ἐχωρίζετο ὑπὸ τοῦ Β, Δ, ἀλλὰ τὰ σημεῖα ταῦτα θὰ ἦσαν πάντοτε ἑκατέρωθεν τῶν Β καὶ Δ ἢ μεταξὺ αὐτῶν.

Θὰ ἀποδείξωμεν ἀκόμη τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«Δοθέντων δύο ζευγῶν σημείων Β, Δ καὶ Β′, Δ′ (σημειοσειρᾶς), μὴ χωριζομένων ἀντιστοίχως, ὑπάρχει πάντοτε ἓν τρίτον ζεῦγος σημείων Α, Γ, διὰ τῶν ὁποίων χωρίζονται ἀντιστοίχως ἁρμονικῶς τὸ Β ἀπὸ τοῦ Δ καὶ τὸ Β′ ἀπὸ τοῦ Δ′». c)

Διότι, ἂν φαντασθῶμεν ὅτι τὸ τμῆμα Β′Δ′ τῆς εὐθείας, ἐπὶ τοῦ ὁποίου δὲν κεῖνται τὰ Β καὶ Δ, γράφεται ὑπὸ κινητοῦ τινος Ρ, τὰ σημεῖα $Ρ_1$ καὶ $Ρ_2$, ἕκαστον τῶν ὁποίων χωρίζεται ἀντιστοίχως ἁρμονικῶς διὰ τῶν Β′, Δ′ καὶ Β, Δ ἀπὸ τοῦ Ρ, γράφουν ἀντιστοίχως τὸ μὲν $Ρ_1$ τὸ τμῆμα τῆς εὐθείας, τὸ ὁποῖον εἶνε συμπλήρωμα τοῦ Β′ Δ′, τὸ δὲ $Ρ_2$ ἓν τμῆμα $Β_2Δ_2$, περιεχόμενον ἐν τῷ συμπληρώματι τούτῳ. Τὰ σημεῖα $Ρ_1$ καὶ $Ρ_2$ κινοῦνται κατ' ἀντίθετον φορὰν πρὸς τὸ Ρ, καὶ συναντῶνται ἅπαξ τοὐλάχιστον (ἐπειδὴ τὸ $Ρ_1$ γράφει τμῆμα εὐθείας ἐνῷ παριέχεται τὸ γραφόμενον ὑπὸ τοῦ $Ρ_2$). Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ Γ τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως τῶν $Ρ_1$ καὶ $Ρ_2$ καὶ διὰ Α τὴν ἀντίστοιχον πρὸς αὐτὴν θέσιν τοῦ Ρ, τὰ σημεῖα Α, Γ χωρίζουν ἀντιστοίχως ἁρμονικῶς τὰ Β, Δ καὶ Β′, Δ′.

P → A
P_1 → Γ
P → D′
P_1 → B′

$Ρ_2$ Β $Ρ_1$ Β′ Ρ Δ′ Δ

($P, B'P$
($P_2 B P$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι, *«εἰς τέσσαρα στοιχεῖα Α, Β, Γ, Δ μιᾶς ἐκ δύο προβολικῶν σημειοσειρῶν k καὶ k_1, ἐκ τῶν ὁποίων τὰ δύο πρῶτα* d)

Α καὶ Β δὲν χωρίζωνται ὑπὸ τῶν δύο ἄλλων Γ καὶ Δ, ἀντιστοιχοῦν τέσσαρα ἄλλα $A_1, B_1, \Gamma_1, \Delta_1$ τῆς k_1, ἐκ τῶν ὁποίων τὰ A_1 καὶ B_1 δὲν χωρίζονται ὑπὸ τῶν Γ_1 καὶ Δ_1».

Πράγματι, ἂν Μ καὶ Ν εἶνε τὰ δύο στοιχεῖα τῆς k, τὰ χωρίζοντα ἁρμονικῶς τὰ Α, Β καὶ Γ, Δ ἀντιστοίχως, θὰ ὑπάρχουν δύο ἀντίστοιχα στοιχεῖα αὐτῶν M_1, N_1 ἐν τῇ k_1, τὰ ὁποῖα θὰ χωρίζουν τὰ A_1, B_1 καὶ Γ_1, Δ_1 ἁρμονικῶς, καὶ ἑπομένως τὰ A_1, B_1 δὲν χωρίζονται ὑπὸ τῶν Γ_1, Δ_1. Ἐὰν τὰ A_1 καὶ Γ_1 χωρίζωνται διὰ τῶν B_1 καὶ Δ_1, τότε καὶ τὰ Α, Γ χωρίζονται διὰ τῶν Β καὶ Δ.

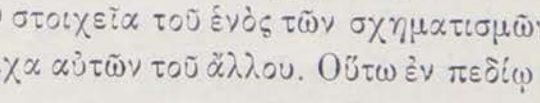
Ἐὰν τώρα ἔν τινι σημειοσειρᾷ k ληφθῇ μία ἀκολουθία σημείων Α,Β,Γ,..., Κ, Λ εἰς τρόπον, ὥστε δύο τούτων οὐδέποτε νὰ χωρίζωνται διὰ προηγουμένων ἢ ἑπομένων αὐτῶν, ἡ ἰδιότης αὕτη θὰ ἰσχύῃ καὶ διὰ πᾶσαν ἄλλην σημειοσειρὰν k_1 προβολικὴν πρὸς τὴν θεωρουμένην, ἐν ᾗ θὰ ἀντιστιστοιχοῦν ἰσάριθμα στοιχεῖα $A_1, B_1, \Gamma_1, \ldots K_1, \Lambda_1$.

Πράγματι, ἂν ἐν τῇ k ἀκολουθοῦν τὰ στοιχεῖα Κ,Λ,Ρ,... συνεχῶς ἄλληλα, πρέπει καὶ τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν $K_1, \Lambda_1, P_1, \ldots$ τῆς k_1 ν' ἀκολουθοῦν ἄλληλα συνεχῶς. Διότι, ἐὰν π. χ. τὰ Λ_1 καὶ P_1 δὲν ἦσαν συνεχῆ στοιχεῖα τῆς k_1, θὰ ὑπῆρχον δύο στοιχεῖα X_1 καὶ Ψ_1, τὰ ὁποῖα θὰ ἐχώριζον αὐτά. Ἀλλὰ τότε ἔπρεπε καὶ τὰ Κ, Λ νὰ χωρίζωνται διὰ τῶν Χ καὶ Ψ, ἀντιστοίχων τῶν X_1 καὶ Ψ_1, τὸ ὁποῖον εἶνε ἀδύνατον, διότι ὑπετέθη ὅτι ταῦτα ἀκολουθοῦν ἄλληλα συνεχῶς.

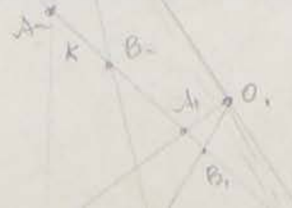
Ἡ ἀνωτέρω πρότασις ἰσχύει προφανῶς καὶ ὅταν πρόκειται περὶ ἄλλων προβολικῶν γεωμετρικῶν σχηματισμῶν τῆς πρώτης βαθμῖδος.

§ 32. Κοινὰ στοιχεῖα προβολικῶν σχηματισμῶν.

Ἐὰν δύο ὁμώνυμοι προβολικοὶ σχηματισμοὶ τεθοῦν ἐπ' ἀλλήλων, ὥστε νὰ ἔχουν κοινὸν φορέα, ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ φορέως τούτου (θεωρουμένου ἐνιαίου τοῦ σχηματισμοῦ) θὰ θεωρῆται δύο φοράς, δηλαδὴ ὡς ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸν ἕνα k καὶ εἰς τὸν ἄλλον k' τῶν δύο σχηματισμῶν. Εἶνε δυνατὸν νὰ συμβῇ, ὥστε νὰ ὑπάρχουν στοιχεῖα τοῦ ἑνὸς τῶν σχηματισμῶν, τὰ ὁποῖα νὰ συμπίπτουν μὲ τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν τοῦ ἄλλου. Οὕτω ἐν πεδίῳ ἔχομεν ὅτι, ἂν τμήσωμεν δύο προοπτικὰς ἐπιπέδους δέσμας, ὄψεις μιᾶς σημειο-



σειρᾶς k' (A',B',Γ',..), τὰς $O_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots)$ καὶ $O_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \ldots)$ διά τινος εὐθείας k, εὑρίσκομεν ἐπὶ ταύτης δύο προβολικὰς σημειοσειρὰς k_1 $(A_1, B_1, \Gamma_1, \ldots)$ καὶ k_2 $(A_2, B_2, \Gamma_2, \ldots)$, ἐχούσας κοινὰ στοιχεῖα τὴν τομὴν τῆς k μετὰ τῆς k', καὶ μετὰ τῆς εὐθείας O_1O_2, τῆς συνδεύσης τὰ δύο κέντρα τῶν δεσμῶν.



Ἐὰν προβάλωμεν δύο προοπτικὰς σημειοσειράς, τομὰς μιᾶς ἐπιπέδου δέσμης $O(\alpha,\beta,\gamma,...)$, τὰς k_1 $(A_1,B_1,\Gamma_1,...)$ καὶ k_2 $(A_2,B_2,\Gamma_2,...)$, ἀπό τινος σημείου O' τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν, προκύπτουν δύο προβολικαὶ ἐπίπεδοι δέσμαι $O_1(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,...)$ καὶ $O_2(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2,...)$, ἔχουσαι κοινὰς ἀκτῖνας τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν τομὴν τῶν k_1 καὶ k_2 καὶ τὴν $O\,O'$, τὴν συνδέουσαν τὰ κέντρα τῶν δεσμῶν.

Κατ᾽ ἀνάλογον τρόπον δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν κοινὰ στοιχεῖα μεταξὺ ἄλλων προβολικῶν σχηματισμῶν, κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ φορέως.

Ἐνδιαφέρει νὰ γνωρίσωμεν πόσα δύνανται νὰ εἶνε τὰ συμπίπτοντα στοιχεῖα δύο προβολικῶν σχηματισμῶν, ὅταν οὗτοι ἔχουν κοινὸν φορέα, καὶ πρὸς τοῦτο θὰ δείξωμεν τὸ ἑξῆς

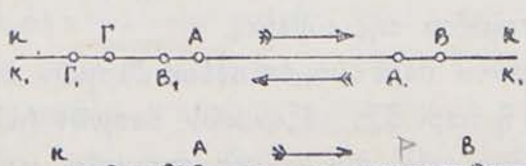
Θεώρημα τοῦ von Staudt.

«Ἐὰν δύο προβολικοὶ σχηματισμοὶ πρώτης βαθμῖδος, ἔχουν τρία στοιχεῖα κοινά, συμπίπτουν ἐκ ταὐτότητος (δηλαδὴ ἔχουν πάντα τὰ στοιχεῖα αὐτῶν κοινά)».

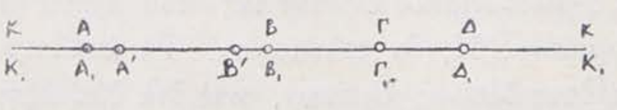
Θὰ ἀποδείξωμεν τὴν πρότασιν ταύτην μόνον διὰ δύο προβολικὰς σημειοσειρὰς (κειμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ φορέως), ἰσχύει δὲ αὕτη, ἐπεκτεινομένη εὐκόλως, καὶ δι᾽ οἱουσδήποτε ἄλλους γεωμετρικοὺς σχηματισμοὺς τῆς πρώτης βαθμῖδος.

Ἐν πρώτοις, λέγομεν ὅτι δύο προβολικαὶ σημειοσειραὶ εἶνε *ὁμόρροποι* μέν, ἂν διαγράφωνται ἀντιστοίχως ὑπὸ δύο κινητῶν, κινουμένων πρὸς τὴν αὐτὴν φοράν, ὅταν αἱ σημειοσειραὶ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἢ ἐπὶ παραλλήλων φορέων, *ἀντίρροποι* δέ, ἂν τοὐναντίον. Τὰ ἀνάλογα παρατηροῦμεν καὶ διὰ δύο ἐπιπέδους δέσμας ἀκτίνων, καὶ διὰ δύο ἀξονικὰς δέσμας ἐπιπέδων, ἂν συμπίπτουν (ἢ μὴ) τὰ κέντρα καὶ τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν, ἢ οἱ ἄξονες τῶν ἀξονικῶν δεσμῶν.

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι, δύο ἀντίρροποι προβολικαὶ σημειοσειραί, π. χ. αἱ $k(A,B,\Gamma,...)$ καὶ $k_1(A_1,B_1,\Gamma_1,...)$, κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ φορέως, ἔχουν πάντοτε δύο στοιχεῖα κοινά· δηλαδὴ ἐκεῖνα, καθ᾽ ἃ τὰ διαγράφοντα τὰς σημειοσειρὰς ταύτας κινητὰ P καὶ P_1 π. χ. συναντῶνται, κινούμενα ἀντιθέτως. Τὰ διπλᾶ ταῦτα στοιχεῖα χωρίζουν πάντοτε ἀπ᾽ ἀλλήλων δύο ὁμόλογα αὐτῶν στοιχεῖα. Δύο ὁμόρροποι προβολικαὶ σημειοσειραὶ π. χ. αἱ $k(A,B,\Gamma,...)$ καὶ $k_1(A_1B_1\Gamma_1,...)$, ἔχουν τότε μόνον δύο στοιχεῖα κοινά, ἐὰν ἓν τμῆμα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸν φορέα



τῆς πρώτης, π. χ. τὸ Α Β, περιέχεται ὁλόκληρον εἰς τὸ ὁμόλογον αὐτοῦ A_1 B_1, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸν φορέα τῆς δευτέρας. Πράγματι, τὰ δύο κινητὰ Ρ καὶ P_1 τὰ διαγράφοντα, κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν κινούμενα, τὸν κοινὸν φορέα τῶν δύο σημειοσειρῶν, συναντῶνται δὶς καὶ ὁρίζουν τὰ κοινὰ στοιχεῖα τῶν δύο σημειοσειρῶν. Εἰς ἄλλας περιπτώσεις δύο τοιαῦται σημειοσειραὶ δύνανται νὰ ἔχουν ἓν ἢ οὐδὲν στοιχεῖον κοινόν. Ὑποθέτομεν τώρα ὅτι δύο προβολικαὶ σημειοσειραὶ k καὶ k_1 ἔχουν τρία στοιχεῖα κοινά. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω αὗται θὰ εἶνε ὁμόρροποι. Ἐπειδὴ δὲ εἶνε προβολικαί, πρέπει ἕκαστον σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπὸ ἑνὸς τῶν ἀντιστοίχων κοινῶν σημείων Α,Β,Γ χωρίζεται ἁρμονικῶς διὰ τῶν δύο ἄλλων, νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ ἀντίστοιχον αὐτοῦ, ἀφοῦ τοῦτο εἶνε τελείως ὡρισμένον, καὶ διότι εἰς τέσσαρα ἁρμονικὰ στοιχεῖα τῆς k ἀντιστοιχοῦν τέσσαρα ἁρμονικὰ τῆς k_1. Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἐπὶ τοῦ τμήματος ΑΒ, ἐφ᾿ οὗ δὲν κεῖται τὸ Γ, ὑπάρχει ἓν σημεῖον Ρ τῆς k, μὴ συμπῖπτον μὲ τὸ ἀντίστοιχον αὐτοῦ P_1 τῆς k_1. Ἐὰν φαντασθῶμεν ὅτι τὸ Ρ διαγράφει τὴν k κατὰ τὴν φοράν, ΑΒΓ,..., τότε τὸ P_1 διαγράφει ὁμοίως τὴν k_1 κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ συμπίπτουν ταῦτα εἰς τὸ σημεῖον Β ἢ εἰς τὸ Β΄, κείμενον πρὸ τοῦ Β. Ἂν τὸ Ρ διαγράφῃ τὴν k κατὰ τὴν ἀντίθετον φορὰν ΓΒΑ, τότε καὶ τὸ P_1 κινεῖται ὁμοίως κατὰ τὴν φορὰν ΓΒΑ, καὶ συμπίπτουν τὰ κινητὰ εἰς τὸ σημεῖον Α ἢ εἰς τὸ Α΄, κείμενον πρὸ τοῦ Α. Οὕτω ἔχομεν ἓν τμῆμα Α΄Β΄ τῆς εὐθείας, τὸ ὁποῖον εἶνε ἴσον μὲ τὸ ΑΒ ἢ εἶνε μέρος τοῦ ΑΒ, καὶ διὰ



τὸ ὁποῖον ἐκτὸς τῶν δύο ἄκρων σημείων αὐτοῦ Α΄,Β΄ οὐδὲν σημεῖον ὑπάρχει, συμπῖπτον μὲ τὸ ἀντίστοιχον αὐτοῦ. Ἀλλὰ τοῦτο εἶνε ἀδύνατον, διότι κατὰ τὰ ἀνωτέρω τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον χωρίζεται ἀπὸ τοῦ Γ διὰ τῶν Α΄,Β΄ ἁρμονικῶς, πρέπει νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ ἀντίστοιχον αὐτοῦ.

Οὕτω αἱ δύο σημειοσειραὶ k καὶ k_1 πρέπει νὰ ἔχουν ἕκαστον σημεῖον τοῦ τμήματος ΑΒ ἀντιστοίχως κοινόν, καθὼς καὶ πᾶν ἄλλο σημεῖον Κ τῶν εὐθειῶν, ἐπειδὴ τὸ Κ θὰ χωρίζεται ἁρμονικῶς διὰ τῶν Α καὶ Β ἀπὸ ἑνὸς σημείου τῆς εὐθείας.

Προκειμένου περὶ δύο ἐπιπέδων δεσμῶν ἀκτίνων μὲ κοινὸν κέντρον (τὸ Ο π.χ.), ἢ περὶ δύο ἀξονικῶν δεσμῶν (μὲ κοινὸν ἄξονα ξ π. χ.), αἱ ὁποῖαι ἔχουν τρία ἀντίστοιχα στοιχεῖα κοινά, ἢ ἀποδεικνύομεν τὴν πρότασιν κατ᾿ ἀναλογίαν πρὸς τὴν ἀνωτέρω ἀπόδειξιν, ἢ τέμνομεν ἀντιστοίχως τὰς δέσμας διὰ μιᾶς εὐθείας, ὅτε λαμβάνομεν δύο σημειοσειρὰς ἀντιστοίχως Α,Β,Γ,Δ,... καὶ A_1,B_1,$Γ_1$,$Δ_1$,..., ἐχούσας τὸν αὐτὸν φορέα, αἵτινες θὰ εἶνε προβολικαὶ καὶ θὰ ἔχουν τρία στοιχεῖα κοινά. Ἑπομένως θὰ ἔχουν αὗται καὶ πάντα τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα αὐτῶν κοινά· ἄρα θὰ συμβαίνῃ τοῦτο καὶ διὰ τὰς πρὸς αὐτὰς προοπτικὰς δέσμας.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι, δύο ὁμώνυμοι προβολικοὶ θεμελιώδεις γεωμετρικοὶ σχηματισμοὶ ἔχουν τὸ πολὺ δύο ἀντίστοιχα στοιχεῖα αὐτῶν κοινά, ἐκτὸς ἐὰν ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ ἑνὸς συμπίπτῃ μὲ τὸ ἀντίστοιχον αὐτοῦ τοῦ ἄλλου.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως προκύπτει ἀκόμη ὅτι,

«ἐὰν μία σημειοσειρὰ εἶνε προβολικὴ πρὸς μίαν ἐπίπεδον δέσμην ἀκτίνων, ἢ μία ἐπίπεδος δέσμη ἀκτίνων εἶνε προβολικὴ πρὸς ἀξονικὴν δέσμην ἐπιπέδων, τρία δὲ στοιχεῖα τοῦ πρώτου τῶν δύο προβολικῶν σχηματισμῶν κεῖνται ἐπὶ τῶν ἀντιστοίχων αὐτῶν τοῦ ἄλλου, τότε ὁ πρῶτος εἶνε μία τομὴ τοῦ ἄλλου».

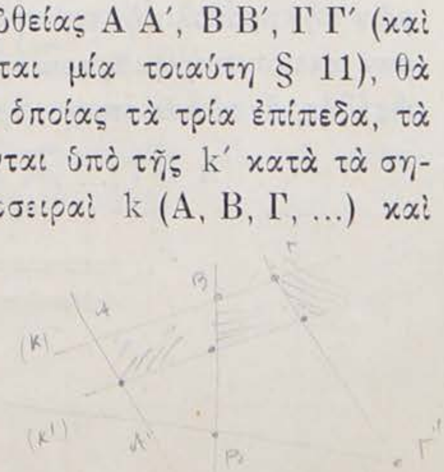
Διότι ὁ πρῶτος ἔχει τρία ἀντίστοιχα στοιχεῖα κοινὰ μὲ τὴν τομὴν τοῦ δευτέρου, τὴν ἔχουσαν φορέα τὸν αὐτὸν μετὰ τοῦ πρώτου σχηματισμοῦ, καὶ ἑπομένως συμπίπτουν ἐκ ταὐτότητος οἱ δύο οὗτοι ὁμώνυμοι σχηματισμοί.

§ 33. Κατασκευὴ προβολικότητος.

Προκειμένου νὰ ἴδωμεν πῶς εἶνε δυνατὸν νὰ κατασκευασθῇ μία προβολικότης, ἀποδεικνύομεν πρῶτον τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«Μεταξὺ δύο γεωμετρικῶν σχηματισμῶν πρώτης βαθμῖδος ὑπάρχει μία προβολικότης, ἐν τῇ ὁποίᾳ ἀντιστοιχοῦν τρία στοιχεῖα τοῦ πρώτου πρὸς τρία τοῦ δευτέρου. Μόνον μία τοιαύτη προβολικότης ὑπάρχει, καὶ δύναται νὰ κατασκευασθῇ διὰ πεπερασμένου ἀριθμοῦ προβολῶν καὶ τομῶν».

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν δοθοῦν δύο στρεβλῶς κείμεναι εὐθεῖαι k καὶ k′ καὶ ἀνὰ μία τριὰς στοιχείων Α, Β, Γ καὶ Α′, Β′, Γ′ ἐπ᾽ αὐτῶν, δυνάμεθα νὰ συσχετίσωμεν αὐτὰς διὰ προβολῶν καὶ τομῶν, ὥστε τὰ στοιχεῖα Α, Β, Γ νὰ ἀντιστοιχοῦν κατὰ σειρὰν πρὸς τὰ Α′, Β′, Γ′. Διότι, ἂν προβάλωμεν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, ... τῆς k ἀπὸ μιᾶς τῶν εὐθειῶν, αἵτινες τέμνουν τὰς στρεβλῶς κειμένας εὐθείας Α Α′, Β Β′, Γ Γ′ (καὶ δι᾽ ἑκάστου σημείου τῆς Α Α′ π. χ. διέρχεται μία τοιαύτη § 11), θὰ ἔχωμεν μίαν ἀξονικὴν δέσμην ἐπιπέδων, τῆς ὁποίας τὰ τρία ἐπίπεδα, τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ τέμνονται ὑπὸ τῆς k′ κατὰ τὰ σημεῖα Α′, Β′, Γ′. Οὕτω αἱ δύο σημειοσειραὶ k (Α, Β, Γ, ...) καὶ



$k'(A', B', Γ', \ldots)$ εἶνε τομαὶ τῆς αὐτῆς ἀξονικῆς δέσμης ἐπιπέδων, ἀντιστοιχοῦν δὲ τὰ Α, Β, Γ τῆς μιᾶς πρὸς τὰ Α′, Β′, Γ′ τῆς ἄλλης.

Ἐὰν οἱ δύο σχηματισμοὶ k καὶ k′ εἶνε οἱοιδήποτε, δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τούτους δι' ἄλλων προοπτικῶν πρὸς αὐτούς, ἐπειδὴ σχηματισμοὶ πρώτης βαθμῖδος, οἵτινες συσχετίζονται διὰ προβολῶν καὶ τομῶν πρὸς τρίτον, συσχετίζονται καὶ μεταξύ των διὰ προβολῶν καὶ τομῶν. Ἐὰν λοιπὸν ὁ εἷς τῶν σχηματισμῶν (ἢ καὶ οἱ δύο) εἶνε δέσμη ἐπιπέδων ἀκτίνων ἢ ἀξονικὴ δέσμη ἐπιπέδων, ἀντικαθιστῶμεν τὴν δέσμην διὰ τεμνούσης αὐτὴν σημειοσειρᾶς (προοπτικῆς πρὸς αὐτήν). Ἐὰν πρόκειται περὶ σημειοσειρῶν κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ φορέως ἢ ἐπὶ τεμνομένων τοιούτων k καὶ k′, προβάλλομεν τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν, ἔστω τὴν ἐπὶ τοῦ k ἀπὸ εὐθείας (στρεβλῶς κειμένης ὡς πρὸς τὴν k) ἐπὶ ἄλλης εὐθείας στρεβλῶς κειμένης ὡς πρὸς τὴν k′, καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν σημειοσειράς, κειμένας ἐπὶ στρεβλῶς πρὸς ἀλλήλους κειμένων φορέων. Οὕτω λοιπὸν ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης ἰσχύει δι' οἱουσδήποτε σχηματισμούς, καὶ ἑπομένως, ὑπάρχει (τοὐλάχιστον) μία προβολικότης μεταξὺ τῶν δύο σχηματισμῶν k καὶ k′, ἐν τῇ ὁποίᾳ τὰ δοθέντα τρία στοιχεῖα τοῦ k ἀντιστοιχοῦν πρὸς δοθέντα τρία τοῦ k′.

Θὰ δείξωμεν τώρα ὅτι μεταξὺ τῶν k καὶ k′, δὲν δύνανται νὰ ὑπάρχουν δύο διάφοροι προβολικότητες τοιαῦται, ὥστε εἰς τὰ Α, Β, Γ νὰ ἀντιστοιχοῦν τὰ Α′, Β′, Γ′. Διότι ἔστωσαν **π** καὶ **τ** δύο τοιαῦται προβολικότητες μεταξὺ τῶν σημειοσειρῶν, τῶν κειμένων ἐπὶ τῶν εὐθειῶν k καὶ k′, καὶ ὅτι τὰ στοιχεῖα Λ καὶ $Λ_1'$ τῆς k ἔχουν ἀντίστοιχον τὸ Λ′ τῆς k′. Θεωροῦμεν ἐπὶ τῆς k τὴν προβολικότητα $\boldsymbol{\tau}^{-1}\boldsymbol{\pi}$, ἐν τῇ ὁποίᾳ τὰ στοιχεῖα Λ καὶ $Λ'_1$ ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἑαυτά, καὶ τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὸ αὐτὸ ὁμόλογον αὐτῶν στοιχεῖον Λ′ κατὰ τὴν **π** καὶ τὴν **τ** συσχέτισιν. Ἡ προβολικότης αὕτη ἔχει τὰ στοιχεῖα Α, Β, Γ διπλᾶ (ἀντιστοιχοῦντα πρὸς ἑαυτά), χωρὶς νὰ εἶνε ταυτότης, ἐὰν δὲν εἶνε $\boldsymbol{\pi} \equiv \boldsymbol{\tau}$, τὸ ὁποῖον εἶνε ἀδύνατον, ὡς ἀντιβαῖνον εἰς τὸ θεώρημα τοῦ von Staudt.

Προβολικότης σχηματισμῶν στρεβλῶς κειμένων.

Γνωρίζομεν ὅτι ὑπάρχει μία προβολικότης μεταξὺ δύο σχηματισμῶν πρώτης βαθμῖδος, ἐν ᾗ δύο δεδομέναι τριάδες στοιχείων ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἀλλήλας, πρὸς δέ, ὅτι δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν διὰ προβολῶν καὶ τομῶν τὴν προβολικὴν ταύτην σχέσιν. Πρόκειται τώρα νὰ εὕρωμεν ἁπλουστέραν κατασκευὴν μιᾶς τοιαύτης προβολικότητος, τὴν ὁποίαν θὰ σημειοῦμεν ὡς ἑξῆς, ἂν αἱ ἀντίστοιχοι τριάδες τῶν στοιχείων εἶνε αἱ Α, Β, Γ καὶ Α′, Β′, Γ′

$$A\,B\,Γ \ldots \;\overline{\wedge}\; A'\,B'\,Γ' \ldots, \text{ ἢ καὶ } \begin{pmatrix} A\,B\,Γ \\ A'B'Γ' \end{pmatrix}.$$

Πρὸς τοῦτο περιοριζόμεθα εἰς προβολικότητας μεταξὺ ὁμωνύμων σχηματισμῶν πρώτης βαθμῖδος. Διότι ἂν πρόκειται περὶ ἑτερωνύμων σχηματισμῶν, ἀντικαθιστῶμεν τὸν ἕνα τούτων δι᾿ ὁμωνύμου πρὸς τὸν ἄλλον, λαμβάνοντες μίαν προβολὴν ἢ τομὴν κατάλληλον τοῦ ἀντικαθισταμένου. Θεωροῦμεν ἐν πρώτοις προβολικότητα μεταξὺ δύο στρεβλῶς πρὸς ἀλλήλας κειμένων εὐθειῶν, καὶ δύο ἀξονικῶν δεσμῶν, τῶν ὁποίων οἱ ἄξονες εἶνε στρεβλῶς πρὸς ἀλλήλας κείμεναι εὐθεῖαι καὶ ἔχομεν τὰς ἑξῆς διδύμους προτάσεις.

«Δύο στρεβλῶς πρὸς ἀλλήλας κείμεναι προβολικαὶ σημειοσειραὶ εἶνε προοπτικαὶ (τομαὶ τῆς αὐτῆς ἀξονικῆς δέσμης)».

Ἔστωσαν k καὶ k′ αἱ δύο σημειοσειραὶ καὶ Α,Β,Γ, καὶ Α′,Β′,Γ′ αἱ ὁμόλογοι τριάδες τῶν σημείων αὐτῶν. Κατασκευάζομεν τὰς εὐθείας (ΑΑ′)=α,(ΒΒ′)=β καὶ(ΓΓ)′=γ, αἵτινες συνδέουν τὰ τρία ζεύγη τῶν ὁμολόγων σημείων, καὶ αἵτινες κεῖνται στρεβλῶς πρὸς ἀλλήλας. Ὑπάρχουν ἄπειροι εὐθεῖαι k″ τέμνουσαι τὰς α,β,γ, ἐπειδὴ δ᾿ ἑκάστου σημείου τῆς μιᾶς τούτων δύναται νὰ ἀχθῇ μία εὐθεῖα, τέμνουσα καὶ τὰς δύο ἄλλας. Ἐὰν θεωρήσωμεν μίαν ἀξονικὴν δέσμην ἐπιπέδων, ἔχουσαν ἄξονα μίαν εὐθεῖαν k″, αἱ σημειοσειραὶ k καὶ k′ θὰ εἶνε προοπτικαί, ὡς τομαὶ τῆς δέσμης ταύτης, θὰ ἀντιστοιχοῦν δὲ τὰ ζεύγη τῶν σημείων ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′. Ἑπομένως θὰ ὁρίζεται διὰ τῆς προοπτικότητος ταύτης ἡ προβολικότης μεταξὺ τῶν k καὶ k′ ἐν ᾗ θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ τριὰς Α,Β,Γ, πρὸς τὴν Α′,Β′,Γ′, δυνάμεθα δὲ νὰ κατασκευάσωμεν αὐτήν.

«Δύο προβολικαὶ ἀξονικαὶ δέσμαι, τῶν ὁποίων οἱ ἄξονες εἶνε εὐθεῖαι στρεβλῶς κείμεναι πρὸς ἀλλήλας, εἶνε προοπτικαὶ (προβολαὶ τῆς αὐτῆς σημειοσειρᾶς)».

Ἔστωσαν k καὶ k′ αἱ δύο ἀξονικαὶ δέσμαι καὶ **a**,**b**,**c** καὶ **a**′,**b**′,**c**′ αἱ ὁμόλογοι τριάδες τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν. Κατασκευάζομεν τὰς εὐθείας (**aa**′)=α, (**bb**′)=β, (**cc**′)=γ, καθ᾿ ἃς τέμνονται τὰ τρία ζεύγη τῶν ἐπιπέδων, καὶ αἵτινες εἶνε στρεβλῶς πρὸς ἀλλήλας κείμεναι εὐθεῖαι. Ὑπάρχουν ἄπειροι εὐθεῖαι k″, τέμνουσαι τὰς α,β,γ (ἐπειδὴ ἐφ᾿ ἑκάστου ἐπιπέδου, διερχομένου διὰ τῆς μιᾶς τούτων, ὑπάρχει μία εὐθεῖα) τέμνουσα καὶ τὰς δύο ἄλλας. Ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν σημειοσειράν, τὴν ἔχουσαν φορέα μίαν τοιαύτην εὐθεῖαν k″, αἱ δύο δέσμαι k καὶ k′ θὰ εἶνε προοπτικαί, ὡς προβολαὶ τῆς σημειοσειρᾶς ταύτης, θὰ ἀντιστοιχοῦν δὲ τὰ ζεύγη τῶν ἐπιπέδων **aa**′, **bb**′, **cc**′. Ἑπομένως θὰ ὁρίζεται διὰ τῆς προοπτικότητος ταύτης ἡ προβολικότης μεταξὺ τῶν k καὶ k′, ἐν ᾗ θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ τριὰς **a**,**b**,**c** πρὸς τὴν **a**′,**b**′,**c**′, δυνάμεθα δὲ νὰ κατασκευάσωμεν αὐτήν.

Παρατηρητέον ὅτι, ἂν αἱ δύο στρεβλῶς πρὸς ἀλλήλας κείμεναι εὐθεῖαι k καὶ k′ εἶνε προβολικαὶ (καὶ προοπτικαί), θὰ εἶνε προβολικαὶ (καὶ προοπτικαὶ) καὶ αἱ ἀξονικαὶ δέσμαι, αἱ ἔχουσαι ἄξονας τὰς k καὶ k′, ἐὰν θεωρήσωμεν ὡς ὁμόλογα ἐπίπεδα διὰ τῶν k καὶ k′ τὰ τέμνοντα τὰς k καὶ k′ εἰς ὁμόλογα σημεῖα, καὶ ἀντιστρόφως, ἰσχύει ἡ πρὸς ταύτην ἀντίστοιχος πρότασις.

Ὑπάρχουν λοιπὸν ἄπειροι εὐθεῖαι, τέμνουσαι τὰς k καὶ k′, ἐκ τῶν ὁποίων ἑκάστη συνδέει δύο ὁμόλογα σημεῖα Δ καὶ Δ′ τῶν k καὶ k′ καὶ εἶνε τομὴ δύο ὁμολόγων ἐπιπέδων **d** = (k Δ′) καὶ **d**′ = (k′ Δ) τῶν δύο δεσμῶν. Αἱ ἄπειροι αὗται εὐθεῖαι, ἀνὰ δύο τῶν ὁποίων κεῖνται στρεβλῶς πρὸς ἀλλήλας, παράγουν μίαν *εὐθειογενῆ ἐπιφάνειαν,* ἥτις ἀντιστοιχεῖ ἑαυτῇ (κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ δυασμοῦ).

Ἡ ἀνωτέρω κατασκευὴ τῆς προβολικότητος μεταξὺ δύο στρεβλῶς πρὸς ἀλλήλας κειμένων σημειοσειρῶν δὲν ἐφαρμόζεται, ἂν αἱ δύο σημειοσειραὶ τέμνωνται, καὶ δὲν δυνάμεθα ἐν τῇ περιπτώσει αὐτῇ νὰ λέγωμεν, ὅτι αἱ δύο σημειοσειραὶ εἶνε τομαὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ἀξονικῆς δέσμης. Διότι θεωροῦμεν σημειοσειρὰν ὡς τομὴν ἀξονικῆς δέσμης, μόνον τὴν ἔχουσαν προοπτικὴν θέσιν πρὸς αὐτήν, καὶ ὄχι τὴν ἔχουσαν φορέα τέμνοντα τὸν ἄξονα τῆς δέσμης. Μία τοιαύτη σημειοσειρὰ δὲν εἶνε προοπτικὴ πρὸς τὴν δέσμην, ἀφοῦ ὁ φορεὺς αὐτῆς συναντᾷ πάντα τὰ ἐπίπεδα τῆς δέσμης εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Παρατηρητέον προσέτι ὅτι, ἐὰν δύο τεμνόμεναι σημειοσειραὶ k καὶ k′ εἶνε προοπτικαί, ὡς τομαὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ἀξονικῆς δέσμης (τῆς ὁποίας ὁ ἄξων ξ δὲν τέμνει τὴν k καὶ k′) θὰ εἶνε καὶ τομαὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ἐπιπέδου δέσμης ἀκτίνων, δηλαδὴ ἐκείνης (τῆς ὁποίας τὸ κέντρον κεῖται ἐπὶ τῆς ξ), ἥτις προκύπτει ὡς τομὴ τῆς ἀξονικῆς δέσμης ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου **a** = (k k)′.

Ἀντιστρόφως· δύο (τεμνόμεναι) σημειοσειραί, αἵτινες εἶνε προοπτικαὶ καὶ τομαὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ἐπιπέδου δέσμης ἀκτίνων, εἶνε τομαὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ἀξονικῆς δέσμης, δηλαδὴ ἑνὸς προβάλλοντος σχήματος τῆς ἐπιπέδου δέσμης τῶν ἀκτίνων.

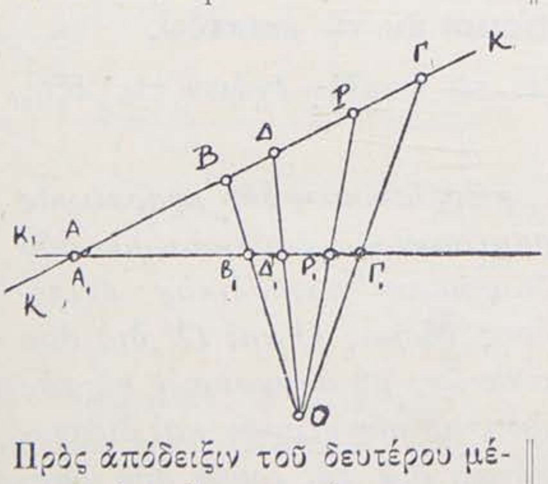
Ἀνάλογα δύναταί τις νὰ παρατηρήσῃ διὰ τὰς ἀξονικὰς δέσμας.

§ 34. Προοπτικοὶ γεωμετρικοὶ σχηματισμοὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

Ἐὰν δύο διάφοροι σημειοσειραὶ ἢ ἐπίπεδοι δέσμαι ἀκτίνων κεῖνται ἐπὶ φορέων τεμνομένων, διὰ νὰ εὕρωμεν ἂν εἶνε προοπτικαί, ἐπειδὴ θὰ κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου, πρέπει νὰ ἐξετάσωμεν ἂν αὗται εἶνε τομαὶ τῆς αὐτῆς ἐπιπέδου δέμης ἢ ὄψεις τῆς αὐτῆς σημειοσειρᾶς, κειμένης ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν δύο εὐθειῶν. Πρὸς τοῦτο ἔχομεν τὰς ἑξῆς διδύμους προτάσεις ἐν πεδίῳ·

«Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα δύο διάφοροι προβολικαὶ σημειοσειραὶ εἶνε προοπτικαί, εἶνε τὸ κοινὸν σημεῖον αὐτῶν νὰ ἀντιστοιχῇ πρὸς ἑαυτό»,

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν αἱ σημειοσειραὶ k καὶ k_1 εἶνε προοπτικαὶ (ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ) καὶ ἑπομένως τομαὶ μιᾶς ἐπιπέδου δέσμης, ἐχούσης κέντρον O (κείμενον ἐκτὸς τῶν k καὶ k_1), ἕκαστον σημεῖον P τῆς σημειοσειρᾶς k θὰ προβάλλεται ἀπὸ τοῦ O ἐπὶ τοῦ ἀντιστοίχου πρὸς αὐτὸ σημείου P_1 τῆς k_1. Ἑπομένως τὸ σημεῖον $(k\,k_1) \equiv A$ τῆς τομῆς τῶν φορέων (θεωρούμενον ἐπὶ τῆς k) θὰ προβάλλεται ἐπὶ τοῦ $(k_1\,k) \equiv A_1$ (θεωρουμένου ἐπὶ τῆς k_1)· ἤτοι τὸ A συμπίπτει μὲ τὸ ὁμόλογον αὐτοῦ A_1, κοινὸν σημεῖον τῶν δύο φορέων k καὶ k_1.



Πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ δευτέρου μέρους τῆς ἀνωτέρω προτάσεως παρατηροῦμεν ὅτι· ἐὰν αἱ k, k_1 εἶνε προ-

«Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα δύο διάφοροι προβολικαὶ ἐπίπεδοι δέσμαι ἀκτίνων εἶνε προοπτικαί, εἶνε ἡ κοινὴ ἀκτὶς (τῶν κέντρων) τῶν δύο δεσμῶν νὰ ἀντιστοιχῇ πρὸς ἑαυτήν».

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν δύο ἐπίπεδοι δέσμαι O καὶ O_1 (ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ) εἶνε προοπτικαὶ καὶ ἑπομένως ὄψεις μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς σημειοσειρᾶς, κειμένης ἐπὶ φορέως k (μὴ διερχομένου διὰ τῶν κέντρων O καὶ O_1), ἑκάστη ἀκτὶς ρ τῆς O, τέμνεται εἰς ἓν σημεῖον ὑπὸ τῆς k, τὸ ὁποῖον προβάλλεται ἀπὸ τοῦ κέντρου O_1 ὑπὸ τῆς ἀκτῖνος ρ_1. Ἑπομένως ἡ ἀκτὶς $(O\,O_1) \equiv \alpha$, ἥτις συνδέει τὰ κέντρα τῶν δεσμῶν (θεωρουμένη εἰς τὴν δέσμην O) θὰ τέμνῃ τὴν k εἰς σημεῖον, προβαλλόμενον ἀπὸ τοῦ κέντρου O_1 διὰ τῆς ἀκτῖνος $(O_1O) \equiv \alpha$ (θεωρουμένης εἰς τὴν δέσμην O_1)· ἤτοι ἡ ἀκτὶς α συμπίπτει μὲ τὴν ὁμόλογον αὐτῆς α_1.

Πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ δευτέρου μέρους τῆς ἀνωτέρω προτάσεως παρατηροῦμεν ὅτι· ἐὰν αἱ δέσμαι O, O_1

βολικαὶ καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον αὐτῶν A (ὑποτιθέμενον ἐπὶ τῆς k) συμπίπτῃ μὲ τὸ ὁμόλογον αὐτοῦ A_1 (ὑποτιθέμενον ἐπὶ τῆς k_1) ἡ προβολικότης μεταξὺ τῶν k, k_1 δύναται νὰ θεωρῆται ὡρισμένη διὰ τῆς ἀντιστοιχίας δύο τριάδων ἐξ ὁμολόγων στοιχείων A, B, Γ καὶ A_1, B_1, $Γ_1$. Ἀλλ' αἱ εὐθεῖαι (BB_1) καὶ ($ΓΓ_1$) ὡρίζουν ἓν σημεῖον O, αἱ δὲ k καὶ k′ προβαλλόμεναι ἀπὸ τοῦ O δίδουν δύο ἐπιπέδους δέσμας συμπιπτούσας, ἐπειδὴ αὗται θὰ ἔχουν τρία στοιχεῖα κοινά, τὰ OA, OB, OΓ (συμπίπτοντα μὲ τὰ ὁμόλογα αὐτῶν OA_1,OB_1,$OΓ_1$). Ἄρα αἱ k, k_1 εἶνε τομαὶ τῆς αὐτῆς ἐπιπέδου δέσμης ἀκτίνων καὶ εἶνε προοπτικαί.

εἶνε προβολικαὶ καὶ ἡ κοινὴ ἀκτὶς αὐτῶν $α \equiv (OO_1)$ (θεωρουμένη εἰς τὴν O) συμπίπτῃ μὲ τὴν ὁμόλογον αὐτῆς $α_1 \equiv (O_1 O)$ (θεωρουμένην εἰς τὴν O_1), ἡ προβολικότης μεταξύ τῶν O, O_1 δύναται νὰ θεωρῆται ὡρισμένη διὰ τῆς ἀντιστοιχίας δύο τριάδων ἐξ ὁμολόγων ἀκτίνων α,β,γ καὶ $α_1$,$β_1$,$γ_1$. Ἀλλὰ τὰ σημεῖα ($ββ_1$) καὶ ($γγ_1$) ὁρίζουν μίαν εὐθεῖαν k, αἱ δὲ O καὶ O_1 τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς k δίδουν δύο σημειοσειρὰς συμπιπτούσας, ἐπειδὴ αὗται θὰ ἔχουν τρία στοιχεῖα κοινά, τὰ (kα) (kβ) (kγ) (συμπίπτοντα μὲ τὰ ὁμόλογα αὐτῶν $kα_1$, $kβ_1$, $kγ_1$). Ἄρα αἱ O, O_1 εἶνε ὄψεις τῆς αὐτῆς σημειοσειρᾶς καὶ εἶνε προοπτικαί.

Διὰ τῶν ἀνωτέρω προτάσεων ἔχομεν τὴν ἁπλουστέραν κατασκευὴν προβολικότητος μεταξὺ δύο σημειοσειρῶν ἢ δύο ἐπιπέδων δεσμῶν ἀκτίνων, τῶν ὁποίων τὸ κοινὸν στοιχεῖον ἀντιστοιχεῖ πρὸς ἑαυτό. Ἐκ τῶν προηγουμένων διακρίνομεν ὅτι, δύο τεμνόμεναι προβολικαὶ σημειοσειραὶ k καὶ k′ δὲν εἶνε ἐν γένει προοπτικαί, καθὼς καὶ δύο προβολικαὶ ἐπίπεδοι δέσμαι ἀκτίνων κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ.

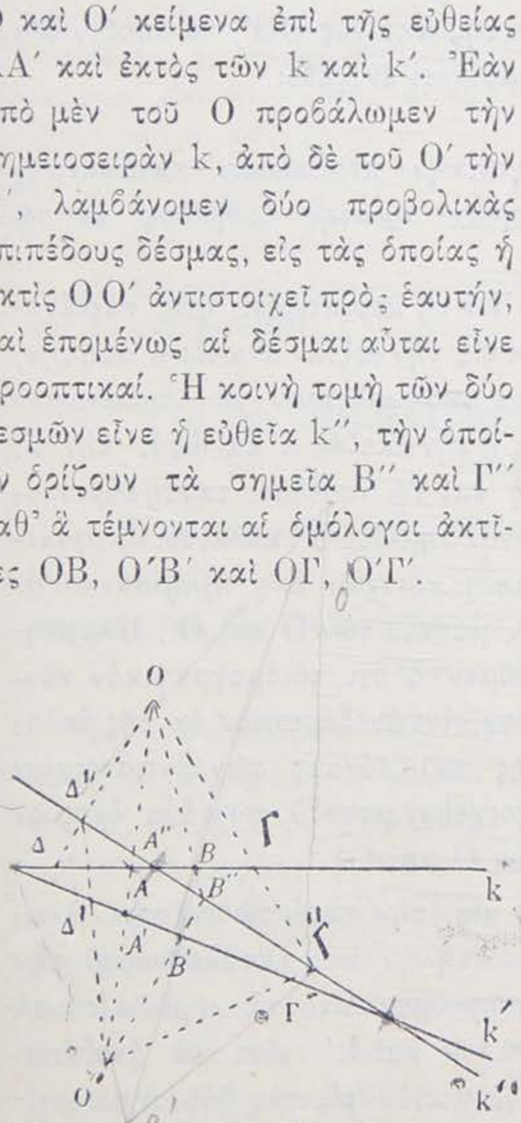
§ 35. Προβολικοὶ σχηματισμοὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

Διὰ προβολικοὺς σχηματισμοὺς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἔχομεν τὰς ἑξῆς διδύμους προτάσεις.

«*Εὑρίσκομεν δύο προοπτικὰς ἐπιπέδους δέσμας, ἐὰν προβάλωμεν δύο διαφόρους προβολικὰς σημειοσειρὰς k καὶ k′ ἀπὸ δύο σημείων, κειμένων ἐκτὸς μὲν αὐτῶν, ἀλλ' ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥτις συνδέει δύο ὁμόλογα σημεῖα τῶν k, k′ (διάφορα τῆς τομῆς (kk′) τῶν k καὶ k′)· οὕτω*

«*Εὑρίσκομεν δύο προοπτικὰς σημειοσειράς, ἐὰν τμήσωμεν δύο διαφόρους προβολικὰς ἐπιπέδους δέσμας O καὶ O′ διὰ δύο εὐθειῶν, μὴ ἀνηκουσῶν εἰς τὰς ἀκτῖνας τῶν δεσμῶν καὶ διερχομένας διὰ τῆς τομῆς δύο ὁμολόγων ἀκτίνων τῶν δεσμῶν· οὕτω εὑρίσκομεν μίαν ἐπίπεδον* *εὑρίσκομεν μίαν εὐθεῖαν (κοινὴν τομὴν τῶν δύο δεσμῶν), ἥτις εἶνε προοπτικὴ πρὸς τὴν k καὶ k'».*

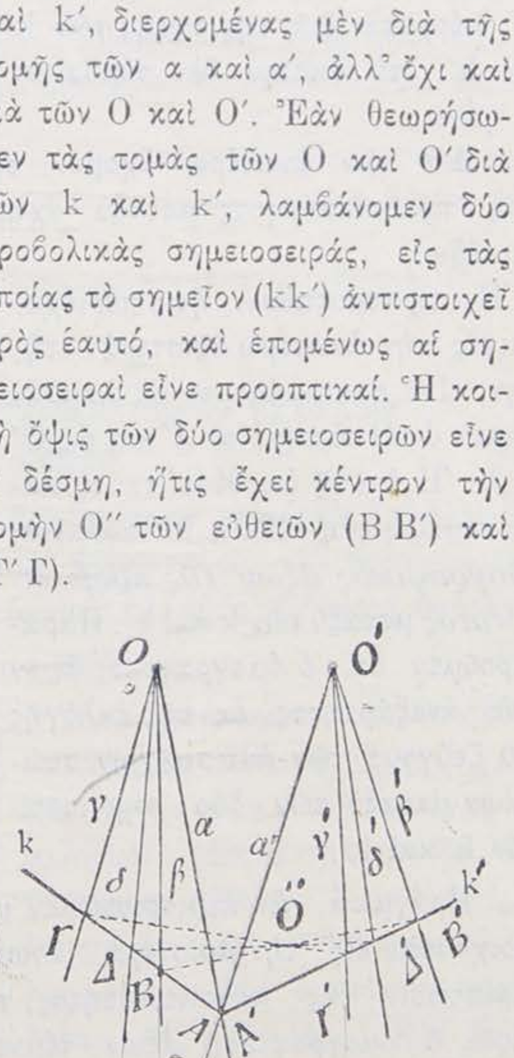
Ἔστωσαν ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' τρία ζεύγη ὁμολόγων σημείων ἐπὶ τῶν προβολικῶν σημειοσειρῶν k καὶ k'. Ἓν τοὐλάχιστον ἐκ τῶν ζευγῶν τούτων, π.χ. τὸ ΑΑ', δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ σημείου (kk') καὶ ἑπομένως δυνάμεθα νὰ λάβωμεν δύο σημεῖα Ο καὶ Ο' κείμενα ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΑ' καὶ ἐκτὸς τῶν k καὶ k'. Ἐὰν ἀπὸ μὲν τοῦ Ο προβάλωμεν τὴν σημειοσειρὰν k, ἀπὸ δὲ τοῦ Ο' τὴν k', λαμβάνομεν δύο προβολικὰς ἐπιπέδους δέσμας, εἰς τὰς ὁποίας ἡ ἀκτὶς Ο Ο' ἀντιστοιχεῖ πρὸς ἑαυτήν, καὶ ἑπομένως αἱ δέσμαι αὗται εἶνε προοπτικαί. Ἡ κοινὴ τομὴ τῶν δύο δεσμῶν εἶνε ἡ εὐθεῖα k'', τὴν ὁποίαν ὁρίζουν τὰ σημεῖα Β'' καὶ Γ'' καθ' ἃ τέμνονται αἱ ὁμόλογοι ἀκτῖνες ΟΒ, Ο'Β' καὶ ΟΓ, Ο'Γ'.



Ἡ σημειοσειρὰ k'' εἶνε προοπτικὴ πρὸς τὴν k καὶ τὴν k'. Ἑπομένως διὰ νὰ εὕρωμεν ἐπὶ τῆς k' τὸ ὁμόλογον στοιχείου τινὸς Δ τῆς

δέσμην (κοινὴν ὄψιν τῶν δύο εὐθειῶν), ἥτις εἶνε προοπτικὴ πρὸς τὴν Ο καὶ Ο'».

Ἔστωσαν αα', ββ' καὶ γγ' τρία ζεύγη ὁμολόγων ἀκτίνων τῶν προβολικῶν ἐπιπέδων δεσμῶν Ο καὶ Ο'. Ἓν τοὐλάχιστον τῶν ζευγῶν τούτων, π. χ. τὸ αα' δὲν συμπίπτει μὲ τὴν ἀκτῖνα (ΟΟ') καὶ ἑπομένως δυνάμεθα νὰ φέρωμεν δύο εὐθείας k καὶ k', διερχομένας μὲν διὰ τῆς τομῆς τῶν α καὶ α', ἀλλ' ὄχι καὶ διὰ τῶν Ο καὶ Ο'. Ἐὰν θεωρήσωμεν τὰς τομὰς τῶν Ο καὶ Ο' διὰ τῶν k καὶ k', λαμβάνομεν δύο προβολικὰς σημειοσειράς, εἰς τὰς ὁποίας τὸ σημεῖον (kk') ἀντιστοιχεῖ πρὸς ἑαυτό, καὶ ἑπομένως αἱ σημειοσειραὶ εἶνε προοπτικαί. Ἡ κοινὴ ὄψις τῶν δύο σημειοσειρῶν εἶνε ἡ δέσμη, ἥτις ἔχει κέντρον τὴν τομὴν Ο'' τῶν εὐθειῶν (Β Β') καὶ (Γ' Γ).



Ἡ δέσμη Ο'' εἶνε προοπτικὴ πρὸς τὴν Ο καὶ Ο'. Ἑπομένως διὰ νὰ εὕρωμεν ἐπὶ τῆς Ο' τὸ ὁμόλογον στοιχείου τινὸς δ τῆς Ο (ἐν τῇ k (ἐν τῇ προβολικότητι μεταξὺ τῶν k καὶ k′), προβάλλομεν τὸ Δ ἀπὸ τοῦ Ο ἐπὶ τῆς k″ καὶ εὑρίσκομεν οὕτω τὸ Δ″· ἀκολούθως προβάλλομεν τὸ Δ″ ἀπὸ τοῦ Ο′ ἐπὶ τῆς k′, ὅτε εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον σημεῖον Δ′.

Ἡ συνθήκη ἵνα αἱ δύο σημειοσειραὶ k καὶ k′ εἶνε προοπτικαὶ ἀνάγεται οὕτω εἰς τὸ ὅτι, ἡ εὐθεῖα k″ διέρχεται διὰ τῆς τομῆς τῶν k καὶ k′, τὸ ὁποῖον δὲν συμβαίνει ἐν γένει.

προβολικότητι μεταξὺ τῶν Ο καὶ Ο′), εὑρίσκομεν τὴν τομὴν Δ τῆς δ ὑπὸ τῆς k καὶ προβάλλομεν τὸ Δ ἀπὸ τοῦ Ο″ ἐπὶ τῆς k′, ὅτε εὑρίσκομεν τὸ Δ′· ἀκολούθως προβάλλομεν τὸ Δ′ ἀπὸ τοῦ Ο′ καὶ ἔχομεν τὴν ζητουμένην ἀκτῖνα δ′.

Ἡ συνθήκη ἵνα αἱ δύο δέσμαι Ο καὶ Ο′ εἶνε προοπτικαὶ ἀνάγεται οὕτω εἰς τὸ ὅτι, τὸ κέντρον Ο″ κεῖται ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΟΟ′, τὸ ὁποῖον δὲν συμβαίνει ἐν γένει.

Διὰ τῶν ἀνωτέρω ἔχομεν τὴν γενικὴν περίπτωσιν κατασκευῆς μιᾶς προβολικότητος μεταξὺ σχηματισμῶν πρώτης βαθμῖδος ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

Ἐν τῇ περιπτώσει, ἥτις περιέχεται εἰς τὴν ἀνωτέρω ἀριστερὰν στήλην, εἶνε σκοπιμώτερον νὰ λαμβάνωμεν ὡς Ο τὸ σημεῖον Α′ καὶ ὡς Ο′ τὸ Α. Ἡ ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ταύτῃ κατασκευαζομένη εὐθεῖα k″ καλεῖται *ὁμογραφικὸς ἄξων τῆς προβολικότητος* μεταξὺ τῶν k καὶ k′. Παρατηροῦμεν ὅτι, ὁ ὁμογραφικὸς ἄξων εἶνε ἀνεξάρτητος ἐκ τῆς ἐκλογῆς τοῦ ζεύγους τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων μεταξὺ τῶν δύο σημειοσειρῶν k καὶ k′.

Ἐν τῇ περιπτώσει, ἥτις περιέχεται εἰς τὴν δεξιὰν ἀνωτέρω στήλην, εἶνε σκοπιμώτερον νὰ λαμβάνωμεν ὡς k τὴν ἀκτῖνα α′ κα᾽ ὡς k′ τὴν α. Τὸ ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ταύτῃ εὑρισκόμενον σημεῖον Ο″ καλεῖται *ὁμογραφικὸν κέντρον τῆς προβολικότητος* μεταξὺ τῶν Ο καὶ Ο′. Παρατηροῦμεν δ᾽ ὅτι, τὸ ὁμογραφικὸν κέντρον εἶνε ἀνεξάρτητον ἐκ τῆς ἐκλογῆς τοῦ ζεύγους τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων μεταξὺ τῶν δύο δεσμῶν τῶν Ο καὶ Ο′.

Πράγματι, ἂν περιορισθῶμεν μόνον εἰς τὴν περίπτωσιν τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν ἀριστερὰ ἀνωτέρω στήλην καὶ ἀποκλείσωμεν τὴν περίπτωσιν τῆς προοπτικότητος, παρατηροῦμεν ὅτι τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα ὁ ὁμογραφικὸς ἄξων τέμνει τὰς k καὶ k′ εἶνε τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα πρὸς τὸ σημεῖον τὸ ὁποῖον εἶνε κοινὸν εἰς τὰς δύο σημειοσειράς, ἑπομένως εἶνε ἀνεξάρτητον ἐκ τῆς ἐκλογῆς τοῦ ζεύγους ΑΑ′

Ἐὰν ἐπὶ πλέον αἱ δύο σημειοσειραὶ k καὶ k′ εἶνε προοπτικαὶ (ὅτε ὁ ὁμογραφικὸς ἄξων τέμνει τὰς k καὶ k′ εἰς τὸ αὐτὸ κοινὸν σημεῖον αὐτῶν), παρατηροῦμεν ὅτι οὗτος εἶνε ἡ τετάρτη ἁρμονικὴ ἀκτὶς ἐν σχέσει πρὸς τὰς k καὶ k′ καὶ πρὸς τὴν ἀκτῖνα καθ᾽ ἣν προβάλλεται τὸ σημεῖον (kk′) ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς προοπτικότητος, καὶ οὕτω ὅτι καὶ ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ὁ ἄξων εἶνε ἀνεξάρτητος ἐκ τῆς ἐκλογῆς τοῦ ζεύγους ΑΑ′.

Ἀσκήσεις.

1) Ἂν δύο προβολικαὶ ἀξονικαὶ δέσμαι ἐπιπέδων (τῶν ὁποίων οἱ ἄξονες τέμνονται) ἔχουν κοινὸν τὸ ἐπίπεδον τῶν ἀξόνων αὐτῶν, εἶνε προοπτικαὶ (ὄψεις μιᾶς ἐπιπέδου δέσμης).

2) Ἂν δύο ὁμόκεντροι ἐπίπεδοι προβολικαὶ δέσμαι (κείμεναι ἐπὶ διαφόρων ἐπιπέδων) ἔχουν κοινὴν τὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν, εἶνε προοπτικαὶ (τομαὶ μιᾶς ἀξονικῆς δέσμης ἐπιπέδων).

3) Δύο προβολικαὶ μὴ ὁμόκεντροι ἐπίπεδοι δέσμαι O_1, O_2, ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κείμεναι, εἶνε προοπτικαί, ἂν τρία σημεῖα τῶν τομῶν ὁμολόγων ζευγῶν ἀκτίνων αὐτῶν κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας.

4) Δύο προβολικαὶ σημειοσειραί, κείμεναι ἐπὶ διαφόρων φορέων, εἶνε προοπτικαί, ἂν τρεῖς εὐθεῖαι, συνδέουσαι τρία ζεύγη ὁμολόγων σημείων αὐτῶν, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

5) Εὕρετε τὰς ἀναλόγους προτάσεις πρὸς τὰς ἀνωτέρω δι᾽ ἀξονικὰς προβολικὰς δέσμας ἐπιπέδων.

§ 36. Προβολικότης σχηματισμῶν ἐχόντων κοινὸν φορέα.

Ἡ κατασκευὴ προβολικότητος σχηματισμῶν κειμένων ἐπ᾽ ἀλλήλων (ἤτοι κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ φορέως) ἀνάγεται εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, ἐὰν παρατηρήσωμεν ὅτι ἔχομεν τὰς ἑξῆς διδύμους προτάσεις

ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

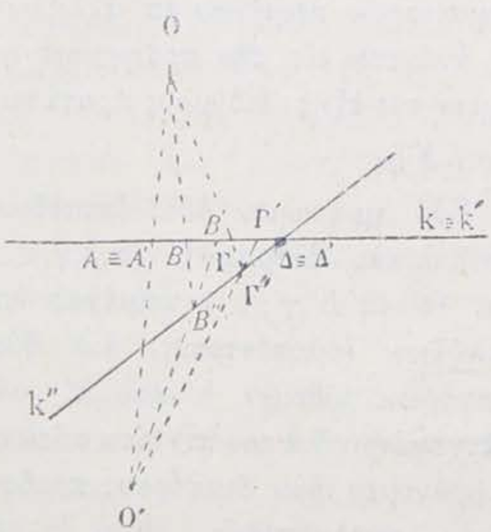
Ἐὰν προβάλωμεν δύο προβολικὰς σημειοσειρὰς k (Α,Β,Γ, ...) καὶ k′ (Α′,Β′,Γ′, ...) κειμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ φορέως, ἀπὸ δύο διαφόρων σημείων Ο καὶ Ο′, ἐκτὸς τοῦ φορέως λαμβανομένων, εὑρίσκομεν δύο διαφόρους ἐπιπέδους προβολικὰς δέσμας. Ἐὰν ἐπὶ τῆς k ≡ k′ ὑπάρχῃ ἓν διπλοῦν σημεῖον, π. χ. ἂν τὸ σημεῖον Α συμπίπτῃ μὲ τὸ Α′, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὰ Ο καὶ Ο′ ἐπὶ μιᾶς εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ Α (ἐκτὸς τῆς k),

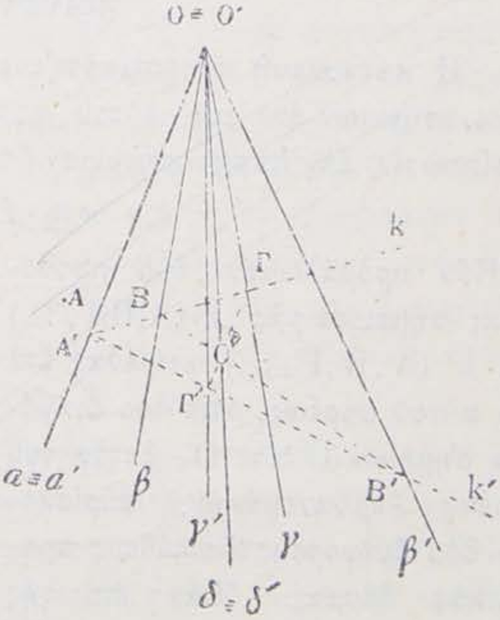
Ἐὰν τμήσωμεν δύο ἐπιπέδους προβολικὰς δέσμας Ο (α,β,γ, ...) καὶ Ο′ (α′,β′,γ′, ...) κειμένας ἐπ᾽ ἀλλήλων (ὁμοκέντρους) διὰ δύο διαφόρων εὐθειῶν k καὶ k′, μὴ διερχομένων διὰ τοῦ κέντρου αὐτῶν, λαμβάνομεν δύο διαφόρους προβολικὰς σημειοσειράς. Ἐὰν ἐν τῇ Ο ≡ Ο′ ὑπάρχῃ μία διπλῆ ἀκτίς, π.χ. ἂν ἡ ἀκτὶς α συμπίπτῃ μὲ τὴν α′, δυνάμεθα νὰ φέρωμεν τὰς k καὶ k′ διὰ σημείου τῆς α (κειμένου ἐκτὸς τοῦ Ο), ὅτε αἱ δύο σημειοσειραὶ ὅτε αἱ δύο προβάλλουσαι δέσμαι θὰ εἶνε προοπτικαί, ἤτοι αἱ k καὶ k′ θὰ εἶνε πρὸς τὴν κοινὴν τομὴν k″ τῶν δύο δεσμῶν προοπτικαί.

Ἐν ἀκόμη διπλοῦν σημεῖον ἐπὶ τῆς k, ἐκτὸς τῶν A, πρέπει νὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς k″, καὶ ἑπομένως θὰ εἶνε τὸ σημεῖον $\Delta \equiv \Delta'$, καθ᾽ ὃ τέμνονται αἱ k καὶ k″. Ἀντιστρόφως· προκύπτει τὸ σημεῖον τοῦτο $\Delta \equiv (kk'')$ ὡς διπλοῦν ἐκ τῆς δοθείσης προβολικότητος μεταξὺ τῶν k καὶ k′, εἰς τρόπον ὥστε αὕτη, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει ἤδη ἓν διπλοῦν σημεῖον A, θὰ ἔχῃ ἐν γένει ἓν δεύτερον διπλοῦν σημεῖον Δ, τὸ ὁποῖον ἐν τούτοις δύναται ἐνίοτε νὰ συμπίπτῃ μετὰ τοῦ A.

θὰ εἶνε προοπτικαί, ἤτοι αἱ δέσμαι O καὶ O′ θὰ εἶνε προοπτικαὶ πρὸς τὴν O″, ἥτις εἶνε κοινὴ ὄψις τῶν δύο σημειοσειρῶν.

Μία ἀκόμη διπλῆ ἀκτὶς τῆς O, ἐκτὸς τῆς α, πρέπει νὰ ἀνήκῃ εἰς τὴν O″ καὶ ἑπομένως θὰ εἶνε ἡ ἀκτὶς $\delta \equiv \delta'$, ἥτις εἶνε κοινὴ ἀκτὶς τῶν O καὶ O″. Ἀντιστρόφως· προκύπτει ἡ ἀκτὶς αὕτη $\delta \equiv (OO'')$ ὡς διπλῆ ἐκ τῆς δοθείσης προβολικότητος μεταξὺ τῶν O καὶ O′, εἰς τρόπον ὥστε αὕτη, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει ἤδη μία διπλῆ ἀκτὶς α, θὰ ἔχῃ ἐν γένει μίαν δευτέραν διπλῆν ἀκτῖνα δ, ἥτις ἐν τούτοις δύναται ἐνίοτε νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν α.





Ἐὰν δίδωνται ἐπὶ τῆς $k \equiv k'$ τὰ δύο σημεῖα $A \equiv A'$ καὶ $\Delta \equiv \Delta'$ καὶ τὸ ζεῦγος τῶν ὁμολόγων σημείων B καὶ B′, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὴν προβολικότητα,

Ἐὰν δίδωνται ἐπὶ τῆς $O \equiv O'$ αἱ δύο διπλαῖ ἀκτῖνες $\alpha \equiv \alpha'$ καὶ $\delta \equiv \delta'$ καὶ τὸ ζεῦγος τῶν ὁμολόγων ἀκτίνων β καὶ β′, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὴν προβολιἐὰν λάβωμεν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ A, τὰ σημεῖα O καὶ O′. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ μόνον ἡ εὐθεῖα k″, ἐὰν φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν, τὴν συνδέουσαν τὸ σημεῖον Δ μὲ τὴν τομὴν τῶν ἀκτίνων OB, καὶ O′B′. Διότι οὕτω ὁρίζεται ἡ προβολικότης μεταξὺ τῶν δεσμῶν, τῶν ἐχουσῶν κέντρα τὰ O καὶ O′, ἄρα καὶ ἡ προβολικότης ἐπὶ τῆς k.

Ἡ ἀνωτέρω κατασκευὴ ἰσχύει καὶ ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ δεύτερον διπλοῦν σημεῖον Δ συμπίπτῃ μὲ τὸ A, ἐπειδὴ ἡ συνθήκη ἵνα συμβαίνῃ τοῦτο, ἔγκειται εἰς τὸ ὅτι, ὁ ἄξων τῆς προοπτικότητος k″ διέρχεται διὰ τοῦ A≡Δ, καὶ τότε εἶνε οὗτος ὡρισμένος, ὡς συνδέων τὸ A μὲ τὴν τομὴν τῶν OB καὶ O′B′.

Οὕτω λαμβάνομεν μίαν προβολικότητα ἐπὶ τῆς k, τῆς ὁποίας τὰ δύο διπλᾶ σημεῖα συμπίπτουν μὲ τὸ A καὶ διὰ τὴν ὁποίαν τὰ B, B′ εἶνε ἓν δοθὲν ζεῦγος ὁμολόγων σημείων. Ἡ προβολικότης αὕτη εἶνε οὕτως ὡρισμένη, ἐπειδὴ εἶνε ὡρισμένη ἡ προοπτικότης μεταξὺ τῶν δεσμῶν, αἵτινες προβάλλουν τὴν k ἀπὸ τῶν O καὶ O′.

κότητα, ἐὰν διά τινος σημείου τῆς α φέρωμεν τὰς εὐθείας k καὶ k′. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον O″, ἐὰν εὕρωμεν τὴν τομὴν τῆς ἀκτῖνος δ μὲ τὴν εὐθεῖαν, τὴν συνδέουσαν τὰ σημεῖα (kβ)≡B, (k′β′)≡B′. Διότι οὕτω ὁρίζεται ἡ προβολικότης μεταξὺ τῶν σημειοσειρῶν k καὶ k′, ἄρα καὶ ἡ προβολικότης O.

Ἡ ἀνωτέρω κατασκευὴ ἰσχύει καὶ ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ δευτέρα διπλῆ ἀκτὶς συμπίπτει μὲ τὴν α, ἐπειδὴ ἡ συνθήκη ἵνα συμβαίνῃ τοῦτο, ἔγκειται εἰς τὸ ὅτι, τὸ κέντρον τῆς προοπτικότητος O″ κεῖται ἐπὶ τῆς α≡δ καὶ τότε εἶνε τοῦτο ὡρισμένον, ὡς τομὴ τῆς α καὶ τῆς ἀκτῖνος τῆς συνδεούσης τὰ σημεῖα (kβ)≡B καὶ (k′β′)≡B′.

Οὕτω λαμβάνομεν μίαν προβολικότητα ἐπὶ τῆς O, τῆς ὁποίας αἱ δύο διπλαῖ ἀκτῖνες συμπίπτουν μὲ τὴν α καὶ διὰ τὴν ὁποίαν αἱ β, β′ εἶνε ἓν δοθὲν ζεῦγος ὁμολόγων ἀκτίνων. Ἡ προβολικότης αὕτη εἶνε οὕτως ὡρισμένη, ἐπειδὴ εἶνε ὡρισμένη ἡ προοπτικότης μεταξὺ τῶν σημειοσειρῶν, καθ' ἃς τέμνεται ἡ O ὑπὸ τῶν k καὶ k′.

Κατὰ τὰς ἀνωτέρω ἰδιότητας, αἵτινες δύνανται νὰ ἐπεκταθοῦν, συμφώνως μὲ τὴν ἀρχὴν τοῦ δυϊσμοῦ, καὶ εἰς ἀξονικὰς δέσμας ἐπιπέδων, ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

« *Εἰς γεωμετρικὸν σχηματισμὸν πρώτης βαθμῖδος ὑπάρχει μία ὡρισμένη προβολικότης ΑΔΒ..... $\overline{\wedge}$ ΑΔΒ′...., ἥτις ἔχει δύο δεδομένα, διάφορα ἀλλήλων ἢ συμπίπτοντα εἰς ἕν, διπλᾶ στοιχεῖα Α καὶ Δ, καὶ ἐν τῇ ὁποίᾳ δύο ἄλλα ὡρισμένα στοιχεῖα Β καὶ Β′ ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἄλληλα*».

§ 37. Διπλᾶ στοιχεῖα προβολικότητος σχηματισμῶν ἐχόντων κοινὸν φορέα.

Ἐγνωρίσαμεν τὴν κατασκευὴν προβολικότητος, ἥτις ὑπάρχει ἐπὶ ἑνὸς σχηματισμοῦ, ἐν τῇ ὁποίᾳ δίδονται δύο διάφορα ἢ συμπίπτοντα διπλᾶ στοιχεῖα καὶ ἓν ζεῦγος ἀντιστοίχων στοιχείων. Ἐὰν καὶ τὸ τρίτον τοῦτο ζεῦγος τῶν ὁμολόγων στοιχείων ἀποτελῆται ἐκ συμπιπτόντων στοιχείων, ἡ προβολικότης αὕτη εἶνε ταὐτότης. Ὑπάρχουν καὶ παραδείγματα ἄλλων προβολικοτήτων ἐφ᾽ ἑνὸς σχηματισμοῦ k πρώτης βαθμῖδος ἄνευ διπλῶν στοιχείων. Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ φαντασθῶμεν τὴν προβολικότητα, ἥτις προκύπτει ἐπὶ τῆς k μεταξὺ τῶν ἁρμονικῶν συζυγῶν στοιχείων πρὸς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ στοιχεῖον ἐν σχέσει πρὸς δύο χωριζόμενα ζεύγη στοιχείων ΑΓ καὶ ΒΔ. Πράγματι ἡ προβολικότης αὕτη δὲν ἔχει διπλᾶ στοιχεῖα, διότι ἓν διπλοῦν στοιχεῖον ἐν αὐτῇ μετὰ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος κοινοῦ πρὸς αὐτὸ συζυγοῦς ἁρμονικοῦ στοιχείου ἐν σχέσει πρὸς τὰ χωριζόμενα ἀπ᾽ ἀλλήλων Α,Γ καὶ Β,Δ θὰ ἀπετέλουν ἓν ζεῦγος, τὸ ὁποῖον θὰ ἐχώριζεν ἁρμονικῶς τὰ δοθέντα ζεύγη Α,Γ καὶ Β,Δ τὸ ὁποῖον εἶνε ἀδύνατον (§ 31), (ἐπειδὴ ταῦτα ὑπετέθησαν χωριζόμενα ἀπ᾽ ἀλλήλων ἁρμονικῶς). Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

«εἰς δοθεῖσαν προβολικότητα ἑνὸς σχηματισμοῦ πρώτης βαθμῖδος, ἥτις δὲν εἶνε ταὐτότης, δυνατὸν νὰ ἔχωμεν τὰς ἑξῆς τρεῖς περιπτώσεις.

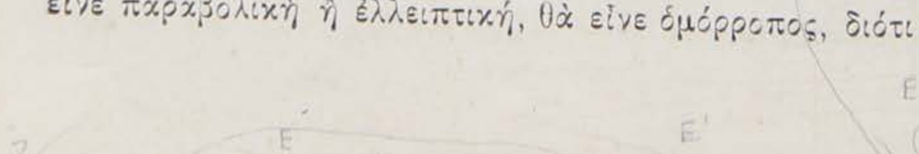
1) Ὑπάρχουν δύο διάφορα διπλᾶ στοιχεῖα· τότε ἡ προβολικότης λέγεται ὑπερβολική.

2) Ὑπάρχει ἓν διπλοῦν στοιχεῖον (ἢ δύο συμπίπτοντα)· τότε ἡ προβολικότης λέγεται παραβολική.

3) Δὲν ὑπάρχει διπλοῦν τι στοιχεῖον· τότε ἡ προβολικότης λέγεται ἐλλειπτική».

Ὡς εἶνε γνωστόν, ἡ προβολικότης μεταξὺ δύο σχηματισμῶν πρώτης βαθμῖδος ἐκφράζεται κινητικῶς διὰ τοῦ ὅτι, ἂν ἓν στοιχεῖον κινῆται καὶ διαγράφῃ τὸν ἕνα σχηματισμόν, τὸ ἀντίστοιχον αὐτοῦ στοιχεῖον τοῦ ἄλλου σχηματισμοῦ, κινούμενον, διαγράφει τὸν ἄλλον σχηματισμόν. Ἐν τῇ περιπτώσει καθ᾽ ἣν κεῖνται ἐπ᾽ ἀλλήλων οἱ σχηματισμοὶ τὰ δύο κινητὰ θὰ κινοῦνται πρὸς τὴν αὐτὴν ἢ τὴν ἀντίθετον φοράν, καὶ ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιπτώσει ἡ προβολικότης εἶνε ὁμόρροπος, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ ἀντίρροπος.

Ἐὰν εἰς ἕνα σχηματισμὸν πρώτης βαθμῖδος ἔχωμεν μίαν προβολικότητα, ἂν μὲν εἶνε ἀντίρροπος, θὰ εἶνε αὕτη ὑπερβολικὴ (§32), ἂν δὲ εἶνε παραβολικὴ ἢ ἐλλειπτική, θὰ εἶνε ὁμόρροπος, διότι ἂν ὑποτεθῇ ὅτι



εἶνε ἀντίρροπος, θὰ ἦτο ὑπερβολική. Ἐν τούτοις, ὑπερβολική τις προβολικότης ἑνὸς σχηματισμοῦ δὲν εἶνε πάντοτε ἀντίρροπος. Πράγματι, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν τέσσαρα σημεῖα Μ, Ν, Α, Α′ ἐπί τινος εὐθείας k. Ὑπάρχει μία προβολικότης ἐπὶ τῆς k, ἐν τῇ ὁποίᾳ τὰ Μ, Ν εἶνε διπλᾶ στοιχεῖα καὶ τὰ Α, Α′ ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἄλληλα. Ἐὰν τώρα ἓν σημεῖον διαγράφῃ τὸ τμῆμα ΜΑΝ, τὸ ἀντίστοιχον αὐτοῦ σημεῖον διαγράφει ἐν τῇ αὐτῇ προβολικότητι τὸ τμῆμα ΜΑ′Ν· εἶνε δὲ τοῦτο ἀντίρροπον ἢ τὸ ΜΑΝ, ἐὰν τὰ Α, Α′ χωρίζουν τὰ Μ καὶ Ν, καὶ ἑπομένως ἐν τῇ περιπτώσει αὐτῇ ἡ προβολικότης εἶνε ἀντίρροπος. Ἐὰν ὅμως τὰ Α, Α′ δὲν χωρίζουν τὰ Μ καὶ Ν, τὰ τμήματα ΜΑΝ καὶ ΜΑ′Ν εἶνε ὁμόρροπα, καὶ ἡ προβολικότης εἶνε ὁμόρροπος. Παρατηροῦμεν προσέτι ὅτι, ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει τὰ στοιχεῖα Μ καὶ Ν χωρίζονται ἀπὸ ἓν ζεῦγος ὁμολόγων στοιχείων, ἐνῷ οὐδέποτε συμβαίνει τοῦτο ἐν τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

——————————————— k
Μ Α Ν Α′

——————————————— k
Μ Α Α′ Ν

Μ Α Ν
Μ Α′ Ν

«εἰς γεωμετρικὸν σχηματισμὸν πρώτης βαθμῖδος 1) ἑκάστη ἀντίρροπος προβολικότης εἶνε ὑπερβολική· 2) ἑκάστη παραβολικὴ ἢ ἐλλειπτικὴ προβολικότης εἶνε ὁμόρροπος· 3) μία ὑπερβολικὴ προβολικότης εἶνε ἀντίρροπος ἢ ὁμόρροπος, καθόσον δύο ὁμόλογα στοιχεῖα αὐτῆς χωρίζουν ἢ μὴ τὰ διπλᾶ στοιχεῖα ταύτης (τὸ ὁποῖον συμβαίνει ὁμοίως διὰ πάντα τὰ ζεύγη ὁμολόγων στοιχείων)».

Παρατηρητέον προσέτι ὅτι, τὸ γινόμενον δύο προβολικοτήτων ἐν σχηματισμῷ πρώτης βαθμῖδος εἶνε ὁμόρροπος, ἢ ἀντίρροπος, προβολικότης, ἐὰν καὶ αἱ δύο εἶνε ὁμόρροποι ἢ ἀντίρροποι, ἢ ἡ μία ὁμόρροπος καὶ ἡ ἄλλη ἀντίρροπος.

§ 38. Ἰδιότητες συμπλεγμάτων τεσσάρων προβολικῶν στοιχείων.

Γνωρίζομεν ὅτι δύο συμπλέγματα ἐκ δύο τριάδων ἀντιστοίχων στοιχείων Α,Β,Γ καὶ Α′,Β′,Γ′, ἀνηκόντων εἰς δύο γεωμετρικοὺς σχηματισμοὺς πρώτης βαθμῖδος k καὶ k′, ὁρίζουν μίαν μόνην προβολικότητα μεταξὺ τῶν σχηματισμῶν, ἤτοι ἔχομεν $ΑΒΓ \,\overline{\wedge}\, Α'Β'Γ'$.

§ 35

Ἀντιστρόφως ἡ σχέσις $ΑΒΓΔ \,\overline{\wedge}\, Α'Β'Γ'Δ'$

δὲν πληροῦται ἐν γένει (ἐν ᾗ τὰ στοιχεῖα Δ καὶ Δ′ εἶνε ἄλλα στοιχεῖα τῶν k καὶ k′) ἐὰν τὰ συμπλέγματα (ΑΒΓΔ) καὶ (Α′Β′Γ′Δ′) τῶν k καὶ k′ ληφθοῦν τυχαίως, ἐπὶ πλέον δ' ἡ σχέσις αὕτη ὁρίζει τὸ Δ', ἂν δοθῇ τὸ Δ, ἐνῷ τὰ Α,Β,Γ καὶ Α',Β',Γ' δύνανται νὰ ληφθοῦν τυχαίως ἐκ τῶν προτέρων.

Ἐὰν Ε καὶ Ε' εἶνε ἄλλα στοιχεῖα τῶν k καὶ k' ἕπεται ἀκόμη ὅτι ἐκ τῶν σχέσεων

$$\mathrm{ΑΒΓΔ} \;\overline{\wedge}\; \mathrm{Α'Β'Γ'Δ'}$$

$$\mathrm{ΑΒΓΕ} \;\overline{\wedge}\; \mathrm{Α'Β'Γ'Ε'}$$

προκύπτει ἡ $\mathrm{ΑΒΓΔΕ} \;\overline{\wedge}\; \mathrm{Α'Β'Γ'Δ'Ε'}$

καὶ διὰ τοῦτο ἔχομεν $\mathrm{ΒΓΔΕ} \;\overline{\wedge}\; \mathrm{Β'Γ'Δ'Ε'}$ κλπ.

Θὰ ἀποδείξωμεν τώρα τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«*Πάντα τὰ ἁρμονικὰ συμπλέγματα ἐκ στοιχείων, ἀνηκόντων εἰς σχηματισμοὺς πρώτης βαθμῖδος, εἶνε προβολικά*».

Πράγματι, ἐὰν (ΑΒΓΔ) καὶ (Α'Β'Γ'Δ') εἶνε δύο ἁρμονικὰ συμπλέγματα ἐκ στοιχείων, ἀνηκόντων εἰς δύο (διαφόρους ἢ συμπίπτοντας) σχηματισμοὺς k καὶ k' τῆς πρώτης βαθμῖδος, ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἄλληλα τὰ τέταρτα ἁρμονικὰ στοιχεῖα Δ καὶ Δ' ἐν τῇ προβολικότητι, ἥτις ὁρίζεται ἐκ τῶν τριάδων Α,Β,Γ καὶ Α',Β',Γ'.

Παρατηροῦμεν ἀκόμη ὅτι, ἂν (ΑΒΓΔ) εἶνε ἓν ἁρμονικὸν σύμπλεγμα ἐκ στοιχείων ἑνὸς σχηματισμοῦ τῆς πρώτης βαθμῖδος, θὰ εἶνε.

$$\mathrm{ΑΒΓΔ} \;\overline{\wedge}\; \mathrm{ΓΒΑΔ} \;\overline{\wedge}\; \mathrm{ΑΔΓΒ} \;\overline{\wedge}\; \mathrm{ΓΔΑΒ}$$

$$\overline{\wedge}\; \mathrm{ΒΓΔΑ} \;\overline{\wedge}\; \mathrm{ΔΓΒΑ} \;\overline{\wedge}\; \mathrm{ΒΑΔΓ} \;\overline{\wedge}\; \mathrm{ΔΑΒΓ}.$$

Ἤτοι, ἓν ἁρμονικὸν σύμπλεγμα ἐκ τεσσάρων στοιχείων σχηματισμοῦ πρώτης βαθμῖδος, λαμβανομένων καθ' ὡρισμένην τινὰ τάξιν, εἶνε προβολικὸν πρὸς τὸ σύμπλεγμα τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν· 1) ἐὰν ἐναλλάξωμεν δύο στοιχεῖα τοῦ συμπλέγματος καθὼς καὶ τὰ δύο ἄλλα αὐτοῦ στοιχεῖα· 2) ἐὰν ἐναλλάξωμεν μόνον δύο συζυγῆ στοιχεῖα τοῦ συμπλέγματος.

Θὰ ἐξετάσωμεν τώρα, ἂν εἶνε δυνατόν, νὰ κάμωμεν τὰς ἐναλλαγὰς 1) καὶ 2) εἰς τὰ τέσσαρα στοιχεῖα ἑνὸς μὴ ἁρμονικοῦ συμπλέγματος σχηματισμοῦ πρώτης βαθμῖδος, καὶ νὰ εὕρωμεν ἓν σύμπλεγμα, τὸ ὁποῖον νὰ εἶνε ἁρμονικὸν πρὸς τὸ ἀρχικὸν τοιοῦτον. Θὰ δείξωμεν ὅτι,

«*ἐὰν Α,Β,Γ,Δ εἶνε τέσσαρα τυχόντα στοιχεῖα ἑνὸς σχηματισμοῦ πρώτης βαθμῖδος, θὰ εἶνε πάντοτε* $\mathrm{ΑΒΓΔ} \;\overline{\wedge}\; \mathrm{ΒΑΔΓ}$.

Θὰ ἀποδείξωμεν τὴν πρότασιν μόνον διὰ τὸ σύμπλεγμα (ΑΒΓΔ) ἐκ τεσσάρων σημείων μιᾶς εὐθείας k, καὶ ἀκολούθως δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν ἀρχὴν τοῦ δυασμοῦ, προκειμένου περὶ τοῦ ἐπιπέδου ἢ τοῦ χώρου τῶν τριῶν διαστάσεων.

Πρὸς τοῦτο, προβάλλομεν τὸ σύμπλεγμα (ΑΒΓΔ) ἀπό τινος σημείου Ο, κειμένου ἐκτὸς τῆς k, ἐπὶ μιᾶς ἄλλης εὐθείας, διερχομένης διὰ τοῦ Δ, καὶ λαμβάνομεν τὸ σύμπλεγμα ($Α_1Β_1Γ_1Δ$), ὅτε θὰ ἔχωμεν

$$ΑΒΓΔ \overline{\wedge} Α_1Β_1Γ_1Δ$$

ἐπειδὴ τὸ ἓν σύμπλεγμα εἶνε προβολὴ τοῦ ἄλλου ἀπὸ τοῦ Ο. Ὁμοίως, ἂν τὸ ($Α_1Β_1Γ_1Δ$) προβάλωμεν ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τῆς ΓΟ, θὰ ἔχωμεν

$$Α_1Β_1Γ_1Δ \overline{\wedge} ΟΕΓ_1Γ$$

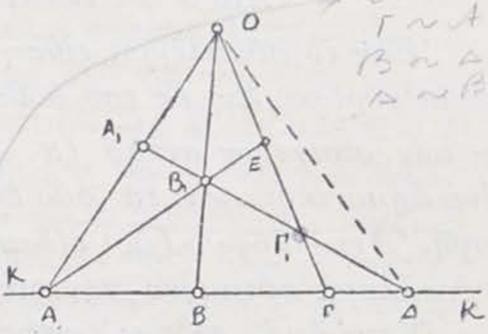
καὶ προβάλλοντες τὸ ($ΟΕΓ_1Γ$) ἀπὸ τοῦ $Β_1$ ἐπὶ τῆς k εὑρίσκομεν

$$ΟΕΓ_1Γ \overline{\wedge} ΒΑΔΓ.$$

Ἑπομένως εἶνε καὶ ΑΒΓΔ $\overline{\wedge}$ ΒΑΔΓ.

Ἐὰν τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο ἐφαρμόσωμεν εἰς τὸ σύμπλεγμα (ΑΓΒΔ), λαμβάνομεν

Α ∼ Γ
Γ ∼ Α
Β ∼ Δ
Δ ∼ Β



$$ΑΓΒΔ \overline{\wedge} ΓΑΔΒ\cdot$$

ἤτοι, ὑπάρχει μία προβολικότης ἐν τῇ ὁποίᾳ, τὰ σημεῖα τῶν ζευγῶν ΑΓ, ΓΑ, ΒΔ, ΔΒ ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἄλληλα. Ἐν τῇ προβολικότητι ταύτῃ εἰς τὸ σύμπλεγμα (ΑΒΓΔ) ἀντιστοιχεῖ τὸ (ΓΔΑΒ), εἰς τρόπον ὥστε εἶνε

$$ΑΒΓΔ \overline{\wedge} ΓΔΑΒ.$$

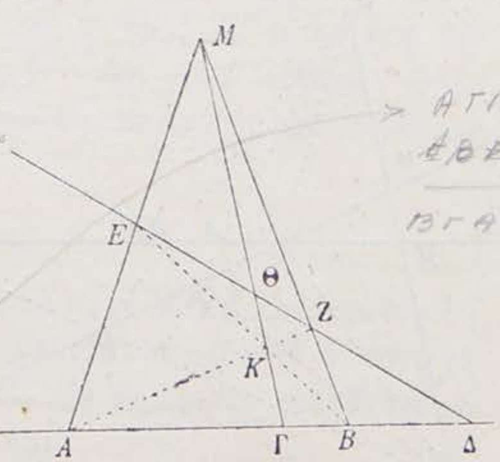
Ἀλλ' εἶνε κατὰ τἀνωτέρω ΓΔΑΒ $\overline{\wedge}$ ΔΓΒΑ.

Ἄρα ἔχομεν τὰς σχέσεις ΑΒΓΔ $\overline{\wedge}$ ΒΑΔΓ $\overline{\wedge}$ ΓΔΑΒ $\overline{\wedge}$ ΔΓΒΑ.

Ὑποθέτομεν τώρα ὅτι ἔχομεν ΑΓΒΔ $\overline{\wedge}$ ΒΓΑΔ καὶ θεωροῦμεν τὸ σύμπλεγμα (ΕΘΖΔ) τὸ προκύπτον ἐκ τοῦ (ΑΓΒΔ) διὰ προβολῆς αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ Μ, κειμένου ἐκτὸς τῆς k, ἐπὶ εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ Δ. Τότε ἔχομεν

$$ΒΓΑΔ \overline{\wedge} ΕΘΖΔ,$$

εἶνε δ' ἡ προβολικότης αὕτη καὶ προοπτικότης, ἐπειδὴ μεταξὺ τῶν δύο σημειοσειρῶν τὸ σημεῖον Δ ἀντιστοιχεῖ πρὸς ἑαυτό. Ἑπομένως αἱ εὐθεῖαι ΒΕ, ΓΘ καὶ ΑΖ τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἔστω



ΑΓΒΔ $\overline{\wedge}$ ΕΘΖ
ΕΘΖΔ $\overline{\wedge}$ ΒΓΑΔ
ΒΓΑΔ $\overline{\wedge}$ ΕΘΖΔ

τὸ Κ. Ἀλλ' οὕτω ἔχομεν τὸ πλῆρες τετρακόρυφον ΕΜΖΚ, ἕνεκα τῆς ἰδιότητος τῶν πλευρῶν τοῦ ὁποίου ἔχομεν ὅτι σύμπλεγμα (ΑΓΒΔ) εἶνε ἁρμονικόν.

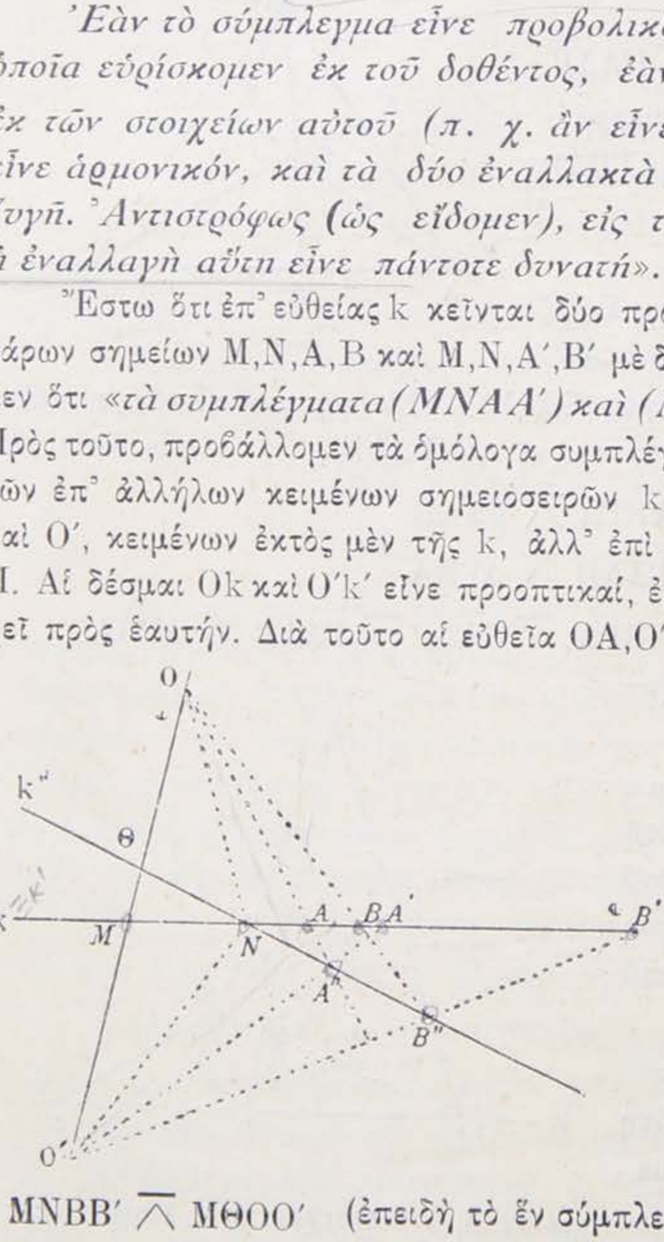
Οὕτω ἔχομεν τὴν ἑξῆς γενικὴν πρότασιν διὰ τοὺς σχηματισμοὺς τῆς πρώτης βαθμῖδος.

«*Ἓν οἱονδήποτε σύμπλεγμα ἐκ τεσσάρων στοιχείων Α,Β,Γ,Δ ἑνὸς σχηματισμοῦ τῆς πρώτης βαθμῖδος, ἐχόντων σειράν τινα ὡρισμένην, εἶνε προβολικὸν πρὸς τὰ συμπλέγματα, τὰ ὁποῖα εὑρίσκομεν, ἐὰν ἐναλλάξωμεν δύο στοιχεῖα αὐτοῦ καθὼς καὶ τὰ δύο ἄλλα μεταξύ των, ἤτοι εἶνε*

$$\mathrm{AB\Gamma\Delta} \;\overline{\wedge}\; \mathrm{BA\Delta\Gamma} \;\overline{\wedge}\; \mathrm{\Gamma\Delta AB} \;\overline{\wedge}\; \mathrm{\Delta\Gamma BA}.$$

Ἐὰν τὸ σύμπλεγμα εἶνε προβολικὸν πρὸς ἓν ἐξ ἐκείνων, τὰ ὁποῖα εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ δοθέντος, ἐὰν ἐναλλάξωμεν μόνον δύο ἐκ τῶν στοιχείων αὐτοῦ (π. χ. ἂν εἶνε $A\Gamma B\Delta \;\overline{\wedge}\; B\Gamma A\Delta$), θὰ εἶνε ἁρμονικόν, καὶ τὰ δύο ἐναλλακτὰ στοιχεῖα εἶνε ἐν αὐτῷ συζυγῆ. Ἀντιστρόφως (ὡς εἴδομεν), εἰς τὰ ἁρμονικὰ συμπλέγματα ἡ ἐναλλαγὴ αὕτη εἶνε πάντοτε δυνατή».

Ἔστω ὅτι ἐπ' εὐθείας k κεῖνται δύο προβολικὰ συμπλέγματα ἐκ τεσσάρων σημείων Μ,Ν,Α,Β καὶ Μ,Ν,Α',Β' μὲ δύο διπλᾶ σημεῖα. Θὰ δείξωμεν ὅτι «*τὰ συμπλέγματα (ΜΝΑΑ') καὶ (ΜΝΒΒ') εἶνε προβολικά*». Πρὸς τοῦτο, προβάλλομεν τὰ ὁμόλογα συμπλέγματα (ΜΝΑΒ) καὶ (ΜΝΑ'Β') τῶν ἐπ' ἀλλήλων κειμένων σημειοσειρῶν k καὶ k' ἀπὸ δύο σημείων Ο καὶ Ο', κειμένων ἐκτὸς μὲν τῆς k, ἀλλ' ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας μετὰ τοῦ Μ. Αἱ δέσμαι Οk καὶ Ο'k' εἶνε προοπτικαί, ἐπειδὴ ἡ ἀκτὶς ΟΟ' ἀντιστοιχεῖ πρὸς ἑαυτήν. Διὰ τοῦτο αἱ εὐθεῖα ΟΑ,Ο'Α' καὶ ΟΒ,Ο'Β' ὁρίζουν δύο σημεῖα Α'',Β'' καὶ ταῦτα τὴν εὐθεῖαν k'', ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ Ν (ὡς τομὴ τῶν δύο προοπτικῶν δεσμῶν). Ἔστω Θ ἡ τομὴ τῆς k'' καὶ ΟΟ'. Θὰ ἔχωμεν τότε



$$\mathrm{MNAA'} \;\overline{\wedge}\; \mathrm{M\Theta OO'}$$

(ἐπειδὴ τὸ ἓν σύμπλεγμα εἶνε προβολὴ τοῦ ἄλλου ἀπὸ τοῦ Α''), καὶ

$\mathrm{MNBB'} \;\overline{\wedge}\; \mathrm{M\Theta OO'}$ (ἐπειδὴ τὸ ἓν σύμπλεγμα εἶνε προβολὴ τοῦ ἄλλου ἀπὸ τοῦ Β''). Ἑπομένως ἔχομεν καὶ $\mathrm{MNAA'} \;\overline{\wedge}\; \mathrm{MNBB'}$.

