ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙ

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

Ι. Ν. Χ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚ ΤΟΥ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΥ Π. Δ. ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ
(8 — Οδός Λυκούργου — 8)
1900

Πᾶν ἀντίτυπον μὴ φέρον τὴν ἰδιόχειρον ὑπογραφήν μου θεωρεῖται ἐκ τυποκλοπίας προερχόμενον·

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ὁ παρὼν πρῶτος τόμος τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ περιέχει τὴν εὕρεσιν τῶν παραγουσῶν καὶ τὴν θεωρίαν τῶν ὡρισμένων ὁλοκληρωμάτων μετὰ τῶν ἐφαρμογῶν αὐτῶν εἴς τε τὴν γεωμετρίαν καὶ εἰς τὴν ἀνάλυσιν, κατὰ τὸ σύστημα, ὅπερ διδάσκω ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ, ἐξ ὅτου διωρίσθην· αἱ δὲ διαφορικαὶ ἐξισώσεις καὶ ὁ λογισμὸς τῶν μεταβολῶν θέλουσι περιληφθῇ ἐν τῷ προσεχῶς ἐκδοθησομένῳ δευτέρῳ τόμῳ.

Ἐν τῇ εὑρέσει τῶν παραγουσῶν, ἥτις ἐκτίθεται ἐν τῷ Α΄ βιβλίῳ, παρέλαβον, ὅσα συνήθως εὑρίσκονται ἐν τοῖς διδακτικοῖς συγγράμμασιν· ἴδιον προσέθηκα μόνον ἐν τῇ ὁλοκληρώσει τῶν ῥητῶν συναρτήσεων νέον τρόπον, δι᾽ οὗ εὑρίσκεται τὸ ὁλοκλήρωμα, ὅταν ἐκφράζηται δι᾽ ἑνὸς λογαρίθμου ῥητῆς συναρτήσεως, χωρὶς νὰ ἀναλυθῇ ὁ παρονομαστὴς εἰς τοὺς πρωτοβαθμίους αὐτοῦ παράγοντας, ὡς ἀπαιτεῖ ἡ συνήθης μέθοδος τῆς ὁλοκληρώσεως.

Καὶ τὴν θεωρίαν τῶν ὡρισμένων ὁλοκληρωμάτων, ἣν περιέχει τὸ Β΄ βιβλίον, ἐξέθηκα κατὰ μέθοδον ἰδίαν, ἥτις καὶ ὁμοιόμορφος εἶνε καὶ ἐπακριβῶς διορίζει τοὺς ὅρους τῆς ὑπάρξεως αὐτῶν καὶ πρὸς τὰς γεωμετρικὰς ἐφαρμογὰς αὐτῶν μᾶλλον προσαρμόζεται· ἔδωκα δὲ εἰς τὴν θεωρίαν ταύτην ἱκανὴν ἔκτασιν· διότι αὕτη ἀποτελεῖ ἓν ἐκ τῶν κυριωτάτων μερῶν τῆς μαθηματικῆς ἀναλύσεως.

Γράφων τὸ σύγγραμμα τοῦτο ἀπέβλεπον, ὡς εἰς πρωτεύοντα σκοπόν, εἰς τὴν ἀσφαλῆ θεμελίωσιν καὶ κραταίωσιν τῶν περὶ τὴν μαθηματικὴν ἀνάλυσιν σπουδῶν παρ᾽ ἡμῖν. Ἐὰν δὲ τὸ ἔργον τοῦτο συντελέσῃ, καὶ μικρὸν ἔτι, πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον, θὰ ὑπολάβω τοὺς κόπους μου ἐπαρκῶς ἀμειφθέντας.

Ἀθήνησι τῇ 20 Ὀκτωβρίου 1899.

Ι. Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙΣ

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ὁρισμὸς τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ.

1. Ὁ ὁλοκληρωτικὸς λογισμὸς εἶνε ἀντίστροφος τοῦ διαφορικοῦ· ἐν μὲν τῷ διαφορικῷ λογισμῷ ζητεῖται τὸ διαφορικὸν ἢ ἡ παράγωγος δεδομένης συναρτήσεως καὶ ἡ εὕρεσις τούτου λέγεται *διαφόρισις*· ἐν δὲ τῷ ὁλοκληρωτικῷ ζητεῖται ἡ συνάρτησις, ἥτις ἔχει δεδομένην παράγωγον, ἢ δεδομένον διαφορικόν, καὶ ἡ εὕρεσις αὐτῆς λέγεται *ὁλοκλήρωσις*.

2. Ἐὰν $\sigma(x)$ εἶνε ἡ δεδομένη συνάρτησις καὶ y ἡ ζητουμένη, ἡ μεταξὺ αὐτῶν σχέσις ἐκφράζεται διὰ τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως

$$\frac{dy}{dx}=\sigma(x) \qquad ἢ \qquad dy=\sigma(x)dx \tag{1}$$

Ἡ λύσις ἄρα τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶνε ἔργον τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ.

Ἀλλ' ὁ ὁλοκληρωτικὸς λογισμὸς δὲν περιορίζεται εἰς τὴν λύσιν μόνης τῆς ἐξισώσεως (1), τουτέστιν εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς ἀγνώστου συναρτήσεως y, ἥτις ἐπαληθεύει αὐτὴν (οἱουδήποτε ὄντος τοῦ x)· ὁρμώμενος ἀπὸ τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (1), ἥτις εἶνε ἡ ἁπλουστάτη τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων, ζητεῖ *τὴν λύσιν πάσης διαφορικῆς ἐξισώσεως*, τουτέστι πάσης ἐξισώσεως, ἥτις περιέχει μίαν ἢ περισσοτέρας ἀγνώστους συναρτήσεις καὶ παραγώγους αὐτῶν ἢ διαφορικὰ αὐτῶν μέχρι τάξεώς τινος, ἢ *καὶ τὴν λύσιν παντὸς συστήματος διαφορικῶν ἐξισώσεων.*

3. Ἡ *λύσις* διαφορικῆς ἐξισώσεως εἶνε ἡ εὕρεσις πάσης συναρτήσεως ἢ πασῶν τῶν συναρτήσεων, αἵτινες ἐπαληθεύουσιν αὐτήν, χωρὶς νὰ ὁρισθῶσιν ἢ νὰ δεσμευθῶσι δι' οὐδεμιᾶς σχέσεως αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταί. Ὁμοίως καὶ ἡ λύσις συστήματος.

4. Ἡ λύσις διαφορικῆς ἐξισώσεως λέγεται καὶ *ὁλοκλήρωσις* αὐτῆς. Ὁμοίως καὶ ἡ λύσις συστήματος διαφορικῶν ἐξισώσεων λέγεται *ὁλοκλήρωσις τοῦ συστήματος.*

Χρησιμότης τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ.

5. Ὁ ὁλοκληρωτικὸς λογισμὸς εἶνε τὸ σπουδαιότατον μέρος τῆς μαθηματικῆς διὰ τὰς πολλὰς καὶ ποικίλας ἐφαρμογὰς αὐτοῦ· ἡ καταμέτρησις τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων (ἡ εὕρεσις τοῦ ὄγκου τῶν στερεῶν, τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν ἐπιφανειῶν, τοῦ μήκους τῶν γραμμῶν) ἀνάγεται, ὡς θὰ ἴδωμεν ἐν τοῖς ἑξῆς, εἰς τὴν εὕρεσιν συναρτήσεως ἐχούσης δεδομένον διαφορικόν, ἤτοι εἰς τὴν λύσιν τῆς ἁπλουστάτης τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων· εἰς τὸ αὐτὸ δὲ πρόβλημα τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ ἀνάγεται καὶ ἡ εὕρεσις τοῦ ὁρίου, πρὸς ὃ τείνει τὸ ἄθροισμα ἀπειροστῶν ἐξαρτωμένων ἐκ μιᾶς ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν· ἀλλὰ καὶ πᾶν ζήτημα τῆς φυσικῆς καὶ τῆς μηχανικῆς ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν διαφορικῶν ἐξισώσεων, ἤτοι εἰς πρόβλημα τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ· διότι τὰ ἀξιώματα καὶ ἐν γένει αἱ ἀρχαί, ἐφ' ὧν στηρίζεται ἡ ἐφαρμογὴ τῶν μαθηματικῶν εἰς τὴν φυσικὴν καὶ εἰς τὴν μηχανικήν, διδάσκουσιν ἡμᾶς μόνον τὰ συμβαίνοντα εἰς ἀπειροστὰ μέρη τῶν ὑλικῶν σωμάτων καὶ εἰς ἀπειροστὸν μέρος τοῦ χρόνου καὶ διὰ τοῦτο ἄγουσιν ἀναγκαίως εἰς διαφορικὰς ἐξισώσεις· ἡ δὲ ὁλοκλήρωσις τῶν ἐξισώσεων τούτων διδάσκει ἡμᾶς τὰ ἐν πεπερασμένοις σώμασι καὶ ἐν πεπερασμένῳ χρόνῳ συμβαίνοντα.

Διαιρέσεις τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ.

6. Ὁ ὁλοκληρωτικὸς λογισμὸς διαιρεῖται εἰς δύο μέρη· καὶ τὸ μὲν πρῶτον πραγματεύεται τὴν εὕρεσιν συναρτήσεως ἐχούσης δεδομένον διαφορικὸν καὶ τὰς ἐφαρμογὰς τοῦ ζητήματος τούτου εἴς τε τὴν ἀνάλυσιν καὶ εἰς τὴν γεωμετρίαν· τὸ δὲ δεύτερον πραγματεύεται τὴν λύσιν τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων ἐν γένει.

Σημείωσις. Καὶ ἡ ἄλγεβρα, ὡς καὶ ὁ ὁλοκληρωτικὸς λογισμὸς πραγματεύεται τὴν λύσιν ἐξισώσεων· ἀλλ' ὑπάρχει οὐσιώδης μεταξὺ τούτων διαφορά, ἡ ἑξῆς· ὅτι αἱ ἐξισώσεις, περὶ ἃς ἀσχολεῖται ὁ ὁλοκληρωτικὸς λογισμός, εἶνε διαφορικαί, ἤτοι περιέχουσι διαφορικὰ τῶν ἀγνώστων συναρτήσεων, ἐνῷ αἱ ἐξισώσεις, ἃς ἐξετάζει ἡ ἄλγεβρα, ἔχουσι μόνον τοὺς ἀγνώστους, οἵτινες ἐν γένει εἶνε ἀριθμοὶ ὡρισμένοι καὶ οὐχὶ συναρτήσεις. Ὑπάρχουσιν ἐν τούτοις ὁμοιότητές τινες μεταξὺ τῶν δύο τούτων μερῶν τῆς μαθηματικῆς· ἐν πρώτοις εἶνε ἐν ἀμφοτέροις πολὺ εὐκολωτέρα ἡ ἐξέλεγξις τῆς λύσεως (ὅταν τις δοθῇ) ἢ ἡ εὕρεσις αὐτῆς. ἔπειτα, ὡς ἐν τῇ ἀλγέβρᾳ ἐζήτουν νὰ ἀναγάγωσι τὴν λύσιν πάσης ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως εἰς τὴν λύσιν τῆς ἁπλουστάτης $x^{\mu}=\alpha$, ἤτοι νὰ ἐκφράσωσι τὴν λύσιν διὰ ῥιζικῶν, μέχρις οὗ ἀπεδείχθη ὅτι τοῦτο ἐν γένει εἶνε ἀδύνατον, οὕτω καὶ ἐν τῷ ὁλοκληρωτικῷ λογισμῷ ζητοῦμεν νὰ ἐκφράσωμεν τὴν λύσιν πάσης διαφορικῆς ἐξισώσεως διὰ λύσεων τῆς ἁπλουστάτης ἐξ αὐτῶν, ἤτοι τῆς ἐξισώσεως $\frac{dy}{dx}=\sigma(x)$.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄

ΕΥΡΕΣΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΕΚ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΑΥΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι.

ΠΕΡΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΩΣ ΕΝ ΓΕΝΕΙ

Ὁρισμὸς τῆς παραγούσης.

7. Ἡ συνάρτησις, ἥτις ἔχει παράγωγον τὴν δοθεῖσαν συνάρτησιν $\sigma(x)$, ἢ διαφορικὸν τὸ $\sigma(x)dx$, λέγεται *παράγουσα* αὐτῆς, ἢ *ὁλοκλήρωμα* τοῦ $\sigma(x)\,dx$, καὶ παρίσταται, ὅταν σχετίζηται πρὸς τὴν $\sigma(x)$, ὡς ἑξῆς (*)

$$\int \sigma(x)dx$$

8. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον εἶνε προφανῶς

$$d\left[\int \sigma(x)dx\right] = \sigma(x)dx \tag{1}$$

καὶ

$$\int d\sigma(x) = \sigma(x) \tag{2}$$

ἐξ ὧν βλέπομεν, ὅτι τὰ δύο σύμβολα d καὶ $\int$ ἀναιροῦσιν ἄλληλα, ὅταν ἐπὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς παραστάσεως ἐφαρμόζωνται· διότι αἱ ὑπ' αὐτῶν σημαινόμεναι πράξεις (διαφόρισις, ὁλοκλήρωσις) εἶνε ἀντίστροφοι πράξεις καὶ διὰ τοῦτο ἀναιροῦσιν ἀλλήλας.

(*) Τὸ σύμβολον $\int$ εἶνε τὸ ἀρχικὸν γράμμα τῆς λέξεως somme· μετεχειρίσθη δὲ τοῦτο ὁ Λεϊβνίτιος πρὸς παράστασιν τῆς παραγούσης, διότι, ὡς θὰ ἴδωμεν ἐν τοῖς ἑπομένοις, ἡ συνάρτησις αὕτη εἶνε ὅριον τοῦ ἀθροίσματος ποσοτήτων, ὧν ἑκάστη μὲν τείνει πρὸς τὸ μηδὲν ὁ δὲ ἀριθμὸς αὐτῶν αὐξάνει εἰς ἄπειρον· ἡ ἄθροισις δὲ τοιούτων ποσοτήτων ἐκλήθη ὁλοκλήρωσις (καὶ τὸ ἐξαγόμενον αὐτῆς, ὁλοκλήρωμα)· διότι δι' αὐτῆς εὑρίσκεταί τ ὅλον ἐκ τῶν ἀπειροστῶν μερῶν του.

Ἀντιστοιχία τῶν τύπων τῆς διαφορίσεως καὶ τῆς ὁλοκληρώσεως.

9. Ἕκαστος τύπος διαφορίσεως δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς τύπος ὁλοκληρώσεως· διότι, ἂν εἶνε

$$d\,\varphi(x) = \sigma(x).\,dx, \tag{3}$$

θὰ εἶνε (κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ὁλοκληρώματος)

$$\text{καὶ} \quad \int \sigma(x)dx = \varphi(x) \tag{3'}$$

Καὶ τἀνάπαλιν, ἐκ τῆς ἐξισώσεως (3') ἕπεται ἀναγκαίως ἡ (3)· ἀμφότεραι δηλαδὴ αἱ ἐξισώσεις αὗται μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ἐκφράζουσι σχέσιν τῶν δύο συναρτήσεων $\sigma(x)$ καὶ $\varphi(x)$. Καθὼς καὶ αἱ δύο ἐξισώσεις $\alpha^2 = \beta$ καὶ $\alpha = \sqrt{\beta}$ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ἐκφράζουσι σχέσιν τῶν ἀριθμῶν α καὶ β.

Παρατήρησις. Διὰ τῆς διαφορίσεως δυνάμεθα νὰ ἐξελέγξωμεν τὴν ἀλήθειαν οἱουδήποτε τύπου τῆς ὁλοκληρώσεως.

Διότι, ἵνα ἀληθεύῃ λ. χ. ἡ ἰσότης

$$\int \sigma(x)\, dx = \varphi(x),$$

πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε

$$\sigma(x).dx = d\,\varphi(x)$$

ἤ

$$\sigma(x) = \varphi'(x).$$

Παραδείγματος χάριν, ὁ τύπος $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3$ εἶνε ἀληθής·

διότι $d\left(\frac{1}{3}x^3\right) = x^2 dx$

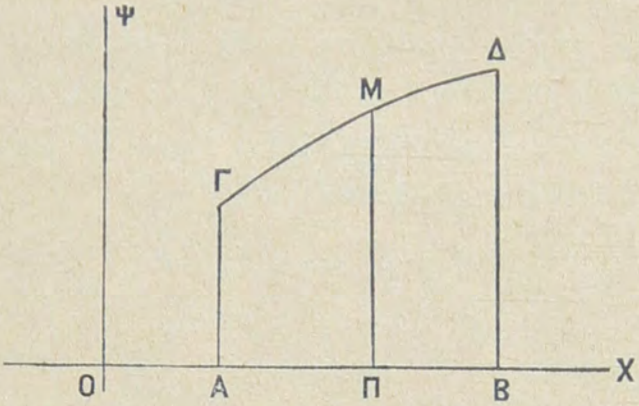
Σημείωσις. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει εἰς πάσας τὰς ἀντιστρόφους πράξεις· τὸ ἐξαγόμενον δηλονότι τῆς ἑτέρας δύναται νὰ ἐξελεγχθῇ διὰ τῆς ἑτέρας.

Πᾶσα συνάρτησις συνεχὴς ἔχει παράγουσαν.

10. Ἐὰν δοθῇ οἱαδήποτε συνάρτησις συνεχὴς (ἔν τινι διαστήματι $x = \alpha \ldots \beta$), ἔστω ἡ $\sigma(x)$, ὑπάρχει πάντοτε συνάρτησίς τις ἔχουσα παράγωγον τὴν $\sigma(x)$·

Ἵνα δείξωμεν τοῦτο, κατασκευάζομεν πρὸς ὀρθογωνίους ἄξονας τὴν ἐξίσωσιν

$$y = \sigma(x)$$



$$\text{OA} = \alpha$$
$$\text{OB} = \beta$$

καὶ θεωροῦμεν τὸ μέρος τῆς καμπύλης τὸ ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰς τιμὰς $x = \alpha \ldots \beta$.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου ΑΠΜΓΑ, ὅπερ περιέχεται ὑπὸ τῆς καμπύλης καὶ ὑπὸ τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ ὑπὸ τῶν τεταγμένων ΑΓ καὶ ΠΜ, μεταβάλλεται, ὅταν ἡ τεταγμένη ΠΜ μεταβάλληται, ἤτοι ὅταν ἡ τετμημένη ΟΠ $(=x)$ μεταβάλληται, ἡ δὲ ΑΓ μένῃ ἀκίνητος· καὶ πρὸς ἑκάστην τιμὴν τῆς ΟΠ ἀντιστοιχεῖ προφανῶς ὡρισμένη τιμὴ τοῦ ἐμβαδοῦ· εἶνε λοιπὸν τὸ ἐμβαδόν, ὅπερ παριστῶ διὰ τοῦ Ε, συνάρτησις ὡρισμένη τοῦ x. Κατὰ δὲ τὰ ἐν τῷ Διαφορικῷ λογισμῷ (σελ. 106) δειχθέντα θὰ εἶνε

$$d\mathrm{E} = \sigma(x)\ dx.$$

Ἐξ οὗ φαίνεται, ὅτι ἡ τὸ ἐμβαδὸν Ε ἐκφράζουσα συνάρτησις εἶνε ἡ παράγουσα τῆς $\sigma(x)$.

Σημείωσις. Κατὰ τῆς ἀποδείξεως ταύτης δύναται νὰ γίνῃ ἡ ἔνστασις, ὅτι γίνεται διὰ τῆς γεωμετρίας, ἐνῷ πρόκειται περὶ θεωρήματος ἀναλυτικοῦ. Πλὴν δὲ τούτου παραδέχεται, ὅτι πᾶν καμπυλόγραμμον χωρίον ἔχει ἐμβαδὸν (τὴν ἀπόδειξιν τούτου ἴδε ἐν τῇ ἀναλυτικῇ γεωμετρίᾳ μου σελ. 392). Ἀκριβῆ ἀπόδειξιν τῆς ὑπάρξεως τοῦ ὁλοκληρώματος θὰ ἴδωμεν ἐν τῷ Β′ βιβλίῳ.

11. Ἑκάστη συνεχὴς συνάρτησις ἔχει ἄπειρα τὸ πλῆθος ὁλοκληρώματα· διότι, ἂν τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$ ἓν ὁλοκλήρωμα εἶνε ἡ $\varphi(x)$, ἤτοι ἂν εἶνε

$$\varphi'(x) = \sigma(x)$$

καὶ ἡ συνάρτησις $\varphi(x)+A$ (ἔνθα A σημαίνει οἱανδήποτε ποσότητα σταθερὰν πρὸς x, τουτέστι μὴ μεταβαλλομένην, ὅταν μεταβάλληται ἡ x) ἔχει παράγωγον τὴν $\sigma(x)$ καὶ διὰ τοῦτο εἶνε καὶ αὐτὴ ὁλοκλήρωμα τῆς $\sigma(x)$.

Ἀλλὰ πάντα τὰ ὁλοκληρώματα μιᾶς συναρτήσεως εὑρίσκονται, ἂν εὑρεθῇ ἓν ἐξ αὐτῶν, τὸ τυχόν, καὶ προστεθῇ εἰς αὐτὸ σταθερά τις ποσότης οἱαδήποτε. Διότι ἔστωσαν $\varphi(x)$ καὶ $\mathrm{f}(x)$ δύο διάφορα ὁλοκληρώματα τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$· ἤτοι ἔστω

$$d\ \varphi(x) = \sigma(x)\, dx$$

$$\text{καὶ}\ d\ \mathrm{f}(x) = \sigma(x)\, dx\cdot$$

τότε θὰ εἶνε καὶ

$$d\ \varphi(x) = d\ \mathrm{f}(x)$$

ἐξ οὗ (Διαφ. λογισμ. ἐδ. 87) ἕπεται

$$\mathrm{f}(x) = \varphi(x)+\mathrm{C}$$

ἤτοι τὸ ὁλοκλήρωμα $\mathrm{f}(x)$ ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ $\varphi(x)$ αὐξανομένου κατὰ τὴν αὐθαίρετον σταθερὰν ποσότητα C.

12. Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι μόνον τὸ μεταβλητὸν μέρος τοῦ ὁλοκληρώματος εἶνε ὡρισμένον, τὸ δὲ σταθερὸν μέρος αὐτοῦ μένει ἐντελῶς ἀόριστον. Ὁρίζεται δὲ καὶ τοῦτο, ἐὰν δοθῇ διὰ μίαν τιμὴν τοῦ x ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ὁλοκληρώματος· διότι, ἂν πρέπῃ διὰ $x=a$, τὸ ὁλοκλήρωμα νὰ γίνηται β, θὰ εἶνε

$$\varphi(a)+\mathrm{C}=\beta \quad \text{ἄρα} \quad \mathrm{C}=\beta-\varphi(a)$$

καὶ ἑπομένως τὸ ὁλοκλήρωμα, ὅπερ πληροῖ τὸν τεθέντα ὅρον, εἶνε

$$\varphi(x) - \varphi(a)+\beta.$$

Σημείωσις Ἐν τοῖς ἑξῆς ἡ αὐθαίρετος σταθερά, ἥτις προστίθεται εἰς ἑκάστην παράγουσαν, παραλείπεται χάριν συντομίας.

Στοιχειώδεις ὁλοκληρώσεις.

13. Ἐκ τῶν στοιχειωδῶν διαφορίσεων συνάγονται αἱ στοιχειώδεις ὁλοκληρώσεις (εἰς τὰς ὁποίας ζητοῦμεν νὰ ἀναγάγωμεν τὰς ἄλλας) ὡς ἑξῆς.

Ἐκ τοῦ τύπου $d\,ax=a\,dx$, ἕπεται (ἐδ. 9)

$$\int a dx=a.x=a\int dx \quad \text{διότι} \quad \int dx=x$$

Ἐκ τοῦ τύπου

$$d(x^\mu)=\mu x^{\mu-1}dx$$

ἐὰν ἀντὶ μ γράψωμεν $\mu+1$, εὑρίσκομεν

$$d(x^{\mu+1})=(\mu+1)\,x^\mu dx$$

ἢ καὶ (ὑποτιθεμένου τοῦ $\mu+1$ διαφόρου τοῦ 0)

$$d\left(\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right)=x^\mu dx$$

ὅθεν

$$\int x^\mu dx=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν $\mu=-\frac{1}{2}$, εὑρίσκομεν τὸν τύπον

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}.$$

Ἐκ τοῦ τύπου

$$d(e^x)=e^x dx,\quad \text{ἕπεται}\quad \int e^x dx=e^x$$

Ὁμοίως ἐκ τοῦ

$$d(a^x)=a^x la dx$$

$$\text{ἢ}\quad d\left(\frac{a^x}{la}\right)=a^x dx,\quad \text{ἕπεται}\quad \int a^x dx=\frac{a^x}{la}$$

Ἐκ τοῦ τύπου

$$d(\eta\mu\, x)=\sigma\upsilon\nu\, x dx,\quad \text{ἕπεται}\quad \int \sigma\upsilon\nu\, x dx=\eta\mu\, x$$

Ὁμοίως ἐκ τοῦ

$$d(\sigma\upsilon\nu\, x)=-\eta\mu\, x dx$$

$$\text{ἢ}\quad d(-\sigma\upsilon\nu\, x)=\eta\mu x dx,\quad \text{ἕπεται}\quad \int \eta\mu x\, dx=-\sigma\upsilon\nu x$$

Ἐκ τοῦ τύπου

$$d(\varepsilon\varphi\, x)=\frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\quad \text{ἕπεται}\quad \int\frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\varepsilon\varphi\, x$$

Ομοίως ἐκ τοῦ

$$d(\sigma\varphi x)=\frac{-dx}{\eta\mu^2 x}$$

$$\text{ἢ}\quad d\,-\sigma\varphi x)=\frac{dx}{\eta\mu^2 x},\quad \text{ἕπεται}\quad \int\frac{dx}{\eta\mu^2 x}=-\sigma\varphi x$$

Ἐκ τοῦ τύπου

$$d(lx)=\frac{dx}{x} \quad \text{ἕπεται} \quad \int\frac{dx}{x}=lx$$

Ἐκ τοῦ τύπου

$$d(\text{τοξ ημ}\,x)=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{ἕπεται} \quad \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\text{τοξ ημ}\,x$$

Ὁμοίως ἐκ τοῦ

$$d(\text{τοξ συν}x)=\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

ἢ $d(-\text{τοξ συν}x)=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, ἕπεται $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\text{τοξ συν}x$

Ἐκ τοῦ τύπου

$$d(\text{τοξ εφ}x)=\frac{dx}{1+x^2} \quad \text{ἕπεται} \quad \int\frac{dx}{1+x^2}=\text{τοξ εφ}x$$

Ὁμοίως ἐκ τοῦ

$$d(\text{τοξ σφ}x)=-\frac{dx}{1+x^2}$$

ἢ $d(-\text{τοξ σφ}x)=\frac{dx}{1+x^2}$, ἕπεται $\int\frac{dx}{1+x^2}=-\text{τοξ σφ}x$.

Καθὼς ἐν τῷ διαφορικῷ λογισμῷ πᾶσα διαφόρισις ἀνάγεται εἰς τὰς στοιχειώδεις ταύτας διαφορίσεις, οὕτω καὶ ἐν τῷ ὁλοκληρωτικῷ λογισμῷ προσπαθοῦμεν νὰ ἀναγάγωμεν εἰς τὰς στοιχειώδεις ταύτας ὁλοκληρώσεις πάσας τὰς λοιπάς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Αἱ δύο τιμαὶ τοῦ ὁλοκληρώματος

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

πρέπει κατὰ τὰ προειρημένα (ἐδ. 11) νὰ διαφέρωσι κατὰ σταθερόν τινα ἀριθμόν· ἤτοι πρέπει νὰ εἶνε

$$\text{τοξ ημ}x+\text{τοξ συν}x=\text{σταθερῷ τινι ἀριθμῷ}$$

τοῦτο δὲ ἀληθεύει· διότι τὰ τόξα ταῦτα εἶνε συμπληρωματικά.

Ὅμοιον ἀληθεύει καὶ περὶ τῶν δύο τιμῶν τοῦ ὁλοκληρώματος

$$\int\frac{dx}{1+x^2}.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Ὁ τύπος

$$\int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}$$

εὑρέθη ἐπὶ τῇ ὑποθέσει, ὅτι $\mu+1$ εἶνε διάφορον τοῦ 0· ἐάν τις θέλῃ νὰ εὕρῃ, τί γίνεται, ὅταν ὁ μ τείνῃ νὰ γίνῃ ἴσος τῷ -1, ἀρκεῖ νὰ γράψῃ αὐτὸν ὡς ἑξῆς

$$\int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}-1}{\mu+1}$$

ἵνα γίνῃ 0 καὶ ὁ ἀριθμητὴς τοῦ δευτέρου μέλους, καὶ νὰ ἐφαρμόσῃ ἔπειτα τὸν γνωστὸν κανόνα τοῦ διαφ. λογισμοῦ (ἐδ. 364), ὅτε εὑρίσκει τὸν τύπον

$$\int \frac{dx}{x} = lx.$$

ΓΕΝΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΤΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΩΣ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΩΣ

14. Οἱ γενικοὶ τύποι τῆς ὁλοκληρώσεως συνάγονται ἀμέσως ἐκ τῶν γενικῶν τύπων τῆς διαφορίσεως, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν ἑξῆς.

Ἰδιότης τῶν σταθερῶν παραγόντων.

15. Ἐκ τοῦ γενικοῦ τύπου

$$d(\alpha\omega) = \alpha . d\omega$$

ἔνθα ω δηλοῖ τυχοῦσαν συνάρτησιν τοῦ x, ἕπεται ὁ τύπος

$$\int \alpha d\omega = \alpha . \omega$$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε $\omega = \int d\omega$, ὁ αὐτὸς τύπος γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$\int \alpha d\omega = \alpha \int d\omega \qquad (1)$$

Ἐκ τούτου γίνεται δῆλον, ὅτι οἱ σταθεροὶ παράγοντες οὐδὲν μέρος ἔχουσιν εἰς τὴν ὁλοκλήρωσιν (ὡς οὐδὲ εἰς τὴν διαφόρισιν ἔχουσιν) καὶ δύνανται νὰ ἐξέρχωνται ἐκ τοῦ σημείου τῆς ὁλοκληρώσεως ἢ καὶ νὰ εἰσέρχωνται εἰς αὐτὸ ἄνευ βλάβης τοῦ ὁλοκληρώματος.

Παραδείγματα.

$$\int 3 \text{ συν } x dx = 3 \int \text{συν } x dx = 3 . \text{ημ } x + C$$

$$\int 4\,e^x dx = 4\int e^x dx = 4\,e^x + C$$

$$\int \frac{2}{5}x^4 dx = \frac{2}{5}\int x^4 dx = \frac{2}{5}\cdot\frac{x^5}{5} + C$$

$$\int \frac{2\,dx}{1+x^2} = 2\int\frac{dx}{1+x^2} = 2.\ \text{τοξ εφ}x + C$$

Ὁλοκλήρωσις κατὰ μέρη.

16. Ἐκ τοῦ γενικοῦ τύπου τῆς διαφορίσεως τῶν ἀθροισμάτων

$$d(\omega+\varphi+f) = d\omega + d\varphi + df$$

συνάγεται (ἐδ. 9)

$$\int (d\omega + d\varphi + df) = \omega + \varphi + f$$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε

$$\omega = \int d\omega, \quad \varphi = \int d\varphi, \quad f = \int df,$$

ἕπεται

$$\int (d\omega + d\varphi + df) = \int d\omega + \int d\varphi + \int df \qquad (2)$$

ἤτοι, *ἵνα ὁλοκληρώσωμεν ἄθροισμα, ἀρκεῖ νὰ ὁλοκληρώσωμεν ἕκαστον τῶν μερῶν του καὶ νὰ προσθέσωμεν ἔπειτα τὰ ἐξαγόμενα.*

17. Στηριζόμενοι εἰς τὴν ἰδιότητα ταύτην ἀναλύομεν, εἰ δυνατόν τὴν ὁλοκληρωτέαν συνάρτησιν εἰς μέρη εὐκόλως ὁλοκληρούμενα, ἔπειτα ὁλοκληροῦντες τὰ μέρη ταῦτα καὶ προσθέτοντες τὰ ὁλοκληρώματα αὐτῶν εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον ὁλοκλήρωμα.

Ἡ μέθοδος αὕτη τῆς ὁλοκληρώσεως λέγεται *ὁλοκλήρωσις κατὰ μέρη.*

Παραδείγματα.

$$\int (x^5 - 4x^4 + 8x^2 - 9x + 12)dx =$$

$$= \int x^5 dx + (-4)\int x^4 dx + 8\int x^2 dx + (-9)\int x dx + 12\int dx =$$

$$= \frac{x^6}{6} - \frac{4}{5}x^5 + \frac{8}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 12x + C.$$

Ὁμοίως εὑρίσκεται τὸ ὁλοκλήρωμα παντὸς ἀκεραίου πολυωνύμου (καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα πάσης ῥητῆς συναρτήσεως εὑρίσκεται, ὡς θὰ ἴδωμεν, διὰ τῆς ἀναλύσεως εἰς μέρη ἁπλούστερα).

$$\int \frac{4x^3-x+1}{x}dx=\int 4x^2dx-\int dx+\int \frac{dx}{x}=$$
$$=\frac{4}{3}x^3-x+lx+C$$

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx=\int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=$$
$$=\text{τοξ ημ}\,x+\sqrt{1-x^2}+C$$

$$\int \text{εφ}^2 x dx=\int \frac{1-\text{συν}^2 x}{\text{συν}^2 x}dx=\int \frac{dx}{\text{συν}^2 x}-\int dx=$$
$$=\text{εφ}\,x-x+C$$

$$\int \frac{dx}{\text{ημ}^2 x\,.\,\text{συν}^2 x}=\int \frac{\text{ημ}^2 x+\text{συν}^2 x}{\text{ημ}^2 x\ \text{συν}^2 x}dx=\int \frac{dx}{\text{συν}^2 x}+\int \frac{dx}{\text{ημ}^2 x}=$$
$$=\text{εφ}\,x-\text{σφ}\,x+C.$$

Ὁλοκλήρωσις κατὰ παράγοντας.

18. Ἐκ τοῦ γενικοῦ τύπου τῆς διαφορίσεως τοῦ γινομένου

$$d(\omega.\varphi)=\omega d\varphi+\varphi d\omega$$

συνάγεται (ἐδ. 9)

$$\int(\omega d\varphi+\varphi d\omega)=\varphi.\omega$$

ἤτοι (ἐδ. 16)

$$\int \omega d\varphi+\int \varphi d\omega=\varphi\omega$$

$$\text{καὶ}\quad \int \omega.d\varphi=\omega.\varphi-\int \varphi.d\omega \tag{3}$$

Κατὰ τὸν τύπον τοῦτον, *ἂν ἔχωμεν νὰ ὁλοκληρώσωμεν τὸ γινόμενον συναρτήσεώς τινος ω ἐπὶ τὸ διαφορικὸν ἄλλης φ, θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν ω ὡς σταθερὰν καὶ ὁλοκληροῦμεν* (ὅτε εὑρίσκομεν ω.φ)· *ἔπειτα ὅμως ἀπὸ τοῦ ἐξαγομένου ωφ ἀφαιροῦμεν τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ ὁλοκληρωθέντος παράγοντος ἐπὶ τὸ διαφορικὸν τοῦ ἄλλου.*

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον ἀνάγεται μία ὁλοκλήρωσις εἰς ἄλλην, ἥτις ἐνδέχεται νὰ εἶνε εὐκολωτέρα· λέγεται δὲ ὁ τρόπος οὗτος τῆς ὁλοκληρώσεως, *ὁλοκλήρωσις κατὰ παράγοντας*.

Παραδείγματα.

(1) $\int lx.dx$

Ἐνταῦθα ἔχομεν νὰ ὁλοκληρώσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ lx ἐπὶ τὸ διαφορικὸν τοῦ x, ὅθεν ἐφαρμόζοντες τὴν κατὰ παράγοντας ὁλοκλήρωσιν ἤτοι τὸν τύπον (3), εὑρίσκομεν

$$\int lx.dx = x.lx - \int xd(lx) =$$

$$= xlx - \int x\frac{dx}{x} =$$

$$= xlx - x + \mathrm{C}.$$

(2) $\int x^{\mu}.lx.dx$

Ἐνταῦθα θεωροῦμεν τὸν lx ὡς τὸν παράγοντα ω τὸ δὲ $x^{\mu}dx$ ὡς τὸ διαφορικὸν τοῦ ἄλλου παράγοντος· καὶ ἂν μὲν εἶνε $\mu+1 \gtrless 0$, θὰ εἶνε

$$\int x^{\mu}lxdx = \int lx.\, d\left(\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right) =$$

$$= \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}lx - \int\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}d(lx) =$$

$$= \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}lx - \frac{1}{\mu+1}\int x^{\mu}dx =$$

$$= \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\left(lx - \frac{1}{\mu+1}\right).$$

Καὶ γενικῶς, ἂν $\varphi(x)$ εἶνε πολυώνυμον ἀκέραιον τοῦ x, ἤτοι

$$\varphi(x) = \sum_{\nu} \mathrm{A}_{\nu} x^{\nu} \qquad \nu = 0,\ 1,\ 2 \ldots n$$

θὰ εἶνε

$$\int \varphi(x)\, lxdx = (lx)\sum_{\nu} \mathrm{A}_{\nu}\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1} - \sum \mathrm{A}_{\nu}\frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)^2}.$$

(3) $\int$ τοξ εφ$x.dx$

Ἐφαρμόζοντες τὴν κατὰ παράγοντας ὁλοκλήρωσιν, εὑρίσκομεν

$$\int \text{τοξ εφ}x . dx = x . \text{τοξ εφ}x - \int \frac{x dx}{1+x^2} =$$

$$= x \text{ τοξ εφ} x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$$

$$= x \text{ τοξ εφ} x - \frac{1}{2} l(1+x^2).$$

4) Ἔστω τέλος καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα

$\int e^{-\lambda x} . \varphi(x) dx$, ἔνθα $\varphi(x)$ εἶνε ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὁλοκληρώματος τούτου παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ $e^{-\lambda x} dx$ εἶνε ἴσον τῷ $d\left(\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right)$· ὅθεν

$$\int e^{-\lambda x} \varphi(x) dx = \int \varphi(x) . d\left(-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right)$$

καὶ ἐφαρμόζοντες τὴν κατὰ παράγοντας ὁλοκλήρωσιν εἰς τὸ δεύτερον ὁλοκλήρωμα, εὑρίσκομεν

$$(4) \qquad \int e^{-\lambda x} \varphi(x) dx = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \varphi(x) + \frac{1}{\lambda} \int e^{-\lambda x} \varphi'(x) dx$$

διὰ τοῦ τύπου τούτου ἀνάγεται ἡ εὕρεσις τοῦ ζητουμένου ὁλοκληρώματος εἰς τὴν εὕρεσιν ἄλλου ἁπλουστέρου· διότι ἀντὶ τοῦ πολυωνύμου $\varphi(x)$ ἔχει τὴν παράγωγόν του $\varphi'(x)$· ἐὰν δὲ ὁ αὐτὸς τύπος ἐφαρμοσθῇ κατὰ σειρὰν εἰς τὰς παραγώγους $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ . . . $\varphi^{\mu}(x)$ (μ ὄντος τοῦ βαθμοῦ τοῦ πολυωνύμου), εὑρίσκομεν ἐξ αὐτοῦ τὰς ἑξῆς ἰσότητας.

$$\int e^{-\lambda x} \varphi(x) dx = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \varphi(x) + \frac{1}{\lambda} \int e^{-\lambda x} \varphi'(x) dx$$

$$\int e^{-\lambda x} \varphi'(x) dx = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \varphi'(x) + \frac{1}{\lambda} \int e^{-\lambda x} \varphi''(x) dx$$

$$\int e^{-\lambda x} \varphi''(x) dx = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \varphi''(x) + \frac{1}{\lambda} \int e^{-\lambda x} \varphi'''(x) dx$$

. . . .

$$\int \overset{-\lambda x}{e} \varphi^{\mu}(x)dx = -\frac{\overset{-\lambda x}{e}}{\lambda}\varphi^{\mu}(x) + \frac{1}{\lambda}\int \overset{-\lambda x}{e} \varphi^{\mu+1}(x)dx.$$

Ἐὰν δὲ προσθέσωμεν τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη, ἀφοῦ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὰς κατὰ σειρὰν ἐπὶ 1, $\frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{\lambda^2} \cdots \frac{1}{\lambda^{\mu}}$, εὑρίσκομεν ἐνθυμούμενοι, ὅτι ἡ παράγωγος $\varphi^{\mu+1}(x)$ εἶνε 0.

$$(5) \qquad \int \overset{-\lambda x}{e} \varphi(x)dx = -\frac{\overset{-\lambda x}{e}}{\lambda}\left\{ \varphi(x) + \frac{\varphi'(x)}{\lambda} + \frac{\varphi''(x)}{\lambda^2} + \cdots + \frac{\varphi^{\mu}(x)}{\lambda^{\mu}} \right\}$$

καὶ ἂν ὑποτεθῇ $\lambda = 1$, προκύπτει ὁ ἁπλούστερος τύπος

$$(6) \qquad \int \overset{-x}{e} \varphi(x)dx = -\overset{-x}{e}\Big[\varphi(x) + \varphi'(x) + \varphi''(x) + \cdots + \varphi^{\mu}(x)\Big].$$

Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ $\lambda = \rho i$, προκύπτουσιν οἱ ἑξῆς δύο τύποι

$$(7) \qquad \int \varphi(x)\,\sigma\upsilon\nu\,(\rho x)dx = \left[\frac{\varphi(x)}{\rho}\eta\mu\,\rho x + \frac{\varphi'(x)}{\rho^2}\eta\mu\left(\rho x + \frac{\pi}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\varphi''(x)}{\rho^3}\eta\mu\left(\rho x + 2\frac{\pi}{2}\right) + \cdots + \frac{\varphi^{\mu}(x)}{\rho^{\mu+1}}\eta\mu\left(\rho x + \mu\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$(7') \qquad \int \varphi(x)\,\eta\mu\,(\rho x)dx = -\left[\frac{\varphi(x)}{\rho}\sigma\upsilon\nu\rho x + \frac{\varphi'(x)}{\rho^2}\sigma\upsilon\nu\left(\rho x + \frac{\pi}{2}\right) + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{\varphi^{\mu}(x)}{\rho^{\mu+1}}\sigma\upsilon\nu\left(\rho x + \mu\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

καὶ ἂν εἶνε $\varrho = 1$, ἔχομεν τοὺς ἁπλουστέρους τύπους

$$(8) \qquad \int \varphi(x)\,\sigma\upsilon\nu\, x dx = \varphi(x)\,\eta\mu\, x + \varphi'(x)\,\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cdots$$
$$+ \varphi^{\mu}(x)\,\eta\mu\left(x + \mu\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(8') \qquad \int \varphi(x)\,\eta\mu\, x dx = -\varphi(x)\,\sigma\upsilon\nu\, x - \varphi'(x)\,\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cdots$$
$$- \varphi^{\mu}(x)\,\sigma\upsilon\nu\left(x + \mu\frac{\pi}{2}\right)$$

Τοὺς τύπους τούτους ἠδυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ ἀμέσως, καθ' ὃν τρόπον εὑρήκαμεν καὶ τὸν τύπον (5).

Ἐὰν δὲ τέλος ὑποτεθῇ $\lambda = \alpha + \beta i = \rho e^{\theta i}$, ἤτοι ἂν ὁ λ ὑποτεθῇ μιγὰς ἀριθμὸς ἔχων μέτρον ϱ καὶ ὅρισμα θ, ὁ τύπος (5) δίδει τοὺς ἑξῆς γενικωτέρους

$$\int e^{-\alpha x}\varphi(x)\,\text{συν}\,\beta x\,dx = -e^{-\alpha x}\left\{\frac{\varphi(x)}{\rho}.\text{συν}(\beta x+\theta)+\right.$$

$$\left.+\frac{\varphi'(x)}{\rho^2}\,\text{συν}\,(\beta x+2\theta)+\ldots+\frac{\varphi^{\mu}(x)}{\rho^{\mu+1}}\text{συν}\Big(\beta x+(\mu+1)\theta\Big)\right\}$$

καὶ
$$\int e^{-\alpha x}\varphi(x)\,\text{ημ}\,\beta x\,dx = -e^{-\alpha x}\left\{\frac{\varphi(x)}{\rho}\,\text{ημ}\,(\beta x+\theta)+\right.$$

$$\left.+\frac{\varphi'(x)}{\rho^2}\text{ημ}\,(\beta x+2\theta)+\ldots+\frac{\varphi^{\mu}(x)}{\rho^{\mu+1}}\text{ημ}\Big(\beta x+(\mu+1)\theta\Big)\right\}$$

Σημείωσις. Τὰ ὁλοκληρώματα $\int e^{-\alpha x}\varphi(x)\,\text{συν}\,\beta x\,dx$ καὶ $\int e^{-\alpha x}\varphi(x)\,\text{ημ}\,\beta x\,dx$ ἀνάγονται εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα $\int e^{-\lambda x}\varphi(x)dx$, διότι τὸ συν βx καὶ τὸ ημ βx εἶνε ἀκέραιαι συναρτήσεις τῶν $e^{\beta x i}$ καὶ $e^{-\beta x i}$.

Ὁλοκλήρωσις δι' ἀντικαταστάσεως.

19. Κατὰ τὴν γενικὴν ἰδιότητα τῶν διαφορικῶν ἰσοτήτων (Διαφ. σελ. 39), ἐὰν εἶνε

$$d\,\varphi(x) = \sigma(x)dx \qquad (9)$$

καὶ θέσωμεν $x = \mathrm{f}(t)$, θὰ εἶνε καὶ

$$d\,\varphi\Big(f(t)\Big) = \sigma\Big(f(t)\Big)\,df(t) \qquad (10)$$

ἀλλ' αἱ ἰσότητες αὗται γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς

$$\int\sigma(x)dx = \varphi(x) \qquad (9')$$

καὶ
$$\int\sigma\Big(f(t)\Big)\,d\,f(t) = \varphi\Big(f(t)\Big) \qquad (10')$$

καὶ ἐπειδὴ $\varphi\Big(f(t)\Big) = \varphi(x)$, συνάγεται

$$\int\sigma(x)dx = \int\sigma\Big(f(t)\Big)df(t). \qquad (11)$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι δυνάμεθα εἰς δοθεῖσαν ὁλοκλήρωσιν νὰ ἀλλάξωμεν τὴν μεταβλητὴν τῆς ὁλοκληρώσεως θέτοντες $x=f(t)$ ἔνθα f δηλοῖ οἱανδήποτε συνάρτησιν νέας τινὸς μεταβλητῆς t· οὕτω τρέπεται ἡ ὁλοκλήρωσις εἰς ἄλλην, ἥτις ἐνδέχεται νὰ εἶνε εὐκολωτέρα· ἀφοῦ δὲ ἐκτελεσθῇ ἡ δευτέρα ὁλοκλήρωσις καὶ εὑρεθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα, ἔστω $\Phi(t)$, εὑρίσκεται καὶ τὸ ζητούμενον ὁλοκλήρωμα· διότι αἱ μεταβληταὶ x καὶ t συνδέονται πρὸς ἀλλήλας διὰ τῆς ἐξισώσεως $x=f(t)$· ἂν λοιπὸν ἐξ αὐτῆς λάβωμεν τὴν τιμὴν τοῦ t ἐκπεφρασμένην διὰ τοῦ x καὶ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸ εὑρεθὲν ὁλοκλήρωμα $\Phi(t)$ τὸ t διὰ τῆς τιμῆς αὐτοῦ, θὰ ἔχωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ὁλοκληρώματος $\int\sigma(x)dx$ ἐκπεφρασμένου διὰ τοῦ x.

Ὁ τρόπος οὗτος τῆς ὁλοκληρώσεως λέγεται *ὁλοκλήρωσις δι' ἀντικαταστάσεως*. Ἡ χρῆσις αὐτῆς εἶνε συχνή· ἀπαιτεῖται ὅμως νὰ εἰξεύρωμεν τὴν πρέπουσαν ἀντικατάστασιν (δηλαδὴ τὴν πρέπουσαν συνάρτησιν $f(t)$, ἥτις θὰ ἀντικατασταθῇ ἀντὶ τοῦ x), ἥτις ἁπλοποιεῖ τὴν ὁλοκλήρωσιν· εἰς τὴν εὕρεσιν δὲ τῆς ἁρμοζούσης ταύτης ἀντικαταστάσεως ἔγκειται κυρίως ἡ δυσκολία τῆς ὁλοκληρώσεως· διότι οὐδεὶς κανὼν δύναται νὰ δοθῇ περὶ αὐτῆς, ἀλλὰ μόνον ἄσκησις καὶ δεξιότης τοῦ πνεύματος ὠφελεῖ.

Παραδείγματα.

1) $$\int(\alpha x+\beta)^{\mu}dx$$

Ἐὰν ὁ μ εἶνε θετικὸς καὶ ἀκέραιος ἀριθμός, δυνάμεθα νὰ ἀναπτύξωμεν τὴν δύναμιν ταύτην κατὰ τὸν τύπον τοῦ διωνύμου καὶ ἔπειτα νὰ ὁλοκληρώσωμεν αὐτὴν κατὰ μέρη· ἀλλ' οἱουδήποτε ὄντος τοῦ μ, ταχύτερον φθάνομεν εἰς τὸ ἐξαγόμενον ὡς ἀκολούθως.

Ἐὰν θέσωμεν $$\alpha x+\beta=t,$$

ἔπεται $$\alpha.dx=dt \quad \text{ἢ} \quad dx=\frac{1}{\alpha}dt$$

ὅθεν $$(\alpha x+\beta)^{\mu}dx=\frac{1}{\alpha}\,t^{\mu}dt$$

καὶ $$\int(\alpha x+\beta)^{\mu}dx=\frac{1}{\alpha}\int t^{\mu}dt=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{t^{\mu+1}}{\mu+1} \qquad \text{ἂν } \mu+1\gtrless 0$$

ἤτοι $$\int(\alpha x+\beta)^{\mu}dx=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{(\alpha x+\beta)^{\mu+1}}{\mu+1} \tag{12}$$

ἂν εἶνε $\mu=-1$, θὰ εἶνε

$$\int \frac{dx}{\alpha x+\beta}=\frac{1}{\alpha}l(\alpha x+\beta) \tag{12'}$$

2) $$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}$$

Ἐὰν θέσωμεν $x=\alpha t$, θὰ εἶνε καὶ $dx=\alpha dt$, καὶ ἑπομένως

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}=\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\text{τοξ ημ}\, t$$

ἤτοι $$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}=\text{τοξ ημ}\left(\frac{x}{\alpha}\right), \quad \left(\text{διότι} \quad t=\frac{x}{\alpha}\right) \tag{13}$$

3) $$\int \frac{dx}{\alpha^2+x^2}$$

Ἐὰν καὶ ἐνταῦθα θέσωμεν $x=\alpha t$, ἑπομένως καὶ $dx=\alpha dt$, θὰ εἶνε

$$\int \frac{dx}{\alpha^2+x^2}=\frac{1}{\alpha}\int \frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{\alpha}\ \text{τοξ εφ}\, t$$

ἤτοι $$\int \frac{dx}{\alpha^2+x^2}=\frac{1}{\alpha}\ \text{τοξ εφ}\left(\frac{x}{\alpha}\right) \tag{14}$$

4) $$\int \frac{8x^3dx}{\alpha+x^4}$$

Ἐὰν ἐνταῦθα τεθῇ ὁ παρονομαστὴς $\alpha+x^4=t$,

ἕπεται $$4x^3dx=dt, \quad \text{ἤτοι} \quad x^3dx=\frac{1}{4}dt$$

ὅθεν $$\int \frac{8x^3dx}{\alpha+x^4}=2\int \frac{dt}{t}=2lt$$

ἤτοι $$\int \frac{8x^3dx}{\alpha+x^4}=2l(\alpha+x^4)=l(\alpha+x^4)^2.$$

5) $$\int \text{συν}\, \lambda x.dx.$$

Ἐὰν τεθῇ $\lambda x=t$, ἕπεται $dx=\frac{1}{\lambda}dt$

καὶ $$\int \text{συν}\, \lambda x\, dx=\frac{1}{\lambda}\int \text{συν}\, t.dt=\frac{1}{\lambda}\text{ημ}\, t$$

ἤτοι $$\int \text{συν}\,\lambda x\,dx = \frac{1}{\lambda}\text{ημ}(\lambda x) \tag{15}$$

Ὁμοίως εὑρίσκεται καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \text{ημ}(\lambda x)\,dx = -\frac{1}{\lambda}\text{συν}(\lambda x).$$

6) $$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ ὁλοκληρωτέου κλάσματος ἐπὶ e^x, γίνεται

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$$

καὶ ἂν θέσωμεν $e^x = t$, εὑρίσκομεν

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \text{τοξ εφ}\,(e^x)$$

7) $$\int \frac{dx}{xlx}.$$

Ἐὰν θέσωμεν $lx = t$, εὑρίσκομεν ἀμέσως

$$\int \frac{dx}{xlx} = \int \frac{dt}{t} = l(lx).$$

8) $$\int \frac{xdx}{\sqrt{\alpha^4 - x^4}}$$

Ἐνταῦθα, ἐὰν τεθῇ $x^2 = \alpha^2 t$, γίνεται $xdx = \frac{1}{2}\alpha^2 dt$

ἑπομένως $$\int \frac{xdx}{\sqrt{\alpha^4 - x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\,\text{τοξ ημ}\left(\frac{x^2}{\alpha^2}\right)$$

9) $$\int \text{ημ}^\mu x\,.\,\text{συν}\,xdx$$

Ἐὰν θέσωμεν $\text{ημ}\,x = t$, ἔπεται $\text{συν}\,xdx = dt$

ὅθεν $$\int \text{ημ}^\mu x\,\text{συν}\,xdx = \int t^\mu dt = \frac{t^{\mu+1}}{\mu+1} = \frac{\text{ημ}^{\mu+1} x}{\mu+1} \quad (\text{ἂν } \mu+1 \gtrless 0).$$

Παρατήρησις.

20. Καὶ οἱ τύποι τῆς ὁλοκληρώσεως, ὡς καὶ οἱ τῆς διαφορίσεως, μένουσιν ἀληθεῖς πρὸς οἱανδήποτε μεταβλητὴν καὶ ἂν ἀναφέρωνται· διότι ἂν εἶνε

$$d\,\varphi(x) = \sigma(x)dx$$

ἢ
$$\int \sigma(x)dx = \varphi(x)$$

καὶ τεθῇ $x=f(t)$, θὰ εἶνε

$$d\,\varphi\big(f(t)\big) = \sigma\big(f(t)\big)\; d\,f(t)$$

ἄρα
$$\int \sigma\big(f(t)\big)\,d\,f(t) = \varphi\big(f(t)\big).$$

Ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης συνάγεται, ὅτι ἐξ ἑνὸς τύπου ὁλοκληρώσεως δύνανται νὰ ἐξαχθῶσιν ἄπειροι ἄλλοι διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως τῆς μεταβλητῆς· παραδείγματος χάριν ἐκ τοῦ τύπου

$$\int \frac{dx}{x} = lx$$

ἂν τεθῇ $x = t^2 + \alpha t + \beta$, ὅθεν καὶ $dx = (2t+\alpha)dt$, προκύπτει τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \frac{(2t+\alpha)dt}{t^2+\alpha t+\beta} = l(t^2+\alpha t+\beta)\cdot$$

ἐὰν δὲ εἰς τὸν αὐτὸν τύπον τεθῇ $x = \varepsilon\varphi\, t$, προκύπτει ὁ ἑξῆς

$$\int \frac{dt}{\eta\mu\, t\; \sigma\upsilon\nu\, t} = l\; \varepsilon\varphi\; t.$$

Ὁλοκλήρωσις διὰ τῆς διαφορίσεως πρὸς παράμετρον.

21. Ἐὰν ἡ δεδομένη πρὸς ὁλοκλήρωσιν συνάρτησις περιέχῃ ἐκτὸς τῆς μεταβλητῆς x καὶ ἄλλην τινὰ μεταβλητὴν παράμετρον t ἀνεξάρτητον ἀπὸ τῆς x, καὶ ἡ παράγουσα αὐτῆς θὰ περιέχῃ τὴν αὐτὴν παράμετρον t.

Ὑποθέσωμεν ὅτι εἶνε $\int \sigma(x,\,t)dx = \varphi(x,\,t)$ (16)

τουτέστι
$$\frac{\partial\, \varphi(x,\,t)}{\partial x} = \sigma(x,\;t).$$

Ἐὰν τὴν ἰσότητα ταύτην διαφορίσωμεν πρὸς t, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial\,\varphi(x,t)}{\partial x}\right\}=\frac{\partial\,\sigma(x,t)}{\partial t} \tag{17}$$

ἀλλ᾽ ἐπειδὴ εἶνε (Διαφ. λογισμοῦ σελ. 201)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial\,\varphi(x,t)}{\partial x}\right\}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial\,\varphi(x,t)}{\partial t}\right\}$$

ἡ ἐκ τῆς διαφορίσεως προκύψασα ἰσότης δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\,\varphi(x,t)}{\partial t}\right]=\frac{\partial\,\sigma(x,t)}{\partial t}$$

ἡ δὲ ἰσότης αὕτη κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ὁλοκληρώματος γράφεται καὶ ὡς ἀκολούθως

$$\int\left\{\frac{\partial\,\sigma(x,t)}{\partial t}\right\}dx=\frac{\partial\,\varphi(x,t)}{\partial t}. \tag{18}$$

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον ἐκ τοῦ ὁλοκληρώματος

$$\int\sigma(x,t)dt \quad \text{εὑρίσκομεν τὸ} \quad \int\left\{\frac{\partial\,\sigma(x,t)}{\partial t}\right\}dx$$

προκύπτει δὲ ἡ ἰσότης (18) ἐκ τῆς ἀρχικῆς ἰσότητος (16), ἐὰν διαφορίσωμεν πρὸς τὴν παράμετρον t ἀμφοτέρας τὰς συναρτήσεις, τήν τε ὑπὸ τὸ σύμβολον $\int$ τῆς ὁλοκληρώσεως καὶ τὴν ἐκτὸς αὐτοῦ· διὰ τοῦτο ἡ μέθοδος αὕτη λέγεται *μέθοδος τῆς διαφορίσεως πρὸς παράμετρον*.

Ὡς παράδειγμα τῆς μεθόδου ταύτης, ἔστω τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int\frac{dx}{(\alpha^2-x^2)^{3/2}}$$

πρὸς εὕρεσιν τούτου ὁρμώμεθα ἀπὸ τοῦ ὁλοκληρώματος

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}.$$

ὅπερ εὕρομεν ἤδη (σελ. 21)

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}=\text{τοξ ημ}\left(\frac{x}{\alpha}\right)$$

ἢ γράφοντες t ἀντὶ α^2·

$$\int\frac{dx}{\sqrt{t-x^2}}=\text{τοξ ημ}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

ἐὰν δὲ τὴν ἰσότητα ταύτην διαφορίσωμεν πρὸς t, εὑρίσκομεν

$$\int \frac{dx}{(t-x^2)^{3/2}} = -2\frac{\partial\, \text{τοξ ημ}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)}{\partial t} = \frac{x}{t\sqrt{t-x^2}}$$

καὶ ἂν ν φορὰς διαφορίσωμεν πρὸς t, προκύπτει

$$\int \frac{dx}{(t-x^2)^{\nu}\sqrt{t-x^2}} = (-1)^{\nu}\,\frac{2^{\nu}}{1.3.5\ldots(2\nu-1)}\cdot\frac{\partial^{\nu}\text{τοξ ημ}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)}{\partial t^{\nu}}.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν ἐκ τῶν δύο ἰσοτήτων (16) καὶ (18) ἀπαλείψωμεν τὴν συνάρτησιν $\varphi(x, t)$, προκύπτει

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int \sigma(x, t)dx\right\} = \int\left\{\frac{\partial\, \sigma(x, t)}{\partial t}\right\}dx$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι, ἵνα διαφορίσωμεν ὁλοκλήρωμα πρὸς παράμετρον, ἀρκεῖ νὰ διαφορίσωμεν τὴν ὑπὸ τὸ σύμβολον τῆς ὁλοκληρώσεως εὑρισκομένην συνάρτησιν πρὸς τὴν αὐτὴν παράμετρον· τουτέστιν ἡ ὁλοκλήρωσις καὶ ἡ διαφόρισις, ὅταν πρόκειται νὰ ἐκτελεσθῶσι πρὸς δύο ἀνεξαρτήτους ἀπ᾿ ἀλλήλων μεταβλητάς, ἀνταλλάσσονται.

Παρατήρησις.

Ἡ κατὰ μέρη ὁλοκλήρωσις, ἤτοι ἡ ἀνάλυσις τῆς ὁλοκληρωτέας συναρτήσεως εἰς μέρη καὶ ἡ ὁλοκλήρωσις ἑκάστου τούτων χωριστά, ἡ κατὰ παράγοντας ὁλοκλήρωσις, ἡ δι' ἀντικαταστάσεως καὶ ἡ διὰ τῆς διαφορίσεως πρὸς παράμετρον, εἶνε αἱ κυριώταται μέθοδοι τῆς ὁλοκληρώσεως· τίς ὅμως ἐκ τούτων πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς δοθὲν παράδειγμα ἢ τίνες καὶ κατὰ τίνα τάξιν, περὶ τούτων οὐδεὶς γενικὸς κανὼν δύναται νὰ δοθῇ· ἐν τῷ ὁλοκληρωτικῷ λογισμῷ δὲν ὑπάρχουσι γενικοὶ κανόνες ὁλοκληρώσεως, οἵους εὕρομεν ἐν τῷ διαφορικῷ διὰ τὴν διαφόρισιν πάσης συναρτήσεως· οὐδὲ δύνανται νὰ ἐκφρασθῶσι πάντα τὰ ὁλοκληρώματα τῶν συναρτήσεων, ἃς ἔχομεν, διὰ τῶν ἰδίων συναρτήσεων. Ἐν τῷ διαφορικῷ λογισμῷ ἐγνωρίσαμεν τὰς ἀλγεβρικὰς συναρτήσεις, τὴν ἐκθετικὴν συνάρτησιν e^x, καὶ τὴν ἀντίστροφον αὐτῆς lx καὶ τὰς ἐκ τούτων προκυπτούσας, ὅταν συνδυασθῶσιν ὁπωσδήποτε πρὸς ἀλλήλας· ἐπειδὴ δὲ ἡ διαφόρισις ἄγει εἰς ἁπλουστέρας συναρτήσεις, συμβαίνει αἱ παράγωγοι τῶν συναρτήσεων τούτων νὰ εἶνε ἐκ τῶν αὐτῶν συναρτήσεων· ὥστε οὐδεμίαν ἐν τῷ διαφορικῷ εἴχομεν ἀνάγκην νὰ εἰσαγάγωμεν εἰς τὸν λογισμὸν νέας συναρτήσεις· ἐν τῷ ὁλοκληρωτικῷ ὅμως, ὅστις ἄγει ἀπὸ ἁπλουστέρων εἰς πολυπλοκωτέρας συναρτήσεις, συμβαίνει πολλάκις τὸ ὁλοκλήρωμα γνωστῆς συναρτήσεως νὰ εἶνε ἄλλη συνάρτησις διάφορος τῶν γνωστῶν καὶ ἑπομένως μὴ δυναμένη νὰ ἐκφρασθῇ δι' αὐτῶν, ἤτοι νὰ ἀναχθῇ εἰς αὐτάς· οἴκοθεν ἐννοεῖται, ὅτι ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἡ ὁλοκλήρωσις δὲν δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ, εἰμὴ μετὰ τὴν προσάρτησιν νέων συναρτήσεων.

Ὑπάρχουσιν ὅμως εἴδη τινα συναρτήσεων, ὧν τινων τὰ ὁλοκληρώματα ἐκφράζονται διὰ τῶν συναρτήσεων, ἃς ἔχομεν· περὶ τῶν κυριωτέρων ἐξ αὐτῶν καὶ περὶ τῶν μεθόδων, δι' ὧν ὁλοκληροῦνται, γίνεται λόγος ἐν τοῖς ἑπομένοις κεφαλαίοις.

Ἀσκήσεις.

1) Ἐὰν ω εἶνε τυχοῦσα συνάρτησις τοῦ x καὶ $\varphi(x)$ ἀκέραιον πολυώνυμον βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ n, θὰ εἶνε

$$\int \varphi(x)\frac{d^n\omega}{dx^n}dx=\varphi(x)\frac{d^{n-1}\omega}{dx^{n-1}}-\varphi'(x)\frac{d^{n-2}\omega}{dx^{n-2}}+\varphi''(x)\frac{d^{n-3}\omega}{dx^{n-3}}-\ldots\pm\varphi^{(n-1)}(x).\omega$$

2) Ἐὰν ἡ συνάρτησις y πληροῖ τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν

$$x.\frac{d^2y}{dx^2}=\alpha y$$

τὸ δὲ $\varphi(x)$ εἶνε πολυώνυμον ἀκέραιον βαθμοῦ μὴ ὑπερβαίνοντος τὸν n, θὰ εἶνε

$$\int y\,\varphi(x)dx=y'\sigma(x)-y\,\sigma'(x)$$

ἔνθα
$$\sigma(x)=\Big[\varphi(x)+\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\ldots+\varphi_n(x)\Big]\frac{x}{\alpha}.$$

καὶ
$$\varphi_{\nu+1}(x)=\Big[\frac{x}{\alpha}\varphi_\nu(x)\Big]'' \qquad \nu=0,\ 1\ 2\ldots n-1.$$

3) Εὑρεῖν τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int y.\varphi(x)dx$$

ἔνθα $\varphi(x)$ εἶνε ἀκεραία συνάρτησις τοῦ x ἡ δὲ συνάρτησις y ἐπαληθεύει τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν $\sigma(x)\frac{d^my}{dx^m}=y$, ἐν ᾗ $\sigma(x)$ εἶνε ἀκέραιον πολυώνυμον βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ m

Ἀπ. Ἐὰν τεθῇ
$$\varphi_{\nu+1}(x)=\Big[\ \varphi_\nu(x)\ \sigma(x)\ \Big]^{(m)}$$

καὶ
$$F(x)=\Big[\ \varphi(x)+(-1)^m\ \varphi_1(x)+(-1)^{2m}\varphi_2(x)+\ldots\Big]\ \sigma(x)$$

θὰ εἶνε
$$\int y\,\varphi(x)dx=y_{m-1}.F(x)-y_{m-2}F'(x)+y_{m-3}F''(x)+\ldots\pm yF^{m-1}(x).$$

4) Εὑρεῖν τὸ ὁλοκλήρωμα $\int\frac{5x\,dx}{1+x^4}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΣ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

22. Αἱ ῥηταὶ συναρτήσεις εἶνε τῆς μορφῆς

$$\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$$

ἔνθα $\sigma(x)$ καὶ $\varphi(x)$ εἶνε ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ x· ἡ δὲ ὁλοκλήρωσις αὐτῶν γίνεται ἐν γένει διὰ τῆς ἀναλύσεως εἰς μέρη.

Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς $\sigma(x)$ δὲν εἶνε βαθμοῦ κατωτέρου ἢ ὁ παρονομαστὴς $\varphi(x)$, διαιροῦμεν αὐτὸν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς ὑπόλοιπόν τι $\mathrm{f}(x)$ βαθμοῦ κατωτέρου ἢ ὁ διαιρέτης $\varphi(x)$· τότε παριστῶντες τὸ εὑρεθὲν πηλίκον διὰ τοῦ $\Pi(x)$, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}=\Pi(x)+\frac{\mathrm{f}(x)}{\varphi(x)}$$

καὶ ἐπομένως

$$\int\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}dx=\int\Pi(x)\,dx+\int\frac{\mathrm{f}(x)}{\varphi(x)}\,dx$$

καὶ τὸ μὲν ὁλοκλήρωμα τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου $\Pi(x)$ εὑρίσκεται ἀμέσως διὰ τῆς κατὰ μέρη ὁλοκληρώσεως, μένει λοιπὸν νὰ μάθωμεν, πῶς ὁλοκληροῦται τὸ κλάσμα

$$\frac{\mathrm{f}(x)}{\varphi(x)}\,dx$$

ἔνθα ὁ ἀριθμητὴς εἶνε βαθμοῦ κατωτέρου ἢ ὁ παρονομαστής.

23. Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν, ὅτι, ἐὰν οἱ ὅροι $\mathrm{f}(x)$ καὶ $\varphi(x)$ τοῦ κλάσματος ἔχωσι κοινόν τινα παράγοντα, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ νὰ ἐξαλείψωμεν αὐτόν· διὰ τοῦτο ὑποθέτομεν ἐν τοῖς ἑξῆς, ὅτι τὰ πολυώνυμα ταῦτα οὐδεμίαν ἔχουσι κοινὴν ῥίζαν, ἤτοι, ὅτι τὸ κλάσμα εἶνε ἀνάγωγον.

Ἡ ὁλοκλήρωσις ἐν γένει τῶν τοιούτων κλασμάτων στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἰδιότητος αὐτῶν, καθ' ἣν ταῦτα ἀναλύονται εἰς ἄλλα ἁπλούστερα κλάσματα· διὰ τοῦτο διαλαμβάνομεν κατὰ πρῶτον περὶ τῆς τοιαύτης ἀναλύσεως.

ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΕΙΣ ΑΛΛΑΣ ΑΠΛΟΥΣΤΕΡΑΣ.

1) Περίπτωσις, καθ' ἣν ὁ παρονομαστὴς $\varphi(x)$ δὲν ἔχει πολλαπλᾶς ῥίζας.

24. Εἶνε γνωστὸν ἐκ τῆς ἀλγέβρας (Εἰσαγ. σελ. 119), ὅτι πᾶν πολυώνυμον $\varphi(x)$ τοῦ βαθμοῦ μ ἀναλύεται εἰς γινόμενον μ πρωτοβαθμίων παραγόντων

$$(x-\alpha)\,(x-\beta)\,(x-\gamma)\,.\,.\,.\,(x-\kappa)$$

ἔνθα α, β, γ . . . κ εἶνε αἱ ῥίζαι τοῦ πολυωνύμου· ὥστε τὸ δοθὲν κλάσμα,

$$\frac{\mathrm{f}(x)}{\varphi(x)}$$

ἀφοῦ εὑρεθῶσιν οἱ πρωτοβάθμιοι παράγοντες τοῦ παρονομαστοῦ $\varphi(x)$, δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς (τὸν συντελεστὴν τῆς ἀνωτάτης δυνάμεως τοῦ x ἐν τῷ παρονομαστῇ ὑποθέτομεν ἴσον τῇ μονάδι 1· διότι ἂν δὲν εἶνε 1, διαιροῦμεν δι' αὐτοῦ ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος)

$$\frac{\mathrm{f}(x)}{(x-\alpha)\,(x-\beta)\,(x-\gamma)\,.\,.\,.\,(x-\kappa)}.$$

25. Ἡ σύνθεσις τοῦ παρονομαστοῦ ὑποδεικνύει, ὅτι εἶνε δυνατὸν τὸ κλάσμα τοῦτο νὰ προέρχηται ἐκ τῆς προσθέσεως κλασμάτων ἐχόντων παρονομαστὰς τοὺς $x-\alpha$, $x-\beta$, . . . $x-\kappa$, οἵτινες εἶνε διάφοροι ἀπ' ἀλλήλων· διότι αἱ ῥίζαι ὑπετέθησαν ἄνισοι. Ἐὰν δὲ συμβαίνῃ τοῦτο, οἱ ἀριθμηταὶ τῶν κλασμάτων θὰ εἶνε βαθμοῦ κατωτέρου ἢ οἱ παρονομασταὶ αὐτῶν· (διότι καὶ εἰς τὸ κλάσμα τὸ αὐτὸ συμβαίνει)· ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶνε

$$\frac{\mathrm{f}(x)}{\varphi(x)}=\frac{\mathrm{A}}{x-\alpha}+\frac{\mathrm{B}}{x-\beta}+\,.\,.\,.\,+\frac{\mathrm{K}}{x-\kappa} \qquad (1)$$

διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x· τότε θὰ εἶνε καὶ

$$(2) \qquad \mathrm{f}(x)=\mathrm{A}.\frac{\varphi(x)}{x-\alpha}+\mathrm{B}.\frac{\varphi(x)}{x-\beta}+\,.\,.\,.\,+\mathrm{K}\frac{\varphi(x)}{x-\kappa}$$

ἀλλ' ἂν ἡ μεταβλητὴ x γίνῃ ἴση τῇ ῥίζῃ α τοῦ $\varphi(x)$, οἱ μὲν ἄλλοι ὅροι τοῦ δευτέρου μέλους μηδενίζονται, ὁ δὲ πρῶτος, καθ' ὅσον ἡ x τείνει πρὸς τὴν τιμὴν α, τείνει (κατὰ τὰ ἐν τῷ Διαφ. λογισμῷ σελ. 458 ἐκτεθέντα) πρὸς τὴν τιμὴν $A\varphi'(\alpha)$· ὅθεν ἡ ταὐτότης (2) δίδει

$$f(\alpha)=A.\varphi'(\alpha)$$

ἐξ ἧς καὶ

$$A=\frac{f(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}. \tag{3}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ἐὰν δώσωμεν εἰς τὴν μεταβλητὴν x τὰς τιμὰς β, γ, δ . . . κ

$$B=\frac{f(\beta)}{\varphi'(\beta)},\quad \Gamma=\frac{f(\gamma)}{\varphi'(\gamma)}\ \ldots\ K=\frac{f(\kappa)}{\varphi'(\kappa)} \tag{3}$$

26. Αἱ τιμαὶ αὗται τῶν ἀριθμητῶν Α, Β . . . Κ εἶνε πεπερασμέναι πᾶσαι καὶ τοῦ 0 διάφοροι· διότι οὔτε οἱ παρονομασταὶ $\varphi'(\alpha)$, $\varphi'(\beta)$ . . . $\varphi'(\kappa)$ εἶνε 0 (αἱ ῥίζαι ὑπετέθησαν ἁπλαῖ), οὔτε οἱ ἀριθμηταὶ $f(\alpha)$, $f(\beta)$ . . . $f(\kappa)$· διότι τὸ πολυώνυμον $f(x)$ οὐδεμίαν ἔχει κοινὴν ῥίζαν μετὰ τοῦ $\varphi(x)$.

27. Τὰς τιμὰς ταύτας πρέπει νὰ ἔχωσιν οἱ ἀριθμηταὶ Α, Β, Γ...Κ, ἵνα ἡ ἀνάλυσις (1) εἶνε δυνατή· λέγω δέ, ὅτι τοῦτο ἀρκεῖ· λέγω δηλαδή, ὅτι, ἂν οἱ ἀριθμηταὶ Α, Β . . . Κ ἔχωσι τὰς εὑρεθείσας ταύτας τιμάς, ἡ ἰσότης (1) θὰ ἀληθεύῃ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x, ἤτοι θὰ εἶνε ταὐτότης.

Καὶ ὄντως· ἐκ τῆς ἀλγέβρας εἶνε γνωστόν, ὅτι, ὅταν δύο ἀκέραια πολυώνυμα τῆς x βαθμῶν μικροτέρων τοῦ μ γίνωνται ἴσα διὰ μ τιμὰς τῆς x, τὰ πολυώνυμα ταῦτα εἶνε ἐντελῶς τὰ αὐτά. (Εἰσαγ. σελ. 120).

Τούτου τεθέντος, τὰ δύο πολυώνυμα

$$f(x)\quad \text{καὶ}\quad A\,\frac{\varphi(x)}{x-\alpha}+B\,\frac{\varphi(x)}{x-\beta}+\ \ldots\ +K\,\frac{\varphi(x)}{x-\kappa}$$

εἶνε ἀκέραια καὶ βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ μ· (μ ὄντος τοῦ βαθμοῦ τοῦ $\varphi(x)$)· γίνονται δὲ ἴσα διὰ τὰς μ τιμὰς α, β, γ . . . κ τῆς x (ἕνεκα τῶν τιμῶν, ἃς ἔχουσι τὰ Α, Β, . . . Κ)· εἶνε ἄρα τὰ αὐτά· ὥστε ἡ ἰσότης (2) εἶνε ταὐτότης, ἐπομένως καὶ ἡ (1) εἶνε ταὐτότης· ἀναλύεται ἄρα ἡ ῥητὴ συνάρτησις εἰς ἄλλας ἁπλουστέρας ἐπίσης ῥητάς.

Σημείωσις. Ἡ ἰσότης (2) ἐν ᾗ τὰ Α, Β, . . . Κ ἔχουσι τὰς εὑρεθείσας τιμὰς αὐτῶν, (3) κατ' οὐδὲν διαφέρει τοῦ τύπου τοῦ Lagrange, ὅστις δίδει τὴν συνάρτησιν $f(x)$, ἥτις ἔχει βαθμὸν μικρότερον τοῦ μ λαμβάνει δὲ διὰ μ τιμὰς τῆς x τὰς α, β . . . κ, δεδομένας τιμὰς $f(\alpha)$, $f(\beta)$ . . . $f(\kappa)$.

28. Τὴν ἀνάλυσιν ταύτην τῆς ῥητῆς συναρτήσεως εἰς ἁπλουστέρας ῥητὰς συναρτήσεις δυνάμεθα νὰ δείξωμεν καὶ ἄλλως· ὡς ἑξῆς.

Ἔστω ἡ ῥητὴ συνάρτησις $\dfrac{\mathrm{f}(x)}{\varphi(x)}$· ἧς ὁ παρονομαστὴς $\varphi(x)$ ἀνελύθη εἰς τοὺς πρωτοβαθμίους αὐτοῦ παράγοντας

$$\varphi(x) = (x-\alpha)\ (x-\beta)\ .\ .\ .\ (x-\varkappa)$$

(ὁ δὲ ἀριθμητὴς εἶνε βαθμοῦ κατωτέρου ἢ ὁ παρονομαστὴς καὶ οὐδεμίαν ἔχει μετ' αὐτοῦ κοινὴν ῥίζαν)· ἐὰν ἀπ' αὐτῆς ἀφαιρέσωμεν τὸ κλάσμα $\dfrac{\mathrm{A}}{x-\alpha}$, μένει τὸ ὑπόλοιπον

$$\frac{\mathrm{f}(x)}{\varphi(x)} - \frac{\mathrm{A}}{x-\alpha}$$

δυνάμεθα δὲ νὰ ὁρίσωμεν τὸν σταθερὸν ἀριθμὸν A οὕτως, ὥστε τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο, ὅπερ εἶνε ἐπίσης ῥητὴ συνάρτησις τοῦ x, νὰ ἔχῃ ὅρους μικροτέρου βαθμοῦ ἢ ἡ δοθεῖσα συνάρτησις.

Διότι, ἂν τὸ γινόμενον $(x-\beta)\ (x-\gamma)\ .\ .\ .\ (x-\varkappa)$ παραστήσωμεν διὰ $\varphi_1(x)$, ἤτοι ἂν θέσωμεν

$$\varphi(x) = (x-\alpha)\ \varphi_1(x),$$

τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ὑπόλοιπον εἶνε

$$\frac{\mathrm{f}(x)}{(x-\alpha)\ \varphi_1(x)} - \frac{\mathrm{A}}{x-\alpha}, \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{\mathrm{f}(x) - \mathrm{A}\,\varphi_1(x)}{(x-\alpha)\,\varphi_1(x)}$$

καὶ ἂν ὁ σταθερὸς ἀριθμὸς A ὁρισθῇ οὕτως, ὥστε ὁ ἀριθμητὴς $\mathrm{f}(x) - \mathrm{A}\,\varphi_1(x)$ νὰ ἔχῃ τὴν ῥίζαν α, ἤτοι νὰ διαιρῆται διὰ $x-\alpha$, τὸ κλάσμα τοῦτο ἁπλοποιηθὲν θὰ εἶνε

$$\frac{\mathrm{f}_1(x)}{\varphi_1(x)}$$

ἤτοι θὰ ἔχῃ ὅρους, ὧν οἱ βαθμοὶ θὰ εἶνε κατὰ μονάδα μικρότεροι τῶν τοῦ δοθέντος· πρὸς τοῦτο πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε

$$\mathrm{f}(\alpha) - \mathrm{A}\,\varphi_1(\alpha) = 0$$

ἤτοι

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{f}(\alpha)}{\varphi_1(\alpha)}$$

ἡ δὲ τιμὴ αὕτη τοῦ A εἶνε πεπερασμένη καὶ τοῦ 0 διάφορος (διὰ τὰς γενομένας ὑποθέσεις) οὐδόλως δὲ διαφέρει τῆς κατὰ τὸν ἄλλον τρόπον εὑρεθείσης· διότι ἐκ τῆς ἰσότητος

$$\varphi(x) = (x-\alpha)\ \varphi_1(x)$$

ἕπεται $\varphi'(x)=(x-\alpha)\ \varphi'_1(x)+\varphi_1(x)$

ὅθεν διὰ $x=\alpha$, $\varphi'(\alpha)=\varphi_1(\alpha)$.

Τούτου γενομένου, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}$$

ἀλλὰ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δυνάμεθα νὰ ἀναλύσωμεν καὶ τὸ κλάσμα $\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}$ εἰς τὰ δύο μέρη

$$\frac{B}{x-\beta}+\frac{f_2(x)}{\varphi_2(x)}$$

ἔνθα τὸ πολυώνυμον $\varphi_2(x)$ ἔχει τοὺς παράγοντας $(x-\gamma)(x-\delta)\ldots(x-\kappa)$. Ὁμοίως καὶ τὸ κλάσμα $\frac{f_2(x)}{\varphi_2(x)}$ εἰς τὰ ἑξῆς δύο

$$\frac{\Gamma}{x-\gamma}+\frac{f_3(x)}{\varphi_3(x)}$$

καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς κλάσμα, ἔχον παρονομαστὴν πρωτοβάθμιον· τότε θὰ ἔχωμεν

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}+\frac{\Gamma}{x-\gamma}+\ldots+\frac{K}{x-\kappa}.$$

Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ κλάσμα

$$\frac{1}{x(x^2-1)}$$

τοῦτο θὰ ἀναλυθῇ εἰς τρία κλάσματα ἔχοντα παρονομαστὰς τοὺς τρεῖς πρωτοβαθμίους παράγοντας x, $x-1$, $x+1$ τοῦ παρονομαστοῦ· ἤτοι θὰ εἶνε

$$\frac{1}{x(x^2-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{\Gamma}{x+1}$$

ἵνα ὁρίσωμεν τοὺς ἀριθμητὰς Α, Β, Γ, δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν τοὺς εὑρεθέντας τύπους (3)· ἀλλ' ἁπλούστερον εἶνε νὰ ἀπαλλάξωμεν τὴν ἰσότητα ταύτην ἀπὸ τῶν παρονομαστῶν, ὅτε γίνεται

$$1=A(x^2-1)+B\,x(x+1)+\Gamma\,x(x-1)$$

καὶ ἔπειτα νὰ δώσωμεν εἰς τὸν x, τὰς τιμὰς 0, 1, -1· οὕτως εὑρίσκομεν

$$A=-1,\quad B=\frac{1}{2}\quad \Gamma=\frac{1}{2}.$$

ἑπομένως εἶνε

$$\frac{1}{x(x^2-1)}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}.$$

2) Περίπτωσις, ἐν ᾗ ὁ παρονομαστὴς $\varphi(x)$ ἔχει πολλαπλᾶς ῥίζας.

29. Ἔστω ἡ ῥητὴ συνάρτησις $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, ἧς ὁ παρονομαστὴς ἔχει τὴν ῥίζαν α πολλαπλῆν τῆς τάξεως λ· (ὁ δὲ ἀριθμητὴς εἶνε βαθμοῦ κατωτέρου ἢ ὁ παρονομαστὴς καὶ οὐδεμίαν ἔχει μετ' αὐτοῦ κοινὴν ῥίζαν)· τότε εἶνε

$$\varphi(x)=(x-\alpha)^\lambda.\,\varphi_1(x)$$

ἔνθα τὸ $\varphi_1(x)$ δὲν ἔχει τὴν ῥίζαν α.

Ἐὰν ἀπ' αὐτῆς ἀφαιρέσωμεν τὸ κλάσμα

$$\frac{A}{(x-\alpha)^\lambda},$$

μένει τὸ ὑπόλοιπον

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}-\frac{A}{(x-\alpha)^\lambda} \quad ἢ \quad \frac{f(x)}{(x-\alpha)^\lambda\varphi_1(x)}-\frac{A}{(x-\alpha)^\lambda}$$

ἢ καὶ

$$\frac{f(x)-A\,\varphi_1(x)}{(x-\alpha)^\lambda.\varphi_1(x)} \tag{4}$$

δυνάμεθα δὲ νὰ ὁρίσωμεν τὸν σταθερὸν ἀριθμὸν Α οὕτως, ὥστε τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο νὰ ἔχῃ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν μικροτέρου βαθμοῦ ἢ ἡ δοθεῖσα συνάρτησις· πρὸς τοῦτο πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ διαιρῆται ὁ ἀριθμητὴς διὰ τοῦ $x-\alpha$· ἤτοι νὰ ἔχῃ τὴν ῥίζαν α· τουτέστ' νὰ εἶνε

$$f(\alpha)-A\,\varphi_1(\alpha)=0$$

ὅθεν ἕπεται

$$A=\frac{f(\alpha)}{\varphi_1(\alpha)} \tag{5}$$

εἶνε δὲ ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ Α πεπερασμένη καὶ διάφορος τοῦ 0 ἕνεκα τῶν γενομένων ὑποθέσεων· τότε τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ὑπόλοιπον (4) ἁπλοποιούμενον γίνεται

$$\frac{f_1(x)}{(x-\alpha)^{\lambda_1}.\varphi_1(x)} \qquad \lambda_1<\lambda$$

ἤτοι ἔχει ὅρους, ὧν ὁ βαθμὸς εἶνε κατὰ μονάδα τοὐλάχιστον μικρότερος.

Τούτου γενομένου, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A}{(x-\alpha)^{\lambda}}+\frac{f_1(x)}{(x-\alpha)^{\lambda_1}\varphi_1(x)}.$$

Ἀλλὰ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δυνάμεθα νὰ ἀναλύσωμεν καὶ τὸ κλάσμα

$$\frac{f_1(x)}{(x-\alpha)^{\lambda_1}\varphi_1(x)}$$

εἰς τὰ δύο μέρη

$$\frac{A_1}{(x-\alpha)^{\lambda_1}}+\frac{f_2(x)}{(x-\alpha)^{\lambda_2}\varphi_1(x)} \qquad \lambda_2<\lambda_1<\lambda$$

ἔνθα

$$A_1=\frac{f_1(\alpha)}{\varphi_1(\alpha)}.$$

καὶ πάλιν τὸ δεύτερον κλάσμα εἰς δύο ἄλλα, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς τὸ κλάσμα $\frac{f_\lambda(x)}{\varphi_1(x)}$· τότε θὰ εἶνε

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A}{(x-\alpha)^{\lambda}}+\frac{A_1}{(x-\alpha)^{\lambda-1}}+\dots+\frac{A_{\lambda-1}}{x-\alpha}+\frac{f_\lambda(x)}{\varphi_1(x)}. \qquad (6)$$

$$A \gtrless 0.$$

Ὁ παρονομαστὴς $\varphi_1(x)$ περιέχει πάσας τὰς ῥίζας τοῦ $\varphi(x)$, ἐξαιρουμένης τῆς α. Ἐὰν λοιπὸν τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)$ ἔχῃ τὴν ῥίζαν β πολλαπλῆν τῆς τάξεως μ, θὰ ἔχῃ αὐτὴν καὶ τὸ $\varphi_1(x)$ ὡσαύτως πολλαπλῆν καὶ τῆς αὐτῆς τάξεως καὶ θὰ εἶνε $\left(\text{ἂν } \varphi_1(x)=(x-\beta)^{\mu}\varphi_2(x)\right)$

$$\frac{f_\lambda(x)}{\varphi_1(x)}=\frac{B}{(x-\beta)^{\mu}}+\frac{B_1}{(x-\beta)^{\mu-1}}+\dots+\frac{B_{\mu-1}}{x-\beta}+\frac{f_{\lambda\mu}(x)}{\varphi_2(x)},$$

$$B \gtrless 0$$

ὅθεν

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A}{(x-\alpha)^{\lambda}}+\frac{A_1}{(x-\alpha)^{\lambda-1}}+\dots+\frac{A_{\lambda-1}}{(x-\alpha)}+$$

$$+\frac{B}{(x-\beta)^{\mu}}+\frac{B_1}{(x-\beta)^{\mu-1}}+\dots+\frac{B_{\mu-1}}{x-\beta}+\frac{f_{\lambda\mu}(x)}{\varphi_2(x)} \qquad (7)$$

ἐὰν ἔπειτα ὁ παρονομαστὴς $\varphi(x)$ ἔχῃ καὶ ἄλλας ῥίζας (πλὴν τῶν α καὶ β) ταύτας πάσας ἔχει καὶ ὁ $\varphi_2(x)$, διότι $\varphi(x)=(x-\alpha)^\lambda(x-\beta)^\mu\varphi_2(x)$, καὶ εἰς τὸν αὐτὸν βαθμὸν πολλαπλότητος· θὰ ἀναλυθῇ λοιπὸν καὶ τὸ κλάσμα $\dfrac{f_{\lambda\mu}(x)}{\varphi_2(x)}$ εἰς ἄλλα, καὶ οὕτω καθεξῆς·

Ὥστε τὸ κλάσμα $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, ἂν ὁ παρονομαστὴς $\varphi(x)$ ἀναλυθεὶς εἰς πρωτοβαθμίους παράγοντας εἶνε, $\varphi(x)=(x-\alpha)^\lambda(x-\beta)^\mu(x-\gamma)^\nu \ldots (x-\varkappa)^\rho$, ἀναλύεται εἰς τὰ ἑξῆς

$$
\begin{aligned}
&\frac{A}{(x-\alpha)^\lambda}+\frac{A_1}{(x-\alpha)^{\lambda-1}}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^{\lambda-2}}+\ldots+\frac{A_{\lambda-1}}{x-\alpha}+\\
&+\frac{B}{(x-\beta)^\mu}+\frac{B_1}{(x-\beta)^{\mu-1}}+\frac{B_2}{(x-\beta)^{\mu-2}}+\ldots+\frac{B_{\mu-1}}{x-\beta}+\\
&+\frac{\Gamma}{(x-\gamma)^\nu}+\frac{\Gamma_1}{(x-\gamma)^{\nu-1}}+\frac{\Gamma_2}{(x-\gamma)^{\nu-2}}+\ldots+\frac{\Gamma_{\nu-1}}{x-\gamma}+\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\frac{K}{(x-\varkappa)^\rho}+\frac{K_1}{(x-\varkappa)^{\rho-1}}+\frac{K_2}{(x-\varkappa)^{\rho-2}}+\ldots+\frac{K_{\rho-1}}{x-\varkappa}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

ἔνθα τὰ A, B, Γ . . . K εἶνε διάφορα τοῦ 0.

30. Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι ἐν τῇ ἀναλύσει τοῦ κλάσματος $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ ἑκάστη ῥίζα τοῦ παρονομαστοῦ δίδει ἐν γένει τόσα κλάσματα ὅσος εἶνε ὁ βαθμὸς τῆς πολλαπλότητος αὐτῆς· ἔχουσι δὲ τὰ κλάσματα ταῦτα ἀριθμητὰς μὲν σταθεροὺς καὶ ἐντελῶς ὡρισμένους ἀριθμοὺς παρονομαστὰς δὲ τὰς δυνάμεις τοῦ πρωτοβαθμίου παράγοντος τοῦ πρὸς τὴν ῥίζαν ἀντιστοιχοῦντος ἀπὸ τῆς πρώτης μέχρις ἐκείνης, ἥτις ὑπάρχει ἐν τῷ πολυωνύμῳ $\varphi(x)$.

Ἑκάστη ῥητὴ συνάρτησις ἔχει ἓν μόνον ἀνάπτυγμα (8).

31. Ἡ ἀνάλυσις ἑκάστου κλάσματος $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ εἰς ἁπλᾶ κλάσματα τῆς μορφῆς (8) παρέχει ἓν καὶ τὸ αὐτὸ πάντοτε ἐξαγόμενον, καθ' οἱονδήποτε

τρόπον καὶ ἂν γίνῃ, τουτέστιν ἓν καὶ τὸ αὐτὸ κλάσμα δὲν δύναται νὰ ἔχῃ δύο διάφορα ἀναπτύγματα τῆς μορφῆς (8).

Διότι, ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ κλάσμα $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ ἀνελύθη πρῶτον μὲν εἰς τὰ ἑξῆς

$$\frac{A}{(x-\alpha)^{\lambda}}+\frac{A_1}{(x-\alpha)^{\lambda-1}}+\dots+\frac{A_{\lambda-1}}{x-\alpha}+$$

$$+\frac{B}{(x-\beta)^{\mu}}+\frac{B_1}{(x-\beta)^{\mu-1}}+\dots+\frac{B_{\mu-1}}{x-\beta}+$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+\frac{K}{(x-\varkappa)^{\rho}}+\frac{K_1}{(x-\varkappa)^{\rho-1}}+\dots+\frac{K_{\rho-1}}{x-\varkappa}$$

ἔπειτα δὲ δι' ἄλλου τρόπου ἀνελύθη εἰς τὰ ἑξῆς

$$\frac{A'}{(x-\alpha')^{\lambda'}}+\frac{A'_1}{(x-\alpha')^{\lambda'-1}}+\dots+\frac{A'_{\lambda'-1}}{x-\alpha'}+$$

$$+\frac{B'}{(x-\beta')^{\mu'}}+\frac{B'_1}{(x-\beta')^{\mu'-1}}+\dots+\frac{B'_{\mu'-1}}{x-\beta'}+$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+\frac{K'}{(x-\varkappa')^{\rho'}}+\frac{K'_1}{(x-\varkappa')^{\rho'-1}}+\dots+\frac{K'_{\rho'-1}}{x-\varkappa'}$$

τότε τὰ δύο ταῦτα ἀθροίσματα, ὡς ἴσα τῷ αὐτῷ κλάσματι, θὰ ἦσαν ἴσα ἀλλήλοις καὶ τοῦτο διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x· ἀλλ' ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα ἐπὶ $(x-\alpha)^{\lambda}$ καὶ ἔπειτα ὑποθέσωμεν $x=\alpha$ τὸ μὲν πρῶτον ἄθροισμα γίνεται A τὸ δὲ δεύτερον γίνεται 0· ἂν πάντες οἱ ἀριθμοὶ α', β', γ' . . . $\varkappa'$ εἶνε διάφοροι τοῦ α, ἀνάγκη ἄρα νὰ εἶνε ὁ α ἴσος ἑνὶ ἐκ τῶν α' β' γ' . . $\varkappa'$· ἔστω $\alpha=\alpha'$· τότε καὶ οἱ ἐκθέται λ καὶ λ' θὰ εἶνε ἴσοι· διότι ἂν ὑποτεθῇ $\lambda>\lambda'$, πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ ἀναπτύγματα ἐπὶ $(x-\alpha)^{\lambda}$ καὶ ὑποθέτοντες ἔπειτα $x=\alpha$, εὑρίσκομεν ἐκ μὲν τοῦ πρώτου ἐξαγόμενον A ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου 0· ἀνάγκη ἄρα νὰ εἶνε καὶ $\lambda'=\lambda$, ἀλλὰ καὶ τούτου ὄντος, τὸ δεύτερον ἄθροισμα γίνεται (διὰ $x=\alpha$) A'· ἄρα θὰ εἶνε καὶ $A'=A$· ἤτοι τὰ δύο πρῶτα κλάσματα κατ' οὐδὲν διαφέρουσιν· παραλειπομένων δὲ τούτων, δεικνύεται ὁμοίως, ὅτι καὶ $A_1 = A'_1$ καὶ καθεξῆς· ὥστε τὰ δύο ἀναπτύγματα κατ' οὐδὲν διαφέρουσιν.

32. Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι ἡ εὕρεσις τῶν ἀριθμητῶν A, B, ... K A_1 B_1 ... τοῦ ἀναπτύγματος δύναται καθ' οἱονδήποτε τρόπον νὰ γίνῃ, εἴτε διὰ τῆς μεθόδου, δι' ἧς ἀπεδείχθη τὸ δυνατὸν τῆς τοιαύτης ἀναλύσεως, εἴτε καὶ δι' ἄλλης οἱασδήποτε. Δυνάμεθα, λόγου χάριν, ἀφοῦ ἀπαλλάξωμεν τὴν ἰσότητα

$$\frac{\mathrm{f}(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^\lambda} + \dots + \frac{A_{\lambda-1}}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\beta)^\mu} + \dots \frac{B_{\mu-1}}{x-\beta} + \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

ἀπὸ τῶν παρονομαστῶν, πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς ἐπὶ $\varphi(x)$, νὰ ἐξισώσωμεν τοὺς συντελεστὰς τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ x εἰς ἀμφότερα τὰ ἀκέραια πολυώνυμα, ἅτινα ἀποτελοῦσι τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος, τότε θὰ ἔχωμεν m ἐξισώσεις πρωτοβαθμίους ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους ἀριθμητὰς A, B ... K, ἐξ ὧν εὑρίσκομεν αὐτούς· ἢ καὶ νὰ δώσωμεν m τιμὰς εἰς τὴν x $\big(m$ ὄντος τοῦ βαθμοῦ τοῦ $\varphi(x)\big)$ καὶ νὰ ἐξισώσωμεν τὰ ἐξαγόμενα· τότε καὶ πάλιν θὰ ἔχωμεν m ἐξισώσεις πρωτοβαθμίους, ἐξ ὧν θὰ προσδιορισθῶσιν οἱ m ἄγνωστοι ἀριθμηταί· οἴκοθεν ἐννοεῖται, ὅτι αἱ ῥίζαι α β γ ... κ εἶνε καταλληλότεραι τιμαί· διότι ἑκάστη μηδενίζει πολλοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου μέλους.

Παραδείγματα.

1) Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ κλάσμα

$$\frac{x-1}{x^3(x+1)}$$

τοῦτο κατὰ τὰ προηγουμένως ἐκτεθέντα, θὰ ἀναλυθῇ εἰς τὰ ἑξῆς τέσσαρα κλάσματα

$$\frac{A}{x^3} + \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{x-1}{x^3(x+1)}$$

ἵνα προσδιορίσωμεν τοὺς ἀριθμητάς, πολλαπλασιάζομεν τὴν ἰσότητα ταύτην ἐπὶ $x^3(x+1)$ καὶ λαμβάνομεν

$$x-1 = A(x+1) + A_1 x(x+1) + A_2 x^2(x+1) + B x^3\cdot$$

διὰ $x = 0$ εὑρίσκομεν $A = -1$

διὰ $x = -1$ εὑρίσκομεν $B = 2\cdot$

ἐξισοῦντες δὲ τοὺς συντελεστὰς τοῦ x^3 καὶ τοῦ x^2 εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$A_2+B=0 \quad \text{ὅθεν} \quad A_2=-2$$
$$A_1+A_2=0 \quad \text{ὅθεν} \quad A_1=2\cdot$$

ὥστε τὸ δοθὲν κλάσμα ἀνελύθη εἰς τὰ ἑξῆς

$$-\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x}+\frac{2}{x+1}.$$

2) Ἔστω καὶ τὸ κλάσμα

$$\frac{x^2-3}{(x+1)^2(x+2)}$$

τοῦτο θὰ ἀναλυθῇ εἰς τὰ ἑξῆς τρία

$$\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{A_1}{x+1}+\frac{B}{x+2}=\frac{x^2-3}{(x+1)^2(x+2)}$$

οἱ δὲ ἀριθμηταὶ προσδιορίζονται ἐκ τῆς ἰσότητος

$$x^2-3=A(x+2)+A_1(x+1)\,(x+2)+B(x+1)^2\cdot$$

διὰ $x=-2$ εὑρίσκομεν $B=1$, διὰ $x=-1$ εὑρίσκομεν $A=-2$ Πρὸς εὕρεσιν τοῦ A_1 ἐξισοῦμεν τοὺς συντελεστὰς τοῦ x^2 εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$1=A_1+B \quad \text{ὅθεν} \quad A_1=0$$

ὥστε εἶνε

$$\frac{x^2-3}{(x+1)^2(x+2)}=-\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+2}.$$

Ἀνάλυσις τῶν ῥητῶν συναρτήσεων εἰς ἄλλας ἐν γένει.

33. Ἐκ τῆς ἀναλύσεως τῶν ῥητῶν συναρτήσεων εἰς ἁπλᾶς συνάγεται καὶ τὸ ἑπόμενον θεώρημα.

Ἐὰν τυχὸν πολυώνυμον $\varphi(x)$ *τοῦ βαθμοῦ* m *ἀναλυθῇ ὁπωσδήποτε εἰς γινόμενον δύο παραγόντων* $\varphi_1(x)$ *καὶ* $\varphi_2(x)$ *μηδεμίαν ἐχόντων κοινὴν ῥίζαν, πᾶν ἀνάγωγον κλάσμα* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, *οὗ ὁ ἀριθμητὴς εἶνε βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ* m, *ἀναλύεται εἰς δύο κλάσματα τῆς μορφῆς*

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}+\frac{f_2(x)}{\varphi_2(x)}$$

καὶ ἑκατέρου τούτων ὁ ἀριθμητὴς εἶνε βαθμοῦ κατωτέρου ἢ ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ.

Εἰς τὸ θεώρημα τοῦτο φθάνομεν, ἐὰν νοήσωμεν ἀναλελυμένον τὸ κλάσμα $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ εἰς ἁπλᾶ κλάσματα καὶ ἑνούμενα εἰς ἓν τὰ κλάσματα, ἅτινα δίδουσιν αἱ ῥίζαι τοῦ $\varphi_1(x)$, ἔπειτα εἰς ἓν ἄλλο τὰ κλάσματα, ἅτινα δίδουσιν αἱ ῥίζαι τοῦ $\varphi_2(x)$.

34. Ἡ ἀνάλυσις αὕτη τοῦ κλάσματος $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ εἰς δύο, ἔχοντα παρονομαστὰς $\varphi_1(x)$ καὶ $\varphi_2(x)$ ἀριθμητὰς δὲ βαθμοῦ μικροτέρου ἢ οἱ παρονομασταί, παρέχει τοὺς αὐτοὺς ἀριθμητὰς $f_1(x)$ καὶ $f_2(x)$ καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν γίνῃ· διότι ἡ ταὐτότης

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}+\frac{f_2(x)}{\varphi_2(x)}=\frac{F_1(x)}{\varphi_1(x)}+\frac{F_2(x)}{\varphi_2(x)}$$

μόνον τότε ἀληθεύει, ὅταν

$$f_1(x)=F_1(x) \quad \text{καὶ} \quad f_2(x)=F_2(x).$$

Καὶ ὄντως· ἐὰν ἀναπτύξωμεν τὴν ῥητὴν συνάρτησιν, ἣν ἀποτελεῖ ἑκάτερον τῶν μελῶν τῆς ταὐτότητος εἰς ἁπλᾶ κλάσματα, ἐπειδὴ ἓν καὶ μόνον ἀνάπτυγμα αὐτῆς εἰς ἁπλᾶ κλάσματα ὑπάρχει, τὰ ἁπλᾶ κλάσματα τοῦ πρώτου μέλους θὰ εἶνε ἓν ἑνὶ ἴσα τοῖς τοῦ δευτέρου· θὰ εἶνε λοιπὸν

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}=\frac{F_1(x)}{\varphi_1(x)} \quad \text{καὶ} \quad \frac{f_2(x)}{\varphi_2(x)}=\frac{F_2(x)}{\varphi_2(x)}$$

ἄρα καὶ
$$f_1(x)=F_1(x) \quad \text{καὶ} \quad f_2(x)=F_2(x).$$

Γινώσκοντες ὅτι ἡ ἀνάλυσις αὕτη εἶνε δυνατὴ καὶ ὅτι παρέχει πάντοτε ἓν ἐξαγόμενον (ὅταν δοθῶσι τὰ φ_1 καὶ φ_2) καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν γίνῃ, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τοὺς ἀριθμητὰς $f_1(x)$ καὶ $f_2(x)$ καὶ χωρὶς νὰ εἰξεύρωμεν τὰς ῥίζας τῶν δύο πολυωνύμων $\varphi_1(x)$ καὶ $\varphi_2(x)$·

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ προσδιορίσωμεν τοὺς συντελεστὰς τῶν $f_1(x)$ καὶ $f_2(x)$ ἐκ τῆς ταὐτότητος

$$f(x)=\varphi_1(x)\,f_2(x)+\varphi_2(x)\,f_1(x)$$

ἥτις περιέχει m συντελεστὰς ἀγνώστους (m_1 τοῦ $f_1(x)$ καὶ m_2 τοῦ $f_2(x)$) ἐπειδὴ δὲ ἑκάτερον τῶν μελῶν αὐτῆς εἶνε βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ m, ἐὰν ἐξισώσωμεν τοὺς συντελεστὰς τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ x ἀπὸ τῆς x^0 μέχρι τῆς x^{m-1}, θὰ ἔχωμεν m ἐξισώσεις, ἐξ ὧν εὑρίσκονται οἱ m ἄγνωστοι συντελεσταί.

Τοὺς ἀριθμητὰς $f_1(x)$ καὶ $f_2(x)$ δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς. Ἐὰν ἀπαλείψωμεν τὴν μεταβλητὴν x μεταξὺ τῶν δύο ἐξισώσεων $\varphi_1(x)=0$ καὶ $\varphi_2(x)=0$, ἐπειδὴ οὐδεμίαν ἔχουσιν αὗται κοινὴν ῥίζαν, θὰ εὕρωμεν (Εἰσαγ. ἀν. ἀλγέβρ. σελ. 153)

$$\varphi_1(x)\, p(x)+\varphi_2(x)\, q(x)=R$$

ἔνθα R εἶνε ὁρίζουσά τις ἐκ τῶν συντελεστῶν τῶν δύο πολυωνύμων φ_1 καὶ φ_2 συγκροτουμένη καὶ ἥτις διαφέρει τοῦ 0.

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης ἕπεται νῦν ἡ ἑξῆς

$$\varphi_1(x)\, p(x)\, f(x)+\varphi_2(x)\, q(x)\, f(x)=R\, f(x). \qquad (\tau)$$

διαιρέσωμεν νῦν τὸ μὲν γινόμενον $p(x)\, f(x)$ διὰ τοῦ $\varphi_2(x)$, τὸ δὲ $q(x)\, f(x)$ διὰ τοῦ $\varphi_1(x)$ καὶ ἔστω

$$p(x)\, f(x) = \Pi(x).\varphi_2(x)+P(x)$$

$$q(x)\, f(x) = K(x).\varphi_1(x)+Q(x)$$

ἔνθα ἕκαστον τῶν ὑπολοίπων $P(x)$ καὶ $Q(x)$ εἶνε βαθμοῦ μικροτέρου ἢ ὁ ἀντίστοιχος διαιρέτης· τούτων τεθέντων ἡ ταὐτότης (τ) γίνεται

$$\varphi_1(x)\, \varphi_2(x) \left[\Pi(x)+K(x)\right]+\varphi_1(x)\, P(x)+\varphi_2(x)\, Q(x)=R\, f(x)$$

ἐπειδὴ δὲ ὁ μὲν πρῶτος ὅρος τῆς ἰσότητος ταύτης εἶνε βαθμοῦ τοὐλάχιστον m οἱ δὲ λοιποὶ εἶνε βαθμοῦ τὸ πλεῖστον m—1, ἡ ἰσότης δὲν δύναται νὰ ὑπάρχῃ ἢ ὅταν εἶνε

$$\Pi(x)+K(x)=0$$

καὶ ἑπομένως $\qquad \varphi_1(x)\, P(x)+\varphi_2(x)\, Q(x)=R\, f(x)$

ἂν ἄρα λάβωμεν $\qquad f_1(x)=\frac{1}{R}\, Q(x)$, καὶ $f_2(x)=\frac{1}{R}\, P(x)$,

θὰ εἶνε $\qquad \frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}+\frac{f_2(x)}{\varphi_2(x)}$

Τὸ θεώρημα τοῦτο δύναται νὰ γενικευθῇ ὡς ἑξῆς.

Ἐὰν τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)$ *ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον ὁσωνδήποτε παραγόντων* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ . . . $\varphi_\sigma(x)$, *ὧν ἕκαστος ἔχει ῥίζας διαφόρους τῶν λοιπῶν, πᾶν ἀνάγωγον κλάσμα* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, *οὗτινος ὁ ἀριθμητὴς εἶνε βαθμοῦ κατωτέρου ἢ ὁ παρονομαστής, ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα κλασμάτων ἐχόντων παρονομαστὰς τοὺς παράγοντας* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ . . . $\varphi_\sigma(x)$, *ἀριθμητὰς δὲ πολυώνυμα ἀκέραια ἕκαστον βαθμοῦ κατωτέρου ἢ ὁ παρονομαστής του·* ἤτοι εἶνε

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}+\frac{f_2(x)}{\varphi_2(x)}+\ .\ .\ .\ +\frac{f_\sigma(x)}{\varphi_\sigma(x)}.$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΣ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΑΝΑΛΕΛΥΜΕΝΩΝ ΕΙΣ ΑΠΛΑΣ

35. Μετὰ τὴν ἀνάλυσιν τῆς ῥητῆς συναρτήσεως $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ εἰς ἁπλᾶς (αἵτινες ἔχουσιν ἀριθμητὴν μὲν σταθερὸν παρονομαστὴν δὲ δύναμίν τινα ἑνὸς τῶν πρωτοβαθμίων παραγόντων τοῦ παρονομαστοῦ $\varphi(x)$) κατὰ τὸν τύπον (8) ἡ ὁλοκλήρωσις αὐτῆς οὐδεμίαν παρουσιάζει δυσκολίαν· ἀρκεῖ τῷ ὄντι νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὴν ῥητὴν συνάρτησιν διὰ τοῦ ἀναπτύγματος αὐτῆς καὶ νὰ ἐφαρμόσωμεν ἐπ᾿ αὐτῆς τὴν κατὰ μέρη ὁλοκλήρωσιν, οὕτως εὑρίσκομεν

$$\int\frac{f(x)dx}{\varphi(x)}=A\int\frac{dx}{(x-\alpha)^{\lambda}}+A_1\int\frac{dx}{(x-\alpha)^{\lambda-1}}+\dots+A_{\lambda-1}\int\frac{dx}{(x-\alpha)}+$$

$$+B\int\frac{dx}{(x-\beta)^{\mu}}+B_1\int\frac{dx}{(x-\beta)^{\mu-1}}+\dots+B_{\mu-1}\int\frac{dx}{x-\beta}+$$

$$(9)\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+K\int\frac{dx}{(x-\varkappa)^{\rho}}+K_1\int\frac{dx}{(x-\varkappa)^{\rho-1}}+\dots+K_{\rho-1}\int\frac{dx}{x-\varkappa}.$$

Ἐκ τῶν ὁλοκληρωμάτων τοῦ δευτέρου μέλους τὰ μὲν ἔχοντα παρονομαστὴν πρωτοβάθμιον εἶνε τῆς μορφῆς

$$\int\frac{dx}{x-t}$$

ἔνθα t εἶνε μία τις τῶν ῥιζῶν α, β, . . . $\varkappa$.

Ἐπειδὴ δὲ ἀντὶ dx δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $d(x-t)$· διότι t εἶνε σταθερόν, συνάγεται

$$\int\frac{dx}{x-t}=\int\frac{d(x-t)}{x-t}=l(x-t)$$

τὰ δὲ ἔχοντα παρονομαστὴν ἀνωτέρου βαθμοῦ εἶνε τῆς μορφῆς

$$\int\frac{dx}{(x-t)^{\sigma}}\quad \text{ἢ}\quad \int\frac{d(x-t)}{(x-t)^{\sigma}}.\qquad \sigma>1$$

καὶ ἂν τεθῇ $x-t=\omega$, ἕπεται

$$\int\frac{dx}{(x-t)^{\sigma}}=\int\frac{d\omega}{\omega^{\sigma}}=\int\omega^{-\sigma}d\omega=\frac{\omega^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

ἤτοι $$\int\frac{dx}{(x-t)^\sigma}=-\frac{1}{\sigma-1}\cdot\frac{1}{(x-t)^{\sigma-1}}.$$

Ἐκτελοῦντες κατὰ ταῦτα τὰς ὁλοκληρώσεις τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἐξισώσεως (9), ἔχομεν

$$(10)\qquad \int\frac{\mathrm{f}(x)}{\varphi(x)}dx=$$

$$-\frac{A}{\lambda-1}\cdot\frac{1}{(x-\alpha)^{\lambda-1}}-\frac{A_1}{\lambda-2}\,\frac{1}{(x-\alpha)^{\lambda-2}}-\ldots-\frac{A_{\lambda-2}}{1}\,\frac{1}{x-\alpha}+A_{\lambda-1}l(x-\alpha)$$

$$-\frac{B}{\mu-1}\cdot\frac{1}{(x-\beta)^{\mu-1}}-\frac{B_1}{\mu-2}\,\frac{1}{(x-\beta)^{\mu-2}}-\ldots-\frac{B_{\mu-2}}{1}\,\frac{1}{x-\beta}+B_{\mu-1}l(x-\beta)$$

. . . .

$$-\frac{K}{\rho-1}\cdot\frac{1}{(x-\varkappa)^{\rho-1}}-\frac{K_1}{\rho-2}\,\frac{1}{(x-\varkappa)^{\rho-2}}-\ldots-\frac{K_{\rho-2}}{1}\,\frac{1}{x-\rho}+K_{\rho-1}l(x-\rho).$$

36. Ἐπὶ τοῦ ἐξαγομένου, ὅπερ παρέχει ἡ ὁλοκλήρωσις οἱαςδήποτε ῥητῆς συναρτήσεως, παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς.

1) Τὸ ὁλοκλήρωμα ῥητῆς συναρτήσεως ἔχει ἐν γένει δύο διάφορα μέρη, τουτέστιν ἀλγεβρικὸν καὶ λογαριθμικόν· καὶ τὸ μὲν ἀλγεβρικὸν εἶνε ῥητὴ συνάρτησις ἔχουσα παρονομαστὴν τὸν

$$(x-\alpha)^{\lambda-1}\,(x-\beta)^{\mu-1}\,.\,.\,.\,x-\varkappa)^{\rho-1}.$$

ἤτοι τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τοῦ παρονομαστοῦ $\varphi(x)$ καὶ τῆς παραγώγου αὐτοῦ $\varphi'(x)$, ἀριθμητὴν δὲ βαθμοῦ μικροτέρου· προέρχεται δὲ τὸ μέρος τοῦτο ἐκ μόνον τῶν πολλαπλῶν ῥιζῶν· τὸ δὲ λογαριθμικὸν εἶνε ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τῶν διαφόρων πρωτοβαθμίων παραγόντων τοῦ $\varphi(x)$, εἰς ὃ ἕκαστος λογάριθμος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ σταθερόν τινα ἀριθμόν.

2) Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς $\varphi(x)$ δὲν ἔχῃ πολλαπλᾶς ῥίζας, τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς ῥητῆς συναρτήσεως δὲν ἔχει ἀλγεβρικὸν μέρος· καὶ ἀντιστρόφως· ἐὰν τὸ ὁλοκλήρωμα δὲν ἔχῃ ἀλγεβρικὸν μέρος, ὁ παρονομαστὴς $\varphi(x)$ δὲν ἔχει πολλαπλᾶς ῥίζας.

3) Ἐὰν ἐν τῷ ἀναπτύγματι τῆς ῥητῆς συναρτήσεως $\dfrac{\mathrm{f}(x)}{\varphi(x)}$, οὐδὲν ὑπάρχει ἁπλοῦν κλάσμα, οὗ ὁ παρονομαστὴς πρωτοβάθμιος (ὅπερ τότε

μόνον προφανῶς δύναται νὰ συμβῇ, ὅταν δὲν ὑπάρχωσιν ἁπλαῖ ῥίζαι ἀλλὰ πᾶσαι πολλαπλαῖ), τὸ ὁλοκλήρωμα αὐτῆς εἶνε ἀλγεβρικόν· καὶ τότε μόνον.

Ὅτι μὴ ὑπαρχόντων τοιούτων κλασμάτων ἐν τῷ ἀναπτύγματι, τὸ ὁλοκλήρωμα εἶνε ἀλγεβρικόν, εἶνε πρόδηλον· ὅτι δὲ οὐδὲν τοιοῦτον κλάσμα πρέπει νὰ ὑπάρχῃ, ἵνα τὸ ὁλοκλήρωμα εἶνε ἀλγεβρικόν, ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς.

Ὑποθέσωμεν τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \frac{f(x)}{\varphi(x)}\,dx$$

ῥητὴν συνάρτησιν τοῦ x καὶ ἔστω

$$\int \frac{f(x)}{\varphi(x)}\,dx = R(x)$$

ἐὰν ἀναπτυχθῇ ἡ ῥητὴ συνάρτησις εἰς ἁπλᾶ κλάσματα, θὰ εἶνε

$$\int \frac{f(x)}{\varphi(x)}dx = \frac{A_0}{(x-\alpha)^\lambda} + \frac{A_1}{(x-\alpha)^{\lambda-1}} + \dots + \frac{A_{\lambda-1}}{x-\alpha} +$$

$$+ \frac{B_0}{(x-\beta)^\mu} + \frac{B_1}{(x-\beta)^{\mu-1}} + \dots + \frac{B_{\mu-1}}{x-\beta}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ \frac{K_0}{(x-\varkappa)^\rho} + \frac{K_1}{(x-\varkappa)^{\rho-1}} + \dots + \frac{K_{\rho-1}}{x-\varkappa}$$

ἄρα θὰ εἶνε

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = -\frac{\lambda A_0}{(x-\alpha)^{\lambda+1}} - \frac{(\lambda-1)A_1}{(x-\alpha)^\lambda} - \dots - \frac{A_{\lambda-1}}{(x-\alpha)^2}$$

$$-\frac{\mu B_0}{(x-\beta)^{\mu+1}} - \frac{(\mu-1)B_1}{(x-\beta)^\mu} - \dots - \frac{B_{\mu-1}}{(x-\beta)^2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$-\frac{\rho K_0}{(x-\varkappa)^{\rho+1}} - \frac{(\rho-1)K_1}{(x-\varkappa)^\rho} - \dots - \frac{K_{\rho-1}}{(x-\varkappa)^2}$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ κλάσματος $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ οὐδένα ὅρον ἔχει οὗ ὁ παρονομαστὴς πρωτοβάθμιος.

Παραδείγματα.

1) *Εὑρεῖν τὸ ὁλοκλήρωμα*

$$\int \frac{dx}{x^2-\alpha^2}.$$

Τὸ κλάσμα $\dfrac{1}{x^2-\alpha^2}$ ἀναλύεται εἰς τὰ ἑξῆς δύο

$$\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x+\alpha}$$

ἑπομένως εἶνε

$$\int \frac{dx}{x^2-\alpha^2}=A\,l(x-\alpha)+B\,l(x+\alpha)$$

ἵνα προσδιορίσωμεν τοὺς συντελεστὰς A καὶ B, ἔχομεν τὴν ταὐτότητα

$$1=A(x+\alpha)+B(x-\alpha)$$

ἐξ ἧς ὑποθέτοντες $x=\alpha$ λαμβάνομεν $A=\dfrac{1}{2\alpha}$

ὑποθέτοντες δὲ $x=-\alpha$ εὑρίσκομεν $B=-\dfrac{1}{2\alpha}$

ὅθεν εἶνε

$$\int \frac{dx}{x^2-\alpha^2}=\frac{1}{2\alpha}\,l\left(\frac{x-\alpha}{x+\alpha}\right).$$

2) *Εὑρεῖν τὸ ὁλοκλήρωμα*

$$\int \frac{dx}{x(x^2-1)}$$

ἀναλύσαντες τὸ κλάσμα $\dfrac{1}{x(x^2-1)}$ εἰς ἁπλᾶ εὕρομεν ἤδη (σελ. 32)

$$\frac{1}{x(x^2-1)}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1}$$

ὅθεν εἶνε

$$\int \frac{dx}{x(x^2-1)}=-lx+\frac{1}{2}\,l(x^2-1)=\frac{1}{2}\,l\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

3) *Εὑρεῖν τὸ ὁλοκλήρωμα*

$$\int \frac{dx}{x^2+\alpha x+\beta} \tag{δ}$$

Ἐὰν αἱ ῥίζαι τοῦ παρονομαστοῦ εἶνε ἄνισοι καὶ παρασταθῶσι διὰ ϱ καὶ ϱ', θὰ εἶνε

$$x^2+\alpha x+\beta=(x-\rho)\ (x-\rho')$$

καὶ τὸ κλάσμα $\frac{1}{x^2+\alpha x+\beta}$ θὰ ἀναλυθῇ εἰς τὰ ἑξῆς

$$\frac{\mathrm{A}}{x-\rho}+\frac{\mathrm{A}'}{x-\rho'}=\frac{1}{x^2+\alpha x+\beta}$$

ὅθεν
$$1=\mathrm{A}(x-\rho')+\mathrm{A}'(x-\rho)$$

διὰ $x=\rho$ ἔχομεν $\mathrm{A}=\frac{1}{\rho-\rho'}$,

διὰ $x=\rho'$ ἔχομεν $\mathrm{A}'=\frac{1}{\rho'-\rho}$.

Ἐντεῦθεν ἕπεται

$$\int \frac{dx}{x^2+\alpha x+\beta}=\frac{1}{\rho-\rho'}\, l\left(\frac{x-\rho}{x-\rho'}\right) \tag{11}$$

Ἐὰν αἱ ῥίζαι ϱ καὶ ϱ' εἶνε ἴσαι, τὸ ζητούμενον ὁλοκλήρωμα γίνεται

$$\int \frac{dx}{(x-\rho)^2}$$

καὶ κατὰ τὰ ἤδη εἰρημένα

$$\int \frac{dx}{x^2+\alpha x+\beta}=-\frac{1}{x-\rho} \qquad \text{ἐὰν } \rho'=\rho \tag{12}$$

Ὅταν αἱ ῥίζαι ϱ καὶ ϱ' εἶνε φανταστικαί, ὁ τύπος (11) δίδει τὸ ὁλοκλήρωμα (δ) διὰ φανταστικῶν ποσοτήτων· καὶ δύναται μὲν νὰ μετασχηματισθῇ (ἐὰν τεθῶσιν αἱ τιμαὶ τῶν λογαρίθμων, ἃς ἐν τῷ διαφορικῷ λογισμῷ εὕρομεν), ὥστε νὰ ἐξαφανισθῶσι τὰ φανταστικὰ (ἐὰν α καὶ β εἶνε πραγματικοὶ ἀριθμοὶ) ἀλλ' ἁπλούστερον εἶνε τότε, ἂν θέλωμεν νὰ ἀποφύγωμεν τὰ φανταστικά, νὰ μὴ ἀναλύσωμεν τὸ κλάσμα, ἀλλὰ νὰ ὁλοκληρώσωμεν αὐτὸ ὡς εἶνε· πρὸς τοῦτο θέτομεν

$$\varrho = \xi+\eta i$$
$$\varrho' = \xi-\eta i$$

ὅτε ἔχομεν

$$\int \frac{dx}{x^2+\alpha x+\beta} = \int \frac{dx}{(x-\xi)^2+\eta^2}$$

καὶ ἐὰν θέσωμεν $x-\xi=\eta\omega$, ἔνθα ω εἶνε νέα τις μεταβλητή, θὰ εἶνε $dx=\eta d\omega$ καὶ ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται

$$\int \frac{dx}{x^2+\alpha x+\beta} = \int \frac{\eta d\omega}{\eta^2(1+\omega^2)} = \frac{1}{\eta} \text{τοξ εφ } \omega$$

ὅθεν
$$\int \frac{dx}{x^2+\alpha x+\beta} = \frac{1}{\eta} \text{ τοξ εφ} \left(\frac{x-\xi}{\eta}\right) \tag{13}$$

Σημείωσις. Ἐκ τοῦ τύπου (11), ὅστις ἰσχύει εἴτε πραγματικαὶ εἶνε αἱ ῥίζαι εἴτε φανταστικαί, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο, ὡς ἑξῆς

ἔστω $\rho=\xi+\eta i, \qquad \rho'=\xi-\eta i$

τότε $\rho-\rho'=2\eta i$

$$l(x-\rho)=l(x-\xi-\eta i)=\frac{1}{2}\, l\left[(x-\xi)^2+\eta^2\right]+i(\varphi+2\kappa\pi)$$

$$l(x-\rho')=l(x-\xi+\eta i)=\frac{1}{2}\, l\left[(x-\xi)^2+\eta^2\right]+i(\varphi'+2\kappa'\pi)$$

ἔνθα $\text{εφ}\,\varphi=\frac{-\eta}{x-\xi}, \quad$ καὶ $\text{εφ}\,\varphi'=\frac{\eta}{x-\xi} \quad$ ὅθεν $\varphi=-\varphi'+K_1\pi$

ἑπομένως $l(x-\rho)-l(x-\rho')=-2i\varphi'+C$

καὶ $$\int \frac{dx}{x^2+\alpha x+\beta} = -\frac{1}{\eta}\text{τοξ εφ}\left(\frac{\eta}{x-\xi}\right)+C=\frac{1}{\eta}\text{τοξ εφ}\left(\frac{x-\xi}{\eta}\right)+C'.$$

4) *Εὑρεῖν τὸ ὁλοκλήρωμα*

$$\int \frac{(Mx+N).dx}{x^2+\alpha x+\beta}$$

τὸ διαφορικὸν τοῦ παρονομαστοῦ εἶνε $(2x+\alpha)dx$· ὁ δὲ ἀριθμητὴς γράφεται ὡς ἑξῆς

$$\frac{M}{2}(2x+\alpha)dx+\left(N-\frac{M\alpha}{2}\right)dx$$

ὅθεν

$$\int \frac{(Mx+N)dx}{x^2+\alpha x+\beta} = \frac{M}{2}\int \frac{(2x+\alpha)dx}{x^2+\alpha x+\beta} + \left(N-\frac{M\alpha}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+\alpha x+\beta}$$

ἤτοι

$$\int \frac{(Mx+N)dx}{x^2+\alpha x+\beta} = \frac{M}{2}\, l(x^2+\alpha x+\beta) + \left(N - \frac{M\alpha}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+\alpha x+\beta}$$

ἐὰν δὲ τεθῇ ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ τοῦ ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει ὑπάρχοντος ὁλοκληρώματος, θὰ ἔχωμεν τὸ ζητούμενον.

Σημείωσις. Δι' ὁμοίου τρόπου δυνάμεθα πάντοτε εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα $\int \frac{f(x)}{\varphi(x)}\, dx$, ἐὰν ὁ βαθμὸς τοῦ ἀριθμητοῦ εἶνε m—1, νὰ καταβιβάζωμεν αὐτὸν εἰς m—2.

Διὰ τῆς ἀναλύσεως τοῦ κλάσματος εἰς δύο ἁπλᾶ εὑρίσκεται τὸ αὐτὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+\alpha x+\beta}dx = \frac{M\rho+N}{\rho-\rho'}\, l(x-\rho) + \frac{M\rho'+N}{\rho'-\rho}\, l(x-\rho') \qquad \text{ἐὰν } \rho \gtrless \rho'$$

Κλάσματα ἐκ φανταστικῶν ῥιζῶν προερχόμενα.

37. Ἐὰν οἱ συντελεσταὶ τῶν πολυωνύμων $f(x)$ καὶ $\varphi(x)$ εἶνε πραγματικοὶ ἀριθμοί, τὰ ἐκ τῶν φανταστικῶν ῥιζῶν τοῦ παρονομαστοῦ $\varphi(x)$ προερχόμενα ἁπλᾶ κλάσματα κατὰ τὴν ἀνάλυσιν τοῦ κλάσματος

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

ἔχουσι παρονομαστὰς φανταστικοὺς καὶ ἀριθμητὰς ἐν γένει ἐπίσης φανταστικούς· ἐάν τις θέλῃ νὰ ἀποφύγῃ τὰ φανταστικὰ κλάσματα, ἀρκεῖ νὰ ἑνώσῃ εἰς ἓν τὰ ἐκ τῶν δύο συζυγῶν ῥιζῶν $\xi+\eta i$ καὶ $\xi-\eta i$ προερχόμενα κλάσματα· (διότι τοῦ $\varphi(x)$ ἔχοντος πραγματικοὺς συντελεστὰς αἱ φανταστικαὶ ῥίζαι, ὡς γνωστόν, εἶνε ἀνὰ δύο συζυγεῖς καὶ ἴσης πολλαπλότητος).

Διότι τὰ κλάσματα ταῦτα εἶνε ἀνὰ δύο συζυγῆ (ἑπομένως δίδουσι πραγματικὸν ἄθροισμα)· ἐὰν τῷ ὄντι προσδιορίσωμεν κατὰ πρῶτον τοὺς ἀριθμητὰς $A, A_1 \ldots A_{\lambda-1}$ τῶν κλασμάτων τῶν πρὸς τὴν ῥίζαν $\alpha=\xi+\eta i$ ἀντιστοιχούντων, ἔπειτα δὲ ἀντὶ τούτων, θέλωμεν νὰ προσδιορίσωμεν τοὺς ἀριθμητὰς $B, B_1 \ldots B_{\lambda-1}$ τῶν πρὸς τὴν συζυγῆ τῆς α (τὴν β) ἀντιστοιχούντων κλασμάτων, ἡ μόνη διαφορὰ κατὰ τὰς πράξεις θὰ εἶνε, ὅτι τὸ i πρέπει νὰ τραπῇ εἰς $-i$ ἐντεῦθεν συνάγεται ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν $B\ B_1 \ldots B_{\lambda-1}$ προέρχονται ἐκ τῶν τιμῶν τῶν $A \ldots A_{\lambda-1}$ τροπῇ τοῦ i εἰς $-i$, εἶνε δηλονότι συζυγεῖς ἀνὰ δύο.

Κατὰ ταῦτα τὰ ἐκ τῶν δύο συζυγῶν ῥιζῶν $\alpha=\xi+\eta i$ καὶ $\beta=\xi-\eta i$ προερχόμενα ἁπλᾶ κλάσματα ἐν τῇ ἀναλύσει τοῦ $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, ἤτοι τὰ

$$\frac{A}{(x-\alpha)^\lambda}+\frac{A_1}{(x-\alpha)^{\lambda-1}}+\ldots+\frac{A_{\lambda-1}}{x-\alpha}$$

$$+\frac{B}{(x-\beta)^\lambda}+\frac{B_1}{(x-\beta)^{\lambda-1}}+\ldots+\frac{B_{\lambda-1}}{x-\beta}$$

ἑνούμενα δίδουσιν ἓν κλάσμα τῆς μορφῆς

$$\frac{M(x)}{\left[(x-\xi)^2+\eta^2\right]^\lambda}$$

ἔνθα $M(x)$ εἶνε πολυώνυμον βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ 2λ.

Ἀλλ' ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ πολυώνυμον $M(x)$ διὰ τοῦ $(x-\xi)^2+\eta^2$, θὰ εὕρωμεν πηλίκον τι $M_1(x)$ καὶ ὑπόλοιπον τι πρώτου βαθμοῦ $Ax+B$ καὶ θὰ εἶνε

$$M(x)=M_1(x)\left[(x-\xi)^2+\eta^2\right]+Ax+B$$

Διαιροῦντες ἔπειτα τὸ $M_1(x)$ πάλιν διὰ τοῦ $(x-\xi)^2+\eta^2$ θὰ εὕρωμεν πηλίκον τι $M_2(x)$ καὶ ὑπόλοιπόν τι τῆς μορφῆς A_1x+B_1 καὶ θὰ εἶνε

$$M_1(x)=A_1x+B_1+M_2(x)\left[(x-\xi)^2+\eta^2\right]$$

ὅθεν

$$M(x)=Ax+B+(A_1x+B_1)\left[(x-\xi)^2+\eta^2\right]+M_2(x)\left[(x-\xi)^2+\eta^2\right]^2$$

ἐξακολουθοῦντες τοιουτοτρόπως βλέπομεν, ὅτι τὸ πολυώνυμον $M(x)$ δύναται νὰ ἀχθῇ εἰς τὴν μορφὴν

$$M(x)=(Ax+B)+(A_1x+B_1)\left[(x-\xi)^2+\eta^2\right]+$$
$$+(A_2x+B_2)\left[(x-\xi)^2+\eta^2\right]^2+\ldots+\left(A_{\lambda-1}x+B_{\lambda-1}\right)\left[(x-\xi)^2+\eta^2\right]^{\lambda-1}.$$

καὶ ἑπομένως τὰ ἐκ τῶν δύο συζυγῶν ῥιζῶν $\xi+\eta i$ καὶ $\xi-\eta i$ προερχόμενα ἁπλᾶ κλάσματα προστιθέμενα δίδουσι τὰ ἑξῆς κλάσματα

$$\frac{Ax+B}{\left[(x-\xi)^2+\eta^2\right]^\lambda}+\frac{A_1x+B_1}{\left[(x-\xi)^2+\eta^2\right]^{\lambda-1}}+\ldots+\frac{A_{\lambda-1}x+B_{\lambda-1}}{(x-\xi)^2+\eta^2}$$

Σημείωσις. Τὴν ἀνάλυσιν ταύτην δύναταί τις νὰ ἀποδείξῃ ἀπ' εὐθείας κατὰ τὸν ἐν τῷ ἐδ. 29 ἐκτεθέντα τρόπον.

38. Μένει νῦν νὰ ἴδωμεν, πῶς ὁλοκληροῦνται τὰ κλάσματα τῆς μορφῆς

$$\frac{Ax+B}{\left[(x-\xi)^2+\eta^2\right]^\nu} \qquad (14)$$

ἔνθα ν εἶνε ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός.

Ἐὰν τεθῇ $x-\xi=\eta\omega$, ἔνθα ω εἶνε νέα τις μεταβλητή, θὰ εἶνε καὶ

$$dx=\eta\,.\,d\omega$$

ὅθεν

$$\int\frac{(Ax+B)dx}{\left[(x-\xi)^2+\eta^2\right]^\nu}=\frac{A}{\eta^{2\nu-2}}\int\frac{\omega d\omega}{(1+\omega^2)^\nu}+\frac{(A\xi+B)}{\eta^{2\nu-1}}\int\frac{d\omega}{(1+\omega^2)^\nu}.$$

Ἐκ τῶν δύο τούτων ὁλοκληρωμάτων τὸ πρῶτον εὑρίσκεται ἀμέσως· διότι ἂν θέσωμεν

$$1+\omega^2=t$$

ὅθεν καὶ $\qquad 2\omega d\omega=dt,$

προκύπτει, ἂν $\nu>1$

$$\int\frac{\omega d\omega}{(1+\omega^2)^\nu}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^\nu}=\frac{1}{2}\int t^{-\nu}dt=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\nu-1}\cdot\frac{1}{t^{\nu-1}}$$

τουτέστιν

$$\int\frac{\omega d\omega}{(1+\omega^2)^\nu}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\nu-1}\cdot\frac{1}{(1+\omega^2)^{\nu-1}}$$

ἂν δὲ εἶνε $\nu=1$

$$\int\frac{\omega d\omega}{1+\omega^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\,lt=\frac{1}{2}\,l(1+\omega^2)\cdot$$

ἀνάγεται ἄρα ἡ ὁλοκλήρωσις τῶν κλασμάτων (14) εἰς τὴν ὁλοκλήρωσιν

$$\int\frac{d\omega}{(1+\omega^2)^\nu}. \qquad (15)$$

Καὶ ἂν μὲν εἶνε $\nu=1$, τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο εἶνε, ὡς γνωστόν, τοξ εφ ω· ἂν δὲ $\nu>1$, ἀνάγομεν τὴν εὕρεσιν τοῦ ὁλοκληρώματος τούτου εἰς τὴν εὕρεσιν ἄλλου ἁπλουστέρου, τουτέστιν τοῦ ἔχοντος $\nu-1$ ἀντὶ ν· γίνεται δὲ τοῦτο, ὡς ἑξῆς.

Διαφορίζοντες τὸ γινόμενον

$$\omega(1+\omega^2)^{-\nu+1} \qquad \text{εὑρίσκομεν}$$

$$d\left\{\omega(1+\omega^2)^{-\nu+1}\right\}=\left[(1+\omega^2)^{-\nu+1}-2\omega^2(1+\omega^2)^{-\nu}(\nu-1)\right]d\omega$$

καὶ ἂν εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος ταύτης ἀντὶ τοῦ παράγοντος ω^2 γραφῇ $(1+\omega^2)-1$, ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται

$$d\left\{\omega(1+\omega^2)^{-\nu+1}\right\}=(-2\nu+3)(1+\omega^2)^{-\nu+1}d\omega+(2\nu-2)(1+\omega^2)^{-\nu}d\omega$$

ὅθεν ἕπεται

$$\omega(1+\omega^2)^{-\nu+1}=(-2\nu+3)\int\frac{d\omega}{(1+\omega^2)^{\nu-1}}+(2\nu-2)\int\frac{d\omega}{(1+\omega^2)^{\nu}}$$

ἢ καὶ (διότι $\nu>1$)

$$\int\frac{d\omega}{(1+\omega^2)^{\nu}}=\frac{\omega(1+\omega^2)^{-\nu+1}}{2\nu-2}+\frac{2\nu-3}{2\nu-2}.\int\frac{d\omega}{(1+\omega^2)^{\nu-1}} \qquad (16)$$

Διὰ τοῦ τύπου τούτου ἀνάγεται ἡ εὕρεσις τοῦ ὁλοκληρώματος

$$\int\frac{d\omega}{(1+\omega^2)^{\nu}} \quad \text{εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ἁπλουστέρου} \quad \int\frac{d\omega}{(1+\omega^2)^{\nu-1}}$$

ἀλλ' ὁ αὐτὸς τύπος, ἐὰν ἐν αὐτῷ θέσωμεν $\nu-1$ ἀντὶ ν, ἀνάγει καὶ τοῦτο εἰς τὸ ἔχον ἐκθέτην $\nu-2$· τοῦτο δὲ παλιν διὰ τοῦ αὐτοῦ τύπου (ἂν τεθῇ $\nu-2$ ἀντὶ ν), ἀνάγεται εἰς τὸ ἔχον ἐκθέτην $\nu-3$, καὶ οὕτω καθεξῆς· ἀλλ' ἐλαττοῦντες οὕτω τὸν ἐκθέτην ν κατὰ μονάδα, θὰ φθάσωμεν ἐπὶ τέλους εἰς τὸν ἐκθέτην 1· ἤτοι εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int\frac{d\omega}{1+\omega^2}$$

ὅπερ εἶνε γνωστὸν — καὶ ἴσον τῷ τοξ εφ ω· τούτου δὲ γνωσθέντος, εὑρίσκονται ἓν μετ' ἄλλο καὶ τὰ προηγούμενα πάντα· ὥστε ὁ τύπος (16) ἀρκεῖ πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὁλοκληρώματος (15).

Ἐὰν π. χ. ζητῆται τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int\frac{d\omega}{(1+\omega^2)^3}, \quad \text{θὰ ἔχωμεν ἐκ τοῦ τύπου (16)}$$

θέτοντες $\nu=3$

$$\int\frac{d\omega}{(1+\omega^2)^3}=\frac{1}{4}\quad\frac{\omega}{(1+\omega^2)^2}+\frac{3}{4}\int\frac{d\omega}{(1+\omega^2)^2}$$

καὶ θέτοντες $\nu=2$

$$\int\frac{d\omega}{(1+\omega^2)^2}=\frac{1}{2}\quad\frac{\omega}{1+\omega^2}+\frac{1}{2}\ \text{τοξ εφ}\ \omega$$

πολλαπλασιάζοντες δὲ τὴν δευτέραν ἰσότητα ἐπὶ $\frac{3}{4}$ καὶ προσθέτοντες ἔπειτα αὐτὰς κατὰ μέλη, ἀπαλείφομεν τὸ ὁλοκλήρωμα, ὅπερ ἔχει $\nu=2$, καὶ εὑρίσκομεν

$$\int\frac{d\omega}{(1+\omega^2)^3}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\omega}{(1+\omega^2)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\quad\frac{\omega}{1+\omega^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\text{τοξ εφ}\ \omega.$$

39. Τὸ ὁλοκλήρωμα (15) δύναται νὰ εὑρεθῇ καὶ διὰ τῆς μεθόδου τῆς διαφορίσεως πρὸς παράμετρον (ἐδ. 21)· γίνεται δὲ τοῦτο ὡς ἑξῆς·

Ἐκ τοῦ τύπου

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=\text{τοξ εφ}\ x$$

ἐὰν τεθῇ $\frac{x}{\sqrt{\alpha}}$ ἀντὶ τοῦ x, ἕπεται

$$\int\frac{dx}{\alpha+x^2}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\ \text{τοξ εφ}\ \left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)\cdot$$

καὶ ἂν διαφορίσωμεν πρὸς α, $\nu-1$ φοράς, εὑρίσκομεν

$$\int\frac{dx}{(\alpha+x^2)^\nu}=\frac{(-1)^{\nu-1}}{1.2.3...(\nu-1)}\quad\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial\alpha^{\nu-1}}\left\{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\ \text{τοξ εφ}\ \left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)\right\}$$

Ἐὰν δὲ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν διαφορίσεων ποιήσωμεν ἐν τῷ ἐξαγομένῳ $\alpha=1$, εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον ὁλοκλήρωμα.

Τέλος παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ αὐτὸ ὁλοκλήρωμα, ἐὰν τεθῇ

$$x=\text{εφ}\ t$$

ἑπομένως καὶ $$dx=\frac{dt}{\text{συν}^2 t},$$

τρέπεται εἰς τὸ ἑξῆς

$$\int\text{συν}^{2\nu-2} t\,.\,dt$$

τουτέστιν εἰς ὁλοκλήρωμα μιᾶς δυνάμεως τοῦ συνημιτόνου· περὶ τοῦ ὁλοκληρώματος τούτου, ὅπερ συχνότατα ἐμφανίζεται ἐν ταῖς ἐφαρμογαῖς, θὰ διαλάβωμεν ἐν τῷ οἰκείῳ τόπῳ.

Παραδείγματα.

1) *Εὑρεῖν τὸ ὁλοκλήρωμα*

$$\int \frac{dx}{1+x^3}.$$

Ὁ παρονομαστὴς $1+x^3$ ἀναλύεται εἰς τὸ γινόμενον

$$(1+x)\ (1-x+x^2)$$

καὶ ἐπειδὴ ὁ δεύτερος παράγων ἔχει ῥίζας φανταστικάς, ἀναλύομεν τὸ κλάσμα ὡς ἑξῆς

$$\frac{1}{1+x^3}=\frac{\mathrm{A}}{x+1}+\frac{\mathrm{B}x+\Gamma}{1-x+x^2}$$

ὅθεν $$1=\mathrm{A}(1-x+x^2)+(\mathrm{B}x+\Gamma)\ (1+x)$$

διὰ $x=-1$ ἔχομεν $\mathrm{A}=\frac{1}{3}$·

διὰ $x=\ 0$ ἔχομεν $\mathrm{A}+\Gamma=1$· ὅθεν $\Gamma=\frac{2}{3}$.

Ἐὰν δὲ ἐξισώσωμεν τοὺς συντελεστὰς τοῦ x^2 εἰς ἀμφότερα τὰ ἴσα εὑρίσκομεν $\mathrm{A}+\mathrm{B}=0$ ὅθεν $\mathrm{B}=-\frac{1}{3}$·

ἐπομένως εἶνε

$$\frac{1}{1+x^3}=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{1+x}-\frac{x-2}{x^2-x+1}\right\}$$

καὶ ἐκτελοῦντες τὴν ὁλοκλήρωσιν τῶν δύο τούτων κλασμάτων (σελ. 45 παράδειγμα 4ον), εὑρίσκομεν

$$\int\frac{dx}{1+x^3}=\frac{1}{6}\ l\ \frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\ \text{τοξ εφ}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

2) *Εὑρεῖν τὸ ὁλοκλήρωμα*

$$\int\frac{dx}{1+x^4}$$

Ὁ παρονομαστὴς $1+x^4$ εἶνε γινόμενον τῶν δύο δευτεροβαθμίων παραγόντων

$$(x^2+x\sqrt{2}+1)\ (x^2-x\sqrt{2}+1)$$

ὧν αἱ ῥίζαι εἶνε φανταστικαί· ἀναλύομεν λοιπὸν τὸ κλάσμα $\dfrac{1}{1+x^4}\cdot$ εἰς δύο τῆς μορφῆς

$$\frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{A'x+B'}{x^2-x\sqrt{2}+1}$$

καὶ εὑρίσκομεν ἐξισοῦντες τοὺς συντελεστὰς τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ x ἐν τῇ ταὐτότητι

$$1=(Ax+B)\ (x^2-x\sqrt{2}+1)+(A'x+B')(x^2+x\sqrt{2}+1)$$

$$A=\frac{1}{2\sqrt{2}},\qquad B=\frac{1}{2},\quad A'=-\frac{1}{2\sqrt{2}},\qquad B'=\frac{1}{2}\cdot$$

ὅθεν $$\frac{1}{1+x^4}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}-\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right\}$$

καὶ ἐκτελοῦντες τὴν ὁλοκλήρωσιν τῶν δύο τούτων κλασμάτων, εὑρίσκομεν

$$\int\frac{dx}{1+x^4}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ l\left(\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right)+\frac{1}{4}\sqrt{2}\ \text{τοξ εφ}\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$$

2) *Εὑρεῖν τὸ ὁλοκλήρωμα*

$$\int\frac{x^2dx}{1+x^4}$$

Ἀναλύοντες ὁμοίως τὸ κλάσμα $\dfrac{x^2}{1+x^4}$, εὑρίσκομεν

$$\frac{x^2}{1+x^4}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\frac{x}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\frac{x}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right\}$$

καὶ ὁλοκληροῦντες ἔχομεν

$$\int\frac{x^2dx}{1+x^4}=-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ l\left(\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right)+\frac{1}{4}\sqrt{2}\ \text{τοξ εφ}\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right).$$

Εὕρεσις τοῦ ἀλγεβρικοῦ μέρους τοῦ ὁλοκληρώματος ἄνευ ἀναλύσεως τοῦ παρονομαστοῦ.

40. Τὸ ὁλοκλήρωμα πάσης ῥητῆς συναρτήσεως, ἐὰν ἑνώσωμεν εἰς ἓν κλάσμα τὸ ἀλγεβρικὸν μέρος αὐτοῦ, γίνεται

$$(17)\quad \int \frac{f(x)}{\varphi(x)}dx = \frac{M(x)}{\Delta(x)} + A_{\lambda-1}l(x-\alpha) + B_{\mu-1}l(x-\beta) + \ldots + K_{\rho-1}l(x-\varkappa)$$

ἔνθα $\Delta(x)$ εἶνε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ παρονομαστοῦ $\varphi(x)$ καὶ τῆς παραγώγου αὐτοῦ $\varphi'(x)$· τὸ δὲ $M(x)$ εἶνε πολυώνυμόν τι βαθμοῦ μικροτέρου ἢ τὸ $\Delta(x)$.

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης ἕπεται νῦν

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left[\frac{M(x)}{\Delta(x)}\right]' + \frac{N(x)}{E(x)} \qquad (18)$$

ἔνθα $E(x)$ δηλοῖ τὸ γινόμενον $(x-\alpha).(x-\beta)\ldots(x-\varkappa)$ πάντων τῶν πρωτοβαθμίων παραγόντων τοῦ $\varphi(x)$, ἑκάστου εἰς τὴν πρώτην δύναμιν λαμβανομένου· ἑπομένως εἶνε $\Delta(x).E(x)=\varphi(x)$· τὸ δὲ $N(x)$ εἶνε πολυώνυμόν τι βαθμοῦ κατωτέρου ἢ τὸ $E(x)$.

Πᾶσα ἄρα ῥητὴ συνάρτησις $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ ἀναλύεται εἰς δύο μέρη, ἐξ ὧν τὸ μὲν εἶνε ἡ παράγωγος ῥητῆς συναρτήσεως ἐχούσης παρονομαστὴν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τοῦ παρονομαστοῦ $\varphi(x)$ καὶ τῆς παραγώγου αὐτοῦ $\varphi'(x)$, τὸ δὲ ἕτερον ἔχει παρονομαστὴν τὸ γινόμενον πάντων τῶν πρωτοβαθμίων παραγόντων τοῦ $\varphi(x)$, ἑκάστου λαμβανομένου εἰς τὴν πρώτην δύναμιν· ἑκάτερος δὲ τῶν ἀριθμητῶν $M(x)$ καὶ $N(x)$ εἶνε βαθμοῦ μικροτέρου ἢ ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ.

41. Ἡ ἀνάλυσις αὕτη εἶνε ἐντελῶς ὡρισμένη· ἤτοι ἡ αὐτὴ συνάρτησις δὲν δύναται πολλαχῶς νὰ ἀναλυθῇ εἰς τὰ ῥηθέντα δύο μέρη.

Διότι ἔστω

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left[\frac{M(x)}{\Delta(x)}\right]' + \frac{N(x)}{E(x)}$$

καὶ

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left[\frac{\overline{M}(x)}{\Delta(x)}\right]' + \frac{\overline{N}(x)}{E(x)}$$

τότε θὰ εἶνε

$$\left[\frac{M(x)}{\Delta(x)}\right]' + \frac{N(x)}{E(x)} = \left[\frac{\overline{M}(x)}{\Delta(x)}\right]' + \frac{\overline{N}(x)}{E(x)}$$

ἐὰν δὲ ἀναπτύξωμεν ἑκάτερον τῶν μελῶν τῆς ταὐτότητος ταύτης εἰς ἁπλᾶ κλάσματα, αἱ μὲν παράγωγοι δίδουσι κλάσματα ἔχοντα παρονομαστὰς ἀνωτέρους τοῦ πρώτου βαθμοῦ, οἱ δὲ δεύτεροι ὅροι δίδουσι κλάσματα μόνον πρωτοβαθμίους ἔχοντα παρονομαστάς· ἡ ταὐτότης ἄρα πληροῦται, μόνον ἂν εἶνε

$$\overline{\mathrm{N}}(x)=\mathrm{N}(x) \quad \text{καὶ} \quad \frac{\mathrm{M}(x)-\overline{\mathrm{M}}(x)}{\Delta(x)}=\text{σταθερᾷ τινι}$$

Ἀλλ' ἡ σταθερὰ αὕτη διαφορὰ εἶνε 0· διότι αὐξανομένου τοῦ x εἰς ἄπειρον τὸ κλάσμα τείνει πρὸς τὸ μηδὲν ὡς ἔχον ἀριθμητὴν βαθμοῦ μικροτέρου ἢ ὁ παρονομαστής του· ἑπομένως καὶ $\overline{\mathrm{M}}(x)=\mathrm{M}(x)$.

42. Ἐπειδὴ ἡ ἀνάλυσις (18) εἶνε πάντοτε δυνατὴ καὶ ἐντελῶς ὡρισμένη εἶνε δὲ γνωστοὶ οἱ παρονομασταὶ $\Delta(x)$ καὶ $\mathrm{E}(x)$ (καὶ εὑρίσκονται χωρὶς νὰ ἀναλυθῇ ὁ παρονομαστὴς $\varphi(x)$ εἰς πρωτοβαθμίους παράγοντας), ἕπεται, ὅτι οἱ ἀριθμηταὶ $\mathrm{M}(x)$ καὶ $\mathrm{N}(x)$ δύνανται νὰ εὑρεθῶσι προσδιοριζομένων τῶν συντελεστῶν αὐτῶν· πρὸς τοῦτο γράφομεν τὴν ταὐτότητα (18) ὡς ἑξῆς

$$\frac{\mathrm{f}(x)}{\varphi(x)}=\frac{\Delta(x)\mathrm{M}'(x)-\Delta'(x)\mathrm{M}(x)}{\Delta(x)^2}+\frac{\mathrm{N}(x)}{\mathrm{E}(x)} \qquad (18')$$

ἀλλὰ τοῦ $\Delta(x)$ ὄντος μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου τῶν $\varphi(x)$ καὶ $\varphi'(x)$ θὰ εἶνε

$$\varphi(x)=\Delta(x)\,.\,\mathrm{E}(x)$$

καὶ

$$\varphi'(x)=\Delta(x)\,.\,\mathrm{Z}(x)\cdot$$

ὅθεν ἕπεται ἐκ τῆς πρώτης

$$\varphi'(x)=\Delta'(x)\mathrm{E}(x)+\Delta(x)\mathrm{E}'(x)\cdot$$

ὅθεν

$$\Delta'(x).\mathrm{E}(x)=\Delta(x)\left[\mathrm{Z}(x)-\mathrm{E}'(x)\right]\cdot$$

διὰ δὲ τὴν ἰσότητα ταύτην ἡ ἰσότης (18΄) γίνεται ἀπαλλασσομένη τῶν παρονομαστῶν

$$\mathrm{f}(x)=\mathrm{E}(x)\mathrm{M}'(x)-\mathrm{M}(x)\left[\mathrm{Z}(x)-\mathrm{E}'(x)\right]+\Delta(x)\,.\,\mathrm{N}(x) \qquad (19)$$

ἐὰν δὲ παραστήσωμεν διὰ ϱ τὸν βαθμὸν τοῦ $\mathrm{E}(x)$, ἤτοι τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀπ' ἀλλήλων διαφόρων ῥιζῶν τοῦ παρονομαστοῦ $\varphi(x)$, τὸν δὲ βαθμὸν τοῦ $\Delta(x)$ διὰ δ (ὅτε θὰ εἶνε $m=\delta+\rho$), τὸ μὲν πολυώνυμον $\mathrm{M}(x)$ θὰ εἶνε ἐν γένει βαθμοῦ $\delta-1$ καὶ θὰ ἔχῃ δ συντελεστάς, τὸ δὲ $\mathrm{N}(x)$ θὰ εἶνε ἐν γένει βαθμοῦ $\rho-1$ καὶ θὰ ἔχῃ ρ συντελεστάς, ἔχομεν ἄρα τὸ ὅλον

m ἀγνώστους συντελεστάς· ἀλλὰ τόσαι εἶνε καὶ αἱ πρωτοβάθμιοι ἐξισώσεις, ἃς λαμβάνομεν ἐξισοῦντες τοὺς συντελεστὰς τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ x εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη· διότι ἑκάτερον τούτων εἶνε ἐν γένει τοῦ βαθμοῦ $m-1$.

43. Ἐὰν πάντες οἱ ϱ συντελεσταὶ τοῦ $\mathrm{N}(x)$ εἶνε 0, τὸ ὁλοκλήρωμα εἶνε ἀλγεβρικόν καὶ ἀντιστρόφως. Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι, ἵνα τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς ῥητῆς συναρτήσεως $\dfrac{\mathrm{f}(x)}{\varphi(x)}$ εἶνε ἀλγεβρικόν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ ῥίζαι τοῦ $\varphi(x)$ νὰ εἶνε πᾶσαι πολλαπλαῖ καὶ οἱ συντελεσταὶ τῶν πολυωνύμων $\varphi(x)$ καὶ $\mathrm{f}(x)$ νὰ πληρῶσι ϱ συνθήκας.

Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \frac{(\mathrm{A}x+\mathrm{B})\mathrm{d}x}{(x^2+\alpha x+\beta)^2} \qquad 4\beta-\alpha^2 \gtrless 0$$

οὗτινος ζητεῖται τὸ ἀλγεβρικὸν μέρος.

Ἐνταῦθα εἶνε

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= (x^2+\alpha x+\beta)^2\\
\varphi'(x) &= 2(x^2+\alpha x+\beta)(2x+\alpha)\\
\Delta(x) &= (x^2+\alpha x+\beta)\\
\mathrm{E}(x) &= x^2+\alpha x+\beta\\
\mathrm{Z}(x) &= 2(2x+\alpha)
\end{aligned}$$

ὅθεν ἡ ἰσότης (19) γίνεται νῦν

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}=(x^2+\alpha x+\beta)\mathrm{M}'(x)-\mathrm{M}(x)(2x+\alpha)+(x^2+\alpha x+\beta)\mathrm{N}(x)\cdot$$

καὶ ἂν τεθῇ $\mathrm{N}_1(x)=\mathrm{N}(x)+\mathrm{M}'(x)$, ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται

$$(\varepsilon) \qquad \mathrm{A}x+\mathrm{B}=(x^2+\alpha x+\beta)\mathrm{N}_1(x)-\mathrm{M}(x)\ (2x+\alpha)$$

τὰ ζητούμενα πολυώνυμα $\mathrm{N}(x)$ καὶ $\mathrm{M}(x)$ εἶνε πρώτου βαθμοῦ· ἄρα καὶ τὸ $\mathrm{N}_1(x)$ θὰ εἶνε τὸ πολὺ τοῦ πρώτου βαθμοῦ· ἀλλ' ἐκ τῆς ἐξισώσεως (ε) βλέπομεν, ὅτι τὸ $\mathrm{N}_1(x)$ πρέπει νὰ εἶνε σταθερόν· ἔστω

$$\mathrm{M}\ (x)=\Gamma x+\Delta$$

$$\mathrm{N}_1(x)=\mathrm{H}$$

ἐξισοῦντες τοὺς συντελεστὰς τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ x, εὑρίσκομεν

$$\begin{aligned}
\mathrm{B} &= \beta\mathrm{H} - \alpha\Delta\\
\mathrm{A} &= \alpha\mathrm{H} - 2\Delta - \Gamma\alpha\\
0 &= \mathrm{H} - 2\Gamma\cdot
\end{aligned}$$

ἐξ ὧν εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν τριῶν συντελεστῶν Η, Γ, Δ

$$H=2\frac{2B-\alpha A}{4\beta-\alpha^2},\quad \Gamma=\frac{2B-\alpha A}{4\beta-\alpha^2},\quad \Delta=\frac{B\alpha-2\beta A}{4\beta-\alpha^2}$$

ὅθεν συνάγεται

$$\int\frac{(Ax+B)dx}{(x^2+\alpha x+\beta)^2}=\frac{(2B-\alpha A)x+B\alpha-2\beta A}{(x^2+\alpha x+\beta)(4\beta-\alpha^2)}+\frac{2B-\alpha A}{4\beta-\alpha^2}\int\frac{dx}{x^2+\alpha x+\beta}$$

ἐὰν εἶνε $2B=\alpha A$, τὸ ὁλοκλήρωμα εἶνε ἀλγεβρικόν.

Ἔστω προσέτι καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int\frac{dx}{(1+x^m)^2}$$

οὗτινος ἂς ζητῆται τὸ ἀλγεβρικὸν μέρος.

Ἐνταῦθα εἶνε

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=(1+x^m)^2\\ \varphi'(x)&=2m(1+x^m)x^{m-1}.\\ \Delta(x)&=1+x^m\\ E(x)&=1+x^m\\ Z(x)&=2mx^{m-1}.\end{aligned}$$

ὅθεν ἡ ἰσότης (19) γίνεται νῦν

$$1=(1+x^m)N_1(x)-mx^{m-1}.M(x)$$

ἐὰν τεθῇ

$$N_1(x)=N(x)+M'(x)$$

ἐπαληθεύεται δὲ ἡ ἰσότης αὕτη, ἂν ληφθῇ

$$M(x)=\frac{x}{m}\quad \text{καὶ}\quad N_1(x)=1.$$

Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι εἶνε

$$\int\frac{dx}{(1+x^m)^2}=\frac{1}{m}\cdot\frac{x}{1+x^m}+\left(1-\frac{1}{m}\right)\int\frac{dx}{1+x^m}$$

Εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀλγεβρικοῦ μέρους τοῦ ὁλοκληρώματος τῆς ῥητῆς συναρτήσεως δυνάμεθα νὰ προβῶμεν καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ X_1 τὸ γινόμενον τῶν πρωτοβαθμίων παραγόντων τοῦ παρονομαστοῦ $\varphi(x)$ τῶν εἰς τὰς ἁπλᾶς ῥίζας αὐτοῦ ἀντιστοιχούντων, διὰ X_2 τὸ γινόμενον τῶν πρωτοβαθμίων παραγόντων τῶν εἰς τὰς διπλᾶς ῥίζας αὐτοῦ ἀντιστοιχούντων, ἑκάστου λαμβανομένου ἅπαξ, διὰ X_3 τὸ γινόμενον τῶν πρωτοβαθμίων παραγόντων τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τὰς τριπλᾶς ῥίζας, ἑκάστου λαμβανομένου ἐπίσης ἅπαξ, καὶ οὕτω καθεξῆς, θὰ εἶνε

$$\varphi(x)=X_1\,X_2^2\,X_3^3\,\ldots\,X_\varkappa^\varkappa$$

καὶ $$\Delta(x) = X_2 X_3^2 \ldots X_\varkappa^{\varkappa-1}$$

τὰ πολυώνυμα $X_1, X_2 \ldots X_\varkappa$ δύνανται, (ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς ἀλγέβρας) νὰ εὑρεθῶσιν ἐκ τοῦ $\varphi(x)$ μόνον διὰ τῶν τεσσάρων πράξεων καὶ ἄνευ ἀναλύσεως τοῦ $\varphi(x)$ εἰς τοὺς πρωτοβαθμίους αὐτοῦ παράγοντας.

Ἐπειδὴ δὲ οἱ παράγοντες $X_1, X_2^2 \ldots X_\varkappa^\varkappa$ οὐδεμίαν ἔχουσι κοινὴν ῥίζαν, ἀνὰ δύο, τὸ κλάσμα $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ δύναται κατὰ τὰ ἐν τῷ ἐδ. 34 εἰρημένα, νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα κλασμάτων ἐχόντων παρονομαστὰς τοὺς παράγοντας τούτους, ἀριθμητὰς δὲ πολυώνυμα, ὧν ἕκαστον μικροτέρου βαθμοῦ ἢ ὁ παρονομαστής του ἔστω

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_1}{X_1} + \frac{A_2}{X_2^2} + \ldots + \frac{A_\varkappa}{X_\varkappa^\varkappa}$$

Τούτου γενομένου, ἡ ἀνάλυσις τοῦ κλάσματος $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ εἰς τὴν παράγωγον ῥητῆς συναρτήσεως καὶ εἰς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν στερούμενον πολλαπλῶν ῥιζῶν (ἐδ. 40) ἀνάγεται εἰς τὴν ὁμοίαν ἀνάλυσιν τῶν μερῶν αὐτοῦ· καὶ τὸ μὲν πρῶτον ἔχει παρονομαστὴν X_1 ὅπερ ἔχει ἁπλᾶς μόνον ῥίζας· τῶν δὲ λοιπῶν ἡ εἰρημένη ἀνάλυσις γίνεται ὡς ἑξῆς.

Ἔστω τυχὸν ἐξ αὐτῶν τὸ $\frac{A}{X^\nu}$ καὶ ἂς τεθῇ

$$\frac{A}{X^\nu} = \left[\frac{M}{X^{\nu-1}}\right]' + \frac{N}{X}$$

ἵνα εὕρωμεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης τὰ δύο πολυώνυμα M καὶ N, ἀπαλλάσσομεν αὐτὴν ἀπὸ τῶν παρονομαστῶν καὶ εὑρίσκομεν

$$A = M'X - (\nu-1)M.X' + N.X^{\nu-1}$$

ἢ $$A = X.\left[M' + N.X^{\nu-2}\right] + (1-\nu)M.X' \qquad (20)$$

ἔπειτα παρατηροῦμεν, ὅτι, ἐπειδὴ τὰ πολυώνυμα X καὶ X′ οὐδεμίαν ἔχουσι κοινὴν ῥίζαν, δύνανται ἐξ αὐτῶν νὰ εὑρεθῶσι δύο ἄλλα P καὶ Q τὸ μὲν P βαθμοῦ κατωτέρου ἢ τὸ X′, τὸ δὲ Q βαθμοῦ κατωτέρου ἢ τὸ X, καὶ τοιαῦτα ὥστε νὰ εἶνε

$$X.P + X'Q = 1$$

ὅθεν καὶ $$X(A.P) + X'(A.Q) = A$$

παραβάλλοντες δὲ τὴν ἰσότητα ταύτην πρὸς τὴν (20), συμπεραίνομεν

$$X\left[M' + NX^{\nu-2} - AP\right] + X'\left[(1-\nu)M - AQ\right] = 0$$

καὶ ἐπειδὴ τὸ πολυώνυμον $M' + NX^{\nu-2} - AP$ πρέπει νὰ περιέχῃ πάσας τὰς ῥίζας τοῦ X′, θὰ εἶνε

$$M' + NX^{\nu-2} - AP = M_1X'(\nu-1) \qquad (\alpha)$$

τοῦ M_1 ὄντος ἀγνώστου τινὸς πολυωνύμου· ἐντεῦθεν ἕπεται καὶ

$$(1-\nu)M - AQ = -M_1X(\nu-1)$$

ἤ $$M=M_1X-\frac{A.Q}{\nu-1}.\qquad(\beta)$$

ἀπαλείφοντες δὲ τὸ M ἐκ τῶν δύο ἐξισώσεων (α) καὶ (β), εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$A_1=M'_1X-(\nu-2)M_1X'+N.X^{\nu-2}\qquad(20')$$

ἔνθα ἐτέθη συντομίας χάριν

$$A_1=A.P+\frac{1}{\nu-1}(AQ)'\qquad(\gamma)$$

Ἐὰν ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης (20΄) ὁρισθῶσι τὰ δύο πολυώνυμα M_1 καὶ N, θὰ εὑρεθῶσι καὶ τὰ ζητούμενα· διότι ἡ ἐξίσωσις (β) δίδει τότε τὸ M, θὰ ἐπαληθεύωσι δὲ αἱ τιμαὶ τῶν M καὶ N τὴν ἐξίσωσιν (20)· διότι ἐκείνη εἶνε ἀκολούθημα τῶν ἐξισώσεων (α) καὶ (β)· ἀνάγεται ἄρα ὁ προσδιορισμὸς τῶν M καὶ N ἐκ τῆς ἐξισώσεως (20) εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῶν M_1 καὶ N ἐκ τῆς ἐξισώσεως (20΄)· ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις αὕτη (20΄) εἶνε ἁπλουστέρα τῆς πρώτης (20), διότι ἀντὶ τοῦ $\nu-1$ ἔχει ἐκθέτην $\nu-2$. Ἐὰν δὲ καὶ εἰς ταύτην ἐφαρμόσωμεν τὴν αὐτὴν μέθοδον, θὰ ἀναγάγωμεν τὴν εὕρεσιν τῶν M_1 καὶ N εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν M_2 καὶ N ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$A_2=M'_2X-(\nu-3)M_2X'+N.X^{\nu-3}\qquad(20'')$$

ἔνθα $$A_2=A_1P+\frac{1}{\nu-2}(AQ)'\qquad(\gamma')$$

καὶ $$M_1=M_2X-\frac{A_1Q}{\nu-2}.\qquad(\beta')$$

Οὕτω προχωροῦντες θὰ φθάσωμεν ἐπὶ τέλους εἰς ἐξίσωσιν, ἐν ᾗ τὸ πολυώνυμον N θὰ πολλαπλασιάζηται ἐπὶ X^0, ἤτοι

$$A_{\nu-1}=X.M'_{\nu-1}+N\cdot\qquad(\overline{20})$$

ἐξ ἧς ὁρίζεται ἀμέσως τὸ N διὰ τῶν γνωστῶν πολυωνύμων καὶ διὰ τοῦ $M'_{\nu-1}$, ὅπερ ἀφίνει μὲν αὐθαίρετον ἡ ἐξίσωσις $(\overline{20})$ ὁρίζει ὅμως ὁ ἐπὶ τοῦ N τεθεὶς περιορισμός, ὅτι πρέπει νὰ εἶνε βαθμοῦ κατωτέρου ἢ τὸ X· ὅθεν βλέπομεν ὅτι τὸ $M'_{\nu-1}$ πρέπει νὰ ληφθῇ ἴσον τῷ πηλίκῳ τῆς ἀλγεβρικῆς διαιρέσεως τοῦ $A_{\nu-1}$ διὰ τοῦ X, τὸ δὲ N θὰ εἶνε τὸ ὑπόλοιπον τῆς αὐτῆς διαιρέσεως· εὑρεθέντος δὲ τοῦ $M_{\nu-1}$ εὑρίσκονται ἓν μετ' ἄλλο καὶ τὸ $M_{\nu-2}$... M_1 ἑπομένως καὶ τὸ M.

Ἡ σειρὰ τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος ἐξισώσεων εἶνε ἡ ἀκόλουθος

	ἐτέθη δὲ
$A=M'X-(\nu-1)MX'+NX^{\nu-1}$	$A_1=AP+\frac{1}{\nu-1}(AQ)'$
$A_1=M'_1.X-(\nu-2)M_1X'+NX^{\nu-2}$	$A_2=A_1P+\frac{1}{\nu-2}(A_1Q)'$
(21) $A_2=M'_2X-(\nu-3\ M_2X'+NX^{\nu-3}$	. . . . (22)
. . . .	. . . .
. . . .	
$A_{\nu-2}=M'_{\nu-2}X-M_{\nu-2}X'+NX$	$A_{\nu-2}=A_{\nu-3}P+\frac{1}{2}(A_{\nu-3}Q)'$
$A_{\nu-1}=M'_{\nu-1}X+N.$	$A_{\nu-1}=A_{\nu-2}P+\frac{1}{1}(A_{\nu-2}Q)'$

ἐτέθη πρὸς τούτοις

$$
\left.
\begin{aligned}
M &= M_1X - \frac{AQ}{\nu-1} \\
M_1 &= M_2X - \frac{A_1Q}{\nu-2} \\
M_2 &= M_3X - \frac{A_2Q}{\nu-3} \\
&\cdots\cdots \\
M_{\nu-2} &= M_{\nu-1}X - \frac{A_{\nu-2}Q}{1}
\end{aligned}
\right\} \qquad (23)
$$

ἀπαλείφοντες δὲ ἐκ τῶν ἐξισώσεων (23) τὰ $M_1, M_2 \ldots M_{\nu-1}$ εὑρίσκομεν τὴν ἑξῆς τιμὴν τοῦ M

$$M = -Q\left\{\frac{A}{\nu-1} + \frac{A_1X}{\nu-2} + \frac{A_2X^2}{\nu-3} + \ldots + \frac{A_{\nu-2}X^{\nu-2}}{1}\right\} + M_{\nu-1}X^{\nu-1} \qquad (24)$$

ἔχομεν δὲ καὶ $$N = A_{\nu-1} - M'_{\nu-1}X$$

ἐκφράζονται δηλαδὴ τὰ δύο πολυώνυμα M καὶ N διὰ τῶν $A, A_1, A_2 \ldots A_{\nu-1}$ (22) καὶ διὰ τοῦ $M_{\nu-1}$ (ὅπερ ἀνωτέρω ὡρίσθη) ἔτι δὲ καὶ διὰ τοῦ X.

Τὸ ἀλγεβρικὸν μέρος τοῦ ὁλοκληρώματος $\int \frac{A\,dx}{X^\nu}$ εἶνε κατὰ ταῦτα τὸ ἑξῆς

$$-Q\left[\frac{A}{(\nu-1)X^{\nu-1}} + \frac{A_1}{(\nu-2)X^{\nu-2}} + \ldots + \frac{A_{\nu-2}}{X}\right] + M_{\nu-1}.$$

Εὕρεσις τοῦ ὁλοκληρώματος $\int \frac{f(x)}{\varphi(x)}\,dx$ ὅταν εἶνε γινόμενον τοῦ λογαρίθμου ῥητῆς συναρτήσεως ἐπὶ σταθερόν τινα ἀριθμόν, ἤτοι τῆς μορφῆς $C\,l\,\frac{F(x)}{\Phi(x)}$.

44. Ἐὰν τὸ ὁλοκλήρωμα ῥητῆς συναρτήσεως εἶνε ἴσον τῷ λογαρίθμῳ ῥητῆς συναρτήσεως ἐπὶ σταθερόν τινα ἀριθμόν, δύναται νὰ εὑρεθῇ χωρὶς νὰ ἀναλυθῇ ὁ παρονομαστὴς εἰς πρωτοβαθμίους παράγοντας.

Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς $\varphi(x)$ ἔχῃ πολλαπλᾶς ῥίζας, εἴδομεν ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα σύγκειται ἔκ τινος μέρους ἀλγεβρικοῦ καὶ ἐκ τοῦ ὁλοκληρώματος ἄλλης ῥητῆς συναρτήσεως, ἧς ὁ παρονομαστὴς ἔχει μόνον ἁπλᾶς ῥίζας.

Διὰ τοῦτο ὑποθέτομεν ἐν τοῖς ἑξῆς, ὅτι ὁ παρονομαστὴς $\varphi(x)$ ἔχει μόνον ἁπλᾶς ῥίζας.

45. Ἐὰν οἱ πρωτοβάθμιοι παράγοντες τοῦ $\varphi(x)$ εἶνε

$$(x-\alpha),\ (x-\beta)\ .\ .\ .\ (x-\varkappa),\quad \text{θὰ εἶνε}$$

$$\int\frac{f(x)}{\varphi(x)}dx=Al(x-\alpha)+Bl(x-\beta)+\ .\ .\ .\ +Kl(x-\varkappa)$$

ἔνθα οἱ συντελεσταὶ A, B, . . . K εἶνε αἱ τιμαὶ τοῦ κλάσματος

$$\frac{f(x)}{\varphi'(x)}\quad \text{διὰ}\ x=\alpha,\ \beta\ .\ .\ .\ \varkappa.$$

Ἐὰν δὲ τὸ κλάσμα τοῦτο παρασταθῇ διὰ τοῦ ω, ἤτοι ἂν τεθῇ

$$f(x)-\omega\varphi'(x)=0 \tag{ε}$$

οἱ συντελεσταὶ A, B, . . . K εἶνε αἱ μόναι τιμαὶ τοῦ ω, δι' ἃς ἡ ἐξίσωσις (ε) ἔχει μετὰ τῆς $\varphi(x)=0$ κοινήν τινα ῥίζαν· διότι, ἵνα ἡ τεθεῖσα ἐξίσωσις (ε) ἔχῃ λόγου χάριν τὴν ῥίζαν α, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε

$$f(\alpha)-\omega\,\varphi'(\alpha)=0$$

ἐξ οὗ

$$\omega=\frac{f(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}=A.$$

Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος

$$\left.\begin{aligned} f(x)-\omega\,\varphi'(x)&=0\\ \varphi(x)&=0\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

εὑρίσκονται καὶ αἱ ῥίζαι τοῦ παρονομαστοῦ $\varphi(x)$ καὶ αἱ τιμαὶ τῶν συντελεστῶν A, B, . . . K· ἀλλ' ἀντὶ νὰ λύσωμεν πρῶτον τὴν ἐξίσωσιν $\varphi(x)=0$ καὶ νὰ θέσωμεν ἔπειτα τὰς ῥίζας α, β, γ . . . κ εἰς τὴν πρώτην τῶν ἐξισώσεων (25) πρὸς εὕρεσιν τῶν τιμῶν τοῦ ω, ἤτοι τῶν A, B, . . . K, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς τιμὰς τοῦ ω ἀπ' εὐθείας, ἂν ἀπαλείψωμεν τὴν ἄγνωστον x ἐκ τῶν δύο ἐξισώσεων (25)· τότε προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$F(\omega)=0$$

ἥτις θὰ δώσῃ ἀπ' εὐθείας τοὺς συντελεστὰς A, B, Γ, . . . K, ἤτοι τὰς τιμὰς $\frac{f(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}$, . . . $\frac{f(\varkappa)}{\varphi'(\varkappa)}$, ἐπομένως θὰ εἶνε τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ μ ὡς καὶ ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x)=0$ (τοῦτο καὶ ἐκ τῆς θεωρίας τῆς ἀπαλοιφῆς εἶνε γνωστόν).

16. Ὑποθέσωμεν, ὅτι εὑρέθησαν αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως ταύτης $F(\omega)=0$, καὶ ἔστω μία ἡ A ἤτοι ἡ $\frac{f(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}$ ἔστω δὲ ἁπλῆ· τὰ δύο πολυώνυμα

$$\varphi(x) \quad \text{καὶ} \quad f(x)-A\varphi'(x) \qquad (\theta)$$

θὰ ἔχωσι τὸν πρωτοβάθμιον παράγοντα $x-\alpha$ κοινόν· διότι τὸ δεύτερον γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$f(x)-\frac{f(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}\varphi'(x)$$

ἀλλὰ πλὴν τούτου οὐδένα ἄλλον· διότι ἂν εἶχον κοινὸν καὶ τὸν πρωτοβάθμιον παράγοντα $x-\beta$, θὰ ἦτο

$$f(\beta)-A\varphi'(\beta)=0$$

ἤτοι
$$A=\frac{f(\beta)}{\varphi'(\beta)}=B\cdot$$

θὰ ἦσαν ἄρα ἴσαι αἱ δύο ῥίζαι A καὶ B τῆς ἐξισώσεως $F(\omega)=0$· ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει.

Ὥστε εἰς τὴν ἁπλῆν ῥίζαν A τῆς ἐξισώσεως $F(\omega)=0$ ἀντιστοιχεῖ κοινὸς παράγων τῶν δύο πολυωνύμων (θ) εἷς καὶ μόνος, ὁ $x-\alpha$· τοῦτον δὲ εὑρίσκομεν ζητοῦντες τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν δύο πολυωνύμων (θ).

Ἔστω νῦν ἡ ῥίζα A πολλαπλῆ τῆς τάξεως τ· λέγω, ὅτι τότε τὰ δύο πολυώνυμα (θ) ἔχουσι κοινοὺς τ πρωτοβαθμίους παράγοντας καὶ οὐχὶ περισσοτέρους· διότι ἂν εἶνε $A=B=\Gamma= \ldots =T$, ἤτοι

$$\frac{f(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}=\frac{f(\beta)}{\varphi'(\beta)}=\frac{f(\gamma)}{\varphi'(\gamma)}= \ldots =\frac{f(\tau)}{\varphi'(\tau)},$$

οἱ παράγοντες $x-\alpha$, $x-\beta$, $\ldots$ $x-\tau$ τοῦ πολυωνύμου $\varphi(x)$ θὰ εἶνε παράγοντες καὶ τοῦ πολυωνύμου $f(x)-A\varphi'(x)$, ἀλλ' ἐκτὸς τούτων ἄλλους παράγοντας δὲν δύνανται νὰ ἔχωσι κοινούς· διότι, ἂν εἶχον καὶ τὸν παράγοντα $x-\upsilon$ κοινόν, θὰ ἦτο

$$f(\upsilon)-A\varphi'(\upsilon)=0$$

ἄρα
$$A=\frac{f(\upsilon)}{\varphi'(\upsilon)}=\Upsilon, \quad \text{ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει}$$

ἂν λοιπὸν ζητήσωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν δύο πολυωνύμων (θ), θὰ εὕρωμεν, ὡς τοιοῦτον, τὸ γινόμενον

$$(x-\alpha).(x-\beta).(x-\gamma)\ .\ .\ .\ (x-\tau)$$

ἤτοι πολυώνυμόν τι βαθμοῦ τ, τὸ $\varphi_1(x)$· τούτου δὲ καὶ μόνου ἔχομεν ἀνάγκην καὶ οὐχὶ τῶν παραγόντων $(x-\alpha)$, $(x-\beta)$, . . . $(x-\tau)$ ἑκάστου χωριστά· διότι ἐν τῷ ὁλοκληρώματι

$$\int\frac{\mathrm{f}(x)}{\varphi(x)}dx$$

οἱ ὅροι, οἱ πρὸς τοὺς παράγοντας τούτους ἀντιστοιχοῦντες, εἶνε οἱ ἑξῆς

$$\mathrm{A}\,l(x-\alpha)+\mathrm{B}\,l(x-\beta)+\ .\ .\ .\ +\mathrm{T}\,l(x-\tau)$$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε $\mathrm{A}=\mathrm{B}=\ .\ .\ .\ =\mathrm{T}$, οἱ ὅροι οὗτοι γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς

$$\mathrm{A}\,l\{(x-\alpha)\,(x-\beta)\,(x-\gamma)\ .\ .\ .\ (x-\tau)\}\quad \text{ἤτοι}\quad \mathrm{A}l\varphi_1(x).$$

47. Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι, ἂν A_1, A_2, . . . A_ρ εἶνε αἱ διάφοροι ἀπ' ἀλλήλων ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$\mathrm{F}(\omega)=0,$$

θὰ εἶνε

$$(26)\qquad \int\frac{\mathrm{f}(x)}{\varphi(x)}dx=\mathrm{A}_1l\varphi_1(x)+\mathrm{A}_2l\varphi_2(x)+\ .\ .\ .\ +\mathrm{A}_\rho l\varphi_\rho(x)$$

ἔνθα $\varphi_\nu(x)$ εἶνε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο πολυωνύμων $\varphi(x)$ καὶ $\mathrm{f}(x)-\mathrm{A}_\nu\varphi'(x)$, ὁ δὲ βαθμὸς ν τοῦ $\varphi_\nu(x)$ δεικνύει τὴν τάξιν τῆς πολλαπλότητος τῆς ῥίζης A_ν.

Ἂν λοιπὸν λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\mathrm{F}(\omega)=0$, εὑρίσκομεν τὸ ὁλοκλήρωμα (26) χωρὶς νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x)=0$, αἱ δὲ μετὰ τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως $\mathrm{F}(\omega)=0$ ἀπαιτούμεναι πράξεις (πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὁλοκληρώματος) εἶνε μόνον αἱ τέσσαρες πράξεις· διὰ ταῦτα οἱ συντελεσταὶ τοῦ πολυωνύμου $\varphi_\nu(x)$ συντίθενται ῥητῶς ἐκ τῆς ἀντιστοίχου ῥίζης A_ν καὶ ἐκ τῶν συντελεστῶν τῶν δύο δοθέντων πολυωνύμων $\mathrm{f}(x)$ καὶ $\varphi(x)$.

48. Ἐὰν αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\mathrm{F}(\omega)=0$ εἶνε πᾶσαι σύμμετροι ἀριθμοί, ἢ γενικώτερον, *ἂν οἱ λόγοι αὐτῶν ἀνὰ δύο εἶνε πάντες σύμμετροι ἀριθμοί*, θὰ εἶνε

$$\mathrm{A}_1=\mathrm{C}\mu_1\quad \mathrm{A}_2=\mathrm{C}\mu_2,\ .\ .\ .\ \mathrm{A}_\rho=\mathrm{C}\mu_\rho$$

ἔνθα μ_1, μ_2, . . . μ_ρ εἶνε ἀκέραιοι ἀριθμοὶ (θετικοὶ ἢ ἀρνητικοὶ) καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα (26) γίνεται

$$\int \frac{\mathrm{f}(x)}{\varphi(x)} dx = \mathrm{C}l \left\{ \varphi_1(x)^{\mu_1} \varphi_2(x)^{\mu_2} \ldots \varphi_\rho(x)^{\mu_\rho} \right\} = \mathrm{C}l \frac{\Sigma(x)}{\Phi(x)}$$

ἔνθα $\Sigma(x)$ καὶ $\Phi(x)$ εἶνε ἀκέραιαι συναρτήσεις τοῦ x, ὧν οἱ συντελεσταὶ συντίθενται ῥητῶς ἐκ τῶν συντελεστῶν τῶν πολυωνύμων $\mathrm{f}(x)$ καὶ $\varphi(x)$ καὶ ἐκ τῆς σταθερᾶς C.

Καὶ ἀντιστρόφως, ἂν τὸ ὁλοκλήρωμα εἶνε τῆς μορφῆς

$$\mathrm{C}l \frac{\Sigma(x)}{\Phi(x)}$$

ἔνθα $\Phi(x)$ καὶ $\Sigma(x)$ δηλοῦσιν ἀκεραίας συναρτήσεις τῆς x, αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\mathrm{F}(\omega)=0$ ἀνὰ δύο θὰ ἔχωσιν λόγους συμμέτρους ἀριθμούς· διότι ἐκ τῆς ἐξισώσεως (26) ἐν ᾗ $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2 \ldots \mathrm{A}_\rho$ εἶνε αἱ εἰρημέναι ῥίζαι, προκύπτει

$$\mathrm{C}l \frac{\Sigma(x)}{\Phi(x)} = \mathrm{A}_1 l\varphi_1(x) + \mathrm{A}_2 l\varphi_2(x) + \ldots \mathrm{A}_\rho l\varphi_\rho(x)$$

ὅθεν

$$\frac{\Sigma(x)}{\Phi(x)} = \varphi_1(x)^{\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{C}}} \varphi_2(x)^{\frac{\mathrm{A}_2}{\mathrm{C}}} \ldots \varphi_\rho(x)^{\frac{\mathrm{A}_\rho}{\mathrm{C}}}$$

πάντες ἄρα οἱ λόγοι

$$\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{C}} \quad \frac{\mathrm{A}_2}{\mathrm{C}} \quad \ldots \quad \frac{\mathrm{A}_\rho}{\mathrm{C}}$$

θὰ εἶνε ἀκέραιοι ἀριθμοὶ (θετικοὶ ἢ ἀρνητικοὶ) καὶ διὰ τοῦτο οἱ λόγοι τῶν ῥιζῶν $\mathrm{A}_1\ \mathrm{A}_2 \ldots \mathrm{A}_\rho$ ἀνὰ δύο θὰ εἶνε πάντες σύμμετροι ἀριθμοί.

49. Ἐκ τῶν προαποδειχθέντων συνάγεται, ὅτι *ἡ ἀναγκαία καὶ ἐπαρκὴς συνθήκη, ἵνα τὸ ὁλοκλήρωμα*

$$\int \frac{\mathrm{f}(x)}{\varphi(x)} dx$$

τῆς ῥητῆς συναρτήσεως $\dfrac{\mathrm{f}(x)}{\varphi(x)}$ *εἶνε τῆς μορφῆς*

$$\mathrm{C}l \frac{\Sigma(x)}{\Phi(x)}$$

ἤτοι γινόμενον σταθερᾶς τινος ἐπὶ τὸν λογάριθμον ἄλλης ῥητῆς συναρτήσεως, εἶνε ἡ ἑξῆς· αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\mathrm{F}(\omega)=0$ *πρέπει νὰ ἔχωσιν ἀνὰ δύο λόγους συμμέτρους ἀριθμούς.*

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐξίσωσις $F(\omega)=0$ λύεται κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην εὐκολώτατα, συμπεραίνομεν, ὅτι δύναται τότε νὰ εὑρεθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα, χωρὶς νὰ ἀναλυθῇ ὁ παρονομαστὴς $\varphi(x)$ εἰς τοὺς πρωτοβαθμίους παράγοντας αὐτοῦ.