Τὸ συμπέρασμα τοῦτο δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν ὡς ἑξῆς.

«Ἐὰν ἐπὶ εὐθείας k *ὑπάρχῃ μία προβολικότης μὲ δύο διάφορα διπλᾶ σημεῖα M καὶ N, ἐν τῇ ὁποίᾳ τὰ AA′ καὶ BB′ εἶνε δύο ζεύγη ὁμολόγων σημείων, μεταβαίνει τις τότε ἐκ τοῦ A′ εἰς τὸ B′ διὰ τῆς προβολικότητος* $\left(\frac{\mathrm{MNA}}{\mathrm{MNB}}\right)$ *ἥτις ὁρίζεται ἐκ τῶν δύο τριάδων M,N,A καὶ M,N,B».*

Τὸ συμπέρασμα τοῦτο δύναται νὰ ἐπεκταθῇ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὰ M καὶ N συμπίπτουν ἢ εἶνε N ≡ M. Ἐπὶ τῇ προϋποθέσει ταύτῃ γνωρίζομεν ὅτι, ἡ προοπτικότης μεταξὺ τῶν δεσμῶν, τῶν ἐχουσῶν κέντρα τὰ O καὶ O′, ἐὰν (ἐκτὸς τοῦ διπλοῦ σημείου M ≡ N) δίδεται ἓν ζεῦγος AA′ ὁμολόγων σημείων, ὁρίζεται ἐκ τοῦ ὅτι τότε πρέπει ὁ ἄξων k″ τῆς προοπτικότητος νὰ διέρχεται διὰ τοῦ M (δηλαδὴ εἶνε ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὸ M μὲ τὴν τομὴν τῶν OA καὶ O′A′). Ἐὰν πάλιν τὰ σημεῖα B καὶ B′ εἶνε ὁμόλογα στοιχεῖα τῆς δοθείσης προβολικότητος MMA $\overline{\wedge}$ MMA′, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἐπὶ τῆς k μίαν προβολικότητα, ἥτις ἔχει εἰς τὸ M δύο συμπίπτοντα διπλᾶ σημεῖα, καὶ ἔχει τὸ A καὶ B ὁμόλογα στοιχεῖα. Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ταύτην (καθὼς ἐν τῇ γενικῇ περιπτώσει καθ' ἣν τὰ M καὶ N εἶνε σημεῖα διάφορα ἀλλήλων), ἐὰν πρῶτον προβάλωμεν τὴν k ἀπὸ τοῦ A″ ἐπὶ τῆς OO′, καὶ ἀκολούθως τὴν OO′ ἀπὸ τοῦ B″, τομῆς τῶν OB καὶ O′B′, ἐπὶ τῆς k′ ≡ k. Οὕτω ἀντιστοιχοῦν ἐν αὐτῇ πρὸς ἄλληλα τὰ A′ καὶ B′.

Τοιουτοτρόπως, ὅτι ἡ προβολικότης αὕτη ἔχει εἰς τὸ M δύο συμπίπτοντα διπλᾶ σημεῖα ἀπεδείχθη διὰ τοῦ ὅτι, ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα ἡ δοθεῖσα κατασκευὴ ἐξ ἑνὸς σημείου τῆς k ὁδηγῇ πάλιν εἰς αὐτό, συνίσταται εἰς τὸ ὅτι, ἡ προβολὴ αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ A″ ἐπὶ τῆς OO′ κεῖται μετὰ τοῦ A″ καὶ B″ ἐπὶ μιᾶς εὐθείας γραμμῆς, ἤτοι ἐπὶ τῆς k″. Ἐὰν ἐπεκτείνωμεν τὴν σημασίαν τοῦ συμβόλου $\overline{\wedge}$, θὰ λέγωμεν ὅτι εἶνε

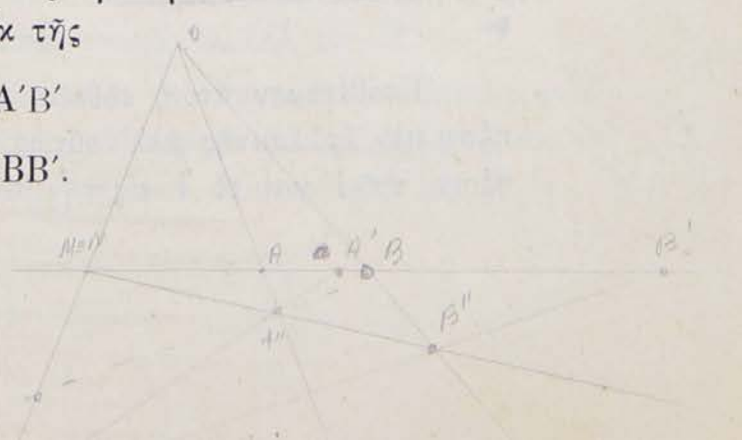
$$\mathrm{MMAB} \;\overline{\wedge}\; \mathrm{MMA'B'}$$

ἐὰν εἰς τὴν προβολικότητα ἐπὶ τῆς k, ἥτις τὰ εἰς τὸ M συμπίπτοντα δύο διπλᾶ σημεῖα καὶ τὰ A, A′ ἔχῃ ἀντίστοιχα σημεῖα, τὸ σημεῖον B′ ἀντιστοιχῇ εἰς τὸ B. Τὸ συμπέρασμα τὸ ἀφορῶν εἰς τὴν σύμπτωσιν τοῦ M καὶ N (M ≡ N) ἐκφράζεται τότε διὰ τοῦ ὅτι ἐκ τῆς

$$\mathrm{MMAB} \;\overline{\wedge}\; \mathrm{MMA'B'}$$

ἕπεται ἡ

$$\mathrm{MMAA'} \;\overline{\wedge}\; \mathrm{MMBB'}.$$



Ἀνάλογος ἐπέκτασις τῆς σημασίας τοῦ συμβόλου $\overline{\wedge}$ δύναται νὰ γίνῃ καὶ διὰ τοὺς ἄλλους σχηματισμοὺς τῆς πρώτης βαθμῖδος.

Δυνάμεθα τώρα καὶ διὰ τὰς δύο περιπτώσεις (καθ' ἃς τὰ Μ καὶ Ν εἶνε διάφορα ἢ συμπίπτουν) νὰ ἔχωμεν τὴν ἑξῆς πρότασιν διὰ σχηματισμοὺς τῆς πρώτης βαθμῖδος.

«Ἐὰν εἰς ἕνα σχηματισμὸν πρώτης βαθμῖδος ὑπάρχουν δύο συμπλέγματα ἐκ (τριῶν ἢ τεσσάρων) στοιχείων (ΜΝΑΒ) καὶ (ΜΝΑ'Β'), τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὰ δύο (διάφορα ἢ συμπίπτοντα) στοιχεῖα Μ καὶ Ν, καὶ εἶνε τοιαῦτα ὥστε νὰ ἔχωμεν

$$\mathrm{MNAB} \ \overline{\wedge} \ \mathrm{MNA'B'},$$

θὰ εἶνε καὶ

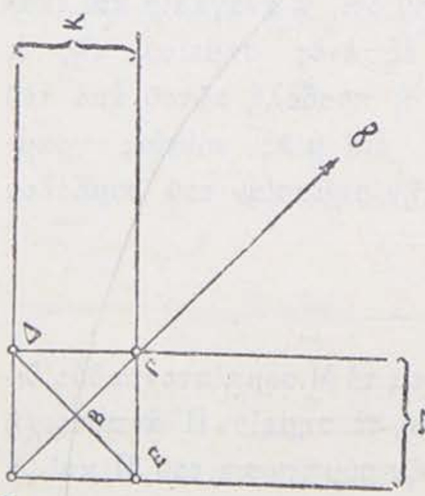
$$\mathrm{MNAA'} \ \overline{\wedge} \ \mathrm{MNBB'}.$$

Ἀναλυτικαὶ σχέσεις προβολικῶν σχηματισμῶν.

§ 39. Μετρικαὶ ἰδιότητες συμπλέγματος τεσσάρων στοιχείων.

«Ἐὰν τρία καθ' ὑπόστασιν σημεῖα Α,Β,Γ κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς (καθ' ὑπόστασιν) καὶ εἶνε (ΑΒ) = (ΒΓ) τὸ σύμπλεγμα (ΑΒΓ∞) εἶνε ἁρμονικόν».

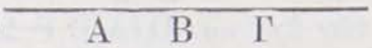
Διότι, ἂν ἐπί τινος ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῆς εὐθείας ΑΒΓ λάβωμεν δύο κατ' ἐκδοχὴν σημεῖα, ἔστω τὰ Κ καὶ Μ, φέρωμεν δὲ διὰ τῶν Α καὶ Γ δύο ζεύγη παραλλήλων εὐθειῶν πρὸς τὰς διευθύνσεις τῶν Κ καὶ Μ, σχηματίζεται τὸ πλῆρες τετρακόρυφον ΑΕΓΔ, τοῦ ὁποίου δύο πλευραί, αἱ ΑΚ καὶ ΑΜ διέρχονται διὰ τοῦ Α, δύο ἄλλαι, αἱ ΓΚ καὶ ΓΜ διὰ τοῦ Γ, καὶ ἀνὰ μία τῶν δύο ἄλλων, αἱ ΔΕ καὶ *ἡ κατ' ἐκδοχὴν εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὰ εἰς τὸ ἄπειρον σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου Κ καὶ Μ* διέρχεται διὰ τοῦ Β καὶ τοῦ εἰς ἄπειρον σημείου τῆς εὐθείας ΑΒΓ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι, ἂν τὸ κατ' ἐκδοχὴν σημεῖον τῆς ΑΒΓ παρασταθῇ διὰ τοῦ ∞, τὸ σύμπλεγμα (ΑΒΓ∞) εἶνε ἁρμονικόν.



Τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν καὶ ὡς ἑξῆς κινητικῶς.

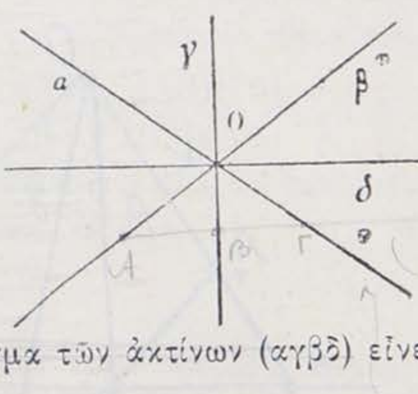
Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒΓ κινεῖται καταλλήλως μέχρις ὅτου πέσῃ μὲν ἐφ' ἑαυτῆς ἀλλ' οὕτως, ὥστε τὸ σημεῖον Α νὰ κεῖται εἰς τὴν θέσιν τοῦ Γ καὶ τὸ Γ εἰς τὴν θέσιν τοῦ Α. Τὸ εἰς ἄπειρον σημεῖον τῆς εὐθείας θὰ λάβῃ οὕτω τὴν ἀρχικὴν αὐτοῦ θέσιν· ἑπομένως καὶ τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν τούτου σημεῖον τῆς εὐθείας θὰ λάβῃ τὴν ἀρχικὴν αὐτοῦ θέσιν. Ἀλλὰ τὸ σημεῖον τοῦτο (κείμενον ἐπὶ τοῦ τμήματος ΑΓ) πρέπει πρὸς τούτοις νὰ ἔχει ἐναλλαχθῆ μὲ τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον εἶνε συμμετρικὸν αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸ μέσον Β τοῦ τμήματος ΑΒΓ.

Ἄρα συμπίπτει τοῦτο μὲ τὸ μέσον Β, καὶ τὸ σύμπλεγμα (ΑΒΓ∞), εἶνε ἁρμονικόν.



«Ἐν ἐπιπέδῳ δέσμῃ ἀκτίνων (ἢ ἐν ἀξονικῇ δέσμῃ ἐπιπέδων) καθ' ὑπόστασιν αἱ διχοτόμοι εὐθεῖαι τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν δύο ἀκτῖνες α καὶ β (ἢ τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τῶν γωνιῶν δύο ἐπιπέδων **a** *καὶ* **b** *) χωρίζουν ἁρμονικῶς τὰς δύο ταύτας ἀκτῖνας (ἢ τὰ δύο ταῦτα ἐπίπεδα)».*

Ἔστω γ ἡ μία τῶν (καθέτων ἐπ' ἀλλήλας) διχοτομουσῶν εὐθειῶν τὰς γωνίας τῶν ἀκτίνων α καὶ β τῆς δέσμης Ο. Ὑποθέτομεν ὅτι κινεῖται τὸ ἐπίπεδον τῆς δέσμης, στρεφόμενον περὶ τὴν γ, μέχρις ὅτου ἐφαρμόσῃ ἐφ' ἑαυτοῦ. Αἱ ἀκτῖνες α καὶ β θὰ εὑρεθοῦν οὕτω ἐνηλλαγμέναι, ἐνῷ ἡ γ μένει ἀμετάβλητος. Ἑπομένως καὶ ἡ συζυγὴς ἁρμονικὴ ἀκτὶς τῆς γ ἐν σχέσει πρὸς τὰς α καὶ β, ἔστω ἡ δ, θὰ ἐφαρμόσῃ ἐφ' ἑαυτῆς. Ἀλλ' ἡ δ πρέπει προσέτι νὰ ἔχει οὕτω ἐναλαχθῆ μὲ ἐκείνην ἐκ τῶν ἀκτίνων τῆς δέσμης, ἡ ὁποία εἶνε συμμετρικὴ αὐτῆς ὡς πρὸς τὴν γ. Ἑπομένως ἡ δ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν γ, καὶ διὰ τοῦτο ἡ δ εἶνε ἡ διχοτόμος τῆς ἄλλης γωνίας τῶν ἀκτίνων α καὶ β. Ἄρα τὸ σύμπλεγμα τῶν ἀκτίνων (αγβδ) εἶνε ἁρμονικόν.



Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι,

«ἂν ἐν τριγώνῳ ΑΟΓ φέρωμεν ἐκ τῆς κορυφῆς τὴν διάμεσον αὐτοῦ ΟΔ, καὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΕ παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν τούτου ΑΓ, αὗται χωρίζουν ἁρμονικῶς τὰς πλευρὰς ΟΑ καὶ ΟΓ τοῦ τριγώνου».

Πράγματι, ἐπειδὴ τὸ σύμπλεγμα (ΑΔΓ ∞) τῶν σημείων τῆς εὐθείας ΑΓ εἶνε ἁρμονικόν, καὶ τὸ σύμπλεγμα (ΟΑ,ΟΔ,ΟΓ,ΟΕ) τῶν ἀκτίνων, διὰ τῶν ὁποίων προβάλλεται τὸ πρῶτον ἀπὸ τοῦ σημείου Ο, εἶνε ἁρμονικόν· ἤτοι αἱ ἀκτῖνες ΟΔ καὶ ΟΕ χωρίζουν ἁρμονικῶς τὰς ΟΑ καὶ ΟΓ.

«Ἐὰν (ΑΒΓΔ) εἶνε ἓν ἁρμονικὸν σύμπλεγμα ἐκ τεσσάρων καθ' ὑπόστασιν σημείων μιᾶς εὐθείας, τὰ σημεῖα Β καὶ Δ χωρίζουν τὸ πεπερασμένον τμῆμα ΑΓ ἐσωτερικῶς καὶ ἐξωτερικῶς εἰς μέρη

ἔχοντα τὸν αὐτὸν λόγον· καὶ ἀντιστρόφως. (Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὰ Α καὶ Γ ἐν σχέσει πρὸς τὰ Β καὶ Δ)».

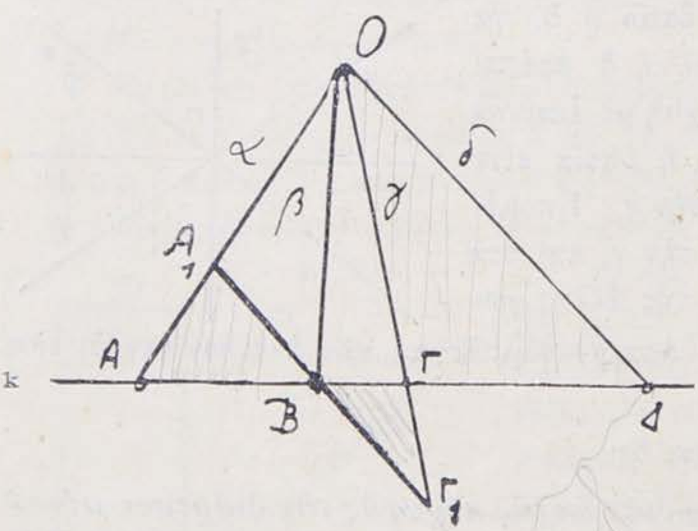
Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, μὲ διάμετρον τὴν ΒΔ γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν ἐπὶ ἐπιπέδου τινὸς (διερχομένου διὰ τῆς ΒΔ) καὶ προβάλλομεν ἀπό τινος σημείου Ο τῆς ἡμιπεριφερείας τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ. Ἵνα τὸ σύμπλεγμα τῶν ἀκτίνων Ο(Α,Β,Γ,Δ) εἶνε ἁρμονικόν, πρέπει αἱ ἀκτῖνες ΟΒ καὶ ΟΔ νὰ εἶνε διχοτόμοι τῶν γωνιῶν, τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ τῶν ἀκτίνων ΟΑ καὶ ΟΓ. Ἀλλ' ἂν συμβαίνῃ τοῦτο, θὰ ἔχωμεν (ὡς γνωρίζομεν ἐκ τῆς στοιχειώδους Γεωμετρίας) (ΑΔ) : (ΓΔ)=(ΟΑ) : (ΟΓ)=(ΑΒ) : (ΓΒ).

Παρατηρητέον ὅτι, ἂν ὁρισθῇ ἡ θετικὴ φορὰ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, ὁ λόγος $\frac{(\text{ΑΒ})}{(\text{ΓΒ})} : \frac{(\text{ΑΔ})}{(\text{ΓΔ})} = -1.$ $\frac{(\text{ΑΒ})}{(\text{ΓΒ})} < 0$ $\frac{(\text{ΑΔ})}{(\text{ΓΔ})} > 0$

«Ἐὰν τὸ σύμπλεγμα (ΑΒΓΔ) ἐκ σημείων μιᾶς σημειοσειρᾶς k *εἶνε ἁρμονικόν, τὰ τμήματα ΑΒ,ΓΒ καὶ ΑΔ,ΓΔ πληροῦν τὴν σχέσιν*

$$\frac{(\text{ΑΒ})}{(\text{ΓΒ})} + \frac{(\text{ΑΔ})}{(\text{ΓΔ})} = 0 \text{ ἢ τὴν } \frac{(\text{ΑΒ})}{(\text{ΓΒ})} : \frac{(\text{ΑΔ})}{(\text{ΓΔ})} = -1 \qquad (1).$$

Πράγματι, ἂν τὸ ἁρμονικὸν σύμπλεγμα (ΑΒΓΔ) προβάλωμεν ἀπὸ τοῦ σημείου Ο, κειμένου ἐκτὸς τῆς k, διὰ τοῦ ἁρμονικοῦ συμπλέγματος ἀκτίνων (αβγδ), φέρωμεν δ' ἐκ τοῦ Β εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν δ, τέμνει αὕτη τὰς α καὶ γ, ἔστω εἰς τὰ Α_1 καὶ Γ_1, καὶ θὰ εἶνε $(\text{ΒΑ}_1)=(\text{ΒΓ}_1)$. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων $\text{ΑΑ}_1\text{Β}$ καὶ ΑΟΔ καὶ ἐκ τῶν $\text{ΓΓ}_1\text{Β}$ καὶ ΓΟΔ ἔχομεν,



$$\frac{(\text{ΑΒ})}{(\text{Α}_1\text{Β})} = \frac{(\text{ΑΔ})}{(\text{ΟΔ})}, \quad \frac{(\text{ΒΓ})}{(\text{ΒΓ}_1)} = \frac{(\text{ΓΔ})}{(\text{ΟΔ})}.$$

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν

$$\frac{(\text{ΑΒ})}{(\text{ΒΓ})} = \frac{(\text{ΑΔ})}{(\text{ΓΔ})}, \text{ ἢ } \frac{(\text{ΑΒ})}{(\text{ΓΒ})} + \frac{(\text{ΑΔ})}{(\text{ΓΔ})} = 0. \quad \text{ἢ καὶ } \frac{(\text{ΑΒ})}{(\text{ΓΒ})} : \frac{(\text{ΑΔ})}{(\text{ΓΔ})} = -1.$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (1) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν θέσιν τοῦ σημείου Δ ἐπὶ τῆς εὐθείας k, ὅταν δοθοῦν τὰ Α,Β,Γ ἐπ' αὐτῆς καὶ εἶνε (ΑΒ) $\gtrless$ (ΒΓ). Ἐκ τῆς αὐτῆς σχέσεως (1) ἔχομεν (ΒΓ) : (ΑΒ)=(ΓΔ):(ΑΔ)

→ ΑΔ = ΓΔ

Δ = ∞

$\frac{ΒΓ}{ΑΒ} = \frac{ΓΔ}{ΑΔ}$ $\qquad$ $\frac{ΒΑ+ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{ΓΑ+ΑΔ}{ΑΔ}$ $\qquad$ $\frac{ΑΓ-ΑΒ}{ΑΒ} = \frac{ΑΔ-ΑΓ}{ΑΔ}$

ἢ $\frac{(ΑΓ)-(ΑΒ)}{(ΑΒ)} = \frac{(ΑΔ)-(ΑΓ)}{(ΑΔ)}$, ἢ $\frac{2}{(ΑΓ)} = \frac{1}{(ΑΒ)} + \frac{1}{(ΑΔ)}$.

Θὰ λέγωμεν ὅτι τρεῖς ἀριθμοὶ $β, γ, δ$ ἀποτελοῦν *ἁρμονικὴν ἀναλογίαν* ἢ ὅτι *εἶνε ἁρμονικοί*, ἂν εἶνε $\frac{β-γ}{β} = \frac{γ-δ}{δ}$.

Κατὰ ταῦτα, τὰ τμήματα ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν ἀναλογίαν.

§ 40. Διπλοῦς ἢ ἀναρμονικὸς λόγος συμπλέγματος τεσσάρων σημείων.

Ἐὰν Α, Β, Γ, Δ εἶνε τέσσαρα στοιχεῖα μιᾶς σημειοσειρᾶς, τὰ στοιχεῖα Β καὶ Δ μετὰ τῶν Α καὶ Γ ὁρίζουν τέσσαρα τμήματα τὰ ΑΒ, ΓΒ καὶ ΑΔ, ΓΔ καὶ δύο λόγους $\frac{(ΑΒ)}{(ΓΒ)}$ καὶ $\frac{(ΑΔ)}{(ΓΔ)}$ τοὺς ὁποίους παριστάνομεν συνήθως καὶ διὰ τῶν $λ_1 = (ΑΒΓ)$, $λ_2 = (ΑΔΓ)$· ἤτοι θέτομεν

$$(ΑΒΓ) = \frac{(ΑΒ)}{(ΓΒ)} = λ_1, \quad (ΑΔΓ) = \frac{(ΑΔ)}{(ΓΔ)} = λ_2.$$

Τὸ πηλίκον $λ_1 : λ_2$ *καλοῦμεν διπλοῦν λόγον** *ἢ ἀναρμονικὸν λόγον* ἐν γένει τῶν τεσσάρων στοιχείων Α, Β, Γ, Δ καὶ γράφομεν, ἂν οὗτος ἰσοῦται μὲ $λ$, $(ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓ) : (ΑΔΓ) = \frac{(ΑΒ)}{(ΓΒ)} : \frac{(ΑΔ)}{(ΓΔ)} = \frac{(ΑΒ)(ΓΔ)}{(ΓΒ)(ΑΔ)} = \frac{λ_1}{λ_2} = λ$.

Ἐὰν $α, β, γ, δ$ εἶνε αἱ τετμημέναι τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ, λαμβανομένης τῆς εὐθείας ΑΒ ὡς ἄξονος τετμημένων, θὰ εἶνε

$$λ = \frac{(β-α)(δ-γ)}{(β-γ)(δ-α)}.$$

Μεταξὺ δύο τμημάτων ΑΓ καὶ ΒΔ ὑπάρχουν τρεῖς διαφόροι δυναταὶ θέσεις μεταξύ των, ὅταν ταῦτα κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας. Δύναται τὸ ΑΓ νὰ κεῖται ἐντὸς τοῦ ΒΔ, ἢ τὸ ΒΔ ἐντὸς τοῦ ΑΒ, ἢ οὐδὲν τῶν ζευγῶν τούτων ἐντὸς τοῦ ἄλλου. Ἐν τῇ τελευταίᾳ ταύτῃ περιπτώσει τὰ ζεύγη τῶν σημείων χωρίζουν ἄλληλα, καὶ λόγοι $λ_1$, $λ_2$ εἶνε ἑτερόσημοι, ὁ δὲ διπλοῦς λόγος εἶνε ἀρνητικός. Ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει τὰ $λ_1, λ_2$ εἶνε θετικά, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ ἀρνητικά, καὶ τὸ $λ$ θετικόν.

Ἐὰν τὸ σύμπλεγμα (ΑΒΓΔ) ἐκ σημείων μιᾶς σημειοσειρᾶς εἶνε ἁρμονικόν, ὁ διπλοῦς αὐτοῦ λόγος ἰσοῦται μὲ -1, ὡς ἀνωτέρω εἴδομεν, καὶ ἔχομεν $λ = \frac{(ΑΒ)}{(ΓΒ)} \frac{(ΓΔ)}{(ΑΔ)} = -1$,

* Τὸν διπλοῦν λόγον εἰσήγαγεν ὡς θεμελιώδη ἔννοιαν τῆς Γεωμετρίας πρὸ 100 ἐτῶν περίπου ὁ A. F. Möbius, ὁ δὲ Chasles ἐκάλει αὐτὸν *ἀναρμονικὸν λόγον* τῶν τεσσάρων στοιχείων Α, Β, Γ, Δ.

ἤτοι τὰ σημεῖα Β καὶ Δ διαιροῦν τὸ τμῆμα ΑΓ εἰς μέρη ἔχοντα λόγους ἀντιθέτους.

Ἐὰν τὸ στοιχεῖον Δ εἶνε τὸ κατ' ἐκδοχὴν τῆς εὐθείας ΑΒ, θὰ ἔχωμεν

$$(ΑΒΓ\infty) = (ΑΒΓ) : (Α\infty Γ).$$

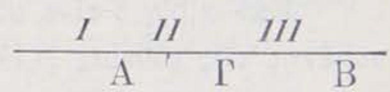
Ἀλλ' εἶνε $(Α\infty Γ) = 1$, ἐπειδὴ εἶνε $(ΑΜΓ) = \frac{(ΑΜ)}{(ΓΜ)} = \frac{(ΑΓ)+(ΓΜ)}{(ΓΜ)}$ $= 1 + \frac{(ΑΓ)}{(ΓΜ)}$, καὶ ὅταν τὸ Μ τείνῃ νὰ συμπέσῃ μὲ τὸ κατ' ἐκδοχὴν σεμεῖον τῆς εὐθείας, ἔχομεν $(Α\infty Γ) = 1$. Ἑπομένως θὰ εἶνε

$$(ΑΒΓ\infty) = (ΑΒΓ).$$

Ἐὰν εἶνε $(ΑΒΓ\infty) = -1$, θὰ ἔχωμεν καὶ $(ΑΒΓ) = -1$, ἤτοι τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν σημεῖον τοῦ κατ' ἐκδοχὴν σημείου τῆς εὐθείας ὡς πρὸς τὰ σημεῖα Α καὶ Γ αὐτῆς εἶνε τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΑΓ.

«*Ἐὰν τὰ μὲν τρία σημεῖα Α,Γ,Δ εἶνε σταθερά, τὸ δὲ Β διαγράφῃ τὴν σημειοσειράν, ὁ διπλοῦς λόγος (ΑΒΓΔ)=λ λαμβάνει πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς καὶ ἑκάστην ἅπαξ*».

Πράγματι, ἐπειδὴ τὰ Α,Γ,Δ εἶνε σταθερὰ τὸ $λ_2 = (ΑΔ) : (ΓΔ)$ θὰ εἶνε σταθερόν, ἐνῷ τὸ $λ_1 = \frac{(ΑΒ)}{(ΓΒ)}$ λαμβάνει πάσας τὰς πραγματικὰς τιμάς, ὅταν τὸ Β διαγράφῃ τὴν εὐθεῖαν ΑΓ.



Τῷ ὄντι, ἔχομεν

$$λ_1 = \frac{(ΑΒ)}{(ΓΒ)} = \frac{(ΑΓ)+(ΓΒ)}{(ΓΒ)} = 1 + \frac{(ΑΓ)}{(ΓΒ)} = 1 - \frac{(ΑΓ)}{(ΒΓ)}$$

Ἐὰν τὸ Β ἀναχωροῦν ἀπὸ τοῦ Γ διαγράφῃ τὸ τμῆμα *III* τῆς εὐθείας, τὸ κλάσμα (ΑΓ) : (ΓΒ) ἐλαττούμενον λαμβάνει πάσας τὰς θετικὰς τιμὰς μέχρι τοῦ μηδενός, καὶ τὸ $λ_1$ μεταβαλλεται ἀπὸ $+\infty$ μέχρι τῆς 1.

Ἐὰν τὸ Β ἐρχόμενον ἐξ ἀριστερῶν διανύῃ τὸ τμῆμα *I* τῆς εὐθείας, ὁ λόγος (ΑΓ) : (ΒΓ) λαμβάνει πάσας τὰς θετικὰς τιμὰς ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τῆς 1, καὶ τὸ $λ_1$ λαμβάνει πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 0. Ἐὰν τὸ Β διαγράφῃ τὸ τμῆμα *II* τῆς εὐθείας ἀπὸ τοῦ Α μέχρι τοῦ Γ, τὸ $λ_1$ λαμβάνει πάσας τὰς ἀρνητικὰς τιμὰς καὶ οὕτως, ὥστε αἱ τιμαὶ αὐτοῦ ἀπολύτως θεωρούμεναι ἐλαττοῦνται. Εἰς τὴν τιμὴν $λ_1 = -1$ ἀντιστοιχεῖ τὸ μέσον τοῦ ΑΒ, ἐνῷ εἶνε $λ_1 = 0$, ὅταν τὸ Β συμπίπτῃ μὲ τὸ Α, $λ_1 = \infty$, ὅταν τὸ Β συμπίπτῃ μὲ τὸ Γ, καὶ $λ_1 = 1$, ὅταν τὸ Γ συμπίπτῃ μὲ τὸ ∞. Ἑπομένως καὶ ὁ διπλοῦς λόγος $λ_1 : λ_2 = λ$ λαμβάνει πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς καὶ ἑκάστην ἅπαξ, ὅταν τὸ σημεῖον Β διαγράφῃ ὁλόκληρον τὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

«εἰς δοθεῖσαν τιμὴν τοῦ διπλοῦ λόγου (ΑΒΓΔ)=λ τεσσάρων σημείων σημειοσειρᾶς ἀντιστοιχεῖ μία θέσις τοῦ σημείου Β· ἐὰν δὲ τὸ Β συμπίπτῃ μὲ τὸ Α, ἢ μὲ τὸ Γ, ἢ τὸ Δ, τὸ λ ἰσοῦται μὲ 0, ἢ μὲ ∞ ἢ μὲ 1».

Ἂν τὸν φορέα ἁρμονικοῦ τινος συμπλέγματος (ΑΒΓΔ) ἐκ στοιχείων μιᾶς σημειοσειρᾶς λάβωμεν ὡς ἄξονα τῶν x, καὶ παραστήσωμεν διὰ x_α, x_β, x_γ, x_δ τὰς τετμημένας τῶν σημείων τούτων, θὰ ἔχωμεν (ἐπειδὴ εἶνε $(AB):(\Gamma B)+(A\Delta):(\Gamma\Delta)=0$)

$$(x_\alpha + x_\gamma)(x_\beta + x_\delta) = 2(x_\alpha x_\gamma + x_\beta x_\delta)$$

Αὕτη χαρακτηρίζεται συνήθως ὡς ἐξίσωσις, ὁρίζουσα τὸ ἁρμονικὸν σύμπλεγμα (ΑΒΓΔ), καὶ δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν ἀναλυτικῶς τὴν θέσιν τοῦ τετάρτου ἐκ τῶν σημείων τούτων, ὅταν δοθοῦν τὰ τρία ἄλλα.

§ 41. Τιμαὶ τοῦ διπλοῦ λόγου συμπλεγμάτων ἐκ τεσσάρων στοιχείων.

Ἐὰν ἀλλάξωμεν τὴν σειρὰν τῆς ἀκολουθίας τῶν τεσσάρων σημείων Α,Β,Γ,Δ ἀλλάσσει ἐν γένει καὶ ἡ τιμὴ τοῦ διπλοῦ λόγου αὐτοῦ λ. Θεωροῦμεν ἐν πρώτοις τὸν λόγον (ΑΒΓ). Ἔχομεν ἓξ μεταθέσεις μεταξὺ τῶν Α,Β,Γ καὶ τοὺς ἀντιστοιχοῦντας εἰς ταύτας ἓξ λόγους

(ΑΒΓ), (ΓΒΑ), (ΑΓΒ), (ΓΑΒ), (ΒΓΑ), (ΒΑΓ).

Ἐὰν εἶνε $(AB\Gamma)=\lambda_1$, οἱ ἓξ οὗτοι λόγοι θὰ ἔχουν κατὰ σειρὰν τὰς τιμὰς

$$\lambda_1\ ,\ \frac{1}{\lambda_1}\ ,\ 1-\lambda_1\ ,\ \frac{\lambda_1-1}{\lambda_1},\ \frac{1}{1-\lambda_1},\ \frac{\lambda_1}{\lambda_1-1} \qquad (1)$$

Πράγματι ἔχομεν

$$(\Gamma BA) = (\Gamma B):(AB) = \frac{1}{\lambda_1}$$

$$(A\Gamma B) = \frac{(A\Gamma)}{(B\Gamma)} = \frac{(AB)+(B\Gamma)}{(B\Gamma)} = 1-\lambda_1.$$

Δι' ἐφαρμογῆς τῶν ἐξαγομένων τούτων εὑρίσκομεν

$$(\Gamma AB) = \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1},\ (B\Gamma A) = \frac{1}{1-\lambda_1},\ \ (BA\Gamma) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1-1}.$$

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι καὶ αἱ τιμαὶ τῶν διπλῶν λόγων τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τὰς 24 μεταθέσεις τῶν Α,Β,Γ,Δ εἶνε ὅμοιαι τῶν ἓξ ἀνωτέρω (1). Ἤτοι ἐκ τῶν 24 μεταθέσεων τῶν Α,Β,Γ,Δ ἀνὰ τέσσαρες ἔχουν τὸν αὐτὸν διπλοῦν λόγον. Πράγματι ἔχομεν

$$BA\Gamma = \frac{BA}{\Gamma A} = \frac{1}{\frac{\Gamma B + BA}{BA}} = \frac{1}{1-\frac{1}{\lambda_1}}$$

$$\Gamma AB = \frac{\Gamma A}{BA} = \frac{\Gamma B + BA}{BA} = \frac{\Gamma B}{BA} + 1 = -\frac{1}{\lambda_1} + 1 = \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1}$$

$$B\Gamma A = \frac{B\Gamma}{A\Gamma} = \frac{1}{A\Gamma} = \frac{1}{\ldots}$$

$$(\mathrm{A\Gamma B\Delta}) = (\mathrm{B\Delta A\Gamma}) = (\mathrm{\Gamma A\Delta B}) = (\mathrm{\Delta B\Gamma A}). \qquad (2)$$

Προκειμένου περὶ τῶν ἄλλων διπλῶν λόγων παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε

$$(\mathrm{A\Gamma B\Delta})\,(\mathrm{A\Delta B\Gamma}) = 1, \qquad (3)$$

διότι, ἀφοῦ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, θὰ εἶνε

$$(\mathrm{AB})\,(\mathrm{\Gamma\Delta}) + (\mathrm{A\Gamma})\,(\mathrm{\Delta B}) + (\mathrm{A\Delta})\,(\mathrm{B\Gamma}) = 0. \qquad (4)$$

Πράγματι ἔχομεν

$$\begin{aligned}(\mathrm{AB})\,(\mathrm{\Gamma\Delta}) &= (\mathrm{AB})\,[(\mathrm{\Gamma A}) + (\mathrm{A\Delta})]\\ (\mathrm{A\Gamma})\,(\mathrm{\Delta B}) &= (\mathrm{A\Gamma})\,[(\mathrm{\Delta A}) + (\mathrm{AB})]\\ (\mathrm{A\Delta})\,(\mathrm{B\Gamma}) &= (\mathrm{A\Delta})\,[(\mathrm{BA}) + (\mathrm{A\Gamma})]\end{aligned}$$

καὶ διὰ προσθέσεως τούτων κατὰ μέλη εὑρίσκομεν εἰς τὸ δεύτερον μέλος ἐξαγόμενον μηδέν.

Διαιροῦντες τὰ μέλη τῆς (4) διὰ τοῦ (ΑΔ) (ΒΓ), ἔπειτα διὰ τοῦ (ΑΓ) (ΔΒ) καὶ τέλος διὰ τοῦ (ΑΒ) (ΓΔ) εὑρίσκομεν

$$\left.\begin{aligned}(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) + (\mathrm{A\Gamma B\Delta}) &= 1\\ (\mathrm{AB\Delta\Gamma}) + (\mathrm{A\Delta B\Gamma}) &= 1\\ (\mathrm{A\Delta\Gamma B}) + (\mathrm{A\Gamma\Delta B}) &= 1.\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Ἐκ τούτων ἔχομεν ὅτι εἰς τὰ ἓξ κατωτέρω συμπλέγματα ἀντιστοιχοῦν οἱ ἓξ κατωτέρω τούτων ἀντίστοιχοι αὐτῶν διπλοῖ λόγοι, ἂν τεθῇ $(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = \lambda$

$$\begin{array}{cccccc}(\mathrm{AB\Gamma\Delta}), & (\mathrm{A\Gamma B\Delta}), & (\mathrm{A\Delta B\Gamma}), & (\mathrm{A\Delta\Gamma B}), & (\mathrm{AB\Delta\Gamma}) & (\mathrm{A\Gamma\Delta B})\\ \lambda\ , & 1-\lambda\ , & \dfrac{1}{1-\lambda}\ , & \dfrac{1}{\lambda}\ , & \dfrac{\lambda}{\lambda-1}\ , & \dfrac{\lambda-1}{\lambda}\end{array} \qquad (6)$$

Εἰς ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν τούτων ἀντιστοιχοῦν ἀκόμη τρεῖς μεταθέσεις ἕνεκα τῆς (2), αἵτινες ἔχουν τὸν αὐτὸν διπλοῦν λόγον.

Θὰ ἴδωμεν τώρα ὑπὸ τίνας συνθήκας δύναται νὰ περιορισθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνωτέρω ἓξ διπλῶν λόγων. Πρὸς τοῦτο θέτομεν τὸν λ ἴσον μὲ ἕνα τῶν ἄλλων. Ἂν εἶνε $\lambda = \dfrac{1}{\lambda}$, θὰ ἔχωμεν $\lambda = \pm 1$. Ὅταν μὲν εἶνε $\lambda = 1$, τὸ σημεῖον Β συμπίπτει μὲ τὸ Δ, ὅταν δ' εἶνε $\lambda = -1$, τὰ σημεῖα ἀποτελοῦν ἁρμονικὸν σύμπλεγμα.

Κατὰ τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ τιμαὶ (6) γίνονται

$$\lambda = \frac{1}{\lambda} = -1, \quad 1-\lambda = \frac{\lambda-1}{\lambda} = 2, \quad \frac{1}{1-\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda-1} = \frac{1}{2}.$$

Ἤτοι ἔχομεν ἐν τῇ περιπτώσει αὐτῇ μόνον τρεῖς διαφόρους τιμὰς τῶν διπλῶν λόγων. Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον καταντῶμεν καὶ ἂν θέσωμεν $\lambda = 1-\lambda$, ἢ $\lambda = \dfrac{\lambda}{\lambda-1}$. Ἄλλας τιμὰς ἔχομεν, ἂν θέσωμεν

$$\lambda = \frac{1}{1-\lambda} = 1 - \frac{1}{\lambda}, \quad \frac{1}{\lambda} = 1 - \lambda = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$$

καὶ εὑρίσκομεν $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$, $\lambda = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{-3}\right)$.

Ἐκ ταύτης ἔχομεν καὶ $\lambda^3 = -1$, παρατηροῦμεν δ' ὅτι τὸ λ εἶνε ἴσον καὶ μὲ μίαν φανταστικὴν ρίζαν τοῦ -1, ὅτε αἱ τρεῖς ἄλλαι τιμαὶ τοῦ λόγου εἶνε ἴσαι μὲ τὴν κυβικὴν συζυγῆ φανταστικὴν ρίζαν. Ἤτοι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἔχομεν δύο συστήματα ἐκ τριῶν ἴσων τιμῶν τοῦ διπλοῦ λόγου, ἐνῶ εἰς τὰς προηγουμένας περιπτώσεις τρία συστήματα ἐκ δύο ἴσων τιμῶν ἕκαστον. Τὴν διάταξιν τῶν τεσσάρων σημείων, τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, καλοῦμεν κατὰ τὸν Cremona * *ἰσαναρμονικήν*, καὶ δύνανται τὸ πολὺ τρία ἐξ αὐτῶν νὰ εἶνε πραγματικά, τὸ δὲ τέταρτον φανταστικόν.

§ 42. Διπλοῦς λόγος συμπλέγματος τεσσάρων ἀκτίνων.

Καλοῦμεν διπλοῦν λόγον ἑνὸς συμπλέγματος (αβγδ) ἐκ τεσσάρων ἀκτίνων ἐπιπέδου δέσμης καὶ παριστάνομεν διὰ τοῦ λ = (αβγδ) τὸ πηλίκον

$$\frac{\eta\mu\,(\alpha,\beta)}{\eta\mu\,(\gamma,\beta)} : \frac{\eta\mu\,(\alpha,\delta)}{\eta\mu\,(\gamma,\delta)}.$$

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ τοῦ διπλοῦ λόγου ἑνὸς συμπλέγματος (αβγδ) ἐκ τεσσάρων ἀκτίνων μιᾶς ἐπιπέδου δέσμης συνάγομεν, ὅτι οὗτος ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ ἀκτῖνες μεταξύ των, καὶ ἐπομένως εἶνε ἀνεξάρτητος τοῦ συστήματος τῶν συντεταγμένων πρὸς τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται ἡ δέσμη, ἐπειδὴ ὁ μετασχηματισμὸς τῶν συντεταγμένων ἰσοδυναμεῖ μὲ μεταφορὰν ἢ καὶ στροφὴν τοῦ φορέως ἐπιπέδου τῆς δέσμης ἐφ' ἑαυτοῦ.

Θεώρημα τοῦ Πάππου **

«Ἐὰν ἓν σύμπλεγμα (αβγδ) ἐκ τεσσάρων ἀκτίνων μιᾶς ἐπιπέδου δέσμης τμηθῇ ὑπό τινος εὐθείας k, ὁ διπλοῦς λόγος τοῦ συμπλέγματος τῶν ἀκτίνων ἰσοῦται μὲ τὸν διπλοῦν λόγον τοῦ συμπλέγματος (ΑΒΓΔ) τῶν σημείων καθ' ἃ τέμνεται ἡ εὐθεῖα ὑπὸ τῆς δέσμης».

---

* Βλ. τὸ ἔργον αὐτοῦ Introduzione ad una teoria geometrica della curve piane ἢ μετάφρασιν τούτου εἰς τὴν γερμανικὴν γλῶσσαν ὑπὸ Curtze, 1865.

** Ὁ Ἕλλην μαθηματικὸς Πάππος ἐξ Ἀλεξανδρείας ἔζησε περὶ τὰ 300 μ. Χ., καίτοι δὲ ἔχει ἀπολεσθῆ τὸ πλεῖστον μέρος τῶν συγγραφῶν αὐτοῦ, εἶνε γνωστὸν ὅτι εἰς αὐτὸν ὀφείλεται ἡ διδασκαλία περὶ τοῦ διπλοῦ λόγου, ἡ ἔννοια τοῦ πλήρους τετρακορύφου καὶ τετραπλεύρου, τῆς ἐνελίξεως σημείων (περὶ τῆς ὁποίας θὰ γίνῃ λόγος εἰς τὸ ἑπόμενον κεφάλαιον) κλπ.

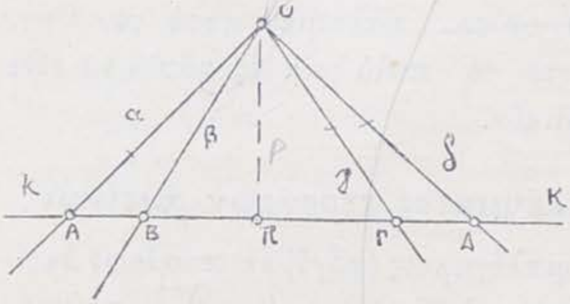
Πράγματι, ἂν O εἶνε τὸ κέντρον τῆς ἐπιπέδου δέσμης (α,β,γ,δ) καὶ p παριστάνει τὴν ἀπόστασιν (ΟΠ) τῆς εὐθείας k ἀπὸ τοῦ O, τὰ δὲ α,β,γ,δ τὰ μήκη τῶν (ΟΑ), (ΟΒ), (ΟΓ) καὶ (ΟΔ), θὰ ἔχωμεν

$$(AB).p = \alpha.\beta.\ \eta\mu(\alpha,\beta),\quad (\Gamma B).p = \gamma.\beta.\ \eta\mu(\gamma,\beta)$$
$$(A\Delta).p = \alpha.\delta.\ \eta\mu(\alpha,\delta),\quad (\Gamma\Delta).p = \gamma.\delta.\ \eta\mu(\gamma,\delta).$$

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν

$$\frac{(AB)}{(\Gamma B)} : \frac{(A\Delta)}{(\Gamma\Delta)} = \frac{\eta\mu\,(\alpha,\beta)}{\eta\mu\,(\gamma,\beta)} : \frac{\eta\mu\,(\alpha,\delta)}{\eta\mu\,(\gamma,\delta)}\ \text{ἤτοι}\ (AB\Gamma\Delta) = (\alpha\beta\gamma\delta) = \lambda.$$

Ἐκ τῆς προτάσεως ταύτης ἕπεται ὅτι, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶνε ἡ τέμνουσα τὴν δέσμην εὐθεῖα, ὁ διπλοῦς λόγος τοῦ συμπλέγματος τῶν σημείων τῆς τομῆς θὰ ἰσοῦται μὲ τὸν διπλοῦν λόγον τοῦ συμπλέγματος τῶν ἀκτίνων.



Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος, (γνωστοῦ εἰς τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας μαθηματικοὺς) παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ἰδιότητες τοῦ διπλοῦ λόγου (ΑΒΓΔ) ἐκ τεσσάρων σημείων ἰσχύουν καὶ διὰ τὸν τεσσάρων ἀκτίνων ἐπιπέδου δέσμης, ἥτις εἶνε ὄψις τῆς σημειοσειρᾶς Α,Β,Γ,Δ ἀπό τινος σημείου, κειμένου ἐκτὸς τοῦ φορέως τῆς σημειοσειρᾶς, μὲ μόνην τὴν διαφοράν, ὅτι τὸ λ λαμβάνει πάσας τὰς πραγματικὰς τιμάς, ὅταν ἡ ἀκτὶς β διαγράφῃ γωνίαν ἴσην πρὸς π, λαμβάνει δὲ τὸ λ τὰς τιμὰς 0,∞, 1, ὅταν ἡ ἀκτὶς β συμπίπτῃ μὲ τὰς α, γ καὶ δ ἀντιστοίχως. Ὅταν εἶνε τὸ λ = —1, ἔχομεν τὸ ἁρμονικὸν σύμπλεγμα (αβγδ).

Ἐὰν $H_1 = 0$, $H_2 = 0$, $H_1 - \lambda_1 H_2 = 0$, $H_1 - \lambda_2 H_2 = 0$ εἶνε κατὰ σειρὰν αἱ ἐξισώσεις τεσσάρων ἀκτίνων α,γ,β,δ μιᾶς ἐπιπέδου δέσμης, ὁ διπλοῦς λόγος τοῦ συμπλέγματος (αβγδ) θὰ εἶνε $\lambda = \lambda_1 : \lambda_2$.

Πράγματι γνωρίζομεν (§ 21) ὅτι ἂν R_1, R_2 εἶνε αἱ ἀποστάσεις τυχόντος σημείου M′ τῆς ἀκτῖνος β (ἐκτὸς τοῦ κέντρου O τῆς δέσμης κειμένου) ἀπὸ τῶν ἀκτίνων α καὶ γ, τὸ λ_1 θὰ εἶνε

$$\lambda_1 = -\frac{R_1\sqrt{u_1^2+v_1^2}}{R_2\sqrt{u_2^2+v_2^2}} = \rho.\ \frac{R_1}{R_2},\quad \text{ἐὰν εἶνε}\ H_1 \equiv u_1x+v_1y+1$$

καὶ $H_2 \equiv u_2x + v_2y + 1$. Ἀλλ' εἶνε, $R_1 = (OM')\ \eta\mu\ (\alpha,\beta)$, $R_2 = (OM')\ \eta\mu\ (\gamma,\beta)$.

Ἑπομένως ἔχομεν $\lambda_1 = \rho\,\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{\eta\mu\,(\alpha,\beta)}{\eta\mu\,(\gamma,\beta)}.\ \rho$

Κατ᾽ ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκομεν $\lambda_2 = \dfrac{\eta\mu\,(\alpha,\delta)}{\eta\mu\,(\gamma,\delta)} \cdot \rho,$

καὶ ἐπομένως εἶνε $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = \dfrac{\eta\mu\,(\alpha,\beta)}{\eta\mu\,(\gamma,\beta)} : \dfrac{\eta\mu\,(\alpha,\delta)}{\eta\mu\,(\gamma,\delta)} = \lambda.$

Ἐὰν αἱ θεωρούμεναι ἀκτῖνες τῆς τετράδος ἔχουν ἐξισώσεις

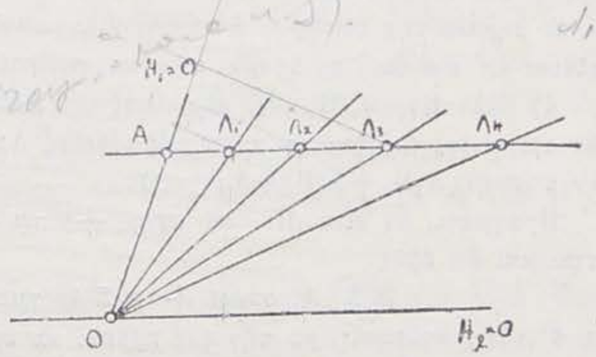
$$H_1 - \lambda_i H_2 = 0, \ (i = 1,2,3,4)$$

ὁ διπλοῦς λόγος λ τοῦ συμπλέγματος αὐτῶν θὰ ἰσοῦται μὲ

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_3 - \lambda_4}.$$

Πράγματι, ἂν τμήσωμεν τὴν δέσμην O δι᾽ εὐθείας τινὸς παραλλήλου πρὸς τὴν ἀκτῖνα $H_2 = 0$ (μὴ διερχομένην διὰ τοῦ O) καὶ εἶνε $A, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$ τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῶν $H_1 = 0$ καὶ τῶν ἄλλων τεσσάρων ἀκτίνων ὑπὸ ταύτης, ὁ διπλοῦς λόγος τοῦ συμπλέγματος τῶν τεσσάρων ἀκτίνων θὰ ἰσοῦται μὲ $\dfrac{(\Lambda_1\Lambda_2)}{(\Lambda_3\Lambda_2)} : \dfrac{(\Lambda_1\Lambda_4)}{(\Lambda_3\Lambda_4)}.$ (1)

Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ αἱ ἀποστάσεις τῶν Λ ἀπὸ τῆς $H_2 = 0$ εἶνε ἴσαι, αἱ ἀποστάσεις αὐτῶν ἀπὸ τῆς $H_1 = 0$ θὰ εἶνε ἀνάλογοι τῶν λ_i. Ἑπομένως καὶ τὰ μήκη τῶν τμημάτων $A\Lambda_i$ εἶνε ἀνάλογα τῶν λ_i. Οὕτω ἔχομεν ὅτι τὰ $(\Lambda_1\Lambda_2) = (A\Lambda_2) - (A\Lambda_1)$, $(\Lambda_3\Lambda_2) = (A\Lambda_2) - (A\Lambda_3)$, $(\Lambda_1\Lambda_4) = (A\Lambda_4) - (A\Lambda_1)$, $(\Lambda_3\Lambda_4) = (A\Lambda_4) - (A\Lambda_3)$ εἶνε ἀνάλογα τῶν $\lambda_1 - \lambda_2$, $\lambda_3 - \lambda_2$, $\lambda_1 - \lambda_4$, $\lambda_3 - \lambda_4$



καὶ ὁ διπλοῦς λόγος λ τοῦ συμπλέγματος τῶν τεσσάρων ἀκτίνων

$H_1 - \lambda_i H_2 = 0$ εἶνε $\dfrac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2} : \dfrac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_3 - \lambda_4} = \lambda$ (2)

Ἐκ τῆς ἐκφράσεως ταύτης τοῦ λ παρατηροῦμεν ὅτι, *«εἰς δοθεῖσαν τιμὴν μ τοῦ λ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν μίαν ἐκ τῶν τεσσάρων ἀκτίνων, ὅταν δοθοῦν αἱ τρεῖς ἄλλαι»*,

Ἐὰν δίδωνται οἱ συντελεσταὶ διευθύνσεως $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ τῶν τεσσάρων ἀκτίνων τοῦ συμπλέγματος, ὁ μὲν διπλοῦς λόγος αὐτοῦ διατηρεῖ τὴν ἀνωτέρω μορφήν, ἐπειδὴ ὁ λόγος (1) τρέπεται εἰς τὸν (2) ἐνῷ τὰ λ φανερώνουν τοὺς συντελεστὰς διευθύνσεων τῶν ἀκτίνων, ἂν δὲ τὸ σύμπλεγμα εἶνε ἁρμονικόν, θὰ ἔχωμεν, θέτοντες τὸν λόγον (2) ἴσον μὲ -1

$$(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_4) = 2\,(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4),$$

ἥτις χαρακτηρίζεται ἐνίοτε ὡς ἐξίσωσις, ὁρίζουσα τὸ ἁρμονικὸν σύμπλεγμα ἐκ τεσσάρων ἀκτίνων ἐπιπέδου δέσμης.

Παρατηρητέον ὅτι, ὁ διπλοῦς λόγος συμπλεγμάτων ἐξ ἀκτίνων δεσμῶν, εἰς τὰς ὁποίας τὰ ἀντίστοιχα λ_i εἶτε τὰ αὐτά, εἶνε ὁ αὐτός. Π. χ. ἂν ἔχωμεν τὰς ἀκτῖνας μιᾶς δέσμης $H_1=0, H_2=0, H_1-\lambda H_2=0, H_1-kH_2=0$, καὶ τὰς ἀκτῖνας ἄλλης δέσμης $H_1'=0, H'_2=0, H'_1-\lambda H'_2=0, H'_1-kH'_2=0$, ὁ διπλοῦς λόγος καὶ τῶν δύο εἶνε ὁ $k:\lambda$. Τὰ τοιοῦτα συμπλέγματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσους διπλοῦς λόγους καλοῦμεν *προβολικὰ συμπλέγματα, καὶ διὰ τοῦτο, τὰ ἁρμονικὰ συμπλέγματα ἐξ ἀκτίνων εἶνε προβολικά.*

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ δειχθῇ ἀναλυτικῶς, ὅτι ἂν ἁρμονικὸν σύμπλεγμα ἐκ τεσσάρων ἀκτίνων ἐπιπέδου δέσμης τμηθῇ διὰ τυχούσης εὐθείας, τὰ σημεῖα τῆς τομῆς ἀποτελοῦν ἁρμονικὸν σύμπλεγμα.

2) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν τομῶν τῶν ὁμολόγων ἀκτίνων δύο προβολικῶν ἐπιπέδων δεσμῶν $O(H_1-\lambda H_2=0)$ καὶ $O'(H'_1-\lambda H'_2=0)$.

3) Ἂν τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῶν ὁμολόγων ἀκτίνων δύο προβολικῶν δεσμῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, αἱ δέσμαι ἔχουν προοπτικὴν θέσιν πρὸς ἀλλήλας. Δείξατε ὅτι, ἂν τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τριῶν ζευγῶν ἀντιστοίχων ἀκτίνων δύο προβολικῶν δεσμῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, αἱ δέσμαι εἶνε προοπτικαί.

4) Ἐὰν $H_1=0$, $H_2=0$, $H_3=0$ εἶνε αἱ ἐξισώσεις τριῶν εὐθειῶν, σχηματιζουσῶν τρίγωνον, ἡ ἐξίσωσις τυχούσης εὐθείας $Ax+By+\Gamma=0$ (1) δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $A_1H_1+A_2H_2+A_3\Gamma_3=0$ (2)

Πράγματι, ἂν εἶνε $H_i = x$ συνφ$_i$ $+y$ ημ φ$_i$ $=p_i$ ($i=1,2,3$), ἡ δευτέρα γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$x\,\Sigma_i A_i \text{ συνφ}_i + y\,\Sigma^i A_i \text{ ημφ}_i - \Sigma_i p_i = 0,$$

ἵνα δ' αὕτη συμπίπτῃ μὲ τὴν (1) πρέπει νὰ ἔχωμεν

$$A = \Sigma_i A_i \text{ συν φ}_i\ ,\quad B = \Sigma_i A_i \text{ ημφ}_i\ ,\quad \Gamma = -\Sigma_i A_i p_i\ ,$$

ἐκ τούτων δ' ὁρίζονται αἱ τιμαὶ τῶν A_i.

§ 43. Μετρικαὶ ἰδιότητες ἁρμονικῶν συμπλεγμάτων ἐκ σημείων καὶ ἀκτίνων.

Ὡς ἐν τοῖς προηγουμένοις εἴδομεν, ἂν (ΑΒΓΔ) εἶνε ἁρμονικὸν σύμπλεγμα ἐκ σημείων μιᾶς σημειοσειρᾶς τοῦ φορέως αὐτῆς θεωρουμένου ὡς ἄξονος τῶν τετμημένων, καὶ α,β,γ,δ εἶνε αἱ τετμημέναι τούτων μετρούμεναι ἀπὸ ἀρχῆς Ο, θὰ ἔχωμεν (ΑΒ) (ΓΔ) + (ΑΔ) (ΓΒ) = 0,

$$\text{ἢ}\qquad (\beta-\alpha)(\delta-\gamma)+(\delta-\alpha)(\beta-\gamma)=0$$

$$\text{ἢ καὶ}\qquad \beta\delta-{}^1/_2\,(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)+\alpha\gamma=0. \qquad (1)$$

Ἐὰν καὶ τὸ ζεῦγος Β′ Δ′ τῶν σημείων Β′(β′), Δ′(δ′) εἶνε ἁρμονικὸν ὡς πρὸς τὰ Α καὶ Γ θὰ ἔχωμεν καὶ $\beta'\delta' - {}^1/_2(\alpha+\gamma)(\beta'+\delta')+\alpha\gamma=0$ (2)

Παρατηροῦμεν ὅτι ἐκ ταύτης καὶ τῆς (1) δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὰ $\alpha+\gamma$ καὶ $\alpha\gamma$, ὅταν γνωρίζωμεν τὰ β, δ καὶ β', δ'. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν $\alpha\gamma$ καὶ $\alpha+\gamma$ ὁρίζονται τὰ α καὶ γ καθ' ἕνα μόνον τρόπον, ἕπεται ὅτι, *«εἰς δύο δοθέντα ζεύγη σημείων Β, Δ καὶ Β', Δ' ἀντιστοιχεῖ ἓν ἄλλο ζεῦγος Α,Γ, τὸ ὁποῖον εἶνε ἁρμονικὸν μὲ ἕκαστον τῶν πρώτων»*. Αἱ τιμαὶ τῶν α καὶ γ θὰ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ

$$\omega^2-(\alpha+\gamma)\,\omega+\alpha\gamma=0 \qquad (3)$$

ἤτοι τὰ α καὶ γ εἶνε αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως ταύτης. Πρὸς εὕρεσιν τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς, δηλαδὴ τῶν συντελεστῶν τῆς (3), παρατηροῦμεν ὅτι, αἱ ἐξισώσεις (1), (2) καὶ (3) εἶνε γραμμικαὶ ἐξισώσεις ὡς πρὸς τὰ 1, $\alpha+\gamma$ καὶ $\alpha\gamma$, καὶ πρέπει ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν αὐτῶν νὰ ἰσοῦται μὲ μηδέν, ἤτοι θὰ ἔχωμεν τὴν ζητουμένην ἐξίσωσιν

$$\begin{vmatrix} \beta\delta & {}^1/_2(\beta+\delta) & 1 \\ \beta'\delta' & {}^1/_2(\beta'+\delta') & 1 \\ \omega^2 & +\omega & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ἐκ τοῦ εἴδους τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὑρίσκομεν τὰς περιπτώσεις καθ' ἃς ἔχομεν τὸ ζεῦγος Α καὶ Γ, καὶ ὅτι, αἱ ῥίζαι εἶνε πραγματικαί, ἂν τα σημεῖα Β,Δ καὶ Β',Δ' δὲν χωρίζουν ἄλληλα (§31), ἐνῶ ὅταν χωρίζωνται ταῦτα, αἱ ῥίζαι τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως εἶνε φανταστικαὶ καὶ δὲν ὑπάρχει ζεῦγος σημείων Α, Γ, χωρίζον τὰ Β, Δ καὶ Β', Δ' ἁρμονικῶς.

Παρατηροῦμεν ἀκόμη ὅτι, ἕκαστον τῶν ζευγῶν Α,Γ καὶ Β,Δ δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν διὰ μιᾶς ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ. Ἔστω

$$\alpha_1 x^2+2\beta_1 x+\gamma_1=0, \qquad -2\beta_1/\alpha_1=\alpha+\gamma, \quad \gamma_1/\alpha_1=\alpha\gamma$$

ἡ ἐξίσωσις, ἥτις ἔχει ὡς ῥίζας τὰ α καὶ γ, πρὸς δὲ ἔστωσαν β καὶ δ αἱ εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Δ ἀντιστοιχοῦσαι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$\alpha_2 x^2+2\beta_2 x+\gamma_2=0, \qquad -2\beta_2/\alpha_2=\beta+\delta, \; \gamma_2/\alpha_2=\beta\delta.$$

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὰς τιμὰς τῶν $\alpha+\gamma$, $\alpha\gamma$, $\beta+\delta$, $\beta\delta$ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν

$$\alpha_1\gamma_2-2\beta_1\beta_2+\gamma_1\alpha_2=0,$$

ἥτις ἐκφράζει τὴν συνθήκην, ἵνα τὰ δύο ζεύγη τῶν σημείων Α,Γ καὶ Β,Δ εἶνε ἁρμονικά. Ἐκ τούτου ἕπεται ἐκ νέου ὅτι,

«εἰς δοθέντα δύο ζεύγη σημείων ἀντιστοιχεῖ ἓν ἄλλο ζεῦγος, τὸ ὁποῖον εἶνε ἁρμονικὸν πρὸς ἕκαστον τῶν δύο πρώτων».

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ ζεῦγος τοῦτο πρέπει νὰ ἔχῃ συντελεστὰς α, β, γ τοιούτους, ὥστε νὰ εἶνε

$$\alpha\gamma_1 - 2\beta\beta_1 + \alpha_1\gamma = 0 \quad \text{καὶ} \quad \alpha\gamma_2 - 2\beta\beta_2 + \alpha_2\gamma = 0 \qquad (4)$$

Ἐπειδὴ δ' αὗται εἶνε δύο γραμμικαὶ ἐξισώσεις ὡς πρὸς α, 2β, γ θὰ ἔχωμεν

$$\alpha : 2\beta : \gamma = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Ἄρα τὸ ζητούμενον ζεῦγος τῶν σημείων ὁρίζεται ἐκ τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως

$$(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\, x^2 + (\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1)\, x + (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) = 0.$$

Τὸ οὕτω ὁριζόμενον ζεῦγος σημείων εἶνε ἁρμονικὸν πρὸς ἕκαστον ζεῦγος σημείων, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ὑπὸ μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ

$$\alpha_1 x^2 + 2\beta_1 x + \gamma_1 + \lambda\,(\alpha_2 x^2 + 2\beta_2 x + \gamma_2) = 0.$$

Ἤτοι ἐκ τῶν ἐξισώσεων (4) ἔχομεν, ἂν πολλαπλασιάσωμεν αὐτὰς ἐπὶ 1 καὶ λ ἀντιστοίχως καὶ προσθέσωμεν

$$\alpha\,(\gamma_1 + \lambda\gamma_2) - 2\beta\,(\beta_1 + \lambda\beta_2) + \gamma(\alpha_1 + \lambda\alpha_2) = 0.$$

§ 44. Προβολικοὶ μετασχηματισμοὶ μεταξὺ σημειοσειρῶν.

Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν τὴν συσχέτισιν τῶν σημείων δύο σημειοσειρῶν k καὶ k' πρὸς ἄλληλα εἰς τρόπον ὥστε, εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς μιᾶς ν' ἀντιστοιχῇ ἓν τῆς ἄλλης, συνδέομεν αὐτὰ ἀναλυτικῶς διὰ τῆς καλουμένης *διγραμμικῆς* ἐξισώσεως

$$\alpha x x' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0, \qquad (1)$$

ἐνῷ τὰ μὲν x παριστάνουν τετμημένας σημείων τῆς k, λαμβανομένης ὡς ἄξονος τῶν x τὰ δὲ x' τῆς k', λαμβανομένης ὡς ἄξονος τῶν x'.

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν

$$x = -\,\frac{\gamma x' + \delta}{\alpha x' + \beta}, \qquad \text{καὶ } x' = -\,\frac{\beta x + \delta}{\alpha x + \gamma} \qquad (2)$$

καὶ ἐκφράζεται οὕτω ἡ μία τῶν μεταβλητῶν διὰ τῆς ἄλλης δι' ἑνὸς *γραμμικοῦ μετασχηματισμοῦ*. Τὴν ἀνωτέρω σχέσιν (1) μεταξὺ τῶν δύο σημειοσειρῶν καλοῦμεν *προβολικὴν* σχέσιν αὐτῶν.

Θεμελιώδης ἰδιότης τῆς προβολικῆς σχέσεως εἶνε τὸ ὅτι, *«ὁ διπλοῦς λόγος τῶν ἀντιστοίχων συμπλεγμάτων ἐκ σημείων τῶν δύο σημειοσειρῶν εἶνε ὁ αὐτός, καὶ καλεῖται ἀναλλοίωτος τῆς προβολικῆς ταύτης σχέσεως»*. Ἤτοι, ἂν P_1, P_2, P_3, P_4 εἶνε τέσσαρα σημεῖα τῆς k καὶ P_1', P_2', P_3', P_4' τὰ ἀντίστοιχοῦντα τῆς k′ (τὰ ὁποῖα καλοῦνται καὶ σημεῖα *ἀπεικονίσεως* τῶν πρώτων ἐπὶ τῆς k′) θὰ ἔχωμεν

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) = (P_1' P_2' P_3' P_4'),$$

ἢ
$$\frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)}{(x_3 - x_2)(x_1 - x_4)} = \frac{(x_1' - x_2')(x_3' - x_4')}{(x_3' - x_2')(x_1' - x_4')} \tag{3}$$

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου παρατηροῦμεν ἐν πρώτοις ὅτι, δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν τρεῖς ἁπλουστέρους τύπους γραμμικῶν μετασχηματισμῶν, τοὺς

$$x' = x + \lambda, \quad x' = \rho x, \quad x' = \frac{1}{x}, \tag{4}$$

καὶ δι᾽ ἕκαστον τούτων ἰσχύει πράγματι ἡ ἀνωτέρω ἰσότης, ὡς ἀμέσως φαίνεται δι᾽ ἀντικαταστάσεως τῶν x ὑπὸ τῶν ἴσων αὐτῶν διὰ τῶν x′.

Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι τυχὼν μετασχηματισμὸς (2) δύναται νὰ συντεθῇ ἐξ ἁπλῶν μετασχηματισμῶν τῆς μορφῆς (4). Διὰ τοὺς δύο μετασχηματισμοὺς τῆς μορφῆς

$$x' = \mu x + \nu, \quad x' = \frac{\mu}{x}$$

εἶνε φανερὸν ὅτι συμβαίνει τοῦτο. Ὁ μὲν πρῶτος προκύπτει ἐκ τοῦ $x_1 = \mu x$ καὶ τοῦ $x' = x_1 + \nu$, ὁ δὲ δεύτερος εἶνε ἰσοδύναμος μὲ τὸν $x_1 = 1 : x$ καὶ $x' = \mu x_1$.

Ἔστω τώρα ὁ γενικὸς γραμμικὸς μετασχηματισμὸς

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}. \tag{5}$$

Γράφομεν αὐτὸν ὡς ἑξῆς

$$x' = \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{x + \eta}{x + \theta} = \frac{\alpha}{\gamma} \left\{ 1 + \frac{\eta - \theta}{x + \theta} \right\}, \quad \eta = \frac{\beta}{\alpha}, \ \theta = \frac{\delta}{\gamma},$$

καὶ θέτομεν κατὰ σειρὰν

$$x_1 = x + \theta, \quad x_2 = \frac{\eta - \theta}{x_1}, \text{ ἐπομένως } x' = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\alpha}{\gamma} \cdot x_2.$$

Οὕτω ἀφοῦ ἡ ἰδιότης (3) ἰσχύει δι᾽ ἕκαστον τῶν ἁπλῶν μετασχηματισμῶν (4) ἰσχύει καὶ διὰ τὸν γενικὸν τοιοῦτον (5), ὁ δὲ διπλοῦς λόγος τῶν συμπλεγμάτων ἐξ ἀντιστοίχων σημείων τῶν δύο σημειοσειρῶν εἶνε *ἀναλλοίωτος*, ἐὰν ἐπὶ πλέον εἶνε

$$\eta - \theta \neq 0 \ \text{ἢ} \ \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Διότι ἂν εἶνε $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$, δὲν ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς k ἓν τῆς k′, καὶ ἀντιστρόφως.

Ἡ ποσότης $\alpha\delta - \beta\gamma = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ καλεῖται ὁρίζουσα τοῦ μετασχηματισμοῦ, Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

«εἰς ἑκάστην προβολικὴν σχέσιν μεταξὺ δύο ὁμωνύμων σχηματισμῶν τῆς πρώτης βαθμῖδος, ἔχουσαν ὁρίζουσαν διάφορον τοῦ μηδενός, ὁ διπλοῦς λόγος τῶν ἀντιστοίχων συμπλεγμάτων ἐκ στοιχείων τῶν σχηματισμῶν εἶνε ἀναλλοίωτος».

Ἐὰν εἶνε $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$, ἤτοι $\alpha:\beta = \gamma:\delta$,

θέτομεν $\quad \beta = \sigma.\alpha, \ \delta = \sigma.\gamma, \ \rho\gamma = \alpha, \ \rho\delta = \beta$

καὶ λαμβάνομεν

$$x' = \frac{\alpha}{\gamma}.\frac{x+\sigma}{x+\sigma} = \frac{\alpha}{\gamma},\ x = \frac{\delta}{\gamma}.\frac{x'+\rho}{x'+\rho} = \frac{\delta}{\gamma}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, εἰς μίαν τυχοῦσαν τιμὴν τοῦ x ἀντιστοιχεῖ πάντοτε ἡ αὐτὴ τιμὴ τοῦ $x' = \alpha/\gamma$, καὶ ὁμοίως εἰς μίαν τυχοῦσαν τιμὴν τοῦ x' τὸ αὐτὸ $x = \delta/\gamma$. Ἤτοι εἰς τὸ σημεῖον τὸ ἔχον τετμημένην ἐπὶ τῆς k, τὴν τιμὴν $x = \delta/\gamma$ ἀντιστοιχοῦν πάντα τὰ σημεῖα τῆς k', καὶ εἰς τὸ σημεῖον τῆς k', τὸ ἔχον τετμημένην $x' = \alpha/\gamma$ ἀντιστοιχοῦν πάντα τὰ σημεῖα τῆς k. Ἡ τοιαύτη ἀντιστοιχία τῶν σημείων τῶν δύο σημειοσειρῶν k καὶ k' καλεῖται *ἐκφυλισμένη*. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ δεικνύεται εὐκόλως ὅτι, ἡ προβολικὴ σχέσις λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\left(x - \frac{\alpha}{\gamma}\right)\left(x' - \frac{\delta}{\gamma}\right) = 0$$

Οὕτω π. χ. μία τοιαύτη εἶνε ἡ $xx'+x+x'+1=0$, ἢ $(x+1)(x'+1)=0$.

Ἡ ἀνωτέρω ἀποδειχθεῖσα πρότασις δύναται νὰ ἀντιστραφῇ· ἤτοι δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν προβολικήν τινα σχέσιν ὡς τοιαύτην σχέσιν μεταξὺ δύο σχηματισμῶν, ἐν ᾗ εἰς ἕκαστον στοιχεῖον τῆς μιᾶς νὰ ἀντιστοιχῇ ἓν τῆς ἄλλης καὶ ἀντιστρόφως, καὶ διὰ τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ ἀναλλοίωτος διπλοῦς λόγος. Ἂν δηλαδὴ εἶνε P_i $(i=1,2,3,4)$ τέσσαρα τυχόντα σημεῖα τῆς σημειοσειρᾶς k καὶ P'_i τὰ σημεῖα ἐφ' ὧν ἀπεικονίζονται ταῦτα ἐπὶ τῆς k', καὶ ὑπάρχῃ ἡ ἐξίσωσις (3), ἐὰν θεωρήσωμεν τὰ τρία ζεύγη $x_1, x_1', x_2, x_2', x_3, x_3'$ σταθερά, καὶ ἀντικαταστήσωμεν τὸ τέταρτον ζεῦγος διὰ τῶν μεταβλητῶν x καὶ x', μετασχηματίζεται ἡ ἐν λόγῳ ἐξίσωσις εἰς μίαν διγραμμικὴν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς x καὶ x'. Ἐπειδὴ δὲ τὰ P_1, P_1', P_2, P_2' καὶ P_3, P_3' δύνανται νὰ ἐκλεγοῦν αὐθαιρέτως ἕπεται ὅτι,

«μία προβολικὴ σχέσις μεταξὺ δύο σημειοσειρῶν εἶνε ὡρισμένη διὰ τριῶν ζευγῶν ἐξ ἀντιστοίχων σημείων αὐτῶν, ὁπωσδήποτε ἐκλεγομένων».

Ἐὰν εἰς τὸ κατ' ἐκδοχὴν σημεῖον τῆς k ἀντιστοιχῇ τὸ σημεῖον H' τῆς k' καὶ εἰς τὸ κατ' ἐκδοχὴν τῆς k' τὸ H τῆς k, θὰ ἔχωμεν διὰ δύο οἱαδήποτε ζεύγη ἐξ ἀντιστοίχων σημείων P, P' καὶ P_1, P_1'

$$(P\infty P_1 H) = (P'H'P'_1\infty).$$

Ἀλλ' ἔχομεν εὐκόλως $\quad (P\infty P_1 H) = (P_1H):(PH),$

$$(P'H'P'_1\infty) = (P'H'):(P_1'H').$$

Ἐὰν η καὶ η' παριστάνουν τὰς τετμημένας τῶν H καὶ H', ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις γίνεται

$$\left.\begin{aligned} &(PH).(P'H') = (P_1H)\,(P_1'H'),\\ \text{ἢ}\quad &(\eta - x)\,(\eta' - x') = \text{σταθερόν}. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Οὕτω τὸ γινόμενον $(PH).(P'H')$ ἔχει μίαν σταθερὰν τιμὴν δι' ἕκαστον ζεῦγος ἀντιστοίχων σημείων, καὶ καλεῖται *δύναμις* τῆς προβολικῆς σχέσεως, τὰ δὲ σημεῖα H καὶ H' καλοῦνται *σημεῖα φυγῆς* τῆς προβολικότητος ταύτης.

Ἐὰν ἐν τῇ προβολικῇ σχέσει (1) εἶνε $\alpha = 0$, θὰ ἀντιστοιχοῦν μεταξύ των τὰ κατ' ἐκδοχὴν σημεῖα τῶν δύο σημειοσειρῶν, ἤτοι θὰ εἶνε

$$(P_1P_2P_3\infty) = (P_1'P_2'P_3'\infty)$$

καὶ θὰ ἔχωμεν

$$(P_1P_3):(P_3P_2) = (P_1'P_3'):(P_3'P_2') \quad \text{ἢ} \quad (P'_i\,P'_k) = \rho.(P_i\,P_k).$$

Δύο σημειοσειραί, ἔχουσαι τὴν ἰδιότητα ταύτην καλοῦνται *ὅμοιαι* (ὡς καὶ ἀμέσως κατωτέρω θέλομεν ἴδει), τὰ δὲ μήκη δύο τμημάτων τῆς μιᾶς ἔχουν πρὸς ἄλληλα τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον καὶ τὰ ἀντίστοιχα τῆς ἄλλης. Ὁ ἀριθμὸς ρ καλεῖται συνήθως *λόγος τῆς διαστολῆς* μεταξὺ τῶν δύο σημειοσειρῶν, ἂν δ' εἶνε $\rho = 1$, αἱ δύο σημειοσειραὶ λέγονται *ἴσαι*.

Ἐὰν αἱ δύο σημειοσειραὶ k καὶ k' κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ φορέως, θὰ ἔχωμεν μίαν προβολικὴν διάταξιν μεταξὺ τῶν σημείων μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, καὶ ἕκαστον σημεῖον αὐτῆς θὰ θεωρῆται ἀνῆκον εἰς τὸν ἕνα καὶ τὸν ἄλλον ἐκ τῶν δύο σχηματισμῶν, ἤτοι τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς εὐθείας θὰ θεωρῆται ὡς σημεῖον P τῆς σημειοσειρᾶς k καὶ ὡς σημεῖον P' τῆς k'. Ὑποθέτομεν ὅτι αἱ τετμημέναι x καὶ x' λογίζονται ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν ἀρχὴν καὶ τὴν αὐτὴν μονάδα μήκους, καὶ οὕτω παρατηροῦμεν ὅτι, εἰς ἓν ζεῦγος τιμῶν $x = x'$ ἀντιστοιχεῖ ἓν ζεῦγος συμπιπτόντων *ἀντιστοίχων* σημείων $P \equiv P'$ τῶν δύο σημειοσειρῶν, καλοῦνται δὲ τὰ τοιαῦτα σημεῖα *διπλᾶ σημεῖα* τῆς προβολικότητος. Ἑκάστη τοιαύτη τιμὴ x εἶνε ῥίζα τῆς ἐξισώσεως

$$\alpha\omega^2 + (\beta + \gamma)\omega + \delta = 0.$$

$(\eta - x)(\eta' - x') = \pm\theta^2$

Ἑπομένως ὑπάρχουν ἐν γένει δύο ζεύγη διπλῶν σημείων, εἶνε δὲ ταῦτα πραγματικά, ἢ συμπίπτοντα, ἢ φανταστικά, ἂν εἶνε

$$(\beta+\gamma)^2 - 4\alpha\delta > 0, \text{ ἢ μηδέν, ἢ ἀρνητικόν.}$$

Τὴν συνθήκην τῆς πραγματικότητος τῶν ριζῶν τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως ἔχομεν ἐκ τῆς (6). Αὕτη δίδει διὰ τὰ διπλᾶ σημεῖα μίαν ἐξίσωσιν

$$\omega^2 - (\eta + \eta')\omega + \eta\,\eta' = \pm\,\theta^2,$$

ἐνῷ τὸ $\pm\,\theta^2$ εἶνε ἡ δύναμις τῆς προβολικῆς σχέσεως. Ἡ ὑπόρριζος ποσότης, ἥτις ὑπάρχει εἰς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶνε

$$\left(\frac{\eta+\eta'}{2}\right)^2 \pm\theta^2 - \eta\,\eta' = \left(\frac{\eta-\eta'}{2}\right)^2 \pm\theta^2$$

Ἐὰν μὲν ἡ δύναμις τῆς προβολικότητος εἶνε θετική, τὰ διπλᾶ σημεῖα εἶνε πραγματικά, ἐὰν δ' αὕτη εἶνε ἀρνητικὴ τότε μόνον, ἐὰν τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεως τοῦ τμήματος Η′ Η εἶνε μεγαλύτερον τῆς ἀπολύτου τιμῆς τῆς δυνάμεως.

Ἐὰν Σ καὶ Τ εἶνε τὰ διπλᾶ σημεῖα τῆς προβολικότητος, ἀποτελοῦν ταῦτα μὲ ἕκαστον ζεῦγος ἀντιστοίχων σημείων Ρ, Ρ′ ἓν σύμπλεγμα ἐκ τεσσάρων σημείων μὲ σταθερὸν διπλοῦν λόγον. Ἐὰν δηλαδὴ Η καὶ Η′ εἶνε ἓν ἄλλο ζεῦγος ἀντιστοίχων σημείων τῆς προβολικότητος, θὰ ἔχωμεν (ΣΡΤΗ) = (ΣΡ′ΤΗ′). ἀλλ' οὐ τὸ πρόβλημα

Ἐὰν ἕκαστον τῶν μελῶν τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος ἀντικαταστήσωμεν διὰ τοῦ ἀντιστοίχου πρὸς τὸ σύμπλεγμα διπλοῦ λόγου, εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε

$$(\Sigma\mathrm{P}\mathrm{T}\mathrm{P}') = (\Sigma\mathrm{H}\mathrm{T}\mathrm{H}').$$

Κατ' ἀναλογίαν πρὸς τοὺς προβολικοὺς μετασχηματισμοὺς μεταξὺ σημειοσειρῶν ἔχομεν τοιούτους καὶ διὰ ἐπιπέδους δέσμας ἀκτίνων. Ἐὰν δύο ἐπίπεδοι δέσμαι δίδωνται διὰ τῶν ἐξισώσεων

$$\mathrm{H}_1 + \lambda \mathrm{H}_2 = 0, \quad \mathrm{H}_1' + \lambda' \mathrm{H}_2 = 0,$$

θὰ λέγωμεν ὅτι αὗται εἶνε προβολικαί, ἂν ὁ διπλοῦς λόγος ἑκάστου συμπλέγματος τεσσάρων ἀκτίνων τῆς μιᾶς ἰσοῦται μὲ τὸν διπλοῦν λόγον τοῦ συμπλέγματος τῶν ἀντιστοίχων τεσσάρων τῆς ἄλλης, ὁρίζεται δὲ μία τοιαύτη προβολικότης διὰ μιᾶς διγραμμικῆς σχέσεως ἢ δι' ἑνὸς προβολικοῦ μετασχηματισμοῦ

$$\alpha\lambda\lambda' + \beta\lambda + \gamma\lambda' + \delta = 0, \quad \lambda' = -\frac{\beta\lambda+\delta}{\alpha\lambda+\gamma} \text{ ἂν εἶνε } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Διότι διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ τούτου εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε

$$\frac{(\lambda_1-\lambda_2)\,(\lambda_3-\lambda_4)}{(\lambda_3-\lambda_2)\,(\lambda_1-\lambda_4)} = \frac{(\lambda_1'-\lambda_2')(\lambda_3'-\lambda_4')}{(\lambda_3'-\lambda_2')(\lambda_1'-\lambda_4')}.$$

$(\Sigma P T H) = (\Sigma P' T H')$ $\quad \frac{(\Sigma P)}{(TP)} : \frac{(\Sigma H)}{(TH)} = \frac{(\Sigma P')}{(TP')} : \frac{(\Sigma H')}{(TH')}$

$\frac{(\Sigma P)}{} \cdot \frac{(\Sigma P')}{} = \frac{(\Sigma H)}{} \frac{(\Sigma H')}{}$ ὅλως

§ 45. Προβολικότης μεταξὺ ἀξονικῶν δεσμῶν καὶ σημειοσειρῶν.

Καλοῦμεν *διπλοῦν λόγον* συμπλέγματος (**abcd**) ἐκ τεσσάρων ἐπιπέδων ἀξονικῆς δέσμης καὶ παριστάνομεν αὐτὸν διὰ τοῦ (**abcd**) $= \lambda$ τὸ πηλίκον $$(\mathbf{abcd}) = \frac{\eta\mu\,(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\eta\mu\,(\mathbf{c},\mathbf{b})} : \frac{\eta\mu\,(\mathbf{a},\mathbf{d})}{\eta\mu\,(\mathbf{c},\mathbf{d})}.$$

Κατ᾽ ἀναλογίαν πρὸς τὰς ἰδιότητας τοῦ διπλοῦ λόγου συμπλέγματος ἐξ ἀκτίνων ἐπιπέδου δέσμης ἢ ἐκ σημείων σημειοσειρᾶς δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τοιαύτας καὶ διὰ τὸν διπλοῦν λόγον συμπλέγματος ἐξ ἐπιπέδων ἀξονικῆς δέσμης, καθὼς καὶ τὸν ὁρισμὸν τῆς προβολικῆς σχέσεως ἀξονικῶν δεσμῶν. Οὕτω σημειοσειραί, ἐπίπεδοι δέσμαι ἀκτίνων καὶ ἀξονικαὶ δέσμαι ἐπιπέδων παρουσιάζονται ὡς ἰσότιμοι στοιχειώδεις γεωμετρικοὶ σχηματισμοί, οἵτινες ἑνιαίως δύνανται νὰ συσχετισθοῦν πρὸς ἀλλήλους προβολικῶς ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ὅτι, ὁ διπλοῦς λόγος αὐτῶν διατηρεῖται *ἀναλλοίωτος*.

Ἐὰν $$H_1 = 0, \quad H_1 + \lambda_1 H_2 = 0, \quad H_2 = 0,$$

εἶνε αἱ ἐξισώσεις τριῶν ἐπιπέδων **a**, **b**, **c** μιᾶς ἀξονικῆς δέσμης, καὶ R_1, R_2 παριστάνουν τὰς ἀποστάσεις (θετικῶς λαμβανομένας) σημείου τινὸς $M\,(x,y,z)$ τοῦ ἐπιπέδου **b** ἀπὸ τῶν δύο ἄλλων, θὰ ἔχωμεν

$$R_1 : R_2 = \frac{H_1\,(x,y,z)}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+\Gamma_1^2}} : \frac{H_2\,(x,y,z)}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+\Gamma_2^2}}$$

$$\lambda_1 = -\frac{H_1\,(x,y,z)}{H_2\,(x,y,z)} = -\frac{R_1}{R_2}\,\frac{\sqrt{A_1^2+B_1^2+\Gamma_1^2}}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+\Gamma_2^2}}$$

Ἀλλ᾽ εἶνε

$$R_1 : R_2 = \eta\mu\,(\mathbf{a},\mathbf{b}) : \eta\mu\,(\mathbf{c},\mathbf{b})$$

ἄρα ἔχομεν $$\lambda_1 = -\frac{\sqrt{A_1^2+B_1^2+\Gamma_1^2}}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+\Gamma_2^2}}\,\frac{\eta\mu\,(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\eta\mu\,(\mathbf{c},\mathbf{b})}$$ $= \rho \frac{\eta\mu(ab)}{\eta\mu(cb)}$ ὅτε $\lambda = \rho \frac{\eta\mu(a}{\eta\mu(c}$

Ἐν ᾗ περιπτώσει αἱ ἐξισώσεις τῶν **a** καὶ **c** δίδονται ὑπὸ τὴν κανονικὴν μορφήν, θὰ ἔχωμεν $\lambda_1 = \dfrac{\eta\mu\,(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\eta\mu\,(\mathbf{c},\mathbf{b})}$.

Ἂν $H_1 + \lambda_2 H_2 = 0$ εἶνε ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐπιπέδου **d**, θὰ ἔχωμεν ὁμοίως $\lambda_2 = \dfrac{\eta\mu\,(\mathbf{a},\mathbf{d})}{\eta\mu\,(\mathbf{c},\mathbf{d})}$ καὶ ὁ διπλοῦς λόγος τοῦ συμπλέγματος (**abcd**) θὰ εἶνε $\lambda = \lambda_1 : \lambda_2$.

$\sqrt{A_1^2+B_1^2+\Gamma_1^2} = 1$

$Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$

Δυνάμεθα τώρα εὐκόλως νὰ ἀποδείξωμεν τὰς ἑξῆς διδύμους προτάσεις, ἀφορώσας εἰς ἀξονικὰς δέσμας καὶ σημειοσειράς.

Τὰ μὲν τέσσαρα ἐπίπεδα
$H_1=0, H_1+\lambda H_2=0, H_2=0, H_1+\mu H_2=0$
ἀποτελοῦν ἓν σύμπλεγμα ἐκ τεσσάρων στοιχείων μιᾶς ἀξονικῆς δέσμης, ἔχον διπλοῦν λόγον ἴσον μὲ $\lambda:\mu$, τὰ δὲ ἐπίπεδα

$H_1=0, H_1-\lambda H_2=0, H_2=0, H_1+\lambda H_2=0$

ἀποτελοῦν ἁρμονικὸν σύμπλεγμα ἐκ τεσσάρων ἐπιπέδων.

Ὁ διπλοῦς λόγος τοῦ συμπλέγματος τῶν ἐπιπέδων $\mathbf{a}_i$
$H_1+\lambda_i H_2=0 \quad (i=1, 2, 3, 4)$
ἔχει τὴν τιμὴν
$$(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4) = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_4)}{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_4)}.$$
Δύο ἀξονικαὶ δέσμαι ἐπιπέδων
$H_1+\lambda H_2=0, \ H'_1+\mu H'_2=0$
εἶνε προβολικαί, ἐὰν μεταξὺ τοῦ λ καὶ μ ὑπάρχῃ ἡ ἑξῆς σχέσις
$$\alpha\lambda\mu+\beta\lambda+\gamma\mu+\delta=0$$
(ἁπλουστέρα περίπτωσις εἶνε ὅταν ἔχωμεν $\lambda=\mu$).

Τὰ μὲν τέσσαρα σημεῖα
$Q_1=0 \ Q_1+\lambda Q_2=0, Q_2=0, Q_1+\mu Q_2=0$
ἀποτελοῦν ἓν σύμπλεγμα ἐκ τεσσάρων στοιχείων μιᾶς σημειοσειρᾶς, ἔχον διπλοῦν λόγον ἴσον μὲ $\lambda:\mu$, τὰ δὲ ~~ἐπίπεδα~~ σημεῖα
$Q_1=0, Q_1-\lambda Q_2=0, Q_2=0, Q_1+\lambda Q_2=0$

ἀποτελοῦν ἁρμονικὸν σύμπλεγμα ἐκ τεσσάρων σημείων.

Ὁ διπλοῦς λόγος τῶν τεσσάρων σημείων A_i
$Q_1+\lambda_i Q_2=0 \ (i=1,2,3,4)$
ἔχει τὴν τιμὴν
$$(A_1A_2A_3A_4) = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_4)}{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_4)}.$$
Δύο σημειοσειραὶ
$Q_1+\lambda Q_2=0, \ Q_1'+\mu Q_2'=0$
εἶνε προβολικαί, ἐὰν μεταξὺ τῶν λ καὶ μ ὑπάρχῃ ἡ ἑξῆς σχέσις
$$\alpha\lambda\mu+\beta\lambda+\gamma\mu+\delta=0$$
(ἁπλουστέρα περίπτωσις εἶνε ὅταν ἔχωμεν $\lambda=\mu$).

Ὡς εἶνε γνωστόν, μία σημειοσειρά καὶ μία ἀξονικὴ δέσμη ἐπιπέδων εἶνε προοπτικαί, ἂν ἕκαστον σημεῖον τῆς πρώτης κεῖται ἐπὶ τοῦ ἀντιστοίχου πρὸς αὐτὸ τῆς δευτέρας. Ὅτι ἡ τοιαύτη σχέσις μεταξὺ τῶν σημείων καὶ τῶν ἐπιπέδων εἶνε προβολική, ἤτοι ὅτι οἱ διπλοῖ λόγοι τούτων εἶνε ἴσοι, ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς ἀναλυτικῶς. Ἔστω ὅτι $H+\lambda H'=0$ εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς ἀξονικῆς δέσμης, καὶ ὅτι δίδεται τυχοῦσα εὐθεῖα ὡς τομὴ δύο τυχόντων ἐπιπέδων δι' αὐτῆς $A=0$ καὶ $B=0$. Ὑπὸ τῆς εὐθείας ταύτης τέμνεται τὸ ἐπίδον $H+\lambda H'=0$ εἰς ἓν σημεῖον, τοῦ ὁποίου ἡ ἐξίσωσις εὑρίσκεται, δι' ἐπαλοιφῆς τῶν x, y, z μεταξὺ τῶν τεσσάρων ἐξισώσεων
$$H+\lambda H'=0, \quad A=0, \quad B=0, \quad ux+vy+wz+1=0.$$
Ἀλλ' οὕτω εὑρίσκομεν μίαν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $Q+\lambda Q'=0$, ἐνῷ

τὰ Q καὶ Q' εἶνε γραμμικαὶ ἀκέραιαι συναρτήσεις τῶν u,v,w (ἀνεξάρτητοι τοῦ λ). Ἑπομένως οἱ διπλοῖ λόγοι τεσσάρων ἀντιστοίχων στοιχείων μεταξὺ τῶν $H + \lambda H' = 0$ καὶ $Q + \lambda Q' = 0$ εἶνε ἴσοι, καὶ οἱ σχηματισμοὶ εἶνε καὶ προβολικοί. Οὕτω ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«*Τέσσαρα σημεῖα μιᾶς σημειοσειρᾶς ἔχουν τὸν αὐτὸν διπλοῦν λόγον, καθὼς καὶ τέσσαρα ἐπίπεδα ἀξονικῆς δέσμης, διερχόμενα διὰ τῶν σημείων τούτων*».

Ἐὰν τυχοῦσα σημειοσειρὰ ἔχῃ προβολικὴν σχέσιν πρὸς τυχοῦσαν ἀξονικὴν δέσμην, δύνανται οἱ δύο σχηματισμοὶ νὰ μεταφερθοῦν εἰς τοιαύτην θέσιν ἐν τῷ χώρῳ, ὥστε νὰ ἔχουν προοπτικὴν θέσιν. Τῷ ὄντι, τὰ ἐπίπεδα τῆς δέσμης ὁρίζουν, τεμνόμενα ὑπό τινος ἐπιπέδου, μὴ ἀνήκοντος εἰς τὴν δέσμην ἀλλὰ διερχομένου διὰ τοῦ φορέως τῆς σημειοσειρᾶς, μίαν ἐπίπεδον δέσμην, ἥτις θὰ εἶνε προβολικὴ πρὸς τὴν δοθεῖσαν σημειοσειράν. Ἀλλ' οὕτω ἡ σημειοσειρὰ θὰ ἔχῃ προοπτικὴν θέσιν πρὸς τὴν ἐπίπεδον καὶ τὴν ἀξονικὴν δέσμην.

Θὰ δείξωμεν ἀκόμη, ὅτι δύο ἀξονικαὶ προβολικαὶ δέσμαι δύνανται νὰ λάβουν προοπτικὴν θέσιν πρὸς ἀλλήλας, ἐὰν ὁρίσωμεν τὴν προοπτικότητα αὐτῶν διὰ τοῦ ὅτι, οἱ μὲν ἄξονες αὐτῶν τέμνονται, τὸ δὲ ἐπίπεδον τῶν ἀξόνων ἀντιστοιχεῖ πρὸς ἑαυτό. Ἔστωσαν **a,b,c,d,..** τὰ ἐπίπεδα τῆς μιᾶς δέσμης καὶ **a′,b′,c′,d′,..** τὰ ἀντίστοιχα τῆς ἄλλης. Κινοῦμεν τὰς δέσμας οὕτως, ὥστε νὰ συμπέσουν τὰ ἐπίπεδα **a** καὶ **a′**, χωρὶς νὰ συμπέσουν καὶ οἱ ἄξονες τῶν δεμῶν. Οὕτω οἱ ἄξονες τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον. Διὰ τοῦ σημείου τούτου διέρχεται ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων **b** καὶ **b′** καθὼς καὶ τομὴ δύο οἱωνδήποτε ἀντιστοίχων ἐπιπέδων. Πᾶσαι αἱ τομαὶ αὗται κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου. Διότι ὑπὸ τῶν εὐθειῶν (**bb′**) καὶ (**cc′**) ὁρίζεται ἓν ἐπίπεδον, ἔστω τὸ **a″**. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου ἔχομεν δύο ἐπιπέδους δέσμας, τομὰς τῶν δύο ἀξονικῶν δεσμῶν ὑπ' αὐτοῦ, αἵτινες εἶνε προοπτικαὶ καὶ ἔχουν κοινὸν κέντρον. Ἀλλ' αἱ δύο αὗται δέσμαι συμπίπτουν ἐκ ταὐτότητος, ἐπειδὴ ἔχουν τρεῖς ἀκτῖνας συμπιπτούσας, ἀντιστοιχούσας εἰς τομὰς τοῦ **a″** μετὰ τῶν ἐπιπέδων **a** καὶ **a′** (συμπιπτόντων), **b** καὶ **b′** καὶ **c** καὶ **c′**. Οὕτω αἱ τομαὶ τῶν ἀντιστοίχων ἐπιπέδων τῶν δύο ἀξονικῶν δεσμῶν κεῖνται ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου καὶ εἶνε αὗται προοπτικαί, ὡς ὄψεις τῆς αὐτῆς ἐπιπέδου δέσμης, καλεῖται δὲ συνήθως τὸ ἐπίπεδον **a″** *προοπτικὴ τομὴ ἢ ἐπίπεδον τῆς προοπτικότητος τῶν δύο ἀξονικῶν δεσμῶν*.

Ἐν γένει ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«*Προβολικοὶ σχηματισμοὶ τῆς πρώτης βαθμῖδος δύνανται νὰ λάβουν προοπτικὴν θέσιν πρὸς ἀλλήλους, καὶ ἀντιστρόφως*».

§ 46. Ὅμοιαι σημειοσειραὶ καὶ ἴσαι δέσμαι.

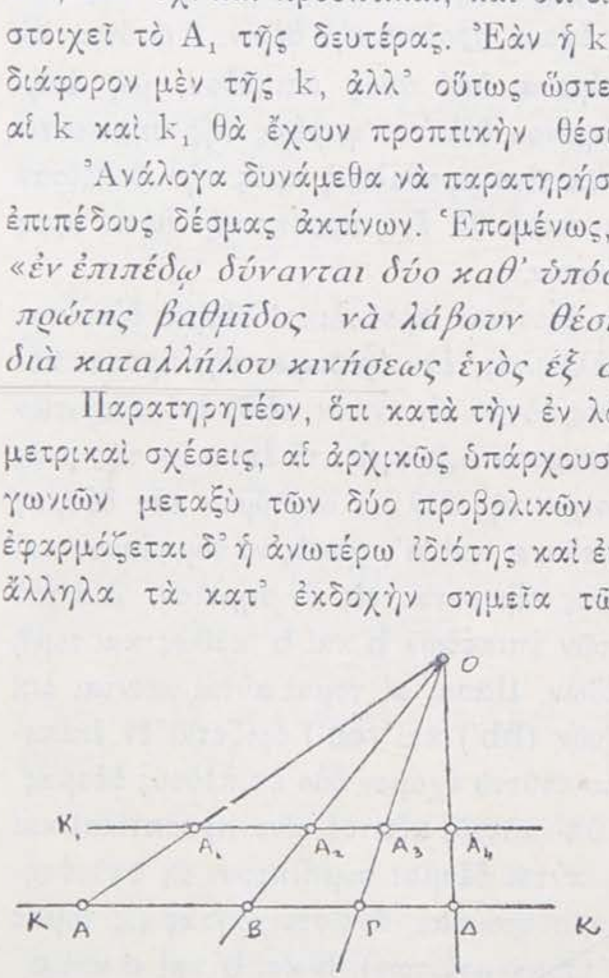
Δύο προβολικαὶ σημειοσειραί, κείμεναι ἐπὶ δύο καθ' ὑπόστασιν φορέων k καὶ k_1, διατηροῦν τὴν σχέσιν τῆς προβολικότητος καὶ ὅταν ὁ εἷς τῶν φορέων κινούμενος λάβῃ νέαν τινὰ θέσιν καθ' ὑπόστασιν (ἐπειδὴ κατὰ τὴν κίνησιν ἕκαστον ἁρμονικὸν σύμπλεγμα διατηρεῖται τοιοῦτον). Ἐν τούτοις, ἐὰν αἱ k καὶ k_1 εἶνε προοπτικαί, δὲν θὰ εἶνε τοιαῦται καὶ μετὰ πᾶσαν κίνησιν τῆς μιᾶς τούτων.

Ἔστω ὅτι δύο καθ' ὑπόστασιν σημειοσειραὶ k καὶ k_1 εἶνε προβολικαί, ἀλλ' ὄχι καὶ προοπτικαί, καὶ ὅτι εἰς τὸ A σημεῖον τῆς πρώτης ἀντιστοιχεῖ τὸ A_1 τῆς δευτέρας. Ἐὰν ἡ k_1 κινηθῇ μέχρις ὅτου λάβῃ θέσιν διάφορον μὲν τῆς k, ἀλλ' οὕτως ὥστε τὸ A_1 νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ A, τότε αἱ k καὶ k_1 θὰ ἔχουν προοπτικὴν θέσιν.

Ἀνάλογα δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν καὶ διὰ δύο καθ' ὑπόστασιν ἐπιπέδους δέσμας ἀκτίνων. Ἑπομένως,

«*ἐν ἐπιπέδῳ δύνανται δύο καθ' ὑπόστασιν προβολικοὶ σχηματισμοὶ πρώτης βαθμῖδος νὰ λάβουν θέσιν προοπτικὴν πρὸς ἀλλήλους διὰ καταλλήλου κινήσεως ἑνὸς ἐξ αὐτῶν*».

Παρατηρητέον, ὅτι κατὰ τὴν ἐν λόγῳ κίνησιν δὲν μεταβάλλονται αἱ μετρικαὶ σχέσεις, αἱ ἀρχικῶς ὑπάρχουσαι μεταξὺ τῶν τμημάτων καὶ τῶν γωνιῶν μεταξὺ τῶν δύο προβολικῶν σχηματισμῶν πρώτης βαθμῖδος, ἐφαρμόζεται δ' ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης καὶ ἐν ᾗ περιπτώσει ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἄλληλα τὰ κατ' ἐξοχὴν σημεῖα τῶν σημειοσειρῶν k καὶ k_1. Ἐὰν λοιπὸν ἐν τῇ περιπτώσει αὐτῇ κινηθῇ ἡ k_1 οὕτως, ὥστε νὰ γίνῃ παράλληλος τῇ k, τότε αἱ k καὶ k_1 θὰ εἶνε προοπτικαὶ καὶ παράλληλοι τομαὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ἐπιπέδου δέσμης ἀκτίνων. Ἐκ τούτων παρατηροῦμεν ὅτι ὁ λόγος τῶν



μηκῶν δύο πεπερασμένων καὶ ἀντιστοίχων τμημάτων αὐτῶν θὰ εἶνε σταθερός. Ἤτοι, ἂν O εἶνε τὸ κέντρον τῆς δέσμης (τὸ ὁποῖον εἶνε τομὴ τῶν εὐθειῶν AA_1 καὶ BA_2), θὰ εἶνε

$$\frac{(AB)}{(A_1A_2)} = \frac{(OB)}{(A_2O)} = \frac{(B\Gamma)}{(A_2A_3)} = \frac{(O\Gamma)}{(A_3O)} = \frac{(\Gamma\Delta)}{(A_3A_4)}\,.$$

Ἐὰν τὸ σημεῖον O εἶνε κατ' ἐξοχὴν τοιοῦτον, θὰ ἔχωμεν $(AB)=(A_1A_2)$ κλπ.

Αἱ μὲν σημειοσειραὶ k καὶ k_1, αἱ ἔχουσαι τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα λέγονται *ὅμοιαι*, ἡ δὲ προβολικότης ἡ μεταξὺ ὁμοίων σημειοσειρῶν ὑπάρχουσα λέγεται καὶ ἁπλῶς *ὁμοιότης*. Ἀντιστρόφως· ἐὰν δύο καθ' ὑπόστασιν σημειοσειραὶ εἶνε οὕτω συσχετιμέναι μεταξύ των, ὥστε ἕκαστον πεπερασμένον τμῆμα τῆς μιᾶς νὰ ἀντιστοιχῇ εἰς ἓν τοιοῦτον τῆς ἄλλης, τὰ δὲ μήκη τούτων ἔχουν δοθέντα λόγον, ἤτοι ἂν αἱ δύο σημειοσειραὶ εἶνε ὅμοιαι, τότε τὰ κατ' ἐκδοχὴν σημεῖα αὐτῶν θὰ ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἄλληλα, καὶ ἐὰν ἡ μία τούτων λάβῃ θέσιν παράλληλον πρὸς τὴν ἄλλην, αἱ δύο σημειοσειραὶ θὰ εἶνε προοπτικαί.

Ἐπομένως ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«*Δύο καθ' ὑπόστασιν προβολικαὶ σημειοσειραί, εἰς τὰς ὁποίας ἀντιστοιχοῦν τὰ κατ' ἐκδοχὴν σημεῖα αὐτῶν, εἶνε ὅμοιαι καὶ ἀντιστρόφως· ἐὰν δύο σημειοσειραὶ εἶνε ὅμοιαι, εἶνε προβολικαί, καὶ τὰ κατ' ἐκδοχὴν στοιχεῖα αὐτῶν εἶνε ἀντίστοιχα ἀλλήλων*».

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι, ἡ ὁμοιότης μεταξὺ δύο (καθ' ὑπόστασιν) σημειοσειρῶν ὁρίζεται, ἐὰν δοθοῦν δύο τυχόντα ζεύγη ὁμολόγων σημείων αὐτῶν.

Δύο κατ' ἐκδοχὴν προβολικαὶ ἐπίπεδοι δέσμαι (κείμεναι ἐπὶ ἐπιπέδων καθ' ὑπόστασιν) λέγονται ὅμοιαι, ἐὰν αἱ προβολικαὶ σημειοσειραὶ καθ' ἃς τέμνονται εἶνε ὅμοιαι.

Δύο κατ' ἐκδοχὴν ἐπίπεδοι δέσμαι ἀκτίνων ἑνὸς καθ' ὑπόστασιν ἐπιπέδου εἶνε ὅμοιαι, ἐὰν ἡ κατ' ἐκδοχὴν ἀκτὶς αὐτῶν ἀντιστοιχῇ πρὸς ἑαυτήν, ἤτοι ἐὰν εἶνε προοπτικαί· καὶ τοὐναντίον.

Ἰδιαιτέρα περίπτωσις τῆς ὁμοιότητος μεταξὺ δύο σημειοσειρῶν (ἢ κατ' ἐκδοχὴν δεσμῶν) εἶνε *ἡ τῆς ἰσότητος*, ἥτις προκύπτει, ἐὰν τὰ ἀντίστοιχα πεπερασμένα τμήματα αὐτῶν ἔχουν ἴσα μήκη (ἢ αἱ ἀποστάσεις τῶν ζευγῶν παραλλήλων εὐθειῶν εἶνε ἴσαι).

Ἐὰν ἔχωμεν δύο ἴσας σημειοσειρὰς k καὶ k′, δυνάμεθα νὰ κινήσωμεν τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν, ὥστε τιθεμένη ἐπὶ τῆς ἄλλης, νὰ συμπίπτουν πάντα τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν σημεῖα. Πράγματι, ἐὰν τὴν k′ κινήσωμεν οὕτως, ὥστε δύο καθ' ὑπόστασιν σημεῖα αὐτῆς, π. χ. τὰ A′ καὶ B′, νὰ λάβουν τὰς θέσεις τῶν ἀντιστοίχων αὐτῶν A καὶ B, θὰ ἔχωμεν ἐπὶ τῆς k τὴν προβολικότητα, ἥτις θὰ εἶνε ταὐτότης, διότι τὰ σημεῖα A, B καὶ τὸ κατ' ἐκδοχὴν σημεῖον θὰ ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἄλληλα, ὡς διπλᾶ σημεῖα. Ἀνάλογα ἰσχύουν καὶ διὰ ἴσας κατ' ἐκδοχὴν ἐπιπέδους δέσμας.

Δύο καθ' ὑπόστασιν ἐπίπεδοι δέσμαι λέγονται *ἴσαι*, ἐὰν συσχετίζωνται οὕτως, ὥστε εἰς μίαν γωνίαν τῆς μιᾶς νὰ ἀντιστοιχῇ μία ἴση τῆς ἄλλης. Τότε δύνανται νὰ συμπέσουν αἱ ἀντίστοιχοι ἀκτῖνες αὐτῶν διὰ τῆς κινήσεως, καθ' ἣν δύο ἀντίστοιχοι ἴσαι γωνίαι αὐτῶν συμπίπτουν. Διὰ τοῦτο, δύο ἴσαι ἐπίπεδοι δέσμαι εἶνε προβολικαί.

«Δύο καθ' ὑπόστασιν προβολικαὶ ἐπίπεδοι δέσμαι εἶνε ἴσαι, ἐὰν εἰς δύο ζεύγη καθέτων ἀκτίνων αβ καὶ γδ τῆς μιᾶς ἀντιστοιχοῦν δύο ζεύγη καθέτων ἀκτίνων α'β' καὶ γ'δ' τῆς ἄλλης».

Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως ταύτης, φέρομεν διὰ κινήσεως τὰς δύο δέσμας εἰς προοπτικὴν θέσιν, ἐνῶ $\alpha \equiv \alpha'$ ἔστω ἡ πρὸς ἑαυτὴν ἀντιστοιχοῦσα ἀκτίς. Ἔστωσαν O καὶ O' τὰ διάφορα ἀλλήλων κέντρα τῶν δεσμῶν, καὶ ὑποθέτομεν ὅτι ὁ ἄξων τῆς προοπτικότητος k εἶνε καθ' ὑπόστασιν εὐθεῖα. Ὁ ἄξων οὗτος θὰ εἶνε παράλληλος πρὸς τὰς ἀκτῖνας β καὶ β', δηλαδὴ κάθετος ἐπὶ τὴν $\alpha \equiv \alpha'$. Ἐὰν ἓν τμῆμα ἐπ' αὐτοῦ προβληθῇ ἀπὸ τοῦ O καὶ τοῦ O' διὰ μιᾶς ὀρθῆς γωνίας, θὰ ἀπέχῃ ἡ k ἀπὸ τῆς β καὶ β' ἴσας ἀποστάσεις, ἐπειδὴ ἡ διάμετρος MN (ἐνῶ M εἶνε ἡ τομὴ τῶν δ, δ' καὶ k, καὶ N ἡ τομὴ τῶν γ, γ' καὶ k) τῆς περιφερείας MNOO' θὰ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν OO' καὶ ἑπομένως διχοτομεῖ ταύτην. Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι (ἐν τῇ ἐν λόγῳ περιπτώσει) εἰς ἑκάστην γωνίαν ὁριζομένην ὑπὸ δύο ἀκτίνων τῆς O, θὰ ἀντιστοιχῇ ἴση γωνία, ὁριζομένη ὑπὸ τῶν δύο ἀντιστοίχων πρὸς ταύτας ἀκτίνων τῆς O'.

Ἐὰν ὁ ἄξων τῆς προοπτικότητος k εἶνε ἡ κατ' ἐκδοχὴν εὐθεῖα, δύο πρὸς ἀλλήλας ἀντιστοιχοῦσαι γωνίαι θὰ ἔχουν πλευρὰς παραλλήλους· ἄρα θὰ εἶνε ἴσαι.

Δύο κατ' ἐκδοχὴν σημειοσειραί, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν συσχετισμένας πρὸς ἀλλήλας, ὡς τομὰς δύο καθ' ὑπόστασιν ἴσων ἐπιπέδων δεσμῶν, θὰ λέγωνται ἐπίσης *ἴσαι*. Αὗται θὰ προβάλλωνται ἀπὸ δύο οἱωνδήποτε καθ' ὑπόστασιν σημείων διὰ ἴσων ἐπιπέδων δεσμῶν.

Δύο κατ' ἐκδοχὴν ἴσαι σημειοσειραὶ δύνανται νὰ τεθοῦν ἐπ' ἀλλήλων, ὥστε νὰ συμπίπτουν τὰ ὁμόλογα σημεῖα αὐτῶν, ἐὰν διὰ μιᾶς κινήσεως φέρωμεν ἓν καθ' ὑπόστασιν ἐπίπεδον, περιέχον τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν, ἐπὶ ἑνὸς καθ' ὑπόστασιν ἐπιπέδου, περιέχοντος τὴν ἄλλην.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον δυνάμεθα νὰ ἐπεκτείνωμεν τὰς ἀνωτέρω προτάσεις καὶ δι' ἴσας καθ' ὑπόστασιν ἀξονικὰς δέσμας καὶ διὰ ἐπιπέδους δέσμας τοῦ κατ' ἐκδοχὴν ἐπιπέδου.

Μία *ὁμοιότης*, κειμένη ἐπί τινος καθ' ὑπόστασιν εὐθείας, λέγεται *κατ' ἀναλογίαν ὁμοιότης ἢ κατ' ἀντιστροφήν*, ἐὰν εἶνε ὁμόρροπος ἢ ἀντίρροπος. Μία ὁμοιότης ἔχει πάντοτε τὸ κατ' ἐκδοχὴν αὐτῆς σημεῖον διπλοῦν, καὶ ἑπομένως εἶνε ὑπερβολικὴ ἢ παραβολική. Ἐν τῇ τελευταίᾳ περιπτώσει ἀσφαλῶς εἶνε αὕτη κατ' ἀναλογίαν ὁμοιότης. Θὰ δείξωμεν ὅτι τότε, αὕτη εἶνε μία ἰσότης ἢ *κατ' ἀναλογίαν ἰσότης*. Πρὸς τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι διὰ μιᾶς ὀλισθήσεως τῆς εὐθείας ἐφ' ἑαυτῆς, ἥτις φέρει ἓν σημεῖον ταύτης A εἰς δοθὲν A', προκύπτει πράγ-

CF = O'F

ματι μία κατ' ἀναλογίαν ἰσότης, δηλαδὴ μία προβολικότης, ἥτις δὲν ἔχει ἄλλο διπλοῦν σημεῖον ἐκτὸς τοῦ κατ' ἐξοχήν, διότι οὐδὲν ἄλλο σημεῖον διατηρεῖται σταθερόν. Ἀφ' ἑτέρου, ὑπάρχει μία μόνη παραβολικὴ προβολικότης ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥτις ἔχει τὸ κατ' ἐξοχὴν σημεῖον διπλοῦν καὶ τὰ Α, Α′ ἀντίστοιχα τοιαῦτα. Ἐπομένως, ἡ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ὑποτιθεμένη παραβολικὴ ὁμοιότης συμπίπτει μὲ τὴν κατ' ἀναλογίαν ἰσότητα, ἥτις παράγεται διὰ τῆς ἐν λόγῳ ὀλισθήσεως. Οὕτω ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«*Μία κατ' ἀναλογίαν ἰσότης ἐπ' εὐθείας καθ' ὑπόστασιν δύναται νὰ ὁρισθῇ ὡς μία παραβολικὴ προβολικότης, τῆς ὁποίας τὸ διπλοῦν σημεῖον κεῖται εἰς τὸ ἄπειρον*».

Εἰς μίαν κατ' ἀντιστροφὴν ἰσότητα ἐπ' εὐθείας ὑπάρχουν δύο διπλᾶ σημεῖα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ μὲν ἓν εἶνε τὸ κατ' ἐξοχὴν σημεῖον, τὸ δὲ ἄλλο ἓν καθ' ὑπόστασιν σημεῖον Ο. Δύο ὁμόλογα σημεῖα θὰ ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ τὸ Ο, καὶ ἐπειδὴ ἡ σχέσις εἶνε ἀντίρροπος, θὰ κεῖνται ταῦτα ἑκατέρωθεν τοῦ Ο. Ἐπομένως ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«*Μία κατ' ἀντιστροφὴν ἰσότης ἐπ' εὐθείας καθ' ὑπόστασιν συμπίπτει μὲ μίαν συμμετρίαν ἐν σχέσει πρὸς τὸ καθ' ὑπόστασιν διπλοῦν σημεῖον αὐτῆς*».

Ἐνῷ ἡ κατ' ἀναλογίαν ἰσότης ἐπ' εὐθείας παράγεται διὰ τῆς κινήσεως τῆς εὐθείας ἐφ' ἑαυτῆς, διὰ τῆς ὁποίας δύο ἀντίστοιχα σημεῖα τίθενται ἐπ' ἀλλήλων, τοὐναντίον, ἡ κατ'ἀντιστοφὴν ἰσότης παράγεται διὰ μιᾶς ἐπιθέσεως τοῦ ἑνὸς μέρους αὐτῆς ἐπὶ τοῦ ἄλλου διὰ στροφῆς αὐτοῦ περὶ τὸ καθ' ὑπόστασιν διπλοῦν σημεῖον ταύτης.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν μίαν κατ' ἀναλογίαν (ὁμόρροπον) καὶ μίαν κατ' ἀντιστροφὴν (ἀντίρροπον) ἰσότητητα, προκειμένου περὶ σημειοσειρῶν κατ' ἐξοχήν, κειμένων ἐπ' ἀλλήλων, καθὼς καὶ τὴν κατ' ἀναλογίαν καὶ κατ' ἀντιστροφὴν ἰσότητα δύο καθ' ὑπόστασιν ἐπιπέδων δεσμῶν, κειμένων ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου.

Ἔστωσαν δύο ἐπίπεδοι ἴσαι δέσμαι Ο καὶ Ο′ (καθ' ὑπόστασιν), κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, καὶ (α,β), (α′,β′) δύο ἀντίστοιχοι ἴσαι γωνίαι αὐτῶν, αἵτινες δὲν εἶνε ὀρθαί, καὶ διὰ τῶν ὁποίων ὁρίζεται αὐτὴ ἡ ἰσότης τῶν δεσμῶν. Κινοῦμεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τὴν δέσμην Ο′, καὶ θέτομεν αὐτὴν ἐπὶ τῆς Ο εἰς τρόπον, ὥστε ἡ α′ νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν α. Τὴν τοιαύτην κίνησιν ὁρίζομεν, ἂν ἀποκλείσωμεν τὴν στροφὴν κατὰ δύο ὀρθὰς γωνίας. Ἡ κίνησις αὕτη φέρει καὶ τὴν ἀκτῖνα β εἰς θέσιν συμπίπτουσαν μὲ τὴν β′, ἢ εἰς ἄλλην β″, ἥτις εἶνε συμμετρικὴ πρὸς τὴν β ἐν σχέσει πρὸς τὴν α. Ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν θεωρήσωμεν π. χ. τὴν ἀκτῖνα γ, κάθετον ἐπὶ τὴν α, ἡ τριὰς τῶν διευθύνσεων αβγ ἔχει τὴν αὐτὴν φοράν, καθὼς καὶ ἡ τριὰς τῶν α′β′γ′, ἥτις σχηματίζεται ἐκ τῶν ὁμολόγων ἀκτίνων τῆς δέσμης O′. Ἤτοι ἡ ἰσότης μεταξὺ τῶν O καὶ O′ εἶνε κατ' ἀναλογίαν. Τοὐναντίον, ἐν τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει αἱ ἐν λόγῳ τριάδες ἔχουν ἀντίθετον φοράν, δηλαδὴ ἡ ἰσότης μεταξὺ τῶν O καὶ O′ εἶνε κατ' ἀντιστροφήν. Παρατηροῦμεν ἀκόμη, ὅτι ἐν μὲν τῇ πρώτῃ πρώτῃ περιπτώσει ἡ ἐν λόγῳ ἰσότης παράγεται διὰ τῆς τοιαύτης κινήσεως ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, διὰ τῆς ὁποίας ἡ O′ θὰ τεθῇ ἐπὶ τῆς O, ὥστε ἡ ἀκτὶς α′ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς α· ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ μετὰ τὴν κίνησιν ταύτην πρέπει νὰ γίνῃ μία στροφὴ τοῦ ἐπιπέδου περὶ τὴν ἀκτῖνα α μέχρις ὅτου πέσῃ τοῦτο ἐφ' ἑαυτοῦ. Ἐκ τούτων συνάγομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«Δύο (καθ' ὑπόστασιν) ἴσαι δέσμαι ἑνὸς ἐπιπέδου εἶνε κατ' ἀναλογίαν ἢ κατ' ἀντιστροφὴν ἴσαι, ἐὰν οἱ ὁμόλογοι ἀκτῖνες αὐτῶν συμπίπτουν διὰ μιᾶς κινήσεως τοῦ ἐπιπέδου ἐφ' ἑαυτοῦ, ἢ διὰ μιᾶς τοιαύτης κινήσεως μετὰ μιᾶς στροφῆς τούτου μέχρις ὅτου πέσῃ τοῦτο ἐφ' ἑαυτοῦ».

Παρατηρητέον ὅτι, ἂν δύο ἴσαι ἐπίπεδοι δέσμαι ἑνὸς ἐπιπέδου εἶνε προοπτικαί, ἢ συσχετίζονται πρὸς ἀλλήλας διὰ τοῦ παραλληλισμοῦ τῶν στοιχείων αὐτῶν, ὅτε ἡ ἰσότης εἶνε κατ' ἀναλογίαν, ἢ εἶνε αὗται προβολαὶ τῆς εὐθείας, ἥτις εἶνε κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας ἡ ὁποία συνδέει τὰ κέντρα τῶν δεσμῶν, καὶ τότε ἡ ἰσότης εἶνε κατ' ἀντιστροφήν.

Ὡς μερικὴ περίπτωσις τῆς ἰσότητος μεταξὺ δύο δεσμῶν ἑνὸς ἐπιπέδου προκύπτει ἡ ἰσότης μεταξὺ δύο δεσμῶν κειμένων ἐπ' ἀλλήλων, ἢ ἐπὶ μιᾶς δέσμης. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δὲν ὑπάρχει ἀνάγκη νὰ θεωρήσωμεν τὴν κατ' ἐκδοχὴν εὐθεῖαν, διὰ νὰ διακρίνωμεν τὴν κατ' ἀναλογίαν καὶ τὴν κατ' ἀντιστροφὴν ἰσότητα.

Μία κατ' ἀναλογίαν ἰσότης εἰς μίαν (καθ' ὑπόστασιν) ἐπίπεδον δέσμην συμπίπτει μὲ μίαν στροφὴν τῆς δέσμης ἐφ' ἑαυτῆς κατὰ ὡρισμένην γωνίαν. Πράγματι, αὕτη δύναται νὰ παραχθῇ διὰ τῆς στροφῆς ἐκείνης, διὰ τῆς ὁποίας μία ἀκτὶς συμπίπτει μὲ τὴν ἀντίστοιχον αὐτῆς. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι, μία τοιαύτη ἰσότης εἶνε πάντοτε *ἐλλειπτική*.

Εἰς μίαν κατ' ἀντιστροφὴν ἰσότητα, ἥτις εἶνε *ὑπερβολική*, πρέπει αἱ γωνίαι, αἵτινες σχηματίζονται ὑπὸ ὁμολόγων ἀκτίνων μὲ μίαν διπλῆν ἀκτῖνα, νὰ εἶνε ἴσαι καὶ ἑκατέρωθεν αὐτῆς (διότι ἡ σχέσις εἶνε *ἀντίρροπος*). Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι,

«μία κατ' ἀντιστροφὴν ἰσότης εἰς μίαν ἐπίπεδον καθ' ὑπόστασιν δέσμην δύναται νὰ προκύψῃ διὰ μιᾶς στροφῆς τοῦ ἐπιπέδου τῆς δέσμης περὶ ἑκάστην διπλῆν ἀκτῖνα, μέχρις ὅτου ἐφαρμόσῃ ἐφ'

ἑαυτοῦ ἢ συμπίπτει μὲ μίαν συμμετρίαν ὡς πρὸς ἑκάστην διπλῆν ἀκτῖνα».

Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι,

«ἡ κατ' ἀντιστροφὴν ἰσότης ἔχει δύο διπλᾶς ἀκτῖνας, καθέτους ἐπ' ἀλλήλας, τὰς διχοτομούσας τῶν γωνιῶν, τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ τῶν ἀντιστοίχων ἀκτίνων».

Αἱ ἀνωτέρω προτάσεις δύνανται νὰ ἐπεκταθοῦν καὶ ἐπὶ τῆς κατ' ἐξοχὴν εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου τῆς θεωρουμένης δέσμης. Οὕτω ἔχομεν τὰς ἑξῆς προτάσεις.

«Ἐπ' εὐθείας κατ' ἐξοχὴν ἑκάστη κατ' ἀναλογίαν ἰσότης εἶνε ἐλλειπτική· ἑκάστη κατ' ἀντιστροφὴν ἰσότης ἐπ' εὐθείας κατ' ἐξοχὴν ἔχει δύο διπλᾶ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς καθέτους ἐπ' ἀλλήλας διευθύνσεις».

«Δύο σημεῖα (λαμβανόμενα καθ' ὡρισμένην σειρὰν) μιᾶς κατ' ἐξοχὴν εὐθείας ἀντιστοιχοῦν εἰς δύο ἰσότητας ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μὲν μία εἶνε κατ' ἀναλογίαν, ἡ δ' ἄλλη κατ' ἀντιστροφήν».

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV.

Περὶ ἐνελίξεως μεταξὺ σχηματισμῶν πρώτης βαθμῖδος.

§ 47. Ἐνέλιξις.

Ἐὰν δοθῇ μία προβολικότης, ἔστω ἡ ω, ἐπὶ ἑνὸς σχηματισμοῦ τῆς πρώτης βαθμῖδος, δὲν συμβαίνει ἐν γένει νὰ εἶνε ἰσοδύναμος μὲ τὴν ἀντίστροφον αὐτῆς, δηλαδὴ δὲν εἶνε ἐν γένει $\omega \equiv \omega^{-1}$. Πράγματι, ἐὰν τὰ στοιχεῖα Α καὶ Α′ εἶνε ἀντίστοιχα εἰς τὴν ω, δύναται νὰ ὁρισθῇ ἡ ω διὰ τῆς ἀντιστοιχίας τῶν τριάδων στοιχείων Α, Α′, Β καὶ Α′, Α″, Β′, ἐνῷ τὰ Α″, Β, Β′ εἶνε ἄλλα ὡρισμένα στοιχεῖα τοῦ σχηματισμοῦ, καὶ τότε παρατηροῦμεν ὅτι, ἡ $\omega \equiv \begin{pmatrix} A\ A'\ B \\ A'\ A''\ B' \end{pmatrix}$ δὲν εἶνε ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $\omega^{-1} \equiv \begin{pmatrix} A'\ A''\ B' \\ A\ A'\ B \end{pmatrix}$ ἐὰν τὸ Α″ εἶνε διάφορον τοῦ Α.

Ἐὰν ἀντὶ νὰ κάμωμεν λόγον περὶ ἑνὸς ἑνιαίου σχηματισμοῦ, θεωροῦμεν δύο σχηματισμοὺς k καὶ k′ τῆς πρώτης βαθμῖδος, κειμένους ἐπ' ἀλλήλων, οἵτινες σχετίζονται διὰ μιᾶς προβολικότητος ω, δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι, ἓν στοιχεῖον Α τοῦ σχηματισμοῦ, τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν κείμενον ἐπὶ τοῦ k καὶ k′, δίδει ἓν ἀντίστοιχον αὐτοῦ στοιχεῖον A′ τοῦ k′ (τὸ ὁμόλογον αὐτοῦ ἐν τῇ ω). Τοὐναντίον, ἂν θεωρήσωμεν τοῦτο κείμενον ἐπὶ τοῦ k′, δίδει τοῦτο ἐν γένει ἓν ἄλλο ἀντίστοιχον αὐτοῦ στοιχεῖον A_1 (τὸ ὁμόλογον αὐτοῦ ἐν τῇ ω^{-1}).

Εἰς ἕνα γεωμετρικὸν σχηματισμὸν πρώτης βαθμῖδος καλοῦμεν *ἐνελικτικὴν προβολικότητα ἢ ἁπλῶς ἐνέλιξιν* μίαν προβολικότητα, ἥτις δὲν εἶνε ταυτότης καὶ συμπίπτει μὲ τὴν ἀντίστροφον αὐτῆς.

Ἐὰν ἀντὶ νὰ κάμωμεν λόγον περὶ ἑνὸς ἑνιαίου σχηματισμοῦ, ὁμιλοῦμεν περὶ ἐνελίξεως δύο σχηματισμῶν k καὶ k′ τῆς πρώτης βαθμῖδος, κειμένων ἐπ᾽ ἀλλήλων, δὲν εἶνε ἀνάγκη νὰ διακρίνωμεν τὸν ἕνα σχηματισμὸν ἀπὸ τὸν ἄλλον, διότι ἕκαστον στοιχεῖον, εἴτε θεωρεῖται κείμενον ἐπὶ τοῦ k εἴτε ἐπὶ τοῦ k′, δίδει ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὸ ἀντίστοιχον αὐτοῦ στοιχεῖον.

Ἀντὶ νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι μία προβολικότης ω εἶνε ἐνέλιξις διὰ τῆς σχέσεως

$$\omega \equiv \omega^{-1}$$

δυνάμεθα νὰ σημειώνωμεν ταύτην διὰ τῆς ἰσοδυνάμου πρὸς ταύτην σχέσεως

$$\omega^2 \equiv 1$$

ἥτις ἐκφράζει, ὅτι ἡ ἐπανάληψις τῆς προβολικότητος ω δίδει τὴν ταυτότητα. Ἤτοι, ἐὰν ἐν μιᾷ ἐνελικτικῇ προβολικότητι (θεωρουμένῃ ἐπὶ σχηματισμοῦ τῆς πρώτης βαθμῖδος) εἰς ἓν στοιχεῖον A ἀντιστοιχῇ ἓν ἄλλο A′, θὰ ἀντιστοιχῇ ἐπίσης καὶ εἰς τὸ στοιχεῖον A′ τὸ A, δηλαδὴ τὰ δύο στοιχεῖα A καὶ A′ ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἄλληλα κατὰ διπλοῦν τρόπον. Ἕνεκα τῆς κατὰ διπλοῦν τρόπον ἀντιστοιχίας ταύτης εἶνε ἀδύνατον νὰ διακρίνωμεν τὸ πρῶτον στοιχεῖον ἀπὸ τοῦ δευτέρου εἰς τὸ ζεῦγος AA′ (τὸ ὁποῖον συμβαίνει πάντοτε ὅταν ἡ ω δὲν εἶνε ἐνελικτική). Διὰ τοῦτο μία ἐνέλιξις δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μία σειρὰ ἐξ ἀπείρων τὸ πλῆθος ζευγῶν στοιχείων (ἀναλόγων πρὸς τὸ AA′) τοιούτων, *ὥστε ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ σχηματισμοῦ ἀνήκει εἰς ἓν ζεῦγος*. Ἐπομένως ἔχομεν δύο διαφόρους σημασίας διὰ τὴν λέξιν ἐνέλιξιν· ἤτοι ἡ ἐνέλιξις δύναται νὰ θεωρηθῇ ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν ὡς πρᾶξις (δηλαδὴ ὡς ἐνελικτικὴ προβολικότης), καὶ ἀφ᾽ ἑτέρου ὡς μία σειρὰ ἐκ ζευγῶν σημείων (τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἄλληλα ἐν ἐνελικτικῇ προβολικότητι).

Ἓν ζεῦγος στοιχείων, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἄλληλα κατὰ διπλοῦν τρόπον ἐν ἐνελίξει, καλεῖται *ζεῦγος συζυγῶν στοιχείων τῆς ἐνελίξεως*.

Εἰς ἑκάστην μὴ ἐλλειπτικὴν προβολικότητα, κειμένην ἐπὶ σχηματισμοῦ τῆς πρώτης βαθμῖδος, ὑπάρχουν ζεύγη ἐκ συμπιπτόντων ὁμολόγων στοιχείων, ἅτινα ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἄλληλα κατὰ διπλοῦν τρόπον, εἶνε δὲ ταῦτα τὰ σχηματιζόμενα ἐκ τῶν διπλῶν στοιχείων.

Προκειμένου περὶ τῆς ἐνελίξεως ἔχομεν τὴν ἑξῆς θεμελιώδη πρότασιν.

«Ἐὰν εἰς δοθεῖσαν προβολικότητα ω ἐν σχηματισμῷ πρώτης βαθμῖδος δύο διάφορα στοιχεῖα ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἄλληλα κατὰ διπλοῦν τρόπον, θὰ συμβαίνῃ τοῦτο καὶ διὰ πᾶν ἄλλο ζεῦγος ὁμολόγων στοιχείων, ἤτοι ἡ προβολικότης εἶνε ἐνέλιξις». m)

Ἔστωσαν Α καὶ Α′ δύο διάφορα στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα ἐν τῇ ω ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἄλληλα κατὰ διπλοῦν τρόπον καὶ ΒΒ′ ἓν οἱονδήποτε ἄλλο ζεῦγος ὁμολόγων στοιχείων αὐτῆς. Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν ω ὡς δεδομένην διὰ τῆς ἀντιστοιχίας τῶν τριάδων Α,Α′,Β, καὶ Α′,Α,Β′, ἤ

ὅτι θὰ ἔχωμεν $\omega \equiv \begin{pmatrix} AA'B \\ A'AB' \end{pmatrix}$. Ἀλλ᾽ εἶνε ὡς εὕρομεν (§ 38) ΑΒΓΔ ⊼ ΒΑΔΓ Α′Α′ΒΒ′ ⊼ Α′Α′ΑΒ

ΑΑ′ΒΒ′ $AA'BB' \barwedge A'AB'B$,

ἡ δὲ σχέσις αὕτη σημαίνει ὅτι, ἐν τῇ προβολικότητι $\omega \equiv \begin{pmatrix} AA'B \\ A'AB' \end{pmatrix}$

εἰς τὸ σημεῖον Β′ ἀντιστοιχεῖ τὸ Β. Ἐπομένως ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἄλληλα τὰ Β καὶ Β′ κατὰ διπλοῦν τρόπον. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ ζεῦγος ΒΒ′ εἶνε τυχὸν ζεῦγος ὁμολόγων στοιχείων τῆς ω, ἕπεται ὅτι ἡ ω εἶνε ἐνέλιξις.

Θὰ ἀποδείξωμεν ἀκόμη τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«Ἐν σχηματισμῷ τινι k πρώτης βαθμῖδος ὑπάρχει μία ἐνέλιξις, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκουν δύο δοθέντα ζεύγη συζυγῶν στοιχείων (ἄνευ κοινῶν στοιχείων), ἐκ τῶν ὁποίων τοὐλάχιστον ἓν ἀποτελεῖται ἐκ διαφόρων στοιχείων». R

Πράγματι, ἂν ΑΑ′ καὶ ΒΒ′ εἶνε τὰ δοθέντα ζεύγη καὶ δὲν εἶνε $A \equiv A'$, ἡ ἐνέλιξις, ἐν ᾗ τὰ Α,Α′ καὶ Β,Β′ εἶνε συζυγῆ στοιχεῖα, εἶνε ἡ

τελείως ὡρισμένη προβολικότης $\begin{pmatrix} AA'B \\ A'AB' \end{pmatrix}$, ἐν ᾗ κατ᾽ ἀνάγκην εἰς τὸ

στοιχεῖον Β′ ἀντιστοιχεῖ τὸ Β.

Ἡ πρότασις αὕτη δύναται νὰ ἐπεκταθῇ εὐκόλως καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν καθ᾽ ἣν καὶ τὰ δύο ζεύγη ἀποτελοῦνται ἐκ συμπιπτόντων (διαφόρων ἀπ᾽ ἀλλήλων) στοιχείων.

Προκειμένου περὶ περισσοτέρων ζευγῶν στοιχείων ἑνὸς σχηματισμοῦ πρώτης βαθμῖδος λέγομεν ὅτι εἶνε *ἐν ἐνελίξει*, ἐὰν ἀνήκουν εἰς μίαν ἐνέλιξιν τοῦ σχηματισμοῦ. Ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται ὅτι, δύο ζεύγη ἀλλ᾽ ὄχι τρία ζεύγη, εἶνε πάντοτε ἐν ἐνελίξει.

Ἔστω ὅτι δίδεται ἐν σχηματισμῷ πρώτης βαθμῖδος k μία ἐνέλιξις ω, ἐν ᾗ ὑπάρχουν τὰ ἐκ διαφόρων στοιχείων ἀποτελούμενα ζεύγη AA′ καὶ BB′ συζυγῶν στοιχείων. Εἰς τὴν ἐνέλιξιν ταύτην ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ τμῆμα ABA′ τοῦ σχηματισμοῦ τὸ τμῆμα A′B′A.

1) Ὑποθέτομεν πρῶτον ὅτι τὰ στοιχεῖα B καὶ B′ χωρίζουν τὰ A καὶ A′. Τότε καὶ τὰ δύο τμήματα ABA′ καὶ A′B′A εἶνε συμπληρωματικὰ ἀλλήλων, καὶ διὰ τοῦτο εἶνε ὁμόρροπα, ἡ δὲ ἐνελικτικὴ προβολικότης εἶνε εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὁμόρροπος.

Πᾶν ἄλλο στοιχεῖον Γ τοῦ τμήματος ABA′ ἔχει τὸ συζυγὲς αὐτοῦ στοιχεῖον Γ′ εἰς τὸ συμπληρωματικὸν τμῆμα, καὶ ἑπομένως τὰ Γ καὶ Γ′ δὲν δύνανται νὰ συμπίπτουν, καὶ πρέπει νὰ χωρίζουν τὰ A καὶ A′. Διὰ τοῦτο συμβαίνει, ὥστε εἰς τὸ τμῆμα ΓAΓ′ τοῦ k ἐν τῇ ω νὰ ἀντιστοιχῇ τὸ συμπληρωματικὸν τμῆμα Γ′A′Γ· ἄρα χωρίζονται ἐπίσης καὶ τὰ Γ καὶ Γ′ καὶ πᾶν ἄλλο ζεῦγος στοιχείων, τὰ ὁποῖα εἶνε συζυγῆ ἐν τῇ ω.

Ἑπομένως, ὅταν χωρίζωνται δύο ζεύγη συζυγῶν στοιχείων ἐν τῇ ω θὰ συμβαίνῃ τοῦτο καὶ διὰ δύο οἱαδήποτε ἄλλα ζεύγη συζυγῶν στοιχείων ἐν τῇ ω, καὶ ἡ ω εἶνε μία ὁμόρροπος ἐνέλιξις.

k A Γ B A′ Γ′ B′

Ἀντιστρόφως· ἐὰν ἡ ω εἶνε ὁμόρροπος, τὰ ἀντιστοιχοῦντα πρὸς ἄλληλα τμήματα ABA′ καὶ A′B′A εἶνε ὁμόρροπα, καὶ διὰ τοῦτο εἶνε συμπληρωματικὰ ἀλλήλων· ἄρα τὰ ζεύγη AA′ καὶ BB′ χωρίζουν ἄλληλα, ἡ δὲ ω δὲν δύναται νὰ ἔχῃ διπλοῦν στοιχεῖον.

2) Ὑποθέτομεν τοὐναντίον, ὅτι τὰ ζεύγη AA′ καὶ BB′ δὲν χωρίζουν ἄλληλα. Τότε εἰς τὸ τμῆμα ABA′ ἀντιστοιχεῖ τὸ A′B′A, τὸ ὁποῖον εἶνε τὸ αὐτὸ τμῆμα μὲ ἀντίθετον φοράν, ἑπομένως ἡ ω εἶνε ἀντίρροπος. Διὰ τοῦτο ὑπάρχουν ἐν τῇ ω δύο (διάφορα) διπλᾶ στοιχεῖα, *τὰ διπλᾶ στοιχεῖα τῆς ἐνελίξεως*. Ἕπεται λοιπὸν ὅτι

k A B B′ A′

«ἐὰν ἐν τῇ ω δὲν χωρίζουν ἄλληλα δύο ζεύγη συζυγῶν στοιχείων, δὲν θὰ χωρίζουν ἄλληλα καὶ δύο οἱαδήποτε ἄλλα ζεύγη συζυγῶν στοιχείων, καὶ ἡ ω εἶνε ὑπερβολικὴ καὶ ἀντίρροπος· διότι ἄλλως θὰ εἴχομεν τὴν περίπτωσιν 1) καὶ ἡ ω θὰ ἦτο ὁμόρροπος».

Οὕτω ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«Εἰς ἕνα σχηματισμὸν πρώτης βαθμῖδος μία ἐνέλιξις εἶνε ὁμόρροπος καὶ ἐλλειπτικὴ ἢ ἀντίρροπος καὶ ὑπερβολική, ἐὰν δύο ζεύγη στοιχείων, τὰ ὁποῖα εἶνε συζυγῆ ἐν αὐτῇ, χωρίζουν ἄλληλα ἢ μή»,

Ἐὰν λάβωμεν δύο ζεύγη, τὰ ὁποῖα χωρίζουν ἄλληλα, ἢ τοὐναντίον, δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν μίαν ἐλλειπτικὴν ἢ ὑπερβολικὴν ἐνέλιξιν, καὶ τοῦτο δεικνύει τὸ ὅτι εἶνε δυναταὶ αἱ δύο περιπτώσεις.

Δὲν ὑπάρχουν παραβολικαὶ ἐνελικτικαὶ προβολικότητες, διότι αὗται θὰ ἦσαν ὁμόρροποι, καὶ μία ὁμόρροπος ἐνέλιξις εἶνε ἐλλειπτική.

Παρατηρητέον ὅτι, ἡ φορὰ δὲν ἀρκεῖ ἐν γένει διὰ νὰ ἀποφανθῶμεν διὰ τὴν ὕπαρξιν διπλῶν σημείων ἐν μιᾷ προβολικότητει, ἐκτὸς μιᾶς περιπτώσεως (ἐν ᾗ ἡ προβολικότης εἶνε ἀντίρροπος), ἀλλὰ τοῦτο εἶνε πάντοτε ἐπαρκὲς διὰ τὴν ἐνέλιξιν.

Θὰ ἀποδείξωμεν τώρα τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«Δύο ἐνελίξεις ἐν σχηματισμῷ πρώτης βαθμῖδος, ἐκ τῶν ὁποίων μία τοὐλάχιστον εἶνε ἐλλειπτική, ἔχουν πάντοτε ἓν κοινὸν ζεῦγος».

Φανταζόμεθα ἐν πρώτοις μίαν σημειοσειρὰν καὶ θεωροῦμεν ἐπὶ τοῦ φορέως k δύο ἐνελίξεις **ω** καὶ **τ**. Τυχὸν σημεῖον Ψ τῆς εὐθείας θὰ ἔχῃ ὡς συζυγῆ ἐν σχέσει πρὸς τὴν **ω** καὶ τὴν **τ**, ἔστω τὰ X καὶ X′, καὶ τὰ δύο ταῦτα θὰ ἀντιστοιχοῦν ἐν τῇ προβολικότητι ($\boldsymbol{\tau\omega}^{-1} \equiv$) **τω** (ἐὰν μεταβάλλεται τὸ Ψ). Ἐὰν τώρα ἡ προβολικότης αὕτη ἔχῃ ἓν διπλοῦν σημεῖον P, θὰ ἔχῃ τοῦτο ἐν σχέσει πρὸς τὰς δύο ἐνελίξεις τὸ αὐτὸ συζυγὲς σημεῖον P′, καὶ μαζὺ λαμβανόμενον μετὰ τοῦ P′ ἀποτελεῖ ἀκριβῶς ἓν ζεῦγος, τὸ ὁποῖον εἶνε κοινὸν εἰς τὰς δύο ἐνελίξεις **ω** καὶ **τ**. Οὕτω ἡ ἐν λόγῳ προβολικότης ἔχει ὡς διπλοῦν σημεῖον ἐπίσης τὸ P′.

Ὑποθέτομεν τώρα, ὅτι ἡ μία τῶν δύο ἐνελίξεων εἶνε ἐλλειπτικὴ (ὁμόρροπος), ἔστω ἡ **ω**, καὶ διακρίνομεν τὰς δύο περιπτώσεις, καθ᾽ ἃς ἡ **τ** εἶνε ὑπερβολικὴ (ἀντίρροπος) ἢ ἐλλειπτικὴ (ὁμόρροπος).

α′) Ἔστω ὅτι ἡ **τ** εἶνε ὑπερβολική.

Ἐπειδὴ ἡ **ω** καὶ **τ** ἔχουν ἀντιρρόπους φοράς, ἡ προβολικότης, ἥτις σχηματίζεται διὰ τοῦ γινομένου **τω**, θὰ εἶνε ἀντίρροπος, καὶ ἑπομένως ἔχει αὕτη ἀσφαλῶς δύο διπλᾶ στοιχεῖα. Ταῦτα ἀποτελοῦν ἓν ζεῦγος, τὸ ὁποῖον εἶνε κοινὸν εἰς τὰς ἐνελίξεις **ω** καὶ **τ**.

β′) Ἔστω ὅτι ἡ **τ** εἶνε ἐλλειπτική.

k X X′ Ψ Z

Ἡ διὰ τοῦ γινομένου **τω** σχηματιζομένη προβολικότης εἶνε ὁμόρροπος ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, καὶ ὅμως δίδει αὕτη πάλιν δύο διπλᾶ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν τὸ ζεῦγος, τὸ ὁποῖον εἶνε κοινὸν εἰς τὴν **ω** καὶ τὴν **τ**.

Διὰ νὰ δείξωμεν τὴν ὕπαρξιν τῶν ἐν λόγῳ διπλῶν σημείων, ἀρκεῖ νὰ κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς k ἓν τμῆμα XZ, ἀντιστοιχοῦν ἐν τῇ **τω** εἰς ἓν τμῆμα ἐπ᾽ αὐτοῦ λαμβανόμενον X′Ψ, ἐνῶ τὸ Z ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ X′ ἐν τῇ **ω**·

§ 48. Ὑπερβολικαὶ ἐνελίξεις.

Θὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἑξῆς πρότασιν δι' ὑπερβολικὰς ἐνελίξεις.

«Ἐν σχηματισμῷ πρώτης βαθμῖδος τὰ διπλᾶ στοιχεῖα μιᾶς ὑπερβολικῆς ἐνελίξεως ω χωρίζουν ἁρμονικῶς τὰ ζεύγη τῶν συζυγῶν στοιχείων».

Ἔστωσαν Μ καὶ Ν τὰ διπλᾶ στοιχεῖα τῆς ω, καὶ Α καὶ Α' δύο διάφορα συζυγῆ στοιχεῖα τῆς ἐνελίξεως ταύτης. Ἐν τῇ ω ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σύμπλεγμα τεσσάρων στοιχείων (ΜΝΑΑ') τὸ σύμπλεγμα (ΜΝΑ'Α). Ἑπομένως εἶνε $\mathrm{MNAA'} \barwedge \mathrm{MNA'A}$,

καὶ διὰ τοῦτο τὸ σύμπλεγμα εἶνε ἁρμονικὸν (§ 38, σελὶς 80).

Τοῦτο ἐκφράζομεν ἀναλυτικῶς, λέγοντες ὅτι ἡ ἀναλλοίωτος ὑπερβολικῆς ἐνελίξεως εἶνε —1.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως ἔχομεν εὐκόλως καὶ τὴν ἑξῆς.

«Ἐὰν δίδωνται ἐν τῇ k *τὰ (διάφορα) διπλᾶ στοιχεῖα Μ καὶ Ν μιᾶς ἐνελίξεως ω, θὰ εἶνε αὕτη ὡρισμένη, καὶ κατασκευάζεται, ἐὰν εἰς ἕκαστον στοιχεῖον ὁρισθῇ τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν στοιχεῖον ὡς πρὸς τὰ Μ καὶ Ν».*

Ἐκ ταύτης καὶ τῆς προτάσεως τῆς (§ 47 σελ. 117) συνάγομεν ὅτι,

«ἐν σχηματισμῷ πρώτης βαθμῖδος k *ὑπάρχει μία ἔνελιξις, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκουν δύο ζεύγη διαφόρων ἢ συμπιπτόντων συζυγῶν στοιχείων χωρὶς κοινὰ στοιχεῖα».*

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι, ἐὰν δοθοῦν αὐθαιρέτως τρία ἢ περισσότερα ζεύγη ἐκ (διαφόρων ἢ συμπιπτόντων) στοιχείων ἐν τῷ k, δὲν θὰ ἀνήκουν ταῦτα ἐν γένει εἰς μίαν ἔνελιξιν. Ἐὰν συμβαίνῃ τοῦτο, λέγομεν ὅτι τὰ ἐν λόγῳ ζεύγη εἶνε ἐν ἐνελίξει, ἢ ὅτι ἓν τούτων μετὰ τῶν ἄλλων εἶνε ἐν ἐνελίξει. Ἐὰν ἐν τῷ k ἕκαστον ἐκ δύο ζευγῶν στοιχείων εἶνε ἐν ἐνελίξει μὲ τὰ αὐτὰ δύο ζεύγη στοιχείων, θὰ εἶνε τὰ τέσσαρα ζεύγη ἐν ἐνελίξει, κ.ο.κ.

Ὅτι ἓν ζεῦγος διαφόρων στοιχείων ΑΑ' εἶνε ἐν ἐνελίξει μὲ δύο ζεύγη, ἐκ τῶν ὁποίων ἕκαστον ἀποτελεῖται ἐκ δύο συμπιπτόντων στοιχείων ΜΜ καὶ ΝΝ, ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ὅτι, τὰ Μ καὶ Ν χωρίζουν ἁρμονικῶς τὰ στοιχεῖα Α καὶ Α'. Διὰ τοῦτο ἔχομεν ὅτι, ἐν μιᾷ ἐλλειπτικῇ ἐνελίξει ἑνὸς σχηματισμοῦ πρώτης βαθμῖδος ὑπάρχει ἓν ὡρισμένον ζεῦγος, το ὁποῖον χωρίζει ἁρμονικῶς ἓν ἄλλο δοθὲν ζεῦγος.

Ἔχοντες ὑπ' ὄψει τὰ ἐν (§ 31) περὶ τῶν ζευγῶν σημείων, τὰ ὁποῖα χωρίζονται ἁρμονικῶς ὑπὸ ἄλλου ζεύγους, δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὴν ἰδιότητα περὶ τοῦ κοινοῦ ζεύγους δύο ἐνελίξεων ὡς ἑξῆς.

«*Ἐν σχηματισμῷ πρώτης βαθμῖδος δύο ὑπερβολικαὶ ἐνελίξεις, ἔχουσαι διάφορα πάντα τὰ διπλᾶ στοιχεῖα αὐτῶν, ἔχουν ἓν κοινὸν ζεῦγος ἢ μή, ἐὰν τὰ διπλᾶ στοιχεῖα αὐτῶν δὲν χωρίζουν ἄλληλα ἢ τοὐναντίον*».

Ἐὰν αἱ δύο ἐνελίξεις ἔχουν ἓν διπλοῦν στοιχεῖον κοινόν, θὰ ἀποτελῇ τοῦτο τὸ κοινὸν ζεῦγος αὐτῶν.

Θὰ ἀποδείξωμεν τώρα τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«*Ἔστω ὅτι ἐν σχηματισμῷ πρώτης βαθμῖδος δίδεται μία (ὑπερβολικὴ) προβολικότης μὲ δύο διπλᾶ στοιχεῖα M καὶ N. Ἐὰν AA' καὶ BB' εἶνε δύο ζεύγη ὁμολόγων στοιχείων ἐν αὐτῇ, τὰ τρία ζεύγη MN, AB' καὶ $A'B$ εἶνε ἐν ἐνελίξει*».

Πράγματι, ἔχομεν ἐξ ὑποθέσεως $\mathrm{MNAB} \barwedge \mathrm{MNA'B'}$

καὶ ἐπομένως εἶνε (§ 38) $\mathrm{MNAB} \barwedge \mathrm{NMB'A'}$.

Ἀλλ' αὐτὴ σημαίνει ὅτι, ἐν τῇ προβολικότητι $\begin{pmatrix} \mathrm{M\,A\,B} \\ \mathrm{N\,B'A'} \end{pmatrix}$ τὰ στοιχεῖα

Μ καὶ Ν ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἄλληλα κατὰ διπλοῦν τρόπον, δηλαδὴ ὅτι ἡ προβολικότης αὕτη εἶνε μία ἐνέλιξις. Ἐκ ταύτης ἕπεται ὅτι, ἐὰν ἐν σχηματισμῷ πρώτης βαθμῖδος δοθῇ μία μὴ ἐνελικτικὴ (ὑπερβολικὴ) προβολικότης μὲ δύο διπλᾶ στοιχεῖα Μ καὶ Ν, καὶ εἶνε $\mathrm{A'}$, $\mathrm{A''}$ τὰ ὁμόλογα στοιχεῖα πρὸς ἓν οἱονδήποτε στοιχεῖον Α, τὸ ὁποῖον δὲν εἶνε διπλοῦν στοιχεῖον εἰς τὴν δοθεῖσαν προβολικότητα καὶ τὴν προκύπτουσαν ἐξ αὐτῆς δ' ἀντιστροφῆς, τότε τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν στοιχεῖον τοῦ Α ὡς πρὸς τὰ $\mathrm{A'}$ καὶ $\mathrm{A''}$ εἶνε συζυγὲς ἁρμονικὸν στοιχεῖον πρὸς τὸ αὐτὸ στοιχεῖον ὡς πρὸς τὰ Μ καὶ Ν. Τῷ ὄντι, ἂν ἀνωτέρω τεθῇ $\mathrm{B} \equiv \mathrm{A''}$ καὶ $\mathrm{B'} \equiv \mathrm{A}$, θὰ ἔχωμεν $\mathrm{MNAA''} \barwedge \mathrm{NMAA'}$,

καὶ ἡ σχέσις αὕτη σημαίνει ὅτι, τὰ ζεύγη ΜΝ καὶ $\mathrm{A'A''}$ ἀνήκουν εἰς μίαν ἐνέλιξιν, ἥτις ἔχει τὸ Α διπλοῦν στοιχεῖον.

Παρατηρήσεις. Διὰ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἐν σχηματισμῷ πρώτης βαθμῖδος τὴν ἐνέλιξιν, ἥτις ὁρίζεται διὰ τῶν δύο διπλῶν στοιχείων τῆς δοθείσης προβολικότητος, ἐὰν ταῦτα ληφθοῦν ὡς διπλᾶ στοιχεῖα τῆς ἐνελίξεως, καὶ τοῦτο χωρὶς νὰ γνωρίζωμεν τὰ στοιχεῖα ταῦτα.

Ἡ ἐνέλιξις αὕτη ἔχει τὴν χαρακτηριστικὴν ἰδιότητα ὅτι, δύναται νὰ ἐναλλαχθῇ μὲ τὴν ἐν λόγῳ προβολικότητα, δηλαδὴ ἐὰν τὴν ἐνέλιξιν καὶ τὴν προβολικότητα, περὶ τῶν ὁποίων πρόκειται, παραστήσωμεν διὰ τοῦ ω καὶ π, θὰ εἶνε $\pi\,\omega \equiv \omega\,\pi$.

Ὅτι ἡ σχέσις αὕτη εἶνε ἀληθής, φαίνεται ἐκ τοῦ ὅτι ἡ προβολικότης π μετασχηματίζει τὴν ἐνέλιξιν εἰς μίαν ἄλλην ἐνέλιξιν μὲ τὰ αὐτὰ διπλᾶ στοιχεῖα, δηλαδὴ μετασχηματίζεται εἰς ἑαυτήν ($\pi\,\omega\,\pi^{-1} \equiv \omega$).

Ἐπὶ πλέον παρατηροῦμεν ὅτι, ἡ ἀνωτέρω ἀποδειχθεῖσα πρότασις δύναται νὰ ἐπεκταθῇ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ προβολικότης π εἶνε ἐλλειπτική, δηλαδὴ καὶ ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν στοιχεῖον τοῦ Α ὡς πρὸς τὸ Α′ καὶ Α″ διαγράφει μίαν ἐνέλιξιν ω, ἥτις εἶνε ἐναλλακτὴ μὲ τὴν π, μόνον δ' ἡ ω εἶνε ἐνταῦθα ἐλλειπτικὴ ἐνέλιξις.

Δεχόμενοι ὅτι, μία ἐλλειπτικὴ ἐνέλιξις ἑνὸς σχηματισμοῦ πρώτης βαθμῖδος ἔχει ἓν ζεῦγος διπλῶν φανταστικῶν στοιχείων (μὴ συγχεομένης τῆς σημασίας ταύτης τῆς συζυγίας πρὸς τὴν ἀντιστοιχίαν τῶν στοιχείων ἐν τῇ ἐνελίξει), τὰ ὁποῖα ἐν τῇ ἐλλειπτικῇ ἐνελίξει εἶνε συζυγῆ πρὸς ἑαυτά, δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι,

«*μία ἐλειπτικὴ προβολικότης ἑνὸς σχηματισμοῦ πρώτης βαθμῖδος ἔχει ἓν ζεῦγος φανταστικῶν διπλῶν στοιχείων, δηλαδὴ τὰ διπλᾶ στοιχεῖα τῆς ἐλλειπτικῆς ἐνελίξεως, ἥτις εἶνε ἐναλλακτὴ μὲ αὐτήν*».

§ 49. Ἐνελικτικὴ ἰδιότης τοῦ τετρακορύφου ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

Διὰ πλῆρες τετρακόρυφον καὶ τετράπλευρον ἔχομεν τὰς ἑξῆς διδύμους προτάσεις ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

«*Τὰ τρία ζεύγη τῶν ἀπέναντι κειμένων πλευρῶν ἑνὸς πλήρους τετρακορύφου τέμνουν μίαν εὐθεῖαν, μὴ διερχομένην διά τινος τῶν κορυφῶν αὐτοῦ, εἰς τρία ζεύγη σημείων μιᾶς ἐνελίξεως*».

«*Τὰ τρία ζεύγη τῶν ἀπέναντι κειμένων κορυφῶν ἑνὸς πλήρους τετραπλεύρου προβάλλονται ἀπὸ ἑνὸς σημείου, μὴ κειμένου ἐπί τινος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, διὰ τριῶν ζευγῶν ἀκτίνων μιᾶς ἐνελίξεως*».

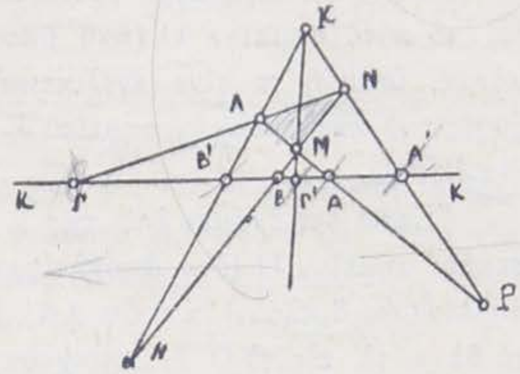
Ἀποδεικνύομεν μόνον τὴν πρὸς τ' ἀριστερὰ ἀνωτέρω ἀναγραφομένην πρότασιν. Ἔστω ΚΛΜΝ τὸ πλῆρες τετρακόρυφον, k ἡ τεμνομένη εὐθεῖα καὶ ΑΑ′, ΒΒ′ καὶ ΓΓ′ τὰ τρία ζεύγη τῶν τομῶν τῆς k ὑπὸ τῶν ζευγῶν τῶν ἀπέναντι κειμένων πλευρῶν ΚΝ καὶ ΛΜ, ΚΛ καὶ ΜΝ, ΝΛ καὶ ΚΜ. Ἓν τῶν ζευγῶν τούτων, τὸ ΑΑ′ π.χ., θὰ ἀποτελῆται ἐκ διαφόρων σημείων. Θεωροῦμεν τὸ σημεῖον Ρ, τομὴν τῶν ΛΜ καὶ ΚΝ, τὸ ὁποῖον εἶνε ἓν διαγώνιον σημεῖον τοῦ τετρακορύφου. Τὰ συμπλέγματα (ΑΑ′Β′Γ′) καὶ (ΑΡΛΜ) εἶνε προβολικά, ἐπειδὴ τὸ ἓν εἶνε προβολὴ τοῦ ἄλλου ἀπὸ τοῦ σημείου Κ. Οὕτω ἔχομεν

$$\mathrm{AA'B'\Gamma'} \overline{\wedge} \mathrm{AP\Lambda M}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι

$$\mathrm{AP\Lambda M} \overline{\wedge} \mathrm{AA'\Gamma B}$$

ἐπειδὴ τὸ ἓν σύμπλεγμα εἶνε προβολὴ τοῦ ἄλλου ἀπὸ τοῦ σημείου Ν. Ἀλλ' ἔχομεν (§ 38)



ΑΑ′Β′Γ′ ⊼ ΑΑ′ΓΒ

$$\mathrm{AA'\Gamma B} \overline{\wedge} \mathrm{A'AB\Gamma}$$

ἑπομένως εἶνε καὶ $\mathrm{AA'B'\Gamma'} \overline{\wedge} \mathrm{A'AB\Gamma}$.

Ἀλλ' ἡ προβολικότης $\begin{pmatrix} \mathrm{A\ A'B'} \\ \mathrm{A'A\ B} \end{pmatrix}$ ἐν ᾗ τὰ ζεύγη ΑΑ′, Α′Α, ΒΒ′ καὶ ΓΓ′ εἶνε ζεύγη ἀντιστοίχων σημείων. εἶνε μία ἐνέλιξις (§46, σελ. 117). Ἑπομένως τὰ ζεύγη ΑΑ′, ΒΒ′ καὶ ΓΓ′ κεῖνται ἐν ἐνελίξει.

Τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως ἔχομεν τὴν ἑξῆς νέαν κατασκευὴν τῆς ἐνελίξεως ἐν σχηματισμῷ πρώτης βαθμῖδος.

Φανταζόμεθα τὰ σημεῖα μιᾶς σημειοσειρᾶς k π.χ., ἐφ' ἧς δίδεται μία ἐνέλιξις διὰ τῶν ζευγῶν συζυγῶν σημείων ΑΑ′ καὶ ΒΒ′. Ζητεῖται εἰς δοθὲν τυχὸν σημεῖον Γ νὰ εὕρωμεν τὸ συζυγὲς αὐτοῦ Γ′. Φέρομεν διὰ τῶν Α,Β,Γ ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου τρεῖς εὐθείας, μὴ συμπιπτούσας μὲ τὴν k καὶ σχηματιζούσας ἓν τρίπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ Λ,Μ,Ν κεῖνται κατὰ σειρὰν ἀπέναντι τῶν πλευρῶν τούτου. Συνδέομεν τὸ Α′ μὲ τὸ Ν καὶ τὸ Β′ μὲ τὸ Λ. Ἡ τομὴ Κ τῶν εὐθειῶν τούτων Α′Ν καὶ Β′Λ προβάλλεται ἀπὸ τοῦ σημείου Μ ἐπὶ τῆς k εἰς τὸ σημεῖον Γ′, συζυγὲς τοῦ Γ. Τὸ σημεῖον Γ′ εἶνε τὸ αὐτό, καὶ ἐὰν κατασκευάσωμεν οἱονδήποτε ἄλλο τετρακόρυφον ΚΛΜΝ, ὡς διακρίνομεν τοῦτο, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν πρότασιν περὶ τῶν προοπτικῶν καὶ ὁμολόγων τετρακορύφων (§ 16).

§ 50. Μετρικαὶ ἰδιότητες ἐνελίξεως ἐπὶ σημειοσειρᾶς.

Ἐὰν δοθῇ μία προβολικότης **π** ἐπὶ σημειοσειρᾶς k καθ' ὑπόστασιν, θὰ ὑπάρχουν ἐν γένει ἐπὶ τῆς k δύο σημεῖα (*φυγῆς* § 44, σελὶς 105), τὰ ὁποῖα ἐν τῇ π καὶ τῇ π^{-1} ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ κατ' ἐξοχὴν σημεῖον, καὶ θὰ εἶνε ταῦτα σημεῖα καθ' ὑπόστασιν, ἐὰν ἡ k δὲν εἶνε μία ὁμοιότης. Ἐν τούτοις εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην δύνανται ταῦτα νὰ συμπέσουν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον O (καθ' ὑπόστασιν) καὶ τοῦτο θὰ συμβῇ πράγματι μόνον, ὅταν ἡ π εἶνε ἐνελικτική. Τὸ σημεῖον O, τὸ ὁποῖον εἶνε συζυγὲς τοῦ κατ' ἐξοχὴν σημείου ἐν τῇ ἐνελίξει π, καλεῖται *κέντρον τῆς ἐνελίξεως*.

Ἔστω ὅτι ἔχομεν ἐπὶ τῆς k μίαν ἐνέλιξιν μὲ κέντρον τὸ καθ' ὑπόστασιν σημεῖον O (ὅτε ἀποκλείομεν τὸ ὅτι αὕτη ἔχει τὸ κατ' ἐξοχὴν σημεῖον ὡς διπλοῦν), καὶ ὅτι AA', BB' εἶνε δύο ζεύγη συζυγῶν σημείων, τὸ δὲ ∞ τὸ εἰς τὸ O ἀντιστοιχοῦν συζυγὲς σημεῖον τῆς k. Θὰ ἔχωμεν

$$AOB\infty \;\overline{\wedge}\; A'\infty B'O,$$

καὶ ἑπομένως προκύπτει, ἐὰν ἐκφράσωμεν ὅτι οἱ διπλοῖ λόγοι τῶν δύο συμπλεγμάτων εἶνε ἴσοι,

$$(AOB\infty) = (A'\infty B'O),$$

ἢ

$$\frac{(AO)}{(BO)} = \frac{(B'O)}{(A'O)},$$

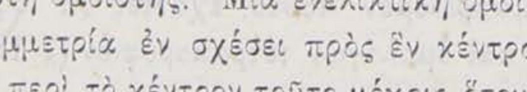
ἄρα εἶνε $(AO)\,(A'O) = (BO)\,(B'O)$. Δηλαδή,

«*τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων δύο συζυγῶν σημείων ἀπὸ τοῦ (καθ' ὑπόστασιν κέντρου τῆς ἐνελίξεως εἶνε σταθερόν*», καὶ τὸ γινόμενον τοῦτο καλεῖται *σταθερὰ ἢ δύναμις τῆς ἐνελίξεως* (§ 44, σελ. 105).

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ ρ τὴν σταθερὰν μιᾶς ἐνελίξεως, τὸ σημεῖον αὐτῆς φανερώνει τὴν φορὰν τῆς ἐνελίξεως. Ἐὰν τὸ ρ εἶνε θετικὸν ἡ ἐνέλιξις εἶνε ἀντίρροπος καὶ ὑπάρχουν δύο διπλᾶ σημεῖα M καὶ N μεταξὺ τῶν ὁποίων κεῖται τὸ O. Ἐν τῇ περιπτώσει αὐτῇ ἔχομεν

$$\rho = (OM)^2 = (ON)^2.$$

Ἡ ἐνέλιξις ἐπὶ τῆς k παρουσιάζεται τελείως διάφορος ἀπὸ μετρικῆς ἀπόψεως, ἐὰν τὸ κατ' ἐξοχὴν σημεῖον εἶνε διπλοῦν, δηλαδὴ ἂν εἶνε αὕτη ὁμοιότης. Μία ἐνελικτικὴ ὁμοιότης ἐπὶ τῆς k εἶνε πάντοτε μία συμμετρία ἐν σχέσει πρὸς ἓν κέντρον, ἥτις παράγεται διὰ στροφῆς τῆς k περὶ τὸ κέντρον τοῦτο μέχρις ὅτου ἐφαρμόσῃ ἐφ' ἑαυτῆς.



Πράγματι, ἐὰν O εἶνε τὸ ἄλλο διπλοῦν σημεῖον τῆς ἐν λόγῳ ἐνελίξεως, χωρίζει τοῦτο μετὰ τοῦ κατ' ἐξοχὴν σημείου ἁρμονικῶς ἑκα-

$(AOA'\infty) = (AOA') = -1$

$\frac{(AO)}{(A'O)} = 1$ ἢ $(OA) = -(OA')$

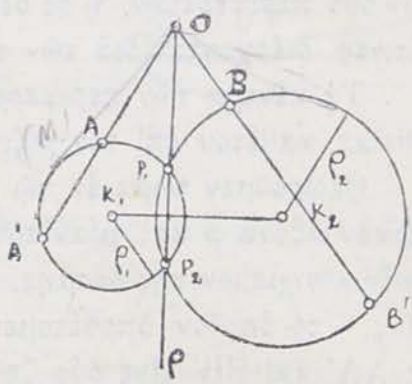
στον ζεῦγος ὁμολόγων σημείων ΑΑ', ἄρα εἶνε (ΟΑ) = — (ΟΑ').

Παρατηρητέον ὅτι, ἐνῶ τὰς κατ' ἀναλογίαν ἰσότητας ἐπὶ μιᾶς σημειοσειρᾶς ἐχαρακτηρίσαμεν ὡς παραβολικὰς προβολικότητας, ἐχούσας τὸ διπλοῦν σημεῖον αὐτῶν εἰς τὸ ἄπειρον, αἱ κατ' ἀντιστροφὴν ἰσότητες (συμμετρίαι) χαρακτηρίζονται ὡς ἐνελίξεις μὲ ἓν διπλοῦν σημεῖον εἰς τὸ ἄπειρον.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὁ ἑξῆς τρόπος παραγωγῆς ἐνελίξεως ἐπὶ σημειοσειρᾶς διὰ τῆς χρήσεως δεσμῶν περιφερειῶν.

Γνωρίζομεν ἐκ τῆς στοιχειώδους Γεωμετρίας ὅτι, δύο περιφέρειαι κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὁρίζουν ἕνα *ῥιζικὸν ἄξονα* αὐτῶν, ἤτοι τὸν τόπον ρ τῶν σημείων, τῶν ἐχόντων ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς τὰς περιφερείας, δηλαδὴ τὸν τόπον τῶν σημείων Ο, διὰ τὰ ὁποῖα εἶνε

$$(OA)\,(OA') = (OB)\,(OB') = (OM_1)^2 = (OM_2)^2.$$

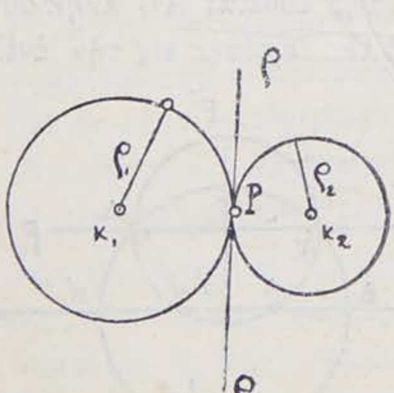


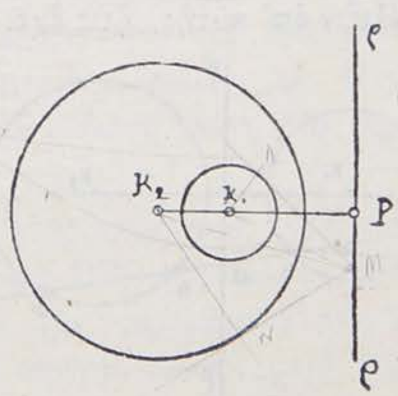
Ὁ ριζικὸς οὗτος ἄξων εἶνε ἡ εὐθεῖα, ἥτις συνδέει τὰ δύο σημεῖα τῆς τομῆς τῶν δύο περιφερειῶν, ἐὰν αὗται τέμνωνται, ἐὰν δ' αἱ περιφέρειαι ἐφάπτωνται, εἶνε ἡ κοινὴ αὐτῶν ἐφαπτομένη ρ. Εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν ὁρίζεται οὗτος ὡς εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον εὐθεῖαν K_1K_2 εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς P, τοῦ ὁποίου αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν κέντρων εἶνε τοιαῦται, ὥστε νὰ ἔχωμεν

$$(K_1P)^2 - (K_2P)^2 = \rho_1^2 - \rho_2^2$$

ἂν ρ_1, ρ_2 παριστάνουν τὰς ἀκτῖνας τῶν περιφερειῶν.

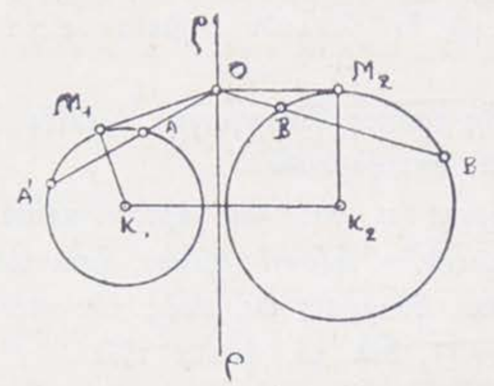
Παρατηρητέον ὅτι, ὁ ριζικὸς ἄξων δύο ὁμοκέντρων περιφερειῶν





εἶνε ἡ κατ' ἐξοχὴν εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν, καὶ ἀντιστρόφως.

Γνωρίζομεν ἐπίσης ὅτι, ἂν δοθοῦν δύο περιφέρειαι ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου, ὑπάρχουν ἄπειροι τοιαῦται, ἔχουσαι μὲ μίαν ἐκ τῶν δύο ὡς ριζικὸν ἄξονα τὸν ἄξονα ρ τῶν δύο δοθεισῶν. Αὗται ἀποτελοῦν μίαν δέσμην περιφερειῶν, ἔχουσαν κοινὸν ριζικὸν ἄξονα τὴν εὐθεῖαν ρ. Ἡ δέσμη



αὕτη εἶνε ὡρισμένη διὰ δύο περιφερειῶν αὐτῆς. Δι᾽ ἑκάστου σημείου τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον δὲν εἶνε κοινὸν σημεῖον πασῶν τῶν περιφερειῶν τῆς δέσμης, διέρχεται μία περιφέρεια τῆς δέσμης.

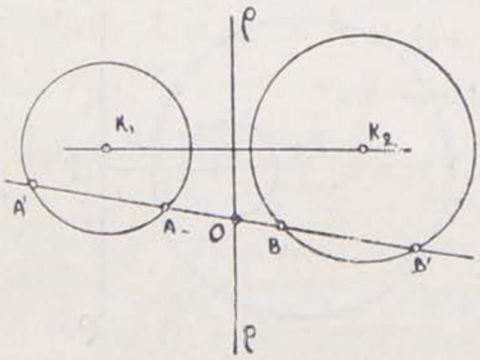
Ἐὰν δύο περιφέρειαι ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα, ταῦτα θὰ καλοῦνται *θεμελιώδη σημεῖα τῆς δέσμης*, διὰ τῶν ὁποίων ὁρίζονται αἱ περιφέρειαι τῆς δέσμης, τῆς ὁριζομένης ὑπὸ τῶν δύο περιφερειῶν, ἡ δὲ δέσμη ἀποτελεῖται ἐκ πασῶν τῶν περιφερειῶν αἵτινες διέρχονται διὰ τῶν σημείων τούτων.

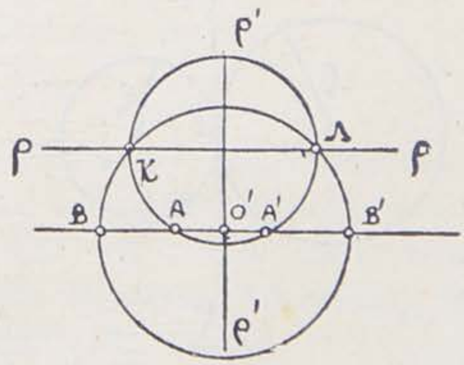
Τὰ κέντρα τῶν περιφερειῶν μιᾶς δέσμης τούτων κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας, καθέτου ἐπὶ τὸν ριζικὸν ἄξονα αὐτῶν.

Θεωροῦμεν τώρα ἐν τῷ ἐπιπέδῳ μίαν δέσμην περιφερειῶν, ἐχουσῶν ριζικὸν ἄξονα ρ καὶ μίαν εὐθεῖαν, μὴ διερχομένην διά τινος τῶν θεμελιωδῶν σημείων τῆς δέσμης. Ἔστω O ἡ τομὴ τοῦ ἄξονος ρ καὶ τῆς εὐθείας, τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν πρῶτον ὅτι εἶνε καθ᾽ ὑπόστασιν. Ἔστω ὅτι AA′ καὶ BB′ εἶνε δύο ζεύγη σημείων, καθ᾽ ἃ ἡ εὐθεῖα τέμνεται ὑπὸ δύο περιφερειῶν τῆς δέσμης. Ἐπειδὴ ρ εἶνε ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν περιφερειῶν, θὰ ἔχωμεν

$$(OA)\ (OA') = (OB)\ (OB').$$

Ἑπομένως τὰ ζεύγη AA′ καὶ BB′ ἐπὶ τῆς εὐθείας AB ἀνήκουν εἰς μίαν ἐνέλιξιν ἐπ᾽ αὐτῆς, ἥτις ἔχει κέντρον τὸ O. Ἐπίσης εἰς τὴν ἐνέλιξιν



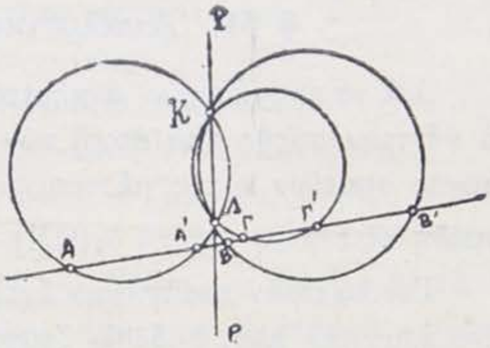


ταύτην ἀνήκουν πάντα τὰ ζεύγη τῶν σημείων, καθ᾽ ἃ τέμνεται ἡ ἐν λόγῳ εὐθεῖα ὑπὸ τῶν περιφερειῶν τῆς δέσμης.

Ἐὰν τὸ O εἶνε σημεῖον κατ᾽ ἐξοχήν, δηλαδὴ ἂν ἡ εὐθεῖα καὶ ἡ ρ εἶνε παράλληλοι, ἢ ἂν ἡ ρ εἶνε ἡ κατ᾽ ἐξοχὴν εὐθεῖα, τότε θεωροῦμεν τὴν κάθετον εὐθεῖαν ρ′ ἐπὶ τὴν ρ, ἐφ᾽ ἧς κεῖνται τὰ κέντρα τῶν περιφερειῶν τῆς δέσμης, καὶ ἔστω O′ ἡ τομὴ ταύτης μετὰ τῆς ἐν λόγῳ εὐθείας. Τὸ σημεῖον O′ εἶνε τὸ μέσον πασῶν τῶν χορδῶν τῶν περιφερειῶν τῆς δέσμης, αἵτινες κατασκευάζονται ἐπὶ τῆς εὐθείας (τέμνουν ταύτην). Ἑπομένως, τὰ ζεύγη τῶν σημείων, καθ᾽ ἃ τέμνεται ἡ εὐθεῖα ὑπὸ τῶν περιφερειῶν τούτων ἀνήκουν εἰς μίαν συμμετρίαν, ἔχουσαν κέντρον τὸ O′.

Οὕτω ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«*Ἐὰν τμήσωμεν δέσμην περιφερειῶν δι᾽ εὐθείας τινός, κειμένης ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς δέσμης ἀλλὰ μὴ διερχομένης διά τινος τῶν θεμελιωδῶν σημείων αὐτῆς, λαμβάνομεν τὰ ζεύγη τῶν σημείων μιᾶς ἐνελίξεως, ἐχούσης κέντρον τὴν τομὴν τῆς εὐθείας ταύτης μετὰ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν περιφερειῶν. Ἐν ᾗ περιπτώσει αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι εἶνε παράλληλοι, ἔχομεν μίαν συμμετρίαν ὡς πρὸς τὴν τομὴν τῆς εὐθείας μετὰ τῆς ἐπ᾽ αὐτὴν καθέτου εὐθείας, ἐφ᾽ ἧς κεῖνται τὰ κέντρα τῶν περιφερειῶν τῆς δέσμης*».



Εἶνε φανερὸν ὅτι, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ἑκάστην ἐνέλιξιν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας α, ὡς προκύπτουσαν κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον. Πράγματι, ἂν AA′ καὶ BB′ εἶνε δύο ζεύγη σημείων μιᾶς ἐνελίξεως **ω** ἐπὶ τῆς α (καὶ τὰ ζεύγη ταῦτα ὁρίζουν τὴν **ω**), δυνάμεθα διὰ τῶν A καὶ A′ καὶ διὰ τῶν B καὶ B′ νὰ φέρωμεν δύο τυχούσας περιφερείας. Ἐὰν ἀκολούθως τμήσωμεν διὰ τῆς α τὴν δέσμην τῶν περιφερειῶν, τῆς ὁριζομένης ὑπὸ τῶν δύο ἐν λόγῳ περιφερειῶν, λαμβάνομεν τὴν ἐνέλιξιν **ω**. Παρατηρητέον ὅτι, δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ἐν τῇ κατασκευῇ ταύτῃ δύο θεμελιώδη σημεῖα τῶν περιφερειῶν τῆς δέσμης.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει καὶ ἡ ἑξῆς κατασκευὴ τῆς ἐνελίξεως **ω** ἐπὶ τῆς α. Δοθέντων τῶν ζευγῶν AA′ καὶ BB′, εὑρίσκομεν τὸ συζυγὲς ἑνὸς τοιούτου Γ, ἐὰν κατασκευάσωμεν τὴν περιφέρειαν τῆς δέσμης, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ Γ, καὶ ἡ ἄλλη τομὴ Γ′ ταύτης μετὰ τῆς α θὰ εἶνε τὸ ζητούμενον σημεῖον. Τὰ διπλᾶ σημεῖα τῆς ἐνελίξεως ταύτης **ω**, ὑποτιθεμένης ὑπερβολικῆς, εἶνε σημεῖα ἐπαφῆς τῶν περιφερειῶν τῆς δέσμης, αἵτινες ἐφάπτονται τῆς α.

Κατασκευή ενελίξεως 1) σελ. 121 και
2) σελ. 122
3) " 127
4) " 120

Παρατήρησις. Κατὰ τὴν ἀνωτέρω πρότασιν δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὸν ριζικὸν ἄξονα τῆς δέσμης τῶν περιφερειῶν εἴτε τέμνονται εἴτε μὴ αἱ περιφέρειαι αὗται. Πρὸς τοῦτο ὁρίζομεν τὰ δύο ζεύγη τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα εἶνε κοινὰ τῶν δύο δοθεισῶν περιφερειῶν καὶ μιᾶς τυχούσης εὐθείας, τεμνούσης ταύτας, καὶ κατασκευάζομεν ἐπὶ ταύτης τὸ κέντρον τῆς ἐνελίξεως, τῆς ὁριζομένης ὑπὸ τῶν δύο ζευγῶν τῶν σημείων. Οὕτω εὑρίσκομεν ἓν σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν δύο περιφερειῶν. Καθ' ὅμοιον τρόπον δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ δεύτερον σημεῖον τοῦ ἄξονος τούτου, καὶ ἑπομένως νὰ κατασκευάσωμεν αὐτόν.

§ 51. Ἀναλυτικαὶ σχέσεις ἐνελίξεων.

Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν ἀναλυτικῶς μίαν *συμμετρίαν* ὑποθέτομεν ὅτι τὸ κέντρον αὐτῆς εἶνε ἀρχὴ τῶν τετμημένων, καὶ ἂν Μ καὶ Μ′ εἶνε ἓν ζεῦγος σημείων αὐτῆς μὲ τετμημένας x καὶ x′ θὰ ἔχωμεν $x + x' = 0$, ἐπειδὴ εἶνε $$(OM) + (OM') = 0.$$

Γενικωτέραν περίπτωσιν ἔχομεν ἐὰν τὰ ζεύγη τῶν σημείων ΜΜ′ εἶνε ἁρμονικὰ πρὸς ἓν δοθὲν ζεῦγος ΑΒ. Εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β συμπίπτουν ἀνὰ ἓν σημεῖον Μ μετὰ τοῦ ἀντιστοίχου πρὸς αὐτὸ Μ′, καὶ τὰ Α καὶ Β καλοῦνται οὕτω διπλᾶ σημεῖα τῆς ἐνελίξεως (τὰ ὁποῖα ἐν τῇ συμμετρίᾳ εἶνε τὰ Ο καὶ τὸ ∞ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ Μ). Οὕτω ἔχομεν διὰ τὰ σημεῖα Α, Β, Μ, Μ′ τὴν ἑξῆς συμμετρικὴν σχέσιν ὡς πρὸς x καὶ x′
$$xx' - {}^1/_2\,(\alpha+\beta)\,(x+x') + \alpha\beta = 0.$$

Καὶ αἱ δύο ἀνωτέρω ἐξισώσεις εἶνε μερικαὶ περιπτώσεις τῆς
$$\alpha xx' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0 \tag{1}$$
ἐν τῇ ὁποίᾳ ὑποτίθεται ὅτι εἶνε $\beta = \gamma$, ὅτε ἔχομεν τὴν διγραμμικὴν σχέσιν
$$\alpha xx' + \beta\,(x + x') + \delta = 0, \tag{2}$$
εἰς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ ἡ προβολικὴ σχέσις, ἥτις καλεῖται ἐνελικτική.

Ἐὰν ΡΡ′, ΚΚ′ εἶνε τὰ δύο ζεύγη τῶν σημείων, τὰ ὁρίζοντα τὴν ἐνέλιξιν, καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ Ρ καὶ Ρ′ εἶνε τυχόντα, τὰ δὲ Κ καὶ Κ′ συμπίπτοντα μὲ τὸ Ρ′ καὶ Ρ ἀντιστοίχως, ἐνῶ τὰ Λ καὶ Λ′ ὅτι εἶνε τυχόντα, θὰ ἔχωμεν
$$\alpha\rho\rho' + \beta\rho + \gamma\rho' + \delta = 0 \quad \text{καὶ} \quad \alpha kk' + \beta k + \gamma k' + \delta = 0$$
οὕτως, ὥστε νὰ εἶνε $\rho' = k$ καὶ $\rho = k'$. Δι' ἀφαιρέσεως τῶν ἐξισώσεων κατὰ μέλη ἔχομεν
$$(\beta - \gamma)\,(\rho - \rho') = 0, \quad \text{ἢ} \quad \beta - \gamma = 0,$$

$(M'AMB) = -1$

$\dfrac{(M'A)(MB)}{(MA)(M'B)} = \dfrac{(\alpha-x')(\beta-x)}{(\alpha-x)(\beta-x')} = -1$

καὶ λέγομεν ὅτι τὸ ζεῦγος $P \equiv K'$ καὶ $P' \equiv K$ ἀντιστοιχεῖ πρὸς ἑαυτὸ διττῶς, δηλαδὴ μίαν φορὰν ὡς ζεῦγος PP' καὶ ἄλλην μίαν φορὰν ὡς KK'. Ἐὰν ἡ διπλῆ αὕτη ἀντιστοιχία παρουσιάζεται μόνον ἅπαξ, ἡ προβολικὴ σχέσις (1) λαμβάνει τὴν συμμετρικὴν μορφὴν (2). Ἐκ τῆς συμμετρικῆς ταύτης μορφῆς ἕπεται ὅτι, ἀνὰ δύο τιμαὶ x_i, x'_i ἀντιστοιχοῦν διττῶς, δηλαδὴ ἂν εἶνε $x_k = x_i'$ θὰ εἶνε $x'_k = x_i$. Οὕτω ἔχομεν τὰς ἑξῆς προτάσεις.

1) «Ἐὰν εἰς μίαν προβολικότητα μεταξὺ δύο σημειοσειρῶν, κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ φορέως, ἓν ζεῦγος σημείων ἀντιστοιχῇ πρὸς ἑαυτὸ διττῶς, τότε πάντα τὰ ζεύγη ἀντιστοιχοῦν διττῶς πρὸς ἑαυτά, καὶ αἱ σημειοσειραὶ συνδέονται ἐνελικτικῶς».

2) «Μία ἐνελικτικὴ σχέσις μεταξὺ δύο σημειοσειρῶν εἶνε ὡρισμένη διὰ δύο ζευγῶν σημείων ὁπωσδήποτε ἐκλεγομένων».

Τοῦτο ἕπεται ἀμέσως ἐκ τῶν ἀνωτέρω· τὸ μὲν ἓν ζεῦγος εἶνε τὸ $K' \equiv P$, $K \equiv P'$, τὸ δὲ ἄλλο εἶνε τὸ $\Lambda\Lambda'$, τὸ ὁποῖον κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν συμπίπτει μὲ ἓν ζεῦγος NN', ὥστε νὰ εἶνε $N' \equiv \Lambda$, $N \equiv \Lambda'$. Ἐπειδὴ δύο ζεύγη τῆς ἐνελίξεως δύνανται νὰ ἐκλεγοῦν αὐθαιρέτως, πρέπει νὰ ὑπάρχῃ σχέσις τις μεταξὺ τριῶν ζευγῶν σημείων ταύτης. Ἐὰν (x, x'), (y, y'), (z, z') εἶνε αἱ τετμημέναι τῶν τριῶν ζευγῶν τῶν σημείων, θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις (2) δι' ἕκαστον τῶν ζευγῶν τούτων, καὶ ἑπομένως ἔχομεν

$$\begin{vmatrix} xx' & x+x' & 1 \\ yy' & y+y' & 1 \\ zz' & z+z' & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

Ἐὰν AA', BB', $\Gamma\Gamma'$ εἶνε τὰ τρία ζεύγη τῶν σημείων, θὰ ἔχωμεν ἕνεκα τῆς διπλῆς ἀντιστοιχίας

$$(AA'B\Gamma') = (A'AB'\Gamma)$$

ἢ

$$\frac{(AA')}{(BA')} \cdot \frac{(B\Gamma')}{(A\Gamma')} = \frac{(A'A)}{(B'A)} \cdot \frac{(B'\Gamma)}{(A'\Gamma)}$$

Ἀλλ' εἶνε $(AA') + (A'A) = 0$, ἑπομένως ἔχομεν

$$(B\Gamma').(\Gamma A').(AB') + (B'\Gamma).(\Gamma'A).(A'B) = 0 \qquad (4)$$

Ἐκφράζει δ' αὕτη * τὴν γεωμετρικὴν σημασίαν τῆς (3), καὶ ὑπάρχουν τοιαῦται σχέσεις τρεῖς ἀκόμη, ἐπειδὴ ἕκαστον ζεῦγος AA' δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ζεῦγος $A'_1 A_1$.

---

* Ἡ σχέσις (4) ἦτο γνωστὴ εἰς τὸν Ἕλληνα μαθηματικὸν Πάππον, ἐνῷ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἐνελίξεως διὰ τῆς προβολικῆς σχέσεως ὀφείλομεν εἰς τὸν Chasles.

Αἱ ἐνελικτικαὶ σημειοσειραὶ ἔχουν δύο διπλᾶ σημεῖα, τὸ ὁποῖα ὁρίζονται ἐκ τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως

$$\alpha\omega^2 + 2\beta\omega + \delta = 0.$$

Ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὴν γενικὴν προβολικὴν σχέσιν ὁρίζεται τελείως διὰ τῆς ἐξισώσεως ταύτης καὶ ἡ ἐξίσωσις (2). Ἑπομένως ἡ ἐνέλιξις δίδεται διὰ τῶν δύο διπλῶν σημείων αὐτῆς, καὶ καθόσον εἶνε $\alpha\delta - \beta^2 < 0$ ἢ >0 ἢ $=0$, τὰ διπλᾶ σημεῖα εἶνε πραγματικὰ ἢ φανταστικὰ ἢ συμπίπτοντα, ἡ δὲ ἐνέλιξις εἶνε τότε *ὑπερβολικὴ* ἢ *ἐλλειπτικὴ* ἢ *παραβολική*.

«Ἐὰν δύο ἐνελίξεις κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, θὰ ἔχουν αὗται ἓν κοινὸν ζεῦγος σημείων».

Ἔστω ὅτι αἱ δύο ἐνελίξεις εἶνε ὑπερβολικαί, καὶ Α,Β τὰ διπλᾶ σημεῖα τῆς μιᾶς καὶ Α′,Β′ τῆς ἄλλης. Τὸ κοινὸν ζεῦγος πρέπει νὰ εἶνε ἁρμονικὸν πρὸς τὰ Α,Β καὶ τὰ Α′,Β′. Ἂν αἱ ἀναλυτικαὶ παραστάσεις τῶν ἐνελίξεων εἶνε

$$\alpha x x' + \beta(x+x') + \delta = 0 \text{ καὶ } \alpha_1 x x' + \beta_1(x+x') + \delta_1 = 0,$$

θὰ ἐπαληθεύῃ ταύτας μία κοινὴ λύσις xx' καὶ $x+x'$ καὶ αἱ τιμαὶ αὗται ὁρίζουν τὸ κοινὸν ζεῦγος τῶν σημείων (x,x'). Σχηματίζομεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ β′ βαθμοῦ $\qquad \omega^2 - (x+x')\omega + xx' = 0,$

ἥτις ἔχει ρίζας τὰς x καὶ x'. Ἐκ ταύτης καὶ τῶν δύο προηγουμένων ἐξισώσεων ἔχομεν,

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \delta_1 \\ 1 & -\omega & \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

ἥτις εἶνε ἡ ζητουμένη δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις, ἢ μετὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς ὁριζούσης $(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)\,\omega^2 + (\alpha\delta_1 - \alpha_1\delta)\omega + (\beta\delta_1 - \beta_1\delta) = 0$.

Τὸ κοινὸν ζεῦγος τῶν σημείων εἶνε φανταστικόν, ἐὰν τὰ διπλᾶ σημεῖα χωρίζουν ἄλληλα, καὶ πραγματικὸν ἂν δὲν χωρίζωνται.

Ἐὰν δὲν εἶνε καὶ αἱ δύο ἐνελίξεις ὑπερβολικαί, τὸ κοινὸν ζεῦγος εἶνε πάντοτε πραγματικόν. Τὰ διπλᾶ στοιχεῖα μιᾶς ἐλλειπτικῆς ἐνελίξεως ἔχουν ὡς τετμημένας συζυγεῖς φανταστικοὺς ἀριθμοὺς καὶ τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον εἶνε πραγματικά.

Προκειμένου περὶ τῆς ἐνελικτικῆς θέσεως ἐπιπέδων δεσμῶν ἔχομεν τὰς ἑξῆς προτάσεις.

1) «Εἰς δύο προβολικὰς ἐπιπέδους δέσμας ὑπάρχει ἀνὰ ἓν ζεῦγος ἀντιστοίχων καθέτων ἀκτίνων».

2) *«Εἰς ἑκάστην ἐνελικτικὴν ἐπίπεδον δέσμην ὑπάρχει ἓν ζεῦγος καθέτων ἀκτίνων».*

3) *«Ὑπάρχει μία ἐνέλιξις, ἀποτελουμένη μόνον ἐκ ζευγῶν ὀρθῶν γωνιῶν (ὀρθογώνιος ἐνέλιξις ἀκτίνων)».*

Πρὸς ἀπόδειξιν ἐκλέγομεν τὰς δύο ἀκτῖνας ἑκάστης δέσμης, αἵτινες ὁρίζουν τὰ κέντρα αὐτῶν, καθέτως ἐπ' ἀλλήλας, καὶ θέτομεν τὰς ἐξισώσεις τούτων ὑπὸ τὴν κανονικὴν μορφήν. Ἔστωσαν λοιπὸν

$$N + \lambda N' = 0, \quad M + \mu M' = 0$$

αἱ ἐξισώσεις τῶν δύο δεσμῶν. Μεταξὺ τῶν λ καὶ μ ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\alpha\lambda\mu + \beta\lambda + \gamma\mu + \delta = 0. \tag{6}$$

Ἐὰν k εἶνε μία μεταβλητὴ ἀκτὶς τῆς πρώτης δέσμης καὶ η ἡ ἀκτὶς τῆς πρώτης δέσμης, ἡ ἔχουσα ἐξίσωσιν $N = 0$, θὰ ἔχωμεν ἐπειδὴ αἱ ὁρίζουσαι τὸ κέντρον τῆς δέσμης ἀκτῖνες ὑπετέθησαν κάθετοι $\lambda = \varepsilon\varphi\,(k, \eta)$.

Ἑπομένως διὰ δύο καθέτους ἐπ' ἀλλήλας ἀκτῖνας k, k_1 τῆς πρώτης δέσμης θὰ ἔχωμεν $\lambda\lambda_1 + 1 = 0$.