Ὡς παράδειγμα ἔστω τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \frac{(2x^3-1)dx}{x^6+2x^3-2x^2+1}$$

ἀπαλείφοντες τὴν x μεταξὺ τῶν δύο ἐξισώσεων

$$(\lambda)\quad \left\{ \begin{array}{l} x^6+2x^3-2x^2+1=0 \\ 6x^5+6x^2-4x-\dfrac{1}{\omega}(2x^3-1)=0, \end{array} \right.$$

εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(\varphi-2\sqrt{2})^3(\varphi+2\sqrt{2})^3=0 \qquad \varphi=\frac{1}{\omega}.$$

ἐξ ἧς βλέπομεν, ὅτι αἱ ῥίζαι

$$\omega=\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{καὶ} \quad \omega=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

εἶνε τριπλαῖ· εὑρίσκοντες δὲ τοὺς μεγίστους κοινοὺς διαιρέτας τῶν δύο πολυωνύμων (λ) διὰ τὰς τιμὰς ταύτας τοῦ ω, ἔχομεν κατὰ τὰ προηγούμενα

$$\int \frac{(2x^3-1)dx}{x^6+2x^3-2x^2+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\, l\left(\frac{x^3-x\sqrt{2}+1}{x^3+x\sqrt{2}+1}\right).$$

Παρατήρησις.

Ἐνίοτε εἶνε δυνατὸν δι᾽ ἁπλῆς τινὸς ἀντικαταστάσεως νὰ ἀναχθῇ τὸ ὁλόκλήρωμα ῥητῆς συναρτήσεως εἰς ἄλλο γνωστὸν ὁλοκλήρωμα.

Ἐὰν π. χ. ἔχωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx$$

θέτομεν $\varphi(x)=t$, ὅτε τοῦτο γίνεται $\int \frac{dt}{t}$ ἤτοι lt· ἑπομένως τὸ ζητούμενον ὁλοκλήρωμα εἶνε $l\varphi(x)$.

Ἐπίσης, ἐὰν ζητῆται τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)^\lambda} dx, \qquad \lambda \gtrless 1$$

θέτομεν πάλιν $\varphi(x)=t$, ὅτε τοῦτο γίνεται

$$\int \frac{dt}{t^\lambda}, \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{t^{1-\lambda}}{1-\lambda}$$

καὶ ἑπομένως τὸ ζητούμενον ὁλοκλήρωμα εἶνε

$$\frac{1}{1-\lambda} \frac{1}{\varphi(x)^{\lambda-1}}.$$

Ἐπίσης, ἂν ζητῆται τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \frac{xdx}{1+x^8}$$

θέτομεν $x^2=t$ ὅθεν καὶ $xdx=\frac{1}{2}dt$, ὅτε τὸ ὁλοκλήρωμα γίνεται

$$\frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^4}$$ ὅπερ εἶνε ἤδη γνωστὸν (σελ. 51).

Ὁμοίως, ἂν ζητῆται τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \frac{3xdx}{1+x^4}$$

θέτομεν $x^2=t$, ὅτε τοῦτο γίνεται

$$\frac{3}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{3}{2} \text{τοξ εφ}\, t$$

καὶ ἑπομένως τὸ ζητούμενον ὁλοκλήρωμα εἶνε

$$\frac{3}{2} \text{τοξ εφ}(x^2).$$

Ὁμοίως πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὁλοκληρώματος

$$\int \frac{xdx}{x^4+2x^2+2}$$

ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν $1+x^2=t$, ὅθεν καὶ $xdx=\frac{1}{2}dt$· διότι τότε γίνεται

$$\frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{1}{2} \text{τοξ εφ}\,(1+x^2).$$

Ὁμοίως πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὁλοκληρώματος

$$\int \frac{dx}{(\alpha^2-x^2)^\nu} \qquad \nu = \text{ἀκεραίῳ}$$

ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν $x=\alpha\dfrac{1-z}{1+z}$· ὅθεν καὶ $dx=\dfrac{-2\alpha dz}{(1+z)^2}$· διότι τότε τὸ ὁλοκλήρωμα γίνεται

$$-\frac{1}{(2\alpha)^{2\nu-1}}\int \frac{(1+z)^{2\nu-2}}{z^\nu}dz$$

ἀναπτύσσοντες δὲ τὴν δύναμιν $(1+z)^{2\nu-2}$ κατὰ τὸν τύπον τοῦ διωνύμου, θὰ ἔχωμεν νὰ ὁλοκληρώσωμεν ἄθροισμα δυνάμεων τοῦ z.

Ὁμοίως πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὁλοκληρώματος

$$\int \frac{dx}{x(1+x^\nu)^\rho}$$

ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν $x^\nu = t$.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Εὑρεῖν τὰ ἑξῆς ὁλοκληρώματα

$$\int \frac{dx}{(1+x^4)^2}, \quad \int \frac{x^2dx}{1+2x^3-x^6}, \quad \int \frac{dx}{x(\alpha+\beta x)^\nu}$$

2) Δεῖξαι ὅτι εἶνε

$$\int \frac{dx}{1+2x\,\text{συν}\,\varphi+x^2}=\frac{1}{\text{ημ}\varphi}\text{τοξ εφ}\frac{x+\text{συν}\varphi}{\text{ημ}\,\varphi}.$$

3) Νὰ ἀναχθῶσιν εἰς ἁπλούστερα τὰ ἑξῆς ὁλοκληρώματα

$$\int \frac{\varphi(x^2)xdx}{(1+x^2)^n}, \quad \int \frac{f(x^m)}{\varphi(x^m)}\ \frac{dx}{x}$$

ἐν οἷς φ καὶ f δηλοῦσιν ἀκεραίας συναρτήσεις.

4) Νὰ ἀναχθῶσιν εἰς ὁλοκληρώσεις ῥητῶν συναρτήσεων αἱ ἑξῆς

$$\int \varphi(x)\ l\,f(x)dx \qquad \int \varphi(x)\ \text{τοξ εφ}x\ dx$$

ἐν οἷς αἱ συναρτήσεις $\varphi(x)$ καὶ $f(x)$ εἶνε ἀκέραιαι συναρτήσεις.

5) Δοθέντος τοῦ πολυωνύμου $\varphi(x)$, ὅπερ στερεῖται ἁπλῶν ῥιζῶν, εὑρεῖν πάσας τὰς ἀκεραίας συναρτήσεις $f(x)$, δι' ἃς τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \frac{f(x)}{\varphi(x)}dx \text{ εἶνε ῥητὴ συνάρτησις.}$$

6) Ἐν τῇ ἀναλύσει τῶν ῥητῶν συναρτήσεων εἰς ἁπλᾶς νὰ θεωρηθῇ ἡ περίπτωσις τῶν ἴσων ῥιζῶν ὡς μερικὴ περίπτωσις τῶν ἀνίσων καὶ νὰ εὑρεθῇ τοιουτοτρόπως τὸ ἀνάπτυγμα.

7) Εὑρεῖν τὴν νυοστὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως τοξ εφ x.

Ἀπ. Ἡ πρώτη παράγωγος εἶνε $\frac{1}{1+x^2}$, ἤτοι $\frac{1}{2}\,i\left(\frac{1}{x+i}-\frac{1}{x-i}\right)$· καὶ ἡ παράγωγος τούτου τῆς τάξεως **ν—1** εἶνε

$$\frac{1}{2}\,i\,(-1)\,(-2)\,(-3)\,.\;.\;.\,(-\nu+1)\left[\frac{1}{(x+i)^\nu}-\frac{1}{(x-i)^\nu}\right]$$

8) Νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς ἁπλᾶς αἱ ἑξῆς ῥηταὶ συναρτήσεις

$$\frac{1}{x(x-\alpha)^\lambda},\quad \frac{1}{(x-\alpha)^m(x-\beta)^m},\quad \frac{1}{(x^2-\alpha^2)^m}.$$

9) Νὰ δειχθῇ, ὅτι εἶνε

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)^{m+1}(x-\beta)^{n+1}}=$$

$$\frac{1}{123\ldots m}\;\frac{\partial^m\left[(\alpha-\beta)^{-n-1}\,l\,(x-\alpha)\right]}{\partial\alpha^m}+\;+\frac{1}{123\ldots n}\;\frac{\partial^n\left[(\beta-\alpha)^{-m-1}\,l\,(x-\beta)\right]}{\partial\beta^n}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Α'.

Ῥητόλυτοι συναρτήσεις.

50. *Ῥητόλυτος* λέγεται ἡ ἀλγεβρικὴ ἐξίσωσις

$$\varphi(x, y)=0 \tag{1}$$

ἐὰν αἱ δι' αὐτῆς συνδεόμεναι δύο μεταβληταὶ x καὶ y δύνανται νὰ παρασταθῶσιν ὡς ῥηταὶ συναρτήσεις ἄλλης μεταβλητῆς t, ἤτοι, ἂν αἱ τιμαὶ

$$x=\sigma(t), \quad y=\mathrm{f}(t) \tag{2}$$

ἔνθα $\sigma(t)$ καὶ $\mathrm{f}(t)$ δηλοῦσι ῥητὰς συναρτήσεις τῆς t, ἐπαληθεύωσιν τὴν ἐξίσωσιν (1) οἱουδήποτε ὄντος τοῦ t· καὶ ἂν πᾶν σύστημα τιμῶν x, y, ὅπερ ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν (1), δίδεται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων (2).

Ἡ ἀλγεβρικὴ συνάρτησις y ἡ διὰ τῆς ῥητολύτου ἐξισώσεως ὁριζομένη λέγεται καὶ αὐτὴ *ῥητόλυτος*· καὶ ἡ καμπύλη, ἣν παριστᾷ ἡ ῥητόλυτος ἐξίσωσις, λέγεται καὶ αὐτὴ *ῥητόλυτος* ἢ *μονόφορος* (unicursale).

51. Ἐὰν ἡ ἀλγεβρικὴ συνάρτησις y εἶνε ῥητόλυτος, ἡ ὁλοκλήρωσις αὐτῆς καὶ γενικῶς ἡ ὁλοκλήρωσις πάσης ῥητῆς συναρτήσεως αὐτῆς καὶ τῆς μεταβλητῆς x, ἀφ' ἧς ἐξαρτᾶται, ἀνάγεται ἀμέσως εἰς τὴν ὁλοκλήρωσιν τῶν ῥητῶν συναρτήσεων.

Διότι ἔστω τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \mathrm{R}(x, y)\, dx \tag{3}$$

ἔνθα R δηλοῖ ῥητὴν συνάρτησιν οἱανδήποτε τῶν μεταβλητῶν x καὶ y, ὅπερ y ἔστω ἀλγεβρικὴ συνάρτησις τοῦ x ὁριζομένη διὰ τῆς ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως

$$\varphi(x, y)=0\cdot$$

ἐὰν ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶνε ῥητόλυτος, θὰ εἶνε

$$x=\sigma(t) \quad y=\mathrm{f}(t), \quad \text{ἄρα καὶ} \quad dx=\sigma'(t)dt$$

ἑπομένως θὰ εἶνε

$$\int R(x, y)dx = \int R\Big(\sigma(t), f(t)\Big)\sigma'(t)dt$$

ἤτοι θὰ ἔχωμεν νὰ ὁλοκληρώσωμεν ῥητήν τινα συνάρτησιν τοῦ t· καί, ὡς ἐν τῷ προηγουμένῳ κεφαλαίῳ ἐμάθομεν, τὸ ἐξαγόμενον τῆς ὁλοκληρώσεως ταύτης θὰ εἶνε τῆς μορφῆς

$$P(t) + \sum_\lambda A_\lambda l(t - \alpha_\lambda)$$

ἔνθα P δηλοῖ ῥητήν τινα συνάρτησιν τοῦ t, τὰ δὲ A_λ καὶ α_λ εἶνε σταθεροὶ ἀριθμοί· ἑπομένως τὸ ζητούμενον ὁλοκλήρωμα θὰ εἶνε

$$\int R(x, y)dx = P(t) + \sum_\lambda A_\lambda l(t - \alpha_\lambda) \qquad (4)$$

52. Ἡ μεταβλητὴ t, δι' ἧς ἐκφράζονται ῥητῶς ἀμφότεραι αἱ μεταβληταὶ x, y αἱ διὰ τῆς ῥητολύτου ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως $\varphi(x, y) = 0$ συνδεόμεναι πρὸς ἀλλήλας, δύναται πάντοτε νὰ ληφθῇ οὕτως, ὥστε νὰ εἶνε ῥητὴ συνάρτησις τῶν x καὶ y· νὰ ἀντιστοιχῇ δηλαδὴ πρὸς ἕκαστον σύστημα τιμῶν x, y ἐπαληθεῦον τὴν ἐξίσωσιν $\varphi(x\, y) = 0$ (ἤτοι πρὸς ἕκαστον σημεῖον τῆς καμπύλης $\varphi(x,y) = 0$) ἐν γένει μία καὶ μόνη τιμὴ τῆς t·* ἂν λοιπὸν εἶνε $t = \varrho(x, y)$, θὰ εἶνε

$$(5) \qquad \int R(x, y)dx = R_1(x, y) + \sum_\lambda A_\lambda l\Big(\varrho(x,y) - \alpha_\lambda\Big) \qquad (\lambda = 1, 2 \ldots n)$$

ἤτοι, τὸ ὁλοκλήρωμα πάσης ῥητῆς συναρτήσεως $R(x, y)$ τῶν x καὶ y, ὅταν ἡ ἐξίσωσις

$$\varphi(x, y) = 0$$

εἶνε ῥητόλυτος, σύγκειται ἔκ τινος ῥητῆς συναρτήσεως τῶν x, y καὶ ἐκ τῶν λογαρίθμων μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ῥητῆς συναρτήσεως τῶν $x\, y$ ηὐξημένης κατὰ διαφόρους σταθεροὺς ἀριθμούς· ἔχει δὲ ἕκαστος τῶν λογαρίθμων τούτων συντελεστὴν σταθερόν τινα ἀριθμόν.

53. Ἐκ τῶν ῥητολύτων ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων ἄξιαι ἰδιαιτέρας μνείας εἶνε αἱ ἀκόλουθοι.

---

* Συντομίας χάριν παραλείπομεν ἐνταῦθα τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀλγεβρικοῦ τούτου θεωρήματος, περὶ οὗ ἴδε Lüroth. Mathematische Annalen IX p. 163.

α΄) *Αἱ πρὸς τὴν x πρωτοβάθμιοι ἐξισώσεις*, ἤτοι αἱ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς

$$x.\sigma(y)+\varphi(y)=0 \qquad (\alpha)$$

ἔνθα $\varphi(y)$ καὶ $\sigma(y)$ εἶνε ἀκέραιαι συναρτήσεις τοῦ y.

Διότι ἡ x (ἐπομένως καὶ τὸ dx) ἐκφράζεται ῥητῶς διὰ τῆς y.

Ἐάν, λόγου χάριν, πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\alpha x+\beta}\right) dx$$

ἔνθα R δηλοῖ ῥητὴν συνάρτησιν τοῦ x καὶ τῆς $\sqrt[m]{\alpha x+\beta}$, παριστῶντες τὴν ῥίζαν ταύτην διὰ τοῦ y, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\alpha x+\beta=y^m$$

ἥτις εἶνε πρωτοβάθμιος πρὸς x· ἐπομένως ἡ x ἐκφράζεται ῥητῶς διὰ τῆς y

$$x=\frac{1}{\alpha}(y^m-\beta)$$

καὶ $$dx=\frac{m}{\alpha}y^{m-1}\,dy$$

καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα ἀνάγεται εἰς τὰ ὁλοκληρώματα τῶν ῥητῶν συναρτήσεων.

Ὡς παράδειγμα ἔστω τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int x\sqrt[4]{x-\alpha}\,dx \quad \text{ἢ} \quad \int xy\,dx$$

ἔνθα $$y^4=x-\alpha$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἕπεται $x=\alpha+y^4$ καὶ $dx=4y^3dy$

ὅθεν $$\int x\sqrt[4]{x-\alpha}\;dx=4\int(\alpha+y^4)y^4\,dy=\frac{4}{5}\,\alpha y^5+\frac{4}{9}y^9=$$

$$=\left[\frac{4}{5}\,\alpha\,(x-\alpha)+\frac{4}{9}(x-\alpha)^2\right]\sqrt[4]{x-\alpha}$$

Σημείωσις Καὶ αἱ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς

$$y^p=\left(\frac{Ax+B}{\Gamma x+\Delta}\right)^q$$

εἶνε ῥητόλυτοι· διότι ἂν τεθῇ

$$\frac{Ax+B}{\Gamma x+\Delta}=t^{p}$$

ἕπεται $\quad y=t^{q} \quad$ καὶ $x=\dfrac{\Delta t^{p}-B}{A-\Gamma t^{p}}.$

β') Αἱ ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ πρὸς x καὶ y.

Διότι ἔστω ἡ τυχοῦσα ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ

$$Ax^2+Bxy+\Gamma y^2+\Delta x+Ey+Z=0 \qquad (\beta)$$

Ἐὰν (α, β) εἶνε τυχὸν σύστημα τιμῶν ἐπαληθεῦον τὴν ἐξίσωσιν καὶ τεθῇ

$$x=x'+\alpha, \quad y=y'+\beta,$$

προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$Ax'^2+Bx'y'^2+\Gamma y'^2+\Delta_1 x'+E_1 y'=0$$

ἥτις ἔχει ὅρους τοῦ πρώτου βαθμοῦ καὶ τοῦ δευτέρου μόνον· καὶ ἂν θέσωμεν

$$\frac{y'}{x'}=t,$$

ἀμφότεραι αἱ μεταβληταὶ x', y' (ἑπομένως καὶ αἱ x, y) ἐκφράζονται ῥητῶς διὰ τῆς t·

$$x=\alpha-\frac{\Delta_1+E_1 t}{A+Bt+\Gamma t^2}, \qquad y=\beta-\frac{(\Delta_1+E_1 t)t}{A+Bt+\Gamma t^2}$$

εἶνε δὲ $t=\dfrac{y-\beta}{x-\alpha}.$

Σημείωσις. Ἐὰν θέλωμεν νὰ ἔχωσιν αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ y εἰς t πραγματικοὺς συντελεστάς, ἀρκεῖ νὰ λαμβάνωμεν τὰς τιμὰς α, β πραγματικὰς (τῶν συντελεστῶν τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως ὑποτιθεμένων πραγματικῶν) ὅπερ πάντοτε δύναται νὰ γίνῃ, πλὴν ὅταν ἡ ἐξίσωσις παριστᾷ φανταστικὴν ἔλλειψιν.

Αἱ ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ δύνανται καὶ ἄλλως νὰ λυθῶσι ῥητῶς ὡς ἑξῆς.

Ἐὰν τὸ τριώνυμον τοῦ δευτέρου βαθμοῦ

$$Ax^2+Bxy+\Gamma y^2$$

ἀναλυθῇ εἰς τοὺς δύο πρωτοβαθμίους αὐτοῦ παράγοντας, ἡ ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ γίνεται

$$(\alpha x+\beta y)(\alpha' x+\beta' y)+\Delta x+Ey+Z=0$$

καὶ ἂν τεθῇ $\alpha x+\beta y=t,$

ἕπεται $t(\alpha' x+\beta' y)+\Delta x+\mathrm{E}y+\mathrm{Z}=0$

Ἐκ τῶν δύο τούτων πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων πρὸς x, y, λύοντες εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν x, y (διὰ τοῦ t), αἵτινες τιμαὶ εἶνε ῥηταὶ εἰς t.

Σημείωσις. Ἐὰν θέλωμεν νὰ ἀποφύγωμεν τὰς ἀντικαταστάσεις, ὧν οἱ συντελεσταὶ ἔχουσι φανταστικοὺς ἀριθμούς, πρέπει νὰ ἐφαρμόζωμεν τὸν μετασχηματισμὸν τοῦτον μόνον ἐν τῇ περιπτώσει τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς παραβολῆς.

Παραδείγματα.

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+x^2}}$$

Ἐὰν τὴν τετρ. ῥίζαν παραστήσωμεν διὰ τοῦ y, ἔχομεν νὰ εὕρωμεν τὸ

$$\int \frac{dx}{y} \tag{6}$$

ἔνθα $y^2-x^2-\beta x-\alpha=0$

ἐπειδὴ δὲ οἱ δευτεροβάθμιοι ὅροι ἀναλύονται εἰς γινόμενον δύο πρωτοβαθμίων πραγματικῶν παραγόντων, θέτομεν

$$y+x=t$$

$$\text{ἢ}\quad y=t-x$$

τότε ἡ ἐξίσωσις γίνεται

$$t\,(y-x)-\beta x-\alpha=0$$

ἔχομεν δὲ καὶ $y=t-x$

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν

$$x=\frac{t^2-\alpha}{2t+\beta},\quad y=\frac{t^2+\beta t+\alpha}{2t+\beta}$$

ἑπομένως

$$dx=2\,\frac{t^2+\beta t+\alpha}{(2t+\beta)^2}.\,dt$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα (6), εὑρίσκομεν

$$\int \frac{dx}{y}=\int \frac{dt}{t+\frac{1}{2}\beta}=l\left(t+\frac{1}{2}\,\beta\right)$$

$$\text{ἢ} \quad \int \frac{dx}{y} = l\left(x + \frac{1}{2}\beta + y\right)$$

ἢ καὶ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + x^2}} = l\left(x + \frac{1}{2}\beta + \sqrt{\alpha + \beta x + x^2}\right) \tag{7}$$

καὶ ἂν $\beta = 0$, προκύπτει τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha + x^2}} = l\left(x + \sqrt{\alpha + x^2}\right) \tag{8}$$

Σημείωσις. Ἐὰν ὁ ὅρος α τοῦ ὑποῤῥίζου εἶνε θετικὸς ἀριθμός, δυνάμεθα νὰ λύσωμεν ῥητῶς τὴν ἐξίσωσιν

$$y^2 = \alpha + \beta x + \gamma x^2$$

ὁρμώμενοι ἐκ τῆς λύσεως αὐτῆς $(0, \sqrt{\alpha})$· τότε θέτομεν (κατὰ τὰ ἀνωτέρω ῥηθέντα)

$$y - \sqrt{\alpha} = tx \quad \text{ἢ} \quad y = \sqrt{\alpha} + tx$$

ὅτε εὑρίσκομεν

$$x = \frac{\beta - 2t\sqrt{\alpha}}{t^2 - \gamma} \quad \text{καὶ} \quad y = \sqrt{\alpha} + \frac{(\beta - 2t\sqrt{\alpha})t}{t^2 - \gamma}$$

$$\text{ὅθεν καὶ} \quad dx = \frac{(t^2 + \gamma)\sqrt{\alpha} - \beta t}{(t^2 - \gamma)^2} \cdot 2dt$$

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x - x^2}} \quad \text{ἢ} \quad \int \frac{dx}{y} \tag{9}$$

ἔνθα

$$y^2 + x^2 - \beta x - \alpha = 0$$

Ἐὰν μὲν αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου $\alpha + \beta x - x^2$ εἶνε φανταστικαὶ ἢ καὶ ἴσαι, τὸ ὑπόρριζον οὐδέποτε ἀλλάσσει σημεῖον, ἑπομένως διαμένει πάντοτε ἀρνητικὸν καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα ἐξ ἀνάγκης θὰ εἶνε φανταστικόν. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἀναλύομεν τοὺς δευτεροβαθμίους ὅρους $y^2 + x^2$ εἰς τὸ γινόμενον $(y + xi)(y - xi)$ καὶ θέτομεν $y + xi = t$, ἢ ἀνάγομεν τὸ ὁλοκλήρωμα ἀμέσως εἰς τὸ προηγούμενον γράφοντες αὐτὸ ὡς ἑξῆς

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x - x^2}} =$$

$$= \frac{1}{i} \int \frac{dx}{\sqrt{-\alpha - \beta x + x^2}} = -i\, l\left(x - \frac{\beta}{2} + \sqrt{-\alpha - \beta x + x^2}\right)$$

Ἀλλ' ἐὰν τὸ ὑπόρριζον ἔχῃ πραγματικὰς καὶ ἀνίσους ῥίζας, (ἔστω τὰς ρ_1, ρ_2), δυνάμεθα νὰ ἀποφύγωμεν τὰ φανταστικὰ ἀναλύοντες αὐτὸ εἰς τοὺς πρωτοβαθμίους αὐτοῦ παράγοντας· τότε ἡ ἐξίσωσις

$$y^2+x^2-\beta x-\alpha=0$$

γίνεται
$$y^2+(x-\rho_1)(x-\rho_2)=0$$

καὶ ἔχει τὴν πραγματικὴν λύσιν $(\rho_1, 0)$· ἑπομένως θέτομεν

$$y=t(x-\rho_1) \qquad \rho_1<\rho_2$$

ὅτε εὑρίσκομεν

$$x=\frac{\rho_2+\rho_1 t^2}{1+t^2}, \quad y=\frac{t(\rho_2-\rho_1)}{1+t^2}$$

καὶ ἑπομένως
$$dx=\frac{2(\rho_1-\rho_2)tdt}{(1+t^2)^2}.$$

καὶ τὸ ζητούμενον ὁλοκλήρωμα γίνεται

$$(10)\ \int\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x-x^2}}=-\int\frac{2dt}{1+t^2}=-2\,\text{τοξεφ}\,t=-2\,\text{τοξεφ}\left(\sqrt{\frac{\rho_2-x}{x-\rho_1}}\right)$$

53. Τὸ αὐτὸ ὁλοκλήρωμα δυνάμεθα καὶ ἄλλως νὰ εὕρωμεν ἀνάγοντες αὐτὸ εἰς τὸ στοιχειῶδες ὁλοκλήρωμα

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

πρὸς τοῦτο γράφομεν τὸ ὑπόρριζον ὡς ἑξῆς

$$\alpha+\beta x-x^2=\alpha+\frac{\beta^2}{4}-\left(x-\frac{\beta}{2}\right)^2.$$

ἔπειτα θέτομεν

$$x-\frac{\beta}{2}=\omega.\sqrt{\alpha+\frac{\beta^2}{4}}.$$

ὅθεν
$$dx=\sqrt{\alpha+\frac{\beta^2}{4}}.\,d\omega$$

καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα γίνεται

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x-x^2}}=\int\frac{d\omega}{\sqrt{1-\omega^2}}=\text{τοξ ημ}\,\omega$$

ὅθεν
$$\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x-x^2}}=\text{τοξ ημ}\left(\frac{2x-\beta}{\sqrt{\beta^2+4\alpha}}\right). \qquad (10')$$

Ἡ ταὐτότης τῶν δύο ἐξαγομένων, ἅτινα ἔδωκεν ἡ ὁλοκλήρωσις (9) δεικνύεται εὐκόλως, ἐὰν εἰς τὸ πρῶτον προστεθῇ ὁ ἀριθμὸς $\frac{\pi}{2}$.

3) Εὑρεῖν τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$$

ἂν μὲν εἶνε $\gamma>0$, ἔχομεν

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}x+x^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\, l\left(\gamma x+\frac{\beta}{2}+\sqrt{\gamma}\,.\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}\right)$$

ἂν δὲ εἶνε $\gamma<0$, ἔχομεν

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=\frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\int \frac{dx}{\sqrt{-\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\gamma}x-x^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\text{ τοξ ημ }\left(\frac{2\gamma x+\beta}{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}\right)$$

ἂν δὲ τέλος εἶνε $\gamma=0$, θὰ εἶνε

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x}}=\frac{2}{\beta}\sqrt{\alpha+\beta x}.$$

γ') *Αἱ ἔχουσαι ὅρους μόνον δύο ἐφεξῆς βαθμῶν πρὸς x καὶ y, ἤτοι ὅρους τοῦ m βαθμοῦ καὶ τοῦ $m-1$.*

Διότι, ἂν ἡ ἐξίσωσις εἶνε

$$(\gamma)\qquad \left(\mathrm{A}x^{m}+\mathrm{A}_1x^{m-1}y+\ .\ .\ .\ +\mathrm{A}_m y^{m}\right)+$$
$$+\left(\mathrm{B}x^{m-1}+\mathrm{B}\ x^{m-2}y+\ .\ .\ .\ +\mathrm{B}_{m-1}y^{m-1}\right)=0$$

καὶ τεθῇ $\frac{y}{x}=t$, γίνεται

$$x\left[\mathrm{A}+\mathrm{A}_1t+...+\mathrm{A}_m t^{m}\right]+\left[\mathrm{B}+\mathrm{B}_1t+\ ...\ +\mathrm{B}_{m-1}t^{m-1}\right]=0$$

ὅθεν

$$x=-\frac{B+B_1t+\ldots+B_{m-1}t^{m-1}}{A+A\,t+\ldots+A_mt^m} \quad \text{καὶ} \quad y=-\frac{\left(B+B_1t+\ldots+B_{m-1}t^{m-1}\right)t}{A+A_1t+\ldots+A_mt^m}.$$

ἤτοι ἐκφράζονται ἀμφότεραι αἱ μεταβληταὶ x, y ῥητῶς διὰ τῆς μεταβλητῆς t, ἥτις εἶνε ῥητὴ συνάρτησις τῶν x, y.

Αἱ καμπύλαι τοῦ τρίτου βαθμοῦ, αἱ ἔχουσαι ἓν διπλοῦν σημεῖον, εἶνε πᾶσαι ῥητόλυτοι· διότι, ἂν ληφθῇ ὡς ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων τὸ διπλοῦν σημεῖον, ἡ ἐξίσωσις αὐτῶν θὰ ἔχῃ ὅρους μόνον τοῦ τρίτου καὶ τοῦ δευτέρου βαθμοῦ (ἰδὲ Ἀναλ. Γεωμετρίαν ἔκδ. Β' σελ. 321)· τοιαύτη καμπύλη, λόγου χάριν, εἶνε τὸ φύλλον τοῦ Καρτεσίου

$$x^3+y^3-3\alpha xy=0$$

αἱ συντεταγμέναι x, y τῶν σημείων αὐτῆς ἐκφράζονται ῥητῶς ὡς ἑξῆς

$$x=\frac{3\alpha t}{1+t^3}, \quad y=\frac{3\alpha t^2}{1+t^3} \quad \text{εἶνε δὲ } t=\frac{y}{x}.$$

δ') *Αἱ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς*

$$(\delta) \qquad P^2=(\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2)Q^2\cdot$$

ἔνθα P καὶ Q εἶνε ἀκέραια καὶ ὁμογενῆ πολυώνυμά τῶν μεταβλητῶν x καὶ y· καὶ τὸ μὲν P εἶνε βαθμοῦ m τὸ δὲ Q, $m-2$.

Διότι, ἂν τεθῇ καὶ πάλιν

$$\frac{y}{x}=t, \quad \text{θὰ εἶνε (Διαφ. λογισμοῦ σελ. 211)}$$

$$P=x^m\varphi(t), \quad Q=x^{m-2}f(t)$$

καὶ ἡ ἐξίσωσις (δ) γίνεται

$$x^2.\varphi(t)^2=(\alpha+\beta t+\gamma t^2)\,f(t)^2.$$

ὅθεν

$$x=\frac{f(t)}{\varphi(t)}\sqrt{\alpha+\beta t+\gamma t^2}=\frac{f(t)}{\varphi(t)}.\omega$$

καὶ

$$y=\frac{t.f(t)}{\varphi(t)}\sqrt{\alpha+\beta t+\gamma t^2}=\frac{t.f(t)}{\varphi(t)}.\omega$$

ἔνθα

$$\omega^2=\alpha+\beta t+\gamma t^2$$

ἐπειδὴ δὲ ἀμφότεραι αἱ μεταβληταὶ ω καὶ t δύνανται νὰ ἐκφρασθῶσι ῥητῶς διά τινος ἄλλης θ, συνάγεται, ὅτι καὶ αἱ μεταβληταὶ x, y τῆς ἐξισώσεως (δ) ἐκφράζονται ῥητῶς διὰ τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς θ.

Πρὸς τοῦτο παριστῶμεν τὰς ῥίζας τοῦ τριωνύμου $\alpha+\beta t+\gamma t^2$ διὰ ρ_1 καὶ ρ_2 καὶ ἔχομεν

$$\omega^2=\gamma(t-\rho_1)(t-\rho_2)$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει τὴν λύσιν $(\omega=0,\ t=\rho_1)$· ἐκ ταύτης ὁρμώμενοι θέτομεν, κατὰ τὰ προηγουμένως εἰρημένα

$$\omega=(t-\rho_1)\theta$$

ὅτε προκύπτει

$$t=\frac{\rho_1\theta^2-\gamma\rho_2}{\theta^2-\gamma} \quad \text{καὶ} \quad \omega=\frac{\gamma(\rho_1-\rho_2)\theta}{\theta^2-\gamma}$$

ἄρα καὶ

$$x=\frac{\mathrm{f}\,(t)}{\varphi\,(t)}\cdot\frac{\gamma(\rho_1-\rho\ )\theta}{\theta^2-\gamma}$$

$$y=\frac{t\,\mathrm{f}(t)}{\varphi(t)}\cdot\frac{\gamma(\rho_1-\rho\ )\theta}{\theta^2-\gamma}$$

καὶ ἂν ἀντὶ t τεθῇ ἡ τιμὴ αὐτοῦ εἰς θ, προκύπτουσι ῥηταὶ τιμαὶ τῶν x, y εἰς θ.

Ὡς παράδειγμα ἔστω ἡ ἐξίσωσις τοῦ λημνίσκου

$$(x^2+y\ )^2=\alpha^2(x^2-y^2).$$

Ἐνταῦθα $\qquad P=x^2+y^2,$ καὶ $Q=1$

θέτομεν $y=tx$ καὶ εὑρίσκομεν

$$x=\alpha\frac{\omega}{1+t^2}, \qquad y=\alpha\frac{t.\omega}{1+t^2}$$

ἔνθα $\qquad \omega^2=1-t^2$

ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐξίσωσις αὕτη τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἐπιδέχεται τὴν λύσιν

$$\omega=0, \quad t=-1,$$

θέτομεν

$$\frac{\omega}{t+1}=\theta\cdot$$

ὅθεν ἕπεται

$$t=\frac{-\theta^2+1}{\theta^2+1}$$

$$\text{καὶ} \quad \omega=\sqrt{1-t^2}=\frac{2\theta}{\theta^2+1}.$$

καὶ ἑπομένως

$$x=\alpha\frac{\theta(1+\theta^2)}{1+\theta^4} \quad \text{καὶ} \quad y=\alpha\frac{\theta(1-\theta^2)}{1+\theta^4}.$$

Ἡ γεωμετρικὴ σημασία τῆς ἀντικαταστάσεως, δι' ἧς λύονται ῥητῶς αἱ προηγούμεναι ἐξισώσεις, εἶνε ἡ ἑξῆς. Ἡ μὲν ἐξίσωσις (γ) παριστᾷ καμπύλην μ βαθμοῦ, ἔχουσαν ἓν σημεῖον πολλαπλοῦν (τὴν ἀρχὴν) τῆς τάξεως $\mu-1$· πᾶσα δὲ δι' αὐτοῦ διερχομένη εὐθεῖα $y=tx$ (t ὄντος τοῦ γωνιακοῦ συντελεστοῦ) τέμνει τὴν καμπύλην (ἐκτὸς τοῦ πολλαπλοῦ σημείου) εἰς ἓν μόνον σημεῖον· ἀντιστοιχοῦσιν ἄρα τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης πρὸς τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς t ἓν πρὸς μίαν καὶ ἀντιστρόφως, καὶ διὰ τοῦτο αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων τῆς καμπύλης (αἵτινες εἶνε ἀλγεβρικαὶ συναρτήσεις τῆς t) πρέπει νὰ δίδωνται δι' ἐξισώσεων πρωτοβαθμίων πρὸς αὐτάς, ἤτοι ἐκφράζονται ῥητῶς διὰ τῆς t.

Ἐν δὲ τῇ ἐξισώσει (β) τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ἐὰν λάβωμεν τὸ τυχὸν σημεῖον (α, β) τῆς καμπύλης, πᾶσαι αἱ δι' αὐτοῦ ἀγόμεναι εὐθεῖαι

$$y-\beta=t(x-\alpha)$$

τέμνουσι τὴν καμπύλην εἰς ἓν μόνον σημεῖον (πλὴν τοῦ α, β)· ὥστε ἀντιστοιχοῦσι τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης πρὸς τὰς τιμὰς τοῦ t ἓν πρὸς μίαν καὶ ἀντιστρόφως· καὶ διὰ τοῦτο αἱ συντεταγμέναι x, y τῶν σημείων τῆς καμπύλης ἐκφράζονται ῥητῶς διὰ τοῦ t.

Καὶ ἡ ἀντικατάστασις τοῦ ἑτέρου τῶν πρωτοβαθμίων παραγόντων τοῦ τριωνύμου $Ax^2+Bxy+\Gamma y^2$ διὰ μιᾶς μεταβλητῆς t τὴν αὐτὴν ἔχει γεωμετρικὴν σημασίαν· διότι ἡ ἐξίσωσις

$$\alpha x+\beta y=t$$

παριστᾷ εὐθείας παραλλήλους μιᾷ τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ὑπερβολῆς (ἢ τῷ ἄξονι τῆς παραβολῆς), αἵτινες τέμνουσι τὴν καμπύλην μόνον καθ' ἓν σημεῖον· ὥστε πρὸς ἑκάστην τιμὴν τῆς t ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον τῆς καμπύλης καὶ ἀντιστρόφως πρὸς ἕκαστον σημεῖον μία τιμὴ τῆς t· διὰ δὲ τοῦτο ἐκφράζονται ῥητῶς αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων τῆς καμπύλης διὰ τῆς t. Ἡ δευτέρα αὕτη ἀντικατάστασις εἶνε μερικὴ περίπτωσις τῆς πρώτης καὶ προκύπτει ἐξ ἐκείνης, ἐὰν τὸ σημεῖον (α, β), ἐξ οὗ ἄγονται αἱ τέμνουσαι τὴν καμπύλην εὐθεῖαι, ἀφανισθῇ εἰς τὸ ἄπειρον.

Αἱ δὲ καμπύλαι (δ) ἔχουσι συντεταγμένας (x, y) ῥητὰς συναρτήσεις τῶν συντεταγμένων τῆς ῥητολύτου καμπύλης $\omega^2=\alpha+\beta t+\gamma t^2$ ὥστε πρὸς ἕκαστον σημεῖον τῆς καμπύλης ταύτης ἀντιστοιχεῖ ἓν καὶ μόνον ἓν σημεῖον ἑκάστης τῶν καμπύλων τούτων (δ).

Ἐν γένει δὲ ἀποδεικνύεται, ὅτι ῥητόλυτοι καμπύλαι μ βαθμοῦ εἶνε αἱ ἔχουσαι διπλᾶ σημεῖα $\frac{1}{2}(\mu-1)(\mu-2)$ καὶ αὗται μόναι.

Περὶ τοῦ ὁλοκληρώματος.

$$\int R(x, \sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2})\,dx \tag{1}$$

ἔνθα R δηλοῖ ῥητὴν συνάρτησιν τοῦ x καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης

$$\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$$

54. Πολλάκις εἶνε προτιμότερον, πρὶν ἀναγάγωμεν τὴν ὁλοκλήρωσιν ταύτην εἰς ὁλοκλήρωσιν ῥητῆς συναρτήσεως, νὰ ἀναλύσωμεν αὐτὴν εἰς ἄλλας ἁπλουστέρας.

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι, ἂν τεθῇ

$$y=\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$$

πᾶσα ῥητὴ συνάρτησις τῶν x καὶ y δύναται νὰ ἀχθῇ εἰς τὴν μορφὴν

$$\frac{\mathrm{K}+\Lambda y}{\mathrm{M}+\mathrm{N}y} \tag{2}$$

ἔνθα K, Λ, M, N εἶνε ἀκέραιαι συναρτήσεις μόνου τοῦ x· διότι αἱ μὲν ἄρτιαι δυνάμεις τοῦ y ἐκφράζονται δι' ἀκεραίων συναρτήσεων τοῦ x, αἱ δὲ περιτταὶ αἱ ἀνώτεραι τῆς πρώτης δύνανται νὰ ἀναχθῶσιν εἰς τὴν πρώτην, ὡς ἑξῆς φαίνεται

$$y^2=\alpha+\beta x+\gamma x^2$$
$$y^3=y(\alpha+\beta x+\gamma x^2)$$
$$y^4=(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^2$$
κτλ. κτλ.

Ἐὰν δὲ τῆς παραστάσεως (2) πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἐπὶ M—Ny, τρέπεται αὕτη εἰς τὴν ἑξῆς

$$\mathrm{P}+\mathrm{P}_1 y$$

ἢ καὶ εἰς τὴν ἑξῆς $\qquad \mathrm{P}+\dfrac{\mathrm{Q}}{y}$

ἔνθα P καὶ Q εἶνε ῥηταὶ συναρτήσεις μόνου τοῦ x.

Ἡ ὁλοκλήρωσις ἄρα (1) ἀνάγεται κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον εἰς τὴν ὁλοκλήρωσιν τῆς ῥητῆς συναρτήσεως P καὶ εἰς τὴν ἁπλουστέραν ὁλοκλήρωσιν

$$\int \frac{\mathrm{Q}}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}dx \tag{3}$$

ἐπειδὴ δὲ ἡ ῥητὴ συνάρτησις Q ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα ἀκεραίας τινὸς συναρτήσεως $\varphi(x)$ καὶ κλασμάτων τινῶν τῆς μορφῆς

$$\frac{\mathrm{A}}{(x-\rho)^{\nu}},$$

ἕπεται, ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα (3) εἶνε ἄθροισμα ὁλοκληρωμάτων τινῶν τῆς μορφῆς

$$\int \frac{x^{\mu} dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} \qquad (\varepsilon)$$

καὶ

$$\int \frac{dx}{(x-\rho)^{\nu}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} \qquad (\varepsilon')$$

ἀλλὰ τὸ δεύτερον τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὸ πρῶτον, ἐὰν τεθῇ

$$x-\rho=\frac{1}{x_1} \quad \text{καὶ ἑπομένως} \quad dx=-\frac{dx_1}{x_1^2}$$

διότι τότε γίνεται

$$\int \frac{dx}{(x-\rho)^{\nu}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=-\int \frac{x_1^{\nu-1} dx_1}{\sqrt{\alpha_1+\beta_1 x_1+\gamma_1 x_1^2}}$$

ἔνθα

$$\alpha_1=\gamma$$
$$\beta_1=\beta+2\gamma\rho$$
$$\gamma_1=\alpha+\beta\rho+\gamma\rho^2$$

ὥστε ἔχομεν νὰ ἀσχοληθῶμεν μόνον περὶ τὰ ὁλοκληρώματα (ε).

Τὰ ὁλοκληρώματα ταῦτα ἀνάγονται εἰς τὸ ἤδη εὑρεθὲν ὁλοκλήρωμα (σελ. 75).

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$$

κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον.

Διαφορίζοντες τὸ γινόμενον

$$x^{\mu-1}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$$

εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα

$$d(x^{\mu-1}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2})=\frac{(\mu-1)\alpha x^{\mu-2}+\left(\mu-\frac{1}{2}\right)\beta x^{\mu-1}+\mu\gamma x^{\mu}}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}.dx$$

ὅθεν ἕπεται

$$(\mu-1)\alpha\int \frac{x^{\mu-2}dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}+\left(\mu-\frac{1}{2}\right)\beta\int \frac{x^{\mu-1}dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}+$$
$$+\gamma\mu\int \frac{x^{\mu}dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=x^{\mu-1}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}. \qquad (\theta)$$

Διὰ τοῦ τύπου τούτου (ἂν εἶνε $\gamma \gtrless 0$) ἀνάγομεν τὴν ὁλοκλήρωσιν

$$\int \frac{x^\mu dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$$

εἰς τὰς δύο ἁπλουστέρας

$$\int \frac{x^{\mu-1} dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} \quad \text{καὶ} \quad \int \frac{x^{\mu-2} dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}.$$

Ἐὰν ἐν τῷ τύπῳ τούτῳ ὑποθέσωμεν $\mu=1, 2, 3 \ldots$ εὑρίσκομεν

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} = \frac{1}{\gamma}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2} - \frac{\beta}{2\gamma}\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} =$$

$$= \frac{x}{2\gamma}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2} - \frac{3\beta}{4\gamma}\int \frac{x dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} - \frac{\alpha}{2\gamma}\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$$

. . . .

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι θὰ εἶνε

$$\int \frac{x^\mu dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} = \varphi(x)\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2} + \varepsilon \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$$

ἔνθα $\varphi(x)$ εἶνε πολυώνυμον τοῦ βαθμοῦ $\mu-1$ καὶ ε σταθερός τις ἀριθμός. (Ὁ τύπος οὗτος ἀληθεύει καὶ ὅταν εἶνε $\gamma=0$, καὶ προκύπτει ὁμοίως ἐκ τοῦ αὐτοῦ τύπου (θ)) καὶ ἐπομένως, ἂν $\sigma(x)$ εἶνε τυχοῦσα ἀκεραία συνάρτησις τοῦ x, θὰ εἶνε

$$\int \frac{\sigma(x) dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} = \mathrm{f}(x)\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} \qquad (4)$$

ἔνθα $\mathrm{f}(x)$ εἶνε ἀκεραία συνάρτησις βαθμοῦ κατὰ μονάδα μικροτέρου ἢ ἡ $\sigma(x)$ τὸ δὲ λ σταθερός τις ἀριθμός.

Τὸ ὁλοκλήρωμα εἶνε ἀλγεβρικόν, ἐὰν $\lambda=0$, καὶ τότε μόνον.

Σημείωσις. Τὸ πολυώνυμον $\mathrm{f}(x)$ καὶ ὁ συντελεστὴς λ δύνανται νὰ προσδιορισθῶσιν ἐκ τοῦ δοθέντος πολυωνύμου $\sigma(x)$ διὰ τῆς μεθόδου τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν· διότι, ἂν διαφορίσωμεν τὴν ἰσότητα (4), πρὸς x, εὑρίσκομεν

$$\sigma(x) = \mathrm{f}'(x)\ (\alpha+\beta x+\gamma x^2) + \mathrm{f}(x)\left(\frac{1}{2}\beta+\gamma x\right) + \lambda$$

καὶ ἐξισοῦντες τοὺς συντελεστὰς τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ x, εὑρίσκομεν $\mu+1$ ἐξισώσεις (τοῦ βαθμοῦ τοῦ $\sigma(x)$ ὄντος μ), ἐξ ὧν ὁρίζονται οἱ μ συντελεσταὶ τοῦ $\mathrm{f}(x)$ καὶ ὁ συντελεστὴς λ.

Μερικαὶ περιπτώσεις.

1) $$\int \frac{x^\mu dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}} \quad \text{καὶ} \quad \int \frac{x^\mu dx}{\sqrt{\beta x-x^2}}$$

Ἐὰν τὸ ὑπόρριζον εἶνε α^2-x^2, ὁ τύπος (θ) τῆς ἀναγωγῆς γίνεται

$$\int \frac{x^\mu dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}} = \frac{\mu-1}{\mu}\alpha^2 \int \frac{x^{\mu-2}dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}} - \frac{x^{\mu-1}}{\mu}\sqrt{\alpha^2-x^2} \tag{5}$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \frac{x^\mu dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}} \qquad (\iota)$$

ἂν μὲν ὁ μ εἶνε ἄρτιος ἀριθμὸς (θετικός), ἀνάγεται εἰς τὸ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}} \quad \text{ἤτοι τοξ ημ}\left(\frac{x}{\alpha}\right) \qquad (\text{σελ. } 21)$$

καὶ ἑπομένως εἶνε τῆς μορφῆς

$$\int \frac{x^\mu dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}} = \varphi(x)\sqrt{\alpha^2-x^2} + \varepsilon \text{ τοξ ημ}\left(\frac{x}{\alpha}\right) \tag{6}$$

τοῦ $\varphi(x)$ ὄντος πολυωνύμου τοῦ βαθμοῦ $\mu-1$ (ὅπερ ἔχει περιττὰς μόνον δυνάμεις τοῦ x).

Ἂν δὲ ὁ μ εἶνε περιττός, τὸ αὐτὸ ὁλοκλήρωμα (ι) ἀνάγεται διὰ τοῦ τύπου (5) εἰς τὸ

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}} \quad \text{ὅπερ εἶνε} \quad -\sqrt{\alpha^2-x^2}$$

ἑπομένως εἶνε ἀλγεβρικὸν καὶ τῆς μορφῆς

$$\int \frac{x^\mu dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}} = \varphi(x)\sqrt{\alpha^2-x^2} \tag{6'}$$

ἔνθα τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)$ εἶνε βαθμοῦ $\mu-1$ καὶ ἔχει ἀρτίας μόνον δυνάμεις τοῦ x.

55. Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τύπον παρέχοντα ἀμέσως τὸ ὁλοκλήρωμα (ι)· πρὸς τοῦτο παριστῶμεν αὐτὸ συντομίας χάριν διὰ τοῦ A_μ ὅτε ὁ τύπος τῆς ἀναγωγῆς γράφεται ὡς ἑξῆς, τοῦ μ ὄντος ἀρτίου (διὰ $\mu=2, 4, 6 \ldots \mu$)

$$A_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}\alpha^2 A_{\mu-2} - \frac{x^{\mu-1}}{\mu}\sqrt{\alpha^2-x^2}$$

$$A_{\mu-2} = \frac{\mu-3}{\mu-2}\alpha^2 A_{\mu-4} - \frac{x^{\mu-3}}{\mu-2}\sqrt{\alpha^2-x^2}$$

$$A_{\mu-4} = \frac{\mu-5}{\mu-4}\alpha^2 A_{\mu-6} - \frac{x^{\mu-5}}{\mu-4}\sqrt{\alpha^2-x^2}$$

. . . .

$$A_4 = \frac{3}{4}\alpha^2 A_2 - \frac{x^3}{4}\sqrt{\alpha^2-x^2}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\alpha^2 A_0 - \frac{x}{2}\sqrt{\alpha^2-x^2}.$$

Ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ σειρὰν ἐπὶ

$$1,\ \frac{\mu-1}{\mu}\alpha^2,\quad \frac{(\mu-1)(\mu-3)}{\mu(\mu-2)}\alpha^4 \ldots \frac{(\mu-1)(\mu-3)\ldots 5.3}{\mu(\mu-2)\ldots 6.4}\alpha^{\mu-2}$$

καὶ προσθέσωμεν ἔπειτα αὐτὰς κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$\int\frac{x^\mu dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}} = \frac{1.3.5.7\ \ldots\ (\mu-1)}{2.4.6.8\ \ldots\ \mu}\alpha^\mu \text{τοξ ημ}\left(\frac{x}{\alpha}\right) +$$

$$-\frac{\alpha^{\mu-1}}{\mu}\sqrt{\alpha^2-x^2}\left\{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\mu-1} + \frac{\mu-1}{\mu-2}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\mu-3} + \right.$$

$$\left. + \frac{(\mu-1)(\mu-3)}{(\mu-2)(\mu-4)}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\mu-5} + \ldots + \frac{(\mu-1)(\mu-3)\ldots 5.3}{(\mu-2)(\mu-4)\ldots 4.2}\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right\}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ἂν ὁ μ εἶνε περιττὸς

$$\int\frac{x^\mu dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}} = -\frac{\alpha^{\mu-1}}{\mu}\sqrt{\alpha^2-x^2}\left\{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\mu-1} + \frac{\mu-1}{\mu-2}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\mu-3} + \right.$$

$$\left. + \frac{(\mu-1)(\mu-3)}{(\mu-2)(\mu-4)}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\mu-5} + \ldots + \frac{(\mu-1)(\mu-3)\ldots 4.2}{(\mu-2)(\mu-4)\ldots 3.1}\right\}.$$

Σημείωσις. Ἡ αὐτὴ ὁλοκλήρωσις, ἂν τεθῇ

$x = \alpha\,\text{συν}t$, γίνεται

$$\int\frac{x^\mu dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}} = -\alpha^\mu\int \text{συν}^\mu t.dt$$

τρέπεται δηλαδὴ εἰς τὴν ὁλοκλήρωσιν μιᾶς δυνάμεως τοῦ συνημιτόνου· περὶ τῆς ὁλοκληρώσεως ταύτης θὰ διαλάβωμεν ἐν τῷ οἰκείῳ τόπῳ.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \frac{x^\mu dx}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}$$

ὅπερ μόνον κατὰ τὸν παράγοντα i διαφέρει ἀπὸ τοῦ προηγουμένου

$$2) \qquad \int \frac{x^\mu}{\sqrt{\beta x - x^2}} dx$$

ὁ τύπος (θ) τῆς ἀναγωγῆς γίνεται διὰ τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο

$$\int \frac{x^\mu}{\sqrt{\beta x - x^2}} dx = -\frac{x^{\mu-1}}{\mu} \sqrt{\beta x - x^2} + \left(\mu - \frac{1}{2}\right) \beta \int \frac{x^{\mu-1}}{\sqrt{\beta x - x^2}} dx$$

διὰ τῆς ἐφαρμογῆς δὲ τούτου ἀνάγεται ἡ προκειμένη ὁλοκλήρωσις εἰς τὴν ἑξῆς

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\beta x - x^2}} = \text{τοξ ημ} \left(\frac{2x-\beta}{\beta}\right) \qquad (\text{ἐδ. } 53)$$

Παρατηρητέον πρὸς τούτοις ὅτι ἡ ὁλοκλήρωσις αὕτη ἀνάγεται εὐκόλως εἰς τὴν προηγουμένην· διότι, ἂν θέσωμεν

$$x = \beta t^2 \quad \text{καὶ ἐπομένως} \quad dx = 2\beta t dt,$$

εὑρίσκομεν

$$\int \frac{x^\mu dx}{\sqrt{\beta x - x^2}} = 2\beta^\mu \int \frac{t^{2\mu} dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

56. Καὶ ὅταν δύο ἢ περισσότεραι ἀλγεβρικαὶ συναρτήσεις τῆς x, ὑπάρχωσιν ἐν τῇ ὁλοκληρωτέᾳ παραστάσει (ἥτις παράστασις ὑποτίθεται ῥητὴ συνάρτησις τῆς x καὶ τῶν ἀλγεβρικῶν αὐτῆς συναρτήσεων), δυνάμεθα ἐνίοτε διά τινος ἄλλης μεταβλητῆς νὰ ἐκφράσωμεν ῥητῶς καὶ τὴν x καὶ τὰς ἀλγεβρικὰς συναρτήσεις αὐτῆς καὶ νὰ ἀναγάγωμεν ἐπομένως τὴν ὁλοκλήρωσιν εἰς ὁλοκλήρωσιν ῥητῆς συναρτήσεως μιᾶς μεταβλητῆς.

Τοῦτο συμβαίνει λόγου χάριν εἰς τὰς ἑξῆς ὁλοκληρώσεις

$$1^\eta \qquad \int R\left(x, (\alpha x+\beta)^{\frac{p}{q}}, (\alpha x+\beta)^{\frac{p_1}{q_1}} \ldots\right) dx$$

ἔνθα R δηλοῖ ῥητὴν συνάρτησιν τοῦ x καὶ ὁσωνδήποτε συμμέτρων δυνάμεων μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς πρωτοβαθμίου συναρτήσεως $\alpha x + \beta$· ἐὰν τότε m εἶνε τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν q, $q_1 \cdots$

(τῶν δεικτῶν τῶν ῥιζῶν) καὶ τεθῇ

$$\alpha x+\beta=t^m \quad \text{ὅθεν καὶ} \quad dx=\frac{1}{\alpha}mt^{m-1}dt,$$

πᾶσαι αἱ ῥίζαι ἐκφράζονται ῥητῶς διὰ τῆς t· ἐπίσης καὶ ἡ μεταβλητὴ x καὶ τὸ dx· ἑπομένως ἡ ὁλοκληρωτέα παράστασις γίνεται ῥητὴ εἰς t.

Ὡς παράδειγμα ἔστω τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}-1}dx$$

ἂν θέσωμεν $x=t^4$, θὰ εἶνε $dx=4t^3dt$ καὶ ἑπομένως

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}-1}dx=4\int\frac{t^5dt}{t-1}$$

καὶ ἐπειδὴ

$$\frac{t^5}{t-1}=\frac{t^5-1}{t-1}+\frac{1}{t-1}=1+t+t^2+t^3+t^4+\frac{1}{t-1},$$

ἕπεται

$$\int\frac{t^5}{t-1}dt=t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^4}{4}+\frac{t^5}{5}+l(t-1)\cdot$$

καὶ
$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}-1}dx=$$

$$=4\left[x^{\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}x^{\frac{3}{4}}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}x^{\frac{5}{4}}+l\left(\sqrt[4]{x}-1\right)\right].$$

Τὴν αὐτὴν μέθοδον μεταχειριζόμεθα καὶ ὅταν πᾶσαι αἱ κλασματικαὶ δυνάμεις κοινὴν βάσιν ἔχωσι ῥητήν τινα συνάρτησιν τοῦ x ἔχουσαν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους πρωτοβαθμίους· ἤτοι εἰς τὰ ὁλοκληρώματα τῆς μορφῆς

$$\int R\left(x,\ \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{p}{q}},\ \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}\dots\right)dx$$

2^{α}
$$\int R(x,\ \sqrt{x-\alpha},\ \sqrt{x-\beta})dx$$

ἔνθα R δηλοῖ ῥητὴν συνάρτησιν τοῦ x καὶ τῶν δύο ῥιζῶν, ὧν τὰ ὑπόρριζα πρωτοβάθμια.

Ἐὰν θέσωμεν

$$x-\alpha=u^2$$

$$x-\beta=v^2,$$

προκύπτει
$$x=\frac{1}{2}(u^2+v^2)+\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \qquad (\iota)$$

καὶ
$$\beta-\alpha=u^2-v^2. \qquad (\varepsilon)$$

ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἡ τὰ u, v συνδέουσα εἶνε ῥητόλυτος, τὰ u, v ἐκφράζονται ῥητῶς διὰ τρίτης τινὸς μεταβλητῆς t· ἑπομένως καὶ ἡ x ἐκ τῆς ἰσότητος (ι) ἐκφράζεται ῥητῶς διὰ τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς t

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν

$$u-v=t$$

διότι τότε ἡ ἐξίσωσις (ε) γίνεται

$$(u+v)t=\beta-\alpha$$

ὅθεν ἕπεται

$$u=\frac{1}{2}\left(\frac{\beta-\alpha}{t}+t\right)$$

$$v=\frac{1}{2}\left(\frac{\beta-\alpha}{t}-t\right)$$

καὶ
$$x=\frac{1}{4}\left(\frac{(\beta-\alpha)^2}{t^2}+t^2\right)+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

3η
$$\int R(x, \sqrt{x+x^2}, \sqrt{x-x^2})dx$$

Ἐὰν καὶ πάλιν θέσωμεν

$$x+x^2=u$$

$$x-x^2=v^2,$$

ἕπεται
$$x=\frac{1}{2}(u^2+v^2)$$

καὶ
$$x^2=\frac{1}{2}(u^2-v^2)$$

ὅθεν ἕπεται μεταξὺ u καὶ v ἡ ἐξίσωσις

$$(u^2+v^2)^2=2(u^2-v^2)$$

ἥτις εἶνε ῥητόλυτος, ὡς ἤδη ἐμάθομεν (σελ 77), αἱ δὲ ῥηταὶ τιμαὶ τῶν u καὶ v εἶνε

$$u=\frac{\theta(1+\theta^2)}{1+\theta^4}\cdot\sqrt{2},\qquad v=\frac{\theta(1-\theta^2)}{1+\theta^4}\sqrt{2}$$

ἄρα

$$x=\frac{2\theta^2}{1+\theta^4}.$$

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Εὑρεῖν τὰ ἑξῆς ὁλοκληρώματα

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{\alpha^2-x^2}},\quad \int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-\alpha^2}},\quad \int\frac{dx}{(\alpha+\beta x)\sqrt{1+x^2}},\quad \int\frac{dx}{(1+\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}},\quad \int(\alpha-x)(\beta-x)^{\frac{2}{3}}dx,\quad \int\frac{dx}{x\sqrt{\alpha+x}}.$$

2) Ἀποδεῖξαι ὅτι εἶνε

$$\int\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}\,dx=(\mathrm{A}x+\mathrm{B})\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}+\varepsilon\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$$

καὶ προσδιορίσαι τὰς τιμὰς τῶν σταθερῶν A, B, ε.

3) Εὑρεῖν τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int\frac{dx}{(x+\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2})^3}$$

4) Εὑρεῖν ἐν τῷ ὁλοκληρώματι

$$\int\frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\mathrm{f}(x).\sqrt{1-x^2}+\varepsilon\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

ἔνθα $\varphi(x)$ εἶνε ἀκεραία συνάρτησις, τὴν σταθερὰν ε.

(Ἀπ. Ἐὰν $\varphi(x)=\sum_\nu \mathrm{A}_\nu x^\nu$, θὰ εἶνε $\varepsilon=\sum \mathrm{A}_\nu\frac{1.3.5\ldots\nu-1}{2.4.6\ldots\nu}$ $(\nu=0,2,4,6\ldots.)$

B′.

Ἐλλειπτικὰ καὶ ὑπερελλειπτικὰ ὁλοκληρώματα.

57. Ἐὰν ἡ ἀλγεβρικὴ ἐξίσωσις

$$\varphi(x, y)=0 \tag{1}$$

δὲν εἶνε ῥητόλυτος, τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int R(x, y)dx \tag{2}$$

τῆς τυχούσης ῥητῆς συναρτήσεως R τῶν x, y δὲν εἶνε ἐν γένει ἀλγεβρικὸν οὔτε σύγκειται ἐκ μέρους ἀλγεβρικοῦ καὶ ἐκ πεπερασμένου ἀριθμοῦ λογαρίθμων ῥητῶν συναρτήσεων τῶν x, y· τοῦτο συμβαίνει, μόνον ὅταν ἡ ῥητὴ συνάρτησις R πληροῖ ὅρους τινάς*· ἐὰν δὲ μὴ πληροῖ αὐτούς, τὸ ὁλοκλήρωμα αὐτῆς εἶνε συνάρτησις τοῦ x διάφορος τῶν μέχρι τοῦδε ἐγνωσμένων καὶ μὴ δυναμένη νὰ παραχθῇ διὰ τοῦ συνδυασμοῦ αὐτῶν ὑπὸ πεπερασμένην μορφήν. Ὅτι δὲ διὰ τὴν τυχοῦσαν ἀλγεβρικὴν συνάρτησιν y ὑπάρχουσιν ἄπειροι ῥηταὶ συναρτήσεις $R(x, y)$ ἔχουσαι ὁλοκλήρωμα ἀλγεβρικὸν ἢ μικτὸν ἐξ ἀλγεβρικοῦ μέρους καὶ ἐκ λογαριθμικοῦ, ἐννοοῦμεν ἀμέσως ἐκ τούτου, ὅτι, ἂν παραστήσωμεν διὰ $\theta, u, v \ldots \omega$ τυχούσας ῥητὰς συναρτήσεις τῶν x, y, τὸ ἄθροισμα

$$\theta+A lu+B lv+\ldots+N l\omega \tag{3}$$

ἔνθα A, B, . . . N εἶνε τυχόντες σταθεροὶ ἀριθμοί, ἔχει παράγωγον πάντοτε ῥητήν τινα συνάρτησιν τῶν x, y**.

58. Θεωρήσωμεν κατὰ πρῶτον τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ ἀλγεβρικὴ ἐξίσωσις (1), ἥτις συνδέει τὰς μεταβλητὰς x, y, εἶνε τῆς μορφῆς

$$y^2=\varphi(x) \tag{4}$$

τοῦ $\varphi(x)$ ὄντος ἀκεραίου πολυωνύμου ἔχοντος ἁπλᾶς μόνον ῥίζας· ἐὰν τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)$ εἶνε ἀνωτέρου τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ἡ ἐξίσωσις (4)

---

* Περὶ τῶν ὅρων τούτων πραγματεύονται εἰδικὰ συγγράμματα (ἰδὲ λ. χ. Appell et Goursat. Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales).

** Ὁ Abel ἀπέδειξεν, ὅτι, ὅταν τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς ἀλγεβρικῆς συναρτήσεως $R(x,y)$ παράγηται διὰ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν στοιχειωδῶν συναρτήσεων ἃς ἐμάθομεν, πάντοτε ἔχει τὴν μορφὴν (3).

δὲν εἶνε ῥητόλυτος καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \mathrm{R}\,(x, y)dx \tag{2}$$

ἔνθα R δηλοῖ τυχοῦσαν ῥητὴν συνάρτησιν τῶν x, y, δὲν δύναται ἐν γένει νὰ παραχθῇ διὰ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν συνήθων συναρτήσεων ὑπὸ πεπερασμένην μορφήν· λέγεται δὲ *ἐλλειπτικὸν* μέν, ἂν τὸ $\varphi(x)$ εἶνε τρίτου ἢ τετάρτου βαθμοῦ, *ὑπερελλειπτικὸν* δέ, ἂν εἶνε ἀνωτέρου.

59. Τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)$ δύναται νὰ ὑποτεθῇ ἄνευ βλάβης τῆς γενικότητος, ὅτι ἔχει μόνον ἁπλᾶς ῥίζας, διότι, ἂν ἔχῃ ῥίζαν τινὰ α πολλαπλῆν τῆς τάξεως λ, θὰ εἶνε

$$\varphi(x)=(x-\alpha)^{\lambda}.\varphi_1(x)$$

καὶ ἑπομένως

$$\sqrt{\varphi(x)}=(x-\alpha)^{\frac{\lambda}{2}}\sqrt{\varphi_1(x)}$$

ἂν λ εἶνε ἄρτιος ἀριθμός· ἂν δὲ ὁ λ εἶνε περιττός,

$$\sqrt{\varphi(x)}=(x-\alpha)^{\frac{\lambda-1}{2}}\sqrt{(x-\alpha)\varphi_1(x)}$$

ἑπομένως ἡ συνάρτησις R (x, y), ἤτοι ἡ $\mathrm{R}\left(x, \sqrt{\varphi(x)}\right)$, γίνεται

$$\mathrm{R}_1\left(x, \sqrt{\varphi_1(x)}\right), \text{ ἢ } \mathrm{R}_1\left(x, \sqrt{(x-\alpha)\varphi_1(x)}\right)$$

ἔνθα τὸ ὑπόρριζον εἶνε κατωτέρου βαθμοῦ καὶ ἢ ἔχει τὴν ῥίζαν α ἁπλῆν ἢ οὐδόλως ἔχει αὐτήν.

60. Ἐὰν τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)$ εἶνε βαθμοῦ ἀρτίου $2p$, δύναται νὰ ὑποβιβασθῇ κατὰ μονάδα ὁ βαθμὸς αὐτοῦ, ὅτε γίνεται περιττοῦ βαθμοῦ $2p-1$· καὶ ἀντιστρόφως, ἂν εἶνε περιττοῦ βαθμοῦ $2p-1$, δύναται νὰ γίνῃ ἀρτίου βαθμοῦ $2p$ κατὰ μονάδα μεγαλητέρου. Διότι ἔστω ὁ βαθμὸς αὐτοῦ $2p$ καὶ α μία τῶν ῥιζῶν αὐτοῦ· ἐὰν τεθῇ

$$x=\alpha+\frac{1}{x_1}$$

θὰ γίνῃ $\varphi(x)=\dfrac{\varphi_1(x_1)}{x_1^{2p}}$ ἔνθα $\varphi_1(x_1)$ εἶνε βαθμοῦ $2p-1$, καὶ ἀντιστρόφως, ἂν ὁ βαθμὸς τοῦ $\varphi(x)$ εἶνε περιττὸς $2p-1$, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν

$$x=\frac{1}{x_1}, \text{ διότι τότε γίνεται } \sqrt{\varphi(x)}=\frac{1}{x_1^{p}}\sqrt{x_1\varphi_1(x_1)}$$

ἔνθα $x_1\varphi_1(x_1)$ εἶνε βαθμοῦ $2p$.

Ἐν τοῖς ἑξῆς ὑποθέτομεν τὸ ὑπόρριζον πολυώνυμον $\varphi(x)$ βαθμοῦ περιττοῦ $2p+1$, διότι ἀποδείξεις τινὲς γίνονται κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ταύτην εὐκολώτεραι.

61. *Πᾶν ἐλλειπτικὸν ἢ ὑπερελλειπτικὸν ὁλοκλήρωμα*

$$(5) \qquad \int R(x, y)dx \qquad y^2 = \varphi(x)$$

ἀνάγεται εἰς πεπερασμένον τινὰ ἀριθμὸν ὁλοκληρωμάτων, ἅτινα εἶνε ἀληθῶς νέαι συναρτήσεις διάφοροι ἐκείνων, ἃς μέχρι τοῦδε ἐθεωρήσαμεν καὶ μὴ δυνάμεναι νὰ παραχθῶσιν ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ αὐτῶν.

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν, ὅτι, ἐπειδὴ αἱ ἄρτιαι δυνάμεις τοῦ y εἶνε ἀκέραιαι συναρτήσεις τοῦ x αἱ δὲ περιτταὶ ἀνάγονται εἰς τὴν πρώτην δύναμιν, πᾶσα ῥητὴ συνάρτησις τῶν x, y δύναται νὰ ἀχθῇ εἰς τὴν ἑξῆς μορφὴν

$$\frac{K + \Lambda y}{M + N y} \quad \text{ἢ εἰς τὴν} \quad P + \frac{Q}{y} \qquad (\text{παράβλ. ἐδ. } 54)$$

ἔνθα P καὶ Q εἶνε ῥηταὶ συναρτήσεις τοῦ x μόνου· ὥστε θὰ εἶνε

$$\int R(x, y)dx = \int P\, dx + \int \frac{Q}{y} dx \qquad (6)$$

καὶ τὸ μὲν ὁλοκλήρωμα $\int P dx$, ὡς ὁλοκλήρωμα ῥητῆς συναρτήσεως τοῦ x, ἐμάθομεν ἤδη πῶς εὑρίσκεται· ἔχομεν λοιπὸν νὰ ἀσχοληθῶμεν μόνον περὶ τὴν εὕρεσιν τοῦ ὁλοκληρώματος

$$\int \frac{Q}{y} dx \qquad (7)$$

Ἐπειδὴ ἡ ῥητὴ συνάρτησις Q δύναται ν' ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα ἀκεραίου τινὸς πολυωνύμου $\Pi(x)$ καί τινων κλασμάτων τῆς μορφῆς

$$\frac{f(x)}{(x-\alpha)^\lambda},$$

ἕπεται, ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα (7) θὰ σύγκειται ἐκ τοῦ ὁλοκληρώματος

$$\int \Pi(x) \frac{dx}{y} \qquad (8)$$

καὶ ἔκ τινων ὁλοκληρωμάτων τῆς μορφῆς

$$\int \frac{f(x)dx}{(x-\alpha)^{\nu}y} \tag{9}$$

Θεωρήσωμεν κατὰ πρῶτον τὰ ὁλοκληρώματα (8) τοῦ πρώτου τύπου.

Λέγω ὅτι ὁ βαθμὸς μ τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου $\Pi(x)$ δύναται νὰ ὑποβιβασθῇ μέχρι τοῦ $2p-1$ ($2p+1$ ὄντος τοῦ βαθμοῦ τοῦ ὑπορρίζου πολυωνύμου $\varphi(x)$). Διότι ἔστω

$$\mu = 2p+\lambda \qquad \lambda \gtrless 0$$

Ἐὰν ἀπὸ τῆς παραστάσεως

$$\frac{\Pi(x)}{\sqrt{\varphi(x)}} \text{ ἀφαιρέσωμεν τὴν παράγωγον τοῦ } Cx^{\lambda}.\sqrt{\varphi(x)},$$

εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον

$$\frac{\Pi(x)-C\left[\lambda x^{\lambda-1}\varphi(x)+\frac{1}{2}x^{\lambda}\varphi'(x)\right]}{\sqrt{\varphi(x)}}$$

ὁ ἀριθμητὴς τοῦ ὑπολοίπου τούτου εἶνε βαθμοῦ $2p+\lambda$ ἤτοι μ· δυνάμεθα δὲ νὰ ἐκλέξωμεν τὸν σταθερὸν ἀριθμὸν C οὕτως ὥστε ὁ συντελεστὴς τοῦ x^{μ} νὰ μηδενισθῇ ἐν αὐτῷ· ὅτε ὁ βαθμὸς αὐτοῦ θὰ γίνῃ κατώτερος τοῦ μ (πρὸς τοῦτο, ἂν εἶνε $\Pi(x)=Ax^{\mu}+\ldots$ καὶ $\varphi(x)=x^{2p+1}+\ldots$ λαμβάνομεν $A-C\left(\lambda+\frac{1}{2}(2p+1)\right)=0$).

Ἐξακολουθοῦντες τοιουτοτρόπως βλέπομεν, ὅτι, ἂν ἀπὸ τῆς παραστάσεως

$$\frac{\Pi(x)}{\sqrt{\varphi(x)}} \text{ ἀφαιρέσωμεν τὴν παράγωγον τοῦ } \sigma(x)\sqrt{\varphi(x)}$$

(ἔνθα $\sigma(x)$ εἶνε πολυώνυμόν τι βαθμοῦ λ), μένει ὑπόλοιπον $\frac{\Pi_1(x)}{\sqrt{\varphi(x)}}$, οὗτινος ὁ ἀριθμητὴς $\Pi_1(x)$ εἶνε βαθμοῦ τὸ πολὺ $2p-1$· ἑπομένως εἶνε

$$\int \frac{\Pi(x)}{\sqrt{\varphi(x)}}dx = \sigma(x)\sqrt{\varphi(x)} + \int \frac{\Pi_1(x)}{\sqrt{\varphi(x)}}dx \tag{10}$$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε $\Pi_1(x)=A_0+A_1x+\ldots+A_{2p-1}x^{2p-1}$, συνάγεται, ὅτι πάντα τὰ ὁλοκληρώματα (8) τοῦ πρώτου τύπου ἐκφράζονται διὰ τῶν $2p$ ὁλοκληρωμάτων

$$\int \frac{x^\nu dx}{\sqrt{\varphi(x)}} \qquad \nu=0, 1, 2, 3 \ldots (2p-1)$$

ἅτινα ἐν γένει εἶνε συναρτήσεις νέαι, διάφοροι ἀπ' ἀλλήλων καὶ ἀπὸ τῶν γνωστῶν ἡμῖν, ἑπομένως μὴ δυνάμεναι νὰ παραχθῶσι διὰ τοῦ συνδυασμοῦ αὐτῶν (ὑπὸ πεπερασμένην μορφήν).

Θεωρήσωμεν νῦν τὰ ὁλοκληρώματα (9) τοῦ δευτέρου τύπου.

Ἐνταῦθα διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθ' ὅσον ὁ ἀριθμὸς α εἶνε ῥίζα τοῦ ὑπορρίζου $\varphi(x)$ ἢ μή.

Ἐὰν α δὲν εἶνε ῥίζα τοῦ $\varphi(x)$, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τῆς παραστάσεως

$$\frac{\mathrm{f}(x)}{(x-\alpha)^\nu\sqrt{\varphi(x)}} \quad \text{τὴν παράγωγον τοῦ} \quad \frac{\mathrm{C}\sqrt{\varphi(x)}}{(x-\alpha)^{\nu-1}}$$

ὅτε εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον

$$\frac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{C}\left[(1-\nu)\varphi(x)+\frac{1}{2}(x-\alpha)\varphi'(x)\right]}{(x-\alpha)^\nu\sqrt{\varphi(x)}} \tag{υ}$$

ὁ ἀριθμητὴς τούτου θὰ διαιρῆται διὰ $x-\alpha$, ἐὰν ὁ σταθερὸς ἀριθμὸς C ἐπαληθεύῃ τὴν ἐξίσωσιν

$$\mathrm{f}(\alpha)-\mathrm{C}\,\varphi(\alpha)\,(1-\nu)=0$$

τότε τὸ ὑπόλοιπον (υ) θὰ εἶνε τῆς μορφῆς

$$\frac{\mathrm{F}(x)}{(x-\alpha)^{\nu-1}\sqrt{\varphi(x)}}$$

Ἐξακολουθοῦντες τοιουτοτρόπως βλέπομεν, ὅτι, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τῆς παραστάσεως

$$\frac{\mathrm{f}(x)}{(x-\alpha)^\nu\sqrt{\varphi(x)}}$$

τὴν παράγωγον τοῦ $\sqrt{\varphi(x)}\left[\frac{\mathrm{C}_1}{(x-\alpha)^{\nu-1}}+\frac{\mathrm{C}_2}{(x-\alpha)^{\nu-2}}+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ +\frac{\mathrm{C}_{\nu-1}}{x-\alpha}\right]$

ἔνθα C_1, C_2 . . . $\mathrm{C}_{\nu-1}$ ἔχουσιν ὡρισμένας τινὰς τιμάς, εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον

$$\frac{\mathrm{f}_1(x)}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}}$$

ἑπομένως θὰ εἶνε

$$(11) \qquad \int \frac{f(x)dx}{(x-\alpha)^{\nu}\sqrt{\varphi(x)}} = \sqrt{\varphi(x)}\frac{\sigma(x)}{(x-\alpha)^{\nu-1}} + \int \frac{f_1(x)dx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}}$$

καὶ ἐπειδὴ $f(x)$ εἶνε ἀκέραιον πολυώνυμον, τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ δευτέρου μέλους ἀνάγεται εἰς τὰ ὁλοκληρώματα τοῦ πρώτου τύπου καὶ εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}}. \qquad (12)$$

Ἐὰν ὁ α εἶνε ῥίζα τοῦ ὑπορρίζου $\varphi(x)$, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τῆς παραστάσεως

$$\frac{f(x)}{(x-\alpha)^{\nu}\sqrt{\varphi(x)}} \quad \text{τὴν παράγωγον τῆς} \quad \frac{C\sqrt{\varphi(x)}}{(x-\alpha)^{\nu}}$$

ὅτε εὑρίσκομεν τὸ ὑπόλοιπον

$$\frac{f(x)-C\left(\frac{1}{2}\varphi'(x)-\nu\varphi_1(x)\right)}{(x-\alpha)^{\nu}\sqrt{\varphi(x)}}, \qquad \varphi_1(x)=\frac{\varphi(x)}{x-\alpha}$$

οὗτινος ὁ ἀριθμητὴς θὰ εἶνε διαιρετὸς διὰ $x-\alpha$, ἐὰν ὁ σταθερὸς ἀριθμὸς C ἐπαληθεύῃ τὴν ἐξίσωσιν

$$f(\alpha)-C\varphi'(\alpha)\left(\frac{1}{2}-\nu\right)=0 \qquad (\varepsilon)$$

ἥτις ὁρίζει πάντοτε αὐτόν, διότι $\varphi'(\alpha)$ εἶνε διάφορον τοῦ 0· τότε δὲ τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶνε τῆς μορφῆς

$$\frac{F(x)}{(x-\alpha)^{\nu-1}\sqrt{\varphi(x)}}.$$

Ἡ ἀναγωγὴ αὕτη δύναται νὰ ἐξακολουθήσῃ, μέχρις οὗ ὁ ν γίνῃ 0· διότι καὶ ὅταν ἀκόμη εἶνε $\nu=1$, ἡ ἐξίσωσις (ε) ὁρίζει τὸν ἀριθμὸν C· ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι θὰ εἶνε κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην

$$\int \frac{f(x)}{(x-\alpha)^{\nu}\sqrt{\varphi(x)}}dx = \sqrt{\varphi(x)}\frac{\sigma(x)}{(x-\alpha)^{\nu}} + \int \frac{f_1(x)}{\sqrt{\varphi(x)}} \qquad (13)$$

ἀνάγεται δηλαδὴ τὸ ὁλοκλήρωμα τότε εἰς τὰ ὁλοκληρώματα τοῦ πρώτου τύπου.

62. Συνοψίζοντες τὰ προειρημένα, βλέπομεν, ὅτι τὰ ὁλοκληρώματα

$$\int \frac{Qdx}{\sqrt{\varphi(x)}} \tag{7}$$

ἔνθα Q παριστᾷ ῥητὴν συνάρτησιν τοῦ x, ἐκφράζονται διὰ τῶν ἀλγεβρικῶν συναρτήσεων, διὰ τῶν ὁλοκληρωμάτων ῥητῶν συναρτήσεων τοῦ x καὶ διὰ τῶν ὁλοκληρωμάτων

$$\int \frac{x^\nu dx}{\sqrt{\varphi(x)}} \qquad \nu=0,\ 1,\ 2\ \ldots\ (2p-1)$$

καὶ

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}} \qquad (\varphi(\alpha) \gtrless 0)$$

63. Διὰ τὰ ἐλλειπτικὰ ὁλοκληρώματα εἶνε $p=1$, διότι ὁ βαθμὸς τοῦ $\varphi(x)$ εἶνε τότε 3· ὥστε πάντα τὰ ἐλλειπτικὰ ὁλοκληρώματα ἀνάγονται εἰς τὰ ἑξῆς τρία

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}},\quad \int \frac{xdx}{\sqrt{\varphi(x)}} \quad \text{καὶ} \quad \int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}}.$$

Κανονικὴ μορφὴ τῆς τετρ. ῥίζης $\sqrt{\varphi(x)}$ ἐν τῷ ἐλλειπτικῷ ὁλοκληρώματι.

$$\int \frac{Qdx}{\sqrt{\varphi(x)}} \tag{14}$$

64. Τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)$, ὅπερ εἶνε τρίτου ἢ τετάρτου βαθμοῦ ἐν τῷ ἐλλειπτικῷ ὁλοκληρώματι (14) δύναται πάντοτε νὰ ἀχθῇ εἰς ἁπλῆν τινα μορφήν, ἥτις λέγεται *κανονική*.

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν, ὅτι, ἐὰν θέσωμεν

$$x=\frac{p+qt}{1+t}, \tag{15}$$

δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τοὺς σταθεροὺς συντελεστὰς p, q, οὕτως, ὥστε τὸ ὑπόρριζον νὰ μὴ ἔχῃ ὅρους περιττοῦ βαθμοῦ· μάλιστα, ἂν οἱ συντελεσταὶ τοῦ $\varphi(x)$ εἶνε πραγματικοί, καὶ αἱ τιμαὶ τῶν p, q θὰ εἶνε πραγματικαί.

Καὶ ὄντως μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν (15) θὰ τραπῇ τὸ $\varphi(x)$ (ὅπερ ὑποτίθεται $4^{ου}$ βαθμοῦ) εἰς πολυώνυμόν τι τοῦ t ἔστω τὸ $f(t)$ διῃρημένον διὰ τοῦ $(1+t)^4$· ἤτοι θὰ εἶνε, δυνάμει τῆς ἐξισώσεως (15)

$$\varphi(x)=\frac{f(t)}{(1+t)^4}$$

Ἔστωσαν α, β, γ, δ αἱ τέσσαρες ῥίζαι τοῦ $\varphi(x)$, αἵτινες θὰ εἶνε ἁπλαῖ (ἐδ. 59)· πρὸς ἑκάστην τούτων ἀντιστοιχεῖ μία ῥίζα τοῦ πολυωνύμου $f(t)$ ὁριζομένη ἐκ τῆς ἐξισώσεως (15), ἥτις δίδει

$$t=\frac{x-p}{q-x} \qquad (15')$$

ἵνα δὲ αἱ ῥίζαι τοῦ $f(t)$ εἶνε ἀντίθετοι ἀνὰ δύο (ὅτε τὸ $f(t)$ θὰ ἔχῃ ἀρτίας μόνον δυνάμεις τοῦ t), πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε

$$\frac{\alpha-p}{q-\alpha}+\frac{\beta-p}{q-\beta}=0$$

καὶ

$$\frac{\gamma-p}{q-\gamma}+\frac{\delta-p}{q-\delta}=0$$

ἐὰν δὲ εἰς ἕκαστον τῶν κλασμάτων τούτων προσθέσωμεν τὴν μονάδα 1, εὑρίσκομεν

$$\left.\begin{aligned}(q-p)\left\{\frac{1}{q-\alpha}+\frac{1}{q-\beta}\right\}&=2\\(q-p)\left\{\frac{1}{q-\gamma}+\frac{1}{q-\delta}\right\}&=2\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

ἐξ ὧν συνάγεται ἡ τὸ q ὁρίζουσα ἐξίσωσις

$$\frac{1}{q-\alpha}+\frac{1}{q-\beta}-\frac{1}{q-\gamma}-\frac{1}{q-\delta}=0 \qquad (17)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶνε τοῦ δευτέρου βαθμοῦ καὶ ἔχει πάντοτε πραγματικὰς τὰς ῥίζας αὐτῆς· διότι, ἂν μὲν αἱ ῥίζαι τοῦ $\varphi(x)$ εἶνε πᾶσαι πραγματικαί, οὐδὲν κωλύει νὰ ὑποθέσωμεν, ὅτι ἐν τῇ σειρᾷ α, β, γ, δ ἐλήφθησαν κατὰ τάξιν μεγέθους· τότε μεταξὺ α καὶ β ὑπάρχει μία ῥίζα τῆς ἐξισώσεως (17) διότι διὰ $q=\alpha+\varepsilon$ καὶ διὰ $q=\beta-\varepsilon$ (τοῦ ε ὄντος ἱκανῶς μικροῦ) τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς δίδει ἀντίθετα ἐξαγόμενα, ἐπίσης ὑπάρχει καὶ ἄλλη μεταξὺ γ καὶ δ.

Ἂν δὲ δύο ῥίζαι τοῦ πολυωνύμου $\varphi(x)$ εἶνε φανταστικαὶ συζυγεῖς, δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν τοιαύτας τὰς γ, δ· τότε ἡ ἐξίσωσις (17) ἔχει πάλιν μίαν ῥίζαν μεταξὺ α καὶ β· ἄρα καὶ ἡ ἄλλη θὰ εἶνε πραγματική.

Ἂν τέλος καὶ αἱ τέσσαρες ῥίζαι α, β, γ, δ εἶνε φανταστικαί, θὰ εἶνε συζυγεῖς ἀνὰ δύο (ἐὰν οἱ συντελεσταὶ τοῦ $\varphi(x)$ εἶνε πραγματικοὶ ἀριθμοὶ) ἔστωσαν δὲ α, β αἱ δύο συζυγεῖς καὶ γ, δ αἱ δύο ἕτεραι· τότε ἡ ἐξίσωσις (17) γράφεται ὡς ἑξῆς

$$\frac{2q-(\alpha+\beta)}{(q-\alpha)(q-\beta)}-\frac{2q-(\gamma+\delta)}{(q-\gamma)(q-\delta)}=0$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι οἱ συντελεσταὶ τοῦ q εἶνε πραγματικοὶ ἀριθμοί· διότι καὶ οἱ παρονομασταὶ εἶνε πραγματικοί, ὡς γινόμενα συζυγῶν μιγάδων, καὶ οἱ ἀριθμηταὶ ἐπίσης. Ἀλλ' ὅταν q εἶνε ἱκανῶς μέγας ἀριθμός, τὸ πρῶτον μέλος ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ

$$\alpha+\beta-(\gamma+\delta)$$

διὰ δὲ $q=\dfrac{\gamma+\delta}{2}$ γίνεται

$$\frac{\gamma+\delta-\alpha-\beta}{\left(\frac{\gamma+\delta}{2}-\alpha\right)\left(\frac{\gamma+\delta}{2}-\beta\right)}$$

ἐπειδὴ δὲ τῆς παραστάσεως ταύτης ὁ παρονομαστὴς εἶνε γινόμενον δύο μιγάδων συζυγῶν, ἕπεται, ὅτι ἔχει ἡ παράστασις σημεῖον ἀντίθετον τοῦ $\alpha+\beta-(\gamma+\delta)$, ἄρα ὑπάρχει μία ῥίζα πραγματικὴ τῆς ἐξισώσεως (17) μεγαλητέρα τοῦ $\dfrac{\gamma+\delta}{2}$· ἑπομένως ἀμφότεραι αἱ ῥίζαι αὐτῆς εἶνε πραγματικαί.

Εὑρεθέντος τοῦ q, εὑρίσκεται καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ p ἐκ τῆς ἑτέρας τῶν ἐξισώσεων (16).

65. Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι, *δοθέντος οἱουδήποτε πολυωνύμου* $\varphi(x)$ *τοῦ τετάρτου βαθμοῦ πρὸς* x, *δυνάμεθα πάντοτε νὰ εὕρωμεν δύο ἀριθμοὺς* p, q *τοιούτους, ὥστε, ἂν θέσωμεν*

$$x=\frac{p+qt}{1+t}$$

νὰ γίνῃ

$$\varphi(x)=\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}t^2+\Gamma t^4}{(1+t)^4} \qquad (18)$$

καὶ ἂν οἱ συντελεσταὶ τοῦ $\varphi(x)$ *εἶνε πραγματικοί, καὶ αἱ τιμαὶ τῶν* p, q *θὰ εἶνε πραγματικαί· ἑπομένως καὶ οἱ νέοι συντελεσταὶ* A, B, Γ *θὰ εἶνε ἐπίσης πραγματικοί.*

Καὶ αἱ τιμαὶ τοῦ t^2 *αἱ μηδενίζουσαι τὸ τριώνυμον* $A+Bt^2+\Gamma t^4$ *θὰ εἶνε ἐπίσης πραγματικαί·* διότι αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου τούτου εἶνε αἱ ἑξῆς

$$\frac{\alpha-p}{q-\alpha}, \quad -\frac{\alpha-p}{q-\alpha}, \quad \frac{\gamma-p}{q-\gamma}, \quad -\frac{\gamma-p}{q-\gamma}$$

ἑπομένως αἱ τιμαὶ τοῦ t^2 αἱ μηδενίζουσαι τὸ τριώνυμον $A+Bt^2+\Gamma t^4$ εἶνε αἱ ἑξῆς δύο

$$\left(\frac{\alpha-p}{q-\alpha}\right)^2 \text{ καὶ } \left(\frac{\gamma-p}{q-\gamma}\right)^2 \quad \text{ἢ} \quad -\left(\frac{\alpha-p}{q-\alpha}\right)\left(\frac{\beta-p}{q-\beta}\right) \text{ καὶ } -\left(\frac{\gamma-p}{q-\gamma}\right)\left(\frac{\delta-p}{q-\delta}\right)$$

εἶνε δὲ αὗται πραγματικαί, εἴτε πραγματικαὶ εἶνε αἱ α, β, γ, δ εἴτε μή· διότι, ἂν εἶνε φανταστικαί, θὰ εἶνε α καὶ β συζυγεῖς καὶ γ καὶ δ ἐπίσης συζυγεῖς· ἑκατέρα δὲ τῶν τιμῶν τούτων τοῦ t^2 θὰ εἶνε θετικὴ μέν, ἂν αἱ πρὸς αὐτὴν ἀντιστοιχοῦσαι δύο ῥίζαι εἶνε πραγματικαί, ἀρνητικὴ δέ, ἂν φανταστικαὶ συζυγεῖς.

Διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως ταύτης πᾶν ἐλλειπτικὸν ὁλοκλήρωμα

$$\int \frac{Q(x)}{\sqrt{\varphi(x)}}dx \quad \text{τρέπεται εἰς} \quad \int \frac{Q_1(t)dt}{\sqrt{A+Bt^2+\Gamma t^4}}$$

ἔνθα

$$Q_1(t)=(q-p)Q(x).$$

Σημείωσις α'. Ὑπεθέσαμεν ἐν τῇ ἀποδείξει περὶ τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως (17) ὅτι ἡ διαφορὰ $\alpha+\beta-(\gamma+\delta)$ δὲν εἶνε 0· ἂν τοῦτο συμβαίνῃ, τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)$ εἶνε

$$\varphi(x)=(x^2-\rho x+\alpha\beta)\,(x^2-\rho x+\gamma\delta) \qquad \rho=\alpha+\beta=\gamma+\delta$$

ἑπομένως διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως $x=t+\frac{\alpha+\beta}{2}=t+\frac{\rho}{2}$ γίνεται

$$\varphi(x)=\left(t^2+\alpha\beta-\frac{\rho^2}{4}\right)\left(t^2+\gamma\delta-\frac{\rho^2}{4}\right).$$

Σημείωσις β'. Ἐὰν τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)$ εἶνε τρίτου βαθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν $x=\alpha+t^2$, ἔνθα α εἶνε μία τῶν ῥιζῶν αὐτοῦ (ἡ πραγματική)· διότι τότε γίνεται

$$\varphi(x)=At^2+Bt^4+\Gamma t^6$$

καὶ

$$\sqrt{\varphi(x)}=t\sqrt{A+Bt^2+\Gamma t^4}.$$

66. Μετὰ τὴν ἐξάλειψιν τῶν περιττοβαθμίων ὅρων τοῦ ὑπορρίζου προβαίνομεν εἰς τὴν περαιτέρω ἁπλοποίησιν τοῦ ὁλοκληρώματος ὡς ἀκολούθως

Ἡ ῥητὴ συνάρτησις $Q_1(t)$ τοῦ t ἔστω πηλίκον τῶν ἀκεραίων συναρτήσεων M καὶ N· ἤτοι

$$Q_1(t)=\frac{M(t)}{N(t)}\cdot \text{ τότε καὶ } Q_1(t)=\frac{M(t).N(-t)}{N(t).N(-t)}$$

καὶ ὁ μὲν παρονομαστὴς ἔχει μόνον ἀρτίας δυνάμεις τοῦ t, ὁ δὲ ἀριθμητής, ἐὰν χωρισθῶσιν οἱ ἀρτιοβάθμιοι ὅροι αὐτοῦ ἀπὸ τῶν περιττοβαθμίων, γίνεται $M_1(t^2)+M_2(t^2).t$· ἐντεῦθεν ἕπεται

$$Q_1(t)=f(t^2)+t\, f_1(t^2)$$

ἔνθα f καὶ f_1 δηλοῦσι ῥητὰς συναρτήσεις τοῦ t^2, ὅθεν καὶ

$$\int\frac{Q_1(t)dt}{\sqrt{A+Bt^2+\Gamma t^4}}=\int\frac{f(t^2)dt}{\sqrt{A+Bt^2+\Gamma t^4}}+\int\frac{f_1(t^2)tdt}{\sqrt{A+Bt^2+\Gamma t^4}}$$

ἀλλὰ τὸ δεύτερον ὁλοκλήρωμα τοῦ δεξιοῦ μέλους ἀνάγεται εἰς τὰ ἤδη γνωστά, ἐὰν τεθῇ $t^2=u$, διότι τότε γίνεται

$$\frac{1}{2}\int\frac{f_1(u)du}{\sqrt{A+Bu+\Gamma u^2}}$$

ὥστε ἔχομεν νὰ ἀσχοληθῶμεν μόνον περὶ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int\frac{f(t^2)dt}{\sqrt{A+Bt^2+\Gamma t^4}}. \qquad (19)$$

67. Ἐν τοῖς ἑξῆς ὑποθέτομεν τοὺς συντελεστὰς τοῦ δοθέντος πολυωνύμου $\varphi(x)$ πραγματικοὺς ἀριθμούς· ἐπομένως αἱ τιμαὶ τοῦ t^2 αἱ μηδενίζουσαι τὸ τριώνυμον $A+Bt^2+\Gamma t^4$ θὰ εἶνε πραγματικαὶ καὶ διὰ τοῦτο λαμβάνει τὸ εἰρημένον τριώνυμον μίαν τῶν ἑπομένων μορφῶν

$$\Gamma(t^2-\alpha^2)\,(t^2-\beta^2)$$
$$\Gamma(t^2-\alpha^2)\,(t^2+\beta^2)$$
$$\Gamma(t^2+\alpha^2)\,(t^2+\beta^2)$$

ἔνθα α καὶ β εἶνε πραγματικοὶ ἀριθμοί.

Περίπτωσις 1^{η}.

Κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν δυνάμεθα νὰ δεχθῶμεν $\alpha^2<\beta^2$, ἐὰν τότε εἶνε $\Gamma>0$, θέτομεν $t=\alpha u$ ὅτε προκύπτει

$$\frac{dt}{\sqrt{\Gamma(t^2-\alpha^2)(t^2-\beta^2)}}=\frac{1}{\beta\sqrt{\Gamma}}\cdot\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

$$k^2=\frac{\alpha^2}{\beta^2}<1.$$

Ἐὰν δὲ εἶνε $\Gamma<0$, θέτομεν

$$t^2=\beta^2+(\alpha^2-\beta^2)u^2$$

ὅτε προκύπτει

$$\frac{dt}{\sqrt{\Gamma(t^2-\alpha^2)(t^2-\beta^2)}}=-\frac{1}{\beta\sqrt{-\Gamma}}\cdot\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

ἔνθα $$k^2=1-\frac{\alpha^2}{\beta^2}<1.$$

Περίπτωσις 2^{α}.

Κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν, ἐὰν εἶνε $\Gamma>0$, θέτομεν

$$t^2=\frac{\alpha^2}{1-u^2}$$

ὅτε προκύπτει

$$\frac{dt}{\sqrt{\Gamma(t^2-\alpha^2)(t^2+\beta^2)}}=\frac{k}{\beta\sqrt{\Gamma}}\cdot\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

ἔνθα $$k^2=\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}<1.$$

Ἐὰν δὲ εἶνε $\Gamma<0$, θέτομεν

$$t^2=\alpha^2(1-u^2)$$

ὅτε εὑρίσκομεν

$$\frac{dt}{\sqrt{\Gamma(t^2-\alpha^2)(t^2+\beta^2)}}=-\frac{k}{\alpha\sqrt{-\Gamma}}\cdot\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

ἔνθα $$k^2=\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}<1.$$

Περίπτωσις 3η.

Κατὰ τὴν τρίτην τέλος περίπτωσιν ὁ συντελεστὴς Γ πρέπει νὰ εἶνε θετικὸς (ἄλλως τὸ ὑπόρριζον θὰ διαμένῃ πάντοτε ἀρνητικόν, ἐπομένως τὸ ὁλοκλήρωμα θὰ εἶνε φανταστικόν· τότε δὲ ἐξάγομεν τὸν παράγοντα i ἐκτὸς τοῦ ῥιζικοῦ καὶ ἔχομεν συντελεστὴν τὸν θετικὸν ἀριθμὸν $-\Gamma$)· ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ $\alpha<\beta$, θέτομεν

$$t^2=\alpha^2\frac{u^2}{1-u^2}$$

ὅτε προκύπτει

$$\frac{dt}{\sqrt{\Gamma(t^2+\alpha^2)(t^2+\beta^2)}}=\frac{1}{\beta\sqrt{\Gamma}}\,\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

ἔνθα

$$k^2=1-\frac{\alpha^2}{\beta^2}<1.$$

68. Ἐκ τῶν προηγουμένων πάντων συνάγεται, ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int\frac{\mathrm{f}(t^2)dt}{\sqrt{\mathrm{A}+\mathrm{B}t^2+\Gamma t^4}} \tag{19}$$

(ἐὰν αἱ τιμαὶ τοῦ t^2 αἱ μηδενίζουσαι τὸ τριώνυμον εἶνε πραγματικαὶ) δύναται πάντοτε νὰ ἀχθῇ εἰς τὸ ἑξῆς

$$\int\frac{\mathrm{f}_1(u^2)du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}\qquad k^2<1 \tag{20}$$

εἶνε δὲ τὰ τετράγωνα u^2 καὶ t^2 ῥηταὶ συναρτήσεις ἀλλήλων.

Ἡ μορφὴ $\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}$ λέγεται *κανονικὴ μορφὴ* τῆς ῥίζης $\sqrt{\varphi(x)}$.

69. Ἐὰν εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα (20) θέσωμεν

$$u^2=v,$$

προκύπτει

$$\int\frac{\mathrm{f}_1(u^2)du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{f}_1(v)dv}{\sqrt{v(1-v)(1-k^2v)}}$$

ἤτοι γίνεται τὸ ὑπόρριζον τρίτου βαθμοῦ· ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὰ ἐν τῷ ἐδαφίῳ (63) εἰρημένα πᾶν ἐλλειπτικὸν ὁλοκλήρωμα ἀνάγεται εἰς τὰ ἑξῆς τρία

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v(1-v)(1-k^2v)}},\int \frac{vdv}{\sqrt{v(1-v)(1-k^2v)}},\int \frac{dv}{(v-\alpha)\sqrt{v(1-v)(1-k^2v)}}$$

ἕπεται, ἂν τεθῇ πάλιν $v=u^2$, ὅτι πᾶν ἐλλειπτικὸν ὁλοκλήρωμα ἀνάγεται καὶ εἰς τὰ ἑξῆς

$$\int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},\quad \int \frac{u^2du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

$$\int \frac{du}{(u-\rho)\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

(Εἰς τὸ τρίτον ὁλοκλήρωμα ἀνελύθη ὁ παράγων $\frac{1}{u^2-\alpha}$ εἰς ἁπλᾶ κλάσματα).

Τὰ τρία ταῦτα ὁλοκληρώματα λέγονται κυρίως ἐλλειπτικὰ ὁλοκληρώματα.

Γ'.

Ἀβελιανὰ ὁλοκληρώματα.

70. Πᾶν ὁλοκλήρωμα

$$\int R(x, y)dx \qquad (1)$$

ἔνθα y εἶνε ἀλγεβρικὴ συνάρτησις τοῦ x καὶ $R(x, y)$ ῥητὴ συνάρτησις τῶν x, y, λέγεται *Ἀβελιανὸν ὁλοκλήρωμα.*

Κυρίως ἀβελιανὰ ὁλοκληρώματα λέγονται τὰ ὁλοκληρώματα τῆς μορφῆς (1) ὅσα δὲν δύνανται νὰ ἐκφρασθῶσι διὰ τῶν ἀλγεβρικῶν καὶ τῶν λογαριθμικῶν συναρτήσεων μηδὲ νὰ ἀναχθῶσιν εἰς τὰ ἐλλειπτικὰ καὶ τὰ ὑπερελλειπτικὰ ὁλοκληρώματα (ἅτινα πάντα θεωροῦνται ὡς μερικαὶ περιπτώσεις τῶν ἀβελιανῶν ὁλοκληρωμάτων).

71. Ἐὰν ἡ ἀλγεβρικὴ ἐξίσωσις

$$\varphi(x, y)=0 \qquad (2)$$

ἐξ ἧς ὁρίζεται ἡ συνάρτησις y, ἀνάγωγος οὖσα, εἶνε τοῦ βαθμοῦ μ, πᾶσα ῥητὴ συνάρτησις $R(x, y)$ δύναται νὰ ἀχθῇ εἰς τὴν μορφὴν

$$R(x, y)=A+A_1y+A_2y^2+\ \ldots\ A_{\mu-1}\,y^{\mu-1}$$

ἔνθα A, A_1 . . . $A_{\mu-1}$ εἶνε ῥηταὶ συναρτήσεις τοῦ x.

Διότι ἡ ῥητὴ συνάρτησις $R(x, y)$ τῶν x, y εἶνε πηλίκον δύο ἀκεραίων συναρτήσεων τῶν αὐτῶν μεταβλητῶν x, y· ἐν ἑκάστῃ δὲ τούτων δυνάμεθα διὰ τῆς ἐξισώσεως (2) νὰ ἀπαλείψωμεν τὰς δυνάμεις τοῦ y τὰς ἀνωτέρας τῆς $y^{\mu-1}$· διότι ἡ ἐξίσωσις αὕτη δίδει τὴν τιμὴν τῆς δυνάμεως y^{μ} ἐκπεφρασμένην διὰ τῶν κατωτέρων δυνάμεων τοῦ y καὶ διὰ τῆς x· ἐὰν δὲ πολλαπλασιασθῇ ἡ ἐξίσωσις ἐπὶ y, δίδει καὶ τὴν τιμὴν τῆς δυνάμεως $y^{\mu+1}$ διὰ τῶν αὐτῶν στοιχείων ἐκπεφρασμένην, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ὥστε πᾶσα ῥητὴ συνάρτησις $R(x, y)$ ἄγεται εἰς τὴν μορφὴν

$$R(x, y)=\frac{M}{N}$$

ἔνθα M καὶ N εἶνε πολυώνυμα ἀκέραια τῶν x, y καὶ βαθμοῦ πρὸς y οὐχὶ ἀνωτέρου τοῦ $\mu-1$.

Τούτου τεθέντος, αἱ δύο ἐξισώσεις

$$\varphi(x, y)=0 \quad \text{καὶ} \quad \mathrm{N}=0$$

ἐν αἷς ἄγνωστος θεωρεῖται ἡ y, δὲν δύνανται νὰ ἔχωσι κοινὴν λύσιν διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς x (ἀλλὰ μόνον διά τινας τιμὰς αὐτῆς)· διότι, ἂν ὑπῆρχον κοιναὶ λύσεις αὐτῶν διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς x, θὰ εἶχον ἀμφότερα τὰ πολυώνυμα $\varphi(x, y)$ καὶ N μέγιστον κοινὸν διαιρέτην πολυώνυμόν τι τοῦ y

$$\Delta+\Delta_1 y+\Delta_2 y^2+\ \ldots\ +\Delta_\lambda y^\lambda \qquad \lambda<\mu$$

ἀλλὰ τότε ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x, y)=0$ δὲν θὰ ἦτο ἀνάγωγος· ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει· ἐπομένως τὰ δύο πολυώνυμα $\varphi(x, y)$ καὶ N τοῦ y οὐδεμίαν δύνανται νὰ ἔχωσι κοινὴν ῥίζαν, ὅταν x μένῃ ἀόριστον.

Ἀλλ' ὅταν δύο πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς y, μηδεμίαν ἔχωσι κοινὴν ῥίζαν, ὡς τὰ $\varphi(x, y)$ καὶ N, ὑπάρχουσι δύο πολυώνυμα τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς, $p(x, y)$ καὶ $q(x, y)$, τοιαῦτα ὥστε εἰς τὸ ἄθροισμα

$$\varphi(x, y).p(x, y)+\mathrm{N}.q(x, y)$$

ἡ μεταβλητὴ αὕτη ἀπαλείφεται. (Εἰσαγωγῆς εἰς τὴν ἀνωτέραν ἄλγεβραν σελ. 152)· ἐπομένως τὸ ἄθροισμα τοῦτο δὲν δύναται ἐνταῦθα νὰ περιέχῃ ἢ μόνον τὴν μεταβλητὴν x, ἤτοι θὰ εἶνε

$$\varphi(x, y)\,.\,p(x, y)+\mathrm{N}\,.\,q(x, y)=\sigma(x).$$

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν ταὐτότητα ταύτην, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὴν ῥητὴν συνάρτησιν $\mathrm{R}(x, y)$ ὡς ἑξῆς

$$\mathrm{R}(x, y)=\frac{\mathrm{M}\,.\,q(x, y)}{\sigma(x)-\varphi(x, y)\,p(x, y)}.$$

καὶ ἐπειδὴ ἐν τῇ ῥητῇ ταύτῃ συναρτήσει αἱ δύο μεταβληταὶ νοοῦνται συνδεδεμέναι διὰ τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x, y)=0$, ἕπεται, ὅτι θὰ εἶνε

$$\mathrm{R}(x, y)=\frac{\mathrm{M}.q(x, y)}{\sigma(x)}.$$

καὶ ἂν εἰς τὸν ἀριθμητὴν (ὅστις εἶνε ἀκεραία συνάρτησις τοῦ y) ἀπαλείψωμεν (ὡς προηγουμένως) τὰς δυνάμεις τοῦ y τὰς ἀνωτέρας τῆς $y^{\mu-1}$, θὰ ἔχωμεν

$$\mathrm{R}(x, y)=\mathrm{A}+\mathrm{A}_1 y+\ \ldots\ +\mathrm{A}_{\mu-1} y^{\mu-1} \tag{3}$$

τῶν $\mathrm{A}, \mathrm{A}_1 \ldots \mathrm{A}_{\mu-1}$ δηλούντων ῥητὰς συναρτήσεις τῆς x.

72. Πᾶσα ῥητὴ συνάρτησις $\mathrm{R}(x, y)$ τοῦ x καὶ τῆς ἀλγεβρικῆς συναρτήσεως αὐτοῦ y εἶνε ἐπίσης ἀλγεβρικὴ συνάρτησις τοῦ x· διότι παριστῶντες αὐτὴν διὰ z, ἤτοι θέτοντες $z=\mathrm{R}(x, y)$, δυνάμεθα νὰ ἀπαλείψωμεν τὴν μεταβλητὴν y μεταξὺ τῆς ἐξισώσεως ταύτης καὶ τῆς $\varphi(x, y)=0$, ὅτε προκύπτει ἄλλη ἀλγεβρικὴ ἐξίσωσις $\mathrm{f}(x, z)=0$, ἥτις ὁρίζει τὴν z ὡς ἀλγεβρικὴν συνάρτησιν τῆς x· ἐπειδὴ ὅμως τὰ ὁλοκληρώματα τῶν ῥητῶν συναρτήσεων τῆς x καὶ τῆς αὐτῆς ἀλγεβρικῆς συναρτήσεως y συνδέονται πρὸς ἄλληλα καὶ ἡ εὕρεσις πάντων ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τινῶν ἐξ αὐτῶν, διὰ τοῦτο θεωροῦμεν τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \mathrm{R}(x, y)dx.$$

73. *Ἐὰν τὸ ὁλοκλήρωμα*

$$\int \mathrm{R}(x, y)dx \tag{1}$$

εἶνε ἀλγεβρικὴ συνάρτησις τῆς x, θὰ εἶνε ῥητὴ συνάρτησις τῶν x καὶ y.

Διότι, ἔστω τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο (ὅπερ συντομίας χάριν παριστῶ διὰ τοῦ N) ἀλγεβρικὴ συνάρτησις τῆς x· ἤτοι ἂς ἐπαληθεύῃ τὴν ἐξίσωσιν

$$\mathrm{N}^\rho + \mathrm{A}_1\mathrm{N}^{\rho-1} + \mathrm{A}_2\mathrm{N}^{\rho-2} + \ . \ . \ . \ + \mathrm{A}_\rho = 0$$

ἐν ᾗ τὰ A_1, A_2 . . . A_ρ εἶνε ῥηταὶ συναρτήσεις τῆς x ἢ καὶ ἀμφοτέρων τῶν x καὶ y· (διότι καὶ τότε, ἀπαλειφομένου τοῦ y μεταξὺ τῆς ἐξισώσεως ταύτης καὶ τῆς (2), προκύπτει ἀλγεβρικὴ ἐξίσωσις μεταξὺ N καὶ x)· ἐὰν διαφορίσωμεν αὐτὴν πρὸς x, θὰ ἔχωμεν

$$\mathrm{N}^{\rho-1}\left[\rho\mathrm{R}(x,y) + \frac{d\mathrm{A}_1}{dx}\right] + \ldots = 0$$

καὶ ἐν τῇ ἐξισώσει ταύτῃ οἱ συντελεσταὶ τῶν δυνάμεων τοῦ N εἶνε ῥηταὶ συναρτήσεις τῶν x καὶ y· διότι ἡ παράγωγος $\dfrac{dy}{dx}$ εἶνε ῥητὴ συνάρτησις τῶν x, y· καὶ ἂν μὲν ὁ συντελεστὴς τῆς ἀνωτάτης δυνάμεως τοῦ N εἶνε 0 διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς x καὶ τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τῆς y, ἤτοι ἂν εἶνε

$$\rho\mathrm{R}(x, y) + \frac{d\mathrm{A}_1}{dx} = 0,$$

θὰ εἶνε $$\rho\int \mathrm{R}(x, y)dx = \mathrm{C} - \mathrm{A}_1$$

ἤτοι θὰ εἶνε τὸ ὁλοκλήρωμα N ῥητὴ συνάρτησις τῶν x καὶ y· ἂν δὲ πάλιν ὁ ῥηθεὶς συντελεστὴς δὲν εἶνε 0, διαιροῦντες δι' αὐτοῦ θὰ ἔχωμεν νέαν ἐξίσωσιν

$$\mathrm{N}^{\rho-1} + \mathrm{B}_1\mathrm{N}^{\rho-2} + \ldots + \mathrm{B}_{\rho-1} = 0$$

ἣν ἐπίσης ὀφείλει νὰ πληροῖ τὸ ὁλοκλήρωμα N· ἐὰν δὲ καὶ ταύτην διαφορίσωμεν πρὸς x καὶ σκεφθῶμεν ὁμοίως, εὑρίσκομεν, ὅτι, ἢ εἶνε τὸ ὁλοκλήρωμα N ῥητὴ συνάρτησις τῶν x, y, ἢ ἐπαληθεύει καὶ ἄλλην ἐξίσωσιν βαθμοῦ $\rho - 2$· ἐξακολουθοῦντες δὲ τοιουτοτρόπως θὰ φθάσωμεν ἐπὶ τέλους εἰς ἐξίσωσιν πρωτοβάθμιον πρὸς N, ἣν τοῦτο ὀφείλει νὰ πληροῖ· ἄρα εἶνε τοῦτο πάντοτε ῥητὴ συνάρτησις τῶν x καὶ y.

Καὶ ἐπειδὴ πᾶσα ῥητὴ συνάρτησις τῶν x, y εἶνε τῆς μορφῆς

$$\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 y + \mathrm{A}_2 y^2 + \ldots + \mathrm{A}_{\mu-1} y^{\mu-1},$$

ἕπεται, ὅτι (ἂν τὸ ὁλοκλήρωμα εἶνε ἀλγεβρικὸν) θὰ εἶνε

$$\int \mathrm{R}(x, y)dx = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 y + \mathrm{A}_2 y^2 + \ldots + \mathrm{A}_{\mu-1} y^{\mu-1} \qquad (4)$$

τῶν A δηλούντων ῥητὰς συναρτήσεις τοῦ x.

Ἐκ τῆς προτάσεως ταύτης ἕπεται, ὅτι πᾶσα ἀλγεβρικὴ συνάρτησις εἶνε ῥητὴ συνάρτησις τῆς παραγώγου αὐτῆς καὶ τῆς x· ὡς καὶ ἡ παράγωγος πάσης ἀλγεβρικῆς συναρτήσεως εἶνε ῥητὴ συνάρτησις αὐτῆς καὶ τῆς x.

74. *Καὶ ὅταν τὸ ὁλοκλήρωμα (1) εἶνε λογάριθμος ἀλγεβρικῆς συναρτήσεως τοῦ x, ἡ συνάρτησις, ἧς λαμβάνεται ὁ λογάριθμος, εἶνε ῥητὴ συνάρτησις τῶν x, y.*

Διότι ἔστω

$$\int \mathrm{R}(x, y)dx = lz$$

καὶ $$z^{\rho} + \mathrm{A}_1 z^{\rho-1} + \mathrm{A}_2 z^{\rho-2} + \ldots + \mathrm{A}_{\rho} = 0$$

τῶν A δηλούντων ῥητὰς συναρτήσεις τοῦ x, ἢ καὶ ἀμφοτέρων τῶν x καὶ y· ἐὰν διαφορίσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, εὑρίσκομεν

$$\rho z^{\rho}\mathrm{R} + \left(\frac{d\mathrm{A}_1}{dx} + (\rho-1)\mathrm{A}_1\mathrm{R}\right)z^{\rho-1} + \ldots = 0.$$

Συνδυάζοντες δὲ τὴν ἐξίσωσιν ταύτην καὶ τὴν δοθεῖσαν, εὑρίσκομεν διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς τοῦ z^ρ νέαν ἐξίσωσιν βαθμοῦ $\rho-1$, ἣν ὀφείλει ὡσαύτως νὰ πληροῖ τὸ z, ἐκτὸς ἂν εἶνε ἐκ ταὐτότητος

$$\frac{dA_1}{dx}+(\rho-1)A_1R=\rho A_1R$$

ἤτοι

$$\frac{dA_1}{dx}=A_1R$$

ἀλλὰ τότε θὰ εἶνε καὶ

$$\int R dx=lA_1$$

ἤτοι τὸ ὁλοκλήρωμα θὰ εἶνε λογάριθμος ῥητῆς συναρτήσεως τῶν x, y.

Ἐὰν δὲ καὶ τὴν νέαν ταύτην ἐξίσωσιν τοῦ βαθμοῦ $\rho-1$ διαφορίσωμεν, φθάνομεν ὁμοίως εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι, ἢ τὸ z εἶνε λογάριθμος ῥητῆς συναρτήσεως τῶν x, y, ἢ ἐπαληθεύει καὶ ἐξίσωσιν ἄλλην βαθμοῦ $\rho-2$· καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν, ὅτε συμπεραίνομεν, ὅτι τὸ z θὰ εἶνε πάντοτε ῥητὴ συνάρτησις τῶν x, y.

Περὶ τῶν ὁλοκληρωμάτων

$$\int Q\sqrt[m]{\varphi(x)}dx \qquad \text{ἢ} \qquad \int\frac{Qdx}{\sqrt[m]{\varphi(x)}}.$$

75. *Ἐὰν τὸ ὁλοκλήρωμα*

$$\int Q\sqrt[m]{\varphi(x)}dx$$

ἔνθα Q *καὶ* $\varphi(x)$ *εἶνε ῥηταὶ συναρτήσεις τῆς* x, *εἶνε ἀλγεβρικόν, θὰ εἶνε*

$$\int Q\sqrt[m]{\varphi(x)}dx=Q_1\sqrt[m]{\varphi(x)} \qquad (5)$$

τοῦ Q_1 δηλοῦντος ἐπίσης ῥητήν τινα συνάρτησιν τοῦ x (ὑποτίθεται ὅτι ἡ ῥίζα $\sqrt[m]{\varphi(x)}$ εἶνε ἀνάγωγος, ἤτοι ὅτι ἡ ἐξίσωσις $y^m=\varphi(x)$ εἶνε ἀνάγωγος).

Διότι κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδ. 73 θὰ εἶνε, ἂν τεθῇ $y^m = \varphi(x)$

$$\int Q.y dx = Q_0 + Q_1 y + Q_2 y^2 + \ldots + Q_{m-1} y^{m-1}. \qquad (\alpha)$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης προκύπτει διὰ τῆς διαφορίσεως ἡ ἑξῆς

$$Qy = Q'_0 + Q'_1 y + \ldots + Q'_{m-1} y^{m-1} +$$

$$+ \frac{1}{m}\left(Q_1 y + 2Q_2 y^2 + \ldots + (m-1)Q_{m-1} y^{m-1}\right)\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}.$$

ἥτις πρέπει νὰ εἶνε ταὐτότης, ἤτοι νὰ ἐπαληθεύηται διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς x καὶ διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς y· διότι ἡ συνάρτησις y δὲν δύναται νὰ ἐπαληθεύῃ (ὅταν x εἶνε οἱονδήποτε) ἐξίσωσιν κατωτέρου βαθμοῦ· ἑπομένως οἱ συντελεσταὶ τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ y εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη πρέπει νὰ εἶνε ἴσοι

ἤτοι $$Q'_0 = 0$$

καὶ $$Q'_\nu + \frac{\nu}{m} Q_\nu \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = 0, \qquad \nu = 2,\ 3 \ldots (m-1)$$

ἢ ἂν $$Q_\nu \gtrless 0$$

$$\frac{Q'_\nu}{Q_\nu}\,\frac{m}{\nu} + \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = 0$$

ὅθεν $$\frac{m}{\nu} l Q_\nu + l\varphi(x) = lC$$

ἤτοι $$\varphi(x) = C\, Q_\nu^{-\frac{m}{\nu}}$$

καὶ $$\sqrt[m]{\varphi(x)} = C_1 \sqrt[\nu]{Q_\nu^{-1}}$$

θὰ ἦτο λοιπὸν ἡ ῥίζα $\sqrt[m]{\varphi(x)}$ ῥίζα κατωτέρου βαθμοῦ ἄλλης ῥητῆς συναρτήσεως τοῦ x ἀλλὰ τοῦτο εἶνε ἀδύνατον· ἄρα θα εἶνε

$$Q_\nu = 0 \qquad \nu = 2,\ 3 \ldots (m-1)$$

καὶ ἑπομένως ἡ ἰσότης (α) γίνεται

$$\int Q \sqrt[m]{\varphi(x)}\, dx = Q_1 \sqrt[m]{\varphi(x)}.$$

Ὁμοίως δεικνύεται, ὅτι εἶνε (ἂν τὸ ὁλοκλήρωμα εἶνε ἀλγεβρικὸν)

$$\int \frac{Q dx}{\sqrt[m]{\varphi(x)}} = \frac{Q_1}{\sqrt[m]{\varphi(x)}}$$

Σημείωσις. Τὴν ὑπόρριζον συνάρτησιν δυνάμεθα πάντοτε νὰ καταστήσωμεν ἀκεραίαν· διότι, ἂν εἶνε $\varphi(x) = \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}$, θὰ εἶνε

$$\sqrt[m]{\varphi} = \frac{\sqrt[m]{\varphi_2 \varphi_1^{m-1}}}{\varphi_1} \qquad \text{ἢ} = \frac{\varphi_2(x)}{\sqrt[m]{\varphi_2^{m-1} \varphi_1}}$$

Σημείωσις. Ἐὰν ἡ ὑπόρριζος συνάρτησις $\varphi(x)$ εἶνε ἀκεραία, δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν, ὅτι δὲν ἔχει πολλαπλᾶς ῥίζας, ὧν ὁ βαθμὸς πολλαπλότητος εἶνε ἴσος ἢ μεγαλήτερος τοῦ m· διότι, ἂν εἶνε

$$\varphi(x) = (x-\alpha)^{\lambda} . \varphi_1(x) \quad \text{καὶ} \quad \lambda = m\rho + \lambda_1, \qquad \lambda_1 < m$$

θὰ εἶνε
$$\sqrt[m]{\varphi(x)} = (x-\alpha)^{\rho} \sqrt[m]{(x-\alpha)^{\lambda_1} \varphi_1(x)}.$$

76. Ἐὰν τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \frac{M}{N} \frac{dx}{\sqrt[m]{\varphi(x)}} \tag{θ}$$

εἶνε ἀλγεβρικόν, τῶν M, N, $\varphi(x)$ δηλούντων ἀκεραίας συναρτήσεις τοῦ x, κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα θὰ εἶνε τῆς μορφῆς

$$\int \frac{M}{N} \frac{dx}{\sqrt[m]{\varphi(x)}} = \frac{M_1}{N_1} \frac{1}{\sqrt[m]{\varphi(x)}} \tag{6}$$

ἔνθα M_1 καὶ N_1 εἶνε ἐπίσης ἀκέραιαι συναρτήσεις τῆς x (περὶ ὧν δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν, ὅτι δὲν ἔχουσι κοινὴν ῥίζαν, ὡς οὐδὲ αἱ M καὶ N)· λέγω δὲ *ὅτι τὸ N_1 θὰ εἶνε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ N καὶ τῆς παραγώγου αὐτοῦ N' καὶ ὅτι, ἂν ὁ παρονομαστὴς N ἔχῃ ἁπλᾶς ῥίζας, αὗται θὰ εἶνε ῥίζαι καὶ τοῦ* $\varphi(x)$

Διότι ἐκ τῆς ἰσότητος (6) συνάγεται ἡ ἑξῆς

$$\frac{M}{N} = \left(\frac{M_1}{N_1}\right)' - \frac{1}{m} \frac{M_1}{N_1} \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \tag{7}$$

ἐπειδὴ δὲ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης εἶνε ῥηταὶ συναρτήσεις τῆς x, δύνανται νὰ ἀναπτυχθῶσι κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ $x-\alpha$ (τοῦ α ὄντος ἀριθμοῦ οἱουδήποτε) καὶ τὰ ἀναπτύγματα ἀμφοτέρων θὰ εἶνε τὰ αὐτά· ἀλλ' ἐὰν ὁ α εἶνε μία τῶν ῥιζῶν τοῦ N_1, ἤτοι ἂν εἶνε

$$N_1=(x-\alpha)^\rho N_2$$

θὰ εἶνε

$$\frac{M_1}{N_1}=\frac{A}{(x-\alpha)^\rho}+\frac{A'}{(x-\alpha)^{\rho-1}}+\ .\ .\ . \qquad \text{ἔνθα } A \gtrless 0$$

ὅθεν

$$\left(\frac{M_1}{N_1}\right)'=-\frac{\rho A}{(x-\alpha)^{\rho+1}}+\ .\ .\ .$$

ὁ ἀριθμὸς α δύναται νὰ εἶνε ῥίζα καὶ τοῦ $\varphi(x)$ (ἀλλὰ βαθμὸν πολλαπλότητος σ θὰ ἔχῃ μικρότερον τοῦ m)· ἔστω

$$\varphi(x)=(x-\alpha)^\sigma\varphi_1(x)$$

(ἔνθα σ θὰ εἶνε 0, ἂν τὸ $\varphi(x)$ δὲν ἔχῃ τὴν ῥίζαν α)· τότε θὰ εἶνε

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=\frac{\sigma}{x-\alpha}+\frac{\varphi'_1(x)}{\varphi_1(x)}$$

ἐπομένως τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος (7) ἄρχεται ἀπὸ τοῦ ὅρου

$$\frac{-A\left(\rho+\frac{\sigma}{m}\right)}{(x-\alpha)^{\rho+1}}$$

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι τὸ πολυώνυμον N θὰ ἔχῃ τὸν παράγοντα $(x-\alpha)^{\rho+1}$· ἐπομένως πᾶσα ῥίζα τοῦ N_1 εἶνε ῥίζα καὶ τοῦ N, ἔχει δὲ ἐν τῷ N βαθμὸν πολλαπλότητος κατὰ μονάδα μεγαλήτερον· καὶ πᾶσα πολλαπλῆ ῥίζα τοῦ N εἶνε ῥίζα καὶ τοῦ N_1 ἔχει δὲ βαθμὸν πολλαπλότητος κατὰ μονάδα μικρότερον· πᾶσα δὲ ἁπλῆ ῥίζα τοῦ N δὲν εἶνε ῥίζα τοῦ N_1 ἀλλ' εἶνε ῥίζα τοῦ $\varphi(x)$· διότι ὁ α τότε μόνον εἶνε ἁπλῆ ῥίζα τοῦ N, ὅταν εἶνε $\rho=0$ καὶ $\sigma\gtrless 0$, ἤτοι ἡ ἁπλῆ ῥίζα α πρέπει τότε νὰ εἶνε ῥίζα τοῦ ὑπορρίζου πολυωνύμου $\varphi(x)$.

Ἐὰν ἄρα ἀναλυθῇ ὁ παρονομαστὴς N εἰς τὸ γινόμενον

$$X_1.X_2^2.X_3^3\ .\ .\ .=N$$

(ἔνθα ἕκαστον τῶν X_1, X_2 . . . ἔχει μόνον ἁπλᾶς ῥίζας) θὰ εἶνε

$$N_1 = X_2 . X_3^2 \ldots$$

τὸ δὲ X_1 θὰ εἶνε διαιρέτης τοῦ $\varphi(x)$.

Ὥστε καθ' ἣν περίπτωσιν τὸ ὁλοκλήρωμα (θ) εἶνε ἀλγεβρικὸν τὸ μόνον, ὅπερ πρέπει νὰ προσδιορισθῇ, εἶνε τὸ πολυώνυμον M_1 (οὗ ὁ βαθμὸς εὑρίσκεται, ἂν ἀναπτυχθῶσιν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος (7) κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x, καὶ εἶνε ἢ $\rho_1 + \frac{\lambda}{m}$ ἢ $\tau - (\rho - \rho_1) + 1$ ἔνθα ρ καὶ ρ_1 εἶνε οἱ βαθμοὶ τῶν N καὶ N_1, λ ὁ βαθμὸς τοῦ $\varphi(x)$ καὶ τ ὁ βαθμὸς τοῦ M· δύναται δὲ νὰ εὑρεθῇ τὸ M_1 διὰ τῆς μεθόδου τῶν ὁριστέων συντελεστῶν.

Παρατηρητέον πρὸς τούτοις, ὅτι τὸ πολυώνυμον M_1 πρέπει νὰ ἔχῃ πάσας τὰς ῥίζας τοῦ $\varphi(x)$ ὅσας δὲν ἔχει ὁ παρονομαστὴς N καὶ ἑκάστην ἅπαξ τοὐλάχιστον.

Ἐὰν εἶνε $N=1$, θὰ εἶνε καὶ $N_1=1$. ἤτοι, ἐὰν τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \frac{M dx}{\sqrt[m]{\varphi(x)}} \text{ εἶνε ἀλγεβρικόν,}$$

θὰ εἶνε

$$\int \frac{M dx}{\sqrt[m]{\varphi(x)}} = \frac{M_1}{\sqrt[m]{\varphi(x)}}$$

ἔνθα M_1 εἶνε ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x· περιέχον πάσας τὰς ῥίζας τοῦ $\varphi(x)$ καὶ ἑκάστην τοὐλάχιστον ἅπαξ· ὁ δὲ βαθμὸς αὐτοῦ θὰ εἶνε ἢ $\tau + 1$ ἢ $\frac{\lambda}{m}$· ἀλλὰ τὸ δεύτερον τοῦτο δὲν δύναται νὰ συμβῇ, ὅταν τὸ ὑπόρριζον πολυώνυμον $\varphi(x)$ δὲν ἔχῃ πολλαπλᾶς ῥίζας τάξεως ἀνωτέρας τῆς $m-1$· διότι ἂν τὸ $\varphi(x)$ ἔχῃ α_1 ἁπλᾶς ῥίζας α_2 διπλᾶς . . . καὶ α_ν τῆς τάξεως ν, θὰ εἶνε $\lambda = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + \nu\alpha_\nu$ καὶ ἂν εἶνε $\nu < m$, θὰ εἶνε $\frac{\lambda}{m} < \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu$ καὶ ἐπειδὴ τὸ M_1 εἶνε βαθμοῦ τοὐλάχιστον $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu$, ἕπεται ὅτι δὲν δύναται νὰ εἶνε βαθμοῦ $\frac{\lambda}{m}$.

Μερικὴ περίπτωσις ἀβελιανῶν ὁλοκληρωμάτων Διώνυμα διαφορικά.

77. *Διώνυμα διαφορικὰ* λέγονται τὰ διαφορικὰ τῆς μορφῆς

$$x^m(\alpha+\beta x^n)^q dx \qquad (1)$$

ἔνθα οἱ ἐκθέται m, n, q εἶνε σύμμετροι ἀριθμοί, οἱ δὲ α, β σταθεροὶ οἱοιδήποτε.

Ὁ ἐκθέτης n δύναται νὰ ὑποτεθῇ θετικός· διότι τὸ αὐτὸ διαφορικὸν γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$x^{m+nq}(\alpha x^{-n}+\beta)^q dx$$

ὅπερ εἶνε ἐπίσης διώνυμον διαφορικὸν ἔχον τὸν ἐκθέτην $-n$ ἀντὶ n.

Οἱ ἐκθέται m καὶ n τῆς μεταβλητῆς x δύνανται πρὸς τούτοις νὰ ὑποτεθῶσιν ἀκέραιοι· διότι, ἂν εἶνε κλάσματα καὶ εἰς ἕνα παρονομαστὴν ἀχθέντες εἶνε

$$m=\frac{m_1}{\sigma}, \quad n=\frac{n_1}{\sigma}$$

θέτομεν $x=t^\sigma$, ὅτε φθάνομεν εἰς τὸ διώνυμον διαφορικὸν

$$\sigma t^{m_1+\sigma-1}(\alpha+\beta x^{n_1})^q dt$$

ὅπερ ἔχει ἀμφοτέρους τοὺς ἐκθέτας τῆς μεταβλητῆς t ἀκεραίους ἀριθμούς.

Σημείωσις. Οἱ σταθεροὶ ἀριθμοὶ α, β ὡς καὶ οἱ ἐκθέται n καὶ q ὑποτίθενται διάφοροι τοῦ 0· διότι ἂν τις τούτων εἶνε 0, τὸ διώνυμον καταντᾷ δύναμις τοῦ x καὶ ὁλοκληροῦται ἀμέσως.

78. Τὰ ὁλοκληρώματα τῶν διωνύμων διαφορικῶν ἀπαντῶσι συχνότατα ἐν ταῖς ἐφαρμογαῖς ὑπάγονται δὲ εἰς τὰ ἀβελιανὰ ὁλοκληρώματα· διότι ἂν εἶνε $q=\dfrac{\lambda}{\rho}$ καὶ τεθῇ

$$y^\rho=(\alpha+\beta x^n)^\lambda$$

τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ διωνύμου διαφορικοῦ (1) γίνεται

$$\int x^m y\, dx.$$

Περιπτώσεις καθ' ἃς δυνάμεθα νὰ ὁλοκληρώσωμεν τὰ διώνυμα διαφορικά.

79. Ἐὰν ὁ ἐκθέτης q εἶνε ἀκέραιος ἀριθμός, ἡ παράστασις

$$x^{\mathrm{m}}\left(\alpha+\beta x^{\mathrm{n}}\right)^{\mathrm{q}}$$

εἶνε ῥητὴ συνάρτησις τοῦ x καὶ ἑπομένως ὁλοκληροῦται κατὰ τὰ ἤδη γνωστά.

80. Ἐκτὸς τῆς περιπτώσεως ταύτης δυνάμεθα νὰ ἀναγάγωμεν τὴν ὁλοκλήρωσιν τοῦ διωνύμου διαφορικοῦ (1) εἰς τὴν ὁλοκλήρωσιν ῥητῆς συναρτήσεως κατὰ τὰς ἀκολούθους δύο περιπτώσεις.

1η. Ἐὰν εἶνε $\dfrac{m+1}{n}=$ ἀκεραίῳ τινὶ ἀριθμῷ θ· (θετικῷ ἢ ἀρνητικῷ ἢ καὶ 0).

Διότι τὸ διώνυμον διαφορικὸν (1) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς (ἂν $q=\dfrac{\lambda}{\rho}$)

$$\frac{1}{m+1}\left(\alpha+\beta x^{\mathrm{n}}\right)^{\frac{\lambda}{\rho}} d\left(x^{\mathrm{m}+1}\right) \qquad (m+1\gtrless 0)$$

ἂν δὲ πρὸς ἀπαλλαγὴν ἀπὸ τοῦ ῥιζικοῦ θέσωμεν

$$\alpha+\beta x^{\mathrm{n}}=t^{\rho}, \quad \text{θὰ εἶνε} \quad x^{\mathrm{n}}=\frac{t^{\rho}-\alpha}{\beta}$$

καὶ ἐπειδὴ $m+1=n\theta$, ἕπεται

$$x^{\mathrm{m}}(\alpha+\beta x^{\mathrm{n}})^{\mathrm{q}} dx=\frac{1}{m+1} t^{\lambda} d\left[(t^{\rho}-\alpha)^{\theta}\right].\frac{1}{\beta^{\theta}}$$

ἀνάγεται ἄρα ἡ ὁλοκλήρωσις αὐτοῦ εἰς τὴν ὁλοκλήρωσιν ῥητῆς συναρτήσεως τοῦ t.

Ἐὰν εἶνε $m+1=0$, τὸ διώνυμον γράφεται ὡς ἑξῆς

$$\overline{x}^{1}(\alpha+\beta x^{\mathrm{n}})^{\frac{\lambda}{\rho}} dx=\frac{1}{n}(\alpha+\beta x^{\mathrm{n}})^{\frac{\lambda}{\rho}} d(lx^{\mathrm{n}})$$

καὶ διὰ τῆς αὐτῆς ἀντικαταστάσεως γίνεται

$$\frac{1}{n} t^{\lambda} d\, l(t^{\rho}-\alpha)$$

ἤτοι πάλιν ῥητὴ συνάρτησις τοῦ t.

2α. Ἐὰν εἶνε $\frac{m+1}{n}+q=$ἀκεραίῳ τινι k (θετικῷ ἢ ἀρνητικῷ ἢ καὶ 0).

Διότι εἶνε $$\alpha+\beta x^{n}=x^{n}(\beta+\alpha x^{-n})$$

ὅθεν $x^{m}(\alpha+\beta x^{n})^{q}dx=x^{m+nq}(\beta+\alpha x^{-n})^{q}dx=x^{m_1}(\beta+\alpha x^{-n})^{q}dx$

καὶ ἐπειδὴ $\frac{m_1+1}{n}=\frac{m+1}{n}+q=k,$ συνάγεται, ὅτι τὸ διώνυμον διαφορικὸν $x^{m_1}(\beta+\alpha x^{-n})^{q}dx$ πληροῖ τὸν ὅρον τῆς προηγουμένης περιπτώσεως· ἀρκεῖ ἄρα νὰ θέσωμεν $t^{p}=\beta+\alpha x^{-n}$, ἵνα γίνῃ ῥητὴ συνάρτησις τοῦ t.

Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int x^{7}\sqrt[3]{1-x^{4}}\,dx$$

ἐνταῦθα εἶνε $$\frac{m+1}{n}=2$$

θέτομεν λοιπὸν

$$1-x^{4}=t^{3}$$

ὅθεν $$x^{8}=(1-t^{3})^{2} \quad \text{καὶ} \quad d(x^{8})=-6(1-t^{3})t^{2}dt$$

καὶ ἑπομένως

$$\int x^{7}(1-x^{4})^{\frac{1}{3}}dx=\frac{1}{8}\int(1-x^{4})^{\frac{1}{3}}d(x^{8})=-\frac{3}{4}\int t^{3}(1-t^{3})dt$$

$$=-\frac{3}{4}\left(\frac{t^{4}}{4}-\frac{t^{7}}{7}\right)=\frac{3}{4}\left(\frac{t^{3}}{7}-\frac{1}{4}\right)t^{4}$$

ἤτοι

$$\int x^{7}(1-x^{4})^{\frac{1}{3}}dx=-\frac{3}{4}\left(\frac{3}{28}+\frac{x^{4}}{7}\right)\left(1-x^{4}\right)\sqrt[3]{1-x^{4}}.$$

Ὁ Tchebichef ἀπέδειξεν, ὅτι αὗται εἶνε αἱ μόναι περιπτώσεις, καθ' ἃς τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ διωνύμου διαφορικοῦ δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὑπὸ πεπερασμένην μορφὴν διὰ τῶν συνήθων συναρτήσεων.

Σημείωσις. Ἐὰν τὸ κλάσμα $\frac{m+1}{n}$ δὲν εἶνε ἀνάγωγον, τὸ διώνυμον διαφορικὸν ἀνάγεται εἰς ἄλλο ἁπλούστερον· διότι ἔστω

$$m+1=(m_1+1)\delta$$
$$n=n_1.\delta$$

δ ὄντος τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου τῶν ἀκεραίων $m+1$ καὶ n· ἐὰν τότε γράψωμεν τὸ διώνυμον διαφορικὸν ὡς ἑξῆς

$$x^m\left(\alpha+\beta x^n\right)^q dx=\frac{1}{m+1}\left(\alpha+\beta x^{n_1\delta}\right)^q d\left(x^{(m_1+1)\delta}\right),$$

βλέπομεν ὅτι ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν $x^\delta=t$, ἵνα τραπῇ τὸ δοθὲν διώνυμον εἰς ἕτερον ἁπλούστερον, τὸ $\frac{1}{\delta}t^{m_1}\left(\alpha+\beta t^{n_1}\right)^q dt$· εἶνε δὲ τοῦτο ἁπλούστερον, διότι ἔχει ἐκθέτας m_1 καὶ n_1 μικροτέρους τῶν m καὶ n.

Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ διώνυμον

$$x^2(\alpha+\beta x^6)^q dx.$$

Ἐνταῦθα οἱ ἀκεραιοι $m+1$ καὶ n ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸν 3· ἐὰν ἄρα θέσωμεν $x^3=t$, εὑρίσκομεν

$$x^2(\alpha+\beta x^6)^q dx=\frac{1}{3}.(\alpha+\beta t^2)^q dt.$$

Ἐπίσης ἀνάγεται τὸ διώνυμον διαφορικὸν εἰς ἄλλο ἁπλούστερον, ἐὰν εἶνε $n=\rho$ καὶ τὸ κλάσμα $\frac{m+1}{n}+\frac{\lambda}{\rho}$ ἤτοι $\frac{m+1+\lambda}{n}$ δὲν εἶνε ἀνάγωγον· διότι, ἂν παραστήσωμεν διὰ δ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν ἀκεραίων $m+1+\lambda$ καὶ n, ἤτοι ἂν εἶνε

$$m+\lambda+1=k\delta \quad \text{καὶ} \quad n=n_1\delta,$$

καὶ θέσωμεν $x^{-\delta}=t$, γίνεται

$$x^m\left(\alpha+\beta x^n\right)^{\frac{\lambda}{n}}dx=x^{m+\lambda}\left(\beta+\alpha x^{-n}\right)^{\frac{\lambda}{n}}dx=-\frac{1}{\delta}t^{-k-1}\left(\beta+\alpha t^{n_1}\right)^{\frac{\lambda}{n}}dt$$

Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ διαφορικὸν

$$x^2\left(\alpha+\beta x^8\right)^{\frac{1}{8}}dx.$$

Ἐνταῦθα εἶνε $n=\rho$ καὶ οἱ ἀκέραιοι $m+\lambda+1$ καὶ n ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸν 4· ἐὰν δὲ τεθῇ $x^{-4}=t$, προκύπτει

$$x^2\left(\alpha+\beta x^8\right)^{\frac{1}{8}}dx=-\frac{1}{4}t^{-2}\left(\beta+\alpha t^2\right)^{\frac{1}{8}}dt.$$

Παρατηρητέον δὲ ὅτι, ἂν τὸ κλάσμα $\frac{m+1}{n}$ εἶνε ἀνάγωγον, ἡ δευτέρα περίπτωσις τοῦ ὁλοκληρωσίμου τοῦ διωνύμου διαφορικοῦ δὲν δύναται νὰ ὑπάρχῃ, ἂν μὴ εἶνε καὶ $n=\rho$· διότι τὸ ἄθροισμα δύο ἀναγώγων κλασμάτων ἀδύνατον νὰ εἶνε ἀκέραιος ἀριθμός, ἂν μὴ εἶνε ὁμώνυμα.

Ἁπλουστέρα μορφὴ τῶν διωνύμων διαφορικῶν.

81. Ἐὰν εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int x^m(\alpha+\beta x^n)^q dx$$

θέσωμεν $\beta x^n = \varepsilon\alpha . t \qquad \varepsilon^2 = 1$

καὶ λάβωμεν τὸ ε τοιοῦτον, ὥστε ἡ νυοστὴ ῥίζα τοῦ $\varepsilon\frac{\alpha}{\beta}$ νὰ εἶνε πραγματικὸς ἀριθμὸς (οἱ α καὶ β ὑποτίθενται ἐπίσης πραγματικοί), θὰ εἶνε

$$x = \sqrt[n]{\varepsilon\frac{\alpha}{\beta}} . t^{\frac{1}{n}} \quad \text{καὶ} \quad dx = \frac{1}{n}\sqrt[n]{\varepsilon\frac{\alpha}{\beta}} . t^{\frac{1}{n}-1} dt$$

ἐπομένως τὸ ὁλοκλήρωμα γίνεται

$$\int x^m(\alpha+\beta x^n)^q dx = \frac{1}{n}\left(\varepsilon\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{m+1}{n}} . \alpha^q \int t^p(1+\varepsilon t)^q dt$$

ἔνθα ἐτέθη $$p = \frac{m+1}{n} - 1$$

ὥστε τὸ ὁλοκλήρωμα παντὸς διωνύμου διαφορικοῦ ἀνάγεται εἰς τὸ ἕτερον τῶν ὁλοκληρωμάτων

εἰς τὸ $\int t^p(1-t)^q dt$ ἢ εἰς τὸ $\int t^p(1+t)^q dt$

ἀλλὰ τὸ δεύτερον τούτων ἀνάγεται εἰς τὸ πρῶτον ὡς ἑξῆς· θέτομεν

$$t = \frac{t_1}{1-t_1} \quad \text{ὅθεν} \quad dt = \frac{dt_1}{(1-t_1)^2}$$

καὶ ἐπομένως

$$\int t^p(1+t)^q dt = \int t_1^p(1-t_1)^{q_1} dt_1 \quad \text{ἔνθα} \quad q_1 = -(p+q)-2.$$

Ὥστε πᾶν ὁλοκλήρωμα διωνύμου διαφορικοῦ ἀνάγεται εἰς τὸ

$$\int t^p(1-t)^q dt \qquad (2)$$

ἔνθα p καὶ q εἶνε σύμμετροι ἀριθμοί.

82. Ἡ σπουδὴ τοῦ ὁλοκληρώματος (2) εἶνε κατὰ τοῦτο ἁπλουστέρα, ὅτι τοῦτο ἔχει δύο μόνον παραμέτρους p καὶ q ἐνῷ τὸ ἀρχικὸν ὁλοκλήρωμα (1) εἶχε πέντε.

Οἱ ὅροι τοῦ ὁλοκληρωσίμου τοῦ διωνύμου τούτου (2) εἶνε κατὰ τὰ ἤδη εἰρημένα (ἐδ. 80) οἱ ἑξῆς.

1) Ἐὰν ὁ ἕτερος τῶν ἐκθετῶν p καὶ q εἶνε ἴσος ἀκεραίῳ τινί.

2) Ἐὰν τὸ ἄθροισμα $p+q$ τῶν δύο ἐκθετῶν εἶνε ἴσον ἀκεραίῳ τινί.

Καὶ ἂν μὲν ὁ q εἶνε ἀκέραιος (ἐπειδὴ ὁ p εἶνε σύμμετρος ἀριθμός), ἡ ὁλοκλήρωσις ἀνάγεται ἀμέσως εἰς τὴν ὁλοκλήρωσιν ῥητῆς συναρτήσεως.

Ἂν δὲ ὁ p εἶνε ἀκέραιος, θέτομεν $1-t=z$, ὅτε τὸ ὁλοκλήρωμα (2) γίνεται

$$\int t^{p}(1-t)^{q}dt=-\int z^{q}(1-z)^{p}dz$$

καὶ ἐπειδὴ ὁ q εἶνε σύμμετρος ἀριθμός, ἀνάγεται ὡς καὶ προηγουμένως εἰς ὁλοκλήρωσιν ῥητῆς συναρτήσεως.

Ἂν δὲ τέλος εἶνε $p+q=$ ἀκεραίῳ τινὶ θ, θέτομεν

$$t=\frac{1}{1+z}$$

ὅτε προκύπτει

$$\int t^{p}(1-t)^{q}dt=-\int z^{q}(1+z)^{-\theta-2}dz$$

καὶ ἐπειδὴ ὁ q εἶνε σύμμετρος ἀριθμός, ἀνάγεται ἡ ὁλοκλήρωσις αὕτη, ὡς καὶ αἱ προηγούμεναι, εἰς τὴν ὁλοκλήρωσιν ῥητῆς συναρτήσεως.

Ἀναγωγὴ τῶν ἐκθετῶν p, q τοῦ διωνύμου διαφορικοῦ $x^{p}(1-x)^{q}dx$

83. Ὅταν μηδέτερος τῶν ἐκθετῶν p, q εἶνε ἀκέραιος ἀριθμὸς μηδὲ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $p+q$, τὸ ὁλοκλήρωμα, ὡς εἴπομεν ἤδη, δὲν δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὑπὸ πεπερασμένην μορφὴν διὰ τῶν συνήθων συναρτήσεων, δυνάμεθα ὅμως νὰ ἀναγάγωμεν τὴν ὁλοκλήρωσιν

$$\int x^{p}(1-x)^{q}dx \qquad (2)$$

εἰς ἄλλην, ἐν ᾗ ἀμφότεροι οἱ ἐκθέται περιλαμβάνονται μεταξὺ 0 καὶ 1.

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ ἐλαττώσωμεν τὸν ἐκθέτην p κατὰ μονάδα· πρὸς τοῦτο γράφομεν τὸ ὁλοκλήρωμα (2) ὡς ἑξῆς

$$\int x^p(1-x)^q dx = \int x^p d\left\{-\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1}\right\} \qquad (\text{διότι } q+1 \gtrless 0)$$

καὶ ἐφαρμόζοντες τὴν κατὰ παράγοντας ὁλοκλήρωσιν, εὑρίσκομεν

$$\int x^p(1-x)^q dx = -\frac{x^p(1-x)^{q+1}}{q+1} + \frac{p}{q+1}\int x^{p-1}(1-x)^{q+1}dx$$

ἐὰν δὲ εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ δευτέρου μέλους ἀντὶ τοῦ παράγοντος $(1-x)^{q+1}$ γράψωμεν $(1-x)^q(1-x)$, ἡ ὁλοκληρωτέα παράστασις γίνεται

$$\left\{(1-x)^q x^{p-1} - (1-x)^q x^p\right\}dx$$

καὶ ἂν ὁλοκληρώσωμεν αὐτὴν κατὰ μέρη, εὑρίσκομεν

$$\int x^p(1-x)^q dx =$$

$$= -\frac{x^p(1-x)^{q+1}}{q+1} + \frac{p}{q+1}\int x^{p-1}(1-x)^q dx - \frac{p}{q+1}\int x^p(1-x)^q dx$$

ἐπειδὴ δὲ τὸ τελευταῖον ὁλοκλήρωμα εἶνε αὐτὸ τὸ ζητούμενον, μεταφέροντες αὐτὸ εἰς τὸ πρῶτον μέλος, εὑρίσκομεν (διότι $p+q+1 \gtrless 0$) τὸν τύπον

$$(3) \qquad \int x^p(1-x)^q dx =$$

$$= -\frac{x^p(1-x)^{q+1}}{p+q+1} + \frac{p}{p+q+1}\int x^{p-1}(1-x)^q dx$$

διὰ τούτου ἡ ὁλοκλήρωσις (2) ἀνάγεται εἰς ἄλλην ἔχουσαν ἀντὶ τοῦ ἐκθέτου p τὸν $p-1$· ἂν λοιπὸν ὁ p εἶνε θετικὸς καὶ περιέχῃ ἀκεραίας μονάδας, δυνάμεθα, ἐφαρμόζοντες ἐπανειλημμένως τὸν τύπον τοῦτον, νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπ' αὐτοῦ πάσας τὰς ἀκεραίας μονάδας, ἃς περιέχει, καὶ νὰ καταστήσωμεν αὐτὸν μικρότερον τῆς μονάδος 1.

Ἂν ὁ ἐκθέτης p εἶνε ἀρνητικός, ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ τύπου (3) καθιστᾷ αὐτὸν (ἀπολύτως) μεγαλήτερον· ἀλλὰ τότε λύοντες τὸν τύπον τοῦτον πρὸς τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ δευτέρου μέλους καὶ γράφοντες ἔπειτα $p+1$ ἀντὶ p, εὑρίσκομεν (διότι $p+1 \gtrless 0$)

$$(3') \qquad \int x^{p}(1-x)^{q}dx=$$

$$\frac{x^{p+1}(1-x)^{q+1}}{p+1}+\frac{p+q+2}{p+1}\int x^{p+1}(1-x)^{q}dx$$

Διὰ τοῦ τύπου τούτου προσθέτομεν εἰς τὸν ἀρνητικὸν ἐκθέτην p μίαν μονάδα θετικήν· ἐὰν δὲ ἐφαρμόσωμεν αὐτὸν ἐπανειλημμένως (τοῦ p μὴ ὄντος ἀκεραίου), θὰ φθάσωμεν εἰς ἐκθέτην p θετικὸν καὶ μικρότερον τῆς μονάδος 1.

Δι' ὁμοίου τρόπου εὑρίσκομεν καὶ τοὺς ἑξῆς δύο τύπους (οὓς καὶ ἐκ τῶν τύπων (3) καὶ (3′) εὑρίσκομεν ἂν θέσωμεν $x=1-t$ καὶ ἀνταλλάξωμεν τοὺς ἐκθέτας p, q)

$$(4) \qquad \int x^{p}(1-x)^{q}dx=$$

$$=\frac{x^{p+1}(1-x)^{q}}{p+q+1}+\frac{q}{p+q+1}\int x^{p}(1-x)^{q-1}dx$$

$$(4') \qquad \int x^{p}(1-x)^{q}dx=$$

$$=-\frac{x^{p+1}(1-x)^{q+1}}{q+1}+\frac{p+q+2}{q+1}\int x^{p}(1-x)^{q+1}dx$$

ὧν ὁ μὲν πρῶτος ἐλαττοῖ τὸν ἐκθέτην q κατὰ μίαν μονάδα, ὁ δὲ δεύτερος αὐξάνει αὐτὸν κατὰ μονάδα· καὶ ὅταν μὲν ὁ q εἶνε θετικὸς καὶ μεγαλήτερος τῆς μονάδος, ἐφαρμόζοντες τὸν πρῶτον τύπον καθιστῶμεν αὐτὸν μικρότερον τῆς μονάδος· ὅταν δὲ ὁ q εἶνε ἀρνητικός, διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ δευτέρου τύπου (ἐπειδὴ ὁ q δὲν εἶνε ἀκέραιος) καθιστῶμεν πάλιν αὐτὸν θετικὸν καὶ μικρότερον τῆς μονάδος 1.

Ὥστε, ὅταν μήτε τις τῶν ἐκθετῶν p, q μήτε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $p+q$ εἶνε ἀκέραιος ἀριθμός, δύνανται ἀμφότεροι νὰ ἀναχθῶσιν εἰς τὸ διάστημα $0 \ldots 1$.

Σημείωσις. Ὁ τύπος (3) εὑρέθη μὲν ἐπὶ τῇ ὑποθέσει, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $q+1$ καὶ $p+q+1$ διαφέρουσιν ἀμφότεροι τοῦ 0, ἀλλ' ἰσχύει προδήλως, ὅταν μόνον $p+q+1$ διαφέρῃ τοῦ 0, οἱωνδήποτε ὄντων τῶν p καὶ q· διότι διαφοριζόμενος ἄγει εἰς ταὐτότητα. Ὡσαύτως ὁ τύπος (4) ἰσχύει, ὅταν εἶνε $p+q+1$ διάφορον τοῦ 0 καὶ ὁ τύπος (3′) ἰσχύει, ὅταν $p+1$ διαφέρῃ τοῦ 0 καὶ τέλος ὁ τύπος (4′) ἰσχύει ὅταν $q+1$ διαφέρῃ τοῦ 0.

Σημείωσις. Καὶ ὅταν οἱ ὅροι τοῦ ὁλοκληρωσίμου πληρῶνται, προτιμότερον εἶνε ἀντὶ νὰ μεταχειριζώμεθα ἀμέσως τοὺς μετασχηματισμοὺς τοῦ ἐδ. 80 πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὁλοκληρώματος, νὰ ἐφαρμόζωμεν τοὺς τύπους (3) (3′) καὶ (4) (4′)· διότι δι' αὐτῶν ἢ εὑρίσκεται τὸ ὁλοκλήρωμα ἢ ἀνάγεται ἡ ὁλοκλήρωσις εἰς ἄλλην ἁπλουστέραν.

Ἐὰν λ. χ. τὸ ἄθροισμα $p+q+2$ εἶνε 0 ἢ ἀρνητικὸς ἀκέραιος ἀριθμός, τὸ ὁλοκλήρωμα εὑρίσκεται ἐκ τῶν τύπων (3′) καὶ (4′) διότι ἐφαρμόζοντες αὐτοὺς ἢ φθάνομεν εἰς ἰσότητα ἐν τῇ ὁποίᾳ ὁ συντελεστὴς τοῦ ὁλοκληρώματος ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει εἶνε 0, ἐπομένως εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον (ὅπερ τότε εἶνε ἀλγεβρικὸν) ἢ ἀνάγομεν τὴν ὁλοκλήρωσιν εἰς τὴν ἑξῆς

$$\int \frac{dx}{x(1-x)} \quad \text{ἥτις δίδει} \quad l\,\frac{x}{1-x}\cdot$$

τὸ δεύτερον τοῦτο συμβαίνει, μόνον τότε, ὅταν ἀμφότεροι οἱ ἐκθέται p, q εἶνε ἀρνητικοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοί.

Τέλος παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα (2), ἐὰν τεθῇ $x=\eta\mu^2\varphi$, ἐπομένως καὶ $dx=2\eta\mu\varphi\,\sigma\upsilon\nu\varphi\,d\varphi$, γίνεται

$$\int x^{p}(1-x)^{q}dx = 2\int \eta\mu^{2p+1}\varphi\,.\,\sigma\upsilon\nu^{2q+1}\varphi\, d\varphi$$

ἀνάγεται ἄρα ἡ ὁλοκλήρωσις παντὸς διωνύμου διαφορικοῦ εἰς τὴν ὁλοκλήρωσιν τοῦ γινομένου μιᾶς δυνάμεως τοῦ ἡμιτόνου ἐπὶ μίαν δύναμιν τοῦ συνημιτόνου· περὶ τοῦ ὁλοκληρώματος τούτου θὰ διαλάβωμεν ἐν τοῖς ἑπομένοις.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Δεῖξαι, ὅτι ἂν εἶνε

$$\int \frac{Q\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}} = Q_1\sqrt{\varphi(x)}$$

τῶν Q, Q_1 καὶ $\varphi(x)$ ὄντων ἀκεραίων πολυωνύμων, ὧν οἱ βαθμοὶ κατὰ σειρὰν εἶνε σ, σ_1 καὶ λ, θὰ εἶνε $\sigma_1=\sigma-\lambda+1$.

2) Εὑρεῖν τὰ ἑξῆς ὁλοκληρώματα

$$\int \frac{3x^8+1}{(1+x^8)x^5}\,\frac{dx}{\sqrt{1+x^8}}$$

$$\int \frac{x^3(1+x^4)}{1+x^8}\,\frac{dx}{\sqrt{1+x^8}}$$

$$\int \frac{2x^5-x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$$

γνωστοῦ ὄντος ὅτι εἶνε ἀλγεβρικά

3) Εὑρεῖν τὰ ὁλοκληρώματα

$$\int \frac{dx}{\sqrt[\rho]{1-x^{\rho}}}, \quad \int x^{2}(1-x)^{\frac{4}{5}}\,dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^{4}(1-x)^{2}}}$$

4) Εὑρεῖν τὸν ἀπαιτούμενον ὅρον, ἵνα τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \frac{\varphi(x^{n})x^{\lambda}dx}{\sqrt[m]{1-x^{n}}}$$

ἶνε ἀλγεβρικόν· $\varphi(x^{n})$ δηλοῖ ἀκεραίαν συνάρτησιν τοῦ x^{n}.

5) Ἐὰν $\varphi(x)$ εἶνε ἀκεραία συνάρτησις τοῦ x, δεῖξαι ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \varphi(x)\,l\mathrm{R}(x, \sqrt{1-x^{2}})dx$$

ἔνθα R δηλοῖ ῥητὴν συνάρτησιν τοῦ x καὶ τῆς $\sqrt{1-x^{2}}$, δύναται νὰ εὑρεθῇ.

6) Πᾶσα ῥητὴ συνάρτησις $\mathrm{R}\,(x, y)$ τοῦ x καὶ τῆς ἀλγεβρικῆς αὐτοῦ συναρτήσεως y, ἣν ὁρίζει ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x, y)=0$, πληροῖ διαφορικήν τινα ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς

$$\frac{d^{\rho}\mathrm{R}}{dx^{\rho}} + \mathrm{A}_{1}\frac{d^{\rho-1}\mathrm{R}}{dx^{\rho-1}} + \ldots + \mathrm{A}_{\rho}\mathrm{R}=0$$

ἧς ἡ τάξις ρ δὲν ὑπερβαίνει τὸν βαθμὸν n τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x, y)=0$ πρὸς y καὶ οἱ συντελεσταὶ $\mathrm{A}_{1}\ \mathrm{A}_{2} \ldots \mathrm{A}_{\rho}$ εἶνε ῥηταὶ συναρτήσεις τοῦ x.

7) Νὰ ἀναχθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int x^{m}(\alpha+\beta x+\gamma x^{2})^{q}\,dx$$

εἰς τὰ ὁλοκληρώματα τῶν διωνύμων διαφορικῶν.

8) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int x^{\mu}(\alpha+\beta x^{n}+\gamma x^{2n})^{\frac{\lambda}{2}}\,dx$$

ἀνάγεται εἰς τὰ ὁλοκληρώματα ῥητῶν συναρτήσεων, ὅταν εἶνε $\frac{\mu+1}{n}$ = ἀκεραίῳ ἀριθμῷ· (οἱ ἐκθέται μ, n καὶ λ ὑποτίθενται ἀκέραιοι).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΣ ΥΠΕΡΒΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

84. Ἐκ τῶν ἀπειροπληθῶν ὑπερβατικῶν συναρτήσεων ὀλίγας μόνον εἰξεύρωμεν νὰ ὁλοκληρώσωμεν. Ὡρισμένας μεθόδους ὁλοκληρώσεως ἔχομεν περὶ τῶν ἑξῆς συναρτήσεων

$$\mathrm{R}(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x),\quad e^{\rho x}\mathrm{R}(x),\quad \varphi(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x)\,\mathrm{R}(x),\quad e^{\rho x}\mathrm{R}(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x)$$
$$\mathrm{R}(x)\ \varphi(e^{nx}, \eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x)$$

ἔνθα R δηλοῖ ῥητὴν συνάρτησιν τῶν ἐν αὐτῷ περιεχομένων· τὸ δὲ φ ἀκεραίαν.

Περὶ τοῦ ὁλοκληρώματος

$$(\mathrm{A})\qquad \int \mathrm{R}\,(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x)\,dx$$

85. Ἡ ὁλοκλήρωσις αὕτη ἀνάγεται πάντοτε εἰς τὴν ὁλοκλήρωσιν τῶν ῥητῶν συναρτήσεων· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν

$$\varepsilon\varphi\,\frac{1}{2}x=z \qquad \text{ἢ} \qquad x=2\tau o\xi\,\varepsilon\varphi z$$

διότι τότε εἶνε

$$\eta\mu\,\frac{1}{2}x=\frac{z}{\sqrt{1+z^2}},\qquad \sigma\upsilon\nu\,\frac{1}{2}x=\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$$

καὶ
$$\eta\mu x=\frac{2z}{1+z^2},\qquad \sigma\upsilon\nu x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$$

εἶνε δὲ
$$dx=\frac{2dz}{1+z^2}$$

ἐκφράζονται ἄρα ῥητῶς διὰ τοῦ z $\left(\text{ἤτοι διὰ τῆς } \varepsilon\varphi\frac{1}{2}x\right)$ ἀμφότερα, τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ x, ὡς καὶ τὸ dx διὰ τοῦ z καὶ dz. Ἐὰν δὲ τὰς τιμὰς ταύτας θέσωμεν εἰς τὴν ὁλοκληρωτέαν παράστασιν, προκύπτει πρὸς ὁλοκλήρωσιν ῥητὴ συνάρτησις τοῦ z ἐπὶ dz.

86. Ἐπειδὴ καὶ τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ x εἶνε ῥηταὶ συναρτήσεις τοῦ e^{xi}, ἁπλούστερον εἶνε νὰ θέτωμεν

$$e^{xi} = t$$

ὅτε
$$\text{ημ}x = \frac{t^2 - 1}{2ti}, \qquad \text{συν}x = \frac{t^2+1}{2t}$$

καὶ
$$dx = -i\,\frac{dt}{t}.$$

Ἡ ἀντικατάστασις αὕτη, ἂν καὶ εἰσάγει φανταστικὰς μεταβλητάς, ἔχει τὸ πλεονέκτημα, ὅτι δίδει ἁπλουστάτην ἔκφρασιν τοῦ συνmx καὶ τοῦ ημmx· διότι εἶνε

$$\text{συν}mx = \frac{t^{2m}+1}{2t^m}, \qquad \text{ημ}mx = \frac{t^{2m}-1}{2it^m}$$

καὶ καθιστᾷ ἐνίοτε ἁπλουστέραν τὴν ὁλοκλήρωσιν.

Παρατηρητέον δέ, ὅτι αἱ δύο μεταβληταὶ t καὶ z, δι᾽ ὧν ἐκφράζονται ῥητῶς τὰ ημx, συνx καὶ dx, εἶνε ῥηταὶ συναρτήσεις ἀλλήλων· διότι εἶνε

$$z = i\,\frac{1-t}{1+t}.$$

87. Ἐκ τῶν ὁλοκληρωμάτων (Α) τὰ ἁπλούστερα καὶ συχνότερα ἀπαντῶντα εἰς τὰς ἐφαρμογὰς εἶνε τὰ ἑξῆς· (ὧν ἕκαστον εὑρίσκεται δι᾽ ἰδιαιτέρας μεθόδου εὐκολωτέρας ἢ ἡ γενική)·

1)

$$\int \text{ημ}x\,dx = -\text{συν}x, \qquad \int \text{συν}x\,dx = \text{ημ}x$$

ἀμφότερα ταῦτα εἶνε στοιχειώδη ὁλοκληρώματα

2)

$$\int \frac{dx}{\text{ημ}x} \qquad \int \frac{dx}{\text{συν}x} \qquad (1)$$

πρὸς εὕρεσιν τοῦ πρώτου παρατηροῦμεν ὅτι

$$\text{ημ}x = 2\,\text{ημ}\frac{x}{2}\,\text{συν}\frac{x}{2}$$

ἑπομένως

$$\int \frac{dx}{\eta\mu x} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}\right)}$$

καὶ ἂν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐν τῷ δευτέρῳ μέλε διαιρέσωμεν διὰ $\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{x}{2}\right)$, προκύπτει

$$\int \frac{dx}{\eta\mu x} = \int \frac{d\,\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)} = l\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)$$

ὅθεν $$\int \frac{dx}{\eta\mu x} = l\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right) \qquad (2)$$

Τὸ δὲ δεύτερον τῶν ὁλοκληρωμάτων (1) εὑρίσκομεν ἀνάγοντες αὐτὸ εἰς τὸ πρῶτον· πρὸς τοῦτο θέτομεν

$$x = \frac{\pi}{2} - y \quad \text{ὅθεν καὶ } dx = -dy$$

ἑπομένως $$\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu x} = -\int \frac{dy}{\eta\mu y} = -l\varepsilon\varphi\left(\frac{y}{2}\right)$$

καὶ $$\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu x} = -l\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

3)

$$\int \frac{dx}{\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x}.$$

Τοῦτο εὑρίσκεται ἀμέσως, ἂν διαιρεθῶσιν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος διὰ $\sigma\upsilon\nu^2 x$· διότι τότε γίνεται

$$\int \frac{dx}{\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x} = \int \frac{d.\varepsilon\varphi x}{\varepsilon\varphi x} = l\varepsilon\varphi x$$

ὅθεν $$\int \frac{dx}{\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x} = l\,\varepsilon\varphi x. \qquad (3)$$

4)

$$\int \varepsilon\varphi x\, dx \qquad \int \frac{dx}{\varepsilon\varphi x}$$

Γράφοντες ἀντὶ τῆς $\varepsilon\varphi x$ τὴν τιμὴν αὐτῆς, ἔχομεν

$$\int \varepsilon\varphi x\, dx = \int \frac{\eta\mu x . dx}{\sigma\upsilon\nu x} = - \int \frac{d(\sigma\upsilon\nu x)}{\sigma\upsilon\nu x}$$

ὅθεν
$$\int \varepsilon\varphi x . dx = - l(\sigma\upsilon\nu x). \tag{4}$$

Ὁμοίως εἶνε

$$\int \frac{dx}{\varepsilon\varphi x} = \int \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu\varphi} dx = \int \frac{d(\eta\mu x)}{\eta\mu x}$$

ἄρα
$$\int \frac{dx}{\varepsilon\varphi x} = l(\eta\mu x). \tag{5}$$

5)

$$\int \frac{dx}{\alpha\, \sigma\upsilon\nu^2 x + \beta\, \eta\mu^2 x}$$

Διαιροῦντες καὶ ἐνταῦθα ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ ὁλοκληρωτέου κλάσματος διὰ $\overset{2}{\sigma\upsilon\nu} x$, εὑρίσκομεν

$$\int \frac{dx}{\alpha\, \sigma\upsilon\nu^2 x + \beta \eta\mu^2 x} = \int \frac{d(\varepsilon\varphi x)}{\alpha + \beta\, \varepsilon\varphi^2 x}$$

καὶ ἂν θέσωμεν $\varepsilon\varphi x = t$

$$\int \frac{dx}{\alpha\, \sigma\upsilon\nu^2 x + \beta\, \eta\mu^2 x} = \int \frac{dt}{\alpha + \beta t^2}$$

ἐὰν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β εἶνε ὁμοειδεῖς ἀριθμοί, θέτομεν

$$\beta t^2 = \alpha\omega^2$$

ἤτοι
$$t = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} . \omega \quad \text{καὶ} \quad dt = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} . d\omega$$

ἄρα
$$\int \frac{dt}{\alpha + \beta t^2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \int \frac{d\omega}{1 + \omega^2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \text{τοξ εφω}$$

ὅθεν $$\int \frac{dx}{\alpha\,\text{συν}^2 x + \beta\,\text{ημ}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\,\text{τοξεφ}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\,\text{εφ}\,x\right) \tag{6}$$

5′) $$\int \frac{dx}{\alpha\,\text{συν}x + \beta}$$

Τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὸ προηγούμενον, ἐὰν ἀντὶ συνx θέσωμεν τὸ ἴσον αὐτῷ $\text{συν}^2 x\left(\frac{x}{2}\right) - \text{ημ}^2\left(\frac{x}{2}\right)$ καὶ ἀντὶ β τὸ

$$\beta\left(\text{συν}^2\frac{1}{2}x + \text{ημ}^2\frac{1}{2}x\right)$$

διότι τότε γίνεται

$$2\int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{(\alpha+\beta)\,\text{συν}^2\frac{x}{2} + (\beta-\alpha)\,\text{ημ}^2\frac{x}{2}}.$$

6) $$\int \frac{dx}{\alpha\,\text{συν}x + \beta\,\text{ημ}x}$$

ἐὰν θέσωμεν $\alpha^2+\beta^2=\rho^2$ καὶ προσδιορίσωμεν τὴν γωνίαν φ ἐκ τῶν τύπων

$$\text{συν}\,\varphi = \frac{\beta}{\rho} \qquad \text{ημ}\,\varphi = \frac{\alpha}{\rho},$$

θὰ ἔχωμεν

$$\int \frac{dx}{\alpha\,\text{συν}x + \beta\,\text{ημ}x} = \frac{1}{\rho}\int \frac{dx}{\text{ημ}(x+\varphi)} = \frac{1}{\rho}\int \frac{d(x+\varphi)}{\text{ημ}(x+\varphi)}$$

ὅθεν κατὰ τὸ $2^{\text{ον}}$ παράδειγμα

$$\int \frac{dx}{\alpha\,\text{συν}x + \beta\,\text{ημ}x} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,l\,\text{εφ}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\varphi\right)$$

ἔνθα $$\varphi = \text{τοξ}\,\text{εφ}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

7)

$$\int \sigma\upsilon\nu^m x\,dx \quad \text{καὶ} \quad \int \eta\mu^m x\,dx. \qquad (m \text{ ἀκέραιος ἀριθμός})$$

88. Τὰ ὁλοκληρώματα ταῦτα εὑρίσκονται (ὅταν m εἶνε ἀκέραιος ἀριθμὸς) εὐκόλως διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς ἄλλα ὅμοια καὶ ἔχοντα ἐκθέτην μικρότερον κατὰ 2 μονάδας, ἑπομένως ἁπλούστερα.

Πρὸς εὕρεσιν τῶν τύπων τῆς ἀναγωγῆς γράφομεν τὸ πρῶτον ὁλοκλήρωμα ὡς ἑξῆς

$$\int \sigma\upsilon\nu^m x\,dx = \int \sigma\upsilon\nu^{m-1}x.\sigma\upsilon\nu x\,dx = \int \sigma\upsilon\nu^{m-1}x\,d(\eta\mu x)$$

ἔπειτα ἐφαρμόζομεν τὴν κατὰ παράγοντας ὁλοκλήρωσιν καὶ εὑρίσκομεν

$$\int \sigma\upsilon\nu^m x\,dx = \sigma\upsilon\nu^{m-1}x\,\eta\mu x + (m-1)\int \sigma\upsilon\nu^{m-2}x.\eta\mu^2 x\,dx \tag{7}$$

Ἐὰν δὲ ἐν τῷ ὁλοκληρώματι τοῦ δευτέρου μέλους ἀντὶ τοῦ $\eta\mu^2 x$ θέσωμεν $1-\sigma\upsilon\nu^2 x$, ἀναλύεται τοῦτο εἰς τὰ ἑξῆς δύο

$$\int \sigma\upsilon\nu^{m-2}x.\eta\mu^2 x\,dx = \int \sigma\upsilon\nu^{m-2}x\,dx - \int \sigma\upsilon\nu^m x\,dx$$

ὅθεν ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὸν τύπον (7), εὑρίσκομεν

$$\int \sigma\upsilon\nu^m x\,dx = \frac{\sigma\upsilon\nu^{m-1}x.\eta\mu x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \sigma\upsilon\nu^m x\,dx \tag{8}$$

Ἐὰν ὁ ἐκθέτης m εἶνε θετικὸς ἀκέραιος (καὶ μεγαλήτερος τῆς μονάδος), ἐλαττοῦται διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου τούτου κατὰ 2 μονάδας· ἐφαρμόζοντες ἑπομένως αὐτὸν ἐπανειλημμένως θὰ φθάσωμεν ἐπὶ τέλους εἰς τὸ ἕτερον τῶν ὁλοκληρωμάτων

$$\int \sigma\upsilon\nu x\,dx \qquad \text{ἂν ὁ } m \text{ εἶνε περιττὸς}$$

$$\text{ἢ} \quad \int dx \qquad \text{ἂν ὁ } m \text{ εἶνε ἄρτιος}$$

Καὶ ἂν μὲν εἶνε ὁ m περιττός, τὸ ὁλοκλήρωμα εἶνε τῆς μορφῆς

$$\int \sigma\upsilon\nu^m x\,dx = \eta\mu x\left(A_0 + A_2\sigma\upsilon\nu^2 x + A_4\sigma\upsilon\nu^4 x + \ldots + A_{m-1}\sigma\upsilon\nu^{m-1}x\right)$$

Ἐὰν δὲ ὁ m εἶνε ἄρτιος, θὰ εἶνε

$$\int \text{συν}^m x\, dx = \text{A}x + \text{ημ}x\left(\text{A}_1 \text{συν}x + \text{A}_3 \text{συν}^3 x + \ldots + \text{A}_{m-1} \text{συν}^{m-1} x\right)$$

τῶν A_ν ὄντων σταθερῶν τινων ἀριθμῶν.

Ἐὰν ὁ ἐκθέτης m εἶνε ἀρνητικὸς ἀκέραιος, ὁ τύπος (8) καθιστᾷ αὐτὸν μεγαλήτερον (ἀπολύτως)· ἀλλὰ τότε λύομεν αὐτὸν πρὸς τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ δευτέρου μέλους καὶ εὑρίσκομεν

$$\int \text{συν}^{m-2} x\, dx = \frac{m}{m-1}\int \text{συν}^m x\, dx - \frac{\text{ημ}x\ \text{συν}^{m-1}x}{m-1} \qquad (m-1 \gtrless 0)$$

ἐὰν δὲ εἰς τοῦτον θέσωμεν $m+2$ ἀντὶ m, προκύπτει ὁ τύπος

$$(8') \qquad \int \text{συν}^m x\, dx = \frac{m+2}{m+1}\int \text{συν}^{m+2} x\, dx - \frac{\text{ημ}x\ \text{συν}^{m+1}x}{m+1}$$

$$(m+1 \gtrless 0)$$

Διὰ τοῦ τύπου τούτου αὐξάνεται ὁ ἐκθέτης m κατὰ δύο μονάδας θετικάς· ἐὰν λοιπὸν εἶνε ἀρνητικὸς καὶ ἀκέραιος (ἀλλ' οὐχὶ -1), ἐφαρμόζοντες διαδοχικῶς τὸν τύπον τοῦτον, θὰ φθάσωμεν εἰς τὸ ἕτερον τῶν ὁλοκληρωμάτων

$$\int \frac{dx}{\text{συν}^2 x} \quad \text{ἂν ὁ } m \text{ εἶνε ἄρτιος}$$

$$\int \frac{dx}{\text{συν}x} \quad \text{ἂν ὁ } m \text{ εἶνε περιττὸς}$$

ταῦτα δὲ ἀμφότερα εἶνε ἤδη γνωστά·

Καὶ ἂν μὲν ὁ m εἶνε ἄρτιος, θὰ εἶνε

$$\int \text{συν}^m x\ dx = \text{ημ}x\left(\text{B}_{-1}\text{συν}^{-1}x + \text{B}_{-3}\text{συν}^{-3}x + \ldots + \text{B}_{m+1}\text{συν}^{m+1}x\right)$$

ἂν δὲ ὁ m εἶνε περιττός, θὰ εἶνε

$$\int \text{συν}^m x\ dx =$$

$$= \text{ημ}x\left(\text{B}_{-2}\text{συν}^{-2}x + \text{B}_{-4}\text{συν}^{-4}x + \ldots + \text{B}_{m+1}\text{συν}^{m+1}x\right) + \varepsilon \int \frac{dx}{\text{συν}x}$$

Ὥστε, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ἀκεραίου m, πάντοτε δυνάμεθα νὰ εὑρωμεν τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \sigma\upsilon\nu^m x\, dx$$

89. Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν καὶ διὰ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \eta\mu^m x\, dx$$

τοὺς ἑξῆς δύο τύπους

$$(9)\qquad \int \eta\mu^m x\, dx = -\frac{\sigma\upsilon\nu x\ \eta\mu^{m-1} x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \eta\mu^{m-2} x\, dx$$

$$(10)\qquad \int \eta\mu^m x\, dx = \frac{m+2}{m+1}\int \eta\mu^{m+2} x\, dx + \frac{\eta\mu^{m+1} x\ \sigma\upsilon\nu x}{m+1},$$

$$(m+1 \gtrless 0)$$

ὧν ὁ μὲν πρῶτος ἐλαττοῖ τὸν ἐκθέτην m κατὰ δύο μονάδας, ὁ δὲ δεύτερος αὐξάνει αὐτὸν κατὰ 2 μονάδας· ἂν λοιπὸν εἶνε ὁ m ἀκέραιος καὶ θετικὸς καταντᾷ (διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ πρώτου τύπου) ἢ 0 ἢ 1, ἂν δὲ εἶνε ἀκέραιος ἀρνητικός, καταντᾷ (διὰ τοῦ δευτέρου τύπου) ἢ -1 ἢ -2· ἀλλὰ τότε τὸ ὁλοκλήρωμα εἶνε γνωστόν.

Σημειωτέον δὲ ὅτι ἐκ τοῦ ἑτέρου τῶν ὁλοκληρωμάτων

$$\int \sigma\upsilon\nu^m x\, dx \quad \text{καὶ} \quad \int \eta\mu^m x\, dx$$

προκύπτει τὸ ἕτερον, ἐὰν ἀντὶ τοῦ x τεθῇ $\frac{\pi}{2} - x_1$· καὶ διὰ τοῦτο οἱ τύποι τῆς ἀναγωγῆς τοῦ ἑτέρου ἐξ αὐτῶν δίδουσιν ἀμέσως καὶ τοὺς τοῦ ἄλλου διὰ τῆς αὐτῆς ἀντικαταστάσεως.

90. Ἐὰν ὁ ἐκθέτης m εἶνε ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός, δυνάμεθα καὶ ἄλλως νὰ εὕρωμεν τὰ αὐτὰ ὁλοκληρώματα ἀναπτύσσοντες τὰς δυνάμεις $\sigma\upsilon\nu^m x$ καὶ $\eta\mu^m x$ εἰς ἄθροισμα συνημιτόνων ἢ ἡμιτόνων τόξων πολλαπλασίων τοῦ x· γίνεται δὲ τοῦτο ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ εἶνε

$$\sigma\upsilon\nu x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$$

έπεται

$$2^{m}.\,\sigma\upsilon\nu^{m}x=\left(e^{xi}+e^{-xi}\right)^{m}=$$

$$=e^{mix}+m\,e^{(m-2)xi}+\frac{m(m-1)}{1.2}e^{(m-4)xi}+\;\ldots\;+e^{-mxi}$$

καὶ ἂν ἑνώσωμεν τοὺς ἀπὸ τῶν ἄκρων ἐξίσου ἀπέχοντας ὅρους τοῦ ἀναπτύγματος, εὑρίσκομεν

$$(11)\qquad 2^{m}\sigma\upsilon\nu^{m}x=\left(e^{mxi}+e^{-mxi}\right)+m\left(e^{(m-2)xi}+e^{-(m-2)xi}\right)+$$
$$+\frac{m(m-1)}{1.2}\left(e^{(m-4)xi}+e^{-(m-4)xi}\right)+\ldots$$

ὁ τελευταῖος ὅρος τῆς ἰσότητος ταύτης θὰ εἶνε διάφορος καθ' ὅσον ὁ m εἶνε ἄρτιος ἢ περιττός· διότι, ἂν μὲν εἶνε ὁ m περιττὸς (ἔστω $m=2n+1$), ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος εἶνε ἄρτιος $(2n+2)$· ὥστε οἱ δύο μεσαῖοι ὅροι αὐτοῦ ἑνούμενοι δίδουσιν ἕνα, τὸν ἑξῆς

$$\frac{m(m-1)\,(m-2)\;\ldots\;(m-n+1)}{1\;\;2\;\;3\;\;\ldots\;\;n}\left(e^{xi}+e^{-xi}\right)$$

Ἐὰν δὲ ὁ m εἶνε ἄρτιος (ἔστω $m=2n$), ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος εἶνε περιττὸς $(=2n+1)$ καὶ ὁ μεσαῖος ὅρος μένει μόνος· εἶνε δὲ ὁ ἀκόλουθος

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\;\;2\;\;3\;\;\ldots\;\;n}$$

ἐπειδὴ δὲ διὰ πάντα ἀριθμὸν p εἶνε

$$e^{pxi}+e^{-pxi}=2\sigma\upsilon\nu\,(px)$$

ἡ ἰσότης (11) γίνεται

$$2^{m-1}\sigma\upsilon\nu^{m}x=\sigma\upsilon\nu(mx)+m\,\sigma\upsilon\nu(m-2)x+\frac{m(m-1)}{2}\sigma\upsilon\nu(m-4)x+\;\ldots$$

καὶ τελευταῖος ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος τούτου θὰ εἶνε

$$\text{ὁ}\quad\frac{m(m-1)(m-2)\;\ldots\;(m-n+1)}{1\;\;2\;\;3\;\;\ldots\;\;n}\sigma\upsilon\nu x\quad\text{ἂν}\quad m=2n+1$$

$$\text{ἀλλ' ὁ}\quad\frac{1}{2}\cdot\frac{m(m-1)(m-2)\;\ldots\;(m-n+1)}{1\;\;2\;\;3\;\;\ldots\;\;n}\quad\text{ἂν}\quad m=2n$$

Μετὰ τὴν τοιαύτην ἀνάπτυξιν τῆς δυνάμεως $\sigma\upsilon\nu^{m}x$, ἡ ὁλοκλήρωσις αὐτῆς εἶνε εὐκολωτάτη· τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς ὁλοκληρώσεως εἶνε

$$2^{m-1}\int \text{συν}^m x\, dx= \tag{12}$$

$$=\frac{\text{ημ}(mx)}{m}+\frac{m}{1}\cdot\frac{\text{ημ}(m-2)x}{m-2}+\frac{m(m-1)}{1.2}\,\frac{\text{ημ}(m-4)x}{m-4}+\cdots$$

π. χ. εἶνε

$$\int \text{συν}^5 x\, dx=\frac{1}{2^4}\left\{\frac{\text{ημ}\,5x}{5}+5\frac{\text{ημ}\,3x}{3}+10\frac{\text{ημ}x}{1}\right\}$$

καὶ $$\int \text{συν}^6 x\, dx=\frac{1}{2^5}\left\{\frac{\text{ημ}\,6x}{6}+6.\frac{\text{ημ}\,4x}{4}+15\frac{\text{ημ}\,2x}{2}+10x\right\}$$

91. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀναχωροῦντες ἀπὸ τῆς ἰσότητος

$$\text{ημ}x=\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}$$

δυνάμεθα νὰ ἀναπτύξωμεν καὶ τὴν δύναμιν $\text{ημ}^m x$ εἰς ἄθροισμα ἡμιτόνων ἢ συνημιτόνων τῶν πολλαπλασίων τοῦ x καὶ νὰ ὁλοκληρώσωμεν αὐτήν· παραλείποντες χάριν συντομίας τὸ ἀνάπτυγμα τοῦτο, παρατηροῦμεν μόνον, ὅτι τοῦτο εὑρίσκεται ἀμέσως ἐκ τοῦ ἀναπτύγματος τῆς δυνάμεως $\text{συν}^m x$, ἂν ἀντὶ x τεθῇ $\frac{\pi}{2}-x$.

92. Η μέθοδος αὕτη τῆς ὁλοκληρώσεως τῶν δυνάμεων $\text{συν}^m x$, $\text{ημ}^m x$ διὰ τῆς ἀναλύσεως αὐτῶν εἰς ἄθροισμα ἁπλῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων ἐπιδέχεται τὴν ἑξῆς γενίκευσιν.

Ἔστω πρὸς ὁλοκλήρωσιν τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων διαφόρων τόξων, ἅτινα πάντα εἶνε πρωτοβάθμιοι συναρτήσεις τοῦ x, ἤτοι

$$\int \text{συν}(\alpha_1 x+\beta_1)\text{συν}(\alpha_2 x+\beta_2)\ \ldots\ \text{ημ}(\gamma_1 x+\delta_1)\text{ημ}(\gamma_2 x+\delta_2)\ \ldots\ dx$$

ἐπειδὴ τὸ γινόμενον δύο ἡμιτόνων ἢ δύο συνημιτόνων ἢ ἑνὸς ἡμιτόνου καὶ ἑνὸς συνημιτόνου τρέπεται πάντοτε εἰς ἄθροισμα ἁπλῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων, ἕπεται, ὅτι καὶ τὸ γινόμενον τοῦτο δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἄθροισμα ἁπλῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων, ὧν τὰ τόξα εἶνε πρωτοβάθμιοι συναρτήσεις τοῦ x καὶ ἑπομένως δυνάμεθα πάντοτε νὰ ὁλοκληρώσωμεν αὐτό.