Ἀνάλογα παρατηροῦμεν καὶ διὰ τὴν δευτέραν δέσμην. Ἐὰν λοιπὸν ὑπάρχουν δύο ζεύγη ἀντιστοίχων καθέτων ἀκτίνων τῶν δύο δεσμῶν καὶ λ, λ_1 καὶ μ, μ_1 εἶνε αἱ τιμαὶ τῶν παραμέτρων, εἰς τὰς ὁποίας ἀντιστοιχοῦν θὰ ἔχωμεν διὰ ταύτας καὶ τὰς ἑξῆς ἐξισώσεις, ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω,

$$\alpha\lambda_1\mu_1 + \beta\lambda_1 + \gamma\mu_1 + \delta = 0 \text{ καὶ } \mu\mu_1 + 1 = 0.$$

Δι' ἀπαλοιφῆς τῶν λ_1 καὶ μ_1 εὑρίσκομεν

$$(\alpha\lambda+\gamma)\,\mu + \beta\lambda + \delta = 0 \qquad \text{καὶ} \qquad (\delta\lambda-\beta)\,\mu - \gamma\lambda + \alpha = 0$$

καὶ ἐκ τούτων $(\alpha\gamma+\beta\delta)\,(\lambda^2-1) - \lambda\,(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2) = 0$.

Μίαν ἀνάλογον ἐξίσωσιν πρὸς ταύτην ἔχομεν διὰ τὸ μ. Αἱ ῥίζαι τῆς τελευταίας ἐξισώσεως δίδουν τὰς δύο τιμὰς λ καὶ λ_1. Εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι αἱ ῥίζαι ταύτης λ, λ_1 εἶνε πάντοτε πραγματικαί. Οὕτω ἀληθεύει ἡ ἀνωτέρω πρώτη πρότασις, ἐπειδὴ δὲ μία ἐνέλιξις εἶνε προβολικότης, ἀληθεύει καὶ ἡ δευτέρα πρότασις.

Ὅσον ἀφορᾷ τὴν πρότασιν 3) παρατηροῦμεν ὅτι αὕτη εἶνε φανερὰ γεωμετρικῶς, διότι δύο ἴσαι δέσμαι, κείμεναι ἐπ' ἀλλήλων (δηλαδὴ κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ φορέως) εἶνε προβολικαί, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶνε ἡ γωνία φ δύο ἀντιστοίχων αὐτῶν ἀκτίνων, εἶνε δ' ἡ σχέσις αὕτη ἐνελικτικὴ διὰ $\varphi = {}^1/_2\pi$. Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὴν πρότασιν ἀναλυτικῶς θεωροῦμεν τὰς ἐξισώσεις τῶν δεσμῶν $N + \lambda N' = 0$, $M + \mu M' = 0$.

Φανταζόμεθα συμπιπτούσας τὰς ἀκτῖνας $M=0$, $M'=0$ μὲ τὰς $N=0$ καὶ $N'=0$ καὶ λαμβάνομεν $\beta = \gamma$ ἐν τῇ (6). Οὕτω θα ἔχωμεν ὅτι αἱ δέσμαι

$$N + \lambda N' = 0, \quad N + \mu N' = 0$$

β=γ=0.
α=δ
αλμ+βλ+γμ+δ=0
λμ+1=0

p. 129 εἶνε ἐν ἐνελίξει. Ἐὰν θέσωμεν $\beta=0$, $\alpha=\delta$, ἡ (6) τρέπεται εἰς τὴν $\lambda\mu+1=0$ καὶ ἔχομεν οὕτω ὀρθογώνιον δέσμην. Αἱ (φανταστικαὶ) διπλαῖ ἀκτῖνες ταύτης δίδονται ὑπὸ τῆς $\lambda^2+1=0$, ἤτοι παριστάνονται ὑπὸ τῶν $N-iN'=0$, $N+iN'=0$,
καὶ καλοῦνται συνήθως *ἀπόλυτοι ἀκτῖνες* τῆς ὀρθογωνίου ἐνελίξεως.

Ἄσκησις.

Ἐξετάσατε τὰς μερικὰς περιπτώσεις, τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς τὰς $\alpha+\delta=0, \beta=\gamma=0$ καὶ $\alpha=0$, $\delta=0$, $\beta=\gamma$ τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως (6).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V.

Περὶ προβολικῶν σχηματισμῶν δευτέρας βαθμῖδος.

§ 52. Ὁμογραφία καὶ ἀντιστροφὴ ἢ προβολικότης μεταξὺ σχηματισμῶν δευτέρας βαθμῖδος.

Δύο ἐπίπεδα ἢ πεδία λέγονται *ὁμογραφικά*, ἐὰν σχετίζωνται οὕτω μεταξύ των, ὥστε εἰς ἕκαστον στοιχεῖον (σημεῖον ἢ εὐθεῖαν) τοῦ ἑνὸς ν᾽ ἀντιστοιχῇ ἓν ὁμώνυμον στοιχεῖον (σημεῖον ἢ εὐθεῖα) τοῦ ἄλλου, καὶ μάλιστα, ἐὰν ἓν σημεῖον τοῦ πρώτου ἐπιπέδου κεῖται ἐπί τινος εὐθείας αὐτοῦ, καὶ τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τοῦ δευτέρου ἐπιπέδου κεῖνται ἐπ᾽ ἀλλήλων.

Καλοῦμεν *ὁμογραφίαν* τὴν σχέσιν ἥτις ὑπάρχει μεταξὺ δύο ὁμογραφικῶν ἐπιπέδων ἢ πεδίων. Ἓν ἁπλοῦν παράδειγμα ὁμογραφίας μεταξὺ δύο ἐπιπέδων ἔχομεν, ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν προοπτικότητα μεταξὺ αὐτῶν, ἥτις προκύπτει διὰ προβολῆς τοῦ ἑνὸς τούτων ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἀπό τινος σημείου κειμένου ἐκτὸς αὐτῶν. Ἄλλο παράδειγμα ὁμογραφίας ἔχομεν, ἐὰν κινήσωμεν τὸ ἓν τῶν ἐπιπέδων εἰς τρόπον, ὥστε νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἄλλου, καὶ θεωρήσωμεν ὡς ἀντίστοιχον σημεῖον ἐπὶ τοῦ δευτέρου ἐπιπέδου εἰς ἓν σημεῖον τοῦ πρώτου τὴν νέαν θέσιν τούτου ἐπὶ τοῦ δευτέρου.

Μία ὁμογραφία μεταξὺ δύο ἐπιπέδων δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μία σχέσις καθ᾽ ἕνα μόνον τρόπον ἀντιστρεπὴ μεταξὺ τῶν σημείων τῶν ἐπιπέδων ἢ ὡς μία τοιαύτη σχέσις μεταξὺ τῶν δύο συστημάτων τῶν εὐθειῶν τῶν δύο ἐπιπέδων, καὶ ὑπάρχει ἡ ἑξῆς θεμελιώδης ἰδιότης.

«Ἐὰν ἓν σημεῖον τοῦ ἑνὸς ἐπιπέδου, κινούμενον, διαγράφῃ εὐθεῖάν τινα αὐτοῦ, τὸ ἀντίστοιχον αὐτοῦ σημεῖον τοῦ ἄλλου ἐπι-

πέδου κινεῖται καὶ διαγράφει ἐπίσης μίαν εὐθεῖαν, κειμένην ἐπ' αὐτοῦ, ἥτις εἶνε ἀντίστοιχος τῆς πρώτης».

Παρατηρητέον ὅτι, ἂν δοθοῦν δύο ἐπίπεδα **a** καὶ **a**′, δυνάμεθα νὰ συσχετίσωμεν αὐτὰ κατ' ἀπείρους τρόπους, ὥστε νὰ ἔχωμεν πάντοτε μίαν σχέσιν καθ' ἕνα τρόπον ἀντιστρεπτὴν μεταξὺ τῶν σημείων αὐτῶν. Ἐν τούτοις, πᾶσα τοιαύτη συσχέτισις δὲν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὁμογραφία, καθὼς π.χ. ἂν ἓν σημεῖον M τοῦ **a** διαγράφῃ ἐπ' αὐτοῦ μίαν εὐθεῖαν k, τὸ δὲ ἀντίστοιχον τούτου ἐπὶ τοῦ **a**′ διαγράφῃ μίαν (συνεχῆ) καμπύλην. Ἐὰν τοὐναντίον καὶ τὸ M′ διαγράφῃ μίαν εὐθεῖαν k′, ἀντίστοιχον τῆς k, θὰ θεωροῦμεν εἰς ἑκάστην εὐθεῖαν k τοῦ πρώτου ἐπιπέδου, θεωρουμένην ὡς τόπον ἑνὸς κινουμένου σημείου ἐπ' αὐτῆς M, ἀντιστοιχοῦσαν ἐπὶ τοῦ δευτέρου μίαν εὐθεῖαν k′, ὡς τόπον τοῦ ἐπ' αὐτῆς κινουμένου σημείου M′, ἀντιστοίχου τοῦ M· οὕτω δὲ εἰς τὴν εὐθεῖαν k καὶ τὸ σημεῖον M, κείμενον ἐπ' αὐτῆς, θὰ ἀντιστοιχοῦν ἡ εὐθεῖα k′ καὶ τὸ σημεῖον M′, κείμενον ἐπὶ ταύτης.

Λέγομεν ὅτι δύο ἐπίπεδα εἶνε *ἀντίστροφα ἀλλήλων*, ἐὰν σχετίζωνται οὕτω μεταξύ των, ὥστε εἰς ἕκαστον στοιχεῖον, σημεῖον ἢ εὐθεῖαν, τοῦ ἑνὸς νὰ ἀντιστοιχῇ ἓν ἑτερώνυμον στοιχεῖον, εὐθεῖα ἢ σημεῖον, τοῦ ἄλλου, καὶ μάλιστα ἐάν, εἰς ἓν σημεῖον καὶ μίαν εὐθεῖαν, κείμενα ἐπ' ἀλλήλων, ἀντιστοιχῇ μία εὐθεῖα καὶ ἓν σημεῖον, κείμενα ἐπ' ἀλλήλων.

Τὴν τοιαύτην σχέσιν μεταξὺ τῶν δύο ἐπιπέδων καλοῦμεν *ἀντιστροφήν*, καὶ δύναται αὕτη νὰ θεωρηθῇ ὡς μία σχέσις μεταξὺ τῶν στοιχείων (σημείων) ἑνὸς ἐπιπέδου συστήματος σημείων καὶ τῶν στοιχείων (εὐθειῶν) ἑνὸς ἐπιπέδου συστήματος εὐθειῶν, καὶ ἔχει τὴν ἑξῆς ἰδιότητα.

«Ἐὰν ἓν σημεῖον κινῆται ἐπὶ τοῦ πρώτου ἐπιπέδου καὶ διαγράφῃ μίαν εὐθεῖαν, ἡ ὁμόλογος αὐτοῦ εὐθεῖα κινεῖται ἐν τῷ δευτέρῳ ἐπιπέδῳ, διερχομένη πάντοτε δι' ἑνὸς σταθεροῦ σημείου». g

Κατὰ τὴν ἰδιότητα ταύτην καὶ εἰς ἑκάστην εὐθεῖαν τοῦ δευτέρου ἐπιπέδου ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον τοῦ πρώτου, κ.ο.κ.

Παρατηρητέον ὅτι, ἡ ἀρχὴ τοῦ δυασμοῦ ἐφαρμοζομένη ἐπὶ μὲν τῆς ὁμογραφίας μεταξὺ δύο ἐπιπέδων δίδει πάλιν ὁμογραφίαν, ἐπὶ δὲ τῆς ἀντιστροφῆς δίδει πάλιν ἀντιστροφήν. Ἤτοι, ἂν μὲν ἡ ὁμογραφία θεωρηθῇ ὡς σχέσις μεταξὺ τῶν δύο συστημάτων σημείων τῶν ἐπιπέδων (δι' ἐφαρμογῆς τῆς ἀρχῆς τοῦ δυασμοῦ), θὰ ἔχωμεν μίαν σχέσιν μεταξὺ τῶν δύο συστημάτων εὐθειῶν τῶν ἐπιπέδων. Ἐὰν δ' ἡ ἀντιστροφὴ θεωρηθῇ ὡς σχέσις μεταξὺ ἑνὸς συστήματος σημείων τοῦ ἑνὸς ἐπιπέδου πρὸς τὸ σύστημα εὐθειῶν τοῦ ἄλλου, θὰ ἔχωμεν (διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἀρχῆς τοῦ δυασμοῦ) μίαν σχέσιν μεταξὺ τοῦ συστήματος τῶν εὐθειῶν τοῦ πρώτου πρὸς τὸ σύστημα τῶν σημείων τοῦ δευτέρου.

Δύο κεντρικαὶ δέσμαι λέγονται ὁμογραφικαί, ἂν εἰς ἑκάστην εὐθεῖαν καὶ εἰς ἕκαστον ἐπίπεδον τῆς μιᾶς ἀντιστοιχῇ μία εὐθεῖα καὶ ἓν ἐπίπεδον τῆς ἄλλης, εἰς τρόπον ὥστε, ἂν τὰ ἐν λόγῳ στοιχεῖα τῆς πρώτης κεῖνται ἐπ' ἀλλήλων καὶ τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν τῆς ἄλλης νὰ κεῖνται ὁμοίως ἐπ' ἀλλήλων.

Δύο κεντρικαὶ δέσμαι λέγονται ἀντίστροφοι ἀλλήλων, ἂν εἰς ἑκάστην εὐθεῖαν καὶ εἰς ἕκαστον ἐπίπεδον τῆς μιᾶς ἀντιστοιχῇ ἓν ἐπίπεδον καὶ μία εὐθεῖα τῆς ἄλλης, εἰς τρόπον ὥστε, ἂν τὰ δύο ἐν λόγῳ στοιχεῖα τῆς μιᾶς κεῖνται ἐπ' ἀλλήλων, νὰ συμβαίνῃ τοῦτο καὶ διὰ τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν στοιχεῖα τῆς ἄλλης.

Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ θεωρήσωμεν *τὴν ὁμογραφίαν μεταξὺ ἑνὸς ἐπιπέδου καὶ μιᾶς κεντρικῆς δέσμης,* διὰ τῆς ἀντιστοιχίας τῶν στοιχείων (σημείων καὶ εὐθειῶν) τοῦ πεδίου πρὸς τὰ στοιχεῖα (εὐθείας καὶ ἐπίπεδα) τῆς δέσμης εἰς τρόπον ὥστε, ἂν τὰ θεωρούμενα στοιχεῖα (σημεῖα καὶ ἐπίπεδα) τῆς δέσμης κεῖνται ἐπ' ἀλλήλων καὶ τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν (σημεῖα καὶ εὐθεῖαι) τοῦ πεδίου νὰ κεῖνται ἐπ' ἀλλήλων. Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἔχομεν *τὴν ἀντιστροφὴν μεταξὺ ἑνὸς πεδίου καὶ μιᾶς κεντρικῆς δέσμης,* ἐὰν εἰς ἕκαστον στοιχεῖον (σημεῖον ἢ εὐθεῖαν) τοῦ πεδίου ἀντιστοιχῇ ἓν στοιχεῖον (ἐπίπεδον ἢ εὐθεῖα) τῆς δέσμης, καὶ εἰς στοιχεῖα κείμενα ἐπ' ἀλλήλων τοῦ πεδίου ἀντιστοιχοῦν στοιχεῖα κείμενα ἐπ' ἀλλήλων τῆς δέσμης.

Ἡ ὁμογραφία καὶ ἡ ἀντιστροφὴ ἐν γένει δύναται νὰ θεωρηθῇ, καθὼς ἡ ὁμογραφία μεταξὺ δύο ἐπιπέδων, ὡς μία σχέσις ἀντιστρεπτὴ καθ' ἕνα μόνον τρόπον μεταξὺ τῶν στοιχείων δύο σχηματισμῶν δευτέρας βαθμῖδος, ἐν ᾗ εἰς τὰ στοιχεῖα ἑνὸς σχηματισμοῦ πρώτης βαθμῖδος ἐν τῷ πρώτῳ σχηματισμῷ ἀντιστοιχοῦν τὰ στοιχεῖα ἑνὸς σχηματισμοῦ πρώτης βαθμῖδος ἐν τῷ δευτέρῳ σχηματισμῷ. Ἡ μόνη διαφορὰ ἔγκειται μόνον εἰς τὴν ἑτερωνυμίαν τῶν ἀντιστοιχούντων στοιχείων εἰς τοὺς δύο σχηματισμούς, καὶ διὰ τοῦτο ἡ ὁμογραφία καὶ ἡ ἀντιστροφὴ λέγονται μὲ ἓν ὄνομα *προβολικότης μεταξὺ πεδίων καὶ δεσμῶν ἢ μεταξὺ σχηματισμῶν δευτέρας βαθμῖδος.* Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι,

«δύο σχηματισμοὶ δευτέρας βαθμῖδος εἶνε προβολικοί, ἐὰν σχετίζωνται οὕτω πρὸς ἀλλήλους, ὥστε εἰς ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ ἑνὸς νὰ ἀντιστοιχῇ ἓν τοῦ ἄλλου, καὶ εἰς στοιχεῖα σχηματισμοῦ πρώτης βαθμῖδος τοῦ ἑνὸς σχηματισμοῦ ἀντιστοιχοῦν στοιχεῖα ἑνὸς (ὁμολόγου) σχηματισμοῦ τῆς πρώτης βαθμῖδος ἐν τῷ δευτέρῳ».

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὁρισμῶν ἕπεται ὅτι,

«ἐὰν μὲν δύο σχηματισμοὶ δευτέρας βαθμῖδος εἶνε προβολι-

κοὶ πρὸς τρίτον, εἶνε καὶ μεταξύ των προβολικοί· ἐὰν δ' εἶνε ὁμογραφικοὶ πρὸς τρίτον, εἶνε καὶ μεταξύ των ὁμογραφικοί».

«Ἐὰν δύο σχηματισμοὶ δευτέρας βαθμῖδος εἶνε ἀντίστροφοι πρὸς τρίτον, εἶνε μεταξύ των ὁμογραφικοί».

«Ἐὰν ἐκ δύο σχηματισμῶν δευτέρας βαθμῖδος ὁ εἷς εἶνε ὁμογραφικός, ὁ δὲ ἀντίστροφος πρὸς τὸν αὐτὸν τρίτον, εἶνε μεταξύ των ἀντίστροφοι».

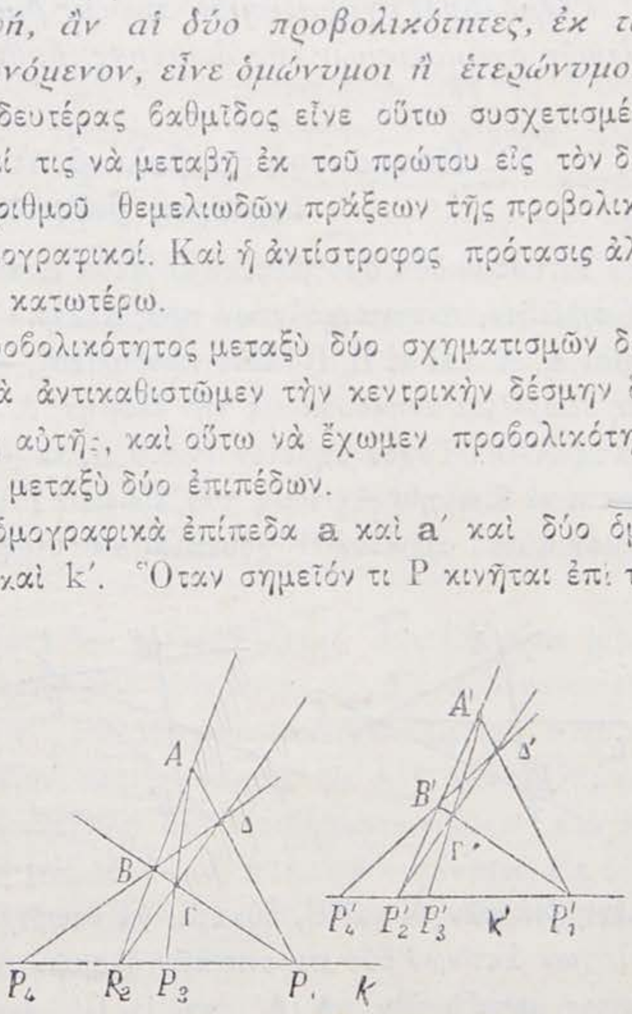
Τὰς προτάσεις ταύτας δυνάμεθα νὰ περιλάβωμεν εἰς τὴν ἑξῆς γενικὴν πρότασιν.

«Τὸ γινόμενον δύο προβολικοτήτων μεταξὺ δύο σχηματισμῶν δευτέρας βαθμῖδος εἶνε μία προβολικότης, καὶ μάλιστα μία ὁμογραφία ἢ μία ἀντιστροφή, ἂν αἱ δύο προβολικότητες, ἐκ τῶν ὁποίων σχηματίζεται τὸ γινόμενον, εἶνε ὁμώνυμοι ἢ ἑτερώνυμοι».

Ἐὰν δύο σχηματισμοὶ δευτέρας βαθμῖδος εἶνε οὕτω συσχετισμένοι μεταξύ των, ὥστε νὰ δύναταί τις νὰ μεταβῇ ἐκ τοῦ πρώτου εἰς τὸν δεύτερον διὰ πεπερασμένου ἀριθμοῦ θεμελιωδῶν πράξεων τῆς προβολικῆς Γεωμετρίας, θὰ εἶνε οὗτοι ὁμογραφικοί. Καὶ ἡ ἀντίστροφος πρότασις ἀληθεύει, ὡς συνάγεται ἐκ τῶν κατωτέρω.

Ἐν τῇ σπουδῇ τῆς προβολικότητος μεταξὺ δύο σχηματισμῶν δευτέρας βαθμῖδος δυνάμεθα νὰ ἀντικαθιστῶμεν τὴν κεντρικὴν δέσμην διὰ πεδίου, τὸ ὁποῖον εἶνε τομὴ αὐτῆς, καὶ οὕτω νὰ ἔχωμεν προβολικότητα (ὁμογραφίαν ἢ ἀντιστροφὴν) μεταξὺ δύο ἐπιπέδων.

Ἔστω ὅτι ἔχομεν δύο ὁμογραφικὰ ἐπίπεδα **a** καὶ **a**′ καὶ δύο ὁμολόγους εὐθείας ἐπ' αὐτῶν k καὶ k′. Ὅταν σημεῖόν τι P κινῆται ἐπὶ τῆς k, τὸ ἀντίστοιχον αὐτοῦ P′ κινεῖται ἐπὶ τῆς k′ καὶ ἔχομεν οὕτω μεταξὺ τῶν k καὶ k′ μίαν σχέσιν ἀντιστρεπτὴν καθ' ἕνα μόνον τρόπον. Ἡ σχέσις αὕτη εἶνε μία προβολικότης. Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ πρὸς τοῦτο, ὅτι εἰς τέσσαρα σημεῖα P_1, P_3, P_2, P_4 τῆς k,



τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν ἁρμονικὸν σύμπλεγμα, ἀντιστοιχοῦν τέσσαρα σημεῖα P_1', P_3', P_2', P_4' τῆς k′, ἀποτελοῦντα ἐπίσης ἁρμονικὸν σύμπλεγμα. Πράγματι, ἂν θεωρήσωμεν τὸ τετρακόρυφον ΑΒΓΔ, δι' οὗ ὁρίζεται τὸ ἁρμονικὸν σύμπλεγμα $(P_1P_3P_2P_4)$, θὰ ἀντιστοιχῇ εἰς τοῦτο ἐν τῷ ἐπιπέδῳ **a**′ ἐν τετρακόρυφον Α'Β'Γ'Δ', τοῦ ὁποίου δύο πλευραὶ διέρχονται διὰ τοῦ P_1', δύο διὰ τοῦ P_2', καὶ ἀνὰ μία τῶν δύο ἄλλων διὰ τῶν P_3' καὶ P_4' ἀντιστοίχως. Ἄρα καὶ τὸ σύμπλεγμα ($P_1'P_3'P_2'P_4'$) εἶνε ἁρμονικόν. Οὕτω ἐδείχθη ἡ ἑξῆς θεμελιώδης πρότασις.

«Δύο ὁμόλογοι σημειοσειραί, κείμεναι ἐπὶ ὁμογραφικῶν ἐπιπέδων, εἶνε προβολικαί».

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἀποδεικνύομεν καὶ τὴν ἑξῆς πρότασιν.

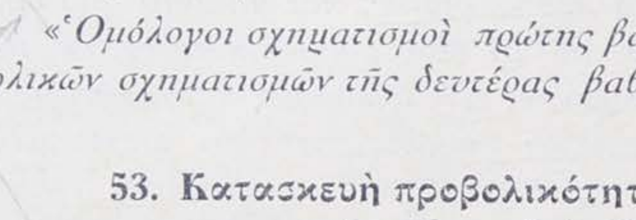
«Μία σημειοσειρὰ καὶ ἡ ὁμόλογος αὐτῆς ἐπίπεδος δέσμη, κείμεναι ἐπὶ ἀντιστρόφων ἐπιπέδων, εἶνε προβολικαί».

Ἢ γενικώτερον.

«Ὁμόλογοι σχηματισμοὶ πρώτης βαθμῖδος, κείμενοι ἐπὶ προβολικῶν σχηματισμῶν τῆς δευτέρας βαθμῖδος, εἶνε προβολικοί».

53. Κατασκευὴ προβολικότητος σχηματισμῶν δευτέρας βαθμῖδος.

Ἔστωσαν δύο ὁμογραφικὰ ἐπίπεδα **a** καὶ **a'** καὶ δύο ζεύγη ΑΑ' καὶ ΒΒ' σημείων, ἀντιστοιχούντων πρὸς ἄλληλα ἐν τῇ ὁμογραφίᾳ ταύτῃ. Αἱ δέσμαι Α, Α' καὶ αἱ Β, Β' εἶνε προβολικαί, εἰς δὲ τὴν ἀκτῖνα ΑΒ, εἴτε αὕτη θεωρεῖται ἀνήκουσα εἰς τὴν δέσμην Α εἴτε εἰς τὴν Β, ἀντιστοιχεῖ ἡ ἀκτὶς Α'Β'. Τυχὸν σημεῖον Ρ τοῦ **a**, κείμενον ἐκτὸς τῆς ἀκτῖνος ΑΒ, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τομὴ τῶν εὐθειῶν ΡΑ καὶ ΡΒ, ὅτε καὶ τὸ ἀντίστοιχον αὐτοῦ σημεῖον Ρ' δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τομὴ τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς ἐν λόγῳ εὐθείας ἐν τῇ προβολικότητι μεταξὺ τῶν δεσμῶν Α,Α' καὶ Β,Β'. Τυχοῦσα εὐθεῖα k, διαγραφομένη ὑπὸ τοῦ Ρ ἐν τῷ **a**, καὶ μὴ διερχομένη διὰ τῶν Α καὶ Β, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τόπος τῶν τομῶν τῶν ὁμολόγων ἀκτίνων δύο προοπτικῶν δεσμῶν Α, Β. Ἕνεκα τῆς προβολικότητος μεταξὺ τῶν Α, Α' καὶ Β, Β', ἐνῶ εἰς τὴν ἀκτῖνα ΑΒ ἀντιστοιχεῖ πάντοτε ἡ Α' Β', αἱ δέσμαι Α', Β' εἶνε προβολικαί, καὶ ἡ ἀκτὶς Α'Β' ἀντιστοιχεῖ πρὸς ἑαυτήν, ἄρα καὶ προοπτικαί, ὁ δὲ τόπος τῶν τομῶν τῶν ὁμολόγων ἀκτίνων εἶνε ἡ εὐθεῖα k', ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν k, διαγράφεται δ' αὕτη ὑπὸ τοῦ σημείου Ρ'.



Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι, ἡ ὑποτεθεῖσα δεδομένη ὁμογραφία μεταξὺ τῶν **a** καὶ **a**′ εἶνε ὡρισμένη διὰ τῆς προβολικότητος μεταξὺ τῶν ζευγῶν τῶν δεσμῶν Α,Α′ καὶ Β,Β′.

Λαμβάνομεν τώρα αὐθαιρέτως δύο δέσμας Α,Β ἐν τῷ ἐπιπέδῳ **a** καὶ εἰς ἓν ἄλλο ἐπίπεδον **a**′ δύο ἄλλας Α′,Β′, αἵτινες εἶνε προβολικαὶ πρὸς τὰς πρώτας εἰς τρόπον, ὥστε εἰς τὴν ἀκτῖνα ΑΒ νὰ ἀντιστοιχῇ πάντοτε (καὶ εἰς τὰς δύο προβολικότητας) ἡ ἀκτὶς Α′Β′. Θὰ δείξωμεν ὅτι, ἐὰν συμβαίνῃ τοῦτο, τὰ δύο ἐπίπεδα **a** καὶ **a**′ εἶνε ὁμογραφικά. Πράγματι, εἶνε ταῦτα ὁμογραφικά, διότι

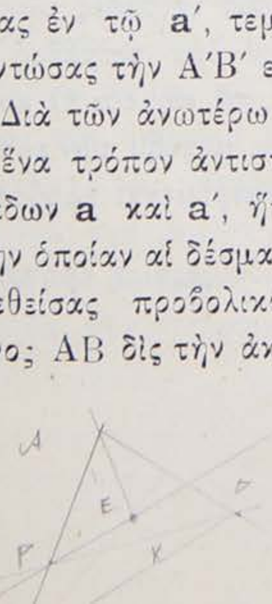
1) Εἰς ἕκαστον σημεῖον Ρ τοῦ **a**, κείμενον ἐκτὸς τῆς ΑΒ, ἀντιστοιχεῖ τὸ σημεῖον Ρ′ τοῦ **a**′, τὸ ὁποῖον ὡς τομὴ τῶν διὰ τοῦ Α′ καὶ Β′ διερχομένων ἀκτίνων, αἵτινες ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς ἀκτῖνας ΡΑ καὶ ΡΒ, εἶνε ὡρισμένον.

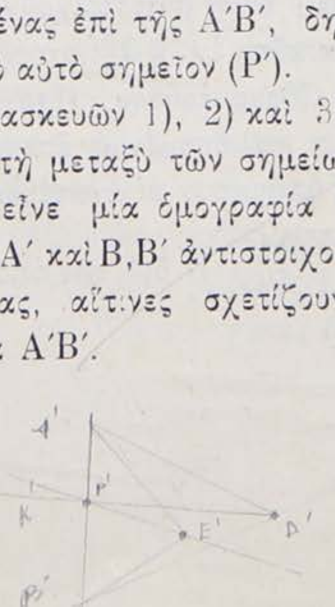
2) Εἰς ἑκάστην εὐθεῖαν k τοῦ **a**, διαγραφομένην ὑπὸ τοῦ Ρ (καὶ μὴ διερχομένην διὰ τοῦ Α ἢ Β) ἀντιστοιχεῖ ἡ ὑπὸ τοῦ Ρ′ ἐν τῷ **a**′ διαγραφομένη εὐθεῖα k′, ἥτις ὁρίζεται ὡς τόπος τῶν τομῶν τῶν ἀκτίνων τῶν διερχομένων διὰ τῶν Α′ καὶ Β′, αἵτινες ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς ἀκτῖνας, τὰς προβαλλούσας ἀπὸ τῶν Α καὶ Β τὰ σημεῖα τῆς k. Αἱ δέσμαι Α′,Β′, αἵτινες σχετίζονται προβολικῶς πρὸς τὰς προοπτικὰς δέσμας Α καὶ Β, εἶνε καὶ μεταξύ των προοπτικαί, ἐπειδὴ εἰς τὴν ἀκτῖνα ΑΒ ἀντιστοιχεῖ πάντοτε ἡ Α′Β′.

3) Εἰς ἕκαστον σημεῖον Ρ τῆς εὐθείας ΑΒ (διάφορον τῶν Α καὶ Β) ἀντιστοιχεῖ τὸ σημεῖον Ρ′, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ὡς τομὴ τῆς Α′Β′ καὶ τῆς k′, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς εὐθεῖάν τινα (διάφορον τῆς ΑΒ), διερχομένην διὰ τοῦ Ρ.

Πράγματι, τὸ σημεῖον τοῦτο δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν λάβωμεν μίαν ἄλλην εὐθεῖαν k διὰ τοῦ Ρ, ἐπειδὴ δύο εὐθεῖαι ἐν τῷ **a**′, τεμνόμεναι εἰς σημεῖον κείμενον ἐκτὸς τῆς Α′Β′, ἀντιστοιχοῦν πάντοτε εἰς δύο εὐθείας τοῦ **a**, τεμνομένας εἰς ἓν σημεῖον, κείμενον ἐκτὸς τῆς ΑΒ, καὶ τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται κατὰ τἀνωτέρω. Ἑπομένως δύο οἱαιδήποτε εὐθεῖαι τοῦ **a**, αἵτινες τέμνονται ἐπὶ τῆς ΑΒ (εἰς τὸ Ρ), ἀντιστοιχοῦν πάντοτε εἰς δύο εὐθείας ἐν τῷ **a**′, τεμνομένας ἐπὶ τῆς Α′Β′, δηλαδὴ εἰς δύο εὐθείας, συναντώσας τὴν Α′Β′ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον (Ρ′).

Διὰ τῶν ἀνωτέρω κατασκευῶν 1), 2) καὶ 3) προκύπτει μία σχέσις καθ' ἕνα τρόπον ἀντιστρεπτὴ μεταξὺ τῶν σημείων καὶ τῶν εὐθειῶν τῶν ἐπιπέδων **a** καὶ **a**′, ἥτις εἶνε μία ὁμογραφία μεταξὺ τῶν **a** καὶ **a**′, εἰς τὴν ὁποίαν αἱ δέσμαι Α,Α′ καὶ Β,Β′ ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἀλλήλας εἰς τὰς ὑποτεθείσας προβολικότητας, αἵτινες σχετίζουν ὡς ἀντίστοιχον τῆς ἀκτῖνος ΑΒ εἰς τὴν ἀκτῖνα Α′Β′.





Οὕτω ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«Ὑπάρχει μία ὡρισμένη ὁμογραφία μεταξὺ δύο ἐπιπέδων, ἐν τῇ ὁποίᾳ δύο ζεύγη ἀκτίνων ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἄλληλα εἰς αὐθερέτως λαμβανομένας προβολικότητας, ὑποτιθεμένου ὅτι εἰς τὴν κοινὴν ἀκτῖνα τῶν δύο δεσμῶν τοῦ ἑνὸς ἐπιπέδου ἀντιστοιχεῖ πάντοτε ἡ κοινὴ ἀκτὶς τῶν δύο δεσμῶν τοῦ ἄλλου ἐπιπέδου».

Τὴν ἀνωτέρω πορείαν δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν, κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ δυασμοῦ, ἢ καὶ διὰ τὰ δύο ἐπίπεδα ἢ καὶ δι' ἓν μόνον. Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὴν ὁμογραφίαν μεταξὺ δύο ἐπιπέδων τῇ βοηθείᾳ δύο ζευγῶν προβολικῶν σημειοσειρῶν, ἢ τὴν ἀντιστοφὴν τῇ βοηθείᾳ τῆς προβολικότητος μεταξὺ δύο σημειοσειρῶν καὶ δύο δεσμῶν.

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν τὴν ἑξῆς γενικὴν πρότασιν.

«Ὑπάρχει μία ὡρισμένη προβολικότης μεταξὺ δύο σχηματισμῶν δευτέρας βαθμῖδος, ἐν τῇ ὁποίᾳ δύο ζεύγη προβολικῶν σχηματισμῶν πρώτης βαθμῖδος ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἄλληλα, ἐὰν εἶνε ὁμόλογα ἐκεῖνα τὰ στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα εἶνε κοινὰ εἰς τὰ δύο ζεύγη».

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἐπὶ τῶν δύο ἐπιπέδων **a** καὶ **a**$'$ ὑπάρχουν δύο τετράδες σημείων A, B, Γ, Δ καὶ A', B', Γ', Δ' ἀνὰ τρία τῶν ὁποίων δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὰ δύο ἐπίπεδα δύνανται νὰ συσχετισθοῦν ὁμογραφικῶς, ὥστε τὰ ζεύγη τῶν σημείων AA', BB', $\Gamma\Gamma'$, $\Delta\Delta'$ νὰ ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἄλληλα, πρὸς δὲ ὅτι οὕτω ἡ ὁμογραφία θὰ εἶνε ὡρισμένη.

Τῷ ὄντι, ἐὰν θεωρήσωμεν τὰ ζεύγη τῶν εὐθειῶν $AB, \Gamma\Delta$ καὶ $A'B', \Gamma'\Delta'$ καὶ παραστήσωμεν διὰ O καὶ O' τὰς τομὰς τούτων ἀντιστοίχως ($O \equiv$ τομὴ τῶν AB καὶ $\Gamma\Delta$, $O' \equiv$ τομὴ τῶν $A'B', \Gamma'\Delta'$) καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν μεταξὺ τῶν εὐθειῶν AB καὶ $A'B'$ τὴν προβολικότητα $\begin{pmatrix} A\,B\,O \\ A'B'O' \end{pmatrix}$, ἥτις ὁρίζεται ἐκ τῶν δύο ἀντιστοίχων τριάδων τῶν σημείων, καὶ κατ' ἀνάλογον τρόπον τὴν προβολικότητα $\begin{pmatrix} \Gamma\,\Delta\,O \\ \Gamma'\Delta'O' \end{pmatrix}$, θὰ ἔχωμεν μίαν ὁμογραφίαν μεταξὺ τῶν **a**, **a**$'$, ἐν ᾗ ἀντιστοιχοῦν αἱ δύο τετράδες τῶν σημείων. Ἀλλ' ἡ ὁμογραφία αὕτη ἐν ᾗ ἀντιστοιχοῦν αἱ δύο τετράδες τῶν σημείων εἶνε ἡ μόνη τοῦ εἴδους τούτου. Πράγματι, τὰ σημεῖα O καὶ O' ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἄλληλα, καὶ ἑπομένως ἕπεται ὅτι, μεταξὺ τῶν εὐθειῶν $AB, A'B'$ καὶ $\Gamma\Delta, \Gamma'\Delta'$ θὰ ὑπάρχουν αἱ ἀνωτέρω ἀναφερόμεναι προβολικότητες $\begin{pmatrix} A\,B\,O \\ A'B'O' \end{pmatrix}$ καὶ $\begin{pmatrix} \Gamma\,\Delta\,O \\ \Gamma'\Delta'O' \end{pmatrix}$, διὰ τῶν ὁποίων ὁρίζεται ἡ ὁμογραφία μεταξὺ τῶν **a** καὶ **a**$'$.

Οὕτω ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«Μεταξὺ δύο σχηματισμῶν δευτέρας βαθμῖδος ὑπάρχει μία προβολικότης, ὁριζομένη διὰ τεσσάρων ζευγῶν ὁμολόγων στοιχείων, ἐν ὅσῳ ἀνὰ τρία τῶν τεσσάρων στοιχείων ἑκάστου σχηματισμοῦ δὲν κεῖνται ἐφ' ἑνὸς σχηματισμοῦ πρώτης βαθμῖδος».

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι,

«ἐὰν δύο σχηματισμοὶ δευτέρας βαθμῖδος εἶνε ὁμογραφικοί, δυνάμεθα νὰ μεταβῶμεν ἐκ τοῦ ἑνὸς τούτων εἰς τὸν ἄλλον διὰ πεπερασμένου ἀριθμοῦ θεμελιωδῶν πράξεων τῆς προβολικῆς Γεωμετρίας».

Πρὸς κατασκευὴν μιᾶς ὁμογραφίας μεταξὺ δύο ἐπιπέδων **a** κα **a'** ἔστω ὅτι δίδονται

τέσσαρα ζεύγη ὁμολόγων σημείων ὡς κορυφαὶ δύο τετρακορύφων ΑΒΓΔ καὶ Α'Β'Γ'Δ'.

Μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῶν δύο τετρακορύφων, αἵτινες συνδέουν ὁμολόγους κορυφάς, π.χ. μεταξὺ τῶν ΑΒ καὶ Α'Β', κατασκευάζεται μία προβολικότης, ἐν ᾗ ἀντιστοιχοῦν τὰ Α καὶ Α', Β καὶ Β' καὶ τὰ διαγώνια σημεῖα τῶν δύο τετρακορύφων, τὰ ὁποῖα εἶνε τομαὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, καὶ Α'Β', Γ'Δ'.

Ὁμοίως κατασκευάζεται μία προβολικότης μεταξὺ τῶν δεσμῶν Α καὶ Α' καὶ Β καὶ Β' κ.ο.κ., ἐν τῇ ὁποίᾳ εἰς τὰς ἀκτῖνας ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ ἀντιστοιχοῦν αἱ ἀκτῖνες Α'Β', Α'Γ', Α'Δ' καὶ ὁμοίως εἰς τὰς ΒΑ, ΒΓ, ΒΔ αἱ Β'Α', Β'Γ', Β'Δ' κ.ο.κ.

Ἔστω τώρα ὅτι δίδεται εὐθεῖά τις k ἐν τῷ **a**, μὴ διερχομένη διά τινος τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ. Αὕτη θὰ τέμνῃ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΓΔ εἰς δύο σημεῖα, διὰ τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὰ ὁμόλογα αὐτῶν ἐπὶ τῶν πλευρῶν Α'Β' καὶ Γ'Δ'.

τέσσαρα ζεύγη ὁμολόγων εὐθειῶν ὡς πλευραὶ δύο τετραπλεύρων αβγδ καὶ α'β'γ'δ'.

Μεταξὺ τῶν δεσμῶν, αἵτινες ὁρίζονται διὰ δύο ὁμολόγων πλευρῶν τῶν τετραπλεύρων, π.χ. μεταξὺ τῶν αβ καὶ α'β', κατασκευάζεται μία προβολικότης, ἐν ᾗ ἀντιστοιχοῦν αἱ α καὶ α', β καὶ β' καὶ αἱ διαγώνιοι εὐθεῖαι τῶν τετραπλεύρων, αἵτινες συνδέουν τὰ σημεῖα αβ καὶ γδ καὶ τὰ α'β' καὶ γ'δ'.

Ὁμοίως κατασκευάζεται μία προβολικότης μεταξὺ τῶν εὐθειῶν α καὶ α' καὶ μεταξὺ τῶν β καὶ β' κ.ο.κ., ἐν ᾗ εἰς τὰ σημεῖα αβ, αγ, αδ ἀντιστοιχοῦν τὰ σημεῖα α'β', α'γ' καὶ α'δ' καὶ ὁμοίως εἰς τὰ βα, βγ, βδ τὰ β'α', β'γ', β'δ' κ.ο.κ.

Ἔστω τώρα σημεῖόν τι Ρ ἐν τῷ **a**, μὴ κείμενον ἐπί τινος τῶν εὐθειῶν α, β, γ, δ. Τοῦτο θὰ προβάλλεται ἀπὸ τῶν σημείων αβ καὶ γδ καὶ ὁρίζονται αἱ εὐθεῖαι, αἵτινες εἶνε ὁμόλογοι πρὸς τὰς προβαλλούσας ταύτας εὐθείας, εἰς τὰς δέσμας α'β'

Ἡ εὐθεῖα k΄ ἐν τῷ **a**΄, ἥτις συνδέει τὰ σημεῖα, θὰ εἶνε ἡ εὐθεῖα, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν k ἐν τῇ ὁμογραφίᾳ μεταξὺ τῶν **a** καὶ **a**΄.

Ἀντιστρόφως, ἂν δίδεται ἓν σημεῖον P, μὴ κείμενον ἐπί τινος τῶν κορυφῶν τοῦ τετρακορύφου ΑΒΓΔ, προβάλλομεν αὐτὸ π.χ. ἀπὸ τῶν Α καὶ Β καὶ ὁρίζομεν τὰς εἰς τὰς προβαλλούσας αὐτὸ εὐθείας ὁμολόγους ἀκτῖνας εἰς τὰς δέσμας Α΄ καὶ β΄. Ἡ τομὴ τῶν ἀκτίνων τούτων θὰ εἶνε τὸ σημεῖον P΄ τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σημεῖον P ἐν τῇ ἐν λόγῳ ὁμογραφίᾳ.

καὶ γ΄δ΄. Ἡ τομὴ P΄ τῶν εὐθειῶν τούτων θὰ εἶνε τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον θὰ ἀντιστοιχῇ εἰς τὸ P ἐν τῇ ὁμογραφίᾳ τῶν δύο ἐπιπέδων **a** καὶ **a**΄.

Ἀντιστρόφως, ἂν δίδεται εὐθεῖά τις k ἐν τῷ **a**, μὴ διερχομένη διά τινος τῶν κορυφῶν τοῦ τετραπλεύρου αβγδ, θὰ εὕρωμεν τὴν τομὴν αὐτῆς π.χ. μετὰ τῶν εὐθειῶν α καὶ β, καὶ θὰ ὁρίσωμεν τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν ἐπὶ τῶν εὐθειῶν α΄ καὶ β΄ εἰς τὰς τομὰς ταύτας. Ἡ εὐθεῖα k΄, ἥτις συνδέει τὰ σημεῖα ταῦτα, θὰ εἶνε ἐκείνη, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν k ἐν τῇ ὁμογραφίᾳ.

Δυνάμεθα τώρα νὰ κατασκευάσωμεν μεταξὺ τῶν **a** καὶ **a**΄ τὴν ἀντιστροφὴν $\begin{pmatrix} \mathrm{ΑΒΓΔ} \\ α\, β\, γ\, δ \end{pmatrix}$, ἐν τῇ ὁποίᾳ τέσσαρα σημεῖα Α,Β,Γ,Δ, κορυφαὶ ἑνὸς τετρακορύφου ἐν τῷ **a**, ἀντιστοιχοῦν εἰς τέσσαρας εὐθείας α,β,γ,δ, πλευρὰς ἑνὸς τετραπλεύρου ἐν τῷ **a**΄. Εἶνε φανερόν, ὅτι αἱ δέσμαι Α,Β, Γ,Δ θὰ εἶνε προβολικαὶ πρὸς τὰς σημειοσειρὰς α,β,γ,δ, καὶ ὁμοίως αἱ σημειοσειραὶ ΑΒ,ΓΔ κλπ. πρὸς τὰς δέσμας αβ,γδ κλπ.

Ἐὰν δοθῇ ἓν σημεῖον P, μὴ κείμενον ἐπί τινος πλευρᾶς τοῦ τετρακορύφου ΑΒΓΔ, θὰ προβληθῇ τοῦτο, π.χ. ἀπὸ τῶν Α καὶ Β, καὶ θὰ ὁρισθοῦν τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα θὰ ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰς δύο ταύτας π οβαλλούσας εὐθείας ἐπὶ τῶν α καὶ β. Ἡ εὐθεῖα k, ἥτις συνδέει τὰ δύο ταῦτα σημεῖα, θὰ εἶνε ἡ εὐθεῖα, ἥτις θὰ ~~θὰ~~ ἀντιστοιχῇ ἐν τῇ ἀντιστροφῇ τῶν **a** καὶ **a**΄ εἰς τὸ σημεῖον P. Ἀντιστρόφως, ἂν δοθῇ μία εὐθεῖα ἐν τῷ **a**, μὴ διερχομένη διὰ τῶν Α,Β,Γ,Δ, θὰ εὕρωμεν τὴν τομὴν αὐτῆς μετὰ τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, καὶ ἀκολούθως θὰ ὁρίσωμεν τὰς εὐθείας, αἵτινες ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς δέσμας αβ καὶ γδ πρὸς τὰς τομὰς ταύτας. Ἡ τομὴ τῶν εὐθειῶν τούτων θὰ εἶνε τὸ σημεῖον P, τὸ ὁποῖον θὰ εἶνε ὁμόλογον ἐν τῇ ἀντιστροφῇ πρὸς τὴν εὐθεῖαν k.

§ 54. Προοπτικοὶ σχηματισμοὶ δευτέρας βαθμῖδος.

Ἐὰν δύο (διάφορα) ἐπίπεδα εἶνε προοπτικά, ἡ ἐπ᾿ αὐτῶν κοινὴ εὐθεῖα τούτων ἀντιστοιχεῖ πρὸς ἑαυτήν, ἀποτελουμένη ἐκ σημείων ἀντιστοίχων πρὸς ἑαυτά. Ἐὰν δύο διάφοροι κεντρικαὶ δέσμαι εἶνε προοπτικαί, τὰ ἐπίπεδα, τὰ διερχόμενα διὰ τῆς εὐθείας τῆς συνδεούσης τὰ κέντρα τῶν δεσμῶν, ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἑαυτά. Ἀντιστρόφως ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«*Ἐὰν δύο διάφορα ἐπίπεδα εἶνε ὁμογραφικά, ἡ δὲ κοινὴ αὐτῶν εὐθεῖα ἀποτελεῖται ἐκ σημείων ἀντιστοιχούντων εἰς ἑαυτά, τὰ δύο ἐπίπεδα εἶνε προοπτικά*»

«*Ἐὰν δύο διάφοροι κεντρικαὶ δέσμαι εἶνε ὁμογραφικαί, ἡ δὲ κοινὴ αὐτῶν ἀξονικὴ δέσμη ἀποτελεῖται ἐξ ἐπιπέδων ἀντιστοιχούντων εἰς ἑαυτά, εἶνε προοπτικαί*».

Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς ἀνωτέρω ἀριστερὰ ἀναγραφομένης προτάσεως, παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν **a** καὶ **a**′ εἶνε τὰ δύο ἐπίπεδα καὶ α ≡ **aa**′ εἶνε ἡ τομὴ αὐτῶν, ἑκάστη εὐθεῖα k τοῦ **a** τέμνει τὴν ἀντιστοιχοῦσαν αὐτῆς εὐθεῖαν k′ ἐπὶ τοῦ **a**′ εἰς τὸ σημεῖον αk, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ἑαυτῷ. Ἔστωσαν τώρα A καὶ B δύο σημεῖα τοῦ **a** καὶ A′ καὶ B′ τὰ ὁμόλογα αὐτῶν ἐν τῷ **a**′. Αἱ εὐθεῖαι AB καὶ A′B′ εἶνε ὁμόλογοι, καὶ ἑπομένως τέμνονται ἐπὶ τῆς α. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι, αἱ εὐθεῖαι AA′ καὶ BB′ κεῖνται ἐφ᾽ ἑνὸς ἐπιπέδου, καὶ ἑπομένως τέμνονται. Ἄρα τέμνονται αἱ εὐθεῖαι, αἱ συνδέουσαι ἀνὰ δύο ὁμόλογα σημεῖα τῶν **a** καὶ **a**′, καὶ ἐπειδὴ (προφανῶς) δὲν κεῖνται πᾶσαι αὗται ἐφ᾽ ἑνὸς ἐπιπέδου, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὰ δὲ **a** καὶ **a**′ εἶνε προοπτικά.

§ 55. Προοπτικὴ ἢ ὁμολογικὴ ὁμογραφία.

Ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν ὁμογραφίαν μεταξὺ δύο ἐπιπέδων, κειμένων ἐπ᾽ ἀλλήλων, δηλαδὴ ἐφ᾽ ἑνὸς ἐπιπέδου **a**, ἓν στοιχεῖον αὐτοῦ, συμπῖπτον μετὰ τοῦ ἀντιστοίχου πρὸς αὐτό, λέγεται *διπλοῦν στοιχεῖον*. Ἐὰν λάβωμεν ὡς διπλᾶ σημεῖα τοῦ **a** τέσσαρα σημεῖα ἀνὰ τρία τῶν ὁποίων δὲν κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας, θὰ ἔχωμεν μίαν ὁμογραφίαν ἐπὶ τοῦ **a**, ἥτις καλεῖται *ἐκ ταὐτότητος ὁμογραφία*, καὶ ἐν αὐτῇ ἕκαστον στοιχεῖον ἀντιστοιχεῖ ἑαυτῷ.

Ἑπομένως δὲν δύνανται νὰ ὑπάρχουν εἰς μὴ ἐκ ταὐτότητος ὁμογραφίαν τοῦ ἐπιπέδου **a** τέσσαρα διπλᾶ σημεῖα, τρία τῶν ὁποίων νὰ μὴ κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας, ἢ (ἀντιστοίχως) τέσσαρες διπλαῖ εὐθεῖαι, τρεῖς τῶν ὁποίων νὰ μὴ ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν δέσμην.

Εὐθεῖά τις ἐν τῷ **a**, συνδέουσα δύο διπλᾶ σημεῖα εἶνε, ἕνεκα τῆς ὁμογραφίας, διπλῆ γραμμὴ καὶ σχετίζεται προβολικῶς πρὸς ἑαυτήν, ἐὰν δ᾽ ὑπάρχῃ καὶ τρίτον διπλοῦν σημεῖον ἐπ᾽ αὐτῆς, πάντα τὰ σημεῖα ταύτης εἶνε διπλᾶ, καὶ ἀντιστοίχως πρὸς ταῦτα (κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ δυασμοῦ), πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες μιᾶς δέσμης εἶνε διπλαῖ, ἂν ἔχῃ αὕτη τρεῖς διπλᾶς ἀκτῖνας. Ἐπομένως ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«*Ἐὰν ἐν (μὴ ἐκ ταυτότητος) ὁμογραφίᾳ ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου ὑπάρχουν τρία ὁμώνυμα διπλᾶ στοιχεῖα (σημεῖα ἢ εὐθεῖαι), ὑπάρχει εἷς σχηματισμὸς πρώτης βαθμῖδος, ἔχων πάντα τὰ στοιχεῖα αὐτοῦ διπλᾶ*».

Ἐὰν ἐν ὁμογραφίᾳ ὑπάρχῃ σημειοσειρὰ k μὲ διπλᾶ σημεῖα, ἑκάστη εὐθεῖα συναντᾷ τὴν k εἰς ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον ὡς διπλοῦν, πρέπει νὰ ἀνήκῃ εἰς τὴν ἀντίστοιχον εὐθεῖαν, δηλαδὴ ὑπάρχουν δύο ὁμόλογοι εὐθεῖαι, τεμνόμεναι ἐπὶ τῆς k. Ἀντιστρόφως· ἐὰν ἐν ὁμογραφίᾳ ἐν ἐπιπέδῳ πάντα τὰ ζεύγη τῶν ἀντιστοίχων εὐθειῶν τέμνωνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας, ἡ εὐθεῖα αὕτη ἀποτελεῖται ἐκ διπλῶν σημείων, ἐπειδὴ ἕκαστον σημεῖον ταύτης εἶνε κέντρον μιᾶς διπλῆς δέσμης.

Ἀντιστοίχως ἔχομεν κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ δυασμοῦ ὅτι· ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη διὰ τὴν ὕπαρξιν μιᾶς δέσμης ἐκ διπλῶν ἀκτίνων ἐν ἐπιπέδῳ μὴ ἐκ ταυτότητος ὁμογραφίᾳ ἔγκειται εἰς τὸ ὅτι, πάντα τὰ ζεύγη ὁμολόγων σημείων μὲ ἓν σταθερὸν κέντρον κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας γραμμῆς.

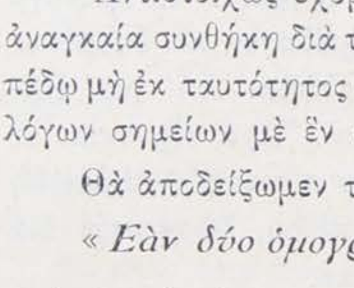
Θὰ ἀποδείξωμεν τώρα τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«*Ἐὰν δύο ὁμογραφικὰ ἐπίπεδα, κείμενα ἐπ᾽ ἀλλήλων ἔχουν*

(τρία διπλᾶ σημεῖα κείμενα ἐπ᾽ εὐθείας καὶ ἑπομένως) μίαν σημειοσειρὰν μὲ διπλᾶ σημεῖα (k), θὰ ἔχουν καὶ μία δέσμην μὲ διπλᾶς ἀκτῖνας».

(τρεῖς διπλᾶς εὐθείας διερχομένας δι᾽ ἑνὸς σημείου καὶ ἑπομένως) μίαν δέσμην (O) μὲ διπλᾶς ἀκτῖνας, θὰ ἔχουν καὶ μίαν σημειοσειρὰν μὲ διπλᾶ σημεῖα».

Ἀποδεικνύομεν μόνον τὴν ἀριστερὰ ἀνωτέρω ἀναγραφομένην πρότασιν. Ἔστωσαν **a** καὶ **a**′ δύο ὁμογραφικὰ ἐπίπεδα, κείμενα ἐπ᾽ ἀλλήλων, ἔχοντα τὴν εὐθεῖαν k μὲ διπλᾶ σημεῖα.



Παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι, ἐπὶ τῆς k τέμνονται πάντα τὰ ζεύγη τῶν ὁμολόγων εὐθειῶν α καὶ α′ ἐπειδὴ τὸ σημεῖον αk ὡς διπλοῦν πρέπει νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ σημεῖον α′k. Φέρομεν διὰ τῆς k ἓν ἐπίπεδον $\mathbf{a}_1$, διάφορον τοῦ $\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}'$ καὶ προβάλλομεν τὸ **a**′ ἐπὶ τοῦ $\mathbf{a}_1$ ἀπό τινος σημείου A, κειμένου ἐκτὸς αὐτῶν. Προκύπτει μία ὁμογραφία μεταξὺ τῶν $\mathbf{a}_1$ καὶ **a**, ἐν ᾗ ἡ k εἶνε μία εὐθεῖα ἀποτελουμένη ἐκ σημείων ἀντιστοιχούντων πρὸς ἑαυτά, ἄρα εἶνε μία προοπτικότης (§ 54).

Κατὰ ταῦτα, τὰ ζεύγη ὁμολόγων σημείων $MM_1, NN_1, \ldots$ κεῖνται πάντα μεθ' ἑνὸς σταθεροῦ σημείου O_1 ἐπὶ μιᾶς εὐθείας. Προβάλλομεν τώρα τὸ $\mathbf{a}_1$ ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τοῦ $\mathbf{a}'$. Αἱ συνδέουσαι εὐθεῖαι τὰ ζεύγη ὁμολόγων σημείων ($MM', NN', \ldots$) ἐν τῇ ὁμογραφίᾳ μεταξὺ τῶν $\mathbf{a}$ καὶ $\mathbf{a}'$ θὰ διέρχωνται πᾶσαι διὰ τοῦ σημείου O, καθ' ὃ προβάλλεται τὸ O_1. Ἄρα τὸ σημεῖον τοῦτο θὰ εἶνε τὸ κέντρον μιᾶς δέσμης ἐκ διπλῶν ἀκτίνων ἐν τῇ ὁμογρ. ~~ία~~ αφία

Καλεῖται *ὁμολογικὴ ὁμογραφία ἢ ὁμολογία μὲ ἄξονα τὴν εὐθεῖαν k καὶ κέντρον τὸ O ἢ κεντρικὴ ἢ καὶ προοπτικὴ ὁμογραφία* ἡ ἐπίπεδος ὁμογραφία (μεταξὺ δύο ἐπιπέδων κειμένων ἐπ' ἀλλήλων) ἐν τῇ ὁποίᾳ ὑπάρχει μία εὐθεῖα k ἐκ διπλῶν σημείων καὶ μία δέσμη O ἐκ διπλῶν ἀκτίνων.

Ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τῆς ἐπιπέδου ὁμολογίας ἔγκειται εἰς τὸ ὅτι,

«αἱ ὁμόλογοι εὐθεῖαι τέμνονται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῆς ὁμολογίας».

«τὰ ὁμόλογα σημεῖα μετὰ τοῦ κέντρου τῆς ὁμολογίας κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς».

Ἡ ἰδιότης ἵνα ὁμογραφία τις εἶνε ὁμολογικὴ εἶνε τὸ ὅτι αὕτη εἶνε ἀντιστρεπτὴ πρὸς ἑαυτήν. Παρατηρητέον δ' ὅτι δὲν ἀποκλείεται τὸ κέντρον O τῆς ὁμολογίας νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος, ὡς φαίνεται ἐκ τῆς ἑξῆς προτάσεως.

«Ὑπάρχει μία ἐπίπεδος ὁμολογία, ἔχουσα δοθέντα ἄξονα k *καὶ δοθὲν κέντρον O, ἐν τῇ ὁποίᾳ ἀντιστοιχοῦν*

δύο σημεῖα A καὶ A', κείμενα ἐπ' εὐθείας μετὰ τοῦ κέντρου O (διάφορα αὐτοῦ καὶ ἐκτὸς τοῦ ἄξονος)».

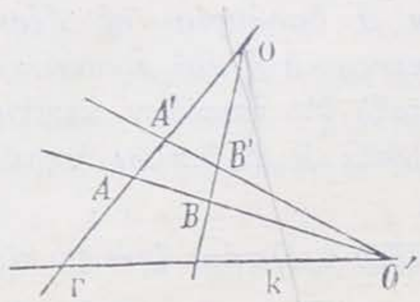
Πράγματι ἡ ὁμολογία αὕτη εἶνε ἡ ὁμογραφία, ἥτις ὁρίζεται ἐκ τοῦ ὅτι ὑποθέτομεν τὴν εὐθεῖαν k ἀντιστοιχοῦσαν πρὸς ἑαυτὴν καὶ ὅτι ἐπ' αὐτῆς πρέπει νὰ ὑπάρχῃ ἡ ἐκ ταὐτότητος προβολικότης, πρὸς δὲ ὅτι ἡ εὐθεῖα AA' θὰ ἀντιστοιχῇ πρὸς ἑαυτήν, καὶ ἐπ' αὐτῆς πρέπει νὰ ὑπάρχῃ (ὡς παραγομένη ὑπὸ τῆς ὁμογραφίας) ἡ προβολικότης, ἐν ᾗ τὸ

δύο εὐθεῖαι a καὶ a', τεμνόμεναι ἐπὶ τοῦ ἄξονος k (διάφοροι αὐτοῦ καὶ μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου O).

Πράγματι ἡ ὁμολογία αὕτη εἶνε ἡ ὁμογραφία, ἥτις ὁρίζεται ἐκ τοῦ ὅτι ὑποθέτομεν τὰ σημεῖα O καὶ aa' πρέπει νὰ εἶνε διπλᾶ σημεῖα καὶ ἐπὶ τῆς δέσμης O (ὡς παραγομένης διὰ τῆς ὁμογραφίας) πρέπει νὰ ὑπάρχῃ ἡ ἐκ ταὐτότητος προβολικοτης, πρὸς δὲ καὶ ἐν τῇ δέσμῃ aa' νὰ ὑπάρχῃ ἡ προβολικότης, ἥτις ἔχει τὴν k καὶ τὴν γ, συνδέ-

Ο καὶ τὸ σημεῖον Γ, τομὴ τῶν ΑΑ΄ καὶ τῆς k, εἶνε διπλᾶ σημεῖα, τὰ δὲ Α καὶ Α΄ εἶνε ἀντίστοιχα σημεῖα.

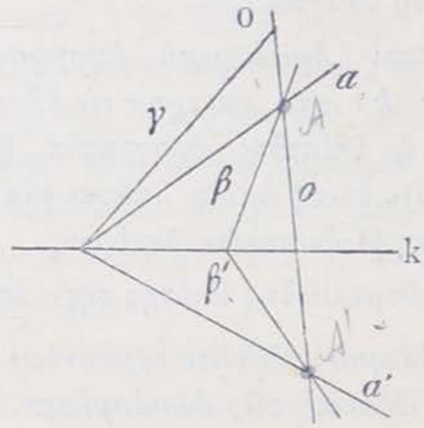
Ἐὰν ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΑΑ΄ δίδεται ἓν σημεῖον Β, δυνάμεθα νὰ ἀκολουθήσωμεν τὴν ἑξῆς πορείαν,



διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἀντίστοιχον αὐτοῦ σημεῖον Β΄. Ὁρίζομεν τὸ σημεῖον Ο΄, τομὴν τῆς ΑΒ καὶ τῆς k, καὶ εὑρίσκομεν τὴν τομὴν τῆς εὐθείας Ο΄Α΄ καὶ ΒΟ. Ἡ τομὴ αὕτη εἶνε τὸ ζητούμενον σημεῖον Β΄, ἐπειδὴ τοῦτο θὰ εἶνε κοινὸν σημεῖον τῆς εὐθείας Α΄Ο΄, ἥτις εἶνε ἀντίστοιχος τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ τῆς ΟΒ.

ουσαν τὰ σημεῖα αα΄ καὶ τὸ Ο, ὡς διπλᾶς ἀκτῖνας, καὶ ἐν ᾗ αἱ ἀκτῖνες α καὶ α΄ ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἀλλήλας.

Ἐὰν δίδεται μία εὐθεῖα β τοῦ ἐπιπέδου, μὴ διερχομένη διὰ τοῦ σημείου αα΄, δυνάμεθα νὰ ἀκολου-



θήσωμεν τὴν ἑξῆς πορείαν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀντίστοιχον αὐτῆς εὐθεῖαν β΄. Ὁρίζομεν τὴν εὐθεῖαν ο, συνδέουσαν τὰ σημεῖα αβ καὶ Ο, καὶ συνδέομεν ἀκολούθως τὰ σημεῖα οα΄ καὶ βk. Ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶνε ἡ ζητουμένη εὐθεῖα β΄, ἐπειδὴ αὕτη θὰ εἶνε κοινὴ ἀκτὶς εἰς τὴν δέσμην α΄ο, ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν δέσμην αβ, καὶ εἰς τὴν kβ.

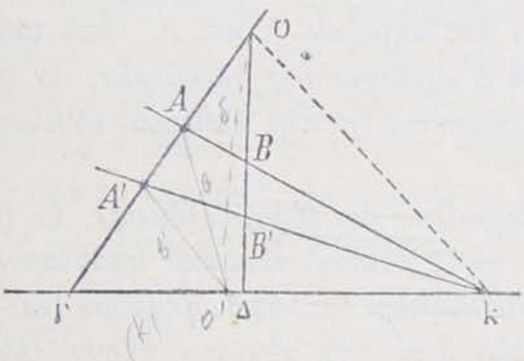
Ἐὰν δίδωνται τὸ κέντρον, ὁ ἄξων καὶ ἓν ζεῦγος ὁμολόγων σημείων μιᾶς ἐπιπέδου ὁμολογίας, κατασκευάζεται ἀμέσως ἓν ζεῦγος ὁμολόγων εὐθειῶν, ἐὰν συνδέσωμεν τὰ δύο σημεῖα μὲ ἓν σημεῖον τοῦ ἄξονος, καὶ ἀντιστρόφως. Οὕτω δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὴν εὐθεῖαν, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς μίαν δοθεῖσαν, ἐὰν ἡ ὁμολογία εἶνε ἡ ὡς ἀνωτέρω ἀριστερὰ ὁριζομένη. Ἀντιστοίχως πρὸς ταῦτα, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς δοθὲν τοιοῦτον, ἐὰν ἡ ὁμολογία εἶνε ἡ ὡς ἀνωτέρω δεξιὰ ὁριζομένη.

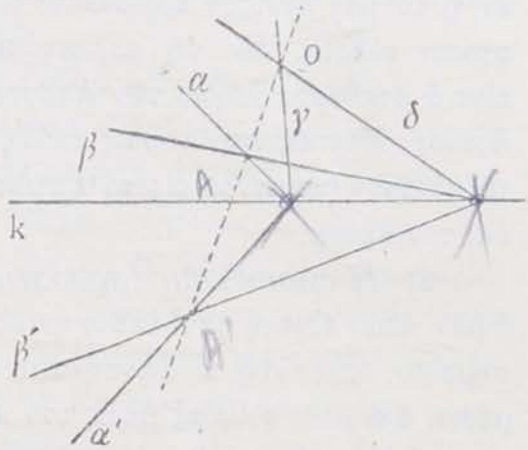
Θὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«*Ἔστωσαν ΑΑ΄ καὶ ΒΒ΄ δύο ζεύγη ὁμολόγων σημείων καὶ α α΄ καὶ ββ΄ δύο ζεύγη ὁμολόγων εὐθειῶν ἐν μιᾷ ἐπιπέδῳ ὁμο-*

λογίᾳ μὲ κέντρον Ο (τομὴν τῶν ΑΑ' καὶ ΒΒ') καὶ ἄξονα k (συνδέοντα τὰ σημεῖα αα' καὶ ββ'), μὴ κείμενα ἐπ' ἀλλήλων. Ἐὰν τὸ μὲν σημεῖον Γ εἶνε ἡ τομὴ τῶν ΑΑ' καὶ k, τὸ δὲ Δ τῶν ΒΒ' καὶ k, καὶ ἡ εὐθεῖα γ συνδέῃ τὰ αα' καὶ Ο, ἡ δὲ δ τὰ ββ' καὶ Ο, θὰ εἶνε

$$AA'O\Gamma \overline{\wedge} BB'O\Delta, \quad \alpha\alpha' k\gamma \overline{\wedge} \beta\beta' k\delta, \quad AA'O\Gamma \overline{\wedge} \alpha\alpha'\gamma k.$$





Πράγματι, ἂν μὲν αἱ εὐθεῖαι ΑΑ' καὶ ΒΒ' συμπίπτουν, ἡ σχέσις

$$AA'O\Gamma \overline{\wedge} BB'O\Delta$$

θὰ εἶνε ἡ ἐν (§38, σελ. 90) εὑρεθεῖσα, ἐὰν δ' αὗται εἶνε διάφοροι, τὰ δύο συμπλέγματα (ΑΑ'ΟΓ) καὶ (ΒΒ'ΟΔ) εἶνε προοπτικά, ἐπειδὴ αἱ ὁμόλογοι ἀκτῖνες ΑΒ καὶ Α'Β' τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον τοῦ ἄξονος τῆς ὁμολογίας k.

Ἀντιστοίχως πρὸς ταῦτα, ἀποδεικνύεται ἡ σχέσις

$$\alpha\alpha' k\gamma \overline{\wedge} \beta\beta' k\delta.$$

Ἐὰν τώρα θεωρήσωμεν ὡς ὁμολόγους εὐθείας β καὶ β' δύο εὐθείας ΑΟ' καὶ Α'Ο', αἵτινες συνδέουν τὰ σημεῖα Α καὶ Α' μὲ ἓν σημεῖον Ο' τῆς k, θὰ εἶνε

$$\beta\beta'\delta k \overline{\wedge} AA'O\Gamma,$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται ἡ

$$AA'O\Gamma \overline{\wedge} \alpha\alpha'\gamma k.$$

Παρατήρησις. Ἡ ἀνωτέρω πρότασις δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ διὰ τοῦ ὅτι, ἐν μιᾷ ὁμολογίᾳ ὁ διπλοῦς λόγος τῆς (ὑπερβολικῆς) προβολικότητος, ἥτις παράγεται ἐπὶ μιᾶς διπλῆς εὐθείας (διερχομένης διὰ τοῦ κέντρου καὶ διαφόρου τοῦ ἄξονος) διατηρεῖται σταθερὸς διὰ πάσας τὰς τοιαύτας εὐθείας, ἐὰν λαμβάνεται καταλλήλως ἡ σειρὰ τῶν τεσσάρων στοιχείων εἰς τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχεῖ, καὶ εἶνε ἴσος μὲ τὸν διπλοῦν λόγον τῆς παραγομένης (ὑπερβολικῆς) προβολικότητος ἐπὶ ἑκάστης διπλῆς δέσμης,

(ΑΑ'ΟΓ)
(ΒΒ'ΟΔ)
ββ'δk
αα'γk

ἐχούσης κέντρον ἐπὶ τοῦ ἄξονος. Ὁ διπλοῦς οὗτος λόγος, ὅστις παριστάνεται διὰ τοῦ (ΑΑ'ΟΓ) καλεῖται συνήθως *ἀναλλοίωτος τῆς ὁμολογίας*, ἐὰν δὲ τὸ κέντρον τῆς ὁμολογίας κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος, θὰ εἶνε αὕτη ἴση μὲ 1.

Περιπτώσεις ὁμολογικῆς ὁμογραφίας εἶνε αἱ ἑξῆς.

1) *Ἡ ὁμοία ὁμολογία (προοπτικὴ ὁμοιότης πρώτου εἴδους)*, ἐν ᾗ τὸ μὲν κέντρον εὑρίσκεται εἰς τὸ ἄπειρον καὶ ὁ ἄξων εἶνε καθ' ὑπόστασιν εὐθεῖα. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ ἀναλλοίωτος τῆς ὁμολογίας εἶνε ὁ σταθερὸς λόγος τῶν ἀποστάσεων δύο σημείων Α καὶ Α' ἀπὸ τοῦ ἄξονος. Μερικὴ περίπτωσις ταύτης εἶνε *ἡ ὀρθογώνιος ὁμολογία*, ἐν ᾗ τὸ κέντρον (κείμενον εἰς τὸ ἄπειρον) εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς καθέτου εὐθείας ἐπὶ τὸν ἄξονα.

2) *Ἡ ὁμοιοθεσία (προοπτικὴ ὁμοιότης δευτέρου εἴδους)*, ἐν ᾗ ὁ μὲν ἄξων εἶνε ἡ κατ' ἐξοχὴν εὐθεῖα, τὸ δὲ κέντρον εἶνε καθ' ὑπόστασιν σημεῖον. Ἐν αὐτῇ, αἱ ἀποστάσεις δύο οἱωνδήποτε ὁμολόγων σημείων (κειμένων ἐπὶ μιᾶς εὐθείας μετὰ τοῦ κέντρου) ἀπὸ τοῦ κέντρου ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον, ὅστις εἶνε ἡ ἀναλλοίωτος τῆς ὁμολογίας, καὶ καλεῖται *λόγος τῆς ὁμοιοθεσίας*. Δύο ἀντίστοιχοι εὐθεῖαι εἶνε παράλληλοι καὶ ὅμοιαι, ὁ δὲ λόγος τῆς ὁμοιότητος τούτων ἰσοῦται μὲ τὸν σταθερὸν λόγον τῆς ὁμοιοθεσίας.

Πράγματι, ἂν Α καὶ Β εἶνε δύο σημεῖα καὶ Α' καὶ Β' τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν, Ο δὲ τὸ κέντρον, θὰ εἶνε

$$\frac{(AB)}{(A'B')} = \frac{(OA)}{(OA')}.$$

Ἐκ τούτου φαίνεται ὅτι, δύο ἐπίπεδα σχήματα, ἀντιστοιχοῦντα πρὸς ἄλληλα ἐν μιᾷ ὁμοιοθεσίᾳ (καὶ λέγονται τότε ὁμοιόθετα σχήματα) εἶνε ὅμοια.

3) *Ἡ παράλληλος μεταφορὰ (ἢ ἁπλῶς μεταφορὰ)* τοῦ ἐπιπέδου ἐφ' ἑαυτοῦ πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν, δηλαδὴ ἡ ὁμολογία, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον καὶ ὁ ἄξων κεῖνται εἰς τὸ ἄπειρον, καὶ δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ταύτην ὡς μερικὴν περίπτωσιν τῆς ὁμοιοθεσίας, δηλαδὴ ἐκείνην ἐν ᾗ ὁ λόγος τῆς ὁμοιοθεσίας ἰσοῦται μὲ $+1$.

§ 56. Ἐνέλιξις σχηματισμῶν δευτέρας βαθμῖδος.

Εἰς μίαν ἐπίπεδον (μὴ ἐκ ταὐτότητος) ὁμογραφίαν ἐν γένει δὲν ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἄλληλα δύο ὁμόλογα στοιχεῖα κατὰ διπλοῦν τρόπον, δηλαδή, ἐὰν εἰς τὸ στοιχεῖον Α ἀντιστοιχῇ τὸ Α', ἀντιστοιχεῖ ἐν γένει εἰς τὰ Α' ἓν στοιχεῖον διάφορον τοῦ Α. Ἐὰν εἰς μίαν ἐπίπεδον ὁμογραφίαν

ω ἀνὰ δύο ὁμόλογα στοιχεῖα ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἄλληλα κατὰ διπλοῦν τρόπον, ὥστε νὰ εἶνε $\omega \equiv \omega^{-1}$, καλεῖται ἡ (μὴ ἐκ ταὐτότητος) ὁμογραφία *ἐνέλιξις*.

Ἐὰν ὑποτεθῇ ἐν τῇ ὁμολογίᾳ περὶ τῆς ὁποίας ἐγένετο λόγος ἐν τοῖς προηγουμένοις, ὅτι τὸ σύμπλεγμα (ΑΑ'ΟΓ) εἶνε ἁρμονικὸν (ἑπομένως καὶ πᾶν ἄλλο ἀνάλογον σύμπλεγμα), τότε ἡ ὁμολογία αὕτη (ἥτις λέγεται καὶ *ἁρμονική*) εἶνε μία *ἐνέλιξις*.

Ἀντιστρόφως, ἂν θεωρήσωμεν μίαν ἐνέλιξιν ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου **a**, αἱ εὐθεῖαι, αἵτινες συνδέουν δύο ὁμόλογα σημεῖα Α καὶ Α', ἔχουν ἑαυτὰς ὡς ἀντιστοιχούσας εὐθείας (τὰς συνδεούσας τὰ σημεῖα Α' καὶ Α). Ἑπομένως ὑπάρχουν ἄπειροι τὸ πλῆθος διπλαῖ εὐθεῖαι. Ὁμοίως ὑπάρχουν καὶ ἄπειρα τὸ πλῆθος διπλᾶ σημεῖα ὡς τομαὶ ζευγῶν ὁμολόγων εὐθειῶν. Ἀλλ' ἐὰν εἰς μίαν μὴ ἐκ ταὐτότητος ὁμογραφίαν ὑπάρχουν περισσότερα τῶν τριῶν διπλῶν στοιχείων, τρία ἐξ αὐτῶν θὰ ἀνήκουν εἰς σχηματισμὸν πρώτης βαθμῖδος, ὅστις τότε ὁλόκληρος θὰ ἀποτελῆται ἐκ διπλῶν στοιχείων. Ἑπομένως, ἡ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ **a** ἐνέλιξις εἶνε μία ὁμολογία. Ἀλλ' ἐφ' ἑκάστης διπλῆς εὐθείας, διαφόρου τοῦ ἄξονος, τὰ ζεύγη ἀντιστοίχων σημείων ἀποτελοῦν μίαν ὑπερβολικὴν ἐνέλιξιν, ἑπομένως (§ 48, σελ. 121) ἡ ὁμολογία αὕτη εἶνε ἁρμονική.

«Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα μία ἐπίπεδος ὁμογραφία εἶνε μία ἐνέλιξις συνίσταται εἰς τὸ νὰ εἶνε αὕτη μία ἁρμονικὴ ὁμολογία».

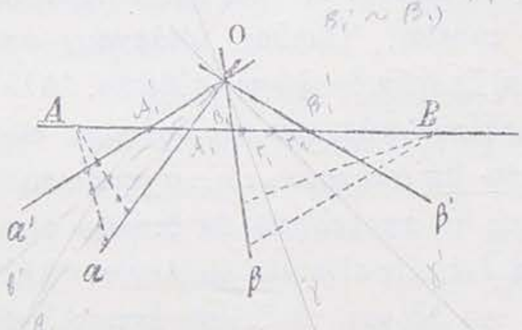
Παρατηρητέον ὅτι, εἰς τὴν ἁρμονικὴν ὁμολογίαν ἡ ἀναλλοίωτος ἰσοῦται μὲ -1, διακρίνομεν δὲ ὡς περιπτώσεις τῆς ἁρμονικῆς ὁμολογίας α') τὴν *πλαγίαν ἢ ὀρθογώνιον συμμετρίαν* ὡς πρὸς ἕνα ἄξονα, καὶ β') *τὴν συμμετρίαν* ὡς πρὸς ἓν κέντρον (*ἁρμονικὴν ὁμοιοθεσίαν*).

§ 57. Διπλᾶ στοιχεῖα ἐπιπέδου ὁμογραφίας.

Ἔστω ὅτι δίδεται μία ἐπίπεδος μὴ ὁμολογικὴ ὁμογραφία **π**, καὶ Ο ἓν διπλοῦν σημεῖον αὐτῆς. Εἰς ἑκάστην εὐθεῖαν α, διερχομένην διὰ τοῦ Ο (ἥτις δὲν εἶνε διπλῆ ἐπειδὴ ἡ ὁμογραφία δὲν εἶνε ὁμολογική) ἀντιστοιχεῖ μία εὐθεῖα α', διερχομένη διὰ τοῦ Ο, καὶ αἱ α, α' θὰ σχετίζωνται διὰ τῆς **π** προβολικῶς πρὸς ἀλλήλας εἰς τρόπον, ὥστε τὸ μὲν Ο θὰ ἀντιστοιχῇ πρὸς ἑαυτό, οὕτω δ' αὗται θὰ εἶνε προοπτικαί. Παριστάνομεν διὰ τοῦ Α τὸ κέντρον τῆς προοπτικότητος ταύτης καὶ θεωροῦμεν ἀκόμη δύο ἄλλας διαφόρους ἀλλήλων ὁμολόγους εὐθείας β καὶ β', διερχομένας διὰ τοῦ Ο. Αὗται θὰ σχετίζωνται διὰ τῆς **π** προοπτικῶς, καὶ ἔστω Β τὸ κέντρον τῆς προοπτικότητος αὐτῶν. Τὸ Β θὰ εἶνε διάφορον τοῦ Α, διότι ἄλλως, ἑκάστη εὐθεῖα, διερχομένη διὰ τοῦ Α, θὰ εἶνε μία διπλῆ εὐθεῖα, ἐπειδὴ εἰς τὰς τομὰς αὐτῆς μετὰ τῶν α καὶ β θὰ ἀντιστοίχουν αἱ τομαὶ ταύτης μετὰ τῶν α′ καὶ β′, οὕτω δὲ ἡ **π** θὰ ἦτο ὁμολογία μὲ κέντρον τὸ Α, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν γενομένην ὑπόθεσιν.

Δυνατὸν τώρα νὰ ἔχωμεν τὰς ἑξῆς δύο περιπτώσεις.

1) Τὰ ἐν λόγῳ ζεύγη αα′ καὶ ββ′ τῶν εὐθειῶν δύνανται νὰ ἐκλεγοῦν οὕτως, ὥστε ἡ εὐθεῖα k ≡ ΑΒ νὰ μὴ διέρχεται διὰ τοῦ Ο. Τότε ἡ k



εἶνε μία διπλῆ εὐθεῖα διὰ τὴν ὁμογραφίαν **π**, διότι εἰς τὰ δύο (διάφορα) σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα τέμνει αὕτη τὰς α καὶ β, ἀντιστοιχοῦν αἱ τομαὶ αὐτῆς μετὰ τῶν α′ καὶ β′. Δύο ἄλλαι εὐθεῖαι γ καὶ γ′, ὁμόλογοι ἐν τῇ **π** καὶ διερχόμεναι διὰ τοῦ Ο, θὰ τέμνωνται ὑπὸ τῆς k εἰς δύο ὁμόλογα σημεῖα. Ἐπομένως ἐπὶ τῆς k κεῖται πάντοτε τὸ κέντρον Γ τῆς προοπτικότητος, ἥτις προκύπτει διὰ τῆς **π** μεταξὺ τῶν γ καὶ γ′.

2) Ὁπωσδήποτε καὶ ἂν ἐκλεγοῦν τὰ ζεύγη αα′ καὶ ββ′, ἡ εὐθεῖα k ≡ ΑΒ διέρχεται διὰ τοῦ Ο.

Τότε δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι, ἡ εὐθεῖα k ≡ ΟΑ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Β τῆς προοπτικότητος, ἥτις ὑπάρχει μεταξὺ δύο οἱωνδήποτε ὁμολόγων εὐθειῶν β καὶ β′ ἐν τῇ **π** τῆς διπλῆς δέσμης Ο. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ εὐθεῖα k εἶνε ἐπίσης διπλῆ εὐθεῖα, ἐπειδὴ ἐν τῇ **π** εἰς ἐκεῖνα τὰ σημεῖα ταύτης, τὰ ὁποῖα εἶνε κέντρα τῆς προοπτικότητος μεταξὺ ζευγῶν ὁμολόγων εὐθειῶν διερχομένων διὰ τοῦ Ο, ἀντιστοιχοῦν κέντρα ἀναλόγων προοπτικοτήτων, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

Ἐπομένως ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«*Μὲ ἕκαστον διπλοῦν σημεῖον Ο μιᾶς μὴ ὁμολογικῆς ἐπιπέδου ὁμογραφίας συνδυάζεται μία διπλῆ εὐθεῖα k, ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖνται πάντα τὰ κέντρα τῶν προοπτικοτήτων, αἵτινες ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν διαφόρων ὁμολόγων εὐθειῶν τῆς διπλῆς δέσμης Ο*».

Καὶ ἀντιστοίχως διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ δυασμοῦ ἔχομεν ὅτι,
«*μὲ ἑκάστην διπλῆν εὐθεῖαν* k *συνδυάζεται ἓν διπλοῦν σημεῖον Ο, διὰ τοῦ ὁποίου διέρχονται οἱ ἄξονες τῶν προοπτικοτήτων μεταξὺ τῶν διαφόρων ὁμολόγων δεσμῶν, τῶν ὁποίων τὰ κέντρα κεῖνται ἐπὶ τῆς διπλῆς εὐθείας*».

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω 1) περιπτώσεως ἔχομεν καὶ τὴν ἑξῆς πρότασιν. *«Ἐὰν μία μὴ ὁμολογικὴ ἐπίπεδος ὁμογραφία ἔχῃ ἓν διπλοῦν σημεῖον καὶ μίαν διπλῆν εὐθεῖαν, μὴ κείμενα ἐπ' ἀλλήλων, ἡ εὐθεῖα καὶ τὸ σημεῖον συνδυάζονται πρὸς ἄλληλα»*.

Παρατηρητέον ὅτι, ἡ μεταξὺ δύο διπλῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα συνδυάζονται πρὸς ἄλληλα διὰ μιᾶς μὴ ὁμολογικῆς ὁμολογίας, ὑπάρχουσα σχέσις εἶνε ἀντίστροφος· δηλαδή, ἐὰν k εἶνε ἡ διπλῆ εὐθεῖα, ἥτις συνδυάζεται μὲ τὸ διπλοῦν σημεῖον O, τὸ σημεῖον O θὰ εἶνε διπλοῦν σημεῖον, τὸ ὁποῖον συνδυάζεται μὲ τὴν k. Τοῦτο ἀπεδείχθη ἀνωτέρω, ἐὰν ἡ k καὶ τὸ O δὲν κεῖνται ἐπ' ἀλλήλων.

Ὑποθέτομεν τώρα ὅτι ἡ k, ἥτις συνδυάζεται μὲ τὸ O, διέρχεται διὰ τοῦ O. Οὕτω θὰ ἔχωμεν τὴν ἀνωτέρω 2) περίπτωσιν, καὶ ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ, ὅτι οἱ ἄξονες τῶν προοπτικοτήτων, οἵτινες ὑπάρχουν μεταξὺ δύο ζευγῶν ὁμολόγων δεσμῶν, ἐχουσῶν κέντρα κείμενα ἐπὶ τῆς k, διέρχονται διὰ τοῦ O.

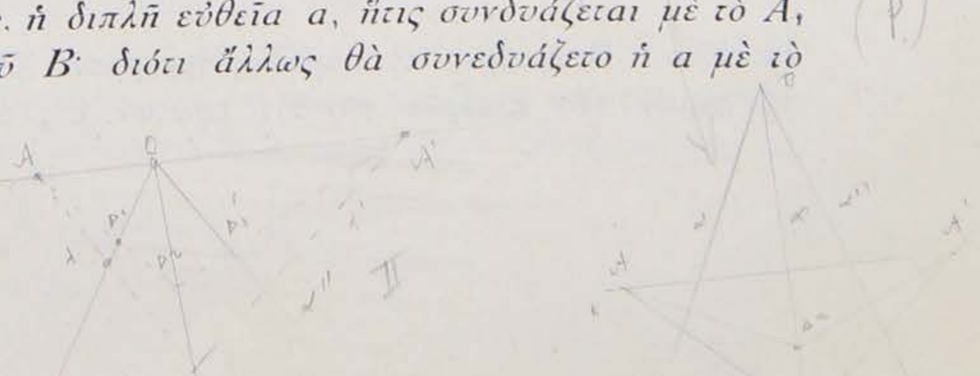
Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν μίαν (μὴ διπλῆν) εὐθεῖαν α τῆς δέσμης O, καὶ ἔστω α′ ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς εὐθεῖα, εἰς ταύτην δ' ἔστω ὅτι ἀντιστοιχεῖ πάλιν ἡ α″. Αἱ εὐθεῖαι α′ καὶ α″ διέρχονται διὰ τοῦ O, ἡ α′ εἶνε προοπτικὴ πρὸς τὴν α, ἡ δὲ α″ πρὸς τὴν α′. Τὰ κέντρα A καὶ A′ τῶν δύο προοπτικοτήτων θὰ εἶνε ὁμόλογα σημεῖα τῆς εὐθείας k. Εἰς ἑκάστην εὐθεῖαν λ ἐν τῇ π, διερχομένην διὰ τοῦ A, ἀντιστοιχεῖ μία εὐθεῖα λ′, διερχομένη διὰ τοῦ A′, ἥτις τέμνει τὴν α′ εἰς τὸ ὁμόλογον σημεῖον πρὸς τὸ (λα), ἤτοι τέμνει αὐτὴν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἡ α′ τέμνεται ὑπὸ τῆς λ.

Οὕτω ἡ α′ εἶνε ὁ ἄξων τῆς προοπτικότητος, ἥτις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν ὁμολόγων δεσμῶν A καὶ A′ ἐν τῇ π, τῶν ὁποίων τὰ κέντρα κεῖνται ἐπὶ τῆς k.

Ἐὰν λάβωμεν ἀντὶ τῆς α μίαν ἄλλην εὐθεῖαν β τῆς δέσμης O, καὶ θεωρήσωμεν τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς αὐτὴν εὐθεῖαν β′, θὰ ἔχωμεν ἓν ζεῦγος ὁμολόγων προοπτικῶν δεσμῶν, τῶν ὁποίων τὰ κέντρα κεῖνται ἐπὶ τῆς k, ὁ δὲ ἄξων τῆς προοπτικότητος β′ διέρχεται διὰ τοῦ O. Οὕτω τὸ O εἶνε τὸ διπλοῦν σημεῖον τὸ ὁποῖον συνδυάζεται μὲ τὴν k, κ.ο.κ.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι, εἰς μίαν μὴ ὁμολογικὴν ἐπίπεδον ὁμογραφίαν δὲν δύναται νὰ συνδυάζεται μία διπλῆ εὐθεῖα μὲ δύο διπλᾶ σημεῖα, καὶ ἑπομένως ἔχομεν ὅτι,

«ἐὰν A καὶ B εἶνε δύο διπλᾶ σημεῖα μιᾶς μὴ ὁμολογικῆς ἐπιπέδου ὁμογραφίας, ἡ διπλῆ εὐθεῖα α, ἥτις συνδυάζεται μὲ τὸ A, διέρχεται διὰ τοῦ B· διότι ἄλλως θὰ συνεδυάζετο ἡ α μὲ τὸ σημεῖον B».



§ 58. Μετρικαὶ ἰδιότητες ἐπιπέδου ὁμογραφίας.

Διακρίνομεν τὰς ἑξῆς μερικὰς περιπτώσεις ὁμογραφιῶν μεταξὺ δύο ἐπιπέδων.

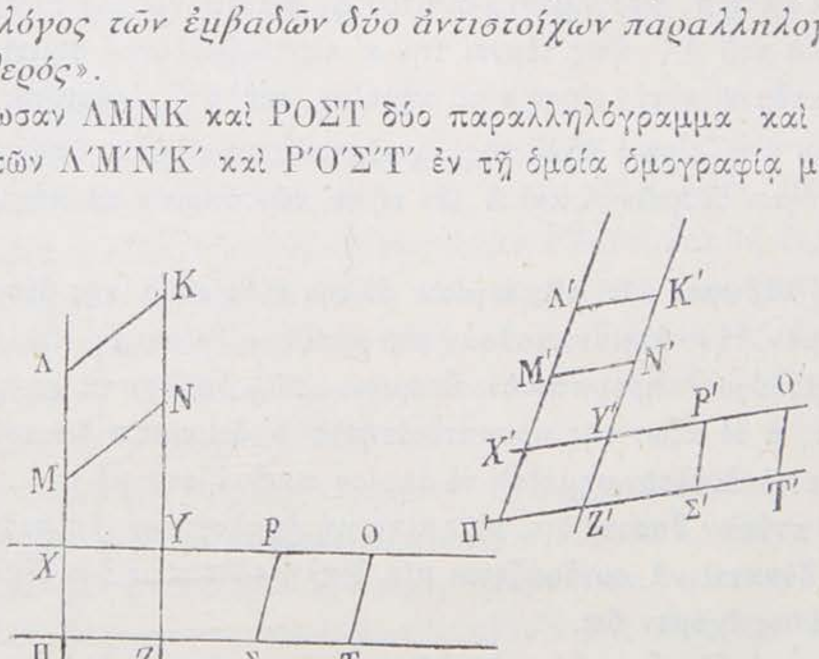
1) Ἐκείνην ἐν ᾗ αἱ κατ' ἐκδοχὴν εὐθεῖαι ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἀλλήλας, ὅτε ἔχομεν τὴν *μὴ κυρίως ἢ δευτερεύουσαν ὁμοιότητα* (*ὁμογραφίαν* **affine** ἢ ἁπλῶς **affinittät**), ἥτις ὁρίζεται διὰ τριῶν (καθ' ὑπόστασιν) ἀντιστοίχων στοιχείων.

Ἐν τῇ γενικῇ περιπτώσει τῆς μὴ κυρίως ὁμοίας ὁμογραφίας ὑπάρχει ἐφ' ἑκάστου ἐπιπέδου μία καθ' ὑπόστασιν εὐθεῖα (*φυγῆς*), ἔχουσα ἀντίστοιχον αὐτῆς ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἐπιπέδου τὴν κατ' ἐκδοχὴν εὐθεῖαν τούτου. Τότε εἰς εὐθύγραμμόν τι τμῆμα ἀντιστοιχεῖ ἓν τμῆμα εὐθύγραμμον, ἔχον ἄπειρον ἢ πεπερασμένον μῆκος, ἐὰν τὸ πρῶτον τμῆμα περιέχῃ ἢ μὴ ἓν σημεῖον τῆς εὐθείας *φυγῆς*. Ἐν τῇ ὁμοίᾳ ὁμογραφίᾳ ἐφ' ἑκάστου τῶν ἐπιπέδων ἡ εὐθεῖα φυγῆς εἶνε ἡ κατ' ἐκδοχὴν εὐθεῖα αὐτοῦ, ἑπομένως εἰς πεπερασμένον εὐθύγραμμον τμῆμα ἀντιστοιχεῖ ἐπίσης πεπερασμένον τοιοῦτον, ἐπὶ πλέον δ' ἐν αὐτῇ δύο ὁμόλογοι σημειοσειραὶ εἶνε ὅμοιαι (§ 46, σελ. 111), καὶ εἰς δύο παραλλήλους εὐθείας τοῦ ἑνὸς ἐπιπέδου ἀντιστοιχοῦν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τοῦ ἄλλου. Ἑπομένως εἰς παραλληλόγραμμον ἀντιστοιχεῖ ἐπίσης ἓν παραλληλόγραμμον.

Θὰ ἀποδείξωμεν διὰ τὰς τοιαύτας ὁμογραφίας τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«*Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ἀντιστοίχων παραλληλογράμμων εἶνε σταθερός*».

Ἔστωσαν ΛΜΝΚ καὶ ΡΟΣΤ δύο παραλληλόγραμμα καὶ τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν Λ'Μ'Ν'Κ' καὶ Ρ'Ο'Σ'Τ' ἐν τῇ ὁμοίᾳ ὁμογραφίᾳ μεταξὺ δύο



ἐπιπέδων. Θεωροῦμεν τὸ παραλληλόγραμμον ΧΥΖΠ, ὁριζόμενον ἐκ τῶν τομῶν τῶν πλευρῶν τῶν δύο πρώτων. Εἰς τοῦτο ἀντιστοιχεῖ τὸ

$X'Y'Z'\Pi'$, προκῦπτον καθ' ὅμοιον τρόπον ἐν τῷ δευτέρῳ ἐπιπέδῳ. Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι ἔχομεν διὰ τὰ ἐμβαδὰ τῶν σχημάτων

$$(\Lambda M N K) : (X Y Z \Pi) = (\Lambda M) : (X \Pi),$$
$$(X Y Z \Pi) : (P O \Sigma T) = (\Pi Z) : (\Sigma T).$$

Ὁμοίως ἔχομεν

$$(\Lambda' M' N' K') : (X' Y' Z' \Pi') = (\Lambda' M') : (X' \Pi'),$$
$$(X' Y' Z' \Pi') : (P' O' \Sigma' T') = (\Pi' Z') : (\Sigma' T').$$

Ἀφ' ἑτέρου παρατηροῦμεν ὅτι, αἱ προβολικαὶ εὐθεῖαι ΛM καὶ $\Lambda'M'$, ἐν αἷς ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἄλληλα τὰ ἐκδοχὴν σημεῖα, εἶνε ὅμοιαι, ἄρα

ἔχομεν $\quad (\Lambda M) : (X \Pi) = (\Lambda' M') : (X' \Pi'),$

καὶ ὁμοίως $\quad (\Pi Z) : (\Sigma T) = (\Pi' Z') : (\Sigma' T').$

Ἑπομένως ἔχομεν, $\quad (\Lambda M N K) : (P O \Sigma T) = (\Lambda' M' N' K') : (P' O' \Sigma' T'),$

καὶ ὁ λόγος $\quad (\Lambda M N K) : (\Lambda' M' N' K')$ δύο ἀντιστοίχων παραλληλογράμμων εἶνε σταθερός.

Ἐὰν θεωρήσωμεν δύο (πεπερασμένα) ἀντίστοιχα τρίγωνα ἐπὶ τῶν δύο ἐπιπέδων τῆς ὁμοίας ὁμογραφίας ὡς ἡμίση ἀντιστοίχων παραλληλογράμμων, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης ἰσχύει καὶ διὰ ταῦτα, καθὼς καὶ διὰ δύο ἀντίστοιχα πολύγωνα, τὰ ὁποῖα χωρίζονται εἰς ἰσάριθμα καὶ ἀντίστοιχα τρίγωνα. Ἐν γένει, ἂν δοθῇ ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου κλειστή τις γραμμή, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν αὐτὴν ὡς ὅριον τῶν περιμέτρων δύο συγκλινουσῶν σειρῶν ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγραμμένων εἰς αὐτὴν πολυγώνων, ὅτε τὸ ἐμβαδὸν τῆς περικλειομένης ὑπὸ τῆς γραμμῆς ἐπιφανείας εἶνε τὸ ὅριον τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγραμμένων πολυγώνων, ὅταν τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν αὐτῶν τείνῃ εἰς τὸ μηδέν. Εἰς τὴν κλειστὴν ταύτην γραμμὴν ἀντιστοιχεῖ ἄλλη τοιαύτη ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἐπιπέδου, καὶ τὸ ἐμβαδὸν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ταύτης ὁρίζεται ὁμοίως. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν τὴν ἑξῆς γενικὴν πρότασιν.

«*Ἐν μὴ κυρίως ὁμοίᾳ ὁμογραφίᾳ δύο ἐπιπέδων ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐπιφανειῶν, τῶν περικλειομένων ὑπὸ δύο ἀντιστοίχων κλειστῶν γραμμῶν, εἶνε σταθερός*».

Ἐὰν ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἀντιστοίχων ἐπιφανειῶν ἰσοῦται μὲ 1, ἡ μὴ κυρίως ὁμοία ὁμογραφία λέγεται ἰσοδυναμία, καὶ ἐν αὐτῇ τὰ ἐμβαδὰ δύο ὁμολόγων ἐπιφανειῶν εἶνε ἴσα.

2) Ἐκείνην, ἐν τῇ ὁποίᾳ ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἀλλήλας αἱ κατ' ἐκδοχὴν εὐθεῖαι τῶν ἐπιπέδων, καὶ ἐπὶ πλέον εἰς ζεύγη συζυγῶν σημείων ἐπὶ τῆς μιᾶς τῶν κατ' ἐκδοχὴν εὐθειῶν ἀντιστοιχοῦν ζεύγη συζυγῶν ση-

μείων τῆς ἄλλης. Ἑπομένως, εἰς ἑκάστην γωνίαν τοῦ ἑνὸς ἐπιπέδου ἀντιστοιχεῖ μία ἴση αὐτῆς γωνία ἐπὶ τοῦ ἄλλου· ἄρα εἰς ἓν πεπερασμένον τρίγωνον τοῦ ἑνὸς ἐπιπέδου ἀντιστοιχεῖ ἓν ὅμοιον αὐτοῦ τοῦ ἄλλου. Καὶ γενικῶς, δύο σχήματα ἀντιστοιχοῦντα ἐν τῇ τοιαύτῃ ὁμογραφίᾳ εἶνε ὅμοια (κατὰ τὴν ἔννοιαν τῆς στοιχειώδους Γεωμετρίας). Διὰ τοῦτο ἡ ὁμογραφία αὕτη καλεῖται ἁπλῶς ἡ *κυρίως ὁμοιότης* μεταξὺ τῶν δύο ἐπιπέδων, καὶ ὁ λόγος τῶν μηκῶν δύο ἀντιστοίχων τμημάτων ἐν αὐτῇ εἶνε σταθερός. Διότι δύο ζεύγη σημείων καὶ τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν θὰ κεῖνται ἐπὶ δύο ὁμοίων τετρακορύφων, ἡ ἰδιότης δ' αὕτη χαρακτηρίζει τὴν ὁμοιότητα. Ἡ ὁμοιότης θεωρουμένη ἐπὶ δύο ἐπιπέδων, κειμένων ἐπ' ἀλλήλων, διακρίνεται εἰς κατ' ἀναλογίαν ἢ κατ' ἀντιστροφήν, καθ' ὅσον ἡ ἰσότης μεταξὺ δύο ἐπιπέδων δεσμῶν, ἀντιστοιχουσῶν ἐν αὐτῇ, εἶνε κατ' ἀναλογίαν ἢ κατ' ἀντιστροφήν, δηλαδὴ καθόσον ἡ προκύπτουσα ἐκ τῆς ὁμοιότητος ἰσότης ἐπὶ τῆς κατ' ἐξοχὴν διπλῆς εὐθείας εἶνε κατ' ἀναλογίαν ἢ κατ' ἀντιστροφὴν (§ 46, σελ. 112). Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι,

«ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου ὑπάρχουν δύο ὁμοιότητες, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία εἶνε κατ' ἀναλογίαν καὶ ἡ ἄλλη κατ' ἀντιστροφήν, ἐν αἷς εἰς δύο καθ' ὑπόστασιν σημεῖα ἀντιστιχοῦν δύο ἄλλα δοθέντα καθ' ὑπόστασιν».

Ἔστωσαν ΑΑ′ καὶ ΒΒ′ δύο ἀντίστοιχα ζεύγη σημείων. Μεταξὺ τῶν σημειοσειρῶν ΑΒ καὶ Α′Β′ ὑπάρχει μία ὡρισμένη ὁμοιότης, ἐν ᾗ τὰ δοθέντα σημεῖα ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἄλληλα ὡς ὑπετέθη (§ 46).
Ἐπὶ τῆς κατ' ἐξοχὴν εὐθείας ὑπάρχουν δύο ἰσότητες, ἡ μία κατ' ἀναλογίαν καὶ ἡ ἄλλη κατ' ἀντιστροφήν, ἐν αἷς εἰς τὸ κατ' ἐξοχὴν σημεῖον τῆς εὐθείας ΑΒ ἀντιστοιχεῖ τὸ κατ' ἐξοχὴν τῆς Α′Β′ (§46, σελ. 115). Ἂν θεωρήσωμεν ἐπὶ τῆς κατ' ἐξοχὴν εὐθείας τὴν μίαν τῶν ἐν λόγῳ ἰσοτήτων, θὰ ἔχωμεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ μίαν τελείως ὡρισμένην ὁμοιότητα (§53, σελ. 138), ἐν ᾗ τὰ Α, Α′ καὶ Β, Β′ ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἄλληλα, εἶνε δ' αὕτη κατ' ἀναλογίαν ἢ κατ' ἀντιστροφήν, ἐξαρτωμένου τοῦ εἴδους ἐκ τῆς φορᾶς τῆς ἰσότητος ἐπὶ τῆς κατ' ἐξοχὴν εὐθείας.

Μία ὁμοιότης ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύναται νὰ εἶνε *ὁμολογική*, καὶ ἔχομεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις, τὰς ὁποίας δίδει μία ὁμολογικὴ ὁμοιότης.

α′) Ὁ ἄξων τῆς ὁμολογίας εἶνε ἡ κατ' ἐξοχὴν εὐθεῖα, ἢ ἡ ὁμοιότης εἶνε μία *ὁμοιοθεσία* (§55, σελ. 146).

β′) Ὁ ἄξων τῆς ὁμολογίας εἶνε μία καθ' ὑπόστασιν εὐθεῖα, ὅτε ἔχομεν μίαν ἰδιαιτέραν ὁμολογίαν, β′ εἴδους ὁμολογίαν καλουμένην. Ἀφ' ἑνὸς ὑπάρχει ἐπὶ τῆς κατ' ἐξοχὴν εὐθείας μία ἰσότης κατ' ἀντιστροφήν, τῆς ὁποίας τὰ διπλᾶ σημεῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς δύο καθέτους ἐπ' ἀλλήλας διευ θύνσεις (§46,σελ.112), καὶ ἑπομένως ἡ ὁμολογία αὕτη, περὶ τῆς ὁποίας πρόκειται, εἶνε ὀρθογώνιος. Ἀφ' ἑτέρου πρέπει δύο εὐθεῖαι, ἀντιστοιχοῦσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ τεμνόμεναι ἐπὶ τοῦ ἄξονος, νὰ σχηματίζουν μετ' αὐτοῦ ἴσας (ἀντιστοίχους) γωνίας.

Φανταζόμεθα τώρα δύο ἀντίστοιχα σημεῖα A καὶ A', κείμενα ἐπ' εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα α. Ἐὰν λάβωμεν τυχὸν σημεῖον P ἐπὶ τῆς α, αἱ εὐθεῖαι PA καὶ PA' σχηματίζουν ἴσας γωνίας μετὰ τῆς α, οὕτω δὲ τὰ σημεῖα A καὶ A' ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ τὸν ἄξονα· ἄρα ἡ ἐν λόγῳ ὁμολογία (ἥτις ὑποτίθεται ὅτι δὲν εἶνε ἐκ ταὐτότητος) θὰ εἶνε μία ὀρθογώνιος συμμετρία ὡς πρὸς τὴν α. Ἀντιστρόφως, μία τοιαύτη συμμετρία εἶνε μία ἰδιαιτέρα κατ' ἀντιστροφὴν ὁμοιότης. Ἐν γένει λοιπὸν ἔχομεν ὅτι, «*μία (μὴ ἐκ ταὐτότητος) ὁμολογικὴ ἐπίπεδος ὁμοιότης εἶνε μία ὁμοιοθεσία (ἰδιαιτέρως μία παράλληλος μεταφορὰ) ἢ μία ὀρθογώνιος συμμετρία ὡς πρὸς ἕνα ἄξονα*».

Παρατηρητέον ὅτι, τὸ γινόμενον δύο ὁμοιοτήτων ἑνὸς ἐπιπέδου εἶνε μία κατ' ἀναλογίαν ἢ κατ' ἀντιστροφὴν ὁμοιότης, καθόσον αἱ δύο δοθεῖσαι ὁμοιότητες εἶνε ὁμοειδεῖς ἢ ἑτεροειδεῖς (καὶ αἱ δύο κατ' ἀναλογίαν ἢ κατ' ἀντιστροφήν, ἢ ἡ μία κατ' ἀναλογίαν καὶ ἡ ἄλλη κατ' ἀντιστροφήν). Διότι, ἂν φαντασθῶμεν δύο διαδοχικὰς ὁμοιότητας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, θὰ ἔχωμεν μίαν ὁμογραφίαν, ἔχουσαν ὡς διπλῆν εὐθεῖαν τὴν κατ' ἐξοχήν, καὶ ἐπ' αὐτῆς προκύπτει ἡ ἰσότης, ἥτις εἶνε γινόμενον τῶν δύο ἰσοτήτων, αἵτινες γεννῶνται ὑπὸ τῶν δύο ὁμοιοτήτων. Ἐκ τούτων ἔχομεν εὐκόλως ὅτι, ἑκάστη κατ' ἀντιστροφὴν ἐπίπεδος ὁμοιότης δύναται νὰ προκύψῃ ἐκ μιᾶς κατ' ἀναλογίαν ἰσότητος καὶ μιᾶς ὀρθογωνίου συμμετρίας ὡς πρὸς ἕνα ἄξονα.

3) Ἡ ὁμοιότης δύναται ἰδιαιτέρως νὰ εἶνε *μία ἰσότης*, δηλαδὴ δύο ὅμοια σχήματα, ἀντιστοιχοῦντα πρὸς ἄλληλα ἐπὶ τῶν δύο ἐπιπέδων, δύνανται νὰ εἶνε ἴσα, καὶ συμβαίνει τοῦτο, ἂν ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα.

Παρατηρητέον ὅτι, ἡ ἰσότης μεταξὺ δύο ἐπιπέδων δύναται νὰ παραχθῇ διὰ μιᾶς κινήσεως, διὰ τῆς ὁποίας τὸ ἓν ἐπίπεδον τίθεται ἐπὶ τοῦ ἄλλου, ὥστε νὰ ἐφαρμώσουν δύο (ἴσα) ἀντίστοιχα τρίγωνα. Διότι τότε ὁρίζεται ἡ ἰσότης μεταξὺ τῶν δύο ἐπιπέδων.

Ἐὰν πρόκειται περὶ ἰσότητος μεταξὺ δύο ἐπιπέδων κειμένων ἐπ' ἀλλήλων ἢ ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου, διακρίνομεν τὴν κατ' ἀναλογίαν ἢ κατ' ἀντιστροφὴν ἰσότητα.

Τὸ γινόμενον δύο ἰσοτήτων ἑνὸς ἐπιπέδου εἶνε κατ' ἀναλογίαν ἢ κατ' ἀντιστροφὴν ἰσότης, καθόσον αἱ παράγουσαι ταύτην ἰσότητες διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν εἶνε ὁμοειδεῖς ἢ ἑτεροειδεῖς.

Μεταξὺ τῶν ἰσοτήτων ἑνὸς ἐπιπέδου διακρίνομεν τὰς *ὁμολογικὰς ἰσότητας*.

Ἐκ τῶν μνημονευθέντων ἐν τοῖς προηγουμένοις ὁμολογικῶν ὁμοιότήτων ἡ ὀρθογώνιος συμμετρία ὡς πρὸς ἕνα ἄξονα (ἥτις παράγεται διὰ στροφῆς τοῦ ἐπιπέδου περὶ τὸν ἄξονα μέχρις ὅτου ἐφαρμόσῃ ἐφ' ἑαυτοῦ) εἶνε πάντοτε μία ἰσότης.

Ἡ ὁμοιοθεσία δύναται νὰ εἶνε μία ἰσότης εἰς δύο περιπτώσεις, δηλαδή, ὅταν ὁ λόγος τῆς ὁμοιοθεσίας εἶνε $+1$ ἢ -1. Ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει ἡ ὁμοιοθεσία ἔχει τὸ κέντρον αὐτῆς ἐπὶ τοῦ ἄξονος (§55, σελ. 146) δηλαδὴ ἐπὶ τῆς κατ' ἐξοχὴν εὐθείας, καὶ τότε ἀνάγεται αὕτη εἰς μίαν παράλληλον μεταφορὰν τοῦ ἐπιπέδου ἐφ' ἑαυτοῦ. Ἐν τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει ἡ ὁμοιοθεσία εἶνε ἁρμονικὴ (§56, σελ. 147), δηλαδὴ μία συμμετρία ὡς πρὸς ἓν κέντρον.

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν ὅτι,

«*μία ὁμολογικὴ ἐπίπεδος ἰσότης εἶνε μία παράλληλος μεταφορὰ ἢ μία συμμετρία ὡς πρὸς ἓν κέντρον ἢ μία ὀρθογώνιος συμμετρία ὡς πρὸς ἕνα ἄξονα*».

Κατὰ μὲν τὰς δύο πρώτας περιπτώσεις ἡ ἰσότης εἶνε κατ' ἀναλογίαν, κατὰ δὲ τὴν τρίτην κατ' ἀντιστροφήν.

Θεωροῦμεν τώρα μίαν μὴ ὁμολογικὴν κατ' ἀναλογίαν ἰσότητα ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

Ἐπὶ τῆς κατ' ἐξοχὴν εὐθείας τούτου παράγεται δι' αὐτῆς μία κατ' ἀναλογίαν ἰσότης, ἥτις δὲν ἔχει διπλοῦν τι σημεῖον (§ 46), ἑπομένως τὸ διπλοῦν σημεῖον, τὸ συνδυαζόμενον μὲ τὴν κατ' ἐξοχὴν εὐθεῖαν (§56) εἶνε σημεῖον καθ' ὑπόστασιν καὶ ἔστω τοῦτο O.

Ἐν τῇ δέσμῃ O γεννᾶται μία κατ' ἀναλογίαν ἰσότης, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν, ἐὰν στρέψωμεν τὸ ἐπίπεδον τῆς δέσμης περὶ ὡρισμένην γωνίαν φ. Ἐπειδὴ τώρα δύο ἀντίστοιχα σημεῖα πρέπει νὰ ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ τοῦ διπλοῦ σημείου O, ἐὰν κάμωμεν τὴν ἐν λόγῳ στροφὴν περὶ τὸ O, θὰ συμπέσῃ ὄχι μόνον ἑκάστη εὐθεῖα μὲ τὴν ἀντίστοιχον αὐτῆς, ἀλλὰ καὶ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου (ἑπομένως καὶ τυχοῦσα εὐθεῖα αὐτοῦ) θὰ συμπέσῃ μὲ τὸ ὁμόλογον αὐτοῦ στοιχεῖον. Ἑπομένως ἔχομεν ἐν γένει ὅτι,

«*ἑκάστη κατ' ἀναλογίαν ἰσότης ἐν τῷ ἐπιπέδῳ δύναται νὰ παραχθῇ διὰ μιᾶς στροφῆς τοῦ ἐπιπέδου περὶ ἓν σταθερὸν κέντρον ἢ διὰ μιᾶς παραλλήλου μεταφορᾶς τούτου ἐφ' ἑαυτοῦ*».

Ἐὰν πρόκειται περὶ στροφῆς καὶ ἡ γωνία, κατὰ τὴν ὁποίαν στρέφεται τὸ ἐπίπεδον, εἶνε δύο ὀρθαί, ἡ ἐν λόγῳ ἰσότης εἶνε μία συμμετρία ὡς πρὸς τὸ ἐν λόγῳ κέντρον.

Θὰ ἐξετάσωμεν τώρα μίαν *μὴ ὁμολογικὴν κατ' ἀντιστροφὴν ἰσότητα* ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

Ἐπὶ τῆς κατ' ἐξοχὴν εὐθείας θὰ ὑπάρχουν δύο διπλᾶ σημεῖα Α καὶ Β, ἀντιστοιχοῦντα εἰς καθέτους ἐπ' ἀλλήλας διευθύνσεις (46, σελ.115). Θὰ δείξωμεν ὅτι, ἓν τούτων συνδυάζεται μὲ τὴν κατ' ἐξοχὴν εὐθεῖαν. Διότι, ἐὰν δὲν συμβαίνῃ τοῦτο, πρέπει νὰ ὑπάρχῃ ἓν καθ' ὑπόστασιν διπλοῦν σημεῖον Ο, συνδυαζόμενον μὲ αὐτήν. Ἀλλ' οὕτω ἐν τῇ δέσμῃ, τῇ ἐχούσῃ κέντρον τὸ Ο, θὰ ἔχωμεν μίαν κατ' ἀντ.στροφὴν ἰσότητα μὲ δύο καθέτους ἐπ' ἀλλήλας διπλᾶς εὐθείας, α καὶ β π.χ., καὶ ἐφ' ἑκάστης τούτων θὰ ὑπάρχῃ μία ἰσότης μὲ διπλοῦν σημεῖον τὸ Ο, ἑπομένως μία κατ' ἀντιστροφὴν ἰσότης, ἰσοδύναμος μὲ μίαν συμμετρίαν ὡς πρὸς τὸ Ο. Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι, εἰς ἑκάστην εὐθεῖαν k θὰ ἀντιστοιχῇ μία εὐθεῖα k', ἥτις τέμνει τὰς α καὶ β εἰς τὰ σημεῖα Α' καὶ Β', τὰ ὁποῖα εἶνε συμμετρικὰ τῶν $A \equiv k\alpha$ καὶ $B \equiv k\beta$ ὡς πρὸς τὸ Ο. Ἄρα εἰς ἑκάστην εὐθεῖαν k θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ συμμετρικὴ αὐτῆς k' ὡς πρὸς τὸ Ο. Ἀλλὰ τοῦτο σημαίνει ὅτι, ἡ ἐν λόγῳ ἰσότης πρέπει νὰ εἶνε μία συμμετρία ὡς πρὸς τὸ Ο, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν, ὅτι αὕτη εἶνε μὴ ὁμολογικὴ κατ' ἀντιστροφὴν ἰσότης. p. 146

Ἔστω λοιπὸν Α τὸ ἓν τῶν διπλῶν σημείων τῆς κατ' ἐξοχὴν εὐθείας τὸ συνδυαζόμενον μὲ αὐτήν. Τότε μὲ τὸ ἄλλο διπλοῦν σημεῖον Β τῆς κατ' ἐξοχὴν εὐθείας θὰ συνδυάζεται μία καθ' ὑπόστασιν εὐθεῖα, ἔστω ἡ α, ἥτις πρέπει νὰ διέρχεται διὰ τοῦ Α, διότι ἄλλως θὰ συνεδυάζετο αὕτη μετὰ τοῦ Α. Ἐπὶ τῆς α δὲν θὰ ὑπάρχῃ διπλοῦν σημεῖον καθ' ὑπόστασιν, ἑπομένως ἡ ἐπ' αὐτῆς παραγομένη ἰσότης θὰ εἶνε κατ' ἀναλογίαν, καὶ θὰ εἶνε ἰσοδύναμος μὲ μίαν ὀλίσθησιν τῆς α ἐφ' ἑαυτῆς (§ 46,σελ.112), κατὰ ἓν μῆκος ὡρισμένον λ πρὸς ὡρισμένην φοράν. Δυνάμεθα τώρα νὰ κατασκευάσωμεν τὴν ἰσότητα ταύτην ὡς ἑξῆς. p. 149 (P)

Μεταφέρομεν τὸ ἐπίπεδον παραλλήλως πρὸς ἑαυτὸ κατὰ μῆκος λ πρὸς τὴν φορὰν τῆς ὀλισθήσεως, τὴν ὁποίαν θεωροῦμεν ἐπὶ τῆς α. Διὰ ταύτης τυχὸν σημεῖον Ρ θὰ λάβῃ νέαν θέσιν P_1, διάφορον τοῦ Ρ', ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὸ Ρ ἐν τῇ δοθείσῃ ἰσότητι (ἐπειδὴ αὕτη δὲν εἶνε παράλληλος μεταφορά). Ἀλλὰ τὸ P_1 κεῖται μετὰ τοῦ Ρ' ἐπὶ εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὴν α. Διότι ἡ κάθετος εὐθεῖα ἐπὶ τὴν α διὰ τοῦ Ρ (ἥτις εἶνε μία εὐθεῖα τῆς κατ' ἐξοχὴν διπλῆς δέσμης Β) κινεῖται παραλλήλως ἑαυτῇ, ἡ δὲ τομὴ ταύτης μετὰ τῆς α διαγράφει ἐπὶ τῆς α ἓν τμῆμα μήκους λ,

$P_1 \sim P$
$P \sim P'$
$P_1 \sim P'$

καὶ συμπίπτει τέλος μὲ τὴν τομὴν τῆς α καὶ τῆς καθέτου ἐπὶ ταύτην διὰ τοῦ P′. Τὰ σημεῖα P_1 καὶ P′ ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἄλληλα εἰς μίαν νέαν (μὴ ἐκ ταυτότητος) ἰσότητα, ἥτις εἶνε τὸ γινόμενον τῆς δοθείσης ἰσότητος καὶ τῆς κατ᾽ ἀντίθετον φορὰν γενομένης παραλλήλου μεταφορᾶς. Εἰς ταύτην πάντα τὰ σημεῖα τῆς α εἶνε διπλᾶ σημεῖα εἰς τρόπον, ὥστε ἡ ἰσότης αὐτὴ εἶνε (ὁμολογικὴ ἤ) μία ὀρθογώνιος συμμετρία ὡς πρὸς τὴν α. Πρέπει λοιπὸν μετὰ τὴν γενομένην μεταφορὰν νὰ γίνῃ καὶ μία στροφὴ τοῦ ἐπιπέδου περὶ τὴν α, μέχρις ὅτου ἐφαρμόσῃ ἐφ᾽ ἑαυτοῦ, ἵνα φέρῃ αὕτη εἰς ἐφαρμογὴν ἕκαστον σημεῖον, μὲ τὸ ἀντίστοιχον αὐτοῦ ἐν τῇ δοθείσῃ κατ᾽ ἀντιστροφὴν ἰσότητι. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν ὅτι, *«ἑκάστη ἐπίπεδος κατ᾽ ἀντιστροφὴν ἰσότης δύναται νὰ παραχθῇ διὰ μιᾶς παραλλήλου μεταφορᾶς τοῦ ἐπιπέδου ἐφ᾽ ἑαυτοῦ πρὸς τὴν φορὰν ἑνὸς ὡρισμένου ἄξονος, καὶ διὰ μιᾶς στροφῆς τούτου περὶ τὸν ἄξονα τοῦτον μέχρις ὅτου ἐφαρμόσῃ ἐφ᾽ ἑαυτοῦ»*.

Ἐὰν πρόκειται περὶ κατ᾽ ἀντιστροφὴν ὁμολογικῶν ἰσοτήτων (συμμετριῶν) ἀρκεῖ μόνον ἡ ἐν λόγῳ στροφὴ τοῦ ἐπιπέδου.

Κατ᾽ ἀναλογίαν πρὸς τὴν κατ᾽ ἀναλογίαν καὶ κατ᾽ ἀντιστροφὴν ἰσότητα λέγομεν ὅτι δύο ἐπίπεδα σχήματα εἶνε κατ᾽ ἀναλογίαν μὲν ἴσα, ἐὰν δύνανται νὰ ἐφαρμόσουν διὰ μιᾶς παραλλήλου μεταφορᾶς τοῦ ἐπιπέδου ἢ διὰ μιᾶς στροφῆς τούτου περὶ ἓν σημεῖον, κατ᾽ ἀντιστροφὴν δὲ ἴσα, ἐὰν δύνανται νὰ ἐφαρμόσουν, ἂν τὸ ἐπίπεδον ὑποστῇ μίαν παράλληλον μεταφορὰν πρὸς ὡρισμένην φοράν, καὶ ἀκολούθως μίαν στροφὴν περὶ ἄξονα, διερχόμενον διὰ τῆς ἐν λόγῳ φορᾶς, μέχρις ὅτου ἐφαρμόσῃ ἐφ᾽ ἑαυτοῦ.

§ 59. Πολώσεις ἐν τῷ ἐπιπέδῳ καὶ ἰδιότητες αὐτῶν*.

Ἐν ἀντιστροφῇ μεταξὺ δύο ἐπιπέδων, κειμένων ἐπ᾽ ἀλλήλων, δύο ὁμόλογα στοιχεῖα δὲν ἀντιστοιχοῦν ἐν γένει διττῶς πρὸς ἄλληλα, δηλαδὴ εἰς ἓν σημεῖον A εἶνε ὁμόλογος μία εὐθεῖα α, καὶ εἰς ταύτην ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν δοθεῖσαν ἀντιστροφὴν ἓν σημεῖον A′, διάφορον τοῦ A.

Καλοῦμεν *πόλωσιν ἢ πολικὸν σύστημα* μίαν ἀντιστροφὴν ἐφ᾽ ἑνὸς ἐπιπέδου, ἐν τῇ ὁποίᾳ δύο οἱαδήποτε ὁμόλογα στοιχεῖα ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἄλληλα κατὰ διπλοῦν τρόπον (ἐνελικτικῶς), δηλαδὴ μίαν ἀντιστροφήν, ἥτις εἶνε ἰσοδύναμος πρὸς τὴν προκύπτουσαν διὰ τῆς ἀντιστροφῆς ταύτης. Ἓν σημεῖον καὶ μία εὐθεῖα, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἄλληλα

* Ἡ θεωρία περὶ τῶν πολικῶν τῶν κωνικῶν τομῶν ὀφείλεται εἰς τὸν Desargues, ὅστις ἀνέπτυξεν αὐτὴν τὸ 1639 εἰς τὸ ἔργον αὐτοῦ «Brouillon projet d'une atteinte. . . . .». ἐνῷ ὁ Ἀπολλώνιος ἀπέδειξεν (Conicorum, βιβλ. I I, πρότασις XXXVII), ὅτι, *«ἡ τομὴ δύο ἐφαπτομένων κωνικῆς τομῆς χωρίζεται ἁρμονικῶς ἀπὸ τῶν σημείων τῆς χορδῆς τῶν ἐπαφῶν διὰ τῆς καμπύλης»*.

B

$P' \sim P$
$P \sim P_1$
$P' \sim P_1$

εἰς ἓν πολικὸν σύστημα, καλοῦνται *πόλος καὶ πολικὴ* εὐθεῖα ἀλλήλων.

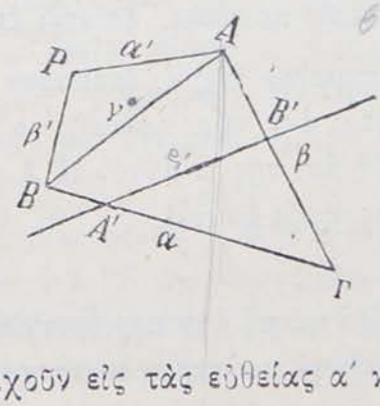
Ἡ πόλωσις ἐν τῷ ἐπιπέδῳ δύναται νὰ ὁρισθῇ καὶ ὡς μία σχέσις ἀντιστρεπτὴ καθ᾽ ἕνα τρόπον μεταξὺ τῶν σημείων καὶ τῶν εὐθειῶν αὐτοῦ εἰς τρόπον, ὥστε, ἐὰν ἡ εἰς ἓν σημεῖον Α ἀντιστοιχοῦσα (πολικὴ) εὐθεῖα διέρχεται διά τινος σημείου Β, ἡ εἰς τὸ σημεῖον Β, ἀντιστοιχοῦσα (πολικὴ) εὐθεῖα διέρχεται διὰ τοῦ Α.

Ἀντιστοίχως πρὸς ταῦτα δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὴν πόλωσιν ἐν κεντρικῇ δέσμῃ.

Ἡ ὕπαρξις πολικῶν συστημάτων προκύπτει ἐκ τῆς ἑπομένης προτάσεως,

«*Μία ἀντιστροφὴ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ εἶνε πόλωσις, ἐὰν ὑπάρχῃ ἓν τρικόρυφον ἐν τῷ ὁποίῳ εἰς ἑκάστην κορυφὴν ἀντιστοιχεῖ ἡ ἀπέναντι αὐτῆς πλευρά*».

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν εἰς μίαν ἀντιστροφὴν ἐν ἐπιπέδῳ εἰς τὰ τρία σημεῖα Α,Β,Γ ἀντιστοιχοῦν αἱ ἀπέναντι πλευραὶ α,β,γ τοῦ τρικορύφου ΑΒΓ, εἰς τὴν εὐθεῖαν $\alpha \equiv B\Gamma$ πρέπει νὰ ἀντιστοιχῇ τὸ σημεῖον $A \equiv \beta\gamma$ κλπ., δηλαδὴ αἱ κορυφαὶ τοῦ τρυκορύφου καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν πλευραὶ ἀντιστοιχοῦν διττῶς πρὸς ἄλληλα. Ἀλλ᾽ ἐν τῇ θεωρουμένῃ προβολικότητι ἡ σημειοσειρὰ α εἶνε προβολικὴ πρὸς τὴν δέσμην Α τῶν ὁμολόγων ἀκτίνων, οὕτως ὥστε, ἐὰν τμήσωμεν τὴν δέσμην ταύτην διὰ τῆς εὐθείας α, θὰ εὕρωμεν ἐπ᾽ αὐτῆς μίαν προβολικότητα. Ἐπειδὴ εἰς τὴν προβολικότητα ταύτην τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ἀντιστοιχοῦν διττῶς πρὸς ἄλληλα, εἶνε αὕτη ἐνέλιξις, καὶ ἑπομένως ἀντιστοιχοῦν μεταξύ των διττῶς τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας α καὶ αἱ ὁμόλογοι ἀκτῖνες τῆς δέσμης Α. Τὸ αὐτὸ δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν διὰ τὰ σημεῖα τῶν εὐθειῶν β καὶ γ καὶ διὰ τὰς εἰς ταῦτα ὁμολόγους εὐθείας, τὰς διερχομένας διὰ τῶν Β καὶ Γ. Κατ᾽ ἀκολουθίαν θὰ ἀντιστοιχῇ διττῶς εἰς ἕκαστον σημεῖον Ρ, καθ᾽ ὃ τέμνονται δύο εὐθεῖαι α' καὶ β' διερχόμεναι διὰ τῶν Α καὶ Β, ἡ ὁμόλογος εὐθεῖα ρ, ἥτις ὁρίζεται ὡς εὐθεῖα συνδέουσα τὰ σημεῖα Α′ καὶ Β′ (κείμενα ἐπὶ τῶν α καὶ β), τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς εὐθείας α' καὶ β'. Ἄρα ἡ θεωρουμένη ἀντιστοφὴ εἶνε ἓν πολικὸν σύστημα.



Ἐν πολικῷ συστήματι τὰ τρικόρυφα ΑΒΓ, τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ εἶνε *πόλοι* τῶν ἔναντι αὐτῶν κειμένων πλευρῶν, λέγονται *συζυγῆ ἢ πολικὰ (ἢ αὐτοσυζυγῆ ἢ αὐτοαντίστροφα) τρίγωνα.*

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς πολώσεως προκύπτουν ἀμέσως αἱ ἑπόμεναι δίδυμοι προτάσεις.

Ἐν ἐπιπέδῳ πολώσει

αἱ πολικαὶ τῶν σημείων μιᾶς εὐθείας διέρχονται διὰ τοῦ πόλου αὐτῆς.

οἱ πόλοι τῶν δι' ἑνὸς σημείου διερχομένων εὐθειῶν κεῖνται ἐπὶ τῆς πολικῆς τοῦ σημείου.

Ἡ δέσμη τῶν πολικῶν τῶν σημείων μιᾶς εὐθείας α εἶνε προβολικὴ πρὸς τὴν σημειοσειρὰν (α) τῶν πόλων αὐτῆς (§52 σελ. 136).

Ἡ σημειοσειρὰ τῶν πόλων τῶν εὐθειῶν μιᾶς δέσμης Α εἶνε προβολικὴ πρὸς τὴν δέσμην (Α) τῶν πολικῶν αὐτῆς (§ 52, σελ. 136).

Δύο σημεῖα Α καὶ Β, ἕκαστον τῶν ὁποίων κεῖται ἐπὶ τῆς πολικῆς τοῦ ἄλλου, καλοῦνται *συζυγῆ ἐν τῷ πολικῷ συστήματι* ἢ *ἀντίστροφα σημεῖα*· σημεῖον δὲ τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς πολικῆς αὐτοῦ λέγεται *συζυγὲς πρὸς ἑαυτό.*

Δύο εὐθεῖαι α καὶ β, ἐφ' ἑκάστης τῶν ὁποίων κεῖται ὁ πόλος τῆς ἄλλης, καλοῦνται *συζυγεῖς ἐν τῷ πολικῷ συστήματι* ἢ *ἀντίστροφοι ἀλλήλων*· εὐθεῖα δέ τις ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται ὁ πόλος ταύτης λέγεται *συζυγὴς πρὸς ἑαυτήν.*

Ἐὰν στοιχεῖόν τι εἶνε συζυγὲς πρὸς ἄλλο θὰ εἶνε καὶ τὸ δεύτερον συζυγὲς πρὸς τὸ πρῶτον. Εἰς πολικὸν τρικόρυφον αἱ τρεῖς κορυφαὶ καὶ αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶνε ἀνὰ δύο συζυγεῖς· ἀντιστρόφως, ἂν ἐν τρικορύφῳ αἱ τρεῖς κορυφαὶ ἢ αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶνε ἀνὰ δύο συζυγεῖς, τὸ τρικόρυφον εἶνε πολικόν.

Ἐὰν ἓν σημεῖον Α καὶ μία εὐθεῖα α ἀντιστοιχοῦντα πρὸς ἄλληλα ἐν ἐπιπέδῳ πολώσει, κεῖνται ἐπ' ἀλλήλων,

οὐδὲν σημεῖον τῆς α, διάφορον τοῦ Α, κεῖται ἐπὶ τῆς πολικῆς αὐτοῦ (δηλαδὴ ἐπὶ τῆς α μόνον τὸ Α εἶνε συζυγὲς πρὸς ἑαυτό).

οὐδεμία εὐθεῖα διάφορος τῆς α καὶ ἀγομένη διὰ τοῦ Α, διέρχεται διὰ τοῦ πόλου αὐτῆς (δηλαδὴ ἐκ τῶν διὰ τοῦ Α διερχομένων εὐθειῶν μόνον ἡ α εἶνε συζυγὴς πρὸς ἑαυτήν).

Πράγματι, ἐὰν περιορισθῶμεν μόνον εἰς τὴν ἀριστερὰ ἀνωτέρω ἀναγραφομένην πρότασιν, παρατηροῦμεν ὅτι, ἐν τῇ πρόβολικότητι, ἥτις προκύπτει ἐκ τῆς πολώσεως μεταξὺ τῆς δέσμης Α καὶ τῆς σημειοσειρᾶς α, αἱ ὁμόλογοι ἀκτῖνες πρὸς τὰ σημεῖα τῆς α διέρχονται διὰ τοῦ Α, καὶ αἱ ἀκτῖνες, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς σημεῖα διάφορα τῶν τῆς α, εἶνε διάφοροι τῆς α.

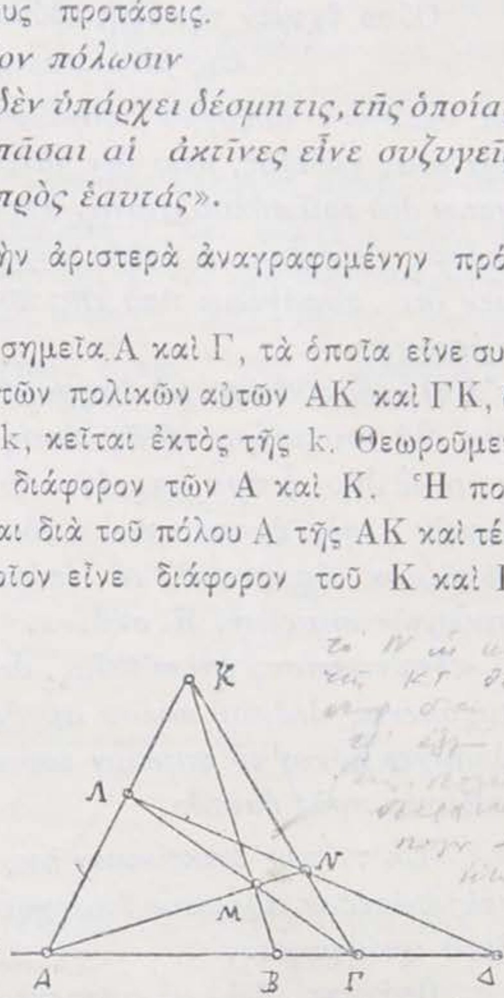
Θὰ ἀποδείξωμεν τὰς ἑξῆς διδύμους προτάσεις.

Εἰς μίαν ἐπίπεδον πόλωσιν

δὲν ὑπάρχει εὐθεῖά τις, τῆς ὁποίας πάντα τὰ σημεῖα εἶνε συζυγῆ πρὸς ἑαυτά».	*δὲν ὑπάρχει δέσμη τις, τῆς ὁποίας πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες εἶνε συζυγεῖς πρὸς ἑαυτάς».*

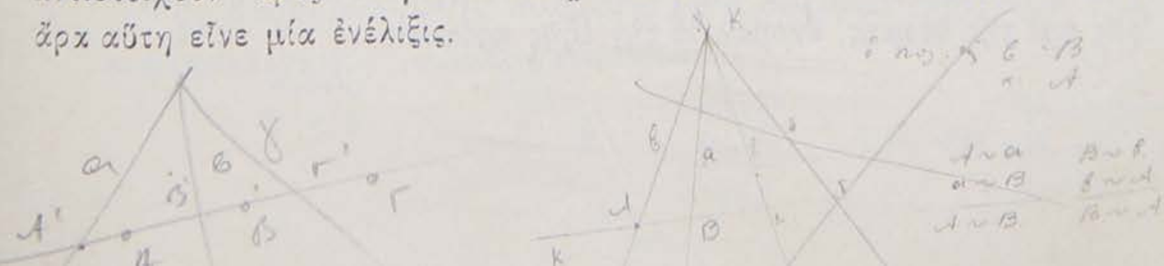
Ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν μόνον τὴν ἀριστερὰ ἀναγραφομένην πρότασιν.

Ἐὰν ἐπ' εὐθείας k ὑπάρχουν δύο σημεῖα Α καὶ Γ, τὰ ὁποῖα εἶνε συζυγῆ πρὸς ἑαυτά, δηλαδὴ κεῖνται ἐπὶ τῶν πολικῶν αὐτῶν ΑΚ καὶ ΓΚ, ὁ (κοινὸς τῶν ΑΚ καὶ ΓΚ) πόλος Κ τῆς k, κεῖται ἐκτὸς τῆς k. Θεωροῦμεν τώρα ἓν σημεῖον Λ τῆς εὐθείας ΑΚ, διάφορον τῶν Α καὶ Κ. Ἡ πολικὴ τούτου (διάφορος τῆς ΑΚ) διέρχεται διὰ τοῦ πόλου Α τῆς ΑΚ καὶ τέμνει τὴν ΓΚ εἰς ἓν σημεῖον Ν, τὸ ὁποῖον εἶνε διάφορον τοῦ Κ καὶ Γ (πόλου τῆς ΓΚ). Ἡ πολικὴ τοῦ Ν εἶνε ἡ εὐθεῖα ΓΛ, ἥτις συνδέει δύο συζυγῆ αὐτοῦ σημεῖα, ἑπομένως τὸ σημεῖον Μ τομὴ τῶν ΑΝ καὶ ΓΛ, εἶνε συζυγὲς τῶν Λ καὶ Ν, καὶ διὰ τοῦτο ἡ εὐθεῖα ΛΝ εἶνε ἡ πολικὴ τοῦ σημείου Μ.



Θεωροῦμεν τώρα τὰ σημεῖα Δ, (τομὴν τῶν k καὶ ΛΝ) καὶ Β (τομὴν τῆς k καὶ τῆς ΚΜ. Ταῦτα εἶνε συζυγῆ ἐν τῇ πολώσει, ἐπειδὴ ἡ πολικὴ τοῦ Δ εἶνε ἀκριβῶς εὐθεῖα ΚΜ, ἥτις συνδέει τοὺς πόλους τῶν k καὶ ΛΝ. Ἀλλὰ τὰ ἐν λόγῳ σημεῖα Β καὶ Δ εἶνε καὶ συζυγῆ ἁρμονικὰ σημεῖα ὡς πρὸς τὰ Α καὶ Γ (ἕνεκα τοῦ τετρακορύφου ΚΛΜΝ), καὶ διὰ τοῦτο εἶνε σημεῖα διάφορα ἀλλήλων. Οὕτω ἐδείχθη ὅτι, ὑπάρχουν ἐπὶ τῆς k δύο διάφορα σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἐν τῇ πολώσει εἶνε συζυγῆ πρὸς ἄλληλα, ἑπομένως δὲν εἶνε συζυγῆ πρὸς ἑαυτά.

Θεωροῦμεν τώρα εὐθεῖάν τινα k, ἐφ' ἧς δὲν κεῖται ὁ πόλος Κ. Εἰς τὰ σημεῖα τῆς k ἀντιστοιχοῦν ὡς πολικαὶ αἱ διὰ τοῦ Κ διερχόμεναι εὐθεῖαι, καὶ ἡ σχέσις εἶνε προβολική. Ἐὰν τμήσωμεν τὴν δέσμην Κ διὰ τῆς εὐθείας k, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς k μίαν προβολικότητα, ἐν ᾗ ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἄλληλα τὰ σημεῖα (τῆς k), τὰ ὁποῖα εἶνε συζυγῆ ἐν τῇ πολώσει. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι ἡ προβολικότης δὲν εἶνε ταὐτότης, ἀλλ' ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἄλληλα ἐν αὐτῇ διττῶς ἀνὰ δύο ἀντίστοιχα σημεῖα, ἄρα αὕτη εἶνε μία ἐνέλιξις.



Οὕτω ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

Εἰς μίαν πόλωσιν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ

τὰ ζεύγη συζυγῶν σημείων ἐπὶ μιᾶς εὐθείας, ἥτις δὲν διέρχεται διὰ τοῦ πόλου αὐτῆς, ἀποτελοῦν ἐνέλιξιν, ἡ ὁποία λέγομεν ὅτι παράγεται ὑπὸ τῆς πολώσεως».	*«τὰ ζεύγη συζυγῶν ἀκτίνων δέσμης, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς πολικῆς αὐτοῦ, ἀποτελοῦν ἐνέλιξιν, ἥτις λέγομεν ὅτι παράγεται ὑπὸ τῆς πολώσεως».*
«Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας, μὴ διερχομένης διὰ τοῦ πόλου αὐτῆς, ὑπάρχουν ἢ δύο ζεύγη σημείων συζυγῶν πρὸς ἑαυτά, καὶ ταῦτα χωρίζουν ἁρμονικῶς τὰ ζεύγη συζυγῶν σημείων, ἢ οὐδέν».	*«Δι' ἑνὸς σημείου, μὴ κειμένου ἐπὶ τῆς πολικῆς αὐτοῦ, διέρχονται ἢ δύο εὐθεῖαι συζυγεῖς πρὸς ἑαυτάς, καὶ αὗται χωρίζουν ἁρμονικῶς τὰ ζεύγη συζυγῶν εὐθειῶν, ἢ οὐδεμία».*
«Τοὐναντίον, ἐπὶ εὐθείας, διερχομένης διὰ τοῦ πόλου αὐτῆς ὑπάρχει μόνον τὸ σημεῖον τοῦτο συζυγὲς πρὸς ἑαυτό».	*«Τοὐναντίον, διὰ σημείου, κειμένου ἐπὶ τῆς πολικῆς αὐτοῦ, διέρχεται μόνον ἡ εὐθεῖα αὕτη συζυγὴς πρὸς ἑαυτήν».*

Ἐκ τούτων διακρίνομεν ὅτι,

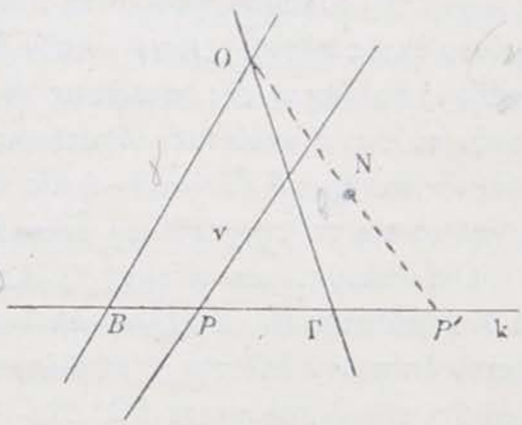
«εἰς ἐπίπεδον πόλωσιν ὑπάρχουν ἄπειρα τὸ πλῆθος συζυγῆ ἢ πολικὰ τρικόρυφα».

Πράγματι, διὰ νὰ κατασκευάσωμεν ἓν τοιοῦτον, λαμβάνομεν αὐθαιρέτως ὡς κορυφὴν ἓν σημεῖον Α, μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς μόνης πολικῆς αὐτοῦ α, καὶ ἐπὶ τῆς α δύο διάφορα συζυγῆ σημεῖα Β καὶ Γ. Τὸ τρικόρυφον ΑΓΒ εἶνε ἓν πολικὸν τρίγωνον εἰς τὴν δοθεῖσαν πόλωσιν. Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ εὕρωμεν τὴν ἀντίστοιχον ταύτης κατασκευὴν δι' ἐφαρμογῆς τῆς ἀρχῆς τῆς ἐναλλαγῆς.

Ἔστω ὅτι δίδεται μία ἐπίπεδος πόλωσις. Ἐὰν φαντασθῶμεν μίαν σημειοσειρὰν k, μὴ διερχομένην διὰ τοῦ πόλου αὐτῆς O, καὶ σχετιζομένην προοπτικῶς πρὸς τὴν δέσμην, τὴν ἔχουσαν κέντρον τὸ O, ἡ ἐνέλιξις τῶν συζυγῶν σημείων τῆς k θὰ προβάλλεται διὰ τῆς ἐνελίξεως τῶν συζυγῶν ἀκτίνων τῆς O, καὶ εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς k θὰ ἀντιστοιχῇ ὡς πολικὴ αὐτοῦ ἡ ἀκτὶς ἐκείνη, ἥτις προβάλλει αὐτὸ ἀπὸ τοῦ O, καὶ ἡ ὁποία εἶνε συζυγὴς πρὸς αὐτό. Ἡ τοιαύτη σχέσις μεταξὺ τῶν k καὶ O εἶνε μία ἰδιαιτέρα περίπτωσις προβολικότητος, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν ὡς γινόμενον μιᾶς προοπτικότητος μεταξὺ τῶν k καὶ O καὶ μιᾶς ἐνελίξεως ἐπὶ τῆς k (ἢ τῆς O), καὶ καλοῦμεν αὐτὴν *ἐνέλιξιν* μεταξὺ τῆς σημειοσειρᾶς καὶ τῆς δέσμης, ἔχομεν δὲ τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«Ἐὰν δοθῇ μεταξὺ μιᾶς σημειοσειρᾶς k καὶ μιᾶς δέσμης O μία ἐνέλιξις, ὑπάρχουν ἄπειροι τὸ πλῆθος ἐπίπεδοι πολώσεις, διὰ τὰς ὁποίας εἰς τὰ σημεῖα τῆς k ἀντιστοιχοῦν αἱ συζυγεῖς εὐθεῖαι, αἱ διερχόμεναι διὰ τοῦ O».

Πράγματι, διὰ νὰ εὕρωμεν μίαν τοιαύτην πόλωσιν, ἀρκεῖ νὰ ὑποθέσωμεν, ὅτι εἰς ἓν σημεῖον N, διάφορον τοῦ O καὶ κείμενον ἐκτὸς τῆς k, ἀντιστοιχεῖ μία εὐθεῖα ν, διάφορος τῆς k καὶ μὴ διερχομένη διὰ τοῦ O, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ σημείου P τῆς k, συζυγοῦς τῆς ἀκτῖνος ON. Ἐὰν δηλαδὴ θεωρήσωμεν δύο σημεῖα B καὶ Γ τῆς k, διάφορα τοῦ P καὶ τῆς τομῆς P′ τῶν k καὶ ON, τὰ ὁποῖα εἶνε συζυγῆ ἐν τῇ ἐνελίξει ἐπὶ τῆς k, εἶνε δὲ OΓ καὶ OB αἱ εἰς ταῦτα συζυγεῖς ἀκτῖνες ἐν τῇ δέσμῃ O, θὰ ἔχωμεν μίαν τελείως ὁριζομένην πόλωσιν, ἐν τῇ ὁποίᾳ τὸ OBΓ εἶνε πολικὸν τρικόρυφον καὶ ἡ ν εἶνε πολικὴ τοῦ N. Εἰς ταύτην ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ σημεῖα B, P,... τῆς k αἱ ἀκτῖνες OΓ, ON,..., αἵτινες εἶνε συζυγεῖς εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐνέλιξιν μεταξὺ τῆς σημειοσειρᾶς k καὶ τῆς δέσμης O.



Διακρίνομεν τὰς κατωτέρω δύο κατηγορίας ἐπιπέδων πολώσεων, ἔχοντες ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι, ἓν τρικόρυφον ABΓ χωρίζει τὸ ἐπίπεδον ἐφ᾽ οὗ κεῖται εἰς τὰς ἑξῆς τέσσαρας περιοχάς. Ἐκ τούτων ἡ μία εἶνε ἡ περιεχομένη ἐντὸς τοῦ τριγώνου ABΓ (ἐν τῇ ἐννοίᾳ τῆς στοιχειώδους Γεωμετρίας)· ἡ δευτέρα εἶνε ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν προεκτάσεων τῶν δύο πλευρῶν BΓ καὶ AΓ τοῦ τριγώνου (ἐν τῇ αὐτῇ πάντοτε ἐννοίᾳ) καθὼς καὶ ἡ περιοχομένη ὑπὸ τῆς πλευρᾶς AB καὶ τῆς προεκτάσεως τῶν ΓA καὶ ΓB· ἡ τρίτη περιέχεται μεταξὺ τῶν προεκτάσεων τῶν πλευρῶν ΓA καὶ BA τοῦ τριγώνου, καθὼς καὶ ἡ μεταξὺ τῆς BΓ καὶ τῶν προεκτάσεων τῶν AB καὶ AΓ· ἡ δὲ τετάρτη περιέχεται μεταξὺ τῶν προεκτάσεων τῶν πλευρῶν ΓB καὶ AB, καθὼς καὶ ἡ μεταξὺ τῆς AΓ καὶ τῶν προεκτάσεων τῶν BA καὶ BΓ.

1) Τὰς ὁμοιομόρφους πολώσεις ἄνευ συζυγῶν στοιχείων πρὸς ἑαυτά. Αὗται χαρακτηρίζονται διὰ τούτου, ὅτι ἡ πολικὴ ἑκάστου σημείου τοῦ ἐπιπέδου, κειμένου ἐντὸς μιᾶς τῶν περιοχῶν, τῶν ὁριζομένων ὑπὸ ἑνὸς πολικοῦ τριγώνου, κεῖται ἐκτὸς τῆς περιοχῆς ταύτης».

«Τὰς ἀνομοιομόρφους πολώσεις μετὰ συζυγῶν στοιχείων πρὸς

ἑαυτά. Αὗται χαρακτηρίζονται διὰ τούτου, ὅτι ἡ πολικὴ ἑκάστου σημείου τοῦ ἐπιπέδου, κειμένου ἐντὸς μιᾶς τῶν περιοχῶν, τῶν ὁριζομένων ὑπὸ ἑνὸς πολικοῦ τριγώνου, εἰσέρχεται ἐντὸς τῆς περιοχῆς ταύτης».

§ 60. Πολώσεις ἐν κεντρικῇ δέσμῃ.

Διὰ πλείστας ἰδιότητας ἀφορώσας εἰς ἐπιπέδους ὁμογραφίας καὶ εἰς ἀντιστροφὰς καὶ ἰδία διὰ τὰς ἀφορώσας εἰς τὰς ἐπιπέδους πολώσεις δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀντιστοίχους αὐτῶν ἐν κεντρικῇ δέσμῃ, διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἀρχῆς τοῦ δυασμοῦ ἢ διὰ μιᾶς προβολῆς τοῦ πεδίου ἀπό τινος σημείου, κειμένου ἐκτὸς αὐτοῦ. Οὕτω λοιπὸν θὰ ἔχωμεν κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὰς ἐπιπέδους πολώσεις τὰς πολώσεις ἐν κεντρικῇ δέσμῃ καθ' ὑπόστασιν. Μεταξὺ τούτων διακρίνομεν ἰδιαιτέρως τὴν καλουμένην *ὁμοιόμορφον πόλωσιν ἐν κεντρικῇ δέσμῃ*, ἐν ᾗ εἰς ἑκάστην εὐθεῖαν τῆς δέσμης ἀντιστοιχεῖ τὸ εἰς ταύτην κάθετον ἐπίπεδον αὐτῆς.

Ὅτι ὑπάρχει μία τοιαύτη πόλωσις φαίνεται ἐκ τοῦ ὅτι, ἂν k καὶ λ εἶνε δύο (κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας) ἀκτῖνες τῆς δέσμης, τοιαῦται ὥστε, τὸ κάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ τὴν k νὰ διέρχεται διὰ τῆς λ, καὶ τὸ κάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ τὴν λ διέρχεται διὰ τῆς k (§59,σελ.157). Ἡ πόλωσις αὕτη καλεῖται συνήθως καὶ *ὀρθογώνιος πόλωσις ἐν τῇ κεντρικῇ δέσμῃ*.

Ἂν O καὶ O′ εἶνε δύο ὁμογραφικαὶ (καθ' ὑπόστασιν) κεντρικαὶ δέσμαι, καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι ἐν τῇ ὁμογραφίᾳ ταύτῃ εἰς τὴν ὀρθογώνιον πόλωσιν τῆς μιᾶς δέσμης ἀντιστοιχεῖ ἡ ὀρθογώνιος πόλωσις τῆς ἄλλης, θὰ σημαίνῃ τοῦτο ὅτι, εἰς μίαν εὐθεῖαν καὶ ἓν ἐπίπεδον, διερχόμενα διὰ τοῦ O καὶ κάθετα ἐπ' ἄλληλα, ἀντιστοιχοῦν μία εὐθεῖα καὶ ἓν ἐπίπεδον διερχόμενα διὰ τοῦ O′ καὶ κάθετα ἐπ' ἄλληλα. Δύο οἱαδήποτε ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι (ἢ ἀξονικαὶ) δέσμαι τῶν δύο δεσμῶν θὰ εἶνε τότε οὕτω προβολικῶς πρὸς ἀλλήλας συσχετισμέναι, ὥστε εἰς τὰ ζεύγη καθέτων ἐπ' ἄλληλα στοιχείων τῆς μιᾶς θὰ ἀντιστοιχοῦν τὰ ζεύγη καθέτων ἐπ' ἄλληλα στοιχείων τῆς ἄλλης. Ἑπομένως αἱ ἐν λόγῳ δέσμαι θὰ εἶνε ἴσαι (§46,σελ.112). Ἄρα ἐν τῇ ὁμογραφίᾳ μεταξὺ τῶν O καὶ O′ εἰς ἑκαστην γωνίαν δύο ἀκτίνων ἢ ἐπιπέδων τῆς μιᾶς δέσμης ἀντιστοιχεῖ μία ἴση γωνία τῆς ἄλλης δέσμης. Κατ' ἀκολουθίαν (ἕνεκα τῆς ὁμογραφίας) εἰς ἕκαστον τετράεδρον, ἔχον κορυφὴν τὸ O, ἀντιστοιχεῖ ἓν τοιοῦτον ἔχον κορυφὴν τὸ O′, τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι τῶν ἑδρῶν καὶ ἀκμῶν εἶνε κατὰ σειρὰν ἴσαι πρὸς τὰς ἀντιστοίχους γωνίας τοῦ ἄλλου. Ἑπομένως, δύο ἀντίστοιχα πρὸς ἄλληλα τετράεδρα τῶν δύο δεσμῶν εἶνε ἴσα (§13,σελ.24), καὶ διὰ τοῦτο ἡ ὁμογραφία αὕτη καλεῖται καὶ ἁπλῶς *ἰσότης*.

Ἐὰν φαντασθῶμεν τὴν δέσμην O κινουμένην οὕτως, ὥστε ἓν τετράεδρον ἔχον κορυφὴν τὸ O νὰ συμπέσῃ μὲ τὸ ἀντίστοιχον αὐτοῦ ἐν τῇ δέσμῃ O′, ἡ κίνησις αὕτη δίδει μίαν ὁμογραφίαν μεταξὺ τῶν δύο κεντρικῶν δεσμῶν, ἥτις δὲν δύναται νὰ διαφέρῃ τῆς ὁριζομένης διὰ τῆς ἀμοιβαίας ἀντιστοιχίας τῶν δύο τετραέδρων. Ἄρα ἡ ἐν λόγῳ κίνησις φέρει ἑκάστην εὐθεῖαν καὶ ἕκαστον ἐπίπεδον τῆς δέσμης O εἰς θέσιν συμπίπτουσαν πρὸς τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν στοιχεῖα τῆς O′ ἐν τῇ δοθείσῃ ἰσότητι. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν ὅτι,

«μία ὁμογραφία μεταξὺ δύο καθ' ὑπόστασιν κεντρικῶν δεσμῶν, ἐν τῇ ὁποίᾳ ἀντιστοιχοῦν αἱ ὀρθογώνιοι αὐτῶν πολώσεις, εἶνε μία ἰσότης, δύναται δ' αὕτη νὰ παραχθῇ διὰ μιᾶς κινήσεως, διὰ τῆς ὁποίας ἡ μία δέσμη τίθεται ἐπὶ τῆς ἄλλης, ὥστε νὰ συμπέσουν τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα αὐτῶν».

Ἐὰν θεωρήσωμεν δύο (καθ' ὑπόστασιν) κεντρικὰς δέσμας O καὶ O′, δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν διερχομένας διὰ τοῦ O δύο ἀκτῖνας α καὶ β, μὴ καθέτους ἐπ' ἀλλήλας, καὶ δύο ἄλλας α′ καὶ β′ διὰ τοῦ O′, σχηματιζούσας γωνίαν (α′, β′) ἴσην μὲ τὴν (α, β). Δυνάμεθα κατὰ δύο τρόπους νὰ φέρωμεν διὰ μιᾶς κινήσεως τὴν δέσμην O ἐπὶ τῆς O′, ὥστε νὰ ἐφαρμόσουν αἱ εὐθεῖαι α, α′ καὶ αἱ β, β′. Οὕτω ἔχομεν δύο ἰσότητας, ἐν αἷς τὰ ἐν λόγῳ ζεύγη στοιχείων, ἑπομένως καὶ αἱ ἀκτῖνες τῶν δεσμῶν αβ καὶ α′β′, ἀντιστοιχοῦν καθ' ὡρισμένον τρόπον πρὸς ἀλλήλας (§46, σελ. 111). Ἡ μία τῶν ἰσοτήτων παράγεται ἐκ τῆς ἄλλης διὰ μιᾶς συμμετρίας ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον α′β′ ἢ διὰ μιᾶς στροφῆς κατὰ δύο ὀρθὰς γωνίας περὶ τὴν διὰ τοῦ O′ ἀγομένην κάθετον εὐθεῖαν ἐπὶ τὸ ἐν λόγῳ ἐπίπεδον. Διὰ τῆς ἐφαρμογῆς καὶ τῆς ἀρχῆς τοῦ δυασμοῦ ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«Μεταξὺ δύο καθ' ὑπόστασιν κεντρικῶν δεσμῶν δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν δύο ἰσότητας, ὥστε εἰς δύο εὐθείας (ἢ ἐπίπεδα) τῆς μιᾶς δέσμης, σχηματιζούσας γωνίαν διάφορον τῆς ὀρθῆς, νὰ ἀντιστοιχοῦν δύο εὐθεῖαι (ἢ ἐπίπεδα) τῆς ἄλλης, σχηματίζουσαι γωνίαν ἴσην, ὡς αἱ πρῶται».

Τὸ προηγούμενον συμπέρασμα δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν αἱ δύο δέσμαι κεῖνται ἐπ' ἀλλήλων. Οὕτω ἔχομεν ἰσότητα ἐπὶ μιᾶς κεντρικῆς δέσμης (ὁμογραφίαν ἥτις μετασχηματίζει εἰς ἑαυτὴν τὴν ὀρθογώνιον πόλωσιν), καὶ δύο ζεύγη ἀκτίνων α β καὶ α′β′, σχηματίζοντα ἴσας μὲν γωνίας, ἀλλὰ διαφόρους τῆς ὀρθῆς, θὰ ὁρίζουν δύο ἰσότητας ἐν τῇ δέσμῃ, εἰς τὰς ὁποίας θὰ ἀντιστοιχοῦν αἱ α, α′ καὶ αἱ β, β′.

Μία ἰσότης ἐν κεντρικῇ δέσμῃ δύναται ~~δύναται~~ νὰ εἶνε *ὁμολογική*, καὶ ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ὑπάρχουν ἄπειροι διπλαῖ εὐθεῖαι, αἵτινες ἀποτελοῦν μίαν ἐπίπεδον δέσμην, καὶ ἄπειρα διπλᾶ ἐπίπεδα, διερχόμενα διὰ τῆς καθέτου εὐθείας α ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον **a** τῆς ἐν λόγῳ δέσμης. Εἰς ἑκάστην εὐθεῖαν α θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ συμμετρικὴ εὐθεῖα πρὸς τὴν α ἤ, τὸ ὁποῖον εἶνε τὸ αὐτό, ἡ συμμετρικὴ εὐθεῖα πρὸς τὸ ἐπίπεδον **a**.

Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι,

«μία ὁμολογικὴ ἰσότης ἐν κεντρικῇ δέσμῃ καθ' ὑπόστασιν εἶνε μία συμμετρία ὡς πρὸς ἕνα ἄξονα (καὶ ὡς πρὸς τὸ ἐπ' αὐτὸν κάθετον ἐπίπεδον) καὶ δύναται νὰ παραχθῇ διὰ μιᾶς στροφῆς τῆς δέσμης κατὰ δύο ὀρθὰς γωνίας περὶ τὸν ἄξονα».

Καλοῦμεν *ἀπόλυτον πόλωσιν* τοῦ κατ' ἐξοχὴν ἐπιπέδου, ἢ τοῦ χώρου, τὴν πόλωσιν, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ κατ' ἐξοχὴν ἐπιπέδου διὰ τῆς τομῆς ὑπὸ μιᾶς ὀρθογωνίου πολώσεως κεντρικῆς τινος δέσμης καθ' ὑπόστασιν, ἤτοι τὴν σχέσιν ἥτις προκύπτει μεταξὺ διευθύνσεων καὶ θέσεων διὰ τῆς ὀρθογωνιότητος. Ἐπίσης δυνάμεθα νὰ χαρακτηρίσωμεν ὡς ἰσότητα πᾶσαν ὁμογραφίαν τοῦ κατ' ἐξοχὴν ἐπιπέδου, ἥτις μετασχηματίζει εἰς ἑαυτὴν τὴν ἀπόλυτον πόλωσιν.

Ἐν μιᾷ ἰσότητι τοῦ κατ' ἐξοχὴν ἐπιπέδου εἰς δύο σημεῖα, παριστάνοντα τὰς διευθύνσεις, αἵτινες σχηματίζουν ὡρισμένην τινὰ γωνίαν, ἀντιστοιχοῦν δύο σημεῖα τὰ ὁποῖα παριστάνουν τὰς διευθύνσεις, τὰς σχηματιζούσας ἴσην γωνίαν, κλπ.

Ἐν τῷ κατ' ἐξοχὴν ἐπιπέδῳ ὑπάρχουν δύο ἰσότητες, εἰς τὰς ὁποίας ἀντιστοιχοῦν δύο ζεύγη ἀντιστοίχων σημείων ἐν τῇ αὐτῇ σειρᾷ ἀκολουθίας, κλπ.

Ἂν ὀρθογώνιον πόλωσιν ἐν κεντρικῇ τινι δέσμῃ Ο τμήσωμεν δι' ἑνὸς ἐπιπέδου (καθ' ὑπόστασιν) **a**, λαμβάνομεν μίαν πόλωσιν ἐν τῷ **a**. Ἐὰν Α εἶνε ἡ ὀρθὴ προβολὴ τοῦ Ο ἐπὶ τοῦ **a** καὶ κατασκευάσωμεν περιφέρειαν μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνά τινα, ἔστω τὴν (ΟΑ)=ρ, εἰς ἕκαστον σημεῖον Ρ τῆς περιφερείας ταύτης ἀντιστοιχεῖ ἐν τῇ πολώσει ἐπὶ τοῦ **a** μία εὐθεῖα, ἥτις ἐφάπτεται τῆς περιφερείας εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον Ρ', τῆς διαμέτρου τῆς περιφερείας, τῆς διερχομένης διὰ τοῦ Ρ. Ἀντιστρόφως, ἔχομεν ὅτι,

«ἐπὶ δοθέντος ἐπιπέδου ὑπάρχει μία ὡρισμένη πόλωσις ἐν τῇ ὁποίᾳ εἰς ἕκαστον σημεῖον μιᾶς περιφερείας κύκλου ἀντιστοιχεῖ ἡ ἐφαπτομένη ταύτης εἰς τὸ ἀπέναντι αὐτοῦ σημεῖον. Ἡ πόλωσις αὕτη προκύπτει διὰ τῆς τομῆς τῆς ὀρθογωνίου πολώσεως μιᾶς κεντρικῆς δέσμης, ἐχούσης τὸ κέντρον αὐτῆς ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς καθέ-

του ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον εἰς τὸ κέντρον τῆς περιφερείας, ἀπέχει δὲ τούτου ὅση εἶνε ἀκτὶς τῆς περιφερείας».

Τὴν πόλωσιν ταύτην καλοῦμεν συνήθως *ἀντιπόλωσιν* ὡς πρὸς τὴν περιφέρειαν, καὶ δύναται νὰ θεωρῆται ὡς προβολὴ τῆς ἀπολύτου πολώσεως τοῦ χώρου ἐπὶ ἐπιπέδου καθ' ὑπόστασιν, τὸ ὁποῖον περιέχει ταύτην, δύναται δὲ νὰ ὁρισθῇ καὶ ὡς ἀντιστροφή, ἐν τῇ ὁποίᾳ εἰς τέσσαρα τυχόντα σημεῖα τῆς περιφερείας ἀντιστοιχοῦν αἱ τέσσαρες ἐφαπτόμεναι ταύτης εἰς τὰ ἀπέναντι αὐτῶν σημεῖα, ἐνῷ ἡ ἀντιπολικὴ εὐθεῖα τοῦ κέντρου εἶνε ἡ κατ' ἐξοχὴν εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI.

Περὶ τῶν καμπύλων καὶ κώνων δευτέρου βαθμοῦ.

§ 61. Κωνικαὶ τομαὶ καὶ κῶνοι δευτέρου βαθμοῦ.

Ἐὰν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ δοθῇ μία ἀνομοιόμορφος πόλωσις ὑπάρχουν ἐν αὐτῷ τὰ ἑξῆς τρία εἴδη εὐθειῶν καὶ σημείων.

1) Εὐθεῖαι διερχόμεναι διὰ τοῦ πόλου αὐτῶν, ἐφ' ὧν κεῖται ἓν σημεῖον συζυγὲς πρὸς ἑαυτό.	1) Σημεῖα κείμενα ἐπὶ τῶν πολικῶν αὐτῶν, διὰ τῶν ὁποίων διέρχεται μία εὐθεῖα συζυγὴς πρὸς ἑαυτήν.
2) Εὐθεῖαι μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ πόλου αὐτῶν, ἐφ' ὧν ἡ ἐνέλιξις συζυγῶν σημείων εἶνε ὑπερβολική, δηλαδὴ εὐθεῖαι, ἐφ' ὧν κεῖνται δύο σημεῖα συζυγῆ πρὸς ἑαυτά.	2) Σημεῖα μὴ κείμενα ἐπὶ τῆς πολικῆς αὐτῶν, διὰ τὰ ὁποῖα ἡ ἐνέλιξις τῶν δι' αὐτῶν διερχομένων συζυγῶν εὐθειῶν εἶνε ὑπερβολική, δηλαδὴ σημεῖα, διὰ τῶν ὁποίων διέρχονται δύο εὐθεῖαι συζυγεῖς πρὸς ἑαυτάς.
3) Εὐθεῖαι, μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ πόλου αὐτῶν, ἐφ' ὧν ἡ ἐνέλιξις συζυγῶν σημείων εἶνε ἐλλειπτική, δηλαδὴ εὐθεῖαι, ἐφ' ὧν δὲν κεῖται σημεῖόν τι συζυγὲς πρὸς ἑαυτό.	3) Σημεῖα μὴ ~~διερχόμενα διὰ~~ κείμενα ἐπὶ τῆς πολικῆς αὐτῶν, διὰ τὰ ὁποῖα ἡ ἐνέλιξις τῶν δι' αὐτῶν διερχομένων συζυγῶν εὐθειῶν εἶνε ἐλλειπτική, δηλαδὴ σημεῖα, διὰ τῶν ὁποίων δὲν διέρχεται εὐθεῖα συζυγὴς πρὸς ἑαυτήν.

Ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ πολώσει ὑπάρχῃ ἓν σημεῖον, κείμενον ἐπὶ τῆς πολικῆς αὐτοῦ, δηλαδὴ ἓν στοιχεῖον συζυγὲς πρὸς ἑαυτό, θὰ ὑπάρχουν ἄπειρα τὸ πλῆθος σημεῖα συζυγῆ πρὸς ἑαυτά.

Τῷ ὄντι, ἂν σημεῖόν τι Α εἶνε συζυγὲς πρὸς ἑαυτό, καὶ α εἶνε ἡ πολικὴ εὐθεῖα τούτου, ἑκάστη εὐθεῖα k, διάφορος τῆς α, διερχομένη διὰ τοῦ Α, ἔχει πόλον ἐπὶ τῆς α, καὶ ἑπομένως ἡ k δὲν εἶνε συζυγὴς πρὸς ἑαυτήν. Διὰ τοῦτο ἀνήκει αὕτη εἰς τὴν περίπτωσιν 2) ἐκ τῶν ἀνωτέρω εἰδῶν καὶ ἐπ' αὐτῆς κεῖται καὶ δεύτερον σημεῖον συζυγὲς πρὸς ἑαυτό, ἔστω τὸ Κ. Ἐὰν ἡ διὰ τοῦ Α διερχομένη εὐθεῖα κινῆται, θὰ κινῆται ἐπ' αὐτῆς καὶ τὸ σημεῖον Κ, ὥστε τὸ οὕτω προκῦπτον σύνολον τῶν πρὸς ἑαυτὰ συζυγῶν σημείων παρουσιάζεται ὡς μία *γραμμή*, δηλαδὴ ὡς τόπος ἑνὸς κινουμένου σημείου.

θὰ ὑπάρχουν ἄπειροι τὸ πλῆθος εὐθεῖαι συζυγεῖς πρὸς ἑαυτάς.

Τῷ ὄντι, ἐὰν α εἶνε εὐθεῖά τις συζυγὴς πρὸς ἑαυτήν, καὶ Α ὁ πόλος ταύτης, ἡ πολικὴ ἑκάστου σημείου Κ διαφόρου τοῦ Α καὶ κειμένου ἐπὶ τῆς α διέρχεται διὰ τοῦ Α, καὶ ἑπομένως τὸ Κ δὲν εἶνε συζυγὲς πρὸς ἑαυτό. Διὰ τοῦτο ἀνήκει τοῦτο εἰς τὸ 2) ἐκ τῶν ἀνωτέρω εἰδῶν, καὶ διέρχεται δι' αὐτοῦ καὶ δευτέρα εὐθεῖα k, συζυγὴς πρὸς ἑαυτήν. Ἐὰν τὸ σημεῖον Κ κινῆται ἐπὶ τῆς α, θὰ κινῆται καὶ ἡ διὰ τοῦ Κ διερχομένη εὐθεῖα, ὥστε τὸ οὕτω προκῦπτον σύνολον τῶν πρὸς ἑαυτὰς συζυγῶν εὐθειῶν παρουσιάζεται ὡς μία *περιβάλλουσα*, δηλαδὴ ὡς συνεχὴς ἀκολουθία τῶν θέσεων μιᾶς κινητῆς εὐθείας.

Καλοῦμεν *καμπύλην β' βαθμοῦ ἢ β' τάξεως ἢ καὶ θεμελιώδη κωνικὴν τομὴν* μιᾶς ἐπιπέδου πολώσεως τὸ σύνολον τῶν πρὸς ἑαυτὰ συζυγῶν σημείων καὶ εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου.

Ἡ κωνικὴ τομὴ θεωρουμένη ἁπλῶς ὡς τόπος τοῦ συνόλου τῶν σημείων αὐτῆς καλεῖται *καμπύλη β' βαθμοῦ ἢ τόπος τῆς κωνικῆς τομῆς*.

Αἱ εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου, καθόσον αὗται ἀνήκουν ἐν τῇ πολώσει εἰς τὸ πρῶτον ἢ τὸ δεύτερον τῶν ἀνωτέρω εἰδῶν, ἔχουν ἓν ἢ δύο κοινὰ σημεῖα μὲ τὸν τόπον τοῦτον καὶ λέγονται *ἐφαπτόμεναι ἢ τέμνουσαι* ταύτης. Αἱ εὐθεῖαι τοῦ τρίτου εἴδους ἐν τῇ πολώσει δὲν ἔχουν κοινόν τι σημεῖον μετὰ τῆς κωνικῆς τομῆς καὶ

Ἡ κωνικὴ τομὴ θεωρουμένη ἁπλῶς ὡς τόπος τοῦ συνόλου τῶν εὐθειῶν αὐτῆς καλεῖται *καμπύλη β' τάξεως ἢ περιβάλλουσα κωνικὴ τομή*.

Δι' ἑκάστου σημείου τοῦ ἐπιπέδου, καθόσον τοῦτο ἀνήκει εἰς τὸ πρῶτον ἢ τὸ δεύτερον εἶδος ἐν τῇ πολώσει, διέρχονται μία ἢ δύο εὐθεῖαι τῆς περιβαλλούσης κωνικῆς τομῆς, καὶ ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιπτώσει τὸ σημεῖον καλεῖται *ἐφαπτόμενον*, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ *ἐξωτερικὸν σημεῖον* ταύτης. Δι' καλοῦνται *ἐξωτερικαὶ εὐθεῖαι* ταύτης.

Ἐὰν Α εἶνε σημεῖόν τι τῆς κωνικῆς τομῆς, ἑκάστη εὐθεῖα διερχομένη δι' αὐτοῦ συναντᾷ ταύτην εἰς ἓν ἀκόμη σημεῖον (καὶ εἶνε αὕτη μία τέμνουσα ταύτης) ἐκτὸς τῆς πολικῆς τοῦ Α, ἥτις εἶνε ἐφαπτομένη εἰς τὸ Α. Αὕτη εἶνε τὸ ὅριον μιᾶς μεταβλητῆς τεμνούσης, τῆς ὁποίας ἡ ἄλλη τομὴ μετὰ τῆς κωνικῆς τομῆς πλησιάζει ἀπείρως τὸ Α, ἤτοι εἶνε ἡ εὐθεῖα, ἥτις συνδέει δύο σημεῖα τῆς καμπύλης ἀπείρως γειτονικά.

ἑνὸς σημείου τοῦ τρίτου εἴδους τῆς πολώσεως δὲν διέρχεται εὐθεῖά τις τῆς κωνικῆς τομῆς καὶ λέγεται τοῦτο *ἐσωτερικὸν σημεῖον* ταύτης.

Ἐὰν α εἶνε εὐθεῖά τις τῆς κωνικῆς τομῆς, δι' ἑκάστου σημείου ταύτης διέρχεται μία ἄλλη εὐθεῖα αὐτῆς, ἐκτὸς τοῦ πόλου τῆς α, ὅστις εἶνε ἐφαπτόμενον σημεῖον. Τοῦτο εἶνε ἡ τομὴ δύο ἀπείρως γειτονικῶν εὐθειῶν τῆς περιβαλλούσης, ἤτοι εἶνε τὸ ὅριον τῆς τομῆς τῆς α μετὰ μιᾶς ἄλλης εὐθείας τῆς περιβαλλούσης, ἥτις πλησιάζει ἀπείρως πρὸς αὐτήν.

Οὕτω αἱ μὲν εὐθεῖαι μιᾶς κωνικῆς τομῆς παρουσιάζονται ὡς ἐφαπτόμεναι ταύτης, ὅταν αὕτη θεωρῆται ὡς τόπος σημείων, τὰ δὲ σημεῖα τῆς κωνικῆς τομῆς παρουσιάζονται ὡς σημεῖα ἐπαφῆς ταύτης μετὰ τῶν ἀντιστοίχων εὐθειῶν, ἐφαπτομένων τῆς περιβαλλούσης.

Κατὰ ταῦτα, μία κωνικὴ τομὴ παρουσιάζεται ὡς τὸ σύνολον τῶν σημείων καὶ τῶν ἐφαπτομένων μιᾶς ἐπιπέδου καμπύλης.

Ἡ καμπύλη αὕτη χωρίζει τὸ ἐπίπεδον, ἐφ' οὗ κεῖται, εἰς δύο περιοχάς, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖνται τὰ ἐκτὸς σημεῖα τῆς καμπύλης διαγράφεται ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων αὐτῆς. Εἰς τὸ χώρισμα τοῦτο τῶν σημείων ἔχουν θέσιν αἱ χωρίζουσαι τὰς εὐθείας, τὰς μὴ ἐφαπτομένας τῆς καμπύλης, ἤτοι τὰς τεμνούσας καὶ τὰς ἐκτὸς αὐτῆς κειμένας. Διὰ νὰ λάβωμεν κατὰ προσέγγισιν ἰδέαν τοῦ σχήματος μιᾶς κωνικῆς τομῆς, ὑποθέτομεν ὅτι παρακολουθοῦμεν τὴν γένεσιν αὐτῆς, ἀναχωροῦντες ἀπό τινος σημείου Α ταύτης. Ἂν διὰ τοῦ Α φαντασθῶμεν δέσμην ἀκτίνων ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς καμπύλης, τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης θὰ ἀντιστοιχοῦν εἰς σημεῖα τῶν διὰ τοῦ Α διερχομένων εὐθειῶν. Ἐὰν μία τῶν εὐθειῶν τῆς δέσμης κινουμένη, διαγράφῃ ταύτην, ἀναχωροῦσα ἀπὸ τῆς θέσεως τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης, ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν κίνησιν αὐτὴν ἡ κίνησις ἑνὸς σημείου, ἀναχωροῦντος ἐκ τοῦ Α, διαγράφοντος τὴν καμπύλην καὶ ἐπανερχομένου εἰς τὸ Α. Οὕτω ἡ κωνικὴ τομὴ παρουσιάζεται ὡς μία κλειστὴ καμπύλη, ἐνῷ μία μεταβάλλουσα θέσιν ἐφαπτομένη ταύτης ἀφήνει πάντοτε πρὸς τὸ ἓν μέρος ἑαυτῆς τὴν καμπύλην καὶ οὐδέποτε εἰσέρχεται εἰς τὴν περιοχὴν τῶν ἐντὸς τῆς καμπύλης σημείων, χωρὶς ὅμως τὸ συμπέρασμα τοῦτο νὰ θεωρηθῇ ὡς αὐστηρῶς ἀποδειχθέν.

Ἔχοντες ὑπ' ὄψει τὰ φανταστικὰ στοιχεῖα, παρατηροῦμεν ὅτι ἀφ' ἑνὸς μέν, ἡ κωνικὴ τομὴ ἔχει μὲ εὐθεῖάν τινα κειμένην ἐν τῷ ἐπιπέδῳ καὶ ἐκτὸς αὐτῆς δύο σημεῖα κοινὰ (φανταστικά). Εἶνε δὲ ταῦτα τὸ ζεῦγος τῶν διπλῶν σημείων τῆς ἑνελίξεως, ἥτις ὁρίζεται ἐπὶ τῆς εὐθείας διὰ τῆς πολώσεως. Ἀφ' ἑτέρου δὲ ὅτι, ἂν θεωροῦμεν ὁμοιόμορφον πόλωσιν, ἔχομεν μίαν φανταστικὴν θεμελιώδη κωνικὴν τομήν, καὶ ἐφ' ἑκάστης εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου θὰ ἔχωμεν δύο σημεῖα φανταστικὰ (τομὰς τῆς κωνικῆς τομῆς καὶ τῆς εὐθείας), ἐνῷ δι' ἑκάστου σημείου αὐτοῦ διέρχεται ἓν ζεῦγος φανταστικῶν ἐφαπτομένων τῆς κωνικῆς τομῆς.

Διακρίνομεν τὰ ἑξῆς εἴδη κωνικῶν τομῶν.

1) *Τὴν ἔλλειψιν*, διὰ τὴν ὁποίαν ἡ κατ' ἐξοχὴν εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου εἶνε *ἐξωτερικὴ* εὐθεῖα αὐτῆς, ἤτοι δὲν ἔχει αὕτη σημεῖον κατ' ἐξοχήν. Μερικὴ περίπτωσις τῆς ἐλλείψεως εἶνε *ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου*.

2) *Τὴν ὑπερβολήν*, διὰ τὴν ὁποίαν ἡ κατ' ἐξοχὴν εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου εἶνε *τέμνουσα* αὐτῆς, ἤτοι ἔχει αὕτη δύο σημεῖα κατ' ἐξοχήν, καὶ ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἀνοικτῶν κλάδων, οἵτινες κλείουν ἀλλήλους, εἰς δύο κατ' ἐξοχὴν σημεῖα, δηλαδὴ πλησιάζουν ἀπείρως (ἐξ ἀντιθέτων φορῶν) δύο σταθερὰς εὐθείας, *ἀσυμπτώτους* καλουμένας, αἵτινες ἐφάπτονται αὐτῆς εἰς σημεῖα κατ' ἐξοχήν.

3) *Τὴν παραβολήν*, διὰ τὴν ὁποίαν ἡ κατ' ἐξοχὴν εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου εἶνε *ἐφαπτομένη* αὐτῆς, καὶ ἀποτελεῖται αὕτη ἀπὸ ἕνα μόνον ἀνοικτὸν κλάδον, ὅστις δὲν πλησιάζει ἀπείρως εὐθεῖάν τινα καθ' ὑπόστασιν, καὶ ὅστις κλείει εἰς σημεῖον κατ' ἐξοχήν.

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὴν ἀρχὴν τῆς ἐναλλαγῆς ἐν τῷ χώρῳ τῶν τριῶν διαστάσεων, ἔχομεν ἀντίστοιχα σχήματα τῶν κωνικῶν τομῶν τοῦ ἐπιπέδου ἐν κεντρικῇ δέσμῃ, τὰ ὁποῖα εὑρίσκομεν διὰ προβολῆς ἐκείνων καὶ καλοῦνται ἐν γένει *κῶνοι δευτέρου βαθμοῦ*. Οὕτω κῶνός τις β' βαθμοῦ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ σύνολον τῶν ἀντιστοιχούντων πρὸς ἑαυτὰς εὐθειῶν καὶ ἐπιπέδων ἐν ἀνομοιόρφῳ πολώσει τῆς δέσμης, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπ' ἀλλήλων, ἢ ὡς προβολὴ μιᾶς κωνικῆς τομῆς ἀπό τινος σημείου, κειμένου ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου ταύτης, τὸ ὁποῖον καλεῖται *κορυφὴ τοῦ κώνου*. Ἀντιστρόφως, ἡ τομὴ κώνου β' βαθμοῦ ὑπὸ ἐπιπέδου, μὴ διερχομένου διὰ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ, εἶνε μία κωνικὴ τομή. Αἱ μὲν εὐθεῖαι τοῦ κώνου καλοῦνται *γενέτειραι* αὐτοῦ, καὶ σχηματίζουν τὸν κῶνον τοῦ β΄ βαθμοῦ ὡς τόπον τούτων, ἐνῷ τὰ ἐπίπεδα τούτου, καθ' ἃ προβάλλονται αἱ ἐφαπτόμεναι κωνικῆς τομῆς, εἶνε *ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα* κατὰ τὰς πολικὰς γενετείρας αὐτοῦ, λέγονται δὲ καὶ *δέσμη ἐπιπέδων β΄ τάξεως*, καὶ σχηματίζουν τὸν κῶνον *ὡς περιβάλλουσαν ἐπιφάνειαν αὐτῶν*.

Μερικὴ περίπτωσις κώνου β΄ βαθμοῦ εἶνε ὁ πλάγιος ἐν γένει ἢ *ὁ ὀρθὸς* κυκλικὸς κῶνος, ὅστις εἶνε προβολὴ περιφερείας κύκλου ἀπό τινος σημείου, κειμένου ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου ταύτης ἢ ἐπὶ τῆς καθέτου εὐθείας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἰς τὸ κέντρον τῆς περιφερείας.

§ 62. Ἰδιότητες πόλων καὶ πολικῶν ὡς πρὸς κωνικὴν τομήν.

Καθὼς ἀνομοιόμορφός τις ἐπίπεδος πόλωσις ὁρίζει μίαν θεμελιώδη κωνικὴν τομήν, οὕτω ἡ κωνικὴ τομὴ ὁρίζει τὴν πόλωσιν.

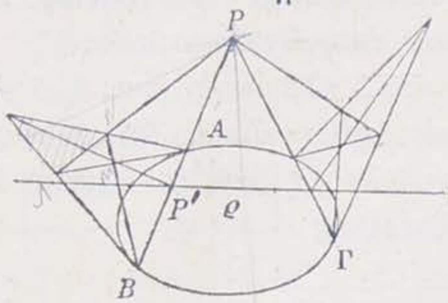
Πράγματι, ἂν λάβωμεν ἐπὶ τῆς κωνικῆς τομῆς τέσσαρα σημεῖα ἀνὰ τρία τῶν ὁποίων δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, καὶ φαντασθῶμεν τὰς δι' αὐτῶν διερχομένας ἀντιστοίχους πρὸς ταῦτα ἐφαπτομένας τῆς κωνικῆς τομῆς, ἀνὰ τρεῖς τῶν ὁποίων δὲν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, θὰ ἔχωμεν οὕτω ἐν τῷ ἐπιπέδῳ μίαν ἀντιστροφήν, ἥτις δὲν δύναται νὰ διαφέρῃ τῆς πολώσεως, τῆς ὁριζούσης τὴν κωνικὴν τομήν. Διὰ τοῦτο, τὰ στοιχεῖα *πόλος* καὶ *πολική*, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται διὰ τῆς πολώσεως, θὰ θεωροῦνται ὡς συζυγῆ ἢ ἐναλλακτὰ στοιχεῖα ἐν τῇ κωνικῇ τομῇ. Οὕτω κωνική τις τομὴ ὁρίζει ἢ παράγει ἐπ' εὐθείας μίαν ἐνέλιξιν συζυγῶν σημείων (πραγματικῶν ἢ φανταστικῶν).

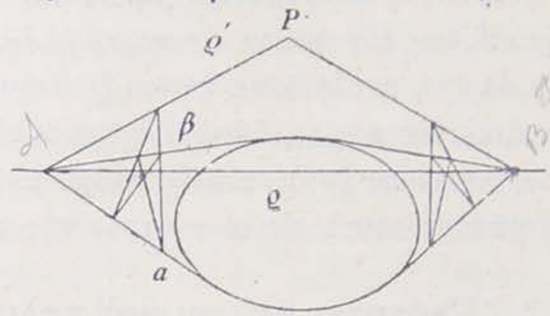
Κατὰ ταῦτα ἔχομεν τὰς ἑξῆς διδύμους προτάσεις.

Δοθείσης κωνικῆς τομῆς Γ,

ἡ πολικὴ ρ σημείου τινὸς Ρ, μὴ κειμένου ἐπὶ τῆς Γ ἔχει τὰς ἑξῆς ἰδιότητας.	*ὁ πόλος Ρ εὐθείας τινὸς ρ, μὴ ἐφαπτομένης τῆς Γ εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο, ἔχει τὰς ἑξῆς ἰδιότητας.*
1) «Ἐπ' αὐτῆς κεῖνται πάντα τὰ συζυγῆ ἁρμονικὰ σημεῖα τοῦ Ρ ὡς πρὸς τὰ ζεύγη τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα εἶνε κοινὰ μεταξὺ τῆς Γ καὶ τυχούσης τεμνούσης αὐτὴν εὐθείας, διερχομένης διὰ τοῦ Ρ».	*1) «Τοῦτο κεῖται ἐπὶ πασῶν τῶν συζυγῶν ἁρμονικῶν εὐθειῶν τῆς ρ ὡς πρὸς τὰ ζεύγη τῶν ἐφαπτομένων τῆς Γ, τῶν ἀγομένων ἀπό τινος ἐξωτερικοῦ αὐτῆς σημείου, κειμένου ἐπὶ τῆς ρ».*

Ἀποδεικνύομεν μόνον τὴν ἀριστερὰ ἀνωτέρω πρότασιν, ἐκ τῆς ἀποδείξεως δὲ ταύτης ἔχομεν δι' ἐναλλαγῆς τὴν ἀπόδειξιν καὶ τῆς πρὸς τὰ δεξιά. Πράγματι, ἐὰν θεωρήσωμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν διὰ τοῦ Ρ, τέμνουσαν τὴν Γ, ἔστω εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, θὰ ἔχωμεν ἐπὶ ταύτης μίαν (ὑπερβολικὴν) ἐνέλιξιν, ὁριζομένην ὑπὸ τῶν ζευγῶν συζυγῶν σημείων, καὶ ἔχουσαν τὰ Α καὶ Β διπλᾶ σημεῖα. Ἑπομένως ἐπ' αὐτῆς κεῖται τὸ συζυγὲς ση-

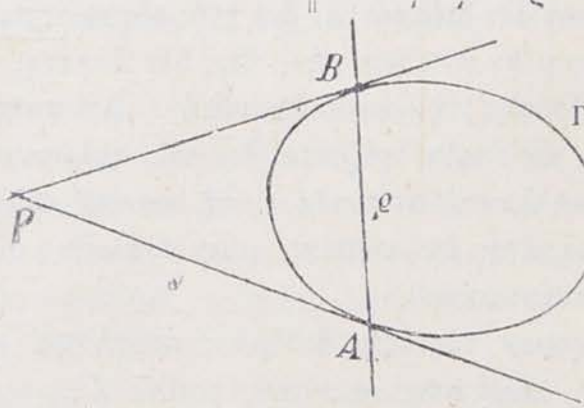




μεῖον τοῦ Ρ (τὸ ὁποῖον εἶνε σημεῖον τῆς ρ)· ἤτοι τὸ σημεῖον Ρ′ συζυγὲς ἁρμονικὸν τοῦ Ρ ὡς πρὸς τὰ Α καὶ Β.

2) «Ἐπ' αὐτῆς κεῖνται τὰ σπιτὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων εὐθειῶν τῆς Γ, αἵτινες δυνατὸν νὰ ἄγωνται ἀπὸ τοῦ Ρ».

2) «Τοῦτο κεῖται ἐπὶ τῶν ἐφαπτομένων εὐθειῶν τῆς Γ εἰς τὰ σημεῖα κατὰ τὰ ὁποῖα δυνατὸν νὰ τέμνῃ ἡ ρ τὴν Γ».



Τῷ ὄντι, ἐὰν διὰ τοῦ Ρ διέρχεται ἐφαπτομένη τις τῆς Γ, τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Α θὰ εἶνε ἓν συζυγὲς σημεῖον τοῦ σημείου Ρ, ἐπειδὴ ἡ ἐφαπτομένη τῆς Γ εἰς τὸ Α (ἡ πολικὴ τοῦ Α) διέρχεται διὰ τοῦ Ρ.

3) «Αὕτη εἶνε ὁ ἄξων μιᾶς ἁρμονικῆς ὁμολογίας μὲ κέντρον Ρ, ἥτις μετασχηματίζει τὴν κωνικὴν τομὴν εἰς ἑαυτήν».

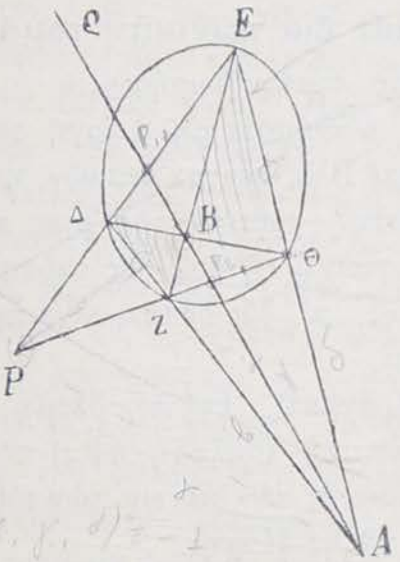
3) «Τοῦτο εἶνε τὸ κέντρον μιᾶς ἁρμονικῆς ὁμολογίας μὲ ἄξονα ρ, μετασχηματίζουσαν τὴν κωνικὴν τομὴν εἰς ἑαυτήν».

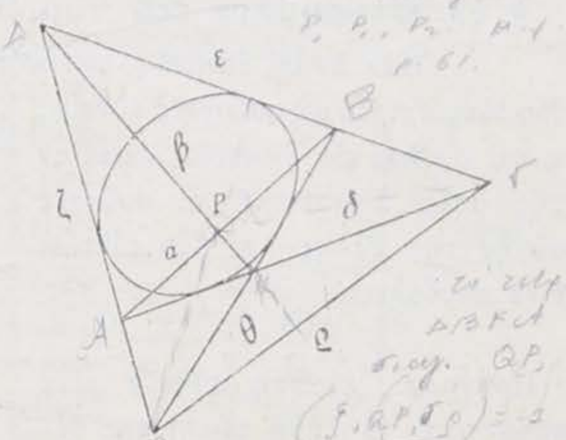
Ἡ ἰδιότης αὕτη εἶνε ἡ 1) ἔχουσα μόνον διάφορον τὴν διατύπωσιν.

4) «Ἐπ' αὐτῆς κεῖνται πάντα τὰ ἄλλα διαγώνια σημεῖα τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὴν Γ πλήρων τετρακορύφων, τῶν ἐχόντων ἓν διαγώνιον σημεῖον τὸ Ρ».

4) «Τοῦτο κεῖται ἐπὶ πασῶν τῶν διαγωνίων εὐθειῶν τῶν περιγεγραμμένων εἰς τὴν Γ πλήρων τετραπλεύρων, τῶν ἐχόντων τὴν ρ διαγώνιον εὐθεῖαν».

Ἔστω ΔΕΖΘ ἓν πλῆρες τετρακόρυφον ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν κωνικὴν τομὴν Γ, ἔχουσαν ἓν διαγώνιον σημεῖον εἰς τὸ Ρ, καὶ Α, Β τὰ δύο ἄλλα διαγώνια σημεῖα αὐτοῦ, πρὸς δὲ ἔστωσαν ΖΘ καὶ ΕΔ αἱ διὰ τοῦ Ρ διερχόμεναι πλευραὶ τοῦ τετρακορύφου. Ἡ εὐθεῖα ΑΒ τέμνει τὰς εὐθείας ΖΘ καὶ ΕΔ εἰς σημεῖα συζυγῆ ἁρμονικὰ τοῦ Ρ ὡς πρὸς τὰ ζεύγη Ζ,Θ καὶ Ε,Δ (§27,σελ.61). Ἑπομένως ἡ ΑΒ εἶνε ἡ πολικὴ ρ τοῦ Ρ, καὶ οὕτω ἡ ἀριστερὰ ἀνωτέρω ἀναγραφομένη πρότασις ἀπεδείχθη, δι' ἐφαρμογῆς δὲ τῆς ἀρχῆς τῆς ἐναλλαγῆς, ἕπεται καὶ ἡ ἀπόδειξις τῆς πρὸς τὰ δεξιά.





Παρατηρητέον ὅτι αἱ ἀνωτέρω διάφοροι σχέσεις τῆς πολικῆς ἑνὸς σημείου καὶ τοῦ πόλου μιᾶς εὐθείας ὡς πρὸς κωνικὴν τομὴν ὁδηγοῦν εἰς ἁπλῆν κατασκευὴν τῶν σχηματισμῶν τούτων καὶ ἰδία ἡ στηριζομένη ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω 4) ἰδιότητος, ἔχομεν δὲ καὶ τὰς ἑξῆς προτάσεις.

«Τὸ τρικόρυφον τῶν διαγωνίων σημείων ἑνὸς πλήρους τετρακορύφου, ἐγγεγραμμένου εἰς κωνικὴν τομήν, εἶνε πολικὸν τρικόρυφον ὡς πρὸς ταύτην».	*«Τὸ τρίπλευρον τῶν διαγωνίων ἑνὸς πλήρους τετραπλεύρου περιγεγραμμένου εἰς κωνικὴν τομήν, εἶνε πολικὸν τρίπλευρον ὡς πρὸς ταύτην».*

Διότι τὰ ζεύγη τῶν κορυφῶν τοῦ τρικορύφου εἶνε ζεύγη συζυγῶν σημείων (ἕνεκα τῆς ἰδιότητος 4).

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος 2) προκύπτει ἡ ἑξῆς πρότασις.

«Ἡ πολικὴ ἑνὸς σημείου ὡς πρὸς κωνικήν τινα τομὴν εἶνε ἐξωτερικὴ ἢ τέμνουσα ταύτην, καθόσον τὸ σημεῖον κεῖται ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τῆς κωνικῆς τομῆς».