8)

$$\int \eta\mu^m x \,.\, \sigma\upsilon\nu^n x \; dx \qquad (m,\ n \text{ ἀκέραιοι ἀριθμοί})$$

93. Καὶ εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἐλαττώσωμεν ἢ καὶ νὰ αὐξήσωμεν ἑκάτερον τῶν ἐκθετῶν κατὰ 2 μονάδας.

Ἔστω πρότερον ὁ ἐκθέτης n· ἵνα ἐλαττώσωμεν αὐτὸν κατὰ 2 μονάδας, γράφομεν τὸ πρὸς ὁλοκλήρωσιν δοθὲν ὡς ἀκολούθως

$$\int \eta\mu^m x \,.\, \sigma\upsilon\nu^n x \, dx = \int \eta\mu^m x . \sigma\upsilon\nu^{n-1} x \; d\,(\eta\mu x) =$$

$$= \frac{1}{m+1} \int \sigma\upsilon\nu^{n-1} x . d(\eta\mu^{m+1} x) \qquad (m+1 \gtrless 0)$$

ἔπειτα ὁλοκληροῦμεν κατὰ παράγοντας καὶ εὑρίσκομεν

$$\int \eta\mu^m x . \sigma\upsilon\nu^n x \; dx =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^{n-1} x \, \eta\mu^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \eta\mu^{m+2} x \; \sigma\upsilon\nu^{n-2} x \;\; dx \qquad (13)$$

καὶ ἂν εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ δευτέρου μέλους ἀντὶ $\eta\mu^{m+2} x$ θέσωμεν $\eta\mu^m x(1 - \sigma\upsilon\nu^2 x)$, τὸ ῥηθὲν ὁλοκλήρωμα ἀναλύεται εἰς τὰ ἑξῆς δύο

$$\int \eta\mu^{m+2} x \; \sigma\upsilon\nu^{n-2} x \; dx = \int \eta\mu^m x \sigma\upsilon\nu^{n-2} x \; dx - \int \eta\mu^m x \;\; \sigma\upsilon\nu^n x \; dx$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὸν τύπον (13) εὑρίσκομεν (ἂν $m+n \gtrless 0$)

$$\int \eta\mu^m x \; \sigma\upsilon\nu^n x dx =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^{n-1} x . \eta\mu^{m+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \eta\mu^m x \; \sigma\upsilon\nu^{n-2} x \; dx \qquad (14)$$

ὁ τύπος οὗτος ἐλαττοῖ τὸν ἐκθέτην n κατὰ 2 μονάδας· λύοντες δ' αὐτὸν πρὸς τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ δευτέρου μέλους καὶ γράφοντες $n+2$ ἀντὶ n, εὑρίσκομεν τὸν ἑξῆς τύπον, δι' οὗ αὐξάνεται ὁ ἐκθέτης n κατὰ δύο μονάδας

$$(14') \qquad \int \eta\mu^m x \,\sigma\upsilon\nu^n x\, dx =$$

$$= \frac{m+n+2}{n+1}\int \eta\mu^m x\, \sigma\upsilon\nu^{n+2} x\, dx - \frac{\sigma\upsilon\nu^{n+1}x\ \eta\mu^{m+1}x}{n+1} \quad (n+1 \gtrless 0)$$

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν καὶ διὰ τὸν ἐκθέτην m τοῦ ἡμιτόνου τοὺς ἑξῆς δύο τύπους

$$(15) \qquad \int \eta\mu^m x\ \sigma\upsilon\nu^n x\, dx =$$

$$= -\frac{\eta\mu^{m-1}x\ \sigma\upsilon\nu^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \eta\mu^{m-2}x\ \sigma\upsilon\nu^n x\, dx$$

$$(15') \qquad \int \eta\mu^m x\ \sigma\upsilon\nu^n x\, dx =$$

$$= \frac{m+n+2}{m+1}\int \eta\mu^{m+2}x\ \sigma\upsilon\nu^n x\, dx + \frac{\eta\mu^{m+1}x\ \sigma\upsilon\nu^{n+1}x}{m+1}$$

94. Ἐξαιρουμένων τῶν τριῶν περιπτώσεων

$$m+1=0, \quad n+1=0, \quad m+n=0 \qquad (16)$$

εἰς πᾶσαν ἄλλην δυνάμεθα ἐφαρμόζοντες τοὺς εὑρεθέντας τύπους (14, 14') (15, 15') νὰ προσθέσωμεν εἰς ἑκάτερον τῶν ἐκθετῶν m, n ἢ καὶ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀφ' ἑκατέρου δύο μονάδας θετικάς· τοῦτο δὲ δύναται νὰ γίνηται, (ὅταν οἱ ἐκθέται m καὶ n εἶνε ἀκέραιοι), μέχρις οὗ φθάσωμεν ἢ εἰς μίαν τῶν ἐξαιρεθεισῶν περιπτώσεων (16) ἢ εἰς ὁλοκλήρωμα ὅμοιον, οὗτινος ἑκάτερος τῶν ἐκθετῶν m, n νὰ εἶνε ἢ 0 ἢ 1, (ὅπερ ὁλοκλήρωμα εὑρίσκεται ἀμέσως).

95. Μένει νὰ ἐξετάσωμεν τὰ τρία ὁλοκληρώματα

$$\int \frac{\sigma\upsilon\nu^n x\, dx}{\eta\mu x}, \quad \int \frac{\eta\mu^m x}{\sigma\upsilon\nu x} dx, \quad \int \epsilon\varphi^m x\, dx$$

ἅτινα ἔχουσι κατὰ σειρὰν

$$m+1=0, \quad n+1=0, \quad m+n=0.$$

Ἐφαρμόζοντες τοὺς τύπους (14) (14') εἰς τὸ πρῶτον, αὐξάνομεν τὸν ἐκθέτην n (ἂν εἶνε ἀρνητικὸς καὶ διάφορος τοῦ -1) κατὰ 2 μονάδας ἢ ἐλαττοῦμεν αὐτὸν κατὰ 2 μονάδας (ἂν εἶνε θετικός)· ἑπομένως (ἐπειδὴ ὁ n εἶνε ἀκέραιος) θὰ φθάσωμεν ἐπὶ τέλους εἰς ἓν ἐκ τῶν ὁλοκληρωμάτων

$$\int \frac{\text{συν}x\, dx}{\text{ημ}x}, \quad \int \frac{dx}{\text{ημ}x} \quad \text{ἂν ὁ } n \text{ εἶνε θετικὸς}$$

$$\text{ἢ} \int \frac{dx}{\text{ημ}x\ \text{συν}x}, \quad \int \frac{dx}{\text{ημ}x} \quad \text{ἂν ὁ } n \text{ εἶνε ἀρνητικὸς}$$

ἅτινα πάντα εἶνε γνωστά.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν καὶ τὸ δεύτερον ὁλοκλήρωμα μεταβάλλοντες τὸν ἀκέραιον ἐκθέτην m κατὰ 2 μονάδας, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς ὁλοκλήρωμα, ἐν ᾧ ὁ ἐκθέτης m ἔχει μίαν τῶν ἑξῆς τιμῶν 1, 0 ἢ -1.

Περὶ τοῦ τρίτου ὁλοκληρώματος προκειμένου, παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε

$$\int \text{εφ}^m x\, dx = \int \text{εφ}^{m-2} x . \text{εφ}^2 x\ dx$$

καὶ ἐπειδὴ $\quad \text{εφ}^2 x = \dfrac{1}{\text{συν}^2 x} - 1, \quad$ ἕπεται

$$\int \text{εφ}^m x\, dx = \int \text{εφ}^{m-2} x \frac{dx}{\text{συν}^2 x} - \int \text{εφ}^{m-2} x\, dx$$

ἤτοι

$$\int \text{εφ}^m x\, dx = \frac{\text{εφ}^{m-1} x}{m-1} - \int \text{εφ}^{m-2} x\, dx \tag{17}$$

Ἐὰν ὁ ἐκθέτης m εἶνε ἀκέραιος καὶ θετικός, διὰ τοῦ τύπου τούτου εὑρίσκεται τὸ ὁλοκλήρωμα· διότι ὁ ἐκθέτης m καταντᾷ διὰ τῆς ἐπανειλημμένης ἐφαρμογῆς αὐτοῦ ἢ 0 (ἂν εἶνε ἄρτιος) ἢ 1 (ἂν περιττός)· καὶ ἂν μὲν ὁ m εἶνε ἄρτιος, ἔχομεν

$$\int \text{εφ}^m x\, dx = \frac{\text{εφ}^{m-1} x}{m-1} - \frac{\text{εφ}^{m-3} x}{m-3} + \frac{\text{εφ}^{m-5} x}{m-5} - \ldots \pm \frac{\text{εφ}x}{1} \pm x$$

ἂν δὲ ὁ m εἶνε περιττός, εὑρίσκομεν

$$\int \text{εφ}^m x\, dx = \frac{\text{εφ}^{m-1} x}{m-1} - \frac{\text{εφ}^{m-3} x}{m-3} + \frac{\text{εφ}^{m-5} x}{m-5} - \ldots \pm \frac{\text{εφ}^2 x}{2} \pm l\, \text{συν}x$$

Ἐὰν ὁ ἐκθέτης m εἶνε ἀκέραιος ἀρνητικός, λύομεν τὸν τύπον (17) πρὸς τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ δευτέρου μέλους καὶ ἔπειτα γράφομεν $m+2$ ἀντὶ m, οὕτω προκύπτει

$$\int \text{εφ}^m x\, dx = \frac{\text{εφ}^{m+1} x}{m+1} - \int \text{εφ}^{m+2} x\, dx$$

Διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου τούτου δυνάμεθα νὰ καταστήσωμεν τὸν ἀρνητικὸν καὶ ἀκέραιον ἐκθέτην m ἴσον τῷ -1 (ἂν εἶνε περιττὸς) ἢ τῷ 0 (ἂν εἶνε ἄρτιος)· τότε δὲ τὸ ὁλοκλήρωμα εἶνε γνωστόν.

96. Συνοψίζοντες τὰ προειρημένα πάντα, βλέπομεν, ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \eta\mu^{m} x \; \sigma\upsilon\nu^{n} x \, dx$$

εὑρίσκεται πάντοτε, ὅταν ἀμφότεροι οἱ ἐκθέται εἶνε ἀκέραιοι ἀριθμοὶ οἱοιδήποτε.

Σημείωσις. Εἴδομεν (σελ. 119) ὅτι πᾶν ὁλοκλήρωμα διωνύμου διαφορικοῦ ἀνάγεται εἰς ὁλοκλήρωμα τῆς μορφῆς (8)· ἀλλὰ καὶ τἀνάπαλιν πᾶν ὁλοκλήρωμα τῆς μορφῆς (8), ἐὰν οἱ ἐκθέται m καὶ n εἶνε σύμμετροι ἀριθμοί, ἀνάγεται εἰς ὁλοκλήρωμα διωνύμου διαφορικοῦ· διότι, ἂν τεθῇ $\eta\mu^2 x = t$, θὰ εἶνε

$$\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - t \quad \text{καὶ} \quad dx = \frac{dt}{2\sqrt{t(1-t)}}$$

ὅθεν
$$\int \eta\mu^{m} x \; \sigma\upsilon\nu^{n} x \, dx = \frac{1}{2} \int t^{\frac{m-1}{2}} (1-t)^{\frac{n-1}{2}} dt \qquad (18)$$

Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι ἡ ὁλοκλήρωσις δύναται νὰ ἀχθῇ εἰς ὁλοκλήρωσιν ῥητῆς συναρτήσεως, ὅταν εἶνε

$$\text{ἢ} \qquad \frac{m-1}{2} = \text{ἀκεραίῳ}$$

$$\text{ἢ} \qquad \frac{n-1}{2} = \text{ἀκεραίῳ}$$

$$\text{ἢ} \qquad \frac{m+n}{2} = \text{ἀκεραίῳ}$$

τουτέστιν, ὅταν ὁ ἕτερος τῶν ἐκθετῶν m ἢ n εἶνε ἀκέραιος καὶ περιττὸς (τοῦ ἑτέρου ὄντος συμμέτρου οἱουδήποτε), ἢ ὅταν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶνε ἀκέραιος καὶ ἄρτιος ἀριθμός.

Καὶ ἂν μὲν εἶνέ τις τῶν ἐκθετῶν, ἔστω ὁ n, ἀκέραιος καὶ περιττὸς ἀριθμός, ἡ παράστασις $t^{\frac{m-1}{2}} (1-t)^{\frac{n-1}{2}} dt$ τρέπεται εὐκόλως εἰς ῥητὴν (ἂν δὲν εἶνε).

Ἐὰν δὲ τὸ ἄθροισμα m+n εἶνε ἀκέραιος ἄρτιος (=2ρ), θέτομεν

$$\varepsilon\varphi^2 x = t \quad \text{ἢ} \quad x = \text{τοξ εφ} \left(t^{\frac{1}{2}} \right) \qquad \text{καὶ} \qquad dx = \frac{1}{2} \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}}$$

ὅτε προκύπτει

$$\int \eta\mu^{m} x \; \sigma\upsilon\nu^{n} x \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{t^{\frac{m-1}{2}} dt}{(1+t)^{\rho+1}}$$

ἡ δὲ ὁλοκληρωτέα παράστασις τρέπεται εὐκόλως εἰς ῥητὴν (διότι m εἶνε σύμμετρος ἀριθμός).

Παρατηρήσεως ἄξιον εἶνε προσέτι, ὅτι, ὅταν ὁ ἕτερος τῶν ἐκθετῶν m ἢ n εἶνε ἀκέραιος θετικὸς καὶ περιττός, ἡ ὁλοκλήρωσις ἐκτελεῖται πάντοτε εἴτε σύμμετρος εἶνε ὁ ἄλλος εἴτε ἀσύμμετρος.

Ἐὰν λ. χ. εἶνε ὁ m περιττὸς καὶ θετικὸς ἀκέραιος, διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (15) θὰ φθάσωμεν εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \eta\mu x \ \sigma\upsilon\nu^{n} x \, dx \quad \text{ὅπερ εἶνε} \ -\frac{\sigma\upsilon\nu^{n+1} x}{n+1} \qquad \text{ἂν } n+1 \gtrless 0$$

$$\text{ἢ} \quad -l\sigma\upsilon\nu x \quad \text{ἂν} \quad n=-1$$

ἀλλὰ καὶ ἄνευ τοῦ τύπου (15) κατορθοῦται ἡ ὁλοκλήρωσις, ἐὰν τεθῇ ἀντὶ τοῦ $\eta\mu^{m}x$ τὸ ἴσον αὐτῷ $\eta\mu x.(1-\sigma\upsilon\nu^2 x)^{\frac{m-1}{2}}$ καὶ ἀναπτυχθῇ ἡ δύναμις, ἧς ὁ ἐκθέτης εἶνε θετικὸς καὶ ἀκέραιος ἀριθμὸς κατὰ τὸν τύπον τοῦ διωνύμου.

9) $\int \varphi(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x)dx$

ἔνθα φ δηλοῖ ἀκεραίαν συνάρτησιν.

97. Ἐπειδὴ πᾶς ὅρος τῆς ἀκεραίας συναρτήσεως φ εἶνε τῆς μορφῆς

$$A\, \eta\mu^{\lambda} x \ \sigma\upsilon\nu^{\mu} x$$

τῶν λ καὶ μ ὄντων θετικῶν ἀκεραίων (ἢ καὶ 0), ἕπεται, ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα (9) εἶνε ἄθροισμα ὁλοκληρωμάτων τῆς μορφῆς (8), περὶ ὧν προηγουμένως διελάβομεν· ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ προβῶμεν εἰς τὴν ὁλοκλήρωσιν (9) καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἐὰν ἀντὶ τοῦ $\eta\mu^2 x$ θέσωμεν $1-\sigma\upsilon\nu^2 x$ εἰς τὴν ἀκεραίαν συνάρτησιν φ, ἀναλύεται αὕτη εἰς ἄθροισμα ὅρων, ὧν ἕκαστος εἶνε τῆς μορφῆς $B\,\sigma\upsilon\nu^{n} x$ ἢ τῆς μορφῆς $B\,\sigma\upsilon\nu^{n} x\, \eta\mu x$· ἐὰν δὲ ἔπειτα ἀναπτύξωμεν τὴν δύναμιν $\sigma\upsilon\nu^{n} x$ εἰς ἄθροισμα συνημιτόνων τῶν πολλαπλασίων τοῦ x, θὰ ἀποτελῆται ἡ ἀκεραία συνάρτησις φ ἐξ ὅρων τῆς μορφῆς

$$\Gamma\, \sigma\upsilon\nu \rho x \quad \text{ἢ τῆς} \quad \Gamma\, \sigma\upsilon\nu\rho x . \eta\mu x$$

ἀλλ' εἶνε $\quad \sigma\upsilon\nu\rho x.\eta\mu x = \frac{1}{2}\Big[\eta\mu(\rho+1)x - \eta\mu(\rho-1)x\Big]$

ὥστε ἡ ἀκεραία συνάρτησις $\varphi(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x)$ θὰ παρασταθῇ ὡς ἄθροισμα ἁπλῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων τόξων πολλαπλασίων τοῦ x, ἤτοι ὡς ἄθροισμα ὅρων, ὧν ἕκαστος εἶνε τῆς μορφῆς

$$C\, \sigma\upsilon\nu\, \rho x \quad \text{ἢ τῆς} \quad C'\eta\mu\, \rho x$$

$$(\Gamma) \qquad \int \varphi(\eta\mu x,\ \sigma\upsilon\nu x)\ \mathrm{R}(x)dx$$

ἔνθα φ δηλοῖ ἀκεραίαν συνάρτησιν.

99. Ἐπειδὴ ἡ ἀκεραία συνάρτησις φ εἶνε ἄθροισμα ὅρων τῆς μορφῆς

$$\mathrm{C}\,\sigma\upsilon\nu\rho x \quad \text{ἢ} \quad \mathrm{C}'\,\eta\mu\rho x,$$

τὸ προκείμενον ὁλοκλήρωμα ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα ὁλοκληρωμάτων τῆς μορφῆς

$$\int \mathrm{R}(x)\ \sigma\upsilon\nu\rho x\ dx, \qquad \int \mathrm{R}(x)\ \eta\mu\rho x\ dx$$

ἀλλ᾽ ἀμφότερα ταῦτα προκύπτουσιν ἐκ τοῦ ἤδη θεωρηθέντος ὁλοκληρώματος

$$\int e^{\rho x}\mathrm{R}(x)\,dx$$

ἐὰν τεθῇ ρί ἀντὶ ρ· ἑπομένως καὶ ταῦτα ἀνάγονται καθ᾽ ὃν τρόπον καὶ ἐκεῖνο εἰς γνωστὰς συναρτήσεις καὶ εἰς τὰ δύο ὁλοκληρώματα

$$\int \frac{\sigma\upsilon\nu\rho x}{x}dx, \qquad \int \frac{\eta\mu\,\rho x}{x}dx$$

ἢ ἂν τεθῇ $\rho x = t$, εἰς τὰ ἑξῆς δύο

$$\int \frac{\sigma\upsilon\nu t}{t}dt \qquad \int \frac{\eta\mu t}{t}dt$$

Ἐὰν δὲ ταῦτα ἐν τῷ ἐξαγομένῳ ἀφανισθῶσι, τὸ ὁλοκλήρωμα εὑρίσκεται καὶ εἶνε ῥητὴ συνάρτησις τοῦ x ἀκεραία δὲ τῶν $\eta\mu x$ καὶ $\sigma\upsilon\nu x$.

Τοῦτο συμβαίνει λ. χ. εἰς τὸ ἑξῆς παράδειγμα

$$\int \left(\sigma\upsilon\nu\alpha x - \frac{\eta\mu\alpha x}{\alpha x}\right)\left(\sigma\upsilon\nu\beta x - \frac{\eta\mu\beta x}{\beta x}\right)dx$$

$$\text{ἢ} \qquad \int \sigma\upsilon\nu\alpha x.\sigma\upsilon\nu\beta x\ dx +$$

$$-\int\left(\frac{\eta\mu\alpha x\ \sigma\upsilon\nu\beta x}{\alpha x} + \frac{\eta\mu\beta x\ \sigma\upsilon\nu\alpha x}{\beta x}\right)dx + \int \frac{\eta\mu\alpha x\ \eta\mu\beta x}{\alpha\beta x^2}dx$$

τὸ τελευταῖον τοῦτο ὁλοκλήρωμα, ἐὰν ἐφαρμοσθῇ ἐπ᾽ αὐτοῦ ἡ κατὰ παράγοντας ὁλοκλήρωσις δίδει

$$\frac{1}{\alpha\beta}\int\frac{\eta\mu\alpha x\ \eta\mu\beta x}{x^2}dx = -\frac{\eta\mu\alpha x\ \eta\mu\beta x}{\alpha\beta x} +$$

$$+\int\left(\frac{\eta\mu\alpha x\ \sigma\upsilon\nu\beta x}{\alpha x}+\frac{\eta\mu\beta x\ \sigma\upsilon\nu\alpha x}{\beta x}\right)dx$$

ὅθεν τὸ προκείμενον ὁλοκλήρωμα καταντᾷ

$$\int\sigma\upsilon\nu\alpha x . \sigma\upsilon\nu\beta x\ dx - \frac{\eta\mu\beta x . \eta\mu\alpha x}{\alpha\beta x}$$

τοῦτο δὲ ὁλοκληρούμενον δίδει

$$\frac{\eta\mu(\alpha+\beta)x}{2(\alpha+\beta)}+\frac{\eta\mu(\alpha-\beta)x}{2(\alpha-\beta)}-\frac{\eta\mu\alpha x . \eta\mu\beta x}{\alpha\beta x}$$

Ἐὰν ἡ συνάρτησις $R(x)$ εἶνε ἀκεραία, τὸ ὁλοκλήρωμα (Γ) εὑρίσκεται πάντοτε.

$$(\Delta) \qquad \int e^{\rho x} R(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x)dx$$

100. Ἐὰν ἡ ῥητὴ συνάρτησις R εἶνε ἀκεραία συνάρτησις τῶν $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$, ἀναλύομεν αὐτὴν εἰς ἄθροισμα ἁπλῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων τόξων πολλαπλασίων τοῦ x κατὰ τὰ προηγουμένως εἰρημένα, ὅτε καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο ἀνάγεται εἰς ἄθροισμα ὁλοκληρωμάτων τῆς μορφῆς

$$\int e^{\rho x}\sigma\upsilon\nu\mu x\ dx, \qquad \int e^{\rho x}\eta\mu\,\mu x\ dx$$

ταῦτα δὲ εὑρίσκονται διὰ τῆς κατὰ παράγοντας ὁλοκληρώσεως ἢ καὶ ὡς ἑξῆς· ἐὰν παραστήσωμεν τὸ πρῶτον διὰ τοῦ α τὸ δὲ δεύτερον διὰ τοῦ β, εἶνε

$$\alpha+\beta i = \int e^{(\rho+\mu i)x}dx = \frac{e^{(\rho+\mu i)x}}{\rho+\mu i}$$

ἢ καὶ $$\alpha+\beta i = \frac{e^{\rho x}(\sigma\upsilon\nu\,\mu x + i\eta\mu\,\mu x)(\rho-\mu i)}{\rho^2+\mu^2}$$

καὶ ἀποχωρίζοντες τὰ πραγματικὰ ἀπὸ τῶν φανταστικῶν, εὑρίσκομεν

$$(20)\qquad \begin{aligned} \int e^{\rho x} \text{συν}\, \mu x\, dx &= \frac{e^{\rho x}(\rho\, \text{συν}\, \mu x + \mu\, \text{ημ}\, \mu x)}{\rho^2+\mu^2} \\ \int e^{\rho x} \text{ημ}\, \mu x\, dx &= \frac{e^{\rho x}(\rho\, \text{ημ}\, \mu x - \mu\, \text{συν}\, \mu x)}{\rho^2+\mu^2} \end{aligned}$$

101. Δυνάμεθα νὰ ἀποφύγωμεν τὴν ἀνάλυσιν τῶν δυνάμεων τοῦ $\text{ημ}x$ καὶ τοῦ $\text{συν}x$ εἰς ἁπλᾶ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα τῶν πολλαπλασίων τοῦ x προβαίνοντες ὡς ἀκολούθως.

Τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int e^{\rho x} \mathrm{R}(\text{ημ}x,\ \text{συν}x)dx$$

ἐὰν R εἶνε ἀκεραία συνάρτησις τῶν $\text{ημ}x$ καὶ $\text{συν}x$, καὶ ἐφαρμοσθῇ εἰς αὐτὸ ἡ κατὰ μέρη ὁλοκλήρωσις, εἶνε ἄθροισμα ὁλοκληρωμάτων τῆς μορφῆς

$$\mathrm{C}\int e^{\rho x}\, \text{ημ}^{\mathrm{m}} x\, \text{συν}^{\mathrm{n}} x\, dx$$

Ἐὰν δὲ ἀντὶ $\text{συν}^2 x$ θέσωμεν τὸ ἴσον αὐτῷ $1-\text{ημ}^2 x$, ἀνάγεται ἡ εὕρεσις τούτου εἰς τὴν εὕρεσιν ὁλοκληρωμάτων τῆς μορφῆς

$$\int e^{\rho x}\, \text{ημ}^{\mathrm{m}} x\, dx \qquad \text{ἢ} \qquad \int e^{\rho x}\, \text{ημ}^{\mathrm{m}} x\, \text{συν}x\, dx$$

καθ᾽ ὅσον ὁ ἐκθέτης n εἶνε ἄρτιος ἢ περιττός.

Ἀλλ᾽ ἂν εἰς τὸ δεύτερον ἐφαρμόσωμεν τὴν κατὰ παράγοντας ὁλοκλήρωσιν, εὑρίσκομεν

$$\int e^{\rho x}\, \text{ημ}^{\mathrm{m}} x\, \text{συν}x\, dx =$$

$$= \int e^{\rho x} d\left\{\frac{\text{ημ}^{\mathrm{m}+1} x}{m+1}\right\} = e^{\rho x}\frac{\text{ημ}^{\mathrm{m}+1} x}{m+1} - \frac{\rho}{m+1}\int e^{\rho x}\, \text{ημ}^{\mathrm{m}+1} x\, dx$$

ἀρκεῖ ἄρα νὰ εὕρωμεν τὰ ὁλοκληρώματα τῆς μορφῆς

$$\int e^{\rho x}\, \text{ημ}^{\mathrm{m}} x\, dx.$$

Ἐφαρμόζοντες εἰς τὰ ὁλοκληρώματα ταῦτα τὴν κατὰ παράγοντας ὁλοκλήρωσιν (καθ' ὃν τρόπον ἐφηρμόσαμεν αὐτὴν εἰς τὰ ὁλοκληρώματα τῶν δυνάμεων του ημx (ἐδ. 88) εὑρίσκομεν εὐκόλως τὸν ἑξῆς τύπον τῆς ἀναγωγῆς

$$(21) \qquad \int e^{\rho x} \eta\mu^{m} x\, dx =$$

$$= \frac{m(m-1)}{m^2+\rho^2} \int e^{\rho x} \eta\mu^{m-2} x\, dx + \frac{e^{\rho x}}{m^2+\rho^2} (\rho\, \eta\mu x - m\, \sigma\upsilon\nu x) \eta\mu^{m-1} x$$

ἐφαρμόζοντες δὲ ἐπανειλημμένως τὸν τύπον τοῦτον, φθάνομεν ἐπὶ τέλους εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα

$\int e^{\rho x} dx$ ἂν m εἶνε ἄρτιος, ἢ εἰς τὸ $\int e^{\rho x} \eta\mu x\, dx$ ἂν περιττός·

Ἐκ τούτου συνάγεται, ὅτι, ἂν ἡ συνάρτησις R εἶνε ἀκεραία, τὸ ὁλοκλήρωμα (Δ) εὑρίσκεται καὶ εἶνε τῆς αὐτῆς μορφῆς

$$e^{\rho x} R_1(\eta\mu x,\ \sigma\upsilon\nu x).$$

Ἐὰν ἡ συνάρτησις R εἶνε ῥητή, θέτομεν

$$e^{xi} = t$$

ὅτε προκύπτει

$$\int e^{\rho x} R(\eta\mu x,\ \sigma\upsilon\nu x)\, dx = \int e^{\rho x} f(t)\, dt$$

τοῦ $f(t)$ δηλοῦντος ῥητὴν συνάρτησιν τοῦ t.

Ἐὰν δὲ ἡ ῥητὴ αὕτη συνάρτησις ἀναλυθῇ εἰς τὸ ἀκέραιον μέρος αὐτῆς (ἂν ἔχῃ) καὶ εἰς ἁπλᾶ κλάσματα, θὰ εἶνε

$$f(t) = \Sigma M_k t^k + \Sigma \frac{N_\tau}{t^\tau} + \Sigma \frac{\varphi_\alpha(t)}{(t-\alpha)^\lambda} + \Sigma \frac{\varphi_\beta(t)}{(t-\beta)^\mu} + \ldots + \Sigma \frac{\varphi_\kappa(t)}{(x-\kappa)^\nu}$$

ἔνθα α, β, γ . . . κ εἶνε αἱ διάφοροι τοῦ 0 ῥίζαι τοῦ παρονομαστοῦ τῆς ῥητῆς συναρτήσεως $f(t)$, τὰ δὲ ἀκέραια πολυώνυμα $\varphi_\alpha(t)$, $\varphi_\beta(t)$.... εἶνε βαθμοῦ κατωτέρου ἢ οἱ παρονομασταὶ αὐτῶν· ἐπομένως τὸ προκείμενον ὁλοκλήρωμα θὰ ἀποτελῆται ἐξ ὁλοκληρωμάτων τῆς μορφῆς

$$\int e^{\rho x} t^{k} dt, \quad \int e^{\rho x} \frac{dt}{t^{\tau}} \quad \text{καὶ} \quad \int e^{\rho x} \frac{\varphi_\alpha(t)\, dt}{(t-\alpha)^{\lambda}}$$

Καὶ τὰ μὲν δύο πρῶτα εὑρίσκονται ἀμέσως· διότι εἶνε

$$\int e^{\rho x} t^{\delta} dt = i \int e^{(\rho+\delta i+i)x} dx = \frac{i\, e^{(\rho+\delta i+i)x}}{\delta i + i + \rho}$$

τοῦ δ ὄντος ἀκεραίου ἀριθμοῦ θετικοῦ ἢ καὶ ἀρνητικοῦ ἢ καὶ 0.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ τρίτου, παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε (ἐδ. 40)

$$\frac{\varphi_\alpha(t)}{(t-\alpha)^{\lambda}} = \frac{A}{t-\alpha} + \left[\frac{\sigma_\alpha(t)}{(t-\alpha)^{\lambda-1}}\right]'$$

ἑπομένως

$$\int e^{\rho x} \frac{\varphi_\alpha(t)}{(x-\alpha)^{\lambda}} dt = A \int \frac{e^{\rho x} dt}{t-\alpha} + \int e^{\rho x} \left[\frac{\sigma_\alpha(t)}{(t-\alpha)^{\lambda-1}}\right]' dt$$

καὶ ὁλοκληροῦντες κατὰ παράγοντας ἐν τῇ τελευταίᾳ ὁλοκληρώσει

$$\int e^{\rho x} \frac{\varphi_\alpha(t)}{(x-\alpha)^{\lambda}} dt =$$

$$= A \int \frac{e^{\rho x} dt}{t-\alpha} + e^{\rho x} \frac{\sigma_\alpha(t)}{(t-\alpha)^{\lambda-1}} + i\rho \int e^{\rho x} \frac{\sigma_\alpha(t)}{t(t-\alpha)^{\lambda-1}} dt$$

ἀναλύοντες δὲ τὴν συνάρτησιν $\dfrac{\sigma_\alpha(t)}{t(t-\alpha)^{\lambda-1}}$ εἰς δύο μέρη τῆς μορφῆς

$$\frac{A_1}{t} + \frac{f_\alpha(t)}{(t-\alpha)^{\lambda-1}}$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\int e^{\rho x} \frac{\varphi_\alpha(t)}{(t-\alpha)^{\lambda}} dt =$$

$$= A \int e^{\rho x} \frac{dt}{t-\alpha} - A_1 e^{\rho x} + \rho i \int e^{\rho x} \frac{f_\alpha(t)}{(t-\alpha)^{\lambda-1}} dt + e^{\rho x} \frac{\sigma_\alpha(t)}{(t-\alpha)^{\lambda-1}}$$

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον ἐλαττοῦται ὁ ἐκθέτης λ κατὰ μίαν μονάδα. Ἐὰν δὲ ἡ αὐτὴ μέθοδος ἐφαρμοσθῇ ἐπανειλημμένως, θὰ προκύψῃ ἐξαγόμενον τῆς μορφῆς

$$\int e^{\rho x}\frac{\varphi_\alpha(t)}{(t-\alpha)^\lambda}dt=e^{\rho x}\frac{\Phi_\alpha(t)}{(t-\alpha)^{\lambda-1}}+E_\alpha\int e^{\rho x}\frac{dt}{t-\alpha}$$

ἐπομένως θὰ εἶνε

$$(22)\qquad \int e^{\rho x}R(\eta\mu x,\ \sigma\upsilon\nu x)dx=\int e^{\rho x}f(t)\,dt=e^{\rho x}\frac{M(t)}{N(t)}+$$

$$+E_\alpha\int e^{\rho x}\frac{dt}{t-\alpha}+E_\beta\int e^{\rho x}\frac{dt}{t-\beta}+\ldots+E_\varkappa\int e^{\rho x}\frac{dt}{t-\varkappa}$$

ἔνθα $N(t)$ εἶνε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ παρονομαστοῦ τῆς ῥητῆς συναρτήσεως $f(t)$ καὶ τῆς παραγώγου αὐτοῦ· ὁ δὲ ἀριθμητὴς $M(t)$ εἶνε βαθμοῦ ἴσου ἢ κατωτέρου ἢ ὁ $N(x)$, τὰ δὲ E_α E_β . . . $E_\varkappa$ σταθεροί τινες ἀριθμοί. Ἐὰν δε πάντα τὰ E_α . . . $E_\varkappa$ εἶνε 0, τὸ ὁλοκλήρωμα εὑρίσκεται καὶ εἶνε τῆς μορφῆς

$$e^{\rho x}\frac{M(t)}{N(t)}\quad \text{ἤτοι}\quad e^{\rho x}R_1(\eta\mu x,\ \sigma\upsilon\nu x).$$

Ὡς παράδειγμα ἔστω τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int e^{x}(\varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi^2 x)dx$$

ἐὰν θέσωμεν $e^{xi}=t$, προκύπτει

$$\int e^{x}(\varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi^2 x)dx=$$

$$=\int e^{x}\left[\frac{1+i}{t}-\frac{1}{t+i}-\frac{1}{t-i}-\frac{1}{(t-i)^2}+\frac{1}{(t+i)^2}\right]dt$$

ἀλλ' εἶνε $$\int e^{x}\frac{dt}{(t+i)^2}=-\frac{e^x}{t+i}+\int e^{x}\left(\frac{1}{t+i}-\frac{1}{t}\right)dt$$

καὶ $$\int e^{x}\frac{dt}{(t-i)^2}=-\frac{e^x}{t-i}-\int e^{x}\left(\frac{1}{t-i}-\frac{1}{t}\right)dt$$

ὅθεν συνάγεται

$$\int e^{x}(\varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi^2 x)dx=e^{x}\frac{2i}{t^2+1}+\int\frac{i-1}{t}e^{x}dt=$$

$$e^{x}\frac{2i}{1+t^2}-e^{x}(1+i)=e^{x}(-1+\varepsilon\varphi x).$$

Ἐν τοῖς προηγουμένοις ὑπετέθη ὁ ρ πραγματικὸς ἀριθμός· ἐὰν εἶνε φανταστικὸς τῆς μορφῆς $\rho=\lambda i$ (τοῦ λ ὄντος πραγματικοῦ καὶ συμμέτρου ἀριθμοῦ) τὸ ὁλοκλήρωμα (Δ) εὑρίσκεται πάντοτε· διότι εὐκόλως ἀνάγεται εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα ῥητῆς συναρτήσεως.

$$\text{(E)}\qquad \int \mathrm{f}(x)\varphi\,(e^{nx},\ \eta\mu x,\ \sigma\upsilon\nu x)dx$$

ἔνθα φ δηλοῖ ἀκεραίαν συνάρτησιν τῶν

$$e^{nx},\ \eta\mu x,\ \sigma\upsilon\nu x.$$

102. Ἐπειδὴ πᾶσα ἀκεραία συνάρτησις τῶν $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$ εἶνε ἄθροισμα ὅρων τῆς μορφῆς

$$C\,\sigma\upsilon\nu\,\lambda x \quad \text{ἢ} \quad C'\eta\mu\,\lambda x$$

οἱ δὲ συντελεσταὶ C καὶ C′ εἶνε ἐνταῦθα ἀκέραιαι συναρτήσεις τοῦ e^{nx}, ἕπεται, ὅτι ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτησις δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς ἄθροισμα ὅρων τῆς μορφῆς

$$C_1\mathrm{f}(x)e^{\rho x}\sigma\upsilon\nu\lambda x \quad \text{ἢ τῆς} \quad C'_1\mathrm{f}(x)e^{\rho x}\eta\mu\lambda x.$$

Ἡ ὁλοκλήρωσις ἄρα τῆς δεδομένης συναρτήσεως (Ε) ἀνάγεται εἰς τὰς δύο ὁλοκληρώσεις

$$\int e^{\rho x}\,\mathrm{f}(x)\sigma\upsilon\nu\lambda x\,dx \quad \text{καὶ} \int e^{\rho x}\,\mathrm{f}(x)\eta\mu\lambda x\,dx$$

ἀλλ' ἂν παραστήσωμεν τὰ ὁλοκληρώματα ταῦτα κατὰ σειρὰν διὰ α καὶ β, θὰ εἶνε

$$\alpha+\beta i=\int e^{(\rho+\lambda i)x}\,\mathrm{f}(x)\,dx \qquad (23)$$

ἀνάγεται ἄρα ἡ ὁλοκλήρωσις (E) εἰς τὴν ὁλοκλήρωσιν ταύτην, περὶ ἧς ἤδη διελάβομεν· διότι τοῦ ὁλοκληρώματος τούτου εὑρεθέντος, τὸ μὲν πραγματικὸν μέρος αὐτοῦ εἶνε τὸ ὁλοκλήρωμα α, τὸ δὲ φανταστικὸν τὸ βi (ὁ ἀριθμὸς ρ ὑποτίθεται πραγματικὸς ἀριθμός).

Ἐὰν ἡ συνάρτησις $f(x)$ εἶνε ἀκεραία συνάρτησις τοῦ x, ἡ ὁλοκλήρωσις (23) ἐκτελεῖται πάντοτε, ἑπομένως καὶ ἡ ὁλοκλήρωσις (E) ἐκτελεῖται πάντοτε. Τὰ δύο ὁλοκληρώματα α καὶ β, εὕρομεν ἤδη ἐν σελ. 19.

Ἀλλ' ἐὰν ἡ συνάρτησις $f(x)$ εἶνε ῥητή, τὸ ὁλοκλήρωμα (23) ἑπομένως καὶ τὸ (E) θὰ ἀποτελῆται ἐν γένει ἐκ γνωστῶν συναρτήσεων καὶ ἐκ τοῦ ὁλοκληρώματος

$$\int \frac{e^x dx}{x}.$$

Παρατηρήσεις.

1) Ἐὰν ἡ ὁλοκληρωτέα παράστασις εἶνε ῥητὴ συνάρτησις ὑπερβατικῆς τινος συναρτήσεως ω πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ τὸ διαφορικὸν αὐτῆς, ἡ ὁλοκλήρωσις ἀνάγεται ἀμέσως εἰς τὴν ὁλοκλήρωσιν ῥητῆς συναρτήσεως.

Ἐὰν λόγου χάριν ζητῆται τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int R(e^x)dx,$$

παρατηροῦμεν, ὅτι, ἂν γράψωμεν αὐτὸ ὡς ἀκολούθως

$$\int \frac{R(e^x)}{e^x} d(e^x),$$

ἔχομεν νὰ ὁλοκληρώσωμεν ῥητὴν συνάρτησιν τοῦ e^x ἐπὶ τὸ διαφορικὸν τοῦ e^x.

Ἐὰν λοιπὸν θέσωμεν $e^x = t$, ἕπεται

$$\int R(e^x)dx = \int R(t)\frac{dt}{t}.$$

Ὡς παράδειγμα ἔστω τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$$

ἐὰν τεθῇ $e^x=t$, ἕπεται

$$\int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx=\int \frac{t-1}{t+1}\ \frac{dt}{t}=l\left\{\frac{(1+t)^2}{t}\right\}$$

ὅθεν
$$\int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx=l\left\{(1+e^x)^2\right\}-x$$

Ὁμοίως, ἂν ζητῆται τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \mathrm{R}(\text{τοξ εφ}x)\ \frac{dx}{1+x^2},$$

ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν τοξ εφ$x=t$, ἵνα ἀναχθῇ εἰς τὸ

$$\int \mathrm{R}(t)\ dt.$$

Ὁμοίως, ἂν ζητῆται τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \mathrm{R}(\text{τοξ ημ}x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

ἀρκεῖ νὰ τεθῇ τοξ ημ$x=t$.

Ὁμοίως, ἂν ζητῆται τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \mathrm{R}(lx)\frac{dx}{x}$$

ἀρκεῖ νὰ τεθῇ $lx=t$, κτλ.

2) Πλεῖστα ὁλοκληρώματα ὑπερβατικῶν συναρτήσεων ὑπάγομεν εἰς τὰς προηγουμένως ἐξετασθείσας μορφὰς διὰ τῆς ἀλλαγῆς τῆς μεταβλητῆς.

Παραδείγματος χάριν τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int x^\mu (lx)^\nu dx$$

ἂν τεθῇ $x=e^t$, γίνεται

$$\int e^{(\mu+1)t}.t^\nu dt$$

καὶ τὸ γενικώτερον ὁλοκλήρωμα

$$\int \varphi(x,\ lx)dx$$

ἔνθα φ δηλοῖ ἀκεραίαν συνάρτησιν τῶν x καὶ lx, ἐὰν τεθῇ $x=e^t$, τρέπεται εἰς τὸ

$$\int \varphi(e^t, t)e^t dt$$

καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \varphi(x)\, \mathrm{R}(lx)\, dx$$

ἔνθα R δηλοῖ ῥητὴν συνάρτησιν, ἐὰν τεθῇ $x = e^t$, τρέπεται εἰς τὸ

$$\int \varphi(e^t) e^t \mathrm{R}(t) dt.$$

Ἐπίσης τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \varphi(x, \text{τοξ ημ}x) dx$$

ἐν ᾧ φ δηλοῖ ἀκεραίαν συνάρτησιν τῶν x καὶ τοξ ημx, ἐὰν τεθῇ $t =$ τοξ ημx, τρέπεται εἰς τὸ

$$\int \varphi(\text{ημ}t, t)\, \text{συν}t\, dt$$

καὶ ἂν ἡ ἀκεραία συνάρτησις ἀναπτυχθῇ κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ ημt, θὰ εἶνε ἄθροισμα ὅρων τῆς μορφῆς σ(t)ημ$^\lambda t$ τοῦ σ(t) δηλοῦντος ἀκεραίαν συνάρτησιν· ὅθεν τὸ ζητούμενον ὁλοκλήρωμα θὰ εἶνε ἄθροισμα ὁλοκληρωμάτων τῆς μορφῆς

$$\int \sigma(t)\, \text{ημ}^\lambda t\, \text{συν}t\, dt.$$

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Εὑρεῖν τὰ ἑξῆς ὁλοκληρώματα

$$\int \frac{x dx}{\text{συν}^{2\mathrm{k}} x}, \quad \int x \,\text{εφ}^{\mathrm{k}} x\, dx, \quad \int \frac{x dx}{\text{ημ}^2 x\, \text{συν}^2 x} \qquad (\text{k ἀκέραιος ἀριθμός})$$

2) Δεῖξαι ὅτι εἶνε

$$\int \mathrm{e}^x \text{εφ}^{\mathrm{k}} x\, dx = \mathrm{e}^x \sigma(\text{εφ}\, x) + \varepsilon . \int \mathrm{e}^x \text{εφ}\, x\, dx$$

ἔνθα k εἶνε ἀκέραιος ἀριθμός, ε σταθερά τις καὶ σ ἀκεραία συνάρτησις τῆς εφx, βαθμοῦ k−1.

3) Εὑρεῖν τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int \sqrt{\alpha + \beta\, \text{εφ}^2 x}\, dx$$

Πρὸς τοῦτο γράφομεν αὐτὸ ὡς ἑξῆς

$$\int \frac{\alpha+\beta\ \varepsilon\varphi^2 x}{\sqrt{\alpha+\beta\ \varepsilon\varphi^2 x}}dx = \int \frac{(\alpha-\beta)\ dx}{\sqrt{\alpha+\beta\ \varepsilon\varphi^2 x}} + \int \frac{\beta d\ \varepsilon\varphi x}{\sqrt{\alpha+\beta\ \varepsilon\varphi^2 x}} =$$

$$=(\alpha-\beta)\int \frac{d\,\eta\mu x}{\sqrt{\alpha+(\beta-\alpha)\eta\mu^2 x}} + \beta\int \frac{d\ \varepsilon\varphi x}{\sqrt{\alpha+\beta\ \varepsilon\varphi^2 x}}$$

4) Δεῖξαι ὅτι ἡ ὁλοκλήρωσις

$$\int \frac{\sigma\upsilon\nu x\ dx}{\sqrt[n]{\sigma\upsilon\nu\ nx}}$$

ἀνάγεται εἰς ὁλοκλήρωσιν ῥητῆς συναρτήσεως ($e^{xi}=t$)

5) Νὰ ἀναχθῶσιν εἰς ὁλοκληρώσεις ῥητῶν συναρτήσεων αἱ ἑξῆς ὁλοκληρώσεις

$$\int \frac{\sigma\upsilon\nu\ mx}{\sigma\upsilon\nu\ nx}dx, \qquad \int \frac{\eta\mu\ mx}{\sigma\upsilon\nu\ nx}dx \qquad (m,\ n \text{ ἀκέραιοι})$$

6) Εὑρεῖν τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int e^{-\alpha x}(\sigma\upsilon\nu\,\beta x)^{\lambda}dx.$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

ΒΙΒΛΙΟΝ Β′

ΩΡΙΣΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΑΥΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι.

ΑΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

---

103. Ἡ καταμέτρησις τῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν μάλιστα δὲ ἡ εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν καμπυλογράμμων χωρίων (ἥτις καὶ τετραγωνισμὸς αὐτῶν λέγεται) ἄγει ἀμέσως εἰς ἀθροίσματα ποσοτήτων, ὧν ἑκάστη μὲν ἐλαττοῦται μέχρις ἐκμηδενίσεως, ἀλλὰ τὸ πλῆθος αὐτῶν αὐξάνει ὑπὲρ πάντα δοθέντα ἀριθμόν *. Ὡς ὅρια δὲ τοιούτων ἀθροισμάτων ἐμφανίζονται οὐ μόνον τὰ ἐμβαδὰ τῶν καμπυλογράμμων ἐπιπέδων χωρίων (παραβλ. Διαφορικοῦ λογισμοῦ σελ. 116) ἀλλὰ καὶ τὰ ἐμβαδὰ τῶν καμπύλων ἐπιφανειῶν καὶ τὰ μήκη τῶν τόξων καὶ οἱ ὄγκοι τῶν στερεῶν· διὰ ταῦτα ἡ ἔρευνα τῶν τοιούτων ἀθροισμάτων ἀποτελεῖ ἓν τῶν κυριωτάτων μερῶν τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ.

104. Ἡ συνήθης μορφὴ τῶν εἰρημένων ἀθροισμάτων ἡ καὶ πασῶν ἁπλουστάτη εἶνε ἡ ἀκόλουθος.

Ἔστω συνάρτησίς τις $\varphi(x)$· ἐὰν ἡ μεταβλητὴ x ἀναχωροῦσα ἀπὸ τῆς τιμῆς α λάβῃ κατὰ σειρὰν τὰς τιμὰς

$$\alpha, \quad x_1 \quad x_2 \ldots x_{\nu-1} \quad \beta$$

---

* Πρῶτος ὅστις ἐθεώρησε τοιαῦτα ἀθροίσματα εἶνε ὁ Ἀρχιμήδης· ἐν τῷ περὶ ἕλικος βιβλίῳ αὐτοῦ παραβάλλει τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕλικος πρὸς δύο ἀθροίσματα κυκλικῶν τομέων καὶ προσδιορίζει αὐτό· ὁμοίως προσδιορίζει τοὺς ὄγκους τῶν ἐκ περιστροφῆς ἐλλειψοειδῶν καὶ τοῦ ἐκ περιστροφῆς παραβολοειδοῦς, παραβάλλων αὐτοὺς πρὸς ἀθροίσματα κυλίνδρων.

καὶ ἡ συνάρτησις αὐτῆς $\varphi(x)$ λαμβάνει τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς

$$\varphi(\alpha),\quad \varphi(x_1),\quad \varphi(x_2)\ .\ .\ .\ \varphi(x_{\nu-1}),\quad \varphi(\beta).$$

Ἐὰν δὲ ἑκάστην τῶν τιμῶν τούτων πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὴν αὔξησιν τῆς τιμῆς τοῦ x, πρὸς ἣν ἀντιστοιχεῖ, προκύπτει τὸ ἄθροισμα

$$\varphi(\alpha).(x_1-\alpha)+\varphi(x_1)(x_2-x_1)+\varphi(x_2)\,(x_3-x_2)+\ldots+\varphi(x_{\nu-1})\,(\beta-x_{\nu-1})$$

Ὅτι τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἔχει ὅριον, ὅταν ἑκάστη τῶν διαφορῶν (ἢ αὐξήσεων) $(x_1-\alpha)$, $(x\ -x_1)\ .\ .\ .\ (\beta-x_{\nu-1})$ τείνῃ πρὸς τὸ 0, ἐδείξαμεν ἐν τῷ Διαφορικῷ λογισμῷ (σελ. 118)· ἐστηρίχθημεν ὅμως ἐπὶ τῆς ὑποθέσεως, ὅτι ὑπάρχει συνάρτησις ἔχουσα παράγωγον τὴν $\varphi(x)$.

105. Ἐνταῦθα θὰ πραγματευθῶμεν τὸ ζήτημα ἄνευ τῆς προϋποθέσεως ταύτης καὶ μάλιστα γενικώτερον· θὰ δείξωμεν δηλαδή, ὅτι, ἐάν, ὁρίσαντες δύο τιμὰς α καὶ β, $(\alpha<\beta)$ *αὐξάνωμεν τὴν μεταβλητὴν x ἀπὸ α εἰς x_1 ἔπειτα ἀπὸ x_1 εἰς x_2 ἔπειτα ἀπὸ x εἰς x_3 καὶ οὕτω καθεξῆς καὶ τέλος ἀπὸ $x_{\nu-1}$ εἰς β, καὶ πολλαπλασιάζωμεν ἑκάστην τῶν αὐξήσεων τούτων ἐπὶ μίαν οἱανδήποτε ἐκ τῶν τιμῶν, ἃς λαμβάνει ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ εἰς τὸ ἀντιστοιχοῦν αὐτῇ διάστημα, τὸ προκύπτον ἄθροισμα*

$$(1)\qquad (x_1-\alpha)\,\varphi(x'_1)+(x_2-x_1)\,\varphi(x'_2)+\ \ .\ .\ .\ \ +(\beta-x_{\nu-1})\,\varphi(x'_\nu)$$

$$\text{ἔνθα}\qquad x_{\rho-1}<x'_\rho<x_\rho$$

ἔχει ὅριόν τι ἀνεξάρτητον τοῦ τρόπου, καθ' ὃν αἱ αὐξήσεις μεταβάλλονται, ἀρκεῖ νὰ τείνῃ ἑκάστη πρὸς τὸ 0, καὶ ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ὅτι ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ εἶνε ὡρισμένη καὶ μένει πεπερασμένη καὶ συνεχὴς ἐν τῷ διαστήματι α . . . β (ἤτοι, ὅτι αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$, ἃς λαμβάνομεν πρὸς σχηματισμὸν τοῦ ἀθροίσματος, εἶνε ἐντελῶς ὡρισμέναι καὶ πᾶσαι πεπερασμέναι καὶ μεταβάλλονται συνεχῶς ἐν τῷ διαστήματι (α . . . β).

106. Ἐὰν νοήσωμεν τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς x ὡς τετμημένας τῶν σημείων εὐθείας τινὸς ΟΧ, αἱ τιμαὶ α . . . β θὰ παριστῶνται ὑπὸ τῶν σημείων τμήματός τινος ΑΒ τῆς εὐθείας ταύτης· καὶ πρὸς ἕκαστον σημεῖον τοῦ τμήματος ΑΒ θὰ ἀντιστοιχῇ τιμή τις τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$· τότε δὲ τὰ σημεῖα τοῦ τμήματος ΑΒ τὰ πρὸς τὰς ἐνδιαμέσους τιμὰς $x_1\ x_2\ .\ .\ .\ x_{\nu-1}$ ἀντιστοιχοῦντα θὰ διαιρῶσιν αὐτὸ εἰς μέρη AA_1, $A_1A_2\ .\ .\ .\ A_{\nu-1}B$· καὶ οἱ ὅροι τοῦ ἀθροίσματος, περὶ οὗ ὁ λόγος, θὰ

εὑρεθῶσιν, *ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ μῆκος ἑκάστου τμήματος τοῦ AB ἐπὶ τὴν τιμὴν ἣν λαμβάνει ἡ συνάρτησις* $\varphi(x)$ *εἰς ἓν οἱονδήποτε ἐκ τῶν σημείων του.*

Διὰ τὴν εὐκολίαν τῆς ἀποδείξεως θέλομεν ὑποθέσει ἐν τοῖς ἑξῆς, ὅτι αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$ αἱ πρὸς σχηματισμὸν τοῦ ἀθροίσματος λαμβανόμεναι εἶνε πᾶσαι θετικαί.

Τούτου τεθέντος, ἵνα δείξωμεν, ὅτι τὸ οὕτω σχηματιζόμενον ἄθροισμα ἔχει ὅριον, ὅταν ἕκαστον τεμάχιον τοῦ AB τείνῃ πρὸς τὸ 0, ὁπωςδήποτε μεταβαλλόμενον, θὰ δείξωμεν κατὰ πρῶτον τὴν ὕπαρξιν τοῦ ὁρίου ἔν τινι μερικῇ διαιρέσει, ἤτοι ὅταν τὸ AB διαιρῆται πρῶτον εἰς δύο ἴσα μέρη, ἔπειτα ἑκάτερον τούτων εἰς δύο ἴσα, ἔπειτα ἕκαστον τῶν νέων τμημάτων πάλιν εἰς δύο ἴσα καὶ τοῦτο γίνηται ἐπ' ἄπειρον· (φανερὸν εἶνε, ὅτι κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον ἕκαστον τεμάχιον τοῦ AB τείνει πρὸς τὸ 0)· τὸν τρόπον τοῦτον τῆς διαιρέσεως καλοῦμεν *διχασμόν*.

Ὑποθέσωμεν, πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, ὅτι ὁ διχασμὸς προέβη μέχρις τοῦ νυοστοῦ, ἑπομένως τὸ AB διῃρέθη εἰς ρ ἴσα μέρη ($\rho=2^\nu$)· ἐὰν τότε πρὸς σχηματισμὸν τοῦ ἀθροίσματος (1) λαμβάνωμεν τὴν μεγίστην τιμὴν τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$ ἐν ἑκάστῳ τῶν ρ τμημάτων καὶ ταύτην πολλαπλασιάζωμεν ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ τμήματος, εὑρίσκομεν τὸ ἑξῆς ἄθροισμα

$$\tau_1 M_1 + \tau_2 M_2 + \ldots + \tau_\rho M_\rho \quad \text{ἢ} \quad \Sigma \tau_k M_k$$

(ἔνθα $\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_\rho$ δηλοῦσι τὰ μήκη τῶν τμημάτων κατὰ σειρὰν καὶ M_k τὴν μεγίστην τιμὴν τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$ ἐν τῷ τμήματι τ_k.

Τὸ ἄθροισμα τοῦτο, ὅπερ παριστῶ συντομίας χάριν διὰ τοῦ Σ_ν, ἔχει ὅριον, ὅταν ὁ διχασμὸς προβαίνῃ ἐπ' ἄπειρον· διότι, ἂν νῦν διαιρέσωμεν ἕκαστον τμῆμα πάλιν εἰς δύο ἴσα, τὸ νέον ἄθροισμα θὰ εἶνε

$$\Sigma\left(\frac{1}{2}\tau_k M_{k1} + \frac{1}{2}\tau_k M_{k2}\right) \qquad (k=1,\, 2,\, \ldots \rho)$$

ἔνθα M_{k1} καὶ M_{k2} παριστῶσι τὰς μεγίστας τιμὰς τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$ ἐν τοῖς δύο τεμαχίοις τοῦ τμήματος τ_k. Τὸ νέον τοῦτο ἄθροισμα $\Sigma_{\nu+1}$ εἶνε μικρότερον τοῦ πρώτου Σ_ν ἢ τὸ πολὺ ἴσον αὐτῷ· διότι ἕκαστος ὅρος τοῦ Σ_ν ἔδωκε δύο ὅρους ἐν τῷ $\Sigma_{\nu+1}$· οἷον ὁ ὅρος

$$\tau_k M_k \quad \text{τοῦ} \quad \Sigma_\nu$$

ἔδωκε τοὺς δύο ὅρους

$$\frac{1}{2}\tau_k M_{k1} + \frac{1}{2}\tau_k M_{k2} \text{ ἐν τῷ } \Sigma_{\nu+1}$$

ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς $\varphi(x)$ ἐν τῷ ὅλῳ τμήματι τ_k δὲν δύναται νὰ εἶνε μικροτέρα μηδετέρας τῶν μεγίστων τιμῶν ἐν τοῖς δύο τεμαχίοις τοῦ τ_k, ἐπειδὴ δηλονότι εἶνε

$$M_{k1} \leqq M_k$$
$$M_{k2} \leqq M_k,$$

ἕπεται καὶ

$$\frac{1}{2}\tau_k M_{k1} + \frac{1}{2}\tau_k M_{k2} \leqq \tau_k M_k$$

ὥστε οἱ δύο ὅροι τοῦ $\Sigma_{\nu+1}$ οἱ ἐξ ἑνὸς ὅρου τοῦ Σ_ν προερχόμενοι ἀποτελοῦσιν ἄθροισμα μικρότερον τοῦ ὅρου τούτου ἢ τὸ πολὺ ἴσον· διὰ τοῦτο εἶνε

$$\Sigma_{\nu+1} \leqq \Sigma_\nu$$

Ἀλλ' ἂν διὰ τοῦ E παραστήσωμεν τὴν ἐλαχίστην τιμὴν τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$ ἐν τῷ διαστήματι $\alpha \ldots \beta$, τὸ ἄθροισμα Σ_ν μένει προφανῶς πάντοτε μεγαλήτερον τοῦ $(\beta-\alpha)E$.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα Σ_ν (ἂν μὴ μένῃ ἀμετάβλητον) ἐλαττοῦται διαρκῶς, ὅταν ὁ ν αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον, ἀλλ' οὐδέποτε γίνεται μικρότερον τοῦ $E(\beta-\alpha)$, συνάγεται ὅτι ἔχει ὅριόν τι (Εἰσαγ. σελ. 99).

Σχηματίσωμεν νῦν καὶ δεύτερον ἄθροισμα ἐκ τῶν αὐτῶν μὲν μερῶν $\tau_1\ \tau_2 \ldots \tau_\rho$ τοῦ AB (διαιρεθέντος εἰς 2^ν ἴσα μέρη) ἀλλ' ἐκ τῶν ἐλαχίστων τιμῶν τῆς $\varphi(x)$ ὡς παραγόντων, ἤτοι τὸ

$$\tau_1 E_1 + \tau_2 E_2 + \ldots + \tau_\rho E_\rho \quad \text{ἢ} \quad \Sigma \tau_k E_k$$

(E_k οὔσης τῆς ἐλαχίστης τιμῆς τῆς $\varphi(x)$ ἐν τῷ τμήματι τ_k).

Καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦτο, ὅπερ παριστῶ διὰ τοῦ σ_ν, τείνει πρός τι ὅριον, ὅταν ὁ ν αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον· διότι, ἂν διαιρεθῇ ἕκαστον τῶν τμημάτων $\tau_1\ \tau_2 \ldots \tau_\rho$ πάλιν εἰς δύο ἴσα (ὅτε τὸ AB διαιρεῖται εἰς $2^{\nu+1}$ ἴσα μέρη), τὸ νέον ἄθροισμα $\sigma_{\nu+1}$ εἶνε

$$\Sigma\left(\frac{1}{2}\tau_k E_{k1} + \frac{1}{2}\tau_k E_{k2}\right) \qquad (k=1,\ 2 \ldots \rho)$$

ἔνθα E_{k1} καὶ E_{k2} εἶνε αἱ ἐλάχισται τιμαὶ τῆς $\varphi(x)$ ἐν τοῖς δύο τεμαχίοις τοῦ τμήματος τ_k· ἀλλ' εἶνε προφανῶς

$$E_{k1} \geqq E_k$$
$$E_{k2} \geqq E_k$$

ὅθεν καὶ
$$\frac{1}{2}\tau_k E_{k1} + \frac{1}{2}\tau_k E_{k2} \geqq \tau_k E_k$$

τουτέστιν οἱ δύο ὅροι τοῦ $\sigma_{\nu+1}$ οἱ ἐξ ἑνὸς ἑκάστου ὅρου τοῦ σ_ν προερχόμενοι ἔχουσιν ἄθροισμα μεγαλήτερον τοῦ ὅρου τούτου ἢ τοὐλάχιστον ἴσον· διὰ δὲ τοῦτο εἶνε

$$\sigma_{\nu+1} \geqq \sigma_\nu$$

ἀλλ' ἂν πάλιν παραστήσωμεν διὰ M τὴν μεγίστην τιμὴν τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$ ἐν τῷ ὅλῳ τμήματι AB, θὰ εἶνε προφανῶς τὸ ἄθροισμα σ_ν πάντοτε μικρότερον τοῦ $M(\beta-\alpha)$· ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα σ_ν αὐξάνει διαρκῶς μετὰ τοῦ ν (ἂν μὴ μένῃ σταθερόν), ἀλλ' οὐδέποτε ὑπερβαίνει ἀριθμόν τινα, συνάγεται, ὅτι τείνει πρός τι ὅριον.

Ἀμφότερα τὰ σχηματισθέντα ἀθροίσματα Σ_ν καὶ σ_ν τείνουσι πρὸς τὸ αὐτὸ ὅριον, ἐὰν ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ εἶνε συνεχὴς ἐν τῷ διαστήματι $\alpha \ldots \beta$.

Καὶ ὄντως ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶνε

$$\Sigma_\nu - \sigma_\nu = \tau_1(M_1 - E_1) + \tau_2(M_2 - E_2) + \ldots + \tau_\rho(M_\rho - E_\rho)$$

καὶ ἂν ἐκ τῶν διαφορῶν $M_k - E_k$ ($k=1, 2 \ldots \rho$) μεγίστη (ἢ μηδεμιᾶς μικροτέρα) εἶνε ἡ $M_\sigma - E_\sigma$, θὰ εἶνε προδήλως

$$\Sigma_\nu - \sigma_\nu < (M_\sigma - E_\sigma)(\beta - \alpha)$$

ἀλλ' ἡ διαφορὰ $M_\sigma - E_\sigma$ τείνει πρὸς τὸ 0, ὅταν ὁ ν αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον· διότι εἶνε διαφορὰ τῶν τιμῶν τῆς $\varphi(x)$ εἰς δύο σημεῖα ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ τμήματος τ_σ, ὅπερ τμῆμα τείνει πρὸς τὸ 0· ἐπειδὴ δὲ ἡ συνάρτησις ὑπετέθη συνεχής, ἕπεται, ὅτι δυνάμεθα νὰ καταστήσωμεν τὴν διαφορὰν ταύτην μικροτέραν παντὸς ἀριθμοῦ δ διαιροῦντες τὸ AB εἰς μέρη ἀρκούντως μικρά· ἑπομένως καὶ τὸ γινόμενον $(M_\sigma - E_\sigma)(\beta - \alpha)$ γίνεται καὶ αὐτὸ μικρότερον παντὸς ἀριθμοῦ· ἤτοι εἶνε

$$\text{ὅρ}(\Sigma_\nu - \sigma_\nu) = 0 \quad \text{ἤτοι} \quad \text{ὅρ}\,\Sigma_\nu = \text{ὅρ}\,\sigma_\nu.$$

Καὶ ἂν ἐκ τῶν αὐτῶν μερῶν $\tau_1\ \tau_2 \ldots \tau_\rho$ τῆς AB, σχηματίσωμεν τὸ ἄθροισμα

$$\tau_1\varphi(\tau_1)+\tau_2\varphi(\tau_2)+\ .\ .\ .\ +\tau_\rho\varphi(\tau_\rho) \tag{2}$$

λαμβάνοντες ὡς παράγοντα δι' ἕκαστον τμῆμα τ_k τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$ εἰς ἓν οἱονδήποτε σημεῖον τοῦ τμήματος τούτου τ_k, καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦτο, ὅπερ παριστῶ διὰ τοῦ Θ_ν, πρὸς τὸ αὐτὸ τείνει ὅριον· διότι προφανῶς εἶνε

$$\sigma_\nu \leqq \Theta_\nu \leqq \Sigma_\nu$$

περιέχεται δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα Θ_ν πάντοτε μεταξὺ τῶν δύο Σ_ν καὶ σ_ν· καὶ ἐπειδὴ ταῦτα εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ τείνουσιν ὅριον, καὶ τὸ μεταξὺ αὐτῶν περιεχόμενον εἰς τὸ αὐτὸ ὅριον τείνει.

Λέγω νῦν, ὅτι *καὶ κατὰ πᾶσαν ἄλλην διαίρεσιν τοῦ AB, ἐὰν ἕκαστον τῶν μερῶν τείνῃ πρὸς τὸ 0, τὸ ἄθροισμα* (1) *τείνει πάντοτε πρὸς τὸ αὐτὸ ὅριον.*

Θεωρήσωμεν τῷ ὄντι δύο τυχούσας διαιρέσεις καὶ ἔστωσαν τὰ μέρη τοῦ AB

ἐν μὲν τῇ πρώτῃ τὰ $\quad p_1 \quad p_2 \ .\ .\ .\ p_\mu$

ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ τὰ $\quad q_1 \quad q_2 \ .\ .\ .\ q_\nu$

τὰ πρὸς τὰς δύο ταύτας διαιρέσεις ἀντιστοιχοῦντα ἀθροίσματα, ἅτινα παριστῶ διὰ P καὶ Q, εἶνε

$$\left.\begin{aligned} P&=p_1\varphi(p_1)+p_2\varphi(p_2)+\ .\ .\ .\ +p_\mu\varphi(p_\mu) \\ Q&=q_1\varphi(q_1)+q_2\varphi(q_2)+\ .\ .\ .\ +q_\nu\varphi(q_\nu) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

ἔνθα $\varphi(p_k)$ δηλοῖ τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$ ἐν τῷ τυχόντι σημείῳ τοῦ τμήματος p_k· ὁμοίως δὲ καὶ τὸ $\varphi(q_k)$.

Τούτων τεθέντων, ἐὰν νοήσωμεν ἀμφοτέρας τὰς διαιρέσεις γενομένας ἐπὶ τοῦ AB, θὰ εὑρεθῇ τὸ AB διῃρημένον εἰς μέρη μικρότερα, τὰ

$$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \ .\ .\ .\ \alpha_\rho$$

ἐξ ὧν γίνονται ἀμφότερα τὰ p καὶ q· ἕκαστον δηλαδὴ p ἀποτελεῖται ἐξ ἑνὸς ἢ περισσοτέρων α, ὁμοίως καὶ ἕκαστον q· ἕκαστον δὲ α ἀνήκει εἰς ἓν καὶ μόνον εἰς ἓν p· ὡσαύτως ἀνήκει εἰς ἓν καὶ μόνον εἰς ἓν q· τὸ α_λ π. χ. ἀνήκει εἰς ἓν ἐκ τῶν $p_1, p_2 \ .\ .\ .\ p_\mu$, ὅπερ παριστῶ διὰ τοῦ $p_{\alpha\lambda}$, καὶ εἰς ἓν ἐκ τῶν $q_1 \ q_2 \ .\ .\ .\ q_\nu$, ὅπερ παριστῶ διὰ τοῦ $q_{\alpha\lambda}$.

Ἐὰν δὲ εἰς πάντας τοὺς ὅρους τῶν ἀθροισμάτων P καὶ Q ἀντὶ τῶν τμημάτων p, q ἀντικαταστήσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν α, ἐξ ὧν ἕκαστον ἀποτελεῖται, τὰ ῥηθέντα ἀθροίσματα γίνονται

$$P=\alpha_1\varphi(p_{\alpha 1})+\alpha_2\varphi(p_{\alpha 2})+\ .\ .\ .\ +\alpha_\rho\varphi(p_{\alpha\rho})$$

$$Q=\alpha_1\varphi(q_{\alpha 1})+\alpha_2\varphi(q_{\alpha 2})+\ .\ .\ .\ +\alpha_\rho\varphi(q_{\alpha\rho})$$

τὰ δύο ταῦτα ἀθροίσματα ἔχουσιν ἴσον ἀριθμὸν ὅρων καὶ ἕκαστον α, οἷον τὸ α_λ πολλαπλασιάζεται ἐν μὲν τῷ πρώτῳ ἐπὶ τιμήν τινα τῆς $\varphi(x)$ ἐν τῷ τμήματι p εἰς ὃ ἀνήκει τὸ α_λ (τὴν τιμὴν ταύτην παριστῶμεν διὰ τοῦ $\varphi(p_{\alpha\lambda})$) ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τιμήν τινα τῆς $\varphi(x)$ ἐν τῷ τμήματι q εἰς ὃ ἀνήκει τὸ α_λ· ἣν τιμὴν παριστῶμεν διὰ τοῦ $\varphi(q_{\alpha\lambda})$.

Ἐκ τούτων ἕπεται

$$P-Q=\alpha_1\left[\varphi(p_{\alpha 1})-\varphi(q_{\alpha 1})\right]+\ .\ .\ .\ +\alpha_\rho\left[\varphi(p_{\alpha\rho})-\varphi(q_{\alpha\rho})\right]$$

ἀλλ' αἱ τιμαὶ $\varphi(p_{\alpha\lambda})$ καὶ $\varphi(q_{\alpha\lambda})$, ἐπειδὴ τὰ τμήματα $p_{\alpha\lambda}$ καὶ $q_{\alpha\lambda}$ ἔχουσι κοινὸν μέρος (τὸ τμῆμα α_λ) διαφέρουσι διαφοράν, ἥτις γίνεται μικροτέρα πάσης ποσότητος, ὅταν ἀμφότερα τὰ τμήματα ταῦτα τείνωσι πρὸς τὸ μηδέν· διότι, ἂν λάβωμεν σημεῖόν τι H τοῦ κοινοῦ μέρους α_λ τῶν δύο τμημάτων $p_{\alpha\lambda}$ καὶ $q_{\alpha\lambda}$ καὶ παραστήσωμεν τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$ εἰς τὸ H διὰ τοῦ $\varphi(H)$, θὰ εἶνε

$$\varphi(p_{\alpha\lambda})-\varphi(q_{\alpha\lambda})=\left[\varphi(p_{\alpha\lambda})-\varphi(H)\right]+\left[\varphi(H)-\varphi(q_{\alpha\lambda})\right]$$

ἀμφότεραι δὲ αἱ διαφοραί, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος ταύτης, τείνουσι πρὸς τὸ 0· διότι ἡ μὲν πρώτη εἶνε διαφορὰ δύο τιμῶν τῆς συναρτήσεως εἰς δύο σημεῖα τοῦ τμήματος $p_{\alpha\lambda}$ ἡ δὲ δευτέρα εἶνε διαφορὰ δύο τιμῶν εἰς δύο σημεῖα τοῦ $q_{\alpha\lambda}$· ἡ δὲ συνάρτησις $\varphi(x)$ ὑπετέθη συνεχής.

Ἐπειδὴ δὲ ἑκάστη τῶν διαφορῶν $\varphi(p_{\alpha\lambda})-\varphi(q_{\alpha\lambda})$ τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ἐὰν τὴν μεγίστην ἐξ αὐτῶν (ἀπολύτως) παραστήσωμεν διὰ τοῦ δ, θὰ εἶνε προφανῶς

$$\mid P-Q \mid\ < \delta.(\alpha_1+\alpha_2+\ .\ .\ .\ +\alpha_\rho) \text{ ἤτοι } < \delta.(\beta-\alpha)$$

ὅθεν $\quad$ ορ $\mid H-\Theta \mid = 0$ τουτέστιν ορ $H=$ορ Θ

Ἐδείχθη ἄρα, ὅτι *δύο διάφοροι τρόποι διαιρέσεως τοῦ τμήματος*

ΑΒ δίδουσιν ἀθροίσματα (3), *ἅτινα ἔχουσιν ἴσα ὅρια, ἐὰν κατ' ἀμφοτέρους ἕκαστον τμῆμα τείνῃ πρὸς τὸ 0.*

Ἐπειδὴ δὲ ἐν τῇ διαιρέσει, ἣν κατὰ πρῶτον ἐθεωρήσαμεν, ἤτοι ἐν τῷ διχασμῷ, τὸ ἄθροισμα ἔχει ὅριον (ὡς ἀπεδείξαμεν), συνάγεται ὅτι καὶ κατὰ πᾶσαν ἄλλην διαίρεσιν τὸ αὐτὸ εὑρίσκεται ὅριον.

107. Τὸ ὅριον πρὸς ὃ τείνει τὸ ἄθροισμα

$$(x_1-\alpha)\varphi(x'_1)+(x_2-x_1)\varphi(x'_2)+\ .\ .\ .\qquad(\beta-x_{\nu-1})\varphi(x'_\nu)$$

$$\text{ἔνθα}\qquad x_k\leqq x'_k\leqq x_{k+1}$$

ὅταν ἑκάστη τῶν αὐξήσεων $x_1-\alpha$, $x_2-x_1\ldots$ τείνῃ πρὸς τὸ 0, λέγεται *ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα* τῆς παραστάσεως $\varphi(x)\,dx$ ἐν τῷ διαστήματι $\alpha\ .\ .\ .\ \beta$ καὶ σημειοῦται ὡς ἑξῆς

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx\qquad \text{ἢ καὶ ὡς ἑξῆς}\qquad \int\limits_{x=\alpha\ldots\beta}\varphi(x)\,dx$$

ἡ δὲ εὕρεσις τοῦ ὁρίου τούτου, ἤτοι ἡ ἄθροισις ποσοτήτων, ὧν ἑκάστη μὲν ἐλαττοῦται μέχρις ἐκμηδενίσεως, ἀλλ' ὧν τὸ πλῆθος αὐξάνει ὑπὲρ πάντα ἀριθμόν, λέγεται *ὁλοκλήρωσις* καὶ ὡς ἄθροισις ἐσημειώθη διὰ τοῦ συμβόλου $\int$, ὅπερ εἶνε τὸ ἀρχικὸν γράμμα τῆς λέξεως somme (=ἄθροισμα). Οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β, ἤτοι αἱ ἄκραι τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς x, λέγονται *ὅρια* τοῦ ὁλοκληρώματος· αἱ δὲ ἀπειροσταὶ ποσότητες, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται τὸ ὁλοκλήρωμα, λέγονται *στοιχεῖα* τοῦ ὁλοκληρώματος.

Σημείωσις. Τὸ ἄθροισμα

$$(x_1-\alpha)\,\varphi(\alpha)+(x_2-x_1)\,\varphi(x_1)+\ .\ .\ .\ +(\beta-x_{\nu-1})\,\varphi(x_{\nu-1})$$

ὅπερ προκύπτει ἐκ τῆς τυχούσης διαιρέσεως τοῦ τμήματος ΑΒ, ἐὰν ἕκαστον μέρος αὐτοῦ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$ ἐν τῇ ἀρχῇ τοῦ τμήματος, γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$\sum_{x=\alpha,\ x_1,\ x_2\ .\ .\ .\ x_{\nu-1},\ \beta}\varphi(x)\,\Delta x$$

Διότι οἱ διάφοροι ὅροι τοῦ ἀθροίσματος προκύπτουσιν ἐκ τῆς παραστάσεως $\varphi(x)\,\Delta x$, ἐὰν ἡ μεταβλητὴ x διανύσῃ τὰς τιμὰς α, x_1 $x_2\ .\ .\ .\ x_{\nu-1}$ τὸ δὲ Δx σημαίνῃ τὴν αὔξησιν τῆς x ἀφ' ἑκάστης τιμῆς εἰς τὴν ἀμέσως ἑπομένην· διὰ τοῦτο δὲ τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος τούτου ἐγράφη

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx.$$

Περὶ τοῦ σημείου τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$.

108. Ἐν τῇ ἀποδείξει τῆς ὑπάρξεως τοῦ ὁρίου, πρὸς ὅ τείνει τὸ ἄθροισμα

$$(1) \qquad \Sigma(x_{\lambda+1}-x_\lambda)\varphi(x'_\lambda) \qquad \lambda=0,\ 1,\ 2\ .\ .\ .\ (\nu-1)$$

ἔνθα $\qquad x_0=\alpha,\quad x_\nu=\beta,\quad$ καὶ $\quad x_\lambda \leqq x'_\lambda \leqq x_{\lambda+1}$

ὑπεθέσαμεν, ὅτι αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$ ἐν τῷ διαστήματι $\alpha\ .\ .\ .\ \beta$ (αἱ πρὸς σχηματισμὸν τοῦ ἀθροίσματος λαμβανόμεναι) εἶνε πᾶσαι θετικαί. Ἀλλ' εἶνε προφανές, ὅτι καὶ ἂν εἶνε πᾶσαι ἀρνητικαί, πάλιν ὑπάρχει ὅριον, τὸ ἀντίθετον ἐκείνου ὅπερ εὑρίσκομεν λαμβάνοντες τὰς τιμὰς τῆς συναρτήσεως θετικάς.

Καὶ ὅταν τὸ διάστημα $\alpha\ .\ .\ .\ \beta$ σύγκειται ἐκ πεπερασμένου πλήθους διαστημάτων

$$\alpha\ .\ .\ .\ \gamma,\qquad \gamma\ .\ .\ .\ \delta,\qquad \delta\ .\ .\ .\ \varepsilon,\ .\ .\ .\ .\ \lambda\ .\ .\ .\ \beta$$

ἐν ἑκάστῳ τῶν ὁποίων ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ διατηρεῖ τὸ ἑαυτῆς σημεῖον, πάλιν ὑπάρχει ὅριον τοῦ ἀθροίσματος (1)· διότι, ἂν εἰς τὰς τιμὰς $\alpha,\ x_1\ x_2\ .\ .\ .\ x_{\nu-1}\ \beta$, ἃς διανύει ἡ μεταβλητὴ x πρὸς σχηματισμὸν τοῦ ἀθροίσματος τούτου, προσλαμβάνωνται πάντοτε καὶ αἱ τιμαὶ $\gamma,\ \delta,\ \varepsilon\ ...\ \lambda$ καὶ τίθηται ἑκάστη εἰς τὴν προσήκουσαν αὐτῇ θέσιν μεγέθους, τουτέστιν, ἂν τὰ ἀντίστοιχα πρὸς αὐτὰς σημεῖα τοῦ ΑΒ, τὰ Γ, Δ, Ε, Λ, λαμβάνωνται πάντοτε ὡς σημεῖα διαιρέσεως, τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος (ἂν ὑπάρχῃ) δὲν θὰ ἀλλοιωθῇ. Καὶ ὄντως, ἂν ἡ τιμὴ γ κεῖται εἰς τὸ διάστημα $x_\rho\ .\ .\ .\ x_{\rho+1}$, ἡ πρόσληψις αὐτῆς δίδει εἰς τὸ ἄθροισμα (1) ἀντὶ τοῦ ὅρου

$$(x_{\rho+1}-x_\rho)\,\varphi(x'_\rho) \quad \text{τοὺς ἑξῆς δύο} \quad (\gamma-x_\rho)\,\varphi(x_{\rho1})+(x_{\rho+1}-\gamma)\,\varphi(x_{\rho2})$$

ἔνθα $\qquad x_\rho<x_{\rho1}<\gamma \quad$ καὶ $\quad \gamma<x_{\rho2}<x_{\rho+1}$

Ἐπίσης ἡ πρόσληψις τοῦ δ εἰσάγει δύο ὅρους εἰς τὸ ἄθροισμα ἐκβάλλει δὲ ἕνα· ἐπίσης καὶ ἡ πρόσληψις τῶν λοιπῶν τιμῶν.

Ἐπειδὴ δὲ καὶ οἱ ἐκβαλλόμενοι καὶ οἱ προσλαμβανόμενοι ὅροι εἶνε εἰς πλῆθος πεπερασμένον καὶ ἕκαστος ἐξ αὐτῶν τείνει πρὸς τὸ 0, συνάγεται, ὅτι τὸ ὅριον, ἂν ὑπάρχῃ, οὐδόλως ἀλλοιοῦται διὰ τῆς προσλήψεως τῶν τιμῶν $\gamma,\ \delta,\ \varepsilon\ .\ .\ .\ \lambda$.

Ἀλλὰ τότε οἱ μὲν ὅροι τοῦ ἀθροίσματος οἱ ἐκ τοῦ διαστήματος $\alpha \ldots \gamma$ προερχόμενοι ἔχουσιν ὅριον τὸ $\int_\alpha^\gamma \varphi(x)\, dx$, οἱ δὲ ἐκ τοῦ διαστήματος $\gamma \ldots \delta$ προερχόμενοι ἔχουσιν ὅριον τὸ $\int_\gamma^\delta \varphi(x)\, dx$, κτλ.

Ὥστε τὸ ὅλον ἄθροισμα ἔχει ὅριον τὸ ἑξῆς

$$\int_\alpha^\gamma \varphi(x)dx + \int_\gamma^\delta \varphi(x)dx + \int_\delta^\varepsilon \varphi(x)dx + \ldots + \int_\lambda^\beta \varphi(x)dx.$$

Ἀκολουθία τῶν τιμῶν τῆς x.

109. Ἐπίσης ὑπεθέσαμεν χάριν εὐκολίας, ὅτι αἱ τιμαὶ

$$\alpha, \quad x_1 \quad x_2 \ldots x_{\nu-1} \; \beta$$

ἃς ἡ μεταβλητὴ x διατρέχει ἐν τῷ ἀθροίσματι

$$(1) \qquad \Sigma(x_{\lambda+1} - x_\lambda)\ \varphi(x'_\lambda)$$

προβαίνουσιν αὐξανόμεναι· ὥστε αἱ διαφοραὶ $x_1 - \alpha$, $x_2 - x_1 \ldots$ εἶνε πᾶσαι θετικαί· ἀλλὰ καὶ ὅταν τοὐναντίον προβαίνωσιν ἐλαττούμεναι, πάλιν ὑπάρχει ὅριον, ὅπερ προδήλως εἶνε τὸ ἀντίθετον ἐκείνου, ὅπερ εὑρίσκομεν λαμβάνοντες τὰς διαφορὰς $x_{\lambda+1} - x_\lambda$ θετικῶς.

Ἡ μεταβλητὴ x τῆς ὁλοκληρώσεως νοεῖται ἐν τῷ ὁλοκληρώματι ἢ διαρκῶς αὐξανομένη ἢ διαρκῶς ἐλαττουμένη.

Διάφορα ἀθροίσματα, ὧν ὅριον εἶνε τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα.

110. Ἐπειδὴ αἱ αὐξήσεις $x_1 - \alpha$, $x_2 - x_1 \ldots \beta - x_{\nu-1}$ τῆς μεταβλητῆς x εἰς οὐδένα ὑπόκεινται περιορισμόν, εἰ μὴ ὅτι πρέπει νὰ τείνωσιν ἑκάστη πρὸς τὸ 0, ὁρίζοντες αὐτοβούλως τὸν νόμον, καθ' ὃν προβαίνουσιν ἐλαττούμεναι, δυνάμεθα νὰ δώσωμεν εἰς τὸ ἄθροισμα (1) διαφόρους μορφάς.

Ἐὰν π. χ. λάβωμεν αὐτὰς πάσας ἴσας καὶ παραστήσωμεν τὸ πλῆθος αὐτῶν διὰ τοῦ ν ἑκάστη θὰ εἶνε $\frac{\beta-\alpha}{\nu}$ καὶ θὰ ἔχωμεν (παρβ. Διαφ. σελ. 71)

$$\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(x)\,dx=(\beta-\alpha)\ \text{ορ}\left\{\frac{\varphi(\alpha)+\varphi(x_1)+\ \dots\ \varphi(x_{\nu-1})}{\nu}\right\}. \qquad (4)$$

(αἱ τιμαὶ α, x_1 x_2 . . . . $x_{\nu-1}$ β ἀποτελοῦσιν ἐνταῦθα ἀριθμητικὴν πρόοδον).

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης ἕπεται, ἂν διὰ τοῦ $M_{\alpha}^{\beta}\,\varphi(x)$ παραστήσωμεν τὴν μέσην τιμὴν τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$ ἐν τῷ διαστήματι α ... β

$$M_{\alpha}^{\beta}\,\varphi(x)=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(x)dx \qquad (5)$$

Ὁμοίως, ἂν αἱ τιμαὶ α, x_1, x_2 . . . $x_{\nu-1}$ β συνιστῶσι γεωμετρικὴν πρόοδον, εὑρίσκομεν

$$\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(x)dx=\text{ορ}\Big(\alpha\,\varphi(\alpha)+x_1\varphi(x_1)+\ \dots\ +\beta\,\varphi(\beta)\Big)\left(\sqrt[\nu]{\frac{\beta}{\alpha}}-1\right).^{*}$$

Γεωμετρικὴ παράστασις τοῦ ὁλοκληρώματος.

111. Ἂν ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ ἐπιδέχηται γεωμετρικὴν παράστασιν διὰ καμπύλης, ἂν δηλαδὴ εἶνε δυνατὸν νὰ κατασκευασθῇ (πρὸς ὀρθογωνίους ἄξονας) καμπύλη ἔχουσα τὴν ἐξίσωσιν $y=\varphi(x)$ **, τὸ ὡρισμένον

---

* Διὰ τῆς καταλλήλου ἐκλογῆς τῶν τιμῶν x_1, x_2 . . . $x_{\nu-1}$ δύναται ἐνίοτε νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα (1) ἑπομένως καὶ τὸ ὅριον αὐτοῦ· ἐὰν π. χ. εἶνε $\varphi(x)=A\,x^m$ καὶ ληφθῶσιν αἱ τιμαὶ α, x_1 . . . β οὕτως ὥστε νὰ ἀποτελῶσι πρόοδον γεωμετρικήν, τὸ ἄθροισμα γίνεται (λ ὄντος τοῦ λόγου τῆς προόδου)

$$A\alpha^{m+1}\Big(1+\lambda^{m+1}+\lambda^{2(m+1)}+\ \dots\ +\lambda^{(\nu-1)(m+1)}\Big)(\lambda-1) \quad \text{ἔνθα} \quad \lambda^{\nu}=\frac{\beta}{\alpha}$$

$$\text{ἤτοι} \qquad A\alpha^{m+1}\left(\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{m+1}-1\right)\frac{\lambda-1}{\lambda^{m+1}-1}.$$

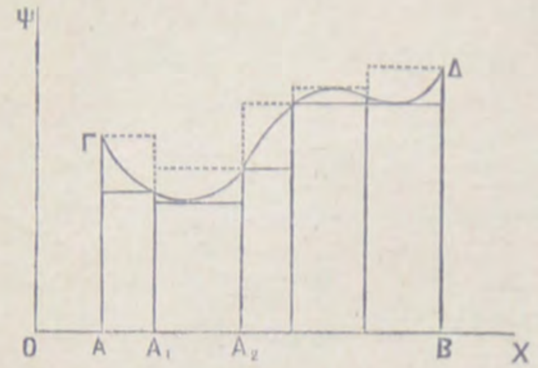
$$\text{ἤτοι} \qquad A\left(\beta^{m+1}-\alpha^{m+1}\right)\frac{1}{1+\lambda+\lambda^2+\dots+\lambda^m}$$

ἐπειδὴ δὲ καθ' ὅσον αἱ διαφοραὶ $x_1-\alpha$, x_2-x_1 . . . τείνουσι πρὸς τὸ 0 ὁ λόγος λ τείνει πρὸς τὴν μονάδα, συνάγεται, ὅτι τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος εἶνε

$$\frac{A(\beta^{m+1}-\alpha^{m+1})}{m+1}.$$

** Τοῦτο δὲν εἶνε πάντοτε δυνατόν. ὡς λ. χ. ὅταν ἡ συνάρτησις ἐν παντὶ διαστήματι ὁσονδήποτε μικρῷ ἔχῃ ἄπειρα μέγιστα καὶ ἐλάχιστα.

ὁλοκλήρωμα



$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)dx$$

εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου, ὅπερ περιέχεται ὑπὸ τῆς καμπύλης ταύτης καὶ ὑπὸ τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ ὑπὸ τῶν τεταγμένων $x=\alpha$, $x=\beta$.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, διαιροῦμεν τὸ τμῆμα ΑΒ εἰς μέρη ὁσαδήποτε καὶ οἱαδήποτε, τὰ AA_1 A_1A_2 . . . $A_{\nu-1}B$, καὶ ἀπὸ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἄγομεν τὰς παραλλήλους τῷ ἄξονι τῶν y, αἵτινες διαιροῦσι τὸ χωρίον εἰς μέρη· ἐὰν δὲ ἔπειτα ἐν ἑκάστῳ τούτων τῶν μερῶν ἐκ τοῦ ἄκρου τῆς ἐλαχίστης τεταγμένης τοῦ τόξου αὐτοῦ (ἢ ἐκείνης ἥτις οὐδεμιᾶς εἶνε μεγαλητέρα) ἀχθῇ ἡ παράλληλος τῷ ἄξονι τῆς x, προκύπτει ὀρθογώνιον, ὅπερ περιέχεται ὅλον ἐντὸς τοῦ μέρους τούτου τοῦ χωρίου· καὶ τὸ σύνολον τῶν οὕτω προκυπτόντων ὀρθογωνίων περιέχεται ἐν τῷ καμπυλογράμμῳ χωρίῳ· ἐπομένως εἶνε

$$\text{ἐμβ } ΑΒΓΔ > (x_1 - \alpha)\varphi(x'_1) + (x_2 - x_1)\varphi(x'_2) + \dots + (\beta - x_{\nu-1})\varphi(x'_\nu)$$

ἔνθα x'_1, x'_2 . . . x'_ν δηλοῦσι τὰς τιμὰς τῆς x, πρὸς ἃς ἀντιστοιχοῦσιν αἱ ἐλάχισται τεταγμέναι τῶν μερῶν.

Ἀλλ' ἐὰν πάλιν ἐν ἑκάστῳ τῶν ῥηθέντων μερῶν τοῦ χωρίου ΑΒΓΔ ἐκ τοῦ ἄκρου τῆς μεγίστης τεταγμένης αὐτοῦ ἀχθῇ ἡ παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν x (καὶ προσεκβληθῶσιν ἐν ἀνάγκῃ αἱ ἄκραι τεταγμέναι αὐτοῦ) σχηματίζεται ὀρθογώνιον, ἐν ᾧ τὸ μέρος τοῦτο περιέχεται ὅλον· ἐπομένως τὸ σύνολον τῶν οὕτω προκυπτόντων ὀρθογωνίων περιέχει τὸ καμπυλόγραμμον χωρίον· ὥστε εἶνε

$$\text{ἐμβ } ΑΒΓΔ < (x_1 - \alpha)\varphi(x''_1) + (x_2 - x_1)\varphi(x''_2) + \dots + (\beta - x_{\nu-1})\varphi(x''_\nu)$$

ἔνθα x''_1 x''_2 . . . x''_ν εἶνε αἱ τιμαὶ τῆς x, πρὸς ἃς ἀντιστοιχοῦσιν αἱ μέγισται τεταγμέναι τῶν μερῶν.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ χωρίον ΑΒΓΔ περιλαμβάνεται ἀείποτε μεταξὺ τῶν δύο ἐπιφανειῶν, ἃς τὰ πρῶτα ὀρθογώνια καὶ τὰ δεύτερα ἀποτελοῦσιν, ἀμφοτέρων δὲ τούτων τὰ ἐμβαδὰ εἰς τὸ αὐτὸ τείνουσιν ὅριον, τουτέστιν εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα

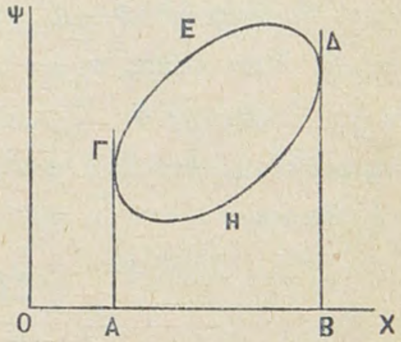
$$(\varepsilon) \qquad \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\, dx$$

συνάγεται, ὅτι τοῦτο εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου ΑΒΓΔ.

Σημείωσις. Ὅταν εἶνε $\alpha < \beta$, τὸ ὁλοκλήρωμα (ε) δίδει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου θετικὸν μέν, ἂν $\varphi(x)$ εἶνε θετικόν, ἤτοι ἂν κεῖται τὸ χωρίον ὑπεράνω τοῦ ἄξονος τῶν x, ἀρνητικὸν δὲ ἂν ἀρνητικόν, ἤτοι ἂν τὸ χωρίον κεῖται ὑποκάτω τοῦ αὐτοῦ ἄξονος· ἂν δὲ μέρος μὲν αὐτοῦ κεῖται ὑπεράνω τοῦ ἄξονος μέρος δὲ ὑποκάτω αὐτοῦ, τὸ ὁλοκλήρωμα (ε) εἶνε ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ μέρους, ὅπερ κεῖται ὑπεράνω τοῦ ἄξονος ὑπὲρ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὑποκάτω κειμένου μέρους. Ἐν τῇ προηγουμένῃ ἀποδείξει διὰ τὴν εὐκολίαν ὑπετέθη $\varphi(x)$ θετικόν. Τὰ ἐναντία τούτων συμβαίνουσιν, ὅταν $\alpha > \beta$.

Ἔκφρασις τοῦ ἐμβαδοῦ παντὸς ἐπιπέδου χωρίου δι' ὁλοκληρώματος.

112. Πᾶν ἐπίπεδον χωρίον ἔχει ἐμβαδὸν παριστώμενον ὑφ' ἑνὸς ἢ πλειόνων ὁλοκληρωμάτων. Διότι π. χ. τὸ χωρίον τὸ ὑπὸ τῆς καμπύλης ΓΗΔΕΓ περικλειόμενον, εἶνε προφανῶς διαφορὰ τοῦ χωρίου ΓΕΔΒΑΓ ὑπὲρ τὸ ΑΒΔΗΓΑ, ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶνε ἡ διαφορὰ



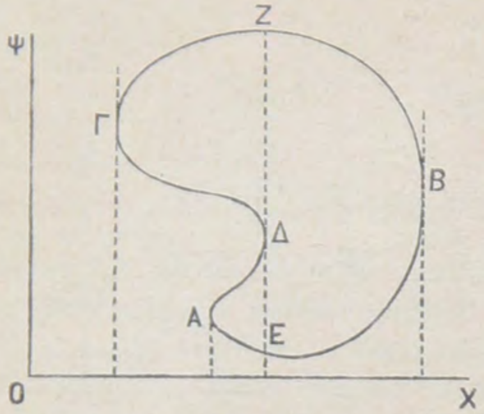
$$(6) \qquad \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} \sigma(x)dx \quad \text{ἢ} \quad \int_{\alpha}^{\beta} y\, dx - \int_{\alpha}^{\beta} y'\, dx$$

ἔνθα $\varphi(x)$ ἢ y παριστᾷ τὴν τεταγμένην τοῦ τόξου ΓΕΔ καὶ $\sigma(x)$ ἢ y' τὴν τεταγμένην τοῦ τόξου ΓΗΔ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν πρὸς τὴν αὐτὴν τιμὴν τῆς x.

Ἀντὶ τῆς διαφορᾶς (6) δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left[\varphi(x) - \sigma(x)\right] dx \quad \text{ἢ} \int_{\alpha}^{\beta} (y - y')dx$$

διότι ἀμφότερα τὰ ὁλοκληρώματα εἶνε ὅρια ἀθροισμάτων, ἐν οἷς δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν τὴν αὐτὴν διαίρεσιν τοῦ διαστήματος $\alpha \ldots \beta$· τουτέστιν, ὅτι ἡ μεταβλητὴ x διανύει ἐν ἀμφοτέροις τὰς αὐτὰς τιμὰς $\alpha, x_1\ x_2 \ldots x_{\nu-1}\ \beta$.



Σημείωσις. Ἐὰν ἡ περίμετρος τοῦ ἐπιπέδου χωρίου τέμνηται ὑπὸ τῶν παραλλήλων πρὸς τὸν ἄξονα ΟΨ εὐθειῶν εἰς σημεῖα περισσότερα τῶν δύο, ἀναλύεται τὸ χωρίον τοῦτο εἰς ἄλλα μικρότερα, ὧν ἡ περίμετρος νὰ μὴ τέμνηται εἰς σημεῖα περισσότερα τῶν δύο, καὶ εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου ὡς ἀνωτέρω ἐδείξαμεν· παραδείγματος χάριν τὸ χωρίον ΑΕΒΖΓΔΑ ἀναλύεται εἰς τὰ ἑξῆς τρία ΑΕΔΑ, ΕΒΖΕ, ΔΖΓΔ.

Περὶ τῆς συνεχείας τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$.

113. Μέχρι τοῦδε ὑπετίθετο, ὅτι ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ ἐν τῷ διαστήματι $\alpha \ldots \beta$ τῆς ὁλοκληρώσεως εἶνε συνεχής, τουτέστιν, ὅτι ἡ διαφορὰ $\varphi(x')-\varphi(x'')$ δύναται νὰ καταντήσῃ μικροτέρα παντὸς ἀριθμοῦ, ὅταν ἡ διαφορὰ $x'-x''$ γίνῃ ἱκανῶς μικρὰ (τῶν x' καὶ x'' κειμένων ἐν τῷ διαστήματι $\alpha \ldots \beta$)· ἀλλὰ καὶ ὅταν ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ διά τινας τιμὰς $\gamma, \delta \ldots \kappa$ τοῦ διαστήματος τούτου, ὧν τὸ πλῆθος πεπερασμένον, δὲν εἶνε συνεχής, μένῃ ὅμως πάντοτε πεπερασμένη, πάλιν τὸ ἄθροισμα

$$\Sigma(x_{\lambda+1}-x_{\lambda})\,\varphi(x'_{\lambda}) \qquad (1)$$

ἔχει ὅριον καὶ τὸ ὅριον τοῦτο παριστῶμεν ἐπίσης διὰ τοῦ $\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\,dx$.

Διότι, ἂν εἰς τὰς τιμὰς $\alpha, x_1, x_2 \ldots x_{\nu-1}\, \beta$, ἃς ἡ μεταβλητὴ x διανύει πρὸς σχηματισμὸν τοῦ ἀθροίσματος (1), προσλαμβάνωνται διαρκῶς καὶ αἱ τιμαὶ $\gamma, \delta \ldots \kappa$, ἤτοι ἂν τὰ πρὸς αὐτὰς ἀντιστοιχοῦντα σημεῖα Γ, Δ . . . Κ λαμβάνωνται διαρκῶς ὡς σημεῖα διαιρέσεως τοῦ τμήματος ΑΒ, ἀποβάλλονται μὲν ἐκ τοῦ ἀθροίσματος οἱ ὅροι

$$(x_{\rho+1}-x_{\rho})\,\varphi(x'_{\rho})+(x_{\sigma+1}-x_{\sigma})\,\varphi(x'_{\sigma})+\ \ldots\ +(x_{\tau+1}-x_{\tau})\,\varphi(x'_{\tau})$$

δι' οὓς εἶνε $\quad x_{\rho}<\gamma<x_{\rho+1}, \quad x_{\sigma}<\delta<x_{\sigma+1}$ κτλ.

προσλαμβάνονται δὲ ἀντ' αὐτῶν οἱ ἑξῆς

$$(\gamma-x_{\rho})\,\varphi(x'_{\rho 1})+(x_{\rho+1}-\gamma)\,\varphi(x'_{\rho 2})$$

$$(\delta-x_{\sigma})\,\varphi(x'_{\sigma 1})+(x_{\sigma+1}-\delta)\,\varphi(x'_{\sigma 2})$$

. . . .

$$(\kappa - x_\tau)\,\varphi(x'_{\tau 1}) + (x_{\tau+1} - \kappa)\,\varphi(x'_{\tau 2})\cdot$$

ἀλλὰ καὶ οἱ ἐκβαλλόμενοι ὅροι καὶ οἱ ἀντ' αὐτῶν προσλαμβανόμενοι εἶνε εἰς πεπερασμένον πλῆθος καὶ ἕκαστος ὅρος τείνει πρὸς τὸ 0· διότι ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ ὑπετέθη πεπερασμένη ἐν τῷ διαστήματι $\alpha \ldots \beta$, τουτέστιν οὐδεμία τιμὴ αὐτῆς ὑπερβαίνει ὡρισμένον τινὰ ἀριθμόν· ὥστε τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος (1), ἂν ὑπάρχῃ, οὐδαμῶς ἀλλοιοῦται· ἀλλὰ τότε οἱ μὲν ὅροι τοῦ ἀθροίσματος οἱ ἐκ τοῦ διαστήματος $\alpha \ldots \gamma$ προερχόμενοι ἔχουσιν ὅριον τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_\alpha^\gamma \varphi(x)\,dx$$

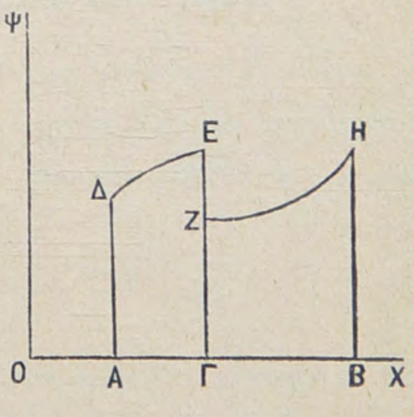
οἱ δὲ ἐκ τοῦ διαστήματος $\gamma \ldots \delta$ προερχόμενοι ὅροι ἔχουσιν ὅριον τὸ

$$\int_\gamma^\delta \varphi(x)\,dx$$

καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ ἄθροισμα (1), εἶνε

$$\int_\alpha^\gamma \varphi(x)\,dx + \int_\gamma^\delta \varphi(x)dx + \ldots + \int_\kappa^\beta \varphi(x)\,dx.$$

Σημείωσις. Συνάρτησις πεπερασμένη μένουσα ἐν τῷ διαστήματι $\alpha \ldots \beta$ δύναται νὰ εἶνε ἀσυνεχὴς διά τινα τιμὴν αὐτοῦ γ εἴτε διότι αἱ δύο τιμαὶ $\varphi(\gamma-\varepsilon)$ καὶ $\varphi(\gamma+\varepsilon)$ ἔχουσι διάφορα ὅρια διὰ $\varepsilon=0$, ὅτε ἡ συνάρτησις μεταπίπτει ἀπό τινος τιμῆς ἀποτόμως εἰς ἄλλην, ὡς ἐν τῷ σχήματι δεικνύεται· εἴτε διότι διὰ $x=\gamma$ γίνεται ἀόριστος, ὡς π.χ. ἡ συνάρτησις ημ $\left(\frac{1}{x-\gamma}\right)$, ἥτις διὰ $x=\gamma$ πρὸς οὐδεμίαν τείνει τιμήν, ἂν καὶ οὐδέποτε ὑπερβαίνει τὴν μονάδα.



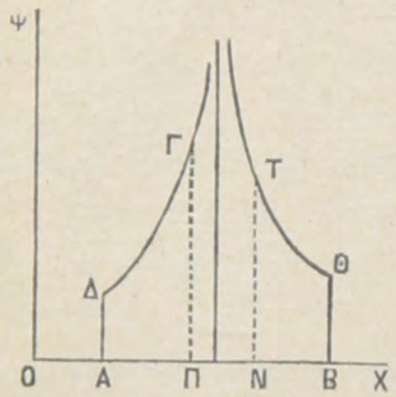
114. Ὅταν ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ γίνηται ἄπειρος διά τινα τιμὴν $x=\gamma$ τοῦ διαστήματος $\alpha \ldots \beta$, δύναται νὰ συμβῇ, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὁλοκληρωμάτων

$$\int_\alpha^{\gamma-\varepsilon} \varphi(x)\,dx + \int_{\gamma+\eta}^{\beta} \varphi(x)\,dx$$

ἔνθα ε καὶ η εἶνε θετικοὶ ἀριθμοί, νὰ τείνῃ πρός τι ὅριον πεπερασμένον καὶ ἐντελῶς ὡρισμένον, ὅταν οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ ε καὶ η *μηδόλως συνδεόμενοι πρὸς ἀλλήλους* τείνωσι πρὸς τὸ 0· ἐὰν τοιοῦτον ὅριον ὑπάρχῃ, τοῦτο καλοῦμεν τότε ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα τῆς παραστάσεως $\varphi(x)\,dx$ ἐν τῷ διαστήματι α . . . β καὶ παριστῶμεν πάλιν ὡς ἑξῆς

$$(\theta) \qquad \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\,dx.$$

Γεωμετρικῶς ἐκφράζεται τοῦτο ὡς ἑξῆς· ἐὰν ἡ καμπύλη $y=\varphi(x)$ ἔχῃ ἀσύμπτωτον τὴν εὐθεῖαν $x=\gamma$ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐμβαδῶν ΑΠΓΔ καὶ ΝΒΘΤ τείνῃ πρός τι ὅριον, ὅταν αἱ τεταγμέναι ΠΓ καὶ ΝΤ τείνωσιν νὰ πέσωσιν ἐπὶ τῆς ἀσυμπτώτου ὁπωσδήποτε κινούμεναι, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀπειρομήκους χωρίου, ὅπερ περιέχεται ὑπὸ τῆς καμπύλης καὶ τοῦ ἄξονος ΟΧ καὶ τῶν εὐθειῶν ΑΔ, ΒΘ, εἶνε πεπερασμένον καὶ παρίσταται διὰ τοῦ ὁλοκληρώματος (θ).



Περὶ τοῦ πλάτους τοῦ ὁλοκληρώματος.

115. Τὸ πλάτος τοῦ ὁλοκληρώματος, τουτέστι τὸ διάστημα α...β ὑποτίθεται ἐν τοῖς προηγουμένοις πάντοτε πεπερασμένον· ἐνίοτε συμβαίνει, ὥστε τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\,dx$$

νὰ τείνῃ πρός τι ὅριον πεπερασμένον καὶ ἐντελῶς ὡρισμένον, ὁσονδήποτε μέγα καὶ ἂν γίνῃ τὸ πλάτος αὐτοῦ (εἴτε διὰ τῆς αὐξήσεως τοῦ β ὑπὲρ πάντα ἀριθμόν, εἴτε διὰ τῆς ἐλαττώσεως τοῦ α, εἴτε δι' ἀμφότερα)· τότε ὁρίζομεν ὁλοκληρώματα ἔχοντα ἄπειρον πλάτος ὡς ἑξῆς

$$\int_{\alpha}^{\infty} \varphi(x)\,dx = \text{ορ}\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\,dx \qquad \text{διὰ } \beta=\infty$$

$$\int_{-\infty}^{\beta} \varphi(x)\, dx = \text{ορ} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\, dx \qquad \text{διὰ } \alpha = -\infty$$

καὶ
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = \text{ορ} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\, dx$$

ὅταν τὰ α καὶ β *μηδόλως συνδεόμενα πρὸς ἄλληλα* αὐξάνωσιν εἰς ἄπειρον.

Ἰδιότητες τῶν ὡρισμένων ὁλοκληρωμάτων

1) *Ἂν τὰ ὅρια τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος ἀντιστραφῶσι, τὸ ὁλοκλήρωμα ἀλλάσσει σημεῖον·* ἤτοι

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\, dx = -\int_{\beta}^{\alpha} \varphi(x)\, dx$$

τοῦτο γίνεται καταφανές, ἂν ἀμφότερα τὰ ὁλοκληρώματα θεωρηθῶσιν ὡς ὅρια ἀθροισμάτων σχηματιζομένων ἐκ τῆς αὐτῆς διαιρέσεως τοῦ διαστήματος α . . . β καὶ ἐκ τῶν αὐτῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$.

Καὶ ὄντως εἶνε

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\, dx =$$

$$= \text{ορ} \left\{ (x_1 - \alpha)\, \varphi(x'_1) + (x_2 - x_1)\, \varphi(x'_2) + \dots + (\beta - x_{\nu-1})\, \varphi(x'_\nu) \right\}$$

$$\int_{\beta}^{\alpha} \varphi(x)\, dx =$$

$$= \text{ορ} \left\{ (x_{\nu-1} - \beta)\, \varphi(x'_\nu) + \dots + (x_1 - x_2)\, \varphi(x'_2) + (\alpha - x_1)\, \varphi(x'_1) \right\}.$$

2) *Ἂν γ εἶνε τυχοῦσα τιμὴ τοῦ διαστήματος τῆς ὁλοκληρώσεως α . . . β,* θὰ εἶνε

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\gamma} \varphi(x)\, dx + \int_{\gamma}^{\beta} \varphi(x)\, dx.$$

Διότι εἰς τὸν σχηματισμὸν τοῦ ἀθροίσματος, οὗτινος ὅριον εἶνε τὸ ὁλοκλήρωμα ἀπὸ α μέχρι β, δυνάμεθα πάντοτε νὰ λαμβάνωμεν καὶ τὴν τιμὴν γ τοῦ x· τότε οἱ μὲν ὅροι τοῦ ἀθροίσματος οἱ ἐκ τοῦ διαστήματος α . . γ προερχόμενοι ἔχουσιν ὅριον τὸ ὁλοκλήρωμα ἀπὸ α μέχρι γ, οἱ δὲ προερχόμενοι ἐκ τοῦ διαστήματος γ . . . β ἔχουσιν ὅριον τὸ ὁλοκλήρωμα ἀπὸ γ μέχρι β.

Καὶ ὅταν ἡ τιμὴ γ κεῖται ἐκτὸς τοῦ διαστήματος α . . . β, ἐὰν ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ μένῃ συνεχὴς καὶ πεπερασμένη (καὶ μονότιμος) ἐν τοῖς διαστήμασιν α . . . γ καὶ β . . . γ, πάλιν θὰ εἶνε

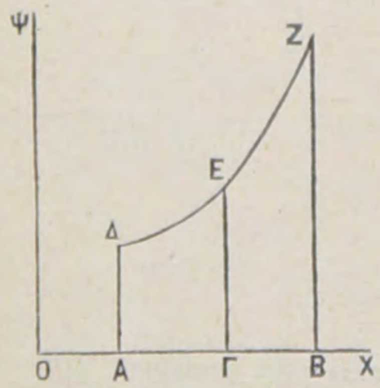
$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma \varphi(x)\,dx + \int_\gamma^\beta \varphi(x)\,dx.$$

Διότι, ἂν ἡ τιμὴ β κεῖται ἐν τῷ διαστήματι α . . . γ, θὰ εἶνε

$$\int_\alpha^\gamma \varphi(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx + \int_\beta^\gamma \varphi(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx - \int_\gamma^\beta \varphi(x)\,dx$$

ὅθεν καὶ πάλιν

$$\int_\alpha^\gamma \varphi(x)\,dx + \int_\gamma^\beta \varphi(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx.$$



ΟΑ=α, ΟΓ=γ, ΟΒ=β

Ὁμοίως δεικνύεται τὸ αὐτὸ καὶ ὅταν ἡ τιμὴ α κεῖται ἐν τῷ διαστήματι β ... γ.

Διὰ τῆς γεωμετρικῆς παραστάσεως τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος δεικνύεται ἁπλούστατα ἡ προκειμένη ἰδιότης αὐτοῦ.

Ἐὰν τῷ ὄντι ἡ ἐξίσωσις $y=\varphi(x)$ παριστᾷ τὴν καμπύλην ΔΕΖ, κεῖται δὲ τὸ Γ μεταξὺ Α καὶ Β, θὰ εἶνε

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx = (\mathrm{AB Z\Delta}),\quad \int_\alpha^\gamma \varphi(x)\,dx = (\mathrm{A\Gamma E\Delta}) \text{ καὶ } \int_\gamma^\beta \varphi(x)\,dx = (\mathrm{\Gamma BZE})$$

ὅθεν
$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma \varphi(x)\,dx + \int_\gamma^\beta \varphi(x)\,dx.$$

Καὶ γενικῶς ἂν γ, δ, . . . κ εἶνε τυχοῦσαι τιμαὶ τῆς x, θὰ εἶνε

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\gamma} \varphi(x)\, dx + \int_{\gamma}^{\delta} \varphi(x)\, dx + \ldots + \int_{\kappa}^{\beta} \varphi(x)\, dx.$$

Διότι εἶνε $\int_{\alpha}^{\gamma} + \int_{\gamma}^{\delta} = \int_{\alpha}^{\delta}$ καὶ $\int_{\alpha}^{\delta} + \int_{\delta}^{\varepsilon} = \int_{\alpha}^{\varepsilon}$ κλ.

3) *Ἐὰν ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ εἶνε ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων ἄλλων, τὸ ὁλοκλήρωμα αὐτῆς ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὁλοκληρωμάτων τῶν μερῶν αὐτῆς εἰς τὰ αὐτὰ ὅρια.*

Ἐὰν δηλαδὴ εἶνε $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$

θὰ εἶνε καὶ $\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_1(x)\, dx + \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_2(x)\, dx$

ἐπὶ τῇ ὑποθέσει, ὅτι ἀμφότεραι αἱ συναρτήσεις $\varphi_1(x)$ καὶ $\varphi_2(x)$ ἐν τῷ διαστήματι α . . . β πληροῦσι τοὺς αὐτοὺς ὅρους, οὓς καὶ ἡ $\varphi(x)$.

Διότι εἶνε

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\varphi_1(x) + \varphi_2(x)\right] dx =$$

$$= \text{ορ}\, \Sigma(x_{\lambda+1} - x_{\lambda})\left[\varphi_1(x'_{\lambda}) + \varphi_2(x'_{\lambda})\right] =$$

$$= \text{ορ}\, \Sigma(x_{\lambda+1} - x_{\lambda})\, \varphi_1(x'_{\lambda}) + \text{ορ}\, \Sigma(x_{\lambda+1} - x_{\lambda})\, \varphi_2(x'_{\lambda}) =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_1(x)\, dx + \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_2(x)\, dx.$$

Καὶ ὅταν ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ εἶνε φανταστικὴ (τῆς x οὔσης πραγματικῆς), ἤτοι ὅταν

$$\varphi(x) = \mathrm{f}(x) + i\,\sigma(x),$$

ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸν αὐτὸν ὁρισμὸν τοῦ ὁλοκληρώματος, εὑρίσκομεν ὁμοίως

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{f}(x)\, dx + i \int_{\alpha}^{\beta} \sigma(x)\, dx.$$

4) *Οἱ σταθεροὶ παράγοντες ἐξέρχονται ἐκτὸς τοῦ συμβόλου τῆς ὁλοκληρώσεως ἢ καὶ τἀνάπαλιν εἰσέρχονται ἐντὸς ἀκωλύτως*

ἤτοι εἶνε $$\int_\alpha^\beta A\,\varphi(x)\,dx = A\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx$$

ἡ ἰδιότης αὕτη γίνεται ἀμέσως φανερὰ ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ὁλοκληρώματος.

5) *Τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο γινομένων, ἅτινα εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τὸ πλάτος αὐτοῦ πρῶτον ἐπὶ τὴν μεγίστην καὶ ἔπειτα ἐπὶ τὴν ἐλαχίστην τιμὴν τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$ ἐν τῷ διαστήματι τῆς ὁλοκληρώσεως.*

Διότι, ἂν M εἶνε ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$ ἐν τῷ διαστήματι $\alpha\ \ldots\ \beta$ (ἢ μηδεμιᾶς μικροτέρα) καὶ E ἡ ἐλαχίστη (ἢ μηδεμιᾶς μεγαλητέρα), θὰ εἶνε προφανῶς

$$\Sigma(x_{\lambda+1}-x_\lambda)\,E < \Sigma(x_{\lambda+1}-x_\lambda)\,\varphi(x'_\lambda) < \Sigma(x_{\lambda+1}-x_\lambda)\,M$$

ἄρα καὶ $$E(\beta-\alpha) < \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx < M.(\beta-\alpha)$$

ὑπετέθη ἐν τῇ ἀποδείξει ὅτι εἶνε $\alpha<\beta$· ἀλλ' εὐκόλως δεικνύεται καὶ ὅταν $\alpha>\beta$.

Σημείωσις. Διὰ τῆς γεωμετρικῆς παραστάσεως τοῦ ὁλοκληρώματος ἀποδεικνύεται ἡ πρότασις ἁπλούστατα· διότι ἂν μηδεμία τεταγμένη τῆς καμπύλης $y=\varphi(x)$ εἶνε μεγαλητέρα τῆς M καὶ μηδεμία μικροτέρα τῆς E, τὸ ἐμβαδὸν περιλαμβάνεται προδήλως μεταξὺ τῶν δύο ὀρθογωνίων AB.M καὶ AB.E.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὸν λόγον τοῦ ὁλοκληρώματος πρὸς τὸ πλάτος αὐτοῦ διὰ τοῦ Λ, θὰ εἶνε

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx = \Lambda(\beta-\alpha) \qquad \text{ἔνθα} \quad E<\Lambda<M.$$

Ἐὰν δὲ ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ εἶνε συνεχής, δὲν δύναται νὰ μεταβῇ ἀπὸ τῆς τιμῆς E εἰς τὴν τιμὴν M πρὶν ἢ διέλθῃ δι' ὅλων τῶν μεταξὺ περιλαμβανομένων τιμῶν, ἑπομένως θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῆς τιμῆς Λ· ἂν τοῦτο γίνηται διὰ $x=\gamma$, θὰ εἶνε

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\, dx = (\beta-\alpha)\, \varphi(\gamma),$$

ἔνθα γ εἶνε τιμή τις τοῦ διαστήματος $\alpha \ldots \beta$.

6) *Ἐὰν ἐν τῷ διαστήματι $\alpha \ldots \beta$ τῆς ὁλοκληρώσεως εἶνε πάντοτε*

$$\varphi(x) > \mathrm{f}(x) \quad \text{καὶ} \quad \alpha < \beta$$

θὰ εἶνε
$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\, dx > \int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{f}(x)\, dx.$$

Ἡ πρότασις αὕτη ἀποδεικνύεται εἴτε ἐκ τῆς γεωμετρικῆς παραστάσεως τῶν ὁλοκληρωμάτων διὰ τῶν ἐμβαδῶν, εἴτε καὶ ἐκ τοῦ σχηματισμοῦ τῶν ἀθροισμάτων, ὧν ὅρια εἶνε τὰ ὁλοκληρώματα, ἐὰν εἰς ἀμφότερα λαμβάνωνται αἱ αὐταὶ τιμαὶ τῆς x. Μένει δὲ ἡ πρότασις ἀληθὴς καὶ ὅταν διά τινας τιμὰς τοῦ διαστήματος $\alpha \ldots \beta$ εἶνε $\mathrm{f}(x)=\varphi(x)$

Σημείωσις. Ἡ πρότασις αὕτη περιλαμβάνει καὶ τὴν προηγουμένην ὡς μερικὴν περίπτωσιν.

7) *Τὸ ὁλοκλήρωμα*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\, dx$$

εἶνε συνάρτησις συνεχὴς καὶ πεπερασμένη καὶ διαφορίσιμος ἑκατέρου τῶν ὁρίων αὐτοῦ, ἐὰν μεταβάλλωνται ταῦτα διαμένοντα ἐντὸς διαστήματος $\alpha_1 \ldots \beta_1$, *ἐν ᾧ ἡ συνάρτησις* $\varphi(x)$ *εἶνε πεπερασμένη καὶ συνεχής.*

Ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα εἶνε συνάρτησις τοῦ ἄνω ὁρίου β, εἶνε προφανές· διότι μεταβαλλομένου τοῦ β καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα μεταβάλλεται, καὶ πρὸς ἑκάστην τιμὴν τοῦ β (τοῦ α μένοντος σταθεροῦ) ἀντιστοιχεῖ μία ἐντελῶς ὡρισμένη τιμὴ τοῦ ὁλοκληρώματος.

Ἐὰν λ. χ. τὸ β αὐξηθῇ κατὰ ε, τὸ ὁλοκλήρωμα γίνεται

$$\int_{\alpha}^{\beta+\varepsilon} \varphi(x)\, dx \quad \text{ἤτοι} \quad \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\, dx + \int_{\beta}^{\beta+\varepsilon} \varphi(x)\, dx$$

ἑπομένως πρὸς τὴν αὔξησιν ε τοῦ β ἀντιστοιχεῖ τοῦ ὁλοκληρώματος αὔξησις ἴση τῷ ὁλοκληρώματι

$$\int_{\beta}^{\beta+\varepsilon} \varphi(x)\, dx \qquad (\iota)$$

εἶνε δὲ τὸ ὁλοκλήρωμα συνεχὴς συνάρτησις τοῦ β· διότι ἡ αὔξησις αὐτοῦ ἡ ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τὴν αὔξησιν τοῦ β κατὰ ε, ὡς μικροτέρα τοῦ Mε (ἔνθα M δηλοῖ τὴν μεγίστην (ἀπολύτως) τιμὴν τῆς συναρτήσεως ἐν τῷ διαστήματι $\alpha_1 \ldots \beta_1$, ἐν τῷ ὁποίῳ διαμένουσι τὰ ὅρια α καὶ β) τείνει πρὸς τὸ 0 μετὰ τοῦ ε· δύναται ἄρα νὰ γίνῃ ὁσονδήποτε μικρά, ἐὰν τὸ ε ληφθῇ ἱκανῶς μικρόν.

Λέγω νῦν, ὅτι εἶνε καὶ διαφορίσιμος συνάρτησις τοῦ β· διότι, ἂν τὸ ὁλοκλήρωμα παρασταθῇ συντομίας χάριν διὰ τοῦ I καὶ ἡ αὔξησις αὐτοῦ διὰ τοῦ ΔI, θὰ εἶνε

$$\Delta I = \int_{\beta}^{\beta+\varepsilon} \varphi(x)\, dx$$

ἢ κατὰ τὰ προηγουμένως εὑρεθέντα (ἰδιότης 5)

$$\Delta I = \varepsilon . \varphi(\beta + \rho\varepsilon) \qquad \text{ἔνθα} \qquad 0 < \rho < 1$$

ἐὰν δὲ γράψωμεν τὴν ἰσότητα ταύτην ὡς ἑξῆς

$$\Delta I = \varepsilon\, \varphi(\beta) + \varepsilon\left[\varphi(\beta+\rho\varepsilon) - \varphi(\beta)\right],$$

βλέπομεν ἀμέσως ὅτι εἶνε

$$dI = \varphi(\beta) d\beta \qquad (7)$$

τουτέστι τὸ διαφορικὸν ὡρισμένου ὁλοκληρώματος πρὸς τὸ ἄνω ὅριον αὐτοῦ εὑρίσκεται, ἐὰν εἰς τὴν ὁλοκληρουμένην παράστασιν ἀντὶ τῆς μεταβλητῆς x τεθῇ τὸ ὅριον τοῦτο.

Καὶ πρὸς τὸ κάτω ὅριον αὐτοῦ εἶνε διαφορίσιμον τὸ ὁλοκλήρωμα· διότι εἶνε

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\, dx = -\int_{\beta}^{\alpha} \varphi(x)\, dx$$

ἄρα

$$dI = -\varphi(\alpha)\, d\alpha. \qquad (7')$$

Ἐὰν δὲ ἀμφότερα τὰ ὅρια α καὶ β μεταβληθῶσιν, θὰ εἶνε

$$dI = \varphi(\beta)\, d\beta - \varphi(\alpha)\, d\alpha \tag{8}$$

Παρατήρησις.

116. Ἐκ τῆς ἀποδειχθείσης ἰδιότητος τῶν ὡρισμένων ὁλοκληρωμάτων συνάγεται νῦν ἀμέσως, ὅτι *ὑπάρχει πάντοτε συνάρτησις ἔχουσα παράγωγον τὴν δεδομένην συνάρτησιν $\varphi(x)$, ἐὰν αὕτη εἶνε πεπερασμένη καὶ συνεχὴς ἔν τινι διαστήματι α . . . β*· διότι τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα

$$\int_\alpha^x \varphi(x)\, dx \quad \text{ἢ καὶ} \quad \int_\alpha^x \varphi(t)\, dt \tag{9}$$

οὗ τὸ ἄνω ὅριον x μεταβάλλεται ἐν τῷ διαστήματι α . . . β, ἔχει πρὸς αὐτὸ παράγωγον τὴν συνάρτησιν $\varphi(x)$.

Ἐπειδὴ ἡ παράγουσα τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$ παρίσταται ὡς ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα (9), διὰ τοῦτο λέγεται καὶ αὐτὴ ὁλοκλήρωμα, κα ἡ εὕρεσις τῶν παραγουσῶν, ὁλοκλήρωσις, καὶ σημειοῦται διὰ τοῦ αὐτοῦ συμβόλου, τοῦ τῆς ὁλοκληρώσεως. Ὅταν δὲ θέλωμεν νὰ διακρίνωμεν τὴν παράγουσαν ἀπὸ τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος, καλοῦμεν αὐτὴν *ἀόριστον ὁλοκλήρωμα.*

Εὕρεσις τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος διὰ τῶν παραγουσῶν.

117. Διὰ τῆς προηγουμένως ἀποδειχθείσης ἰδιότητος τῶν ὡρισμένων ὁλοκληρωμάτων ἀνάγεται ἡ εὕρεσις αὐτῶν εἰς τὴν εὕρεσιν συναρτήσεως ἐχούσης δεδομένον διαφορικόν, τουτέστιν εἰς τὸ ζήτημα, ὅπερ ἐπραγματεύθημεν ἐν τῷ Α′ βιβλίῳ. Διότι, ἂν θεωρηθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$I = \int_\alpha^\beta \varphi(x)\, dx$$

ὡς συνάρτησις τοῦ ἄνω ὁρίου αὐτοῦ β, θὰ εἶνε

$$dI = \varphi(\beta)\, d\beta$$

ἐὰν λοιπὸν εὕρωμεν συνάρτησίν τινα $\sigma(x)$, ἥτις ἔχει παράγωγον τὴν δεδομένην συνάρτησιν $\varphi(x)$ $\Big($ἤτοι ἂν εὕρωμεν τὴν παράγουσαν τῆς $\varphi(x)\Big)$

θὰ εἶνε $$\sigma'(\beta) = \varphi(\beta)$$

ἄρα $$d\mathrm{I} = \sigma'(\beta)\, d\beta = d\,\sigma(\beta)$$

καὶ ἑπομένως $$\mathrm{I} = \sigma(\beta) + \mathrm{C}$$

ἵνα νῦν προσδιορίσωμεν τὴν σταθερὰν C, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα I εἶνε συνεχὴς συνάρτησις τοῦ β ἐν τῷ διαστήματι $\alpha_1 \ldots \beta_1$ ὥστε, *ἂν εἶνε συνεχὴς καὶ ἡ συνάρτησις σ(β)* ἐν τῷ αὐτῷ διαστήματι, ἡ σταθερὰ ποσότης C, ὡς διαφορὰ δύο συνεχῶν συναρτήσεων, δὲν δύναται νὰ μεταπέσῃ αἴφνης ἀπὸ μιᾶς τιμῆς εἰς ἄλλην· θὰ διαμένῃ, ἄρα ἡ αὐτὴ ὁπωσδήποτε καὶ ἂν μεταβάλληται τὸ β ἐν τῷ αὐτῷ διαστήματι $\alpha_1 \ldots \beta_1$, ἀλλ' ὅταν τὸ β συνεχῶς ἐλαττούμενον (ἂν $\beta > \alpha$) ἢ συνεχῶς αὐξανόμενον (ἂν $\beta < \alpha$) καταντήσῃ ἴσον τῷ α, τὸ ὁλοκλήρωμα I γίνεται 0· ὅθεν συνάγεται

$$0 = \sigma(\alpha) + \mathrm{C} \quad \text{καὶ} \quad \mathrm{C} = -\sigma(\alpha)$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ τιμὴ τοῦ ὁλοκληρώματος

$$\mathrm{I} = \int_\alpha^\beta \varphi(x)\, dx = \sigma(\beta) - \sigma(\alpha) \tag{10}$$

τουτέστι *τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα τοῦ* $\varphi(x)\,dx$ *ἀπὸ α μέχρι β ἰσοῦται τῇ αὐξήσει, ἣν λαμβάνει ἡ παράγουσα* $\sigma(x)$, *ὅταν ἡ μεταβλητὴ* x *συνεχῶς μεταβαλλομένη καὶ ἀεὶ προχωροῦσα μεταβῇ ἐκ τῆς τιμῆς α εἰς τὴν τιμὴν β.*

Τὴν αὔξησιν ταύτην παριστῶμεν ὡς ἑξῆς $\Big[\,\sigma(x)\,\Big]_\alpha^\beta$

ὥστε ὁ τύπος (10) γράφεται καὶ ὡς ἕπεται

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\, dx = \Big[\,\sigma(x)\,\Big]_\alpha^\beta$$

Ὁ τρόπος οὗτος τῆς εὑρέσεως τῶν ὡρισμένων ὁλοκληρωμάτων (ὁ διὰ τῆς εὑρέσεως τῆς παραγούσης) εἶνε ὁ ἁπλούστατος καὶ ὁ γενικώτατος πάντων· διότι δι' αὐτοῦ, ἀφοῦ εὑρεθῇ ἡ παράγουσα $\sigma(x)$, εὑρίσκεται τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ $\varphi(x)\,dx$, οἱαδήποτε ὅρια καὶ ἂν ἔχῃ.

Παραδείγματα.

1ον $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}x\, dx$$

Τὸ ἀόριστον ὁλοκλήρωμα εἶνε $\text{ημ}x$·

ὅθεν $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}x\, dx = \Big[\text{ημ}x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν καὶ $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ημ}x\, dx = 1.$$

Ἐπίσης εἶνε $\int_0^{k\pi} \text{συν}x\, dx = \text{ημ}(k\pi)$ καὶ $\int_0^{k\pi} \text{ημ}x\, dx = 1 - \text{συν}(k\pi)$

2ον $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}^n x\, dx$$ (ἔνθα n ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός).

Περὶ τοῦ ἀορίστου ὁλοκληρώματος $\int \text{συν}^n x\, dx$ ἀπεδείξαμεν (σελ. 126) τὸν τύπον

$$\int \text{συν}^n x\, dx = \frac{\text{συν}^{n-1} x\ \text{ημ}x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \text{συν}^{n-2} x\, dx$$

ὅθεν $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}^n x\, dx = \left[\frac{\text{συν}^{n-1} x\ \text{ημ}x}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}^{n-2} x\, dx$$

ἤτοι (ἂν $n > 1$) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}^n x\, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}^{n-2} x\, dx. \qquad (11)$$

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον τοῦτον θέσωμεν ἐκ διαδοχῆς $n=2, 4, 6 \ldots$ εὑρίσκομεν

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}^4 x\, dx = \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}^2 x\, dx = \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}^6 x\, dx = \frac{5}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}^4 x\, dx = \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\pi}{2}$$

καὶ ἐν γένει διὰ πάντα ἐκθέτην n ἄρτιον

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}^n x\, dx = \frac{1.3.5\ \ldots\ n-1}{2.4.6\ \ldots\ n}\cdot\frac{\pi}{2} \qquad (12)$$

Ἐὰν δὲ εἰς τὸν αὐτὸν τύπον (11) θέσωμεν ἐκ διαδοχῆς $n=3,5,7..$ εὑρίσκομεν ὁμοίως

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}^3 x\, dx = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν} x\, dx = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}^5 x\, dx = \frac{4}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}^3 x\, dx = \frac{2.4}{3.5}$$

καὶ γενικῶς διὰ πάντα ἐκθέτην n περιττὸν

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}^n x\, dx = \frac{2.4.6\ .\ .\ .\ (n-1)}{3.5.7\ .\ .\ .\ \ n}. \qquad (12')$$

Ὁμοίως εὑρίσκεται καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ημ}^n x\, dx \quad \text{ὅπερ εἶνε ἴσον τῷ} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}^n x\, dx$$

διὰ πάντα ἐκθέτην n.

Ἀξιοπαρατήρητον εἶνε ὅτι τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}^n x\, dx$$

εἶνε σύμμετρον μέν, ὅταν ὁ ἐκθέτης n εἶνε περιττός, γινόμενον δὲ τοῦ $\frac{\pi}{2}$ ἐπὶ σύμμετρον, ὅταν ὁ n εἶνε ἄρτιος· ἐπειδὴ δὲ εἶνε ἐν τῷ διαστήματι τῆς ὁλοκληρώσεως

$$\text{συν}^{2n+1} x < \text{συν}^{2n} x < \text{συν}^{2n-1} x,$$

ἕπεται

$$\frac{2.4.6\ .\ .\ .\ 2n}{3.5.7\ .\ .\ .\ (2n+1)} < \frac{1.3.5\ .\ .\ .\ (2n-1)}{2.4.6\ .\ .\ .\ 2n} . \frac{\pi}{2} < \frac{2.4.6\ .\ .\ .\ (2n-2)}{3.5.7\ .\ .\ .\ 2n-1}$$

ὅθεν

$$\frac{\pi}{2} < \left(\frac{2}{1} . \frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{3} . \frac{4}{5}\right)\left(\frac{6}{5} . \frac{6}{7}\right) \cdots \left(\frac{2n-2}{2n-3} . \frac{2n-2}{2n-1}\right)\frac{2n}{2n-1}.$$

ἀλλὰ

$$\frac{\pi}{2} > \left(\frac{2}{1} . \frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{3} . \frac{4}{5}\right)\left(\frac{6}{5} . \frac{6}{7}\right) \cdots \left(\frac{2n-2}{2n-3} . \frac{2n-2}{2n-1}\right)\left(\frac{2n}{2n-1}\right)\left(\frac{2n}{2n+1}\right)$$

καὶ ἐπειδὴ τὰ δύο γινόμενα ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς παράγοντας πλὴν τοῦ παράγοντος $\frac{2n}{2n+1}$, ὅστις τείνει πρὸς τὴν μονάδα (ὅταν ὁ n αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον), συνάγεται

$$\frac{\pi}{2}=\text{ορ}\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\right)\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\right)\left(\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\right)\cdots\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right)\cdots$$

Ὁ τύπος οὗτος εὑρέθη ὑπὸ τοῦ ἄγγλου μαθηματικοῦ Wallis· δύναται δὲ νὰ γραφῇ ὁ αὐτὸς τύπος καὶ ὡς ἑξῆς

$$\frac{\pi}{4}=\text{ορ}\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)\cdots$$

$3^{\text{ον}}$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ημ}^m x \,\text{συν}^n x\, dx$ (m καὶ n ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί).

Περὶ τοῦ ὁλοκληρώματος τούτου ἀπεδείξαμεν (σελ. 131) τὸν τύπον

$$\int \text{συν}^n x.\text{ημ}^m x\, dx=\frac{\text{συν}^{n-1} x.\text{ημ}^{n+1} x}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}\int \text{συν}^{n-2} x.\,\text{ημ}^m x\, dx$$

ὅθεν (ἂν $n>1$) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}^n x\,\text{ημ}^m x\, dx=\frac{n-1}{m+n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}^{n-2} x.\text{ημ}^m x\, dx$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου, ἂν θέσωμεν διαδοχικῶς $n=2, 4, 6, 8\ldots$ εὑρίσκομεν διὰ πάντα ἐκθέτην n ἄρτιον

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}^n x.\text{ημ}^m x\, dx=\frac{1.3.5\ \ldots\ (n-1)}{(m+2)(m+4)\ldots(m+n)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ημ}^m x dx$$

καὶ διὰ πάντα ἐκθέτην n περιττὸν

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}^n x.\text{ημ}^m x\, dx=\frac{2.4.6\ \ldots\ (n-1)}{(m+1)(m+3)\ldots(m+n)}.$$

4ον $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{εφ}^m x\, dx$$ (m ἀκέραιος καὶ θετικός).

Ἐκ τοῦ ἐν τῷ ἐδ. 95 εὑρεθέντος τύπου (17) ἔχομεν (ἂν $m>1$)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{εφ}^m x\, dx = \frac{1}{m-1} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{εφ}^{m-2} x\, dx$$

καὶ ἂν θέσωμεν $m=2, 4\ \ldots$ εὑρίσκομεν

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{εφ}^2 x\, dx = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{εφ}^4 x\, dx = \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4}$$

καὶ γενικῶς διὰ πάντα ἐκθέτην m ἄρτιον

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{εφ}^m x\, dx = \left[\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots \pm \frac{1}{m-1}\right](-1)^{\frac{m}{2}}$$

ἂν δὲ θέσωμεν $m=3, 5, 7\ \ldots$ εὑρίσκομεν διὰ πάντα ἐκθέτην m περιττὸν

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{εφ}^m x\, dx = \left[\frac{1}{2} l2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \ldots \pm \frac{1}{m-1}\right](-1)^{\frac{m-1}{2}}$$

5ον $$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\rho}\, dx$$ (ρ ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός) ἐφαρμόζοντες τὸν ἐν τῷ ἐδ. 18 εὑρεθέντα τύπον (6) περὶ τοῦ ἀορίστου ὁλοκληρώματος $\int e^{-x}\varphi(x)\,dx$, εὑρίσκομεν ἐνταῦθα

$$\int e^{-x}x^{\rho}\,dx = -e^{-x}\left[x^{\rho}+\rho x^{\rho-1}+\rho(\rho-1)x^{\rho-2}+\ \ldots\ +1.2.3\ldots\rho\right]$$

παρατηροῦντες δὲ ὅτι τὸ δεύτερον μέλος γίνεται 0 διὰ $x=\infty$, εὑρίσκομεν

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\,x^{\rho}\,dx = 1.2.3\ \ldots\ \rho \qquad (13)$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, τοῦ $\varphi(x)$ δηλοῦντος ἀκέραιον πολυώνυμον βαθμοῦ n

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\varphi(x)\,dx = \varphi(0)+\varphi'(0)+\varphi''(0)+\ \ldots\ +\varphi^{n}(0)$$

ἢ ἂν $\qquad \varphi(x)=A_0x^{\rho}+A_1x^{\rho-1}+\ \ldots\ +A_{\rho}$

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\varphi(x)\,dx =$$

$$=(1.2.3\ \ldots\ \rho)\,A_0+1.2.3\ \ldots\ (\rho-1)A_1+\ \ldots\ +1.A_{\rho-1}+A_{\rho}$$

6ον $\qquad \int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\,\text{συν}\,\beta x\,dx \quad \text{καὶ} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\,\text{ημ}\,\beta x\,dx$

(α καὶ β πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ $\alpha>0$)

Ἐκ τῶν εὑρεθέντων ἤδη ἀορίστων ὁλοκληρωμάτων (σελ. 140) εὑρίσκομεν νῦν

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\,\text{συν}\,\beta x\,dx &= \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\\ \int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\,\text{ημ}\,\beta x\,dx &= \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

7^{ov} $$\int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

ἐπειδὴ ἡ ὁλοκληρουμένη συνάρτησις $\frac{1}{\sqrt{x}}$ γίνεται ἄπειρος διὰ $x=0$, ἤτοι εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ διαστήματος $0 \ldots x_1$ τῆς ὁλοκληρώσεως, εὑρίσκομεν κατὰ πρῶτον τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_\varepsilon^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \qquad \varepsilon > 0$$

ὅπερ εἶνε $2(\sqrt{x} - \sqrt{\varepsilon})$ $\left(\text{διότι } \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\right)$

ἐπειδὴ δὲ τοῦτο, τοῦ ε τείνοντος πρὸς τὸ 0, ἔχει ὅριον τὸ $2\sqrt{x_1}$ συνάγεται

$$\int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x_1}.$$

8^{ov} $$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \eta\mu^n x \, dx.$$

Ἐκ τοῦ τύπου (21) τῆς σελίδος 141 εὑρίσκομεν $(n > 1)$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \eta\mu^n x \, dx = \frac{n(n-1)}{n^2+\alpha^2} \int_0^\infty e^{-\alpha x} \eta\mu^{n-2} x \, dx.$$

Ἐκ δὲ τούτου εὑρίσκομεν

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \eta\mu^{2n} x \, dx = \frac{1.\ 2.\ 3 \ldots (2n)}{\alpha(\alpha^2+2^2)(\alpha^2+4^2) \ldots (\alpha^2+4n^2)}$$

καὶ $$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \eta\mu^{2n+1} x \, dx = \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots (2n+1)}{(\alpha^2+1^2)(\alpha^2+3^2) \ldots \left(\alpha^2+(2n+1)^2\right)}$$

$9^{ον}$ $\int_0^1 x^p(1-x)^q dx$ (p καὶ q θετικοὶ καὶ ἀκέρ. ἀριθμοὶ)

Ἐκ τῶν τύπων τῆς ἀναγωγῆς τοῦ ἀορίστου ὁλοκληρώματος, τῶν ἐν τῷ ἐδ. 83 ἀποδειχθέντων, εὑρίσκομεν

$$\int_0^1 x^p(1-x)^q dx = \frac{q}{p+q+1}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}dx$$

ὑποθέτοντες δὲ $q=1, 2, 3 \ldots$ εὑρίσκομεν

$$\int_0^1 x^p(1-x)dx = \frac{1}{p+2}\int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+2}\cdot\frac{1}{p+1}$$

$$\int_0^1 x^p(1-x)^2 dx = \frac{2}{p+3}\cdot\frac{1}{p+2}\quad\frac{1}{p+1}$$

καὶ γενικῶς διὰ πάντα ἐκθέτην q (ἀκέραιον καὶ θετικὸν)

$$\int_0^1 x^p(1-x)^q dx = \frac{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ q}{(p+1)(p+2)\ldots(p+q)}\cdot\frac{1}{p+q+1} =$$

$$= \frac{(1.2.3\ \ldots\ p)\ (1.2.3\ \ldots\ q)}{1.2.3\ \ldots\ (p+q)}\quad\frac{1}{p+q+1}.$$

$10^{ον}$ $\int_0^{2\pi}$ συν mx.συν $nx\,dx$, $\int_0^{2\pi}$ ημ mx.ημ $nx\,dx$, $\int_0^{2\pi}$ ημ mx.συν $nx\,dx$

(m καὶ n ἀκέραιοι ἀριθμοὶ)

ἀναλύοντες τὰ γινόμενα εἰς ἀθροίσματα ἔχομεν

$$\text{συν}\, mx.\text{συν}\, nx = \frac{1}{2}\text{συν}(m+n)x + \frac{1}{2}\text{συν}(m-n)x$$

$$\text{ημ}\, mx.\text{ημ}\, nx = \frac{1}{2}\text{συν}(m-n)x - \frac{1}{2}\text{συν}(m+n)x$$

$$\text{ημ}\, mx.\text{συν}\, nx = \frac{1}{2}\text{ημ}(n+m)x - \frac{1}{2}\text{ημ}(n-m)x$$

ὅθεν συνάγεται

$$\int_0^{2\pi} \text{συν}\, mx . \text{συν}\, nx\, dx = 0 \quad \text{ἂν } m \gtrless n, \quad \text{ἢ } = \pi \text{ ἂν } m = n$$

καὶ $$\int_0^{2\pi} \text{ημ}\, mx . \text{ημ}\, nx\, dx = 0 \quad \text{ἂν } m \gtrless n, \quad \text{ἢ } = \pi \text{ ἂν } m = n$$

καὶ $$\int_0^{2\pi} \text{ημ}\, mx . \text{συν}\, nx\, dx = 0$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν

$$\int_0^{\pi} \text{ημ}(mx)\text{συν}(nx) dx = 0$$ ἂν ἀμφότεροι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ m καὶ n εἶνε ἄρτιοι ἢ ἀμφότεροι περιττοὶ

καὶ $$\int_0^{\pi} \text{ημ}(mx)\text{συν}(nx)\, dx = \frac{2m}{m^2 - n^2}$$ ἂν ὁ εἷς εἶνε ἄρτιος καὶ ὁ ἄλλος περιττός.

$$\int_0^{\pi} \text{ημ}(mx)\text{ημ}(nx) dx = 0 \quad \text{ἂν } m \gtrless n \quad \text{καὶ } = \frac{\pi}{2} \text{ ἂν } m = n$$

$$\int_0^{\pi} \text{συν}\, mx . \text{συν}\, nx\, dx = 0 \quad \text{ἂν } m \gtrless n \quad \text{καὶ } = \frac{\pi}{2} \text{ ἂν } m = n.$$

11ον Εὑρεῖν τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2n\, x^{2m}}{1 + x^{2n}} dx \qquad (m \text{ καὶ } n \text{ ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ καὶ } m < n)$$

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ $\rho_0\ \rho'_0,\ \rho_1\ \rho'_1,\ \cdot\cdot\cdot\ \rho_{n-1}\ \rho'_{n-1}$ τὰς $2n$ ῥίζας τοῦ παρονομαστοῦ, αἵτινες εἶνε ἀνὰ δύο συζυγεῖς (αἱ τὸν αὐτὸν δείκτην ἔχουσαι) καὶ νοήσωμεν τὴν πρὸς ὁλοκλήρωσιν δεδομένην ῥητὴν συνάρτησιν ἀναλελυμένην εἰς ἁπλᾶ κλάσματα, τὰ δὲ ὑπὸ συζυγῶν ῥιζῶν διδόμενα ἡνωμένα εἰς ἕν, θὰ εἶνε

$$\frac{2n\, x^{2m}}{1+x^{2n}} = X_0 + X_1 + \ldots + X_{n-1}$$

καὶ ἑπομένως

$$\int_{-A}^{+B} \frac{2n\, x^{2m}}{1+x^{2n}} dx = \int_{-A}^{+B} X_0 dx + \int_{-A}^{+B} X_1 dx + \ldots + \int_{-A}^{+B} X_{n-1} dx$$

τὰ ὑπὸ δύο οἱωνδήποτε συζυγῶν ῥιζῶν $\rho (=\alpha+\beta i)$ καὶ $\rho' (=\alpha-\beta i)$ διδόμενα κλάσματα εἶνε

$$X = -\left[\frac{\rho^{2m+1}}{x-\rho} + \frac{\rho'^{2m+1}}{x-\rho'}\right] =$$

$$-\frac{x\left(\rho^{2m+1}+\rho'^{2m+1}\right) - \left(\rho\rho'^{2m+1}+\rho'\rho^{2m+1}\right)}{x^2-(\rho+\rho')x+\rho\rho'}$$

ὁλοκληροῦντες δὲ τοῦτο μεταξὺ τῶν ὁρίων $-A$ καὶ $+B$, εὑρίσκομεν

$$\int_{-A}^{+B} X\, dx = -\frac{1}{2}\left(\rho^{2m+1}+\rho'^{2m+1}\right) l\left(\frac{B^2}{A^2}\right) +$$

$$-\frac{1}{2}\left(\rho^{2m+1}+\rho'^{2m+1}\right) l \left\{\frac{\left(1-\frac{\alpha}{B}\right)^2+\frac{\beta^2}{B^2}}{\left(1-\frac{\alpha}{A}\right)^2+\frac{\beta^2}{A^2}}\right\} +$$

$$-i\left(\rho^{2m+1}-\rho^{2m+1}\right)\left\{\text{τοξ εφ}\frac{B-\alpha}{\beta} + \text{τοξ εφ}\frac{A+\alpha}{\beta}\right\}.$$

Ἐκ τούτου ἕπεται νῦν

$$\int_{-A}^{+B} \frac{2n\, x^{2m}}{1+x^{2n}} dx = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\rho_k^{2m+1}+\rho_k'^{2m+1}\right) l \left\{\frac{\left(1-\frac{\alpha}{B}\right)^2+\frac{\beta^2}{B^2}}{\left(1-\frac{\alpha}{A}\right)^2+\frac{\beta^2}{A^2}}\right\} +$$

$$-i\sum_{k=0}^{n-1}\left(\rho_k^{2m+1}-\rho_k'^{2m+1}\right)\left\{\text{τοξ εφ}\frac{B-\alpha_k}{\beta_k} + \text{τοξ εφ}\frac{A+\alpha_k}{\beta_k}\right\}.$$

(τὸ ἄθροισμα $\sum_{k=0}^{n-1}\left(\rho^{2m+1}+\rho'^{2m+1}\right)$ εἶνε ἴσον τῷ 0· διότι εἶνε

$2m+1<2n$, εἶνε δὲ γνωστὸν ἐκ τῆς ἀλγέβρας, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοίων δυνάμεων τῶν ῥιζῶν ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως εἶνε ἀκεραία συνάρτησις τῶν συντελεστῶν αὐτῆς· οἱ δὲ συντελεσταί, δι' ὧν ἐκφράζεται τὸ ἄθροισμα τῶν δυνάμεων $2m+1$, εἶνε ἐνταῦθα 0).

Ἐὰν δὲ ἐν τῷ προηγουμένῳ ὁλοκληρώματι νοήσωμεν τοὺς θετικοὺς ἀριθμοὺς A καὶ B αὐξανομένους ὑπὲρ πάντα ἀριθμόν, εὑρίσκομεν

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2n\, x^{2m}}{1+x^{2n}} dx = -\pi i \sum_{k=0}^{n-1} \left(\rho_k^{2m+1} - \rho_k'^{2m+1} \right)$$

πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος τούτου, παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ ῥίζαι ρ τῆς ἐξισώσεως $x^{2n}+1=0$ εἶνε αἱ ἑξῆς (Εἰσαγ. σελ. 86)

$$\text{συν}\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) + i\ \text{ημ}\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) \qquad k=0,1,2\ldots(2n-1)$$

συζυγεῖς δὲ εἶνε αἱ πρὸς τὰς τιμὰς k καὶ $2n-1-k$ ἀντιστοιχοῦσαι· ὥστε πᾶσαι αἱ ῥίζαι εἶνε

$$\text{συν}\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) \pm i\ \text{ημ}\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) \qquad k=0,\ 1,\ 2\ldots(n-1)$$

ἑπομένως

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\rho_k^{2m+1} - \rho_k'^{2m+1} \right) = 2i \sum_{k=0}^{n-1} \text{ημ}\left((2k+1)(2m+1)\frac{\pi}{2n} \right) =$$

$$= 2i \left[\text{ημ}\,\varepsilon + \text{ημ}\,3\varepsilon + \text{ημ}\,5\varepsilon + \ldots + \text{ημ}(2n-1)\varepsilon \right]$$

ἐὰν τεθῇ $\qquad \varepsilon = \dfrac{2m+1}{2n}\pi.$

ὅθεν $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2n\, x^{2m}}{1+x^{2n}} dx = 2\pi \left[\text{ημ}\,\varepsilon + \text{ημ}\,3\varepsilon + \ldots + \text{ημ}(2n-1)\varepsilon \right]$$

Ἀλλ' ἐὰν τὸ ἐν τῇ παρενθέσει ἄθροισμα πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 2ημε, καὶ ἀναλύσωμεν ἔπειτα ἕκαστον ὅρον εἰς διαφορὰν δύο συνημιτόνων, εὑρίσκομεν

$$\text{ημ}\,\varepsilon + \text{ημ}\,3\varepsilon + \ldots + \text{ημ}(2n-1)\varepsilon = \frac{1-\text{συν}\,2n\varepsilon}{2\,\text{ημ}\,\varepsilon} = \frac{1}{\text{ημ}\,\varepsilon}.$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται τέλος

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n\, x^{2m}}{1+x^{2n}} dx = \frac{\pi}{\eta\mu\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right)} \tag{15}$$

Τὸ εὑρεθὲν ὁλοκλήρωμα εἶνε ἄθροισμα τῶν ἑξῆς δύο ὁλοκληρωμάτων

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{n\, x^{2m}}{1+x^{2n}} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{n\, x^{2m}}{1+x^{2n}} dx$$

ἅτινα εἶνε ἴσα ἀλλήλοις· διότι ἡ ὁλοκληρουμένη συνάρτησις εἶνε ἀρτία· (δεικνύεται δὲ τοῦτο καὶ ἂν τεθῇ $x=-t$ ἐν τῷ πρώτῳ, ὅτε τοῦτο τρέπεται εἰς τὸ δεύτερον)· ἑπομένως εἶνε

$$\int_{0}^{\infty} \frac{n\, x^{2m}}{1+x^{2n}} dx = \frac{\pi}{2\eta\mu\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right)}. \tag{16}$$

Παρατηρήσεις.

1) Ἐὰν ἡ συνάρτησις $\sigma(x)$ ἐν τῷ διαστήματι $\alpha_1 \ldots \beta_1$ δι' ἑκάστην τιμὴν τῆς x ἔχῃ τιμὰς περισσοτέρας τῆς μιᾶς, τότε $\sigma(\beta)$ ἐν τῷ τύπῳ (10) εἶνε (ὡς ἐκ τῆς εὑρέσεως τοῦ τύπου τούτου γίνεται δῆλον) ἡ τιμή, πρὸς ἣν τείνει ἡ τιμὴ $\sigma(\alpha)$, ὅταν ἡ x συνεχῶς μεταβαλλομένη καὶ ἀεὶ προχωροῦσα μεταβαίνῃ ἀπὸ τῆς τιμῆς α εἰς τὴν τιμὴν β. Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν τιμὴν $\sigma(\alpha)$, αὕτη δύναται νὰ εἶνε μία οἱαδήποτε ἐκ τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$ διὰ $x=\alpha$· διότι δύο διάφοροι τιμαὶ τῆς $\sigma(x)$, ὅταν ἡ x μεταβάλληται, μεταβάλλονται καὶ ἔχουσιν ἴσας παραγώγους (διότι ἡ $\varphi(x)$ εἶνε μονότιμος)· διαφέρουσιν ἄρα μόνον κατὰ σταθεράν τινα. Ἐὰν λοιπὸν $\sigma(\alpha)$ καὶ $\sigma(\alpha)+\tau$ εἶνε δύο ἐκ τῶν τιμῶν τούτων καὶ $\sigma(\beta)$ ἡ τιμή, πρὸς ἣν τείνει ἡ $\sigma(\alpha)$, ὅταν ἡ x ἀεὶ προχωροῦσα μεταβαίνῃ ἐκ τῆς τιμῆς α εἰς τὴν β, τότε καὶ ἡ τιμὴ $\sigma(\alpha)+\tau$ ἐν τῇ αὐτῇ μεταβολῇ τοῦ x τείνει πρὸς τὴν $\sigma(\beta)+\tau$· ἑπομένως εἴτε τὴν $\sigma(\alpha)$ λάβωμεν εἴτε τὴν $\sigma(\alpha)+\tau$, ὁ τύπος (10) παρέχει ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον.

Παραδείγματα.

1) $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Τὸ ἀόριστον ὁλοκλήρωμα εἶνε τοξ ημx· ὅθεν εἶνε

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \Big[\text{τοξ ημ}x\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2}\cdot$$

ὡς τοξ ημ0 δυνάμεθα νὰ λάβωμεν οἱονδήποτε ἐκ τῶν τόξων $k\pi$· ἀλλ' ὅταν ἡ x ἀπὸ τῆς τιμῆς 0 ἀναχωροῦσα αὐξάνῃ μέχρις 1, τὸ τόξον τοῦτο πρέπει νὰ αὐξάνῃ (διότι ἔχει θετικὴν παράγωγον), ἑπομένως πρέπει νὰ εἶνε τῆς μορφῆς $2k\pi$ καὶ ὅταν γίνῃ $x=1$ καταντᾷ $2k\pi + \frac{\pi}{2}\cdot$ ὥστε τὸ ὁλοκλήρωμα εἶνε $\frac{\pi}{2}$.

2) $$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

Τὸ ἀόριστον ὁλοκλήρωμα εἶνε τοξ εφx· τοῦτο δὲ αὐξάνει κατὰ $\frac{\pi}{2}$, ὅταν ἡ x αὐξάνῃ ἀπὸ 0 μέχρις ∞· ὥστε εἶνε

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Ὡς τοξ εφ0 δύναται νὰ ληφθῇ πᾶν τόξον τῆς μορφῆς $k\pi$· ἀλλ' ὅταν ἡ x αὐξάνῃ ἀπὸ 0 μέχρις ∞, τὸ τόξον τοῦτο αὐξάνει κατὰ $\frac{\pi}{2}$.

3) $$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \Big(\varphi(x) \text{ ἀκεραία συνάρτησις}\Big)$$

Ἐκ τοῦ τύπου τῆς ἀναγωγῆς τοῦ ὁλοκληρώματος τούτου (σελ. 81) βλέπομεν ἀμέσως ὅτι εἶνε

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \varepsilon . \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \varepsilon . \pi$$

ἔνθα ε εἶνε ἀριθμός τις ὡρισμένος.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ε, παρατηροῦμεν, ὅτι ἂν θέσωμεν

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^{\mu}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \varepsilon_{\mu} . \pi \qquad (\iota)$$

θὰ εἶνε $\varepsilon = A_{\mu}\varepsilon_{\mu} + A_{\mu-1}\varepsilon_{\mu-1} + \ldots + A_1\varepsilon_1 + A_0$

τοῦ $\varphi(x)$ ὄντος ἴσου τῷ $A_{\mu}x^{\mu} + A_{\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots + A_1 x + A_0$

ὥστε ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸν συντελεστὴν ε_{μ}.

Ἀλλ' ἐκ τῆς τιμῆς τοῦ ὁλοκληρώματος (ι) βλέπομεν, ὅτι θὰ εἶνε $\varepsilon^{\mu}=0$, ἂν μ εἶνε περιττὸς ἀριθμὸς

καὶ $\varepsilon_{\mu} = \dfrac{1.3.5 \ldots (\mu-1)}{2.4.6 \ldots \mu}$ ἂν ὁ μ εἶνε ἄρτιος

ὅθεν ἕπεται

$$\varepsilon = A_0 + \frac{1}{2}A_2 + \frac{1.3}{2.4}A_4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}A_6 + \ldots\ldots$$

2) Ἐὰν ἡ παράγουσα συνάρτησις $\sigma(x)$ διά τινα τιμὴν γ τοῦ διαστήματος $\alpha_1 \ldots \beta_1$ πάντοτε πεπερασμένη διαμένουσα, εἶνε ἀσυνεχής, ἡ σταθερὰ C κατ' ἀνάγκην μεταπίπτει ἀπὸ μιᾶς τιμῆς εἰς ἄλλην καὶ ὁ τύπος (10) δὲν ἀληθεύει.

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, ἀναλύομεν τὸ ὁλοκλήρωμα ὡς ἑξῆς

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\gamma-\varepsilon} \varphi(x)\,dx + \int_{\gamma-\varepsilon}^{\gamma+\eta} \varphi(x)\,dx + \int_{\gamma+\eta}^{\beta} \varphi(x)\,dx$$

καὶ τὸ μὲν ὁλοκλήρωμα ἀπὸ $\gamma-\varepsilon$ μέχρι $\gamma+\eta$ τείνει πρὸς τὸ 0 (ὅταν ε καὶ η τείνωσι πρὸς τὸ 0) διότι εἶνε μικρότερον (ἀπολύτως) τοῦ $M(\varepsilon+\eta)$, M οὔσης τῆς μεγίστης τιμῆς τῆς $\varphi(x)$ ἐν τῷ διαστήματ

$\alpha_1 \ldots \beta_1$, τὰ δὲ λοιπὰ δύο ὁλοκληρώματα κατὰ τὰ προηγουμένως εἰρημένα, εἶνε

$$\int_{\alpha}^{\gamma-\varepsilon} \varphi(x)dx = \sigma(\gamma-\varepsilon)-\sigma(\alpha), \qquad \int_{\gamma+\eta}^{\beta} \varphi(x)\,dx = \sigma(\beta)-\sigma(\gamma+\eta)$$

ὅθεν
$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\,dx = \sigma(\beta)-\sigma(\alpha)+\sigma(\gamma-)-\sigma(\gamma+)$$

ἔνθα $\sigma(\gamma-)$ καὶ $\sigma(\gamma+)$ δηλοῦσι τὰς τιμάς, πρὸς ἃς τείνουσιν αἱ τιμαὶ $\sigma(\gamma-\varepsilon)$ καὶ $\sigma(\gamma+\eta)$, ὅταν τὰ ε καὶ η θετικὰ μένοντα τείνωσι πρὸς τὸ 0.

Ὡς παράδειγμα τούτου ἔστω τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2\left(e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}\right)^2}$$

Ἡ ὁλοκληρουμένη συνάρτησις εἶνε συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα $-1 \ldots +1$ τῆς ὁλοκληρώσεως· διὰ $x=0$, ὁ παρονομαστὴς γίνεται ∞· διότι εἶνε

$$x^2\left(e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}\right)^2 = 4x^2\left(1+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1.2.3.4}\cdot\frac{1}{x^4}+\ \ldots\right)^2$$

ἑπομένως τὸ ὁλοκλήρωμα εἶνε πεπερασμένον καὶ ἐντελῶς ὡρισμένον.

Ἡ παράγουσα εἶνε
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+e^{\frac{2}{x}}}$$

ἀλλ' ἡ συνάρτησις αὕτη δὲν εἶνε συνεχὴς διὰ $x=0$· διότι, ὅταν x ἀπὸ θετικῶν τιμῶν τείνῃ πρὸς τὸ 0, ἡ συνάρτησις γίνεται 0, ὅταν δὲ ἀπὸ ἀρνητικῶν, ἡ συνάρτησις τείνει πρὸς τὸ $\frac{1}{2}$· ἀνάγκη λοιπὸν νὰ χωρισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα εἰς δύο καὶ νὰ ὑπολογισθῇ χωριστὰ ἐν ἑκατέρῳ τῶν διαστημάτων $-1 \ldots 0$ καὶ $0 \ldots +1$· ἤτοι

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2\left(e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}\right)^2} = \text{ορ}\,\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+e^{\frac{2}{x}}}\right]_{-1}^{-\varepsilon} + \text{ορ}\,\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+e^{\frac{2}{x}}}\right]_{\eta}^{+1} = \frac{1}{1+e^2}.$$

Μετασχηματισμὸς τῶν ὡρισμένων ὁλοκληρωμάτων.

118. *Ἐν τῷ ὡρισμένῳ ὁλοκληρώματι δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὴν μεταβλητὴν τῆς ὁλοκληρώσεως.*

Ἔστω t μεταβλητή τις συνδεομένη πρὸς τὴν x διά τινος ἐξισώσεως $x=\mathrm{f}(t)$ τοιαύτης, ὥστε, ὅταν ἡ x συνεχῶς μεταβαλλομένη καὶ οὐδέποτε ὀπισθοχωροῦσα διανύῃ τὸ διάστημα $\alpha \ldots \beta$, ἡ t, ἐπίσης συνεχῶς μεταβαλλομένη καὶ οὐδέποτε ὀπισθοχωροῦσα, διανύει διάστημά τι τὸ $\gamma \ldots \delta$· τότε πρὸς ἑκάστην τιμὴν τῆς x ἐν τῷ διαστήματι $\alpha \ldots \beta$ ἀντιστοιχεῖ μία τιμὴ τῆς t ἐντελῶς ὡρισμένη καὶ πεπερασμένη ἐν τῷ διαστήματι $\gamma \ldots \delta$, καὶ τἀνάπαλιν. Ὑποθέσωμεν πρὸς τούτοις τὴν συνάρτησιν $\mathrm{f}(t)$ διαφορίσιμον. Ἐὰν τότε παραστήσωμεν διὰ α, x_1 $x_2 \ldots x_{\nu-1}$ β τιμὰς οἱασδήποτε τῆς x κατὰ τάξιν μεγέθους τεταγμένας καὶ διὰ γ, t_1 $t_2 \ldots t_{\nu-1}$ δ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς t, θὰ εἶνε

$$x_{\lambda+1}-x_\lambda=\mathrm{f}(t_{\lambda+1})-\mathrm{f}(t_\lambda)=(t_{\lambda+1}-t_\lambda)\,\mathrm{f}'(t_\lambda)+\omega_\lambda(t_{\lambda+1}-t_\lambda)$$

ὅθεν

$$\sum_\lambda (x_{\lambda+1}-x_\lambda)\,\varphi(x_\lambda)=\sum_\lambda (t_{\lambda+1}-t_\lambda)\,\varphi(x_\lambda)\,\mathrm{f}'(t_\lambda)+\sum_\lambda (t_{\lambda+1}-t_\lambda)\,\varphi(x_\lambda)\omega_\lambda.$$

Τὸ ὅριον τοῦ τελευταίου ἀθροίσματος εἶνε 0· διότι, ἂν ἐκ τῶν ω_0 $\omega_1 \ldots \omega_{\nu-1}$ ἐκλέξωμεν τὸ μέγιστον (κατ' ἀπόλυτον τιμήν), ὅπερ ἔστω τὸ ω_k, τὸ ῥηθὲν ἄθροισμα θὰ εἶνε (ἀπολύτως) μικρότερον τοῦ $\Sigma(t_{\lambda+1}-t_\lambda)\mathrm{M}.\omega_k$ (Μ οὔσης τῆς μεγίστης τιμῆς τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$ ἐν τῷ διαστήματι $\alpha \ldots \beta$), ἤτοι τοῦ $\mathrm{M}.\omega_k(\delta-\gamma)$· ἀλλὰ τοῦτο τείνει πρὸς τὸ 0· ἑπομένως καὶ τὸ εἰρημένον ἄθροισμα τείνει πρὸς τὸ 0.

Τούτου τεθέντος, ἐὰν λάβωμεν τὰ ὅρια τῶν δύο μελῶν τῆς προηγουμένης ἰσότητος, εὑρίσκομεν

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx=\int_\gamma^\delta \varphi\big[\mathrm{f}(t)\big]\,\mathrm{f}'(t)\,dt. \qquad (17)$$

Ἐκ τούτων βλέπομεν ὅτι, *ἵνα μετασχηματίσωμεν τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα λαμβάνοντες ὡς μεταβλητὴν τῆς ὁλοκληρώσεως ἀντὶ τῆς x ἄλλην μεταβλητὴν t, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν εἰς τὴν ὁλοκληρωτέαν παράστασιν τὰς τιμὰς τῶν x καὶ dx ἐκπεφρασμένας διὰ τῶν t καὶ dt.*

Διάστημα δὲ τῆς νέας ὁλοκληρώσεως εἶνε τὸ πρὸς τὸ διάστημα *α . . . β τῆς πρώτης ἀντίστοιχον καὶ ὅρια αὐτῆς αἱ πρὸς τὰς τιμὰς α καὶ β ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τῆς t.*

Ὁ τύπος (17) τοῦ μετασχηματισμοῦ ἰσχύει καὶ ὅταν τὸ πλάτος ἑνὸς τῶν ὁλοκληρωμάτων ἢ καὶ ἀμφοτέρων εἶνε ἄπειρον· ἀρκεῖ τὰ ὁλοκληρώματα νὰ ἔχωσι τιμὰς ὡρισμένας· διότι τότε εἶνε ὅρια ὁλοκληρωμάτων ἐχόντων πλάτος πεπερασμένον καὶ ἐφ' ὧν ἰσχύει πάντοτε ὁ τύπος (17).

Σημείωσις. Ἡ ἰσότης (17) δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἐὰν εἶνε
$$x=f(t)$$

θὰ εἶνε καὶ
$$\int_\alpha^x \varphi(x)\,dx=\int_\gamma^t \varphi\big(f(t)\big)\,f'(t)\,dt$$

διότι τὰ ὁλοκληρώματα ταῦτα θεωρούμενα ὡς συναρτήσεις τῶν ἄνω ὁρίων αὐτῶν x καὶ t (ἅτινα συνδέει ἡ ἐξίσωσις $x=f(t)$) ἔχουσιν ἴσα διαφορικά· ἑπομένως διαφέρουσι κατὰ σταθεράν τινα· ἀλλ' ὅταν τὸ ἄνω ὅριον x καταντήσῃ α (ὅτε καὶ τὸ t καταντᾷ γ, διότι πρὸς ἑκάστην τιμὴν τῆς x ἐν τῷ διαστήματι α . . . β ἀντιστοιχεῖ μία τιμὴ τῆς t ἐν τῷ γ . . . δ), μηδενίζονται ἀμφότερα· οὐδόλως ἄρα διαφέρουσιν· ἐὰν δὲ τὸ ἄνω ὅριον x γίνῃ β, καὶ τὸ t γίνεται δ καὶ προκύπτει ἡ ἰσότης (17).

Παραδείγματα.

1) $$\int_0^\alpha \frac{dx}{\alpha^2+x^2} \qquad \alpha>0$$

Ἐὰν θέσωμεν $x=\alpha t$, τοῦ x αὐξάνοντος ἀπὸ 0 ἕως α, ἡ t αὐξάνεται ἀπὸ 0 μέχρι 1· ὅθεν

$$\int_0^\alpha \frac{dx}{\alpha^2+x^2}=\frac{1}{\alpha}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\alpha}.$$

2) $$\int_0^\alpha \frac{x^\mu dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}} \qquad \text{(μ θετικὸς καὶ ἀκέραιος)}$$

Ἐὰν θέσωμεν $x=\alpha\eta\mu t$, τοῦ x αὐξανομένου ἀπὸ 0 μέχρις α, αὐξάνεται καὶ ἡ t ἀπὸ 0 μέχρι $\frac{\pi}{2}$· (ἂν ὡς ἀρχικὴ τιμὴ τῆς t ληφθῇ ἢ 0)· ἑπομένως εἶνε

$$\int_0^\alpha \frac{x^\mu dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}=\alpha^\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^\mu t\, dt$$

ὅθεν ἂν μ εἶνε περιττὸς $\displaystyle\int_0^\alpha \frac{x^\mu dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}=\alpha^\mu.\frac{2.4.6\ldots(\mu-1)}{3.5.7\ldots\mu}$

ἂν δὲ ὁ μ εἶνε ἄρτιος $\displaystyle\int_0^\alpha \frac{x^\mu dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}=\alpha^\mu.\frac{1.3.5\ldots(\mu-1)}{2.4.6\ldots\mu}.\frac{\pi}{2}.$

3) $$\int_0^\alpha \frac{x^\mu dx}{\sqrt{\alpha x-x^2}}$$

Ἐὰν θέσωμεν $x=\alpha\eta\mu^2 t$, τοῦ x διανύοντος τὸ διάστημα $0\,.\,.\,\alpha$ ἡ t διανύει τὸ διάστημα $0\,.\,.\,.\,\frac{\pi}{2}$ (ἂν ὡς πρώτη τιμὴ αὐτῆς ληφθῇ ἡ τιμὴ 0)· ὅθεν

$$\int_0^\alpha \frac{x^\mu dx}{\sqrt{\alpha x-x^2}}=2\alpha^\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{2\mu} t\, dt=\pi.\alpha^\mu\frac{1.3.5\ldots(2\mu-1)}{2.4.6\ldots2\mu}.$$

4) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2 x+\beta\,\eta\mu^2 x}$$ (α, β θετικοὶ ἀριθμοὶ)

Ἐὰν θέσωμεν $\varepsilon\varphi x=t$, τοῦ x αὐξανομένου ἀπὸ 0 μέχρι $\frac{\pi}{2}$, αὐξάνεται ἡ t ἀπὸ 0 εἰς ἄπειρον· ὅθεν

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2 x+\beta\,\eta\mu^2 x}=\int_0^\infty \frac{dt}{\alpha+\beta t^2}$$

καὶ ἂν ἔπειτα θέσωμεν $t=\omega.\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$, θὰ εἶνε

$$\int_0^\infty \frac{dt}{\alpha+\beta t^2}=\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\int_0^\infty \frac{d\omega}{1+\omega^2}=\frac{\pi}{2}.\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

ὅθεν
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\alpha\,\text{συν}^2 x+\beta\,\text{ημ}^2 x}=\frac{\pi}{2}.\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

5) $$\int_0^\infty \frac{n\,x^{2m}dx}{1+x^{2n}}=\frac{\pi}{2\text{ημ}\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right)}$$ (σελ. 184)

Ἐὰν εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο θέσωμεν

$$x^{2n}=t,\ \text{ἤτοι}\ \ x=t^{\frac{1}{2n}}\ \ \text{καὶ}\ \ dx=\frac{1}{2n}\,t^{\frac{1}{2n}-1}dt$$

εὑρίσκομεν

(18) $$\int_0^\infty \frac{t^{p-1}\,dt}{1+t}=\frac{\pi}{\text{ημ}(p\pi)}\qquad \text{ἔνθα ἐτέθη}\ \ p=\frac{2m+1}{2n}$$

Ἐν τῷ ὁλοκληρώματι τούτῳ ὁ p δηλοῖ ἀριθμὸν σύμμετρον θετικὸν καὶ μικρότερον τῆς μονάδος 1 καὶ τῆς μορφῆς $\frac{2m+1}{2n}$· προφανὲς εἶνε ὅμως ὅτι ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος (18) εἶνε συνεχεῖς συναρτήσεις τοῦ p, ἑπομένως ἰσχύει ἡ ἰσότης αὕτη καὶ διὰ πᾶσαν τιμὴν p' αὐτοῦ εἴτε σύμμετρον εἴτε ἀσύμμετρον, ἐὰν μεταξὺ 0 καὶ 1 περιέχηται· διότι δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ἄπειρον σειρὰν ἀριθμῶν τῆς μορφῆς $\frac{2m+1}{2n}$ ἔχουσαν ὅριον τὴν τιμὴν ταύτην p'.

Σημείωσις α'. Ἐν τῷ μετασχηματισμῷ τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος ὑποτίθεται, ὅτι, ἂν ἡ νέα μεταβλητὴ t λαμβάνῃ τὰς τιμὰς γ καὶ δ διὰ $x=\alpha$ καὶ $x=\beta$, τοῦ x διανύοντος τὸ πεπερασμένον διάστημα α . . . β, διανύει καὶ ἡ t τὸ πεπερασμένον διάστημα γ . . . δ. Δύναται ὅμως νὰ συμβῇ, ὥστε, τοῦ x διανύοντος τὸ διάστημα α . . . β, ἡ μεταβλητὴ t νὰ διανύῃ τὸ διάστημα γ . . . δ διερχομένη διὰ τοῦ ἀπείρου, ἤτοι νὰ διανύῃ τὰ δύο διαστήματα γ . . .— ∞+∞ . . . δ (ὑποτίθεται (γ<δ)· (διότι ὅταν μεταβλητή τις μεταβαίνῃ ἀπὸ μιᾶς τιμῆς πεπερασμένης γ εἰς ἄλλην ἐπίσης πεπερασμένην δ μηδέποτε ὀπισθοχωροῦσα, ἢ διανύει τὸ πεπερασμένον διάστημα γ ... δ ἢ διανύῃ τὸ ἄπειρον διάστημα γ . . . —∞ +∞ . . . δ). Οἴκοθεν ἐννοεῖται ὅτι ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ τιμὴ τοῦ ὁλοκληρώματος εἶνε ἡ αὔξησις τῆς παραγούσης συναρτήσεως, ὅταν ἡ t διανύῃ τὸ ἄπειρον διάστημα γ . . . —∞ +∞ . . . δ καὶ οὐχὶ ἡ αὔξησις αὐτῆς ἡ προκύπτουσα ὅταν ἡ t διανύῃ τὸ πεπερασμένον διάστημα γ . . . δ· αἱ δύο αὗται αὐξήσεις δύνανται νὰ διαφέρωσιν, ὅταν ἡ παράγουσα ἔχῃ τιμὰς περισσοτέρας τῆς μιᾶς δι' ἑκάστην τιμὴν τῆς t, ἀλλ' ὅταν εἶνε μονότιμος, ταυτίζονται, διότι ἀμφότεραι ἐκφράζονται ὑπὸ τῆς διαφορᾶς σ(δ)—σ(γ).

Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{1+x^2}$$

ἡ παράγουσα συνάρτησις εἶνε τοξ εφx τοῦ x δὲ διανύοντος τὸ διάστημα —1...0...+1 ἡ παράγουσα αὐξάνεται κατὰ $\frac{\pi}{2}$· ὥστε εἶνε

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$$

ἀλλ' ἂν μετασχηματίσωμεν τὸ ὁλοκλήρωμα θέτοντες $x=\frac{1}{t}$

εὑρίσκομεν $$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{1+x^2}=-\int_{-1}^{+1}\frac{dt}{1+t^2}$$

ἀλλ' ὅταν ἡ x διανύῃ τὸ διάστημα —1 . . . 0 . . . +1, ἡ t διανύει τὸ ἄπειρον διάστημα —1 . . . — ∞+∞ . . . +1· ἡ δὲ παράγουσα, ἥτις εἶνε —τοξ εφt, αὐξάνεται τότε ἀπὸ $+\frac{\pi}{4}$ μέχρι τοῦ $+\frac{3\pi}{4}$· ἐπομένως ἡ αὔξησις αὐτῆς εἶνε $\frac{\pi}{2}$.

Ὁμοίως εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα $$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\sigma'(x)\,dx}{1+\sigma(x)^2}$$

ἐὰν θέσωμεν σ(x)=t, εὑρίσκομεν $$\int_{\gamma}^{\delta}\frac{dt}{1+t^2}$$

καὶ ἐάν, τοῦ x διανύοντος τὸ διάστημα α...β, ἡ t μένῃ πεπερασμένη, ἡ τιμὴ τοῦ ὁλοκληρώματος θὰ εἶνε τοξ εφδ—τοξ εφ γ' ἤτοι τοξ εφ σ(β)—τοξ εφ σ(γ)· ἀλλ' ἂν ἡ t διέρχηται διὰ τοῦ ἀπείρου (μεταβαίνουσα ἐκ τῆς τιμῆς γ εἰς τὴν τιμὴν δ) καὶ μεταπίπτῃ ἐκ τοῦ —∞

εἰς τὸ τὸ $+\infty$, ἡ τιμὴ τοῦ ὁλοκληρώματος θὰ εἶνε $-\pi+$τοξ εφ σ(β)$-$τοξ εφ σ(α), τῶν τοξ εφ σ(α) καὶ τοξ εφ σ(β) ὄντων μικροτέρων τοῦ $\frac{\pi}{2}$ καὶ μεγαλητέρων τοῦ $-\frac{\pi}{2}$.

Σημείωσις β'. Ἐὰν κατὰ τὸ διάστημα α...β ἡ τὰς μεταβλητὰς x καὶ t συνδέουσα ἐξίσωσις δὲν εἶνε τοιαύτη, ὥστε αἱ τιμαὶ αὐτῶν νὰ ἀντιστοιχῶσι πρὸς ἀλλήλας μία πρὸς μίαν, ὡς ὑπετέθη, ἀνάγκη νὰ χωρίζηται τοῦτο εἰς μικρότερα διαστήματα, ἐν ἑκάστῳ τῶν ὁποίων αἱ τιμαὶ τῶν δύο μεταβλητῶν νὰ ἀντιστοιχῶσι πρὸς ἀλλήλας μία πρὸς μίαν. Ἐὰν π. χ. ἡ ἐξίσωσις εἶνε $t=4+(x-2)^2$, τὸ δὲ διάστημα τῆς x εἶνε 1...2...3, αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς t εἶνε 5...4...5.

Ἐντεῦθεν βλέπομεν, ὅτι ἂν τὸ διάστημα 1...2...3 τῆς x χωρίσωμεν εἰς τὰ δύο 1...2 καὶ 2...3, εἰς μὲν τὸ πρῶτον ἡ t προβαίνει ἐλαττουμένη 5...4 εἰς δὲ τὸ δεύτερον αὐξανομένη 4...5· διὰ τοῦτο ἐν μὲν τῷ πρώτῳ διαστήματι πρέπει νὰ ληφθῇ $x=2-\sqrt{t-4}$ καὶ $dx=-\frac{dt}{2\sqrt{t-4}}$· ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ πρέπει νὰ ληφθῇ $x=2+\sqrt{t-4}$ καὶ $dx=\frac{dt}{2\sqrt{t-4}}$.

Θεωρήματα περὶ τῶν ὡρισμένων ὁλοκληρωμάτων, ὧν τὸ πλάτος εἶνε ἄπειρον.

119. Ὅταν ἐν τῷ ὁλοκληρώματι $\int_\alpha^x \varphi(x)\,dx$ τὸ ἄνω ὅριον x αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον, τὸ ὁλοκλήρωμα δύναται ἢ νὰ αὐξάνῃ καὶ αὐτὸ εἰς ἄπειρον, ἢ νὰ τείνῃ πρός τι ὅριον, ἢ καὶ μηδέτερον τούτων νὰ συμβαίνῃ ἀλλὰ νὰ γίνηται ἀόριστον.

Παραδείγματα.

1) $$\int_\alpha^x \varphi(x)\,dx \qquad (\varphi(x) \text{ ἀκεραία συνάρτησις τῆς } x)$$

Ἂν f(x) εἶνε ἡ παράγουσα τῆς $\varphi(x)$, τὸ ὁλοκλήρωμα εἶνε f$(x)-$f(α)· τοῦ δὲ x αὐξάνοντος εἰς ἄπειρον καὶ ἡ διαφορὰ αὕτη τείνει ἐπίσης εἰς τὸ ἄπειρον.

2) $$\int_\alpha^x e^{-x}\,dx.$$

Ἡ παράγουσα τῆς e^{-x} εἶνε $-e^{-x}$· ὅθεν τὸ ὁλοκλήρωμα εἶνε $-e^{-x}+e^{-\alpha}$· τοῦ δὲ x αὐξάνοντος εἰς ἄπειρον ἡ διαφορὰ αὕτη τείνῃ πρὸς τὸ $e^{-\alpha}$.

3) $\int_0^x$ συν$x\,dx$· τοῦτο εἶνε ἴσον τῷ ημx· τοῦ δὲ x αὐξανομένου εἰς ἄπειρον τὸ ὁλοκλήρωμα πρὸς οὐδὲν ὅριον τείνει.

120. Δὲν εἶνε πάντοτε δυνατόν, πρὶν ἢ ἐκτελέσωμεν τὴν ὁλοκλήρωσιν, νὰ διακρίνωμεν ἐκ τῆς ὁλοκληρωτέας συναρτήσεως $\varphi(x)$, ἂν τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_\alpha^x \varphi(x)\,dx \tag{θ}$$

τείνῃ πρός τι ὅριον, ὅταν τὸ ἄνω ὅριον αὐτοῦ, τὸ x, αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον· ἔχομεν ὅμως θεωρήματά τινα, δι' ὧν εἰς πλείστας περιπτώσεις κατορθοῦται ἡ λύσις τοῦ ζητήματος τούτου.

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν, ὅτι, τοῦ x αὐξάνοντος εἰς ἄπειρον, ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$, ἢ ἀπό τινος τιμῆς λ τοῦ x καὶ ἑξῆς διατηρεῖ τὸ ἑαυτῆς σημεῖον ἀμετάβλητον, ἢ ἀλλάσσει πάντοτε σημεῖον, ὅσον μέγας καὶ ἂν ληφθῇ ὁ ἀριθμὸς λ (τότε ἀλλάσσει ἀπειράκις σημεῖον)· διὰ τοῦτο διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

121. Ἐὰν ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ ἀπό τινος τιμῆς λ τοῦ x καὶ ἑξῆς διατηρῇ τὸ ἑαυτῆς σημεῖον (ὅπερ δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν θετικόν), ἔχομεν τὰ ἑξῆς δύο θεωρήματα.

1ον) *Ἐὰν ὑπάρχῃ τις ἀριθμὸς ϱ θετικὸς καὶ μεγαλήτερος τῆς μονάδος, δι' ὃν τὸ γινόμενον*

$$x^\varrho.\varphi(x)$$

αὐξάνοντος τοῦ x εἰς ἄπειρον νὰ διαμένῃ πάντοτε μικρότερον ἀριθμοῦ τινος ὡρισμένου K, τὸ ὁλοκλήρωμα (θ) εἶνε πεπερασμένον καὶ τείνει πρός τι ὅριον.

Διότι ἐν πρώτοις εἶνε

$$\int_\alpha^x \varphi(x)\,dx = \int_\alpha^\lambda \varphi(x)\,dx + \int_\lambda^x \varphi(x)\,dx$$

καὶ τὸ μὲν πρῶτον μέρος εἶνε πεπερασμένον καὶ ἐντελῶς ὡρισμένον (διότι ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ ὑποτίθεται πεπερασμένη), τὸ δὲ δεύτερον αὐξάνει μετὰ τοῦ x (διότι $\varphi(x)$ διὰ $x>\lambda$ εἶνε θετικόν)· ἂν λοιπὸν μένῃ μικρότερον ἀριθμοῦ τινος ὡρισμένου, τείνει πρός τι ὅριον· ἀλλὰ τοῦτο συμβαίνει· διότι ἐξ ὑποθέσεως εἶνε

$$x^{\rho}\varphi(x)<\mathrm{K} \qquad x>\lambda, \quad \text{καὶ} \quad \rho>1$$

ἄρα καὶ $$\varphi(x)<\frac{\mathrm{K}}{x^{\rho}}$$

ὅθεν $$\int_{\lambda}^{x}\varphi(x)\,dx<\int_{\lambda}^{x}\frac{\mathrm{K}}{x^{\rho}}dx \quad \text{ἤτοι} <\mathrm{K}.\frac{\lambda^{1-\rho}-x^{1-\rho}}{\rho-1}$$

ἐπειδὴ δὲ τοῦ x αὐξανομένου εἰς ἄπειρον τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἀνισότητος ταύτης μένει πάντοτε πεπερασμένον καὶ μικρότερον τοῦ $\frac{\mathrm{K}\lambda^{1-\rho}}{\rho-1}$, συνάγεται ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα (θ) εἶνε πεπερασμένον καὶ ἐντελῶς ὡρισμένον.

2ον) *Ἐὰν ὑπάρχῃ τις ἀριθμὸς ρ θετικὸς καὶ μικρότερος τῆς μονάδος 1, ἢ καὶ ἴσος αὐτῇ, δι' ὃν τὸ γινόμενον*

$$x^{\rho}\varphi(x)$$

τοῦ x αὐξάνοντος εἰς ἄπειρον, νὰ μένῃ πάντοτε μεγαλήτερον ἀριθμοῦ τινος Κ (διαφόρου τοῦ 0) τὸ ὁλοκλήρωμα (θ) αὐξάνει εἰς ἄπειρον μετὰ τοῦ x.

Διότι εἶνε πάλιν

$$\int_{\alpha}^{x}\varphi(x)\,dx=\int_{\alpha}^{\lambda}\varphi(x)\,dx+\int_{\lambda}^{x}\varphi(x)\,dx$$

καὶ τὸ μὲν πρῶτον μέρος εἶνε πεπερασμένον καὶ ὡρισμένον, τὸ δεύτερον ὅμως αὐξάνει εἰς ἄπειρον μετὰ τοῦ x· διότι εἶνε

$$x^{\rho}\varphi(x)>\mathrm{K}, \quad \text{ἤτοι} \quad \varphi(x)>\frac{\mathrm{K}}{x^{\rho}}$$

ἄρα $$\int_{\lambda}^{x}\varphi(x)\,dx>\int_{\lambda}^{x}\mathrm{K}\frac{dx}{x^{\rho}} \quad \text{ἤτοι} > \mathrm{K}\frac{x^{1-\rho}-\lambda^{1-\rho}}{1-\rho}$$

ἐπειδὴ δὲ τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἀνισότητος ταύτης αὐξάνει εἰς ἄπειρον μετὰ τοῦ x, συνάγεται ὅτι καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα αὐξάνει εἰς ἄπειρον.

Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_{1}^{x} e^{-x} x^{n}\, dx\cdot$$

Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον $x^{\rho}.e^{-x}.x^{n}$ ἤτοι $x^{\rho+n}e^{-x}$, ὁσονδήποτε μέγας καὶ ἂν ληφθῇ ὁ ἐκθέτης ρ, τοῦ x αὐξάνοντος εἰς ἄπειρον, τείνει πρὸς τὸ 0, συνάγεται, ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο, ὅταν τὸ ἄνω ὅριον αὐτοῦ αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον, τείνει πρός τι ὅριον· ἤτοι εἶνε πεπερασμένον οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ἐκθέτου n.

Ἔστω προσέτι καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_{0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{x^3+2x+1}}$$

ἐπειδὴ τὸ γινόμενον $x^{\rho}.\dfrac{1}{\sqrt{x^3+2x+1}}$, τοῦ x αὐξάνοντος εἰς ἄπειρον· τείνει πρὸς τὸ 0, ὅταν $\rho=1+\dfrac{1}{3}$, συνάγεται, ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα τείνει πρός τι ὅριον, ὅταν x_1 αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον.

122. Ἐὰν ἡ συνάρτησις φ(x), τοῦ x αὐξάνοντος εἰς ἄπειρον, ἀλλάσσῃ ἀπειράκις σημεῖον, ἔστω θετικὴ μὲν εἰς τὸ διάστημα $\alpha \ldots \alpha_1$, ἀρνητικὴ δὲ εἰς τὸ $\alpha_1 \ldots \alpha_2$, θετικὴ πάλιν εἰς τὸ $\alpha_2 \ldots \alpha_3$, καὶ οὕτω καθεξῆς· τότε θὰ εἶνε

$$\int_{\alpha}^{x_1} \varphi(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\alpha_1} \varphi(x) dx + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \varphi(x) dx + \ldots + \int_{\alpha_\nu}^{x_1} \varphi(x)\, dx$$

$$(\text{ἐὰν } \alpha_\nu < x_1 < \alpha_{\nu+1})$$

τὰ ὁλοκληρώματα τοῦ δευτέρου μέλους εἶνε ἐναλλὰξ θετικὰ καὶ ἀρνητικὰ καὶ ἂν παραστήσωμεν τὰς τιμὰς αὐτῶν θετικῶς ληφθείσας διὰ A_1, $A_2 \ldots$ θὰ εἶνε

$$\int_{\alpha}^{\alpha_\nu} \varphi(x)\, dx = A_1 - A_2 + A_3 - \ldots \pm A_\nu$$

Ἐὰν δὲ τὸ ἄθροισμα τοῦτο τείνῃ πρός τι ὅριον, ἤτοι ἂν εἶνε

$$\text{ορ}(A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \ldots \pm A_\nu) = N$$

θὰ εἶνε καὶ $\text{ορ}(A_1 - A + A_3 - A_4 + \ldots \mp A_{\nu-1}) = N$

$$\text{ἄρα} \qquad \text{ορ}\, A_\nu = 0 \quad \text{ὅταν} \quad \nu = \infty$$

τοῦτο δὲ ἀρκεῖ, *ἐὰν τὰ* A_1, A_2 . . . A_ν *προβαίνωσιν ἐλαττούμενα* (τοὐλάχιστον ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς)· διότι, ἂν λάβωμεν ὅρους ἀρτίους τὸ πλῆθος

$$(A_1 - A_2) + (A_3 - A_4) + \ldots + (A_{2\nu-1} - A_{2\nu})$$

τὸ ἄθροισμα προβαίνει αὐξανόμενον μετὰ τοῦ ν, ἀλλ' οὐδέποτε ὑπερβαίνει τὸ A_1· διότι τὸ αὐτὸ ἄθροισμα γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$A_1 - (A_2 - A_3) - (A_4 - A_5) \ldots - (A_{2\nu-2} - A_{2\nu-1}) - A_{2\nu}$$

ἑπομένως τείνει πρός τι ὅριον.

Καὶ περιττὸν πλῆθος ὅρων ἂν λαμβάνωμεν, πάλιν τὸ ἄθροισμα τείνει πρὸς τὸ αὐτὸ ὅριον· διότι εἶνε $\text{ορ}\, A_{2\nu+1} = 0$.

Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{\eta\mu x}{x}\, dx \qquad (\iota)$$

ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτησις ἀλλάσσει σημεῖον διὰ τὰς τιμὰς $x = k\pi$· ὅθεν ἀναλύομεν τὸ ὁλοκλήρωμα ὡς ἑξῆς

$$\int_0^\infty \frac{\eta\mu x}{x} dx = \int_0^\pi \frac{\eta\mu x}{x} dx + \int_\pi^{2\pi} \frac{\eta\mu x}{x} dx + \ldots + \int_{\nu\pi}^{(\nu+1)\pi} \frac{\eta\mu x}{x} dx + \ldots$$

καὶ ἂν τεθῇ εἰς τὸ δεύτερον $x = \pi + x_1$, εἰς τὸ τρίτον $x = 2\pi + x_1$ καὶ γενικῶς εἰς τὸ $(\nu+1)^{\text{ον}}$ $x = \nu\pi + x_1$, ἕπεται

$$\int_0^\infty \frac{\eta\mu x}{x} dx =$$

$$\int_0^\pi \frac{\eta\mu x}{x} dx - \int_0^\pi \frac{\eta\mu x}{x+\pi} dx + \int_0^\pi \frac{\eta\mu x}{x+2\pi} dx - \ldots \pm \int_0^\pi \frac{\eta\mu x}{x+\nu\pi} dx \ldots$$

Ἐκ τούτων γίνεται δῆλον, ὅτι τὰ ὁλοκληρώματα ταῦτα βαίνουσιν ἐλαττούμενα καὶ τείνουσι πρὸς τὸ 0· ἐπομένως τὸ ὁλοκλήρωμα (ι) εἶνε πεπερασμένον.

Ἔστω προσέτι καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$2\int_0^{\infty} \eta\mu(x^2)\, dx \qquad (\varepsilon)$$

Ἐὰν θέσωμεν $x=\sqrt{t}$, τὸ ὁλοκλήρωμα γίνεται

$$\int_0^{\infty} \frac{\eta\mu t}{\sqrt{t}}\, dt$$

καὶ ἀναλύεται (ὡς τὸ προηγούμενον) εἰς τὰ ἑξῆς ὁλοκληρώματα

$$\int_0^{\pi} \frac{\eta\mu t}{\sqrt{t}}\, dt - \int_0^{\pi} \frac{\eta\mu t}{\sqrt{t+\pi}}\, dt + \int_0^{\pi} \frac{\eta\mu t}{\sqrt{t+2\pi}}\, dt \ldots \pm \int_0^{\pi} \frac{\eta\mu t}{\sqrt{t+\nu\pi}}\, dt \ldots$$

ἅτινα προβαίνουσι φθίνοντα καὶ τείνουσι πρὸς τὸ 0· ἐπομένως τὸ ὁλοκλήρωμα (ε) εἶνε πεπερασμένον.

123. Τὸ ζήτημα, ἂν ὁλοκλήρωμά τι, οὗτινος τὸ πλάτος αὐξάνει εἰς ἄπειρον, τείνῃ πρός τι ὅριον ἢ οὔ, δὲν διαφέρει οὐσιωδῶς ἀπὸ τοῦ ζητήματος, ἂν σειρά τις συγκλίνῃ ἢ ἀποκλίνῃ· διότι δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν τὸ τοιοῦτον ὁλοκλήρωμα ὡς ἄθροισμα ὅρων ἀπειραρίθμων· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τυχούσας τιμὰς τῆς x, τὰς $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_\nu \ldots$ τοιαύτας, ὥστε α_ν νὰ αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον μετὰ τοῦ ν· τότε θὰ εἶνε προδήλως

$$\int_{\alpha}^{\alpha_\nu} \varphi(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\alpha_1} \varphi(x)\, dx + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \varphi(x)\, dx + \ldots + \int_{\alpha_{\nu-1}}^{\alpha_\nu} \varphi(x)\, dx$$

ἄρα καὶ $\quad \text{op} \int_{\alpha}^{\alpha_\nu} \varphi(x)\, dx = \text{op} \left(\int_{\alpha}^{\alpha_1} \varphi(x)\, dx + \ldots + \int_{\alpha_{\nu-1}}^{\alpha_\nu} \varphi(x)\, dx \right)$

124. Ἂν ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ ἀπό τινος τιμῆς $x=\lambda$ καὶ ἑξῆς διατηρῇ πάντοτε τὸ ἑαυτῆς σημεῖον, προχωρῇ δὲ φθίνουσα διαρκῶς, ἰσχύει τὸ ἑξῆς θεώρημα.

Τὸ ὁλοκλήρωμα $$\int_{\alpha}^{\infty} \varphi(x)\, dx$$

εἶνε πεπερασμένον, ἂν ἡ σειρὰ

$$\varphi(\lambda)+\varphi(\lambda+1)+\varphi(\lambda+2)+\ \ldots$$

συγκλίνῃ· καὶ τἀνάπαλιν, ἡ σειρὰ θὰ εἶνε συγκλίνουσα, ἂν τὸ ὁλοκλήρωμα εἶνε πεπερασμένον.

Ἐν πρώτοις εἶνε

$$\int_{\alpha}^{\infty} \varphi(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\lambda} \varphi(x)\, dx + \int_{\lambda}^{\infty} \varphi(x)\, dx$$

καὶ τὸ μὲν ὁλοκλήρωμα ἀπὸ α μέχρι λ εἶνε πεπερασμένον (διότι ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ ὑποτίθεται πεπερασμένη καὶ συνεχὴς διὰ τὰς τιμὰς τῆς $x=\alpha\ .\ .\ .\ \infty$)· ἀρκεῖ ἄρα νὰ θεωρήσωμεν τὸ δεύτερον ὁλοκλήρωμα, ὅπερ ἀναλύεται εἰς τὰ ἑξῆς

$$\int_{\lambda}^{\lambda+1} \varphi(x)\, dx + \int_{\lambda+1}^{\lambda+2} \varphi(x)\, dx + \ .\ .\ .\ + \int_{\lambda+\nu-1}^{\lambda+\nu} \varphi(x)\, dx + \ .\ .\ .$$

ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ (ὅταν $x>\lambda$) προχωρεῖ φθίνουσα, θὰ εἶνε ἐν τῷ διαστήματι $\lambda\ .\ .\ .\ \lambda+1$

$$\varphi(\lambda+1)<\varphi(x)<\varphi(\lambda)$$

ἄρα $$\varphi(\lambda+1)<\int_{\lambda}^{\lambda+1} \varphi(x)\, dx<\varphi(\lambda)$$

ὁμοίως $$\varphi(\lambda+2)<\int_{\lambda+1}^{\lambda+2} \varphi(x)\, dx<\varphi(\lambda+1)$$

καὶ γενικῶς

$$\varphi(\lambda+\nu)<\int_{\lambda+\nu-1}^{\lambda+\nu} \varphi(x)\, dx<\varphi(\lambda+\nu-1)$$

ὅθεν συνάγεται, ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_{\lambda}^{\lambda+\nu} \varphi(x)\, dx$$

περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο ἀθροισμάτων

$$\varphi(\lambda)+\varphi(\lambda+1)+\ \ldots\ +\varphi(\lambda+\nu-1)$$

καὶ

$$\varphi(\lambda+1)+\ \ldots\ +\varphi(\lambda+\nu-1)+\varphi(\lambda+\nu)$$

ἑπομένως καὶ τὸ ὅριον αὐτοῦ διὰ $\nu=\infty$, θὰ εἶνε μικρότερον μὲν τῆς σειρᾶς

$$\varphi(\lambda)+\varphi(\lambda+1)+\ \ldots\ +\varphi(\lambda+\nu)+\ \ldots \qquad (\sigma)$$

μεγαλήτερον δὲ τῆς

$$\varphi(\lambda+1)+\varphi(\lambda+2)+\ \ldots\ +\varphi(\lambda+\nu)+\ \ldots \qquad (\sigma_1)$$

θὰ εἶνε ἄρα πεπερασμένον, ἂν ἡ σειρὰ (σ) εἶνε συγκλίνουσα· καὶ τἀνάπαλιν ἡ σειρὰ (σ_1) θὰ εἶνε συγκλίνουσα, ἑπομένως καὶ ἡ (σ), ἂν τὸ ὁλοκλήρωμα εἶνε πεπερασμένον.

Σημείωσις. Καὶ διὰ τῆς γεωμετρικῆς παραστάσεως τῶν ὁλοκληρωμάτων ὡς ἐμβαδῶν ἀποδεικνύεται ἡ πρότασις αὕτη ἁπλούστατα.

Ὁλοκληρώματα, ἐν οἷς ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτησις γίνεται ἄπειρος ἐν τῷ διαστήματι τῆς ὁλοκληρώσεως.

125. Ὅταν ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ γίνηται ἄπειρος διά τινα τιμὴν γ τοῦ διαστήματος α . . . β, τὸ ὁλοκλήρωμα

$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx$ εἶνε πεπερασμένον, ἂν τὸ ἄθροισμα $\int_\alpha^{\gamma-\varepsilon} \varphi(x)dx+\int_{\gamma+\eta}^\beta \varphi(x)\,dx$

τείνῃ πρός τι ὅριον, καθ' ὅσον τὰ ε καὶ η τείνουσι πρὸς τὸ 0, οὐδόλως συνδεόμενα πρὸς ἄλληλα (ἐδ. 114) ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, ὅταν ἑκάτερον τῶν ὁλοκληρωμάτων τούτων τείνῃ πρός τι ὅριον.

126. Ἀλλὰ καὶ πρὶν ἐκτελεσθῇ ἡ ὁλοκλήρωσις δυνάμεθα ἐνίοτε νὰ διακρίνωμεν, ἄν τι τοιοῦτον ὁλοκλήρωμα εἶνε πεπερασμένον ἢ οὔ. Εἰς τοῦτο χρησιμεύουσι τὰ ἑξῆς δύο θεωρήματα (ἐν οἷς ὑποτίθεται $\varphi(x)>0$ καὶ $\alpha<\beta$).

1) *Ἐὰν ὑπάρχῃ τις ἀριθμὸς ϱ θετικὸς καὶ μικρότερος τῆς μονάδος 1, δι' ὃν τὸ γινόμενον*

$$|x-\gamma|^\rho.\varphi(x), \qquad x=\alpha\ .\ .\ .\ \beta$$

νὰ μένῃ πάντοτε μικρότερον ἀριθμοῦ τινος ὡρισμένου k, τὸ ὁλοκλήρωμα εἶνε πεπερασμένον.

Διότι, ἂν εἶνε (διὰ $x=\alpha \ldots \gamma$)

$$(\gamma-x)^{\rho}\varphi(x)<k, \quad \text{θὰ εἶνε καὶ} \quad \varphi(x)<\frac{k}{(\gamma-x)^{\rho}}$$

ὅθεν $$\int_{\alpha}^{\gamma-\varepsilon}\varphi(x)\,dx<k\int_{\alpha}^{\gamma-\varepsilon}\frac{dx}{(\gamma-x)^{\rho}} \quad \text{ἤτοι} <\frac{(\gamma-\alpha)^{1-\rho}-\varepsilon^{1-\rho}}{1-\rho}.k$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα ἀπὸ α μέχρι γ εἶνε μικρότερον τοῦ $\frac{k(\gamma-\alpha)^{-\rho}}{1-\rho}$, ἐπίσης δεικνύεται ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα ἀπὸ γ μέχρι β εἶνε μικρότερον τοῦ $\frac{k(\beta-\gamma)^{1-\rho}}{1-\rho}$· ἐπομένως τὸ ὁλοκλήρωμα εἶνε πεπερασμένον.

2) *Ἐὰν ὑπάρχῃ τις ἀριθμὸς ρ θετικὸς καὶ μεγαλήτερος τῆς μονάδος 1, ἢ καὶ ἴσος αὐτῇ, δι' ὃν τὸ γινόμενον*

$$|x-\gamma|^{\rho}\,\varphi(x) \qquad x=\alpha \ldots \beta$$

νὰ μένῃ πάντοτε μεγαλήτερον ἀριθμοῦ τινος k(διαφόρου τοῦ 0), τὸ ὁλοκλήρωμα εἶνε ἄπειρον.

Διότι τότε εἶνε

$$\int_{\alpha}^{\gamma-\varepsilon}\varphi(x)\,dx>k\int_{\alpha}^{\gamma-\varepsilon}\frac{dx}{(\gamma-x)^{\rho}} \quad \text{ἤτοι} >\frac{\varepsilon^{1-\rho}-(\gamma-\alpha)^{1-\rho}}{\rho-1}.k$$

καὶ $$\int_{\gamma+\eta}^{\beta}\varphi(x)\,dx>k\int_{\gamma+\eta}^{\beta}\frac{dx}{(x-\gamma)^{\rho}} \quad \text{ἤτοι} >\frac{\eta^{1-\rho}-(\beta-\gamma)^{1-\rho}}{\rho-1}.k$$

ἐπειδὴ δὲ ἀμφότερα τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἀνισοτήτων τούτων αὐξάνουσιν εἰς ἄπειρον, ὅταν ε καὶ η τείνωσιν πρὸς τὸ 0, συνάγεται ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα εἶνε ἄπειρον.

Παραδείγματα.

Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ ὁλοκλήρωμα

$$(1) \qquad \int_{0}^{\infty} e^{-x}x^{n-1}dx \qquad n>0$$

Ἐὰν χωρίσωμεν τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο εἰς τὰ ἑξῆς δύο

$$\int_0^1 e^{-x}x^{n-1}dx+\int_1^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx$$

περὶ μὲν τοῦ δευτέρου ἀπεδείξαμεν ἤδη ὅτι εἶνε πεπερασμένον· ἐν δὲ τῷ πρώτῳ ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτησις $e^{-x}\,x^{n-1}$ γίνεται ἄπειρος διὰ $x=0$ (ἂν $n<1$)· ἀλλὰ τὸ γινόμενον $(e^{-x}.x^{n-1}).x^{\rho}$ ἐν τῷ διαστήματι $0\ .\ .\ .\ 1$ μένει πάντοτε μικρότερον τῆς μονάδος 1, ἂν εἶνε $n>0$ καὶ ληφθῇ $\rho=1-n$· ἑπομένως τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο εἶνε πεπερασμένον.

Ἀλλ' ἂν ὁ n εἶνε 0 ἢ ἀρνητικὸς ἀριθμός, τὸ προκείμενον ὁλοκλήρωμα εἶνε ἄπειρον· διότι τὸ γινόμενον $(e^{-x}\,x^{n-1})\,x^{\rho}$ (ἐὰν $\rho=1-n$, ἤτοι μεγαλήτερον τῆς μονάδος ἢ ἴσον αὐτῇ) μένει πάντοτε μεγαλήτερον τοῦ ἀριθμοῦ $\dfrac{1}{e}$ (ἐν τῷ διαστήματι $0\ .\ .\ .\ 1$).

Ἔστω ὡς δεύτερον παράδειγμα τὸ ὁλοκλήρωμα

$$(2)\qquad \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad p>0 \quad \text{καὶ} \quad q>0$$

ἐὰν ἀναλύσωμεν αὐτὸ εἰς τὰ ἑξῆς δύο

$$(2')\qquad \int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

ἐν μὲν τῷ πρώτῳ ἡ ὁλοκληρουμένη συνάρτησις γίνεται ἄπειρος διὰ $x=0$ (ἂν $p<1$), ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ διὰ $x=1$ (ἂν $q<1$).

Ἀλλ' ἐν μὲν τῷ πρώτῳ τὸ γινόμενον

$$x^{\rho}.x^{p-1}(1-x)^{q-1}, \qquad \text{ἐὰν εἶνε } p>0 \text{ καὶ ληφθῇ } \rho=1-p,$$

μένει ἐν τῷ διαστήματι $x=0\ .\ .\ .\ \dfrac{1}{2}$ μικρότερον τοῦ 2.

Ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ, τὸ γινόμενον

$$(1-x)^{\rho}\,x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}$$

ἐὰν εἶνε $q>0$ καὶ ληφθῇ $\rho=1-q$, μένει πάντοτε μικρότερον τοῦ 2 $\left(\text{ἐν τῷ διαστήματι } x=\frac{1}{2}\ldots 1\right)$· ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι ἀμφότερα τὰ ὁλοκληρώματα ταῦτα εἶνε πεπερασμένα, ἂν p καὶ q εἶνε θετικοὶ ἀριθμοί, ἐπομένως καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα (2) εἶνε τότε πεπερασμένον.

Ἀλλ' ἐὰν τὸ ἕτερον τῶν p ἢ q εἶνε ἀρνητικὸν ἢ 0 (ἢ καὶ ἀμφότερα) τὸ ὁλοκλήρωμα (2) εἶνε ἄπειρον· διότι, ἂν λ. χ. εἶνε $p<0$, τὸ πρῶτον τῶν ὁλοκληρωμάτων (2′) εἶνε ἄπειρον· καὶ ὄντως τὸ γινόμενον

$$x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}.x^{\rho},$$

ἐὰν ληφθῇ $\rho=1-p$ (ἤτοι μεγαλήτερον τῆς μονάδος ἢ ἴσον αὐτῇ), μένει πάντοτε $\left(\text{ἐν τῷ διαστήματι } x=0\ldots\frac{1}{2}\right)$ μεγαλήτερον τοῦ ἀριθμοῦ $\left(\frac{1}{2}\right)^{q-1}$ ἂν $q>1$ ἢ τοῦ 1 ἂν $q<1$· ἐπομένως τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο εἶνε ἄπειρον.

Ὁλοκλήρωσις τῶν σειρῶν.

126. Ἐὰν ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτησις εἶνε δυνατὸν νὰ ἀναπτυχθῇ εἰς οἱανδήποτε σειρὰν

$$u_0+u_1+u_2+\;\ldots\;+u_\nu+\;\ldots \tag{1}$$

συγκλίνουσαν ὁμαλῶς διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῆς x ἐν τῷ διαστήματι $\alpha\ldots\beta$ (ὅπερ ὑποτίθεται πεπερασμένον) καὶ τῆς ὁποίας ἕκαστος ὅρος εἶνε πεπερασμένη καὶ συνεχὴς συνάρτησις τῆς x ἐν τῷ αὐτῷ διαστήματι $\alpha\ldots\beta$, ἤτοι ἂν εἶνε

$$\varphi(x)=u_0+u_1+u_2+\;\ldots\;+u_\nu+\;\ldots$$

$$\alpha\leqq x\leqq\beta$$

θὰ εἶνε καὶ

$$\int_\alpha^{x_1}\varphi(x)\,dx=\int_\alpha^{x_1}u_0\,dx+\int_\alpha^{x_1}u_1\,dx+\ldots+\int_\alpha^{x_1}u_\nu\,dx+\ldots,$$

διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x_1 κειμένην ἐν τῷ αὐτῷ διαστήματι $\alpha\ldots\beta$.

Λέγω δὲ ὅτι ἡ σειρὰ (1) συγκλίνει ὁμαλῶς ἐν τῷ διαστήματι

$\alpha \ldots \beta$ τοῦ x, ὅταν, δοθέντος ἀριθμοῦ θετικοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ ε, δύναται, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ x ἐν τῷ διαστήματι $\alpha \ldots \beta$, νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός τις ἀκέραιος καὶ θετικὸς ρ ἀρκούντως μέγας, ὥστε ὁσουσδήποτε ὅρους καὶ ἂν λάβωμεν ἐκ τῶν

$$u_{\rho+1}+u_{\rho+2}+\ldots$$

νὰ εἶνε πάντοτε τὸ ἄθροισμα τῶν ληφθέντων ἀπολύτως μικρότερον τοῦ ε.

Ἐν πρώτοις λέγω, ὅτι ἡ ἐκ συγκλινούσης σειρᾶς διὰ τῆς ὁλοκληρώσεως προκύπτουσα νέα σειρὰ

$$\int_\alpha^{x_1} u_0\,dx+\int_\alpha^{x_1} u_1 dx+\ldots+\int_\alpha^{x_1} u_\nu\,dx+\ldots \qquad (2)$$

ἐν ᾗ τὸ ὁλοκλήρωμα ἑκάστου ὅρου θεωρεῖται ὡς εἷς ὅρος, εἶνε καὶ αὐτὴ συγκλίνουσα· διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ x_1 ἐν τῷ αὐτῷ διαστήματι $\alpha \ldots \beta$.

Διότι ἂς λάβῃ τις ὁσουσδήποτε καὶ οἱουσδήποτε ὅρους τῆς νέας σειρᾶς (εἰς πεπερασμένον πλῆθος)

$$\int_\alpha^{x_1} u_\sigma dx+\int_\alpha^{x_1} u_\tau\,dx+\ldots+\int_\alpha^{x_1} u_\varphi dx$$

τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἰσοῦται τῷ ὁλοκληρώματι

$$\int_\alpha^{x_1} (u_\sigma+u_\tau+\ldots+u_\varphi)\,dx$$

ἀλλ' εἶνε $u_\sigma+u_\tau+\ldots+u_\varphi<A$, ὅταν x εὑρίσκηται ἐν τῷ διαστήματι $\alpha \ldots \beta$· (διότι ἡ σειρὰ $u_0+u_1+u_2+\ldots+u_\nu+\ldots$ εἶνε συγκλίνουσα (διὰ $x=\alpha \ldots \beta$)· τὸ ἄθροισμα ἄρα ὁσωνδήποτε ὅρων αὐτῆς μένει πάντοτε μικρότερον ἀριθμοῦ τινος Α)· ἐπομένως εἶνε καὶ

$$\int_\alpha^{x_1} (u_\sigma+u_\tau+\ldots+u_\varphi)dx<A(\beta-\alpha)$$

ἤτοι τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ὅρων τῆς νέας σειρᾶς μένει πάντοτε μικρότερον τοῦ ἀριθμοῦ $A(\beta-\alpha)$, κατ' ἀκολουθίαν ἡ νέα σειρὰ εἶνε συγκλίνουσα.

Λέγω νῦν ὅτι καὶ ὁμαλῶς συγκλίνει ἐν τῷ διαστήματι $x=\alpha\ldots\beta$, ἐὰν καὶ ἡ πρώτη συγκλίνῃ ὁμαλῶς ἐν αὐτῷ.

Διότι, δοθέντος ἀριθμοῦ θετικοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ ε, δύναται νὰ εὑρεθῇ ἀκέραιός τις καὶ θετικὸς ἀριθμὸς ρ, ὁ αὐτὸς διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς x, ἐν τῷ διαστήματι $\alpha\ \ldots\ \beta$ καὶ τοιοῦτος, ὥστε ἂν χωρισθῇ ἡ σειρὰ (1) εἰς τὰ δύο μέρη

$$(u_0+u_1+\ \ldots\ +u_\rho)+(u_{\rho+1}+u_{\rho+2}+\ \ldots\ +u_{\rho+\nu}+\ldots)$$

τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ὅρων τοῦ δευτέρου μέρους νὰ μένῃ πάντοτε, (οἱανδήποτε τιμὴν καὶ ἂν ἔχῃ ἡ x ἐν τῷ διαστήματι $\alpha\ \ldots\ \beta$) ἀπολύτως μικρότερον τοῦ ε, ἤτοι νὰ εἶνε

$$|u_{\rho+\sigma}+u_{\rho+\tau}+\ \ldots\ +u_{\rho+\varphi}|<\varepsilon$$

ἀλλὰ τότε θὰ εἶνε καὶ

$$\left|\int_\alpha^{x_1} u_{\rho+\sigma}dx+\int_\alpha^{x_1} u_{\rho+\tau}dx+\ \ldots\ +\int_\alpha^{x_1} u_{\rho+\varphi}dx\right|<\varepsilon(\beta-\alpha)$$

οἱουδήποτε ὄντος τοῦ x_1 ἐν τῷ διαστήματι $\alpha\ \ldots\ \beta$· ἐπομένως καὶ ἡ νέα σειρὰ (2) συγκλίνει ὁμαλῶς ἐν τῷ αὐτῷ διαστήματι $\alpha\ \ldots\ \beta$.

Μένει ἔτι νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῆς νέας σειρᾶς (2) εἶνε τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_\alpha^{x_1} \varphi(x)\, dx$$

Καὶ ὄντως κατὰ τὴν γενομένην ὑπόθεσιν, ὁσονδήποτε μικρὸς καὶ ἂν εἶνε ὁ θετικὸς ἀριθμὸς ε, εὑρίσκεται ἀριθμός τις ρ, ὁ αὐτὸς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x ἐν τῷ διαστήματι $\alpha\ \ldots\ \beta$, καὶ τοιοῦτος, ὥστε νὰ εἶνε

$$\varphi(x)=u_0+u_1+\ \ldots\ +u_\rho+\mu.\varepsilon \quad \text{ἔνθα} \quad \mu<1, \quad x=\alpha\ldots\beta$$

ὅθεν ἕπεται

$$\int_\alpha^{x_1} \varphi(x)\, dx=\int_\alpha^{x_1} u_0dx+\int_\alpha^{x_1} u_1dx+\ldots+\int_\alpha^{x_1} u_\rho dx+\varepsilon\int_\alpha^{x_1} \mu dx$$

ἐπειδὴ δὲ τὸ τελευταῖον ὁλοκλήρωμα εἶνε (ἀπολύτως) μικρότερον τοῦ $\varepsilon(\beta-\alpha)$, συνάγεται ὅτι ἡ διαφορὰ τοῦ ὁλοκληρώματος καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ρ πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς (2) δύναται νὰ γίνῃ μικροτέρα παντὸς ἀριθμοῦ· εἶνε ἄρα

$$\int_{\alpha}^{x_1} \varphi(x)\, dx = \int_{\alpha}^{x_1} u_0\, dx + \int_{\alpha}^{x_1} u_1 dx + \ldots + \int_{\alpha}^{x_1} u_\nu dx + \ldots$$

Πρὸς ἐφαρμογὴν θεωρήσωμεν τὸ ὁλοκλήρωμα

$$4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\varepsilon^2 \sigma\upsilon\nu^2\varphi}\; d\varphi \qquad\qquad \varepsilon^2<1$$

ὅπερ ἐκφράζει τὸ μῆκος τοῦ τόξου τῆς ἐλλείψεως, ἥτις ἔχει μέγαν ἄξονα $2a$ καὶ ἐκκεντρότητα ε.

Ἐπειδὴ εἶνε (Διαφ. σελ. 182)

$$\left(1-\varepsilon^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi-\frac{1.1}{2.4}\varepsilon^4\sigma\upsilon\nu^4\varphi-\ldots-\frac{1.1.3.5\ldots(2\nu-3)}{2.4.6.8\ldots\;\;2\nu}\varepsilon^{2\nu}\sigma\upsilon\nu^{2\nu}\varphi+\ldots$$

ἕπεται

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\varepsilon^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi}\; d\varphi=$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi-\frac{1}{2}\varepsilon^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^2\varphi\, d\varphi \ldots -\frac{1.1.3.5\ldots(2\nu-3)}{2.4.6.8\ldots\;\;2\nu}\varepsilon^{2\nu}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^{2\nu}\varphi\; d\varphi\ldots$$

ἤτοι (σελ. 174)

$$4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\varepsilon^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi}\; d\varphi=$$

$$2\pi a\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{\varepsilon^2}{1}-\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{\varepsilon^4}{3}-\ldots-\left(\frac{1\cdot3.5\ldots(2\nu-1)}{2.4.6\ldots\;\;2\nu}\right)^2\frac{\varepsilon^{2\nu}}{2\nu-1}-\ldots\right\}$$

Ἔστω προσέτι τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^\beta \frac{dx}{\sqrt{(\beta x - x^2)\left(1-\frac{x}{2}\right)}} \qquad \beta<2$$

(ὅπερ ἀπαντᾷ ἐν τῇ θεωρίᾳ τοῦ ἐκκρεμοῦς).

Ἐνταῦθα εἶνε

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}} = \left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2}+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\ldots+\frac{1.3.5..(2\nu-1)}{2.4.6\ldots 2\nu}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu+\ldots$$

συγκλίνει δὲ ἡ σειρὰ αὕτη ἐν τῷ διαστήματι $0\ .\ .\ .\ \beta$· ὅθεν

$$\int_0^\beta \frac{dx}{\sqrt{(\beta x - x^2)\left(1-\frac{x}{2}\right)}} =$$

$$\int_0^\beta \frac{dx}{\sqrt{\beta x - x^2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^\beta \frac{x dx}{\sqrt{\beta x - x^2}} + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \int_0^\beta \frac{x^2 dx}{\sqrt{\beta x - x^2}} + \ldots$$

ἐπομένως (σελ. 190)

$$\int_0^\beta \frac{dx}{\sqrt{(\beta x - x^2)\left(1-\frac{x}{2}\right)}} =$$

$$\pi\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{\beta}{2}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{\beta}{2}\right)^2+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{\beta}{2}\right)^3+\ldots\right\}$$

Διαφόρισις τῶν σειρῶν.

Ἐὰν ἡ σειρὰ

$$(1) \qquad u_0+u_1+u_2+u_3+\ \dots\ +u_\nu+\ \dots$$

συγκλίνῃ διὰ τὰς τιμὰς α . . . β τῆς μεταβλητῆς x, ἀφ' ἧς ἐξαρτῶνται οἱ ὅροι αὐτῆς, ἡ δὲ ἐξ αὐτῆς προκύπτουσα διὰ τῆς διαφορίσεως τῶν ὅρων αὐτῆς συγκλίνῃ ὁμαλῶς ἐν τῷ αὐτῷ διαστήματι α . . . β, ἡ νέα αὕτη σειρὰ θὰ εἶνε παράγωγος τῆς σειρᾶς (1)· τουτέστι τὸ διαφορικὸν τῆς σειρᾶς (1) εὑρίσκεται ὡς τοῦ κοινοῦ ἀθροίσματος.

Διότι παριστῶντες τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς (1) διὰ $\sigma(x)$ καὶ τὸ ἄθροισμα τῆς νέας σειρᾶς $u'_0+u'_1+u'_2+\ \dots\ +u'_\nu+\ \dots$ διὰ τοῦ $\varphi(x)$, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὰ προηγούμενα

$$\int_\alpha^x \varphi(x)\,dx=\int_\alpha^x u'_0\,dx+\int_\alpha^x u'_1\,dx+\dots+\int_\alpha^x u'_\nu\,dx+\dots$$

$$\alpha \leqq x \leqq \beta$$

ἤτοι $\displaystyle\int_\alpha^x \varphi(x)dx=(u_0-A_0)+(u_1-A_1)+\dots+(u_\nu-A_\nu)+\dots=\sigma(x)-\sigma(\alpha)$

ἔνθα διὰ τοῦ A_ν παρεστήσαμεν τὴν τιμὴν τοῦ u_ν διὰ $x=\alpha$.

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης ἕπεται ἀμέσως

$$\varphi(x)=\sigma'(x)$$

ἤτοι ἡ νέα σειρὰ εἶνε παράγωγος τῆς πρώτης.

Ἡ ἐκ τῆς διαφορίσεως τῶν ὅρων σειρᾶς συγκλινούσης προκύπτουσα νέα σειρὰ δὲν εἶνε πάντοτε συγκλίνουσα· παραδείγματος χάριν ἐκ τῆς σειρᾶς

$$\frac{\eta\mu x}{1^2}+\frac{\eta\mu(1.2)^2x}{2^2}+\ \dots\ +\frac{\eta\mu(1.2.3\dots\nu)^2x}{\nu^2}+\ \dots$$

ἥτις εἶνε προδήλως συγκλίνουσα, προκύπτει διὰ τῆς διαφορίσεως ἡ ἑξῆς

$$\sigma\upsilon\nu\, x+1^2\sigma\upsilon\nu\,(1.2)^2x+\dots+(1.2\dots\nu-1)^2\,\sigma\upsilon\nu\,(1.2.3\dots\nu)^2x+\dots$$

ἥτις δὲν εἶνε συγκλίνουσα.

Σημείωσις. Περὶ τῶν σειρῶν τῆς μορφῆς

$$\Sigma A_\nu x^\nu \qquad \nu = 0, 1, 2 \dots$$

ἀπεδείξαμεν ἤδη ἐν τῷ διαφ. λογισμῷ ὅτι καὶ ὁλοκληροῦνται καὶ διαφορίζονται ὡς τὰ κοινὰ ἀθροίσματα.

Εὕρεσις τῶν ὡρισμένων ὁλοκληρωμάτων κατὰ προσέγγισιν. Τύπος τοῦ Σίμψωνος.

128. Ὅταν εἶνε ἀδύνατον νὰ εὕρωμεν τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\, dx \qquad (1)$$

ἀκριβῶς, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν αὐτὸ κατὰ προσέγγισιν ἐκ τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$ διὰ τιμὰς τῆς x ἰσοδιαφόρους $\alpha, x_1\, x_2 \dots x_{\nu-1}\, \beta$ κατὰ τὰς ἑξῆς μεθόδους.

Ὑποθέσωμεν ὅτι εἶνε γνωσταὶ αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$ αἱ πρὸς τὰς ἰσοδιαφόρους τιμὰς α, $x_1\; x_2\; \dots\; x_{n-1}\, \beta$ τῆς x ἀντιστοιχοῦσαι καὶ ἔστωσαν αἱ y_0, $y_1 \dots y_n$. ἐκ δὲ τῶν δεδομένων τούτων πρόκειται νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ὁλοκλήρωμα κατὰ προσέγγισιν.

Ἐπειδὴ τὸ ζητούμενον ὁλοκλήρωμα εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου ὅπερ περιέχεται ὑπὸ τοῦ ἄξονος ΟΧ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν $x = \alpha$, $x = \beta$ καὶ ὑπὸ τῆς καμπύλης $y = \varphi(x)$, ἧς μόνον τὰς τεταγμένας $y_0\; y_1 \dots y_n$ ἔχομεν τὰς ἀντιστοιχούσας πρὸς τὰς τετμημένας α, $x_1 \dots \beta$, (ἔχομεν δηλαδὴ μόνον $n+1$ σημεῖα τῆς καμπύλης ταύτης), εἶνε προφανές, ὅτι τὸ πρόβλημα τῆς εὑρέσεως τοῦ ὁλοκληρώματος ἐκ τῶν δεδομένων τούτων εἶνε ἀόριστον, διότι ἄπειροι διάφοροι ἀπ' ἀλλήλων καμπύλαι δύνανται νὰ διέλθωσι διὰ τῶν δοθέντων σημείων $(\alpha, y_0) \dots (\beta, y_n)$ λαμβάνοντες δὲ μίαν ἐκ τούτων ἀντὶ τῆς ἀγνώστου καμπύλης $y = \varphi(x)$ εὑρίσκομεν τιμὴν τοῦ ὁλοκληρώματος προσεγγίζουσαν κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον πρὸς τὴν ἀληθῆ τιμὴν αὐτοῦ.

Ὡς πρώτην προσέγγισιν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἀντὶ τῆς ἀγνώστου καμπύλης $y = \varphi(x)$ τὴν τεθλασμένην γραμμήν, ἥτις συνδέει τὰ δοθέντα σημεῖα· τότε τὸ χωρίον σύγκειται ἐκ τραπεζίων, ὧν τὸ ἐμβαδὸν εἶνε κατὰ σειρὰν

$$\frac{1}{2}\varepsilon(y_0 + y_1) + \frac{1}{2}\varepsilon(y_1 + y_2), \;\dots\; \frac{1}{2}\varepsilon(y_{n-1} + y_n)$$

ἔνθα ε δηλοῖ τὴν διαφορὰν δύο ἐφεξῆς τιμῶν τῆς x· ἐπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου εἶνε

$$\frac{1}{2}\varepsilon(y_0+2y_1+2y_2+\ \ldots\ +2y_{n-1}+y_n)$$

τοῦτο δὲ δύναται νὰ ληφθῇ ὡς προσεγγίζουσα τιμὴ τοῦ ὁλοκληρώματος (1).

Πολὺ περισσότερον προσεγγίζομεν πρὸς τὴν ἀλήθειαν, ἐὰν τὸ διὰ τριῶν ἐφεξῆς σημείων διερχόμενον τόξον τῆς ἀγνώστου καμπύλης $y=\varphi(x)$ ἀντικαταστήσωμεν διὰ παραβολικοῦ τόξου· αἱ τεταγμέναι $y_0\ y_1 \cdots y_{2n}$ (ὧν ὁ ἀριθμὸς ὑποτίθεται περιττὸς $2n+1$) διαιροῦσι τὸ χωρίον εἰς $2n$ μέρη, ἀνὰ δύο δὲ ἐφεξῆς μέρη ἔχουσιν ἓν τόξον παραβολῆς.

Ἡ διὰ τῶν τριῶν σημείων $(\alpha,\ y_0)$ $(x_1\ \ y_1)$ $(x_2,\ y_2)$ διερχομένη παραβολὴ ἡ ἔχουσα τὸν ἄξονα αὐτῆς παράλληλον τῇ ΟΥ ἔχει ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $$y=\mathrm{A}+\mathrm{B}x+\Gamma x^2.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ δευτεροβάθμιος συνάρτησις $\mathrm{A}+\mathrm{B}x+\Gamma x^2$ γίνεται y_0, ὅταν $x=\alpha$, καὶ y_1 ὅταν $x=x_1$ καὶ y_2 ὅταν $x=x_2$, ἡ συνάρτησις αὕτη κατὰ τὸν τύπον τοῦ Lagrange θὰ εἶνε

$$y=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2\varepsilon^2}y_0-\frac{(x-x_2)(x-x_0)}{\varepsilon^2}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2\varepsilon^2}y_2$$

ἐπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο πρώτων μερῶν εἶνε

$$\int_{x_0}^{x_2} y dx=\frac{y_0}{2\varepsilon^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_1)(x-x_2)dx-\frac{y_1}{\varepsilon^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x\ )(x-x_0)dx+$$

$$+\frac{y_2}{2\varepsilon^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_1)dx$$

τὰ ὁλοκληρώματα τοῦ δευτέρου μέλους εὑρίσκονται εὐκόλως (ἐὰν λ. χ. τεθῇ $x=x_1+2\varepsilon t$) καὶ εἶνε

$$\int_{x_0}^{x_2} y\,dx=\frac{1}{3}\varepsilon(y_0+4y_1+y_2)$$

Ὁμοίως εὑρίσκεται, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο ἑπομένων μερῶν εἶνε

$$\frac{1}{3}\varepsilon(y_2+4y_3+y_4)$$

καὶ οὕτω καθεξῆς· ἐὰν δὲ προσθέσωμεν πάντα ταῦτα, εὑρίσκομεν τὸν ἑξῆς τύπον τοῦ Simpson

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx=$$

$$\frac{1}{3}\varepsilon\left[y_0+y_{2n}+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})\right]$$

Σημείωσις. Γεωμετρικὴν τοῦ τύπου τούτου ἀπόδειξιν ἴδε ἐν τῇ ἐπιπέδῳ ἀναλ. γεωμετρίᾳ μου (σελ. **404**).

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὴν καμπύλην διὰ μιᾶς παραβολικῆς καμπύλης τοῦ βαθμοῦ n διερχομένης διὰ τῶν δοθέντων $n+1$ σημείων, εὑρίσκομεν τὸν τύπον τοῦ Cotes *, ὅστις προσεγγίζει πολὺ περισσότερον εἰς τὴν ἀλήθειαν ἢ ὁ τοῦ Simson.

129. Ἐὰν ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ εἶνε γνωστὴ καὶ αἱ παράγωγοι αὐτῆς ἐπίσης, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν προσεγγίζουσάν τινα τιμὴν τοῦ ὁλοκληρώματος (1) καὶ κατ' ἄλλον τρόπον, ὡς ἑξῆς.

Παριστῶντες τὴν παράγουσαν τῆς $\varphi(x)$ διὰ $\sigma(x)$, ἔχομεν

$$\sigma(x+\varepsilon)-\sigma(x)=\frac{\varepsilon}{1}\cdot\varphi(x)+\frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi'(x)+\frac{\varepsilon^3}{1.2.3}\varphi''(x)+\ldots$$

Ἐὰν δὲ εἰς τὸν τύπον τοῦτον θέσωμεν κατὰ σειρὰν

$$x=\alpha,\ \alpha+\varepsilon,\ \alpha+2\varepsilon,\ \ldots\ \alpha+(n-1)\varepsilon \quad \text{ἔνθα} \quad (n\varepsilon=\beta-\alpha)$$

καὶ προσθέσωμεν ἔπειτα τὰς προκυπτούσας ἰσότητας κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx=\frac{\varepsilon}{1}\left\{\varphi(\alpha)+\varphi(\alpha+\varepsilon)+\ldots+\varphi\big(\alpha+(n-1)\varepsilon\big)\right\}+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{1.2}\left\{\varphi'(\alpha)+\varphi'(\alpha+\varepsilon)+\ldots+\varphi'\big(\alpha+(n-1)\varepsilon\big)\right\}+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

καὶ ἂν ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον τοῦτον εἰς τὰς συναρτήσεις

$$\varphi(x),\quad \varphi'(x),\quad \varphi''(x)\quad \text{κτλ.}$$

---

* Περὶ τούτου ἴδε **Bertrand Calcul Intégral** p. 338.

ἔχομεν

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)dx = \frac{\varepsilon}{1}\Sigma\,\varphi(\alpha+\nu\varepsilon) + \frac{\varepsilon^2}{1.2}\Sigma\,\varphi'(\alpha+\nu\varepsilon) + \ldots$$

$$\varphi(\beta)-\varphi(\alpha) = \frac{\varepsilon}{1}.\Sigma\,\varphi'(\alpha+\nu\varepsilon) + \frac{\varepsilon^2}{1.2}.\Sigma\,\varphi''(\alpha+\nu\varepsilon) + \ldots$$

$$\varphi'(\beta)-\varphi'(\alpha) = \frac{\varepsilon}{1}\;\Sigma\,\varphi''(\alpha+\nu\varepsilon) + \frac{\varepsilon^2}{1.2}.\Sigma\,\varphi'''(\alpha+\nu\varepsilon) + \ldots$$

. . . .

πολλαπλασιάζοντες δὲ τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ σειρὰν ἐπὶ 1, $\varepsilon\lambda_1$, $\varepsilon^2\lambda_2$ .. καὶ ἀθροίζοντες, εὑρίσκομεν

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\,dx + \lambda_1\varepsilon\Big[\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)\Big] + \lambda_2\varepsilon^2\Big[\varphi'(\beta)-\varphi'(\alpha)\Big] + \ldots =$$

$$= \varepsilon\,\Sigma\,\varphi(\alpha+\nu\varepsilon) + \varepsilon^2\left[\frac{1}{1.2}+\lambda_1\right]\Sigma\,\varphi'(\alpha+\nu\varepsilon) +$$

$$+\varepsilon^3\left[\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2}\lambda_1+\lambda_2\right]\Sigma\,\varphi''(\alpha+\nu\varepsilon) + \ldots$$

καὶ ἂν οἱ πολλαπλασιασταὶ λ_1, λ_2 . . ὁρισθῶσιν οὕτως, ὥστε νὰ πληρῶσι τὰς ἐξισώσεις

$$\lambda_1 + \frac{1}{1.2} = 0$$

$$\lambda_2 + \frac{1}{1.2}\lambda_1 + \frac{1}{1.2.3} = 0$$

$$\lambda_3 + \frac{1}{1.2}\lambda_2 + \frac{1}{1.2.3}\lambda_1 + \frac{1}{1.2.3.4} = 0$$

. . . .

. . . .

ἐξ ὧν

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{12}, \quad \lambda_3 = 0 \ldots$$

προκύπτει ὁ τύπο,

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\, dx =$$

$$\frac{\varepsilon}{1}\cdot\Sigma\,\varphi(\alpha+\nu\varepsilon)+\frac{1}{2}\varepsilon\Big[\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)\Big]-\frac{1}{12}\varepsilon^2\Big[\,(\varphi'(\beta)-\varphi'(\alpha)\,\Big]+\dots$$

$$\nu=0,\ 1,\ 2\ \dots\ (n-1)\quad \text{καὶ}\quad n\varepsilon=\beta-\alpha$$

Διὰ τοῦ τύπου τούτου εὑρίσκεται τὸ ὁλοκλήρωμα μὲ προσέγγισιν ἱκανήν, ὅταν τὸ ε εἶνε ἀρκούντως μικρόν· διότι οἱ παραλειφθέντες ὅροι ἔχουσι κοινὸν παράγοντα τὸ ε^4.

Ὁ αὐτὸς δὲ τύπος χρησιμεύει καὶ πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος $\Sigma\,\varphi(\alpha+\nu\varepsilon)$ (κατὰ προσέγγισιν), ὅταν εἶνε γνωστὸν τὸ ὁλοκλήρωμα· διότι εἶνε

$$\Sigma\,\varphi(\alpha+\nu\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx-\frac{1}{2}\Big[\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)\Big]+\frac{1}{12}\varepsilon\Big[\varphi'(\beta)-\varphi'(\alpha)\Big]+\dots$$

$$\nu=0,\ 1,\ 2\ \dots\ (\nu-1)\varepsilon \qquad n\varepsilon=\beta-\alpha$$

Πρὸς ἐφαρμογὴν τοῦ τύπου τούτου ἃς εὕρωμεν προσεγγίζουσάν τινα τιμὴν τοῦ γινομένου

$$(n+1)\ (n+2)\ (n+3)\ \dots\ (n+n)$$

ὅταν ὁ n αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον.

Κατὰ πρῶτον γράφομεν τὸ γινόμενον τοῦτο ὡς ἑξῆς

$$2n^n(1+\varepsilon)(1+2\varepsilon)(1+3\varepsilon)\ \dots\ (1+(n-1)\varepsilon)\quad \text{ἢ}\quad 2n^n.\Gamma$$

ἐὰν τεθῇ $\qquad \Gamma=(1+\varepsilon)(1+2\varepsilon)\ \dots\ (1+(n-1)\varepsilon)$

ὅθεν καὶ $\qquad l\Gamma=\Sigma l(1+\nu\varepsilon) \qquad \nu=0,\ 1,\ 2\ \dots\ (n-1)$

ἀλλ' εἶνε κατὰ τὸν προηγούμενον τύπον

$$\Sigma l(1+\nu\varepsilon)=n\int_0^1 l(1+x)\,dx-\frac{1}{2}l\,2-\frac{\varepsilon}{24}\ \dots$$

$$=2nl2-n-\frac{1}{2}l2-\theta_n, \qquad \text{ὅρ}\ \theta_n=0,$$

ὅθεν $\qquad \Gamma=e^{-n}.2^{2n-\frac{1}{2}}e^{-\theta_n}$

καὶ $\qquad (n+1)(n+2)(n+3)\ \dots\ (n+n)=n^n.e^{-n}.2^{2n+\frac{1}{2}}e^{-\theta_n}$

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἐὰν τεθῇ $X_n = \frac{d^n \{(1-x^2)^n\}}{dx^n}$, νὰ δειχθῇ ὅτι εἶνε

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x) X_n \, dx = 0$$ ὅταν $\varphi(x)$ εἶνε τυχὸν ἀκέραιον πολυώνυμον βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ n.

Ἐὰν δὲ τὸ πολυώνυμον εἶνε βαθμοῦ n, τὸ αὐτὸ ὁλοκλήρωμα εἶνε

$$(-1)^n 2.\varphi^n(0) \frac{2.4.6\ldots\ 2n}{3.5.7\ldots(2n+1)}$$

ἑπομένως εἶνε $$\int_{-1}^{+1} X_n X_m \, dx = 0 \qquad \text{ἐὰν } m \gtrless n$$

$$\text{καὶ} \quad \int_{-1}^{+1} X_n^2 \, dx = \frac{2^{2n+1}}{2n+1}(1.2.3\ldots n)^2$$

Ἐπίσης, ἐὰν θέσωμεν $P_n = \frac{d^n (x^n e^{-x})}{dx^n}$, θὰ εἶνε

$\int_0^{\infty} \varphi(x) P_n \, dx = 0$, ἐὰν $\varphi(x)$ εἶνε τυχὸν πολυώνυμον βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ n.

2) Πότε τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_\alpha^{\infty} \frac{\sigma(x)\, dx}{\sqrt{\varphi(x)}}$ εἶνε πεπερασμένον; (φ καὶ σ ἀκέραια πολυώνυμα).

Τὸ κατώτερον ὅριον α ὑπερβαίνει πάσας τὰς πραγματικὰς ῥίζας τοῦ $\varphi(x)$.

3) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_0^{\infty} \frac{\eta\mu x}{x^\rho} dx$ εἶνε πεπερασμένον ἐὰν $\rho > 0$.

4) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἑξῆς ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} x \,\sigma\upsilon\nu^{2\mu} x \, dx = I$$

ἐὰν τεθῇ $x = 2\pi - y$ προκύπτει

$$I = 2\pi \int_0^{2\pi} \sigma\upsilon\nu^{2\mu} x \, dx \qquad \text{ὅθεν} \qquad I = 2\pi^2 \frac{1.3.5\ldots(2\mu-1)}{2.4.6\ldots\ 2\mu}$$

5) Ἀποδεῖξαι ὅτι εἶνε

$$1) \int_\alpha^\beta \varphi(x)\, dx = \text{ορ} \left\{ \frac{\varphi(\alpha) + \frac{1}{2}\varphi(x_1) + \frac{1}{3}\varphi(x_2) + \ldots + \frac{1}{\nu}\varphi(x_{\nu-1})}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\nu}} \right\} (\beta - \alpha)$$

$$\text{ἔνθα} \quad x_\rho = \alpha + \varepsilon\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\rho}\right)$$

$$2) \quad \int_\alpha^\beta \varphi(x)\, dx = \text{ορ} \left\{ \frac{\varphi(\alpha) + 2\varphi(x_1) + 3\varphi(x_2) + \ldots + \nu\varphi(x_{\nu-1})}{\nu^2} \right\} 2(\beta - \alpha)$$

$$\text{ἐὰν} \qquad x_\rho = \alpha + \varepsilon(1 + 3 + \ldots + \rho)$$

6) Εὑρεῖν τιμὴν προσεγγίζουσαν τοῦ γινομένου $1.2.3 \ldots n$ καθ' ὅσον ὁ n αὐξάνει εἰς ἄπειρον.

Ὁ τύπος τοῦ Wallis γράφεται καὶ ἑξῆς

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots 2n-1}\right)^2 \frac{1}{2n}.(1+\alpha_n) \quad \text{ἔνθα ὅρ } \alpha_n = 0 \text{ διὰ } n = \infty$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται

$$\sqrt{n\pi} = \frac{2.4.6 \ldots 2n}{1.3.5 \ldots (2\nu-1)}.(1+\alpha_n)^{\frac{1}{2}} = \frac{(2.4.6 \ldots 2n)^2}{1.2.3 \ldots (2n)}(1+\alpha_n)^{\frac{1}{2}}$$

ἢ καὶ

$$\sqrt{n\pi} = \frac{2^{2n}(1.2.3\ldots n)^2}{1.2.3\ldots(2n)}(1+\alpha_n)^{\frac{1}{2}}$$

ὅθεν

$$(n+1)(n+2)\ldots(n+n)\sqrt{n\pi} = 2^{2n}(1.2.3\ldots n)(1+\alpha_n)^{\frac{1}{2}}$$

καὶ ἐπειδὴ εὑρέθη $\quad (n+1)(n+2)\ldots(n+n) = n^n.2^{2n}e^{-n}\sqrt{2}\; e^{-\theta n}$

συνάγεται $\quad (1.2.3\ldots n) = n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}.\sqrt{2\pi}\,(1+\rho n) \quad$ ἔνθα ορ $\rho n = 0$ διὰ $n = \infty$

7) Ἐὰν ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ ἐν τῷ διαστήματι $\alpha\ldots\beta$ μένῃ θετική, θὰ εἶνε

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\, f(x)dx = f(\xi).\int_\alpha^\beta \varphi(x)\, dx \qquad \text{ἔνθα } \xi \text{ εἶνε τιμή τις τοῦ διαστήματος } \alpha\ldots\beta.$$

Διότι, ἂν E εἶνε ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς $f(x)$ καὶ M ἡ μεγίστη ἐν τῷ διαστήματι $\alpha\ldots\beta$ θὰ εἶνε

$$E < f(x) < M \qquad x = \alpha\ldots\beta$$

ὅθεν καὶ

$$E\,\varphi(x) < f(x)\,\varphi(x) < M\,\varphi(x)$$

καὶ

$$E\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx < \int_\alpha^\beta f(x)\,\varphi(x)\,dx < M\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx$$

τουτέστιν

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\varphi(x)\,dx = \mu.\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx$$

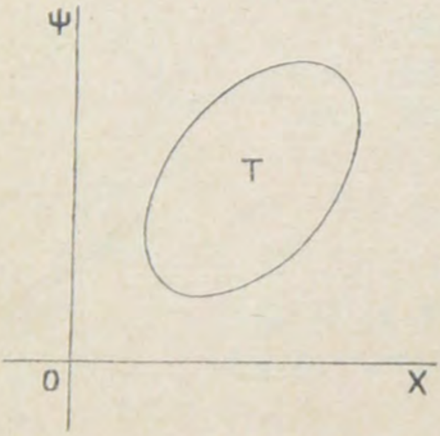
ἔνθα μ δηλοῖ ἀριθμόν τινα μεταξὺ E καὶ M κείμενον, ὅστις θὰ εἶνε τιμὴ τῆς συναρτήσεως $f(x)$ (ἐὰν εἶνε συνεχής) διά τινα τιμὴν ξ κειμένην ἐν τῷ διαστήματι $\alpha\ldots\beta$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II.

ΔΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

---

130. Θεωρήσωμεν δύο μεταβλητὰς x, y ἀνεξαρτήτους ἀπ' ἀλλήλων, ἃς παριστῶμεν ὡς ὀρθογωνίους συντεταγμένας τῶν σημείων τοῦ



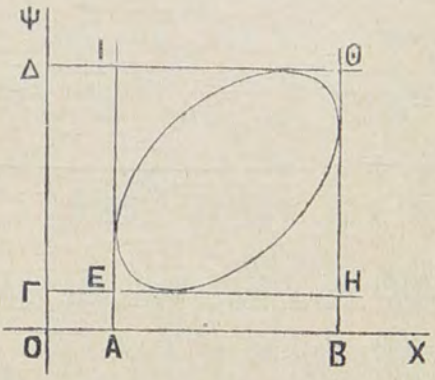
ἐπιπέδου ΨΟΧ, καὶ τμῆμά τι αὐτοῦ πεπερασμένον καὶ ὑπὸ τῆς τυχούσης κλειστῆς γραμμῆς περατούμενον, τὸ Τ· ἔστω δὲ καὶ συνάρτησίς τις $\varphi(x, y)$, ἥτις ἐν ἑκάστῳ σημείῳ τοῦ Τ (ἤτοι δι' ἕκαστον σύστημα τιμῶν x, y, πρὸς ἃς ἀντιστοιχεῖ σημεῖόν τι τοῦ Τ) ἔχει μίαν τιμὴν πεπερασμένην καὶ συνεχῶς μεταβαλλομένην μετὰ τοῦ σημείου, ἐν ὅσῳ τοῦτο μένῃ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας Τ (λέγω δὲ συνάρτησίν τινα συνεχῆ ἐν ἐπιφανείᾳ, ὅταν, δοθέντος ἀριθμοῦ θετικοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ, τοῦ ε, εἶνε πάντοτε δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός τις θετικὸς δ τοιοῦτος, ὥστε πᾶσα μεταβολὴ τῶν συντεταγμένων x, y ἐξ οἱουδήποτε σημείου τῆς ἐπιφανείας, καὶ ἂν γίνηται, ἐὰν ἔχῃ μέτρον μικρότερον τοῦ δ, νὰ προξενῇ μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως ἔχουσαν μέτρον μικρότερον τοῦ ε).

Ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν Τ εἰς ὁσαδήποτε καὶ οἱαδήποτε μέρη καὶ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου ἐπὶ τὴν τιμήν, ἣν λαμβάνει ἡ συνάρτησις $\varphi(x, y)$ εἰς ἓν οἱονδήποτε τῶν σημείων αὐτοῦ, τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τούτων λέγω ὅτι τείνει πρός τι ὅριον πεπερασμένον καὶ ἐντελῶς ὡρισμένον, ὅταν ἡ διαίρεσις τῆς ἐπιφανείας Τ προχωρῇ οὕτως, ὥστε ἕκαστον τῶν μερῶν αὐτῆς νὰ τείνῃ πρὸς τὸ 0 κατ' ἀμφοτέρας τὰς διαστάσεις αὐτοῦ, ἤτοι οὕτως, ὥστε ἡ ἀπόστασις δύο τυχόντων σημείων αὐτοῦ νὰ τείνῃ πρὸς τὸ 0.

Σημείωσις. Καὶ ἐνταῦθα πρόκειται περὶ ἀθροίσματος ποσοτήτων, ὧν ἑκάστη μὲν ἐλαττοῦται μέχρις ἐκμηδενίσεως, ἀλλ' ὧν τὸ πλῆθος αὐξάνει ὑπὲρ πάντα ἀριθμόν· ἀλλ' αἱ ποσότητες αὗται ἐξαρτῶνται νῦν ἀπὸ δύο μεταβλητῶν x, y ἀνεξαρτήτων ἀπ' ἀλλήλων καὶ οὐχὶ ἀπὸ μιᾶς. Καὶ ὅτε μὲν εἴχομεν μίαν μεταβλητήν, τὴν x, περιωρίσαμεν αὐτὴν ἐπὶ τμήματος τῆς εὐθείας ΟΧ, ἐφ' ἧς παριστάνομεν τὰς τιμὰς αὐτῆς· νῦν δέ, ὑπαρχουσῶν δύο μεταβλητῶν, περιορίζομεν αὐτὰς ἐπὶ τμήματός τινος τοῦ ἐπιπέδου, ἐφ' οὗ παριστάνομεν ἕκαστον σύστημα τιμῶν αὐτῶν. Αἱ δὲ ποσότητες ὧν τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος θεωροῦμεν, σχηματίζονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον· διαιρεῖται δηλαδὴ ὁ τόπος, ἐν ᾧ περιορίζονται αἱ μεταβληταὶ εἰς μέρη καὶ πολλαπλασιάζεται τὸ μέγεθος ἑκάστου ἐπὶ τὴν τιμὴν ἣν λαμβάνει ἡ δοθεῖσα συνάρτησις εἰς ἓν τῶν σημείων αὐτοῦ.

131. Κατὰ πρῶτον θὰ ἀποδείξωμεν καὶ ἐνταῦθα τὴν ὕπαρξιν τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος ὁρίου ἐν μιᾷ ὡρισμένῃ διαιρέσει, ἔπειτα δὲ θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι καὶ ἐν πάσῃ διαιρέσει τὸ αὐτὸ ὑπάρχει ὅριον.

Διὰ τὴν εὐκολίαν τῆς ἀποδείξεως θέλομεν καὶ ἐνταῦθα ὑποθέσει ὅτι αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως $\varphi(x, y)$ ἐν τῷ τόπῳ Τ εἶνε πᾶσαι θετικαί.



Ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΙ καὶ ΒΘ παραλλήλως τῇ ΟΨ καὶ οὕτως, ὥστε νὰ περιλαμβάνωσι μεταξὺ αὐτῶν τὸ χωρίον Τ ἐγγίζουσαι αὐτὸ ἑκατέρα εἰς ἓν ἢ περισσότερα σημεῖα· τότε ΟΑ$(=\alpha)$ εἶνε τὸ ἐλάχιστον x τῶν σημείων τοῦ χωρίου καὶ ΟΒ$(=\beta)$ εἶνε τὸ μέγιστον. Ἂς ἀχθῶσιν ἔπειτα καὶ αἱ εὐθεῖαι ΓΗ καὶ ΔΘ παραλλήλως τῇ ΟΧ καὶ οὕτως ὥστε νὰ περιλαμβάνωσιν ἐπίσης μεταξὺ αὐτῶν τὸ χωρίον Τ ἐγγίζουσαι αὐτὸ ἑκάτερα εἰς ἓν ἢ περισσότερα σημεῖα· τότε ΟΓ$(=\gamma)$ εἶνε τὸ ἐλάχιστον y τῶν σημείων τοῦ Τ καὶ ΟΔ$(=\delta)$ εἶνε τὸ μέγιστον. Ἂς διαιρεθῇ ἔπειτα ἑκατέρα τῶν πλευρῶν ΕΗ καὶ ΕΙ τοῦ περὶ τὸ χωρίον περιγραφέντος ὀρθογωνίου ΕΗΘΙ εἰς δύο ἴσα μέρη, ἔπειτα ἑκατέρα εἰς τέσσαρα, ἔπειτα εἰς 8, καὶ οὕτω καθεξῆς, καὶ ἂς ἄγωνται ἑκάστοτε ἀπὸ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως αἱ παράλληλοι πρὸς τοὺς ἄξονας· αὗται διαιροῦσι τὸ περιγραφὲν ὀρθογώνιον πρῶτον μὲν εἰς τέσσαρα ἴσα, ἔπειτα δὲ ἕκαστον τούτων εἰς τέσσαρα ἴσα, καὶ οὕτω καθεξῆς· φανερὸν εἶνε ὅτι κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον τῆς διαιρέσεως, καθ' ὅσον προχωροῦμεν, ἕκαστον τῶν ὀρθογωνίων εἰς ἃ διαιρεῖται τὸ ΕΗΘΙ τείνει πρὸς τὸ 0. Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων δὲ τούτων ἄλλα μὲν κεῖνται ὅλως ἐντὸς τοῦ χωρίου Τ, ἄλλα δὲ ὅλως ἐκτός, τινὰ δὲ κεῖνται ἐν μέρει ἐντὸς καὶ ἐν μέρει ἐκτός· ἔστωσαν κατὰ τὴν νυοστὴν διαίρεσιν (ὅτε ἑκατέρα τῶν πλευρῶν ΕΗ, ΕΙ εὑρίσκεται διῃρημένη εἰς μέρη ἴσα 2^ν) $\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_\rho$ τὰ ἐντὸς τοῦ χωρίου κείμενα ὀρθογώνια καθ' οἱανδήποτε τάξιν ἠριθμημένα καὶ τ'_1 τ'_2 . . . τ'_σ τὰ ἐντὸς ἐκτὸς κείμενα. Τούτου τεθέντος, πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τῶν ἐντὸς τοῦ Τ κειμένων ὀρθογωνίων ἐπὶ τὴν ἐλαχίστην τιμὴν τῆς συναρτήσεως $\varphi(x, y)$ ἐν αὐτῷ καὶ σχηματίζομεν τὸ ἑξῆς ἄθροισμα

$$\tau_1 E_1 + \tau_2 E_2 + \ . \ . \ . \ + \tau_\rho E_\rho$$

ἔνθα E_k δηλοῖ τὴν ἐλαχίστην τιμὴν τῆς συναρτήσεως $\varphi(x, y)$ ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τ_k.

Τὸ ἄθροισμα τοῦτο, ὅπερ παριστῶ διὰ τοῦ σ_ν, ἔχει ὅριον, ὅταν ἡ διαίρεσις προχωρῇ ἐπ' ἄπειρον· διότι, ἂν νῦν διαιρεθῇ ἕκαστον τῶν 2^ν μερῶν ἑκατέρας τῶν πλευρῶν ΕΗ, ΕΙ εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ ἀχθῶσιν αἱ παράλληλοι τοῖς ἄξοσιν, ἕκαστον τῶν ὀρθογωνίων τ_k θὰ διαιρεθῇ εἰς 4 ἴσα, ἐπομένως ἕκαστος ὅρος τοῦ σ_ν θὰ διασχισθῇ ἐν τῷ ἀθροίσματι $\sigma_{\nu+1}$ εἰς τέσσαρας· π. χ. ὁ ὅρος $\tau_k E_k$ θὰ γίνῃ

$$\frac{1}{4}\tau_k E_{k1} + \frac{1}{4}\tau_k E_{k2} + \frac{1}{4}\tau_k E_{k3} + \frac{1}{4}\tau_k E_{k4}$$

ἔνθα E_{k1}, E_{k2}, E_{k3}, E_{k4} παριστῶσι τὰς ἐλαχίστας τιμὰς τῆς συναρτήσεως $\varphi(x, y)$ ἐν ἑκάστῳ τῶν τεσσάρων μερῶν τοῦ ὀρθογωνίου τ_k.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ ἐλάχισται αὗται τιμαὶ δὲν δύνανται νὰ εἶνε μικρότεραι τῆς ἐλαχίστης τιμῆς E_k ἐν τῷ ὅλῳ ὀρθογωνίῳ τ_k, ἤτοι ἐπειδὴ

$$E_{k1} \geqq E_k$$
$$E_{k2} \geqq E_k$$
$$E_{k3} \geqq E_k$$
$$E_{k4} \geqq E_k$$

ἕπεται $$\frac{1}{4}\tau_k E_{k1} + \frac{1}{4}\tau_k E_{k2} + \frac{1}{4}\tau_k E_{k3} + \frac{1}{4}\tau_k E_{k4} \geqq \tau_k E_k$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ὁ ὅρος $\tau_k E_k$ τοῦ ἀθροίσματος σ_ν ἔδωκεν ἐν τῷ νέῳ ἀθροίσματι $\sigma_{\nu+1}$ τέσσαρας ὅρους, οἵτινες ἔχουσιν ἄθροισμα μεγαλήτερον αὐτοῦ, ἢ τοὐλάχιστον ἴσον αὐτῷ· τὸ αὐτὸ δὲ ἰσχύει περὶ ἑκάστου τῶν ὅρων τοῦ σ_ν. ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι τὸ νέον ἄθροισμα $\sigma_{\nu+1}$ θὰ εἶνε μελήτερον τοῦ σ_ν, ἢ τοὐλάχιστον ἴσον αὐτῷ.

Ἀλλὰ καὶ ἄλλοθεν λαμβάνει αὔξησιν τὸ νέον ἄθροισμα $\sigma_{\nu+1}$· τινὰ δηλονότι τῶν ὀρθογωνίων τῆς νυοστῆς διαιρέσεως, ἅτινα ἐν τῷ σχηματισμῷ τοῦ ἀθροίσματος σ_ν παρελείποντο, ὡς κείμενα ἐντός ἐκτός τοῦ T, ἐν τῇ νέᾳ διαιρέσει δίδουσι μέρη ὅλως ἐντὸς τοῦ χωρίου T κείμενα καὶ ἑπομένως τὸ ἄθροισμα $\sigma_{\nu+1}$ προσκτᾶται ἐξ αὐτῶν νέους ὅρους.

Ἐκ τούτων πάντων συνάγεται, ὅτι θὰ εἶνε

$$\sigma_{\nu+1} \geqq \sigma_\nu$$

ἤτοι τὸ ἀπὸ τῶν ἐλαχίστων τιμῶν καὶ ἀπὸ μόνων τῶν ἐντὸς κειμένων ὀρθογωνίων σχηματιζόμενον ἄθροισμα σ_ν (ἂν μὴ εἶνε πάντοτε σταθερὸν) προβαίνει αὐξανόμενον καὶ ἐπειδὴ οὐδέποτε ὑπερβαίνει τὸ γινόμενον (EI)(EH).M (ἔνθα M δηλοῖ τὴν μεγίστην τιμὴν τῆς συναρτήσεως $\varphi(x, y)$ ἐν τῷ ὅλῳ χωρίῳ T), συμπεραίνομεν ὅτι τείνει πρός τι ὅριον.

Σχηματίσωμεν νῦν δεύτερον ἄθροισμα λαμβάνοντες οὐ μόνον τὰ ἐντὸς τοῦ T κείμενα ὀρθογώνια $\tau_1, \tau_2 \,.\,.\, \tau_\rho$ ἀλλὰ καὶ πάντα τὰ ἐντὸς ἐκτὸς $\tau'_1, \tau'_2 \,.\,.\, \tau'_\sigma$ καὶ πολλαπλασιάζοντες τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου ἐπὶ τὴν μεγίστην τιμὴν τῆς συναρτήσεως ἐν αὐτῷ· ἔστω δὲ τοῦτο τὸ ἑξῆς

$$\Sigma_\nu = \tau_1 M_1 + \tau_2 M_2 + \,.\,.\, + \tau_\rho M_\rho + \tau'_1 M'_1 + \tau'_2 M'_2 + \,.\,.\, + \tau'_\sigma M'_\sigma$$

τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἐλαττοῦται, ὅταν ὁ ν αὐξάνῃ (ἢ μένει σταθερόν)· διότι, ἐὰν διαιρεθῇ πάλιν εἰς δύο ἴσα μέρη ἕκαστον τῶν 2^ν ἴσων μερῶν τῶν πλευρῶν EI, EH καὶ ἀχθῶσιν αἱ παράλληλοι πρὸς τοὺς ἄξονας, διαιρεῖται ἕκαστον τῶν ὀρθογωνίων τ εἰς τέσσαρα ἴσα ὀρθογώνια καὶ ἑπομένως ἕκαστος ὅρος τοῦ ἀθροίσματος Σ_ν διασχίζεται εἰς τέσσαρας π. χ. ὁ ὅρος $\tau_k M_k$ δίδει τοὺς ἑξῆς τέσσαρας

$$\frac{1}{4}\tau_k M_{k1} + \frac{1}{4}\tau_k M_{k2} + \frac{1}{4}\tau_k M_{k3} + \frac{1}{4}\tau_k M_{k4}$$

ἐπειδὴ ὅμως ἡ μεγίστη τιμὴ ἐν ἑκάστῳ τῶν τεσσάρων ὀρθογωνίων, εἰς ἃ διαιρεῖται τὸ τ_k, δὲν δύναται νὰ εἶνε μεγαλητέρα τῆς μεγίστης τιμῆς M_k ἐν τῷ ὅλῳ ὀρθογωνίῳ, ἤτοι

$$M_{k1} \leqq M_k$$
$$M_{k2} \leqq M_k$$
$$M_{k3} \leqq M_k$$
$$M_{k4} \leqq M_k$$

ἕπεται

$$\frac{1}{4}\tau_k M_{k1}+\frac{1}{4}\tau_k M_{k2}+\frac{1}{4}\tau_k M_{k3}+\frac{1}{4}\tau_k M_{k4}\leqq \tau_k M_k$$

ἐξ ὧν βλέπομεν, ὅτι οἱ τέσσαρες ὅροι οὓς ἔδωκεν ὁ ὅρος $\tau_k M_k$ τοῦ ἀθροίσματος Σ_ν εἰς τὸ ἄθροισμα $\Sigma_{\nu+1}$, ἔχουσιν ἄθροισμα μικρότερον αὐτοῦ ἢ τὸ πολὺ ἴσον αὐτῷ· τοῦτο δὲ ἰσχύει περὶ ἑκάστου ὅρου τοῦ Σ_ν. ὥστε τὸ νέον ἄθροισμα $\Sigma_{\nu+1}$ εἶνε μικρότερον τοῦ Σ_ν ἢ τὸ πολὺ ἴσον αὐτῷ.

Ἀλλὰ καὶ ἄλλοθεν προέρχεται ἐλάττωσις τοῦ ἀθροίσματος Σ_ν· τινὰ δηλονότι τῶν ἐντὸς ἐκτὸς ὀρθογωνίων, ὅταν διαιρεθῶσιν εἰς τέσσαρα, δίδουσι μέρη κείμενα ὅλως ἐκτὸς τοῦ χωρίου καὶ διὰ τοῦτο παραλειπόμενα ἐν τῷ σχηματισμῷ τοῦ νέου ἀθροίσματος $\Sigma_{\nu+1}$· οἱ ἐκ τοιούτων δὲ ὀρθογωνίων προερχόμενοι ὅροι τοῦ Σ_ν διασχίζονται ἐν τῷ $\Sigma_{\nu+1}$ εἰς ὅρους ὀλιγωτέρους τῶν τεσσάρων καὶ παρέχουσι διὰ τοῦτο ἄθροισμα μικρότερον· ἐὰν λ. χ. τοιοῦτον εἶνε τὸ ὀρθογώνιον τ'_1 καὶ τὸ μέρος αὐτοῦ τ'_{14} κεῖται ὅλον ἐκτὸς τοῦ T, ὁ ὅρος $\tau'_1 M'_1$ τοῦ Σ_ν θὰ δώσῃ ἐν τῷ νέῳ ἀθροίσματι $\Sigma_{\nu+1}$ μόνον τρεῖς ὅρους, τοὺς ἑξῆς

$$\frac{1}{4}\tau'_1 M'_{11}+\frac{1}{4}\tau'_1 M'_{12}\frac{1}{4}\quad\tau'_1 M'_{13}$$

ὧν τὸ ἄθροισμα δὲν ὑπερβαίνει τὸ $\frac{3}{4}\tau'_1 M'_1$.

Ἐκ πάντων τούτων συνάγεται, ὅτι θὰ εἶνε

$$\Sigma_{\nu+1}\leqq\Sigma_\nu$$

ἤτοι τὸ ἐκ τῶν ἐντὸς καὶ ἐκ τῶν ἐντὸς ἐκτὸς κειμένων ὀρθογωνίων καὶ ἐκ τῶν μεγίστων τιμῶν τῆς συναρτήσεως ἐν ἑκάστῳ τούτων σχηματιζόμενον ἄθροισμα Σ_ν προβαίνει διηνεκῶς ἐλαττούμενον, ὅταν αὐξάνῃ ὁ ν, (ἂν μὴ μένῃ πάντοτε σταθερόν)· ἐπειδὴ δὲ μένει πάντοτε μεγαλήτερον τοῦ σ_ν, συμπεραίνομεν, ὅτι καὶ τοῦτο τείνει πρὸς ὅριόν τι, ὅταν ὁ ν αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον.

Λέγω νῦν, ὅτι ἀμφότερα τὰ ἀθροίσματα Σ_ν καὶ σ_ν πρὸς τὸ αὐτὸ ὅριον τείνουσιν, ὅταν ὁ ν αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον.

Καὶ, ὄντως ἡ διαφορὰ αὐτῶν

$$\Sigma_\nu-\sigma_\nu=\tau_1(M_1-E_1)+\tau_2(M_2-E_2)+\ \ldots\ +\tau_\rho(M_\rho-E_\rho)+$$
$$+\tau'_1 M'_1+\tau'_2 M'_2+\ \ldots\ +\tau'_\sigma M'_\sigma$$

σύγκειται ἐκ δύο μερῶν, ἅτινα ἀμφότερα τείνουσι προς τὸ 0· διότι ἐν μὲν τῷ πρώτῳ

$$(\alpha) \qquad \tau_1(M_1-E_1)+\tau_2(M_2-E_2)+\ .\ .\ .\ +\tau_\rho(M_\rho-E_\rho)$$

ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις $\varphi(x, y)$ ὑπετέθη συνεχὴς ἐν τῷ τόπῳ Τ, αἱ δύο τιμαὶ M_λ καὶ E_λ αὐτῆς ἐντὸς ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ὀρθογωνίου τ_λ τείνουσι νὰ συμπέσωσιν, ὅταν αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου τούτου σμικρύνωνται καὶ τείνωσι πρὸς τὸ 0· ἑπομένως τοῦ ν αὐξάνοντος εἰς ἄπειρον πᾶσαι αἱ διαφοραὶ $M\lambda-E\lambda$ ($\lambda=1,\ 2\ .\ .\ .\ \rho$) τείνουσι πρὸς τὸ 0· ἐὰν δὲ ἐκ τῶν διαφορῶν τούτων λάβωμεν τὴν μεγίστην (ἢ τὴν μηδεμιᾶς μικροτέραν), ἥτις ἔστω ἡ $Mk-Ek$, καὶ θέσωμεν αὐτὴν ἀντὶ τῶν ἄλλων, εὑρίσκομεν ἄθροισμα προφανῶς μεγαλήτερον, τὸ

$$\tau_1(Mk-Ek)+\tau_2(Mk-Ek)+\ .\ .\ .\ +\tau_\rho(Mk-Ek)$$

ἤτοι

$$(\tau_1+\tau_2+\ .\ .\ .\ \tau_\rho)(Mk-Ek)$$

ἀλλὰ καὶ τοῦτο τείνει πρὸς τὸ 0, ὅταν ὁ ν αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον· διότι ὁ μὲν παράγων $Mk-Ek$ τείνει πρὸς τὸ 0, ὁ δὲ ἕτερος $(\tau_1+\tau_2+\ .\ .\ .\ \tau_\rho)$ μένει πάντοτε μικρότερος τοῦ ἐμβαδοῦ (ΕΗ)(ΕΙ) τοῦ ὀρθογωνίου ΕΗΙΘ· ἑπομένως καὶ τὸ ἄθροισμα (α) κατὰ μείζονα λόγον τείνει πρὸς τὸ 0·

Τὸ δὲ δεύτερον

$$(\beta) \qquad \tau'_1M'_1+\tau'_2M'_2+\ .\ .\ .\ +\tau'_\sigma M'_\sigma$$

ἐὰν διὰ τοῦ Μ παραστήσωμεν τὴν μεγίστην τιμὴν τῆς συναρτήσεως $\varphi(x, y)$ ἐν τῷ ὅλῳ χωρίῳ Τ, εἶνε μικρότερον τοῦ

$$\tau'_1M+\tau'_2M+\ .\ .\ .\ +\tau'_\sigma M$$

ἤτοι τοῦ $\qquad M(\tau'_1+\tau'_2+\ .\ .\ .\ +\tau'_\sigma)$ ἢ καὶ τοῦ $M\sigma.\tau$

ἐὰν διὰ τοῦ τ παραστήσωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς οἱουδήποτε τῶν ὀρθογωνίων (εἰς ἃ διῃρέθη τὸ ὀρθογώνιον ΕΗΘΙ)· διότι πάντα ταῦτα εἶνε ἴσα.

Ὁ ἀριθμὸς σ τῶν ἐντὸς ἐκτὸς κειμένων ὀρθογωνίων αὐξάνει καὶ αὐτὸς εἰς ἄπειρον (ὅταν ὁ ν αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον)· ἵνα προσδιορίσωμεν αὐτόν, ἢ ἄλλον μεγαλήτερον, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι ἕκαστον τῶν ὀρθογωνίων τούτων ἔχει ἐντὸς αὐτοῦ τοὐλάχιστον ἓν τεμάχιον τῆς περιμέτρου τοῦ χωρίου Τ· ὁ ἀριθμὸς ἄρα σ αὐτῶν δὲν εἶνε μεγαλήτερος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν τεμαχίων, εἰς ἃ διῃρέθη ἡ περίμετρος τοῦ χωρίου Τ διὰ τῶν ἀχθεισῶν παραλλήλων πρὸς ἑκάτερον τῶν ἀξόνων· ἐπειδὴ δὲ τὰ τεμάχια, εἰς ἃ διαιρεῖται οἱαδήποτε κλειστὴ γραμμὴ (μὴ τέμνουσα ἑαυτὴν) εἶνε πάντοτε ἰσάριθμα πρὸς τὰ σημεῖα, εἰς ἃ τέμνεται, συμπεραίνομεν, ὅτι ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν εἰς πόσα σημεῖα ἐτμήθη ἡ περίμετρος τοῦ Τ διὰ τῶν ἀχθεισῶν ὡς εἴρηται εὐθειῶν.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $p+1$ τὸ πλῆθος τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἤχθησαν παραλλήλως πρὸς ἑκάτερον τῶν ἀξόνων κατὰ τὴν νυοστὴν διαίρεσιν, (εἶνε δὲ τότε $p=2^{\nu}$) καὶ διὰ τοῦ k τὸν μέγιστον ἀριθμὸν τῶν σημείων, καθ' ἃ τέμνει τὴν περίμετρον τοῦ χωρίου Τ ἑκάστη παράλληλος ἐνὶ τῶν ἀξόνων, τὰ σημεῖα, καθ' ἃ ἐτμήθη ἡ περίμετρος ὑπὸ τῶν $2p+2$ ἀχθεισῶν εὐθειῶν, (ἐπομένως καὶ τὰ μέρη εἰς ἃ διῃρέθη) δὲν εἶνε περισσότερα τῶν $(2p+2)k$· κατ' ἀκολουθίαν καὶ ὁ ἀριθμὸς σ τῶν ἐντὸς ἐκτὸς κειμένων ὀρθογωνίων δὲν ὑπερβαίνει τὸν αὐτὸν ἀριθμόν· ἤτοι

$$\sigma \leqq (2p+2)k$$

ὥστε τὸ ἄθροισμα (β) εἶνε μικρότερον τοῦ $2\mathrm{M}.\tau.k(p+1)$.

Ἀλλ' αἱ $p+1$ παράλληλοι τῇ ΟΧ μετὰ τῶν $p+1$ παραλλήλων τῇ ΟΨ ἐσχημάτισαν p^2 ἴσα ἀλλήλοις ὀρθογώνια, ἅτινα συναποτελοῦσι τὸ ὀρθογώνιον ΕΗΘΙ· ἐπομένως εἶνε $\tau = \frac{(\mathrm{EH}).(\mathrm{EI})}{p^2}$ καὶ διὰ τοῦτο τὸ ἄθροισμα (β) εἶνε μικρότερον τοῦ

$$2\mathrm{M}k\frac{p+1}{p^2}.(\mathrm{EH})(\mathrm{EI})\cdot$$

ἐπειδὴ δὲ τοῦτο τείνει πρὸς τὸ 0, ὅταν ὁ ἀριθμὸς p αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον, συνάγεται, ὅτι κατὰ μείζονα λόγον καὶ τὸ ἄθροισμα (β) τείνει πρὸς τὸ 0 (ὁ ἀριθμὸς k ὑποτίθεται πεπερασμένος).

Ἐδείχθη ἄρα ὅτι εἶνε

$$\text{ορ}\,(\Sigma_\nu - \sigma_\nu) = 0 \quad \text{ἤτοι} \quad \text{ορ}\,\Sigma_\nu = \text{ορ}\,\sigma_\nu \quad \text{διὰ} \quad \nu = \infty$$

Καὶ ἂν λαμβάνωμεν πάντα τὰ ἐντὸς κείμενα ὀρθογώνια καὶ ὅσα θέλωμεν ἐκ τῶν ἐντὸς ἐκτός, ἢ καὶ μέρη μόνον τινῶν ἐκ τούτων (ὡς λόγου χάριν τὰ ἐντὸς τοῦ Τ κείμενα μέρη αὐτῶν) καὶ πολλαπλασιάζωμεν ἕκαστον τῶν ληφθέντων ἐπὶ τὴν τιμὴν ἣν ἔχει ἡ συνάρτησις $\varphi(x,y)$ εἰς ἓν οἱονδήποτε ἐκ τῶν σημείων αὐτοῦ, καὶ τὸ οὕτω σχηματιζόμενον ἄθροισμα

$$\Theta_\nu = \tau_1\varphi(\tau_1) + \tau_2\varphi(\tau_2) + \ldots + \tau_\rho\,\varphi(\tau_\rho) + \mu_1\tau'_1\varphi(\tau'_1) + \mu_2\tau'_2\varphi(\tau'_2) + \ldots$$

πρὸς τὸ αὐτὸ τείνει ὅριον· διότι τοῦτο περιλαμβάνεται προδήλως μεταξὺ τῶν δύο ἀθροισμάτων Σ_ν καὶ σ_ν.

Σημείωσις. Διὰ τοῦ $\varphi(\tau_\nu)$ ἐσημειώθη ἡ τιμὴ ἣν ἔχει ἡ συνάρτησις $\varphi(x, y)$ εἰς ἓν οἱονδήποτε σημεῖον τοῦ τ_ν, ἕκαστος δὲ τῶν ἀριθμῶν μ_1, μ_2 . . . δύναται νὰ ἔχῃ οἱανδήποτε ἐκ τῶν τιμῶν 0...1.

132. Ἐδείχθη, ἄρα, ὅτι, *ἐὰν περὶ τὸ χωρίον T περιγράψωμεν ὀρθογώνιον ἔχον πλευρὰς παραλλήλους τοῖς ἄξοσι καὶ ἔπειτα διαιρῶμεν αὐτὸ εἰς μέρη ὅμοια αὐτῷ πρῶτον μὲν εἰς 4 ἴσα, ἔπειτα δὲ ἕκαστον τούτων πάλιν εἰς 4 ἴσα, καὶ οὕτω καθεξῆς, λαμβάνωμεν δὲ πάντα τὰ ἐντὸς τοῦ T κείμενα ὀρθογώνια καὶ ὅσα θέλωμεν ἐκ τῶν ἐντὸς ἐκτὸς ἢ καὶ μέρη τούτων (ὡς λ. χ. τὰ ἐντὸς τοῦ T κείμενα μέρη) καὶ πολλαπλασιάζωμεν ἕκαστον τῶν ληφθέντων ἐπὶ τὴν τιμὴν ἣν ἔχει ἡ συνάρτησις φ(x, y) εἰς ἓν οἱονδήποτε ἐκ τῶν σημείων αὐτοῦ, τὸ ἐκ πάντων τῶν γινομένων τούτων ἄθροισμα τείνει πρὸς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ὅριον.*

Τὸ ὅριον τοῦτο οὐδόλως βλάπτεται καὶ ἂν παραλειφθῶσι πάντα τὰ ὀρθογώνια ὅσα συναντᾷ τυχοῦσα γραμμὴ ἐν τῷ χωρίῳ T, διότι τὸ πλῆθος τῶν ὀρθογωνίων τούτων εἶνε τὸ πολὺ (ὡς ἐν τοῖς προηγουμένοις ἐδείχθη)

$$(2p+2)k$$

ἐὰν ἡ ῥηθεῖσα γραμμή, ἡ τὰ παραλειπόμενα ὀρθογώνια συναντῶσα, τέμνηται ὑφ' ἑκάστης τῶν παραλλήλων τοῖς ἄξοσιν εὐθειῶν εἰς k σημεῖα τὸ πλεῖστον· οἱ δὲ ὅροι, οὓς τὰ ῥηθέντα ὀρθογώνια ἔδιδον εἰς τὸ ἄθροισμα, πάντες ὁμοῦ, εἶνε μικρότεροι τοῦ

$$(2p+2)k\,\tau\mathrm{M}. \quad \text{ἤτοι τοῦ} \quad 2\mathrm{M}k.\frac{p+1}{p^2}(\mathrm{EII})(\mathrm{EI})$$

ὅπερ ὡς ἤδη εἴδομεν τείνει εἰς τὸ 0.

133. Μένει ἔτι νὰ δείξωμεν, ὅτι καὶ κατὰ πάντα ἄλλον τρόπον διαιρέσεως τοῦ χωρίου T, ἐὰν πολλαπλασιάζωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου μέρους τοῦ T ἐπὶ τὴν τιμὴν ἣν ἔχει ἡ συνάρτησις $\varphi(x, y)$ εἰς ἓν οἱονδήποτε ἐκ τῶν σημείων αὐτοῦ, τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν γινομένων τούτων τείνει πρὸς τὸ αὐτὸ πάντοτε ὅριον, ἀρκεῖ ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ T νὰ τείνῃ πρὸς τὸ 0 κατ' ἀμφοτέρας τὰς διαστάσεις.

Θεωρήσωμεν δύο τυχούσας διαιρέσεις τοῦ χωρίου T καὶ ἔστωσαν τὰ μέρη αὐτοῦ

ἐν μὲν τῇ πρώτῃ διαιρέσει $p_1, p_2 \dots p_\mu$

ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ $q_1, q_2 \dots q_\nu$

τὰ πρὸς τὰς διαιρέσεις ταύτας ἀντιστοιχοῦντα ἀθροίσματα θὰ εἶνε

$$P = p_1\varphi(p_1) + p_2\varphi(p_2) + \dots + p_\mu\varphi(p_\mu)$$

$$Q = q_1\varphi(q_1) + q_2\varphi(q_2) + \dots + q_\nu\,\varphi(q_\nu)$$

ἔνθα $\varphi(p_\lambda)$ παριστᾷ τιμήν τινα τῆς συναρτήσεως ἐν τῷ τμήματι p_λ· ὁμοίως καὶ $\varphi(q_\lambda)$.

Τούτων τεθέντων, ἂν νοήσωμεν ἀμφοτέρας τὰς διαιρέσεις ἐπὶ τοῦ χωρίου T γινομένας, θὰ εὑρεθῇ τὸ χωρίον τοῦτο διῃρημένον εἰς μέρη μικρότερα, τὰ

$$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \dots \alpha_\rho$$

ἐξ ὧν γίνονται ἀμφότερα τὰ p καὶ τὰ q· ἕκαστον δηλονότι p ἀποτελεῖται ἐξ ἑνὸς ἢ πλειόνων α, ὁμοίως καὶ ἕκαστον q· ἕκαστον δὲ α ἀνήκει εἰς ἓν καὶ μόνον p καὶ εἰς ἓν καὶ μόνον q· τὸ α_λ π. χ. ἀνήκει εἰς ἓν τῶν τμημάτων $p_1\ p_2 \dots p_\mu$, ὅπερ παριστῶ διὰ τοῦ $p_{\alpha\lambda}$ καὶ εἰς ἓν ἐκ τῶν τμημάτων $q_1\ q_2 \dots q_\nu$, ὅπερ παριστῶ διὰ τοῦ $q_{\alpha\lambda}$.

Ἐὰν δὲ εἰς πάντας τοὺς ὅρους τῶν ἀθροισμάτων P καὶ Q ἀντὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων p ἢ q ἀντικαταστήσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν α, ἐξ ὧν ἕκαστον ἀποτελεῖται, τὰ ῥηθέντα ἀθροίσματα γίνονται

$$P = \alpha_1\varphi(p_{\alpha 1}) + \alpha_2\varphi(p_{\alpha 2}) + \dots + \alpha_\rho\varphi(p_{\alpha\rho})$$

$$Q = \alpha_1\varphi(q_{\alpha 1}) + \alpha_2\varphi(q_{\alpha 2}) + \dots + \alpha_\rho\varphi(q_{\alpha\rho})$$

τὰ δύο ταῦτα ἀθροίσματα ἔχουσιν ἴσον ἀριθμὸν ὅρων καὶ ἕκαστον α, οἷον τὸ α_λ, πολλαπλασιάζεται ἐν μὲν τῷ πρώτῳ ἐπὶ τιμήν τινα τῆς συναρτήσεως $\varphi(x, y)$ ἐν τῷ τμήματι p εἰς ὃ ἀνήκει τὸ α_λ, τὴν τιμὴν δὲ ταύτην παριστῶμεν διὰ τοῦ $\varphi(p_{\alpha\lambda})$, ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ ἐπὶ τιμήν τινα τῆς αὐτῆς συναρτήσεως ἐν τῷ τμήματι q εἰς ὃ ἀνήκει τὸ α_λ, ἥν τινα τιμὴν παριστῶ διὰ τοῦ $\varphi(q_{\alpha\lambda})$.

Εκ τούτων έπεται

$$P-Q=$$

$$=\alpha_1\Big[\varphi(p_{\alpha_1})-\varphi(q_{\alpha_1})\Big]+\alpha_2\Big[\varphi(p_{\alpha_2})-\varphi(q_{\alpha_2})\Big]+\ldots+\alpha_\rho\Big[\varphi(p_{\alpha_\rho})-\varphi(q_{\alpha_\rho})\Big]$$

ἀλλ' αἱ τιμαὶ $\varphi(p_{\alpha\lambda})$ καὶ $\varphi(q_{\alpha\lambda})$, ἐπειδὴ τὰ δύο τμήματα $p_{\alpha\lambda}$ καὶ $q_{\alpha\lambda}$ ἔχουσι κοινὸν μέρος τὸ α_λ διαφέρουσι διαφοράν, ἥτις γίνεται μικροτέρα πάσης ποσότητος, ὅταν ἀμφότερα τὰ τμήματα ταῦτα τείνωσι πρὸς τὸ 0· διότι, ἂν λάβωμεν σημεῖόν τι Η τοῦ κοινοῦ μέρου α_λ τῶν τμημάτων τούτων καὶ παραστήσωμεν τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως $\varphi(x, y)$ ἐν αὐτῷ διὰ τοῦ $\varphi(\mathrm{H})$, θὰ εἶνε

$$\varphi(p_{\alpha\lambda})-\varphi(q_{\alpha\lambda})=\Big[\varphi(p_{\alpha\lambda})-\varphi(\mathrm{H})\Big]+\Big[\varphi(\mathrm{H})-\varphi(q_{\alpha\lambda})\Big]$$

ἀμφότεραι δὲ αἱ διαφοραί, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται τὸ δεύτερον μέλος τῆς ταὐτότητος ταύτης, τείνουσι πρὸς τὸ 0, ὅταν τὰ τμήματα $p_{\alpha\lambda}$ καὶ $q_{\alpha\lambda}$ τείνωσι πρὸς τὸ 0 (κατὰ πάσας τὰς διαστάσεις), διότι ἡ μὲν πρώτη εἶνε διαφορὰ τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως εἰς δύο σημεῖα τοῦ τμήματος $p_{\alpha\lambda}$ ἡ δὲ δευτέρα εἶνε διαφορὰ τῶν τιμῶν αὐτῆς εἰς δύο σημεῖα τοῦ τμήματος $q_{\alpha\lambda}$· ἡ δὲ συνάρτησις $\varphi(x, y)$ ὑπετέθη συνεχής.

Ἐπειδὴ δὲ ἑκάστη τῶν διαφορῶν

$$\varphi(p_{\alpha\lambda})-\varphi(q_{\alpha\lambda}), \qquad \lambda=1,\ 2,\ .\ .\ .\ \rho$$

τείνει πρὸς τὸ 0, ἐὰν τὴν μεγίστην ἐξ αὐτῶν θετικῶς ληφθεῖσαν παραστήσωμεν διὰ τοῦ δ, θὰ εἶνε προφανῶς

$$|P-Q|<\alpha_1\delta+\alpha_2\delta+\ldots+\alpha_\rho\delta \quad \text{ἤτοι} \quad <(\mathrm{EH\Theta I}).\delta$$

ὅθεν καὶ $$\text{ὅρ}\,|P-Q|=0$$

ἑπομένως, ἂν τὸ ἕτερον τῶν ἀθροισμάτων τούτων τείνῃ πρός τι ὅριον, καὶ τὸ ἕτερον τείνει πρὸς τὸ αὐτὸ ὅριον.

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὸν πρῶτον τρόπον τῆς διαιρέσεως ἐδείξαμεν ὅτι ὑπάρχει ὅριον τοῦ ἀθροίσματος, συμπεραίνομεν ὅτι καὶ κατὰ πᾶσαν ἄλλην διαίρεσιν εὑρίσκεται τὸ αὐτὸ ὅριον.

134. Ἐδείχθη ἄρα, ὅτι, *ἐὰν ὁπωσδήποτε διαιρῶμεν τὸ χωρίον T εἰς μέρη α_1, α_1, α_3 . . . α_ρ, καὶ πολλαπλασιάζωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου ἐπὶ μίαν οἱανδήποτε τιμὴν τῆς συναρτήσεως $\varphi(x, y)$ ἐν αὐτῷ, τὸ*

ἄθροισμα τῶν γινομένων τούτων

$$\Sigma \alpha_k \, \varphi(\alpha_k) \qquad (1)$$

ἔχει πάντοτε τὸ αὐτὸ ὅριον, ἀρκεῖ ἕκαστον τῶν μερῶν νὰ τείνῃ πρὸς τὸ 0 κατ' ἀμφοτέρας τὰς διαστάσεις αὐτοῦ.

Τὸ ὅριον τοῦτο καλοῦμεν *διπλοῦν ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα* τῆς παραστάσεως $\varphi(x, y) \,.\, d(x, y)$ ἐν τῷ τόπῳ Τ καὶ παριστῶμεν ὡς ἑξῆς

$$\int_{T} \varphi(x, y)\, d(x, y) \quad \text{ἢ καὶ ὡς ἑξῆς} \quad \int\int_{T} \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

Ἡ δευτέρα αὕτη γραφὴ τοῦ διπλοῦ ὁλοκληρώματος προέκυψεν ἐκ τῆς εἰς ὀρθογώνια διαιρέσεως τοῦ χωρίου Τ· διότι, ἂν αἱ διαστάσεις τῶν ὀρθογωνίων τούτων εἶνε Δx, Δy καὶ πολλαπλασιάζηται τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου ἐπὶ τὴν τιμήν, ἣν ἔχει ἡ συνάρτησις εἰς τὴν κορυφὴν αὐτοῦ τὴν ἔχουσαν τὰς ἐλαχίστας συντεταγμένας (x, y), τὸ ἄθροισμα λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\Sigma\, \varphi(x, y)\ \Delta x, \Delta y$$

καὶ διὰ τοῦτο τὸ ὅριον αὐτοῦ παρεστάθη διὰ τοῦ $\int\int \varphi(x,y)\ dx\, dy.$

Ὅταν ὅμως θέλωμεν νὰ ἀφήσωμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ χωρίου ἀόριστον, παριστῶμεν τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα ὡς ἑξῆς

$$\int_{T} \varphi(x, y)\, d(x, y)$$

τοῦ $d(x, y)$ δηλοῦντος τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς οἱουδήποτε ἀπειροστοῦ τμήματος τοῦ χωρίου Τ.

Συνήθως ὁ τόπος Τ τῆς ὁλοκληρώσεως ὁρίζεται διὰ μιᾶς ἢ πλειόνων ἀνισοτήτων $\sigma < 0$· τότε γράφομεν τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα ὡς ἑξῆς

$$\int_{\sigma<0} \varphi(x, y)\ d(x, y).$$

Περὶ τῶν ὑπὸ γραμμῆς συναντωμένων τμημάτων ἐν οἱαδήποτε διαιρέσει τοῦ Τ.

135. Ἐν πάσῃ διαιρέσει τοῦ χωρίου Τ τὰ ὑπὸ τῆς περιμέτρου ἢ καὶ ὑφ' οἱασδήποτε γραμμῆς ἐν τῷ χωρίῳ κειμένης συναντώμενα τμήματα παρέχουσιν ὅρους, ὧν τὸ ἄθροισμα τείνει πρὸς τὸ 0· ἑπομένως τὰ ῥη-

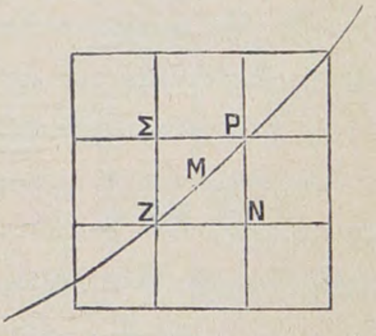
θέντα μέρη δύνανται νὰ παραλείπωνται ὅλως ἢ καὶ νὰ λαμβάνωνται τινὰ ἐξ αὐτῶν ἢ μέρη αὐτῶν οἱαδήποτε, χωρὶς νὰ βλαφθῇ τὸ ὅριον τοῦ ὅλου ἀθροίσματος.

Ἔστω τῷ ὄντι ἡ τυχοῦσα διαίρεσις (ἐν ᾗ ἕκαστον τῶν τμημάτων τείνει πρὸς τὸ 0 κατ' ἀμφοτέρας τὰς διαστάσεις αὐτοῦ)· καί, ορισθέντος ἀριθμοῦ τινος ν ὁσονδήποτε μεγάλου, ἂς προχωρήσῃ ἡ διαίρεσις μέχρις οὗ ἡ ἀπόστασις δύο τυχόντων σημείων τοῦ αὐτοῦ τμήματος νὰ γίνῃ μικροτέρα τῶν $\frac{\mathrm{EI}}{2^{\nu}}$ καὶ $\frac{\mathrm{EH}}{2^{\nu}}$· ἐὰν τότε διαιρεθῶσιν αἱ πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου ΕΗΘΙ εἰς 2^{ν} ἴσα μέρη ἑκατέρα καὶ ἀχθῶσιν αἱ παράλληλοι τοῖς ἄξοσι, διαιρεῖται τὸ χωρίον εἰς ὀρθογώνια, ἐξ ὧν ἡ θεωρουμένη γραμμὴ συναντᾷ τὸ πλεῖστον

$$(2p+2)k, \qquad p=2^{\nu}$$

(ἂν τέμνηται ὑπὸ τῶν ἀχθεισῶν εὐθειῶν τὸ πλεῖστον εἰς k σημεῖα ὑφ' ἑκάστης).

Ἀλλ' ἐὰν εἰς ἕκαστον τῶν συναντωμένων ὑπὸ τῆς γραμμῆς ὀρθογωνίων προσαρτήσωμεν καὶ τὰ πέριξ αὐτοῦ 8 ὀρθογώνια, προκύπτει ζώνη τις ἔχουσα τὸ πλεῖστον $9k(2p+2)$ ὀρθογώνια· ἐν ταύτῃ δὲ τῇ ζώνῃ περιέχονται πάντα τὰ τμήματα τῆς πρώτης διαιρέσεως τὰ ὑπὸ τῆς αὐτῆς γραμμῆς συναντώμενα. Διότι ἂν τι τμῆμα συναντᾷ τὴν γραμμὴν κατὰ τὸ σημεῖον Μ τοῦ ὀρθογωνίου ΖΝΡΣ, ἐπειδὴ ἡ ἀπόστασις πάντων τῶν σημείων αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ Μ εἶνε μικροτέρα τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου, τὸ τμῆμα τοῦτο περιέχεται ἐντὸς τοῦ ὀρθογωνίου ὅπερ ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ ΖΝΡΣ καὶ ἐκ τῶν πέριξ αὐτοῦ 8 ὀρθογωνίων· ἀλλὰ καὶ ἂν ἅπαντα τὰ τὴν ζώνην ἀποτελοῦντα ὀρθογώνια ληφθῶσι καὶ ἂν ἐπὶ τὴν μεγίστην τιμὴν Μ τῆς συναρτήσεως ἐν τῷ χωρίῳ Τ πολλαπλασιασθῇ ἕκαστον, πάλιν οἱ ὅροι οὓς παρέχουσιν εἰς τὸ ὅλον ἄθροισμα εἶνε πάντες ὁμοῦ μικρότεροι τοῦ



$$9k\,(2p+2)\tau.\mathrm{M}$$

ὅπερ τείνει εἰς τὸ 0· ἑπομένως καὶ οἱ ὅροι, οὓς τὰ ὑπὸ τῆς γραμμῆς συναντώμενα τμήματα (τῆς πρώτης διαιρέσεως) παρέχουσιν, ἔχουσιν ἄθροισμα ὅπερ τείνει πρὸς τὸ 0.

Περὶ τοῦ σημείου τῆς συναρτήσεως $\varphi(x, y)$.

136. Ἐν τοῖς προηγουμένοις ὑπετέθη ἡ συνάρτησις $\varphi(x, y)$ ἐν ὅλῳ τῷ χωρίῳ Τ θετική· ἀλλ' εἶνε φανερόν, ὅτι καὶ ἀρνητικὴ ἂν εἶνε ἐν ὅλῳ τῷ χωρίῳ, ὑπάρχει ὅριον τοῦ ἀθροίσματος, τουτέστι τὸ ἀντίθετον ἐκείνου, ὅπερ εὑρίσκομεν, ὅταν λαμβάνωμεν θετικῶς τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως.

Καὶ ὅταν τὸ χωρίον Τ σύγκειται ἐκ πεπερασμένου πλήθους μερῶν T_1, T_2, T_3 . . . $T_\varkappa$, εἰς ἕκαστον δὲ τούτων ἡ συνάρτησις φ διατηρῇ τὸ ἑαυτῆς σημεῖον, πάλιν ὑπάρχει ὅριον τοῦ ἀθροίσματος

$$\Sigma\, \alpha_\nu\, \varphi\,(\alpha_\nu) \qquad (2)$$

ἔνθα α_1, α_2 . . . α_ρ δηλοῦσι τὰ τμήματα τῆς ἐπιφανείας Τ κατὰ τὴν τυχοῦσαν διαίρεσιν καὶ $\varphi(\alpha_\nu)$ τιμὴν οἱανδήποτε τῆς συναρτήσεως φ ἐπὶ τοῦ τμήματος α_ν.

Διότι ἄν, προϊούσης τῆς διαιρέσεως, λαμβάνωμεν πάντοτε ὡς γραμμὴν διαιρέσεως τὴν περίμετρον τοῦ T_1 ἀποβάλλονται μὲν ἐκ τοῦ ἀθροίσματος (2) πάντες οἱ ὅροι οἱ προερχόμενοι ἐκ τῶν τμημάτων ἅτινα διασχίζει ἡ ῥηθεῖσα περίμετρος, προσλαμβάνονται δὲ ἄλλο (διότι ἕκαστον διασχιζόμενον τμῆμα δίδει δύο ἢ καὶ πλείονας ὅρους), ἀλλὰ κατὰ τὰ προαποδειχθέντα καὶ τῶν ἀποβαλλομένων τὸ ἄθροισμα τείνει πρὸς τὸ 0 καὶ τῶν προσλαμβανομένων ἐπίσης· (διότι προέρχονται ἐκ μερῶν συναντωμένων ὑπὸ γραμμῆς)· ἐπομένως τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος (2), ἂν ὑπάρχῃ, δὲν βλάπτεται. Ὁμοίως μένει τὸ ὅριον ἀμετάβλητον, ἄν, προϊούσης τῆς διαιρέσεως, λαμβάνηται ὡς γραμμὴ διαιρέσεως πάντοτε ἡ περίμετρος τοῦ T_2, ἐπίσης καὶ τῶν T_3 . . . $T_\varkappa$. Ἀλλὰ τότε οἱ μὲν ὅροι τοῦ ἀθροίσματος (2) οἱ ἐκ τῶν τμημάτων τοῦ T_1 προερχόμενοι ἔχουσιν ὅριον τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα

$$\int\limits_{T_1} \varphi(x, y)\; d(x, y)$$

οἱ δὲ ἐκ τῶν τμημάτων τοῦ T_2 ἔχουσιν ὅριον τὸ

$$\int\limits_{T_2} \varphi(x, y)\; d(x, y)$$

καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε τὸ ὅλον ἄθροισμα (ὅπερ θεωρεῖται ὡς ἀθροισμα τῶν κ μερικῶν ἀθροισμάτων) ἔχει ὅριον τὸ

$$\int_{T_1} \varphi(x,y)\, d(x,y) + \int_{T_2} \varphi(x,y)\, d(x,y) + \ldots + \int_{T_\varkappa} \varphi(x,y)\, d(x,y)$$

Περὶ τῆς συνεχείας τῆς συναρτήσεως $\varphi(x, y)$.

137. Ἐν τῇ ἀποδείξει τῆς ὑπάρξεως τοῦ ὁρίου, πρὸς ὃ τείνει τὸ θροισμα

$$\Sigma\, \alpha_\nu\, \varphi(\alpha_\nu) \qquad (1)$$

ὑπεθέσαμεν τὴν συνάρτησιν $\varphi(x, y)$ συνεχῆ ἐν τῷ τόπῳ Τ· ἀλλὰ καὶ ὅταν ἡ συνάρτησις ἐπὶ μιᾶς γραμμῆς (ἢ γραμμῶν ὧν τὸ πλῆθος πεπερασμένον) εἶνε ἀσυνεχὴς *μένῃ ὅμως πάντοτε πεπερασμένη*, πάλιν τὸ ἄθροισμα (1 ἔχει ὅριον καὶ τοῦτο καλοῦμεν πάλιν ὡρισμένον διπλοῦν ὁλοκλήρωμα καὶ παριστῶμεν ἐπίσης διὰ τοῦ

$$\int_{T} \varphi(x, y)\, d(x, y)$$

Διότι, ἂν προϊούσης τῆς παραδεδεγμένης διαιρέσεως πρὸς σχηματισμὸν τοῦ ἀθροίσματος (1) λαμβάνωμεν πάντοτε ὡς γραμμὴν διαιρέσεως καὶ τὴν γραμμὴν τῆς ἀσυνεχείας, ἀποβάλλονται μὲν ἐκ τοῦ ἀθροίσματος (1) οἱ ὅροι οἱ προερχόμενοι ἐκ τῶν ὑπ' αὐτῆς διασχιζομένων μερῶν, προσλαμβάνονται δὲ ἀντ' αὐτῶν ἄλλοι (διότι ἕκαστον διασχιζόμενον τμῆμα δίδει δύο ἢ πλείονα μέρη καὶ ἰσαρίθμους ὅρους)· ἀλλὰ καὶ οἱ ἀποβαλλόμενοι ὁμοῦ πάντες τείνουσι πρὸς τὸ 0 καὶ οἱ προσλαμβανόμενοι ἐπίσης· ἑπομένως τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος (1), ἂν ὑπάρχῃ, οὐδόλως ἀλλοιοῦται Ἀλλὰ τότε τὰ μὲν πρὸς τὸ ἓν μέρος τῆς γραμμῆς κείμενα μέρη δίδουσιν ὅρους, ὧν τὸ ἄθροισμα ἔχει ὅριον, ἐπίσης καὶ τὰ πρὸς τὸ ἕτερον· ἑπομένως καὶ τὸ ὅλον ἄθροισμα ἔχει ὅριον.

Σημείωσις. Ἐὰν ἡ συνάρτησις $\varphi(x, y)$ εἴς τι σημεῖον τοῦ τόπου Τ γίνηται ἄπειρος, ἐξαιροῦμεν τμῆμά τι τυχὸν τοῦ Τ περιέχον τὸ σημεῖον τοῦτο ἐντὸς αὐτοῦ, τὸ θ, καὶ εὑρίσκομεν τὸ ὁλοκλήρωμα ἐντὸς τοῦ ὑπολοιπομένου τόπου Τ΄· ἐὰν ἔπειτα τοῦ ἐξαιρεθέντος τμήματος θ τείνοντος ὁπωσδήποτε πρὸς τὸ 0 (κατ' ἀμφοτέρας τὰς διαστάσεις), τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_{T'} \varphi(x, y)\, d(x, y)$$

τείνῃ πρός τι ὅριον πεπερασμένον καὶ ἐντελῶς ὡρισμένον, τὸ ὅριον τοῦτο καλοῦμεν ὡρισμένον διπλοῦν ὁλοκλήρωμα ἐν τῷ τόπῳ Τ καὶ παριστῶμεν ὁμοίως.

Γεωμετρικὴ παράστασις τοῦ διπλοῦ ὁλοκληρώματος.

138. Ἐὰν ἡ συνάρτησις $\varphi(x, y)$ ἐπιδέχηται γεωμετρικὴν παράστασιν δι' ἐπιφανείας, ἂν δηλαδὴ εἶνε δυνατὸν νὰ κατασκευασθῇ πρὸς ὀρθογωνίους ἄξονας ἐπιφάνεια ἔχουσα τὴν ἐξίσωσιν

$$z = \varphi(x, y),$$

τὸ ὡρισμένον διπλοῦν ὁλοκλήρωμα

$$\int_T \varphi(x, y)\ d(x, y)$$

εἶνε ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, ὅπερ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῆς ἐπιφανείας ταύτης καὶ τοῦ ἐπιπέδου χωρίου T καὶ τοῦ ὀρθοῦ κυλίνδρου, ὅστις ἔχει βάσιν τὸ χωρίον τοῦτο (ἡ συνάρτησις $\varphi(x, y)$ ὑποτίθεται θετικὴ ἐν τῷ χωρίῳ T).

Ἐὰν τῷ ὄντι περὶ τὸ χωρίον T, ἤτοι περὶ τὴν βάσιν τοῦ στερεοῦ, περιγράψωμεν ὀρθογώνιον ἔχον πλευρὰς παραλλήλους τοῖς ἄξοσι καὶ διαιρέσωμεν ἔπειτα τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο εἰς ὁσαδήποτε μέρη διὰ παραλλήλων πρὸς τὰς πλευρὰς αὐτοῦ εὐθειῶν, τὰ διὰ τῶν εὐθειῶν τούτων ἀγόμενα καθέτως ἐπὶ τὸ χωρίον T ἐπίπεδα διασχίζουσι τὸ προκείμενον στερὸν εἰς μέρη, ὧν ἕκαστον βαίνει ἐφ' ἑνὸς μέρους τοῦ χωρίου T.

Ἕκαστον τῶν μερῶν τούτων τοῦ στερεοῦ εἶνε προφανῶς μικρότερον τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος, ὅπερ ἔχει βάσιν τὸ ὀρθογώνιον, ἐφ' οὗ κεῖται ἡ βάσις αὐτοῦ (εἴτε ὀρθογώνιον πλῆρες εἶνε ἡ βάσις εἴτε καὶ μὴ) καὶ ὕψος τὴν μεγίστην κατηγμένην τῆς ἄνω ἐπιφανείας του· ἤτοι τὴν μεγίστην τιμὴν τῆς συναρτήσεως $\varphi(x, y)$ ἐν τῇ βάσει αὐτοῦ· (ἢ τὴν μηδεμιᾶς μικροτέραν)· καὶ τὸ σύνολον τῶν πρισμάτων τούτων ἀποτελεῖ ἑπομένως στερεὸν περιέχον τὸ προκείμενον στερεόν· ἀλλ' οἱ ὄγκοι τῶν πρισμάτων τούτων εἶνε

(α) $\qquad \tau_1 M_1 + \tau_2 M_2 + \ldots + \tau_\rho M_\rho + \tau'_1 M'_1 + \tau'_2 M'_2 + \ldots + \tau'_\sigma M'_\sigma$

ἔνθα $\tau_1\ \tau_2 \ldots \tau_\rho$ δηλοῦσι τὰ ἐντὸς τοῦ T κείμενα ὀρθογώνια καὶ $\tau'_1\ \tau'_2 \ldots \tau'_\sigma$ τὰ ἐντὸς ἐκτός, τὰ δὲ M_1, $M'_1 \ldots$ τὰς μεγίστας τιμὰς τῆς συναρτήσεως $\varphi(x, y)$ ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τούτοις.

Ἀλλὰ πάλιν ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ προκειμένου στερεοῦ τῶν ἐχόντων βάσεις πλήρη ὀρθογώνια, εἶνε μεγαλήτερον τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος, ὅπερ ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ὕψος τὴν ἐλαχίστην κατηγμένην τῆς ἄνω ἐπιφανείας του, καὶ τὸ σύνολον τῶν τοιούτων πρισμάτων ἀποτελεῖ ἐπομένως στερεόν τι περιεχόμενον ὅλον ἐν τῷ περὶ οὗ ὁ λόγος στερεῷ· οἱ δὲ ὄγκοι τῶν πρισμάτων τούτων εἶνε

$$(\beta) \qquad \tau_1 E_1 + \tau_2 E_2 + \ldots + \tau_\rho E_\rho$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁπωςδήποτε καὶ ἂν προχωρῇ ἡ διαίρεσις τοῦ τόπου T, πάντοτε τὸ προκείμενον στερεὸν περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ στερεοῦ, ὅπερ ἀποτελοῦσι τὰ πρῶτα πρίσματα καὶ τοῦ στερεοῦ, ὅπερ ἀποτελοῦσι τὰ δεύτερα, ἀμφοτέρων δὲ τούτων οἱ ὄγκοι (α) καὶ (β) τείνουσι πρὸς τὸ αὐτὸ ὅριον, τουτέστι πρὸς τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_T \varphi(x, y)\, dx\, dy \qquad (3)$$

συμπεραίνομεν ὅτι τοῦτο εἶνε ὁ ὄγκος τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος στερεοῦ.

Ὑπεθέσαμεν τὴν συνάρτησιν $\varphi(x, y)$ θετικὴν ἐν τῷ τόπῳ T· ἐὰν εἶνε ἀρνητική, ἤτοι ἂν τὸ στερεὸν κεῖται ὑποκάτω τοῦ ἐπιπέδου xy, τὸ ὁλοκλήρωμα δίδει τὸν ὄγκον ἀρνητικόν. Ἂν δὲ μέρος μὲν τοῦ στερεοῦ κεῖται ὑπεράνω τοῦ ἐπιπέδου xy μέρος δὲ ὑποκάτω αὐτοῦ, τὸ ὁλοκλήρωμα (2) δίδει τὴν ὑπεροχὴν τοῦ ὄγκου τοῦ στερεοῦ, ὅπερ κεῖται ὑπεράνω, ὑπὲρ τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ ὅπερ κεῖται ὑποκάτω.

Σημείωσις. Ἐὰν εἶνε $\varphi(x, y) = 1$, τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα καταντᾷ

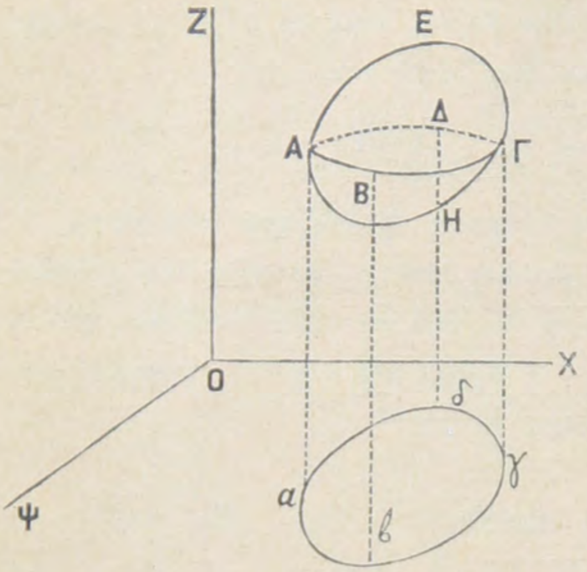
$$\int_T dx\, dy \quad \text{ἢ} \quad \int_T d(x, y)$$

καὶ παριστᾷ τὸν ὄγκον κυλίνδρου ἔχοντος βάσιν τὴν ἐπιφάνειαν T καὶ ὕψος τὴν μονάδα τοῦ μήκους· ἢ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου T, ὅπερ προφανές.

Παρατήρησις.

139. Ὁ ὄγκος παντὸς στερεοῦ ἐκφράζεται δι' ἑνὸς ἢ πλειόνων διπλῶν ὁλοκληρωμάτων. Νοήσωμεν τῷ ὄντι τυχὸν στερεὸν V περικλειόμενον ὑφ' οἱαςδήποτε ἐπιφανείας τεμνόμενον ὅμως ὑπὸ τῶν παραλλήλων τῷ ἄξονι OZ εἰς δύο τὸ πολὺ σημεῖα. Ἐὰν νοήσωμεν τὰ σημεῖα αὐτοῦ προβεβλημένα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν xy, αἱ προβολαὶ αὐτῶν θὰ καταλάβωσι τόπον τινὰ T περικλειόμενον ὑπὸ γραμμῆς αβγδ καὶ ὁ ὀρθὸς

κύλινδρος ὁ ἔχων βάσιν τὴν ἐπιφάνειαν Τ θὰ εἶνε περιγεγραμμένος περὶ τὸ στερεὸν V ἐγγίζων αὐτὸ κατὰ πάντα τὰ σημεῖα γραμμῆς τινος



ΑΒΓΔ, ἧς προβολὴ εἶνε ἡ αβγδ καὶ ἥτις χωρίζει τὴν περατοῦσαν τὸ στερεὸν V ἐπιφάνειαν εἰς δύο μέρη, τὰ ΑΒΓΔΕ καὶ ΑΒΓΔΗ· προφανὲς δὲ εἶνε ὅτι τὸ στερεὸν V εἶνε διαφορὰ τῶν δύο στερεῶν, ὧν βάσις μὲν κοινὴ εἶνε τὸ χωρίον Τ παράπλευρος δὲ ἐπιφάνεια ἡ τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου ΑαΒβΓγΔδ καὶ ἄνω ἐπιφάνεια τοῦ μὲν μεγαλητέρου ἡ ΑΒΓΔΕ τοῦ δὲ μικροτέρου ἡ ΑΒΓΔΗ· ἑπομένως εἶνε

$$V = \int_T f_1(x,y)\, d(x,y) - \int_T f_2(x,y)\, d(x,y) \qquad (4)$$

ἐὰν $z_1 = f_1(x, y)$ εἶνε ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἄνω μέρους ΑΒΓΔΕ τῆς ἐπιφανείας καὶ $z_2 = f_2(x, y)$ ἡ τοῦ ὑποκάτω μέρους ΑΒΓΔΗ.

Τὸν τύπον τοῦτον δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ ὡς ἑξῆς

$$V = \int_T \left[f_1(x, y) - f_2(x, y)\right] d(x, y) \qquad (4')$$

ἐὰν εἰς ἀμφότερα τὰ ὁλοκληρώματα νοήσωμεν τὸ χωρίον Τ εἰς τὰ αὐτὰ μέρη διῃρημένον.

Σημείωσις. Ἐὰν τὸ στερεὸν V τέμνηται ὑπὸ τῶν παραλλήλων τῷ ἄξονι ΟΖ εἰς σημεῖα περισσότερα τῶν δύο, ἀναλύεται τὸ στερεὸν τοῦτο εἰς ἄλλα μικρότερα, ὧν ἡ περατοῦσα ἐπιφάνεια νὰ μὴ τέμνηται ὑπὸ τῶν εἰρημένων εὐθειῶν εἰς περισσότερα τῶν δύο σημεῖα καὶ εὑρίσκεται ὁ ὄγκος ἑκάστου ἰδιαιτέρως.

Ἰδιότητες τῶν διπλῶν ὁλοκληρωμάτων.

1) *Τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα ἀναλύεται εἰς μέρη, ἐὰν ὁ τόπος Τ τῆς ὁλοκληρώσεως διαιρεθῇ εἰς μέρη.*

Ἐὰν τῷ ὄντι ὁ τόπος Τ τῆς ὁλοκληρώσεως διαιρεθῇ εἰς τὰ μέρη T_1, T_2 . . . T_κ λαμβάνωνται δὲ αἱ τὰ μέρη ταῦτα ἀπ' ἀλλήλων χωρίζουσαι γραμμαὶ ὡς γραμμαὶ διαιρέσεως μόνιμοι, οἱ ὅροι τοῦ ἀθροίσματος $\Sigma \alpha_\nu \varphi(\alpha_\nu)$ οἱ ἐκ τῶν μερῶν τοῦ T_1 προερχόμενοι ἔχουσι προδήλως ὅριον τὸ

$$\int_{T_1} \varphi(x, y)\ d(x, y)$$

οἱ δὲ ἐκ τῶν μερῶν τοῦ T_2 ἔχουσιν ὅριον τὸ

$$\int_{T_2} \varphi(x, y)\ d(x, y)$$

καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε εἶνε

$$\int_T \varphi(x, y)\, d(x, y) =$$

$$\int_{T_1} \varphi(x, y)\ d(x, y) + \int_{T_2} \varphi(x, y)\ d(x, y) + \cdots + \int_{T_\varkappa} \varphi(x, y)\ d(x, y).$$

Καὶ ἐκ τῆς γεωμετρικῆς παραστάσεως τοῦ διπλοῦ ὁλοκληρώματος ὡς ὄγκου ἀποδεικνύεται ἡ ἰδιότης αὕτη ἁπλούστατα.

2) *Οἱ σταθεροὶ παράγοντες ἐξάγονται ἐκτὸς τοῦ σημείου τῆς ὁλοκληρώσεως ἢ καὶ τοὐναντίον εἰσέρχονται ἐντὸς αὐτοῦ ἀκωλύτως.*

Ἡ ἰδιότης αὕτη συνάγεται ἀμέσως ἐκ τοῦ ἀθροίσματος, οὗτινος ὅριον εἶνε τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα.

3) *Ἐὰν ἡ συνάρτησις $\varphi(x, y)$ εἶνε ἄθροισμα δύο ἄλλων $\varphi_1(x, y)$ καὶ $\varphi_2(x, y)$ ἐπίσης συνεχῶν καὶ πεπερασμένων ἐν τῷ τόπῳ T τῆς ὁλοκληρώσεως* (ἢ ἀσυνεχῶν μὲν ἐπὶ γραμμῶν τινων ἀλλὰ πάντοτε πεπερασμένων), *θὰ εἶνε*

$$\int_T \varphi(x, y)\ d(x, y) = \int_T \varphi_1(x, y)\ d(x, y) + \int_T \varphi_2(x, y)\ d(x, y)$$

Καὶ ἡ ἰδιότης αὕτη συνάγεται ἀμέσως ἐκ τοῦ ἀθροίσματος, οὗτινος ὅριον εἶνε τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα.

4) *Τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα*

$$\int_T \varphi(x, y)\ d(x, y)$$

περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο γινομένων

$$M.(T) \quad \text{καὶ} \quad E(T)$$

ἔνθα M εἶνε ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς συναρτήσεως ἐν τῷ ὅλῳ χωρίῳ T καὶ E ἡ ἐλαχίστη· τὸ δὲ (T) παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου T.

Τοῦτο καὶ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος, οὗτινος ὅριον εἶνε τὸ ὁλοκλήρωμα, ἀποδεικνύεται ἁπλούστατα καὶ ἐκ τῆς γεωμετρικῆς παραστάσεως τοῦ ὁλοκληρώματος ὡς ὄγκου γίνεται ἀμέσως φανερόν.

5) *Ἐὰν εἶνε ἐν τῷ τόπῳ τῆς ὁλοκληρώσεως πάντοτε*

$$\varphi(x, y) > f(x, y)$$

θὰ εἶνε

$$\int_T \varphi(x, y) \; d(x, y) > \int_T f(x, y) \; d(x, y)$$

Ἡ ἰδιότης αὕτη συνάγεται ἀμέσως ἐκ τῶν δύο ἀθροισμάτων, ὧν τινων ὅρια εἶνε τὰ δύο ὁλοκληρώματα, γίνεται δὲ καταφανὴς καὶ διὰ τῆς παραστάσεως τῶν ὁλοκληρωμάτων ὡς ὄγκων.

Εὕρεσις τοῦ διπλοῦ ὁλοκληρώματος.

140. *Ἡ εὕρεσις παντὸς διπλοῦ ὁλοκληρώματος ἀνάγεται εἰς δύο ἀλλεπαλλήλους ὁλοκληρώσεις.*

(Χάριν ἁπλότητος θέλομεν ὑποθέσει ἐν τοῖς ἑξῆς ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ τόπου T τῆς ὁλοκληρώσεως, διατεμνομένη ὑπὸ τῶν παραλλήλων πρὸς τοὺς ἄξονας εὐθειῶν, τέμνεται ὑπ' αὐτῶν εἰς σημεῖα οὐχὶ περισσότερα τῶν δύο).

Ἐὰν ἐν τῷ τόπῳ T ἡ μεταβλητὴ x μεταβάλληται ἀπὸ α εἰς β (α ἡ ἐλαχίστη τιμὴ αὐτῆς καὶ β ἡ μεγίστη), ἡ δὲ μεταβλητὴ y ἀπὸ γ εἰς δ (γ ἡ ἐλαχίστη τιμὴ αὐτῆς καὶ δ ἡ μεγίστη), αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι

$$x = \alpha \qquad x = \beta$$

$$y = \gamma \qquad y = \delta$$

σχηματίζουσιν ὀρθογώνιον, τὸ ΕΗΘΙ, περιγεγραμμένον περὶ τὸν τόπον T· τοῦτο δὲ τὸ ὀρθογώνιον νοοῦμεν διαιρούμενον εἰς ἄλλα δι' εὐθειῶν παραλλήλων τοῖς ἄξοσι καὶ τοιαῦτα, ὥστε ἀμφότεραι αἱ διαστάσεις αὐτῶν νὰ τείνωσι πρὸς τὸ 0.

Πρὸς σχηματισμὸν τοῦ ἀθροίσματος

$$\Sigma\, \tau_\nu\ \varphi(\tau_\nu)$$

οὗτινος ὅριον εἶνε τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα

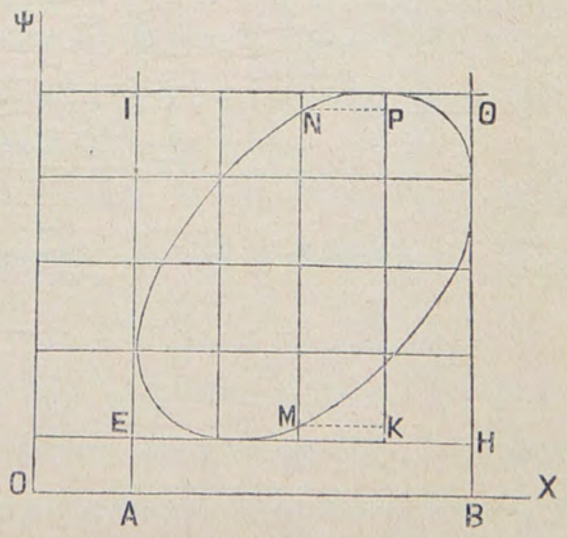
$$\int_T \varphi(x, y)\ d(x, y)$$

πρέπει νῦν νὰ λάβωμεν πάντα τὰ ἐντὸς τοῦ Τ κείμενα ὀρθογώνια καὶ ὅσα θέλωμεν ἐκ τῶν ἐντὸς ἐκτὸς (ἢ καὶ μέρη τούτων) καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου ἐπὶ τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως $\varphi(x,y)$ εἰς ἓν τῶν σημείων αὐτοῦ.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τοῦ ἀθροίσματος εἶνε πάντοτε πεπερασμένον, ἡ τάξις καθ' ἣν λαμβάνονται οἱ ὅροι ἐν τῇ προσθέσει εἶνε ἀδιάφορος ὡς πρὸς τὸ ἄθροισμα καὶ διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν τὸ ἄθροισμα εἰς ὁμάδας συνενοῦντες εἰς μίαν ὁμάδα πάντας τοὺς ὅρους τοὺς προερχομένους ἐκ τῶν μερῶν μιᾶς ἑκάστης ταινίας τοῦ χωρίου Τ περιεχομένης μεταξὺ δύο ἐφεξῆς παραλλήλων τῇ ΟΨ· ἐὰν τότε παραστήσωμεν διὰ A_1 τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων οἵτινες προέρχονται ἐκ τῶν μερῶν τῆς πρώτης ταινίας (τῆς ἐγγυτάτης τῷ ἄξονι ΟΨ), διὰ A_2 τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων, οἵτινες προέρχονται ἐκ τῶν μερῶν τῆς δευτέρας ταινίας, καὶ οὕτω καθεξῆς, θὰ εἶνε προφανῶς

$$\Sigma\, \tau_\nu\, \varphi(\tau_\nu) = A_1 + A_2 + A_3 + \ .\ .\ .\ + A_\sigma$$

Ἵνα σχηματίσωμεν τὰ μερικὰ ταῦτα ἀθροίσματα, ὁρίζομεν κατὰ πρῶτον τὰ ἐξ ἑκάστης ταινίας λαμβανόμενα μέρη· πρὸς τοῦτο ἄγομεν ἐν αὐτῇ δύο παραλλήλους τῇ ΟΧ ἀπὸ τῶν σημείων ἔνθα τέμνει ἡ πρώτη αὐτῆς παράλληλος τὴν περίμετρον τοῦ Τ, οὕτω σχηματίζεται ἐν ἑκάστῃ ταινίᾳ ὀρθογώνιον περιέχον πάντα τὰ ἐντὸς τοῦ Τ ὀρθογώνια τῆς ταινίας καὶ ἄλλα τινὰ ἐντὸς ἐκτὸς κείμενα ἢ μέρη τοιούτων, ταῦτα δὲ καὶ μόνα λαμβάνομεν. Τέλος πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τῶν λαμβανομένων μερῶν (ὅπερ εἶνε ὀρθογώνιον) ἐπὶ τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως



$\varphi(x, y)$ εἰς τὴν κορυφὴν αὐτοῦ, ἥτις ἔχει τὰς ἐλαχίστας συντεταγμένας (τὴν ἐγγυτάτην τῇ ἀρχῇ 0).

Ἐάν, προβαίνοντες κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον, παραστήσωμεν διὰ Υ καὶ Υ′ τὰς τεταγμένας τῶν σημείων, ἔνθα ἡ πρώτη παράλληλος τῆς ταινίας τέμνει τὴν περίμετρον τοῦ Τ, καὶ διὰ $\Upsilon, y_1, y_2 \dots y_{k-1}$ Υ' τὰς τεταγμένας τῶν πρώτων κορυφῶν τῶν λαμβανομένων ὀρθογωνίων κατὰ σειράν, οἱ ἐκ τῆς ταινίας ταύτης προερχόμενοι ὅροι εἶνε οἱ ἑξῆς

$$\left[\varphi(x, \Upsilon)(y_1-\Upsilon)+\varphi(x,y_1)(y_2-y_1)+\dots+\varphi(x, y_{k-1})(\Upsilon'-y_{k-1})\right].\lambda$$

ἔνθα λ δηλοῖ τὸ πλάτος τῆς ταινίας, ὅπερ εἶνε κοινὴ βάσις πάντων τῶν ληφθέντων ὀρθογωνίων, τὸ δὲ x δηλοῖ τὴν κοινὴν τετμημένην πάντων τῶν σημείων τῆς πρώτης παραλλήλου τῆς ταινίας.

Τὸ ἐν τῇ παρενθέσει ὑπάρχον ἄθροισμα τείνει πρὸς τὸ ἁπλοῦν ὁλοκλήρωμα

$$(5) \qquad \int_{\Upsilon}^{\Upsilon'} \varphi(x, y)\ dy$$

ἐν τῇ εὑρέσει τοῦ ὁποίου ἡ x θεωρεῖται σταθερὰ ἡ δὲ y μεταβάλλεται αὐξανομένη ἀπὸ Υ μέχρι Υ′· ἐπειδὴ δὲ τὰ ὅρια ταῦτα τῆς y ἐξαρτῶνται (ἐν γένει) ἐκ τοῦ x· διότι, τοῦ x ὁρισθέντος, ὁρίζεται καὶ ἡ ταινία καὶ τὰ ὅρια Υ, Υ′, μεταβαλλομένου δὲ τοῦ x ἀλλάσσει καὶ ἡ ταινία καὶ τὰ ἀντίστοιχα αὐτῇ ὅρια, διὰ τοῦτο τὸ ὁλοκλήρωμα (5) εἶνε συνάρτησίς τις τοῦ x καὶ ἂν θέσωμεν συντομίας χάριν

$$\int_{\Upsilon}^{\Upsilon'} \varphi(x, y)\, dy = \sigma(x) \qquad (6)$$

τὸ ἐν τῇ παρενθέσει ὑπάρχον ἄθροισμα δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς ἑξῆς

$$\sigma(x)+\varepsilon$$

(ἔνθα ὅρ. $\varepsilon=0$, ὅταν ἑκάστη τῶν διαφορῶν $y_1-\Upsilon$, $y_2-y_1 \dots$ τείνῃ πρὸς τὸ 0, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ x ἐν τῷ διαστήματι $\alpha \dots \beta$)· ἑπομένως οἱ ἐκ τῶν μερῶν τῆς τυχούσης ταινίας προερχόμενοι ὅροι ἔχουσιν ἄθροισμα τὸ ἑξῆς

$$\big(\sigma(x)+\varepsilon\big).\lambda$$

ὁ τύπος δὲ οὗτος δίδει τὰ εἰς πάσας τὰς ταινίας ἀντιστοιχοῦντα μερικὰ ἀθροίσματα $A_1, A_2 \ldots A_\sigma$, ἂν ἐν αὐτῷ ὑποτεθῇ

διὰ μὲν τὴν πρώτην ταινίαν $x=\alpha$ καὶ $\lambda=x_1-\alpha$

διὰ δὲ τὴν δευτέραν $x=x_1$ καὶ $\lambda=x_2-x_1$

καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε εἶνε

$$\Sigma\tau_\nu\varphi(\tau_\nu)=(x_1-\alpha)\sigma(\alpha)+(x_2-x_1)\sigma(x_1)+\ldots+(\beta-x_{\sigma-1})\sigma(x_{\sigma-1})+$$
$$+(x_1-\alpha)\varepsilon_0+(x_2-x_1)\varepsilon_1+\ldots+(\beta-x_{\sigma-1})\varepsilon_{\sigma-1}$$

ἔνθα $\varepsilon_0\ \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{\sigma-1}$ δηλοῦσι τὰς τιμὰς τοῦ ε διὰ $x=\alpha, x_1 \ldots x_{\sigma-1}$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα $(x_1-\alpha)\varepsilon_0+\ldots(\beta-x_{\sigma-1})\varepsilon_{\sigma-1}$ τείνει πρὸς τὸ 0, ὡς ἀπολύτως μικρότερον τοῦ $(\beta-\alpha)\varepsilon_k$ (ἔνθα ε_k δηλοῖ τὸ μέγιστον (ἀπολύτως) ἐκ τῶν $\varepsilon_0\ \varepsilon_1 \ldots$), συνάγεται

$$\text{ορ}\,\Sigma\tau_\nu\varphi(\tau_\nu)=\int\limits_T\varphi(x,y)\,d(x,y)=\int_\alpha^\beta\sigma(x)\,dx$$

ἤτοι
$$\int\limits_T\varphi(x,y)\,d(x,y)=\int_\alpha^\beta\left(\int_\Upsilon^{\Upsilon'}\varphi(x,y)\,dy\right)dx \qquad (6)$$

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον τῆς εὑρέσεως αὐτοῦ παρίσταται τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα (6) ὡς ἐξαγόμενον δύο ἀλλεπαλλήλων ὁλοκληρώσεων. Καὶ ἐν μὲν τῇ πρώτῃ ὁλοκληροῦται ἡ παράστασις $\varphi(x,y)\ dx.dy$ πρὸς y, τῶν x καὶ dx θεωρουμένων σταθερῶν (καὶ ἔχοντος τοῦ x τὴν τυχοῦσαν τιμὴν τοῦ διαστήματος α...β), καὶ ὅρια τοῦ y εἶνε ἡ ἐλαχίστη τιμὴ αὐτοῦ καὶ ἡ μεγίστη ἐν τῷ χωρίῳ Τ, ὅταν ἡ x μένῃ ἀμετάβλητος ἔχουσα τὴν τυχοῦσαν τιμὴν τοῦ διαστήματος α...β. τόπος δηλαδὴ τῆς ὁλοκληρώσεως πρὸς y εἶνε τὸ διάστημα, ὅπερ διανύει ἡ y ἐν τῷ χωρίῳ Τ, ὅταν ἡ x διαμένῃ ἀμετάβλητος ἔχουσα τὴν τυχοῦσαν τιμὴν τοῦ διαστήματος α ... β. Ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ ὁλοκληροῦται πρὸς x τὸ ἐξαγόμενον τῆς πρώτης ὁλοκληρώσεως καὶ ὅρια αὐτῆς εἶνε ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τοῦ x ἐν τῷ χωρίῳ καὶ ἡ μεγίστη.

Ἀλλαγὴ τῆς τάξεως τῶν δύο ὁλοκληρώσεων.

141. *Ἡ τάξις, καθ' ἣν ἐκτελοῦνται αἱ δύο ἀλλεπάλληλοι ὁλοκληρώσεις, δι' ὧν εὑρίσκεται τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα, εἶνε ἀδιάφορος πρὸς τὸ ἐξαγόμενον* καὶ ἑπομένως δυνάμεθα ν' ἀλλάξωμεν αὐτήν, ἀρκεῖ νὰ ἀλλάξωμεν καταλλήλως καὶ τὰ ὅρια τῶν ὁλοκληρώσεων.

Τῷ ὄντι κατὰ τὸν προεκτεθέντα τρόπον τῆς εὑρέσεως τοῦ διπλοῦ ὁλοκληρώματος γίνεται πρώτη ἡ ὁλοκλήρωσις πρὸς y διότι ἐσχηματίσαμεν κατὰ πρῶτον τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τῶν ὅρων, οἵτινες προέρχονται ἐξ ἑκάστης ταινίας παραλλήλου τῇ ΟΥ· προφανὲς ὅμως εἶνε, ὅτι δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν κατὰ πρῶτον τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων, οἵτινες προέρχονται ἐκ τῶν μερῶν ἑκάστης ταινίας παραλλήλου τῇ ΟΧ καὶ ἔπειτα νὰ ἑνώσωμεν τὰ μερικὰ ταῦτα ἀθροίσματα πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὁλικοῦ ἀθροίσματος· τότε ἡ μὲν πρώτη ὁλοκλήρωσις γίνεται πρὸς x, τῶν y καὶ dy θεωρουμένων ὡς σταθερῶν (καὶ ἔχοντος τοῦ y τὴν τυχοῦσαν τιμὴν ἐν τῷ διαστήματι $\gamma\ .\ .\ .\ \delta$) καὶ ὅρια αὐτῆς εἶνε ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τοῦ x καὶ ἡ μεγίστη τιμὴ αὐτοῦ ἐν τῷ χωρίῳ Τ, *ὅταν ἡ y μένῃ ἀμετάβλητος καὶ ἔχῃ τὴν τυχοῦσαν τιμὴν τοῦ διαστήματος* $\gamma\ldots\delta$, ἤτοι αἱ ἄκραι τιμαὶ τοῦ διαστήματος, ἐν ᾧ μεταβάλλεται τότε ἡ x ἐν τῷ χωρίῳ· ἡ δὲ δευτέρα ὁλοκλήρωσις γίνεται πρὸς y καὶ ἔχει ὅρια τὴν ἐλαχίστην καὶ τὴν μεγίστην τιμὴν τοῦ y ἐν τῷ χωρίῳ, ἤτοι γ καὶ δ· ἑπομένως εἶνε

$$(7)\qquad \int_{T} \varphi(x, y)\ d(x, y) =$$

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left(\int_{Y}^{Y'} \varphi(x,y)dy\right)dx = \int_{\gamma}^{\delta}\left(\int_{X}^{X'} \varphi(x,y)\ dx\right)dy$$

Ἐὰν ὁ τόπος Τ τῆς ὁλοκληρώσεως εἶνε ὀρθογώνιον ἔχον τὰς πλευρὰς αὐτοῦ παραλλήλους τοῖς ἄξοσιν, τὰ ὅρια ἀμφοτέρων τῶν ὁλοκληρώσεων εἶνε σταθερὰ καὶ κατὰ τὴν ἀνταλλαγὴν τῶν ὁλοκληρώσεων διατηρεῖ ἑκατέρα τὰ ἑαυτῆς ὅρια· ἤτοι εἶνε

$$(8)\qquad \int_{\alpha}^{\beta}\left(\int_{\gamma}^{\delta} \varphi(x, y)\ dy\right)dx = \int_{\gamma}^{\delta}\left(\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x, y)\ dx\right)dy$$

Ἐὰν δὲ καὶ ὁ τόπος τῆς ὁλοκληρώσεως εἶνε ὀρθογώνιον παραλλήλους ἔχον τὰς πλευρὰς πρὸς τοὺς ἄξονας καὶ ἡ συνάρτησις $\varphi(x, y)$ εἶνε τῆς μορφῆς

$$\varphi(x, y) = \sigma(x)\,f(y)$$

τὸ ὁλοκλήρωμα καταντᾷ

$$\left(\int_{\alpha}^{\beta} \sigma(x)\, dx\right)\left(\int_{\gamma}^{\delta} \mathrm{f}(y)\, dy\right)$$

ἤτοι γινόμενον δύο ἁπλῶν ὁλοκληρωμάτων.

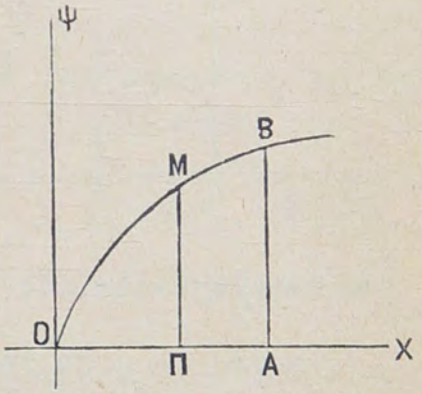
Σημείωσις. Ὑπεθέσαμεν χάριν ἁπλότητος, ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ χωρίου T, ἐὰν διατέμνηται ὑπὸ τῶν παραλλήλων τοῖς ἄξοσιν εὐθειῶν, τέμνεται εἰς σημεῖα οὐχὶ περισσότερα τῶν δύο· ἐὰν τοὐναντίον συμβαίνῃ, διαιροῦμεν τὸν τόπον T εἰς ἀριθμόν τινα μερῶν πεπερασμένον, ὧν ἕκαστον νὰ πληροῖ τὸν ὅρον τοῦτον, καὶ εὑρίσκομεν τὸ ὁλοκλήρωμα ἐν ἑκάστῳ τῶν μερῶν τούτων, ἔπειτα δὲ προσθέτομεν τὰ ἐξαγόμενα

Παραδείγματα.

1) *Εὑρεῖν τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα*

$$\int_{OAB} x\, d(x, y)$$

ἐπὶ τοῦ παραβολικοῦ χωρίου OAB.



Ἐὰν νοήσωμεν τὸν τόπον OAB διῃρημένον εἰς ὀρθογώνια (διὰ παραλλήλων τοῖς ἄξοσιν εὐθειῶν) καὶ ἐκτελέσωμεν πρῶτον τὴν ὁλοκλήρωσιν πρὸς y, ὅρια τοῦ y θὰ εἶνε 0 καὶ $\sqrt{2\mu x}$· διότι, τοῦ x διατηροῦντος τὴν τυχοῦσαν τιμὴν ΟΠ ἐπὶ τοῦ διαστήματος AB, ἡ y ἐν τῷ τόπῳ OAB μεταβάλλεται ἀπὸ 0 μέχρι $\Pi M = \sqrt{2\mu x}$· ὅρια δὲ τοῦ x ἐν τῇ δευτέρᾳ ὁλοκληρώσει εἶνε 0 καὶ $OA(=x_1)$· ὅθεν

$$\int_{(OAB)} x\, d(x, y) = \int_0^{x_1} dx \int_0^{\sqrt{2\mu x}} x dy = \int_0^{x_1} x dx \int_0^{\sqrt{2\mu x}} dy$$

ἡ πρώτη ὁλοκλήρωσις δίδει $x\sqrt{2\mu x}.dx$, ἑπομένως ἡ δευτέρα γίνεται

$$\sqrt{2\mu}\int_0^{x_1} x^{3/2} dx \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{2}{5}\sqrt{2\mu}.\ x_1^{\frac{5}{2}}$$

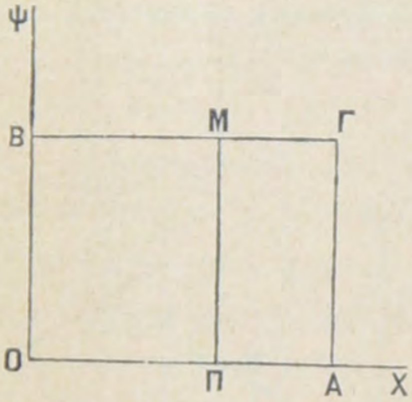
2) *Εὑρεῖν τὸ ὁλοκλήρωμα*

$$\int (x^2 + y^2)\, d(x, y)$$

ἐπὶ τοῦ ὀρθογωνίου ΟΑΓΒ.

Ἐὰν νοήσωμεν τὸν τόπον τῆς ὁλοκληρώσεως διῃρημένον εἰς ὀρθογώνια διὰ τῶν παραλλήλων πρὸς τοὺς ἄξονας, καὶ ἐκτελέσωμεν πρώτην τὴν ὁλοκλήρωσιν πρὸς y, ὅρια τοῦ y θὰ εἶνε 0 καὶ ΟΒ($=\beta$) οἱουδήποτε ὄντος τοῦ x, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ ὁλοκληρώσει ἡ x θὰ ἔχῃ ὅρια 0 καὶ ΟΑ($=\alpha$)· ὥστε εἶνε

$$\int_{(\mathrm{OA\Gamma B})} (x^2+y^2)\, d(x, y)=\int_0^\alpha dx\int_0^\beta (x^2+y^2)\, dy$$



Ἡ πρώτη ὁλοκλήρωσις δίδει

$$\left(x^2\beta+\frac{\beta^3}{3}\right)dx$$

ἡ δὲ δευτέρα

$$\frac{\alpha^3\beta}{3}+\frac{\alpha\beta^3}{3} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{\alpha\beta}{3}(\alpha^2+\beta^2).$$

Μετασχηματισμὸς τῶν διπλῶν ὁλοκληρωμάτων.

Ἔστωσαν δύο μεταβληταὶ u καὶ v συνδεόμεναι πρὸς τὰς x, y διὰ δύο ἐξισώσεων

$$(9)\quad \begin{matrix} u=\sigma(x, y) \\ v=\mathrm{f}(x, y) \end{matrix} \qquad \text{ἢ} \qquad \begin{matrix} x=\Sigma(u, v) \\ y=\mathrm{F}(u, v) \end{matrix} \quad (9')$$

τοιούτων, ὥστε πρὸς ἕκαστον ζεῦγος τιμῶν x, y ἐν τῷ τόπῳ Τ τοῦ ἐπιπέδου x, y νὰ ἀντιστοιχῇ ἓν καὶ μόνον ἓν σύστημα τιμῶν u, v ἔν τινι πεπερασμένῳ τόπῳ Π τοῦ ἐπιπέδου UV· καὶ ἀντιστρόφως πρὸς ἕκαστον σύστημα τιμῶν u, v τοῦ τόπου Π νὰ ἀντιστοιχῇ ἓν καὶ μόνον σύστημα τιμῶν x,y ἐν τῷ τόπῳ Τ· τότε οἱ δύο τόποι Τ καὶ Π λέγεται ὅτι *συσχετίζονται ὁμαλῶς* διὰ τῶν ἐξισώσεων (9) ἢ διὰ τῶν (9') καὶ αἱ μὲν x,y εἶνε αἱ ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι σημείου τινος Μ τοῦ Τ αἱ δὲ πρὸς αὐτὰς ἀντίστοιχοι τιμαὶ u, v (9) λέγονται *καμπυλόγραμμοι συντεταγμέναι* τοῦ αὐτοῦ σημείου Μ.

Ἐὰν ἐν τῷ διπλῷ ὁλοκληρώματι

$$\int_{\mathrm{T}} \varphi(x, y)\, dx\, dy \qquad (10)$$

θέσωμεν τὰς τιμὰς τῶν x καὶ y καὶ τῶν dx, dy ἐκ τῶν ἐξισώσεων (9') εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον τῆς μορφῆς

$$\int_{T} \varphi(x,y)\, dx\, dy = \int_{\Pi} (A\, du^2 + 2B\, du\, dv + \Gamma\, dv^2)$$

ἀλλὰ τὸ δεύτερον μέλος δὲν ἔχει τὴν ἰδιότητα νὰ ἀνάγηται εἰς δύο ἀλλεπαλλήλους ὁλοκληρώσεις, διότι τὸ ὁλοκλήρωμα (10) ὑποθέτει τὸν τόπον Τ διῃρημένον εἰς ὀρθογώνια· ὅταν δὲ προσθέτωμεν τὰ μεταξὺ δύο παραλλήλων πρὸς ἕνα τῶν ἀξόνων κείμενα ὀρθογώνια, ἀμφότεραι αἱ μεταβληταὶ u, v μεταβάλλονται· ἑπομένως ἡ μερικὴ αὕτη πρόσθεσις δὲν ἀνάγεται πλέον εἰς ὁλοκλήρωσιν πρὸς μίαν μεταβλητήν.

142. Ἵνα εὕρωμεν τὸν κατάλληλον μετασχηματισμόν, παρατηροῦμεν, ὅτι ἠλλάξαμεν μόνον τὰς μεταβλητὰς διετηρήσαμεν ὅμως τὴν διαίρεσιν τοῦ τόπου Τ εἰς ὀρθογώνια καὶ ἐξεφράσαμεν ἁπλῶς ἕκαστον ὅρον τοῦ ἀθροίσματος $\Sigma\, \tau_\nu\, \varphi(\tau_\nu)$ διὰ τῶν νέων μεταβλητῶν· ἐμάθομεν ὅμως ὅτι δυνάμεθα νὰ διαιρῶμεν τὸν τόπον τῆς ὁλοκληρώσεως εἰς οἱαδήποτε μέρη, ἀρκεῖ νὰ γίνωνται ἀπειροστὰ κατ' ἀμφοτέρας τὰς διαστάσεις· πρέπει λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὴν κατάλληλον διαίρεσιν διὰ τὰς νέας μεταβλητὰς u, v.

Πρόδηλον εἶνε, ὅτι, ἂν τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα μέλλῃ νὰ διατηρήσῃ τὴν ἰδιότητα αὐτοῦ (νὰ ἀνάγηται εἰς δύο ἀλλεπαλλήλους ὁλοκληρώσεις), πρέπει νὰ προσθέτωμεν ὅρους τοῦ ἀθροίσματος $\Sigma\, \alpha_\nu\, \varphi(\alpha_\nu)$ προερχομένους ἐκ μερῶν, ἐν οἷς μία τῶν μεταβλητῶν μένει σταθερά, ἔστω ἡ u.

Τὰ μέρη ταῦτα θὰ κεῖνται τότε μεταξὺ δύο γραμμῶν, ἐν ἑκάστῃ τῶν ὁποίων θὰ διαμένῃ σταθερὰ ἡ u· αἱ γραμμαὶ ἄρα αὗται θὰ ἔχωσι τὰς ἐξισώσεις

$$u = \sigma(x, y) \quad \text{καὶ} \quad u + \Delta u = \sigma(x, y).$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν τόπον Τ πρῶτον μὲν διὰ μιᾶς σειρᾶς καμπύλων ἐχουσῶν τὰς ἐξισώσεις

$$u = \sigma(x,y) = k, \quad u = \sigma(x,y) = u_1, \quad u = \sigma(x,y) = u_2 \ldots u = \sigma(x,y) = l$$

αἵτινες κατὰ τὴν γενομένην ὑπόθεσιν δὲν τέμνουσιν ἀλλήλας, αἱ δὲ ἄκραι $u = k$ καὶ $u = l$ ἐγγίζουσι μόνον τὸν τόπον Τ εἰς ἓν ἢ περισσότερα σημεῖα ἀλλὰ δὲν διατέμνουσιν αὐτὸν (l ὑποτίθεται ἡ μεγίστη τιμὴ τοῦ u, ἤτοι τῆς συναρτήσεως $\sigma(x, y)$ ἐν τῷ τόπῳ Τ καὶ k ἡ ἐλαχίστη)· ἔπειτα δὲ νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸν καὶ δι' ἄλλης σειρᾶς καμπύλων, ὧν αἱ ἐξισώσεις εἶνε

$$v = \mathrm{f}(x, y) = \sigma, \quad v = \mathrm{f}(x, y) = v_1 \; . \; . \; . \; v = \mathrm{f}(x, y) = \rho$$

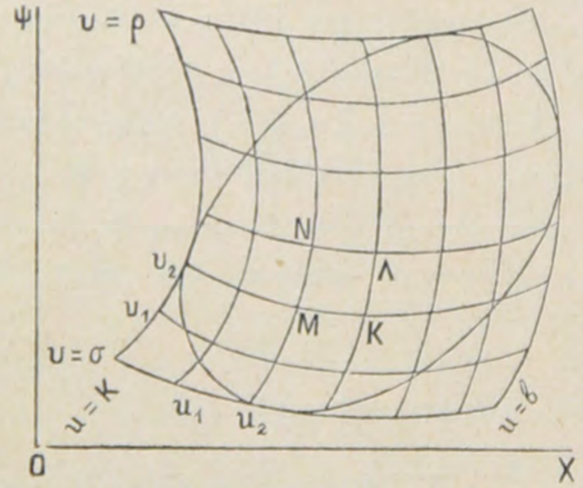
αἵτινες ὁμοίως δὲν τέμνουσιν ἀλλήλας, αἱ δὲ δύο ἄκραι, $v = \sigma$ καὶ $v = \rho$ ἐγγίζουσι μόνον ἀλλὰ δὲν διατέμνουσι τὸν τόπον Τ (σ δηλοῖ τὴν ἐλαχίστην τιμὴν τῆς v, ἤτοι τῆς συναρτήσεως $\mathrm{f}(x, y)$ ἐν τῷ χωρίῳ Τ τῆς ὁλοκληρώσεως καὶ ρ τὴν μεγίστην).

Αἱ δύο αὗται σειραὶ τῶν καμπύλων u, v διαιροῦσι τὸ χωρίον Τ εἰς τετράπλευρα καμπυλόγραμμα καὶ ἂν ἐν ἑκάστῳ ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ τῶν περικλειόντων αὐτὸ τόξων, θὰ εὑρεθῇ τὸ χωρίον διῃρημένον εἰς τετράπλευρα εὐθύγραμμα, ὧν ἕκαστον τείνει πρὸς τὸ 0 κατ' ἀμφοτέρας τὰς διαστάσεις αὐτοῦ, ὅταν αἱ διαφοραὶ

$$u_1 - k, \quad u_2 - u_1 \; . \; . \; . \; l - u_{\nu-1}$$

$$v_1 - \sigma, \quad v_2 - v_1 \; . \; . \; . \; \rho - v_{\pi-1}$$

τείνωσι πρὸς τὸ 0· ταῦτα δὲ τὰ εὐθύγραμμα τετράπλευρα, εἰς ἃ ὁ τόπος Τ διαιρεῖται, λαμβάνομεν εἰς τὸν σχηματισμὸν τοῦ ἀθροίσματος $\Sigma \alpha_\nu \, \varphi(\alpha_\nu)$· ἑπομένως πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν αὐτῶν.



Ἔστω τὸ τυχὸν ἐκ τῶν τετραπλεύρων τούτων, τὸ ΜΝΛΚ· ἔστω δὲ Μ ἡ κορυφὴ αὐτοῦ ἡ τὸ ἐλάχιστον $u (= u_\lambda)$ καὶ τὸ ἐλάχιστον $v (= v_\mu)$ ἔχουσα· αἱ καμπυλόγραμμοι συντεταγμέναι τῶν 4 κορυφῶν αὐτοῦ εἶνε αἱ ἑξῆς

$$\mathrm{M}(u_\lambda, v_\mu), \quad \mathrm{N}(u_\lambda, v_{\mu+1}), \quad \mathrm{K}(u_{\lambda+1}, v_\mu), \quad \Lambda(u_{\lambda+1}, v_{\mu+1})$$

ἤ, ἂν παραστήσωμεν γενικῶς τὰς καμπυλογράμμους συντεταγμένας u_λ, v_μ διὰ u, v καὶ τὰς διαφορὰς $u_{\lambda+1} - u_\lambda$ καὶ $v_{\mu+1} - v_\mu$ διὰ Δu καὶ Δv,

$$\mathrm{M}(u, v), \quad \mathrm{N}(u, v + \Delta v), \quad \mathrm{K}(u + \Delta u, v), \quad \Lambda(u + \Delta u, v + \Delta v)$$

αἱ δὲ εὐθύγραμμοι καὶ ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι τῶν αὐτῶν σημείων εὑρίσκονται ἐκ τῶν ἐξισώσεων (9′) καὶ εἶνε

τοῦ $M(x, y)$

τοῦ $N\left(x+\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v+\ldots,\ y+\frac{\partial y}{\partial v}\Delta v+\ldots\right)$

τοῦ $K\left(x+\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u+\ldots,\ y+\frac{\partial y}{\partial u}\Delta u+\ldots\right)$

τοῦ $\Lambda\left(x+\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v+\ldots,\ y+\frac{\partial y}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial y}{\partial v}\Delta v+\ldots\right)$

ἔνθα οἱ παραλειφθέντες καὶ διὰ στιγμῶν ὑποδηλούμενοι ὅροι ἔχουσιν ἀνωτέρας δυνάμεις τῶν αὐξήσεων $\Delta u, \Delta v$. Ἔχοντες τὰς εὐθυγράμμους συντεταγμένας τῶν κορυφῶν τοῦ τετραπλεύρου ΜΝΛΚ, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑκατέρου τῶν τριγώνων ΜΚΛ καὶ ΜΛΝ, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται· εὑρίσκομεν δὲ

$$(\mathrm{MK\Lambda N})=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\Delta u\,\Delta v+\alpha.\Delta u\,\Delta v$$

τοῦ α ὄντος ἀπειροστοῦ τινος.

Ἐπειδὴ δὲ πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ ὅριον πρὸς ὃ τείνει τὸ ἄθροισμα ἀπειροστῶν ποσοτήτων, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὡς ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου ΜΚΛΝ τὸ ἰσοδύναμον αὐτῷ ἀπειροστὸν

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\Delta u.\Delta v \quad \text{ἢ} \quad \Delta(u, v)\Delta u\,\Delta v$$

ἐὰν διὰ τοῦ $\Delta(u, v)$ παρασταθῇ ἡ ὁρίζουσα.

Ἐὰν δὲ ἐν τῷ σχηματισμῷ τοῦ ἀθροίσματος $\Sigma\alpha_\nu\,\varphi(\alpha_\nu)$ πολλαπλασιάζωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τετραπλεύρου (ἢ τὸ ἰσοδύναμον αὐτῷ) ἐπὶ τὴν τιμήν, ἣν ἔχει ἡ συνάρτησις $\varphi(x, y)$, ἢ ἡ ἴση αὐτῇ $\Phi(u,v)$, δυνάμει τῶν ἐξισώσεων (9′), εἰς τὴν κορυφὴν αὐτοῦ τὴν ἔχουσαν τὰ ἐλάχιστα u καὶ v, ὁ τυχὼν ὅρος τοῦ ἀθροίσματος θὰ γίνῃ

$$\Phi(u, v)\ \Delta(u, v)\ \Delta u\ \Delta v$$

τῶν Δu, Δv δηλούντων τὰς αὐξήσεις τῶν u καὶ v, ὅταν ἀπὸ τῆς κορυφῆς u, v τοῦ τετραπλεύρου μεταβῶμεν εἰς τὰς λοιπάς.

Ἐπειδὴ δὲ καὶ ἐνταῦθα τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τοῦ ἀθροίσματος εἶνε πεπερασμένον, δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ἐξ αὐτῶν ὁμάδας περιλαμβάνοντες εἰς μίαν ὁμάδα τοὺς ὅρους, οὓς παρέχουσι τὰ μεταξὺ δύο ἐφεξῆς καμπύλων τῆς αὐτῆς σειρᾶς βαίνοντα τετράπλευρα (ὡς καὶ ὅταν ὁ τόπος Τ ἦτο διῃρημένος εἰς ὀρθογώνια). Ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ σχηματίσωμεν τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τῶν ὅρων, οἵτινες προέρχονται ἐκ τῶν μεταξὺ δύο ἐφεξῆς καμπύλων u καὶ $u+\Delta u$ βαινόντων τετραπλεύρων. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ V καὶ V' τὴν ἐλαχίστην τιμὴν τοῦ v καὶ τὴν μεγίστην τιμὴν αὐτοῦ, ὅταν ἡ u διατηρῇ τὴν τιμὴν ἣν ἔχει ἐπὶ τῆς καμπύλης u, καὶ διὰ $V, v_1, v_2 \ldots v_{i-1}\, V'$ τὰς τιμὰς τῆς v ἐν ταῖς κορυφαῖς τῶν εἰρημένων τετραπλεύρων κατὰ σειράν, οἱ ἐκ τῶν τετραπλεύρων τούτων προερχόμενοι ὅροι εἶνε

$$\Big\{(v_1-V)F(u,V)+(v_2-v_1)F(u,v_1)+\ \ldots\ (V'-v_{i-1})F(u,v_{i-1})\Big\}\Delta u$$

$$\text{ἔνθα}\qquad F(u,v)=\Phi(u,v)\,\Delta(u,v).$$

καὶ τὸ ἐν τῇ παρενθέσει ὑπάρχον ἄθροισμα τείνει πρὸς τὸ ἁπλοῦν ὁλοκλήρωμα

$$\int_V^{V'} \Phi(u,v)\ \Delta(u,v)\ dv$$

ἐν τῇ εὑρέσει τοῦ ὁποίου ἡ u θεωρεῖται σταθερά, ἐπίσης καὶ τὸ Δu· εἶνε δὲ τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο ἐν γένει συνάρτησις τοῦ u· διότι τὰ ὅρια αὐτοῦ V καὶ V' ἐξαρτῶνται ἐκ τοῦ u καὶ μεταβάλλονται, ὅταν μεταβάλληται ἡ u (ἤτοι ἀπὸ μιᾶς λωρίδος τοῦ χωρίου εἰς ἄλλην)· ἐὰν ἄρα παραστήσωμεν τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο διὰ τοῦ $\sigma(u)$, τὸ μερικὸν ἄθροισμα, περὶ οὗ ὁ λόγος, θὰ εἶνε

$$\sigma(u)\Delta u+\beta.\Delta u \quad \text{τοῦ } \beta \text{ ὄντος ἀπειροστοῦ}$$

ἀλλὰ καὶ ἐνταῦθα δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὡς μερικὸν ἄθροισμα μόνον τὸ $\sigma(u)\,\Delta u$· διότι τοῦτο εἶνε ἀπειροστὸν ἰσοδύναμον τῷ μερικῷ ἀθροίσματι.

Ἡ παράστασις $\sigma(u)\ \Delta u$ δίδει τὰ ἐκ τῶν διαφόρων λωρίδων τοῦ Τ προερχόμενα μερικὰ ἀθροίσματα (τὰ ἰσοδύναμα αὐτοῖς), ἐὰν ἐν αὐτῇ θέσωμεν

$u=k$ καὶ $\Delta u=u_1-k$ διὰ τὴν πρώτην λωρίδα

$u=u_1$ καὶ $\Delta u=u_2-u_1$ διὰ τὴν δευτέραν,

καὶ οὕτω καθεξῆς

$u=u_{\nu-1}$ καὶ $\Delta u=l-u_{\nu-1}$ διὰ τὴν τελευταίαν·

ἑπομένως τὸ ὁλικὸν ἄθροισμα εἶνε

$$(u_1-k)\,\sigma(k)+(u_2-u_1)\,\sigma(u_1)+\ .\ .\ .\ +(l-u_{\nu-1})\,\sigma(u_{\nu-1})$$

καὶ ἔχει ὅριον τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_{\mathrm{k}}^{l}\sigma(u)du,\quad \text{ἤτοι τὸ}\int_{\mathrm{k}}^{l}\left\{\int_{\mathrm{V}}^{\mathrm{V}'}\Phi(u,v)\,\Delta(u,v)\,dv\right\}du$$

Ἐὰν ἐσχηματίζομεν τὰ μερικὰ ἀθροίσματα ἐκ τετραπλεύρων, ἅτινα βαίνουσι μεταξὺ δύο ἐφεξῆς καμπύλων v καὶ $v+\Delta v$, θὰ εὑρίσκομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὅτι τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα εἶνε

$$\int_{\sigma}^{\rho}\left\{\int_{\mathrm{U}}^{\mathrm{U}'}\Phi(u,v)\ \Delta(u,v)\ du\right\}dv$$

ἔνθα U καὶ U′ εἶνε ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τοῦ u καὶ ἡ μεγίστη τιμὴ αὐτοῦ ἐν τῷ χωρίῳ T, ὅταν ἡ v διατηρῇ ἀμετάβλητον τὴν ἑαυτῆς τιμὴν ἐν τῷ διαστήματι σ...ρ.

Κατὰ ταῦτα εἶνε

$$(11)\qquad \int_{\mathrm{T}}\varphi(x,y)\ d(x,y)=$$

$$=\int_{\mathrm{k}}^{l}\Big(\int_{\mathrm{V}}^{\mathrm{V}'}\Phi(u,v)\ \Delta(u,v)dv\Big)du=\int_{\sigma}^{\rho}\Big(\int_{\mathrm{U}}^{\mathrm{U}'}\Phi(u,v)\ \Delta(u,v)\ du\Big)dv=$$

$$=\int_{\Pi}\Phi(u,v)\ \Delta(u,v)\ d(u,v)$$

Ὥστε καὶ πάλιν ἡ τάξις τῶν ὁλοκληρώσεων εἶνε ἀδιάφορος πρὸς τὸ ἐξαγόμενον.

Καὶ τὰ ὅρια τῶν ὁλοκληρώσεων εὑρίσκονται κατὰ τὸν αὐτὸν πάντοτε τρόπον· τουτέστιν ἐν μὲν τῇ πρώτῃ ὁλοκληρώσει ὅρια εἶνε ἡ ἐν τῷ χωρίῳ Τ ἐλαχίστη καὶ ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς μεταβλητῆς, πρὸς ἣν γίνεται ἡ ὁλοκλήρωσις, ὅταν ἡ ἄλλη μένῃ σταθερὰ ἔχουσα τὴν τυχοῦσαν αὐτῆς τιμὴν (ἐξ ἐκείνων ἃς ἔχει ἐν τῷ Τ)· ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ ὅρια εἶνε ἡ ἐλαχίστη καὶ ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς μεταβλητῆς ἐν τῷ χωρίῳ Τ.

Τοῦτο γίνεται καταφανὲς καὶ ὅταν τις πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος $\Sigma\Phi(u, v)\,\Delta(u, v)\,\Delta u\,\Delta v$ παραστήσῃ τὰς μεταβλητὰς u, v ὡς ὀρθογωνίους συντεταγμένας ἔν τινι ἐπιπέδῳ UV.

Σημείωσις. Ἡ ὁρίζουσα $\Delta(u, v)$ πρέπει νὰ λαμβάνηται θετικῶς πάντοτε· διότι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τυχόντος τετραπλεύρου, ἤτοι τὸ $\Delta(u, v)\,\Delta u\,\Delta v$ λαμβάνεται θετικῶς, τὰ δὲ $\Delta u\ \Delta v$ εἶνε θετικὰ ἐπίσης. Σημειωτέον δέ, ὅτι, ἂν οἱ δύο τόποι Τ καὶ Π συσχετίζωνται ὁμαλῶς διὰ τῶν ἐξισώσεων (9), ἡ ὁρίζουσα

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

μένει ἐν τῷ τόπῳ Τ πεπερασμένη καὶ τοῦ 0 διάφορος, ἑπομένως διατηρεῖ τὸ ἑαυτῆς σημεῖον ἀμετάβλητον ἐν τῷ τόπῳ τούτῳ. Καὶ ὄντως, ἂν ἀναχωροῦντες ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου $M(x_0\ y_0)$ τοῦ Τ καὶ ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου πρὸς αὐτὸ σημείου $N(u_0\ v_0)$ τοῦ Π, θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἀντίστοιχον εἰς τὸ σημεῖον $N'(u+du,\ v+dv)$, θὰ ἔχωμεν νὰ λύσωμεν τὰς ἐξισώσεις

$$\left.\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}dv \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}dv \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

ἐξ ὧν, προσδιοριζομένων τῶν dx, dy, εὑρίσκονται αἱ συντεταγμέναι $x+dx$, $y+dy$ τοῦ τοῦ σημείου M΄ ὅπερ ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὸ N΄· καὶ ἂν μὲν ἡ ὁρίζουσα (12) διαφέρῃ τοῦ 0, ἡ λύσις τοῦ συστήματος (13) δίδει ἓν καὶ μόνον σύστημα τιμῶν dx, dy, ἑπομένως πρὸς ἕκαστον σημεῖον N΄ ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ N εὑρίσκομεν ἀντίστοιχον ἓν καὶ μόνον ἓν σημεῖον τοῦ τόπου Τ κείμενον ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ M. Ἐὰν ὅμως ἡ ὁρίζουσα εἶνε 0 (εἰς τὸ σημεῖον M) αἱ ἐξισώσεις (13) ἢ οὐδεμίαν ἔχουσι λύσιν ἢ ἀπείρους· τουτέστι τότε ἢ οὐδὲν ἀντίστοιχον σημεῖον ὑπάρχει τοῦ N΄ ἢ ἄπειρα· ταῦτα δὲ ἀμφότερα ἀποκλείονται ἐξ ὑποθέσεως· Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι, ἐὰν αἱ ἐξισώσεις (9) συσχετίζωσι τοὺς δύο τόπους Τ καὶ Π ὁμαλῶς, ἡ ὁρίζουσα (12) οὐδαμοῦ ἐν αὐτοῖς μηδενίζεται· ἀλλ' οὐδὲ ἄπειρος δύναται νὰ γίνῃ· διότι τότε ἡ ἀντίστροφος ὁρίζουσα

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

θὰ ἐγίνετο 0· μένει ἄρα πάντοτε ἑκατέρα τῶν ὁριζουσῶν πεπερασμένη καὶ τοῦ 0 διάφορος καὶ ἑπομένως, ἐὰν εἶνε συνεχής, διατηρεῖ πανταχοῦ τὸ ἑαυτῆς σημεῖον.

Μετασχηματισμὸς εἰς πολικὰς συντεταγμένας

143. Ἐὰν αἱ νέαι μεταβληταὶ u, v εἶνε αἱ πολικαὶ συντεταγμέναι ρ, θ, αἱ ἐξισώσεις αἱ συνδέουσαι αὐτὰς πρὸς τὰς ὀρθογωνίους συντεταγμένας x, y εἶνε

$$x = \rho \text{ συν}\theta$$

$$y = \rho \text{ ημ}\theta$$

ὅθεν
$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \text{συν}\,\theta, \qquad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -\rho \text{ ημ}\theta$$

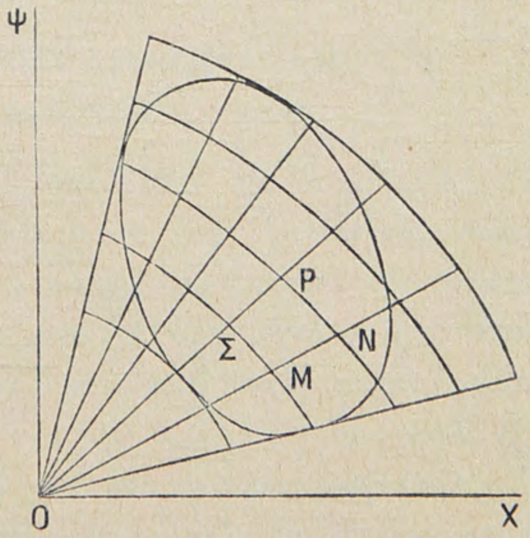
$$\frac{\partial y}{\partial \rho} = \text{ημ}\theta, \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = \rho \text{ συν}\theta$$

καὶ
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \rho$$

καὶ ἑπομένως εἶνε

$$(14) \qquad \int_T \varphi(x, y)\, d(x, y) = \int_T \varphi(\rho \text{ συν}\theta,\ \rho \text{ ημ}\theta).\rho d\rho\, d\theta$$

Τὸν τύπον τοῦτον δυνάμεθα καὶ ἀμέσως νὰ εὕρωμεν εὐκόλως. Ἐὰν τῷ ὄντι διαιρέσωμεν τὸν τόπον T διὰ περιφερειῶν ὁμοκέντρων ἐχουσῶν κέντρον τὸν πόλον O καὶ δι᾽ εὐθειῶν ἐξ αὐτοῦ ἀρχομένων, τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τῶν ἐντὸς τοῦ T κειμένων μερῶν, οἷον τοῦ ΜΝΡΣ, εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς· ἐὰν Μ εἶνε ἡ κορυφὴ τοῦ μικτογράμμου τετραπλεύρου ἡ τὰ ἐλάχιστα ρ καὶ θ ἔχουσα, αἱ συντεταγμέναι τῶν λοιπῶν κορυφῶν θὰ εἶνε



$$N(\rho + \Delta\rho, \theta), \quad P(\rho + \Delta\rho, \theta + \Delta\theta) \quad \Sigma(\rho, \theta + \Delta\theta)$$

καὶ τὸ μικτόγραμμον χωρίον εἶνε διαφορὰ τῶν τομέων ΟΡΝ καὶ ΟΜΣ τὸ ἐμβαδὸν ἄρα αὐτοῦ εἶνε

$$\left[\frac{1}{2}(\rho+\Delta\rho)^2-\frac{1}{2}\rho^2\right]\Delta\theta. \quad \text{ἢ} \quad \rho\Delta\rho\Delta\theta\left(1+\frac{\Delta\rho}{2\rho}\right)$$

τοῦτο δὲ εἶνε ἰσοδύναμον τῷ $\rho\Delta\rho\Delta\theta$· ἐπομένως εἶνε

$$\text{ορ}\sum \alpha_\nu\,\varphi(\alpha_\nu)=\text{ορ}\sum \varphi(\rho\ \text{συν}\theta,\ \rho\ \text{ημ}\theta)\,\rho\Delta\rho\Delta\theta$$

ἤτοι
$$\int\limits_T \varphi(x,y)\,d(x,y)=\int\limits_T \varphi(\rho\ \text{συν}\theta,\ \rho\ \text{ημ}\theta)\ \rho\, d\rho\, d\theta$$

Ἐὰν πρώτη ἐκτελεσθῇ ἡ ὁλοκλήρωσις πρὸς θ, ὅρια αὐτῆς εἶνε αἱ ἄκραι τιμαὶ τοῦ διαστήματος ἐντὸς τοῦ ὁποίου μεταβάλλεται ἡ γωνία θ, ἐν τῷ τόπῳ Τ, ὅταν ἡ ἀκτὶς ρ διαμένῃ ἀμετάβλητος ἔχουσα οἱανδήποτε τιμὴν μεταξὺ τῶν τιμῶν, ἃς ἔχει ἐν τῷ τόπῳ Τ· ὅρια δὲ τοῦ ρ θὰ εἶνε ἔπειτα αἱ ἄκραι τιμαὶ τοῦ διαστήματος ἐντὸς τοῦ ὁποίου μεταβάλλεται ἐν τῷ Τ ἡ ἀκτὶς ρ.

Ἐὰν δὲ τοὐναντίον ἐκτελεσθῇ πρώτη ἡ ὁλοκλήρωσις πρὸς ρ, ὅρια τούτου θὰ εἶνε αἱ ἄκραι τιμαὶ τοῦ διαστήματος, ἐν ᾧ μεταβάλλεται ἡ ἀκτὶς ρ ἐν τῷ τόπῳ Τ, ὅταν ἡ γωνία θ μένῃ ἀμετάβλητος διατηροῦσα τὴν τυχοῦσαν τιμὴν ἐξ ἐκείνων ἃς ἔχει ἐν τῷ Τ· τῆς δὲ γωνίας θ ὅρια θὰ εἶνε ἔπειτα αἱ ἄκραι τιμαὶ τοῦ διαστήματος, ἐν ᾧ μεταβάλλεται ἡ θ ἐν τῷ τόπῳ Τ.

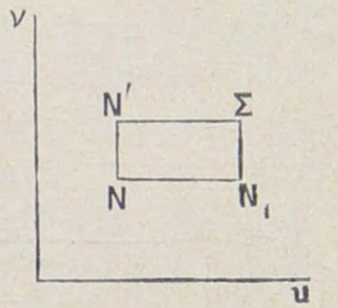
Σημείωσις. Ὑποτίθεται διὰ τὴν ἁπλότητα, ὅτι ἑκάστη ἀκτὶς διατέμνει τὴν περίμετρον τοῦ Τ εἰς δύο τὸ πολὺ σημεῖα· ὡς καὶ ἑκάστη περιφέρεια.

Παρέκβασις περὶ τῶν παραγώγων τῶν συστημάτων.

144. Ὅταν δύο μεταβληταὶ ἐξαρτῶνται ἀπ' ἀλλήλων, ἂν παραστήσωμεν ἑκατέραν δι' ἑνὸς σημείου ἐπὶ μιᾶς εὐθείας, πρὸς ἑκάστην μετατόπισιν τοῦ ἑτέρου τῶν σημείων ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένη τοῦ ἄλλου μετατόπισις καὶ ὁ λόγος τῶν ἀντιστοιχούντων τμημάτων, ἅτινα γράφουσι τὰ σημεῖα ταῦτα, ἔχει ὅριον τὴν παράγωγον τῆς μιᾶς μεταβλητῆς πρὸς τὴν ἄλλην.