Ἐπίσης ἔχομεν ὅτι,

«ἐὰν τρικόρυφον ἢ τρίπλευρόν τι εἶνε πολικὸν ὡς πρὸς κωνικὴν τομήν, δύο μὲν πλευραὶ αὐτοῦ εἶνε τέμνουσαι καὶ μία ἐκτὸς εὐθεῖα, δύο δὲ κορυφαὶ τούτου εἶνε ἐξωτερικὰ σημεῖα καὶ ἓν ἐσωτερικὸν τῆς κωνικῆς τομῆς».

Διότι αἱ ἐνελίξεις συζυγῶν σημείων ἐπὶ τῶν δύο ἐκ τῶν τριῶν εὐθειῶν, τῶν σχηματιζουσῶν τὸ πολικὸν τρίπλευρον, εἶνε ὑπερβολικαί, ἐνῶ ἐπὶ τῆς τρίτης τούτων ὑπάρχει μία ἐλλειπτικὴ ἐνέλιξις (§59,σελ.161-162).

§ 63. Θεωρήματα τοῦ von Staudt διὰ κωνικὴν τομήν.

Ἐὰν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ κωνικῆς τινος τομῆς θεωρήσωμεν

δύο οἱασδήποτε μὴ συζυγεῖς εὐθείας α καὶ β, καὶ εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς μιᾶς ἀντιστοιχῇ τὸ συζυγὲς αὐτῆς τῆς ἄλλης, αἱ δύο εὐθεῖαι εἶνε προβολικαί.

δύο οἱαδήποτε μὴ συζυγῆ σημεῖα Α καὶ Β ὡς κέντρα δεσμῶν, καὶ εἰς ἑκάστην εὐθεῖαν τῆς μιᾶς αὐτῶν ἀντιστοιχῇ ἡ συζυγὴς ταύτης τῆς ἄλλης, αἱ δύο δέσμαι εἶνε προβολικαί.

Πράγματι, ἑκάστη εὐθεῖα εἶνε προοπτικὴ (δηλαδὴ τομὴ) τῆς δέσμης τῶν πολικῶν εὐθειῶν τῶν σημείων τῆς ἄλλης εὐθείας.

Πράγματι, ἑκάστη δέσμη εἶνε προοπτικὴ (δηλαδὴ ὄψις) τῆς σημειοσειρᾶς τῶν πόλων τῶν εὐθειῶν τῆς ἄλλης δέσμης.

Ἐὰν τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν α καὶ β εἶνε συζυγὲς πρὸς ἑαυτὸ (δηλαδὴ κεῖται ἐπὶ τῆς κωνικῆς τομῆς), αἱ εὐθεῖαι α καὶ β εἶνε προοπτικαί, ἤτοι αἱ συνδέουσαι εὐθεῖαι τὰ συζυγῆ σημεῖα τῶν α καὶ β διέρχονται δι᾿ ἑνὸς σημείου.

Ἐὰν ἡ συνδέουσα τὰ σημεῖα Α καὶ Β εὐθεῖα εἶνε συζυγὴς πρὸς ἑαυτὴν (δηλαδὴ εἶνε ἐφαπτομένη τῆς κωνικῆς τομῆς), αἱ δέσμαι Α καὶ Β εἶνε προοπτικαί, ἤτοι αἱ τομαὶ τῶν συζυγῶν ἀκτίνων τῶν δεσμῶν κεῖνται ἐπ᾿ εὐθείας.

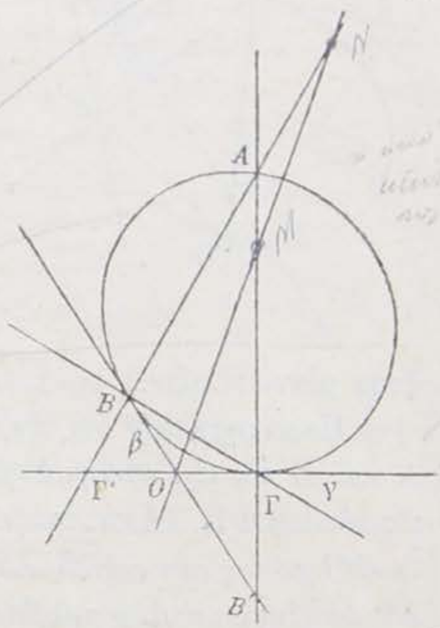
Ἐκ τούτων ἕπονται τὰ ἑξῆς θεωρήματα τοῦ von Staudt.

«Δοθείσης κωνικῆς τινος τομῆς καὶ τρικορύφου ΑΒΓ ἐγγεγραμμένου ἐν αὐτῇ (ἔχοντος τὰς κορυφὰς αὐτοῦ ἐπὶ ταύτης), πᾶσα εὐθεῖα, συζυγὴς πρός τινα πλευρὰν ΒΓ τοῦ τρικορύφου, τέμνει τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς αὐτοῦ εἰς συζυγῆ σημεῖα».

«Δοθείσης κωνικῆς τινος τομῆς καὶ τριπλεύρου αβγ περιγεγραμμένου εἰς αὐτὴν (τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ἐφάπτονται ταύτης), πᾶν σημεῖον, συζυγὲς πρὸς μίαν κορυφὴν τοῦ τριπλεύρου, προβάλλει τὰς δύο ἄλλας κορυφὰς αὐτοῦ διὰ συζυγῶν εὐθειῶν».

«Ἀντιστρόφως· ἐὰν εὐθεῖα τέμνῃ τὰς δύο πλευρὰς τοῦ τρικορύφου εἰς δύο συζυγῆ σημεῖα, εἶνε συζυγὴς πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν αὐτοῦ, ἄρα διέρχεται διὰ τοῦ πόλου ταύτης».	*«Ἀντιστρόφως· ἐὰν σημεῖον προβάλλῃ τὰς δύο κορυφὰς τοῦ τριπλεύρου διὰ δύο συζυγῶν εὐθειῶν, εἶνε συζυγὲς πρὸς τὴν τρίτην κορυφὴν αὐτοῦ, ἄρα κεῖται ἐπὶ τῆς πολικῆς τούτου».*

Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς ἀριστερὰ ἀνωτέρω ἀναγραφομένης προτάσεως παρατηροῦμεν ὅτι, αἱ σημειοσειραὶ ΑΒ καὶ ΑΓ, τῶν ὁποίων τὸ κοινὸν σημεῖον Α εἶνε συζυγὲς πρὸς ἑαυτό, εἶνε προοπτικαί, ἐὰν θεωρήσωμεν ὡς ἀντιστοιχοῦντα πρὸς ἄλληλα τὰ σημεῖα τῆς μιᾶς καὶ τὰ συζυγῆ τούτων ἐπὶ τῆς ἄλλης. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ κέντρου τῆς προοπτικότητος, θεωροῦμεν τὰς πολικὰς β καὶ γ τῶν Β καὶ Γ (τὰς ἐφαπτομένας τῆς κωνικῆς τομῆς εἰς τὰ Β καὶ Γ), αἵτινες τέμνουν τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Β′ καὶ Γ′. Τὰ σημεῖα Β, Β′ καὶ Γ, Γ′ εἶνε συζυγῆ, καὶ ἑπομένως τὸ ζητούμενον κέντρον Ο εἶνε τὸ σημεῖον βγ. Τὸ Ο εἶνε ὁ πόλος τῆς εὐθείας ΒΓ. Τοῦτο σημαίνει, ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα δύο συζυγῆ σημεῖα, κείμενα ἐπὶ τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ, διέρχεται διὰ τοῦ Ο, ἤτοι εἶνε συζυγὴς πρὸς τὴν ΒΓ. Ἀντιστρόφως· πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Ο, δηλαδὴ πᾶσα συζυγὴς πρὸς τὴν ΒΓ, τέμνει τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς δύο ὁμόλογα, δηλαδὴ εἰς συζυγῆ σημεῖα.



Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

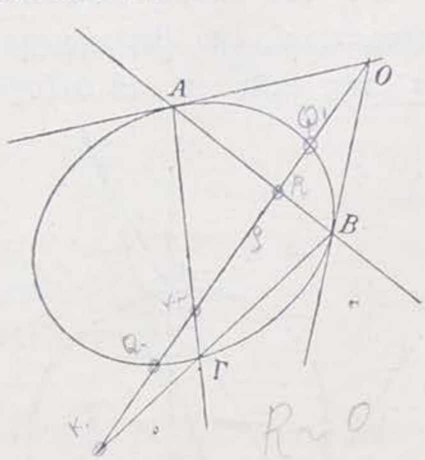
*«Ἐὰν τρικορύφου τινὸς **ΑΒΓ** αἱ μὲν κορυφαὶ **Α** καὶ **Β** κεῖνται ἐπὶ κωνικῆς τινος τομῆς αἱ δὲ δύο πλευραὶ **ΑΓ** καὶ **ΒΓ** τέμνωνται ὑπὸ εὐθείας συζυγοῦς πρὸς τὴν **ΑΒ** εἰς συζυγῆ σημεῖα, καὶ ἡ τρίτη κορυφὴ **Γ** τοῦ τρικορύφου κεῖται ἐπὶ τῆς κωνικῆς τομῆς».*	*«Ἐὰν τριπλεύρου τινὸς **αβγ** αἱ μὲν δύο πλευραὶ **α** καὶ **β** εἶνε ἐφαπτόμεναι κωνικῆς τινος τομῆς, αἱ δὲ δύο κορυφαὶ **αγ** καὶ **βγ** προβάλλωνται ἀπὸ σημείου συζυγοῦς τῆς κορυφῆς **αβ** διὰ δύο συζυγῶν εὐθειῶν, καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ **γ** εἶνε ἐφαπτομένη τῆς κωνικῆς τομῆς».*

§ 64. Θεώρημα τοῦ Steiner.

«Ἐὰν προβάλωμεν τὰ σημεῖα κωνικῆς τινος τομῆς *K* ἀπὸ δύο σημείων ταύτης *A* καὶ *B*, προκύπτουν δύο προβολικαὶ δέσμαι».

«Ἐὰν τμήσωμεν τὰς ἐφαπτομένας κωνικῆς τινος τομῆς *K* διὰ δύο ἐκ τῶν ἐφαπτομένων ταύτης *α* καὶ *β*, προκύπτουν δύο προβολικαὶ σημειοσειραί».

Τῷ ὄντι, ἂν αἱ δέσμαι Α καὶ Β συσχετισθοῦν πρὸς ἀλλήλας, ὥστε αἱ ἀκτῖνες ΑΓ καὶ ΒΓ νὰ προβάλλουν τὸ αὐτὸ σημεῖον Γ τῆς Κ, αἱ



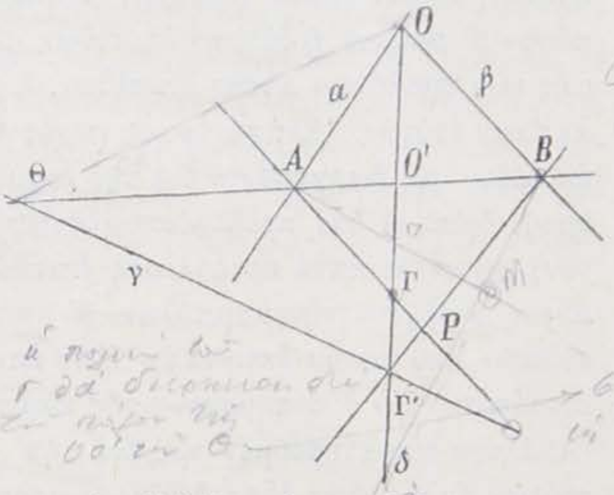
τομαὶ τῶν δεσμῶν ὑπὸ μιᾶς εὐθείας συζυγοῦς τῆς ΑΒ (μὴ διερχομένης διὰ τῶν Α καὶ Β) σχηματίζουν δύο προβολικὰς σημειοσειράς, κειμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ φορέως (ἐν ἐνελίξει). Διότι, δύο ἀκτῖνες π.χ. αἱ ΑΓ καὶ ΒΓ τέμνουν τὴν εὐθεῖαν εἰς δύο συζυγῆ σημεῖα (κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ von Staudt) καὶ τὰ ζεύγη τῶν συζυγῶν σημείων ἐπὶ μιᾶς εὐθείας, ἥτις δὲν ἐφάπτεται τῆς κωνικῆς τομῆς, σχηματίζουν μίαν ἐνέλιξιν.

Παρατηρητέον ὅτι, ἐν τῇ προβολικότητι μεταξὺ τῶν δύο δεσμῶν Α καὶ Β εἰς τὴν κοινὴν ἀκτῖνα ΑΒ ἀντιστοιχοῦν αἱ ἐφαπτόμεναι τῆς Κ εἰς τὰ Α καὶ Β. Ἀντιστρόφως ἔχομεν ὅτι,

«Ὁ τόπος τῶν τομῶν τῶν ὁμολόγων ἀκτίνων δύο προβολικῶν, μὴ προοπτικῶν οὐδὲ ὁμοκέντρων ἐπιπέδων δεσμῶν, κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, εἶνε μία κωνικὴ τομὴ ἢ καμπύλη ἢ σημειοσειρὰ β′ βαθμοῦ καλουμένη».

«Ἡ περιβάλλουσα τῶν εὐθειῶν, αἵτινες συνδέουν τὰ ὁμόλογα σημεῖα δύο προβολικῶν, μὴ προοπτικῶν οὐδὲ κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ φορέως ἀλλ' ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου σημειοσειρῶν, εἶνε μία κωνικὴ τομὴ ἢ ἐπίπεδος δέσμη ἀκτίνων β′ τάξεως καλουμένη».

Ἔστωσαν Α, Β αἱ δύο δέσμαι καὶ α, β αἱ εἰς τὴν κοινὴν ἀκτῖνα ΑΒ ἀντιστοιχοῦσαι ἀκτῖνες τούτων, τεμνόμεναι εἰς τὸ Ο. Θεωροῦμεν εὐθεῖάν τινα δ διὰ τοῦ Ο ἀγομένην (διάφορον τῶν α καὶ β), τέμνουσαν εἰς τὸ Ο′ τὴν ΑΒ. Αἱ ὁμόλογοι ἀκτῖνες τῶν δεσμῶν τέμνονται ὑπὸ τῆς δ κατὰ προβολικὰς σημειοσειράς, εἰς τὰς ὁποίας τὰ Ο καὶ Ο′ ἀντιστοιχοῦν διττῶς πρὸς ἄλληλα, καὶ ἐπομένως ὁρίζουν ἐπὶ τῆς δ ἰσάριθμα ζεύγη σημείων μιᾶς ἐνελίξεως. Ἔστωσαν Γ καὶ Γ′ δύο (διάφορα τῶν Ο καὶ Ο′) συζυγῆ σημεῖα ἐπὶ τῆς ἐνελίξεως ταύτης, προκύπτοντα διὰ τῆς τομῆς τῆς δ ὑπὸ τῶν ἀντιστοίχων ἀκτίνων ΑΡ καὶ ΒΡ. Δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν μίαν πόλωσιν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὡς πολικὰς τῶν Ο, Α, Β τὰς εὐθείας ΑΒ, α καὶ β, τὰ δὲ σημεῖα Γ καὶ Γ′ ὅτι εἶνε συζυγῆ. Πράγματι, διὰ τῆς πρώτης ὑποθέσεως ὁρίζεται ὅτι εἰς τὰ σημεῖα τῆς ΑΒ ἀντιστοιχοῦν ἐν τῇ πολώσει αἱ εὐθεῖαι, αἱ διὰ τοῦ Ο διερχόμεναι, αἵτινες εἶνε συζυγεῖς πρὸς τὰ σημεῖα ἐκεῖνα ἐν τῇ ἐνελίξει τῇ ὁριζομένῃ ὑπὸ τῶν ζευγῶν Αα καὶ Ββ, ἐνῷ τὸ ὅτι τὰ Γ καὶ Γ′ θὰ εἶνε συζυγῆ ἐν τῇ πολώσει ἔχει ὡς ἀκολουθίαν, τὸ νὰ ἔχῃ τὸ Γ πολικὴν τὴν γ, συνδέουσαν τὸ Γ′ μὲ τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν σημεῖον Θ τοῦ Ο′ ὡς πρὸς τὰ Α καὶ Β. Οὕτω ἡ πόλωσις εἶνε τελείως ὡρισμένη, καὶ ἔχομεν μίαν κωνικὴν τομήν, διερχομένην διὰ τῶν **Α** καὶ **Β** καὶ ἐφαπτομένην τῶν α καὶ β.



Δύο εὐθεῖαι, διερχόμεναι διὰ τῶν Α καὶ Β καὶ ἀντιστοιχοῦσαι πρὸς ἀλλήλας ἐν τῇ δοθείσῃ προβολικότητι μεταξὺ τῶν δύο δεσμῶν, τέμνουν τὴν δ εἰς δύο σημεῖα συζυγῆ ἐν τῇ ἐνελίξει, τῇ ὁριζομένῃ ὑπὸ τῶν ζευγῶν ΟΟ′ καὶ ΓΓ′, δηλαδὴ εἰς δύο σημεῖα συζυγῆ ὡς πρὸς τὴν κωνικὴν τομήν. Ἑπομένως αἱ εὐθεῖαι αὗται τέμνονται εἰς σημεῖον τῆς κωνικῆς τομῆς (κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ von Staudt).

Δι᾽ ἐφαρμογῆς τῆς ἀρχῆς τῆς ἐναλλαγῆς ἔχομεν τὰς ἑξῆς διδύμους προτάσεις.

«Δύο προβολικαὶ ἀξονικαὶ δέσμαι μὴ προοπτικαί, τῶν ὁποίων οἱ ἄξονες τέμνονται, σχηματίζουν διὰ τῶν τομῶν τῶν ὁμολόγων αὐτῶν ἐπιπέδων ἕνα κῶνον β′ βαθμοῦ, ὅστις μὲ ἕκαστον τῶν ἐπιπέδων ἔχει τὸ πολὺ δύο εὐθείας τῶν τομῶν κοινάς. Ἡ τομὴ τῶν ἀξόνων τῶν δεσμῶν εἶνε κορυφὴ τοῦ κώνου καὶ δι᾽ αὐτῆς διέρχονται πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες (γενέτειραι) τοῦ κώνου».

«Δύο ὁμόκεντροι προβολικαὶ ἐπίπεδοι δέσμαι μὴ προοπτικαί, κείμεναι ἐπὶ διαφόρων ἐπιπέδων, σχηματίζουν διὰ τῶν ἐπιπέδων τῶν ὁμολόγων αὐτῶν ἀκτίνων μίαν δέσμην ἐπιπέδων β′ τάξεως, δι᾽ οὐδεμιᾶς τῶν εὐθειῶν τῆς ὁποίας διέρχονται περισσότερα τῶν δύο ἐπιπέδων. Τὸ κέντρον τῶν δύο δεσμῶν καλεῖται κέντρον τῆς δέσμης τῶν ἐπιπέδων καὶ κεῖται ἐπὶ πάντων τῶν ἐπιπέδων αὐτῆς».

Τὸν κῶνον β′ βαθμοῦ ἢ τὴν δέσμην ἐπιπέδων β′ τάξεως δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν παραγόμενα τῇ βοηθείᾳ τῆς καμπύλης β′ βαθμοῦ καὶ τῆς δέσμης ἐπιπέδων ἀκτίνων β′ τάξεως διὰ προβολῆς αὐτῶν ἀπό τινος σημείου Ο κειμένου ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τούτων. Διότι δύο ἐπίπεδοι προβολικαὶ δέσμαι, μὴ προοπτικαί, ἢ δύο σημειοσειραὶ τοιαῦται, προβάλλονται ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου Ο διὰ δύο ἀξονικῶν δεσμῶν προβολικῶν καὶ μὴ προοπτικῶν, ἢ διὰ δύο ἐπιπέδων ὁμοκέντρων δεσμῶν προβολικῶν καὶ μὴ προοπτικῶν, κειμένων ἐπὶ διαφόρων ἐπιπέδων. Αἱ δέσμαι αὗται παράγουν κῶνον β′ βαθμοῦ ἢ δέσμην ἐπιπέδων β′ τάξεως ἀντιστοίχως, διὰ τῆς τομῆς τῶν ὁμολόγων αὐτῶν ἐπιπέδων, ἢ διὰ τῶν ἐπιπέδων τῶν ὁμολόγων ἀκτίνων τούτων. Ἀντιστρόφως· κῶνός τις β′ βαθμοῦ τέμνεται ὑπό τινος ἐπιπέδου μὴ διερχομένου διὰ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ κατὰ καμπύλην β′ βαθμοῦ, διότι αἱ δύο προβολικαὶ ἀξονικαὶ δέσμαι, αἱ παράγουσαι τὸν κῶνον, τέμνονται κατὰ προβολικὰς ἐπιπέδους δέσμας, μὴ προοπτικάς, καὶ αὗται παράγουν τὴν καμπύλην β′ βαθμοῦ. Ἐὰν περισσότεραι τῶν δύο εὐθειῶν τοῦ κώνου ἔκειντο ἐφ᾿ ἑνὸς ἐπιπέδου, θὰ ἔκειντο ἐπ᾿ εὐθείας περισσότερα τῶν δύο σημείων τῆς καμπύλης, τὸ ὁποῖον εἶνε ἀδύνατον. Ἀνάλογα παρατηροῦμεν καὶ διὰ τὴν δέσμην ἐπιπέδων β′ τάξεως. Ἐκ τούτων ἔχομεν τὰς ἑξῆς διδύμους προτάσεις.

«Ἑκάστη καμπύλη β′ βαθμοῦ καὶ δέσμη ἀκτίνων β′ τάξεως προβάλλεται ἀπό τινος σημείου μὴ κειμένου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν, δι᾿ ἑνὸς κώνου β′ βαθμοῦ καὶ διὰ μιᾶς δέσμης ἐπιπέδων β′ τάξεως».

«Ἕκαστος κῶνος β′ βαθμοῦ καὶ ἑκάστη δέσμη ἐπιπέδων β′ τάξεως τέμνονται ἐν γένει ὑπὸ τυχόντος ἐπιπέδου κατὰ καμπύλην β′ βαθμοῦ καὶ κατὰ μίαν δέσμην ἀκτίνων β′ τάξεως».

Ἀσκήσεις.

1) Ὁ τόπος τῶν τομῶν ὁμολόγων ἀκτίνων προβολικῶν καὶ προοπτικῶν (μὴ ὁμοκέντρων) δεσμῶν εἶνε δύο εὐθεῖαι *ἐκφυλισμένη κωνικὴ τομή)*, ἤτοι ὁ ἄξων τῆς προοπτικότητος καὶ ἡ κοινὴ ἀκτὶς τῶν δεσμῶν.

2) Ὁ τόπος τῶν εὐθειῶν τῶν συνδεουσῶν τὰ ὁμόλογα σημεῖα προβολικῶν σημειοσειρῶν καὶ προοπτικῶν (μὴ ἐχουσῶν κοινὸν φορέα) εἶνε δύο σημεῖα *(ἐκφυλισμένη περιβάλλουσα κωνικὴ τομή)*, ἤτοι τὸ κέντρον τῆς προοπτικότητος καὶ ἡ τομὴ τῶν φορέων.

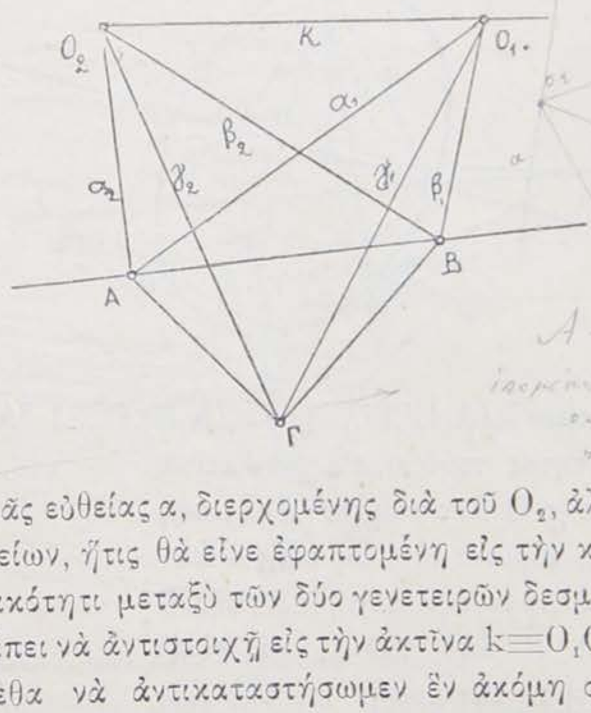
3) Ἐὰν περισσότερα τῶν δύο σημείων κωνικῆς τομῆς ἀκολουθοῦν ἄλληλα, ἀκολουθοῦν ἀλλήλας καὶ αἱ εἰς τὰ σημεῖα ταῦτα ἐφαπτόμεναι ταύτης. (Διότι ἐν τῇ πολώσει ὡς πρὸς τὴν κωνικὴν τομὴν εἰς μίαν δέσμην ἀκτίνων, προβάλλουσαν τὰ σημεῖα Β, Γ.... τῆς κωνικῆς τομῆς ἀπό τινος σημείου Α ταύτης, ἀντιστοιχεῖ ἡ σημειοσειρά, καθ᾿ ἣν ἡ διὰ τοῦ Α διερχομένη ἐφαπτομένη α τέμνεται ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων β, γ,... εἰς τὰ Β, Γ,..... Ἕνεκα δὲ τῆς πολώσεως ἡ δέσμη Α καὶ ἡ σημειοσειρὰ α εἶνε προβολικαὶ καὶ ἡ διάταξις τῶν ὁμολόγων στοιχείων αὐτῶν εἶνε ὁμοία).

§ 65. Κατασκευαὶ κωνικῶν τομῶν.

Ἐν τῷ ἐπιπέδῳ

πέντε σημεῖα, ἀνὰ τρία τῶν ὁποίων δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ὁρίζουν μίαν κωνικὴν τομήν, διερχομένην δι' αὐτῶν».	*πέντε εὐθεῖαι, ἀνὰ τρεῖς τῶν ὁποίων δὲν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ὁρίζουν μίαν ἐπίπεδον δέσμην ἀκτίνων ἢ κωνικὴν τομὴν β' τάξεως, ἐφαπτομένην αὐτῶν».*

Ἂν O_1, O_2, A, B, Γ εἶνε τὰ δοθέντα σημεῖα, δυνάμεθα νὰ συσχετίσωμεν προβολικῶς πρὸς ἀλλήλας τὰς δέσμας O_1 $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots)$ καὶ O_2 $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \ldots)$ ὥστε αἱ ἀκτῖνες $O_1A, O_1B, O_1\Gamma$ νὰ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς $O_2A, O_2B, O_2\Gamma$, ὅτε ὁρίζουν αὗται μίαν κωνικὴν τομὴν K, διερχομένην διὰ τῶν δοθέντων σημείων, ἐπειδὴ εἶνε προβολικαὶ καὶ μὴ προοπτικαί, ἀφοῦ ἀνὰ τρία τῶν δοθέντων σημείων δὲν κεῖται ἐπ' εὐθείας. Ἡ οὕτως ὁριζομένη κωνικὴ τομὴ εἶνε μία μόνη, διότι ἂν ὑπῆρχε καὶ ἄλλη K' π.χ. διερχομένη διὰ τῶν O_1, O_2, A, B, Γ, τὰ σημεῖα αὐτῆς θὰ ἐπροβάλλοντο ἀπὸ τῶν O_1 καὶ O_2 διὰ δύο προβολικῶν δεσμῶν, αἵτινες θὰ συνέπιπτον μὲ τὰς δέσμας O_1 καὶ O_2, αἵτινες ὁρίζουν τὴν K.



Ἡ ἀνωτέρω πρότασις ἰσχύει καὶ ὅταν ἀντικατασταθῇ ἓν τῶν πέντε σημείων π.χ. τὸ A διὰ μιᾶς εὐθείας α, διερχομένης διὰ τοῦ O_2, ἀλλ' ὄχι καὶ δι' ἄλλου τινὸς τῶν σημείων, ἥτις θὰ εἶνε ἐφαπτομένη εἰς τὴν κωνικὴν τομήν. Διότι ἐν τῇ προβολικότητι μεταξὺ τῶν δύο γενετειρῶν δεσμῶν O_1 καὶ O_2 τῆς K ἡ εὐθεῖα α πρέπει νὰ ἀντιστοιχῇ εἰς τὴν ἀκτῖνα $k \equiv O_1O_2$. Κατ' ἀνάλογον τρόπον δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν ἓν ἀκόμη σημεῖον π. χ. τὸ B, διὰ τῆς εὐθείας β (μὴ διερχομένης διὰ τῶν O_2 καὶ Γ), ἐφαπτομένης τῆς K εἰς τὸ O_1. Οὕτω ἔχομεν τὰς ἑξῆς διδύμους προτάσεις.

Ἐν τῷ ἐπιπέδῳ

τέσσαρα σημεῖα, ἀνὰ τρία τῶν ὁποίων δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ ἡ ἐφαπτομένη εἰς ἓν ἐξ αὐτῶν, μὴ διερχομένη διά τινος τῶν ἄλλων σημείων, ὁρίζουν μίαν κωνικὴν τομήν».	*τέσσαρες εὐθεῖαι, ἀνὰ τρεῖς τῶν ὁποίων δὲν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, καὶ ἓν σημεῖον ἐπαφῆς μιᾶς τούτων, μὴ κείμενον ἐπί τινος τῶν ἄλλων εὐθειῶν, ὁρίζουν μίαν κωνικὴν τομήν».*

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἔχομεν ὅτι,

«τρία σημεῖα, μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, καί αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς δύο ἐκ τούτων, αἵτινες δὲν διέρχονται διά τινος τῶν ἄλλων σημείων, ὁρίζουν μίαν κωνικὴν τομήν».

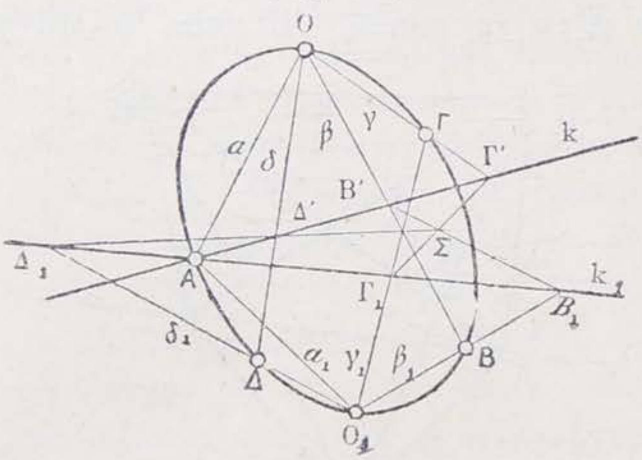
«τρεῖς εὐθεῖαι, μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, καὶ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς δύο ἐξ αὐτῶν, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπί τινος τῶν ἄλλων εὐθειῶν, ὁρίζουν μίαν κωνικὴν τομήν».

Πρώτη κατασκευή.

«Δοθέντων πέντε σημείων κωνικῆς τομῆς, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν αὐτήν».

«Δοθεισῶν πέντε ἐφαπτομένων κωνικῆς τομῆς δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν αὐτήν».

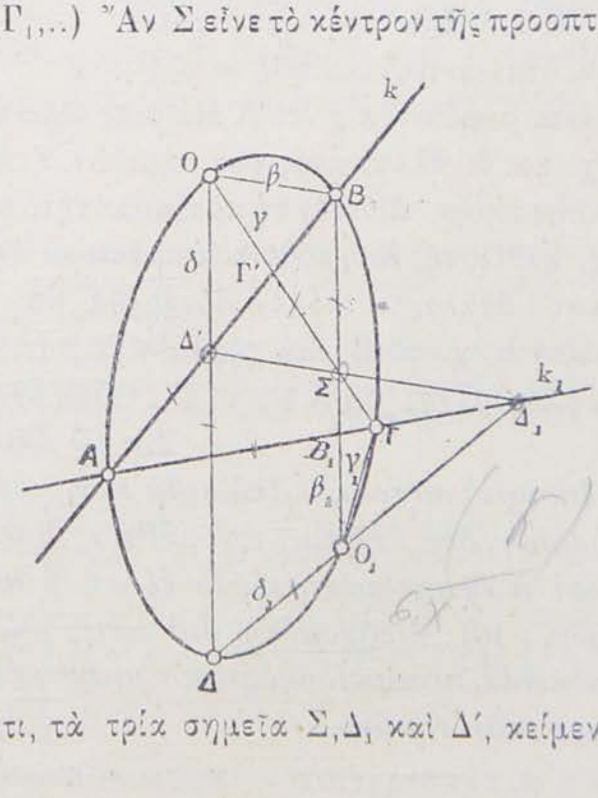
Ἔστωσαν O, O_1, A, B, Γ τὰ δοθέντα σημεῖα τῆς κωνικῆς τομῆς. Συσχετίζομεν τὰς δέσμας $O(A, B, \Gamma, ...)$ καὶ $O_1(A, B, \Gamma, ...)$ προβολικῶς, ὥστε αἱ ἀκτῖνες α, β, γ νὰ ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰς $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. Φέρομεν διὰ τοῦ A δύο τυχούσας ἀκτῖνας k καὶ k_1 τεμνούσας τὰς δέσμας κατὰ δύο προβολικὰς καὶ προοπτικὰς σημειοσειράς (ὡς ἐχούσας κοινὸν τὸ σημεῖον A). Ἤτοι



ἔχομεν $k(A, B', \Gamma', ...) \overline{\overline{\wedge}} k_1(A, B_1, \Gamma_1, ...)$ Ἂν Σ εἶνε τὸ κέντρον τῆς προοπτικότητος τούτων, εἰς τὴν ἀκτῖνα δ τῆς O ἀντιστοιχεῖ ἡ δ_1 τῆς O_1, εὑρισκομένη ὡς ἑξῆς. Προβάλλομεν τὴν τομὴν Δ' τῆς δ καὶ k ἀπὸ τοῦ Σ, καὶ εὑρίσκομεν τὴν τομὴν Δ_1 τῆς $\Sigma\Delta'$ μετὰ τῆς k_1, ὅτε ἡ $O_1\Delta_1$ εἶνε ἡ ἀκτὶς δ_1. Οὕτω ἡ τομὴ $\delta\delta_1 \equiv \Delta$ εἶνε σημεῖον τῆς κωνικῆς τομῆς.

Δευτέρα κατασκευή.

Ἡ προηγουμένη κατασκευὴ ἁπλοποιεῖται, ἂν ὡς εὐθείας k καὶ k_1 λάβωμεν τὰς εὐθείας



AB καὶ AΓ, παρατηροῦμεν δ' ὅτι, τὰ τρία σημεῖα Σ, Δ_1 καὶ Δ', κείμενα ἐπὶ τῆς εὐθείας $\Sigma\Delta'$, δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς τομαὶ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν $O\Gamma$ καὶ BO_1, ΓA καὶ $O_1\Delta_1$, AB καὶ ΔO τοῦ ἁπλοῦ ἑξακορύφου $O\Gamma ABO_1\Delta$. Ἑπομένως αἱ τομαὶ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ ἁπλοῦ τούτου ἑξακορύφου κεῖνται ἐπ' εὐθείας (θεώρημα τοῦ Pascal).

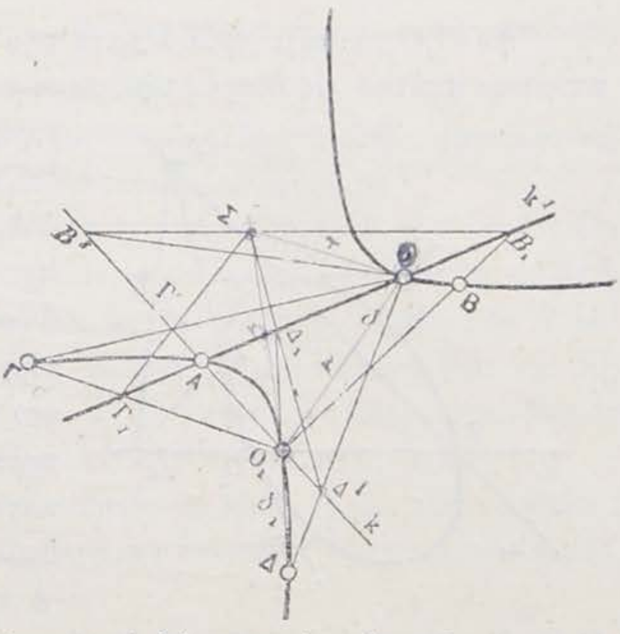
Ἀσκήσεις.

1) Νὰ κατασκευασθῇ ἡ κωνικὴ τομή, τῆς ὁποίας δίδονται πέντε σημεῖα. α') $O, O_1, A, B, \Gamma_\infty$. β') $O, O_1, A, B_\infty, \Gamma_\infty$. γ') $O, O_1, A_\infty, B, \Gamma$. δ') $O_\infty, O_1, A, B, \Gamma$. ε') $O_\infty, O_1, A_\infty, B, \Gamma$. στ') $O_\infty, O_{1\infty}, A, B, \Gamma$.

2) Εἰς δοθὲν ἰσοσκελὲς τρίγωνον νὰ περιγραφῇ κωνικὴ τομή, διερχομένη καὶ διὰ τῶν κατ' ἐκδοχὴν σημείων τῶν ὑψῶν αὐτοῦ, τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τὰ σκέλη τούτου.

Τρίτη κατασκευή.

Δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὡς εὐθείας k καὶ k_1 τὰς ἀκτῖνας AO_1 καὶ AO, εὑρίσκομεν δ' ὡς καὶ προηγουμένως τὸ κέντρον τῆς προβολικότητος Σ ὡς τομὴν τῶν εὐθειῶν $B'B_1$, καὶ $\Gamma'\Gamma_1$, ἐνῷ B' καὶ B_1 μὲν εἶνε αἱ τομαὶ τῆς k καὶ k_1 ὑπὸ τῶν OB καὶ O_1B, Γ' καὶ Γ_1 δὲ ὑπὸ τῶν $O\Gamma$ καὶ $O_1\Gamma$. Ἡ εἰς τὴν τυχοῦσαν ἀκτῖνα δ τῆς δέσμης O ἀντιστοιχοῦσα δ_1 τῆς O_1 εὑρίσκεται, ἂν προβάλωμεν τὴν τομὴν $\Delta' \equiv \delta k$ ἀπὸ τοῦ Σ ἐπὶ τῆς k_1 εἰς τὸ Δ_1 καὶ φέρωμεν τὴν $O_1\Delta_1 \equiv \delta_1$. Τὸ σημεῖον $\Delta \equiv \delta\delta_1$ κεῖται ἐπὶ τῆς κωνικῆς τομῆς.



Εὕρεσις δύο ἐφαπτομένων καὶ δύο σημείων ἐπαφῆς.

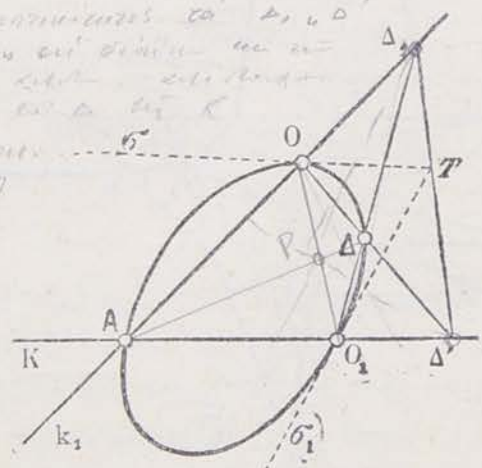
Φανταζόμεθα ὅτι φέρομεν καὶ τὴν εὐθεῖαν OO_1 ἐν τῇ προηγουμένῃ κατασκευῇ, ἔστω δ' αὕτη μ, ἂν θεωρῆται εἰς τὴν δέσμην O $(OO_1 \equiv \mu)$ καὶ λ_1 ἂν εἰς τὴν O_1 $(O_1O \equiv \lambda_1)$. Πρὸς εὕρεσιν τῆς μ_1 ὁμολόγου τῆς μ ἐν τῇ O_1, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὴν τομὴν $\mu k \equiv O_1$, καὶ νὰ προβάλωμεν τὸ O_1 ἀπὸ τοῦ Σ ἐπὶ τῆς k_1. Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι ἡ $\mu_1 \equiv O_1\Sigma$ εἶνε ἡ ὁμόλογος ἀκτὶς τῆς $OO_1 \equiv \mu$. Ἤτοι ἔχομεν ὅτι τὸ O_1 (κέντρον τῆς δευτέρας δέσμης) εἶνε σημεῖον τῆς κωνικῆς τομῆς. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι καὶ τὸ O εἶνε σημεῖον ταύτης. Ἐπειδὴ τώρα μία τυχοῦσα ἀκτὶς δ_1 τῆς O_1 ἔχει ἐκτὸς τοῦ O_1 καὶ ἓν ἀκόμη σημεῖον κοινὸν μὲ τὴν καμπύλην, δηλαδὴ τὸ Δ, καθ' ὃ τέμνεται αὕτη ὑπὸ τῆς ὁμολόγου αὐτῆς δ τῆς δέσμης Ο, ἡ ἀκτὶς μ_1 ἔχει μετὰ τῆς καμπύλης μόνον τὸ O_1 κοινὸν σημεῖον καὶ εἶνε ἐφαπτομένη αὐτῆς εἰς τὸ O_1. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι καὶ ἡ ἀκτὶς $\lambda \equiv O\Sigma$, ὁμόλογος τῆς $\lambda_1 \equiv O_1O$ ἐν τῇ δέσμῃ Ο, εἶνε ἐφαεφαπτομένη τῆς καμπύλης εἰς τὸ Ο.

Ἐκ τούτων ἕπεται δι' ἐφαρμογῆς τῆς ἀρχῆς τῆς ἐναλλαγῆς ὅτι, οἱ φορεῖς δύο προβολικῶν σημειοσειρῶν μὴ προοπτικῶν οὐδὲ κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ φορέως εἶνε ἀκτῖνες τῆς δέσμης δευτέρας τάξεως (ἐφαπτόμεναι τῆς κωνικῆς τομῆς) τὴν ὁποίαν ὁρίζουν αὗται. Τὰ σημεῖα τῶν σημειοσειρῶν, τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὴν τομὴν τῶν φορέων, εἶνε σημεῖα ἐπαφῆς τῆς δέσμης β' τάξεως.

Παρατηρητέον ὅτι τὸ σημεῖον Σ τῆς ἀνωτέρω κατασκευῆς εἶνε ἡ τομὴ τῶν ἐφαπτομένων τῆς καμπύλης εἰς τὰ σημεῖα Ο καὶ O_1.

Κατασκευὴ ἐκ τριῶν σημείων καὶ δύο ἐφαπτομένων τῆς καμπύλης.

Ἂν O, O_1, A εἶνε τρία σημεῖα τῆς κωνικῆς τομῆς καὶ σ, σ_1 αἱ ἐφαπτόμεναι ταύτης εἰς δύο ἐκ τῶν σημείων τούτων, ἔστω εἰς τὰ Ο καὶ O_1,



εὑρίσκομεν τὴν τομὴν $T \equiv \sigma\sigma_1$ καὶ διὰ ταύτης φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν $\Delta'\Delta_1$, τέμνουσαν τὰς $k \equiv AO_1$ καὶ $k_1 \equiv AO$ εἰς τὰ σημεῖα Δ' καὶ Δ_1. Φέρομεν τὰς $O\Delta'$ καὶ $O_1\Delta_1$, αἵτινες τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Δ, κείμενον ἐπὶ τῆς κωνικῆς τομῆς. Παρατηρητέον ὅτι ἐν τῇ περιπτώσει αὐτῇ κατασκευάζεται ἡ καμπύλη, ὅταν δοθοῦν μόνον τέσσαρα σημεῖα O, O_1, Α καὶ Τ, ἐκ τῶν ὁποίων τρία, τὰ O, O_1, A κεῖνται ἐπ' αὐτῆς, τὸ δὲ τέταρτον Τ εἶνε τομὴ τῶν ἐφαπτομένων εὐθειῶν εἰς τὰ δύο τῶν δοθέντων σημείων, τὰ Ο καὶ O_1.

Ἀσκήσεις.

Νὰ κατασκευασθῇ ἡ κωνικὴ τομὴ τῆς ὁποίας δίδονται α') τὰ O, O_1, A καὶ αἱ παράλληλοι ἐφαπτόμεναι αὐτῆς εἰς τὰ Ο καὶ O_1. β') τὰ O, O_1, A_∞ καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι σ καὶ σ_1 εἰς τὰ Ο καὶ O_1. γ') τὰ O, O_1, A_∞ καὶ αἱ παράλληλοι ἐφαπτόμεναι σ καὶ σ_1. δ') τὰ O_∞, O_1, A καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι σ, σ_1. ε') τὰ O_∞, O_1, A_∞ καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι σ καὶ σ_1. ζ') τὰ $O_\infty, O_{1\infty}, A$ καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι σ καὶ σ_1.

Κατασκευὴ ἐκ τεσσάρων σημείων καὶ μιᾶς ἐφαπτομένης.

Ἐκ τῆς προηγουμένης κατασκευῆς παρατηροῦμεν ὅτι, τὸ μὲν πλῆρες τετρακόρυφον $OO_1A\Delta$ (μετὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ Δ), εἶνε ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν κωνικὴν τομήν, ἡ δὲ διαγώνιος αὐτοῦ $\Delta'\Delta_1$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν πλευρὰν τούτου OO_1, ἐνῷ ἡ $\Delta'\Delta_1$ διέρχεται διὰ τῆς τομῆς Τ τῶν ἐφαπτομένων εὐθειῶν τῆς καμπύλης εἰς τὰ Ο καὶ O_1. Ἤτοι ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«*Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς δύο κορυφὰς ἑνὸς πλήρους τετρακορύφου, ἐγγεγραμμένου εἰς καμπύλην β' βαθμοῦ, τέμνονται ἐπὶ τῆς διαγωνίου αὐτοῦ, τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὴν πλευρὰν τούτου, τὴν συνδέουσαν τὰς δύο κορυφάς· ἤτοι ἐπὶ τῆς διαγωνίου, τῆς συνδεούσης τὰ μὴ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς κείμενα διαγώνια σημεῖα αὐτοῦ*».

Δυνάμεθα τώρα νὰ κατασκευάσωμεν κωνικὴν τομήν, τῆς ὁποίας δίδονται τέσσαρα σημεῖα καὶ μία ἐφαπτομένη εἰς ἓν τούτων. Ἔστωσαν O, O_1, A, Δ τὰ σημεῖα καὶ σ ἡ ἐφαπτομένη εὐθεῖα εἰς τὸ Ο τῆς καμπύλης. Ἡ διαγώνιος $\Delta'\Delta_1$ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν καμπύλην πλήρους τετρακορύφου $O\,O_1\,A\Delta$, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν πλευρὰν OO_1 τούτου, τέμνει τὴν δοθεῖσαν ἐφαπτομένην εἰς ἓν σημεῖον Τ, διὰ τοῦ ὁποίου διέρχεται καὶ ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἰς τὸ O_1. Εὑρεθέντος τοῦ σημείου Τ ἀνάγομεν τὴν κατασκευὴν τῆς καμπύλης εἰς τὴν προηγουμένην.

Κατασκευὴ πολικῆς σημείου, δοθείσης μιᾶς κωνικῆς τομῆς.

«*Δοθείσης κωνικῆς τομῆς διὰ πέντε σημείων αὐτῆς, ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ πολικὴ ἑνὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς*».

Ἐὰν Α,Β,Γ,Δ,Ε εἶνε τὰ δοθέντα σημεῖα, ἀνὰ τρία τῶν ὁποίων δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, καὶ Ρ τὸ σημεῖον, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ πολική, συνδέομεν τοῦτο δι' εὐθειῶν μετὰ δύο ἐκ τῶν δοθέντων, ἔστω τῶν Α καὶ Β, καὶ εὑρίσκομεν τὰς ἄλλας τομὰς A_1 καὶ B_1 τῶν εὐθειῶν ΡΑ καὶ ΡΒ μετὰ τῆς καμπύλης. Οὕτω ἡ πολικὴ ρ τοῦ Ρ εἶνε ἡ εὐθεῖα, ἡ συνδέουσα τὰς τομὰς τῶν ζευγῶν τῶν εὐθειῶν AB, A_1B_1 καὶ AB_1, A_1B.

Διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ δυασμοῦ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν πόλον δοθείσης εὐθείας ὡς πρὸς κωνικὴν τομήν, ὁριζομένην διὰ πέντε ἐφαπτομένων αὐτῆς.

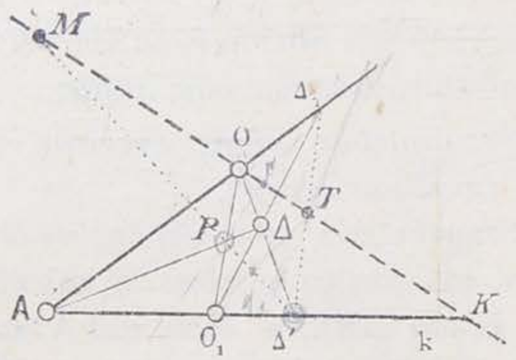
Ἀσκήσεις.

1) Διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἀρχῆς τῆς ἐναλλαγῆς εὕρετε τὴν ἀντίστοιχον πρότασιν τῆς προηγουμένης τῆς ἀνωτέρω διὰ πλῆρες τετράπλευρον, ἔχον πλευρὰς ἐφαπτομένας καμπύλης δευτέρας τάξεως, καὶ λύσατε τὸ πρόβλημα, «νὰ κατασκευασθῇ καμπύλη β' τάξεως, ὅταν δίδωνται τέσσαρες ἐφαπτόμεναι αὐτῆς καὶ ἓν σημεῖον ἐπαφῆς μιᾶς τούτων o, o_1, α, β καὶ Ο».

2) Νὰ κατασκευασθῇ κωνικὴ τομή, τῆς ὁποίας δίδονται α') τέσσαρα σημεῖα O, O_1, A_∞, B καὶ ἡ ἐφαπτομένη σ εἰς τὰ Ο· β') τὰ $O, O_1, A_\infty, B_\infty$, καὶ ἡ ἐφαπτομένη σ εἰς τὸ Ο· γ') τὰ O_∞, O_1, A, B καὶ ἡ ἐφαπτομένη σ εἰς τὸ πρῶτον σημεῖον· δ') τὰ $O_\infty, O_1, A, B_\infty$ καὶ ἡ ἐφαπτομένη σ εἰς τὸ πρῶτον σημεῖον· ε') τὰ $O_\infty, O_1, A_\infty, B$ καὶ ἡ ἐφαπτομένη σ εἰς τὸ πρῶτον σημεῖον· στ') τὰ $O_\infty, O_{1\infty}, A, B$ καὶ ἡ ἐφαπτομένη σ εἰς τὸ πρῶτον σημεῖον.

§ 66. Ἰδιότητες ἐφαπτομένων καὶ σημείων κωνικῆς τομῆς.

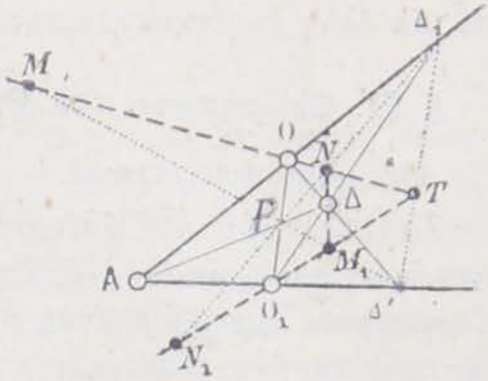
Ἔστω ὅτι κωνική τις τομὴ δίδεται διὰ πέντε σημείων αὐτῆς O, O_1, A, B, Γ. Δυνάμεθα κατὰ τ' ἀνωτέρω νὰ κατασκευάσωμεν τὰς ἐφαπτομένας αὐτῆς εἰς τὰ O καὶ O_1 (λαμβάνοντες τὰς AO καὶ AO_1 ὡς k_1 καὶ k ἀντιστοίχως) καὶ τὴν τομὴν αὐτῶν, ἔστω δ' αὕτη T. Ἀκολούθως δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἓν ἀκόμη σημεῖον Δ τῆς καμπύλης, ἂν φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν $\Delta'\Delta_1$ διὰ τοῦ T, τέμνουσαν τὰς k καὶ k_1 εἰς τὰ Δ' καὶ Δ_1, ὅτε ἡ τομὴ τῶν $O\Delta'$ καὶ $O_1\Delta_1$ εἶνε τὸ σημεῖον Δ. Θεωροῦμεν τώρα τὸ πλῆρες τετρακόρυφον $OO_1A\Delta$, τοῦ ὁποίου τὰ Δ' καὶ Δ_1 εἶνε διαγώνια σημεῖα. Ἂν P εἶνε τὸ τρίτον διαγώνιον σημεῖον τοῦ τετρακορύφου τούτου (τομὴ τῶν OO_1 καὶ $A\Delta$), ἐπειδὴ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ $O\Delta$ καὶ AO_1 τοῦ τετρακορύφου, αἵτινες τέμνονται ἐπὶ τοῦ Δ', εἶνε συζυγεῖς ἁρμονικαὶ πρὸς τὰς δύο διαγωνίους $\Delta'P$ καὶ $\Delta'\Delta_1$, τὰς διερχομένας διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου αὐτῶν (§ 27, σελ. 61), τὸ σύμπλεγμα $(\Delta'A, \Delta'P, \Delta'O, \Delta'\Delta_1)$ εἶνε ἁρμονικόν, ἄρα καὶ ἡ τομὴ τούτου ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης OT εἰς τὸ σημεῖον O, ἤτοι τὸ σύμπλεγμα $(KMOT)$ εἶνε ἁρμονικόν. Ἂν τώρα ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα $\Delta_1\Delta'$ στρέφεται περὶ τὸ T, τὰ



μὲν τρία σημεῖα O, T καὶ K διατηροῦνται σταθερά, ἡ δὲ μεταβλητὴ διαγώνιος εὐθεῖα $\Delta'P$ διέρχεται πάντοτε διὰ τοῦ τετάρτου σταθεροῦ ἁρμονικοῦ σημείου M τῶν T, O καὶ K. Καὶ κατὰ τὴν στροφὴν λοιπὸν ταύτην θὰ ἔχωμεν ὅτι αἱ ἐπίπεδοι δέσμαι, αἱ ἔχουσαι κέντρα τὰ A καὶ O, τῶν ὁποίων αἱ ἀντίστοιχοι ἀκτῖνες τέμνονται εἰς τὸ Δ εἶνε προβολικαί. Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ A εἶνε τυχὸν σημεῖον τῆς καμπύλης, ἔχομεν ὁμοίως $B(\Delta)\overline{\wedge}O(\Delta)$, ἑπομένως εἶνε καὶ $A(\Delta)\overline{\wedge}B(\Delta)$· ἤτοι ἀποδεικνύεται ἐκ νέου ἡ πρότασις (§64, σελ. 174) τοῦ Steiner.

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι, ἡ διαγώνιος εὐθεῖα Δ_1P τοῦ τετρακορύφου $OO_1A\Delta$ διέρχεται διὰ τοῦ (σταθεροῦ) σημείου N_1 τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ O_1. Ἂν N εἶνε ἡ τομὴ τῆς OT (ἐφαπτομένης εἰς τὸ O) καὶ τῆς Δ_1P, ἡ ΔN θὰ εἶνε ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἰς τὸ Δ, ἐπειδὴ ἡ Δ_1P εἶνε ἡ διαγώνιος τοῦ πλήρους τετρακορύφου $OAO_1\Delta$, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν πλευρὰν $O\Delta$ (§ 65, σελ. 181). Ὁμοίως ἔχομεν ὅτι τὸ M_1, τομὴ τῆς O_1T καὶ $\Delta'P$ ὁρίζει τὴν ἐφαπτομένην τῆς καμπύλης

ΔM_1 εἰς τὸ Δ. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα $\Delta'\Delta_1$ στρέφεται περὶ τὸ T, τὸ σημεῖον N θὰ κινῆται ἐπὶ τῆς OT καὶ ἡ ἀκτὶς N_1N θὰ στρέφεται περὶ τὸ σταθερὸν σημεῖον N_1, καὶ θὰ γράφουν τὸ μὲν μίαν σημειοσειράν, ἡ δὲ μίαν δέσμην, προβολικὰς πρὸς ἀλλήλας καὶ προοπτικὰς (ἐπειδὴ ἡ μία εἶνε ὄψις τῆς ἄλλης). Ἀλλ' ἡ δέσμη, ἡ ἔχουσα κέντρον τὸ N_1, εἶνε προβολικὴ καὶ προοπτικὴ καὶ πρὸς τὴν σημειοσειράν, τὴν γραφομένην ὑπὸ τοῦ P ἐπὶ τῆς OO_1, αὕτη δὲ πρὸς τὴν δέσμην τὴν προβάλλουσαν ταύτην ἀπὸ τοῦ M, ἥτις πάλιν ἔχει τὴν αὐτὴν σχέσιν πρὸς τὴν σημειοσειρὰν τὴν γραφομένην ὑπὸ τοῦ M_1 ἐπὶ τῆς O_1T (καθ' ἣν τέμνεται ἡ ἐν λόγῳ δέσμη). Ἔχομεν λοιπὸν ὅτι αἱ σημειοσειραὶ τὰς ὁποίας γράφουν οὕτω τὰ σημεῖα N καὶ M_1 εἶνε προβολικαί.



Ἔχομεν δηλαδὴ $N \overset{=}{\overline{\wedge}} N_1(N) \overset{=}{\overline{\wedge}} P \overset{=}{\overline{\wedge}} M(P) \overset{=}{\overline{\wedge}} M_1$, καὶ $N \overline{\wedge} M_1$,

ὅπου τὰ N, P καὶ M_1 παριστάνουν τὰς ὑπ' αὐτῶν γραφομένας σημειοσειρὰς κατὰ τὴν ἐν λόγῳ κίνησιν.

Ἐκ τούτων καὶ δι' ἐφαρμογῆς τῆς ἐναλλαγῆς ἕπεται ὅτι,

«αἱ ἐφαπτόμεναι μιᾶς καμπύλης β' βαθμοῦ τέμνουν δύο οἱασδήποτε ἀλλ' ὡρισμένας ἐφαπτομένας αὐτῆς κατὰ τὰ σημεῖα δύο προβολικῶν σημειοσειρῶν».

«τὰ σημεῖα τῆς ἐπαφῆς μιᾶς καμπύλης β' τάξεως προβάλλονται ἀπὸ δύο τυχόντων ἀλλ' ὡρισμένων σημείων ἐπαφῆς διὰ δύο προβολικῶν (ἐπιπέδων) δεσμῶν».

Κατὰ ταῦτα, ἐπειδὴ αἱ ἐφαπτόμεναι μιᾶς κωνικῆς τομῆς δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς συνδέουσαι τὰ ὁμόλογα σημεῖα N καὶ M_1 δύο προβολικῶν σημειοσειρῶν ἔχομεν ὅτι,

«αἱ ἐφαπτόμεναι μιᾶς καμπύλης β' βαθμοῦ σχηματίζουν μίαν ἐπίπεδον δέσμην ἀκτίνων δευτέρας τάξεως ἢ μίαν καμπύλην β' τάξεως».

«τὰ σημεῖα τῶν ἐπαφῶν μιᾶς ἐπιπέδου δέσμης β' τάξεως ἢ μιᾶς καμπύλης β' τάξεως ἀποτελοῦν μίαν καμπύλην β' βαθμοῦ».

Οὕτω παρατηροῦμεν ὅτι, πᾶσαι αἱ προτάσεις αἱ ἀναφερόμεναι εἰς τὰς ἐπιπέδους δέσμας β' τάξεως ἰσχύουν καὶ διὰ τὰς ἐφαπτομένας μιᾶς καμπύλης β' βαθμοῦ.

Δι᾽ ἑκάστου σημείου τοῦ ἐπιπέδου κωνικῆς τινος τομῆς (ἐκτὸς αὐτῆς κειμένου), διὰ τοῦ ὁποίου διέρχεται μία ἐφαπτομένη ταύτης, διέρχεται καὶ μία ἄλλη ἐφαπτομένη αὐτῆς.

§ 67. Θεωρήματα τοῦ Pascal* καὶ τοῦ Brianchon*.

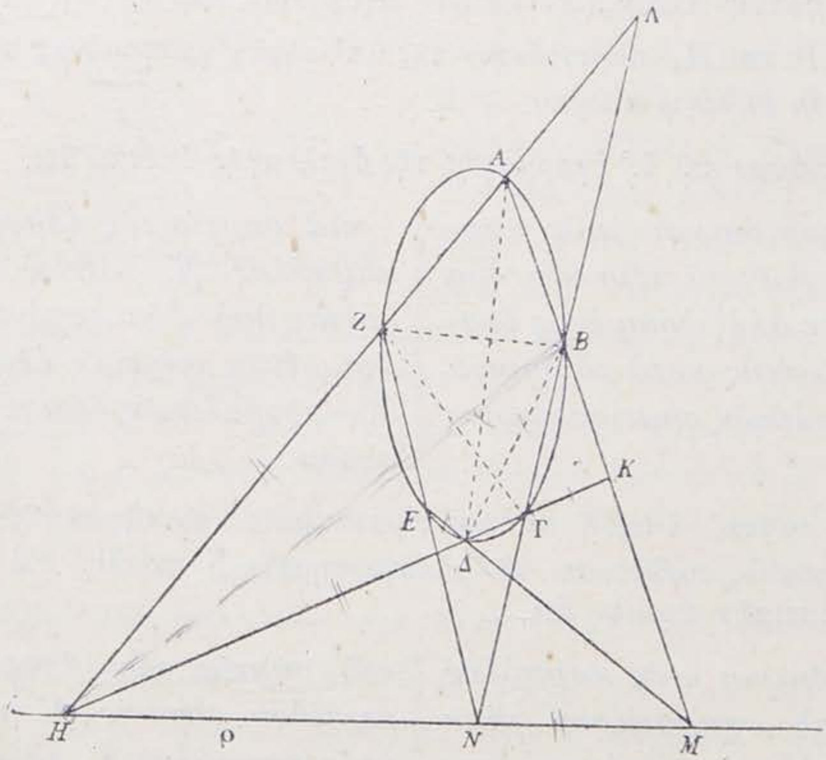
Θεώρημα τοῦ *Pascal*.

«*Τὰ τρία ζεύγη τῶν ἀπέναντι κειμένων πλευρῶν ἑνὸς ἁπλοῦ ἑξακορύφου, ἐγγεγραμμένου εἰς κωνικὴν τομήν, τέμνονται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας (ἥτις καλεῖται εὐθεῖα τοῦ Pascal)*».

Θεώρημα τοῦ *Brianchon*.

«*Αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰς ἀπέναντι κορυφὰς ἑνὸς ἁπλοῦ ἑξαπλεύρου, περιγεγραμμένου εἰς κωνικὴν τομήν, διέρχονται δι᾽ ἑνὸς σημείου (τὸ ὁποῖον καλεῖται σημεῖον τοῦ Brianchon*»).

Ἔστωσαν ἓξ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, κείμενα ἐπὶ κωνικῆς τινος τομῆς, ὁρίζοντα ἓν ἁπλοῦν ἑξακόρυφον ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτήν. Προβάλλομεν



ἀπὸ τῶν Δ καὶ Ζ τὰ ἄλλα σημεῖα Α, Β, Γ, Ε, ὅτε θὰ ἔχωμεν δύο προβολικὰς δέσμας Δ (Β, Γ, Ε, Α,..) καὶ Ζ (Β, Γ, Ε, Α..), αἵτινες τέμνονται ὑπὸ

* Τὴν θεμελιώδη ταύτην πρότασιν, ἥτις καλεῖται καὶ «*τῶν ἓξ σημείων κωνικῆς τομῆς*» εὗρεν ὁ Pascal τὸ 1630 εἰς ἡλικίαν 16 ἐτῶν, καὶ ἐδημοσίευσε διὰ τοῦ ἔργου αὐτοῦ «Essais sur les coniques». Ὁ Brianchon ἐδημοσίευσε τὴν ἐπίσης θεμελιώδη πρότασιν αὐτοῦ τὸ 1806 εἰς τὸ «Journal d l' Ecole polytechnique», XIII cahier».

Δ(ΑΒΓΕ) (ΑΒΚΜ)
Ζ(ΑΒΓΕ,) (ΑΒΓΝ)

τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΒΓ κατὰ δύο προβολικὰς σημειοσειράς. Ἐὰν Κ καὶ Μ εἶνε αἱ τομαὶ τῶν ἀκτίνων ΔΓ καὶ ΔΕ ὑπὸ τῆς ΑΒ, καὶ Λ καὶ Ν αἱ τομαὶ τῶν ἀκτίνων ΖΑ καὶ ΖΕ ὑπὸ τῆς ΒΓ, θὰ ἔχωμεν

$$\mathrm{B,K,M,A,}\ldots \overline{\wedge}\ \mathrm{B,\Gamma,N,\Lambda,}\ldots$$

Ἀλλ' εἰς τὰς δύο ταύτας προβολικὰς σημειοσειρὰς τὸ σημεῖον Β ἀντιστοιχεῖ πρὸς ἑαυτό, ἄρα εἶνε αὗται καὶ προοπτικαί. Διὰ τοῦτο αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰ σημεῖα Κ καὶ Γ, Μ καὶ Ν, Α καὶ Λ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ἔστω τοῦ Η. Ἤτοι, τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν, καθ' ἃ τέμνονται τὰ ζεύγη τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ΑΒ, ΔΕ καὶ ΒΓ, ΕΖ τοῦ ἑξακορύφου, κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς μετὰ τοῦ σημείου Η, καθ' ὃ τέμνονται αἱ εὐθεῖαι ΓΔ καὶ ΑΖ, αἵτινες ἀποτελοῦν τὸ τρίτον ζεῦγος τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ ἐν λόγῳ ἑξακορύφου. Τὸ ἐν λόγῳ ἑξακόρυφον, διὰ τὸ ὁποῖον ἰσχύει ἡ πρότασις, λέγεται συνήθως τοῦ *Pascal*.

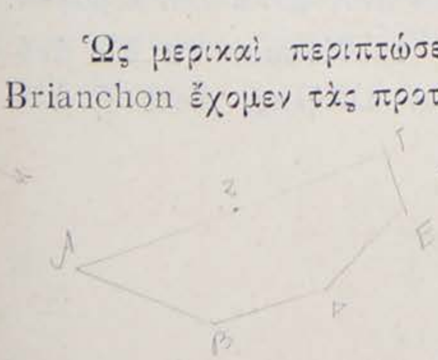
Δι' ἐφαρμογῆς τῆς ἀρχῆς τοῦ δυασμοῦ ἔχομεν τὴν ἀντίστοιχον ἀπόδειξιν τῆς δεξιὰ ἀνωτέρω προτάσεως, τὸ δὲ ἑξάπλευρον, διὰ τὸ ὁποῖον ἰσχύει αὕτη, λέγεται συνήθως τοῦ *Brianchon*.

Ἐὰν ἀντιστρέψωμεν τὴν πορείαν τῆς ἀνωτέρω ἀποδείξεως, παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ΑΒ καὶ ΕΔ, ΒΓ καὶ ΖΕ, ΓΔ καὶ ΑΖ ἑνὸς ἁπλοῦ ἑξακορύφου ΑΒΓΔΕΖ τέμνωνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας, αἱ δέσμαι, αἵτινες προβάλλουν τὰ ἄλλα σημεῖα ἀπὸ τῶν Δ καὶ Ζ εἶνε προβολικαί, καὶ ἑπομένως αἱ ἓξ κορυφαὶ τοῦ ἑξακορύφου κεῖνται ἐν γένει ἐπὶ κωνικῆς τομῆς (ἥτις δυνατὸν νὰ εἶνε ἐκφυλισμένη), τῆς παραγομένης ὑπὸ τῶν δύο δεσμῶν. Διὰ τῆς ἐφαρμογῆς καὶ τῆς ἀρχῆς τοῦ δυασμοῦ ἔχομεν τὰς ἑξῆς διδύμους προτάσεις.

«Πᾶν ἑξακόρυφον τοῦ Pascal, ἀνὰ τρεῖς κορυφαὶ τοῦ ὁποίου δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, εἶνε ἐγγεγραμμένον εἰς κωνικὴν τομήν. Ἐὰν τρεῖς τῶν κορυφῶν αὐτοῦ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, τὸ ἑξακόρυφον εἶνε ἐγγεγραμμένον εἰς ἓν ζεῦγος εὐθειῶν (ἤτοι εἰς ἐκφυλισμένην κωνικὴν τομήν)».

«Πᾶν ἑξάπλευρον τοῦ Brianchon, ἀνὰ τρεῖς πλευραὶ τοῦ ὁποίου δὲν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, εἶνε περιγεγραμμένον εἰς κωνικὴν τομήν. Ἐὰν τρεῖς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ἑξάπλευρον εἶνε περιγεγραμμένον εἰς ἓν ζεῦγος εὐθειῶν (δηλαδὴ εἰς ἐκφυλισμένην κωνικὴν τομήν)».

Ὡς μερικαὶ περιπτώσεις τῶν θεωρημάτων τοῦ Pascal καὶ τοῦ Brianchon ἔχομεν τὰς προτάσεις, αἵτινες προκύπτουν ἐκ τῶν ἀνωτέρω,



ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι δύο κορυφαὶ τοῦ εἰς τὴν κωνικὴν τομὴν ἐγγεγραμμένου ἑξακορύφου πλησιάζουν ἀπείρως ἀλλήλας, ὥστε ἡ ἀπόστασις αὐτῶν νὰ τείνῃ εἰς τὸ μηδέν, ὅτε ἡ συνδέουσα ταύτας πλευρὰ εἶνε ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης, κλπ. Αὗται ἀποδεικνύονται διὰ πορείας ἀναλόγου πρὸς τὴν ἀνωτέρω, ἐὰν ἀντὶ τοῦ ἑξακορύφου ΑΒΓΔΕΖ θεωρήσωμεν τὸ πεντακόρυφον ΑΒΓΔΕ, καὶ ἐν τῇ θέσει τῆς πλευρᾶς ΑΖ φαντασθῶμεν τὴν εἰς τὴν κορυφὴν Α ἐφαπτομένην τῆς κωνικῆς τομῆς. Ἀνάλογα παρατηροῦμεν καὶ ἂν φαντασθῶμεν ὅτι καὶ δύο ἄλλαι κορυφαὶ τοῦ ἑξακορύφου πλησιάζουν ἀπείρως ἀλλήλας. Οὕτω ἔχομεν τὰς ἑξῆς προτάσεις ὡς μερικὰς τῶν ἀνωτέρω τοῦ Pascal καὶ τοῦ Brianchon.

«Ἐὰν ἁπλοῦν πεντακόρυφον εἶνε ἐγγεγραμμένον εἰς κωνικὴν τομήν, ἡ τομὴ τῆς ἐφαπτομένης εἰς μίαν τῶν κορυφῶν μετὰ τῆς ἀπέναντι αὐτῆς πλευρᾶς τούτου κεῖται ἐπ᾽ εὐθείας μετὰ τῶν σημείων καθ᾽ ἃ τέμνονται τὰ δύο ἄλλα ζεύγη, τῶν μὴ διαδοχικῶν αὐτοῦ πλευρῶν».

«Ἐὰν ἁπλοῦν τετρακόρυφον εἶνε ἐγγεγραμμένον εἰς κωνικὴν τομήν, ἡ τομὴ τῶν ἐφαπτομένων εἰς δύο ἀπέναντι κορυφὰς αὐτοῦ κεῖται ἐπ᾽ εὐθείας μετὰ τῶν σημείων καθ᾽ ἃ τέμνονται αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τούτου (θεώρημα τοῦ Mac Laurin)».

«Ἐὰν ἁπλοῦν πεντάπλευρον εἶνε περιγεγραμμένον εἰς κωνικὴν τομήν, ἡ εὐθεῖα, ἥτις συνδέει τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς μιᾶς τούτων μετὰ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς αὐτοῦ, διέρχεται διὰ τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν, τῶν συνδεουσῶν τὰ δύο ἄλλα ζεύγη τῶν μὴ διαδοχικῶν κορυφῶν τούτου».

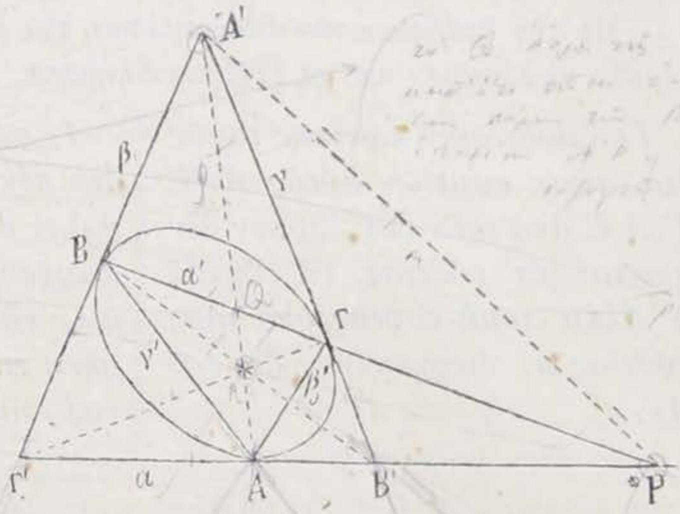
«Ἐὰν ἁπλοῦν τετράπλευρον εἶνε περιγεγραμμένον εἰς κωνικὴν τομήν, ἡ εὐθεῖα, ἥτις συνδέει τὰ σημεῖα τῆς ἐπαφῆς δύο ἀπέναντι πλευρῶν αὐτοῦ, διέρχεται διὰ τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν, (διαγωνίων) τῶν συνδεουσῶν τὰ ζεύγη τῶν ἀπέναντι κορυφῶν τούτου»

Αἱ ἀνωτέρω προτάσεις εἶνε ἐπίσεις ἀντιστρεπταὶ καθὼς καὶ αἱ γενικαὶ τοιαῦται, ὑποτιθεμένου ὅτι ἡ κωνικὴ τομή, εἰς τὴν ὁποίαν εἶνε ἐγγεγραμμένον τὸ πεντακόρυφον ἢ τετρακόρυφον (ἢ περιγεγραμμένον τὸ πεντάπλευρον ἢ τετάπλευρον), δύναται νὰ εἶνε ἐκφυλισμένη κωνικὴ τομή. Οὕτω π.χ. θὰ ἀποτελῆται αὕτη ἐκ δύο εὐθειῶν, ἂν τὸ πεντακόρυφον εἶνε τοιοῦτον, ὥστε τρεῖς ἐκ τῶν κορυφῶν αὐτοῦ νὰ κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας, ἢ ἡ δοθεῖσα ἐφαπτομένη διέρχεται διά τινος τῶν ἄλλων κορυφῶν.

Κατ᾽ ἀνάλογον τρόπον, ἐὰν ἐπὶ πλέον ὑποθέσωμεν ὅτι δύο ἀκόμη κορυφαὶ τοῦ τετρακορύφου πλησιάζουν ἀλλήλας, ὥστε ἡ ἀπόστασις αὐτῶν νὰ τείνῃ εἰς τὸ μηδέν, θὰ ἔχωμεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«*Ἐν τρικόρυφον ἐγγεγραμμένον εἰς κωνικὴν τομὴν καὶ τὸ περιγεγραμμένον εἰς αὐτὴν τρίπλευρον, τὸ σχηματιζόμενον ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων αὐτῆς εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ τρικορύφου, εἶνε ὁμόλογα*».

Ἔστωσαν Α,Β,Γ τρία σημεῖα κωνικῆς τινος τομῆς, τὰ ὁποῖα εἶνε κορυφαὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὴν τρικορύφου ΑΒΓ, καὶ α,β,γ αἱ ἐφαπτόμεναι ταύτης εἰς τὰ σημεῖα ταῦτα καὶ Α′,Β′,Γ′ αἱ κορυφαὶ τοῦ περιγεγραμμένου τούτου τριπλεύρου, αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν πλευρῶν α,β,γ. Θεωροῦμεν τὸ σημεῖον Ρ, τομὴν τῶν α καὶ ΒΓ. Ἡ πολικὴ τούτου εἶνε ἡ εὐθεῖα ΑΑ′, ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Α καὶ Α′ εἶνε οἱ πόλοι τῶν δύο εὐθειῶν α καὶ ΒΓ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι, αἱ εὐθεῖαι Α′Ρ καὶ Α′Α εἶνε συζυγεῖς ὡς πρὸς τὴν κωνικὴν τομήν, καὶ ἑπομένως ὅτι αὗται χωρίζουν ἁρμονικῶς τὰς ἐφαπτομένας β καὶ γ, αἱ ὁποῖαι εἶνε διπλαῖ ἀκτῖνες ἐν τῇ ἐνελίξει τῶν διὰ τοῦ σημείου Α′ διερχομένων συζυγῶν εὐθειῶν.



Ἐὰν συνδέσωμεν δι᾽ εὐθείας τὸ σημεῖον Α′ μὲ τὴν τομὴν τῶν ΒΒ′ καὶ ΓΓ′, αὕτη μετὰ τῆς Α′Ρ χωρίζει ἁρμονικῶς τὰς β καὶ γ (§ 27, σελ. 61). Ἄρα ἡ εὐθεῖα αὕτη δὲν δύναται νὰ διαφέρῃ τῆς Α′Α, καὶ ἑπομένως αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἀρχῆς τῆς ἐναλλαγῆς ἔχομεν ὅτι, τὰ σημεῖα αα′,ββ′,γγ′ κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας. Τὰς προτάσεις ταύτας δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς.

«*Τὰ τρία σημεῖα, καθ᾽ ἃ τέμνονται αἱ πλευραὶ ἑνὸς τρικορύφου, ἐγγεγραμμένου εἰς κωνικήν τινα τομήν, ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων ταύτης εἰς τὰς ἀπέναντι τῶν πλευρῶν τούτων αὐτοῦ κορυφάς, κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας*».

«*Αἱ τρεῖς εὐθεῖαι, αἵτινες συνδέουν τὰς κορυφὰς ἑνὸς τριπλεύρου, περιγεγραμμένου εἰς κωνικὴν τομήν, μετὰ τῶν σημείων τῆς ἐπαφῆς τῶν ἀπέναντι πλευρῶν εἰς τὰς κορυφὰς ταύτας, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου*».

Παρατηρητέον ὅτι, ἐπειδὴ ἡ ἐπίπεδος δέσμη τῶν ἐφαπτομένων μιᾶς καμπύλης β' βαθμοῦ τέμνεται ὑπὸ δύο ἐκ τῶν ἐφαπτομένων τούτων κατὰ δύο σημειοσειρὰς (§ 66,σελ. 183), δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν ὡς ἑξῆς τὴν πρότασιν τοῦ Brianchon.

«*Ἑκάστου ἁπλοῦ ἑξακορύφου, περιγεγραμμένου εἰς καμπύλην β' βαθμοῦ (τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ἐφάπτονται τῆς καμπύλης), αἱ διαγώνιοι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου*».

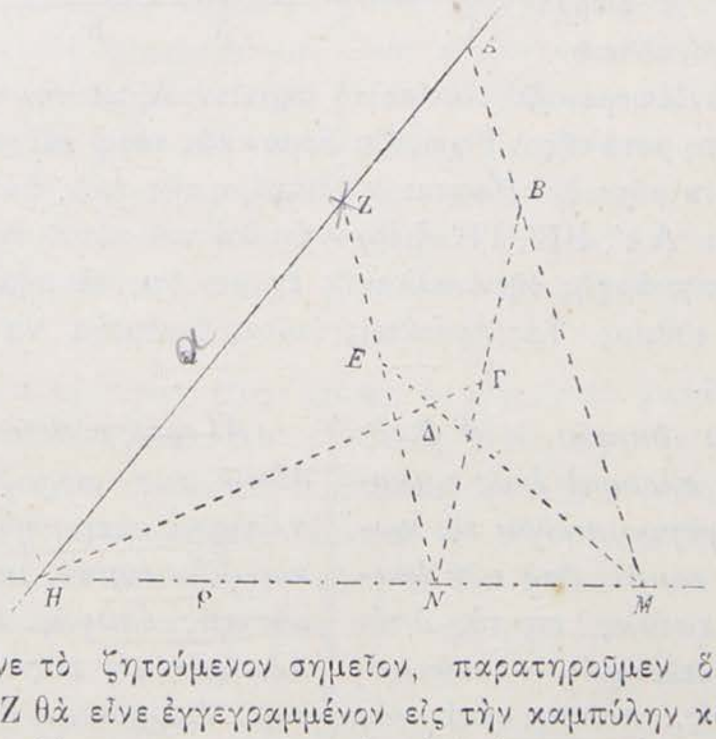
Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἔχομεν ἀντιστοίχους προτάσεις, προκειμένου περὶ πεντακορύφων, τετρακορύφων καὶ τρικορύφων.

§ 68. Ἐφαρμογαὶ τῶν θεωρημάτων τοῦ Pascal καὶ Brianchon.

Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν θεωρημάτων τοῦ Pascal καὶ Brianchon δυνάμεθα νὰ λύσωμεν καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα.

1) «Δοθείσης κωνικῆς τομῆς διὰ πέντε σημείων αὐτῆς Α,Β, Γ,Δ,Ε ἀνὰ τρία τῶν ὁποίων δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἄλλη τομὴ ταύτης ὑπὸ μιᾶς εὐθείας α, διερχομένης διὰ τοῦ Α».

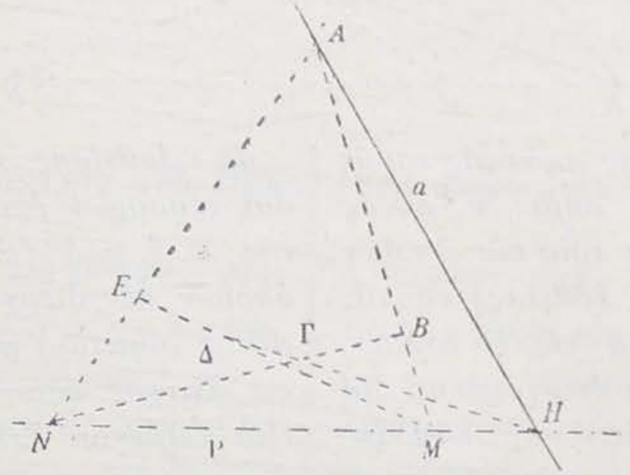
1) «Δοθείσης κωνικῆς τομῆς διὰ πέντε εὐθειῶν ταύτης α,β, γ,δ,ε, ἀνὰ τρεῖς τῶν ὁποίων δὲν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἄλλη ἐφαπτομένη ταύτης, ἡ ἀγομένη ἀπό τινος σημείου Α τῆς α».



Ἂν Ζ εἶνε τὸ ζητούμενον σημεῖον, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἑξακόρυφον ΑΒΓΔΕΖ θὰ εἶνε ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν καμπύλην καὶ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν εὐθεῖαν ρ τοῦ Pascal, ἂν φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΗΜ, ὅπου Η εἶνε ἡ τομὴ τῶν α καὶ ΔΓ, καὶ Μ ἡ τομὴ τῶν ΕΔ καὶ ΑΒ. Ἐὰν Ν εἶνε ἡ τομὴ τῆς πλευρᾶς ΓΒ καὶ τῆς ρ, πρέπει ἡ εὐθεῖα ΕΖ νὰ διέρχεται διὰ τοῦ Ν. Ἄρα τὸ σημεῖον Ζ εἶνε τομὴ τῶν εὐθειῶν ΝΕ καὶ α ≡ ΑΖ.

2) «Δοθείσης κωνικῆς τομῆς διὰ πέντε σημείων αὐτῆς Α,Β, Γ,Δ,Ε, ἀνὰ τρία τῶν ὁποίων δὲν κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας, ζητεῖται ἡ ἐφαπτομένη ταύτης εἰς ἓν τῶν σημείων τούτων, ἔστω εἰς τὸ Α».

2) «Δοθείσης κωνικῆς τομῆς διὰ πέντε ἐφαπτομένων αὐτῆς α,β,γ,δ,ε, ἀνὰ τρεῖς τῶν ὁποίων δὲν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ζητεῖται τὸ σημεῖον ἐπαφῆς μιᾶς ἐκ τούτων, ἔστω τῆς α».

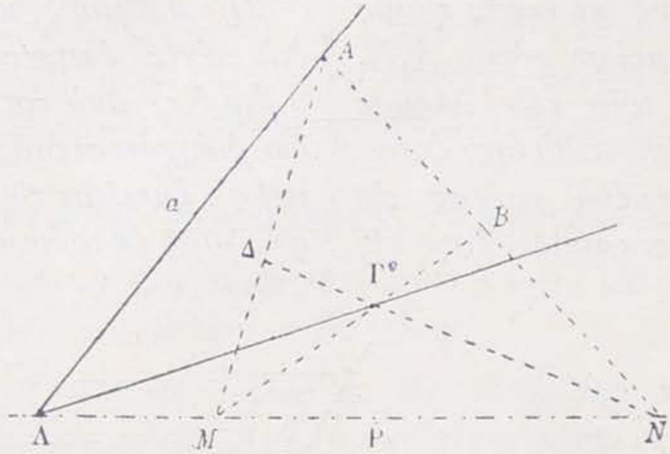


Εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν εὐθεῖαν ρ τοῦ Pascal, συνδέοντες δι᾽ εὐθείας τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν, τομὰς τῶν ΕΔ καὶ ΑΒ καὶ τῶν ΓΒ καὶ ΑΕ. Οὕτω τὸ σημεῖον Η θὰ εἶνε ἐκεῖνο καθ᾽ ὃ τέμνονται ἡ ρ καὶ ἡ ΓΔ, ἥτις εἶνε πλευρὰ τοῦ πενταкορύφου, κειμένη ἀπέναντι τῆς κορυφῆς Α. Ἄρα ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη εὐθεῖα εἶνε ἡ α ≡ ΑΗ.

3) «Δοθείσης κωνικῆς τομῆς διὰ τεσσάρων σημείων Α, Β, Γ, Δ (ἀνὰ τρία τῶν ὁποίων δὲν κεῖνται ἐπ εὐθείας) καὶ τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς εἰς ἓν τούτων, ἔστω τῆς α εἰς τὸ Α (μὴ διερχομένης διά τινος τῶν ἄλλων σημείων), ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον Γ».

3) «Δοθείσης κωνικῆς τομῆς διὰ τεσσάρων ἐφαπτομένων α, β, γ, δ (ἀνὰ τρεῖς τῶν ὁποίων δὲν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου) καὶ τοῦ σημείου ἐπαφῆς ταύτης μετὰ μιᾶς ἐκ τούτων, ἔστω τοῦ Α τῆς α (μὴ κειμένου ἐπί τινος τῶν ἄλλων ἐφαπτομένων), ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς Γ τῆς γ».

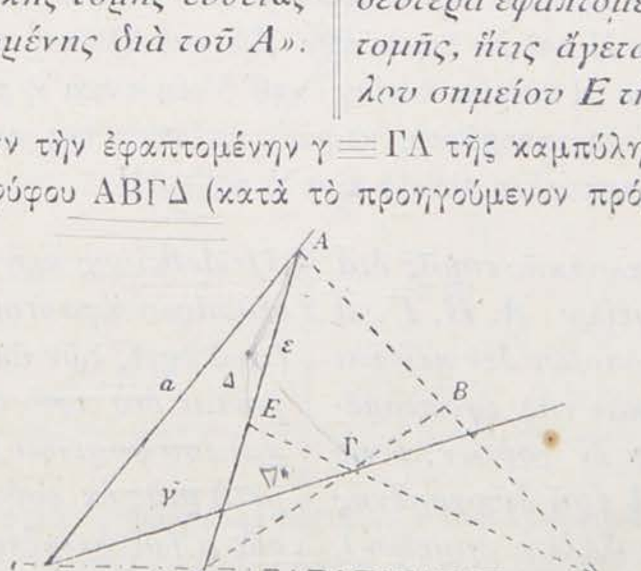
Ἐὰν Μ καὶ Ν εἶνε αἱ τομαὶ τῶν ἀπέναντι κειμένων πλευρῶν τοῦ τετρακορύφου ΑΒΓΔ, ἡ εὐθεῖα $\rho \equiv$ ΜΝ εἶνε ἡ εὐθεῖα τοῦ Pascal, καὶ ἑπομένως, ἂν Λ εἶνε ἡ τομὴ ταύτης μετὰ τῆς δοθείσης ἐφαπτομένης α εἰς τὸ Α, ἡ εὐθεῖα ΓΛ εἶνε ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη γ τῆς καμπύλης εἰς τὸ Γ.



4) «*Δοθείσης κωνικῆς τομῆς διὰ τεσσάρων σημείων αὐτῆς Α, Β, Γ, Δ (ἀνὰ τρία τῶν ὁποίων δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας) καὶ τῆς ἐφαπτομένης α εἰς ἓν τούτων, τὸ Α π. χ. (μὴ διερχομένης διά τινος τῶν ἄλλων σημείων), ζητεῖται τὸ ἄλλο σημεῖον τῆς τομῆς μετὰ τῆς κωνικῆς τομῆς εὐθείας τινὸς ε, διερχομένης διὰ τοῦ Α*».

4) «*Δοθείσης κωνικῆς τομῆς διὰ τεσσάρων ἐφαπτομένων αὐτῆς α, β, γ, δ (ἀνὰ τρεῖς τῶν ὁποίων δὲν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου) καὶ τοῦ σημείου ἐπαφῆς, ἔστω τοῦ Α τῆς α (μὴ κειμένου ἐπί τινος τῶν ἄλλων ἐφαπτομένων), ζητεῖται ἡ δευτέρα ἐφαπτομένη τῆς κωνικῆς τομῆς, ἥτις ἄγεται ἀπό τινος ἄλλου σημείου Ε τῆς α*».

Εὑρίσκομεν τὴν ἐφαπτομένην $\gamma \equiv$ ΓΛ τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον Γ τοῦ τετρακορύφου ΑΒΓΔ (κατὰ τὸ προηγούμενον πρόβλημα).



Ἐὰν Ε εἶνε τὸ ζητούμενον σημεῖον, εὑρίσκομεν τὴν εὐθεῖαν τοῦ Pascal ὡς πρὸς τὸ τετρακόρυφον ΑΒΓΕ, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ σημείου

Λ, τομῆς τῶν δύο ἐφαπτομένων α καὶ γ, καὶ διὰ τοῦ Μ΄, τομῆς τῶν εὐθειῶν ΑΕ καὶ ΓΒ. Ἐὰν Ν΄ εἶνε ἡ τομὴ τῶν εὐθειῶν ΛΜ΄ καὶ ΑΒ, ἡ εὐθεῖα Ν΄Γ τέμνει τὴν ε εἰς τὸ ζητούμενον σημεῖον Ε.

Κατ᾽ ἀνάλογον τρόπον δύνανται νὰ λυθοῦν καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα,

«Δοθείσης κωνικῆς τομῆς διὰ τριῶν σημείων αὐτῆς Α,Β,Γ (μὴ κειμένων ἐπ᾽ εὐθείας) καὶ τῶν ἐφαπτομένων εἰς δύο τούτων, ἔστω τῶν α καὶ β εἰς τὰ Α καὶ Β (μὴ διερχομένων διά τινος τῶν ἄλλων σημείων), ζητεῖται ἡ ἐφαπτομένη γ εἰς τὸ τρίτον σημεῖον Γ».

«Δοθείσης κωνικῆς τομῆς διὰ τριῶν ἐφαπτομένων αὐτῆς α,β,γ (μὴ διερχομένων διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου) καὶ τῶν σημείων ἐπαφῆς δύο ἐκ τούτων, ἔστω τῶν Α καὶ Β τῶν α καὶ β (τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπί τινος τῶν ἄλλων ἐφαπτομένων), ζητεῖται τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Γ τῆς τρίτης ἐφαπτομένης γ».

§ 69. Θεωρήματα τοῦ Desargues (διὰ κωνικὰς τομάς).

Διὰ τετρακόρυφον καὶ τετράπλευρον.

«Ἐὰν δοθῇ μία κωνικὴ τομὴ καὶ πλῆρες τετρακόρυφον ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτήν, τέμνουσά τις τῆς καμπύλης, μὴ διερχομένη διά τινος τῶν κορυφῶν τοῦ τετρακορύφου, συναντᾷ αὐτὴν εἰς δύο σημεῖα, τὰ ὁποῖα εἶνε συζυγῆ ἐν τῇ ἐνελίξει, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκουν αἱ τομαὶ ταύτης μετὰ τῶν τριῶν ζευγῶν τῶν ἀπέναντι κειμένων πλευρῶν τοῦ τετρακορύφου (§49, σελ. 122)».

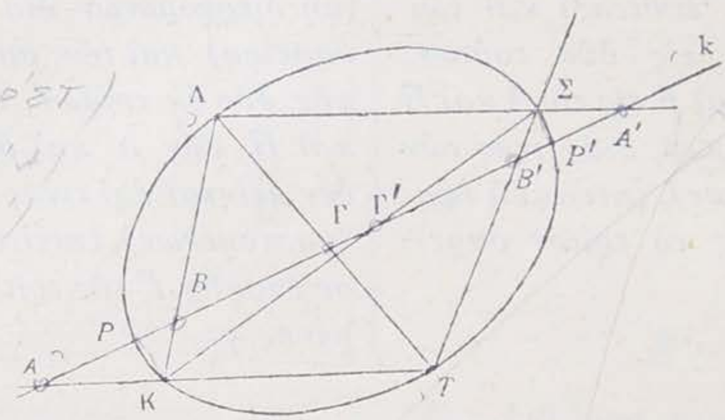
«Ἐὰν δοθῇ μία κωνικὴ τομὴ καὶ πλῆρες τετρακόρυφον περιγεγραμμένον εἰς αὐτήν, δύο ἐφαπτόμεναι ταύτης, διερχόμεναι διά τινος σημείου, μὴ κειμένου ἐπί τινος τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου, εἶνε συζυγεῖς ἀκτῖνες ἐν τῇ ἐνελίξει, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκουν τὰ τρία ζεύγη τῶν ἀκτίνων, καθ᾽ ἃς προβάλλονται ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου αἱ ἀπέναντι κείμεναι κορυφαὶ τοῦ τετραπλεύρου (§49)».

Ἔστω ΚΑΣΤ ἓν πλῆρες τετρακόρυφον ἐγγεγραμμένον εἰς δοθεῖσαν κωνικὴν τομὴν καὶ k εὐθεῖά τις, τέμνουσα τὴν καμπύλην εἰς τὰ σημεῖα Ρ καὶ Ρ΄ καὶ τὰ ζεύγη τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετρακορύφου εἰς τὰ Α καὶ Α΄, Β καὶ Β΄, Γ καὶ Γ΄. Ἐὰν προβάλωμεν ἀπὸ τῶν σημείων Κ καὶ Σ τὰ τέσσαρα σημεῖα Ρ, Ρ΄ Λ, Τ τῆς κωνικῆς τομῆς, θὰ ἔχωμεν

$$K(P,P',\Lambda,T) \barwedge \Sigma(P,P'\Lambda,T),$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν, ἐὰν τμήσωμεν διὰ τῆς k
$k(P,P',B,A)\overline{\wedge}(P,P',A',B')$, καὶ ἑπομένως ὅτι $k(P,P',B,A)\overline{\wedge}k(P'PB'A')$.

Ἐκ ταύτης ἔχομεν ὅτι, τὸ A καὶ A′ εἶνε συζυγῆ σημεῖα ἐν τῇ ἐνελίξει $\begin{pmatrix} P\,P'\,B \\ P'\,P\,B' \end{pmatrix}$. Εἰς τὴν αὐτὴν ἐνέλιξιν εὑρίσκομεν κατ᾽ ἀνάλογον τρόπον ὅτι ἀνήκει καὶ τὸ ζεῦγος Γ καὶ Γ′, (ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι τὰ τρία



ζεύγη A καὶ A′, B καὶ B′, Γ καὶ Γ′ κεῖνται ἐν ἐνελίξει (§ 49,σελ.122).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προτάσεων ἔχομεν τὰς ἑξῆς μερικὰς περιπτώσεις, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι δύο κορυφαὶ τοῦ τετρακορύφου τείνουν νὰ συμπέσουν εἰς μίαν, ἡ δὲ πλευρὰ ἥτις συνδέει ταύτας ἀντικαθίσταται διὰ τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης εἰς τὴν κορυφὴν ταύτην, κλπ.

Διὰ τρικόρυφον καὶ τρίπλευρον.

«Ἐὰν δοθῇ κωνικὴ τομὴ καὶ τρικόρυφον ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτήν, τέμνουσά τις τῆς καμπύλης (καὶ μὴ διερχομένη διά τινος τῶν κορυφῶν τοῦ τρικορύφου), συναντᾷ αὐτὴν εἰς δύο σημεῖα, τὰ ὁποῖα εἶνε συζυγῆ ἐν τῇ ἐνελίξει, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκουν τὰ ζεύγη τῶν τομῶν αὐτῆς μετὰ τῶν δύο πλευρῶν τοῦ τρικορύφου, καὶ μετὰ τῆς τρίτης πλευρᾶς ἀφ᾽ ἑνός, καὶ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν ἀπέναντι ταύτης κορυφὴν τούτου ἀφ᾽ ἑτέρου».

«Ἐὰν δοθῇ κωνικὴ τομὴ καὶ τρίπλευρον περιγεγραμμένον εἰς αὐτήν, δύο ἐφαπτόμεναι τῆς καμπύλης, ἀγόμεναι ἀπό τινος σημείου (μὴ κειμένου ἐπί τινος τῶν πλευρῶν τοῦ τριπλεύρου), εἶνε συζυγεῖς ἀκτῖνες ἐν τῇ ἐνελίξει, ἐν τῇ ὁποίᾳ ἀνήκουν τὰ ζεύγη τῶν ἀκτίνων τῶν προβαλλουσῶν ἀπ᾽ αὐτοῦ τὰς δύο κορυφὰς τοῦ τριπλεύρου καὶ τὴν τρίτην κορυφὴν ἀφ᾽ ἑνός, καὶ τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς τῆς ἀπέναντι ταύτης πλευρᾶς τούτου ἀφ᾽ ἑτέρου».

§ 70. Ἐφαρμογαὶ τῶν θεωρημάτων τοῦ Desargues.

Ἐνέλιξις ἐπὶ σημειοσειρᾶς.