Ἀνάλογον συμβαίνει καὶ ὅταν δύο μεταβληταὶ u, v ἐξαρτῶνται ἀπὸ δύο ἄλλων x, y· τότε καὶ ἀντιστρόφως αἱ x, y ἐξαρτῶνται ἀπὸ τῶν u, v (Διαφ. λογισμοῦ σελ. 222)· ἂν τότε παραστήσωμεν ἕκαστον σύστημα τιμῶν x, y ὡς ὀρθογωνίους συντεταγμένας ἑνὸς σημείου Μ τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἕκαστον σύστημα τιμῶν u, v ὡς ὀρθ. συντεταγμένας σημείου τινος Ν ἄλλου ἐπιπέδου, εἰς ἑκάστην μετατόπισιν τοῦ σημείου Μ θὰ ἀντιστοιχῇ ὡρισμένη μετατόπισις τοῦ ἄλλου σημείου Ν· ἀλλ' ἐνταῦθα τὰ σημεῖα δὲν γράφουσι τμήματα εὐθείας ἀλλὰ τμήματα ἐπιπέδου, ἐπιφάνειαν δηλονότι· ἀλλὰ καὶ ἐνταῦθα ὁ λόγος τῶν γραφομένων ἐπιφανειῶν ὑπὸ τῶν δύο σημείων ἔχει ὅριον καὶ τοῦτο καλοῦμεν παράγωγον τοῦ συστήματος τῶν δύο μεταβλητῶν πρὸς τὸ σύστημα τῶν δύο ἄλλων.

Ἵνα δείξωμεν τοῦτο, ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ μὲν μεταβλητὴ u μεταβάλλεται ἐν τῷ διαστήματι $u \ldots u+du$, ἡ δὲ μεταβλητὴ v ἐν τῷ $v \ldots v+dv$· τότε τὸ τυχὸν σύστημα τιμῶν τῶν μεταβλητῶν τούτων δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς ἑξῆς



$$u+\varepsilon . du, \quad v+\eta . dv$$

ἔνθα ε καὶ η εἶνε ἀριθμοὶ θετικοὶ καὶ μικρότεροι τῆς μονάδος· καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν παριστώμενον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου UV θὰ κεῖται ἐντὸς τοῦ ὀρθογωνίου $NN_1\Sigma N'$ ($NN_1=du$, $NN'=dv$) καὶ θὰ διαγράφῃ τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ ε καὶ η μεταβάλλωνται ἐν τῷ διαστήματι $0 \ldots 1$, ἀνεξάρτητοι μένοντες ἀπ' ἀλλήλων· τότε αἱ τιμαὶ τῶν μεταβλητῶν x, y, αἱ πρὸς τὰς τιμὰς $u+du$, $v+dv$ ἀντιστοιχοῦσαι, θὰ εἶνε αἱ $x+dx, y+dy$, αἱ δὲ τιμαὶ αὐτῶν αἱ πρὸς τὸ τυχὸν σύστημα $u+\varepsilon du$, $v+\eta dv$ ἀντιστοιχοῦσαι θὰ εἶνε

$$x+\theta\, dx, \quad y+i\, dy.$$

τῶν θ καὶ i ὄντων θετικῶν καὶ μικροτέρων τῆς μονάδος ἀριθμῶν· συνδέονται δὲ αἱ πρὸς ἀλλήλας ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ διὰ τῶν ἐξισώσεων

$$\varepsilon\, du = \frac{\partial u}{\partial x}\,\theta\, dx + \frac{\partial u}{\partial y} i\, dy$$

$$\eta\, dv = \frac{\partial v}{\partial x}\,\theta\, dx + \frac{\partial v}{\partial y} i\, dy$$

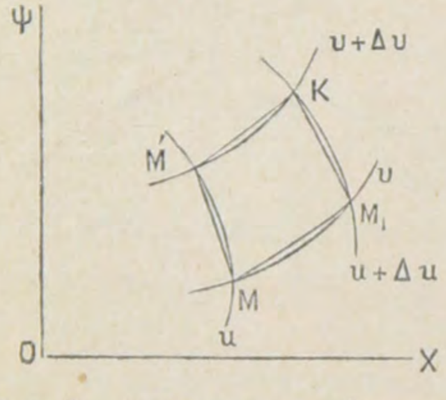
αἵτινες, ἂν ἡ ὁρίζουσα

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

εἶνε διάφορος τοῦ 0, δίδουσιν ἓν καὶ μόνον ἓν σύστημα τιμῶν τῶν θdx καὶ $i dy$ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν συντεταγμένων $x+\theta dx$, $y+i dy$ παριστώμενον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου x, y διαγράφει τετράπλευρόν τι καμπυλόγραμμον, τὸ MM_1KM', περικλειόμενον ὑπὸ τῶν καμπύλων

$$MM'\big(u=\sigma(x,y)\big),\quad MM_1\big(v=f(x,y)\big),\quad M_1K\big(u+\Delta u=\sigma(x,y)\big)$$

καὶ KM' $\big(v+\Delta v=f(x,y)\big)$, ἃς διαγράφει τὸ σημεῖον M, ὅταν τὸ N διαγράφῃ τὴν περίμετρον τοῦ ὀρθογωνίου $NN_1\Sigma N'$· ἀντιστοιχοῦσιν ἄρα τὰ σημεῖα τῶν δύο ἐπιφανειῶν $NN_1\Sigma N'$ καὶ MM_1KM' πρὸς ἄλληλα ἀνὰ δύο, ἓν ἐνί.



Τούτου τεθέντος, ὁ λόγος

$$\frac{(MM_1KM')}{(NN_1\Sigma N')}$$

τῶν ἀλλήλοις ἀντιστοιχούντων ἀπειροστῶν ἐμβαδῶν τείνει πρός τι ὅριον· καὶ ὄντως, ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ τῶν τόξων MM_1 MM' M_1K, KM', τὸ σχηματιζόμενον ὑπ' αὐτῶν τετράπλευρον ἔχει ἐμβαδὸν (ὡς εὕρομεν ἤδη) τὸ

$$\Delta.du\ dv+\alpha\ du\ dv \quad \text{ἔνθα} \quad \text{ορ}\ \alpha=0$$

ἐπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καμπυλογράμμου τετραπλεύρου MM_1KM' εἶνε

$$\Delta.du\ dv+\alpha\ du\ dv+\beta_1-\beta+\gamma_1-\gamma$$

ἂν διὰ β, β_1 παραστήσωμεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν χωρίων, ἅτινα περιέχονται ὑπὸ τῶν ἀπέναντι τόξων MM' καὶ M_1K καὶ ὑπὸ τῶν χορδῶν αὐτῶν, καὶ διὰ γ, γ_1 τὰ ἐμβαδα τῶν χωρίων, ἅτινα περιέχονται μεταξὺ τῶν λοιπῶν δύο τόξων καὶ τῶν χορδῶν αὐτῶν· ἀλλὰ τὰ μὲν ἐμβαδὰ β, β_1 εἶνε ἀπειροστὰ τρίτης τάξεως πρὸς τὸ dv καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν $\beta_1-\beta$ μηδενίζεται, ὅταν du μηδενισθῇ· ἐπομένως εἶνε $\beta_1-\beta=p.dv^3du$. τοῦ p ὄντος πεπερασμένου· τὰ δὲ ἐμβαδὰ γ, γ_1 εἶνε ἀπειροστὰ τρίτης τάξεως πρὸς du καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν μηδενίζεται, ὅταν dv μηδενισθῇ· ἐπομένως εἶνε $\gamma_1-\gamma=q.du^3dv$· τὸ ἐμβαδὸν ἄρα τοῦ καμπυλογράμμου τετραπλεύρου εἶνε

$$\Delta.dudv+\alpha\ dudv+p\ dudv^3+q\ du^3dv$$

ἐπειδὴ δὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου $NN_1\Sigma N'$ εἶνε $dudv$, ἕπεται

$$\text{ορ}\,\frac{MM_1KM'}{NN_1\Sigma N'}=\Delta, \quad \text{ἤτοι} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

ἡ ὁρίζουσα αὕτη σημειοῦται (κατ᾽ ἀναλογίαν τῶν ἁπλῶν παραγώγων) ὡς ἑξῆς

$$\frac{d(x, y)}{d(u, v)}$$

ἔνθα τὸ μὲν $d(u, v)$ τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν u, v σημαίνει τὸ ἀπειροστὸν ὀρθογώνιον $du\, dv$, τὸ δὲ $d(x, y)$ σημαίνει τὸ πρωτεῦον μέρος τοῦ ἀπειροστοῦ τετραπλεύρου MM_1KM' τοῦ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ἀντιστοιχοῦντος· διότι εἶνε

$$d(x, y)=\Delta.du\, dv$$

Διὰ τῆς γενικεύσεως ταύτης τῆς ἐννοίας τῆς παραγώγου καθίσταται πλήρης ἡ ὁμοιότης μεταξὺ διπλῶν καὶ ἁπλῶν ὁλοκληρωμάτων· καθὼς δηλαδὴ ἐν τῷ ἁπλῷ ὁλοκληρώματι

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\, dx$$

ἡ γραφὴ αὕτη ἁρμόζει πρὸς οἱανδήποτε μεταβλητήν, καὶ ἂν ἡ x ἐξαρτᾶται ἀπ᾽ ἄλλης μεταβλητῆς t, ἀρκεῖ ἀντὶ τῶν x καὶ dx νὰ θέσωμεν τὰς τιμάς των (καὶ τὰ κατάλληλα ὅρια), ἵνα τρέψωμεν τὸ ὁλοκλήρωμα πρὸς x εἰς ὁλοκλήρωμα πρὸς t, δηλαδὴ

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\, dx=\int_\gamma^\delta \varphi(x)\,\frac{dx}{dt}dt,$$

οὕτω καὶ εἰς τὰ διπλᾶ ὁλοκληρώματα, ἐὰν γράφωμεν αὐτὰ ὡς ἑξῆς

$$\int_T \varphi(x, y)\, d(x, y)$$

ἡ γραφὴ αὕτη ἁρμόζει εἴτε εἶνε αἱ x, y αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ εἴτε εἶνε συναρτήσεις ἄλλων u, v· διότι, ἂν αἱ x, y εἶνε συναρτήσεις τῶν

u, v, ἵνα μετασχηματίσωμεν τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα εἰς τὰς μεταβλητὰς u, v, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν εἰς αὐτὸ τὰς τιμὰς τῶν x, y καὶ $d(x, y)$, ἤτοι

$$d(x, y) = \frac{d(x, y)}{d(u, v)}\, d(u, v)$$

καὶ νὰ ἀλλάξωμεν καταλλήλως τὸν τόπον τῆς ὁλοκληρώσεως· δηλαδὴ

$$\int_{T} \varphi(x, y)\, d(x, y) = \int_{\Pi} \varphi(x, y)\frac{d(x, y)}{d(u, v)} d(u, v)$$

Ἀναλυτικὴ μέθοδος τοῦ μετασχηματισμοῦ.

145. Τὸν μετασχηματισμὸν τῶν διπλῶν ὁλοκληρωμάτων δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἡ εὕρεσις τοῦ διπλοῦ ὁλοκληρώματος ἀνάγεται ὡς ἐμάθομεν ἤδη εἰς δύο ἀλλεπαλλήλους ἁπλᾶς ὁλοκληρώσεις, ἤτοι

$$\int_{T} \varphi(x, y)\; dx\; dy = \int_{\alpha}^{\beta} dx \left(\int_{\Upsilon}^{\Upsilon'} \varphi(x, y)\; dy \right)$$

δυνάμεθα δὲ εἰς τὴν πρώτην ὁλοκλήρωσιν· ἤτοι εἰς τὴν

$$\int_{\Upsilon}^{\Upsilon'} \varphi(x, y)\, dy,$$

νὰ ἀλλάξωμεν τὴν μεταβλητὴν τῆς ὁλοκληρώσεως (τὴν y) ἀντικαθιστῶντες ἀντ᾽ αὐτῆς τὴν μεταβλητὴν v· πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ dy ὡς πρὸς v, ὅταν ἡ x μένῃ σταθερὰ (διότι ἐν τῇ ὁλοκληρώσει ταύτῃ ἡ x μένει σταθερά)· ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις αἱ συνδέουσαι τὰς μεταβλητὰς x, y πρὸς τὰς u, v αἱ ἑξῆς

$$x = \Sigma(u, v)$$

$$y = \mathrm{F}(u, v)$$

ἐὰν διαφορίσωμεν ταύτας κατὰ τὴν ὑπόθεσιν $x =$ σταθ. εὑρίσκομεν

$$0 = \frac{\partial \Sigma}{\partial u} du + \frac{\partial \Sigma}{\partial v} dv$$

$$dy = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} dv$$

ἐξ ὧν ἕπεται

$$dy = \frac{\Delta . dv}{\frac{\partial \Sigma}{\partial u}}$$

εἶνε ἄρα

$$\int_{\Upsilon}^{\Upsilon'} \varphi(x, y)\, dy = \int_{V}^{V'} \varphi(x, y)\, \frac{\Delta}{\frac{\partial \Sigma}{\partial u}} dv$$

ἐν τῷ ὁλοκληρώματι τούτῳ πρὸς v πρέπει νὰ μείνωσι δύο μόνον μεταβληταί, αἱ x καὶ v, ὥστε αἱ λοιπαὶ δύο u καὶ y πρέπει νὰ ἐκφρασθῶσι δι' αὐτῶν καὶ νὰ ἀντικατασταθῶσιν αἱ τιμαὶ αὐτῶν.

Τούτου τεθέντος, θὰ εἶνε

$$\int_{T} \varphi(x, y)\, dx\, dy = \int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{V}^{V'} \varphi(x, y)\, \frac{\Delta}{\frac{\partial \Sigma}{\partial u}} dv \qquad (15)$$

ἔνθα V καὶ V′ εἶνε αἱ ἄκραι τιμαὶ τοῦ διαστήματος, ἐν ᾧ μεταβάλλεται ἡ μεταβλητὴ v, ὅταν ἡ x διαμένῃ σταθερὰ ἔχουσα τὴν τυχοῦσαν τιμὴν τοῦ διαστήματος $\alpha \ldots \beta$.

Ἀλλ' ἐμάθομεν ὅτι δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν ὁλοκληρώσεων, ἀρκεῖ νὰ ὁρίσωμεν καταλλήλως τὰ ὅρια αὐτῶν· ἑπομένως, ἂν πρῶτον ἐκτελέσωμεν τὴν ὁλοκλήρωσιν πρὸς x καὶ ἔπειτα τὴν πρὸς v, θὰ εἶνε

$$\int_{T} \varphi(x, y)\, dx\, dy = \int_{\sigma}^{\rho} dv \left(\int_{X}^{X'} \varphi(x, y)\, \frac{\Delta}{\frac{\partial \Sigma}{\partial u}} dx \right)$$

ἔνθα X καὶ X′ εἶνε αἱ ἄκραι τιμαὶ τοῦ διαστήματος, ἐν ᾧ μεταβάλλεται ἡ x, ὅταν ἡ v μένῃ σταθερὰ διατηροῦσα τὴν τυχοῦσαν τιμὴν τοῦ διαστήματος $\sigma \ldots \rho$.

Ἐὰν νῦν ἐν τῇ πρώτῃ ὁλοκληρώσει

$$\int_{X}^{X'} \varphi(x, y)\, \frac{\Delta}{\frac{\partial \Sigma}{\partial u}} dx$$

ἀλλάξωμεν τὴν μεταβλητὴν τῆς ὁλοκληρώσεως, ἀντικαθιστῶντες ἀντ' αὐτῆς τὴν u, πρέπει ἀντὶ dx νὰ θέσωμεν τὸ διαφορικὸν τῆς x, ὅταν ἡ

v μένῃ σταθερὰ (διότι κατὰ τὴν ὁλοκλήρωσιν ταύτην ἡ v μένει σταθερά)· ἀλλὰ τότε εἶνε

$$dx = \frac{\partial \Sigma}{\partial u} du$$

ὅθεν
$$\int_{X}^{X'} \varphi(x, y) \frac{\Delta}{\frac{\partial \Sigma}{\partial u}} dx = \int_{U}^{U'} \varphi(x, y)\ \Delta . du$$

τῶν U καὶ U′ δηλούντων τὰς ἄκρας τιμὰς τοῦ διαστήματος, ἐν ᾧ μεταβάλλεται ἡ u, ὅταν ἡ v μένῃ σταθερὰ ἔχουσα τὴν τυχοῦσαν τιμὴν τοῦ διαστήματος ρ . . . σ· ἐπομένως εἶνε

$$\int_{T} \varphi(x,y) dx\, dy = \int_{\rho}^{\sigma} dv \left(\int_{U}^{U'} \varphi(x, y)\ \Delta . du \right) = \int_{\Pi} \varphi(x, y)\ \Delta . d(u, v)$$

Ἐπίδρασις τοῦ μετασχηματισμοῦ εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν διπλῶν ὁλοκληρωμάτων.

146. Ὁ μετασχηματισμὸς τῶν διπλῶν ὁλοκληρωμάτων μεγάλην ἔχει ῥοπὴν εἰς τὴν εὕρεσιν αὐτῶν· διότι πολλάκις δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα κατά τινα τοῦ τόπου T διαίρεσιν κατ' ἄλλην δὲ διαίρεσιν, ἤτοι διὰ τῆς καταλλήλου ἐκλογῆς τῶν μεταβλητῶν, εὑρίσκομεν εὐκόλως αὐτό· ὡς παράδειγμα ἔστω τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα

$$\int_{x^2+y^2-\alpha^2<0} e^{-x^2-y^2} d(x, y)$$

οὗτινος ὁ τόπος T τῆς ὁλοκληρώσεως εἶνε ὁ κύκλος $x^2+y^2-\alpha^2<0$.

Ἐὰν παραδεχθῶμεν τὴν εἰς ὀρθογώνια διαίρεσιν τοῦ κύκλου, ἤτοι, ἂν λάβωμεν ὀρθογωνίους συντεταγμένας, αἱ δύο ὁλοκληρώσεις, ἅς τινας πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου ὁλοκληρώματος, εἶνε αἱ ἑξῆς

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-x^2} dx \left(\int_{-\sqrt{\alpha^2-x^2}}^{+\sqrt{\alpha^2-x^2}} e^{-y^2} dy \right) \quad ἢ \quad \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-y^2} dy \left(\int_{-\sqrt{\alpha^2-y^2}}^{+\sqrt{\alpha^2-y^2}} e^{-x^2} dx \right)$$

ἀλλ' ἐπειδὴ δὲν δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν διὰ τῶν γνωστῶν συναρτήσεων τὸ ἀόριστον ὁλοκλήρωμα

$$\int e^{-y^2} dy$$

εἶνε ἀδύνατον νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ σεσημειωμέναι μερικαὶ ὁλοκληρώσεις.

Ἐὰν ὅμως δεχθῶμεν τὴν διὰ περιφερειῶν ὁμοκέντρων καὶ δι' ἀκτίνων διαίρεσιν τοῦ κύκλου, τουτέστιν, ἂν λάβωμεν πολικὰς συντεταγμένας, τὸ ζητούμενον διπλοῦν ὁλοκλήρωμα γίνεται

$$\int_{0<\rho<\alpha} e^{-\rho^2} \rho \, d\rho \, d\theta$$

καὶ αἱ πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ ἀπαιτούμεναι δύο ὁλοκληρώσεις εἶνε αἱ ἀκόλουθοι

$$\int_0^\alpha e^{-\rho^2} \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta$$

αἵτινες ἐκτελοῦνται εὐκολώτατα καὶ δίδουσιν $\pi(1-e^{-\alpha^2})$· ὥστε εἶνε

$$\int_{x^2+y^2-\alpha^2<0} e^{-x^2-y^2} d(x, y) = \pi(1-e^{-\alpha^2})$$

Ὁλοκληρώματα, ὧν ὁ τόπος τῆς ὁλοκληρώσεως εἶνε ἄπειρος.

147. Ὁ τόπος Τ τῆς ὁλοκληρώσεως ὑπετέθη ἐν πᾶσι τοῖς προηγουμένοις πεπερασμένος καὶ ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ταύτῃ ἀπεδείχθησαν τὰ προηγούμενα θεωρήματα καὶ ἰδίᾳ ἡ ὕπαρξις τοῦ ὁρίου τοῦ ἀθροίσματος $\Sigma\, \alpha_\nu\, \varphi(\alpha_\nu)$ καὶ ἡ ἀλλαγὴ τῆς τάξεως τῶν ὁλοκληρώσεων, δι' ὧν εὑρίσκεται τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα.

Πολλάκις ὅμως ὁλοκλήρωμά τι

$$\int_T \varphi(x, y)\; d(x, y),$$

αὐξανομένου τοῦ τόπου Τ, ἐφ' οὗ ἐκτελεῖται, μένει πάντοτε πεπερασμένον καὶ τείνει πρός τι ὅριον πεπερασμένον καὶ ἐντελῶς ὡρισμένον, *ὅταν ὁ τόπος Τ, ὁπωσδήποτε μεταβαλλόμενος, ἐπεκτείνηται ἐπί τινος* *μέρους τοῦ ἐπιπέδου ἀπείρου μὲν ἀλλ' ἐντελῶς ὡρισμένου*, ἢ *καὶ ἐφ' ἅπαντος τοῦ ἐπιπέδου*· ὅταν συμβαίνῃ τοῦτο, παριστῶμεν τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ ὁλοκλήρωμα, ὡς ἑξῆς

$$\int_{T^{\infty}} \varphi(x, y)\, d(x, y)$$

τοῦτο δὲ τὸ ὅριον ἐννοοῦμεν, ὅταν λέγωμεν ὅτι ὁλοκλήρωμά τι ἔχει τόπον ὁλοκληρώσεως ἄπειρον.

Ἐὰν τὸ ὁλοκλήρωμα, καθ' ὅσον ὁ τόπος αὐτοῦ ἐπεκτείνεται, μένῃ πάντοτε πεπερασμένον, δὲν τείνῃ ὅμως πρὸς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ὅριον, ὁπωςδήποτε καὶ ἂν γίνηται ἡ ἐπέκτασις, ἀλλὰ πρὸς τοὺς διαφόρους τρόπους τῆς ἐπεκτάσεως, ἂν καὶ πάντες φέρουσιν εἰς τὸν αὐτὸν ἄπειρον τόπον, ἀντιστοιχῶσι διάφορα ὅρια, πρὸς ἃ τείνει, τὸ τοιοῦτον ὁλοκλήρωμα λέγεται *παραλλάσσον*.

Σημείωσις. Οἴκοθεν ἐννοεῖται ὅτι δύναται τὸ ὁλοκλήρωμα, ὅταν ὁ τόπος αὐτοῦ ἐπεκτείνηται εἰς ἄπειρον, νὰ αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον ἢ καὶ νὰ γίνηται ἀόριστον, ἤτοι νὰ μὴ τείνῃ πρὸς οὐδὲν ὅριον.

148. Ἐὰν ἡ συνάρτησις $\varphi(x, y)$ ἐν τῷ ἀπείρῳ τόπῳ, ἐφ' οὗ ἐπεκτείνεται ἡ ὁλοκλήρωσις, μένῃ πάντοτε πεπερασμένη καὶ διατηρῇ τὸ ἑαυτῆς σημεῖον, τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_{T} \varphi(x, y)\, d(x, y)$$

ἐπεκτεινομένου τοῦ τόπου Τ εἰς ἄπειρον, ἢ αὐξάνει εἰς ἄπειρον ἢ τείνει πρὸς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ πάντοτε ὅριον, ὁπωςδήποτε καὶ ἂν γίνηται ἡ ἐπέκτασις, ἀρκεῖ νὰ φέρῃ αὕτη πρὸς τὸν αὐτὸν ἄπειρον τόπον· διότι, ὅταν ἄθροισμα ὁμοειδῶν ἀριθμῶν (οἷα εἶνε τὰ στοιχεῖα τοῦ ὁλοκληρώματος κατὰ τὴν προκειμένην περίπτωσιν) εἶνε πεπερασμένον, ἡ τάξις, καθ' ἣν λαμβάνονται ἐν τῇ προσθέσει, εἶνε ἀδιάφορος ὡς πρὸς τὸ ἐξαγόμενον· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἡ ἀλλαγὴ τῆς τάξεως τῶν ὁλοκληρώσεων ἐπιτρέπεται εἰς τὰ τοιαῦτα ὁλοκληρώματα καὶ ἡ ἀλλαγὴ τῆς διαιρέσεως τοῦ τόπου τῆς ὁλοκληρώσεως, ἤτοι ἡ ἀλλαγὴ τῶν μεταβλητῶν, ἐπίσης.

Παράδειγμα τοιούτου ὁλοκληρώματος εἶνε τὸ ἑξῆς

$$\int e^{-x^2-y^2} d(x, y)$$

τοῦτο, ὅταν ὁ τόπος αὐτοῦ εἶνε κύκλος ἔχων κέντρον τὴν ἀρχήν, καὶ ἀκτῖνα α, εὑρέθη ἴσον τῷ $\pi(1-e^{-\alpha^2})$· καὶ ἐφ' ὅσον ἡ ἀκτὶς α αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον, τείνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν π· ὅθεν

$$\int e^{-x^2-y^2} d(x,y)=\pi$$

ὅταν τόπος τοῦ ὁλοκληρώματος εἶνε ἅπαν τὸ ἐπίπεδον x, y.

Τὸ αὐτὸ δὲ ὁλοκλήρωμα, ὅταν ἔχῃ τόπον τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, ἔνθα ἀμφότεραι αἱ συντεταγμέναι x, y εἶνε θετικαί, εἶνε ἴσον τῷ $\frac{\pi}{4}$.

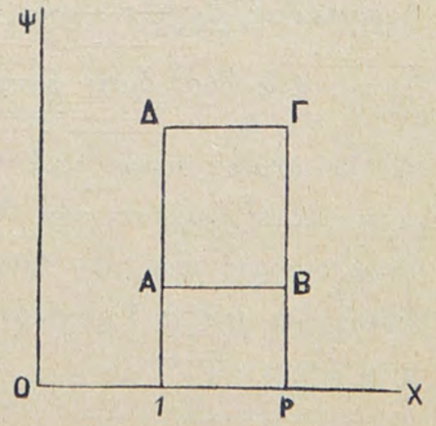
149. Ἀλλ' ἐὰν ἐν τῷ ἀπείρῳ τόπῳ τῆς ὁλοκληρώσεως ἡ συνάρτησις $\varphi(x, y)$ εἶνε θετικὴ μὲν εἰς τὸ μέρος T_1 ἀρνητικὴ δὲ εἰς τὸ μέρος T_2, τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_T \varphi(x, y)\ d(x,y)$$

θὰ εἶνε πεπερασμένον καὶ ἐντελῶς ὡρισμένον, μόνον ὅταν ἀμφότερα τὰ ὁλοκληρώματα

$$\int_{T_1} \varphi(x,y)\ d(x, y) \quad \text{καὶ} \quad \int_{T_2} \varphi(x,y)\ d(x, y)$$

εἶνε πεπερασμένα· ἤτοι ὅταν τὰ θετικὰ στοιχεῖα αὐτοῦ ἔχωσιν ἄθροισμα πεπερασμένον καὶ τὰ ἀρνητικὰ ἐπίσης.



Ἐὰν ὅμως ἑκάτερον τούτων μόνον λαμβανόμενον εἶνε ἄπειρον, τὸ ὁλοκλήρωμα ἐν γένει εἶνε παραλλάσσον, ἤτοι ἔχει διαφόρους τιμὰς κατὰ τὴν διάφορον τάξιν καθ' ἣν λαμβάνονται εἰς πρόσθεσιν τὰ στοιχεῖα αὐτοῦ, ἤτοι κατὰ τὴν διάφορον τοῦ τόπου διαίρεσιν (ἢ κατὰ τὴν διάφορον τάξιν τῶν ὁλοκληρώσεων).

Παράδειγμα τοιούτου ὁλοκληρώματος, ἔστω τὸ ἑξῆς

$$\int_{(\mathrm{ΑΒΓΔ})} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} d(x,y).$$

Ἐὰν αἱ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ εἶνε

$$\begin{array}{lll} x=1 \text{ τῆς ΑΔ} & & y=1 \text{ τῆς ΑΒ} \\ & \text{καὶ} & \\ x=p \text{ τῆς ΒΓ} & & y=q \text{ τῆς ΔΓ} \end{array}$$

αἱ πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὁλοκληρώματος ἀπαιτούμεναι ἁπλαῖ ὁλοκληρώσεις εἶνε αἱ ἑξῆς

$$\int_1^p dx \int_1^q \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy$$

καὶ ἡ μὲν πρώτη ὁλοκλήρωσις δίδει ἐξαγόμενον τὸ

$$\frac{q}{x^2+q^2}-\frac{1}{x^2+1}$$

ἡ δὲ δευτέρα δίδει

$$\left[\text{τοξ εφ}\left(\frac{x}{q}\right)-\text{τοξ εφ}x\right]_1^p \quad \text{ἤτοι}$$

$$\frac{\pi}{4}+\text{τοξ εφ}\left(\frac{p}{q}\right)-\text{τοξ εφ}(p)-\text{τοξ εφ}\left(\frac{1}{q}\right)$$

ὅταν δὲ αἱ εὐθεῖαι ΒΓ καὶ ΔΓ ἀπομακρύνωνται εἰς ἄπειρον, ὁ τόπος τῆς ὁλοκληρώσεως γίνεται ἄπειρος (τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τὸ ἐν τῇ γωνίᾳ ΔΑΒ κείμενον)· ἀλλὰ τὸ ὁλοκλήρωμα μένει πάντοτε πεπερασμένον· τὸ ὅριον ὅμως πρὸς ὃ τείνει, ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ νόμου, ὃν ἀκολουθοῦσιν αὐξάνοντα εἰς ἄπειρον τὰ p καὶ q· ἐὰν εἶνε $p=q$, τὰ λαμβανόμενα στοιχεῖα ἐξ ἑκατέρου τῶν εἰδῶν (θετικὰ καὶ ἀρνητικὰ) εἶνε ἴσα ἀπολύτως ἀνὰ δύο, διότι ἡ παράστασις $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ ἔχει τιμὰς ἀντιθέτους εἰς δύο σημεῖα συμμετρικὰ πρὸς τὴν διχοτομοῦσαν τὴν γωνίαν Α· ἐπομένως τὸ ἐξαγόμενον εἶνε 0· ἐὰν δὲ εἶνε $p>q$, λαμβάνονται θετικὰ στοιχεῖα περισσότερα τῶν ἀρνητικῶν καὶ τὸ ἐξαγόμενον εἶνε θετικόν· ἐὰν τέλος εἶνε $p<q$ λαμβάνονται περισσότερα ἀρνητικὰ καὶ τὸ ἐξαγόμενον εἶνε ἀρνητικόν (*).

(*) Περὶ τῶν παραλλασσόντων ὁλοκληρωμάτων ἴδε Ἀθηνᾶς ἐν τόμῳ Η' τεύχος Β' σελ. 230.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΔΙ' ΩΝ ΕΥΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΤΑ ΩΡΙΣΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

---

150. Ἡ εὕρεσις τῶν διπλῶν ὁλοκληρωμάτων ἀνάγεται, ὡς εἴδομεν, εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν ἁπλῶν (τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει, ὡς ἐν τοῖς ἑπομένοις θὰ δειχθῇ, καὶ περὶ τῶν τριπλῶν καὶ ἐν γένει τῶν πολλαπλῶν ὁλοκληρωμάτων)· ἑπομένως ἡ εὕρεσις τῶν ἁπλῶν ὁλοκληρωμάτων ἀποτελεῖ τὴν βάσιν τοῦ λογισμοῦ πάντων τῶν ὁλοκληρωμάτων ἐν γένει.

Ὁ ὁρισμὸς τοῦ ὁλοκληρώματος, καθ' ὃν τοῦτο εἶνε ὅριον ἀθροίσματος ποσοτήτων, ὧν τὸ πλῆθος, πεπερασμένον πάντοτε διαμένον, αὐξάνεται ὑπὲρ πάντα ἀριθμόν, ἐνῷ ἑκάστη ἐλαττουμένη καταντᾷ μικροτέρα πάσης δεδομένης ὁμοειδοῦς ποσότητος, ὁ ὁρισμὸς οὗτος λέγω, ἂν καὶ εἶνε πρὸς τὰς ἐφαρμογὰς τῶν ὁλοκληρωμάτων (γεωμετρικὰς καὶ μηχανικὰς ἰδίως) προσφορώτατος, οὐδαμῶς βοηθεῖ εἰς τὴν εὕρεσιν αὐτῶν, ἢ μόνον εἰς ἁπλουστάτας τινὰς περιπτώσεις, ἐν αἷς δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα καὶ ἐκ τούτου τὸ ὅριον αὐτοῦ, ὡς λ. χ. ὅταν οἱ ὅροι τοῦ ἀθροίσματος συνιστῶσι πρόοδον ἀριθμητικὴν ἢ γεωμετρικήν, ἢ ὅταν ἀνάγηται τὸ ἄθροισμα εἰς τὴν πρόσθεσιν ὁμοίων δυνάμεων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν κατὰ σειράν· (τοιούτων ἀθροισμάτων ὅρια εἶνε τὰ ἐμβαδὰ τῶν καμπύλων καὶ οἱ ὄγκοι τῶν στερεῶν, ἅτινα εὗρεν ὁ Ἀρχιμήδης 220 ἔτη π. Χ. τοιαῦτα ἐπίσης εἶνε καὶ ὅσα εὗρεν ὁ Wallis καὶ ἄλλοι πρὸ τῆς εὑρέσεως τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ).

151. Ἡ γενικωτάτη καὶ συνάμα ἁπλουστάτη μέθοδος πρὸς εὕρεσιν τῶν ὡρισμένων ὁλοκληρωμάτων εἶνε ἡ διὰ τῶν παραγουσῶν, ἥτις ἀνάγει τὴν εὕρεσιν τοῦ ὁλοκληρώματος εἰς τὴν εὕρεσιν συναρτήσεως ἐχούσης δεδομένην παράγωγον· δι' αὐτῆς εὑρίσκεται τὸ ὁλοκλήρωμα οὐ μόνον εἰς τὰ δοθέντα ὅρια ἀλλὰ καὶ ἐν γένει εἰς οἱαδήποτε ὅρια.

Ἀλλ' ἡ μέθοδος αὕτη πολλάκις εἶνε ἀνεφάρμοστος· διότι δὲν δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ἡ ζητουμένη παράγουσα διὰ τῶν συναρτήσεων, ἃς εἰξεύρομεν.

Ὑπάρχουσιν ὅμως καὶ ἄλλαι μέθοδοι πρὸς εὕρεσιν τῶν ὡρισμένων ὁλοκληρωμάτων καὶ ἐκ τούτων σπουδαιότεραι εἶνε αἱ βασιζόμεναι ἐπὶ τῶν ἑξῆς δύο ἰδιοτήτων αὐτῶν, ἤτοι τῆς διαφορίσεως καὶ τῆς ὁλοκληρώσεως αὐτῶν πρὸς παράμετρον.

Α΄) Διαφόρισις ὁλοκληρώματος πρὸς παράμετρον.

152. Ἐὰν ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτησις ἐκτὸς τῆς μεταβλητῆς x, πρὸς ἣν γίνεται ἡ ὁλοκλήρωσις, περιέχῃ καὶ ἄλλην τινα t, ἥτις κατὰ τὴν ὁλοκλήρωσιν θεωρεῖται σταθερά, διαμένῃ δὲ ἡ ῥηθεῖσα συνάρτησις συνεχὴς καὶ πεπερασμένη ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ

$$\begin{aligned} x&=\alpha\ .\ .\ .\ \beta \\ t&=\gamma\ .\ .\ .\ \delta \end{aligned} \qquad (\upsilon)$$

ὡς καὶ ἡ παράγωγος αὐτῆς πρὸς t, τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x,t)\,dx$$

θὰ εἶνε διαφορίσιμον πρὸς t καὶ τὸ διαφορικὸν αὐτοῦ εὑρίσκεται, ἂν διαφορίσωμεν πρὸς t τὴν ὁλοκληρωτέαν συνάρτησιν καὶ ἔπειτα ἐπὶ τῆς προκυπτούσης συναρτήσεως ἐκτελέσωμεν τὴν ὁλοκλήρωσιν πρὸς x. (Ἐπὶ τοιαύτης δηλαδὴ συναρτήσεως ἡ ὁλοκλήρωσις πρὸς x καὶ ἡ διαφόρισις πρὸς t ἀνταλλάσσονται ἄνευ βλάβης τοῦ ἐξαγομένου αὐτῶν).

Διότι, ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ u τὸ ἐξαγόμενον τῆς ὁλοκληρώσεως, ὅταν ἡ t εὑρίσκηται ἐν τῷ διαστήματι $\gamma\ .\ .\ .\ \delta$, ὅπερ ἐξαγόμενον ἐν γένει θὰ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς παραμέτρου t, ἤτοι, ἂν θέσωμεν

$$u=\int_\alpha^\beta \varphi(x,t)\,dx \qquad (1)$$

θὰ εἶνε, ὅταν ἡ t μεταβληθῇ κατὰ Δt (μένουσα ἐν τῷ αὐτῷ διαστήματι)

$$u+\Delta u=\int_\alpha^\beta \varphi(x,t+\Delta t)\,dx$$

ὅθεν καὶ

$$\Delta u=\int_\alpha^\beta \varphi(x,t+\Delta t)dx-\int_\alpha^\beta \varphi(x,t)dx$$

ἢ καὶ (σελ. 167) $$\Delta u = \int_\alpha^\beta \Big[\varphi(x, t+\Delta t) - \varphi(x, t)\Big] dx \qquad (2)$$

ἀλλ' εἶνε

$$\varphi(x, t+\Delta t) - \varphi(x, t) = \Delta t \, . \, \varphi'_t(x, t+\theta\Delta t)$$

ὅθεν $$\Delta u = \Delta t \int_\alpha^\beta \varphi'_t(x, t+\theta\,\Delta t) dx \qquad 0<\theta<1$$

ἐπειδὴ δὲ ἐξ ὑποθέσεως ἡ παράγωγος $\varphi'_t(x, t)$ εἶνε συνεχὴς ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ (υ), ἂν θέσωμεν

$$\varphi'_t(x, t+\theta\,\Delta t) - \varphi'_t(x, t) = \omega,$$

ὅτε $$\Delta u = \Delta t \int_\alpha^\beta \varphi'_t(x, t)\, dx + \Delta t \int_\alpha^\beta \omega dx \qquad (3)$$

ἡ διαφορὰ ω δύναται νὰ γίνῃ μικροτέρα παντὸς τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ε, ὅταν $|\Delta t|$ ληφθῇ μικρότερον ἀριθμοῦ τινος δ, *οἱουδήποτε ὄντος τοῦ x ἐν τῷ διαστήματι α ... β*· ἐπομένως θὰ γίνῃ τότε

$$\int_\alpha^\beta \omega\, dx < (\beta-\alpha).\varepsilon$$

καὶ ἐπειδὴ τὸ πλάτος β—α τοῦ ὁλοκληρώματος εἶνε πεπερασμένον, τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο δύναται νὰ γίνῃ μικρότερον παντὸς τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, ὅταν $|\Delta t|$ ληφθῇ ἱκανῶς μικρόν, καὶ διὰ τοῦτο εἶνε

$$du = dt \int_\alpha^\beta \varphi'_t(x, t)\, dx \quad \text{ἢ καὶ} \quad \frac{du}{dt} = \int_\alpha^\beta \varphi'_t(x, t)\, dx \qquad (4)$$

Σημείωσις. Ἡ παράγωγος $\varphi'_t(x, t)$ θὰ εἶνε συνεχὴς ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ (υ), ἂν ἔχῃ παράγωγον πεπερασμένην ἐν αὐτῷ, διότι τότε εἶνε

$$\omega = \varphi'_t(x, t+\theta\,\Delta t) - \varphi'_t(x, t) = \theta.\Delta t.\varphi''_t(x, t+\lambda\Delta t) \qquad 0<\lambda<\theta$$

καὶ ἐπειδὴ ἡ δευτέρα παράγωγος μένει (οἱουδήποτε ὄντος τοῦ x ἐν τῷ διαστήματι α...β) μικροτέρα ἀριθμοῦ τινος M, ἕπεται

$$|\omega| < \mathrm{M}.\Delta t \quad \text{καὶ} \quad \int_\alpha^\beta \omega dx < \Delta t.\mathrm{M}(\beta-\alpha)$$

ἤτοι γίνεται τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο μικρότερον παντὸς τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, ὅταν Δt ληφθῇ ἱκανῶς μικρόν.

Ἡ προηγουμένη ἀπόδειξις ἐστηρίχθη ἐπὶ τῆς ὑποθέσεως, ὅτι τὸ πλάτος $\beta-\alpha$ τοῦ ὁλοκληρώματος εἶνε πεπερασμένον· ὅταν τὸ ἕτερον τῶν ὁρίων εἶνε ἄπειρον, ἡ πρότασις ἰσχύει, ἐὰν ἡ συνάρτησις $\varphi(x,t)$ καὶ αἱ δύο αὐτῆς παράγωγοι $\varphi'_t(x,t)$ καὶ $\varphi''_t(x,t)$ μένωσι συνεχεῖς καὶ πεπερασμέναι ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ $x=\alpha\ldots\beta$ καὶ $t=\gamma\ldots\delta$, ὁσονδήποτε μέγα καὶ ἂν γίνῃ τὸ β καὶ τὰ μὲν δύο ὁλοκληρώματα

$$u=\int_\alpha^\beta \varphi(x,t)du \quad \text{καὶ} \quad u'=\int_\alpha^\beta \varphi'_t(x,t)dx \tag{5}$$

τείνωσι (ὅταν β αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον) πρὸς ὅρια πεπερασμένα καὶ ὡρισμένα, τὸ δὲ ὁλοκλήρωμα

$$\int_\alpha^\beta \varphi''_t(x,t)\,dx$$

μένῃ πάντοτε (ἀπολύτως) μικρότερον ἀριθμοῦ τινος M.

Διότι τότε θὰ εἶνε

$$\Delta u=u'.\Delta t+\frac{(\Delta t)^2}{2}\int_\alpha^\beta \varphi''_t(x,t+\theta\Delta t)dx$$

καὶ ἐπειδὴ ὁ μὲν τελευταῖος ὅρος τῆς ἰσότητος ταύτης μένει πάντοτε (ὅσον μέγα καὶ ἂν γίνῃ τὸ ὅριον β) μικρότερος τοῦ $\frac{1}{2}M(\Delta t)^2$· τὰ δὲ δύο ὁλοκληρώματα u καὶ u' τείνουσι πρὸς τιμὰς πεπερασμένας καὶ ἐντελῶς ὡρισμένας (ὅταν β αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον), συνάγεται

$$d.\int_\alpha^\infty \varphi(x,t)\,dx=dt.\int_\alpha^\infty \varphi'_t(x,t)dx \tag{6}$$

Σημείωσις. Τὰ ὅρια α καὶ β τοῦ ὁλοκληρώματος u ὑπετέθησαν ἀνεξάρτητα ἀπὸ τῆς παραμέτρου t· ἂν ἐξαρτῶνται καὶ ταῦτα ἀπὸ τοῦ t, εἰς τὸ εὑρεθὲν διαφορικὸν τοῦ u πρὸς t πρέπει νὰ προστεθῶσι καὶ τὰ δύο μερικὰ διαφορικὰ αὐτοῦ πρὸς α καὶ πρὸς β, ἑπομένως θὰ εἶνε τότε

$$du=\varphi(\beta,t)\,d\beta-\varphi(\alpha,t)d\alpha+dt.\int_\alpha^\beta \varphi'_t(x,t)\,dx$$

Ἀλλὰ δυνάμεθα καὶ διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως $x=\alpha+(\beta-\alpha)y$ νὰ καταστήσωμεν τὰ ὅρια τοῦ ὁλοκληρώματος ἀνεξάρτητα ἀπὸ τῆς t· διότι ἡ ἀντικατάστασις αὕτη δίδει

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x,t)\,dt=(\beta-\alpha)\int_0^1 \varphi(\alpha+(\beta-\alpha)y,\ t)dy$$

153. Διὰ τῆς διαφορίσεως πρὸς παράμετρον εὑρίσκομεν ἐξ ἑνὸς ὁλοκληρώματος πλῆθος ἄλλων, ὡς δεικνύουσι τὰ ἑξῆς παραδείγματα.

1) Ἐκ τοῦ ὁλοκληρώματος

$$\int_0^1 x^\mu dx = \frac{1}{\mu+1} \qquad \mu+1>0$$

διὰ τῆς διαφορίσεως πρὸς τὴν παράμετρον μ εὑρίσκομεν

$$\int_0^1 x^\mu lx\, dx = -\frac{1}{(\mu+1)^2}$$

καὶ ἂν n φορὰς διαφορίσωμεν πρὸς μ, εὑρίσκομεν

$$\int_0^1 x^\mu (lx)^n dx = \frac{(-1)(-2)\dots(-n)}{(\mu+1)^{n+1}}$$

2) Ἐκ τοῦ ὁλοκληρώματος (σελ. 190)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2 x+\beta\,\eta\mu^2 x} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

ἂν διαφορίσωμεν πρὸς τὴν παράμετρον α, εὑρίσκομεν

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x\, dx}{(\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2 x+\beta\,\eta\mu^2 x)^2} = \frac{\pi}{4}\,\alpha^{-\frac{3}{2}}.\,\beta^{-\frac{1}{2}}$$

ἂν δὲ πρὸς β διαφορίσωμεν τὸ αὐτὸ ὁλοκλήρωμα, εὑρίσκομεν

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^2 x\, dx}{(\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2 x+\beta\,\eta\mu^2 x)^2} = \frac{\pi}{4}\,\alpha^{-\frac{1}{2}}.\,\beta^{-\frac{3}{2}}.$$

προσθέτοντες δὲ τὰ δύο ταῦτα ὁλοκληρώματα, εὑρίσκομεν

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2 x+\beta\,\eta\mu^2 x)^2} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}.$$

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον προβαίνοντες δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν πᾶν ὁλοκλήρωμα τῆς μορφῆς

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^{2\lambda}x\,dx}{(\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2 x+\beta\,\eta\mu^2 x)^\rho} \quad \text{ἢ} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu^{2\lambda}x\,dx}{(\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2 x+\beta\,\eta\mu^2 x)^\rho} \quad \text{ἢ} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2 x+\beta\,\eta\mu^2 x)^\rho}$$

τῶν λ καὶ ρ ὄντων ἀκεραίων καὶ θετικῶν (καὶ $\lambda<\rho$).

3) Ἔστω τέλος καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{dx}{t+x^2} \qquad t>0$$

ἐὰν θέσωμεν $x=y\sqrt{t}$, εὑρίσκομεν

$$\int_0^\infty \frac{dx}{t+x^2}=\frac{\pi}{2}t^{-\frac{1}{2}}$$

ἐὰν δὲ διαφορίσωμεν τὴν ἰσότητα ταύτην πρὸς t, εὑρίσκομεν

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(t+x^2)^2}=\frac{\pi}{2}.\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}$$

καὶ ἂν n φορὰς διαφορίσωμεν τὴν αὐτὴν ἰσότητα, εὑρίσκομεν

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(t+x^2)^{n+1}}=\frac{\pi}{2}.\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\;2n}t^{-n-\frac{1}{2}}$$

154. Τὰ διὰ τῆς διαφορίσεως πρὸς παράμετρον εὑρισκόμενα ὁλοκληρώματα ἐξ ὁλοκληρώματος, οὗτινος εἶνε γνωστὴ ἡ παράγουσα, δύνανται νὰ εὑρεθῶσι καὶ διὰ τῆς μεθόδου τῶν παραγουσῶν.

Διότι, ἂν τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x,t)\,dx=\sigma(t)$$

εὑρέθη διὰ τῆς παραγούσης $\int \varphi(x,t)\,dx$, ἥτις ἔστω ἡ $\mathrm{f}(x,t)$, τὸ διὰ τῆς διαφορίσεως αὐτοῦ πρὸς t προκύπτον ὁλοκλήρωμα

$$\int_\alpha^\beta \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} dx = \sigma'(t)$$

ἔχει καὶ τοῦτο γνωστὴν παράγουσαν· εἶνε δὲ αὕτη ἡ παράγωγος τῆς $\mathrm{f}(x,t)$ πρὸς t, ἤτοι ἡ $\mathrm{f}'_t(x,t)$.

Διότι ἐκ τῆς σχέσεως

$$\frac{\partial \mathrm{f}(x,t)}{\partial x} = \varphi(x,t),$$

ἕπεται, ἂν διαφορίσωμεν πρὸς t

$$\frac{\partial \mathrm{f}'_t(x,t)}{\partial x} = \varphi'_t(x,t) \qquad \text{(παράβαλε ἐδ. 21)}$$

ἀλλ' ἡ ἐφαρμογὴ τῆς μεθόδου τῆς διαφορίσεως πρὸς παράμετρον εὐκολύνει συνήθως τὴν εὕρεσιν τῶν ὁλοκληρωμάτων.

Β΄) Ὁλοκλήρωσις πρὸς παράμετρον ὑπὸ τὸ σύμβολον τῆς ὁλοκληρώσεως.

155. Ἔστω τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x,t)dx = \sigma(t) \qquad (1)$$

ἔνθα ἡ συνάρτησις $\varphi(x,t)$ ὑποτίθεται συνεχὴς καὶ πεπερασμένη ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ

$$\left.\begin{array}{l} x = \alpha \;.\;.\;.\; \beta \\ t = \gamma \;.\;.\;.\; \delta\cdot \end{array}\right. \qquad (\upsilon)$$

ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα (1) ἐπὶ dt καὶ ὁλοκληρώσωμεν αὐτὰ πρὸς t μεταξὺ τῶν ὁρίων γ καὶ δ, εὑρίσκομεν

$$\int_\gamma^\delta dt \int_\alpha^\beta \varphi(x,t)\, dx = \int_\gamma^\delta \sigma(t) dt$$

καὶ ἐπειδὴ τὸ πρῶτον μέλος εἶνε τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα

$$\int \varphi(x,t)\, d(x,t)$$

ἐκτεινόμενον ἐπὶ τοῦ ὀρθογωνίου (υ), ἐὰν ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν ὁλοκληρώσεων, εὑρίσκομεν

$$\int_{\alpha}^{\beta} dx \left\{ \int_{\gamma}^{\delta} \varphi(x,t)dt \right\} = \int_{\gamma}^{\delta} \sigma(t)dt \qquad (2)$$

τουτέστιν, *ἵνα ὁλοκληρώσωμεν πρὸς τὴν παράμετρον t ὁλοκλήρωμά τι πρὸς x, ἀρκεῖ νὰ ὁλοκληρώσωμεν πρὸς t τὴν ὑπὸ τὸ σύμβολον τῆς ὁλοκληρώσεως παράστασιν.*

156. Ἐὰν ἐκτελεσθῶσιν αἱ πρὸς t ὁλοκληρώσεις, προκύπτει ἐκ τοῦ δοθέντος ὁλοκληρώματος (1) ἄλλο, ὅπερ πολλάκις εἶνε ἀδύνατον νὰ εὑρεθῇ διὰ τῶν παραγουσῶν· διότι εἰς τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα

$$\int \varphi(x,t)\, d(x,t) \qquad \begin{matrix} x=\alpha\ldots\beta \\ t=\gamma\ldots\delta \end{matrix}$$

συμβαίνει πολλάκις νὰ ἐκτελῶνται μὲν ἀμφότεραι αἱ ὁλοκληρώσεις διὰ τῶν παραγουσῶν, ὅταν γίνηται πρώτη ἡ πρὸς x καὶ ἔπειτα ἡ πρὸς t $\Big($ὅτε ἡ μὲν πρώτη δίδει $\sigma(t)$ ἡ δὲ δευτέρα τὸ $\displaystyle\int_{\gamma}^{\delta} \sigma(t)\, dt\Big)$· ἀλλ' ὅταν ἀντιστραφῇ ἡ τάξις, νὰ ἐκτελῆται μόνον ἡ πρὸς t διὰ τῆς παραγούσης αὐτῆς ἡ δὲ παράγουσα τῆς δευτέρας ὁλοκληρώσεως νὰ εἶνε ἄγνωστος· τὰ οὕτως εὑρισκόμενα ὁλοκληρώματα (ὧν ἡ παράγουσα συνάρτησις εἶνε ἄγνωστος) ἔχουσιν ὅρια οὐχὶ τυχαῖα οὐδὲ μεταβλητά, ἀλλὰ καταλλήλους τινὰς τιμὰς τῆς x· διότι, ἂν διὰ τὰ τυχόντα ὅρια ἦτο γνωστὸν τὸ ὁλοκλήρωμα, θὰ ἐγίνετο γνωστὴ εὐθὺς καὶ ἡ παράγουσα αὐτοῦ συνάρτησις.

Τοῦτο γίνεται δῆλον ἐκ τῶν ἑξῆς παραδειγμάτων.

1) Θεωρήσωμεν τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^1 x^{\mu} dx = \frac{1}{\mu+1} \qquad \mu+1>0$$

ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα ἐπὶ $d\mu$ καὶ ὁλοκληρώσωμεν πρὸς μ μεταξὺ τῶν ὁρίων α καὶ β (οἱ ἀριθμοὶ $\alpha+1$ καὶ $\beta+1$ ὑποτίθενται θετικοί), εὑρίσκομεν

$$\int_0^1 \frac{x^{\beta}-x^{\alpha}}{lx}\, dx = l\left(\frac{\beta+1}{\alpha+1}\right)$$

2) Ἔστω τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha} \qquad \alpha>0$$

ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης ἐπὶ $d\alpha$ καὶ ὁλοκληρώσωμεν ἔπειτα πρὸς α μεταξὺ τῶν ὁρίων β καὶ γ (τῶν β καὶ γ ὄντων θετικῶν ἀριθμῶν), εὑρίσκομεν

$$\int_0^{\infty}\left(e^{-\beta x}-e^{-\gamma x}\right)\frac{dx}{x}=l\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)$$

ἡ δὲ παράγουσα τοῦ ὁλοκληρώματος τούτου εἶνε ἄγνωστος.

3) Ἔστω πρὸς τούτοις τὸ ὁλοκλήρωμα (σελ. 178)

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\,\text{ημ}\,\beta x\,.\,dx=\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} \qquad \alpha>0$$

πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ $d\alpha$ καὶ ὁλοκληροῦντες πρὸς α μεταξὺ τῶν ὁρίων γ καὶ δ (ἅτινα ὡς τιμαὶ τῆς α εἶνε ἀμφότερα θετικοὶ ἀριθμοί), εὑρίσκομεν

$$\int_\gamma^\delta d\alpha\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\,\text{ημ}\,\beta x dx=\int_\gamma^\delta\frac{\beta d\alpha}{\beta^2+\alpha^2}=\left[\text{τοξ εφ}\frac{\alpha}{\beta}\right]_\gamma^\delta$$

ἐπειδὴ δὲ τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα

$$\int e^{-\alpha x}\,\text{ημ}\,\beta x\, d(x,\alpha) \qquad \begin{matrix} x=0\ \ldots\ \infty \\ \alpha=\gamma\ \ldots\ \delta \end{matrix}$$

εἶνε πεπερασμένον καὶ ἐντελῶς ὡρισμένον, δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν ὁλοκληρώσεων ὅτε εὑρίσκομεν ἐκτελοῦντες τὴν ὁλοκλήρωσιν πρὸς α

$$\int_0^{\infty}\frac{\text{ημ}\,\beta x}{x}\left(e^{-\gamma x}-e^{-\delta x}\right)dx=\left[\text{τοξ εφ}\frac{\alpha}{\beta}\right]_\gamma^\delta \qquad (3)$$

τοῦ ὁλοκληρώματος τούτου ἡ παράγουσα εἶνε ἄγνωστος, εὑρέθη δ' ὅμως τοῦτο μεταξὺ τῶν ὁρίων 0 καὶ ∞ διὰ τῆς ἰδιότητος τῶν διπλῶν ὁλοκληρωμάτων.

Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ γ καὶ δ εἶνε τυχόντες θετικοὶ ἀριθμοί, ἐὰν νοήσωμεν τὸν δ αὐξανόμενον εἰς ἄπειρον, τὸν δὲ γ ἐλαττούμενον μέχρι τοῦ 0, εὑρίσκομεν

$$(4) \qquad \int_0^\infty \frac{\eta\mu\beta x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \qquad \text{ἐὰν } \beta > 0$$

καὶ

$$\int_0^\infty \frac{\eta\mu\beta x}{x} dx = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{ἐὰν } \beta < 0$$

Ἄξιον παρατηρήσεως εἶνε, ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μεγέθους τοῦ β, ἀλλάσσει δ' ὅμως σημεῖον, ἂν ὁ β ἀλλάξῃ σημεῖον καὶ μηδενίζεται, ὅταν ὁ β μηδενισθῇ.

Ἐὰν εἰς τὸ αὐτὸ ὁλοκλήρωμα (3) ὑποθέσωμεν $\delta = \infty$, εὑρίσκομεν (ὑποθέτοντες $\beta > 0$)

$$\int_0^\infty e^{-\gamma x} \frac{\eta\mu\beta x}{x} dx = \text{τοξ εφ}\left(\frac{\beta}{\gamma}\right) \qquad (5)$$

Ἐὰν (τοῦ β ὄντος θετικοῦ) πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἰσότητα (4) ἐπὶ $d\beta$ καὶ ὁλοκληρώσωμεν πρὸς β μεταξὺ τῶν ὁρίων 0 καὶ 2ρ ($\rho > 0$), εὑρίσκομεν

$$\int_0^\infty \frac{\eta^2\mu(\rho x)}{x^2} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \rho$$

Ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὁλοκληρώματος (4)ποριζόμεθα καὶ ἄλλα ὡς ἑξῆς.

Ἔστωσαν α καὶ β δύο τυχόντες θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ $\alpha > \beta$· τότε θὰ εἶνε

$$\int_0^\infty \frac{\eta\mu(\alpha+\beta)x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{καὶ} \int_0^\infty \frac{\eta\mu(\alpha-\beta)x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Ἐκ τούτων ἕπεται, ἂν ἀναπτύξωμεν τὰ ἡμίτονα

$$\int_0^\infty \frac{\eta\mu(\alpha x) . \sigma\upsilon\nu(\beta x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

ἀλλὰ

$$\int_0^\infty \frac{\eta\mu(\beta x) . \sigma\upsilon\nu(\alpha x)}{x} dx = 0$$

Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ $\alpha=\beta$, εἶνε

$$\int_0^\infty \frac{\eta\mu(\alpha x)\,\sigma\upsilon\nu(\alpha x)}{x}dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\eta\mu(2\alpha x)}{x}dx=\frac{\pi}{4}.$$

Ἐκ τούτων βλέπομεν ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{\eta\mu(\alpha x)\,\sigma\upsilon\nu(\beta x)}{x}dx \tag{6}$$

ἔνθα α καὶ β εἶνε τυχόντες θετικοὶ ἀριθμοί, θὰ εἶνε

$$=\frac{\pi}{2}, \quad \text{ἐὰν} \quad \alpha>\beta$$

$$=0, \quad \text{ἂν} \quad \alpha<\beta$$

καὶ

$$=\frac{\pi}{4}, \quad \text{ἂν} \quad \alpha=\beta$$

Ἐκ τοῦ ὁλοκληρώματος (6) εὑρίσκεται πλῆθος ἄλλων ἐχόντων ἀξιοπεριέργους ἀνωμαλίας περὶ τὴν συνέχειαν.

Ἐὰν θέσωμεν

$$u=\int_0^\infty \frac{\eta\mu(\alpha x)\,\sigma\upsilon\nu(\beta x)}{x}dx \qquad \alpha>0, \quad \beta>0$$

καὶ πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ἐπὶ $d\beta$ καὶ ὁλοκληρώσωμεν ἔπειτα πρὸς β ἀπὸ 0 μέχρι γ, εὑρίσκομεν

$$\int_0^\infty \frac{\eta\mu(\alpha x)\eta\mu(\gamma x)}{x^2}dx=\int_0^\gamma u d\beta$$

καὶ ἂν μὲν εἶνε $\gamma<\alpha$, θὰ εἶνε διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ β (ἐν τῷ διαστήματι $0\ldots\gamma$) $u=\frac{\pi}{2}$· ἑπομένως τὸ δεύτερον μέλος θὰ εἶνε $\frac{\pi}{2}.\gamma$· ἀλλ' ἂν εἶνε $\gamma>\alpha$, θὰ εἶνε

$$\int_0^\gamma u d\beta=\int_0^\alpha u d\beta+\int_\alpha^\gamma u d\beta$$

καὶ ὅταν μὲν τὸ β διανύῃ τὸ διάστημα $0\ldots\alpha$, ἔχομεν $u=\frac{\pi}{2}$, ὅταν δὲ τὸ α . . . γ, ἔχομεν $u=0$· ἄρα

$$\int_0^\gamma u d\beta = \frac{\pi}{2}\alpha$$

Ἐκ τούτων βλέπομεν ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα

$$(7) \qquad \int_0^\infty \frac{\eta\mu(\alpha x)\eta\mu(\gamma x)}{x^2}dx \qquad \alpha>0, \quad \gamma>0$$

εἶνε ἴσον τῷ μικροτέρῳ ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν $\frac{\pi}{2}\alpha$ ἢ $\frac{\pi}{2}\gamma$.

157. Ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάζωμεν ἐπὶ τὸ διαφορικὸν τῆς παραμέτρου ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x, t)dx = \sigma(t) \qquad (1)$$

δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάζωμεν ἐπὶ τὴν τυχοῦσαν συνάρτησιν τοῦ t, τὴν $\mathrm{f}(t)$, καὶ ἐπὶ τὸ dt, καὶ ἔπειτα νὰ ὁλοκληρῶμεν. Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον ἐκ τῆς ἰσότητος (1) προκύπτει μετὰ τὴν ἀλλαγὴν τῆς τάξεως τῶν ὁλοκληρώσεων

$$\int_\alpha^\beta dx \left\{ \int_\gamma^\delta \mathrm{f}(t)\, \varphi(x, t)\, dt \right\} = \int_\gamma^\delta \sigma(t)\, \mathrm{f}(t) dt$$

Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\, \eta\mu(\beta x)\, dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ $\frac{\sigma\upsilon\nu\,\beta}{\beta}d\beta$ καὶ ἔπειτα ὁλοκληρώσωμεν πρὸς β ἀπὸ 0 μέχρις ∞, εὑρίσκομεν

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \left\{ \int_0^\infty \frac{\eta\mu.\beta x.\sigma\upsilon\nu\beta}{\beta} d\beta \right\} dx = \int_0^\infty \frac{\sigma\upsilon\nu\beta.d\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

καὶ ἐπειδὴ ἡ πρὸς τὸ x ὁλοκλήρωσις δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο, ὧν ἡ πρώτη ἀπὸ 0 μέχρις 1 ἡ δὲ δευτέρα ἀπὸ 1 μέχρις ∞. τὸ πρῶτον μέλος γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$\int_0^1 e^{-\alpha x}\left\{\int_0^\infty \frac{\eta\mu(\beta x).\sigma\upsilon\nu\beta}{\beta}d\beta\right\}dx+\int_1^\infty e^{-\alpha x}\left\{\int_0^\infty \frac{\eta\mu(\beta x).\sigma\upsilon\nu\beta}{\beta}d\beta\right\}dx$$

καὶ ἐν μὲν τῷ πρώτῳ τῶν ὁλοκληρωμάτων τούτων εἶνε $\beta x<\beta$, ἐπομένως ἡ πρὸς β ὁλοκλήρωσις δίδει ἐξαγόμενον 0, ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ εἶνε $\beta x>\beta$· ἐπομένως ἡ πρὸς β ὁλοκλήρωσις δίδει $\frac{\pi}{2}$· ὅθεν συνάγεται

$$\frac{\pi}{2}\int_1^\infty e^{-\alpha x}dx=\int_0^\infty \frac{\sigma\upsilon\nu\beta\, d\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

ἤτοι

$$\int_0^\infty \frac{\sigma\upsilon\nu\beta\ d\beta}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha}$$

καὶ ἂν τεθῇ $\beta=\alpha x$ $(\alpha>0)$ ἕπεται

$$\int_0^\infty \frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha x)\,dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha} \tag{8}$$

158. Ἡ εὕρεσις νέων ὁλοκληρωμάτων διὰ τῆς ὁλοκληρώσεως πρὸς παράμετρον στηρίζεται, ὡς εἴδομεν, ἐπὶ τῆς ἰδιότητος τῶν διπλῶν ὁλοκληρωμάτων, καθ' ἣν *ἡ τάξις τῶν ὁλοκληρώσεων εἶνε ἀδιάφορος πρὸς τὸ ἐξαγόμενον*. Ἀλλ' ἡ μέθοδος αὕτη εἶνε μερικὴ μόνον περίπτωσις ἄλλης γενικωτέρας μεθόδου, δι' ἧς εὑρίσκομεν πολλάκις ὁλοκληρώματα (ὧν ἡ παράγουσα συνάρτησις εἶνε ἄγνωστος).

Ἡ μέθοδος αὕτη συνίσταται εἰς τὸ νὰ θεωρῶμεν τὸ ζητούμενον ὁλοκλήρωμα ὡς τὸ ἐξαγόμενον μιᾶς τῶν ὁλοκληρώσεων διπλοῦ τινος ὁλοκληρώματος, ὅπερ εὑρίσκεται ἢ διὰ τῆς ἀλλαγῆς τῆς τάξεως τῶν ὁλοκληρώσεων ἢ καὶ διὰ τῆς καταλλήλου διαιρέσεως τοῦ τόπου τῆς ὁλοκληρώσεως, ἤτοι διὰ τοῦ καταλλήλου μετασχηματισμοῦ. Ἡ ἐκλογὴ τοῦ διπλοῦ ὁλοκληρώματος, οὗτινος μία τῶν ὁλοκληρώσεων δίδει τὸ ζητούμενον ἁπλοῦν, εἰς οὐδένα ὑπόκειται κανόνα· οἴκοθεν δὲ ἐννοεῖται, ὅτι πρέπει νὰ γίνηται οὐχὶ τυχαίως ἀλλὰ προσηκόντως, ἐὰν ἡ μέθοδος μέλλῃ νὰ φέρῃ εἰς ἐξαγόμενον. Παρατηρητέον προσέτι ὅτι τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα, ἂν ὁ τόπος τῆς ὁλοκληρώσεως αὐτοῦ εἶνε ἄπειρος, πρέπει νὰ εἶνε μόνιμον, ἤτοι νὰ προκύπτῃ τὸ αὐτὸ ὁπωςδήποτε καὶ ἂν γίνῃ ἡ διαίρεσις τοῦ τόπου καὶ καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν ἐκτελῆται ἡ ἄθροισις.

Πρὸς κατανόησιν τῆς μεθόδου ταύτης παραθέτομεν τὰ ἑξῆς παραδείγματα.

1) Εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{\eta\mu(\beta x)dx}{x} \qquad (4)$$

(ὅπερ ἤδη εὕρομεν) παρατηροῦμεν ὅτι ὁ παράγων $\frac{1}{x}$ προκύπτει ἐκ τῆς ὁλοκληρώσεως $\int_0^\infty e^{-yx}\,dy$· ἐπομένως τὸ ὁλοκλήρωμα (4) προκύπτει ἐκ τοῦ διπλοῦ ὁλοκληρώματος

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-xy}\,\eta\mu(\beta x)dx\,dy$$

διὰ τῆς πρὸς y ὁλοκληρώσεως.

Ἐὰν δὲ ἐν τῷ διπλῷ τούτῳ ὁλοκληρώματι ἐκτελέσωμεν πρῶτον τὴν ὁλοκλήρωσιν πρὸς x καὶ ἔπειτα τὴν πρὸς y, εὑρίσκομεν (ἐὰν $\beta>0$) $\frac{\pi}{2}$· ὅθεν

$$\int_0^\infty \frac{\eta\mu(\beta x)}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

2) Εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha x}{1+x^2}dx \qquad (8)$$

θεωροῦμεν τὸν παράγοντα $\frac{1}{1+x^2}$ ὡς ἐξαγόμενον τῆς ὁλοκληρώσεως

$$\int_0^\infty e^{-y}\,\frac{\eta\mu(xy)}{x}dy$$

τότε τὸ ὁλοκλήρωμα (8) θὰ εἶνε τὸ ἐξαγόμενον τοῦ διπλοῦ ὁλοκληρώματος

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-y} \frac{\eta\mu(xy)\sigma\upsilon\nu\, \alpha x}{x} dx dy$$

(ὅταν ἐκτελεσθῇ ἡ ὁλοκλήρωσις πρὸς y)· ἀλλὰ τοῦτο εὑρίσκεται, ἐὰν πρῶτον ἐκτελεσθῇ ἡ ὁλοκλήρωσις πρὸς x καὶ ἔπειτα ἡ πρὸς y· διότι, ἂν χωρίσωμεν τὴν πρὸς y ὁλοκλήρωσιν εἰς δύο, μίαν μὲν ἀπὸ 0 μέχρις α, τὴν δὲ ἄλλην ἀπὸ α μέχρις ∞, τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα γίνεται

$$\int_0^\alpha e^{-y}\, dy \left\{ \int_0^\infty \frac{\eta\mu(xy)\sigma\upsilon\nu(\alpha x)}{x} dx \right\} + \int_\alpha^\infty e^{-y}\, dy \left\{ \int_0^\infty \frac{\eta\mu(xy)\sigma\upsilon\nu(\alpha x)}{x}\, dx \right.$$

ἀλλὰ τότε αἱ πρὸς x ὁλοκληρώσεις δίδουσιν, ἡ μὲν πρώτη 0 (διότι ἐν αὐτῇ εἶνε $xy < \alpha x$) ἡ δὲ δευτέρα $\frac{\pi}{2}$ (διότι ἐν αὐτῇ εἶνε $xy > \alpha x$)· ὅθεν τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα καταντᾷ

$$\frac{\pi}{2} \int_\alpha^\infty e^{-y}\, dy \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{\pi}{2}\; e^{-\alpha}$$

ἐπομένως

$$\int_0^\infty \frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}\; e^{-\alpha}$$

Ἀλλ' ἂν εἰς τὸ αὐτὸ ὁλοκλήρωμα θεωρήσωμεν τὸν παράγοντα $\frac{1}{1+x^2}$ ὡς ἐξαγόμενον τῆς ὁλοκληρώσεως

$$\int_0^\infty e^{-y}\, \sigma\upsilon\nu(xy) dy,$$

τὸ ὁλοκλήρωμα ἀνάγεται εἰς τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-y}\, \sigma\upsilon\nu(xy)\sigma\upsilon\nu(\alpha x) dx dy$$

ὅπερ εἶνε παραλλάσσον καὶ ἡ ὁλοκλήρωσις πρὸς x δίδει ἐξαγόμενον ἀόριστον.

Ἔστω πρὸς τούτοις τὸ ὁλοκλήρωμα

$$u=\int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ ἐφ' ἑαυτό, ὅτε εὑρίσκομεν

$$u^2=\int_0^\infty e^{-x^2}dx.\int_0^\infty e^{-y^2}dy\cdot$$

ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦτο εἶνε τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}dxdy,$$

ὅπερ εὑρίσκεται, ἐὰν μετασχηματισθῇ εἰς πολικὰς συντεταγμένας (ἐδ. 146), διότι τότε γίνεται

$$\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^2}d\rho d\theta$$

καὶ ἡ μὲν πρώτη ὁλοκλήρωσις, ἡ πρὸς θ, δίδει $\frac{\pi}{2}\ e^{-\rho^2}\rho d\rho$, ἡ δὲ δευτέρα δίδει $\frac{\pi}{4}$, ὅθεν $u=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot$ ἤτοι

$$(9)\qquad \int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο προσδιώρισεν ὁ γάλλος μαθηματικὸς Poisson.

Ἐὰν εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο θέσωμεν ἀντὶ τοῦ x, $x\sqrt{\alpha}$, $(\alpha>0)$, προκύπτει

$$(10)\qquad \int_0^\infty e^{-\alpha x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.\alpha^{-\frac{1}{2}}$$

καὶ ἂν διαφορίσωμεν πρὸς τὴν παράμετρον α ἑκάτερον τῶν μελῶν, εὑρίσκομεν

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}x^2dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.\frac{1}{2}\alpha^{-\frac{3}{2}}$$

καὶ ἂν n φορὰς διαφορίσωμεν, εὑρίσκομεν τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\, x^{2n}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}\alpha^{-n-\frac{1}{2}}$$

καὶ ἂν τεθῇ νῦν $\alpha=1$, ἕπεται

$$(11) \qquad \int_0^\infty e^{-x^2}.\, x^{2n}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}.$$

Ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις e^{-x^2} εἶνε ἀρτία, ἕπεται

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^0 e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

(διότι τὰ στοιχεῖα ἀμφοτέρων τῶν ὁλοκληρωμάτων εἶνε ἓν πρὸς ἓν ἴσα)· ἄρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

καὶ ἂν ἐν τούτῳ θέσωμεν $x+k$ ἀντὶ τοῦ x, τὰ ὅρια οὐδαμῶς ἀλλοιοῦνται καὶ εὑρίσκομεν

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-2kx}\, dx = \sqrt{\pi}.e^{k^2}$$

ὁμοίως εὑρίσκομεν, ἂν θέσωμεν $x-k$ ἀντὶ x,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+2kx}dx = \sqrt{\pi}.e^{k^2}$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}(e^{2kx}+e^{-2kx})dx = 2\sqrt{\pi}.\, e^{k^2}$$

Ἡ ἰσότης αὕτη ἰσχύει διὰ πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ k· ἐπειδὴ δὲ ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς δύνανται νὰ ἀναπτυχθῶσι κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ k εἰς σειρὰς συγκλινούσας, συνάγεται, ὅτι οἱ συντελεσταὶ τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ k θὰ εἶνε ἴσοι ἐν ταῖς δύο σειραῖς. ἑπομένως θὰ εἶνε ἴσαι αἱ σειραὶ καὶ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ k εἴτε πραγματικὴν εἴτε φανταστικήν, ἀρκεῖ μόνον νὰ εἶνε συγκλίνουσαι (ὅπερ ἐνταῦθα συμβαίνει)· ἐὰν λοιπὸν θέσωμεν ki ἀντὶ k εἰς τὴν ἰσότητα ταύτην, εὑρίσκομεν

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \text{συν}(2kx)\, dx = \sqrt{\pi}\, e^{-k^2}$$

καὶ ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις e^{-x^2} συν$(2kx)$ εἶνε ἀρτία, θὰ εἶνε

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} \text{συν}(2kx) dx = \int_{0}^{\infty} e^{-x^2} \text{συν}(2kx) dx$$

ὅθεν

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} \text{συν}(2kx)\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.\, e^{-k^2} \tag{12}$$

Ἐὰν δὲ ἐν τῷ ὁλοκληρώματι τούτῳ θέσωμεν $x\sqrt{\alpha}$ ἀντὶ τοῦ x $(\alpha > 0)$, εὑρίσκομεν

$$(13) \qquad \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x^2} \text{συν}(2\beta x) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\; e^{-\frac{\beta^2}{\alpha}} \qquad (\beta = k\sqrt{\alpha})$$

Θεωρήσωμεν πρὸς τούτοις τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\text{συν}\, x}{\sqrt{x}} dx,$$

ὅπερ εἶνε πεπερασμένον (ἐδ. 122).

Ἐὰν θεωρήσωμεν τὸν παράγοντα $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ὡς προκύψαντα ἐκ τῆς ὁλοκληρώσεως

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-xy^2} dy \qquad (\text{τύπος } 10)$$

τὸ ὁλοκλήρωμα, περὶ οὗ λόγος, γίνεται διπλοῦν ὁλοκλήρωμα

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-xy^2} \text{συν} x\, dx\, dy$$

καὶ ἂν πρῶτον ἐκτελεσθῇ ἡ ὁλοκλήρωσις πρὸς x, εὑρίσκομεν

$$\int_0^\infty \frac{\text{συν}\, x}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{y^2 dy}{1+y^4} = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi} \qquad (\text{σελ. } 184)$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{\text{ημ}\, x}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}.$$

Ἐὰν εἰς τὰ δύο ταῦτα ὁλοκληρώματα θέσωμεν x^2 ἀντὶ x, εὑρίσκομεν

$$\int_0^\infty \text{συν}(x^2) dx = \int_0^\infty \text{ημ}(x^2)\, dx = \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}.$$

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Νὰ δειχθῇ, ὅτι εἶνε

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \dots + \frac{x^\rho}{1.2\dots\rho} = \frac{1}{1.2\dots\rho} \int_0^\infty e^{-t} (t+x)^\rho dt$$

2) Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{\text{ημ}\alpha x . \text{ημ}\beta x . \text{ημ}\gamma x}{x} dx$$

εἶνε ἴσον τῷ $\frac{\pi}{4}$, ἐὰν μηδεὶς τῶν θετικῶν ἀριθμῶν α, β, γ ὑπερβαίνῃ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων, καὶ ἴσον τῷ $\frac{\pi}{8}$, ἂν εἷς εἶνε ἴσος τῷ ἀθροίσματι τῶν δύο ἄλλων, ἐὰν δέ τις ὑπερβαίνῃ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων, τὸ ὁλοκλήρωμα εἶνε 0.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV.

ΕΥΛΗΡΙΑΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

159. Τὰ δύο ὁλοκληρώματα

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \quad \text{καὶ} \quad \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$$

ἅτινα ὡς ἤδη ἐδείχθη (σελ. 201) εἶνε πεπερασμένα, τὸ μὲν πρῶτον, ὅταν ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ p καὶ q εἶνε θετικοί, τὸ δὲ δεύτερον, ὅταν ὁ n εἶνε θετικὸς ἀριθμός, λέγονται Εὐληριανὰ (ἀπὸ τοῦ Euler) καὶ τὸ μὲν πρῶτον λέγεται τοῦ *πρώτου εἴδους*, τὸ δὲ δεύτερον τοῦ *δευτέρου*· ἐπειδὴ δὲ εἰς ταῦτα ἀνάγεται πλῆθος ἄλλων ὁλοκληρωμάτων, παριστῶσιν αὐτὰ συντομίας χάριν διὰ τῶν $B(p, q)$ καὶ $\Gamma(n)$,

ἤτοι
$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

καὶ
$$\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx \qquad (1)$$

Τὰ ὁλοκληρώματα ταῦτα ἐμφανίζονται πολλάκις καὶ ὑπὸ ἄλλην μορφήν· ἐὰν τῷ ὄντι θέσωμεν εἰς τὸ πρῶτον $x=\eta\mu^2\theta$, εἰς δὲ τὸ δεύτερον $x=t^2$, εὑρίσκομεν

$$B(p, q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{2p-1}\theta\ \sigma\upsilon\nu^{2q-1}\theta\ d\theta$$

$$\Gamma(n)=2\int_0^\infty e^{-t^2}\, t^{2n-1}\, dt \qquad (2)$$

Ἐὰν δὲ εἰς τὸν τύπον τοῦτον θέσωμεν $n=\frac{1}{2}$, εὑρίσκομεν

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}.$$

160. Τὰ εὐληριανὰ ὁλοκληρώματα τοῦ πρώτου εἴδους ἀνάγονται εἰς τὰ τοῦ δευτέρου.

Διότι εἶνε

$$\Gamma(p)=2\int_0^{\infty} e^{-x^2}x^{2p-1}\,dx$$

$$\Gamma(q)=2\int_0^{\infty} e^{-y^2}y^{2q-1}\,dy$$

ὅθεν

$$\Gamma(p).\Gamma(q)=4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2}x^{2p-1}y^{2q-1}\,dxdy$$

ἐὰν δὲ μετασχηματίσωμεν τὸ διπλοῦν τοῦτο ὁλοκλήρωμα εἰς πολικὰς συντεταγμένας (ἤτοι ἂν διαιρέσωμεν τὸν τόπον αὐτοῦ, ὅστις εἶνε ἡ θετικὴ γωνία ΧΟΥ, εἰς κολοβοὺς τομεῖς), εὑρίσκομεν

$$\Gamma(p).\Gamma(q)=4\int_0^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^2}\rho^{2p+2q-1}\,\sigma\upsilon\nu^{2p-1}\theta\;\eta\mu^{2q-1}\theta\;d\rho d\theta=$$

$$=\left(2\int_0^{\infty} e^{-\rho^2}\rho^{2(p+q)-1}\,d\rho\right)\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^{2p-1}\theta\;\eta\mu^{2q-1}\theta\;d\theta\right)$$

τουτέστι $\Gamma(p)\Gamma(q)=\Gamma(p+q)\mathrm{B}(p,q)$

ὅθεν $$\mathrm{B}(p,\,q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \qquad (3)$$

161. Τὸ ὁλοκλήρωμα $\Gamma(n)$ τοῦ δευτέρου εἴδους ἔχει τὰς ἑξῆς ἰδιότητας.

1η) $\Gamma(n+1)=n.\Gamma(n)$.

Ἵνα δείξωμεν τοῦτο, ἀρκεῖ ἐν τῷ ὁλοκληρώματι

$$\Gamma(n+1) \quad \text{ἤτοι ἐν τῷ} \int_0^\infty e^{-x}\, x^n dx$$

νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν κατὰ παράγοντας ὁλοκλήρωσιν ὡς ἑξῆς

$$\int e^{-x} x^n dx = \int x^n d(-e^{-x}) = -e^{-x}\, x^n + n \int e^{-x} x^{n-1} dx$$

καὶ νὰ θέσωμεν ἔπειτα τὰ ὅρια 0 καὶ ∞· τότε προκύπτει

$$\int_0^\infty e^{-x} x^n dx = n \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx \quad \text{ἤτοι} \quad \Gamma(n+1) = n.\Gamma(n) \qquad (4)$$

Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς n εἶνε ἀκέραιος καὶ θετικός, ἐφαρμόζοντες ἐπανειλημμένως τὸν τύπον τοῦτον εὑρίσκομεν, διότι $\Gamma(1)=1$,

$$\Gamma(n) = 1.2.3.4\ldots(n-1) \qquad \text{(παράβλ. σελ. 177)}$$

Ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης συνάγεται, ὅτι ἀρκεῖ νὰ εἰξεύρωμεν τὰς τιμὰς τοῦ $\Gamma(n)$ διὰ τὰς τιμὰς τοῦ n τὰς μεταξὺ 0 καὶ 1 περιεχομένας, ἵνα εὕρωμεν ἀμέσως τὰς τιμὰς αὐτοῦ διὰ πᾶσαν θετικὴν τιμὴν τοῦ n (δι' ἀρνητικὰς τιμὰς τοῦ n καὶ διὰ $n=0$ τὸ ὁλοκλήρωμα $\Gamma(n)$ εἶνε ἄπειρον).

Παραδείγματος χάριν εἶνε

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

ἐπίσης $$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}.$$

2α) Τοῦ n περιλαμβανομένου μεταξὺ 0 καὶ 1 θὰ εἶνε

$$\Gamma(n).\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\eta\mu(n\pi)} \qquad (5)$$

Διότι ἐκ τῆς τιμῆς (1) τοῦ ὁλοκληρώματος $B(p, q)$, ἐὰν θέσωμεν $p=n$, $q=1-n$, εὑρίσκομεν

$$B(n,\ 1-n) = \Gamma(n).\Gamma(1-n) = \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{-n}\, dx$$

καὶ ἂν θέσωμεν

$$x=\frac{y}{1+y}, \quad \text{ὅτε } 1-x=\frac{1}{1+y} \quad \text{καὶ} \quad dx=\frac{dy}{(1+y)^2}$$

εὑρίσκομεν

$$\Gamma(n)\,\Gamma(1-n)=\int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{1+y}dy=\frac{\pi}{\eta\mu(n\pi)} \qquad (\text{σελ. } 191)$$

Διὰ τῆς ἰδιότητος ταύτης, ἐὰν εἶνε γνωσταὶ αἱ τιμαὶ τοῦ $\Gamma(n)$ διὰ τὰς τιμὰς τοῦ n ἀπὸ 0 μέχρις $\frac{1}{2}$, εὑρίσκονται καὶ αἱ τιμαὶ διὰ $n=\frac{1}{2}\;.\;.\;.\;1$.

3$^{\gamma}$) Τὸ ὁλοκλήρωμα $\Gamma(n)$ εἶνε τὸ ὅριον τοῦ ἑξῆς γινομένου

$$\frac{1.2.3\;.\;.\;.\;(\mu-1)}{n(n+1)(n+2)\;.\;.\;.\;(n+\mu-1)}.\mu^n,$$

ὅταν ὁ ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμὸς μ αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον.

Καὶ ὄντως, ἂν εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx$ θέσωμεν $x=l\left(\frac{1}{y}\right)$, προκύπτει

$$\Gamma(n)=\int_0^1 \left\{l\left(\frac{1}{y}\right)\right\}^{n-1} dy \qquad (6)$$

ἀλλ' εἶνε

$$l\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)=\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^3}{3}+\;.\;.\;.\;+\frac{\varepsilon^\nu}{\nu}+\;.\;.\;. \qquad |\varepsilon|<1$$

ὅθεν καὶ

$$\left[l\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)\right]^{n-1}=\varepsilon^{n-1}\left[1+\frac{n-1}{2}\varepsilon+A_2\varepsilon^2+\;.\;.\;.\;+A_\nu\varepsilon^\nu+\;.\;.\;.\;\right]$$

καὶ ἂν τεθῇ

$$\varepsilon=1-\sqrt[\mu]{y}$$

τοῦ μ ὄντος ἀκεραίου καὶ θετικοῦ ἀριθμοῦ, προκύπτει

$$\left[l\left(\frac{1}{y}\right)\right]^{n-1}=$$

$$=\mu^{n-1}\left(1-\sqrt[\mu]{y}\right)^{n-1}\left\{1+\frac{n-1}{2}\left(1-\sqrt[\mu]{y}\right)+A_2\left(1-\sqrt[\mu]{y}\right)^2+\dots\right\}$$

καὶ ἑπομένως κατὰ τὸν τύπον (6)

$$\Gamma(n)=\mu^{n-1}\int_0^1\left(1-\sqrt[\mu]{y}\right)^{n-1}dy+\frac{n-1}{2}\mu^{n-1}\int_0^1\left(1-\sqrt[\mu]{y}\right)^{n}dy+$$

$$+A_2\mu^{n-1}\int_0^1\left(1-\sqrt[\mu]{y}\right)^{n+1}dy+\dots$$

πρὸς εὕρεσιν τῶν ὁλοκληρωμάτων τούτων θέτομεν

$$y=t^{\mu} \quad \text{ὅθεν} \quad dy=\mu t^{\mu-1}dt$$

καὶ εὑρίσκομεν

$$\int_0^1\left(1-\sqrt[\mu]{y}\right)^{n-1}dy=\mu\int_0^1(1-t)^{n-1}t^{\mu-1}dt=\mu.\frac{\Gamma(n)\Gamma(\mu)}{\Gamma(n+\mu)}$$

$$\int_0^1\left(1-\sqrt[\mu]{y}\right)^{n}dy=\mu\int_0^1(1-t)^{n}\,t^{\mu-1}\,dt=\mu.\frac{\Gamma(n)\,\Gamma(\mu)}{\Gamma(n+\mu)}.\frac{n}{\mu+n}$$

. . . .

ὅθεν

$$\Gamma(n)=$$

$$\mu^{n}.\frac{1.2.3\dots(\mu-1)}{n(n+1)\dots(n+\mu-1)}\left[1+\frac{n-1}{2}\frac{n}{\mu+n}+A_2\frac{n(n+1)}{(\mu+n)(\mu+n+1)}+\dots\right].$$

ὅταν δὲ ὁ ἀκέραιος μ αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον, προκύπτει

$$\Gamma(n)=\text{ὅρ}\frac{1.2.3\dots(\mu-1)}{n(n+1)(n+2)\dots(n+\mu-1)}.\mu^{n}, \quad \text{διὰ } \mu=\infty \qquad (7)$$

162. Ἐὰν εἰς τὸν ἤδη εὑρεθέντα τύπον

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\text{ημ}(\pi x)}$$

θέσωμεν τὰς τιμὰς (7) τῶν ὁλοκληρωμάτων $\Gamma(x)$ καὶ $\Gamma(1-x)$, εὑρίσκομεν τὴν ἑξῆς τιμὴν τοῦ $\eta\mu(\pi x)$, ἐν ᾗ τοῦτο ἐμφανίζεται ὡς ὅριον τοῦ γινομένου ἀπειροπληθῶν παραγόντων

$$\eta\mu(\pi x)=\pi x\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\mu^2}\right)\cdots$$

ἤ, ἂν τεθῇ $\pi x=\theta$·

$$\eta\mu\theta=\theta\left(1-\frac{\theta^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{\theta^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{\theta^2}{9\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\theta^2}{\mu^2\pi^2}\right)\cdots$$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε $\eta\mu 2\theta=2\eta\mu\theta.\sigma\upsilon\nu\theta$, εὑρίσκομεν καὶ

$$\sigma\upsilon\nu\,\theta=\left(1-\frac{4\theta^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4\theta^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4\theta^2}{25\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{4\theta^2}{(2\mu+1)^2\pi^2}\right)\cdots$$

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν

Νὰ ἐκφρασθῶσι διὰ τῶν ὁλοκληρωμάτων Γ τὰ ἑξῆς ὁλοκληρώματα

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^\rho}}=\frac{1}{\rho}\sqrt{\pi}.\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{m-1}x.\sigma\upsilon\nu^{n-1}x\,dx=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}x^{n-1}\,\sigma\upsilon\nu\beta x\,dx=\frac{\Gamma(n)}{\rho^n}\,\sigma\upsilon\nu(n\theta)$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}x^{n-1}\,\eta\mu\,\beta x\,dx=\frac{\Gamma(n)}{\rho^n}\,\eta\mu\,(n\theta)$$

ἔνθα $\alpha+\beta i=\rho e^{\theta i}$.

ἐὰν εἰς τὰ δύο ταῦτα ὁλοκληρώματα τεθῇ $\alpha=0$, προκύπτει (ὑποτίθεται $1>m>0$)

$$\int_0^\infty \frac{\sigma\upsilon\nu\beta x}{x^m}\,dx=\frac{\beta^{m-1}}{\Gamma(m)}\,\frac{\pi}{2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{m\pi}{2}\right)}$$

$$\int_0^\infty \frac{\eta\mu\beta x}{x^m}\,dx=\frac{\beta^{m-1}}{\Gamma(m)}\,\frac{\pi}{2\eta\mu\left(\frac{m\pi}{2}\right)}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΑΙ ΤΩΝ ΩΡΙΣΜΕΝΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Α΄) Τύπος τοῦ Taylor.

163. Διὰ τῶν ὡρισμένων ὁλοκληρωμάτων δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν ἀκριβῶς τὸ ὑπόλοιπον τοῦ τύπου τοῦ Taylor· πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι, ἂν ἐν τῷ διαστήματι $x \ldots x+\varepsilon$ ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ καὶ αἱ παράγωγοι αὐτῆς $\varphi'(x), \ldots, \varphi^{n+1}(x)$ εἶνε συνεχεῖς καὶ πεπερασμέναι, θὰ εἶνε

$$\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)=\int_x^{x+\varepsilon}\varphi'(\alpha)\,d\alpha$$

καὶ ἂν ἀντὶ τῆς μεταβλητῆς α θέσωμεν

$$\alpha=x+\varepsilon-t,$$

ἕπεται
$$\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)=\int_0^{\varepsilon}\varphi'(x+\varepsilon-t)dt\cdot$$

ἐὰν δὲ εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο ἐφαρμόσωμεν ἐπανειλημμένως τὴν κατὰ παράγοντας ὁλοκλήρωσιν, εὑρίσκομεν

$$\int_0^{\varepsilon}\varphi'(x+\varepsilon-t)dt=\frac{\varepsilon}{1}\varphi'(x)+\int_0^{\varepsilon}t\varphi''(x+\varepsilon-t)dt$$

$$\int_0^{\varepsilon}t\varphi''(x+\varepsilon-t)dt=\frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''(x)+\int_0^{\varepsilon}\frac{t^2}{1.2}\varphi'''(x+\varepsilon-t)dt$$

. . . .

$$\int_0^{\varepsilon}\frac{t^{\nu-1}}{1.2..\nu-1}\varphi^{\nu}(x+\varepsilon-t)dt=\frac{\varepsilon^{\nu}}{1.2..\nu}\varphi^{\nu}(x)+\int_0^{\varepsilon}\frac{t^{\nu}}{1.2...\nu}\varphi^{(\nu+1)}(x+\varepsilon-t)dt$$

καὶ προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας ταύτας εὑρίσκομεν

$$\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)=$$

$$\frac{\varepsilon}{1}\varphi'(x)+\frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''(x)+\ldots+\frac{\varepsilon^\nu}{1.2\ldots\nu}\varphi^\nu(x)+\int_0^\varepsilon\frac{t^\nu}{1.2.3\ldots\nu}\varphi^{(\nu+1)}(x+\varepsilon-t)dt$$

Οὗτος δὲ εἶνε ὁ τύπος τοῦ Taylor, οὗ τὸ ὑπόλοιπον παρίσταται δι᾽ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος.

Β΄) Προσδιορισμὸς τῶν συντελεστῶν τοῦ ἀναπτύγματος τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$ κατὰ τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα τῶν πολλαπλασίων τοῦ x.

164. Ἐὰν ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ εἶνε ἀναπτύξιμος κατὰ τὰ ἡμίτονα τῶν πολλαπλασίων τοῦ x, ἤτοι ἂν εἶνε

$$\varphi(x)=A_1\eta\mu x+A_2\eta\mu 2x+A_3\eta\mu 3x+\ldots+A_\nu\eta\mu(\nu x)+\ldots,$$

οἱ σταθεροὶ συντελεσταὶ A_ν εὑρίσκονται ὡς ἑξῆς.

Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ἐπὶ $\eta\mu(\nu x)dx$ καὶ ὁλοκληροῦμεν ἔπειτα μεταξὺ τῶν ὁρίων 0 καὶ π (ἐπὶ τῇ ὑποθέσει, ὅτι ἡ ἰσότης ἰσχύει διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ x ἀπὸ 0 μέχρι π)· οὕτως εὑρίσκομεν (σελ. 181)

$$\int_0^\pi\varphi(x)\eta\mu(\nu x)dx=\frac{\pi}{2}A_\nu$$

ὅθεν
$$A_\nu=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\varphi(x)\eta\mu(\nu x)dx. \qquad (1)$$

Ἐὰν δὲ ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ εἶνε ἀναπτύξιμος κατὰ τὰ συνημίτονα τῶν πολλαπλασίων x, ἤτοι ἂν εἶνε

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}A_0+A_1\sigma\upsilon\nu x+A_2\sigma\upsilon\nu 2x+\ldots+A_\nu\sigma\upsilon\nu(\nu x)+\ldots,$$

εὑρίσκομεν ὁμοίως

$$A_\nu=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\varphi(x)\sigma\upsilon\nu(\nu x)dx \qquad (2)$$

Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ συνάρτησις $\varphi(x)=x$ καὶ ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ μεταβλητὴ x εἶνε ἀναπτύξιμος κατὰ τὰ ἡμίτονα τῶν πολλαπλασίων αὐτῆς· τότε οἱ συντελεσταὶ A_ν θὰ εἶνε

$$A_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\eta\mu(\nu x)dx$$

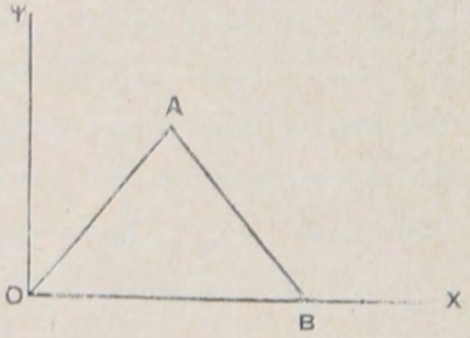
καὶ ἂν τεθῇ $\nu x = t$, θὰ εἶνε

$$A_\nu = \frac{2}{\pi\nu^2}\int_0^{\nu\pi} t\eta\mu t\, dt = +\frac{2}{\nu}(-1)^{\nu+1},$$

ἑπομένως θὰ εἶνε

$$x = 2\left(\eta\mu x - \frac{\eta\mu 2x}{2} + \frac{\eta\mu 3x}{3} + \ldots \pm \frac{\eta\mu(\nu x)}{\nu} \mp \ldots\right)$$

ἡ ἰσότης αὕτη δύναται νὰ ἀληθεύῃ διὰ τὰς τιμὰς τῆς x ἀπὸ 0 μέχρι π, προφανῶς ὅμως δὲν ἀληθεύει διὰ $x = \pi$.



Ἔστω ὡς δεύτερον παράδειγμα ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ ἡ παριστῶσα τὰς τεταγμένας τῆς τεθλασμένης γραμμῆς OAB (OA=AB) καὶ ἂς ὑποτεθῇ OB$=\pi$ καὶ ἡ γωνία AOB$=\frac{\pi}{4}$· τότε εἶνε

$$\varphi(x) = x \quad \text{ἐν τῷ διαστήματι} \quad 0 \ldots \frac{\pi}{2}$$

καὶ

$$\varphi(x) = \pi - x \quad \text{ἐν τῷ διαστήματι} \quad \frac{\pi}{2} \ldots \pi\text{·}$$

ἄρα

$$A_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x)\eta\mu(\nu x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\eta\mu(\nu x)dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - x)\eta\mu(\nu x)dx$$

ἐπειδὴ δὲ εἶνε

$$\int x\eta\mu(\nu x)dx = -\frac{x}{\nu}\sigma\upsilon\nu(\nu x) + \frac{\eta\mu(\nu x)}{\nu^2},$$

συνάγεται

$$A_\nu = \frac{4}{\pi} \eta\mu\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{\nu^2}.$$

ἐπομένως διὰ πᾶν ἄρτιον ν εἶνε $A_\nu = 0$, διὰ πᾶν δὲ περιττὸν ν, εἰ μὲν εἶνε τῆς μορφῆς $4k+1$, ἔχομεν $\eta\mu\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)=1$, εἰ δὲ τῆς μορφῆς $4k+3$, ἔχομεν $\eta\mu\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) = -1$. Ἐντεῦθεν συνάγεται

$$\varphi(x) = \frac{4}{\pi}\left\{\frac{\eta\mu x}{1^2} - \frac{\eta\mu 3x}{3^2} + \frac{\eta\mu 5x}{5^2} - \dots \pm \frac{\eta\mu(2\nu+1)x}{(2\nu+1)^2} \dots\right\}$$

165. Ἐὰν τέλος ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ εἶνε ἀναπτύξιμος εἰς σειρὰν ἔχουσαν καὶ τὰ ἡμίτονα καὶ τὰ συνημίτονα τῶν πολλαπλασίων τοῦ x, ἤτοι ἂν εἶνε

$$(3) \quad \begin{aligned} \varphi(x) = \frac{1}{2}A_0 + A_1 \sigma\upsilon\nu x + A_2 \sigma\upsilon\nu 2x + \dots + A_\nu \sigma\upsilon\nu(\nu x) + \dots + \\ + B_1 \eta\mu x + B_2 \eta\mu 2x + \dots + B_\nu \eta\mu(\nu x) + \dots, \end{aligned}$$

πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ $\sigma\upsilon\nu(\nu x)dx$ καὶ ὁλοκληροῦμεν ἔπειτα ἀπὸ 0 μέχρι 2π (ἐπὶ τῇ ὑποθέσει, ὅτι τὸ ἀνάπτυγμα ἰσχύει ἐν τῷ διαστήματι $0 \dots 2\pi$), ὅτε εὑρίσκομεν

$$A_\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x)\sigma\upsilon\nu(\nu x)dx,$$

ἔπειτα δὲ πάλιν πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ $\eta\mu(\nu x)dx$ καὶ ὁλοκληροῦμεν ἀπὸ 0 μέχρι 2π· ὅτε εὑρίσκομεν

$$B_\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x)\eta\mu(\nu x)dx$$

Σημείωσις. Αἱ σειραὶ τῆς μορφῆς (3) λέγονται σειραὶ τοῦ Fourier· περὶ τῶν ὅρων, ὑφ' οὓς αἱ συναρτήσεις ἀναπτύσσονται εἰς τοιαύτας σειράς, ἴδε Riemann, partielle Difgl.

Ἐκ τῶν σειρῶν τούτων ὑπάρχουσιν αἱ παριστῶσαι συνεχεῖς μὲν καὶ πεπερασμένας συναρτήσεις, ἀλλὰ μὴ διαφορισίμους.

Γ') Ἀπόδειξις τοῦ Gauss περὶ τῆς ὑπάρξεως τῶν ῥιζῶν τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων.

166. Ὁ Gauss ἀπέδειξε τὴν ὕπαρξιν τῶν ῥιζῶν παντὸς ἀκεραίου πολυωνύμου ἔχοντος πραγματικοὺς συντελεστὰς διὰ τῆς ἰδιότητος τοῦ διπλοῦ ὁλοκληρώματος, καθ' ἣν ἡ τάξις τῶν ὁλοκληρώσεων εἶνε ἀδιάφορος πρὸς τὸ ἐξαγόμενον, ὅταν ὁ τόπος τῆς ὁλοκληρώσεως εἶνε πεπερασμένος καὶ ἡ ὁλοκληρουμένη συνάρτησις μένῃ ἐν αὐτῷ πάντοτε πεπερασμένη καὶ συνεχής· ἡ δὲ ἀπόδειξις αὐτοῦ εἶνε ἡ ἑξῆς.

Ἔστω τυχὸν πολυώνυμον $\varphi(z)$, ὅπερ ὑποτίθεται ἔχον πραγματικοὺς συντελεστὰς

$$\varphi(z)=z^n+A_1z^{n-1}+\ .\ .\ .\ +A_n\cdot$$

ἐὰν τεθῇ εἰς αὐτὸ ὁ μιγὰς ἀριθμὸς $\alpha+\beta i$, ἢ ὁ ἴσος αὐτῷ $\rho(\text{συν}\varphi+i\text{ημ}\varphi)$, τὸ πολυώνυμον γίνεται

$$\varphi(\alpha+\beta i)=P+Qi$$

ἔνθα
$$P=\rho^n\text{συν}n\theta+A_1\rho^{n-1}\text{συν}(n-1)\theta+\ldots+A_{n-1}\rho\,\text{συν}\theta+A_n$$
$$Q=\rho^n\text{ημ}n\theta+A_1\rho^{n-1}\text{ημ}(n-1)\theta+\ldots+A_{n-1}\rho\,\text{ημ}\theta$$

καὶ ἂν θέσωμεν

$$V=\text{τοξ εφ}\left(\frac{Q}{P}\right),$$

θὰ εἶνε

$$\frac{\partial V}{\partial\rho}=\frac{P\dfrac{\partial Q}{\partial\rho}-Q\dfrac{\partial P}{\partial\rho}}{P^2+Q^2},\qquad \frac{\partial V}{\partial\theta}=\frac{P\dfrac{\partial Q}{\partial\theta}-Q\dfrac{\partial P}{\partial\theta}}{P^2+Q^2}.$$

Ἡ παράγωγος $\dfrac{\partial^2V}{\partial\rho\partial\theta}$ ἔχει ἀριθμητὴν μὲν ἀκεραίαν τινὰ συνάρτησιν τῶν P, Q καὶ τῶν παραγώγων αὐτῶν, παρονομαστὴν δὲ τὸ τετράγωνον $(P^2+Q^2)^2$· ὁ δὲ παρονομαστὴς οὗτος, ἂν τὸ πολυώνυμον $\varphi(z)$ μηδεμίαν ἔχῃ ῥίζαν (ἐν τῷ μιγαδικῷ συστήματι), δι' οὐδὲν σύστημα τιμῶν τῶν ρ καὶ θ, τουτέστιν εἰς οὐδὲν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου xy, μηδενίζεται· θὰ εἶνε λοιπὸν τότε ἡ παράγωγος $\dfrac{\partial^2V}{\partial\rho\partial\theta}$ συνάρτησις τῶν ρ, θ συνεχὴς καὶ πεπερασμένη ἐντὸς κύκλου ἔχοντος κέντρον τὴν ἀρχὴν καὶ ἀκτῖνα R ὁσηνδήποτε· ἄρα θὰ εἶνε

$$\int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial\rho\partial\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{\partial^2 V}{\partial\rho\partial\theta} d\rho \qquad (1)$$

Ἀλλ' ἡ ἰσότης αὕτη εἶνε ἀδύνατος· διότι τὸ μὲν πρῶτον μέλος αὐτῆς εἶνε 0, τὸ δὲ δεύτερον οὐχὶ 0.

Καὶ ὄντως εἶνε

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial\rho\partial\theta} d\theta = \left[\frac{\partial V}{\partial\rho}\right]_0^{2\pi}$$

καὶ ἐπειδὴ ἡ παράγωγος $\frac{\partial V}{\partial\rho}$ περιέχει μόνα τὰ ἡμίτονα καὶ τὰ συνημίτονα τῆς θ καὶ τῶν πολλαπλασίων αὐτῆς, αἱ τιμαί, ἃς λαμβάνει διὰ $\theta=0$ καὶ $\theta=2\pi$, οὐδόλως διαφέρουσιν ἀπ' ἀλλήλων· ὥστε εἶνε

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial\rho\partial\theta} d\theta = 0 \quad \text{καὶ ἑπομένως} \quad \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial\rho\partial\theta} d\theta = 0\cdot$$

ὡς πρὸς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος (1) ἔχομεν

$$\int_0^R \frac{\partial^2 V}{\partial\rho\partial\theta} d\rho = \left[\frac{\partial V}{\partial\theta}\right]_0^R$$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε

$$P\frac{\partial Q}{\partial\theta} - Q\frac{\partial P}{\partial\theta} =$$

$$(\rho^n \text{συν} n\theta + \ldots)(n\rho^n \text{συν} n\theta + \ldots) + (\rho^n \text{ημ} n\theta + \ldots)(n\rho^n \text{ημ} n\theta + \ldots) =$$

$$= n\rho^{2n} + \ldots + \rho A_n A_{n-1} \text{συν}\,\theta.$$

καὶ $\qquad P^2 + Q^2 = \rho^{2n} + \ldots + A_n^2,$

ἕπεται $\qquad \frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{n\rho^{2n} + \ldots + \rho A_n A_{n-1}\,\text{συν}\theta}{\rho^{2n} + \ldots + A_n^2}$

καὶ $\qquad \left[\frac{\partial V}{\partial\theta}\right]_0^R = \frac{nR^{2n} + \ldots + RA_nA_{n-1}\,\text{συν}\theta}{R^{2n} + \ldots + A_n^2} = \frac{n+\varepsilon}{1+\eta}\cdot$

ἐπειδὴ δὲ τὰ ε καὶ η δύνανται νὰ γίνωσι μικρότερα παντὸς ἀριθμοῦ, ὅταν ἡ ἀκτὶς R ληφθῇ ἐπαρκῶς μεγάλη (διότι ἑκάτερον τούτων ἀποτελεῖται ἔκ τινων ὅρων, ὧν ἕκαστος ἔχει διαιρέτην μίαν τῶν δυνάμεων $R, R^2, \ldots, R^{2n}$), ἐὰν ληφθῇ ἡ ἀκτὶς R τοιαύτη, ὥστε τὰ ε καὶ η νὰ ἔχωσι μέτρον μικρότερον τοῦ $\frac{1}{2}$, θὰ εἶνε $\frac{2n-1}{3}<\frac{n+\varepsilon}{1+\eta}<2n+1$· ἑπομένως τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial V}{\partial \theta}\right]_0^R d\theta \quad \text{ἤτοι τὸ} \quad \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{\partial^2 V}{\partial\rho\partial\theta} d\rho$$

θὰ περιλαμβάνηται μεταξὺ τῶν $\quad 2\pi\frac{2n-1}{3} \quad$ καὶ $\quad 2\pi(2n+1)$

καὶ διὰ τοῦτο εἶνε θετικὸν καὶ διάφορον τοῦ 0· ἡ ἰσότης ἄρα (1) εἶνε ἀδύνατος.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἰσότης (1) δὲν ἀληθεύει, συνάγεται, ὅτι ἡ ὁλοκληρουμένη συνάρτησις $\frac{\partial^2 V}{\partial\rho\partial\theta}$ γίνεται ἄπειρος ἐν τῷ τόπῳ τῆς ὁλοκληρώσεως, ἤτοι, ὅτι ὁ παρονομαστὴς P^2+Q^2 μηδενίζεται διά τι σύστημα τιμῶν τῶν ρ καὶ θ ($\rho<R$)· ὑπάρχει ἄρα ῥίζα τις τοῦ πολυωνύμου $\varphi(z)$ ἐν τῷ εἰρημένῳ τόπῳ.

Δ'.) Ἀπόδειξις τοῦ ὅτι ὁ ἀριθμὸς *e* δὲν εἶνε ἀλγεβρικὸς ἀριθμός.

167. *Ἀλγεβρικὸς* ἀριθμὸς λέγεται πᾶς ἀριθμός, ὅστις εἶνε ῥίζα ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως ἐχούσης συντελεστὰς ἀκεραίους ἀριθμούς.

Παραδείγματος χάριν αἱ ῥίζαι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν παντὸς βαθμοῦ εἶνε ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί.

Οἱ μὴ ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται *ὑπερβατικοί*.

Ὅτι ὁ ἀριθμὸς e δὲν εἶνε ἀλγεβρικός, ἀπεδείχθη κατὰ πρῶτον ὑπὸ τοῦ γάλλου μαθηματικοῦ Hermite· ἀλλ' ἡ ἀπόδειξις αὐτοῦ ἡπλοποιήθη ἔπειτα πολὺ ὑπὸ τοῦ γερμανοῦ μαθηματικοῦ Hilbert· τούτου δὲ τὴν ἀπόδειξιν παραλαμβάνομεν ἐνταῦθα.

Ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς *e* εἶνε ἀλγεβρικὸς καὶ ἡ ἐξίσωσις, ἣν ἐπαληθεύει, εἶνε ἡ ἑξῆς

$$\alpha_0+\alpha_1 e+\alpha_2 e^2+\ldots+\alpha_n e^n=0 \qquad (1)$$

ἔνθα οἱ ἀριθμοὶ $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ εἰνε ἀκέραιοι καὶ ὁ α_0 διάφορος τοῦ 0.

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν

$$\frac{1}{1.2.3\ldots\rho}\int_0^\infty e^{-x}x^\rho\sigma(x)^{\rho+1}dx$$

ἔνθα $\rho+1$ εἶνε πρῶτος ἀριθμὸς μεγαλήτερος τῶν ἀριθμῶν n καὶ α_0 καὶ $\sigma(x)$ δηλοῖ τὸ γινόμενον $(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n)$, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν αὐτὴν καὶ ὡς ἑξῆς

$$\alpha_0\frac{\int_0^\infty}{1.2.3\ldots\rho}+\alpha_1 e\frac{\int_1^\infty}{1.2.3\ldots\rho}+\ldots+\alpha_n e^n\frac{\int_n^\infty}{1.2\ldots\rho}+$$

$$\alpha_1 e\frac{\int_0^1}{1.2\ldots\rho}+\ldots+\alpha_n e^n\frac{\int_0^n}{1.2\ldots\rho}=0$$

ἢ συντόμως $\qquad P+Q=0\cdot \qquad (2)$

ἐὰν διὰ τοῦ P παραστήσωμεν τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου στίχου καὶ διὰ τοῦ Q τὸ τοῦ δευτέρου.

Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα P εἶνε ἀκέραιος ἀριθμὸς διάφορος τοῦ 0· διότι εἶνε

$$x^\rho\sigma(x)^{\rho+1}=Ax^\rho+Bx^{\rho+1}+\Gamma x^{\rho+2}+\ldots+\Omega x^{n(\rho+1)+\rho},$$

ἔνθα A, B, Γ,... εἶνε ἀκέραιοι ἀριθμοί· καὶ $A=[1.2.3\ldots n]^{\rho+1}.(-1)^{n(\rho+1)}\cdot$ ἄρα (σελ. 178)

$$\int_0^\infty e^{-x}x^\rho\sigma(x)^{\rho+1}dx=(1.2.3\ldots\rho)\left\{A+(\rho+1)B+(\rho+1)(\rho+2)\Gamma+\ldots\right\}$$

ὥστε ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ P εἶνε ἀκέραιος ἀριθμὸς τῆς μορφῆς

$$\alpha_0\left[(-1)^{n(\rho+1)}(1.2.3\ldots n)^{\rho+1}+(\rho+1)K\right],$$

ἔνθα K εἶνε ἀκέραιός τις.

Ὁ δὲ τυχὼν ἐκ τῶν λοιπῶν ὅρων τοῦ P, ἔστω ὁ

$$\frac{1}{1.2\ldots\rho}\alpha_\nu e^\nu\int_\nu^\infty e^{-x}x^\rho\sigma(x)^{\rho+1}dx \qquad (\nu=1,2,3,\ldots,n)$$

ἐὰν τεθῇ ἐν αὐτῷ $x=\nu+t$, γίνεται

$$\frac{\alpha_\nu}{1.2\ldots\rho}\int_0^\infty e^{-t}t^{\rho+1}\varphi(t)dt, \quad \text{ἔνθα} \quad \varphi(t)=\left[\frac{\sigma(\nu+t)}{t}\right]^{\rho+1}(\nu+t)^\rho$$

καὶ ἂν τὸ πολυώνυμον $\varphi(t)$, ἀναπτυχθὲν κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ t, εἶνε

$$\varphi(t)=\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2t+\ldots,$$

ὁ θεωρούμενος ὅρος θὰ εἶνε

$$\alpha_\nu\left\{(\rho+1)\mathrm{A}_1+(\rho+1)(\rho+2)\mathrm{A}_2+\ldots\right\}$$

ἤτοι εἶνε ἀκέραιος καὶ τῆς μορφῆς $\alpha_\nu(\rho+1)\mathrm{N}$ (N ἀκέραιος)· ἑπομένως τὸ πρῶτον ἄθροισμα P εἶνε ἀκέραιος ἀριθμὸς καὶ τῆς μορφῆς

$$(-1)^{n(\rho+1)}\alpha_0(1.2.3\ldots n)^{\rho+1}+(\rho+1).\Theta, \qquad \Theta=\text{ἀκέραιός τις}$$

ἐπειδὴ δὲ ὁ $\rho+1$ εἶνε πρῶτος ἀριθμὸς μεγαλήτερος τοῦ α_0 καὶ τοῦ n, δὲν δύναται νὰ διαιρῇ τὸ γινόμενον $\alpha_0(1.2.3\ldots n)^{\rho+1}$ καὶ ἑπομένως ὁ ἀκέραιος P δὲν δύναται νὰ εἶνε 0.

Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸν πρῶτον ἀριθμὸν $\rho+1$ τόσον μέγαν, ὥστε τὸ δεύτερον μέλος Q τῆς ἰσότητος (2) νὰ γίνῃ μικρότερον παντὸς ἀριθμοῦ (δὲν δύναται δὲ νὰ γίνῃ 0, διότι τότε θὰ ἦτο $P=0$). Ἐὰν τῷ ὄντι παραστήσωμεν διὰ M τὴν μεγίστην ἀπολύτως τιμὴν τοῦ πολυωνύμου $\sigma(x)$, ἤτοι τοῦ $(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$, ἐν τῷ διαστήματι $0\ldots n$ καὶ διὰ α τὸ μέγιστον ἐκ τῶν μέτρων τῶν συντελεστῶν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, θὰ εἶνε

$$|Q|<\frac{\alpha.e^n.n^\rho.\mathrm{M}^{\rho+1}}{1.2.3\ldots\rho}\left\{\int_0^1 e^{-x}dx+\int_0^2 e^{-x}dx+\ldots+\int_0^n e^{-x}dx\right\}$$

ἤτοι
$$|Q|<\alpha.e^n.\frac{(n\mathrm{M})^\rho}{1.2.3\ldots\rho}.(n\mathrm{M})$$

τοῦτο δὲ τείνει πρὸς τὸ 0, ὅταν ὁ ρ αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον· διότι ὁ μὲν παράγων $\alpha e^n.n\mathrm{M}$ μένει ἀμετάβλητος· ὁ δὲ ἕτερος παράγων εἶνε ὁ τὴν τάξιν ρ κατέχων ὅρος τῆς συγκλινούσης σειρᾶς, εἰς ἣν ἀναπτύσσεται ἡ δύναμις $e^{n\mathrm{M}}$. Ἐπειδὴ δὲ ὁ μὲν P εἶνε πάντοτε ἀκέραιος ἀριθμὸς καὶ διάφορος τοῦ 0, ὁ δὲ Q, διάφορος ὢν τοῦ 0, καταντᾷ μικρότερος τῆς μονάδος, συνάγεται ὅτι ἡ ἰσότης (2) εἶνε ἀδύνατος· καὶ ἡ ἰσότης (1) ἄρα εἶνε ἀδύνατος· ἤτοι ὁ ἀριθμὸς e δὲν εἶνε ἀλγεβρικὸς ἀριθμός.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI.

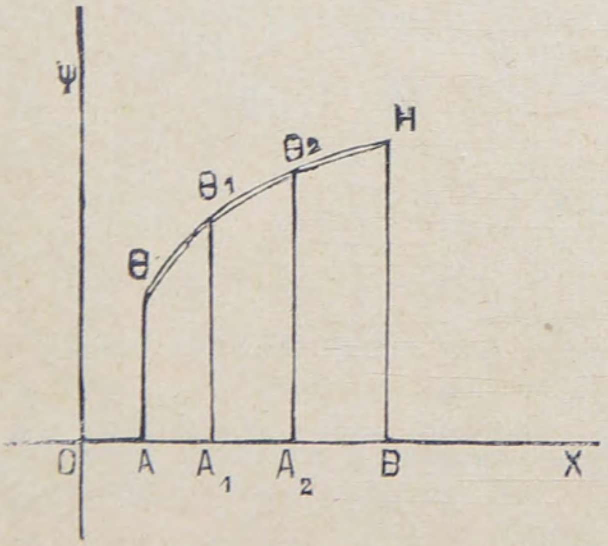
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΩΡΙΣΜΕΝΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Α΄) Μῆκος τόξων καμπύλων.

Ἐν τῷ διαφορικῷ λογισμῷ (σελ. 119) ὡρίσαμεν ὡς μῆκος τόξου τὸ *ὅριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ μῆκος τεθλασμένης γραμμῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ τόξον καὶ τὰ αὐτὰ ἐχούσης πέρατα, ὅταν ἑκάστη τῶν πλευρῶν αὐτῆς τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν.*

Ἐπίπεδοι καμπύλαι.

168. Ἵνα ἐκφράσωμεν τὸ μῆκος τοῦ τυχόντος τόξου ΘΗ τῆς ἐπιπέδου καμπύλης



$y = \sigma(x)$ (ἄξονες ὀρθογώνιοι) δι' ὡρισμένου ὁλοκληρώματος, νοοῦμεν ἐγγραφομένην εἰς αὐτὸ τὴν τυχοῦσαν τεθλασμένην γραμμὴν $\Theta\Theta_1, \Theta_1\Theta_2, \ldots, \Theta_{\nu-1}\mathrm{H}$, ἧς αἱ κορυφαὶ ἔχουσι τὰς τετμημένας α, $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}$, β· τὸ μῆκος τῆς τυχούσης χορδῆς, ἐὰν τὰ πέρατα αὐτῆς ἔχωσι συντεταγμένας x, $\sigma(x)$ καὶ $x+\Delta x$, $\sigma(x+\Delta x)$, θὰ εἶνε

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + \left[\sigma(x+\Delta x) - \sigma(x)\right]^2} \quad \text{ἢ} \quad \Delta x . \sqrt{1 + \left(\sigma'(x) + \omega\right)^2}$$

ἐπειδὴ δὲ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα $\sqrt{1+\left(\sigma'(x)+\omega\right)^2}$, ὅταν ἡ χορδὴ τείνῃ πρὸς τὸ 0, τείνει πρὸς τὴν $\sqrt{1+\sigma'(x)^2}$, ἂν θέσωμεν

$$\sqrt{1+\left(\sigma'(x)+\omega\right)^2}=\sqrt{1+\sigma'(x)^2}+\varepsilon,$$

τὸ μῆκος τῆς χορδῆς θὰ εἶνε

$$\Delta x.\sqrt{1+\sigma'(x)^2}+\varepsilon.\Delta x\cdot$$

ὁ τύπος οὗτος δίδει τὸ μῆκος τῆς τυχούσης χορδῆς· ἐὰν δὲ ἐφαρμόσωμεν αὐτὸν εἰς τὰς διαφόρους χορδὰς $\Theta\Theta_1$, $\Theta_1\Theta_2$,... κατὰ σειράν, εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ μῆκος τῆς ἐγγεγραμμένης γραμμῆς $\Theta\Theta_1\Theta_2\ldots H$ εἶνε

$$\sqrt{1+\sigma'(\alpha)^2}.(x_1-\alpha)+\sqrt{1+\sigma'(x_1)^2}(x_2-x_1)+\ldots+\sqrt{1+\sigma'(x_{\nu-1})^2}(\beta-x_{\nu-1})$$
$$+\varepsilon_1(x_1-\alpha)+\varepsilon_2(x_2-x_1)+\ldots+\varepsilon_\nu(\beta-x_{\nu-1})$$

τὸ δὲ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ μῆκος τοῦτο, ὅταν ἑκάστη τῶν διαφορῶν $x_1-\alpha$, x_2-x_1,...$\beta-x_{\nu-1}$, τείνῃ πρὸς τὸ 0, (ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς δευτέρας σειρᾶς τείνει πρὸς τὸ 0) εἶνε

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{1+\sigma'(x)^2}\,dx\cdot$$

τοῦτο ἄρα παριστᾷ τὸ μῆκος s τοῦ τόξου ΘΗ· ἤτοι

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{1+\sigma'(x)^2}\,dx \qquad (1)$$

ἢ καὶ
$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \qquad (2)$$

Σημείωσις. Ἡ μεταβλητὴ x ὑποτίθεται ἐν τῇ ἀποδείξει, ὅτι αὐξάνει διαρκῶς ἐπὶ τοῦ τόξου ἀπὸ α εἰς β.

169. Εἰς τὸν αὐτὸν τύπον (1) δυνάμεθα νὰ φθάσωμεν καὶ ἄλλως, ὡς ἑξῆς.

Τὰ μήκη τῶν χορδῶν $\Theta\Theta_1$, $\Theta_1\Theta_2$,..., εἶνε κατὰ σειρὰν

$$\sqrt{(x_1-\alpha)^2+\left[\sigma(x_1)-\sigma(\alpha)\right]^2} \text{ ἢ } \sqrt{1+\sigma'(x'_1)^2}(x_1-\alpha) \quad (x_1>x'_1>\alpha)$$
$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+\left[\sigma(x_2)-\sigma(x_1)\right]^2} \text{ ἢ } \sqrt{1+\sigma'(x'_2)^2}(x_2-x_1) \quad (x_2>x'_2>x_1)$$
. . . .

ὥστε τὸ μῆκος τῆς ἐγγεγραμμένης γραμμῆς $\Theta\Theta_1\Theta_2\ldots\Theta_{\nu-1}H$ εἶνε

$$(x_1-\alpha)\sqrt{1+\sigma'(x'_1)^2}+(x_2-x_1)\sqrt{1+\sigma'(x'_2)^2}+\ldots+(\beta-x_{\nu-1})\sqrt{1+\sigma'(x'_\nu)^2},$$

τούτου δὲ ὅριον εἶνε τὸ ὁλοκλήρωμα (1).

Ὑπεθέσαμεν τὴν τεταγμένην y τῶν σημείων τοῦ τόξου ὡς συνάρτησιν τῆς τετμημένης x· ἐὰν τοὐναντίον ἡ x θεωρῆται ὡς συνάρτησις τῆς y, αὐξάνῃ δὲ αὕτη διαρκῶς ἐπὶ τοῦ τόξου ΘΗ ἀπὸ γ μέχρι δ, εὑρίσκομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον

$$s=\int_\gamma^\delta\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy \qquad (1')$$

Ἐὰν δὲ ἀμφότεραι αἱ μεταβληταὶ x, y θεωρῶνται ὡς συναρτήσεις τρίτης τινὸς μεταβλητῆς t, ἥτις μεταβάλλεται ἐπὶ τοῦ τόξου συνεχῶς αὐξανομένη ἀπὸ λ εἰς μ, μετασχηματίζοντες τὸ ὁλοκλήρωμα (1) εὑρίσκομεν

$$s=\int_\lambda^\mu\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt. \qquad (3)$$

Ἐὰν τὸ τόξον ἀναφέρηται πρὸς πολικὰς συντεταγμένας (ρ,θ), θὰ εἶνε

$$dx^2+dy^2=d\rho^2+\rho^2d\theta^2$$

ἐπομένως τὸ ὁλοκλήρωμα (3) γίνεται

$$s=\int_\lambda^\mu\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2+\rho^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}.dt \qquad (3')$$

Παραδείγματα.

Ἔλλειψις.

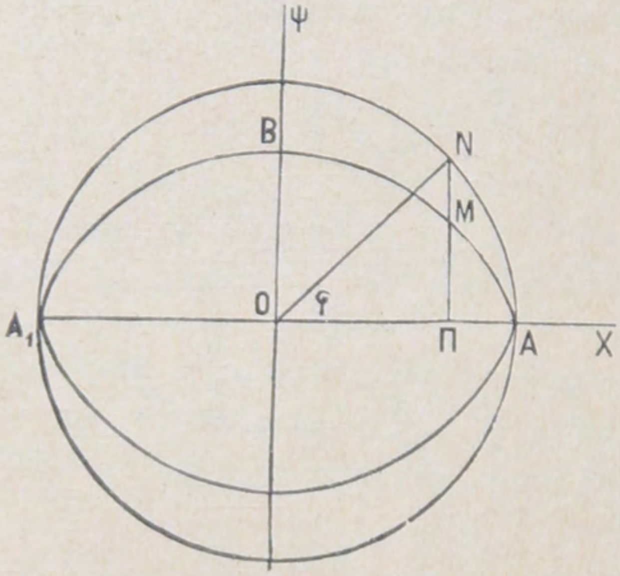
Ἐὰν θεωρήσωμεν τὰς συντεταγμένας x, y τῶν σημείων τῆς ἐλλείψεως ὡς συναρτήσεις τῆς ἐκκεντρικῆς γωνίας φ (Ἐπιπέδου Ἀναλ. σελ. 187) θὰ εἶνε

$$x=\alpha\,\text{συν}\varphi, \qquad y=\beta\,\text{ημ}\varphi$$

$$dx = -\alpha\,\eta\mu\varphi\,d\varphi, \qquad dy = \beta\,\sigma\upsilon\nu\varphi\,d\varphi$$

ὅθεν $$dx^2 + dy^2 = (\alpha^2\eta\mu^2\varphi + \beta^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi)d\varphi^2 = (\alpha^2 - \gamma^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi)\,d\varphi^2\cdot$$

ὅθεν $$s = \tau o\xi \mathrm{AM} = \alpha\int_0^{\varphi_1} \sqrt{1 - \varepsilon^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi}\,d\varphi$$



Τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο εἶνε ἐλλειπτικόν, διότι, ἂν ἐπαναφέρωμεν τὴν x θέτοντες $\sigma\upsilon\nu\varphi = \dfrac{x}{\alpha}$, εὑρίσκομεν

$$s = \tau o\xi\,\mathrm{AM} = \int_{x_1}^{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha^2 - \varepsilon^2 x^2}{\alpha^2 - x^2}} \qquad x_1 = \mathrm{O\Pi}$$

Ἀναπτύσσοντες τὴν τετρ. ῥίζαν $\sqrt{1 - \varepsilon^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi}$ κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ $\varepsilon^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi$, εὑρίσκομεν

$$\sqrt{1 - \varepsilon^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi} =$$
$$1 - \frac{1}{2}\,\varepsilon^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi - \frac{1.1}{2.4}\,\varepsilon^4\sigma\upsilon\nu^4\varphi - \ldots - \frac{1.1.3.5\ldots(2\nu-3)}{2.4.6.8\ldots\;2\nu}\,\varepsilon^{2\nu}\sigma\upsilon\nu^{2\nu}\varphi - \ldots$$

ὅθεν

$$s = \tau\acute{o}\xi\,\mathrm{AM} = \alpha\varphi_1 - \frac{1}{2}\,\varepsilon^2\int_0^{\varphi_1}\sigma\upsilon\nu^2\varphi\,d\varphi - \frac{1.1}{2.4}\,\varepsilon^4\int_0^{\varphi_1}\sigma\upsilon\nu^4\varphi\,d\varphi - \ldots$$

ὁ δὲ τύπος οὗτος θὰ εἶνε τόσῳ χρησιμώτερος, ὅσῳ μικροτέρα εἶνε ἡ ἐκκεντρότης ε.

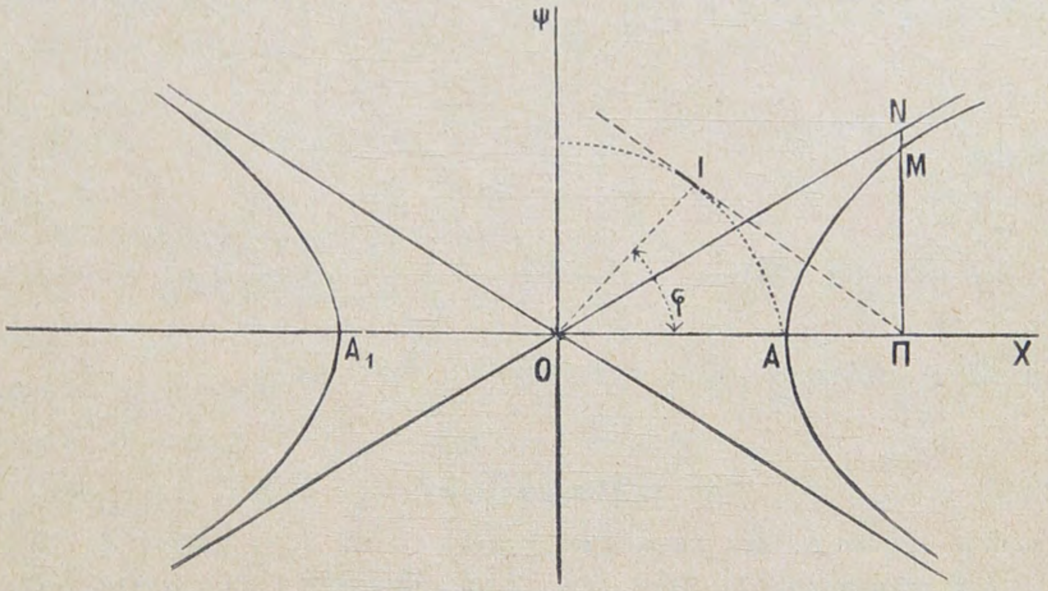
Ἐὰν ζητῆται τὸ μῆκος τῆς ὅλης ἐλλείψεως, εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ τύπου τούτου θέτοντες $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ (σελ. 174)

$$\text{τοξ}\, ABA_1B_1A =$$

$$2\pi\alpha \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\varepsilon^2}{1} - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{\varepsilon^4}{3} - \dots - \left(\frac{1.3.5\dots(2\nu-1)}{2.4.6\dots 2\nu}\right)^2 \frac{\varepsilon^{2\nu}}{2\nu-1} - \dots\dots \right\}$$

Ὑπερβολή.

Αἱ συντεταγμέναι x, y τῶν σημείων τῆς ὑπερβολῆς δύνανται νὰ ἐκφρασθῶσι διὰ βοηθητικῆς τινος γωνίας φ, ὡς ἀκολούθως



$$x = \frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\,\varphi}, \qquad y = \beta\, \varepsilon\varphi\, \varphi$$

ὅθεν $$dx = -\frac{\alpha\, \eta\mu\varphi\, d\varphi}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi} \quad \text{καὶ} \quad dy = \frac{\beta d\varphi}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}$$

καὶ $$\text{τοξ}\, AM = s = \gamma \int_0^{\varphi_1} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sigma\upsilon\nu^2\varphi}\, \frac{d\varphi}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}, \qquad \varepsilon = \frac{\alpha}{\gamma}.$$

Ἐὰν N εἶνε τὸ σημεῖον τῆς ἀσυμπτώτου, ὅπερ ἔχει τὴν τετμημένην OΠ τοῦ ἄκρου τοῦ τόξου AM, θὰ εἶνε

$$ON = \frac{\gamma x}{\alpha} = \frac{\gamma}{\sigma\upsilon\nu\varphi}$$

ὅθεν $$\text{ON}-\text{τοξ AM}=\gamma\left\{\frac{1}{\text{συν}\varphi_1}-\int_0^{\varphi_1}\sqrt{1-\varepsilon^2\text{συν}^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\text{συν}^2\varphi}\right\}.$$

Ἡ διαφορὰ αὕτη μένει πεπερασμένη, ὁσονδήποτε μέγα καὶ ἂν ληφθῇ τὸ τόξον AM, διότι τοῦ M ἀπομακρυνομένου εἰς ἄπειρον, ἡ γωνία φ_1 τείνει πρὸς τὴν ὀρθήν· ἀλλ' εἶνε

$$\int_0^{\varphi_1}\sqrt{1-\varepsilon^2\text{συν}^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\text{συν}^2\varphi}=\text{εφ}\,\varphi_1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\varphi_1-\frac{1.1}{2.4}\varepsilon^4\int_0^{\varphi_1}\text{συν}^2\varphi d\varphi-\ldots$$

ὅθεν

$$\text{ON}-\text{τοξ AM}=\frac{1-\text{ημ}\,\varphi_1}{\text{συν}\varphi_1}+\frac{1}{2}\varepsilon^2\varphi_1+\frac{1.1}{2.4}\varepsilon^4\int_0^{\varphi_1}\text{συν}^2\varphi\,d\varphi-\ldots$$

καὶ διὰ $$\varphi_1=\frac{\pi}{2}$$

$$\text{ὁρ}(\text{ON}-\text{τοξ AM})=\frac{\pi}{2}\left\{\frac{\varepsilon^2}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{\varepsilon^4}{4}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{\varepsilon^6}{6}+\ldots\right\}$$

εἶνε δὲ τὸ δεύτερον μέλος πεπερασμένον, διότι $\varepsilon<1$.

Παραβολή.

Διὰ τὴν παραβολὴν εἶνε $y^2=2\mu x$, ὅθεν $dx=\frac{1}{\mu}y\,dy$

καὶ ἑπομένως

$$\text{τοξ AM}=s=\frac{1}{\mu}\int_0^{y_1}\sqrt{\mu^2+y^2}\,dy \qquad (y_1=\Pi\text{M})$$

καὶ ὁλοκληροῦντες εὑρίσκομεν

$$s=\frac{1}{2\mu}\left\{y_1\sqrt{\mu^2+y_1^2}+\mu^2 l\left(\frac{y_1+\sqrt{\mu^2+y_1^2}}{\mu}\right)\right\}$$

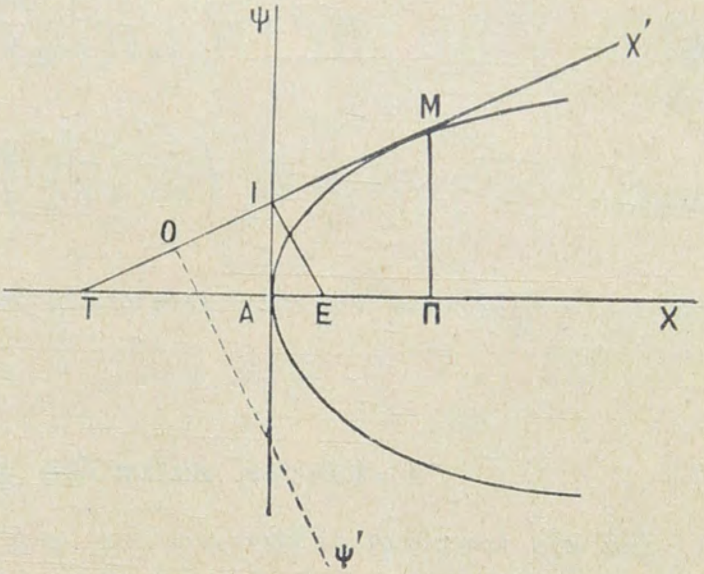
Ἄξιον παρατηρήσεως εἶνε, ὅτι τὸ ἀλγεβρικὸν μέρος τῆς τιμῆς ταύτης τοῦ s εἶνε τὸ μῆκος τῆς ἐφαπτομένης ἀπὸ τῆς ἁφῆς μέχρι τοῦ σημείου I, καθ' ὃ τέμνει τὸν ἄξονα τῆς y· τῷ ὄντι ἐκ τῆς γνωστῆς ἰδιότητος τῆς ὑφαπτομένης τῆς παραβολῆς εἶνε $\mathrm{MI}=\mathrm{IT}$ ὅθεν

$$\mathrm{MI}=\frac{\mathrm{AI}}{\eta\mu\varphi_1}=\frac{y_1}{2\eta\mu\varphi_1} \quad \text{καὶ ἐπειδὴ εἶνε} \quad \varepsilon\varphi\,\varphi_1=\frac{\mu}{y_1}$$

συνάγεται

$$\mathrm{MI}=\frac{1}{2\mu}\,y_1\sqrt{\mu^2+y_1^2}.$$

Πρὸς τούτοις ἐπειδὴ Ι εἶνε ὁ ποὺς τῆς καθέτου, ἥτις ἄγεται ἐκ τῆς ἑστίας Ε ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην ΙΜ (Ἐπιπέδου Ἀναλ. σελ. 223), ἕπεται ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΕΙ



$$\mathrm{EI}=\frac{1}{2}\sqrt{\mu^2+y_1^2}.$$

Ἐκ τούτων ὁρμώμενοι δυνάμεθα νὰ δείξωμεν νῦν, ὅτι, *ἐὰν ἡ παραβολὴ κυλίηται ἐπὶ εὐθείας, ἡ ἑστία αὐτῆς γράφει τὴν ἀλυσσοειδῆ.*

Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν τὴν εὐθεῖαν ΤΜ, ἐφ' ἧς γίνεται ἡ κύλισις, ὡς ἄξονα τῶν x' καὶ τὸ σημεῖον αὐτῆς Ο, οὗτινος ἐφήπτετο ἡ κορυφὴ Α τῆς παραβολῆς, ὡς ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων (τότε τοξ $\mathrm{AM}=\mathrm{OM}$) καὶ ἀναφέρομεν πρὸς τοὺς ἄξονας τούτους τὴν ὑπὸ τῆς ἑστίας Ε γραφομένην καμπύλην· ἐν τῇ τυχούσῃ στιγμῇ τῆς κινήσεως αἱ συντεταγμέναι τοῦ Ε θὰ εἶνε

$$(\iota)\quad \begin{cases} x'=\mathrm{OI}=\mathrm{OM}-\mathrm{IM}=s-\mathrm{IM}=\frac{1}{2}\mu l\left(\frac{y_1+\sqrt{\mu^2+y_1^2}}{\mu}\right) \\ y'=\mathrm{EI}=\frac{1}{2}\sqrt{\mu^2+y_1^2}. \end{cases}$$

ἑπομένως πρὸς εὕρεσιν τῆς καμπύλης, ἣν γράφει τὸ Ε, ἀρκεῖ νὰ ἀπαλείψωμεν τὴν τεταγμένην y_1 μεταξὺ τῶν δύο ἐξισώσεων (ι)· καὶ ἡ μὲν πρώτη δίδει εὐθὺς

$$\frac{y_1+\sqrt{\mu^2+y_1^2}}{\mu}=e^{\frac{2x'}{\mu}},$$

ἐξ ἧς πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ $y_1-\sqrt{\mu^2+y_1^2}$ εὑρίσκομεν

$$\frac{y_1-\sqrt{\mu^2+y_1^2}}{\mu}=-e^{-\frac{2x'}{\mu}}$$

ὅθεν
$$\frac{2\sqrt{\mu^2+y_1^2}}{\mu}=e^{\frac{2x'}{\mu}}+e^{-\frac{2x'}{\mu}}$$

ἐπομένως
$$y'=\frac{\mu}{4}\left(e^{\frac{2x'}{\mu}}+e^{-\frac{2x'}{\mu}}\right).$$

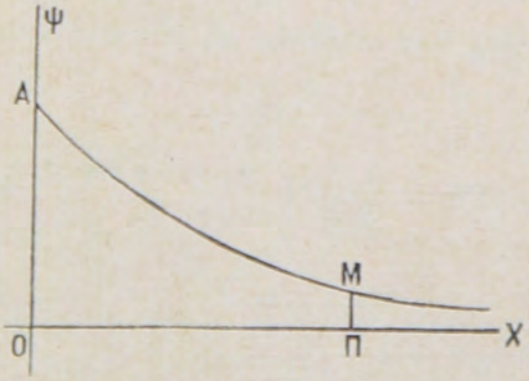
εἶνε ἄρα ἡ γραφομένη καμπύλη ἁλυσσοειδὴς καὶ παράμετρον ἔχει $\frac{\mu}{2}$.

Ἐκθετικὴ καμπύλη $y=e^{-\frac{x}{\alpha}}$.

Διὰ τὴν καμπύλην ταύτην εἶνε

$$x=-\alpha ly \quad \text{καὶ} \quad dx=-\alpha\frac{dy}{y}$$

ὅθεν
$$s=\text{τοξ AM}=\int_{y_1}^{1}\sqrt{\alpha^2+y^2}\,\frac{dy}{y}.$$



ἔνθα y_1 εἶνε ἡ τεταγμένη τοῦ ἄκρου M (τὰ ὅρια τοῦ ὁλοκληρώματος ἐλήφθησαν οὕτως, ὥστε ἡ μεταβλητὴ τῆς ὁλοκληρώσεως νὰ αὐξάνῃ διαρκῶς ἐπὶ τοῦ τόξου ἀπὸ y_1 εἰς 1).

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀορίστου ὁλοκληρώματος $\int\sqrt{\alpha^2+y^2}\,\frac{dy}{y}$ γράφομεν κατὰ πρῶτον αὐτὸ ὡς ἑξῆς

$$\int\frac{\alpha^2+y^2}{\sqrt{\alpha^2+y^2}}\,\frac{dy}{y}$$ καὶ ἔπειτα χωρίζομεν αὐτὸ εἰς τὰ ἑξῆς δύο

$$\alpha^2 \int \frac{dy}{y\sqrt{\alpha^2+y^2}} + \int \frac{ydy}{\sqrt{\alpha^2+y^2}}.$$

τούτων τὸ μὲν δεύτερον εἶνε $\sqrt{\alpha^2+y^2}$, τὸ δὲ πρῶτον, ἂν τεθῇ $y=\frac{\alpha}{t}$ γίνεται

$$-\alpha \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{ἤτοι} \quad -\alpha l(t+\sqrt{1+t^2})$$

ὅθεν εἶνε

$$\int \sqrt{\alpha^2+y^2}\,\frac{dy}{y} = \sqrt{\alpha^2+y^2} + \alpha l y - \alpha l(\alpha+\sqrt{\alpha^2+y^2})$$

καὶ ἑπομένως

$$s = \text{τοξ AM} = \sqrt{1+\alpha^2} - \sqrt{1+y_1^2} - \alpha l y_1 + \alpha l \left\{ \frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+y_1^2}}{\alpha+\sqrt{\alpha^2+1}} \right\}.$$

Μῆκος τόξου τῆς καμπύλης $\alpha y^2 = x^3$, $\alpha > 0$.

Διὰ τὴν καμπύλην ταύτην εἶνε

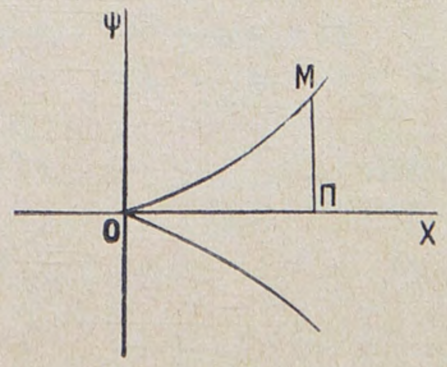
$$s = \text{τοξ OM} = \int_0^{x_1} \sqrt{1+\frac{9x}{4\alpha}}\,dx \qquad (x_1 = \text{ΟΠ})$$

ἐὰν δὲ θέσωμεν

$$1+\frac{9x}{4\alpha} = t^2 \text{ καὶ ἑπομένως } dx = \frac{8}{9}\alpha\, t dt,$$

εὑρίσκομεν μετὰ τὴν ὁλοκλήρωσιν

$$s = \text{τοξ OM} = \frac{8}{27}\alpha \left\{ \left(1+\frac{9x_1}{4\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right\}$$

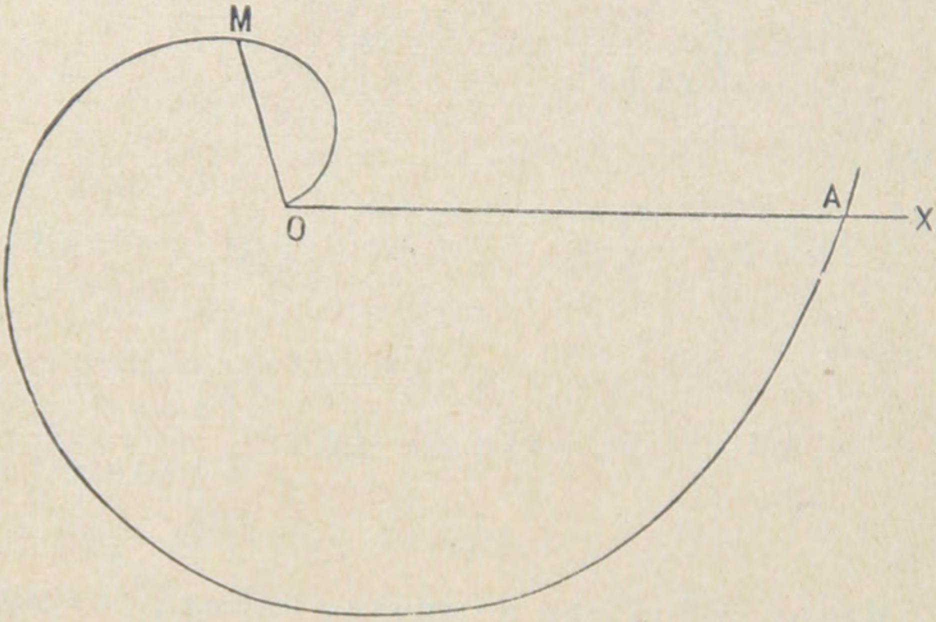


Σημείωσις. Ἡ καμπύλη αὕτη εἶνε ἡ πρώτη, ἧς τὸ μῆκος τοῦ τόξου εὑρέθη· ἐγένετο δὲ τοῦτο κατὰ τὸ 1657 ὑπὸ τοῦ Ἄγγλου **Neil**.

Ἀρχιμήδειος ἕλιξ.

Ἡ ἕλιξ τοῦ Ἀρχιμήδους ἔχει τὴν ἐξίσωσιν $\rho=\alpha\theta$·

ὅθεν $$s=\mathrm{OM}=\frac{1}{\alpha}\int_0^{\rho_1}\sqrt{\rho^2+\alpha^2}\,d\rho \qquad (\rho_1=\mathrm{OM})$$



ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι τὸ τόξον ΟΜ τῆς Ἀρχιμηδείου ἕλικος εἶνε ἰσόμηκες πρὸς τὸ τόξον ΑΜ τῆς παραβολῆς $y^2=2\alpha x$, ἥτις ἔχει παράμετρον τὸ α, ἐὰν ἡ τεταγμένη y_1 τοῦ ἄκρου τοῦ παραβολικοῦ τόξου λαμβάνηται ἴση τῇ ἀκτῖνι ρ_1 τοῦ ἄκρου τοῦ τόξου τῆς ἕλικος.

Λημνίσκος.

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ λημνίσκου τούτου εἶνε

$$\rho^2=2\alpha^2\sigma\upsilon\nu\, 2\theta\cdot$$

ὅθεν $$\rho d\rho=-2\alpha^2\eta\mu 2\theta\, d\theta\cdot$$

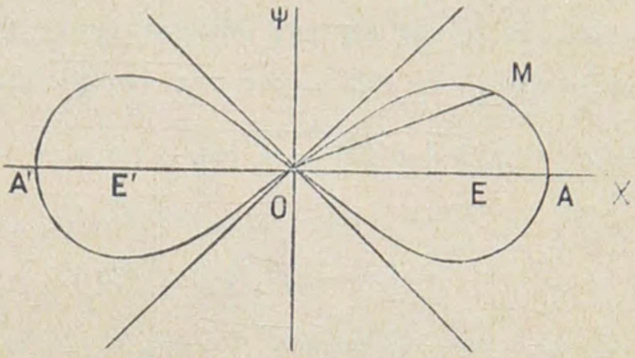
καὶ $$\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2=\frac{2\alpha^2}{\sigma\upsilon\nu\, 2\theta}.$$

καὶ $$s=\tau o\xi\ \mathrm{AM}=\alpha\sqrt{2}\int_0^{\theta_1}\frac{d\theta}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu 2\theta}}.$$

τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο εἶνε ἐλλειπτικόν· διότι ἂν θέσωμεν $\sigma\upsilon\nu 2\theta=t^2$, εὑρίσκομεν

$$s=\alpha\sqrt{2}\int_{t_1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

Τὸ μῆκος λ ὅλου τοῦ λημνίσκου εἶνε



$$4\alpha\sqrt{2}\int_{0}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

ἀνάγεται δὲ τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο εἰς τὰ εὐληριανά, ἐὰν τεθῇ $t^4=u$· καὶ ὄντως τότε εὑρίσκομεν

$$s=\alpha\sqrt{2}\int_{0}^{1}u^{-\frac{3}{4}}(1-u)^{\frac{1}{2}}du=\alpha\sqrt{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}=\alpha\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\sqrt{\pi}}.$$

Καμπύλαι ἐν τῷ χώρῳ.

Τὸ μῆκος στρεβλοῦ τόξου ὁρίζεται ὡς καὶ τῶν ἐπιπέδων καὶ εὑρίσκεται ὁμοίως.

Ἐὰν αἱ ἐξισώσεις τῆς καμπύλης εἶνε

$$y = \sigma(x)$$
$$z = \varphi(x)$$

τὸ μῆκος τῆς τυχούσης χορδῆς, ἧς τὰ πέρατα ἔχουσι τετμημένας x καὶ $x+\Delta x$, θὰ εἶνε

$$\sqrt{(\Delta x)^2+\Big[\sigma(x+\Delta x)-\sigma(x)\Big]^2+\Big[\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)\Big]^2}$$

ἢ

$$\Delta x\cdot\sqrt{1+\Big[\sigma'(x)+\omega\Big]^2+\Big[\varphi'(x)+u\Big]^2} \qquad (\delta)$$

ἔνθα ω καὶ u τείνουσι πρὸς τὸ 0, ὅταν ἡ διαφορὰ Δx τείνῃ πρὸς τὸ 0.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ τετρ. ῥίζα (ὅταν Δx τείνῃ πρὸς τὸ 0) τείνει πρὸς τὴν $\sqrt{1+\sigma'(x)^2+\varphi'(x)^2}$, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὸ μῆκος τῆς προκειμένης χορδῆς ὡς ἀκολούθως

$$\Delta x.\sqrt{1+\sigma'(x)^2+\varphi'(x)^2}+\theta.\Delta x \qquad (\text{ὅρ } \theta=0)$$

Ὁ τύπος οὗτος δίδει τὸ μῆκος τῆς τυχούσης πλευρᾶς τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ τόξον τεθλασμένης $\Theta\Theta_1\Theta_2\ldots\Theta_{\nu-1}H$· ἐὰν δὲ ἐφαρμόσωμεν αὐτὸν εἰς τὰς πλευρὰς $\Theta\Theta_1$, $\Theta_1\Theta_2,\ldots,\Theta_{\nu-1}H$ κατὰ σειράν, εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ μῆκος τῆς ἐγγεγραμμένης γραμμῆς εἶνε

$$(x_1-\alpha)\sqrt{1+\sigma'(\alpha)^2+\varphi'(\alpha)^2}+(x_2-x_1)\sqrt{1+\sigma'(x_1)^2+\varphi'(x_1)^2}+\ldots$$
$$+(\beta-x_{\nu-1})\sqrt{1+\sigma'(x_{\nu-1})^2+\varphi'(x_{\nu-1})^2}$$
$$+(x_1-\alpha)\theta_1+(x_2-x_1)\theta_2+\ldots+(\beta-x_{\nu-1})\theta_\nu$$

τὸ δὲ ὅριον τοῦ μήκους τούτου, τουτέστι τὸ μῆκος τοῦ τόξου ΘΗ, εἶνε

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{1+\sigma'(x)^2+\varphi'(x)^2}.dx \quad \text{ἢ} \quad s=\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx \qquad (1)$$

Αἱ συντεταγμέναι x, y, z τῶν σημείων τῆς καμπύλης ὑπετέθησαν συναρτήσεις τῆς x (ἥτις προχωρεῖ ἐπὶ τοῦ τόξου διαρκῶς αὐξανομένη ἀπὸ α εἰς β)· ἐὰν πᾶσαι αἱ συντεταγμέναι εἶνε συναρτήσεις ἄλλης οἱασδήποτε μεταβλητῆς t, ἤτοι ἂν αἱ ἐξισώσεις τῆς καμπύλης εἶνε

$$x=\sigma(t), \qquad y=\varphi(t), \qquad z=\mathrm{f}(t)$$

καὶ προχωρῇ διαρκῶς αὐξανομένη ἐπὶ τοῦ τόξου ἀπὸ λ εἰς μ, μετασχηματίζοντες τὸ ὁλοκλήρωμα (1) εὑρίσκομεν

$$s=\int_\lambda^\mu \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.dt \qquad (2)$$

Ἐὰν ἡ καμπύλη ἀναφέρηται πρὸς πολικὰς συντεταγμένας (ρ, θ, ψ) ἔχομεν (Διαφ. λογισμοῦ σελ. 155)

$$dx^2+dy^2+dz^2=d\rho^2+\rho^2 d\theta^2+\rho^2\eta\mu^2\theta\, d\psi^2$$

$$s=\int_\lambda^\mu \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2+\rho^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\rho^2\eta\mu^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2}.dt \qquad (3)$$

Πρὸς ἐφαρμογὴν τῶν τύπων τούτων ζητήσωμεν τὸ μῆκος τοῦ τόξου τῆς λοξοδρομίας (Διαφ. σελ. 151).

Αἱ ἐξισώσεις αὐτῆς εἰς πολικὰς συντεταγμένας εἶνε

$$\rho=\alpha, \qquad \varepsilon\varphi\left(\frac{\theta}{2}\right)=e^{-\mu\psi},$$

ἔνθα μ δηλοῖ τὴν συνεφαπτομένην τῆς γωνίας, ὑπὸ τὴν ὁποίαν ἡ καμπύλη αὕτη τέμνει τοὺς μεσημβρινοὺς τῆς σφαίρας.

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν

$$d\rho=0, \qquad d\theta=-\frac{2\mu\, e^{-\mu\psi}}{1+e^{-2\mu\psi}}d\psi, \qquad \text{ὅθεν}$$

$$s=2\alpha\sqrt{1+\mu^2}\int_0^{\psi_1}\frac{e^{-\mu\psi}d\psi}{1+e^{-2\mu\psi}}=2\alpha\sqrt{1+\frac{1}{\mu^2}}\left(\frac{\pi}{4}-\text{τοξ εφ}\, e^{-\mu\psi_1}\right)$$

Τὸ τόξον s ἄρχεται ἀπὸ τοῦ σημείου $\psi=0$, ἔνθα ἡ λοξοδρομία τέμνει τὸν ἰσημερινόν, καὶ λήγει εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον (ψ_1)· αὐξάνοντος δὲ τοῦ ψ_1 εἰς ἄπειρον, τὸ μῆκος τοῦ τόξου τείνει πρὸς τὸ

$$\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{1+\frac{1}{\mu^2}}.$$

ἑπομένως τὸ μῆκος τοῦ τόξου τῆς λοξοδρομίας εἶνε πεπερασμένον, ἂν καὶ ἐκτελεῖ τὸ τόξον ἀπείρους ἑλιγμοὺς ἐπὶ τῆς σφαίρας περὶ τὸν πόλον.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἐὰν ἐπίπεδον τόξον AB μηδεμίαν ἔχον καμπὴν κυλισθῇ ἐπὶ εὐθείας, ἕκαστον σημεῖον O τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ γράφει καμπύλην, ἧς τὸ τόξον ἔχει μῆκος παριστώμενον ὑπὸ τοῦ ὁλοκληρώματος

$$\int_A^B \rho\, d\varphi,$$

ἔνθα ρ δηλοῖ τὴν πολικὴν ἀκτῖνα, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ O ἐπὶ τὸ σημεῖον, ἔνθα τὸ κυλιόμενον τόξον ἐφάπτεται τῆς εὐθείας καὶ $d\varphi$ τὴν γωνίαν τῆς συνεπαφῆς τοῦ τόξου εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Τὸ αὐτὸ δὲ μῆκος ἔχει καὶ ἡ ποδικὴ τοῦ τόξου AB ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου O κατασκευαζομένη.

2) Ἡ καμπύλη, ἐφ' ἧς κεῖνται τὰ μέσα τῶν ἀκτίνων καμπυλότητος τῆς τυχούσης καμπύλης, καὶ ἐκείνη, ἐφ' ἧς κεῖνται τὰ μέσα τῶν αὐτῶν ἀκτίνων, ὅταν μετενεχθῶσι παραλλήλως ἑαυταῖς εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον, εἶνε ἰσομήκεις.

Τὸ αὐτὸ ἀληθεύει, καὶ ὅταν τὰ σημεῖα τὰ ἐπὶ τῶν ἀκτίνων λαμβανόμενα διαιρῶσιν ἑκάστην εἰς δύο μέρη ἔχοντα δεδομένον λόγον.

3) Εὑρεῖν τὸ μῆκος τοῦ τόξου τῆς καμπύλης

$$y=l\left(\frac{1}{\text{συν}\, x}\right) \quad \text{ἀπὸ } x=0 \text{ μέχρι } x=\frac{\pi}{4}.$$

Β΄) Ἐμβαδὰ ἐπιφανειῶν.

1) ΕΠΙΠΕΔΟΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΙ.

170. Τὸ ἐμβαδὸν Ε πάσης ἐπιπέδου ἐπιφανείας Τ, κατὰ τὰ ἐν τῇ θεωρίᾳ τῶν διπλῶν ὁλοκληρωμάτων εἰρημένα, παρίσταται ὑπὸ τοῦ διπλοῦ ὁλοκληρώματος

$$\mathrm{E}=\int_{\mathrm{T}} d(x, y) \tag{1}$$

καὶ ἂν ἡ ἐπιφάνεια Τ νοηθῇ διῃρημένη εἰς ἀπειροστὰ ὀρθογώνια ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους πρὸς τοὺς ὀρθογωνίους ἄξονας, θὰ εἶνε

$$\mathrm{E}=\int_{\mathrm{T}} dx\, dy \tag{2}$$

Ἐὰν δὲ οἱ ἄξονες εἶνε πλαγιογώνιοι καὶ νοηθῇ ἡ ἐπιφάνεια Τ διῃρημένη εἰς ἀπειροστὰ παραλληλόγραμμα ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους πρὸς τοὺς ἄξονας, θὰ εἶνε

$$\mathrm{E}=\text{ημ}\theta.\int_{\mathrm{T}} dx\, dy, \tag{3}$$

ἔνθα θ εἶνε ἡ γωνία τῶν ἀξόνων.

Ἐὰν δὲ νοηθῇ διῃρημένη ἡ ἐπιφάνεια Τ εἰς κολοβοὺς τομεῖς δι' ὁμοκέντρων περιφερειῶν καὶ δι' ἀκτίνων ἐκ τοῦ κέντρου τῶν περιφερειῶν ἠγμένων, θὰ εἶνε

$$\mathrm{E}=\int_{\mathrm{T}} \rho d\rho\, d\theta. \tag{4}$$

Ἐὰν δὲ τέλος νοηθῇ ἡ ἐπιφάνεια Τ διῃρημένη εἰς ἀπειροστά τε τράπλευρα διὰ δύο οἱωνδήποτε σειρῶν γραμμῶν

$$\varphi(x, y)=u$$
$$\mathrm{f}(x, y)=v,$$

θὰ εἶνε
$$\mathrm{E}=\int_{\mathrm{T}} \frac{d(x, y)}{d(u, v)} du dv$$

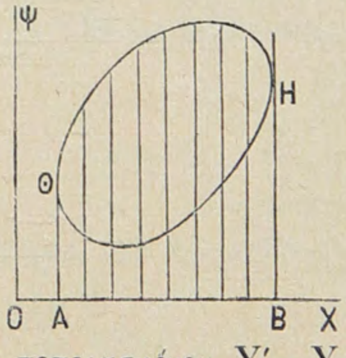
ἔνθα ἡ παράγωγος τοῦ συστήματος x, y πρὸς τὸ σύστημα u, v πρέπει νὰ λαμβάνηται θετική.

Ἐν τοῖς διπλοῖς ὁλοκληρώμασιν (2) καὶ (4) ἡ μία τῶν ὁλοκληρώσεων δύναται πάντοτε νὰ ἐκτελεσθῇ· ἑπομένως δύναται τὸ ἐμβαδὸν Ε νὰ ἐκφρασθῇ δι' ἁπλοῦ ὁλοκληρώματος.

Ἐὰν τῷ ὄντι ἡ περίμετρος τῆς ἐπιφανείας Τ τέμνηται ὑπὸ τῶν παραλλήλων πρὸς τοὺς ἄξονας ΟΧ, ΟΥ εἰς δύο τὸ πολὺ σημεῖα ὑφ' ἑκάστης, καὶ ὁλοκληρώσωμεν τὸ (2) πρὸς y, εὑρίσκομεν

$$\mathrm{E}=\int_{\alpha}^{\beta}(\mathrm{Y}'-\mathrm{Y})dx \qquad (2')$$

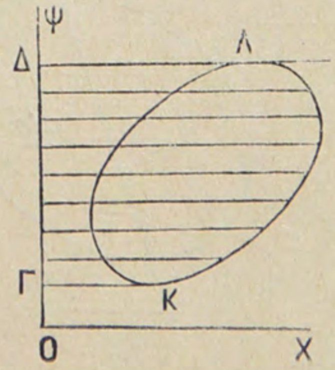
ἔνθα Υ' καὶ Υ εἶνε ἡ μεγίστη καὶ ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τοῦ y ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ Τ, ὅταν ἡ x ἔχουσα τὴν τυχοῦσαν τιμὴν αὐτῆς (μεταξὺ α καὶ β) διατηρῇ αὐτὴν ἀμετάβλητον, ἤτοι αἱ δύο τεταγμέναι τῆς περιμέτρου αἱ πρὸς τὴν αὐτὴν τιμὴν τῆς x ἀντιστοιχοῦσαι.



Ἐν τῷ ὁλοκληρώματι τούτῳ ἡ ἐπιφάνεια Τ θεωρεῖται ὡς συγκειμένη ἐξ ἀπειροστῶν ὀρθογωνίων ἐχόντων βάσιν ἀπειροστὴν dx καὶ ὕψος πεπερασμένον Υ'—Υ.

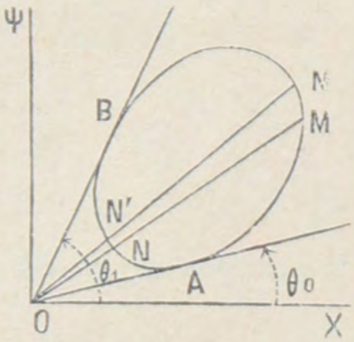
Ἐὰν δὲ ὁλοκληρώσωμεν πρῶτον πρὸς x, εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ αὐτοῦ τύπου (2)

$$\mathrm{E}=\int_{\gamma}^{\delta}(\mathrm{X}'-\mathrm{X})dx \qquad (2'')$$



Ἐν τῷ ὁλοκληρώματι τούτῳ θεωρεῖται ἡ ἡ ἐπιφάνεια Τ ὡς συγκειμένη ἐξ ὀρθογωνίων ἐχόντων ὕψος ἀπειροστὸν dy καὶ βάσιν πεπερασμένην Χ'—Χ.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ τύπου (4), ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν ἑτέραν τῶν ὁλοκληρώσεων

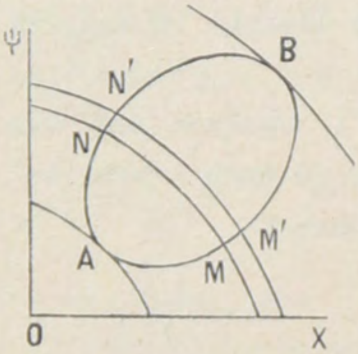


$$E=\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1}(P'^2-P^2)\,d\theta\cdot$$

καὶ

$$E=\int_{\rho_0}^{\rho_1}\rho(\Theta'-\Theta)\,d\rho$$

καὶ ἐν μὲν τῷ πρώτῳ ἐκ τούτων θεωρεῖται ἡ ἐπιφάνεια Τ ὡς συγκειμένη ἐξ ἀπειροστῶν τομέων κολοβῶν ἢ μή, (ὡς ὁ ΝΝ'ΜΜ') ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ θεωρεῖται ὡς συγκειμένη ἐκ κυκλικῶν λωρίδων, οἵα εἶνε ἡ ΜΝΜ'Ν'.



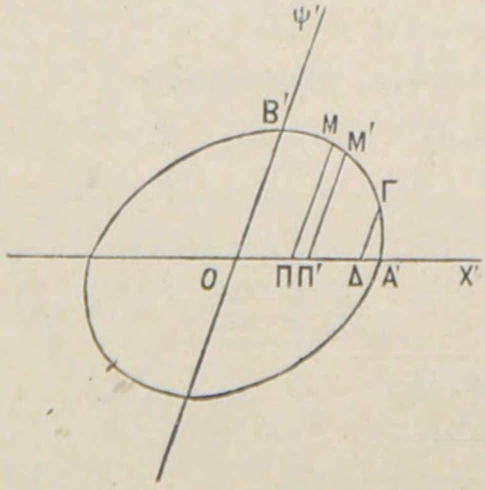
Καὶ ἐνταῦθα ὑποτίθεται, ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ Τ τέμνεται ὑφ' ἑκάστης περιφερείας καὶ ὑφ' ἑκάστης ἀκτῖνος εἰς δύο τὸ πολὺ σημεῖα.

Σημείωσις. Ἐὰν ἡ περίμετρος τοῦ Τ τέμνηται ὑπὸ τῶν διαιρουσῶν τὴν ἐπιφάνειαν γραμμῶν εἰς σημεῖα περισσότερα τῶν δύο, διαιροῦμεν τὴν ἐπιφάνειαν εἰς μέρη, ἑκάστου τῶν ὁποίων ἡ περίμετρος νὰ μὴ τέμνηται εἰς περισσότερα τῶν δύο σημεῖα καὶ εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου χωριστά.

Παραδείγματα.

Ἔλλειψις.

Ἐὰν τὸ ὑπὸ τῆς ἐλλείψεως καὶ ὑπὸ μιᾶς διαμέτρου αὐτῆς καὶ δύο τεταγμένων ἐπ' αὐτὴν περιεχόμενον χωρίον ΟΒ'ΓΔ νοήσωμεν διῃρημένον εἰς ἀπειροστὰ παραλληλόγραμμα διὰ τῶν ἐπὶ τὴν διάμετρον ταύτην τεταγμένων, θὰ εἶνε



$$E=\eta\mu\theta\int_0^{x_1}y\,dx$$

$$x_1=O\Delta,\quad \theta=XOY\cdot$$

ἀλλ' αἱ συντεταγμέναι x, y τοῦ τυχόντος σημείου τῆς ἐλλείψεως συνδέονται διὰ τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{x^2}{\alpha'^2}+\frac{y^2}{\beta'^2}=1,$$

ἔνθα α΄ καὶ β΄ εἶνε τὰ μήκη τῶν συζυγῶν ἡμιδιαμέτρων ΟΑ΄, ΟΒ΄· ὅθεν

$$\mathrm{E}=\frac{\beta'}{\alpha'}\,\eta\mu\theta\int_0^{x_1}\sqrt{\alpha'^2-x^2}\,dx$$

καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς ὁλοκληρώσεως

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}\,\eta\mu\theta\,.\,\frac{\beta'}{\alpha'}\left[x_1\sqrt{\alpha'^2-x_1^2}+\alpha'^2\,\tau o\xi\,\eta\mu\left(\frac{x_1}{\alpha'}\right)\right].$$

Ἐὰν ζητῆται τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐλλείψεως, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν ὅρια τοῦ x ἀπὸ $-\alpha'$ μέχρι $+\alpha'$ καὶ νὰ διπλασιάσωμεν τὸ ἐξαγόμενον· τοιουτοτρόπως εὑρίσκομεν

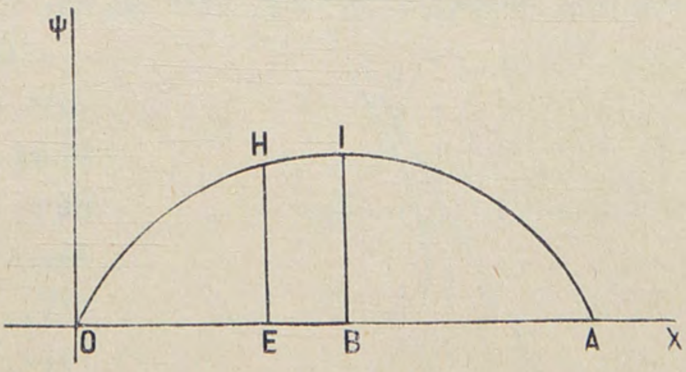
$$\mathrm{E}=\pi\alpha'\beta'\eta\mu\theta$$

Ἐὰν δὲ αἱ συζυγεῖς διάμετροι εἶνε οἱ ἄξονες τῆς ἐλλείψεως (ὅτε $\theta=90^0$) εὑρίσκομεν

$$\mathrm{E}=\pi\alpha\beta,$$

ἐξ οὗ συνάγεται $\alpha\beta=\alpha'\beta'\eta\mu\theta$· ἤτοι τὸ γνωστὸν θεώρημα τῶν συζυγῶν διαμέτρων τῆς ἐλλείψεως.

Κυκλοειδής.



Ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια ΟΑΙΗΟ, ἡ μεταξὺ τῆς κυκλοειδοῦς καὶ τῆς βάσεως αὐτῆς περιεχομένη, νοηθῇ διῃρημένη εἰς ἀπειροστὰ ὀρθογώνια διὰ τῶν παραλλήλων τῇ ΟΨ, θὰ εἶνε

$$\text{ἐμβαδὸν ΟΕΗΟ}=\mathrm{E}=\int_0^{x_1}y\,dx \qquad x_1=\mathrm{OE}$$

ἀλλ' αἱ συντεταγμέναι x, y τοῦ τυχόντος σημείου τῆς κυκλοειδοῦς δίδονται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων

$$x=\alpha(\omega-\eta\mu\omega)$$

$$y=\alpha(1-\sigma\upsilon\nu\omega)$$

ὅθεν

$$dx=\alpha(1-\sigma\upsilon\nu\omega)d\omega$$

καὶ

$$\mathrm{E}=\alpha^2\int_0^{\omega_1}(1-\sigma\upsilon\nu\omega)^2d\omega,$$

ἔνθα ω_1 εἶνε ἡ πρὸς τὸ σημεῖον $\mathrm{H}(x_1, y_1)$ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τῆς γωνίας ω.

Ἀναπτύσσοντες δὲ τὸ τετράγωνον $(1-\sigma\upsilon\nu\omega)^2$ καὶ ἐκτελοῦντες τὴν ὁλοκλήρωσιν κατὰ μέρη, εὑρίσκομεν

$$\mathrm{E}=\alpha^2\left\{\frac{3}{2}\omega_1-2\eta\mu\omega_1+\frac{\eta\mu\omega_1\sigma\upsilon\nu\omega_1}{2}\right\} \qquad (5)$$

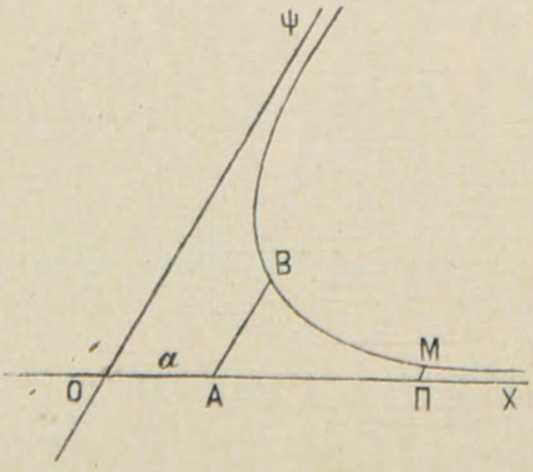
Ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν $\omega_1=2\pi$, εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ τύπου τούτου τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς μεταξὺ τῆς κυκλοειδοῦς καὶ τῆς βάσεως αὐτῆς περιεχομένης ἐπιφανείας

$$\text{ἐμβ. } \mathrm{OAIO}=3\pi\alpha^2\cdot$$

ἤτοι τὸ μεταξὺ τῆς κυκλοειδοῦς καὶ τῆς βάσεως αὐτῆς περιεχόμενον χωρίον εἶνε τριπλάσιον τοῦ κύκλου, ἐξ οὗ παράγεται ἡ κυκλοειδής.

Ὑπερβολικαὶ καμπύλαι.

Ὑπερβολικὴν καμπύλην καλοῦμεν πᾶσαν καμπύλην, ἧς ἡ ἐξίσωσις εἶνε τῆς μορφῆς $x^m.y^n=k$, ἔνθα m καὶ n εἶνε θετικοὶ ἀριθμοί.



Ὁ ἀριθμὸς k δύναται πάντοτε νὰ ὑποτεθῇ θετικός· καὶ τὸ ἐν τῇ γωνίᾳ τῶν ἀξόνων κείμενον μέρος τῶν καμπύλων τούτων ἔχει ἀσυμπτώτους τοὺς ἄξονας ΟΧ, ΟΥ, ὡς καὶ ἡ κοινὴ ὑπερβολὴ (ἥτις προκύπτει, ἂν $m=n$) τὸ δὲ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου ΑΒΠΜ, ὅπερ περιέχεται ὑπὸ τῆς καμπύλης καὶ τοῦ ἄξονος ΟΧ καὶ ὑπὸ δύο παραλλήλων τῇ ΟΨ, ἐὰν νοηθῇ διῃρημένον εἰς ἀπειροστὰ παραλληλόγραμμα διὰ τῶν παραλλήλων τῇ ΟΥ, εἶνε

$$E = \eta\mu\theta \int_{\alpha}^{x_1} y\,dx = k^{\frac{1}{n}} \cdot \eta\mu\theta \int_{\alpha}^{x_1} x^{-\frac{m}{n}}\,dx \qquad (x_1 = O\Pi)$$

καὶ μετὰ τὴν ὁλοκλήρωσιν (ἂν $m \gtrless 0$)

$$E = k^{\frac{1}{n}} . \eta\mu\theta \left(x_1^{\frac{n-m}{n}} - \alpha^{\frac{n-m}{n}} \right) \frac{n}{n-m}.$$

Ἐὰν εἶνε $n > m$, αὐξανομένου τοῦ x_1 εἰς ἄπειρον αὐξάνει τὸ ἐμβαδὸν εἰς ἄπειρον· ἀλλ' ἂν εἶνε $n < m$, αὐξανομένου τοῦ x_1 εἰς ἄπειρον, τὸ ἐμβαδὸν τείνει πρὸς τὸ

$$\frac{n}{m-n} k^{\frac{1}{n}} \eta\mu\theta . \alpha^{1-\frac{m}{n}},$$

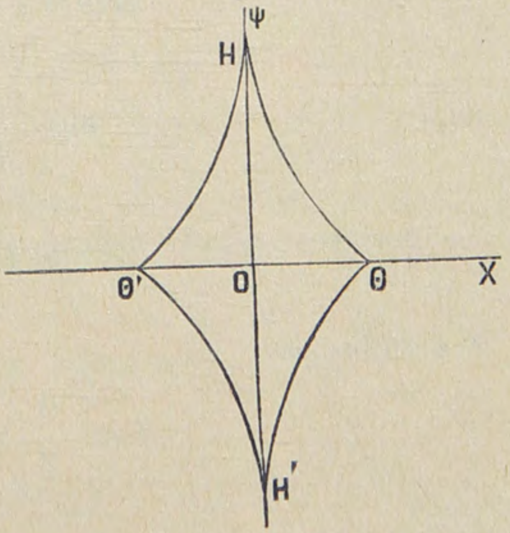
ἑπομένως τὸ ἀπειρόμηκες χωρίον τὸ ὑπὸ τῆς καμπύλης καὶ τοῦ ἄξονος ΟΧ καὶ ὑπὸ τῆς τεταγμένης $x = \alpha$ περιεχόμενον, ἔχει τότε ἐμβαδὸν πεπερασμένον.

Ἐνειλιγμένη τῆς ἐλλείψεως.

Ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς εἶνε

$$(6) \qquad \left(\frac{x}{\alpha_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{\beta_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \qquad \alpha_1 < \beta_1$$

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὑπ' αὐτῆς περιεχομένου χωρίου, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τεταρτημορίου ΘΟΗ καὶ ἔπειτα τετραπλασιάζομεν.



Νοοῦντες τὸ χωρίον τοῦτο διῃρημένον εἰς ὀρθογώνια διὰ τῶν παραλλήλων τῷ ἄξονι ΟΥ, ἔχομεν

$$E = 4 \int_0^{\alpha_1} y\,dx$$

πρὸς ἐκτέλεσιν τῆς ὁλοκληρώσεως ταύτης θέτομεν

$x = \alpha_1 \sigma\upsilon\nu^3\varphi$, ὅτε ἡ ἐξίσωσις (6) δίδει $y = \beta_1 \eta\mu^3\varphi$

καὶ ἑπομένως

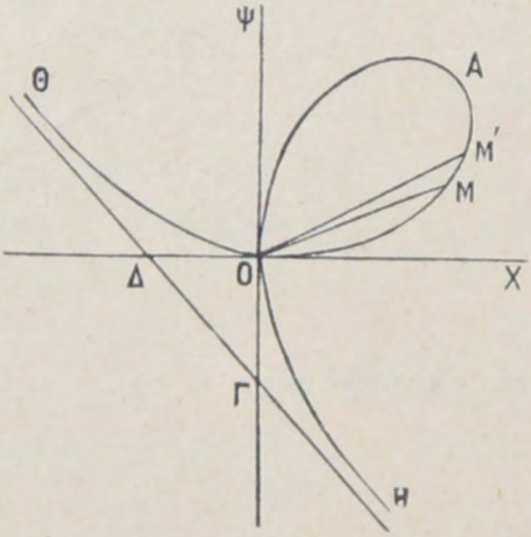
$$E = 12\,\alpha_1\beta_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^4\varphi\,\sigma\upsilon\nu^2\varphi\, d\varphi = 12\,\alpha_1\beta_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta\mu^4\varphi - \eta\mu^6\varphi)\, d\varphi$$

ἤτοι
$$E = 12\,\alpha_1\beta_1\, \frac{\pi}{2}\left(\frac{1.2}{2.4} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\right) = \frac{3}{8}\pi\,\alpha_1\beta_1$$

Φύλλον τοῦ Καρτεσίου.

Ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης ταύτης εἶνε (ἰδὲ Ἐπίπεδον Ἀναλ., σελ. 347)

$$x^3 + y^3 - 3\alpha xy = 0$$



Ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ χωρίον ΟΜΑΟ ὡς συγκείμενον ἐκ τομέων ἀπειροστῶν (ὧν κέντρον τὸ Ο), θὰ εἶνε

$$E = (\text{OMAO}) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 d\theta\cdot$$

ἀλλ' αἱ πολικαὶ συντεταγμέναι ρ, θ τοῦ τυχόντος σημείου τῆς καμπύλης ταύτης συνδέονται διὰ τῆς ἐξισώσεως

$$\rho(\eta\mu^3\theta + \sigma\upsilon\nu^3\theta) = 3\alpha\,\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta$$

ὅθεν
$$E = \frac{9\alpha^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^2\theta\,\sigma\upsilon\nu^2\theta\, d\theta}{(\eta\mu^3\theta + \sigma\upsilon\nu^3\theta)^2}.$$

ἵνα ἐκτελέσωμεν τὴν ὁλοκλήρωσιν ταύτην, θέτομεν

$$\varepsilon\varphi\,\theta = t$$

ὅτε εὑρίσκομεν

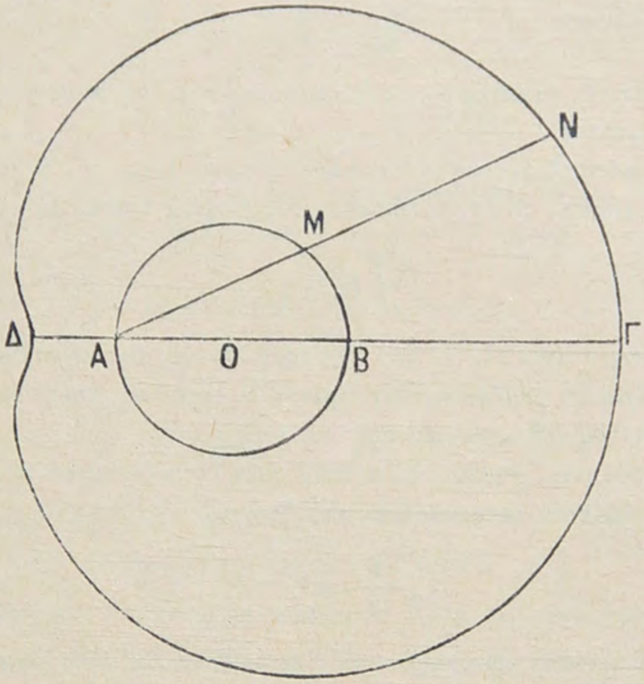
$$E = \frac{9}{2}\,\alpha^2\int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^3)^2}.$$

ἤτοι
$$E = \frac{3}{2}\,\alpha^2\left[-\frac{1}{1+t^3}\right]_0^{\infty} = \frac{3}{2}\,\alpha^2.$$

Κογχοειδὴς τῆς περιφερείας ἀπὸ σημείου αὐτῆς.

Ἐὰν τὸ σημεῖον Α τῆς περιφερείας, ἐξ οὗ ἄγονται αἱ ἀκτῖνες, ληφθῇ ὡς πόλος, ἡ δὲ διάμετρος ΑΟΒ ὡς πολικὸς ἄξων, ἡ ἐξίσωσις τῆς κογχοειδοῦς θὰ εἶνε (ἐν τῷ σχήματι ὑπετέθη $\beta > 2\alpha$)

$$\rho = \beta + 2\alpha \,\text{συν}\theta, \qquad \beta = \text{ΒΓ}, \quad 2\alpha = \text{ΑΒ}$$



Ἐὰν δὲ ἡ ὑπὸ τῆς κογχοειδοῦς περιεχομένη ἐπιφάνεια ἀναλυθῇ εἰς ἀπειροστοὺς τομεῖς ἔχοντας κέντρον τὸ σημεῖον Α, τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς θὰ δίδηται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$E = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\beta + 2\alpha \,\text{συν}\theta)^2 \, d\theta$$

ἀναπτύσσοντες τὸ τετράγωνον καὶ ὁλοκληροῦντες κατὰ μέρη, εὑρίσκομεν

$$E = \pi(\beta^2 + 2\alpha^2).$$

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Τὸ ὑπὸ τῆς καμπύλης

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^m + \left(\frac{y}{\beta}\right)^n = 1$$

καὶ τῶν θετικῶν ἡμιαξόνων ΟΧ, ΟΨ περικλειόμενον χωρίον (m καὶ n ὑποτίθενται θετικοὶ ἀριθμοὶ) ἔχει ἐμβαδὸν

$$\frac{\alpha.\beta}{m+n}\;\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}.$$

2) Τὸ μεταξὺ καμπύλης οἱασδήποτε καὶ τῆς ἐνειλιγμένης αὐτῆς καὶ δύο ἀκτίνων καμπυλότητος περιεχόμενον χωρίον ἔχει ἐμβαδὸν τὸ

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} Rd\varphi$$

ἔνθα φ εἶνε ἡ γωνία τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης πρὸς ὡρισμένην τινὰ εὐθεῖαν καὶ R ἡ ἀκτὶς τῆς καμπυλότητος.

3) Ἐὰν ἐν κλειστῇ καὶ κυρτῇ καμπύλῃ λάβωμεν ἐντὸς τοῦ ὑπ' αὐτῆς περικλειομένου χωρίου τυχὸν σημεῖον τὸ O, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου τούτου θὰ εἶνε

$$\int pds,$$

ἔνθα p δηλοῖ τὴν ἀπόστασιν τοῦ O ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης (πρὸς εὕρεσιν τοῦ τύπου τούτου νοοῦμεν τὸ χωρίον ὡς συγκείμενον ἐκ τριγώνων ἀπειροστῶν ἐχόντων βάσεις τὰ ἀπειροστὰ μέρη τοῦ τόξου καὶ κορυφὴν τὸ O).

4) Τὸ ἀπειρόμηκες χωρίον τὸ μεταξὺ τῶν θετικῶν ἡμιαξόνων καὶ τῆς ἑλκομένης περιεχόμενον ἔχει ἐμβαδὸν πεπερασμένον καὶ ἴσον τῷ

$$\frac{1}{4}\pi\alpha^2.$$

5) Εὑρεῖν τὰ ἐμβαδὰ τῶν χωρίων, ἅτινα ὁρίζουσιν αἱ ἑξῆς καμπύλαι

$$\rho = \alpha\eta\mu(m\theta)$$

$$\rho^2 = \alpha^2\sigma\upsilon\nu(m\theta)$$

$$\rho = \alpha\,\sigma\upsilon\nu\theta.\sqrt[m]{\eta\mu\theta}\cdot$$

$$(xy)^2+1=\alpha^m y^m.$$

6) Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τῶν ἐπικυκλοειδῶν.

7) Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὑπὸ τῆς καμπύλης

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^m+\left(\frac{y}{\beta}\right)^m-cx^\lambda y^\mu=0$$

περικλειομένου χωρίου, ὅπερ κεῖται ἐν τῇ θετικῇ γωνίᾳ τῶν ἀξόνων (οἱ ἐκθέται m, λ, μ ὑποτίθενται θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ $m>\lambda+\mu$)

$$\left(\text{Ἀπ.}\quad E=\frac{1}{2m}\,c^{\frac{2}{k}}.\alpha^{\frac{2\lambda}{k}+1}.\beta^{\frac{2\mu}{k}+1}\,\frac{\Gamma\left(\frac{k+2\lambda}{km}\right).\Gamma\left(\frac{k+2\mu}{km}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{k}\right)}\right)$$

ἔνθα
$$k=m-(\lambda+\mu).$$

8) Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἣν περικλείει ἡ ποδικὴ καμπύλης κυρτῆς καὶ

κλειστῆς ἀπὸ σημείου ἐντὸς αὐτῆς κειμένου, τοῦ O.

$$\left(\text{Ἀπ.}\quad E=\frac{1}{2}\int p^2\frac{ds}{R},\right.$$

ἔνθα p δηλοῖ τὴν ἀπόστασιν τοῦ O ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης καὶ R τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος αὐτῆς).

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς καμπύλης εἶνε $\frac{1}{2}\int\rho^2 d\theta$, ἐντεῦθεν ἕπεται

$$\int\rho^2 d\theta\leqq\int p^2\frac{ds}{R}.$$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε $p=\rho$ ημφ καὶ $\frac{ds}{R}=d\theta+d\varphi$,

ἔνθα φ εἶνε ἡ γωνία τῆς πολικῆς ἀκτῖνος καὶ τῆς ἐφαπτομένης, ἕπεται, ὅτι διὰ πᾶσαν καμπύλην κυρτὴν καὶ κλειστὴν εἶνε (ἂν ὁ πόλος O κεῖται ἐντὸς αὐτῆς)

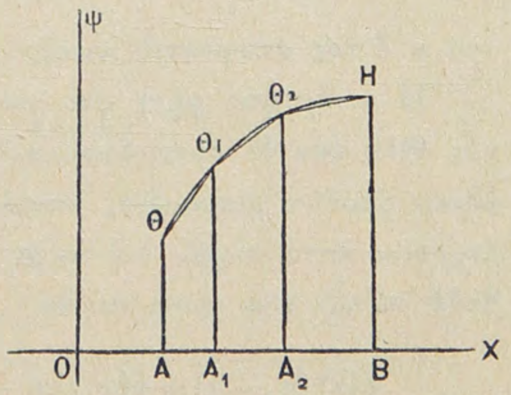
$$\int\rho^2\text{συν}^2\varphi\, d\theta\leqq\int\rho^2\text{ημ}^2\varphi\, d\varphi.$$

2) ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΩΝ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

171. *Ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνεια* λέγεται πᾶσα ἐπιφάνεια, ἥτις γεννᾶται ὑπὸ γραμμῆς στρεφομένης περὶ εὐθεῖαν.

Ἡ τὴν ἐπιφάνειαν γεννῶσα γραμμὴ δύναται πάντοτε νὰ ὑποτεθῇ ἐπίπεδος· διότι, ἂν διὰ τοῦ ἄξονος τῆς περιστροφῆς ἀχθῇ τυχὸν ἐπίπεδον, τέμνει τοῦτο τὴν ἐπιφάνειαν κατὰ γραμμήν, ἥτις λέγεται *μεσημβρινὸς* τῆς ἐπιφανείας καὶ ἥτις προδήλως γεννᾷ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐὰν στραφῇ περὶ τὸν ἄξονα.

Ἐμβαδὸν τῆς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας λέγεται, ἐὰν ὁ μεσημβρινὸς αὐτῆς τμηθῇ εἰς μέρη, τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ ἐμβαδὸν τῶν κολούρων κώνων, οὓς γράφουσιν ἐν τῇ περιστροφῇ αἱ χορδαὶ τῶν μερῶν τούτων, ὅταν ἑκάστη τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν.



Ὅτι δὲ ὑπάρχει ὅριον τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν εἰρημένων κολούρων κώνων καὶ ὅτι εἶνε τὸ αὐτὸ πάντοτε, ὁπωσδήποτε καὶ ἂν προχωρῶσιν ἐλαττούμεναι αἱ χορδαί, ἀρκεῖ νὰ τείνῃ ἑκάστη πρὸς τὸ μηδέν, τοῦτο ἀποδεικνύεται ἐν τοῖς ἑξῆς.

Θεωρήσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν, ἣν γράφει ἡ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου XOY κειμένη γραμμὴ ΘΗ, ὅταν περιστραφῇ περὶ τὸν ἄξονα τῶν x (ὁλόκληρον περιστροφήν). Ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν γραμμὴν ταύτην εἰς μέρη, αἱ χορδαὶ $\Theta\Theta_1$, $\Theta_1\Theta_2, \ldots, \Theta_{\nu-1}H$ τῶν μερῶν τούτων γράφουσι κατὰ τὴν περιστροφὴν τὰς κυρτὰς ἐπιφανείας κολούρων κώνων, ὧν τὰ ἐμβαδὰ εὑρίσκομεν ὡς ἀκολούθως.

Ἐὰν αἱ συντεταγμέναι τῶν περάτων τῆς τυχούσης ἐκ τῶν χορδῶν εἶνε (x, y) καὶ $(x+\Delta x, y+\Delta y)$, ἡ ὑπ' αὐτῆς γραφομένη ἐπιφάνεια ἔχει ἐμβαδὸν

$$\pi(2y+\Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

$$\text{ἢ} \qquad \pi(2y+\Delta y)\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.\ \Delta x\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ ἡ παράστασις $\pi(2y+\Delta y)\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$, ὅταν ἡ χορδὴ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, τείνει πρὸς τὴν

$$2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

ἣν παριστῶμεν συντομίας χάριν διὰ τοῦ $\varphi(x)$, τὸ ῥηθὲν ἐμβαδὸν δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς

$$\varphi(x).\Delta x+\varepsilon.\Delta x,$$

τοῦ ε ὄντος ἀπειροστοῦ τινος.

Ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ εἶνε γνωστή, ὅταν δοθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς γραμμῆς ΘΗ· ἐὰν δὲ ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον τοῦτον εἰς τὰς ὑπὸ τῶν διαφόρων χορδῶν γραφομένας ἐπιφανείας, παριστῶντες τὰς τετμημένας τῶν περάτων κατὰ σειρὰν διὰ α, x_1, $x_2, \ldots, x_{\nu-1}$ β, εὑρίσκομεν ὅτι τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν εἶνε κατὰ σειρὰν

$$\begin{aligned}&\varphi(\alpha)(x_1-\alpha)+\varphi(x_1)(x_2-x_1)+\ldots+\varphi(x_{\nu-1})(\beta-x_{\nu-1})\\&\quad+\varepsilon_1(x_1-\alpha)+\varepsilon_2(x_2-x_1)+\ldots+\varepsilon_\nu(\beta-x_{\nu-1})\end{aligned}$$

τῶν ε_1, $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu$ ὄντων ἀπειροστῶν.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ δευτέρου στίχου τείνει πρὸς τὸ 0, συνάγεται, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ συνόλου τῶν ἐπιφανειῶν, ἅς τινας γράφουσιν αἱ χορδαί, ἔχει ὅριον τὸ

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx \quad \text{ἤτοι} \quad 2\pi\int_\alpha^\beta y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.dx$$

τοῦτο δὲ εἶνε κατὰ τὸν δοθέντα ὁρισμόν, τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας· ἤτοι εἶνε

$$E=2\pi\int_\alpha^\beta y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx, \qquad (1)$$

ἢ συντομώτερον
$$E=2\pi\int_\alpha^\beta yds. \qquad (2)$$

Ἡ μεταβλητὴ τῆς ὁλοκληρώσεως ὑποτίθεται, ὅτι αὐξάνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΘΗ διαρκῶς ἀπὸ α εἰς β.

Ἐν τῷ τύπῳ (2) ἡ ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνεια θεωρεῖται ὡς συγκειμένη ἐξ ἀπειροστῶν ἐπιφανειῶν κολούρων κώνων γραφομένων ὑπὸ τῶν ἀπειροστῶν μερῶν τοῦ μεσημβρινοῦ αὐτῆς.

Σημείωσις. Ἐν τῇ εὑρέσει τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν τῶν κολούρων κώνων, οὓς γράφουσιν αἱ χορδαὶ τοῦ τόξου ΘΗ, ὑπεθέσαμεν τὰς τεταγμένας τοῦ τόξου τούτου θετικὰς πάσας· ἤτοι ὑπεθέσαμεν, ὅτι τὸ τόξον ΘΗ κεῖται ὅλον, ὑπεράνω τοῦ ἄξονος ΟΧ· ἐὰν μέρος μὲν τοῦ ΘΗ κεῖται ὑπεράνω τοῦ ΟΧ μέρος δὲ ὑπ' αὐτόν, τὸ δεύτερον τοῦτο μέρος θὰ ἔχῃ τεταγμένας ἀρνητικὰς καὶ ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἣν γράφει τὸ μέρος τοῦτο, δίδεται ὑπὸ τοῦ εὑρεθέντος τύπου ἀρνητικόν.

Παραδείγματα.

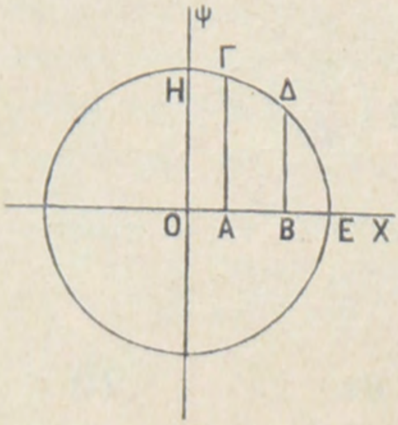
1) Ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης.

Ἐὰν τὸ κυκλικὸν τόξον ΓΔ στραφῇ περὶ τὴν διάμετρον ΟΧ, γράφει σφαιρικὴν ζώνην, ἧς τὸ ἐμβαδὸν εἶνε

$$E=2\pi\int_\alpha^\beta y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx. \qquad (\alpha=OA, \quad \beta=OB)$$

Ἐνταῦθα εἶνε
$$x^2+y^2=\rho^2,$$

ὅθεν
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

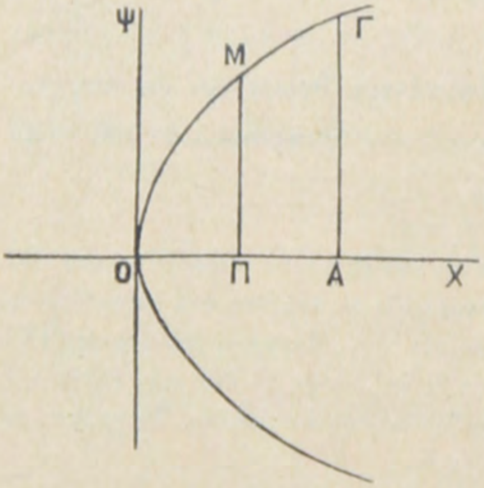


καὶ $$ds = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}\, dx = \frac{\rho}{y} dx,$$

ὅθεν $$E = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho dx = 2\pi\rho(\beta - \alpha),$$

ἤτοι τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης εἶνε γινόμενον τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτῆς.

2) Ἐμβαδὸν τοῦ ἐκ περιστροφῆς παραβολοειδοῦς.



Ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ παραβολικὸν τόξον ΟΜΓ στρέφεται περὶ τὸν ἄξονα τῆς παραβολῆς.

Ἐνταῦθα εἶνε
$$y^2 = 2\mu x,$$
ὅθεν
$$ydy = \mu dx$$
καὶ θεωροῦντες τὴν y ὡς ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\mu}, \quad \text{ὅθεν} \quad ds = \frac{1}{\mu}\sqrt{\mu^2 + y^2}\, dy\cdot$$

ὅθεν ὁ τύπος (2) γίνεται

$$E = \frac{2\pi}{\mu} \int_0^{y_1} y\sqrt{\mu^2 + y^2}\, dy \qquad (y_1 = \mathrm{A\Gamma})$$

καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς ὁλοκληρώσεως

$$E = \frac{4\pi}{3\mu} \left\{ (\mu^2 + y_1^2)^{\frac{3}{2}} - \mu^3 \right\}.$$

Ἐλλειψοειδῆ ἐκ περιστροφῆς.

α') Ἐπίμηκες.

Ἐὰν ἡ ἔλλειψις $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1 \qquad (\alpha>\beta)$

στραφῇ περὶ τὸν μείζονα αὐτῆς ἄξονα, γεννᾷ τὸ ἐκ περιστροφῆς ἐλλειψοειδὲς τὸ *ἐπίμηκες* λεγόμενον. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας ταύτης, θεωροῦμεν τὰς συντεταγμένας τῶν σημείων τῆς ἐλλείψεως ὡς συναρτήσεις τῆς ἐκκεντρικῆς γωνίας φ, ὅτε ἔχομεν

$$x=\alpha\,\text{συν}\varphi, \qquad y=\beta\,\text{ημ}\varphi$$

καὶ $$ds=\sqrt{\alpha^2\text{ημ}^2\varphi+\beta^2\text{συν}^2\varphi}\,d\varphi=\alpha\sqrt{1-\varepsilon^2\text{συν}^2\varphi}\,d\varphi$$

ὅθεν $$E=4\pi\alpha\beta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{ημ}\varphi\sqrt{1-\varepsilon^2\text{συν}^2\varphi}\,d\varphi$$

καὶ ἂν θέσωμεν $\varepsilon\,\text{συν}\varphi=t$, ἕπεται

$$E=\frac{4\pi\alpha\beta}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}\sqrt{1-t^2}\,dt$$

ἄρα $$E=\frac{2\pi\alpha\beta}{\varepsilon}\Big[t\sqrt{1-t^2}+\text{τοξ ημ}t\Big]_0^{\varepsilon}$$

τουτέστιν $$E=2\pi\alpha\beta\left[\sqrt{1-\varepsilon^2}+\frac{\text{τοξ ημ}\varepsilon}{\varepsilon}\right]$$

ἢ καὶ $$E=2\pi\beta\left[\beta+\alpha\frac{\text{τοξ ημ}\varepsilon}{\varepsilon}\right]. \qquad (\varepsilon)$$

ἐὰν εἶνε $\varepsilon=0$, τὸ ἐλλειψοειδὲς καταντᾷ σφαῖρα καὶ εὑρίσκεται $E=4\pi\alpha^2$.

β') Ἐπίπλατυ.

Ἐὰν ἡ ἔλλειψις στραφῇ περὶ τὸν ἐλάσσονα αὐτῆς ἄξονα, γεννᾷ τὸ ἐκ περιστροφῆς ἐλλειψοειδὲς τὸ *ἐπίπλατυ* λεγόμενον· τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$E=2\pi\int x\,ds$$

διότι ὁ ἄξων τῆς περιστροφῆς λαμβάνεται ὡς ἄξων τῶν y· ἑπομένως εἶνε κατὰ τὰ προηγουμένως εὑρεθέντα

$$E=4\pi\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu\varphi\sqrt{\alpha^2\eta\mu^2\varphi+\beta^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi}\,d\varphi,$$

ἢ καὶ
$$E=4\pi\alpha\beta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\varepsilon_1^2\eta\mu^2\varphi}\,\sigma\upsilon\nu\varphi\,d\varphi \qquad \left(\varepsilon_1=\frac{\gamma}{\beta}\right)$$

καὶ ἂν θέσωμεν $\varepsilon_1\eta\mu\varphi=t$, γίνεται

$$E=\frac{4\pi\alpha\beta}{\varepsilon_1}\int_0^{\varepsilon_1}\sqrt{1+t^2}\,dt$$

καὶ μετὰ τὴν ὁλοκλήρωσιν

$$E=\frac{2\pi\alpha\beta}{\varepsilon_1}\left[\varepsilon_1\sqrt{1+\varepsilon_1^2}+l\left(\varepsilon_1+\sqrt{1+\varepsilon_1^2}\right)\right]$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες τὸ ε_1 διὰ τῆς τιμῆς αὐτοῦ εὑρίσκομεν

$$E=2\pi\alpha\left[\alpha+\frac{\beta^2}{\gamma}l\left(\frac{\alpha+\gamma}{\beta}\right)\right] \qquad (\varepsilon')$$

Κυκλοειδικὴ ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας, ἣν γράφει τὸ τόξον ΑΜ τῆς κυκλοειδοῦς, ὅταν στραφῇ περὶ τὴν βάσιν αὐτῆς ΑΒ, παρατηροῦμεν, ὅτι ἐπ' αὐτοῦ εἶνε

$$x=\alpha(\omega-\eta\mu\omega)$$
$$y=\alpha(1-\sigma\upsilon\nu\omega)$$

καὶ
$$dx=\alpha(1-\sigma\upsilon\nu\omega)d\omega, \quad dy=\alpha\,\eta\mu\omega\,d\omega,$$

ὅθεν καὶ
$$ds=2\alpha\,\eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right)d\omega$$

καὶ διὰ ταῦτα εἶνε

$$E=8\pi\alpha^2\int_0^{\omega_1}\eta\mu^3\left(\frac{\omega}{2}\right)d\omega\cdot$$

ἢ καὶ $$E=16\pi\alpha^2\int_0^{\varphi_1}\eta\mu^3\varphi\,d\varphi,\quad \text{ἐὰν τεθῇ}\quad \varphi=\frac{\omega}{2}\cdot$$

καὶ μετὰ τὴν ὁλοκλήρωσιν

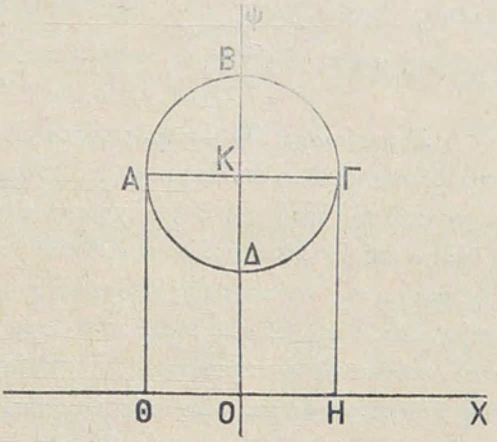
$$E=\frac{16}{3}\pi\alpha^2\left\{2-\sigma\upsilon\nu\frac{\omega_1}{2}\left(2+\eta\mu^2\frac{\omega_1}{2}\right)\right\}\cdot$$

ἐὰν ζητῆται τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὅλης ἐπιφανείας, ἣν γράφει τὸ τόξον ΑΓΒ, πρέπει νὰ θέσωμεν εἰς τὸν τύπον τοῦτον $\omega_1=2\pi$· τότε εὑρίσκομεν

$$E=\frac{64}{3}\pi\alpha^2.$$

Ἐπιφάνεια τῆς σπείρας.

Ἐὰν ἡ περιφέρεια ΑΒΓΔ στραφῇ περὶ εὐθεῖαν ἐκτὸς αὐτῆς κειμένην (ἀλλ' ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῆς) τὴν ΟΧ, γεννᾷ ἐπιφάνειαν, ἥτις σύγκειται ἐκ δύο μερῶν, ἐκ τῆς γεννωμένης ὑπὸ τῆς ἀνωτέρας ἡμιπεριφερείας ΑΒΓ καὶ ἐκ τῆς γεννωμένης ὑπὸ τῆς κατωτέρας ΑΔΓ· ἐπομένως τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς εἶνε



$$E=2\pi\int y_1ds+2\pi\int y_2ds=2\pi\int(y_1+y_2)\,ds,$$
$$(x=-\alpha\ldots+\alpha)$$

ἔνθα y_1 καὶ y_2 εἶνε αἱ τεταγμέναι τῶν δύο ἡμιπεριφερειῶν αἱ πρὸς τὴν αὐτὴν τετμημένην ἀντιστοιχοῦσαι.

Ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας εἶνε

$$x^2+(y-\beta)^2=\rho^2,\quad \text{ἔνθα}\quad \beta=\mathrm{OK}\cdot$$

ὅθεν $$y_1=\beta+\sqrt{\rho^2-x^2}\quad \text{καὶ}\quad y_2=\beta-\sqrt{\rho^2-x^2}$$

καὶ ἐπομένως

$$E=4\pi\beta\int ds\qquad (x=-\alpha\ldots+\alpha)$$

ἐπειδὴ δὲ τὸ ὁλοκλήρωμα παριστᾷ τὸ μῆκος τῆς ἡμιπεριφερείας, συνάγεται

$$E=4\pi^2\alpha\beta.$$

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἣν γράφει ὁ λημνίσκος $\rho^2=2\alpha^2\sigma\upsilon\nu 2\theta$ στρεφόμενος περὶ τὸν πολικὸν ἄξονα (τὸ ἄνω μέρος τοῦ τόξου). ('Απ. $4\pi\alpha^2(2-\sqrt{2})$).

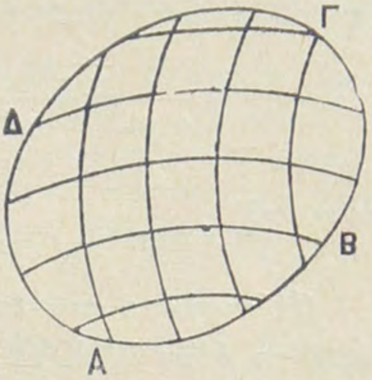
2) Ἡ ἀπειρομήκης ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνεια ἡ γραφομένη ὑπὸ τῆς ἑλκομένης, ὅταν περιστρέφηται περὶ τὸν ἄξονα τῶν x, ἔχει ἐμβαδὸν $2\pi\alpha^2$.

3) ΕΜΒΑΔΟΝ ΟΙΑΣΔΗΠΟΤΕ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

172. *Ἐμβαδὸν* οἱασδήποτε καμπύλης ἐπιφανείας λέγεται τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ ἐμβαδὸν πολυεδρικῆς ἐπιφανείας ἐγγεγραμμένης εἰς αὐτὴν καὶ τῆς ὁποίας τὸ περίγραμμα εἶνε ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ περίγραμμα τῆς ἐπιφανείας, ὅταν ἑκάστη τῶν ἑδρῶν αὐτῆς τείνῃ πρὸς τὸ 0 κατ' ἀμφοτέρας τὰς διαστάσεις, τὸ δὲ ἐπίπεδον αὐτῆς τείνῃ νὰ γίνῃ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας.

Σημείωσις. Ὁ ὁρισμὸς οὗτος εἶνε ἀνάλογος τῷ ὁρισμῷ τοῦ μήκους τῶν καμπύλων τόξων· καθὼς ὡρίσαμεν μῆκος τόξου τὸ ὅριον τοῦ μήκους πάσης εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένης καὶ τὰ αὐτὰ τῷ τόξῳ ἐχούσης πέρατα, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ αὐτῆς τείνῃ πρὸς τὸ 0, οὕτω καὶ ἐνταῦθα ὁρίζομεν ἐμβαδὸν καμπύλης ἐπιφανείας τὸ ὅριον πάσης εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένης πολυεδρικῆς ἐπιφανείας, ἧς τὰ ἄκρα εἶνε ἐγγεγραμμένα εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἐπιφανείας, ὅταν ἑκάστη ἕδρα τείνῃ πρὸς τὸ 0 κατ' ἀμφοτέρας τὰς διαστάσεις. Ἐνταῦθα μόνον προσετέθη ὁ περιορισμός, ὅτι πρέπει καὶ τὸ ἐπίπεδον ἑκάστης ἕδρας νὰ τείνῃ νὰ γίνῃ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας (ὅτι ὁ περιορισμὸς οὗτος εἶνε ἀναγκαῖος, θὰ δειχθῇ ἐν τοῖς ἑπομένοις)· διότι ἐν μὲν ταῖς καμπύλαις γραμμαῖς ἑκάστη πλευρὰ τῆς ἐγγεγραμμένης τεθλασμένης γραμμῆς, ὡς χορδή, τείνει ἀναγκαίως νὰ γίνῃ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης, ἐν ταῖς ἐπιφανείαις ὅμως δύναται ἐγγεγραμμένον τι ἐπίπεδον σχῆμα νὰ τείνῃ πρὸς τὸ 0 κατ' ἀμφοτέρας τὰς διαστάσεις αὐτοῦ καὶ ὅμως τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ νὰ μὴ τείνῃ νὰ γίνῃ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας· ἐὰν λ.χ. τάμωμεν τὴν ἐπιφάνειαν δι' ἐπιπέδου καὶ ἑνώσωμεν τρία σημεῖα $MM'M''$ τῆς τομῆς, τὸ τρίγωνον $MM'M''$ τείνει πρὸς τὸ 0, ὅταν τὰ τρία σημεῖα M, M', M'' τείνωσιν νὰ συμπέσωσιν εἰς ἕν· ἀλλὰ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ μένει ἀμετάβλητον.

Ὅτι εἶνε δυνατὸν εἰς δεδομένην καμπύλην ἐπιφάνειαν νὰ ἐγγραφῇ πολυεδρικὴ ἐπιφάνεια καὶ ἡ περατοῦσα αὐτὴν τεθλασμένη νὰ εἶνε ἐγγραμμένη εἰς τὴν περατοῦσαν τὴν ἐπιφάνειαν γραμμήν, δεικνύεται ὡς ἑξῆς. Ἔστω ΑΒΓΔ ἡ τὴν ἐπιφάνειαν περατοῦσα γραμμή. Γράφομεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας σειράν τινα γραμμῶν μὴ τεμνουσῶν ἀλλήλας (λόγου χάριν τέμνομεν τὴν ἐπιφάνειαν δι' ἐπιπέδων παραλλήλων) ἢ συνερχομένων εἰς ἓν σημεῖον· ἔπειτα ἑτέραν σειρὰν γραμμῶν τὸν αὐτὸν τηροῦσαν περιορισμόν· αἱ δύο αὗται σειραὶ ἀποτελοῦσιν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας δίκτυόν τι διαιροῦσαι αὐτὴν εἰς τετράπλευρα καμπυλόγραμμα (καί τινα τρίγωνα καμπυλόγραμμα)· ἄγομεν ἐν ἑκάστῳ τῶν τετραπλεύρων τούτων τὰς χορδὰς τῶν τόξων αὐτοῦ καὶ μίαν τῶν διαγωνίων του· τοιουτρόπως προκύπτει πολυεδρικὴ ἐπιφάνεια ἐκ τριγώνων συγκειμένη, ἧς τινος τὸ περίγραμμα εἶνε ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ περίγραμμα τῆς ἐπιφανείας· καὶ τὸ ἐπίπεδον ἑκάστου τῶν τριγώνων τούτων τείνει νὰ γίνῃ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας, ὅταν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ τείνωσι πᾶσαι πρὸς τὸ 0, αἱ δὲ γωνίαι αὐτοῦ τείνωσι πρὸς ὅρια διάφορα τοῦ 0 καὶ τῶν 180^0· διότι αἱ δύο πλευραὶ ἑκάστης τῶν γωνιῶν αὐτοῦ τείνουσι τότε νὰ γίνωσιν ἐφαπτόμεναι τῆς ἐπιφανείας μὴ συμπίπτουσαι.



Ἔστω ἐπιφάνειά τις καμπύλη οἱαδήποτε περατουμένη εἰς τὴν γραμμὴν ΑΒΓΔΑ· ἐὰν εἰς αὐτὴν νοήσωμεν ἐγγεγραμμένην τυχοῦσαν πολυεδρικὴν ἐπιφάνειαν περατουμένην εἰς τεθλασμένην γραμμὴν ἐγγεγραμμένην εἰς τὴν ΑΒΓΔΑ, καὶ παραστήσωμεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἑδρῶν διὰ τῶν E_1, $E_2, \ldots, E_\nu$, ἡ πολυεδρικὴ ἐπιφάνεια θὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν τὸ ἄθροισμα

$$E_1 + E_2 + E_3 + \ldots + E_\nu.$$

Ὑποθέσωμεν νῦν, ὅτι αἱ παράλληλοι τῷ ἄξονι ΟΖ τέμνουσι τὴν προκειμένην ἐπιφάνειαν καθ' ἓν μόνον σημεῖον· ἐὰν προβάλωμεν τήν τε καμπύλην ἐπιφάνειαν καὶ τὴν εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένην πολυεδρικὴν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν xy, ἡ προβολὴ Τ τῆς ἐπιφανείας θὰ εὑρεθῇ διῃρημένη καὶ αὐτὴ εἰς εὐθύγραμμα σχήματα, τόσα, ὅσαι εἶνε αἱ ἕδραι τῆς πολυεδρικῆς ἐπιφανείας, καὶ ἂν παραστήσωμεν τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν διὰ τ_1, $\tau_2, \ldots, \tau_\nu$, θὰ εἶνε

$$\tau_1 = E_1 \sigma\upsilon\nu\omega_1, \quad \tau_2 = E_2 \sigma\upsilon\nu\omega_2, \ldots, \tau_\nu = E_\nu \sigma\upsilon\nu\omega_\nu,$$

ἔνθα ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_\nu$ δηλοῦσι τὰς γωνίας, ἃς τινας σχηματίζουσιν αἱ ἕδραι E_1, $E_2, \ldots$ πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῶν xy.

Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐγγεγραμμένης πολυεδρικῆς ἐπιφανείας εἶνε

$$\frac{\tau_1}{\sigma\upsilon\nu\omega_1} + \frac{\tau_2}{\sigma\upsilon\nu\omega_2} + \ldots + \frac{\tau_\nu}{\sigma\upsilon\nu\omega_\nu}.$$

ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως ἡ ἐγγραφὴ τῆς πολυεδρικῆς ἐπιφανείας προχωρεῖ οὕτως, ὥστε ἑκάστη ἕδρα E τείνει νὰ γίνῃ ἐφαπτομένη εἰς τὴν ἐπιφάνειαν· ἐὰν ἄρα παραστήσωμεν διὰ x, y, z τὰς συντεταγμένας μιᾶς τῶν κορυφῶν τῆς τυχούσης ἕδρας καὶ διὰ φ τὴν γωνίαν τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῶν xy, ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν φ καὶ ω τείνει πρὸς τὸ 0· ἐπομένως εἶνε

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\omega}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\varphi}+\eta, \qquad \text{τοῦ } \eta \text{ ὄντος ἀπειροστοῦ τινος,}$$

ὅθεν καὶ
$$E=\frac{\tau}{\sigma\upsilon\nu\varphi}+\eta.\tau.$$

Ἡ γωνία φ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς τὸ σημεῖον x, y, z πρὸς τὸ ἐπίπεδον XOY εἶνε γνωστή, ἐὰν δοθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας· διότι ἂν εἶνε

$$z=\varphi(x,y) \quad \text{καὶ τεθῇ} \quad p=\frac{\partial z}{\partial x}, \quad q=\frac{\partial z}{\partial y},$$

θὰ εἶνε (εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους)

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\varphi}=\sqrt{1+p^2+q^2}=\mathrm{f}(x,y)$$

ὅθεν ἡ τυχοῦσα ἕδρα ἔχει ἐμβαδὸν

$$E=\tau.\mathrm{f}(x,y)+\tau.\eta\cdot$$

ἐφαρμόζοντες δὲ τὸν τύπον τοῦτον εἰς τὰς διαφόρους ἕδρας τῆς ἐγγεγραμμένης πολυεδρικῆς ἐπιφανείας, εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς εἶνε

$$\tau_1\mathrm{f}(x_1,y_1)+\tau_2\mathrm{f}(x_2,y_2)+\ldots+\tau_\nu\mathrm{f}(x_\nu,y_\nu)$$
$$+\tau_1\eta_1+\tau_2\eta_2+\ldots+\tau_\nu\eta_\nu$$

καὶ τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς, ἤτοι τὸ ἐμβαδὸν τῆς καμπύλης ἐπιφανείας, εἶνε

$$E=\int_T \mathrm{f}(x,y)\,d(x,y) \quad \text{ἢ} \quad E=\int_T \sqrt{1+p^2+q^2}\,d(x,y). \qquad (1)$$

Ἡ ἐπιφάνεια ἐν τῷ ὁλοκληρώματι τούτῳ θεωρεῖται ὡς συγκειμένη ἐκ τῶν μερῶν, εἰς ἃ διαιρεῖται διὰ τῶν ὀρθῶν κυλίνδρων, οἵτινες ἔχουσι βάσεις τὰ μέρη τοῦ τόπου T ὁπωσδήποτε διαιρουμένου.

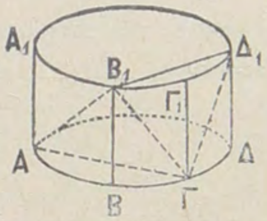
Σημείωσις. Ὅτι εἶνε δυνατὸν πολυεδρική τις ἐπιφάνεια ἐγγεγραμμένη εἰς καμπύλην ἐπιφάνειαν νὰ ἔχῃ οἱονδήποτε ὅριον (ὅταν αἱ ἕδραι αὐτῆς δὲν τείνωσι νὰ γίνωσιν ἐφαπτόμεναι τῆς ἐπιφανείας), δεικνύει τὸ ἑξῆς παράδειγμα τοῦ γερμανοῦ μαθηματικοῦ Schwarz.

Κύλινδρον ὀρθὸν κυκλικῆς βάσεως τέμνομεν δι' ἐπιπέδων καθέτων πρὸς τὸν ἄξονα αὐτοῦ καὶ ἴσον ἀπεχόντων ἀπ' ἀλλήλων εἰς n ἴσους κυλίνδρους, ὧν ἕκαστος θὰ ἔχῃ ὕψος $\frac{v}{n}$, ἂν v εἶνε τὸ ὕψος τοῦ ἀρχικοῦ κυλίνδρου· ἕκαστον τῶν n κυλίνδρων τέμνομεν ἔπειτα διὰ $2m$ ἐπιπέδων διὰ τοῦ ἄξονος αὐτοῦ ἀγομένων εἰς $2m$ ἴσα μέρη καὶ ἐγγράφομεν τρίγωνα εἰς τὴν κυρτὴν αὐτοῦ ἐπιφάνειαν κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον.

Ἐὰν Α, Β, Γ, Δ,... εἶνε κατὰ σειρὰν τὰ σημεῖα, ἐν οἷς ἐτμήθη ἡ ἑτέρα τῶν περιφερειῶν αὐτοῦ (ὑπὸ τῶν $2m$ ἐπιπέδων) καὶ $Α_1$, $Β_1$, $Γ_1$, $Δ_1$,... τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα, ἐν οἷς ἐτμήθη ἡ ἄλλη (διὰ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων κατὰ σειράν), ἄγομεν τὰς εὐθείας

$$ΑΒ_1,\ Β_1Γ,\ ΓΔ_1,\ Δ_1Ε,\ Ε_1Ζ, \ldots, Ω_1Α$$

καὶ τὰς χορδὰς ΑΓ, ΓΕ,...,$Β_1Δ_1$, $Δ_1Ζ_1$,... αἵτινες ἐπιζευγνύουσι τὰ ἄκρα δύο ἐφεξῆς ἐκ τῶν εὐθειῶν τούτων· τοιουτοτρόπως σχηματίζονται $2m$ τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις καὶ ἰσοσκελῆ καὶ ἐγγεγραμμένα εἰς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ μικροῦ κυλίνδρου ΑΒΓΔ.... $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$..· ἐὰν δὲ τοῦτο ποιήσωμεν ἐπὶ πάντων τῶν μερῶν τοῦ ἀρχικοῦ κυλίνδρου (φροντίζοντες, ὥστε νὰ συμπίπτωσιν αἱ βάσεις τῶν εἰς δύο συνεχόμενα μέρη ἐγγεγραμμένων τριγώνων), θὰ ἔχωμεν $2mn$ τρίγωνα ἴσα καὶ ἰσοσκελῆ, ἐγγεγραμμένα εἰς τὴν κυρτὴν αὐτοῦ ἐπιφάνειαν· τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὑπ' αὐτῶν ἀποτελουμένης πολυεδρικῆς ἐπιφανείας θὰ εἶνε διὰ τοῦτο $2mn\varepsilon$, ἂν διὰ τοῦ ε παραστήσωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ἐκ τούτων.



Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ ε παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ τυχὸν τρίγωνον, οἷον τὸ $ΑΒ_1Γ$, ἔχει βάσιν μὲν τὴν χορδὴν τοῦ τόξου ΑΓ, ὅπερ εἶνε τὸ $\frac{1}{m}$ τῆς περιφερείας καὶ ἑπομένως ἡ χορδὴ αὐτοῦ εἶνε (ἂν διὰ τοῦ α παρασταθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κυλίδρου)

$$2\alpha\,\text{ημ}\left(\frac{\pi}{m}\right),$$

ὕψος δὲ ἔχει τὴν ὑποτείνουσαν ὀρθογωνίου τριγώνου, οὗτινος κάθετοι πλευραὶ εἶνε ἡ γενέτειρα $Β_1Β=\left(\frac{v}{n}\right)$ καὶ τὸ βέλος τοῦ τόξου ΑΓ, ὅπερ εἶνε $\alpha-\alpha\,\text{συν}\left(\frac{\pi}{m}\right)$ ἤτοι $2\alpha\,\text{ημ}^2\left(\frac{\pi}{2m}\right)$· τὸ ἐμβαδὸν ἄρα τοῦ τριγώνου τούτου εἶνε

$$\varepsilon=\alpha\,\text{ημ}\left(\frac{\pi}{m}\right)\cdot\sqrt{\frac{v^2}{n^2}+4\alpha^2\text{ημ}^4\left(\frac{\pi}{2m}\right)}$$

καὶ τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς ἐκ πάντων τῶν τριγώνων συνισταμένης πολυεδρικῆς ἐπιφανείας εἶνε

$$Ε=2m\alpha\,\text{ημ}\left(\frac{\pi}{m}\right)\sqrt{v^2+4\alpha^2n^2\text{ημ}^4\left(\frac{\pi}{2m}\right)}$$

καὶ ἑπομένως

$$\text{ὅρ}\ Ε=2\pi\alpha\sqrt{v^2+\frac{1}{4}\ \pi^4\alpha^2\ \text{ὅρ}\ \left(\frac{n^2}{m^4}\right)}$$

ἐπειδὴ δὲ οἱ ἀριθμοὶ m καὶ n αὐξάνουσιν εἰς ἄπειρον, ὅλως ἄσχετοι πρὸς ἀλλήλους διαμένοντες, τὸ ὅριον τῆς τετρ. ῥίζης δύναται νὰ γίνῃ οἱονδήποτε (μεγαλήτερον τοῦ v)· ἀρκεῖ νὰ συνδεθῶσι ταῦτα καταλλήλως· ἐὰν λ. χ. τὰ m καὶ n αὐξάνωσιν οὕτως, ὥστε νὰ εἶνε $m=n$, θὰ εἶνε ὅρ $E=2\pi\alpha v$· ἀλλ' ἐὰν αὐξάνωσιν οὕτως, ὥστε νὰ εἶνε $m^2=n$, θὰ εἶνε

$$\text{ὅρ } E=2\pi\alpha\sqrt{v^2+\frac{1}{4}\pi^4\alpha^2}.$$

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ φ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἣν σχηματίζει τὸ τυχὸν τρίγωνον πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου, εὑρίσκομεν εὐκόλως, ὅτι εἶνε

$$\sigma\varphi\ \varphi=\frac{\alpha\left(1-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{m}\right)\right)n}{v}=\frac{2\alpha n\ \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2m}\right)}{v}.$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου γίνεται φανερόν, ὅτι ὅταν εἶνε ορ $\varphi=\frac{\pi}{2}$, ὅταν δηλαδὴ τὰ ἐπίπεδα τῶν τριγώνων τείνωσι νὰ γίνωσιν ἐφαπτόμενα τοῦ κυλίνδρου, καὶ τότε μόνον, ἔχομεν

$$\text{ορ } E=2\pi\alpha v.$$

Μετασχηματισμὸς τοῦ ὁλοκληρώματος

$$\int\limits_T\sqrt{1+p^2+q^2}\,d(x,y),$$

ὅταν αἱ συντεταγμέναι x, y, z τῶν σημείων τῆς ἐπιφανείας δοθῶσιν ὡς συναρτήσεις δύο μεταβλητῶν u, v.

173. Πολλάκις δίδεται ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ τὴν μορφὴν $\varphi(x, y, z)=0$, ἢ γενικώτερον δίδονται αἱ συντεταγμέναι x, y, z αὐτῆς ὡς συναρτήσεις δύο μεταβλητῶν u, v διὰ τῶν ἐξισώσεων

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v)\\ y &= \mathrm{f}(u, v)\\ z &= \sigma(u, v)\end{aligned}\qquad(\varepsilon)$$

τότε πρὸς εὕρεσιν τῶν μερικῶν παραγώγων p, q διαφορίζομεν τὰς ἐξισώσεις ταύτας καὶ ἀπαλείφομεν τὰ du, dv (ἰδὲ Διαφ. σελ. 159), ὅτε εὑρίσκομεν

$$p=-\frac{A}{\Gamma},\qquad q=-\frac{B}{\Gamma},$$

ἔνθα ἐτέθη πρὸς συντομίαν

$$\mathrm{A}=\frac{d(y,z)}{d(u,v)},\qquad \mathrm{B}=\frac{d(z,x)}{d(u,v)},\qquad \Gamma=\frac{d(x,y)}{d(u,v)}.$$

ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς ἐπιφανείας δίδεται τότε ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\mathrm{E}=\int_{\mathrm{T}}\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\Gamma^2}\;d(u,v) \tag{2}$$

ἢ καὶ

$$\mathrm{E}=\int_{\mathrm{T}}\sqrt{d(x,y)^2+d(y,z)^2+d(z,x)^2} \tag{3}$$

Ὁ τύπος οὗτος εἶνε ἐντελῶς ἀνάλογος τῷ τύπῳ, ὅστις δίδει τὸ μῆκος τοῦ τόξου τῶν καμπύλων.

Σημείωσις. Ἐν τῷ ὁλοκληρώματι (2) ἐὰν ληφθῇ $d(u,v)=du.dv$, θεωρεῖται ἡ ἐπιφάνεια ὡς συγκειμένη ἐκ τῶν ἀπειροστῶν τετραπλεύρων, εἰς ἃ διαιρεῖται διὰ τῶν ὀρθῶν κυλίνδρων, ὧν βάσεις εἶνε τὰ μέρη τοῦ χωρίου Τ διαιρεθέντος διὰ τῶν δύο σειρῶν τῶν καμπύλων $u=$σταθ. καὶ $v=$σταθ.

Παραδείγματα.

1) **Ἐμβαδὸν τοῦ κοινοῦ στρεβλοῦ ἑλικοειδοῦς**.

Ἡ ἐπιφάνεια, ἣν ἀποτελοῦσιν αἱ ἐκ τῶν σημείων κοινῆς στερεᾶς ἕλικος ἀγόμεναι κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα αὐτῆς (αἱ πρῶται κάθετοι αὐτῆς) λέγεται *κοινὸν ἑλικοειδὲς στρεβλὸν* (διότι δὲν εἶνε ἀναπτύξιμος ἐπὶ ἐπιπέδου).

Αἱ ἐξισώσεις αὐτῆς εὑρίσκονται ὡς ἀκολούθως.

Ἔστω Η τυχὸν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας κείμενον ἐπὶ τῆς καθέτου ΜΕ· ἐὰν διὰ x, y, z παραστήσωμεν τὰς συντεταγμένας αὐτοῦ καὶ διὰ x_1, y_1, z_1 τὰς τοῦ ἀντιστοίχου σημείου Μ τῆς ἕλικος, θὰ εἶνε

$$z=z_1\quad \text{καὶ}\quad \frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1},$$

καὶ ἂν τὴν τιμὴν ἑκατέρου τῶν ἴσων τούτων λόγων παραστήσωμεν διὰ u, θὰ ἔχωμεν

$$x=x_1u,\quad y=y_1u,\quad \text{καὶ}\quad z=z_1\cdot$$

ὅθεν (Διαφ. σελ. 153)

$$x = \alpha u \text{ συνω}$$
$$y = \alpha u \text{ ημω} \qquad (\varepsilon)$$
$$z = \alpha m.\omega.$$

Ἔχομεν οὕτω τὰς ἐξισώσεις ταύτας τῆς ἐπιφανείας, ἐν αἷς αἱ συντεταγμέναι x, y, z τοῦ τυχόντος σημείου αὐτῆς ἐκφράζονται ὡς συναρτήσεις τῶν δύο μεταβλητῶν ω καὶ u, καὶ ἂν μὲν ἡ ω μένῃ σταθερά, ἡ δὲ u μεταβάλληται, λαμβάνομεν τὰ σημεῖα μιᾶς γενετείρας, ἂν δὲ τἀνάπαλιν μεταβάλληται μόνη ἡ ω, ἔχομεν τὰ σημεῖα μιᾶς ἕλικος κειμένης ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων εὑρίσκομεν νῦν

$$A = m\alpha^2 \text{ημω}, \qquad B = -m\alpha^2 \text{συνω}, \qquad \Gamma = \alpha^2 u,$$

ἑπομένως κατὰ τὸν τύπον (2)

$$E = \alpha^2 \int \sqrt{m^2 + u^2}\, du d\omega.$$

Ὡς τόπον τῆς ὁλοκληρώσεως λαμβάνομεν τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου, τότε τὸ ὁλοκλήρωμα παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μέρους τῆς ἐπιφανείας, ὅπερ κεῖται ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου καὶ γράφεται ὑπὸ τῆς γενετείρας στρεφομένης ὁλόκληρον περιστροφήν· καὶ τὰ ὅρια τοῦ μὲν u εἶνε ἀπὸ 0 μέχρις 1, τῆς δὲ γωνίας ω ἀπὸ 0 μέχρι 2π· ὥστε

$$E = \alpha^2 \int_0^1 \sqrt{m^2 + u^2}\, du \int_0^{2\pi} d\omega$$

καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ὁλοκληρώσεων

$$E = \pi\alpha^2 \left\{ \sqrt{1 + m^2} + m^2 l \left(\frac{1 + \sqrt{1 + m^2}}{m} \right) \right\}$$

2) *Πρόβλημα τοῦ* Viviani.

Ἐπὶ τοῦ μεγίστου κύκλου σφαίρας γράφομεν δύο ἴσους κύκλους ἐφαπτομένους αὐτοῦ καὶ ἀλλήλων καὶ ἔχοντας διάμετρον ἴσην τῇ ἀκτῖνι τῆς σφαίρας. Ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ἥτις περιλαμβάνεται ἐντὸς τῶν κυλίνδρων, ὧν βάσεις εἶνε οἱ δύο κύκλοι.

Ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος ἐπιφάνεια σύγκειται προδήλως ἐκ τεσσάρων ἴσων μερῶν (δύο μὲν ὑπεράνω τοῦ μεγίστου κύκλου AA_1BB_1, δύο δὲ ὑποκάτω)· ὅθεν

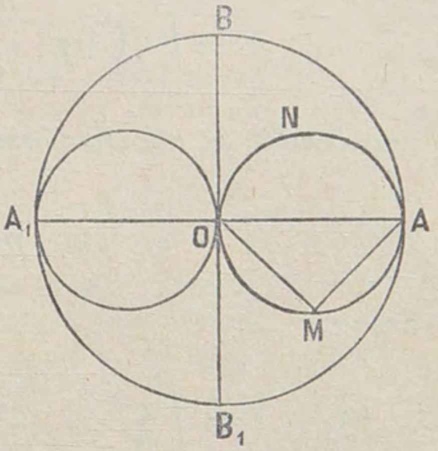
$$E=4\int\limits_{(OMANO)}\sqrt{1+p^2+q^2}\,d(x,y)=8\int\limits_{(OMAO)}\sqrt{1+p^2+q^2}\,d(x,y)$$

καὶ ἂν διαιρέσωμεν τὸν τόπον τῆς ὁλοκληρώσεως (ἤτοι τὸ ἡμικύκλιον OMAO) εἰς κολοβοὺς τομεῖς, θὰ εἶνε

$$E=8\int\limits_{(OMAO)}\sqrt{1+p^2+q^2}\,\rho d\rho\, d\theta\cdot$$

ἀλλ' ἐπὶ τῆς σφαίρας εἶνε

$$x^2+y^2+z^2=\alpha^2,$$



ὅθεν $\quad p=-\dfrac{x}{z},\quad q=-\dfrac{y}{z}$

καὶ $\quad \sqrt{1+p^2+q^2}=\dfrac{\alpha}{z}=\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-\rho^2}},$

ὅθεν $$E=8\alpha\int\frac{\rho d\rho\, d\theta}{\sqrt{\alpha^2-\rho^2}}\cdot$$

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν πρώτην τὴν ὁλοκλήρωσιν πρὸς ρ, τὰ ὅρια τοῦ ρ θὰ εἶνε 0 καὶ OM (ἂν ἡ γωνία θ ἔχῃ τὴν τιμὴν AOM), ἤτοι ασυνθ, τῆς δὲ γωνίας θ ὅρια θὰ εἶνε 0 καὶ $\dfrac{\pi}{2}\cdot$ ὅθεν

$$E=8\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\alpha\sigma\upsilon\nu\theta}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{\alpha^2-\rho^2}}$$

καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ὁλοκληρώσεων

$$E=8\alpha^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=4\pi\alpha^2-8\alpha^2.$$

Ἐκ τοῦ ἐξαγομένου τούτου βλέπομεν, ὅτι τὸ ἐκτὸς τῶν δύο εἰρημένων κυλίνδρων μένον μέρος τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας εἶνε ἴσον τῷ

$8\alpha^2$ (δύναται ἄρα νὰ κατασκευασθῇ γεωμετρικῶς τετράγωνον ἰσοδύναμον αὐτῷ).

3) *Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐλλειπτικοῦ παραβολοειδοῦς*

$$\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\mu}=2z, \qquad (\delta)$$

ἥτις περιλαμβάνεται ἐντὸς τοῦ ὀρθοῦ κυλίνδρου

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\mu^2}=k^2.$$

Τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν εἶνε κατὰ τὸν τύπον (1)

$$\mathrm{E}=\int\sqrt{1+p^2+q^2}\,d(x,y), \qquad \frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\mu^2}-k^2\leqq 0$$

καὶ ἐπειδὴ ἐκ τῆς ἐξισώσεως (δ) τῆς ἐπιφανείας εὑρίσκομεν

$$p=\frac{x}{\lambda}, \quad q=\frac{y}{\mu},$$

ἕπεται

$$(\iota) \qquad \mathrm{E}=\int\sqrt{1+\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\mu^2}}\,d(x,y), \qquad \frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\mu^2}-k^2\leqq 0.$$

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὁλοκληρώματος τούτου διαιροῦμεν τὸν τόπον τῆς ὁλοκληρώσεως $\left(\text{ἤτοι τὴν ἔλλειψιν } \frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\mu^2}-k^2<0\right)$ εἰς ζώνας ἐλλειπτικὰς διὰ σειρᾶς ἐλλείψεων ὁμοιοθέτων

$$(\theta) \qquad \frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\mu^2}-u=0 \qquad u=0,\ldots,k^2.$$

(ἐκλέγομεν δὲ τὰς καμπύλας ταύτας, διότι ἐφ' ἑκάστης αὐτῶν ἡ τετρ. ῥίζα, ἡ ἐν τῷ ὁλοκληρώματι, μένει σταθερὰ καὶ ἴση τῇ $\sqrt{1+u}$ δηλαδὴ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον σχηματίζει εἰς τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας τὰ ἐφ' ἑκάστης τῶν καμπύλων τούτων προβαλλόμενα σταθερὰν γωνίαν πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῶν xy)· ἔπειτα δὲ διαιροῦμεν καὶ τὰς ζώνας ταύτας δι' ἄλλης οἱασδήποτε σειρᾶς καμπύλων εἰς μέρη· ἐὰν τότε προσθέσωμεν τὰ στοιχεῖα τοῦ ὁλοκληρώματος (ι) τὰ προερχόμενα ἐκ τῶν μερῶν μιᾶς ζώνης, (ἃς περιλαμβάνεται δὲ αὕτη μεταξὺ δύο ἐλλείψεων (θ) ἀντιστοιχουσῶν πρὸς τὰς τιμὰς u καὶ $u+du$), εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον

$$\sqrt{1+u^2}\int d(x,y) \quad \text{ἤτοι} \quad \varepsilon\sqrt{1+u},$$

ἔνθα ε σημαίνει τὸ ἐμβαδὸν τῆς εἰρημένης ζώνης, ἤτοι τὸ διαφορικὸν τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐλλείψεως, ἥτις ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν τιμὴν u· τὸ ἐμβαδὸν τοῦτο εἶνε $\pi\lambda\mu u$ καὶ τὸ διαφορικὸν αὐτοῦ εἶνε $\pi\lambda\mu du$, ὅθεν τὸ ἐξαγόμενον τῆς πρώτης ὁλοκληρώσεως εἶνε $\pi\lambda\mu\sqrt{1+u^2}\,du$.

Ἵνα νῦν εὕρωμεν τὸ ὁλοκλήρωμα (ι), ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα τὰ ἐκ πασῶν τῶν ζωνῶν προερχόμενα, ἤτοι νὰ ὁλοκληρώσωμεν τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο πρὸς u ἀπὸ 0 μέχρι k^2· ὅθεν

$$E=\pi\lambda\mu\int_0^{k^2}\sqrt{1+u^2}\,du=\frac{2}{3}\pi\lambda\mu\left\{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}-1\right\}.$$

Σημείωσις. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὁλοκληρώματος τούτου διηρέσαμεν τὸν τόπον τῆς ὁλοκληρώσεως διὰ καμπύλων, ἐφ' ὧν ἡ τετρ. ῥίζα μένει σταθερὰ καὶ αἵτινες ἐξαρτῶνται ἀπό τινος παραμέτρου u· τότε δὲ (οἱασδήποτε οὔσης τῆς δευτέρας σειρᾶς τῶν καμπύλων v) ἐὰν ἀθροίσωμεν τὰ στοιχεῖα τοῦ ὁλοκληρώματος τὰ προερχόμενα ἐκ τῶν μερῶν τοῦ τόπου T, ἅτινα περιλαμβάνονται μεταξὺ δύο καμπύλων u καὶ $u+du$, ἐπειδὴ εἰς αὐτὰ ἡ τετρ. ῥίζα μένει σταθερά, εὑρίσκομεν τὸ ἐξαγόμενον $\sqrt{1+p^2+q^2}\int d(x,y)$, ἤτοι τὸ γινόμενον τῆς τετρ. ῥίζης ἐπὶ τὸ μεταξὺ τῶν δύο καμπύλων u καὶ $u+du$, περιλαμβανόμενον ἐμβαδόν, ἤτοι ἐπὶ τὸ διαφορικὸν τοῦ ἐμβαδοῦ, ὅπερ περικλείει ἡ καμπύλη u. Διὰ τοῦ τρόπου τούτου γίνεται συνήθως ἡ πρώτη ὁλοκλήρωσις εὐκολώτατα· *ἀλλ' ἵνα τὰ ὅρια τῆς δευτέρας ὁλοκληρώσεως (πρὸς u) εἶνε σταθερά, πρέπει νὰ εἶνε ἡ τὸν τόπον T κλείουσα γραμμὴ μία ἐκ τῶν καμπύλων u*, ἤτοι πρέπει κατὰ μῆκος αὐτῆς νὰ διαμένῃ σταθερὰ ἡ τετρ. ῥίζα. Τὴν μέθοδον ταύτην θὰ ἐφαρμόσωμεν καὶ εἰς τὸ ἑπόμενον παράδειγμα, ἔνθα πρόκειται περὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐλλειψοειδοῦς.

4) *Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐλλειψοειδοῦς.*

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας ταύτης εἶνε

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\cdot$$

ἐξ αὐτῆς εὑρίσκομεν

$$p=-\frac{\frac{x}{a^2}}{\frac{z}{c^2}}, \qquad q=-\frac{\frac{y}{b^2}}{\frac{z}{c^2}},$$

ὅθεν
$$p^2+q^2=\frac{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}{\frac{z^2}{c^4}}.$$

Τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας, ἐν οἷς τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον σχηματίζει πρὸς τὸ ἐπίπεδον x, y σταθερὰν γωνίαν φ, ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{1}{\text{συνφ}}, \quad \text{ὅθεν} \quad p^2+q^2=\text{εφ}^2\text{φ},$$

ἤτοι
$$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}=u.\frac{z^2}{c^4} \qquad u=\text{εφ}^2\text{φ}.$$

ἑπομένως αἱ γραμμαὶ τῆς ἐπιφανείας, ἐν αἷς ἡ γωνία φ μένει σταθερά, ἔχουσι τὰς ἐξισώσεις

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{καὶ} \quad \frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}=u\,\frac{z^2}{c^4},$$

ἐκ δὲ τούτων διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς τοῦ z προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$(\lambda) \qquad \frac{x^2}{a^2}\left(v+\frac{1}{a^2}\right)+\frac{y^2}{b^2}\left(v+\frac{1}{b^2}\right)=v, \qquad v=\frac{u}{c^2},$$

ἥτις παριστᾷ τὰς προβολὰς τῶν εἰρημένων γραμμῶν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν xy· εἶνε δὲ αἱ προβολαὶ αὗται ἐλλείψεις, ὧν ἡ μὲν ἀντιστοιχοῦσα πρὸς $v=0$ εἶνε ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων, ἡ δὲ πρὸς $v=\infty$ εἶνε ἡ πρωτεύουσα τομή, ἐφ' ἣν προβάλλεται τὸ ἄνω ἥμισυ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐλλειψοειδοῦς· ἡ δὲ πρωτεύουσα αὕτη τομὴ εἶνε ὁ τόπος τῆς ὁλοκληρώσεως

$$\int\sqrt{1+p^2+q^2}\,d(x, y), \tag{1}$$

ἐὰν ζητῆται τὸ ἄνω ἥμισυ τῆς ἐπιφανείας.

Ἐὰν ἄρα νοήσωμεν τὸν τόπον τοῦτον διῃρημένον εἰς ζώνας διὰ τῶν ἐλλείψεων (λ) καὶ προσθέσωμεν τὰ στοιχεῖα τοῦ ὁλοκληρώματος (1) τὰ ἐκ μιᾶς οἰασδήποτε ζώνης προερχόμενα (ἔστω τῆς περιεχομένης μεταξὺ τῶν δύο ἐλλείψεων, αἵτινες ἀντιστοιχοῦσι πρὸς τὰς τιμὰς v καὶ $v+dv$), εὑρίσκομεν ἄθροισμα

$$\varepsilon\sqrt{1+p^2+q^2}. \quad \text{ἢ} \quad \frac{\varepsilon}{\text{συν}\,\varphi},$$

ἔνθα ε σημαίνει τὸ ἐμβαδὸν τῆς εἰρημένης ζώνης, ἤτοι τὸ διαφορικὸν τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐλλείψεως τῆς πρὸς τὴν τιμὴν v ἀντιστοιχούσης· ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐλλείψεως (λ) εἶνε

$$\frac{\pi abv}{\sqrt{(v+\alpha^2)(v+\beta^2)}} \qquad \alpha=\frac{1}{a}, \quad \beta=\frac{1}{b}.$$

ἐπομένως τὸ ἐξαγόμενον τῆς πρώτης ὁλοκληρώσεως εἶνε

$$\frac{\pi ab}{\text{συν}\,\varphi}\,d\left\{\frac{v}{\sqrt{(v+\alpha^2)(v+\beta^2)}}\right\}$$

καὶ ἐπειδὴ
$$\text{εφ}\,\varphi=c\sqrt{v},$$

ἕπεται
$$\frac{1}{\text{συν}\,\varphi}=\sqrt{1+vc^2}=c\sqrt{v+\gamma^2} \qquad \gamma=\frac{1}{c}.$$

ὅθεν τὸ ἐξαγόμενον τῆς πρώτης ὁλοκληρώσεως εἶνε

$$\pi abc\sqrt{v+\gamma^2}\,d\left\{\frac{v}{\sqrt{(v+\alpha^2)(v+\beta^2)}}\right\}$$

καὶ πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἄνω ἡμίσεως τῆς ἐπιφανείας, ἀρκεῖ νὰ ὁλοκληρώσωμεν τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο πρὸς v ἀπὸ 0 μέχρις ∞ (ἤτοι νὰ ἀθροίσωμεν τὰ ἐξαγόμενα πασῶν τῶν ζωνῶν, εἰς ἃς ὁ τόπος τῆς ὁλοκληρώσεως διῃρέθη)· ὅθεν ἡ ὅλη ἐπιφάνεια εἶνε

$$\mathrm{E}=2\pi abc\int_0^{\infty}\sqrt{v+\gamma^2}\,d\left\{\frac{v}{\sqrt{(v+\alpha^2)(v+\beta^2)}}\right\}$$

καὶ ἐφαρμόζοντες τὴν κατὰ παράγοντας ὁλοκλήρωσιν εὑρίσκομεν μετά τινας πράξεις

$$\mathrm{E}=\pi abc\,.\,\text{ὅρ.}\left\{2\sqrt{v}-\int_0^{v}\frac{vdv}{\sqrt{(v+\alpha^2)(v+\beta^2)(v+\gamma^2)}}\right\}_{v=\infty}$$

Δι' ὁμοίου τρόπου δυνάμεθα ἐκ τοῦ γενικοῦ τύπου τοῦ ἐμβαδοῦ πάσης ἐπιφανείας νὰ εὕρωμεν τὸν τύπον τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανειῶν. Ἐὰν ὁ ἄξων τῆς περιστροφῆς ληφθῇ ὡς ἄξων τῶν z, αἱ γραμμαί, ἐν αἷς ἡ γωνία φ (τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y καὶ τοῦ ἐφαπτομένου τῆς ἐπιφανείας) μένει σταθερά, εἶνε οἱ παράλληλοι τῆς ἐπιφανείας κύκλοι καὶ προβάλλονται ἀμετάβλητοι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y· ἂν λοιπὸν διαιρέσωμεν τὸν τόπον τῆς ὁλοκληρώσεως (ὅστις εἶνε ἐπίσης κύκλος) διὰ περιφερειῶν ὁμοκέντρων καὶ προσθέσωμεν τὰ στοιχεῖα τοῦ ὁλοκληρώματος

$$\int \frac{d(x, y)}{\sigma\upsilon\nu\,\varphi},$$

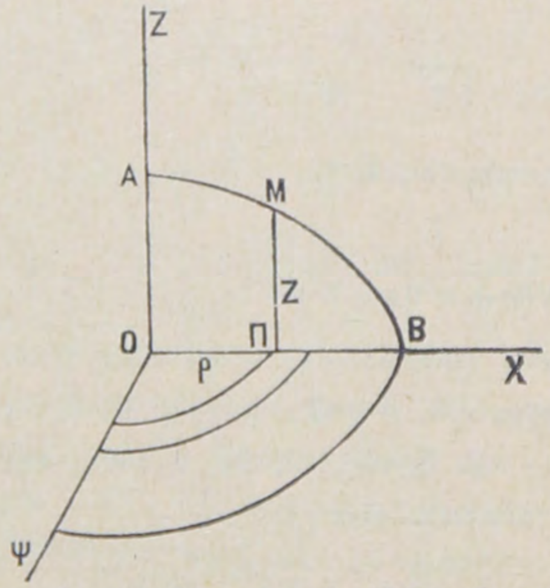
τὰ μεταξὺ δύο περιφερειῶν κείμενα, εὑρίσκομεν

$$\frac{d(\pi\rho^2)}{\sigma\upsilon\nu\,\varphi} \quad \text{ἢ} \quad \frac{2\pi\,\rho d\rho}{\sigma\upsilon\nu\,\varphi}$$

καὶ ἐπειδὴ ρ εἶνε ἡ τετμημένη τοῦ σημείου Μ τοῦ μεσημβρινοῦ, τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εἶνε

$$\frac{2\pi\,xdx}{\sigma\upsilon\nu\,\varphi}\cdot$$

ἐὰν δὲ τοῦτο ὁλοκληρωθῇ πρὸς x μεταξὺ τῶν καταλλήλων ὁρίων, δίδει τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας



$$E = 2\pi \int \frac{xdx}{\sigma\upsilon\nu\,\varphi}\cdot$$

ἀλλ' ἡ γωνία φ εἶνε ἡ γωνία τῆς ἐφαπτομένης τοῦ μεσημβρινοῦ πρὸς τὸν ἄξονα ΟΧ, ἑπομένως εἶνε $\sigma\upsilon\nu\,\varphi = \frac{dx}{ds}$· ὅθεν

$$E = 2\pi \int xds\cdot$$

x ἐνταῦθα εἶνε ἡ ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς περιστροφῆς κάθετος ἡ ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου τοῦ μεσημβρινοῦ ἠγμένη· ἐν τῷ προηγουμένως εὑρεθέντι τύπῳ ἡ κάθετος αὕτη παρίστατο διὰ τοῦ y.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας

$$x^2+y^2+z^2=\alpha^2,$$

ἥτις προβάλλεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου x, y ἐντὸς ἑκάστης ἐκ τῶν ἑξῆς καμπύλων

$$\rho^2=\beta^2(1-\varepsilon\varphi^2\theta), \qquad \beta<\alpha$$

$$\rho^2=2\alpha^2\sigma\upsilon\nu\, 2\theta$$

$$\rho=\alpha\,\eta\mu(m\theta)$$

$$\rho^2=\alpha^2\eta\mu(m\theta).$$

2) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, ἥτις περιλαμβάνεται μεταξὺ τῆς καθέτου τομῆς καὶ ἄλλης οἱαςδήποτε γραμμῆς, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$E=\int z ds,$$

ἔνθα s παριστᾷ τὸ μῆκος τοῦ τόξου τῆς καθέτου τομῆς (λογιζομένου ἀπό τινος ἀρχῆς) καὶ z τὴν διὰ τοῦ ἄκρου τοῦ τόξου διερχομένην γενέτειραν· (ἡ κάθετος τομὴ ὑποτίθεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν x, y).

Ἐν τῷ τύπῳ τούτῳ θεωρεῖται ἡ κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὡς συγκειμένη ἐκ τραπεζίων ἐχόντων βάσεις μὲν τὰ ἀπειροστὰ μέρη τοῦ τόξου τῆς καθέτου τομῆς, πλευρὰς δὲ παραλλήλους, τὰς διὰ τῶν ἄκρων τοῦ ἀπειροστοῦ τόξου ds διερχομένας γενετείρας.

3) Τὸ ἐμβαδὸν πάσης κωνικῆς ἐπιφανείας, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$E=\frac{1}{2}\int \gamma^2 d\sigma \quad \text{ἢ καὶ} \quad E=\frac{1}{2}\int p ds,$$

ἔνθα $d\sigma$ δηλοῖ τὴν ἀπειροστὴν γωνίαν τῶν δύο γενετειρῶν τῶν ἐρχομένων εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ἀπειροστοῦ τόξου $MM'=ds$ τῆς καμπύλης, ὑφ' ἧς περατοῦται ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια, γ δὲ τὸ μῆκος τῆς γενετείρας OM καὶ p τὴν ἀπόστασιν τῆς κορυφῆς O ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τοῦ τόξου MM'. Ἐν τοῖς τύποις τούτοις θεωρεῖται ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια ὡς συγκειμένη ἐκ τριγώνων ἀπειροστῶν ὁμοκορύφων, ὧν δύο πλευραὶ εἶνε αἱ γενέτειραι αἱ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ἀπειροστοῦ τόξου MM' ἀπολήγουσαι, ἡ δὲ βάσις τὸ ἀπειροστὸν τοῦτο τόξον MM'.

4) Τὸ ἐμβαδὸν πάσης ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας, ἥτις περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ λαιμοῦ αὐτῆς καὶ δύο γενετειρῶν οἱωνδήποτε καὶ τῆς τυχούσης γραμμῆς, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\frac{1}{2}\int \gamma^2 d\sigma,$$

ἔνθα $d\sigma$ δηλοῖ τὴν γωνίαν τῆς συνεπαφῆς τοῦ λαιμοῦ εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον M αὐτοῦ καὶ γ τὸ ἐντὸς τῆς ἐπιφανείας κείμενον μέρος τῆς γενετείρας, ἥτις ἄρχεται ἐκ τοῦ M.

Ἐν τῷ τύπῳ τούτῳ θεωρεῖται ἡ ἀναπτυκτὴ ἐπιφάνεια ὡς συγκειμένη ἐκ τριγώνων ἀπειροστῶν ἐχόντων πλευρὰς τὰ τμήματα γ τῶν γενετειρῶν αὐτῆς καὶ γωνίας τὰς γωνίας τῆς συνεπαφῆς.

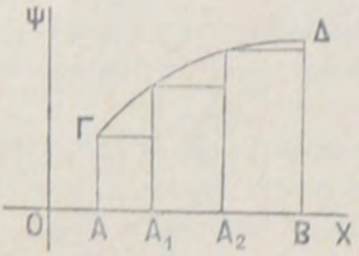
5) Ἔν τινι ἑλικοειδεῖ κινήσει ἡ ταχύτης τῆς περιστροφῆς εἶνε σταθερὰ καὶ ἡ ταχύτης τῆς ὀλισθήσεως ἐπίσης. Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἣν γράφει ἐν τῇ κινήσει ἡ τυχοῦσα ἐπίπεδος καμπύλη, ἧς τὸ ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος.

Γ') Ὄγκοι τῶν στερεῶν.

1) ΣΤΕΡΕΑ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

Στερεὸν ἐκ περιστροφῆς λέγεται τὸ γραφόμενον ὑπὸ ἐπιπέδου ἐπιφανείας, ὅταν αὕτη στρέφηται περὶ ἄξονα ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῆς κείμενον.

Θεωρήσωμεν κατὰ πρῶτον τὸ ἐκ περιστροφῆς στερεὸν τὸ παραγόμενον ὑπὸ τῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας ΑΒΓΔ, ἥτις περιορίζεται ὑπὸ τοῦ ἄξονος ΟΧ, ὑπὸ τῆς καμπύλης $y=\varphi(x)$ (ὀρθογ. ἄξονες) καὶ ὑπὸ δύο τεταγμένων αὐτῆς $x=\alpha$ καὶ $x=\beta$ $(\alpha<\beta)$, ὅταν ἡ ἐπίπεδος αὕτη ἐπιφάνεια στραφῇ ὁλόκληρον στροφὴν περὶ τὸν ἄξονα ΟΧ.



Ἵνα ἐκφράσωμεν τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ τούτου δι' ὡρισμένου ὁλοκληρώματος, διαιροῦμεν τὸν ἄξονα αὐτοῦ ΑΒ εἰς μέρη ὁσαδήποτε, τὰ $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{\nu-1}B$, καὶ ἀπὸ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἄγομεν τὰ πρὸς τὸν ἄξονα κάθετα ἐπίπεδα, ἅτινα διαιροῦσι τὸ μὲν στερεὸν εἰς πλάκας, τὴν δὲ γράφουσαν αὐτὸ ἐπιφάνειαν ΑΒΔΓ εἰς λωρίδας· ἐὰν ἔπειτα ἐν ἑκάστῃ τῶν λωρίδων ἐκ τοῦ ἄκρου τῆς ἐλαχίστης τεταγμένης τοῦ τόξου αὐτῆς ἀχθῇ ἡ παράλληλος τῇ ΟΧ, προκύπτει ὀρθογώνιον, ἐν τῇ λωρίδι περιεχόμενον· τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο κατὰ τὴν περιστροφὴν γράφει κύλινδρον περιεχόμενον εἰς τὴν ὑπὸ τῆς λωρίδος γραφομένην πλάκα· καὶ οἱ κύλινδροι οἱ ὑπὸ τῶν οὕτω προκυπτόντων ὀρθογωνίων γραφόμενοι ἀποτελοῦσι στερεὸν προφανῶς μικρότερον τοῦ ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας ΑΒΔΓ γραφομένου· ὥστε εἶνε

$$\text{ὄγκ}\,ΑΒΔΓ > \pi\left\{(x_1'-\alpha)\varphi(x_1')^2+(x_2'-x_1')\,\varphi(x_2')^2+\ldots+(\beta-x_{\nu-1}')\,\varphi(x_\nu')^2\right\},$$

ἔνθα $x_1', x_2', \ldots, x_\nu'$ παριστῶσι τὰς τιμὰς τῆς x, πρὸς ἃς ἀντιστοιχοῦσιν αἱ ἐλάχισται τεταγμέναι τῶν μερῶν τοῦ τόξου ΓΔ (ἢ αἱ μηδεμιᾶς μεγαλήτεραι).

Ἀλλ' ἐὰν πάλιν ἐν ἑκάστῃ λωρίδι ἐκ τοῦ ἄκρου τῆς μεγίστης τεταγμένης τοῦ τόξου αὐτῆς ἀχθῇ ἡ παράλληλος τῇ ΟΧ, προκύπτει ὀρθογώνιον περιέχον τὴν λωρίδα καὶ ἑπομένως γράφον στερεὸν μεγαλήτερον τοῦ ὑπὸ τῆς λωρίδος γραφομένου· ὥστε οἱ κύλινδροι οἱ ὑπὸ τῶν δευτέρων τούτων ὀρθογωνίων γραφόμενοι ἀποτελοῦσι στερεὸν προδήλως μεγαλήτερον τοῦ γραφομένου ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας ΑΒΔΓ· ἤτοι εἶνε

$$\text{ὄγκ}(\mathrm{AB\Delta\Gamma}) < \pi \left\{ (x_1-\alpha)\varphi(x''_1)^2 + (x_2-x_1)\varphi(x''_2) + \ldots + (\beta-x_{\nu-1})\varphi(x''_\nu)^2 \right\},$$

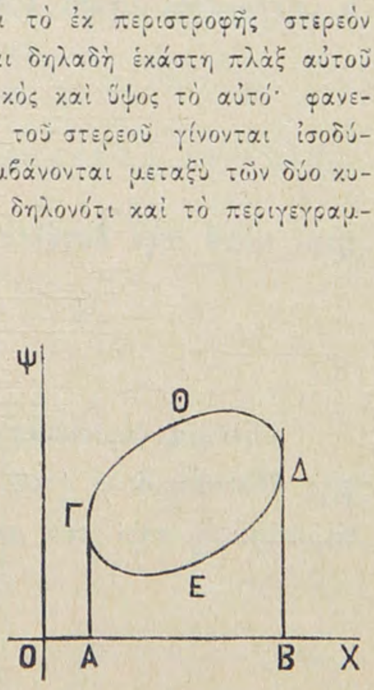
ἔνθα $x''_1, x''_2, \ldots, x''_\nu$ εἶνε αἱ τιμαὶ τῆς x, πρὸς ἃς ἀντιστοιχοῦσιν αἱ μέγισται τεταγμέναι τῶν λωρίδων.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἐκ περιστροφῆς στερεὸν περιλαμβάνεται ἀείποτε μεταξὺ τῶν δύο στερεῶν, ἅτινα οἱ πρῶτοι κύλινδροι καὶ οἱ δεύτεροι ἀποτελοῦσιν, τούτων δὲ ἀμφοτέρων οἱ ὄγκοι τείνουσι πρὸς τὸ αὐτὸ ὅριον, τουτέστι τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\pi \int_\alpha^\beta \varphi(x)^2 dx \quad \text{ἢ} \quad \pi \int_\alpha^\beta y^2 dx, \qquad (1)$$

συνάγεται, ὅτι τοῦτο εἶνε ὁ ὄγκος τοῦ ἐκ περιστροφῆς στερεοῦ τοῦ γραφομένου ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας ΑΒΔΓ.

Σημείωσις. Ἐν τῷ ὁλοκληρώματι τούτῳ θεωρεῖται τὸ ἐκ περιστροφῆς στερεὸν ὡς συγκείμενον ἐκ κυλίνδρων ἀπειροστοῦ ὕψους· ἐξομοιοῦται δηλαδὴ ἑκάστη πλὰξ αὐτοῦ πρὸς κύλινδρον ἔχοντα βάσιν τὴν μίαν τῶν βάσεων τῆς πλακὸς καὶ ὕψος τὸ αὐτό· φανερὸν δὲ εἶνε, ὅτι ὁ κύλινδρος καὶ ἡ ἀντίστοιχος αὐτῷ πλὰξ τοῦ στερεοῦ γίνονται ἰσοδύναμα ἀπειροστά· διότι ἀμφότερα τὰ στερεὰ ταῦτα περιλαμβάνονται μεταξὺ τῶν δύο κυλίνδρων, οὓς γράφουσι τὰ δύο ὀρθογώνια, τὸ ἐγγεγραμμένον δηλονότι καὶ τὸ περιγεγραμμένον εἰς τὴν λωρίδα.



Θεωρήσωμεν νῦν τὸ ἐκ περιστροφῆς στερεὸν τὸ γραφόμενον ὑφ' οἱασδήποτε ἐπιπέδου ἐπιφανείας ΓΕΔΘ στρεφομένης περὶ τὸν ἄξονα ΟΧ (ὅστις δὲν τέμνει αὐτὴν) ὁλόκληρον περιστροφήν· προφανὲς εἶνε, ὅτι τὸ προκείμενον στερεὸν εἶνε διαφορὰ τῶν δύο στερεῶν, ἅτινα γράφουσιν αἱ ἐπιφάνειαι ΑΒΔΘΓΑ καὶ ΑΒΔΕΓΑ· ἑπομένως ὁ ὄγκος αὐτοῦ θὰ εἶνε κατὰ τὰ προηγουμένως εὑρεθέντα

$$\pi \int_\alpha^\beta \mathrm{Y}^2 dx - \pi \int y^2 dx \quad \text{ἢ} \quad \pi \int_\alpha^\beta (\mathrm{Y}^2 - y^2) dx$$

ἔνθα Y καὶ y δηλοῦσι τὰς πρὸς τὴν αὐτὴν τετμημένην x ἀντιστοιχούσας τεταγμένας τῶν τόξων ΓΘΔ καὶ ΓΕΔ.

Παραδείγματα.

1) *Εὑρεῖν τὸν ὄγκον τοῦ ἐκ περιστροφῆς ἐλλειψοειδοῦς τοῦ ἐπιμήκους.*

Οὕτω καλεῖται τὸ στερεόν, ὅπερ γράφεται ὑπὸ τοῦ ἡμίσεως τῆς ἐλλείψεως στρεφομένης περὶ τὸν μέγαν αὐτῆς ἄξονα A_1A.

Τὸ ἥμισυ τοῦ στερεοῦ γράφεται ὑπὸ τοῦ τεταρτημορίου ΑΟΒ τῆς ἐλλείψεως· ὅθεν ὁ ὄγκος τοῦ ὅλου στερεοῦ εἶνε

$$2\pi\int_0^\alpha y^2 dx$$

καὶ ἐπειδὴ ἡ τεταγμένη y τῆς ἐλλείψεως δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - x^2)$$

ὁ ζητούμενος ὄγκος εἶνε

$$2\pi\frac{\beta^2}{\alpha^2}\int_0^\alpha (\alpha^2 - x^2)\, dx$$

ἤτοι μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς ὁλοκληρώσεως

$$\frac{4}{3}\pi\,\alpha\beta^2.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ πεπλατυσμένου ἐκ περιστροφῆς ἐλλειψοειδοῦς (τοῦ γραφομένου ὑπὸ τῆς ἡμιελλείψεως B_1OB), ὅταν περιστραφῇ περὶ τὸν μικρὸν ἄξονα B_1B, εἶνε

$$\frac{4}{3}\pi\,\alpha^2\beta$$

εἶνε δὲ οὗτος μεγαλήτερος τοῦ προηγουμένου, διότι $\alpha > \beta$.

2) *Εὑρεῖν τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ, ὅπερ γράφει ἡ μεταξὺ ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς καὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων αὐτῆς καὶ δύο παραλλήλων τῇ ἄλλῃ περιεχομένη ἐπιφάνεια, ὅταν στραφῇ περὶ τὴν πρώτην.*

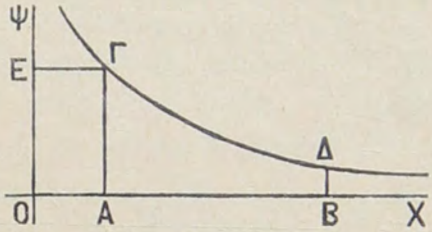
Ὁ ζητούμενος ὄγκος εἶνε

$$\pi\int_{\alpha}^{\beta} y^2 dx \qquad (\mathrm{OA}=\alpha,\ \mathrm{OB}=\beta)$$

καὶ ἐπειδὴ διὰ τὴν ὑπερβολὴν εἶνε $xy=k^2$, ἔπεται, ὅτι ὁ ὄγκος εἶνε

$$\pi k^4 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{x^2} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \pi k^4\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)$$

Ἀξιοπαρατήρητον εἶνε, ὅτι ὁ ὄγκος οὗτος, ὅταν τὸ σημεῖον Β ἀπομακρύνηται εἰς ἄπειρον (ὅτε ἡ τὸν ὄγκον γράφουσα ἐπιφάνεια αὐξάνει εἰς ἄπειρον), μένει πάντοτε πεπερασμένος καὶ τείνει πρὸς τὴν παράστασιν $\frac{\pi k^4}{\alpha}$ ἢ $\pi k^2(\mathrm{A\Gamma})$ ἢ καὶ $\pi(\mathrm{A\Gamma})^2.(\mathrm{OA})$ ἤτοι πρὸς τὸν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου, ὃν γράφει τὸ ὀρθογώνιον ΟΑΓΕ, ὅταν περιστραφῇ περὶ τὴν ΟΑ.



3) *Εὑρεῖν τὸν ὄγκον τῆς σπείρας.*

Ἐὰν διὰ τοῦ Υ καὶ y παραστήσωμεν τὰς τεταγμένας τῶν τόξων ΑΔΓ καὶ ΑΒΓ τὰς πρὸς τὴν αὐτὴν τετμημένην x ἀντιστοιχούσας καὶ διὰ τοῦ V τὸν ζητούμενον ὄγκον, θὰ εἶνε

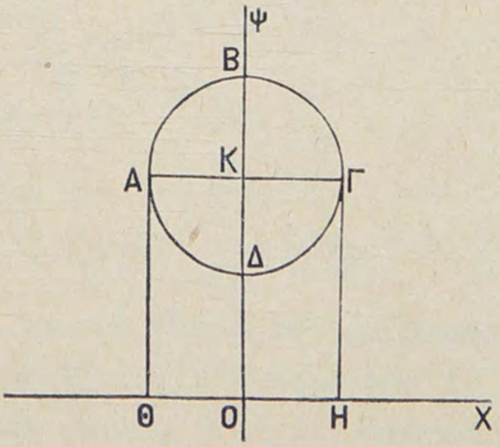
$$V=2\pi\int_0^{\alpha}(Y^2-y^2)\,dx=2\pi\int_0^{\alpha}(Y+y)(Y-y)dx=4\pi\beta\int_0^{\alpha}(Y-y)\,dx$$

διότι $Y+y=2\beta$, ἔνθα β παριστᾷ τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ ἄξονος.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^{\alpha}(Y-y)dx$$

παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἡμικυκλίου ΒΓΔΑΒ, συνάγεται



$$V=2\pi\,\alpha^2\beta.$$

Σημείωσις. Ἐν τοῖς προηγουμένοις ἐθεωρήθη ἡ τὸ στερεὸν γράφουσα ἐπιφάνεια ὡς συγκειμένη ἐξ ὀρθογωνίων ἀπειροστὴν μὲν ἐχόντων βάσιν, ὕψος ὅμως πεπερασμένον· ἑπομένως καὶ τὸ ἐκ περιστροφῆς στερεὸν ἐθεωρήθη ὡς ἄθροισμα τῶν ἀπειροστῶν τὸ ὕψος κυλίνδρων, οὓς γράφουσιν ἐν τῇ περιστροφῇ τὰ ὀρθογώνια ταῦτα. Ἀλλ' εἶνε προφανές, ὅτι ἡ τὸ στερεὸν γράφουσα ἐπιφάνεια δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς συγκειμένη ἐξ ὀρθογωνίων ἀπειροστῶν κατ' ἀμφοτέρας τὰς διαστάσεις (ἢ καὶ γενικώτερον ἐξ οἱωνδήποτε μερῶν), ὅτε καὶ τὸ ὑπ' αὐτῆς γραφόμενον στερεὸν εἶνε ἄθροισμα τῶν ἀπειροστῶν στερεῶν, ἅτινα γράφουσι τὰ μέρη αὐτῆς.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὀρθογώνιον $dx\,dy$ γράφει στερεὸν ἔχον ὄγκον $2\pi y\,dx\,dy$ (τὸ πρωτεῦον μέρος τοῦ ὄγκου), ὁ ὄγκος τοῦ ὅλου ἐκ περιστροφῆς στερεοῦ, θὰ εἶνε

$$V = 2\pi \int\!\!\int_{(E)} y\,dx\,dy, \qquad (2)$$

ἔνθα τόπος τῆς ὁλοκληρώσεως εἶνε ἡ ἐπιφάνεια E ἡ τὸ στερεὸν γράφουσα.

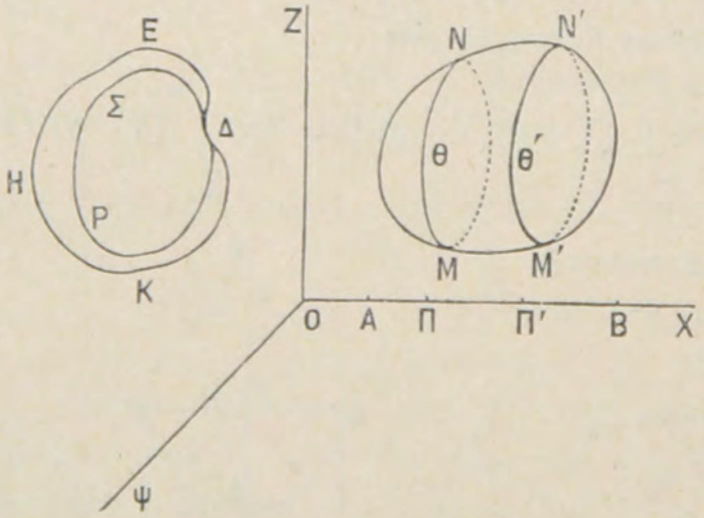
Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὸ διπλοῦν τοῦτο ὁλοκλήρωμα δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὸν τόπον τῆς ὁλοκληρώσεως εἰς οἱαδήποτε μέρη (ἀπειροστὰ κατ' ἀμφοτέρας τὰς διαστάσεις) συνάγεται

$$V = 2\pi \int y\,d(x, y).$$

Ἐκ τοῦ τύπου (2) εὑρίσκεται ὁ τύπος (1), ἐὰν ἐκτελεσθῇ ἡ ὁλοκλήρωσις πρὸς y.

2) ΣΤΕΡΕΑ, ΩΝ ΟΙ ΟΓΚΟΙ ΕΥΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΔΙΑ ΜΙΑΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΩΣ

175. Ἐὰν ἔν τινι στερεῷ ἔχωμεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τομῶν τῶν παραλλήλων ἐπιπέδῳ τινὶ (ἐκπεφρασμένα διὰ τῆς μεταβλητῆς, ἐξ ἧς ὁρίζεται ἡ θέσις τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου), δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ τούτου δι' ἑνὸς ἁπλοῦ ὁλοκληρώματος.



Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν τὸ ἐπίπεδον τῶν yz παράλληλον πρὸς τὰς τομάς, ὧν τὰ ἐμβαδὰ ἔχομεν, καὶ ἄγομεν δύο ἐπίπεδα παράλληλα τῷ yz περιλαμβάνοντα μεταξὺ αὐτῶν ἅπαν τὸ στερεὸν καὶ ἐγγίζοντα αὐτὸ ἑκάτερον εἰς ἓν ἢ πλείονα σημεῖα, ἀλλὰ μὴ διατέμνοντα αὐτό. Ἐὰν νοήσωμεν τὸ μεταξὺ αὐτῶν ἀπολαμβανόμενον τμῆμα τοῦ ἄξονος OX, τὸ AB, διῃρημένον ὁπωσδήποτε εἰς μέρη AA_1, $A_1A_2, \ldots, A_{\nu-1}B$ καὶ διὰ τῶν σημείων A_1, $A_2, \ldots$ ἐπίπεδα παράλληλα τῷ yz, ταῦτα διαιροῦσι τὸ στερεὸν εἰς πλάκας· λέγω δέ, ὅτι *ἑκάστη τῶν πλακῶν τούτων* *εἶνε ἰσοδύναμος κυλίνδρῳ ἔχοντι βάσιν μὲν τὴν ἑτέραν τῶν παραλλήλων βάσεων αὐτῆς, ὕψος δὲ τὸ αὐτό.*

Διότι ἔστω τυχοῦσα πλὰξ τοῦ στερεοῦ ἡ μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων ΠΜΝ καὶ Π′Μ′Ν′ ἀπολαμβανομένη· ἡ πλὰξ αὕτη περιορίζεται ὑπὸ τῶν δύο βάσεων αὐτῆς ΜΘΝ καὶ Μ′Θ′Ν′ καὶ ὑπό τινος λωρίδος τῆς ἐπιφανείας τοῦ στερεοῦ· ἐὰν δὲ τὴν λωρίδα ταύτην προβάλωμεν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν yz (παραλλήλως τῇ ΟΧ), θὰ καταλάβωσιν αἱ προβολαὶ τῶν σημείων αὐτῆς ζώνην τινὰ περιλαμβανομένην μεταξὺ δύο γραμμῶν ΕΗΚΔ καὶ ΔΣΡ· αἱ δὲ προβάλλουσαι εὐθεῖαι, ὧν οἱ πόδες πίπτουσιν ἐπὶ τῶν γραμμῶν τούτων θὰ ἐγγίζωσι μόνον τὴν προβαλλομένην λωρίδα (εἰς ἓν ἢ πλείονα σημεῖα ἑκάστη), ἀλλὰ δὲν θὰ διαπερῶσιν αὐτήν· διότι, ὅταν εὐθεῖά τις διαπερᾷ ἐπιφάνειαν, δύναται νὰ κινηθῇ παραλλήλως ἑαυτῇ ἀρκούντως ὀλίγον, ὥστε νὰ διαπερᾷ πάλιν αὐτὴν καὶ τοῦτο κατὰ πάσας τὰς διευθύνσεις· ἀλλὰ τοῦτο δὲν συμβαίνει ἐπὶ τῶν εἰρημένων εὐθειῶν· διότι, ἂν ἐλάχιστον κινηθῶσιν, ἐξέρχονται οἱ πόδες αὐτῶν ἐκ τῆς ζώνης καὶ ἑπομένως δὲν συναντῶσι πλέον τὴν λωρίδα· διὰ τοῦτο αἱ μὲν προβάλλουσαι εὐθεῖαι, ὧν οἱ πόδες κεῖνται ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς γραμμῆς ΕΗΚΔ τῆς ζώνης, συνιστῶσι κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν περιγεγραμμένην περὶ τὴν λωρίδα, αἱ δὲ προβάλλουσαι αἱ ἔχουσαι τοὺς πόδας αὐτῶν ἐπὶ τῆς ἐσωτερικῆς γραμμῆς ΔΣΡ συνιστῶσι κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν ἐγγεγραμμένην εἰς τὴν λωρίδα· αἱ δύο δὲ αὗται κυλινδρικαὶ ἐπιφάνειαι μετὰ τῶν ἐπιπέδων τῆς πλακὸς ὁρίζουσι δύο κυλίνδρους, ὧν ὁ μὲν εἷς ἐγκλείει ἐν ἑαυτῷ τὴν πλάκα, ὁ δὲ ἕτερος περιέχεται ἐν αὐτῇ· ἐὰν ἄρα παραστήσωμεν διὰ θ τὸν ὄγκον τῆς πλακὸς καὶ διὰ h τὸ κοινὸν ὕψος τῆς πλακὸς καὶ τῶν δύο κυλίνδρων, θὰ εἶνε

$$h\,(\Delta\Sigma\mathrm{P}) < \theta < h\,(\mathrm{EHK}\Delta)\cdot$$

ἀλλ' ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τὰ τρία ταῦτα διὰ τοῦ ὄγκου $\mathrm{E}.h$ τοῦ κυλίνδρου, ὅστις ἔχει βάσιν τὴν μίαν τῶν βάσεων τῆς πλακὸς καὶ ὕψος τὸ αὐτό, θὰ εἶνε

$$\frac{(\Delta\Sigma\mathrm{P})}{\mathrm{E}} < \frac{\theta}{\mathrm{E}h} < \frac{(\mathrm{EHK}\Delta)}{\mathrm{E}}.$$

ἐπειδὴ δέ, ὅταν ἡ ἀπόστασις h τῶν δύο ἐπιπέδων, ὑφ' ὧν ἀποτέμνεται ἡ πλάξ, τείνῃ πρὸς τὸ 0, αἱ γραμμαὶ ΔΣΡ καὶ ΕΗΚΔ τείνουσι νὰ συμπέσωσιν ἐπὶ τῆς προβολῆς τῆς τομῆς Ε, τὰ ἐμβαδὰ (ΔΣΡ) καὶ (ΕΗΚΔ) τείνουσι πρὸς τὸ Ε, ἑπομένως εἶνε

$$\text{ὁρ.}\frac{\theta}{E.h}=1,$$

ἤτοι ἡ πλὰξ γίνεται ἀπειροστὸν ἰσοδύναμον τῷ κυλίνδρῳ, ὅστις ἔχει βάσιν μὲν τὴν ἑτέραν τῶν βάσεων τῆς πλακός, ὕψος δὲ τὸ τῆς πλακός.

Τούτου τεθέντος, ἐὰν παραστήσωμεν διὰ V τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ, ἐπειδὴ εἶνε ἄθροισμα τῶν πλακῶν, εἰς ἃς διαιρεῖται, θὰ ἔχωμεν πάντοτε

$$V=\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_\nu.$$

ἐὰν δὲ ἐν τῷ ἀθροίσματι τούτῳ ἀντικαταστήσωμεν ἑκάστην πλάκα διὰ τοῦ πρὸς αὐτὴν ἰσοδυνάμου κυλίνδρου, θὰ ἔχωμεν

$$V=\text{ὁρ}\left\{E_1h_1+E_2h_2+\ldots\ldots+E_\nu h_\nu\right\}.$$

Ἀλλὰ κατὰ τὴν γενομένην ὑπόθεσιν τὸ ἐμβαδὸν πάσης τομῆς τοῦ στερεοῦ (παραλλήλου τῷ ΥΟΖ) εἶνε γνωστὸν ὡς συνάρτησις τῆς τετμημένης x τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου· ἐὰν λοιπὸν εἶνε ἐν γένει

$$E=\sigma(x)$$

θὰ εἶνε $\qquad E_1=\sigma(\alpha),\quad E_2=\sigma(x_1),\ldots,\quad E_\nu=\sigma(x_{\nu-1})$

καὶ ἂν ὁ ἄξων τῶν x εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΥΟΖ, θὰ εἶνε

$$h_1=(x_1-\alpha),\quad h_2=(x_2-x_1),\ldots\ldots,\quad h_\nu=(\beta-x_{\nu-1})$$

ὅθεν $\qquad V=\text{ὁρ}\left\{\sigma(\alpha)(x_1-\alpha)+\sigma(x_1)(x_2-x_1)+\ldots+\sigma(x_{\nu-1})(\beta-x_{\nu-1})\right\}$

ἤτοι $\qquad V=\int_\alpha^\beta\sigma(x)\,dx \quad$ ἢ καὶ $\quad V=\int_\alpha^\beta E\,dx. \qquad (3)$

Ἐὰν ὁ ἄξων τῶν x σχηματίζῃ πρὸς τὴν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον yz τὴν γωνίαν θ, τὰ ὕψη τῶν κυλίνδρων θὰ εἶνε

$$(x_1-\alpha)\,\text{συν}\,\theta,\quad (x_2-x_1)\,\text{συν}\,\theta,\ldots\ldots,$$

ὥστε θὰ εἶνε

$$V=\text{συν}\,\theta.\int_\alpha^\beta E\,dx. \qquad (3')$$

Σημείωσις. Τὰ ἐκ περιστροφῆς στερεὰ εἶνε μερικὴ μόνον περίπτωσις τῶν στερεῶν, περὶ ὧν ὁ λόγος ἐνταῦθα, διότι αἱ τομαὶ αὐτῶν, αἱ πρὸς τὸν ἄξονα αὐτῶν κάθετοι, εἶνε πάντοτε κύκλοι (ἢ διαφορὰ δύο ὁμοκέντρων κύκλων) καὶ τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστης εἶνε πy^2 $\left(\text{ἢ } \pi(Y^2-y^2)\right)$.

Παραδείγματα.

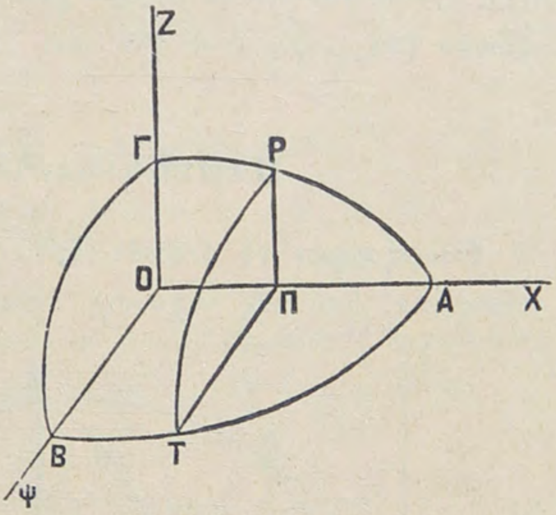
Ἐλλειψοειδές.

Θεωρήσωμεν τὸ ἐλλειψοειδὲς ἀναφερόμενον πρὸς τρεῖς οἱασδήποτε συζυγεῖς διαμέτρους αὐτοῦ· ἡ ἐξίσωσις αὐτοῦ εἶνε

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}+\frac{z^2}{c_1^2}=1$$

ἔνθα $2a_1$, $2b_1$, $2c_1$ εἶνε τὰ μήκη τῶν συζυγῶν διαμέτρων.

Ἐὰν νοήσωμεν τυχὸν ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ΥΖ, ἔστω τὸ $x=x_1$, τοῦτο θὰ τέμνῃ τὸ ἐλλειψοειδὲς κατὰ μίαν ἔλλειψιν, ἧς ἡ προβολὴ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΥΖ ἔχει τὴν ἐξίσωσιν



$$\frac{y^2}{b_1^2}+\frac{z^2}{c_1^2}=1-\frac{x_1^2}{a_1^2}$$

καὶ ἔχει συζυγεῖς διαμέτρους (κειμένας ἐπὶ τῶν ἀξόνων ΟΥ, ΟΖ) τὰς

$$2b_1\sqrt{1-\frac{x_1^2}{a_1^2}} \quad \text{καὶ} \quad 2c_1\sqrt{1-\frac{x_1^2}{a_1^2}}$$

περιεχούσας τὴν γωνίαν ΨΟΖ($=\varphi$)· τὸ ἐμβαδὸν ἄρα τῆς τομῆς εἶνε

$$E=\pi b_1 c_1 \eta\mu\varphi\left(1-\frac{x_1^2}{a_1^2}\right)$$

καὶ ὁ ὄγκος τοῦ ἐλλειψοειδοῦς εἶνε (θ οὔσης τῆς γωνίας τοῦ ἄξονος ΟΧ πρὸς τὴν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΨΟΖ)

$$V=2\pi b_1 c_1 \eta\mu\varphi \;\sigma\upsilon\nu\theta \int_0^{\alpha_1}\left(1-\frac{x_1^2}{a_1^2}\right)dx_1$$

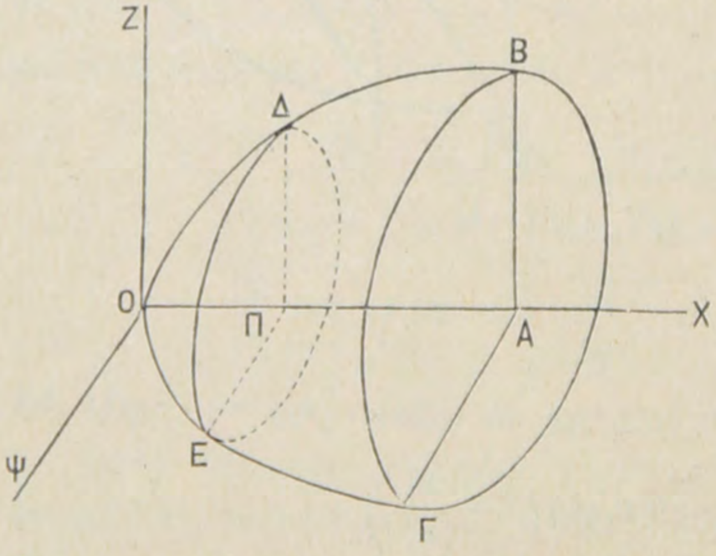
ἤτοι
$$V=\frac{4}{3}\pi a_1 b_1 c_1 \eta\mu\varphi\ \sigma\upsilon\nu\theta.$$

Ἐὰν ἀπὸ τῶν τριῶν συζυγῶν ἡμιδιαμέτρων OA_1, OB_1, $O\Gamma_1$, ὡς ἀπὸ ἀκμῶν, ἀναγραφῇ παραλληλεπίπεδον, τοῦτο θὰ ἔχῃ ὄγκον
$$a_1 b_1 c_1 \eta\mu\varphi\,.\,\sigma\upsilon\nu\theta,$$
διότι βάσις μὲν αὐτοῦ εἶνε τὸ ἀπὸ τῶν OB_1, $O\Gamma_1$ ἀναγραφόμενον παραλληλόγραμμον, ὅπερ ἔχει ἐμβαδὸν $b_1 c_1 \eta\mu\varphi$, ὕψος δὲ εἶνε ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς A_1 ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΨΟΖ καταβιβαζομένη κάθετος, ἥτις εἶνε $a_1 \sigma\upsilon\nu\theta$.

Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι *πάντα τὰ ἀπὸ τριῶν συζυγῶν ἡμιδιαμέτρων* (τοῦ ἐλλειψοειδοῦς) *ὡς ἀπὸ ἀκμῶν ἀναγραφόμενα παραλληλεπίπεδα ἔχουσι τὸν αὐτὸν ὄγκον· ἤτοι τὸν ὄγκον τοῦ ἀπὸ τῶν τριῶν ἡμιαξόνων ἀναγραφομένου* (βλ. καὶ Στερ. Ἀν. Γεωμ., σελ. 101).

Παραβολοειδὲς ἐλλειπτικόν

Θεωρήσωμεν τὸ στερεόν, ὅπερ περιλαμβάνεται ὑπὸ τοῦ παραβολοειδοῦς καὶ ὑπὸ τῆς τυχούσης ἐλλειπτικῆς τομῆς αὐτοῦ· ἐὰν λάβωμεν



ὡς ἄξονα τῶν x τὴν πρὸς τὴν τομὴν ταύτην καὶ τὰς παραλλήλους αὐτῇ ἀντιστοιχοῦσαν διάμετρον τῆς ἐπιφανείας, ὡς ἀρχὴν τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου ταύτης καὶ ὡς ἄξονας τῶν y καὶ z τὰς παραλλήλους δύο συζυγῶν διαμέτρων τῆς τομῆς, ἡ ἐξίσωσις τοῦ παραβολοειδοῦς πρὸς τοὺς ἄξονας τούτους θὰ εἶνε
$$\frac{y^2}{\mu_1}+\frac{z^2}{\nu_1}=2x$$
ἐὰν δὲ τμηθῇ τὸ στερεόν, περὶ οὗ ὁ λόγος, δι' ἐπιπέδου παραλλήλου τῷ ΨΟΖ, ἔστω διὰ τοῦ $x=x_1$, ἡ τομὴ ἔχει προβολὴν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου

ΨΟΖ τὴν ἔλλειψιν

$$\frac{y^2}{\mu_1}+\frac{z^2}{\nu_1}=2x_1$$

ἔχει ἄρα ἐμβαδὸν $\qquad \mathrm{E}=2\pi x_1\sqrt{\mu_1\nu_1}\ \eta\mu\varphi,$

ἔνθα φ εἶνε ἡ γωνία τῶν συζυγῶν διαμέτρων τῆς βάσεως τοῦ στερεοῦ· καὶ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ θὰ εἶνε

$$\mathrm{V}=2\pi\sqrt{\mu_1\nu_1}\ \eta\mu\varphi\ \sigma\upsilon\nu\theta\int_0^\alpha x_1dx_1$$

καὶ μετὰ τὴν ὁλοκλήρωσιν

$$\mathrm{V}=\pi\,\eta\mu\varphi\,.\,\sigma\upsilon\nu\theta\,.\,\alpha^2\sqrt{\mu_1\nu_1}\cdot$$

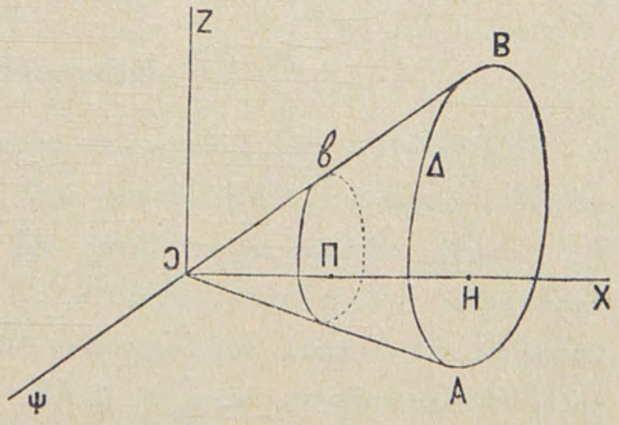
ἀλλ' ἐὰν παρασταθῇ διὰ Β τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως καὶ διὰ v τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ, θὰ εἶνε

$$\mathrm{B}=2\pi\alpha\sqrt{\mu_1\nu_1}\ \eta\mu\varphi \quad \text{καὶ} \quad v=\alpha\,\sigma\upsilon\nu\theta$$

ὅθεν $\qquad \mathrm{V}=\frac{1}{2}\mathrm{B}\,.\,v,$

ἤτοι ὁ ὄγκος παντὸς παραβολοειδικοῦ τμήματος ἔχοντος βάσιν ἔλλειψιν ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους αὐτοῦ.

Ὄγκος παντὸς κώνου.



Ἔστω τυχὼν κῶνος ἔχων βάσιν τὴν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν ΑΒΔ· ἐὰν ληφθῇ τὸ ἐπίπεδον ΨΟΖ παράλληλον τῇ βάσει τοῦ κώνου καὶ ὁ ἄξων τῶν x κάθετος ἐπ' αὐτήν, αἱ τομαὶ τοῦ κώνου αἱ δι' ἐπιπέδων παραλλήλων τῇ βάσει γινόμεναι ἔχουσιν ἐμβαδὰ γνωστά· διότι εἶνε ὅμοιαι τῇ βάσει Β· ὅθεν

$$\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{B}}=\frac{(\mathrm{O\Pi})^2}{(\mathrm{OH})^2} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{B}}=\frac{x^2}{v^2}$$

ἐντεῦθεν ἕπεται

$$V = \frac{B}{v^2}\int_0^v x^2 dx = \frac{1}{3} B . v .$$

Σημείωσις. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εὑρίσκεται καὶ στοιχειωδῶς ἁπλούστατα, ἐὰν θεωρηθῇ ὁ κῶνος ὡς ὅριον πυραμίδων καὶ ἐφαρμοσθῇ τὸ γνωστὸν θεώρημα περὶ τοῦ ὄγκου τῶν πυραμίδων.

Κυλινδροειδῆ.

Κυλινδροειδὲς λέγω τὸ στερεὸν τὸ γραφόμενον ὑπὸ τῆς τυχούσης ἐπιπέδου ἐπιφανείας, ὅταν κινῆται οὕτως, ὥστε τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς νὰ μένῃ πάντοτε παράλληλον ἑαυτῷ (ἡ ἐπιφάνεια, κινουμένου τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς, δύναται νὰ στρέφηται ὁπωσδήποτε ἐν αὐτῷ). Ἐπειδὴ αἱ τομαὶ τοῦ τοιούτου στερεοῦ δι' ἐπιπέδων παραλλήλων τῶν δύο βάσεών του εἶνε πᾶσαι ἴσαι, ἕπεται, ὅτι θὰ εἶνε (ὁ ἄξων τῶν x ἐλήφθη κάθετος ἐπὶ τὰς βάσεις τοῦ στερεοῦ)

$$V = E\int_0^\beta dx = E(\beta - \alpha),$$

ἔνθα β—α παριστᾷ τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο βάσεων τοῦ κυλινδροειδοῦς, ἤτοι τὸ ὕψος αὐτοῦ· *ὥστε παντὸς κυλινδροειδοῦς ὁ ὄγκος εἶνε γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

Κωνοειδῆ.

Θεωρήσωμεν τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ, ὅπερ περιορίζεται ὑπὸ τῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας ΠΜΔΝ καὶ ὑπὸ τῆς κωνοειδοῦς ἐπιφανείας, ἥτις ἔχει ὁδηγοὺς τὸ περίγραμμα αὐτῆς καὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, ἥτις ὑποτίθεται παράλληλος τοῦ ἐπιπέδου ΠΜΔΝ. Ἐὰν τὸ στερεὸν τοῦτο τμηθῇ δι' ἐπιπέδου παραλλήλου τῷ ὁδηγοῦντι ἐπιπέδῳ τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ, ἡ τομὴ θὰ εἶνε τρίγωνον, οἷον τὸ ΚΜΝ, ἔχον βάσιν τὴν χορδὴν ΜΝ τῆς καμπύλης ΔΜΠΝ καὶ ὕψος τὴν ἀπόστασιν τοῦ Κ ἀπὸ τῆς χορδῆς ΜΝ, ἥτις ἀπόστασις, ἐὰν ΚΗ εἶνε κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως καὶ ΗΘ κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ΜΝ, εἶνε ἡ ΚΘ· ἀλλ' ἐὰν διὰ τοῦ θ παραστήσωμεν τὴν γωνίαν ΚΘΗ, ἥτις εἶνε ἡ γωνία τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως, θὰ εἶνε

$$\mathrm{K\Theta}=\frac{\mathrm{KH}}{\eta\mu\theta}\cdot$$

ὅθεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς εἶνε

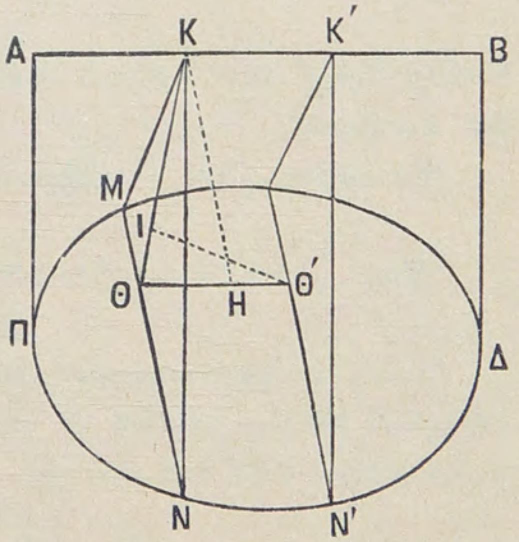
$$\frac{1}{2}\;\frac{(\mathrm{MN}).(\mathrm{KH})}{\eta\mu\theta}\quad \text{ἢ}\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{(\mathrm{MN})v}{\eta\mu\theta}.$$

καὶ ἡ πλὰξ τοῦ στερεοῦ ἡ μεταξὺ δύο παραλλήλων τομῶν KMN, K'M'N' περιεχομένη θὰ ἔχῃ ὄγκον ἰσοδύναμον τῷ

$$\frac{1}{2}(\mathrm{MN})\frac{v}{\eta\mu\theta}.(\Theta'\mathrm{I})\quad \text{ἤτοι}\quad \frac{1}{2}(\mathrm{MN})v.(\Theta\Theta')$$

ἔνθα Θ'Ι εἶνε ἡ ἀπόστασις τῶν τεμνόντων ἐπιπέδων· ὁ ὄγκος ἄρα τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος στερεοῦ εἶνε

$$\mathrm{V}=\frac{1}{2}v\int_{(\Pi\mathrm{M}\Delta\mathrm{N})}(\mathrm{MN}).(\Theta\Theta')$$



ἀλλὰ τὸ ὁλοκλήρωμα $\int(\mathrm{MN})(\Theta\Theta')$ εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ΠΜΔΝ· διότι εἶνε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπειροστῶν τὸ πλάτος ὀρθογωνίων, εἰς ἃ διαιρεῖται ἡ βάσις διὰ τῶν τεμνόντων ἐπιπέδων· ὅθεν ἔχομεν

$$\mathrm{V}=\frac{1}{2}\mathrm{B}.v,$$

τουτέστιν *ὁ ὄγκος παντὸς κωνοειδοῦς, οὗ ἡ κορυφογραμμὴ εἶνε παράλληλος τῇ βάσει, ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους.*

Πρισματοειδῆ.

Ἐὰν πολύγωνον μεταβλητὸν κινηθῇ οὕτως, ὥστε τὸ μὲν ἐπίπεδον αὐτοῦ νὰ μένῃ παράλληλον ἑαυτῷ, αἱ δὲ κορυφαὶ αὐτοῦ νὰ γράφωσιν εὐθείας δεδομένας, γράφει στερεόν, ὅπερ λέγεται *πρισματοειδές*. Τὸ πρισματοειδὲς κατὰ ταῦτα περιορίζεται ὑπὸ δύο πολυγώνων ΑΒΓΔ καὶ Α'Β'Γ'Δ' ἴσας τὸ πλῆθος ἐχόντων πλευράς, ἅτινα λέγονται *βάσεις αὐτοῦ*, καὶ ὑπὸ τῶν παραπλεύρων ἐπιφανειῶν ΑΒΑ'Β', ΒΓΒ'Γ', . ., ἃς γράφουσιν αἱ πλευραὶ τοῦ κινουμένου πολυγώνου καὶ αἵτινες εἶνε παραβολοειδῆ ὑπερβολικά. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὄγκου τοῦ στερεοῦ τούτου παρατηροῦμεν, ὅτι, ἂν ληφθῇ ἡ μία τῶν βάσεων αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν xy, αἱ τομαὶ αὐτοῦ ὑπὸ τῶν παραλλήλων τῇ βάσει ἐπιπέδων, ἤτοι ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων $z=h$, θὰ εἶνε πολύγωνα ἔχοντα πλευρὰς ἰσοπληθεῖς ταῖς βάσεσι καὶ ἐπειδὴ αἱ ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν ΑΑ', ΒΒ', . . καὶ ἡ ἐξίσωσις $z=h$ δίδουσι τὰς συντεταγμένας τῶν κορυφῶν τῶν τομῶν ὡς πρωτοβαθμίους συναρτήσεις τοῦ h, τὰ ἐμβαδὰ τῶν τομῶν θὰ εἶνε δευτεροβάθμιός τις συνάρτησις τοῦ h, ἔστω

$$E=\alpha h^2+\beta h+\gamma \qquad (4)$$

ἐπομένως ὁ ὄγκος V τοῦ στερεοῦ θὰ εἶνε

$$V=\int_0^v(\alpha h^2+\beta h+\gamma)dh,$$

ἔνθα v δηλοῖ τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ (τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο βάσεων ἀπ' ἀλλήλων).

Ἐκτελοῦντες τὴν ὁλοκλήρωσιν εὑρίσκομεν

$$V=\frac{1}{3}\alpha v^3+\frac{1}{2}\beta v^2+\gamma v=v\left\{\frac{1}{3}\alpha v^2+\frac{1}{2}\beta v+\gamma\right\}.$$

Ἀλλ' ἐὰν παραστήσωμεν διὰ Β καὶ Β' τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο παραλλήλων βάσεων καὶ διὰ **Μ** τὸ ἐμβαδὸν τῆς μέσης τομῆς (ἧς τὸ ἐπίπεδον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν δύο βάσεων) θὰ εἶνε κατὰ τὸν τύπον (4)

$$B=\gamma$$

$$B'=\alpha v^2+\beta v+\gamma$$

$$M=\frac{1}{4}\alpha v^2+\frac{1}{2}\beta v+\gamma\cdot$$

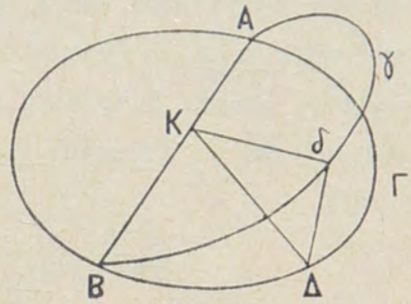
ὅθεν
$$B+4M+B'=2\alpha v^2+3\beta v+6\gamma$$

καὶ ἐπομένως
$$V=\frac{1}{6}v(B+4M+B'). \qquad (5)$$

Πεταλοειδῆ.

Οὕτω καλοῦμεν τὰ στερεά, ἅτινα περιέχονται ὑπὸ τῆς τυχούσης κυλινδρικῆς ἐπιφανείας καὶ ὑπὸ δύο ἐπιπέδων τεμνομένων, ὧν τὸ ἕτερον εἶνε κάθετον πρὸς τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν.

Ἔστω ΑΒΓΔ ἡ κάθετος τομὴ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας καὶ ΑΒ ἡ τομὴ τῶν δύο ἐπιπέδων· ἐὰν ἀχθῇ τυχὸν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, τοῦτο θὰ εἶνε παράλληλον πρὸς τὰς γενετείρας τῆς ἐπιφανείας καὶ θὰ τέμνῃ τὸ στερεὸν κατὰ τρίγωνόν τι, ὡς τὸ ΚΔδ, οὗτινος ἡ γωνία ΔΚδ εἶνε ἡ γωνία τῶν δύο ἐπιπέδων, ἥντινα γωνίαν παριστῶμεν διὰ τοῦ θ· ἐν τῷ τριγώνῳ τούτῳ ἔχομεν



$$\Delta\delta = \text{Κ}\Delta \,.\, \varepsilon\varphi\theta,$$

ὅθεν
$$(\Delta\text{Κ}\delta) = \frac{1}{2}(\text{Κ}\Delta)^2 \varepsilon\varphi\theta$$

καὶ ἂν ἡ ΑΒ ληφθῇ ὡς ἄξων τῶν x τὸ δὲ ἐπίπεδον τὸ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν κάθετον ὡς ἐπίπεδον τῶν xy (ἐν ὀρθογωνίῳ συστήματι συντεταγμένων), θὰ εἶνε

$$V = \frac{1}{2}\varepsilon\varphi\theta \int_\alpha^\beta y^2 dx \qquad (6)$$

ἀλλ' ἐὰν παραστήσωμεν διὰ V_1 τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ, ὅπερ ἡ ἐπιφάνεια ΑΒΓ καταγράφει, ὅταν περιστραφῇ περὶ τὴν ΑΒ, ἔχομεν

$$V_1 = \pi \int_\alpha^\beta y^2 dx,$$

ὅθεν συνάγεται
$$V = \frac{1}{2\pi} \,.\, V_1 \varepsilon\varphi\theta \cdot \qquad (6')$$

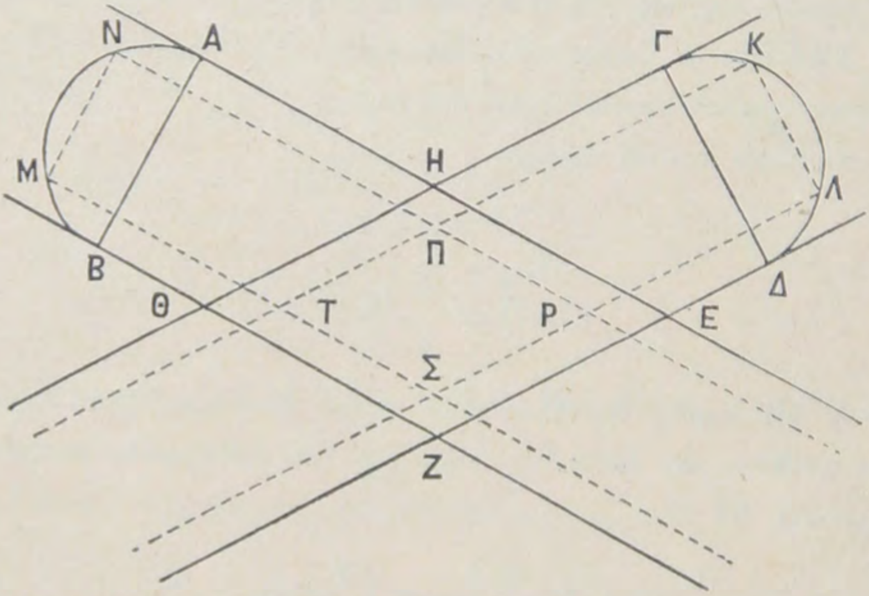
Ἐὰν π. χ. ἡ κάθετος τομὴ εἶνε κύκλος ἔχων ἀκτῖνα α καὶ ἡ τομὴ τῶν δύο ἐπιπέδων εἶνε διάμετρος τοῦ κύκλου, θὰ εἶνε

$$V = \frac{1}{2\pi} \,.\, \varepsilon\varphi\theta \,.\, \frac{4}{3}\pi\alpha^3 = \frac{2}{3}\alpha^3 \,.\, \varepsilon\varphi\theta \,.$$

Ὄγκος τοῦ κοινοῦ μέρους δύο κυλίνδρων.

Θεωρήσωμεν τὸ στερεόν, ὅπερ εἶνε κοινὸν μέρος δύο κυκλικῶν κυλίνδρων ἰσοδιαμέτρων, ὧν οἱ ἄξονες τέμνουσιν ἀλλήλους.

Τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο ἀξόνων τέμνει τὰς μὲν κυκλικὰς βάσεις τῶν κυλίνδρων κατὰ δύο διαμέτρους ΑΒ καὶ ΓΔ· ἑκατέραν δὲ τῶν κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν κατὰ δύο ἀντιθέτους γενετείρας· αἱ τέσσαρες δὲ αὗται γενέτειραι σχηματίζουσι ῥόμβον τὸν ΕΖΗΘ καὶ τὸ μὲν ἥμισυ τοῦ στερεοῦ κεῖται ὑπεράνω τοῦ ῥόμβου τούτου, τὸ δὲ ἕτερον ἥμισυ ὑποκάτω· πᾶν δὲ ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ τῶν ἀξόνων καὶ ἀπέ-



χον ἀπ' αὐτοῦ ἀπόστασιν h μικροτέραν τῆς ἀκτῖνος α τῶν κυλίνδρων τέμνει τὰς μὲν βάσεις τῶν κυλίνδρων κατὰ χορδὰς ἴσας, τὰς δὲ κυλινδρικὰς ἐπιφανείας ἑκατέραν κατὰ δύο γενετείρας, αἱ τέσσαρες δὲ αὗται γενέτειραι σχηματίζουσιν ἐπίσης ῥόμβον· ἔστω τὸν ΠΡΣΤ· τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ῥόμβου τούτου εἶνε

$$E = (\Pi P).(MN)$$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε $MN = K\Lambda = \Pi P \,.\, \eta\mu\varphi$,

ἔνθα φ δηλοῖ τὴν γωνίαν τῶν δύο ἀξόνων, ἕπεται

$$E = \frac{(MN)^2}{\eta\mu\varphi}.$$

ἀλλ' ἡ χορδὴ ΜΝ, ὡς ἀπέχουσα ἀπὸ τῆς διαμέτρου ΑΒ ἀπόστασιν ἴσην τῇ h, εἶνε $2\sqrt{\alpha^2 - h^2}$

ὅθεν
$$E=\frac{4(\alpha^2-h^2)}{\eta\mu\varphi}$$

καὶ ὁ ζητούμενος ὄγκος εἶνε

$$V=\frac{8}{\eta\mu\varphi}\int_0^\alpha(\alpha^2-h^2)\,dh=\frac{16}{3}\;\frac{\alpha^3}{\eta\mu\varphi}.$$

Σημείωσις. Ἐὰν τέμνωσι μὲν ἀλλήλους οἱ ἄξονες τῶν κυλίνδρων, ἀλλ' αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν εἶνε ἄνισοι (ἔστωσαν α καὶ β καὶ $\alpha<\beta$), ὁ μικρότερος διαπερᾷ τὸν μεγαλήτερον καὶ τὸ κοινὸν μέρος αὐτῶν ἔχει ὄγκον

$$V=\frac{8}{\eta\mu\varphi}\int_0^\alpha\sqrt{(\alpha^2-h^2)(\beta^2-h^2)}\,dh.$$

3) ΣΤΕΡΕΑ ΟΙΑΔΗΠΟΤΕ

176. Ὁ ὄγκος οἱουδήποτε στερεοῦ περατουμένου ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας $z=\varphi(x,y)$ καὶ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τῶν xy καὶ ὑπὸ τῆς τυχούσης κυλινδρικῆς ἐπιφανείας παραλλήλου τῷ ἄξονι τῶν z δίδεται, ὡς ἐμάθομεν ἤδη (σελ. 230), ὑπὸ τοῦ διπλοῦ ὁλοκληρώματος

$$V=\int_{(T)}\varphi(x,y)\,d(x,y), \tag{7}$$

οὗτινος τόπος εἶνε ἡ βάσις τοῦ κυλίνδρου (ὁ ἄξων τῶν z ὑποτίθεται κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον xy).

Σημείωσις α'. Ἐν τῷ τύπῳ τούτῳ θεωρεῖται τὸ στερεὸν ὡς συγκείμενον ἐξ ἀπειροστῶν ὀρθῶν πρισμάτων ἐχόντων βάσεις τὰ στοιχεῖα $d(x,y)$ τῆς ἐπιφανείας T, ὕψος δὲ ἕκαστον τὴν κατηγμένην τῆς ἐπιφανείας $z=\varphi(x,y)$ τὴν βαίνουσαν ἐπὶ τοῦ τυχόντος σημείου τῆς βάσεώς του.

Σημείωσις β'. Ἐὰν ὁ ἄξων τῶν z δὲν εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον xy, ἀλλὰ σχηματίζῃ πρὸς αὐτὸ γωνίαν τινὰ θ, ὁ ὄγκος ἑκάστου πρισματίου εἶνε $zd(xy).\eta\mu\theta$ καὶ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$V=\eta\mu\theta\int_T\varphi(x,y)\,d(x,y). \tag{7'}$$

177. Ἔστω τέλος τὸ τυχὸν στερεόν, ἀλλ' αἱ παράλληλοι τῷ ἄξονι τῶν z ἂς διαπερῶσιν αὐτὸ μόνον εἰς δύο σημεῖα ἑκάστη· ἐὰν προβληθῇ τὸ στερεὸν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν xy, αἱ προβολαὶ τῶν σημείων του θὰ

καταλάβωσιν τόπον τινὰ T καὶ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ θὰ εἶνε

$$V=\int_{T}(Z'-Z)\,d(x,y), \tag{8}$$

ἔνθα Z' καὶ Z εἶνε αἱ δύο κατηγμέναι τῆς τὸ στερεὸν περατούσης ἐπιφανείας αἱ πρὸς τὸ αὐτὸ σύστημα τιμῶν x, y ἀντιστοιχοῦσαι (ἐν τῷ τόπῳ T).

178. Ὅταν ἡ ἐπιφάνεια ἡ τὸ στερεὸν περατοῦσα παρίσταται ὅλη διὰ μιᾶς ἐξισώσεως

$$\sigma(x,y,z)=0,$$

εὑρίσκομεν τὸν τόπον T ὡς ἑξῆς.

Ἐὰν νοήσωμεν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν K παράλληλον τῇ OZ καὶ ἔχουσαν βάσιν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν x,y τὴν περίμετρον τοῦ T, ἡ ἐπιφάνεια αὕτη θὰ ἐφάπτηται τοῦ στερεοῦ περικλείουσα αὐτὸ ἐν ἑαυτῇ, θὰ ἐφάπτηται δὲ αὐτοῦ κατά τινα γραμμὴν Θ, ἧς προβολὴ εἶνε προδήλως αὐτὴ ἡ περίμετρος τοῦ T· τὴν γραμμὴν ταύτην τῆς ἐπαφῆς Θ εὑρίσκομεν παρατηροῦντες, ὅτι τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας $\sigma(x,y,z)=0$ εἰς ἓν οἱονδήποτε ἐκ τῶν σημείων της, ὡς ἐφαπτόμενον τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας K, θὰ εἶνε παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν z· καὶ ἀντιστρόφως, πᾶν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας, εἰς ὃ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἶνε παράλληλον τῷ ἄξονι z, θὰ εἶνε σημεῖον τῆς γραμμῆς Θ· ἑπομένως τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς Θ ἐπαληθεύουσι τὰς δύο ἐξισώσεις

$$\sigma(x,y,z)=0 \quad \text{καὶ} \quad \frac{\partial\sigma}{\partial z}=0$$

καὶ ἂν μεταξὺ τούτων ἀπαλείψωμεν τὴν μεταβλητὴν z, θὰ εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$f(x,y)=0,$$

ἥτις παριστᾷ τὴν προβολὴν τῆς γραμμῆς Θ· ἤτοι τὴν περίμετρον τοῦ τόπου T.

Σημείωσις. Εἰς τὸν τύπον (8) περιλαμβάνονται καὶ οἱ προηγουμένως περὶ τοῦ ὄγκου τῶν στερεῶν εὑρεθέντες τύποι· διότι, ἂν διαιρεθῇ ὁ τόπος T εἰς ὀρθογώνια παράλληλα τοῖς ἄξοσιν καὶ ἐκτελεσθῇ ἡ πρώτη ὁλοκλήρωσις πρὸς y, ἤτοι ἂν προστεθῶσι πάντα τὰ ἀπειροστὰ πρίσματα τοῦ στερεοῦ τὰ μεταξὺ δύο ἐπιπέδων $X=x$ καὶ $X=x+dx$ περιεχόμενα καὶ ἑπομένως μίαν πλάκα αὐτοῦ ἀποτελοῦντα, θὰ ἔχωμεν

$$V=\int_{\alpha}^{\beta}dx\left\{\int_{y}^{y'}(Z'-Z)dy\right\}$$

καὶ ἐπειδὴ τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_{y}^{y'}(Z'-Z)dy$ παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν E τῆς τομῆς, ἣν ποιεῖ τὸ ἐπίπεδον $X=x$ ἐν τῷ στερεῷ, συνάγεται ὁ τύπος

$$V=\int_{\alpha}^{\beta} E.dx$$

Παραδείγματα.

1) Εὑρεῖν τὸν ὄγκον τοῦ ἐλλειψοειδοῦς.

Ἐὰν ἀναφέρωμεν τὸ ἐλλειψοειδὲς πρὸς τοὺς ἄξονάς του ὡς πρὸς ἄξονας τῶν συντεταγμένων, ἡ ἐξίσωσις αὐτοῦ εἶνε

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

καὶ τὸ ὑπεράνω τοῦ ἐπιπέδου τῶν xy κείμενον ἥμισυ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς (θεωρούμενον ὡς ἄθροισμα ὀρθῶν πρισματίων ἐχόντων βάσεις ἀπειροστὰς) ἔχει ὄγκον ἴσον τῷ

$$\int zd(x,y) \qquad \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-1<0.$$

ὁ ὅλος ἄρα ὄγκος εἶνε

$$V=2c\int\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}}\,d(x,y), \qquad \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-1<0$$

Πρὸς εὐκολωτέραν εὕρεσιν τοῦ ὁλοκληρώματος τούτου εἰσάγομεν νέας μεταβλητὰς ρ καὶ θ ὁριζομένας διὰ τῶν ἐξισώσεων

$$\frac{x}{\alpha}=\rho\sigma\upsilon\nu\theta, \qquad \frac{y}{\beta}=\rho\eta\mu\theta, \qquad (1)$$

τότε

$$\frac{d(x,y)}{d(\rho,\theta)}=\alpha\beta\rho,$$

καὶ τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα γίνεται

$$V=2\alpha\beta c\int\sqrt{1-\rho^2}.\,\rho d\rho d\theta \qquad (2)$$

$$0<\rho<1$$
$$0<\theta<2\pi$$

καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ὁλοκληρώσεων

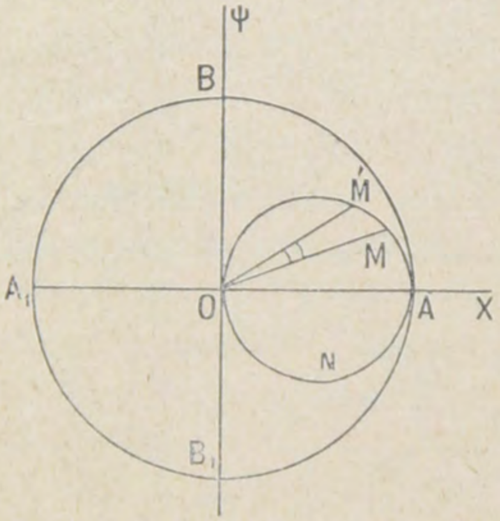
$$V=\frac{4}{3}\pi\alpha\beta c. \qquad (3)$$

Σημείωσις. Ἡ εἰσαγωγὴ τῶν μεταβλητῶν ρ καὶ θ ἀντὶ τῶν x,y διὰ τῶν ἐξισώσεων (1) σημαίνει διαίρεσιν τοῦ τόπου τῆς ὁλοκληρώσεως, ἤτοι τῆς πρωτευούσης τομῆς, $z=0$, δι' ἐλλείψεων ὁμοιοθέτων αὐτῇ καὶ δι' ἀκτίνων ἐκ τοῦ κέντρου ἠγμένων.

2) Εὑρεῖν τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ, ὅπερ εἶνε κοινὸν μέρος τῆς σφαίρας

$$x^2+y^2+z^2=\alpha^2$$

καὶ τοῦ ὀρθοῦ κυλίνδρου $x^2+y^2-\alpha x=0$.



Τὸ ἐπίπεδον τῶν xy τέμνει τὴν μὲν σφαῖραν κατὰ τὸν μέγιστον κύκλον ABA_1B_1, τὸν δὲ κύλινδρον κατὰ τὸν κύκλον ΟΝΑΜΟ, ὅστις διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ ἔχει ἀκτῖνα τὸ ἥμισυ τοῦ α· καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ στερεοῦ τὸ ὑπεράνω τοῦ ἐπιπέδου ΧΟΨ κείμενον (ἐὰν θεωρηθῇ ὡς συγκείμενον ἐκ πρισματίων ὀρθῶν ἐχόντων βάσεις ἀπειροστὰς) ἔχει ὄγκον ἴσον τῷ ὁλοκληρώματι

$$\int\limits_{(ONAMO)} z\,d(x,y) \qquad \text{ἢ} \qquad 2\int\limits_{(OAMO)} z\,d(x,y)$$

ἄρα θὰ εἶνε, ἂν διαιρεθῇ ὁ τόπος τῆς ὁλοκληρώσεως εἰς κολοβοὺς τομεῖς,

$$V=4\int\limits_{(OAMO)}\sqrt{\alpha^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta\cdot$$

ὁλοκληροῦντες πρῶτον πρὸς ρ, θὰ ἔχωμεν ὅρια 0 καὶ ΟΜ (τὴν τυχοῦσαν πολικὴν ἀκτῖνα τῆς ἡμιπεριφερείας ΟΜΑ),
ἤτοι 0 καὶ ασυνθ· ὅθεν

$$V=\frac{4}{3}\alpha^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\eta^3\mu\theta)\,d\theta$$

ἐκτελοῦντες δὲ καὶ τὴν πρὸς θ ὁλοκλήρωσιν (ἧς ὅρια εἶνε προφανῶς 0 καὶ $\frac{\pi}{2}$), εὑρίσκομεν

$$V=\frac{4}{3}\alpha^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

Ἐὰν νοήσωμεν καὶ δεύτερον ὀρθὸν κύλινδρον ἴσον τῷ πρώτῳ ἔχοντα βάσιν τὴν ἐπὶ τῆς OA_1 ὡς διαμέτρου ἀναγραφομένην περιφέρειαν, τὸ στερεόν, ὅπερ ἀμφότεροι οἱ κύλινδροι ἀφαιροῦσιν ἀπὸ τῆς σφαίρας, ἔχει ὄγκον

$$\frac{4}{3}\pi\alpha^3-\frac{16}{9}\alpha^3$$

Τὸ ὑπολειπόμενον ἄρα μέρος τῆς σφαίρας, ὅταν ἀφαιρεθῶσιν ἀπ' αὐτῆς τὰ ἐν τοῖς κυλίνδροις περιεχόμενα δύο μέρη αὐτῆς, ἔχει ὄγκον $\frac{16}{9}\alpha^3$.

---

179. Ἐὰν ἐν τῷ στερεῷ ὑπάρχῃ σημεῖόν τι O, ἐξ οὗ αἱ ἀγόμεναι ἀκτῖνες νὰ διαπερῶσι τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ ἑκάστη μόνον καθ' ἓν σημεῖον, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν αὐτὸ ὡς ὅριον ἀθροίσματος πυραμίδων ἐχουσῶν κορυφὴν τὸ O καὶ βάσεις τὰ ἀπειροστὰ μέρη τῆς ἐπιφανείας του, ὁπωςδήποτε διῃρημένης (ἢ τὰς ἕδρας οἱαςδήποτε πολυεδρικῆς ἐπιφανείας ἐγγεγραμμένης εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ στερεοῦ). Ὑποθέσωμεν, ὅτι αἱ συντεταγμέναι x,y,z τῶν σημείων τῆς ἐπιφανείας (ἀρχὴ τὸ O) εἶνε ἐκπεφρασμέναι ὡς συναρτήσεις δύο μεταβλητῶν u, v οὕτως, ὥστε πρὸς ἕκαστον σημεῖον αὐτῆς νὰ ἀντιστοιχῇ ἓν σύστημα τιμῶν u, v καὶ ἀντιστρόφως, πρὸς ἕκαστον σύστημα τιμῶν u, v νὰ ἀντιστοιχῇ ἓν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας (αἱ δύο μεταβληταὶ u, v λέγονται τότε συντεταγμέναι *καμπυλόγραμμοι* τῆς ἐπιφανείας)· ἂν τότε ἡ ἐπιφάνεια διαιρεθῇ διὰ τῶν γραμμῶν u=σταθ. καὶ v=σταθ. εἰς ἀπειροστὰ τετράπλευρα, τὸ στερεὸν τὸ περιεχόμενον ὑφ' ἑκάστου τούτων καὶ ὑπὸ τῶν τεσσάρων ὁμοκορύφων κωνικῶν ἐπιφανειῶν, ὧν ὁδηγοὶ εἶνε αἱ τέσσαρες πλευραὶ τοῦ τετραπλεύρου, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πυραμὶς ἔχουσα βάσιν μὲν τὸ τετράπλευρον τῆς ἐπιφανείας, ὕψος δὲ τὴν ἀπόστασιν τοῦ O ἀπὸ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς ἐπιφανείας εἰς μίαν τῶν κορυφῶν τοῦ τετραπλεύρου· καὶ ἡ μὲν ἀπόστασις αὕτη εἶνε (Διαφ. λογισμοῦ σελ. 159)

$$\frac{Ax+By+\Gamma z}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}$$

ἔνθα εἶνε

$$A=\frac{d(y,z)}{d(u,v)},\qquad B=\frac{d(z,x)}{d(u,v)},\qquad \Gamma=\frac{d(x,y)}{d(u,v)},$$

τὸ δὲ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου, ἐν ᾧ ἡ u μεταβάλλεται ἀπὸ u μέχρι $u+du$ καὶ ἡ v ἀπὸ v μέχρι $v+dv$, εἶνε

$$\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}\,dudv\cdot$$

ὅθεν ὁ ὄγκος τῆς ἀπειροστῆς πυραμίδος ἔχει πρωτεῦον μέρος τὸ ἑξῆς

$$\frac{1}{3}(Ax+By+\Gamma z)dudv$$

καὶ ὁ ὄγκος τοῦ ὅλου στερεοῦ θὰ εἶνε ἴσος τῷ ὁλοκληρώματι

$$V=\frac{1}{3}\int\int(Ax+By+\Gamma z)dudv, \tag{1}$$

ἔνθα τὸ ὁλοκλήρωμα ἐκτείνεται ἐφ' ἅπαντα τὰ μέρη τῆς ἐπιφανείας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII.

ΤΡΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Ἡ θεωρία τῶν τριπλῶν ὁλοκληρωμάτων ἐλάχιστον διαφέρει τῆς θεωρίας τῶν διπλῶν· διὰ τοῦτο ἀρκούμεθα ἐνταῦθα εἰς τὴν ἀναγραφὴν τῶν θεωρημάτων, παραλείποντες τὰς ἀποδείξεις, ὧν ἡ εὕρεσις εἶνε εὔκολος ἐκ τῶν εἰς τὰ διπλᾶ ὁλοκληρώματα εἰρημένων.

180. Θεωρήσωμεν τρεῖς μεταβλητὰς x,y,z ἀνεξαρτήτους ἀπ᾽ἀλλήλων ἃς παριστῶμεν ὡς ὀρθογωνίους συντεταγμένας τῶν σημείων τοῦ χώρου καὶ μέρος τι τοῦ χώρου πεπερασμένον καὶ ὑπὸ τῆς τυχούσης κλειστῆς ἐπιφανείας περατούμενον, τὸ στερεὸν T· ἔστω δὲ καὶ συνάρτησίς τις $\varphi(x,y,z)$, ἥτις ἐν ἑκάστῳ σημείῳ τοῦ T (ἤτοι δι᾽ ἕκαστον σύστημα τιμῶν, πρὸς ἃς ἀντιστοιχεῖ σημεῖον τοῦ T) ἔχει μίαν τιμὴν πραγματικὴν συνεχῶς μεταβαλλομένην μετὰ τοῦ σημείου, ἐν ὅσῳ τοῦτο μένει ἐντὸς τοῦ τόπου T (λέγω δὲ τὴν συνάρτησιν $\varphi(x,y,z)$ συνεχῆ ἐν τῷ τόπῳ T, ὅταν, δοθέντος ἀριθμοῦ θετικοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ, τοῦ ε, δύναται πάντοτε νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός τις θετικὸς δ τοιοῦτος, ὥστε πᾶσα μεταβολὴ τῶν συντεταγμένων x,y,z ἐξ οἱουδήποτε σημείου τοῦ T καὶ ἂν γίνηται, ἐὰν ἔχῃ μέτρον μικρότερον τοῦ δ, νὰ προξενῇ μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως ἔχουσαν μέτρον μικρότερον τοῦ ε).

Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν τόπον T εἰς ὁσαδήποτε καὶ οἱαδήποτε μέρη καὶ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὄγκον ἑκάστου ἐπὶ τὴν τιμήν, ἣν ἔχει ἡ συνάρτησις $\varphi(x,y,z)$ εἰς ἓν οἱονδήποτε ἐκ τῶν σημείων αὐτοῦ, τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τούτων λέγω ὅτι τείνει πρός τι ὅριον πεπερασμένον καὶ ἐντελῶς ὡρισμένον, ὅταν ἡ διαίρεσις τοῦ τόπου T προχωρῇ οὕτως, ὥστε ἕκαστον μέρος τοῦ T νὰ τείνῃ πρὸς τὸ 0 κατὰ πάσας τὰς διαστάσεις αὐτοῦ, ἤτοι, ὅταν ἡ ἀπόστασις δύο τυχόντων σημείων αὐτοῦ τείνῃ πρὸς τὸ 0.

181. Κατὰ πρῶτον ἀποδεικνύεται καὶ ἐνταῦθα ἡ ὕπαρξις τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος ὁρίου ἐν μιᾷ ὡρισμένῃ διαιρέσει, ἔπειτα δὲ γενικῶς καὶ ἐν πάσῃ ἄλλῃ διαιρέσει· ὑποτίθεται δὲ διὰ τὴν εὐκολίαν τῆς ἀποδείξεως, ὅτι αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως $\varphi(x,y,z)$ εἶνε πᾶσαι θετικαὶ ἐν τῷ τόπῳ T.

Πρὸς τοῦτο ἄγομεν δύο ἐπίπεδα παράλληλα τῷ YOZ καὶ τοιαῦτα, ὥστε νὰ περιλαμβάνωσι μεταξὺ αὐτῶν ἅπαν τὸ στερεὸν Τ, ἐγγίζοντα αὐτὸ ἑκάτερον εἰς ἓν ἢ περισσότερα σημεῖα· ἂν αἱ ἐξισώσεις τῶν ἐπιπέδων τούτων εἶνε

$$x=\alpha \quad \text{καὶ} \quad x=\beta \quad \alpha<\beta$$

τὸ μὲν α εἶνε ἡ ἐλαχίστη τετμημένη τῶν σημείων τοῦ στερεοῦ, τὸ δὲ β ἡ μεγίστη (τουτέστιν ἐν τῷ Τ ἡ μεταβλητὴ x μεταβάλλεται ἀπὸ α μέχρι β)· ἔπειτα ἄγομεν ὁμοίως δύο ἐπίπεδα παράλληλα τῷ ΖΟΧ, ἔστω τὰ

$$y=\gamma \quad \text{καὶ} \quad y=\delta \qquad \gamma<\delta$$

περιλαμβάνοντα τὸ στερεὸν Τ μεταξὺ αὐτῶν καὶ ἐγγίζοντα αὐτὸ ἑκάτερον εἰς ἓν ἢ περισσότερα σημεῖα, ὅτε γ εἶνε ἡ ἐλαχίστη τεταγμένη τῶν σημείων τοῦ Τ καὶ δ ἡ μεγίστη· καὶ τέλος ἄγομεν δύο ἐπίπεδα παράλληλα τῇ ΧΟΥ

$$z=\zeta \quad \text{καὶ} \quad z=\eta \qquad \zeta<\eta$$

περιέχοντα τὸ στερεὸν μεταξὺ αὐτῶν καὶ ἐγγίζοντα αὐτὸ ἑκάτερον εἰς ἓν ἢ περισσότερα σημεῖα, ὅτε ζ εἶνε ἡ ἐλαχίστη κατηγμένη τῶν σημείων τοῦ στερεοῦ καὶ η ἡ μεγίστη.

Τὰ ἓξ ταῦτα ἐπίπεδα σχηματίζουσιν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, ἐν ᾧ περιέχεται ἅπαν τὸ στερεὸν Τ.

Νοήσωμεν νῦν ἑκάστην τῶν ἀκμῶν τοῦ ὀρθογωνίου τούτου παραλληλεπιπέδου διαιρουμένην πρῶτον μὲν εἰς δύο ἴσα μέρη, ἔπειτα εἰς τέσσαρα, ἔπειτα εἰς ὀκτώ, καὶ οὕτω καθεξῆς· καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἑκάστης ἀκμῆς ἑκάστοτε ἐπίπεδα κάθετα πρὸς αὐτήν· ταῦτα διαιροῦσι τὸ εἰρημένον παραλληλεπίπεδον, ὅπερ παριστῶ διὰ τοῦ Π, πρῶτον μὲν εἰς ὀκτὼ ἴσα μέρη, ἔπειτα δὲ ἕκαστον τούτων τῶν μερῶν πάλιν εἰς ὀκτώ, καὶ οὕτω καθεξῆς· προφανὲς δὲ εἶνε, ὅτι κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον τῆς διαιρέσεως, καθ' ὅσον προχωροῦμεν, ἕκαστον τῶν μερῶν, εἰς ἃ τὸ παραλληλεπίπεδον διαιρεῖται, τείνει πρὸς τὸ 0 κατὰ πάσας τὰς διαστάσεις. Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τούτων παραλληλεπιπέδων, εἰς ἃ διαιρεῖται τὸ Π, ἄλλα μὲν κεῖνται ἐντὸς τοῦ στερεοῦ Τ, ἄλλα δὲ ὅλως ἐκτὸς αὐτοῦ καὶ ἄλλα κεῖνται ἐν μέρει ἐντὸς τοῦ Τ καὶ ἐν μέρει ἐκτὸς αὐτοῦ. Ἔστωσαν κατὰ τὴν νυοστὴν διαίρεσιν (ὅτε ἑκάστη ἀκμὴ τοῦ παραλληλεπιπέδου Π εἶνε διηρημένη εἰς μέρη 2^ν) ἐντὸς μὲν τοῦ Τ τὰ παραλληλεπίπεδα $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_\rho$ καθ' οἱανδήποτε τάξιν ἠριθμημένα· ἐντὸς δ' ἐκτὸς τὰ $\tau'_1, \tau'_2, \ldots, \tau'_\sigma$.

Τούτων τεθέντων, ἐὰν ἀπὸ μόνον τῶν ἐντὸς τοῦ Τ κειμένων ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων καὶ ἀπὸ τῶν ἐλαχίστων τιμῶν τῆς συναρτήσεως

$\varphi(x,y,z)$ ἐν ἑκάστῳ τούτων σχηματίσωμεν τὸ ἄθροισμα

$$\sigma_\nu = \tau_1 E_1 + \tau_2 E_2 + \ldots + \tau_\rho E_\rho,$$

ἀποδεικνύεται εὐκόλως, ὅτι τὸ ἄθροισμα τοῦτο σ_ν αὐξάνει, καθ' ὅσον ἡ διαίρεσις προχωρεῖ, καὶ τείνει πρός τι ὅριον. Ἐπίσης ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ τὸ ἐκ πάντων τῶν ἐντὸς καὶ ἐκ πάντων τῶν ἐντὸς ἐκτὸς κειμένων παραλληλεπιπέδων καὶ ἐκ τῶν μεγίστων τιμῶν τῆς συναρτήσεως φ ἐν ἑκάστῳ τούτων σχηματιζόμενον ἄθροισμα

$$\Sigma_\nu = \tau_1 M_1 + \tau_2 M_2 + \ldots + \tau_\rho M_\rho + \tau'_1 M'_1 + \tau'_2 M'_2 + \ldots + \tau_\sigma M'_\sigma$$

ἐλαττοῦται, καθ' ὅσον προβαίνει ἡ διαίρεσις, καὶ τείνει πρός τι ὅριον.

Καὶ ἐνταῦθα ἀμφότερα τὰ ἀθροίσματα σ_ν καὶ Σ_ν τείνουσι πρὸς τὸ αὐτὸ ὅριον (ἐὰν ἡ συνάρτησις φ εἶνε συνεχὴς ἐν τῷ στερεῷ T)· διότι ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶνε

$$\tau_1(M_1 - E_1) + \tau_2(M_2 - E_2) + \ldots + \tau_\rho(M_\rho - E_\rho)$$
$$+ \tau'_1 M'_1 + \tau'_2 M'_2 + \ldots + \tau'_\sigma M'_\sigma\cdot$$

καὶ τὸ μὲν πρῶτον μέρος τῆς διαφορᾶς ταύτης τείνει πρὸς τὸ 0· διότι ἡ συνάρτησις εἶνε συνεχής· τὸ δὲ δεύτερον ἔχει ἄθροισμα μικρότερον τοῦ

$$\sigma.\tau_1 M \qquad (1)$$

ἔνθα M δηλοῖ τὴν μεγίστην τιμὴν τῆς συναρτήσεως $\varphi(x,y,z)$ ἐν ὅλῳ τῷ στερεῷ T.

Ἵνα νῦν εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν σ τῶν ἐντὸς ἐκτὸς κειμένων μερῶν, ἢ ἀνώτερόν τι ὅριον αὐτοῦ, διακρίνομεν αὐτὰ εἰς τάξεις, ὡς ἑξῆς·

1) Ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ στερεοῦ T τέμνῃ μὲν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ παραλληλεπιπέδου τ′, ἀλλ' οὐδεμίαν αὐτοῦ ἀκμήν, τὸ παραλληλεπίπεδον τ′ λέγεται *πρώτης τάξεως*.

2) Ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ στερεοῦ T τέμνῃ τὴν τοῦ παραλληλεπιπέδου τ′ κατά τινα ἀκμὴν (ἢ ἀκμάς), ἀλλ' οὐδεμίαν κορυφὴν αὐτοῦ συναντᾷ, τὸ παραλληλεπίπεδον τ′ λέγεται *δευτέρας* τάξεως.

3) Ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ στερεοῦ T διέρχηται διά τινος τῶν κορυφῶν τοῦ παραλληλεπιπέδου τ′, λέγεται τοῦτο *τρίτης* τάξεως.

Θεωρήσωμεν τὸ τυχὸν παραλληλεπίπεδον πρώτης τάξεως· μία τοὐλάχιστον τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ τέμνεται ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τοῦ στερεοῦ· λέγω δέ, ὅτι μία ἐκ τῶν κλειστῶν καμπύλων, καθ' ἃς ἡ ἐπιφάνεια τοῦ στερεοῦ τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἕδρας ταύτης, κεῖται ὅλη ἐπὶ τῆς ἕδρας ταύτης· διότι ἂν μέρος τι αὐτῆς ἔκειτο ἐκτὸς τῆς ἕδρας, ἡ καμπύλη ἐξερχομένη ἐκ τῆς ἕδρας θὰ ἔτεμνεν ἀναγκαίως μίαν τῶν ἀκμῶν αὐτῆς, ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει· ἑπομένως μία ἐκ τῶν κλειστῶν καμπύλων, ἃς τὸ ἐπίπεδον τῆς ἕδρας ποιεῖ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ στερεοῦ, κεῖται ὅλη ἐπὶ τῆς ἕδρας ταύτης· ἐπειδὴ δὲ ἡ αὐτὴ ἕδρα χωρίζει δύο παραλληλεπίπεδα, ἕπεται, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν παραλληλεπιπέδων τῆς πρώτης τάξεως δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κλειστῶν καμπύλων, ἃς ποιοῦσιν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ στερεοῦ τὰ ἀχθέντα ἐπίπεδα· ἂν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ τοῦ $p+1$ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀχθέντων ἐπιπέδων κατὰ τὴν νυοστὴν διαίρεσιν παραλλήλω; ἑκάστῳ τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων (ὅτε εἶνε $p=2^\nu$) καὶ διὰ k τὸν μέγιστον ἀριθμὸν τῶν μὴ συνεχομένων κλειστῶν καμπύλων, ἃς δύναται νὰ ποιήσῃ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ στερεοῦ ἕκαστον τῶν ἐπιπέδων τούτων, ὁ ἀριθμὸς τῶν παραλληλεπιπέδων τῆς πρώτης τάξεως εἶνε μικρότερος τοῦ

$$6k(p+1).$$

Θεωρήσωμεν ἔπειτα τὸ τυχὸν παραλληλεπίπεδον τῆς δευτέρας τάξεως ἢ καὶ τῆς τρίτης· μία τοὐλάχιστον τῶν ἀκμῶν τοῦ παραλληλεπιπέδου τούτου τέμνεται ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τοῦ στερεοῦ καθ' ἓν τοὐλάχιστον σημεῖον· τὸ δὲ σημεῖον τοῦτο εἶνε ἓν ἐκ τῶν σημείων, καθ' ἃ τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ T ἡ εὐθεῖα, ἐφ' ἧς κεῖται ἡ ἀκμή, ἥτις εὐθεῖα εἶνε τομὴ δύο ἐκ τῶν ἀχθέντων ἐπιπέδων· ἀλλ' αἱ εὐθεῖαι, αἵτινες ἐγένοντο διὰ τῆς τομῆς τῶν ἀχθέντων ἐπιπέδων, εἶνε

$$3(p+1)^2\cdot$$

ἐὰν δὲ ὁ μέγιστος ἀριθμὸς τῶν σημείων, καθ' ἃ τέμνεται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ στερεοῦ ὑφ' ἑκάστης τῶν εὐθειῶν τούτων, εἶνε λ, θὰ ἔχωμεν σημεῖα τομῆς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ T, τὸ πλεῖστον

$$3\lambda(p+1)^2\cdot$$

ἐπειδὴ δὲ ἕκαστον σημεῖον τομῆς εἶνε κοινὸν εἰς 4 μὲν παραλληλεπίπεδα, ἂν δὲν εἶνε κορυφὴ παραλληλεπιπέδου, εἰς 8 δέ, ἂν εἶνε κορυφή, συνάγεται, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν παραλληλεπιπέδων τῆς δευτέρας καὶ τῆς τρίτης τάξεως ὁμοῦ δὲν εἶνε μεγαλήτερος τοῦ

$$24\lambda(p+1)^2$$

καὶ ὁ ἀριθμὸς σ τῶν ἐντὸς ἐκτὸς κειμένων παραλληλεπιπέδων δὲν ὑπερβαίνει τὸν ἀριθμὸν

$$6k(p+1)+24\lambda(p+1)^2.$$

Τὸ παραλληλεπίπεδον Π διαιρεῖται ὑπὸ τῶν ἀχθέντων $3(p+1)$ ἐπιπέδων εἰς p^3 ἴσα παραλληλεπίπεδα· ἐπομένως ὁ ὄγκος ἑκάστου εἶνε $\frac{\Pi}{p^3}$. ὥστε εἶνε

$$\sigma M \tau_1 \leqq M.\Pi \frac{6k(p+1)+24\lambda(p+1)^2}{p^3}$$

καὶ ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς p αὐξάνει εἰς ἄπειρον, συνάγεται, ὅτι εἶνε

$$\text{ὅρ}\ \sigma M\tau_1 = 0\cdot$$

ἄρα κατὰ μείζονα λόγον καὶ τὸ ἄθροισμα

$$\tau'_1 M'_1 + \tau'_2 M'_2 + \ldots + \tau'_\sigma M'_\sigma$$

τείνει πρὸς τὸ 0· καὶ κατ' ἀκολουθίαν εἶνε

$$\text{ὅρ}\ \Sigma_\nu = \text{ὅρ}\sigma_\nu,$$

ἤτοι ἀμφότερα τὰ ἀθροίσματα σ_ν καὶ Σ_ν τείνουσι πρὸς τὸ αὐτὸ ὅριον.

Καὶ ὅταν ἐν τῷ σχηματισμῷ τοῦ ἀθροίσματος λαμβάνωμεν πάντα τὰ ἐντὸς κείμενα παραλληλεπίπεδα καὶ ὁσαδήποτε θέλωμεν ἐκ τῶν ἐντὸς ἐκτὸς ἢ καὶ μέρη τούτων (ὡς λ. χ. τὰ ἐντὸς τοῦ στερεοῦ κείμενα μέρη αὐτῶν) καὶ ἕκαστον τῶν λαμβανομένων πολλαπλασιάζωμεν ἐπὶ τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως $\varphi(x,y,z)$ εἰς ἓν τῶν σημείων του, καὶ τὸ ἐκ πάντων τῶν γινομένων τούτων ἄθροισμα, Θ_ν, ὡς περιλαμβανόμενον πάντοτε μεταξὺ τῶν σ_ν καὶ Σ_ν εἰς τὸ αὐτὸ τείνει ὅριον.

Τὸ ὅριον τοῦτο δὲν βλάπτεται, καὶ ἂν παραλειφθῶσι πάντα τὰ παραλληλεπίπεδα, ὅσα διατέμνει τυχοῦσα ἐπιφάνεια ἐντὸς τοῦ στερεοῦ Τ· διότι τὸ πλῆθος τῶν παραλληλεπιπέδων τούτων, (κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα) εἶνε τὸ πολὺ $6k(p+1)+24\lambda(p+1)^2$ (ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια τέμνηται ὑφ' ἑκάστου τῶν ἀχθέντων ἐπιπέδων εἰς k καμπύλας κεχωρισμένας ἀπ' ἀλλήλων καὶ ἑκάστη τῶν καμπύλων τούτων τέμνηται εἰς λ σημεῖα ὑπὸ τῶν παραλλήλων πρὸς τοὺς ἄξονας)· οἱ δὲ ὅροι, οὓς τὰ ῥηθέντα παραλληλεπίπεδα δίδουσιν εἰς τὸ ἄθροισμα Θ_ν, πάντες ὁμοῦ τείνουσι πρὸς τὸ 0.

182. Καὶ κατ' ἄλλην οἱανδήποτε διαίρεσιν τοῦ στερεοῦ Τ, ἐὰν πολλαπλασιάζωμεν τὸν ὄγκον ἑκάστου μέρους ἐπὶ τὴν τιμήν, ἣν ἔχει ἡ συνάρτησις φ εἰς ἓν οἱονδήποτε σημεῖον τοῦ μέρους τούτου, τὸ ἐκ πάντων τῶν γινομένων τούτων ἄθροισμα τείνει πρὸς τὸ αὐτὸ ὅριον, ἀρκεῖ ἡ διαίρεσις νὰ προχωρῇ οὕτως, ὥστε ἕκαστον μέρος τοῦ Τ νὰ τείνῃ πρὸς τὸ 0 κατὰ πάσας τὰς διαστάσεις (παράβαλ. ἐδ. 133).

183 Ἐκ πάντων τούτων συνάγεται ἡ πρότασις.

Ἐὰν ὁπωσδήποτε διαιρῶμεν τὸ στερεὸν T εἰς μέρη $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\rho$ καὶ πολλαπλασιάζωμεν τὸν ὄγκον ἑκάστου ἐπὶ μίαν οἱανδήποτε τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως φ ἐν αὐτῷ, τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τούτων

$$\Sigma \alpha_\lambda \varphi(\alpha_\lambda) \qquad (1)$$

ἔχει πάντοτε τὸ αὐτὸ ὅριον, ἀρκεῖ ἕκαστον τῶν μερῶν νὰ τείνῃ πρὸς τὸ 0 κατὰ πάσας τὰς διαστάσεις αὐτοῦ.

Τὸ ὅριον τοῦτο καλοῦμεν *τριπλοῦν ὁλοκλήρωμα* τῆς παραστάσεως $\varphi(x,y,z)\, d(x,y,z)$ ἐν τῷ τόπῳ Τ καὶ παριστῶμεν αὐτὸ ὡς ἑξῆς

$$\int\limits_T \varphi(x,y,z)\, d(x,y,z) \qquad \text{ἢ καὶ ὡς ἑξῆς} \qquad \int\limits_T \varphi(x,y,z)\, dx\, dy\, dz,$$

τοῦ $d(x,y,z)$ δηλοῦντος τὸν ὄγκον οἱουδήποτε ἀπειροστοῦ μέρους τοῦ στερεοῦ Τ.

Ἡ δευτέρα παράστασις τοῦ τριπλοῦ ὁλοκληρώματος, ἡ καὶ συνηθεστέρα, προέκυψεν ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ τόπου Τ εἰς ὀρθογ. παραλληλεπίπεδα δι' ἐπιπέδων παραλλήλων τοῖς συντεταγμένοις· ἐὰν οὕτω διαιρῆται τὸ στερεόν, ὁ ὄγκος ἑκάστου μέρους θὰ εἶνε $\Delta x . \Delta y\ \Delta z$· καὶ ἂν πολλαπλασιάζωμεν τοῦτον ἐπὶ τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως φ εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ παραλληλεπιπέδου τὴν ἔχουσαν συντεταγμένας x,y,z, τὸ ἄθροισμα λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\Sigma \varphi(x,y,z) \Delta x \Delta y \Delta z$$

καὶ διὰ τοῦτο τὸ ὅριον αὐτοῦ παρίσταται διὰ τοῦ

$$\int\limits_T \varphi(x,y,z)\, dx\, dy\, dz.$$

Περὶ τῶν ὑπὸ ἐπιφανείας συναντωμένων μερῶν ἐν οἱαδήποτε διαιρέσει.

184. Ἐν πάσῃ διαιρέσει τὰ ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τοῦ στερεοῦ Τ, ἢ καὶ ὑπ' ἄλλης οἱαςδήποτε ἐπιφανείας ἐν τῷ στερεῷ κειμένης, συναντώμενα μέρη παρέχουσιν ὅρους, ὧν τὸ ἄθροισμα τείνει πρὸς τὸ 0 καὶ ἑπομένως δύνανται τὰ ῥηθέντα μέρη νὰ παραλείπωνται ὅλως, ἢ καὶ νὰ λαμβάνωνται

τινὰ ἐξ αὐτῶν ἢ μέρη αὐτῶν οἱαδήποτε, χωρὶς νὰ βλαφθῇ τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος (παράβλ. ἐδ. 135).

Περὶ τοῦ σημείου τῆς συναρτήσεως $\varphi(x,y,z)$.

185. Ἐὰν ἐν τῷ τόπῳ T ἡ συνάρτησις $\varphi(x,y,z)$ εἶνε πάντοτε ἀρνητική, τὸ ἄθροισμα $\Sigma\varphi(x,y,z)d(x,y,z)$ τείνει πάλιν πρὸς ὅριον (τὸ ἀντίθετον ἐκείνου, ὅπερ εὑρίσκομεν λαμβάνοντες τὰς τιμὰς τοῦ φ θετικῶς)· Ἐὰν δὲ ὁ τόπος T σύγκειται ἐκ πεπερασμένου πλήθους μερῶν $T_1, T_2, .. T_n$, εἰς ἕκαστον τῶν ὁποίων ἡ συνάρτησις φ διατηρεῖ τὸ ἑαυτῆς σημεῖον, πάλιν τὸ ἄθροισμα ἔχει ὅριον καὶ τὸ ὅριον τοῦτο εἶνε

$$\int_{T_1}\varphi(x,y,z)d(x,y,z)+\int_{T_2}\varphi(x,y,z)d(x,y,z)+\ldots+\int_{T_n}\varphi(x,y,z)d(x,y,z)$$

Περὶ τῆς συνεχείας τῆς συναρτήσεως φ.

186. Ἡ συνάρτησις $\varphi(x,y,z)$ ὑπετέθη συνεχὴς ἐν τῷ τόπῳ T, ἀλλὰ καὶ ὅταν ἐπὶ μιᾶς ἐπιφανείας (ἢ περισσοτέρων, ἀλλ' εἰς πεπερασμένον πλῆθος) εἶνε ἀσυνεχής, *μένη ὅμως πάντοτε πεπερασμένη*, πάλιν τὸ ἄθροισμα

$$\Sigma\alpha_\lambda\varphi(\alpha_\lambda)$$

ἔχει ὅριον καὶ τὸ ὅριον τοῦτο παριστῶμεν ἐπίσης διὰ τοῦ

$$\int_T\varphi(x,y,z)d(x,y,z) \tag{2}$$

Ὄγκος παντὸς στερεοῦ.

187. Ἐὰν ἡ συνάρτησις $\varphi(x,y,z)$ ὑποτεθῇ ἴση τῇ μονάδι 1, τὸ τριπλοῦν ὁλοκλήρωμα

$$\int_T d(x,y,z)$$

παριστᾷ προδήλως τὸν ὄγκον V τοῦ στερεοῦ T, ἤτοι εἶνε

$$V=\int_T d(x,y,z) \tag{3}$$

Ἐὰν δὲ νοήσωμεν τὸ στερεὸν διῃρημένον εἰς ἀπειροστὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα δι' ἐπιπέδων παραλλήλων τοῖς συντεταγμένοις, θὰ εἶνε

$$V=\int_T dx dy dz \tag{4}$$

188. Ἐὰν οἱ ἄξονες εἶνε πλαγιογώνιοι, τὰ παράλληλα τοῖς συντεταγμένοις ἐπίπεδα διαιροῦσι τὸ στερεὸν T εἰς παραλληλεπίπεδα, ὧν ἕκαστον ἔχει ὄγκον ημθ.ημφ.$dx dy dz$ (ἔνθα θ εἶνε ἡ γωνία ΧΟΨ καὶ φ ἡ γωνία τοῦ ἄξονος τῶν z πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΧΟΨ) καὶ ὁ ὄγκος V παρίσταται διὰ τοῦ ὁλοκληρώματος

$$V=\text{ημθ}.\text{ημφ}\int_T dx dy dz \tag{5}$$

Ἰδιότητες τῶν τριπλῶν ὁλοκληρωμάτων

1) Τὸ τριπλοῦν ὁλοκλήρωμα ἀναλύεται εἰς μέρη, ἐὰν ὁ τόπος αὐτοῦ T διαιρεθῇ εἰς μέρη.

2) Ἐὰν ἡ συνάρτησις φ εἶνε ἄθροισμα δύο ἄλλων φ_1 καὶ φ_2, συνεχῶν καὶ πεπερασμένων ὡς αὐτὴ (ἢ ἀσυνεχῶν μὲν ἐπὶ ἐπιφανείας τινός, ἀλλὰ πάντοτε πεπερασμένων), θὰ εἶνε

$$\int_T \varphi . d(x,y,z)=\int_T \varphi_1 . d(x,y,z)+\int_T \varphi_2 . d(x,y,z)$$

3) Οἱ σταθεροὶ παράγοντες ἐξάγονται ἐκτὸς τοῦ ὁλοκληρώματος ἢ καὶ εἰσέρχονται ἐντὸς αὐτοῦ ἀκωλύτως.

4) Τὸ τριπλοῦν ὁλοκλήρωμα

$$\int_T \varphi . d(x,y,z)$$

περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο γινομένων

E.V καὶ M.V,

ἔνθα E εἶνε ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς συναρτήσεως φ ἐν τῷ τόπῳ T καὶ M ἡ μεγίστη· τὸ δὲ V δηλοῖ τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ T.

5) Ἐὰν ἐν παντὶ σημείῳ τοῦ στερεοῦ T εἶνε

$$\varphi(x,y,z)>f(x,y,z)$$

θὰ εἶνε καὶ $$\int\limits_{T} \varphi . d(x,y,z) > \int\limits_{T} f . d(x,y,z).$$

Αἱ ἀποδείξεις τῶν ἰδιοτήτων τούτων γίνονται ὡς καὶ ἐν τοῖς διπλοῖς ὁλοκληρώμασιν.

Εὕρεσις τοῦ τριπλοῦ ὁλοκληρώματος.

189 *Ἡ εὕρεσις παντὸς τριπλοῦ ὁλοκληρώματος ἀνάγεται εἰς τρεῖς ἀλλεπαλλήλους ὁλοκληρώσεις.*

Ἂς ὑποθέσωμεν χάριν ἁπλότητος, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ στερεοῦ T τέμνεται ὑπὸ τῆς τυχούσης εὐθείας τὸ πλεῖστον εἰς δύο σημεῖα (τοῦτο δύναται πάντοτε νὰ γίνῃ, ἐὰν διαιρεθῇ καταλλήλως τὸ στερεὸν εἰς μέρη).

Νοήσωμεν τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον

$$\begin{array}{l|l|l} x=\alpha & y=\gamma & z=\eta \\ x=\beta & y=\delta & z=\theta, \end{array}$$

ἐν ᾧ περικλείεται τὸ στερεὸν T, διῃρημένον διὰ τῶν τριῶν σειρῶν τῶν ἐπιπέδων

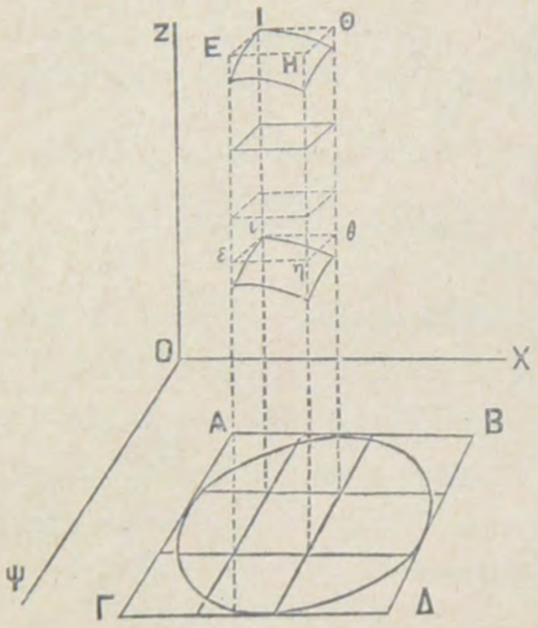
$$\begin{array}{l} x=\alpha,\ x_1,\ x_2, \ldots, x_{\lambda-1},\ \beta \\ y=\gamma,\ y_1,\ y_2, \ldots, y_{\mu-1},\ \delta \\ z=\eta,\ z_1,\ z_2, \ldots, z_{\nu-1},\ \theta \end{array}$$

εἰς ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα $\tau_1, \tau_2, .., \tau_\rho$· πρὸς σχηματισμὸν τοῦ ἀθροίσματος $$\Sigma\varphi(\tau_\lambda).\tau_\lambda,$$
οὗτινος ὅριον εἶνε τὸ τριπλοῦν ὁλοκλήρωμα

$$\int\limits_{T} \varphi\, d(xyz),$$

πρέπει νὰ λάβωμεν πάντα τὰ ἐντὸς τοῦ T κείμενα παραλληλεπίπεδα τ_λ καὶ ὅσα θέλωμεν ἐκ τῶν ἐντὸς ἐκτὸς (ἢ μέρη αὐτῶν) καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὄγκον ἑκάστου ἐπὶ τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως φ εἰς ἓν οἱονδήποτε ἐκ τῶν σημείων του, (ὡς τοιοῦτον δὲ σημεῖον λαμβάνομεν τὸ ἔχον τὰς ἐλαχίστας συντεταγμένας), νὰ προσθέσωμεν δὲ ἔπειτα τὰ γινόμενα καθ' οἱανδήποτε τάξιν θέλωμεν (διότι τὸ πλῆθος τῶν γινομένων τούτων εἶνε πάντοτε πεπερασμένον).

Δυνάμεθα δὲ νὰ σχηματίσωμεν τὸ ἄθροισμα εἰς ὁμάδας συνενοῦντες εἰς μίαν ὁμάδα πάντας τοὺς ὅρους, οὓς δίδουσι τὰ μέρη τοῦ Τ τὰ περιεχόμενα μεταξὺ δύο ἐφεξῆς ἐπιπέδων x_i καὶ x_{i+1} καὶ μεταξὺ δύο ἐφεξῆς



ἐπιπέδων y_k καὶ y_{k+1}· τὰ μέρη ταῦτα ἀποτελοῦσι πρισμάτιον περατούμενον ἄνω καὶ κάτω ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τοῦ στερεοῦ Τ καὶ προβαλλόμενον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν xy ἐφ ἑνὸς τῶν ὀρθογωνίων, εἰς ἃ διαιροῦσι τὴν προβολὴν T_1 τοῦ στερεοῦ Τ τὰ παραλλήλως τοῖς ἐπιπέδοις ΧΟΖ, ΨΟΖ ἀχθέντα ἐπίπεδα, καὶ ἂν παραστήσωμεν διὰ $A_1, A_2, .., A_\sigma$ τὰ ἀθροίσματα τὰ ἐξ ἑκάστου πρισματίου προερχόμενα, θὰ εἶνε προφανῶς

$$\Sigma \tau_\lambda \varphi(\tau_\lambda) = A_1 + A_2 + \ldots + A_\sigma.$$

Ἵνα σχηματίσωμεν τὰ μερικὰ ταῦτα ἀθροίσματα, ὁρίζομεν κατὰ πρῶτον τὰ ἐξ ἑκάστου πρισματίου λαμβανόμενα μέρη· πρὸς τοῦτο ἄγομεν ἐν αὐτῷ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τῷ ΧΟΨ ἐκ τῶν δύο σημείων, ἔνθα τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ Τ ἡ πρώτη ἀκμὴ τοῦ πρισματίου (ἡ τὸ ἐλάχιστον x καὶ τὸ ἐλάχιστον y ἔχουσα)· οὕτω σχηματίζεται ἐν ἑκάστῳ πρισματίῳ ὀρθογώνιόν τι παραλληλεπίπεδον περιέχον πάντα μὲν τὰ τέλεια παραλληλεπίπεδα τοῦ πρισματίου καὶ ἄλλα τινὰ ἐντὸς κείμενα ἢ μέρη τοιούτων· ταῦτα δὲ καὶ μόνα λαμβάνομεν· ἐὰν τότε παραστήσωμεν διὰ Ζ καὶ Ζ΄ τὰς κατηγμένας τῶν δύο σημείων, ἔνθα ἡ πρώτη ἀκμὴ τοῦ πρισματίου συναντᾷ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ Τ (ἐξ ὧν ἤχθησαν τὰ δύο ἐπίπεδα παραλλήλως τῷ ΧΟΨ), οἱ ὅροι οἱ ἐκ τοῦ πρισματίου τούτου προερχόμενοι εἶνε

$$(1)\quad \left\{\varphi(x,y,Z)(z_1-Z)+\varphi(x,y,z_1)(z_2-z_1)+\ldots+\varphi(x,y,z_\rho)(Z'-z_\rho)\right\}\varepsilon,$$

ἔνθα ε παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου, ὅπερ εἶνε κοινὴ βάσις πάντων τῶν ληφθέντων παραλληλεπιπέδων, τὰ δὲ x, y εἶνε ἡ κοινὴ τετμημένη καὶ ἡ κοινὴ τεταγμένη πάντων τῶν σημείων τῆς πρώτης ἀκμῆς τοῦ πρισματίου· καὶ τέλος τὰ $z_1, z_2, .., z_\rho$ εἶνε τιμαὶ τοῦ z μεταξὺ Ζ καὶ Ζ΄ κείμεναι καὶ οὕτω προβαίνουσαι, ὥστε ἡ διαφορὰ δύο οἱωνδήποτε ἐφεξῆς νὰ τείνῃ πρὸς τὸ 0.

Τὸ ἐν τῇ παρενθέσει ἄθροισμα τείνει πρὸς τὸ ἁπλοῦν ὁλοκλήρωμα

$$\int_{Z}^{Z'} \varphi(x,y,z)dz,$$

ἐν τῇ εὑρέσει τοῦ ὁποίου ἡ x καὶ ἡ y θεωροῦνται σταθεραί, ἡ δὲ z μεταβάλλεται ἀπὸ Z εἰς Z'· ἐπειδὴ δὲ τὰ ὅρια ταῦτα τοῦ z εἶνε ἐν γένει μεταβλητὰ καὶ ἐξαρτῶνται ἀπὸ τῶν x καὶ y (διότι ταῦτα εἶνε αἱ δύο κατηγμέναι τῆς ἐπιφανείας τοῦ στερεοῦ T αἱ πρὸς τὸ αὐτὸ σύστημα τῶν τιμῶν x,y ἀντιστοιχοῦσαι), θὰ εἶνε τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο συνάρτησίς τις τῶν x,y· ἔστω

$$\int_{Z}^{Z'} \varphi(x,y,z)dz = \sigma(x,y)$$

τότε τὸ ἄθροισμα (1) γίνεται

$$\varepsilon \left\{ \sigma(x,y) + \theta \right\}, \tag{2}$$

ἔνθα ὅρ $\theta = 0$, ὅταν ἑκάστη τῶν διαφορῶν $z_1 - Z, z_2 - z_1, \ldots, Z - z_\rho$ τείνῃ πρὸς τὸ 0.

Ὁ τύπος οὗτος δίδει τὰ ἐκ πάντων τῶν πρισματίων προερχόμενα ἀθροίσματα $A_1, A_2, \ldots, A_\sigma$, ἂν ἐφαρμοσθῇ εἰς πάντα τὰ μέρη τῆς προβολῆς T_1, ἤτοι ἂν ἕκαστον τούτων τῶν μερῶν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὴν τιμήν, ἣν ἔχει ἡ συνάρτησις $\sigma(x,y)$ εἰς τὴν πρώτην κορυφήν του (τὴν ἔχουσαν τὰς ἐλαχίστας συντεταγμένας) καὶ ἐπὶ τὴν τιμήν, ἣν ἔχει εἰς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἡ ἀπειροστὴ ποσότης θ· ἐπειδὴ δὲ πρόκειται νὰ εὑρεθῇ ἔπειτα τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ ἄθροισμα

$$\sum_{T_1} \varepsilon \left\{ \sigma(x,y) + \theta \right\},$$

δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τοὺς ἀπειροστοὺς αὐτοῦ ὅρους $\varepsilon[\sigma(x,y)+\theta]$ διὰ τῶν ἰσοδυνάμων αὐτοῖς $\varepsilon\sigma(xy)$· ἑπομένως εἶνε

$$\int\int\int_{T} \varphi(x,y,z)d(x,y,z) = \text{ὅρ} \sum_{T_1} \varepsilon\sigma(x,y) = \int\int_{T_1} \sigma(x,y)dxdy\cdot$$

διότι ἡ ἄθροισις ἐκτείνεται ἐφ' ὅλων τῶν ὀρθογωνίων τοῦ T_1 καὶ ἐπί τινων ἐκ τῶν κειμένων ἐντὸς ἐκτός. Ἐπειδὴ δὲ τὸ διπλοῦν τοῦτο ὁλοκλήρωμα εὑρίσκεται, ὡς ἐδείξαμεν (ἐδ. 140), διὰ τῶν δύο ὁλοκληρώσεων

$$\int_{\alpha}^{\beta} dx\left(\int_{Y}^{Y'} \sigma(x,y)dy\right), \text{ ἕπεται}$$

$$\int\int\int_{T} \varphi(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} dx\left\{\int_{Y}^{Y'} \sigma(x,y)\,dy\right\} =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} dx\left\{\int_{Y}^{Y'} dy\left(\int_{Z}^{Z'} \varphi(x,y.z)dz\right)\right\},$$

ἤτοι τὸ τριπλοῦν ὁλοκλήρωμα εὑρίσκεται διὰ τριῶν ἀλλεπαλλήλων ὁλοκληρώσεων· καὶ ἐν μὲν τῇ πρώτῃ ὁλοκληρώσει (πρὸς z) εὑρίσκεται τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων, οἵτινες προέρχονται ἐκ τῶν μερῶν τοῦ στερεοῦ Τ τῶν περιεχομένων μεταξὺ δύο ἐφεξῆς ἐπιπέδων $x=x_{i}$ καὶ $x=x_{i+1}$ καὶ μεταξὺ δύο ἐφεξῆς ἐπιπέδων $y=y_{k}$ καὶ $y=y_{k+1}$· τὰ μέρη ταῦτα ἀποτελοῦσι πρισμάτιον παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν Ζ καὶ προβαλλόμενον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ΧΟΥ ἐντὸς τοῦ ὀρθογωνίου

$$x=x_{i},\ x=x_{i+1},\ y=y\ ,\ y=y_{+1}\cdot$$

ἐν τῇ ὁλοκληρώσει ταύτῃ ἑπομένως τὰ x καὶ y θεωροῦνται σταθερὰ καὶ ὅρια τοῦ z εἶνε ἡ μεγίστη τιμὴ αὐτοῦ ἐν τῷ στερεῷ καὶ ἡ ἐλαχίστη, ὅταν τὰ x καὶ y μένωσιν ἀμετάβλητα διατηροῦντα τὰς τυχούσας τιμὰς αὐτῶν.

Ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ ὁλοκληρώσει (πρὸς y) εὑρίσκεται τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων, οἵτινες προέρχονται ἐκ πάντων τῶν ῥηθέντων πρισματίων τῶν μεταξὺ δύο ἐφεξῆς ἐπιπέδων $x=x_{i}$ καὶ $x=x_{i+1}$ περιεχομένων· ἀποτελοῦσι δὲ ταῦτα μίαν πλάκα τοῦ στερεοῦ παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ ΥΟΖ· ἐν τῇ ὁλοκληρώσει ταύτῃ θεωρεῖται διὰ τοῦτο ἡ x σταθερὰ καὶ ὅρια τῆς y εἶνε ἡ μεγίστη τιμὴ αὐτῆς καὶ ἡ ἐλαχίστη ἐν τῇ προβολῇ T_1, ἑπομένως καὶ ἐν τῷ στερεῷ Τ, ὅταν ἡ x μένῃ ἀμετάβλητος διατηροῦσα τὴν τυχοῦσαν τιμὴν αὐτῆς.

Ἐν τῇ τρίτῃ τέλος ὁλοκληρώσει (πρὸς x) εὑρίσκεται τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων, οἵτινες προέρχονται ἐκ πασῶν τῶν εἰρημένων πλακῶν τοῦ στερεοῦ· διὰ τοῦτο τὰ ὅρια τῆς x εἶνε ἡ μεγίστη τιμὴ β αὐτῆς καὶ ἡ ἐλαχίστη α ἐν τῷ στερεῷ Τ.

Οἴκοθεν δὲ ἐννοεῖται, ὅτι ἡ τάξις τῶν τριῶν ὁλοκληρώσεων, δι' ὧν εὑρίσκεται τὸ τριπλοῦν ὁλοκλήρωμα, εἶνε ὅλως αὐθαίρετος, ἀρκεῖ νὰ ὁρίζωνται καταλλήλως τὰ ὅρια ἑκάστης· πρὸς τοῦτο δέον νὰ ἐνθυμώμεθα, ὅτι ἐν ἑκάστῃ ὁλοκληρώσει τὰ ὅρια τῆς μεταβλητῆς, πρὸς ἣν ὁλοκληροῦμεν, εἶνε ἡ μεγίστη τιμὴ αὐτῆς καὶ ἡ ἐλαχίστη ἐν τῷ στερεῷ T, ὅταν αἱ ἐν τῇ ὁλοκληρώσει ταύτῃ θεωρούμεναι ὡς σταθεραὶ μένωσιν ἀμετάβλητοι διατηροῦσαι τὰς τυχούσας τιμὰς αὐτῶν· τῆς τελευταίας δὲ ὁλοκληρώσεως τὰ ὅρια εἶνε ἡ μεγίστη τιμὴ καὶ ἡ ἐλαχίστη τῆς μεταβλητῆς ἐν τῷ στερεῷ.

Ἐὰν ὁ τόπος T τῆς ὁλοκληρώσεως εἶνε παραλληλεπίπεδον ἔχον τὰς ἀκμὰς αὐτοῦ παραλλήλους τοῖς ἄξοσιν OX,OY,OZ, τὰ ὅρια πασῶν τῶν ὁλοκληρώσεων εἶνε σταθερά, καὶ κατὰ τὴν ἀλλαγὴν τῆς τάξεως, καθ' ἣν ἐκτελοῦνται, ἑκάστη ὁλοκλήρωσις διατηρεῖ τὰ ἑαυτῆς ὅρια.

Σημείωσις α'. Τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα

$$\int_{T_1} \sigma(x,y)dxdy,$$

εἰς ὃ ἀνάγεται τὸ τριπλοῦν μετὰ τὴν πρώτην ὁλοκλήρωσιν (πρὸς z), δύναται καὶ καθ' οἱανδήποτε ἄλλην διαίρεσιν τοῦ τόπου T_1 νὰ εὑρεθῇ.

Σημείωσις β'. Τὸ τριπλοῦν ὁλοκλήρωμα

$$V=\int\int\int_{T} dxdydz,$$

ὅπερ ἰσοῦται τῷ ὄγκῳ τοῦ στερεοῦ T, ἐὰν ἐκτελεσθῇ ἡ πρὸς z ὁλοκλήρωσις, γίνεται

$$V=\int\int_{T_1}(Z'-Z)dxdy,$$

ἔνθα Z καὶ Z' εἶνε αἱ δύο κατηγμέναι τῆς ἐπιφανείας τοῦ T αἱ ἀντιστοιχοῦσαι πρὸς τὸ τυχὸν σύστημα τιμῶν x,y.