«Ἐὰν δοθῇ κωνικὴ τομὴ καὶ δύο ἐφαπτόμεναι αὐτῆς, τέμνουσά τις τῆς καμπύλης (μὴ διερχομένη διά τινος τῶν σημείων τῆς ἐπαφῆς), συναντᾷ αὐτὴν καὶ τὰς δύο ἐφαπτομένας εἰς δύο ζεύγη σημείων, ὁρίζοντα μίαν ἐνέλιξιν, ἔχουσαν διπλοῦν σημεῖον τὴν τομὴν τῆς τεμνούσης μετὰ τῆς εὐθείας, τῆς συνδεούσης τὰ δύο σημεῖα τῆς ἐπαφῆς».

Ἐνέλιξις ἐπὶ δέσμης.

«Ἐὰν δοθῇ κωνικὴ τομὴ καὶ δύο σημεῖα ἐπ' αὐτῆς, δύο ἐφαπτόμεναι τῆς καμπύλης ἀγόμεναι ἀπό τινος σημείου (μὴ κειμένου ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς συνδεούσης τὰ δύο σημεῖα) καὶ αἱ δύο ἀκτῖνες, καθ' ἃς προβάλλονται ἀπ' αὐτοῦ τὰ δύο δοθέντα σημεῖα ὁρίζουν μίαν ἐνέλιξιν, ἔχουσαν διπλῆν ἀκτῖνα τὴν εὐθεῖαν καθ' ἣν προβάλλεται ἡ τομὴ τῶν ἐφαπτομένων τῆς καμπύλης εἰς τὰ δύο δοθέντα σημεῖα».

Δι' ἐφαρμογῆς τῶν ἀνωτέρω καὶ τῶν προηγουμένων προτάσεων τοῦ Desargues δυνάμεθα νὰ λύσωμεν καὶ ἄλλως τὰ προβλήματα, τὰ ἀναφερόμενα εἰς τὴν εὕρεσιν σημείων καὶ ἐφαπτομένων κωνικῆς τινος τομῆς. Οὕτω π.χ. ἂν δίδωνται πέντε σημεῖα Α,Β,Γ,Δ,Ε, ἀνὰ τρία τῶν ὁποίων δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν δευτέραν τομὴν εὐθείας k, διερχμένης δι' ἑνὸς ἐξ αὐτῶν π.χ. διὰ τοῦ Ε, μετὰ τῆς καμπύλης, ἐὰν εὕρωμεν ἐπὶ τῆς k τὸ συζυγὲς σημεῖον τοῦ Ε ἐν τῇ ἐνελίξει, ἥτις ὁρίζεται διὰ τῶν τομῶν τῆς εὐθείας καὶ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ πλήρους τετρακορύφου ΑΒΓΔ.

Φανταζόμεθα τώρα ὅτι ἔχομεν πάσας τὰς κωνικὰς τομάς, αἵτινες ἀποτελοῦν *μίαν δέσμην κωνικῶν τομῶν* ἔχουσαν ὡς *θεμελιώδη σημεῖα* τὰ Α,Β,Γ,Δ, καὶ ἔχουν κοινὰ σημεῖα τὰ Α,Β,Γ,Δ (ἀνὰ τρία τῶν ὁποίων δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας), ἤτοι τὰς κωνικὰς τομάς, τὰς ἐχούσας κοινὸν τὸ ἐγγεγραμμένον πλῆρες τετρακόρυφον ΑΒΓΔ, καὶ θεωροῦμεν εὐθεῖάν τινα ρ τοῦ ἐπιπέδου, μὴ διερχομένην διά τινος τῶν Α,Β,Γ,Δ. Δι' ἑκάστου σημείου Ε τῆς ρ (τὸ ὁποῖον δὲν εἶνε τομὴ μετά τινος τῶν πλευρῶν τοῦ τετρακορύφου ΑΒΓΔ) καὶ διὰ τῶν Α,Β,Γ,Δ διέρχεται μία κωνική τομή, ἥτις (ἐὰν δὲν ἐφάπτεται τῆς ρ) τέμνει τὴν ρ εἰς ἓν ἄλλο σημεῖον, ἔστω τὸ Ε′. Πάντα τὰ εἰς τὸ ζεῦγος ΕΕ′ ἀνάλογα ζεύγη σημείων ἀνήκουν εἰς τὴν ἐνέλιξιν ἐπὶ τῆς ρ, ἥτις ὁρίζεται ἐκ τῶν τριῶν ζευγῶν τῶν ἀπέναντι κειμένων πλευρῶν τοῦ τετρακορύφου ΑΒΓΔ. Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὰ ζεύγη ταῦτα τῶν πλευρῶν ὡς *ἐκφυλισμένας κωνικὰς τομάς*, ἀνηκούσας εἰς τὴν δέσμην. Ἐκ τούτων ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«Αἱ κωνικαὶ τομαὶ μιᾶς δέσμης ὁρίζουν ἐπ' εὐθείας, τεμνούσης αὐτὰς καὶ μὴ διερχομένης διά τινος τῶν τεσσάρων θεμελιωδῶν σημείων τούτων, τὰ ζεύγη μιᾶς ἐνελίξεως».

Διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἀρχῆς τοῦ δυασμοῦ ἔχομεν, ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ πλῆθος τῶν κωνικῶν τομῶν, αἵτινες ἐφάπτονται τεσσάρων εὐθειῶν (ἀνὰ τρεῖς τῶν ὁποίων δὲν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου), ἤτοι τῶν ἐχουσῶν τὸ αὐτὸ περιγεγραμμένον εἰς ταύτας πλῆρες τετράπλευρον.

«Τὰ ζεύγη τῶν ἐφαπτομένων, αἵτινες ἄγονται εἰς τὰς κωνικὰς τομὰς μιᾶς δέσμης ἀπό τινος σημείου τοῦ ἐπιπέδου, κειμένου ἐκτὸς μὲν αὐτῶν, ἀλλ' ὄχι ἐπί τινος τῶν πλευρῶν τοῦ περιγεγραμμένου τετραπλεύρου, κεῖνται ἐν ἐνελίξει».

Ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν δέσμην τῶν κωνικῶν τομῶν, τῶν ἐχουσῶν θεμελιώδη σημεῖα τὰ Α,Β,Γ,Δ καὶ τὴν ἐνέλιξιν, ἥτις σχηματίζεται ὑπ' αὐτῆς καὶ εὐθείας τινὸς ρ (μὴ διερχομένης διά τινος τῶν θεμελιωδῶν σημείων), εἶνε φανερὸν ὅτι, ἕκαστον ζεῦγος τῆς ἐνελίξεως ταύτης κεῖται ἐπί τινος καμπύλης τῆς δέσμης, ἥτις ὁρίζεται ἐξ ἑνὸς σημείου τοῦ ζεύ- E
γους μετὰ τῶν Α,Β,Γ,Δ, δύναται δ' ἡ καμπύλη νὰ εἶνε καὶ ἐκφυλισμένη τοιαύτη.

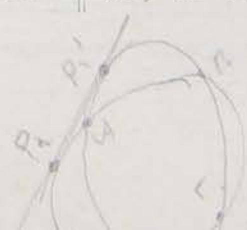
Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι, ἐὰν ὑπάρχουν κωνικαὶ τομαὶ ἐν τῇ δέσμῃ, αἵτινες ἐφάπτονται τῆς εὐθείας ρ, τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς Ρ μιᾶς τοιαύτης κωνικῆς τομῆς εἶνε διπλοῦν σημεῖον τῆς ἐν λόγῳ ἐνελίξεως, διότι ἄλλως ἡ κωνικὴ τομὴ ἡ ὁριζομένη ὑπὸ τῶν πέντε σημείων Α,Β,Γ,Δ,Ρ θὰ ἔτεμνε τὴν ρ εἰς ἓν σημεῖον συζυγὲς τοῦ Ρ καὶ διάφορον αὐτοῦ, καὶ ἑπομένως δὲν θὰ ἐφήπτετο τῆς ρ εἰς τὸ σημεῖον Ρ.

Ἐπειδὴ ἐν ἐνελίξει ἢ δὲν ὑπάρχουν διπλᾶ σημεῖα ἢ ὑπάρχουν δύο, ἔχομεν τὰς ἑξῆς διδύμους προτάσεις.

«Ἐὰν δοθοῦν τέσσαρα σημεῖα ὡς κορυφαὶ ἑνὸς πλήρους τετρακορύφου καὶ μία εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν, μὴ διερχομένη διά τινος αὐτῶν, ἢ δὲν ὑπάρχει κωνική τις τομή, διερχομένη διὰ τῶν τεσσάρων σημείων καὶ ἐφαπτομένη τῆς εὐθείας, ἢ ὑπάρχουν δύο τοιαῦται, καὶ αἱ ἐπα-

«Ἐὰν δοθοῦν τέσσαρες εὐθεῖαι ὡς πλευραὶ ἑνὸς πλήρους τετραπλεύρου καὶ ἓν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν, μὴ κείμενον ἐπί τινος τῶν εὐθειῶν, ἢ δὲν ὑπάρχει κωνική τις τομή, ἐφαπτομένη τῶν τεσσάρων εὐθειῶν καὶ διερχομένη διὰ τοῦ σημείου, ἢ ὑπάρχουν δύο τοιαῦται,

ΑΒΓΔP_1
ΑΒΓΔP_2



φαὶ αὐτῶν μετὰ τῆς εὐθείας εἶνε τὰ διπλᾶ σημεῖα τῆς ἐνελίξεως, ἥτις ὁρίζεται ἐπὶ τῆς εὐθείας διὰ τῶν τριῶν ζευγῶν τῶν ἀπέναντι κειμένων πλευρῶν τοῦ τετρακορύφου».

καὶ αἱ εὐθεῖαι αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν εἰς τὸ δοθὲν σημεῖον εἶνε διπλαῖ ἀκτῖνες τῆς ἐνελίξεως, ἥτις ὁρίζεται ἐν τῇ δέσμῃ διὰ τῶν τριῶν ζευγῶν ἀκτίνων, καθ' ἃς προβάλλονται αἱ ἀπέναντι κορυφαὶ τοῦ τετραπλεύρου».

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα διέρχεται δι' ἑνὸς μόνον ἐκ τῶν τεσσάρων σημείων, θὰ ὑπάρχῃ, ὡς εἴδομεν, (§ 65, σελ. 177, 180), μία κωνικὴ τομὴ διερχομένη διὰ τῶν τεσσάρων σημείων καὶ ἐφαπτομένη τῆς εὐθείας.

Ἐὰν τὰ τέσσαρα σημεῖα Α,Β,Γ,Δ εἶνε κορυφαὶ ἑνὸς τετρακορύφου καὶ εὐθεῖά τις ρ δὲν διέρχεται διά τινος τούτων, δυνάμεθα εὐκόλως νὰ εὕρωμεν ἂν ὑπάρχουν κωνικαὶ τομαί, διερχόμεναι διὰ τῶν τεσσάρωε σημείων καὶ ἐφαπτόμεναι τῆς εὐθείας. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ἐξετάσωμεν, ἂν τὰ δύο ζεύγη σημείων, καθ' ἃ τέμνεται ἡ ρ ὑπὸ δύο ζευγῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετρακορύφου, χωρίζουν ἄλληλα ἢ μή. Ἀνάλογα ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν καὶ δι' ἐφαρμογῆς τῆς ἀρχῆς τῆς ἐναλλαγῆς. Ἐπὶ πλέον παρατηροῦμεν ὅτι, ἡ ἀνωτέρω πρότασις ἰσχύει καὶ ἂν θεωρήσωμεν ὅτι δύο ἐκ τῶν σημείων συμπίπτουν εἰς ἕν, ἀντικαταστήσωμεν δὲ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς ταῦτα εὐθεῖαν διὰ τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον τῆς συμπτώσεως αὐτῶν.

Παρατηρητέον ὅτι, δυνάμεθα νὰ ἐπεκτείνωμεν τὴν ἔννοιαν τῆς δέσμης κωνικῶν τομῶν, ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ σύστημα τῶν κωνικῶν τομῶν, τῶν διερχομένων διὰ δύο δοθέντων σημείων καὶ παραγουσῶν ἐπ' εὐθείας δοθείσης, μὴ διερχομένης διά τινος τῶν ἐν λόγῳ σημείων, μίαν δοθεῖσαν ἐλλειπτικὴν ἐνέλιξιν, κλπ. Οὕτω λαμβάνομεν δέσμην κωνικῶν τομῶν, ἐχουσῶν δύο συζυγῆ φανταστικὰ θεμελιώδη σημεῖα καὶ δέσμην κωνικῶν τομῶν μὲ δύο ζεύγη φανταστικῶν θεμελιωδῶν σημείων, ὑπάρχει δὲ πάντοτε μία κωνικὴ τομὴ τῆς δέσμης, διερχομένη διά τινος σημείου τοῦ ἐπιπέδου, διαφόρου τῶν θεμελιωδῶν σημείων, κλπ.

§ 71. Θεωρήματα τοῦ Pascal καὶ Brianchon διὰ κώνους β' βαθμοῦ.

Ἀνάλογοι προτάσεις τῶν ἐν § 67 ἀληθεύουν διὰ κώνους β' βαθμοῦ. Οὕτω ἔχομεν τὰς ἑξῆς διδύμους προτάσεις διὰ ἑξάακμον ἐγγεγραμμένον ἢ περιγεγεγραμμένον εἰς κῶνον β' βαθμοῦ.

«Ἐὰν ἁπλοῦν ἑξάακμον εἶνε ἐγγεγραμμένον εἰς κῶνον β' βαθμοῦ, τὰ τρία ζεύγη τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν αὐτοῦ τέμνονται κατὰ τρεῖς εὐθείας, κειμένας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ (τοῦ Pascal)».

«Ἐὰν ἁπλοῦν ἑξάακμον εἶνε περιγεγραμμένον εἰς κῶνον β' βαθμοῦ, τὰ τρία διαγώνια ἐπίπεδα αὐτοῦ διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας (τοῦ Brianchon)».

Αἱ προτάσεις αὗται δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς ἄμεσοι ἀκολουθίαι τῶν ἀντιστοίχων αὐτῶν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ (§67, σελ. 184), ἐὰν ἡ καμπύλη καὶ ἡ ἐπίπεδος δέσμη β' τάξεως προβληθοῦν ἀπό τινος σημείου, κειμένου ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τούτων, διὰ ἑνὸς κώνου καὶ μιᾶς δέσμης ἐπιπέδων β' τάξεως. Ἑκάστη ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης θὰ προβληθῇ δι' ἑνὸς ἐπιπέδου, ἔχοντος μετὰ τοῦ κώνου μίαν μόνην ἀκτῖνα κοινήν, καθ' ἣν ἐφάπτεται αὐτοῦ. Ὁμοίως ἕκαστον σημεῖον ἐπαφῆς τῆς ἐπιπέδου δέσμης τῶν ἀκτίνων β' τάξεως θὰ προβληθῇ διὰ μιᾶς εὐθείας, ἥτις καλεῖται καὶ *ἀκτὶς ἐπαφῆς τῆς δέσμης τῶν ἐπιπέδων β' βαθμοῦ*, καὶ δι' αὐτῆς διέρχεται ἓν μόνον ἐπίπεδον τῆς δέσμης ταύτης. Ἐπειδὴ ἀφ' ἑτέρου, ἕκαστος κῶνος καὶ δέσμη ἐπιπέδων β' τάξεως τέμνεται ὑπό τινος ἐπιπέδου κατὰ μίαν καμπύλην καὶ μίαν ἐπίπεδον δέσμην ἀκτίνων β' τάξεως, ἕπεται ὅτι θὰ ἔχωμεν τὰς ἑξῆς διδύμους προτάσεις.

«Τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα ἑνὸς κώνου β' βαθμοῦ σχηματίζουν μίαν δέσμην ἐπιπέδων β' τάξεως (§66, σελ. 183)».

«Αἱ γενέτειραι ἑνὸς κώνου β' βαθμοῦ προβάλλονται ἀπὸ δύο ἐξ αὐτῶν διὰ δύο προβολικῶν ἀξονικῶν δεσμῶν (§66, σελ. 183)»,

«Αἱ ἀκτῖνες τῆς ἐπαφῆς μιᾶς δέσμης ἐπιπέδων β' τάξεως σχηματίζουν ἕνα κῶνον β' βαθμοῦ (§66, σελ. 183))».

«Τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα κώνου β' βαθμοῦ τέμνονται ὑπὸ δύο ἐξ αὐτῶν κατὰ δύο ἐπιπέδους προβολικὰς δέσμας (§66, σελ. 183)».

Διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἀρχῆς τοῦ δυασμοῦ δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τὰς ἀντιστοίχους προτάσεις τῶν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, τὰς ἀφορώσας εἰς ἁπλᾶ πεντάακμα, τετράακμα ἐν κεντρικῇ δέσμῃ, τὰ ὁποῖα εἶνε ἐγγεγραμμένα εἰς κῶνον β' βαθμοῦ, κλπ.

§ 72. Σχέσις καμπύλων β' βαθμοῦ πρὸς κυκλικὸν κῶνον.

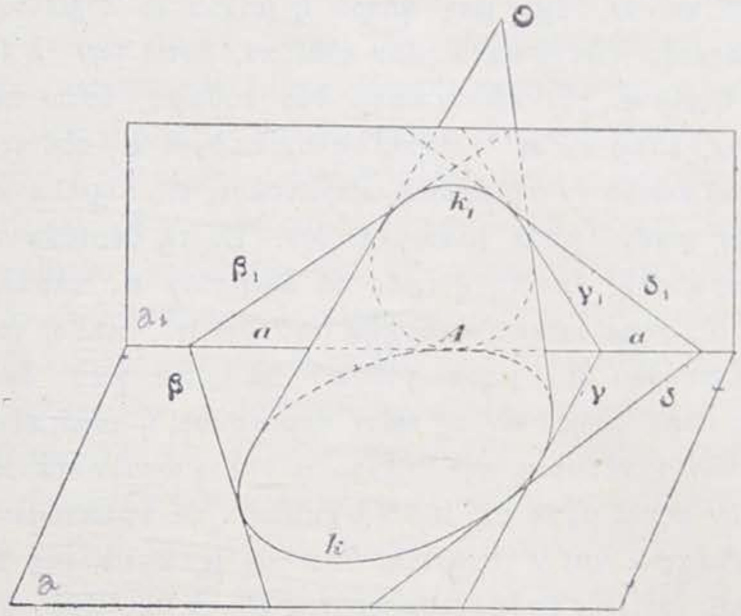
Steiner

Περιφέρειά τις κύκλου εἶνε καμπύλη β' βαθμοῦ, ἐπειδὴ προβάλλεται αὐτὴ ἀπὸ δύο οἱωνδήποτε σημείων αὐτῆς O καὶ O, διὰ δύο ἴσων ἐπιπέδων δεσμῶν, καὶ ἑπομένως προβολικῶν. Διότι αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας σχηματίζουν τὰ ζεύγη τῶν ἀντιστοίχων ἀκτίνων αβ καὶ α'β' π. χ. εἶνε ἴσαι, ὡς ἐγγεγραμμέναι καὶ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὸ αὐτὸ τόξον.

Κατὰ ταῦτα, πᾶς ὀρθὸς ἢ πλάγιος κυκλικὸς κῶνος (§ 61,σελ.169) εἶνε κῶνος β′ βαθμοῦ, ἐνῶ ἑκάστη τομὴ κώνου β′ βαθμοῦ εἶνε ἐν γένει καμπύλη τις β′ βαθμοῦ.

Θὰ δείξωμεν τώρα ὅτι,

«ἑκάστη καμπύλη β′ βαθμοῦ εἶνε τομὴ κυκλικοῦ κώνου ὑπὸ ἐπιπέδου, ἤτοι ὅτι εἶνε ***κωνικὴ τομὴ*** *κατὰ τὴν ἔννοιαν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων γεωμετρῶν».*



Ἔστω k καμπύλη τις β′ βαθμοῦ καὶ k_1 περιφέρεια κύκλου, ἐφαπτομένη τῆς k εἰς ἓν σημεῖον A, τῆς ὁποίας τὸ ἐπίπεδον $\mathbf{a}_1$ τέμνει τὸ ἐπίπεδον **a** τῆς k κατὰ τὴν κοινὴν ἐφαπτομένην α τῶν γραμμῶν εἰς τὸ A. Διὰ τριῶν σημείων τῆς α φέρομεν τρεῖς ἐφαπτομένας εὐθείας β,γ,δ τῆς k καὶ τρεῖς ἄλλας $\beta_1,\gamma_1,\delta_1$ τῆς k_1, καὶ ἔστω O ἡ τομὴ τῶν τριῶν ἐπιπέδων $\beta\beta_1,\gamma\gamma_1$ καὶ $\delta\delta_1$. Προβάλλομεν ἀπὸ τοῦ σημείου O τὴν περιφέρειαν k_1 ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου **a** Ἡ προβολὴ αὕτη θὰ εἶνε μία καμπύλη β′ βαθμοῦ, ἥτις θὰ ἔχῃ μετὰ τῆς k τέσσαρας κοινὰς ἐφαπτομένας, τὰς α,β,γ,δ καὶ ἓν σημεῖον ἐπαφῆς, τὸ A. Ἑπομένως συμπίπτει αὕτη μετὰ τῆς k. Οὕτω ὁ κυκλικὸς κῶνος, ὁ προκύπτων διὰ προβολῆς τῆς περιφερείας k_1 ἀπὸ τοῦ O διέρχεται καὶ διὰ τῆς καμπύλης k, ἄρα κεῖται αὕτη ἐπὶ τοῦ κώνου τούτου, καὶ εἶνε τομὴ αὐτοῦ. Διὰ τοῦτο κυρίως αἱ καμπύλαι β′ βαθμοῦ καλοῦνται κωνικαὶ τομαί.

Ὡς γνωρίζομεν, καμπύλη τις β′ βαθμοῦ δύναται νὰ ἔχῃ τὸ πολὺ δύο πραγματικὰ σημεῖα κοινὰ μετά τινος εὐθείας (διότι ἂν εἶχε τρία τοιαῦτα καὶ προβάλωμεν τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης ἀπὸ δύο σημείων αὐτῆς, θὰ εἴχομεν δύο ἐπιπέδους δέσμας προβολικὰς μέν, αἵτινες παράγουν τὴν καμπύλην, ἀλλὰ προοπτικάς, τὸ ὁποῖον εἶνε ἀδύνατον). Κατὰ ταῦτα, καμπύλη τις β΄ βαθμοῦ δύναται νὰ ἔχῃ δύο φανταστικὰ κοινὰ σημεῖα μετὰ τῆς κατ᾽ ἐξοχὴν εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου *(ἔλλειψις)*, ἢ δύο πραγματικὰ *(ὑπερβολή)*, ἢ ἓν πραγματικὸν *(παραβολή)*, ὅτε ἐφάπτεται τῆς κατ᾽ ἐξοχὴν εὐθείας. Τὰ τρία ταῦτα εἴδη τῶν καμπύλων δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ διὰ τομῆς ἑκάστου κώνου β΄ βαθμοῦ, τοῦ ὁποίου ἡ κορυφὴ δὲν εἶνε κατ᾽ ἐξοχὴν σημεῖον. Ἐπίπεδόν τι **a**, διερχόμενον διὰ τῆς κορυφῆς Ο τοῦ κώνου, ἔχει μετ᾽ αὐτοῦ ἢ μόνον τὸ σημεῖον τοῦτο κοινόν, ἢ ἐφάπτεται τούτου κατὰ μίαν εὐθεῖαν, ἔστω τὴν λ (διερχομένην διὰ τοῦ Ο), ἢ τέμνει τὸν κῶνον κατὰ δύο εὐθείας, ἔστω τὰς μ καὶ ν. Πᾶν ἐπίπεδον, ἔστω τὸ $\mathbf{a}_1$, παράλληλον πρὸς τὸ **a**, τέμνει πάσας τὰς γενετείρας τοῦ κώνου ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει εἰς σημεῖα καθ᾽ ὑπόστασιν, ἄρα τὸν κῶνον κατὰ μίαν ἔλλειψιν. Ἐν τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει ἡ τομὴ εἶνε παραβολή, ἐπειδὴ ἡ πρὸς τὸ ἐπίπεδον $\mathbf{a}_1$ παράλληλος ἀκτὶς λ θὰ τμηθῇ εἰς σημεῖον κατ᾽ ἐξοχὴν ὑπὸ τοῦ $\mathbf{a}_1$, καὶ ἡ τομὴ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου **a** μετὰ τοῦ $\mathbf{a}_1$ θὰ εἶνε κατ᾽ ἐξοχὴν ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς. Ἐν τῇ τρίτῃ περιπτώσει ἡ τομὴ εἶνε ὑπερβολή, ἐπειδὴ αἱ δύο γενέτειραι τοῦ κώνου μ καὶ ν ἔχουν τὰ κατ᾽ ἐξοχὴν σημεῖα αὐτῶν κοινὰ μετὰ τοῦ $\mathbf{a}_1$. Τὰ ἐπίπεδα τὰ ἐφαπτόμενα τοῦ κώνου κατὰ τὰς εὐθείας μ καὶ ν τέμνονται ὑπὸ τοῦ $\mathbf{a}_1$ κατὰ τὰς ἀσυμπτώτους τῆς ὑπερβολῆς (αἵτινες ἐφάπτονται ταύτης εἰς τὰ κατ᾽ ἐξοχὴν αὐτῶν σημεῖα). Ἡ ὑπερβολὴ ἀποτελεῖται ἐκ δύο καμπύλων γραμμῶν, διότι τέμνονται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου $\mathbf{a}_1$ καὶ αἱ δύο χῶναι τοῦ κώνου (κείμεναι ἑκατέρωθεν τοῦ Ο). Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν ὑπερβολὴν ὡς μίαν κλειστὴν γραμμήν, ὡς καὶ τὴν ἔλλειψιν καὶ τὴν παραβολὴν (κλείουσαν εἰς τὸ κατ᾽ ἐξοχὴν σημεῖον ταύτης), ἐπειδὴ πᾶς κῶνος καθ᾽ ὑπόστασιν, προβάλλων αὐτήν, θεωρεῖται ὡς μία κλειστὴ ἐπιφάνεια.

Δύο προβολικαὶ ἐπίπεδοι δέσμαι, κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, παράγουν μίαν ἔλλειψιν, ἢ παραβολήν, ἢ ὑπερβολήν, ἐὰν δὲν ἔχουν ὁμολόγους ἀκτῖνας παραλλήλους, ἢ ἂν ἔχουν ἓν ζεῦγος, ἢ δύο τοιαῦτα ἐξ ὁμολόγων καὶ παραλλήλων. Ἐὰν κινηθῇ ἡ μία τῶν δεσμῶν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῶν, ὥστε νὰ γίνῃ ὁμόκεντρος μὲ τὴν ἄλλην, διατηρουμένων τῶν διευθύνσεων τῶν ἀκτίνων αὐτῆς, αἱ δύο ὁμόκεντροι δέσμαι ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει δὲν θὰ ἔχουν ἀκτῖνά τινα κοινήν· ἐν τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει θὰ ἔχουν μίαν κοινὴν ἀκτῖνα, καὶ ἐν τῇ τρίτῃ δύο. Ἡ τρίτη περίπτωσις παρουσιάζεται προφανῶς, ἐὰν αἱ δύο δέσμαι εἶνε ἀντίρροποι.

Δύο προβολικαὶ μὴ προοπτικαὶ σημειοσειραὶ παράγουν τότε καὶ μόνον διὰ τῶν εὐθειῶν τῶν συνδεουσῶν τὰ ὁμόλογα αὐτῶν σημεῖα τὰς ἐφαπτομένας μιᾶς παραβολῆς, ἐὰν τὰ κατ' ἐξοχὴν αὐτῶν σημεῖα ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἄλληλα. Διότι μόνον ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ κατ' ἐξοχὴν εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου εἶνε μία τῶν ἐφαπτομένων τῆς οὕτω παραγομένης καμπύλης. Ἀλλ' αἱ τοιαῦται σημειοσειραί λέγονται *ὅμοιαι*, ὡς γνωστὸν (§46, σελ. 111), ἑπομένως ἔχομεν ὅτι,

«δύο οἱαιδήποτε ἐφαπτόμεναι k καὶ k_1 μιᾶς παραβολῆς τέμνονται ὑπὸ τῶν ἄλλων τοιούτων εἰς μέρη ἀνάλογα».

«Ἐὰν αἱ κορυφαὶ ἑνὸς τρικορύφου κινοῦνται ἐπὶ τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν οὕτως, ὥστε αἱ δύο πλευραὶ νὰ διατηροῦν τὰς διευθύνσεις αὐτῶν, ἡ τρίτη πλευρὰ περιβάλλει μίαν παραβολήν, ἐὰν αὕτη δὲν διατηρῇ ἀμετάβλητον τὴν διεύθυνσιν αὐτῆς».

Διότι, διὰ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων δεσμῶν ἀκτίνων, τὰς ὁποίας διαγράφουν αἱ δύο πρῶται πλευραὶ τοῦ τρικορύφου θὰ σχετίζωνται δύο ἐκ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν προβολικῶς πρὸς τὴν τρίτην, ἑπομένως καὶ πρὸς ἀλλήλας.

«Ἐὰν ἔν τινι ἐπιπέδῳ σημειοσειρά τις k καὶ δέσμη ἀκτίνων O εἶνε προβολικαί, καὶ φέρωμεν δι' ἑκάστου σημείου τῆς k μίαν εὐθεῖαν παράλληλον ἢ κάθετον πρὸς τὴν ἀντίστοιχον αὐτοῦ ἀκτῖνα τῆς O, αἱ παράλληλοι ἢ αἱ κάθετοι αὗται ἀκτῖνες τέμνονται ἢ εἰς ἓν σημεῖον, ἢ περιβάλλουν μίαν παραβολήν, ἥτις ἐφάπτεται καὶ τῆς k».

Διότι ἡ τομὴ τῆς δέσμης O μετὰ τῆς κατ' ἐξοχὴν εὐθείας εἶνε μία προβολικὴ πρὸς τὴν k κατ' ἐξοχὴν σημειοσειρά. Ἐὰν αὕτη δὲν εἶνε προοπτικὴ πρὸς τὴν k, παράγει μετὰ τῆς k μίαν ἐπίπεδον δέσμην ἀκτίνων β' βαθμοῦ, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει καὶ ἡ κατ' ἐξοχὴν εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου, ἄρα περιβάλλει αὕτη μίαν παραβολὴν καὶ οὕτω ἐδείχθη ἡ πρότασις διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς παραλληλίας. Ἐν τῇ περιπτώσει τῆς καθετότητος δυνάμεθα νὰ ἀναχθῶμεν εἰς τὴν προηγουμένην, ἂν στρέψωμεν τὴν δέσμην O ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῆς κατὰ μίαν ὀρθὴν γωνίαν.

Ἐὰν καμπύλην τινὰ β' βαθμοῦ προβάλωμεν ἀπό τινος κατ' ἐξοχὴν σημείου, κειμένου ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου ταύτης, λαμβάνομεν ἕνα κῶνον β' βαθμοῦ μὲ κορυφὴν κατ' ἐξοχὴν σημεῖον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀκτῖνες, ἤτοι αἱ γενέτειραι, εἶνε παράλληλοι. Ὁ κῶνος οὗτος καλεῖται *κύλινδρος β' βαθμοῦ*. Δύο προβολικαὶ μὴ προοπτικαὶ ἀξονικαὶ δέσμαι, ἔχουσαι τοὺς ἄξονας αὐτῶν παραλλήλους παράγουν ἕνα κύλινδρον β' βαθμοῦ. Διακρίνομεν τοὺς κυλίνδρους β' βαθμοῦ εἰς *ἐλλειπτικούς, παραβολικοὺς* καὶ *ὑπερβολικούς*, ἐὰν αἱ τομαὶ αὐτῶν ὑπὸ τυχόντος ἐπιπέδου, μὴ διερχομένου διὰ τοῦ κατ' ἐξοχὴν κέντρου τούτων, εἶνε ἐλλείψεις, παραβολαὶ ἢ ὑπερβολαί, ἢ ἐὰν οὗτοι δὲν περιέχουν κατ' ἐξοχήν τινα ἀκτῖνα, ἢ ἔχουν μίαν, ἢ δύο τοιαύτας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII.

Μετρικαὶ ἰδιότητες καὶ ἀναλυτικαὶ σχέσεις καμπύλων δευτέρου βαθμοῦ.

§ 73. Διάμετροι καὶ κέντρα τῶν κωνικῶν τομῶν.

Ἐὰν ἔχωμεν κωνικήν τινα τομὴν καὶ εὐθεῖαν τέμνουσαν αὐτήν, τὸ μεταξὺ τῶν σημείων τῆς τομῆς περιεχόμενον εὐθύγραμμον τμῆμα ταύτης καλεῖται *χορδὴ* τῆς κωνικῆς τομῆς, πλῆθος δὲ τεμνουσῶν αὐτὴν παραλλήλων πρὸς ἀλλήλας εὐθειῶν ὁρίζει ἓν *σύστημα παραλλήλων χορδῶν* τῆς καμπύλης, καὶ ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν ἀφορῶσαν εἰς τὰ μέσα τούτων.

«Τὰ μέσα παραλλήλων χορδῶν κωνικῆς τινος τομῆς κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ἥτις καλεῖται διάμετρος τῆς καμπύλης».

Διότι, ἐπειδὴ τὰ μέσα ταῦτα χωρίζονται ἁρμονικῶς διὰ τῆς καμπύλης ἀπὸ τοῦ κατ' ἐξοχὴν σημείου τῶν παραλλήλων χορδῶν (§ 39 σελ. 90), κεῖνται ταῦτα ἐπὶ τῆς πολικῆς τοῦ σημείου τούτου. Ὁμοίως ἔχομεν ὅτι,

«ἡ πολικὴ ἑκάστου κατ' ἐξοχὴν σημείου τοῦ ἐπιπέδου εἶνε μία διάμετρος τῆς θεωρουμένης κωνικῆς τομῆς».

«Ἡ διάμετρος κωνικῆς τομῆς διχοτομεῖ πάσας τὰς συζυγεῖς αὐτῆς χορδὰς καὶ συνδέει τὰ σημεῖα τῆς ἐπαφῆς τῶν συζυγῶν ταύτης ἐφαπτομένων τῆς καμπύλης, ἐὰν ὑπάρχουν τοιαῦται».

Δύο ἐφαπτόμεναι τῆς καμπύλης τέμνονται ἐπὶ τῆς διαμέτρου, ἐὰν ἡ χορδὴ τῶν ἐπαφῶν τούτων εἶνε συζυγὴς πρὸς τὴν διάμετρον.

Ἐπειδὴ αἱ πολικαὶ τῶν σημείων μιᾶς εὐθείας διέρχονται διὰ τοῦ πόλου τῆς εὐθείας, ἔπεται ὅτι,

«πᾶσαι αἱ διάμετροι μιᾶς καμπύλης β' βαθμοῦ διέρχονται δι' ἑνὸς σημείου, δηλαδὴ διὰ τοῦ πόλου τῆς κατ' ἐξοχὴν εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου τῆς καμπύλης».

Ἐὰν ἡ κωνικὴ τομὴ εἶνε παραβολή, ἐφάπτεται αὕτη τῆς κατ' ἐξοχὴν εὐθείας κατὰ τὸν πόλον αὐτῆς. Ἑπομένως ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«Αἱ διάμετροι μιᾶς παραβολῆς εἶνε παράλληλοι καὶ διέρχονται διὰ τοῦ κατ' ἐξοχὴν σημείου αὐτῆς».

Ἐὰν ἡ κωνικὴ τομὴ εἶνε ἔλλειψις ἢ ὑπερβολή, ὁ πόλος τῆς κατ' ἐξοχὴν εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς εἶνε σημεῖον καθ' ὑπόστασιν, καλεῖται δὲ τὸ σημεῖον τοῦτο *κέντρον τῆς καμπύλης*, ὡς ἔχοντος τὰς ἑξῆς ἰδιότητας.

«Ἑκάστη χορδὴ τῆς καμπύλης δευτέρου βαθμοῦ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς, διχοτομεῖται ὑπ' αὐτοῦ».

Διότι τὸ κέντρον χωρίζεται ἁρμονικῶς ἀπὸ τοῦ κατ' ἐξοχὴν σημείου τοῦ ἐπιπέδου τῆς καμπύλης, κειμένου ἐπὶ τῆς πολικῆς αὐτοῦ, διὰ τῶν δύο ἄκρων τῆς χορδῆς, ἑπομένως ἀπέχει ἰσάκις ἀπὸ τῶν σημείων τούτων.

Ἡ παραβολὴ δὲν ἔχει κέντρον, ὡς προκύπτει ἐκ τῶν ἑπομένων προτάσεων.

«Ἐὰν δύο χορδαὶ καμπύλης β' βαθμοῦ διχοτομοῦν ἀλλήλας, ἡ τομὴ αὐτῶν εἶνε ὁ πόλος τῆς κατ' ἐξοχὴν εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου τῆς καμπύλης, ἑπομένως αἱ χορδαὶ κεῖνται ἐπὶ δύο διαμέτρων τῆς καμπύλης».

Διότι, ἡ τομὴ τῶν χορδῶν χωρίζεται ἁρμονικῶς ἀπὸ τῶν κατ' ἐξοχὴν σημείων τούτων διὰ τῆς καμπύλης. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ πόλος τῆς κατ' ἐξοχὴν εὐθείας ὡς πρὸς παραβολὴν συμπίπτει μὲ τὸ κατ' ἐξοχὴν σημεῖον τῆς παραβολῆς, ἕπεται ὅτι δὲν ὑπάρχουν δύο χορδαὶ τῆς παραβολῆς, διχοτομοῦσαι ἀλλήλας.

Διὰ τὴν ὑπερβολὴν ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«Ἐν τῷ κέντρῳ τῆς ὑπερβολῆς τέμνονται αἱ ἀσύμπτωτοι αὐτῆς».

Διότι διὰ τοῦ πόλου μιᾶς εὐθείας διέρχονται πάντοτε αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης, τὰ κείμενα ἐπὶ τῆς εὐθείας (§62, σελ. 170).

«Τὸ κέντρον μιᾶς ὑπερβολῆς κεῖται ἐκτὸς αὐτῆς, ἐνῷ μιᾶς ἐλλείψεως κεῖται ἐντὸς ταύτης».

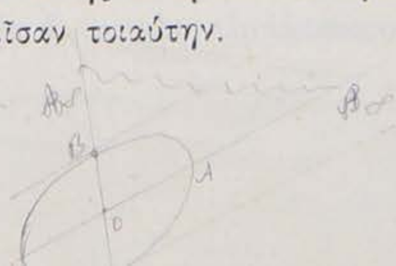
Διότι ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει ἡ πολικὴ αὐτοῦ εἶνε τέμνουσα τῆς καμπύλης, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ μία ἐξωτερικὴ εὐθεῖα αὐτῆς.

«Αἱ δύο ἐφαπτόμεναι τῆς ὑπερβολῆς καὶ διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς ἐφάπτονται ταύτης εἰς κατ' ἐξοχὴν σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου καὶ καλοῦνται ὡς γνωστὸν (§61, σελ. 168) ἀσύμπτωτοι τῆς ὑπερβολῆς».

Δι' ἑκάστην διάμετρον μιᾶς ἐλλείψεως ἢ ὑπερβολῆς ὑπάρχει μία *συζυγὴς διάμετρος* αὐτῆς, ἐκ δύο δὲ συζυγῶν διαμέτρων ἑκάστη διέρχεται διὰ τοῦ εἰς ἄπειρον κειμένου πόλου τῆς ἄλλης.

«Δύο συζυγεῖς διάμετροι ἐλλείψεως ἢ ὑπερβολῆς σχηματίζουν μετὰ τῆς κατ' ἐξοχὴν εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν ἓν πολικὸν τρίπλευρον. Ἑκάστη δὲ χορδὴ τῆς καμπύλης, παράλληλος πρὸς μίαν τῶν συζυγῶν διαμέτρων, διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς ἄλλης».

Διότι προεκτεινομένη αὕτη διέρχεται διὰ τοῦ πόλου αὐτῆς. Ἐὰν ἡ μία τῶν δύο συζυγῶν διαμέτρων τέμνῃ τὴν καμπύλην, αἱ δύο ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ σημεῖα τῆς τομῆς ταύτης θὰ εἶνε παράλληλοι πρὸς τὴν ἄλλην διάμετρον. Διὰ τῆς ἰδιότητες ταύτης δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν εὐκόλως τὴν συζυγῆ διάμετρον πρὸς δοθεῖσαν τοιαύτην.



Ὡς γνωρίζομεν (§59, σελ.160) αἱ ὡς πρὸς κωνικήν τινα τομὴν συζυγεῖς εὐθεῖαι, αἱ διερχόμεναι διά τινος σημείου μὴ κειμένου ἐπὶ τῆς καμπύλης, ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἀλλήλας ἐν μιᾷ ἐνελίξει.

Ἑπομένως, ἂν δοθῇ καμπύλη β′ βαθμοῦ ἔχουσα κέντρον, τὰ ζεύγη τῶν συζυγῶν διαμέτρων αὐτῆς ἀποτελοῦν μίαν ἐνέλιξιν εὐθειῶν, διερχομένων διὰ τοῦ κέντρου *(τὴν ἐνέλιξιν τῶν συζυγῶν διαμέτρων)*, καὶ εἶνε αὕτη ἐλλειπτικὴ ἢ ὑπερβολική, καθόσον ἡ καμπύλη εἶνε ἔλλειψις ἢ ὑπερβολή, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει ἔχει αὕτη τὰς ἀσυμπτώτους ὡς διπλᾶς εὐθείας.

Ἑκάστη τῶν παραλλήλων πρὸς ἀλλήλας διαμέτρων παραβολῆς εἶνε συζυγὴς πρὸς ἓν σύστημα παραλλήλων εὐθειῶν, ἐχουσῶν διάφορον διεύθυνσιν τῶν διαμέτρων, ἐπειδὴ αὗται εἶνε αἱ πολικαὶ τῶν κατ᾿ ἐξοχὴν σημείων.

Ἐὰν δοθοῦν δύο ζεύγη συζυγῶν διαμέτρων κωνικῆς τινος τομῆς, ἐχούσης κέντρον, δυνάμεθα ἀμέσως νὰ διακρίνωμεν τὸ εἶδος τῆς καμπύλης, καθόσον τὰ ἐν λόγῳ ζεύγη χωρίζουν ἄλληλα ἢ μὴ (§47,σελ.118).

Σημεῖόν τι, μὴ κείμενον ἐπί τινος κωνικῆς τομῆς, μετὰ τῆς πολικῆς αὐτοῦ σχηματίζουν τὸ κέντρον καὶ τὸν ἄξονα μιᾶς ἁρμονικῆς ὁμολογίας, μετασχηματιζούσης τὴν καμπύλην εἰς ἑαυτήν (§62,σελ.170, 3).

Τὸ καθ᾿ ὑπόστασιν κέντρον κωνικῆς τομῆς ἀποτελεῖ τὸ κέντρον μιᾶς συμμετρίας, μετασχηματιζούσης τὴν καμπύλην εἰς ἑαυτήν, ἢ τὸ μέσον τῶν δι᾿ αὐτοῦ διερχομένων χορδῶν ταύτης.

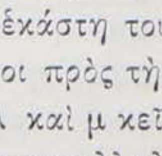
Ἐὰν δύο χορδαὶ κωνικῆς τομῆς διχοτομοῦν ἀλλήλας, τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον εἶνε τὸ κέντρον τῆς καμπύλης.

«Αἱ διαγώνιοι ἑκάστου παραλληλογράμμου, περιγεγραμμένου εἰς καμπύλην β′ βαθμοῦ, εἶνε συζυγεῖς διάμετροι αὐτῆς».

«Αἱ πλευραὶ ἑκάστου παραλληλογράμμου, ἐγγεγραμμένου εἰς καμπύλην β′ βαθμοῦ, εἶνε παράλληλοι πρὸς δύο συζυγεῖς διαμέτρους αὐτῆς».

«Αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμων, ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου εἰς καμπύλην β′ βαθμοῦ, εἶνε διάμετροι αὐτῆς».

Διότι, ἡ τομὴ αὐτῶν ἔχει πολικὴν τὴν κατ᾿ ἐξοχὴν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου τῆς καμπύλης. Ἐὰν διὰ τοῦ σημείου τούτου φέρωμεν δύο εὐθείας λ καὶ μ παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου παραλληλογράμμου, ἑκάστη τούτων διχοτομεῖ τὰς ἀπέναντι πλευράς, αἵτινες εἶνε παράλληλοι πρὸς τὴν ἄλλην. Ἄρα αἱ λ καὶ μ εἶνε συζυγεῖς διάμετροι. Ἐπὶ τῶν λ καὶ μ κεῖνται ἐπίσης οἱ πόλοι τῶν τεσσάρων πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου παραλληλογράμμου, ἢ αἱ λ καὶ μ εἶνε αἱ διαγώνιοι τοῦ



περιγεγραμμένου ἁπλοῦ τετρακορύφου, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ἐφάπτονται τῆς καμπύλης β΄ βαθμοῦ κατὰ τὰς κορυφὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου παραλληλογράμμου. Ἀλλὰ τὸ περιγεγραμμένον τοῦτο ἁπλοῦν τετρακόρυφον εἶνε παραλληλόγραμμον, ἐπειδὴ αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς διαμετρικῆς χορδῆς εἶνε παράλληλοι πρὸς ἀλλήλας, καὶ δύναται νὰ θεωρηθῇ τοῦτο ὡς τυχὸν παραλληλόγραμμον, περιγεγραμμένον εἰς τὴν καμπύλην. Ἡ τελευταία ἀνωτέρω πρότασις δύναται νὰ διατυπωθῇ καὶ ὡς ἑξῆς.

«Αἱ δύο χορδαί, αἱ συνδέουσαι τυχὸν σημεῖον μιᾶς ἐλλείψεως ἢ ὑπερβολῆς μὲ τὰ ἄκρα σημεῖα μιᾶς διαμετρικῆς χορδῆς αὐτῆς, εἶνε παράλληλοι πρὸς συζυγεῖς διαμέτρους τῆς καμπύλης».

Ἐὰν καμπύλης τινος β΄ βαθμοῦ δοθοῦν δύο ζεύγη συζυγῶν διαμέτρων καὶ καὶ ἓν σημεῖον, δυνάμεθα δι᾽ αὐτῶν νὰ εὕρωμεν ἀκόμη πέντε σημεῖα τῆς καμπύλης. Πρὸς τοῦτο, διὰ τοῦ δοθέντος σημείου, ἔστω τοῦ P, φέρομεν μίαν διάμετρον καὶ εὑρίσκομεν τὴν δευτέραν τομὴν ταύτης μετὰ τῆς καμπύλης, ἔστω δ᾽ αὕτη M, (στηριζόμενοι ἐπὶ τῆς προτάσεως ὅτι, ἡ P M διχοτομεῖται ὑπὸ τοῦ κέντρου τῆς καμπύλης). Μὲ διαγώνιον τὴν P M κατασκευάζομεν δύο παραλληλόγραμμα, αἱ πλευραὶ τῶν ὁποίων εἶνε ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς ἀνὰ ἓν ζεῦγος συζυγῶν διαμέτρων. Τὰ δύο νέα ζεύγη τῶν κορυφῶν τῶν παραλληλογράμμων τούτων κεῖνται ὁμοίως ἐπὶ τῆς καμπύλης β΄ βαθμοῦ.

Ὁμοίως δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ἓξ ἐφαπτομένας καμπύλης β΄ βαθμοῦ, ἐὰν δοθοῦν μία ἐφαπτομένη καὶ δύο ζεύγη συζυγῶν διαμέτρων αὐτῆς.

«Ἐὰν ἀνὰ δύο συζυγεῖς διάμετροι καμπύλης β΄ βαθμοῦ τέμνωνται καθέτως, ἡ καμπύλη εἶνε περιφέρεια κύκλου».

Διότι, ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ αἱ πλευραὶ ἑκάστου παραλληλογράμμου εἶνε κάθετοι ἐπ᾽ ἀλλήλας, καὶ εἶνε τοῦτο ὀρθογώνιον, αἱ δὲ διαγώνιοι αὐτοῦ, δηλαδὴ δύο οἱαιδήποτε ἑπομένως καὶ πᾶσαι αἱ διαμετρικαὶ χορδαὶ τῆς καμπύλης, εἶνε ἴσαι πρὸς ~~πρὸς~~ ἀλλήλας.

«Ἐὰν καμπύλη τις β΄ βαθμοῦ ἔχῃ περισσότερα τοῦ ἑνὸς ζεύγη συζυγῶν διαμέτρων καθέτων ἐπ᾽ ἀλλήλας, ἡ καμπύλη εἶνε περιφέρεια κύκλου».

Διότι, ἂν διὰ τῶν ἄκρων σημείων, ἔστω τῶν A καὶ B, μιᾶς διαμετρικῆς χορδῆς φέρωμεν παραλλήλους εὐθείας πρὸς δύο καθέτους ἐπ᾽ ἀλλήλας συζυγεῖς διαμέτρους τῆς καμπύλης, εὑρίσκομεν ἓν ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον εἶνε ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν καμπύλην καὶ εἰς μίαν περιφέρειαν κύκλου. Ἕκαστον δεύτερον ζεῦγος καθέτων συζυγῶν διαμέτρων ὁρίζει ἓν δεύτερον τοιοῦτον ὀρθογώνιον κατασκευασμένον ἐπὶ τῆς αὐτῆς διαγωνίου AB. Οὕτω ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου ἐν τῇ ἐν λόγῳ περιπτώσει ἔχει μετὰ τῆς καμπύλης β′ βαθμοῦ ἐκτὸς τῶν σημείων Α καὶ Β τοὐλάχιστον τέσσαρα κοινά, καὶ ἑπομένως συμπίπτει μετ᾽ αὐτῆς (§65,σελ.177).

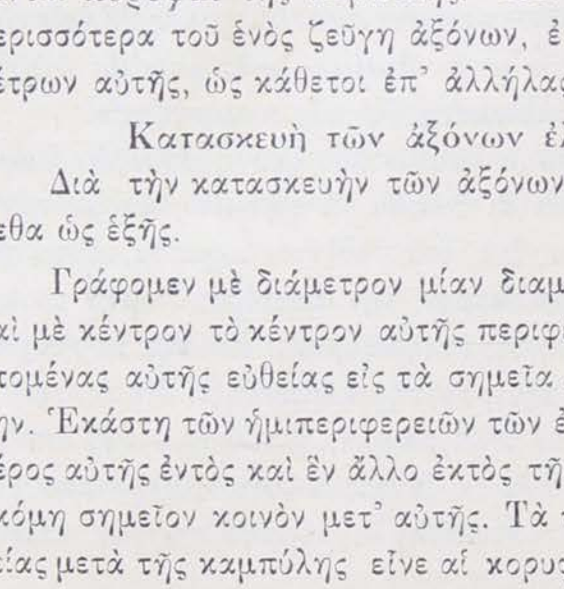
§ 74. Ἄξονες τῶν καμπύλων δευτέρου βαθμοῦ.

Καλοῦμεν *ἄξονας* καμπύλης β′ βαθμοῦ τὰς καθέτους ἐπ᾽ ἀλλήλας συζυγεῖς διαμέτρους αὐτῆς, αἱ δὲ τομαὶ τούτων μετὰ τῆς καμπύλης λέγονται *κορυφαὶ* τῆς καμπύλης. Μόνον ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου ἔχει περισσότερα τοῦ ἑνὸς ζεύγη ἀξόνων, ἐπειδὴ ἀνὰ ἓν ζεῦγος συζυγῶν διαμέτρων αὐτῆς, ὡς κάθετοι ἐπ᾽ ἀλλήλας, εἶνε ἄξονες ταύτης.

Κατασκευὴ τῶν ἀξόνων ἐλλείψεως ἢ ὑπερβολῆς.

Διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν ἀξόνων ἐλλείψεως ἢ ὑπερβολῆς ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς.

Γράφομεν μὲ διάμετρον μίαν διαμετρικὴν χορδὴν ΑΒ τῆς καμπύλης καὶ μὲ κέντρον τὸ κέντρον αὐτῆς περιφέρειαν κύκλου, τέμνουσαν τὰς ἐφαπτομένας αὐτῆς εὐθείας εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, ἑπομένως καὶ τὴν καμπύλην. Ἑκάστη τῶν ἡμιπεριφερειῶν τῶν ἐχουσῶν διάμετρον τὴν ΑΒ ἔχει ἓν μέρος αὐτῆς ἐντὸς καὶ ἓν ἄλλο ἐκτὸς τῆς καμπύλης, ἄρα ἔχει καὶ ἓν ἄλλο ἀκόμη σημεῖον κοινὸν μετ᾽ αὐτῆς. Τὰ τέσσαρα σημεῖα τομῆς τῆς περιφερείας μετὰ τῆς καμπύλης εἶνε αἱ κορυφαὶ ἑνὸς ἐγγεγραμμένου εἰς ταύτην ὀρθογωνίου, πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ ὁποίου εἶνε παράλληλοι οἱ ζητούμενοι ἄξονες. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι, *«ἡ ἔλλειψις καὶ ἡ ὑπερβολὴ ἔχουν ἓν ζεῦγος ἀξόνων».*



Ὡς ἄξων τῆς καμπύλης β′ βαθμοῦ δύναται νὰ ὁρισθῇ καὶ ὡς διάμετρος αὐτῆς, ἥτις εἶνε κάθετος ἐπὶ τὰς συζυγεῖς αὐτῆς καὶ διχοτομουμένας ὑπὸ ταύτης χορδάς.

«Ἡ παραβολὴ ἔχει ἕνα μόνον ἄξονα». Ἐπ᾽ αὐτοῦ κεῖνται τὰ μέσα πασῶν τῶν παραλλήλων χορδῶν τῆς παραβολῆς, τῶν καθέτων πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς διαμέτρου ταύτης.

Καμπύλη τις β′ βαθμοῦ διαιρεῖται ὑφ᾽ ἑκάστου τῶν ἀξόνων αὐτῆς εἰς δύο συμμετρικὰ πρὸς ἄλληλα ἡμίση καὶ μετασχηματίζεται εἰς ἑαυτὴν δι᾽ ἀπεικονίσεως διὰ τοῦ ἄξονος.

Δύο συζυγεῖς εὐθεῖαι α,β χωρίζονται ἁρμονικῶς διὰ τῶν δύο ἐφαπτομένων τῆς καμπύλης, αἵτινες δύνανται νὰ ἀχθοῦν διὰ τοῦ σημείου τῆς τομῆς αὐτῶν. Διότι ὁ πόλος τῆς α κεῖται ἐπὶ τῆς β, καὶ δι' αὐτοῦ διέρχονται πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι, αἵτινες χωρίζονται ἀπὸ τῆς α δι' ἀνὰ δύο ἐφαπτομένων τῆς καμπύλης (§62,σελ.169). Ἑπομένως ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«Δύο συζυγεῖς διάμετροι ὑπερβολῆς χωρίζονται ἁρμονικῶς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων αὐτῆς, καὶ μόνον ἡ μία τούτων τέμνει ταύτην. Οἱ ἄξονες τῆς ὑπερβολῆς διχοτομοῦν τὴν γωνίαν τῶν ἀσυμπτώτων αὐτῆς (§39, σελ.91).

Αἱ ἀσύμπτωτοι ὑπερβολῆς ὁρίζουν ἐφ' ἑκάστης εὐθείας, τεμνούσης τὴν ὑπερβολὴν καὶ παραλλήλου πρὸς διάμετρόν τινα ταύτης, ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα, τοῦ ὁποίου τὸ μέσον κεῖται ἐπὶ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου αὐτῆς (§40 σελ.94). Ἐὰν ἡ ἐν λόγῳ εὐθεῖα τέμνῃ ἢ ἐφάπτεται τῆς ὑπερβολῆς, τὸ μέσον τῆς ἐπ' αὐτῆς κειμένης χορδῆς ἢ τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς συμπίπτει μὲ τὸ μέσον τοῦ τμήματος τούτου. Ἐκ τούτων ἔχομεν τὰς ἑξῆς προτάσεις τοῦ Ἕλληνος μαθηματικοῦ *Ἀπολλωνίου* (περὶ τὰ 230 π.Χ).

«Ἐφ' ἑκάστης εὐθείας, τεμνούσης ὑπερβολήν, τὰ δύο τμήματα τὰ μεταξὺ τῆς καμπύλης καὶ τῶν ἀσυμπτώτων αὐτῆς περιεχόμενα εἶνε ἴσα».

«Τὸ τμῆμα μιᾶς εὐθείας ἐφαπτομένης ὑπερβολῆς, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων αὐτῆς, διχοτομεῖται ὑπὸ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς».

Ἡ πρώτη τῶν προτάσεων τούτων δύναται νὰ χρησιμεύσῃ διὰ μίαν ἁπλῆν κατασκευὴν τῆς ὑπερβολῆς, ἐὰν δοθοῦν αἱ ἀσύμπτωτοι καὶ ἓν σημεῖον καθ' ὑπόστασιν αὐτῆς. Πρὸς τοῦτο, ἐφ' ἑκάστης διὰ τοῦ ἐν λόγῳ σημείου διερχομένης τεμνούσης τὴν καμπύλην εὑρίσκομεν δι' ἐφαρμογῆς τῆς προτάσεως ταύτης τὸ δεύτερον ἐπὶ ταύτης σημεῖον τῆς καμπύλης.

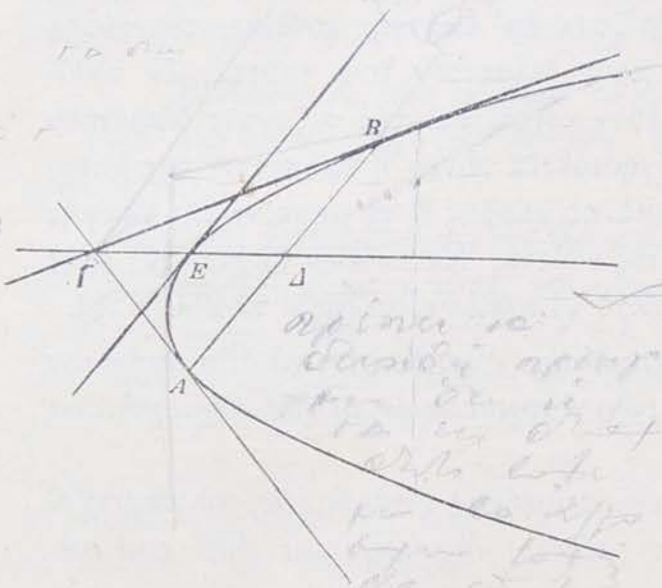
Ἡ ὑπερβολὴ τέμνεται μόνον ὑπὸ τοῦ ἑνὸς τῶν ἀξόνων αὐτῆς καὶ μάλιστα καθέτως εἰς τὰς δύο αὐτῆς κορυφὰς (δηλαδὴ ὁ ἄξων οὗτος εἶνε κάθετος ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας τῆς καμπύλης εἰς τὰς κορυφάς).

Ἡ ἔλλειψις ἔχει τέσσαρας κορυφὰς ἀνὰ δύο ἐφ' ἑκάστου τῶν δύο ἀξόνων αὐτῆς.

Ἡ παραβολὴ ἔχει μίαν μόνον καθ' ὑπόστασιν κορυφήν, ἔχει δ' αὕτη μετὰ ἄξονος τὴν κορυφὴν καὶ τὸ κατ' ἐξοχὴν αὐτῆς σημεῖον κοινόν.

Μία ὑπερβολὴ λέγεται *ἰσοσκελής*, ἐὰν αἱ ἀσύμπτωτοι αὐτῆς εἶνε κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας. Αἱ γωνίαι ἀνὰ δύο συζυγῶν διαμέτρων ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς διχοτομοῦνται ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων αὐτῆς (§39. σελ.91). Ἐὰν διάμετρός τις στρέφεται περὶ τὸ κέντρον τῆς ὑπερβολῆς (ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῆς), στρέφεται περὶ αὐτὸ καὶ ἡ συζυγὴς ταύτης διάμετρος κατ᾽ ἀντίθετον φορὰν καὶ οὕτως, ὥστε αἱ δύο δέσμαι, αἱ γραφόμεναι ὑπὸ τῶν διαμέτρων θὰ εἶνε συμμετρικῶς ἴσαι. Αἱ προβολικαὶ δέσμαι, διὰ τῶν ὁποίων προβάλλεται ἡ ἰσοσκελὴς ὑπερβολὴ ἀπὸ τῶν ἄκρων μιᾶς διαμετρικῆς χορδῆς, θὰ εἶνε ἴσαι, ἀλλ᾽ ὄχι ὁμόρροποι, διότι αἱ ὁμόλογοι ἀκτῖνες αὐτῶν εἶνε παράλληλοι πρὸς ἀνὰ δύο συζυγεῖς διαμέτρους, ἐπειδὴ τέμνονται ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς (§71, σελ.203).

Ἐὰν τὸ μέσον Δ χορδῆς τινος ΑΒ παραβολῆς συνδεθῇ δι᾽ εὐθείας μὲ τὴν τομὴν Γ τῶν ἐφαπτομένων αὐτῆς εἰς τὰ Α καὶ Β, ἡ εὐθεῖα αὕτη θὰ εἶνε μία διάμετρος τῆς παραβολῆς. Διότι ἡ εὐθεῖα ΔΓ εἶνε ἡ πολικὴ τοῦ κατ᾽ ἐκδοχὴν σημείου τῆς ΑΒ. Ἀλλὰ τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ χωρίζονται ἁρμονικῶς διὰ τῶν δύο σημείων τομῆς τῆς παραβολῆς ὑπὸ τῆς ΓΔ, καὶ ἓν τῶν σημείων τούτων κεῖται εἰς τὸ ἄπειρον. Τὸ ἄλλο σημεῖον τῆς τομῆς Ε διχοτομεῖ τὸ τμῆμα ΓΔ, καὶ ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.



«Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ συνδέον τὸν πόλον μιᾶς χορδῆς παραβολῆς τινος μετὰ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς ταύτης διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς καμπύλης».

Καθ᾽ ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι, μία ὑπερβολὴ διχοτομεῖ τὰ δύο εὐθύγραμμα τμήματα, ἅτινα ἄγονται παραλλήλως πρὸς τὰς ἀσυμπτώτους αὐτῆς ἀπό τινος σημείου τοῦ ἐπιπέδου ταύτης μέχρι τῆς πολικῆς τοῦ ἐν λόγῳ σημείου.

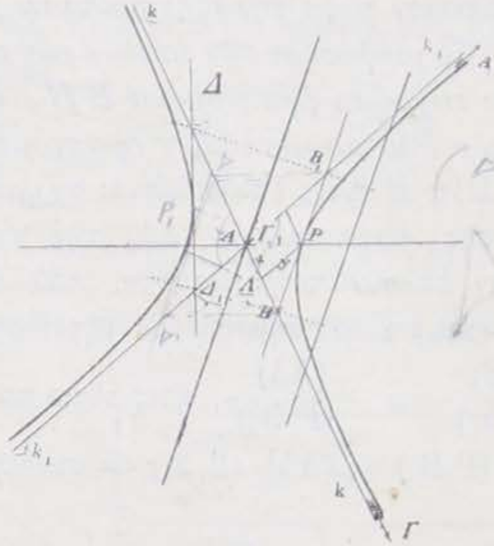
§ 75. Ἐξισώσεις τῶν καμπύλων δευτέρου βαθμοῦ.

Ἐκ τῆς προτάσεως περὶ τοῦ ἁπλοῦ περιγεγραμμένου τετραπλεύρου εἰς καμπύλην β′ βαθμοῦ ἔχομεν καὶ τὰς ἑξῆς ἰδιότητας.

Ἐὰν ἡ καμπύλη εἶνε ὑπερβολή, τὸ δὲ ἁπλοῦν περιγεγραμμένον εἰς αὐτὴν τετράπλευρον $BB_1ΔΔ_1$ σχηματίζεται ἐκ τῶν ἀσυμπτώτων ἀφ᾽ ἑνὸς k καὶ k_1 καὶ ἐκ δύο ἄλλων ἐφαπτομένων αὐτῆς ἀφ᾽ ἑτέρου BB_1 καὶ $ΔΔ_1$, τὸ σημεῖον τοῦ Brianchon κεῖται ἐπὶ τῆς κατ᾽ ἐκδοχὴν εὐθείας, ἐπειδὴ δι᾽ αὐτοῦ διέρχεται ἡ συνδέουσα τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν ἀπέναντι αὐτοῦ πλευρῶν k καὶ k_1, ἄρα αἱ δύο διαγώνιοι αὐτοῦ $B_1Δ$ καὶ $BΔ_1$ εἶνε παρά-

$B_1Δ \parallel BΔ_1 \parallel PP_1$

ληλοι. Διὰ τοῦτο τὰ τρίγωνα $\Delta_1 B \Delta$ καὶ $\Delta_1 B B_1$, ἔχοντα τὴν αὐτὴν πλευρὰν $\Delta_1 B$ ὡς βάσιν, ἔχουν ἴσα ἐμβαδά, καθὼς καὶ τὰ τρίγωνα $\Delta_1 A \Delta$ καὶ $B_1 A B$, τὰ ὁποῖα διαφέρουν τῶν προηγουμένων κατὰ τὸ κοινὸν τρίγωνον $\Delta_1 B A$. Οὕτω ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.



«Τὰ τρίγωνα, τὰ σχηματιζόμενα ὑπὸ τῶν δύο ἀσυμπτώτων ὑπερβολῆς μὲ ἀνὰ μίαν ἄλλην ἐφαπτομένην αὐτῆς, ἔχουν ἴσα ἐμβαδά».

Αἱ παράλληλοι διαγώνιοι $B\Delta_1$ καὶ $B_1\Delta$ καὶ τὸ κέντρον A τῆς ὑπερβολῆς ὁρίζουν ἐπὶ τῶν ἀσυμπτώτων εὐθύγραμμα τμήματα ἀνάλογα. Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων $\Delta_1 A \Delta$ καὶ $B_1 A B$ ἔχομεν $(AB).(AB_1) = (A\Delta)(A\Delta_1)$.

Ἤτοι, *«τὰ γινόμενα τῶν μηκῶν τῶν τμημάτων, ἅτινα ὁρίζουν ἀνὰ μία ἐφαπτομένη π.χ. ἡ BB_1 (ἢ ἡ $\Delta\Delta_1$) ἐπὶ τῶν δύο ἀσυμπτώτων τῆς ὑπερβολῆς εἶνε σταθερά».*

Ἐὰν διὰ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς P τῆς ἐφαπτομένης BB_1 π.χ. φέρωμεν εὐθεῖαν $P\Lambda$ παράλληλον πρὸς τὴν ἀσύμπτωτον k_1, τέμνει αὕτη τὴν k, ἔστω εἰς τὸ Λ. Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον P διχοτομεῖ τὸ τμῆμα BB_1 τῆς ἐφαπτομένης, θὰ εἶνε (ΛP) ἢ $y = \frac{1}{2}(AB_1)$, καὶ $(A\Lambda)$ ἢ $x = \frac{1}{2}(AB)$, ἂν λάβωμεν ὡς ἄξονας συντεταγμένων xy τὰς ἀσυμπτώτους k καὶ k_1. Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ γινόμενον $(AB)(AB_1)$ δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἡ ἐφαπτομένη BB_1 κυλίεται ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς ἐφαπτομένη πάντοτε αὐτῆς, ἕπεται ὅτι, τὸ γινόμενον xy ἔχει σταθερὰν τιμήν, ἐὰν τὸ σημεῖον P διαγράφῃ τὴν ὑπερβολήν. Ἑπομένως ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«Ἐὰν λάβωμεν ὡς ἄξονας εὐθυγράμμων συντεταγμένων μιᾶς ὑπερβολῆς τὰς ἀσυμπτώτους αὐτῆς, ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης εἶνε

$$\boxed{xy = \text{σταθερόν}}$$

Ἐὰν θεωρήσωμεν ἓν ζεῦγος OX, OY συζυγῶν διαμέτρων καμπύλης β' βαθμοῦ, τουλάχιστον ἡ μία τούτων, ἔστω ἡ OX, τέμνει τὴν καμπύλην.

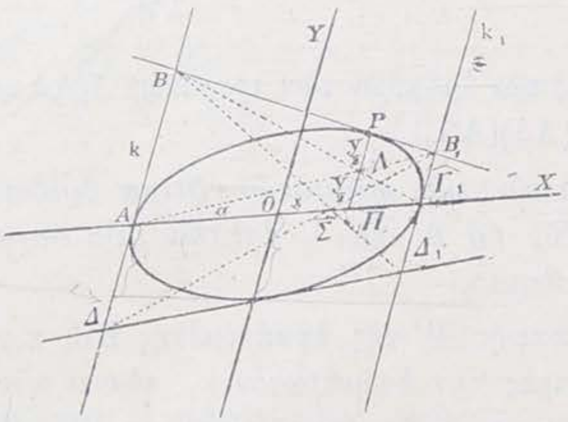
Αἱ δύο ἐφαπτόμεναι k καὶ k_1 τῆς καμπύλης εἰς τὰ δύο σημεῖα τῶν τομῶν A καὶ Γ_1 εἶνε παράλληλοι πρὸς τὴν ἄλλην διάμετρον ΟΥ. Θὰ ἀποδείξωμεν τώρα τὴν ἑξῆς πρότασιν *τοῦ Ἀπολλωνίου.*

«Τὸ γινόμενον τῶν μηκῶν τῶν τμημάτων AB καὶ $\Gamma_1 B_1$, τὰ ὁποῖα ὁρίζει τυχοῦσα ἐφαπτομένη BB_1 τῆς καμπύλης δευτέρου βαθμοῦ ἐπὶ τῶν δύο παραλλήλων ἐφαπτομένων k καὶ k, εἶνε σταθερόν».

Διότι αἱ τρεῖς ἐφαπτόμεναι σχηματίζουν μετὰ μιᾶς ἄλλης τυχούσης τετάρτης ἐφαπτομένης $\Delta\Delta_1$ τῆς καμπύλης ἓν περιγεγραμμένον εἰς ταύτην ἁπλοῦν τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι $B\Delta_1$ καὶ $B_1\Delta$ τέμνονται ἐπὶ τοῦ σημείου Σ τῆς διαμέτρου $A\Gamma_1$, καὶ ἐκ τῆς ἀναλογίας

$$\frac{(AB)}{(\Gamma_1\Delta_1)} = \frac{(A\Delta)}{(\Gamma_1 B_1)},$$ ἥτις οὕτω προκύπτει, ἕπεται ὅτι,

$$(AB).(\Gamma_1 B_1) = (A\Delta).(\Gamma_1\Delta_1) = \text{σταθερόν}.$$



Τὸ σταθερὸν τοῦτο γινόμενον εἶνε θετικόν, καὶ ἔστω ἴσον πρὸς $+\beta^2$, ἐὰν ἡ καμπύλη εἶνε ἔλλειψις, καὶ ἐν τῇ περιπτώσει αὐτῇ τὸ β εἶνε τὸ μῆκος τῆς ἡμιδιαμέτρου τῆς ἐλλείψεως, ἥτις ἀντιστοιχεῖ ἐπὶ τῆς ΟΥ, ὡς φαίνεται τοῦτο, ἂν ἀχθῇ ἡ $\Delta\Delta_1$ παραλλήλως πρὸς τὴν ΟΧ.

Ἐν τῇ περιπτώσει τῆς ὑπερβολῆς τὸ $(AB)(\Gamma_1 B_1)$ εἶνε ἀρνητικόν, καὶ ἔστω ἴσον πρὸς $-\beta^2$, ἐπειδὴ τὰ τμήματα AB καὶ $\Gamma_1 B_1$ εἶνε ἀντίρροπα, τὸ δὲ β εἶνε ἀπολύτως ἴσον μὲ τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος, τὸ ὁποῖον ὁρίζει ἑκάστη τῶν δύο ἀσυμπτώτων ἐπὶ τῶν παραλλήλων ἐφαπτομένων k καὶ k_1.

Αἱ τρεῖς ἐφαπτόμεναι k, k_1 καὶ BB_1, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ BB_1 ἐφάπτεται τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον P, σχηματίζουν ἓν τρίπλευρον περιγεγραμμένον εἰς τὴν καμπύλην, τοῦ ὁποίου κορυφαὶ εἶνε τὰ σημεῖα B, B_1 καὶ τὸ κατ' ἐκδοχὴν σημεῖον τῆς διαμέτρου ΟΥ. Αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰ τρία ταῦτα σημεῖα μὲ τὰ σημεῖα τῆς ἐπαφῆς τῶν ἀπέναντι αὐτῶν κειμένων πλευρῶν τέμνονται, ὡς εἶνε γνωστόν, εἰς ἓν σημεῖον. Τὸ σημεῖον Λ τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν $B\Gamma_1$ καὶ $B_1 A$ κεῖται οὕτω ἐπὶ τῆς τεταγμένης $(\Pi P) = y$ τοῦ σημείου P ὡς πρὸς ἄξονας ΧΟΥ. Ἀλλ' ἐπειδὴ εἶνε

$$\frac{(\Pi\Lambda)}{(AB)} = \frac{(\Pi\Gamma_1)}{(A\Gamma_1)} = \frac{(PB_1)}{(BB_1)} = \frac{(\Lambda P)}{(AB)},$$

θὰ ἔχωμεν $(ΠΛ)=(ΛΡ)=\frac{1}{2}(ΠΡ)=\frac{1}{2}y$.

Εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς καμπύλης β' βαθμοῦ, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας

$$\frac{(ΠΛ)}{(ΑΒ)}=\frac{(ΠΓ_1)}{(ΑΓ_1)} \quad \text{καὶ} \quad \frac{(ΠΛ)}{(Γ_1Β_1)}=\frac{(ΑΠ)}{(ΑΓ_1)}$$

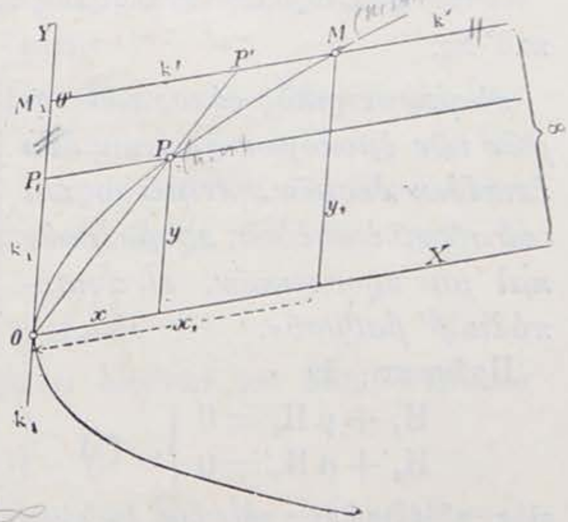
καὶ θέσωμεν ἀκολούθως $(ΠΛ)=\frac{1}{2}y, (ΑΒ)(Γ_1Β_1)=\pm\beta^2, (ΑΓ_1)=2(ΑΟ)$ $=2\alpha$, καὶ $(ΟΠ)=x$, ὅτε θὰ εἶνε $(ΠΓ_1)=\alpha-x$ καὶ $(ΑΠ)=\alpha+x$.

Οὕτω εὑρίσκομεν

$$\pm\frac{y^2}{4\beta^2}=\frac{\alpha^2-x^2}{4\alpha^2} \quad ἢ \quad \boxed{\frac{x^2}{\alpha^2}\pm\frac{y^2}{\beta^2}=1}$$

ἔχομεν δὲ τὸ σημεῖον + μὲν διὰ τὴν ἔλλειψιν καὶ τὸ − διὰ τὴν ὑπερβολήν. Τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἐπαληθεύουν αἱ συντεταγμέναι x, y τυχόντος σημείου Ρ τῆς καμπύλης 6' 6αθμοῦ, ἐὰν ἀναφέρεται αὕτη ὡς πρὸς ἄξονας δύο συζυγεῖς διαμέτρους αὐτῆς.

Ἐὰν ἡ καμπύλη εἶνε παραβολή, λαμβάνομεν ὡς ἄξονα τῶν τεταγμένων μίαν τυχοῦσαν ἐφαπτομένην αὐτῆς ΟΥ καὶ ὡς ἄξονα τῶν x τὴν διάμετρον ΟΧ, τὴν διερχομένην διὰ τοῦ Ο τῆς ἐπαφῆς τῆς ἐν λόγῳ ἐφαπτομένης. Ἡ παραβολὴ προβάλλεται ἀπὸ τοῦ κατ' ἐξοχὴν αὐτῆς σημείου ∞, τοῦ κειμένου ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Ο διὰ προβολικῶν δεσμῶν (§ 64 σελ. 174). Ἐὰν λοιπὸν Ρ καὶ Μ εἶνε δύο τυχόντα σημεῖα τῆς παραβολῆς, ἔχοντα συντεταγμένας (x,y) καὶ (x_1,y_1), θὰ ἔχωμεν διὰ τὴν προβολικὴν σχέσιν τῶν δύο δεσμῶν, τῶν ἐχουσῶν κέντρα τὰ ∞ καὶ Ο τῆς παραβολῆς ἐπὶ τῆς ΟΧ.



$$\infty(O,P,M,\infty)\,\overline{\wedge}\,O(Y,P,M,\infty).$$

Ἐὰν τμήσωμεν τὴν δέσμην τὴν ἔχουσαν κέντρον τὸ τῆς παραβολῆς διὰ τῆς ἐφαπτομένης ΟΥ ἢ k_1 εἰς τὸ Ο καὶ τὴν ἔχουσαν κέντρον τὸ Ο διὰ τῆς διαμέτρου τῆς διερχομένης διὰ τοῦ Μ, ἔστω δ' αὕτη k', ὅτε θὰ ἔχωμεν ὡς τομὰς ὁμοίας προβολικὰς σημειοσειράς, ἐπειδὴ ἀντιστοιχοῦν τὰ κατ᾽ ἐξοχὴν σημεῖα αὐτῶν, ∞ καὶ ∞_1, θὰ εἶνε

$$k_1\,(O, P_1, M_1, \infty) \;\overline{\wedge}\; k'\,(O', P', M, \infty').$$

Ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος ἔχομεν (§ 46, σελ. 110).

$$\frac{(O\,P_1)}{(O\,M_1)} = \frac{(O'\,P')}{(O'\,M)}.$$

Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα O_1P_1P καὶ $OM_1\,P'$ εἶνε ὅμοια ἔχομεν ἀκόμη

$$\frac{(O\,P_1)}{(O\,M_1)} = \frac{(P_1\,P)}{(M_1\,P')} \;\text{ἢ}\; \frac{(O\,P_1)}{(O\,M_1)} = \frac{(P_1\,P)}{(O'\,P')}.$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἰσοτήτων κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$\frac{(OP_1)^2}{(OM_1)^2} = \frac{(P_1P)}{(O'M)} \;\text{ἢ}\; \frac{y^2}{y_1^2} = \frac{x}{x_1}.$$

Ἤτοι, «*αἱ τετμημέναι τῶν δύο σημείων $P\,(x,y)$ καὶ $M\,(x_1,y_1)$ ἔχουν λόγον πρὸς ἀλλήλας ἴσον πρὸς τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν τεταγμένων αὐτῶν*».

Ἐὰν τεθῇ $\dfrac{y_1^2}{x_1} = p$, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς παραβολῆς

$$\boxed{y^2 = 2\,p\,x}$$

§ 76. Γενικὴ ἐξίσωσις τῶν καμπύλων β΄ βαθμοῦ.

Θὰ ἀποδείξωμεν ἀναλυτικῶς τὰς διδύδους προτάσεις (§ 64, σελ. 174) καθ᾽ ἅς,

«*ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν τομῶν τῶν ὁμολόγων ἀκτίνων δύο ἐπιπέδων δεσμῶν, κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, προβολικῶν καὶ μὴ προοπτικῶν, εἶνε καμπύλη β΄ βαθμοῦ*».

Πράγματι, ἂν

$$\left.\begin{aligned} H_1 + \mu\,H_2 &= 0 \\ H_1' + \mu\,H_2' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

εἶνε αἱ ἐξισώσεις τῶν δύο ἐν λόγῳ δεσμῶν, αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τῆς τομῆς δύο ἀκτίνων τῶν (1) εἰς τὰς ὁποίας ἀντιστοιχεῖ ἡ αὐτὴ

«*ὁ τόπος τῶν εὐθειῶν τῶν συνδεουσῶν τὰ ὁμόλογα σημεῖα δύο προβολικῶν σημειοσειρῶν, κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ μὴ προοπτικῶν, εἶνε καμπύλη β΄ τάξεως*».

Πράγματι, ἂν

$$\left.\begin{aligned} Q_1 + \mu\,Q_2 &= 0 \\ Q_1' + \mu\,Q_2' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)^*$$

εἶνε αἱ ἐξισώσεις τῶν δύο ἐν λόγῳ σημειοσειρῶν, αἱ συντεταγμέναι τῆς εὐθείας τῆς συνδεούσης δύο σημεῖα τῶν $(1)^*$ τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὴν τιμὴν τοῦ μ θὰ ἐπαληθεύουν τὰς δύο ἐξισώσεις (1). Ἐὰν ἀπαλείψωμεν τὸ μ μεταξὺ τῶν (1), λαμβάνομεν μίαν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς x,y (ἀνεξάρτητον τοῦ μ), ἥτις θὰ παριστάνῃ τὸν τόπον τῶν τομῶν τῶν ἀντιστοίχων ἀκτίνων τῶν δύο δεσμῶν (1).

Ἤτοι ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐν λόγῳ τόπου εἶνε

$$H_1 H_2' - H_2 H_1' = 0 \qquad (2)$$

καὶ παριστάνει καμπύλην β′ βαθμοῦ (§20, σελ. 38), διέρχεται δ᾽ αὕτη διὰ τῶν κέντρων τῶν δύο δεσμῶν (1), διότι ἡ (2) ἐπαληθεύεται ἐὰν εἶνε $H_1 = 0$ καὶ $H_2 = 0$, ἢ $H'_1 = 0$ καὶ $H_2' = 0$.

Ἀντιστρόφως ἰσχύει καὶ ἡ ἑξῆς πρότασις. Δοθείσης καμπύλης β′ βαθμοῦ διὰ τῆς ἐξισώσεως (2) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν δύο ἐπιπέδους δέσμας, ἐχούσας ἐξισώσεις τῆς μορφῆς (1), αἵτινες δύνανται νὰ παριστάνουν ταύτην.

αὐτὴν τιμὴν τοῦ μ, θὰ ἐπαληθεύουν καὶ τὰς δύο ἐξισώσεις (1)*. Ἐὰν ἀπολείψωμεν τὸ μ μεταξὺ τῶν (1)*, λαμβάνομεν μίαν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς u, v (ἀνεξάρτητον τοῦ μ), ἥτις θὰ παριστάνῃ τὸν τόπον τῶν εὐθειῶν τῶν συνδεουσῶν τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα τῶν δύο σημειοσειρῶν (1)*. Ἤτοι ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐν λόγῳ τόπου εἶνε

$$Q_1 Q_2' - Q_2 Q_1' = 0 \qquad (2)^*$$

καὶ παριστάνει καμπύλην β′ τάξεως, (§ 20, σελ. 38) ἐφάπτεται δ᾽ αὕτη τῶν δύο εὐθειῶν (1)*, διότι ἐπαληθεύεται ἐὰν εἶνε $Q_1 = 0$ καὶ $Q_2 = 0$, ἢ $Q_1' = 0$ καὶ $Q_2' = 0$.

Ἀντιστρόφως ἰσχύει καὶ ἡ ἑξῆς πρότασις. Δοθείσης καμπύλης β′ τάξεως τῆς ἐξισώσεως (2)* δυνάμεθα τὰ εὕρωμεν δύο σημειοσειράς, κειμένας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἐχούσας ἐξισώσεις τῆς μορφῆς (1)*, αἵτινες δύνανται νὰ παριστάνουν ταύτην.

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὰ δύο κέντρα τῶν δεσμῶν (1) ἀντιστοιχῇ πρὸς ἑαυτήν, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν αὐτὴν ὡς μίαν τῶν δύο ὡρισμένων ἀκτίνων, αἵτινες ὁρίζουν τὸ κέντρον ἑκάστης τῶν δύο δεσμῶν, καὶ ἂν $H = 0$ εἶνε ἡ ἐξίσωσις ταύτης, αἱ ἐξισώσεις τῶν δύο δεσμῶν θὰ εἶνε τῆς μορφῆς

$$H_1 + \mu H = 0, \quad H_1' + \mu H = 0. \qquad (3)$$

Ὁ τόπος τῶν τομῶν τῶν ὁμολόγων ἀκτίνων τῶν δεσμῶν τούτων ἔχει ἐξίσωσιν

$$(H_1 - H_1')\, H = 0,$$

καὶ παριστάνει δύο εὐθείας, ἐχούσας ἐξισώσεις $H_1 - H_1' = 0$ καὶ $H = 0$, εἶνε δ᾽ ὁ τόπος οὗτος μία *ἐκφυλισμένη* κωνικὴ τομή. Ἡ εὐθεῖα $H_1 - H_1' = 0$, ἥτις εἶνε ὁ τόπος τῶν τομῶν τῶν ὁμολόγων ἀκτίνων τῶν δεσμῶν, τῶν διαφόρων τῆς κοινῆς ἀκτῖνος αὐτῶν $H = 0$, καλεῖται *ἄξων* *τῆς προοπτικότητος* τῶν προοπτικῶν δεσμῶν (3) (§ 34, σελ. 77).

Ἀνάλογα παρατηροῦμεν διὰ δύο προβολικὰς σημειοσειράς, κειμένας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ὅταν τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν φορέων αὐτῶν ἀντιστοιχῇ πρὸς ἑαυτό, ὅτε αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰ ὁμόλογα σημεῖα τούτων διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, καλουμένου *κέντρου τῆς προοπτικότητος* τῶν ἐν λόγῳ προοπτικῶν σημειοσειρῶν (§ 34, σελ. 77).

§ 77. Εὕρεσις καμπύλης β′ βαθμοῦ ἀναλυτικῶς.

Θὰ ἀποδείξωμεν ἀναλυτικῶς τὰς ἑξῆς διδύμους προτάσεις (§65, σελ. 177).

«Δυνάμεθα πάντοτε νὰ κατασκευάσωμεν μίαν καμπύλην β′ βαθμοῦ, διερχομένην διὰ πέντε δοθέντων σημείων ἑνὸς ἐπιπέδου, ἀνὰ τρία τῶν ὁποίων δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς».

«Δυνάμεθα πάντοτε νὰ κατασκευάσωμεν μίαν καμπύλην β′ τάξεως, ἐφαπτομένην πέντε δοθεισῶν εὐθειῶν ἑνὸς ἐπιπέδου, ἀνὰ τρεῖς τῶν ὁποίων δὲν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου».

Πράγματι, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν δύο τῶν δοθέντων σημείων ὡς κέντρα δύο ἐπιπέδων δεσμῶν, νὰ συσχετίσωμεν δὲ ταύτας προβολικῶς, ὥστε νὰ ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἀλλήλας αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν, αἱ διερχόμεναι δι' ἑκάστου τῶν τριῶν ἄλλων σημείων. Οὕτω αἱ δύο αὗται δέσμαι θὰ ὁρίσουν διὰ τῶν σημείων τῶν τομῶν τῶν ὁμολόγων αὐτῶν ἀκτίνων μίαν καμπύλην β′ βαθμοῦ. Πρὸς εὕρεσιν τῆς ἐξισώσεως τῆς καμπύλης ταύτης παρατηροῦμεν ἐν πρώτοις ὅτι αὕτη θὰ εἶνε ἐν γένει τῆς μορφῆς

$$Ax^2 + 2Bxy + \Gamma y^2 + 2\Delta x + 2Ey + Z = 0$$

ἐν ᾗ ἄγνωστοι εἶνε οἱ συντελεσταὶ αὐτῆς. Ἐπειδὴ ἡ καμπύλη θὰ διέρχεται διὰ τῶν δοθέντων σημείων M_i $(x_i\ ,\ y_i)$, ἐνῷ εἶνε $i=1,2,3,4,5$, θὰ ἔχωμεν

$$\begin{aligned}
Ax^2_1 + 2Bx_1y_1 + \Gamma y^2_1 + 2\Delta x_1 + 2Ey_1 + Z &= 0\\
Ax^2_2 + 2Bx_2y_2 + \Gamma y^2_2 + 2\Delta x_2 + 2Ey_2 + Z &= 0\\
Ax^2_3 + 2Bx_3y_3 + \Gamma y^2_3 + 2\Delta x_3 + 2Ey_3 + Z &= 0\\
Ax^2_4 + 2Bx_4y_4 + \Gamma y^2_4 + 2\Delta x_4 + 2Ey_4 + Z &= 0\\
Ax^2_5 + 2Bx_5y_5 + \Gamma y^2_5 + 2\Delta x_5 + 2Ey_5 + Z &= 0.
\end{aligned}$$

Αἱ πέντε αὗται ἐξισώσεις εἶνε γραμμικαὶ καὶ ὁμογενεῖς ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z$ καὶ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἓν σύστημα τιμῶν αὐτῶν διὰ τῶν $(x_i\ ,\ y_i)$. Ἑπομένως ἔχομεν καὶ τὰς ἑξῆς διδύμους προτάσεις.

«Καμπύλη τις β′ βαθμοῦ εἶνε τελείως ὡρισμένη, ἐὰν δίδωνται πέντε σημεῖα αὐτῆς».

«Καμπύλη τις β′ τάξεως εἶνε τελείως ὡρισμένη, ἐὰν δίδωνται πέντε τῶν ἐφαπτομένων αὐτῆς».

Ἐὰν δοθῇ καμπύλη τις β' βαθμοῦ, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν αὐθαιρέτως πέντε σημεῖα αὐτῆς καὶ ἐκ τούτων δύο ὡς κέντρα ἐπιπέδων δεσμῶν, νὰ συσχετίσωμεν δὲ ταύτας προβολικῶς πρὸς ἀλλήλας διὰ τῆς ἀντιστοιχίας τῶν ἀκτίνων τῶν διερχομένων δι' ἑκάστου τῶν τριῶν ἄλλων σημείων. Οὕτω θὰ ἔχωμεν μίαν καμπύλην β' βαθμοῦ, ὁριζομένην διὰ τῶν δύο τούτων προβολικῶν δεσμῶν καὶ διερχομένην διὰ τῶν πέντε ἐν λόγῳ σημείων. Ἀλλ' ἐπειδὴ διὰ πέντε σημείων (ἀνὰ τρία τῶν ὁποίων δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας) ὁρίζεται μία μόνον καμπύλη β' βαθμοῦ, ἕπεται ὅτι αὕτη συμπίπτει μὲ τὴν δοθεῖσαν. Δι' ἐφαρμογῆς καὶ τῆς ἀρχῆς τοῦ δυασμοῦ ἔχομεν τὰς ἑξῆς διδύμους προτάσεις.

«Πᾶσα καμπύλη β' βαθμοῦ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς παραγομένη ὑπὸ δύο προβολικῶν δεσμῶν, αἵτινες εὑρίσκονται, ἂν ἀπὸ δύο σημείων αὐτῆς προβάλλωμεν τὰ ἄλλα σημεῖα ταύτης».

«Πᾶσα καμπύλη β' τάξεως δύναται νὰ θεωρηθῇ παραγομένη ὑπὸ δύο προβολικῶν σημειοσειρῶν, αἵτινες εὑρίσκονται, ἂν τμήσωμεν διὰ δύο ἐφαπτομένων αὐτῆς τὰς ἄλλας ἐφαπτομένας ταύτης».

Ἐπειδὴ δυνάμεθα νὰ ἐκλέξωμεν αὐθαιρέτως τὰ πέντε σημεῖα ἐπὶ τῆς καμπύλης διὰ νὰ ὁρίσωμεν δι' αὐτῶν δύο προβολικὰς δέσμας, αἵτινες παράγουν ταύτην, παρητηροῦμεν ὅτι τὰ κέντρα τῶν δεσμῶν τούτων δύνανται νὰ εἶνε δύο οἱαδήποτε σημεῖα τῆς καμπύλης, ἔχομεν δ' οὕτω τὰς ἑξῆς διδύμους προτάσεις.

«Αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι δύο σταθερὰ σημεῖα μιᾶς καμπύλης β' βαθμοῦ μὲ τὰ ἄλλα σημεῖα ταύτης ὁρίζουν δύο δέσμας προβολικάς».

«Αἱ τομαὶ δύο σταθερῶν ἐφαπτομένων καμπύλης β' τάξεως ὑπὸ τῶν ἄλλων ἐφαπτομένων αὐτῆς ὁρίζουν δύο σημειοσειρὰς προβολικάς».

«Ἐὰν σημεῖόν τι κινῆται ἐπὶ καμπύλης τινὸς β' βαθμοῦ, ἡ δέσμη τῶν ἀκτίνων αἵτινες συνδέουν τὸ σημεῖον τοῦτο μὲ δύο ἄλλα σημεῖα τῆς καμπύλης εἶνε πάντοτε προβολικὴ πρὸς ἑαυτήν».

«Ἐὰν ἐφαπτομένη τις καμπύλης β' τάξεως κινῆται περὶ τὴν καμπύλην (ἐφαπτομένη αὐτῆς), ἡ σημειοσειρὰ ἥτις ὁρίζεται ἐπ' αὐτῆς ὑπὸ τῶν ἄλλων ἐφαπτομένων εἶνε πάντοτε προβολικὴ πρὸς ἑαυτήν».

«Ἐὰν συνδέσωμεν δι' εὐθειῶν τέσσαρα ὡρισμένα σημεῖα μιᾶς καμπύλης β' βαθμοῦ μὲ ἓν

«Ἐὰν τμήσωμεν τέσσαρας ὡρισμένας ἐφαπτομένας μιᾶς καμπύλης β' τάξεως ὑπὸ μιᾶς πέμ-

πέμπτον σημεῖον αὐτῆς, ὁ διπλοῦς λόγος τῶν τεσσάρων ἀκτίνων εἶνε πάντοτε ὁ αὐτός».

πτης ἐφαπτομένης αὐτῆς, ὁ διπλοῦς λόγος τῶν τεσσάρων σημείων τῶν τομῶν εἶνε πάντοτε ὁ αὐτός».

Αἱ ἀνωτέρω ἰδιότητες δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς θεμελίωσις τῆς θεωρίας τῶν καμπύλων β' βαθμοῦ, ἀποδεικνύεται δὲ ἐπὶ τῇ βάσει αὐτῶν πλῆθος προτάσεων, ἀναφερομένων εἰς τὰς καμπύλας ταύτας. Οὕτω π.χ. ἀποδεικνύομεν τὰ γνωστὰ θεωρήματα τοῦ Pascal καὶ Brianchon (§67, σελ. 184).

«Αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ἁπλοῦ ἑξακορύφου ἐγγεγραμμένου εἰς καμπύλην β' βαθμοῦ τέμνονται εἰς τρία σημεῖα μιᾶς εὐθείας».

«Αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰς ἀπέναντι κορυφὰς ἁπλοῦ ἑξακορύφου περιγεγραμμένου εἰς καμπύλην β' βαθμοῦ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου».

Πρὸς τοῦτο παριστάνομεν διὰ τῶν ἀριθμῶν 1,2,3,4,5,6 τὰς διαδοχικὰς κορυφὰς τοῦ ἐν λόγῳ ἑξακορύφου, ἀκολουθούσας κατὰ τὴν σειρὰν 1,2,4, 3,6,5 ἐπὶ τῆς καμπύλης, καὶ λαμβάνομεν ὡς ἀπέναντι πλευρὰς τὰς εὐθείας τὰς ὁριζομένας ὑπὸ τῶν σημείων 12 καὶ 45, 23 καὶ 56, 34 καὶ 61, παραστάνομεν δὲ διὰ I,II,III τὰς τομὰς τῶν ζευγῶν τούτων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν. Ἐὰν θεωρήσωμεν τὰς δύο προβολικὰς δέσμας, τὰς ἐχούσας κέντρα τὰ σημεῖα 2 καὶ 6 καὶ προβαλλούσας τὰ ἄλλα σημεῖα, αἱ τομαὶ τούτων ὑπὸ τῶν εὐθειῶν 34 καὶ 45 θὰ εἶνε δύο σημειοσειραὶ προβολικαὶ καὶ προοπτικαί, ὡς ἔχουσαι τὸ σημεῖον 4 κοινόν. Ἑπομένως, αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα τούτων, διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου προοπτικότητος τῶν σημειοσειρῶν. Ἤτοι, ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα I καὶ III, (καθ' ἃ τέμνεται ἡ 45 ὑπὸ τῆς ἀκτῖνος 21 τῆς δέσμης 2 καὶ 34 ὑπὸ τῆς ἀκτῖνος 61 ἀντιστοίχου τῆς 21 ἐν τῇ δέσμῃ 6) θὰ διέρχεται διὰ σημείου II, διὰ τοῦ ὁποίου διέρχονται ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὰ ὁμόλογα σημεῖα 3 ἀφ' ἑνὸς ἐπὶ τῆς 43 καὶ τὴν τομὴν τῆς ἀκτῖνος 23 μετὰ τῆς εὐθείας 45 ἀφ' ἑτέρου, καὶ ἡ εὐθεῖα ἥτις συνδέει τὸ σημεῖον 5, τομὴν τῆς 45 ὑπὸ τῆς ἀκτῖνος 25 τῆς δέσμης 2, καὶ τὴν τομὴν τῆς ἀκτῖνος 65 τῆς δέσμης 6 μετὰ τῆς 43. Ἤτοι τὰ τρία σημεῖα I, II, III καθ' ἃ τέμνονται αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ ἑξακορύφου κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Διὰ τοῦ θεωρήματος τοῦ Pascal δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ὁσαδήποτε σημεῖα καμπύλης β' βαθμοῦ, τῆς ὁποίας δίδονται πέντε σημεῖα π.χ. τὰ 1,2,3,4,5. Πρὸς τοῦτο, φέρομεν δι' ἑνὸς ἐξ αὐτῶν, τοῦ 5 π.χ., τυχοῦσαν εὐθεῖαν, ἔστω τὴν 5 II, καὶ εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον τῆς τομῆς 6 ταύτης μετὰ τῆς καμπύλης, δι᾽ ἐφαρμογῆς τῆς ἀνωτέρας ἰδιότητος. Ὁμοίως διὰ τοῦ θεωρήματος τοῦ Brianchon εὑρίσκομεν ὁσασδήποτε ἐφαπτομένας μιᾶς καμπύλης β′ τάξεως, ὅταν δίδωνται πέντε ἐφαπτόμεναι ταύτης.

§ 78. Εὕρεσις τομῶν εὐθείας καὶ καμπύλης β′ βαθμοῦ.