Ὁ τύπος οὗτος πρὸς ἔκφρασιν τοῦ ὄγκου τοῦ στερεοῦ T εὑρέθη ἤδη (ἐδ. 177).

Μετασχηματισμὸς τῶν τριπλῶν ὁλοκληρωμάτων.

190. Ἔστωσαν τρεῖς μεταβληταὶ u,v,w συνδεδεμέναι πρὸς τὰς x,y,z διὰ τριῶν ἐξισώσεων

$$(1)\quad \left.\begin{aligned} u&=\lambda(x,y,z)\\ v&=\mu(x,y,z)\\ w&=\nu(x,y,z)\end{aligned}\right\} \quad \text{ἢ} \quad \begin{aligned} x&=\Lambda(u,v,w)\\ y&=M(u,v,w)\\ z&=N(u,v,w)\end{aligned}\quad (1')$$

τοιούτων, ὥστε, ἂν παραστήσωμεν καὶ τὰς μεταβλητὰς u,v,w ὡς ὀρθογωνίους συντεταγμένας πρὸς ἄλλους ἄξονας $\Theta U, \Theta V, \Theta W$, νὰ ἀντιστοιχῇ εἰς τὸν τόπον Τ τόπος τις ἄλλος Π ἐντελῶς ὡρισμένος καὶ τὰ σημεῖα τῶν δύο τόπων νὰ ἀντιστοιχῶσιν ἀλλήλοις ἀνὰ δύο, ἓν ἐκ τοῦ ἑνὸς πρὸς ἓν ἐκ τοῦ ἄλλου, τουτέστι πρὸς ἕκαστον σύστημα τιμῶν τῶν x,y,z ἐν τῷ τόπῳ Τ νὰ ἀντιστοιχῇ ἓν καὶ μόνον ἓν σύστημα τιμῶν u,v,w ἐν τῷ τόπῳ Π, καὶ ἀντιστρόφως, πρὸς ἕκαστον σύστημα τιμῶν u,v,w ἐν τῷ τόπῳ Π νὰ ἀντιστοιχῇ ἓν καὶ μόνον ἓν σύστημα τιμῶν x,y,z ἐν τῷ τόπῳ Τ.

Ἐὰν εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_{T} \varphi(x,y,z)d(x,y,z) \tag{2}$$

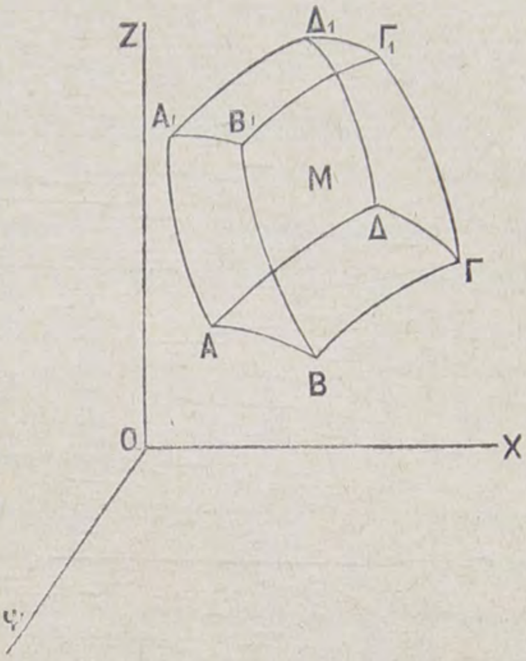
ἀντὶ τῶν μεταβλητῶν x,y,z θέλωμεν νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὰς u,v,w, ἀνάγκη νὰ διαιρέσωμεν τὸν τόπον Τ τῆς ὁλοκληρώσεως εἰς τοιαῦτα μέρη, ὥστε νὰ ὑπάρχῃ σειρά τις αὐτῶν, εἰς τὰς κορυφὰς τῶν ὁποίων μόνον μία ἐκ τῶν μεταβλητῶν u,v,w νὰ μεταβάλληται, αἱ δὲ λοιπαὶ δύο νὰ μένωσι σταθεραὶ (τοῦτο δέ, ἵνα διατηρηθῇ ἡ ἰδιότης τοῦ ὁλοκληρώματος, δι' ἧς ἀνάγεται ἡ εὕρεσις αὐτοῦ εἰς τρεῖς ἀλλεπαλλήλους ὁλοκληρώσεις)· τοῦτο γίνεται ὡς ἑξῆς.

Ἡ ἐξίσωσις $u=\lambda(x,y,z)$, ἐν ᾗ ἡ u θεωρεῖται ὡς μεταβλητὴ παράμετρος, παριστᾷ σειρὰν ἐπιφανειῶν μὴ τεμνουσῶν ἀλλήλας, ἃς καλοῦμεν συντόμως ἐπιφανείας u· ἐκ τῶν ἐπιφανειῶν τούτων ὑπάρχουσι δύο, ἔστωσαν αἱ $u=A$ καὶ $u=B$, αἵτινες περιέχουσι μεταξὺ αὐτῶν τὸν τόπον Τ ἐγγίζουσαι μόνον, ἀλλὰ μὴ διασχίζουσαι αὐτόν· (τουτέστιν ἡ μεταβλητὴ u ἢ ἡ ἴση αὐτῇ συνάρτησις $\lambda(x,y,z)$ μεταβάλλεται ἐν τῷ τόπῳ Τ μεταξὺ Α καὶ Β). Ὁμοίως ὑπάρχουσι δύο ἐπιφάνειαι $v=\Gamma$ καὶ $v=\Delta$, αἵτινες περιλαμβάνουσι μεταξὺ αὐτῶν τὸν τόπον Τ ἐγγίζουσαι μόνον, ἀλλὰ μὴ διατέμνουσαι αὐτόν· καὶ δύο ἐπιφάνειαι w, ἔστωσαν αἱ $w=H$ καὶ $w=\Theta$, αἵτινες καὶ αὐταὶ περιλαμβάνουσι μεταξὺ αὐτῶν τὸν τόπον Τ ἐγγίζουσαι μόνον, ἀλλὰ μὴ διατέμνουσαι αὐτόν.

Ἐὰν τότε νοήσωμεν τὰς τρεῖς σειρὰς τῶν ἐπιφανειῶν

$$u=A, u_1, u_2, \ldots, u_\lambda, B$$
$$v=\Gamma, v_1, v_2, \ldots, v_\mu, \Delta$$
$$w=H, w_1, w_2, \ldots, w_\nu, \Theta$$

αἱ ἐπιφάνειαι αὗται διαιροῦσι τὸν τόπον Τ εἰς ἑξάεδρα (ἐν γένει καμπυλόγραμμα) περιεχόμενα ὑπὸ δύο ἐφεξῆς ἐπιφανειῶν u, ὑπὸ δύο ἐφεξῆς ἐπιφανειῶν v καὶ ὑπὸ δύο ἐφεξῆς ἐπιφανειῶν w· γίνονται δὲ τὰ μέρη ταῦτα ἀπειροστὰ κατὰ πάσας τὰς διαστάσεις αὐτῶν, ὅταν πᾶσαι αἱ διαφοραὶ δύο οἱωνδήποτε ἐφεξῆς τιμῶν τῆς u καὶ δύο οἱωνδήποτε ἐφεξῆς τιμῶν τῆς v καὶ δύο οἱωνδήποτε ἐφεξῆς τιμῶν τῆς w τείνωσι πρὸς τὸ 0. Ἔστω τὸ τυχὸν ἐκ τούτων τὸ $ΑΒΓΔΑ_1Β_1Γ_1Δ_1$ καὶ ἡ μὲν ἕδρα ΑΒΓΔ ἔστω μέρος τῆς ἐπιφανείας u, ἡ δὲ ἀπέναντι $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ τῆς $u+\Delta u$, ἡ ἕδρα $ΑΒΑ_1Β_1$ ἔστω μέρος τῆς ἐπιφανείας v, ἡ δὲ ἀπέναντι $ΓΔΓ_1Δ_1$ τῆς $v+\Delta v$, καὶ τέλος ἡ ἕδρα $ΑΔΑ_1Δ_1$ ἔστω μέρος τῆς ἐπιφανείας w, ἡ δὲ ἀπέναντι $ΒΓΒ_1Γ_1$ τῆς $w+\Delta w$· ἑπομένως αἱ καμπυλόγραμμοι συντεταγμέναι τῶν κορυφῶν τοῦ ἑξαέδρου εἶνε αἱ ἑξῆς·



τῆς Α (u, v, w),	τῆς $Α_1$ $(u+\Delta u, v, w)$
τῆς Β $(u, v, w+\Delta w)$,	τῆς $Β_1$ $(u+\Delta u, v, w+\Delta w)$
τῆς Γ $(u, v+\Delta v, w+\Delta w)$,	τῆς $Γ_1$ $(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w)$
τῆς Δ $(u, v+\Delta v, w)$,	τῆς $Δ_1$ $(u+\Delta u, v+\Delta v, w)$

Ἐὰν νῦν ἐν ἑκάστῃ ἕδρᾳ τοῦ ἑξαέδρου $ΑΒΓΔΑ_1Β_1Γ_1Δ_1$ ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ τῶν τόξων, ὑφ᾽ ὧν περατοῦται, καὶ ἔπειτα ἡ διαγώνιος τοῦ ἐκ τῶν χορδῶν σχηματιζομένου τετραπλεύρου (ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς u,v,w ἢ ἡ ἀπὸ τῆς ἀπέναντι $u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w$), γίνονται ἐν ἑκάστῃ ἕδρᾳ δύο τρίγωνα καὶ ὑπὸ τῶν 12 τριγώνων τοῦ ἑξαέδρου σχηματίζεται δωδεκάεδρον· ταῦτα δὲ τὰ δωδεκάεδρα, εἰς ἃ διαιρεῖται ὁ τόπος Τ τοιουτοτρόπως, λαμβάνομεν πρὸς σχηματισμὸν τοῦ ἀθροίσματος

$$\Sigma . \tau \varphi(x,y,z/\tau), \tag{3}$$

οὗτινος ὅριον εἶνε τὸ τριπλοῦν ὁλοκλήρωμα (2).

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὄγκου τοῦ τυχόντος ἐκ τῶν δωδεκαέδρων τούτων, τοῦ ὁμοκορύφου τῷ ἑξαέδρῳ $ΑΒΓΔΑ_1Β_1Γ_1Δ_1$, λαμβάνομεν τὸ ἐντὸς τοῦ ἑξαέδρου τούτου κείμενον σημεῖον $\left(u+\frac{1}{2}\Delta u,\ v+\frac{1}{2}\Delta v,\ w+\frac{1}{2}\Delta w\right)$ καὶ θεωροῦμεν τοῦτο ὡς κορυφὴν τετραέδρων ἐχόντων βάσεις τὰς ἕδρας τοῦ δωδεκαέδρου· τὸ δωδεκάεδρον διαιρεῖται τότε εἰς 12 τετράεδρα· λέγω δέ, ὅτι ταῦτα πάντα εἶνε ἰσοδύναμα ἀλλήλοις· διότι πάντα μηδενίζονται, ὅταν μία οἱαδήποτε ἐκ τῶν τριῶν αὐξήσεων Δu, ἢ Δv, ἢ Δw μηδενισθῇ, οἱαιδήποτε καὶ ἂν εἶνε αἱ ἄλλαι· ἑπομένως ὁ ὄγκος ἑκάστου ἐκ τῶν τετραέδρων θὰ εἶνε τῆς μορφῆς

$$\Theta.\Delta u\Delta v\Delta w,$$

ἔνθα Θ θὰ εἶνε συνάρτησίς τις τῶν συντεταγμένων τῶν τεσσάρων αὐτοῦ κορυφῶν· ἀλλ' αἱ συντεταγμέναι τῶν κορυφῶν δύο οἱωνδήποτε ἐκ τῶν ῥηθέντων τετραέδρων διαφέρουσιν ἀπ' ἀλλήλων κατὰ ἀπειροστὰς ποσότητας· ἂν λοιπὸν τοῦ ἑνὸς ὁ ὄγκος εἶνε $\Theta.\Delta u\Delta v\Delta w$, τοῦ ἑτέρου θὰ εἶνε $(\Theta+\Delta\Theta)\Delta u\Delta v\Delta w$, ἔνθα ΔΘ εἶνε ἀπειροστόν τι παριστῶν τὴν μεταβολὴν τοῦ Θ, ὅταν ἀντὶ τῶν συντεταγμένων τῶν κορυφῶν τοῦ πρώτου τετραέδρου ἀντικατασταθῶσιν αἱ συντεταγμέναι τῶν κορυφῶν τοῦ δευτέρου· ἐπειδὴ δὲ ἡ παράστασις Θ ἔχει ὅριον πεπερασμένον (διότι ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου θὰ εἶνε ἀπειροστὸν τρίτης τάξεως), συνάγεται, ὅτι τὸ ὅριον τοῦ λόγου $\dfrac{\Theta+\Delta\Theta}{\Theta}$ εἶνε ἡ μονάς· τουτέστι δύο τυχόντα ἐκ τῶν 12 τετραέδρων, ἅτινα δίδει ἕκαστον δωδεκάεδρον, εἶνε ἰσοδύναμα.

Τούτου τεθέντος, ἵνα εὕρωμεν τὸν ὄγκον ἑνὸς ἐξ αὐτῶν, ἔστω τοῦ ΜΑΒΓ, παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ εὐθύγραμμοι καὶ ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι τῶν κορυφῶν του εὑρίσκονται ἐκ τῶν καμπυλογράμμων διὰ τῶν ἐξισώσεων (1΄) καὶ εἶνε

τοῦ $A(x,y,z)$

τοῦ $B\left(x+\frac{\partial x}{\partial w}\Delta w\ldots,\ y+\frac{dy}{dw}\Delta w\ldots,\ z+\frac{\partial z}{\partial w}\Delta w\ldots\right)$

τοῦ $\Gamma\left(x+\frac{\partial x}{\partial w}\Delta w+\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v\ldots,\ y+\frac{\partial y}{\partial w}\Delta w+\frac{\partial y}{\partial v}\Delta v\ldots,\ z+\frac{\partial z}{\partial w}\Delta w+\frac{\partial z}{\partial v}\Delta v\ldots\right)$

τοῦ $M\left(x+\frac{1}{2}\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u+\frac{1}{2}\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v+\frac{1}{2}\frac{\partial x}{\partial w}\Delta w,\ldots\right)$

ἐπομένως ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου τούτου ἔχει πρωτεῦον μέρος τὸ ἑξῆς (ὅπερ εὑρίσκομεν λαμβάνοντες τὴν πρώτην μόνον δύναμιν ἑκάστης αὐξήσεως)

$$\frac{1}{12}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial w} & \dfrac{\partial y}{\partial w} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} . \Delta u \Delta v \Delta w \text{ ἢ συντόμως } \frac{1}{12}\frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)}\Delta u \Delta v \Delta w$$

καὶ τὸ πρωτεῦον μέρος τοῦ ὄγκου τοῦ δωδεκαέδρου εἶνε

$$\frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)}\Delta u \Delta v \Delta w\cdot$$

τοῦτο δὲ καὶ μόνον χρειαζόμεθα· διότι πρόκειται περὶ εὑρέσεως τοῦ ὁρίου, πρὸς ὃ τείνει τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπειροστῶν (3).

Ἐὰν νῦν σχηματίσωμεν τὸ ἄθροισμα (3) καὶ παραστήσωμεν διὰ $\Phi(u,v,w)$ τὴν συνάρτησιν, εἰς ἣν τρέπεται ἡ συνάρτησις $\varphi(x,y,z)$, ὅταν θέσωμεν ἐν αὐτῇ τὰς τιμὰς τῶν x,y,z (1΄), εὑρίσκομεν

$$(4) \qquad \int_T \varphi(x,y,z)d(x,y,z) = \int_\Pi \Phi(u,v,w)\frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)}dudvdw.$$

Κατὰ ταῦτα, ἵνα μετασχηματίσωμεν τὸ τριπλοῦν ὁλοκλήρωμα, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν αὐτὸ ὑπὸ τὴν γενικὴν μορφὴν

$$\int_T \varphi(x\ y,z)d(x,y,z),$$

ἐν ᾗ ἡ διαίρεσις τοῦ τόπου T τῆς ὁλοκληρώσεως μένει ἀόριστος, καὶ νὰ θεωρήσωμεν ἔπειτα τὰς μεταβλητὰς x,y,z ὡς συναρτήσεις τῶν νέων μεταβλητῶν u,v,w καὶ τὸ $d(x\ y,z)$ ὡς διαφορικὸν τοῦ συστήματος (x,y,z) πρὸς τὸ (u,v,w).

Σημείωσις. Καὶ ἐνταῦθα δεικνύεται εὐκόλως, ὅτι ἡ παράγωγος $\dfrac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)}$ εἶνε τὸ ὅριον τοῦ λόγου τῶν δύο ἀπειροστῶν ὄγκων τῶν πρὸς ἀλλήλους ἀντιστοιχούντων, οὓς γράφουσι τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα x,y,z καὶ u,v,w, ὅταν ἀμφότερα τὰ συστήματα τῶν μεταβλητῶν ἑπομένως τὸ ὁλοκλήρωμα (α) γίνεται

$$\int \varphi(x,y,z)\frac{\Delta}{\delta}dw\cdot$$

ὅθεν

$$\int\int\int_{T} \varphi(x,y,z)dxdydz=$$

$$\int_{A}^{B} dx \int_{Y}^{Y'} dy \int \varphi(x,y,z)\frac{\Delta}{\delta}dw\cdot$$

ἀλλ᾽ ἐὰν μεταβάλωμεν καὶ πάλιν τὴν τάξιν τῶν ὁλοκληρώσεων καὶ καταστήσωμεν πρώτην τὴν πρὸς y, τὸ τριπλοῦν ὁλοκλήρωμα γίνεται

$$\int_{A}^{B} dx \int dw \int \varphi(x,y,z)\frac{\Delta}{\delta}dy$$

καὶ πάλιν ἐν τῇ πρώτῃ ὁλοκληρώσει

$$\int \varphi(x,y,z)\frac{\Delta}{\delta}dy \qquad (\beta)$$

δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὴν μεταβλητὴν y διὰ τῆς v (εἶνε δὲ ἡ y συνάρτησις τῶν τριῶν μεταβλητῶν x,w,v, ὡς ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (1΄) φαίνεται)· πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ ἀντικαταστήσωμεν ἐν τῇ συναρτήσει $\varphi(x,y,z)\frac{\Delta}{\delta}$ τὴν μεταβλητὴν y διὰ τῆς τιμῆς αὐτῆς εἰς x,w,v καὶ νὰ θέσωμεν ἀντὶ dy τὸ μερικὸν διαφορικὸν τοῦ y θεωρουμένου ὡς συναρτήσεως τῶν x,w,v, ὅταν αἱ x καὶ w μένωσι σταθεραί· ἀλλ᾽ ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1΄) εὑρίσκομεν ὑποθέτοντες σταθερὰς τὰς w καὶ x

$$0=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv$$

$$dy=\frac{\partial y}{\sigma u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv$$

ὅθεν
$$dy = \frac{\delta}{\frac{\partial x}{\partial u}} dv, \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\delta}{\frac{\partial x}{\partial u}}.$$

ἐπομένως τὸ ὁλοκλήρωμα (β) γίνεται

$$\int \varphi(x,y,z) \frac{\Delta}{\frac{\partial x}{\partial u}} dv$$

ὅθεν καὶ

$$\int\int\int_T \varphi(x,y,z) dx dy dz = \int_A^B dx \int dw \int \varphi(x,y,z) \frac{\Delta}{\frac{\partial x}{\partial u}} dv$$

Ἐὰν δὲ καὶ ἐν τούτῳ ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν ὁλοκληρώσεων καὶ προτάξωμεν τὴν ὁλοκλήρωσιν πρὸς x ἀντικαταστήσωμεν δὲ ἔπειτα εἰς τὴν πρώτην ὁλοκλήρωσιν

$$\int \varphi(x,y,z) \frac{\Delta}{\frac{\partial x}{\partial u}} dx, \qquad (\gamma)$$

τὴν μεταβλητὴν x διὰ τῆς u, ἀντὶ τοῦ dx πρέπει νὰ θέσωμεν τὸ μερικὸν διαφορικὸν τῆς x, ὅταν θεωρῆται ὡς συνάρτησις τῶν u,v,w καὶ μένωσι σταθερὰ τὰ v καὶ w· ἀλλὰ τότε εἶνε $dx = \frac{\partial x}{\partial u} du$

ὅθεν τὸ ὁλοκλήρωμα (γ) γίνεται

$$\int \varphi(x,y,z) \Delta \,.\, du$$

καὶ ἐπομένως

$$\int\int\int \varphi(x,y,z) dx dy dz = \int\int\int \varphi(x,y,z) \Delta \,.\, du dv dw.$$

Οἴκοθεν ἐννοεῖται, ὅτι ἐν τῇ συναρτήσει $\varphi(x,y,z).\Delta$ πρέπει νὰ ἀντικατασταθῇ πρῶτον μὲν ἡ z ἐκφραζομένη διὰ τῶν x,y,w, ἔπειτα δὲ ἡ y ἐκφραζομένη διὰ τῶν x,v,w καὶ τέλος ἡ x ἐκφραζομένη διὰ τῶν u,v,w·

τουτέστι πρέπει νὰ ἀντικατασταθῶσι καὶ αἱ τρεῖς μεταβληταὶ x,y,z διὰ τῶν τιμῶν αὐτῶν (1΄) εἰς u,v,w.

Ὄγκος τῶν στερεῶν εἰς πολικὰς συντεταγμένας.

193. Πρὸς ἐφαρμογὴν τῶν προηγουμένων ἔστω τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int\int\int_{T} dxdydz,$$

ὅπερ παριστᾷ, ὡς γνωστόν, τὸν ὄγκον παντὸς στερεοῦ Τ· ἐὰν θέλωμεν νὰ μετασχηματίσωμεν αὐτὸ εἰς πολικὰς συντεταγμένας ἔχομεν

$$x = \rho\,\eta\mu\theta\ \sigma\upsilon\nu\psi$$

$$y = \rho\,\eta\mu\theta . \eta\mu\psi$$

$$z = \rho\ \sigma\upsilon\nu\theta,$$

ὅθεν εὑρίσκομεν εὐκόλως $\dfrac{d(x,y,z)}{d(\rho,\theta,\psi)} = \rho^2\eta\mu\theta.$

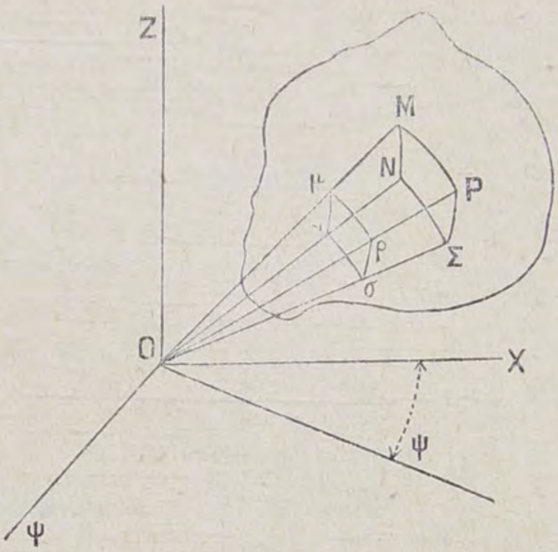
ἑπομένως εἶνε

$$\int\int\int_{T} dxdydz = \int\int\int_{T} \rho^2\eta\mu\theta d\rho d\theta d\psi \qquad (5)$$

194. Τὴν ἔκφρασιν ταύτην τοῦ ὄγκου εἰς πολικὰς συντεταγμένας δυνάμεθα καὶ ἀμέσως νὰ εὕρωμεν, ὡς ἀκολούθως.

Νοήσωμεν σειρὰν σφαιρικῶν ἐπιφανειῶν ἐχουσῶν κέντρον τὴν ἀρχὴν Ο, ἀκτῖνας δὲ αὐξανούσας κατὰ Δρ ἀφ' ἑκάστης εἰς τὴν ἑπομένην· ἐφ' ἑκάστης τούτων ἡ μεταβλητὴ ρ μένει σταθερὰ ($\rho = C$)· αἱ ἐπιφάνειαι αὗται διαιροῦσι τὸ στερεὸν εἰς σφαιρικὰς πλάκας· ἔπειτα ἐπίπεδα ἐκ τοῦ ἄξονος ΟΖ ἐκβαλλόμενα πέριξ αὐτοῦ, ὧν ἡ γωνία πρὸς τὸ ΖΟΧ ἐπίπεδον νὰ αὐξάνηται κατὰ Δψ ἀφ' ἑκάστου εἰς τὸ ἑπόμενον (ἐφ' ἑκάστου τούτων ἡ γωνία ψ μένει σταθερά)· ταῦτα διαιροῦσιν ἑκάστην πλάκα εἰς ὄνυχας σφαιρικούς· τέλος νοοῦμεν σειρὰν κωνικῶν ἐπιφανειῶν (ἐκ περιστροφῆς) ἐχουσῶν κορυφὴν κοινὴν τὸ Ο καὶ ἄξονα κοινὸν τὸν ἄξονα ΟΖ, ἡ δὲ γωνία αὐτῶν νὰ αὐξάνῃ κατὰ Δθ ἀφ' ἑκάστης εἰς τὴν ἑπομένην (ἐφ' ἑκάστης τῶν κωνικῶν τούτων ἐπιφανειῶν μένει ἡ θ σταθερά)· αἱ ἐπιφάνειαι αὗται διαιροῦσιν ἕκαστον ὄνυχα, ἑπομένως καὶ τὸ ὅλον στερεόν, εἰς μέρη, ἅτινα γίνονται ἀπειροστὰ κατὰ πάσας τὰς διαστάσεις αὐτῶν, ὅταν αἱ διαφοραὶ $\Delta\rho$, $\Delta\theta$, $\Delta\psi$ γίνωσιν ἀπειροσταί.

Θεωρήσωμεν ἓν τῶν μερῶν τούτων, τὸ τυχόν, ἐντὸς τοῦ στερεοῦ κείμενον· τοῦτο περιορίζεται ὑπὸ 6 ἑδρῶν, ἤτοι ὑπὸ τῶν δύο ἀπέναντι σφαιρικῶν ἐπιφανειῶν ΜΝΡΣ καὶ μνρσ, ὑπὸ τῶν δύο ἀπέναντι ἐπιπέδων ΜμΡρ καὶ ΝνΣσ καὶ ὑπὸ τῶν δύο ἀπέναντι κωνικῶν ἐπιφανειῶν ΜμΝν καὶ ΡρΣσ· πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὄγκου αὐτοῦ παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ἑξάεδρον τοῦτο εἶνε διαφορὰ τῶν σφαιρικῶν πυραμίδων ομνρσ καὶ ΟΜΝΡΣ (λέγω δὲ *σφαιρικὴν πυραμίδα* πᾶν στερεὸν περιεχόμενον ὑπὸ τοῦ τυχόντος μέρους τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καὶ ὑπὸ τῶν εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ ἀγομένων ἀκτίνων)· ὁ ὄγκος τοῦ τοιούτου στερεοῦ ἀποδεικνύεται εὐκόλως, ὅτι εἶνε ἴσος τῷ γινομένῳ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ἥτις εἶνε βάσις αὐτοῦ, ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος· ἑπομένως ὁ ὄγκος τοῦ ἑξαέδρου εἶνε, ἂν ρ, θ, ψ εἶνε αἱ ἐλάχισται συντεταγμέναι τῶν σημείων του,



$$\frac{1}{3}(\rho+\Delta\rho)(\text{ΜΝΡΣ})-\frac{1}{3}\rho(\mu\nu\rho\sigma) \qquad (\iota)$$

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας μνρσ παρατηροῦμεν, ὅτι αὕτη εἶνε μέρος τῆς σφαιρικῆς ζώνης, ἣν θὰ ἔγραφε τὸ τόξον μρ στρεφόμενον ὁλόκληρον περιστροφὴν περὶ τὴν διάμετρον ΟΖ, ἡ ζώνη αὕτη ἔχει ἐμβαδὸν $2\pi\rho\upsilon$ (ἔνθα υ εἶνε τὸ ὕψος αὐτῆς)· νῦν ὅμως ἐστράφη οὐχὶ ὁλόκληρον περιστροφήν, ἀλλὰ μόνον κατὰ τὴν γωνίαν $\Delta\psi$· ἑπομένως ἔγραψε μέρος τῆς ζώνης ἀνάλογον τῆς γωνίας τῆς περιστροφῆς, ἤτοι

$$(\mu\nu\rho\sigma)=\rho\upsilon\,.\,\Delta\psi\cdot$$

τὸ ὕψος υ τῆς ζώνης εὑρίσκεται, ἂν ἀπὸ τῶν σημείων μ καὶ ρ καταβιβάσωμεν καθέτους ἐπὶ τὴν ΟΖ, καὶ εἶνε τὸ μεταξὺ τῶν ποδῶν τῶν καθέτων τ ούτων ἀπολαμβανόμενον τμῆμα τοῦ ἄξονος, εὑρίσκεται δὲ εὐκόλως, ὅτ

$$v = \rho \left\{ \sigma\upsilon\nu\theta - \sigma\upsilon\nu(\theta + \Delta\theta) \right\}\cdot$$

ἐπομένως ἡ σφαιρικὴ ἕδρα μνρσ ἔχει ἐμβαδὸν

$$(\mu\nu\rho\sigma) = \rho^2.\Delta\psi \left\{ \sigma\upsilon\nu\theta - \sigma\upsilon\nu(\theta + \Delta\theta) \right\}\cdot$$

ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ ἀπέναντι σφαιρικὴ ἕδρα ΜΝΡΣ (ἧς ἡ ἀκτὶς εἶνε $\rho + \Delta\rho$) ἔχει ἐμβαδὸν

$$(\mathrm{MNP\Sigma}) = (\rho + \Delta\rho)^2.\Delta\psi \left\{ \sigma\upsilon\nu\theta - \sigma\upsilon\nu(\theta + \Delta\theta) \right\}\cdot$$

ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι ὁ ὄγκος (α) τοῦ ἑξαέδρου εἶνε

$$\frac{1}{3}.\Delta\psi \left[\sigma\upsilon\nu\theta - \sigma\upsilon\nu(\theta + \Delta\theta) \right].\left[(\rho + \Delta\rho)^3 - \rho^3 \right] \qquad (o)$$

τούτου τὸ πρωτεῦον μέρος εἶνε

$$\rho^2 \eta\mu\theta.\Delta\rho.\Delta\theta.\Delta\psi,$$

ἐπομένως ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ Τ, θὰ εἶνε ὅριον τοῦ ἀθροίσματος $\Sigma\rho^2\eta\mu\theta\Delta\rho\Delta\theta\Delta\psi$ ἐκτεινομένου ἐπὶ πάντων τῶν μερῶν τοῦ στερεοῦ· δηλαδὴ

$$\int\int\int_{\mathrm{T}} dxdydz = \int\int\int_{\mathrm{T}} \rho^2 \eta\mu\theta.d\rho d\theta d\psi. \qquad (5)$$

195. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν πρώτην τὴν ὁλοκλήρωσιν πρὸς ρ, ἀθροίζομεν τὰ στοιχεῖα, ἐν οἷς αἱ θ,ψ μένουσι σταθεραί, καὶ μόνη ἡ ρ μεταβάλλεται εὑρίσκομεν ἐπομένως τὸν ὄγκον τοῦ μέρους, ὅπερ κεῖται ἐν μιᾷ πυραμίδι περιεχομένῃ μεταξὺ δύο ἐφεξῆς κωνικῶν ἐπιφανειῶν καὶ δύο ἐφεξῆς ἐπιπέδων· ὁ ὄγκος οὗτος εἶνε

$$\eta\mu\theta d\theta d\psi \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{P}'} \rho^2 d\rho \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{3}(\mathrm{P}'^3 - \mathrm{P}^3)\eta\mu\theta d\theta d\psi, \qquad (\alpha)$$

ἔνθα Ρ καὶ Ρ′ εἶνε ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τοῦ ρ καὶ ἡ μεγίστη ἐν τῷ στερεῷ Τ, ὅταν αἱ θ,ψ διατηρῶσι τὰς τιμὰς αὐτῶν· (αἱ τιμαὶ αὗται Ρ καὶ Ρ′ εὑρίσκονται ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῆς ἐπιφανείας τοῦ στερεοῦ Τ καὶ εἶνε ἐν γένει συναρτήσεις τῶν θ,ψ).

Ἐὰν ἔπειτα ὁλοκληρώσωμεν πρὸς θ τὸ ἐξαγόμενον (α) τῆς πρώτης ὁλοκληρώσεως, εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον τοῦ ὄνυχος, ὅστις κεῖται μεταξὺ δύο ἐφεξῆς ἐπιπέδων ψ· ὁ ὄγκος οὗτος εἶνε

$$\frac{1}{3}d\psi\int_{\Theta}^{\Theta'}(\mathrm{P}'^3-\mathrm{P}^3)\eta\mu\theta d\theta, \qquad (\beta)$$

ἔνθα Θ καὶ Θ′ εἶνε αἱ ἄκραι τιμαὶ τῆς θ ἐν τῷ στερεῷ, ὅταν ἡ ψ μένῃ ἀμετάβλητος διατηροῦσα τὴν τυχοῦσαν τιμὴν αὐτῆς.

Ἐὰν δὲ τέλος ὁλοκληρώσωμεν πρὸς ψ τὸ ἐξαγόμενον (β) τῆς δευτέρας ὁλοκληρώσεως, εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον πάντων τῶν ὀνύχων, ἤτοι τὸν ὄγκον τοῦ ὅλου στερεοῦ T

$$V=\frac{1}{3}\int_{\Psi_0}^{\Psi_1}d\psi\int_{\Theta}^{\Theta'}(\mathrm{P}'^3-\mathrm{P}^3)\eta\mu\theta . d\theta,$$

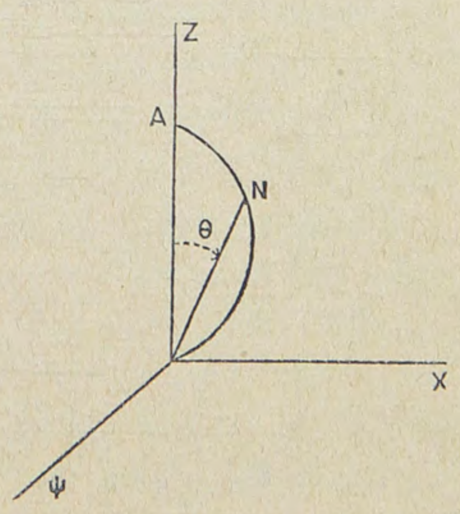
ἔνθα Ψ καὶ Ψ′ εἶνε αἱ ἄκραι τιμαὶ τῆς ψ ἐν τῷ στερεῷ.

Παράδειγμα.

Εὑρεῖν τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ, οὗτινος ἡ ἐπιφάνεια ἔχει τὴν ἐξίσωσιν

$$\rho^m=\alpha^m.\sigma\upsilon\nu\theta. \qquad m>0$$

Ἡ ἐπιφάνεια αὕτη εἶνε ἐκ περιστροφῆς, ὁ δὲ μεσημβρινὸς αὐτῆς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν xz παρίσταται ὑπὸ τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως $\rho^m=\alpha^m\sigma\upsilon\nu\theta$ διὰ $\theta=0$ ἔχομεν $\rho=\alpha$, τοῦ θ αὐξάνοντος, τὸ ρ ἐλαττοῦται,καὶ ὅταν $\theta=\frac{\pi}{2}$, γίνεται $\rho=0$· ὥστε ὁ μεσημβρινὸς ἔχει τὸ σχῆμα τόξου συνεχοῦς ἀρχομένου ἀπὸ τοῦ Α (ΟΑ=α) καὶ λήγοντος εἰς τὴν ἀρχὴν Ο.



Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὄγκου τοῦ στερεοῦ τούτου παρατηροῦμεν, ὅτι, τῶν θ καὶ ψ ἐχόντων τιμὰς οἱασδήποτε, ἡ ἀκτὶς ρ μεταβάλλεται ἐν τῷ στερεῷ ἀπὸ 0 μέχρις $\alpha\sigma\upsilon\nu^{\frac{1}{m}}\theta$· ὥστε ἡ πρώτη ὁλοκλήρωσις πρὸς ρ δίδει

$$\frac{1}{3}\eta\mu\theta\, d\theta\, d\psi.\alpha^3.\sigma\upsilon\nu^{\frac{3}{m}}\theta\cdot$$

ἐν τῇ δευτέρᾳ ὁλοκληρώσει πρὸς θ, τὰ ὅρια τοῦ θ εἶνε 0 καὶ $\frac{\pi}{2}$, ὥστε ἡ δευτέρα ὁλοκλήρωσις δίδει

$$\frac{1}{3}\alpha^3.d\psi.\frac{m}{m+3}$$

ἐν δὲ τῇ τελευταίᾳ ὁλοκληρώσει ὅρια τοῦ ψ εἶνε προφανῶς 0 καὶ 2π· ὅθεν ὁ ζητούμενος ὄγκος εἶνε

$$\frac{2}{3}\pi\alpha^3.\frac{m}{m+3}.$$

Μετασχηματισμὸς εἰς ἐλλειπτικὰς συντεταγμένας.

196. *Ἐλλειπτικαὶ* συντεταγμέναι τοῦ σημείου (x,y,z) λέγονται αἱ τρεῖς ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$(1)\qquad \frac{x^2}{\alpha^2+\lambda}+\frac{y^2}{\beta^2+\lambda}+\frac{z^2}{\gamma^2+\lambda}=1 \qquad \alpha>\beta>\gamma$$

αἱ πρὸς τὰς τιμὰς τῶν x,y,z ἀντιστοιχοῦσαι (ἄγνωστος θεωρεῖται ὁ λ) ἔχει δὲ ἡ ἐξίσωσις αὕτη δι' ἕκαστον σημεῖον Μ (x,y,z) τρεῖς ῥίζας u,v,w πραγματικὰς πάντοτε καὶ ἡ μὲν u εἶνε μεγαλειτέρα τοῦ $-\gamma^2$ ἡ δὲ v περιλαμβάνεται μεταξὺ $-\gamma^2$ καὶ $-\beta^2$, ἡ δὲ w μεταξὺ $-\beta^2$ καὶ $-\alpha^2$.

Ἡ ἐξίσωσις (1) παριστᾷ διὰ τὰς τιμὰς u,v,w τοῦ λ τρεῖς ὁμοεστίους ἐπιφανείας τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ὧν ἡ μὲν πρὸς u ἀντιστοιχοῦσα εἶνε ἐλλειψοειδές, ἡ δὲ πρὸς v εἶνε ὑπερβολοειδὲς μονόχωνον, ἡ δὲ τρίτη εἶνε ὑπερβολοειδὲς δίχωνον, τούτων τομὴ εἶνε τὸ σημεῖον Μ (x,y,z)· τέμνουσι δὲ ἀλλήλας ἀνὰ δύο πάντοτε ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν (ἰδὲ Στερεὰν ἀναλυτικὴν γεωμετρίαν, σελ. 205).

Διὰ τῶν ἐλλειπτικῶν συντεταγμένων u,v,w ἐκφράζονται αἱ εὐθύγραμμοι καὶ ὀρθογώνιοι (x,y,z) τοῦ αὐτοῦ σημείου, ὡς ἀκολούθως

$$\begin{aligned} x^2&=\frac{(\alpha^2+u)(\alpha^2+v)(\alpha^2+w)}{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2-\gamma^2)} \\ y^2&=\frac{(\beta^2+u)(\beta^2+v)(\beta^2+w)}{(\beta^2-\alpha^2)(\beta^2-\gamma^2)} \\ z^2&=\frac{(\gamma^2+u)(\gamma^2+v)(\gamma^2+w)}{(\gamma^2-\alpha^2)(\gamma^2-\beta^2)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Τούτων τεθέντων, ἵνα μετασχηματίσωμεν τριπλοῦν τι ὁλοκλήρωμα εἰς τὰς ἐλλειπτικὰς συντεταγμένας, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὴν παράγωγον

$$\frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)}.$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶνε $2x\dfrac{\partial x}{\partial u}=\dfrac{(\alpha^2+v)(\alpha^2+w)}{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2-\gamma^2)}$, κτλ.

ἕπεται $$8xyz(\alpha^2-\beta^2)^2(\beta^2-\gamma^2)^2(\gamma^2-\alpha^2)^2=$$

$$=-\begin{vmatrix} (\alpha^2+v)(\alpha^2+w), & (\beta^2+v)(\beta^2+w), & (\gamma^2+v)(\gamma^2+w) \\ (\alpha^2+w)(\alpha^2+u), & (\beta^2+w)(\beta^2+u), & (\gamma^2+w)(\gamma^2+u) \\ (\alpha^2+u)(\alpha^2+v), & (\beta^2+u)(\beta^2+v), & (\gamma^2+u)(\gamma^2+v) \end{vmatrix}.$$

Ἡ ὁρίζουσα αὕτη εἶνε προφανῶς ἀκεραία συνάρτησις τῶν $\alpha^2,\beta^2,\gamma^2$, $u,v\ w$· μηδενίζεται δέ, ὅταν δύο ἐκ τῶν α^2, β^2, γ^2 ἢ δύο ἐκ τῶν u,v,w γίνωσιν ἴσα· ἑπομένως διαιρεῖται διὰ τοῦ γινομένου

$$(\alpha^2-\beta^2)(\beta^2-\gamma^2)(\gamma^2-\alpha^2)(u-v)(v-w)(w-u)\cdot$$

ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον τοῦτο καὶ ἡ ὁρίζουσα εἶνε ἰσοβάθμια πρὸς πάντα τὰ γράμματα, ἅτινα περιέχουσιν, ἕπεται, ὅτι μόνον κατὰ ἀριθμητικόν τινα παράγοντα δύνανται νὰ διαφέρωσιν· ἀλλ' εὑρίσκοντες τὸν συντελεστὴν τοῦ ὅρου $\alpha^4\beta^2u^2v$, βλέπομεν, ὅτι εἶνε $+1$ ἐν ἀμφοτέροις· ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι εἶνε

$$\frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)}=\frac{-(u-v)(v-w)(w-u)}{8\sqrt{-\varphi(u)\varphi(v)\varphi(w)}}, \tag{3}$$

ἔνθα $$\varphi(u)=(\alpha^2+u)(\beta^2+u)(\gamma^2+u).$$

Ἐὰν παραδείγματος χάριν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ ἐλλειψοειδοῦς

$$(4) \qquad \frac{x^2}{\alpha^2+u_0}+\frac{y^2}{\beta^2+u_0}+\frac{z^2}{\gamma^2+u_0}=1, \qquad u_0>-\gamma^2$$

ἀρκεῖ νὰ ἐνθυμηθῶμεν, ὅτι ἐν τῷ ὀγδόῳ αὐτοῦ, ὅπερ κεῖται ἐν τῇ θετικῇ γωνίᾳ τῶν ἀξόνων, αἱ μεταβληταὶ u, v, w διανύουσι (αὐξάνουσαι) τὰς τιμὰς

$$\begin{aligned} u &= -\gamma^2 \ldots u_0 \\ v &= -\beta^2 \ldots -\gamma^2 \\ w &= -\alpha^2 \ldots -\beta^2 \end{aligned} \qquad (5)$$

καὶ πρὸς ἕκαστον σημεῖον τοῦ μέρους τούτου ἀντιστοιχεῖ ἓν καὶ μόνον ἓν σύστημα τιμῶν u, v, w, καὶ τἀνάπαλιν πρὸς ἕκαστον σύστημα u, v, w ἓν καὶ μόνον σημεῖον· ὅθεν ὁ ὄγκος V τοῦ ἐλλειψοειδοῦς (4) εἶνε

$$V = -\int\int\int \frac{(u-v)(v-w)(w-u)}{\sqrt{-\varphi(u)\varphi(v)\varphi(w)}} du\, dv\, dw$$

$$\left(\begin{aligned} u &= -\gamma^2 \ldots u_0 \\ v &= -\beta^2 \ldots -\gamma^2 \\ w &= -\alpha^2 \ldots -\beta^2 \end{aligned} \right)$$

καὶ ἐπειδὴ ὁ ὄγκος τοῦ ἐλλειψοειδοῦς εἶνε ἄλλοθεν γνωστός, ἕπεται

$$\int_{-\gamma^2}^{u_0}\int_{-\beta^2}^{-\gamma^2}\int_{-\alpha^2}^{-\beta^2} \frac{(u-v(v-w)(w-u)}{\sqrt{-\varphi(u)\varphi(v)\varphi(w)}} du\, dv\, dw = -\frac{4}{3}\pi\sqrt{\varphi(u_0)}$$

καὶ ἂν διαφορίσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης πρὸς u_0 εὑρίσκομεν

$$\int_{-\beta^2}^{-\gamma^2}\int_{-\alpha^2}^{-\beta^2} \frac{(u_0-v(v-w)(w-u_0)}{\sqrt{-\varphi(v)\varphi(w)}} dv\, dw = -\frac{2}{3}\pi\varphi'(u_0).$$

ἐξισοῦντες δὲ τοὺς συντελεστὰς τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ u_0 εὑρίσκομεν τὰ ἑξῆς διπλᾶ ὁλοκληρώματα

$$\int_{-\beta^2}^{-\gamma^2}\int_{-\alpha^2}^{-\beta^2}\frac{v-w}{\sqrt{-\varphi(v)\varphi(w)}}\,dv\,dw=2\pi$$

$$\int_{-\beta^2}^{-\gamma^2}\int_{-\alpha^2}^{-\beta^2}\frac{(v^2-w^2)}{\sqrt{-\varphi(v)\varphi(w)}}\,dv\,dw=-\frac{4}{3}\pi(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$

$$\int_{-\beta^2}^{-\gamma^2}\int_{-\alpha^2}^{-\beta^2}\frac{vw(v-w)}{\sqrt{-\varphi(v)\varphi(w)}}\,dv\,dw=\frac{2}{3}\pi(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII.

ΩΡΙΣΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΕΝ ΓΕΝΕΙ

Ὁρισμοί.

197. Τὸ σύνολον τῶν συστημάτων πραγματικῶν τιμῶν, ἃς λαμβάνουσι n μεταβληταὶ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων καὶ εἰς οὐδένα ὑποκείμεναι περιορισμόν, λέγομεν ὅτι παριστᾷ *τὸν χῶρον τῶν n διαστάσεων*.

Ἕκαστον σύστημα τιμῶν τῶν n μεταβλητῶν $x_1, x_2 \ldots x_n$, οἷον τὸ $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, λέγομεν ὅτι παριστᾷ *ἓν σημεῖον* τοῦ χώρου τῶν n διαστάσεων, αἱ δὲ τιμαὶ τοῦ συστήματος λέγονται *συντεταγμέναι* τοῦ σημείου τούτου· πάντα δὲ τὰ σημεῖα τὰ παριστώμενα ὑπὸ τῶν τιμῶν

$$x'_1 + \varepsilon_1, \quad x'_2 + \varepsilon_2 \ldots x'_n + \varepsilon_n$$

ὅταν τὰ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ μεταβάλλωνται ὁπωσδήποτε, ἀλλ' οὕτως, ὥστε τὸ μέτρον ἑκάστου ἐξ αὐτῶν νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ ἀριθμόν τινα θετικὸν ρ, λέγεται ὅτι ἀποτελοῦσι τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου $x'_1, x'_2 \ldots x'_n$, ὁ δὲ ἀριθμὸς ρ λέγεται *πλάτος* τῆς περιοχῆς ταύτης.

198 Πλῆθος συστημάτων πραγματικῶν τιμῶν τῶν $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ὁπωσδήποτε διοριζόμενον, λέγεται ὅτι *παριστᾷ συνεχὲς στερεὸν τῶν n διαστάσεων*, ἐάν, ληφθέντος τοῦ τυχόντος συστήματος τοῦ πλήθους, ἅπαντα τὰ τὴν περιοχὴν αὐτοῦ ἀποτελοῦντα συστήματα, ὅταν τὸ πλάτος αὐτῆς ληφθῇ ἱκανῶς μικρόν, εἶνε τοῦ αὐτοῦ πλήθους.

Τὸ στερεὸν λέγεται *πεπερασμένον*, ἐὰν αἱ τιμαὶ ἑκάστης τῶν μεταβλητῶν ἐν ἅπασι τοῖς συστήμασι τοῦ πλήθους μένωσι μικρότεραι ἀριθμοῦ τινος.

Ἑνιαῖον δέ, ἐὰν δύο οἱαδήποτε συστήματα τοῦ διορισθέντος πλήθους δύνανται νὰ συνδεθῶσι διὰ μιᾶς συνεχοῦς ἀκολουθίας συστημάτων τοῦ αὐτοῦ πλήθους.

Συνήθως τὸ στερεὸν ὁρίζεται διὰ μιᾶς ἀνισότητος περιοριζούσης τὰς μεταβλητὰς $x_1, x_2 \ldots x_n$, ἢ καὶ διὰ περισσοτέρων· παραδείγματος χάριν, ἡ ἀνισότης

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2<1 \qquad (1)$$

ὁρίζει ἐν τῷ χώρῳ τῶν n διαστάσεων στερεὸν συνεχὲς καὶ πεπερασμένον, ὅπερ λέγεται *σφαῖρα*. Αἱ δὲ ἀνισότητες

$$\begin{aligned} \alpha_1<x_1&<\beta_1 \\ \alpha_2<x_2&<\beta_2 \\ \ldots&\ldots \\ \alpha_n<x_n&<\beta_n \end{aligned} \qquad (2)$$

ὁμοῦ λαμβανόμεναι ὁρίζουσι στερεὸν συνεχὲς καὶ πεπερασμένον, ὅπερ λέγεται ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον· τὰ σημεῖα αὐτοῦ παρίστανται ὑπὸ τῶν ἑξῆς συστημάτων

$$\begin{aligned} x_1&=\alpha_1+\lambda_1(\beta_1-\alpha_1) \\ x_2&=\alpha_2+\lambda_2(\beta_2-\alpha_2) \\ &\ldots\ldots \\ x_n&=\alpha_n+\lambda_n(\beta_n-\alpha_n) \end{aligned}$$

ὅταν τὰ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ἀνεξάρτητα ἀπ' ἀλλήλων μένοντα διανύωσι τὰς τιμὰς $0 \ldots 1$ ἕκαστον. Ὄγκος δὲ τοῦ παραλληλεπιπέδου τούτου λέγεται τὸ γινόμενον

$$(\beta_1-\alpha_1)(\beta_2-\alpha_2)\ldots(\beta_n-\alpha_n)$$

τῶν n ἀκμῶν αὐτοῦ, ἤτοι τῶν n διαστημάτων $\beta_k-\alpha_k$ $(k=1,2\ldots n)$, ἐν οἷς μεταβάλλονται ἐν τῷ παραλληλεπιπέδῳ αἱ μεταβληταί.

199. Τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ στερεοῦ παριστῶσι τὰ συστήματα ἐκεῖνα, ὧν ἡ περιοχή, ὁσονδήποτε μικρὸν πλάτος καὶ ἂν ἔχῃ, περιέχει καὶ σημεῖα τοῦ στερεοῦ καὶ σημεῖα ξένα αὐτοῦ.

200. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ στερεοῦ ὁρίζεται (ἡ ὅλη ἢ ἕκαστον μέρος αὐτῆς) συνήθως διὰ μιᾶς ἐξισώσεως συνδεούσης τὰς n μεταβλητάς· ἑπομένως τὰ σημεῖα αὐτῆς ἀποτελοῦσι πλῆθος ἐν γένει τῆς τάξεως $n-1$.

Αἱ πρωτοβάθμιοι ἐξισώσεις λέγεται καὶ ἐνταῦθα, ὅτι παριστῶσιν ἐπίπεδα ἐν τῷ χώρῳ τῶν n διαστάσεων καὶ τὰ ἐπίπεδα $x_k=\alpha_k$ λέγεται ὅτι εἶνε παράλληλα πρὸς τὰ συντεταγμένα ἐπίπεδα.

Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας (1) ὁρίζεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=1$$

Ἡ δὲ ὅλη ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου (2) ἀποτελεῖται ἐκ $2n$ μερῶν, ἅτινα ὁρίζονται διὰ τῶν σχέσεων ($k=1,2,\ldots n$)

$$x_k=\alpha_k \qquad\qquad x_k=\beta_k$$
$$\alpha_\lambda<x_\lambda<\beta_\lambda \qquad\qquad \alpha_\lambda<x_\lambda<\beta_\lambda$$
$$\left(\lambda\lesseqgtr k\right) \qquad\qquad \left(\lambda\gtreqless k\right)$$

Τὰ συστήματα τῶν τιμῶν, δι' ὧν παρίσταται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθ. παραλληλεπιπέδου, λέγονται *ἄκρα συστήματα αὐτοῦ*· εἰς ἕκαστον τῶν τοιούτων συστημάτων μία τοὐλάχιστον ἐκ τῶν μεταβλητῶν ἔχει τὴν ἑτέραν τῶν ἄκρων τιμῶν αὐτῆς (ἡ x_k λόγου χάριν ἢ τὴν α_k ἢ τὴν β_k), ἤτοι ἢ τὴν ἐλαχίστην τιμὴν αὐτῆς ἐν τῷ παραλληλεπιπέδῳ ἢ τὴν μεγίστην. Τὸ ἄκρον σύστημα λέγεται *τῆς τάξεως* ϱ, ἐὰν ρ μεταβληταὶ ἐκ τῶν $x_1,x_2\ldots x_n$ ἔχωσιν ἐν αὐτῷ ἑκάστη τὴν ἑτέραν τῶν ἄκρων τιμῶν αὐτῆς.

---

201. Ἔστω συνάρτησις τυχοῦσα $\varphi(x_1,x_2,\ldots x_n)$ τῶν n μεταβλητῶν $x_1,x_2,\ldots,x_n$ συνεχὴς(*) καὶ πεπερασμένη καὶ ἔχουσα ἐν τῷ στερεῷ T δι' ἕκαστον σύστημα τιμῶν $x'_1,x'_2,\ldots,x'_n$ μίαν μόνην τιμὴν πραγματικὴν (τὴν τιμὴν ταύτην ὑποθέτομεν κατὰ πρῶτον θετικήν)· ἐὰν ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς μεταβλητῆς x_k ἐν τῷ στερεῷ T εἶνε α_k ἡ δὲ μεγίστη β_k, τὸ παραλληλεπίπεδον $\alpha_k<x_k<\beta_k$

$(k=1,2,\ldots,n)$

περιέχει ἅπαν τὸ στερεὸν (ἤτοι πᾶν σημεῖον τοῦ στερεοῦ T εἶνε καὶ τοῦ παραλληλεπιπέδου καὶ ἔχει συντεταγμένος τῆς μορφῆς

$$x_k=\alpha_k+\lambda_k(\beta_k-\alpha_k)$$
$$0\leqq\lambda_k\leqq 1$$

τὸ παραλληλεπίπεδον τοῦτο παριστῶμεν διὰ τοῦ Θ.

(*) Λέγω συνάρτησίν τινα $\varphi(x_1..x_n)$ συνεχῆ ἐν τῷ στερεῷ T, ὅταν δοθέντος θετικοῦ ἀριθμοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ, τοῦ ε, δύναται πάντοτε νὰ εὑρεθῇ ἕτερος θετικὸς ἀριθμὸς δ, τοιοῦτος, ὥστε πᾶσα μεταβολὴ τῶν συντεταγμένων $x_1,x_2,\ldots,x_n$, ἐξ οἱουδήποτε σημείου τοῦ στερεοῦ T καὶ ἂν γίνηται, ἐὰν ἔχῃ μέτρον μικρότερον τοῦ δ, νὰ προξενῇ μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως ἔχουσαν μέτρον μικρότερον τοῦ ε.

202. Ἐὰν νῦν τὸ παραλληλεπίπεδον τοῦτο Θ διαιρεθῇ εἰς λ μέρη διὰ τῶν ἐπιπέδων

$$x_1=\alpha_1,\ x_1=x'_1,\ x_1=x''_1 \ldots x_1=x_1^{(\alpha-1)},\ x_1=\beta_1$$

ἔπειτα ἕκαστον τούτων εἰς μ μέρη διὰ τῶν ἐπιπέδων

$$x_2=\alpha_2,\ x_2=x'_2,\ x_2=x''_2,\ldots,x_2=x_2^{(\mu-1)}\ x_2=\beta_2$$

ἔπειτα πάλιν ἕκαστον τούτων εἰς ν μέρη διὰ τῶν ἐπιπέδων

$$x_3=\alpha_3,\ x_3=x'_3,\ \ldots,\ x_3=x_3^{(\nu-1)},\ x_3=\beta_3$$

καὶ οὕτω καθεξῆς· καὶ τέλος ἕκαστον εἰς ρ μέρη διὰ τῶν ἐπιπέδων

$$x_n=\alpha_n,\ x_n=x'_n,\ldots,\ x_n=x_n^{(\rho-1)},\ x_n=\beta_n,$$

αἱ n αὗται σειραὶ τῶν ἐπιπέδων διαιροῦσι τὸ παραλληλεπίπεδον Θ εἰς λ.μ.ν...ρ μέρη, ἅτινα εἶνε πάλιν ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα καὶ τὰ ὁποῖα γίνονται ἀπειροστὰ κατὰ πάσας τὰς διαστάσεις αὐτῶν, ὅταν πᾶσαι αἱ διαφοραὶ δύο ἐφεξῆς τιμῶν ἑκάστης μεταβλητῆς γίνωσιν ἀπειροσταί· τὰ δὲ συστήματα, δι' ὧν παρίσταται τὸ τυχὸν ἐκ τῶν μερῶν τούτων εἶνε

$$x_1=x_1^{(\alpha)}+\lambda_1\left(x_1^{(\alpha+1)}-x_1^{(\alpha)}\right),\qquad \lambda_1=0\ldots1$$

$$x_2=x_2^{(6)}+\lambda_2\left(x_2^{(6+1)}-x_2^{(6)}\right),\qquad \lambda_2=0,\ldots1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n=x_n^{(\theta)}+\lambda_n\left(x_n^{(\theta+1)}-x_n^{(\theta)}\right),\qquad \lambda_n=0\ldots1.$$

ἔνθα τὰ $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ ἀνεξάρτητα ἀπ' ἀλλήλων διαμένοντα διανύουσιν ἕκαστον τὰς τιμὰς $0\ldots1$. Καὶ ἂν μὲν πάντα τὰ σημεῖα τοῦ παραλληλεπιπέδου τούτου εἶνε καὶ τοῦ Τ σημεῖα, τὸ παραλληλεπίπεδον τοῦτο λέγεται *ἐσωτερικὸν* ἢ ὅτι κεῖται ἐντὸς τοῦ T, ἂν δὲ μηδὲν ἔχῃ σημεῖον τοῦ Τ, λέγεται *ἐξωτερικὸν παραλληλεπίπεδον* ἢ ὅτι κεῖται ἐκτὸς τοῦ T· ἂν δὲ τέλος ἔχῃ καὶ σημεῖα τοῦ Τ καὶ σημεῖα ξένα αὐτοῦ, λέγεται ἐντὸς ἐκτὸς καὶ τὸ μέρος αὐτοῦ τὸ ἐντὸς τοῦ Τ κείμενον λέγεται ἀτελὲς παραλληλεπίπεδον.

---

203. Λέγω νῦν, ὅτι, *ἂν λαμβάνωμεν πάντα μὲν τὰ ἐντὸς τοῦ T κείμενα παραλληλεπίπεδα ἐκ δὲ τῶν ἐντὸς ἐκτὸς ὅσα θέλωμεν καὶ πολ-*

λαπλασιάζωμεν τὸν ὄγκον ἑκάστου τῶν ληφθέντων παραλληλεπιπέδων ἐπὶ τὴν τιμὴν ἣν ἔχει ἡ δεδομένη συνάρτησις φ εἰς ἓν οἱονδήποτε ἐκ τῶν σημείων αὐτοῦ, τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τούτων τείνει πρὸς ὅριόν τι πεπερασμένον καὶ ἐντελῶς ὡρισμένον, ὅταν ἡ διαίρεσις τοῦ παραλληλεπιπέδου Θ προχωρῇ οὕτως, ὥστε ἕκαστον μέρος αὐτοῦ νὰ γίνηται ἀπειροστὸν κατὰ πάσας τὰς διαστάσεις.

Τοῦτο δεικνύομεν κατὰ πρῶτον, ὅταν ἡ διαίρεσις τοῦ παραλληλεπιπέδου Θ προχωρῇ καθ' ἕνα ὡρισμένον τρόπον, τὸν ἑξῆς.

Ἑκάστη τῶν διαφορῶν $\beta_1-\alpha_1$, $\beta_2-\alpha_2$, .., $\beta_n-\alpha_n$ διαιρεῖται εἰς δύο ἴσα μέρη, ἔπειτα ἕκαστον τούτων πάλιν εἰς δύο ἴσα, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Εὐκόλως τότε δεικνύεται, ὅτι τὸ ἐκ πάντων τῶν ἐσωτερικῶν παραλληλεπιπέδων καὶ ἐκ τῶν ἐλαχίστων τιμῶν τῆς συναρτήσεως φ ἐν αὐτοῖς συγκροτούμενον ἄθροισμα σ_ν τείνει πρός τι ὅριον πεπερασμένον· ἐπίσης δὲ καὶ τὸ ἐκ πάντων τῶν ἐσωτερικῶν καὶ πάντων τῶν ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐκ τῶν μεγίστων τιμῶν τῆς συναρτήσεως ἐν αὐτοῖς συγκροτούμενον ἄθροισμα Σ_ν. (ἐδ. 131).

Ὅτι δὲ ἀμφότερα τὰ ἀθροίσματα ταῦτα σ_ν καὶ Σ_ν πρὸς τὸ αὐτὸ τείνουσιν ὅριον (ἐὰν ἡ συνάρτησις φ εἶνε συνεχὴς) ἀποδεικνύεται ἐνταῦθα ὡς ἑξῆς. Ἡ διαφορὰ $\Sigma_\nu-\sigma_\nu$ τῶν δύο ἀθροισμάτων τῶν ἐκ τῆς νυοστῆς διαιρέσεως προκυπτόντων (καθ' ἣν ἑκάστη τῶν διαφορῶν $\beta_k-\alpha_k$ διαιρεῖται εἰς 2^ν ἴσα μέρη) ἀποτελεῖται ἐκ δύο μερῶν· τοῦτ' ἔστι πρῶτον μὲν ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐσωτερικῶν παραλληλεπιπέδων, ὧν ἕκαστον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὴν διαφορὰν δύο τιμῶν τῆς συναρτήσεως φ ἐντὸς αὐτοῦ· (τοῦτο δὲ τὸ μέρος τείνει πρὸς τὸ 0· διότι ἡ συνάρτησις φ ὑπετέθη συνεχής), δεύτερον δὲ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος πάντων τῶν ἐντὸς ἐκτὸς κειμένων παραλληλεπιπέδων, ὧν ἕκαστον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὴν τιμὴν ἣν ἔχει ἡ συνάρτησις φ εἰς ἓν τῶν σημείων του, ἀλλ' ἐὰν διὰ τοῦ Μ παραστήσωμεν τὴν μεγίστην τιμὴν τῆς συναρτήσεως φ ἐν τῷ στερεῷ Τ καὶ διὰ σ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐντὸς ἐκτὸς παραλληλεπιπέδων, κατὰ τὴν νυοστὴν διαίρεσιν καὶ τὸν ὄγκον ἑνὸς τῶν παραλληλεπιπέδων διὰ τοῦ ω, τὸ δεύτερον τοῦτο ἄθροισμα εἶνε μικρότερον τοῦ σ.Μ.ω.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀριθμοῦ σ (ἢ ἀνωτέρου τινὸς ὁρίου αὐτοῦ) παρατηροῦμεν, ὅτι ἕκαστον τῶν ἐντὸς ἐκτὸς κειμένων παραλληλεπιπέδων οἷον τὸ

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma_1 + \lambda_1 h_1 \\ x_2 &= \gamma_2 + \lambda_2 h_2 \qquad\qquad (\lambda_k = 0 \ldots 1) \\ &\cdots\cdots \qquad\qquad \left(h_k = \frac{\beta^k - \alpha_k}{2^\nu}\right) \\ x_n &= \gamma_n + \lambda_n h_n \end{aligned}$$

(ἔνθα $h_1, h_2 \ldots h_n$ εἶνε αἱ διαστάσεις τοῦ παραλληλεπιπέδου καὶ $\gamma_1, \gamma_2 \cdots \gamma_n$ αἱ ἐλάχισται συντεταγμέναι τῶν σημείων αὐτοῦ) ἔχει ἐξ ἀνάγκης συστήματα ἀνήκοντα εἰς τὴν ἐπιφάνειαν E τοῦ στερεοῦ T (διότι περιέχει καὶ συστήματα τοῦ T καὶ συστήματα ξένα τοῦ T) καὶ ὅτι τινὰ τῶν συστημάτων τούτων εἶνε ἄκρα συστήματα τοῦ παραλληλεπιπέδου, ἤτοι συστήματα τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ· διότι, ἂν θεωρήσωμεν σύστημά τι $x'_1, x'_2, \ldots, x_n$ τῆς ἐπιφανείας E ἐκτὸς τοῦ παραλληλεπιπέδου τούτου κείμενον, ἐν τῷ ὁποίῳ δηλαδὴ μία τοὐλάχιστον ἐκ τῶν μεταβλητῶν x_k κεῖται ἐκτὸς τοῦ διαστήματος $\gamma^k \ldots \gamma_k + h_k$, ἐπειδὴ ἡ ἐπιφάνεια E ὑποτίθεται ἑνιαία καὶ συνεχής, πρέπει τὸ σύστημα τοῦτο νὰ συνδέηται διὰ συνεχοῦς ἀκολουθίας συστημάτων τῆς ἐπιφανείας E πρὸς οἱονδήποτε σύστημα αὐτῆς $(x''_1, x''_2 \ldots x''_n)$ κείμενον ἐντὸς τοῦ παραλληλεπιπέδου· εἰς τὴν ἀκολουθίαν δὲ ταύτην τῶν συνδεόντων συστημάτων αἱ μεταβληταὶ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ κατά τινα τάξιν πρέπει νὰ ἔρχωνται ἑκάστη εἰς τὸ προσῆκον αὐτῇ διάστημα (ἡ x_k π. χ. εἰς τὸ διάστημα $\gamma_k \ldots \gamma^k + h_k$), διερχομένη κατ' ἀνάγκην διὰ μιᾶς ἐκ τῶν ἄκρων αὐτῆς τιμῶν (ἡ x_k ἢ διὰ τῆς γ_k ἢ διὰ τῆς $\gamma_k + h_k$)· ἐκεῖνο τὸ σύστημα, ὅπερ εἰσάγει τὴν τελευταίαν τῶν μεταβλητῶν εἰς τὸ προσῆκον αὐτῇ διάστημα, εἶνε προδήλως ἄκρον σύστημα παραλληλεπιπέδου ἀνῆκον εἰς τὴν ἐπιφάνειαν E.

Τούτου τεθέντος διακρίνομεν τὰ ἐντὸς ἐκτὸς παραλληλεπίπεδα εἰς τάξεις, ὡς ἑξῆς·

Ἐὰν παραλληλεπίπεδόν τι ἔχῃ ἄκρα συστήματα τῆς τάξεως ρ ἀνήκοντα εἰς τὴν ἐπιφάνειαν E τοῦ στερεοῦ T ἀλλ' οὐδὲν ταξεως ἀνωτέρας, τὸ παραλληλεπίπεδον τοῦτο λέγεται ὅτι εἶνε *τῆς τάξεως ϱ*.

Περὶ τῆς ἐπιφανείας E τοῦ στερεοῦ T ὑποθέτομεν ἐν τοῖς ἑπομένοις, ὅτι ἔχει τὴν ἑξῆς ἰδιότητα. Τὰ συστήματα αὐτῆς, ἐν οἷς τινὲς ἐκ τῶν μεταβλητῶν $x_1, x_2, \ldots x_n$ διατηροῦσιν ὡρισμένας τιμάς, σύγκεινται ἐκ πεπερασμένου τινος ἀριθμοῦ μερῶν (τὸ πολὺ λ) κεχωρισμένων ἀπ' ἀλλήλων, ὧν ἕκαστον εἶνε συνεχές, ἤτοι δύο συστήματα τοῦ αὐτοῦ μέρους συνδέονται πάντοτε διὰ συνεχοῦς ἀκολουθίας συστημάτων τοῦ αὐτοῦ μέρους.

Θεωρήσωμεν τὰ παραλληλεπίπεδα τῆς πρώτης τάξεως· ἔστω τ_1 τὸ τυχὸν ἐξ αὐτῶν καὶ τὰ παριστῶντα αὐτὸ συστήματα ἔστωσαν τὰ ἑξῆς

$$(1) \qquad x_k=\gamma_k+\lambda_k h_k \qquad (\lambda_k=0\ldots 1)$$
$$(k=1,2,3\ldots n)$$

Τὸ παραλληλεπίπεδον τοῦτο ἔχει ἐξ ὑποθέσεως ἄκρα συστήματα ἀνήκοντα εἰς τὴν ἐπιφάνειαν Ε τοῦ στερεοῦ· ἔστω ἓν ἐξ αὐτῶν τὸ

$$(\gamma_1, x'_2, x'_3 \ldots x'_n). \qquad (2)$$

Τὸ ἐπίπεδον $x_1=\gamma_1$ ὁρίζει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας Ε τὸ πολὺ λ χώρους Π_1^1, $\Pi_2^1 \ldots \Pi_\lambda^1$ κεχωρισμένους ἀπ' ἀλλήλων, ὧν ἕκαστος εἶνε συνεχής· λέγω δὲ ὅτι εἷς τουλάχιστον ἐκ τῶν χώρων τούτων κεῖται ὅλος ἐπὶ τοῦ παραλληλεπιπέδου τ_1, ἤτοι πᾶν σύστημα αὐτοῦ εἶνε σύστημα τοῦ τ_1 καὶ δίδεται ἑπομένως ὑπὸ τῶν τύπων (1), ὅταν τὰ $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ λάβωσι καταλλήλους τιμὰς (πάσας ὅμως μεταξὺ 0 καὶ 1) τὸ δὲ λ_1 διαμένει ἴσον τῷ 0.

Καὶ ὄντως, ἂν τὸ ἄκρον σύστημα (2) κεῖται ἐπὶ τοῦ χώρου Π_1^1, ἐπειδὴ ὁ χῶρος Π_1^1 εἶνε συνεχής, ἤτοι δύο τυχόντα συστήματα αὐτοῦ συνδέονται διὰ συνεχοῦς ἀκολουθίας συστημάτων ἀνηκόντων αὐτῷ, ἂν σημεῖόν τι τοῦ Π_1^1 (ἔστω τὸ $\gamma_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$) ἔκειτο ἐκτὸς τοῦ παραλληλεπιπέδου τ_1, ἐν τῇ ἀκολουθίᾳ τῶν συστημάτων, ἅτινα θὰ συνέδεον αὐτὸ πρὸς τὸ θεωρούμενον ἄκρον σύστημα $(\gamma_1, x'_2 \ldots x'^n)$ τὸ ἐπὶ τοῦ Π_1^1, εὑρισκόμενον, θὰ ὑπῆρχεν ἓν σύστημα εἰσάγον τὴν τελευταίαν ἐκ τῶν μεταβλητῶν $x_2, x_3, \ldots, x_n$ ἐντὸς τῶν ὁρίων της, ἔστω τὸ σύστημα τοῦτο τὸ ἑξῆς

$$(3) \qquad \begin{array}{ll} x_1=\gamma_1 & \\ x_2=\gamma_2+\varepsilon_2 h_2 & \varepsilon_2=0 \text{ ἢ } 1 \\ x_3=\gamma_3+\lambda_3 h_3 & \\ \ldots\ldots\ldots & 0<\lambda_3<1 \\ x_n=\gamma_n+\lambda_n h_n & 0<\lambda_4<1 \\ & \ldots\ldots \\ & 0<\lambda_n<1 \end{array}$$

ἀλλὰ τὸ σύστημα τοῦτο (3) εἶνε ἄκρον σύστημα τῆς δευτέρας τάξεως (διότι δύο μεταβληταί, αἱ x_1 καὶ x_2, ἔχουσιν ἐν αὐτῷ τὰς ἄκρας τιμὰς αὐτῶν) τοιαῦτα δὲ συστήματα δὲν ἔχει τὸ παραλληλεπίπεδον τ_1· ὥστε ὁ χῶρος Π_1^1 κεῖται ὅλος ἐπὶ τοῦ παραλληλεπιπέδου τ_1· ἐπειδὴ δὲ ὁ αὐτὸς χῶρος Π_1^1 κεῖται ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν παραλληλεπιπέδων, ἐν τοῖς ὁποίοις αἱ μὲν ἄλλαι μεταβληταὶ $x_2, x_3 \ldots x_n$ ἔχουσι τὰς αὐτὰς τιμάς, ἡ δὲ x_1 διανύει τὰς τιμὰς

$$\gamma_1-h_1 \dots \gamma_1 \dots \gamma_1+h_1,$$

συνάγεται ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν παραλληλεπιπέδων τῆς πρώτης τάξεως εἶνε τὸ πολὺ διπλάσιος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν χώρων Π^1, οὓς τὰ ἀχθέντα ἐπίπεδα ἐποίησαν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας E τοῦ στερεοῦ· ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ p_1 τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀχθέντων ἐπιπέδων τῆς μορφῆς

$$x_1=\alpha_1 \quad x_1=x'_1 \dots \quad x_1=\beta_1$$

καὶ διὰ p_2 τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀχθέντων ἐπιπέδων τῆς μορφῆς

$$x_2=\alpha_2 \quad x_2=x'_2 \dots \quad x_2=\beta_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ἐπειδὴ ἕκαστον τῶν ἐπιπέδων τούτων ἐποίησεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας E τὸ πολὺ λ χώρους Π^1, ἕπεται, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν παραλληλεπιπέδων τῆς πρώτης τάξεως εἶνε μικρότερος τοῦ

$$2\lambda(p_1+p_2+\dots+p_n).$$

Θεωρήσωμεν ἔπειτα τὰ παραλληλεπίπεδα τῆς δευτέρας τάξεως· ἔστω τ_2 τὸ τυχὸν ἐξ αὐτῶν καὶ ἄκρον σύστημα αὐτοῦ τῆς δευτέρας τάξεως ἔστω τὸ ἑξῆς

$$(4) \qquad \begin{aligned} &x_1=\gamma_1 \\ &x_2=\gamma_2 \\ &x_3=\gamma_3+\lambda_3 h_3 \\ &\dots\dots \qquad\qquad (\lambda=0,\dots 1) \\ &x_n=\gamma_n+\lambda_n h_n \end{aligned}$$

τὰ δύο ἐπίπεδα ὁμοῦ

$$x_1=\gamma_1, \quad x_2=\gamma_2$$

ὁρίζουσιν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας E τοῦ στερεοῦ τὸ πολὺ λ χώρους $(\Pi^2_1\ \Pi^2_2 \dots \Pi^2_\lambda)$ κεχωρισμένους ἀπ᾿ ἀλλήλων, ὧν ἕκαστος εἶνε συνεχής· λέγω δέ, ὅτι, ἂν τὸ ἄκρον σύστημα (4) κεῖται ἐπὶ τοῦ χώρου Π^2_1, ὁ χῶρος οὗτος ὁλόκληρος κεῖται ἐπὶ τοῦ παραλληλεπιπέδου τ_2.

Καὶ ὄντως· ἂν σύστημά τι τοῦ χώρου Π^2_1 ἔκειτο ἐκτὸς τοῦ παραλληλεπιπέδου τ_2, θὰ ὑπῆρχε συνεχής τις ἀκολουθία συστημάτων συνδεόντων αὐτὸ πρὸς τὸ ἄκρον σύστημα (4) ὅπερ κεῖται ἐπὶ τοῦ τ_2· ἀκολουθοῦντες δὲ τὴν σειρὰν ταύτην τῶν συστημάτων θὰ ἐφθάνομεν ἀναγκαίως εἰς σύστημά τι, ὅπερ θὰ εἰσῆγε τὴν τελευταίαν τῶν μεταβλητῶν $x_3 x_4 \dots x_n$ ἐντὸς τῶν ἀνηκόντων αὐτῇ ὁρίων· ἔστω τὸ σύστημα τοῦτο

$$x_1 = \gamma_1$$
$$x_2 = \gamma_2$$
$$x_3 = \gamma_3$$
$$x_4 = \gamma_4 + \lambda_4 h_4$$
$$\dots\dots\dots$$

ἀλλὰ τὸ σύστημα τοῦτο εἶνε ἄκρον σύστημα τῆς τρίτης τάξεως καὶ τοιοῦτον οὐδὲν ἔχει τὸ παραλληλεπίπεδον τ_2· ὁλόκληρος ἄρα ὁ χῶρος Π_1^2 κεῖται ἐπὶ τοῦ παραλληλεπιπέδου τ_2. Ἐπειδὴ δὲ ὁ αὐτὸς χῶρος Π_1^2 κεῖται ἐπὶ 4 παραλληλεπιπέδων, ἐν οἷς αἱ δύο μεταβληταὶ x_1 καὶ x_2 διανύουσι τὰς τιμὰς

$$x_1 = \gamma_1 - h_1 \cdot \gamma_1 \cdots \gamma_1 + h_1$$
$$x_2 = \gamma_2 - h_2 \cdots \gamma_2 \cdots \gamma_2 + h_2$$

αἱ δὲ λοιπαὶ ἔχουσαι τὰς αὐτὰς τιμάς, ἃς καὶ ἐν τῷ τ_2, συνάγεται ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν παραλληλεπιπέδων τῆς δευτέρας τάξεως εἶνε τὸ πολὺ τετραπλάσιος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν χώρων Π^2, οὓς τὰ ἀχθέντα ἐπίπεδα ἀνὰ δύο λαμβανόμενα (μὴ παράλληλα) ἐποίησαν ἐπὶ τῆς ἐπιφανεία Ε· ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς τῶν χώρων Π^2 εἶνε μικρότερος τοῦ ἀριθμοῦ

$$\lambda(p_1 p_2 + p_1 p_3 + \dots + p_{n-1} p_n)$$

διότι αἱ μένουσαι σταθεραὶ δύο μεταβληταὶ δύνανται νὰ εἶνε οἱαιδήποτε ἐκ τῶν n μεταβλητῶν $x_1, x_2 \dots x_n$· ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς τῶν παραλληλεπιπέδων τῆς δευτέρας τάξεως εἶνε μικρότερος τοῦ

$$2^2 . \lambda(p_1 p_2 + p_1 p_3 + \dots + p_{n-1} p_n)$$

Ὁμοίως δεικνύεται, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν παραλληλεπιπέδων τῆς ρ τάξεως ($\rho = 1, 2, 3 \dots n-2$) εἶνε μικρότερος τοῦ ἑξῆς ἀριθμοῦ

$$2^\rho . \lambda(p_1 p_2 \cdots p_\rho + \dots\dots)$$

ὅστις εἶνε τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν δυνατῶν γινομένων τῶν ἀριθμῶν $p_1, p_2 \dots p_n$ ἀνὰ ρ λαμβανομένων πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ $2^\rho . \lambda$.

Θεωρήσωμεν τέλος τὰ παραλληλεπίπεδα τῶν δύο τελευταίων τάξεων· ἔστω δὲ τ΄ τὸ τυχὸν ἐξ αὐτῶν· τοῦτο ἔχει κοινὸν μετὰ τῆς ἐπιφανείας

Ε ἄκρον τι σύστημα τῆς τάξεως $n-1$· ἔστω τὸ ἑξῆς

$$(5)\qquad \begin{aligned} &x_1=\gamma_1\\ &x_2=\gamma_2\\ &\quad\cdots\cdot\\ &x_{n-1}=\gamma_{n-1}\\ &x_n=\gamma_n+\lambda_n h_n \end{aligned}$$

ἀλλ' ὅταν ἐκ τῶν n μεταβλητῶν $x_1, x_2, \ldots, x_n$ αἱ $n-1$ ἔχωσιν ὡρισμένας τιμὰς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας Ε, καὶ ἡ λοιπὴ ἔχει ὡρισμένας τινὰς τιμὰς (τὸ πλεῖστον λ), διότι αἱ n μεταβληταὶ συνδέονται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας Ε δι' ἐξισώσεώς τινος· ὑπάρχουσι δηλαδὴ τὸ πολὺ λ συστήματα τῆς ἐπιφανείας Ε, ἤτοι λ σημεῖα αὐτῆς, ἔχοντα

$$x_1=\gamma_1,\qquad x_2=\gamma_2, \ldots x_{n-1}=\gamma_{n-1}$$

διὰ τοῦτο ἐν τῷ ἄκρῳ συστήματι (5) ἡ μεταβλητὴ x_n ἔχει καὶ αὐτὴ ὡρισμένας τινὰς τιμὰς (τὸ πολὺ λ)· ἐπομένως ἄκρα συστήματα τῆς μορφῆς (5) δὲν δύνανται νὰ εἶνε περισσότερα τῶν λ· διὰ τοῦτο ὁ ἀριθμὸς τῶν ἄκρων συστημάτων τῶν δύο τελευταίων τάξεων τῶν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν Ε ἀνηκόντων εἶνε μικρότερος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν σημείων, ἅτινα ποιοῦσιν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας Ε τὰ ἀχθέντα ἐπίπεδα ἀνὰ $n-1$ λαμβανόμενα (μὴ παράλληλα), ἤτοι μικρότερος τοῦ ἀριθμοῦ

$$\lambda(p_2p_3\cdot p_n+p_1p_3\cdot\cdot p_n+\ldots+p_1p_2\cdot\cdot p_{n-1})$$

καὶ ἐπειδὴ ἕκαστον τοιοῦτον σύστημα εἶνε κοινὸν εἰς 2^{n-1} παραλληλεπίπεδα (ἂν εἶνε τῆς τάξεως $n-1$) ἢ εἰς 2^n (ἂν εἶνε τῆς τάξεως n) συμπεραίνομεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν παραλληλεπιπέδων τῶν τάξεων $n-1$ καὶ n ὁμοῦ εἶνε μικρότερος τοῦ

$$2^n.\lambda(p_2p_3\cdot\cdot p_n+p_1p_3\cdot\cdot p_n+\ldots+p_1p_2\cdot\cdot p_{n-1})$$

Ὁ ὅλος ἄρα ἀριθμὸς τῶν ἐντὸς ἐκτὸς παραλληλεπιπέδων εἶνε μικρότερος τοῦ ἀριθμοῦ

$$2^n.\lambda\left\{(p_1+1)(p_2+1)(p_3+1)\ldots(p_n+1)-p_1p_2p_3\cdot p_n\right\}\tag{6}$$

καὶ ἐπειδὴ ὁ ὄγκος ω τοῦ τυχόντος τῶν παραλληλεπιπέδων εἶνε

$$h_1\,h_2\ldots h_n,\ \text{ἔνθα}\ h_k=\frac{\beta_k-\alpha_k}{2^\nu}=\frac{\beta_k-\alpha_k}{p_k-1}\qquad k=1,2,\ldots n)$$

έπεται, ότι τὸ γινόμενον σωΜ εἶνε μικρότερον τοῦ

$$2^n.\lambda M h_1 h_2 \ldots h_n \left\{ (p_1+1)(p_2+1)\ldots(p_n+1) - p_1 p_2 \ldots p_n \right\}$$

ἤτοι τοῦ $$2^n.\lambda M \left\{ (\beta_1-\alpha_1+2h_1)(\beta_2-\alpha_2+2h_2)\ldots(\beta_n-\alpha_n+2h_n) - \right.$$

$$\left. -(\beta_1-\alpha_1+h_1)(\beta_2-\alpha_2+h_2)\ldots(\beta_n-\alpha_n+h_n) \right\}$$

ἐπειδὴ δὲ τοῦτο τείνει πρὸς τὸ 0 καθ' ὅσον αἱ διαστάσεις $h_1, h_2 .. h_n$ τῶν παραλληλεπιπέδων τείνουσι πρὸς τὸ 0, συνάγεται ὅτι καὶ τὸ γινόμενον σ.ω.Μ κατὰ μείζονα λόγον τείνει ὡσαύτως πρὸς τὸ 0· καὶ ἐπομένως ἀμφότερα τὰ ἀθροίσματα σ_ν καὶ Σ_ν τείνουσι πρὸς τὸ αὐτὸ ὅριον.

Σημείωσις. Ἐν τῇ διαιρέσει τοῦ στερεοῦ Τ, ἣν πρώτην θεωροῦμεν, οἱ ἀριθμοὶ $p_1, p_2 .. p_\nu$ τῶν ἀγομένων ἐπιπέδων εἶνε πάντες ἴσοι ἀλλήλοις· ἀλλ' ὁ προσδιορισμὸς τοῦ ἀνωτέρου ὁρίου τοῦ ἀριθμοῦ σ τῶν ἐντὸς ἐκτὸς κειμένων παραλληλεπιπέδων ἐγένετο κατὰ τρόπον τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἁρμόζῃ γενικῶς εἰς πᾶσαν διαίρεσιν τοῦ Τ δι' ἐπιπέδων παραλλήλων τοῖς συντεταγμένοις.

Καὶ ἂν λαμβάνωμεν πάντα τὰ ἐσωτερικὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὅσα θέλωμεν ἐκ τῶν ἐντὸς ἐκτὸς ἢ μέρη τούτων (π.χ. τὰ ἐντὸς τοῦ στερεοῦ Τ κείμενα) καὶ πολλαπλασιάζωμεν ἕκαστον τῶν ληφθέντων ἐπὶ τὴν τιμήν, ἣν ἔχει ἡ συνάρτησις φ εἰς ἓν οἱονδήποτε ἐκ τῶν σημείων του, καὶ τὸ οὕτω προκύπτον ἄθροισμα Θ_ν τείνει πρὸς τὸ αὐτὸ ὅριον· διότι προφανῶς εἶνε

$$\sigma_\nu < \Theta_\nu < \Sigma_\nu .$$

Μένει ἔτι νὰ δειχθῇ, ὅτι, καὶ ὅταν γενικώτερον διαιρῶμεν τὸ στερεὸν Τ διὰ n σειρῶν παραλλήλων ἐπιπέδων

$$x_i=\alpha_i, \quad x_i=x_i^{(1)} \quad x_i=x_i^{(2)} \ldots \; x_i=\beta_i$$
$$(i=1,2,3\ldots n)$$

ἐν οἷς ἑκάστη τῶν μεταβλητῶν προχωρεῖ αὐξανομένη ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης τιμῆς αὐτῆς ἐν τῷ Τ μέχρι τῆς μεγίστης διερχομένη διὰ τῶν τυχουσῶν τιμῶν, ἐὰν καὶ πάλιν λαμβάνωμεν πάντα τὰ ἐντὸς τοῦ Τ κείμενα παραλληλεπίπεδα καὶ ὅσα θέλωμεν ἐκ τῶν ἐντὸς ἐκτὸς (ἢ καὶ μέρη αὐτῶν) καὶ πολλαπλασιάζωμεν τὸν ὄγκον ἑκάστου τῶν ληφθέντων μερῶν ἐπὶ τὴν τιμήν, ἣν ἔχει ἡ συνάρτησις φ εἰς ἓν οἱονδήποτε ἐκ τῶν σημείων του, καὶ τὸ οὕτω σχηματιζόμενον ἄθροισμα

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma..}\left(x_1^{(\alpha+1)}-x_1^{(\alpha)}\right)\left(x_2^{(\beta+1)}-x_2^{(\beta)}\right)\cdots\left(x_n^{(\nu+1)}-x_n^{(\nu)}\right)\varphi\left(\xi_1^{(\alpha)},\xi_2^{(\beta)}\ldots\xi_n^{(\nu)}\right)$$

ἔνθα

$$x_1^{(\alpha)}\leqq\xi_1^{(\alpha)}\leqq x_1^{(\alpha+1)}$$

$$x_2^{(\beta)}\leqq\xi_2^{(\beta)}\leqq x_2^{(\beta+1)}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n^{(\nu)}\leqq\xi_n^{(\nu)}\leqq x_n^{(\nu+1)}$$

τείνει πρὸς τὸ αὐτὸ ὅριον, ὅταν ἑκάστη τῶν διαφορῶν δύο ἐφεξῆς τιμῶν ἑκάστης τῶν n μεταβλητῶν τείνῃ πρὸς τὸ 0.

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν, ὅτι καὶ κατὰ τὴν γενικωτέραν ταύτην διαίρεσιν οἱ ὅροι τοῦ ἀθροίσματος, περὶ οὗ ὁ λόγος, οἱ προερχόμενοι ἐκ τῶν ἐντὸς ἐκτὸς κειμένων παραλληλεπιπέδων οὐδεμίαν ἐπίδρασιν ἔχουσιν ἐπὶ τοῦ ὁρίου αὐτοῦ, διότι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἔχει ὅριον τὸ 0.

Καὶ ὄντως, ὁσονδήποτε μέγας καὶ ἂν ληφθῇ ὁ ἀριθμὸς ν, εἶνε δυνατὸν ἐξ ὑποθέσεως νὰ προχωρήσῃ ἡ διαίρεσις τόσον, ὥστε πᾶσα διαφορὰ δύο ἐφεξῆς τιμῶν ἑκάστης μεταβλητῆς νὰ γίνῃ μικροτέρα τῶν

$$\frac{\beta_1-\alpha_1}{2^\nu},\ \frac{\beta_2-\alpha_2}{2^\nu},\ldots,\frac{\beta_n-\alpha_n}{2^\nu},\ \text{ἤτοι τῶν}\ h_1,h_2,..,h_n$$

(ὅτε τὰ παραλληλεπίπεδα τῆς νέας διαιρέσεως ἔχουσι διαστάσεις μικροτέρας ἢ τὰ τῆς πρώτης)· ἐὰν τότε νοήσωμεν καὶ τὴν πρώτην διαίρεσιν γινομένην καὶ προχωροῦσαν, μέχρις οὗ ἑκάστη τῶν διαφορῶν $\beta_i-\alpha_i$ διαιρεθῇ εἰς 2^ν ἴσα μέρη, καὶ προσαρτήσωμεν εἰς ἕκαστον τῶν παραλληλεπιπέδων τῆς διαιρέσεως ταύτης, ἅτινα κεῖνται ἐντὸς ἐκτός, τὰ πέριξ αὐτοῦ παραλληλεπίπεδα (ὧν ὁ ἀριθμὸς εἶνε 3^n-1), ἀποτελεῖται ὑπ' αὐτῶν φλοιός τις, ἐν τῷ ὁποίῳ περιλαμβάνονται πάντα τὰ ἐντὸς ἐκτὸς μέρη τὰ κατὰ τὴν τυχοῦσαν διαίρεσιν προκύψαντα· ἑπομένως οἱ ὅροι, οὓς ταῦτα παρέχουσιν, δίδουσιν ἄθροισμα μικρότερον τοῦ $M.\sigma.3^n.\omega$, ὅπερ τείνει πρὸς τὸ 0.

Τούτου τεθέντος, νοήσωμεν δύο τυχούσας διαιρέσεις τοῦ παραλληλεπιπέδου Θ καὶ ἔστωσαν τὰ παραλληλεπίπεδα τῆς μιᾶς, τὰ

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ ..,\ \alpha_\nu\quad \text{καὶ}\quad \alpha'_1,\ \alpha'_2,\ ..\ ,\ \alpha'_\sigma$$

τῆς δὲ ἄλλης τὰ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\varrho$ καὶ $\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_\tau$, ἔνθα τὰ ἄτονα γράμματα παριστῶσι τὰ ἐντὸς τοῦ στερεοῦ Τ κείμενα παραλληλεπίπεδα, τὰ δὲ τονούμενα τὰ ἐντὸς ἐκτός.

Τὰ δύο ἀθροίσματα, ἅτινα αἱ δύο διαιρέσεις παρέχουσι, δύνανται νὰ γραφῶσιν ὡς ἑξῆς

$$A = \Sigma\alpha_i\varphi(\alpha_i) + \Sigma\alpha'_k\varphi(\alpha'_k)$$
$$B = \Sigma\beta_i\varphi(\beta_i) + \Sigma\beta'_k\varphi(\beta'_k).$$

ἐὰν νῦν νοήσωμεν ἀμφοτέρας τὰς διαιρέσεις γινομένας ἐπὶ τοῦ παραλληλεπιπέδου Θ, θὰ προκύψωσιν ἐσωτερικὰ μὲν μέρη τὰ

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_\mu,$$

ἐντὸς δὲ ἐκτὸς τὰ $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots \gamma'_\pi$.

Πάντα τὰ ἐσωτερικὰ παραλληλεπίπεδα

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu \quad \text{καὶ} \quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\varrho$$

ἀμφοτέρων τῶν διαιρέσεων γίνονται ἐκ τῶν ἐσωτερικῶν μερῶν

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_u$$

ἤτοι ἕκαστον ἐξ αὐτῶν εἶνε ἄθροισμα τινῶν ἐκ τῶν $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_u$ Ἀλλὰ καὶ εἴς τινα τῶν ἐντὸς ἐκτὸς

$$\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_\sigma \quad \text{καὶ} \quad \beta'_1, \beta'_2, \ldots \beta'_\tau$$

δυνατὸν νὰ ὑπάρχωσί τινα ἐκ τῶν $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\varkappa$ (ὅσα ἐκ τούτων δὲν ὑπάρχουσιν εἰς τὰ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ θὰ εὑρίσκωνται ἐν τοῖς $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_\sigma$)

Ἐὰν νῦν ἀντικαταστήσωμεν τὰ α_i καὶ β_i ἐν τοῖς ἀθροίσμασιν Α καὶ Β ἕκαστον διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γ, ἐξ ὧν σύγκειται, καὶ ἕκαστον τῶν α_i' καὶ β_i' ἐὰν ἔχῃ τινὰ ἐκ τῶν $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ ἀναλύσωμεν ὁμοίως, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὰ ἀθροίσματα ταῦτα ὡς ἑξῆς (παράβλ. ἐδ. 133)

$$A = \Sigma\gamma_i\varphi(\alpha_{\gamma i}) + \Sigma\bar{\alpha}'_u\varphi(\alpha_k)$$
$$B = \Sigma\gamma_i\varphi(\beta_{\gamma i}) + \Sigma\bar{\beta}'_k\varphi(\beta'_k)$$

ἔνθα διὰ $\bar{\alpha}'_k$ καὶ $\bar{\beta}'_k$ παριστῶμεν τὰ μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἐσωτερικῶν μερῶν γ ὑπολειφθέντα μέρη τῶν α'_k καὶ β'_k.

Ἐκ τούτων γίνεται φανερόν, ὅτι ἀμφότερα τὰ ἀθροίσματα Α καὶ Β τείνουσι πρὸς τὸ αὐτὸ ὅριον· διότι τὰ μὲν πρῶτα ἀθροίσματα ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὅριον, τὰ δὲ δεύτερα ἔχουσι ὅριον τὸ 0, ὡς προερχόμενα ἐκ τῶν ἐντὸς ἐκτὸς μερῶν. Ἐδείχθη ἄρα, ὅτι

Ἐὰν τὸ στερεὸν T διαιρῆται διὰ n σειρῶν παραλλήλων ἐπιπέδων

$$x_i=\alpha_i,\quad x_i=x_i^{(1)},\quad x_i=x_i^{(2)},\ \ldots,\quad x_i=\beta_i$$

$$(i=1,2,3,..,n)$$

καὶ λαμβάνωμεν τὰ ἐντὸς αὐτοῦ παραλληλεπίπεδα καὶ ὅσα θέλωμεν ἐκ τῶν ἐντὸς ἐκτὸς (ἢ καὶ μέρη τούτων) καὶ πολλαπλασιάζωμεν τὸν ὄγκον ἑκάστου τῶν λαμβανομένων ἐπὶ τὴν τιμήν, ἣν ἔχει ἡ δεδομένη συνάρτησις $\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ εἰς ἓν οἱονδήποτε τῶν σημείων του, τὸ οὕτω σχηματιζόμενον ἄθροισμα τείνει πρὸς ὅριόν τι πεπερασμένον καὶ ἐντελῶς ὡρισμένον, ὅταν τὰ παραλληλεπίπεδα γίνωνται ἀπειροστὰ κατὰ πάσας τὰς διαστάσεις αὐτῶν.

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ἄνευ τῆς γεωμετρικῆς βοηθείας, ὡς ἑξῆς·

Ἔστωσαν $x_1,x_2,\ .\ ,x_n$ ὁσαιδήποτε μεταβληταὶ ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων καὶ δυνάμεναι νὰ λάβωσι πάσας τὰς μίαν ἀνισότητα (ἢ περισσοτέρας) πληρούσας τιμάς, αἵτινες τιμαὶ ὑποτίθεται, ὅτι ἀποτελοῦσι πληθύν τινα συνεχῆ καὶ πεπερασμένην, ἐν τῇ ὁποίᾳ ἑκάστη μεταβλητὴ διαμένει ἔν τινι διαστήματι (ἡ x_i π.χ. ἐν τῷ διαστήματι $\alpha_i\ \ldots\ \beta_i$), ἔστω δὲ καὶ συνάρτησίς τις τῶν μεταβλητῶν τούτων ἡ $\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ἥτις ὑποτίθεται συνεχὴς καὶ πεπερασμένη καὶ ἔχουσα μίαν μόνην (πραγματικὴν) τιμὴν δι' ἕκαστον σύστημα τιμῶν, ἃς λαμβάνουσιν αἱ μεταβληταὶ $x_1,x_2,..,x_n$· ἐὰν ἑκάστη τῶν μεταβλητῶν τούτων αὐξάνῃ ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης τιμῆς αὐτῆς μέχρι τῆς μεγίστης διερχομένη διὰ τιμῶν οἱωνδήποτε (οἷον ἡ x_i ἀπὸ τῆς α_i μέχρι τῆς β_i διερχομένη διὰ τῶν τιμῶν $x_i^{(1)}$, $x_j^{(2)}$, .. , $x_i^{(\varrho-1)}$) καὶ λαμβάνοντες ἕκαστον σύστημα τιμῶν πληροῦν τὴν εἰρημένην ἀνισότητα (οἷον τὸ $x'_1,x'_2,\ldots,x'_n$) σχηματίζωμεν τὸ γινόμενον πασῶν τῶν αὐξήσεων τῶν μεταβλητῶν ἀπὸ τῆς τιμῆς, ἣν ἔχει ἑκάστη ἐν τῷ ληφθέντι συστήματι, μέχρι τῆς ἑπομένης τιμῆς αὐτῆς, καὶ τὸ γινόμενον τοῦτο πολλαπλασιάζωμεν ἔπειτα ἐπὶ τὴν τιμήν, ἣν λαμβάνει ἡ δεδομένη συνάρτησις $\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ὅταν ἑκάστη τῶν μεταβλητῶν ἔχῃ ἢ τὴν τιμὴν ἣν ἔχει ἐν τῷ ληφθέντι συστήματι ἢ τὴν ἀμέσως ἑπομένην ἢ καὶ ἄλλην οἱανδήποτε μεταξὺ τῶν δύο τούτων περιλαμβανομένην, τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τούτων τείνει πρός τι ὅριον πεπερασμένον καὶ ἐντελῶς ὡρισμένον, ὅταν ἑκάστη τῶν αὐξήσεων ἑκάστης τῶν μεταβλητῶν τείνῃ πρὸς τὸ 0.

Τὸ ὅριον τοῦτο καλοῦμεν *ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα* τῆς παραστάσεως $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1, dx_2, .., dx_n$ ἐν τῇ ὑπὸ τῆς ἀνισότητος ὁριζομένῃ πληθύϊ (ἢ ἐν τῷ τόπῳ T) καὶ σημειοῦμεν ὡς ἑξῆς

$$\int \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n \quad \text{ἢ} \quad \int_T \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

$$\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0$$

Σημείωσις α'. Ἐὰν ἡ συνάρτησις φ ἐν τῷ τόπῳ T τῆς ὁλοκληρώσεως εἶνε ἀρνητική, φανερὸν εἶνε, ὅτι τὸ ὅριον πάλιν ὑπάρχει καὶ εἶνε ἀρνητικὸς ἀριθμός, ὁ ἀντίθετος ἐκείνου, ὃν εὑρίσκομεν λαμβάνοντες τὰς τιμὰς τῆς συναρτήσεως φ θετικῶς. Ἐὰν δὲ ὁ τόπος T χωρίζηται εἰς μέρη $T_1, T_2, .., T_\varrho$ (ὧν ὁ ἀριθμὸς πεπερασμένος) εἰς ἕκαστον τῶν ὁποίων ἡ συνάρτησις διατηρεῖ τὸ ἑαυτῆς σημεῖον, τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ἄθροισμα ἀποδεικνύεται εὐκόλως (ἐδ. 136), ὅτι ἔχει πάλιν ὅριον, ὅπερ εἶνε τὸ ἄθροισμα τῶν ὁλοκληρωμάτων τῆς παραστάσεως $\varphi . dx_1 dx_2 .. dx_n$ εἰς τὰ διάφορα μέρη τοῦ T.

Σημείωσις β'. Ἐὰν ἡ συνάρτησις φ εἶνε ἴση τῇ μονάδι 1, τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_T dx_1, dx_2 .. dx_n$$

λέγεται ***ὄγκος*** τοῦ τόπου T κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὰ διπλᾶ καὶ τὰ τριπλᾶ ὁλοκληρώματα

$$\int_T dxdy \quad \text{καὶ} \quad \int_T dxdydz,$$

ἅτινα παριστῶσι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τόπου τῆς διπλῆς ὁλοκληρώσεως καὶ τὸν ὄγκον τοῦ τόπου τῆς τριπλῆς.

204. Πᾶσαι αἱ ἰδιότητες τῶν διπλῶν ὁλοκληρωμάτων αἱ ἐν σελ. 232 ἀποδειχθεῖσαι ἀληθεύουσι γενικῶς περὶ πάντων τῶν ὡρισμένων ὁλοκληρωμάτων καὶ ἀποδεικνύονται ὁμοίως.

Καὶ ἡ εὕρεσις τοῦ ὁλοκληρώματος

$$\int_T \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

ἀνάγεται καθ' ὅμοιον τρόπον εἰς n ἁπλᾶς ὁλοκληρώσεις μίαν πρὸς ἑκάστην τῶν n μεταβλητῶν· καὶ ἡ τάξις τῶν ὁλοκληρώσεων τούτων εἶνε ἐντελῶς ἀδιάφορος πρὸς τὸ ἐξαγόμενον· ἐν ἑκάστῃ δὲ ὁλοκληρώσει τὰ ὅρια τῆς μεταβλητῆς, πρὸς ἣν ὁλοκληροῦμεν, εἶνε ἡ ἐλαχίστη τιμὴ αὐτῆς καὶ ἡ μεγίστη ἐν τῷ τόπῳ T, ὅταν αἱ ἐν τῇ ὁλοκληρώσει ταύτῃ θεωρούμεναι ὡς σταθεραὶ (ἐκ τῶν n μεταβλητῶν) μένωσιν ἀμετάβλητοι διατηροῦσαι τὰς τυχούσας τιμὰς αὐτῶν· τῆς τελευταίας δὲ ὁλοκληρώσεως ὅρια εἶνε ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς πρὸς ἣν γίνεται ἡ ὁλοκλήρωσις μεταβλητῆς καὶ ἡ μεγίστη ἐν τῷ τόπῳ T.

Μετασχηματισμὸς τῶν πολλαπλῶν ὁλοκληρωμάτων ἐν γένει.

205. Ὁ μετασχηματισμὸς τῶν πολλαπλῶν ὁλοκληρωμάτων οἱασδήποτε τάξεως γίνεται κατὰ τὴν ἀναλυτικὴν μέθοδον τοῦ ἐδ. 192 ὡς ἀκολούθως·

Ἔστωσαν δεδομέναι αἱ n συναρτήσεις

$$(1) \qquad u_i = \sigma_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (i=1,2,3,\ldots,n)$$

τῶν μεταβλητῶν $x_1, x_2, \ldots, x_n$· ἔστωσαν δὲ τοιαῦται, ὥστε πρὸς ἕκαστον σύστημα τιμῶν τῶν $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ἐν τῷ τόπῳ T τῆς ὁλοκληρώσεως νὰ ἀντιστοιχῇ ἓν καὶ μόνον ἓν σύστημα τιμῶν τῶν $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ἔν τινι τόπῳ U, καὶ ἀντιστρόφως πρὸς ἕκαστον σύστημα τιμῶν τῶν $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ἐν τῷ τόπῳ U νὰ ἀντιστοιχῇ ἓν καὶ μόνον ἓν σύστημα τιμῶν τῶν $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ἐν τῷ τόπῳ T· τὰ σημεῖα τῶν δύο τόπων T καὶ U ἀντιστοιχοῦσι τότε πρὸς ἄλληλα ἓν πρὸς ἕν· καὶ αἱ ἐξισώσεις (1) λυόμεναι πρὸς $x_1, x_2, \ldots, x_n$ δίδουσιν

$$(1') \qquad x_i = f_i(u_1, u_2, \ldots, u_n), \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

Τούτου τεθέντος, δυνάμεθα νὰ μετασχηματίσωμεν τὸ ὁλοκλήρωμα

$$(o) \qquad \int_T \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

εἰς τὰς νέας μεταβλητὰς $u_1, u_2, \ldots, u_n$· γίνεται δὲ τοῦτο ὡς ἑξῆς·

Ἐὰν τὴν ὁλοκλήρωσιν πρὸς x_1 τάξωμεν πρώτην, θὰ ἔχωμεν

$$\int_T \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1, dx_2, \ldots, dx_n = \int dx_2\, dx_3 \ldots dx_n \int \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1$$

ἀλλὰ κατὰ τὴν ἁπλῆν ταύτην ὁλοκλήρωσιν πρὸς x_1 (καθ' ἣν αἱ $x_2, x_3, \ldots, x_n$ θεωροῦνται σταθεραὶ) δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὴν μεταβλητὴν τῆς ὁλοκληρώσεως x_1 διὰ τῆς u_1· τότε δὲ πρέπει νὰ θέσωμεν μὲν εἰς τὴν συνάρτησιν $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ἀντὶ τῆς x_1 τὴν τιμὴν αὐτῆς ἐκπεφρασμένης διὰ τῶν $x_2, x_3, \ldots, x_n$ καὶ u_1, ὅτε αὕτη γίνεται $\varphi_1(u_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, εἰς δὲ τὸν τόπον τοῦ dx_1 νὰ θέσωμεν τὸ διαφορικὸν αὐτοῦ πρὸς u_1, ὅταν θεωρῆται ὡς συνάρτησις τῶν εἰρημένων μεταβλητῶν $u_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, μένωσι δὲ σταθεραὶ αἱ $x_2, x_3, \ldots, x_n$· τότε αἱ ἐξισώσεις (1') δίδουσι·

$$dx_1 = \frac{\partial f_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f_1}{du_2} du_2 + \;\cdot\; + \frac{\partial f_1}{du_n} du_n$$

$$0 = \frac{df_2}{du_1} du_1 + \frac{\partial f_2}{\partial u_2} du_2 + \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial u_n} \partial u_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 = \frac{\partial f_n}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f_n}{\partial u_2} du_2 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial u_n} du_n$$

Ἐκ δὲ τούτων ἀπαλείφοντες τὰ $du_2, du_3, \ldots, du_n$, εὑρίσκομεν

$$dx_1 = \frac{\Delta}{\Delta_1} du_1$$

ἔνθα
$$\Delta = \frac{d(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{d(u_1, u_2, \ldots, u_n)}, \qquad \Delta_1 = \frac{d(f_2, f_3, \ldots, f_n)}{d(u_2, u_3, \ldots, u_n)}$$

ὅθεν ἕπεται

$$\int_T \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \int dx_2 dx_3 \ldots dx_n \int \varphi_1(u_1, x_2 \ldots x_n) \frac{\Delta}{\Delta_1} du_1$$

Ἐὰν δὲ ἐν τῷ ὁλοκληρώματι τοῦ δευτέρου μέλους τάξωμεν νῦν πρώτην τὴν ὁλοκλήρωσιν πρὸς x_2 καὶ ἀντικαταστήσωμεν ἔπειτα ἐν τῇ ὁλοκληρώσει ταύτῃ τὴν μεταβλητὴν τῆς ὁλοκληρώσεως x_2 διὰ τῆς u_2, θὰ ἔχωμεν πρῶτον μὲν νὰ ἐκφράσωμεν τὴν x_2 διὰ τῶν μεταβλητῶν $u_1, u_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$ καὶ νὰ θέσωμεν τὴν τιμὴν αὐτῆς εἰς τὴν ὁλοκληρωτέαν συνάρτησιν $\varphi_1(u_1, x_2, \ldots, x_n) \dfrac{\Delta}{\Delta_1}$, ἔπειτα δὲ νὰ εὕρωμεν τὸ διαφορικὸν τοῦ x_2, ὅταν θεωρῆται ὡς συνάρτησις τῶν $u_1, u_2, x_3, \ldots, x_n$, μένωσι δὲ σταθεραὶ αἱ $u_1\ x_3, \ldots, x_n$· τότε δὲ εὑρίσκομεν ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1′)

$$dx_2 = \frac{\partial f_2}{\partial u_2} du_2 + \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial u_n} du_n$$

$$0 = \frac{\partial f_3}{\partial u_2} du_2 + \ldots + \frac{\partial f_3}{\partial u_n} du_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 = \frac{\partial f_n}{\partial u_2} du_2 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial u_n} du_n$$

ὅθεν $$dx_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} du_2 \qquad \text{ἔνθα} \quad \Delta_2 = \frac{d(f_3, f_4, \ldots, f_n)}{d(u_3, u_4, \ldots, u_n)}$$

ἑπομένως θὰ εἶνε

$$\int_T \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n = \int \varphi_2(u_1, u_2, x_3, \ldots, x_n) \frac{\Delta}{\Delta_2} du_1 du_2 dx_3 \ldots dx_n$$

Ἐξακολουθοῦντες τοιουτοτρόπως βλέπομεν, ὅτι θὰ εἶνε

$$(2) \qquad \int_T \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \int_U \Phi(u_1, u_2, \ldots, u_n) \frac{d(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{d(u_1, u_2, \ldots, u_n)} du_1 du_2 \ldots du_n$$

ἔνθα διὰ τοῦ $\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ παρεστήσαμεν τὴν συνάρτησιν $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ὅταν τεθῶσιν ἐν αὐτῇ αἱ τιμαὶ τῶν $x_1, x_2, \ldots, x_n$ διὰ τῶν $u_1, u_2, \ldots u_n$.

Πολλαπλᾶ ὁλοκληρώματα ἀναγόμενα εἰς τὰ Εὐληριανά.

206. Ἐν τῇ θεωρίᾳ τῶν Εὐληριανῶν ὁλοκληρωμάτων (σελ. 278) ἐδείχθη, ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ πρώτου εἴδους

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx \qquad p>0,\ q>0$$

ἀνάγεται εἰς τὰ ὁλοκληρώματα τοῦ δευτέρου εἴδους καὶ εἶνε

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Ἐὰν δὲ θέσωμεν $x=\frac{u}{\alpha}$ $(\alpha>0)$ καὶ ἑπομένως $dx=\frac{du}{\alpha}$, εὑρίσκομεν

$$(1)\qquad \int_0^\alpha u^{p-1}(\alpha-u)^{q-1}du=\alpha^{p+q-1}\,\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Τούτου τεθέντος, θεωρήσωμεν τὸ ὁλοκλήρωμα

$$(2)\int x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\ldots\omega^{s-1}(\alpha-x-y-z\ldots-\omega)^{\tau-1}dxdydz\ldots d\omega$$

$$x+y+z+\ldots+\omega\leqq\alpha$$

ὅπερ ἐκτείνεται ἐφ' ἁπάσας τὰς θετικὰς τιμὰς τῶν μεταβλητῶν $x, y, z, \ldots, \omega$, ὧν τὸ ἄθροισμα εἶνε μικρότερον τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ α (ἢ καὶ ἴσον).

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν πρώτην τὴν ὁλοκλήρωσιν πρὸς x, τὰ ὅρια τοῦ x θὰ εἶνε 0 καὶ $\alpha-y-z\ldots-\omega$· ὥστε θὰ ἔχωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^{\alpha-(y+z+\ldots+\omega)} x^{p-1}\Big((\alpha-y-z-\ldots-\omega)-x\Big)^{\tau-1}dx$$

ἀλλὰ τοῦτο κατὰ τὸν τύπον (1) εἶνε ἴσον τῷ

$$(\alpha-y-z\ldots-\omega)^{p+\tau-1}\,\frac{\Gamma(p)\Gamma(\tau)}{\Gamma(p+\tau)}.$$

ἑπομένως τὸ ζητούμενον ὁλοκλήρωμα (2) ἀνάγεται εἰς τὸ ἑξῆς·

$$(3)\quad \frac{\Gamma(p)\Gamma(\tau)}{\Gamma(p+\tau)}\int y^{q-1}z^{r-1}\ldots\omega^{s-1}(\alpha-y-z\ldots-\omega)^{p+\tau-1}dydz\ldots d\omega$$

$$y+z+\ldots+\omega\leqq\alpha$$

ὅπερ εἶνε ὅμοιον τῷ ζητουμένῳ (2), ἀλλὰ τάξεως κατὰ μονάδα μικροτέρας.

Ἐὰν νῦν ἐκτελέσωμεν ἐν τῷ ὁλοκληρώματι τούτῳ τὴν ὁλοκλήρωσιν πρὸς y, ὅρια τοῦ y θὰ εἶνε 0 καὶ $\alpha-z..-\omega$ καὶ μετὰ τὴν ὁλοκλήρωσιν προκύπτει

$$(4)\quad \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(\tau)}{\Gamma(p+q+\tau)}\int z^{r-1}..\omega^{s-1}(\alpha-z-..-\omega)^{p+q+\tau-1}dz\,.\,d\omega.$$

Ἐξακολουθοῦντες τοιουτοτρόπως βλέπομεν, ὅτι θὰ εἶνε

$$(5)\quad \int x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}...\omega^{s-1}(\alpha-x-y-z...-\omega)^{\tau-1}dxdydz...d\omega=$$

$$=\alpha^{p+q+r+...+s+\tau-1}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)...\Gamma(s)\Gamma(\tau)}{\Gamma(p+q+r+...s+\tau)}$$

$$x+y+z+...+\omega\leqq\alpha$$

Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ $\tau=1$, προκύπτει ὁ τύπος

$$(6)\quad \int x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}...\omega^{s-1}dxdy...d\omega=$$

$$\alpha^{p+q+r+...+s}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)..\Gamma(s)}{\Gamma(p+q+r..+s+1)}$$

$$x+y+z+...+\omega\leqq\alpha$$

207. Καὶ τὸ γενικώτερον τούτου ὁλοκλήρωμα

$$(7)\quad \int x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}...\omega^{s-1}dxdydz...d\omega$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\lambda}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\mu}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\nu}+...+\left(\frac{\omega}{m}\right)^{\rho}\leqq 1$$

ὅπερ ἐκτείνεται ἐφ᾽ ἁπάσας τὰς θετικὰς τιμὰς τῶν μεταβλητῶν $x,y,z...\omega$, τὰς πληρούσας τὴν ἀνισότητα (οἱ παρονομασταὶ $a,b\,c,...,m$ καὶ οἱ ἐκθέται $\lambda,\mu,\nu,...,\rho$, ὑποτίθενται θετικοὶ ἀριθμοί), ἀνάγεται εἰς τὰ Εὐληριανὰ ὁλοκληρώματα· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ τεθῇ

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\lambda}=\xi,\quad \left(\frac{y}{b}\right)^{\mu}=\eta,\quad \left(\frac{z}{c}\right)^{\nu}=\zeta,...,\left(\frac{\omega}{m}\right)^{\rho}=\varphi$$

τότε ἕπεται $x=a.\xi^{\frac{1}{\lambda}}, \quad y=\beta.\eta^{\frac{1}{\mu}}, \quad z=c\,\zeta^{\frac{1}{\nu}}, \ldots, \omega=m\,\varphi^{\frac{1}{\rho}}$

καὶ

$$dx=\frac{1}{\lambda}a\xi^{\frac{1}{\lambda}-1}d\xi,\ dy=\frac{1}{\mu}\beta\eta^{\frac{1}{\mu}-1}d\eta.\ dz=\frac{1}{\nu}c\zeta^{\frac{1}{\nu}-1}d\zeta.\ d\omega=\frac{1}{\rho}mf^{\frac{1}{\rho}-1}d\varphi$$

ὅθεν
$$\int x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\ldots\omega^{s-1}dxdydz\ldots d\omega=$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\lambda}+\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\mu}+\ldots+\left(\frac{\omega}{m}\right)^{\rho}\leqq 1$$

$$=\frac{a^{p}.\beta^{q}.c^{r}\ldots m^{s}}{\lambda\,\mu.\nu\ldots\rho}\int\xi^{\frac{p}{\lambda}-1}.\eta^{\frac{q}{\mu}-1}.\zeta^{\frac{r}{\nu}-1}\ldots\varphi^{\frac{s}{\rho}-1}d\xi d\eta\ldots d\varphi$$

$$\xi+\eta+\zeta+\ldots+\varphi\leqq 1$$

ἢ κατὰ τὰ προηγουμένως εὑρεθέντα

(8) $$\int x^{p-1}q^{q-1}z^{r-1}\ldots\omega^{s-1}dxdydz\ldots d\omega=$$

$$\frac{a^{p}.\beta^{q}.c^{r}\ldots m^{s}}{\lambda.\mu.\nu\ldots\rho}\quad\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\lambda}\right).\Gamma\left(\frac{q}{\mu}\right)\Gamma\left(\frac{r}{\nu}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{s}{\rho}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\lambda}+\frac{q}{\mu}+\frac{r}{\nu}+\cdots+\frac{s}{\rho}+1\right)}$$

Ἐὰν π. χ. ὑποθέσωμεν τρεῖς μεταβλητὰς $x.y,z$ καὶ $p=q=r=1$ καὶ $\lambda=\mu=\nu=2$, ὅτε τὸ ὁλοκλήρωμα (7) παριστᾷ τὸ ὄγδοον τοῦ ὄγκου τοῦ ἐλλειψοειδοῦς

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2}+\left(\frac{y}{\beta}\right)^{2}+\left(\frac{z}{c}\right)^{2}=1,$$

εὑρίσκομεν

$$\int dxdydz=\frac{a\beta c}{8}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{3}}{\Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right)}=\frac{\pi}{6}a\beta c$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX.

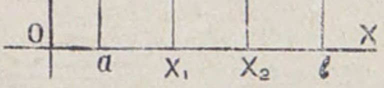
ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

208. Ἐν τῷ ὁρισμῷ τοῦ ἁπλοῦ ὁλοκληρώματος

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx$$

παρεστήσαμεν τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς x διὰ τῶν σημείων τμήματός τινος AB τοῦ ἄξονος OX καὶ ἐσχηματίσαμεν τοὺς ὅρους τοῦ ἀθροίσματος, οὗτινος ὅριον εἶνε τὸ ὁλοκλήρωμα, διαιροῦντες τὸ τμῆμα AB εἰς ὅσα δήποτε μέρη καὶ πολλαπλασιάζοντες τὸ μῆκος ἑκάστου, ἤτοι τὴν αὔξησιν τῆς μεταβλητῆς x ἐπ' αὐτοῦ, ἐπὶ τὴν τιμήν, ἣν ἔχει ἡ συνάρτησις $\varphi(x)$ εἰς ἓν οἱονδήποτε ἐκ τῶν σημείων αὐτοῦ.

Ἡ γεωμετρικὴ αὕτη παράστασις ὁδηγεῖ εἰς ἐπέκτασίν τινα τῆς ἐννοίας τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος, ἥτις ἐν πολλοῖς ζητήμασιν εἶνε χρήσιμος.



Ἀντὶ τοῦ τμήματος AB τοῦ ἄξονος τῶν x λάβωμεν γενικώτερον οἱανδήποτε καμπύλην AB ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου xy κειμένην καὶ διαιροῦντες αὐτὴν εἰς μέρη ἂς πολλαπλασιάζωμεν τὴν αὔξησιν τῆς x (ἢ καὶ τοῦ y) ἐφ' ἑκάστου τούτων ἐπὶ τὴν τιμήν, ἣν ἔχει ἡ δεδομένη συνάρτησις $\varphi(x,y)$ τῶν δύο μεταβλητῶν x καὶ y εἰς ἓν οἱονδήποτε ἐκ τῶν σημείων αὐτοῦ· οὕτω προκύπτει τὸ ἄθροισμα.

$$(x_1-\alpha)\varphi(\xi_1,\eta_1)+(x_2-x_1)\varphi(\xi_2,\eta_2)+\ldots+(\beta-x_{\nu-1})\varphi(\xi_\nu,\eta_\nu) \qquad (1)$$

ἔνθα, α $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}$ παριστῶσι τὰς τετμημένας τῶν ἄκρων τῶν μερῶν, τὰ δὲ ξ_i, η_i εἶνε αἱ συντεταγμέναι τοῦ τυχόντος σημείου τοῦ τμήματος, οὗ τὰ ἄκρα ἔχουσι τετμημένας x_{i-1} καὶ x_i.

Τὸ ἄθροισμα τοῦτο, ὅταν αἱ διαιρέσεις προχωρῶσιν οὕτως, ὥστε ἕκαστον τεμάχιον τῆς ληφθείσης καμπύλης AB νὰ τείνῃ πρὸς τὸ 0 καὶ ἡ δεδομένη συνάρτησις $\varphi(x,y)$ μένῃ συνεχὴς καὶ πεπερασμένη καὶ μονότιμος ἐπὶ τῆς καμπύλης, ἔχει ὅριόν τι πεπερασμένον καὶ ἐντελῶς ὡρισμένον· τοῦτο δὲ τὸ ὅριον καλοῦμεν *ἐπικαμπύλιον* ὁλοκλήρωμα τῆς παραστάσεως $\varphi(x,y)dx$ ἐπὶ τῆς καμπύλης ΑΒ καὶ παριστῶμεν αὐτὸ ὡς ἕπεται

$$\int_{(AB)} \varphi(x,y)dx \tag{2}$$

Ὅτι τὸ εἰρημένον ἄθροισμα (1) ἔχει ὅριον, εἶνε προφανές· διότι ἐπὶ τῆς καμπύλης ΑΒ ἡ τεταγμένη y εἶνε συνάρτησις τοῦ x πεπερασμένη καὶ συνεχής· ἔστω $y=\sigma(x)$· τότε

$$\varphi(x,y)=\varphi(x,\sigma(x))=f(x)$$

καὶ

$$\varphi(\xi_i,\eta_i)=\varphi(\xi_i,\sigma(\xi_i))=f(\xi_i)$$

τὸ ἄθροισμα ἄρα (1) γίνεται

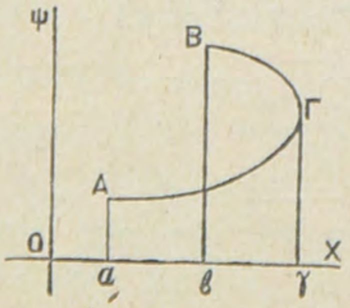
$$(x_1-\alpha)f(\xi_1)+(x_2-x_1)f(\xi_2)+\ldots+(\beta-x_{\nu-1})f(\xi_\nu)$$

καὶ τὸ ὅριον αὐτοῦ εἶνε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx. \tag{3}$$

209. Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα ἀνάγεται εἰς τὰ κοινὰ ὁλοκληρώματα· ἐξαρτᾶται δὲ ἡ τιμὴ αὐτοῦ οὐ μόνον ἐκ τῶν ἄκρων σημείων Α καὶ Β, ἀλλὰ καὶ ἐκ τῆς καμπύλης ΑΒ· διότι ἂν δι' ἄλλης καμπύλης συνδέσωμεν τὰ αὐτὰ σημεῖα Α,Β, ἡ y θὰ εἶνε ἄλλη συνάρτησις τῆς x καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα (3), εἰς ὃ ἀνάγεται τὸ ἐπικαμπύλιον, θὰ εἶνε ἐν γένει διάφορον.

210. Ὑπετέθη ἐν τῇ προηγουμένῃ ἀποδείξει, ὅτι ἐπὶ τῆς καμπύλης ΑΒ ἡ μεταβλητὴ τῆς ὁλοκληρώσεως (ἡ x) βαίνει αὐξανομένη διαρκῶς ἀπὸ α εἰς β καὶ ἑπομένως αἱ παράλληλοι τῇ ΟΥ εὐθεῖαι τέμνουσι τὴν καμπύλην ΑΒ ἑκάστη καθ' ἓν μόνον σημεῖον. Ἀλλὰ καὶ τούτου μὴ συμβαίνοντος, πάντοτε ἡ ἀναγωγὴ τοῦ ἐπικαμπυλίου ὁλοκληρώματος εἰς κοινὰ ὁλοκληρώματα εἶνε δυνατή. Ἔστω π.χ. ἡ καμπύλη ΑΓΒ, ἐφ' ἧς ἡ μεταβλητὴ x βαίνει αὐξανομένη ἀπὸ Α μέχρι σημείου τινὸς Γ ἔπειτα δὲ ἀπὸ τούτου βαίνει ἐλαττουμένη μέχρι τοῦ Β· τότε οἱ ἐκ τοῦ τόξου ΑΓ προερχόμενοι ὅροι τοῦ ἀθροίσματος (1) ἔχουσιν ὅριον τὸ



$$\int_\alpha^\gamma \varphi(x,y_1)dx$$

ἔνθα y_1 δηλοῖ τὴν τεταγμένην τοῦ τόξου ΑΓ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν πρὸς τὴν τετμημένην x, οἱ δὲ ἐκ τοῦ τόξου ΓΒ προερχόμενοι ὅροι ἔχουσιν ὅριον τὸ

$$\int_{\gamma}^{\beta} \varphi(x,y_2)dx \quad \text{ἢ} \quad -\int_{\beta}^{\gamma} \varphi(x,y_2)dx$$

ἔνθα y_2 δηλοῖ τὴν τεταγμένην τοῦ τόξου ΓΒ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν πρὸς τὴν τετμημένην x.

ὅθεν
$$\int_{(\mathrm{AB\Gamma})} \varphi(x.y)dx = \int_{(\mathrm{A\Gamma})} \varphi(x,y_1)dx - \int_{(\mathrm{B\Gamma})} \varphi(x,y_2)dx$$

211 Αἱ ἑξῆς ἰδιότητες τῶν ἐπικαμπυλίων ὁλοκληρωμάτων εἶνε προφανεῖς.

1) Ἐὰν ἀλλαχθῇ ἡ διεύθυνσις, καθ' ἣν προβαίνομεν λαμβάνοντες τὰ μέρη τῆς καμπύλης, τὸ ὁλοκλήρωμα ἀλλάσσει σημεῖον.

ἤτοι
$$\int_{(\mathrm{AB})} \varphi(x,y)dx + \int_{(\mathrm{BA})} \varphi(x,y)dx = 0$$

2) Ἐὰν ἡ καμπύλη, ἐφ' ἧς λαμβάνεται τὸ ὁλοκλήρωμα, διαιρεθῇ εἰς μέρη, καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα ἀναλύεται εἰς ἀντίστοιχα μέρη

ἤτοι
$$\int_{(\mathrm{AB})} \varphi(x.y)dx = \int_{(\mathrm{A\Gamma})} \varphi(x,y)\,dx + \int_{(\mathrm{\Gamma B})} \varphi(x,y)dx$$

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀνάγεται καὶ τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα

$$\int \varphi(x,y)dy,$$

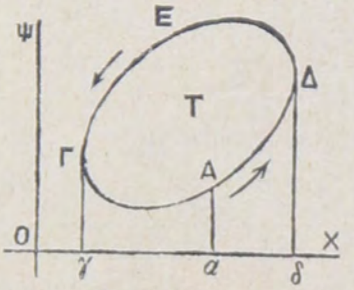
ἐν ᾧ μεταβλητὴ τῆς ὁλοκληρώσεως εἶνε ἡ y, εἰς κοινὰ ὁλοκληρώματα.

212. Τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα λέγεται *κλειστόν*, ὅταν ἡ καμπύλη, ἐφ' ἧς ἐκτείνεται, εἶνε κλειστή, ἤτοι τὸ πέρας αὐτῆς συμπίπτῃ τῇ ἀρχῇ. Ὡς ἀρχὴ τῆς καμπύλης δύναται τότε νὰ ληφθῇ τὸ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς, ἐὰν ἡ συνάρτησις $\varphi(x,y)$ εἶνε μονότιμος ἐπὶ τῆς καμπύλης τῆς ὁλοκληρώσεως.

313. Τὸ κλειστὸν ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα

$$\int_{(ΑΔΕΓΑ)} \varphi(x,y)dx$$

δύναται νὰ ἀναχθῇ καὶ εἰς διπλοῦν κοινὸν ὁλοκλήρωμα, οὗτινος τόπος εἶνε ὁ ὑπὸ τῆς κλειστῆς καμπύλης ΑΔΕΓΑ περικλειόμενος, *ἐὰν ἡ συνάρτησις $\varphi(x,y)$ μένῃ συνεχὴς καὶ πεπερασμένη καὶ μονότιμος ἐν τῷ τόπῳ τούτῳ.* (Ἡ κλειστὴ καμπύλη ὑποτίθεται ἁπλῆ, ἤτοι μία συνεχὴς γραμμὴ μὴ τέμνουσα ἑαυτήν)



Διότι τῆς συναρτήσεως $\varphi(x,y)$ οὔσης συνεχοῦς καὶ πεπερασμένης καὶ μονοτίμου ἐν τῷ τόπῳ Τ (ὃν ἡ καμπύλη ΑΔΕΓΑ περικλείει), τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα

$$\iint_{Τ} \varphi'_y(x,y)dxdy$$

εἶνε πεπερασμένον καὶ ἐντελῶς ὡρισμένον· ἐὰν δὲ ἐκτελέσωμεν τὴν ὁλοκλήρωσιν πρὸς y, εὑρίσκομεν

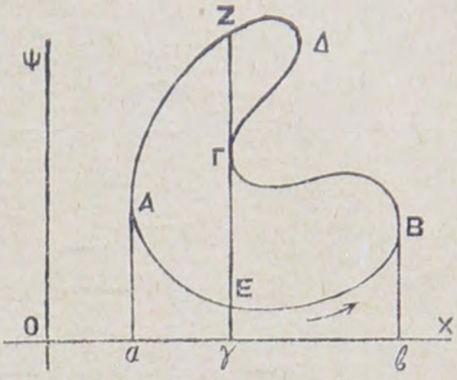
$$\iint_{Τ} \varphi'_y(x,y)dxdy = \int_{\gamma}^{\delta} \varphi(x,Y')dx - \int_{\gamma}^{\delta} \varphi(x,Y)dx =$$

$$= \int_{(ΓΕΔ)} \varphi(x,y)dx - \int_{ΓΑΔ} \varphi(x,y)dx = -\int_{ΓΑΔΕΓ} \varphi(x,y)dx$$

ὅθεν,

$$\int_{(ΑΔΕΓΑ)} \varphi(x,y)dx = -\iint_{Τ} \varphi'_y(x,y)dxdy \qquad (4)$$

Ὑπετέθη ἐν τῇ ἀποδείξει ταύτῃ, ὅτι αἱ παράλληλοι τῇ ΟΨ τέμνουσι



τὴν κλειστὴν καμπύλην εἰς δύο μόνον σημεῖα· ἀλλ' εἰς ὁσαδήποτε καὶ ἂν τέμνωσιν αὐτήν, πάντοτε ἡ ἰσότης (4) ἀληθεύει.

Διότι, ἂν ἡ τετμημένη x ἐπὶ μὲν τοῦ μέρους ΑΒ προβαίνῃ αὐξανομένη συνεχῶς, ἐπὶ δὲ τοῦ ΒΓ προβαίνῃ ἐλαττουμένη, ἐπὶ δὲ τοῦ ΓΔ πάλιν αὐξανομένη καὶ ἐπὶ τοῦ ΔΑ ἐλαττουμένη, ἡ ἐκ τοῦ Γ ἀγομένη παράλληλος τῇ ΟΨ διαιρεῖ τὸν τόπον εἰς τρία μέρη T_1, T_2, T_3 πληροῦντα τὸν εἰρημένον ὅρον καὶ ἑπομένως θὰ εἶνε

$$-\iint\limits_{T_1} \varphi'_y dxdy = \int\limits_{(\mathrm{AE})} \varphi . dx + \int\limits_{(\mathrm{E\Gamma})} \varphi dx + \int\limits_{(\mathrm{\Gamma Z})} \varphi dx + \int\limits_{(\mathrm{ZA})} \varphi dx$$

$$-\iint\limits_{T_2} \varphi'_y dxdy = \int\limits_{(\mathrm{EB\Gamma})} \varphi dx + \int\limits_{\mathrm{\Gamma E}} \varphi dx.$$

$$-\iint\limits_{T_3} \varphi'_y dxdy = \int\limits_{(\mathrm{\Gamma\Delta Z})} \varphi dx + \int\limits_{\mathrm{Z\Gamma}} \varphi dx.$$

ὅθεν ἕπεται

$$-\iint\limits_{T} \varphi'_y dxdy = \int\limits_{(\mathrm{AEB\Gamma\Delta ZA})} \varphi dx.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι εἶνε (σχῆμα τὸ τῆς προηγουμένης σελίδος)

$$\int\limits_{(\mathrm{A\Delta E\Gamma A})} \varphi(x,y) dy = \iint\limits_{T} \varphi'_x dx\,dy$$

Σημείωσις α'. Ἐν τοῖς προηγουμένοις τύποις πρὸς εὕρεσιν τῶν κλειστῶν ὁλοκληρωμάτων λαμβάνονται τὰ μέρη τῶν κλειστῶν γραμμῶν οὕτως, ὥστε ὁ διερχόμενος αὐτά, καθ' ἣν τάξιν λαμβάνονται, νὰ ἔχῃ πάντοτε πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ τὸν ἐκτὸς τῆς γραμμῆς τόπον· ἡ φορὰ αὕτη, καθ' ἣν διανύομεν τὴν γραμμήν, λέγεται ***θετική***· ἡ δὲ ἀντίθετος ***ἀρνητική***.

Σημείωσις β'. Οἱ τύποι, δι' ὧν ἐκφράζονται τὰ ἐμβαδὰ τῶν καμπυλογράμμων χωρίων καὶ οἱ ἐκ περιστροφῆς ὄγκοι δι' ἁπλῶν ὁλοκληρωμάτων, γίνονται ἁπλούστεροι ἐὰν γραφῶσι δι' ἐπικαμπυλίων ὁλοκληρωμάτων· παραδείγματος χάριν, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου, ὅπερ περικλείει ἡ γραμμὴ ΑΔΕΓΑ, δίδεται ὑπὸ τοῦ ἐπικαμπυλίου ὁλοκληρώματος

$$E=\int_{(\mathrm{A\Gamma E\Delta A})} y\,dx$$

ἐκτεινομένου ἐπὶ τῆς περικλειούσης αὐτὸ γραμμῆς (κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν)· καὶ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, ὅπερ γεννᾷ ἡ ἐπιφάνεια ΑΓΕΔΑ περιστρεφομένη περὶ τὸν ἄξονα ΟΧ, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$V=\pi\int_{\mathrm{A\Gamma E\Delta A}} y^2 dx$$

214. Ἰδιάζουσαν σημασίαν ἔχει τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_{(AB)}\Big(M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy\Big) \quad \text{ἤτοι} \quad \int_{(AB)} M(x,y)dx+\int_{(AB)} N(x,y)dy$$

ἐν τῷ ὁποίῳ αἱ συναρτήσεις Μ καὶ **Ν** ὑποτίθενται συνεχεῖς καὶ πεπερασμέναι καὶ μονότιμοι ἐπὶ τῆς γραμμῆς τῆς ὁλοκληρώσεως.

Περίπτωσις καθ' ἣν τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα $\int Mdx+Ndy$ ἐν δεδομένῳ τόπῳ Τ ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῶν ἄκρων σημείων Α καὶ Β τῆς γραμμῆς, ἐφ' ἧς ἐκτελεῖται ἡ ὁλοκλήρωσις, ἀλλ' οὐχὶ ἐκ τῆς γραμμῆς ταύτης.

215. *Ἐὰν ἐπὶ δύο γραμμῶν ΑΓΒ καὶ ΑΔΒ ἐκ τοῦ Α εἰς τὸ Β ἀγουσῶν καὶ μὴ τεμνουσῶν ἀλλήλας μηδὲ ἑαυτὰς τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα* $\int Mdx+Ndy$ *ἔχει τιμὰς ἴσας, ἐπὶ τῆς ὅλης κλειστῆς γραμμῆς ΑΓΒΔΑ ἐκτεινόμενον εἶνε ἴσον τῷ 0* καὶ τἀνάπαλιν, *ἐὰν ἐπὶ μιᾶς κλειστῆς ἁπλῆς γραμμῆς τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα εἶνε 0 καὶ λάβωμεν δύο τυχόντα σημεῖα αὐτῆς τὰ Α καὶ Β, ἐπὶ ἀμφοτέρων τῶν μερῶν τῆς γραμμῆς τῶν ἀγόντων ἀπὸ Α εἰς Β, τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα ἔχει ἴσας τιμάς.*

Διότι ἐκ τῆς ἰσότητος

$$\int_{\mathrm{A\Gamma B}} \mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy = \int_{\mathrm{A\Delta B}} \mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy$$

συνάγεται $\int_{\mathrm{A\Gamma B}} \mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy + \int_{\mathrm{B\Delta A}} \mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy = 0$, ἤτοι $\int_{\mathrm{A\Gamma B\Delta A}} \mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy = 0$

Καὶ ἀντιστρόφως, ἂν εἶνε

$$\int_{\mathrm{A\Gamma B\Delta A}} \mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy = 0,$$

θὰ εἶνε καὶ

$$\int_{\mathrm{A\Gamma B}} \mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy + \int_{\mathrm{B\Delta A}} \mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy = 0, \text{ ἤτοι } \int_{\mathrm{A\Gamma B}} \mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy = \int_{\mathrm{A\Delta B}} \mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy$$

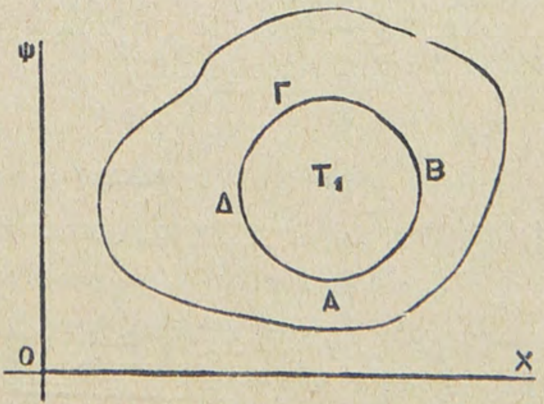
216. *Ἐὰν ἔν τινι τόπῳ T περατουμένῳ ὑπὸ μιᾶς ἁπλῆς καὶ κλειστῆς γραμμῆς, αἱ συναρτήσεις M καὶ N μένωσι πεπερασμέναι καὶ συνεχεῖς καὶ μονότιμοι καὶ αἱ πρῶται παράγωγοι αὐτῶν ἐπαληθεύωσι τὴν ἰσότητα*

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x},$$

τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα

$$\int (\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dx)$$

θὰ εἶνε 0 ἐπὶ πάσης κλειστῆς καὶ ἁπλῆς γραμμῆς ἐν τῷ τόπῳ τούτῳ κειμένης· ἑπομένως ἡ τιμὴ τοῦ ὁλοκληρώματος τούτου ἐπὶ πάσης γραμμῆς κειμένης ἐν τῷ αὐτῷ τόπῳ T θὰ ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῶν συντεταγμένων τῶν ἄκρων τῆς γραμμῆς.



Ἔστω τυχοῦσα ἁπλῆ καὶ κλειστὴ γραμμὴ ἡ ΑΒΓΔΑ ἐν τῷ τόπῳ T κειμένη· ἐὰν τὸν ὑπ' αὐτῆς περικλειόμενον τόπον (ὅστις εἶνε μέρος τοῦ T) παραστήσωμεν διὰ τοῦ T_1 θὰ εἶνε κατὰ τὰς γενομένας ὑποθέσεις

$$\int\limits_{(\mathrm{AB\Gamma\Delta A})} \mathrm{M}(x,y)dx = -\iint\limits_{\mathrm{T}_1} \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} dxdy$$

καὶ
$$\int\limits_{(\mathrm{AB\Gamma\Delta A})} \mathrm{N}(x,y)dy = \iint\limits_{\mathrm{T}_1} \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} dxdy$$

ὅθεν
$$\int\limits_{(\mathrm{AB\Gamma\Delta A})} (\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy) = \iint\limits_{\mathrm{T}_1} \left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}\right) dxdy$$

καὶ ἐπειδὴ ὑπετέθη $\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}$ ἐπὶ παντὸς τοῦ τόπου Τ, συνάγεται

$$\int\limits_{\mathrm{AB\Gamma\Delta A}} (\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy) = 0$$

καὶ διὰ τοῦτο

$$(5) \qquad \int\limits_{\mathrm{AB}} (\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy) = \int\limits_{\mathrm{A\Delta\Gamma B}} (\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy).$$

Ἐπομένως ἡ τιμὴ τοῦ ἐπικαμπυλίου τούτου ὁλοκληρώματος ἐξαρτᾶται τότε μόνον ἐκ τῶν ἄκρων τῆς γραμμῆς, ἐφ' ἧς ἐκτελεῖται· καὶ ἂν ὁρισθῇ ὡς ἀρχὴ τῶν διαφόρων γραμμῶν τὸ τυχὸν σημεῖον Α(α, β) τοῦ τόπου Τ, εἰς ἕκαστον αὐτοῦ σημεῖον $\mathrm{M}(x,y)$ ἔχει τὸ ῥηθὲν ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα τιμὴν ἐντελῶς ὡρισμένην καὶ τὴν αὐτὴν πάντοτε δι' οἱασδήποτε γραμμῆς (ἐντὸς τοῦ Τ κειμένης) καὶ ἂν φθάσωμεν εἰς αὐτὸ ἀναχωροῦντες ἀπὸ τοῦ Α. Τὸ ὁλοκλήρωμα τότε δύναται νὰ παρασταθῇ καὶ ὡς ἑξῆς

$$(6) \qquad \int_{(\alpha,\beta)}^{(x,y)} (\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy)$$

καὶ εἶνε συνάρτησις τῶν δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν x καὶ y (τῶν ἄνω ὁρίων του) τὴν συνάρτησιν ταύτην παριστῶμεν διὰ τοῦ ω.

217. Πρὸς εὕρεσιν τῶν μερικῶν διαφορικῶν τῆς συναρτήσεως ω (πρὸς x καὶ πρὸς y), παρατηροῦμεν, ὅτι, ἂν μόνον τὴν x αὐξήσωμεν κατὰ dx, τὴν δὲ y ἀφήσωμεν ὡς εἶνε, τουτέστιν, ἂν τὸ ἄκρον Μ τῆς γραμμῆς,

ἐφ᾽ ἧς ὁλοκληροῦμεν, κινήσωμεν παραλλήλως τῇ ΟΧ κατὰ dx, ἡ αὔξησις τοῦ ω θὰ εἶνε (διότι ἡ y μένει σταθερὰ)

$$\int_{(x,y)}^{(x+dx,y)} \mathrm{M}(x,y)dx$$

τοῦτο δὲ εἶνε κοινὸν ὁλοκλήρωμα πρὸς x καὶ πρωτεῦον μέρος ἔχει (σελ. 169) τὸ $\mathrm{M}(x,y)dx$· ὅθεν

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\mathrm{M}(x,y).$$

ὁμοίως εὑρίσκεται καὶ $$\frac{\partial\omega}{\partial y}=\mathrm{N}(x,y),$$

ὅθεν $$d\omega=\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy\cdot$$

ἤτοι τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα (6) εἶνε ἡ συνάρτησις ἡ ἔχουσα μερικὰς παραγώγους τὰς συναρτήσεις M καὶ N.

218. Ἐὰν ἐφ᾽ ἅπαντος τοῦ ἐπιπέδου xy αἱ συναρτήσεις $\mathrm{M}(x,y)$ καὶ $\mathrm{N}(x,y)$ μένωσι πεπερασμέναι καὶ συνεχεῖς καὶ μονότιμοι καὶ πρὸς τούτοις εἶνε

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}=\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x},$$

ἡ συνάρτησις ω θὰ εἶνε τὸ ἄθροισμα τῶν δύο κοινῶν ὁλοκληρωμάτων

$$\omega=\int_{\alpha}^{x} \mathrm{M}(x,y)dx+\int_{\beta}^{y} \mathrm{N}(\alpha,y)dy \tag{7}$$

διότι τότε δυνάμεθα νὰ ἐκλέξωμεν ὡς γραμμὴν τῆς ὁλοκληρώσεως τὴν γραμμὴν ΑΓΜ, ἥτις σύγκειται ἐκ τῆς ΑΓ παραλλήλου τῇ ΟΨ, ἐφ᾽ ἧς μένει $x=\alpha$, ἡ δὲ y μεταβάλλεται ἀπὸ β εἰς y, καὶ ἐκ τῆς ΓΜ παραλλήλου τῇ ΟΧ, ἐφ᾽ ἧς μένει y σταθερόν, ἡ δὲ x μεταβάλλεται ἀπὸ α εἰς x.

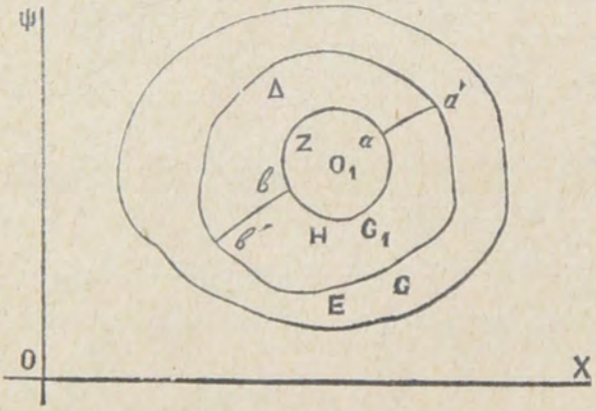
219. *Ὅταν εἴς τινα μεμονωμένα σημεῖα τοῦ τόπου Τ, ὧν τὸ πλῆθος πεπερασμένον, δὲν ἀληθεύωσι πᾶσαι αἱ περὶ τῶν συναρτήσεων M καὶ N καὶ περὶ τῶν παραγώγων αὐτῶν γενόμεναι ὑποθέσεις, ἀληθεύωσιν ὅμως εἰς πάντα τὰ ἄλλα σημεῖα αὐτοῦ, ἐὰν γραφῇ ἐν τῷ τόπῳ Τ*

τυχοῦσα ἁπλῆ καὶ κλειστὴ γραμμή, ἡ C, μὴ διερχομένη δι' οὐδενὸς ἐκ τῶν ἀνωμάλων τούτων σημείων, ἐγκλείουσα δέ τινα ἐξ αὐτῶν, θὰ εἶνε

$$\int_{C}(Mdx+Ndy)=\int_{C_1}(Mdx+Ndy)+\int_{C_2}(Mdx+Ndy)+\ldots$$

ἔνθα $C_1, C_2, \ldots$ εἶνε τυχοῦσαι καμπύλαι ἁπλαῖ καὶ κλεισταί, ὧν ἑκάστη ἐγκλείει ἓν καὶ μόνον ἓν ἐκ τῶν εἰρημένων σημείων· πᾶσαι δὲ αἱ καμπύλαι $C, C_1, C_2, \ldots$ διανύονται ἐν τῇ ὁλοκληρώσει κατὰ τὴν θετικὴν φοράν.

Ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον, ὅτι ἡ καμπύλη C ἐγκλείει ἓν μόνον ἀνώμαλον σημεῖον, τὸ O_1, ὅπερ ἐγκλείει καὶ ἡ καμπύλη C_1· ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ γραμμαὶ α α΄ καὶ β β΄ ἐκ τῆς καμπύλης C_1 εἰς τὴν C, χωρίζονται δύο τόποι αα΄Δβ΄βΖα καὶ αα΄Εβ΄βΗα, ἐν οἷς ἀληθεύουσι πᾶσαι αἱ περὶ τῶν συναρτήσεων M καὶ N καὶ περὶ τῶν παραγώγων αὐτῶν γενόμεναι ὑποθέσεις· ἑπομένως εἶνε



$$\int_{(\alpha\alpha'\Delta\beta'\beta Z\alpha)}(Mdx+Ndy)=0=\int_{\alpha\alpha'}+\int_{\alpha'\Delta\beta'}+\int_{\beta'\beta}+\int_{\beta Z\alpha}$$

$$\int_{(\beta\beta' E\alpha'\alpha H\beta)}(Mdx+Ndy)=0=\int_{\beta\beta'}+\int_{\beta' E\alpha'}+\int_{\alpha'\alpha}+\int_{\alpha H\beta}$$

ἀθροίζοντες δὲ καὶ παρατηροῦντες, ὅτι αἱ ἀχθεῖσαι γραμμαὶ αα΄ καὶ ββ΄ διανύονται ἑκάστη δὶς καὶ ἀντιθέτως, εὑρίσκομεν

$$\int_{\alpha'\Delta\beta' E\alpha'}(Mdx+Ndy)+\int_{\beta Z\alpha H\beta}(Mdx+Ndy)=0$$

ἢ
$$\int_{(C)} (Mdx+Ndy) = \int_{(C_1)} (Mdx+Ndy).$$

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις, καὶ ὅταν ἡ καμπύλη C ἐγκλείῃ δύο ἢ καὶ περισσότερα ἀνώμαλα σημεῖα.

---

220. Πρὸς ἐφαρμογὴν τῶν προηγουμένων θεωρήσωμεν τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int d\,\text{τοξεφ}\left(\frac{Q}{P}\right), \quad \text{ἤτοι} \quad \int \frac{PdQ-QdP}{P^2+Q^2},$$

ἔνθα P καὶ Q δηλοῦσι δύο ἀκέραια πολυώνυμα τῶν μεταβλητῶν $x.y$. Αἱ συναρτήσεις M καὶ N εἶνε ἐνταῦθα

$$M=\frac{PQ'_x-QP'_x}{P^2+Q^2}, \qquad N=\frac{PQ'_y-QP'_y}{P^2+Q^2},$$

μένουσι δὲ συνεχεῖς καὶ πεπερασμέναι ἐφ᾽ ἅπαντος τοῦ ἐπιπέδου πλὴν εἰς τὰ σημεῖα $O_1, O_2, \ldots, O_\nu$, ἔνθα ἀμφότερα τὰ πολυώνυμα P καὶ Q μηδενίζονται (ὧν ἑπομένως αἱ συντεταγμέναι εἶνε κοιναὶ ῥίζαι τῶν δύο πολυωνύμων)· καὶ ἡ ἰσότης $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ πληροῦται· (διότι M καὶ N εἶνε μερικαὶ παράγωγοι τῆς συναρτήσεως τοξεφ $\frac{Q}{P}$ πρὸς x καὶ y).

Ἐὰν λοιπὸν γράψωμεν τυχοῦσαν κλειστὴν καὶ ἁπλῆν καμπύλην, τὴν C μὴ διερχομένην δι᾽ οὐδενὸς τῶν σημείων $O_1, O_2, \ldots, O_\nu$, ἐγκλείουσαν δὲ ἐν ἑαυτῇ τινὰ ἐκ τῶν σημείων τούτων, ἔστω τὰ $O_1, O_2, \ldots, O_\lambda$, θὰ εἶνε

$$(1) \quad \int_C \frac{PdQ-QdP}{P^2+Q^2} = \int_{C_1} \frac{PdQ-QdP}{P^2+Q^2} + \cdots + \int_{C_\lambda} \frac{PdQ-QdP}{P^2+Q^2}$$

τῶν $C_1, C_2, \ldots C_\lambda$ δηλούντων τυχούσας κλειστὰς καμπύλας, ὧν ἑκάστη ἐγκλείει ἓν καὶ μόνον ἐκ τῶν σημείων $O_1, O_2, \ldots, O_\lambda$ (ἡ C_1, τὸ O_1, ἡ C_2 τὸ $O_2, \ldots$, καὶ ἡ C_λ τὸ O_λ).

Ἵνα ὑπολογίσωμεν ἓν ἐκ τῶν ὁλοκληρωμάτων τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος (1), ἔστωσαν $x=\alpha$, $y=\beta$ αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου O_1· ἐὰν ἀναπτύξωμεν τὰ δύο πολυώνυμα P καὶ Q κατὰ τὰς δυνάμεις τῶν διαφορῶν $x-\alpha$, $y-\beta$, θὰ εἶνε

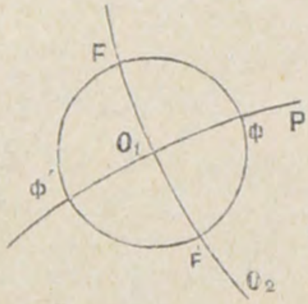
$$P=A(x-\alpha)+B(y-\beta)+\ldots$$

$$Q=A'(x-\alpha)+B'(y-\beta)+\ldots,$$

ἑπομένως

$$(2)\qquad d\left(\text{τοξεφ}\frac{Q}{P}\right)=\frac{(AB'-A'B)\{(x-\alpha)dy-(y-\beta)dx\}+\ldots}{P^2+Q^2}.$$

ὡς γραμμὴν C_1 λαμβάνομεν νῦν περιφέρειαν κύκλου ἔχουσαν κέντρον τὸ O_1 καὶ ἀκτῖνα ρ ἱκανῶς μικράν, ὥστε νὰ τέμνῃ ἑκατέραν τῶν καμπύλων $P=0$ καὶ $Q=0$ εἰς δύο μόνον σημεῖα, (τὴν μὲν $P=0$ εἰς τὰ σημεῖα Φ καὶ Φ΄, τὴν δὲ $Q=0$ εἰς τὰ F καὶ F΄) καὶ ἡ ὁρίζουσα



$$\begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{vmatrix}$$

νὰ διατηρῇ τὸ ἑαυτῆς σημεῖον ἐπὶ τοῦ κύκλου τούτου. Ἡ ὁρίζουσα αὕτη εἰς τὸ σημεῖον O_1 εἶνε

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}=\delta,$$

ὑποθέτομεν δέ αὐτὴν διάφορον τοῦ 0 (ἤτοι θεωροῦμεν μόνον τὰς ἁπλᾶς κοινὰς ῥίζας τῶν δύο πολυωνύμων P καὶ Q· ἤτοι τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν δύο καμπύλων $P=0$ καὶ $Q=0$, ἐν οἷς αὗται τέμνουσιν ἀλλήλας).

Τούτων τεθέντων, ἐκ τῆς ἰσότητος (2) βλέπομεν, ὅτι, ἐὰν διανύωμεν τὴν περιφέρειαν C_1 κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, ἤτοι ἂν θέσωμεν

$$x-\alpha=\rho\,\text{συν}\theta,\quad y-\beta=\rho\,\text{ημ}\theta$$

καὶ μεταβάλωμεν τὴν γωνίαν θ ἀπὸ 0 μέχρι 2π, τὸ διαφορικὸν τοῦ τοξεφ$\left(\frac{Q}{P}\right)$ ἔχει τὸ σημεῖον τῆς ὁριζούσης δ· ἑπομένως ἢ αὐξάνει διαρκῶς ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἂν $\delta>0$, ἢ ἐλαττοῦται διαρκῶς, ἂν $\delta<0$· καὶ κατὰ μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν τὸ τοξεφ$\left(\frac{Q}{P}\right)$, ὅπερ εἰς τὸ σημεῖον F εἶνε 0, αὐξάνει διαρκῶς καὶ γίνεται $\frac{\pi}{2}$ εἰς τὸ Φ', ἔπειτα γίνεται π εἰς τὸ F', 3. $\frac{\pi}{2}$ εἰς τὸ Φ καὶ τέλος εἰς τὸ F γίνεται 2π· κατὰ δὲ τὴν δευτέραν ἐλαττούμενον διαρκῶς γίνεται —2π· ὥστε εἶνε

$$\int_{C_1} d\text{τοξεφ}\left(\frac{Q}{P}\right)=2\pi\varepsilon$$

ἔνθα $\varepsilon=+1$, ἂν $\delta>0$ καὶ $\varepsilon=-1$, ἂν $\delta<0$.

221. Ἐκ τούτων συνάγεται ἡ πρότασις

Τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\frac{1}{2\pi}\int d\text{τοξεφ}\left(\frac{Q}{P}\right), \text{ ἤτοι } \frac{1}{2\pi}\int\frac{PdQ-QdP}{P^2+Q^2} \tag{3}$$

ἐπὶ οἱασδήποτε κλειστῆς καὶ ἁπλῆς καμπύλης ἐκτεινόμενον (μὴ διερχομένης δι' οὐδενὸς τῶν κοινῶν σημείων τῶν καμπύλων P=0 καὶ Q=0) *εἶνε πάντοτε ἀκέραιός τις ἀριθμὸς καὶ ἰσοῦται τῇ ὑπεροχῇ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κοινῶν ῥιζῶν τῶν δύο πολυωνύμων P καὶ Q, ὧν τὰ ἀντίστοιχα κοινὰ σημεῖα ἐγκλείονται ἐντὸς τῆς καμπύλης C καὶ ἐν αἷς ἡ ὁρίζουσα*

$$\frac{d\,(P,Q)}{d(x,y)} \tag{4}$$

εἶνε θετική, ὑπὲρ τὸν ἀριθμὸν τῶν κοινῶν ῥιζῶν, ὧν τὰ ἀντίστοιχα κοινὰ σημεῖα ἐγκλείει ἡ αὐτὴ καμπύλη, καὶ ἐν αἷς ἡ αὐτὴ ὁρίζουσα εἶνε ἀρνητική.

222. Ἐὰν ἡ ὁρίζουσα (4) διατηρῇ πάντοτε τὸ ἑαυτῆς σημεῖον, τὸ ὁλοκλήρωμα (3) δίδει τὸν ἀριθμὸν τῶν κοινῶν ῥιζῶν τῶν ἐντὸς τῆς καμπύλης C περιεχομένων· τοῦτο συμβαίνει π.χ., ὅταν εἰς τὸ τυχὸν πολυώνυμον $\sigma(z)$ θέσωμεν $z=x+yi$ καὶ χωρίσωμεν τὰ πραγματικὰ ἀπὸ τῶν φανταστικῶν· διότι, ἂν εἶνε

$$\sigma(z)=P(x,y)+iQ(x,y),$$

εἶνε καὶ $$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x}$$

καὶ ἑπομένως ἡ εἰρημένη ὁρίζουσα εἶνε $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2$, ἤτοι εἶνε πάντοτε θετική.

Σημείωσις. Ἡ πρότασις ἀληθεύει, καὶ ὅταν P καὶ Q δηλῶσιν οἱασδήποτε συναρτήσεις τῶν x,y, ἀρκεῖ ἐν τῇ περιοχῇ ἑκάστου κοινοῦ σημείου (α,β) νὰ ἔχωσιν αἱ συναρτήσεις αὗται τὸν χαρακτῆρα ἀκεραίας συναρτήσεως· τουτέστι νὰ εἶνε ἀναπτύξιμοι εἰς σειρὰς κατὰ τὰς θετικὰς καὶ ἀκεραίας δυνάμεις τῶν διαφορῶν $x-\alpha$ καὶ $y-\beta$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ X

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΜΙΓΑΔΙΚΑ

Συναρτήσεις μιγαδικῶν μεταβλητῶν.

223. Ὡς συνάρτησιν τῆς μιγαδικῆς μεταβλητῆς $x+iy$ δυνάμεθα, κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τῆς συναρτήσεως (Διαφ. σελ. 12), νὰ δεχθῶμεν πᾶσαν συνάρτησιν ω τῶν δύο πραγματικῶν μεταβλητῶν x,y, ὡς τὴν $f(x,y)$· διότι, δοθέντος τοῦ μιγάδος ἀριθμοῦ $x+iy$, δίδονται καὶ τὰ δύο μέρη αὐτοῦ x καὶ iy, δίδονται ἑπομένως καὶ οἱ δύο ἀριθμοὶ x,y, ἀφ᾽ ὧν ἐξαρτᾶται ἡ συνάρτησις $f(x,y)$· ἄρα ὁρίζεται ἡ τιμὴ αὐτῆς· προφανὲς δὲ εἶνε, ὅτι ἡ συνάρτησις αὕτη $f(x,y)$ δύναται καὶ μιγαδικὰς τιμὰς νὰ ἔχῃ· ἤτοι νὰ εἶνε ἐν γένει

$$f(x,y)=\varphi(x,y)+i\sigma(x,y)$$

τῶν $\varphi(x,y)$ καὶ $\sigma(x,y)$ δηλούντων πραγματικὰς συναρτήσεις τῶν πραγματικῶν μεταβλητῶν x,y.

Παραδείγματος χάριν αἱ συναρτήσεις

$$x^2+iy^2, \qquad e^x+ie^y, \qquad x+iy^2$$

δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς συναρτήσεις τοῦ μιγάδος ἀριθμοῦ $x+yi$.

Ἀλλ᾽ ἵνα ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ τῆς μιγάδος μεταβλητῆς $x+iy$ ἔχῃ παράγωγον ἐντελῶς ὡρισμένην δι᾽ ἑκάστην τιμὴν τοῦ ἀριθμοῦ $x+yi$, πρέπει νὰ πληροῖ ἐξίσωσίν τινα, ἣν εὑρίσκομεν ὡς ἀκολούθως.

Ἐὰν ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ $x+yi$, ἣν παριστῶμεν δι᾽ ἑνὸς γράμματος z, αὐξηθῇ κατὰ $\Delta x+i\Delta y$ (ἢ Δz), ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ θὰ αὐξηθῇ κατὰ

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\dots$$

καὶ ὁ λόγος τῆς αὐξήσεως τῆς συναρτήσεως πρὸς τὴν αὔξησιν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς z θὰ εἶνε

$$(1) \qquad \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\ldots}{\Delta x+i\Delta y}.$$

Τὸ ὅριον τοῦ λόγου τούτου (ἤτοι ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως f πρὸς τὴν μεταβλητὴν z) δὲν εἶνε ἐντελῶς ὡρισμένον δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ z, ἀλλ' ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ὁρίου, πρὸς ὃ τείνει ὁ λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ὅπερ δύναται νὰ εἶνε οἱονδήποτε· διότι αἱ δύο μεταβληταὶ x,y εἶνε ἐντελῶς ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων, ἐπίσης δὲ καὶ αἱ αὐξήσεις αὐτῶν.

224. Διὰ τῆς γεωμετρικῆς παραστάσεως τῆς μιγαδικῆς μεταβλητῆς $x+iy$ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ (Εἰσαγωγ. σελ. 88) γίνεται τοῦτο σαφέστερον· ἑκάστη τιμὴ $x+iy$ τῆς μιγαδικῆς μεταβλητῆς παρίσταται δι' ἑνὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου, οἷον τοῦ Μ, ἡ δὲ νέα τιμὴ $x+yi+\Delta x+i\Delta y$ δι' ἄλλου, τοῦ Μ', καὶ τὸ μέτρον τῆς αὐξήσεως Δz, ἤτοι ἡ τετρ. ῥίζα $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, εἶνε τὸ μῆκος τοῦ τμήματος ΜΜ', ὁ δὲ λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ εἶνε ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας, ἣν τὸ αὐτὸ τμῆμα ΜΜ' σχηματίζει πρὸς τὸν θετικὸν ἡμιάξονα ΟΧ.

225. Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι τὸ ὅριον τοῦ λόγου (1) ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς διευθύνσεως τῆς ΜΜ', ἤτοι ἐκ τῆς διευθύνσεως, πρὸς ἣν τὸ σημεῖον Μ ἐκινήθη.

Ἐὰν ἄρα θέλωμεν νὰ ὑπάρχῃ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $f(x,y)$ ἐντελῶς ὡρισμένη δι' ἑκάστην τιμὴν τῆς μεταβλητῆς z, (ἀνεξάρτητος δηλαδὴ ἀπὸ τοῦ λόγου $\frac{\Delta y}{\Delta x}$), ἀνάγκη νὰ πληρῇ ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ τὴν ἑπομένην ἐξίσωσιν

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

Τοῦτο δὲ καὶ ἀρκεῖ· ἡ δὲ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $f(x,y)$ πρὸς z εἶνε τότε $\frac{\partial f}{\partial x}$ ἢ τὸ ἴσον αὐτῷ $-i\frac{\partial f}{\partial y}$.

226. Ἡ ἐξίσωσις (2) ἐκφράζει, ὅτι ἡ συνάρτησις f ἐξαρτᾶται ἐκ μόνου τοῦ ἀθροίσματος $x+iy$· ἐὰν δηλαδὴ παραστήσωμεν τὸ ἄθροισμα τοῦτο διὰ z, ἤτοι ἂν θέσωμεν

$$x+iy=z$$

καὶ ἀπαλείψωμεν τὴν x, θέτοντες εἰς τὴν συνάρτησιν $f(x,y)$ ἀντὶ τοῦ x τὸ ἴσον αὐτῷ $z-iy$, θὰ ἀπαλειφθῇ καὶ ἡ y καὶ θὰ μείνῃ ἐν τῇ συναρτήσει f μόνον ἡ z. Διότι ὑποτεθείσθω, ὅτι μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τοῦ x γίνεται

$$f(x,y)=f_1(z,y)$$

τότε

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f_1}{\partial z}\cdot \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=i\frac{\partial f_1}{\partial z}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\cdot$$

καὶ ἡ ἐξίσωσις (2) γίνεται

$$i\frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

ἤτοι ἡ νέα συνάρτησις f_1 δὲν ἔχει ποσῶς τὴν μεταβλητὴν y· εἶνε ἄρα

$$f(x,y)=f_1(z)$$

καὶ ἡ παράγωγος αὐτῆς εἶνε $f'_1(z)$.

Ὅτι δὲ καὶ ἀντιστρόφως· πάσης συναρτήσεως τοῦ $z(=x+yi)$ ἡ παράγωγος εἶνε ἀνεξάρτητος ἀπὸ τοῦ λόγου $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, εἶνε προφανές.

227. Ἐὰν χωρίσωμεν τὴν συνάρτησιν $f(z)$ εἰς τὸ πραγματικὸν καὶ εἰς τὸ φανταστικὸν αὐτῆς μέρος, θὰ εἶνε

$$f(z)=\varphi(x,y)+i\sigma(x,y) \qquad (3)$$

καὶ ἡ ἐξίσωσις (2) δίδει τὰς ἑξῆς δύο

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x}&=\frac{\partial \sigma}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}&=-\frac{\partial \sigma}{\partial x}, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

ἃς πρέπει νὰ πληρῶσι τὰ δύο εἰρημένα μέρη τῆς συναρτήσεως $f(z)$.

Ἐκ τούτων ἕπεται

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}&=0 \\ \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}&=0, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

ἤτοι ἀμφότερα τὰ μέρη τῆς συναρτήσεως $f(z)$ ἐπαληθεύουσι μίαν καὶ τὴν αὐτὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν εἰς μερικὰς παραγώγους.

Παρατηρητέον πρὸς τούτοις, ὅτι αἱ ἐξισώσεις (4) ἕπονται ἀμέσως ἐκ τῆς (3)· διότι διαφορίζοντες αὐτὴν πρῶτον μὲν πρὸς x, ἔπειτα δὲ πρὸς y, εὑρίσκομεν

$$f'(z)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\sigma}{\partial x}$$

$$if'(z)=\frac{\partial\varphi}{\partial y}+i\frac{\partial\sigma}{\partial y}$$

καὶ ἀπαλείφοντες τὴν παράγωγον $f'(z)$ εὑρίσκομεν

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\sigma}{\partial x}=+\frac{\partial\sigma}{\partial y}-i\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

ἤτοι τὰς ἐξισώσεις (4).

Παρατήρησις.

228. Αἱ ἀλγεβρικαὶ συναρτήσεις, ἡ ἐκθετικὴ συνάρτησις e^x καὶ ἡ ἀντίστροφος αὐτῆς lx καὶ πᾶσαι αἱ ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ αὐτῶν προκύπτουσαι (Διαφ., σελ. 29), πᾶσαι δηλονότι αἱ συναρτήσεις, ἃς ἐγνωρίσαμεν ἐν τῷ Διαφορικῷ λογισμῷ, εἶνε ὡρισμέναι οὐ μόνον διὰ τὰς πραγματικὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς, ἀφ' ἧς ἐξαρτῶνται, ἀλλὰ καὶ διὰ τὰς μιγαδικὰς καὶ ἡ ἰσότης

$$\sigma(x+\varepsilon)-\sigma(x)=\varepsilon\sigma'(x)+\varepsilon\omega,$$

ἥτις ἐχρησίμευσεν ὡς βάσις τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ, ἀληθεύει διὰ τὰς συναρτήσεις ταύτας, εἴτε πραγματικαὶ εἶνε αἱ τιμαὶ τῆς αὐξήσεως ε εἴτε καὶ φανταστικαί· ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι ἡ διαφόρισις, ἑπομένως καὶ ἡ ἀντίστροφος αὐτῇ πρᾶξις, ἡ ὁλοκλήρωσις, εἴτε πραγματικαὶ εἶνε αἱ μεταβληταὶ εἴτε μιγαδικαί, εἰς τοὺς αὐτοὺς ὑπόκεινται κανόνας καὶ εἰς τὰ αὐτὰ ἄγουσιν ἐξαγόμενα· πάντες δηλονότι οἱ εὑρεθέντες τύποι τῆς διαφορίσεως καὶ τῆς ὁλοκληρώσεως ἀληθεύουσι καὶ ἐπὶ τῶν μιγαδικῶν μεταβλητῶν.

Διὰ τῆς παραδοχῆς τῶν μιγαδικῶν τιμῶν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, αἱ ἰδιότητες τῶν συναρτήσεων γίνονται καταφανέστεραι, ὡς ἐν τοῖς ἑπομένοις θὰ φανῇ, ἰδιαζόντως δὲ εὐκολύνει τὴν σπουδὴν τῶν συναρτήσεων καὶ τῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν ἡ παράστασις τῶν μιγαδικῶν τιμῶν διὰ τῶν σημείων ἑνὸς ἐπιπέδου· κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον ἑκάστη τιμὴ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x παρίσταται δι' ἑνὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου ΧΟΥ καὶ ἑκάστη συνεχὴς σειρὰ τιμῶν αὐτῆς διὰ γραμμῆς τινος συνεχοῦς ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· ἐπίσης δὲ καὶ ἑκάστη τιμὴ τῆς συναρτήσεως u παρίσταται δι' ἑνὸς σημείου ἄλλου ἐπιπέδου καὶ ἑκάστη συνεχὴς σειρὰ τιμῶν τῆς συναρτήσεως u παρίσταται ὡσαύτως διὰ γραμμῆς τινος συνεχοῦς ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ.

Σημείωσις. Τὰ δύο ἐπίπεδα, ἐν οἷς παριστῶνται αἱ πρὸς ἀλλήλας ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τῶν μεταβλητῶν u καὶ z $\big(u=\sigma(z)\big)$ **ἀπεικονίζονται καθ' ὁμοιότητα** ἑκάτερον ἐπὶ τοῦ ἑτέρου· ἐὰν δηλονότι ληφθῶσι δύο ἀντίστοιχα σημεῖα αὐτῶν, οἷον τὰ u_0 καὶ z_0, πάντα τὰ ἐκ τούτων ἀρχόμενα ἀντίστοιχα ἀπειροστὰ τόξα ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον· καὶ ἡ γωνία δύο τυχόντων τόξων ἐκ τοῦ σημείου z_0 ἀρχομένων ἰσοῦται τῇ γωνίᾳ τῶν ἀντιστοίχων τόξων, ἅτινα ἄρχονται ἀπὸ τοῦ u_0 (ἐπὶ τῇ ὑποθέσει, ὅτι ἡ παράγωγος $\sigma'(z_0)$ ἔχει διὰ $z=z_0$ τιμὴν πεπερασμένην καὶ ἐντελῶς ὡρισμένην καὶ τοῦ 0 διάφορον)· διότι ἐκ τῆς ἐξισώσεως $u=\sigma(z)$ ἕπεται

$$(6) \qquad du=\sigma'(z_0)dz \qquad (\text{διὰ } z=z_0)$$

καὶ ἂν παραστήσωμεν διὰ ds τὸ ἀπειροστὸν τόξον, ὅπερ γράφει ἡ μεταβλητὴ z ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς καὶ διὰ φ τὴν γωνίαν, ἣν σχηματίζει ἡ ἐφαπτομένη αὐτοῦ πρὸς τὸν θετικὸν ἡμιάξονα ΟΧ, ἔτι δὲ διὰ dS καὶ Φ τὰ ἀντίστοιχα μεγέθη διὰ τὴν καμπύλην, ἣν γράφει ἡ μεταβλητὴ u ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῆς, πρὸς δὲ τούτοις παραστήσωμεν τὸ μέτρον τῆς παραγώγου $\sigma'(z_0)$ διὰ ρ_0 καὶ τὸ ὄρισμα αὐτῆς διὰ α_0 ἡ ἰσότης (6) γίνεται

$$e^{\Phi i}.\, dS=\rho_0 e^{\alpha_0 i}.\, e^{\varphi i}\, ds,$$

ὅθεν

$$dS=\rho . ds \quad \text{καὶ} \quad \Phi=\varphi+\alpha_0,$$

ἐὰν δὲ καὶ δευτέραν οἱανδήποτε γραμμὴν γράφῃ ἡ μεταβλητὴ z ἀναχωροῦσα ἀπὸ τῆς τιμῆς z_0, θὰ γράφῃ καὶ ἡ μεταβλητὴ u ἀντίστοιχον γραμμὴν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς ἀρχομένη ἀπὸ τῆς τιμῆς u_0 καὶ θὰ εἶνε πάλιν

$$\Phi'=\varphi'+\alpha_0,$$

ὅθεν

$$\Phi'-\Phi=\varphi'-\varphi,$$

ἤτοι ἡ γωνία δύο οἱωνδήποτε γραμμῶν τοῦ ἐπιπέδου z ἀρχομένων ἐκ τοῦ σημείου z_0 ἰσοῦται τῇ γωνίᾳ τῶν ἀντιστοιχουσῶν γραμμῶν τοῦ ἐπιπέδου u, τῶν ἀρχομένων ἀπὸ τοῦ σημείου u_0.

Μονότιμοι καὶ πλειονότιμοι συναρτήσεις.

229. Ἡ μιγαδικὴ μεταβλητὴ z δύναται νὰ μεταβῇ ἀπὸ μιᾶς τιμῆς α εἰς ἄλλην β συνεχῶς μεταβαλλομένη καὶ ἀκολουθοῦσα ἀπείρους σειρᾶς τιμῶν (τὰς σειρὰς ταύτας τῶν τιμῶν παριστῶσιν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αἱ γραμμαὶ αἱ συνδέουσαι τὰ παριστῶντα τὰς δύο τιμὰς σημεῖα Α καὶ Β.).

ἐὰν δὲ ἀναχωρήσωμεν ἀπὸ τῆς πρώτης τιμῆς α καὶ μεταβάλλωμεν αὐτὴν συνεχῶς ἀκολουθοῦντες τὴν τυχοῦσαν σειρὰν τιμῶν, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς τὴν τιμὴν β, ἐὰν δηλαδὴ γράψωμεν τυχοῦσαν γραμμὴν ἄγουσαν ἐκ τοῦ σημείου Α εἰς τὸ Β καὶ νοήσωμεν τὸ τὴν μεταβλητὴν z παριστῶν σημεῖον διαγράφον τὴν γραμμὴν ταύτην, ἂν μὲν ἡ συνάρτησις $\sigma(z)$ ἔχῃ μόνον μίαν τιμὴν δι' ἑκάστην τιμὴν τῆς μεταβλητῆς z, φανερὸν εἶνε ὅτι, *οἱανδήποτε γραμμὴν καὶ ἂν ἀκολουθήσωμεν*, πάντοτε ἡ τιμὴ $\sigma(\alpha)$ θὰ φέρῃ εἰς τὴν τιμὴν $\sigma(\beta)$· ἐὰν ὅμως ἡ συνάρτησις $\sigma(z)$ ἔχῃ δύο ἢ περισσοτέρας τιμὰς δι' ἑκάστην τιμὴν τῆς z καὶ λάβωμεν μίαν τινὰ ἐκ τῶν ἀντιστοιχουσῶν πρὸς τὴν τιμὴν α (τῆς z), ἔστω τὴν u_0, ἐπειδὴ ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἡ μεταβλητὴ z μεταβάλλεται συνεχῶς, καὶ ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως θὰ μεταβάλληται συνεχῶς· ὥστε εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς γραμμῆς θὰ λαμβάνηται ἐκ τῶν πολλῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως ἡ πλησιεστέρα πρὸς τὴν ἀμέσως προηγουμένως ληφθεῖσαν· ἡ γραμμὴ ἄρα αὕτη θὰ φέρῃ, ὅταν φθάσωμεν εἰς Β, εἰς τιμήν τινα u_1 ἐντελῶς ὡρισμένην (ἐπὶ τῇ ὑποθέσει, ὅτι ἡ τιμή, ἣν ἐλάβομεν, τῆς συναρτήσεως, μένει ἐπὶ τῆς γραμμῆς συνεχὴς καὶ πεπερασμένη καὶ διάφορος τῶν λοιπῶν)· εἶνε δὲ φανερόν, ὅτι δύναται ἄλλη γραμμή, ἄγουσα ἐκ τοῦ Α εἰς τὸ Β, νὰ φέρῃ ἐκ τῆς αὐτῆς τιμῆς u_0 εἰς ἄλλην u'_1 διάφορον τῆς u_1. Ἐκ τούτου δὲ ἐξηγεῖται, πῶς μία συνάρτησις δύναται νὰ ἔχῃ περισσοτέρας τιμὰς δι' ἑκάστην τιμὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς z καὶ πῶς αἱ τιμαὶ αὗται συνδέονται πρὸς ἀλλήλας ἀναποσπάστως καὶ συναποτελοῦσιν ὁμοῦ μίαν μόνην συνάρτησιν.

230. Αἱ ἔχουσαι μίαν μόνην τιμὴν δι' ἑκάστην τιμὴν τῆς z λέγονται *μονότιμοι* συναρτήσεις, αἱ δὲ περισσοτέρας *πλειονότιμοι*· καὶ δίτιμοι μὲν λέγονται, ἂν ἔχωσι δύο τιμάς, τρίτιμοι, ἂν τρεῖς, κτλ.

Προαγωγὴ τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως.

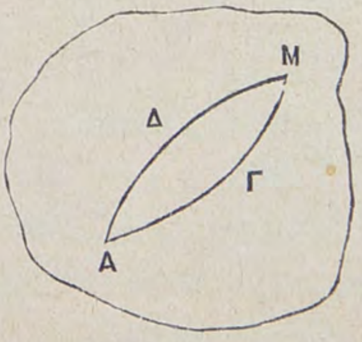
231. Ὅταν ἐκ τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως τῶν εἴς τι σημεῖον Α ἀντιστοιχουσῶν λαμβάνωμεν μίαν τινὰ u_0 καὶ παρακολουθῶμεν αὐτὴν συνεχῶς μεταβαλλομένην ἐν τῇ κινήσει τοῦ σημείου ἐπὶ τῆς τυχούσης γραμμῆς ΑΒ, τότε λέγομεν, ὅτι *προάγομεν* τὴν τιμὴν ταύτην ἐπὶ τῆς γραμμῆς ΑΒ, καὶ ἡ τιμή, ἣν εὑρίσκομεν τοιουτοτρόπως εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Β τῆς ΑΒ, λέγεται *προηγμένη* τῆς ἀρχικῆς τιμῆς u_0 ἐπὶ τῆς γραμμῆς ΑΒ. Ἀλλ' εἶνε πρόδηλον, ὅτι ἡ προαγωγὴ εἶνε δυνατή, μόνον

ὅταν ἡ τιμὴ u_0 μένῃ συνεχὴς καὶ πεπερασμένη ἐπὶ τῆς γραμμῆς AB καὶ διάφορος τῶν λοιπῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως εἰς πάντα τὰ σημεῖα αὐτῆς· διότι τότε κατὰ τὴν μετάβασιν ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου M τῆς AB εἰς ἄλλο σημεῖον M′ αὐτῆς, ἱκανῶς πλησίον τοῦ M κείμενον, ἀσφαλῶς δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν, τίς ἐκ τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ M′ πρέπει νὰ θεωρηθῇ ὡς προηγμένη τῆς τιμῆς, ἣν εἴχομεν εἰς τὸ M.

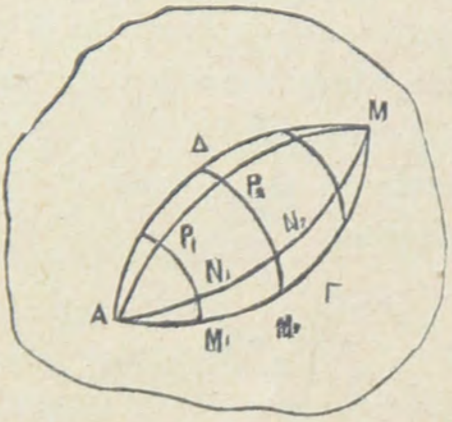
232. Τὰ σημεῖα, ἔνθα ἡ προαγωγὴ τιμῆς τινος εἶνε ἀδύνατος, ἤτοι τὰ σημεῖα, ἐν οἷς ἡ τιμὴ αὕτη γίνεται ἄπειρος ἢ πάσχει περὶ τὴν συνέχειαν, ἢ γίνεται ἴση πρὸς ἄλλην τινὰ τιμὴν τῆς συναρτήσεως (ἐκ τῶν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον ἀντιστοιχουσῶν), τὰ σημεῖα ταῦτα λέγονται *ἀνώμαλα σημεῖα* τῆς τιμῆς ταύτης ἢ καὶ τῆς ὅλης συναρτήσεως.

Ἀπομόνωσις μιᾶς τιμῆς ἔν τινι τόπῳ.

233 *Ἐὰν μία ἐκ τῶν τιμῶν συναρτήσεως πλειονοτίμου προαγομένη ἐντὸς τόπου τινὸς T, ὅστις περατοῦται ὑπὸ μιᾶς ἁπλῆς καὶ κλειστῆς γραμμῆς C, μένῃ πάντοτε πεπερασμένη καὶ συνεχὴς ἐν αὐτῷ, ἡ δὲ διαφορὰ αὐτῆς ἀφ᾽ ἑκάστης τῶν λοιπῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως ἐν παντὶ σημείῳ τοῦ T ἔχῃ μέτρον πάντοτε μεγαλήτερον ἑνός τινος θετικοῦ ἀριθμοῦ δ, ἡ τιμὴ αὕτη ἔχει ἐν ἑκάστῳ σημείῳ M τοῦ τόπου T μίαν καὶ μόνην προηγμένην, δι᾽ οἱασδήποτε γραμμῆς καὶ ἂν προαχθῇ μέχρι τοῦ σημείου τούτου M· λέγω δηλαδή, ὅτι δύο τυχοῦσαι γραμμαὶ ἐν τῷ τόπῳ T κείμεναι, ὡς αἱ ΑΓΜ καὶ ΑΔΜ, ἄγουσιν ἐκ τῆς τιμῆς u_0 (εἰς A) εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν τιμὴν u_1 εἰς M.*



Ἔστω ε ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, ἐν τῷ ὁποίῳ ἡ μετάβασις ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου αὐτοῦ εἰς ἄλλο προξενεῖ μεταβολὴν τῆς περὶ ἧς ὁ λόγος τιμῆς ἔχουσαν μέτρον μικρότερον τοῦ $\frac{\delta}{2}$, ὁπουδήποτε τοῦ τόπου T καὶ ἂν ἔχῃ τὸ κέντρον αὐτοῦ. Ἐὰν διαιρέσωμεν εἰς μέρη τὸν ὑπὸ τῶν δύο γραμμῶν ΑΓΜ καὶ ΑΔΜ ἀπολαμβανόμενον τόπον (ὅστις εἶνε μέρος τοῦ T) πρῶτον μὲν διὰ τῆς τυχούσης σειρᾶς γραμμῶν ἀρχομένων ἐκ τοῦ A καὶ ληγουσῶν εἰς M καὶ μὴ τεμνουσῶν ἀλλήλας, ἔπειτα δὲ δι᾽ ἄλλης οἱασδήποτε σειρᾶς γραμμῶν μὴ τεμνουσῶν ἀλλήλας, λάβωμεν δὲ τὰς γραμμὰς ταύτας τόσον πλησίον, ὥστε ἡ ἀπόστασις δύο οἱωνδήποτε σημείων ἑκάστου μέρους τοῦ τόπου ΑΓΜΔΑ νὰ εἶνε μικροτέρα τοῦ ε, ἡ ἐκ τοῦ Α προαγωγὴ τῆς τιμῆς u_0 εἴτε ἐπὶ τῆς ὁδοῦ AM_1 γίνῃ, εἴτε ἐπὶ τῆς AN_1M_1, θὰ φέρῃ εἰς τὴν αὐτὴν τιμήν· καὶ ὄντως παριστῶντες διὰ ω_1 τὴν τιμήν, εἰς ἣν ἄγει ἡ ὁδὸς AM_1, καὶ διὰ ω'_1 τὴν τιμήν, εἰς ἣν ἄγει ἡ AN_1M_1, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὰς γενομένας ὑποθέσεις



$$\left|\omega_1-u_0\right|<\frac{\delta}{2} \quad \text{καὶ} \quad \left|\omega'_1-u_0\right|<\frac{\delta}{2}$$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε

$$\omega_1-\omega'_1=(\omega_1-u_0)+(u_0-\omega'_1) \text{ συνάγεται}$$

$$\left|\omega_1-\omega'_1\right|<\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2} \quad \text{ἤτοι } <\delta\cdot$$

ἐπειδὴ δὲ ἡ τιμὴ ω_1 διαφέρει τῶν λοιπῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως (τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς M_1) διαφορὰν ἔχουσαν μέτρον μεῖζον τοῦ δ, συμπεραίνομεν, ὅτι θὰ εἶνε $\omega'_1=\omega_1$, ἤτοι αἱ δύο ὁδοὶ AM_1 καὶ AN_1M_1 ἄγουσιν εἰς τὴν αὐτὴν τιμὴν ω_1, ἤτοι εἶνε ἰσοδύναμοι.

Ὁμοίως δεικνύεται, ὅτι ἡ τιμὴ ω_1 εἴτε ἐπὶ τῆς ὁδοῦ M_1M_2 προαχθῇ, εἴτε ἐπὶ τῆς $M_1N_1N_2M_2$ φέρει εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν τιμὴν ω_2. Ὥστε αἱ δύο ὁδοὶ AM_2 καὶ AN_2M_2 εἶνε ἰσοδύναμοι.

Ἐξακολουθοῦντες τοιουτοτρόπως δεικνύομεν, ὅτι αἱ δύο ὁδοὶ $AM_1M_2...M$ καὶ $AN_1N_2...M$ ἄγουσιν ἐκ τῆς τιμῆς u_0 εἰς τὴν αὐτὴν τιμὴν u_1.

Ἀλλὰ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δεικνύεται καὶ ἡ ὁδὸς $AP_1P_2...M$ ἰσοδύναμος τῇ $AN_1N_2...M$ καὶ ἡ ὁδὸς $A\Sigma_1\Sigma_2...M$ ἰσοδύναμος ταῖς προηγουμένως εἰρημέναις, καὶ οὕτω καθεξῆς· ἤτοι τέλος αἱ δύο ὁδοὶ ΑΓΜ καὶ ΑΔΜ εἶνε ἰσοδύναμοι.

234. Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι, *ἐὰν ἡ μεταβλητὴ z περιορισθῇ ἐντὸς τοῦ τόπου T, ἡ τιμὴ u_0 εἰς A μετὰ τῶν προηγμένων αὐτῆς εἰς τὰ σημεῖα τοῦ τόπου T δύνανται νὰ ἀπομονωθῶσιν ἐντελῶς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως καὶ νὰ θεωρηθῶσιν ὡς συναποτελοῦσαι μίαν μονότιμον συνάρτησιν* (ἐν τῷ τόπῳ T)· *ἡ συνάρτησις αὕτη εἶνε τότε* **κλάδος** *τῆς ὅλης συναρτήσεως.*

Ὁρισμός.

235. Ἐὰν συνάρτησίς τις (ἢ κλάδος συναρτήσεως) ἔν τινι τόπῳ T μένῃ πεπερασμένη καὶ συνεχὴς καὶ μονότιμος, λέγεται, ὅτι εἶνε *ὁμαλὴ* ἐν τῷ τόπῳ τούτῳ.

Α΄) ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΜΟΝΟΤΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1) Ἀκέραιαι συναρτήσεις βαθμοῦ μ.

236. Πᾶσα ἀκεραία συνάρτησις τοῦ βαθμοῦ μ εἶνε προφανῶς μονότιμος· ἡ μεταβλητὴ z δύναται νὰ λάβῃ πᾶσαν τιμήν, (ἤτοι τὸ παριστῶν αὐτὴν σημεῖον δύναται νὰ καταλάβῃ πᾶσαν θέσιν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου) ἡ δὲ συνάρτησις μένει πάντοτε πεπερασμένη καὶ μεταβάλλεται συνεχῶς, ὅταν ἡ z μεταβάλληται συνεχῶς (Εἰσαγ. σελ. 113).

Ἐὰν ἡ μεταβλητὴ z αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον ἀκολουθοῦσα οἱανδήποτε σειρὰν τιμῶν, ἀρκεῖ τὸ μέτρον αὐτῆς νὰ αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον, ἂν δηλαδὴ τὸ παριστῶν αὐτὴν σημεῖον ἀπομακρύνηται εἰς ἄπειρον ἀκολουθοῦν οἱανδήποτε γραμμήν, ἡ συνάρτησις αὐξάνει εἰς ἄπειρον· δηλαδή, δοθέντος ἀριθμοῦ θετικοῦ ὁσονδήποτε μεγάλου, τοῦ M, δύναται νὰ γραφῇ κύκλος περὶ τὴν ἀρχὴν O ἔχων ἀκτῖνα R ἱκανῶς μεγάλην, ὥστε πᾶσαι αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως, διὰ τιμὰς τῆς z ἐκτὸς τοῦ κύκλου τούτου κειμένας, νὰ ἔχωσι μέτρον μεγαλήτερον τοῦ M· τοῦτο δε ἐννοοῦμεν, ὅταν λέγωμεν, ὅτι ἡ ἀκεραία συνάρτησις (τοῦ βαθμοῦ μ) διὰ $x=\infty$ ἔχει τιμὴν ὡρισμένην, τὴν τιμὴν ∞.

Ἡ ἀκεραία συνάρτησις τοῦ βαθμοῦ μ λαμβάνει ἑκάστην τῶν τιμῶν αὐτῆς διὰ τιμὰς τοῦ z, ὧν τὸ πλῆθος εἶνε πεπερασμένον καὶ ἴσον τῷ βαθμῷ αὐτῆς μ.

2) Ῥηταὶ συναρτήσεις.

237. Καὶ αἱ ῥηταὶ συναρτήσεις εἶνε προφανῶς μονότιμοι· εἶνε δὲ πεπερασμέναι καὶ συνεχεῖς, πλὴν εἴς τινα σημεῖα, ὧν ὁ ἀριθμὸς πεπερασμένος (τὰ παριστῶντα τὰς ῥίζας τοῦ παρονομαστοῦ), ἔνθα ἡ συνάρτησις γίνεται ἄπειρος· ὅταν δηλαδὴ ἡ μεταβλητὴ z (ἤτοι τὸ παριστῶν αὐτὴν σημεῖον) πλησιάζῃ πρὸς ἓν τῶν σημείων τούτων ἀκολουθοῦσα οἱανδήποτε γραμμήν, τὸ μέτρον τῆς ῥητῆς συναρτήσεως αὐξάνει εἰς ἄπειρον· δηλαδή, δοθέντος ἀριθμοῦ θετικοῦ ὁσονδήποτε μεγάλου, τοῦ M,

δύναται νὰ γραφῇ κύκλος περὶ τὸ σημεῖον τοῦτο μὲ ἀκτῖνα ἱκανῶς μικράν, ὥστε πᾶσαι αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως διὰ τὰς τιμὰς τῆς z τὰς ἐντὸς τοῦ κύκλου τούτου κειμένας νὰ ἔχωσι μέτρον μεγαλήτερον τοῦ M.

Καὶ διὰ $x=\infty$ ἡ ῥητὴ συνάρτησις ἔχει τιμὴν ἐντελῶς ὡρισμένην, ἡ δὲ τιμὴ αὕτη εἶνε 0 μέν, ἂν ὁ βαθμὸς τοῦ ἀριθμητοῦ εἶνε μικρότερος ἢ ὁ τοῦ παρονομαστοῦ, ἄπειρον δέ, ἂν μεγαλήτερος, καὶ ἀριθμός τις πεπερασμένος (διάφορος τοῦ 0), ἂν οἱ βαθμοὶ εἶνε ἴσοι.

Ὥστε καὶ ἡ ῥητὴ συνάρτησις ἔχει δι' ἑκάστην τιμὴν τῆς μεταβλητῆς z μίαν μόνην καὶ ἐντελῶς ὡρισμένην τιμήν· λαμβάνει δὲ ἑκάστην τιμὴν αὐτῆς διὰ τιμὰς τῆς z, ὧν τὸ πλῆθος εἶνε πεπερασμένον· διότι ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{\sigma(z)}{\varphi(z)}=u \qquad \text{ἢ} \quad \sigma(z)-u.\varphi(z)=0,$$

ἥτις δίδει δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ u τὰς ἀντιστοιχούσας τιμὰς τῆς z, εἶνε ἀλγεβρική.

238. Ἐὰν ἡ ῥητὴ συνάρτησις $f(z)$ γίνηται ἄπειρος διὰ $z=\alpha$, ὑπάρχει πάντοτε ἀκέραιός τις καὶ θετικὸς ἀριθμὸς μ τοιοῦτος, ὥστε τὸ γινόμενον

$$f(z).(z-\alpha)^{\mu}$$

νὰ μένῃ πεπερασμένον καὶ διάφορον τοῦ 0 ἐντὸς κύκλου περὶ τὸ α ἔχοντος ἀκτῖνα ἱκανῶς μικράν· ἐπίσης, ἂν διὰ $x=\infty$, γίνηται ἄπειρος, ὑπάρχει πάντοτε ἀκέραιός τις καὶ θετικὸς ἀριθμὸς μ τοιοῦτος, ὥστε τὸ γινόμενον

$$f(x)\left(\frac{1}{x}\right)^{\mu}$$

διὰ τιμὰς τῆς z κειμένας ἐκτὸς κύκλου ἔχοντος κέντρον τὴν ἀρχὴν καὶ ἀκτῖνα ἱκανῶς μεγάλην, νὰ μένῃ πάντοτε πεπερασμένον καὶ ὡρισμένον καὶ τοῦ 0 διάφορον.

Ὁρισμοί.

239. Πᾶσαι αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς z, ὧν ἡ διαφορὰ ἀπὸ μιᾶς πεπερασμένης τιμῆς αὐτῆς α ἔχει μέτρον μικρότερον τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ ρ, λέγεται, ὅτι *ἀποτελοῦσι τὴν περιοχὴν τῆς τιμῆς ταύτης α τὴν ἔχουσαν ἀκτῖνα ϱ*· ἢ γεωμετρικῶς· ἐὰν περὶ κέντρον τὸ τυχὸν σημεῖον M τοῦ ἐπιπέδου, ἐφ' οὗ παρίσταται ἡ μεταβλητὴ z, γραφῇ κύκλος ἔχων ἀκτῖνα ρ, τὰ σημεῖα τοῦ κύκλου τούτου λέγεται, ὅτι ἀποτελοῦσι τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου M τὴν ἔχουσαν ἀκτῖνα ρ.

240. *Περιοχὴ τοῦ ἀπείρου ἀπὸ ἀκτῖνος* R λέγεται τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τῆς z, ὧν τὸ μέτρον ὑπερβαίνει τὸν θετικὸν ἀριθμὸν R. ἤτοι τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου z, ἅτινα κεῖνται ἐκτὸς τοῦ κύκλου, οὗ κέντρον ἡ ἀρχὴ 0 καὶ ἡ ἀκτὶς R.

241. Ἐὰν εἴς τι σημεῖον $z=\alpha$ (ἢ $z=\infty$) ἡ συνάρτησις $\sigma(z)$ γίνηται ἄπειρος, οἱανδήποτε γραμμὴν καὶ ἂν ἀκολουθῇ ἡ μεταβλητὴ z ἐρχομένη εἰς αὐτό, ὑπάρχει δὲ ἀκέραιός τις καὶ θετικὸς ἀριθμὸς μ, τοιοῦτος, ὥστε τὸ γινόμενον

$$\sigma(z)(z-\alpha)^{\mu} \quad \left(\text{ἤ, ἂν } z=\infty,\ \sigma(z)\left(\frac{1}{z}\right)^{\mu}\right)$$

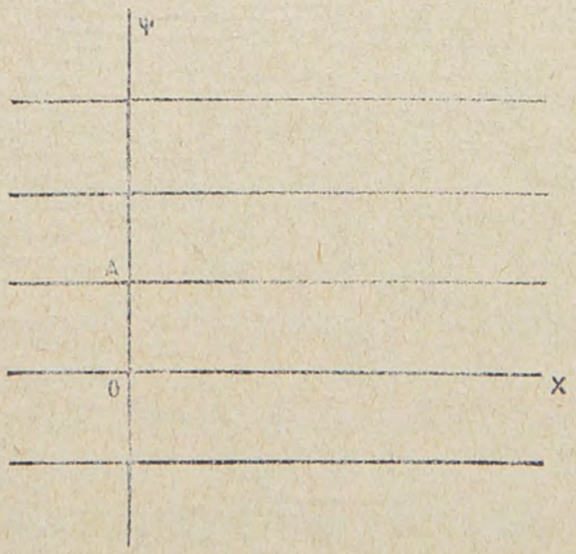
νὰ μένῃ πεπερασμένον ἔν τινι περιοχῇ τοῦ σημείου τούτου καὶ νὰ τείνῃ πρὸς πεπερασμένην καὶ τοῦ 0 διάφορον τιμήν, ὅταν ἡ z τείνῃ πρὸς α (ἢ ὅταν $z=\infty$), τὸ τοιοῦτον ἀνώμαλον σημεῖον λέγεται *πόλος* τῆς συναρτήσεως καὶ ὁ ἐκθέτης μ λέγεται *βαθμὸς τοῦ ἀπειρισμοῦ* τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον αἱ ῥηταὶ συναρτήσεις μόνον πόλους ἔχουσιν ἀνώμαλα σημεῖα· αἱ δὲ ἀκέραιαι ἔχουσι πόλον τὸ σημεῖον ∞,

242. Ἐὰν ἐν πάσῃ περιοχῇ σημείου τινὸς $M(z=\alpha)$ ἡ συνάρτησις $\sigma(z)$ λαμβάνῃ πᾶσαν τιμήν, ἤ, ἂν μὴ λαμβάνῃ τιμήν τινα, λαμβάνῃ ὅμως τιμὰς ὁσονδήποτε ὀλίγον διαφερούσας ἀπ' αὐτῆς, τὸ τοιοῦτον σημεῖον λέγεται *σημεῖον ἀοριστίας* τῆς συναρτήσεως $\sigma(z)$.

3) $\quad e^z$ **ἤτοι** $\displaystyle\sum_{\nu} \frac{z^{\nu}}{1.2\,3\ldots\nu}$

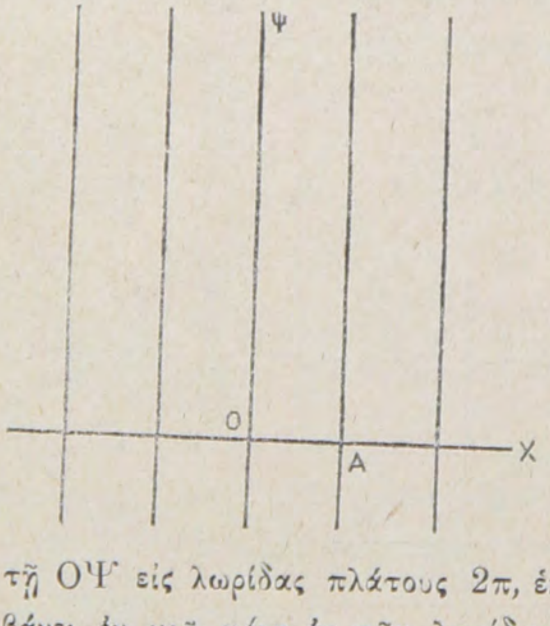
243. Ἡ συνάρτησις αὕτη εἶνε μονότιμος, συνεχὴς καὶ πεπερασμένη ἐπὶ παντὸς πεπερασμένου μέρους τοῦ ἐπιπέδου (Διαφορ. σελ. 21), εἶνε δὲ περιοδικὴ καὶ περίοδον ἔχει τὸ $2\pi i$· ὥστε, ἂν διαιρέσωμεν τὸ ἐπίπεδον ΧΟΨ δι' εὐθειῶν παραλλήλων τῇ ΟΧ εἰς λωρίδας ἐχούσας πλάτος 2π, ἡ συνάρτησις e^z λαμβάνει πάσας τὰς δυνατὰς αὐτῆς τιμάς, ὅταν



ἡ μεταβλητὴ z διανύσῃ μίαν μόνην ἐκ τῶν λωρίδων τούτων (λαμβάνει δὲ ἑκάστην τιμὴν αὐτῆς ἅπαξ ἐν ἑκάστῃ λωρίδι), αἱ δὲ τιμαὶ αὐτῆς εἰς τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα πασῶν τῶν λωρίδων (ἤτοι εἰς τὰ σημεῖα, ὧν αἱ μὲν τετμημέναι εἶνε αἱ αὐταί, αἱ δὲ τεταγμέναι διαφέρουσι κατὰ πολλαπλάσιόν τι τοῦ 2π) εἶνε αἱ αὐταί. Ἐκ τούτου συνάγεται, ὅτι διὰ $z=\infty$ ἡ συνάρτησις e^z οὐδεμίαν ἔχει ὡρισμένην τιμήν, ἤτοι εἶνε ἀόριστος· διότι ἐν πάσῃ περιοχῇ τοῦ ἀπείρου ἀπὸ ἀκτῖνος ὁσονδήποτε μεγάλης ὑπάρχουσι πάντοτε ἄπειροι λωρίδες, ὥστε λαμβάνει ἡ συνάρτησις (ἐν πάσῃ περιοχῇ τοῦ ἀπείρου) πάσας τὰς τιμὰς αὐτῆς, διὰ τοῦτο λέγομεν, ὅτι ἡ συνάρτησις e^z ἔχει σημεῖον ἀοριστίας τὸ σημεῖον ∞. Τὴν τιμὴν 0 δὲν λαμβάνει ἡ συνάρτησις e^z ἐν τῷ πεπερασμένῳ, τείνει ὅμως πρὸς αὐτήν, ὅταν ἡ μεταβλητὴ z διανύῃ οἱανδήποτε γραμμὴν εἰς ἄπειρον ἐκτεινομένην καὶ ἐφ' ἧς ἡ τετμημένη x, ἀρνητικὴ οὖσα, αὐξάνει εἰς ἄπειρον (κατ' ἀπόλυτον τιμήν).

Σημειωτέον δέ, ὅτι κοινὸν γνώρισμα πασῶν τῶν μονοτίμων ὑπερβατικῶν συναρτήσεων εἶνε τὸ ὅτι γίνονται ἀόριστοι εἰς ἓν ἢ περισσότερα σημεῖα.

4). ημz καὶ συνz



244. Αἱ συναρτήσεις αὗται εἶνε ῥηταὶ συναρτήσεις τῆς e^{zi} ἀκέραιαι δὲ συναρτήσεις τῶν e^{zi} καὶ e^{-zi} ὁρίζονται ἑπομένως διὰ σειρῶν συγκλινουσῶν ἐφ' ἅπαντος τοῦ ἐπιπέδου z· ἑπομένως εἶνε μονότιμοι καὶ μένουσι συνεχεῖς καὶ πεπερασμέναι ἐν παντὶ πεπερασμένῳ μέρει τοῦ ἐπιπέδου z, ἔχουσι δὲ περίοδον τὸ 2π· ὥστε, ἐὰν διαιρεθῇ τὸ ἐπίπεδον ΧΟΨ δι' εὐθειῶν παραλλήλων τῇ ΟΨ εἰς λωρίδας πλάτους 2π, ἑκατέρα τῶν συναρτήσεων τούτων λαμβάνει ἐν μιᾷ μόνῃ ἐκ τῶν λωρίδων τούτων πάσας τὰς τιμὰς αὐτῆς· εἰς τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα τῶν λωρίδων αἱ τιμαὶ ἑκατέρας εἶνε αἱ αὐταί. Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι καὶ αἱ συναρτήσεις αὗται γίνονται ἀόριστοι διὰ $z=\infty$.

245. Ἐν ἑκάστῃ λωρίδι ἡ συνάρτησις συνz λαμβάνει δὶς ἑκάστην

τῶν τιμῶν αὐτῆς, ἤτοι εἰς δύο σημεῖα τῆς λωρίδος· διότι ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}=\alpha$$

δίδει

$$e^{2zi}-2\alpha e^{zi}+1=0$$

ὅθεν

$$e^{zi}=\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-1}.$$

καὶ

$$z=\frac{1}{i}l\left\{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-1}\right\}.$$

παριστῶντες δὲ διὰ ρ_1 καὶ ρ_2 τὰ μέτρα τῶν δύο ἀριθμῶν $\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}$ καὶ $\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}$ καὶ διὰ φ_1 καὶ φ_2 τὰ ὀρίσματα αὐτῶν (μεταξὺ 0 καὶ 2π) ἔχομεν τὰς δύο τιμὰς τοῦ z

$$z_1=\frac{1}{i}l\rho_1+\varphi_1$$

καὶ

$$z_2=\frac{1}{i}l\rho_2+\varphi_2.$$

Εἰς τὰς τιμὰς ταύτας τῶν λογαρίθμων παρελείφθησαν αἱ περιφέρειαι $2k\pi$· διότι, τοῦ z κειμένου ἐν τῇ πρώτῃ λωρίδι, τὸ πραγματικὸν μέρος αὐτοῦ, δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὸ 2π.

Παρατηρητέον δέ, ὅτι εἶνε

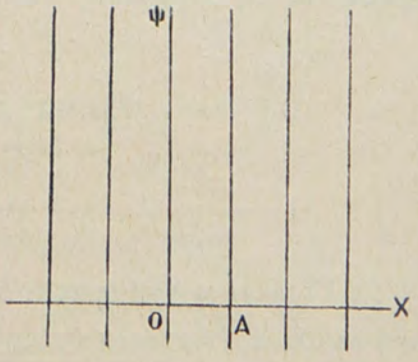
$$z_1+z_2=2\pi,$$

διότι οἱ δύο ἀριθμοὶ $\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-1}$ ἔχουσι γινόμενον 1· ὅθεν $\rho_1\rho_2=1$ καὶ $\varphi_1+\varphi_2=2\pi$· ἑπομένως καὶ $z_1+z_2=2\pi$.

Ἤτοι εἶνε συν$(2\pi-z)=$συνz, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ z.

Ὁμοίως δεικνύεται, ὅτι αἱ δύο τιμαὶ z_1 καὶ z_2 δίδουσι τὴν αὐτὴν τιμὴν τοῦ ημz, ἂν εἶνε $z_1+z_2=\pi$· τουτέστιν εἶνε ημ$z=$ημ$(\pi-z)$, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ z.

5) εφz καὶ σφz



246. Αἱ συναρτήσεις αὗται εἶνε ῥηταὶ συναρτήσεις τοῦ e^{zi}, εἶνε περιοδικαὶ καὶ περίοδον ἔχουσι τὸν π· ὥστε, ἂν διαιρεθῇ τὸ ἐπίπεδον ΧΟΨ διὰ παραλλήλων τῇ ΟΨ εἰς λωρίδας πλάτους π, λαμβάνει ἑκατέρα

τούτων πάσας τὰς ἑαυτῆς τιμὰς ἐντὸς μιᾶς τῶν λωρίδων τούτων· εἰς τὸ ἄπειρον γίνονται καὶ αὗται ἀόριστοι· διότι ἐν πάσῃ περιοχῇ τοῦ ἀπείρου κεῖνται ἄπειροι λωρίδες.

Ἐν ἑκάστῃ λωρίδι αἱ συναρτήσεις εφz καὶ σφz εἶνε πεπερασμέναι καὶ συνεχεῖς ἐξαιρουμένου ἑνὸς σημείου αὐτῆς, ὅπερ εἶνε πόλος καὶ βαθμὸν ἀπειρισμοῦ ἔχει 1· τὸ σημεῖον τοῦτο ἐν τῇ πρώτῃ λωρίδι εἶνε τὸ σημεῖον $z=\frac{\pi}{2}$ διὰ τὴν συνάρτησιν εφz (διὰ δὲ τὴν συνάρτησιν σφz εἶνε τὸ $z=0$)· τῷ ὄντι τὸ γινόμενον

$$\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\text{εφ}z$$

μένει πεπερασμένον ἐν ἱκανῶς μικρᾷ περιοχῇ τῆς τιμῆς $\frac{\pi}{2}$ καὶ τείνει πρὸς τὴν μονάδα 1, ὅταν z τείνῃ πρὸς τὸ $\frac{\pi}{2}$.

Ἐν ἑκάστῃ λωρίδι ἑκατέρα τῶν συναρτήσεων λαμβάνει ἅπαξ ἑκάστην τιμὴν αὐτῆς· διότι ἡ ἐξίσωσις

$$\text{εφ}z=\alpha \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{e^{zi}-e^{-zi}}{e^{zi}+e^{-zi}}=\alpha i$$

μόνον μίαν τιμὴν z_1 δίδει ἔχουσαν πραγματικὸν μέρος θετικὸν καὶ μικρότερον τοῦ π.

Καὶ ὄντως ἐξ αὐτῆς εὑρίσκομεν

$$e^{2zi}=\frac{1+\alpha i}{1-\alpha i}=\rho e^{\varphi i}, \qquad 0<\varphi<2\pi$$

ὅθεν

$$z=\frac{1}{2i}\,l\rho+\frac{\varphi}{2}.$$

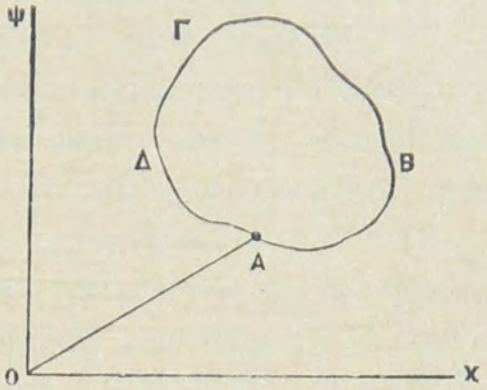
αἱ ἡμιπεριφέρειαι $k\pi$ παρελείφθησαν, διότι τὸ πραγματικὸν μέρος τοῦ z πρέπει νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὸν π. (διὰ τὴν πρώτην λωρίδα).

Β') ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΗ ΜΟΝΟΤΙΜΩΝ

1) $\quad u=\sqrt{z}$ ἢ $u^2=z$

247. Ἡ συνάρτησις $\sqrt{z}$ ἔχει εἰς ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου z δύο τιμὰς ἀντιθέτους (εἰς τὴν ἀρχήν, ἤτοι διὰ $z=0$, αἱ τιμαὶ αὗται συνέ-

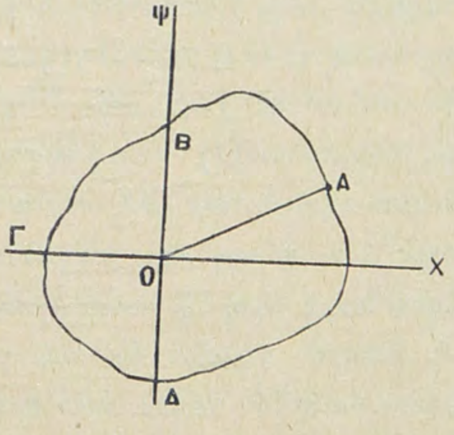
πεσαν εἰς μίαν) εἶνε συνεχὴς καὶ πεπερασμένη εἰς πᾶν πεπερασμένον μέρος τοῦ ἐπιπέδου καὶ διὰ $z=\infty$ γίνεται καὶ αὐτὴ ∞.



Ἐὰν ἡ μεταβλητὴ z διανύσῃ ὁλόκληρον κλειστήν τινα γραμμήν, ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως ἐπανέρχεται ἡ αὐτή, ἂν ἡ γραμμὴ δὲν περικλείῃ τὴν ἀρχήν, ἡ ἀντίθετος ὅμως, ἂν περικλείῃ αὐτήν· διότι, ἂν λόγου χάριν ἡ τιμὴ τοῦ z εἰς τὸ σημεῖον Α εἶνε z_0 ἢ $\rho_0 e^{\theta_0 i}$ (ρ=ΟΑ καὶ θ=γων. ΑΟΧ), αἱ δύο τιμαὶ τῆς συναρτήσεως $\sqrt{z}$ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Α θα εἶνε

$$\sqrt{\rho_0}\cdot e^{\frac{1}{2}\theta_0 i} \qquad \text{καὶ} \quad -\sqrt{\rho_0}\, e^{\frac{1}{2}\theta_0 i}$$

ὅταν δὲ ἡ μεταβλητὴ z διανύῃ τὴν κλειστὴν γραμμὴν ΑΒΓΔΑ, καὶ τὸ μέτρον αὐτῆς ρ καὶ τὸ ὄρισμα αὐτῆς θ μεταβάλλονται, ἀλλ' ἐπανέρχονται πάλιν εἰς τὰς αὐτὰς τιμὰς ρ_0 καὶ θ_0, ὅταν ἡ z φθάσῃ εἰς Α· ἐπομένως καὶ ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως ἐπανέρχεται ἡ αὐτή.



Ἀλλ' ἐὰν ἡ κλειστὴ γραμμή, ἣν διανύει ἡ μεταβλητὴ z, ἐγκλείῃ τὴν ἀρχὴν Ο, ἐξ ἑκατέρας τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως ἔρχεται ἡ ἀντίθετος· διότι τὸ μὲν μέτρον τοῦ z ἐπανέρχεται προδήλως εἰς τὴν αὐτὴν τιμὴν ρ_0 ἀλλὰ τὸ ὄρισμα αὐτοῦ αὐξάνεται κατὰ 2π, ἂν ἡ ἀκτὶς ρ στρέφηται θετικὴν στροφὴν (ἢ ἐλαττοῦται κατὰ 2π, ἂν ἀντιθέτως γίνεται ἡ κίνησις) ἐπομένως ἐκ τῆς τιμῆς

$$\sqrt{\rho_0}\, e^{\frac{1}{2}\theta_0 i} \quad \text{ἔρχεται ἡ} \quad \sqrt{\rho_0}\, e^{\frac{1}{2}(\theta_0+2\pi)i} \qquad \text{ἤτοι} \quad -\sqrt{\rho_0}\, e^{\frac{1}{2}\theta_0 i}$$

$$\text{καὶ ἐκ τῆς} \quad -\sqrt{\rho^0}\, e^{\frac{1}{2}\theta_0 i} \quad \text{ἔρχεται ἡ} \quad -\sqrt{\rho_0}\, e^{\frac{1}{2}(\theta_0+2\pi)i} \quad \text{ἤτοι} \quad \sqrt{\rho_0}\, e^{\frac{1}{2}\theta_0 i}.$$

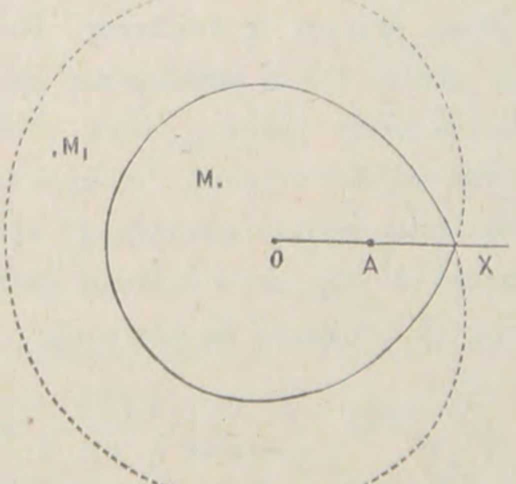
248. Τὸ σημεῖον Ο, εἰς ὃ αἱ δύο τιμαὶ τῆς συναρτήσεως γίνονται ἴσαι ἀλλήλαις καὶ ἐκ τῆς κυκλώσεως τοῦ ὁποίου τρέπονται αἱ τιμαὶ τῆς

συναρτήσεως εἰς ἀλλήλας, εἶνε σημεῖον ἀνώμαλον (ἐδ. 232) τῆς συναρτήσεως $\sqrt{z}$ καὶ λέγεται *σημεῖον διακλαδώσεως*.

Ἑκατέρα τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως ἀπομονοῦται ἐντὸς οἱουδήποτε πεπερασμένου μέρους τοῦ ἐπιπέδου ἔχοντος τὴν ἀρχὴν O ἐκτὸς ἑαυτοῦ· διότι δύο ὁδοὶ ἐν τῷ τοιούτῳ τόπῳ, ἐὰν ἔχωσι τὰ αὐτὰ ἄκρα, φέρουσι πάντοτε ἐξ ἴσων τιμῶν εἰς τὴν αὐτὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως.

249. Ἐὰν ἡ μεταβλητὴ z νοῆται κινουμένη ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου ΧΟΨ, ἡ συνάρτησις $\sqrt{z}$ εἶνε δίτιμος· ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ καταστήσωμεν τὴν ὅλην συνάρτησιν $\sqrt{z}$ μονότιμον, ἐὰν δώσωμεν εἰς τὴν μεταβλητὴν z ὡς τόπον κινήσεως, οὐχὶ ἓν ἀλλὰ δύο ἐπίπεδα, ὧν τὸ ἓν κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄλλου· τότε δὲ ἡ ὑπὸ τῶν δύο τούτων ἐπιπέδων ἀποτελουμένη ἐπιφάνεια δύναται νὰ διαρρυθμισθῇ οὕτως, ὥστε πρὸς ἕκαστον σημεῖον αὐτῆς νὰ ἀντιστοιχῇ μία καὶ μία μόνη τιμὴ τῆς $\sqrt{z}$ (καὶ αἱ δύο τιμαὶ τῆς συναρτήσεως $\sqrt{z}$ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι πρὸς σημεῖα τῶν δύο ἐπιπέδων συμπίπτοντα νὰ εἶνε ἀντίθετοι)· τὴν ἰδέαν ταύτην ἔσχεν ὁ Γερμανὸς μαθηματικὸς Riemann, ὅστις καὶ ἐφήρμοσεν αὐτὴν ἐπὶ πασῶν ἐν γένει τῶν ἀλγεβρικῶν συναρτήσεων.

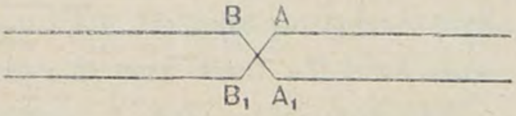
Ὑποθέσωμεν, ὅτι ἀναχωροῦμεν ἀπὸ τοῦ σημείου A τοῦ πολικοῦ ἄξονος OX, ἔνθα $OA=1$, καὶ λαμβάνομεν ὡς τιμὴν τῆς $\sqrt{z}$ τὴν τιμὴν $+1$· τότε ἐφ' ὅλης τῆς ἀκτῖνος OA ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως $\sqrt{z}$ εἶνε ἐντελῶς ὡρισμένη (ἐὰν ἡ μεταβλητὴ z κινῆται ἐπ' αὐτῆς χωρὶς νὰ ἔλθῃ ποτὲ εἰς τὸν πόλον O)· ἐὰν ἔπειτα νοήσωμεν τὴν ἀκτῖνα OX στρεφομένην περὶ τὸν πόλον καὶ γράφουσαν τὸ ἐπίπεδον, ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως $\sqrt{z}$ εἰς ἕκαστον σημεῖον M τοῦ γραφομένου ἐπιπέδου τόπου, πρὶν ἐπανέλθῃ ἡ ἀκτὶς εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν της εἶνε ἐντελῶς ὡρισμένη, ἐὰν μένῃ ἡ μεταβλητὴ z ἐν τῷ γραφέντι μέρει τοῦ ἐπιπέδου, διότι αἱ ἐκ τοῦ A (ἔνθα $\sqrt{z}=+1$) εἰς τὸ σημεῖον M ἄγουσαι γραμμαὶ δὲν δύνανται νὰ κυκλώσωσι τὸν πόλον, ἐὰν μένωσιν ἐν τῷ γραφέντι μέρει τοῦ ἐπιπέδου.



Ὅταν ὅμως ἡ στρεφομένη ἀκτὶς ἐκτελέσῃ ὁλόκληρον περιστροφήν, νοοῦμεν αὐτὴν (τὴν OX_1) οὐχὶ συμπίπτουσαν τῇ OX, ἀλλὰ διαβαίνουσαν ὑπὸ τὴν

ΟΧ καὶ γράφουσαν δεύτερον ἐπίπεδον ὑπὸ τὸ ἤδη γραφὲν καὶ συνεχόμενον μετ' αὐτοῦ· εἰς τὰ σημεῖα τοῦ δευτέρου τούτου ἐπιπέδου ἡ τιμὴ τῆς $\sqrt{z}$ εἶνε ἐπίσης ἐντελῶς ὡρισμένη, ἐὰν ἡ μεταβλητὴ z διαμένῃ ἐπὶ τοῦ ἤδη γεγραμμένου τόπου· εἰς ἕκαστον δηλαδὴ σημεῖον αὐτοῦ M_1 ἡ τιμὴ τῆς $\sqrt{z}$ εἶνε ἀντίθετος τῇ εἰς τὸ ὑπερκείμενον σημεῖον Μ τοῦ πρώτου ἐπιπέδου ἀντιστοιχούσῃ· διότι, ἵνα ἐκ τοῦ σημείου Α φθάσωμεν εἰς τὸ M_1, πρέπει νὰ κυκλώσωμεν τὸν πόλον Ο· τέλος, ὅταν ἡ ἀκτὶς στρεφομένη ἐκτελέσῃ καὶ τὴν δευτέραν περιστροφὴν καὶ φθάσῃ πάλιν εἰς τὴν πρώτην θέσιν ΟΧ (ὑποκάτω δηλαδὴ αὐτῆς), αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως $\sqrt{z}$ ἐπ' αὐτῆς εἶνε αὐταὶ αἱ πρῶται, διὰ τοῦτο νοοῦμεν τὴν ἀκτῖνα ταύτην OX_2 συμπίπτουσαν μετὰ τῆς ΟΧ. Ὥστε, ὅταν ἐν τῷ ὑποκάτω ἐπιπέδῳ κινῆται σημεῖόν τι καὶ φθάσαν τὴν γραμμὴν ταύτην OX_2 θέλῃ νὰ διαβῇ δι' αὐτῆς, θὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τοῦ ὑπεράνω κειμένου ἐπιπέδου, ὅπερ πρῶτον ἐγράφη. Ἐπὶ τῆς οὕτω κατασκευαζομένης διφύλλου ἐπιφανείας, φανερὸν εἶνε, ὅτι ἡ συνάρτησις $\sqrt{z}$ εἶνε μονότιμος· ἔχει δηλαδὴ εἰς ἕκαστον σημεῖον αὐτῆς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν πάντοτε τιμὴν (ἐὰν ληφθῇ ὡς τιμὴ αὐτῆς εἰς τὸ Α ἡ τιμὴ $+1$).

Τὴν δίφυλλον ταύτην ἐπιφάνειαν δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ὡς ἑξῆς· θέτομεν δύο φύλλα χάρτου σχήματος κυκλικοῦ τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου· ἔπειτα διατέμνομεν ἀμφότερα κατὰ μῆκος μιᾶς ἀκτῖνος ΟΧ· τότε τὸ μὲν ἄνω φύλλον θὰ ἔχῃ δύο ἄκρας ἀκτῖνας ΟΑ, ΟΒ, τὸ δὲ ὑποκάτω θὰ ἔχῃ ἄλλας δύο OA_1, OB_1 (τὴν OA_1 ὑποκάτω τῆς ΟΑ καὶ τὴν OB_1 ὑποκάτω τῆς ΟΒ)· συνενοῦμεν ἔπειτα τὴν ἀκτῖνα ΟΑ μετὰ τῆς ἀκτῖνος OB_1 καὶ τὴν ΟΒ μετὰ τῆς OA_1.



$$2) \qquad u^2 = \sigma(z) \qquad \text{ἢ} \qquad u = \sqrt{\sigma(z)}$$

250. Ἡ συνάρτησις $\sqrt{\sigma(z)}$, ἔνθα $\sigma(z)$ δηλοῖ ἀκέραιον πολυώνυμον τῆς z, ἔχει δύο τιμὰς ἀντιθέτους εἰς ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ΧΟΨ· γίνονται δὲ αἱ δύο αὗται τιμαὶ ἴσαι εἰς τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,... τὰ παριστῶντα τὰς ῥίζας τοῦ πολυωνύμου $\sigma(z)$· ἀμφότεραι αἱ τιμαὶ τῆς $\sqrt{\sigma(z)}$ εἶνε συνεχεῖς καὶ πεπερασμέναι εἰς πᾶν μέρος τοῦ ἐπιπέδου καὶ διὰ $x=\infty$ γίνονται ἐπίσης ∞.

Ἐὰν ἡ μεταβλητὴ z διανύσῃ ὁλόκληρον κλειστὴν γραμμήν, δι' οὐδενὸς τῶν σημείων Α,Β,Γ,... διερχομένην, ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως ἐπανέρχεται, ὅταν ἡ γραμμὴ ἐγκλείῃ ἐκ τῶν σημείων τούτων Α, Β, Γ,... ἄρτιον ἀριθμόν, μεταβάλλεται δὲ εἰς τὴν ἀντίθετον, ἐὰν ἐγκλείῃ περιττὸν ἀριθμὸν ἐκ τῶν αὐτῶν σημείων.

Διότι, ἂν παραστήσωμεν τὰς ἀποστάσεις τοῦ μεταβλητοῦ σημείου Μ (ὅπερ παριστᾷ τὴν μεταβλητὴν z) ἀπὸ τῶν σημείων Α, Β, Γ, .. διὰ $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$, καὶ τὰς γωνίας τῶν εὐθειῶν ΑΜ, ΒΜ, ΓΜ,..., πρὸς τὸν πολικὸν ἄξονα ΟΧ διὰ $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$, τὰς δὲ ῥίζας τοῦ πολυωνύμου $\sigma(z)$ διὰ $a, б, c \ldots$, θὰ εἶνε $\sigma(z)=(z-a)(z-б)\ldots$

ἐπειδὴ δὲ
$$z-a=\rho_1 e^{\theta_1 i}$$
$$z-б=\rho_2 e^{\theta_2 i}$$
$$\cdots\cdots,$$

ἕπεται
$$u=\sqrt{\sigma(z)}=(\rho_1 \rho_2 \rho_3 \cdot\cdot)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2+\ldots)i} \tag{1}$$

ὅταν δὲ τὸ σημεῖον Μ διανύσῃ τὴν τυχοῦσαν ἁπλῆν γραμμὴν (δι' οὐδενὸς τῶν σημείων Α, Β, Γ... διερχομένην) καὶ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν του, τὰ μὲν μέτρα $\rho_1, \rho_2 \ldots$ ἐπαναλαμβάνουσι προδήλως τὰς ἀρχικὰς τιμὰς αὐτῶν, ἐκ δὲ τῶν ὁρισμάτων $\theta_1, \theta_2 \ldots$ ὅσα μὲν ἀνήκουσιν εἰς ἀκτῖνας ἐρχομένας ἐκ τῶν ἐκτὸς τῆς γραμμῆς σημείων ἐπαναλαμβάνουσι τὰς ἑαυτῶν τιμὰς ἕκαστον, ὅσα δὲ ἀνήκουσιν εἰς ἀκτῖνας ἐρχομένας ἐκ τῶν ἐγκεκλεισμένων σημείων αὐξάνουσιν ἕκαστον κατὰ 2π ἢ ἐλαττοῦται ἕκαστον κατὰ 2π (καθ' ὅσον τὸ σημεῖον Μ διαγράφει τὴν κλειστὴν γραμμὴν κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν ἢ κατὰ τὴν ἀρνητικήν)· ἐὰν λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐγκλειομένων σημείων εἶνε τ, θὰ προκύψῃ ἐκ τῆς τιμῆς (1) ἡ ἑξῆς τιμὴ

$$(\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \ldots)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2+\ldots+2\pi\tau)i} \quad \text{ἢ} \quad (\rho_1 \rho_2 \ldots)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2 \ldots)i} e^{\pi\tau i}$$

ἤτοι ἡ αὐτὴ τιμὴ (1), ἂν τ εἶνε ἄρτιον, ἡ ἀντίθετος δέ, ἂν τ εἶνε περιττόν.

Ἐὰν ἡ γραμμὴ περικλείῃ ἓν μόνον ἐκ τῶν σημείων Α, Β,..., ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως μετὰ τὴν κύκλωσιν αὐτοῦ γίνεται ἀντίθετος· τὰ σημεῖα ταῦτα λέγονται διὰ τοῦτο *σημεῖα διακλαδώσεως* τῆς συναρτήσεως $\sqrt{\sigma(z)}$. Ἑκατέρα τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως $\sqrt{\sigma(z)}$ δύναται νὰ ἀπομονωθῇ ἐντὸς οἱουδήποτε τόπου περιοριζομένου ὑπὸ μιᾶς κλειστῆς καὶ ἁπλῆς γραμμῆς καὶ ἔχοντος πάντα τὰ σημεῖα τῆς διακλαδώσεως ἐκτὸς ἑαυτοῦ.

Σημείωσις. Δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν δίφυλλον ἐπιφάνειαν, ἐφ' ἧς ἡ συνάρτησις $\sqrt{\sigma(z)}$ νὰ εἶνε μονότιμος· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν δύο φύλλα ἐπίπεδα τὸ ἓν ὑπεράνω τοῦ ἄλλου καὶ ἐξ ἑκάστου τῶν σημείων διακλαδώσεως νὰ διασχίσωμεν ἀμφότερα κατὰ μῆκος οἱασδήποτε γραμμῆς δι' οὐδενὸς τῶν λοιπῶν ἀνωμάλων σημείων διερχομένης καὶ διηκούσης μέχρι τοῦ πέρατος τῶν φύλλων· ἔπειτα νὰ συνενώσωμεν τὰ δύο ἄκρα τοῦ ἄνω ἐπιπέδου μετὰ τῶν δύο ἄκρων τοῦ ὑποκάτω κειμένου, ὡς καὶ προηγουμένως.

3) $u = lz$ ἢ $z = e^u$

251. Ἡ συνάρτησις lz ἔχει ἀπείρους τιμὰς δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ z· διότι, ἂν εἶνε

$$z = \rho e^{\theta i},$$

θὰ εἶνε (Διαφ. σελ. 26) $lz = l\rho + (\theta + 2\kappa\pi)i$ (κ ἀκέραιος)

ἑκάστη τῶν τιμῶν τούτων εἶνε πεπερασμένη καὶ συνεχὴς εἰς πᾶν μέρος τοῦ ἐπιπέδου ἔχον τὴν ἀρχὴν O ἐκτὸς ἑαυτοῦ, καὶ προάγεται ἐπὶ πάσης γραμμῆς μὴ διερχομένης διὰ τῆς ἀρχῆς. Ἡ ἀρχὴ εἶνε σημεῖον ἀνώμαλον τῆς συναρτήσεως ταύτης· εἰς αὐτὴν πᾶσαι αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως γίνονται ἄπειροι καὶ ἂν τὸ τὴν μεταβλητὴν z παριστῶν σημεῖον M διαγράψῃ κλειστὴν καὶ ἁπλῆν καμπύλην ἐγκλείουσαν τὴν ἀρχὴν O, ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως μεταβάλλεται κατὰ $2\pi i$· διότι τὸ ὄρισμα θ αὐξάνει ἢ ἐλαττοῦται κατὰ 2π· ἀλλ' ἂν τὸ M γράψῃ κλειστὴν ἁπλῆν καμπύλην ἔχουσαν ἐκτὸς ἑαυτῆς τὸ σημεῖον O, ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως ἐπανέρχεται ἡ αὐτή· διότι τὸ ὄρισμα θ ἐπαναλαμβάνει τὴν ἀρχικὴν αὐτοῦ τιμήν.

4) $u = \text{τοξεφ}\, z$ ἢ $z = \text{εφ}\, u$

252. Ἡ ἐξίσωσις $z = \text{εφ}\,u$ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$iz = \frac{e^{ui} - e^{-ui}}{e^{ui} + e^{-ui}}$$

ὅθεν

$$e^{2ui} = \frac{1 + zi}{1 - zi}$$

καὶ

$$u = \frac{1}{2i}\, l\left\{\frac{1+zi}{1-zi}\right\} = \frac{1}{2i}\left\{l(1+zi) - l(1-zi)\right\}$$

Ἡ συνάρτησις αὕτη u, ἤτοι τοξεφz, ἔχει δύο σημεῖα ἀνώμαλα ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΟΨ, τὰ παριστῶντα τὰς τιμὰς i καὶ $-i$, διότι διὰ μὲν τὴν τιμὴν i ὁ $l(1+zi)$ γίνεται ἄπειρος, διὰ δὲ τὴν δευτέραν $-i$ ὁ $l\,(1-zi)$ γίνεται ἐπίσης ἄπειρος. Ἐὰν ἡ μεταβλητὴ z διαγράψῃ γραμμὴν ἁπλῆν καὶ κλειστὴν ἐγκλείουσαν τὸ ἕτερον ἐκ τῶν σημείων τούτων, ὁ ἀντίστοιχος λογάριθμος μεταβάλλεται κατὰ $2\pi i$ καὶ ἑπομένως ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως μεταβάλλεται κατὰ π.

Μιγαδικὰ ὁλοκληρώματα.

253. Ὅταν ἡ μεταβλητὴ τῆς ὁλοκληρώσεως λαμβάνῃ μόνον πραγματικὰς τιμάς, ἡ σειρὰ τῶν τιμῶν, ἃς ἡ μεταβλητὴ διανύει, ἵνα μεταβῇ ἀπὸ τιμῆς τινος α εἰς ἄλλην β, εἶνε ἐντελῶς ὡρισμένη καὶ τὸ παριστῶν τὴν μεταβλητὴν ταύτην σημεῖον διανύει ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x τμῆμά τι ΑΒ ἐντελῶς ὡρισμένον. ($\text{ΟΑ}=\alpha, \text{ΟΒ}=\beta$), ἵνα δὲ σχηματίσωμεν τοὺς ὅρους τοῦ ἀθροίσματος, οὗτινος ὅριον εἶνε τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx$$

λαμβάνομεν τὸ τμῆμα ΑΒ τοῦ ἄξονος ΟΧ καὶ διαιροῦντες τοῦτο εἰς ὅσα δήποτε μέρη $\text{ΑΑ}_1, \text{Α}_1\text{Α}_2, \ldots, \text{Α}_{\nu-1}\text{Β}$ πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος ἑκάστου, ἤτοι τὴν αὔξησιν τῆς x ἐπ' αὐτοῦ, ἐπὶ τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως $\sigma(x)$ εἰς ἓν οἱονδήποτε ἐκ τῶν σημείων του. Ὅταν ὅμως ἡ μεταβλητὴ λαμβάνῃ μιγαδικὰς τιμάς, δύναται νὰ μεταβῇ ἀπὸ τῆς τυχούσης τιμῆς α εἰς οἱανδήποτε ἄλλην β διανύουσα τὴν τυχοῦσαν σειρὰν τιμῶν, ἤτοι τὸ παριστῶν αὐτὴν σημεῖον δύναται νὰ μεταβῇ ἀπό τινος σημείου Α εἰς ἄλλο Β ἀκολουθοῦν τὴν τυχοῦσαν γραμμὴν ΑΒ. Δυνάμεθα ἑπομένως νὰ ὁρίσωμεν νῦν τὸ ὁλοκλήρωμα γενικώτερον, ὡς ἀκολούθως.

Ἔστω τυχοῦσα γραμμὴ ΑΒ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΧΟΨ συνδέουσα δύο σημεῖα Α καὶ Β καὶ συνάρτησίς τις τῆς μιγαδικῆς μεταβλητῆς z ἡ $\sigma(z)$, ἔχουσα εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς γραμμῆς μίαν τιμὴν πεπερασμένην καὶ ἐντελῶς ὡρισμένην· ἐὰν διαιροῦντες τὴν γραμμὴν ΑΒ εἰς ὁσαδήποτε καὶ οἱαδήποτε μέρη $\text{ΑΑ}_1, \text{Α}_1\text{Α}_2, \ldots, \text{Α}_{\nu-1}\text{Β}$ πολλαπλασιάζωμεν τὴν αὔξησιν τῆς μεταβλητῆς z εἰς ἕκαστον τούτων, ἐπὶ τὴν τιμήν, ἣν ἔχει ἡ συνάρτησις

$\sigma(z)$ εἰς ἓν οἱονδήποτε ἐκ τῶν σημείων του, τὸ προκύπτον ἄθροισμα

$$(1) \qquad (z_1-a)\sigma(z'_1)+(z_2-z_1)\sigma(z'_2)+\ldots+(\textit{б}-z_{\nu-1})\sigma(z'_\nu),$$

ἔνθα

$$z_\rho<z'_\rho<z_{\rho+1},$$

τείνει πρὸς ὅριόν τι, ὅταν ἕκαστον τῶν μερῶν τῆς γραμμῆς τείνῃ πρὸς τὸ 0· τὸ δὲ ὅριον τοῦτο καλοῦμεν *ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα τῆς παραστάσεως $\sigma(z)\,dz$ ἐπὶ τῆς γραμμῆς AB* καὶ παριστῶμεν αὐτὸ ὡς ἑξῆς

$$\int_{(AB)} \sigma(z)dz.$$

254. Ὅτι τὸ ἄθροισμα (1) τείνει πρός τι ὅριον, (ὅταν ἕκαστον τῶν μερῶν τῆς ΑΒ τείνῃ πρὸς τὸ 0), φαίνεται ἀμέσως, διότι καὶ τὸ πραγματικὸν αὐτοῦ μέρος τείνει πρὸς ὅριον πεπερασμένον καὶ ἐντελῶς ὡρισμένον καὶ τὸ φανταστικὸν ἐπίσης.

Ἐὰν τῷ ὄντι εἶνε $z=x+iy,\quad a=\alpha+i\alpha',\quad \textit{б}=\beta+i\beta'$

καὶ

$$\sigma(z)=\varphi(x,y)+if(x,y),$$

τὸ ἄθροισμα (1) γίνεται

$$\Big[(x_1-\alpha)\varphi(x'_1,y'_1)+(x_2-x_1)\varphi(x'_2,y'_2)+\ldots+(\beta-x_{\nu-1})\varphi(x'_\nu,y'_\nu)\Big]+$$
$$+i\Big[(x_1-\alpha)f(x'_1,y'_1)+(x_2-x_1)f(x_2,y_2)+\ldots+(\beta-x_{\nu-1})f(x'_\nu,y'_\nu)\Big]$$
$$+i\Big[(y_1-\alpha')\varphi(x'_1,y'_1)+(y_2-y_1)\varphi(x'_2y'_2)+\ldots+(\beta'-y_{\nu-1})\varphi(x'_\nu,y'_\nu)\Big]$$
$$-\Big[(y_1-\alpha')f(x'_1,y'_1)+(y_2-y_1)f(x'_2,y'_2)+\ldots+(\beta'-y_{\nu-1})f(x'_\nu,y'_\nu)\Big]$$

ἐπειδὴ δὲ ἕκαστον τῶν τεσσάρων τούτων μερικῶν ἀθροισμάτων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἄθροισμα (1) ἔχει ὅριον ἐπικαμπύλιόν τι ὁλοκλήρωμα (σελ. 407) ἐπὶ τῆς αὐτῆς γραμμῆς ΑΒ ἐκτεινόμενον, συνάγεται, ὅτι τὸ προκείμενον ἄθροισμα ἔχει ὅριον, ἤτοι

$$(2) \qquad \int_{AB} \sigma(z)dz=\int_{AB}(\varphi dx-fdy)+\;i\int_{AB}(\varphi dy+fdx)$$

Θεώρημα τοῦ Cauchy.

255. *Ἐὰν ἔν τινι τόπῳ T ὑπὸ μιᾶς ἁπλῆς καὶ κλειστῆς γραμμῆς περατουμένῳ, ἡ συνάρτησις σ(z)* (ἢ κλάδος συναρτήσεως) *εἶνε ὁμαλὴ* (ἤτοι μένη πεπερασμένη καὶ συνεχὴς καὶ μονότιμος), *τὸ ὁλοκλήρωμα*

$$\int \sigma(z)dz \tag{3}$$

ἐκτεινόμενον ἐπὶ πάσης κλειστῆς γραμμῆς ABA ἐν τῷ τόπῳ τούτῳ κειμένης εἶνε ἴσον τῷ 0.

Ἑπομένως ἡ τιμὴ τοῦ ὁλοκληρώματος τούτου ἐπὶ πάσης γραμμῆς AB ἐν τῷ αὐτῷ τόπῳ κειμένης θὰ ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῶν συντεταγμένων τῶν ἄκρων τῆς γραμμῆς.

Διότι ἀμφότερα τὰ ἐπικαμπύλια ὁλοκληρώματα (2), ἐξ ὧν σύγκειται τὸ μιγαδικὸν ὁλοκλήρωμα (3), εἶνε ἴσα τῷ 0 ἐπὶ τῆς τοιαύτης κλειστῆς γραμμῆς, ὡς πληροῦντα τοὺς ὅρους τοῦ ἐδ. 216· εἶνε δηλαδὴ αἱ συναρτήσεις $\varphi(x,y)$ καὶ $f(x,y)$ (τὸ πραγματικὸν μέρος καὶ τὸ φανταστικὸν τῆς συναρτήσεως $\sigma(z)$), ἀμφότεραι πεπερασμέναι καὶ συνεχεῖς καὶ μονότιμοι ἐν τῷ τόπῳ T καὶ αἱ πρῶται παράγωγοι αὐτῶν πληροῦσι τὰς ἰσότητας

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial x}=0 \quad \text{καὶ} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}$$

256. Ἐκ τούτων συνάγεται ὅτι, *ἂν ὁρισθῇ ὡς ἀρχὴ τῶν διαφόρων γραμμῶν τὸ σημεῖον A (z=α) τοῦ τόπου T, εἰς ἕκαστον σημεῖον αὐτοῦ M(z) ἔχει τὸ μιγαδικὸν ὁλοκλήρωμα*

$$\int_{(AM)} \sigma(z)dz$$

τιμὴν πεπερασμένην καὶ ἐντελῶς ὡρισμένην καὶ τὴν αὐτὴν πάντοτε, δι' οἱασδήποτε γραμμῆς καὶ ἂν φθάσωμεν εἰς αὐτὸ ἀναχωροῦντες ἀπὸ τοῦ A.

Διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ παριστῶμεν τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο καὶ ὡς ἑξῆς

$$\int_{\alpha}^{z} \sigma(z)dz \tag{4}$$

καὶ νὰ θεωρῶμεν αὐτὸ ὡς συνάρτησιν τοῦ ἄνω ὁρίου αὐτοῦ z.

257. Ἡ συνάρτησις αὕτη τοῦ z, ἣν παριστῶμεν συντομίας χάριν διὰ τοῦ $\omega(z)$, ἔχει παράγωγον· ἐὰν τῷ ὄντι ἀναλύσωμεν τὸ ὁλοκλήρωμα εἰς τὰ δύο ἐπικαμπύλια ὁλοκληρώματα (2), ἐξ ὧν σύγκειται, καὶ ζητήσωμεν τὴν παράγωγον αὐτοῦ πρὸς x καὶ ἔπειτα πρὸς y, εὑρίσκομεν (ἐδ. 217)

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}=\varphi+if, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial y}=-f+i\varphi=i(\varphi+if),$$

ἐξ ὧν συνάγεται $$\frac{\partial \omega}{\partial x}\,i=\frac{\partial \omega}{\partial y},$$

ἡ δὲ ἰσότης αὕτη ἐκφράζει τὸν ἀναγκαῖον καὶ ἐπαρκῆ ὅρον, ἵνα ἡ συνάρτησις $\omega(z)$ ἔχῃ παράγωγον δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ z.

258. Ἐκ τῆς αὐτῆς ἰσότητος βλέπομεν προσέτι, ὅτι ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $\omega(z)$ εἶνε ἡ $\sigma(z)$, ἤτοι εἶνε

$$\omega'(z)=\sigma(z),$$

εἶνε δηλαδὴ τὸ ὁλοκλήρωμα (4), ὅταν θεωρῆται ὡς συνάρτησις τοῦ ἄνω ὁρίου του, παράγουσα τῆς συναρτήσεως $\sigma(z)$.

259. Ἡ εὕρεσις τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος

$$\int_{\alpha}^{\beta}\sigma(z)dz$$

διὰ τῶν παραγουσῶν τῆς συναρτήσεως $\sigma(z)$ γίνεται ὡς καὶ εἰς τὰ κοινὰ ὁλοκληρώματα (ἐν οἷς ἡ μεταβλητὴ τῆς ὁλοκληρώσεως διανύει μόνον πραγματικὰς τιμάς)· διότι, ἂν $\varphi(z)$ εἶνε ἡ τυχοῦσα παράγουσα τῆς συναρτήσεως $\sigma(z)$, θὰ εἶνε κατὰ τὸν θεμελιώδη τύπον τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ

$$\varphi(z_1)-\varphi(\alpha)=(z_1-\alpha)\sigma(z)+(z_1-\alpha)\varepsilon_1$$

$$\varphi(z_2)-\varphi(z_1)=(z_2-z_1)\sigma(z_1)+(z_2-z_1)\varepsilon_2$$

. . . .

$$\varphi(\beta)-\varphi(z_{\nu-1})=(\beta-z_{\nu-1})\sigma(z_{\nu-1})+(\beta-z_{\nu-1})\varepsilon_\nu,$$

ὅθεν συνάγεται (παράβαλ. Διαφ λογισμοῦ ἐδ. 88)

$$\int_{\alpha}^{\beta}\sigma(z)dz=\varphi(\beta)-\varphi(\alpha).$$

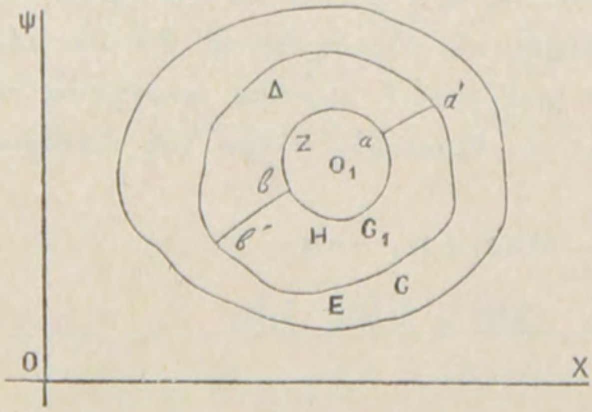
εἶνε δηλαδὴ τὸ μιγαδικὸν ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα ἴσον τῇ αὐξήσει τῆς παραγούσης $\varphi(z)$, ὅταν ἡ μεταβλητὴ z συνεχῶς μεταβαλλομένη αὐξήσῃ ἀπὸ α εἰς β, ἀκολουθοῦσα τὴν τυχοῦσαν συνεχῆ σειρὰν τιμῶν (ἐν τῷ τόπῳ T).

260. *Ἐὰν συνάρτησις εἶνε ὁμαλὴ ἔν τινι τόπῳ T περατουμένῳ ὑπὸ δύο ἢ περισσοτέρων ἁπλῶν καὶ κλειστῶν γραμμῶν* (ὧν μία ἐξωτερική, αἱ δὲ λοιπαὶ ἐσωτερικαὶ) *καὶ γραφῇ ἐν αὐτῷ τυχοῦσα κλειστὴ καὶ ἁπλῆ γραμμή, ἡ C, ἐγκλείουσά τινας τῶν ἐσωτερικῶν τοῦ τόπου γραμμῶν, τὰς C_1, C_2, .., θὰ εἶνε*

$$\int_{C} \sigma(z)dz = \int_{C_1} \sigma(z)dz + \int_{C_2} \sigma(z)dz + \ldots,$$

ἔνθα πᾶσαι αἱ καμπύλαι διανύονται ἐν τῇ ὁλοκληρώσει κατὰ τὴν θετικὴν φοράν.

Ὑποθέσωμεν διὰ τὴν ἁπλότητα, ὅτι ἡ γραμμὴ C ἐγκλείει μόνον μίαν τῶν ἐσωτερικῶν καμπύλων, τὴν C_1· ἐὰν ἀχθῶσιν ἐκ τῆς γραμμῆς C_1 εἰς τὴν C αἱ γραμμαὶ $\alpha\alpha'$ καὶ $\beta\beta'$, χωρίζονται δύο τόποι $\alpha\alpha'\Delta\beta'\beta Z\alpha$ καὶ $\beta\beta'E\alpha'\alpha H\beta$, ὧν ἑκάτερος περατοῦται ὑπὸ μιᾶς ἁπλῆς καὶ κλειστῆς γραμμῆς καὶ ἐν ἀμφοτέροις ἡ συνάρτησις $\sigma(z)$ εἶνε ὁμαλή, ἑπομένως εἶνε



$$\int_{\alpha\alpha'} + \int_{\alpha'\Delta\beta'} + \int_{\beta'\beta} + \int_{\beta Z\alpha} = 0$$

καὶ
$$\int_{\beta\beta'} + \int_{\beta'E\alpha'} + \int_{\alpha'\alpha} + \int_{\alpha H\beta} = 0$$

ἀθροίζοντες δὲ καὶ παρατηροῦντες, ὅτι αἱ ἀχθεῖσαι γραμμαὶ $\alpha'\alpha$ καὶ $\beta'\beta$ διανύονται ἑκάστη δὶς κατ' ἀντίθετον φοράν, εὑρίσκομεν

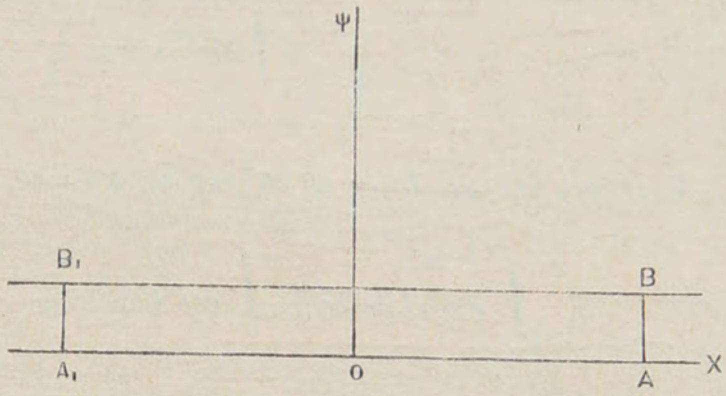
$$\int_{C} \sigma(z)dz = \int_{C_1} \sigma(z)dz$$

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις, καὶ ὅταν ἡ γραμμὴ C ἐγκλείῃ περισσοτέρας ἐκ τῶν ἐσωτερικῶν γραμμῶν $C_1, C_2, \ldots$

261. Διὰ τοῦ θεωρήματος τούτου τοῦ Cauchy δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν πολλῶν ὡρισμένων ὁλοκληρωμάτων, ὡς δεικνύεται ἐκ τῶν ἑξῆς παραδειγμάτων.

1ον)

Ἡ συνάρτησις e^{-z^2} εἶνε ὁμαλὴ ἐπὶ παντὸς πεπερασμένου μέρους τοῦ ἐπιπέδου· ἐὰν λοιπὸν ὁλοκληρώσωμεν τὴν παράστασιν $e^{-z^2}dz$ ἐπὶ τῆς περιμέτρου τοῦ ὀρθογωνίου ABB_1A_1OA, θὰ εἶνε



$$\int_{AB} e^{-z^2}dz + \int_{BB_1} e^{-z^2}dz + \int_{B_1A_1} e^{-z^2}dz + \int_{A_1A} e^{-z^2}dz = 0$$

Ἐν τῷ πρώτῳ ὁλοκληρώματι εἶνε $z = \alpha + yi$ $(\alpha = OA = A_1O)$ καὶ ἡ μεταβλητὴ y μεταβάλλεται ἀπὸ 0 μέχρι β ($\beta = AB$)· ὅθεν εἶνε

$$\int_{AB} e^{-z^2}dz = e^{-\alpha^2}\int_0^{\beta} e^{y^2-2\alpha yi}dy$$

ὁ παράγων $e^{-\alpha^2}$ τείνει πρὸς τὸ 0, ὅταν α αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον, ὁ δὲ ἕτερος εἶνε πεπερασμένος· ὅθεν

$$\text{ορ}\int_{AB} e^{-z^2}dz = 0, \quad \text{ὅταν } \alpha = \infty$$

Ὁμοίως δεικνύεται, ὅτι καὶ $\text{ορ}\int_{B_1A_1} e^{-z^2}dz = 0$, ὅταν $\alpha = \infty$.

διὰ τὸ ὁλοκλήρωμα ἐπὶ τῆς γραμμῆς BB_1 εἶνε $z=i\beta+x$, μεταβάλλεται δὲ ἡ x ἀπὸ α μέχρι —α. ὅθεν εἶνε

$$\int_{BB_1} e^{-z^2}dz = e^{\beta^2}\int_{\alpha}^{-\alpha} e^{-x^2-2x\beta i}dx = -e^{\beta^2}\int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-x^2}(\sigma\upsilon\nu 2\beta x - i\eta\mu 2\beta x)dx.$$

Τέλος τὸ ὁλοκλήρωμα ἐπὶ τῆς γραμμῆς A_1A εἶνε

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-x^2}\,dx.$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅταν α αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = e^{\beta^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}(\sigma\upsilon\nu 2\beta x - i\eta\mu 2\beta x)dx,$$

τουτέστιν

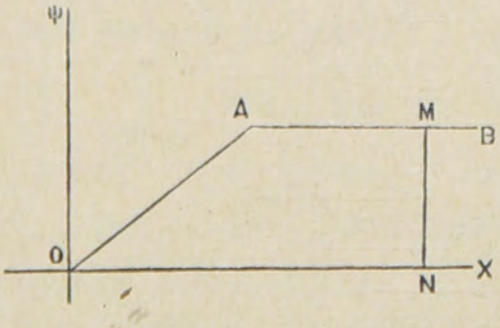
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\sigma\upsilon\nu 2\beta x\,dx = e^{-\beta^2}\sqrt{\pi}$$

καὶ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\eta\mu 2\beta x\,dx = 0,$$

2ον)

Ἡ συνάρτησις $e^{-z}\varphi(z)$, ἔνθα $\varphi(z)$, δηλοῖ ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ z, εἶνε ὁμαλὴ ἐπὶ παντὸς πεπερασμένου μέρους τοῦ ἐπιπέδου. Θεωρήσωμεν τὸ ὁλοκλήρωμα



$$\int e^{-z}\varphi(z)dz$$

ἐπὶ τῆς τυχούσης γραμμῆς, ἥτις ἄρχεται ἐκ τῆς ἀρχῆς O καὶ ἀπολήγει εἰς εὐθεῖαν AB παράλληλον καὶ ὁμόρροπον τῷ θετικῷ ἡμιάξονι OX. Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Cauchy εἶνε

$$\int\limits_{ON} e^{-z}\varphi(z)dz + \int\limits_{NM} e^{-z}\varphi(z)dz = \int\limits_{OAM} e^{-z}\varphi(z)dz$$

Ἐν τῷ πρώτῳ ὁλοκληρώματι $z=x$ καὶ ὅρια τοῦ x εἶνε 0 καὶ $ON(=\rho)$· ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ εἶνε $z=\rho+iy$ καὶ ὅρια τοῦ y εἶνε ἀπὸ 0 μέχρι $\beta(=NM)$· ὅθεν ἕπεται

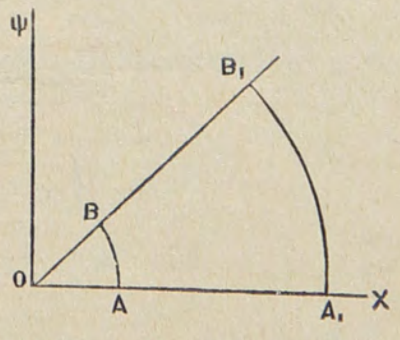
$$\int\limits_{OAM} e^{-z}\varphi(z)dz = \int_0^\rho e^{-x}\varphi(x)dx + e^{-\rho}\int_0^\beta e^{-iy}\varphi(\rho+iy)dy\cdot$$

ἐπειδὴ δὲ τὸ τελευταῖον τοῦτο ὁλοκλήρωμα τείνει πρὸς τὸ 0, ὅταν ρ αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον, συνάγεται

$$\int\limits_{OAM\ldots\infty} e^{-z}\varphi(z)dz = \int_0^\infty e^{-x}\varphi(x)dx,$$

τουτέστι τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς παραστάσεως $e^{-z}\varphi(z)dz$ ἐπὶ τῆς τυχούσης γραμμῆς, ἥτις ἄρχεται ἐκ τῆς ἀρχῆς Ο καὶ καταλήγει εἰς εὐθεῖαν παράλληλον καὶ ὁμόρροπον τῷ θετικῷ ἡμιάξονι ΟΧ, ἰσοῦται τῷ ὁλοκληρώματι τῆς αὐτῆς παραστάσεως ἐπὶ τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονος ΟΧ.

3ον)



Ἡ συνάρτησις $z^{\alpha-1}e^{-z}$ (ἔνθα α δηλοῖ θετικὸν ἀριθμὸν καὶ z^α ὁρίζεται ὡς ἴσον τῷ $r^\alpha e^{\alpha\theta i}$, ἐὰν $z=re^{\theta i}$) εἶνε ὁμαλὴ ἐν παντὶ μέρει τοῦ ἐπιπέδου ἔχοντι τὴν ἀρχὴν ἐκτὸς ἑαυτοῦ· (ἡ ἀρχὴ Ο εἶνε σημεῖον διακλαδώσεως τῆς συναρτήσεως, ἐὰν ὁ α δὲν εἶνε ἀκέραιος)· ἐὰν ἄρα ὁλοκληρώσωμεν αὐτὴν ἐπὶ τῆς περιμέτρου τοῦ κολοβοῦ τομέως AA_1B_1BA, θὰ εἶνε

$$\int\limits_{AA_1} + \int\limits_{A_1B_1} + \int\limits_{B_1B} + \int\limits_{BA} = 0 \qquad (\varepsilon)$$

Ἐν τῇ πρώτῃ γραμμῇ AA_1 εἶνε $z=x$ καὶ μεταβάλλεται ἡ x ἀπὸ τῆς τιμῆς $\rho(=OA)$ μέχρι τῆς τιμῆς $R(=OA_1)$· εἶνε λοιπὸν

$$\int_{AA_1} e^{-z}.z^{\alpha-1}dz=\int_{\rho}^{R} e^{-x}x^{\alpha-1}dx.$$

Ἐπὶ τοῦ τόξου A_1B_1 εἶνε $z=Re^{\theta i}$ καὶ μεταβάλλεται ἡ γωνία θ ἀπὸ 0 μέχρις ω (=γωνίᾳ AOB)· ὅθεν

$$\int_{A_1B_1} e^{-z}z^{\alpha-1}dz \quad =i\int_{0}^{\omega} e^{-R\sigma\upsilon\nu\theta}\, R^{\alpha}\, e^{(\alpha\theta-R\eta\mu\theta)i}d\theta$$

καὶ ἑπομένως $$\delta\rho\int_{A_1B_1} e^{-z}z^{\alpha-1}dz=0, \qquad \text{ὅταν } R=\infty$$

Ἐπὶ τοῦ τόξου BA εἶνε $z=\rho e^{\theta i}$ καὶ ἡ γωνία θ μεταβάλλεται ἀπὸ ω μέχρι 0· ὅθεν εἶνε

$$\int_{BA} e^{-z}.z^{\alpha-1}dz=-i\int_{0}^{\omega} e^{-\rho\sigma\upsilon\nu\theta}\rho^{\alpha}e^{(\alpha\theta-\rho\eta\mu\theta)i}\, d\theta,$$

τοῦ ρ δὲ ἐλαττουμένου μέχρις ἐκμηδενίσεως, ἔχομεν

$$\delta\rho\int_{BA} e^{-z}.z^{\alpha-1}dz=0, \qquad \text{ὅταν } \rho=0.$$

Τέλος ἐπὶ τῆς γραμμῆς B_1B εἶνε $z=re^{\omega i}$ καὶ ἡ μεταβλητὴ r μεταβάλλεται ἀπὸ R μέχρι ρ· ὅθεν

$$\int_{B_1B} e^{-z}z^{\alpha-1}dz=-\int_{\rho}^{R} e^{-r\,(\sigma\upsilon\nu\omega+i\eta\mu\omega)}r^{\alpha-1}e^{\alpha\omega i}dr$$

Διὰ ταῦτα ἡ ἰσότης (ε) γίνεται, ὅταν ρ τείνῃ πρὸς τὸ 0 καὶ R αὐξάνῃ ὑπὲρ πάντα ἀριθμόν,

$$\int_0^\infty e^{-x}.x^{\alpha-1}.dx = e^{\alpha\omega i}\int_0^\infty e^{-x\sigma\upsilon\nu\omega}x^{\alpha-1}.e^{-xi\eta\mu\omega}dx$$

ἢ καὶ $$\Gamma(\alpha).e^{-\alpha\omega i} = \int_0^\infty e^{-x\sigma\upsilon\nu\omega}x^{\alpha-1}.e^{-xi\eta\mu\omega}dx$$

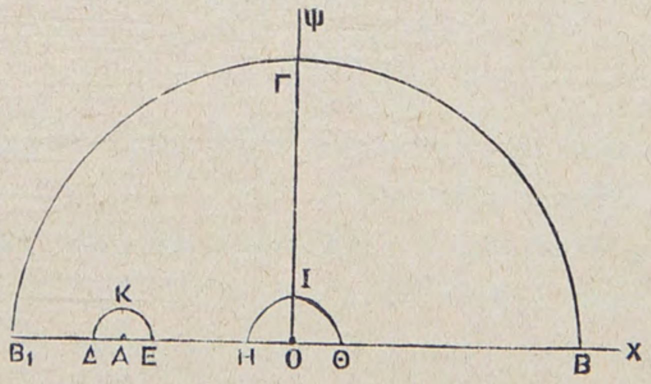
καὶ ἀποχωρίζοντες τὰ πραγματικὰ ἀπὸ τῶν φανταστικῶν, εὑρίσκομεν

$$\int_0^\infty e^{-x\sigma\upsilon\nu\omega}x^{\alpha-1}\sigma\upsilon\nu(x\eta\mu\omega)dx = \Gamma(\alpha)\sigma\upsilon\nu(\alpha\omega)$$

$$\int_0^\infty e^{-x\sigma\upsilon\nu\omega}x^{\alpha-1}.\eta\mu(x\eta\mu\omega)dx = \Gamma(\alpha)\eta\mu(\alpha\omega)$$

4ον)

Ἡ συνάρτησις $\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}$, ἔνθα α ὑποτίθεται θετικὸς ἀριθμὸς καὶ μικρότερος τῆς μονάδος 1, ἔχει δύο σημεῖα ἀνώμαλα, τὴν ἀρχὴν καὶ τὸ σημεῖον $z=-1$, ὅπερ εἶνε πόλος αὐτῆς· ἐπὶ παντὸς δὲ μέρους τοῦ ἐπιπέδου ἔχοντος τὰ εἰρημένα δύο σημεῖα ἐκτὸς αὐτοῦ, ἡ συνάρτησις εἶνε ὁμαλή.



Ἐὰν περὶ τὴν ἀρχὴν ὡς κέντρον γράψωμεν δύο ἡμικύκλια τὰ $ΒΓΒ_1$ καὶ ΘΙΗ ἔχοντα ἀκτῖνας τὰς R καὶ ρ, ἔπειτα ἕτερον ἡμικύκλιον περὶ κέντρον τὸ σημεῖον Α ($z=-1$) ἔχον ἀκτῖνα ρ′, ἡ συνάρτησις εἶνε ὁμαλὴ ἐν τῷ τόπῳ $Β_1ΔΚΕΗΙΘΒΓΒ_1$· ὅθεν

$$\int_{B_1\Delta}+\int_{\Delta KE}+\int_{EH}+\int_{HI\Theta}+\int_{\Theta B}+\int_{B\Gamma B_1}=0$$

Ἐν τῷ πρώτῳ ὁλοκληρώματι ἐπὶ τῆς γραμμῆς $B_1\Delta$ εἶνε $z=-x$ καὶ μεταβάλλεται ἡ x ἀπὸ $+R$ μέχρι $+1+\rho'$, ὅθεν

$$\int_{B_1\Delta}\frac{z^{\alpha-1}dz}{1+z}=\quad e^{\pi\alpha i}\int_R^{1+\rho'}\frac{x^{\alpha-1}dx}{1-x}$$

Ὁμοίως εἶνε
$$\int_{EH}\frac{z^{\alpha-1}dz}{1+z}=\quad e^{\pi\alpha i}\int_{+1-\rho'}^{+\rho}\frac{x^{\alpha-1}dx}{1-x}.$$

$$\int_{\Theta B}\frac{z^{\alpha-1}dz}{1+z}=\int_{\rho}^{R}\frac{x^{\alpha-1}dx}{1+x}.$$

Ἐπὶ τοῦ τόξου $B\Gamma B_1$ εἶνε $z=Re^{\theta i}$ καὶ μεταβάλλεται ἡ γωνία θ ἀπὸ 0 μέχρι π· ὅθεν εἶνε

$$\int_{B\Gamma B_1}\frac{z^{\alpha-1}dz}{1+z}=\quad i\int_0^{\pi}\frac{R^{\alpha}.e^{\alpha\theta i}\,d\theta}{1+Re^{\theta i}}$$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε $\alpha<1$, τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο τείνει πρὸς τὸ 0, ὅταν R αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον.

Ἐπίσης τὸ ὁλοκλήρωμα ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας $HI\Theta$ τείνει πρὸς τὸ 0, ὅταν ρ τείνῃ πρὸς τὸ 0.

Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας ΔKE, ἐπ' αὐτῆς εἶνε $z=-1+\rho' e^{\theta i}$ καὶ μεταβάλλεται ἡ γωνία θ ἀπὸ π μέχρι 0· ὅθεν

$$\int_{(\Delta KE)}\frac{z^{\alpha-1}dz}{1+z}=-\quad i\int_{\pi}^{0}(-1+\rho' e^{\theta i})^{\alpha-1}d\theta.$$

τὸ δὲ ὁλοκλήρωμα τοῦτο, καθ' ὅσον ἡ ἀκτὶς ρ' τείνει πρὸς τὸ 0, τείνει πρὸς τὸ ἑξῆς ὅριον

$-i(-1)^{\alpha-1}.\pi$, ἤτοι $-ie^{\pi i(\alpha-1)}\pi$, (διότι $z^{\alpha-1}$ ὁρίζεται ὡς ἴσον τῷ $r^{\alpha-1}.e^{\theta i(\alpha-1)}$, ἐὰν $z=re^{\theta i}$).

Ἐντεῦθεν συνάγεται

$$ὅρ\left\{e^{\pi\alpha i}\int_{+R}^{+1+\rho'}\frac{x^{\alpha-1}dx}{1-x}+e^{\pi\alpha i}\int_{+1-\rho'}^{+\rho}\frac{x^{\alpha-1}dx}{1-x}+\int_{\rho}^{R}\frac{x^{\alpha-1}dx}{1+x}\right\}=-\pi ie^{\pi\alpha i}$$

$$ἢ\ καὶ\ ὅρ\left\{\int_{R}^{1+\rho'}\frac{x^{\alpha-1}dx}{1-x}+\int_{1-\rho'}^{\rho}\frac{x^{\alpha-1}dx}{1-x}+e^{-\pi\alpha i}\int_{\rho}^{R}\frac{x^{\alpha-1}dx}{1+x}\right\}=-\pi i$$

ἀποχωρίζοντες δὲ τὰ πραγματικὰ ἀπὸ τῶν φανταστικῶν καὶ λαμβάνοντες τὰ ὅρια, εὑρίσκομεν

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}dx}{1+x}=\frac{\pi}{\eta\mu(\alpha\pi)} \qquad (\text{παράβ. σελ. 191}).$$

Ἀπόδειξις τοῦ ὅτι ὁ ἀριθμὸς π δὲν εἶνε ἀλγεβρικὸς ἀριθμός.

Ὅτι ὁ π δὲν εἶνε ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς ἀπέδειξε πρῶτος ὁ γερμανὸς μαθηματικὸς Lindemann. Ἐνταῦθα ἀναγράφομεν τὴν ἀπόδειξιν τοῦ Hilbert ὡς ἁπλουστέραν.

262. Ἐὰν ὁ π εἶνε ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς καὶ ὁ πi εἶνε ἀλγεβρικός· ἔστω $\sigma(z)=0$ ἀλγεβρικὴ ἐξίσωσις ἔχουσα συντελεστὰς ἀκεραίους ἀριθμοὺς πραγματικούς, ἧς τινος ῥίζα εἶνε ὁ ἀριθμὸς πi, καὶ βαθμὸς τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἔστω ὁ n· ἐὰν παραστήσωμεν τὰς ῥίζας αὐτῆς διὰ τῶν α_1 (τὴν πi) $\alpha_2, \alpha_3, .., \alpha_n$, θὰ εἶνε

$$(1)\qquad \left(1+e^{\alpha_1}\right)\left(1+e^{\alpha_2}\right)\cdots\left(1+e^{\alpha_n}\right)=0, \qquad \text{διότι } 1+e^{\alpha_1}=0,$$

ἤτοι
$$1+\sum_k e^{\alpha_k}+\sum_{k,\lambda}e^{\alpha_k+\alpha_\lambda}+\ldots+e^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}=0 \qquad (2)$$

Οἱ ἐκθέται τοῦ e ἐν τῷ γινομένῳ τούτῳ εἶνε αἱ n ῥίζαι

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_n$$

καὶ τὰ ἀθροίσματα αὐτῶν ἀνὰ δύο λαμβανομένων,

ἤτοι τὰ

$$\begin{array}{llll} \alpha_1+\alpha_2, & \alpha_1+\alpha_3, & \ldots, & \alpha_1+\alpha_n, \\ & \alpha_2+\alpha_3, & \ldots, & \alpha_2+\alpha_n, \\ & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ & & & \alpha_{n-1}+\alpha_n \end{array}$$

καὶ τὰ ἀθροίσματα αὐτῶν ἀνὰ τρία λαμβανομένων, καὶ γενικῶς τὰ ἀθροίσματα αὐτῶν ἀνὰ ν λαμβανομένων ($\nu=1,2,3,\ldots,n-1$), καὶ τέλος τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν ῥιζῶν $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$. Τοὺς ἐκθέτας τούτους παριστῶμεν διὰ τῶν $\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_N$. Πάντες δ' οὗτοι οἱ ἐκθέται εἶνε αἱ ῥίζαι μιᾶς ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως ἐχούσης συντελεστὰς ἀκεραίους ἀριθμούς· διότι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τούτων $\sum\limits_{\nu}\beta_\nu$ εἶνε συμμετρικὴ συνάρτησις τῶν $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν αὐτῶν ἐκθετῶν ἀνὰ δύο $\sum\beta_\nu\beta_\mu$ εἶνε ἐπίσης συμμετρικὴ συνάρτησις τῶν $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ καὶ γενικῶς καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν εἰρημένων ἐκθετῶν ἀνὰ k ($k=1,2,\ldots,N$) εἶνε συμμετρικὴ συνάρτησις τῶν $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$· ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις, ἣν ἐπαληθεύουσι πάντες οὗτοι οἱ ἐκθέται $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_N$, ἔχει συντελεστὰς ἀκεραίους πραγματικοὺς ἀριθμούς. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη τῶν β δύναται νὰ ἔχῃ καὶ ῥίζας τινὰς ἴσας τῷ 0 (τινὰ δηλαδὴ τῶν $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_N$ δυνατὸν νὰ εἶνε 0) ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν, ὅτι εἶνε

$$\beta_{m+1}=\beta_{m+2}=\ldots=\beta_N=0,$$

ἡ ἐξίσωσις (2) γίνεται

$$1+1+\ldots+1+e^{\beta_1}+e^{\beta_2}+\ldots+e^{\beta_m}=0$$

ἤτοι

$$a+e^{\beta_1}+e^{\beta_2}+\ldots+e^{\beta_m}=0, \qquad (3)$$

ἔνθα a εἶνε ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός, οἱ δὲ ἐκθέται $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m$ εἶνε αἱ ῥίζαι μιᾶς ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως

$$b z^m+b_1 z^{m-1}+\ldots+b_m=0 \qquad (4)$$

ἐχούσης συντελεστὰς $b, b_1,\ldots,b_m$ ἀκεραίους πραγματικοὺς ἀριθμοὺς καὶ b καὶ b_m διαφόρους τοῦ 0.

Τούτων οὕτως ἐχόντων, ἐὰν ἀποδείξωμεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις (3) εἶνε ἀδύνατος, ἕπεται ἀναγκαίως, ὅτι ὁ π δὲν εἶνε ἀλγεβρικὸς ἀριθμός.

263. Ἵνα δείξωμεν τὸ ἀδύνατον τῆς ἐξισώσεως (3), πολλαπλασιάζομεν αὐτὴν ἐπὶ τὸ ἐπὶ τοῦ ἡμιάξονος OX λαμβανόμενον ὁλοκλήρωμα

$$\frac{1}{1.2.3\ldots\rho}\int_0^{\infty} e^{-z}z^{\rho}\left[\beta^{m}\varphi(z)\right]^{\rho+1}dz \tag{5}$$

ἔνθα $\rho+1$ εἶνε πρῶτος ἀριθμὸς μεγαλήτερος τῶν β, β_m καὶ α καὶ $\varphi(z)$ δηλοῖ τὸ πολυώνυμον $\beta z^m+\beta_1 z^{m-1}+\ldots+\beta_m$.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ τιμὴ τοῦ ὁλοκληρώματος τούτου εἶνε ἡ αὐτή, εἴτε ἐπὶ τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονος OX ληφθῇ (ὅτε εἶνε $z=x$), εἴτε ἐφ' οἱασδήποτε γραμμῆς ἀρχομένης ἐκ τοῦ O καὶ ἀποληγούσης εἰς εὐθεῖαν παράλληλον καὶ ὁμόρροπον τῇ OX, (σελ. 446) ἐὰν ἐν τῷ γινομένῳ τοῦ ὅρου e^{β_ν} ἐπὶ τὸ ὁλοκλήρωμα (5) λάβωμεν ὡς γραμμὴν τῆς ὁλοκληρώσεως τὴν εὐθεῖαν OB_ν (B_ν τὸ σημεῖον τὸ παριστῶν τὴν ῥίζαν β_ν) καὶ τὴν εὐθεῖαν $B_\nu X_\nu$ παράλληλον καὶ ὁμόρροπον τῇ OX, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὸ γινόμενον τῆς ἐξισώσεως (3) ἐπὶ τὸ ὁλοκλήρωμα (5) ὡς ἑξῆς

$$\frac{\alpha}{1.2.3\ldots\rho}\int_{(OX)}+\frac{e^{\beta_1}}{12\ldots\rho}\int_{(B_1X_1)}+\frac{e^{\beta_2}}{12.\rho}\int_{(B_2X_2)}+\ldots+\frac{e^{\beta_m}}{12.\rho}\int_{(B_mX_m)}+$$

$$+\frac{e^{\beta_1}}{12.\rho}\int_{(OB_1)}+\frac{e^{\beta_2}}{12\ldots\rho}\int_{(OB_2)}+\ldots+\frac{e^{\beta_m}}{12\ldots\rho}\int_{(OB_m)}=0$$

ἢ
$$P+Q=0 \tag{6}$$

ἂν διὰ τοῦ P παραστήσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τοῦ πρώτου στοίχου καὶ διὰ τοῦ Q τὸ ἄθροισμα τῶν τοῦ δευτέρου.

Ἀλλὰ τὸ P εἶνε ἀκέραιος ἀριθμὸς διάφορος τοῦ 0· διότι ὁ μὲν πρῶτος ὅρος αὐτοῦ εἶνε (ἐπειδὴ ἐπὶ τοῦ OX εἶνε $z=x$)

$$\frac{a}{1.2.3..\rho}\int_0^\infty e^{-x}.\ x^\rho\left[\text{б}^m\varphi(x)\right]^{\rho+1}dx,$$

εἶνε δὲ

$$x^\rho\left[\text{б}^m\varphi(x)\right]^{\rho+1}=\text{б}^{m(\rho+1)}\left\{\text{б}_m^{\rho+1}x^\rho+M_1x^{\rho+1}+M_2x^{\rho+2}+\ldots\right\}$$

τῶν $M_1, M_2, \ldots$ ὄντων ἀκεραίων· ὅθεν

$$\frac{a}{1.2.3..\rho}\int_0^\infty e^{-x}x^\rho\left[\text{б}^m\varphi(x)\right]^{\rho+1}dx=a\text{б}^{m(\rho+1)}\left\{\text{б}_m^{\rho+1}+M_1(\rho+1)+\right.$$
$$\left.+M_2(\rho+1)(\rho+2)+\ldots\right\}.$$

ὁ πρῶτος ἄρα ὅρος τοῦ P εἶνε τῆς μορφῆς

$$a\left[(\text{б}^m\text{б}_m)^{\rho+1}+N.(\rho+1)\right],$$

ἔνθα N δηλοῖ ἀκέραιόν τινα ἀριθμόν.

Περὶ δὲ τῶν λοιπῶν ὅρων τοῦ P παρατηροῦμεν, ὅτι ἐν μὲν τῷ πρώτῳ ἐπὶ τῆς γραμμῆς B_1X_1 τῆς ὁλοκληρώσεως εἶνε $z=\beta_1+x'$ $(x'=0\ldots\infty)$, ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ εἶνε $z=\beta_2+x'$ καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος ὅρων εἶνε

$$\frac{1}{1.2.\rho}\sum_{\nu=1}^{m}\left\{\int_0^\infty e^{-x'}(\beta_\nu+x')^\rho\left[\text{б}^m\varphi(\beta_\nu+x')\right]^{\rho+1}dx'\right.$$

ἢ καὶ $$\frac{1}{1.2..\rho}\int_0^\infty e^{-x}\left\{\sum_{\nu=1}^{m}(\beta_\nu+x)^\rho\varphi(\beta_\nu+x)^{\rho+1}\right\}\text{б}^{m(\rho+1)}dx.$$

Τὸ ἄθροισμα $$\sum_{\nu=1}^{m}(\beta_\nu+x)^\rho\varphi(\beta_\nu+x)^{\rho+1} \tag{7}$$

εἶνε πολυώνυμον ἀκέραιον τοῦ x διαιρετὸν διὰ τοῦ $x^{\rho+1}$ (διότι εἶνε $\varphi(\beta_\nu)=0$)· ἐπομένως $\varphi(\beta_\nu+x)=x\varphi'(\beta_\nu)+\ldots$), οἱ δὲ συντελεσταὶ αὐτοῦ εἶνε συμμετρικαὶ ἀκέραιαι συναρτήσεις τῶν ῥιζῶν $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta^m$ βαθμοῦ πρὸς αὐτὰς τὸ πλεῖστον $\rho + (m-1).(\rho+1)$, ἤτοι $m(\rho+1)-1$ καὶ ἔχουσαι συντελεστὰς ἀκεραίους ἀριθμούς· ἐπειδὴ δὲ πᾶσα συμμετρικὴ ἀκεραία συνάρτησις τῶν ῥιζῶν τῆς ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως $\varphi(x)=0$ εἶνε ἀκεραία συνάρτησις τῶν ἀριθμῶν $\frac{\mathscr{b}_1}{\mathscr{b}}, \frac{\mathscr{b}_2}{\mathscr{b}}, \ldots \frac{\mathscr{b}_m}{\mathscr{b}}$ βαθμοῦ οὐχὶ ἀνωτέρου, συνάγεται, ὅτι οἱ συντελεσταὶ τοῦ πολυωνύμου (7) εἶνε ἀριθμοὶ σύμμετροι καὶ ἔχουσι παρονομαστὰς δυνάμεις τοῦ $\mathscr{b}$ οὐχὶ ἀνωτέρας τῆς $\mathscr{b}^{m(\rho+1)-1}$. ἐπειδὴ δὲ τὸ πολυώνυμον τοῦτο (7) πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὴν δύναμιν $\mathscr{b}^{m(\rho+1)}$, γίνονται οἱ συντελεσταὶ τοῦ ὑπὸ τὸ ὁλοκλήρωμα πολυωνύμου

$$\sum_{\nu=1}^{m} (\beta_\nu + x)^\rho \varphi(x)^{\rho+1} . \mathscr{b}^{m(\rho+1)}$$

πάντες ἀκέραιοι ἀριθμοί.

Τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν λοιπῶν ὅρων τοῦ P (πλὴν τοῦ πρώτου) εἶνε τῆς μορφῆς

$$\frac{1}{1.2..\rho} \int_0^\infty e^{-x}. x^{\rho+1} F(x) dx,$$

ἔνθα $F(x)$ εἶνε πολυώνυμόν τι ἀκέραιον τοῦ x ἔχον συντελεστὰς ἀκεραίους ἀριθμούς· ἑπομένως τὸ εἰρημένον ἄθροισμα εἶνε τῆς μορφῆς $K(\rho+1)$ ἔνθα K δηλοῖ ἀκέραιόν τινα.

Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι ἐν τῇ ἐξισώσει (6) οἱ διὰ τοῦ P παρασταθέντες ὅροι ἀποτελοῦσιν ἀκέραιόν τινα ἀριθμὸν τῆς μορφῆς

$$a(\mathscr{b}^m \mathscr{b}_m)^{\rho+1} + \Lambda(\rho+1), \qquad \Lambda = \text{ἀκέραιος·}$$

ἐὰν ἄρα ὁ $\rho+1$ ληφθῇ πρῶτος ἀριθμὸς μεγαλήτερος τῶν $\mathscr{b}$, $\mathscr{b}_m$ καὶ a, τὸ ἄθροισμα P διαφέρει τοῦ 0· διότι εἶνε ἄθροισμα δύο ἀκεραίων, ἐξ ὧν ὁ μὲν εἷς εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ $\rho+1$, ὁ δὲ ἕτερος οὐχί.

Θεωρήσωμεν νῦν τοὺς ὅρους τοῦ ἀθροίσματος Q. Ἔστω A ἡ ἀκτὶς κύκλου περιέχοντος ἐντὸς ἑαυτοῦ πάντα τὰ σημεῖα $B_1, B_2, \ldots, B_m$ τὰ παριστῶντα τὰς ῥίζας $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$· καὶ ἐν τῷ κύκλῳ τούτῳ ἔστω μέγιστον μέτρον τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως $e^{-z}.\beta^m\varphi(z)$ τὸ Η, μέγιστον δὲ μέτρον τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως $z\beta^m\varphi(z)$ τὸ Θ· τότε θὰ εἶνε ἐντὸς τοῦ ῥηθέντος κύκλου

$$\left| e^{-z}.z^{\rho}\left[\beta^m\varphi(z)\right]^{\rho+1} \right| < \mathrm{H}.\Theta^{\rho}\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ τὸ μέτρον παντὸς ἀθροίσματος οὐδέποτε ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν προσθετέων, θὰ εἶνε

$$\left| \int_{OB_\nu} e^{-z}z^{\rho}\left[\beta^m\varphi(z)\right]^{\rho+1} dz \right| < \int_{OB_\nu} \mathrm{H}.\Theta^{\rho}.\,|dz| < \mathrm{H}.\Theta^{\rho}.\mathrm{A}$$

ὁμοίως εἶνε

$$\left| e^{\beta_\nu} \right| < e^{\mathrm{A}}.$$

ὅθεν

$$\left| \mathrm{Q} \right| < \frac{me^{\mathrm{A}}\,\mathrm{H}.\Theta^{\rho}\mathrm{A}}{1.2.3\ldots\rho}.$$

ἀλλὰ τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἀνισότητος ταύτης τείνει πρὸς τὸ 0, ὅταν ὁ πρῶτος ἀριθμὸς $\rho+1$ λαμβάνηται ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον μεγαλήτερος· ὅθεν καὶ ορQ=0. Ἡ ἰσότης ἄρα $\mathrm{P}+\mathrm{Q}=0$ εἶνε ἀδύνατος, διότι τὸ μὲν P εἶνε πάντοτε ἀκέραιος ἀριθμὸς διάφορος τοῦ 0, τὸ δὲ Q δύναται νὰ γίνῃ παντὸς ἀριθμοῦ μικρότερον, ὅταν ὁ πρῶτος ἀριθμὸς $\rho+1$ ληφθῇ ἱκανῶς μέγας· ἐπομένως καὶ ἡ ἰσότης (3) εἶνε ἀδύνατος. Ἄρα *ὁ ἀριθμὸς π δὲν εἶνε ἀλγεβρικός.*

264. Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι ὁ τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου, ἤτοι ἡ κατασκευὴ τετραγώνου ἰσοδυνάμου πρὸς κύκλον, ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, ἡ κατασκευὴ εὐθείας ἰσομήκους τῇ περιφερείᾳ, εἶνε ἀδύνατος, οὐ μόνον ὅταν εἰς τὰς γεωμετρικὰς κατασκευὰς μεταχειριζώμεθα εὐθείας γραμμὰς καὶ περιφερείας κύκλων, ἀλλὰ καὶ ὅταν μεταχειριζώμεθα οἱασδήποτε ἀλγεβρικὰς καμπύλας· διότι καὶ αἱ συντεταγμέναι τῶν τομῶν ἀλγεβρικῶν καμπύλων (ὧν αἱ ἐξισώσεις ἔχουσι συντελεστὰς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς) εἶνε ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ καὶ τὰ μήκη τῶν τὰς τομὰς ἑνουσῶν εὐθειῶν καὶ τὰ ἐμβαδὰ τῶν προκυπτόντων εὐθυγράμμων σχημάτων ἐκ τοιούτων καμπύλων, πάντα ταῦτα, ἐκφράζονται δι' ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.

Σημείωσις. Ὁ Lindemann ἀπέδειξε καὶ τὴν ἑξῆς γενικωτέραν πρότασιν·

Ἡ ἐξίσωσις $\quad \mathrm{X}_1e^{x_1}+\mathrm{X}_2e^{x_2}+\ldots\mathrm{X}_ne^{x_n}=0, \quad (1)$

ὅταν οἱ ἐκθέται $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *εἶνε ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ διάφοροι ἀπ' ἀλλήλων καὶ οἱ συντελεσταὶ* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *ἐπίσης ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί, εἶνε ἀδύνατος, ἐκτὸς ὅταν εἶνε*

$$X_1 = X_2 = X_3 \ldots = X_n = 0.$$

Ἐν τῇ προτάσει ταύτῃ περιέχονται προφανῶς καὶ αἱ προτάσεις, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ e καὶ π δὲν εἶνε ἀλγεβρικοί.

Ἐκ τῆς αὐτῆς προτάσεως ἕπονται καὶ αἱ ἑξῆς·

1) Ἡ ἐξίσωσις $y = e^x$, ἂν μὴ εἶνε $x=0$ καὶ $y=1$, ἀδύνατον νὰ ἐπαληθευθῇ ὑπ' ἀριθμῶν x, y ἀμφοτέρων ἀλγεβρικῶν· τοῦτ' ἔστιν ἡ καμπύλη $y = e^x$ δι' οὐδενὸς σημείου διέρχεται, οὗ ἀμφότεραι αἱ συντεταγμέναι νὰ εἶνε ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί, πλὴν τοῦ σημείου $0,1$.

Ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς e^x εἶνε πάντοτε ὑπερβατικὸς ἀριθμός, ὅταν ὁ ἐκθέτης x εἶνε ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς διάφορος τοῦ 0.

Καὶ ὁ Νεπέρειος λογάριθμος οἱουδήποτε ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ y εἶνε πάντοτε ὑπερβατικὸς ἀριθμός, πλὴν ὅταν $y=1$.

2) Ἡ ἐξίσωσις $e^{\frac{1}{2}xi} - e^{-\frac{1}{2}xi} = yi$, ἤτοι $y = 2\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)$, ὅταν x διαφέρῃ τοῦ 0, ἀδύνατον νὰ ἐπαληθευθῇ ὑπ' ἀριθμῶν x, y ἀμφοτέρων ἀλγεβρικῶν.

Ἐντεῦθεν βλέπομεν, ὅτι, ὅταν ἡ χορδὴ κυκλικοῦ τόξου (διὰ τῆς ἀκτῖνος μετρουμένη) ἐκφράζηται δι ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ y, (οὐχὶ 0), τὸ τόξον ἐκφράζεται δι' ἀριθμοῦ ὑπερβατικοῦ καὶ ἑπομένως τὸ ἀνάπτυγμα αὐτοῦ εἶνε ἀδύνατον νὰ κατασκευασθῇ δι' ἀλγεβρικῶν καμπύλων.

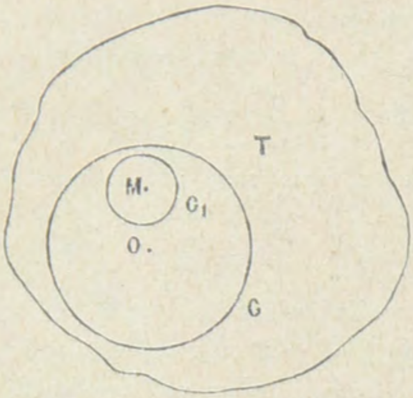
Ἀνάπτυξις τῶν συναρτήσεων τῆς μιγαδικῆς μεταβλητῆς z εἰς σειράς.

Θεώρημα τοῦ Cauchy.

265. *Ἐὰν ἡ συνάρτησις* $\sigma(z)$ *εἶνε ὁμαλὴ ἔν τινι τόπῳ* T *καὶ ληφθῇ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου τὸ* O (ἔνθα εἶνε $z = z_0$), *ἡ συνάρτησις* $\sigma(z)$ *ἔν τινι περιοχῇ τοῦ σημείου* O *δύναται νὰ ἀναπτυχθῇ εἰς σειρὰν ἔχουσαν ὅρους τὰς δυνάμεις τοῦ* $z - z_0$, *ὧν οἱ ἐκθέται εἶνε θετικοὶ καὶ ἀκέραιοι ἀριθμοί, καὶ ὧν ἕκαστος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ σταθερόν τινα ἀριθμόν· ἤτοι εἰς σειρὰν τῆς μορφῆς*

$$\Sigma A_\nu (z - z_0)^\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots, \infty)\cdot$$

θὰ συγκλίνῃ δὲ ἡ σειρὰ αὕτη ἐντὸς παντὸς κύκλου ἔχοντος κέντρον τὸ ληφθὲν σημεῖον $O(z_0)$ *καὶ κειμένου ὅλου ἐπὶ τοῦ τόπου* T.



Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν μιγαδικὴν μεταβλητὴν διὰ τοῦ Z καὶ γράψωμεν περιφέρειαν ἔχουσαν κέντρον τὸ ληφθὲν σημεῖον O καὶ κειμένην ὅλην ἐντὸς τοῦ τόπου T, ἐντὸς δὲ αὐτῆς λάβωμεν τυχὸν σημεῖον, τὸ M (ἔνθα εἶνε $Z=z$), ἡ συνάρτησις

$$\frac{\sigma(Z)}{Z-z}$$

θὰ εἶνε ὁμαλὴ ἐν τῷ αὐτῷ τόπῳ T ἐξαιρουμένου τοῦ σημείου M (ἔνθα γίνεται ἄπειρος)· ἐὰν ἄρα γράψωμεν περὶ τὸ M περιφέρειαν C_1 ἔχουσαν ἀκτῖνα ρ ἱκανῶς μικράν, ὥστε νὰ κεῖται ὁλόκληρος ἐντὸς τοῦ προηγουμένως γραφέντος κύκλου, θὰ εἶνε

$$\int_C \frac{\sigma(Z)}{Z-z}dZ = \int_{C_1} \frac{\sigma(Z)}{Z-z}dZ. \tag{1}$$

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὁλοκληρώματος τοῦ δευτέρου μέλους παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ἀκτὶς ρ τῆς περιφερείας C_1 δύναται νὰ ληφθῇ ὅσον θέλωμεν μικρά, καὶ ὅτι ἐπὶ τῆς περιφερείας ταύτης εἶνε

$$Z-z=\rho e^{\theta i} \qquad (\theta=0\ldots 2\pi)$$

καὶ

$$dZ=i\rho e^{\theta i}d\theta\cdot$$

ὅθεν

$$\int_{C_1} \frac{\sigma(Z)}{Z-z}dZ = i\int_0^{2\pi} \sigma(z+\rho e^{\theta i})d\theta. \tag{2}$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ συνάρτησις σ(Z) εἶνε ὁμαλὴ ἐν τῷ κύκλῳ C, δύναται νὰ ληφθῇ ἡ ἀκτὶς ρ τόσον μικρά, ὥστε ἡ διαφορὰ δύο τιμῶν αὐτῆς ἐντὸς τοῦ κύκλου C_1 νὰ ἔχῃ μέτρον μικρότερον παντὸς τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ δ· τότε, ἂν θέσωμεν

$$\sigma(z\rho+e^{\theta i})-\sigma(z)=\varepsilon,$$

θὰ εἶνε $|\varepsilon|<\delta$

καὶ

$$i\int_0^{2\pi} \sigma(z+\rho e^{\theta i})d\theta = i\int_0^{2\pi}\sigma(z)d\theta + i\int_0^{2\pi}\varepsilon d\theta. \tag{3}$$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε $|\varepsilon| < \delta$, ἕπεται $\left| \int_0^{2\pi} \varepsilon d\theta \right| < 2\pi\delta$.

(διότι τὸ μέτρον τοῦ ἀθροίσματος οὐδέποτε ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν προσθετέων).

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι καθ' ὅσον ἡ ἀκτὶς ρ τείνει πρὸς τὸ 0, καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_0^{2\pi} \varepsilon d\theta$ τείνει ὡσαύτως πρὸς τὸ 0· ἑπομένως τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος (2) τείνει πρὸς τὸ $2\pi i \sigma(z)$· ἀλλὰ τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος (1) εἶνε προφανῶς ἀνεξάρτητον ἀπὸ τοῦ ρ· ἑπομένως καὶ τὸ δεύτερον οὐδαμῶς μεταβάλλεται, ὅταν ἡ ἀκτὶς ρ μεταβάλληται· κατ' ἀκολουθίαν ἡ τιμὴ αὐτοῦ πρέπει νὰ εἶνε $2\pi i \sigma(z)$· ὅθεν συνάγεται ἡ ἰσότης

$$\sigma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\sigma(Z)}{Z - z} dZ. \tag{4}$$

266. *Διὰ τῆς ἰσότητος ταύτης παρίσταται ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως ἐν ἑκάστῳ σημείῳ z τοῦ τόπου T ὡς ἐξαγόμενον ὁλοκληρώσεως ἐπὶ τυχούσης περιφερείας* (ἢ καὶ ἐπὶ τυχούσης κλειστῆς καὶ ἁπλῆς καμπύλης) *ἐν αὐτῷ κειμένης καὶ περικλειούσης τὸ σημεῖον τοῦτο.*

Ἐπειδὴ δὲ τὸ κλάσμα

$\dfrac{\sigma(Z)}{Z - z}$ δύναται νὰ γραφῆ καὶ ὡς ἑξῆς $\dfrac{\sigma(Z)}{Z - z_0 - (z - z_0)}$.

ἢ καὶ ὡς ἑξῆς
$$\frac{\sigma(Z)}{Z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(\dfrac{z - z_0}{Z - z_0}\right)},$$

ἐφαρμόζοντες τὴν ταὐτότητα

$$\frac{1 - \omega^{\nu+1}}{1 - \omega} = 1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^\nu,$$

εὑρίσκομεν

$$\frac{\sigma(Z)}{Z - z} = \frac{\sigma(Z)}{Z - z_0} \left\{ 1 + \frac{z - z_0}{Z - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{Z - z_0}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{z - z_0}{Z - z_0}\right)^\nu \right\} +$$
$$+ \frac{\sigma(Z)}{Z - z} \cdot \left(\frac{z - z_0}{Z - z_0}\right)^{\nu+1}.$$

ὅθεν καὶ

$$\int\limits_C \frac{\sigma(Z)dZ}{Z-z} = 2\pi i\sigma(z) = \int\limits_C \frac{\sigma(Z)}{Z-z_0}dZ + (z-z_0)\int\limits_C \frac{\sigma(Z)}{(Z-z_0)^2}dZ + \ldots +$$

$$+(z-z_0)^\nu \int\limits_C \frac{\sigma(Z)}{(Z-z_0)^{\nu+1}}dZ + \int\limits_C \sigma(Z)\left(\frac{z-z_0}{Z-z_0}\right)^{\nu+1}\frac{dZ}{Z-z}.$$

Ἀλλ' ἐπὶ τῆς περιφερείας C, ἐφ' ἧς πρέπει νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ὁλοκληρώσεις αὗται, εἶνε πανταχοῦ

$$\left|Z-z_0\right| > \left|z-z_0\right| \quad \text{ἤτοι} \quad \left|\frac{z-z_0}{Z-z_0}\right| < 1,$$

διότι τὸ σημεῖον M(z) κεῖται ἐντὸς αὐτῆς, τὸ δὲ Z ἐπ' αὐτῆς· ἑπομένως ὁ παράγων $\left(\frac{z-z_0}{Z-z_0}\right)^{\nu+1}$ τοῦ τελευταίου ὁλοκληρώματος τείνει πρὸς τὸ 0, ὅταν ὁ ν αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον· ἐπειδὴ δὲ οἱ λοιποὶ παράγοντες αὐτοῦ εἶνε πεπερασμένοι ἐπὶ τῆς περιφερείας καὶ τὰ ὅρια αὐτοῦ ἐπίσης, συμπεραίνομεν, ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο τείνει πρὸς τὸ 0, ὅταν ὁ ν αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον, καὶ ἑπομένως εἶνε

$$(5) \qquad \sigma(z) = A_0 + A_1(z-z_0) + A_2(z-z_0)^2 + \ldots + A_\nu(z-z_0)^\nu + \ldots,$$

ἔνθα

$$A_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\sigma(Z)}{(Z-z_0)^{\nu+1}}dZ \qquad (\nu=0,1,2,\ldots,\infty)$$

267. Ἐὰν ἄρα γραφῇ κύκλος κείμενος ὅλος ἐντὸς τοῦ τόπου T, ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως σ(z) εἰς οἱονδήποτε σημεῖον (z) ἐντὸς αὐτοῦ κείμενον ἀναπτύσσεται εἰς σειρὰν κατὰ τὰς θετικὰς καὶ ἀκεραίας δυνάμεις τῆς διαφορᾶς $z-z_0$, ἔνθα z_0 εἶνε ἡ τιμὴ τῆς μιγαδικῆς μεταβλητῆς Z εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· ἔχει δηλαδὴ ἡ ὁμαλὴ συνάρτησις ἐν τῷ τόπῳ T ἐν τῇ περιοχῇ ἑκάστου σημείου τοῦ τόπου τούτου τὸν χαρακτῆρα ἀκεραίας συναρτήσεως.

268. Οἱ συντελεσταὶ A_ν τῆς σειρᾶς (5) εἶνε προφανῶς ἀνεξάρτητοι ἐκ τῆς θέσεως τοῦ σημείου M(z) ἐντὸς τοῦ κύκλου, συγκλίνει δὲ ἡ σειρὰ αὕτη τοὐλάχιστον ἐντὸς τοῦ κύκλου, ὅστις ἔχει κέντρον τὸ O(z_0)

καὶ ἀκτῖνα τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν αὐτοῦ ἀπὸ τῶν περάτων τοῦ τόπου Τ.

269. Τὸ ἀνάπτυγμα (5) τῆς συναρτήσεως $\sigma(z)$ κατὰ τὰς θετικὰς καὶ ἀκεραίας δυνάμεις τῆς διαφορᾶς $z-z_0$ εἶνε αὐτὴ ἡ σειρὰ τοῦ Taylor. Καὶ ὄντως, ἂν διαφορίσωμεν τὴν ἰσότητα (5) ν φορὰς πρὸς z καὶ ἔπειτα εἰς τὸ ἐξαγόμενον θέσωμεν $z=z_0$, εὑρίσκομεν

$$A_\nu=\frac{\sigma^\nu(0)}{1.2.3\ldots\nu}.$$

ἤτοι τὸν συντελεστὴν τῆς δυνάμεως $(z-z_0)^\nu$ ἐν τῷ ἀναπτύγματι τῆς συναρτήσεως $\sigma\big(z_0+(z-z_0)\big)$.

270. Ἐκ τοῦ τύπου (5) προκύπτει ἀμέσως ὁ τύπος τοῦ Maclaurin, ἐὰν ἡ ἀρχὴ Ο κεῖται ἐντὸς τοῦ τόπου Τ· διότι τότε δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εἰς τὴν ἀρχὴν Ο (ὅτε γίνεται $z_0=0$).

Τότε θὰ ἔχωμεν

$$\sigma(z)=A_0+A_1z+A_2z^2+\ldots+A_\nu z^\nu+\ldots$$

ἤτοι τὸν τύπον τοῦ Maclaurin.

Σημείωσις. Τὸ θεώρημα τοῦ Cauchy ἐκφράζει σαφέστερον τοὺς ὅρους, ὑπὸ τοὺς ὁποίους συνάρτησίς τις εἶνε ἀναπτύξιμος κατὰ τοὺς τύπους τοῦ Taylor καὶ τοῦ Maclaurin, ἀπαλλάσσει δὲ ἡμᾶς καὶ τῆς ἐρεύνης τοῦ ὑπολοίπου, ἥτις πολλάκις εἶνε δύσκολος.

271. Ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος καὶ ἐκ τοῦ ἀναπτύγματος (5) συνάγεται, ὅτι

1) *Ἡ τιμὴ πάσης συναρτήσεως ὁμαλῆς ἔν τινι τόπῳ εἶνε ἐντελῶς ὡρισμένη, ὅταν εἶνε γνωστὴ ἡ τιμὴ αὐτῆς καὶ πασῶν τῶν παραγώγων αὐτῆς εἰς ἓν σημεῖον* M_0 (z_0) *τοῦ τόπου.*

Διότι τότε εἶνε γνωστὴ ἡ σειρὰ (5), ἥτις δίδει τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως καὶ τῶν παραγώγων αὐτῆς εἰς πάντα τὰ σημεῖα τοῦ κύκλου, οὗ κέντρον μὲν εἶνε τὸ σημεῖον (z_0), ἀκτὶς δὲ ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τῶν ἄκρων τοῦ τόπου· λαμβάνοντες δὲ σημεῖόν τι $M_1(z_1)$ ἐντὸς τοῦ κύκλου τούτου κείμενον καὶ εὑρίσκοντες τὰς τιμὰς τῆς συναρτήσεως καὶ τῶν παραγώγων αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο, ἔχομεν τὴν σειράν, ἥτις δίδει τὰς τιμὰς τῆς συναρτήσεως καὶ τῶν παραγώγων της ἐντὸς τοῦ κύκλου, ὅστις ἔχει κέντρον τὸ M_1 καὶ ἀκτῖνα τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν τοῦ M_1 ἀπὸ τῶν ἄκρων τοῦ τόπου Τ. Ἐξακολουθοῦντες δὲ τοιουτοτρόπως βλέπομεν, ὅτι ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως εἶνε ὡρισμένη ἐντελῶς εἰς πᾶν σημεῖον τοῦ τόπου Τ.

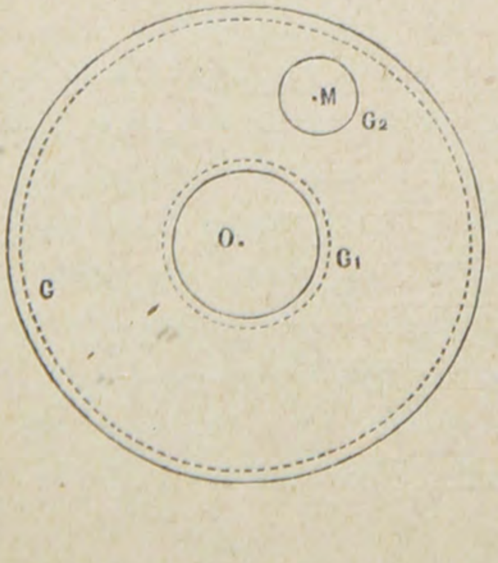
2) Καὶ ὅταν εἶνε γνωσταὶ αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως $\sigma(z)$ ἐπὶ μιᾶς ἁπλῆς καὶ κλειστῆς γραμμῆς ἐν τῷ τόπῳ Τ κειμένης καὶ ἐγκλειούσης μέρος αὐτοῦ, αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως $\sigma(z)$ εἶνε ἐντελῶς ὡρισμέναι ἐν ὅλῳ τῷ τόπῳ Τ.

Διότι, ἂν ληφθῇ τότε τὸ σημεῖον z_0 ἐντὸς τῆς γραμμῆς ταύτης, οἱ συντελεσταὶ A_ν τοῦ ἀναπτύγματος (5) θὰ εἶνε ἐντελῶς ὡρισμένοι· διότι τὰ ὁλοκληρώματα, δι' ὧν ἐκφράζονται, δύνανται νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἐπὶ τῆς ῥηθείσης κλειστῆς γραμμῆς.

3) *Πᾶσαι αἱ παράγωγοι ὁμαλῆς συναρτήσεως ἔν τινι τόπῳ Τ εἶνε καὶ αὐταὶ ὁμαλαὶ ἐν τῷ αὐτῷ τόπῳ ἐπίσης καὶ πᾶσαι αἱ παράγουσαι·* διότι, ἂν ἡ συνάρτησις $\sigma(z)$ ἔχῃ ἀνάπτυγμα τὸ $\sum\limits_\nu A_\nu(z-z_0)^\nu$ ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ σημείου $M_0(z_0)$, ἡ παράγωγος αὐτῆς θὰ ἔχῃ ἀνάπτυγμα τὸ $\sum\limits_\nu A_\nu \nu(z-z_0)^{\nu-1}$ καὶ ἡ παράγουσα, τὸ $\sum \frac{A_\nu}{\nu+1}(z-z_0)^{\nu+1}$ (Διαφορ. λογισμοῦ σελ. 50).

Θεώρημα τοῦ Laurent.

272. *Ἐὰν συνάρτησις εἶνε ὁμαλὴ ἐν τῷ μεταξὺ δύο ὁμοκέντρων περιφερειῶν περιλαμβανομένῳ τόπῳ Τ, δύναται νὰ ἀναπτυχθῇ εἰς σειρὰν περιέχουσαν καὶ τὰς θετικὰς δυνάμεις τῆς διαφορᾶς $z-z_0$ καὶ τὰς ἀρνητικάς, ἤτοι εἰς σειρὰν τῆς μορφῆς*



$$\sum_\nu A_\nu(z-z_0)^\nu,$$

$$(\nu=-\infty\ldots 0\ldots+\infty)$$

ἔνθα z_0 εἶνε ἡ τιμὴ τῆς μιγαδικῆς μεταβλητῆς Ζ εἰς τὸ κοινὸν κέντρον τῶν δύο περιφερειῶν· συγκλίνει δὲ ἡ σειρὰ αὕτη ἐντὸς τοῦ εἰρημένου τόπου.

Ἔστω τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου Τ τὸ $M(z)$ καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος ὁ C_2

ἔχων ἀκτῖνα ρ ἱκανῶς μικράν, ὥστε νὰ κεῖται ὅλος ἐν τῷ τόπῳ Τ· ἡ συνάρτησις

$$\frac{\sigma(Z)}{Z-z}$$

εἶνε προφανῶς ὁμαλὴ ἐντὸς τοῦ τόπου Τ, ἐξαιρουμένου τοῦ σημείου Μ (ἔνθα $Z=z$). Ἐὰν ἄρα γράψωμεν ἐν τῷ τόπῳ Τ δύο περιφερείας C καὶ C_1 ὁμοκέντρους ταῖς πρώταις καὶ τοιαύτας, ὥστε ἐν τῷ μεταξὺ αὐτῶν τόπῳ νὰ περιέχηται ὅλος ὁ κύκλος C_2, θὰ εἶνε (ἐδ. 260)

$$\int_{C}\frac{\sigma(Z)}{Z-z}dZ=\int_{C_1}\frac{\sigma(Z)}{Z-z}dZ+\int_{C_2}\frac{\sigma(Z)}{Z-z}dZ \tag{1}$$

Τὸ ὁλοκλήρωμα ἐπὶ τῆς περιφερείας C_2 εὑρίσκεται ὡς καὶ προηγουμένως καὶ εἶνε $2\pi i\sigma(z)$· ὅθεν

$$\sigma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{\sigma(Z)dZ}{Z-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{\sigma(Z)}{Z-z}dZ. \tag{2}$$

Ἐν τῷ πρώτῳ ὁλοκληρώματι τοῦ δευτέρου μέλους εἶνε πανταχοῦ ἐπὶ τῆς περιφερείας C

$$|Z-z_0|>|z-z_0|,$$

ἑπομένως εἶνε ὡς καὶ προηγουμένως

$$\frac{1}{Z-z}=\frac{1}{Z-z_0-(z-z_0)}=$$

$$=\frac{1}{Z-z_0}\left\{1+\left(\frac{z-z_0}{Z-z_0}\right)+\left(\frac{z-z_0}{Z-z_0}\right)^2+\dots+\left(\frac{z-z_0}{Z-z_0}\right)^\nu\right\}+$$

$$+\left(\frac{z-z_0}{Z-z_0}\right)^{\nu+1}\cdot\frac{1}{Z-z}.$$

καὶ ἐπομένως

$$\int_C \frac{\sigma(Z)}{Z-z}dZ = \int_C \frac{\sigma(Z)}{Z-z_0}\,dZ + (z-z_0)\int_C \frac{\sigma(Z)}{(Z-z_0)^2}\,dZ + \ldots +$$

$$+ (Z-z_0)^\nu \int_C \frac{\sigma(Z)}{(Z-z_0)^{\nu+1}}\,dZ + \int_C \frac{\sigma(Z)}{Z-z}\left(\frac{z-z_0}{Z-z_0}\right)^{\nu+1} dZ.$$

καὶ ἐπειδή, τοῦ ν αὐξανομένου εἰς ἄπειρον, τὸ τελευταῖον ὁλοκλήρωμα τείνει πρὸς τὸ 0, θὰ εἶνε πάλιν

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\sigma(Z)}{Z-z}dz = A_0 + A_1(z-z_0) + A_2(z-z_0)^2 + \ldots + A_\nu(z-z_0)^\nu + \ldots$$

ἔνθα

$$A_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\sigma(Z)}{(Z-z_0)^{\nu+1}}\,dZ.$$

Ἀλλ' ἐν τῷ δευτέρῳ ὁλοκληρώματι τῆς ἰσότητος (2) εἶνε πανταχοῦ ἐπὶ τῆς περιφερείας C_1

$$|Z-z_0| < |z-z_0|,$$

ὅθεν εἶνε

$$\frac{1}{Z-z} = \frac{1}{Z-z_0-(z-z_0)} = -\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\left(\dfrac{Z-z_0}{z-z_0}\right)}$$

καὶ κατὰ τὸν τύπον

$$\frac{1-\omega^{\nu+1}}{1-\omega} = 1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^\nu \qquad \text{εἶνε}$$

$$\frac{1}{Z-z} = -\frac{1}{z-z_0}\left\{ 1 + \left(\frac{Z-z_0}{z-z_0}\right) + \left(\frac{Z-z_0}{z-z_0}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{Z-z_0}{z-z_0}\right)^\nu \right\} +$$

$$+ \frac{1}{Z-z}\left(\frac{Z-z_0}{z-z_0}\right)^{\nu+1}$$

ἑπομένως

$$\int_{C_1} \frac{\sigma(Z)}{Z-z}\,dZ = -(z-z_0)^{-1}\int_{C_1} \sigma(Z)\,dZ - (z-z_0)^{-2}\int_{C_1} \sigma(Z)(Z-z_0)\,dZ - \ldots$$

$$-(z-z_0)^{-\nu-1}\int_{C_1} \sigma(Z)(Z-z_0)^{\nu}\,dZ + \int_{C_1} \frac{\sigma(Z)}{Z-z}\left(\frac{Z-z_0}{z-z_0}\right)^{\nu+1} dZ.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ τελευταῖον τοῦτο ὁλοκλήρωμα, καθ᾽ ὅσον αὐξάνει ὁ ν εἰς ἄπειρον, τείνει πρὸς τὸ 0, διότι τὸ μέτρον

$$\left|\frac{Z-z_0}{z-z_0}\right| \text{ εἶνε μικρότερον τῆς μονάδος,}$$

συνάγεται, ὅτι εἶνε

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{\sigma(Z)}{Z-z}\,dZ = A'_1(z-z_0)^{-1} + A'_2(z-z_0)^{-2} + \ldots + A'_{\nu}(z-z_0)^{-\nu} + \ldots,$$

ἔνθα

$$A'_{\nu} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \sigma(Z)(Z-z_0)^{\nu-1}\,dZ.$$

Τούτων οὕτως ἐχόντων, ἡ ἰσότης (2) γίνεται

$$\text{(3)}\quad \begin{aligned} \sigma(z) = {} & A_0 + A_1(z-z_0) + A_2(z-z_0)^2 + \ldots + A_{\nu}(z-z_0)^{\nu} + \ldots \\ & + A'_1(z-z_0)^{-1} + A'_2(z-z_0)^{-2} + \ldots + A'_{\nu}(z-z_0)^{-\nu} + \ldots \end{aligned}$$

Ὅτι δὲ ἓν μόνον τοιοῦτον ἀνάπτυγμα τῆς ὁμαλῆς συναρτήσεως $\sigma(z)$ ὑπάρχει ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ σημείου **M**, δεικνύεται εὐκόλως.

273. Ἐκ τῶν ἀναπτυγμάτων τῶν συναρτήσεων εἰς σειρὰς ἀποδεικνύονται εὐκόλως αἱ ἑξῆς ἰδιότητες αὐτῶν.

1) Τὰ σημεῖα, ἐν οἷς μηδενίζεται ἡ ὁμαλὴ συνάρτησις, εἶνε μεμονωμένα.

Ἐὰν δηλαδὴ ἡ συνάρτησις $\sigma(z)$ εἶνε ὁμαλὴ ἔν τινι τόπῳ Τ καὶ εἴς τι σημεῖον $A(z=\alpha)$ ἐντὸς τοῦ τόπου τούτου εἶνε $\sigma(\alpha)=0$, δύναται νὰ γραφῇ κύκλος περὶ κέντρον τὸ Α ἱκανῶς μικρός, ὥστε εἰς πάντα τὰ λοιπὰ σημεῖα αὐτοῦ νὰ εἶνε ἡ $\sigma(z)$ διάφορος τοῦ 0.

Διότι ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ σημείου Α (ἐντὸς τοῦ Τ) θὰ εἶνε

$$(1)\qquad \sigma(z)=A_\nu(z-\alpha)^\nu+A_{\nu+1}(z-\alpha)^{\nu+1}+\ldots,$$

ἔνθα ν εἶνε ἀκέραιός τις καὶ θετικὸς ἀριθμὸς καὶ A_ν διάφορον τοῦ 0·

$$\text{ἢ καὶ } \sigma(z)=(z-\alpha)^\nu \left\{ A_\nu+A_{\nu+1}(z-\alpha)+\ldots \right\},$$

ἐπειδὴ δὲ ἡ σειρὰ

$$(2)\qquad A_\nu+A_{\nu+1}(z-\alpha)+A_{\nu+2}(z-\alpha)^2+\ldots$$

ἐν τῷ κύκλῳ τῆς συγκλίσεως αὐτῆς εἶνε συνεχὴς συνάρτησις τοῦ $z-\alpha$ (Διαφορικοῦ σελ. 20), δύναται νὰ γραφῇ περὶ κέντρον τὸ Α κύκλος ἱκανῶς μικρός, ὥστε ἡ διαφορὰ δύο τυχουσῶν τιμῶν τῆς σειρᾶς ἐντὸς αὐτοῦ νὰ ἔχῃ μέτρον μικρότερον τοῦ $\frac{1}{2}|A_\nu|$· ἐν τῷ κύκλῳ τούτῳ πᾶσαι αἱ τιμαὶ τῆς σειρᾶς (2) εἶνε διάφοροι τοῦ 0· διότι ἐν τῷ κέντρῳ αὐτοῦ ἡ αὐτὴ σειρὰ ἔχει τὴν τιμὴν A_ν· ἑπομένως ἡ συνάρτησις $\sigma(z)$ ἐν τῷ κύκλῳ τούτῳ μόνον εἰς τὸ κέντρον μηδενίζεται· εἰς πᾶν δ' ἄλλο σημεῖον αὐτοῦ εἶνε διάφορος τοῦ 0.

Καὶ γενικῶς· ἐὰν ἡ συνάρτησις $\sigma(z)$ εἶνε ὁμαλὴ ἔν τινι τόπῳ Τ καὶ εἰς τὸ σημεῖον Α $(z=\alpha)$ αὐτοῦ εἶνε $\sigma(\alpha)=\beta$, ἡ περιοχὴ τοῦ σημείου Α δύναται νὰ ληφθῇ ἱκανῶς μικρά, ὥστε ἐν αὐτῇ νὰ εἶνε $\sigma(z)$ διάφορος τοῦ β (πλὴν εἰς τὸ κέντρον).

Διότι καὶ ἡ συνάρτησις $\sigma(z)-\beta$ εἶνε ὁμαλὴ ἐν τῷ αὐτῷ τόπῳ Τ καὶ γίνεται 0 διὰ $z=\alpha$.

Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι *ἐντὸς τόπου πεπερασμένου* (λέγω δὲ πεπερασμένον τόπον τὸν δυνάμενον νὰ περιληφθῇ ἐντὸς κύκλου ἱκανῶς μεγάλου) *τὰ σημεῖα, ἐν οἷς ἡ ὁμαλὴ συνάρτησις $\sigma(z)$ λαμβάνει δεδομένην τυχοῦσαν τιμήν, εἶνε εἰς πεπερασμένον πλῆθος.*

2) Ὁ βαθμὸς τοῦ μηδενισμοῦ τῆς ὁμαλῆς συναρτήσεως εἶνε πάντοτε ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός.

Ἐὰν δηλαδὴ εἶνε $\sigma(\alpha)=0$, ὑπάρχει πάντοτε δύναμίς τις τοῦ $z-\alpha$ ἔχουσα ἐκθέτην θετικὸν καὶ ἀκέραιον καὶ τοιοῦτον, ὥστε τὸ πηλίκον

$$\frac{\sigma(z)}{(z-\alpha)^{\nu}}$$

νὰ μένῃ πεπερασμένον καὶ τοῦ 0 διάφορον ἔν τινι περιοχῇ τοῦ σημείου A ἱκανῶς μικρᾷ.

Τοῦτο γίνεται ἀμέσως φανερὸν ἐκ τοῦ ἀναπτύγματος (5).

3) Ἐὰν ἡ συνάρτησις $\sigma(z)$ εἶνε ὁμαλὴ ἔν τινι τόπῳ T, ἡ συνάρτησις $\frac{1}{\sigma(z)}$ μόνον πόλους ἔχει ἐν τῷ αὐτῷ τόπῳ (τὰ σημεῖα δηλαδή, ἐν οἷς ἡ συνάρτησις $\sigma(z)$ μηδενίζεται).

Ἔστω $A(z=\alpha)$ ἓν ἐκ τῶν σημείων τούτων· ἡ συνάρτησις $\sigma(z)$ ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ σημείου τούτου (τῇ κειμένῃ ἐντὸς τοῦ T) θὰ παρίσταται διὰ σειρᾶς τοιαύτης

$$\sigma(z)=A_{\nu}(z-\alpha)^{\nu}+A_{\nu+1}(z-\alpha)^{\nu+1}+\ldots, \qquad A_{\nu}\gtrless 0.$$

ὅθεν καὶ $$\frac{1}{\sigma(z)}=(z-\alpha)^{-\nu}\frac{1}{A_{\nu}+A_{\nu+1}(z-\alpha)+\ldots}.$$

Ἀλλ' ἐν κύκλῳ ἔχοντι κέντρον τὸ σημεῖον A καὶ ἀκτῖνα ἱκανῶς μικράν, ὥστε ἡ σειρὰ

$$A_{\nu}+A_{\nu+1}(z-\alpha)+\ldots$$

νὰ μὴ μηδενίζηται ἐν αὐτῷ, ἡ συνάρτησις

$$\frac{1}{A_{\nu}+A_{\nu+1}(z-\alpha)+\ldots}$$

εἶνε ὁμαλή· ἀναπτύσσεται ἄρα εἰς σειρὰν συγκλίνουσαν ἐν τῷ ῥηθέντι κύκλῳ· ἔστω εἰς τὴν ἑξῆς

$$A'_{\nu}+A'_{\nu+1}(z-\alpha)+\ldots, \qquad \text{ἔνθα } A'_{\nu}=\frac{1}{A_{\nu}}.$$

ἑπομένως ἡ συνάρτησις $\frac{1}{\sigma(z)}$ ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ παρίσταται ὡς ἑξῆς

$$\frac{1}{\sigma(z)}=(z-\alpha)^{-\nu}\left\{A'_{\nu}+A'_{\nu+1}(z-\alpha)+\ldots\right\}. \tag{3}$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι τὸ σημεῖον $A(z=\alpha)$ εἶνε πόλος τῆς συναρτήσεως $\frac{1}{\sigma(z)}$ καὶ βαθμὸν ἀπειρισμοῦ ἔχει τὸν ν· ἤτοι τὸν βαθμὸν τοῦ μηδενισμοῦ τῆς συναρτήσεως $\sigma(z)$ ἐν τῷ αὐτῷ σημείῳ Α· διότι, ἂν πολλαπλασιάσωμεν αὐτὴν ἐπὶ $(z-\alpha)^{\nu}$, μένει πεπερασμένη καὶ τοῦ 0 διάφορος ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ σημείου Α.

4) Ἐὰν συνάρτησις ἔν τινι πεπερασμένῳ τόπῳ Τ μόνον πόλους ἔχῃ ἀνώμαλα σημεῖα καὶ τούτους εἰς πλῆθος πεπερασμένον, εἶνε δὲ ὁμαλὴ εἰς πᾶν μέρος τοῦ Τ ἔχον τὰ ῥηθέντα σημεῖα ἐκτὸς ἑαυτοῦ, ἡ τοιαύτη συνάρτησις γίνεται ὁμαλὴ ἐν τῷ τόπῳ Τ, ἀφοῦ ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτῆς ῥητή τις συνάρτησις.

Ἔστω $A(z=\alpha)$ εἷς ἐκ τῶν πόλων καὶ λ ὁ βαθμὸς τοῦ ἀπειρισμοῦ τῆς συναρτήσεως $\sigma(z)$ ἐν αὐτῷ· ἐπειδὴ τὸ γινόμενον

$$\sigma(z)\,(z-\alpha)^{\lambda}$$

ἔν τινι περιοχῇ τοῦ Α εἶνε ὁμαλὴ συνάρτησις τοῦ z, δύναται νὰ ἀναπτυχθῇ εἰς σειρὰν τῶν θετικῶν καὶ ἀκεραίων δυνάμεων τοῦ $z-\alpha$· ἔστω

$$\sigma(z)\,(z-\alpha)^{\lambda}=A_0+A_1(z-\alpha)+\ldots\cdot$$

τότε $$\sigma(z)=\frac{A_0+A_1(z-\alpha)+\ldots+A_{\lambda-1}(z-\alpha)^{\lambda-1}}{(z-\alpha)^{\lambda}}+A_{\lambda}+A_{\lambda+1}(z-\alpha)+\ldots$$

καὶ ἂν παραστήσωμεν διὰ $R_1(z)$ τὴν ῥητὴν συνάρτησιν

$$\frac{A_0+A_1(z-\alpha)+\ldots+A_{\lambda-1}(z-\alpha)^{\lambda-1}}{(z-\alpha)^{\lambda}}$$

θὰ εἶνε ἡ διαφορὰ $\sigma(z)-R_1(z)$ ὁμαλὴ συνάρτησις ἔν τινι περιοχῇ τοῦ σημείου Α ἱκανῶς μικρᾷ.

Ἐὰν ἔπειτα θεωρήσωμεν καὶ ἄλλον πόλον $B(z=\beta)$ τῆς συναρτήσεως $\sigma(z)$, δεικνύεται ὁμοίως, ὅτι ὑπάρχει ῥητή τις συνάρτησις $R_2(z)$ τοιαύτη, ὥστε ἡ διαφορὰ $\sigma(z)-R_2(z)$

νὰ εἶνε ὁμαλὴ συνάρτησις ἔν τινι περιοχῇ τοῦ πόλου B ἱκανῶς μικρᾷ.

Ἐπειδὴ δὲ οἱ πόλοι A, B, Γ, ..., K εἶνε εἰς πλῆθος πεπερασμένον, ἐὰν αἱ πρὸς αὐτοὺς ἀντίστοιχοι ῥηταὶ συναρτήσεις εἶνε κατὰ σειρὰν αἱ $R_1(z)$, $R_2(z), \ldots, R_n(z)$, καὶ τεθῇ $R_1(z)+R_2(z)+\ldots+R_n(z)=R(z)$,

ἡ διαφορὰ
$$\sigma(z)-R(z)$$
θὰ εἶνε ὁμαλὴ ἐν τῷ τόπῳ T· διότι καὶ μονότιμος εἶνε καὶ πεπερασμένη καὶ συνεχὴς ἐν αὐτῷ.

Σημείωσις. Ἐπειδὴ ἡ ἐκ τῶν πόλων ἀνωμαλία αἴρεται εὐκόλως, οἱ πόλοι λέγονται *ἐπουσιώδη* ἀνώμαλα σημεῖα.

5) Ἐὰν συνάρτησις $\sigma(z)$ ἔν τινι πεπερασμένῳ τόπῳ T μόνον πόλους ἔχῃ ἀνώμαλα σημεῖα καὶ τούτους εἰς πλῆθος πεπερασμένον, τὸ ὁλοκλήρωμα
$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}dz \tag{4}$$
ἐκτεινόμενον ἐπὶ τῆς τυχούσης κλειστῆς καὶ ἁπλῆς γραμμῆς, ἥτις κειμένη ἐν τῷ τόπῳ T δι᾽ οὐδενὸς τῶν πόλων διέρχεται οὔτε δι᾽ οὐδενὸς τῶν σημείων μηδενισμοῦ τῆς συναρτήσεως $\sigma(z)$, ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν σημείων μηδενισμοῦ, ἅτινα ἐγκλείει ἡ γραμμὴ τῆς ὁλοκληρώσεως ὑπὲρ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐγκλειομένων ἐν αὐτῇ πόλων· ἑκάστου τῶν σημείων τούτων λαμβανομένου τοσάκις, ὅσας ἔχει μονάδας ὁ βαθμὸς αὐτοῦ.

Διότι τὸ πηλίκον $\dfrac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}$ εἶνε μὲν ὁμαλὴ συνάρτησις τοῦ z ἔν τινι περιοχῇ παντὸς σημείου (τοῦ τόπου T), ἐν ᾧ ἡ συνάρτησις $\sigma(z)$ εἶνε πεπερασμένη καὶ τοῦ 0 διάφορος· ἔχει ὅμως πόλους ἁπλοῦς πάντας τοὺς πόλους τῆς συναρτήσεως $\sigma(z)$ καὶ πάντα τὰ σημεῖα μηδενισμοῦ αὐτῆς.

Καὶ ὄντως, ἂν διὰ $z=z_1$ εἶνε $\sigma(z_1)=0$, θὰ εἶνε ἔν τινι περιοχῇ τῆς τιμῆς z_1
$$\sigma(z)=(z-z_1)^{\lambda_1}\cdot\varphi(z),$$
ἔνθα $\varphi(z)$ εἶνε πεπερασμένον καὶ τοῦ 0 διάφορον ἐν τῇ αὐτῇ περιοχῇ.

Ἐντεῦθεν ἕπεται
$$\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}=\frac{\lambda_1}{z-z_1}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \tag{5}$$

Καὶ ἂν περὶ κέντρον τὸ σημεῖον z_1 γραφῇ περιφέρεια ἐν τῇ αὐτῇ περιοχῇ κειμένη, ἡ C_1, θὰ εἶνε

$$\int_{C_1} \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} dz = \lambda_1 \int_{C_1} \frac{dz}{z-z_1} + \int_{C_1} \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} dz.$$

ἀλλὰ τὸ τελευταῖον ὁλοκλήρωμα εἶνε 0· διότι ἡ συνάρτησις $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ ἐν τῇ θεωρουμένῃ περιοχῇ εἶνε ὁμαλή· ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ εἶνε $z-z_1=\rho e^{\theta i}$ $(\theta=0, \ldots, 2\pi)$· ὅθεν

$$\int_{C_1} \frac{dz}{z-z_1} = 2\pi i$$

καὶ ἐπομένως εἶνε $$\int_{C_1} \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} dz = 2\pi i \lambda_1.$$

Ἂν ἔπειτα ἡ τιμὴ $z=z'_1$ εἶνε πόλος τῆς συναρτήσεως $\sigma(z)$ καὶ λ'_1 ὁ βαθμὸς αὐτοῦ, τὸ γινόμενον

$$(z-z'_1)^{\lambda'_1} . \sigma(z)$$

εἶνε ὁμαλὴ συνάρτησις ἔν τινι περιοχῇ τῆς τιμῆς z'_1, καὶ ἂν παραστήσωμεν αὐτὸ διὰ τοῦ $f(x)$, ἤτοι ἂν θέσωμεν

$$\sigma(z) = (z-z'_1)^{-\lambda'_1} . f(z)$$

θὰ εἶνε ἐν τῇ αὐτῇ περιοχῇ

$$\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \frac{-\lambda'_1}{z-z'_1} + \frac{f'(z)}{f(z)}$$

καὶ ἂν περὶ τὸ σημεῖον z'_1 ὡς κέντρον γραφῇ περιφέρεια κειμένη ἐν τῇ εἰρημένῃ περιοχῇ, ἡ C'_1, εὑρίσκομεν ὁμοίως

$$\int_{C'_1} \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} dz = -2\pi i \lambda'_1$$

Ἀλλ' ἂν ἡ γραμμὴ C ἐγκλείῃ τὰ σημεῖα μηδενισμοῦ $z_1, z_2, \ldots, z_\sigma$ καὶ τοὺς πόλους $z'_1, z'_2, \ldots, z'_\rho$ καὶ γράψωμεν περὶ ἕκαστον τούτων περιφέρειαν ἱκανῶς μικράν, θὰ εἶνε (ἐδ. 260)

$$\int_C \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} dz = \int_{C_1} \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} dz + \int_{C_2} \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} dz + \ldots$$

$$+ \int_{C'_1} \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} dz + \int_{C'_2} \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} dz + \ldots,$$

ἢ κατὰ τὰ ἀνωτέρω εὑρεθέντα

$$(6) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} dz = (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\sigma) - (\lambda'_1 + \lambda'_2 + \ldots + \lambda'_\rho),$$

Ἐὰν ἡ συνάρτησις $\sigma(z)$ εἶνε ἀκεραία συνάρτησις βαθμοῦ μ, ἐπειδὴ πόλοι αὐτῆς δὲν ὑπάρχουσιν ἐν τῇ καμπύλῃ C ἐγκεκλεισμένοι, τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} dz$$

παριστᾷ τὸν ἀριθμὸν τῶν σημείων μηδενισμοῦ αὐτῆς τῶν ἐν τῇ καμπύλῃ C ἐγκλειομένων.

Ἐὰν δὲ ἡ γραμμὴ C ληφθῇ περιφέρεια κύκλου ἔχουσα κέντρον τὴν ἀρχὴν καὶ ἀκτῖνα ρ, τὸ αὐτὸ ὁλοκλήρωμα γίνεται

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\mu + \varepsilon) d\theta,$$

ἔνθα ε γίνεται ὅσον θέλωμεν μικρόν, ὅταν ἡ ἀκτὶς ρ ληφθῇ ἱκανῶς μεγάλη· ἐπειδὴ δὲ ἡ τιμὴ τοῦ ὁλοκληρώματος εἶνε προφανῶς ἀνεξάρτητος ἀπὸ τῆς ἀκτῖνος ρ, ὅταν ρ ὑπερβῇ ὅριόν τι, συνάγεται, ὅτι θὰ εἶνε ἴσον τῷ μ· ἤτοι τὸ πολυώνυμον μ βαθμοῦ ἔχει μ ῥίζας.

Ὁρισμοί.

274. Ἐὰν συνάρτησίς τις μένῃ ὁμαλὴ ἐπὶ παντὸς πεπερασμένου μέρους τοῦ ἐπιπέδου, ἡ τοιαύτη συνάρτησις λέγεται *τελείως ὁμαλὴ* συνάρτησις.

Πᾶσα τελείως ὁμαλὴ συνάρτησις δύναται νὰ ἀναπτυχθῇ εἰς σειρὰν τῆς μορφῆς $\Sigma A_\nu z^\nu$ συγκλίνουσαν ἐφ' ἅπαντος τοῦ ἐπιπέδου (ἐδ. 265).

Καὶ αἱ παράγουσαι καὶ αἱ παράγωγοι τῆς τελείως ὁμαλῆς συναρτήσεως εἶνε ἐπίσης τελείως ὁμαλαί· διότι, ὅταν σειρά τις συγκλίνῃ ἐφ' ἅπαντος τοῦ ἐπιπέδου, καὶ αἱ παράγωγοι αὐτῆς καὶ αἱ παράγουσαι πᾶσαι συγκλίνουσιν ἐπίσης ἐφ' ἅπαντος τοῦ ἐπιπέδου (Διαφ. σελ. 50).

Ἡ τελείως ὁμαλὴ συνάρτησις καταντᾷ ἀκεραία συνάρτησις, ἤτοι ἀκέραιον πολυώνυμον τῆς μεταβλητῆς z, ἂν αἱ δυνάμεις τῆς z ὑπάρχωσιν ἐν τῷ ἀναπτύγματι $\Sigma A_\nu z^\nu$ εἰς πεπερασμένον πλῆθος.

275. Αἱ τελείως ὁμαλαὶ συναρτήσεις ἔχουσι τὰς ἑξῆς ἰδιότητας.

1) Πᾶσα τελείως ὁμαλὴ συνάρτησις (ἂν μὴ εἶνε σταθερὰ ποσότης) *ἐν πάσῃ περιοχῇ τοῦ ἀπείρου λαμβάνῃ τιμάς, ὧν τὸ μέτρον ὑπερβαίνει πάντα δοθέντα ἀριθμόν.*

Διότι ἂς ὑποθέσωμεν τὸ ἐναντίον· τουτέστιν, ὅτι ἐκτὸς κύκλου τινός, οὗτινος ἡ ἀκτὶς ἔστω Ρ, πᾶσαι αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως ἔχουσι μέτρον μικρότερον τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ Μ· ἤτοι ὅτι εἶνε

$$|\sigma(z)| < M, \qquad \text{ἐὰν} \qquad |z| > P.$$

Τούτου τεθέντος, παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ συντελεσταὶ A_ν τοῦ ἀναπτύγματος τῆς συναρτήσεως $\sigma(z)$ κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ z ἔχουσιν, ὡς εἴδομεν (ἐδ. 266), τὰς ἑξῆς τιμὰς

$$A_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int \sigma(Z)\frac{dZ}{Z^{\nu+1}},$$

ἐκτείνεται δὲ τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο ἐπὶ περιφερείας ἐχούσης κέντρον τὴν ἀρχὴν καὶ ἀκτῖνα ρ οἱανδήποτε· ἐπομένως εἶνε ἐπ' αὐτῆς $Z = \rho e^{\theta i}$ καὶ

$$A_\nu = \frac{1}{2\pi i \rho^\nu}\int_0^{2\pi} \sigma(Z) e^{-(\nu+1)\theta} d\theta.$$

καὶ ἂν λάβωμεν τὴν ἀκτῖνα ρ μεγαλητέραν τῆς P, θὰ εἶνε ἐπὶ τῆς περιφερείας

$$|\sigma(Z)|<M,$$

ἄρα καὶ
$$\left|\sigma(Z)e^{-(\nu+1)\theta}\right|<M$$

καὶ ἐπομένως
$$\left|A_\nu\right|<\frac{M}{\rho^\nu}.$$

ἀλλ' ἡ ἀκτὶς ρ τοῦ κύκλου τῆς ὁλοκληρώσεως δύναται νὰ ληφθῇ ὁσονδήποτε μεγάλη (διότι ἡ συνάρτησις εἶνε τελείως ὁμαλή), καὶ ἐπειδὴ ὁ συντελεστὴς A_ν δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ρ, συνάγεται, ὅτι θὰ εἶνε

$$A_\nu=0 \qquad \text{διὰ} \qquad \nu=1,2,3,\ldots$$

καὶ τὸ ἀνάπτυγμα τῆς συναρτήσεως θὰ εἶνε μόνον ὁ σταθερὸς ὅρος A_0, ἤτοι ἡ συνάρτησις $\sigma(z)$ θὰ εἶνε σταθερὰ ποσότης.

2) *Πᾶσα τελείως ὁμαλὴ συνάρτησις* (ἐὰν μὴ εἶνε ἀκεραία συνάρτησις) *καταντᾷ ἀόριστος εἰς τὸ ἄπειρον*, ἤτοι ἐν πάσῃ περιοχῇ τοῦ ἀπείρου λαμβάνει πᾶσαν δεδομένην τιμὴν 6, ἢ τοὐλάχιστον τὸ μέτρον τῆς διαφορᾶς $\sigma(z)-6$ γίνεταί που (ἐν πάσῃ περιοχῇ τοῦ ἀπείρου) μικρότερον παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ δ.

Διότι, ἂν μὴ ἐγίνετο τὸ μέτρον

$$|\sigma(z)-6|$$

μικρότερον τοῦ ἀριθμοῦ δ ἐν πάσῃ περιοχῇ τοῦ ἀπείρου, θὰ ἔμενεν ἔν τινι περιοχῇ τοῦ ἀπείρου μεγαλήτερον τοῦ δ· ἔστω

$$|\sigma(z)-6|>\delta, \qquad \text{ὅταν} \qquad |z|>P\cdot$$

τότε ἡ συνάρτησις

$$\frac{1}{\sigma(z)-6}$$

ἐν τῷ κύκλῳ P μόνον πόλους δύναται νὰ ἔχῃ καὶ τούτους εἰς πλῆθος πεπερασμένον· ἐπομένως μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν ῥητῆς τινος συναρτήσεως

$\varphi(z)$ (ἧς ὁ ἀριθμητὴς εἶνε βαθμοῦ κατωτέρου ἢ ὁ παρονομαστὴς) θὰ γίνῃ ὁμαλὴ ἐντὸς τοῦ εἰρημένου κύκλου· ἀλλ' ἡ νέα συνάρτησις

$$\frac{1}{\sigma(z)-\beta}-\varphi(z) \qquad (1)$$

θὰ εἶνε ὁμαλὴ καὶ ἐκτὸς τοῦ κύκλου P· διότι καὶ παράγωγον ἔχει καὶ μονότιμος εἶνε καὶ πεπερασμένη καὶ συνεχὴς μένει (ἐκτὸς τοῦ κύκλου P), διότι τὸ μέτρον αὐτῆς εἶνε μικρότερον τοῦ

$$\frac{1}{\delta}+|\varphi(z)|,$$

ἡ δὲ ῥητὴ συνάρτησις $\varphi(z)$ μένει πεπερασμένη ἐκτὸς τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

Κατὰ ταῦτα ἡ συνάρτησις (1) εἶνε τελείως ὁμαλὴ καὶ ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ ἀπείρου ἀπὸ ἀκτῖνος P λαμβάνει τιμάς, ὧν τὸ μέτρον μένει πάντοτε μικρότερον ἀριθμοῦ τινος· εἶνε ἄρα σταθερὰ ποσότης, ἤτοι εἶνε

$$\frac{1}{\sigma(z)-\beta}-\varphi(z)=C,$$

ὅθεν καὶ
$$\sigma(z)=\beta+\frac{1}{\varphi(z)+C}\cdot$$

θὰ ἦτο λοιπὸν ἡ συνάρτησις $\sigma(z)$ ῥητὴ συνάρτησις καὶ μάλιστα ἀκεραία (διότι οὐδαμοῦ ἐν τῷ πεπερασμένῳ γίνεται ἄπειρος), ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει. Ἀνάγκη ἄρα νὰ λαμβάνῃ ἡ τελείως ὁμαλὴ συνάρτησις (ἐὰν μὴ εἶνε ἀκεραία) ἐν πάσῃ περιοχῇ τοῦ ἀπείρου (ἤτοι ἐκτὸς παντὸς κύκλου ὁσονδήποτε μεγάλου) τιμὰς τοιαύτας, ὥστε τὸ μέτρον τῆς διαφορᾶς $\sigma(z)-\beta$ νὰ καταντᾷ μικρότερον παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ δ.

3) Πᾶσα τελείως ὁμαλὴ συνάρτησις, ἐὰν μηδεμία πεπερασμένη τιμὴ τῆς z μηδενίζῃ αὐτήν, εἶνε τῆς μορφῆς

$$e^{\varphi(z)},$$

ἔνθα $\varphi(z)$ δηλοῖ τινα συνάρτησιν τελείως ὁμαλήν.

Διότι τὸ πηλίκον

$$\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}$$

οὐδαμοῦ ἐν τῷ πεπερασμένῳ γίνεται ἄπειρον· εἶνε ἄρα τελείως ὁμαλὴ συνάρτησις, καὶ ἂν τὴν παράγουσαν αὐτῆς τὴν μηδενιζομένην διὰ $z=0$ (ἥτις εἶνε ἐπίσης τελείως ὁμαλὴ) παραστήσωμεν διὰ τοῦ $g(z)$, θὰ εἶνε

$$\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}=g'(z)$$

καὶ ὁλοκληροῦντες ἀπὸ 0 μέχρι z, ἔχομεν

$$l\sigma(z)-l\sigma(0)=g(z)$$

καὶ

$$\sigma(z)=\sigma(0)e^{g(z)}=e^{\varphi(z)}$$

ἐὰν τεθῇ

$$\varphi(z)=g(z)+l\sigma(0).$$

4) Ἐὰν συνάρτησις τελείως ὁμαλὴ μηδενίζηται διὰ τὰς τιμὰς $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$, *ὧν τὸ πλῆθος εἶνε πεπερασμένον, θὰ εἶνε τῆς μορφῆς*

$$e.^{\varphi(z)}\prod_{\nu=1,2,\ldots,\rho}(z-\alpha_\nu) \qquad \text{ἤτοι} \qquad e^{\varphi(z)}(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_\rho)$$

ἔνθα $\varphi(z)$ δηλοῖ συνάρτησιν τελείως ὁμαλήν, τὰ δὲ σημεῖα τοῦ μηδενισμοῦ ὑποτίθενται ἁπλᾶ.

Διότι ἡ συνάρτησις $\dfrac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}$ ἔχει πόλους τὰς ῥίζας α_1, α_2, . . ., α_ρ καὶ τούτους μόνον ἐν τῷ πεπερασμένῳ. Ἐὰν δὲ ἀπ' αὐτῆς ἀφαιρέσωμεν τὴν ῥητὴν συνάρτησιν

$$\sum\frac{1}{z-\alpha_\nu} \qquad \nu=1,2,\ldots,\rho,$$

ἡ διαφορὰ

$$\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}-\sum\frac{1}{z-\alpha_\nu}$$

γίνεται τελείως ὁμαλὴ συνάρτησις· ἐὰν δὲ τὴν παράγουσαν αὐτῆς τὴν μηδενιζομένην διὰ $z=0$ παραστήσωμεν διὰ $g(z)$, θὰ εἶνε

$$\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}-\sum\frac{1}{z-\alpha_\nu}=g'(z)$$

καὶ ὁλοκληροῦντες ἀπὸ 0 μέχρι z, εὑρίσκομεν,

$$\sigma(z)=e^{\varphi(z)}\prod_{\nu}\left(1-\frac{z}{\alpha_\nu}\right), \qquad (\nu=1,2,\ldots,\rho)$$

ἐὰν τεθῇ $$\varphi(z)=g(z)+l\sigma(0).$$

Ἡ ἀναλογία τῶν τελείως ὁμαλῶν συναρτήσεων πρὸς τὰς ἀκεραίας συναρτήσεις προβαίνει ἔτι περαιτέρω· ὡς ἐκ τῆς ἑπομένης προτάσεως φαίνεται.

5) Ὅταν τὸ πλῆθος τῶν ῥιζῶν τῆς τελείως ὁμαλῆς συναρτήσεως $\sigma(z)$ εἶνε ἄπειρον, δύναται καὶ πάλιν ἡ συνάρτησις νὰ παρασταθῇ ὡς γινόμενον παραγόντων τῆς μορφῆς

$$e^{\varphi(z)}(z-\alpha_\nu)$$

ἔνθα $\varphi(z)$ δηλοῖ συνάρτησιν τελείως ὁμαλήν· ἕκαστος ἑπομένως τῶν παραγόντων τούτων ἔχει μίαν μόνον ῥίζαν.

Ἔστωσαν αἱ ῥίζαι τῆς τελείως ὁμαλῆς συναρτήσεως $\sigma(z)$ πᾶσαι ἁπλαῖ καὶ διάφοροι τοῦ 0 καὶ κατὰ τοιαύτην τάξιν τεταγμέναι

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_\nu\ \ldots,$$

ὥστε τὰ μέτρα αὐτῶν, ἅτινα παραστῶ διὰ τῶν

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots,\ A_\nu,$$

νὰ μὴ προβαίνωσιν ἐλαττούμενα· τότε θὰ εἶνε κατ' ἀνάγκην ὅρ$A_\nu=\infty$ διὰ $\nu=\infty$· διότι ἐν παντὶ πεπερασμένῳ τόπῳ τὸ πλῆθος τῶν ῥιζῶν εἶνε πάντοτε πεπερασμένον.

Ἐὰν καὶ πάλιν ἀπὸ τῆς συναρτήσεως $\dfrac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}$ ἀφαιρέσωμεν τὸ κλάσμα $\dfrac{1}{z-\alpha_\nu}$, ἡ διαφορὰ

$$\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}-\frac{1}{z-\alpha_\nu}$$

μένει πεπερασμένη διὰ $z=\alpha_\nu$· ἀλλ' ἐπειδὴ ἐνταῦθα τὸ πλῆθος τῶν ῥιζῶν εἶνε ἄπειρον, ἐνδέχεται τὸ ἄθροισμα

$$\sum_\nu\frac{1}{z-\alpha_\nu}$$

(ὅπερ πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τῆς συναρτήσεως $\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}$, ἵνα ἡ διαφορὰ μένῃ πεπερασμένη εἰς πάσας τὰς ῥίζας) νὰ μὴ εἶνε πεπερασμένον. Ἡ δυσκολία αὕτη αἴρεται διὰ τῆς παρατηρήσεως, ὅτι ἡ συνάρτησις $\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}$ μένει πεπερασμένη διὰ $z=\alpha_\nu$ οὐχὶ μόνον ὅταν ἀφαιρεθῇ τὸ κλάσμα $\frac{1}{z-\alpha_\nu}$, ἀλλὰ καὶ γενικώτερον ὅταν ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτῆς τὸ ἄθροισμα

$$\frac{1}{z-\alpha_\nu}+\theta_\nu(z),$$

ἔνθα $\theta_\nu(z)$ δηλοῖ τυχὸν ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ z· ἐὰν δὲ ἐκλεχθῶσι τὰ πολυώνυμα $\theta_1(z)$ $\theta_2(z)\ldots\theta_\nu(z)\ldots$ οὕτως, ὥστε ἡ σειρὰ

$$(1)\qquad \sum_\nu \left\{ \frac{1}{z-\alpha_\nu}+\theta_\nu(z) \right\} \qquad (\nu=1,2,..,\infty)$$

(ἐν ᾗ τὸ ἄθροισμα $\frac{1}{z-\alpha_\nu}+\theta_\nu(z)$ θεωρεῖται ὡς εἷς ὅρος) νὰ συγκλίνῃ διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ z πλὴν τῶν τιμῶν α_1 $\alpha_2..\alpha_\nu\ldots$ (τουτέστι τῶν ῥιζῶν), ἡ διαφορὰ

$$(2)\qquad \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}-\sum_\nu \left\{ \frac{1}{z-\alpha_\nu}+\theta_\nu(z) \right\} \qquad (\nu=1,2,3,..,\infty)$$

θὰ παριστᾷ συνάρτησιν τοῦ z πανταχοῦ ἐν τῷ πεπερασμένῳ μένουσαν πεπερασμένην, ἑπομένως τελείως ὁμαλήν· ἐὰν δὲ καὶ πάλιν παραστήσωμεν διὰ τοῦ $g(z)$ τὴν παράγουσαν αὐτῆς τὴν μηδενιζομένην διὰ $z=0$, θὰ εἶνε

$$(3)\qquad \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}-\sum_\nu \left\{ \frac{1}{z-\alpha_\nu}+\theta_\nu(z) \right\} = g'(z)$$

καὶ ἂν ὁλοκληρώσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης ἀπὸ 0 μέχρι z, εὑρίσκομεν, παριστῶντες διὰ $\varphi_\nu(z)$ τὴν παράγουσαν τοῦ πολυωνύμου $\theta_\nu(z)$ τὴν μηδενιζομένην διὰ $z=0$

$$(4)\qquad \sigma(z)=\sigma(0)e^{g(z)}.\prod_\nu \left\{ \left(1-\frac{z}{\alpha_\nu}\right)e^{\varphi_\nu(z)} \right\} \qquad (\nu=1,2,..,\infty)$$

Ὁ τύπος οὗτος εὑρέθη ὑπὸ τοῦ Weierstrass.

Ἐν τῷ γινομένῳ θεωρεῖται ὡς εἷς ἀχώριστος παράγων τὸ $\left(1-\frac{z}{\alpha_\nu}\right)e^{\varphi_\nu(z)}$.

Μένει νὰ ἴδωμεν, πῶς εἶνε δυνατὸν νὰ προσδιορισθῶσι τὰ πολυώνυμα $\theta_1(z)$, $\theta_2(z)$.., ὥστε ἡ σειρὰ (1) νὰ συγκλίνῃ.

Ἐπειδὴ τὰ πολυώνυμα ταῦτα εἰς οὐδένα ἄλλον ὑπόκεινται περιορισμόν, ἐννοεῖται εὐκόλως, ὅτι δυνατὸν νὰ ὑπάρχωσι πολλοὶ προσδιορισμοί· καὶ τῷ ὄντι ἐκ τοῦ τύπου (3) φαίνεται ἀμέσως, ὅτι δύναταί τις νὰ προσθέσῃ εἰς τὰ πολυώνυμα $\theta_\nu(z)$ ἄλλα πολυώνυμα $\varepsilon_\nu(z)$· ἀρκεῖ ἡ προσθήκη αὕτη νὰ μὴ βλάπτῃ τὴν σύγκλισιν τῆς σειρᾶς· διότι τότε ὁ τύπος (3) μένει ἀμετάβλητος, ἂν ἐκ τῆς τελείως ὁμαλῆς συναρτήσεως $g'(z)$ ἀφαιρεθῇ ἡ ἐπίσης τελείως ὁμαλὴ συνάρτησις $\sum\limits_\nu \varepsilon_\nu(z)$.

Ἵνα εὕρωμεν πολυώνυμα $\theta_\nu(z)$ ἤτοι $\varphi'_\nu(z)$ τοιαῦτα, ὥστε νὰ συγκλίνῃ ἡ σειρὰ

$$(1)\qquad \sum_\nu \left\{ \frac{1}{z-\alpha_\nu}+\theta_\nu(z) \right\},$$

παρατηροῦμεν, ὅτι εἶνε (οἱουδήποτε ὄντος τοῦ θετικοῦ ἀκεραίου ρ)

$$\frac{1}{z-\alpha_\nu}=-\frac{1}{\alpha_\nu}\left\{ 1+\frac{z}{\alpha_\nu}+\frac{z^2}{\alpha_\nu^{\,2}}+\ldots+\frac{z^{\rho-1}}{\alpha_\nu^{\,\rho-1}}\right\}+\frac{z^\rho}{\alpha_\nu^\rho(z-\alpha_\nu)}.$$

καὶ ἂν λάβωμεν

$$\theta_\nu(z)=\frac{1}{\alpha_\nu}\left\{ 1+\frac{z}{\alpha_\nu}+\frac{z^2}{\alpha_\nu^{\,2}}+\ldots+\frac{z^{\rho-1}}{\alpha_\nu^{\,\rho-1}}\right\}$$

θὰ εἶνε

$$\frac{1}{z-\alpha_\nu}+\theta_\nu(z)=\frac{z^\rho}{\alpha_\nu^\rho(z-\alpha_\nu)}$$

καὶ

$$\sum_\nu \left\{ \frac{1}{z-\alpha_\nu}+\theta_\nu(z) \right\}=\sum_\nu \frac{z^\rho}{\alpha_\nu^\rho(z-\alpha_\nu)},\qquad (\nu=1,2\ldots\infty)$$

Ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις, ὅτι ὑπάρχει τις ἀριθμὸς θετικὸς καὶ ἀκέραιος, ὁ $\lambda+1$, τοιοῦτος, ὥστε ἡ σειρὰ

$$\sum_\nu \frac{1}{A_\nu^{\lambda+1}} \quad \text{νὰ συγκλίνῃ}\cdot \qquad A_\nu=|\alpha_\nu| \qquad (5)$$

λέγω τότε, ὅτι, ἂν λάβωμεν $\rho=\lambda$, ἡ σειρὰ (1), ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, ἡ σειρὰ

$$\sum_\nu \frac{z^\lambda}{\alpha_\nu^\lambda(z-\alpha_\nu)} \qquad \text{ἢ} \qquad z^\lambda \sum \frac{1}{\alpha_\nu^\lambda(z-\alpha_\nu)} \tag{6}$$

θὰ συγκλίνῃ (ἐξαιρουμένων τῶν τιμῶν $z=\alpha_\nu$)· καὶ ὄντως ἡ σειρὰ τῶν μέτρων αὐτῆς εἶνε

$$\sum_\nu \frac{1}{A_\nu^\lambda|z-\alpha_\nu|} \tag{7}$$

καὶ ἂν παραστήσωμεν τὸν νυοστὸν ὅρον τῆς συγκλινούσης σειρᾶς (5) διὰ u_ν τῆς δὲ σειρᾶς (7) διὰ v_ν, θὰ εἶνε

$$\frac{v_\nu}{u_\nu}=\frac{A_\nu}{|z-\alpha_\nu|}$$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε $\qquad |z-\alpha_\nu| \geqq A_\nu-|z|,$

$$\frac{v_\nu}{u_\nu} \leqq \frac{A_\nu}{A_\nu-|z|} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \frac{v_\nu}{u_\nu} \leqq 1+\frac{|z|}{A_\nu-|z|}.$$

ἐπειδὴ δέ, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ z, ἀπό τινος ὅρου καὶ ἑξῆς, γίνεται $A_\nu>2|z|$, ἕπεται, ὅτι ἀπὸ τοῦ ὅρου τούτου καὶ ἑξῆς θὰ εἶνε $v_\nu<2u_\nu$, ἑπομένως θὰ συγκλίνῃ καὶ ἡ σειρὰ (7), ἑπομένως καὶ ἡ (6), ἤτοι ἡ σειρὰ

$$\sum_\nu \left\{ \frac{1}{z-\alpha_\nu}+\frac{1}{\alpha_\nu}\left(1+\frac{z}{\alpha_\nu}+\ldots+\frac{z^{\lambda-1}}{\alpha_\nu^{\lambda-1}}\right) \right\} \tag{8}$$

τοῦτο δὲ ἐπρόκειτο νὰ ἐπιτευχθῇ.

Ἐὰν μηδεὶς ἀριθμὸς λ ὑπάρχῃ, δι' ὃν ἡ σειρὰ $\sum \frac{1}{A_\nu^{\lambda+1}}$ νὰ συγκλίνῃ, ἑπόμενοι τῷ Weierstrass λαμβάνομεν $\rho=\nu-1$ καὶ ἑπομένως

$$\theta_\nu(z)=\frac{1}{\alpha_\nu}\left(1+\frac{z}{\alpha_\nu}+\ldots+\frac{z^{\nu-2}}{\alpha_\nu^{\nu-2}}\right)\cdot$$

τότε ἡ σειρὰ (1) γίνεται

$$\sum_{\nu}\left\{\frac{1}{z-\alpha_\nu}+\theta_\nu(z)\right\}=-\frac{1}{z}\sum_{\nu}\frac{z^\nu}{\alpha_\nu^\nu\left(1-\frac{z}{\alpha_\nu}\right)}, \tag{9}$$

ἡ δὲ σειρὰ αὕτη συγκλίνει· διότι ἡ σειρὰ τῶν μέτρων τῶν ὅρων αὐτῆς εἶνε

$$\sum_{\nu}\frac{|z|^\nu}{A_\nu^\nu\left|1-\frac{z}{\alpha_\nu}\right|}$$

συγκλίνει δὲ ἡ σειρὰ αὕτη· διότι ἡ νυοστὴ ῥίζα τοῦ νυοστοῦ ὅρου τείνει πρὸς τὸ 0, ὅταν ὁ ν αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον· ἑπομένως συγκλίνει καὶ ἡ σειρὰ (9), ἤτοι ἡ σειρὰ

$$\text{(10)}\qquad \sum_{\nu}\left\{\frac{1}{z-\alpha_\nu}+\frac{1}{\alpha_\nu}\left(1+\frac{z}{\alpha_\nu}+\ldots+\frac{z^{\nu-2}}{\alpha_\nu^{\nu-2}}\right)\right\},$$

τοῦτο δὲ ἐπρόκειτο νὰ ἐπιτευχθῇ.

Ἐκ τῶν προηγουμένων βλέπομεν, ὅτι τὰ μὲν ἀκέραια πολυώνυμα, ὅταν δοθῶσιν αἱ ῥίζαι αὐτῶν, εἶνε ἐντελῶς ὡρισμένα, πλὴν σταθεροῦ τινος παράγοντος· αἱ δὲ τελείως ὁμαλαὶ συναρτήσεις, ὅταν εἶνε γνωσταὶ αἱ ῥίζαι αὐτῶν, εἶνε ὡρισμέναι, πλὴν παράγοντός τινος οὐδεμίαν ἔχοντος ῥίζαν, ἤτοι τῆς μορφῆς $e^{\varphi(z)}$, ἔνθα $\varphi(z)$ εἶνε τελείως ὁμαλὴ συνάρτησις.

Ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον (4) τοῦ Weierstrass εἰς τὴν συνάρτησιν

$$\frac{\eta\mu\pi z}{\pi z}\,.$$

αἱ ῥίζαι α_ν τῆς συναρτήσεως ταύτης εἶναι αἱ ἑξῆς

$$\pm1,\quad \pm2,\quad \pm3,\ldots,\pm\nu,\ldots$$

ἡ δὲ σειρὰ τῶν ἀντιστρόφων τῶν μέτρων τῶν ῥιζῶν

$$2\sum\frac{1}{\nu}\qquad\qquad \nu=1,2,3,\ldots,\infty$$

εἶνε ἐνταῦθα ἀποκλίνουσα· ἀλλ' ἡ σειρὰ

$$2\sum_{\nu}\frac{1}{\nu^2}$$

εἶνε, ὡς γνωστόν, συγκλίνουσα· ἑπομένως ἐνταῦθα εἶνε $\lambda=1$ καὶ $\theta_{\nu}(z)=\frac{1}{\nu}$, καὶ ὁ τύπος (4) γίνεται

$$\frac{\eta\mu\pi(z)}{\pi z}=e^{g(z)}.\prod_{\nu}\left\{\left(1-\frac{z}{\nu}\right)e^{\frac{z}{\nu}}\right\} \qquad \nu=\pm1,\pm2,\ldots$$

ἐὰν δὲ ἀντικαταστήσωμεν τοὺς δύο παράγοντας τοῦ γινομένου τοὺς εἰς ἀντιθέτους τιμὰς τοῦ ν ἀντιστοιχοῦντας διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν, εὑρίσκομεν

$$(11) \qquad \frac{\eta\mu\pi z}{\pi z}=e^{g(z)}.\prod_{\nu}\left(1-\frac{z^2}{\nu^2}\right), \qquad \nu=1,2,3,\ldots$$

Μένει νὰ εὑρεθῇ ἡ τελείως ὁμαλὴ συνάρτησις $g(z)$, καὶ πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν τὸν τύπον (3), ὅστις ἐνταῦθα γίνεται

$$g'(z)=\pi\sigma\varphi(\pi z)-\frac{1}{z}-\sum_{\nu}\left\{\frac{1}{z-\nu}+\frac{1}{\nu}\right\} \qquad (\nu=\pm1,\pm2,\ldots)$$

καὶ ἂν ἑνώσωμεν ἐν τῷ ἀθροίσματι εἰς ἕνα τοὺς δύο ὅρους τοὺ; εἰς ἀντιθέτους τιμὰς τοῦ ν ἀντιστοιχοῦντας, ἔχομεν

$$(12) \qquad g'(z)=\pi\sigma\varphi(\pi z)-\frac{1}{z}-\sum_{\nu}\left(\frac{1}{z-\nu}+\frac{1}{z+\nu}\right) \qquad (\nu=1,2,\ldots)$$

Ἐν πρώτοις λέγω, ὅτι ἡ συνάρτησις $g'(z)$ εἶνε περιοδικὴ καὶ περίοδον ἔχει 1, ἤτοι λέγω, ὅτι εἶνε $g'(z+1)=g'(z)$.

Καὶ ὄντως, ἂν τεθῇ $z+1$ ἀντὶ z, προκύπτει

$$(13) \qquad g'(z+1)=\pi\sigma\varphi\pi z-\frac{1}{z+1}-\sum_{\nu}\left(\frac{1}{z-(\nu-1)}+\frac{1}{z+(\nu+1)}\right).$$

Τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἰσοτήτων (12) καὶ (13) εἶνε ἴσα· τῷ ὄντι αἱ ἐν αὐτοῖς ὑπάρχουσαι σειραὶ εἶνε συγκλίνουσαι, δυνάμεθα ἄρα, δοθέντος ἀριθμοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ, τοῦ ε, νὰ εὕρωμεν ἀριθμόν τινα ρ τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ρ πρώτων ὅρων ἑκατέρας νὰ διαφέρῃ ἀπὸ τοῦ ὅλου ἀθροίσματος τῆς σειρᾶς ὀλιγώτερον ἢ ε· τότε δὲ αἱ ἰσότητες (11) καὶ (12) δύνανται νὰ γραφῶσιν ὡς ἑξῆς

$$g'(z)=\pi\sigma\varphi(\pi z)-\frac{1}{z}-\sum_{\nu=1}^{\rho}\left(\frac{1}{z-\nu}+\frac{1}{z+\nu}\right)+\theta\,\varepsilon,\qquad -1<\theta<1$$

$$g'(z+1)=\pi\sigma\varphi(\pi z)-\frac{1}{z+1}-\sum_{\nu=1}^{\rho}\left(\frac{1}{z-(\nu-1)}+\frac{1}{z+(\nu+1)}\right)+\theta'.\varepsilon,$$
$$-1<\theta'<1$$

ἐπομένως εἶνε

$$g'(z+1)-g'(z)=\frac{1}{z-\rho}-\frac{1}{z+\rho+1}+\varepsilon(\theta'-\theta)$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ διαφορὰ αὕτη τείνει πρὸς τὸ 0, ὅταν ὁ ἀριθμὸς ρ αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον, συνάγεται

$$g'(z+1)=g'(z).$$

Λέγω νῦν, ὅτι ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ ἀπείρου τὸ μέτρον τῆς συναρτήσεως $g'(z)$ μένει πανταχοῦ μικρότερον ἀριθμοῦ τινος· (ἐπομένως εἶνε $g'(z)=$ σταθερᾷ τινι)· πρὸς ἀπόδειξιν τούτου θεωρήσωμεν τὰς τιμὰς τῆς συναρτήσεως $g'(z)$ διὰ τὰς μιγαδικὰς τιμὰς $x+yi$, ἐν αἷς δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν $0\leqq x\leqq 1$ διὰ τὴν ἰδιότητα $g'(z+1)=g'(z)$ διὰ τὰς τιμὰς ταύτας εἶνε

$$\pi\sigma\varphi(\pi z)=i\pi\frac{1+e^{-2\pi y+2\pi xi}}{1-e^{-2\pi y+2\pi xi}}$$

ἐπομένως ὁ ὅρος $\pi\sigma\varphi(\pi z)$ τῆς ἰσότητος (12) μένει πάντοτε πεπερασμένος, ὅταν y, αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον.

Ἀλλὰ καὶ ἡ σειρὰ

$$(14)\qquad \sum\left(\frac{1}{z-\nu}+\frac{1}{z+\nu}\right),\qquad (\nu=1,2,3,4\ldots)$$

μένει πεπερασμένη, ὅταν y αὐξάνῃ εἰς ἄπειρον· διότι γίνεται, ἂν τεθῇ $z=x+yi$,

$$\sum\left(\frac{1}{x-\nu+yi}+\frac{1}{x+\nu+yi}\right) \quad \text{ἤτοι} \quad \sum_{\nu}\left(\frac{2(x+yi)}{(x-\nu+yi)(x+\nu+yi)}\right)$$

καὶ τὸ μέτρον τῆς ὅλης σειρᾶς εἶνε μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν μέτρων τῶν ὅρων αὐτῆς

$$2\sum_{\nu}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{\{(x-\nu)^2+y^2\}.\{(x+\nu)^2+y^2\}}}, \qquad (\nu=1,2,3,4,..)$$

τοῦτο δὲ εἶνε μικρότερον τοῦ ἑπομένου

$$2\sum\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(\nu-1)^2+y^2}, \qquad (\nu=1,2,3,4,..)$$

ὅπερ εὑρίσκομεν γράφοντες $\nu-1$ ἀντὶ $\nu-x$ καὶ $\nu+x$ (διότι εἶνε $x<1$). τὸ τελευταῖον τοῦτο ἄθροισμα γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$2\sqrt{x^2+y^2}\sum_{\nu}\frac{1}{\nu^2+y^2}, \qquad (\nu=0,1,2...)$$

ἐπειδὴ δὲ εἶνε (ἐδ. 124)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu^2+y^2}>\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^2+y^2},$$

ἀλλὰ

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2+y^2}<\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^2+y^2},$$

συνάγεται, ὅτι εἶνε

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu^2+y^2}=\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^2+y^2}+\theta.\frac{1}{y^2}, \qquad (0<\theta<1)$$

ἤτοι

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu^2+y^2}=\frac{\pi}{2}.\frac{1}{y}+\frac{\theta}{y^2}.$$

ἑπομένως τὸ μέτρον τῆς σειρᾶς (14) διὰ τὰς τιμὰς $x+yi$ (ἐπειδὴ $|x|<1$) εἶνε πάντοτε μικρότερον τοῦ

$$\frac{2\sqrt{x^2+y^2}}{y}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{y}\right), \quad \text{ἢ καὶ τοῦ } 2\sqrt{1+\frac{1}{y^2}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{y}\right).$$

Τούτων οὕτως ἐχόντων, ἐκ τῆς ἰσότητος (12) γίνεται δῆλον, ὅτι τὸ μέτρον τοῦ $g'(z)$ ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ ἀπείρου μένει πάντοτε μικρότερον ἀριθμοῦ τινος· εἶνε ἄρα $g'(z)=b$ (σταθερᾷ τινί) καὶ $g(z)=bz+c$. Ἀλλ' ἂν εἰς τὴν ἰσότητα (11) τεθῇ $-z$ ἀντὶ τοῦ z, προκύπτει $e^{-bz+c}=e^{bz+c}$ ἢ καὶ $e^{2bz}=1$, ὅθεν $b=0$· ἂν δὲ εἰς τὴν αὐτὴν ἰσότητα τεθῇ $z=0$, εὑρίσκεται $e^c=1$ ἤτοι $c=0$· ὅθεν συνάγεται $g(z)=0$ καὶ

$$(15) \qquad \eta\mu(\pi z)=\pi z\left(1-\frac{z^2}{1}\right)\left(1-\frac{z^2}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{\nu^2}\right)\ldots$$

καὶ ἐκ τῆς ἰσότητος $\eta\mu 2\pi z=2\eta\mu\pi z.\sigma\upsilon\nu\pi z$ εὑρίσκομεν ἔπειτα

$$(16) \quad \sigma\upsilon\nu(\pi z)=\left(1-\frac{4z^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{4z^2}{(2\nu+1)^2}\right)\ldots \text{(πρβλ. σελ. 283).}$$

Εὑρεθείσης τῆς συναρτήσεως $g'(z)$, ἡ ἰσότης (12) δίδει

$$(17) \qquad \pi\sigma\varphi(\pi z)=\frac{1}{z}+\sum\frac{2z}{z^2-\nu^2} \qquad (\nu=1,2,3,\ldots)$$

ὁ δὲ τύπος οὗτος δίδει τὴν σφ(πz) (ἢ καὶ τὴν σφz, ἂν τεθῇ ἐν αὐτῷ z ἀντὶ πz) ὡς ἄθροισμα ἀπειραρίθμων ῥητῶν συναρτήσεων.

ΤΕΛΟΣ

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

Ὁλοκλήρωσις ὑπερβατικῶν συναρτήσεων. (σελ. 121-148)

ΒΙΒΛΙΟΝ Β'.

Ὡρισμένα ὁλοκληρώματα καὶ ἐφαρμογαὶ αὐτῶν

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

Ἁπλᾶ ὁλοκληρώματα. (σελ. 149-215)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

Διπλᾶ ὁλοκληρώματα (σελ. 216-258)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

Τριπλᾶ ὁλοκληρώματα. (σελ. 357-385)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

Ὡρισμένα ὁλοκληρώματα ἐν γένει (σελ. 386-406).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX

Ἐπικαμπύλια ὁλοκληρώματα (σελ. 407-420).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ X

Ὁλοκληρώματα μιγαδικά (σελ. 421-484).

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

				ἀντὶ	γράφε
Ἐν σελ.	17	ἐν τῷ τύπῳ	(4)	$\frac{1}{\lambda}\int e^{-\lambda x}\varphi(x)dx$	$\frac{1}{\lambda}\int e^{-\lambda x}\varphi'(x)dx$
» »	41	» » »	(10)	$x-\rho$	$x-\varkappa$
» »	155	στίχῳ	προτελευταίῳ	Η καὶ Θ	P καὶ Q
» »	210	»	22ῳ	$x_1+2\varepsilon t$	$x_0+2\varepsilon t$
» »	262	»	τελευταίῳ	at	dx
» »	274	»	9ῳ	$e^{-\rho^2}d\rho d\theta$	$e^{-\rho^2}\rho d\rho d\theta$
» »	410	»	15ῳ	$-\int_{\gamma}^{\delta}\varphi(x,Y)dx$	$\int_{\gamma}^{\delta}\varphi(x,Y')dx$
» »	455	»	1ῳ	β^m	β_m
» »	458	»	23ῳ	$\sigma(z\rho+e^{\theta i})$	$\sigma(z+\rho e^{\theta i})$
» »	461	»	6ῳ	$\sigma^{\nu}(0)$	$\sigma^{\nu}(z_0)$