Ὁ ἀνωτέρω ἐκτεθεὶς τρόπος τῆς παραγωγῆς τῶν καμπύλων β′ βαθμοῦ καὶ β′ τάξεως ὁδηγεῖ καὶ εἰς τὴν λύσιν τοῦ ἑξῆς προβλήματος.

«Δοθείσης καμπύλης β′ βαθμοῦ διὰ πέντε σημείων αὐτῆς, νὰ εὑρεθῇ ἡ τομὴ ταύτης ὑπὸ δοθείσης εὐθείας».

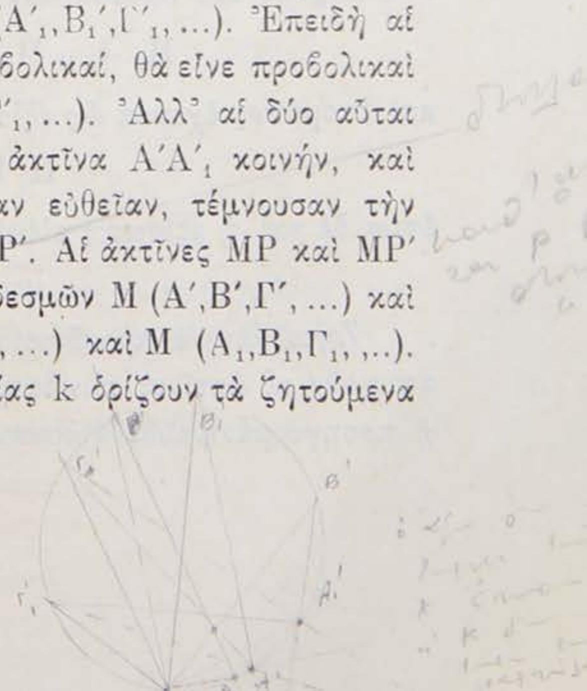
Πράγματι, ἂν 1,2,3,4,5 εἶνε τὰ δοθέντα σημεῖα, φέρομεν διὰ δύο ἐξ αὐτῶν, ἔστω τῶν 1 καὶ 2, τὰς ἀκτῖνας εἰς τὰ ἄλλα σημεῖα 3,4 καὶ 5. Οὕτω ἔχομεν δύο προβολικὰς δέσμας, ἐχούσας κέντρα τὰ 1 καὶ 2, αἵτινες παράγουν τὴν καμπύλην. Αἱ δύο δέσμαι τέμνονται ὑπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας κατὰ δύο προβολικὰς σημειοσειράς. Ἓν σημεῖον τῆς εὐθείας ταύτης θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς καμπύλης, ἐὰν διέρχωνται δι᾽ αὐτοῦ δύο ὁμόλογοι ἀκτῖνες τῶν δεσμῶν, ἤτοι ἐὰν συμπίπτουν δύο σημεῖα ἀντίστοιχα τῶν δύο σημειοσειρῶν.

Ἑπομένως ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὰ διπλᾶ σημεῖα δύο προβολικῶν σημειοσειρῶν, κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ φορέως.

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου, ἔστωσαν A,B,Γ καὶ A_1,B_1,Γ_1 αἱ ἀντίστοιχοι τριάδες τῶν ὁμολόγων στοιχείων τῶν δύο προβολικῶν σημειοσειρῶν, κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ φορέως k. Ὑποθέτομεν ὅτι δίδεται καμπύλη τις β′ βαθμοῦ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ μετὰ τῆς k καὶ ἐκτὸς αὐτῆς, καὶ ἔστω αὕτη περιφέρεια κύκλου. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον M τῆς περιφερείας καὶ τὰς δέσμας $M(A,B,\Gamma,\ldots)$ καὶ $M(A_1,B_1,\Gamma_1,\ldots)$, αἵτινες τέμνουν τὴν περιφέρειαν ἔστω κατὰ τὰ σημεῖα $A',B',\Gamma',\ldots$ καὶ $A'_1,B'_1,\Gamma'_1,\ldots$ ἀντιστοίχως.

Αἱ δέσμαι $M(A',B',\Gamma',\ldots)$ καὶ $A'_1(A',B',\Gamma',\ldots)$ εἶνε προβολικαί, καθὼς καὶ αἱ $M(A'_1,B'_1,\Gamma'_1,\ldots)$ καὶ $A'(A'_1,B'_1,\Gamma'_1,\ldots)$. Ἐπειδὴ αἱ $M(A',B',\Gamma',\ldots)$ καὶ $M(A'_1,B'_1,\Gamma'_1,\ldots)$ εἶνε προβολικαί, θὰ εἶνε προβολικαὶ καὶ αἱ $A'_1(A',B',\Gamma',\ldots)$ καὶ $A'(A'_1,B'_1,\Gamma'_1,\ldots)$. Ἀλλ᾽ αἱ δύο αὗται δέσμαι εἶνε προοπτικαί, ἐπειδὴ ἔχουν τὴν ἀκτῖνα $A'A'_1$ κοινήν, καὶ ὁρίζουν ὡς ἄξονα τῆς προοπτικότητος μίαν εὐθεῖαν, τέμνουσαν τὴν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα, ἔστω τὰ P καὶ P′. Αἱ ἀκτῖνες MP καὶ MP′ εἶνε αἱ διπλαῖ ἀκτῖνες τῶν δύο προβολικῶν δεσμῶν $M(A',B',\Gamma',\ldots)$ καὶ $M(A'_1,B'_1,\Gamma'_1,\ldots)$ ἢ τῶν δεσμῶν $M(A,B,\Gamma,\ldots)$ καὶ $M(A_1,B_1,\Gamma_1,\ldots)$. Αἱ τομαὶ τῶν ἀκτίνων τούτων μετὰ τῆς εὐθείας k ὁρίζουν τὰ ζητούμενα διπλᾶ σημεῖα τῆς προβολικότητος ἐπὶ τῆς k.

$M(A,B,\Gamma,\ldots) \barwedge M(A_1,B_1,\Gamma_1,\ldots)$
" $M(A'B'\Gamma'\ldots) \barwedge M(A_1'B_1'\Gamma_1'\ldots)$
$M(A'B'\Gamma'\ldots) \barwedge A_1'(A'B'\Gamma'\ldots)$
$M(A_1'B_1'\Gamma_1'\ldots) \barwedge A'(A_1'B_1'\Gamma_1'\ldots)$



§ 79. Σχέσις καμπύλων β' βαθμοῦ καὶ β' τάξεως.

Γνωρίζομεν (§17. σελ. 33) ὅτι δὲν δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν εὐθεῖαν γραμμὴν ὡς περιβάλλουσαν εὐθειῶν, οὔτε σημεῖόν τι ὡς τόπον σημείων, ἐνῷ δυνάμεθα ἐν γένει νὰ θεωρήσωμεν καμπύλην τινὰ ὡς παραγομένην κατὰ δύο διαφόρους τρόπους. Ὡς εἴδομεν, καμπύλη τις ἐκφυλισμένη δευτέρου βαθμοῦ ἢ β' τάξεως ἀποτελεῖται ἐκ δύο εὐθειῶν ἢ ἐκ δύο σημείων, παρατηροῦμεν δ' ἐπὶ πλέον ὅτι αἱ καμπύλαι β' βαθμοῦ συμπίπτουν μὲ τὰς τῆς β' τάξεως, ἡ δὲ ἀπόδειξις τούτου στηρίζεται εἰς τοὺς ἑξῆς διδύμους ὁρισμούς.

«Καλοῦμεν ἐπίπεδον καμπύλην ν βαθμοῦ ἐκείνην ἥτις τέμνεται ὑπὸ μιᾶς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς εἰς ν σημεῖα (πραγματικὰ ἢ φανταστικά)».

Ἔστω μ βαθμοῦ ἡ ἐξίσωσις καμπύλης τινὸς ἐπιπέδου εἰς σημειακὰς συντεταγμένας

$$f(x,y)=0,$$

καὶ ἡ εὐθεῖα

$$Ax+By+\Gamma=0.$$

Εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν μ βαθμοῦ ὡς πρὸς y, ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ $f(x,y)$ τὸ x διὰ τοῦ $-\dfrac{By+\Gamma}{A}$.

«Καλοῦμεν ἐπίπεδον καμπύλην ν τάξεως ἐκείνην εἰς τὴν ὁποίαν ἀπό τινος σημείου τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς ἄγονται ν ἐφαπτόμεναι εὐθεῖαι (πραγματικαὶ ἢ φανταστικαί)».

Ἔστω μ βαθμοῦ ἡ ἐξίσωσις ἐπιπέδου τινὸς καμπύλης εἰς γραμμικὰς συντεταγμένας

$$f(u,v)=0,$$

καὶ τὸ σημεῖον

$$Au+Bv+\Gamma=0.$$

Εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν μ βαθμοῦ ὡς πρὸς v, ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ $f(u,v)$ τὸ u διὰ τοῦ $-\dfrac{Bv+\Gamma}{A}$.

Ἔστω τώρα καμπύλη τις β' βαθμοῦ, ἥτις παριστάνεται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων τῶν δύο προβολικῶν δεσμῶν, τῶν παραγουσῶν αὐτὴν

$$H_1+\mu H_2=0,\quad H'_1+\mu H'_2=0,$$

καὶ ἑπομένως ἔχουσα ὡς ἐξίσωσιν τὴν

$$H_1 H'_2 - H'_1 H_2 = 0,$$

ἔστω δὲ καὶ ἡ ἐξίσωσις εὐθείας τινὸς

$$ux+vy+1=0.$$

Ζητοῦμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ μ διὰ τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχοῦν αἱ ἀκτῖνες τῶν δεσμῶν, αἱ διερχόμεναι διὰ τῶν σημείων καθ' ἃ ἡ προηγουμένη εὐθεῖα συναντᾷ τὴν καμπύλην.

Αἱ ἐξισώσεις τῶν δύο δεσμῶν δύνανται νὰ γραφοῦν καὶ ὡς ἑξῆς

$$(\lambda_1 + \mu\nu_1)\, x + (\lambda_2 + \mu\nu_2)\, y + (\lambda_3 + \mu\nu_3) = 0,$$
$$(\lambda_1' + \mu\nu'_1)\, x + (\lambda'_2 + \mu\nu_2')\, y + (\lambda'_3 + \mu\nu'_3) = 0.$$

Εἰς τὰ ζητούμενα σημεῖα τῆς τομῆς θὰ ἐπαληθεύωνται αἱ ἐξισώσεις αὗται καὶ ἡ τῆς εὐθείας, ἄρα θὰ ἔχωμεν

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 + \mu\nu_1 & \lambda_2 + \mu\nu_2 & \lambda_3 + \mu\nu_3 \\ \lambda'_1 + \mu\nu_1' & \lambda'_2 + \mu\nu'_2 & \lambda'_3 + \mu\nu'_3 \\ u & v & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ἥτις εἶνε ἐξίσωσις β′ βαθμοῦ ὡς πρὸς μ καὶ γραμμικὴ ὡς πρὸς u καὶ v. Ἐὰν διατάξωμεν ταύτην ὡς πρὸς μ, θὰ ἔχωμεν

$$\Lambda + M\mu + N\mu^2 = 0,$$

ὅπου τὰ Λ,M,N παριστάνουν συναρτήσεις γραμμικὰς τῶν u,v. Ἐὰν θεωρήσωμεν τὰ u,v ὡς σταθερά, ἡ λύσις τῆς προηγουμένης ἐξισώσεως δίδει δύο τιμὰς διὰ τὸ μ. Τοὐναντίον, ἂν θεωσήσωμεν τὸ μ ὡς σταθερὸν καὶ τὰ u,v μεταβλητά, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν ἀκτίνων, αἵτινες ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν σταθερὰν ταύτην τιμὴν τοῦ μ ἐπὶ τῶν δύο δεσμῶν, δηλαδὴ τὴν ἐξίσωσιν ἑνὸς σημείου μιᾶς καμπύλης β′ βαθμοῦ. Ἐὰν τὸ μ λαμβάνῃ διαδοχικῶς πάσας τὰς δυνατὰς τιμὰς αὐτοῦ, θὰ ἔχωμεν πάντα τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης, ἥτις οὕτω παρουσιάζεται ὡς σύνολον τῶν ἀποτελούντων αὐτὴν σημείων, καὶ καλεῖται διὰ τοῦτο καὶ *σημειοσειρὰ β′ βαθμοῦ.*

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα (u,v) εἶνε ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς καμπύλης εἰς γραμμικὰς συντεταγμένας. Ἐν τῇ περιστώσει ταύτῃ πρέπει νὰ τέμνεται αὕτη ὑπὸ τῆς εὐθείας εἰς δύο σημεῖα συμπίπτοντα, ἤτοι πρέπει αἱ δύο ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως τοῦ β′ βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸ μ νὰ εἶνε ἴσαι. Ἐπειδὴ δι᾿ αἱ ῥίζαι αὗται εἶνε

$$\mu = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - 4\Lambda N}}{2N}$$

θὰ ἔχωμεν ὡς συνθήκην τῆς ἰσότητος αὐτῶν

$$M^2 - 4\Lambda N = 0.$$

Αὕτη εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης εἰς γραμμικὰς συντεταγμένας, καὶ ἀφοῦ τὰ Λ,M,N εἶνε γραμμικὰ ὡς πρὸς u,v, ἕπεται ὅτι εἶνε β′ βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰς μεταβλητὰς ταύτας. Ἄρα,

«πᾶσα καμπύλη τοῦ β′ βαθμοῦ ἐν γένει εἶνε καὶ β′ τάξεως».

Ἡ ἀντίστροφος τῆς ἀνωτέρω προτάσεως ἀποδεικνύεται κατ᾽ ἀναλογίαν. Ἔστω καμπύλη τις τῆς β΄ τάξεως, ὁριζομένη ὑπὸ δύο προβολικῶν σημειοσειρῶν, ἐχουσῶν ἐξισώσεις

$$Q_1 + \mu Q_2 = 0, \quad Q_1' + \mu Q_2' = 0.$$

Αἱ ἐφαπτομέναι τῆς καμπύλης ταύτης, αἱ ἀγόμεναι ἀπὸ σημείου τινὸς διδομένου ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$ux + vy + 1 = 0$$

$Q_1 \equiv k_1 u + k_2 v + k_3$
$Q_2 \equiv \rho_1 u + \rho_2 v + \rho_3$

ὁρίζονται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως β΄ βαθμοῦ

$$\begin{vmatrix} k_1 + \mu \rho_1 & k_2 + \mu \rho_2 & k_3 + \mu \rho_3 \\ k_1' + \mu \rho_1' & k_2' + \mu \rho_2' & k_3' + \mu \rho_3' \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

πρὸς σχηματισμὸν τῆς ὁποίας ἀντικατεστήσαμεν τὰ Q_1, Q_2, Q_1', Q_2' διὰ τῶν ἐκφράσεων αὐτῶν ὡς πρὸς τὰ u καὶ v. Ἡ τελευταία ἐξίσωσις διατεταγμένη ὡς πρὸς μ ἔχει τὴν μορφὴν

$$\Theta + P\mu + K\mu^2 = 0,$$

ὅπου τὸ Θ,P,K εἶνε γραμμικὰ ὡς πρὸς x καὶ y. Ἐὰν θεωρήσωμεν μεταβλητὰ τὰ x καὶ y καὶ τὸ μ ὡς παράμετρον, ἡ καμπύλη παρουσιάζεται ὡς παραγομένη ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων αὐτῆς, ἤτοι ὡς δέσμη ἐπιπέδων ἀκτίνων β΄ τάξεως. Ἐὰν αἱ δύο εὐθεῖαι αἱ διερχόμεναι διὰ δοθέντος σημείου καὶ ἐφαπτόμεναι τῆς καμπύλης (ὡς ἀνήκουσαι εἰς τὴν δέσμην τῶν ἀκτίνων τῶν ἀποτελουσῶν αὐτήν) συμπίπτουν, τὸ σημεῖον κεῖται κατ᾽ ἀνάγκην ἐπὶ τῆς καμπύλης, ἡ δὲ συνθήκη διὰ νὰ συμβαίνῃ τοῦτο εἶνε

$$P^2 - 4\Theta K = 0,$$

ἥτις εἶνε ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης εἰς σημειακὰς συντεταγμένας, καὶ εἶνε αὕτη δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x,y. Ἄρα,

«πᾶσα καμπύλη β΄ τάξεως ἐν γένει εἶνε καὶ β΄ βαθμοῦ».

Ἡ ταὐτότης τῶν δύο ἐννοιῶν ὑπὸ τὰς ὁποίας θεωροῦμεν τὰς καμπύλας ταύτας δικαιολογεῖ καὶ ἀπὸ τῆς ἀναλυτικῆς ἀπόψεως τὴν ἰσχὺν καὶ δι᾽ αὐτὰς τῆς ἀρχῆς τῆς ἐναλλαγῆς, προκειμένου περὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἐν λόγῳ γραμμῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII.

Περὶ τῶν εὐθειογενῶν ἐπιφανειῶν δευτέρου βαθμοῦ.

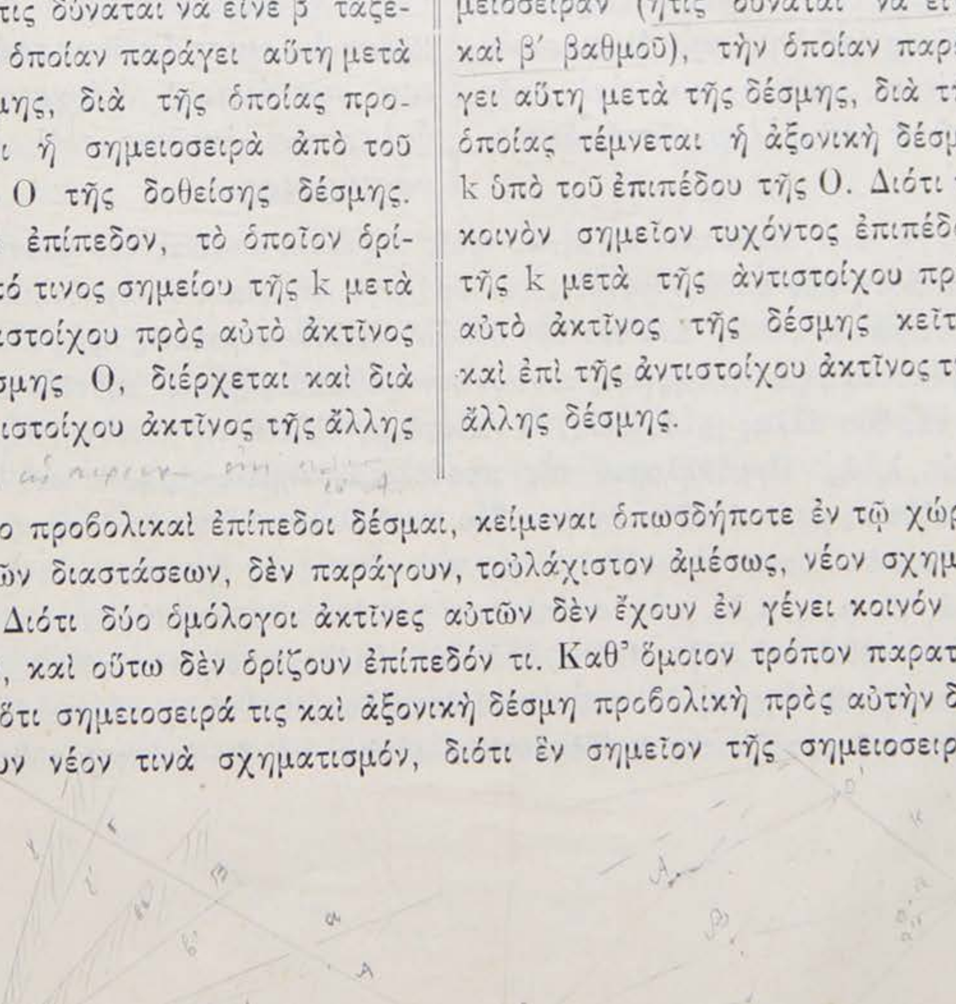
§ 80. Γένεσις εὐθειογενῶν ἐπιφανειῶν β΄ βαθμοῦ.

Ὡς εἴδομεν ἐν τοῖς προηγουμένοις ἐκ δύο ὁμωνύμων θεμελιωδῶν προβολικῶν σχηματισμῶν, οἵτινες κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἢ ἐπὶ τῆς αὐτῆς κεντρικῆς δέσμης, ὁρίζονται ἐν γένει αἱ καμπύλαι καὶ οἱ κῶνοι β΄ βαθμοῦ, καθὼς καὶ αἱ δέσμαι ἀκτίνων καὶ ἐπιπέδων β΄ τάξεως. Θὰ ζητήσωμεν τώρα νὰ ἴδωμεν, ἐὰν ἐκ δύο προβολικῶν θεμελιωδῶν γεωμετρικῶν σχηματισμῶν, ὁπωσδήποτε κειμένων ἐν τῷ χώρῳ τῶν τριῶν διαστάσεων, δύνανται νὰ παραχθοῦν ἄλλοι σχηματισμοὶ β΄ βαθμοῦ. Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι,

ἐπίπεδός τις δέσμη, ἔχουσα κέντρον τὸ O π.χ. μετά τινος σημειοσειρᾶς, ἐχούσης φορέα τὴν εὐθεῖαν k π. χ., προβολικῆς πρὸς αὐτήν, παράγει τὴν αὐτὴν δέσμην ἐπιπέδων (ἥτις δύναται νὰ εἶνε β΄ τάξεως), τὴν ὁποίαν παράγει αὕτη μετὰ τῆς δέσμης, διὰ τῆς ὁποίας προβάλλεται ἡ σημειοσειρὰ ἀπὸ τοῦ κέντρου O τῆς δοθείσης δέσμης. Διότι τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ὑπὸ τινος σημείου τῆς k μετὰ τῆς ἀντιστοίχου πρὸς αὐτὸ ἀκτῖνος τῆς δέσμης O, διέρχεται καὶ διὰ τῆς ἀντιστοίχου ἀκτῖνος τῆς ἄλλης δέσμης.

ἐπίπεδός τις δέσμη, ἔχουσα κέντρον τὸ O π.χ. μετά τινος ἀξονικῆς δέσμης, ἐχούσης ἄξονα ἔστω τὴν εὐθεῖαν k, καὶ προβολικῆς πρὸς αὐτήν, παράγει τὴν αὐτὴν σημειοσειρὰν (ἥτις δύναται νὰ εἶνε καὶ β΄ βαθμοῦ), τὴν ὁποίαν παράγει αὕτη μετὰ τῆς δέσμης, διὰ τῆς ὁποίας τέμνεται ἡ ἀξονικὴ δέσμη k ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τῆς O. Διότι τὸ κοινὸν σημεῖον τυχόντος ἐπιπέδου τῆς k μετὰ τῆς ἀντιστοίχου πρὸς αὐτὸ ἀκτῖνος τῆς δέσμης κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς ἀντιστοίχου ἀκτῖνος τῆς ἄλλης δέσμης.

Δύο προβολικαὶ ἐπίπεδοι δέσμαι, κείμεναι ὁπωσδήποτε ἐν τῷ χώρῳ τῶν τριῶν διαστάσεων, δὲν παράγουν, τοὐλάχιστον ἀμέσως, νέον σχηματισμόν. Διότι δύο ὁμόλογοι ἀκτῖνες αὐτῶν δὲν ἔχουν ἐν γένει κοινόν τι σημεῖον, καὶ οὕτω δὲν ὁρίζουν ἐπίπεδόν τι. Καθ᾽ ὅμοιον τρόπον παρατηροῦμεν ὅτι σημειοσειρά τις καὶ ἀξονικὴ δέσμη προβολικὴ πρὸς αὐτὴν δὲν παράγουν νέον τινὰ σχηματισμόν, διότι ἓν σημεῖον τῆς σημειοσειρᾶς



μετὰ τοῦ ἀντιστοίχου πρὸς αὐτὸ ἐπιπέδου τῆς δέσμης δὲν ὁρίζουν ἐν γένει τρίτον τι στοιχεῖον.

Ἑπομένως εἶνε πιθανὸν νὰ παραχθοῦν νέα σχήματα διὰ προβολικῶν σημειοσειρῶν ἢ ἀξονικῶν δεσμῶν, κειμένων ὁπωσδήποτε ἐν τῷ χώρῳ τῶν τριῶν διαστάσεων.

Πράγματι, δύο προβολικαὶ σημειοσειραὶ k καὶ k_1, κείμεναι στρεβλῶς πρὸς ἀλλήλας, παράγουν ἓν πλῆθος ἀκτίνων, ἔστω τὸ Λ, αἵτινες συνδέουν ἀνὰ δύο ὁμόλογα σημεῖα τῶν σημειοσειρῶν, καὶ τὸ ὁποῖον θὰ καλοῦμεν πρὸς συντομίαν *σύστημα τῶν εὐθειῶν Λ.*

Ἀνὰ δύο εὐθεῖαι τοῦ συστήματος Λ δὲν κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. Διότι ἂν συνέβαινε τοῦτο, θὰ ἔκειντο δύο σημεῖα τῆς k μετὰ δύο σημείων τῆς k_1 ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἄρα καὶ αἱ k καὶ k_1, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν γενομένην ὑπόθεσιν.

Αἱ ἀκτῖνες τοῦ συστήματος Λ σχηματίζουν μίαν ἐπιφάνειαν, ἥτις καλεῖται *εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια* καὶ ἔχει τὰς ἑξῆς ἰδιότητας.

«Ἡ εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια, ἥτις παράγεται ὑπὸ τοῦ συστήματος τῶν ἀκτίνων Λ, ἔχει δεύτερον σύστημα ἀκτίνων, ἔστω τὸ M, ἑκάστη δ' ἀκτὶς τοῦ ἑνὸς συστήματος τέμνεται ὑφ' ἑκάστης ἀκτῖνος τοῦ ἄλλου, ἐνῷ ἀνὰ δύο εὐθεῖαι τοῦ αὐτοῦ συστήματος δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου».

«Ἕκαστον σημεῖον τυχούσης ἀκτῖνος τοῦ ἑνὸς συστήματος τῶν ἀκτίνων, κεῖται καὶ ἐπὶ μιᾶς ἀκτῖνος τοῦ ἄλλου συστήματος».

«Ἕκαστον ἐπίπεδον διερχόμενον διά τινος ἀκτῖνος τοῦ πρώτου συστήματος διέρχεται καὶ διά τινος ἀκτῖνος τοῦ ἄλλου συστήματος».

Τῷ ὄντι, ἔστωσαν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ τρεῖς τυχοῦσαι ἀκτῖνες τοῦ συστήματος Λ, ἑκάστη τῶν ὁποίων συνδέει δύο ὁμόλογα σημεῖα τῶν προβολικῶν σημειοσειρῶν k καὶ k_1 ἀνὰ δύο τῶν ὁποίων κεῖνται στρεβλῶς πρὸς ἀλλήλας. Δι' ἑκάστου σημείου τῆς μιᾶς τούτων δυνάμεθα νὰ φέρωμεν εὐθεῖαν τέμνουσαν τὰς δύο ἄλλας (§11, σελ.18). Ἔστω μ_2 εὐθεῖά τις τοιαύτη, τέμνουσα τὰς $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Προβάλλομεν τὰς προβολικὰς σημειοσειρὰς k καὶ k_1 ἀπὸ τῆς εὐθείας μ_2, καὶ οὕτω ἔχομεν δύο προβολικὰς ἀξονικὰς δέσμας, ἐχούσας κοινὸν ἄξονα τὴν εὐθεῖαν μ_2, καὶ αἵτινες ὡς ἔχουσαι τρία ἐπίπεδα κοινά, τὰ $\mu_2\lambda_1, \mu_2\lambda_2, \mu_2\lambda_3$, συμπίπτουν καὶ ἀποτελοῦν μίαν μόνην τοιαύτην δέσμην (§32, σελ.71). Οὕτω ἀνὰ δύο ὁμόλογα σημεῖα τῶν k καὶ k_1 κεῖνται μετὰ τῆς μ_2 ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, καὶ ἡ μ_2 τέμνει ἑκάστην ἀκτῖνα τοῦ συστήματος Λ. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ δι' ἑκάστην εὐθεῖαν μ_3

ἢ μ ἐν γένει, ἥτις τέμνει ἑκάστην τῶν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Οὕτω ἔχομεν δεύτερον σύστημα ἀκτίνων Μ, ὁριζουσῶν μίαν εὐθειογενῆ ἐπιφάνειαν τοῦ συστήματος Μ. Ἑπομένως ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

« *Τὸ σύστημα τῶν εὐθειῶν τοῦ συστήματος Μ ἀποτελεῖται ἐκ πασῶν τῶν εὐθειῶν, αἵτινες τέμνουν τρεῖς οἱασδήποτε ἀκτῖνας $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ τοῦ συστήματος Λ. Ὁμοίως τὸ σύστημα Λ ἀποτελεῖται ἐκ πασῶν τῶν εὐθειῶν, αἵτινες τέμνουν τρεῖς οἱασδήποτε ἀκτῖνας μ_1, μ_2, μ_3 τοῦ συστήματος Μ, ὁρίζεται δὲ τοῦτο ἐκ μιᾶς τριάδος ἀκτίνων $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$*».

Ἑκάστη εὐθεῖα τοῦ ἑνὸς συστήματος λέγεται *ὁδηγὸς* ἀκτὶς τοῦ ἄλλου συστήματος, ὡς τέμνουσα πάσας τὰς εὐθείας τοῦ ἄλλου, ἕκαστον δὲ τῶν δύο συστημάτων καλεῖται *ὁδηγοῦν* σύστημα τοῦ ἑτέρου.

Κατὰ ταῦτα μία τοιαύτη εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια δύναται νὰ παραχθῇ κατὰ δύο τρόπους ὑπὸ μιᾶς εὐθείας, ἥτις ὀλισθαίνει ἐπὶ τριῶν σταθερῶν εὐθειῶν, κειμένων στρεβλῶς πρὸς ἀλλήλας. Αἱ τρεῖς σταθεραὶ εὐθεῖαι εἶνε ὁδηγοὶ τοῦ συστήματος, τὸ ὁποῖον διαγράφεται ὑπὸ τῆς κινουμένης εὐθείας. Δι᾽ ἑκάστου σημείου μιᾶς ὁδηγοῦ ἀκτῖνος διέρχεται ἡ κινουμένη εὐθεῖα ἅπαξ, καὶ κεῖται αὕτη ἅπαξ ἐφ᾽ ἑκάστου ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἄγεται διὰ μιᾶς τῶν ὁδηγῶν εὐθειῶν καὶ τέμνει μίαν ἄλλην τοιαύτην, (§11.σελ.18), οὕτω δ᾽ ἀπεδείχθησαν αἱ ἀνωτέρω προτάσεις.

Δύο προβολικαὶ ἐπίπεδοι δέσμαι ξ καὶ ξ_1, τῶν ὁποίων οἱ ἄξονες κεῖνται στρεβλῶς πρὸς ἀλλήλους, παράγουν ὁμοίως ἓν σύστημα τῶν εὐθειῶν τοῦ συστήματος Λ, καθ᾽ ἃς τέμνονται τὰ ὁμόλογα ἐπίπεδα τῶν δύο δεσμῶν. Τοῦτο παράγεται ἐπίσης ὑπὸ τῶν δύο προβολικῶν σημειοσειρῶν ξ καὶ ξ_1, ἐκ τῶν ὁποίων ἑκάστη εἶνε τομὴ τῆς ἄλλης ἀξονικῆς δέσμης ὑπὸ τοῦ ἄξονος αὐτῆς, ἤτοι ἡ μὲν μία εἶνε τομὴ τῆς δέσμης ξ_1 ὑπὸ τοῦ ἄξονος ξ, ἡ δὲ τομὴ τῆς δέσμης ξ ὑπὸ τοῦ ἄξονος ξ_1. Ἑπομένως, ἑκάστη εὐθεῖα, καθ᾽ ἣν τέμνονται δύο ὁμόλογα ἐπίπεδα τῶν δεσμῶν, συνδέει δύο ὁμόλογα σημεῖα τῶν δύο ἐν λόγῳ προβολικῶν σημειοσειρῶν (§33,σελ.76).

« *Ἓν σύστημα τῆς εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας τέμνεται ὑπὸ ἀνὰ δύο ὁδηγῶν αὐτοῦ εὐθειῶν κατὰ προβολικὰς σημειοσειράς, προβάλλεται δὲ διὰ δύο προβολικῶν ἀξονικῶν δεσμῶν ἀπὸ δύο τοιούτων ἀκτίνων. Αἱ ἀξονικαὶ αὗται δέσμαι εἶνε προοπτικαὶ πρὸς τὰς ἀντιστοίχους αὐτῶν δύο σημειοσειράς*».

Πράγματι, ἔστωσαν η_1, η_2, η_3 τρεῖς ὁδηγοὶ ἀκτῖνες τοῦ ἑνὸς συστήματος τῆς ἐπιφανείας, αἵτινες ὡς τοιαῦται τέμνουν ἑκάστην ἀκτῖνα αὐτοῦ. Λαμβάνομεν ὁσασδήποτε ἀκτῖνας τοῦ συστήματος, εἴτε ἂν φέρωμεν διὰ τῆς η_2 ὁσαδήποτε ἐπίπεδα καὶ ἐφ' ἑκάστου τούτων φαντασθῶμεν τὴν εὐθεῖαν, τὴν συνδέουσαν τὰς τομὰς αὐτοῦ μετὰ τῶν εὐθειῶν η_1 καὶ η_3, εἴτε ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς η_2 ὁσαδήποτε σημεῖα, συνδέσωμεν ἕκαστον τούτων μετὰ τῶν η_1 καὶ η_3, καὶ εὕρωμεν τὴν τομὴν τῶν οὕτω ὁριζομένων ἐπιπέδων. Ἐκ τῶν κατασκευῶν τούτων ἕπεται ὅτι, τὸ ἐν λόγῳ σύστημα εὐθειῶν τέμνεται ὑπὸ τῶν ὁδηγῶν ἀκτίνων η_1, η_3 κατὰ προβολικὰς σημειοσειράς, καὶ ὅτι προβάλλεται τοῦτο ἀπὸ τῶν η_1 καὶ η_3 διὰ προβολικῶν ἐπιπέδων δεσμῶν, αἵτινες εἶνε προοπτικαὶ πρὸς τὴν σημειοσειρὰν η_2.

Τέσσαρες εὐθεῖαι τοῦ ἑνὸς συστήματος τῆς ἐπιφανείας λέγονται *ἁρμονικαὶ ἀκτῖνες* τοῦ συστήματος, ἐὰν τέμνωνται ὑπὸ μιᾶς, ἄρα καὶ ὑπὸ πάσης, ὁδηγοῦ ἀκτῖνος τοῦ συστήματος κατὰ τέσσαρα σημεῖα, ἀποτελοῦντα ἁρμονικὸν σύμπλεγμα, ὁπότε καὶ προβάλλονται ἀπὸ ἑκάστης ὁδηγοῦ ἀκτῖνος διὰ τεσσάρων ἐπιπέδων, ἀποτελούντων ἁρμονικὸν σύμπλεγμα.

Ἐὰν δηλαδὴ η_1, η_2 εἶνε δύο τυχοῦσαι ὁδηγοὶ ἀκτῖνες, αἱ δύο σημειοσειραὶ η_1 καὶ η_2 θὰ σχετίζωνται διὰ τοῦ συστήματος τῶν εὐθειῶν προβολικῶς πρὸς ἀλλήλας, καὶ ἐὰν τέσσαρες τυχοῦσαι ἀκτῖνες τοῦ συστήματος τμηθοῦν ὑπὸ τῆς η_1 κατὰ σημεῖα ἀποτελοῦντα ἁρμονικὸν σύμπλεγμα, καὶ αἱ τομαὶ αὐτῶν ὑπὸ τῆς η_2 θὰ ἀποτελοῦν ἁρμονικὸν σύμπλεγμα. Ἀλλ' ὁμοίως προβάλλονται αἱ τέσσαρες ἀκτῖνες ἀπὸ τῆς η_2 διὰ τεσσάρων ἁρμονικῶν ἐπιπέδων, διότι τὰ ἐπίπεδα ταῦτα διέρχονται διὰ τῶν τεσσάρων σημείων τῶν κειμένων ἐπὶ τῆς η_1, τῶν ἀποτελούντων ἁρμονικὸν σύμπλεγμα.

Διὰ τριῶν εὐθειῶν α,β,γ, κειμένων στρεβλῶς πρὸς ἀλλήλας ἀνὰ δύο, ὁρίζεται μία τετάρτη ἁρμονικὴ τούτων εὐθεῖα δ, ἥτις χωρίζεται ἀπὸ μιᾶς τῶν τριῶν, ἔστω ἀπὸ τῆς β. Πράγματι, ἂν ἐπί τινος εὐθείας τεμνούσης τὰς τρεῖς δοθείσας (§11,σελ.18) εὕρωμεν τὸ τέταρτον ἁρμονικὸν σημεῖον τῶν τομῶν αὐτῆς μετὰ τῶν τριῶν δοθεισῶν, θὰ ἔχωμεν ἓν σημεῖον τῆς ζητουμένης εὐθείας δ. Ἐν γένει ἡ εὐθεῖα δ εἶνε μία τετάρτη ἀκτὶς ἑνὸς συστήματος εὐθειῶν ἐπιφανείας, διερχομένων διὰ τῶν διὰ τῶν α, β καὶ γ, καὶ χωρίζεται ἀπὸ τῆς β διὰ τῶν α καὶ γ.

Ἐὰν εὐθεῖά τις ἔχῃ μετά τινος εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας (ἐκ τῶν ἐν λόγῳ) περισσότερα τῶν δύο σημείων κοινὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας. Διότι αὕτη τέμνει τότε περισσοτέρας τῶν δύο εὐθειῶν τοῦ ἑνὸς συστήματος τῶν εὐθειῶν καὶ θὰ εἶνε ὁδηγὸς ἀκτὶς τοῦ πλήθους τούτου, θὰ ἀνήκῃ δ' οὕτω εἰς τὸ δεύτερον σύστημα τῶν εὐθειῶν τῆς ἐπιφανείας. Ἕνεκα τῆς ἰδιότητος ταύτης τῶν ἐπιφανειῶν τούτων καλοῦνται αὗται πρὸς διάκρισιν ἀπὸ ἄλλων εὐθειογενῶν ἐπιφανειῶν *«εὐθειογενεῖς ἐπι-*

φάνειαι β' βαθμοῦ». Ἐπίπεδόν τι τέμνον τὴν εὐθειογενῆ ἐπιφάνειαν κατὰ μίαν ἀκτῖνα λ τοῦ ἑνὸς συστήματος, ἑπομένως καὶ κατὰ μίαν ἀκτῖνα μ τοῦ ἄλλου συστήματος, δὲν ἔχει ἐκτὸς τῶν εὐθειῶν λ καὶ μ ἄλλο τι σημεῖον P κοινὸν μετὰ τῆς ἐπιφανείας. Διότι, ἄλλως, ἑκάστη εὐθεῖα, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ P καὶ τέμνει τὰς ἀκτῖνας λ καὶ μ εἰς ἀνὰ ἓν σημεῖον, θὰ ἔκειτο ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, τὸ δὲ ἐπίπεδον θὰ ἔκειτο οὕτω ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, τὸ ὁποῖον εἶνε ἀδύνατον. Ἐπειδὴ τώρα ἑκάστη εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου διερχομένη διὰ τῆς τομῆς τῶν ἀκτίνων λ καὶ μ ἔχει μετὰ τῆς ἐπιφανείας μόνον τὸ σημεῖον τοῦτο λμ κοινόν, καὶ ἐφάπτεται εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο τῆς ἐπιφανείας, λέγομεν ὅτι, *ἡ εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια ἐφάπτεται τοῦ ἐπιπέδου ἢ ὅτι τὸ ἐν λόγῳ ἐπίπεδον ἐφάπτεται τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον λμ.*

«Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων τῆς εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας, τῶν διερχομένων διὰ μιᾶς εὐθείας k, ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα εἶνε κοινὰ μεταξὺ τῆς εὐθείας καὶ τῆς ἐπιφανείας».

Διότι, ἐπειδὴ ἐφ' ἑκάστου ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῆς k καὶ ἐφαπτομένου τῆς ἐπιφανείας κεῖται μία εὐθεῖα τοῦ ἑνὸς συστήματος, καθὼς καὶ μία τοῦ ἄλλου συστήματος τῶν εὐθειῶν τῆς ἐπιφανείας, ἡ εὐθεῖα αὕτη k ἔχει ἓν κοινὸν σημεῖον μὲ ἑκάστην τούτων. Ἀλλὰ δύο τῶν σημείων τούτων τῶν τομῶν δὲν συμπίπτουν, διότι ἀνὰ δύο ἀκτῖνες ἑκάστου συστήματος δὲν τέμνονται. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι, μία εὐθεῖα κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, ἐὰν τέμνωνται ἐπ' αὐτῆς περισσότερα τῶν δύο ἐφαπτομένων ἐπιπέδων τῆς ἐπιφανείας.

Ἡ εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια β' βαθμοῦ λέγεται καὶ *β' τάξεως*, ἐπειδὴ διὰ τυχούσης εὐθείας διέρχονται τὸ πολὺ δύο ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα αὐτῆς.

Δύο προβολικαὶ ἀξονικαὶ δέσμαι, αἵτινες παράγουν ἓν σύστημα εὐθειῶν, τέμνονται ὑπὸ τυχόντος ἐπιπέδου κατὰ προβολικὰς ἐπιπέδους δέσμας. Ἕκαστον σημεῖον τομῆς ὁμολόγων ἀκτίνων τῶν δεσμῶν τούτων κεῖται ἐπὶ μιᾶς ἀκτῖνος τοῦ συστήματος τῶν εὐθειῶν. Ἐὰν τὸ σύστημα τοῦτο παραχθῇ ὑπὸ προβολικῶν σημειοσειρῶν, προβληθοῦν δ' αὗται ἀπὸ τινος σημείου διὰ ὁμοκέντρων προβολικῶν ἐπιπέδων δεσμῶν, ἕκαστον ἐπίπεδον ὁριζόμενον ἐξ ὁμολόγων ἀκτίνων τῶν δύο τούτων δεσμῶν διέρχεται διὰ μιᾶς εὐθείας τοῦ συστήματος. Ἐκ τούτων ἕπεται τὸ πρῶτον μέρος τῶν ἑξῆς διδύμων προτάσεων.

«Ἓν σύστημα εὐθειῶν τέμνεται ὑπὸ ἑκάστου ἐπιπέδου, ἐφ' οὗ δὲν κεῖται ἀκτὶς τοῦ συστή-

«Ἓν σύστημα εὐθειῶν προβάλλεται ἀπὸ ἑκάστου σημείου, μὴ κειμένου ἐπί τινος ἀκτῖνος

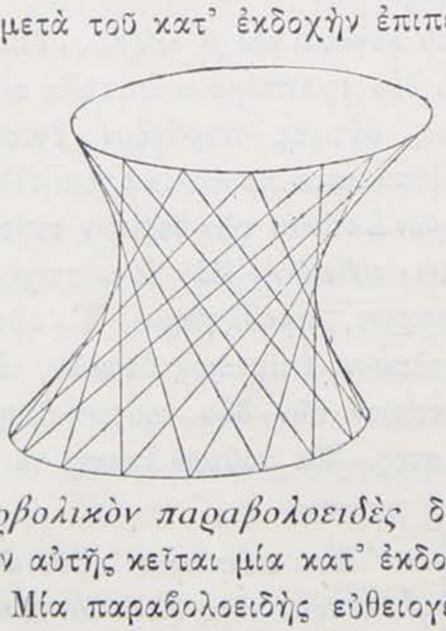
ματος, κατὰ μίαν καμπύλην β' βαθμοῦ. Τὰ ἐπίπεδα τὰ ἐφαπτόμενα τῆς εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας κατὰ τὰ σημεῖα μιᾶς καμπύλης β' βαθμοῦ, ἀποτελοῦν μίαν δέσμην ἐπιπέδων β' τάξεως»,

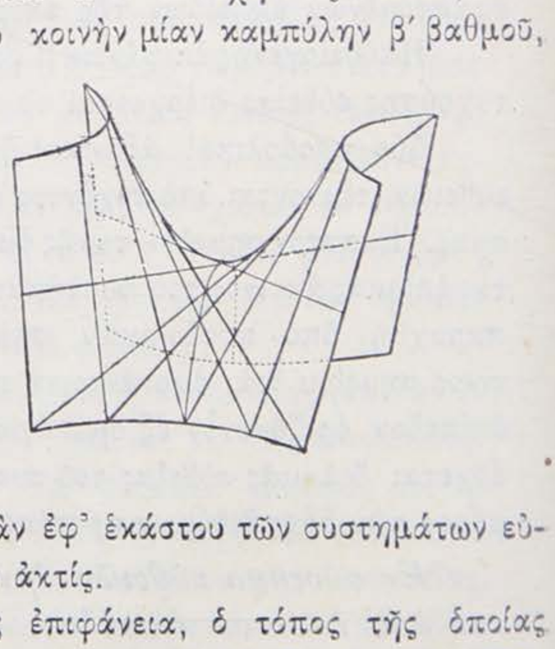
τοῦ συστήματος, διὰ μιᾶς δέσμης ἐπιπέδων β' τάξεως. Τὰ σημεῖα καθ' ἃ ἐφάπτεται ἡ ἐπιφάνεια τῶν ἐν λόγῳ ἐπιπέδων μιᾶς τοιαύτης δέσμης, κεῖνται ἐπὶ μιᾶς καμπύλης β' βαθμοῦ».

Πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ ἄλλου μέρους τῆς δεξιὰ ἀνωτέρω ἀναγραφομένης προτάσεως, φέρομεν ἓν ἐπίπεδον διὰ τριῶν σημείων ἐπαφῆς. Τοῦτο τέμνει τὴν δέσμην τῶν ἐπιπέδων κατὰ μίαν δέσμην ἀκτίνων β' τάξεως, ἥτις ἔχει τὰ τρία ἐν λόγῳ σημεῖα ὡς σημεῖα ἐπαφῆς καὶ περιβάλλει μίαν καμπύλην β' τάξεως. Ἀλλ' ἡ καμπύλη αὕτη συμπίπτει ἐκ ταὐτότητος μὲ τὴν καμπύλην καθ' ἣν τέμνεται ἡ εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου, ἐπειδὴ αἱ δύο αὗται καμπύλαι β' βαθμοῦ ἔχουν κοινὰ τρία σημεῖα ἐπαφῆς καὶ τὰς τρεῖς ἐφαπτομένας αὐτῶν εἰς τὰ σημεῖα ταῦτα. Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ ἡ ἀριστερὰ ἀνωτέρω ἀναγραφομένη πρότασις, ἐὰν διὰ τῆς τομῆς τριῶν ἐφαπτομένων τῆς ἐπιφανείας φέρωμεν μίαν δέσμην ἐφαπτομένων ἐπιπέδων ταύτης.

§ 81. Διάκρισις τῶν εὐθειογενῶν ἐπιφανειῶν β' βαθμοῦ εἰς γένη.

Εὐθειογενής τις ἐπιφάνεια β' βαθμοῦ καλεῖται *μονόχωνον ὑπερβολοειδὲς* μέν, ἐὰν δὲν κεῖται ἐπ' αὐτοῦ κατ' ἐκδοχήν τις εὐθεῖα, ἀλλ' ἔχῃ μετὰ τοῦ κατ' ἐκδοχὴν ἐπιπέδου κοινὴν μίαν καμπύλην β' βαθμοῦ,





ὑπερβολικὸν παραβολοειδὲς δέ, ἐὰν ἐφ' ἑκάστου τῶν συστημάτων εὐθειῶν αὐτῆς κεῖται μία κατ' ἐκδοχὴν ἀκτίς.

Μία παραβολοειδὴς εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια, ὁ τόπος τῆς ὁποίας εἶνε ἓν ὑπερβολικὸν παραβολοειδές, τέμνεται ὑπὸ ἀνὰ δύο ἐκ τῶν ὁδηῶν αὐτῆς εὐθειῶν κατὰ δύο προβολικὰς ὁμοίας σημειοσειράς, τῶν ὁποίων τὰ κατ᾽ ἐκδοχὴν σημεῖα ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἄλληλα (§46,σελ.111). Ὑπερβολικόν τι παραβολοειδὲς γράφεται ὑπὸ εὐθείας, ἥτις ὀλισθαίνῃ ἐπὶ δύο εὐθειῶν, στρεβλῶς πρὸς ἀλλήλας κειμένων, μένουσα παράλληλος πρὸς σταθερὸν ἐπίπεδον, ἐφ᾽ οὗ δὲν κεῖνται αἱ διευθύνσεις τῶν δύο ἐν λόγῳ εὐθειῶν. Διότι, ἂν μ_1 καὶ μ_2 εἶνε αἱ δύο εὐθεῖαι, τὰς ὁποίας συναντᾷ ἡ κινουμένη εὐθεῖα, αὕτη συναντᾷ καὶ τὴν κατ᾽ ἐκδοχὴν εὐθεῖαν τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου, καὶ ἑπομένως γράφει εὐθειογενῆ ἐπιφάνειαν, ἥτις ἔχει μίαν ἑπομένως καὶ μίαν ἄλλην, κατ᾽ ἐκδοχὴν ἀκτῖνα, ἄρα εἶνε αὕτη ὑπερβολικὸν παραβολοειδές. Οὕτω ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς δύναται νὰ θεωρηθῇ παραγομένη ὑπὸ εὐθείας κινουμένης οὕτως, ὥστε νὰ συναντᾷ αὕτη δύο εὐθείας, στρεβλῶς πρὸς ἀλλήλας κειμένας, καὶ μενούσης παραλλήλου πρὸς ἐπίπεδον σταθερόν, μὴ παράλληλον πρὸς τὰς εὐθείας».

Ἔχοντες ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι, *κωνοειδὴς ἐπιφάνεια* λέγεται ἡ γραφομένη ὑπὸ εὐθείας ἥτις κινουμένη συνεχῶς συναντᾷ δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ δοθεῖσαν γραμμὴν καὶ μένει παράλληλος πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον, παρατηροῦμεν ὅτι,

«τὸ ὑπερβολικὸν παραβολοειδὲς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἐπιφάνεια κωνοειδής».

Τὸ ὑπερβολικὸν παραβολοειδὲς τέμνεται ὑπὸ τυχόντος ἐπιπέδου, μὴ διερχομένου διά τινος τῶν ἀκτίνων αὐτοῦ, κατὰ μίαν ὑπερβολήν, μόνον δὲ ὅταν τὸ ἐπίπεδον διέρχεται δι᾽ ὡρισμένης διευθύνσεως, ἡ τομὴ εἶνε παραβολή. Ἡ καμπύλη τῆς τομῆς διέρχεται δηλαδὴ διὰ τῶν δύο σημείων, τὰ ὁποῖα εἶνε κοινὰ μεταξὺ τῶν κατ᾽ ἐκδοχὴν ἀκτίνων τῆς ἐπιφανείας καὶ τοῦ ἐπιπέδου, καὶ τὰ σημεῖα ταῦτα συμπίπτουν εἰς ἕν, ἐὰν τὸ ἐπίπεδον περιέχῃ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν δύο κατ᾽ ἐκδοχὴν ἀκτίνων.

Τὸ μονόχωνον ὑπερβολοειδὲς δὲν ἐφάπτεται τοῦ κατ᾽ ἐκδοχὴν ἐπιπέδου, ὡς συμβαίνει τοῦτο διὰ τὸ ὑπερβολικὸν παραβολοειδές, ἀλλὰ τέμνεται ὑπ᾽ αὐτοῦ κατὰ καμπύλην β′ βαθμοῦ. Τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα εἰς τὰ κατ᾽ ἐκδοχὴν σημεῖα τοῦ ὑπερβολοειδοῦς τούτου εἶνε, κατὰ ταῦτα, καθ᾽ ὑπόστασιν ἐπίπεδα καὶ καλοῦνται *ἀσύμπτωτα ἐπίπεδα* τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς.

Τὰ ἀσύμπτωτα ἐπίπεδα τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς ἔχουν μετ᾽ αὐτοῦ ἀνὰ δύο παραλλήλους εὐθείας κοινάς, τέμνονται δ᾽ αὗται εἰς ἓν σημεῖον O καὶ σχηματίζουν μίαν δέσμην ἐπιπέδων β′ τάξεως. Ὁ ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων τούτων περιβαλλόμενος κῶνος β′ τάξεως ἐφάπτεται τοῦ ὑπερβολοειδοῦς κατὰ μῆκος τῆς κατ' ἐκδοχὴν καμπύλης αὐτοῦ καὶ κ- λεῖται *ἀσύμπτωτος κῶνος* τοῦ ὑπερβολοειδοῦς τούτου.

Ἑκάστη ἀκτὶς τοῦ ἀσυμπτώτου κώνου μονοχώνου τινὸς ὑπερβολοειδοῦς διευθύνεται παραλλήλως πρὸς ἀνὰ μίαν ἀκτῖνα τῶν δύο συστημάτων εὐθειῶν τῆς εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας, καὶ διέρχεται διὰ τοῦ κατ' ἐκδοχὴν σημείου τῆς ἀκτῖνος ταύτης.

Ἐπίπεδόν τι, μὴ διερχόμενον διά τινος τῶν ἀκτίνων τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς, τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν κατὰ μίαν ὑπερβολήν, ἢ παραβολήν, ἢ ἔλλειψιν, καθ' ὅσον ἔχει μετὰ τῆς κατ' ἐκδοχὴν καμπύλης τοῦ ὑπερβολοειδοῦς δύο σημεῖα κοινά, ἢ ἕν, ἢ οὐδέν, ἢ καθόσον εἶνε τοῦτο παράλληλον πρὸς δύο ἀκτῖνας τοῦ ἀσυμπτώτου κώνου, ἢ πρὸς μίαν, ἢ πρὸς οὐδεμίαν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔχομεν καὶ τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«Ἐὰν διὰ τυχόντος σημείου ἀχθῇ παράλληλος εὐθεῖα πρὸς ἑκάστην ἀκτῖνα μιᾶς εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας β' βαθμοῦ, πᾶσαι αἱ παράλληλοι αὗται κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς ἀσυμπτώτου ἐπιπέδου ἢ ἐπὶ ἑνὸς κώνου β' βαθμοῦ, καθόσον ἡ εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια εἶνε ὑπερβολικὸν παραβολοειδὲς ἢ μονόχωνον ὑπερβολοειδές».

Ὑπερβολικόν τι παραβολοειδὲς καλεῖται *ἰσόπλευρον*, ἐὰν αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο συστημάτων αὐτοῦ διευθύνωνται παραλλήλως πρὸς δύο κάθετα ἐπ' ἄλληλα ἐπίπεδα. Ἕκαστον σύστημα εὐθειῶν τοῦ ἰσοπλεύρου παραβολοειδοῦς ἔχει μίαν ἀκτῖνα, ἥτις τέμνει καθέτως τὸ ὁδηγοῦν ἐπίπεδον καὶ πάσας τὰς ἀκτῖνας τοῦ ἄλλου συστήματος.

Ἓν σύστημα εὐθειῶν Μ εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας β' βαθμοῦ προβάλλεται ἐκ τῶν ∞^1 ὁδηγῶν ἀκτίνων αὐτοῦ δι' ἑνὸς πλήθους *προβολικῶν ἀξονικῶν δεσμῶν* ἢ ἁπλῶς *πλήθους δεσμῶν* καλουμένων, παράγεται δὲ τοῦτο δι' ἀνὰ δύο ἐκ τῶν προβολικῶν τούτων ἀξονικῶν δεσμῶν ἐπιπέδων.

Καθ' ὅμοιον τρόπον τὸ σύστημα τῶν ὁδηγῶν ἀκτίνων Λ προβάλλεται ἀπὸ τῶν εὐθειῶν τοῦ Μ διὰ ∞^1 προβολικῶν ἀξονικῶν δεσμῶν ἑνὸς *δευτέρου πλήθους δεσμῶν* καὶ παράγεται δι' ἀνὰ δύο τοιούτων δεσμῶν. Τὰ δύο πλήθη τῶν δεσμῶν παράγουν ἄλληλα, διότι αἱ δέσμαι τῶν ἐπιπέδων ἑνὸς ἑκάστου ἐξ αὐτῶν ἀποτελοῦνται ἐξ ὁμολόγων ἐπιπέδων τῶν ∞^1 δεσμῶν τοῦ ἄλλου πλήθους. Ἕκαστον ἀπὸ τὰ δύο πλήθη τῶν δεσμῶν καλεῖται *φορεὺς* τοῦ ἄλλου, καὶ λέγομεν περὶ αὐτῶν ὅτι *φέρουν ἢ βαστάζουν* ἄλληλα, οἱ δὲ ἄξονες τῶν ∞^1 ἀξονικῶν δεσμῶν κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας β' βαθμοῦ.

Τὸ πλῆθος τῶν εὐθειῶν τοῦ συστήματος Μ εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας β' βαθμοῦ τέμνεται ὑπὸ τῶν ∞^1 ὁδηγῶν αὐτῶν ἀκτίνων κατὰ ἓν *πλῆθος προβολικῶν σημειοσειρῶν*. Αἱ ∞^1 αὗται σημειοσειραὶ παράγουν διὰ τῶν ὁμολόγων αὐτῶν σημείων ἓν δεύτερον πλῆθος προβολικῶν σημειοσειρῶν, αἵτινες κεῖνται ἐπὶ τῶν ἀκτίνων τοῦ συστήματος Μ καὶ εἶνε τομαὶ τῶν ὁδηγῶν ἀκτίνων τοῦ Μ. Ἕκαστον ἀπὸ τὰ δύο πλήθη τῶν προβολικῶν σημειοσειρῶν εἶνε ὁ φορεὺς τοῦ ἄλλου.

Διὰ δύο προβολικῶν ἀξονικῶν δεσμῶν ξ_1 καὶ ξ_2 ὁρίζονται δύο ἀλληλοβαστάζοντα πλήθη δεσμῶν, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν $(\xi_1\xi_2)$ συνδέει τὰς δύο δέσμας. Διότι αἱ ξ_1 καὶ ξ_2 παράγουν ἓν σύστημα εὐθειῶν Λ, τὸ ὁποῖον ἐκ τῶν ∞^1 ὁδηγῶν αὐτοῦ ἀκτίνων προβάλλεται διὰ τῶν ∞^1 προβολικῶν δεσμῶν τοῦ πλήθους $(\xi_1\,\xi_2)$. Αἱ δέσμαι ὅμως τοῦ ἄλλου πλήθους τῶν δεσμῶν ἀποτελοῦνται ἐξ ὁμολόγων ἐπιπέδων τῶν ∞^1 δεσμῶν τοῦ $(\xi_1\xi_2)$, αὗται θὰ παραχθοῦν διὰ τῶν δεσμῶν τούτων, καὶ οἱ ἄξονες αὐτῶν εἶνε αἱ ἀκτῖνες τοῦ πλήθους Λ. Ἐὰν αἱ δύο δέσμαι ξ_1 καὶ ξ_2 παράγουν ἕνα κῶνον β' βαθμοῦ, θὰ προβάλλεται οὗτος ἀπὸ τῶν ∞^1 ἀκτίνων αὐτοῦ διὰ τῶν προβολικῶν δεσμῶν τοῦ πλήθους $(\xi_1\xi_2)$ (§71, σελ.196), ἀλλὰ τὸ δεύτερον πλῆθος τῶν δεσμῶν συμπίπτει τότε μὲ τοῦ $(\xi_1\xi_2)$. Ἐὰν αἱ ξ_1,ξ_2 ἔχουν ἀντιστοίχως ἓν κοινὸν ἐπίπεδον **a**, καὶ ἑπομένως ἔχουν προοπτικὴν θέσιν πρὸς ἀλλήλας καὶ πρὸς ἐπίπεδόν τινα δέσμην Ο, τότε ἐκφυλίζεται ὁ κῶνος εἰς τὸ ἐπίπεδον **a** καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον **b** τῆς δέσμης Ο. Ἀλλὰ τὰ δύο πλήθη τῶν δεσμῶν ἀποτελοῦνται κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην ἐκ προοπτικῶν ἀξονικῶν δεσμῶν, τῶν ὁποίων οἱ ἄξονες σχηματίζουν ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων **a** καὶ **b** δύο ὁμοκέντρους ἐπιπέδους δέσμας, καὶ μάλιστα αἱ δέσμαι τοῦ πλήθους $(\xi_1\xi_2)$ ἔχουν ἀντιστοίχως τὸ ἐπίπεδον **a** κοινὸν καὶ εἶνε προοπτικαὶ πρὸς τὴν δέσμην Ο, ἐν τῷ ἐπιπέδῳ **b** κειμένην. Αἱ δέσμαι τοῦ ἄλλου πλήθους ἀποτελοῦνται ἐξ ὁμολόγων ἐπιπέδων τῶν ∞^1 δεσμῶν τοῦ $(\xi_1\xi_2)$, αὗται ἔχουν τὸ ἐπίπεδον **b** ἀντιστοίχως κοινὸν καὶ μία ἐξ αὐτῶν εἶνε ἐκφυλισμένη καὶ ἀνάγεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου **a**.

§ 82. Γενικὴ ἐξίσωσις τῶν εὐθειογενῶν ἐπιφανειῶν δευτέρου βαθμοῦ. **

Ἀποδεικνύομεν ἀναλυτικῶς τὰς ἑξῆς διδύμους προτάσεις.

«Αἱ τομαὶ τῶν ἀντιστοίχων ἐπιπέδων δύο προβολικῶν καὶ μὴ προοπτικῶν ἀξονικῶν δεσμῶν εἶνε αἱ γενέτειραι μιᾶς	*«Αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα δύο προβολικῶν μὴ προοπτικῶν σημειοσειρῶν, κειμένων ἐπὶ φορέων στρε-*

ἐπιφανείας β' βαθμοῦ, ἤτοι τὰ σημεῖα τῶν τομῶν τούτων ἀποτελοῦν ἐν συνόλῳ αὐτῶν μίαν ἐπιφάνειαν, τῆς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις εἰς σημειακὰς συντεταγμένας εἶνε β' βαθμοῦ (§34, σελ. 48)».

Πράγματι, ἂν

$H_1 + \lambda H_2 = 0, \; H'_1 + \lambda H'_2 = 0 \quad (1)$

εἶνε αἱ ἐξισώσεις τῶν προβολικῶν δεσμῶν, ὁ τόπος τῶν τομῶν τῶν ὁμολόγων ἐπιπέδων παριστάνεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$H_1 H'_2 - H_2 H'_1 = 0, \qquad (2)$$

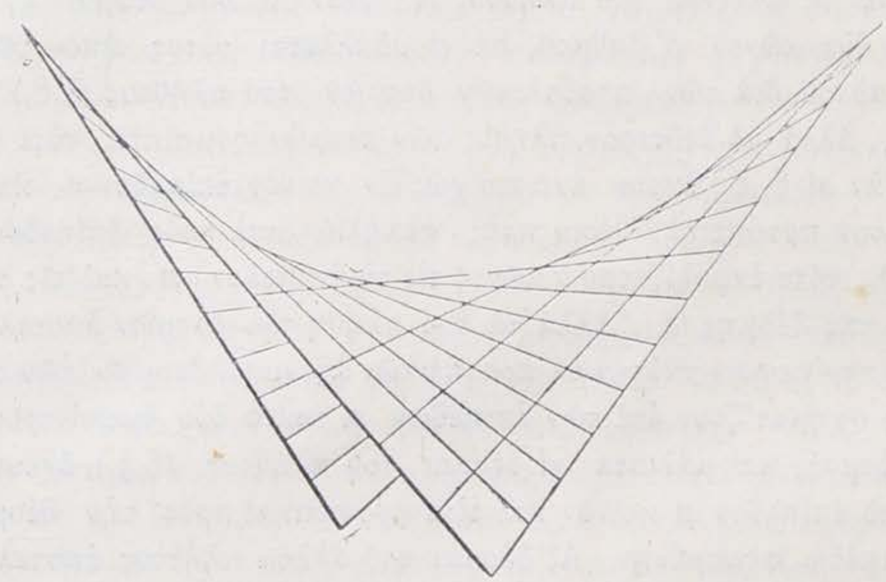
ἥτις προκύπτει δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ λ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (1), εἶνε δ' αὕτη β' βαθμοῦ ὡς πρὸς x,y,z, ὑποτιθεμένου ὅτι τὰ H_1, H_2, H'_1, H'_2

βλῶς πρὸς ἀλλήλους κειμένων εἶνε αἱ γενέτειραι μιᾶς ἐπιφανείας β' τάξεως, ἤτοι ἕκαστον ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ μιᾶς τοιαύτης γενετείρας, ἐφάπτεται μιᾶς ὡρισμένης ἐπιφανείας, τῆς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις εἰς ἐπιπεδικὰς συντεταγμένας εἶνε β' βαθμοῦ (§24, σελ. 48).

Πράγματι, ἂν

$Q_1 + \lambda Q_2 = 0, \; Q'_1 + \lambda Q'_2 = 0 \quad (1)^*$

εἶνε αἱ ἐξισώσεις τῶν δύο προβολικῶν σημειοσειρῶν, ὁ τόπος τῶν



εὐθειῶν, τῶν συνδεουσῶν τὰ ὁμόλογα σημεῖα παριστάνεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $Q_1 Q'_2 - Q'_1 Q_2 = 0, \; (2)^*$

ἥτις προκύπτει δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ λ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (1)*, εἶνε δ' αὕτη β' βαθμοῦ ὡς πρὸς u,v,w, ὑποτιθεμένου ὅτι τὰ Q_1, Q_2, Q'_1, Q'_2

** Τὴν τοιαύτην γένεσιν τῶν ἐπιφανειῶν β' βαθμοῦ εὗρε πρῶτος ὁ Steiner (βλ. Systematisbe Entwicklung der Abhängigkeit geometrishen Gestalten. Berlin, 1832, § 51. Gesammelte Abhandlurgen, Bd.I). Καθαρῶς γεωμετρικῶς ἠσχολήθησαν μὲ τὸ θέμα τοῦτο ἐκτὸς ἄλλων καὶ οἱ von Staudt (1856), Reye (1868), Cremona (1870), Schröter (1880).

εἶνε πρωτοβάθμια πολυώνυμα ὡς πρὸς x,y,z.

Ἡ αὐτὴ ἐπιφάνεια (2) παράγεται καὶ ὑπὸ τῶν τομῶν τῶν ἀντιστοίχων ἐπιπέδων τῶν δύο προβολικῶν ἀξονικῶν δεσμῶν

$H_1+\mu H'_1=0,\quad H_2+\mu H'_2=0$ (3),

ὡς ἀμέσως φαίνεται τοῦτο δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ μ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τούτων. Ἑπομένως ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας (2) ὑπάρχουν δύο διάφορα ἀλλήλων συστήματα εὐθειῶν γενετειρῶν ταύτης. Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ ἄξονες τῶν δεσμῶν (1) περιέχονται εἰς τὰς γενετείρας τοῦ συστήματος (3) (δηλαδὴ διὰ λ=0 καὶ λ = ∞), καὶ τοὐναντίον, οἱ ἄξονες τῶν δεσμῶν (3) περιέχονται μεταξὺ τῶν γενετειρῶν τοῦ συστήματος (1). Ἐν γένει ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«Ἑκάστη γενέτειρα τοῦ ἑνὸς συστήματος τέμνεται ὑπὸ ἑκάστης γενετείρας τοῦ ἄλλου συστήματος, ἀλλὰ δύο γενέτειραι τοῦ αὐτοῦ συστήματος δὲν τέμνονται».

Πρὸς τοῦτο δεικνύομεν πρῶτον ὅτι, ἀνὰ δύο τυχοῦσαι γενέτειραι τοῦ ἑνὸς συστήματος δύνανται νὰ χρησιμεύσουν ὡς ἄξονες δεσμῶν διὰ τὴν παραγωγὴν τῆς ἐπιφανείας, θεωρουμένης ὡς τόπου τῶν γενετειρῶν τοῦ ἄλλου συστήματος.

Ἐὰν μ_1 καὶ μ_2 παριστάνουν σταθερὰς ποσότητας καὶ ρ μίαν μεταβλητὴν παράμετρον, αἱ ἐξισώσεις

εἶνε πρωτοβάθμια πολυώνυμα ὡς πρὸς u,v,w.

Ἡ αὐτὴ ἐπιφάνεια (2)* παράγεται καὶ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τῶν συνδεουσῶν τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα τῶν δύο προβολικῶν σημειοσειρῶν

$Q_1+\mu Q'_1=0,\quad Q_2+\mu Q'_2=0,$ (3)*

ὡς ἀμέσως φαίνεται τοῦτο δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ μ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τούτων. Ἑπομένως ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας (2)* ὑπάρχουν δύο διάφορα συστήματα εὐθειῶν γενετειρῶν ταύτης. Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ φορεῖς τῶν σημειοσειρῶν (1)* περιέχονται εἰς τὰς γενετείρας τοῦ συστήματος (3)* (δηλαδὴ διὰ λ=0 καὶ λ = ∞), καὶ τοὐναντίον, οἱ φορεῖς τῶν σημειοσειρῶν (3)* περιέχονται μεταξὺ τῶν γενετειρῶν τοῦ συστήματος (1)*. Ἐν γένει ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«Ἑκάστη γενέτειρα τοῦ ἑνὸς συστήματος τέμνεται ὑφ' ἑκάστης γενετείρας τοῦ ἄλλου συστήματος, ἀλλὰ δύο γενέτειραι τοῦ αὐτοῦ συστήματος δὲν τέμνονται».

Πρὸς τοῦτο δεικνύομεν πρῶτον ὅτι, ἀνὰ δύο γενέτειραι τοῦ ἑνὸς συστήματος δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς φορεῖς σημειοσειρῶν διὰ τὴν παραγωγὴν τῆς ἐπιφανείας, ὡς τόπου τῶν γενετειρῶν τοῦ ἄλλου συστήματος.

Ἐὰν μ_1 καὶ μ_2 παριστάνουν σταθερὰς ποσότητας καὶ ρ μίαν μεταβλητὴν παράμετρον, αἱ ἐξισώσεις

δι' (1) δια μ=0 δια μ=∞

$\left.\begin{matrix}H_1=0\\H_2=0\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}H'_1=0\\H'_2=0\end{matrix}\right\}$

$$\begin{aligned}(H_1+\mu_1 H'_1)+\rho(H_2+\mu_1 H'_2)=0\\(H_1+\mu_2 H'_1)+\rho(H_2+\mu_2 H'_2)=0\end{aligned}\quad(4)$$

παριστάνουν δύο προβολικὰς ἀξονικὰς δέσμας, τῶν ὁποίων οἱ ἄξονες ἀνήκουν εἰς τὸ δεύτερον σύστημα τῶν γενετειρῶν.

Ἐὰν τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις γράψωμεν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$H_1+\rho H_2+\mu_1(H'_1+\rho H'_2)=0$$
$$H_1+\rho H_2+\mu_2(H'_1+\rho H'_2)=0,$$

παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τὴν τομὴν τῶν δύο ἐπιπέδων πρέπει νὰ ἐπαληθεύωνται καὶ αἱ ἐξισώσεις

$$H_1+\rho H_2=0,\ H'_1+\rho H'_2=0,$$

ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ μ_1 καὶ μ_2 εἶνε διάφοροι. Ἡ ἀπαλοιφὴ τοῦ ρ μεταξὺ τῶν τελευταίων ἐξισώσεων δίδει τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν (2), ἥτις προέκυψεν ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1). Ἐὰν ἐπαλείψωμεν τὸ ρ ἐκ τῶν ἐξισώσεων (4) εὑρίσκομεν

$$\begin{vmatrix}H_1+\mu_1 H'_1 & H_2+\mu_1 H'_2\\ H_1+\mu_2 H'_1 & H_2+\mu_2 H'_2\end{vmatrix}=0,$$

ἢ $(\mu_1-\mu_2)(H_1H'_2-H_2H'_1)=0.$

Ἐπειδὴ ἑκάστη γενέτειρα τοῦ πρώτου συστήματος δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ὡς ἄξων γενετείρας ἀξονικῆς δέσμης, πρέπει νὰ κεῖται μὲ ἑκάστην γενέτειραν τοῦ ἄλλου συστήματος ἐφ᾽ ἑνὸς ἐπιπέδου.

Ὅτι δύο γενέτειραι τοῦ αὐτοῦ συστήματος δὲν τέμνονται ἕπεται ἐκ τοῦ ὅτι, αἱ ἐξισώσεις

$$H_1+\lambda H_2=0,\quad H'_1+\lambda H'_2=0$$
$$H_1+\lambda' H_2=0,\quad H'_1+\lambda' H'_2=0$$

δύνανται τότε μόνον νὰ ἐπαληθεύωνται πᾶσαι, ἐὰν εἶνε

$H_1=0,\ H_2=0,\ H'_1=0\ H'_2=0.$

$$\begin{aligned}(Q_1+\mu_1 Q'_1)+\rho(Q_2+\mu_1 Q'_2)=0\\(Q_1+\mu_2 Q'_1)+\rho(Q_2+\mu_2 Q'_2)=0\end{aligned}\quad(4)^*$$

παριστάνουν δύο προβολικὰς σημειοσειράς, οἱ φορεῖς τῶν ὁποίων ἀνήκουν εἰς τὸ δεύτερον σύστημα τῶν γενετειρῶν.

Ἐὰν γράψωμεν τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$Q_1+\rho Q_2+\mu_1(Q'_1+\rho Q'_2)=0$$
$$Q_1+\rho Q_2+\mu_2(Q'_1+\rho Q'_2)=0,$$

παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τὴν εὐθεῖαν τὴν συνδέουσαν τὰ δύο σημεῖα πρέπει νὰ ἐπαληθεύωνται καὶ αἱ ἐξισώσεις $Q_1+\rho Q_2=0, Q'_1+\rho Q'_2=0$ ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ μ_1 καὶ μ_2 εἶνε διάφοροι. Ἡ ἀπαλοιφὴ τοῦ ρ μεταξὺ τῶν τελευταίων ἐξισώσεων δίδει τὴν ἐπιφάνειαν (2),* ἥτις προέκυψεν ἐκ τῶν ἐξίσεων (1)*.

Ἐπειδὴ ἑκαστη γενέτειρα τοῦ πρώτου συστήματος δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ὡς φορεὺς γενετείρας σημειοσσειρᾶς, πρέπει νὰ τέμνεται ὑπὸ ἑκάστης γενετείρας τοῦ δευτέρου συστήματος.

Ὅτι δύο γενέτειραι τοῦ αὐτοῦ συστήματος δὲν τέμνονται ἕπεται ἐκ τοῦ ὅτι, αἱ ἐξισώσεις

$$Q_1+\lambda Q_2=0,\quad Q'_1+\lambda Q'_2=0,$$
$$Q_1+\lambda' Q_2=0,\quad Q'_1+\lambda' Q'_2=0$$

δύνανται τότε μόνον νὰ ἐπαληθεύωνται πᾶσαι, ἐὰν εἶνε

$Q_1=0,\ Q_2=0,\ Q'_1=0,\ Q'_2=0.$

Ἀλλὰ τότε ἔπρεπε νὰ τέμνωνται οἱ ἄξονες τῶν ἀρχικῶν ἀξονικῶν δεσμῶν, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν γενομένην ὑπόθεσιν.

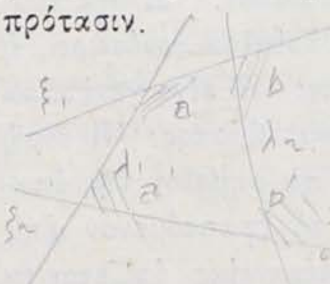
Ἀλλὰ τότε ἔπρεπε νὰ κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οἱ φορεῖς τῶν ἀρχικῶν σημειοσειρῶν, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν γενομένην ὑπόθεσιν.

§ 83. Σχέσις εὐθειογενῶν ἐπιφανειῶν β΄ βαθμοῦ καὶ β΄ τάξεως.

Ἐκ τῶν προηγουμένων παρατηροῦμεν ὅτι, δύο ἀξονικαὶ δέσμαι, χρησιμεύουσαι διὰ τὴν παραγωγὴν εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας β΄ βαθμοῦ, τῶν ὁποίων οἱ ἄξονες εἶνε γενέτειραι τοῦ πρώτου συστήματος, τέμνουν γενέτειράν τινα τοῦ πρώτου συστήματος κατὰ μίαν σημειοσειράν. Εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς σημειοσειρᾶς τέμνονται δύο ἐπίπεδα τῶν χρησιμοποιουμένων δεσμῶν, καὶ ἑπομένως διέρχεται δι᾽ αὐτοῦ μία γενέτειρα τοῦ δευτέρου συστήματος. Καθ᾽ ὅμοιον τρόπον αἱ δύο δέσμαι τέμνουν δευτέραν τινὰ γενέτειραν τοῦ πρώτου συστήματος κατὰ μίαν σημειοσειρὰν διὰ τῆς αὐτῆς σειρᾶς τῶν γενετειρῶν τοῦ δευτέρου συστήματος. Οὕτω αἱ γενέτειραι αὗται τοῦ β΄ συστήματος παρουσιάζονται ὡς εὐθεῖαι συνδέουσαι τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα δύο προβολικῶν σημειοσειρῶν. Ἤτοι ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«Αἱ γενέτειραι τοῦ ἑνὸς συστήματος τέμνονται ὑπὸ τῶν γενετειρῶν τοῦ ἄλλου κατὰ προβολικὰς σημειοσειράς. Δι᾽ ἑκάστου σημείου τῆς ἐπιφανείας

Θεωροῦμεν τώρα δύο οἱασδήποτε σημειοσειράς, χρησιμευούσας διὰ τὴν παραγωγὴν τῆς ἐπιφανείας καὶ τῶν ὁποίων οἱ φορεῖς ἀνήκουν εἰς τὰς γενετείρας τοῦ πρώτου συστήματος. Ἐὰν διά τινος σημείου τῆς μιᾶς σημειοσειρᾶς καὶ μιᾶς τυχούσης γενετείρας τοῦ δευτέρου συστήματος φέρωμεν ἐπίπεδον, θὰ διέρχεται τοῦτο καὶ διὰ τοῦ ἀντιστοίχου σημείου τῆς ἄλλης σημειοσειρᾶς. Οὕτω ἑκάστη γενέτειρα τοῦ δευτέρου συστήματος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἄξων μιᾶς ἀξονικῆς δέσμης, ἡ ὁποία σχετίζεται προβολικῶς πρὸς ἑκάστην τῶν θεωρουμένων σημειοσειρῶν. Ἑπομένως ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.



«Αἱ ἀξονικαὶ δέσμαι, αἵτινες παράγονται ἐκ πάντων τῶν ἐπιπέδων ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖται τυχοῦσα γενέτειρα τοῦ ἑνὸς συστήματος καὶ πᾶσαι αἱ τοῦ ἄλλου, εἶνε προβολικαὶ

διέρχεται μία γενέτειρα ἑκάστου συστήματος».

Ἑπομένως,

«ἡ ἐπιφάνεια τῆς § 82 (2) δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τόπος τῶν εὐθειῶν τῶν συνδεουσῶν ἀντίστοιχα σημεῖα δύο προβολικῶν σημειοσειρῶν. Ἤτοι αἱ θεωρούμεναι ἐπιφάνειαι β′ βαθμοῦ εἶνε καὶ ἐπιφάνειαι β′ τάξεως».

Ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται ἀκόμη ὅτι, ἕκαστον ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἄγεται διά τινος γενετείρας, εἶνε ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας, εὐκόλως δ᾽ εὑρίσκεται τὸ σημεῖον ἐπαφῆς αὐτοῦ. Διότι τὸ ἐπίπεδον πρέπει νὰ τέμνῃ τὴν ἐπιφάνειαν κατὰ μίαν καμπύλην β′ βαθμοῦ, ἐπειδὴ τέμνει τοῦτο τὰς δύο ἀξονικὰς δέσμας κατὰ δύο προβολικὰς ἐπιπέδους δέσμας. Ἀλλ᾽ ἡ καμπύλη αὐτη ἀποτελεῖται ἐκ δύο τεμνομένων εὐθειῶν. Ἡ μία τούτων εἶνε ἡ δοθεῖσα γενέτειρα, ἡ δὲ ἄλλη πρέπει νὰ εἶνε γενέτειρα τοῦ ἄλλου συστήματος. Ἡ τομὴ τούτων εἶνε τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς, ἐπειδὴ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας ὁρίζεται ἐκ δύο γραμμικῶν στοιχείων, κειμένων ἐπ᾽ αὐτῆς, ἄρα ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ διὰ τῶν δύο γενετειρῶν ταύτης.

πρὸς ἀλλήλας. Ἐφ᾽ ἑκάστου ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς ἐπιφανείας κεῖται μία γενέτειρα ἑκάστου συστήματος».

Ἑπομένως,

«ἡ ἐπιφάνεια τῆς 82 (2) δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τόπος τῶν τομῶν τῶν ἀντιστοίχων ἐπιπέδων δύο προβολικῶν ἀξονικῶν δεσμῶν. Ἤτοι αἱ θεωρούμεναι ἐπιφάνειαι β′ τάξεως εἶνε καὶ ἐπιφάνειαι β′ βαθμοῦ».*

Ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται ἀκόμη ὅτι, ἕκαστον σημεῖον, κείμενον ἐπί τινος γενετείρας, εἶνε σημεῖον τῆς ἐπιφανείας, τὸ δὲ ἀντίστοιχον εἰς τοῦτο ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εὑρίσκομεν παρατηροῦντες ὅτι, πάντα τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τῆς ἐπιφανείας, τὰ διερχόμενα διὰ τοῦ ἐν λόγῳ σημείου, πρέπει νὰ χωρίζωνται εἰς δύο ἀξονικὰς δέσμας, τῶν ὁποίων οἱ ἄξονες τέμνονται. Διότι ἡ ἰδιότης αὐτη ἀντιστοιχεῖ διὰ τῆς ἀρχῆς τῆς ἐναλλαγῆς εἰς τὸν χωρισμὸν κωνικῆς τομῆς εἰς δύο εὐθείας. Ὁ εἷς ἄξων εἶνε ἡ μία γενέτειρα, ὁ δὲ ἄλλος πρέπει νὰ εἶνε γενέτειρα τοῦ ἄλλου συστήματος. Τὸ ὑπὸ τῶν ἀξόνων ὁριζόμενον ἐπίπεδον εἶνε τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον, διότι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς αὐτοῦ ὁρίζεται ὡς τομὴ δύο ἀκμῶν τῶν ἐφαπτομένων κώνων τῶν ἀναχωρούντων ἀπὸ τῶν σημείων αὐτοῦ, καὶ δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς τοιαύτας ἀκμὰς τὰς δύο γενετείρας.

Ὅτι ἡ ἀρχὴ τῆς ἐναλλαγῆς ἰσχύει καὶ δι' ἐπιφανείας β' βαθμοῦ καὶ β' τάξεως, παραγομένας ὑπὸ προβολικῶν σημειοσειρῶν ἢ ἀξονικῶν δεσμῶν τοιούτων, ἀποδεικνύεται καὶ ὡς ἑξῆς ἀναλυτικῶς.

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (3) τῆς § 82 εὑρίσκομεν εὐκόλως

$$H_1 : H'_1 : H_2 : H'_2 = \lambda\mu : -\lambda : -\mu : 1.$$

Ἡ ἀναλογία αὕτη ὁρίζει τρεῖς ἐξισώσεις γραμμικὰς ὡς πρὸς x,y,z, καὶ ἐξ αὐτῶν δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς συντεταγμένας ἑνὸς σημείου τῆς ἐπιφανείας ὡς συναρτήσεις δύο παραμέτρων. Ἡ ἐξίσωσις τοῦ κινουμένου σημείου τῆς ἐπιφανείας προκύπτει ἐὰν ἀπαλείψωμεν τὰ x,y,z, ρ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων

$$\rho H_1 = \lambda\mu,\ \rho H'_1 = -\lambda,\ \rho H_2 = -\mu,\ \rho H'_2 = 1,$$

$$ux + uy + wz + 1 = 0.$$

Ἡ οὕτω προκύπτουσα ἐξίσωσις ἔχει τὴν μορφὴν

$$P + \lambda P' + \mu Q + \lambda\mu Q' = 0, \tag{5}$$

ἐνῷ τὰ P,Q,P',Q' παριστάνουν ἀκεραίας γραμμικὰς συναρτήσεις τῶν u,v,w. Ἑπομένως αἱ $P + \lambda P' = 0,\ Q + \lambda Q' = 0$

ἢ αἱ $P + \mu Q = 0,\ P' + \mu Q' = 0$

παριστάνουν σημειοσειρὰς κειμένας ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, δηλαδὴ προβολικὰς σημειοσειρὰς τῶν ὁποίων οἱ φορεῖς εἶνε γενέτειραι τοῦ αὐτοῦ συστήματος. Οὕτω ἡ πιφάνεια θεωρεῖται καὶ ὡς τόπος τῶν εὐθειῶν τῶν συνδεουσῶν ἀντίστοιχα σημεῖα τῶν σημειοσειρῶν τούτων.

Τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ κινούμενον σημεῖον, τὸ ὁριζόμενον διὰ τῶν παραμέτρων λ καὶ μ, διέρχεται διὰ τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων τῆς δέσμης (1) τῆς § 82 καθὼς καὶ διὰ τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων τῆς δέσμης (3) τῆς αὐτῆς παραγράφου, ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις αὐτοῦ εἶνε

$$H_1 + \lambda H_2 + \mu(H'_1 + \lambda H'_2) = H_1 + \mu H'_1 + \lambda(H_2 + \mu H'_2) = 0$$

ἢ
$$H_1 + \lambda H_2 + \mu H'_1 + \lambda\mu H'_2 = 0. \tag{5*}$$

Ἡ ἀναλογία τῆς ἐξισώσεως ταύτης μετὰ τῆς (5) δεικνύει τὴν ἰσχὺν τῆς ἀρχῆς τῆς ἐναλλαγῆς διὰ τὰς ἐπιφανείας περὶ τῶν ὁποίων γίνεται λόγος.

Ἂν οἱ φορεῖς τῶν σημειοσειρῶν ἢ οἱ ἄξονες τῶν δεσμῶν τέμνωνται, θὰ ἔχωμεν ἐπίπεδον καμπύλην ἢ κῶνον β' τάξεως, ἐν ᾗ δὲ περιπτώσει ἔχουν προοπτικὴν θέσιν οἱ φορεῖς ἢ οἱ ἄξονες, ἡ μὲν καμπύλη ἐκφυλίζεται εἰς ἓν ζεῦγος σημείων, ὁ δὲ κῶνος εἰς ἓν ζεῦγος ἐπιπέδων.

Διάφοροι ἀσκήσεις.

1) Νὰ ἀχθῇ τμῆμα εὐθείας ΑΒ μεταξὺ τῶν πλευρῶν α καὶ β μιᾶς γωνίας οὕτως, ὥστε τὸ μέσον αὐτοῦ νὰ κεῖται ἐπὶ δοθέντος σημείου Ρ, ἢ οὕτως ὥστε τὸ σημεῖον Α νὰ διχοτομῇ τὸ τμῆμα ΡΒ.

2) Δύο σημειοσειραὶ k καὶ k_1 κεῖνται προοπτικῶς πρὸς τρίτην k_2. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ ὑπ' αὐτῶν παραγομένη δέσμη ἀκτίνων β' τάξεως.

3) Δύο δέσμαι Ο καὶ O_1 ἔχουν προοπτικὴν θέσιν πρὸς ἄλλην O_3. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ ὑπ' αὐτῶν παραγομένη καμπύλη β' βαθμοῦ.

4) Ἐκ δύο προβολικῶν σημειοσειρῶν δίδονται τρία ζεύγη ὁμολόγων σημείων AA_1, BB_1, $\Gamma\Gamma_1$. Εἰς δοθὲν σημεῖον Δ τῆς k νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀντίστοιχον αὐτοῦ Δ_1 τῆς k_1, καὶ νὰ κατασκευασθῇ ἡ ὑπὸ τῶν k καὶ k_1 παραγομένη δέσμη ἀκτίνων β' τάξεως ἐν γένει.

5) Δοθεισῶν δύο προβολικῶν ἐπιπέδων δεσμῶν νὰ κατασκευασθοῦν δύο ἀκτῖνες κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας ἐν τῇ μιᾷ δέσμῃ, ἀντιστοιχοῦσαι εἰς καθέτους ἀκτῖνας τῆς ἄλλης.

6) Νὰ κατασκευασθῇ ὑπερβολή, τῆς ὁποίας δίδονται ἐκτὸς τῶν ἀσυμπτώτων ἓν ἀκόμη σημεῖον ἢ καὶ μία ἐφαπτομένη αὐτῆς.

7) Νὰ κατασκευασθῇ παραβολή, τῆς ὁποίας δίδονται τέσσαρες ἐφαπτόμεναι ἢ τρεῖς ἐφαπτόμεναι καὶ ἓν σημεῖον ἐπαφῆς αὐτῶν.

8) Νὰ κατασκευασθῇ ὑπερβολή, τῆς ὁποίας δίδονται τρία σημεῖα καὶ αἱ διευθύνσεις τῶν ἀσυμπτώτων αὐτῆς.

9) Ἐὰν γωνία τις, ἔχουσα σταθερὸν μέγεθος, κινῆται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῆς οὕτως, ὥστε ἡ μὲν κορυφὴ ταύτης νὰ διαγράφῃ δοθεῖσαν εὐθεῖαν k ἡ δὲ μία τῶν πλευρῶν διέρχεται διὰ δοθέντος σημείου Ο, ἡ ἄλλη πλευρὰ αὐτῆς περιβάλλει μίαν παραβολήν, ἥτις ἐφάπτεται τῆς k.

10) Τρίγωνον μεταβλητὸν AOA_1 κινεῖται οὕτως ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτοῦ, ὥστε αἱ μὲν κορυφαὶ τούτου Α καὶ A_1 διαγράφουν δύο εὐθείας k καὶ k_1, ἡ δὲ γωνία τῆς κορυφῆς Ο, διατηρουμένη ἀμετάβλητος κατὰ μέγεθος, στρέφεται περὶ ἓν σημεῖον. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα AA_1 περιβάλλει μίαν καμπύλην β' βαθμοῦ, τῆς ὁποίας ἐφάπτονται αἱ k καὶ k_1.

11) Ἡ βάσις AA_1 ἑνὸς μεταβλητοῦ τριγώνου APA_1 δίδεται κατὰ μέγεθος καὶ ὀλισθαίνει ἐπὶ σταθερᾶς εὐθείας k, ἐνῷ αἱ ἄλλαι δύο πλευραὶ αὐτοῦ ΡΑ καὶ PA_1 στρέφονται περὶ σταθερὰ σημεῖα Ο καὶ O_1. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ κορυφὴ Ρ γράφει ὑπερβολήν, διερχομένην διὰ τῶν Ο καὶ O_1, ἔχουσαν ἀσύμπτωτον τὴν εὐθεῖαν k.

12) Ἐὰν δύο προβολικαὶ δέσμαι παράγουν ὑπερβολήν, τέμνονται ὑπὸ ἑκάστης τῶν ἀσυμπτώτων αὐτῆς εἰς κατ' ἀναλογίαν ἴσας σημειοσειράς.

13) Ἐὰν δύο γωνίαι αβ καὶ $\alpha_1\beta_1$, ἔχουσαι δοθὲν μέγεθος, στρέφωνται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῶν περὶ τὰς σταθερὰς κορυφὰς Ο καὶ O_1, ὥστε ἐκ τῶν τεσσάρων τομῶν τῶν πλευρῶν αὐτῶν τὸ $\alpha\alpha_1$ νὰ διαγράφῃ μίαν εὐθεῖαν, ἕκαστον τῶν τριῶν ἄλλων σημείων τομῶν $\beta\beta_1$, $\alpha\beta_1$, $\alpha_1\beta$ κινεῖται ἐπὶ μιᾶς καμπύλης β' βαθμοῦ, διερχομένης διὰ τῶν Ο καὶ O_1.

14) Ἐὰν ἀπό τινος σημείου Ρ φέρωμεν εὐθείας καθέτους ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ἀξονικῆς τινος δέσμης ξ, οἱ πόδες τῶν καθέτων κεῖνται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας

κύκλου, ἐχούσης ὡς διαμετρικὴν χορδὴν τὴν ἀπὸ τοῦ σημείου Ρ κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα ξ καὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς εἶνε κάθετον ἐπὶ τὴν ξ.

15) Ἐὰν διὰ τῶν πλευρῶν α καὶ $α_1$ ὀξείας τινὸς γωνίας φέρωμεν πάντα τὰ ζεύγη καθέτων ἐπιπέδων, τέμνονται ταῦτα κατὰ τὰς ἀκτῖνας ἑνὸς κώνου β' βαθμοῦ, διερχομένου διὰ τῶν α καὶ $α_1$. Ἕκαστον ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν α ἢ τὴν $α_1$ τέμνει τὸν κῶνον κατὰ περιφέρειαν κύκλου, ἕκαστον δὲ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον $αα_1$ τέμνει αὐτὸν κατὰ καμπύλην β' βαθμοῦ, τῆς ὁποίας ὁ εἷς ἄξων κεῖται ἐπὶ τῆς $αα_1$. Ὁ κῶνος οὗτος καλεῖται (κατὰ τὸν Schröter) ***ὀρθογώνιος*** κῶνος β' βαθμοῦ.

16) Τὸν ὀρθογώνιον κῶνον β' βαθμοῦ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ τῇ βοηθείᾳ ἑνὸς ἐπιπέδου **a**, τὸ ὁποῖον εἶνε κάθετον ἐπὶ τὴν $α_1$ εἰς τὸ σημεῖον $αα_1$ (τῆς προηγουμένης προτάσεως). Ἐὰν δηλαδὴ ὀρθή τις γωνία, εἰς τὴν κορυφὴν τῆς ὁποίας τέμνονται τὸ **a** καὶ ἡ α, κινῆται οὕτως ὥστε τὸ μὲν ἐπίπεδον αὐτῆς νὰ διέρχεται διὰ τῆς εὐθείας α, ἡ δὲ μία πλευρὰ ταύτης νὰ διαγράφῃ τὸ ἐπίπεδον **a**, ἡ ἄλλη πλευρὰ αὐτῆς διαγράφει τὸν κῶνον.

17) Ἐὰν ἀπό τινος σημείου Ρ φέρωμεν καθέτους εὐθείας ἐπὶ τὰς ἀκτῖνας μιᾶς ἐπιπέδου δέσμης Ο, οἱ πόδες αὐτῶν κεῖνται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας. Αἱ κάθετοι αὗται κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου κώνου β' βαθμοῦ, ἐὰν τὸ Ρ δὲν κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς δέσμης.

18) Ἐὰν δύο ὁμόκεντροι ἐπίπεδοι δέσμαι, τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα τέμνονται κατὰ ὀξεῖαν γωνίαν, σχετίζωνται οὕτω μεταξύ των, ὥστε ἀνὰ δύο ὁμόλογοι ἀκτῖνες αὐτῶν νὰ εἶνε κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, παράγουν μίαν δέσμην ἐπιπέδων β' τάξεως. Ἤτοι, ἂν ὀρθή τις γωνία στρέφεται περὶ τὴν κορυφὴν αὐτῆς, ὥστε αἱ δύο πλευραὶ ταύτης νὰ κινοῦνται ἐπὶ δύο ἐπιπέδων, τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς περιβάλλει ἕνα κῶνον β' βαθμοῦ, ὅστις ἐφάπτεται τῶν δύο ἐν λόγῳ ἐπιπέδων.

19) Ἐὰν ἀπό τινος σημείου φέρωμεν εὐθείας καθέτους ἐπὶ τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα ἑνὸς κώνου β' βαθμοῦ, θὰ κεῖνται αὗται ἐπὶ ἄλλου κώνου β' βαθμοῦ· Ἤτοι, τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα παράγονται ὑπὸ δύο προβολικῶν δεσμῶν ἀκτίνων καὶ ἐκ τούτων δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν δύο προβολικὰς ἀξονικὰς δέσμας, αἵτινες παράγουν δεύτερον κῶνον.

20) Δύο σημεῖα Ρ καὶ $Ρ_1$ καλοῦνται ἀντίστροφα ὡς πρὸς περιφέρειαν, ἔχουσαν κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα ρ, ἐὰν κεῖνται ἐπ' εὐθείας μετὰ τοῦ Κ καὶ εἶνε συζυγῆ ὡς πρὸς τὴν περιφέρειαν. Ταῦτα χωρίζονται ἁρμονικῶς διὰ τῶν ἄκρων σημείων μιᾶς διαμετρικῆς χορδῆς τῆς περιφερείας καὶ θὰ εἶνε $(ΚΡ)\,(ΚΡ_1)=ρ^2$. Μία τοιαύτη ἀπεικόνισις σημείων τοῦ ἐπιπέδου διὰ μιᾶς περιφερείας καλεῖται κατὰ τὸν Liouville (Journal de Math., I. Série, T. XII, σελ. 265) ***ἀρχὴ τῶν ἀντιστρόφων ἀκτίνων ἢ ἀπεικόνισις δι' ἀντιστροφῆς***. Τὸ μὲν Κ καλεῖται ***κέντρον***, τὸ δὲ $ρ^2$ ***δύναμις*** τῆς ἀντιστροφῆς καὶ ἀντιστοιχεῖ εἰς ἐσωτερικὸν μὲν σημεῖον τοῦ κύκλου ἐξωτερικὸν αὐτοῦ, εἰς κατ' ἐκδοχὴν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τὸ κέντρον Κ, τὰ δὲ σημεῖα τῆς περιφερείας εἰς ἑαυτά.

21) Εἰς δοθεῖσαν εὐθεῖαν γ τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχεῖ περιφέρεια Π, τῆς ὁποίας ἡ κάθετος διάμετρος ἐπὶ τὴν γ ἔχει ἄκρον τὸ κέντρον ἀντιστροφῆς καὶ τὸν πόλον Γ τῆς γ.

22) Δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι γ καὶ $γ_1$ τέμνονται ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν καθὼς καὶ αἱ ἀντίστροφοι αὐτῶν περιφέρειαι Π καὶ $Π_1$.

ΠΙΝΑΞ ΟΝΟΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΩΝ

(Οἱ ἀριθμοὶ φανερώνουν τὰς σελίδας τοῦ βιβλίου)

Α

Β

Γ

Ο

Π

Ρ

Σ

Τ

Υ

Φ

Χ
